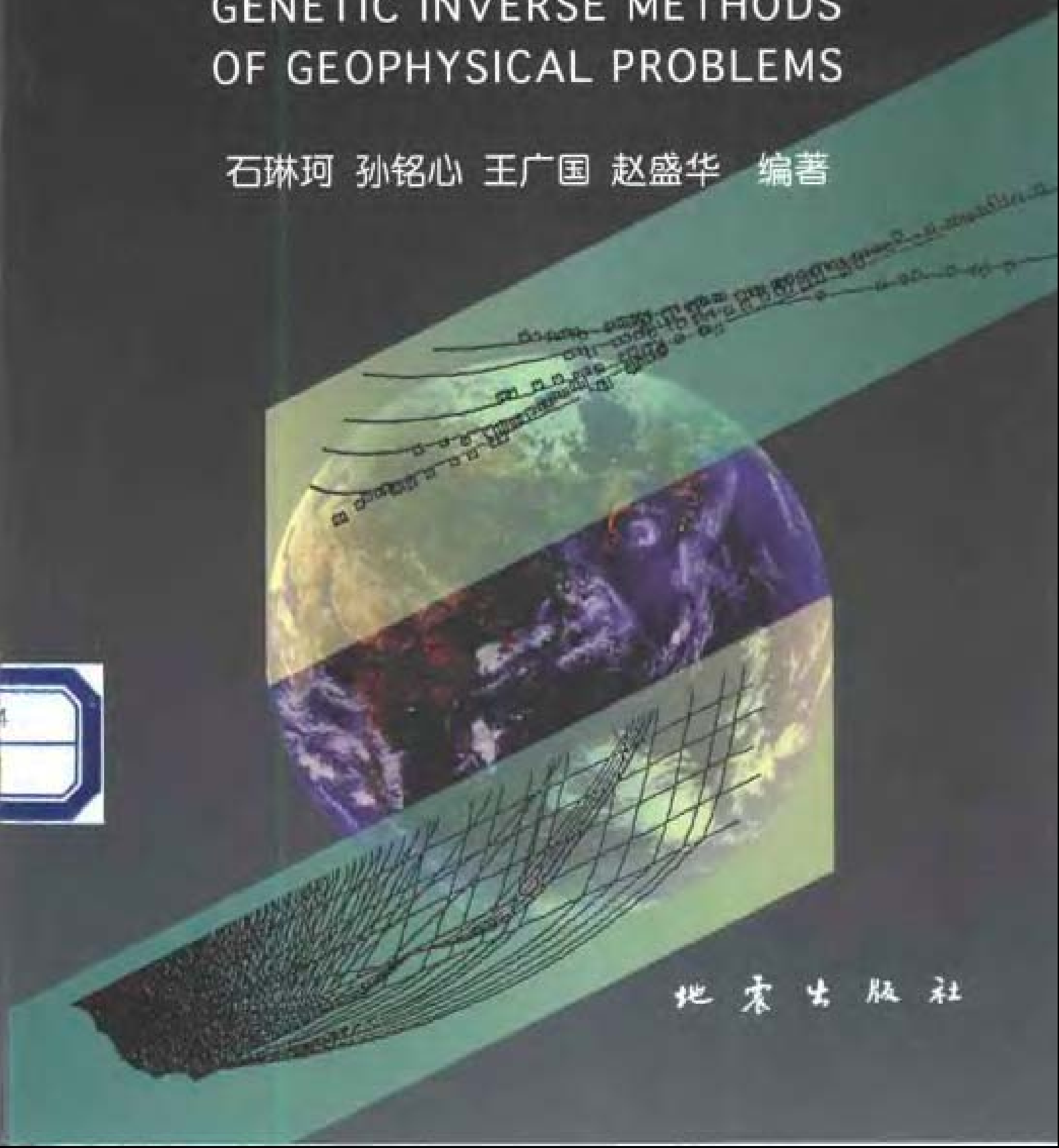
地球物理遗传反演方法

GENETIC INVERSE METHODS OF GEOPHYSICAL PROBLEMS

石琳珂 孙铭心 王广国 赵盛华 编著



地震出版社

地球物理遗传反演方法

GENETIC INVERSE METHODS OF GEOPHYSICAL PROBLEMS

石琳珂　孙铭心　王广国　赵盛华 编著

地震出版社

2000

内 容 简 介

遗传算法（Genetic Algorithms，GA）是近年来发展起来的一种新颖的非线性反演方法，它的工作原理与现有的反演方法有根本的不同，具有很强的普遍适应性与数值计算稳定性，在解决地球物理学的非线性反演问题方面有广泛的应用前景。本书在回顾了地球物理反演方法发展历史的基础上，指出了现有反演方法存在的不足和引入遗传算法的必要性。书中系统地研究了遗传算法的理论和方法，针对它的弱点，作者从三个方面对其做了改进。然后，给出了改进的遗传算法在二维和三维密度界面反演、一维和二维地壳速度结构走时反演以及重力和地震数据联合反演中的应用，这些都是作者近年来的最新研究成果。最后，对遗传算法在地球物理反演中的应用途径给出了原则性方法。

本书可供地球物理、物探、石油勘探等部门的科研人员、大专院校师生参考。

地球物理遗传反演方法

石琳珂　孙铭心　王广国　赵盛华 编著

责任编辑：姚家榴

责任校对：庞娅萍

*

地震出版社出版

北京民族学院南路 9 号

北京地大彩印厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国各地新华书店经售

*

787×1092 1/16　7.125 印张　183 千字

2000 年 5 月第一版　2000 年 5 月第一次印刷

印数 001-800

ISBN 7-5028-1755-7/O・31

（2286）定价：10.00 元

序

建立有效的反演理论和方法一直是应用地球物理学重点探索的目标之一。这项工作的重要性不仅在于它是一项基本的、难度很大的工作，更体现了人类探索地球内部结构的能力和水平。《地球物理遗传反演方法》的重要贡献之一在于，它提出了一整套简洁、普遍适用的解决地球物理反演问题的方法，开辟了一条研究地球物理反演问题的新途径。所谓最简洁、最简单的方法，或许正是最有效和最健全的方法，就是这个道理。因此，本书的内容有重要的启发意义和学术参考意义，将有助于推动地球物理反演理论和方法的发展。

作者在回顾了地球物理反演理论发展过程的基础上，对传统的反演方法做了充分的评价，指出传统反演方法已不能完全适应地球物理学对解非线性、多参数反演问题的需要。理由有三，①对于需要做线性化处理的方法，其结果是不精确的；②对于需要解大型方程组的方法，其解的可靠性有待讨论；③对于需要求导数的方法，若导数不存在则无法应用。因此，需要研究新的反演方法。

遗传算法（GA）是近年来出现的基于全局搜索的反演方法之一，其特点是方法简单、有效，具有普遍适应性，不存在上述传统反演方法中的三类问题。作者在消化吸收国外先进技术的基础上，把GA引入到地球物理反演领域，并针对GA本身的某些弱点，创造性地提出了相应的改进措施，这对GA的算法是一种创新，具有很强的使用价值。在此基础上提出了一系列地球物理反演算法，用于解决地球物理中的二维、三维界面位场资料的反演问题，一维、二维地壳速度结构走时反演问题，以及重力、地震资料的联合反演问题。这是本书的又一重要贡献。

本书语言流畅、层次分明，配有大量应用实例和数值模拟实例。另外，作者对地球物理中的很多问题，提出了新的见解，具有启发意义。相信本书对地球物理反演理论和方法的研究将会起到很好的推动作用，特为之序。

张先康

1999年12月

前　言

地球物理反演问题是国内外地球物理工作者经常遇到的问题，历来受到高度重视。地球物理反演理论和方法是一门综合学科，涉及数学、物理、计算数学、计算机科学等等。地球物理学的发展史表明，当科学技术得到迅速发展时，都有新的反演理论和方法技术的诞生，而这些新理论、新技术又促进地球物理学的进一步发展。到目前为止，地球物理反演理论仍然是一个发展着的、十分活跃的领域。比如，利用人的大脑工作原理的研究成果，科学家在80年代中期提出了人工神经网络（Artificial Neural Networks，ANN）计算方法，这种方法已广泛应用于地球物理学的模式识别、分类及反演问题中；模拟物理学中晶体生成的方法，出现了模拟退火法(Simulated Annealing，SA)，该方法曾成功地解决过著名的数学难题“旅行商”问题（Traveling Salcsman Problem，TSP)，同时也已应用于解地球物理反演问题；利用生物界自然进化原理，出现了遗传算法(Genetic Algorithms，GA)。这种方法在国外发展很快，已应用于科学技术的很多领域，如人工智能、工业自动控制、图像识别、通讯等。GA作为一种函数优化方法，其本身就是一种完全非线性反演方法，在解地球物理反演问题中必定有广阔的应用前景。因此，开展对GA的研究有着重要的现实意义。

尽管GA是一种在解决非线性反演问题中有独特优势的反演方法，但它本身也有局限性，其中最突出的弱点是收敛速度慢。另外，据现有文献，GA在地球物理学中的应用主要集中在地震学的一维走时和波形反演，在地震学的二维反演和位场资料的反演解释方面几乎还是空白。因此，本书的主要研究目标在于：

(1) 研究提高GA收敛速度的措施，对其进行改进，使GA更为完善。

(2) 扩大GA的应用范围，探讨其在地球物理学其它领域中的应用途经。

(3) 结合科研项目，把改进后的GA应用于处理实际地球物理资料。

作者希望这一系列研究能对地球物理反演方法和技术的发展有所贡献，在探索地球内部结构奥秘的进程中增添一种有效的工具和手段。

本书共分11章。第1章为综述，主要回顾地球物理反演方法的发展历史，分析现有反演方法的问题，并对此做一定性的综合评价。第2、3章对GA的理论与方法做全面的研究和剖析，研究它的主要方法原理及数学基础，把它与现有反演方法做一对比，并给出一些实际计算例子以说明GA的特点。第4～6章为GA的改进部分，分别介绍作者提出的三项加速收敛措施：①遗传基因的多点交换；②

逐步缩小搜索范围；③用S形函数分辨模型的优劣。每章都附有地球物理学中实际问题的反演实例，以说明各项加速收敛措施的效果。第7～11章为应用部分，分别介绍作者研究的地球物理遗传反演方法：①二维密反界面位场遗传反演方法；②三维界面位场遗传反演方法；③一维地壳速度结构走时遗传反演方法；④二维地壳速度结构走时遗传反演方法；⑤重力、地震数据联合遗传度演方法。根据这些方法，得到了郑州—临汾剖面的地壳密度结构，山西高原的莫氏面理深等值线图，任县—武清地震剖面的一维地壳速度结构和北京—怀来—丰镇地震剖面的二维地壳速度结构，重力、地震数据联合遗传反演方法还给出了数值模拟结果。最后，在结束语中对GA在地球物理反演中的应用途经给出了原则性方法，并对GA做了综合评价。

本书在研究和撰写过程中，始终受到中国地质大学（北京）研究生院应用地球物理系管志宁教授和中国地震局地球物理勘探中心张先康研究员、孙武城研究员的悉心指导。蔡柏林教授、曾华霖教授在研究过程中在选题、研究方向和技术路线等方面提出了很多宝贵建议。在与姚长利副教授、候俊胜博士、张明华博士就有关问题研讨时，他们都给予作者以热情的帮助。作者在此一并向他们表示衷心的感谢！

作者特别要向孙懿斐女士对本项研究工作的长期关注和资助表示感谢。

在本书的编写过程中，引用了很多文献的内容及资料（见参考文献），中国地震局物探中心也提供了很多宝贵资料，对这些文献和资料的作者及单位表示感谢。

最后，感谢中国地震局地球物理勘探中心主任、河南省地球物理学会理事长张先康研究员为本书题写序言。

本书是关于地球物理遗传反演理论和方法的第一本专著，由于作者经验不足、水平有限，书中定有不妥和错误之处，恳请前辈和同仁不吝赐教。

著　者

1999年9月9日

目　录

1　地球物理反演理论和方法的发展与评价 …… (1)
1.1　引言 …… (1)
1.2　地球物理反演理论和方法的发展 …… (2)
1.2.1　广义逆理论 …… (2)
1.2.2　最优化方法 …… (2)
1.3　地球物理反演理论的一般数学原理 …… (3)
1.4　连续型线性反演理论 …… (3)
1.5　离散型反演问题 …… (4)
1.6　解离散型反演问题的数值计算方法 …… (5)
1.6.1　广义逆方法 …… (5)
1.6.2　最优化方法 …… (6)
1.7　现有反演计算方法的评价 …… (8)
小结 …… (8)
2　遗传算法（GA） …… (9)
2.1　引言 …… (9)
2.2　GA 简介 …… (9)
2.3　GA 与现有方法的差别 …… (10)
2.4　GA 运算 …… (11)
2.5　GA 的实现方法 …… (13)
2.6　GA 的模拟计算 …… (16)
2.7　图式 …… (19)
小结 …… (20)
3　GA 的数学基础 …… (22)
3.1　GA 基本理论 …… (22)
3.1.1　基本概念 …… (22)
3.1.2　再生运算对图式的影响 …… (23)
3.1.3　基因交换运算对图式的影响 …… (23)
3.1.4　基因变异运算对图式的影响 …… (25)
3.2　图式理论的检验 …… (25)
小结 …… (26)
4　加速收敛措施之一：遗传基因的多点交换 …… (27)
4.1　问题 …… (27)
4.2　遗传基因的多点交换 …… (28)

4.3 数值模拟 …… (28)
小结 …… (30)
5 加速收敛措施之二：逐步缩小参数搜索范围 …… (31)
5.1 引言 …… (31)
5.2 从模型群体的演化过程中得到的启示 …… (32)
5.3 搜索范围内各种情况的分析 …… (33)
5.4 逐步缩小搜索范围的方法 …… (35)
5.5 理论模型试验 …… (36)
5.5.1 磁性球的空间位置及几何参数的反演 …… (36)
5.5.2 一维地壳结构速度-深度函数走时反演 …… (39)
小结 …… (43)
6 加速收敛措施之三：S形函数在GA中的应用 …… (45)
6.1 引言 …… (45)
6.2 S形函数 …… (45)
6.3 参数选择 …… (46)
6.4 数值模拟 …… (46)
6.4.1 与原有GA的比较 …… (46)
6.4.2 与逐步缩小搜索范围的方法结合 …… (47)
小结 …… (49)
7 二维密度界面位场遗传反演方法研究 …… (50)
7.1 引言 …… (50)
7.2 地壳密度模型及正演方法 …… (50)
7.2.1 地壳密度模型 …… (50)
7.2.2 正演公式 …… (51)
7.3 遗传反演方法 …… (51)
7.4 数值模拟 …… (52)
7.5 郑州—临汾剖面重力异常机制分析 …… (53)
7.5.1 剖面地球物理场特征 …… (53)
7.5.2 速度、密度换算 …… (54)
7.5.3 正演拟合 …… (54)
7.5.4 反演计算 …… (55)
7.5.5 异常机制分析 …… (56)
7.6 有关问题讨论 …… (56)
7.6.1 重力异常与莫霍界面起伏的关系 …… (56)
7.6.2 解重力反问题时的约束条件 …… (57)
小结 …… (57)
8 三维界面位场遗传反演方法研究 …… (58)
8.1 引言 …… (58)
8.2 三维物性界面的频率域快速正演方法 …… (59)

8.2.1 坐标系 …… (59)
8.2.2 重力位的频谱 …… (59)
8.2.3 三维物性层的重力频谱表达式 …… (60)
8.2.4 三维物性层的磁频谱表达式 …… (61)
8.2.5 位场频谱表达式的简化 …… (61)
8.2.6 单界面模型的位场频谱表达式及其简化 …… (62)
8.2.7 重、磁位场频谱表达式的比较 …… (63)
8.3 界面位场遗传反演方法 …… (64)
8.4 数值模拟 …… (64)
8.4.1 模型及正演公式 …… (65)
8.4.2 参数 …… (66)
8.4.3 数值模拟 …… (66)
8.4.4 计算中的注意事项 …… (66)
8.5 反演实例——山西高原莫氏面位场反演 …… (67)
8.5.1 计算区域 …… (67)
8.5.2 布格重力异常 …… (67)
8.5.3 数据处理——深部异常信息提取 …… (67)
8.5.4 反演计算 …… (68)
小结 …… (69)
9 一维地壳速度结构走时遗传反演方法研究 …… (71)
9.1 地震波走时计算公式 …… (71)
9.1.1 地壳模型及地震波类型 …… (71)
9.1.2 反射波 …… (71)
9.1.3 回折波 …… (72)
9.1.4 首波 …… (72)
9.2 任县—武清地震剖面南段一维地壳速度结构走时遗传反演 …… (73)
9.2.1 构制初始地壳模型 …… (73)
9.2.2 构造目标函数 …… (73)
9.2.3 走时遗传反演 …… (74)
小结 …… (77)
10 二维地壳速度结构走时遗传反演方法研究 …… (78)
10.1 引言 …… (78)
10.2 射线追踪 …… (79)
10.2.1 基本理论 …… (79)
10.2.2 正演计算程序的修改 …… (79)
10.3 模型参数化 …… (79)
10.4 目标函数构制 …… (80)
10.4.1 问题分析 …… (80)
10.4.2 初始模型先验信息的利用 …… (80)

10.5 数值模拟 …… (81)
10.5.1 正演计算 …… (81)
10.5.2 反演计算 …… (83)
10.6 北京—怀来—丰镇剖面二维地壳速度结构走时遗传反演 …… (86)
10.6.1 剖面位置及地质概况 …… (86)
10.6.2 确定初始模型和各震相关键参数 …… (86)
10.6.3 反演计算 …… (87)
小结 …… (89)
11 重力、地震资料的联合遗传反演方法研究 …… (90)
11.1 引言 …… (90)
11.2 地壳模型及速度-密度转换 …… (91)
11.3 目标函数形式 …… (91)
11.4 遗传反演计算步骤 …… (91)
11.5 数值模拟 …… (92)
小结 …… (96)
结束语 …… (98)
附录 用GA解地球物理反演问题的步骤 …… (101)
参考文献 …… (104)

1 地球物理反演理论和方法的发展与评价

1.1 引 言

有关地球深部的信息，绝大多数来源于对地表地球物理观测资料的解释。因此，任何一种地球物理观测，最终都要求解反演问题，即根据各种位场、地震波地球物理观测资料，来推测地球内部的结构形态和物质成分，定量计算各种地球物理参数（朱介寿，1985）。

解反演问题是一门广泛应用于各个科学技术领域的基本研究方法，凡涉及到观测与演绎的科学技术，都会碰到这类问题。例如，天体物理学中根据光谱的测定研究宇宙的物质组成及星体的演化；天体力学中根据人造卫星瞬时位置及速度的观测数据计算其轨道要素；气象学中根据气象观测数据研究大气层运动规律；大地测量学中根据大地测量数据推算近代应力场；地球物理学中根据地表的地球物理观测数据推算地下物质的结构、形态及成分等等，这些都是反演问题的例子。可见，相当多的科学技术问题，都以不同的方式、在不同程度上涉及反演问题。

解反演问题的古典方法是最小二乘法及统计学中的回归、参数估计等。近 40 年来，由于在计算中广泛应用了信息论、线性及非线性规划、广义逆理论及最优化方法等一些数学工具，使得地球物理反演问题在理论和方法上都有了重大进展。

任何反演问题的计算都是建立在正演问题的基础之上。对于某个地球物理问题，只有得到了它的数学解答（解析的或数值的），即能计算其正演问题时，才有可能解反演问题。对于那些成因或机制尚不清楚的地球物理问题，是谈不上解反演问题的。所谓正演问题，是由理论模型参数计算观测数据的理论值。而反演问题，是由实际观测数据推算所有可能的模型参数。

反演问题是地球物理学研究中一个重要而又困难的问题，最主要的困难是反演结果存在着多解性（不唯一性）。这种不唯一性不是由于反演方法或技巧上的缺陷引起的，而是地球物理问题本身存在的固有困难。困难之一是观测资料不完备。由于地球物理观测只能在地球表面或其上空进行，无法直接获得反映地球内部物质的充足的信息。这就使得反演结果有多种可能性，而每一种可能性都能满足不充分的观测数据。地球物理观测信息的不足是无法用数学技巧来弥补的。困难之二是任何地球物理观测都存在干扰和误差。这种受畸变的观测数据使得反演计算不稳定，即观测数据中少量的错误可以导致反演结果的很大变动。因此，在解地球物理反演问题时，要根据已有资料，尽可能多地引入先验信息、附加约束条件，以减少解的不唯一性。

在不同的科学技术领域中，对反演问题有不同的提法。如，根据数学的观点，反演是在给定的子空间中寻找与函数空间中的某点最靠近的点；根据统计学的观点，反演是回归和参数估计问题；根据信息论的观点，反演又可看成滤波或过程鉴别问题。尽管术语和提法不同，但它们都表示同一内容，即从观测数据计算地球内部物质的各种参数。

下面对地球物理反演理论和方法的发展做一简要回顾和归纳，并对现有的（传统的）一般的反演方法做一定性的评价，其中不涉及为解决专门问题而设计的特殊反演方法。

1.2 地球物理反演理论和方法的发展

在地球物理学发展的初期，由于观测资料比较粗糙，一般只对观测数据做定性的或粗略的定量解释。从20世纪初到50年代，随着地球物理方法的发展，相继提出了各种解反演问题的定量计算方法。但这些方法大多是孤立地为解决某一特定问题而提出来的。例如，重、磁位场解释中常用到的特征点法、积分法就是为解释某一孤立位场异常而提出的一些简单反演计算方法。又如，地震学中根据地球表面体波走时观测来反演速度随深度变化的Herglotz—Wiechert公式，也是在假设速度是深度的单调函数时的一种积分运算。这些方法的特点是，仅能提供有关平均化的参量，如异常物体的质量或埋藏深度等。

近40年来，随着科学技术的迅速发展，地球物理资料无论在空间分布范围上（从大陆、大气层扩展到海洋和太空）还是数据的可靠性及丰富程度上，都较过去有很大改进。数学方法特别是电子计算机的广泛应用，促进了地球物理一般反演理论的建立和数据处理自动化的发展。

1967～1970年间，Backus和Gilbert发表了一系列重要文章。这些文章奠定了近代地球物理线性反演理论的基础，具有重要意义。这个比较完整、比较严格的反演理论被称之为Backus-Gilbert（或BG）理论。在他们的原始文献中，一般研究整个地球内部物理参数的连续变化，故反演问题以连续型函数表达。1972年，Wiggins用矩阵将Backus—Gilbert理论表达为离散形式。同年，Jackson用广义逆理论详细地讨论了线性反演问题在各种情况下的解答。另外，BG理论中引入了分辨矩阵、信息矩阵和协方差矩阵等重要概念，这对于理解反演问题的实质及评价反演效果有重要作用。

1987年，Tarantola从概率的角度提出广义反演方法，该方法把表示先验信息的模型协方差矩阵和表示数据误差的数据协方差矩阵等先验信息直接引入到反演公式中，有效地减小了解的非唯一性（A. Tarantola，1987）。

同时，解反演问题的数值计算方法也得到了迅速发展，其中发展比较快的有广义逆理论和最优化方法。

1.2.1 广义逆理论

广义逆理论是矩阵论近年来的新成就之一。早在1920年，Moore就提出了奇异矩阵的逆的问题，从而建立了广义逆矩阵的概念。1935年，他又对广义逆概念进行了重新讨论。1955年，Penrose也独立提出了一个广义逆矩阵的概念。他的这个概念实际上与Moore的概念等价，现在称为Morre-Penrose广义逆，常用A^-表示。同年，Rao提出了一个更一般的广义逆概念，通常称为g逆，用A^-表示。此后，广义逆理论得到了迅速发展，并广泛应用于许多科学技术领域。

1.2.2 最优化方法

最优化方法是一个有悠久历史的方法，至少可以追溯到Newton发明微积分的时代。另外，早在1847年，Cauchy就提出了最速下降法，这也许就是最早的求解最优化问题的方法。但这些方法对参数较多的问题常常不适用。这是因为，最速下降法收敛得比较慢，而且，我

们经常遇到的问题都是非线性的。后来，计算机的使用和实际需要的增长，使这些古老的方法取得了实质性的发展。如 Daviden 提出的变度量法（即拟 Newton 法），是最优化计算方法中最好的方法之一。Broyden，Powell，Fletcher 等人在这方面也做了大量工作，他们提出的 powell 直接方法和共轭梯度法在最优化方法中也占有重要位置。Marquardt 针对平方和这种特殊形式的目标函数也做了很好的工作，提出了阻尼最小二乘法。总之，出现了很多新的最优化计算方法，而且这些方法在解决实际地球物理反演问题中都得到了广泛的应用。

1.3 地球物理反演理论的一般数学原理

设：U 为地球物理参数值构成的集合，称为模型空间；E 为映射地球物理参数与地球物理观测场之间的算子；D 是地球物理观测值构成的集合，称为数据空间。

如果模型空间 U 和数据空间 D 都是线性空间，且映射算子 E 也是线性的，则这样的反演问题为线性反演问题。但是，大部分地球物理反演问题都不是线性的。为此，必须使用两种方法使其线性化。

(1)将映射算子 E 用线性算子 E_0 代替。常用的方法是将其在某一初始模型 W_0 附近展开，使线性函数 $E_0(W)$ 与非线性函数 $E(W)$ 充分地接近。

(2) 通过约束条件使模型空间 U 与数据空间 D 都成为线性空间。

假定模型空间 U 为希尔伯特空间 $L_2(\Omega)$，其中 Ω 为实空间中的有限域。通过 m 个映射算子的核 $G_i(r) \in L_2(\Omega)$，可以把模型空间 U 映射到数据空间 D，即

$$\int G_i(r)W(r)\mathrm{d}r = g_i(W) \quad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{1.1}$$

其中，$W(r)$ 为连续型地球模型参数（r 可看成是地球半径），$g_i(W)$ 等于或近似等于观测数据 d_i。这样表达的问题是连续型的。

若将 Ω 分成 n 个子域 Ω_1，Ω_2，…，Ω_n（例如将地球内部划分成 n 层），使 $\Sigma\Omega_i=\Omega$，则上述连续型函数就被离散化。模型参数 W 被离散为 W_k（$k=1$，2，…，n），积分方程（1.1）可写成矩阵方程形式

$$(G \times W)_i = \Sigma G_{ik} \times W_k = g_i(W) \quad (i = 1,2,\cdots,m) \tag{1.2}$$

其中，G 为 $m\times n$ 矩阵，模型参数 W 为 n 维向量，观测数据 g 为 m 维向量。由（1.2）式表达的问题是离散的。

所谓线性反演问题，就是从 m 个观测数据 d_1，d_2，…，d_m 中获得所要求的模型参数 W（或 n 个离散值 W_1、W_2、…、W_n）的信息。Backus-Gilhert 理论是对连续型问题（1.1）给出平均解的一种途经，而广义逆理论和最优化方法是对离散型问题（1.2）求解的基本方法。

1.4 连续型线性反演理论

前面已经指出，地球物理反演问题实质上是寻找一个物理模型，它与观测数据拟合得最好。但这个物理模型往往是不唯一的。Backus 和 Gilbert 的主要贡献在于，从全部可能的希尔伯特空间，特别是从那些满足观测数据的模型空间中减少了不唯一性，因为可以根据模型的性质对它进行约束。如模型的非负性质，反演计算模型与初始模型在模型空间中最短距离性

质等，都可用来对模型做出约束，使反演结果的不唯一性得到控制。

地球物理反演问题的一般提法是，根据一组观测值 d_j，$j=1, 2, \cdots, m$，找出适应于该观测数据的地球物理模型 W。一般来说，观测数据 d_j 是模型参数 W 的非线性函数：

$$d_j = E_j(W), \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{1.3}$$

对于真实地球物理模型 W_0，其相应的观测值为

$$d_j^0 = E_j(W_0), \quad j = 1,2,\cdots,m \tag{1.4}$$

引入希尔伯特空间的目的之一，是使我们能定义并计算观测数据相对于模型参数的导数。考虑两个模型 W 和 W^1，它们之间仅相差一个微量 δm：

$$W^1 = W + \delta m \tag{1.5}$$

若它们的函数值之间有关系

$$E_j(W + \delta m) = E_j(W) + (F_j, \delta m) + \varepsilon(\delta m) \tag{1.6}$$

其中，每个 F_j 都是希尔伯特空间中的一个元素，$(F_j, \delta m)$ 为 F_j 与 δm 的内积，且 $\varepsilon(\delta m)$ 比范数 $\|\delta m\|$ 更快地趋于零。如（1.6）式成立，则称此函数是 Frechet 可微的，F_j 则称为观测数据 d_j 的 Frechet 核函数（或算子）。通常，F_j 是 d_j 对 W 的导数。所有有地球物理意义的数据都可以看成 Frechet 可微的。显然，（1.6）式实质上是将问题线性化的一个重要步骤。

设（1.5）式中的 W 是初始模型，而 W^1 是真实模型，或至少是满足观测数据的模型。由于初始模型 W 是给定的，而 W^1 是待求的，所以我们希望得到 δm。但 δm 是无穷维向量空间的一个元素，而仅有 m 个观测数据，这就使得解是不唯一的。Backus 和 Gilbert 提出的一个约束条件是，寻找一个与初始模型 W 最接近的 W^1，或在希尔伯特空间中与 W 距离最短的 W^1 作为解。这种约束条件意味着寻找一个 δm 范数为最小，即 $\|\delta m\| = \min$ 的解，或满足：

$$\int [\delta m(r)]^2 \mathrm{d}r = \min \tag{1.7}$$

的解。

若 W 与 W^1 是最靠近的，则（1.6）式中的 ε 项可以忽略。用变分法可得：

$$\delta m = \sum_{j=1}^{n} a_j F_j \tag{1.8}$$

式中 a_j 可通过下面 n 个线性方程求得：

$$\Sigma(F_j, F_k)a_k = E_j(W^1) - E_j(W) \quad j = 1,2,\cdots,n \tag{1.9}$$

其中，(F_j, F_k) 是 Frechet 导数的内积。计算时忽略 ε 项，说明这种方法是近似的，即由此得到的 δm 是不精确的。但可以应用迭代法，每次迭代用上一次的结果（$W+\delta m$）为起点，逐步得到与实际观测值符合最好的模型。

1.5 离散型反演问题

任何一个地球物理反演问题，如根据地球重、磁异常计算矿体或构造的空间位置及形态，根据地震体波或面波研究地球结构，根据地热流或电磁场推算地球内部物质状态，根据人造卫星轨道计算地球外表形状及内部物质分布，根据地磁场资料推算海底扩张及大陆漂移史等，都可以用下述离散模型表示。

由实际观测得到的 m 个离散的地球物理数据，以 m 维向量表示

$$\boldsymbol{Y}^{o}=(y_1^{o},y_2^{o},\cdots,y_m^{o})^{T} \tag{1.10}$$

它称为观测值向量。

一个具体的地球物理问题，可以用 n 个离散的（具有相同或不同量纲的）物理参数来表示反演所要求的模型，写为 n 维向量

$$\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{T} \tag{1.11}$$

它称为模型参数向量。

由初始的模型参数，根据具体的地球物理问题，可以计算出一组理论值，它可用 m 维向量表示

$$\boldsymbol{Y}^{c}(\boldsymbol{X})=\left(y_1^{c}(\boldsymbol{X}),y_2^{c}(\boldsymbol{X}),\cdots,y_m^{c}(\boldsymbol{X})\right) \tag{1.12}$$

它称为模型的理论值向量。

地球物理反演的关键是，用一定的数学方法寻找一个模型，使它尽量符合真实地球物理模型。即寻找参数向量 $\boldsymbol{X}$，使其计算的理论值向量 $\boldsymbol{Y}^{c}$ 与观测值向量 $\boldsymbol{Y}^{o}$ 尽可能符合。为此，可以利用最小二乘原理，构造一个 m 维残差向量：

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X})=\left(\varepsilon_1(\boldsymbol{X}),\varepsilon_2(\boldsymbol{X}),\cdots,\varepsilon_m(\boldsymbol{X})\right)^{T} \tag{1.13}$$

其中，

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\boldsymbol{X})&=y_1^{o}-y_1^{c}(\boldsymbol{X})\\ \varepsilon_2(\boldsymbol{X})&=y_2^{o}-y_2^{c}(\boldsymbol{X})\\ &\cdots\ \cdots\ \cdots\\ \varepsilon_m(\boldsymbol{X})&=y_m^{o}-y_m^{c}(\boldsymbol{X})\end{aligned}$$

令残差向量范数平方为极小：

$$\|\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X})\|^{2}=\Sigma\varepsilon_i^{2}(\boldsymbol{X})=\min \tag{1.14}$$

经过一定的数学变换，可由上式解出 $\boldsymbol{X}$，从而使问题得解。

1.6 解离散型反演问题的数值计算方法

用于解离散型地球物理反演问题的数值计算方法常用的有广义逆方法和最优化方法。

1.6.1 广义逆方法

广义逆方法的基本步骤是把正问题线性化，由目标函数列出线性方程组，解这个线性方程组，得模型参数。具体方法是：由给定的模型参数，计算相应的理论值。若（1.12）式中的 $Y^{c}(\boldsymbol{X})$ 为线性函数，则其各分量可以写成

$$\begin{aligned}y_1^{c}(\boldsymbol{X})&=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2^{c}(\boldsymbol{X})&=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ &\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ y_m^{c}(\boldsymbol{X})&=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{aligned} \tag{1.15}$$

其中 a_{ij} 为常系数。上式也可以直接写成矩阵形式

$$\boldsymbol{Y}^{c}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X} \tag{1.16}$$

其中 $\boldsymbol{Y}^{c}$ 为 m 维向量，$\boldsymbol{X}$ 为 n 维向量，$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵（系数矩阵）。

令残差向量为观测值与理论值之差

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^{o}-\boldsymbol{Y}^{c}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^{o}-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X} \tag{1.17}$$

于是有关系

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}^{o}-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}) \tag{1.18}$$

一般来说，地球物理问题所反映的函数关系都是非线性关系，所以要对正问题做线性化处理。在模型参数的某个初始值 $\boldsymbol{X}_0$ 点进行 Taylor 展开，略去二阶以上高次项，有

$$\begin{aligned}
y_1^c(\boldsymbol{X}) &= y_1^c(\boldsymbol{X}_0)+\Sigma(y_1^c/x_j)_{x0}\Delta x_j\\
y_2^c(\boldsymbol{X}) &= y_2^c(\boldsymbol{X}_0)+\Sigma(y_{c2}/x_j)_{x0}\Delta x_j\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
y_m^c(\boldsymbol{X}) &= y_m^c(\boldsymbol{X}_0)+\Sigma(y_m^c/x_j)_{x0}\Delta x_j
\end{aligned} \tag{1.19}$$

写成矩阵形式为

$$\boldsymbol{Y}^c(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^c(\boldsymbol{X}_0)+\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{X} \tag{1.20}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 为微分系数矩阵（即 Jacobi 矩阵），而 $\Delta\boldsymbol{X}$ 为模型参数 $\boldsymbol{X}$ 的改正量。

由（1.20）式，残差向量可以写成

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^o-\boldsymbol{Y}^c(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{Y}^o-\boldsymbol{Y}^c(\boldsymbol{X}_0)-\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{X} \tag{1.21}$$

令向量 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{Y}^o-\boldsymbol{Y}^c(\boldsymbol{X}_0)$，表示观测值与初始模型理论计算值之差，则（1.21）式可以写成

$$\boldsymbol{A}\times\Delta\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X}) \tag{1.22}$$

可见，(1.22) 式与（1.18）式在形式上是相似的，即一个非线性问题可以转换成线性问题进行计算。所以，在广义逆方法中一般只考虑线性方程组

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{X}=\boldsymbol{b} \tag{1.23}$$

的解法。对于线性反演问题，可直接把 $\boldsymbol{X}$ 做为模型参数，$\boldsymbol{b}$ 做为观测值。对于非线性反演问题，$\boldsymbol{X}$ 做为模型参数的改正量 $\Delta\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{b}$ 做为观测值与理论值之差。在（1.23）式中，均略去了（1.18）和（1.22）式中的残差项 $\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{X})$，这说明这种计算是近似的。但用迭代法可以使这种近似计算逐步逼近真值。

从以上讨论可见，解上述反演问题实际上归结为求解线性方程组（1.23）的问题，也就是求系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵问题。根据逆矩阵的定义，只有当系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为满秩（非奇异）时，它的逆矩阵才有意义。这时，(1.23) 式有唯一解，并可以写成简单而又紧凑的形式

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b} \tag{1.24}$$

不过，非奇异矩阵只是矩阵的一种特殊形式，常见的是奇异矩阵或长方阵。对于这些一般的矩阵，显然不存在通常意义下的逆矩阵，并且这时（1.23）式也没有（1.24）表示的那种唯一解。

广义逆理论就是解决这种一般矩阵的求逆问题。对于任意的 $m\times n$ 矩阵，一般 $m\neq n$，且 $\boldsymbol{A}$ 可以有任意秩，在广义逆的概念下，它们存在着逆矩阵。并当（1.23）式有解时，其解也可以表示成类似于（1.24）式的紧凑形式，即

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{G}\times\boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{G}$ 是 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的广义逆矩阵。这样，广义逆理论就把解一般方程组的理论概括统一起来。其中，常用的计算方法有正交分解法和奇异值分解法。

1.6.2 最优化方法

最优化方法是直接求目标函数 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 的极小值。其基本思路是用数值方法产生一个模型参数的点列

$$x_0,x_1,\cdots,x_k,\cdots$$

使其满足

$$\varphi(x_0) > \varphi(x_1) > \cdots > \varphi(x_k) > \cdots$$

直到 $\varphi(x_n)$ 小于给定精度为止。

最优化方法的一般计算步骤为：

①给定实际观测数据与测点位置信息；

②选择进行解释计算用的地球物理模型；

③给定理论模型各个参数的初值；

①用当前模型参数正演计算模型体的理论观测值，并将它与实际观测值对比；

⑤评定理论观测值与实际观测值的符合程度，即它们之间差异的大小，判断是否需要修改理论模型的参数重新计算对比；

⑥如果不满足要求，自动修改理论模型的参数，使理论观测值与实际观测值之间的差异不断减小；

⑦如此反复迭代，直到满足要求为止；

⑧最终得到的理论模型的参数，作为实际模型体的解释结果。

设实际观测值用 ΔT_k 表示（k 为观测点号），$k=1, 2, \cdots, m$；m 为观测点数。模型体的理论观测值用 f_k 表示，它是观测点坐标和模型体参数的函数，即

$$f_k = f(x_k, y_k, z_k, x_1, x_2, \cdots, x_n) \tag{1.25}$$

其中，x_k，y_k，z_k 为观测点坐标；x_1，x_2，$\cdots$，x_n 模型体位置、大小、产状和物性参数等参量；n 为参量的个数。

通常，实测异常与理论异常之间差异的大小，是以各测点上两者之间偏差的平方和表示，即

$$\varphi = \Sigma(\Delta T_k - f_k)^2 \tag{1.26}$$

(1.25) 式中，x_k，y_k，z_k 在计算迭代过程中是不变的，需要求的是地质体参数 $\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$。所以，$\varphi$ 可视为 $\boldsymbol{X}$ 的函数，即 $\varphi = \varphi(\boldsymbol{X})$。在上述的基本步骤中，关键问题是如何实现自动修改模型体的参数，即如何计算出这些参数的改正量。就是说，如何求一组参数 $\boldsymbol{X}$，它使 $\varphi(\boldsymbol{X})$ 为极小。

设给定的模型体的初始参数为 $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$，我们的目的在于求出一组关于模型体参数的改正量 $\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n$，来修改给定的初始参数，即有

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \delta_1 \\ x_2 &= x_2^0 + \delta_2 \\ &\cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_n &= x_n^0 + \delta_n \end{aligned} \tag{1.27}$$

写成向量的形式为：

$$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}^{(0)} + \boldsymbol{\delta}$$

这样便求出关于模型体参数的一组新值。如果将这组新参数代入 (1.26) 式能使目标函数 φ 减小，这就是成功的计算。如果能够确定这组新参数在一定精度范围内使 φ 取极小，就取 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 做为模型体的最终解释结果。

就如何自动修改理论模型参数，最优化方法又分为只利用目标函数值的直接法和利用目标函数的一阶导数或二阶导数的间接法。直接法不用计算目标函数的导数，通过对目标函数

值的比较，确定最佳模型参数。常用的有单纯形法、共轭方向法和 Powell 法。间接法需要计算目标函数的一阶或二阶导数，由此构造线性方程组。在迭代过程中，通过解线性方程组，得到模型参数的改正量，从而逐步得到最佳模型参数。常用的有最速下降法、拟 Newton 法、Marquardt 法、共轭梯度法和广义最小二乘法。

1.7 现有反演计算方法的评价

根据以上回顾可以看到，现有反演计算方法存在如下问题：

(1) 有些属于线性方法。对于非线性的反演问题，首先要把正问题线性化，由此构造目标函数及线性方程组。对于实际的地球物理非线性问题而言，这是不精确的。

(2) 有些属于局部方法。因为它们利用的是局部信息，如目标函数的梯度等。这种性质使它们容易陷入局部极值。

(3) 基本上都涉及解线性方程组。这对于模型参数较多的反演问题，会出现方程组的阶数很高的情况。在这种情况下，方程组的条件数很大，使得解的误差增加。

(4) 局部方法的特点是，它们都强烈地依赖于初始模型参数的选取。但是，要对初始模型选择一个好的初值往往是很困难的，它要求对问题的解有较多的了解。然而，如果没有好的初值，往往容易陷入局部极值。

(5) 对于需要计算导数的方法，一般来说比不计算导数的方法效率要高一些。但如果目标函数不存在导数或导数不易计算时，这些方法不便使用。

(6) 对于不需要计算导数的方法，它们的效率往往很低，收敛速度很慢。

但是，尽管现有方法有上述局限性，但它们并不是没有用的。目前，这些方法仍然是在解地球物理反演问题中用得较多的方法。这些方法以及它们的各种组合，已成功地应用于地球物理学的很多领域，解决了很多实际地球物理问题。

然而，随着科学技术对解决非线性、多参数问题的需求，上述方法在某些方面已不能满足要求。因此，必须研究新的反演方法。

小 结

本章中简要回顾了地球物理反演理论和方法的发展，并对现有地球物理反演方法做了定性评价。广义逆理论和最优化方法是当前解地球物理反演问题时应用得最多的两大类方法，但它们也具有局限性。为满足科学技术中对解决非线性、多参数问题的需要，有必要研究新的非线性的反演方法。

2 遗传算法(GA)

2.1 引 言

在第1章中回顾了地球物理反演理论和方法的发展及现状，认识到，现有的反演计算方法存在着局限性。但是，这一领域仍然是一个发展着的、十分活跃的领域。随着科学技术的发展，各种学术思想、方法和技术在相互借鉴、相互结合、相互渗透。地球物理反演理论和方法也是这样。

例如，利用对人的大脑工作原理的研究成果，出现了人工神经网络(Artificial Neural Networks，ANN)方法，这种方法已广泛应用于模式识别和分类问题中（杨行峻等，1992)。利用物理学中晶体生成的方法，出现了模拟退火法(Simulated Annealing，SA)。这种方法可用于函数优化，曾解决过著名的“旅行商”问题(Traveling Salesman Problem，TSP)。利用自然界生物进化原理，出现了遗传算法(Genetic Algorithms，GA)。这种方法在国外发展得比较快，已广泛应用于人工智能、工业自动控制、图像识别、通讯等方面。国内在自动控制、决策管理等方面也得到了应用。

Ga作为一种优化方法，其本身就是一种反演方法，近几年来也应用于地球物理反演问题中(Stoffa，Sen，1991)。本章研究GA的基本原理和方法。作为一种比较健全的真正非线性反演方法，它与现有的反演方法在解决问题的思路方面存在着显著的差别。本章通过一个简单的例子来说明GA的工作过程，利用图式(Schema)的概念来说明其能力，并给出它的实现方法。

