全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

测量平差

主编　纪奕君

煤炭工业出版社

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

测量平差

主　编　纪奕君
副主编　宋太江

煤炭工业出版社
·北　京·

内 容 提 要

全书共分六章。前三章是测量平差基础部分，包括观测误差、精度指标、方差传播率、协因数传播率、最小二乘原理、间接平差、直接平差和条件平差等；第四章为误差椭圆；第五章为法方程式的解算方法，包括高斯消去法、三角分解法、三角分解求逆法和迭代法等解算方法；第六章为平差应用算例，包括测量平差的计算表格、水准网平差算例、三角网平差算例和导线网平差算例。

本书为全国煤炭高职高专工程测量专业“十一五”规划教材，也可作为测量及其相关专业工程技术人员和自学者参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

测量平差/纪奕君主编．—北京：煤炭工业出版社，2007.6

全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

ISBN 978-7-5020-3077-3

Ⅰ.测… Ⅱ.纪… Ⅲ.测量平差-高等学校：技术学校 教材 Ⅳ.P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 054898 号

煤炭工业出版社 出版
(北京市朝阳区芍药居 35 号 100029)
网址：www.cciph.com.cn

北京京科印刷有限公司 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本 787mm×1092mm 1/16 印张 12
字数 285 千字 印数 1—5,000
2007 年 6 月第 1 版 2007 年 6 月第 1 次印刷
社内编号 5878 定价 22.00 元

版权所有 违者必究

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，本社负责调换

全国煤炭高职高专工程测量技术类“十一五”规划教材

编审委员会

主　　任:纪奕君

副 主 任:薄志毅　李天和　索效荣　李战宏

秘 书 长:赵国忱

委　　员（以姓氏笔画为序）:

邓传军　冯大福　孙　江　孙金礼

任建华　刘永清　刘俊荷　米志强

宋文斌　李世平　李孝文　杨　楠

苗福林　贺英魁　钟来星　高绍伟

燕志明　姬　婧　梁振华　董俊锋

温继满

前　言

本书是全国煤炭高职高专工程测量技术专业“十一五”规划教材，由中国煤炭教育协会和中国矿业大学(北京)教材编审室共同组织编写。是根据2006年5月煤炭高等职业教育教材工作会议精神，按照全国煤炭高等职业教育工程测量技术专业规划教材专家编审委员会通过的《测量平差》教材编写提纲的要求编写的。

由于近年来，测量误差理论与数据处理方法产生了飞速发展，从只对偶然误差的分析处理到顾及系统误差、粗差的综合分析与处理；从独立观测值误差传播到广义误差传播；从传统的平差方法到近代平差方法；从以表格手工计算为主到以计算机计算为主等方面都有长足的发展和进步。另外，通过几年来的高职教学实践，笔者认为高职教育在理论上够用为度的前提下，应更加突出对学生动手能力的培养。因此对《测量平差》课程的教学改革是非常必要的，为满足高等职业教育工程测量技术专业新的教学体系需要，我们对传统的教材内容进行了较大的调整。

本书在内容上突出了两个基本，一个能力。即用较通俗的数学知识描述了测量平差的基本理论和基本方法；增加了大量的例题，以提高动手能力的培养。此外，本书与现有平差教材相比，增加了法方程解算方法一章，较详细介绍了法方程解算的理论和方法。这样，既可以使学生得到手工计算的训练，更主要的是为编写平差计算程序奠定了基础。

本书由纪奕君任主编，宋太江任副主编。具体分工：辽宁工程技术大学职业技术学院纪奕君编写绪论、第四章、第五章和第六章；重庆工程职业技术学院宋太江编写第三章；北京工业职业技术学院辛星编写第一章；山西煤炭职业技术学院曹海春编写第二章。全书由纪奕君统稿并定稿，由中国矿业大学(北京)戴华阳教授主审。

在本书的编写过程中，参阅了大量文献资料，引用了同类书刊中的部分内容与算例，在此谨向有关作者表示衷心感谢！

由于作者的水平有限，书中如有不妥与错误之处，恳请使用本教材的教师和广大读者提出宝贵意见，以便再版时修正。

编　者

2007年3月

目　录

绪论 …… (1)

思考题与习题 …… (3)

第一章　观测误差及其传播 …… (5)

第一节　偶然误差的统计性质 …… (5)

第二节　衡量精度的指标 …… (9)

第三节　误差(协方差)传播律 …… (13)

第四节　误差传播律在测量中的应用 …… (25)

第五节　权与定权的常用方法 …… (28)

第六节　协因数和协因数传播律 …… (34)

第七节　由真误差计算中误差的实际应用 …… (41)

第八节　最小二乘原理 …… (45)

第九节　系统误差的传播 …… (48)

思考题与习题 …… (51)

第二章　间接平差 …… (53)

第一节　测量平差概述 …… (53)

第二节　间接平差原理 …… (56)

第三节　误差方程 …… (59)

第四节　精度评定 …… (67)

第五节　间接平差公式汇编和示例 …… (72)

第六节　间接平差特例——直接平差 …… (82)

思考题与习题 …… (85)

第三章　条件平差 …… (88)

第一节　条件平差原理 …… (88)

第二节　必要观测和多余观测 …… (93)

第三节　水准网条件方程式 …… (97)

第四节　测角网条件方程式 …… (99)

第五节　测边网与边角网条件方程式 …… (108)

第六节　导线网条件方程式 …… (113)

第七节　精度评定 …… (114)

第八节　条件平差算法与算例 …… (118)

思考题与习题 …… (128)

第四章　误差椭圆 …… (131)

第一节　概述 …… (131)

第二节　点位误差…… (132)
第三节　误差曲线…… (138)
第四节　误差椭圆…… (139)
第五节　相对误差椭圆…… (141)
第五章　法方程式的解算方法…… (145)
第一节　高斯消去法…… (145)
第二节　正定矩阵三角分解法…… (152)
第三节　正定矩阵三角分解求逆法…… (156)
第四节　线性方程的迭代解法…… (158)
第六章　平差应用实例…… (162)
第一节　概述…… (162)
第二节　水准网平差算例…… (166)
第三节　三角网平差算例…… (170)
第四节　导线网平差算例…… (174)
主要参考文献…… (181)

绪　论

测量平差是测绘专业的技术基础课，该课程的学习好坏不仅直接影响其他专业课程的学习质量，而且有可能影响到学习者今后在生产、科研上的自身成就和发展。要学好本课程，首先应明确测量平差的目的和任务。

