

子午线收敛角计算公式及计算精度分析

邬熙娟, 江国焰, 高俊强

(南京工业大学 土木工程学院, 江苏 南京 210009)

摘要 采用赫里斯托夫给出的展开至七次项的公式来近似地计算子午收敛角的真值, 分析了随纬度、经差的变化规律; 并对近似公式 $r = \sin B \cdot l$ 计算子午收敛角与其真值之间的较差在经差 $0.5^\circ \sim 3.5^\circ$ 、纬度 $5^\circ \sim 85^\circ$ 范围进行详细分析, 给出了在经差 $l = 3.5^\circ$ 时较差拟合公式。得到如下结论: 1) 在同一平行圈上 ($B = \text{常数}$), 经差 l 愈大, 较差也愈大; 2) 在同一子午线上 ($L = \text{常数}$), 点位处在中纬度 ($25^\circ \sim 55^\circ$) 时, 较差较大; 3) 在中低纬度 ($B = 5^\circ \sim 80^\circ$), $l = 3.5^\circ$ 时, 公式(4)的计算精度只能达到 $0.1''$; $l = 2.5^\circ$ 时, 计算精度达到 $0.1'' \sim 0.01''$; $l = 1.5^\circ$ 时, 计算精度达到 $0.01''$; $l = 0.5^\circ$ 时, 计算精度达到 $0.001'' \sim 0.0001''$ 。

关键词 子午收敛角 经差 投影带 坐标方位角

中图分类号: P226+.3 **文献标识码:** B **文章编号:** 1672-4097(2005)06-0022-04

1 引言

高斯投影中坐标计算分为正算、反算, 由大地坐标 L 、 B 求高斯投影带上的平面直角坐标 X 、 Y 称为正算, 反之称为反算。相邻高斯投影带上平面坐标相互换算称为坐标换带, 在测量工作中, 经常需要进行正算、反算、换带和子午线收敛角的计算工作。

在文献[1]所提出的大地坐标系中, 如图1所示, 以椭圆面上一点 P 为起点的任一大地线的方向角 α 可定义为过点 P 的大地平行线方向顺时针到该大地线切线方向的角度。显然它与以子午线方向为起始方向的大地方位角 A 是不相同的, 其间的差异即为点 P 上的大地平行线与子午线之间的夹角 γ , 可称为大地坐标系中点 P 上的子午线收敛角, 显然就有[1]:

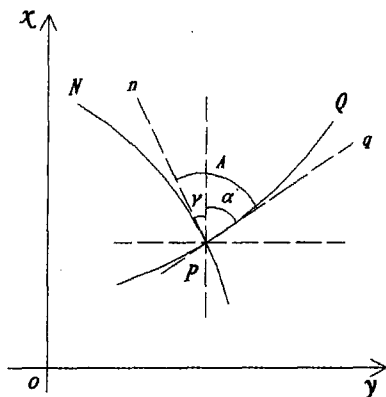


图1 子午线收敛角和方位角关系

$$\gamma = A - \alpha + \delta \quad (1)$$

式中, γ 为子午线收敛角, α 为坐标方位角, A 为大地方位角, δ 为曲率改正。

在大地控制测量以及高精度工程测量中常常需要利用上述公式来进行两类方位角之间的转换, 如利用陀螺经纬仪所测的方位角为大地方位角, 当我们需要获得坐标方位角时, 就势必要先计算子午线收敛角。

子午线收敛角的计算精度直接影响坐标方位角的精度, 目前, 关于子午线收敛角计算公式在许多大地测量书籍中[2~6]都已经导出, 但由于精度要求不同以及公式推导的方法不同, 使得计算公式不尽相同, 但它们的计算精度如何有关文献中均没有涉及, 这正是本文所要探讨解决的。

2 子午线收敛角 γ 的计算公式[6]

