目　录

译者前言

序言……（1）

第一章　数学惯例……（1）

第一节　运算……（2）

第二节　运算顺序……（3）

第三节　量与数……（5）

第四节　有理数和无理数……（8）

第五节　近似值和精度……（9）

第六节　根和对数……（9）

第七节　初等函数……（15）

第八节　坐标和图象……（18）

第二章　三角和向量……（22）

第一节　角的度量单位　度数和弧度……（23）

第二节　三角比……（23）

第三节　向量和数量……（29）

第四节　向量代数……（30）

第五节　向量的分量……（32）

第六节　直线……（35）

第七节　数量积……（36）

第八节　向量积……（37）

第九节　数量积和向量积的运算……（38）

第三章　线性函数……（41）

第一节　基本线性函数……（41）

第二节　联立方程……（44）

第三节　坐标轴的旋转……（52）

第四节　数学函数和统计关系 …… (53)
第五节　直线拟合 …… (55)
第六节　计算结果的显著性 …… (62)
第七节　多变量关系 …… (65)
第八节　连续方程 …… (68)
第四章　矩阵 …… (70)
第一节　基本矩阵 …… (70)
第二节　矩阵的相等 …… (72)
第三节　矩阵运算 …… (73)
第四节　矩阵代数定律 …… (77)
第五节　转置矩阵 …… (77)
第六节　逆矩阵 …… (78)
第七节　行列式 …… (81)
第八节　伴随矩阵 …… (83)
第九节　同坐标几何图形的比较和联立方程的解 …… (84)
第十节　特征向量和特征值 …… (87)
第十一节　矩阵和网络 …… (93)
第五章　非线性函数 …… (96)
第一节　微分学基础 …… (96)
第二节　标准函数的特征 …… (103)
一、幂函数 …… (103)
二、对数函数和指数函数 …… (108)
三、三角函数和反三角函数 …… (111)
第三节　函数组合及其导数 …… (113)
第四节　驻点的确定 …… (115)
第五节　积和商的导数 …… (119)
第六节　曲线拟合 …… (122)
第七节　非线性关系的其它例子 …… (129)
第六章　级数和数列 …… (134)

第一节　算术数列和几何数列 …… (134)
第二节　级数 …… (138)
第三节　算术级数的和 …… (139)
第四节　几何级数的和 …… (141)
第五节　二项式定理 …… (144)
第六节　级数的其它例子 …… (149)
第七章　概率论 …… (154)
第一节　概率空间 …… (155)
第二节　链概率 …… (159)
第三节　马尔科夫概率的矩阵解法 …… (165)
第四节　频率分布 …… (166)
第五节　理论分布 …… (169)
一、二项分布 …… (169)
二、泊松分布 …… (172)
三、正态分布 …… (173)
四、伽马分布 …… (177)
第六节　其它类型的分布 …… (179)
一、皮尔逊分布Ⅰ型 …… (180)
二、皮尔逊分布Ⅳ型 …… (180)
三、皮尔逊分布Ⅵ型 …… (180)
四、其它的皮尔逊判别准则和转移型 …… (181)
五、对数正态分布 …… (182)
六、极值分布 …… (183)
第七节　累积频率分布的应用 …… (184)
第八章　积分 …… (188)
第一节　极限和连续函数 …… (188)
第二节　原函数 …… (189)
第三节　不定积分 …… (193)
第四节　标准积分 …… (194)

第五节　比较复杂的函数的积分 …… (196)
第六节　分部积分法 …… (197)
第七节　置换积分法 …… (200)
第八节　三角函数的积分 …… (203)
第九节　部分分式积分法 …… (204)
第十节　积分法一览表 …… (207)
第十一节　数值积分 …… (208)
第十二节　梯形法则 …… (210)
第十三节　辛卜生法则 …… (212)
第十四节　积分的应用 …… (214)
第十五节　旋转体的体积 …… (214)
第十六节　转动惯量 …… (216)
第十七节　傅里叶级数 …… (217)
第九章　基本微分方程 …… (223)
第一节　基本方程 …… (223)
第二节　阶与次 …… (225)
第三节　常微分方程和偏微分方程 …… (226)
第四节　一阶常微分方程的解 …… (228)
第五节　含有函数 y 的方程 …… (229)
第六节　可分离变量的方程 …… (230)
第七节　齐次方程 …… (232)
第八节　“恰当”微分方程的解 …… (235)
第九节　积分因子 …… (239)
第十节　积分因子 $e^{\int M dx}$ …… (241)
第十一节　微分方程解法一览表 …… (242)
第十二节　高阶微分方程（常系数方程）的解 …… (243)
第十三节　特别积分 …… (246)
第十四节　D 算子 …… (249)
第十五节　应用 …… (252)

第十六节　大气边界层中的风场 …… (254)
第十七节　大气运动方程 …… (254)
后记 …… (259)
习题答案 …… (261)
附录 …… (269)
附录一　希腊字母表和一些字母的通常用法 …… (269)
附录二　国际单位制（SI） …… (270)
第一节　标准单位 …… (270)
第二节　十进倍数和约数 …… (272)
第三节　非标准单位 …… (272)
附录三　四位常用对数表 …… (273)
附录四　正弦、余弦和正切表 …… (276)
附录五　统计学附录 …… (283)
第一节　标准差，平均数，众数和中位数 …… (283)
第二节　相关系数 …… (284)
第三节　回归方程 …… (286)
第四节　正态分布曲线 …… (287)
第五节　y 估算值的标准误差 …… (288)
第六节　学生氏 t 检验法 …… (289)
第七节　复相关系数 …… (289)
推荐文献 …… (291)
参考文献 …… (296)
英汉地理教学名词对照 …… (300)

第一章　数学惯例

一般说来，初等数学的三门传统科目：算术、代数和几何仍然是构成数学实践的基础。然而，数学各个科目的范围，其中包括微积分（本书第五章和第八章）和向量（第二章）在函数求解（第三章和第五章）上的应用在内，都在日益扩大，从纯数学的单一领域深入到其它专门学科，目前已形成自然地理学科研与教学结构中重要部分。例如，对于一个问题往往有好多种数学解法。然而，所有的数学解法却都起源于算术、代数或几何基本运算的一些简单指导法则。算术使用的数字或代数使用的英文和希腊文字母符号（参见附录一），以及几何使用的空间量度（第二章第八节），均为数学的基本结构单元。因此，正如用数和量表示什么要有严格规定一样，也要有使用这些基本结构单元的方法。基本结构单元的使用方法都是以各种符号表示的；必须精心确定和掌握以符号表示的运算模式，以便获得严密的单值运算结构。

一般说来，数学与音乐、文学有许多共同之处，即这两方面的工作都是用经过严格确定其意义的符号表示的。交响乐曲主旋律是用表示音拍和音高的音符直接表述纸上的，音高按音符所在谱线位置而定，这与图表轴线的用法（第一章第八节）类似。一部小说中的单词和组成单词的字母也起着同样的作用，而语法则与音阶和声有类似之处。数学中规定的习惯用法同样也很严格，以便提供严密而适用的运算结构。数的基本概念（第一章第三节）与音符、字母和单词类似。数的用途和用法都是以数学所有学科通用的符号表示的。数的用法习惯虽然简单，但仍然可以表达非常复杂而往往又很抽象的概念。例如，第九章微分方程的比较困难的解法就类似于本章列出的惯例，正如肖斯塔科维奇第十交响乐曲

类似于该乐曲所用的主调音阶——E 小调一样。

第一节 运 算

用以表示数学运算模式的符号一般可以分为两大类：一类是信息符号，例如表示两项等值的符号“=”，等等；另一类是指令符号，例如符号“+”和“-”，等等，均为操作码。第一类包括各种各样的通用符号：

$=$ 等于

$\neq$ 不等于

$\equiv$ 恒等于，相当于

$\propto$ 与……成比例

$<$ 小于（$\leqslant$小于或等于）

$>$ 大于（$\geqslant$大于或等于）

$\not<$ 不小于

$\not>$ 不大于

$\doteq$或$\simeq$或$\div$ 近似等于

第二类符号大多为读者所熟悉：符号 $+$，$-$，$\times$，$\div$ 分别表示加，减，乘，除，不过也有些容易混淆的变化，如 a 与 b 二值的相乘或相除运算可分别表示为：

a 乘以 b $a\times b$ 或 $a\cdot b$ 或 ab

a 除以 b $a\div b$ 或 $\frac{a}{b}$ 或 a/b 或 $a\cdot b^{-1}$。

根据 SI（国际单位制）惯例(国家物理实验室,1970)，最好选用ab和 a/b 或 ab^{-1}。正如在第二章将会看到的，以点表示乘号实际上仅限于向量乘法。其他符号将分别在随后各章相继引用。不过有两个省略符号很实用，虽不属于以上两类中的任何一类，但在数

学中却常用，即：符号∴表示“所以”；符号∵表示“因为”，后者很少用到。

第二节　运 算 顺 序

在一项计算中施行好几次运算时，连续运算的顺序对计算结果会有影响。在诸如 $a+bc/d$ 的一切混合计算中，要先乘除后加减。例如在上式中应当首先计算 bc/d，然后将得数加 a，而不能 a 加 bc，再将得数除以 d。本法则的例外情形是，带括号的运算要先作。例如，若写出 $(a+b)c/d$，则应将 a 加上 b，然后将得数乘以 c/d。两种场合的计算结果不同。例如若 $a=2$，$b=6$，$c=1$ 和 $d=4$，则

$$a+bc/d=2+6/4=3.5$$

$$(a+b)c/d=(2+6)1/4=2.0$$

当用计算器施行上述运算时，记住这些法则是重要的。

括号还可以在乘法分配律中使用。例如，表示式

$$ac+ad+bc+bd$$

用括号重新组合诸值后可以表示成下列更为简便的形式：

$$(a+b)(c+d)$$

这里注意到原式的所有四项中不含 a 就含 b，不含 c 就含 d，将该式作因式分解，在两个括号里进行不同的成对组合，就可以得出 $(a+b)(c+d)$ 的解答。首先乘出 $a(c+d)$，然后乘出 $b(c+d)$，就得出原式 $ac+ad+bc+bd$。

在自然地理计算中，正值和负值都会经常用到；它们常常表明各种对立的概念，或者表示从 $-n$ 经零至 $+n$ 的区间值。因此，如果在一个表达式中设 f 表示加速度，那么 $+f$ 就表示某一方向上的加速度，而 $-f$ 则表示相反方向上的加速度。$-f$ 和 $+f$ 都

有一个绝对值 f，可以记作 $|f|$；即"模数 f"。表示方向的符号在向量用法中获得广泛应用（第二章），并且萨姆纳（Sumner，1977 a）曾经应用向量研究过海风的发育。如果将一切向岸坡降风规定为正向，而一切离岸坡降风规定为负向，并且还假设具备了晴空和合成浅对流这样的必要条件，那么就可以着手估计坡降风的风向对海风发育的影响（参见戴维森 Davidson，1978，for a treatment of the processesinvolved）。正交向岸风或正交离岸风，即吹向与海岸线恰好成直角相交的向岸风和离岸风，显然是极其罕见的。风速为 v 米/秒的向岸风的冲击作用在正交向岸时显然最大，而在其吹向与海岸线近乎平行时则最小。向岸风的作用随着它与海岸线的夹角的减小而减弱（参见图 1.1）。实际上，如果运用第二章将要确定的三角比中的一个，则坡降风的向岸分量等于 $v\ \sin\alpha$ 或 $v\ \sin\beta$，如图 1.1 所示，并且 $\sin\alpha$ 为正，而 $\sin\beta$ 为负（参见表 2.1）。第二章中将对此法作进一步讨论。

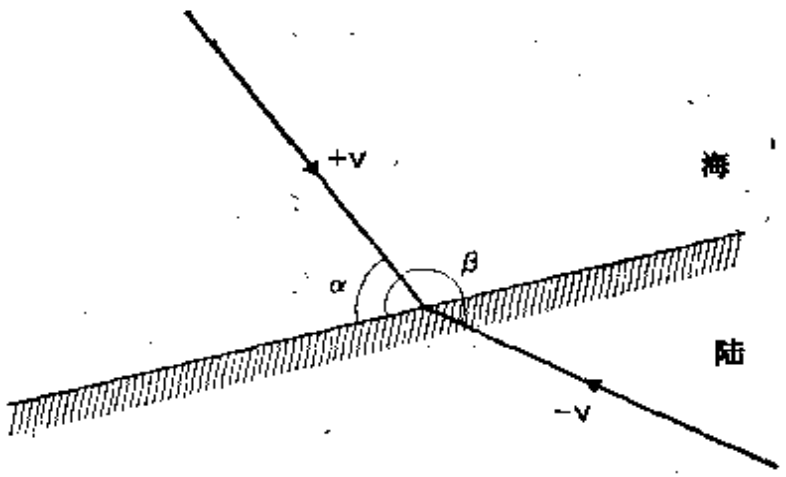


图 1.1　向岸风和离岸风的分量

在计算含有正负值的表示式时，会涉及加法法则。除用来表示加法和阐明如上述海风一例中那样的对立现象以外，+ 号通常是省略不写的。在加法或减法运算中，正、负值总是相互"抵销"，所以 $+a$ 减 $+b$ 得 $a-b$，

$$(+a)-(+b)=a-b$$

同理，

$$(+a)+(-b)=a-b$$

乘法和除法法则稍为复杂一些；由于 $a/b=a(1/b)$，所以乘法和除法数学上都是同一过程。如果负值有偶数个，则计算结果总为正值，例如：

$$(-a)(-b)=+ab$$

或 $$(-a)(-b)(-b)/(-c)=(-ab^2)/(-c)=+(ab^2/c)$$

而在负值有奇数个时，计算结果总为负值，例如：

$$(-a)(+b)=-ab$$

$$(-a)(-b)/(-c)=+ab/-c=-(ab/c)$$

$$(-a)(-a)(-a)=-a^3$$

第三节　量　与　数

到现在为止，我们的注意力仅限于基本算术运算的最一般形式。代数表示法仅在数可以被取代时方可使用。上例中的 a 或 b 同样可以表示可赋予数值的任何一种特征或过程，诸如河流含沙量或蒸发率。量和计量乃是自然地理研究的一个基本部分。为了适应对定量化的普遍需求，提出了一些惯例和概念，以便确立可以单值地使用数据的严密的“语法”结构。数学“语言”只有通过提出一些数制才能实现这一目标。为此目的先后提出了各种不同的数制和符号体系。我们经常使用十进制(以 10 为单位计算)，因为对我们来说这是最灵活的运算结构。还有几种别的数制在有限范围内也在用，例如，残存的十二进制，以“打”即 12 为单位计算，现今仍然继续普遍使用着。然而，特别是最基本的数制，即二进制的创立，大大促进了数字计算机的发展。二进制只有两个符号 0和 1；

这两个符号用于计算机逻辑部分，分别表示“外存”和“内存”。任何一个数都可以用任何一种数制加以表示，尽管二进制的数字串其实很长。十进制的基数为 10（从 0 到 9 共 10 个数字），而二进制的基数为 2（0 和 1 两个数字）。在上述所有数制中，每一个数位都有一个定值，可以最简便的方式施行数量分级。另外，数量级数的大小取决于按自右向左递升的数量级计算的其他数位的位置。在十进制中，第一个数量级的数位（自右向左）称为“个位”，第二个数位称为“十位”，第三个数位称为“百位”，等等。这些数位以基数 10 的幂指数命名更为方便，即第三个数量级（千位）为 10^3，第二个数量级为 10^2，第一个数量级为 10^1。例如，200 为 2×10^2；500,000 为 5×10^5；40 为 4×10^1。此数列自 10^1 以下必然是，10^0 为 1。的确，任何一个数自乘至零次幂总为 1，即：

$$1^0 = 6^0 = 500,000^0 = 1$$

例如数 3,551 为下式的缩写：

$$(3\times10^3) + (5\times10^2) + (5\times10^1) + (1\times10^0)$$

对于各种数制都可以列出类似的数列，因此，在基数为 5（0 到 4 共五个数字）的数制中，数 2,441 为：

$$(2\times5^3) + (4\times5^2) + (4\times5^1) + (1\times5^0)$$

可见，将一些数由一种数制转换为另一种数制是一件比较容易的事。列举一个简单的运算例子也会有助于加深理解。为了将十进制数 53 转换为其对应的二进制数，可以找出至少一次就能“逼近”53（即作为 53 的分母）的 2 的最高次幂。2^5 的值为 32，而 2^6 的值为64。因此，在表 1.1 中用 2^5 除 53 得余值（第（四）栏）21。作为 21 的分母的 2 的最高次幂则是对应的二进制数的下一部分，依此类推。最后在余值栏中出现零，并且第（一）栏中 2 的幂相加即可表示对应的二进制数。于是，十进制的 53 可以二进制表示为：

$$(1\times 2^5)+(1\times 2^4)+(0\times 2^3)+(1\times 2^2)+(0\times 2^1)+(1\times 2^0)$$

即 110,101。

到现在为止给出的各种数制仅仅对于求定整数值（自然数，即计数整数 1,2,3,…,N 中的任意一个数）而言是充分的。实数，例如数学常数 3.141 6(π)，整数 3+0.141 6(实数)可以用小数或分数类似地表示成基数的幂指数。将这种记数制推广到小于 1 的值是一件容易的事，即依次变换成负幂指数。按惯例，负幂指数起点是用小数点表示的，例如，23.605 7 不过是下式的缩写：

$$(2\times 10^1)+(3\times 10^0)+(6\times 10^{-1})+(0\times 10^{-2})+(5\times 10^{-3})+(7\times 10^{-4})$$

应当指出，正如小数点左方的数量级情形一样，为了方便起见，各个数字分成三个一组，不过这次是用空档而不是用逗号分开。数量

表 1.1　十进制数 53 的对应二进制数的求定

(一)	(二) 计算值	(三) 累积值	(四) 余　值
2^5	32	32	21
2^4	16	48	5
2^2	4	52	1
2^0	1	53	0

级仍然反映在数位在数位串中的位置上，因此，正如 10^2 表示“一百倍”一样，10^{-2} 表示“百分之一”或分数 1/100；即 10^{-2} 为 10^2 的倒数($1/10^2$)。若将这种简便表示方法加以一般推广，则特大或特小数量级的数即可表示为带小数乘以 10 的几次方。例如，3,456,000 可以重写为“3.456 兆”或 3.456×10^6；同理，0.000　034 可以写为 3.4×10^{-5}。

第四节　有理数和无理数

有许多实数可以写成更简单的形式，即表示成分数。例如，数2.64即为$2\frac{64}{100}$或$2\frac{16}{25}$。该数称为有理数，因为它可以用两个整数精确地表示成分数。然而也有许多实数不能用两个整数精确地表示出来，这类实数称为无理数。这种无理数的例子有$\pi = 3.141\ 592\ 65$（至小数点后面八位）或$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，等等。然而分数2/9却是有理数，尽管它的对应小数是0.222 222 222…，即无限循环小数。若在循环数字上方点一圆点表示循环小数部分，则上数即可写为$0.\dot{2}$。应当认识到，该数虽然无限循环，但其绝对值可以用$0.\dot{2}$准确地加以确定。同理，1/3可以写为$0.\dot{3}$；但是，2/7为$0.\dot{2}\,8\,5\ \ 7\,1\,4\dot{}$，这表示所有六个数字全都循环：

0.285 714 285 714 285 714 285 714 …

可见，无限循环小数的概念是不会有多大问题的。而相反的，无理数却不能用无论多么长的分数来表示，其小数的表示由于不循环也不会是完整的。不过，无理数尽管有无限多个不循环数字，但其值却是有限的。一切小于无限大的自然数都具有有限值。例如，有理数以某种表示精度加以表示，这在理论上是可行的；而想出一串无限长的数字则是不可能的，更谈不上精确地表示它了。可是在我们考察由无限多个数字组成的数字串、因而其值大于无限大的情形时，就会出现问题。不过，无限大实际上可以提供一个简便的概念，用以阐明一些数学原理。如果读者想要深入研究有关无限大的一些详论，那么可以参阅威尔德（Wilder，1968）的著述。

第五节　近似值和精度

无理数的例子有$\sqrt{2}$或π。$\sqrt{2}$常常简化约计为1.414。这就是说，$\sqrt{2}$表示到小数点后面三位有效数字，或表示到10^{-3}的精度。若将精度提高到例如10^{-15}，那就可以更精确地接近$\sqrt{2}$的真值；这时有1.414　213　562　369　326。通常都用近似值，尽管这仅仅是为了节省篇幅和避免书写长串数字而已！然而确定数据的给定精度有时是很重要的，至于有关精度和近似值的更详尽的论述，则可以在本书姐妹篇——戴维森（1978）所著一书中找到。把小数"四舍五入"必然会使精度有所降低，所以为了约计到例如小数点后面六位，就必须知道第七位数字值。如果"第$(n+1)$"位值大于或等于5，那么"第n"位值必须加上1。例如$\sqrt{2}$至六位有效数字是1.414 214，而不是1.414 213，因为第七位值是5。同理，2.98至小数点后面一位的近似值为3.0。

第六节　根和对数

在自然地理学中往往会遇到许多幂指数为实数的幂指数项。例如，杜里（Dury，1959）证实，对于东英格兰的涅恩河（Nene）和大乌斯河（Great Ouse）流域说来，重现期为2.33年的流量与流域面积成比例，即

$$q = 5.1\,a^{0.98} \tag{1.1}$$

式中q为流量，以每秒一立方英尺（英尺/秒）为单位；a为供水流域面积，以平方英里为单位。这里遵守原英国标准单位，以免发生混乱。还证实，重现期为2.33年的最大流量（参见第七章）等于河流的平均年最大流量，因而它对水文预报极其重要。一个数自

乘到 0.98 次幂的概念是很难理解的，最好用诸如 0.5 或 0.3 的简单小数幂指数来确定。一个数自乘到 0.5 次幂和取其平方根一样：$x^{0.5}=\sqrt{x}$。同理，$x^{0.3}=x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$，$x^{0.25}$ 为四次方根，$\sqrt[4]{x}$，等等。这里本来还可以另举几个例子，可是同样一个指数可以用各种方式表示出来，往往会导致一些混乱，因此适可而止。首先我们取值 2^3。经简单计算，其得数为 8(2×2×2)。于是还可以写为 $\sqrt[3]{8}=8^{1/3}=8^{0.3}=2$。因为 $\sqrt{4}=4^{1/2}=2$，所以 $(4^{1/2})^3=(\sqrt{4})^3=4^{1.5}=8$。同理，$3^3=9^{3/2}=27$；且 $4^5=16^{5/2}=1,024$，等等。在这一点上，现在就可以确立一个重要的幂的乘方运算法则，就一般情形而言有：

$$(a^m)^n=a^{mn} \tag{1.2}$$

另外还有两个幂式的运算法则。例如，用算术方法可以证明，2^5 与 $2^2\times2^3$、即 $(2\times2)\times(2\times2\times2)$ 一样。因此一般可以写为：

$$a^m a^n=a^{(m+n)} \tag{1.3}$$

同理：

$$a^m/a^n=a^{(m-n)} \tag{1.4}$$

于是回到涅恩河和大乌斯河流域一例，可以看出，$a^{0.98}$ 可以约计为：

$$\sqrt{a}\sqrt[3]{a}\sqrt[7]{a} \text{ 或 } a^{0.5}a^{0.3}a^{0.14}=a^{0.97}$$

于是我们就有了一个特别有效的乘法和除法运算工具。如果象在上例中那样，把一些被乘数或被除数表示为一个常数底的幂，那么这些幂指数相加即可使诸原数相乘，幂指数相减即可使除法简化。对一个常数底表示的这些幂指数值称为诸原数的对数。例如，最简乘积 $10\times100=1,000$ 可以 10 为常用底表示为 $10^1\times10^2=10^3$。可见，为得一数所需的底为 10 的幂指数称为以 10 为底的该数的对数。例如以 10 为底 100 的对数为 2.0，即

$\log_{10}100 = 2.0$　因为　$10^2 = 100$

同理：　$\log_{10}10 = 1.0$　因为　$10^1 = 10$

$\log_{10}1 = 0.0$　因为　$10^0 = 1$

$\log_{10}0.1 = -1.0$ 因为 $10^{-1} = 0.1$

等等。诸数的常用对数相加可以求积；它们相减可以求商。因此一般说：

若　$x^m = a$　则 $\log_x a = m$

$x^n = b$　则 $\log_x b = n$

更明确地说，以 x 为底一数的对数乃是为求该数所须的底为 x 的幂指数。此外，还可以指出，

$$\log_x a + \log_x b = \log_x (ab) \tag{1.5}$$

和

$$\log_x a - \log_x b = \log_x (a/b) \tag{1.6}$$

x 的最常用值为 10，因为以 10 为底的常用对数容易进行内、外运算。不过有时也用 e 为底。e 值的推求在第六章讨论，暂且给出其近似值 2.718　28 至小数点后面五位就够了。这种对数就是纳皮尔对数或自然对数，并且通常写为 $\log_e x$ 或 $\ln x$。然而如果底没有标出，一般就意味着以 10 为底，并且我们的注意力仅限于这些以 10 为底的对数。

现在，作为比较容易的最初一步，我们来讨论底的非整倍数的一些数的对数，尽管乘方幂指数乍看起来都是些相当愁人的小数。很明显，例如，介于 1 和 10 之间的所有数的对数必然位于0.0 和 1.0 之间；而介于 10 和 100 之间的诸数，其对数就增大为 1.0 至 2.0，等等，可见，每一组对数的总范围均已明确确定。每一组这些值之间的对数都可以计算出来，不过用表查取更为迅速方便，通常至小数点后面四位或更多位（例如“四位对数表”有效至小数点后面四位，见本书附录三）。为了举例说明一数的对数的查取方法，将四位对数表的一小部分摘录于表 1.2。我们可以利用这一特

6	7	8	9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1 2 2 3 4 5 6 7 7
0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1 2 2 3 4 5 6 6 7
0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1 2 2 3 4 5 6 6 7

$\overline{2}$ 表明对数左边不为正，但右边仍为正。例如，在用对数解算 0.0123×0.0019/0.240 1 时，可得（参阅附录三）：

$$\log 0.0123 = -2 + 0.0899 = \overline{2}.0899$$

$$\log 0.0019 = -3 + 0.2788 = \overline{3}.2788$$

$$\log 0.2401 = -1 + 0.3804 = \overline{1}.3804$$

因而：

$$\log(0.0019/0.2401) = (\overline{3}.2788) - (\overline{1}.3804)$$
$$= (-3 + 0.2788) - (-1 + 0.3804)$$
$$= -2 + (0.2788 - 0.3804)$$
$$= -2 - 1 + 0.8984 = \overline{3}.8984$$

故 $\log(0.0123 \times 0.0019/0.2401)$ 为 $\overline{2}.0899 + \overline{3}.8984$。左、右方分别相加，则得：

$$\overline{2}.0899 + \overline{3}.8984 = -5 + 0.9883 = \overline{5}.9883$$

现在把上述过程反过来，并用表取其反对数，则得：

$$\text{反对数}\ (\overline{5}.9883) = 9.734 \times 10^{-6}$$

如果对数不是如上所述那样用作计算工具，那就必须考虑小数点两边的符号混合。在下一章会看到，在求解含有对数项的方程时，须将对数转换为实数，因此，例如 $\log(0.011) = \overline{2}.0414$，就可以转化为 $0.0414 - 2.0000 = -1.9586$。

对数还可以用来计算实根值和数的乘幂。兹考察方程(1.2)，并令：

$$(x^m)^n = x^{mn}$$

因此

$$\text{若 } a = x^m, \text{则 } \log_x(a^n) = n \log_x a \qquad (1.7)$$

于是，例如 $2^{0.5}$ 可以通过 log 2 乘以 0.5 来求出：

$$\log 2 = 0.3010 \text{（由表查出）}$$

$$\therefore 0.5 \log 2 = 0.1505$$

且 $2^{0.5} = 1.415$（由表查出）

同理，对于 54.6^7 而言，

$$\log(54.6^7) = 7 \log 54.6 = 7 \times 1.737\ 2 = 12.2$$

且 $\therefore 54.6^7 =$ 反对数 $12.2 = 1.445 \times 10^{12}$

现在即可以就已知流域面积(例如当 $a = 22.0$ 平方英里时)求解方程(1.1)。方程两边取对数，则有：

$$\log q = \log 5.1 + 0.98 \log 22.0$$

$$= 0.7076 + 0.98 \times 1.3424$$

$$= 2.023\ 2$$

且 $\therefore q = 105.4$ 英尺^3/秒（由表查出）

现在读者可自己用附录三的对数表求出下列对数，并就小于 1 的数求出其对应实数值，然后试用对数作算术题。

习题 1.6

1.6.1 log0.0150

1.6.2 log12.24

1.6.3 log58.847

1.6.4 log0.0025

1.6.5 $\log(5.4 \times 10^{-2})$

1.6.6 $\log(54 \times 10^{-3})$

试作下列习题

1.6.7 试用对数解算 $2.56 \times 3.012 / 10.8$。

1.6.8 试用对数解算 0.8024×0.0543。

1.6.9 试用对数求定$\sqrt{2}$，42.36^3，5.25^4 和$\sqrt[3]{3}$。

1.6.10 试用对数证明，在方程(1.1)中当 $a = 300$ 平方英里时 $q = 1,365$ 英尺^3／秒。

第七节　初等函数

前面引用方程(1.1)这个表达式是为了说明数的乘幂和对数的性质的。方程(1.1)还表明了供水流域面积 a 与河流流量 q 之间的关系。我们可以对杜里为确立该关系所用的 a 值域内的任何一个值来解算该方程而求出 q。q 和 a 都是变量，并且表明，对于 a 的任何一个值，都有一个可由该方程确定的 q 值与之对应。作为 a 的任何一个值，可以在为确定该关系所用的 a 值域内的许多值中任取一个(最大流域和最小流域)。例如，我们可以认为 a 总有一个值位于所谓集 A 的一组值内；而 q 总有一个值在组成集 Q 的一组值内。可见，a 为 A 的一个数；q 为 Q 的一个数，即：

$$a \in A$$

$$q \in Q$$

并且在这些约束条件下：

$$q = 5.1a^{0.98}$$

此方程是一个关联着 q 与 a 的函数，即：

$$q = f(a)$$

实际上可以认为 q 与 a 成比例($q \propto a$)。

自然地理学中最常见的情形是，影响一个要素变化的其他要素不止一个。因此，我们经常碰到的函数都不是由一个变量组成。例如，可以认为，影响土壤类型(s)的，有气候(c)，植被(v)，有机体(o)，母质(p)，降雨(r)和时间(t)。不用说这些要素中的任何一个是怎样影响土壤类型的，就可以将这一关系简记为：

$$s = f(c, v, o, p, r, t)$$

然后应当设法进行野外实验来考察每个要素对土壤类型的影响方式——这就是研究计划的良好起点。形如(1.1)方程的任何数学

函数，都可以表明在一个变量与一个以上变量之间存在有确定性的关系。对于专业数学工作者说来，这种确定性就很重要；然而，自然地理工作者则必须意识到，在我们所涉及的大多数关系中所含的要素几乎总是些难定的和未知的要素。这样就必然会产生许多关键性问题而使我们怀疑，试图表示地理关系的许多数学函数，在其地理意义上是不是确定性的。首先，由地理学理论知道，虽然 q 取决于 a，但反过来就不能成立。可见，数学函数必定还具有单向逻辑"关联"的意义。关联这一术语通常指的是，"若 a 增加，则 q 也会相应地增加"。这种表达式有几种符号表示法；如果读者特别想要研究这方面的数理符号，则可参阅本书末尾推荐文献中所列的有关书籍。我们通常把可使一个或多个变量产生变化的变量称为自变量，而被自变量引起变化的变量则称为因变量。

其次，杜里导出的方程和其他类似方程都是从流域的颇大总体中抽取较小样本的结果。因此，该关系无疑也不完全象描述它的数学函数所要求的那样，是不可变的。这就是说，正如在第三章将会看到的，在阐释这种表达式时一定要谨慎。再次，影响着平均年最大流量值的还有许多其它要素，例如降水及其季节分布和类型。这样就进一步强调了关系的单向性。一般说来，大的流域面积很可能伴有大的平均年最大流量值，不过也有这样的情形，即：某一流域的平均年最大流量很大，不一定表明供水流域面积也大。

现在回到函数本身的形式，完全可以说，$q=f(a)$ 或 $y=f(x)$ 仅仅能够说明有某种关系存在，但却不能够确定该关系。例如它就不能够说明：

(1) y 随 x 的单位变化而变化（或 q 随 a 的单位变化而变化）的大小；

(2) x 的增量变化是否总会引起 y 的同一增量变化；如果不会，那么 y 随 x 的增量变化的趋势又是怎样；

(3)当 x 为零时，y 是否也为零。

方程(1.1)是特定方程；它说明：

$$q=f(a^n)，\text{式中 } n\neq 0 \text{ 或 } 1 \qquad (1.8)$$

若 n 等于 1 而不为 0.98，则在关系

$$q=5.1a$$

中，a 的单位变化应当引起 q 的相应变化；q 总为 a 的 5.1 倍(见表 1.3)。这种类型的函数根据第三章的明显理由称为线性函数。然而应指出，当 $a=0$ 时，$q=0$。若方程为 $q=5.1a+6.4$，则当 $a=0$ 时，$q=6.4$；当 $a=1$ 时，$q=5.1+6.4=11.5$，等等。这就是说方程中增加了一个常数项，并且给出了线性函数的一般形式：

$$y=mx+k,$$

此方程将在第三章讨论。方程中的项 m 满足上述条件 (1)，常数项 k 满足条件(3)。条件(2)在这种场合并不适用，因为我们业已证实，对于 x 的一切值说来，增量变化是恒定的。

表 1.3 对于给定的流域面积（平方英里）的流量（英尺³/秒）表

a	1	2	3	4	5	6
q	5.1	10.2	15.3	20.4	25.5	30.6

然而我们由方程(1.8)知道，$n\neq 0$ 或 1，因而 q 为 a 的幂函数。这就是说，a 的单位变化不会引起 q 的恒定的增量变化。仍然根据明显的理由，幂函数是曲线函数即标准函数。这类函数将在第五章讨论。在 n 值大于零时，则为正比例，即 a 的增加总会引起 q 的增加。若 $n=0.0$，则 q 恒定不变，因为任何一个值自乘零次方均为 1。然而若 n 小于零，则为反比例，即 a 的增加会引起 q 的减少。这样我们就有两种类型的曲线函数，其最基本形式为：

$$y=x^n \qquad (\text{正比例}, n>0)$$

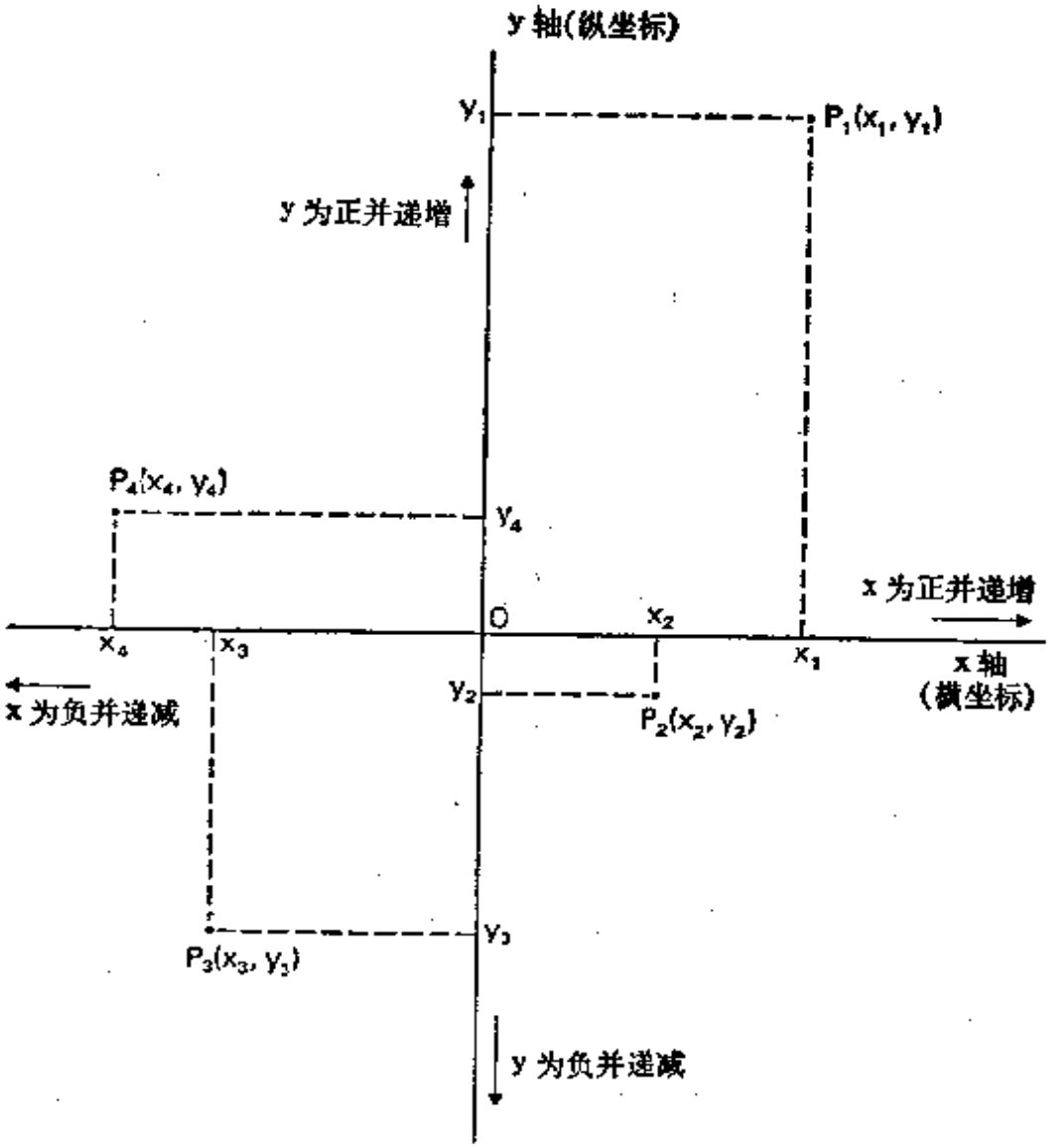


图 1.2　直角坐标系

标为负。任何一个函数的直观形式均可以在该坐标系中通过连续标出坐标对而描绘出来。

另一个通常不太使用的坐标系统是极坐标系。笛卡儿坐标系是一种特别灵活的坐标系。在图 1.3 的极坐标图象中，点 A 是由坐标(r,θ)确定的，其中 r 为极 (P) 至 A 的距离；θ 为向量角，即 AP 线与极轴 PB 的夹角。在自然地理学的一些领域中所用的玫瑰图，例如风向图、界标方位图，均采用极坐标系。不过，惯用的由北点按时针正向的方位量度(即北为 0 度，南为 180 度，西为 270

度，等等），与图 1.3 所示的由水平极轴按时针反向量度相抵触，两者容易混淆。极坐标系主要用于表示向量（第二章），例如风向和风速的分解。

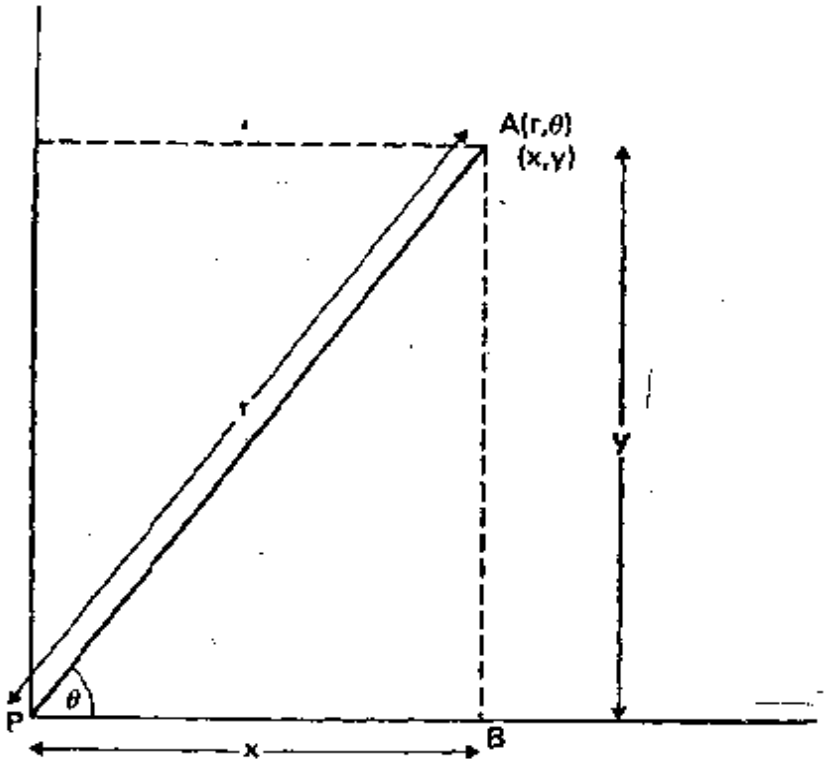


图 1.3　极坐标系

习题 1.8

读者可试绘出线性函数的这两个简单实例的图象。

1.8.1　试绘出 x 轴和 y 轴，并分别标出 0 至 6 和 0 至 40 间隔；再在 y 轴上标出 q，在 x 轴上标出 a；然后绘出 $q=5.1a$ 的图象；该区间的 q、a 值分别载于表 1.3 中。试图解证明当 a 大约等于 4 时，q 近似等于 20。

表 1.4　摄氏和华氏的对应值

℃	-9.4	-3.9	1.7	7.2	12.8	18.3	23.9	29.4	35.0
°F	15	25	35	45	55	65	75	85	95

1.8.2　表 1.4 的数据表示华氏温度及其对应的摄氏温度。试在纵坐标上标

出摄氏值-在横坐标上标出华氏值，并通过所有各点画线。首先说明任何两个点间摄氏变化与华氏变化之比值。该比值大约为0.5(5/9)。其次指出该线与横坐标轴的交点和该线与纵坐标轴的交点。试证明后一个交点的摄氏值大约等于0.5(－32.0)。

第二章　三角和向量

动态和空间计量同自然地理学研究有着内在的联系。研究过程就是研究动态，而地理学本身的实质又必然是从空间角度研究过程和形式。长度、面积和体积的计量当然都是简便的空间计量方法，并且正如在第一章末尾所看到的，可以在图象坐标系中准确地进行任何的空间定位。然而在上一章末尾还曾经指出，利用长度为 r 的一条线及其与方向确定的另一条线的夹角 θ 同样可以准确定点。这种表示方法可以发展成向量。而向量还可以引导到第四章的矩阵研究。向量和矩阵两者实际上给本书到现在为止所讨论的数学内容增添了一个维数，并且提供了另一个概念，为深入理解数学原理创造了条件。

本章讨论的任何一个问题都会涉及到颇广的数学范围。目前正在发售的许多数学专业书籍全都涉及向量和矩阵，例如，奈特和阿达姆斯(Knight and Adams,1975)合著的一书，它是一本比较初级的教程。本书力图用本章和第四章这两章篇幅阐明基本向量论和基本矩阵论。向量适用于自然环境的动态研究，掌握向量会大大有助于解释复杂的过程，不管是地貌过程、水文过程，还是自然地理的任何其它方面的过程都是如此。阐述矩阵代数原理可以加深读者对诸如主成分分析等多变量统计方法的理解，此外还可以提供另一个有用的概念，即多变量“空间”。如果读者想用计算机进行数据分析，那么掌握矩阵还有助于理解计算机程序设计的一些问题。这里我们希望力求阐明的只是向量和矩阵的基本原理。而读者还有待于通过深入学习地理杂志文章以及数学和统计学书刊来将有关问题发挥到更高的水平。为此目的，在第四章末尾列有一些推荐文献。然而我们首先必须确定角的度量单位和

三角比。

第一节　角的度量单位度数和弧度

对于涉及三角比的许多初级运算说来，以度、分和秒作为角的度量单位就足够了，例如，24°34′02″，其中60秒(″)等于一分(′)；60分等于一度(°)。360度等于一周角。然而在高级运算中，特别是在三角比被视为函数(例如 $y=\sin x$)时，则以弧度作为角的度量单位。一弧度的定义是等于半径长的圆弧所对的圆心角(见图2.1)。例如，由于圆周长为 $2\pi r$，全圆360度可以表示为 $2\pi r/r$，即 $360°=2\pi$ 弧度。因此 $90°=\pi/2$ 弧度；$180°=\pi$ 弧度；并且一度为0.0175弧度，或者一弧度为 $57°17'45''=57.296°$。

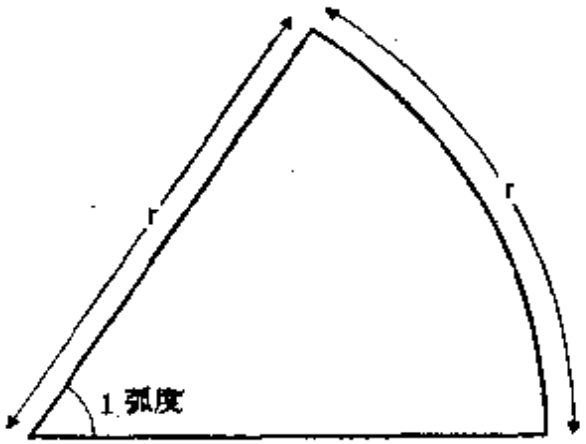


图 2.1　一弧度的定义

第二节　三　角　比

在全面阐述向量之前，需要确定几个基本三角比，以便在后面几章可以讨论各种数学函数。图1.3中的向量角 θ 可以用来说明这些基本三角比。这样我们也就可以根据极坐标 (r,θ) 来确定直角坐标 (x,y) 的表达式。当 θ 值变化时，三角形PAB的三边PA，AB和BP(分别为斜边，角APB的对边和邻边)之比也变化。角ABP为一直角。当 θ 趋于零度时，AB边变得很小，而边PA和BP几乎相等，尽管根据定义，BP之长总小于PA。当 θ 为45°时，

AB 和 BP 之长相等，即三角形变成等腰三角形。可见，以一个三角比表示的任何一对边长之比均可用表来确定 θ 值。读者可以使用附录四的表来确定零至 90 度之间各角的三个基本三角比（正弦、余弦和正切）值。该表的使用方法与第一章第六节所述的查取对数的方法类似。对于每一个基本三角比而言，三角形 PAB 各边之比分别为：

$$\text{正弦或 } \sin\theta = AB/AP = y/r \tag{2.1}$$

$$\text{余弦或 } \cos\theta = BP/AP = x/r \tag{2.2}$$

$$\text{正切或 } \tan\theta = AB/BP = y/x \tag{2.3}$$

$$\text{余割或 } \operatorname{cosec}\theta = AP/AB = r/y \tag{2.4}$$

$$\text{正割或 } \sec\theta = AP/BP = r/x \tag{2.5}$$

$$\text{余切或 } \cot\theta = BP/AB = x/y \tag{2.6}$$

因为 $\cos\theta = x/r$

故 $x = r\cos\theta$ （乘以 r）

同理 $y = r\sin\theta$

因此，对于直角坐标系而言，如果点 A 的极坐标为 (r,θ)，而且假设点 P 正好与笛卡儿坐标系的原点 O 重合，那么 A 的直角坐标为 $(r\cos\theta, r\sin\theta)$。如果读者记忆上述的基本三角比表有困难，那么最好是首先记住 $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$，$\sec\theta = 1/\cos\theta$ 和 $\cot\theta = 1/\tan\theta$，然后再记住助记符号 SOHCAHTOA：Sine，Opposite/Hypoteneuse；Cosine，Adjacent/Hypoteneuse；Tangent，Opposite/Adjacent（正弦，对边/斜边；余弦，邻边/斜边；正切，对边/邻边）。

利用同一结构，勾股定理表明：

$$r^2 = x^2 + y^2 \tag{2.7}$$

即斜边平方等于另两边之平方和，因此（同除以 r^2）：

$$1 = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2}$$

于是（由方程(2.1)和(2.2)）得：

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad (2.8)$$

或 $$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

且 $$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

又因 $$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{y/r}{x/r}$$

于是 $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad (2.9)$$

由方程(2.8)，并且同除以 $\cos^2\theta$，则得：

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$\therefore \quad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad (2.10)$$

同理 $$\therefore \quad \cot^2\theta + 1 = \operatorname{cosec}^2\theta \qquad (2.11)$$

上列诸关系式早已为许多读者所熟知，对于以后各章也很重要，如果还不熟悉，那就应当记住。也可以确立复角间的关系式。兹考察图 2.2(1)所示的复角$(\alpha+\beta)$的情形。可以证明：

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \qquad (2.12)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \qquad (2.13)$$

和 $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} \qquad (2.14)$$

而对于图 2.2(2)所示角 α 含有角 β 的情形则有：

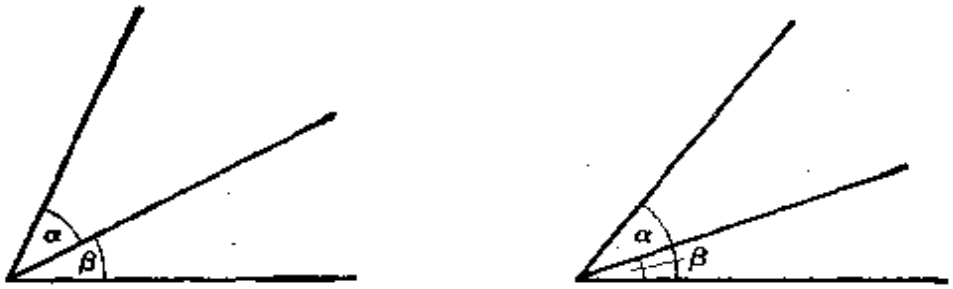
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \qquad (2.15)$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \qquad (2.16)$$

和 $$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta} \qquad (2.17)$$

此外，若角 α = 角 β，则：

由(2.12) $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad (2.18)$$



(1) (2)

图 2.2 复角的三角比：(1)$(\alpha+\beta)$，(2)$(\alpha-\beta)$。

由(2.13)
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \qquad (2.19)$$

并且由(2.14)
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (2.20)$$

关于上述诸定理的证明，读者可以参阅推荐书目中的弗兰德和普赖斯(Flander and Price 1973)合著一书。

以上的三角比都是就小于 90 度的角导出的。然而很明显，有可能得出零至 360 度(0 至 2π 弧度) 之间的任何一个角的任何一个三角比，这些值都可以利用方程(2.7)至(2.20)，将 α 代以 90，180，或 270，即以 sin146 = sin(90 + 56) 等形式来求出。在详细论述这一点时，最好利用三角比作为 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 和 $y=\tan x$ 型三角函数，并以图象加以说明。这些函数都是周期函数，因为它们都有固定的重现周期，其方式类似循环小数。例如“正弦曲线” $y=\sin x$ 如图 2.3 所示。由此可见，不止一个角的正弦为 1.0。实际上，若取 x 等于 n 弧度，则正弦为 1.0 的诸角为 $\pi/2$，$5\pi/2$，$9\pi/2$ 等(即 90，450，810 度等)。此外，正弦值为零的角每隔 π 弧度在 $0,\pi,2\pi,3\pi$ 等处，即每隔 180 度重现一次。对于 $y=\cos x$ 存在有类似顺序，不过其在 x 轴上的相位偏移 $\pi/2$。在 x 轴上相邻波谷或相邻波峰之间的距离称为波长(通常以希腊字母 λ 表示)，并且总为 2π 弧度。而且波形的振幅总相同，并等于 2，在 $y=+1$

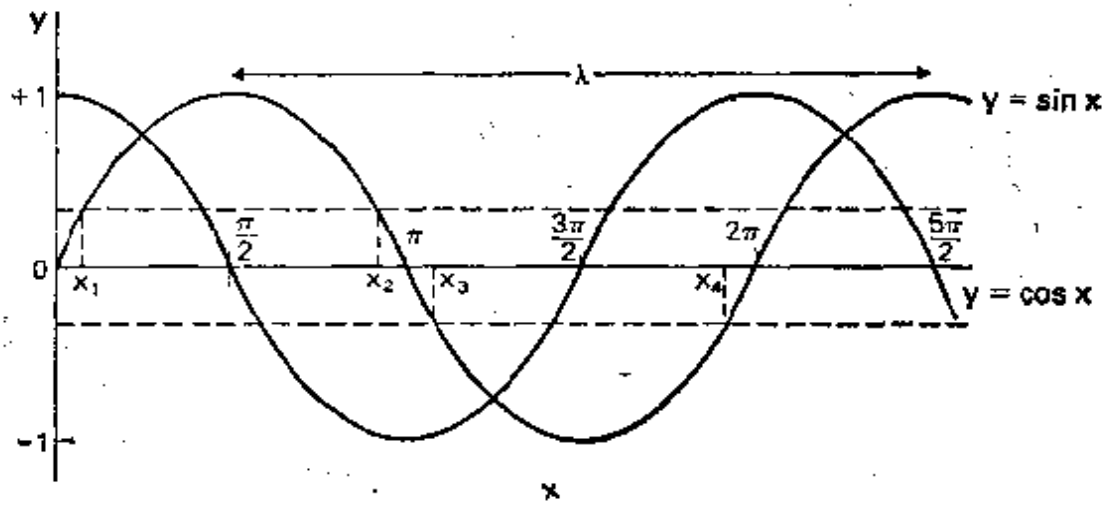


图 2.3　函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 的图象

和 $y=-1$ 之间。

由图象同样可以明显看出，对于 y 的任一个给定值而言，在 0 与 2π 弧度之间总有两个角（x_1 和 x_2），其正弦值均为 y。同样也有正弦值均为负（x_3 和 x_4）的情形。这样一来，由图 2.3 的图象可以看出，以下诸式成立：

$$\sin x_2=\sin(180-x_2) \tag{2.21}$$

$$\sin x_3=-\sin(x_3-180) \tag{2.22}$$

$$\sin x_4=-\sin(360-x_4) \tag{2.23}$$

对于余弦和正切也有类似的关系式。$y=\tan x$ 的图象如图 2.4 所示。有：

$$\cos x_2=-\cos(180-x_2) \tag{2.24}$$

$$\cos x_3=-\cos(x_3-180) \tag{2.25}$$

$$\cos x_4=\cos(360-x_4) \tag{2.26}$$

$$\tan x_2=-\tan(180-x_2) \tag{2.27}$$

$$\tan x_3=\tan(x_3-180) \tag{2.28}$$

$$\tan x_4=-\tan(360-x_4) \tag{2.29}$$

应当指出，就正切情形而言，曲线在 $x=\pi/2$ 和 $3\pi/2$ 处趋近于正

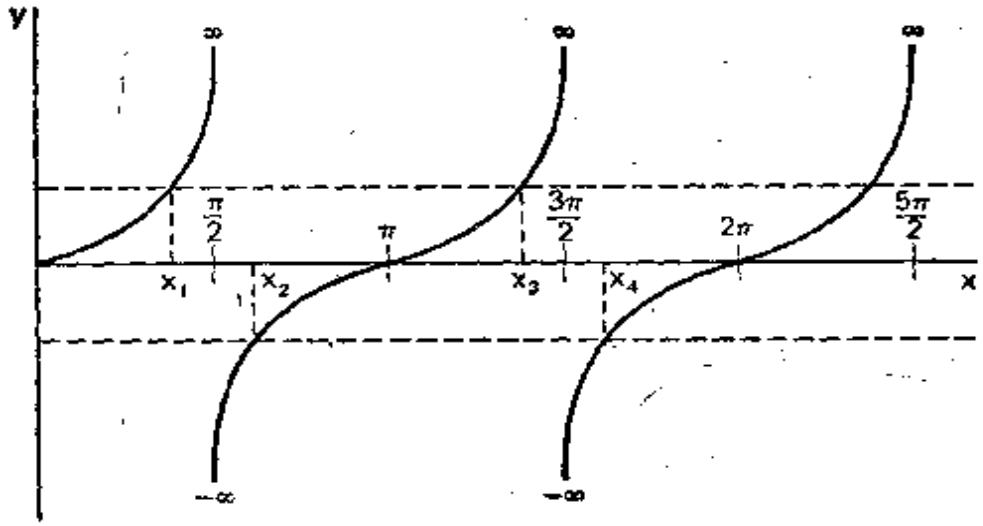


图 2.4　函数 $y=\tan x$ 的图象

无限大，并且在这些值之后紧接着又由负无限大趋近而来。所有三个基本三角比在零与 $\pi/2$ 弧度之间全为正，而每一个三角比依次在其他三个象限分别为正。90与 360 度之间诸角的三角比求定法则，对于所有三角比而言均应符合一个条件，即：对于不同象限内的不同三角比说来，三角比应当变号。这些法则可以概括在表 2.1 和图 2.5 中。例如，欲求 121 度的三角比，通常先求 180 − 121 = 59度的相应三角比，然后注意到在该象限仅有正弦为正，于是用表可以查出 sin121 = sin59 = 0.8572，而tan121 = − 1.6643；cos121 = − 0.5150。读者在继续往下学习之前，应当力求使自己熟悉附录四中的三角

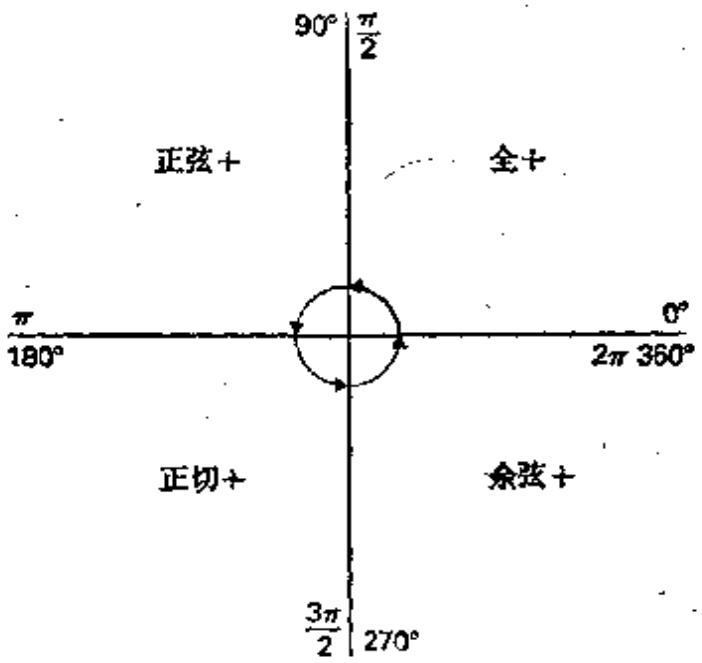


图 2.5　0 至 360 度之间的正三角比

函数表。

表 2.1　0 至 360 度诸角的正弦、余弦和正切值的求定

θ 角间隔	0—90	91—180	181—270	271—360
正　弦	$\sin\theta$	$\sin(180-\theta)$	$-\sin(\theta-180)$	$-\sin(360-\theta)$
余　弦	$\cos\theta$	$-\cos(180-\theta)$	$-\cos(\theta-180)$	$\cos(360-\theta)$
正　切	$\tan\theta$	$-\tan(180-\theta)$	$-\tan(\theta-180)$	$-\tan(360-\theta)$

第三节　向量和数量

直到现在，我们所涉及的都是些仅仅用来表示数值的量，例如：85 英尺^3/秒，100 公斤或 25℃；这些量全都是数量的实例，仅表示某一特定的大小。然而还有另一种量，既表示大小，又指定方向，这种量是向量；气候工作者在考察风的运动时，或者流水地貌工作者在估计深泓线坡度对河流流水侵蚀能力的影响时，都要和向量发生特殊关系。兹列举气候学一例加以简单说明，如果说风吹的秒速是 10 米，则指的是风的速率，属于数量；而如果说西北风具有秒速 10 米，则指的是风的速度，属于向量。这里应指出，速率和速度两个术语的用法有明显区别。最近欣迪和凯耳韦 (Hindi and Kelway, 1977) 曾运用向量数学试图对英格兰和威尔士因低气压通过上空而造成降雨的等时线进行校正或"校平"。这些等时线都是从时间精度往往很差的、分布相当稀疏的自记雨量站网推出的。自然地理学有许多方面在颇大程度上会涉及到力学或动力学的基本原理，或与之部分相同；在过程研究中尤其如此。各种力 (参见戴维森 1978 所著一书，第三章) 都是向量，并且可以根据一些基本定理加以利用。关于坡地稳定性的过程研究的许多理论都与受重力加速度 (g) 作用的下滑力的研究有着密切关系。我们在上述文献中大概会经常看到表达式 $g\sin\theta$，其中 θ 为地面与水平

线形成的坡角（图 2.6）。同样，在气象学中比较常见的表达式之一（这往往也是学生最不好懂的表达式之一！）是用来描述地球表面上科里奥利力*（地球自转偏向力）变化的数学表达式 $\omega \sin\phi$（ω 为地球的角速度，ϕ 为科里奥利力计算点的纬度角），在本例中，地球在水平运动着的空气微粒之下旋转，致使微粒运动路径发生明显偏转。然而，微粒运动通过的水平面在纬度 0 处平行于地轴，而在两极处则与之成直角。因此，地球旋转的作用力在赤道为零；而在两极最大，等于地球的角速度。这样就需要有一个系数，它与纬度成比例，并在零与 1 之间变通；并且根据不久即将了解的原因，纬度正弦可以提供这个系数。为了确定科里奥利系数，我们可以把地球旋转的作用力进行垂直投影分解。此时地球角速度就是一个向量。

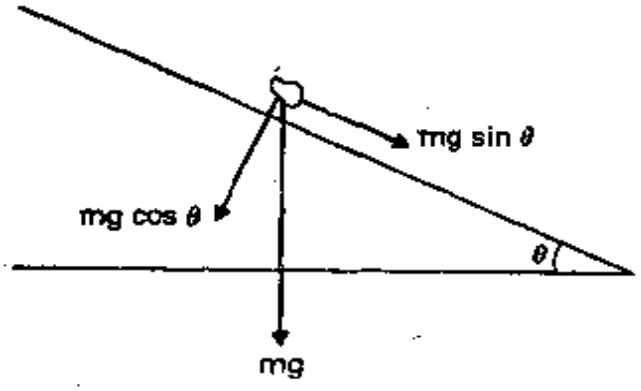


图 2.6　作用于坡面上一颗微粒上的力，其中 mg 为该微粒的重量，θ 为坡角

第四节　向量代数

在代数学上向量总是以黑体（粗长）字母表示的。例如，在图 2.7 中，以线段 AB 表示的大小为 v 的向量，可以写为 $\boldsymbol{v}$ 或 $\vec{AB}$，即：

$$\boldsymbol{v} = \vec{AB} \tag{2.30}$$

该式表明，向量的大小为 v，向量的方向为从 A 到 B。同理，在该

* 即地球自转所产生的偏向力。它最早由法国数学家科里奥利加以研究并确定，因而称科里奥利力。在气象学上，科里奥利力常称为地转偏向力——译者

图中还有：$w=\overrightarrow{AC}$ 和 $z=\overrightarrow{AD}$。在该图中的各个向量是这样表示的，即向量的大小都用线段的长度表示；向量的方向都用有向线段表示。可见在几何学上 $v=AB$，$w=AC$ 和 $z=AD$。因此一眼即可看出，在实空间中的一些向量的交互作用(这些向量可以认为是作用于一颗微粒上的一些力）与该交互作用的几何表示之间是极其相似的。现在如果将上述情形简化为仅有两个力作用于一个点上，并且重新画图，以使 v 从 A 作用到 B，w 从 B 作用到 C（图2.8），不过保留该两个向量的长度和方向，那么分取每个向量，v 首先把假想的微粒从 A 移到 B，而后 w 又把它再从 B 移到 C。该微粒最终止于 C，因此我们即可得出一个合成向量 $(v+w)$，从 A 作用到 C。该几何作图就是向量的三角形法则。现在如果使每个向量都增加一倍(而不改变方向)，那么很明显，这只不过是使该合成向量的大小增加一倍。例如：

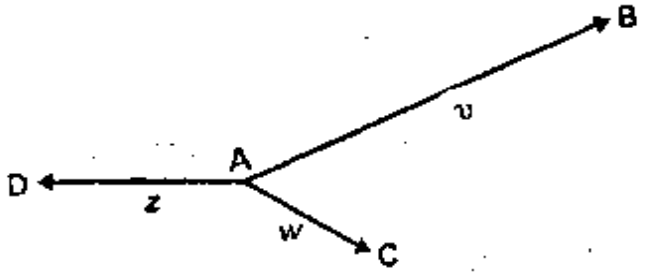


图 2.7　单向量图

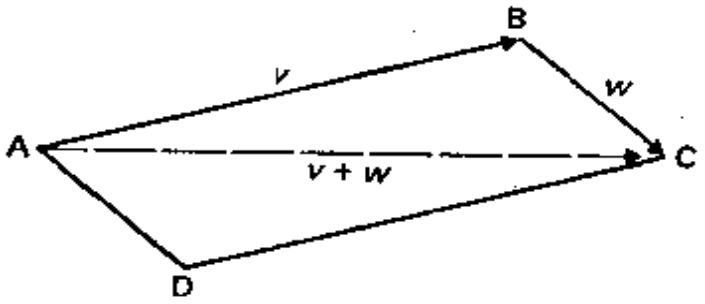


图 2.8　三角形法则和平行四边形

$$v+w=(v+w)$$

且

$$2v+2w=2(v+w)$$

一开始就注意向量加法与普通算术加法之间的差别是很重要的。正如读者可以看到的，上述过程在几何意义上是截然不同的。然而我们还可以看出一向量与一数量相乘可以得出另一向量。但是要注意，若一向量乘以 -1，则该向量反向，而其大小不变，得出向

量 $-v$。例如，西风完全可以表示成负的东风。这一方面的许多细节在下一节将作进一步讨论。

作为三角形法则的一项推演，可以在图 2.8 中相对于合成向量 AC，取三角形 ABC 的镜象，进而得出一个平行四边形 $ABCD$。平行四边形 $ABCD$ 所包含的面积称为向量 v 和 w 的向量面积(S)，即：

$$S = v \wedge w \qquad (2.31)$$

根据本章第一节和第二节所述的关于三角比的知识，我们还可以看出：

$$S = AB \cdot BC \sin(\text{角 } ABC),$$

式中 S 为 S 的大小，它再次把向量大小与几何图形直接联系起来。根据两个向量作一个平行四边形，广泛用来研究作用于一点上的一些力，这样作出的图形称为作用力的平行四边形。

第五节　向量的分量

我们在本章第三节中介绍向量时，实际上已经涉及了取向量的分量问题。重力加速度的作用是垂直向下的，例如在考察山坡的稳定性时，应当记住的诸要素之一就是作用于坡面碎屑上的 g 的垂直分量。如果坡地接近水平，则作用于岩块或土块上的总下滑力实际上显然很小。不管是什么，只要既有大小又有方向，它就能在任一方向上加以分解。我们可以取水平分量或垂直分量，取西向分量或北向分量，或取在任何必要的方向上分解的任何其他分量。例如，如果我们对某一地区的西风的总"吹流"感兴趣，那么取风的西向分量就是进行分析的良好开端。因此，对于风速为 5 米/秒的正西风而言，西向分速为 + 5米/秒；而对于同一风速的东风而言，西向分速则为 − 5米/秒。同理，正北风或正南风绝不会

有西向分量。

显然，我们应当将向量改化为标准形式，以便能够和同一现象的其他度量直接进行对比。这往往很容易作到，因为取分量不过是利用正弦和余弦的简单的三角比。兹考察风速为10米/秒的方向偏西 30 度的北风，即按照惯例，自北按时针正向 330 度方向的风。计算北向分量和西向分量是件简单事情。该几何图形如图 2.9 所示。取分量乃是本章第四节所述的合成向量的反算。不过，这时合成向量(10米/秒，来向330度)为已知，而所要计算的是导致该合成向量的两个相互垂直作用的向量。例如，我们可以将北向 (n) 和西向(w)分量分别表示如下：

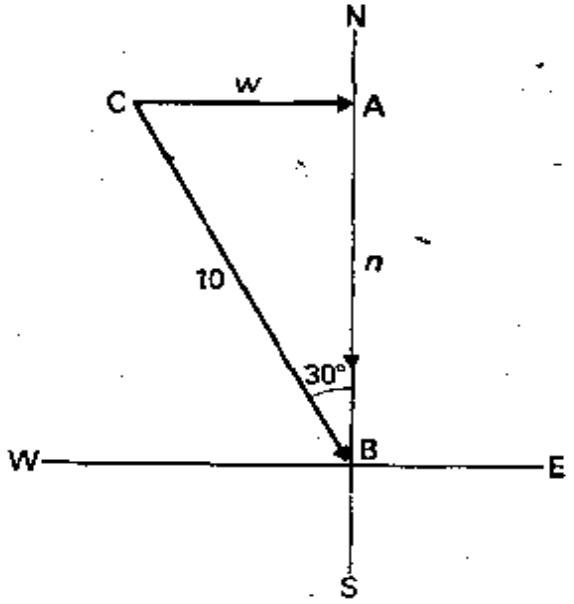


图 2.9　吹速为 10 米/秒的 330 度来向风的分量 (w 和 n)

$$w = 10 \sin 30 = 5 \text{ 米/秒}$$

和

$$n = 10 \cos 30 = 8.66 \text{ 米/秒}$$

当然，同理还可以得出 $n^2 + w^2 = 10^2$，因为三角形 ABC 为直角三角形。

这样就可以推测，还可以使向量的分量具有更一般的形式。到现在为止，我们所考察的是可能出现的最简单的情形，即仅用两个维数的情形。这是为了提出问题。空间是三维的，因而实际上我们可以把讨论范围扩展到三轴坐标系 x, y 和 z，并且相对于这三个平面，根据普通代数学来讨论各种向量关系式。兹取向量 a，并用它的三个相互垂直的分量加以确定，所以其终点是在点 $A(x, y, z)$ 上。如果点 A 用向量 a 来确定，则 a 称为定位向量，因为