测量平差的研究对象是观测数据，研究的目的是为各类观测数据的处理提供原则和方法。观测数据来源于外业观测（或称为信息采集），不可避免地会受到测量仪器、观测者和外界条件等诸方面的影响，使之与实际值存在差异，即存在观测误差。因此，要想学好测量平差，应先了解观测误差。

一、观测条件与观测误差

观测值是通过观测得到的测量信息。任何观测值，客观上总存在一个能反映其真实大小的数值，这个数值称为观测量的真值。然而，一个量的真值一般是得不到的，因为观测中不可避免地要存在误差，这一点可以通过对某一量进行多次重复观测或对某一几何图形进行观测就可以得到证实。例如，对某一段高差或某一距离或某一角度重复观测若干次，会发现各量重复观测值间均存在差异。再如，对某平面三角形的三内角进行观测，你会发现三个观测角之和与其理论值 180°存在差异。这些差异说明了观测误差的存在，因为，如果不存在观测误差，同一量的若干次观测值应相等，即都等于其真值，三角形三内角的观测值之和当然应等于内角和的理论值。

观测误差产生的原因很多，概括起来有以下三个方面：

1. 测量仪器

测量工作通常是利用测量仪器进行的。由于每一种仪器具有一定限度的精密度。因而使观测值的精密度受到了一定的限制。例如，丈量长度的各种各样的尺子，它们的格值都会含有误差，所标记的长度并不是真长，因此，用这些尺子量得的长度就不是真长。又如，水准仪的视准轴不平行于水准管轴时，在水准尺上的读数将会产生误差，而且这个误差将随着水准仪距水准尺的距离的增大而增大。同样，经纬仪、GPS、全站仪等测量仪器的误差也使测量结果产生误差。

2. 观测者

由于观测者的感觉器官的鉴别能力有一定的局限性，所以在仪器的安置、照准、读数等方面都会产生误差。同时，观测者的工作态度和技术水平，也是对观测成果质量有直接影响的重要因素。

3. 外界条件

观测时所处的外界条件，如温度、湿度、风力、大气折光等因素都会对观测结果直接产生影响；同时随着温度的高低及湿度的大小、风力的强弱以及大气折光的不同，它们对观测结果的影响也随之不同。因而，在这样的客观环境下进行观测，就必然使观测的结果产生误

差。

上述测量仪器、观测者、外界条件三个方面的因素是引起误差的主要来源。把这三方面的因素综合起来称为观测条件。不难想像，观测条件的好坏与观测成果的质量有着密切的联系，观测条件较好则观测成果的质量较高，观测条件较差则观测成果的质量较低，观测条件相同则观测成果的质量也相同。所以，观测成果的质量高低也就客观地反映了观测条件的优劣。

但是，不管观测条件如何，在整个观测过程中，由于受上述种种因素的影响，观测的结果总会产生这样或那样的误差。当然，在客观条件允许的范围内，测量工作者必须确保观测成果具有较高的质量。

二、观测误差的分类

根据观测误差的来源与对观测结果的影响性质，可将观测误差分为系统误差、偶然误差和粗差三种。

1. 系统误差

在相同的观测条件下，作一系列的观测，如果误差在大小、符号上表现出系统性，或者在观测过程中按一定的规律变化，或者为某一常数，那么，这种误差就称为系统误差。

例如，用具有某一尺长误差的钢尺量距时，由于尺长误差所引起的距离误差与所测距离的长度成正比地增加，距离越长，所积累的误差也越大；经纬仪因校正或整置的不完善而使所测角度产生误差；等等。这些都是由于仪器不完善或工作前未经检验校正而产生的系统误差。又如，用钢尺量距时的温度与检定尺子时的温度不一致，而使所测的距离产生误差；测角时因大气折光的影响而产生的角度误差等等，这些都是由于外界条件所引起的系统误差。此外，如某些观测者在照准目标时，总是习惯于把望远镜十字丝对准目标中央的某一侧，也会使观测结果带有系统误差。

2. 偶然误差

在相同的观测条件下，作一系列的观测，如果误差在大小和符号上都表现出偶然性，即从单个误差看，该系列误差的大小和符号没有规律性，但就大量误差的总体而言，具有一定的统计规律，这种误差称为偶然误差。

例如，在用经纬仪测角时，误差是由照准误差、读数误差、外界条件变化所引起的误差、仪器本身不完善而引起的误差等综合的结果。而其中每一项误差又是由许多偶然(随机)因素所引起的小误差的代数和。例如，照准误差可能是由于脚架或觇标的晃动或扭转、风力，风向的变化、目标的背影、大气折光和大气透明度等偶然因素影响而产生的小误差的代数和。因此，测角误差实际上是许许多多微小误差项的和，而每项微小误差又随着偶然因素的影响不断变化，其数值忽大忽小，其符号或正或负，这样，由它们所构成的总和，就某个体而言，无论是数值的大小或符号的正负都是不能事先预知的，因此，把这种性质的误差称为偶然误差。

3. 粗差

粗差是一种大量级的观测误差，它是测量上的失误。在测量成果中，是不允许粗差存在的。

粗差产生的原因较多，主要是作业员疏忽大意、失职而引起的，如大数被读错、读数被记录员记错、照错目标等。

在观测数据中应尽可能设法避免出现粗差。行之有效的发现粗差的方法有：进行必要的重复观测；通过多余观测，采用必要而又严格的检核、验算等方式均可发现粗差。国家测绘机构制定的各类测量规范和细则，一般也能起到防止粗差出现和发现粗差的作用。

含有粗差的观测值都不能采用。因此，一旦发现粗差，该观测值必须舍去或重测。尽管测量者十分小心谨慎，粗差有时仍然在所难免。因此，如何在大量的观测数据中发现和剔除粗差，或在数据处理中削弱含粗差的观测值对平差计算结果的影响，乃是测绘界十分关注的课题之一。

系统误差和偶然误差在观测过程中总是同时产生的。当观测值中有显著的系统误差时，偶然误差就居于次要地位，观测误差就呈现出系统的性质，反之，则呈现出偶然的性质。

系统误差对于观测结果的影响一般具有积累的作用，它对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中，应该采用各种方法来消除系统误差，或者减小其对观测成果的影响，达到实际上可以忽略不计的程度。例如，在进行水准测量时，使前、后视距相等，以消除视准轴不平行于水准管轴对观测高差所引起的系统误差；对量距用的钢尺预先进行检定，求出尺长误差的大小，对所量的距离进行尺长改正，以消除由于尺长误差对量距所引起的系统误差等，都是消除系统误差的方法。

当观测列中已经排除了系统误差的影响，或者与偶然误差相比已处于次要地位，则该观测列中主要是存在着偶然误差。这样的观测列称为带有偶然误差的观测列。这样观测结果和偶然误差便都是一些随机变量，如何处理这些随机变量，是测量平差这一学科所要研究的内容。