2.2 GA简介

GA(David，1989)是以自然选择和自然遗传机制为基础的优化方法。它通过在模型群体中做有结构的、随机的信息交换，开发和利用群体中最适应环境的成分，以形成具有某些智能特点的搜索能力。在每一代遗传演化中，用上一代最适应环境的那些成分来构造新的模型参数，以形成下一代新的模型群体。

GA在搜索过程中不用计算目标函数的导数，只需要计算目标函数值。所以，它具有直接反演方法的全部优点。同时它控制着一群模型。随着算法的执行，它有效地处理包含在群体中的有关目标函数形状的信息，这些信息在模型群体中迅速地交换，使每个模型都能从群体中获得有关的信息，这使得模型群体能迅速确定出接近最优的解。同时，它充分利用全局方面的信息，所以不致于陷入局部极值。由于GA综合了全局优化和局部优化方法两方面的优点，可以认为它是基于导数方法的效率和完全非线性彻底搜索方法的健全性之间的结合。

GA是由美国密西根大学的John Holland教授和他的同事们发展起来的。他们研究GA已有40余年的历史，主要研究目标有两个：①提取并精确地解释自然系统的适应过程；②设

计具有自然系统机制的人工系统软件。GA 研究的中心主题是健全性 (robustness)，即在不同的环境中生存时系统所必须具备的能力。人们常常感到，凡是要求健全性的地方，生物系统是做得最好的。人工系统　　软件和硬件（无论工程系统、计算机系统或商业系统）　　的设计者只能对生物系统的健全性、效率及灵活性感到望尘莫及，而自我完善、自我引导和再生能力是生物系统中的普遍特征。因此，探讨适应性和生存奥秘的最好方式，是仔细研究生物中的例子。理论和实践都证明，GA 能够在复杂空间中做健全的搜索。专门论述这方面问题的重要专著是 Holland (1975) 的《自然系统和人工系统中的适应性》(Adaptation in Natural and Artificial System)，这本书以及其它一些有关的论文及专著奠定了 GA 在函数优化及控制应用方面的理论基础。作为一种有效的优化方法，GA 目前已在商业界、科学界及工程界得到了更为广泛的应用。它之所以得到广泛应用，其原因很简单，即这种方法计算上简单，但搜索能力强大。另外，它对搜索空间没有苛刻的假设（如连续性、存在导数、单峰等等）。

2.3　GA 与现有方法的差别

GA 在健全性方面超过现有方法，是因为它在一些非常基本的方面与传统方法有所不同。即：

GA 对模型参数的编码进行操作，而不是对参数本身进行操作；

GA 同时用一个模型群体对模型空间进行搜索，而不是只用一个模型点；

GA 只利用目标函数值的信息，而不使用目标函数的导数或其它特殊的辅助信息；

GA 使用随机的（概率的）转移规则，而不是使用确定性的转移规则。

下面具体讨论：

(1)GA 要求把所要优化的问题的模型参数用一些有限的符号编成有限长度的数字串。如求某个函数 $f(x)$ 在某个区间内的极小值，现有方法是直接用参数 X 计算它在该区间内的每个函数值，直到得到最小函数值。而用 GA，第一步是把参数 X 转换成一个有限长度的数值编码。

可以用很多方法对参数编码，现以图 2.1 中的开关设置问题为例介绍一种简单的编码方法。这个开关设置问题是，某设备有 5 个输入开关，对应这 5 个开关的每一种设置，有一个输出信号 $f=f(s)$。其中，s 是 5 个开关的某个特定设置。该问题的目的是设置这些开关，以得到 f 的最大可能输出值。用一个 5 位的数字串来表示这 5 个开关，如果开关是 "ON"，用 1 表示；如果开关是"OFF"，用 0 表示，这样可以得到一种简单的参数编码。对于这种简单的编码，数字串 11110 表示：前 4 个开关是 "ON"，第 5 个开关是 "OFF"。后面介绍的编码方案不会是这样明显，这里主要是强调 GA 是对参数的编码进行操作，而不是直接对参数本身。

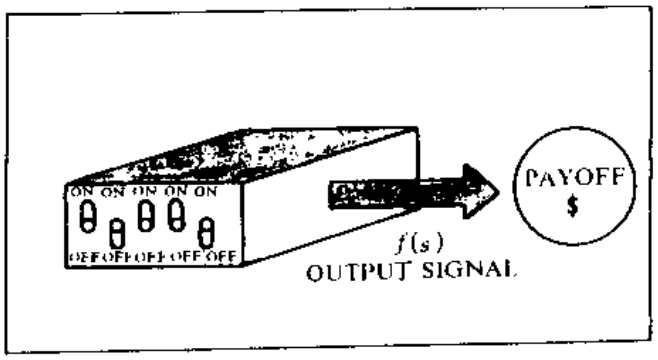


图 2.1　开关设置问题示意图

(2) 在很多其它优化方法中，对参数空间的搜索是根据某种确定性的转移规则在参数空间中从一点移动到下一点。这

种点到点的搜索方法很不安全，因为在多峰的搜索空间中它容易陷入局部极值。相反，GA 同时对一群点（模型）进行操作，并行地对很多极值做搜索，因此，它陷入局部极值的概率比点到点的方法小得多。

对于上述开关设置问题，用其它方法，通常是以某种开关设置开始，然后利用某种转移规则产生新的设置。而 GA 是从随机选择的某个群体（表示这些开关的不同初始设置）出发，相继产生下一代的群体。例如，对这个开关设置问题，用连续投掷硬币 20 次的方法（正面＝1，反面＝0）可得到有 4 个成员的随机初始群体：

成员 1：0 1 1 0 1

成员 2：1 1 0 0 0

成员 3：0 1 0 0 0

成员 4：1 0 0 1 1

随后，GA 产生下一代群体。用适应多种情况的群体而不是用单个点对参数空间做搜索，这种做法体现出群体中有安全感（There is safety in numbers）。后面将会看到，这种用多个模型并行搜索的方法怎样提高了 GA 的健全性。

（3）为了顺利地搜索，现有搜索方法要求有很多辅助信息。例如，梯度方法要求有导数存在（解析的或数值的），其它局部搜索方法要求目标函数连续等。相反，GA 不需要所有上述辅助信息。为了执行有效的搜索，GA 只需要与每个数字串有关的目标函数值，而这种信息是绝大多数传统搜索方法都要用到的最一般的信息。这个特点使得 GA 比其它搜索方法更具普遍性。因为，不同的搜索问题有截然不同的辅助信息，只有那些不用特殊的辅助信息的方法，才是适用于最普遍情况的搜索方法。

（4）与很多其它搜索方法不同，GA 用概率的转移规则来引导搜索。但是，概率的使用并不意味着 GA 是简单的随机搜索。它是用随机选择作为工具，引导搜索过程向着模型空间中最有可能使搜索过程得到改善的区域移动。

总之，这 4 个差别——用参数的编码、用群体搜索、不用特殊的辅助信息和非确定性的转移规则——提高了 GA 的健全性，使它优于现有反演方法。

2.4 GA 运算

GA 运算的原理相当简单，只涉及参数编码的复制和部分编码的交换。至于这种简单的运算为什么会导致成功的搜索，这里将给出有说服力的解释。简单的运算和较高的效率是 GA 的两个主要特征。

简单 GA 通常由三步运算组成：

1）选择（Selection）和再生（Reproduction）

选择和再生是根据群体成员的目标函数值 f（生物学家称这个函数为适应度函数）对其编码进行复制的过程。直观上，可以把 f 想象为要求其极大值的某种利润或效率等等。按照成员的适应度函数值对其编码做复制，意味着具有高适应度函数值的成员对后代有较高的贡献概率。显然，这步运算是达尔文“适者生存”自然选择规律的体现。在自然群体中，适应度由生物克服天敌、瘟疫以及克服其它一些妨碍其生长及再生障碍的生存能力所决定。而在人工系统中，目标函数值是决定群体成员生存与淘汰的最关键因素。

再生运算可以用很多方法来执行，最容易的方法是建立一个有偏轮盘赌。当前群体中的每一个成员的编码在该轮盘赌中占有一段区间，其大小与该成员的适应度函数值成正比。假定上述开关设置问题中的 4 个成员的适应度函数值等数据如表 2.1 所示，与这一代相应的有偏轮盘赌如图 2.2 所示。为了执行再生操作，只需简单地转动这个轮盘赌 4 次，就可以决定哪个群体成员获得再生。例如，对于上述给定问题，第 1 个成员的适应度函数值为 169，它在所有适应度函数值中占 14.4%，因此它在轮盘赌中占 14.4%的区间。每次转动轮盘赌，第 1 个成员有 14.4%的选中概率。用这种方法，适应度函数值高的成员被选中的机会多，可以在下一代中有较多的后代。一旦某个成员被选中，则复制它的编码，为产生下一代新的群体做准备。

表 2.1　开关问题的群体成员及其适应度函数值

成员编号	编码	适应度函数值	百分比/%
①	01101	169	14.4
②	11000	576	49.2
③	01000	64	5.5
④	10011	361	30.9

2）基因交换(Crossover)

再生运算之后，可用两个步骤做基因交换运算。第 1 步，对选中的群体成员做随机匹配。第 2 步，每对成员的编码按下述方法做交换基因：在编码中随机选一交换位置，该位置之前的编码保持不变，之后的编码相互交换，由此产生两个后代。例如，对于某一对成员 A_1 和 A_2：

$$A_1 = 0\ 1\ 1\ 0|1$$
$$A_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ |0$$
$$\uparrow$$
$$\text{交换点}$$

随机选择的交换位置如竖线所示，则基因交换所产生的下一代两个新成员为 A'_1 和 A'_2：

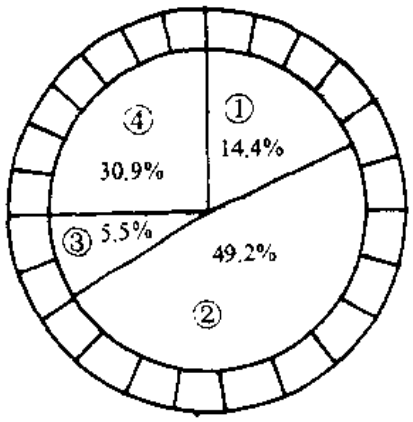


图 2.2　开关设置问题的有偏轮盘赌

$$A'_1 = 0\ 1\ 1\ 0\ 0$$
$$A'_2 = 1\ 1\ 0\ 0\ 1$$

再生和基因交换的原理非常简单，只有随机数的产生、编码的复制和部分编码的交换。然而，这种再生和基因交换相结合的随机过程产生了结构式的信息交换的效果，它赋予 GA 以很强的搜索能力。这是因为，在一个有 n 个成员的群体（如上述开关设置问题中的 4 个数字串的群体）中，每个成员不仅表示对执行一个具体的任务所必须的完整的概念（在这个例子中，每个数字串代表一个完整的开关设置概念），而且还包含着与该任务有关的各种因素。因此群体中包含的不仅是 n 个概念，而且包含着大量的为执行该任务所必须的其它因素以及这些因素的组合。GA 以如下两种方式充分地利用这些丰富的信息：①根据群体成员的适应度函数值使高质量的因素得以再生，②把这些因素与其它成员中高质量的因素做信息交换。因此，再生和基因交换运算就可以根据过去试验中所得到的好的结果，来构造出更好的结果。这样，

两个简单的运算会产生有效的、快速的而且是健全性的搜索效果就不难理解了。

这种方式与人类根据以往的有效的方法产生新的更有效的方法有相同的地方。根据人类的经验，新的方法是过去比较有效的方法的交流与结合。GA 中的再生和基因交换也是这种方法的交流与结合，好的方法在搜索过程中被反复地利用和交换，最后得到新的更好的方法。

3）基因变异(Mutation)

如果再生和基因交换给了 GA 以强大的信息处理能力，那么基因变异的目的是在搜索过程中不断地引入新的信息量。"变异是需要的，因为尽管再生和基因交换可以有效地进行搜索，但偶尔它们也会丧失某些潜在有用的遗传物质"(Goldberg，1989)。在人工遗传系统中，变异运算可以防止这种不可恢复的有用遗传物质的损失。在上述简单 GA 中，变异是以很小的概率随机地改变编码中某个位置上的值，即只是简单地把 1 变成 0，或把 0 变成 1。就其本身来讲，变异是在编码空间中随机执行。但当把它与再生和基因交换同时使用时，可以防止某些重要因素的过早丢失。

上述三种运算在 GA 中起着不同的作用：

(1) 选择和再生体现适者生存的原理。在地球物理反演过程中，相当于根据目标函数衡量模型参数接近其真值的程度。

(2) 基因交换控制着模型之间的混合程度及分享信息的程度。在地球物理反演过程中，这是对参数空间进行全局搜索的一种方式。

(3) 基因变异的目的是在群体中保持一定程度的差异及随机性，这种差异和随机性会由于前面的两个步骤而逐渐减弱。由于基因变异的存在，会不时地引入新的遗传物质，这有利于利用包含在群体中的信息对模型空间中新的区域做进一步的开发。它在地球物理反演过程中是对参数空间做局部搜索的一种方式。

2.5 GA 的实现方法

1）确定目标函数

有两种方法：

①以计算值与观测值拟合程度最高为标准，即求模型参数 m，使目标函数 $F(m)$ 为最大：

$$F(m)=\frac{f_0+f_c}{F_0^2+f_c^2} \tag{2.1}$$

其中：+为相关运算。

②以计算值与观测值之差的平方和最小为标准，即求模型参数 m，使目标函数 $F(m)$

$$F(m)=\left(\frac{\Sigma(f_0-f_c)^2}{n}\right)^{1/2} \tag{2.2}$$

为最小。其中：n 为观测值的个数。

2）指定搜索范围

给定每个模型参数 m_i 的搜索范围，并按精度要求分段，其分段数为 2 的幂次方：

模型参数 m_i 的变化范围：$(X_{\min}, X_{\max})$

分段间隔数：2^k

每段长度（即计算精度）：$\Delta=(X_{\min}-X_{\max})/2^k$

3）模型参数编码

从上述讨论可知，GA 运算是对参数的编码进行操作。但当正演时，又要用到参数的十进制数。所以，要考虑各种数制的相互转换问题。

对于十进制与二进制的相互转换问题，我们已比较熟悉，不再赘述。但 GA 中有时用到一种 Gray 码，它与二进制的相互转换关系为：

a）二进制转换到 Gray 码：

$$G_i = \begin{cases} B_i, & i = 1 \\ B_{i-1} + B_i & i > 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

其中：＋为二进制加法。

b）Gray 码转换到二进制：

$$b_i = \sum_{j=1}^{i} G_j \tag{2.4}$$

其中的求和运算用二进制加法。

c）术语：

参数编码中的每一位称为基因，模型参数可以由若干位基因组成。所有模型参数的编码串连起来组成一个数字串，称为一条染色体，代表一个模型。尽管基因和染色体与模型参数和模型是不同学科中的术语，但在 GA 中它们表示同一种事物，所以，在以后的讨论中，有时是把它们混在一起讨论的。

d）三种参数编码方案：

GA 同时控制一组模型（Q 个），称为模型群体。初始模型群体由随机方式产生，然后把它们转换成编码。如两个 3 参数的模型：

（18，28，6）和（16，30，3）

它们可由如下方法进行编码：

·规则编码：即通常的二进制编码

（18，28，6）→（10010 11100 00110）

（16，30，3）→（10000 11110 00011）

·量化编码：把上面每个参数二进制编码的第一位放在一起，第二位放在一起等等，这样组成一种新的编码形式：

（18，28，6）→（110 010 011 101 000）

（16，30，3）→（110 010 010 011 001）

量化编码的意义是，前 3 个元素（110）表示，前两个参数（18，28）的第 5 位大于 24，后一个参数（6）的第 5 位小于 24，等等。

·Gray 编码：二进制转换成 Gray 码：公式见（2.3）式。

如上述参数的二进制编码转换成 Gray 码为：

11011 10010 00101

11000 10001 00010

Gray 码转换成二进制：公式见（2.4）式。

如上述参数的 Gray 码转换成二进制为：

10010 11100 00110

10000 11110 00011

Gray 编码的性质是，任何两个相邻的十进制数用 Gray 码表示时，它们的编码中只有 1 位数字不同。若用二进制表示，只在局部范围才有这种性质。

二进制编码与 Gray 编码的比较

十进制	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
二进制	0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001
Gray 码	0000	0001	0011	0010	0110	0111	0101	0100	1100	1101

4）随机产生初始群体

a）在上述给定的模型参数搜索范围及分段的基础上，由一随机数 a（$0 \leqslant a \leqslant 1$）与某模型参数的总分段数相乘，其结果再与该参数的最小值相加，即得该模型参数的随机选择值。因为分段是均匀的，所以在指定范围内，该模型参数的各个可能值有相等的选中机会。

用公式表示：

$$a = \text{random}(\ \ )$$

$$k = a \times 2^k$$

$$m_j = X_{\min} + k \times \Delta$$

b）把这个随机选择的模型参数按指定的编码方案进行编码。

c）对每个模型参数重复步骤 1 和 2，得到各个模型参数的编码。把它们串连起来形成一个染色体，代表一个模型。

d）重复步骤 1）～3）到指定次数（如 Q 次），得到 Q 个模型，做为初始群体，为下面的 GA 运算做准备。

上述过程的示意图见图 2.3。

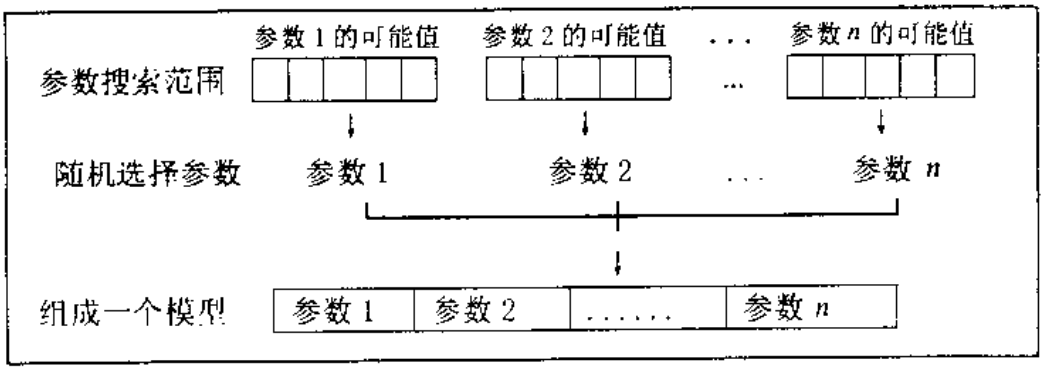


图 2.3　模型产生示意图

5）计算目标函数

$$F_j(m) = (\Sigma(f^c - f^o)^2/n)^{1/2} \qquad j = 1,Q$$

其中，f^c 和 f^o 分别为模型参数的理论计算值和实际观测值，n 为观测点数，Q 为群体大小。

在上述群体中，求出所有目标函数 F_j 的最小、最大、平均值和总和，并根据目标函数的最小值保存最好的模型。

6）遗传运算

a）目标函数的转换：

用途：把目标函数转换成适应度函数 Fitness(i)，为模型的再生选择做准备。对于求目标函数极小的问题，常用(2.5)式或(2.6)式。对于求目标函数极大的问题，可选用(2.7)式。

线性转换：

$$\text{Fitness}(m_k) = \frac{\Phi_{\max} - \Phi(m_k)}{Q \times (\Phi_{\max} - \Phi_{\text{mean}})} \tag{2.5}$$

指数转换：

$$\text{Fitness}(m_k) = \frac{\exp[-\Phi(m_k)/\sigma]}{\Sigma\exp[-\Phi_j/\sigma]} \tag{2.6}$$

其中，σ 是所有目标函数的标准偏差。可见，目标函数越小，其适应度函数值越大。

不转换

$$\text{Fitness}(i) = F(i) \tag{2.7}$$

b）选择和再生：

适应度函数归一化

$$\text{Fitness}(i) = \text{Fitness}(i)/\text{sum} \qquad i = 1,2,\cdots,Q$$

其中，sum 为 Q 个适应度函数值的总和。

在归一化的基础上确定各模型（在轮盘赌中）所处的范围：

$$S(i) = \sum_{j=1}^{i} \text{Fitness}(j) \tag{2.8}$$

由随机数 a（$0 \leqslant a \leqslant 1$）决定各模型的再生机会：

若

$$S(i) \leqslant a \leqslant S(j) \tag{2.9}$$

则第 j 个模型获得再生的机会。

期望的后代数

$$\text{Offspring} = \text{Fitness}(i) \times Q \tag{2.10}$$

上述方法按各模型的适应度函数值决定其再生的机会和在下一代中的后代数，体现优胜劣汰、适者生存的进化原理。

c）基因交换：

在上述获得再生的群体中，用随机选择的方法使群体中的染色体两两配对，组成 $Q/2$ 对双亲，并按概率 P_c 进行基因交换。交换方法为，对于某对双亲，如果随机数大于 P_c，则不做基因交换，直接进入下一代。如随机数小于 P_c，则在表示该对双亲的数字串中随机地选一交换点。交换点之前的基因保持不变，交换点之后的基因相互交换，由此产生后代。

d）基因变异：

按概率 P_m 对群体中的所有基因做随机改变，即由 0 变为 1，或由 1 变为 0。对于某个基因，如随机数大于 P_m，则不做基因变异。如随机数小于 P_m，则按上述方法对该基因做变异运算。

2.6 GA 的模拟计算

现在，把上述 GA 运算一步一步地应用到一个实际的优化问题中。考察求函数

$$f(x)=1-\mathrm{e}^{-0.001|x|}\cos(|x|^{1/2})$$

的极值问题，其中参数的编码采用二进制编码。由于正数的二进制编码较为简单，所以限制 x 在 [0，500] 之间变化，见图 2.4。

GA 参数：①参数编码：采用二进制编码；

②目标函数转换方式：指数形式；

③群体大小：$Q=4$；

④交换概率：$P_c=0.9$；

⑤变异概率：$P_m=0.07$。

另外，参数空间大小：$n=2^9=512$，搜索精度为 $\Delta=1$，随机数种子：seed=90。

对于这样一个函数，它在区间 [0，500] 之间有 5 个局部极值，其中全局极值为 $y=f(0)=0$。可以想象，如果用现有搜索方法，除非对这个函数有比较多的先验信息，可以给出较好的初值，否则，对于任何一种搜索方法，这都将是一个困难的问题。

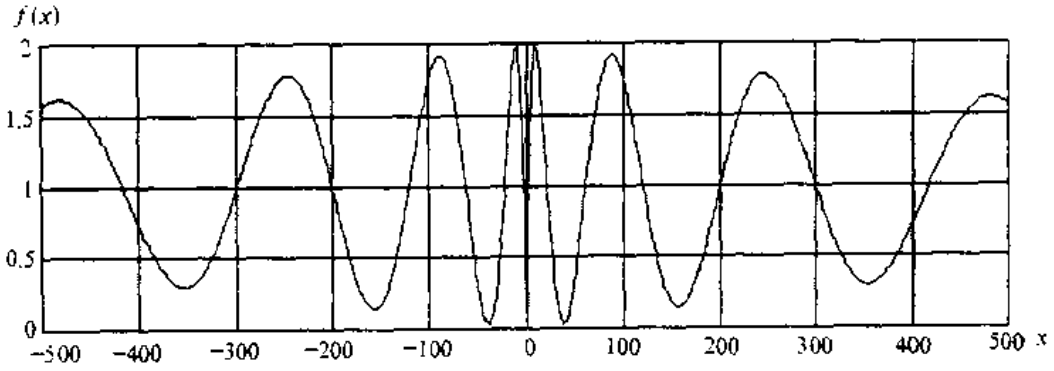


图 2.4　函数 $f(x)$的曲线示意图

现在，用 GA 来解这个问题。为了应用 GA，首先必须把问题中的参数 x 转换成二进制编码。由于 x 的最大值为 500，可以用 9 位二进制数来表示。利用已定义的适应度函数和编码方案，现在可以用再生、基因交换和基因变异运算来模拟 GA 的一代遗传演化。

首先用随机数发生器选择一个有四个成员的随机初始群体，见表 2.2 的左边，其中也有群体成员(x)的编码、相应的目标函数值 $f(x)$和适应度函数值 $F(x)$。

GA 的一代遗传演化由选择和再生开始。旋转轮盘赌 4 次，选出作为下一代父本的成员。用产生随机数的方法模拟这个过程，结果成员 3 和成员 4 各被复制 1 次，成员 1 被复制 2 次，成员 2 没有被复制，被淘汰（表 2.2）。

表 2.2　参数编码及再生过程

编号	群体成员	参数编码	$f(x)$	$F(x)$	生存概率区间	期望后代数	实际个数
1	164	010100100	0.176	0.555	0.000～0.555	2.222	2
2	313	100111001	0.706	0.109	0.555～0.663	0.436	0
3	139	010001011	0.379	0.297	0.663～0.960	1.188	1
4	419	110100011	1.032	0.040	0.960～1.000	0.160	1

与希望的复制数($QF(x)$)比较，基本得到了期望的结果：最好的成员 1 被两次复制，处于

中等状态的成员 3 被复制 1 次。按照常理，最差的成员 4 应该被淘汰。但是 GA 使用的是随机规则，而不是确定性规则，搜索过程由随机选择引导。尽管成员 4 的生存区间很窄，但随机数恰好落在这个区间里，所以成员 4 被选中，而比它好一些的成员 2 反而没有被选中。但无论如何，被淘汰的成员 2 也是一个比较差的成员。从这里可以看到 GA 执行过程中的一些特点。

基因交换运算有两步：①对数字串做随机匹配，②交换基因。本例中，新成员 1 和新成员 4 匹配，交换位置为 4。新成员 2 和新成员 3 匹配，交换位置为 5。它们产生的结果见表 2.3。

表 2.3 基因交换过程

新编号	原编号	再生后群体	随机匹配	交换位置	后代
1	1	010100100	第一对	1：0101|00100	010101011
2	1	010100100		4：0100|01011	010000100
3	4	110100011	第二对	2：01010|0100	010100011
4	3	010001011		3：11010|0011	110100100

最后一步运算基因变异，是在群体的所有成员中按概率逐字节地执行。在这个例子中，变异概率为 $P_m=0.07$。那么在每一代中，对于有 9 位数字的 4 个模型，共有 36 个数字位。需要做变异运算的位数为 $36\times0.07=2.52$，即约有 3 个数字位要做变异运算。根据随机选择，对成员 2 的第 2 位和第 7 位及成员 4 的第 4 位做了变异运算（表 2.4）。

表 2.4 基因变异过程

编　号	参数编码	变异位置	变异结果	x	$f(x)$
1	010101011	-	010101011	171	0.264
2	010000100	2,7	000000000	0	0.000
3	010100011	-	010100011	163	0.167
4	110100100	4	110000100	288	1.227

再生、交换和变异之后，就可以对新的群体继续做 GA 运算。但本例中，只经过一代遗传演化，GA 已经找到了全局极小值 $x=0$。

从这个例子中，我们已经了解了 GA 的一些原理，并对它的搜索能力有了一个初步的认识。但是，根据一个试验的结果就下结论是不谨慎的。我们再考察一下 GA 怎样使好的因素得以联合以达到更有效的搜索。注意，表 2.2～2.4 中的函数最小值和平均值在新的一代中得到了显著的改善。

在这一代遗传中，群体平均目标函数值从 0.573 变到了 0.414，最小目标函数值也从 0.176 下降到 0.0。虽然随机过程导致了这种良好的局面，但得到这个结果并不是偶然的。

考察表 2.2 适应度函数值 $F(x)$这一栏。在第一代中，最好的成员 1 由于其高于平均值以上的适应度函数值而得到两次复制，当它与第二个最好的成员 3（新编号为 4）随机结合并在位置 4 做随机交换后，所得到的一个后代（000000000）确实是个非常好的结果，实际上这就是该问题的全局极值。这说明好的信息在遗传演化过程得到了多次利用，并且它们在群体中不断地交流和传播，最终得到了更好的结果。

本例的模型空间大小为 501，但是，GA 只对其中 7 个点的参数做了 8 次正演计算就得到

了该函数在指定范围内的全局极值，可见其搜索效率比现有方法高得多。

这个例子对前面几节中的阐述是个很好的说明。本例中，所得到的好的结果是由两个适应度函数值高于平均值以上的数字串相互结合及交流信息的结果，由此可以体会GA优化过程的原理及能力。

到目前为止，我们对GA的能力有了初步的认识，同时也使我们感到这里面确实包含着一些有价值的东西。但有些事情还不很清楚，如，我们可以直观地感到，GA在演化过程中只利用目标函数的信息显然是不够的，但它还利用一些什么信息，以及怎样处理这些信息以帮助搜索。因此，为了更好地了解GA，需要研究GA在搜索过程中处理些什么信息以及怎样处理这些信息。

2.7 图 式

首先考察表2.2中的群体成员及其目标函数值。为方便起见，把它们重写如下：

群体成员	目标函数值
010100100	0.176
100111001	0.706
010001011	0.379
110100011	1.032

在这些数据中表面上看不出什么，只有4个不同的数字串以及它们的目标函数值。然而，当我们仔细观察群体成员这一栏，并自然地对这些数字做上下扫描并与目标函数值做对比时，可以注意到在这些数字中有某种相似的东西。仔细地研究这些相似的东西，可以发现某些数字串的形式与低目标函数值联系在一起。

例如，群体成员中第一位是0的数字串似乎是最好的，在优化这个函数时也许这是个重要的成分。的确，对我们所研究的函数$f(x)$及编码（9位无符号整数）来说是这样的。因此我们应该：第一，在群体成员中寻找那些相似的东西。第二，寻找这些相似的东西与低目标函数值之间的联系。这样做可以利用大量的新的信息以帮助搜索。为了知道GA过程利用了多少信息以及利用了什么信息，下面给出图式(Schemata)的概念，并用图式理论来回答这些问题。

定义：图式是用数字串中某些位置上的相似物表示数字子串的相似模板。

不失一般性，只考虑二进制数字系统{0，1}。在这个系统中加入一个特殊符号“*”后就很容易说明图式这个概念。利用这个扩充的数字系统{0，1，*}，就可以建立三元数字串，而且如果把图式看成图形匹配装置的话，它的意义就很清楚了。如果图式中每个位置上的符号与某个数字串一一对应，即1对应1，0对应0，*对应1或0，那么这个图式就与这个数字串相匹配。例如，图式*0000与两个数字串10000和00000相匹配。又如，图式*111*代表了一个有4个成员的子集（01110，01111，11110，11111）。再如，图式0*1**与长度为5、第一位是0，第三位是1的8个数字串相匹配。可见，图式概念是描述用有限字符集表示的有限长度的数字串中相似物的简洁而有力的方式。

因为在参数编码的每个位置上可以是0，1或*这三种情况，所以对于编码长度$L=9$的

编码，有 $3^9=19683$ 个不同的图式。一般来说，对于基本数（字符集中的符号个数）为 k 的字符集中，有 $(k+1)^L$ 个图式（L 为编码长度）。初看起来，图式似乎会使搜索更困难。对于有 k 个元素的字符集，只有 k^L 个长度为 L 的编码，为什么要考虑 $(k+1)^L$ 个图式而把所考虑的空间扩大呢？换言之，在上述长度为 9 的例子中，只有 $2^9=512$ 个不同的数字串，为什么要考虑 $3^9=19683$ 个图式而把事情搞复杂化呢？这是因为，对大小为 Q 的群体，如果我们分别考虑这些数字串，那么我们只有 Q 种信息可供利用。然而，当我们不仅考虑数字串，而且还考虑它们的目标函数值和数字串中的图式之后，我们就会获得大量的新的信息以帮助指导搜索。那么，在考虑了图式之后，我们获得了多少信息？这个问题的答案与群体中的图式个数有关。

例如，考察一个长度为 5 的数字串 11111。这个数字串是 2^5 个图式中的一个，因为它的每一位可取 0、1 或是 * 号。通常，一个特定的数字串（长度为 L）包含有 2^L 个图式，因此，一个大小为 Q 的群体包含有 $2^L\sim Q\times 2^L$ 个图式，取决于群体的差异。这个事实证实了我们以前的直觉。研究图式的最初动机是想获得更多的信息以指导搜索。上述的讨论表明，关于图式的大量信息确实包含在既使是一般大小的群体中。以后我们将讨论 GA 怎样利用这些信息。但首先要研究再生、基因交换和基因变异对图式在各代遗传中增长或消亡的影响。

再生对某个特定图式的影响很容易确定。因为有高适应度函数值的群体成员有较高的选择概率，总体上它们都被多次地复制。但是，只用再生运算并没有在搜索空间中做新的搜索。那么当引入了基因交换后，这个特定的图式会发生什么变化？如果随机选择的交换点没有切开这个图式，那么这个图式就不会受到破坏，否则就会破坏。例如两个图式 1＊＊＊0 和＊＊11＊，第一个就很可能被基因交换所破坏，而第二个就相对不大可能被破坏。因此，经基因交换后，有限长度短的图式得以保留，并由再生运算产生更多的复制。正常的、低概率的基因变异不会频繁地破坏一个特定的图式。于是，我们得到这样一个结论：高适应度函数值的、有限长度短的图式（称之为“建筑块”，Building Blocks）在演化过程中将得到不断上升的复制率。

小　结

本章讨论了一个简单的三步 GA 的原理。GA 是对模型的群体做运算。再生、基因交换和基因变异作用于群体成员，相继产生新的下一代群体。这些运算本身很简单，无非是随机数的产生、编码的复制和部分编码的交换。然而，尽管它们简单，由它们产生的搜索效果却是强大而健全的。GA 不断识别新的有利于搜索的因素，并让它们在群体中做交流，由此形成有效的搜索能力。本章的模型计算例子说明了 GA 的细节和能力。

1）GA 与传统搜索方法有 4 个方面的不同

（1）直接对参数的编码做操作。

（2）用一个群体做搜索，而不是用单点搜索。

（3）只用目标函数值的信息，而不用其它特殊辅助信息。

（4）使用随机转移规则，而不是用确定性转移规则。

GA 在参数编码的层次上操作并控制变量，以开发和利用高适应度函数值的编码中的图式，而传统方法通常是直接处理函数及它们的变量。因为 GA 在编码的层次上进行操作，所以它不会受到局部极值的影响，使它优于传统方法。

GA 对群体操作，而其它方法是对单点操作，因此 GA 在群体中获得了安全感。由于保持了一群适应性好的搜索点，它陷入局部极值的概率被大大减少。

GA 只需要函数的目标函数值，而不需要其它特殊的辅助信息，这使得它的应用范围具有相当的广度。而现有方法强烈地依赖于那些特殊信息，在那些不便利用或很难获得这些信息的问题中，现有方法就会失败。GA 只使用那些在任何问题中都能用的信息，所以它具有一般性。它按照群体成员在当前环境中的生存能力开发其中的图式及结构信息，并充分利用这些广泛可用的信息，所以它可以应用于任何类型的优化问题中。

GA 的转移规则是随机的而现有方法是确定性的，但 GA 的随机运算与现有方法的随机搜索有显著的不同。

2) GA 的三种运算在地球物理反演过程中有不同的作用

(1) 选择和再生体现适者生存的原理，用目标函数衡量模型参数接近其真值的程度。

(2) 基因交换控制着模型之间的混合程度及分享信息的程度。这是对模型空间做全局搜索的一种方式。

(3) 基因变异的目的是在群体中保持一定程度的差异及随机性，这种差异和随机性会由于前面的两个步骤而逐渐减弱。由于基因变异的存在，不时地引入新的遗传物质，这有利于利用包含在群体中的信息对模型空间中新的区域做进一步的开发。这是对模型空间做局部搜索的一种方式。

3) 利用图式的概念定性地评价了 GA

一个图式是一个由字符集 {0，1，*} 组成的数字串，其中 0 和 1 保持其正常意义，而 * 是统配符。简单地说，图式是描述群体中所包含的结构化信息量的一种手段。由于它明确地确定了群体成员中所有可能的信息组合，所以这种表示方法简化了对 GA 的分析。同时也初步讨论了建筑块——短的、适应度函数值高的图式，它有利于对模型空间的搜索。

3 GA 的数学基础

第 2 章对 GA 的原理和能力做了初步的考察。现在我们从数学的角度更深入地考察 GA，以解释使用它能做健全搜索的原因。

在上一章结束时，引入了图式的基本概念，定性地发现在模型群体中确实存在着大量的图式可被利用。本章中，我们将更严格地考察 GA。首先，查出群体中图式的个数，并考察在遗传过程中，哪些图式增长，哪些图式减少。为此，分析再生、基因交换和基因变异对某个特定图式的影响。这种分析可导出更精确地确定增长率和消亡率的 GA 基本理论，同时也可导出这种增长率的数学公式。

3.1 GA 基本理论

从第 2 章已经看到，GA 运算相当简单。从 Q 个模型的随机群体出发，对某些较好的模型做加权复制、匹配并交换部分编码，最后对某个位置的值做随机的变异。为了分析包含在群体中的图式的增长和消亡，在导出图式增长公式的同时，研究再生、交换和变异运算对图式的影响。

3.1.1 基本概念

仍然研究第 2 章所述的扩充的数字系统 {0，1，*} 组成的编码。为方便起见，用大写字母 A 表示模型，用小写字母及下标表示每个字符和它们的位置，如 7 位编码的模型可表示如下

$$A = a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$$

其中，a_i 表示第 i 个二进制数，它们可取 0 或 1。a_j (j=1，2，…，Q) 表示 t 时刻（或代）包含在群体中的模型编码。H 表示群体中的图式。

根据第 2 章的结果，在长度为 L 的二进制数字串中，有 3^L 个图式。一般来说，在基数为 k 的数字系统中，有 $(k+1)^L$ 个图式。另外，在有 Q 个成员的群体中，至少有 $Q*2^L$ 个图式包含在该群体中。这些数字给了我们有关 GA 处理的信息量的初步概念。然而，为了真正了解包含在图式中的建筑块，必须区分不同类型的图式。

所有图式并不是平等的。如 011*1*1 比 0*****更为特殊，因为后者比前者的跨度大。为了把这些概念定量化，引入有关图式的两个新概念：图式的阶和它的确定长度（定长）。

定义 1：图式 H 的阶表示图式中的固定位置数，用 $O(H)$表示。

如图式 H_1=011*1**中有 4 个固定数字，其阶为 4，所以 $O(H_1)=4$。而 H_2=0*****的阶为 1。

定义 2：图式 H 的确定长度为图式中最后一个固定位置与第一个固定位置之间的距离，用 $\delta(H)$表示。

如 H_1=011*1**，因为最后一个固定位置是 5，第 1 个固定位置是 1，它们之间的距

离是 $\delta(H_1)=5-1=4$。对于 $H_2=0******$，因为只有一个固定位置，第1个和最后一个固定位置都一样，所以其定长 $\delta(H_2)=0$。

图式及其性质对于参数编码的严格讨论及分类是非常有用的概念，同时，它们为分析GA运算对群体中的建筑块的影响提供了基本方法。现在根据上述概念研究再生、基因交换和基因变异对群体中的图式分别的和综合的影响。

3.1.2 再生运算对图式的影响

假定在给定时刻 t，群体 $A(t)$ 中含有某个特定图式 H 的 m 个样本，其中 $m=m(H,t)$。它表示在不同的时刻 t，对于不同的图式 H，可能有不同的样本数。

再生运算时，一个群体成员按照其适应度函数值被复制，或更精确地说，它以概率

$$p_i = f_i/\Sigma_j f_j \tag{3.1}$$

被选择。因此，它在 $t+1$ 时刻的样本数为

$$m(H,t+1) = m(H,t)Qf(H)/\Sigma_j f_j \tag{3.2}$$

其中，$f(H)$是 t 时刻图式 H 的平均适应度函数值。而整个群体的平均适应度函数值为

$$f_{\text{mean}} = \Sigma_j f_j/Q \tag{3.3}$$

所以，再生运算后图式样本的增长公式为

$$m(H,t+1) - m(H,t)\frac{f(H)}{f_{\text{mean}}} \tag{3.4}$$

即某个特定图式在下一代中的样本数随该图式的平均适应度函数值与群体平均适应度函数值之比的速率而增长。

令：

$$e = \frac{f(H)}{f_{\text{mean}}} \tag{3.5}$$

如果某个图式 H 的平均适应度函数值 $f(H)$大于群体平均适应度函数值 f_{mean}，则 $e>0$，该图式在下一代中的样本数增加。反之，小于群体平均适应度函数值的图式在下一代中将会减少样本数。可见，所有图式在下一代中的样本数在再生运算中按照其适应度函数值增加或减少。

再生运算对图式样本数的影响已很清楚，即大于群体平均适应度函数值的图式在下一代中会增加样本数，反之则减少样本数。现在假定某个图式有大于平均适应度函数值以上的适应度函数 $c\times f_{\text{mean}}$，其中 c 是常数。这时，图式的增长公式为

$$m(H,t+1) = m(H,t)\times(1+c) \tag{3.6}$$

这个公式在商业中是复合利息公式，在数学中是指数形式的几何级数公式。由此可更清楚地理解再生运算的影响，它给平均值以上（以下）的图式在下一代中分配以指数上升（下降）的样本数。

但是，再生运算本身并不能促进对搜索空间中新区域的开发。因为只复制未做任何改变的旧的群体成员并不能产生新的信息，于是引进了交换运算。

3.1.3 基因交换运算对图式的影响

基因交换运算是群体成员之间随机的而且是有结构的信息交换。它建立新的结构，并最大限度地减少由再生运算决定的分配方案的破坏。这就导致了群体中图式指数式的上升或下降。

为了了解哪些图式受交换运算的影响，哪些不受影响，考察一个长度为7的参数编码以

及该编码中的两个图式：

$$A = 0111000$$
$$H_1 = *1*****0$$
$$H_2 = ***10**$$

显然，H_1 和 H_2 由 A 表示。

交换运算的步骤是：①为某个图式随机地选择一个对象；②随机选择一个交换位置；③与选择的对象做部分编码的交换。假定 A 被选做对象，在这个长度为 7 的参数编码中，有 6 个交换位置。进一步假定交换位置位于 3 和 4 之间，用如下竖线表示。交换运算对 H_1 和 H_2 的影响很容易从下面的例子中看出：

$$A = 011 \mid 1000$$
$$H_1 = *1* \mid *** 0$$
$$H_2 = *** \mid 10**$$

除非数字串 A 的对象在图式的固定位置上与 A 相同（为谨慎起见，通常不考虑这种可能性），否则，H_1 将被破坏，因为位置 2 上的 1 和位置 7 上的 0 将会位于不同的后代中（它们位于交换点的两侧）。同样很显然，用相同的交换点，图式 H_2 将获得生存，因为位置 4 上的 1 和位置 5 上的 0 将被原封不动地带到同一个后代中。

这里虽然用了一个特殊的交换点作为说明，但显然 H_1 在交换运算中的生存可能性要比 H_2 小。因为一般来说，交换点很可能落在相距较远的固定位置之间。

现在，把这个概念定量化。由于 H_1 的定长为 $\delta=5$，如果在 $L-1=7-1=6$ 个可能的位置上随机选择交换点，显然 H_1 将以 $P_d=\delta(H_1)/(L-1)=5/6$ 的概率被破坏，而其生存概率为 $P_s=1-P_d=1-5/6=1/6$。同样，$\delta(H_2)=1$，其被破坏的概率为 $P_d=1/6$，而生存概率为 $P_s=5/6$。

因此，可以为任一个图式计算其在交换运算中的生存概率的下界。因为当交换位置位于定长之外时，该图式生存，那么在交换运算中图式的生存概率为 $P_s=1-\delta(H)/(L-1)$。如果交换运算本身也是以随机选择的方式执行，例如对某个特定的图式其被选择做交换运算的概率为 P_c，则其生存概率下式表示：

$$P_s \geqslant 1 - P_c\delta(H)/(L-1) \tag{3.7}$$

当 $P_c=1$ 时，该式与前面的式子相同。

现在可以考虑再生和基因交换的联合影响。就像单独考虑再生运算对图式的影响一样，我们只计算某个特定的图式在下一代中的样本数。假定再生和交换是独立进行的，有

$$m(H,t+1) \geqslant m(H,t)\frac{f(H)}{f_{\text{mean}}}\left(1 - P_c\frac{\delta(H)}{L-1}\right) \tag{3.8}$$