它可以准确地表示出 A 相对于三个坐标轴的位置。我们还可以规定向量 $\boldsymbol{a}$ 等于

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z}$$

暂且引用单位向量是很方便的。单位向量正如其名称所提示的，乃是大小为一的向量，并且对于高等向量运算说来，以单位向量表示向量是很方便的。兹以记号 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 表示 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量。这样就可以规定向量 $\boldsymbol{a}$ 等于 $a\hat{\boldsymbol{a}}$，或者为了清楚起见，向量的大小可以表示为 $|\boldsymbol{a}|$。这样一来，如果认为 x，y 和 z 轴上的单位向量分别是 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$，则上列方程可以重写为：

$$\boldsymbol{a}=i\boldsymbol{x}+j\boldsymbol{y}+k\boldsymbol{z} \tag{2.32}$$

该关系式可以表示如图2.10；由该图显然还可以看出，根据勾股定理有：

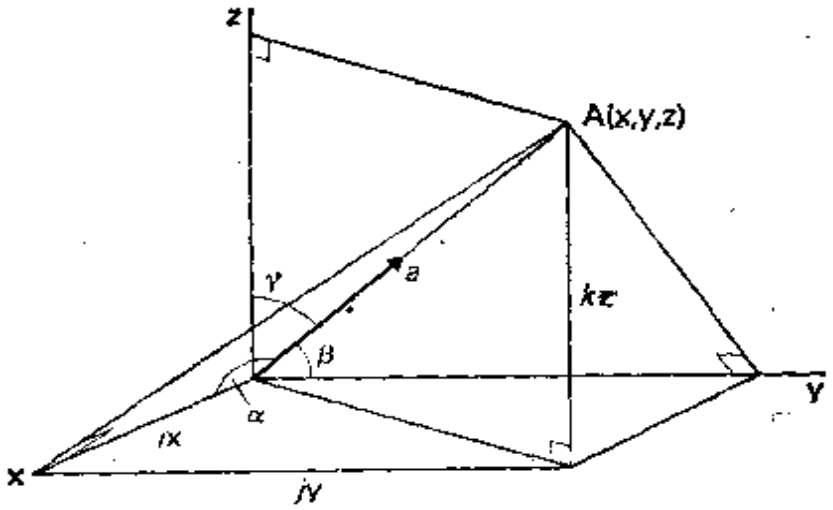


图 2.10 三维向量

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)} \tag{2.33}$$

同理，$\boldsymbol{a}$ 的方向可以表示成以下方程：

$$x=|\boldsymbol{a}|\cos\alpha \tag{2.34}$$

$$y=|\boldsymbol{a}|\cos\beta \tag{2.35}$$

$$z=|\boldsymbol{a}|\cos\gamma \tag{2.36}$$

α,β 和 γ 的余弦称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦。于是将方程(2.32)中的 x,y 和 z 置换，则得：

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma \qquad (2.37)$$

习题 2.5

2.5.1 试将风速为 5.7 米/秒的西南风分解为西向分量和北向分量。

2.5.2 v 的大小 $=3.2$，w 的大小 $=2.1$，夹角 $=45$ 度。试求合成向量 $v+w$ 的大小和该合成向量与 w 的夹角。

2.5.3 有一石块静止在坡度为 1:7 的山坡上，已知石块重量为 mg，试求作用于该石块上的力的垂直分力。

2.5.4 试求由风速为 14.0 米/秒的向岸海风和风速为 9.0 米/秒与海岸线成 60 度的离岸梯度风混合而生成的合成风的大小与方向。

2.5.5 在部分积云中有速度为 5 米/秒的向上气流，同时受到速度为2.5米/秒的水平风的影响。试计算该云中气流的运动速度。

第六节 直 线

现在可以来确定直线方程的向量形式。设 P 为直线上的任意一点(图 2.11)，Q 为该直线上的另一点。若点 O 为坐标系的原点，并设 P 的定位向量为 $\boldsymbol{r}$，Q 的定位向量为 $\boldsymbol{r}_1$，且 $\overrightarrow{QP}=\boldsymbol{a}$，于是

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{a}$$

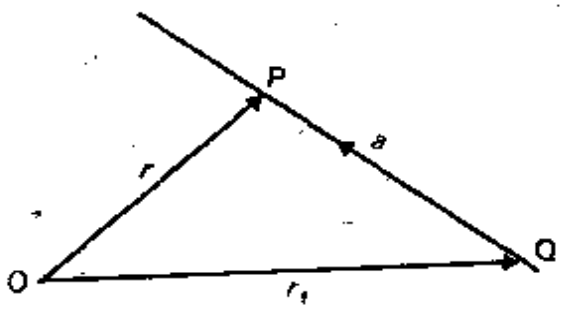


图 2.11 直线

该方程还是以单位向量 $\hat{\boldsymbol{a}}$ 表示为好，所以 QP 可以用单位向量和数量倍数 t 加以确定，故：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t\hat{\boldsymbol{a}} \qquad (2.38)$$

该式即为直线的标准向量形式。这时如果 P 的坐标为(x_1, y_1, z_1)；而 Q 的坐标为(x_2, y_2, z_2)，并且由方程(2.37)有：

$$\hat{a} = i\cos\alpha + j\cos\beta + k\cos\gamma$$

那么，在以 O 为中心的直角坐标系中利用方程 (2.34)、(2.35) 和 (2.36)可以得出：

$$\frac{(x_2 - x_1)}{\cos\alpha} = \frac{(y_2 - y_1)}{\cos\beta} = \frac{(z_2 - z_1)}{\cos\gamma} = t \qquad (2.39)$$

x, y 和 z 中的每一个以 t 和方向余弦表示的表达式称为原方程的参数形式。

第七节 数 量 积

下一步必然是考察两个向量的投影分解，即一个向量投影到另一个向量上会有什么结果。在图 2.12 中可以看到两个向量 a和 b，a 在 b 的方向上的分解不难表示成下列几何表达式：

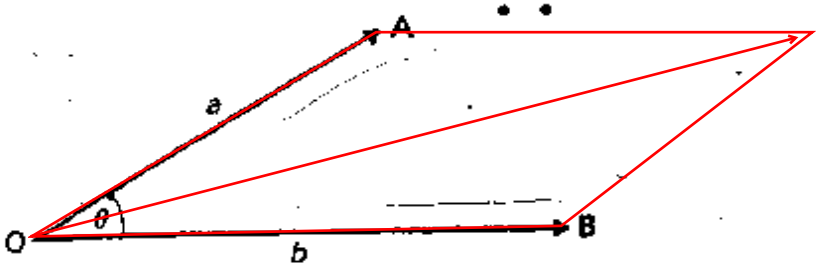


图 2.12 数量积（或称点积）

$$|a||b|\cos\theta \qquad (2.40)$$

同理，b 在 a 上的投影为 $|b||a|\cos\theta$，其大小显然与方程(2.40)相同。这种运算称为两向量的数量积，或称点积，因为我们可以写为：

$$a \cdot b = |a||b|\cos\theta \qquad (2.41)$$

若 a 和 b 均依据预先给定的三轴坐标系分别加以确定，则由方程(2.32) 可得：

$$a = a_1 i + a_2 j + a_3 k \qquad (2.42)$$

和

$$b = b_1 i + b_2 j + b_3 k \qquad (2.43)$$

现在若将该两结果相乘以求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，则得：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 \tag{2.44}$$

因为

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$$

（这是由于在这些点积中 θ 为零所致），

而且

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$$

（这是由于在这些点积中 θ 为 90° 所致）。

第八节　向　量　积

两向量的数量积通过一向量对另一向量的分解，可以给出该两向量的数量并合值；而两向量的向量积却给出既有大小又有方向的并合值，换言之，给出另一向量。向量积的定义如下。若 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为同一平面中的两向量，θ 为两者的夹角，由 $\boldsymbol{a}$ 至 $\boldsymbol{b}$ 度量（这很重要，下面将会看到），则向量积为：

$$\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{c}} \tag{2.45}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{c}}$ 为垂直作用于 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 平面（图 2.13）的单位向量。向量积 $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}$ 为一向量，其大小为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，其方向为 $\hat{\boldsymbol{c}}$。对于 $\boldsymbol{a}$ 和

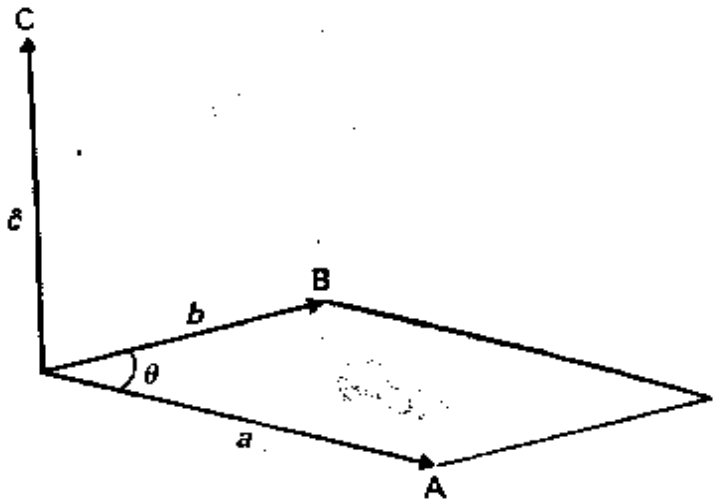


图 2.13　向量积

$\boldsymbol{b}$ 可以作一个平行四边形，所以向量面积（方程(2.31)）也可以由 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 确定。然而指出，向量积 $\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}$ 为：

$$\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin(-\theta)\hat{\boldsymbol{c}}$$

$$=-|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\sin\theta\,\hat{\boldsymbol{c}}=-\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b} \qquad (2.46)$$

这显然是由于角 θ 现在是由 $\boldsymbol{b}$ 至 $\boldsymbol{a}$ 度量所致。由此可见，数量积是可交换的，而向量积却是不可交换的；这一点在运算时务必永远牢记。

第九节　数量积和向量积的运算

假设我们欲求两向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角 θ。这可以运用本章第七节和第八节所述的数量积法则和向量积法则加以解决。依据三轴坐标系 x,y 和 z，命：

$$\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$$

和

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 依次仍然分别为三个坐标轴上的单位向量。就数量积而言，因为

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{i}\cos\alpha+\boldsymbol{j}\cos\beta+\boldsymbol{k}\cos\gamma \qquad \text{（由方程(2.37)）}$$

而且　$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$，　$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$

所以

$$\hat{\boldsymbol{a}}^2=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma$$

于是由方程(2.33)有：

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(2^2+1^2+3^2)}=\sqrt{14}$$

且

$$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{(1^2+2^2+(-1)^2)}=\sqrt{6}$$

而由方程(2.37)得：

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\quad\text{及}\quad\hat{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$$

故 $$\hat{a}=\frac{(2i+j+3k)}{\sqrt{14}}$$

$$\hat{b}=\frac{(i+2j-k)}{\sqrt{6}}$$

并且由方程(2.41)有$\hat{a}\cdot\hat{b}=\cos\theta$，所以

$$\cos\theta=\frac{(2i+j+3k)(i+2j-k)}{\sqrt{14}\ \sqrt{6}}$$

$$=\frac{(2+2-3)}{\sqrt{84}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{84}}$$

$$=0.1091$$

故 $\theta=83°44'$ (用表查得)

现在运用向量积：

$$\hat{a}\wedge\hat{b}=\frac{(2i+j+3k)}{\sqrt{14}}\wedge\frac{(i+2j-k)}{\sqrt{6}} \qquad (2.47)$$

而对于向量积而言：

$$i\wedge i=j\wedge j=k\wedge k=0$$

因为夹角的正弦为零。然而由于三个坐标轴互成直角，其中$\sin\theta=90°$，故：

$$i\wedge j=k \quad 且 \quad -j\wedge i=k \qquad (2.48)$$

$$j\wedge k=i \quad 且 \quad -k\wedge j=i \qquad (2.49)$$

$$k\wedge i=j \quad 且 \quad -i\wedge k=j \qquad (2.50)$$

读者务必牢记这些向量积，并且要注意，每一对向量中有一个变号就会导致合成向量变号，二者全变号则会导致同一合成向量。颠倒顺序(例如，由$i\wedge j$至$j\wedge i$)也会使合成向量变号。于是在本例中向量积$\hat{a}\wedge\hat{b}$成为：

$$\hat{a}\wedge\hat{b}=\frac{(2i+j+3k)\wedge(i+2j-k)}{\sqrt{84}}$$

$$=\frac{4(i\wedge j)+2(i\wedge -k)+(j\wedge i)+(j\wedge -k)+3(k\wedge i)+6(k\wedge j)}{\sqrt{84}}$$

$$=\frac{4k+2j+3j-k-i-6i}{\sqrt{84}}$$

$$=\frac{-7i+5j+3k}{\sqrt{84}}$$

可是由于按定义 $\hat{a}\wedge\hat{b}=\sin\theta\hat{c}$，则

$$|\hat{a}\wedge\hat{b}|=|\sin\theta|$$

因而

$$\sin^2\theta=\frac{(-7i+5j+3k)\cdot(-7i+5j+3k)}{84}$$

(这里应指出有一点积)，于是

$$\sin^2\theta=\frac{49+25+9}{84}$$

$$\sin\theta=0.9940$$

$$\theta=83°44'$$

习题 2.9

试求以 i,j,k 和 θ 值一起确定的下列各向量的点积$(a\cdot b)$和向量积$(a\wedge b)$。

2.9.1 $a=5i+2j+k$

$b=3i+5j+2k$

2.9.2 $a=2j-6k$

$b=2i-3j-k$

2.9.3 $a=5.2i-3.6j+0.1k$

$b=-9.7i+3.1j+10.2k$

第三章　线性函数

数学函数的概念在第一章曾经作了介绍。一个函数可以确定两变量之间的比例关系，例如在一般意义上可以确定 x 与 y 之间的比例关系。这会有两种情形：一是表明 x 与 y 之间的比例关系是否对于每个变量的所有值说来均为一恒比；二是确定该比值。例如，在函数 $y=3x$ 中，y 与 x 之比总为 3：1；而在函数 $y=3x^2$ 中，两变量之比则随 x 的增加而增加。本章将仅涉及前一种函数，即线性函数。

第一节　基本线性函数

关联着 y 与 x 的线性函数的标准方程（$y=mx+k$）在第一章作了介绍，并且其表达式的向量形式也在上一章作了推演。我们暂且假设 $k=0$，因而假设 x 与 y 的比例关系总为一恒比 $1:m$；这就是说，对于 x 的单位变化而言，y 值变化 m。对 x 取连续值 1，2 和 3，则 y 等于 $1m$，$2m$ 和 $3m$。若 $m=2$，则诸坐标对 x 与 y 之比为 1：2，例如(1,2)，(2,4)和(3,6)。若将这些点相对于图象坐标系加以标绘，则这些点的连线为一直线，并且通过原点 (0, 0)。这是一个初等线性函数 $y=2x$（图 3.1），该函数连同 $k=0$ 的所有其它线性函数都表示出在 x 与 y 之间有一个常数比。然而很明显，如果有个函数为 $y=2x^2$，那么，例如在它和 $y=2x$ 以点(0,0)为公共点的情况下，x 与 y 之比在 $x=1$ 时为 1：2，在 $x=2$ 时为 1：4，在 $x=3$ 时为 1：6，等等。此非线性函数，亦示于图 3.1。

自然地理学中有许多关系只要作为近似，就可以表示成线性函数。例如，第一章援引的方程 $q=5.1a^{0.98}$ 就是近线性方程。正如

在那一章曾经见过的，线性函数 $q=5.1a$ 极其接近这一方程，因为诸 a 项仅仅增加 $a^{0.02}$ 倍（$a^{1.0}=a^{0.98}a^{0.02}$）。标准方程中的 m 项，除了表示 q 与 a 或 y 与 x 之比值外，还是线性函数图象与 x 轴之间的夹角之正切。因此，称它为直线的斜率或梯度。可见，在 m 项很小的诸方程中，其函数图象更接近平行于 x 轴（例如图 3.1 中的 $y=0.2x$）。同理，m 值很大，表明函数图象与 x 轴更接近成直角（例如图 3.1 中的 $y=20x$）。因为 90 度的正切为无限大，所以平行于 y 轴的直线的方程可以表示成 $y=\infty x$，即 $x=\frac{y}{\infty}=0$。参照图 2.5 还可以表明，在函数图象由左向上倾斜时，其斜率为正；而函数图象朝相反方向倾斜时则斜率为负，例如图 3.1 中的 $y=-2x$。这样一来，斜率乃是一变量随另一变量的变化率，即线性函数图象上坐标分别为 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2) 的任意两点间的变化率；该斜率为：

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \tag{3.1}$$

习题 1.8.1 的解向许多读者提示了这一点。例如，在图 3.1 中 $y=-2x$ 图象上任取两点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$，即 $A=(-4.5,9.0)$ 和 $B=(-2.0,4.0)$，则可以看出：

$$m=\frac{9.0-4.0}{(-4.5)-(-2.0)}=\frac{5.0}{-2.5}=-2$$

凡是标准形式 $y=mx+k$ 中的 $k=0$ 的线性函数，其图象均通过坐标系原点 $(0,0)$。改变 k 值（其中 $k\neq 0$）可以获得斜率均为 m 的一"族"平行直线。在图 3.2 中诸图象均就 $y=2x+k$、当 $k=-2$ 至 $+3$ 时绘出的。由这些图象显然可见，k 值可以直接确定函数图象与 y 轴的交点。因此，常数 k 称为截距，并且对于标准方程而言，直线与 y 轴相交于点 $(0,k)$ 上。习题 1.8.2 引用的关联着华氏温度和摄氏温度的关系式就是这里讨论的线性方程的熟悉而简明的

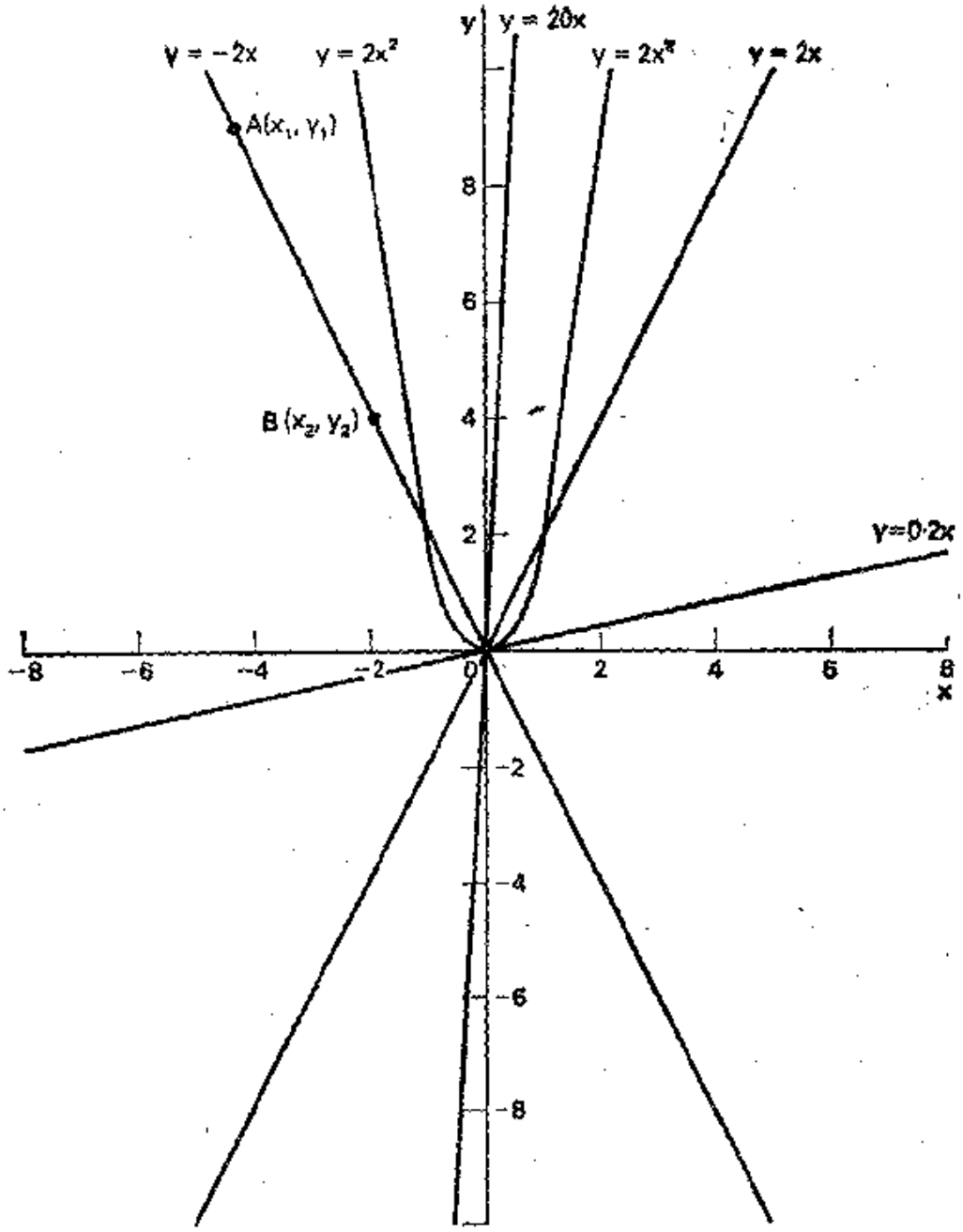


图 3.1 一元线性函数，$y=-2x, y=0.2x, y=2x, y=20x$ 和非线性函数 $y=2x^2$

一个例子。华氏一度与摄氏一度之比为 9：5，因为在华氏度盘上冰点与沸点之间有 180 个分度(212－32 度)，而在摄氏标度上该两点之间则有 100 个分度。因此关联着 F 与 C 的函数的斜率 m 等于 1.8，故：

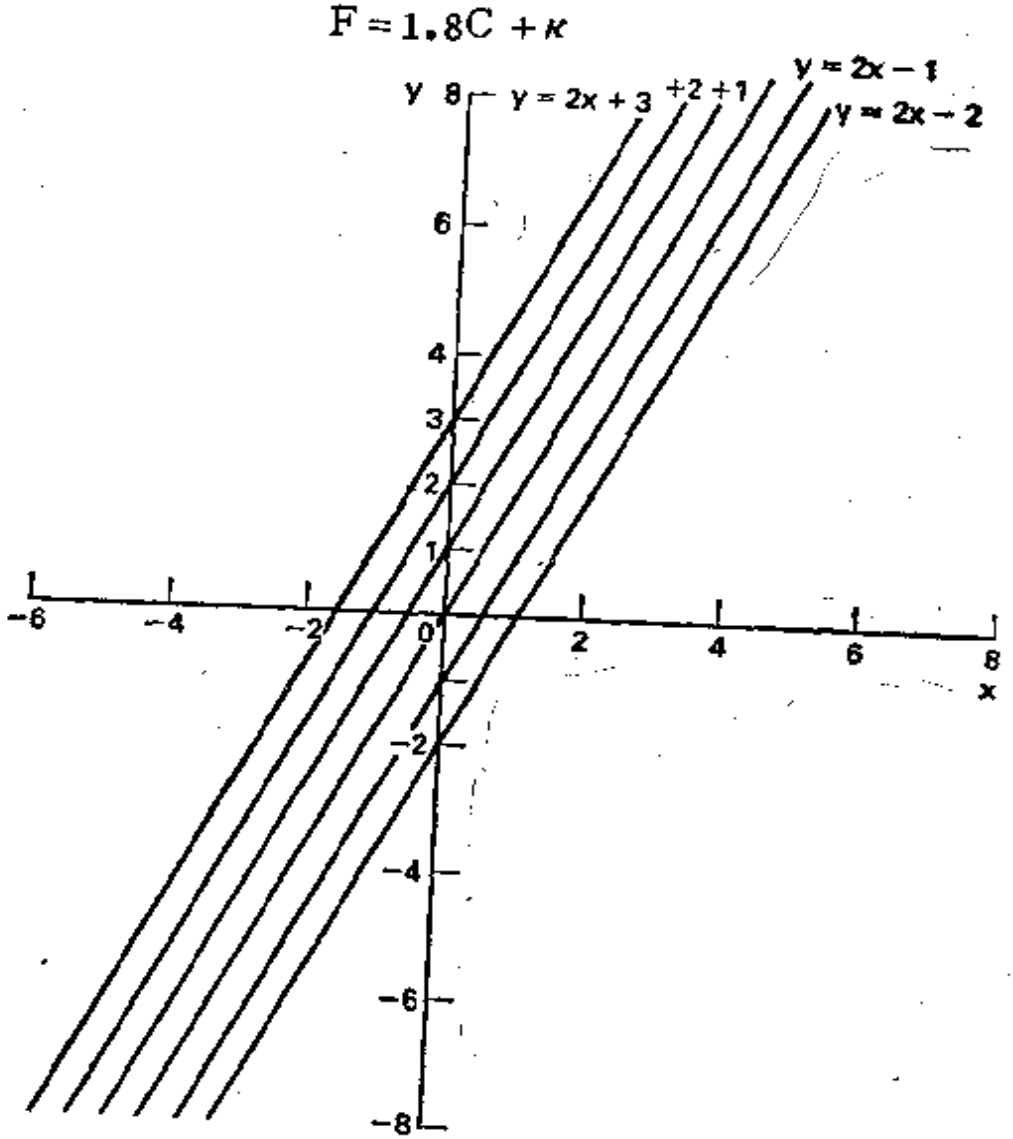


图 3.2　线性函数族：$y = 2x + k$，　$k = -2$ 至 $+3$

然而我们还知道，冰点可以表示为 C = 0和 F = 32，因此，将 F = 3 和 C = 0 代入此方程，则可得出 $k = 32$，并且最终的线性方程为 F = 1.8C + 32.0。建议读者务必使自己熟悉设 m 和 k 的适当值来描绘线性函数图象。另外还建议读者试试逆过程，即在图象纸上绘出若干条直线并求出它们的方程。

第二节　联立方程

截距可以为获得直线与 y 轴的交点的坐标提供方便。实际上

为了确定该交点，可以联立解 $y=mx+k$ 和 $x=0$，以求出两者公共点的坐标。这时，为了求解可以将 $x=0$ 直接代入标准方程，故 $y=k$，可见该点的坐标为(0，k)。然而往往需要求出既含 x 项又含 y 项的两个方程的公共点。对于任意两个线性函数而言，如果其方程的斜率值不同，则其图象会相交于一个已知点。兹假定有两个关联着 x 与 y 的函数，因而其方程分别为：

$$y=3.2x+4.2 \qquad (3.2)$$

和

$$y=5.2x-5.0 \qquad (3.3)$$

由于两者均等于 y，可以认为：

$$5.2x-5.0=3.2x+4.2$$

两边同减 $3.2x$，则得：

$$2.0x-5.0=4.2$$

两边同加 5.0，则得：

$$2.0x=9.2$$

故

$$x=4.6$$

可见两函数的 x 值相同，均为 4.6，也就是说，该两函数图象的交点的 x 坐标为 4.6。将该值代入方程(3.2)或(3.3)，则可以得出连带的 y 坐标。于是，

$$y=5.2\times4.6-5.0 \qquad (由(3.3))$$

故

$$y=23.9-5.0=18.9$$

相同的 y 坐标为 18.9，可见两函数图象的交点的坐标为(4.6，18.9)（图 3.3）。方程（3.2）和（3.3）二者均已写为标准形式 $y=mx+k$。方程的表达方式往往使得其标准形式不易识别。例如，方程 $4y-x=16$ 就不是标准形式，然而该方程两边同加 x，则得 $4y=x+16$，再同除以 4，又得：$y=\frac{1}{4}x+4$，故 $m=\frac{1}{4}$，$k=4$。

在试解联立方程时，最好(尽管实际上并无必要)将每个方程移项

将后一个方程乘以 2，然后由前一个方程减去，则可得出 y 值。于是

$$2x-5y=14$$
$$2x-2y=-4$$

相减

$$0-3y=18$$

$$\therefore \quad y=-6$$

现将得数代入方程(3.4)或(3.5)中。在方程(3.4)中得出：

$$2x+30=14$$
$$\therefore \quad 2x=-16$$
$$\therefore \quad x=-8$$

可见，该二函数的交点为（-8，-6）。

一般形式的联立方程的解法如下。兹命两线性方程的斜率分别为 m_1 和 m_2，其截距分别为 k_1 和 k_2，因而该二方程分别为：

$$y=m_1x+k_1 \tag{3.6}$$
$$y=m_2x+k_2 \tag{3.7}$$

则

$$m_1x+k_1=m_2x+k_2$$

将含 x 的诸项集合在一边，而截距集合在另一边，则有：

$$x(m_1-m_2)=k_2-k_1$$

于是：

$$x=\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2} \tag{3.8}$$

将方程(3.6)同乘以 m_2，而方程(3.7)同乘以 m_1，则得：

$$m_2y=m_2m_1x+m_2k_1 \tag{3.9}$$

和

$$m_1y=m_1m_2x+m_1k_2 \tag{3.10}$$

(3.9)减(3.10)，并将左边诸项集合，则得：

$$y(m_2-m_1)=m_2k_1-m_1k_2$$

$$\therefore y=\frac{m_2k_1-m_1k_2}{m_2-m_1} \tag{3.11}$$

因此，任意两个线性函数的图象交点的坐标为：

$$\left(\frac{k_2-k_1}{m_1-m_2},\ \frac{m_2k_1-m_1k_2}{m_2-m_1}\right) \tag{3.12}$$

现在可以运用线性函数论解决自然地理学中的一个基本问题。许多读者可能对千变万化的空气温度递减率之间的关系感到不好理解和解释；考虑到这些问题，这里引用以下一个实例。大气的稳定度或不稳定度决定于空气的含水量及其饱和度、大气温度垂直递减率(环境温度垂直递减率——环境直减率)和地面温度。温度递减率理论和气体定律的其它应用一般可在戴维森(1978)所著一书中找到。一团未饱和空气温度升高到高于其外界温度时，就会通过大气层上升，其速率决定于其浮力(它本身是气块及其外界的温度差的函数)，并且只要气块中的空气保持未饱和状态，该团空气温度就会按照干空气温度的绝热垂直递减率(干绝热直减率)0.98°C/100 米高度而降低。因此，关联着未饱和条件下温度与高度的函数所具有的斜率(m)为 -0.98。对于一团未饱和空气来说，在某一给定高度(z 米$\times 10^2$)上的温度(T)决定于该斜率及地面(即 $z=0$)上的初始温度(T_0)；后者显然相当于截距。可见，关联着 T 与 z 的完全函数为：

$$T=-0.98z+T_0 \tag{3.13}$$

如果地面温度为 20.0℃，则在 $z=800$ 米高度上的气块温度为：

$$T=-0.98\times 8+20.0=12.2℃$$

只要气块保持未饱和状态，该方程就成立。气块一旦达到饱和状态，则随气块继续上升而释放潜热，会补偿一部分随高度而降低的温度；因此必须引用可以涉及湿空气温度的绝热垂直递减率(湿绝热直减率)的另一个函数。湿绝热直减率不是固定不变的直减率——也就是说表示它的函数是非线性函数，因为释放潜热量取决于气块的绝对含水量，因而亦取决于气块温度。然而为了方便起见，假设湿绝热直减率是固定不变的，即为 -0.50℃/100米，

而其值在大约1000米高度为10℃。这里还需要确定起始温度，以便完全确定湿绝热直减率函数：

$$T = -0.50z + k \qquad (3.14)$$

湿绝热直减率(而不是干绝热直减率)适用的气块高度，可以认为是达到初始露点温度的高度。因此，如果地面温度为20.0℃，而露点温度为11.0℃，那么以露点温度值取代方程(3.13)中的T_0=20.0，即可确定出该高度：

$$T = 20.0 - 0.98z \qquad (3.15)$$

$$11.0 = 20.0 - 0.98z \qquad (3.16)$$

且

$$0.98z = 9.0$$

$$z = 9.2(\text{或 } 920 \text{ 米})$$

该高度标明的是，温度按干绝热直减率降低的上升气块达到饱和状态的位置，绝热凝结高度，也是湿绝热直减率方程(3.14)开始成立的位置。于是湿绝热直减率函数在$z=9.2$时为$T=11.0$，所以代入方程(3.14)，则得：

$$11.0 = -4.6 + k$$

$$k = 15.6$$

于是，完全的湿绝热直减率方程为：

$$T = -0.50z + 15.6 \qquad (3.17)$$

方程(3.14)，(3.16)与(3.17)之间的关系图象示于图3.4。其中的坐标系与气象学惯用的正相反，所以高度(z)这个自变量出现在纵坐标上。这只不过是为了简化图象说明而已。

环境温度垂直递减率也可以用数学方式加以介绍。直到现在，我们一直认为大气是不稳定的，也就是说，上升气块内的空气温度总高于外界空气温度。实际上对于不同高度而言大气温度随高度的变率决不是固定不变的；并且关联着T与z的任何函数都会是极其复杂的，而且很少是线性的。不过，正如就湿绝热直减率

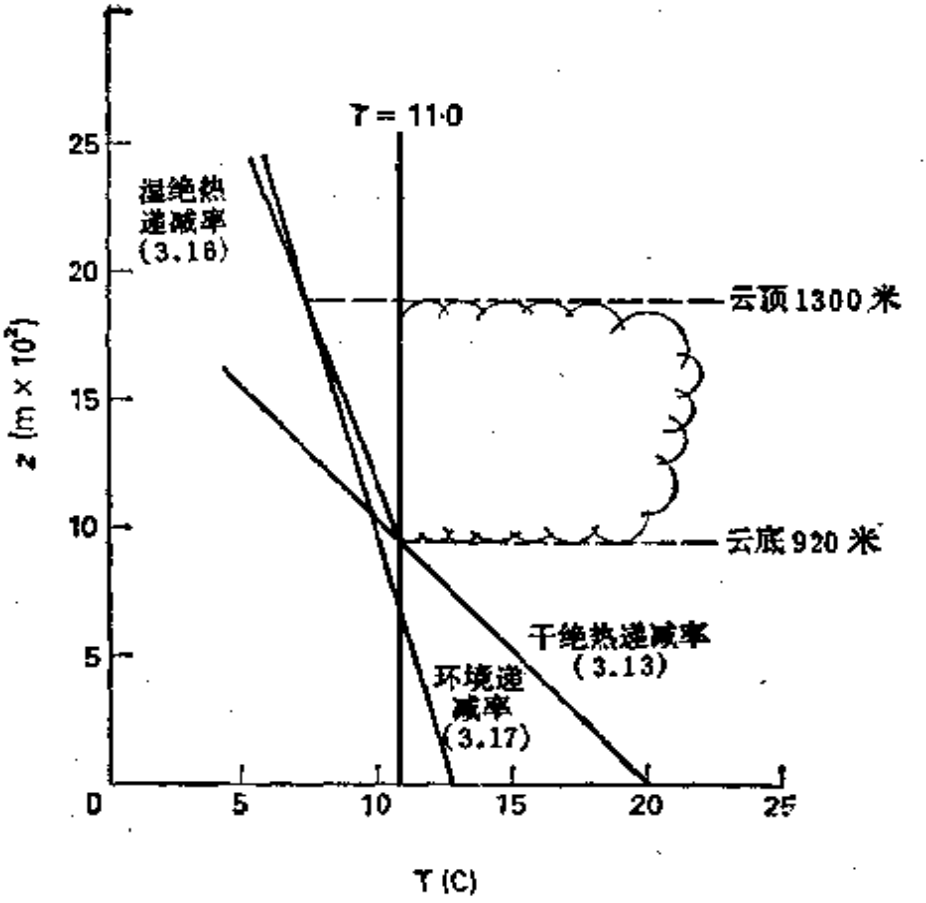


图 3.4 各种温度递减率的联立解

所作过的，我们认为上述趋向可以近似地表示成下列表达式是适宜的：

$$T = -0.30\,z + 13.0 \qquad (3.18)$$

此式表明地面温度为 13.0℃时的温度直减率为 0.3℃/100米，这在图 3.4 中亦已示出。因此，气块温度升高到地面温度 20.0℃ 而不再上升的高度，可以通过方程(3.18)与(3.14)(未饱和状态的)或与(3.17)(饱和状态的)联立解而求出，因为它们的交点所标明的是上升气块与外界空气二者的温度相同的位置。联立解(3.14)和(3.18)可得：

$$20.0 - 0.98z = 13.0 - 0.30z$$

$$\therefore \quad 0.68z = 7.0$$

$$\therefore \quad z = 10.29 \quad \text{即 } 1{,}029 \text{ 米}$$

然而因为这已超过了气块达到饱和状态的高度(920 米),所以我们必须代之以联立解(3.17)和(3.18)如下:

$$15.60 - 0.50z = 13.00 - 0.30z$$

$$\therefore \quad 0.20z = 2.60$$

$$\therefore \quad z = 13.00 \quad \text{即 } 1300 \text{ 米}$$

于是,在上述条件下,气块在 1300 米高度不再上升;该高度还标示着形成积云的云顶高度,并给出云深为 380 米(1300 - 920米)。

习题 3.2

试解下列联立方程,并以图象验证所得结果:

3.2.1 $y = 3x - 4$

$y = 12x + 1$

3.2.2 $y = 1 - x$

$17x - 3y = 2$

3.2.3 $5x - 2y = 0$

$x = 2y - 2$

3.2.4 $x + y = 0$

$x - y = 1$

3.2.5 $2y = 5x + 2$

$y = 6$

试绘出下列函数的图象,以确定交点,并联立解其方程来验证所得结果:

3.2.6 $y = 12x + 2$

$y = 2 - 12x$

3.2.7 $\frac{1}{2}y = x + 1$

$2y = 4x + 5$

3.2.8 $2x + y = 0$

$4x + y = 2$

第三节　坐标轴的旋转

到目前为止所确立的理论是足以满足大多数数学和统计学用场的。不过有些统计方法(例如第四章的主成分分析)需要旋转坐标系来进行方程"变换"。兹考察点P(图3.5),其在X和Y坐标系中的坐标为(x,y),其在X_1和Y_1坐标系中的坐标为(x_1,y_1)。两个坐标系的X轴和Y轴分别相互偏斜成θ角。两坐标系具有共用原点,所以对二者说来OP之长均为r。OP与X_1轴的夹角为角ϕ,而与X轴的夹角为角$(\theta+\phi)$。于是

$$x = r\cos(\theta+\phi)$$

$$\therefore \quad x = r\cos\theta\cos\phi - r\sin\theta\sin\phi \qquad \text{(由(2.13))}$$

但 $$x_1 = r\cos\phi \qquad (3.19)$$

且 $$y_1 = r\sin\phi \qquad (3.20)$$

$$\therefore \quad x = x_1\cos\theta - y_1\sin\theta \qquad (3.21)$$

而 $$y = r\sin(\theta+\phi)$$

$$\therefore \quad y = r\sin\theta\cos\phi + r\cos\theta\sin\phi \qquad \text{(由(2.12))}$$

故 $$y = x_1\sin\theta + y_1\cos\theta \quad \text{(由(3.19)和(3.21))} \quad (3.22)$$

如果图3.5中的OP的方程为$y=5x$,而且坐标轴旋转30度,因而$\sin\theta=0.5000$,$\cos\theta=0.8660$(由附录四的表查出),那么相对于新坐标系的方程为:

$$x\sin\theta + y\cos\theta = 5(x\cos\theta - y\sin\theta) \quad \text{(由(3.21)和(3.22))}$$

$$0.5x + 0.8660y = 5\times 0.8660x - 5\times 0.5y$$

$$0.8660y + 2.5y = 4.33x - 0.5x$$

$$\therefore \quad 3.366y = 3.83\,x$$

$$\therefore \quad y = 1.14\,x$$

如果原始方程不通过原点,则新截距(k_1)可以表示为:

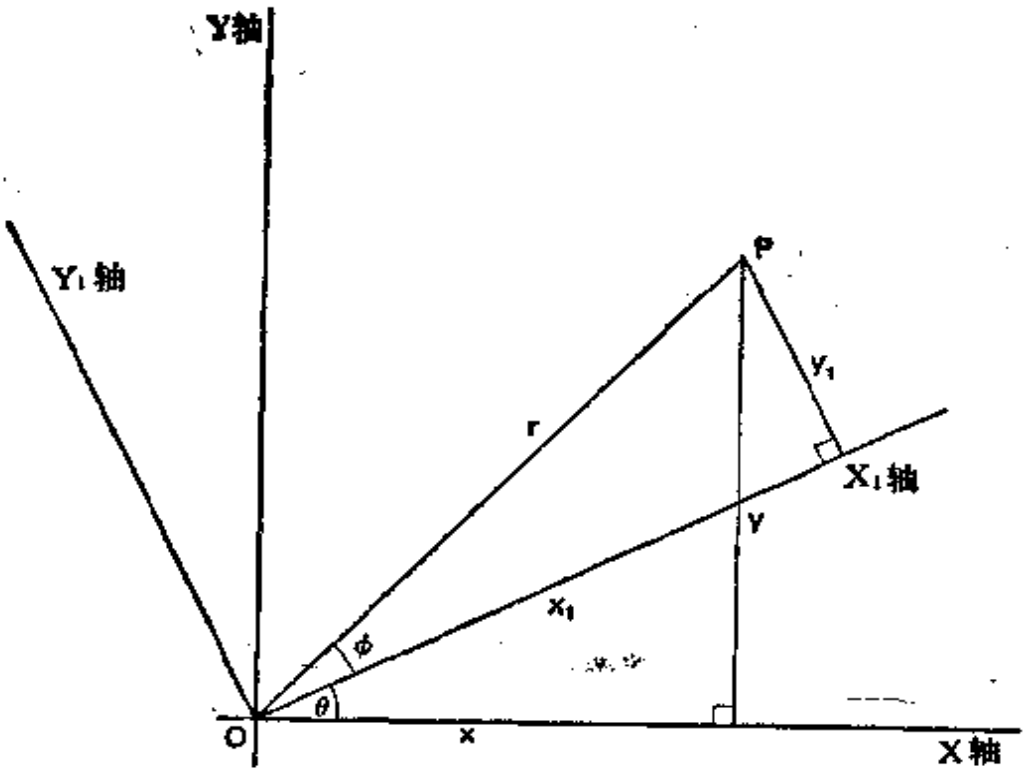


图 3.5　坐标轴的旋转

$$k_1 = k\cos\theta$$

因此，若方程为 $y = 5x + 2$，则通过 30 度角变换，可得：

$$y = 1.14x + 2\cos\theta$$

$$= 1.14x + 1.73$$

该变换通过代入方程(3.21)和(3.22)同样适用于非线性函数。

第四节　数学函数和统计关系

由于线性函数的数学原理业已确立，现在我们就可以把注意力转向线性函数在自然地理学中的一般应用。一个函数，例如在确定干绝热直减率时关联着温度与高度的那个函数，可以表示出由联系 T 与 z 两参数的自然规律所确定的一个单值线性关系。该关系式可以从理论上获得，并且还可以表示得十分精确(参见麦克托什和汤姆 (McIntosh and Thom, 1969) 合著一书，戴维森(1978)

所著一书)。正因为这样,该关系式可以用来就给定的 T 确定 z,通常也可以由 z 预测 T,尽管它在逻辑上必然是一个关联着 z 与 T 的一元条件表示式。该关系式是一个纯数学函数,即严密而单值的函数。

正如第一章所述,在环境科学中确立的各种关系式常常达不到这样的精度。我们经常采用的是归纳推理的方法而不是演绎推理的方法,并且作为依据的都是些不大精确的和带有误差的野外观察结果。在试图以函数形式建立数学模型时,尽最大努力所能得到的也只是实际关系的近似。在第一章援引的关联着流量与流域面积的关系式 $q=5.1a^{0.98}$ 中,a 的变化不能说明 q 的所有变化。影响流量的还有别的要素,另外,推导该方程时所利用的野外观察结果几乎不可避免地都带有误差。用哪种方法可以得出最佳描述野外情形的数学函数,要看数据的复杂情形来决定,而如何运用该模型则又要看关系的性质来定(亦即任何程度的因果关系是否都可以通过逻辑论证加以确立)。如果象大多数地理关系中的那样,因果性可以确立,而关系式又不理想,那么因变量和自变量的确定,就成为统计学上很重要的了。利用为了根据 x 预测 y 而导出的关系式来根据 y 预测 x,这在统计学上是不成立的。这是由于本章后面所述的明显理由所致。

为了适应能用"最佳拟合"函数表示观察到的关系的需要,可以提出两个问题,对非线性和多变量情形同样适用。其一,必须得出最佳拟合的方程,以便对所有的观察结果提出尽可能准确的解释。其二,由于函数与诸观察点不大相符的结果,在利用关系式于预测目的时就需要确定对关系式的置信度。有几种统计方法可以满足这两项需求或者其中之一,故而本书涉及了一些统计方法。这些方法的详尽阐述和推演均不属本书讨论范围,而在附录五中给出了一些统计公式,以供参考。然而读者如果想要继续深入学习

统计学的话，则可参阅优秀的初等统计学教程，例如格雷戈里(Gregory,1970)、布赖恩特(Bryant,1966)或齐根尔(Siegel,1956)所著各书。

第五节 直线拟合

确定数学函数来近似地描述两变量之间的关系，有一个很简便的方法，就是把诸数据对标在坐标图上，目测画出一条直线，可视作所有数据的最佳表象。可惜，利用这种方法对数据点进行直线拟合的优良度如何，却没有可靠的估计办法，因而这种方法带有很大的主观性。可是根据经验，由此法给出的直线推出的函数，可以极其接近用其他统计方法确定的函数。在散点靠近直线，即统计相关性(参见附录五，第二节)好的时候尤其如此。在画出直线时应当力求使所有数据点对直线的总离差减至最小。图 3.6 所示即为目测画出直线的一个例子。该图上标出的诸数据点显示的是坦桑尼亚 35 个气候观测站年平均温度(摄氏)随高度（米$\times 10^3$）递减的总趋势(东非气象局，1964)。总的相关性看来是好的。为了确定该直线的方程，可以在直线上任取两点，例如 A(5.0,24.2) 和 B(13.0,20.0)，并将其代入标准方程 $y=mx+k$：

$$24.2=5.0m+k \qquad (3.23)$$

$$20.0=13.0m+k \qquad (3.24)$$

(3.23)减(3.24)以消去 k，则得：

$$4.2=-8.0m$$

$$m=-0.53\text{(或}-0.5\text{到小数点后面一位)}$$

在本例中，取到小数点后面不止一位，以提高该方法的精度是不现实的。将该值代入方程(3.23)，得：

$$24.2=5.0\times -0.5+k$$

$$k=24.2+2.5=26.7$$

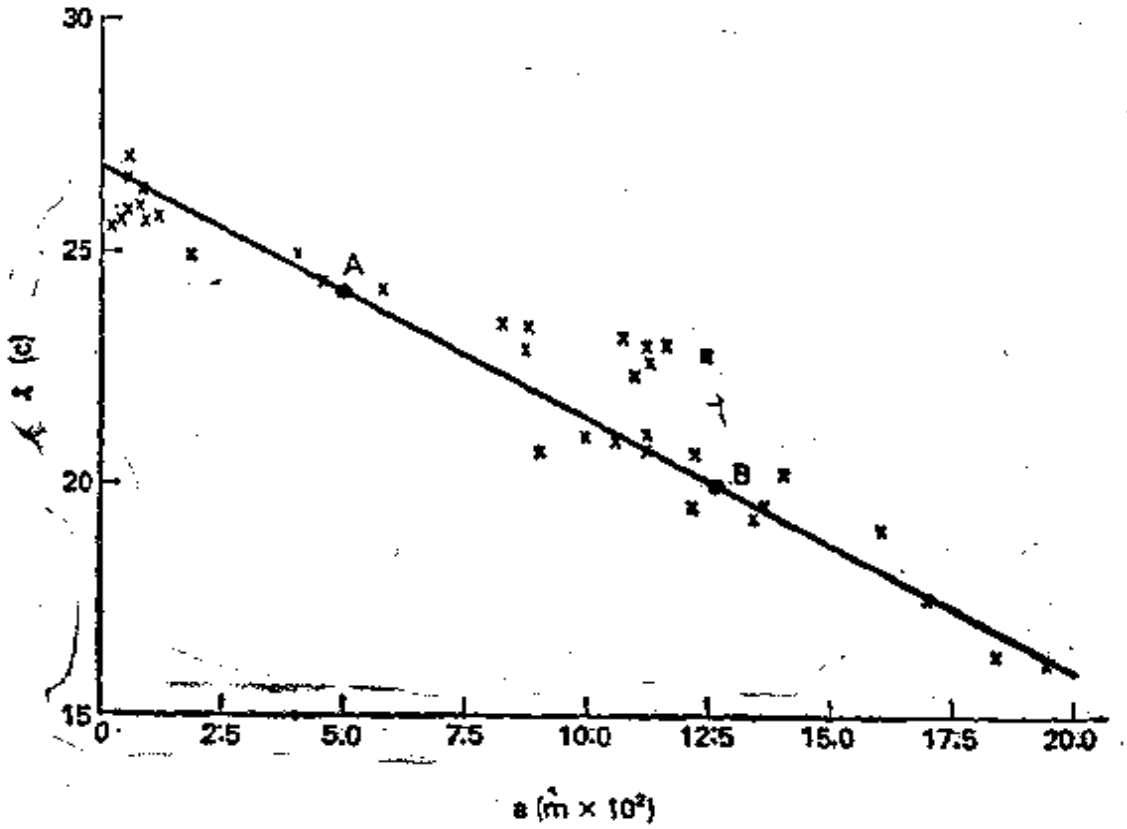


图 3.6　坦桑尼亚年平均温度 t(℃)与高度 a(10^2 米)之间的关系
直线由目测拟合而成

因而推出的方程为：

$$t = 26.7 - 0.5a \qquad (3.25)$$

另一方面，我们还可以指出，当 $a = 0$(截距)时，t 值为 26.9，并且因为 m 可以 $(y_1 - y_0)/(x_1 - x_0)$ 表示(由方程(3.1))，所以关联着 t 与 a 的函数为：

$$t = \left(\frac{20.0 - 24.2}{13.0 - 5.0}\right)a + 26.9$$

$$t = 26.9 - 0.5a \qquad (3.26)$$

应当指出，方程(3.25)与(3.26)不同。这反映了利用该法推出的函数一般是不精确的。该法的好处是速度相当快，但是缺少统计学上的客观性。我们无法确信，推出的方程实际上是否是诸数据点的最佳拟合方程，也不能表明根据 a 预测 t 值时的置信度如何。

利用统计方法可以更精确地推出函数。应用统计学试图推出最佳拟合直线，既能符合客观性，又能估计对关系的置信度。有两种统计方法可以用来获得上述的最佳拟合回归直线。其中最简单的一种方法就是推出缩短主轴回归方程(附录五，第三节)，该法是由皮尔逊(Pearson)于 1901 年首先提出的。正如前已指出，我们可以试图对图上散点拟合出直线，而使所有散点对该直线的总离差减至最小。缩短主轴回归直线可以做到这点，而使由该直线与所有散点值组成的诸三角形(例如图 3.7 中的三角形 ABC) 面积总合减至最小。关于统计学公式的概略推导，读者可以参阅克鲁斯卡尔(Kruskal, 1953)或米勒和卡恩(Miller and Kahn, 1962) 的著述。统计量是假定两组数据均为至少接近正态分布的(参见附录五第四节和第七章)。回归直线的斜率可以由 y 和 x 的标准差之比(σ_y 与 σ_x 之比，参见附录五第一节)加以确定，于是：

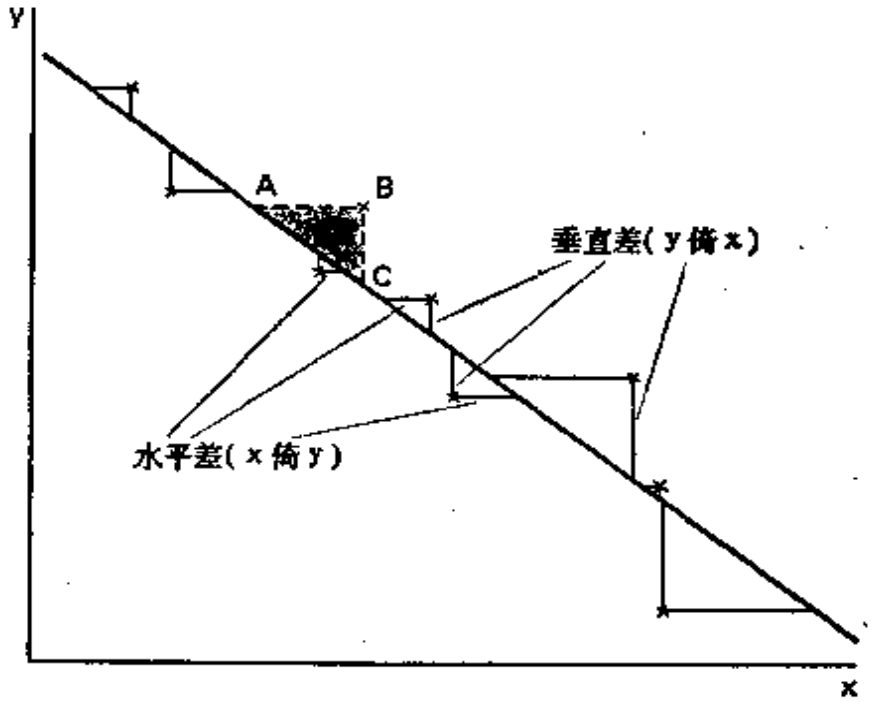


图 3.7　两种回归方法的离差累积

对于缩短主轴回归方法而言，诸面积(ABC)应当减至最小；对于最小二乘回归方法而言，x 倚 y 的水平差和 y 倚 x 的垂直差应当减至最小

$$m=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

并且该直线还含有两组数据的平均值($\overline{x}$, $\overline{y}$)。以正态性为前提就可以对关系式推出一定的置信度。对于图 3.8 所示温度与高度的关系来说，$\overline{t}=22.74$ 和 $\overline{a}=8.43$，$\sigma_t=2.93$ 和 $\sigma_a=5.97$。可见，回归直线的斜率为：

$$m=\frac{2.93}{5.97}=0.49$$

可惜这并不能提供关于该直线的斜率方向的情况，后者首先必须根据图上数据点的总趋势加以确定。例如，如果图上散点非常分散，或者根据每一个参数对另一个参数不能提出充分解释的话，那么该法就会成为困难。不过在这种场合，斜率显然为负；故而将 m 值 -0.49 以及 t 和 a 平均值的坐标均代入标准直线方程中，则可得出：

$$22.74=-0.49\times 8.43+k$$

$$k=26.88$$

因而缩短主轴回归直线为：

$$t=26.88-0.49a \qquad (3.27)$$

此方程如图 3.8 中直线 1 所示，并且由于巧合而与由目测画出的直线所推出的方程非常近似。这似乎是反映了画出原直线的人的技巧，而不是反映了方法的精确性！

缩短主轴回归方法比较简单也很灵活，可以根据观察数据估计关系的性质。尽管这种方法比起目测主观拟合直线来，在统计学上要复杂到无法想象的程度，但是我们仅仅能够估计出对总的关系的置信度，却不能客观地估计出利用方程根据 a 预测 t 时的置信度。此外，该法还不要求预先知道变量中哪一个是因变量，哪一个是自变量。因而，该法特别适用于自变量和因变量无法推

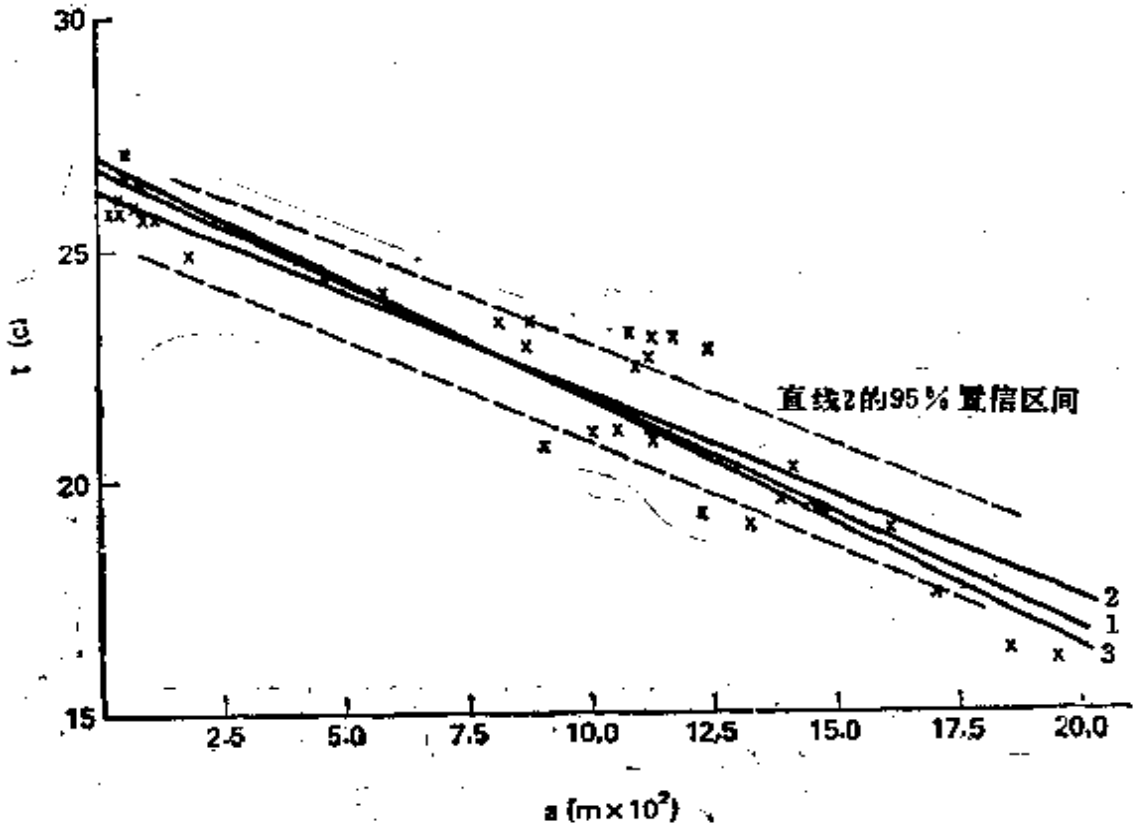


图 3.8　坦桑尼亚年平均温度t(℃)与高度a(10^2米)的关系。直线 1 为缩短主轴回归直线；直线 2 为 y 倚 x 的最小二乘回归直线；直线 3 为 x 倚 y 的最小二乘回归直线

断的领域，诸如古生物学或生物学中形态变量的对比。而在自然地理学中该法却不如其他回归方法那样常用；这恐怕是由于自然地理学研究大多探索的是因果关系所致。然而，如果因果关系这一要素不需要确定或者不需要论证的话，那么该法却是把在同一数据总体中观察到的各种关系区别开来的一种有效方法。在这一方面，戴维森(1977)运用这种非常简单的方法阐明了威尔士中部高原土的各种沉积物特征。如果自变量和因变量能够确定而对预测的置信度又很重要的话，那么就应当运用更为严密的统计方法，即最小二乘回归法。此法可以用来估计根据方程预测出的因变量诸值时的置信度。最小二乘回归法既能使直线拟合符合客观性，又能通过积矩相关系数(r)(附录五第二节)估计出置信度。如要应用

显著性检验时，能否确定两组数据均近于正态分布也是很重要的。此法可以使散点对直线的总偏差减至最小；该直线可以与两个坐标轴中的任何一个平行地加以分解，以便获得最佳拟合回归方程。总相关性越差，就每一对相关变量可以计算出的两个回归方程间的差别就越大。这样一来，若将 y 值对直线的离差减至最小时，即可得出"y 倚 x"的回归；或者若将 x 值的离差减至最小时，即可得出"x 倚 y"的回归(参见图 3.7)。由于按照惯例，自变量通常占据 x 轴，而因变量占据 y 轴，故而我们几乎仅仅涉及 y 倚 x 的回归。取 x 倚 y 的回归就意味着没有考虑不完全由 x 变差所引起的 y 变差。

最小二乘回归方程可以通过联立解两个线性方程（所谓正规方程)而得出。线性方程的推导已不属本章讨论的数学范围，因为这要涉及到微分方程(第九章)，并且也不属本书讨论的统计学范围。不过，它们已在方程(3.28)和(3.29)中给出。如前一样，采用 k 和 m，并以 Σ 表示"取所有某值之和"，则有：

$$nk + m\Sigma x = \Sigma y \tag{3.28}$$

$$k\Sigma x + m\Sigma x^2 = \Sigma xy \tag{3.29}$$

式中 n 为样本量；Σx 为所有 x 值之和；Σy 为所有 y 值之和；Σx^2 为所有 x^2 值之和；Σxy 为所有 xy 积值之和。

m 和 k 的推导值为：

$$m = \frac{n\Sigma xy - \Sigma x\Sigma y}{(n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2)} \tag{3.30}$$

这里应指出，参照大多数统计学教程，可以看出经常用 a 和 b 分别代替 k 和 m。这里，为了保持连贯起见，仍然采用 k 和 m。

$$k = \overline{y} - m\overline{x} \tag{3.31}$$

用前述的同一实例，有：

$\overline{x} = \overline{a} = 8.43$　　且 $\overline{y} = \overline{t} = 22.74$，　$n = 35$

表 3.1

x	5.0	2.6	1.0	6.8	7.6	9.6	5.6	5.2	6.4	2.0	10.8
y	3.6	2.6	2.0	5.6	6.4	7.0	5.0	4.4	4.8	2.0	8.2

$\overline{x}=5.69$, $\overline{y}=4.69$, $\sigma_x=2.90$, $\sigma_y=1.95$

表 3.2

x	33	54	54	5	30	72	43	10	19	45	68	38	30
y	16	35	24	55	35	25	50	40	50	31	28	35	43

$\overline{x}=38.5$, $\overline{y}=35.9$, $\sigma_x=19.7$, $\sigma_y=11.0$

第六节　计算结果的显著性

虽然本书不是一本统计学教程，但在这里讨论一下通过回归分析所得到的结果的显著性还是必要的。有关显著性和概率的问题，在本书的姐妹篇——戴维森(1978)所著一书的第八章，或者在任何一本普通统计学教程(例如，布赖恩特1966) 所著一书中都有比较全面的介绍。在本书第一章和本章前面业已强调指出，自然地理学中有很多的关系，其分析方法在很大程度上必然要看抽样的需要量来决定。另外，我们已经看到，由于使用仪器的误差和其他自变量的影响，在大多数场合可得到这样一些点，通过这些点可在散点图上画出直线来。在上一实例中，标绘在图 3.8 所示的图上的散点比较接近一条直线。因此，两条最小二乘回归直线靠得很近，并且两者的方程也类似。缩短主轴直线把这两条回归直 线 截开。如果我们利用推得的关联着温度与高度的函数来进行预测，那么就能以一定的置信度，预测出某一给定高度的温度。现在来

* 此处原书计算有误，已改正。原书还有一些错误，凡发现者均已订正，不再加注——编者

考察图 3.9 所示的情形，其中在图上绘出了另一组数据对。此例研究了海风到达威尔士的兰佩特(Lampeter)时气块与海面的温度差（T_s）与原先的温度差（T_a）之间可能存在的关系（萨姆纳(1977b)）。该图上的散点相当分散，到处都是，以致难以目测画出直线。计算出并画出了两条最小二乘回归直线，其方程分别为：

T_s关于T_a　　$T_s = 0.08T_a + 0.65$　　(3.34)

T_a关于T_s　　$T_a = 0.80T_a - 2.68$　　(3.35)

这两条直线显然不同，并且利用这两条直线进行预测的任何努力，都不会获得与实际很相似的预期结果。

因此，除了计算回归方程本身以外，还要有办法表示出我们对计算结果的置信度，即关系式的统计显著性。这一点的关键在于相关系数的计算。相关系数值总介于 -1.0 与 $+1.0$ 之间；其值为 $+1.0$ 表示完全相关，并且 y 随 x 的增大而增大。如果标在图上的所有的点恰好都在回归方程直线上，那么两条回归直线就会重合。因而，回归直线的斜率正是两个标准差 σ_x 与 σ_y 之比。而相关系数为 -1.0 也表示完全相关，然而 y 随 x 减小而增大，其斜率相应取负值，而其模数仍为标准差之比。对于正、负相关两者说来，两条回归直线均随着 $|r|$ 值的减小而发散，直至两者在 $r=0$ 处互成直角为止。就图 3.8 中所用的数据而言，相关系数为-0.9372；而本例中 T_s 与 T_a 之间的相关系数则仅为0.3108。自变量对因变量提出的统计解释程度可以用 r^2 表示，因此在前一例中大约有88%的 t 的变差可以用 a 的变差来解释；而在本例中则仅有10%的 T_s 的变差可以用 T_a 的变差来解释。

另外，对相关性的置信度还取决于样本量。更简单地说，如果我们的样本很小，那么即使相关系数很大，对回归方程的形成有不利影响的乱真数据的出现机会仍然比较多。可见，相关系数的显著性通常是以利用样本数据推出的关系式对总体成立的概率来表示

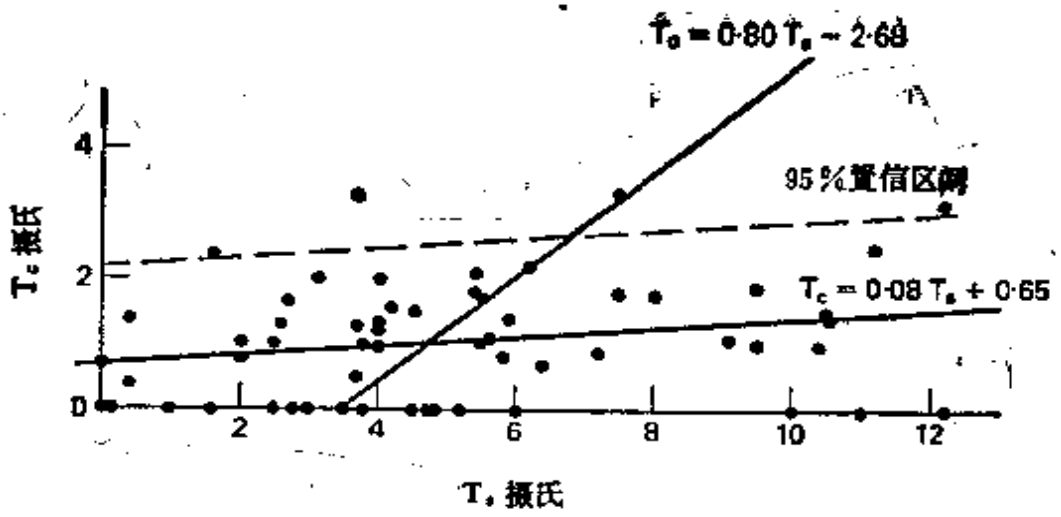


图 3.9　1973—1975 年威尔士的兰佩特海风到来时气块与海面的温度差(T_c)与原先的温度差(T_s)之间的关系

的。该显著性可以利用学生氏 t 检验法(附录五第六节)和 t 值表求得。t 值表是以数据均呈正态分布为前提的,并再次强调,必须确保两组数据从一开头就都接近正态分布。若将该检验法应用于相关系数为 -0.9372,样本量 $n=35$ 的情形,则计算结果显示,坦桑尼亚的温度与高度之间的关系式显著到小于0.1%的舍弃水平,即我们能以大于 99.9% 的置信度确信,回归直线所给出的关系式对该国一切地区均成立。在后一例中,得学生氏 t 值为 2.5,这对于 $n=61$ 来说,仅显著到 2%的舍弃水平,所以在该场合我们仅有98%的置信度。

如果我们用回归方程进行预测的话,那么必须利用相关系数连同因变量的标准差一起来计算出 y 的标准误差(SE),即:

$$SE = \sigma_y\sqrt{(1-r^2)} \qquad (3.36)$$

如果仍然认为数据均呈正态分布,那么根据回归方程预测出的 y 值中大约会有 95%的值介于 $-2SE \leq y \leq +2SE$ 之间。在第一个例子中,y 的标准误差为 0.51,所以,例如在 500 米的高度,根据方程(3.32)预测出的年平均温度为 24.3℃,不过有 95%的机会可以求出该高度上的温度介于 24.3 − 1.02℃ 与 24.3 + 1.02℃ 之间,即

23.3 至 25.3℃之间。如果在图上画出两条直线平行于方程(3.32)的直线，不过在 $t=-1.02$ 和 $t=+1.02$ 处要远离它，那么我们就会建立回归方程的置信区间为 95%。后一例经同样分析表明，标准误差为 0.76，所以就 $T_s=5$℃而言，根据方程(3.34)有 $T_s=1.05$℃。对于海面与上覆气块温度差为摄氏 5.0 度而言，可以 95% 的置信度确信，海风到达时的温度变差为 1.1℃±1.5℃；这样的预测值真太不高明啦！

由于篇幅所限，相关性和显著性水平的详细情形这里就不再赘述了。这些问题都属于统计学范畴，读者仍然可以参阅诸如格雷戈里(Gregory，1970)或布赖恩特(1966)所著的优秀的初级统计学教程，以便获得更详细的解释。然而必须强调，最小二乘法正是由于对预测结果的置信度能够作出客观的统计学估计而优于其他方法。应用缩短主轴回归法就无法得出 y 的预测值的估算标准误差，而只能计算出斜率和截距的标准误差。仅仅根据目测画出的直线所推出的方程，其统计的显著性是无法确定的。读者现在会发觉，把相关系数和就表 3.1 和表 3.2(习题 3.5.1 和 3.5.2)所载数据而计算出的标准误差，与读者就这些练习计算出和画出的回归方程联系起来，是有帮助的和有教益的。对于上述数据而言，积矩相关系数分别为 0.9853 和 −0.6183。

第七节　多变量关系

讨论一下二变量关系足以说明线性函数的基础。简单阐述一下线性函数会大大有利于对函数的全面理解。然而，自然地理学存在于多变量世界之中；并且仅仅根据一个变量就可以获得对另一个变量的完全解释的情形是不常有的，即使认为没有量测误差也是如此。不过，根据一个自变量可以解释因变量的大部分变差

的情形却是常有的。在坦桑尼亚的温度与高度一例中，所提出的完全统计解释为88%。这里强调一下统计解释与科学解释的差别是很重要的。88%统计解释未必就是88%科学解释。与自然地理影响全然无关的诸误差因素势必会导致明确解释数量减少。这当然不是说，为了提高完全解释的水平，我们就可以不去研究其他的地理影响了；而有一些多变量统计方法可以按照与二变量相关和回归相似的方式推出统计模型。上述的计算尽管不是数学计算，却显然相当复杂，往往需要作计算机计算；由于这个原因，多变量函数的讨论就不能象一元函数那样详细了。学生如果想要深入学习多变量关系的统计学，可以参阅高级教程，例如埃塞基尔与福克斯(Ezekiel and Fox，1959)的合著、布赖恩特(1966)的著述；关于自然地理学方面的专题论述，可以参阅米勒与卡恩 (Miller and Kahn，1962)及帕诺夫斯基与布里尔(Panofsky and Brier，1958)的著述。

最简单的多变量函数包含有三个变量。把就二变量关系所述的各种方法加以扩展是比较容易的，只要再加一个坐标轴，即z轴，即可实施。这样得到的坐标系统就是三维的，且在二维的纸面上还能应付而不致造成太多混乱(图3.10)。任何一点都可以用三维坐标系相对于三个坐标轴加以确定。含有三个变量的函数的图象表示是一个面，而不是线，后者是仅含两个维数的函数的图象。计算趋势面，例如格雷(Gray，1974)就岩石台地计算出的趋势面，可以拟合出三维的数学函数，作为数据散点空间分布的近似表示。为了完全掌握多元回归和相关分析，学生需要熟悉矩阵代数原理和运算(第四章)。这在试图建立含有三个以上变量的数学模型时尤其重要。既然即便是三维的空间，我们仍然感到很难理解，那用图象来表示上述函数就同样很难不发生混乱；因而只有完全求助于数学符号。而矩阵代数就是这种符号的一个重要组成部分。