由于观测结果不可避免地存在着偶然误差的影响，因此在实际工作中，为了提高成果的质量，同时也为检查和及时发现观测值中有无粗差存在，通常要使观测值的个数多于未知量的个数，也就是要进行多余观测。例如，对一条导线边，丈量一次就可得其长度，但实际上总要丈量两次或两次以上；一个平面三角形，只需观测其中两个内角，即可决定它的形状，但通常是观测三个内角。由于偶然误差的存在，通过多余观测必然会发现在观测结果之间不相一致，或不符合应有关系而产生的不符值。因此，必须对这些带有偶然误差的观测值进行处理，使得消除不符值后的结果，可以认为是观测量的最可靠的结果。由于这些带有偶然误差的观测值是一些随机变量，因此，可以根据概率统计的方法来求出观测量最可靠结果，这就是测量平差的一个主要任务。

测量平差的另一项任务，就是评定观测值及其函数的最可靠结果的精度，也就是考核测量结果的质量。人们把这一数据处理的整个过程叫做“测量平差”。概括起来讲，测量平差有两大任务：一是通过数据处理求待定量的最佳估值；二是评估观测成果的质量。

思考题与习题

0－1　什么叫观测误差？观测误差给观测结果带来什么影响？

0－2　产生观测误差的原因有哪些？

0－3　观测条件是由哪些因素构成的？它与观测结果的质量有什么联系？

0－4　根据观测误差对观测结果影响的不同，说明误差的分类。

0－5　为什么在观测中一定存在偶然误差？能否将其消除？

0－6　什么叫多余观测？测量中为什么要进行多余观测？

0－7　测量平差的任务是什么？带有系统误差的观测值能否参与平差？

0－8　在测角中用正、倒镜观测，水准测量中使用前、后视距相等，这些规定都是为了消除什么误差？

0－9　用钢尺丈量距离，有下列几种情况，使量得的结果产生误差，试判别误差的性质。

(1)尺长不准确　(2)尺不水平　(3)估读小数不准确　(4)尺垂曲　(5)尺端偏离直线方向

0　10　在水准测量中，有下列几种情况，使水准尺读数带有误差，试判别误差的性质。

(1)视准轴与水准轴不平行　(2)仪器下沉　(3)读数不准确　(4)水准尺下沉

第一章　观测误差及其传播

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值，求出未知量的最佳值及评定测量成果的精度。因此首先要对偶然误差的性质进行研究，找出它们对观测值的影响规律。偶然误差是一种随机变量，一组误差表面上看没有规律性，但就其总体来说具有一定的统计规律，随机变量的统计学原理适用于此。

本章从测量误差的统计规律入手，引出测量中的常用的“精度”概念，详细讨论测量平差中最重要的内容之一，即偶然误差的传播定律，并给出其在测量中的应用实例，最后给出权的定义以及测量中常用的定权方法。

第一节　偶然误差的统计性质

任何一个被观测量，客观上总是存在一个能代表其真实大小的数值，这一数值就称为该观测量的真值。从概率和数理统计角度来看，当观测量仅含偶然误差时，数学期望也就是它的真值。

设进行了 n 次观测，其观测值为 L_1、L_2、…、L_n，假定观测量的真值为 $\tilde{L}_1$、$\tilde{L}_2$、…$\tilde{L}_n$，由于各观测值都带有一定的误差，因此，每一观测值 L_i，与其真值 $\tilde{L}_i$ 或 $E(L_i)$ 之间必存在一差数，设

$$\Delta_i = L_i - \tilde{L}_i \tag{1-1}$$

式中，Δ_i 为真误差，又简称为误差。若记

$$\underset{n\times 1}{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\tilde{L}} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_1 \\ \tilde{L}_2 \\ \vdots \\ \tilde{L}_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\Delta} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \end{pmatrix}$$

则有

$$\Delta = L - \tilde{L} \tag{1-2}$$

如果以被观测量的数学期望

$$E(L) = [E(L_1), E(L_2), \cdots, E(L_n)]^{\mathrm{T}}$$

表示其真值，则

$$\begin{aligned} E(L) &= \tilde{L} \\ \Delta &= L - E(L) \end{aligned} \tag{1-3}$$

测量平差处理的观测值是假定不含系统误差的，因此这里的 Δ 仅仅是指偶然误差。就单个偶然误差而言，其大小和符号没有规律性，即呈现出一种偶然性（或随机性）。但就总体而言，却呈现出一定的统计规律性。人们从大量的测量实践中发现，相同观测条件下，大量偶然误差的分布也确实表现出了一定的规律性。下面举例说明。

在某测区，在相同的观测条件下，独立观测 358 个三角形的全部内角，求得 358 个三角形的闭合差，由于观测值带有误差，故三内角观测值之和不等于其真值 180°。根据式（1－1），各个三角形内角和的真误差可由下式算得：

$$\Delta_i = (L_1 + L_2 + L_3)_i - 180^\circ \quad (i = 1, 2, \cdots, 358)$$

式中，$(L_1 + L_2 + L_3)_i$ 表示各三角形内角和的观测值。现取误差区间的间隔 $d\Delta = 0.20''$，将这一组误差按其正负号与误差值的大小排列，统计误差出现在各区间内的个数 v_i，以及误差出现在某一区间内的频率 $\frac{v_i}{n}$（此处 $n = 358$），其结果见表 1－1。

表 1－1

误差的区间/(″)	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	45	0.126	0.630	46	0.128	0.640	
0.20～0.40	40	0.112	0.560	41	0.115	0.575	
0.40～0.60	33	0.092	0.460	33	0.092	0.460	
0.60～0.80	23	0.064	0.320	21	0.059	0.295	
0.80～1.00	17	0.047	0.235	16	0.045	0.225	$d\Delta = 0.20''$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
1.00～1.20	13	0.036	0.180	13	0.036	0.180	
1.20～1.40	6	0.017	0.085	5	0.014	0.070	
1.40～1.60	4	0.011	0.055	2	0.006	0.030	
1.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	181	0.505		177	0.495		

从表 1－1 中可以看出，误差的分布情况具有以下性质：

（1）误差的绝对值有一定的限值；

（2）绝对值小的误差比绝对值大的误差出现的个数多；

（3）绝对值相等的正负误差的个数相近。

为了便于以后对误差分布互相比较，下面对另一测区的 421 个三角形内角和的一组真误差，按上述方法作了统计，其结果列于表 1－2。

表 1－2 中所列的 421 个真误差，尽管其观测条件不同于表 1－1 中的真误差，但从表中可以看出：愈接近于零误差的区间，其频率愈大；随着离开零误差愈来愈远，其频率亦逐渐递