2.1 赫里斯托夫给出的展至七次项的计算公式

$$\begin{aligned} \gamma = & \cos B \cdot t \cdot l + \frac{1}{3} \cos^3 B \cdot t (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) l^3 + \\ & \frac{1}{15} \cos^5 B \cdot t (2t^2 + 15\eta^2 - 15\eta^2 t^2) l^5 + \\ & \frac{1}{315} \cos^7 B \cdot t (17 - 26t^2 + 2t^4) l^7 + O(l^9) \end{aligned} \quad (2)$$

式中, $t = \tan B$, $\eta = e' \cdot \cos^2 B$ (e' 为第二偏心率), B 为纬度, l 为经差。

2.2 《控制测量学》给出的展至五次项的计算公式

$$\begin{aligned} \gamma = & \sin B \cdot l + \frac{1}{3} \sin B \cos^2 B \cdot (1 + 3\eta^2 + 2\eta^4) l^3 + \\ & \frac{1}{15} \sin B \cos^4 B \cdot (2 - t^2) l^5 + O(l^7) \end{aligned} \quad (3)$$

式中, $t = \tan B$, $\eta = e' \cdot \cos^2 B$ (e' 为第二偏心率), B 为纬度, l 为经差。

2.3 《测量学》中给出的近似公式[8]

$$\gamma = \sin B \cdot l \quad (4)$$

2.4 《工程测量学》中给出的近似公式^[9]

$$\gamma = \frac{y}{N} \cdot \operatorname{tg} B$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \quad (5)$$

式中, y 为测站点的横坐标, N 为卯酉圈曲率半径, e 为第一偏心率。

3 子午线收敛角公式的计算精度

3.1 公式分析

由公式(1)分析可知:

(1) γ 为 l 的奇次幂函数, 在北半球, γ 与 l 同

号, 即当点位在中央子午线以东时, γ 和 l 为正; 以西时 γ 和 l 为负;

(2) 在同一平行圈上 (B = 常数), 经差 l 愈大, γ 愈大;

(3) 在同一子午线上 (L = 常数), 纬度 B 愈高, γ 愈大。

为了便于分析问题, 可令:

$$A = \frac{1}{315} \cos^7 B \cdot t(17 - 26t^2 + 2t^4)l^7 \quad (6)$$

在高斯分带投影中, 最大是 6° 带投影, 再顾及投影换带的需要, 不妨取 $l = 3.5^\circ$, 计算在不同纬度时的 A 值, 见下表 1。

表 1 A 值计算表(单位: $1'' \times 10^{-7}$)

B	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
A	2.97	5.53	6.62	6.65	5.56	3.75	1.70	-0.085	-1.29
B	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	
A	-1.78	-1.67	-1.21	-0.647	-0.204	0.258	0.070 1	0.027 9	

通过分析该表发现当 $B = 20^\circ$ 时, A 有最大值, 但是仅为 $6''.65 \times 10^{-7}$, 由此认为 A 值对 γ 值的影响十分微小, 几乎可以忽略不计。由 A 值大小, 可以判断出后面的无穷小项 $o(l^7)$ 占真值 γ 的比重更加微小, 为此, 略去最后的无穷小项, 不影响计算结果的准确性。不妨设子午收敛角的真值计算公式为:

$$\gamma = \cos B \cdot t \cdot l + \frac{1}{3} \cos^3 B \cdot t(1 + 3t^2 + 2t^4)l^3 + \frac{1}{15} \cos^5 B \cdot t(2t^2 + 15t^2 - 15t^2 t^2)l^5 +$$

$$\frac{1}{315} \cos^7 B \cdot t(17 - 26t^2 + 2t^4)l^7 \quad (7)$$

事实上, 公式(7)已远远超过实际计算的需要的精度。

在公式(3)中, 令其五次项为:

$$C = \frac{1}{15} \sin B \cos^4 B \cdot (2 - t^2)l^5 \quad (8)$$

在 $l = 3.5^\circ$ 、 B 在不同纬度下时, 通过计算得到其数值大小如表 2 所示。

表 2 C 值计算表(单位: $1'' \times 10^{-4}$)