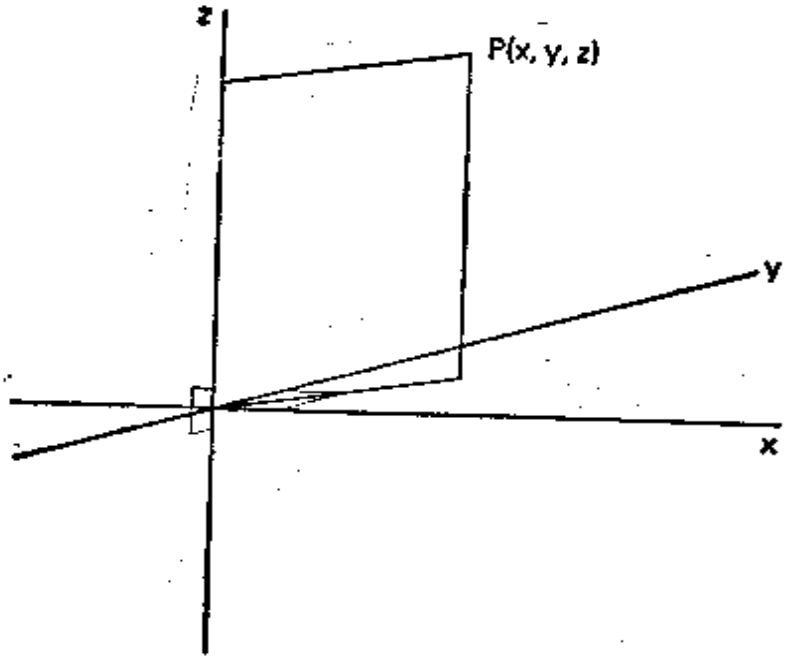


图 3.10　三维坐标系

第一章曾经列举过含有多个自变量的初等函数实例，当时曾经提出，土壤类型(s)决定于几个独立因素：气候(c)，植物(v)，有机体(o)，母质(p)，降雨(r)和时间(t)，即

$$s=f(c,v,o,p,r,t) \tag{3.37}$$

要想根据野外数据确定数学函数，就须应用多变量统计方法。有一个更简单的模型，这一次是关联着暴雨降水(P_r)、期前降水(API)和河流暴雨径流(Q_r)的，是由韦曼 (Weyman,1975) 就萨默西特(Somerset)一个地区给出的，即：

$$Q_r=-3.16+0.35P_r+0.34\mathrm{API}$$

这可以相对于三个坐标轴表示成一个线性面。上述的多变量线性函数在自然地理学中是比较少见的，并且就是在该例中，在推算期前降水指数时，也要根据一个幂函数(参见第五章和第六章)对期前日降水量总计施行加权。P_r和 API 两者都会影响 Q_r的变差，并且该全式曾经对暴雨径流总变差提出过 65%统计解释。要是列入更多的自变量，统计解释当然会有所增加。

第八节　连续方程

在自然地理学中有许多含有不止两个变量的函数实例，它们的科学解释按定义是完整的。这些函数常常仅适用于描述个别系统。在最近几年，各种自然地理过程作为各种系统的研究面扩大了；这一点突出地表现在诸如乔利与肯尼迪(Chorlly and kennedy，1971）的著作或鲁斯沃姆与索墨韦尔（Russwurm and Sommerville，1974）的著作中，这些书籍纯粹从系统学观点探讨所研究的问题。各种系统必须保持输入量与输出量相平衡，并且能够用连续方程加以描述。例如，在气候学中推出的连续方程就能说明地面的辐射平衡。比如在方程(3.38)中，有效辐射量(R_n)必须与射向地面的太阳辐射量(R_s)，地面的发射辐射量(R_b)和地面的反射辐射量(rR_s，其中 r 为地面反射率)保持平衡：

$$R_n = R_s(1-r) - R_b \qquad (3.38)$$

按定义，该方程两边必然相等，即输入量（左方）等于输出量(右方)。水文学中也有说明水量平衡的类似实例，即降水输入量(P)恰好等于蒸发量(E)、地表径流量(R)、潜水径流量(S)和潜水蓄水量(M)之和，即：

$$P = E + R + S + M \qquad (3.39)$$

同一形式的一般方程可以用来考察持水量颇小的土壤持水情形。上述方程还可以用来估算其大小无法用仪器直接测定的参数。例如，测定(尽管以有限的精度)一个流域境内的 P 和 E 和监测 S 和 R（根据两者对流域出口处河流流量的补给情形）都是比较容易的。在这种情况下就可以估算一个时期内的储水变量。换句话说，我们可以试图确定对潜水面的水量补给的速率。然而，根据水分通过持水量不定的土壤的运动理论(参见赫德森(Hudson，1971)

所著一书)显示,该运动速率,从而对潜水面的水量补给的速率又取决于已有的水量(例如参见基恩(Quinn,1977)所著一书)。因此,还可以引用另外一个因素,它对其它一些彼此相关的变量的大小有强烈影响。对储水的水量补给的速率,对于稳定的降雨速率来说并不是稳定的。例如,当土壤成为饱和状态并达到其渗润量时,就会有很多水停蓄在地面上,通过蒸发和地表径流而消失;因而若 M 减小,则 R 和 E 增大,以补偿和保持平衡。可见,上述方程表面看来似乎很简单,其实却带有很复杂的性质,并且对于个别环境系统来说,往往需要借助微分方程(第九章)逐一求解。

然而,在自然地理学中有许多二变量关系却都具有非线性特征,并且有许多多变量关系同样也都是非线性的。非线性关系往往是普遍现象,而线性关系却往往是个别现象,其中诸模型都是根据野外观察或实验室观察而建立的。数据点的曲线拟合(而不是直线拟合)的难点仅仅在于,首先应当确立最接近观察散点的关系式的形式。例如,有许多关系式都是对数函数,如同下式一样:

$$y = 32.2 \log x + 0.8 \qquad (3.40)$$

这里若将 $t = \log x$ 代入即可显示出,该方程形式与标准线性方程相同。这就提示了如何讨论第五章问题的思路。不过,在线性关系讨论完全结束之前,还有一个问题要研究,这就是本章第五节建立的回归模型的一项发展,即主成分分析;不过放在下一章介绍矩阵代数以后来讨论是最适宜的。

第四章　矩　阵

第一节　基本矩阵

矩阵跟向量一样，目前在自然地理学中经常使用，并且在对数据进行高级统计分析时，正如在本章第十节将要看到的，在应用矩阵代数来选择主成分时特别有用。矩阵的最基本形式其实就是向量。不过通常不把矩阵表示成向量形式，而表示成阵列形式。矩阵的最简单例子或者称为行矩阵，或者称为列矩阵，这要看数列是水平的，还是竖直的而定。一单串数可以组成行矩阵或列矩阵。由于诸项本身均含有方向，这两种形式的矩阵又可以分别称为行向量和列向量。在许多教程中经常引用的表示月平均温度的数列可以组成一行矩阵。同理，页面上下排列的一单列数可以组成一列矩阵。

然而，矩阵通常由若干个行和列组成，所以给人的印象一般是数值阵列。作为一个实例，兹在表4.1中以普通表格形式列出一些数据，这在任何教程中都是可以见到的。此表表示出大学地理系男、女生对自然地理、人文地理和区域地理的一定选择机会。可以看

表 4.1　男、女生对自然地理或人文地理的选择机会

	男生	女生	总计
自然地理	20	40	60
人文地理	33	15	48
区域地理	7	4	11
总　计	60	59	119

出，综合自然地理要远比人文地理或区域地理更受欢迎，并且选择

前者的女生比例(68%)要比男生(33%)高得多——这当然是很正常的现象！将总计从每一列和每一行中除去，则可得出 3 × 2 矩阵(三行和二列)，并可写成：

$$A=\begin{pmatrix}20 & 40\\ 33 & 15\\ 7 & 4\end{pmatrix}$$

其中 A 称为矩阵。矩阵中的单个部分称为元素，项或成分，并且 m 行 n 列矩阵 A_{mn} 的一般表达式为：

$$A_{mn}=\begin{pmatrix}i_{11} & i_{12} & i_{13} & i_{14} & i_{15} & \cdots & i_{1n}\\ i_{21} & i_{22} & i_{23} & i_{24} & i_{25} & \cdots & i_{2n}\\ i_{31} & i_{32} & i_{33} & i_{34} & i_{35} & \cdots & i_{3n}\\ i_{41} & i_{42} & i_{43} & i_{44} & i_{45} & \cdots & i_{4n}\\ i_{51} & i_{52} & i_{53} & i_{54} & i_{55} & \cdots & i_{5n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ i_{m1} & i_{m2} & i_{m3} & i_{m4} & i_{m5} & \cdots & i_{mn}\end{pmatrix} \qquad (4.1)$$

这是阶数为 mn 的矩阵。在上一例中阶数为 $2\times 3=6$。如果读者早已拥有计算机程序设计经验，那恐怕就会注意到，矩阵 A_{mn} 与阶数为 mn 的阵列，即 Fortran 程序中的 $A(m,n)$ 极其相似。若 $m=n$，则方程(4.1)所示的矩阵就被认为有一对角线，由元素 i_{11}，i_{22}，i_{33}，i_{44} 等组成。这种 $m=n$ 的矩阵由于明显的理由而称为方阵。

在任一矩阵中诸元素值的大小变化决定着矩阵是否对称。例如，在大多数地名词典中都可以见到主要城镇里程表。如果示出一个完全矩阵，则对角线以下部分恰好是对角线以上部分的镜象，因为诸行上的城市序列与诸列上的相同。这里还有一个更简单的无实际意义的例子：

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 2 & 5\\ 0 & 5 & 3\end{pmatrix}$$

显然是对称的，因为诸元素值相对于对角线呈镜象关系；而

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

则不是对称的。不对称矩阵常常称为斜对称矩阵。另外，按定义，一对称矩阵必然也为一方阵。有一种很重要的对称矩阵形式是单位矩阵(I)，其中对角线上的诸元素值均为一，而所有其它元素均为零。单位矩阵的性质特别有用，在本章以后各节都会用到。例如，我们会看到，单位矩阵在矩阵乘法中仿佛起着数量数1的作用，所以

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

另外，所有元素值均为零的矩阵称为零矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

第二节　矩阵的相等

如果有二矩阵 A 和 B，其中

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ a & b \end{pmatrix} \quad \text{且} \quad B = \begin{pmatrix} c & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

则当且仅当 $b=c=0$ 和 $a=2$ 时，$A=B$。同理，若命二矩阵 A 和 B 分别具有以下元素：

$$A = \begin{pmatrix} x-2 \\ 5y+2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} y+1 \\ 4+x \end{pmatrix}$$

则当且仅当　　$x-2=y+1$　　(4.4)

和　　$4+x=5y+2$　　(4.5)

时，$A=B$。

(4.4)减(4.5)，得：

$$-6=-4y-1$$

或　　$y=1\frac{1}{4}$

将此值代入(4.4)得：

$$x-2=1\frac{1}{4}+1$$

或　　$x=4\frac{1}{4}$

这样我们显然可以矩阵形式表示和求解联立方程（仍然可以参见第三章第二节）。这一点我们在考虑矩阵加法、乘法运算时会作进一步讨论。现在考虑下列情形，即：

$$A=\begin{pmatrix}x+y & 5\\ 3+2y & y\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}6 & y\\ 3x+1 & x+y\end{pmatrix}$$

对于第一行而言：

$x+y=6$ 且 $y=5$，故 $x=1$ 且 $y=5$

而对于第二行而言：

$3+2y=3x+1$ 且 $y=x+y$，由此 $x=0$ 且 $y=-1$。可见，矩阵 A 不能等于矩阵 B。

第三节　矩 阵 运 算

矩阵的算术运算大多都是根据有关数量的算术运算推出的，然而正如向量乘法的情形一样，矩阵乘法也有例外。首先我们来讨论矩阵加法的简单情形。兹考察下列情形：即已知某一地区

秋、冬、春三季的降雨日平均出现率分别为64,57和46天。这些数据可以表示成一行向量 A 的形式：

$$A=(64 \quad 57 \quad 46)$$

即 1×3 元素的矩阵。矩阵中元素值之和给出行和，表示所有三个季节中降雨日出现的总平均数。如果我们要估计连续五年的降雨日概数，则不难求出矩阵 A 与数量5之积，所以：

$$5A=(320 \quad 285 \quad 230)$$

一数量与一矩阵之积的运算显然很简单，即将矩阵中每一个元素同乘以数量值而得出新矩阵。

如果我们现在假设，对于同一地区的降雪日出现率得出了类似的数据，并且来考察以降雪和降雨出现率反映的特定季节的特征，那么就能组成两个 2×3 矩阵，以说明有关矩阵加法的运算。如果在 x 年对于三个季节分别有70,64,39个降雨日和4，10，8个降雪日，而对于 y 年的相应数据分别为71,38,32个降雨日和0,35,10个降雪日，那么通过求定表示每年降雨出现率的矩阵 A 和表示每年降雪出现率的矩阵 B，即可写出：

$$A=\begin{pmatrix}70 & 64 & 39\\ 71 & 38 & 32\end{pmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{pmatrix}4 & 10 & 8\\ 0 & 35 & 10\end{pmatrix}$$

在每一个矩阵中，各行表示每年的数据，各列给出季节出现率的数据。x 年(上行)显然是比较多雨的和比较温和的；而 y 年冬季特别多雪。二矩阵相加可以得出第三个矩阵 C，即每年降雨、降雪综合出现率；为此将每一阵列中的各个元素分别相加就行了，这是容易做到的，于是：

$$\begin{pmatrix}70 & 64 & 39\\ 71 & 38 & 32\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 10 & 8\\ 0 & 35 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}74 & 74 & 47\\ 71 & 73 & 42\end{pmatrix}$$

应当指出，虽然此运算是数量运算的简单推广，但是只有每一行、每一列的元素数目均相同的矩阵才能相加。

为了说明矩阵乘法法则，现在我们把一些数据应用到一个简单的经济问题上。应用这些数据所涉及的地区的地方运输公司，可以估计受降雨、降雪和降雾出现率影响的延误费。如果把两年(不考虑季节)中降雨、降雪和降雾的出现率综合起来，那么就能组成一个 2 × 3 矩阵，其中第三列表示降雾的出现率，头两列分别表示降雪和降雨的出现率，所以 $C_{11}=B_{11}+B_{12}+B_{13}$ 且 $C_{12}=A_{11}+A_{12}+A_{13}$，等等。因而这个新矩阵 C 为：

$$C=\begin{pmatrix}22 & 173 & 12\\ 45 & 141 & 15\end{pmatrix}$$

现在我们将因降雪(D_{11})、降雨(D_{21})和降雾(D_{31})分别造成的每日延误费表示成一列矩阵 D：

$$D=\begin{pmatrix}50\\ 10\\ 20\end{pmatrix}$$

为了使两个矩阵可以一起相乘，第二矩阵的列数必须与第一矩阵的行数相同。当然同样重要的是确保第一矩阵各列和第二矩阵的各行所表示的变量项项对应相关！为了将矩阵 C 与 D 相乘，C 的第一行的每一个元素显然必须分别乘以矩阵 D 的对应元素。这样，所得的矩阵 CD 即可表示成下式：

$$CD=\begin{pmatrix}22 & 173 & 12\\ 45 & 141 & 15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}50\\ 10\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22\times 50+173\times 10+12\times 20\\ 45\times 50+141\times 10+15\times 20\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3070\\ 3960\end{pmatrix}$$

结果，x 年的总延误费为 3070 个单位，y 年的总延误费为 3960 个单位。同一乘法法则可以推广到任何阶数的矩阵，不过有一个条件，即对于任何两个矩阵 A_{mn} 和 B_{pq} 来说，p 必须等于 n。在上例

$$A=\begin{pmatrix}3y+2x & 10x-y\\ 3x-2y & 9y+x\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}3x+y & 8x-15\\ 2x & 5x+y\end{pmatrix}$$

第四节　矩阵代数定律

眼下在转向所论及的矩阵的其它问题之前，不妨概括一下到目前为止所推出或确立的矩阵代数定律。

一、加法和乘法的結合律

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$
$$A(BC)=(AB)C$$

二、交換律（仅适用于加法）

$$A+B=B+A$$

三、加法和乘法的分配律

$$A(B+C)=AB+AC$$
$$k(A+B)=kA+kB$$
$$k(AB)=kAB$$
$$(k+l)A=kA+lA$$
$$(kl)A=k(lA)$$

除了仅对加法成立的交換律之外，诸定律均与数量代数相同。

第五节　转 置 矩 阵

转置矩阵是行和列元素互易后所得的矩阵。可见，一列阵的转置矩阵为一行阵，反之亦然。一般说来，如果一矩阵 A 具有下列形式，

$$A=\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \\ i_{31} & i_{32} \end{pmatrix}$$

则其转置矩阵 A' 或 A^T 为：

$$A^T=\begin{pmatrix} i_{11} & i_{21} & i_{31} \\ i_{12} & i_{22} & i_{32} \end{pmatrix}$$

其另一性质是：二矩阵 A 与 B 之乘积等于该二矩阵 B 与 A 的转置形式之乘积，即：

$$AB=B^TA^T \qquad (4.8)$$

该式的证明如下：设

$$A=\begin{pmatrix} i_{11} & i_{12} \\ i_{21} & i_{22} \end{pmatrix} \text{ 和 } B=\begin{pmatrix} j_{11} \\ j_{21} \end{pmatrix}$$

故：

$$A^T=\begin{pmatrix} i_{11} & i_{21} \\ i_{12} & i_{22} \end{pmatrix} \text{ 和 } B^T=(j_{11} \quad j_{21})$$

于是

$$AB=(i_{11}\ j_{11}+i_{12}\ j_{21} \quad i_{21}\ j_{11}+i_{22}\ j_{21})$$
$$B^TA^T=(j_{11}\ i_{11}+j_{21}\ i_{12} \quad j_{11}\ i_{21}+j_{21}\ i_{22})$$

第六节 逆 矩 阵

在普通数值运算中经常涉及一数的倒数，并且把它定义为 $k\frac{1}{k}=1$，其中数 $\frac{1}{k}$ 即为 k 的倒数。此相应值的矩阵表示即为逆矩阵，所以：

$$AB\cdot BA=I \qquad (\text{单位阵}) \qquad (4.9)$$

式中 B 为 A 的逆矩阵。然而矩阵 A 的求逆运算并不象其相应值的数量运算那样简单。若取一方阵 A；

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix} \quad 并设 \quad B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

则根据定义(4.9)可知：

$$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以根据第四章第三节将上式乘出，即可得四个联立方程：

$$2a+4c=1 \tag{4.10}$$

$$2b+4d=0 \tag{4.11}$$

$$6a+8c=0 \tag{4.12}$$

$$6b+8d=1 \tag{4.13}$$

联立解(4.13)和(4.11)，可得：

$$b=\frac{1}{2} \qquad 和 \qquad d=-\frac{1}{4}$$

同样，联立解(4.12)和(4.10)，得：

$$a=-1, \qquad c=3/4$$

所以

$$B=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\end{pmatrix} \qquad 是 \quad A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}的逆矩阵,$$

并且可以写为：

$$B=A^{-1} \tag{4.14}$$

因而我们可以得出该矩阵阵列的一般形式：

$$\begin{pmatrix}p & q\\ r & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

故

$$ap+qc=1 \tag{4.15}$$

$$bp+qd=0 \tag{4.16}$$

$$ra + sc = 0 \tag{4.17}$$

$$rb + sd = 1 \tag{4.18}$$

并且由上列方程可得：

$$p = d/(ad - bc) \tag{4.19}$$

$$q = -b/(ad - bc) \tag{4.20}$$

$$r = -c/(ad - bc) \tag{4.21}$$

$$s = a/(ad - bc) \tag{4.22}$$

因此，方阵 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆矩阵为：

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

表达式 $(ad - bc)$ 为矩阵的行列式，并且可以写为：

$$\det A \text{ 或者 } \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{或者} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \tag{4.24}$$

正如将在本章第七节要看到的，对于任何阶数的方阵都可以求出其行列式，尽管求起来并不那么容易。不过有些方阵并不存在逆矩阵形式。在这种情况下，行列式值为 0。例如，方阵

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

就不存在逆矩阵，因为其行列式 $(ad - bc)$ 为零。实际上凡是具有形式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ ka & kb \end{pmatrix}$$

的方阵均不存在逆矩阵。这种矩阵称为奇异矩阵，而按定义，可以获得逆矩阵的那些矩阵则是非奇异矩阵。

第七节　行　列　式

运用矩阵代数解联立方程(第四章第九节)时，行列式特别有用，尽管对于阶数大于 2 × 2 的方阵说来，任务比上面所述的要更难一些。现在来研究下列情形：用方程(4.1)中见到的记号来求定三阶行列式，即 3 × 3 方阵的行列式。如需要时，运用与方程(4.15)至(4.23)类似的推导方法，可以得出行列式的另一通解。不过，这作起来相当麻烦，任何阶数的方阵的行列式求起来就比较容易。

对于任一矩阵 A_{mn}，行列式可以确定为：

$$|A| = \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{i+j} a_{ij} \alpha_{ij}, \tag{4.25}$$

式中 a_{ij} 为任一 i 行 j 列元素之值，α_{ij} 称为元素 a_{ij} 的"余子式"。该余子式可以借助元素 a_{ij} 的代数余子式(A_{ij})，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \alpha_{ij} \tag{4.26}$$

加以确定。使用方程(4.1)的记号，3 × 3 方阵元素 a_{11} 和 a_{21} 的余子式的求法，正如方程(4.27)所示：

$$\begin{array}{|cc} \textcircled{a_{11}} & a_{12} \quad a_{13} \\ \textcircled{a_{21}} & a_{22} \quad a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \quad a_{33} \end{array} \tag{4.27}$$

故

$$\alpha_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4.28}$$

$$\alpha_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4.29}$$

$$\alpha_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{4.30}$$

等等。眼下指出上列矩阵所含各元素的位置是很重要的。在一切场合，把 a_{ij} 所在的行与列(i 和 j)删去而不予考虑，并且由矩阵 A_{nn} 的余项，即四角的元素组成余子式 α_{ij} 的新矩阵。实际上是把该大矩阵分解为若干个小矩阵因子，其行列式的计算方法比较简单。对于阶数大于 3 × 3 的方阵说来，必须通过若干个余子式 2 × 2 方阵逐步地进行。余子式(α_{ij})的行列式乃是元素 a_{ij} 的代数余子式。求出每个元素 a_{ij} 的这些代数余子式以后，大矩阵的行列式就比较容易求解了，不过在列举实例之前，有两点很重要，必须强调一下。这两点可使运算简化，使方程(4.25)的定义更为明确。其一是方程 (4.26) 中的代数余子式 A_{ij} 的符号取决于 $(-1)^{i+j}$ 项，即仅仅由于元素位置的交替不同而交替变化。例如，α_{11} 的符号为 +，α_{12} 的为 −，α_{13} 为 +，α_{21} 为 −，等等。我们可以相应地得出代数余子式 A_{ij} 的符号方阵，对于 3 × 3 方阵而言为：

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

其二是仅仅利用一列元素(a_{ij}，其中 j 为常数)并且计算其余诸行和诸列的 α_{ij}(见方程(4.27)至(4.30))，即可算出行列式。利用任一其它列算出的行列式值必然相同，如果算术运算无错的话！

兹取一方阵 A，确定为：

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

取第一列诸元素并代入方程(4.25)，则得：

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \times (-1-4) - 2 \times (-2+1) + 1 \times (-8-1)$$

$$= -22$$

利用第二列重复演算，则得：

$$|A| = -2\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times (-2+4) + 1 \times (-3-1) + 1 \times (-12-2) = -22$$ 与前者相同。

第八节 伴随矩阵

为了把行列式值应用到矩阵以求其逆矩阵形式，首先必须确定伴随矩阵，即 $\mathrm{Adj}A$。伴随矩阵就是矩阵 A_{mn} 所有元素 a_{ij} 的代数余子式的转置矩阵。例如对于矩阵 A：

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A 的代数余子式矩阵为：

$$B = \begin{pmatrix} (2-6) & (6-0) & (3-0) \\ (4-4) & (10-0) & (10-0) \\ (12-4) & (30-12) & (5-6) \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 3 \\ 0 & 10 & 10 \\ 8 & 18 & -1 \end{pmatrix}$$

B 的转置矩阵（B^T）为：

$$B^T = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 8 \\ 6 & 10 & 18 \\ 3 & 10 & -1 \end{pmatrix}$$

方程(4.23)中的矩阵$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$即为$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的伴随矩阵。

现在我们可以将矩阵 A 的逆矩阵的一般式写为：

$$A^{-1}=\frac{\mathrm{Adj}A}{|A|} \tag{4.33}$$

习题 4.8

试求下列矩阵的行列式，并进而求其逆矩阵形式：

4.8.1

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.8.2

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4.8.3

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

第九节　同坐标几何图形的比较和联立方程的解

现在我们可以比较二维(x, y)或三维(x,y,z)坐标系同其元素与坐标交会点相对应的简单矩阵的相似之处。二轴坐标图上的坐标(1,2)直接对应于一矩阵中的元素 i_{12}，不过坐标图中诸列是向上的，而矩阵都是向下的。同理，正如前已指出，含有 x 和 y 或 x,y,z 的诸方程均可表示成矩阵形式。这一相似之处现在是一目了然的。例如，方程 $y=5x+8$ 可以重写成矩阵形式为：

$$(5\ -1)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(-8)$$

这时如果考察两个都含有 x 和 y 项的联立方程

$$5x+5y=15 \tag{4.34}$$

和

$$6x+2y=14 \tag{4.35}$$

则可将其重写为下列矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}5 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 14\end{pmatrix} \tag{4.36}$$

若命

$$A=\begin{pmatrix}5 & 5\\ 6 & 2\end{pmatrix} \text{和} k=\begin{pmatrix}15\\ 14\end{pmatrix} \text{和} X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

则可将这些矩阵写为 $AX=k$。两边同乘以 A 的逆矩阵 A^{-1}，于是得：

$$A^{-1}AX=A^{-1}k$$

故

$$IX=A^{-1}k, \text{因为} AA^{-1}=I$$

结果

$$X=A^{-1}k \tag{4.37}$$

于是将 k 乘以 A 的逆矩阵，即可获得该方程的解。由方程(4.24)知 A 的逆矩阵为：

$$A^{-1}=\frac{1}{10-30}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -6 & 5\end{pmatrix}$$

故：

$$X=-\frac{1}{20}\begin{pmatrix}2 & -5\\ -6 & 5\end{pmatrix}k$$

$$=\begin{pmatrix}-0.1 & 0.25\\ 0.3 & -0.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}15\\ 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

即 $x=2$ 及 $y=1$。

读者对所有这些的最初反应大概是，联立方程用第三章所述的较常规的方法来解会更容易些！除了证明联立方程可以用矩阵来解之外，联立方程的矩阵解法也适用于该任务的计算机解法；其

中变量阵列可以用来以上面所述的矩阵形式存储联立方程。对于每个方程都含有大量未知数的大量方程的联立解来说，使用常规的运算方法一般是很冗长而乏味的，而上述的矩阵解法却很容易为计算机的使用编制程序，矩阵方法的主要的实用性即在于此。然而，因为该方法在这方面是可用的，并且因为我们必须看到，除了解到的有关运算以外，在数学或统计学领域中就再没有什么方法可用了，所以下面来解算有三个变量的三个联立方程例题。兹将三方程确定为：

$$3x+2y+z=14 \tag{4.38}$$

$$2x+y-4z=4 \tag{4.39}$$

$$x-y-z=0 \tag{4.40}$$

现在必须利用本章第七节和第八节的方法求出该矩阵的逆矩阵。

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

其实，该矩阵的行列式(由方程(4.32))在前面早已求出，即

$$A=-22$$

应用符号交替法则，(4.41)的代数余子式矩阵为：

$$\begin{pmatrix} +(-1-4) & -(-2-(-4)) & +(-2-1) \\ -(-2-(-1)) & +(-3-1) & -(-3-2) \\ +(-8-1) & -(-12-2) & +(+3-4) \end{pmatrix}$$

它可变为：

$$B=\begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ +1 & -4 & +5 \\ -9 & +14 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^{T}=\begin{pmatrix} -5 & +1 & -9 \\ -2 & -4 & +14 \\ -3 & +5 & -1 \end{pmatrix}$$

因此，X 的解可以下式表示：

$$X=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-5 & +1 & -9\\ -2 & -4 & +14\\ -3 & +5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}14\\ 4\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$$

即 $x=3$，$y=2$ 和 $z=1$。读者可试用第三章的联立方程解法来验证此解。

习题 4.9

试运用矩阵代数联立解下列方程组，并以联立方程常规解法验证答案。

4.9.1 $3x-4y+2z=19$

$2x+y-4z=2$

$x+5y+z=7$

4.9.2 $2y-3x+4z=10$

$x=y+z-4$

$2z+y-6x=23$

4.9.3 $3x+4z-2y=6$

$2y-3x-4z=6$

$3z+2y-10x=1$

第十节　特征向量和特征值

矩阵最广泛的应用之一是其在一些统计分析方法上的应用。在选取“主成分”来解释多变量情形中的数据方差时所用的方法是众所周知的。主成分分析试图相对于新坐标系解释总方差，以使第一主成分可以解释尽可能多的方差，而此后相继的每个成分可以解释的方差则逐渐减少。这样一来，总方差就可以用来自每个成分的每个方差之总和来加以全面解释。该方法，因而还有有待计算的特征向量和特征值的性质，根据图 4.1 所示的一元的二变量关系式的图象加以阐述为最好。

图 4.1(1)至(4)所示的图象分别表示二变量间的一元的二向关系；其名称和含义对讨论并不重要。图 4.1(1)第一例的情形是：二变量间的相关系数为零，并且等概率线表现为一系列同心圆，其圆心为图上显示出的每个变量的中央点。如果我们认为二组数据相对于每一场合的中央零点均呈正态分布(见第七章)，并且假定图 4.1 坐标系表示标准差的倍数，那么由图 4.1(1)可以

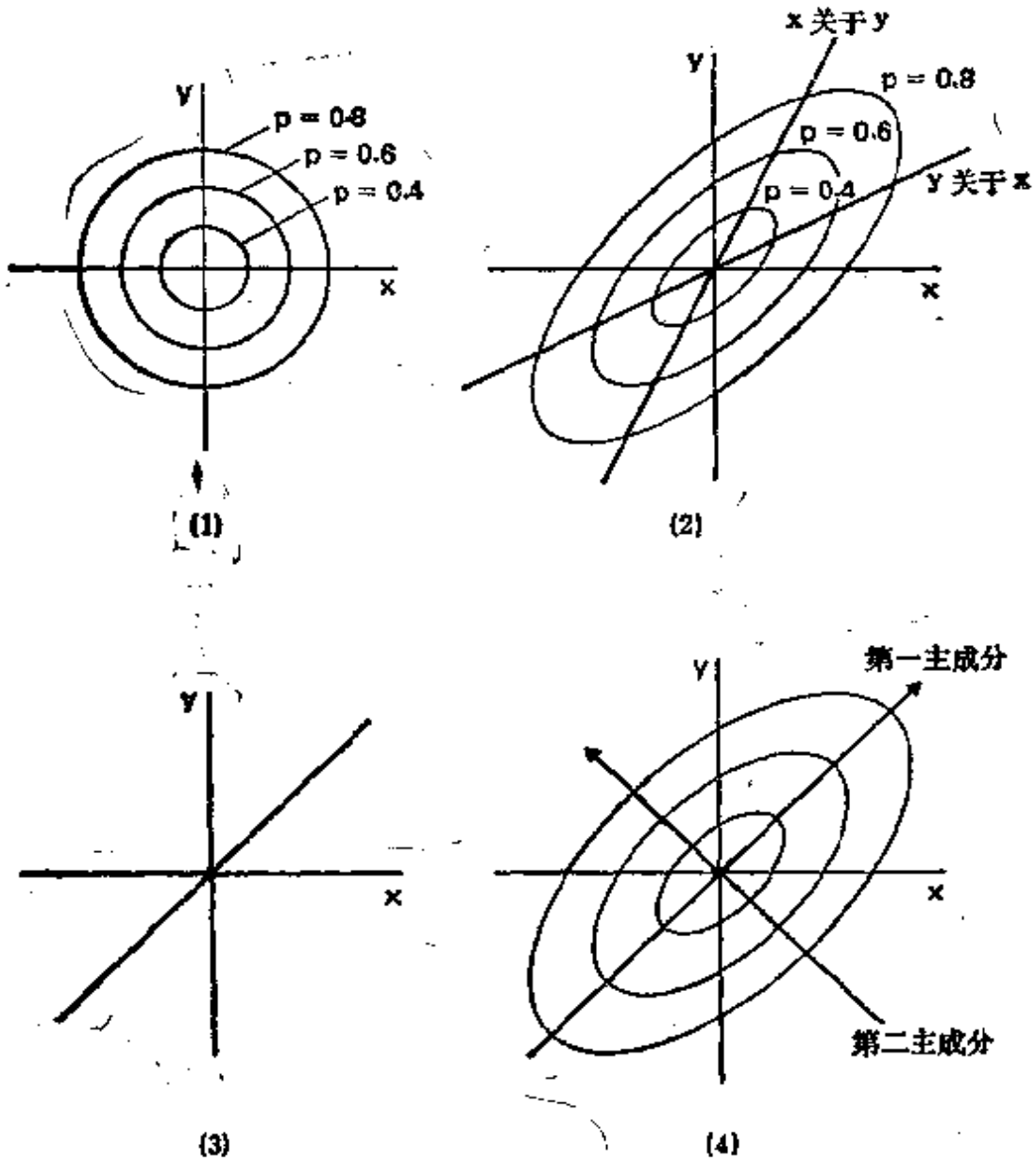


图 4.1 回归直线，等概率线和主成分
(1)$r=0.0$；(2)$r=0.5$；(3)$r=1.0$；(4)主成分。

看出，若 x 值等于平均数减去一标准差，则有许多其概率与 x 值相关的对应 y 值与正态曲线（见第七章）上的概率相关。图 4.1（2）的第二例的情形是：二变量的相关系数约为 0.5。正如在第三章已经看到的，会有两条最小二乘回归直线带有这样的相关系数。该相关系数值等于该二回归直线的夹角余弦值。因为在二变量间存在较好的相关性，所以可以看出，诸等概率线均相应地变为椭圆，其长轴位于二回归直线之间的缩短叶轴直线上；其短轴则与之垂直。该长、短轴分别是第一主成分和第二主成分（图 4.1（4））。为了提供参考，我们还可以看到图 4.1（3）所示的完全相关的情形，即二回归直线，因而二主成分均彼此重合。主成分个数显然与其协方差受检验的变量的个数相同。现将注意力限制在诸主成分的确定问题上；这里我们只有两个坐标轴，因为仅研究两个变量。

每一个主成分都有一个方程及其特征值（通常以 λ 表示）；前者可用特征向量（其方向）确定；后者表示由每一个成分所解释的方差。这里我们将诸向量分解成两个相互垂直的方向。诸特征值组成一对角矩阵：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

问题是旋转图象坐标轴，使原始数据矩阵变换成以主成分为坐标轴的另一矩阵。我们在第三章已经见过，将坐标轴旋转一个角度 θ，可得新坐标如下：

$$x = x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta \qquad \text{（由(3.21)）}$$

和

$$y = x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta \qquad \text{（由(3.22)）}$$

于是可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad (4.42)$$

例如将坐标轴旋转 42 度，则 $\sin 42 = 0.6691$，$\cos 42 = 0.7432$，而点$P_1(1,2)$在转动后变为 $P(x,y)$：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7432 & -0.6691 \\ 0.6691 & 0.7432 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.5950 \\ 2.1560 \end{pmatrix}$$

因而可以写出，旋转后 $P_1(1,2) \rightarrow P(-0.595, 2.156)$。

对于任何旋转，不论转动大小如何，有些因素仍然可以保持"不变"。例如，若在旋转前，在图上有四个点，每一个点表示一个几何图形的一个角隅，则在旋转后，尽管每一个点均移位，但几何形状却保留下来，因而该形状未变。特征向量是不变量的另一特殊情形。如果我们取矩阵 A，并将其乘以向量 X，以使计算结果本身为该向量的数量倍数，即：

$$AX = \lambda X \tag{4.43}$$

那么 λ 即为特征值，而向量 X 即为特征向量。将方程(4.43)全部写出，则有：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

或

$$(a-\lambda)x + by = 0$$

$$cx + (d-\lambda)y = 0 \tag{4.45}$$

或

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} X = 0 \tag{4.46}$$

可是(4.45)中的二方程均为齐次方程(其右边均为零)。对于任何一对联立齐次方程来说，其行列式均为零，除非它们会有解 $x = y = 0$。于是由此可见，

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4.47}$$

或　　$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$

该方程称为矩阵的特征方程；由该方程可以得出特征值，其结果代入方程(4.45)即可得出特征向量。

现在我们来求2×2简单方阵的特征值和特征向量。在该方阵中有：

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 2\\ \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

由方程(4.47)有：

$$\left(\frac{1}{3}-\lambda\right)(0-\lambda)-\frac{2}{3}=0$$

$$\therefore\ \lambda^2-\frac{1}{3}\lambda-\frac{2}{3}=0$$

或　　$3\lambda^2-\lambda-2=0$

所以利用二次方程求解表达式(第五章 第四节，方程(5.32))则有：

$$\lambda=\frac{1\pm\sqrt{(1+24)}}{6}$$

$$=1\text{ 或 }-\frac{2}{3}$$

代回方程(4.45)，则有：

对于 $\lambda=1$　　$\left(\frac{1}{3}-1\right)x+2y=0$

且　　$\frac{1}{3}x+(0-1)y=0$

即就两者而言，$y=\frac{1}{3}x$，即是第一特征向量；

对于 $\lambda=-\frac{2}{3}$　　$\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)x+2y=0$

且 $$\frac{1}{3}x+\left(0+\frac{2}{3}\right)y=0$$

即就两者而言，$y=-\frac{1}{2}x$，即是第二特征向量。

该例题特意选来作为说明如何运用方程(4.43)至(4.47)推求2×2简单方阵的特征向量和特征值的简单情形。该题是作为数学例题而不是作为统计学例题来求解的，因而才能列举这样简单的例题。其目的就在于说明什么是特征向量和什么是特征值，而不在于计算实例，因为在进行野外数据统计分析时会遇到这样的实例。在对多变量情形中的野外数据进行主成分分析时，特征值和特征向量待定的矩阵乃是相关系数矩阵。该系数的个数与数据对的个数相同，并且相关矩阵反映了这一点。另外，就主成分分析而言，特征值是该分析中的"主成分标数"；其总数等于所用变量的个数。该标数的个数与主成分分析中的变量的个数相同。例如，在对含有四个变量的数据进行分析时就有四个特征值，每一阶数的每一成分各有一个，而且其总合值也等于四。假定我们已经计算出下列标数：

$$\lambda_1=2.56$$
$$\lambda_2=0.65$$
$$\lambda_3=0.42$$
$$\lambda_4=0.37$$

可见，第一主成分最重要，它可解释64.0%的方差(2.56×100/4)。第二、第三和第四主成分分别可以解释总方差的16.25%，10.5%和9.25%。总数四即为所涉及的变量的总数。

有一个简化方法可供求定特征值和特征向量时用，现表示如下：

因 $$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

故 $$|A-\lambda I|=0 \qquad (4.48)$$

这是特征方程的另一表示式。

至于矩阵代数，特征值和特征向量等在统计方法中的其它应用的任何进一步推广，均超出本书的讨论范围，热心研究的学生或其他人员(如工作需要时)可参阅目前发售的专门论述主成分分析的大量优秀的高级统计学教程。特别是肯德尔(Kendall，1965)的著作简直是一本权威性教程，而霍普(Hope，1968)的著作所涉及的范围也很广。如果需要了解在地理学方面的直接应用，那最好参阅道耳特里(Daultry，1976)所著的最新简明教程。

习题 4.10

试求定下列方阵的特征值和特征向量：

4.10.1

$$A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$$

4.10.2

$$A=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$$

4.10.3

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

第十一节　矩阵和网络

在自然地理学中，矩阵主要作为计算辅助手段应用于主成分分析之中。矩阵在概率研究上的应用实例在第七章中可以看到，而应用矩阵最合适有效的另一个领域则是网络。自然地理学中的网络并不象人文地理学中经常遇到的运输网那样复杂。通过河流网来讨论这个问题恐怕再简单不过了。霍顿和斯特拉勒(Horton

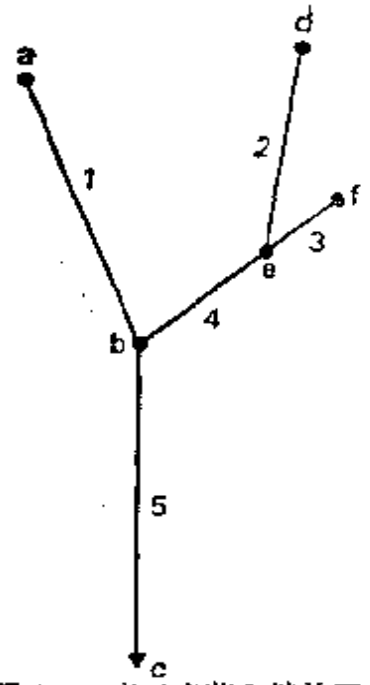


图 4.2 表示出节和链的理想化河流网

(1945), Strahler(1957))早期所作的河流网工作是根据泄水支流的数目和大小进行河流分级的。我们可以根据汇集于每一个汇流点（节点）上的链（即支流）的数目来把河流类型表示成矩阵形式。可以组成简单矩阵来用链或节表示网络。简单的理想化河流网如图 4.2 所示。诸链是以数字 1 至 5 表示的；而诸节是以小写字母 a 至 f 表示的。表示该河流网的链和节矩阵如下：

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

在链矩阵中，零表示在各个支流之间没有直接链，而 1 表明存在直接链，所以可以看出，2 与 3 和 4 直接相连，而与 1 和 5 不相连。对于节矩阵而言，使用了同样的符号，所以，例如节 d 与节 e 直接相连，而与其它任何一个都不相连；而节 b 则与 a、c 和 e 相连。该二矩阵均为对称矩阵，不过很明显，这种对称决不会是河流网的情形，理由很简单，须知水是不会往高处流的！可见，我们必须设法表明在某一方向上链系是不可能有的。为了说明这一点，并使矩阵成为非对称的，通常以行表示“由”$a,b,c,$等等，以列表示“至”$a,b,c,$等等。例如，因为仅由 1 至 5 或由 f 至 e 可能有链系，所以在

每一矩阵中就都失去了一些链系。于是该二矩阵分别为：

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

可见，每一列之和表明了流入每条受水河的支流总数：两条各进入链 4 和 5；两条各流入节 b 和 e。网络的变化不难用矩阵加法和减法表示成矩阵形式。该过程还可以推广应用到描述诸如流量、河床规模等的其他河流网特征。

第五章　非线性函数

如果我们要创造一个地理学上理想的世界，那么在这个世界上，选择任何关系恐怕都会是线性关系！这就会有利于大大简化野外观察的分析。我们在第三章中就曾只局限于这种关系。然而尽管掌握简单的线性关系会有助于掌握非线性关系，但是实际上在自然地理学中看到的大多数关系却都不是简单明了的关系。自然地理工作者最常涉及的是对坐标图上的散点进行函数拟合，而在许多场合所得到的线远不是直线。因而，对于有志的自然地理工作者说来，非常了解主要类型的标准(非线性)函数及其图象表示是极其重要的。自然地理工作者一旦学到了这些技能，并且能够确立数学函数，至少近似表示出整个坐标图上散点的趋势，那时他就可以利用所得到的方程对来自不同数据总体的类似关系进行客观的对比。

可见，最终目的是对坐标图上观察到的散点趋势进行函数拟合。然而在详细讨论曲线拟合过程(本章第六节)之前，我们必须先确定标准函数的各种主要类型的共性，它们的图象和方程的一般形式。不过首先需要确定一些术语和概念，这会有助于理解诸方程本身及其表现形式。这就是微分学这一数学分支的简单介绍，掌握它对本书以后各章是关键。读者务必学好本章，因为本书所有九章当中，这一章几乎与自然地理学本身的大多数问题肯定都有最直接的关系。

第一节　微分学基础

曲线关系可以提出两个主要问题，在与初等线性函数相比时

尤其如此。首先，曲线关系的斜率总是变的；其次，有许多曲线可以倒转方向，至少在函数对于 x 的任何个别值能获得不止一个 y 值，对于 y 的任何个别值也能获得不止一个 x 值的情况下是这样。初等曲线函数 $y=x^2$ 对每一 x 值都有 y 的两个解，因为 y 可以取 $+\sqrt{x}$ 或 $-\sqrt{x}$ 值。

象 $y=x^2$（图 5.2）那样的曲线的斜率是随 x 值的增加而增大的。该曲线是向上凹的。象 $y=2x^2$ 那样的曲线，其斜率既是 x 值的函数，又是常数 2 的函数。同理，对于象 $y=\sin x$（$x=0$ 和 $x=\pi$ 之间（图 2.3））那样的曲线，其斜率仍然是 x 的函数，不过这一次它是随 x 的增加而减小的。该曲线是向上凸的。于是就产生一个问题，即怎样可以得出曲线在给定的一点处的斜率值呢？就直线而言当然很简单，因为其斜率是不变的。另外，由于非线性的实例均为曲线，我们必须设法考察相当小的一段曲线，以使所讨论的斜率在那一点上可以认为是不变的。从数学上来讲，一条曲线可以认为是由许多首尾相接的斜率各不相同的无限小直线线段所组成。任何曲线都可以通过在该曲线上诸点之间画出直线（弦）来近似地表示在坐标图上。这些点彼此靠得越近，诸弦就变得越短，曲线的近似表示精度就越高。这样一来，为了确定曲线在一点处的真斜率，诸直线线段一定要非常小，以致我们可以考虑曲线的诸切线的斜率，而不用考虑曲线的诸弦的斜率。一曲线的切线为一直线，它与曲线仅相切于一点，并且不与曲线相交。在图 5.1 中 AB 表示很小的一段曲线，其方程如何眼下并不重要。直线 CD 为一弦，连接曲线上的两个点；直线 EF 为曲线在 P 点处的切线。点 P 和点 D 的坐标分别为 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)。如果现在我们设想有许多象 CD 那样的短弦首尾相接地延伸开来，那么就可以看到怎样用这些短弦近似表示曲线的。正是由于把每条曲线均看作是由上述的无限小的直线线段所组成，我们才能够解决如何确定曲线

在一点的斜率问题。

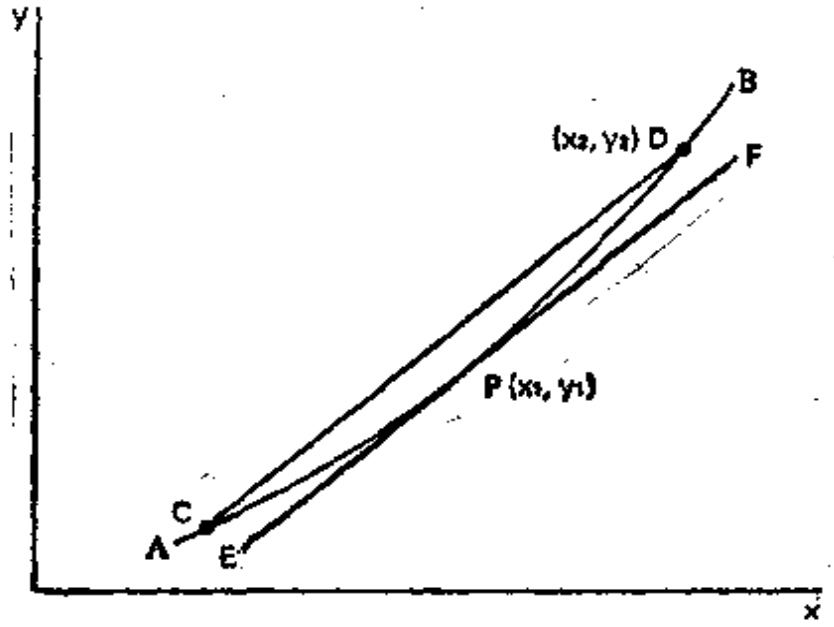


图 5.1 曲线斜率的确定

已知点 D 和点 P 的坐标，则联结点 P 和点 D的直线的斜率可以表示为$(y_2-y_1)/(x_2-x_1)$(由方程(3.1))。如果假定该直线上这二点之间每一 x 值或 y 值大小的改变量是很小的，那么这些微小改变量就可以表示成：

δy，即 y 的微小改变量(而不是 y 的 δ 倍)

δx，即 x 的微小改变量(而不是 x 的 δ 倍)

于是斜率或梯度可以表示为：

$$\frac{\delta y}{\delta x}$$

当然，严格说来，该值实际上乃是弦 PD 的斜率，不过当 D 点移近 P 点时，此斜率值接近切线 EF 的斜率。为了说明这一情形，可以写出：

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{x\to 0}\frac{\delta y}{\delta x}$$

在当 δx 趋于零时，$\delta y/\delta x$ 的极限是导数。在计算函数的导数时，我们就是在曲线的切线处画出直线的斜率；而这个过程，我们称

之为微分。现在可以用数学方法来论证直线的斜率。兹考察线性方程的一般形式，$y = mx + k$，并以图 5.1 中的线段 PD 表之。设点 P 的坐标为(x_1, y_1)，因为 $x_2 = x_1 + \delta x$ 和 $y_2 = y_1 + \delta y$，所以点 D 的坐标为$(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y)$。将这些坐标代入一般方程，则有：

$$y_1 = mx_1 + k \tag{5.1}$$

$$(y_1 + \delta y) = m(x_1 + \delta x) + k \tag{5.2}$$

由(5.2)减去(5.1)以消去 x_1 项和 y_1 项，则有：

$$\delta y = m\delta x$$

于是

$$\frac{\delta y}{\delta x} = m$$

或当 $\delta x \to 0$ 时，$\frac{dy}{dx} = m$ (5.3)

因此很明显，任何线性函数的导数均为斜率 m。

对于 $y = x$，$\frac{dy}{dx} = 1$

而对于 $y = 6x$，$\frac{dy}{dx} = 6$，等等。

兹假定图 5.1 中曲线 AB 的函数具有方程 $y = ax^2 + bx + c$。这种类型的其它曲线将在后面讨论。这时仍然利用点 P (x_1, y_1) 和点 D$(x_1 + \delta x, y_1 + \delta y)$，则有：

$$y_1 = ax_1^2 + bx_1 + c \tag{5.4}$$

和 $(y_1 + \delta y) = a(x_1 + \delta x)(x_1 + \delta x) + b(x_1 + \delta x) + c$

$$= ax_1^2 + a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + bx_1 + b\delta x + c \tag{5.5}$$

由(5.5)减去(5.4)，得：

$$y_1 - y_1 + \delta y = ax_1^2 + a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + bx_1 + b\delta x + c - ax_1^2 - bx_1 - c$$

$$\therefore \quad \delta y = a(\delta x)^2 + 2ax_1\delta x + b\delta x$$

$$= (2ax_1 + b)\delta x + a(\delta x)^2$$

或
$$\frac{\delta y}{\delta x} = 2ax_1 + b + a\delta x \tag{5.6}$$

然而当 $\delta x \to 0$ 时，$a\delta x$ 项亦趋于零，可见，就一般点 (x,y) 而言，$y = ax^2 + bx + c$ 的导数可以表示成下式：

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b \tag{5.7}$$

或
$$\frac{d}{dx}(ax^2 + bx + c) = 2ax + b$$

这里可以清楚地看出，非线性函数的导数乃是 x 值和在该方程中可以出现的任何常数项两者的函数本身。于是，例如在方程 $y = 6x^2 + 3x + 5$ 中，其导数可以表示为：

$$\frac{dy}{dx} = 12x + 3 \tag{5.8}$$

可见，由许多指数不同的 x 项所组成的方程，其全导数乃是各个项的导数之和。例如，在方程(5.8)中可以看到，就线性函数 $y = 3x$ 而言，$3x$ 的导数为 3，$6x^2$ 的导数为 $12x$(即 $2 \times 6x$)，因而：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(ax^2) + \frac{d}{dx}(bx) + \frac{d}{dx}(c) \tag{5.9}$$

在对 x 的幂求导数方面显示出某种共同的特性。在上例中，$y = ax^2$ 的导数为 $dy/dx = 2ax$。如果函数为 $y = ax^3$，则其导数为 $3ax^2$。应当指出，在一切场合，在 x 项前面的常数都要乘上 x 的原指数，而指数本身则减一。实际上，对于 $y = ax$ 和 $y = a$ 来说，情形一样，只是在这两种场合它们的导数分别为 a 和零，因为在前一场合，x 的原指数为 1，而在后一场合，x 的原指数为零($a = ax^0$)。因此，函数 $y = ax^n$ 的导数的一般形式为：

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} \tag{5.10}$$

这是最有用的一般导数，应当记住。x 的其它函数(包括对数或三角比)的导数将在本章后一阶段讨论这些函数的形式时再给出。

作为一元微分的应用，可以考察一物体从支架上落下时发生的情形。忽略空气阻力，物体会以 9.81 米/秒^2 的加速度(即重力加速度，以 g 表之)朝着地面的方向增加速度，表明，物体的速度在下落第一秒后为 9.81 米/秒，第二秒后为 19.62 米/秒(2×9.81)，等等。可见，物体的平均速度在第一秒内为 9.81/2 = 4.91 米/秒，在第二秒内为 (9.81 + 19.62)/2 = 14.72 米/秒，在第三秒内为 24.53 米/秒。因此，物体在一秒后达 4.91 米，在二秒后达 4.91 + 14.72 = 19.62 米，在三秒后达 19.62 + 24.53 = 44.15 米。可见，下落距离(s)与经过时间(t)之间的关系可以表示成下列形式的曲线函数：

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \tag{5.11}$$

式中 s 为 t 的幂函数。运用方程(5.10)引伸的法则，有：

$$\frac{ds}{dt} = 2 \cdot \frac{1}{2}gt^{2-1}$$

或

$$\frac{ds}{dt} = gt \tag{5.12}$$

换言之，下落物体在 t 秒后的速度(ds/dt)可以表示为 gt，即加速度乘上时间。于是，如果命 $v = ds/dt$，并求 v 关于 t 的导数，则得：

$$\frac{dv}{dt} = 1 \cdot gt^{1-1}$$

或

$$\frac{dv}{dt} = g \tag{5.13}$$

这样就得出了最初加速度。这表明朝向地面的加速度 g 是固定不变的。这一点只要依次考察一下距离、速度和加速度的计量单位即可得到证实。对于代表自然关系的任何方程而言，方程两边的计量单位必须保持平衡。实际上所有的单位均可以用三种基本计量单位：质量(M)，长度(L)和时间(T)表示出来，而与所用的计量

单位制(英国单位制、国际单位制等)无关。例如,在方程$s=\frac{1}{2}gt^2$中,左边的计量单位为L,而右边的计量单位为$LT^{-2}T^2=L$。关于这一问题的详述可以在戴维森(1978)所著一书中找到。同样还可以看出,加速度(dv/dt)是速度随时间的变化率。因此,微分可以为我们提供一种求定一表达式中因变量相对于自变量的变化率的方法。第三章中列举的温度直减率一例就是温度随高度的变化率(dT/dz)的表达式。加速度是距离的二阶导数,速度的一阶导数,表示这些导数的关系式分别可写为:

$$a=\frac{d^2s}{dt^2}=g$$

$$v=\frac{ds}{dt}=gt$$

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

微分的逆过程就是积分,这将在第八章另作讨论。上述特定的运动方程是由斯塔塔姆(Statham,1976)为建立岩崩模型而导出的。

在许多数学教程中通常还采用另一种导数记号,为了方便起见,我们在第九章也将采用。这种记号如下。若命$y=f(x)$(对此关系式不再另作说明),则:

$$\frac{dy}{dx}=f'(x)=y'$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f''(x)=y''$$

和

$$\frac{d^3y}{dx^3}=f^{(3)}(x)=y^{(3)}$$,等等。

例如,若$f(x)=3x^5+2x$,则$f'(x)=15x^4+2$,$f''(x)=60x^3$和$f^{(3)}(x)=180x^2$,等等。

习题 5.1

试求下列诸函数的一阶导数和二阶导数(dy/dx 和 d^2y/dx^2)：

5.1.1　$y=5x^3$

5.1.2　$y=4-2x^2$

5.1.3　$3y=x^3-2x+5x^2$

5.1.4　$y=12x+3$

5.1.5　$y=x(x+1)(x-1)$

5.1.6　$y=1/x^2$

5.1.7　$y=2x^{-4}$

5.1.8　$y=\dfrac{x(x^2-x-2)}{x+1}$

5.1.9　$y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2+4$

5.1.10　$y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+9x+4$

第二节　标准函数的特征

一、幂函数

现在我们可以详细阐述标准函数的一些主要类型。对各种观察到的关系进行曲线拟合会是一项艰难而冗长的任务，因为最终得到的函数往往是非常复杂的。曲线拟合的基本方法将在本章第六节中讨论。然而也有许多计算机程序，都是专门为此目的而设计的。许多第一流计算机厂商在他们的程序设备中均提供有“子程序设备”，可以进行基本曲线的拟合；例如在 ICL 1900 系列中就有一种科学子程序，称为 F4CFORPL。不过有许多基本曲 线类型都可以根据一些数学判别准则和形态学判别准则加以识别。如果这样的识别方法是可行的，那么曲线拟合的任务解决起来就更容易些，就不用编制程序或作冗长的计算了。因此，眼下简单列举

出一些函数及其伴有的图象形式是有益的。取自自然地理学领域的具体实例可以在本章末尾第七节中找到。

幂函数具有一般形式 $y=x^n$。当 $n=0$（即函数 $y=1$）或 $n=1$（即函数 $y=x$）时，幂函数的形式最简单，即为线性关系。然而，对于 n 值不为零或 1 而言，也可以给出一些曲线。结果会得出三种不同类型的曲线，视 $n>1.0$，还是 $-0.9\leqslant n\leqslant 0.9$，还是 $n<-1.0$ 而定。下面我们将依次讨论这三种类型曲线。

第一种类型，即 $n>1.0$，相对于 x 的整数幂（2，3 等），如图 5.2 所示。因为在自然地理学中得到的大多数关系中，我们仅仅涉及正的 x 值和 y 值，所以把注意力局限于第一象限里的曲线形式恐怕是最有用的，至少眼下是这样。这种类型中的所有曲线均以（0，0）和（1，1）二点为公共点，因为 1 自乘到任何次幂总为 1，对于零来说也如此。然而随着 n 的增加并超过 1.0，原点与点（1，1）之间的曲线的曲率也增大。因此若 n 值很大，则在 y 值变得颇大之前，x 必定逼近一个较大的小数。可见，随着 n 的增大，会有以点（0，0）和点（1，1）为公共点的一系列曲线出现，n 值很大的曲线显然呈最尖锐的形式；而伴有小 n 值的曲线则呈最开放的形式，最终变成直线 $y=x^1$。

如果现在我们把注意力转向图 5.2 所示图表的其它三个象限，那么就可以清楚地看出，对于 n 的偶数值而言，第一象限内的曲线形式镜映于第二象限。然而对于 n 的奇数值（例如 $y=x^3$）而言，第一象限内的曲线则倒映且镜映于第三象限。该特点当然不难用第一章阐述的指数符号法则加以解释。负值自乘到奇数次幂仍然保持其负值，而负值自乘到偶数次幂则变为正值。$y=x^2$ 的曲线为一特殊情形，因为它可以画出一条抛物线。有关抛物线和诸如圆和椭圆的其它特殊曲线形式的详细阐述，可以在例如弗兰德斯与普赖斯（Flanders and Price，1973）的著述中找到。对于这一

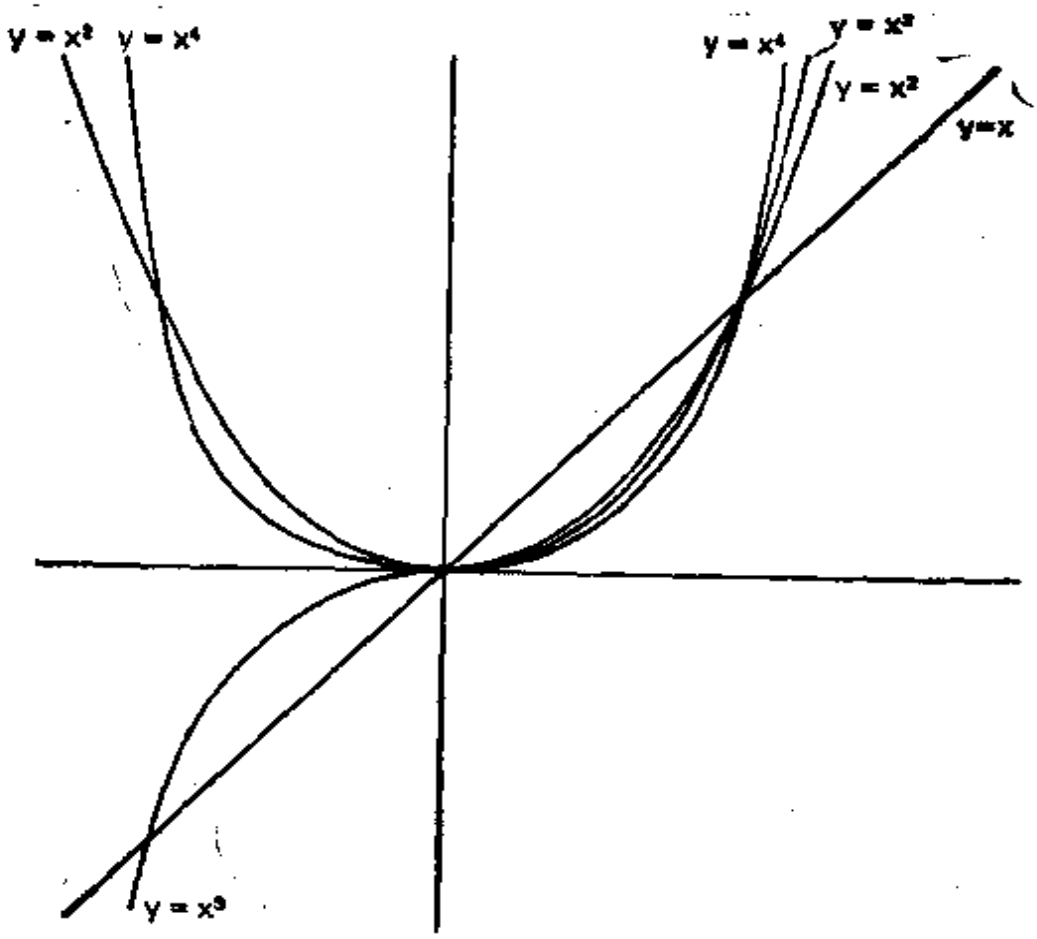


图 5.2 $y=x^n(n>1.0)$型曲线

类型曲线来说，均有一些确定的数学定义，并且一些数学教程给抛物线下的这些定义一般都是相对于 x 轴而不是相对于 y 轴而言的。这种抛物线属于第二种类型的幂函数，其中 n 介于零与 0.9 之间。

例如，表达式 $y=x^{\frac{1}{2}}$只不过是函数 $y^2=x$ 的另一种写法，因此，n 值介于 -1.0 与 $+1.0$ 区间的诸曲线具有对称形式，但相对于 x 轴，而不是仅相对于 y 轴，也不是同时相对于二轴；后者是第一种和第三种类型的幂函数情形。实际上方程 $y^2=4ax$ 是适用于抛物线的一般表达式。抛物线可以定义为距一固定点（F，图 5.3 中的焦点）和一固定直线（DD′，准线）的距离之比保持不变的一动点的轨迹。可见，图 5.3 中的 PM/PF 为一常数。抛物线的形状

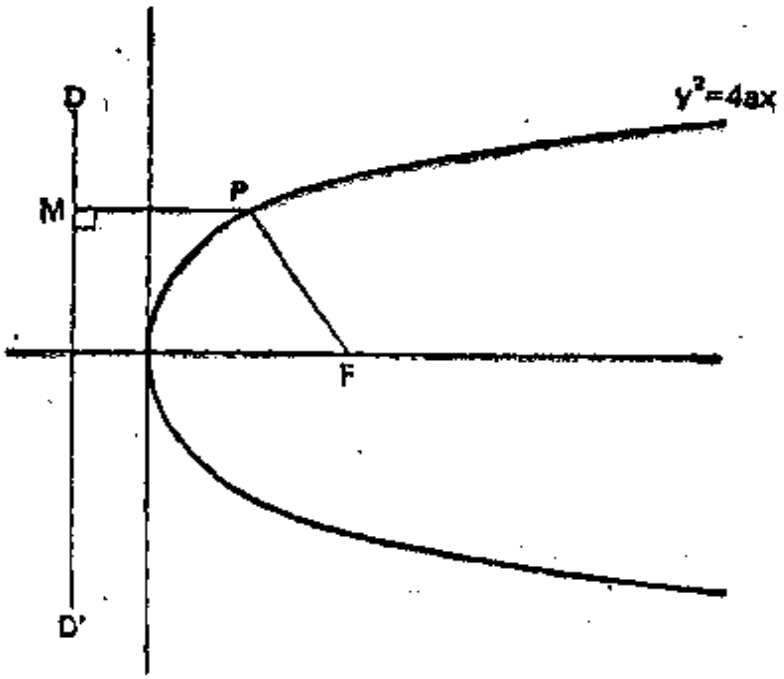


图 5.3　抛物线 $y^2=4ax$ 相对于 x-轴的确定

可以通过改变 PM/PF 之比加以确定。此比例关系可以说明，例如汽车前灯自 F 照射到抛物面上的光线，经反射后总是与抛物线的平分轴线平行；这就是抛物面反射镜的原理。

函数 $y=x^{\frac{1}{2}}$ 和 $y=x^{\frac{1}{4}}$ 的曲线如图 5.4 所示。n 值比较小会导致曲线和 x 轴贴合得更紧密。然而我们自然地理工作者主要关心的还是第一象限，这里可以看出，在第一象限内，斜率随着 x 的增加而减小，而不是相反，即当 $n>1$ 时的情形。n 为正值的极端情形是 $y=x$ 的"曲线"和由 $y=1$（当 $n=0$ 时）确定的线。可见，这里仍然存在有对于 $n>1$ 的诸函数所看到的趋势。然而对于负 n（但是 $n>-1$）而言，曲线形式会发生显著改变，尽管相对于 x 轴仍然保持对称。$y=x^{-1/2}$ 的图象如图 5.4 所示。这时在第一象限内可以看到该曲线具有这样的形式，即该曲线随着 x 的增加而逼近 x 轴，并且随着 y 的增加它又逼近 y 轴。实际上，仔细考察一下该函数即可清楚表明，该曲线其实决不会与二坐标轴相交，尽管该曲线收敛无限远时与二坐标轴逼近。如果有一曲线逼近二坐标

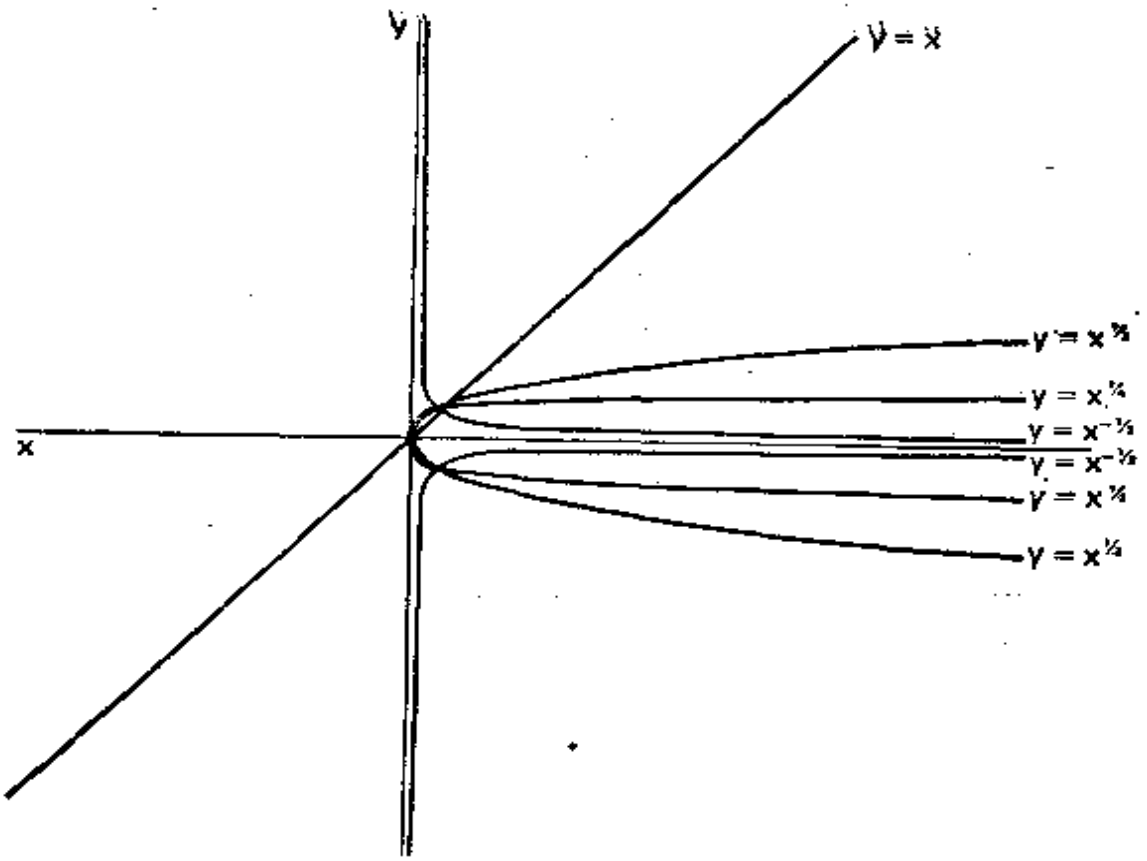


图 5.4 $y=x^n(-0.9\leqslant n\leqslant 0.9)$型曲线

轴，但与两者仅相交于无限处，则称这一曲线为渐近曲线。在这些例子中，渐近线实际上就是 x 轴和 y 轴，不过也有许多例子，其渐近线与二坐标轴既不重合，也不平行。诸如此类的函数所确定的几何图象乃是双曲线。所有 $y=x^n$（其中 $n<0$）型的函数（包括 n 小于 -1 的函数在内）均为直角双曲线，因为它们的渐近线相互垂直，即为 x 轴和 y 轴。在本章第六、七节给出了一些自然地理学中的实例。