将上式与单独考虑再生时的表达式比较可见，交换和再生的联合影响是由交换运算中的生存概率 P_s 与单独考虑再生运算时的图式在下一代的期望样本数相乘而得到的。这些运算的影响很清楚，图式 H 增长或减少依赖于一个乘法因子。对于再生和交换，这个乘法因子由两个因素决定：①该图式的适应度函数值与群体平均适应度函数值的比值；②该图式的确定长度。显然，那些高于群体平均值以上的、且有较短定长的图式在下一代中将以指数的形式增加其样本数。

3.1.4 基因变异运算对图式的影响

根据前面的定义，变异是以概率 P_m 对数字串某个位置上的值做随机的改变。对某个图式 H，如果它要生存，那么每个位置上的等位基因都要生存下来。因此，既然每个等位基因以 $(1-P_m)$ 的概率生存，而且每个变异运算在统计上是独立的，所以，当该图式中 $O(H)$ 个固定位置都生存时，这个特定的图式才能生存。对生存概率 $(1-P_m)$ 自乘 $O(H)$ 次，得变异运算中的生存概率：$(1-P_m)^{O(H)}$。由于 P_m 很小($P_m \ll 1$)，图式 H 的生存概率可近似表示为 $(1-O(H)P_m)$。因此，经过再生、基因交换和基因变异运算并忽略了小的交叉相乘项之后，这个特定的图式 H 在下一代的样本数为

$$m(H,t+1) \geqslant m(H,t)\frac{f(H)}{f_{\text{mean}}}\left(1-P_c\frac{\delta(H)}{L-1}-O(H)P_m\right) \tag{3.9}$$

变异运算的加入使(3.9)式与(3.8)式稍有不同，但有相似的结论：短的，低阶的、群体平均适应度函数值以上的图式在下一代中将得到指数形式的增加。这个结论非常重要，因此称它为图式理论，或 GA 基本理论。这个理论的含意非常深远。为了理解这一点，用第 2 章中的例子来考察 GA 的上述三步运算对群体中图式的影响。

3.2 图式理论的检验

再次回顾第 2 章的例子。但这次不是只计算单独的数字串，而是研究 GA 怎样处理群体中的图式。第 2 章的计算结果列在表 2.2～2.4。除了以前的数据外，另外加进了 3 个图式为：

$$H_1 = 0********$$

$$H_2 = *10*****$$

$$H_3 = 1*******1$$

首先研究再生、交换和变异对第一个图式的影响。在再生运算阶段，这些群体成员按照其适应度函数值以某种概率被复制。从表中第二列可知，成员 1 和成员 3 是 H_1 的样本。再生运算后，该图式产生了 3 个样本（新编号为 1、2 和 4）。现在我们考察这个结果与图式理论的预测是否一致。根据图式理论，我们希望得到 $mf(H)/f_{\text{mean}}$ 个样本。H_1 的图式平均值为 $f(H_1)=(0.555+0.297)/2=0.426$，群体平均值 $f_{\text{mean}}=0.25$，t 时刻图式 H_1 的样本个数为 $m(H_1,t)=2$，由公式(3.4)得 $(t+1)$ 时刻 H_1 的期望数为：

$$m(H_1,t+1) = 2 \times 0.426/0.25 = 3.408$$

与实际图式样本数 (3) 比较，可见得到了正确的结果。进一步可以看到，交换运算不会对这个图式产生任何影响，因为其定长 $\delta(H_1)=0$ 可以防止交换运算对任一个位置上数字做改变。对于变异运算，如果它要破坏这个图式，必须对这个图式的 3 个样本中的固定位置做变异。对于 $P_m=0.07$ 的变异概率，样本中的 3 个固定位置发生变化的概率为 $3\times0.07=0.21$，所以不必做变异运算。结果，正如图式理论所预测的那样，H_1 确实得到了指数形式的增加。

但是，只有 1 个固定位置的 H_1 是一种特殊情况。现研究 H_2 和 H_3 的演化情况，它们有比 H_1 长的定长。

H_2 在初始群体中有 3 个样本（即数字串 1、3 和 4），再生之后变成了 4 个样本（即新编号 1、2、3 和 4）。根据图式理论，H_2 的平均适应度函数值为

$$f(H_2) = (0.555 + 0.297 + 0.040)/3 = 0.297$$

其期望的样本数为

$$m(H_2) = 3 \times 0.297/0.25 = 3.568 \approx 4$$

与实际计算结果一致，其中 0.25 是群体平均适应度函数值。H_2 在再生之后其样本数由 3 变成 4，这是因为它的图式平均值（0.297）大于群体平均值（0.25），所以其样本数增加。

H_3 在初始群体中有 2 个样本（即数字串 2 和 4），再生之后减少成 1 个样本（即新编号 3）。这与期望值

$$m(H_3) = 2 \times 0.074/0.25 = 0.596 \approx 1$$

相一致。其中 0.074 是 H_3 的图式平均值，低于群体平均值 0.25。

交换后的情况稍有不同。对于 H_2，其定长为 $\delta(H_2)=3-2=1$。交换后它的 4 个样本仍然存在。它被破坏的概率为 $P_d=\delta(H_2)/(L-1)=1/8$，所以其生存概率为 $P_s=1-1/8=7/8=0.875$。再生和交换运算对 H_2 样本数的综合影响为

$$m(H_2,t+1) = 3.568 \times (1 - 0.9/8) = 3.167$$

与实际数(4)相差不多。至于 H_3 的情况，由于其定长较长($\delta(H_3)=9-1=8$)，因此交换运算很容易破坏这个图式。它被破坏的概率为 $P_d=\delta(H_3)/(L-1)=8/8=1$，所以其生存概率 $P_s=0$。从最后结果看，它确实被彻底破坏了。

这个例子的模拟计算结果证实了本章所建立的理论。短的、低阶的图式其样本数将有指数形式的增长或下降，取决于其适应度函数值。

小　结

在本章中，从数学的角度对 GA 做了更严格地考察。GA 基本理论表明，高适应性的、短定长的和低阶的图式在下一代中至少以指数形式的增加。这是因为，再生运算给较好的图式分配了较多的样本数，以及交换运算不会频繁地破坏短定长的图式。因为变异运算概率很低，它对这些重要的图式的影响非常小。

GA 用这种方式处理群体中的图式，减少了问题的复杂性。在某种意义下，这些高适应性的、短定长的和低阶的图式是问题的局部解（称为建筑块），而 GA 对包含在当前群体中的局部解重新组合、推测，以发现新的解。

建筑块确实导致了搜索过程的改善，这是 GA 的基本假定，称为建筑块假说。

通过一个简单例子的计算，对图式理论进行了检验，结果表明，图式理论的预测是正确的。

4 加速收敛措施之一：遗传基因的多点交换

从前面的讨论知，GA 是一种方法独特新颖、搜索能力强大的真正非线性反演方法。从综合的角度看，其效率及稳定性优于传统反演方法。但在某些具体的应用中，也存在收敛速度慢的弱点，有待进一步改进（M. Sambridge，1992；M. K. Sen，1992）。

简单的 GA 的基本运算由三部分组成，即新一代模型群体的选择及再生、基因交换和基因变异。在函数的优化过程中，遗传基因的交换是对模型空间进行搜索的一种方式。在本章中讨论不同的基因交换方法对收敛速度的影响，以便采用正确的基因交换方法，加速遗传演化的进程。

4.1 问 题

我们知道，基因交换的一般方式，是在一对模型染色体中随机选一交换点，交换点前的基因保持不变，交换点后的基因相互交换（见第 2 章 2.4 节）。GA 采用这种方法实现对模型空间的搜索。但是，那里所讨论的是在只有两个模型参数的染色体中做一点交换的方法。当模型参数很多时，仅采用这种一点交换的方式会降低 GA 的搜索能力。为便于分析这个问题，给出多参数情况下的一点交换方式示意图，见图 4.1。为醒目起见，用第一个模型的参数编码都是 0、第二个模型的参数编码都是 1 这种极端的情况来说明问题。

由图 4.1 可见，两个模型做基因交换后，除最后一个模型参数有所改变外，其余的模型参数都没有变化。用传统优化方法的语言讲，就是在本次迭代中，最后一个模型参数得到了一定程度的改正量，而其余参数的改正量均为零。从对模型空间搜索的角度讲，这种方式的搜索范围是很有限的。当然，图 4.1 表示的是一种交换点位于最后一个模型参数中的特殊情况，但不管交换点位于哪个模型参数中，一点交换的结果都将是大多数模型参数保持不变。

基因交换前：

	参数 1	参数 2	…	…	…	参数 n
模型 1	000000	000000	000000	000000	000000	000000
模型 2	111111	111111	111111	111111	111111	111111

↑

交换点

基因交换后：

	参数 1	参数 2	…	…	…	参数 n
模型 1	000000	000000	000000	000000	000000	001111
模型 2	111111	111111	111111	111111	111111	110000

图 4.1 多参数模型的一点交换示意图

可见，遗传基因的一点交换方法在多参数的反演问题中使 GA 的搜索能力受到限制，这将导致漫长的演化过程。因此，有必要对 GA 的这种一点交换方式进行改革，克服它的弱点，以适应多参数优化问题的需要。

4.2 遗传基因的多点交换

通过上面的分析，发现了 GA 一点基因交换方式的问题及由此引起的后果。为解决这一问题，应采用多点基因交换方式。

多点交换方式的基本思想，是在基因交换这一运算步骤中，给每个模型参数赋予均等的获得改变的机会，以提高 GA 在多参数反演问题中的搜索能力。

多点交换的具体实施方法是，在基因交换概率的控制下，对两个具体的模型染色体由随机数决定是否对其做基因交换。对于决定要做基因交换的一对模型染色体，以模型参数为单位，由随机数决定是否对该模型参数做基因交换。如果要做基因交换，则在该模型参数中选一基因交换点。在该模型参数中，交换点前的基因保持不变，交换点后的基因对应交换。多点交换方式的示意图见图 4.2。

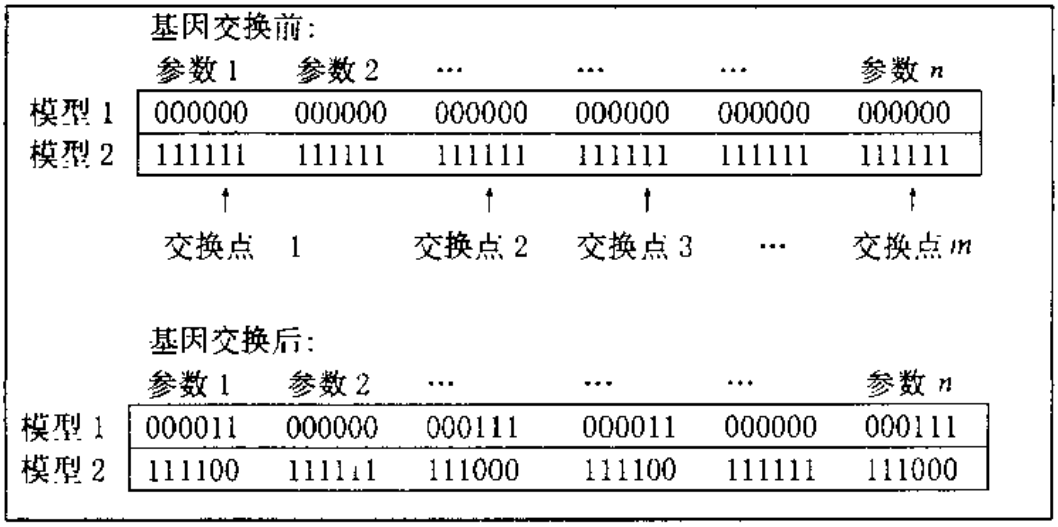


图 4.2 多参数模型的多点交换示意图

在模型参数的基因交换中，仍采用模型的基因交换概率 P_c 做为模型参数的交换概率。该概率值由使用者预先设置，通常为 $P_c>0.9$。它表示在演化过程中，90%以上的模型参数都要改变。在传统反演方法中，每次迭代几乎所有的模型参数都会获得一定程度的改变，因此，采用 $P_c>0.9$ 做为模型参数的交换概率是合乎情理的。

采用多点交换方式后，就解决了一点交换方式中每次迭代只有少数模型参数得到改变的不合理状况。

4.3 数值模拟

现以磁化强度函数的反演为例，说明多点交换方式的效果。

磁化强度函数的数学表达式为

$$J(z) = az\mathrm{e}^{-bz} + c \tag{4.1}$$

式中：z 表示深度（向下为正），a、b 和 c 是常系数。其中第一项是线性函数与指数型衰减函数的乘积，表示磁化强度随深度变化的部分。第二项是常数，表示常磁化强度部分。磁化强度函数是上述两部分之和。

数值模拟的第一步，给定常数

$$a = 0.5 \quad b = 0.1 \quad c = 0.8$$

并设 z 从 0 到 40km 之间变化，点距为 1km。根据这些参数，用（4.1）式正演计算理论磁化强度值。

数值模拟的第二步，把（4.1）式与遗传算法结合，形成反演系统。把磁化强度理论值做为实测数据，反演磁化强度函数的 3 个参数 a、b 和 c。

给定 3 个参数的初始搜索范围见表 4.1。

遗传算法参数为：$P_c=0.98$，$P_m=0.04$，模型群体大小为 40。

表 4.1　参数的初始搜索范围

参数	搜索范围
a	−6.0～6.0
b	0.0～5.0
c	−1.0～1.0

反演时在相同的参数条件下，采用两种不同的基因交换方法，以便比较两种方法的优劣。反演过程的收敛曲线见图 4.3，反演结果见表 4.2，由此得到的磁化强度函数曲线见图 4.4。

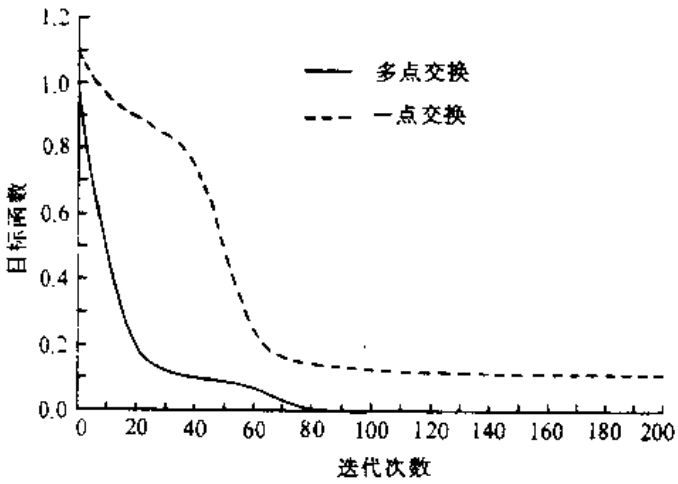


图 4.3　收敛曲线

表 4.2　两种方法的反演结果

	一点交换		多点交换	
参　数	反演结果	绝对误差	反演结果	绝对误差
a	0.520	0.020	0.493	0.007
b	0.118	0.018	0.100	0.000
c	1.000	0.200	0.821	0.021

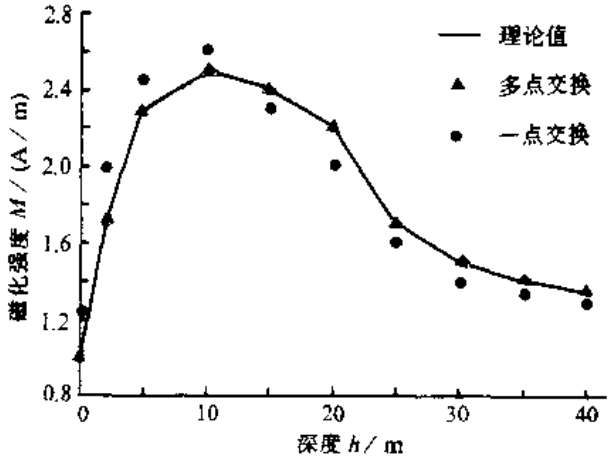


图 4.4　反演得到的磁化强度函数曲线

从数值模拟的结果看，在同样的参数条件下，多点交换比一点交换的收敛速度要快，而且反演结果也好得多。这是因为，采用多点交换后，反演过程对模型空间的搜索更快，也更彻底，这样就加速了反演过程的收敛，使反演过程缩短。

可见，多点交换方法有明显的加速收敛的作用。

小　结

本章针对 GA 演化过程中收敛速度慢的情况，从模型参数基因交换方式的角度提出了多点交换的改进方法。采用多点交换方法，从原理上讲更符合反演过程中多参数同时变化的实际情况。它的作用是进一步增强 GA 的空间搜索能力，扩大对模型空间的搜索范围，使搜索更为彻底。因此，它在 GA 的演化过程中起到明显的加速收敛作用是必然的。

5 加速收敛措施之二：逐步缩小参数搜索范围

5.1 引 言

GA 被认为是一种普遍有效的反演方法。所谓“普遍有效”，是指对任何反演问题，尤其是对多参数非线性反演问题，它总能给出一个满足给定精度的全局极值，这一点相对现有的局部线性反演方法来说是一个进步，但其代价是大量的时间消耗。前一章曾用基因的多点交换方法对 GA 的这一弱点做了改进，本章将从参数搜索精度的角度，用逐步缩小参数搜索范围的方法对它做进一步的改进。

应用中发现，GA 对模型空间的搜索速度及搜索精度与模型空间的初始划分精度有关。所谓模型空间的初始划分精度，是指参数空间中参数的取值间隔，它与各参数的初始搜索范围（x'_{min}，x'_{max}）及用户所要求的参数取值精度 d' 有关：

$$d' = (x'_{max} - x'_{min})/(2^n - 1) \tag{5.1}$$

其中，2^n 为参数范围的划分间隔数。这样，各模型参数的可能值可表示为

$$x' = x'_{min} + jd' \qquad (j = 0,1,\cdots,N', \quad i = 1,2,\cdots,m) \tag{5.2}$$

其中，N' 为各模型参数可能取值的个数，对每个模型参数是不同的；m 为模型参数个数。

现以一个磁性球的空间位置及几何参数的反演问题来说明这个问题。各种参数如下：

磁性球空间位置及半径：$x=350$m，$y=350$m，$h=200$m，$r=100$m

磁场参数：磁倾角 $I=90°$，磁偏角 $A'=0°$，磁化强度 $M=1.25$ A/m

测网参数：测线数 $m=15$，测点数 $n=15$，线距 $D_x=50$m，点距 $D_y=50$m

遗传算法参数：基因交换概率 $P_c=0.9$，基因变异概率 $P_m=0.02$，模型群体为 80。

由以上参数用磁性球的正演公式得到 ΔT 理论值，以这些理论值做为观测数据 $\Delta T'_{obs}$，以

$$f = (\Sigma(\Delta T'_{obs} - \Delta T'_{cal})^2/N)^{1/2} \tag{5.3}$$

做为目标函数，用 GA 在两种初始参数划分精度条件下解磁性球的 4 个参数（x，y，h，r）。

这 4 个参数的初始搜索范围见表 5.1，计算结果见图 5.1。图中横轴表示遗传演化（迭代）次数，纵轴表示 80 个模型中的最佳模型的目标函数 f。虚线和实线分别表示低精度与高精度条件下 f 随演化次数的变化曲线（演化开始时，f 的值很大，约为 350。出于做图比例上的考虑，去掉了 $f>25$ 以上的部分）。

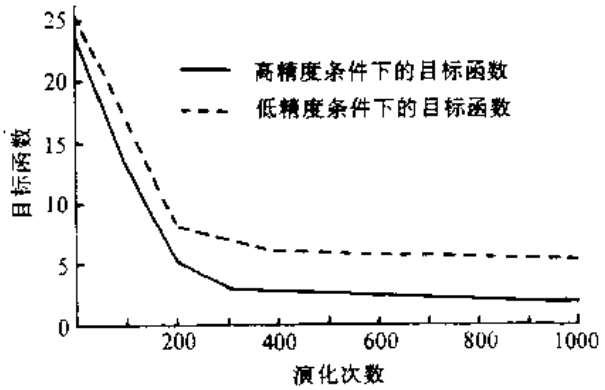


图 5.1 初始搜索范围的划分对演化结果的影响

由图可见，在 120 次迭代之前，f 从一个高值迅速下降到 8 左右，但 120 迭代之后，低精度的曲线几乎成水平，最后在 410

～ 1000 次迭代中一致保持在 $f=6$ 的水平上。而高精度的曲线从 290～1000 次迭代过程中，f 下降得非常缓慢，迭代到 1000 次时，$f=1.431$。

表 5.1　磁性球空间位置和几何参数的初始搜索范围

	低精度		高精度	
搜索范围/m	分段数	每段长度/m	分段数	每段长度/m
x：−650～1350	512	3.914	1048576	0.002
y：−650～1350	512	3.914	1048576	0.002
h：0～400	256	1.569	32768	0.012
r：0～200	256	0.784	32768	0.006
模型空间	17179869184		1180000000000000000000	

表 5.2　两种反演方法的计算结果

搜索方式	X/m	Y/m	H/m	R/m	f
低精度	348.043	348.043	200.784	100.392	6.042
高精度	350.062	349.997	200.946	100.400	1.431

从这个结果得到如下几点印象：

(1) 不管用低精度还是高精度的搜索方式，在遗传演化的初期，f 的下降都很迅速。

(2) 遗传演化到一定程度后，f 的下降非常缓慢。

(3) 计算结果的精度与给定的初始搜索精度有关，若要得到相当精度的结果，要经过漫长的遗传演化过程（注意：在巧合的情况下也会出现在低精度的搜索条件下得到某个参数高精度的计算结果。这是因为某个分点正好处在真值的位置或离真值很近。但在多参数反演问题中，各个参数的初始值都恰好取在真值或真值附近的可能性几乎是不存在的）。

于是提出如下问题：在上述 4 个参数的反演过程中，用完全精确的理论数据要经过 1000 次的遗传演化才能得到 $f=1.431$ 的计算结果。如果参数增加、观测数据中有误差，演化次数要增加，模型空间的大小也要增加（在低精度的搜索方式下，模型空间的大小已达 171 亿。高精度时，模型空间为 10 万亿亿），搜索速度将随之下降。这样的速度我们是否能够容忍。如果不能容忍，采用什么办法加以改进。

5.2　从模型群体的演化过程中得到的启示

现在考察模型群体在模型空间的演化发展趋势（图 5.2）。

图 5.2 是参数 x 在演化过程中的发展趋势（其它 3 个参数情况类似）。由图可见，当演化过程开始时，遗传算法对模型群体在搜索范围内的选择比较均匀，大部分区域的选择次数为 1～2 次，只要局部区域（$x=600$ 附近）稍高些，为 5 次。当演化进行到第 20 次时，已出现对模型群体的选择向真值附近集中的明显趋势。在 $x=300$ 附近出现一峰值，选择次数约为 18，而其它区域最大选择次数为 8。当演化进行到 40～60 次时，算法对真值 $x=350$ 附近模型参数的选择已超过总选择次数的 80%以上。

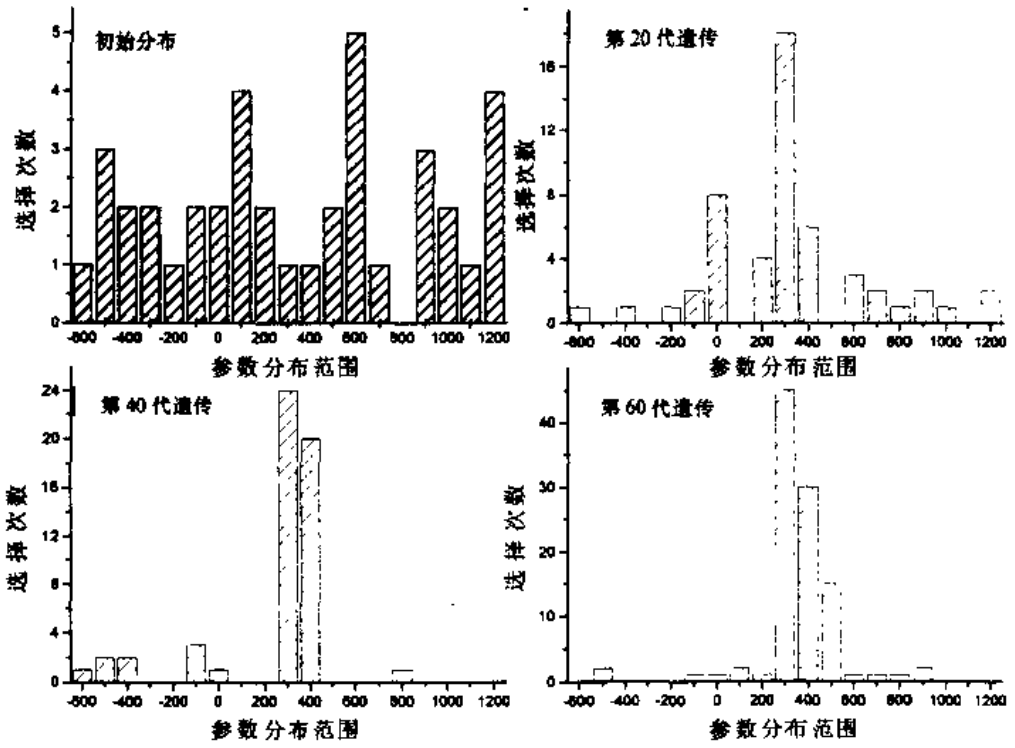


图 5.2　模型群体(在 x 参数空间)的演化趋势示意图

由此可见，随着演化进程的发展，模型群体在其搜索范围内逐步向其真值附近集中，最后，绝大多数模型分布在真值附近的一个局部范围内。

根据这个观察认为，如果在模型群体的演化过程中逐步缩小搜索范围，将有助于解决引言中提出的问题。因为这样做至少有如下几点好处：

(1) 可逐步圈定出真值所处的大致范围。

(2) 在保持搜索范围原有分段数不变的情况下，相应地提高了搜索精度，而提高搜索精度并不影响搜索范围变化后初期的搜索速度，这一点可从图 5.1 中看出。

(3) 由于缩小搜索范围后可不必再去搜索远离真值的区域，可相应地提高搜索效率。

但是，如果这样做又会引出一个问题，即缩小搜索范围后是否能保证真值仍然保留在缩小后的搜索范围内。如果要做到这一点，首先要解决何时开始收缩和怎样缩小搜索范围的问题。

5.3　搜索范围内各种情况的分析

为了简便，下面主要针对一维模型空间进行讨论。由于 GA 在寻求多参数的最佳模型时也是在各个模型参数的一维空间中分别寻找相应的最佳参数，最后组成最佳模型，所以一维空间的讨论同样适用于多参数的反演问题。

为便于分析，首先给出真值的邻域及当前最优值的概念。

定义 1：真值的邻域，是指以真值为中心，以真值到离搜索范围最近的那个端点之间的距离 L 为半径的区域，见图 5.3。

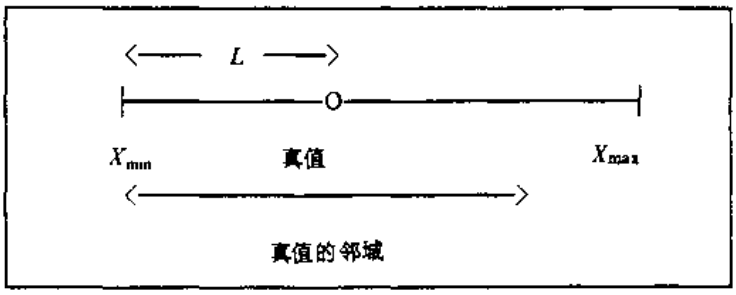


图 5.3　真值的邻域示意图

定义 2：当前最优值，是指演化过程中模型群体中当前目标函数最小的模型参数值。

根据真值的邻域和当前最优值的概念，可以分析它们在搜索范围内的相对位置的各种情况(图 5.4)。其中：

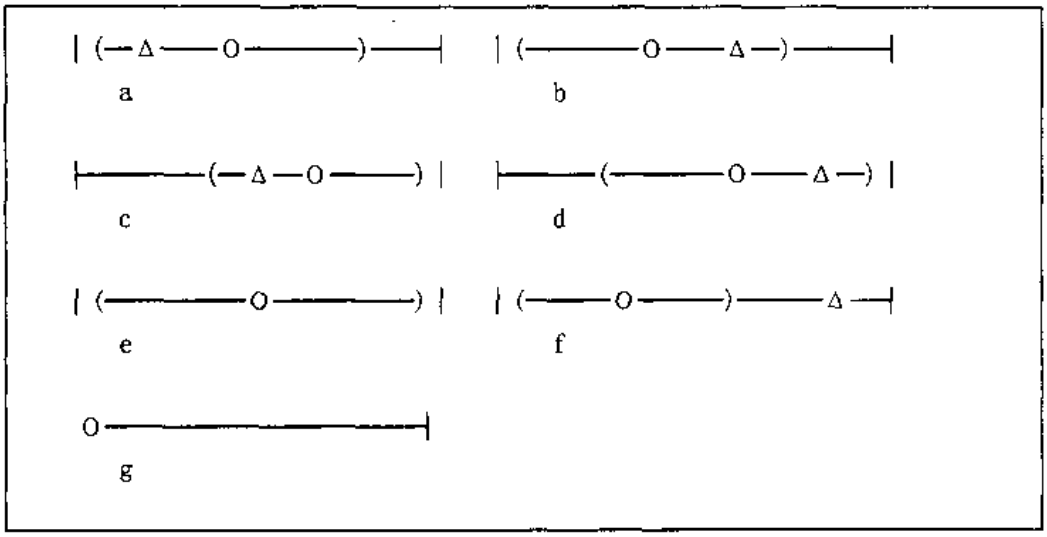


图 5.4　真值及当前最优值在搜索范围内的相互位置示意图

(O：真值，Δ：当前最优值，(　)：真值的邻域，|　|：参数搜索范围)

a～d 是比较普遍的情况，只要初始搜索范围选择合适，当演化过程进行到一定程度后就会出现这种情况，即当前最优值位于真值的邻域内。图 5.2 的模型演化发展趋势示意图可以证明这一点。

e 是搜索范围选得比较特殊的情况，真值位于搜索范围的中点，其邻域是整个搜索范围。事实上，这样选择初始搜索范围最有利于范围的压缩，但问题是通常我们并不知道真值在何处。

f 通常是真值距离某个端点比较近，其邻域较小的情况，或在演化的初期当前最优值还未进入真值邻域时的情况。

g 是另一种特殊情况，真值位于搜索范围的某个端点，其邻域为零。有两种可能：①当前最优值就是真值，这时的搜索范围已收缩成一个点，或一个相当小的范围；②初始搜索范围选择不当，使其正好位于某个端点，这种情况下它的邻域为 0。当演化进行到一定程度后，观

察模型群体的演化趋势，会发现它们都集中在该端点附近。

综上所述，在排除了极特殊的情况 g 之后，只要初始搜索范围选择合适，经过若干次演化，当前最优值必然会进入真值的邻域。

5.4 逐步缩小搜索范围的方法

以上借助真值邻域的概念分析了当前最优值在搜索范围内的几种情况，结合模型群体的演化趋势（图 5.2），可以肯定，它们必然会最终进入真值的邻域。一旦当前最优值进入真值的邻域，即可按下式实施搜索范围的压缩：

$$X'_{\min} = X_{\min} + (\text{当前最优值} - X_{\min})/D \tag{5.4}$$

$$X'_{\max} = X_{\max} - (X_{\max} - \text{当前最优值})/D \tag{5.5}$$

其中：$D \geqslant 2$。按上式得到的新的搜索范围 $(X'_{\min}, X'_{\max})$，一定包含真值和当前最优值在内。这个结论很容易从几何上得到证明。下面只给出图 4 中 a 和 f 的证明，其它情况类似。

证明：参考图 5.5。令：

$$D = 2$$

$$L_1 = \text{当前最优值} - x_{\min} \qquad S_1 = L_1/D$$

$$L_2 = x_{\max} - \text{当前最优值} \qquad S_2 = L_2/D$$

则(5.4)、(5.5)式可写成

$$x'_{\min} = x_{\min} + S_1$$

$$x'_{\max} = x_{\max} - S_2$$

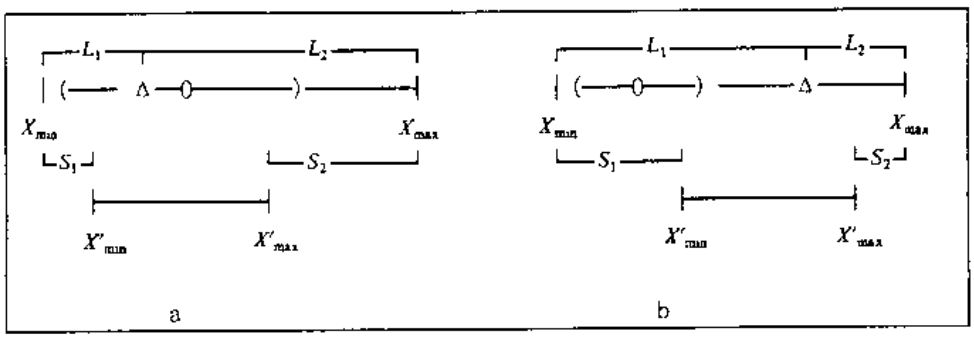


图 5.5 收缩公式的证明示意图

a. 收缩后的区域包含真值及当前最优值；

b. 收缩后的区域不包含真值

图 5.5 中给出了两种情况下新的搜索范围。由图可见，因为 a 中当前最优值位于真值的邻域内，所以新的搜索范围包含真值及当前最优值。而 b 中当前最优值在真值的邻域之外，所以新的搜索范围只包含当前最优值而不包含真值。

(5.4)、(5.5) 式的应用条件是合理地选择初始搜索范围，避免真值的邻域等于 0 的情况出现。事实上，这个条件很容易得到满足，只要初始搜索范围给得足够大即可。

当 $D=2$ 时是比较快速的收缩方案，每次去掉的区域较大。为安全起见，可取 $D=3$ 或 4。但是，经压缩搜索范围后，真值的邻域也相应地缩小，当前最优值可能会位于真值的邻域之

外。如果马上进行下一次压缩，就有可能把真值排除在新的搜索范围之外。所以，在每做一次压缩后，应迭代几次，使模型群体对新的环境有个适应的过程，然后再做下一次压缩。

到此，解决了如何压缩搜索范围的问题。关于何时开始压缩的问题，由于不知道真值，所以也不可能知道当前最优值何时进入真值的邻域，因此只能另外寻找别的标志做间接的判断。

再次考察模型群体演化趋势图（图 5.2）。从图可见，当演化进行到 20～30 次时，已出现模型群体向真值靠拢的明显趋势，而这时最佳模型的目标函数 f 也从开始的高值迅速下降。f 的大小是模型接近其真值程度的综合体现（暂不考虑解的不唯一性）。如果在一个模型中，某个模型参数比较接近其真值，但其它的参数离其相应的真值较远，它们的综合表现仍然是 f 的值较大。只有当模型中的各个参数都比较接近它们的真值时，f 才会较小。因此，可利用 f 做为开始压缩的标志。当 f 下降到一定程度后，即可执行搜索范围的压缩。

5.5 理论模型试验

根据上述方法，做了一些理论模型计算，以检验方法的效果。

5.5.1 磁性球的空间位置及几何参数的反演

该试验仍采用本章引言中磁性球的例子。在下面的试验中，其它参数都保持不变，只改变搜索范围，以便考察搜索范围的变化对计算结果的影响。

模型试验一

采用本章引言中的理论模型，参数的初始搜索范围见表 5.3。

表 5.3 参数的初始搜索范围

范围/m	分段数	每段长度/m
x：−650～1350	512	3.914
y：−650～1350	512	3.914
h：0～400	256	1.569
r：0～200	256	0.784

由于真值位于搜索范围的中点，所以真值的邻域为整个搜索范围。这样，演化过程一开始当前最优模型就肯定位于真值的邻域内，因此，第一次演化结束后即可执行搜索范围的压缩。采用 $D=3$，且每压缩一次后迭代 10 次，计算结果见图 5.6。其中：实线为经搜索范围压缩的计算结果，虚线为未经搜索范围压缩的计算结果（即图 5.1 中的虚线）。

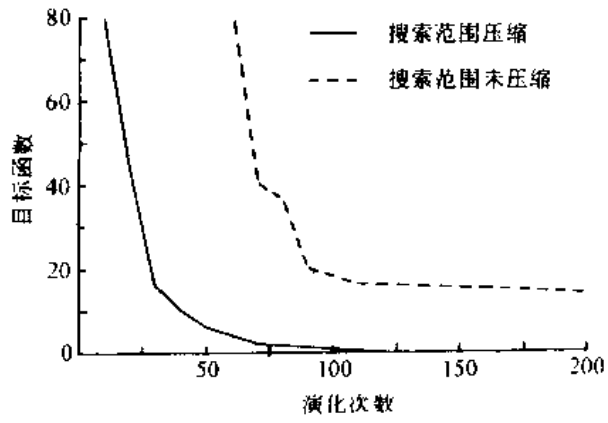


图 5.6 真值在搜索范围中点时的演化情况

从图中可明显看到，执行搜索范围压缩后，无论是搜索速度还是计算结果的精度都得到了显著的提高。当遗传演化进行到 50 次时，f 已小于未做范围压缩时 130 次的水平。当演化到 119 次时，$f=0.402$，小于给定精度（0.5），计算结束。与图 5.1 比较，可见计算速度提高了将近 10 倍，精度也同时提高。

表 5.4 搜索范围随遗传演化进程的变化

演化次数	搜索范围							
	x/m		y/m		h/m		r/m	
	min	max	min	max	min	max	min	max
0	−650.0	1350.0	−650.0	1350.0	0.0	400.0	0.0	200.0
10	−62.4	826.4	−129.9	759.0	132.7	310.4	54.6	143.4
20	75.3	667.9	28.1	620.7	157.0	275.5	70.3	129.6
30	166.7	561.8	134.6	529.6	173.2	252.2	80.8	120.3
40	227.7	491.0	205.5	468.9	183.7	236.3	87.8	114.1
50	268.3	443.9	253.6	429.1	189.9	224.9	91.9	109.5
60	295.4	412.5	285.6	402.6	193.0	216.4	94.6	106.3
70	313.6	391.7	306.9	384.9	195.3	210.9	96.4	104.2
80	325.8	377.8	321.1	373.1	196.8	207.2	97.6	102.8
90	333.8	368.5	330.6	365.3	197.8	204.7	98.4	101.9
100	339.2	362.3	337.0	360.1	198.5	203.1	98.8	101.2
110	342.8	358.2	341.2	356.6	199.0	202.1	99.3	100.8

最终计算结果：$x=349.952$，$y=349.824$，$h=200.001$，$r=99.986$，模型群体平均目标函数为 3.961，同时把真值圈定在一个相当小的范围内。搜索范围的变化情况见表 5.4。

模型试验二

模型试验一是当真值位于搜索范围中点的特殊情况。由于我们不可能知道真值的位置，所以普遍的情况是真值位于非中点的某个位置上，且有

0<真值的邻域<整个初始搜索范围

为检验这种情况下方法的效果，做如下试验。初始搜索范围参数见表 5.5。

表 5.5 参数的初始搜索范围

参　数	范围/m	分段数	每段长度/m
x	−1000～1000	256	7.8
y	−1000～1000	256	7.8
h	0～500	64	7.9
r	0～300	32	9.6

可见搜索范围划分得比较粗糙。

由于真值位于非中点，其邻域不再是整个搜索范围，因此首先确定当前最优模型进入真值邻域的标志。根据上面的讨论，当前最优模型的 f 小于 100 时即在各个模型参数空间同时压缩搜索范围，每压缩一次迭代 10 次，再做下一次压缩。取 $D=3$，试验结果见图 5.7。

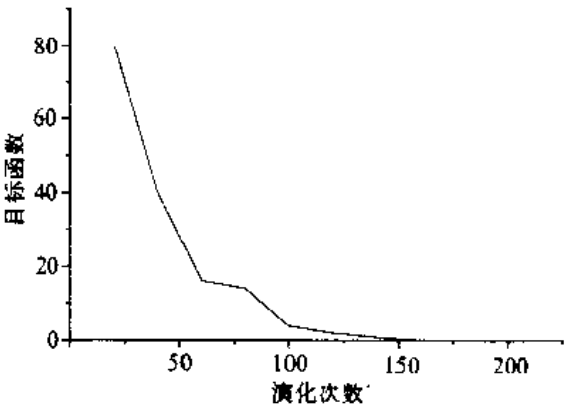


图 5.7 真值不在搜索范围中点时的计算结果

把图 5.6 和图 5.7 对照分析可知，尽管这个试验的效果不如真值在中点的情况，但比不做收缩的情况好得多。当演化进行到 90 次时，最优模型的 f 已降至未收缩情况下 130 次的水平。当演化进行到 156 次时 $f=0.483$，计算

结束。由此可见，真值位于搜索范围的非中点时这种方法也很有效。另外，利用先验信息选好初始搜索范围，使真值大致位于搜索范围的中部，对提高搜索效率很有帮助。

最终计算结果：$x=350.017$，$y=349.785$，$h=200.020$，$r=99.987$，群体平均目标函数为 2.857，最后搜索范围的压缩结果见表 5.6。

表 5.6 参数的最后搜索范围

参 数	搜 索 范 围	
	min	max
x/m	345.4	352.2
y/m	345.0	351.8
h/m	199.6	201.3
r/m	99.7	100.7

模型试验三

这个试验考虑数据中有误差的情况。

在上述磁性球的 ΔT 理论值中分别加入 5%和 10%的随机误差，初始搜索范围参数见表 5.7。

表 5.7 参数的初始搜索范围

参数	含 5%的误差			含 10%的误差		
	初始范围/m	分段数	每段长度/m	初始范围/m	分段数	每段长度/m
x	−650～1350	512	3.9	−1000～1000	256	7.8
y	−650～1350	512	3.9	−1000～1000	256	7.8
h	0～400	256	1.6	0～500	64	7.9
r	0～200	256	0.8	0～300	32	9.6

计算结果见图 5.8、图 5.9 及表 5.8 和表 5.9。

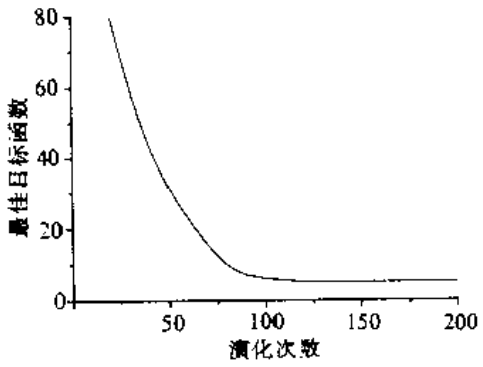


图 5.8 数据含有 5%随机误差的计算结果

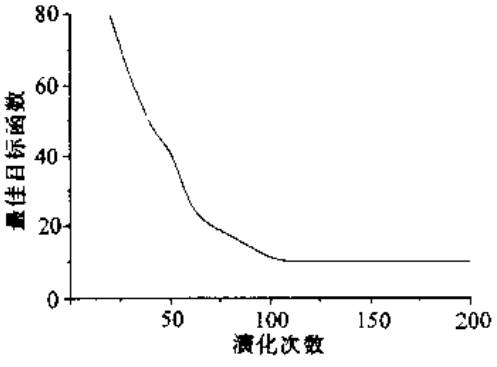


图 5.9 数据含有 10%随机误差的计算结果

从计算结果看，比较接近真值。但数据的目标函数较大，这显然是由数据中的随机误差造成的。

表 5.8　数据中含有误差的计算结果

参　数	含 5%的误差	含 10%的误差
x/m	350.204	350.479
y/m	350.177	351.034
h/m	99.933	200.271
r/m	100.884	101.854
f	3.959	8.189