表 1－2

误差的区间/(″)	Δ 为负值			Δ 为正值			备注
	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	个数 v_i	频率 $\frac{v_i}{n}$	$\frac{v_i/n}{d\Delta}$	
0.00～0.20	40	0.095	0.475	37	0.088	0.440	
0.20～0.40	34	0.081	0.405	36	0.085	0.425	
0.40～0.60	31	0.074	0.370	29	0.069	0.345	
0.60～0.80	25	0.059	0.295	27	0.064	0.320	
0.80～1.00	20	0.048	0.240	18	0.043	0.215	
1.00～1.20	16	0.038	0.190	17	0.040	0.200	
1.20～1.40	14	0.033	0.165	13	0.031	0.155	$d\Delta = 0.20''$ 等于区间左端值的误差算入该区间内
1.40～1.60	9	0.021	0.105	10	0.024	0.120	
1.60～1.80	7	0.017	0.085	8	0.019	0.095	
1.80～2.00	5	0.012	0.060	7	0.017	0.085	
2.00～2.20	6	0.014	0.070	4	0.009	0.045	
2.20～2.40	2	0.005	0.025	3	0.007	0.035	
2.40～2.60	1	0.002	0.010	2	0.005	0.025	
2.60 以上	0	0	0	0	0	0	
$\sum$	210	0.499		211	0.501		

减;超过一定值(2.60″)的误差出现的频率为 0;且出现在正负误差区间内的频率基本上相等。因而,表 1－2 的误差分布情况与表 1－1 的误差分布情况具有相同的性质。

误差分布的情况,除了采用上述误差分布表的形式表达外,还可利用图形来表达。例如,以横坐标表示误差出现的不同区间,纵坐标代表各区间内误差出现的频率除以区间的间隔值,即 $\frac{v_i/n}{d\Delta}$(此处间隔值均取为 $d\Delta = 0.20''$)。分别根据表 1－1 和表 1－2 中的数据绘制出图 1－1 和图 1－2。可见,此时图中每一误差区间上的长方条面积就代表误差出现在该区间内的频率。例如,图 1－1 中画有斜线的长方条面积,就是代表误差出现在 0.00″～＋0.20″区间内的频率 0.128。这种图通常称为直方图,它形象地表示了误差的分布情况。

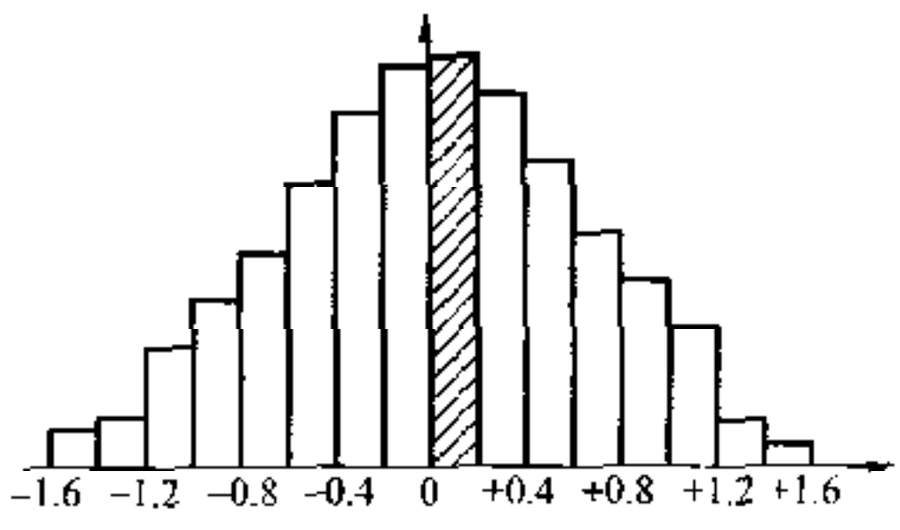


图 1－1

由此可知,在相同观测条件下所得到的一组独立观测的误差,只要误差的总个数 n 足够多,那么,误差出现在各区间内的频率总是稳定在某一常数(理论频率)附近,而且当观测个数愈多时,稳定的程度也就愈大。例如,就表 1－1 的一组误差而言,在观测条件不变的情况下,如果再继续观测更多的三角形,则可预期,随着观测的个数愈来愈多,误差出现在各区间内的频率,其变动幅度也就愈来愈小,当 $n \to \infty$ 时,各频率也就趋近于一个完全确定的数值,这就是误差出现在各区间的概率。这就是说,在一定观测条件下,对应着一定的误差分布。

