

# Logistic 递减开发模型

冯文光

(“油气藏地质及开发工程”国家重点实验室,成都理工学院石油系 610059)

**【摘要】** 本文提出了 Logistic 递减开发模型,提出了开发速度,采出程度等开发指标的数学关系式。分析了参数对 Logistic 递减开发模型的影响。提出了开发初期 Logistic 递减开发模型的确定方法,便于开发初期决策。制作了 Logistic 递减开发模型的  $\log V_D$ - $\log R_p$  图版,  $\log V_D$ - $\log at$  图版,  $\log R_p$ - $\log at$  图版。提出了开发中晚期 Logistic 递减开发模型的判断方法,三点抛物线法和三种图版匹配的拟合方法,为开发中晚期预测奠定了基础。Logistic 递减开发模型是一种先慢后快的递减模型。

**【关键词】** Logistic 递减;开发模型;早期决策;判断方法;三点抛物线法;图版匹配法;增长曲线;生长曲线

中图分类号:TE319 /文献标识码:A

## 0 引言

文献<sup>[1]</sup>提出了 Logistic 模型。Logistic 模型分为两种,第一种是峰状模型,它是 Usher 模型中  $b=1$  的特例;第二种是递减模型,Logistic 递减模型的原型为:

$$N_p = N_o / (1 + ce^{-at}) \quad (1)$$

文献<sup>[2-4]</sup>提出了满足开发模型基本条件的递减开发模型。Logistic 递减模型不满足  $N_p|_{t=0}=0$  的基本条件。本文将从开发模型的角度提出满足基本条件的 Logistic 递减开发模型。

## 1 Logistic 递减开发模型

$$\begin{aligned} \text{产量模型: } Q &= Q_i \frac{1+c}{c} \left( 1 - \frac{1}{1+ce^{-at}} \right), \\ Q_{\max} &= Q_i \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{累计产量模型: } N_p = \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} \ln \frac{1+c}{1+ce^{-at}} \quad (2)$$

该模型满足开发模型的基本条件

$$Q|_{t=0} = Q_i, Q|_{t \rightarrow \infty} = 0$$

$$N_p|_{t=0} = 0, N_p|_{t \rightarrow \infty} = N_o = \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} \ln(1+c)$$

$$\text{开发速度: } V = \frac{a}{\ln(1+c)} \left( 1 - \frac{1}{1+ce^{-at}} \right),$$

$$V_{\max} = \frac{ac}{(1+c)\ln(1+c)} \quad (3)$$

$$\text{无量纲开发速度: } V_D = \frac{1+c}{c} \left( 1 - \frac{1}{1+ce^{-at}} \right) \quad (4)$$

$$\text{采出程度: } R_p = 1 - \frac{\ln(1+ce^{-at})}{\ln(1+c)} \quad (5)$$

无量纲开发速度与采出程度的关系:

$$V_D = \frac{1+c}{c} \left[ 1 - \frac{1}{(1+c)^{1-R_p}} \right] \quad (6)$$

经济极限产量与最终采收率的关系:

$$\frac{Q_e}{Q_{\max}} = \frac{1+c}{c} \left[ 1 - \frac{1}{(1+c)^{1-E_R}} \right] \quad (7)$$

## 2 参数对 Logistic 递减开发模型的影响

由图 1 可以看出, Logistic 递减开发模型是一种缓慢递减模型。延缓系数  $c$  越小, 越呈直线递减; 延缓系数  $c$  越大, 递减速度越慢。图 8, 9 也说明这一规律。图 2 说明延缓系数  $c$  越大, 采出程度越高。图 10 也说明这一点。