以上介绍的第二种类型的幂函数都是仅相对于 x 轴对称的，一旦 n 变得小于或等于 -1.0 时就会产生不同的对称。这些曲线在形式上仍为双曲线（见图 5.5），因为它们的两翼都逼近二坐标轴，不过它们却有部分出现在第二或第三象限内，而不是出现在第四象限内。这些曲线都是反函数 $y=1/x, y=1/x^2, y=1/x^3$，等

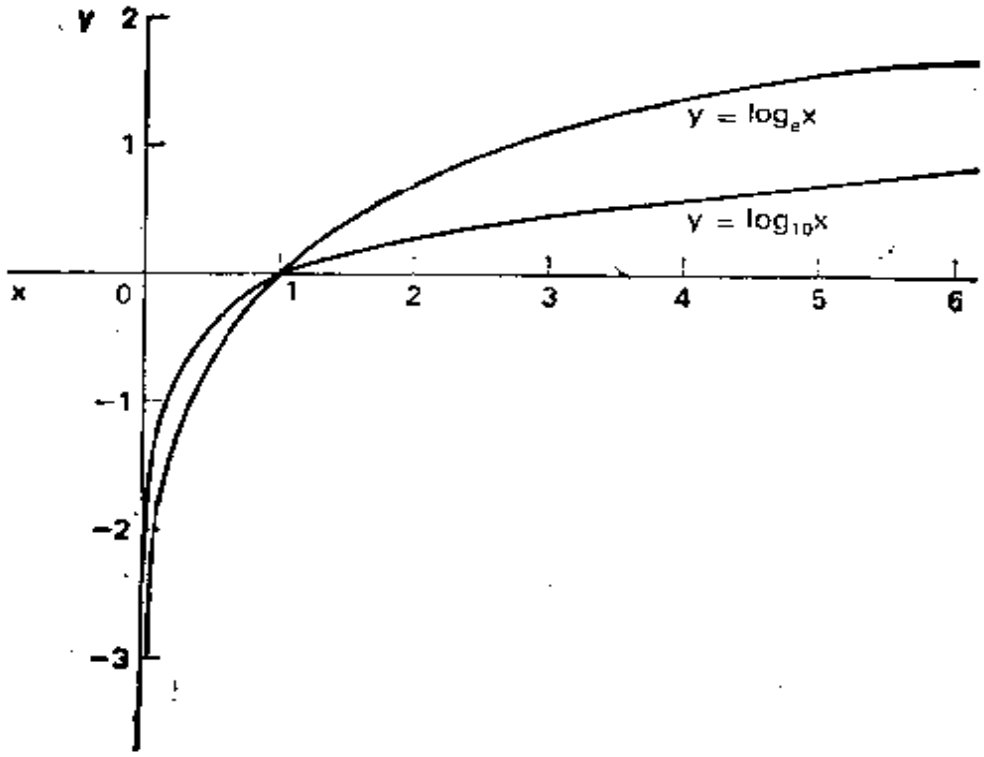


图 5.6 $y=\log_e x$ 形式的曲线

一数为底的 1 的对数总为零，因此 $y=\log_e x$ 形式的所有曲线均相交于公共点(1,0)。在使用以 10 为底的对数时，10 的对数为 1.0，100 的对数为 2.0，等等。可见，$y=\log_{10}x$ 的值随着 x 值的增加而增大，但其速率却越来越慢，因为曲线在 $x=10$ 时达到 $y=1$，而 x 等于 100 时曲线与 $y=2$ 必定尚未相交。对于小于 1 的 x 值而言，相反的情形成立，因为 0.1 的对数为 -1，而 0.01 的对数为 -2，og0.001 为 -3。可见，曲线的这一端可以逼近，但却永远不可能达到 y 轴，并且对 y 轴渐近于负无限远处。我们永远不可能对负数取对数。随着底减至 1（此时就有函数 $y=\log_1 x=1$），曲线的曲率就会变得不那么尖锐了。

如果我们涉及到函数 $y=\log_e x$，那我们实际上就是在取函数 $x=e^y$，因而 $y=e^x$ 型指数函数与 $x=\log_e y$ 是一样的。因此，表现该函数的曲线形式与对数函数很类似，只是它对 x 轴渐进于负无限远处，并且 y 永远不会小于零。函数 $y=e^{-x}$ 的曲线是 $y=e^x$

相对于 y 轴的镜象(图 5.7)。曲线的这种形式在幂指数 x 乘上不大的小数(例如 $y=e^{0.1x}$)的时候显然会变平。

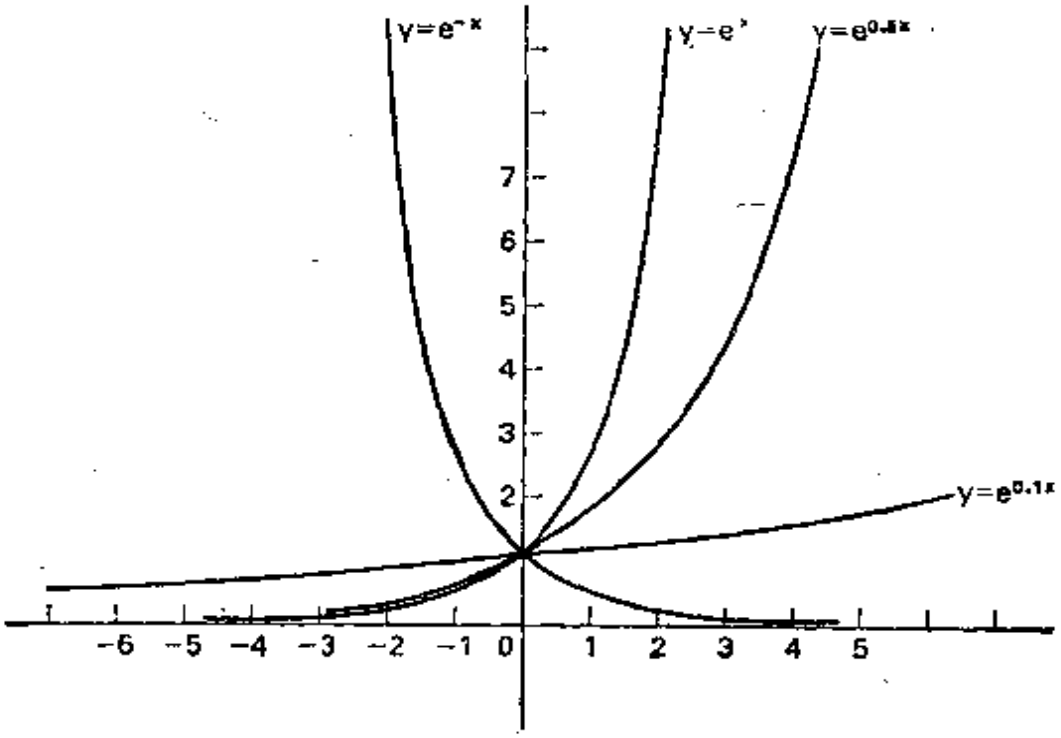


图 5.7 $y=e^{ax}$ 形式的曲线

这两种类型曲线的性质表明，前面从幂函数推出的导数计算法则是不适用的。我们能够以同样方式得出该二函数的导数，不过所用的诸方法均已超出本书所要求的数学范围。因此这里给出每一函数的导数的一般形式就足够了：

$$\frac{d(\log_a x)}{dx}=\frac{1}{x} \tag{5.14}$$

$$\frac{d(e^x)}{dx}=e^x \tag{5.15}$$

以上两种情形的明确性质是显而易见的。重要的是指出，就前者而言，对数不管以什么数为底，其导数均一样；就后者而言，指数函数的任何导数(一阶、二阶、三阶导数等)总为 e^x。

三、三角函数和反三角函数

基本三角函数在第二章已经作了介绍。$\sin x$,$\cos x$ 及其反商函数都具有波长为 $x=2\pi$ 弧度的连续循环的波形形式。正切和余切情形由于不连续乍看起来似乎不是全波状的。有些幂函数的曲线情形也是如此。不过它们的确每隔 2π 弧度均呈周期循环的。函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 和 $y=\tan x$ 的图象实例分别如图 2.3 和图 2.4 所示。这些函数本身尚需进一步作一些说明。然而它们的反函数形式往往很有用。我们可以不取函数 $y=f(x)$，而写出其反函数形式，如 $x=g(y)$。因此，就三角函数而言，要求写出 $\sin y=x$ 的更一般的形式。该式变为：

$$y=\sin^{-1}x \tag{5.16}$$

即反正弦函数(图 5.8)。必须指出，这里所用的上标 -1 并不是表示 $y=1/\sin x$。这样显然就会跟写成 $y=\sec x$ 一样了。在三角函数中所用的这一个上标只是表示（如上例那样）其正弦为 x 并以弧度为单位的角 y。在三角函数中还使用另一个术语，即 arc sin（反正弦），不过 x 值只限定在 $-\pi/2$ 与 $+\pi/2$ 之间。同理，我们可以有反正切 arc tan。这两个函数均不循环，并且仅适用于该上下限之间。然而反三角函数的循环和振动方式实际上与三角函数一样，只是前者相对于 y 轴，而后者则相对于 x 轴。每一个主要的反三角函数的导数为：

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \tag{5.17}$$

仅适用于第一和第四象限，在其他象限内则需乘以 -1。

$$\frac{d}{dx}\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{-a}{\sqrt{(a^2-x^2)}} \quad \text{（第一和第二象限）} \tag{5.18}$$

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{a}{a^2+x^2} \tag{5.19}$$

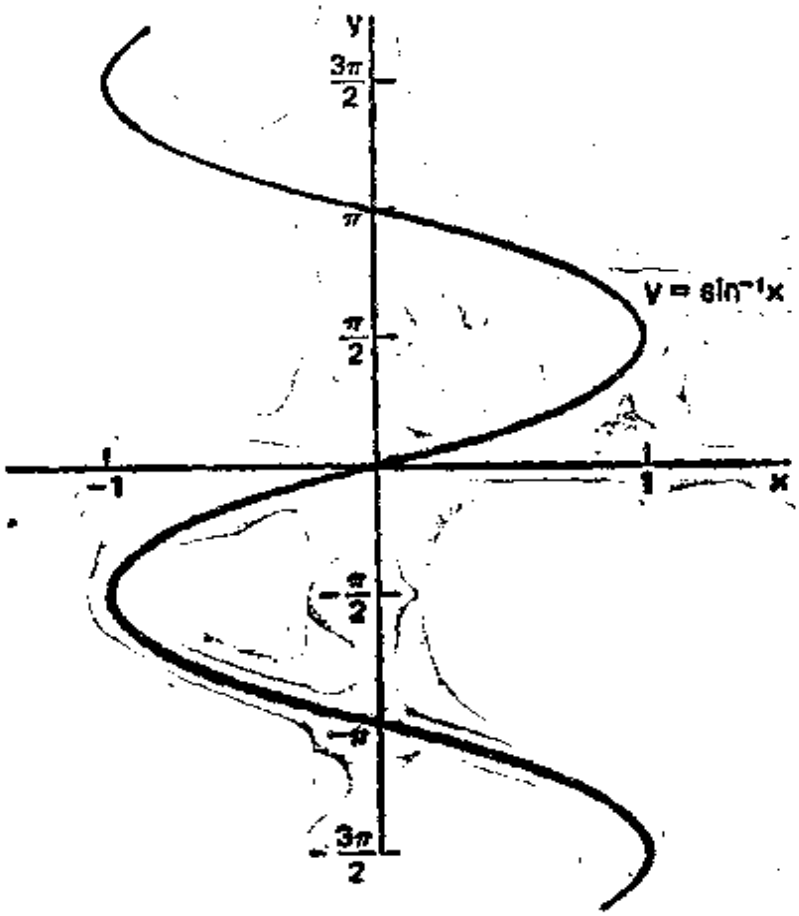


图 5.8 反三角函数 $y=\sin^{-1}x$ 的曲线

标准三角函数的导数为：

$$\frac{d(\sin x)}{dx}=\cos x \tag{5.20}$$

$$\frac{d(\cos x)}{dx}=-\sin x \tag{5.21}$$

$$\frac{d(\tan x)}{dx}=\sec^2 x \tag{5.22}$$

另外还有一类函数，表面上乍看起来具有三角函数形式，不过在自然地理学中很少碰到。它们是形如 $y=\sin hx$，$y=\cos hx$ 和 $y=\tan hx$ 的双曲函数。实际上 $\sinh x$ 等值均可以由指数函数的一些组合而得出，因为：

$$\sin hx=(e^x-e^{-x})/2 \tag{5.23}$$

$$\cos hx = (e^x + e^{-x})/2 \tag{5.24}$$

$$\tan hx = (e^x - e^{-x})/(e^x + e^{-x}) \tag{5.25}$$

我们还可以确定反双曲函数；并且双曲函数的导数和反双曲函数的导数分别为：

$$\frac{d(\cos hx)}{dx} = \sin hx \tag{5.26}$$

$$\frac{d(\sin hx)}{dx} = \cos hx \tag{5.27}$$

$$\frac{d(\tan hx)}{dx} = \sec h^2 x \tag{5.28}$$

$$\frac{d}{dx}\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)}} \tag{5.29}$$

$$\frac{d}{dx}\cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 - a^2)}} \tag{5.30}$$

$$\frac{d}{dx}\tan h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a^2 - x^2} \tag{5.31}$$

就(5.30)而言，$x/a > 1$ 且 $\cos h^{-1}(x/a) > 0$；而对于 $\cos h^{-1}(x/a) < 0$，导数需乘以 -1。就(5.31)而言，$x^2 < a^2$。

第三节　函数组合及其导数

三种基本类型的非线性函数和第三章的线性函数都是基本的专业手段；自然地理工作者利用它们可以试图对各种观察到的关系建立数学模型。然而很遗憾，利用前三节给出的各种形式的标准函数不一定能获得令人满意的拟合。本章由于篇幅所限不能包括一切可能的函数组合，并附以图象示例，不过读者会认为，仅仅根据本章第二节第一小节至第三小节中的各种形式的函数至少能近似地表示出曲线关系的形式。对于振荡型而言，可以作出三角函数或反三角函数的拟合尝试。在斜率随 x 值的增加而增大的趋

势很明显的场合，只要一元幂函数(其中 $n>1.0$) 或指数函数就足够了。同理，在可以看到斜率随 x 的增加而减小的场合，对数函数或幂函数(其中 $0.0<n<1.0$) 可以近似地表示出所观察到的趋势。然而通过把各种不同类型的函数组合成为同一方程所能得出的诸曲线会有些什么改变却是值得讨论的。几乎没有什么严格的法则可以把函数组合与所得出的曲线的形式连系起来。只要加上一个常数值就足以改变函数相对于坐标系的位置。常数会记下而不会算入导数，因而得出的曲线的形式是未改变的。例如，曲线 $y=x^2+6$ 的"支点"位于(0,6)，而不象 $y=x^2$ 的情形那样位于原点。确定这样的驻点，即曲线改变方向的那一点，对曲线的画出和拟合是非常重要的；这将在本章第四节中详细讨论。另加一些 x 项也会使曲线形式发生改变。在许多场合可以加上一些幂函数，以组成均含 x 项的项列，例如：$y=4x^4+5x^3+x^2-4x+5$。这种函数称为多项式，而最基本的多项式所含的诸 x 项的幂指数小于三。这一基本类型是二次多项式。含有高次幂 x(例如 x^3 和 x^4) 的多项式分别称为三次和四次多项式。图 5.9 表示出上述多项式的两

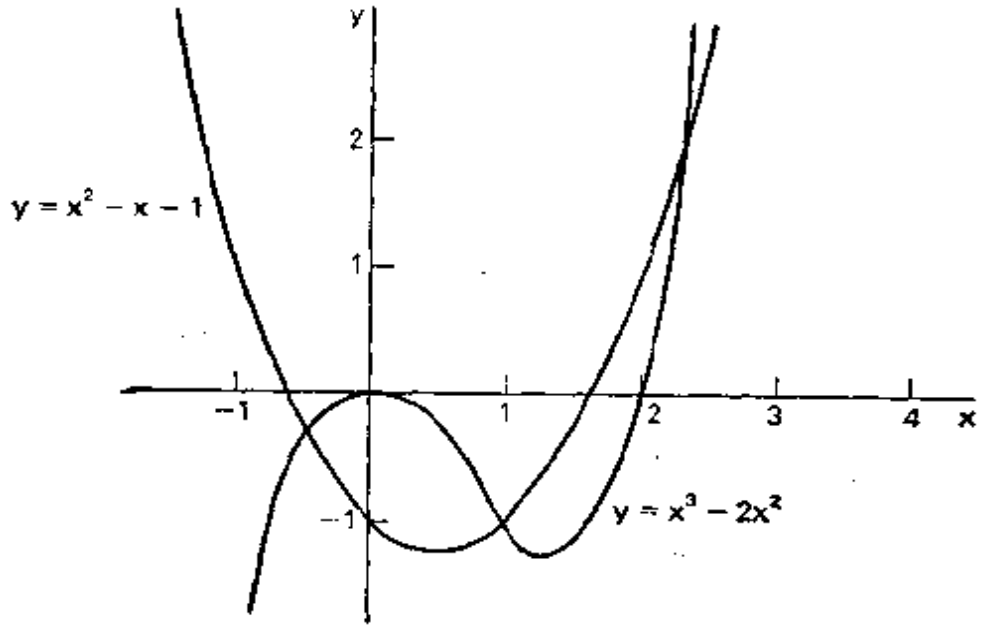


图 5.9 $y=x^2-x-1$ 和 $y=x^3-2x^2$ 的曲线

个简单例子(一个是二次多项式；另一个是三次多项式)。对于二次函数($y=x^2-x-1$)我们可以指出，这又是一条仅有一个驻点的曲线，而这次它与原点并不重合；并且该曲线也不对称于原点。图中的三次多项式($y=x^3-2x^2$)显示，直观上它与 $y=x^3$ 没有什么相似之处。这里有两个驻点，其中仅有一个与原点重合。该二驻点中的前一个称为极大值驻点，因为在该点上 y 值极大；而后一个称为极小值驻点，在这点上 y 值极小。不过应当指出，在两种场合，极大值和极小值所表示的未必是整个曲线上 y 所能达到的最大值或最小值。当极大值点和极小值点二者重合时，就有一个所谓拐点。现在就有两项法则可以加以定性描述。其一，对于任何多项式，只要其方程中没有常数项，曲线就会仅通过原点。其二，也是最重要的，曲线上驻点的个数等于方程中最高阶项的幂指数减去一，于是，对于二次多项式而言，仅有一个驻点；对于三次多项式而言，则有两个驻点；而对于四次多项式而言，有三个驻点。然而这里必须顺便指出，所有驻点有时会重合，这时就有一个拐点。

其他的函数组合同样也会有的，这里不可能都一一举例说明。读者能够完成的最有益的练习之一，是花费一些时间画出不同函数组合的各种曲线。这样的练习对深刻领会函数组合的运算会是大有帮助的。不过这种帮助只有在能够精确地确定各驻点的所在位置以后才是有可能的。

第四节　驻点的确定

由上一节的多项式简述显然可以看出，所有三种类型的驻点均与函数曲线的无限短的水平线段有关。因此，对于任何函数，我们都可以首先令函数的一阶导数为零来求出该点或各点的 x 坐标；然后再将 x 值或各 x 值代入原始方程以求出对应的 y 坐标。

例如，如果取图 5.9 的函数 $y=x^2-x-1$，则其一阶导数为 $2x-1$，于是其驻点的 x 坐标即可表示为 $2x=1$，即 $x=\frac{1}{2}$。将 $x=\frac{1}{2}$ 代入原始函数，即可得出 $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-1=-1\frac{1}{4}$，可见，该极小值点的坐标为 $\left(\frac{1}{2},-1\frac{1}{4}\right)$。

对于高次多项式，特别是所含幂指数高于 x^3 的多项式说来，在由一阶导数得出的方程中求解 x 会是一项繁重的任务。该任务就是求出方程的诸系数，而这些系数往往都是很难求的。对于二次方程（令三次函数的一阶导数为零时所得）的解说来，有一个现成的公式，只要将该方程的诸值代入此公式，即可求出方程的根（解）。对于每一个待解的二次方程说来都会有两个根；对于每一个三次方程而言会有三个根，余类推。不过，对多项式中最基本的二次方程可以用检查法来求根。例如，方程 $x^2+2x+1=0$ 就可以因式分解为 $(x+1)(x+1)=(x+1)^2=0$，可见 x 的解仅有一个，即 $x=-1$，因为两个根相同。然而如果我们取方程 $x^2+4x-12=0$，则该方程可以用检查法因式分解：$(x+6)(x-2)=0$。此法基本上是经验、实践加一点试凑的方法！方程 $(x+6)(x-2)=0$ 的根为 $x=-6$ 和 $x=2$。

现在我们取方程 $2x^2-5x+2=0$。此方程不便于因式分解为整数根。此方程和所有类似的二次方程均可以利用下列公式求解：

$$x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{5.32}$$

式中 a、b 和 c 均为一般二次方程：$ax^2+bx+c=0$ 中的常数。例如，$2x^2-5x+2=0$ 中的 x 的解可以表示为：

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm3}{4}$$

可见 $x=2$ 或 $x=\frac{1}{2}$。对于更高次方程而言，求根 x 就会变得更难些。如果方程用检查法不容易因式分解(这是少有的情形)，那么最好试用图解法来求近似解。为此，可以绘出多项式的曲线，并在图象的 $y=0$ 处读取 x 值。例如，假定我们欲求函数 $y=x^4-3x^2-x+2$ 的驻点，则该函数的一阶导数为 $4x^3-6x-1$，现在面临的问题是求解三次方程 $4x^3-6x-1=0$。绘出函数 $y=4x^3-6x-1$，并在 $y=0$ 处读取 x 值，即可求出方程的根。不过我们首先必须得出该新函数的驻点，可将其表示为 $12x^2-6=0$。因而该二点分别位于 $x=\pm1/\sqrt{2}$，即 $x=\pm0.71$。代入原始三次函数，我们即可得出二转折点于(0.71，-3.83)和(-0.71，1.83)。现在对于在曲线与 x 轴 ($y=0$) 的二交点所决定的诸值区间内的 x 值求出 y 值，即可绘出曲线的其余部分。该函数的曲线就 $-2.0\leqslant x\leqslant+2.0$ (根据表 5.1 的计算值得出)绘于图 5.10。这时我们可以在 $y=0$ 处读取 x 值，即 $x=-1.1$，$x=-0.2$ 和 $x=1.25$，均为 $4x^3-6x-1=0$ 的近似根。这些根均可用代入法加以验证。它们显然只是实根的近似值，但是如果函数 $y=4x^3-6x-1$ 的曲线画得比较精确，那么近似值的精度还可以有所提高。

表 5.1 $y=4x^3-6x-1$ 的曲线上的诸点

x	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
y	-21	-5.5	+1.0	+1.5	-1.0	-3.5	-3.0	+3.5	+19

由图 5.10 中画出的图象可以清楚地看出，哪个驻点是极大值点，哪个驻点是极小值点。然而通过画出函数图象来确定哪个是哪个，这是一个相当麻烦的方法。我们可以利用函数的二阶导数

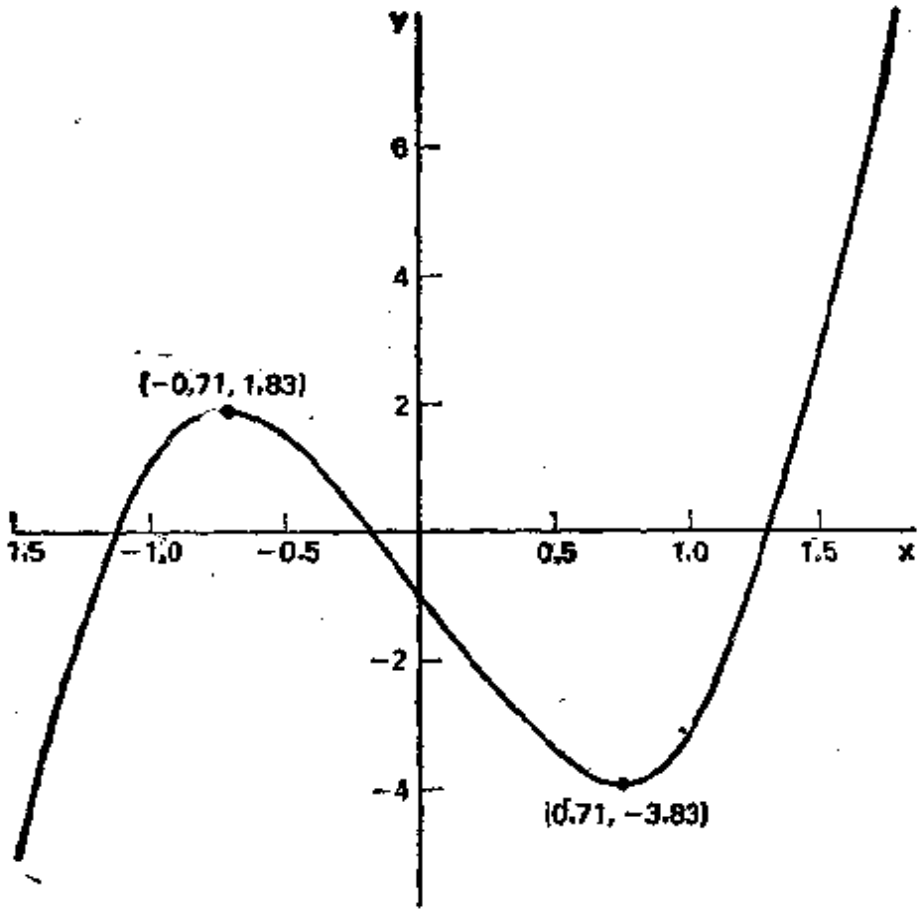


图 5.10　$y = 4x^3 - 6x - 1$ 的根的图解求定

来辨别它们。函数的二阶导数乃是曲线斜率变化率的表达式。因此很明显，由一阶导数和原始函数求出驻点的坐标以后，如果还可以确定这些点上斜率的变化率特性，那么就可以很容易地确定它们是极大值点，还是极小值点，还是拐点。如果在驻点的二阶导数为正值，则在该点的斜率递增，因而它必然是极小值点。反之，如果二阶导数为负值，则其斜率递减，因而该点为极大值点。若二阶导数的值为零，则是一个拐点。可见，在上例中，函数 $y = 4x^3 - 6x - 1$ 的极大值点为 $(-0.71, 1.83)$，因为 $d^2y/dx^2 = 24x = -17.04$；其极小值点为 $(0.71, -3.83)$，因为 $d^2y/dx^2 = 24x = +17.04$。

现在我们可以回到原来的问题，即函数 $y = x^4 - 3x^2 - x + 2$ 的

驻点求定问题。驻点的 x 坐标曾经表示为三次函数 $y=4x^3-6x-1$ 中 x 的解。将这些值代入原始四次函数中即可得出诸驻点坐标，即：$(-1.1,0.9)$，其二阶导数为正，因而它是极小值点；$(-0.2,2.1)$，其 d^2y/dx^2 为负，因而它是极大值点；$(1.25,-1.5)$，它是另一个极小值点。

习题 5.4

读者在继续往下学习本章之前，必须试作下列练习。试求下列二次方程的根：

(1) 用检查法因式分解

5.4.1　$x^2-4=0$

5.4.2　$x^2+16x+64=0$

5.4.3　$2x^2+4x-6=0$

5.4.4　$3x^2+4x+1=0$

5.4.5　$1-x^2=0$

(2) 利用方程(5.32)

5.4.6　$3x^2+2x-1=0$

5.4.7　$x^2-4=0$

5.4.8　$5x^2-7x-2=0$

5.4.9　$-3x^2+4x-1=0$

5.4.10　$3x-2x^2=4$

试用图解法求解以下方程的 x 根：

5.4.11　$x^3-x^2-9x+9=0$

5.4.12　$10x^3+23x^2+5x-2=0$

试求习题 5.1 给出的每个函数的驻点，并说明它们是极大值点、极小值点，还是拐点。

第五节　积和商的导数

画出类型比较复杂的函数组合(例如 $y=x\log x$)，再次计算驻

点，以便画出比较精确的图象。这种函数的导数乃是各个函数的导数与函数本身的组合。在函数组合的前几例中，我们仅看到函数导数的加法，那是一项比较简单的往往又是冗长的任务。有许多方程，其中含有各个标准函数的组合，这时就需要求积（例如 $y = x\log x$）的导数或商（例如 $x/\log x$）的导数。在一般场合，如果 u 和 v 均为 x 的函数，即 $y = u(x)v(x)$，则其积的导数可以表示为：

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} \tag{5.33}$$

而对于商而言，$y = u(x)/v(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x)\dfrac{du}{dx} - u(x)\dfrac{dv}{dx}}{v(x)v(x)} \tag{5.34}$$

因此对于函数 $y = x\log x$，有：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}x + \log x = 1 + \log x$$

同理，为了求 $y = 3x^2\sin x$ 的导数，兹将 $u(x) = 3x^2$ 和 $v(x) = \sin x$ 代入方程(5.33)，则得：

$$\frac{d}{dx}(3x^2\sin x) = 3x^2\cos x + 6x\sin x$$

而对于 $y = \log x\tan x$，则有：

$$\frac{dy}{dx} = \log x\sec^2 x + (\tan x)/x$$

于是对于上述的商的例子，有：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\log x}\right) = \frac{\log x - x\dfrac{1}{x}}{\log^2 x}$$

$$= \frac{1}{\log x}\left(1 - \frac{1}{\log x}\right)$$

此外，如果 $y = \sin x/\cos x$（$y = \tan x$，其导数为 $\sec^2 x$，见方程

(5.22))，则由方程(5.34)可得：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\sec^2 x \qquad (5.35)$$

最后这个法则，可以用来对组合函数求导数，称之为函数的函数法则或者置换微分法则。兹考察下列函数的情形：

$$y=(\cos x+\sin x)^3$$

设 $z=\cos x+\sin x$，故：

$$y=z^3$$

则
$$\frac{dy}{dz}=3z^2$$

且
$$\frac{dz}{dx}=-\sin x+\cos x$$

于是
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\ \frac{dz}{dx}$$

因此
$$\frac{d(\cos x+\sin x)^3}{dx}=3(\cos x+\sin x)^2(\cos x-\sin x)$$

同理，设 $z=\sin x$，则可求出 $y=\log(\sin x)$ 的导数，

所以 $dy/dz=1/z$，且 $dz/dx=\cos x$，于是：

$$\frac{d}{dx}(\log(\sin x))=\frac{1}{z}\cos x=\cot x$$

更加复杂的函数仍然可以将上述各项法则应用到同一表达式来求导；这样一来，大多数函数就都能够求导了。现举函数 $y=\tan 3x^3+2x\cos x$ 为例。第一项($\tan 3x^3$)可以应用函数的函数法则求导；第二项可以应用积的微分法(方程(5.34))求导。对于第一项，设 $z=3x^3$，故 $y=\tan z$，于是有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\ \frac{dy}{dz}=9x^2\sec^2 3x^3$$

而对于第二项，设 $y=2x\cos x$，于是：

$$\frac{dy}{dx}=2\cos x+2x(-\sin x)=2(\cos x-x\sin x)$$

故：

$$\frac{d}{dx}(\tan 3x^3 + 2x\cos x) = 9x^2\sec^2 3x^3 + 2(\cos x - x\sin x)$$

可见，读者使自己熟悉各种微分法和本章给出的标准微分是很重要的。下列习题就是满足这方面需要的方便途径。为了进一步练习，还可以试解任何初级微积分教程（例如奈特与阿达姆斯(Knight and Adams, 1975)以及斯蒂芬森(Stephenson,1973) 的著述）中所出的一些习题。

习题 5.5

试求下列诸函数的导数：

5.5.1 $y = 5(2x^2 + \sin x)$

5.5.2 $y = 2\sin^{-1}2x$

5.5.3 $y = 3\log x^2$

5.5.4 $y = x^{-2}\log x$

5.5.5 $y = 2\sin x\cos x$

5.5.6 $y = \sec^2 x$(设 $z = \sec x$, $u = \cos x$)

5.5.7 $y = \tan(\log x)$

5.5.8 $y = e^{2x}\log(x^2 + 1)$

5.5.9 $y = x\log x/\sin x$

5.5.10 $xy = 5\cos x + x^2\log x$

第六节 曲 线 拟 合

对观察数据分布获得最佳拟合回归曲线这一任务，比起配出最佳拟合的线性回归方程这一任务来更为需要。归根结底，所用的各种统计方法及其前提依然与第三章所述的一样。曲线可以目测画出，尽管推导曲线方程要比推导直线方程来得更难一些。多项式或含有长项列的函数的拟合均不属本书讨论范围。然而读者如果

对此感兴趣，实际上可以参阅任何含有曲线拟合章节的数值分析方面的教程(例如希尔迪布兰德(Hildebrand, 1974)或哈巴扎(Khabaza, 1965)的著述)。不过，有一个曲线拟合问题最好留在本书后面讨论，这就是如何将曲线拟合成周期函数的问题，正如调和分析和傅里叶分析中所作的那样(第八章)。

因此，如果我们把注意力局限于简单曲线类型，那么为了对一些已知点配出简单曲线方程，最有效的方法之一，是相对于对数轴点绘一个或二个变量来进行曲线"调直"。在第三章末尾曾经提过，例如将 $t=\log x$ 代入形如 $y=a\log x+C$(式中 a 和 C 为常数)的方程中，然后再相对于 $\log t$ 点绘 y，这样就可以将非线性的关系"化为"线性形式。在自然地理学中有许多观察到的关系接近这种形式的函数，并且完全可以使用特制的"单对数"坐标纸将它们点绘成直线；在这种坐标纸上，通常作为 x 轴的那一个坐标轴呈对数形式，也就是说，其刻度有所改变，致使在最简单的场合 $y=\log x$ 曲线表现成一直线(图 5.11(1)和(2))。这可不应当被看作是一个骗局！这完全是一种合理的，比较好的处理函数的方法；而且如果可能的话，还可以利用第三章所述的诸回归方法中的一种来对散点进行直线拟合。在自然地理学中的各种关系中，大家最熟悉的是为显示流域特征(长度、流域面积等等)与河流分级的关系所能画出的散点图系列，后者是由霍尔顿(Horton, 1945)发起，以后又由斯特拉勒(1957)等人提出的。然而必须指出，这些关系都可以作为任何自然分系统加以观察，并且很难与地貌学中的过程相联系，所以这些关系的实用性多少就会受到一些限制(见金(King, 1966)所著一书)。不过，这些关系既通俗又易懂，作为实例还是比较适宜的；两个这样的散点图如图 5.12 所示。还有一种类似的函数曲线调直方法可以应用，不过需用大量的特制坐标纸。另一种很常用的坐标纸称为"双对数"坐标纸，其两个坐标轴均呈对数

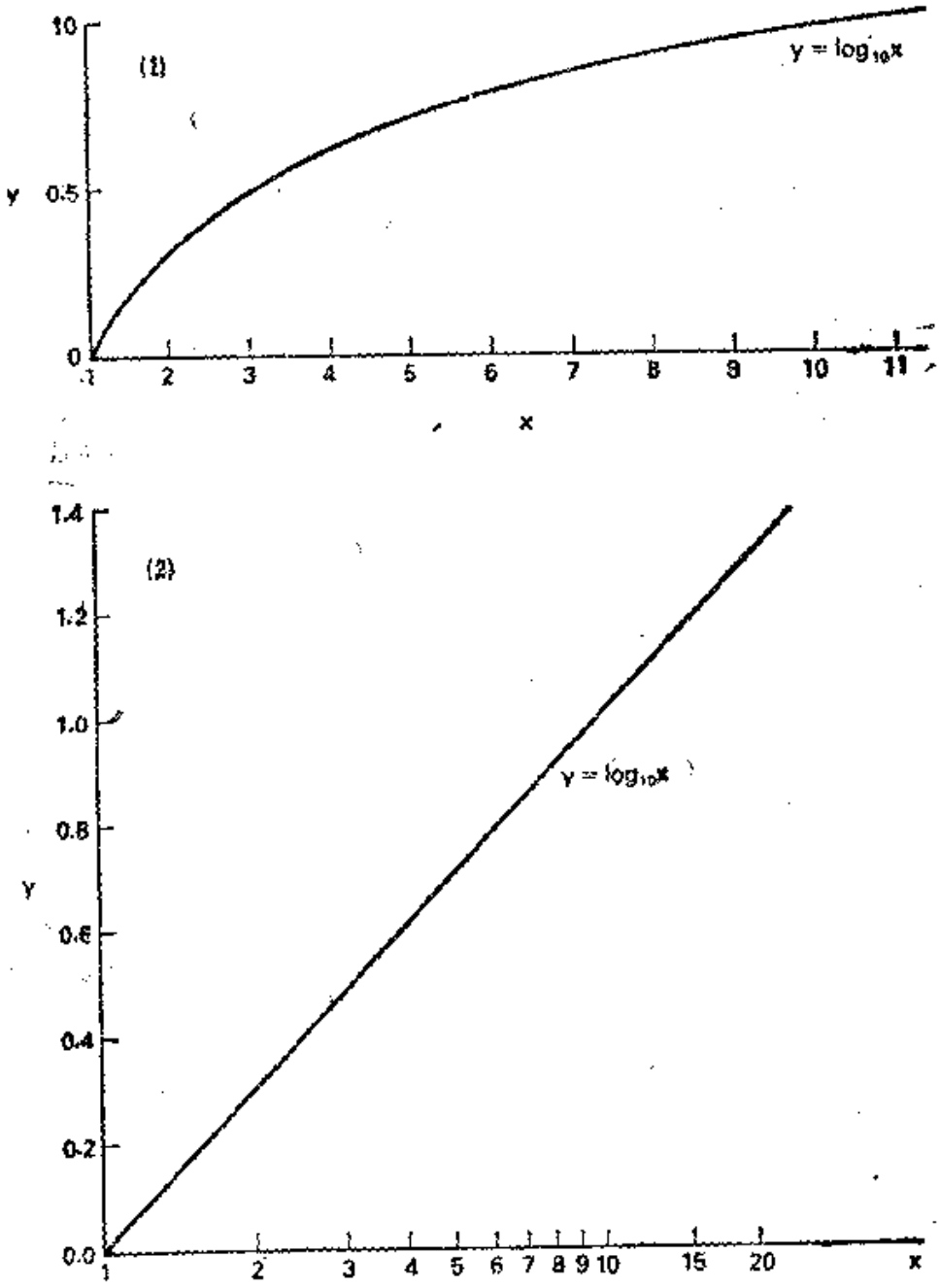


图 5.11 $y=\log_{10}x$ 的图象：(1)普通坐标图上的；(2)单对数坐标图上的。

形式；在这种坐标纸上，形如 $\log y = a\log x + C$ 的方程表现为直线。正态概率纸以类似的方式可以为累积正态分布曲线的调直提供一种手段(第七章)。

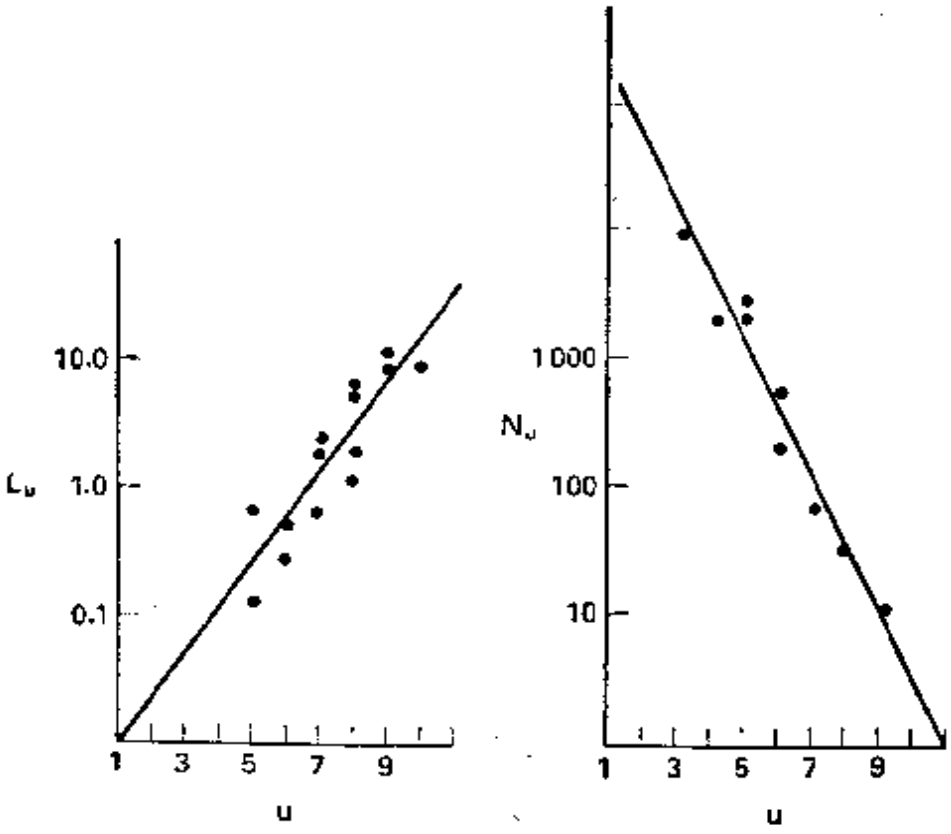


图 5.12　新墨西哥的圣菲(Santa Fe)附近的干旱区小河中 u 级河道的平均河道长度(L_u)和河道数目(N_u)的散点图（根据 Leopold, Wolman, Miller, 1964所著一书）

然而，把非线性函数化为表面上的线性形式的这些方法，不应当与使数据频率分布接近正态形式的数据变换相混淆。对于许多统计分析(例如回归分析)说来，都有一个前提，即数据呈近似正态分布。例如，如果数据(低数量级的值相对较多)的频率分布曲线呈正向偏态分布，那么求出每一数据值的平方值，然后利用这些值点绘出新的频率分布曲线，即表现为近似的正态分布。类似地，对于数据(高数量级的值相对较多)显然表现为负向偏态分布的情形说来，若对每一值均取平方根或者取对数，则可得出正态分布。在附录五的第四节中给出了正态分布曲线的简要说明，并列举了偏态分布及其变换的实例。对正态分布曲线本身在第七章作了数学上的论述。当然，由于统计学上需要对某一关系中的一个或两个

变量进行变换，往往可以把前非线性函数化为线性函数。

对数据进行曲线拟合的最初阶段常常是，查明在普通坐标纸上画出的曲线与本章前面给出的标准函数实例中的任何一个是否相类似。该过程除非采用一种有效的曲线拟合程序，否则就要进行很多次试凑。举例来说，兹讨论若干年内多次暴雨后所观察到的最大降水强度(I_t)与降水历时（t）之间的关系（参见麦卡鲁姆(McCallum,1959)所著一书)。该关系的典型曲线如图5.13所

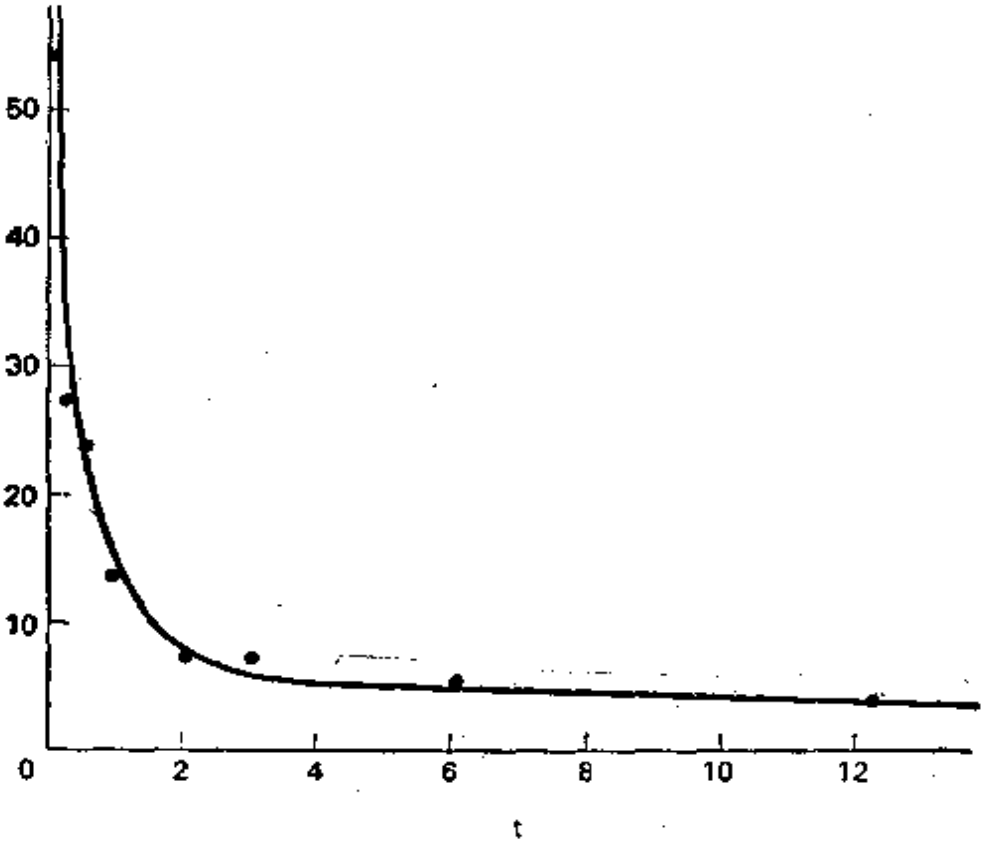


图5.13 威尔士的兰佩特(Lampeter)1973—1975历时t(小时)的最大降水强度I_t(毫米/小时)散点图(在普通坐标纸上绘出)

示。直观上散点与曲线十分吻合，然而这种形式的曲线却不大适用于预测目的，并且很难用来以外推法求出历时很长(长于12小时)或历时很短（短于5分钟)的最大降水强度。而后者对于估计在数据适用地区所需的排水量来说是非常重要的。在取数据期间内，该地区三年内(在西威尔士)降水历时五分钟的降水强度的最

高记录为 52.8 毫米/小时。画出的曲线显然表明，在更短期间内，例如降水历时一分钟的最大降水强度会大得多，然而由于仪器不精确，在这样短的时间内作出可靠的降水强度测定是不可能的。该曲线相对于 y 轴(代表降水强度)是渐近的。类似地，该曲线的另一端显然相对于 x 轴(代表降水历时，以小时计)是渐近的。将该曲线的形式与图 5.2 至 5.8 中的诸标准函数实例加以比较即可看出，代表该关系的函数与形如 $y=kx^{-n}$ 的负幂函数有共同的特征。这样的函数都可以方便地重写为 $\log y=\log k-n\log x$；这类似于线性函数的一般形式，并且在双对数坐标纸上点绘时会呈一条近似直线。这种情形如图 5.14 所示。

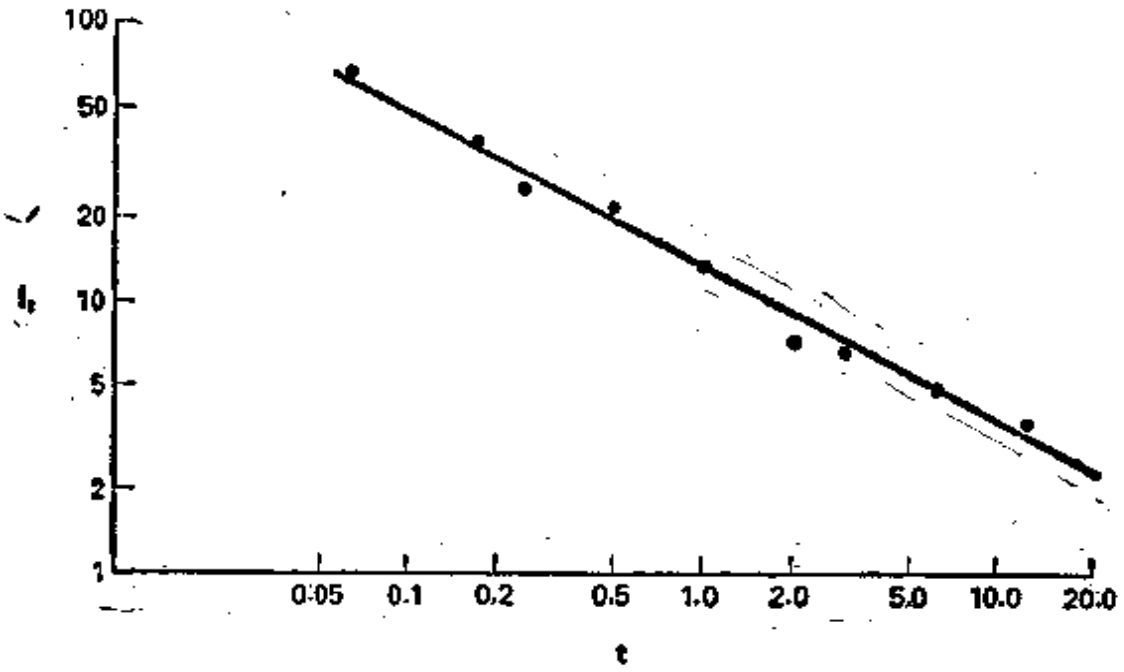


图 5.14　不同降水历时的最大降水强度的散点图(在双对数坐标纸上绘出，其他细节与图 5.13 同)

现在就可以进行关于 I_t 和 t 二变量的对数的直接线性回归。为此，记住小于一的数的对数性质是很重要的，因为小数点左方的值为负，而小数点右方的值则总为正。例如 0.16667 小时(10分钟)的对数为 $\bar{1}.2219$，而就本练习而言则变为 -0.7821。这样计算出的

$\log I_t$ 与 $\log t$ 之间的相关系数为 -0.8837。最小二乘回归直线的计算是利用表 5.2 完成的。降水强度(I_t)和降水历时(t)的原始数

表 5.2 函数 $I_t = k t^{-n}$ 的单对数回归

I_t	t	y $\log I_t$	x $\log t$	y^2 $(\log I_t)^2$	x^2 $(\log t)^2$	xy $(\log I_t \log t)$
52.8	0.0833	1.7728	−1.0794	2.9674	1.1651	−1.8594
36.5	0.1667	1.5623	−0.7781	2.4408	0.6054	−1.2156
25.6	0.25	1.4082	−0.6021	1.9830	0.3625	−0.8479
22.8	0.5	1.3578	−0.3010	1.8436	0.0906	−0.4087
13.4	1.0	1.1271	0.0000	1.2704	0.0000	0.0000
7.4	2.0	0.8692	0.3010	0.7555	0.0906	0.2616
6.8	3.0	0.8325	0.4771	0.6931	0.2276	0.3972
4.9	6.0	0.6902	0.7782	0.4764	0.6056	0.5371
3.6	12.0	0.5563	1.0792	0.3095	1.1647	0.6004
		10.1262 Σy	−0.1251 Σx	12.7397 Σy^2	4.3122 Σx^2	−2.5353 Σxy

据载于头两栏中。x 和 y 两栏分别载有 I_t 和 t 的对数，所以 $y = \log I_t$，$x = \log t$。后三栏载有 x^2，y^2 和 xy 值，其和数分别载于每一栏末。x 的平均值为 -0.0139，y 的平均值为 1.1251，因此，将 Σxy，Σx，Σy，Σx^2 和 $(\Sigma x)^2$ 诸值均代入方程(3.30)中，则对于形如 $y = mx + k$ 的方程有：

$$m = \frac{9 \times (-2.5353) - (-0.1251)(10.1262)}{9 \times 4.3122 - (-0.1251)^2}$$

$$= \frac{-21.55}{38.79} = -0.56$$

将 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 和 m 代入方程(3.31)，则还有：

$$k = 1.1251 - (-0.56)(-0.0139)$$

$$= 1.1173$$

可见，最小二乘回归方程为：

$$y = -0.56x + 1.1173$$

但 $y=\log I_t, x=\log t$，故

$$\log I_t = -0.56 \log t + 1.1173$$

取反对数，则有：

$$I_t = (\text{反对数 } 1.1173)\, t^{-0.56}$$

这样一来，图 5.13 和图 5.14 中的曲线方程为：

$$I_t = 13.1\, t^{-0.56} \tag{5.36}$$

到现在为止，我们方便地运用了线性回归分析方法；它是以数据呈正态分布为前提而又不用既成这一事实的。在此特例中，降水历时数据在未经变换时显然呈正向偏态分布，然而在对每一值取对数时，却显示出比较好的分布。一般说来，用这种方法进行曲线拟合是带有一定偶然性的；而这里选用的例子可以说明与一元标准函数极其相似的几个关系实例中的一个。另外还有许多例子只能用这样的一元函数加以近似表示，并且为了获得对更复杂函数的拟合技巧，只能靠积累经验和熟悉各种函数组合所具有的曲线形式；这就再次强调了演习本章所出的习题的重要性。

第七节　非线性关系的其它例子

即便极粗略地浏览一下涉及自然地理学各个方面问题的许多书刊文献也会发现，有许多非线性关系，特别是河流地貌学和水文学中的非线性关系，均表现为上一例所提出的曲线形式，因为它们均为双对数型关系。这些函数的大多数所含的幂指数都介于 -1 和 $+1$ 之间。其中有一个数可以使 y 与 x 的平方根成反比。例如，方程(5.36)可以近似表示为 $I_t = 13/\sqrt{t}$。为了说明在各种不同条件下历时(t)后的土壤渗润率(i)，曾经得出下列形式的一般函数：

$$i = a + bt^{-1/2} \tag{5.37}$$

(参见菲利普斯(Philips，1957-1958)的著述)。对一组给定条件的

曲线拟合取决于土壤达到饱和时水通过土壤的最低速率，而后者又取决于土壤类型，以常数 a 表示。方程中的第二项表明，渗润率的改变完全可以表示成渗润开始以后所经历的时间乘上一个表示先存土壤水分的常数因子 b。如果土壤在渗润开始时几乎达到饱和状态，那么该项就会很小，因为这时的渗润率会很接近 $b=0$ 时的饱和土壤的渗润率。该方程表现的曲线形式如图 5.15 所示，并且

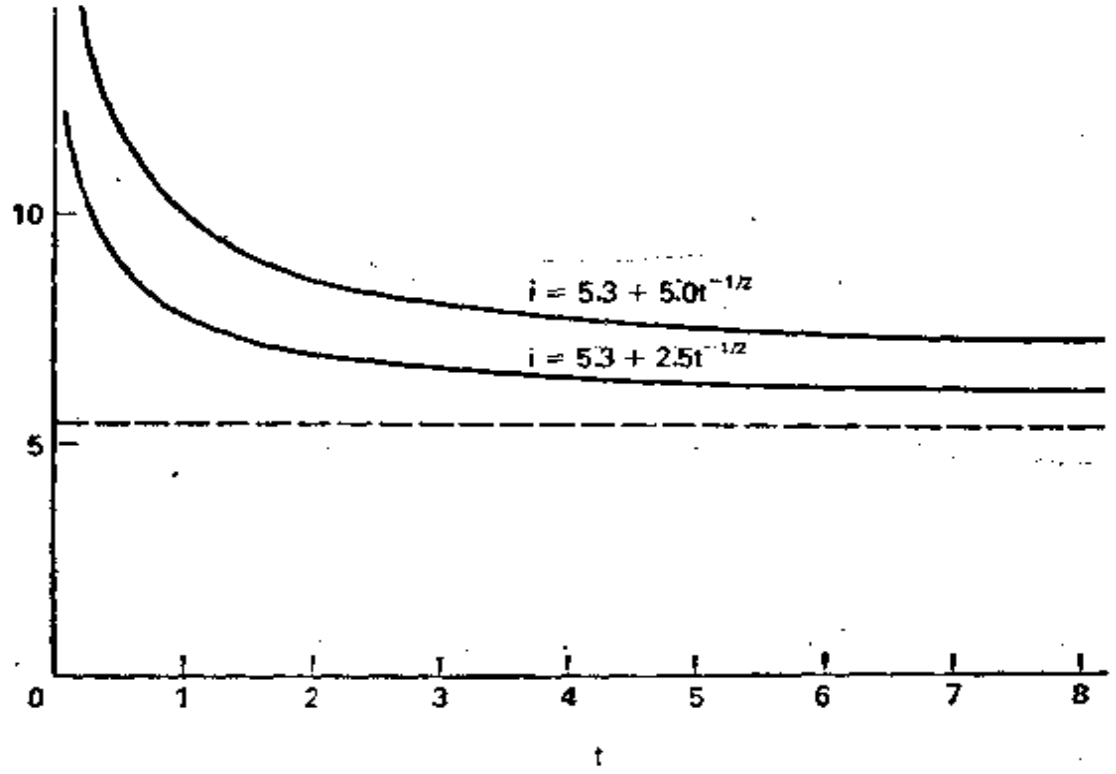


图 5.15 函数 $i=a+bt^{-1/2}$ 在 $a=5.3$，$b=2.5$，和 $b=5.0$ 时的图象，可以说明起始土壤含水量高（b 值比较小）和起始土壤含水量低（b 值比较大）对渗润率的影响

相对于 $i=a$ 是渐近的。在建立河流的单位面积径流量与供水面积的关系式时，往往会看到类似的关系式，不过没有第一个常数项。因此，在绘出正常的最大径流量的曲线时，例如 1952 年林茅斯 (Lynmouth) 的最大径流量的曲线（参见多比与沃尔夫 (Dobbie and Wolf, 1953) 的著述），可以得出形如 $R=kA^{-1/2}$ 的函数。在这里，多比与沃尔夫得出：

$$R=3350A^{-0.5} \tag{5.38}$$

式中 R 为每 1000 英亩的径流量(以立方英尺/秒计)；A 为供水流域面积，以千英亩计。

在不同于水文研究的水文气象研究中，也可以得出类似形式的方程。例如，在大多数对流暴雨中，总降水量的空间分布一般是这样的，即总降水量以暴雨中心为最大值，并且沿着离开暴雨中心的辐射方向而递减。在世界许多地区，对于某一历时的暴雨而言，平均降水量(P)与暴雨面积之间的关系可以近似表示为下列形式：

$$\overline{P} = a - bA^{1/2}, \qquad (5.39)$$

式中第一个常数项(a)为暴雨中心最大降水量，而 b 表示的是降水量沿着离开暴雨中心的辐射方向而递减的速率。业已证实，此特定关系对于美国许多地区均成立(参见胡夫与尼尔(Huff and Neill, 1957)的著述)。美国关于类似关系式的推导的其他研究(例如，《迈阿米自然保护区》(Miami Conservation District, 1936) 一书) 表明，对于比较大的地区而言，该函数会含有一个附加指数项，函数的一般形式为：

$$\overline{P} = P_0 e^{-kA^n} \qquad (5.40)$$

式中 P_0 相当于方程(5.39)中的常数项 a；k 和 n 均为常数，与某一次暴雨或历时相同的多次暴雨有关。例如，就美国北部地区推导出的上述形式的方程为：

$$P = 16e^{-0.0883A^{0.24}} \qquad (5.41)$$

上面这一例子乃是偶尔会遇到的一些比较复杂的函数的典型。然而，在曲线拟合中会达到这样一个阶段，即描述某一关系的函数再复杂，对观察到的数据点进行曲线拟合的优度也提高不了多少。为了对比起见，完全可以证明，把观察到的关系近似地表示成一元函数，有时甚至近似地表示成线性函数是最为理想的。在自然地理学中有许多关系显然可以导致二变量的一元函数，通常近

的紧密度如图 5.16 所示。方程的一般形式为：

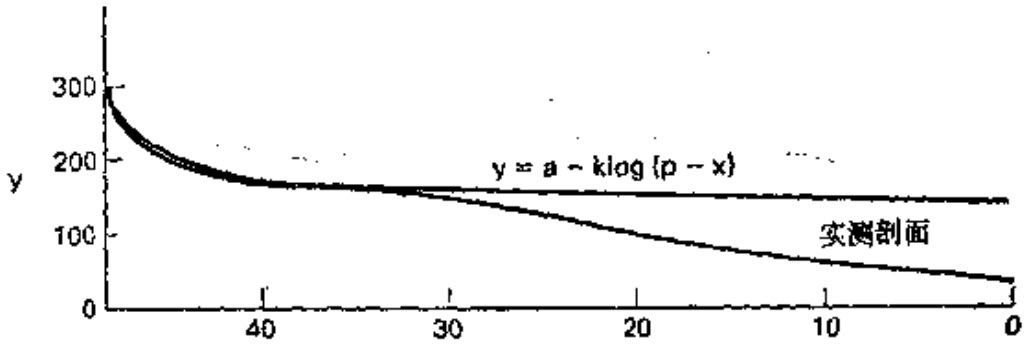


图5.16 函数 $y=a-k\log(p-x)$ 的图象，适用于莫尔河的上游段。（根据 Green，1935 年的著述）

$$y=a-k\log(p-x) \tag{5.44}$$

式中 y 为高出海平面的高度，以英尺计；x 为距河口的距离，以英里计；p 为总的河道长度；a 和 k 均为常数，就莫尔河而言分别为 241.5 和 65。其实，该曲线的一端相对于推知的诸古海平面是渐近的，而另一端则相对于 y 轴是渐近的——这些条件在实践中永远不会达到。鲁希(Ruhe，1969)在对美国沿衣阿华河谷的黄土沉积进行对比中和霍尔顿(1945)在他的有关河道网系形态测量学的早期著作中也都曾经得出过类似类型的单对数关系式。例如，由图 5.12 可以看出，按特定分级和按河道本身分级时，某一次河道的平均河道长度的曲线几乎完全是单对数关系：

$$\overline{L}_u=f(\log u) \tag{5.45}$$

式中 $\overline{L}_u$ 为 u 次河道的平均长度。

自然地理学中经常遇到的线性函数和非线性函数的例子，都只能列举很少几个，不可能再多举了；然而可以期望，读者现在要是看到充满这类函数的书籍或文章的话，那就会感到完全有把握了。读者在这些文献中还会遇到其它的数学细节，那就各属其它不同范畴了。下一章将要讨论函数的一个方面的推广（这在本章已经涉及，但未作解释），就是通过级数和展开式对多项式作进一步讨论。

第六章　级数和数列

第一节　算术数列和几何数列

我们在前两章讨论了关联着两个或更多个变量的函数。函数就是因变量随自变量的连续变化。例如考察水库淤积量的累积仅按年度进行测定的情形。水库的累积淤积可用阵列形式表示成水库库容的年减少量的数列。假设水库建成时(第 0 年) 已经有 a 立方米的淤积物积累下来，随后的每一年均有 d 立方米的淤积物在水库中淤积下来。该水库五年以后总的累积淤积量为：

$$a+d+d+d+d+d=a+5d,$$

十年后为 $a+10d$，余类推。于是，该水库的年累积淤积量数列如下：a，$a+d$，$a+2d$，$a+3d$，$a+4d$，$a+5d$，$a+6d$，…该序列称为算术数列，其每一个随后的数值均等于 d(称为公差) 加上前一个数值。若以 x 表示年度，以 y 表示淤积量，则线性函数 $y=dx+a$ 在 x 以整数变化时可以表示同一序列。例如，若 $a=1$ 且 $d=2$，则就淤积而言，算术数列结果为 1,3,5,7,9,…，这和把 $x=0,1,2,3,4,\cdots$ 代入函数 $y=2x+1$ 中的情形一样。a 或 d 二者均可为负值，所以在 $a=10$ 且 $d=-1$ 时，数列结果为 10，9,8,7，6，5,…(在 x 值由 $x=0$ 起以整数递增时，函数 $y=10-x$)。

另一类数列是几何数列。在上述的水库淤积这一个简单的例子中，即使实际的淤积速率逐年不变，水库库容量也不是逐年成比例地减少。如果我们仍然使用任意单位，以使累积淤积量可以表示为函数 $y=2x+1$，并且假设水库的总库容在第 0 年为 100，那么库容量的逐年缩减率即可这样表示，即：在第一年内为 2.02($2\times 100/99$)；在第二年内为 2.06($2\times 100/97$)，在第三年内为 2.10，余

类推。这些数字载于表 6.1。这里的变化率是逐年递增的，所以到

表 6.1　水库的淤积，速率递增，但年淤积增量不变

年度 (x)	0	1	2	3	4	5	6
累积淤积量 (y)	1	3	5	7	9	11	13
库容 ($100-y$)	99	97	95	93	91	89	87
库容变化	1	2	2	2	2	2	2
变化率 (%)	−1.01	−2.02	−2.06	−2.10	−2.20	−2.27	−2.33

第 49 年，缩减率为 $2\times100/(100-2\times49-1)$，即 200%，而在第50年，水库有些地方会完全淤塞。在这些地方库容总减少量为100%。因此，算术数列和经济学中应用的单利的情形完全一样，其中利息仅仅是创办资本的函数。然而几何数列却与复利类似。如果我们要考察涉及水库淤积的类似情形，但库容缩减率年年保持不变(即原有资本的函数，仍然与经济学类似)，那么年累积淤积量的数列如下。兹认为水库的有效库容每年减少到上一年库容的 25%，于是若设库容起初仍为 100 个单位，则前六年的库容累积减少量如表 6.2 所示。一般说来，若设初始库容 a 等于 100 个单位，r 为每年库容变化率，则剩余库容的几何数列中的逐邻项为：

$$a,a(0.75),a(0.75)(0.75),a(0.75)(0.75)(0.75),\cdots,$$

即

$$a,ar,ar^2,ar^3,ar^4,ar^5,\cdots$$

表 6.2　水库库容的减少，其速率保持不变，但年库容减少量递减

年度 (x)	0	1	2	3	4	5	6
剩余库容	100	75	56.25	42.19	31.64	23.73	17.80
年减少量	0	25	18.75	14.06	10.53	7.91	5.93

凡是与该特定序列相对应的数列均为几何数列。在该特例中，历时(x)以后的剩余库容(y)可以表示成指数函数 $y=100(0.75)^x$。

下面列举几个简单的例子，同时分别给出 a 值和 r 值及其对应的指数函数：

$a=1,\ r=2$	1,2,4,8,16,32,64,128	$y=2^x$
$a=1,\ r=10$	1,10,100,1,000;10,000	$y=10^x$
$a=3,\ r=3$	3,9,27,81,243,729	$y=3(3)^x=3^{x+1}$
$a=1,\ r=\frac{1}{2}$	$1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32}$	$y=\frac{1}{2}^x$

每一个数列的第一项(a)，称为起始项，而常数 r 是公比。应当指出，数列中的第 n 项为 ar^{n-1}。读者可以看到，上述诸函数的曲线形式与指数函数 $y=e^x$(图 5.7)极其相似。

还有一个自然地理学中的例子会有助于进一步区分这两类数列，并把它们与对应的函数联系起来。在土壤学和沉积学整个领域均采用粒级 ϕ 表示土粒大小。该粒级是秩次粒级；它试图把土粒类型的简单的文字描述，即符号粒级(粗粉粒，细沙粒，粗粘粒等) 与各种不同的粒径联系起来。土粒描述，土粒粒径和 ϕ 值之间的关系示于表 6.3。文字描述非常简单，但应用很有限，土粒很小而粒径的微小变异又会使全然不同的自然制约系统发生作用时尤其如此。例如，若粒级 ϕ 基本上是算术数列，其中 $a=9$，且 $d=-1$，因而逐邻级范围分别从 9,8,7, 6 等开始，则对应的粒径范围(毫米) 采取几何数列形式，其诸项随诸 ϕ 单位项的减小而增大。对于该几何数列来说，$a=0.00195$，$r=2$，所以，仍然就每一级的下限而言，有：0.00195,0.0039,0.0078,0.0156 等。ϕ 值为8.0，表示粒径为 0.0039 毫米，ϕ 值为0.0，表示粒径为 1.0 毫米，ϕ 值为 -8.0，表示粒径为 256 毫米。表 6.3 中土粒分级单元大小随着粒级向上递升而增大，这样就间断成数列。然而如果我们把“小漂砾”级和“中砾” 级分别再分成四级和两级，则就会发现在二数列中 d 值和 r 值均被保留下来：$\phi=-2.0$ 至 -3.0 对应于粒径 4.0 至 8.0 毫米；$\phi=-3.0$

表 6.3 土粒的粒级 ϕ

描 述	粒 径 (毫米)	单 位
巨砾	256	−8.0
中砾	256 至 64	−8.0 至 −6.0
小漂砾	64 至 4	−6.0 至 −2.0
团粒	4 至 2	−2.0 至 −1.0
超粗沙粒	2 至 1	−1.0 至 0.0
粗沙粒	1 至 0.5	0.0 至 1.0
中沙粒	0.5 至 0.25	1.0 至 2.0
细沙粒	0.25 至 0.125	2.0 至 3.0
超细沙粒	0.125 至 0.0625	3.0 至 4.0
粗粉粒	0.0625 至 0.0312	4.0 至 5.0
中粉粒	0.0312 至 0.0156	5.0 至 6.0
细粉粒	0.0156 至 0.0078	6.0 至 7.0
超细粉粒	0.0078 至 0.0039	7.0 至 8.0
粗粘粒	0.0039 至 0.00195	8.0 至 9.0
中粘粒	0.00195 至 0.00098	9.0 至 10.0

至 −4.0 对应于粒径 8.0 至 16.0 毫米，等等。

ϕ 值与粒径之间的完全序列，可以表现成一个以粒径表示的 ϕ 的函数。使用上述记号，对于粒级 ϕ 有：

$$\phi = dx + a,$$

式中 x 代表由某一个粒径分级单元至另一个对应单元的变异，故：

$$\phi \simeq 9 - x \tag{6.1}$$

而对于粒径(D)有：

$$D = ar^n = 0.00195(2)^x \tag{6.2}$$

由此方程得：

$$\log D = \log 0.00195 + x\log 2$$

和

$$x = \frac{\log D - \log 0.00195}{\log 2}$$

$$= -3.32\log D - (-2.71/0.3010)$$

$$\therefore\ x = -3.32\log D + 9.0$$

将 x 代入方程(6.1)，则有：

$$\phi = -3.32 \log D$$

此方程乃是一个关联着粒径与其 ϕ 值的连续函数。

习题 6.1

试确定下列诸数列是几何数列，还是算术数列，并求出对应的 a、r 或 d 值。

6.1.1 2.50, 1.25, 0.00, −1.25, −2.50, …

6.1.2 $2x$, $3x$, $4x$, $5x$, $6x$, …

6.1.3 6, 36, 216, 1296, 7776, …

6.1.4 2.1, 8.4, 33.6, 134.4, 537.6, …

6.1.5 −3.0, −1.5, −0.75, −0.375, −0.1875

6.1.6－6.1.10 试算出以上数列中每一列的第八项和第十项。

第二节 级 数

数列在自然地理学中的主要应用在于，数列论一般可以通过二项式定理(本章后面和下一章)应用到比较高级的一些方法，例如积分法(第八章)和概率论。数列很少直接应用到自然地理学本身。数列在数学中的最有效的应用是，通过一个数列中的所有各项相加，可以得出一个级数。例如，$a+(a+d)+(a+2d)+\cdots$是一个算术级数；而 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots$是一个几何级数。级数可以是有限级数，也可以是无限级数。例如，我们想要计算以 P_m(其中 m 代表项的号数) 表示的某一数列中所有各项之和。这时我们可以将该级数表示为：