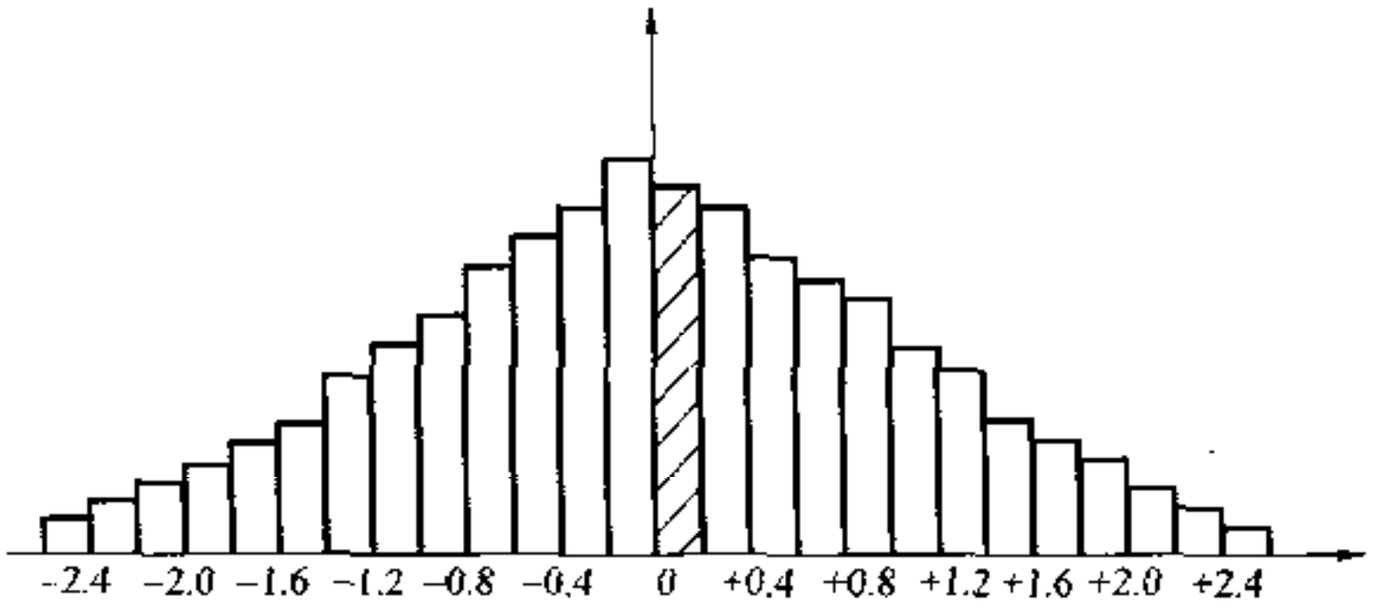


图 1－2

在 $n\to\infty$ 的情况下，由于误差出现的频率已趋于完全稳定，此时若把误差区间间隔无限缩小，则可想像到，图 1－1 及图 1－2 中各长方条顶边所形成的折线将分别变成如图 1－3 所示的两条光滑的曲线。这种曲线也就是误差的概率分布曲线，或称为误差分布曲线。由此可见，偶然误差的频率分布，随着 n 的逐渐增大，都是以正态分布为其极限的。通常也称偶然误差的频率分布为其经验分布，而将正态分布称为它们的理论分布。因此，在以后的理论研究中，都是以正态分布作为描述偶然误差分布的数学模型，这不仅可以带来工作上的便利，而且基本上也是符合实际情况的。

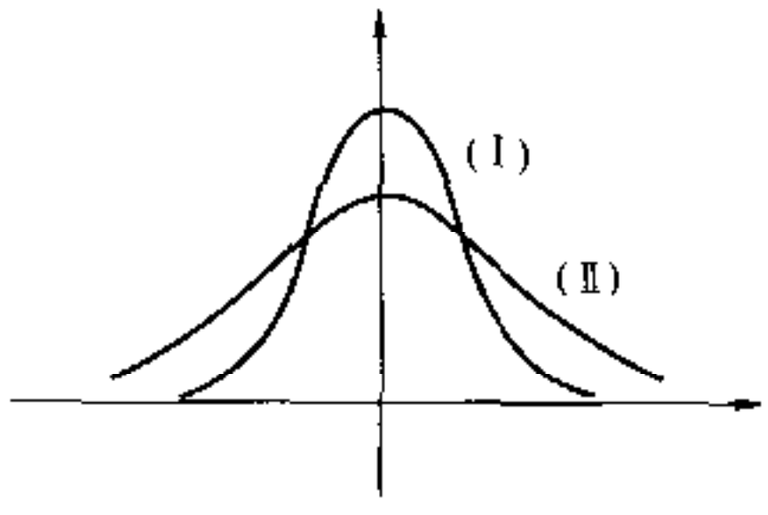


图 1－3

将上述讨论的偶然误差用概率术语来概括其特性：

(1) 在一定的观测条件下，误差的绝对值有一定的限值，或者说，超出一定限值的误差，其出现的概率为零。

(2) 绝对值较小的误差比绝对值较大的误差出现的概率大。

(3) 绝对值相等的正负误差出现的概率相等。

(4) 根据式(1－3)可知，偶然误差的数学期望为零，即

$$E(\Delta)=E(L-E(L))=E(L)-E(L)=0 \tag{1-4}$$

也就是说，偶然误差的理论平均值为零。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta]}{n}=0 \tag{1-5}$$

对于一系列的观测而言，不论其观测条件是好是差，也不论是对同一个量还是对不同的量进行观测，只要这些观测是在相同的条件下独立进行的，则所产生的一组偶然误差必然都具有上述四个特性。

图 1－1 和图 1－2 中各长方条的纵坐标为 $\frac{v_i/n}{\mathrm{d}\Delta}$，其面积即为误差出现在该区间内的频率。如果将这个问题提到理论上来讨论，则以理论分布(图 1－3)取代经验分布，此时，图 1－1 和图 1－2 中各长方条的纵坐标就是 Δ 的密度函数 $f(\Delta)$，而长方条的面积为 $f(\Delta)\mathrm{d}\Delta$，即代表误差出现在该区间内的概率，即

$$P(\Delta)=f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \tag{1-6}$$

根据数理统计知识，顾及式(1－3)，可写出 Δ 的概率密度式为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}} \tag{1-7}$$

式中，σ 为中误差。当上式中的参数 σ 确定出后，即可画出它所对应的误差分布曲线。由于 $E(\Delta)=0$，所以该曲线是以纵轴为对称轴。当 σ 不同时，曲线的位置不变，但分布曲线的形状将发生变化。例如，图 1－3 中就是表示 σ 不相等时的两条曲线。由上述讨论可知，偶然误差 Δ 是服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布的随机变量。

第二节　衡量精度的指标

测量平差的任务之一，就是评定测量成果的精度。如何正确理解“精度”的含意以及怎样衡量精度的高低，是本节所要讨论的主要内容。

为了阐述精度的含义，先分析上节的两个实例。图 1－1 和图 1－2 分别是在不同观测条件下所测得的两组误差的频率分布图(直方图)，图中每个长方条的面积就是误差出现在该区间内的频率。频率的大小见表 2－1 及表 2－2 中的数值。不难理解，如果将表 1－1 中的 0.00″～－0.20″和 0.00″～＋0.20″这两个区间的频率相加，即得区间－0.20″～＋0.20″内的频率为 0.254。如果按此法进行累计，则知误差出现于－0.60″～＋0.60″区间内的频率为 0.665。这就是说，在表 1－1 的这组误差中，出现于区间－0.60″～＋0.60″以内的误差占误差总数的 66.5%，而出现在这一区间以外的误差，即绝对值大于 0.6″的误差，其频率为1－0.665＝0.335，即占区间总数的 33.5%。如果对表 1－2 的误差也进行累计，可知出现在－0.60″～＋0.60″区间内的频率为 0.492，而出现于这一区间以外的频率为 1－0.492＝0.508。这就是说，出现于－0.60″～＋0.60″这一区间之内和区间之外的误差，各占误差总数的 49.2%和 50.8%。

上述数字表明，表 1　1 中的误差更集中于零的附近，因此可以说这一组误差分布得较为密集，或者说它的离散度小。相对而言，表 1－2 中的误差分布得较为离散或者说它的离散度大。

从直方图来看，误差分布较为密集的图 1－1，其图形在纵轴附近的顶峰较高，且由各长方条所构成的阶梯比较陡峭；而误差较为分散的图 1－2，在纵轴附近的顶峰则较低，且其阶梯较为平缓。这个性质同样反映在误差分布曲线(图 1－3)的形态上，即误差分布曲线(Ⅰ)较为高而陡峭，误差分布曲线(Ⅱ)则较低而平缓。