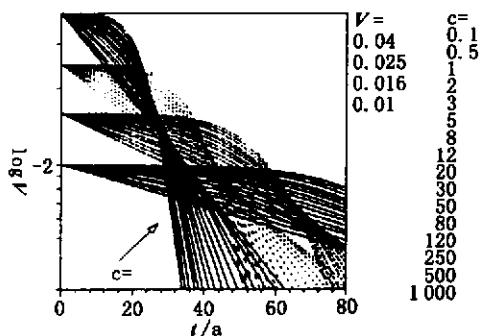


图 1 Logistic 递减开发模型  $\log V-t$

Fig. 1 Logistic Decline  $\log V-t$

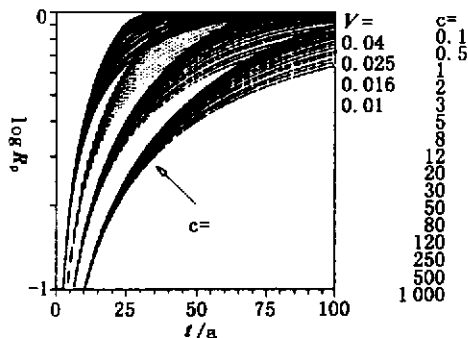


图 2 Logistic 递减开发模型  $\log R_p-t$

Fig. 2 Logistic Decline  $\log R_p-t$

图 1 可知,  $V_{\max}$  越小, 递减系数  $a$  越小, 递减速度越慢。图 2 说明, 递减系数  $a$  越小, 相同生产时间内采出程度越低。

## 3 开发初期 Logistic 递减开发模型的确定方法

已知最大产能  $2Q_{\max}$ , 经济极限产能  $Q_c$ , 地质储量  $N_0$ , 最终采收率  $E_R$ , 由 (7) 式迭代求  $c$ , 或由图 5 查出  $c$  值; 由图 6 查出  $a$  值, 或

$$a = \frac{Q_{\max}}{N_0} \frac{1+c}{c} \ln(1+c) \quad (8)$$

$$\text{开采年限 } t_R = \frac{-1}{a} \{ \ln[(1+c)^{1-E_R} - 1] - \ln c \} \quad (9)$$

也可以由数据查出  $at_R$ , 获得  $t_R$ 。

## 4 开发中晚期 Logistic 递减开发模型判断、拟合与预测

第一种拟合方法: 直线拟合法

$$\text{由 (1) 式} \quad 1 + ce^{-at} = \frac{Q_i}{Q} \frac{1+c}{c} \cdot ce^{-at} \quad (10)$$

$$\text{代入 (2)} \quad N_p = \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} \ln \frac{1+c}{Q_i(1+c)e^{-at}}$$

$$= \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} \left( \ln \frac{Q}{Q_i} + at \right)$$

$$N_p = \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} (-\ln Q_i + at + \ln Q) \quad (11)$$

由 (11) 式得:

$$\frac{N_{p,j+1} + N_{p,j}}{t_{j+1} - t_j} = Q_i \frac{1+c}{c} - \frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \ln \frac{Q_i}{Q_{j+1}} \quad (12)$$

(12) 式是 Logistic 递减开发模型的判断式与直线拟合的依据, 即在  $\frac{N_{p,j+1} + N_{p,j}}{t_{j+1} - t_j} - \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \ln \frac{Q_i}{Q_{j+1}}$  坐标

中, 出现下降直线; 斜率  $\text{slop} = -\frac{Q_i}{a} \frac{1+c}{c}$ , 截距  $\text{cept} = Q_i \frac{1+c}{c}$ , 则

$$a = -\text{cept}/\text{slop} \quad (13)$$

第二种拟合方法: 等差级数法, 令  $t_{j+1} - t_j = \Delta t = \text{常数}$

$$\text{由 (10) 式} \quad 1 = \left[ \frac{Q_i}{Q_j} (1+c) - c \right] e^{-at_j} \quad (14)$$

$$\begin{cases} 1 = \left[ \frac{Q_i}{Q_j} (1+c) - c \right] e^{-at_j} \\ 1 = \left[ \frac{Q_i}{Q_{j+1}} (1+c) - c \right] e^{-at_{j+1}} \end{cases}$$

$$1 = \frac{\frac{Q_i}{Q_{j+1}} (1+c) - c}{\frac{Q_i}{Q_j} (1+c) - c} e^{-a\Delta t}$$

$$\frac{Q_i}{Q_{j+1}} (1+c) - c = \frac{Q_i}{Q_j} (1+c) e^{-a\Delta t} - ce^{-a\Delta t}$$

$$\frac{1}{Q_{j+1}} = \frac{1}{Q_j} e^{-a\Delta t} + \frac{c}{Q_i(1+c)} (1 - e^{-a\Delta t}) \quad (15)$$