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} P_m$$

它所表示的展开式为：

$$P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+\cdots+P_\infty$$

其中 $n=\infty$，这样的级数称之为无限级数。因此，按定义，有限级数乃是在有限区间进行展开的级数，例如：

$$\sum_{m=1}^{m=10} P_m = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \cdots + P_{10}$$

和

$$\sum_{m=12}^{m=20} P_m = P_{12} + P_{13} + P_{14} + \cdots + P_{20}$$

有一些几何级数的展开式对于确定象 e 这样的一些数学常数和象 $\sin x$ 这样的三角函数值（这在本章后面会看到）说来是特别重要的。不过我们首先要来看看算术级数和几何级数的求和方法。

第三节　算术级数的和

根据前面的定义，算术级数 P_m 的展开式可以表示为：

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + \cdots + (a+(n-1)d) \qquad (6.3)$$

在该表达式中共有 n 项，故其末项必然含有 $d(n-1)$。因而上式即可简化为：

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = na + d + 2a + 3d + 4d + 5d + \cdots + (n-1)d \qquad (6.4)$$

因为共有 n 项含 a，仅剩 $(n-1)$ 项含 d。将诸项的顺序颠倒，则该式可以写成另一形式：

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = na + (n-1)d + (n-2)d + (n-3)d + \cdots + 3d + 2d + d \qquad (6.5)$$

方程(6.4)与(6.5)相加，则有：

$$2\sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + d + (n-1)d + 2d + (n-2)d + \cdots$$
$$+ (n-1)d + d$$

因而：

$$2\sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + nd + nd + nd + nd + \cdots + nd$$

共有$(n-1)$项含 nd，故：

$$2\sum_{m=1}^{m=n} P_m = 2na + (n-1)\,nd$$

$$\therefore \quad \sum_{m=1}^{m=n} P_m = n\left(a + \frac{(n-1)d}{2}\right) \tag{6.6}$$

然而实际上我们可以看出，将大括号内的 a，n 和 d 各项重新组合，则得：

$$\sum_{m=1}^{m=n} P_m = n\left(\frac{a + (a + (n-1)d)}{2}\right) \tag{6.7}$$

即有限算术级数 P_m 中所有各项之和可以简单地表示为项数乘以首、末项的平均数。例如，对于以 $a=1$ 和 $d=1$ 确定的一个级数来说，其第一项至第十项的和为

$$10\frac{1 + (1 + 9 \times 1)}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

如果级数可以无限展开，则有限个项的和称为部分和。例如，在上一例中就有级数至第十项的部分和。类似地，我们可以求出算术级数任何项列的和，所以就同一级数而言，该级数由第八项至第十五项（含第八项和第十五项）的部分和（即共八项：8，9，10，11，12，13，14，15）为：

$$8\frac{(1+7) + (1+14)}{2} = 8 \times 11.5 = 92$$

或者更一般地表示为：

$$\sum_{m=b}^{m=c} P_m = (c-b+1)\frac{(a+(b-1)d)+(a+(c-1)d)}{2}$$

习题 6.3

试计算下列算术级数在规定区间的和：

6.3.1 $a=2$, $d=3.5$, $m=1$ 至 10

6.3.2 $a=-0.2$, $d=-2$, $m=1$ 至 6

6.3.3 $a=1$, $d=6$, $m=5$ 至 7

6.3.4 $a=-1$, $d=0.2$, $m=3$ 至 10

6.3.5 $a=4$, $d=-0.2$, $m=8$ 至 14

第四节　几何级数的和

由几何级数的展开式还可以得出其它重要结果。运用这类级数的一般展开式，有：

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m = a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^{n-1} \qquad (6.8)$$

现将方程(6.8)两边同乘以 r，则：

$$r\sum_{m=1}^{m=n} S_m = ar+ar^2+ar^3+ar^4+\cdots+ar^n \qquad (6.9)$$

再由方程(6.8)减去(6.9)，有：

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m - r\sum_{m=1}^{m=n} S_m = a-ar^n$$

$$\therefore \quad \sum_{m=1}^{m=n} S_m(1-r) = a(1-r^n)$$

$$\therefore \quad \sum_{m=1}^{m=n} S_m = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \qquad (6.10)$$

例如，该几何级数(其中 $a=0.1$，且 $r=2$) 中前五项的和可以表示为：

$$\frac{0.1(1-2^5)}{(1-2)}=\frac{0.1-3.2}{-1}=3.1$$

严格说来，这样一个几何级数直至无限的完全展开式，或者一个算术级数直至无限的和，是不可能存在的，因为实际上可以证实，由于展开式中已经有无限个项，而在许多这种级数中每一项的值又均大于一，故所有项的和乃是一个大于无限大的数。我们称这种趋于无限大的几何级数为发散的。

然而现在来考察 $-1<r<+1$ 的几何数列。在该级数的展开式中，相继的诸项值均随 r 的自乘幂指数增大而减小。兹举例说明，若 $r=0.5, r^2=0.25, r^3=0.125, r^4=0.0675$，等等，则这时我们可以说，在至 ar^n 的项列中，当 n 趋于无限大时，r^n 值本身趋于零。因此在方程(6.10)中，当 r^n 趋于零，且 $(1-r^n)$ 趋于一时，该级数的和的表达式变为：

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m=\frac{a}{1-r} \text{ 就 } -1<r<+1 \text{ 而言} \qquad (6.11)$$

完全展开式的和在该 r 区间不再取决于 n，因而可以认为展开式具有一有限值。例如，若 $a=64$ 且 $r=0.5$，则展开式的和为：$64/0.5=128$。然而应指出，若利用该数列的前十项，则前五项的部分和为124，而所有十项的和为127.875。如果将 $n=10, a=64$ 和 $r=0.5$ 均代入方程(6.10)，则可以得出相同的值。该级数的前十项为：

$$64, 42, 16, 8, 4, 2, 1, 0.5, 0.25, 0.125$$

整个级数的和，只能是近似的，因为要涉及无限个项。于是很明显，该级数所具有的特性与上一章介绍的一些函数的渐近曲线类似。该级数展开式趋近于级数的和，而只有在 n 本身达到无限大时才能达到级数的和。因此，我们称这种级数为收敛的，且在此情况下它的收敛和为128。

期前降水指数(P_a)是自然地理学中特别有用的一个收敛几何

级数的例子。对于该指数来说，级数中的常数 r 值往往可以任意选定。不过级数必须反映出，每一日降水量的影响都是随时间的推移而递减的，所以 $0<r<1$。我们可以任意确定，每一日降水量的影响均为后一日降水量的一半。这样一来，在几何级数中就有 $r=0.5$，所以如果 P_t 为 t 天前的总降水量，并且对于十天内的总降水量表示为：

$$\sum_{t=1}^{t=10} P_t$$

那么加到该级数中每一日降水量上的权数取下列形式：

$$P_a=\sum_{t=1}^{t=10} P_t r^t \quad (0<r<1)$$

式中 $t=1$ 是前一天，$t=10$ 是前十天。若 $r=0.5$，则有：

$$P_a=P_1+0.5P_2+0.25P_3+0.125P_4+\cdots+0.0009765P_{10}$$

r 值可以因地区条件而不同。例如，如果我们利用指数建立河道流量模型，那么在水情"湍急"的流域，由于对降水量反应敏感，可以代入比较小的 r 值。而在由基本径流补给的河流的分流量很大的其他流域，由于对降水过程反应比较迟钝，可以选用较大的 r 值。

本章前面已经指出，在一些级数与函数之间存在有某种相似性。然而就几何级数而言，如果我们仍然假设 $-1<r<+1$，则由方程(6.8)可知：

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m=a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}$$

还由方程(6.11)知：

$$\sum_{m=1}^{m=n} S_m=\frac{a}{1-r}$$

这样，若命 $a=1$，则可得出下列形式的函数展开式：

$$y=\frac{1}{1-r}=(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1} \qquad (6.12)$$

此式在下一节：二项式定理中将作进一步讨论。

习题 6.4

试计算下列诸几何级数的和，直至所指出的诸项：

6.4.1 $a=2$, $r=0.2$ 直至无限

6.4.2 $a=0.5$, $r=-0.5$ 直至无限

6.4.3 $a=7$, $r=2$ 至第十项

6.4.4 $0.2+0.6+1.8+5.4+16.2+\cdots$至第十项

6.4.5 $0.8+0.256+0.082-0.0262+\cdots$直至无限

第五节 二项式定理

在上一章我们介绍了多项式的概念。现在已经很明显，简单型多项式：$a+bx+cx^2+dx^3$ 等与方程(6.8)给出的几何级数一般展开式极其相似，只是对于几何级数而言，多项式中的 a、b、c 和 d 诸值全都相等。第五章还曾指出，有许多多项式可以按乘法分配律(第一章)因式分解成$(a+b)(c+d)$形式等。当每一个括号内的数值对均相同，也就是说当我们对表达式 $(a+x)^n$ 的展开感兴趣时，应用这些项特别有效。这样的表达式称之为二项式；二项式展开(整个表达式自乘 n 次)与概率研究(第七章)有特殊关系。就概率而言，$(a+x)$值总等于 1，例如当 a 表示旋转硬币降落正面的概率、而 x 为其降落背面的概率时即是如此。在仅有一枚硬币的特定情况下，每一次旋转后正、反面的出现概率相等，因而我们可以认为$a=0.5, x=0.5$。这在第七章将作进一步讨论。

我们的讨论暂且仅限于研究二项式 $(a+x)^n$ 的展开。作为一个简单例子，基本二项式当 $n=2$ 时展开如下：

$$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

类似地，$(a+x)^3$ 和 $(a+x)^4$ 的展开式分别为：

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$$

$$(a+x)^4 = a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$$

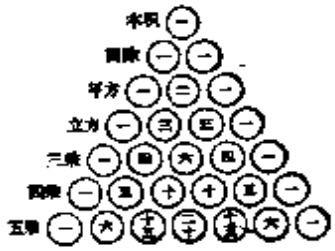
在所有场合，展开式中的项数随着 n 值的增大而增加。然而应指出，a^n 和 x^n 项仅仅各有一项，并且在每一场合所有各项的系数相对于中间位置都是对称的：对于 $n=2$ 有 1,2,1；对于 $n=3$ 有 1,3,3,1；对于 $n=4$ 有 1,4,6,4,1。这些系数，称之为二项式系数。还应指出，每一个展开式中的总项数总等于 $n+1$。如果我们把所有二项式系数均表示为 C_n^r（${}^nC_r$、亦可二者择一地记为 ${}_nC$ 或 C_n^r）①，即共 n 项中的第 r 项，那么在 $n=2$ 时 $C_2^0=1, C_2^1=2$ 和 $C_2^2=1$。对于 $n=3$ 而言，$C_3^0=1, C_3^1=3, C_3^2=3$ 和 $C_3^3=1$。

正如在系数为 C_n^r 的每一展开式中均具有对称性一样，在随着 n 的递增而来的相继的诸展开式的常数项中也均具有对称性。这些常数项既有几何对称性，又有算术对称性，结果组成帕斯卡三角形②。当 n 颇大时，运用帕斯卡三角形可以求出 C_n^r 值，而不用进行繁复的因数连乘。对于 $n=1$ 至 $n=10$ 的部分帕斯卡三角形 见下一页。应当指出，$(n+1)$ 次展开式的诸常数值总可以通过该三角形中 n 次展开式诸常数上方的两个数值相加而得出；例如当 $n=6$ 时，系数值 $C_6^2 = C_5^1 + C_5^2 = 5 + 10 = 15$。

---

①按照国内惯例，我们以后均采用 C_n^r——译者。

②我国南宋时期数学家杨辉在其《详解九章算法》(1261 年)中记载着有关二项系数的研究。在二项式定理中，当 n 分别取 0,1,2,3,4,5,6,时，其二项系数表示成如图所示三角形，即所谓"杨辉三角形"。



法国人帕斯卡也有类似结果(1650 年)，故外国书刊中称之为"帕斯卡三角形"，但比杨辉要晚近四百年。

尽管运用帕斯卡三角形计算系数 C_n^r，对按常规方法进行诸项繁复相乘说来是一项改进，但这样求系数值仍然比较麻烦。每一个系数值显然与其在级数中的位置(即 r 值)和 n 值有关系。系数 C_5^3 实际上可以表示为：

$$\frac{3\times 2}{2\times 1}=3$$

并且 C_5^3 可以表示为：

$$\frac{5\times 4\times 3}{3\times 2\times 1}=\frac{60}{6}=10$$

而且 C_7^5 可以表示为：

$$\frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{7\times 6}{2}=21$$

余类推。这里我们引用另一个符号，在数学和概率统计学中很通用，即：

$$4\times 3\times 2\times 1=4!\quad(\text{“四的阶乘”})$$

$n=1$ 1
$n=2$ 1 2 1
$n=3$ 1 3 3 1
$n=4$ 1 4 6 4 1
$n=5$ 1 5 10 10 5 1
$n=6$ 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$ 1 7 21 35 35 21 7 1
$n=8$ 1 8 28 56 70 56 28 8 1
$n=9$ 1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$n=10$ 1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

若用此符号，则每一个系数值的一般形式即表现为：

$$C_n^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$$

$$=\frac{n!}{r!(n-r)!}\qquad(6.13)$$

如果我们现在把此式应用于 $(a+x)^4$ 展开式的系数，则可得出：

$$C_4^0=\frac{4!}{0!(4!)} \qquad C_4^1=\frac{4!}{1!(3!)} \qquad C_4^2=\frac{4!}{2!(2!)}$$

$$C_4^3=\frac{4!}{3!(1!)} \qquad C_4^4=\frac{4!}{4!(0!)}$$

按照惯例 $0!=1=1!$ 因而对于 C_4^r 而言利用此法计算出的诸系数为：1，4，6，4，1。

此外，二项式级数的展开式必定还伴有括号内每一个值的幂指数序列；后者取下列形式：

$$a^n, a^{n-1}x, a^{n-2}x^2, a^{n-3}x^3, a^{n-4}x^4, \cdots, a^{n-r}x^r, \cdots, x^n$$

例如，略去诸二项式系数，$(a+x)^5$ 的展开式则含有 $a^5, a^4x^1, a^3x^2, a^2x^3, a^1x^4, x^5$ 诸项。因此，完全的二项式展开可以写为：

$$(a+x)^n=a^n+\frac{n!}{(n-1)!}a^{n-1}x+\frac{n!}{2!(n-2)!}a^{n-2}x^2+\cdots$$

$$+\frac{n!}{r!(n-r)!}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n \qquad (6.14)$$

这个公式通常称之为二项式定理，此定理在概率中的应用实例可以在第七章中找到。

二项式展开可以进一步推广而得出两个展开式，我们在第八章将应用它们讨论积分的一些问题。如果我们将二项式定理的展开式(方程(6.14))写成另一种更便于运用的形式：

$$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}a^{n-r}x^r+\cdots+x^n \qquad (6.15)$$

然后通除以 a，则有：

$$a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n=a^n\left[1+n\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{x}{a}\right)^3+\cdots\right.$$

6.5.3　　$(5y+2x)^4$

6.5.4　　$(0.5+x)^{-1}$ 直至第五项

6.5.5　　$(x+2)^4$

第六节　级数的其它例子

我们可以进一步运用二项式定理来确定在第三章和第五章曾经遇到过的一些数学函数。方程(6.15)的进一步推广在于推求数学常数 e。为了求出该常数，可以利用下列式子当 n 趋于无限大时的展开式

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

可见，通过计算有限个项的部分和，只能逼近它的值，因为该级数是收敛的。然而，完全可以将其计算到小数点后面四位，即一般查表所给的和计算所用的精度。将 $a=1$ 和 $x=1/n$ 代入方程(6.15)给出的二项展开式，即可求出该展开式。于是有：

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\cdot 1^{n-1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}1^{n-2}\left(\frac{1}{n}\right)^2\\ &\quad+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}1^{n-3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots+\frac{1}{n^n}\\ &=1+1+\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{1}{2!}+\frac{n}{n}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n}\frac{1}{3!}\\ &\quad+\cdots+\frac{1}{n^n}\end{aligned}$$

于是，当 n 趋于无限大，且分式 $(n-1)/n$ 和 $(n-2)/n$ 趋向于 1 时，e 的展开式为：

$$\begin{aligned}e&=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\cdots\\ &=1+1+0.5+0.16667+0.04167+0.00833\end{aligned}$$

$$+0.00139+0.00020+0.00003 \qquad (6.18)$$

直至第八项，故：

$e=2.71829=2.7183$ 至小数点后面四位

加上其它诸项对常数计算值的影响很小。e 值为无理数，级数仅在无限处收敛于其真值。

我们可以用同样方法将函数 e^x 展开，进而得出指数级数

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots \qquad (6.19)$$

或者将 e^{-x} 展开，进而得出振荡级数：

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+\frac{x^r}{r!}+\cdots \qquad (6.20)$$

这两个级数均为马克劳林级数的实例。马克劳林证实，在级数可以表示成一幂级数而且是可微的场合，如果该级数的和为 $S=f(x)$，并使用第五章使用过的导数记号，则有

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\cdots \qquad (6.21)$$

可见，若 $f(x)=e^x$，$f'(x)=e^x$，等等，则：

$$e^x=e^0+xe^0+x^2\frac{e^0}{2!}+x^3\frac{e^0}{3!}+\cdots$$

$$=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

类似地，我们可以运用马克劳林级数的展开式来证明，以弧度为单位的任何角度的正弦都可以表示成下列式子：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots \qquad (6.22)$$

例如，若 $x=30$ 度 $=0.5236$ 弧度，则

$$\sin x=0.5236-\frac{0.5236^3}{6}+\frac{0.5236^5}{120}-\cdots$$

$$=0.5236-0.0240+0.0003\cdots \qquad (6.23)$$

$=0.49$（实际值为 0.50）

这仍然是一个振荡级数，不过，指出该展开式的一个有用的性质是很重要的，即对于正弦值来说，当 x 很小，例如 $x\to 0$ 时，$\sin x\to x$，因为在展开式中仅有第一项对角度的大小是有意义的（方程(6.22)）。这样一来，大约小于 0.1 弧度(约六度)的任何角度的正弦都可以用弧度单位本身精确地约计到小数点后面四位，因为对于 $x=0.1$ 而言，展开式中的第二项仅从该值中减去 0.0002。$\cos x$ 的展开式当然可以通过求关于 x 的导数，并代入方程(6.21)而求出，所以：

$$\cos x = 1-\frac{3x^2}{3!}+\frac{5x^4}{5!}-\frac{7x^6}{7!}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad (6.24)$$

这里我们必须指出，一个级数的导数乃是其所有各项的导数。其它三角函数也都可以作为展开式加以确定，不过展开式的各个项会变得更为复杂。我们可以给出 $-\pi/2<x<+\pi/2$ 区间的 $\tan x$ 的展开式如下：

$$\tan x = x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots \qquad (6.25)$$

有一些其它函数的比值，可以运用二项式定理来求取。特别是可以推出求对数值用的展开式。利用这些展开式，可以不用查表(如需要时)即可计算对数值。这一方面的证明虽然不属于本书的讨论范围，但是记住下列一点仍是有益的，即给出振荡级数：

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \qquad (6.26)$$

则一些数的自然对数可以用 $\log_e(1+x)$ 的展开式求出。此式仅对 $-1<x<+1$ 而言是正确的，并且仍然可以由马克劳林级数推出。因而，自然对数可以就零至 1.9 区间内的任何值而求出。例如，命

$x=-0.4$，则可写出：

$$\log_e 0.6=\log_e(1.0-0.4)$$

$$=-0.4-\frac{0.16}{2}-\frac{0.064}{3}-\frac{0.00256}{4}-\cdots$$

$$=-0.5056=\bar{1}.4944$$

类似地，命 $x=0.2$，有：

$$\log_e 1.2=\log_e(1.0+0.2)$$

$$=0.2-\frac{0.04}{2}+\frac{0.008}{3}-\frac{0.0016}{4}$$

$$=0.1823$$

许多诸如此类的展开式都可以通过综合运用每一函数的基本定义而推出。例如，两个双曲函数(方程(5.26)和(5.27))就可以运用各自的定义通过 e^x 和 e^{-x} 而计算出来。于是：

$$\sin hx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)-\frac{1}{2}\left(1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(2x+\frac{2x^3}{3!}+\frac{2x^5}{5!}+\cdots\right)$$

$$=x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots \qquad (6.27)$$

类似地，

$$\cos hx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots \qquad (6.28)$$

形式更复杂的函数，可以类似地求解。例如 $e^{\sin x}$ 的展开式可以根据 e^x 和 $\sin x$ 两者的展开式的组合而求出。这一方面的计算会是很冗长的，而 $e^{\sin x}$ 的展开式结果为：

$$e^{\sin x} = 1 + x\frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} + \frac{8x^5}{6!} - \cdots \qquad (6.29)$$

习题 6.6

试运用第六章第六节给出的展开式求出下列诸值，并根据有关用表验证答案：

6.6.1 $\sin 56^\circ 02'$

6.6.2 $\log_e 1.7240$

6.6.3 $\tan 0.7854$ 弧度

6.6.4 e^3

6.6.5 $e^{\sin x}$（其解为方程(6.29)）

第七章 概 率 论

在上一章(第六章第五节)讨论二项式级数时，简单地介绍了一些与统计学有关的数学理论。概率论乃是数学在自然地理学上应用比较广泛的一个方面。了解概率论对掌握许多参数统计方法是很重要的，而我们迄今为止在本书中所涉及的数学基础知识，对于基本上掌握概率论说来是充分的。有许多场合，对来自自然地理学的数据进行分析可以发现，个别事件的发生频率遵从大家熟悉的概率论定律，而这些定律的证明则是数学问题，而不是统计学问题。我们在这一章讨论的是概率论和概率分布以及概率论在自然地理学中的一些应用。这些应用具有双重的意义：其一是统计上的意义，即对运用统计方法得出的结论的显著性作出评价；其二是直接的意义，例如估计发生严重干旱或洪水的可能性。我们在第五章已经介绍了概率论在一些统计方法上的应用，而且一些基本统计分析方法的概述可以在附录五中找到。概率论的这些问题，戴维森作了进一步阐述(参见戴维森 1978 年的著述)。

在概率论直接应用到自然地理学方面，有两种不同性质的概率可加以说明。其一，有一种概率可以通过仪器测量，根据经验而得出，例如经验概率，可以就个别河道流量根据长期野外测量而得出。其二，理论概率，或先验概率，往往可以假设，例如，一枚无偏硬币每旋转一次后降落正面或反面的机会是相同的；因此，我们可以认为，这样的一枚硬币旋转后降落正面的机会为 50%，即其概率为 0.5；而降落反面的机会也一样。类似的判别准则可以对河流推移质的运动提出来。河流流速一旦超过了取决于推移质粒径分布的临界值，就会发生推移质的运动。现在我们在一个假想的地理区取一个河流总体。在任何情况下，一些河流具有静态的推

移质；而其它河流具有动态的推移质。为了方便和明确起见，假设对于任何河流的全长而言，推移质不是静态的就是动态的。这两个条件是互不相容的，因为河流或者有，或者没有静态的推移质。在一些特殊条件下可以设想，恰好有50%的河流具有动态的推移质；同样地恰好也有50%的河流具有静态的推移质。然而，带有动态推移质的河流和带有静态推移质的河流所占的比例通常并不相等，而这种有偏性在从该区随机抽取任何河流的时候，都会影响到每种类型河流的出现机会。

第一节　概率空间

概率论的一切概念都能用集(亦称集合)来阐述，因为集可以限定通常以所谓的维恩氏图(*Venn diagrams*)形式描述的"概率空间"。现在我们就最简单的情况来说明存在/不在或黑/白这一基本情形，例如说明一个包括上述地区内所有河流的集S。不过，该集S本身不应和现实的地理区相混淆，这个集完全是一个抽象的概念。我们设想在此集内会有两个互不相容的子集，一为静态的推移质，一为动态的推移质，其面积分别与各自的出现概率成比例(图7.1)。由于集S代表所有河流，故其面积显然相当于概率$P(S)$为1.0，所以若该二子集分别以A和$\sim A$("非A")表之，则

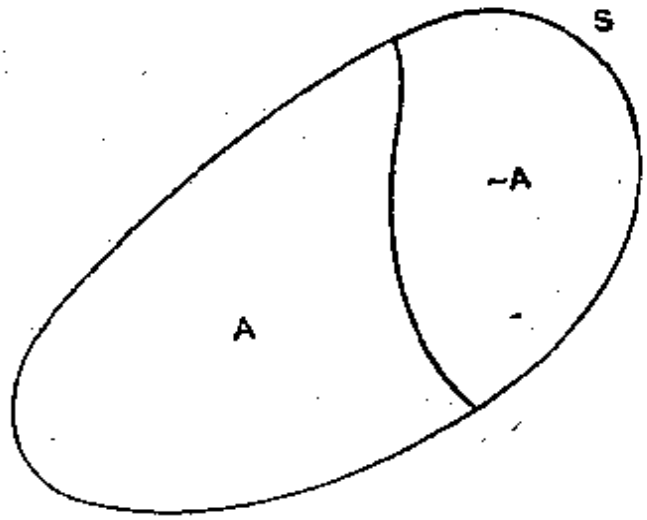


图7.1　概率空间：互不相容子集

$$P(A)+P(\sim A)=1.0 \qquad (7.1)$$

和：

$$P(A)=M(A)/M(S) \qquad (7.2)$$

式中$M(A)$为子集 A 的面积，而 $M(S)$为子集 S 的面积。$P(\sim A)$可以类似地加以表示。这样，我们就根据含有互不相容事件的二子集的相对面积确定出概率。

然而，另外还有一些河流特征，不一定是互不相容的，例如根据明文规定的标准，任一河流可以是污染的或未污染的，而污染河流又可以是季节性的或常流的，不过，在初次组合时我们当然不希望有这样的情形！于是在集 S 内，可以再引用两个子集，B（污染的）和 C（季节性的）。在集 S 内不含于两者之中的面积，与任一河流（既不是季节性的、又不是污染的）的概率，即 $P(\sim B \cap \sim C)$ 成比例（图 7.2）；这里，记号 ∩ 在集合论中是用来表示两者同时发生，即“与”或者“交”，而 ∪ 则表示两者至少有一个发生，即“或”或者“联”。可见，重迭面积表示既是季节性的又是污染的河流的概率，即 $P(B \cap C)$ 或 $P(BC)$。总阴影面积代表不是污染的就是季节性的河流的出现概率。现在我们应当讨论一下这些不同组合的概率的计算方法。很明显，包括所有事件的总概率必然为 1.0，即 100%，也就是由集 S 所描绘的面积。如果在子集 B 和子集 C 之间不存在重迭，则不是这个就是那个的出现概率应当为 $P(B)+P(C)$，而与面积 $M(B)$和 $M(C)$成比例。然而就图 7.2 所示一例而言，该计算还应当包括面积 $M(BC)$，因而概率 $P(B \cap C)$ 可

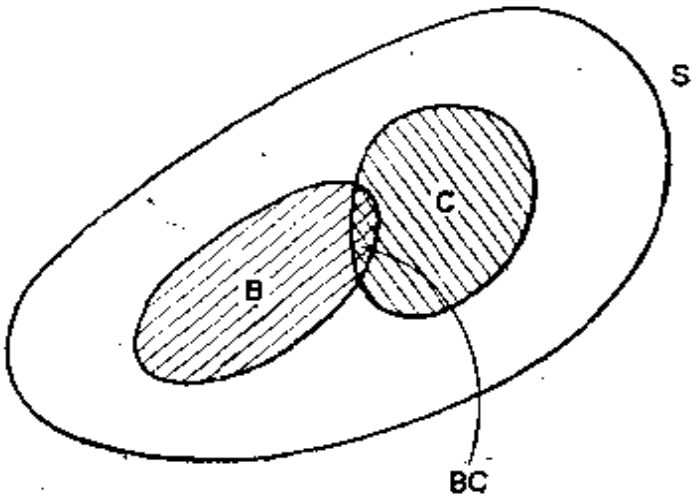


图 7.2 概率空间：重迭子集

以表示成下式：

$$P(B \cap C) = \frac{M(B) + M(C) - M(BC)}{M(S)}$$

$$= P(B) + P(C) - P(BC) \qquad (7.3)$$

这里讨论一下不是互不相容的概率，也是为了介绍条件概率。图7.2中的子集 B 与子集 C 之间的重迭面积表明，有一小部分河流既是污染的又是季节性的。任一污染河流(B)是季节性的(C)概率和任一季节性的河流(C)是污染的(B)概率可以分别表示为 $P(C \mid B)$和 $P(B \mid C)$。这二者都是条件概率，即 C 是否是 B 的概率和 B 是否是 C 的概率。根据图7.2表明，我们不再仅仅涉及集 S，而且还涉及子集 B 和子集 C 的相对面积，特别是涉及二者的重迭部分 BC。于是，就 $P(B \mid C)$的一般计算而言，有：

$$P(B \mid C) = \frac{M(BC)}{M(C)} = \frac{M(BC)/M(S)}{M(C)/M(S)}$$

$$= \frac{P(BC)}{P(C)} \qquad (7.4)$$

而对于 $P(C \mid B)$，则有

$$P(C \mid B) = \frac{M(BC)}{M(B)} = \frac{M(BC)/M(S)}{M(B)/M(S)}$$

$$= \frac{P(BC)}{P(B)} \qquad (7.5)$$

该条件概率在贝叶斯定理(*Bayes's Theorem*)中作了进一步阐述。方程(7.5)的两边同乘以 $P(B)$，则有：

$$P(C \mid B)P(B) = P(BC)$$

再将 $P(BC)$代入方程(7.4)，则得：

$$P(B \mid C) = \frac{P(C \mid B)P(B)}{P(C)} \qquad (7.6)$$

这就是贝叶斯定理，它把条件概率 $P(B \mid C)$和 $P(C \mid B)$两者结合起来。

(4.5%)。我们运用贝叶斯定理还可以说，任一热日也是湿日的概率为：

$$P(B \mid A) = (0.280 \times 0.161)/0.236$$
$$= 0.191 \text{ 即 } 19.1\%$$

现在我们考察一个全然不同的概率集。兹假定，任一是污染的季节性河流的概率与任一是污染的河流的概率一样。这时，我们可以认为，河流是不是季节性的，这对预测它是不是污染的并没有关系，即$P(B \mid C) = P(B)$。既然这样，我们就可以认为二子集B和C是相互独立的；这一术语在第三章就类似的问题已经作了说明。在这些条件下，两者同时发生的概率可以表示成两者各自的概率的乘积，因为：

$$P(B \mid C) = P(BC)/P(C)$$

且 $P(B) = P(B \mid C)$（当两者彼此独立时）

于是： $P(B) = P(BC)/P(C)$

故： $$P(BC) = P(B)P(C) \qquad (7.7)$$

第二节 链 概 率

我们迄今为止所涉及的概率，其出现均与以前的事件无关。独立的概率和相关的概率的差别，我们已经讨论过了。然而会发生这样的情形，其中在前一事件的出现与其相继的事件的出现之间存在有某种相关性。例如，如果设想有一个装有各种颜色的大理石的袋子，那么抽取每块大理石必然会使袋子里的该色大理石的总数减少，相应地也会使下一次抽取时获得该色大理石的概率减小。经过比如十次抽取后的最终出现会取决于以前诸次抽取的出现的累积。迄今为止，我们在论述概率中尚未考察这样形成的“链概率”。为了绝对精确起见，我们现在可以指出概率分析与随

机过程的不同之处。概率过程完全不是随时间而变的，然而随机过程却表明，诸事件的出现顺序对于确定最终的出现是很重要的。在自然地理学中也有许多过程，可以推断它们在一定程度上是随时间而变的。其中大家最熟悉的是模拟过程，它可以组成随机走动来模拟河道网的演变。在组成一随机走动中，任何特定的一步前进的方向决定于随机序列的形成，但是在模拟一河道网时要有一个制约条件，即下一步不能"向上"。很显然，这里就有一个简单的链概率系统，其中前一形成的空间出现会制约着下一形成的出现。关于随机走动本身的详尽论述，读者可以参阅河流地貌学标准教程，例如利奥波德、沃尔曼与米勒(Leopold, Wolman and Miller, 1964)或格雷戈里与沃林(Gregory and Walling, 1973)的著述。随机走动的形成是比较基本的链过程之一。如果对该例进一步定出限制，即在该链中的每一步仅有两种出现是可能的，并且认为每种出现均具有概率值，那么我们就可以确定马尔科夫链。此链已经应用于岩屑坡地的滑动(参见桑尼斯(Thornes, 1971)著文)和日降水(不考虑其量值)的出现率(参见加布里尔与纽曼(Gabriel and Neumann, 1962)著文)。现在我们利用威尔士某一地区的日降水资料来说明日降水的各种不同的持续性和周期性；后者可以用马尔科夫链表达，如同由加布里尔和纽曼最先推演的那样。

马尔科夫链起初是用两个条件概率 p_1 和 p_0 确定的，其中：

$p_1 = P$　　(湿日后是湿日)

且　　$p_0 = P$　　(干日后是湿日)

概率p_0称之为转移概率；即在接连几天中由干日变为湿日的概率。这两个概率当然可以根据一组数据求定。兹假定分析本地区日降水发现，在接连 1,280 天的一个样本当中，有 728 天出现降水，很明显，我们可以根据经验求得出现降水日的总概率(P)为

$$P = 728/1280 = 0.57 \tag{7.8}$$

同理，可以得出条件概率 p_1 和 p_0：

$$p_1 = \frac{\text{湿日后是湿日的总天数}}{\text{湿日的总天数}}$$

$$p_0 = \frac{\text{干日后是湿日的总天数}}{\text{干日的总天数}}$$

湿日后是湿日的总天数为 552 天，干日后是湿日的有 176 天，并且有 552 天干日（由于巧合）。因而，根据经验推出的概率分别为：

$$p_1 = 552/728 = 0.76 \tag{7.9}$$

$$p_0 = 176/552 = 0.32 \tag{7.10}$$

显然，本来是要作出一些非常复杂的推导的，可是某种程度的湿日持续性已经显示了出来。另外要指出，这两个概率的和大于 1.0；它们不是独立的。按定义，湿日后是干日的概率为 $1 - p_1 = 0.24$；同理，干日后还是干日的概率为 0.68。现在我们就能够组成一个以字母表示的至少一天后是湿日或是干日的概率链。该链如图 7.3 所示。湿日后是湿日的概率（即 $P(W \mid W)$）可以 p_1 表之；湿日后是干日的概率（$P(D \mid W)$）可以 $1 - p_1$ 表之，等等。于是，湿日后第二天是湿日的概率可以表示为：

$$\begin{aligned} P_w &= P(W \mid W \mid W) + P(W \mid D \mid W) \\ &= p_1 \cdot p_1 + p_0(1 - p_1) \\ &= 0.76 \times 0.76 + 0.24 \times 0.32 = 0.66 \end{aligned}$$

同理，干日后第二天是湿日的概率为：

$$\begin{aligned} P_d &= P(W \mid W \mid D) + P(W \mid D \mid D) \\ &= p_1 \cdot p_0 + p_0(1 - p_0) \\ &= 0.76 \times 0.32 + 0.32 \times 0.68 = 0.46 \end{aligned}$$

此链内随后的诸概率还用这样的方法计算，那就会是冗长而又乏味的过程，而为了便于计算起见，可以运用就 P_w 和 P_d 推出的下

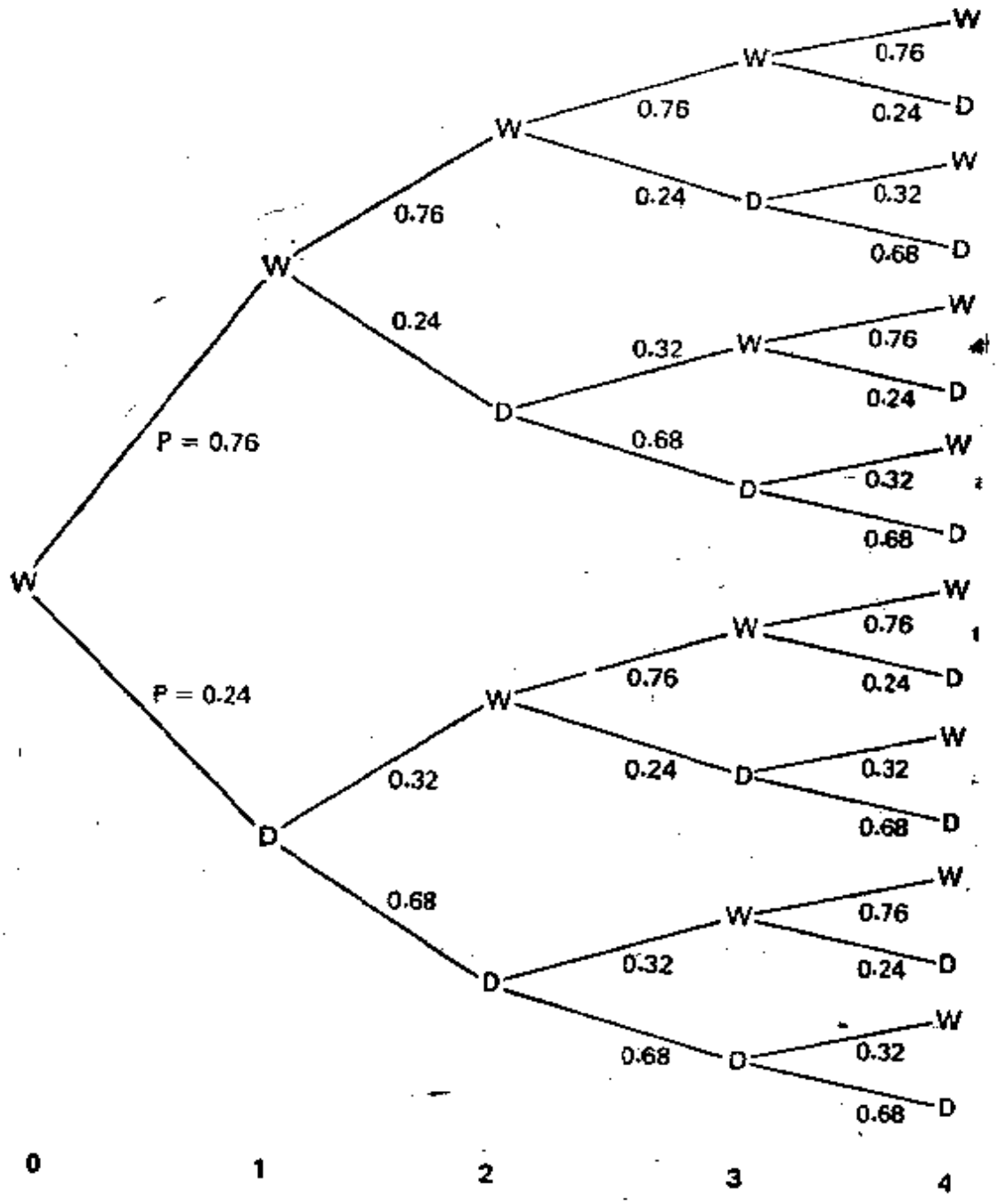


图 7.3 马尔科夫链概率的图示
(就 $i=1$ 至 4 天而言)

列两个方程：

$$P_w = P + (1-P)d^i \tag{7.11}$$

$$P_d = P - Pd^i \tag{7.12}$$

式中 P 为湿日的总概率，而 $d = p_1 - p_0$。在这两种场合，湿日或干日后第 i 天的概率曲线相对于概率 P 都是渐近的。该二曲线如图 7.4 所示。就所用数据的每种场合而言，湿日或干日后第四天是湿日的概率很接近于总概率 P，因而可以认为持续天气显然不超过 $i = 4$ 天。

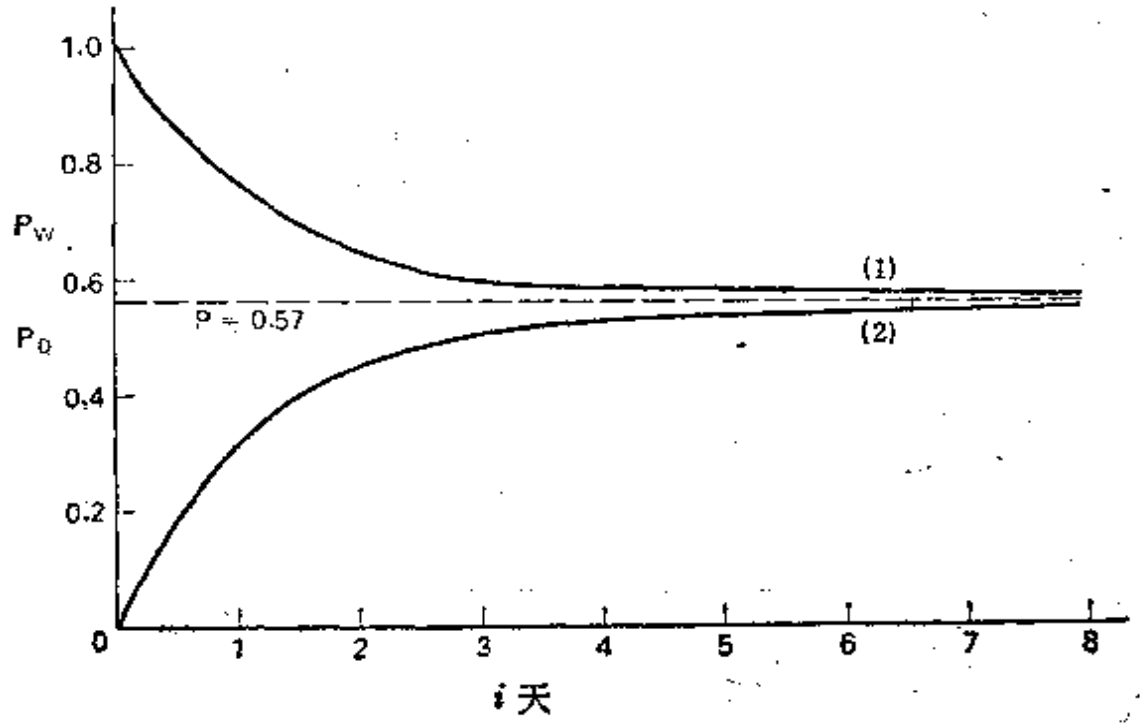


图 7.4 马尔科夫概率

(1) 湿日后第 i 天是湿日的概率　　(2) 干日后第 i 天是湿日的概率

加布里尔和纽曼推导出了另外的链。天气的湿期或干期的概率就是这两个链的直接推广。湿期和干期的概率是运用二项展开式(第六章第五节)推导出的。历时 k 天的湿期的概率相当于每隔 $(k+1)$ 天再现的干期的概率，其为：

$$P_{湿期} = (1 - p_1) p_1^{k-1} \tag{7.13}$$

$$P_{干期} = p_0 (1 - p_0)^{k-1} \tag{7.14}$$

由本例计算结果，历时一天的湿期的概率为 $0.24\ P_1^{1-1}$，即单独出现的湿日的概率；历时三天的湿期的概率为 0.14；历时五天的对

应概率为 0.08；其余类推。历时对应相同的干期的概率，计算结果分别为 0.32，0.15 和 0.07。因此，对观察到的数据进行马尔科夫链拟合表明，历时不到三天左右的干期的可能性比同一历时的湿期要大。若历时超过三天，则湿期的可能性比干期要大。这两个链可以进一步推广，以估算连续的干、湿期（一个周期性指标）的概率。加布里尔和纽曼计算出了历时各为 n 天的连续的湿、干期（$2n$ 天的周期性）的概率，即

$$P_n = \frac{(1-p_0)^{n-1} - p_1^{n-1}}{(1-p_0-p_1)} P_0(1-p_1) \qquad (7.15)$$

将 $p_1 = 0.76$ 和 $p_0 = 0.32$ 代入上式，则可以得出整个历时周期的概率，其值特别小，就 $n = 4$ 天而言，出现的峰值概率为 0.13 。

正如在第五章对曲线拟合所作的说明那样，马尔科夫链所提供的计算方法也必然组成有关的实际随机序列。推导出的链应当对照由数据直接推导出的特定气象事件的概率加以检核。正如作理论上的统计模型拟合的任何尝试时的情形一样，观察到的出现率很少和理论上的出现率正好相符。仅仅借助于马尔科夫链就可以由数据直接推导出初始条件概率（p_1 和 p_0）和总概率 P。所有其推导出的概率都基于一个前提，即其状态仅与前一天的状态有关。为了了解计算出的概率链的拟合优度，只能直接由数据计算出概率，然后两者加以统计对比。如果在使用来自不同出处和地区的数据时发现有完全相符的情形，那么显然可以认为，日降水遵从马尔科夫链模型。加布里尔和纽曼在分析以色列的特拉维夫*的日降水中发现，观察到的频率与计算出的马尔科夫概率几乎相同。

---

* 特拉维夫是巴勒斯坦重要海港，原书把特拉维夫说成是以色列所有——编者

第三节　马尔科夫概率的矩阵解法

矩阵在概率分析领域中的应用乃是矩阵相当广泛的一项应用。这一点将结合马尔科夫概率加以讨论如下。如果把表示连续几天中由湿日或干日的四种可能转换的四个转移概率分别重写为 $P_{ww}=0.76, P_{dw}=0.32, P_{wd}=0.24$ 和 $P_{dd}=0.68$（ww 表示湿日转换到湿日，等等），那么我们就可以写成矩阵形式：

$$\begin{array}{c} \\ \text{(明天)} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.76 & 0.32 \\ 0.24 & 0.68 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{c} \\ \text{(今天)} \end{array} \tag{7.16}$$

如果现在把数天前和数天后的状态（即是说湿日还是干日）表示成对角矩阵：

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} w & d \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

那么任一湿日或干日后第 n 天是湿日或干日的概率就可以概括为下列矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} 0.76 & 0.32 \\ 0.24 & 0.68 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

于是对于 $n=2$ 而言，有：

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 0.76 & 0.32 \\ 0.24 & 0.68 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.76 & 0.32 \\ 0.24 & 0.68 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.58+0.08 & 0.27+0.22 \\ 0.18+0.16 & 0.08+0.46 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.66 & 0.49 \\ 0.34 & 0.54 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.66 & 0.49 \\ 0.34 & 0.54 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是，湿日后第二天是湿日的概率为 0.66，干日后第二天是湿日的概率为 0.49，等等。

第四节　频率分布

马尔科夫链可以表达概率的时间分布。在上面的例子中，概率 $p_1 = 0.76$ 表明，显然有湿日持续的偏向。该链是由一个双向概率序列组成。我们有一个简单的频率分布，其中有 76% 的湿日，其后还是湿日；只有 24% 的湿日，其后是干日。这个频率分布是根据经验确定的，然而我们还可以考察先验概率的频率分布。现在回到骰子和硬币两个例子，一粒骰子的每一面在每次投掷时的出现概率均为 1/6(0.16)，而一枚硬币的每一面的出现概率均为 0.5。兹绘出一个简单图形来说明频率分布，这样的图通常被称为直方图，如图 7.5(1)所示。这里没有使任何一面的频率高于其它各面的偏向。现在我们来考察这样一种情形，即骰子是灌过铅的，以致六点面向上显示的机会频率有所增高(图 7.5(2))。所有概率的和仍然为 1.0，不过，如果说 $P(6)$ 根据经验已经求出，即为 0.25，那么其余五个面共有的总的剩余概率相应地就减小。在这

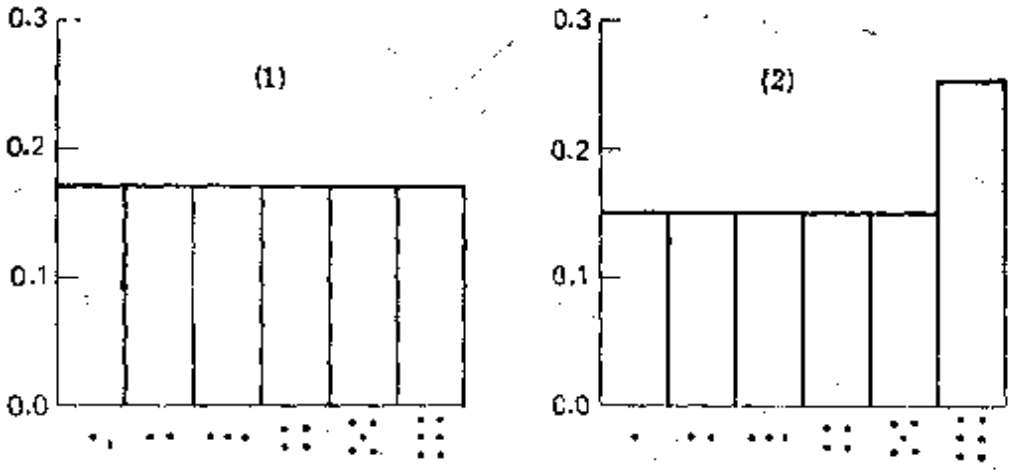


图 7.5　(1) 一粒骰子的无偏概率
(2) 一粒骰子的有偏概率

种情况下，其它五面当中的每一面的出现概率则为(1－0.25)/5或0.15。

在自然地理学中，大多数自然事件的出现频率都是有偏向的。为了证明某一组数据所固有的有偏性，我们可以抽取样本，通常抽取随机样本，并在直方图上绘出大小不同事件的频率，最后得出根据经验推导出的概率的统计估计值。如果再有别的有偏性，那就会是由于仪器不良或抽样不当而引起的误差所造成；正因为如此，我们需要有一些参数统计方法，借以确定样本的代表性，也就是确定就样本所观察到的频率分布是否可能比较精确地代表就整个总体所得到的频率分布。这样的一个直方图的例子如图 7.6 所示。

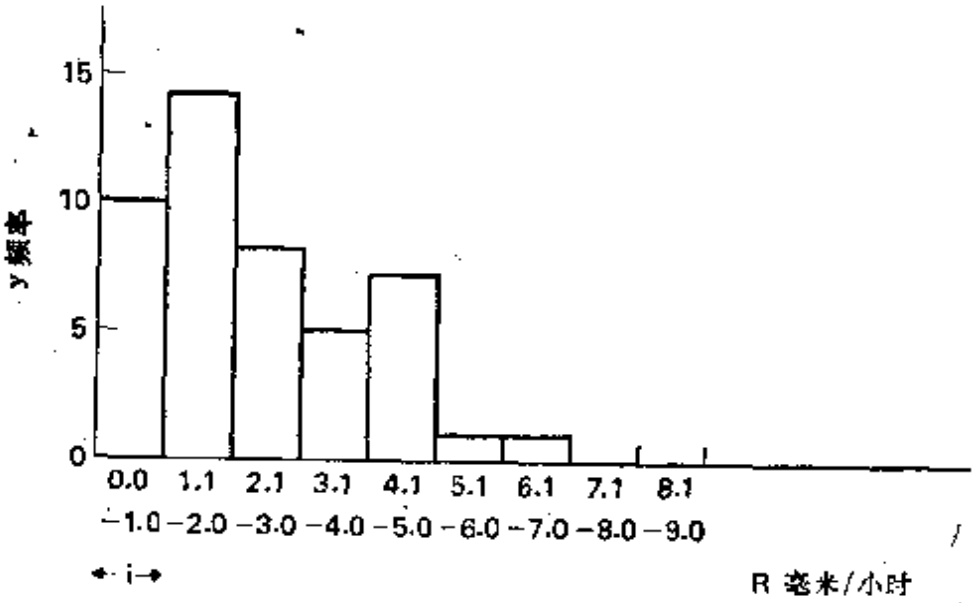


图 7.6　联合王国兰佩特 1973—75 年锋面暴雨最大时降水强度的频率分布

这个例子中的样本是联合王国部分地区一个锋面暴雨序列的最大时降水强度的频率。我们可以直接地、但又非常主观地(因为我们无法从统计学上证实该结论)作出判断，这里显然有标度下限一端诸值的偏向。由于样本的总概率必然为 1.0，直方图上每个柱形内所含的面积与每一量级(0.0—1.0 毫米/小时，1.1—2.0 毫米/小时，等等)的出现概率成比例，故：

$$P \propto fi/N \qquad (7.18)$$

式中 f 为频率(事件数)；i 为标度分组组段；N 为样本量。为了方便起见，在本特例中，降水强度的分组组段被选定为1.0毫米/小时。然而，在许多其它场合，这样方便的分法是不可能有的，所以归根结底，总概率(ΣP)等于 i，因为：

$$\Sigma P = \Sigma \frac{fi}{N}$$

$$= \frac{i}{N} \Sigma f$$

但 $N = \Sigma f$，因而

$$\Sigma P = \frac{i}{N} N = i$$

故上式往往更适用于组成概率密度直方图，以使

$$P \propto fi/Ni$$

即

$$\Sigma P = \frac{1}{N} \Sigma f = 1.0$$

哪一种统计方法可以应用到资料上，这在很大程度上要看观察到的频率分布的数学性质来决定。从理论上讲，对任何观察到的频率分布，当然都可以拟合出一个数学方程来，不过有一些基本频率分布型确定起来更为方便。例如图7.6所示的分布是呈正向偏态的，也就是说，众数值与样本平均数不相符，而是落在它的左方。负向偏态表明的情形，则正好相反。就正向偏态的样本而言，相对较大的一部分事件均具有低量级值。自然地理学中应用的许多统计方法都不采用偏度，而采用一种判别准则，赖以判别数据是否呈"正态分布"，即无偏曲线；此曲线有一些重要特点，我们在后面要作讨论。正态曲线业已论及（第三章），它是所有的理论频率分布当中最常用的一个。还有一些其它的理论频率分布，在自然地理学中也会经常遇到。这些分布当中的每一个都有一些十分

重要的特点，并且发现它们都接近许多观察到的频率分布。所有基本的参数统计方法均以正态分布为前提。然而，在河道流量研究中遇到的诸概率分布却都显示为非正态分布。因此，我们经常涉及到的会是选择一些理论频率分布，使之与根据经验推出的直方图配合得最为准确。但是，关于每个理论分布，如何作数学上的理论解释，这完全要看诸事件发生的概率空间的性质和所提出的前提来决定。例如，确定诸事件是否确实都是独立的，并都是参与考虑样本量的，这是很重要的。

第五节　理 论 分 布

一、二项分布

二项分布不同于正态曲线，它大概是所有分布当中最有用和最简单的一个。为了举例说明，我们可以回到图 7.1 所示的概率空间，那里仅涉及了互不相容且不随时间而变的情形，亦即是 $P(A)+P(\sim A)=1.0$。为了简便起见，我们仍然以旋转一枚硬币为例，并且假定所固有的有偏性并不存在，因而 $p=q=0.5$，其中 p 是得到正面的概率，q 是得到反面的概率。二项分布适用于多次连续独立旋转的情形。很明显，即使每次旋转的概率 p 和 q 相同，正、反面不同组合的总数（比方说，在三次旋转中有两次正面和一次反面）也会随旋转序列的增大而增加。可以认为，每个组合均具有先验概率。同理，还可以认为，不同排列（亦即序列：正面、正面、反面或反面、反面、反面）均具有先验概率。例如，对于三次旋转序列而言会有 2^3 个排列：

$$hhh \quad hht \quad htt \quad hth \quad thh \quad tth \quad tht \quad ttt$$

其中 h = 正面，t = 反面，因而每个排列的概率为 $1/2^3$，即 0.125，所以某一排列的概率可以表示为 $1/2^n$，其中对于每次试验都有两

种出现可能。然而我们往往会涉及到事件的组合，比方说，已知“晴日”和“阴日”的概率，试求七天内有两天晴日的机会。在上述不同排列的序列中，组合 $2h+t$ 出现三次，即 hht, hth, thh；因而得到该组合的概率三倍于每个排列的概率。对于 $2t+h$ 而言，情形也如此。不过得到 $3h$ 或 $3t$ 却仅有一次。因此，四个组合的概率序列为 p, $3p$, $3p$, p，其中 p 为每一个别排列的概率。

我们迄今为止讨论的是一般情形。显然也会出现这样的情形，即如果由一次旋转得到一次正面的概率为 0.5，那么由二次旋转得到二次正面的概率则为 0.5^2，由三次旋转得到三次正面的概率为 0.5^3，其余类推。这一点，从我们对马尔科夫链概率的讨论中可以看得很清楚。同理，得到组合 $2h+t$ 的概率在 $p=0.5$ 时必然为 $0.5^2\times0.5$，即 p^2q。只要在概率 p 和 q 中没有偏向，那情形就很简单。然而如果 $p=0.4$ 而 $q=0.6$，那么我们就必须严格运用一般代数法则。这样就可以表示如下：

$$p^3+ppq+pqq+pqp+qpp+qqp+qpq+q^3=1.0$$

或
$$p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=1.0$$

即
$$(p+q)^3=1.0$$

换句话说，该概率序列可以表示成 $(p+q)^n$ 的二项展开式。于是我们可以运用帕斯卡三角形（第六章）或者运用方程(6.13)和(6.14)来求定（例如）由一个 n 次旋转序列得到 m 次正面的概率如下：

$$P_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m} \qquad (7.19)$$

在自然地理学中，互不相容的事件具有相同的概率的情形是很少有的。往往有偏向某一方的情形，以致例如得到河道满岸流量的概率，这一比较少有的出现率颇小于低流量的概率。这就会使分布呈明显的正向偏态。当 $p=q=0.5$ 时，二项频率分布相对于平均数是对称的（图7.7），不过显然呈另一种偏态。图 7.7 中的另

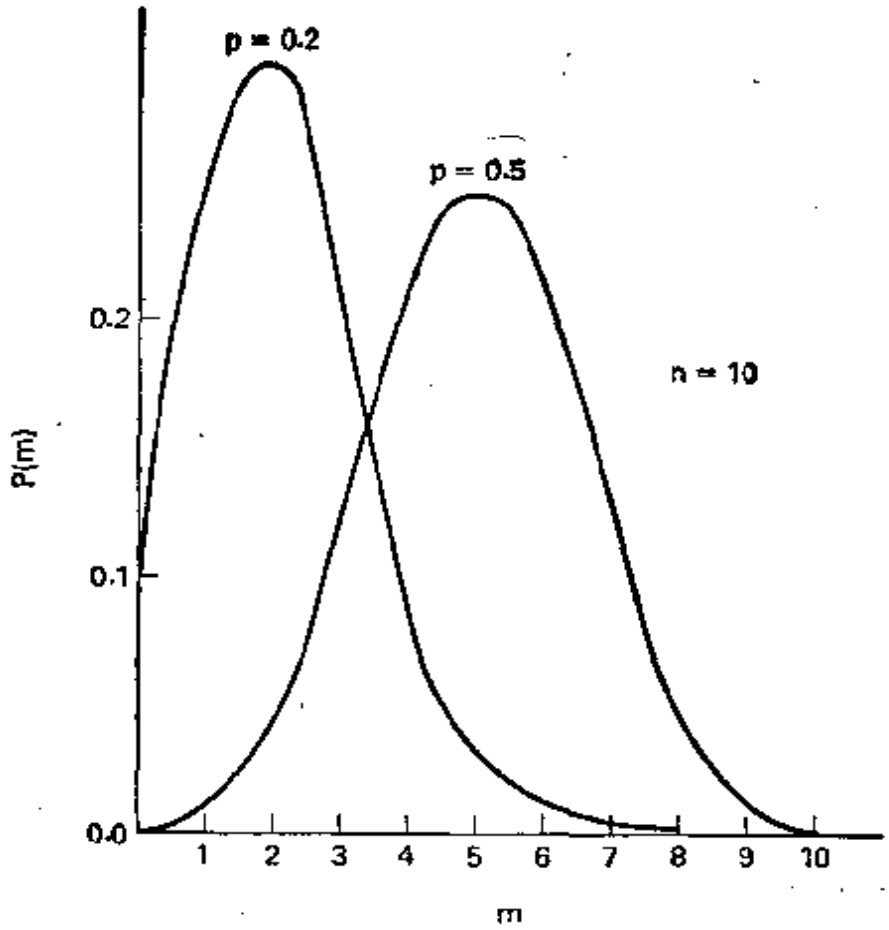


图 7.7　当 $n=10$，$p=0.2$ 和 0.5 时的二项频率分布

一个分布是就 $p=0.2$，且 $(1-p)=0.8$ 而言的。这两条曲线均就一个十次试验（$n=10$）序列而画出。我们在举例说明马尔科夫链时曾了解到，在那里，任何一天是雨日的概率（P）为 0.57。可见，在这个本性二项分布情形中存在有轻微的偏向。因此，一个星期内每一天是湿日的概率为 $0.57^7 \equiv 0.020$——此概率与上面就西威尔士一个潮湿地区所讨论的数据比起来是意想不到的小！那里，在任何七天内恰好有两天湿日的概率可以用方程（7.19）计算如下：

$$P_1^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!}0.57^2(1-0.57)^{7-2}$$

$$= \frac{5040}{240}0.325\times 0.015$$

$= 0.10$

应当指出，这并不是说，例如周末两天都是湿日的概率为10%，因为周六和周日两天都是湿日的概率为排列 $0.33(0.57^2)$。在计算这两个概率中的任何一个时，均未考虑前几天的天气，因为在平常的气候条件下有一个相当显著的持续性要素。任取周末两天当中的任一天是湿日的概率为概率 P_2^1，即0.49。另外，七天内至少有两天是湿日的概率可以表示为由 P_7^2 至 P_7^7 诸概率的和，即 $0.10+0.20+0.31+0.24+0.09+0.02=0.96$。

二、泊松分布

泊松分布乃是二项分布在事件概率(P)很小、而试验总数(样本量)颇大时的极限分布，因而它适用于模拟在颇长时期内稀有事件(例如巨大的洪水)的直方图。由于 P 很小，它是呈明显偏态的二项分布变形。此分布可以表示为：

$$P(m)=\frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!} \tag{7.20}$$

式中 $P(m)$为 m 个事件顺序发生的概率，μ 为频率分布的平均数。m 的所有整数值的概率和为 1.0。两个泊松分布如图 7.8 所示，并且仍然以曲线表之；一条曲线是就 $\mu=1$ 而言的；另一曲线就 $\mu=2$ 而言的。计算出的诸概率载于表 7.1。应当指出，随着平均数的增大，最大概率点移向 m 的递增值一方。对于比较大的 μ 值来说，该分布就不再接近二项分布。

泊松分布适用于稀有的，且相互独立的，随时间或空间而变的事件。因此，这个分布可以为由长期数据记录提取偶发洪水时得出的频率分布形式提供一个原型，尽管这样的事件，未必可以确实认为都是相互独立的。例如，若考察最大日流量，那么由于一次大暴雨的结果而在接连两天或三天内出现颇大的流量是完全有可能

表 7.1　就 $\mu=1$ 和 $\mu=2$ 计算出的泊松概率

$\mu=1$		$\mu=2$	
m	$P(m)$	m	$P(m)$
0	0.37	0	0.14
1	0.37	1	0.27
2	0.18	2	0.27
3	0.06	3	0.18
4	0.02	4	0.09
5	0.003	5	0.04
6	0.0005	6	0.01

的。一个土壤样本内稀有痕量元素的散点分布实际上会更接近泊松分布。假设我们要计算一样本系列内的这种元素的粒数，并且发现，每个样本平均有 2.1 粒某一痕量元素，那么运用方程(7.20)，就可以预测，在任何样本内至少找到一粒的概率为：

$$P(1)=\frac{(2.1)^1 e^{-2.1}}{1!}=0.26$$

而

$$P(4)=\frac{(2.1)^4 e^{-2.1}}{4!}=0.10$$

且

$$P(10)=\frac{(2.1)^{10} e^{-2.1}}{10!}=5.6\times10^{-5}$$

三、正态分布

正如泊松分布接近二项分布在 p 或 q 颇小时的一个极限分布一样，二项分布的另一个极限分布也接近正态曲线。我们在前面讨论二项分布时曾经指出，当 p 与 q 二值相差明显时，分布曲线呈现明显的偏态。图 7.7 显示出了就 $p=0.2$ 且 $n=10$ 而言的明显的偏态分布；而在 $p=q=0.5$ 时则呈现对称形式，并且与试验次数无关。这里会有一个关于二项分布的极限分布的重要问题。一般说来，在 p 与 q 相等或近似相等时，有很少几次试验就可以得出

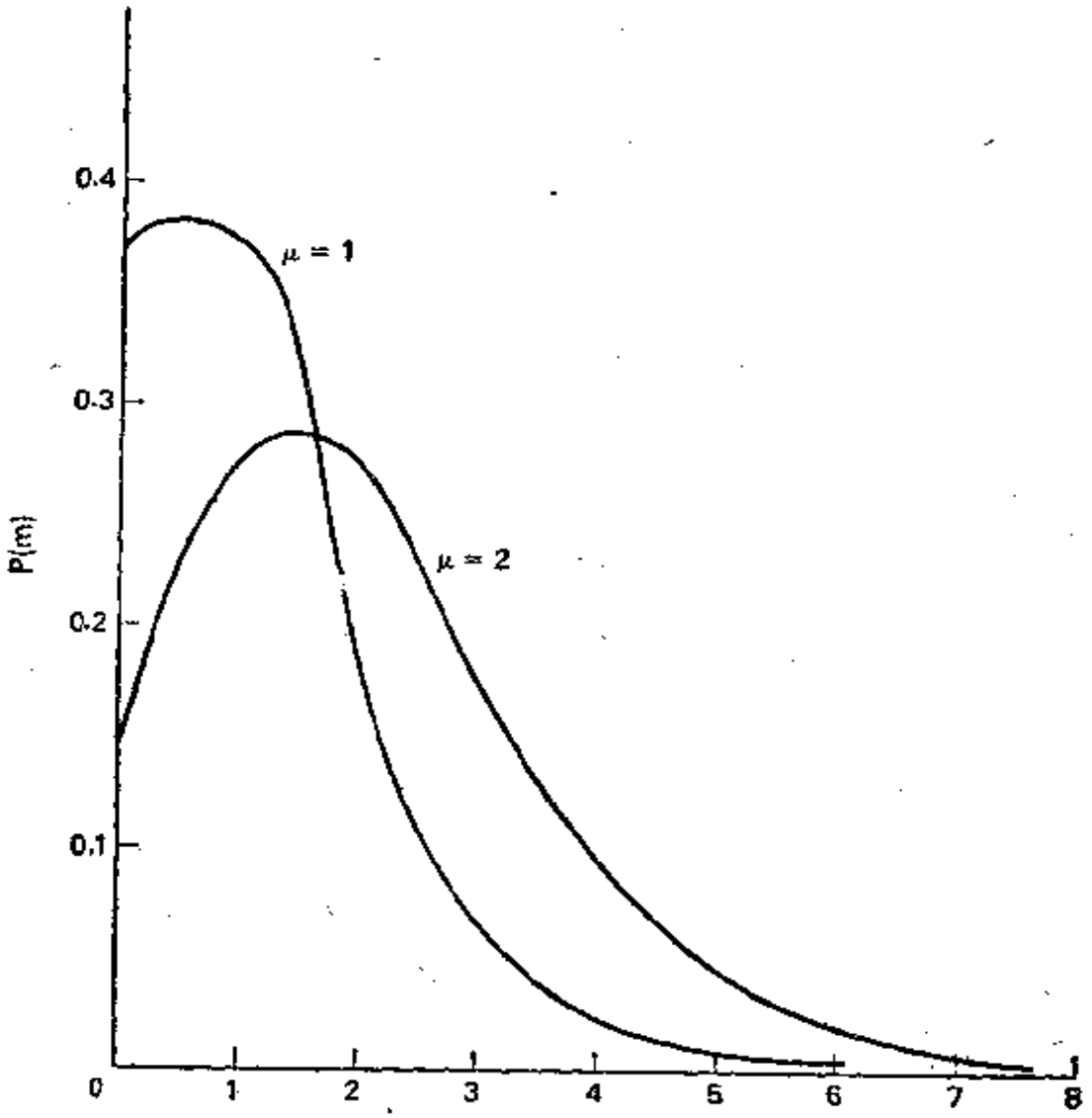


图 7.8　就 $\mu=1$ 和 2 而言的泊松频率分布

近似对称的分布。随着 p 与 q 之间的差别增大，我们仍然可以得出一个近似对称的分布，不过我们需要作出越来越多的试验。例如，虽然二项式 $(0.2+0.8)^{10}$ 具有明显的偏态形式，但二项式 $(0.2+0.8)^{100}$ 却具有一个相对于平均数近似对称的形式。问题是这样的展开式太冗长，不实用。

正态分布是一个对称曲线，其形式类似于二项分布在 n 增至无限大时的极限分布。正态分布具有一些特点，使其成为一个比较有用的分布，而且对一些统计方法特别有用。现在我们来举一个

简单的例子。兹设想，在相同的受控制的环境中，使用若干个温度计对一个烧杯里的水的温度进行同步测定。由于每个温度计在设计和制作上均含有微小误差，其温度读数彼此会稍有差别，但所有读数的平均数($\bar{T}$)会极其接近实际温度(T)。诸读数相对于平均数的散点分布会给出一条近似正态曲线的分布曲线，其平均数位于中点处。此曲线是一条相对于平均数而对称的曲线。对所有的温度计说来是一致的任何偏向，在分布的偏态中都会有所显示。这条曲线所具有的一些特点均与样本量无关。正如我们在本书所讨论的所有其它的频率分布情况一样，该曲线内的面积代表总概率为 1.0；并且各个不同点间曲线内的面积分别与这些点的出现概率成比例。然而在这条正态曲线情况下，曲线各个不同部位下的部分面积，对于所有的样本量都是固定不变的；而其计量单位是统计单位(参见附录五第一节)，概率可以用标准差(σ)加以表示，即：

$$P(m)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (7.21)$$

就 $\mu=10$ 和 $\sigma=0.5$，1，2 和 5 而言的诸正态分布曲线例子如图 7.9 所示。在所有这些例子中，曲线延伸均与横坐标轴渐近会合，尽管对于小的标准差而言，大多数情况都很靠近平均数。可见，由于每条曲线下的总面积必然为 1.0，所以标准差越小，曲线的波峰就越尖，而在平均数和靠近平均数处的诸点所占的比例就越大。曲线在标准差方面的这一特点，可以使从一个正态分布数据组中随机抽取任何项目时，其介于 $-\sigma<\mu<+\sigma$ 之间的概率为 0.682；介于 $-2\sigma<\mu<+2\sigma$ 之间的概率为 0.954；介于 $-3\sigma<\mu<+3\sigma$ 之间的概率为0.998 。因此，对于大多数实际场合，我们可以认为，超出 $\pm3\sigma$ 的出现概率是很小的。