表 5.9　数据中含有误差的最终搜索范围

参　数	含 5%的误差		含 10%的误差	
	min	max	min	max
x/m	346.7	353.5	318.2	365.7
y/m	346.7	353.5	319.1	366.6
h/m	199.6	200.9	197.0	208.8
r/m	99.6	101.3	99.8	107.0

5.5.2　一维地壳结构速度-深度函数走时反演

这里给出两个试验例子，用以说明该方法的效果和用这种方法解地壳速度结构反问题这类非线性问题的能力。为叙述方便，把原有的 GA 称为方法 1，改进的 GA 称为方法 2。

模型试验四

这个试验用以说明两种方法的差别。理论模型采用水平层状速度模型，见图 5.10 中实线。计算时两种方法所用的初始参数都一样，只有搜索范围的固定与变动之差。模型群体 $Q=40$，指定迭代 300 次。

目标函数：

$$f=[\Sigma(t^o-t^c)^2/n]^{1/2} \tag{5.6}$$

其中，t^o 是到时的观测值，t^c 是到时的理论计算值，n 是数据个数。(5.6) 式表示观测到时与理论到时之间的均方差。

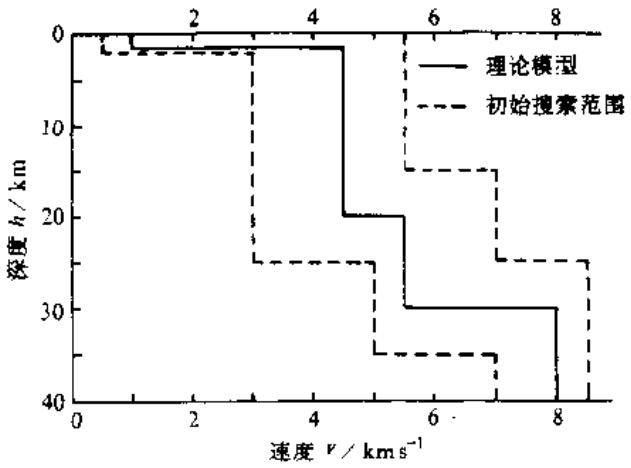


图 5.10　试验四的理论模型及初始搜索范围

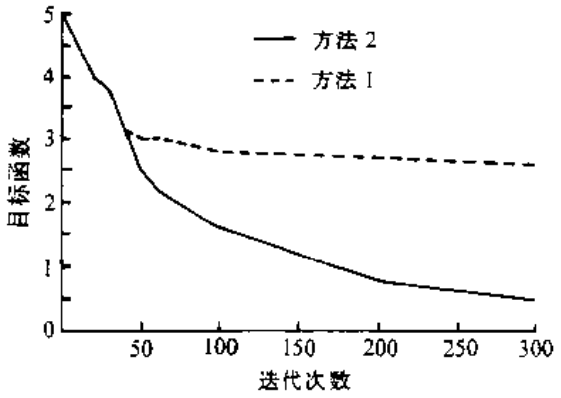


图 5.11　最佳模型的目标函数

范围收缩方法（方法 2 用）：当最佳模型的目标函数值小于 4.0 时，以 $D=5$ 的比例对搜索范围进行压缩，每压缩一次后迭代 30 次。

图 5.11 是最佳模型的目标函数的变化情况，图 5.12 是模型群体平均目标函数的变化情况，两次计算的结果见图 5.13。从这些图中可见，两种方法效果之间的差别是明显的。

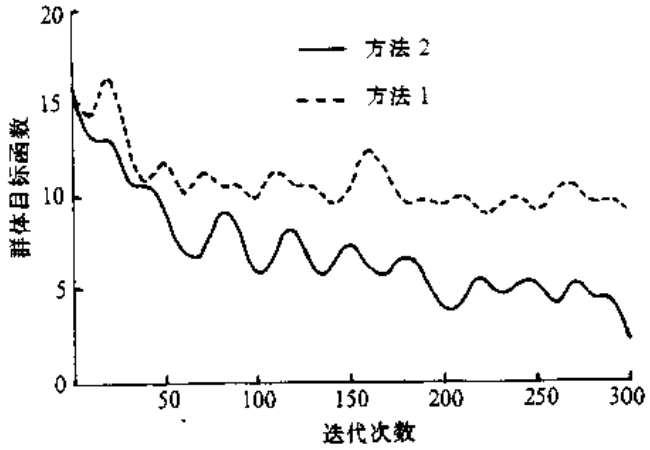


图 5.12　模型群体平均目标函数

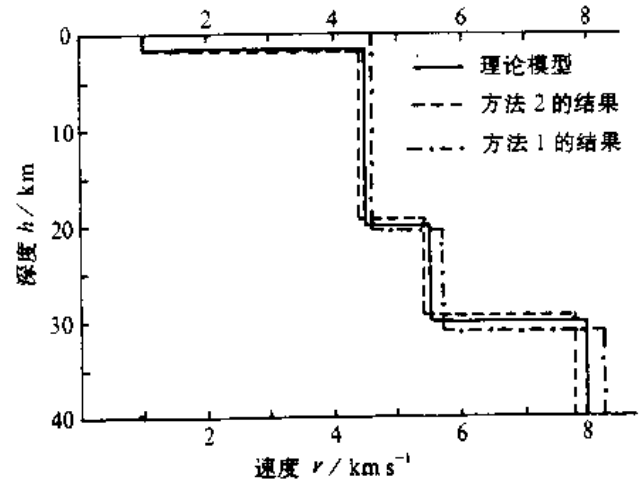


图 5.13　两种方法的计算结果

先看最佳模型的目标函数情况。当用方法 1 时，迭代的初期目标函数从 5 迅速下降到 3 左右，而在以后的大部分迭代过程中一直保持在这个水平上不再下降了。这意味着模型参数已接近指定的搜索精度，进一步改善的可能受到了限制。

当用方法 2 时，初期的情况与方法 1 相同（因为采用相同的 GA 参数包括随机数种子）。但当迭代进行到第 30 次时，由于执行了第一次范围的压缩，这时的搜索精度已经改变，所以这时方法 2 的目标函数曲线不像方法 1 那样，而是有了一个较大幅度的下降。这说明模型群体已搜索到了更接近最优解的模型。以后每迭代 30 次都执行了范围的压缩，从图中可以看出，每压缩一次都导致了目标函数的明显改善。

再看模型群体平均目标函数的变化情况，两种方法之间的差别也是明显的。因为方法 1 采

用固定的搜索范围和精度，当迭代过程接近初始设置的搜索精度极限时，群体平均目标函数就保持在这个水平上不再变化了。本例中迭代开始时群体平均目标函数值是 15 左右，然后迅速下降到 11 左右，而在以后的大部分迭代过程中再也没有明显的改善，一直在 10 附近波动。而方法 2 的曲线则出现了明显的单调下降趋势。这是因为搜索范围的不断缩小和搜索精度的不断提高，使模型群体有可能进一步接近最优解。尽管由于随机性的作用，群体中的模型仍有可能在远离最优解的区域取值，但由于不断缩小的搜索范围的边界的限制，群体中各个模型与最优解的距离都在逐步缩小，导致群体平均目标函数值出现明显的下降趋势。根据这种趋势预测，如果迭代继续进行的话，群体平均目标函数值还会得到进一步改善，计算结果将会更好。

最终的搜索区间见表 5.10。从表中数据可见，大多数参数的最终搜索区间只是初始搜索范围的 1/7.5 左右，搜索精度都提高了 10 倍左右。

表 5.10　试验四的搜索范围及搜索精度的对比（h_i：层底深度，v_i：层速度）

参数	初始范围	最终范围	比例	初始精度	最终精度	提高（倍）
h_1	0.5～2.0	1.30～1.51	1/7.5	0.214	0.025	9
v_1	0.5～2.0	0.93～1.13	1/7.5	0.500	0.050	10
h_2	15.0～25.0	19.30～20.65	1/7.5	1.428	0.168	9
v_2	3.0～5.5	4.19～4.53	1/8	0.833	0.084	10
h_3	25.0～35.0	28.79～30.14	1/7.5	1.428	0.168	9
v_3	5.0～7.0	5.76～6.03	1/7.5	0.667	0.067	10
h_4	35.0～45.0	38.76～40.78	1/5	2.143	0.252	9
v_4	7.0～8.5	7.56～8.06	1/3	0.500	0.050	10

这个例子证实了前面分析的正确性，同时也说明所做的改进是有效的。

模型试验五

这个试验采用含有低速层的 5 层速度模型。共有 10 个参数，它们是各层的层底深度和层速度，见图 5.14 中实线部分。

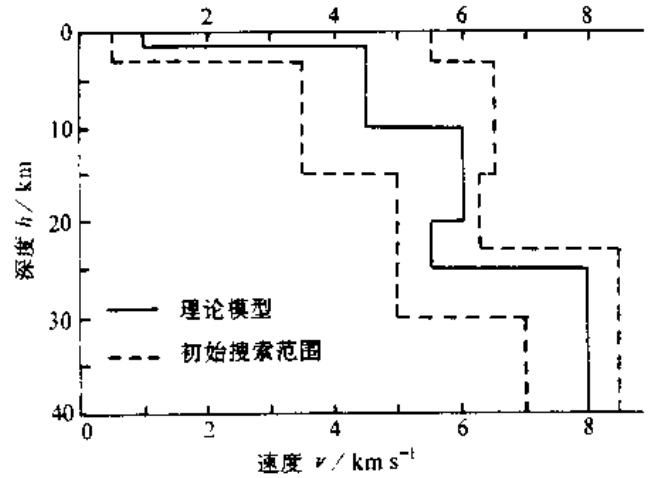


图 5.14　试验五的理论模型及初始搜索范围

反演中所采用的策略是，开始时设置较低的初始搜索精度，使得模型空间不至于太大，有利于快速确定最优解的大概位置。然后在反演过程中逐步提高精度。

每个参数的初始搜索范围都被等分成 3 个间隔，共有 4 种可能的取值，可见这种初始划分比较粗略。在这种划分下，模型空间的大小为

$$s = 4^{10} = 1048576\ (100\ 万以上)$$

初始搜索范围见图 5.14 虚线及表 5.10。搜索范围的收缩方法是，当目标函数小于 4.0 时，以 $D=5$ 的速率收缩搜索范围，每收缩一次迭代 40 次。用 50 个模型的群体同时搜索，指定迭代次数为 400。

计算结果见图 5.15、图 5.16 和图 5.17。

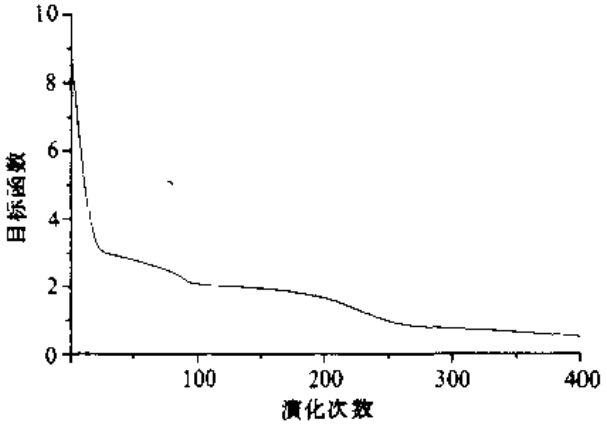


图 5.15　最佳模型目标函数曲线

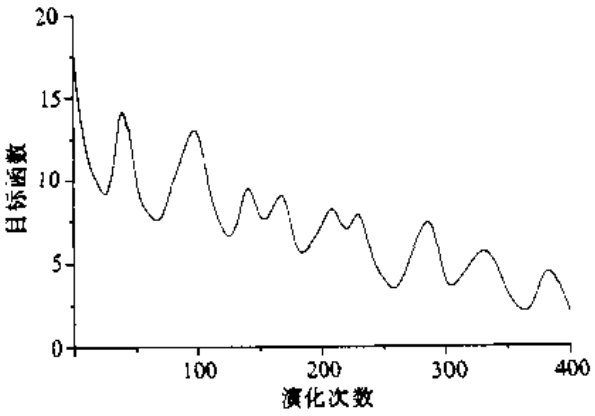


图 5.16　模型群体平均目标函数值曲线

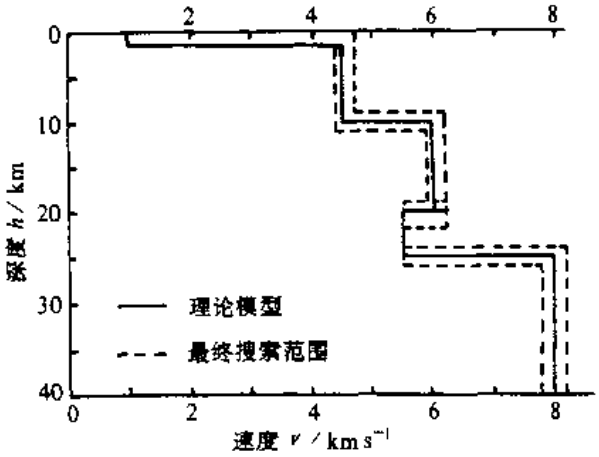


图 5.17　试验五的计算结果

由图 5.15 可见，由于初始搜索精度比较低，模型空间相对较小，迭代过程能很快接近最优解，目标函数下降很快，然后趋于平缓。当迭代进行到第 40 次时，进入搜索范围的压缩阶段。第 80 次迭代后执行了一次压缩，目标函数有了一个较大幅度的下降。但在 80～240 次之间，尽管也做了压缩，但并没有引起目标函数的明显改善。这种情况是由于非线性问题的多解性所引起的，即由不同的模型参数可以得到相同的目标函数。但尽管这时目标函数没有变

化，由于GA基本原理的作用，模型参数的调整却在不断进行。在做模型试验的过程中，随时可以看到这种情况。出现在压缩过程中的这种目标函数的平缓变化与原有GA中的情况是不同的。前者尽管目标函数没有变化，模型参数仍在朝着最优解的附近调整，随着迭代过程的延续，终将得到最优解。而后者却是由于接近当前搜索精度，使参数没有调整余地所造成的，迭代过程的延续也不会改变这种状况。所以它们之间有着本质的差别。

从图5.16的模型群体平均目标函数变化曲线看，总的来说是呈下降趋势，从开始的17下降到3左右。从这张图上可以看到这样一种情况（图5.12中也有类似情况），即每当做了一次范围的收缩后都引起了群体平均目标函数值的剧烈变化。出现这种情况的原因是，由于搜索范围的缩小，使原有的模型群体生存环境发生了变化。以前保留在群体中的关于有利于生存（最优解的位置）的信息已经过时。为了生存的需要，模型群体必须重新适应新的环境、搜集新的信息。于是模型群体在新的环境中重新做全面的搜索，导致群体目标函数值的上升。在积累了新的有用信息后，群体又逐渐向最优解附近集中，又使得群体目标函数值下降。这样循环往复，不断适应新环境，最终找到最优解。由此也可以理解逐步缩小搜索范围方法的作用：它不断给模型群体提供新的发展余地，引导模型群体逐步朝着最有利的区域搜索。由于原有的GA不具备开辟新环境的能力，使模型群体的进一步发展受到限制，所以迭代后期收敛很慢。

表5.10　试验五的搜索范围及搜索精度对比（h_i：层底深度，v_i：层速度）

参数	初始范围	最终范围	比例	初始精度	最终精度	提高（倍）
h_1	0.5～3.0	1.32～1.65	1/7.5	0.833	0.083	10
v_1	0.5～1.5	0.95～1.09	1/7.1	0.333	0.034	10
h_2	3.0～15.0	8.98～10.59	1/7.5	4.000	0.403	10
v_2	3.5～5.5	4.34～4.60	1/7.7	0.667	0.067	10
h_3	15.0～23.0	18.99～20.06	1/7.5	2.667	0.268	10
v_3	5.0～6.5	5.84～6.04	1/7.5	0.500	0.050	10
h_4	23.0～30.0	24.66～25.60	1/7.5	2.333	0.235	10
v_4	5.0～6.0	5.44～5.58	1/7.2	0.333	0.034	10
h_5	30.0～45.0	38.63～40.64	1/7.5	5.000	0.503	10
v_5	7.0～8.5	7.78～8.06	1/5.4	0.500	0.050	10

最终的计算结果见图5.17。与图5.14相比，搜索范围已收缩得很小。迭代过程中的最佳模型也包含在内。反演结果可以取最佳模型、模型群体的均值，也可以取搜索范围的均值，或结合其它资料综合确定，有较多的选择余地。

小　结

针对GA收敛速度慢的问题，从搜索范围的角度提出了逐步缩小参数搜索范围的加速收敛改进措施。本章介绍了在GA的遗传演化过程中如何压缩搜索范围，同时提高计算速度及计算精度的具体做法。提出了真值邻域的概念，根据这个概念分析了模型参数空间中当前最优模型与真值邻域的相互关系，由此得到了压缩公式并从几何上给出了它们的证明。只要合理选择初始搜索范围（这一点并不难做到），上述压缩公式能确保问题的解始终保留在压缩后

的搜索范围内。本章给出了大量理论模型试验结果，表明这种方法非常有效。

综合前面的讨论，可以得到如下认识：

(1) 在执行遗传算法的不同阶段中，模型参数的改善条件是不一样的，初期有较多的改善余地，而以后则会受到限制。

(2) 为了在遗传算法的执行过程中给模型参数提供进一步改善的机会，有必要采用对搜索范围做逐步缩小的方法。这样既可以使模型参数不断得到改善，又可以逐步提高搜索精度，有利于快速收敛。

(3) 为使模型空间不至于太大，影响收敛速度，初始搜索精度可稍低些，使迭代过程能快速找到最优解的大概位置，然后再逐步提高精度。这是一个切实可行的反演策略。

(4) 用这种方法既可得到一个最佳模型和一个模型群体，又可得到一个相当小的参数分布范围，这对解的分析和评价都很方便。

6 加速收敛措施之三：S形函数在GA中的应用

6.1 引 言

在第4章和第5章中，已经分析了造成GA收敛速度慢的原因。其原因分别存在于基因交换方式方面和模型参数的搜索精度方面。基因交换方式方面的原因是，单点交换的低搜索效率造成了GA漫长的演化过程。解决这个问题的方法，是采用多点基因交换方式。这种方式使得对模型空间的搜索效率大为提高，不仅扩大搜索范围，而且提高搜索速度。这方面的问题已在第4章中得到解决。模型参数搜索精度方面的原因是，给定的模型参数初始搜索精度太低。当反演过程接近或达到这个精度时，进一步提高反演精度已经不可能，于是出现不收敛的情况。对于这种情况，有两个解决办法。①给定较高的初始模型搜索精度。但这个办法会大量地增加模型搜索空间的大小，对于多参数的反演问题可能引起计算机内存方面的问题。②先给定较低的初始搜索精度，在遗传演化的过程中不断缩小搜索范围。这样，在保持搜索区间分段数不变的情况下，可以逐步提高搜索精度。这就是所谓逐步缩小搜索范围的方法，这方面的问题已经在第5章中得到解决。

除了上述两方面的原因外，在适应程度函数方面也存在着造成GA演化过程漫长的原因。即演化进行到后期，群体中各模型都已接近其真值，它们的目标函数也比较接近，因此它们的适应程度在再生概率区间内所占的范围差别不大，于是就造成在用随机过程选择再生模型时出现困难。

通过对原因的分析可以发现，解决这个问题的关键是要把这些再生概率相差不大的模型区别开来，而要做到这一步，就要首先把它们的适应程度数值上的微小差别区别开来。下面用S形函数来解决这一问题。

6.2 S形函数

S形函数的数学表达式为

$$y = \frac{1}{1 + \alpha e^{-\beta(x-\theta)}} \tag{6.1}$$

其中，x是自变量。α是比例控制参数，其作用后面讨论。β是曲线形态控制参数，β越小，曲线越平缓。反之，β越大，曲线越陡峭。θ是阈值，控制曲线的位置和对x的作用结果，当$x=\theta$时，有

$$y = y_0 = \frac{1}{1 + \alpha}$$

当$x<\theta$时，$y<y_0$；当$x>\theta$时，$y>y_0$。S形函数的图形见图6.1。

S形函数在很多方面都有应用。如在BP神经网络中，它被用做神经元的激发函数。当输

入神经元的信息量大于阈值 θ 时，神经元将对此做出响应，否则，则不予响应(史忠植，1993)。又如在位场频率域数据处理中的正则化滤波因子，也是S形函数的一种变形。在它的数学表达式中，$\beta=-\beta$，因此它的图形与图 6.1 正好相反，当 $x<\theta$ 时，$y>y_0$；当 $x>\theta$ 时，$y<y_0$。这样的函数作为正则化滤波因子，具有函数连续光滑、形式简单的优良特性，可用于低通滤波(安玉林，1985)。

对于我们的问题，应用S形函数的目的是要把差别不大的适应程度值区别开来，使小于阈值的适应程度值被相对缩小，大于阈值的适应程度值被相对放大，以便于选择最佳模型。

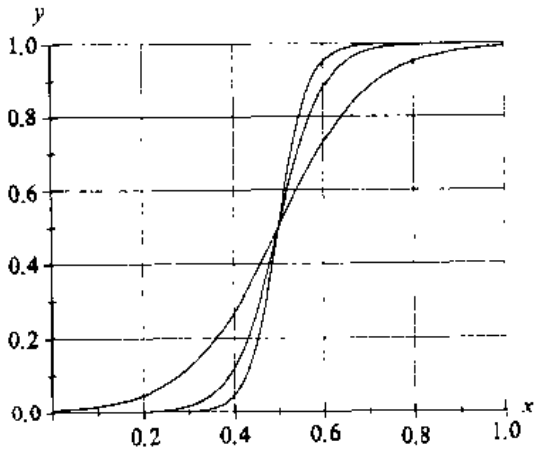


图 6.1　具有不同 β 值的S形函数($\alpha=1,\theta=0.5$)

6.3　参数选择

S形函数中的 x 表示模型的适应程度值 Fitness(i)($i=1,2\cdots,n$)，y 表示 Fitness(i)经S形函数作用后的结果。另外三个参数 α、β 和 θ 可按如下标准来选取。

(1) α 是比例控制参数，它控制着对小于(或大于)θ 的 x 的压制(或放大)程度。当 $x=\theta$ 时，$y=1/(1+\alpha)$。根据经验，取 $\alpha=2\sim5$ 比较合适。

(2) β 是曲线形状控制参数，它的值越大曲线越陡峭，这时对阈值两侧的 x 的区分越显著。当 β 大到一定程度后，S形函数近似成为阶跃函数，即小于 θ 的 x 其函数值为0，大于 θ 的 x 其函数值为1。为使不同模型的适应程度值有明显的区别，应根据具体问题由试验选择 β 值。

(3) θ 是阈值，控制对 x 的作用结果。它的选择依据为，根据GA基本理论，大于群体平均适应程度值的模型，在下一代应得到指数形式的增加。因此，可取 θ 为群体平均适应程度值的 $(1+\varepsilon)$倍，其中 $\varepsilon=0.0\sim0.3$。

这些参数确定之后，S形函数就完全确定了。

增加了S形函数后，第2章中“GA的实现方法”中的“GA运算”要稍微做些变动。在(2.8)式之前先把各模型的适应程度函数 Fitness(i)代入S形函数中，得到的结果仍用 Fitness(i)表示，然后再做后面的计算。

6.4　数值模拟

6.4.1　与原有GA的比较

为了说明S形函数的作用，首先把它与原有GA做一比较。现以一个简单的天然地震的震中定位问题为例子以说明。

简单地震定位问题中天然地震波到时的正演计算公式为

$$T_i(x_0,y_0,z_0,t_0)=\frac{[(x_i-x_0)^2+(y_i-y_0)^2+z_0^2]^{1/2}}{v}+t_0 \qquad (6.2)$$

式中，x_0、y_0、z_0 和 t_0 是天然地震的震源位置和发震时刻，x_i、y_i 是第 i 个台站的位置，v 是

地震波在地壳内的平均传播速度，T_i 是到达第 i 个台站的地震波到时。

设有 16 个地震台站组成一地震台网，它们的位置及接收到的地震波到时见表 6.1，其中震源位置的理论值为 $x_0=5\text{km}$，$y_0=10\text{km}$，$z_0=15\text{km}$，$t_0=0\text{s}$，$v=6.0\text{km/s}$。

表 6.1　台站位置及 P 波到时

台站编号	到时/s	x/km	y/km
1	5.721	7.056	−20.807
2	13.508	−47.946	−49.500
3	8.854	32.849	−32.682
4	3.674	20.606	14.183
5	12.473	−37.840	−49.500
6	8.176	−13.971	−32.682
7	7.853	49.468	14.183
8	8.671	−27.201	48.008
9	11.607	−47.946	−32.682
10	5.318	32.849	14.183
11	7.290	20.606	48.008
12	10.563	−50.000	37.695
13	4.091	−13.971	14.183
14	10.065	49.468	48.008
15	7.507	−27.201	37.695
16	6.533	−26.829	−7.275

反演问题的目的是根据地震波到时确定地震的震源位置（x_0，y_0，z_0，t_0）。为简单起见，假定 $t_0=0$ 为已知，这时待求参数只有 3 个。

首先给出 3 个参数的搜索范围，见表 6.2。

GA 参数为：$P_c=0.98$，$P_m=0.04$，模型群体大小为 30。

S 形函数的参数为：$\alpha=6.0$，$\beta=900.0$，$\theta=1.1$。

反演时，当目标函数 $f<0.005$ 时停止迭代，分别用两种方法做了计算。当迭代进行到 24 次时，新算法满足迭代中止条件，$f=0.004$。而原有算法达到同样的精度则进行了 119 次迭代。两种方法的反演结果一样：$x_0=4.980$，$y_0=10.000$，$z_0=15.059$。图 6.2 给出了两种方法的收敛曲线。

表 6.2　参数搜索范围

参数	搜索范围/km
x_0	−10～10
y_0	−5～20
z_0	0～30

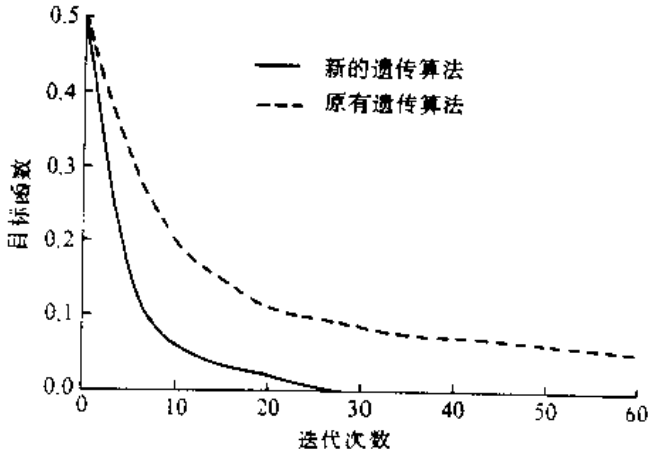


图 6.2　两种方法的收敛曲线对比

6.4.2　与逐步缩小搜索范围的方法结合

S 形函数和逐步缩小搜索范围的方法都是为了提高 GA 的收敛速度而采取的改进措施。它们各有特

点，从不同的角度发挥其作用。如果把这两种方法结合起来，可以收到更好的加速收敛效果。下面以一密度球体模型的反演例子来说明这一点。为叙述方便，称逐步缩小搜索范围的方法为方法 1，S 形函数为方法 2，两者的结合为方法 3。

球体空间坐标及半径的理论值为 $x=350\text{m}$，$y=350\text{m}$，$h=200\text{m}$，$r=100\text{m}$。反演时用到的各类参数为：

遗传算法参数：$P_c=0.98$，$P_m=0.004$，$Q=20$

方法 1 的参数：当目标函数值小于 5.0 时，开始以 $D=4.0$ 的速率收缩，每收缩一次后迭代 30 次。

方法 2 的参数：$\alpha=2$，$\beta=1300$，$\theta=(1+0.3)\ Fit_{\text{mean}}$

参数搜索范围见表 6.3。

表 6.3 参数搜索范围

参 数	搜索范围/m
x	−400～700
y	−400～700
h	0～400
r	0～200

在初始搜索精度为 $\Delta x=\Delta y=8.66$，$\Delta h=6.35$，$\Delta r=6.45$ 的条件下，三种方法的收敛曲线见图 6.3，反演结果见表 6.4。为了能更清楚地比较不同方法在迭代后期的差别，图 6.3 中的纵轴采用对数坐标。

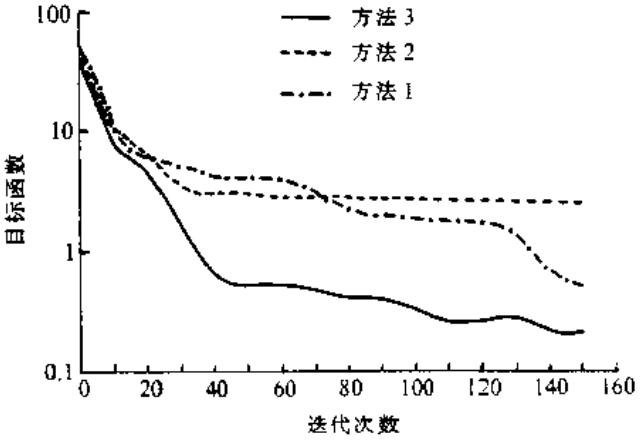


图 6.3 在低搜索精度条件下三种方法收敛速度的比较

从图中可以看到，在迭代的前期，方法 2 的效果优于方法 1，而在迭代后期，方法 1 优于方法 2。方法 3 的总体效果优于方法 1 和方法 2。出现这种情况的原因是，方法 2 中没有包含搜索精度随迭代进行逐步提高的机制，当迭代进行到一定程度后，由于迭代过程已达到或接近给定的初始搜索精度，使方法 2 向其真值的进一步搜索受到限制，所以相应的目标函数不再进一步改善。而方法 3 综合了两种方法的优点，所以其综合效果最好。

表 6.4 低精度搜索条件下三种方法的反演结果

	x/m	y/m	h/m	r/m
方法 1	352.300	346.409	201.847	100.369
方法 2	353.543	353.543	232.258	106.667
方法 3	349.128	349.128	202.699	100.806
理论值	350.000	350.000	200.000	100.000

鉴于这种情况，把初始搜索精度提高到 $\Delta x=\Delta y=0.54$，$\Delta h=0.39$，$\Delta r=0.39$，考察在这种情况下方法 2 的收敛情况及反演结果，见图 6.4。

由上图可见，在较高的初始搜索精度条件下，方法 2 的效果得到了明显的改善。当迭代进行到 80 次时，目标函数就从 18 下降到 1。在后面的迭代过程中，目标函数继续下降，最后

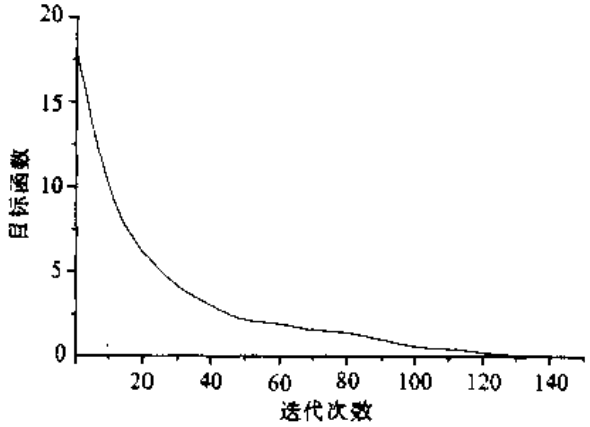


图 6.4　在高搜索精度时方法 2 的收敛曲线

下降到 0.109。反演结果也很令人满意，$x=350.171$，$y=350.171$，$h=201.369$，$r=100.196$，与其理论值相差很小。可见，只要搜索精度不受到限制，方法 2 就会有优于方法 1 的收敛效果，尤其是在迭代后期。

小　结

综合以上讨论，可以把加速收敛的措施归纳如下：

(1) 在计算机内存不允许设置较高的初始搜索精度的情况下（初始搜索精度高，模型的二进制编码就很长，占用内存多），采用方法 1 来加速收敛，因为方法 1 可以在迭代过程中逐步提高搜索精度。

(2) 在计算机内存允许设置较高的初始搜索精度的情况下，可采用方法 2 来加速收敛，因为方法 2 几乎不再增加内存的使用量，而且在较高的初始搜索精度条件下，它的效果更好。

(3) 方法 3 是在上述两种情况下都可以使用的方法，它不仅具有方法 1 可以在迭代过程中逐步提高搜索精度的能力，而且具有在没有搜索精度限制的情况下迭代后期收敛速度快的特点，是一种比较完备的加速收敛方法。

因此，在以后的应用中，都采用方法 3 作为加速收敛的基本方法。

7 二维密度界面位场遗传反演方法研究

7.1 引 言

利用重力资料研究地壳密度界面分层，对于了解地壳深部构造、区域地质研究及金属和非金属矿产探测，都是十分重要的。国内外的研究人员曾采用很多不同的方法开展这一工作。

由于位场反问题的多解性，用重力资料同时反演多个密度界面几乎是不可能的。所以，在解决多界面地壳分层结构问题时用正演拟合代替反演计算的方法在目前仍然比较常用。这种方法的好处是可以根据各种地质、地球物理资料，用人机对话的方式由手工来调整模型参数。其不足之处在于，要耗费大量时间，并且不能保证目标函数在某个特定的范数下达到极小。

频率域中的反演方法对界面的起伏幅度有严格限制。而且在计算过程中要反复采用滤波手段，这样做对数据中的有用信息影响较大。尽管其速度很快，但是由此带来的好处并不能弥补有用信息的损失。

本章把 GA 的基本原理与二维变密度重力异常计算方法相结合，提出空间域地壳分层结构的遗传反演方法。这种方法的主要特点是，采用正演拟合与遗传反演相结合。在有人工地震测深资料可利用的部位，充分利用这些资料确定界面的几何形态，用正演拟合的方法得到相应的重力异常。在没有深部资料的部位，根据重力资料用反演的方法得到界面形态。因此，这是一种重力、地震约束反演方法。

7.2 地壳密度模型及正演方法

7.2.1 地壳密度模型

地下物质的分布极其复杂，为讨论问题的方便，对地壳模型做如下简化。设地下存在一密度界面，在 $(0, \xi)$ 之间其深度是 ξ 的单值函数，其平均深度为 h_0。在 $(0, \xi)$ 之外，界面向两端无限延伸。根据界面的起伏和密度的分布，在横向上可以把 $(0, \xi)$ 范围内界面与地面之间的物质分成若干密度区间。界面与地面之间物质的密度分布在横向上可以是变化的，这种密度的横向变化可以用不同的区间具有不同的密度来体现。若地下存在多个物质层，可以同样处理。图 7.1 所示的是一个双界面密度模型。

这种地壳密度模型的基本特点是：① 在横向上，模型可以分成若干区间。密度在横向上的不均匀性可以用一系列具有不同密度的区间来表示。其中，各个区间的密度在横向上可以是常数，但不同的区间可以具有不同的密度。② 在纵向上，模型可以分成若干层。密度在纵向上的不均匀性可以用具有不同密度的物质层来表示。

可见，这种模型可以模拟各种变密度的地壳结构，因此有很大的灵活性，它用较简单的形式客观地近似了实际地壳结构的基本特征。汪炳柱等（1995）曾采用过类似的地壳密度模型，但只考虑了密度仅随深度变化的情况。这里的模型中密度在横向和纵向上都是变化的，这

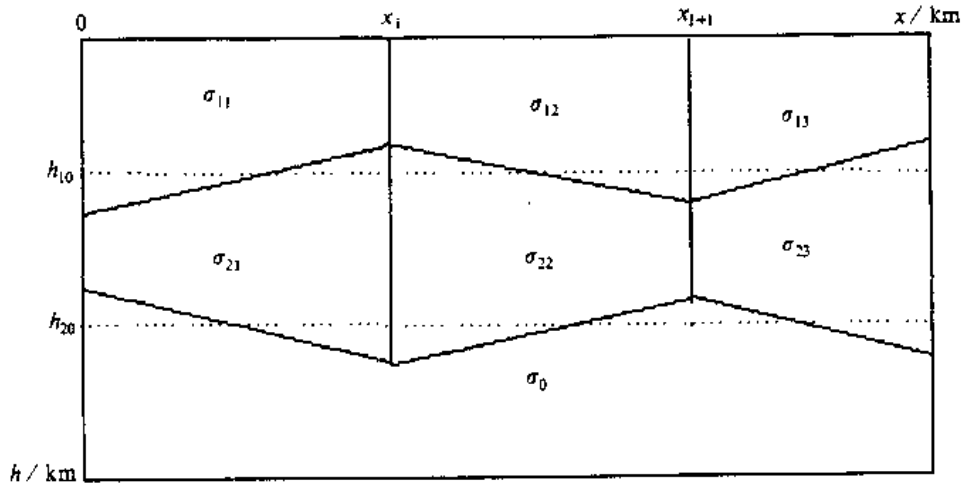


图 7.1　双界面地壳密度模型

是一种有意义的改进。

7.2.2　正演公式

在图 7.1 的地壳密度模型中，观测点的坐标用 x 表示，模型内各点的坐标用 ξ、ζ 表示。定义 $\Delta\sigma_1$ 和 $\Delta\sigma_2$ 分别为第一层和第二层地壳的平均密度与下层密度之差。根据模型分解的思想和位场的叠加原理，这样一种地壳密度模型在计算点 x 处产生的重力效应为

$$g(x) = 2\pi G\Delta\sigma_1 h_{10} + \sum_{i=1}^{n_1} G\Delta\sigma_{1i}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \ln\frac{(\xi-x)^2 + h_1(\xi)^2}{(\xi-x)^2 + h_{10}^2}\,\mathrm{d}\xi$$

$$+ 2\pi G\Delta\sigma_2 h_{20} + \sum_{i=1}^{n_2} G\Delta\sigma_{2i}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} \ln\frac{(\xi-x)^2 + h_2(\xi)^2}{(\xi-x)^2 + h_{20}^2}\mathrm{d}\xi \qquad (7.1)$$

其中，G 为引力常数，h_{10}和 h_{20}为界面平均深度，n_1 和 n_2 分别为第一层和第二层的密度区间数，$\Delta\sigma_{ji}$（$j=1$，2）为第 j 层内第 i 个密度区间的剩余密度。

对（7.1）式的计算采用数值积分。

最终的重力异常 $\Delta g(x)$是地壳内各层重力效应之和与地球正常场 $g_0(x)$之差，即

$$\Delta g(x) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x) - g_0(x) \qquad (7.2)$$

其中，n 是地壳内物质层的层数。

7.3　遗传反演方法

在研究地壳分层结构的反演问题中，正演所需的参数是各物质层中各密度区间的左右边界坐标 ξ_i 和 ξ_{i+1}，相应的界面埋深 h_i（ξ_i）和 h_i（ξ_{i+1}）（下标 i 表示层序号，下标 j 表示第 i 层的密度区间的序号）和各区间的密度 σ_{ij}。根据问题的特点，在反演时假定 ξ_i 和 ξ_{i+1}为已知，而密度 σ 可根据人工地震测深资料由纵波波速 v_P 经转换得到。于是，待求的模型参数就只有各层界面的埋深 $h(\xi)$。但是，由于重力反问题固有的多解性，同时对多个密度界面同时做反演计算有一定困难。因此，界面的埋深也要根据人工地震资料来确定，而只把某个需要专门研究的界面的埋深做为反演时的待求参数。如果掌握的资料比较充分，则可以试验进行多界

面的同时反演。

在确定待求参数的搜索范围时，先由人工地震测深资料确定其大概位置，再根据具体情况给出其搜索范围。这些参数确定之后，即可进行反演计算。

反演中止条件为：①目标函数小于给定精度；或②演化到指定次数。

7.4 数值模拟

为了检验遗传反演方法效果，首先在理论模型上做了数值模拟。理论模型见图 7.1。该模型有两个密度界面，以 51 个重力异常正演计算值做为观测数据，分别单独反演了第一、第二个界面的埋深，最后对同时反演两个界面的情况也做了试验。试验中综合采用了三项加速收敛措施。

1）反演第一个界面

反演第一个界面时是把第一个界面的埋深做为待求参数，其它界面的埋深及密度等参数做为已知量。开始时取第一界面的埋深是在其理论值的基础上增加±2km 的变化范围做为参数的初始搜索范围。本例中初始参数及反演结果见表 7.1。

表 7.1 第一个界面的参数及反演结果（单位：km）

理论值	搜索范围	反演结果	误差
12	10～14	11.971	0.029
8	6～10	8.029	0.029
12	10～14	11.971	0.029
8	6～10	8.023	0.023

当迭代进行到 74 次时目标函数满足给定精度（0.1）。由反演得到的模型参数正演计算的理论重力异常与观测值的最大误差为 0.215。

若不采用加速收敛措施，在相同的反演参数条件下，迭代 300 次仍不能满足给定精度。

2）反演第二个界面

反演第二个界面时是把第二个界面的埋深做为待求参数，其它参数为已知。初始参数及反演结果见表 7.2。

表 7.2 第二个界面的参数及反演结果（单位：km）

理论值	搜索范围	反演结果	误差
18	16～22	17.936	0.064
22	20～24	22.072	0.072
18	16～22	17.906	0.094
22	20～24	22.099	0.099

迭代共进行了 85 次。由终模型计算的理论重力异常与观测值的最大误差为 0.282。

值得指出的是，在解这种有两个界面的重力反问题中，有些研究人员采用传统反演方法，即先由重力异常反演第二个界面，然后从重力异常中扣除第二个界面的影响，再用剩余的重力异常反演第一个界面。这样做的结果使得两个界面的反演结果必然同步起伏，这种结果有

时并不能反映真实情况。这里所介绍的反演方法，是在假定已知一个界面的情况下用总的重力异常反演另一个未知的界面，尽管两个界面的起伏形态不一样，但反演结果还是比较准确地给出了两个界面各自的理论形态。

3）两个界面的同时反演

重力反问题的多解性不支持多个界面的同时反演，即已知和数不能推知各个加数。所以，在没有充分掌握资料的情况下同时反演多层界面是没有意义的。这里所做的两个界面同时反演的数值模拟，是在假定所有密度值为已知，并且对所有界面的埋深比较清楚的条件下进行的。这时可以给模型参数施加很强的约束，只有在这种条件下才有可能实施多个界面的同时反演。

仍以图 7.1 的理论模型为例，参数的搜索范围及反演结果见表 7.3。

表 7.3 两个界面的参数及反演结果（单位：km）

界面	理论值	搜索范围	反演结果	误 差
1	12	11.5～12.5	12.004	0.004
1	8	7.5～8.5	8.131	0.131
1	12	11.5～12.5	11.996	0.004
1	8	7.5～8.5	8.208	0.208
2	18	17.5～18.5	18.226	0.226
2	22	21.5～22.5	21.740	0.260
2	18	17.5～18.5	18.237	0.237
2	22	21.5～22.5	21.508	0.492

反演结束时目标函数平均误差为 0.099，其中最大误差为 0.233。

7.5 郑州—临汾剖面重力异常机制分析

郑州—临汾剖面是郑州—延川人工地震测深剖面的一部分，全长 280 余公里。在地理上，该剖面由东向西穿过华北平原和山西高原南部。在全国布格重力异常图上，它横穿中国东部重力梯级带。沿该剖面深部地球物理探测程度较高，曾做过地震测深、重力测量和大地电磁测深等，探测结果见图 7.2。

7.5.1 剖面地球物理场特征

1）人工地震测深

根据人工地震测深资料，剖面内地下存在三个主要的速度分界面：

从地表至地下 11～13km 深度范围内是上地壳，纵波速度小于 6.3km/s，近地表处速度变化很大，为 2.6～5.0km/s，其余普遍为 5.0～6.0km/s。

从 11～13km 至 30km 深度范围内是中地壳，在该层地壳内除去某些低速层外，纵波速度普遍为 6.3～6.5km/s。

从 30km 至 38～40km 深度范围内为下地壳，纵波速度为 6.8～7.1km/s。该层地壳的下界面即为莫霍界面。莫霍界面以下纵波速度大于 7.9km/s。