由 (15) 式, 在  $\frac{1}{Q_{j+1}} - \frac{1}{Q_j}$  坐标中, 斜率  $\text{slop} = e^{-a\Delta t}$ ,

$$\text{截距 } \text{cept} = \frac{c}{Q_i(1+c)} (1 - e^{-a\Delta t})$$

$$a = \frac{-1}{\Delta t} \ln \text{slop}, \quad \frac{c}{Q_i(1+c)} = \frac{\text{cept}}{1 - \text{slop}} \quad (16)$$

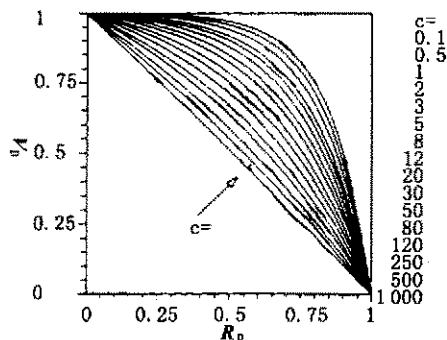
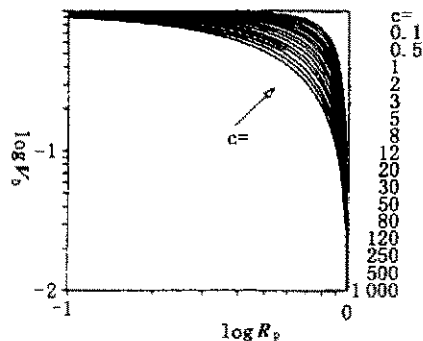
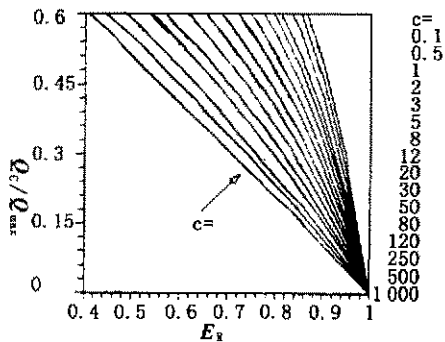
第三种拟合方法: 二元最小二乘法

由 (11) 令目标函数

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^N (N_{pj} + D_1 - D_2 t - D_3 \ln Q_j)^2 \quad (17)$$

$$\text{其中: } D_1 = \frac{Q_i(1+c)}{a} \ln Q_i, D_2 = Q_i \frac{1+c}{c},$$

$$D_3 = \frac{Q_i(1+c)}{a} \frac{1}{c} \quad (18)$$

图3 Logistic 递减开发模型  $V_D-R_p$ Fig. 3 Logistic Decline  $V_D-R_p$ 图4 Logistic 递减开发模型  $\log V_D-\log R_p$ Fig. 4 Logistic Decline  $\log V_D-\log R_p$ 图5 Logistic 递减开发模型  $Q_c/Q_{\max}-E_R$ Fig. 5 Logistic Decline  $Q_c/Q_{\max}-E_R$ 

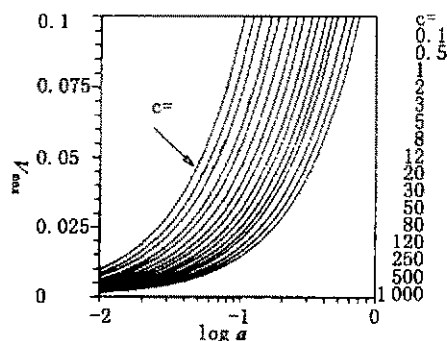
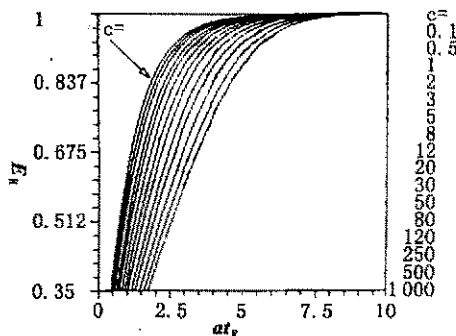
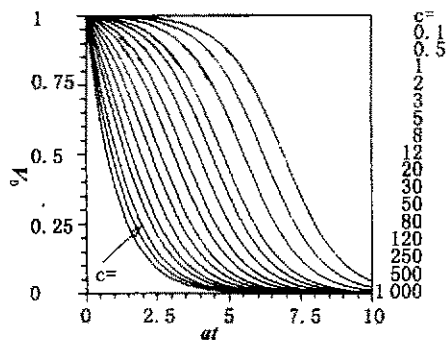
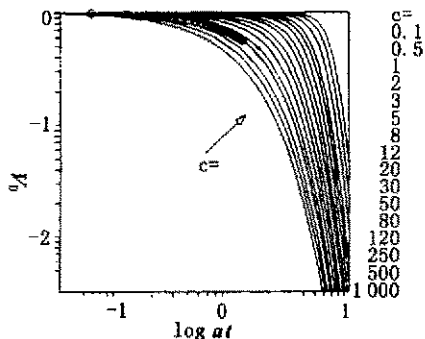
使误差达到最小,则