在一定观测条件下进行的一组观测，它对应着一种确定的误差分布。不难理解，如果分布较为密集，即离散程度较小时，则表示该组观测质量较好，也就是说，这一组观测精度较高；反之，如果分布较为离散，即离散程度较大时，则表示该组观测质量较差，也就是说，这一组观测精度较低。

所谓精度，就是指误差分布的密集或离散程度，也就是指离散度的大小。离散度越大，则精度越低。假如两组观测成果的误差分布相同，便是两组观测成果的精度相同；反之，若误差分布不同，则精度也就不同。

在相同条件下所进行的一组观测，由于它们对应着同一种误差分布，因此，对于这一组中的每一个观测值，都称为同精度观测值。例如表 1－1 中所列的 358 个观测结果是在相同

观测条件下测得的，各个结果的真误差彼此并不相等，有的甚至相差很大，但是由于它们所对应的误差分布相同，因此这些结果是彼此同精度的。

将表 1－1 及表 1－2 中的数值相比较可知，表 1－2 的误差分布比表 1－1 的误差分布较为离散，因此，表 1－2 中的 421 个观测值其精度均低于表 1－1 中的观测值。

为了衡量观测值精度高低，可以按照第一节的方法，把在一组相同条件下得到的误差，可用误差分布表、直方图或误差分布曲线的方法进行比较。但在实际工作中，这样做比较麻烦，有时甚至很困难，而且还需要对精度有一个数字概念。这种具体的数字应该能够反映误差分布的密集或离散程度，即应能够反映其离散度的大小，因此称它为衡量精度的指标。

衡量精度的指标有很多种，下面介绍几种常用的精度指标。

一、方差和中误差

首先看看在数理统计中，是如何度量随机变量 X 的离散程度的，容易看到用 $E\{|X-E(X)|\}$ 能度量 X 与其均值 $E(X)$ 的偏离程度。但由于式中含有绝对值，运算不方便，故通常用 $E\{(X-E(X))^2\}$ 来度量随机变量与其均值的偏离程度，并称其为方差，即

$$\sigma_X^2 = D(X) = E(\{(X-E(X))^2\}) = \int_{-\infty}^{+\infty}(X-E(X))^2 f(x)\mathrm{d}x \qquad (1-8)$$

式中，$f(x)$ 为 X 的概率分布密度函数，X 的方差也可记为 $D(X)$；σ_X 称为标准差，或称为中误差。

对于观测值 L 及其真误差 Δ，因它们均为随机变量，方差分别为

$$D(L)=\sigma_L^2=E\{(L-E(L))^2\}$$

$$D(\Delta)=\sigma_\Delta^2=E\{(\Delta-E(\Delta))^2\}$$

顾及到 $E(L)=\tilde{L}$，$(L-E(L))^2=(L-\tilde{L})^2=\Delta^2$，且 $E(\Delta)=0$，则

$$D(L)=D(\Delta)=E(\Delta^2) \qquad (1-9)$$

可见，一组观测值的中误差与一组误差的中误差是相同的，而 $\sigma=\sqrt{E(\Delta^2)}$ 即为标准差，或中误差。

由上可知，不同的 σ 将对应着不同形状的分布曲线，同时正态分布曲线具有两个拐点（图 1－4），它们在横轴上的坐标为 $\Delta_{拐}=\mu\pm\sigma$，μ 为变量 Δ 的数学期望。对于偶然误差而言，其数学期望 $E(\Delta)=0$，所以拐点在横轴上的坐标应为

$$\Delta_{拐}=\pm\sigma \qquad (1-10)$$

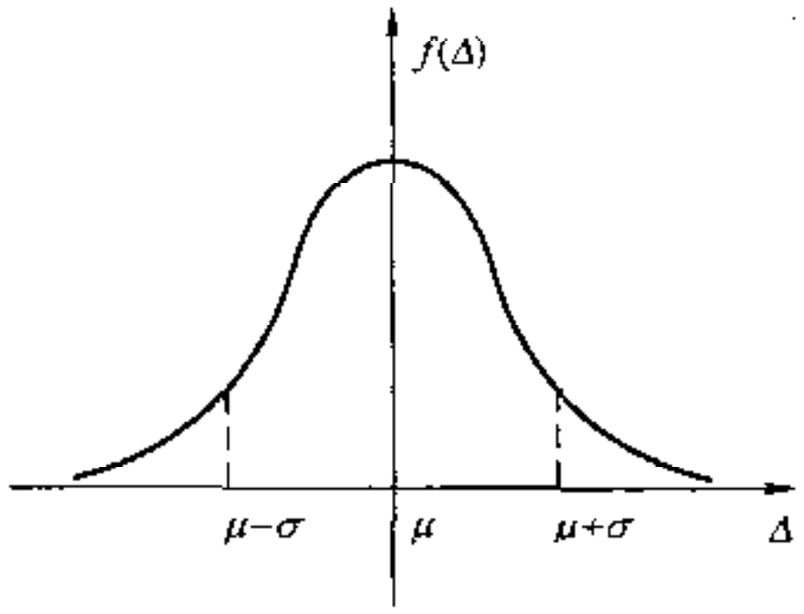


图 1－4

由图可见，σ 愈小，曲线愈陡峭，误差分布越密集；σ 愈大，曲线愈平缓，误差分布越分散。即 σ 的大小可以反映精度的高低，故常用中误差 σ 作为衡量精度的指标。

现在来推求中误差 σ 的计算公式。前已述及，误差 Δ 概率密度函数为

$$f(\Delta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma^2}}$$

如果在相同的观测条件下得到了一组独立的观测误差，由方差的定义可知：

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Delta^2 f(\Delta)\mathrm{d}\Delta \qquad (1-11)$$

即方差是真误差平方 Δ^2 的数学期望，也就是 Δ^2 的理论平均值。因此式(1－11)也可写成

$$\sigma^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_i^2}{n}$$

如采用[ ]表示一系列数值的代数和，则

$$\sigma^2 = D(\Delta) = E(\Delta^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta\Delta]}{n} \tag{1-12}$$

因此

$$\sigma = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-13}$$

可见，方差 σ^2 和中误差 σ 分别是 $\frac{[\Delta\Delta]}{n}$ 和 $\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}$ 的极限值，它们都是理论上的数值。但是实际上观测个数 n 总是有限的，由于有限个观测值的真误差只能求得方差和中误差的估(计)值。方差 σ^2 和中误差 σ 的估值将用符号 $\hat{\sigma}^2$ 和 $\hat{\sigma}$ 表示，即