这种速度分布表明，地壳具有三层速度结构。

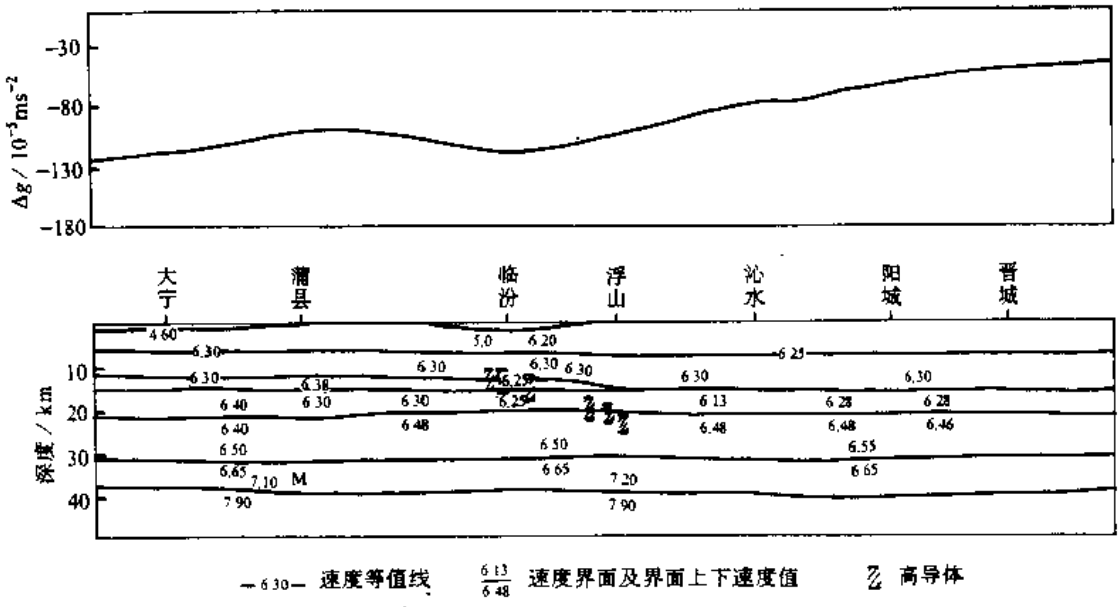


图 7.2 郑州—临汾剖面地球物理探测成果

（—6.30—速度等值线；$\frac{6.13}{6.48}$速度界面及界面上下速度值，单位：km/s；阴影块为高导体）

2）大地电磁测深

根据国家地震局地质研究所大地电磁测深资料，临汾附近的中地壳内分布有许多高导体，在纵向上这些高导体从 10～30km 及上地幔都有分布。

3）布格重力异常

布格重力异常总的变化趋势是由西向东逐渐上升。在此背景下，临汾以西的吕梁山区布格重力异常为低值异常中的局部重力高，在临汾附近为局部重力低，临汾以东为布格重力异常上升段。重力异常东西落差约为 $70\times10^{-5}\mathrm{ms}^{-2}$。

7.5.2 速度、密度换算

由纵波波速到密度之间的转换，常用的是 Nafe-Drake 拟合公式，其数学表达式为

$$\sigma=\begin{cases}2.78+0.27(v_P-6.0) & v_P\leqslant 7.0\\ 3.05+0.33(v_P-7.0) & 7.0<v_P\leqslant 7.8\\ 3.05+0.33(v_P-7.0)-0.1 & 7.8<v_P\end{cases}\qquad(7.3)$$

在以后的资料处理中，均采用（7.3）式做速度与密度之间的转换计算，由此得到的密度值比推测的密度值更为可靠。

7.5.3 正演拟合

根据人工地震测深、大地电磁测深资料和由（7.3）式转换得到的密度数据，构制了郑州—临汾剖面的地壳密度模型，见图 7.3 下部。据此密度模型并考虑了地形的影响之后，正演计算得到的理论重力异常见图 7.3 上部点划线。与图 7.2 比较可见，理论重力异常与实测重力异常在变化形态上比较相似，但它们之间存在一明显的系统偏差。这种偏差在剖面西部较小，在东部较大，由西向东呈线性增加的趋势。显然，在莫霍界面以下的地球深部，即在上地幔内存在质量剩余。这些高密度的质量剩余，在横向上也是不均匀分布的，它对地壳重力

场有着区域性的控制作用。因此，有必要考虑上地幔内高密度层不均匀分布的影响，使理论重力异常与实测重力异常之间的系统偏差得到校正。

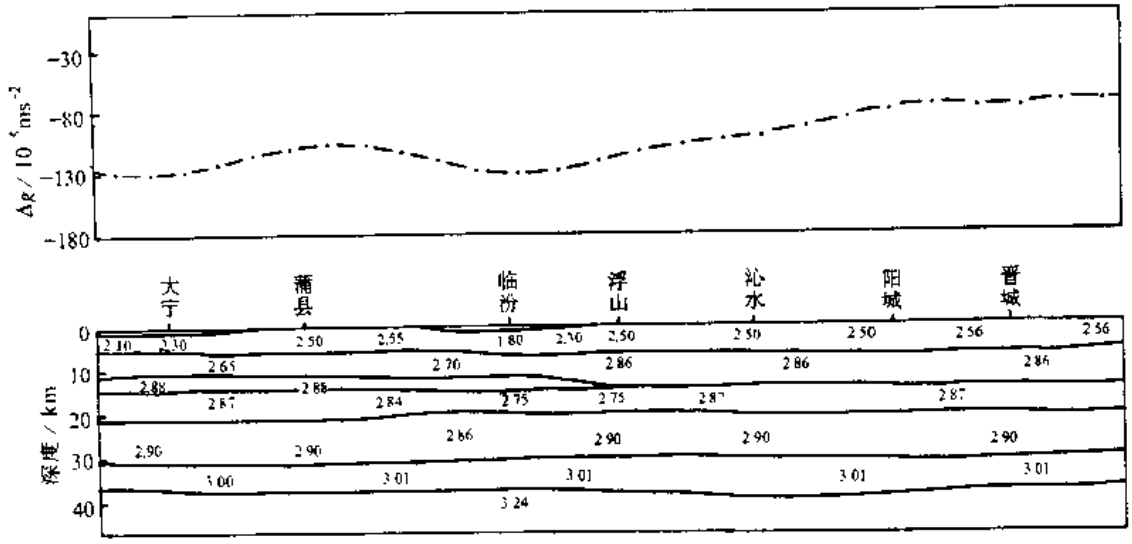


图 7.3　郑州—临汾剖面正演拟合结果

（图中数字为密度，单位：$10^3kg/m^3$）

7.5.4　反演计算

为了确定上地幔内高密度层的形态，首先根据地震测深、大地电磁测深和上地幔密度分布资料给出它的大致形态，再用遗传反演方法计算出它的准确分布位置。

上地幔高密度层的初始参数见表 7.4。

用遗传反演方法确定的上地幔高密度层的位置见图 7.4 下部，增加了上地幔高密度层以后的理论重力异常见图中离散点曲线。这时理论异常与实测异常比较接近，平均误差为 0.482，其中最大误差为 1.703。

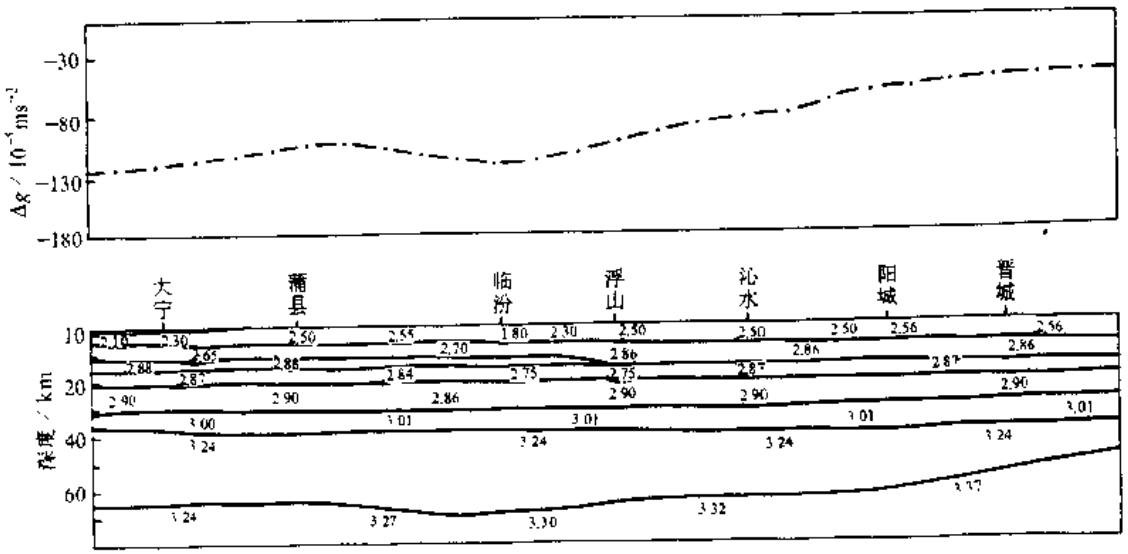


图 7.4　郑州- 临汾剖面反演结果

（图中数字为密度，单位：$10^3kg/m^3$）

表 7.4　上地幔高密度体的初始参数

区　　间	密度/(10^3kg/m^3)	深度范围/km
蒲县以西	3.24	63～67
蒲县—临汾	3.26	59～63
临汾—浮山	3.29	68～72
浮山—阳城	3.31	64～68
阳城以东	3.35	43～47

7.5.5　异常机制分析

根据以上正演拟合和反演计算得到的剖面密度模型，可以比较合理地解释实测布格重力异常曲线。

(1) 蒲县附近的局部重力高是由上地壳浅部密度横向不均匀变化引起。在上地壳的浅部，蒲县以西密度为 2.1～2.3 (10^3kg/m^3)，蒲县以东密度为 2.5～2.55 (10^3kg/m^3)，这种不均匀的密度变化是引起蒲县局部重力高的主要原因。

(2) 临汾附近的局部重力低是由上地壳的密度横向不均匀变化和中地壳内的低密度体所引起。在上地壳中，临汾附近的密度为 1.8～2.2 (10^3kg/m^3)，而东西两侧的密度均为 2.5 (10^3kg/m^3) 左右，这种密度的不均匀变化是引起临汾局部重力低的浅部因素。在中地壳内，临汾附近的密度也较两侧偏低。根据大地电磁测深结果，在临汾附近的地下 9～15km 和 25～30km 深度范围内存在高导体。这些高导体的位置在地面上的投影与实测重力异常曲线中局部重力低的位置有很好的对应关系。由此推测，这些高导体也是引起临汾局部重力低的因素。

(3) 浮山及其以东的区域性重力高，是由上地幔密度横向变化引起的。这是因为，第一，这种数百公里区域性、大范围的重力异常变化，只能由地壳深部的因素所控制。第二，上述正、反演的结果表明，该段剖面位于上地幔密度分布高值区，与西段的密度有很大的差异，这种密度上的差异反映了地球深部物质分布的不均匀性，正是这种物质的不均匀分布造成东段重力异常与西段有明显差别。

(4) 人工地震探测结果表明，在临汾附近，浅层密度在全剖面最低，这与山西断陷带内巨厚的新生代堆积相关。中地壳内存在低密度体。上地幔密度结构呈异常状态的过渡带，其东部密度相当高，且越往东密度越高，埋深越浅。西部密度相对低，埋深变化不大。这反映了从地表至上地幔均相应地为异常带，异常带大地热流值偏高。异常带附近曾发生了以 8 级地震为代表的一系列强地震。

7.6　有关问题讨论

7.6.1　重力异常与莫霍界面起伏的关系

大陆地壳是一个很复杂的多层结构，地壳的厚度即莫霍界面的深度可以在 30～70 余公里深度范围内变化，通常分为上地壳、中地壳和下地壳。各层地壳内的物质成分受地壳运动的作用，其物性参数在横向和纵向上呈复杂的不均匀形式变化，产生复杂的重力异常。莫霍界面做为壳幔分界面，该界面上、下物质有着很大的物性差异，因此该界面的起伏变化对地球重力场有着很强的影响。地壳以下，上地幔中的物质成分也不是均匀的，在不同的地区有高

密度体或低密度体存在，并且其物性参数有明显的横向不均匀性。如果上地幔中分布有物性参数不均匀变化的物质成分，则可以在大范围内影响地球重力场。重力异常无疑是上述各种因素综合作用的结果。加之地形对重力场也有一定的影响作用，这就使得影响地球重力场的因素更为多样化。可见，重力异常与莫霍界面形态的关系是相当复杂的非线性关系、而不是简单的线性关系。因此，将区域重力场的变化仅仅归因于莫霍界面的起伏有时是不恰当的。

7.6.2 解重力反问题时的约束条件

从以上讨论可知，地壳是一个很复杂的多层结构体，而影响地球重力场的因素又很多，因此在根据重力异常解地壳密度界面反问题时存在着固有的多解性。如果没有地震测深资料的约束和其它已知条件的限制，利用重力异常求解地壳密度界面的反问题将没有意义。本文给出的遗传反演方法在利用已知的约束条件方面有独到的方便之处，只需给出相应的参数变化范围即可。

小 结

(1) 地下介质的情况极为复杂。为便于理论研究和数值模拟，根据模型分解与位场叠加的思想，提出了多层地壳变密度模型，其特点是同时考虑了密度在纵向上和横向上的不规则变化，它比较简单、方便地模拟了实际地壳的基本特征。根据此模型给出了相应的重力异常正演计算公式。

(2) 以遗传算法为基础，结合上述正演公式，形成了一套遗传反演方法，这种反演方法属于重、震约束反演方法。它对正问题不做任何形式的线性化处理，对界面的起伏幅度没有限制，并且在反演过程中对观测数据也不做任何转换，这将有利于保留数据中的有用信息。它既可以只反演某个界面的埋深，也可以根据先验信息的约束同时反演多个界面，并且不会出现多个界面同步起伏的情况。

(3) 在利用人工地震测深结果时，采用 Nafe-Drake 拟合公式由纵波速度计算密度值，由此得到的密度值更为可靠。

(4) 根据人工地震测深、大地电磁测深和布格重力异常等深部地球物理资料，利用正演拟合与反演计算相结合的方法，得到郑州- 临汾剖面的地壳密度模型。根据所得结果，对产生该剖面重力异常的机制做了分析。其中西部的局部异常是上、中地壳内密度横向不均匀变化造成的，而东部的区域性异常则受到地球深部因素的控制，上地幔物质成分的不均匀分布是造成这种区域性异常的重要深部因素。

(5) 根据以上结果，讨论了影响重力异常的各种因素，指出重力异常曲线与莫霍界面的变化形态之间存在着复杂的非线性关系，而不是简单的线性关系。同时，由于影响重力异常的因素多样化，所以在解重力反问题时存在着固有的多解性。只有在充分掌握有关先验信息的前提下，才有可能得到有意义的地球物理结果。而遗传反演方法可以非常方便地利用各种先验信息。

8 三维界面位场遗传反演方法研究

8.1 引 言

由地面已知位场资料反演物性界面，由此了解地壳内主要物性分界面如莫氏面、居里面的变化起伏情况，是一个有着重要现实意义的课题，无论在地球物理研究，还是在矿产预测方面都有重要应用。因为三维数学模型能更为准确地描述复杂的地质体，因此，国内外的研究人员对此极为关注，提出了很多三维位场反演方法。如在根据场、源的物理和几何参数关系建立起来的外部位场函数关系基础上，借助于线性反演方法而形成的直接反演方法，是一种发展较早的方法。但这种方法设置了很多简化条件，并对场、源之间的非线性关系做了线性化处理，所以有时其解与实际情况会有很大偏差。再如间接迭代法，是采用空间域离散模型，用大量的棱柱体模拟复杂的地质体，通过空间域迭代途径不断修改初始模型，从而达到与实测位场资料的最佳拟合。这种方法正演精度高，但当参数太多时，空间域正演计算要耗费大量机时，所以限制了它在实际工作中的应用。

1973 年，Parker 提出了物性界面位场正演计算的频率域理论公式（Parker，1973），次年，Oldenburg 把它推广成迭代反演形式，形成了三维界面位场频率域反演方法（Oldenburg，1974）。80 年代以来，国内的很多研究人员对原 Parker 公式又做了改进，在此基础上建立了物性参数三维分布的界面位场频率域快速计算方法，使物性参数不仅在平面上可以任意变化，在深度上也可以呈线性或指数函数形式变化，使这种方法的应用范围更宽（冯锐，1986；潘作枢，1992）。

频率域快速计算方法在正演计算中利用了快速富里叶变换(FFT)的高速度，在同样精度条件下，其正演计算速度比离散模型方法至少快一个数量级以上。随着这一工作的开展，人们注意到这是一种位场正演计算快速、有效的方法，在我国的地球物理研究工作中得到广泛的应用。

但是，频率域方法的反演计算则存在一些问题。首先，它对界面的起伏幅度有一定限制。其次，反演公式中含有一项对高频干扰成分有放大作用的向下延拓因子，它往往使迭代过程发散。为克服向下延拓因子的不良影响，不同的研究人员在各自的应用研究中采取了不同的措施，如采用正则化滤波（安玉林，1985）、补偿圆滑滤波、逐次向下延拓（李燕，1993）等方法，希望使反演过程稳定收敛。但是，作者认为这里仍有一些问题值得考虑。首先，向下延拓计算本身在位场数据处理中就是一个难度很大的问题，不容易彻底解决。另外，有时在选择滤波参数时也会遇到困难，很难做到恰如其分，这样也影响反演结果。最后一点，也是最重要的一点，即在反演过程中反复使用滤波手段，必然影响数据质量，损失有用信息，而这些损失并不能用计算上的高速度得以补偿。

可见，上述界面位场频率域快速计算方法，尤其是反演部分仍有进一步改进的必要。作者认为，与其花很多精力去解决那些不易解决的问题，倒不如彻底避开它们，另辟蹊径。为

此，这里提出一种把界面位场频率域快速正演计算方法与 GA 相结合的三维界面位场反演方法——位场遗传反演方法。这种方法的特点是充分利用上述正演方法的高速度，同时，采用 GA 做为反演方法，这样就避免了频率域反演方法中的那些不易克服的困难。因此，这是一种空间域与频率域相结合、扬长避短的界面位场反演方法。

8.2 三维物性界面的频率域快速正演方法

三维物性界面的正演计算方法是在 Parker 方法的基础上改进得到的，其中最主要的是要利用它的高速度。这种计算方法的公式推导及改进在很多文献中都有报道，但为了内容的完整性，将其主要推导步骤及改进结果整理归纳如下（柴玉璞，1990；潘作枢，1992）。

8.2.1 坐标系

坐标系如图 8.1 所示。其中测点 P 的坐标为 (x, y, z)，体积元中心点 Q 的坐标为 (ξ, η, ζ)。

测点 P 的坐标矢量为

$$r = xi + yj + zk$$

它在 XOY 平面上的投影为

$$r = xi + yj$$

Q 点的坐标矢量为

$$r_0 = \xi i + \eta j + \zeta k$$

它在 XOY 平面上的投影为

$$r_0 = \xi i + \eta j$$

因此，P、Q 两点的距离为

$$R = [(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2]^{1/2}$$

以上式子中，i、j、k 分别是沿 X，Y，Z 轴的单位矢量。

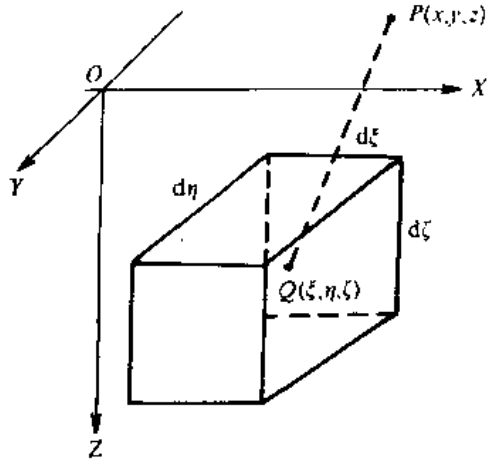


图 8.1 坐标系

8.2.2 重力位的频谱

根据上述坐标系，重力位可表示为

$$V(r,z) = f\iiint_D \frac{\sigma(r_0,\zeta)}{R}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{8.1}$$

其中，f 是万有引力常数，$\sigma(r_0,\zeta)$是密度函数，D 是积分区域。

对(8.1)式做富里叶变换，有

$$F[V(r,z)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int V(r,z)\exp(-i\omega \times r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{8.2}$$

其中，ω 为圆频率，其模 $\omega = |\omega| = (u^2+v^2)^{1/2}$，$u$ 和 v 分别为 X、Y 方向的圆频率。

把(8.1)式代入(8.2)式，有

$$F[V(r,z)] = f\iiint_D \sigma(r_0,\zeta)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{1}{R}\exp(i\omega \times r)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{8.3}$$

上式中方括号外的积分乘以 $\exp(-i\omega\times r_0)$，方括号内的积分乘以 $\exp(i\omega\times r_0)$，有

$$F[V]=f\iiint_D \sigma\exp(-i\omega\times r_0)\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R}\exp(-i\omega\times(r-r_0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{8.4}$$

设：ω 与 $(r-r_0)$ 之间的夹角为 θ，及

$$R_0=(x-\xi)i+(y-\eta)j$$

有

$$\omega\times(r-r_0)=R_0\cos\theta \tag{8.5}$$

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=R_0\mathrm{d}R_0\mathrm{d}\theta \tag{8.6}$$

令(8.4)式中方括号内的积分为 I，把(8.5)和(8.6)式代入，有

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{R_0}{[R_0^2+(\zeta-z)^2]^{1/2}}\left[\int_0^{2\pi}\exp(-i\omega\times r_0)\cos\theta\mathrm{d}\theta\right]\mathrm{d}R_0$$

上式中方括号内的积分为 $2\pi j_0(\omega\times R_0)$，其中 $j_0(\omega\times R_0)$ 是以 ω 和 R_0 为变量的零阶贝塞尔函数，故有

$$I=2\pi\int_0^{\infty}\frac{R_0 j_0(\omega\times R_0)}{[R_0+(\zeta-z)^2]^{1/2}}\mathrm{d}R_0$$

利用零阶汉克尔变换，求得上式积分为

$$I=\frac{2\pi}{\omega}\exp[-\omega(\zeta-z)] \tag{8.7}$$

把(8.7)式代入(8.4)式，有

$$F(V)=f\frac{2\pi}{\omega}\exp(\omega z)\iiint_D \sigma(r_0,\zeta)\exp(-\omega\zeta)\exp(-i\omega\times r_0)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{8.8}$$

(8.8) 式就是任意三度体重力位的频谱表达式。

8.2.3 三维物性层的重力频谱表达式

设物性层的顶界面埋深为 h_1，底界面埋深为 h_2。又设密度函数 σ 不仅随平面位置 r_0 变化，而且随深度 ζ 呈指数变化，有

$$\sigma(r_0,\zeta)=\sum_{l=0}^{L}\zeta_l\,\sigma_l(r_0)\exp(\lambda\zeta)$$

并令

$$z=z-z_0(z_0\text{ 为调整深度})$$

则由(8.8)式，先对 ζ 积分，有

$$F(V)=\frac{2\pi f}{\omega}\exp(-\omega(z_0-z))\sum_{l=0}^{L}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(r_0)\exp(-i\omega\times r_0)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\cdot\int_{h_1}^{h_2}\zeta_l\exp((-\omega+\lambda)\zeta)\mathrm{d}\zeta\right]$$

$$=\frac{2\pi f}{\omega}\exp(-(z_0-z))\times E(u,v) \tag{8.9}$$

其中：

$$E(u,v)=\sum_{l=0}^{L}\left[\iint_{-\infty}^{\infty}\sigma_1(r_0)\exp(-i\omega\times r_0)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\int_{h_1}^{h_2}\zeta_l\exp(-\omega+\lambda)\zeta\mathrm{d}\zeta\right] \tag{8.10}$$

上式中 h_1 和 h_2 随 r_0 变化。

用分部积分法求出对 ζ 的积分，最后可得

$$E(u,v)=\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m(-\omega+\lambda)^{n-m-1}\frac{l!}{n!(1-m)!}F(\sigma_1\times\zeta^{n-m+1})\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.11}$$

其中，n 为指数项展开成级数的项数。

(8.9) 式和 (8.11) 式就是具有顶、底界面物性层的重力位频谱表达式。

根据富里叶变换的微分性质，由 (8.9) 式可得 Δg 的频谱表达式：

$$\begin{aligned}F(\Delta g)&=\frac{\partial}{\partial z}F(V)\big|_{z=0}=\omega F(V)\big|_{z=0}=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)E(u,v)\\&=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{l=0}^{L}\sum_{m=0}^{l}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^m(-\omega+\lambda)^{n-m-1}\frac{1!}{m!(1-m)!}\cdot\\&\quad F(\sigma_1\zeta^{n-m+1})\Big|_{h_1}^{h_2}\end{aligned} \tag{8.12}$$

上式就是双界面模型的 Δg 频谱表达式，式中令 $z=0$ 是假设观测面与 XOY 平面重合。

8.2.4 三维物性层的磁频谱表达式

根据以上的讨论，同理可得 ΔT 的频谱表达式。

表示磁位 U 与重力位 V 关系的泊松公式为

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=-\frac{1}{4\pi}\frac{M}{f\sigma}\left(\alpha\frac{\partial V}{\partial x}+\beta\frac{\partial V}{\partial y}+\gamma\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&=-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{f\sigma}M\mathrm{grad}(V)\end{aligned} \tag{8.13}$$

其中：M 为磁化强度矢量。α、β、γ 是 M 的三个方向余弦。对上式做富里叶变换，有

$$F[U]=-\frac{M}{4\pi f\sigma}[i(u\alpha+v\beta)+m\gamma]F[V] \tag{8.14}$$

把(8.9)和(8.11)式代入(8.14)，并把(8.11)式中的密度函数 $\sigma(\gamma_0)$，换成磁化强度函数 $M(r_0)$，同时令 $z=0$，有

$$F[U]=-\frac{1}{4\pi}\frac{2\pi}{f\sigma}\exp(-\omega z_0)[i(u\alpha+v\beta)+m\gamma]E[u,v] \tag{8.15}$$

由磁场与磁位的关系，有

$$\Delta T=-\mu_0\frac{\partial U}{\partial t}=-\mu_0\left(\alpha_0\frac{\partial U}{\partial x}+\beta_0\frac{\partial U}{\partial y}+\gamma_0\frac{\partial U}{\partial z}\right) \tag{8.16}$$

其中，μ_0 是真空磁导率，t 是正常场方向，α_0、β_0、γ_0 是正常场的三个方向余弦。对上式做富里叶变换，有

$$F(\Delta T)=-\mu_0[i(\alpha_0u+\beta_0v)+\gamma_0w]F(U)$$

把(8.15)式代入上式，有

$$F(\Delta T)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2\pi}{\omega}[i(\alpha_0u+\beta_0v)+\gamma_0w][i(\alpha u+\beta v)+\gamma w]\exp(-\omega z_0)E(u,v) \tag{8.17}$$

这就是三维物性层的 ΔT 频谱表达式。式中 $E(u,v)$ 由(8.11)式表示，但其中的 $\sigma(r_0)$ 由 $M(r_0)$ 代替。

(8.12)和(8.17)式分别是物性层重、磁场的频率域正演表达式，由它们得到位场的频谱后，再做富里叶反变换，即可得到相应的位场空间域正演结果。

8.2.5 位场频谱表达式的简化

(8.12)和(8.17)式相对比较复杂，实际应用中可做一些简化。这里仅就重力问题给出相应简化公式，磁法问题与此类似。

(1) 密度函数只沿平面变化时，即 $\sigma=\sigma(r_0)$，则有

$$F(\Delta g)=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F[\sigma(r_0)\zeta^n]\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.18}$$

(2) 密度函数为常数时，σ 可提到求和号外面，

$$F(\Delta g)=(2\pi f)\sigma\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F[\zeta^n]\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.19}$$

(3) 密度函数不仅沿平面变化，面且随深度呈指数函数形式变化时，即

$$\sigma(r_0,\zeta)=\sigma(r_0)\exp(\lambda\zeta)$$

则：

$$F(\Delta g)=2\pi f\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega+\lambda)^{n-1}}{n!}F[\sigma(r_0)\zeta^n]\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.20}$$

(4) 密度函数不仅沿平面变化，面且随深度呈线性函数形式变化时，即

$$\sigma(r_0,\zeta)=\sigma_0(r_0)+\sigma_1\zeta$$

则：

$$F(\Delta g)=2\pi f\exp(-\omega z_0)\Big[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F[\sigma_0\zeta^n]+\frac{1}{\omega}F(\sigma_1\zeta^n)+F(\sigma_1\zeta^{n+1})\Big]\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.21}$$

(5) 密度函数呈二项式分布，即

$$\sigma(r_0,\zeta)=\sigma_0+\sigma_1\zeta+\sigma_2\zeta^2$$

则：

$$F(\Delta g)=2\pi f\exp(-\omega z_0)\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}\Big[F(\sigma_0\zeta^n)-\frac{n-1}{\omega}F(\sigma_1\zeta^n)-2\frac{n-1}{\omega_2}F(\sigma_2\zeta^n)\Big]+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-3}}{(n-2)!}F(\sigma_1\zeta^{n+1})\Big\}\Big|_{h_1}^{h_2} \tag{8.22}$$

8.2.6 单界面模型的位场频谱表达式及其简化

以上讨论了具有顶、底界面的物性层的位场频谱表达式，但在应用中，国内外的很多研究人员仍采用单界面模型，故这里把单界面模型做为一个简化的特例来讨论。

设(8.9)式中的 z_0 是单界面的深度参数，则该式中对 ζ 的积分上下限为[0,Δh]。Δh 可定义为

$$\Delta h(\xi,\eta)=h(\xi,\eta)-z_0$$

其中 $h(\xi,\eta)$是单界面的深度函数，$\Delta h(\xi,\eta)$是界面深度函数相对于深度参数 z_0 的起伏幅度，且是随 r_0 变化的。由此可得与(8.12)式对应的单界面 Δg 频谱表达式：

$$F(\Delta g)=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{l}\sum_{m}\sum_{n}(-1)^m(-\omega+\lambda)^{n-m-l}\frac{1!}{m!(1-m)!}F(\sigma\zeta^{n-m+l}) \tag{8.23}$$

其中密度函数 σ 为界面上下的密度差。

与(8.18)～(8.22)式对应的单界面简化公式为

(1) 对于 $\sigma=\sigma(r_0)$，有

$$F(\Delta g)=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F(\sigma\Delta h^n) \tag{8.24}$$

(2) 对于 σ=常数，有

$$F(\Delta g) = (2\pi f)\sigma\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F(\Delta h^n) \tag{8.25}$$

(3) 对于 $\sigma=\sigma\exp(\lambda\zeta)$，有

$$F(\Delta g) = (2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega+\lambda)^{n-1}}{n!}F(\sigma\Delta h^n) \tag{8.26}$$

(4) 对于 $\sigma=\sigma_0+\sigma_1$，有

$$F(\Delta g) = (2\pi f)\exp(-\omega z_0)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F(\sigma_0\Delta h^n) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-2}}{n(n-2)!}F(\sigma_1\Delta h^n)\right] \tag{8.27}$$

(5) 对于 $\sigma=\sigma_0+\sigma_1\zeta+\sigma_2\zeta^2$

$$F(\Delta g) = (2\pi f)\exp(-\omega z_0)\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n=!}F(\sigma_0\Delta h^n) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-2}}{n(n-2)!}F(\sigma_1\Delta h^n) + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-3}}{n(n-3)!}F(\sigma_2\Delta h^n)\right] \tag{8.28}$$

8.2.7 重、磁位场频谱表达式的比较

根据以上讨论，层状介质的界面频率域位场快速正演公式可归纳为

$$F(P) = CD\sum_{l}\sum_{m}\sum_{n}R(l,m,n)\,F(I) \tag{8.29}$$

其中：

①P 为表示位场的符号。

②$F(I)$ 为界面函数的频谱

$$F(I) = \left\{\left|\begin{matrix}\sigma\\ M\end{matrix}\right|(h_2^{n-m+1} - h_1^{n-m+1})\right\}$$

③C 为常数项

$$C = \begin{cases}\dfrac{2\pi f}{\omega} & \text{当 } P \text{ 为引力异常时}\\ \dfrac{2\pi}{\omega}\dfrac{\mu_0}{4\pi} & \text{当 } P \text{ 为磁力异常时}\end{cases}$$

④D 为方向谱，$D=D_1$，D_2

$$D_1 = \begin{cases}\omega & \text{当 } P \text{ 为 } \Delta g \text{ 时}\\ r_0\omega & \text{当 } P \text{ 为垂直磁异常时}\\ \alpha_0 u & \text{当 } P \text{ 为位场的 } X \text{ 分量时}\\ \beta_0 v & \text{当 } P \text{ 为位场的 } Y \text{ 分量时}\\ \alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w & \text{当 } P \text{ 为磁异常 } \Delta T \text{ 时}\end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases}1 & \text{当 } P \text{ 为引力异常时}\\ \alpha u + \beta v + \gamma w & \text{当 } P \text{ 为磁力异常时}\end{cases}$$

⑤R 为响应谱

$$R = (-1)^m\exp(-\omega z_0)(-\omega+\lambda)^{n-m-1}\frac{1!}{n!(l-m)!}$$

由此可见，对于重力异常和磁力异常的频谱，在 (8.29) 式中只有求和号以外的 C 和 D

项有所不同，而 R 和 F 在形式上是完全相同的。

以上就是三维物性界面位场频率域快速正演计算的基本公式。

8.3 界面位场遗传反演方法

由第 2 章知，遗传反演方法没有解析的反演迭代公式，它的反演过程通过一系列简单的数字处理来实现。对于不同的反演问题，应用 GA 的最主要差别在于确定参数的初始搜索范围。下面结合界面位场反演的具体情况，给出确定界面参数初值及搜索范围的方法。

为简单起见，仅以单一密度界面为例予以说明。

由布格重力异常数据 $\Delta g(x, y)$，根据公式

$$h_0(\xi,\eta) = \frac{\Delta g(x,y)}{\epsilon\pi f\Delta\sigma} \tag{8.30}$$

可得到界面的初始值 $h_0(\xi, \eta)$。其中，f 是万有引力常数，$\Delta\sigma$ 是界面上下的密度差，$1<\epsilon<2$。

得到 $h_0(\xi, \eta)$后，以 $h_0(\xi, \eta)$为中心，分别加上和减去一个大于零的常量 C_{ij}(如 3km，4km 等)，即得到界面深度搜索范围的上、下限 $h_{\perp}(\xi, \eta)$和 $h_{\top}(\xi, \eta)$：

$$h_{\top}(\xi,\eta) = h(\xi,\eta) - C_{ij} \tag{8.31}$$

$$h_{\perp}(\xi,\eta) = h(\xi,\eta) + C_{ij} \tag{8.32}$$

其中 C_{ij}在平面上是变化的，即在界面的不同位置上界面深度的变化范围可以是不同的，这可根据先验信息确定。由 $h_{\perp}(\xi, \eta)$和 $h_{\top}(\xi, \eta)$及给定的搜索精度，可以确定每个界面深度在给定搜索精度下可能的取值：

$$\mathrm{d}h(\xi,\eta) = [h_{\perp}(\xi,\eta) - h_{\top}(\xi,\eta)]/2^N \tag{8.33}$$

$$h(\xi,\eta) = h_{\top}(\xi,\eta) + i\mathrm{d}h(\xi,\eta), i = 1,2,\cdots,2^N \tag{8.34}$$

上两式中的 2^N 是各模型参数搜索范围的分段数，其中的 N 对每个模型参数可取不同的值，$\mathrm{d}h(\xi, \eta)$是每段的长度，即参数的搜索精度。

参数的初始搜索范围确定之后，即可进行反演计算。

从第 2 章的讨论可以看到，GA 的计算非常简单，除了随机数的产生和二进制运算之外，不涉及任何复杂的数学计算。它只对由正演得到的目标函数值做了一些简单的处理，如目标函数到适应程度的转换，适应程度的求和，基因交换和变异等，而这些运算不会在过程中引入不稳定的因素，使迭代过程发散。这样，就从根本上避免了原有频率域反演方法中存在的问题。

8.4 数值模拟

利用位场资料反演物性界面，在地球物理反演问题中是一类非常特殊的问题。其特殊性之一是这类问题的待求模型参数非常多。对于剖面（二维）问题，一般有数十到数百个待求参数。对于面积（三维）问题，则有数百到数千甚至上万个参数。对于解决实际问题而言，面积性的位场资料反演问题是经常遇到的问题，因此这种多参数的反演问题是需要解决，但又是非常困难的问题。其特殊性之二是观测数据在数量上与模型参数的个数相当，这对于反演计算来讲是很不利的。在地球物理学的很多领域中问题就不是这样。如天然地震的震中定位

问题，其待求参数有 4 个（地震的空间坐标 x，y，z 和发震时刻 t_0），而观测记录到的地震波到时则有很多（在地震台网的不同台站上）。又如用地震波到时数据反演一维地壳速度模型问题，对于有 n 层介质的模型，其待求参数有 $2n$ 个（v_i，h_i，$i=1$，n），而其观测到时数据则往往多于待求参数数倍以上。对于观测数据多于待求参数的反演问题，反演过程可以从观测数据中得到更多的有关模型参数的先验信息，这有利于克服解的不唯一性。但大而积的物性界面反演问题就没有这样的有利条件可供利用。

从国内外的现有文献可以了解到，GA 在地球物理学中的应用主要集中在一维地壳速度模型反演问题上。这类问题模型参数少，面可以利用的观测资料多，这对于反问题的求解非常有利。而在大面积位场资料反演物性界面这种同样重要的地球物理问题中，则没有见到应用 GA 的报道。造成这种局面的原因也许就是上述物性界面反演问题的两个特殊性。

在用 GA 解界面反问题时，待求参数多引起的问题是计算速度慢，反演时间长，这可以用第 4 章至第 6 章介绍的加速收敛方法予以解决。观测数据少引起的问题是解不唯一，这可用增加约束的方法来解决。在 GA 中指定约束很方便，根据已掌握的地质、地球物理资料把相应的模型参数搜索范围给予适当限制即可。

这里给出的数值模拟是用 GA 解多参数反问题的一种探索和尝试，可为今后的进一步研究提供经验和借鉴。

8.4.1 模型及正演公式

为简单起见，采用单密度界而模型，正演公式采用单界面模型的简化公式（8.24）式

$$F[\Delta g]=(2\pi f)\exp(-\omega z_0)\Sigma\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}F[\Delta\sigma(r)\Delta h^n]$$

其中密度函数 $\Delta\sigma$ 在平而上可以是常数，也可以是变化的。

理论界而等值线见图 8.2，根据理论界面正演得到的理论布格重力异常见图 8.3，这些数据在反演中做为观测数据使用。

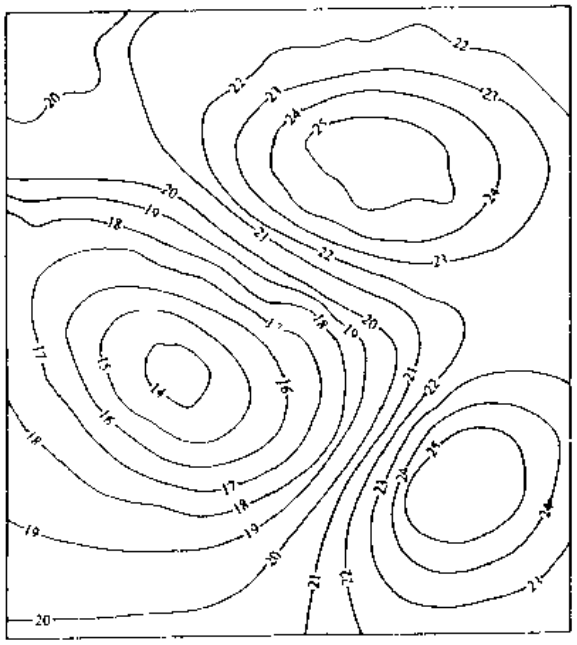


图 8.2　理论界面等值线图(单位：km)

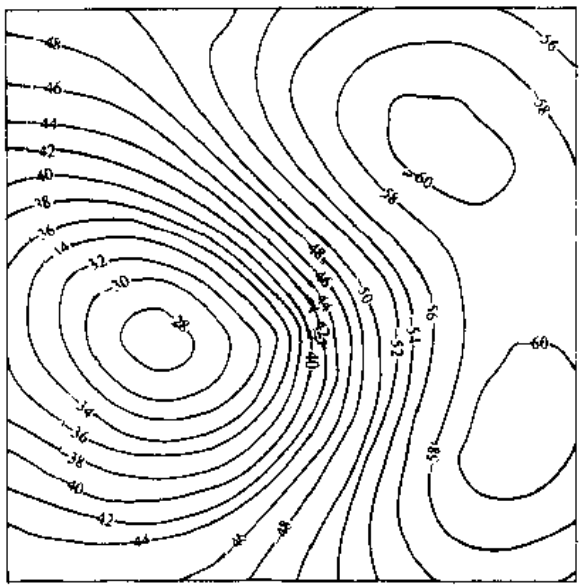


图 8.3　理论布格重力异常(单位：$10^{-5}m\cdot s^{-2}$)

8.4.2 参数

正反演所用的各种参数为：

(1) 测网参数：线数、点数均为 21，线距、点距均为 5km。

(2) 正演参数：$\Delta\sigma=0.25\times10^{3}\mathrm{kg/m^{3}}$，$h_0=20\mathrm{km}$。

(3) 遗传算法参数：$P_c=0.98$，$P_m=0.03$，$Q=10$。

(4) 加速收敛方法：方法 3(见第 6 章)。其中：

a) 方法 3(1)：当目标函数小于 10 时，以 $D=5$ 的速率开始收缩，每收缩一次迭代 50 次。

b) 方法 3(2)：$\alpha=2$，$\beta=900$，$\theta=1.0$。

(5) 约束：可按 (8.30) ～ (8.32) 式对模型参数进行约束，也可令理论模型参数为 $h(\xi,\eta)$，用(8.31)～(8.32)式对模型参数约束，其中 C_{ij} 可任意给定，这里取 $C_{ij}=2\mathrm{km}$。

8.4.3 数值模拟

根据上述正、反演方法及加速收敛的方法，用图 8.3 的理论布格重力异常做为观测数据作了数值模拟，其结果见图 8.4。把图 8.4 与图 8.2 比较可以看到，在界面形态上反演结果与其理论值非常相似，在数值上除三个极值点处数值稍有不同外，其它都比较接近。反演结束时观测数据的最大拟合误差为 0.586($10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$)。根据这些情况，可以认为这里所提出的遗传反演方法，其数值模拟结果是令人满意的。

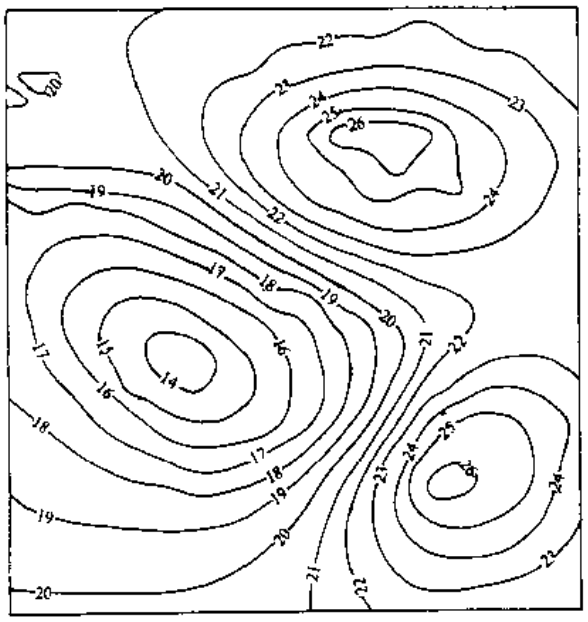


图 8.4 数值模拟反演结果(单位：km)