$$\begin{bmatrix} -\sum & \sum t & \sum \ln Q \\ -\sum t & \sum t^2 & \sum t \ln Q \\ -\sum \ln Q & \sum t \ln Q & \sum (\ln Q)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum N_p \\ \sum t N_p \\ \sum N_p \ln Q \end{bmatrix}$$

$$a = D_2/D_3, \quad Q_i = e^{D_1/D_3}, \quad c = \frac{Q_i}{D_2 - Q_i} \quad (19)$$

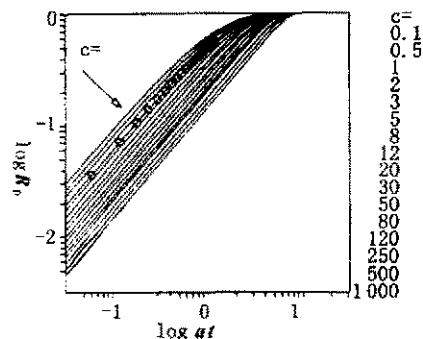
第四种拟合方法:图版匹配法

如图4,第一类匹配法是在  $\log V_D-\log R_p$  图版中,制作相同刻度的  $\log Q-\log N_p$  实测曲线,平行移

图6 Logistic 递减开发模型  $V_{\max}-\log a$ Fig. 6 Logistic Decline  $V_{\max}-\log a$ 图7 Logistic 递减开发模型  $E_R-at_R$ Fig. 7 Logistic Decline  $E_R-at_R$ 图8 Logistic 递减开发模型  $V_D-at$ Fig. 8 Logistic Decline  $V_D-at$ 图9 Logistic 递减开发模型  $\log V_D-\log at$ Fig. 9 Logistic Decline  $\log V_D-\log at$ 

$Q_i=58.4; a=0.06, c=2; N_o=1604$

动实测曲线直至匹配最好。由匹配的图版曲线得  $c$ , 由匹配点得  $(V_D)_M, (Q)_M, (R_p)_M, (N_p)_M$ 。则  $Q_{\max} = (Q)_M / (V_D)_M, N_o = (N_p)_M / (R_p)_M$

图10 Logistic 递减开发模型  $\log R_p \sim \log at$ Fig. 10 Logistic Decline  $\log R_p \sim \log at$  $Q_i = 58.4$ ;  $a = 0.06$ ,  $c = 2$ ;  $Now = 1\ 604$ 

$$a = \frac{Q_{\max} (1+c)}{N_o c} \ln c \quad (20)$$

如图9,第二类匹配法是  $\log V_D \sim \log(at)$  图版中,制作相同刻度的  $\log Q \sim \log t$  实测曲线,平行移动实测曲线直至匹配最好。由匹配的图版曲线得  $c$ ,由匹配点得  $(V_D)_M$ ,  $(Q)_M$ ;  $(at)_M$ ,  $(t)_M$ 。则

$$Q_{\max} = (Q)_M / (V_D)_M, a = (at)_M / (t)_M \quad (21)$$

如图10,第三类匹配法是  $\log R_p \sim \log(at)$  图版中,制作相同的  $\log N_p \sim \log t$  实测曲线,平行移动实测曲线直至匹配最好。由匹配的图版曲线得  $c$ ,由匹配点得  $(R_p)_M$ ,  $(N_p)_M$ ;  $(at)_M$ ,  $(t)_M$ 。则