B	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
C	0.685	-4.98	3.21	-0.89	2.96	0.255	-5.93	1.30	-0.473
B	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	
C	-5.13	0.006	-5.67	-0.156	0.738	-5.97	0.136	-3.81	

根据上表可知在 $B = 75^\circ$ 时, C 的绝对值最大, 达 $5.97'' \times 10^{-4}$, 此外, 表中数据变化幅度较大, 没有规律性。

文献[9]中给出的公式(5), 根据高斯投影正算公式近似地有^[1]:

$$\gamma = N \cos B \cdot l \quad (9)$$

代入(5)式中, 得:

$$\gamma = \frac{y}{N} \cdot \operatorname{tg} B = \frac{N \cos B \cdot l}{N} \cdot \operatorname{tg} B = \sin B \cdot l \quad (10)$$

因此, 公式(4)和公式(5)是一致的, 只是为了方便计算给出的不同形式而已。

3.2 计算精度

公式(4)或(5)是测量人员在实际作业时经常采

用的, 公式简单易记、计算方便。但是, 由于 γ 值是随纬度和经差在变化, 因此这种近似计算的误差也必然存在。实际工作中往需要知道采用公式(4)或(5)计算子午收敛角时的计算精度是多少? 能否满足实际工作要求? 这正是我们所要讨论分析的问题。

为此, 假设 $l = 3.5^\circ$, 根据上述四种公式的分析, 以公式(2)来计算结果为子午收敛角的近似真值。计算时采用 1983 IGA 椭球参数, 即取:

$$a = 6\,378\,136, \alpha = \frac{1}{298.257} \quad (11)$$

第二偏心率:

$$e'^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{a-b}{a}\right)^2} - 1$$

程计算得到不同纬度下子午收敛角,并设:

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^2} - 1 \quad (12)$$

$$\Delta = \gamma_{\text{公式(2)}} - \gamma_{\text{公式(4)}} \quad (13)$$

利用 MATLAB 软件分别依据公式(2)~(4)编

计算结果见表 3。

表 3 $l = 3.5^\circ$ 的 γ 值及较差计算表(单位: ")

B	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
公式(2)	109.952	219.061	326.491	432.419	533.044	630.588	723.310	810.509	891.509
公式(4)	109.816	218.797	326.112	430.945	532.499	630.000	722.706	809.912	890.955
Δ	0.135 78	0.264 36	0.379 02	0.473 96	0.544 70	0.588 32	0.603 69	0.591 54	0.554 33
B	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	
公式(2)	965.712	1 032.554	1 091.531	1 142.201	1 184.185	1 217.168	1 240.904	1 255.217	
公式(4)	965.216	1 032.132	1 091.192	1 141.947	1 184.013	1 217.067	1 240.858	1 255.205	
Δ	0.496 15	0.422 37	0.339 26	0.253 61	0.172 19	0.101 35	0.046 51	0.011 85	

上表中 Δ 的变化范围在 $0.012'' \sim 0.604''$, 故此
时采用公式(4)的计算误差(计算精度)在数量级上
只能达到 $0.1'' \sim 0.01''$ 。