出现这种结果不是偶然的。这是因为，与传统的空间域反演方法相比，位场遗传反演方法不必对正问题做线性化处理，在数值计算上不涉及解方程组和复杂的矩阵运算。与传统的频率域反演方法相比，它不存在下延因子问题、频率参数选择问题和对数据的反复滤波问题。由于位场遗传反演方法的这些特点，使它的反演过程很容易实现，并且比较精确和稳定。又由于它是空间域方法与频率域相结合的产物，这使它兼有空间域方法的稳定性和频率域方法速度快的特点，而且不存在传统反演方法中的那些问题，因此其反演效果良好。

8.4.4 计算中的注意事项

1)给定约束(搜索范围)

在遗传算法中，搜索范围与约束等价。在数值模拟计算时，可以每个理论界面参数 $h(\xi,\eta)$ 为中心，用(8.31)和(8.32)式给定约束，其中常数 C_{ij} 可根据情况给定。

在用实际资料计算时，可先用 (8.30) 式得到初始界面，再用 (8.31) 和 (8.32) 式确定每个界面参数的搜索范围。这时，如果有某些界面参数的先验信息 (如钻井资料、人工地震测深结果等)，可以单独为它们指定相应的约束。

2) 相对起伏 Δh 的归一化

正演计算时，为避免上溢并使正演收敛快，可以对(8.24)式中的 Δh 归一化，即该式中的 Δh 用 H 除之。

令： $H = \max(\Delta h_i)$

则(8.24)式成为

$$F[\Delta g] = (2\pi f)\exp(-\omega z_0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\omega)^{n-1}}{n!}H^n F\left[\Delta\sigma(r)\left(\frac{\Delta h}{H}\right)^n\right]$$

3)级数求和项数 n 的确定

在正演计算公式中，级数求和项数为 $n=1\sim\infty$，但在实际计算时，只能对其有限项进行计算而舍去一部分求和项。根据文献报道，为保证相当的精度，同时又减少不必要的计算量，取 $n=3$ 即可满足要求。

8.5 反演实例——山西高原莫氏面位场反演

为检验本文提出的遗传反演方法的效果，利用山西省地质矿产局 1988 年所做的山西高原 1∶100 万布格重力异常资料，对山西高原莫氏面位场做了反演计算。

8.5.1 计算区域

计算区域范围为 N：34°30′～41°00′，E：110°00′～114°00′，包括山西全省和河北、河南、陕西、内蒙古自治区的部分地区。该区域位于华北平原以西、黄土高原的东部，是华北地台的一部分。山西省通称山西高原，一般海拔高度为 1000m，东部有太行山，西部有吕梁山，中间是一系列串珠状盆地。

构造走向以北北东为主，南部和北部转为北东向。由于山西断隆是相对抬升的构造单元，因而结晶基底和沉积盖层均有大面积的出露。新生代全区以隆升为主，仅在局部地区发育断陷盆地，如大同、太原和临汾等，构成北北东向断陷带。其中堆积的新地层一般厚 2～3.5km 左右。侏罗纪—白垩纪以整体断块抬升为特征，燕山期本区有岩浆活动，侵入岩为中酸性、碱性，属大陆沿断裂的壳源岩浆产物。山西断陷带内北部有两群火山口（大同与阳原中间地段和怀仁与山阴中间地段）和一些温泉，如代县、原平、定襄和忻州等地。南部也有很多温泉。

8.5.2 布格重力异常

计算区域的布格重力异常采用山西高原 1∶100 万布格重力异常图。总的异常趋势是东高（$-40\times10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）西低（$-130\times10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$），南高（$-30\times10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$）北低（$-120\times10^{-5}\mathrm{m\cdot s^{-2}}$），太行山重力梯级带从北到南纵贯本区，是本区重力异常比较醒目的特征。

8.5.3 数据处理——深部异常信息提取

通常，莫氏面位场反演的计算步骤为：①沉积层改正，②深部异常信息提取，③反演计算。

(1)为了消除局部低密度层的影响，一般要做沉积层改正。根据收集到的沉积层厚度和密度资料，利用正演公式计算出该密度层引起的重力异常，并把这一部分异常从总的布格重力异常中扣除掉，即达到沉积层改正的目的。但由于资料及经费上的原因，这部分工作没有进行。

(2)提取深部异常的方法有多种，如向上延拓、滑动平均、趋势分析及正则化滤波等。这里采用正则化低通滤波方法。其滤波因子为

$$F(u,v) = \frac{1}{1+\alpha e^{\beta(f-f_0)\lambda_x}} \tag{8.35}$$

其中：$2\leqslant\alpha\leqslant3$，$\beta\geqslant2$，$f_0$ 是要消除的高频干扰信号的最小波数，等于其最大水平尺寸 λ_0 的倒数，$f=(u^2+v^2)^{1/2}$，$u=m/\lambda_x$，$v=n/\lambda_y$，λ_x 和 λ_y 为基波波长，m，n 为测网线点数。图 8.5

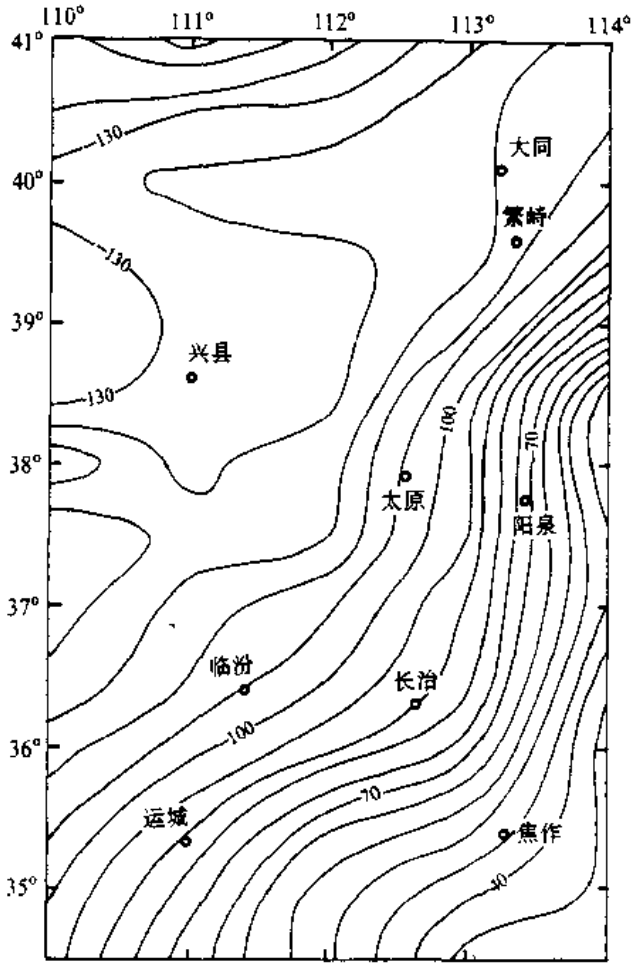


图 8.5　布格重力异常经正则化滤波后的结果(单位:$10^{-5}m \cdot s^{-2}$)

是取 $f_0=0.016km^{-1}$的滤波结果。

从图 8.5 可见，本区布格重力异常的主要特征有三：①布格重力异常从东南到西北逐渐降低，②从北到南有一明显的 S 形梯度带，③东部等值线较密，而西北部等值线较稀。

根据重力均衡的观点，布格重力异常的这些特征大致反映了本区莫氏面在东南部较浅，但变化速率大，而在西北部较深，但相对变化较平缓的基本趋势。

8.5.4　反演计算

根据正则化带通滤波后的布格重力异常数据，用遗传反演方法对本区的莫氏面埋深做了反演计算。正演公式仍采用单界面正演公式(8.24)式。反演过程中使用的参数如下：

(1) 测网参数：线数为 71，点数为 40，点线距均为 10km。

(2) 正演参数：莫氏面上下密度差 $\Delta\sigma=0.35\times10^3kg/m^3$，莫氏面深度调整参数为 $h_0=40km$。

(3) 遗传算法参数：交换概率 $P_c=0.98$，变异概率 $P_m=0.04$，模型群体大小为 $Q=20$。

(4) 采用方法 3 作为加速收敛方法。其中：

a) 方法 3(1)：当目标函数小于 20 时，以 $D=8$ 的速率开始收缩，每收缩一次迭代 50 次。

b)方法 3(2)：$\alpha=2$，$\beta=1000$，$\theta=1.1$。

(5) 搜索范围：按 (8.30) 式得到初始界面，取$C=2$km，用(8.31)和(8.32)式确定参数搜索范围。

反演结果见图 8.6。从该图可见，本区莫氏面的埋深有如下特征：

(1)在位于河北、河南省的东南边界附近，莫氏面埋深较浅，深度为 33～37km。向西北方向莫氏面逐渐加深，到位于内蒙古自治区的西北边界附近，莫氏面深度增加到 43～45km。

(2)在与太行山 S 形重力梯度带相对应的区域，莫氏面深度变化剧烈，从 35km 增加到 41km。

(3)在太原—临汾一带，莫氏面变化比较平缓，约为 41～42km。

(4)浑源—繁峙和兴县一带为局部凹陷区，其深度分别为 43km 和 44km。

(5)在繁峙西部有一局部隆起区，最浅处小于 41km。

本区莫氏面埋深图像的西南角至东北角为一条边界过渡带，其东南半部为强梯度单调递减的大陡坡，西北半部总体梯度较小。该分界过渡带实质上是一个突变带，即山西高原莫氏面埋深突变异常带。它的存在对山西高原地质演化起着控制作用，如山西断陷带的形成、该带内火山口与温泉的形成以及大地震的发生等，都有着密切的关系。

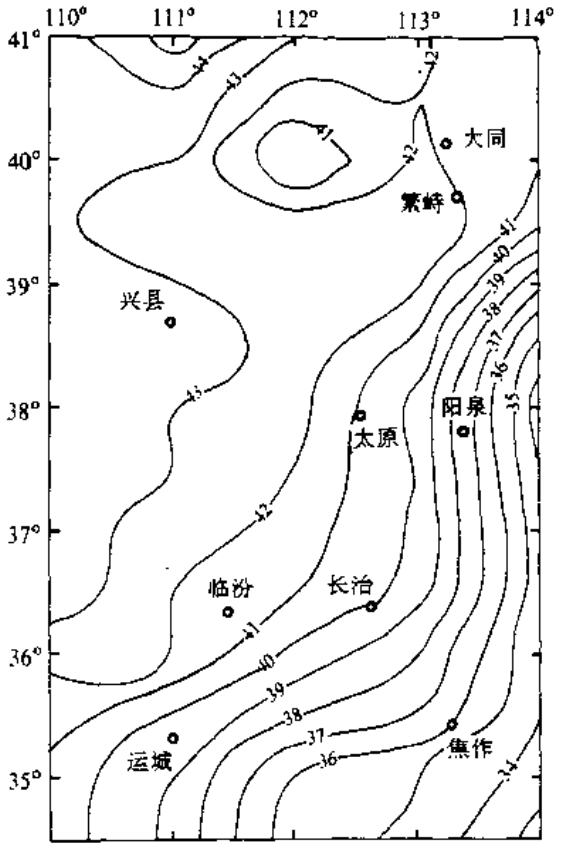


图 8.6 用遗传反演方法得到的
山西高原莫氏面埋深等值线图(单位：km)

根据我国莫氏面分区，莫氏面深度在我国东部约为 30～40km，在中部约为 40～50km，东部与中部的分界线位于大兴安岭—太行山—武陵山一线。本区的反演结果总体上与上述分区结果一致。

小 结

本章在分析了目前位场资料反演中应用最为广泛的频率域反演方法中的优点及不足的基础上，弘扬其优点，避开其不足，结合解非线性问题的有效工具——GA，提出了三维界面位场资料反演的遗传反演方法。现把主要内容归纳如下。

(1)首先分析了原有频率域反演方法的优缺点。其优点是正演速度快，精度高，面且使用方便。自 1973 年 Parker 提出这种位场正演方法以来，经国内外研究人员的改进及发展，该方法已经十分完善。该方法不仅可以用于重力，同样可以用于磁法。物性参数不仅在平面上可以变化，在深度上也可以呈线性或指数函数形式变化。即可以用于剖面资料，也可以用于面积资料。该方法的这些优点已得到国内外研究人员的一致好评，被认为是位场正演计算中最有效的方法。因此，本文提出的位场遗传反演方法也采用频率域快速正演方法做为其正演计算手段。文

中归纳了重、磁物性层、单界面及物性参数在空间呈各种变化形式的公式，这些公式在与GA结合时不存在任何理论上的障碍。

(2)原有频率域方法中的反演部分存在一些问题，如反演公式中含有向下延拓因子，该因子对高频干扰成分有放大作用，结果导致反演过程不稳定。为解决这一下延因子带来的麻烦，人们在应用中采取了很多不同的措施，效果也不尽相同。又如滤波因子选择问题和对观测数据反复使用滤波手段，使数据中的有用信息损失严重。

鉴于这种情况，作者认为，与其花费很大精力去解决这些不好解决的问题，倒不如彻底避开这些问题，最有效的办法是去寻找不含有这类问题的新的反演方法。基于这种考虑，提出了位场资料的遗传反演方法。做为遗传反演方法核心部分的GA，它的运算非常简单，这种运算上的简单性使它的反演过程非常稳定、健全。在反演过程中，它不对正问题和观测数据做任何转换。这样，就从根本上避免了原有频率域反演方法中的种种问题。

(3)在遗传反演方法中增加了加速收敛的措施。GA的弱点是当待求参数增多时收敛速度慢。针对这种情况，在分析了造成这一问题的原因后，提出了三方面的改进措施。这些措施有很强的针对性，理论计算表明，效果显著。

(4)用本文提出的这种遗传反演方法，分别做了理论上的数值模拟和实际资料的反演计算，经与理论模型及前人的反演结果对比，效果良好。据现有资料，用GA解这种多参数的反演问题是前所未有的。可以说，这是一次有意义的探索和尝试，可以为今后的进一步研究、应用提供经验和借鉴。

9 一维地壳速度结构走时遗传反演方法研究

研究地壳-上地幔详细结构的一种有效方法，是利用人工震源激发地震波，根据地震波在各接收点处的到时，反演地壳速度结构。本章研究一维地壳速度结构的走时遗传反演问题。

9.1 地震波走时计算公式(朱介寿等，1988)

9.1.1 地壳模型及地震波类型

假定地壳模型为水平层状结构。根据地震波速的变化，模型内各层的性质可以分成常速层（即该层内速度是恒定的）和速度梯度层（即该层内速度随深度呈线性变化）。对于常速层，该层内速度梯度为零。对于梯度层，该层内的速度梯度定义为

$$a_i = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{h_i} \tag{9.1}$$

其中，v_{i-1}为层底速度，v_{i-1}层顶速度，h_i 为层厚度。

对于不同的地壳-上地幔介质的分层结构，在剖面内不同的接收段内可记录到反射波、折射波、回折波和首波的到时，它们的计算方法各不相同，下面给出它们的计算公式。

9.1.2 反射波

地震波在介质内传播，当遇到波阻抗(即介质密度与波速的乘积)界面时，会产生反射和折射。对于有 n 个水平层的地壳模型，第 n 层反射波的走时和水平距离由参数方程表示

$$X = 2\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{9.2}$$

$$T = 2\sum_{i=1}^{n} t_i \tag{9.3}$$

其中，X 为震中距，T 为第 n 层界面反射波走时，x_i 和 t_i 分别为地震波在第 i 层介质中传播所经过的单程水平距离和走时。

根据斯奈尔（Snell）定律，当地震射线以 α_1 角入射，在通过各个不同的层位时，入射角与各层速度之间有如下关系

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1} = \frac{\sin\alpha_2}{v_2} = \cdots \frac{\sin\alpha_n}{v_n} = p$$

或

$$\sin\alpha_i = pv_i \tag{9.4}$$

其中，α_i 是地震射线与 z 轴（向下为正）的夹角，v_i 是第 i 层速度，p 是常数，称为射线参数。

地震射线在介质内的某常速层（设为第 i 层）经过的水平距离和走时为

$$x_i = h_i\mathrm{tg}\alpha_i = h_i\frac{\sin\alpha_i}{\cos\alpha_i} = h_i i\frac{pv_i}{(1-p^2v_i^2)^{1/2}} \tag{9.5}$$

$$t_i = \frac{h_i}{v_i \cos\alpha_i} = \frac{h_i}{v_i (1 - p^2 v_i^2)^{1/2}} \tag{9.6}$$

其中，h_i 和 v_i 分别为第 i 层的厚度和速度。

对于梯度层，该层梯度由(9.1)式表示。地震射线从该层顶传播到层底所经过的水平距离和相应走时为

$$\begin{aligned} x_i &= \int_0^{h_i} \mathrm{tg}\alpha \mathrm{d}z = \int_0^{h_i} \frac{p^2}{(1 - p^2 v^2)^{1/2}} \mathrm{d}z = \frac{1}{a_1} \int_{v_{i-1}}^{v_{i+1}} \frac{1}{(1 - p^2 v^2)^{1/2}} \mathrm{d}v \\ &= [(1 - p^2 v_{i-1}^2)^{1/2} - (1 - p^2 v_{i+1}^2)^{1/2}]/(a_i p) \\ &= (\cos\alpha_{i-1} - \cos\alpha_{i+1})/(a_i p) \end{aligned} \tag{9.7}$$

$$\begin{aligned} t_i &= \int_0^{h_i} \frac{1}{v\cos\alpha} \mathrm{d}z = \frac{1}{a_i} \int_{v_{i-1}}^{v_{i+1}} \frac{1}{v(1 - p^2 v^2)^{1/2}} \mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{a_i} \left[\ln \frac{p v_{i+1}}{1 + (1 - p^2 v_{i+1}^2)^{1/2}} - \ln \frac{p v_{i-1}}{1 + (1 - p^2 v_{i-1}^2)^{1/2}} \right] \\ &= \frac{1}{a_i} \left(\ln \frac{\sin\alpha_{i+1}}{1 + \cos\alpha_{i+1}} - \ln \frac{\sin\alpha_{i-1}}{1 + \cos\alpha_{i-1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_i} \ln \frac{\mathrm{tg}(\alpha_{i+1}/2)}{\mathrm{tg}(\alpha_{i-1}/2)} \end{aligned} \tag{9.8}$$

以上两式即为速度梯度层内反射波传播的参数方程，它们既可以用射线参数 p 表示，也可以用射线入射角 α 表示。

9.1.3 回折波

当射线进入速度梯度层时，就会发生弯曲。如果该层的速度梯度 $a>0$，射线则向上弯曲。当射线弯曲到临界角 90°时，它就沿轴对称方向折回地面，这就是所谓回折波。

回折波的震中距和走时仍按 (9.2) 和 (9.3) 式计算。假定在第 n 层产生了回折波，则地震射线在 1 到 $n-1$ 层内的 x_i 和 t_i 仍用(9.5)、(9.6)或(9.7)、(9.8)式计算。对产生回折波的第 n 层，因为 $\alpha_{n+1}=90°$，(9.7)和(9.8)式可以简化为

$$x_n = \frac{\cos\alpha_{n-1}}{a_n p} \tag{9.9}$$

$$t_n = \frac{1}{a_n p} \ln \mathrm{ctg} \frac{\alpha_{n-1}}{2} \tag{9.10}$$

9.1.4 首波

当某界面下层介质的波速大于上层介质的波速，且震中距大于临界距离时，在剖面上一定距离之后可以接收到来自该界面的首波。设首波在 X 处被接收到，相应的走时为

$$T = 2\sum_{i=1}^{n} t_i + \frac{X - 2\sum_{i=1}^{n} x_i}{v_{n+1}} \tag{9.11}$$

其中，t_i 和 x_i 为在临界条件下首波在第 i 层介质中传播的单程走时和水平距离。

当地壳内各层介质都是均匀层而无速度梯度层时，上式可以简化为

$$T = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i}{v_i}\cos\alpha_i + \frac{X}{v_{n+1}} \tag{9.12}$$

其中，$\alpha_i = \arcsin\left(\frac{v_i}{v_{n+1}}\right)$

9.2 任县—武清地震剖面南段一维地壳速度结构走时遗传反演

在第2章—第6章已经详细地介绍了GA的基本原理、它的改进及加速收敛措施。第5章中一维地壳速度结构反演的理论模型试验结果也表明，改进后的遗传反演方法在处理这类地球物理非线性反问题时效果是好的。现根据这种改进后的遗传反演方法，利用任县—武清南段宽角反射/折射地震剖面的实测走时数据（中国地震局地球物理勘探中心，1995），对该剖面的一维地壳速度结构做实际资料计算。

任县—武清的野外地震数据采集由中国地震局地球物理勘探中心完成。该剖面为北东方向，起自河北省邢台市任麻村（E：114°35′45.19″，N：37°02′27.33″），经任县、隆尧、宁晋、束鹿至深县北午村（E：115°46′40.61″，N：38°05′27.21″），全长146.5km。该剖面通过宁晋隆起、束鹿凹陷、新河隆起，北端进入深县凹陷，并穿过牛家桥6.8级地震和东汪7.2级地震震中区。

该剖面经过处于华北盆地中部的邢台震区。华北盆地为一大型裂谷盆地，在中、新生代经历了几次重要的断裂和沉降阶段。在燕山期遭受强烈的构造运动，发育了一系列以北北东向为主、部分近北西西向的断裂。晚白垩至新生世期间普遍隆起，在始新世至渐新世时期，不断产生大量新断裂，并发展成凹陷带。从晚第三纪开始，该地区大面积下沉，相邻凹陷统一成大型坳陷，早期隆起逐渐被覆盖，形成该区现代地貌形态。盆地中部自西向东依次为冀中坳陷、沧县隆起、黄骅坳陷、呈宁隆起和济阳坳陷。

该剖面的野外施工共做了四次爆破（SP：1.22，SP：29.19，SP：123.07，SP：146.67）。从记录截面上可识别出5种震相：①上地壳回折波Pg，②中、上地壳分界面反射波P1，③中地壳内反射波P2，④下地壳顶面反射波P3，⑤莫氏面反射波Pm。利用遗传反演方法对这4炮的资料做了反演计算。

9.2.1 构制初始地壳模型

根据实测时距曲线和有关地球物理资料，构制大致的地壳模型，由此地壳模型正演理论时距曲线，并将它与实测时距曲线对比。根据两者的拟合程度对模型参数做适当调整，由此可以得到一个初步的地壳模型，作为以后用遗传反演方法进一步计算时的依据。

应当指出的是，这一步骤是必要的，因为它有助于确定遗传反演方法的参数搜索范围，减少盲目性，缩短计算时间。同时，也有助于构造目标函数。

9.2.2 构造目标函数

反演的目的是要寻找一组模型参数（在这里它们是各层的深度h_i和速度v_i），它使理论的与实测的走时曲线有最好的拟合，为此需要构造一个目标函数。在这里采用走时的误差平方和作为目标函数：

$$f = \left[\sum_{i=1}^{n}(t_{oi} - t_{ci})^2\right]^{1/2}/n \tag{9.13}$$

其中，t_{oi}和t_{ci}分别为第i接收点上实测的和理论的走时，n为数据个数。

但是，在做目标函数的计算时，问题就不如在重力、磁法等其它地球物理反演中那样简单。在重力和磁法中，理论数据与实测数据是一一对应的，它们的目标函数计算只需按观测点依次计算即可。在地震问题中，由于地壳模型中速度和深度的变化，以及各种不同类型的地震波在不同介质中传播的特点，所以在有些接收点处可能接收到一种或多种地震波，而有些接收点处则接收不到任何地震波。所以有些接收点处可能有1个或多个数据，而有些接收点处则没有数据。理论走时曲线的计算也存在这样的问题。如果只做正演不需计算目标函数，这个问题是不存在的。但现在要做反演，就必须考虑这个问题。由于两类数据之间不能很好地一一对应，所以在计算目标函数时出现困难。

为解决这个问题，需要把实测数据和理论数据做一重新安排。

设一实测数据数组$T_0(n,m)$，其中n为接收点个数，m为震相个数。该数组中数据的安排顺序为，对于第j个震相，如果第i个接收点收到了它的走时，则$T_0(i,j)$的值就是第j震相在第i接收点处的到时，否则$T_0(i,j)=0$。对于理论数据，设另一数组$T(n,m)$。理论计算得到的第j震相在第i接收点处的到时存在$T(i,j)$处，其余填入零。在计算目标函数时，只要对两个数组的数据对应计算即可，这样就解决了计算目标函数的问题。

9.2.3 走时遗传反演

有了初始地壳模型和观测数据，而且也解决了目标函数的计算问题后，就可以用遗传反演方法对地壳模型参数做进一步的精细反演。

用遗传反演方法首先要给出各模型参数的搜索范围。根据上而得到的初始地壳模型，对深度h_i和速度v_i分别给定±1.5km和±0.2km/s的区间做为参数的初始搜索范围。

遗传算法参数为：$P_c=0.9$，$P_m=0.04$，模型群体大小为20。

加速收敛参数为：$D=4$，$\alpha=3.0$，$\beta=900$，$\theta=1.1$。

根据以上4炮数据反演得到的地壳模型参数见表9.1，由这些模型参数正演计算的结果见图9.1。由于理论数据与观测数据不可能完全拟合，因此，反演得到的模型参数只是剖面下方壳幔结构的平均状态。

根据反演得到的模型参数构制了该剖面下方速度界而形态，见图9.2。由于该剖面只有4炮的数据，而且SP：29.19和SP：123.07之间有将近100km的距离，所以该段内的界而形态是粗略的。所得的壳幔速度结构反映了该区深部区域性特征。沿剖面地壳大致为三层结构。上层地壳厚度约为10～11km，速度纵向和横向的不均匀性强烈，由近地表的2.2km/s变化到层底的6.2km/s。中层地壳厚约10～13km，层速度为6.3～6.5km/s，有低速体存在。下层由均速层和梯度层构成。地壳从邢台到武清逐渐隆起，在邢台—任县之间变化较大，层速度为6.7～7.1km/s。上地幔局部地区速度降低。

该区异常的壳幔结构和深部构造的形成，与上地幔的隆起和上地幔热物质沿莫氏而断裂入侵到地壳中有关。有关资料表明，壳内局部有强反射波出现和莫氏面反射波的减弱或不连续，这可以看做岩浆活动的重要标志。局部高速体是上地幔高密度物质入侵到下地壳顶部的结果，在入侵过程中，由于温度增加，使中地壳局部物质溶融形成异常的低速体。这种异常的壳幔结构与地震活动关系密切。据统计，该区85%$M_S\geqslant5.0$的地震发生在10～20km的深度内，如东汪7.2级和牛家桥6.8级地震。1966年的邢台地震及余震也发生在这里，震源深度集中在10～25km深度范围内，这与该区中地壳相当。

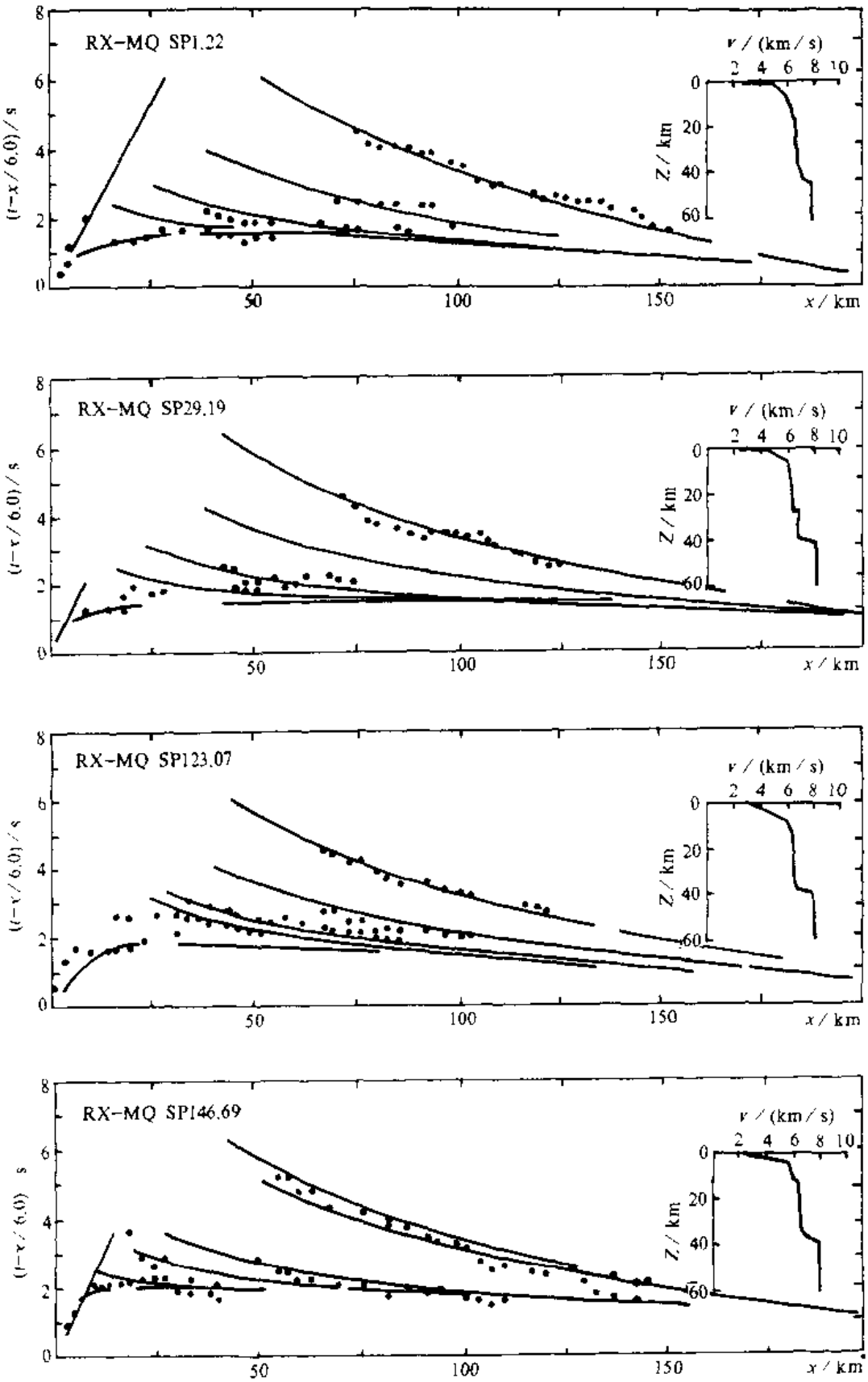


图 9.1　用反演结果计算的走时曲线及速度-深度函数

（实线：理论走时曲线；圆点：实测走时曲线）

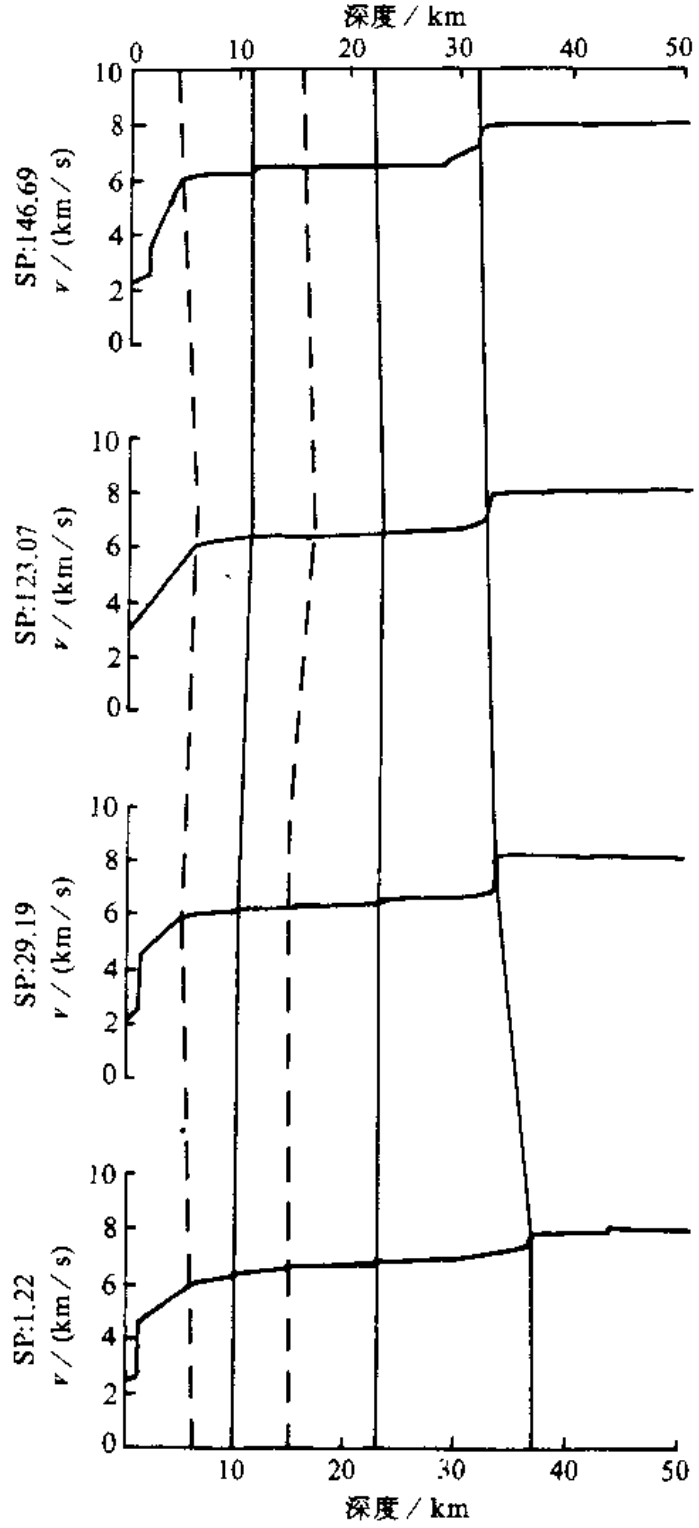


图 9.2　根据反演结果构制的速度界面形态示意图

（实线：主要速度界面；虚线：次要速度界面）

表 9.1　4 炮数据反演得到的地壳模型结果

	SP：1.22 数据反演结果		SP：29.19 数据反演结果		SP：123.07 数据反演结果		SP：146.67 数据反演结果	
参数序号	深度/km	速度/(km/s)	深度/km	速度/(km/s)	深度/km	速度/(km/s)	深度/km	速度/(km/s)
1	0.000	2.668	0.001	2.254	0.000	2.982	0.000	2.277
2	1.001	2.694	1.000	2.557	6.352	6.080	1.776	2.600
3	1.000	4.662	1.001	4.524	11.199	6.367	1.765	3.641
4	6.000	5.969	5.000	5.979	11.750	6.422	4.633	6.040
5	10.001	6.182	10.071	6.065	15.001	6.336	7.000	6.201
6	10.000	6.326	10.425	6.201	17.000	6.350	10.659	6.200
7	15.000	6.400	15.000	6.200	17.000	6.400	11.813	6.401
8	15.000	6.500	15.000	6.301	23.000	6.400	16.000	6.400
9	23.001	6.500	23.000	6.300	23.001	6.500	15.918	6.500
10	23.000	6.701	23.001	6.600	30.000	6.500	29.000	6.454
11	30.001	6.741	25.001	6.600	29.996	6.720	29.001	6.672
12	36.281	7.250	29.483	6.528	30.519	6.640	29.261	6.724
13	36.812	7.800	32.599	6.650	32.317	7.035	32.000	7.167
14	50.474	7.827	33.259	6.788	32.929	7.900	32.000	7.912
15			33.532	8.116	49.931	8.038	51.028	7.994
16			50.000	8.067				

小　结

本章介绍了利用遗传反演方法计算任县—武清地震剖面南段内一维地壳速度结构的方法。在反演计算之前，应对观测数据做初步的拟合。这有助于确定正演计算的关键参数和初始地壳模型，同时也便于构造目标函数。从反演结果看，理论走时曲线与观测数据之间的拟合效果是好的。根据该剖面 4 炮数据的速度-深度函数反演结果，构制了剖面下方地壳内速度界面的大致形态。

10 二维地壳速度结构走时遗传反演方法研究

10.1 引 言

利用人工地震波走时资料研究二维地壳速度结构，是探测地壳深部构造的重要手段。国内外的地球物理工作者曾采用多种方法开展这一工作。所谓二维地壳速度结构，是指地震波在地壳中的传播速度不仅随深度变化，而且在横向上也是变化的。研究二维地壳速度结构的方法有很多，正演模拟（试错法）是较常用的一种。这种方法是利用走时正演计算程序计算理论走时并与观测走时曲线对比，再由人工修改地壳速度模型参数，使理论走时与观测走时达到最好的拟合。这种方法的不足之处在于，第一，要消耗大量的时间。第二，对剖面上多炮点的地震试验，很难用正演模拟的方法来构造一个在可以接受的精度内符合观测数据的地壳速度模型。第三，它不能提供有关模型参数的不确定性、分辨率等方面的定量估计。第四，它不能保证目标函数在某个特定的范数下达到极小。

由于正演模拟方法存在的这些问题，不少地球物理研究人员开展了用广义线性反演方法研究二维地壳速度结构的工作。广义线性反演方法的好处是可以提供有关模型参数的分辨率等方面的定量信息，其不便之处在于要对正问题做线性化处理。

1992 年，Zelt & Smith 采用阻尼最小二乘法研究二维地壳速度结构。该方法在处理 1986 IRIS－PASSCAL NEVADA 的地震试验数据时效果良好。但是，阻尼最小二乘法有两方面的局限性，第一，涉及解方程组。对于模型参数很多的情况，存在计算机内存和解的精确性问题。第二，涉及偏导数计算问题。对于导数不易计算或计算很费时的问题，该方法不便使用。另外，也要首先对目标函数做线性化处理。

本章采用改进的 GA 作为反演方法，射线追踪正演计算是根据国际著名的捷克射线理论专家 V. Cerveny 教授提出的射线追踪方法并有相应的正演计算程序（PDR2），两者结合形成二维地壳速度结构遗传反演方法。在现有的二维射线追踪方法中，有两点射线追踪和一点射线追踪方法之分。PDR2 不涉及两点射线追踪，计算速度较快，从计算时间角度讲适合多参数的反演计算。

GA 是近年来发展起来的一种完全非线性反演方法。因为这是一种完全非线性反演方法，所以它不用对目标函数做线性化处理。它只利用待求问题正演计算方面的信息，不需要计算导数。只要正演计算方面没有问题，就可以很容易地与 GA 结合，形成反演系统。在计算过程中，用多个模型组成的模型群体同时在模型空间搜索，这样既使个别模型陷入局部极值或出现数值计算问题，模型群体中的其它模型也不会因此受到影响，表现出良好的健全性。GA 根据生物学中优胜劣汰的进化原则，使好的模型不断增加，坏的模型不断减少，最终寻找到最佳模型。

本章将就射线追踪方法、模型参数化方法、遗传反演方法、目标函数构制方法等方面分别予以介绍，并用北京—怀来—丰镇剖面的部分实测资料做实际反演计算。

10.2 射线追踪

10.2.1 基本理论

射线追踪方法采用 V.Cerveny 教授提出的射线理论。其基本思想是，根据零阶渐近射线理论用数值方法解射线追踪方程。二维射线追踪方程是一对一阶常微分方程，可以写成两种形式

$$\frac{dz}{dx}=\text{cotan}\theta,\quad \frac{d\theta}{dx}=\frac{(v_z-v_x\text{cotan}\theta)}{v} \tag{10.1}$$

或

$$\frac{dx}{dz}=\tan\theta,\quad \frac{d\theta}{dz}=\frac{(v_z\tan\theta-v_x)}{v} \tag{10.2}$$

初始条件为

$$x=x_0\qquad z=z_0\qquad \theta=\theta_0 \tag{10.3}$$

以上公式中，θ 是射线与 z 轴的夹角（z 轴向下为正），v 是波速，v_x 和 v_z 分别是波速 v 相对于 x 和 z 坐标的偏导数。点(x_0,z_0)是爆炸源位置，θ_0 是射线离源角。当射线路径近水平时，以 x 为积分变量解(10.1)式。当射线路径近垂直时，以 z 为积分变量解(10.2)式。解上述常微分方程组的数值计算方法采用龙格-库塔法。计算过程中，当射线与界面相交时，运用斯奈尔（Snell）定律完成射线的追踪。

射线理论的完整描述参见有关文献（V.Cervery，1986）。

10.2.2 正演计算程序的修改

前已提及，正演计算采用以 V.Cerveny 教授提出的射线理论为基础的射线追踪计算程序 PDR2，方法上采用一点射线追踪。但 PDR2 程序原仅是为正演计算设计的，要把它用于反演计算，要做一些修改。为此，对原 PDR2 程序做了如下几点修改。

①把 PDR2 程序改成一个子程序，反演时由遗传算法做正演计算时调用。它的功能是接收模型参数和相应的各种控制变量，传出走时理论计算值。

②该子程序在反演计算时被多次调用。为保证每次正演计算的正确性，在调用该子程序时，除每次传入的模型参数和相应的控制变量如射线角、角度步长、射线编码等可以是不同的外，其它的控制变量、全程变量、局部变量和常数都应保证它们与第一次被调用时一样，如果不一样要重新赋值。这一点非常重要，否则不能保证正演计算的正确性。

③该子程序内不能再有数据的读入和打印操作，这些操作都应放在该子程序外进行。

④增加了接收点位置坐标，各震相在接收点上的理论到时由内插得到。

⑤不同震相的射线及相应的走时曲线用不同的颜色表示，这样在屏幕上可以清晰地分辨出各震相的射线追踪路径。

⑥该子程序中的绘图部分在反演过程中全部关闭，反演结束后重新打开，最后绘出一幅最终的射线追踪图和相应的走时曲线图（屏幕或文件）。

10.3 模型参数化

本章采用的模型参数化方法见图 10.1。

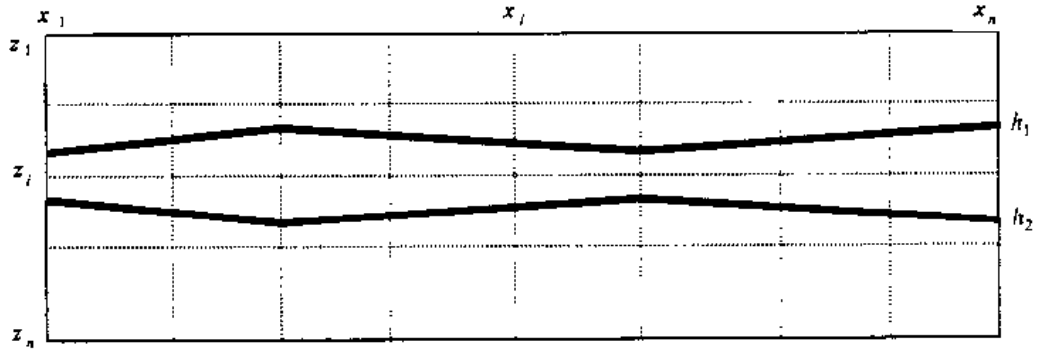


图 10.1　二维地壳速度模型参数化示意图

二维速度分布由矩形虚线网格表示，在网格的每个节点上给定相应的速度值。界面由实线表示，它们的空间位置由若干组距离、深度数据来确定。为约束界面附近的速度，在界面与纵虚线相交处的上、下方也给定相应的速度值。

对速度的限制是，界面必须从左到右横穿整个模型，但界面之间不能相交。另外，界面也不能穿越速度网格横虚线，即界面只能分布在相邻两条速度网格横虚线之间。

反演时，可调整的参数为速度界面的深度和每个速度网格节点上的速度值。

10.4　目标函数构制

10.4.1　问题分析

首先应该指出，对于二维地壳速度结构这种反演问题，在数学上可能是一个欠定问题，由此导致反演的多解性。这是因为：

(1) 对于一条地震剖面，只利用其中个别炮的观测资料，从观测系统角度讲是不完整的。

(2) 在接收点的布置方面，因受到野外地理环境的限制，接收点的布置可能是不均匀的。

(3) 在实测数据的采集方面，由于地壳速度模型中界面的起伏以及速度在纵向和横向上的变化，可能影响到地震射线在地壳中的传播路径，使得有些地方射线密集，有些地方射线稀疏，甚至有些地方根本没有射线穿过。因此，在各接收点处采集到的各种地震波（直达波、反射波、折射波、首波等）的到时数据是不完整的，即这些数据中并没有包含所有模型参数的全部信息。