$$N_o = (N_p)_M / (R_p)_M, a = (at)_M / (t)_M$$

## 参考文献

- 1 陈元千. Logistic 模型的推导及自回归方法[J]. 新疆石油地质, 1996, 17(2).
- 2 冯文光, 胡常忠, 杨凤波. Arps 递减开发模型[J]. 矿物岩石, 1999(3).
- 3 冯文光, 胡常忠, 杨凤波. КОИЛТОВ 递减开发模型[J]. 矿物岩石, 1999(3).
- 4 冯文光. FWG1 幂指数递减开发模型[J]. 矿物岩石, 1999(4).

# LOGISTIC DECLINE DEVELOPMENT MODEL

FENG Weng-uang

(State Key Laboratory of Oil/Gas Reservoir Geology and Exploitation,  
Petroleum Department, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059)

**Abstract** A mathematical expression for such development indexes as recovery rates and recovery percent of reserves is established on the basis of the logistic decline development model and the logistic decline development model is proposed. The effect of parameter on the logistic decline development model is analyzed. For the convenience of policy decision in the initial stage of development, the method of determining the logistic decline development model is proposed. Accordingly, the  $\log \log V_D \sim \log R_p$  type curves,  $\log V_D \sim \log(at)$  type curves and  $\log R_p \sim \log(at)$  type curves are created. The proposition of assessment method and the matching methods for three point parabolic method and the three type curves for the logistic decline development model in the mid-late stage development lies a foundation for the mid-late stage prediction.

**Key words** Logistic decline; development model; initial stage policy decision; determining method; three point parabolic method; type curves matching method; growth curve

ISSN 1001-6872(2000)01-0070-73; CODEN: KUYAE2

**Synopsis of the first author** Feng Weng-uang, male, 52 years old, Professor (Academic supervisor of Doctorate and M Sc degree for Oil & Gas Field Exploitation Engineering) of Oil Reservoir Engineering at Chengdu University of Technology. Now he is engaged in oil & gas field exploitation engineering, reservoir numerical simulation, analysis of well testing and coalbed gas reservoir engineering.

$$Q_i = \frac{aN_o c}{(1+c) \ln(1+c)} \quad (22)$$

由(7)式或图5得井控最终采收率  $E_R$ 。由(9)或图7得井控开发年限  $t_R$ 。

图4、图9、图10中圆点为实际生产数据。

## 5 结论

5.1 本文提出了 Logistic 递减开发模型及其开发速度、无量纲开发速度、开发程度等关系式。Logistic 模型是延缓型递减模型。

5.2 延缓系数  $c$  越大, 递减速度越缓慢, 最终采收率高。

5.3 本文提出了开发初期 Logistic 递减开发模型的确定方法。

5.4 本文提出了开发中晚期 Logistic 递减开发模型的判断方法及直线拟合法、等差级数拟合法, 二元最小二乘法和三类图版匹配法。

### 符号说明:

$a$ : 递减系数,  $a^{-1}$ ;  $c$ : 延缓系数, 无量纲;  $E_R$ : 最终采收率, 无量纲;  $N_o$ : 地质储量或井控储量, 油田;  $t$ : 气田;  $10^4 m^3$ ;  $N_p$ : 累计产量, 油田;  $t$ : 气田;  $10^4 m^3$ ;  $N_R$ : 可采储量, 油田;  $t$ : 气田;  $10^4 m^3$ ;  $Q_i$ : 年产量, 油田;  $10^4 m^3 a^{-1}$ ;  $Q_e$ : 经济极限年产量, 油田;  $10^4 m^3 a^{-1}$ ;  $Q_c$ : 初始年产量, 油田;  $10^4 m^3 a^{-1}$ ;  $Q_{\max}$ : 最大年产量, 油田;  $10^4 m^3 a^{-1}$ ;  $R_p$ : 采出程度, 无量纲;  $t$ : 开采时间,  $a$ ;  $t_R$ : 开发年限,  $a$ ;  $V$ : 开发速度,  $a^{-1}$ ;  $V_D$ : 无量纲开发速度;  $V_{\max}$ : 最大开发速度,  $a^{-1}$ 。