根据表 3 数据可绘出图 2。

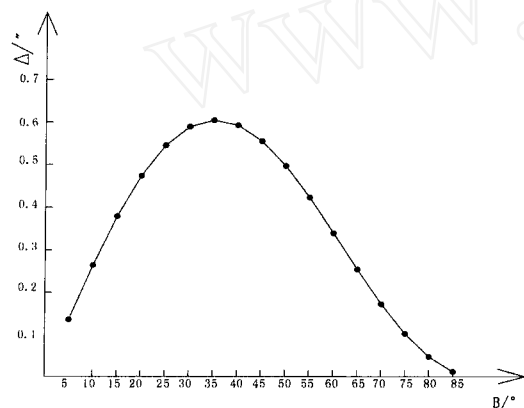


图 2 较差 Δ 随纬度变化曲线

同样也可计算 $l = 0.5^\circ$ 、 1.0° 、 1.5° 、 2.0° 和

2.5° 时的公式(2)和(4)的子午线收敛角及较差, 限于篇幅, 下表 4 仅列出较差。

观察表 4 可以得到, 随着 l 增大, 采用公式(4)计算子午收敛角的误差相应增大, 变化量最大从 $0.001 8'' \sim 0.219 9''$; 在 $l = 0.5^\circ$ 时, 较差的变化范围在 $3.46 \times 10^{-5}'' \sim 0.001 8''$, 并且在中低纬度 ($B = 5^\circ \sim 80^\circ$) 时采用公式(4)的计算误差(计算精度)在数量级上只能达到 $0.001'' \sim 0.000 1''$; $l = 1.0^\circ$ 时, 在数量级上计算精度达到 $0.01'' \sim 0.001''$; $l = 1.5^\circ$ 时, 在数量级上计算精度达到 $0.01''$; $l = 2.0^\circ$ 、 2.5° 时, 在数量级上计算精度达到 $0.1'' \sim 0.01''$ 。

以上计算是采用 MATLAB 软件编写的程序实现的, 程序

为了便于实际应用, 同时顾及我国所处的纬度区域, 我们选择用三次四项式来拟合经差为 3.5° 时子午线收敛角较差和纬度关系, 可时得到如下的拟合多项式:

表 4 较差对照表(单位: ")

B	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°
$l = 0.5^\circ$	3.95×10^{-4}	7.70×10^{-4}	0.001 1	0.001 4	0.001 6	0.001 7	0.001 8	0.001 7	0.001 6
$l = 1.0^\circ$	0.003 2	0.006 2	0.008 8	0.011 0	0.012 7	0.013 7	0.014 1	0.013 8	0.012 9
$l = 1.5^\circ$	0.010 7	0.020 8	0.029 8	0.037 3	0.042 8	0.046 3	0.047 5	0.046 5	0.043 6
$l = 2.0^\circ$	0.025 3	0.049 3	0.070 7	0.088 4	0.101 6	0.109 7	0.112 6	0.110 3	0.103 4
$l = 2.5^\circ$	0.049 4	0.096 3	0.138 0	0.172 6	0.198 4	0.214 3	0.219 9	0.215 5	0.202 0
B	50°	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	
$l = 0.5^\circ$	0.001 4	0.001 2	9.89×10^{-4}	7.40×10^{-4}	5.02×10^{-4}	2.96×10^{-4}	1.36×10^{-4}	3.46×10^{-5}	
$l = 1.0^\circ$	0.011 6	0.009 9	0.007 9	0.005 9	0.004 0	0.002 4	0.001 1	2.77×10^{-4}	
$l = 1.5^\circ$	0.039 1	0.033 2	0.026 7	0.020 0	0.013 6	0.008 0	0.003 7	9.33×10^{-4}	
$l = 2.0^\circ$	0.092 6	0.078 8	0.063 3	0.047 3	0.032 1	0.018 9	0.008 7	0.002 2	
$l = 2.5^\circ$	0.180 8	0.153 9	0.123 6	0.092 4	0.062 8	0.036 9	0.017 0	0.004 3	

$$f(B) = 4.81 \times 10^{-6} \cdot B^3 - 9.54 \times 10^{-4} \cdot B^2 + 4.75 \times 10^{-2} \cdot B - 0.11 \quad (14)$$