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}^2 &= \frac{[\Delta\Delta]}{n}\\ \hat{\sigma} &= \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}}\end{aligned}\right\} \tag{1-14}$$

这就是根据一组等精度真误差计算方差和中误差估值的基本公式。

从式(1－14)看出，σ 越小，说明小误差出现的越多，精度越高。而且中误差能够灵敏地反映较大真误差的影响，因此我国及许多国家实用上都采用中误差作为衡量精度的指标。

顺便指出，由于测量中观测误差个数的有限性，只能求得方差和中误差的估值，因此在本书以后的文字叙述中，一般不再强调"估值"的概念，一律简称为"方差"或"中误差"，并不再严格区分方差和中误差的理论值(σ^2，σ)和估值($\hat{\sigma}^2$，$\hat{\sigma}$)。

例 1－1　设某一角度，用 2 台经纬仪各观测了 9 次，其观测值列于表 1－3 中。该角已用精密经纬仪预先精密测定，其值为 50°33′54.1″。由于非常精确，在此看成该角的真值。试分别求出 2 台经纬仪的观测值的中误差。

表 1－3

编号	第一台经纬仪			第二台经纬仪		
	观测值 L_i	Δ_i	Δ_i^2	观测值 L_i	Δ_i	Δ_i^2
1	50°33′52.6″	−1.5	2.25	50°33′50.7″	−3.4	11.56
2	54.8	+0.7	0.49	59.6	+5.5	30.25
3	53.6	−0.5	0.25	54.2	+0.1	0.01
4	55.0	+0.9	0.81	52.6	−1.5	2.25
5	52.2	−1.9	3.61	57.8	+3.7	13.69
6	53.8	−0.3	0.09	51.3	−2.8	7.84
7	54.7	+0.6	0.36	53.9	−0.2	0.04
8	58.1	+4.0	16.00	56.4	+2.3	5.29
9	56.2	+2.1	4.41	55.0	+0.9	0.81
$\sum$			28.27			71.74
$\sigma_1 = \pm\sqrt{\frac{28.27}{9}} = \pm 1.8''$				$\sigma_2 = \pm\sqrt{\frac{71.74}{9}} = \pm 2.8''$		

表 1－3 说明，用第一台经纬仪观测的任一个观测值，其中误差为 ±1.8″；用第二台经纬仪观测的任一个观测值，其中误差为 ±2.8″。因为 $\sigma_1 < \sigma_2$，故第一台经纬仪观测值的精度比第二台的高。

中误差作为度量观测质量的“尺子”，在测量中形成各种各样的精度指标。例如，四等三角测量的测角中误差规定为不大于 ±2.5″，四等水准测量每公里高差中数偶然中误差不超过 ±5 mm，等等。

二、极限误差

中误差不代表个别误差的大小，而是代表误差分布的离散度的大小。由中误差的定义式(1－14)可知，它代表一组同精度观测误差平方的平均值的平方根的极限值，中误差愈小，即表示在该组观测中，绝对值较小的误差愈多。按正态分布表查得，在大量同精度观测的一组误差中，误差落在 $(-\sigma, +\sigma)$，$(-2\sigma, +2\sigma)$ 和 $(-3\sigma, +3\sigma)$ 的概率分别为

$$\left.\begin{aligned} P(-\sigma<\Delta<+\sigma)&\approx 68.3\% \\ P(-2\sigma<\Delta<+2\sigma)&\approx 95.5\% \\ P(-3\sigma<\Delta<+3\sigma)&\approx 99.7\% \end{aligned}\right\} \tag{1-15}$$

这就是说，绝对值大于中误差的偶然误差，其出现的概率为 31.7%；而绝对值大于 2 倍中误差的偶然误差出现的概率为 4.5%；特别是绝对值大于 3 倍中误差的偶然误差出现的概率仅有 0.3%，这已经是概率接近于零的小概率事件，或者说这是实际上的不可能事件。因此，通常以 3 倍中误差作为偶然误差的极限值 $\Delta_{限}$，并称为极限误差。即

$$\Delta_{限} \approx 3\sigma \tag{1-16}$$

实践中，大都采用 2σ 作为极限误差的。实用上则以中误差的估值 $\hat{\sigma}$ 代替 σ，即以 $3\hat{\sigma}$ 或 $2\hat{\sigma}$ 作为极限误差。同时，式(1－15)也反映了中误差与真误差间的概率关系。

在测量工作中，如果某误差超出了极限误差，那就可以认为它是错误，相应的观测值应舍去不用。

三、相对误差

对于某些观测结果，有时单靠中误差还不能完全表达观测结果的好坏。有些观测误差的绝对量还与观测值本身的大小有关，最典型的是距离测量。例如，分别丈量了 1 000 m 及 80 m 的两段距离，观测值的中误差均为 ±2 cm，虽然两者的中误差相同，但就单位长度而言，两者精度并不相同。显然前者的相对精度要比后者高。此时，需采用另一种办法来衡量精度，通常采用相对中误差，它是中误差与观测值之比。如上述两段距离，前者的相对中误差为 $\frac{1}{50\,000}$，而后者则为 $\frac{1}{4\,000}$。

相对中误差是个无名数，在测量中一般将分子化为 1，即用 $\frac{1}{N}$ 表示。其意义可以简单地理解为每观测 N 个单位长度时，产生 1 个单位长度的误差。

对于真误差与极限误差，有时也用相对误差来表示。例如，经纬仪导线测量时，规范中所规定的相对闭合差不能超过 $\frac{1}{2\,000}$，它就是相对极限误差；而在实测中所产生的相对闭合差，则是相对真误差。

与相对误差相对应，真误差、中误差、极限误差等均称为绝对误差。

四、精度和准度

精度是指误差分布的密集或离散程度。由中误差定义式知，精度也表示各观测结果与

其数学期望的接近程度。当观测仅含偶然误差时，其数学期望就是真值，在这种情况下，精度描述观测列与真值接近程度，可以说它表示观测结果偶然误差大小的程度，是衡量偶然误差大小程度的指标。

准度又名准确度，是指随机变量 X 的真值 $\tilde{X}$ 与数学期望 $E(X)$ 的接近程度，即

$$\varepsilon = E(X) - \tilde{X}$$

不难看出 ε 就是 $E(X)$ 的真误差，这是存在系统误差的情况。因此，准度表示了观测结果系统误差大小的程度。当不存在系统误差时，$E(X) = \tilde{X}$，故 $\varepsilon = 0$。衡量系统误差大小程度的指标是准确度。