正态分布曲线可以用来表达许多自然出现的分布，由于正态

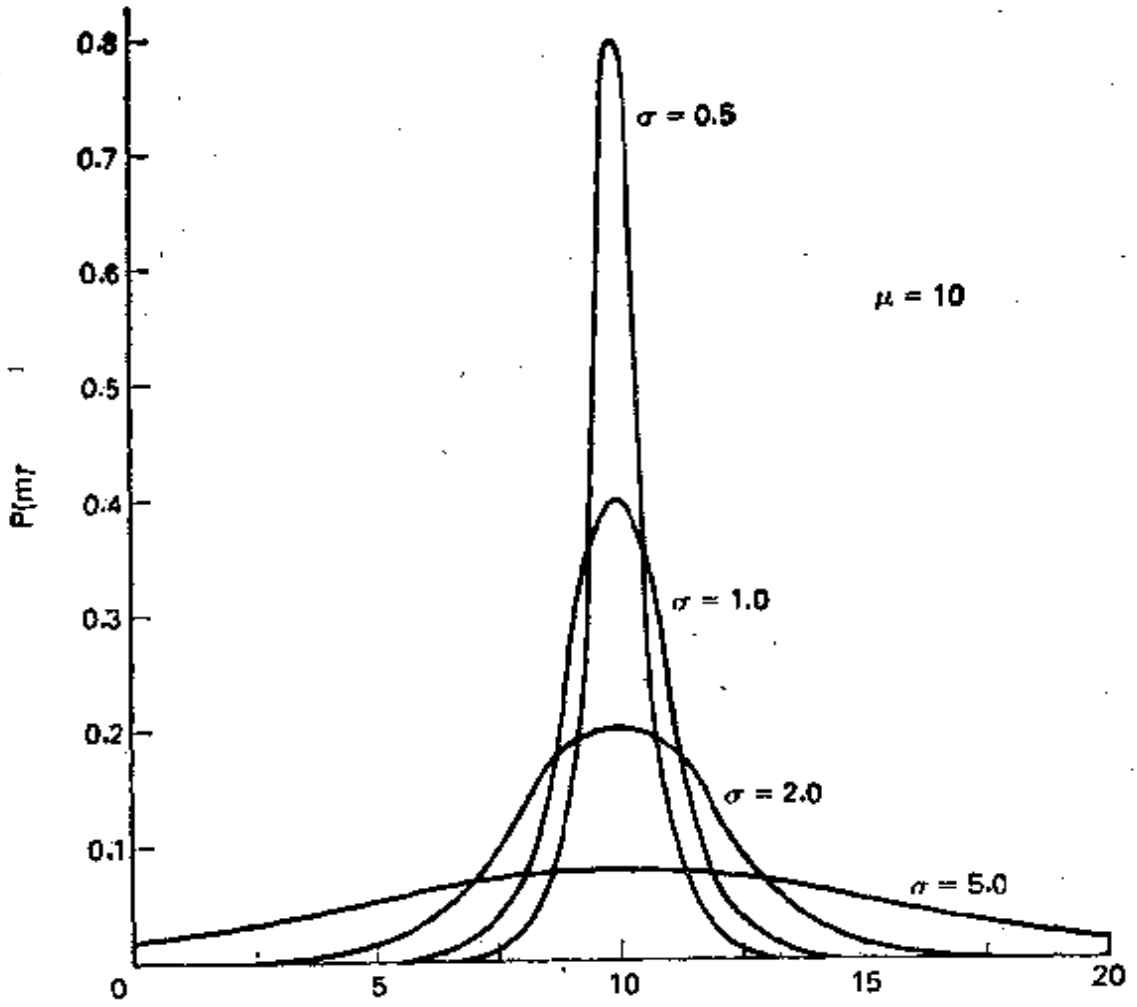


图7.9　就 $\mu = 10$ 和 $\sigma = 0.5$，1，2，5 而言的正态频率分布

曲线与标准差有关，也就是与数据相对于其平均数的方差这一很有用的单位有关，故正态分布主要是与一些参数统计方法有关系，而且有些统计方法，例如积矩相关系数法和最小二乘回归法，均以正态分布为前提。把这些方法应用到数据上，如果该数据对于正态分布有任何明显的偏离，那就会使统计推断成为不可靠。正态分布还在误差测定上获得广泛应用，这在姐妹教程（参见戴维森1978年的著述）中已作了阐述。在所有这些例子中，一个观察到的分布对正态分布的任何明显偏态，都可以表明，对数据存在有一些外来的系统性影响；而在进行误差测定的情况下，则是仪器常差，正如前面已经指出的那样。在应用以正态分布为前提的各种统计

检验，并且数据频率曲线呈偏态的场合，可以利用一些数据函数来使该曲线“正态化”(例如，各个数据单元可以分别取对数或求方)。

四、伽马分布

另外还有一个很有用的分布，特别适用于总为正值的数据，这就是伽马分布。概率密度的表达式可以用两个常数 a 和 b，数学常数 e 和伽马函数 $\Gamma(a+1)=a$ 加以确定。概率的完全表达式可以表示为：

$$P(m)=\frac{m^a e^{-m/b}}{b^{a+1}\Gamma(a+1)} \tag{7.22}$$

式中 $b>0$，且 $a\geq -1$；该式为一整数值。概率 $P(0)$ 本身为零，可见，伽马分布显然不同于泊松分布(图7.8)。该分布的平均数及其标准差可以用两个常数表示，所以对于任何根据经验得出的数据组说来，如果其平均数和偏差已经计算出来，那么为了对比起见就可以组成对应的伽马分布，因为

$$\text{平均数，}\quad \mu=b(a+1) \tag{7.23}$$

$$\text{方　差，}\quad \nu=b^2(a+1) \tag{7.24}$$

就 $\mu=2$ 和 6，且就不同的方差而言的伽马分布的两个例子如图7.10(1)和(2)所示。诸曲线全都呈不对称形式，但是可以看出，每一族曲线内偏态最明显的曲线均具有最大方差。方差小的曲线相对于平均数是近似对称的，正如图中 $\mu=2$ 且 $\nu=0.2$ 的曲线所示。这个分布往往接近那些出现率大多颇小、但又不为零的观察到的分布，如长降水期内的短期降水强度的频率分布便是一例。

作为实例说明，现在我们来计算一个伽马分布，它与粒径差距颇大的一个大型样本内的粒径分布相对应。很明显，粒径为零的

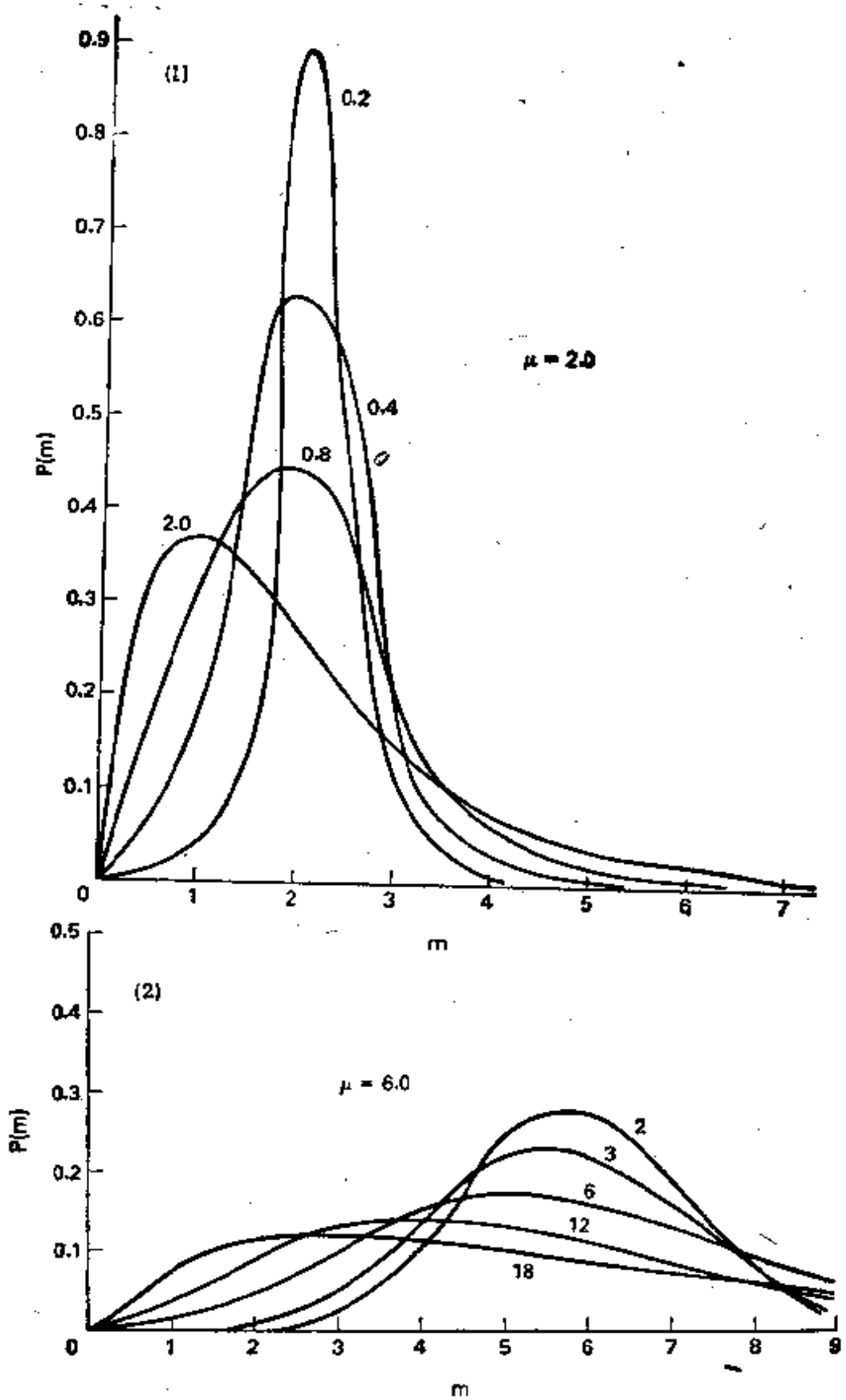


图 7.10　伽马频率分布：
(1) 就 $\mu = 2.0$ 和方差 0.2,0.4,0.8,2.0 而言；
(2) 就 $\mu = 6.0$ 和方差 2,3, 6, 12, 18 而言。

是不会有的；而且经验告诉我们，粒径大的是会有的，但极少。假设我们就 $\mu = 1.2$ 毫米和标准差 2.8 毫米来计算本样本的平均粒径，则由方程(7.23)有：

$$b(a+1) = 1.2$$

和

$$b^2(a+1) = 7.84 \quad \text{（方差是标准差的平方）}$$

所以，对应于这些值的伽马分布可以表示为 $a = -1$ 和 $b = 2.8$。根据上述的计算，a 值实际上为 -0.82，不过我们必须把它约计为其最靠近的整数。把这些值代入方程(7.22)，则得：

$$P(m) = \frac{m^{-1}e^{-m/2.8}}{2.8} = m^{-1}e^{-0.36m}$$

因此，粒径分别为 1，2 和 10 毫米的颗粒的伽马概率为：

$$P(1) = e^{-0.36} \approx 0.70$$

$$P(2) = 2^{-1}e^{-0.72} = 0.25$$

$$P(10) = 10^{-1}e^{-3.6} = 0.003$$

第六节　其它类型的分布

除了常用的和很实用的二项分布、泊松分布、伽马分布及正态分布以外，还有其它三大类型分布。为了推导这些分布，往往要把统计学与数学结合起来，而且表达概率密度的方程往往都是冗长而复杂的。

这三大类型分布当中的第一类型是皮尔逊(Pearson) 于 1901 年确定的曲线族。皮尔逊曲线族构成十二个主要类型的分布系统，分别以罗马数字 I 至 XII 编号。其中三个是基本型，其余九个是“转移”型。各特定类型的皮尔逊分布主要应用于洪水水文学领域。三个基本型(Ⅰ、Ⅳ和Ⅵ)基本上全都呈钟形，不过总的偏态却随着概率函数内的一些常数值的改变而改变。如果我们就这些常

数分别得出了一定的值，那么我们就可以利用皮尔逊公式中的一个来确定正态曲线。皮尔逊分布系所提供的分布范围非常广泛，因而相应地，该分布系所涉及的统计学和数学的范围也很广泛。如果读者想要深入探讨这一方面的问题，那么关于该分布系的数理统计简单示例，就可以参阅埃尔德顿与约翰逊 (Elderton and Johnson，1969) 的著述；而关于地理学专业方面的各种分布的计算机简易计算方法，则可以参阅道森(Dawson，1972)的著述。然而为了全面起见，现将诸概率函数摘要叙述如下。

一、皮尔逊分布 I 型

$$P(m) = y_0\left(1+\frac{m}{a_1}\right)^{b_1}\left(1-\frac{m}{a_2}\right)^{b_2} \qquad (7.25)$$

式中 $-a_1 < m < +a_2$，$a_1 b_2 = a_2 b_1$，而 y_0 为一常数。这可以给出一条正向偏态明显的钟形曲线，除非 $b_1 = b_2$，此时曲线相对于样本平均数对称。若 b_1 为负，而 b_2 为正，则曲线呈 J 形。戴维森 (1973) 曾经利用这条曲线表达了观察到的粒径频率分布。

二、皮尔逊分布IV型

$$P(m) = y_0\left(1+\frac{m^2}{a^2}\right)^{-b} \exp\left[-\gamma \tan^{-1}(m/a)\right] \qquad (7.26)$$

式中 y_0，a，b 和 γ 均由 β_1 和 β_2 二"根"（参见第七章第六节第四分节）得出。该曲线也具有钟形特征，并且通常呈偏态。

三、皮尔逊分布VI型

$$P(m) = y_0(m-a)^{q_2} m^{-q_1} \qquad (7.27)$$

式中 y_0，a，q_1 和 q_2 也均以 β_1 和 β_2 确定。$q_1 > q_2$，而且该曲线呈钟形，不过若 q_2 为负，则呈 J 形。

四、其它的皮尔逊判别准则和转移型

虽然这一章由于篇幅所限不能详细讨论皮尔逊分布系，但是所有上述的皮尔逊型和转移变形完全可以用$\varkappa$来确定，后者为：

$$\varkappa = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(4\beta_2-3\beta_1)(2\beta_2-3\beta_1-6)} \tag{7.28}$$

第七章第六节第二小节和第三小节中所涉及的常数β_1和β_2可以根据对分布的中点的矩比来确定。对众数的矩的求定如图7.11所示，其中点m_1对众数的n阶矩为：

$$\mu_n = (m_1 - M)^n P(m_1) \tag{7.29}$$

式中M为众数；而β_1和β_2则分别为：

$$\beta_1 = \mu_3^2/\mu_2^3 \quad 和 \quad \beta_2 = \mu_4/\mu_2^2 \tag{7.30}$$

对于上述的诸基本分布型而言，$\varkappa$区间分别为：

I型：　$\varkappa$为负

IV型：　$0<\varkappa<1$

VI型：　$\varkappa>1$

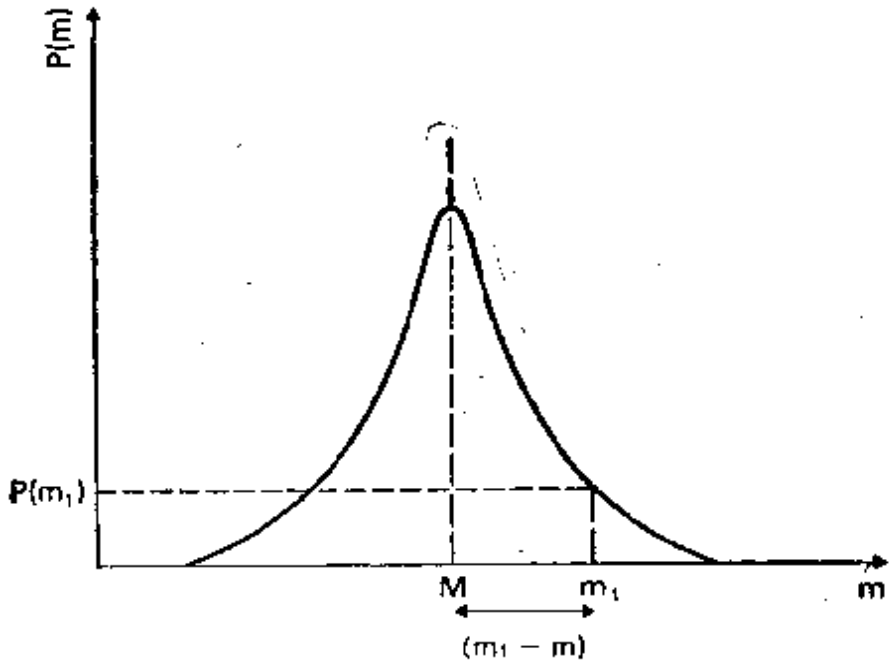


图7.11　m_1对众数M的矩的确定

于是，曲线的诸转移型也就可以用 $\mathscr{K}$ 来确定了；这些类型分布一览示于表 7.2。在 $\mathscr{K}=0$ 的场合，若 $\beta_2=3$ 且 $\beta_1=0$，则在Ⅰ型与Ⅳ型间转移之处可以得到正态曲线。而若 $\beta_2<3$，则在该表的同一处可以得到Ⅱ型曲线；又若 $\beta_2>3$，则可以得到Ⅵ型曲线。在所有其余的转移型当中，皮尔逊分布Ⅲ型对自然地理学是最为重要的；它为一普通曲线族，包括伽马分布这一特例。皮尔逊分布Ⅲ型的概率密度函数为：

表 7.2　以 $\mathscr{K}$ 表示的诸皮尔逊分布取自埃尔德顿与约翰逊(1969)合著一书

$\mathscr{K}=-\infty$	$\mathscr{K}=0$	$\mathscr{K}=1$	$\mathscr{K}=\infty$
	Ⅰ型	Ⅳ型	Ⅵ型
Ⅲ型	Ⅱ型 Ⅶ型	Ⅴ型	Ⅲ型

$$P(m)=P_0\left(1+\frac{m}{a}\right)^c e^{cm/a} \tag{7.31}$$

式中

$$c=4/\beta_1-1$$

$$a=c\mu_3/2\mu_2$$

$$P_0=\frac{N}{a}\cdot\frac{c^{c+1}}{e^c\Gamma(c+1)}$$

可以看出，皮尔逊分布Ⅲ型函数与方程(7.22)的伽马分布极其相似。

五、对数正态分布

对数正态概率属于另一大类型分布。前面确定的许多分布都具有或都能够具有明显的正向偏态的特点。有许多自然地理数据全都呈这一形式的分布。然而，正如我们在第三章和第五章已经看到的，数据取对数可以使一个正向偏态分布呈现极其近似正态

曲线的直方图。这是我们在对数坐标纸上标绘数据点的时候自然要用到的转移型分布。可见，这个分布的概率密度函数与正态分布的概率密度函数(方程(7.21))非常类似，并且为：

$$P(m)=\frac{1}{\sigma e^{\ln x}\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(m-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (7.32)$$

这个分布曾经于十九世纪末首次为高尔顿(Galton)所用，而且从那时起即被称为高尔顿定律。有关这一分布的特点的详细论述，可以在艾齐逊与布朗(Aitchison and Brown，1957) 的著述中找到，尽管这是一本经济学专著。

六、极值分布

上述的对数正态分布乃是三个极值分布型之一的一个特例。在水文学、河流地貌学和气候学的一些领域，经常会涉及到诸如极其罕见的严重洪水和干旱的一些事件。比如说，水文工作者常常利用过去的事件频率来预测未来的类似事件或更坏事件。在从事这类预测的时候，通常都要运用累积概率。我们将在第七章第七节更详细地讨论这个问题。

极值累积概率主要有三种类型，其方程可以分别表示如下。首先是极值分布 I 型，即冈贝尔(Gumbel) 分布（后来以极值统计学领域的一位著名学者的名字而命名）。有关这一分布的详细情况在冈贝尔 1958 年的著述中作了详细论述。对于这一分布而言有：

$$P(X\leqslant x)=\exp(-e^{-(a+x)/c}) \qquad (7.33)$$

式中 $P(X\leqslant x)$ 为其值小于 x 的事件的出现概率，a 和 c 均为常数。累积对数正态分布为这一分布的一个特例。其次是分布 II 型，即，

$$P(X\leqslant x)=\exp[-(\theta/x)^k] \qquad (7.34)$$

式中 θ 为根据样本量 n 预期的最大值事件；k 为一常数。最后是极值分布Ⅲ型，即威布尔(Weibull)累积分布(后来也是以首先应用此分布的学者的名字而命名)。冈贝尔(1958)又发展了这个分布。累积概率可以表示为：

$$P(X \leqslant x) = \exp(-t^k) \tag{7.35}$$

式中

$$t = (x-\varepsilon)/(\theta-\varepsilon) \tag{7.36}$$

k 和 θ 均为常数，其定义与方程(7.34)的相同，而且 $-\infty < x < \varepsilon$。

第七节　累积频率分布的应用

方程(7.33)至方程(7.36)所概括的诸型分布，读者似乎会望而生畏！然而，如果把累积频率数据点绘在相应的一种概率坐标纸上的话，那么这些分布应用起来就比较容易。我们在第五章已经指出，如果简单地通过使坐标轴变形就可以选择一些曲线调直的方法，那么标准函数图象应用起来往往就比较容易。对于各型累积频率分布曲线也可以这样作。皮尔逊分布Ⅲ型、对数正态分布、冈贝尔分布和威布尔分布函数都是自然地理工作者最常用的；并且印制有各种坐标纸，可以在坐标纸上把这些累积分布点绘成直线。这些类型分布当中的一个，即对数正态分布一例如图 7.12 所示；而读者面临的问题仍然只是把观察到的数据点绘在某一种坐标纸上。

一般说来，在水文学中经常使用年最大流量数列（或者它在自然地理学其它诸分支中的对应值）。这一数列是由上述的河道秩年最大流量所组成，后者通常是以水文年(在联合王国为十月至九月)为基础的。在这种情况下，我们就可以着手预测未来年份的同值或超值的最大流量的概率。按粗略的估计，如果我们拥有本河道的 n 年数据，而且在这 n 年内 Q 值的最大流量有 m 次，那么，

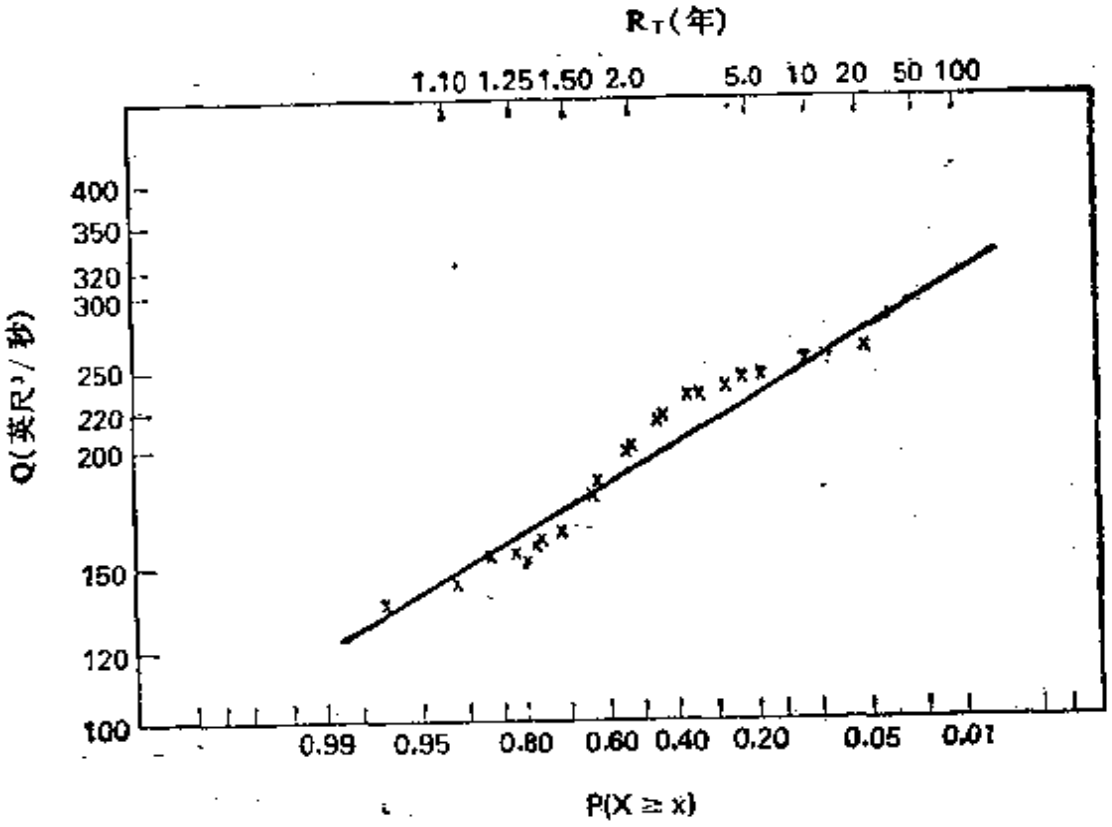


图 7.12　表 7.3 中数据的对数正态累积概率曲线图

我们就可以说，将来 Q 值或更大值的最大流量平均会每隔 $(n+1)/m$ 年重现一次(即重现期或再现时段)。随后的任何一年内最大流量是同值或超值的概率可以表示为：

$$P(m) = m/(n+1) \qquad (7.37)$$

这样一来，如果把每个年最大流量按照递降顺序排成秩，并给各个年最大流量以一个秩值 m，那么我们就可以在相应的概率坐标纸上，相对于 $P(m)$ 点绘 Q_m；这里的 Q_m 为秩 m 的流量。利用南威尔士的托河(Tawe)的数据(表7.3)已经作了上述处理，并且该累积概率在对数正态概率坐标纸上的图象，如图 7.12 所示。同理，我们也可以例如就最小流量，以同样的方式作类似处理，只是按照递升顺序排成秩，因为我们所关心的不是某一超值的流量。

在两种情况下，概率 0.05(即 5%)代表每隔 20 年一次的重现

表7.3 威尔士的伊斯特拉京拉伊斯(Ystradgynlais)的托河的年最大流量数列表（此数据已承威尔士国家水文开发管理局西南威尔士河流处许可）

年代	流量 (米³/秒)	日 期	秩 m	$P=m/(n+1)$	重现期 (年)
1956—57	179.5	6— 9 —57	13	0.63	1.59
1957—58	242.2	23— 9 —58	4	0.22	4.55
1958—59	156.9	17— 1 —59	16	0.77	1.30
1959—60	186.2	25—11—59	12	0.61	1.64
1960—61	233.1	3—12—60	6	0.32	3.13
1961—62	217.5	11— 9 —62	9	0.44	2.27
1962—63	134.9	9— 3 —63	20	0.97	1.03
1963—64	159.4	19—11—63	15	0.76	1.32
1964—65	219.7	13—12—64	8	0.42	2.38
1965—66	233.1	18—12—65	7	0.35	2.86
1966—67	251.5	27— 2 —67	2	0.11	9.09
1967—68	255.3	19—10—67	1	0.05	20.00
1968—69	153.9	28—10—68	18	0.86	1.16
1969—70	163.5	21— 1 —70	14	0.71	1.41
1970—71	236.8	1—11—70	5	0.27	3.70
1971—72	142.4	15— 2 —72	19	0.92	1.09
1972—73	202.4	5— 8 —73	10	0.52	1.92
1973—74	153.9	30— 1 —74	17	0.83	1.21
1974—75	243.9	22— 1 —75	3	0.18	5.56
1975—76	198.3	1—12—75	11	0.53	1.89

期，这表明，对于最大流量数列而言，等于或大于 Q 值的事件平均每隔 20 年一次。当然，这样的事件在连续五年的每一年内出现是完全可能的，而再过 100 年，重现则是不可能的。在连续 N 年内出现一次的 m 次 Q 值事件的概率，可以用 $P(m)$ 和 $[1-P(m)]$ 的一般二项展开式(方程(7.19))求出，即

$$\text{概率}=\frac{N!}{(N-1)!}P(m)^1[1-P(m)]^{N-1}$$

$$=NP(m)[1-P(m)]^{N-1} \qquad (7.38)$$

同理，事件恰好在 N 年内出现的概率可以表示为：

$$\text{概率} = P(m)[1-P(m)]^{N-1} \tag{7.39}$$

因此，如果我们要预测 Q 值流量在十年内出现的概率，那么就 $P(m)=0.04$（再现时段每隔25年一次）而言就可以表示为：$10\times 0.04\times 0.96^9$。于是"25年最大流量"在任何的连续十年内出现的概率为0.28。所得的结果会随着被选作模型的累积分布类型的不同而稍有不同，尽管大概不那么明显，除非坐标图上的秩点曲线与直线相差很大。由于篇幅所限，这些差异在这里就不一一讨论了；关于对数-皮尔逊分布和冈贝尔分布的对比实例，读者可以参阅林斯雷、科勒与保鲁斯(Linsley, Kohler and Paulus, (1975))的著述；关于水文学中的诸累积分布的详细论述，可以参阅乔(Chow, 1964)的著述。

第八章　积　　分

这一章的内容乃是第五章所述的微分法的自然推广，并且第六章所述的级数展开式在这里获得了应用。

第一节　极限和连续函数

我们已经了解到，一些几何级数如果具有形式 a，ar^2，ar^3，…且 $-1<r<+1$，则都收敛于一极限。这样的一个级数尽管有无限个项，但其和仍然是有限的。因此，我们可以写出：

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

这是 S_n 的展开式在项数趋于无限大时的极限。类似地，我们在第五章曾经列举过一些 x 的数学函数例子，其中 $f(x)$ 在 x 值趋于无限大时趋于一有限值。兹考察函数 $y=1/x^2$。随着 x 值以整数递增，y 减小到越来越小的值，并且趋于、但实际上永远不会达到零：

$x=$ 1　2　3　4　5　6　7 …

$y=$ 1　1/4　1/9　1/16　1/25　1/36　1/49…

可以把后者写成类似级数和的形式：

$$\lim_{x\to\infty} y = 0$$

即 y 在 x 趋于无限大时的极限为零。我们可以就 x 值（$0<x<\infty$）计算 y 值。这样，函数 $y=1/x^2$ 就被认为在这一区间是连续的。

现在来考察下列形式的函数：

$$y=(x^2-1)/(x-1)$$

我们可以就 x 的整数递增来计算 y 的对应值，正如我们在上一个例子 $y=1/x^2$ 中所作过的那样。仍然取由 $x=0$ 至 $x=7$ 的数列，则

有下列 y 值：

$$x = 0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$$

$$y = 1\ 0\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8$$

当 $x=1$ 时 y 值为零；下面我们会看到，这并不正确。对于该数列，如果不考虑其间隔值，我们所得的印象就是一个线性关系。然而只要仔细检查一下，便可以看到该函数并不是一个一元线性函数。下表列出的是当诸 x 值均近于 1.0 时 y 的诸计算值：

$x=$ 0.5 0.8 0.9 0.95 0.99 0.999 1 1.001 1.01 1.05
1.1 1.2 1.5

$y=$ 1.5 1.8 1.9 1.95 1.99 1.999 ? 2.001 2.01 2.05
2.1 2.2 2.5

y 值显然由两边向值 2.0 收敛，但实际上永远不会达到此值，因此这里我们必须认为：

$$\lim_{x\to 1} y = 2.0$$

即

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2.0$$

该函数仍然有极限，但也是不连续的。如果将 x 的值 1 代入，那么就得到 y 的解 0/0，这一项实际上没有意义，并且我们给 y 以 0 值是不正确的，正如我们给 y 以任何别的值也是不正确的一样。当我们讨论微分和积分(后者乃是本章的主题)时，重要的是强调函数应当是连续的，也就是说对于所给区间内的 x 和 y 的所有值域均成立。

第二节　原　函　数①

我们之所以特意把本节的标题称为“原函数”，是因为原函数

①原书为 antiderivatives，按数学习惯用语，译为原函数，以下均作同样处理——译者。

正是积分！我们在第五章详细讨论了微分和导数，这里还必须补充说，一函数的积分乃是导数等于该函数的另一函数——原函数。这就是微积分学的基本定律；它把初等微分法与下面介绍的积分法连系起来了。

然而我们还应当确定，积分究竟是干什么的，也就是说它有什么用处，以及它有什么含义。眼下我们在本章把讨论范围局限于所谓的定积分，即在已知区间内确定的函数的积分。一函数的积分其实可以为我们提供在特定区间在那个函数图象之下，通常在 x 轴($y=0$)之上所包含的面积的一个表达式。

作为引导，我们回到第五章列举的例子，即由菲利普斯 (Philips 1957-58)所提出的关联着土壤渗润率与时间的函数。为了避免发生混乱，我们在本章后面将恢复使用 x 和 y，而不象第五章那样使用 t 和 i。兹假设对于某一地区而言，这一形式的一元关系式为：

$$y = 15 + 5x^{-1/2} \qquad (8.1)$$

此方程只要 x 大于零，就可以用来及时计算任何一点的瞬时渗润率，所以有：

$x =$ 0.1 0.2 0.5 1.0 2.0 5.0 小时 (h)

$y =$ 30.8 26.2 22.1 20.0 18.5 17.3 毫米/小时(mmh^{-1})

在任何给定的时段内土壤渗润的总水量(Q) 均可以表示成在该时段区间、在曲线之下、x 轴之上的面积。这在单位上是正确的，因为水量(降水对应值以毫米 (mm)为单位)就等于 $mm\ h^{-1}h =$ 毫米 (mm)。现在假设想要获得在 0.1 和 0.5 小时之间的渗润总水量的图象。我们当然可以由图象(图 8.1) 繁复地量取该二点之间的面积(阴影)。然而有了积分法，这项任务就变得容易些了。不过眼下我们直接根据几何图形来说明积分法恐怕是再好不过的了。

以 $x=0.1$，$x=0.5$，$y=0$ 和 $y=22.1$(在$x=0.5$ 处的 y 值)为

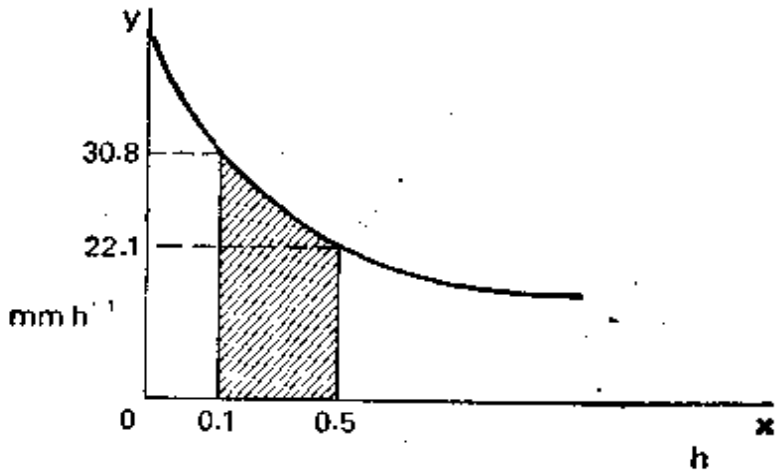


图 8.1　在曲线 $y = 15 + 5x^{-\frac{1}{2}}$ 之下，
在 $x = 0.1$ 和 $x = 0.5$ 之间的面积

界的矩形面积当然容易计算出来，但是我们面临的问题还有求定该矩形与曲线本身之间的不规则图形的面积。我们可以这样处理这个问题，即把该矩形面积看作是在该曲线之下，在这个区间内的面积的最劣近似值。为了改善这个近似值，可以取若干个小矩形的和，而这些小矩形的上界均分别为它们与该曲线的诸接触点所制约。在特定区间，可以画出随便多少个这样的小矩形（图 8.2

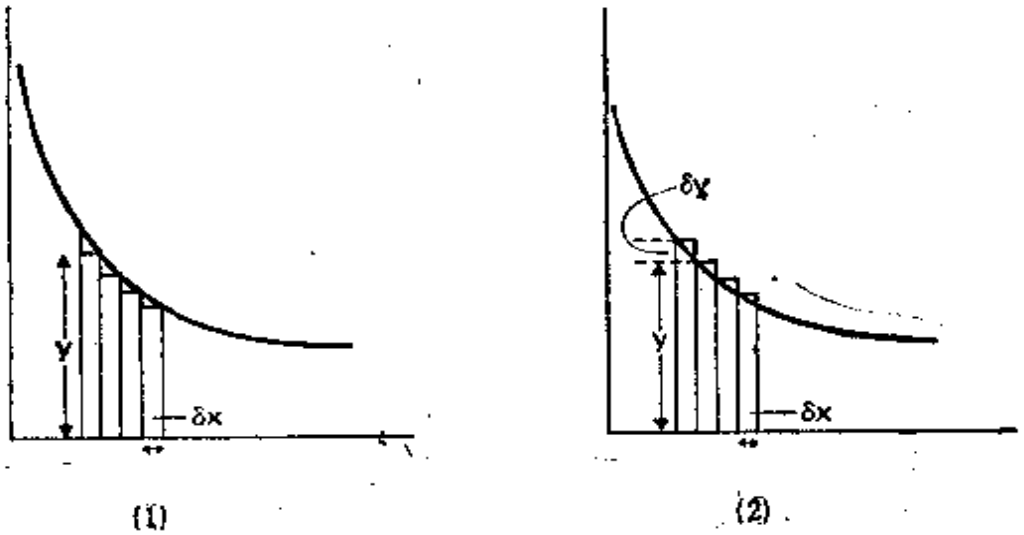


图 8.2　在一曲线下的面积的积分
(1) 方程(8.3)，估计过低
(2) 方程(8.4)，估计过高

(1))，并且画的越多，近似值就越接近该曲线之下这个区间的面积的真值。然而，我们的近似值会被估计过低，除非在该区间有无限多个无限狭窄的柱形。按另一种估算面积的方法，以上述方式画出的这些柱形，会使给出的面积被估计过高，如图 8.2(2) 所示。而且这些柱形越狭窄，计算出的面积就越精确。这两个近似值均收敛于一极限，它是在 δx 趋于零时的真积分。因此有：

就情形(1)而言
$$\sum_{0.1}^{0.5} Q = \sum_{0.1}^{0.5} y\delta x \tag{8.2}$$

就情形(2)而言
$$\sum_{0.1}^{0.5} Q = \sum_{0.1}^{0.5} (y+\delta y)\delta x \tag{8.3}$$

为了举例说明上述两种求定面积的方法，兹假设我们选定 δx 值为 0.1，因而在 $x=0.1$ 和 $x=0.5$ 之间就有四个柱形，于是就情形(1)而言有：

$$\sum_{0.1}^{0.5} y\delta x = 0.1[15+5(0.2^{-\frac{1}{2}})]+0.1[15+5(0.3^{-\frac{1}{2}})]$$
$$+0.1[15+5(0.4^{-\frac{1}{2}})]+0.1[15+5(0.5^{-\frac{1}{2}})]$$
$$=2.62+2.41+2.29+2.21=9.53 \text{ 毫米}$$

类似地，就情形(2)而言有：

$$\sum_{0.1}^{0.5}(y+\delta y)\delta x = 0.1[15+5(0.1^{-\frac{1}{2}})]+0.1[15+5(0.2^{-\frac{1}{2}})]$$
$$+0.1[15+5(0.3^{-\frac{1}{2}})]+0.1[15+5(0.4^{-\frac{1}{2}})]$$
$$=3.08+2.62+2.41+2.29=10.40 \text{ 毫米}$$

我们特意选定的 δx 值颇大，因而所得的面积估算值是相当粗略的，两个极值之间大约相差一个毫米。到此我们已经了解，面积的真值介于这两个值之间。

当 $\delta x \to 0$ 时，该二估算值收敛于真值，即 y 在 $x=0.1$ 和 $x=0.5$ 之间关于 x 的定积分，于是我们可以写为：

的常数值是不确定的。当我们考察限定区间内的积分时，显然无需每次都加上一个常数值，因为这对积分的总结果并没有什么影响，因此，常数项在运算中可以消去。例如，为了求定在方程 $y=10x+3$ 的曲线之下、在 $x=5$ 和 $x=10$ 区间的面积，则不难写出：

$$\int_5^{10}(10x+3)dx=[5x^2+3x+C]_5^{10}$$

$$=(500+30+C)-(125+15+C)$$

$$=390$$

应当指出，按照惯例，积分在施加上下限以前要先用方括号括起来。知道了积分，就可以直接将 x 的上下限代入，并将两个结果彼此相减。因此，通常应把不定积分写为：

$$\int f(x)dx=g(x)+C \qquad (8.7)$$

第四节　标 准 积 分

现在已经很明显，既然能够求定若干个函数的标准导数（第五章），那结果必然是对于所有导数也会有类似的原函数，即标准积分。例如，正如我们曾经能够写出：

$$\frac{d}{dx}(ax^n)=nax^{n-1}$$

同样地也能写出：

$$\int ax^n dx=\frac{ax^{n+1}}{n+1}+C \qquad (8.8)$$

因为

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{ax^{(n+1)-1}}{n+1}(n+1)=ax^n$$

又因

$$\frac{d}{dx}\sin x=\cos x$$

故：

$$\int\cos x dx=\sin x+C$$

其余类推。兹将一些标准积分表列在下面。比较完全的积分表本身就有一本书那样长；至于其它的标准积分，读者可以参阅杜怀特（Dwight，1957）的著述。下面所列的标准积分对于掌握本章的其余内容说来是充分的：

$$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C(x\neq -1) \tag{8.9}$$

$$\int(1/x)dx=\ln x+C \tag{8.10}$$

$$\int e^x dx=e^x+C \tag{8.11}$$

$$\int\sin x dx=-\cos x+C \tag{8.12}$$

$$\int\cos x dx=\sin x+C \tag{8.13}$$

$$\int\sec^2 x dx=\tan x+C \tag{8.14}$$

$$\int\operatorname{cosec}^2 x dx=-\cot x+C \tag{8.15}$$

$$\int\sinh x dx=\cosh x+C \tag{8.16}$$

$$\int\cosh x dx=\sinh x+C \tag{8.17}$$

$$\int\operatorname{sech}^2 x dx=\tanh x+C \tag{8.18}$$

$$\int 1/\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx=\sin^{-1}(x/a)+C \tag{8.19}$$

$$\int 1/\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx=\cos^{-1}(x/a)+C \tag{8.20}$$

$$\int 1/(a^2+x^2)dx=\frac{1}{a}\tan^{-1}(x/a)+C \tag{8.21}$$

$$\int 1/\sqrt{(a^2+x^2)}\,dx=\frac{1}{a}\sinh^{-1}(x/a)+C \tag{8.22}$$

$$\int 1/\sqrt{(x^2-a^2)}\,dx=\frac{1}{a}\cosh^{-1}(x/a)+C \tag{8.23}$$

$$\int a/(a^2-x^2)dx=\frac{1}{a}\tanh^{-1}(x/a)+C \tag{8.24}$$

$$\int \log\ x dx = x\log x - x + C \qquad (8.25)$$

习题 8.4

试求解下列积分：

8.4.1 $\int (5x^2 + 3x - 2)dx$

8.4.2 $5\int (3x^2 - 5 + 2x)dx$

8.4.3 $\int_{\pi}^{2\pi} (\sin x - \cos x)dx$

8.4.4 $\int_{1}^{3} (3/x + 2x^2)dx$

8.4.5 $\int \frac{1}{1-x^2}dx$

8.4.6 $\int_{-5}^{2} (3x^3 - 2x)dx$

8.4.7 $\int_{1}^{5} \frac{dx}{x}$

8.4.8 $\int (\sec^2 x - 2\cos x)dx$

第五节　比较复杂的函数的积分

在许多需要求积分的场合，原函数的形式是这样的，即直接利用上述标准形式来求积分反而往往是不可能的。因此，为了帮助我们解决那些性质比较复杂的求积分问题，已经推出了一些各种不同的方法。积分常可以用类似试凑的方法求出。首先根据经验就积分可能有什么样的形式作出主观推测，然后求出这一结果的微分(一般这是比较容易作的过程)，以便与原来的进行对比。然而为了对一些性质比较复杂的复合函数求积分，主要有三种方法，即：

(1) 分部积分法

(2) 置换积分法

(3) 部分分式积分法

所有这三种方法不但适用于求不定积分，而且还适用于求定积分（数值积分）；这一问题在本章后面还要作进一步的讨论。这三种主要方法在随后的四节中将分别加以讨论，并且在本章第十节概括成表的形式。

然而首先我们应当考察对下列形式的函数求积分的简单情形，即

$$\int f(Ax+B)\,dx$$

一般法则适用于这一形式的函数，故：

$$\int f(Ax+B)\,dx=\frac{1}{A}F(Ax+B)+C \qquad (8.26)$$

这个式子在我们需要对 $\sec^2(5x+2)$ 之类的函数求积分时是很有用的，因为可以直接写出：

$$\int \sec^2(5x+2)\,dx=\frac{1}{5}\tan(5x+2)+C \qquad (由(8.14))$$

如果所讨论的函数用这一方法不可能求其积分，那么就得用下面所述的比较复杂的方法当中的一种。能不能看出函数所具有的特定形式，这对选择方法往往是很重要的。由于这个原因，应当记住本章第十节中的积分"法则"一览表，而且还要认真学习本章第五节至第九节，并试解所有习题。如果被积函数具有形式$\int x\log x\,dx$，即由二函数之积所组成的话，那么就可以用本章第六节中所述的方法求其积分；而如果被积函数是多项式的形式，那么就应当利用本章第九节的方法来处理。有一些场合可以用不止一种方法求积分，但不管用什么方法都可以期望得到同样的结果，而分部积分法大概是最有用的方法之一。

第六节　分部积分法

我们在第五章曾经指出，为了求 $y=u(x)v(x)$ 型函数的微分，

可以利用方程(5.33)给出的下列公式：

$$\frac{dy}{dx}=u(x)\frac{dy}{dx}+v(x)\frac{du}{dx}$$

为了清楚起见，我们将方程的形式简化，写为：

$$\frac{d}{dx}(uv)=u\frac{dy}{dx}+v\frac{du}{dx} \tag{8.27}$$

对整个式子求关于 x 的积分，得：

$$uv=\int u\frac{dv}{dx}dx+\int v\frac{du}{dx}dx+C$$

因此

$$\int u\frac{dv}{dx}dx=uv-\int v\frac{du}{dx}dx+C \tag{8.28}$$

或

$$\int udv=uv-\int vdu+C \tag{8.29}$$

例如，假设我们欲求下列积分：

$$\int x\sin x dx$$

命 $u=x$，并令 $dv=\sin x dx$，故 $v=-\cos x$，于是：

$$\int x\sin x dx=-x\cos x-\int-\cos x dx \quad (由(8.29))$$

$$\int x\sin x dx=\sin x-x\cos x+C$$

可见，迄今为止的运算是相当容易的。然而现在假定我们欲求下列函数的积分：

$$\int x^2\sin x dx$$

若令 $u=x^2$，并命 $dv=\sin x$，故 $du=2xdx$，且 $v=-\cos x$，则：

$$\int x^2\sin x dx=-x^2\cos x-\int-2x\cos x dx$$

而现在我们面临的又是一个无法直接求出的积分。这时我们必须仍然用分部积分法对这个式子再次求关于 x 的积分。兹将 $s=2x$ 和 $dt=-\cos x dx$ 代入，因而 $ds=2dx$ 且 $t=-\sin x$，于是：

$$\int-2x\cos x dx=-2x\sin x-\int-2\sin x dx$$

$$= -2(\cos x + x \sin x) + C$$

这样一来，全积分为：

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$$

$$= \underline{2x \sin x + (2 - x^2)\cos x + C}$$

这里应指出，若命 $s = -\cos x$ 且 $dt = 2xdx$，故 $ds = \sin x dx$ 且 $t = x^2$，则有：

$$\int -2x \cos x dx = -x^2 \cos x - \int x^2 \sin x dx$$

而对于原积分有：

$$\int x^2 \sin x dx = -x^2 \cos x + x^2 \cos x + \int x^2 \sin x dx$$

即

$$\int x^2 \sin x dx = \int x^2 \sin x dx !!$$

因此很明显，我们在应用分部积分法时，必须运用一些常识，并且选定，函数的哪一部分要用 u 来代表，哪一部分要用 dv 来代表。掌握这种方法的最好办法就是独立地试用此法求出一些积分。首先建议读者试证下列方程：

$$\int x^2 \cos x dx = x^2 \sin x - 2(\sin x - x \cos x) + C$$

$$\int x^2 \log x dx = \frac{1}{3} x^3 \left(\log x - \frac{1}{3} \right) + C$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

$$\int arc \sin x dx = x \, arc \sin x + (1 - x^2)^{1/2} + C$$

现在试作下列习题：

习题 8.6

试求下列积分：

8.6.1 $\int 5x \log x dx$

8.6.2 $\int x^3 \sin x dx$

8.6.3 $\int \log x dx$

8.6.4 $\int (\log x)^2 dx$

8.6.5 $\int 3x^2 (1 - \log x) dx$

第七节　置换积分法

另一种主要积分法也是在我们无法直接用标准积分的场合可以使用的，这就是置换法。这里我们可以运用一个与分部积分法中所用的类似性质，即：

$$dx = \frac{dx}{du}du \tag{8.30}$$

因此，如果我们用 u 代替部分被积函数，那么就可以求出 du/dx，然后再求出 dx/du。为了举例说明此法，我们来考察用这种方法求积分的几个例子。首先试求下列积分：

$$\int \frac{x}{\sqrt{(1-x)}}dx$$

兹命 $u=\sqrt{(1-x)}$。它的导数可以用第五章第五节所述的置换法求出。令 $t=1-x$，则

$$\frac{dt}{dx} = -1$$

我们还有

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}t^{-1/2}$$

因而

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dt}\ \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{2}(1-x)^{-1/2}$$

$$\therefore\quad \frac{dx}{du} = -2(1-x)^{1/2}$$

故

$$dx = -2(1-x)^{1/2}du$$

于是将 du 代入，则得：

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(1-x)}} = \int \frac{x}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}[-2(1-x)^{\frac{1}{2}}]du$$

和

$$\int -\frac{xdx}{\sqrt{(1-x)}} = \int -2xdu$$

既然 $u=(1-x)^{\frac{1}{2}}, u^2=(1-x)$，于是 $x=1-u^2$。将其代入积分中，则得：

$$\int -2(1-u^2)du = -2u+\frac{1}{3}u^3+C$$

再以 x 取代 u，则有：

$$\int \frac{x}{\sqrt{(1-x)}}dx = -2(1-x)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$= -\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{1}{2}}(x+2)+C$$

现在再举一例，兹求下列积分：

$$\int x\,e^{x^2}d\,x$$

这时命 $u=e^{x^2}$，且令 $t=x^2$，故 $u=e^t$

$$\frac{du}{dt}=e^t \quad 且 \quad \frac{dt}{dx}=2x$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dt}\ \frac{dt}{dx}=2xe^{x^2}$$

故

$$\frac{dx}{du}=1/2xe^{x^2}$$

于是

$$\int xe^{x^2}dx=\int xe^{x^2}(1/2xe^{x^2})du$$

$$=\int\frac{1}{2}du=\frac{1}{2}u+C$$

及

$$\int xe^{x^2}dx=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

最后再举一例，兹求：

$$\int\frac{\log x}{x}dx$$

令 $u=\log x$，故

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x}$$

因而
$$\int \frac{\log x}{x}dx = \int \frac{\log x}{x}xdu$$
$$= \int \log x du$$

既然 $u = \log_a x$，则 $x = a^u$，于是 $\log_a a^u = u$，故可以写出：

$$\int u du = \int \log x du = \frac{1}{2}u^2 \quad C$$

及
$$\int \frac{\log x}{x}dx = \frac{1}{2}(\log x)^2 + C$$

此法特别适用于一部分被积函数可以用另一部分被积函数的导数表示出来的场合，正如最后这个例子中的那样。因此，如求 $\int f_1(x) f_2(x)dx$（其中 $f_2(x) = f_1'(x)$）时，我们可以令 $u = f_1(x)$，然后以 u 取代 $f_1(x)$，解被积函数：

$$\int f_1(x)f_2(x)dx = \int f_1(x)f_2(x)\frac{dx}{du}du$$
$$= \int f_1(x)f_2(x)\frac{1}{f_1'(x)}du$$
$$= \int f_1(x)du$$

又如上一节的情形一样，掌握此法的最好办法仍然是作一些例题。读者应当试用置换法证明下列四个积分及其解：

$$\int c \quad s\, 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x-1)^4} = \frac{-x^2 + x - \frac{1}{3}}{(x-1)^3} + C$$

$$\int \frac{1}{x \log x}dx = \log(\log x) + C$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x + 1} = \log(e^x + 1) + C$$

习题 8.7

试用置换法求下列积分：

8.7.1 $\int 5\sin x\cos x dx$

8.7.2 $\int (1+x^2)^{-1}\tan^{-1}x dx$

8.7.3 $\int (1-x^{\frac{1}{2}}x dx$

8.7.4 $\int \tan x \sec^2 x dx$

8.7.5 $\int x^2 e^{-2x^2} dx$

第八节　三角函数的积分

在被积函数中含有三角函数的场合，可以在求积分的过程中作出另一种置换。在上一节中，对一些这样的例子已经求了积分，尽管用的不是这种方法。第二章曾经给出了一些方程(方程(2.8)至(2.20))，分别是关联着双角三角函数($\sin 2x, \cos 2x$，等等) 与单角三角函数的和三角比平方的。凡是对积分适合的场合都可以运用这类置换。然后可以再用分部法或者置换法，或者其它方法求出积分。例如，如果我们取被积函数：

$$\int \sin^2 x dx,$$

则由方程(2.19)知：

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

而由(2.8)有：

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

因此：

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

将此代入原来的被积函数，则得：

$$\int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

这里可以认为，读者已经自己满意地证明：

$$\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}\sin 2x \quad \text{（根据本章第七节中的例题）}$$

实际上我们可以利用一般形式的积分来对任何幂指数的三角比求积分，所以在 n 为任何正整数的场合，有：

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx \qquad (8.31)$$

和

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx \qquad (8.32)$$

这些公式称为归约公式；它们常被使用，而且为了得到直接可以积分的 $\sin x$ 或 $\cos x$ 形式的最终被积函数，同样也常常是必不可少的。作为这些公式的应用例题，建议读者再来试解以下积分习题：

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{4}\sin^3 x \cos x - \frac{5}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\cos x \sin x + \frac{1}{2}x + C$$

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x - \frac{2}{3}\sin x + C$$

第九节　部分分式积分法

在这个标题之下，我们仅仅涉及所谓的有理函数，亦即是以 x 的多项式为分母和分子的函数。有时用别的方法当然也可以求积分，不过用部分分式积分法来求往往最快。下面我们会看到，此法特别适用于多项式可以因式分解成适当形式的场合。我们用这个方法可以把被积有理函数简化成更便于求积分的组合形式，即往往可以直接地，亦即用方程(8.26)法则求积分的形式。$k/(Ax+B)$

形式的有理函数很容易用这个方程求其积分。

运用此法的先决条件是，分子的次数(即 x 的最高指数)总得小于分母的次数，所以，例如表达式：

$$\frac{x^3+2x-1}{x^2-1}$$

必须通过从分子中提取因子(x^2-1)而使之成为适当的形式，因而有：

$$\frac{x(x^2-1)+3x-1}{x^2-1}=x+\frac{3x-1}{x^2-1}$$

现在就可以对上述的有理函数求积分，写出：

$$\int x\,dx+\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx$$

这个积分的前一部分不会引起困难，后一部分就是部分分数。兹提取分母(x^2-1)的因子，则有$(x+1)(x-1)$，故：

$$\frac{3x-1}{x^2-1}=\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} \qquad (8.33)$$

于是这个最终表达式可以因式分解为：

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

同乘以$(x+1)(x-1)$，则我们可以认为：

$$A(x-1)+B(x+1)=3x-1 \qquad (8.34)$$

并且由于方程(8.33)中分母的根为$+1$和-1，我们可以将这两个值分别代入方程(8.34)，进而得出 $A=2$ 和 $B=1$，故：

$$\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=\int\frac{2}{x-1}dx+\int\frac{1}{x+1}dx$$

再运用方程(8.26)，则有：

$$\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx=2\log(x-1)+\log(x+1)$$

$$=\log[(x-1)^2(x+1)]+C$$

因此，全积分为：

$$\int \frac{x^3+2x-1}{x^2-1}dx = \frac{1}{2}x^2 + \log[(x-1)^2(x+1)] + C$$

在分母不用进行上述的因式分解就能很容易求出根的场合，我们在阐述部分分式积分法时可以将第三项 C 列入式子中(但不要和作为积分结果的那个常数项 C 相混淆)。兹设想，欲对下列的有理函数求积分：

$$\int \frac{1}{x(x^2+1)}dx$$

(x^2+1)没有实根(利用方程(5.32)求解可以证实这一点，正如我们试求(b^2-4ac)的负值方根的结果得出的那样)，因而可以写出：

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \int \frac{A}{x}dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+1}dx$$

于是我们可以认为$(Bx+C)x + A(x^2+1) = 1$。一个解为$x=0$，将此值代入则得 $A=1$。同样地，该方程两边的 x^2 和 x 的系数必须取得平衡，所以既然

$$(A+B)x^2 + Cx + A = 1$$

故 $A+B=0$，因而 $B=-1$ 且 $C=0$。这样一来，我们就得求下列积分：

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

设 $u=x^2+1$，并代入后一个积分，则有：

$$\frac{dx}{du} = \frac{1}{2x}$$

于是求下列积分：

$$\int x\frac{1}{x^2+1}\frac{1}{2x}du$$

既然 $x=(u-1)^{1/2}$，故：

$$\int \frac{xdx}{x(x^2+1)} = \int (u-1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{u}\frac{1}{2(u-1)^{1/2}}du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{1}{2}\log u = \frac{1}{2}\log(x^2+1)$$

可见，全积分可以表示为：

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = \log x - \frac{1}{2}\log(x^2+1) + C$$

下面再给出几个例题，要读者自己加以证明，然后试作习题。

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)^2} = \log(x+2) - \log(x+1) - 2(x+2)^{-1}$$

$$\int \frac{xdx}{(1+x)^2} = \log(x+1) + (x+1)^{-1}$$

$$\int \frac{(2x-3)dx}{(x-1)(x-7)} = \frac{11}{6}\log(x-7) + \frac{1}{6}\log(x-1)$$

习题 8.9

8.9.1 $\int \frac{(x+2)dx}{(x+1)(x-3)}$

8.9.2 $\int \frac{dx}{(x-3)(x-2)}$

8.9.3 $\int \frac{xdx}{x^4-1}$

8.9.4 $\int \frac{x^2+5x+1}{x(x+1)^2}dx$

8.9.5 $\int \frac{x+1}{(1-x^2)^{1/2}}dx$

第十节　积分法一览表

正如本章第五节末尾曾经强调过的，往往可以利用我们这里给出的若干方法中的任何一种来对给定的任何被积函数求积分。

这里只列举了几个例题，不可能再多举了；而浏览了例题，试解一下各节末尾的习题，这对读者的重要性是不能低估的。对求积分这个任务说来，最宝贵的东西是经验。过一定时候，挑选最快的求积分方法的能力几乎就会成为习惯！同样地，经常遇到的，但不是标准型的一些积分，不久都会印在心上，并且可以达到这样的程度，以致足以对积分作出"推断"，然后再求微分加以证实；这是一个比较快的过程。指出这一点就可以认识到，对于绝大多数的地理工作者，甚至自然地理工作者说来，对长项多次求积分的机会和需求都是比较少的。因此，对于大多数人来说，基本掌握几种主要的函数积分法，应当被认为是最终目的；下面对一些基本积分法作了概括。读者在碰到被积函数时，应当系统地浏览一下表 8.1 的检查表，查看一下在各种方法当中有没有可以直接应用的方法。该表并不是完全的，读者有时尚须求助于试凑法。

第十一节　数值积分

现在我们可以讨论对本章一开始考察的那个简单问题所作的"正确"答案了。我们曾经设法计算土壤渗水的总深度，其渗润率可以表示成函数 $y = 15 + 5x^{-1/2}$，式中 y 为渗润率，以毫米/小时(mm/h)计；而 x 为时间，以小时计。我们在本章第二节得出的近似值，在 $x = 0.1$ 至 $x = 0.5$ 时段内的曾经是 9·53 毫米和 10.40 毫米。运用刚才由中间各节得到的经验，我们可以有把握地计算下列定积分：

$$\int_{0.1}^{0.5}(15 + 5x^{-1/2})\,dx = \left[\,15x + 10x^{1/2}\,\right]_{0.1}^{0.5}$$

$$= (7.50 + 7.07) - (1.50 + 3.16)$$

$$= 9.91 \text{ 毫米}$$

表8.1 积 分 方 法 一 览 表

被积函数的形式	特 征	方 法	节号	附 注
标准型	参见第八章第四节	参阅方程(8.9)至(8.25)	8.4	全表参见德怀特(1957)所著一书
三角函数 三角函数	1 $\int\cos 2x\,dx$ $\int\sin 2x\,dx$,等 2 $\int\sin^n x dx$ 等,n 为整数	运用方程(2.8)至(2.20) 运用归约公式	2.9 8.8	必要时重复使用此法
$\int f(Ax+B)dx$		$\int f(Ax+B)dx=\frac{1}{A}F(Ax+B)$	8.5	
多项式	1 含有诸如x^n,x^{n-1},ax^n 等诸项串	运用标准方程(8.9)	8.4	
	2. 例如 $\int\frac{3x-1}{x^2-1}dx$	利用部分分式积分法进行因式分解	8.9	
两个或更多个 x 项之积	$\int f_1(x)f_2(x)dx$ 和 $f_1(x)=f_2'(x)$	置换积分法：命 $u=f_2(x)$ 然后求 dx/du $\int f_1(x)f_2(x)\frac{dx}{du}du$	8.7	必要时重复使用此法
两个或更多个 x 项之积	$\int f_1(x)f_2(x)dx$	利用分部积分法：代入 $u=f_1(x)$,$dv=f_2(x)$ $\int udv=uv-\int vdu+C$	8.6	必要时重复使用此法

然而对这类数值积分有两个"捷径"，适用于对复杂的函数求定积分。必须着重强调的是，两个捷径全都是近似的方法，不过正如我们将会看到的，两者都比原始的几何方法稍精确一些。其中第一个捷径是梯形法则。

第十二节　梯形法则

在曲线下的面积的上述几何近似值的误差，主要是由于图8.2(2)中括入了曲线上面的诸小面积和图 8.2(1) 中除去了曲线下面的诸小面积所造成的。然而在两种情况下，这些小面积的形状都很近似三角形。δx 值越小，每一曲线线段就越接近该曲线上二点之间的弦。梯形法则正是利用这些小面积，并且以它们实际上都是三角形为前提，来简化其面积计算的。因此，柱形的形状结果均呈梯形。为了对比起见，我们将选定和前面一样的区间，并利用梯形法则计算面积。图 8.3 仅示出图 8.2 所示的曲线 $y = 15 + 5x^{-1/}$ 的一小线段。现在我们可以认为，每个 x 坐标与该曲线的交点，其坐标为(x_0, y_0)，(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，等等。在我们的例子中，这样的坐标有五个，表示出四个梯形。在 x 轴上各个 x 坐标的间距是固定不变的，我们暂且以 h 表之。可见，与该曲线交于点(x_0, y_0)和点(x_1, y_1)的第一个梯形的面积可以表示为：

$$hy_0 + \frac{1}{2}h(y_1 - y_0)$$

就我们的情形而言，由于曲线的斜率为负，上式为负，故 y_0 大于 y_1。类似地，第二个梯形的面积为

$$hy_1 + \frac{1}{2}h(y_2 - y_1)$$

其它梯形的面积依此类推。于是所有四个梯形的总面积为：

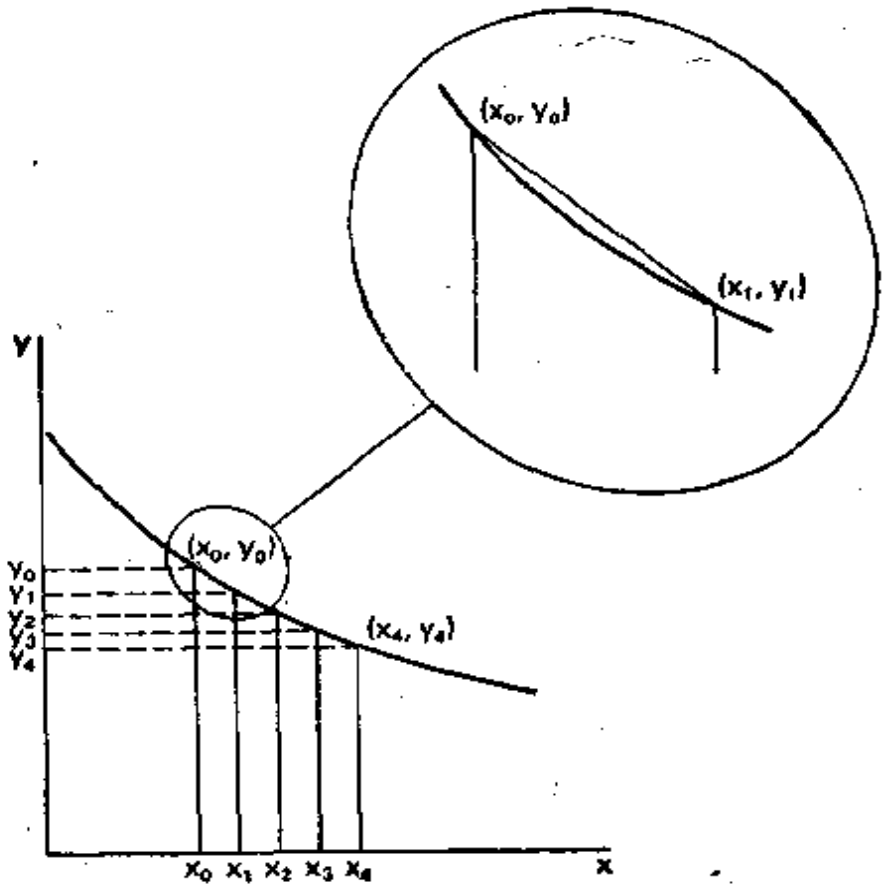


图 8.3　梯形积分法和辛卜生积分法

$$hy_0 + \frac{1}{2}h(y_1 - y_0) + hy_1 + \frac{1}{2}h(y_2 - y_1) + hy_2 + \frac{1}{2}h(y_3 - y_2)$$

$$+ hy_3 + \frac{1}{2}h(y_4 - y_3)$$

或　$$\frac{1}{2}h(y_0 + y_1) + \frac{1}{2}h(y_1 + y_2) + \frac{1}{2}h(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}h(y_3 + y_4)$$

或　$$\frac{1}{2}h[y_0 + 2(y_1 + y_2 + y_3) + y_4]$$

代入诸 y 值，其中 $y_0 = 30.8$，$y_1 = 26.2$，$y_2 = 24.1$，$y_3 = 22.9$，$y_4 = 22.1$，则有：

$$\frac{1}{2} \times 0.1[30.8 + 2(26.2 + 24.1 + 22.9) + 22.1]$$

因此，在该曲线之下在给定的区间的面积的梯形解为 9.97 毫米。

$$= 2hf(x_1) + \frac{1}{3}h^3 f''(x_1)$$

$$= 2hy_1 + \frac{1}{3}h^3 f''(x_1)$$

在后一项中的二阶微分实际上是曲线在 x_1 处的切线斜率的变化率，我们可以近似地认为它与相邻二点之间的弦的斜率之变化率大致相等(因为 δx 趋于 dx)，因而有：

$$f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_2 - 2y + y_0)$$

于是该积分变为：

$$\int_{-h}^{h} f(x_1 + a)da = 2hy_1 + \frac{1}{3}h(y_2 - 2y_1 + y_0)$$

$$= \frac{1}{3}h(y_2 + 4y_1 + y_0)$$

我们可以就每对柱形依次重作这个练习，进而得出下列的面积一般表达式，即辛卜生法则：

$$\int_0^n f(x)dx = \frac{1}{3}h[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots) + y_n] \qquad (8.37)$$

因此，按文字描述，我们必须取首、末纵坐标之和，加上奇数下标的纵坐标之和的四倍，再加上偶数下标的纵坐标之和的两倍。唯一的条件是要有偶数个柱形。在我们的特例中，就有这样的偶数个柱形，奇数个纵坐标，而且按辛卜生法则求得的解为：

$$\int_{0.1}^{0.5} (15 + 5x^{-1\cdot 2})dx = \frac{1}{3} \times 0.1[30.8 + 4(26.2 + 22.9) + 2(24.1) + 22.1]$$

$$= 9.92 \text{ 毫米}$$

这个结果与用常规积分法求出的数值积分仅仅大 0.01 毫米，尽管用这个特殊的近似方法来求这样的一个简单积分显然是非常不合

算的。

第十四节　积分的应用

我们可以把积分的应用扩大到科学技术的许多各种不同的领域，而所有这些领域又都同自然地理学的内容相抵触的。积分在自然地理学本身中的应用必然是比较有限的。然而在文献中却经常会遇到积分，这样的例子是不胜枚举的。读者现在已经了解了积分的含义，因而可望能够解释积分。不过，积分在两大领域中是一个很重要的前提。其中的一个领域可以将积分的应用由面积扩大到体积、重心和转动惯量；而另一个领域则可以为谐量分析提供数学基础。

第十五节　旋转体的体积

如果在二维空间给定一个一元函数，关联着 x 和 y，那么我们就可以使其绕两轴之中的任何一个旋转而产生一个旋转体积。首先我们来列举一个很简单的例子。假定想要组成一个锥体，锥顶位于本坐标系的原点。取直线方程的一般形式 $y=mx+k$，并使之绕 x 轴旋转。若 x 为正值，因为 $k=0$，结果会产生一个锥形体。图 8.4 中的三角形 OAB 的面积可以表示成积分：

$$\int_0^{x_1} mx\,dx$$

这样就验证了三角形面积的一般公式，因为该积分为：

$$\left[\frac{1}{2}mx^2\right]_0^{x_1}=\frac{1}{2}\,\frac{y_1}{x_1}\,x_1^2=\frac{1}{2}y_1x_1$$