当然，这些问题在某种程度上可以用加密接收点和多炮数据联合计算的方法予以克服。但是由于各种地震波的传播特点，既使增加了观测数据，仍然不能保证其中完全包含各个模型参数的全部信息。

可见，对于这类问题，反演时采用常规的数据误差平方和的目标函数是不合适的。因为仅有观测数据提供的信息还不充分，还应从其它方面补充必要的信息。

为了能够获得更为丰富的有关模型参数的信息，根据广义反演理论中有关处理欠定问题的方法 (A. Tarantola，1982，1989；张先康等，1987，1990)，对常规的目标函数做一修改。

10.4.2　初始模型先验信息的利用

广义反演理论在解非线性反演问题时，对各种先验信息的利用有独到之处。对于一个反演问题，最基本的先验信息来自观测数据。观测数据中所包含的信息通过正演计算公式与模

型参数发生联系，它们在反演计算中引导反演过程实现对最佳模型参数的搜索。另一部分先验信息来自初始模型。因为在反演计算开始之前，我们对所要获得的解都或多或少地有所了解。在常规反演方法中，就是根据这种了解来对模型参数给予约束。在解地球物理反演问题时，这是常用的方法。因为有多解性的存在，如果对模型参数一无所知，那么反演所得到的解必然无意义。

在广义反演理论中，目标函数的形式为：

$$f=[\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_d^{-1}[\boldsymbol{d}_0-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)]+[\boldsymbol{m}_k-\boldsymbol{m}_0]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}_m^{-1}[\boldsymbol{m}_k-\boldsymbol{m}_0] \tag{10.4}$$

它由数据和模型参数两部分组成。其中，$\boldsymbol{m}_0$ 和 $\boldsymbol{m}_k$ 分别为初始模型参数向量和第 k 次迭代时的模型参数向量。$\boldsymbol{C}_m$ 为初始模型参数的协方差矩阵，当模型参数相互独立时，它是对角矩阵。它的意义是对初始模型参数置信程度的一种度量。$\boldsymbol{d}_0$ 和 $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)$ 分别为观测数据向量和第 k 次迭代时的理论数据向量。$\boldsymbol{C}_d$ 为观测数据向量的协方差矩阵，当观测数据相互独立时，它也是对角矩阵。它的意义是对观测数据精确程度的一种评价。

当 $\boldsymbol{C}_m$ 很小时，则 $\boldsymbol{C}_m^{-1}$ 很大，表明对参数的置信程度很高。如果参数中有误差，这些误差就会在目标函数中明显地反映出来，由此引导反演过程修改模型参数，降低目标函数。反之，当 $\boldsymbol{C}_m$ 很大，则 $\boldsymbol{C}_m^{-1}$ 很小，表明对参数的置信程度很低。当参数有误差时，这些误差在目标函数中反映不明显，不足以引导反演过程。这种形式的目标函数有明确的物理意义，它既包含了观测数据中的先验信息，又考虑了初始模型参数中的先验信息，有助于克服由于信息不充分所造成的数学上的欠定和反演的多解性。在反演过程中，上述目标函数的意义是寻找这样一个解，它在数据空间最接近观测数据，在模型空间最接近初始模型。既使对于欠定问题，只要对模型参数有足够的了解，仍然能够得到一个有意义的解。

这种形式的目标函数更具有普遍性，它包含了通常的平方和形式的目标函数。若令 $\boldsymbol{C}_d=1$，$\boldsymbol{C}_m\to\infty$，(10.4) 式就成为通常的平方和形式的目标函数。这时，它的物理意义是在目标函数中不考虑模型参数方面的先验信息，反演结果主要由观测数据决定。应该指出的是，尽管这个目标函数中没有体现出模型参数的先验信息，但不同的反演方法在利用先验信息方面有不同的途经。因此，如果需要考虑先验信息，可以采用其它手段获得。

所以，在以后的遗传反演计算中，均采用(10.4)式作为问题的目标函数。但与广义反演方法不同的一点是，遗传算法在反演计算时并不明确给出参数的初始模型向量，而是只给出模型参数的搜索范围。因此，把各模型参数初始搜索范围的中点作为初始模型参数向量 $\boldsymbol{m}_0$。

10.5 数值模拟

根据上面提出的方法，首先从正、反演两方面做了数值模拟。

10.5.1 正演计算

正演计算共做了三个例子，理论模型从简单到复杂。

(1) 理论模型 1：单速度界面，速度只随深度变化

理论模型参数见表 10.1。

炮点位置 3 个，分别位于 0.0、60、120.0km 处。正演计算结果见图 10.2。

(2) 理论模型 2：双速度界面，速度在纵向和横向上均有变化理论模型参数见表 10.2。

表 10.1　理论模型 1 的模型参数

剖面参数/km			x_1 0.0	x_2 50.0	x_3 120.0
速度参数/（km/s）	z_1	0.0km	6.0	6.0	6.0
	z_2	50.0km	8.0	8.0	8.0
界面参数/km	h		35.0	35.0	35.0

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h 为反射界面序号。

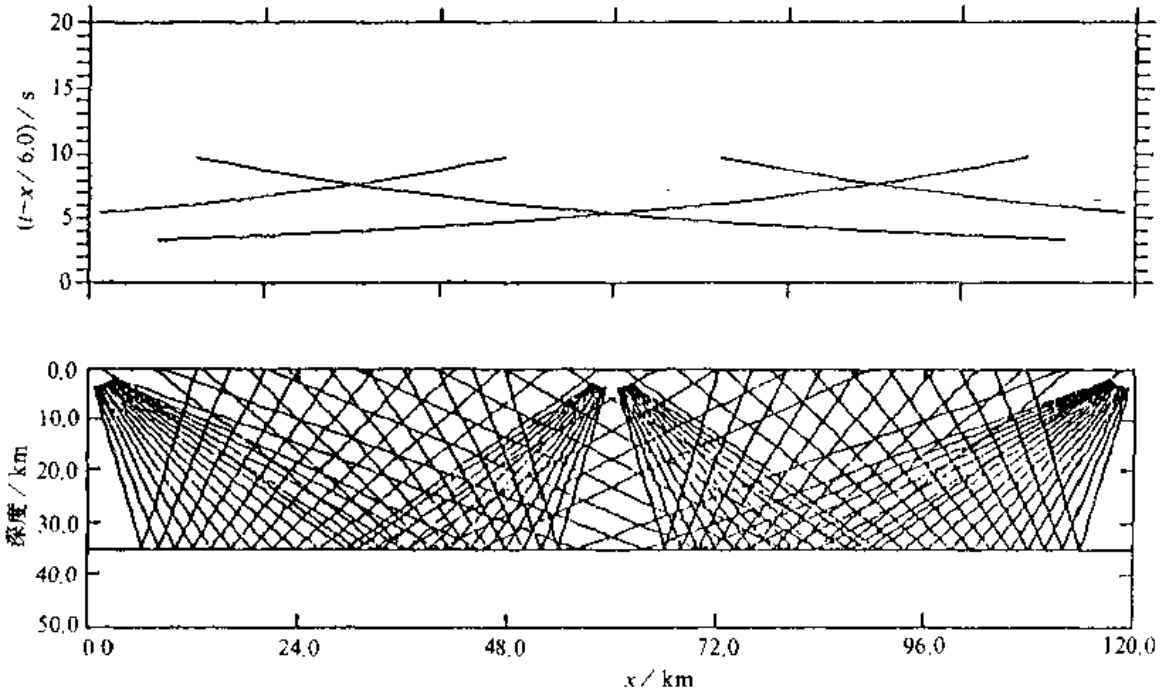


图 10.2　理论模型 1 的正演计算结果

表 10.2　理论模型 2 的模型参数

剖面参数/km			x_1 0.0	x_2 50.0	x_3 120.0
速度参数/（km/s）	z_1	0.0km	3.1	3.5	3.7
	z_2	10.0km	4.3	4.1	4.5
	z_3	30.0km	6.6	6.2	6.5
	z_4	50.0km	8.5	8.2	8.4
界面参数/km	h_1		20.0	16.0	20.0
	h_2		45.0	43.0	45.0

其中、x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号

炮点位置 2 个，分别位于 0.0、120.0km 处。正演计算结果见图 10.3。

(3) 理论模型 3：多速度界面，速度在纵向和横向上均有变化

理论模型参数见表 10.3。

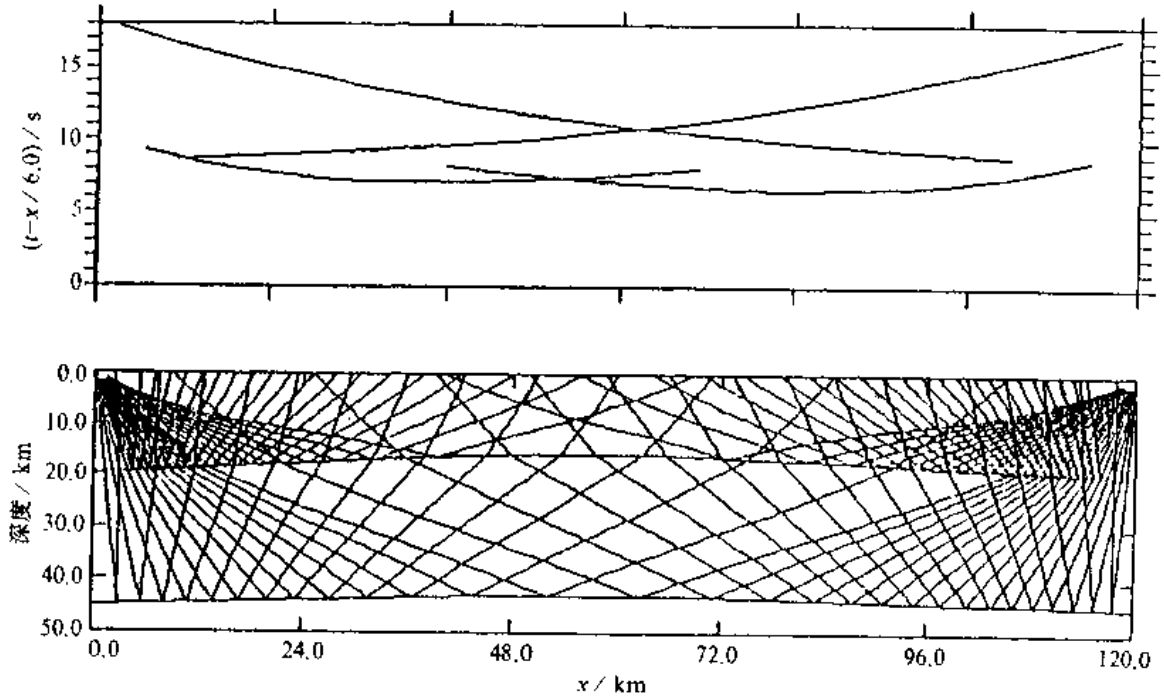


图 10.3　理论模型 2 的正演计算结果

表 10.3　理论模型 3 的模型参数

剖面参数/km			x_1 0.0	x_2 27.0	x_3 56.0	x_4 64.0	x_5 77.5	x_6 100.0	x_7 125.0
速度参数/(km/s)	z_1	0.0km	2.30	2.30	2.39	2.30	2.30	2.31	2.30
	z_2	6.0km	5.95	5.75	5.65	5.65	5.55	5.65	5.55
	z_3	12.5km	6.30	6.30	6.15	6.05	6.05	6.25	6.25
	z_4	20.0km	6.29	6.30	6.45	6.45	6.45	6.45	6.42
	z_5	25.0km	6.70	6.70	6.70	6.67	6.49	6.46	6.46
	z_6	30.0km	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75
	z_7	37.5km	8.50	8.50	8.50	8.50	8.50	8.50	8.50
界面参数/km	h_1		1.4	1.4	1.4	1.8	1.2	2.5	1.8
	h_2		9.0	9.0	9.0	9.0	10.0	12.1	11.0
	h_3		15.0	15.0	15.0	15.0	15.4	15.8	16.2
	h_4		22.0	22.0	22.0	22.0	22.0	22.3	22.5
	h_5		29.0	29.0	29.0	29.0	29.0	29.0	29.0
	h_6		34.0	34.0	33.2	33.0	32.5	32.5	32.0

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

炮点位于 123.0km 处。正演计算结果见图 10.4，其中只计算了第 1、2、3、4、6 层各震相的射线追踪和相应的走时曲线。

从这些正演计算结果可见，射线追踪正演计算程序 PDR2 的修改是成功的，它可以适用于比较复杂的地壳速度模型。

10.5.2　反演计算

1）理论模型 2 的反演计算

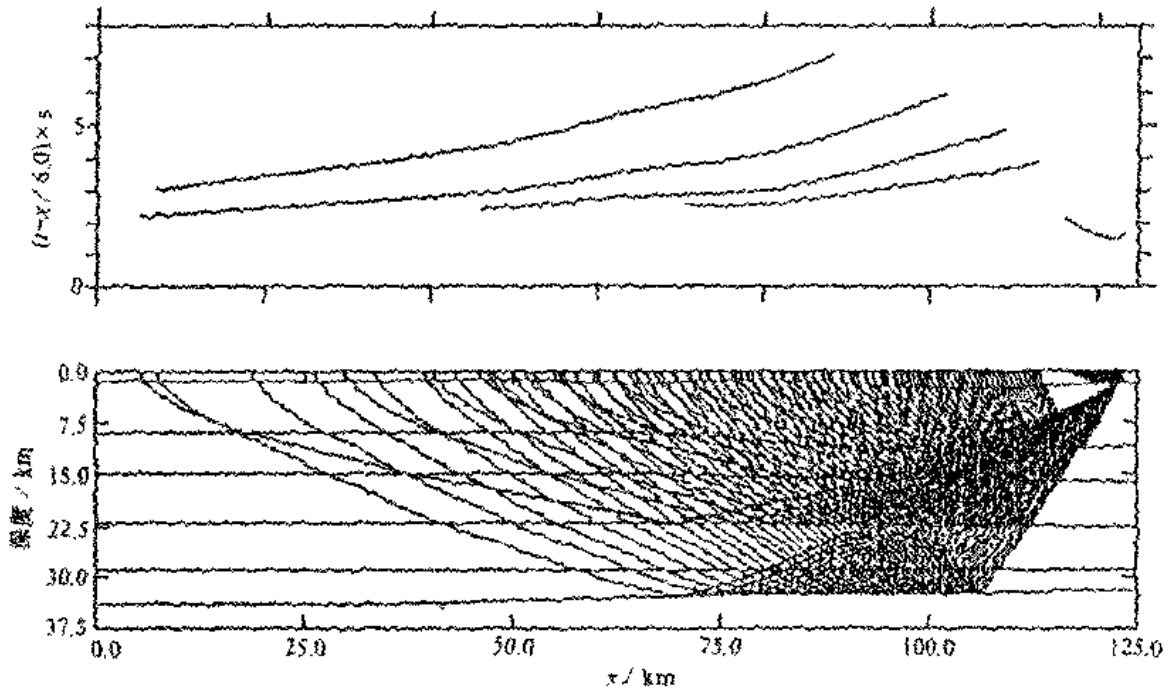


图 10.4　理论模型 3 的正演计算结果

本例的理论模型及相应的走时曲线见表 10.2 和图 10.3，反演时各速度界面的深度和速度网格节点上的速度值为待求的模型参数。这些参数的初始搜索范围为：

①界面参数搜索范围：理论值±2km；

②速度参数搜索范围：理论值±0.3km/s。

采用上述遗传反演方法，用 10 个模型同时做搜索，迭代 100 次后得到反演结果（用机时 25 分钟），见图 10.5。该图中，实线为根据参数的反演结果得到的走时曲线，圆圈为实测走时曲线。走时曲线平均误差为 0.16s，其中最大误差为 0.34s。

模型参数的反演结果见表 10.4。

表 10.4　理论模型 2 的反演结果

剖面参数/km		x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
		0.0	50.0	120.0	0.0	50.0	120.0	0.0	50.0	120.0
		理论值			反演结果			绝对误差		
速度参数/(km/s)	z_1 0.0km	3.10	3.50	3.70	3.14	3.63	3.66	0.04	0.13	0.04
	z_2 10.0km	4.30	4.10	4.50	4.26	4.06	4.71	0.04	0.04	0.21
	z_3 30.0km	6.60	6.20	6.50	6.56	6.33	6.46	0.04	0.13	0.04
	z_4 50.0km	8.50	8.20	8.40	8.54	8.24	8.36	0.04	0.04	0.04
界面参数/km	h_1	20.00	16.00	20.00	20.06	15.94	19.94	0.06	0.06	0.06
	h_2	45.00	43.00	45.00	44.94	43.06	45.06	0.06	0.06	0.06

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

2）理论模型 3 的反演计算

本例的理论模型及相应的走时曲线见表 10.3 和图 10.4。模型参数的初始搜索范围为：

①界面参数搜索范围：理论值±1km；

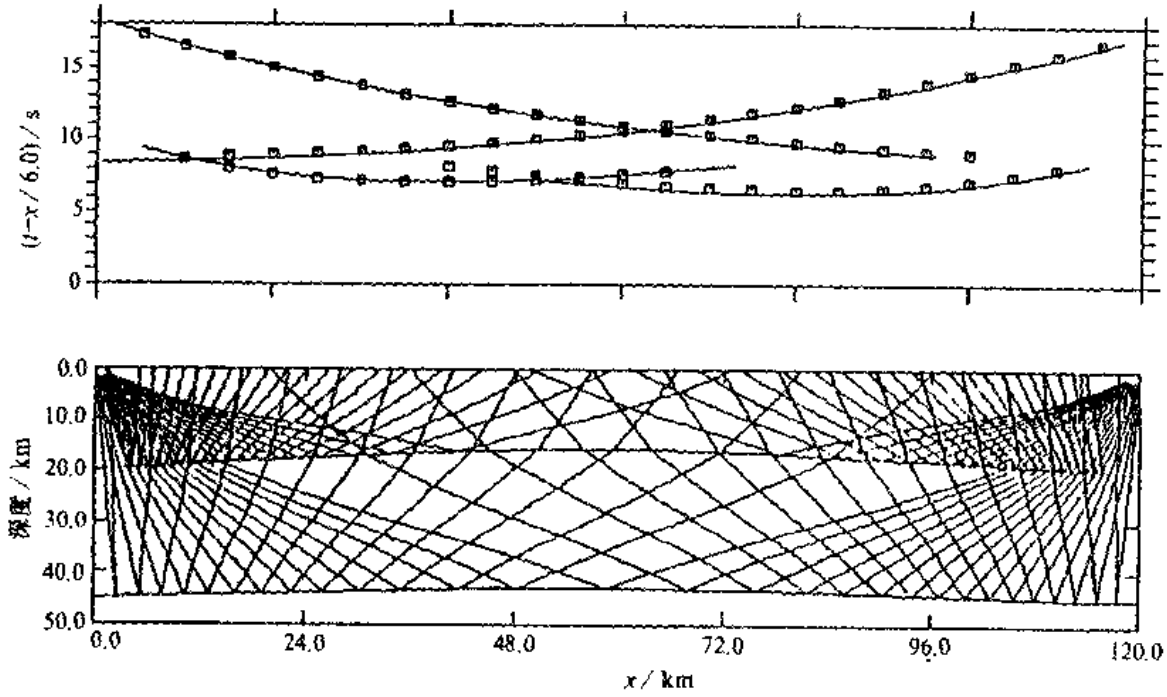


图 10.5　理论模型 2 的反演结果

②速度参数搜索范围：理论值±0.2km/s。

用 10 个模型同时做搜索，迭代 100 次后得到反演结果，见图 10.6。走时曲线平均误差为 0.03s，其中最大误差为 0.08s。

模型参数的反演结果见表 10.5。

表 10.5　理论模型 3 的反演结果

剖面参数/km			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
			0.00	27.00	56.00	64.00	77.50	100.00	125.00
速度参数/(km/s)	z_1	0.0km	2.21	2.27	2.25	2.33	2.39	2.22	2.39
	z_2	6.0km	5.86	5.61	5.68	5.51	5.46	5.62	5.64
	z_3	12.5km	6.16	6.21	6.29	5.96	6.08	6.22	6.16
	z_4	20.0km	6.32	6.21	6.31	6.36	6.42	6.42	6.22
	z_5	25.0km	6.79	6.67	6.67	6.70	6.52	6.55	6.66
	z_6	30.0km	6.89	6.61	6.78	6.66	6.78	6.78	6.55
	z_7	37.5km	8.47	8.64	8.47	8.53	8.70	8.41	8.47
界面参数/km	h_1		1.32	1.13	1.32	1.69	1.09	2.32	1.88
	h_2		8.89	8.85	8.73	8.98	10.31	12.18	10.73
	h_3		14.89	15.05	14.69	14.92	15.29	15.82	16.18
	h_4		21.76	22.08	21.82	22.02	22.15	22.48	22.55
	h_5		29.08	28.76	28.89	28.98	29.08	28.89	29.08
	h_6		34.08	34.15	33.15	33.11	32.61	32.55	31.95

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

与表 3 中界面参数的理论值对比，最大误差为 0.31km，速度的最大误差为 0.18km/s。

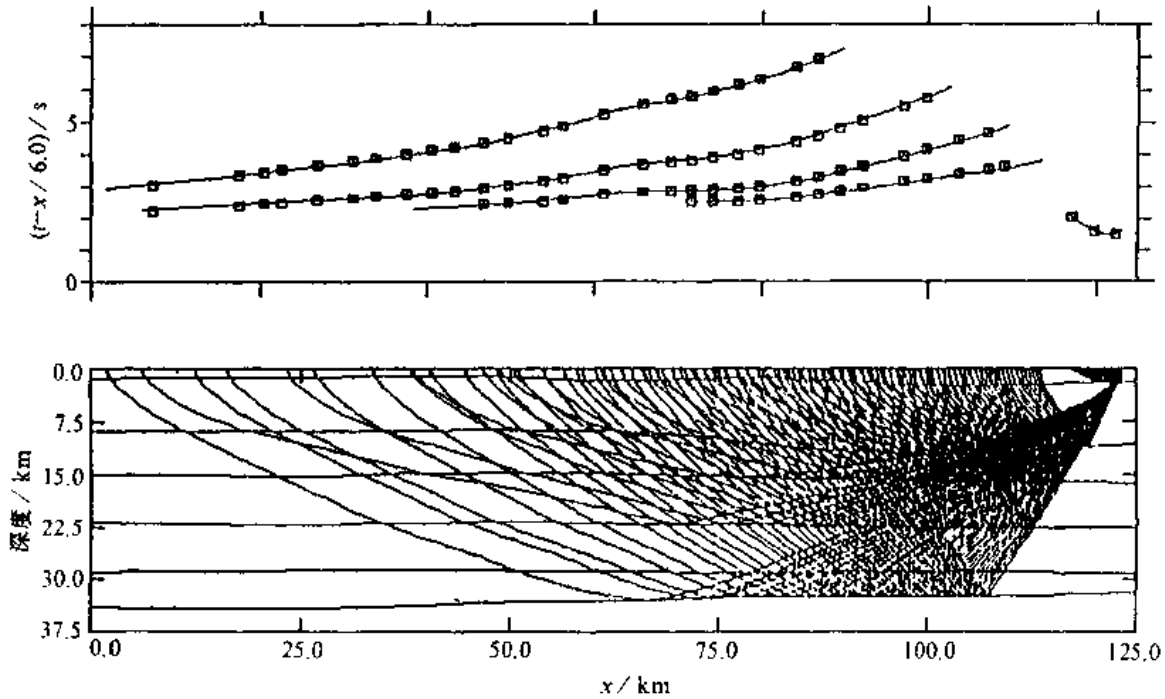


图 10.6 理论模型 3 的反演结果

从上述理论模型的反演结果看，正演计算程序与遗传算法的结合也是成功的。

10.6 北京—怀来—丰镇剖面二维地壳速度结构走时遗传反演

10.6.1 剖面位置及地质概况

北京—怀来—丰镇剖面是中国地震局地球物理勘探中心为完成国家“八五”科技攻关项目(85-907)所设置的宽角反射/折射剖面(中国地震局地球物理勘探中心,1995.12)。该剖面为近东西方向，东起北京市平谷县峪口（E：116°59′48″，N：40°11′57″），经顺义、昌平、延庆、怀来、怀安至内蒙古自治区丰镇县（E：113°06′00″，N：40°29′11″），全长 342km。剖面由东向西穿过燕山与华北平原过渡带，八达岭、延怀盆地和深井、怀安、天镇—阳高等山间盆地。剖面位于华北断陷、燕山褶皱带与山西断隆的接合部，通过太行山重力梯级带、张家口～渤海地震带及一系列北北东向为主的断裂。沿剖面在 7 个炮点上共进行了 7 次爆炸观测，平均观测点距为 2.5km。现根据对应爆炸点 SP：14.87 和 SP：146.66 的 P 波走时数据，用遗传反演方法计算该剖面下方二维地壳速度结构。

10.6.2 确定初始模型和各震相关键参数

根据二维地壳速度结构反演的非线性性质以及为避免解的不唯一性，要求反演过程有一个初始模型。为建立初始地壳模型，参照了已有的研究成果，如由不同方法求取的本区壳幔速度参数、该剖面已有的分析解释结果以及浅层地质构造和其它地球物理资料。在此基础上，用修改后的 PDR2 程序做正演计算，对观测数据做初步拟合。同时，在初步拟合的过程中确定各震相的反射面大致位置、射线追踪范围及射线初始离源角、角增量等关键正演参数。然后，把初始模型离散化。为避免参数过多影响计算速度，速度模型分为 8×8 的网格，其网格

纵、横线坐标及节点上的速度值见表 10.6。初始模型中确定了五个速度反射面，这些界面与速度网格纵线交点处的深度值也列在表 10.6 中。

表 10.6　北京—怀来—丰镇剖面二维地壳速度结构初始模型参数

剖面参数/km			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
			0.0	50.0	128.0	168.0	213.0	235.0	300.0	340.0
速度参数/(km/s)	z_1	0.0km	3.00	3.00	3.00	3.00	3.60	3.60	3.60	3.60
	z_2	3.6km	6.00	6.10	6.00	6.00	6.00	5.93	6.00	5.95
	z_3	10.0km	6.18	6.10	6.08	6.17	6.10	6.17	6.15	6.15
	z_4	20.0km	6.34	6.34	6.34	6.35	6.30	6.30	6.33	6.33
	z_5	27.2km	6.46	6.46	6.35	6.50	6.40	6.34	6.39	6.49
	z_6	32.7km	6.55	6.40	6.66	6.66	6.60	6.50	6.70	6.70
	z_7	46.6km	8.13	8.12	8.18	8.14	8.12	8.13	8.12	8.09
	z_8	60.0km	8.40	8.40	8.40	8.40	8.40	8.40	8.40	8.40
界面参数/km	C_1		7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5	7.5
	C_2		15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0	15.0
	C_3		22.0	22.0	22.0	22.0	22.5	22.5	23.5	23.5
	C_4		30.0	30.5	31.0	31.5	31.5	31.5	31.5	31.5
	Moho		38.0	38.0	38.0	39.5	40.0	41.0	41.0	41.5

x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；C_i 和 Moho 为反射界面标号。

10.6.3　反演计算

有了初始模型和上述正演参数后，即可对该剖面的二维地壳速度结构做反演计算。反演时在初始模型的基础上，界面深度参数±1km、速度参数±0.2km/s 作为模型参数的初始搜索范围，用实测走时数据对模型参数做进一步的调整。

其它参数为，$P_c=0.9$，$P_m=0.03$，$Q=10$，$D=5$，$\alpha=1.0$，$\beta=700.0$，$\theta=1.0$。

对于 SP：14.87 的数据，反演计算共进行了 100 次迭代。走时拟合平均误差为 0.22s，其中最大误差为 0.43s。根据反演结果得到的射线追踪图和相应的走时曲线见图 10.7。用同样的方法对 SP：146.66 的数据做了反演计算，走时拟合平均误差为 0.13s，其中最大误差为 0.39s，相应的射线追踪及走时曲线见图 10.8。

由图 10.7 和图 10.8 可见，根据反演结果得到的二维地壳速度模型使得射线追踪范围能够覆盖地表所有接收点，并且理论走时曲线（实线）与实测走时曲线（离散点）的拟合程度较高。

根据上述两炮的数据，反演得到的二维地壳速度结构见图 10.9。需要说明的是，图 10.7、图 10.8 与图 10.9 的横坐标轴是相反的，但以图 10.9 为准。这是因为，PDR2 程序总是把坐标轴的零点放在左边，而在实际剖面图上，坐标轴的零点是在右边。

由图 10.9 可见，地壳大致分为三层：

①由地表到 C_2 反射面为上地壳。其厚度变化不大，为 15～16.5km。其速度在地表为 3.0km/s，在层底部为 6.2km/s。

②由 C_2 到 C_3 反射面为中地壳。其底边界在顺义附近为 21.5km，向西部逐渐加深，在丰镇附近为 24.0km。层速度为 6.25～6.33km/s。

③从 C_3 到 Moho 面为下地壳，其中 C_4 界面又将其分为上、下两层。下地壳上层层速度为

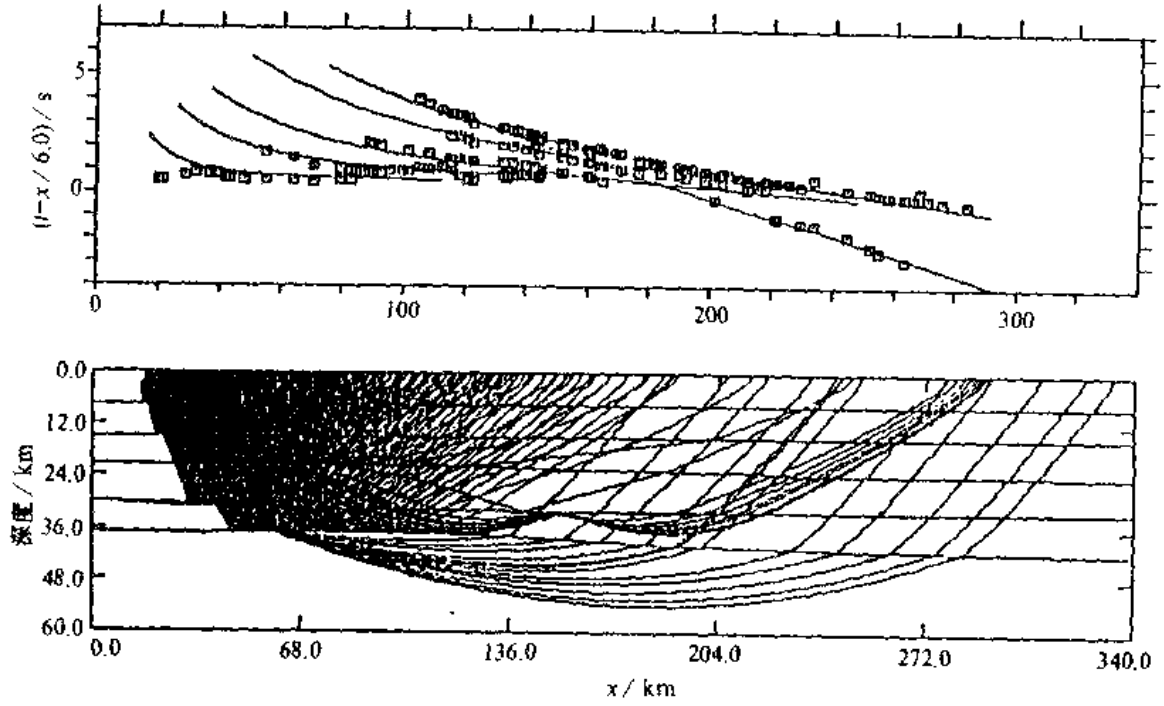


图 10.7　射线追踪及走时曲线图(SP:14.87)

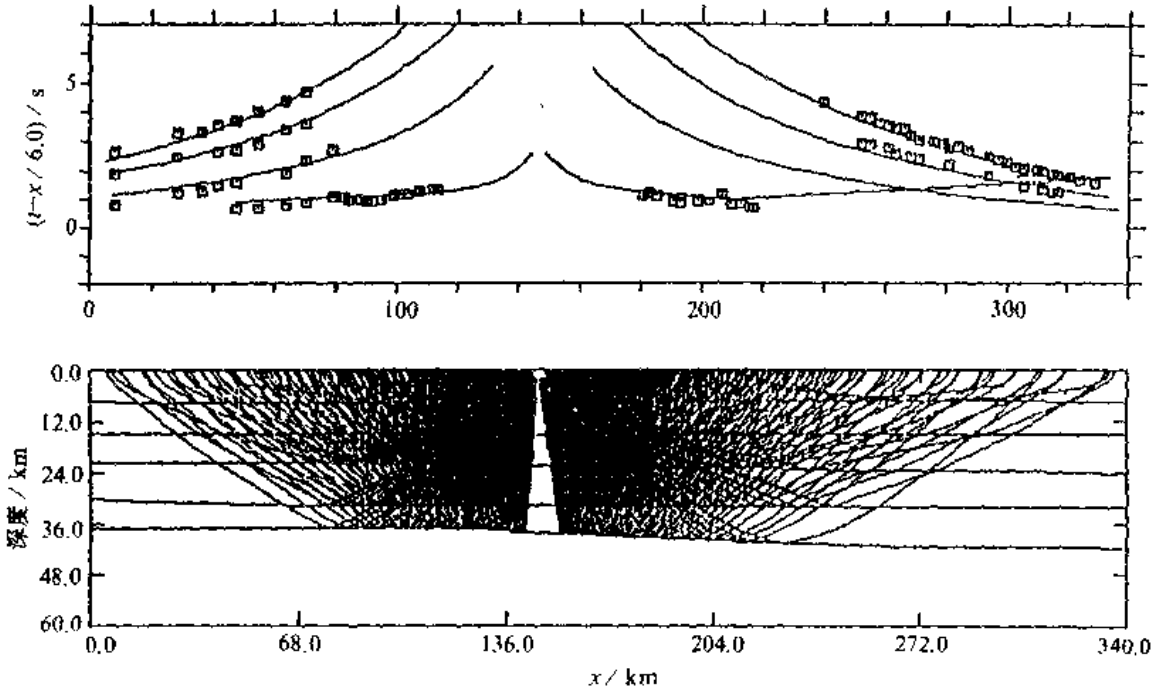


图 10.8　射线追踪及走时曲线图(SP:146.66)

6.4～6.5km/s，下层层速度为 6.7～7.1km/s。Moho 面的深度由东向西呈加深趋势，在顺义附近为 37.06km，怀来附近为 37.46km，天镇附近为 40.96km，丰镇附近为 41.88km。

剖面所显示的地壳层状结构明显，壳内界面起伏不大，由东向西呈缓慢下倾趋势，莫氏面向西下倾的趋势更为明显。上地壳厚度由剖面东端的 15km 向西部山区加厚至 16km，中地

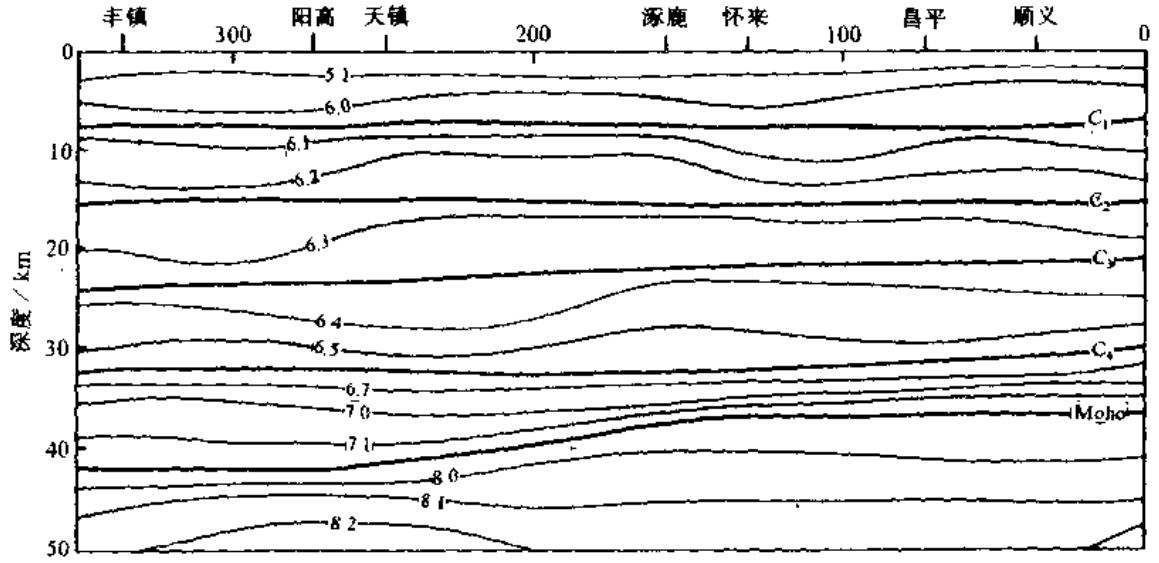


图 10.9　北京—怀来—丰镇二维地壳速度结构

壳厚度为 7～8km，其底界面的深度在 22～24km，由东向西加深。这是一个厚度、速度变化不大的层位，它起到把脆性的上地壳和相对塑性的下地壳分开、并在上下地壳之间起到传递形变和解耦的作用。下地壳厚度为 13～18km，其底界面（莫氏面）埋深在 35～41km。有关资料表明，怀来东侧和涿鹿下方在延伸至莫氏面的深断裂带，它们分别是阳原—涿鹿和灵丘—怀来地壳深断裂在北东方向的延续。据有历史记载以来，本区共发生 8 级地震 1 次，7 级地震 3 次，6.0～6.9 级地震 10 次，5.0～5.9 级地震 24 次。1989 年大同 6.1 级地震位于该剖面附近。这些地震多发生在山间盆地内部和山区与平原交接处，震源深度集中在 5.0～20.0km 深度范围内。涿鹿 6.0 级和沙城 7.0 级地震分别位于深部隐伏断裂带上。

小　结

（1）成功地将射线追踪正演计算程序（PDR2）与遗传算法程序结合起来，形成了二维地壳速度结构遗传反演方法。

（2）根据广义反演方法中构制目标函数的方法，对问题的目标函数做了改造，这样就能从观测数据和初始模型两方面引入先验信息，以克服反演的欠定性以及由此带来的解的不唯一性。

（3）在理论模型上所做的正、反演数值模拟表明，这种反演方法是可行的。

（4）对于实际资料的处理，数据的初步拟合这一步骤必不可少，其作用是确定初始地壳模型和正演计算的关键参数。这对克服解的不唯一性很有帮助。

（5）根据北京—怀来—丰镇剖面的到时资料，对该剖面的二维地壳速度结构做了反演计算。反演结果表明，实测数据的拟合程度较高。根据反演结果，构制了剖面下方二维地壳速度结构。

11　重力、地震资料的联合遗传反演方法研究

11.1　引　言

深部地球物理勘探的重要任务之一，是搞清地壳内物质的分布情况，尤其是壳内主要物性界面（如沉积层底界面、莫氏面等）的位置，这对于地震预报、矿产资源预测、地球动力学研究都是十分重要的。目前，开展这方面研究所采用的方法有人工地震、重力勘探等。

人工地震测深在发现和确定地层位置、深度、厚度及构造特征等重要地质因素方面，有其特殊的优势，是深部地球物理勘探的重要方法。但其本身也有一些局限性，如：①由于真实的地壳情况非常复杂，某些重要的地层界面不一定就是弹性波阻抗面，因此这些界面在地震勘探结果中有时并无清楚的显示。②当盖层中存在高波阻抗面时，地震波的穿透能力减弱，其下的各地震反射界面在探测结果中难以分辨。③由于岩性的不均匀和波阻抗面起伏的复杂性，则界面的深度及起伏特征与弹性波的速度特征在探测结果中往往混杂在一起，不易区分。④由于地壳的复杂性和地震波的传播特点，探测结果中不可能包含研究范围内的所有信息，所以在用地震资料做反演计算时，在数学上可能成为欠定问题，导致解的不唯一。

重力勘探也是深部地球物理勘探的重要手段之一。重力异常是地下各物性界面起伏与岩性不均匀变化的综合反映。用重力勘探的方法可以在短时间内完成大范围的探测，在没有干扰的情况下，可以获得地壳内物性分布的很多细节和微弱的异常特征和信息。但是，由于重力异常是地壳内物性界面与岩性分布的综合反映，并且在异常的分离方法上目前存在很大困难，所以只用重力资料来解地壳结构的反演问题是不够的，存在着多解性问题。

近年来，国内外都很重视研究用多种地球物理资料进行综合解释的反演方法，这样做可以使各种地球物理方法和资料互相验证、取长补短，提高资料解释的可靠性。在这方面国内外的地球物理工作者已做了很多工作（关小平等，1994）。可见，各种地球物理资料的联合反演方法，是当前的重点研究方向。

所谓联合反演，应该是以各种地球物理方法的观测数据或中间处理结果为基础资料，结合必要的已知信息，根据各种方法的基本原理和彼此的相关性，构成一个统一的反演过程。在这个反演过程中，各种方法和资料相互补充、相互约束，以克服地球物理反问题中固有的多解性，提高反演计算的可靠性。

由于各种地球物理方法的原理和物理机制互不相同，要建立一个统一、通用、客观、严格的联合反演计算公式并予以实施，用传统的反演方法将会遇到很多困难，实非短期内所能实现。GA 是近年来出现的一种完全非线性反演方法，与传统反演方法相比，它的特点是，①不计算目标函数的导数，②不用解方程组，③是完全非线性的，④可以很容易地与各种地球物理方法的正演计算程序相结合，⑤有统一的反演计算过程。它的这些特点非常适用于解决地球物理中的多方法联合反演问题。

本章讨论重力与地震方法的联合反演问题。因为重力方法中的密度参数与地震方法中的

速度参数之间有一定的关系，所以这两种方法的联合有其方便之处。这里把重力和地震资料结合起来，用 GA 做为基本反演方法，结合重力异常和地震射线追踪正演计算方法，形成重、震联合遗传反演系统，用以研究二维地壳结构问题。

11.2 地壳模型及速度-密度转换

在重、震联合反演中所采用的地球物理模型，应该是能同时满足理论重力异常和理论走时曲线正演计算的统一的模型。为此，采用与第 10 章相同的地壳模型（见图 10.1）。这个模型在做射线追踪计算时是二维速度模型，它的网格节点上是速度分布值，其中的界面为速度界面。当做重力异常正演计算时，它可以成为密度模型，其中速度与密度之间的转换由 Nafe-Drake 公式（7.3）来实现，这时模型中的界面为密度界面。这样，以速度与密度的关系为桥梁，在同一个模型上即可实现两种不同地球物理方法的理论值计算。

11.3 目标函数形式

联合反演的目标函数形式基本上与（10.4）式相同。不同之处在于，这里的目标函数由重力与地震两部分数据的误差组成。因此，反演过程依赖于两种数据的误差。由于目标函数中存在两类数据，而且它们的数量级不同，重力数据的误差量级大而地震数据的误差量级小，因此要做归一化处理。否则反演过程将过多地依赖重力数据的误差，而走时的误差将会被忽略。做了归一化处理后，两类数据的误差将会在反演过程中起同样重要的作用。

11.4 遗传反演计算步骤

在反演计算之前，要做走时数据的初步拟合。这一步骤主要是针对地震数据，有两个目的。第一，要确定初始地壳速度模型。第二，要确定理论走时曲线正演计算的关键参数，如各震相地震波的离源角、角增量及射线个数等。这样做的好处是，①可以减少反演计算中的盲目性，提高计算效率。②可以避免多解性，提高可靠性。