拟合效果见图3。

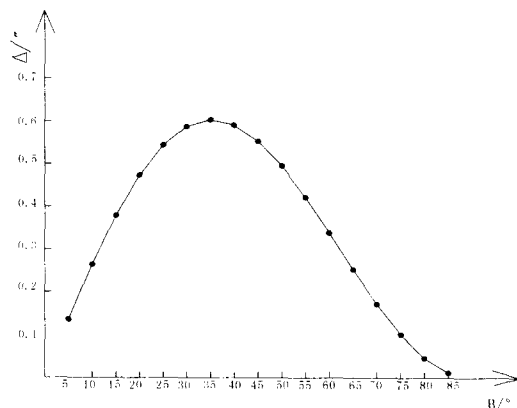


图3 拟合曲线图

4 结束语

通过以上计算可以知道,采用公式(2)和公式(4)计算子午收敛角的存在较差,并且随经差和纬度不同而变化,对比计算数据并分析可以得到以下结论:

- 4.1 同一平行圈上($B = \text{常数}$),经差 l 愈大,较差 Δ 也愈大。
- 4.2 在同一子午线上($L = \text{常数}$),点位处在中纬度($25^\circ \sim 55^\circ$)时,较差 Δ 较大。
- 4.3 分析较差得到:在中低纬度($B = 5^\circ \sim 80^\circ$), $l = 3.5^\circ$ 时,公式(4)的计算精度只能达到 $0.1''$; $l =$

2.5° 时,计算精度达到 $0.1'' \sim 0.01''$; $l = 1.5^\circ$ 时,计算精度达到 $0.01''$; $l = 0.5^\circ$ 时,计算精度达到 $0.001'' \sim 0.0001''$ 。而在实际工作中,比如隧道开挖、地铁施工等,隧道两端距离一般不会太长,大约在 $0.5 \sim 50\text{km}$ 间,相应的经差最大也就是约为 0.45° ,因此,采用公式(4)也可保证足够的计算精度。

参考文献

- 1 孔祥元,梅是义. 控制测量学[M]. 武汉:武汉大学出版社,1996.
- 2 施一民. 现代大地控制测量[M]. 北京:测绘出版社,2003.
- 3 施一民,冯琰. 地球椭球面上另一种形式的测地坐标系的建立[J]. 同济大学学报(自然科学版),2001,29(11):1282—1285.
- 4 施一民,朱紫阳. 测地坐标系中大地线的微分方程及微分关系式[J]. 同济大学学报(自然科学版),2003,31(1):35—38.
- 5 施一民,朱紫阳,方胤祺. 测地主题正反解算[J]. 测绘工程,2003,12(1):9—12.
- 6 熊介. 椭球大地测量学[M]. 北京:解放军出版社,1998.
- 7 胡明诚,鲁福. 现代大地测量学[M]. 北京:测绘出版社,1993.
- 8 武汉测绘科技大学控制测量教研室,同济大学大地测量教研室. 控制测量学[M]. 北京:测绘出版社,1986.
- 9 陈永奇. 工程测量学[M]. 北京:测绘出版社,2004.

Calculation of Formula of Meridian Constringent Angle and Its Precision Analysis

WU Xijuan, Jiang Guoyan, Gao Junqiang

(College of Civil Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract The true value of meridian constringent angle is calculated approximately using formula given by Hristov, and the change rule is analyzed with longitude & latitude. It is analyzed that the difference of the true value and approximate value calculated by $r = \sin B \cdot l$ when longitude is between 0.5° and 3.5° , also latitude is between 5° and 85° . Residual formula when longitude interval is 3.5° is obtained. It can be concluded as follows: First, at the same parallels of latitude, the bigger l is, the larger the difference is. Second, at the same meridian (L is constant), when points lay in middle latitude (between 25° and 55°), the difference is greater. Third, when the l value is 3.5° , calculation precision of formula can only reach $0.1''$, when l is 2.5° , it can reach $0.1'' \sim 0.01''$; when l is 1.5° , it can reach $0.01'' \sim 0.001''$, when l is 0.5° , it can reach $0.001'' \sim 0.0001''$.

Key words Meridian constringent angle, Longitude residual, Projection zone, Coordinate azimuth