当我们旋转三角形面积时，该锥体的每个微元的半径为 mx_n，因而每个旋转微元的面积必定为 $\pi(mx_n)^2$，于是整个锥体的旋转体积

为：

$$\pi\int_0^{x_1}(mx)^2\,dx=\frac{1}{3}\pi\frac{y_1^2}{x_1^2}x_1^3=\frac{1}{3}\pi y_1^2x_1$$

即底面积乘上高的三分之一。

只要知道表达侧面形状的函数，就可以利用这个方法计算任何形状的体积。一般的表达式为：

$$\int_a^b\Big(f(x)\Big)^2dx \tag{8.38}$$

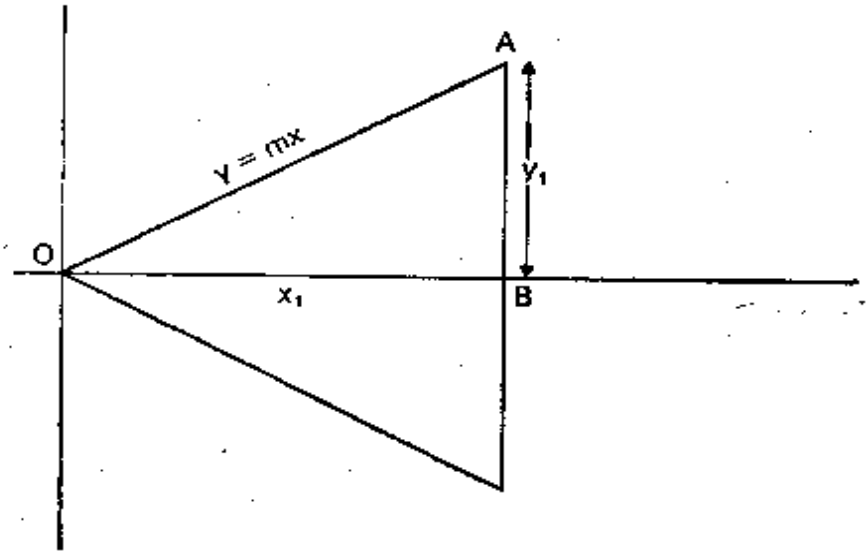


图 8.4　一锥体体积的产生

例如，将以原点为中心的一个圆绕 x 轴旋转，就可以得出一个球体体积。圆的一般方程为 $x^2+y^2=r^2$，即 $y=(r^2-x^2)^{\frac{1}{2}}$。为了求出整个球体的体积，可以对该圆在 $-r$ 和 $+r$(r 为半径)之间求积分，所以有：

$$\pi\int_{-r}^{+r}(r^2-x^2)dx=\pi\left[r^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{+r}$$

$$=\frac{4}{3}\pi r^3$$

即球体体积的常见的一般表达式。

第十六节　转 动 惯 量

现在我们来考察一旋转体上一定点处的一个质点。这个质点对其旋转中心具有一转动惯量；后者可以根据该质点的质量(m)和距旋转中心的距离来确定(参见戴维森 1978 所著一书)。命I为转动惯量，r为其距旋转中心的距离，则

$$I = mr^2$$

现假设想要计算一根密度均匀的杆在它以通过其中点的轴绕y轴旋转时的总转动惯量。很明显，该杆的总转动惯量可以表示成整个杆上所有无限小的微元的积分。如果杆的密度为D(单位长度的质量)，因而该杆每个微元的质量为Ddx，并且如果杆的长度为 2 (在x轴上由$-l$至$+l$)，那么总转动惯量(I_t)就可以表示为：

$$I_t = \int_{-l}^{+l} Dx^2 dx = \left[\frac{1}{3}Dx^3\right]_{-l}^{+l}$$

$$= \frac{1}{3}Dl^3 + \frac{1}{3}Dl^3$$

$$= \frac{2}{3}Dl^3$$

由于杆的总质量为$2Dl$，因而该杆在它绕其中点旋转时的总转动惯量可以表示为：

$$I_t = \frac{1}{3}ml^2$$

上述计算实例只是用来说明一个很简单的情形，即积分法可以用来求物体的转动惯量。类似地，我们还可以求一些别的物体的转动惯量，不过这已经不属于本书的讨论范围。如出现这些问题时，那就留待个别读者自己去应付了。

第十七节　傅里叶级数

在我们研究周期函数(例如,时间序列和某些类型的趋势面)的时候,傅里叶级数乃是积分的一项很有效的应用。我们在第四章曾经看到,三角函数,特别是含有正弦和余弦的那些三角函数,都是些周期函数,因为它们在 x 轴上每隔 2π 弧度均重复出现。这些函数当然皆为连续函数;连续函数这一概念在这一章的一开头就已经下了定义。在第六章也曾经看到,诸三角函数都可以用象马克劳林级数那样的级数展开式来加以确定。傅里叶级数可以把积分法与级数展开式结合起来,适用于间断函数。

因为我们所涉及的三角函数,其各个纵坐标每隔 2π 弧度重复出现,所以我们可以把注意力局限于含有 2π 弧度周期的任何区间。因而为了方便起见,我们仅讨论在 $-\pi<x<+\pi$ 区间上的积分。傅里叶级数所涉及的是含常数项的三角函数 $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \sin nx, \cdots$ 和 $\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos nx, \cdots$。所有这样的函数,不管它们的诸项有多么复杂,都有周期(波长)2π。例如,$\sin(2\pi+3x)=\sin(4\pi+3x)$。这一点由第二章可以看得很清楚。傅里叶级数的基本形式为:

$$f(x)=a_0/2+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\cdots+a_r\cos rx+b_1\sin x+b_2\sin 2x+b_3\sin 3x+\cdots+b_r\sin rx \tag{8.39}$$

这个式子可以简化为:

$$f(x)=a_0/2+\sum_{r=1}^{\infty}(a_r\cos rx+b_r\sin rx) \tag{8.40}$$

式中任意傅里叶系数(a_0, a_r 和 b_r)分别以下式确定:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \tag{8.41}$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos rx\,dx \qquad (r \text{ 为整数}) \tag{8.42}$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin rx\,dx \qquad (r \text{ 为整数}) \tag{8.43}$$

在大多数场合，运用傅里叶级数可以求得一元函数的近似值。例如，可以设想以傅里叶项表示的周期循环函数 $y = x$，以便在外加相继的高次 r 的诸项时我们最终可以得出一个间断函数，它在 $x = -\pi$ 和 $x = +\pi$ 区间，当 r 趋于无限大时逼近直线 $y = x$。现在我们列举这个特例来说明这一问题。为了求 a_0，a_r 和 b_r，必须代入方程(8.41)，(8.42)和(8.43)以求对应函数的积分。该过程相当冗长，这里因篇幅所限无法详述此过程。按分部法求积分的结果显示：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx \qquad = C$$

$$a_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos rx\,dx = O$$

$$b_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin rx\,dx = -\frac{2}{r}\cos\pi r$$

由于 $-\cos\pi r = (-1)^{r+1}$，故：

$$b_r = \frac{2(-1)^{r+1}}{r}$$

于是(由方程(8.40))所求的傅里叶展开式为：

$$b_r\sin rx = 2\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \frac{1}{2}\sin 4x + \sin 5x$$

$$-\frac{1}{3}\sin 6x + \cdots \tag{8.44}$$

随着外加给级数上的项数越来越多，它也就越来越逼近 $y = x$ 型。

然而应指出，该函数在 $r=\infty$ 时是间断的。图 8.5 中画出的诸图象分别说明就 2 项、10 项和 50 项而言的诸曲线以及函数 $y=x$ 的曲线。

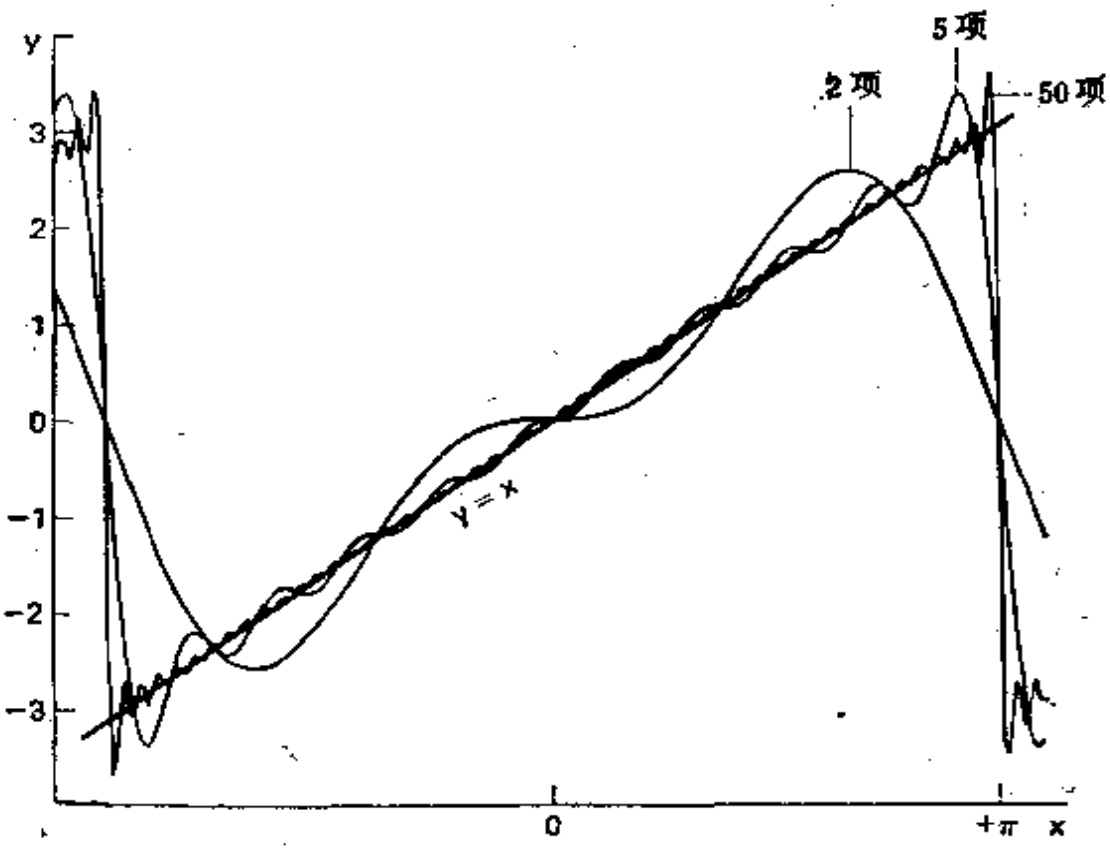


图 8.5　$y=x$ 以及利用方程(8.40)型的诸间断调和函数对它的逼近

在自然地理学中，所谓的傅里叶分析就构成了时间序列分析理论的重要的一部分，并且也是趋势面分析一些领域的重要基础。下面来讨论上述问题的一个例子；然而如果读者想要深入研究地理文献中的趋势面分析问题，那么可以参阅雷奈 (Rayner, 1972) 的著述，其中应用傅里叶级数对地形趋势面作了研究。

方程(8.40)中所给的傅里叶级数的一般形式可以在保持该级数的周期性的情况下加以变换，以适合于非 $-\pi$ 至 $+\pi$ 区间。在调和分析中所用的傅里叶级数的一般形式为：

$$f(x)=\overline{x}+\sum_{r=1}^{r=N/2}[a_r\sin(2\pi rx/P)+b_r\cos(2\pi rx/P)] \quad (8.45)$$

式中 P 为数据的基本周期(例如参见帕诺夫斯基与布里尔(Panofsky and Brier, 1958)的著述)。因此,如果我们考察月降水量的年周期,那么该基本周期即为 12 个月。N 为数据总体,在上面所举的例子中它也取值 12。不过应指出,我们还可以考察平均月降水量,并且保留 $N=12$,但要命 $P=365$ 天。该表达式选择什么单位,这显然要看分析结果的最终形式如何来决定。a_r 和 b_r 的表达式分别为:

$$a_r = \frac{2}{N}\left[f(x)\sin(2\pi rx/P)\right]_{x=1}^{x=N} \tag{8.46}$$

$$b_r = \frac{2}{N}\left[f(x)\cos(2\pi rx/P)\right]_{x=1}^{x=N} \tag{8.47}$$

在这个例子中,我们设法对肯尼亚的内罗毕的月降水量的年较差进行傅里叶型周期函数的拟合。降水量的年变化是显著的,而且季节性变化也是显著的,并且最湿的月份是四月和十一月(表 8.2)。第一步是将诸 x 值(月份序数 1 至 12)和 $f(x)$(每月的降水量)代入方程(8.46)和(8.47)中,并就 $r=1$(即一次调和)求出 a_r 和 b_r。对于 $r=1$ 而言的傅里叶系数为:

表 8.2 肯尼亚的内罗毕平均月降水量(毫米)(摘自: Meterological office, Tables of Temperature, Relative Humiditg and Precipitation for the world: Part iv, 1967, HMSO)

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
38.1	63.5	124.5	210.8	157.5	45.7	15.2	22.9	30.5	53.3	109.2	86.4

$$a_1 = \frac{2}{12}[38.1\sin(2\pi/12) + 63.5\sin(4\pi/12) + 124.5\sin(6\pi/12) + \cdots + 86.4\sin(24\pi/12)]$$

和

$$b_1 = \frac{2}{12}[38.1\cos(2\pi/12) + 63.5\cos(4\pi/12)$$
$$+ 124.5\cos(6\pi/12) + \cdots + 86.4\cos(24\pi/12)]$$

完成这两项计算，则得：

$$a_1 = 50.2 \qquad b_1 = -6.6$$

平均月降水量为 79.8 毫米，可见，由方程(8.45)中的一次调和所给的年级数的一次近似为：

$$f(x) = 79.8 + 50.2\sin(\pi x/6) - 6.6\cos(\pi x/6) \qquad (8.48)$$

将诸 x 值代入这个方程中，就可以得出表 8.3 的第一行数字。通过类似的过程，我们可以计算其它的傅里叶系数，必要时直到第六个傅里叶系数。表 8.3 中的第二行、第三行和第四行的数字分别与二次、三次和四次调和的累加相对应。直至四次调和的终结级数方程可以表示为：

$$f(x) = 79.8 + 50.2\sin(\pi x/6) - 6.6\cos(\pi x/6)$$
$$- 56.4\sin(\pi x/3) - 6.4\cos(\pi x/3) - 3.8\sin(\pi x/2)$$
$$+ 26.3\cos(\pi x/2) - 5.2\sin(2\pi x/3) - 8.0\cos(2\pi x/3) \qquad (8.49)$$

表 8.3 的第四行中的数字与表 8.2 中的数字极其相近似。可见，我们已经获得了非常接近原始数据的结果，并且在继续往下计算五次和六次调和之前，也可以计算已经造成的方差值。所造成的方

表 8.3 内罗毕降水量的调和分析按方程 (8.45) 对一次、二次、三次和四次调和的计算值

一月	二月	三月	四月	五月	六月	七月	八月	九月	十月	十一月	十二月
99.2	120.0	130.0	126.6	110.6	86.4	60.4	39.6	29.6	33.0	49.0	73.2
47.2	74.3	136.4	178.7	156.3	80.0	8.3	-6.1	36.0	85.1	94.7	66.8
43.3	48.0	140.2	205.0	152.5	53.7	12.1	20.2	32.2	58.8	98.5	93.1
42.8	56.5	132.2	204.5	161.0	45.7	11.6	28.7	24.2	58.3	107.0	85.1

差可以表示为：

$$\frac{a_i^2+b_i^2}{2s_x^2} \tag{8.50}$$

式中 s_x 为原始数据的标准差。利用这个公式可以预测，一次调和会造成总方差的35%，二次，45%，三次，10%，四次，1%。由前四次调和所解释的总方差为91%，而且前两次调和实际上可以解释总方差的80%。很明显，这两次调和在月降水量的年变化中是最重要的调和。为什么这样说，只要计算一下各次调和的周期就可以一目了然。一次调和具有的周期可以表示为 P/r，即 12 个月；二次调和的周期为 6 个月(12/2)。我们在一开始即曾说过，降水量的年变化和季节性变化都是显著的；后者与天顶日的季节性变化密切相关。

正如读者将会看到的，在自然地理学中，在许多问题上可以用到积分。在最后一节中所列举的一些直接而显明的应用实例都是一些比较高级的统计方法所依赖的基本数学基础。另外，在前几节中关于积分的比较全面的论述可望还有助于读者理解在一些论述地貌学、气象学的高深的论文中所遇到的一些数学问题。如果读者想要增进这一章讨论范围以外的积分论知识，那么可以推荐几本特别实用的，在积分等有关问题上有明确阐述的数学教程，这就是兰恩(Lang，1973)的著述和奈特与阿达姆斯(1975 a.b)的合著。

第九章　基本微分方程

第五章和第八章阐述的各种方法，现在可以应用到解微分方程。正如上一章（积分）所讨论的问题情形一样，这一章的标题所包括的数学范围足以占满全书，至于这本书的单独一章那就更不必说了。正如上一章的情形一样，向学生介绍的问题主要是现有的各种解法如何掌握的问题和什么类型的微分方程可以用什么方法解的如何识别的问题。由于这个原因，本章有大量的习题，为掌握这些方法提供更多的机会。

仅用这一章的篇幅来向读者介绍，更确切地说，让读者解最基本的微分方程，显然是很困难的；不过可以期望，如果读者需要或者希望的话，这里提供的基础知识却能够为掌握比较高深的概念和方法打下牢固的基础。我们首先把注意力转向微分方程的解法，然后再列举几个具体例子说明微分方程在自然地理学中的应用。

第一节　基本方程

我们对全书中关联着两个或更多个函数，即变量（就统计意义而言）的数学方程已经熟悉了。同时我们从第五章和第八章还了解了微分和积分的含义，而且已经会用它们来处理简单的微分方程和积分方程。如果我们取一个一元的关系式，比方说第三章中用来说明基本线性函数的干绝热直减率的关系式，那么我们可以看出，温度直减率本身可以写成下列形式：

$$\frac{dT}{dz} = -9.8(^{\circ}C/\text{公里}) \tag{9.1}$$

这个公式其实是我们考察微分方程的出发点。我们可以对这个一

元微分方程求关于 z 的积分，并且得出：

$$T = -9.8z + C \tag{9.2}$$

式中的积分常数表明，我们在用直减率进行预测中需要知道初始温度；在大多数场合需要知道地面温度。微分方程的最简形式是方程(9.1)，它不仅含有x项和y项，而且还含有导数dy/dx，dy^2/dx^2，等等。在这一章的大部分只涉及仅含两个变量 x 和 y以及其中之一的导数的微分方程。

上一章讨论了几种积分法，旨在求定土壤渗润率与时间的一元关系的定积分。为了方便起见，设渗润率为 y，而不考虑它实际上是水量关于时间的导数。如果现在我们设这个导数为 dy/dx，那么为了更精确起见，应当写为：

$$\frac{dy}{dx} = 15 - 5x^{-1/2} \tag{9.3}$$

所以该积分应当为：

$$y = 15x + 10x^{\frac{1}{2}} + C \tag{9.4}$$

实际上我们已经解出了方程(9.3)所给的微分方程。但应指出，该解仅为一通解，因为我们使 C 成为不确定的。因而方程(9.4)是(9.3)微分方程的通解。通过确定 x 值和 y 值，我们可以得出特解。因此，我们可以认为，例如：

$$\frac{dy}{dx} = 15 - 5x^{-1/2} \qquad y = 10, \quad x = 0.5$$

或

$$\frac{dy}{dx} = 15 - 5x^{-1/2} \qquad y(0.5) = 10 \tag{9.5}$$

将(0.5,10)代入方程(9.4)的通解中，便可得出 C 值：

$$10 = 15 \times 0.5 + 10 \times 0.5^{-1/2} + C$$

$$C = 18.1$$

于是我们有下列特解：

$$y = 15x + 10x^{1\ 2} + 18.1 \tag{9.6}$$

能使我们得出特解的 x 值和 y 值构成边界条件。如果我们在 $x=0$ ($y(0)$)时确定该关系式，那么这个条件就被称为该方程的初始条件。

我们可以援引类似的一个序列来解运动方程(第五章)。如果以 s 表示距离，v 表示速度，a 表示加速度，t 表示时间，那么就可以将运动方程表示为微分方程的递解。于是可认为：

$$\frac{d^2s}{dt^2} = a \tag{9.7}$$

解这个方程(求关于 t 的积分)，则有：

$$\frac{ds}{dt} = at + u \tag{9.8}$$

式中 u 为积分的任意常数，在这一场合为初始条件，其中 $t=0$。通过求关于 t 的积分来解这个方程，则有：

$$s = \frac{1}{2}at^2 + ut + k \tag{9.9}$$

k 又是另一个任意常数，这次它表示距物体开始运动的原点的距离。因为为了方便起见，我们通常认为物体总起动于原点($s=0$，$t=0$)，所以这个常数取零值。

第二节 阶 与 次

我们对函数的一阶和二阶导数已经熟悉了。方程(9.7)是含有 s 关于 t 的二阶导数的方程。因此我们可以认为，方程(9.7)为二阶微分方程。方程(9.8)为一阶微分方程。下面我们另举几个比较复杂的微分方程例子，它们有各自的阶(用括号说明)。

$$2\frac{dy}{dx} - y + 3xy = 0 \qquad \text{(一阶)}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{dy}{dx}3x=y \qquad \text{(三阶)}$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=4y+x \qquad \text{(四阶)}$$

$$y''-2y'+5x=0 \qquad \text{(二阶)}$$

$$5-2y^{(4)}-3y=1 \qquad \text{(四阶)}$$

在每种情形下，方程取最高阶导数的阶，而不管有无低阶导数出现。在这一章我们的注意力主要放在一阶微分方程的解上。二阶或更高阶微分方程的解法基本上类似一阶微分方程的解法。解这样的方程会涉及相当复杂的变换，尽管这一章打下的基础仍然适用。热心研究的读者必须学习这一章，并且充分领会这一章的内容，然后参阅推荐参考文献中所列的任何一本高等数学教程，以增进解高阶方程的知识。

微分方程中的次往往与其阶相混淆。微分方程的次，主要指的不是导数，而是方程中任何 y 项的最高幂指数。例如方程中如有 y^4 或 $(y'')^4$ 诸项，则称它为四次方程。这里重要的是指出：

$$(y'')^3 \neq y^{(6)} \qquad (9.10)$$

这个不等式的左边表明，y 的二阶导数自乘到三次幂；而右边则表明 y 关于 x 的六阶导数。只含一次 x 项的方程称为线性微分方程，而更高次方程则是非线性方程。我们通常仅涉及一次方程。

第三节　常微分方程和偏微分方程

到现在为止，我们在这一章讨论的所有微分方程全都可以列入所谓的常微分方程这一类；这样的称法从其实用性看来不一定是妥当的。这些方程仅含有自变量和因变量各一个。另一方面，偏微分方程是含有不止一个自变量的方程。我们在前一章已经看到了含有不止两个变量的普通线性方程。兹考察下列简单方程：

$$x = 5y - 2z \tag{9.11}$$

这个方程可以求其偏微分，以给出 x 关于 y 和 x 关于 z 的导数。当求 x 关于 y 的导数时，可以把所有含 z 的各项均视为常数；类似地，对于 x 关于 z 的偏微分说来，也可以把所有的 y 项均视为常数。在这一章会经常利用偏微分，但并不专门讨论这个问题，这一节只是简短地涉及一下，也不试图解偏微分方程本身，尽管这样的解通常都是这一章中所讨论的一些方法的比较直接的推广。热心研究的读者如果想要研究这个问题，则可以参阅其它有关文献。

偏导数所采用的记号与常导数所采用的记号显然不同。我们使用字母 d 表示常微分，而使用记号 ∂ 表示偏微分，于是方程(9.11)中 x 关于 y 的偏导数为：

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 5 \tag{9.12}$$

且 x 关于 z 的偏导数为：

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -2 \tag{9.13}$$

我们称这个记号为“偏 d”。

作为偏微分的一个例子，我们来考察下列方程：

$$x = 12y^3 - 3yz + 4z^2y^3 \tag{9.14}$$

因而：

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 36y^2 - 3z + 12z^2y^2 \tag{9.15}$$

且

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = 72y \quad + 24z^2y \tag{9.16}$$

另外：

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -3y \quad + 8zy^3 \tag{9.17}$$

且

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z} = \quad 8y^3 \tag{9.18}$$

等等。指出：

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial x}{\partial z} = -3 + 24\,zy^2 \qquad (9.19)$$

且

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial x}{\partial y} = -3 + 24\,zy^2 \qquad (9.20)$$

再另举一例，设：

$$x = y\tan z + e^{2y} - z^3 \log y \qquad (9.21)$$

则：

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \tan z + 2\,ye^{2y} - z^3/y \qquad (9.22)$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = y\sec^2 z \qquad -3\,z^2 \log y \qquad (9.23)$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y \partial z} = \sec^2 z \qquad -3\,z^2/y \qquad (9.24)$$

习题 9.3

试求下列诸式的 $\partial x/\partial z, \partial^2 x/\partial z^2$ 和 $\partial x/\partial y, \partial^2 x/\partial y^2$。

9.3.1 $x = 5\,y(z-2) + 10\,yz$

9.3.2 $x = z\tan y(1 + z\tan y)$

9.3.3 $x = y\log z + 2zy + z\log y$

9.3.4 $x = 2\sin z\cos y - 3\tan zy$

9.3.5 $x = 3(z^2 - y^2) + 2\,z\tan^{-1} y$

第四节　一阶常微分方程的解

因为按定义，解微分方程就是求积分，我们在求积分时曾遇到过围绕此任务的一些类似问题。当我们通过本章的这一部分、由基本的微分方程向比较复杂的微分方程过渡的时候，就会出现这些问题。对一些求解"法则"在本章第七节作了概括。

类型最简单的微分方程是下列形式的恒等式：

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{9.25}$$

其中我们可以很容易对该式两边求关于 x 的积分，所以设：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

则

$$y = \log x + C$$

当然，这些方法正是我们在第八章曾经遇到过的，而且无需再作重复说明或再出这种方程的习题了。

第五节　含有函数 y 的方程

下面有一些复杂的方程，仅含有导数 dy/dx 和因变量 y，即下列形式的一些方程：

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{9.26}$$

解这类方程要比解含有导数和 $f(x)$ 的上一形式的方程稍为困难一些。兹考察方程：

$$\frac{dy}{dx} = y \tag{9.27}$$

我们可以将 dy 项和 dx 项均视为分离的，并且两边同乘以 dx，于是：

$$dy = ydx$$

试图对 y 求关于 x 的积分显然是无济于事的，不过将该方程通除以 y，则：

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int dx$$

该方程对左边求关于 y 的积分，对右边求关于 x 的积分，则为：

$$\log y = x + C \tag{9.28}$$

应指出，该解显然含有常数 C。因为这个常数值对通解而言是任

意的，所以我们可以完全有根据地写出：

$$\log y - x + C = 0$$

此式尽管代数上不同于方程(9.28)的解，因为 C 的符号相反，然而它在我们的讨论范围内是完全容许的。现在读者应当试解下列习题。

习题 9.5

9.5.1 $\dfrac{dy}{dx} = 5y^2$

9.5.2 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4}{y}$

9.5.3 $3\dfrac{dy}{dx} = -2\sin^2 y$

9.5.4 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}e^{2x}$

9.5.5 $2(4+y^2)\dfrac{dy}{dx} = 3$

第六节　可分离变量的方程

下面我们来考察含有 x 项和 y 项以及导数 dy/dx 的方程。解这类方程，有各种不同的方法可供使用；而选用什么方法则取决于识别方程的一般形式和应用适当的方法。最简单的方法往往与最简单、轮廓最分明的这类微分方程有关。现在我们来考察方程：

$$\frac{dy}{dx} = xy \tag{9.29}$$

乘以 dx 并除以 y，则有：

$$\int \frac{1}{y}\, dy = \int x dx$$

再对两边分别求关于 y 和关于 x 的积分：

$$\log y - \frac{1}{2}x^2 = C \qquad (9.30)$$

在这种形式的方程中，诸变量均被认为是分离的，而且总是可以用这个方法来解。我们还可以另举一例来说明此方法，兹试解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(y-1)}{x+1}$$

乘以 dx，有：

$$dy = \frac{2(y-1)}{x+1}dx$$

且
$$(x+1)dy = 2(y-1)dx$$

故

$$\int \frac{dy}{2(y-1)} = \int \frac{dx}{x+1}$$

因而求积分后有：

$$\frac{1}{2}\log(y-1) = \log(x+1) + C$$

或写为

$$\frac{\log(y-1)}{2\log(x+1)} = C$$

现在建议读者试解下列习题：

习题 9.6

9.6.1 $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 5x^3y^2$

9.6.2 $\sin^2 x\frac{dy}{dx} - 2y^2 = 0$

9.6.3 $\operatorname{cosec} x\frac{dy}{dx} = \sec y$

9.6.4 $x\frac{dy}{dx} = 2\operatorname{cosec} y\cos^3 y$

9.6.5 $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\log x$

第七节　齐次方程

另有一类常微分方程，只要代入 $y=vx$ 所得的方程仅含 y 项和 v 项，就可以用这样的代入法来解。如果是这样的话，那么该方程就被认为是齐次方程。如果 $y=vx$，则运用积的微分法则(方程(5.33))，有：

$$y=vx$$

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{dx}{dx}+x\frac{dv}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \tag{9.31}$$

兹举下列方程为例：

$$xy\frac{dy}{dx}=x^2+y^2 \tag{9.32}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{xy} \tag{9.33}$$

此方程显然不是一个可分离方程。因而下一步在于确定该方程是否是个齐次方程。如果这时将 $y=vx$ 代入此方程的右边，那么我们就应得出一个仅含 v 项的表达式。对于方程(9.33)来说，有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+v^2x^2}{vx^2}=\frac{1+v^2}{v}$$

消去所有含 x 的项，则该方程是齐次的，故：

$$\frac{dy}{dx}=f(v)$$

继之，令方程(9.31)等于我们最后得到的函数 v，则得：

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{v}$$

这是一个可分离的微分方程，因而可以求解：

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{v}-v=\frac{1}{v}$$

$$v+\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2+3v}{v+2}$$

因此：

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{2v^2+3v-v(v+2)}{v+2}$$

$$=\frac{v^2+v}{v+2}$$

$$\therefore \quad \int\frac{v+2}{v^2+v}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

以 v 表示的积分可以因式分解为：

$$\frac{v+2}{v^2+v}=\frac{A}{v}+\frac{B}{v+1}$$

因而：

$$A(v+1)+Bv=v+2$$

所以 $A=2$ 且 $B=-1$。故：

$$\int\frac{2}{v}dv-\int\frac{1}{v+1}dv=\int\frac{1}{x}dx$$

$$2\log v-\log(v+1)=\log Cx$$

既然 $v=y/x$，故：

$$2\log(y/x)-\log(y/x+1)=\log Cx$$

$$(y/x)^2/(y/x+1)=Cx$$

$$(y/x)^2=Cx(y/x+1)=C(y+x)$$

$$\underline{y^2=Cx^2(y+x)}$$

这个方法是一个很有用的解法。在微分方程不是可分离的场合，我们首先总是要通过代入 $y=vx$ 来检查方程是否是齐次方程。而方程很少是齐次的。兹列举下列方程作为另一个例子：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{xy} \tag{9.35}$$

其性质很类似方程(9.32)。然而我们在代入 $y=vx$ 时得到：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+vx}{vx^2}=\frac{1+v}{vx}$$

应指出，含 x 各项并不能消去，因而该方程不是齐次的，并且：

$$\frac{dy}{dx} \neq f(v)$$

当这一情形出现时，我们只得求助于本章第八节至第十节所述的比较高级的解法。

习题 9.7

检查下列诸方程是否是齐次方程，如果检查达到目的，则解之：

9.7.1 $$\frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$$

9.7.2 $$xy^3 \frac{dy}{dx} = x^4 + y^4$$

9.7.3 $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x}{2x - y}$$

第八节 “恰当”微分方程的解

在本章前几节中我们了解了一些微分方程的解，它们不仅是一阶的和线性的，而且还是类型简单、求解容易的。当有些方程不能用本章第四节至第七节所述的方法来解时，我们就要着手寻找别的求解方法。有些特殊类型的一阶方程是可以用下述的方法来解的。而另有一些方程虽然不能直接用此法来解，但往往却可以化为更适当的形式，然后即可用此法来解。现在我们来讨论“恰当”微分方程。

如果一微分方程具有下列形式，那么它就是一个“恰当”微分方程：

$$Q\frac{dy}{dx} + P = 0 \qquad (9.36)$$

式中 P 和 Q 分别为 x 项和 y 项，而且式中 Q 关于 x 的偏导数等于 P 关于 y 的偏导数，即：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y} \tag{9.37}$$

作为例证，我们取下列两个很相似的微分方程：

$$(5x^2-2xy)\frac{dy}{dx}+10xy-y^2=0 \tag{9.38}$$

和

$$(5x^3-2xy)\frac{dy}{dx}+10xy-y^2=0 \tag{9.39}$$

在不知情者看来，唯一的差别似乎并不那么明显，因为方程(9.38)中的第一项为 $5x^2$，而方程(9.39)中的第一项为 $5x^3$。然而如果我们运用方程(9.36)和方程(9.37)的定义，那就可以看出，尽管这两个方程具有这种形式，但在后一方程中的偏导数 $\partial Q/dx$ 和 $\partial P/\partial y$ 并不能满足方程(9.37)，而在前一方程中的却能满足。对于方程(9.38)，有：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=10x-2y \tag{9.40}$$

和

$$\frac{\partial P}{\partial y}=10x-2y \tag{9.41}$$

而对于方程(9.39)，则有：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=15x^2-2y \tag{9.42}$$

和

$$\frac{\partial P}{\partial y}=10x-2y \tag{9.43}$$

方程(9.38)显然满足(9.37)中的条件，而方程(9.39)却不能满足。确定了微分方程是恰当方程，那解它就可以大大简单化了。

我们一旦确定了一微分方程是恰当方程，那就可以如下处理。首先通过 y 和 x 确定另一个函数 u，所以：

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial u}{\partial x} \tag{9.44}$$

我们立即可以看出，这个方程类似方程(9.36)中的原来的一般形

式的微分方程；于是如果写出：

$$Q=\frac{\partial u}{\partial y} \quad 和 \quad P=\frac{\partial u}{\partial x}$$

则方程(9.44)变为：

$$\frac{du}{dx}=Q\frac{dy}{dx}+P=0 \quad (由方程(9.36))$$

因而我们可以将方程(9.36)写为：

$$\frac{du}{dx}=0$$

或

$$u=常数$$

这样就有了解这种形式的方程的方法了。我们现在就这样来解方程(9.38)：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=P=10xy-y^2 \tag{9.45}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=Q=5x^2-2xy \tag{9.46}$$

对方程(9.45)求关于 x 的积分，有：

$$u=5x^2y-y^2x+f(y)+C, \tag{9.47}$$

式中 $f(y)$ 为某一必须加以确定、以便得出最终解的任意函数 y。考虑到这一点，并且还考虑到我们已经有了 $\partial u/\partial y$ 的值(9.46)，便可对方程(9.47)求关于 y 的微分，因而：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=5x^2-2xy+\frac{df}{dy} \tag{9.48}$$

并且令方程(9.48)与方程(9.46)相等，则有：

$$5x^2-2xy=5x^2-2xy+\frac{df}{dy}$$

故

$$\frac{df}{dy}=0$$

或

$$f(y)=C$$

可见，考虑到 u 为一常数，并且将其与 C 合并，则该解必然为：

$$5yx^2 - y^2x = C \tag{9.49}$$

在上面的例子中，$f(y)$是作为一个常数，解起来很方便。而这样的情形并不常有。例如，取方程：

$$(y^2 + x^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \tag{9.50}$$

故 $Q = x^2 + y^2$ 和 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$ (9.51)

并且 $P = 2xy$ 和 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$ (9.52)

而为了求函数 u，有：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + y^2$$

故 $$u = x^2y + f(y)$$

求关于 y 的微分，有：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + \frac{df}{dy}$$

因此由方程(9.51)得：

$$x^2 + \frac{df}{dy} = x^2 + y^2$$

$$\therefore \quad \frac{df}{dy} = y^2$$

$$\therefore \quad f(y) = \frac{1}{3}y^3 + C$$

因而方程(9.50)的解为：

$$x^2y + \frac{1}{3}y^3 = C$$

可见，解恰当方程的过程乃是一个简单的代数变换过程。然而我们通常很少遇到微分方程是恰当方程的情形！我们往往首先必须用本章第九节中确定的积分因子来把它们化为恰当方程形式。不

过读者仍然必须首先来试解下面的习题，以便使自己熟悉解恰当微分方程的方法。

习题 9.8

9.8.1 $2(y\sin x+2xy)\frac{dy}{dx}+y^2(\cos x+1)=0$

9.8.2 $(\log x+2yx^2+2yx)\frac{dy}{dx}+y\left(\frac{1}{x}+2y\,x+y\right)-\log x=0$

9.8.3 $x^2+3y+(3x-y^2)\frac{dy}{dx}=0$

9.8.4 $(\sin y-\tan x)\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x$

9.8.5 $(x-1)\frac{dy}{dx}+y-x=1$

第九节 积分因子

兹考察方程：

$$2y\cos y+y\left(\frac{1}{x}-x\sin y\right)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (9.53)$$

这是方程(9.36)所示的一般形式的方程，然而求出诸系数的偏导数，则得：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y\log x-y\sin y \qquad (9.54)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2y\sin y+2\cos y \qquad (9.55)$$

因此，此方程不是恰当方程，而且不能如本章第八节所述那样直接解。不过如果我们将方程(9.53)乘以 x/y，则得：

$$2x\cos y+(1-x^2\sin y)\frac{dy}{dx}=0 \qquad (9.56)$$

这里，
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y$$

而且因子 x/y 被称为积分因子。现在我们可以如以前那样继续解下去：

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x\cos y$$

$$\therefore \quad u = x^2\cos y + f(y) + C$$

且

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x^2\sin y + \frac{df}{dy}$$

由方程(9.53)可以看出：

$$\frac{\partial u}{\partial y} = Q = 1 - x^2\sin y$$

因而

$$\frac{df}{dy} = 1 \quad 且 \quad f(y) = y + C$$

于是该解为：

$$x^2\cos y + y = C \tag{9.57}$$

这是一个很简单的例子，其中积分因子比较明显。正如涉及积分和解微分方程的许多方法的情形一样，选择一个适当因子的任务可以是一项艰巨的任务，或者至少也是一项冗长乏味的任务。归根结底，这要取决于特定形式的方程的识别机会。因此，我们往往不得不仍然再次求助于试凑法，亦即"检验解法"(目前倾向于后一种委婉称法)！下面还出了一些习题。这一节的所有习题都可以用积分因子求解。

习题 9.9

9.9.1 试用积分因子 $y\cos x$ 解

$$(2\tan x + 2x\sec x)\frac{dy}{dx} + y(1+\sec x) = 0$$

9.9.2 试解 $(3x^3y^{-1} + 2x^2 - x)\frac{dy}{dx} + 6x^2 + yx = 0$

9.9.3 试解 $x\log x\frac{dy}{dx} + (x+y) = 0$

9.9.4 试解

$$(x^2\sec y - 3xy^2\cot y)\frac{dy}{dx} + x(2\operatorname{cosec} y - y^3\cot y) = 0$$

9.9.5 试解

$$(6x^2y^3 - 18y^2x + 12y)\frac{dy}{dx} + 4y^4x - 9y^2 = 0$$

第十节 积分因子$e^{\int A dx}$

有些方程具有下列形式：

$$\frac{dy}{dx} + Ay = B \tag{9.58}$$

式中 A 和 B 均为 x 的函数，可以通过代入 $e^{\int A dx}$ 型积分因子来解，因此：

$$\frac{d}{dx}(e^{\int A dx}y) = e^{\int A dx}B \tag{9.59}$$

例如，兹考察方程：

$$x\frac{dy}{dx} = x^3 - y \tag{9.60}$$

这个方程通过通除以 x 并且重新排列诸项，可以容易地化为方程(9.58)的形式：

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2$$

即

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2$$

所以 $A = 1/x$ 且 $B = x^2$，

而且

$$e^{\int A dx} = e^{\int (1/x)dx} = e^{\log x} = x$$

因此代入方程(9.59)，则有：

$$\frac{d}{dx}(xy) = x^3$$

$$\therefore \quad xy = \frac{1}{4}x^4 + C \text{ 即 } \underline{x(4y - x^3) = C}$$

习题 9.10

识别微分方程的形式乃是解微分方程的一个重要部分。下面出的习题就是用本章第八节、第九节和第十节所述的方法来解微分方程。因此，读者在应用三种方法中的一种求解之前，一定要确定方程的性质。

9.10.1 $3x\frac{dy}{dx} + 3y = 2$

9.10.2 $(x-1)\frac{dy}{dx} - xy\log x = 2$

9.10.3 $2y\cot x + 2\sin x\frac{dy}{dx} = 0$

9.10.4 $y^2\cot x\,(\cot x - \sin y)\frac{dy}{dx} + y^3\sec x\,\operatorname{cosec} x = 0$

9.10.5 $x^2 + 3y + (3x - y^2)\frac{dy}{dx} = 0$

第十一节 微分方程解法一览表

解一阶微分方程时要涉及的第一个问题是，确定微分方程具有什么样的基本型；因为方程的型决定着我们对方程的解法。这个任务完成之后，第二个问题往往就是对微分方程内的有关函数求积分。读者在解微分方程时，可以参阅第八章第十节中的积分法一览表。

为了便于读者查阅本章第四节至第十节所述的解微分方程的各种方法，作为辅助工具，下面我们给出一个相似的解法一览表。表 9.1 按照复杂程度的递升顺序非常概括地列出了各种微分方程类型。不过，一些“标准”型可以根据实践和经验比较容易地加以识别，因此这里无需再作系统整理和列入此表。

表 9.1 微分方程解法一览表

方 程 型	解 法	节 号
元恒等式 $\frac{dy}{dx}=f(x)$	求积分	第四节
一元恒等式 $\frac{dy}{dx}=f(y)$	通除以 $f(y)$ 并求积分	第五节
可分离变量的方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{f(y)}{f(x)}$	适当通除并求积分	第六节
齐次方程 $f(xy)\frac{dy}{dx}=f(x)f(y)$	代入 $y=vx$ 以检验是否齐次。如果是齐次，则 $v+x\frac{dv}{dx}=f(v)$ 求解并将 v 代入	第七节
恰当方程 $Q\frac{dy}{dx}+P=0$ $\frac{\delta Q}{\delta x}=\frac{\delta P}{\delta y}$	$\delta u/\delta y=P$。求出 u。再求出 $\delta u/\delta y=Q$，然后求出 $f(y)$ 解以 u 表之	第八节
非齐次方程 $Q\frac{dy}{dx}+P=0$ $\frac{\delta Q}{\delta x}\neq\frac{\delta P}{\delta y}$	试求积分因子 故 $\frac{\delta Q}{\delta x}=\frac{\delta P}{\delta y}$ 然后如上处理	第九节
非齐次和非恰当方程 $\frac{dy}{dx}+Ay=B$	写出：$\frac{d}{dx}e^{\int A dx}y=e^{\int A dx}B$	第十节

第十二节 高阶微分方程（常系数方程）的解

现在我们来考察高阶微分方程的解，不过在开始时，我们仅讨论那些既是线性的，又仅仅是二阶的微分方程，尽管所述诸方法同样也适用于比较复杂的高阶型方程。高阶微分方程的解法主要有三种。其中之一是下列形式的方程的通解：

$$a_0\frac{d^ny}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \quad (9.61)$$

因为仅局限于二阶方程，故可写成一般二阶线性型：

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+Cy=0 \quad (9.62)$$

这是一个齐次方程，其形式可以通过代入 $y=e^{mx}$（式中 m 为某一任意常数）来解。由于 e^{mx} 的一阶导数为 me^{mx}，二阶导数为 m^2e^{mx}（余类推），所以方程(9.62)在所有各项通除以 e^{mx} 时，通过代入即可变为：

$$am^2+bm+c=0$$

这个方程被称为微分方程(9.62)的辅助方程，可以通过因式分解或代入方程(5.32)而求出它的根 m_1 和 m_2。结果为：

$$y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x} \quad (9.63)$$

式中 A 和 B 均为任意常数。通解中任意常数的个数体现了原微分方程的阶，决定着我们由辅助方程可以求得的根的个数。于是对于三阶方程而言，通解应当为：

$$y=Ae^{m_1x}+Be^{m_2x}+Ce^{m_3x} \quad (9.64)$$

作为这种方法的应用例证，取方程：

$$2\frac{d^2y}{dx^2}+11\frac{dy}{dx}-6y=0$$

这个方程通过代入 $y=e^{mx}$ 而变为：

$$2m^2+11m-6=0$$

经因式分解，有：

$$(m+6)(2m-1)=0$$

或 $m_1=-6$ 和 $m_2=\frac{1}{2}$，因此，通解为：

$$y=Ae^{-6x}+Be^{\frac{1}{2}x}$$

现在来考察 $m_1=m_2$ 的情形。在下列方程中，当根为 -1 时，就有

这样的一种情形：

$$\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad (9.65)$$

于是解为：

$$y=(A+B)e^{-x}$$
$$=Ce^{-x}\quad (\text{式中 } A+B=C)$$

而我们仅有一个任意常数，它并不能满足二阶微分方程的通解。因此，必须求出 $y=ue^{mx}$ 的另一个通解，式中 $u=f(x)$，因而代入方程(9.65)中，则有：

$$\frac{d^2}{dx^2}(ue^{-x})+2\frac{d}{dx}(ue^{-x})+ue^{-x}=0 \qquad (9.66)$$

运用积的微分公式(方程(5.33))，有：

$$\frac{d}{dx}(ue^{-x})=-ue^{-x}+e^{-x}\frac{du}{dx} \qquad (9.67)$$

和 $$\frac{d^2}{dx^2}(ue^{-x})=ue^{-x}+(-e^{-x})\frac{du}{dx}+e^{-x}\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{du}{dx}(-e^{-x}) \qquad (9.68)$$

而将方程(9.67)和方程(9.68)代入方程(9.66)，则得：

$$ue^{-x}-2e^{-x}\frac{du}{dx}+e^{-x}\frac{d^2u}{dx^2}+2\left(e^{-x}\frac{du}{dx}-ue^{-x}\right)+ue^{-x}=0$$

或

$$\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

$$\therefore\quad \frac{du}{dx}=A$$

$$u=Ax+B$$

因此方程(9.65)的通解一定具有下列形式：

$$y=(Ax+B)e^{-x} \qquad (9.69)$$

辅助方程的根往往是虚根。这就是说，该方程不能因式分解，而且代入方程(5.32)包括取负数的方根。这样的解是可能的，不

过会含有复数(即含有 $i=(-1)^{1/2}$ 的那些数),而我们在本书中并不直接讨论复数的积分。如果读者想要深入研究微分方程的解的这个问题,则可以参阅较高级的数学教程,例如弗兰德与普赖斯(Flanders and Price,1973)的著述。

习题 9.12

9.12.1 $2\dfrac{d^2y}{dx^2}=8y$

9.12.2 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+12\dfrac{dy}{dx}+36y=0$

9.12.3 $2\dfrac{d^2y}{dx^2}-3\dfrac{dy}{dx}=2y$

9.12.4 $5\dfrac{d^2y}{dx^2}+14\dfrac{dy}{dx}-9y=0$

9.12.5 $25\dfrac{d^2y}{dx^2}+36y=60\dfrac{dy}{dx}$

第十三节 特别积分

本章第十二节所讨论的方程类型是很简单的一种类型。兹考察非齐次方程的情形,例如:

$$a\frac{d^2y}{dx^2}+b\frac{dy}{dx}+cy=f(x) \qquad (9.70)$$

我们不能用本章第十二节中所述的方法来解这个方程,然而却可以将补函数 u 应用到方程(9.70),它也是 x 的函数。因而有:

$$a\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{du}{dx}+cu=0 \qquad (9.71)$$

这个方程也被称为简化方程;随后代入 $u=e^{mx}$,便可以解,正如我们在本章第十二节中作过的那样。原先的函数的剩余部分被称为特殊积分 v。这样一来,对于方程(9.70)型的非齐次微分方程的

完全通解，可以认为

$$\underline{\text{通解}(y)=\text{补函数}(u)+\text{特别积分}(v)}$$

式中

$$a\frac{d^2v}{dx^2}+b\frac{dv}{dx}+cv=f(x) \tag{9.72}$$

为了证明这一点，可求下列方程的解：

$$a\frac{d^2}{dx^2}(u+v)+b\frac{d}{dx}(u+v)+c(u+v)=f(x)$$

根据方程(9.71)和方程(9.72)，此方程可以化为：

$$a\frac{d^2u}{dx^2}+b\frac{du}{dx}+cu+a\frac{d^2v}{dx^2}+b\frac{dv}{dx}+cv=0+f(x) \tag{9.73}$$

这个方法的主要问题是确定特别积分 v。这基本上仍然是一个试凑法的问题。在许多场合，特别积分是很难选择的。我们在本章第十四节还会涉及这个问题，不过首先我们列举一个基本的特殊积分的应用例子。兹考察微分方程：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}+y=(x+1)^2 \tag{9.74}$$

就本场合而言，补函数 u 可使我们得出辅助方程：

$$m^2-2m+1=0$$

即 $m=1$，于是有：

$$u=(Ax+B)e^x$$

为了确定特别积分，假定由于方程(9.74)的右边是一个多项式，特别积分也具有那种形式，因而：

$$v=ax^2+bx+c$$

则有：

$$\frac{d^2v}{dx^2}-2\frac{dv}{dx}+v=2a-2(2ax+b)+ax^2+bx+c=(x+1)^2$$

令诸系数分别相等，则有：

$$a=1,\ b-4a=2 \text{ 和 } 2a-2b+c=1$$

故 $a=1, b=6$ 且 $c=11$。这样一来，特别积分为：

$$v=x^2+6x+11 \tag{9.75}$$

而通解为：

$$y=(Ax+B)e^x+x^2+6x+11 \tag{9.76}$$

这种作法可以用来确定一些类型的特别积分。当 $f(x)$ 具有形式 ae^{bx} 时，我们同样也可以认为特别积分会取形式 a_1e^{bx}，其余类推。现在我们列举一个比较难作的例题，试求下列方程的通解：

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2\frac{dy}{dx}-y=6x+\sin x$$

这时可以把左边因式分解，因而有(以 m 表之)：

$$m^2-2m-1=(m-1)^2=0$$

于是

$$u=(Ax+B)e^x$$

对于特别积分 v，可认为它所取的形式也取决于该方程右边的形式，故：

$$v=(ax+b)+(c\sin x+d\cos x)$$

式中第一个括号内的各项与第一项有关，而 $(c\sin x+d\cos x)$ 则与第二项有关，可见，如上一个例子一样：

$$\begin{aligned}\frac{d^2v}{dx^2}-2\frac{dv}{dx}-v=&\frac{d^2}{dx^2}(ax+b+c\sin x+d\cos x)\\&-2\frac{d}{dx}(ax+b+c\sin x+d\cos x)\\&-(ax+b+c\sin x+d\cos x)\\=&\,6x+\sin x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad&(-c\sin x-d\cos x)-2(a+c\cos x-d\sin x)\\&-(ax+b+c\sin x+d\cos x)\\=&\,6x+\sin x\end{aligned}$$

重新排列各项，得：

$$\sin x(-c+2d-c)+\cos x(-d-2c-d)+x(-a)$$

这些算子均被称为"D 算子"。不过应指出，D 算子的用法跟辅助方程中 m 的用法不一样，两者所执行的任务也完全不同。我们在使用记号 m 时可以看到，补函数可以表示成方程 $(D^2-2D+1)y=0$，此方程附有一个同一形式的辅助方程，表明 $m=1$，并给我们以 u 解。现在为了求出上列方程的特别积分，将两边除以 D^2-2D+1，于是：

$$y=\frac{(x+1)^2}{D^2-2D+1}$$

$$=(x+1)^2(D^2-2D+1)^{-1}$$

利用二项展开式(方程(6.14))将$[1+(D^2-2D)]^{-1}$ 展开，可把上式的后一项展开为：

$$y=[1-(D^2-2D)+(D^2-2D)^2-(D^2-2D)^3+\cdots](x+1)^2$$

现在利用 D 来"处理"每个$(x+1)^2$ 项，并且考虑到任何高于 D^2 的高阶项均为零，有：

$$y=(x+1)^2-2+4(x+1)+8$$

因此，

$$y=x^2+6x+11$$

与前面的方程(9.76)一样，我们再次看到该解为：

$$y=(Ax+B)e^x+x^2+6x+11$$

D 算子法常常是一种很实用的联立解线性微分方程的方法。一阶微分方程是比较容易解的，但联立解高阶方程往往是很繁重的计算。不过下面我们列举几个很简单的例题来说明一些可用的方法。兹考察一对微分方程：

$$2y_1+\frac{dy_1}{dx}+5y_2=0 \qquad (9.78)$$

$$3y_1+5\frac{dy_1}{dx}+y_1=0 \qquad (9.79)$$

命 $D=d/dx$，于是：

$$(D+2)y_1+5y_2=0 \qquad (9.80)$$

且
$$(5D+1)y_2+3y_1=0 \tag{9.81}$$
将方程(9.80)乘以 3，方程(9.81)乘以(D+2)，则有：
$$3(D+2)y_1+15y_2=0 \tag{9.82}$$
$$3(D+2)y_1+(5D+1)(D+2)y_2=0 \tag{9.83}$$
相减后则有：
$$15y_2-(5D+1)(D+2)y_2=0$$
$$\therefore\quad y_2(-5D^2-11D+13)=0 \tag{9.84}$$
将此方程视为以 m 表示的一个辅助方程，并有 $m_1=-2.25$ 和 $m_2=1.15$，于是：
$$\underline{y_2=Ae^{-2.25x}+Be^{1.15x}}$$
现在将 y_2 代入方程(9.78)，则有：
$$3y_1+5(-2.25Ae^{-2.25x}+1.15Be^{1.15x})+Ae^{-2.25x}+Be^{1.15x}=0$$
$$\therefore\quad 3y_1=10.25Ae^{-2.25x}-6.75Be^{1.15x}$$
$$\therefore\quad \underline{y_1=3.42Ae^{-2.25x}-2.25Be^{1.15x}}$$
作为另一个例题，我们来联立解下列方程：
$$3\frac{dy_1}{dx}-6y_2=0 \tag{9.85}$$
$$4y_1-\frac{dy_2}{dx}=0 \tag{9.86}$$
仍然令 $D=d/dx$，则有：
$$3Dy_1-6y_1=0 \tag{9.87}$$
$$4y_1-Dy_2=0 \tag{9.88}$$
将方程(9.87)乘以 4，方程(9.88)乘以 3D，则有：
$$12Dy_1-24y_2=0 \tag{9.89}$$
$$12Dy_1-3D^2y_2=0 \tag{9.90}$$
方程(9.89)减方程(9.90)，有：
$$3D^2y_2-24y_2=0$$

因而 $m_1 = 2.83$ 且 $m_2 = -2.83$，于是

$$y_2 = Ae^{2.83x} + Be^{-2.83x}$$

同样地，代入方程(9.88)，有：

$$4y_1 - 2.83Ae^{2.83x} + 2.83Be^{-2.83x} = 0$$

$$\therefore \quad y_1 = 0.71(Ae^{2.83x} - Be^{-2.83x})$$

习题 9.14

试用 D 算子法解下列微分方程：

9.14.1 $2\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 2y = (x+1)(x-1)$

9.14.2 $D^2 + 2D + 1 = x$

9.14.3 $\frac{d^2y}{dx^2} - y = x^3 + x$

第十五节 应 用

现在我们已经打下了微分方程的基础。关于微分方程，我们只能作简略而初步的讨论。正如在本章一开始所讲的，这个问题通常要用一整本书，而不是仅用一章的篇幅来讨论的。关于这个问题本来还可以多讲一些，就象在这一章和以前几章中介绍基本微积分时所讲的那样。不过，读者在现阶段已经能够着手从数学专业和理科专业书籍(而不是自然地理专业书籍)中进一步搜集比较高深的一些数学资料了。就这特定的一章来说，我们已经初步地考察了微分方程问题，以致读者对微分方程的含义和比较简单的微分方程的解法有了基本了解。实际上在自然地理学中经常遇到的微分方程形式，差不多都能用本章列举和阐述的方法当中的一种来解。微分方程通常仅应用于理论性的过程研究，因此很少有高于二阶的方程。在过去的十年中，山坡过程和伴生土壤发育

的研究领域已经成了自然地理学中很大的一个研究领域。而在此之前的一个很长的时期内提出的许多有关坡地发育的理论，基本上全不是以对复杂的自然过程作严格的定量分析作为依据的。在第三章，作为说明力的分解的一个例证，我们曾经把力学应用到坡地上的颗粒运动。由这样的初级水平进一步提高，结果就形成了诸如柯克比(Kirkby,1977)和尤(Young,1972)所作的坡地形态和过程的详尽探讨。这些地貌学问题已经由夏德格 (Scheidegger,1970) 作了比较全面的阐述，并且有一些山坡发 育模型已经应用到特定类型的坡地和地理区(例如肖与海利所作 (Shaw and Healy,1977))。这些著作在对有关问题进行理论探讨时全都运用了微分方程。

在理论大气学和水力学(例如尤斯与阿杰里德斯(Youngs and Aggelides,1976)的著述)中的确会有更为复杂的方程，然而我们必须看到，从事这样的理论探讨的地理工作者至少都具有大学毕业水平，而且实际上都能够参阅高等数学教程——这当然要从阅读本书以获取基础知识作起！关于特殊的相关性和有效性的比较高深的问题应当是解偏微分方程，它所需的偏导数本身性质方面的知识，比我们所提供的要多得多(例如参见斯蒂芬森 (Stephenson, 1973)的著述)。另外还有一些复杂的微分方程可以运用拉普拉斯变换来求解。热心研究的读者如果对这两个问题中的一个或者两者全都感兴趣的话，那么作为深入学习的一般性指南，可以参阅斯蒂芬森 (1973)的著述或者马诺吉安与诺斯卡特 (Manougian and Northcutt,1973)的著述。前者作了尤其明确的阐述，它本来不是供数学专业，而是供理科专业用的。

作为这一章的最后一部分，我们把注意力转过来，比较详细地讨论一下微分方程在自然地理学中的两项简单应用，两者均属理论气象学领域。

第十六节　大气边界层中的风场

地面与大气层之间的磨擦力，可以使地表附近的风速减低，风向偏转。风速减低和风向改变，发生在地面本身附近的所谓“边界层”中的最为明显；此边界层人为地被规定为500米左右的大气最低层。对风速随高度增加而增大的情形进行详查的结果发现，这种增大情形并不是均匀（线性）的；而且风的切变，即风速随高度的变化率，在地面本身附近是最大的，其初始条件是，高度（z）为零时，风速（v）亦为零。可见，风的切变是随高度增加而减小的，于是可以写出：

$$\frac{dv}{dz}\propto\frac{1}{z} \tag{9.91}$$

为建立这个关系式的基本微分方程所需的比值常数，就是风速和地形本身的函数。在实践中我们经常使用由磨阻速度 u_* 和卡尔曼（Karman）常数 k（约为0.4）所组成的一项，为了方便起见，我们常把这两者合并为常数 b，于是 $b=u_*/k$，而且：

$$\frac{dv}{dz}=b\frac{1}{z} \tag{9.92}$$

这样一来，经积分可得：

$$v=b\log z+C \tag{9.93}$$

式中 C 为一任意常数。于是我们可以看出，在边界层内风速随高度的非线性增加，必然具有单对数关系式的一般形式。这就为建立边界层风场的数学模型提供了一个基本的开端。

第十七节　大气运动方程

学生在学习（和理解）基础气象学中的地转风和梯度风方程推

导问题时，常常感到困惑不解！正是由于这个缘故，为什么下面援引了大气学领域中的另一个例子，那就不言自明了。大气中只要有什么运动发生，那必然是施加了什么力而使气粒产生了加速度。气粒即使处于分子状态，它也具有质量，而且我们把所施加的力规定为等于气粒质量乘上所产生的加速度（见戴维森 1978 年所著一书），即：

$$F = ma \tag{9.94}$$

这就是大气层中能使气粒在水平面上产生加速度的气压梯度力。在地球大气层内，我们可以把气压梯度力分解为两个水平方向，在考察其他力的时候还可以分解成垂直方向。如果 u，v 和 w 分别是这三个方向 x，y 和 z 上的风速，则有：

$$F_x = m\frac{du}{dt} \tag{9.95}$$

$$F_y = m\frac{dv}{dt} \tag{9.96}$$

$$F_z = m\frac{dw}{dt} \tag{9.97}$$

因为气压仅是作用于单位面积上的力，所以可以认为，在 x 方向上起作用的气压（p）可以将力 $pdydz$ 施加于矩形 ABCD 上，如图 9.1 所示。如果假定在 x 方向上有气压梯度（$\partial p/\partial x$）在起作用，则该气压可以将力

$$\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dy\ dz$$

施加于按顺风方向相隔 dx 距离的另一个矩形（EFGH）上。应指出，这里对气压梯度使用了偏导数，因为这时诸气压梯度均以 x，y 和 z 作为自变量而分解为三个方向。两个力之差即代表由于气压梯度所造成的力，因此：

$$F_x = m\left[\ pdydz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right)dydz\right] \tag{9.98}$$

$$= -m\left(\frac{\partial p}{\partial x}dxdydz\right) \tag{9.99}$$

假设上述的气粒具有单位质量，而且由于密度(ρ)等于质量/体积，故对于单位质量而言：

$$F_x = -\frac{\partial p}{\partial x}\ \frac{1}{\rho} \tag{9.100}$$

类似地：

$$F_y = -\frac{\partial p}{\partial y}\ \frac{1}{\rho} \tag{9.101}$$

我们还可以就高度 z 推出类似的表达式，不过这时我们要引进重力加速度 g 项，这与引起大气压力的下向增加情形（垂直气压梯度）一样，因此：

$$F_z = g = -\frac{\partial p}{\partial z}\ \frac{1}{\rho} \tag{9.102}$$

于是，将方程(9.95)与方程(9.100)合并，再将方程(9.96) 与方程(9.101) 合并，则得：

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}\ \frac{1}{\rho} \tag{9.103}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}\ \frac{1}{\rho} \tag{9.104}$$

现在我们将科里奥利力的对应各项相加(仍然按单位质量)：

$$C = 2V\Omega\sin\phi = Vf \tag{9.105}$$

式中 V 为沿气压梯度向下的风速(亦即是说未经分解)；Ω 为地球的角速度；ϕ 为纬度。f 项称为科里奥利参数。如果我们现在将总的科里奥利力以速度 v 和 u 分别在 y 轴和 x 轴上分解为两个方向，并且考虑到在科里奥利力与分解风速成比例时，前者垂直作用于后者，那么我们可以看出，科里奥利力的分力 vf 对 y 方向上的 dv/dt 并没有影响，而对 x 方向上的 du/dt 却有影响。这一情形以图解方法就 x 方向上的分力示于图 9.2(1)，而就 y 方向上的分

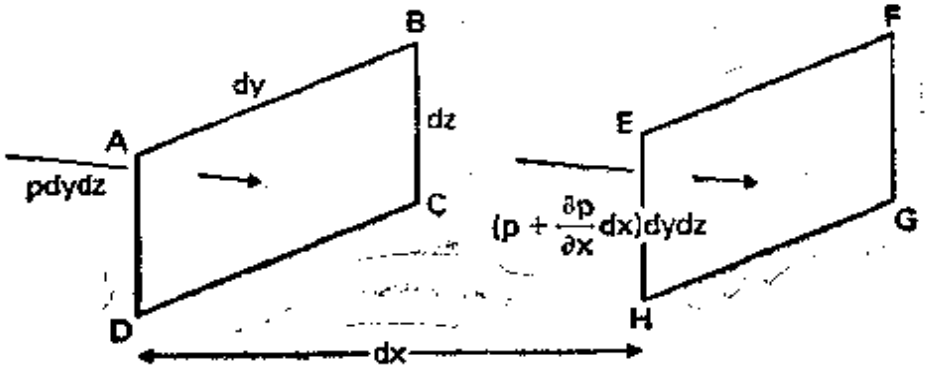


图 9.1 气压梯度力

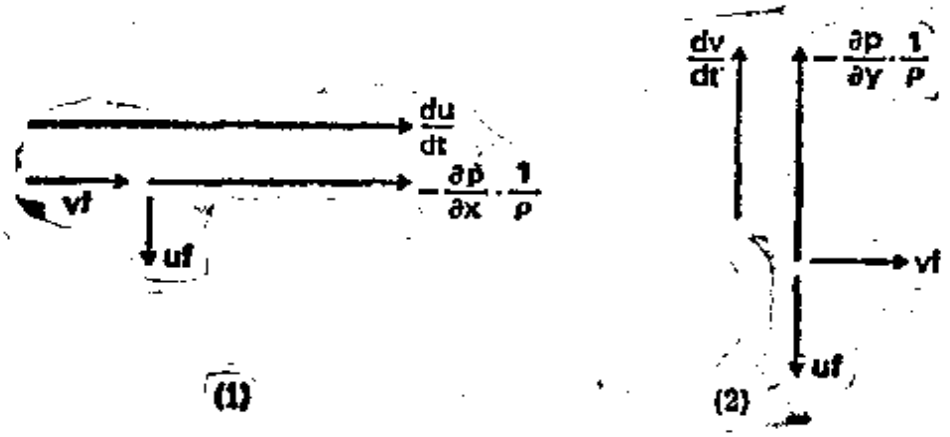


图 9.2 科里奥利力的分力

力示于图 9.2(2)。这样一来，我们最后所得到的 x 方向和 y 方向上的运动方程分别为：

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{\rho} \tag{9.106}$$

$$\frac{du}{dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{1}{\rho} \tag{9.107}$$

我们可以将方程 (9.106)和(9.107) 进一步加以推广来证明，对于 du/dt 和 dv/dt 均为零的情形而言，产生的风是与气压梯度成正比的，因此，就 u 而言有：

$$u=-\frac{\partial p}{\partial y}\frac{1}{f\rho} \tag{9.108}$$

而就 v 而言有：

$$v = -\frac{\partial p}{\partial x}\frac{1}{f\rho} \tag{9.109}$$

在每个方向上分解的加速度均为零的这种情形乃是平衡气流条件，并且与气压梯度垂直(即与等压线平行) 产生的合成风乃是地转风。该风吹向必然与气压梯度垂直，因为在 u（在 x 上分解的）的表达式中仅有一个在 y 轴上的气压梯度项。

通过求出任何一个时间的 u 与 v 的合成风速，可以写出地转风的一般方程，因而合成风的吹向与绘出的等压线平行。设这个总的地转风为 V_g，因而有：

$$V_g = \frac{dp}{dn}\frac{1}{f\rho} \tag{9.110}$$

式中 n 是按照与等压线平行方向计量的。应当指出，我们刚才所用的是常微分。现在对于弯曲的等压气流来说，可以将方程(9.110)加以变换，即给向心加速度一项加上一个加速度，它是为保持气流沿着等压线的弯曲路径流动所需的。向心加速度是随着半径的缩短和风速的增高而增大的，所以对于向心加速度的作用方向与气压梯度力的方向相反时的反气旋情形而言，有：

$$fV = \frac{V^2}{r} - \frac{dp}{dr}\frac{1}{\rho} \tag{9.111}$$

而对于气压梯度力和向心加速度两者的作用方向相同的气旋情形而言，有：

$$-\frac{V^2}{r} - \frac{dp}{dr}\frac{1}{\rho} = fV \tag{9.112}$$

在上列的两个式子中 r 为曲率半径。

后　记

普通读者对最后两章理解起来也许会有些吃力，因而他们很可能会认为写一篇后记作为本书的结尾是适宜的！诚然，有的读者很可能会把本书作为数学的复习教程使用。属于这一类的那些读者都学过(并且考试及格！)大专（高等普通专业教育）数学专修科目，因而他们大概不会碰到什么困难。对于大多数不属于这一类的读者说来，可以期望，学习本书也并不太困难，即使他们在开始的时候实际根本没有数学基础，也是如此。

然而，对于上述两类读者说来，有一点必须特别加以强调，这就是对于自然地理工作者来说，为数学而数学本身决不是学习目的。的确，有可能对自然地理学中的随便多少个过程推出数学模拟，但是这些过程一定要用统计方法通过与观察到的数据进行对比，进而和"客观世界"联系起来。还可以期望，在读者达到本书这个目的的时候，如果那时读者再碰到描述往往似乎令人费解的统计方法的一些公式，那么这些公式理解起来就比较容易了。另外，研究工作者为了能试作数学模拟，或者学生为了能掌握数学模拟，他们就必须在被模拟的现象或事件中所包含的物理和化学过程方面具备充分的基础知识。而这种种过程借助于数学公式往往理解起来就相当容易。例如，气体定律(见戴维森 1978 年所著一书）的方程形式就比文字描述好记。

本书阐述的数学内容乃是多数大学生和许多更高级人员的必要且充分的数学基础知识。至于具有大学水平的自然地理工作者所需要的物理和化学基础知识，可以使用本书的姐妹篇——戴维森所著一书加以解决。不过，作为告诫性的结束语，强调指出下列一点是很重要的，即我们作为自然地理工作者，一定要始终认

为，数学是受我们的需要所支配的，决不能对数学抱有任何偏见而让它来支配我们。正如数学为科学的思维、方法和理论所用一样，数学本身也必然为自然地理学本身所用。自然地理学这门学科的共性在于，它可以运用严密而精确的科学方法和数学表达方式，完全是一门真正的科学。