反演计算步骤如下：

（1）随机产生初始模型群体。

（2）根据初始地壳速度模型正演计算与各个模型相应的理论走时曲线。

（3）把初始地壳速度模型转换成密度模型，正演计算与各个模型相应的理论重力异常。

（4）根据重力与地震的实测数据与理论数据计算各个模型的目标函数。

（5）根据各个模型的目标函数用 GA 确定模型的保留与淘汰，产生下一代模型群体（即修改模型参数）。

（6）重复执行步骤 2～5，直到：

①最佳目标函数小于给定值；或②迭代到指定次数。

从这些计算步骤可以看到，这种重、震联合反演方法有统一的目标函数和统一的反演过程，因此这是真正意义上的联合反演。

反演计算的流程图见图 11.1。

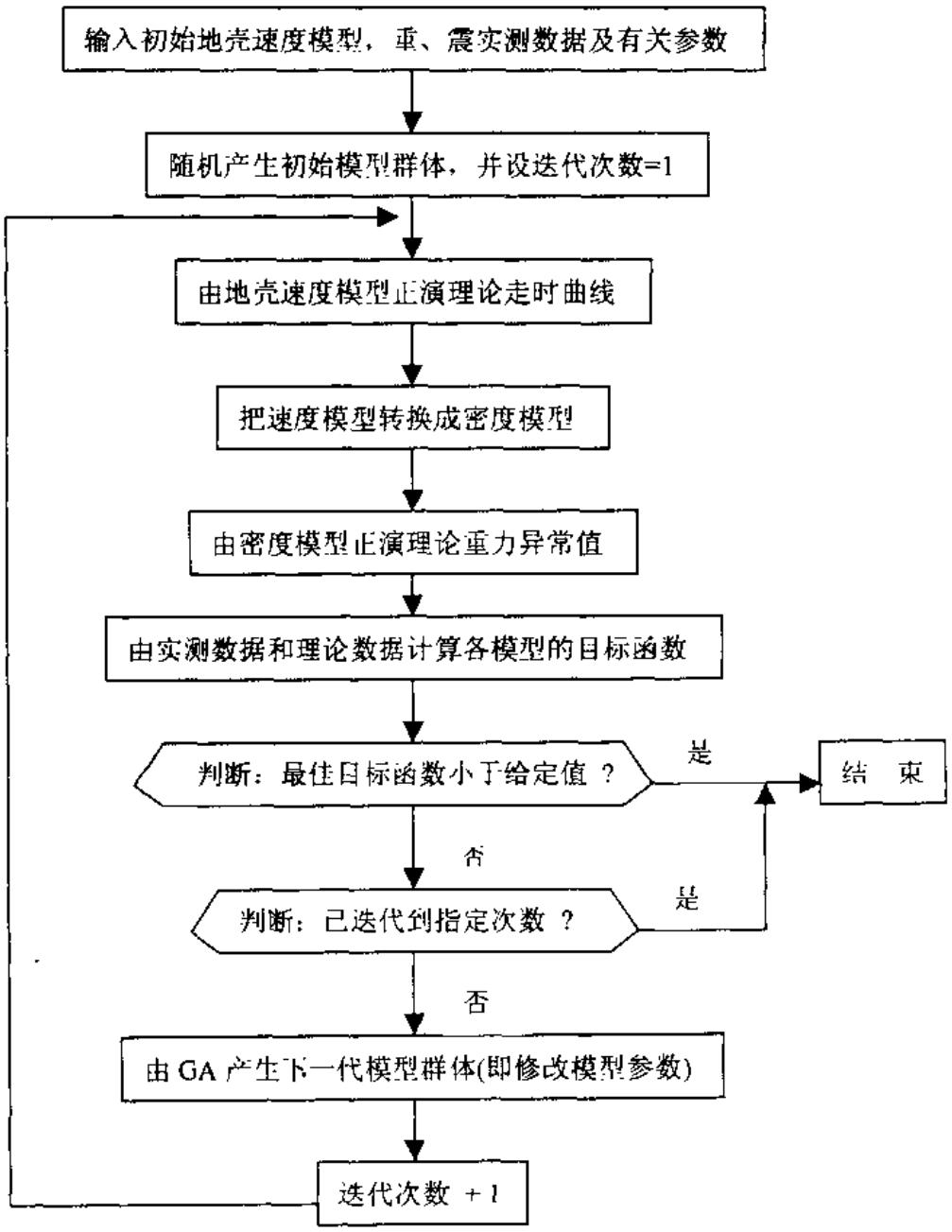


图 11.1 联合遗传反演计算流程图

11.5 数值模拟

利用上述联合遗传反演方法，首先做了理论上的数值模拟，以检验方法及程序的效果。

数值模拟一：

1）正演计算

数值模拟一所采用的理论地壳模型为双界面地壳模型，其界面参数及速度参数见表

11.1。

表 11.1　数值模拟一的理论地壳模型参数

剖面参数/km			x_1	x_2	x_3
			0.0	50.0	120.0
速度参数/（km/s）	z_1	0.0km	6.1	6.3	6.2
	z_2	50.0km	7.9	7.8	8.0
界面参数/km	h_1		20.0	16.0	20.0
	h_2		45.0	43.0	45.0

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

地震剖面长 120km。从 5.0km 处开始，共设置了 24 个接收点，接收点间距为 5km。爆炸点有 2 个，分别位于 0.0km 和 120.0km 处。所接收到的震相为来自第一和第二反射界面的反射波。

重力剖面与地震剖面重合。沿地震剖面共设置重力观测点 25 个，观测点间距为 5km。

该模型的正演计算结果见图 11.2。

2）反演计算

应用联合遗传反演方法，在上述理论模型上做了反演计算。所采用的参数为：

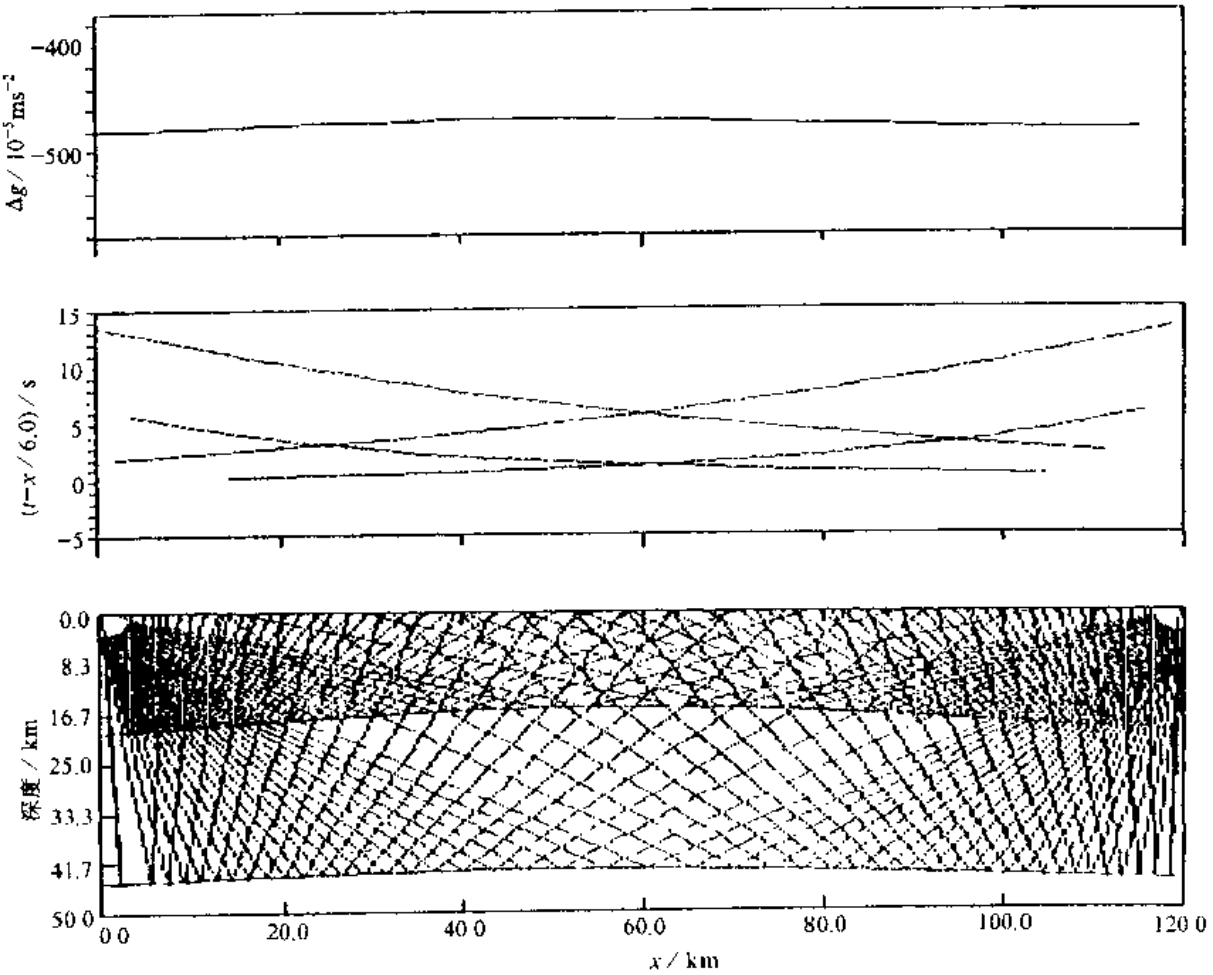


图 11.2　数值模拟一的正演计算结果

GA 参数：$P_c=0.90$，$P_m=0.04$，$Q=10$。

加速收敛方法参数：当目标函数小于 20 时，以 1/4 的速率压缩参数搜索范围，然后迭代 20 次。其中 S 形函数的参数为：$\alpha=2$，$\beta=500$，$\theta=1.0$。

迭代进行了 200 次，反演结果见图 11.3。观测数据的拟合情况为，重力异常的平均拟合误差为 0.20 ($10^{-5}m\cdot s^{-2}$)，最大误差为 2.026 ($10^{-5}m\cdot s^{-2}$)。走时平均拟合误差为 0.005s，最大误差为 0.154s。模型参数的误差统计见表 11.2。

表 11.2　数值模拟一的模型参数反演结果及误差统计表

速度反演结果/(km/s)			理论值/(km/s)			误差/(km/s)		
6.08	6.33	6.23	6.10	6.30	6.20	0.02	0.03	0.03
7.92	7.75	8.04	7.90	7.80	8.00	0.02	0.05	0.04
界面反演结果/km			理论值/km			误差/km		
19.88	15.95	19.85	20.00	16.00	20.00	0.12	0.05	0.15
45.08	42.98	45.11	45.00	43.00	45.00	0.08	0.02	0.11

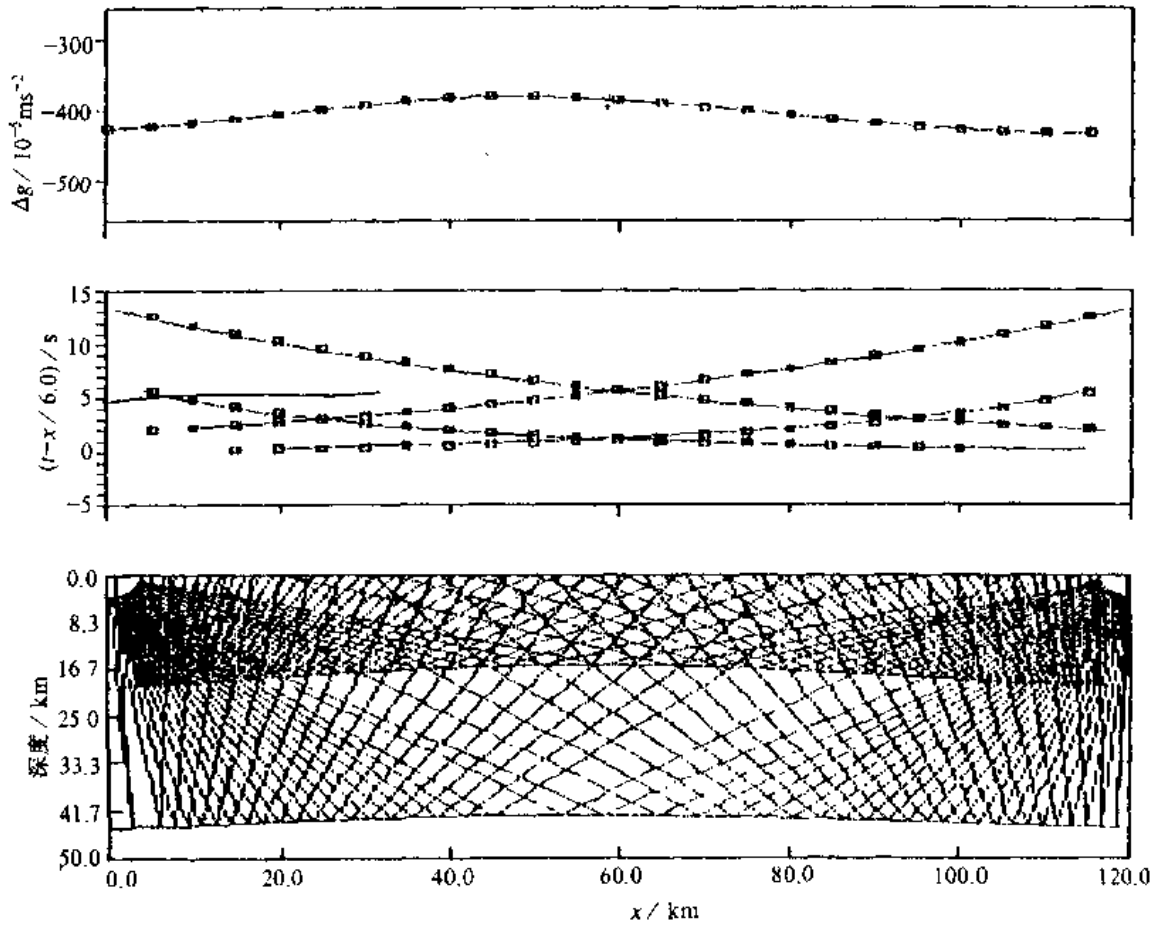


图 11.3　数值模拟一的反演计算结果

数值模拟二：

1）正演计算

数值模拟二所采用的理论地壳模型是有 4 个界面的地壳模型，其界面参数及速度参数见表 11.3。

表 11.3　数值模拟二的理论地壳模型参数表

剖面参数/km			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
			28.0	56.0	64.0	77.50	100.0	122.0	131.0	150.0	175.0
速度参数/(km/s)	z_1	0.0km	2.00	2.09	2.00	2.00	2.01	2.00	2.00	2.02	2.00
	z_2	6.0km	5.70	5.55	5.50	5.50	5.65	5.50	4.90	5.73	5.90
	z_3	12.5km	6.30	6.17	6.10	6.05	6.30	6.30	6.20	6.19	6.19
	z_4	20.0km	6.28	6.45	6.45	6.45	6.45	6.20	6.20	6.20	6.20
	z_5	25.0km	6.70	6.70	6.65	6.49	6.46	6.46	6.46	6.46	6.46
	z_6	30.0km	6.72	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75	6.75
	z_7	37.5km	8.20	8.20	8.20	8.20	8.20	8.20	8.20	8.20	8.20
界面参数/km	h_1		1.4	1.4	1.8	1.2	2.5	1.8	4.10	1.5	2.1
	h_2		9.0	9.0	9.0	10.0	12.1	11.0	11.00	11.5	12.1
	h_3		15.0	15.0	15.0	15.4	15.8	16.2	16.50	16.5	16.5
	h_4		34.0	33.2	33.0	32.5	32.5	32.0	32.00	32.0	32.0

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

地震剖面长 175km。从 30.0km 处开始，共设置了 30 个接收点，接收点间距为 5km。爆炸点有 2 个，分别位于 28.0km 和 175.0km 处。所接收到的震相主要为来自第二、第三和第四反射界面的反射波。

重力剖面与地震剖面重合。沿地震剖面共设置重力观测点 36 个，观测点间距为 5km。

该模型的正演计算结果见图 11.4。

2）反演计算

应用联合遗传反演方法，在上述理论模型上做了反演计算。所采用的参数为：

GA 参数：$P_c=0.92$，$P_m=0.06$，$Q=10$。

加速收敛方法参数：当目标函数小于 20 时，以 1/4 的速率压缩参数搜索范围，然后迭代 20 次。其中 S 形函数的参数为：$\alpha=2$，$\beta=500$，$\theta=1.0$。

迭代进行了 200 次，反演结果见图 11.5。观测数据的拟合情况为，重力异常的平均拟合误差为 0.40（$10^{-5}m\cdot s^{-2}$），最大误差为 4.31（$10^{-5}m\cdot s^{-2}$）。走时平均拟合误差为 0.011s，最大误差为 0.175s。反演的模型参数见表 11.4。

表 11.4　数值模拟二的反演结果

剖面参数/km			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
			28.0	56.0	64.0	77.5	100.0	122.0	131.0	150.0	175.0
速度参数/(km/s)	z_1	0.0km	2.03	2.09	2.05	2.04	2.01	2.03	2.03	2.03	2.04
	z_2	6.0km	5.69	5.55	5.49	5.49	5.65	5.49	4.89	5.73	5.90
	z_3	12.5km	6.30	6.18	6.09	6.05	6.30	6.30	6.19	6.19	6.18
	z_4	20.0km	6.28	6.44	6.45	6.45	6.45	6.39	6.38	6.33	6.31
	z_5	25.0km	6.70	6.69	6.64	6.49	6.46	6.46	6.47	6.46	6.46
	z_6	30.0km	6.73	6.74	6.74	6.74	6.74	6.76	6.74	6.74	6.75
	z_7	37.5km	8.19	8.20	8.21	8.20	8.19	8.21	8.19	8.19	8.20

续表

剖面参数/km		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
		28.0	56.0	64.0	77.5	100.0	122.0	131.0	150.0	175.0
界面参数/km	h_1	1.45	1.43	1.82	1.16	2.44	1.88	4.12	1.58	2.12
	h_2	8.89	9.12	9.01	10.21	12.13	11.23	11.07	11.53	12.20
	h_3	14.99	15.10	15.21	15.33	15.50	16.29	16.44	16.47	16.45
	h_4	34.30	33.19	33.25	32.49	32.49	31.99	32.17	32.23	32.30

其中，x_i、z_i 为速度网格纵、横线坐标；h_i 为反射界面序号。

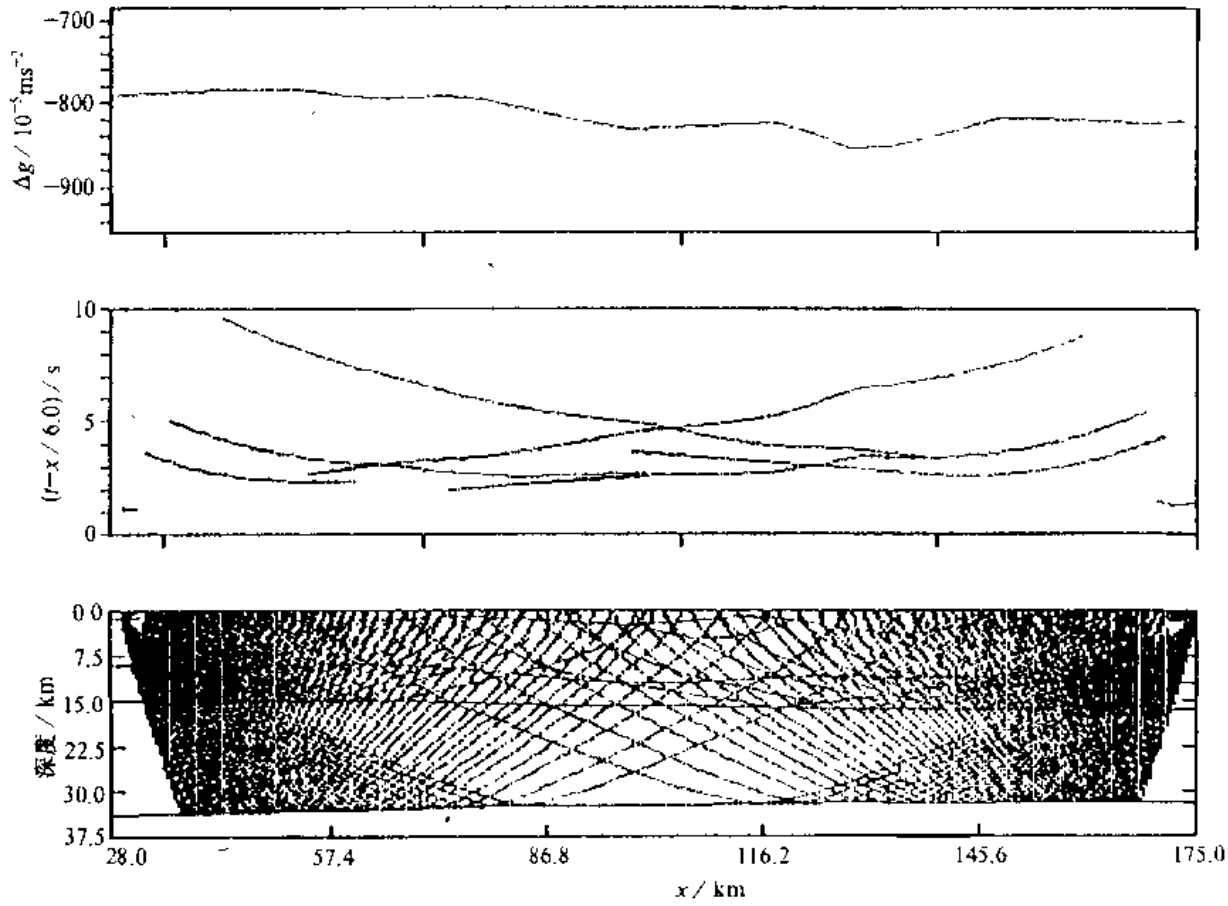


图 11.4　数值模拟二的正演计算结果

与表 11.3 对比，速度参数的最大误差为 0.19km/s，界面参数最大误差为 0.3km。

小　结

多种地球物理方法的联合反演解释是当前地球物理数据处理的发展方向，有助于提高资料解释的可靠性，减少多解性。

本章讨论了重力与地震数据联合反演的方法。这种联合反演方法是以 GA 为基础，结合重力异常和人工地震波走时曲线正演计算方法而形成的一套完全非线性的反演方法。在反演过程中，两种方法使用同一个地壳模型，其中速度到密度的转换由 Nafe-Drake 公式完成。两

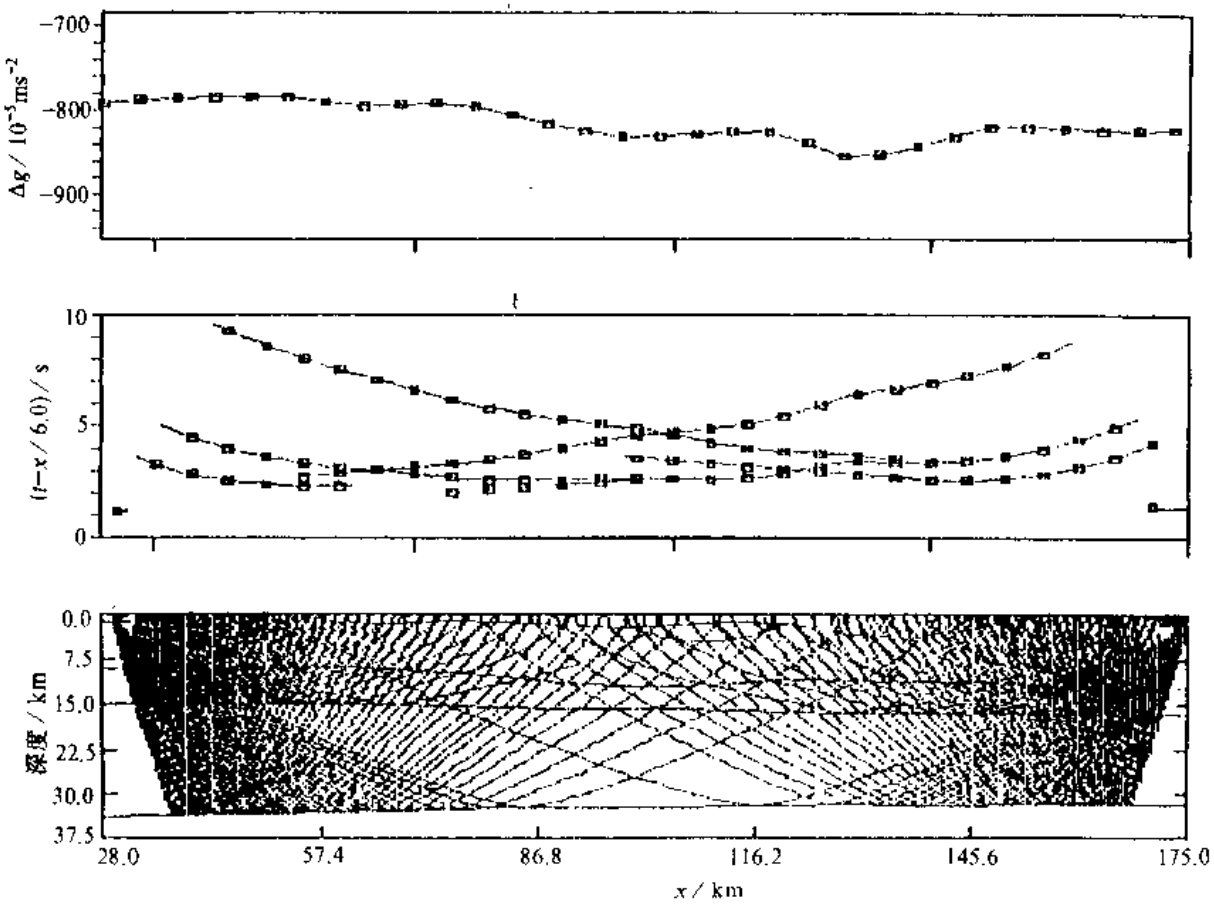


图 11.5　数值模拟二的反演计算结果

类数据的误差都反映在一个统一的目标函数中，反演过程由这个统一的目标函数引导，实现对最优解的搜索。数值模拟的结果表明，方法及程序的效果良好。

本章所做的联合反演研究工作只是初步的尝试，不完善之处有待今后进一步深入研究。

结 束 语

本书对 GA 的基本原理、方法、改进及其在地球物理反问题中的应用等方面做了详细地研究和介绍，现将主要内容归纳如下：

1. 算法方面

1) GA 的特点

根据作者的应用经验，认为GA 有如下特点：

(1) GA 本身就是一种反演方法。从数学上讲，它的运算很简单，这使它可以成为一种稳定、通用的反演方法。对于不同的应用问题，只要有相应的正演计算程序，就很容易与GA 相结合，形成遗传反演系统。

(2) 在反演过程中只利用目标函数值这种最一般的搜索信息，不必计算目标函数相对于模型参数的导数等特殊信息，所以本算法不要求目标函数可导。

(3) 对正问题不必做任何形式的线性化处理。这一特点对非线性的地球物理反演问题来说尤为重要，因此它的反演计算是完全精确的。

(4) 在做位场资料反演时，对观测数据不做任何形式的转换，这样可以保留全部有用信息。

(5) 利用多个模型（模型群体）同时在模型空间做搜索，而不是只用一个模型。因此，既使个别模型陷入局部极值或出现数值计算问题，演化过程也不会因此而受影响，表现出良好的健全性。

2) GA 与不同应用问题相结合的方法

GA 本身是一种通用的非线性反演方法，它可以很容易地与各种不同问题的正演计算程序相结合形成不同的反演系统。但首先要把问题的正演计算程序做一些修改，以下是几点应该特别注意的问题。

(1) 把正演程序改成一个子程序，反演时由 GA 做正演计算时调用。它的功能是接收模型参数和相应的各种控制变量，传出理论计算值。

(2) 该子程序在反演计算时被多次调用。为保证每次正演计算的正确性，在调用该子程序时，除每次传入的模型参数和相应的控制变量等可以是不同的外，其它的控制变量、全程变量、局部变量和常数都必须保证它们与第一次被调用时一样。如果这些量在正演计算时被改变了，在下一次正演计算之前要重新赋值。这一点非常重要，否则不能保证正演计算的正确性。

(3) 在该子程序内不能再有数据的读入和打印操作，这些操作都应放在该子程序之外进行。

(4) 如果该子程序中有绘图部分，在反演过程中应全部关闭，待反演结束后再重新打开，最后绘出一幅最终的图件。

3) GA 的局限性

尽管 GA 是一种有发展潜力的非线性反演方法，但它本身也有其自身的局限性，其主要

方面有：

（1）它不能解决地球物理反演中的多解性问题。这是因为，多解性问题是地球物理反演中固有的问题，它是由于先验信息的不充分和观测数据中含有误差造成的，任何巧妙的反演方法都不可能弥补这种先天不足，只是不同的反演方法在利用已有先验信息的程度方面有所区别。

（2）它不能给出模型参数的分辨率、后验方差等信息。这是因为，在BG理论和广义反演方法中，模型参数的分辨率及后验方差等信息是通过解方程组得到的，而GA在反演过程中不涉及解方程组的问题，所有这些信息无法得到。

4）速度问题

在讨论一个反演方法的速度问题时，作者认为要明确两个概念。

（1）计算速度：每迭代一次的计算时间。它主要受问题的正演计算速度的影响。

（2）收敛速度：每迭代一次或几次后目标函数的下降速度。它主要受待求问题的非线性程度和反演方法的影响。

在GA中，计算速度受模型群体大小、迭代次数的影响。因为GA是用若干个模型组成的模型群体在模型空间中搜索，而传统反演方法只用一个模型搜索，因此，在现有的计算机上，GA的计算时间比传统方法长若干倍这是可以理解的。但从发展的眼光看，在将来的并行计算机上，GA的模型群体在模型空间中同步搜索一次的时间，与传统方法一个模型搜索一次的时间相当，而GA的搜索效率要比传统方法高若干倍，那时，GA的潜在威力就可以得到充分发挥。

由于采用了作者提出的三项改进措施，GA的收敛速度得到明显改善，因此可以认为，改进后的GA是一种比较完善的反演方法。

2. 改进方面

（1）在遗传基因的交换过程中，采用多点交换方法。遗传基因实行多点交换，其作用是在一次演化过程中使大多数模型参数都发生变化，这样做可以对模型空间实行更彻底、更快速的搜索，同时也更符合反演计算的实际情况。

2）提出了真值邻域的概念，据此导出了参数搜索范围的压缩公式，它使模型参数的搜索范围随着遗传演化的进程实行动态地逐步缩小，其意义是使模型空间搜索的速度和搜索精度同时得到提高。

3）把S形函数作用于模型的适应程度函数值上，使遗传算法能够更仔细地分辨各个模型的优劣，以便保留好的模型而淘汰坏的模型。

以上三方面的改进，在模型参数的遗传演化过程中都起到了加速收敛的积极作用。

3. 应用方面

GA是一种通用的非线性反演方法，它可以很容易地与不同的问题相结合，形成相应的反演系统，但其中要注意上面提到的正演程序修改及与GA主程序结合方面的问题。应用改进后的GA，将它分别与多种地球物理问题相结合，针对各个问题的特点，提出了不同的地球物理反演方法，简要总结如下。

（1）采用变密度多层地壳密度模型和相应的重力异常正演计算公式，以GA为基础，结合上述重力异常正演公式，提出了二维密度界面位场的遗传反演方法。

（2）在分析了目前常用的频率域位场反演方法中存在的问题后，提出了用位场频率域快

速正演方法与GA相结合形成的三维界面位场遗传反演方法。这种反演方法的特点是，正演计算在频率域中进行，这样可以充分利用了频率域正演方法速度快、精度高的特点。反演计算在空间域中进行，因此避开了频率域反演方法中的下延因子问题、滤波参数选择问题和对数据的反复滤波问题，使反演过程稳定、健全。

（3）把GA与地震波走时曲线正演计算方法相结合，形成了一维地壳速度结构走时遗传反演方法。对于实际资料的处理，数据的初步拟合这一步骤必不可少，其作用是确定初始地壳模型和正演计算的关键参数，这对克服解的不唯一性是必要的。

（4）成功地将二维射线追踪正演计算与GA结合起来，形成了二维地壳速度结构走时遗传反演方法。根据广义反演方法中构制目标函数的方法，对问题的目标函数做了改造，这样能从观测数据和初始模型两方面引入先验信息，以克服反演的欠定性以及由此带来的解的不唯一性。同样，对于实际资料的处理，数据的初步拟合这一步骤必不可少，作用同上。

（5）多种地球物理方法和资料的联合反演与解释技术是当今地球物理学的重要课题，它对减少多解性、增加反演的可靠程度非常重要。在本文的最后一章对这一技术做了尝试性研究，把重力方法、人工地震方法与GA方法结合起来，形成了一套重、震联合遗传反演方法。数值模拟的结果表明效果良好。

4. 主要成果

(1)对GA这种新颖的完全非线性反演方法做了全面的研究和详细的剖析，给出了GA各种运算在地球物理反演过程中的作用：①选择和再生是根据目标函数衡量模型参数接近其真值的程度。②基因交换是对模型空间做全局搜索的一种方式。③基因变异是对模型空间做局部接索的一种方式。

（2）提出了使GA加速收敛的三项措施：①遗传基因的多点交换；②逐步缩小参数搜索范围；③在GA中应用S形函数分辨模型的优劣。

（3）以GA为基本反演方法，针对不同的地球物理问题，提出了相应的反演方法，并用这些反演得到了有意义的地球物理结果：

①用重、震约束二维地壳密度结构遗传反演方法，利用多种深部地球物理资料，采用正演拟合与遗传反演相结合的方法得到了郑州—临汾剖面的地壳密度结构。

②用三维界面位场的遗传反演方法，根据布伽重力异常资料，得到了山西高原莫氏面埋深等值线图。

③用一维速度-深度函数遗传反演方法，根据任县—武清深地震测深剖面4炮的P波走时数据，计算了该剖面内的速度-深度函数。根据4炮数据的反演结果，构制了剖面下方地壳内速度界面的大致形态。

④用二维地壳速度结构遗传反演方法，根据北京—怀来…丰镇深地震测深剖面的走时资料，对该剖面的二维地壳速度结构做了反演计算。根据反演结果，得到了该剖面下方二维地壳速度结构图。

⑤用GA作为基本反演方法，对重力、地震的联合反演做了尝试性研究，初步结果表明效果良好。

附录：用GA解地球物理反演问题的步骤

用GA解地球物理反问题的步骤见图A-1。

上述计算步骤可分为三个主要部分：①确定GA参数、加速收敛参数、正演参数；②确定模型参数的搜索范围；③GA反演计算。下面分别说明：

1. 确定GA参数、加速收敛参数及正演参数

1）GA参数

GA参数包括交换概率P_c、变异概率P_m和模型群体大小Q。根据已有研究成果及个人体会，认为$P_c \approx 0.9$，$P_m \approx 0.04$比较合适，在此基础上根据具体情况可做适当调整。Q的确定可根据问题的复杂程度、计算机容量及计算速度做选择。太大占用内存多且计算速度慢，太小则搜索不彻底，应根据具体情况权衡选择。

2）加速收敛参数

论文中第4～6章已对加速收敛方法做了详细的介绍，第7～11章的应用中也多次谈到它们的使用方法，现把要点归纳如下。

①基因多点交换方法不需要参数，程序自动执行该功能。

②逐步缩小搜索范围，重要的参数是压缩比例和压缩后的迭代次数。对于参数较少的问题，压缩比可大些，压缩后的迭代次数可少些。反之，对于参数较多的问题，压缩比应小些，压缩后应多迭代几次。

③S形函数，通常取$\alpha=2$，$\beta=600$，$\theta=1$即可。

3）正演参数

对于位场问题，包括测网参数、物性参数等。

对于地震问题，包括炮点位置、接收点个数及位置、震相个数、各震相射线初始离源角、角增量、射线个数等。

2. 确定模型参数的搜索范围

对于不同的地球物理应用问题，有不同的确定方法。比如对于界面位场问题，①如果有地震或其它地球物理资料可供利用，则利用这些资料确定参数搜索范围。②也可用近似线性公式$h=\Delta g/(\varepsilon\pi G\sigma)$给出近似界面形态，在此基础上确定参数搜索范围，再用GA做进一步精确反演。其中，Δg是布格重力异常，$0<\varepsilon<2$，G是引力常数，σ是密度。

对于地震问题，最好先做数据的初步拟合，在初步拟合所得模型的基础上确定参数搜索范围。

3. GA反演计算

在前面两步工作完成之后，即可进行GA反演计算。GA的运算由通用的程序模块来完成，不用人工干涉。

以上就是GA反演的主要步骤。值得指出的是，由于地球物理反演问题存在固有的多解性，如果没有充分的先验信息可供利用，反演效果必然不好。因此，反演前的准备工作很重要。①要做数据的初步拟合，②要利用各种已有资料确定参数搜索范围。这样做有利于减少

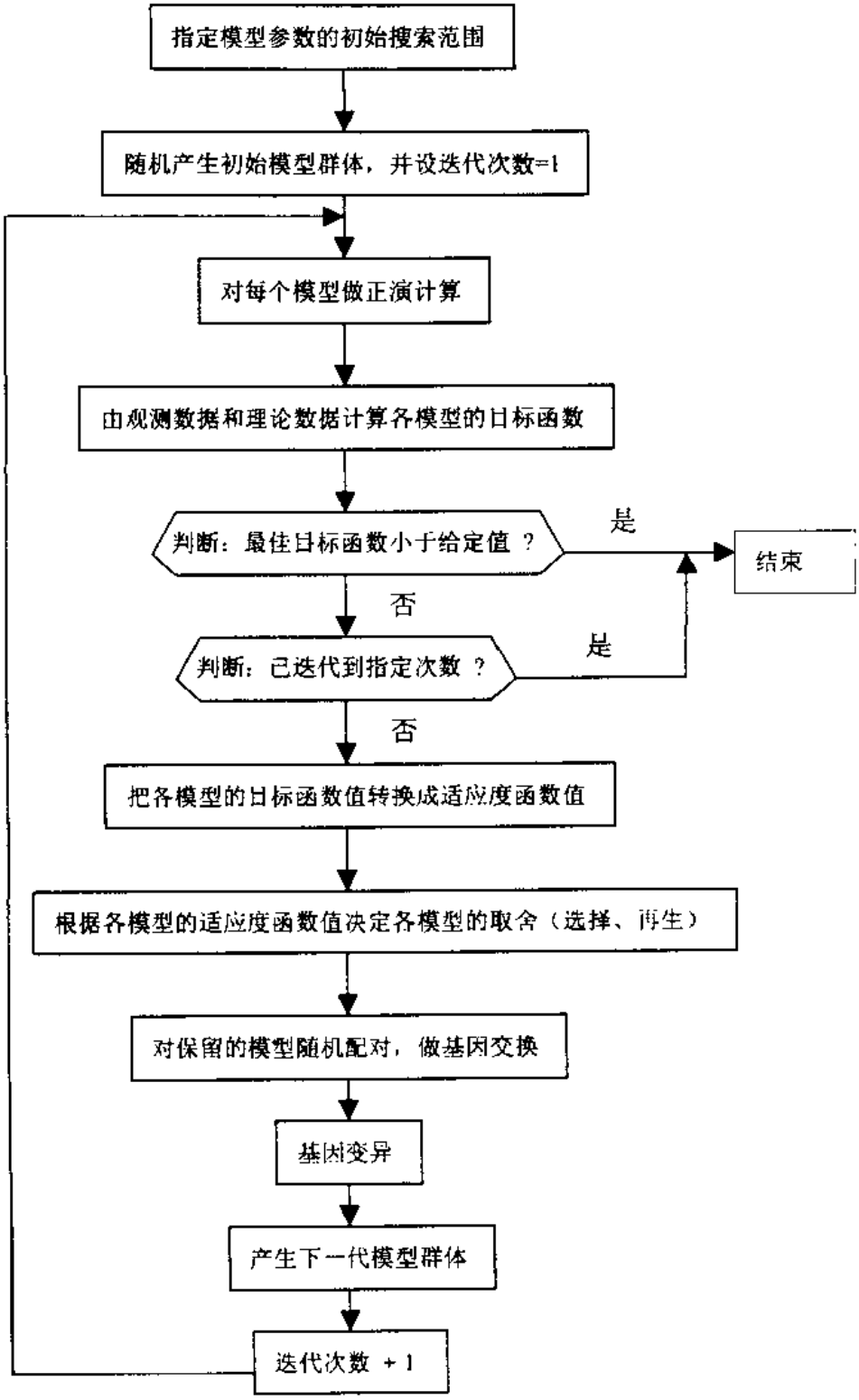


图 A-1　用 GA 解地球物理反问题的步骤框图

多解性，增加反演的可靠程度。比如，在处理郑州—临汾剖面时就是这样做的。首先，根据人工地震资料确定的地壳速度模型，通过速度与密度的关系转换成密度模型，再用正演计算

来拟合实测重力异常数据。尽管对莫氏面以上的速度-密度在合理的范围内做了调整，但理论值与观测值仍有偏差。于是，根据这种偏差用 GA 对上地幔的密度分布做了反演，得出了该剖面上地幔密度分布不均匀的结果。

参 考 文 献

安玉林、管志宁，1985，消除高频干扰的正则化稳定因子，物探化探计算技术，No.1。

柴玉璞，1990，Parker 公式的一系列推广及其在石油重力勘探中的应用前景，石油地球物理勘探，No.3。

冯　锐，1986，三维物性分布的位场计算，地球物理学报，vol.29，No.4，p.399～406。

李燕等，1993，重磁界面的一种快速正、反演方法，物探与化探，No.6。

潘作枢，1992，位场资料处理及解释问题，北京：地质出版社。

史忠植，1993，神经计算，北京：电子工业出版社。

汪炳柱、王硕儒，1995，二维密度界面正反演的样条函数法，石油地球物理勘探，vol.30，No.2，p.230～239。

杨行峻、郑君里，1992，人工神经网络，北京：高等教育出版社。

张先康、石琳珂，1987，震中定位的广义反演方法及其计算程序，华北地震科学，vol.53，No.3，p.1～8。

张先康、石琳珂，1990，唐山滦县地区地壳速度结构与震源参数的非线性联合反演，地震研究，vol.12，No.1，p.9～18。

朱介寿，1985，地震学中的计算方法，北京：地震出版社。

朱介寿等，1988，研究地壳上地幔结构的地震体波计算方法，北京：科学出版社。

A. Tarantola，张先康等译，1989，反演理论，北京：学术书刊出版社。

A. Tarantola and B. Vallette，1982，Inverse problems = quest for information，Joun. of Geo.，50，p.159～170.

David E. Goldberg，1989，Genetic algorithms in search，optimization & machine learning，Addison—Wesley Publishing Company，Inc.

M. K. . Sen & P. L. Stoffa，1992，Rapid sampling of model space using genetic algorithms：examples from seismic waveform inversion，Geophys. J. Int. 108，p.281～292.

M. Sambridge & G. Drijkoningen，1992，Genetic algorithms in seismic waveform inversion，Geophys. J. Int.，109，p.323～342.

Oldehburg. D. W.，1974，The inversion and interpretation of gravity anomalies，Geophysics，vol.39，No.4，p.526～536.

Parker. R. L.，1973，The rapid calculation of potential anomalies，Geophys. J. R.，vol.31，p.447～455

. Sen，M. K. and Stoffa，P. L.，1991，Nonlinear one—dimensional seismic waveform inversion using simulated annealing，Geophysics，vol.56，No.10，p.1624～1638.

Stoffa，P. L. and Sen，M. K.，1991，Nonlionear multiparameter optimization using genetic algorithms：Inversion of plane wave seismograms，Geophysics，vol.56，No.11，p.1794～1810.

V. Cerveny、I. A. Molotkov、I. Psencik，1986，地震学中的射线方法，刘福田等译，北京：地质出版社。