习 题 答 案

第一章

1.6.1　$\bar{2}.1761$，-1.8239

1.6.2　1.0878

1.6.3　1.7547

1.6.4　$\bar{3}.3979$，-2.6021

1.6.5　$\bar{2}.7324$，-1.2676

1.6.6　$\bar{2}.7324$，-1.2676

1.6.7　0.7140

1.6.8　0.0436

1.6.9　1.414，76,010，759.7，1.442

第二章

2.5.1　北向分速 -4.03米／秒；西向分速 4.03米／秒

2.5.2　2.3；86 度

2.5.3　0.1414 mg

2.5.4　7.7 米／秒向岸，与海岸线成 54 度角

2.5.5　5.59 米／秒向上，与水平线成 63°26′06″倾角

2.9.1　$a\cdot b=27$，$\theta=34°45'$；$a\wedge b=-i-7j+19k$

2.9.2　$a\cdot b=0$，$\theta=90°00'$；$a\wedge b=-20i-12j-4k$

2.9.3　$a\cdot b=-60.58$，$\theta=131°39'$；$a\wedge b=-37.03i-52.07j-18.8k$

第三章

3.2.1　$x=-\frac{5}{9}$，$y=-5$

3.2.2　$x=\frac{1}{4}$，$y=\frac{3}{4}$

3.2.3　$x=\frac{1}{2}$，$y=1\frac{1}{4}$

3.2.4 $x=\frac{1}{2}, y=-\frac{1}{2}$

3.2.5 $x=2$

3.2.6 $x=0, y=2$

3.2.7 无解，二线平行

3.2.8 $x=1, y=-2$

3.5.1 缩短主轴：$y=0.67x+0.91$

x 关于 y 的回归：$y=0.68x+0.85$

y 关于 x 的回归：$y=0.66x+0.96$

3.5.2 缩短主轴：$y=57.7-0.57x$

x 关于 y 的回归：$y=70.4-0.91x$

y 关于 x 的回归：$y=49.3-0.35x$

第四章

4.3.1 $\begin{pmatrix}12 & 19\\ 28 & 16\end{pmatrix}$

4.3.2 $\begin{pmatrix}-42\\ 51\\ 24\end{pmatrix}$

4.3.3 $A=B, x=10, y=5$

4.8.1 $|A|=29$ $\frac{1}{29}\begin{pmatrix}13 & 11 & 3\\ 2 & 5 & -4\\ 18 & 12 & 7\end{pmatrix}$

4.8.2 $|A|=1$ $\begin{pmatrix}6 & -2 & -3\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$

4.8.3 $|A|=3$ $\begin{pmatrix}\frac{11}{3} & -3 & \frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3} & 3 & -\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

4.10.1　$\lambda=10.75$ 或 -0.75；$y=2.2x, y=-0.7x$

4.10.2　$\lambda=5$ 或 2；$y=-4.5x, y=-3x$

4.10.3　$\lambda=3.56$ 或 -0.56；$y=0.28x, y=-1.78x$

第五章

5.1.1　$dy/dx=15x^2, d^2y/dx^2=30x$

5.1.2　$dy/dx=-4x, d^2y/dx^2=-4$

5.1.3　$dy/dx=x^2-\frac{2}{3}+\frac{10}{3}x, d^2y/dx^2=2x+\frac{10}{3}$

5.1.4　$dy/dx=12, d^2y/dx^2=0$

5.1.5　$dy/dx=3x^2-1, d^2y/dx^2=6x$

5.1.6　$dy/dx=-2x^{-3}, d^2y/dx^2=6x^{-4}$

5.1.7　$dy/dx=-8x^{-5}, d^2y/dx^2=40x^{-6}$

5.1.8　$dy/dx=2x-2, d^2y/dx^2=2$

5.1.9　$dy/dx=x^2-2x, d^2y/dx^2=2x-2$

5.1.10　$dy/dx=x^2-6x+9, d^2y/dx^2=2x-6$

5.4.1　$(x+2)(x-2), x=\pm 2$

5.4.2　$(x+8)^2, x=-8$

5.4.3　$2(x-1)(x+3), x=1$ 或 -3

5.4.4　$(3x+1)(x+1), x=-\frac{1}{3}$ 或 -1

5.4.5　$(1-x)(1+x), x=\pm 1$

5.4.6　$x=-1$ 或 $\frac{1}{3}$

5.4.7　$x=\pm 2$

5.4.8　$x=1.64$ 或 -0.24

5.4.9　$x=\frac{5}{6}$ 或 $-\frac{1}{2}$

5.4.10　没有实根，因为 b^2-4ac 为负

5.4.11　$x=+3, +1$ 或 -3

5.4.12　$x=\frac{1}{5}, \frac{1}{2}$ 或 -2

5.4.13 (0,0)为极小值点

5.4.14 (0,4)为极大值点

5.4.15 (0.19,0.06)为极小值点，
(−3.52,49.76)为极大值点

5.4.16 线性函数

5.4.17 (0.58, −0.39)为极小值点，
(−0.58,0.39)为极大值点

5.4.18 没有驻点；为什么？

5.4.19 没有驻点；为什么？

5.4.20 (1, −1)为极小值点

5.4.21 $\left(2,\ 2\frac{2}{3}\right)$ 为极小值点，
(0,4)为极大值点

5.4.22 (3,13)为拐点

5.5.1 $5(4x+\cos x)$

5.5.2 $4(1-4x^2)^{-\frac{1}{2}}$

5.5.3 $6x^{-1}$

5.5.4 $(1-2\log x)x^{-3}$

5.5.5 $2(1-2\sin^2 x)$

5.5.6 $2\tan x\sec^2 x$

5.5.7 $\frac{1}{x}\sec^2(\log x)$

5.5.8 $2e^{2x}[\log(x^2+1)+x(x^2+1)^{-1}]$

5.5.9 $\operatorname{cosec} x(1+\log x-x\log x\cot x)$

5.5.10 $1+\log x-5\left(\frac{1}{x}\sin x+\frac{1}{x^2}\cos x\right)$

第六章

6.1.1 算术数列：$a=2.50, d=-1.25$

6.1.2 算术数列：$a=2x, d=x$

6.1.3 几何数列：$a=6, r=6$

6.1.4 几何数列：$a=2.1, r=4$

6.1.5　几何数列：$a=-3, r=0.5$

6.1.6　-6.25；-8.75

6.1.7　$9x$；$11x$

6.1.8　1,679,616；60,466,176

6.1.9　34,406.4；550,502.4

6.1.10　-0.024；-0.0058

6.3.1　177.5

6.3.2　-31.2

6.3.3　93

6.3.4　0.8

6.3.5　14

6.4.1　2.5

6.4.2　0.3

6.4.3　7161

6.4.4　5904.8

6.4.5　$0.\dot{6}\,\dot{0}$

6.5.1　$1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5$

6.5.2　$\frac{1}{9}+\frac{2}{27}y+\frac{1}{27}y^2+\frac{4}{243}y^3+\frac{5}{729}y^4$

6.5.3　$625y^4+1000y^3x+600y^2x^2+160yx^3+16x^4$

6.5.4　$2-4x+8x^2-16x^3+32x^4$

6.5.5　$x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

第八章

8.4.1　$\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x+C$

8.4.2　$5(x^3-5x+x^2)+C$

8.4.3　-2

8.4.4　19.30

8.4.5　30 度

9.3.2 $\partial x/\partial z = \tan y(1+2z\tan y)$, $\partial^2 x/\partial z^2 = 2\tan^2 y$

$\partial x/\partial y = z\sec^2 y(1+2z\tan y)$

$\partial^2 x/\partial y^2 = 2z\sec^2 y(z+\tan y+3z\tan^2 y)$

9.3.3 $\partial x/\partial z = y/z+2y+\log y$, $\partial^2 x/\partial z^2 = -y/z^2$

$\partial x/\partial y = \log z+2z+z/y$, $\partial^2 x/\partial y^2 = -z/y^2$

9.3.4 $\partial x/\partial z = 2\cos z\cos y - 3y\sec^2 zy$

$\partial^2 x/\partial z^2 = -2\sin z\cos y - 6y^2\tan^2 z\, y\sec^2 zy$

$\partial x/\partial y = -2\sin z\sin y - 3z\sec^2 zy$

$\partial^2 x/\partial y^2 = -2\sin z\cos y - 6z^2\tan zy\sec^2 zy$

9.3.5 $\partial x/\partial z = 6z+2\tan^{-1} y$, $\partial^2 x/\partial z^2 = 6$

$\partial x/\partial y = -6y+2z/(1+y^2)$, $\partial^2 x/\partial y^2$

$= -6-4yz/(1+y^2)^2$

9.5.1 $5y(x+C)+1=0$

9.5.2 $y^2-8x=C$

9.5.3 $3\cot y-2x=C$

9.5.4 $x+e^{-2y}=C$

9.5.5 $2y\left(4+\frac{1}{3}y^2\right)-3x=C$

9.6.1 $2y^2(5x^4+4C)+4=0$

9.6.2 $2y(\cot x-C)-1=0$

9.6.3 $\sin y+\cos x=C$

9.6.4 $\frac{1}{2}\tan^2 y-2\log x=C$

9.6.5 $\log y=\frac{1}{2}(\log x)^2+C$

9.7.1 $x/y-\log x=C$

9.7.2 $y^4=4x^2\log Cx$

9.7.3 $(y-x)=C(y+x)^3$

9.8.1 $y^2(\sin x+x)+Cy=0$

9.8.2 $(y-x)\log x+(x+1)xy^2-x^2=C$

9.8.3 $x^3+9yx-y^3=C$

9.8.4 $-y\tan x-\cos y=C$

9.8.5 $y(x-1)-x\left(\frac{1}{2}x+1\right)=C$

9.9.1 同 9.8.1

9.9.2 $yx(3x+2y)-\frac{1}{2}y(y+4x)=C$,(因子 y/x)

9.9.3 $x+y\log x=C$,(因子 $1/x$)

9.9.4 $2x^2\sec y-xy(xy^2-3xy+6y)=C$,(因子 $\tan x$)

9.9.5 $2y^3x^2-9y^2x+12y=C$,(因子 $1/6y$)

9.10.1 $x(3y-2)=C$

9.10.2 $y+2x^2-yx=C$

9.10.3 $2y\sin x=C$

9.10.4 $y\tan x+\cos y=C$

9.10.5 $3xy+\frac{1}{3}(x^3-y^3)=C$

9.12.1 $y=Ae^{2x}+Be^{-2x}$

9.12.2 $y=(Ax+B)e^{-5x}$

9.12.3 $y=Ae^{-0.5x}+Be^{2x}$

9.12.4 $y=Ae^{0.54x}+Be^{-3.34x}$

9.12.5 $y=(Ax+B)e^{1.2x}$

9.13.1 $6y=Ae^{-2x}+Be^{3x}-x^2+2x-2$

9.13.2 $y=Ae^{4x}+Be^{1.5x}+0.33x^2+1.11x+1.66$

9.13.3 $y=(Ax+B)e^{-\frac{1}{2}x}+e^{2x+9}$

9.13.4 $y=(Ax+B)e^x+\cos x$

9.13.5 $13y=Ae^{2x}+Bx^{-2x}+10\sin 3x$

9.14.1 $2y=Ae^{-2x}+Be^{\frac{1}{2}x}+x^2+3x+11/2$

9.14.2 $y=(Ax+B)e^{-x}+x-2$

9.14.3 参见 9.13.2

附录一　希腊字母表和一些字母的通常用法

字　母		英语读音	在地理学中的用法
A	α	alpha	常用作各种常数
B	β	beta	常用作各种常数
Γ	γ	gamma	常用作各种常数
Δ	δ	delta	用于微积分学＝"微小改变量"
E	ε	epsilon	相角(波长)
Z	ζ	zeta	＝旋度
H	η	eta	
Θ	θ	theta	表示角度
I	ι	iota	
K	κ	kappa	用于皮尔逊分布
Λ	λ	lambda	＝波长
M	μ	mu	＝微米(10^{-6}米)
N	ν	nu	＝频率(波动现象的)
Ξ	ξ	xi	
O	o	omicron	
Π	π	pi	用于圆的计算(＝3.1416)
P	ρ	rho	用于表示密度
Σ	σ	sigma	用于统计学＝总和
T	τ	tau	用于统计学(肯德耳氏检验)
Υ	υ	upsilon	
Φ	φ	phi	表示角度
X	χ	chi	用于统计学(χ平方检验)
Ψ	ψ	psi	
Ω	ω	omega	＝角速度

附录二　国际单位制（SI）

第一节　标准单位

下列诸单位均符合于最近正式通过的国际单位制。其全面说明可在《国际单位制》（国家物理实验室，HMSO，1970）一书中找到。有许多自然地理学教程在给出某些常数值时采用了其它的单位制，因而经常会引起混乱。国际单位制采用的基本单位：长度是米（m），质量是千克（kg），时间是秒（s），而以前CGS制曾经采用厘米（cm），克（g）和秒（s）。现在基本上已不用的（美国除外）英国标准单位制，曾经采用英尺，磅和秒（FPS）。本书在可能的场合严格遵守国际单位制，只是在援引研究成果的场合采用了原来的其它单位制，因为单位变换会造成混乱。

目前有三种单位：基本单位，导出单位和辅助单位。

一、基本单位

长度：米（m）

该长度等于与氪-86原子的$2p_{10}$与$5d_5$能级之间跃迁相对应的真空辐射波长的1,650,763.73倍。

质量：千克（kg）

由铂-铱制成的国际原型保存在国际度量衡局（BIPM）。

时间：秒（s）

最初为1/86,400的平均太阳日。现在依据铯-133原子的放射辐射来确定。

温度：开尔文（K）

开尔文，热力学温度单位，为水的三态点的热力学温度的

1/273.16(0℃ = 273.16K)。

发光强度：坎德拉(cd)

坎德拉为在每平方米 101,325 牛顿的压力下，处在铂凝固温度的黑体的 1/600,000 平方米表面的垂直方向上的发光强度。

物质的量：摩尔(mol)

摩尔为这样一个系统的物质的量，它所包含的基本单元数与 0.012 千克碳-12 中的原子数目相等。

二、导出单位和辅助单位

面积	平方米	m^2
体积	立方米	m^3
速率	米/秒	m/s
加速度	米/秒/秒	m/s^2
波数	1/米	1/m
密度	千克/立方米	kg/m^3
亮度	坎[德拉]/平方米	cd/m^2
频率	赫[兹](Hz)	s^{-1}
力	牛[顿](N)	$mkgs^{-2}$
压力	帕[斯卡](Pa)	N/m^2
能量	焦[耳](J)	N/m
功率	瓦[特](W)	J/s

三、同国际单位制一起使用的单位

度(角度)	(π/180)弧度	(π = 3.1416)
分(角度)	1/60 度	
秒(角度)	1/60 分	
公升(l)	1 立方分米	$(10^{-1}m^3)$
公吨(t)	10^3kg	
力矩	牛[顿]米	Nm
表面张力	牛[顿]/米	N/m
热流密度	瓦[特]/平方米	W/m^2
热容，熵	焦[耳]/开[尔文]	J/K
比热容，比熵	焦[耳]/千克 开[尔文]	J/kgK

续 表

热导率(导热系数)	瓦[特]/米 开[尔文]	W/mK
平面角	弧度(rad)	
立体角	球面度(sr)	

(弧度为一圆的二半径在圆周上截取等于半径长的圆弧时其间的平面夹角)

角速度	弧度/秒	rad/s
角加速度	弧度/秒/秒	rad/s^2

第二节 十进倍数和约数

国际单位制十进倍数和约数的现有首标

(由 10^{12}至 10^{-18})

10^{12}	兆兆	T	10^{-1} 分	d
10^{9}	千兆	G	10^{-2} 厘	c
10^{6}	兆	M	10^{-3} 毫	m
10^{3}	千	k	10^{-6} 微	μ
10^{2}	百	h	10^{-9} 毫微	n
10^{1}	十	da	10^{-12} 微微	p
			10^{-15} 毫微微	f
			10^{-18} 微微微	a

第三节 非标准单位

埃	(Å)	$=0.1nm=10^{-10}m$
巴	(bar)	$=0.1MPa=10^{5}Pa$
		(1 毫巴 = 1/1000 巴)
尔格	(erg)	$=10^{-7}J$
达因	(dyn)	$=10^{-5}N$
泊	(P)	$=0.1Ps$
卡	(cal)	$=4.1868J$
微米	(μ)	$=10^{-6}m$

附录三　四位常用对数表

对　数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

对　数

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3 4	5	6 7 8 9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1 2 2 3	4	5 5 6 7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1 2 2 3	4	5 5 6 7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1 2 2 3	4	5 5 6 7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1 1 2 3	4	4 5 6 7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1 1 2 3	4	4 5 6 7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1 1 2 3	4	4 5 6 6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1 1 2 3	4	4 5 6 6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1 1 2 3	3	4 5 6 6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1 1 2 3	3	4 5 5 6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1 1 2 3	3	4 5 5 6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1 1 2 3	3	4 5 5 6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1 1 2 3	3	4 5 5 6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1 1 2 3	3	4 5 5 6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1 1 2 3	3	4 4 5 6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1 1 2 2	3	4 4 5 6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1 1 2 2	3	4 4 5 6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1 1 2 2	3	4 4 5 5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1 1 2 2	3	4 4 5 5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1 1 2 2	3	4 4 5 5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1 1 2 2	3	4 4 5 5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1 1 2 2	3	3 4 5 5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1 1 2 2	3	3 4 5 5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1 1 2 2	3	3 4 4 5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1 1 2 2	3	3 4 4 5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1 1 2 2	3	3 4 4 5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1 1 2 2	3	3 4 4 5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1 1 2 2	3	3 4 4 5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1 1 2 2	3	3 4 4 5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1 1 2 2	3	3 4 4 5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1 1 2 2	3	3 4 4 5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1 1 2 2	3	3 4 4 5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1 1 2 2	3	3 4 4 5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0 1 1 2	2	3 3 4 4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0 1 1 2	2	3 3 4 4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0 1 1 2	2	3 3 4 4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0 1 1 2	2	3 3 4 4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0 1 1 2	2	3 3 4 4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0 1 1 2	2	3 3 4 4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0 1 1 2	2	3 3 4 4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0 1 1 2	2	3 3 4 4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0 1 1 2	2	3 3 4 4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0 1 1 2	2	3 3 4 4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0 1 1 2	2	3 3 4 4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0 1 1 2	2	3 3 4 4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0 1 1 2	2	3 3 3 4

说明：

1．由《常用对数表》可以直接查出 $1 \leqslant N < 10$ 且有三个有效数字的数 N 的对数尾数，而首数为零。

例 1　查表求 $\log 2.18$。

解：　查表得 $\log 2.18 = 0.3385$。

例 2　查表求 $\log 8.63$。

解：　查表得 $\log 8.63 = 0.9360$。

2．右边顶上一横行是真数的第四个有效数字。当真数有四个有效数字时，就要用到它所对应的修正值。

例 3　查表求 $\log 5.273$。

解：　查表得 $\log 5.273 = 0.7218 + 0.0002$

$= 0.7220$。

3．当真数 $N < 1$ 和 $N \geqslant 10$ 时，先把真数写成科学记数法：$N = a \times 10^n$，其中 $1 \leqslant a < 10$，n 为整数。根据对数的性质，得　$\log N = n + \log a$。

即 N 的对数的首数是 n，尾数是 a 的对数。

例 4　查表求 $\log 3594$。

解：　把 3594 写成 3.594×10^3，查表得

$\log 3.594 = 0.5556$，

$\therefore \quad \log 3594 = 3.5556$。

例 5　查表求 $\log 0.0001352$。

解：　把 0.0001352 写成 1.352×10^{-4}，查表得

$\log 1.352 = 0.1309$，

$\therefore \quad \log 0.0001352 = \bar{4}.1309$。

---

①附录三和附录四中的《四位常用对数表》、《正弦、余弦和正切表》后面所附的使用说明，均摘自国内通用的四位数学用表，以便于读者查阅——译者。

附录四　正弦、余弦和正切表

正弦真数

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	3	6	9	12	15
3	·0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	3	6	9	12	15
4	·0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	3	6	9	12	14
5	·0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	3	6	9	12	14
6	·1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	3	6	9	12	14
7	·1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	3	6	9	12	14
8	·1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	3	6	9	12	14
9	·1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	3	6	9	11	14
10	·1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	3	6	9	11	14
11	·1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	3	6	9	11	14
12	·2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	3	6	9	11	14
13	·2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	3	6	8	11	14
14	·2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	3	6	8	11	14
15	·2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	3	6	8	11	14
16	·2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	3	6	8	11	14
17	·2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3	6	8	11	14
18	·3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3	6	8	11	14
19	·3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	3	5	8	11	14
20	·3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3	5	8	11	14
21	·3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3	5	8	11	14
22	·3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3	5	8	11	13
23	·3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	3	5	8	11	13
24	·4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	3	5	8	11	13
25	·4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	3	5	8	11	13
26	·4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	3	5	8	10	13
27	·4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	3	5	8	10	13
28	·4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	3	5	8	10	13
29	·4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	3	5	8	10	13
30	·5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	3	5	8	10	13
31	·5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	2	5	7	10	12
32	·5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	2	5	7	10	12
33	·5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	2	5	7	10	12
34	·5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	2	5	7	10	12
35	·5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	2	5	7	10	12
36	·5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	2	5	7	9	12
37	·6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	2	5	7	9	12
38	·6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	2	5	7	9	11
39	·6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	2	4	7	9	11
40	·6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	2	4	7	9	11
41	·6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	2	4	7	9	11
42	·6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	2	4	6	9	11
43	·6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	2	4	6	8	11
44	·6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	2	4	6	8	10

正弦真数

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45	·7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	2	4	6	8	10
46	·7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	2	4	6	8	10
47	·7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	2	4	6	8	10
48	·7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	2	4	6	8	10
49	·7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	2	4	6	8	9
50	·7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	2	4	6	7	9
51	·7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	2	4	5	7	9
52	·7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	2	4	5	7	9
53	·7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	2	3	5	7	9
54	·8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	2	3	5	7	8
55	·8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	2	3	5	7	8
56	·8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	2	3	5	6	8
57	·8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	2	3	5	6	8
58	·8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	2	3	5	6	8
59	·8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	1	3	4	6	7
60	·8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	1	3	4	6	7
61	·8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	1	3	4	6	7
62	·8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	1	3	4	5	7
63	·8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	1	3	4	5	6
64	·8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	1	3	4	5	6
65	·9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	1	2	4	5	6
66	·9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	1	2	3	5	6
67	·9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	1	2	3	4	6
68	·9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	1	2	3	4	5
69	·9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	1	2	3	4	5
70	·9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	1	2	3	4	5
71	·9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	1	2	3	4	5
72	·9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	1	2	3	4	4
73	·9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	1	2	2	3	4
74	·9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	1	2	2	3	4
75	·9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	1	1	2	3	4
76	·9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	1	1	2	3	3
77	·9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	1	1	2	3	3
78	·9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	1	1	2	2	3
79	·9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	1	1	2	2	3
80	·9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	0	1	1	2	2
81	·9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	0	1	1	2	2
82	·9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	0	1	1	2	2
83	·9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	0	1	1	1	2
84	·9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0	1	1	1	1
85	·9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	0	0	1	1	1
86	·9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	0	0	1	1	1
87	·9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	0	0	0	0	0
88	·9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0	0	0	0	0
89	·9998	9999	9999	9999	9999	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	0	0	0	0	0

余弦真数

減

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	1·000	**·9999**	**·9999**	**·9999**	**·9999**	0	0	0	0	0
1	·9998	9998	9998	9997	9997	9997	9996	9996	9995	9995	0	0	0	0	0
2	·9994	9993	9993	9992	9991	9990	9990	9989	9988	9987	0	0	0	0	0
3	·9986	9985	9984	9983	9982	9981	9980	9979	9978	9977	0	0	1	1	1
4	·9976	9974	9973	9972	9971	9969	9968	9966	9965	9963	0	0	1	1	1
5	·9962	9960	9959	9957	9956	9954	9952	9951	9949	9947	0	1	1	1	1
6	·9945	9943	9942	9940	9938	9936	9934	9932	9930	9928	0	1	1	1	2
7	·9925	9923	9921	9919	9917	9914	9912	9910	9907	9905	0	1	1	2	2
8	·9903	9900	9898	9895	9893	9890	9888	9885	9882	9880	0	1	1	2	2
9	·9877	9874	9871	9869	9866	9863	9860	9857	9854	9851	0	1	1	2	2
10	·9848	9845	9842	9839	9836	9833	9829	9826	9823	9820	1	1	2	2	3
11	·9816	9813	9810	9806	9883	9799	9796	9792	9789	9785	1	1	2	2	3
12	·9781	9778	9774	9770	9767	9763	9759	9755	9751	9748	1	1	2	3	3
13	·9744	9740	9736	9732	9728	9724	9720	9715	9711	9707	1	1	2	3	3
14	·9703	9699	9694	9690	9686	9681	9677	9673	9668	9664	1	1	2	3	4
15	·9659	9655	9650	9646	9641	9636	9632	9627	9622	9617	1	2	2	3	4
16	·9613	9608	9603	9598	9593	9588	9583	9578	9573	9568	1	2	2	3	4
17	·9563	9558	9553	9548	9542	9537	9532	9527	9521	9516	1	2	3	4	4
18	·9511	9505	9500	9494	9489	9483	9478	9472	9466	9461	1	2	3	4	5
19	·9455	9449	9444	9438	9432	9426	9421	9415	9409	9403	1	2	3	4	5
20	·9397	9391	9385	9379	9373	9367	9361	9354	9348	9342	1	2	3	4	5
21	·9336	9330	9323	9317	9311	9304	9298	9291	9285	9278	1	2	3	4	5
22	·9272	9265	9259	9252	9245	9239	9232	9225	9219	9212	1	2	3	4	6
23	·9205	9198	9191	9184	9178	9171	9164	9157	9150	9143	1	2	3	5	6
24	·9135	9128	9121	9114	9107	9100	9092	9085	9078	9070	1	2	4	5	6
25	·9063	9056	9048	9041	9033	9026	9018	9011	9003	8996	1	3	4	5	6
26	·8988	8980	8973	8965	8957	8949	8942	8934	8926	8918	1	3	4	5	6
27	·8910	8902	8894	8886	8878	8870	8862	8854	8846	8838	1	3	4	5	7
28	·8829	8821	8813	8805	8796	8788	8780	8771	8763	8755	1	3	4	6	7
29	·8746	8738	8729	8721	8712	8704	8695	8686	8678	8669	1	3	4	6	7
30	·8660	8652	8643	8634	8625	8616	8607	8599	8590	8581	1	3	4	6	7
31	·8572	8563	8554	8545	8536	8526	8517	8508	8499	8490	2	3	5	6	8
32	·8480	8471	8462	8453	8443	8434	8425	8415	8406	8396	2	3	5	6	8
33	·8387	8377	8368	8358	8348	8339	8329	8320	8310	8300	2	3	5	6	8
34	·8290	8281	8271	8261	8251	8241	8231	8221	8211	8202	2	3	5	7	8
35	·8192	8181	8171	8161	8151	8141	8131	8121	8111	8100	2	3	5	7	8
36	·8090	8080	8070	8059	8049	8039	8028	8018	8007	7997	2	3	5	7	9
37	·7986	7976	7965	7955	7944	7934	7923	7912	7902	7891	2	4	5	7	9
38	·7880	7869	7859	7848	7837	7826	7815	7804	7793	7782	2	4	5	7	9
39	·7771	7760	7749	7738	7727	7716	7705	7694	7683	7672	2	4	6	7	9
40	·7660	7649	7638	7627	7615	7604	7593	7581	7570	7559	2	4	6	8	9
41	·7547	7536	7524	7513	7501	7490	7478	7466	7455	7443	2	4	6	8	10
42	·7431	7420	7408	7396	7385	7373	7361	7349	7337	7325	2	4	6	8	10
43	·7314	7302	7290	7278	7266	7254	7242	7230	7218	7206	2	4	6	8	10
44	·7193	7181	7169	7157	7145	7133	7120	7108	7096	7083	2	4	6	8	10

黒体数字表示整数変化

余弦真数

減

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45	·7071	7059	7046	7034	7022	7009	6997	6984	6972	6959	2	4	6	8	10
46	·6947	6934	6921	6909	6896	6884	6871	6858	6845	6833	2	4	6	8	11
47	·6820	6807	6794	6782	6769	6756	6743	6730	6717	6704	2	4	6	9	11
48	·6691	6678	6665	6652	6639	6626	6613	6600	6587	6574	2	4	7	9	11
49	·6561	6547	6534	6521	6508	6494	6481	6468	6455	6441	2	4	7	9	11
50	·6428	6414	6401	6388	6374	6361	6347	6334	6320	6307	2	4	7	9	11
51	·6293	6280	6266	6252	6239	6225	6211	6198	6184	6170	2	5	7	9	11
52	·6157	6143	6129	6115	6101	6088	6074	6060	6046	6032	2	5	7	9	12
53	·6018	6004	5990	5976	5962	5948	5934	5920	5906	5892	2	5	7	9	12
54	·5878	5864	5850	5835	5821	5807	5793	5779	5764	5750	2	5	7	9	12
55	·5736	5721	5707	5693	5678	5664	5650	5635	5621	5606	2	5	7	10	12
56	·5592	5577	5563	5548	5534	5519	5505	5490	5476	5461	2	5	7	10	12
57	·5446	5432	5417	5402	5388	5373	5358	5344	5329	5314	2	5	7	10	12
58	·5299	5284	5270	5255	5240	5225	5210	5195	5180	5165	2	5	7	10	12
59	·5150	5135	5120	5105	5090	5075	5060	5045	5030	5015	3	5	8	10	13
60	·5000	4985	4970	4955	4939	4924	4909	4894	4879	4863	3	5	8	10	13
61	·4848	4833	4818	4802	4787	4772	4756	4741	4726	4710	3	5	8	10	13
62	·4695	4679	4664	4648	4633	4617	4602	4586	4571	4555	3	5	8	10	13
63	·4540	4524	4509	4493	4478	4462	4446	4431	4415	4399	3	5	8	10	13
64	·4384	4368	4352	4337	4321	4305	4289	4274	4258	4242	3	5	8	11	13
65	·4226	4210	4195	4179	4163	4147	4131	4115	4099	4083	3	5	8	11	13
66	·4067	4051	4035	4019	4003	3987	3971	3955	3939	3923	3	5	8	11	13
67	·3907	3891	3875	3859	3843	3827	3811	3795	3778	3762	3	5	8	11	13
68	·3746	3730	3714	3697	3681	3665	3649	3633	3616	3600	3	5	8	11	14
69	·3584	3567	3551	3535	3518	3502	3486	3469	3453	3437	3	5	8	11	14
70	·3420	3404	3387	3371	3355	3338	3322	3305	3289	3272	3	5	8	11	14
71	·3256	3239	3223	3206	3190	3173	3156	3140	3123	3107	3	6	8	11	14
72	·3090	3074	3057	3040	3024	3007	2990	2974	2957	2940	3	6	8	11	14
73	·2924	2907	2890	2874	2857	2840	2823	2807	2790	2773	3	6	8	11	14
74	·2756	2740	2723	2706	2689	2672	2656	2639	2622	2605	3	6	8	11	14
75	·2588	2571	2554	2538	2521	2504	2487	2470	2453	2436	3	6	8	11	14
76	·2419	2402	2385	2368	2351	2334	2317	2300	2284	2267	3	6	8	11	14
77	·2250	2233	2215	2198	2181	2164	2147	2130	2113	2096	3	6	9	11	14
78	·2079	2062	2045	2028	2011	1994	1977	1959	1942	1925	3	6	9	11	14
79	·1908	1891	1874	1857	1840	1822	1805	1788	1771	1754	3	6	9	11	14
80	·1736	1719	1702	1685	1668	1650	1633	1616	1599	1582	3	6	9	11	14
81	·1564	1547	1530	1513	1495	1478	1461	1444	1426	1409	3	6	9	12	14
82	·1392	1374	1357	1340	1323	1305	1288	1271	1253	1236	3	6	9	12	14
83	·1219	1201	1184	1167	1149	1132	1115	1097	1080	1063	3	6	9	12	14
84	·1045	1028	1011	0993	0976	0958	0941	0924	0906	0889	3	6	9	12	14
85	·0872	0854	0837	0819	0802	0785	0767	0750	0732	0715	3	6	9	12	14
86	·0698	0680	0663	0645	0628	0610	0593	0576	0558	0541	3	6	9	12	15
87	·0523	0506	0488	0471	0454	0436	0419	0401	0384	0366	3	6	9	12	15
88	·0349	0332	0314	0297	0279	0262	0244	0227	0209	0192	3	6	9	12	15
89	·0175	0157	0140	0122	0105	0087	0070	0052	0035	0017	3	6	9	12	15

減

正切真数

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
0	·0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	3	6	9	12	15
1	·0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	3	6	9	12	15
2	·0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	3	6	9	12	15
3	·0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	3	6	9	12	15
4	·0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	3	6	9	12	15
5	·0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	3	6	9	12	15
6	·1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	3	6	9	12	15
7	·1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	3	6	9	12	15
8	·1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	3	6	9	12	15
9	·1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	3	6	9	12	15
10	·1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	3	6	9	12	15
11	·1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	3	6	9	12	15
12	·2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	3	6	9	12	15
13	·2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	3	6	9	12	15
14	·2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	3	6	9	12	16
15	·2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	3	6	9	13	16
16	·2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3	6	9	13	16
17	·3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3	6	10	13	16
18	·3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3	6	10	13	16
19	·3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	3	7	10	13	16
20	·3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3	7	10	13	17
21	·3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	3	7	10	13	17
22	·4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	3	7	10	14	17
23	·4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	3	7	10	14	17
24	·4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	4	7	11	14	18
25	·4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4	7	11	14	18
26	·4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	4	7	11	15	18
27	·5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	4	7	11	15	18
28	·5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	4	8	11	15	19
29	·5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	4	8	12	15	19
30	·5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	4	8	12	16	20
31	·6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	4	8	12	16	20
32	·6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	4	8	12	16	20
33	·6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	4	8	13	17	21
34	·6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	4	9	13	17	21
35	·7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	4	9	13	18	22
36	·7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	5	9	14	18	23
37	·7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	5	9	14	18	23
38	·7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	5	9	14	19	24
39	·8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	5	10	15	20	24
40	·8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	5	10	15	20	25
41	·8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	5	10	16	21	26
42	·9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	5	11	16	21	27
43	·9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	6	11	17	22	28
44	·9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	6	11	17	23	29

正切真数

°	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	1′	2′	3′	4′	5′
45	1·0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	6	12	18	24	30
46	1·0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	6	12	18	25	31
47	1·0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	6	13	19	25	32
48	1·1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	7	13	20	26	33
49	1·1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	7	14	21	28	34
50	1·1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	7	14	22	29	36
51	1·2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	8	15	23	30	38
52	1·2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	8	16	24	31	39
53	1·3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	8	16	25	33	41
54	1·3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	9	17	26	34	43
55	1·4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	9	18	27	36	45
56	1·4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	10	19	29	38	48
57	1·5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	10	20	30	40	50
58	1·6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	11	21	32	43	53
59	1·6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	11	23	34	45	56
60	1·7321	7391	7461	7532	7603	7675	7747	7820	7893	7966	12	24	36	48	60
61	1·8040	8115	8190	8265	8341	8418	8495	8572	8650	8728	13	26	38	51	64
62	1·8807	8887	8967	9047	9128	9210	9292	9375	9458	9542	14	27	41	55	68
63	1·9626	9711	9797	9883	9970	**0057**	**0145**	**0233**	**0323**	**0413**	15	29	44	58	73
64	2·0503	0594	0686	0778	0872	0965	1060	1155	1251	1348	16	31	47	63	78
65	2·1445	1543	1642	1742	1842	1943	2045	2148	2251	2355	17	34	51	68	85
66	2·2460	2566	2673	2781	2889	2998	3109	3220	3332	3445	18	37	55	73	92
67	2·3559	3673	3789	3906	4023	4142	4262	4383	4504	4627	20	40	60	79	99
68	2·4751	4876	5002	5129	5257	5386	5517	5649	5782	5916	22	43	65	87	108
69	2·6051	6187	6325	6464	6605	6746	6889	7034	7179	7326	24	47	71	95	118
70	2·7475	7625	7776	7929	8083	8239	8397	8556	8716	8878	26	52	78	104	130
71	2·9042	9208	9375	9544	9714	9887	**0061**	**0237**	**0415**	**0595**	29	58	87	116	145
72	3·0777	0961	1146	1334	1524	1716	1910	2106	2305	2506	32	64	96	129	161
73	3·2709	2914	3122	3332	3544	3759	3977	4197	4420	4646	36	72	108	144	180
74	3·4874	5105	5339	5576	5816	6059	6305	6554	6806	7062	41	81	122	163	203
75	3·7321	7583	7848	8118	8391	8667	8947	9232	9520	9812	使用内插法				
76	4·0108	0408	0713	1022	1335	1653	1976	2303	2635	2972					
77	4·3315	3662	4015	4373	4737	5107	5483	5864	6252	6646					
78	4·7046	7453	7867	8288	8716	9152	9594	**0045**	**0504**	**0970**					
79	5·1446	1929	2422	2924	3435	3955	4486	5026	5578	6140					
80	5·6713	7297	7894	8502	9124	9758	**0405**	**1066**	**1742**	**2432**					
81	6·3138	3859	4596	5350	6122	6912	7720	8548	9395	**0264**					
82	7·1154	2066	3002	3962	4947	5958	6996	8062	9158	**0285**					
83	8·1443	2636	3863	5126	6427	7769	9152	**0579**	**2052**	**3572**					
84	9·5144	6768	8448	10·02	10·20	10·39	10·58	10·78	10·99	11·20					
85	11·43	11·66	11·91	12·16	12·43	12·71	13·00	13·30	13·62	13·95					
86	14·30	14·67	15·06	15·46	15·89	16·35	16·83	17·34	17·89	18·46					
87	19·08	19·74	20·45	21·20	22·02	22·90	23·86	24·90	26·03	27·27					
88	28·64	30·14	31·82	33·69	35·80	38·19	40·92	44·07	47·74	52·08					
89	57·29	63·66	71·62	81·85	95·49	114·6	143·2	191·0	286·5	573·0					

黑体数字表示整数变化

说明：

1. 由《三角函数表》可以查出 0° 到 90° 每差 1′ 的各角的正弦、余弦、正切和余切值。各表左边一直列和顶上一横行是查正弦和正切用的；右边一直列和底下一横行是查余弦和余切用的。

2. 76° 到 90° 每差 1′ 各角的正切以及 0° 到 14° 每差 1′ 各角的余切，可以由表上直接查得。如

$$\tan 81°34' = 6.745, \cot 5°46' = 9.902$$

3. 查正弦、余弦以及 0° 到 76° 每差 1′ 各角的正切和 14° 到 90° 每差 1′ 各角的余切，需要用到表中的修正值如

$$\begin{aligned}\sin 70°32' &= \sin 70°30' + 0.0002\\ &= 0.9426 + 0.0002\\ &= 0.9428。\end{aligned}$$

注意：余弦和余切的值随着角的增加而减小。如

$$\begin{aligned}\cos 18°39' &= \cos 18°36' - 0.0003\\ &= 0.9478 - 0.0003\\ &= 0.9475(\text{修正值用“减”})。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 18°39' &= \cos 18°42' + 0.0003\\ &= 0.9472 + 0.0003\\ &= 0.9475(\text{修正值用“加”})。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cot 24°46' &= \cot 24°48' + 0.003\\ &= 2.164 + 0.003\\ &= 2.167(\text{修正值用“加”})。\end{aligned}$$

为了避免弄错修正值的“加”“减”号，在查一个锐角的余弦值或余切值时，可以改查它的余角的正弦值或正切值。如要查 $\cos 18°36'$ 可以改查 $\sin 71°21'$。

4. 已知一个角的正弦、余弦、正切、余切，也可以利用这个表查出它所对应的锐角的度数来。

附录五　统计学附录

第一节　标准差，平均数，众数和中位数

兹取任一数据样本总体$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则算术平均数可以表示为：

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

同时应指出，我们往往的确不能够计算出全部总体的实际平均数(μ)，并且必须预料到样本算术平均数与实际平均数多少会有点差别。样本的众数是样本中出现频率最高的值或值组(例如1.0—1.9)。众数的值是频率分布曲线的峰值(见第七章第四节)。有些分布表现为双峰分布，或者甚至表现为多峰分布。中位数的值是数列$x_1, x_2, \cdots, x_n$按顺序排列时居于中间位置的值。我们以21个值的样本为例加以如下说明：

7,5,3,6,9,4,2,4,11,13,5,4,3,3,4,6,4,8,10,12,1

平均数为5.91；若将诸值按递升顺序加以排列，则有：

1,2,3,3,3,4,4,4,4,4,5,5,6,6,7,8,9,10,11,12,13

而出现频率最高的值，即众数为4。该频率分布如图1所示。这里我们可以看出，众数位于平均数的左方，我们称此分布为正向偏态分布，其小于平均数的值比较多。如果众数位于平均数的右方，则称该分布为负向偏态分布。

平均数的一个特点是，诸值的平均数离差之和$(\overline{x} - x_1) + (\overline{x} - x_2) + \cdots + (\overline{x} - x_n)$为零。若将每一平均数离差平方并取离差平方和，则此离差平方和小于任何其它点的离差平方和。这一特点

是很重要的；我们把平均数离差平方和除以样本量(n)称为方差(σ^2)。这是数据值相对于中点的离散度的度量单位。在上例中，方差为13.7；这表明诸值相对于平均数的离散度比较大，如图A.1所示。如果我们取数列3,4,4,4,3作为样本，则平均数为3.6，方差仅为0.24；而对于3,3,3,3,3而言，平均数为3.0，方差为0.0。

标准差(σ)为方差的平方根，故：

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}(\bar{x}-x_i)^2}$$

第二节 相关系数

相关系数所表示的是一变量随着另一变量的变化而变化的程

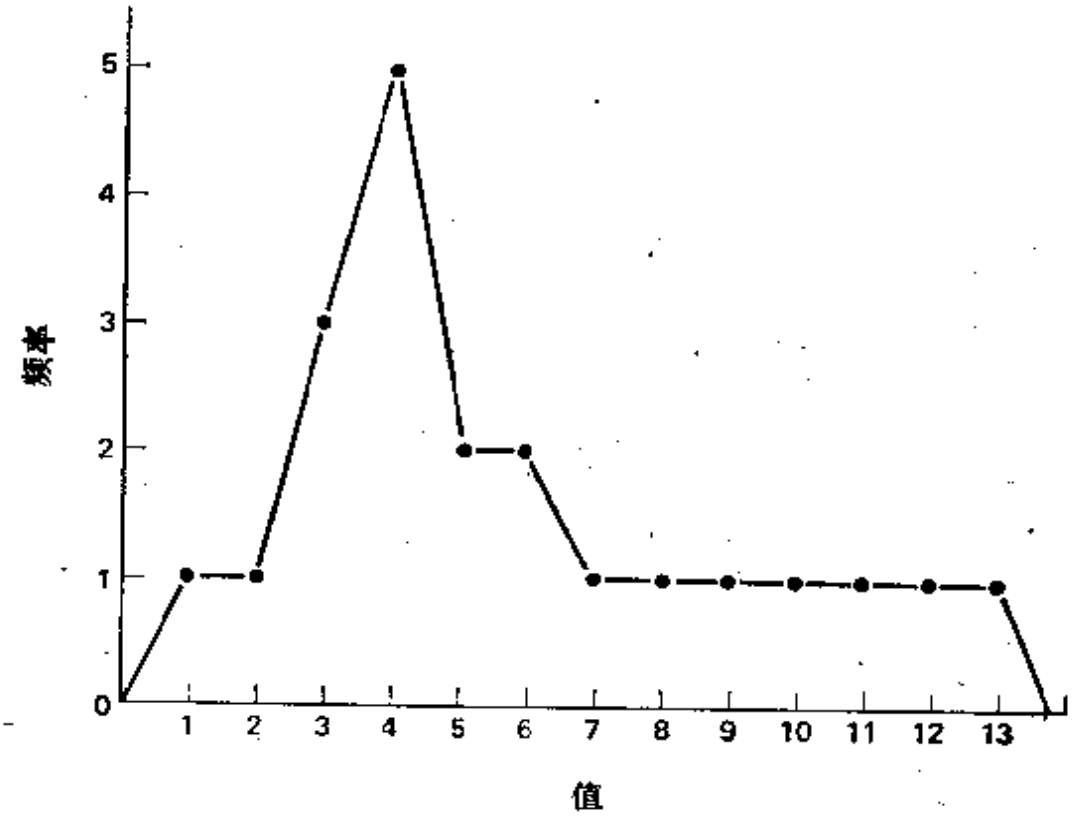


图 A.1。

度。它实际上是二总体协方差的度量单位。如果在二变量组之间存在有完全相关，而且 y 恰好随 x 的增加而增大，则相关系数为1.0。如果在二变量组之间存在有完全相关，但是 y 恰好随 x 的减少而增大，则相关系数为 -1.0。在这两种场合，如果我们将所有的数据点(x 和 y)绘在坐标图上，则绘出的诸点均位于一条直线上(见本附录第三节回归方程)，其斜率分别为正值或负值(见第三章第一节)。当 x 和 y 的协方差变小时，相关度就减小，坐标图上的散点就变得更分散，致使相关系数为零而完全不相关。

有两个相关系数，在二数据组间的协变性统计分析中经常用到。其中的一个系数适用于秩次数据，可以表示为：

$$r = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{i=n} d_i^2}{n^3 - n}$$

式中 r 被称为斯皮尔曼氏(Spearman)秩次相关系数；

$$d_i = (\bar{x} - x_i) - (\bar{y} - y_i) = y_i - x_i,$$

因为按秩次 $\bar{x} = \bar{y}$。

这个相关单位在统计学上不象下面的积矩相关系数那样有效率，因而很不实用。积矩相关系数被定义为：

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} (\bar{x} - x_i)(\bar{y} - y_i)}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \quad (x \text{ 和 } y \text{ 的协方差})$$

我们可以用学生氏检验法(见本附录第六节)来检验结果 r 的显著性。这个显著性检验法是以二组数据均呈正态分布为前提的（见本附录第四节和第七章第七节)。因此，在估计所得系数的有效性时，一定要确保既成这一事实。一般说来，n 值越大，我们就可以越容易地认为，样本的相关系数的某一值表达了二数据组总体间的实际关系。另外，还要特别注意，良好的相关不一定表明在相关的二变量之间存在有因果关系。

第三节 回归方程

由相关分析发展而来的回归分析，使我们能够就某一样本中的诸值随另一样本中的诸值而变化的方式作出评价。这样就可以得出一个描述 y 与 x 的关系的数学函数(见第三章第一节)。第三章第四、第五和第六节详细讨论了两种主要回归方法的特点。回归分析的目的是通过将数据点绘在坐标图上，进而拟合出最佳代表全部关系的一条线(即一个数学函数)。对于完全相关而言，这是一件很容易作的事，即通过所有散点画出一条直线。然而对于非完全相关(这是一般情形)而言，我们可以得出这样的一个回归直线方程，即诸点对该直线的离差之平方和减至最小。在 y 轴上分解的离差减至最小时(见图 3.7)，我们可以得出 y 关于 x 的回归直线(一般设 x 为自变量)，其方程为：

$$y-\bar{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\bar{x})$$

而 x 关于 y 的回归直线方程为：

$$x-\bar{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\bar{y})$$

在相关系数值与二回归直线间的关系之间，存在有一种特殊的联系：这两条直线之间的夹角(θ)的余弦以 r 表之，则 $r=\cos\theta$。例如，若系完全相关，则这两条直线重合，而若系零相关，则这两条直线相互垂直。这样获得回归直线的方法，称为最小二乘回归方法。此外，如果我们运用回归方程进行预测，那就必须确保数据均呈正态分布。

另一种获得回归直线方程的方法，并不利用相关系数，而是使散点对直线的 x 和 y 离差二者均减至最小。这就是缩短主轴回归直线，并且可以表示为：

$$y=\frac{\sigma_y}{\sigma_x}x+k$$

式中 k 可以通过将 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$ 代入方程加以确定。这条直线和两条最小二乘回归直线均通过两个样本总体的平均数。

第四节　正态分布曲线

正态曲线的理论，在第七章第七节已经讨论过了，下面讨论正态曲线的统计学上的含义和应用。根据测量级可以将资料分为三大类，即：

符号资料：这是在类型划分，例如土壤类型（灰壤或棕壤）划分中遇到的资料；对于这类资料选用合适的统计方法，会受到原始资料性质的限制，因而统计结果的效率较差。

顺序资料：这是为了施行统计检验而排成秩次的资料；对这类资料所用的统计方法都是效率比较高的一些方法；统计结果比用于符号数据的那些方法效率要高。

区间资料：这是用于统计方法中的实数值资料。有效的统计检验法大多使用区间资料。

统计方法主要可以分为两类，一类使用符号资料或顺序资料，称之为非参数统计方法；另一类使用区间资料，称之为参数统计方法。参数统计方法通常均以数据呈近似正态分布为前提。

正态曲线具有一些独特的统计特点，特别是在标准差方面，因而适用于估计出现的概率和结果的显著性。就正态曲线而言，曲线以下的面积有 68.26% 介于 $\bar{x}+\sigma$ 与 $\bar{x}-\sigma$ 之间。因此，正态分布样本有 68.26%，其值为平均数两边的任何一边之一个标准差。同理，有 95.44% 介于 $\bar{x}+2\sigma$ 与 $\bar{x}-2\sigma$ 之间；有 99.73% 介于 $\bar{x}+3\sigma$ 与 $\bar{x}-3\sigma$ 之间。正态曲线沿两个方向呈渐近延伸；因此，

在理论上，任何有限数个标准差都不能包括曲线以下的所有全部面积，不过，位于 $\bar{x}+4\sigma$ 与 $\bar{x}-4\sigma$ 以外的面积是非常小的，以致曲线的这两个末端往往可以忽略不计。

数据呈近似正态分布的程度，往往不足以确保它们可以被认为统计学上是正态分布的。在这种情况下，常要运用对应的数学函数来将数据加以变换，视数据是呈正向偏态还是呈负向偏态而定。通常在进行数据变换时，对于正向偏态而言，使用数据值的对数；而对于负向偏态而言，则使用数据的平方值。

第五节　y 估算值的标准误差

统计方法是必不可少的，因为我们的目的通常在于仅仅根据总体中的比较小的样本得出关于某一现象或某一关系的结论。由于这个原因，我们需要有一些方法来预测由样本获得的结果和总体的实际结果相差到什么程度。

对于任何无限大的总体而言，我们可以通过计算样本平均数（$\bar{x}$）来估算实际平均数（μ），通过计算样本标准差（s）来估算实际标准差（σ_x）。我们可以重复该估算过程很多次，每一次由总体获得的样本全不一样，每一次获得的结果也全不一样。对于很小的样本来说，一、二个很稀有的（很大的或很小的）值的机会相对地要多一些，这会急剧地改变样本平均数和标准差的值。因此，样本平均数与实际平均数的可能差异的任何度量都会含有 n。另外，计算甚伪样本平均数的机会会随着数据值相对于平均数的离散度（亦即标准差）的增大而急剧增多。这样一来，我们就可以运用标准误差或平均数（$s_{\bar{x}}$），即

$$s_{\bar{x}}=s/\sqrt{n}$$

作为样本平均数与实际平均数差异的指标。其实，平均数的标准

误差是样本平均数相对于实际平均数的标准差。这一点可加以推广，以便就用回归分析进行预测的有效性提供一个估计量。这里，由 x 估算 y 的标准误差可以表示为：

$$s_{y\cdot x}=\sigma_y\sqrt{(1-r^2)}$$

这时，假定数据呈正态分布，而且只要两组数据均呈正态分布，我们就可以认为，由回归分析估算出的诸 y 值，有 95.44% 介于 $\pm 2s_{y\cdot x}$ 之间，有 99.73% 介于 $\pm 3s_{y\cdot x}$ 之间。因此，通常在散点图上回归直线的两边，一般在 $\pm 2s_{y\cdot x}$ 处标出"置信区间"，以表明大约95%的 y 值的范围，即 95% 的置信区间。

第六节　学生氏 t 检验法

学生氏 t 检验法是用来检验这样一个假设的，即：平均数为 $\bar{x}$ 的样本可以从平均数为 μ 的总体中抽取。可见，这是平均数的标准误差的一项推广，并且可以表示为：

$$t=\frac{\text{样本平均数与总体平均数之差}}{\text{平均数的标准误差}}$$

$$=\frac{\mu-\bar{x}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

然后要把按这个公式求得的 t 值，跟就不同概率计算出的诸 t 值加以比较。所有这些在大多数统计学教程中均有阐述。此外，如果我们利用比较大的样本量，则任何一个结果的显著性就有所提高。一般说来，对于常数 n 而言，t 值比较大表明，样本不大可能不是从总体中抽取的。

第七节　复相关系数

复相关系数所表示的是若干个变量(比方说，$x_1,x_2,\cdots,x_n$)间

的线性相关程度。该系数就三变量情形而言为$R_{1.23}$，其第一个下标是因变量，后两个下标是自变量，可以与各对数据组的单相关系数有效地联系起来。若设r_{12}为1组与2组间的单相关系数，$r_{2\cdot}$为2组与3组间的单相关系数，则就三变量情形而言，有：

$$R_{1.23}=\sqrt{\frac{r_{13}^2+r_{12}^2-2r_{13}r_{12}r_{32}}{1-r_{32}^2}}$$

总系数总取值为$0\leqslant R\leqslant 1$，而R^2为由x_2和x_3造成的x_1的方差。

推荐文献

第一章

一般数学概念和惯例

COURANT, R. and ROBBINS, H. 1973: What is mathematics? London: Oxford University Press.

GOODSTEIN, R. L. 1962: Fundamental concepts of mathematics. London: Pergamon.

WILDER, R. L. 1968: Evolution of mathematical concepts: an elementary study. New York: Wiley.

逻辑学与集合论

BISHIR, J. W. and DREWES, D. W. 1970: Mathematics in the behavioural and social sciences. New York: Harcourt, Brace and World.

MIZRAHI, A. and SULLIVAN, M. 1973: Finite mathematics with applications for business and social sciences. New York, Wiley.

单位制

NATIONAL PHYSICAL LABORATORY, 1970: SI the international system of units. London: HMSO.

第三章

系统方法

CHORLEY, R. J. and KENNEDY, B. A. 1971: Physical geography: a systems approach. London: Prentice Hall.

RUSSWURM, L. H. and SOMMERVILLE, E. 1974: Man's natural environment: a systems approach. North Scituate, Mass.: Duxbury.

普通统计方法

BRYANT, E. C. 1966: Statistical analysis. New York: McGraw-

University Library. London: Hutchinson.

第五章

坐标几何

FLANDERS, H. and PRICE, J. J. 1973: Introductory college mathematics with linear algebra and finite mathematics. New York: Academic Press.

微分

KNIGHT, B. and ADAMS, R. 1975: Calculus I and Calculus II. London: Unwin.

STEPHENSON, G. 1973: Mathematical methods for science students. London: Longmans.

曲线拟合与数值分析

EZEKIEL, M. and Fox, K. A. 1959: Methods of correlation and regression analysis—linear and curvilinear. New York: Wiley.

HILDEBRAND, F. B. 1974: Introduction to numerical analysis. New York: McGraw-Hill.

KHABAZA, I. M. 1965: Numerical analysis. London: Pergamon.

WILLIAMS, E. J. 1959: Regression analysis. New York: Wiley.

第六章

BISHIR, J. W. and DREWES, D. W. 1970: Mathematics in the behavioural and social sciences. Harcourt, Brace and World.

LANG, S. 1973: A first course in calculus. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

第七章

概率论与科研方法

DAVIDSON, D. A. 1978: Science for physical geographers. London: Edward Arnold.

普通概率论

DURRAN, J. H. 1970: SMP Statistics and probability. Cam-

bridge: Cambridge University Press.

HEATHCOTE, C. P. 1971: Probability: elements of the mathematical theory. Unwin University Books. London: Unwin.

概率论在水文学和分布中的应用

CHOW, V. T. 1964: Handbook of applied hydrology. New York: McGraw-Hill.

皮尔逊分布

DAWSON, J. A. 1972: The Pearson system of frequency curves. Computer Applications in the natural and social sciences 13A, 1—10.

ELDERTON, W. P. and JOHNSON, N. L. 1969: Systems of frequency curves. Cambridge: Cambridge University Press.

极值分布与对数正态分布

AITCHISON, J. and BROWN, J. A. C. 1957: The lognormal distribution, with special reference to its uses in economics. University of Cambridge Department of Applied Economics Monograph 5. Cambridge: Cambridge University Press.

GUMBEL, E J. 1958: The statistics of extremes. New York, Columbia University Press.

第八章

积分概论

KNIGHT, B. and ADAMS, R. 1975 Calculus I and Calculus II. London: Unwin.

LANG, S. 1973: A first course in calculus. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley. For tables of standard integrals.

DWIGHT, H. B. 1957: Tables of integrals and other mathematical data. London: Macmillan.

第九章

一般微分方程

MANOUIGAN, M. N. and NORTHCUTT, R. A. 1973: Ordinary

differential equations. London: Charles E. Merrill.
STEPHENSON, G. 1973: Mathematical methods for science students. London: Longmans.
复数
FLANDERS, H. and PRICE, J. J. 1973: Introductory college mathematics with linear algebra and finite mathematics. New York: Academic Press.

参考文献

DAVIDSON, D. A. 1973: Particle size and phospate analysis—evidence for the evolution of a tell. *Archaeometry* 15(1), 143—52.

DAVIDSON, D. A. 1977: The subdivision of a slope profile on the basis of soil properties: a case study from mid-Wales. *Earth Surface Processes* 2. 55—61.

DAVIDSON, D. A. 1978: *Science for physical geographers*. London: Edward Arnold.

DOBBIE, C. H. and WOLF, P. O. 1953: The Lynmouth flood of August 1952. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*.

DURY, G. H. 1959: Analysis of regional flood frequency in the Nene and Great Ouse. *Geographic Journal*. 125, 223—9.

EAST AFRICAN METEOROLOGICAL DEPARTMENT, 1964: *Climatological statistics for East Africa and the Seychelles, part III—Tanganyika and Zanzibar*. Nairobi, Kenya: EAMD.

FLANDERS, H. and PRICE, J. J. 1973: *Introductory college mathematics with linear algebra and finite mathematics* New York: Academic Press.

GABRIEL, K. R. and NEUMANN, J. 1962: A Markov Chain model for daily rainfall at Tel Aviv. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society* 88, 90—95.

GARDINER, V. 1975: *Drainage basin morphometry*. British Geomorphological Research Group Technical Bulletin 14.

GRAY, J. M. 1974: The main rock platform of the Firth of Lom, western Scotland. *Institute of British Geographers, Transactions* 61, 81—100.

GREEN, J. F. N. 1935: The terraces of southernmost England. *Quarterly Journal of the Geological Society*, 92, 58—72.

GREGORY, K. and WALLING, D. 1973: *Drainage basin form*

MIAMI CONSERVATION DISTRICT, 1936: Storm rainfall of the eastern United States. *Technical Report part V*, 258—59.

MILLER, R. L. and KAHN, J. S, 1962: *Statistical analysis in the geological sciences*. New York: Wiley.

PANOFSKY, H. A. and BRIER G. W. 1958: Some applications of statistics and meteorology. Pennsylvania: Pennsylvania State University.

PEARSON, K. 1901: On the lines and planes of closest fit to systems of points in space. *Philosophical Magazine*, 6, 320—331.

PHILIPS, J. 1957—58: The theory of infiltration. *Soil Science*, 83—85, various pages.

QUINN, F. H. 1977: Annual and seasonal flow variations through the Straits of Mackinac. *Water Resources Research*, 13, 137—44.

RAYNER, J. N. 1972: The application of harmonic and spectral analysis to the study of terrain. In *Spatial analysis in geomorphology*, 283—300, London: Macmillan.

RUHE, R. K. 1969: *Quaternary landscape in Iowa*. Ames, Iowa: Iowa State University Press.

SCHEIDEGGER, A. E. 1970: *Theoretical geomorphology*, Berlin: Springer-Verlag.

SHAW, J. and HEALY, T. R. 1977: Rectilinear slope formation in Antarctica. *Annals of the Association of American Geographers* 67, 46—54.

SMITH, K. 1972: *Water in Britain*. London: Macmillan.

STATHAM, I. 1976: A scree slope rockfall model. *Earth Surface Processes* 1, 43—62.

STRAHLER, A. N. 1957: Quantitative analysis of watershed geomorphology. *Transactions of the American Geophysical Union* 38, 913—20.

SUMNER, G. N. 1977a: Sea breezes in hilly terrain. *Weather* 32, 200—8.

SUMNER, G. N. 1977b: Sea breeze temperature and humidity

contrasts at Lampeter, Dyfed. *Cambria* 4, 187—98.

THORNES, J. E. 1971: state, environment and attribute in scree-slope studies. in Brunsden, D., editor, *Slopes, form and process*. Institute of British Geographers Special Publication 3.

WEYMAN, D. R. 1974: Runoff processes, contributing area and streamflow in a small upland catchment. *Institute of British Geographers Special Publication* 6, 33—43.

YOUNG, A. 1972: *Slopes*. London: Longman.

YOUNGS, E. G. and AGGELIDES, S. 1976: Drainage to a water table analysed by the Green-Ampt approach. *Journal of Hydrology* 31, 67—79.

英汉地理数学名词对照

abscissa	横坐标
acceleration	加速度
acceleration, centripetal	向心加速度
addition	加,加法
amplitude	振幅
angular measurement	角的度量
angular velocity	角速度
antecedent precipitation index	期前降水指数
anticyclonic	反气旋的
antiderivation	反导数
antilogarithm	反对数
approximation	近似值
arcsine	反正弦
area	面积
array	阵列
assymptotes	渐近线
atmospheric motion, equations of	大气运动方程
axes, rotation of	坐标轴的转动
axis	轴,坐标轴
balanced flow	平衡气流
base	基数,底
Bayes' theorem	贝叶斯定理
bedload	推移质
binary system	二进制
binomial coefficient	二项系数
binomial distribution	二项分布
binomial theorem	二项式定理
boundary condition	边界条件

boundary layer	边界层
calculus	微积分学
characteristic equation	特征方程
chord	弦
circular measure	弧度法
cofactors	余因子，代数余子式
combinations	组合
common difference	公差
common ratio	公比
complementary function	补函数
components	分量，成分
compound angle	复角
confidence	置信度
constant	常数
continuity equations	连续方程
convergent(series)	收敛级数
coordinates	坐标
rectangular or Cartesian	直角坐标或笛卡尔坐标
polar	极坐标
Coroilis force	科里奥利力
correlation coefficient	相关系数
cosecant	余割
cosine	余弦
cotangent	余切
cubic	三次的
cumulative probability	累积概率
curve fitting	曲线拟合
cyclonic	气旋的
D-operator	D 算子
decimal system	十进制

degree	次数,阶
degrees	度
depth-duration curve	深-时曲线
derivative	导数
determinants	行列式
diagonal	对角线
differential equations	微分方程
applications	微分方程的应用
constant coefficients	常系数微分方程
exact	恰当微分方程
first-order	一阶微分方程
general solution	微分方程的通解
homogeneous	齐次微分方程
linear	线性微分方程
non-linear	非线性微分方程
ordinary	常微分方程
partial	偏微分方程
particular solution	微分方程的特解
second order	二阶微分方程
separable variable	可分离变量的微分方程
solution by D-operators	微分方程的D算子解法
solution by integrating factor	微分方程的积分因子解法
solution by particular integral	微分方程的特别积分解法
solution by higher order	高阶微分方程的解法
solution by ordinary first-order	一阶常微分方程的解法
summary of solution techniques	微分方程解法一览表
differentiation	微分
substitution	置换微分
partial	偏微分

dimension	阶数,维数
direction cosine	方向余弦
discharge	流量
divergent(series)	发散级数
division	除,除法
dot product	点积
drainage area	流域面积
drought	干旱
duodecimal system	十二进制
e	e
Eigenvector	特征向量
Eigenvalue	特征值
elements(matrices)	元素（矩阵）
entries(matrices)	项（矩阵）
eqnations	方程
cubic	三次方程
differential	微分方程
homogeneous	齐次方程
quadratic	二次方程
quadratic, solution of	二次方程的解
quartic	四次方程
error	误差
expansion (of series)	展开式(级数的)
explanation	解释,说明
exponential series	指数级数
extremal distributions	极值分布
extreme-value distribution	极值分布
factorial	阶乘
family of lines	线族
floods	洪水

forces	力
Fourier analysis	傅里叶分析
Fourier coefficients	傅里叶系数
frequency distribution	频率分布
frictional velocity	摩阻速度
function	函数
complementary	补函数
continuous	连续函数
curvilinear	曲线函数
discontinuous	间断函数
exponential	指数函数
hyperbolic	双曲函数
inverse trigonometric	反三角函数
linear	线性函数
logarithmic	对数函数
multidimensional	多维函数
non-linear	非线性函数
periodic	周期函数
power	幂函数
rational	有理函数
standard	标准函数
trigonometric	三角函数
trigonometric, integration of	三角函数的积分
fundamental law of calculus	微积分学基本定律
fundamental period	基本周期
Galton's Law	高尔顿定律
gamma distribution	伽马分布
geostrophic wind	地转风
gradient	梯度，斜率
graph	坐标图，图象
graph papers	坐标纸

gravity	重力
groundwater storage	潜水蓄水量
Gumbel	冈贝尔
harmonic analysis	调和分析
hillslope processes	山坡过程
histogram	直方图
hyperbola	双曲线
hyperbola, rectangular	直角双曲线
hypoteneuse	斜边
implication	关联
infiltration rate	渗润率
infinity	无限大
initial condition	初始条件
initial line	起始线，极轴
initial term	起始项
integer	整数
integral, definite	定积分
indefinite	不定积分
particular	特别积分
standard	标准积分
integrating factor	积分因子
integration	积分
application of	积分的应用
by parts	分部积分法
by substitution	置换积分法
general rule	一般法则
integration, numerical	数值积分
of trigonometric functions	三角函数的积分
techniques, summary	积分法一览表
using partial fractions	部分分式积分法
intercept	截距

interest, compound	复利
simple	单利
intersection	交，交集
irrational numbers	无理数
isosceles triangle	等腰三角形
Kenya	肯尼亚
Laplace transformations	拉普拉斯变换
lapse rates	温度直减率
limits	极限，区间
line fitting	直线拟合
links	链
locus	轨迹
logarithm	对数
logarithms, computation in	对数运算
logarithms, Napeirian	讷氏对数
natural	自然对数
lognormal distribution	对数正态分布
longitudinal profile	纵剖面
Maclaurin's series	马克劳林级数
magnitude	大小，数值，数量级
Markov Chains	马尔科夫链
matrix solution	马尔科夫链的矩阵解法
matrices	矩阵
matrices, singular	奇异矩阵
equality of	矩阵的相等
matrix, adjoint	伴随矩阵
column	列矩阵
inverse	逆矩阵
null	零矩阵
row	行矩阵

skew-symmetric	反对称矩阵
square	方阵
symmetric	对称矩阵
unit or identity	单位矩阵
matrix algebra, law of	矩阵代数定律
computation	矩阵运算
transposition	转置矩阵
maximum point	极大值点
mean	平均数
minimum point	极小值点
minute	分
modulus	模数
Mole R,	莫尔河
moment	矩
moment of inertia	转动惯量
multiplication	乘，乘法
distributive law of	乘法分配律
multivariate	多变量的
Nairobi	内罗毕
natural numbers	自然数
negative values, computation involving	含有负值的运算
networks	网络
nodes	节
nominal scale	符号粒级
normal curve	正态曲线
normal distribution	正态分布
normal equations	正规方程
number systems	数制
operators	操作码，算子

order	次
order in computation	运算顺序
ordinal scale	顺序粒级
ordinate	纵坐标
origin	原点
parabola	抛物线
parallelogram of forces	力的平行四边形
parametric form	参数形式
partial differentiation	偏微分
partial fractions, integration by	部分分式积分法
partial sum(of series)	部分和
particle size	粒径
Pascall's triangle	帕斯卡三角形
Pearson family of distributions	皮尔逊分布系
period	周期
period, fundamental	基本周期
periodicity	周期性
permutations	排列
phase	相位
phi-scale	粒级 ϕ
point of inflexion	拐点
Poisson distribution	泊松分布
pole	极
polynomial	多项式
position vector	定位向量
powers	幂指数
computation involving	含有幂指数的运算
precipitation	降水,降水量
pressure gradient force	气压梯度力
principal components analysis	主成分分析
probability	概率

a priori	先验概率
conditional	条件概率
chain	链概率
empirical	经验概率
transitional	转移概率
density	概率密度
distribution	概率分布
space	概率空间
product	积
progression, arithmetic	算术数列
geometric	几何数列
proportionality	比例,比值
Pythagoras	勾股定理
quadratic	二次的
quartic	四次的
quotient	商
radian	弧度
radiation	辐射
rainfall	降水强度
参见 precipitation intensity	
rainstorm	暴雨
random walk	随机走动
rational functions	有理函数
rational numbers	有理数
real numbers	实数
reciprocal	倒数
recurrence interval	再现时段
recurrence of decimals	循环小数
reduced equation	对比方程
reduced major axis regression	缩短主轴回归

reduction formula	归约公式
regression	回归
least squares	最小二乘回归
reduced major axis	缩短主轴回归
reservoir storage	水库库容
resolution	分解
resultant	合成的
return period	重现期
roots	根,根数
rounding	凑整,四舍五入
runoff	径流
sample size	样本量
scalar	数量
scalar product	数量积
sea breeze	海风
secant	正割
sedimentation	沉积,淤积
series	级数,序列
annual flood	年最大流量序列
arithmetic	算术级数
covergent	收敛级数
divergent	发散级数
exponential	指数级数
finite	有限级数
Fourier	傅里叶级数
geometric	几何级数
infinite	无限级数
Maclaurin's	马克劳林级数
oscillating	振荡级数
partial sum of	级数的部分和

sum of arithmetic	算术级数的和
sum of geometric	几何级数的和
time	时间序列
expansion	级数展开式
set	集，集合
significance	显著性
Simpson's Rule	辛卜生法则
simultaneous equations	联立方程
general solution of	联立方程的通解
matrix solution of	联立方程的矩阵解
skewness	偏态，偏度
slope	斜率
slope form	坡地
spells, weather	持续天气
sphere, volume of	球体体积
standard deviation	标准差
standard error	标准误差
stationary points	驻点
establishment of	驻点的确定
statistical relationship	统计关系式
stochastic processes	随机过程
straight line	直线
stream network	河道网
stream order	河道秩次
Student's t-test	学生氏 t 检验法
substitution, in tegration by	置换积分法
subtraction	减，减法
surface	面
symbols	符号
Systeme Internationale	国际单位制
tangent(trigonometry)	正切(三角学)

tangent(to a curve)	切线(曲线的)
Tanzania	坦桑尼亚
Taylor's series	泰勒级数
temperature	温度
time series analysis	时间序列分析
totality	合,合集
trace elements	痕量元素
transformation(of data)	变换(数据的)
trapezoidal rule	梯形法则
trend surface analysis	趋势面分析
triangle law(of vectors)	三角形法则(向量的)
trigonometric ratios	三角比
unit vector	单位向量
variables, independent	自变量
dependent	因变量
variance	方差
vector	向量
vector addition	向量加法
vector area	向量面积
vector product	向量积
vectorial angle	向量角
velocity	速度
Venn diagram	维恩氏图
volume of revolution	旋转体的体积
von Karman's constant	卡尔曼常数
Wales	威尔士
water table	潜水面
wavelength	波长
Weibull	威伯尔

wind components	风的分量
wind fields	风场
wind shear	风的切变
x-axis	x 轴
y-axis	y 轴
z-axis	z 轴