第三节　误差(协方差)传播律

在实际工作中，往往会遇到某些量的大小并不是直接测定的，而是由观测值通过一定的函数关系间接计算出来的，是观测值的函数。这类例子很多，例如，对同一个量等精度观测了 n 次，得观测值 L_1、L_2、…、L_n，则其平均值为

$$x = \frac{[L]}{n} = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + \cdots + L_n)$$

这个 x 值不是直接测定的，是根据直接测定的观测值计算而得。

又如，在一个三角形中，观测了三内角 L_1、L_2、L_3，其闭合差 W 和将闭合差平均分配之后所得的各角平差值 $\hat{L}_1$、$\hat{L}_2$、$\hat{L}_3$ 为

$$W = (L_1 + L_2 + L_3) - 180^\circ$$

$$\hat{L}_i = L_i - \frac{1}{3}W \quad (i = 1,2,3)$$

这里各角的平差值都是三个角度观测值的函数。

再如，在三角高程测量中(图 1－5)，测得 A、B 两点间的水平距离为 D，竖直角为 α，则 A、C 两点间的高差可以通过下式求出：

$$h = D\tan\alpha$$

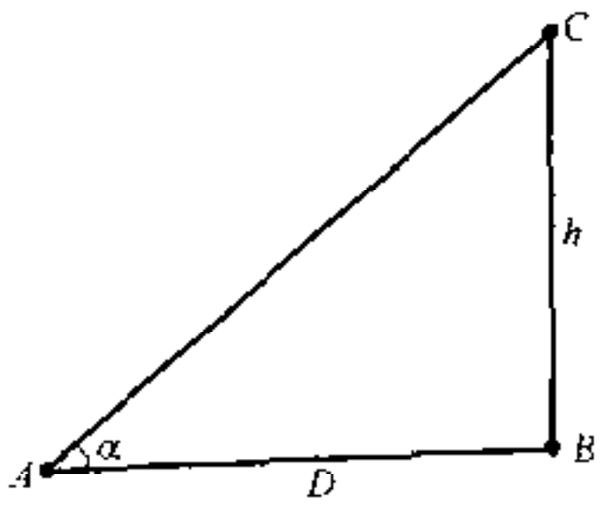


图 1－5

现在提出这样一个问题：既然观测值含有误差，观测值的函数值也不可避免地产生误差。那么观测值的中误差是通过什么样的规律传播给函数值的？这个规律就称为误差传播定律。因为中误差可以由相应的方差开方得到，所以它们之间的关系可以通过方差和协方差的运算规律来导出，故将阐述这种关系的公式称为协方差传播律。有了这个定律，才可以根据观测值的中误差计算出函数的中误差，从而对函数值的精度做出评价。

为了讨论方便，本节先说明协方差和协方差阵的概念，再导出观测值函数的协方差阵，即协方差传播的一般公式。最后说明求观测值非线性函数的协方差阵的方法。

一、协方差阵

设有观测值 X 和 Y，则它们的协方差被定义为

$$\sigma_{xy} = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \tag{1-17}$$

式中，$X-E(X)$和 $Y-E(Y)$分别为 X 和 Y 的真误差，即

$$\Delta_x = X - E(X)$$

$$\Delta_y = Y - E(Y)$$

故式(1-17)可写为

$$\sigma_{xy} = E(\Delta_x \Delta_y) \tag{1-18}$$

从式(1-17)和式(1-18)可以看出，协方差是用数学期望来定义的。其中 Δ_{x_i} 是观测值 x_i 的真误差，Δ_{y_i} 是观测值 y_i 的真误差，而协方差 σ_{xy} 则是这两种真误差所有可能取值的乘积的理论平均值，即

$$\sigma_{xy} = \lim_{n\to\infty}\frac{[\Delta_x \Delta_y]}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\Delta_{x_1}\Delta_{y_1} + \Delta_{x_2}\Delta_{y_2} + \cdots + \Delta_{x_n}\Delta_{y_n}) \tag{1-19}$$

实际上 n 总是有限值，所以也只能求得它的估值，记为

$$\tilde{\sigma}_{xy} = \frac{[\Delta_x \Delta_y]}{n} \tag{1-20}$$

当 X 和 Y 的协方差 $\sigma_{xy}=0$ 时，表示这两个观测值的误差之间互不影响，或者说，它们的误差是不相关的，并称这些观测值为不相关的观测值；如果 $\sigma_{xy}\neq 0$，则表示它们的误差是相关的，称这些观测值为相关观测值。由于在测量上所涉及的观测值和观测误差都是服从正态分布的随机变量，对于正态随机变量而言，“不相关”与“独立”是等价的，所以把不相关观测值也称为独立观测值，同样把相关观测值也称为不独立观测值。

独立观测值之间的协方差 $\sigma_{xy}=0$ 这一性质，可以这样来证明：

由于 Δ_x 与 Δ_y 相互独立，所以顾及式(1-20)得

$$\sigma_{xy} = E(\Delta_x\Delta_y) = E(\Delta_x)E(\Delta_y) = 0$$

在测量工作中，直接观测得到的高差、距离、角度和方向等，都是独立观测值。一般来说，独立观测值的各个函数之间是不独立的，或者说是相关的，因而它们是相关观测值。例如，当一个测站上的水平方向值是独立观测值时，由这些方向值所算得的相邻角度就是相关观测值；又如，三角网或导线网中根据观测角度和边长求得的各点的坐标也是相关观测值。

假如有 n 个不同精度的相关观测值 $x_i(i=1,2,\cdots,n$，下同)，它们的数学期望和方差为 μ_{x_i} 和 $\sigma_{x_i}^2$，它们两两之间的协方差为 $\sigma_{x_iy_j}(i\neq j)$ 用矩阵表示为

$$\left.\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mu_X = \begin{pmatrix} \mu_{x_1} \\ \mu_{x_2} \\ \vdots \\ \mu_{x_n} \end{pmatrix} = E(X), \\ D_{XX} &= \begin{pmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1x_2} & \cdots & \sigma_{x_1x_n} \\ \sigma_{x_2x_1} & \sigma_{x_2}^2 & \cdots & \sigma_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{x_nx_1} & \sigma_{x_nx_2} & \cdots & \sigma_{x_n}^2 \end{pmatrix} = E[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^{\mathrm{T}}] \end{aligned}\right\} \tag{1-21}$$

式中，$\underset{n\times 1}{X}$ 为观测值向量，或简称为观测值；$\mu_X = E(X)$ 为 X 的数学期望；而称 D_{XX} 为 X 的方

差－协方差阵，简称协方差阵。式中主对角线上的元素 σ_i^2 为观测值向量 X 中 x_i 分量的方差；而非主对角线元素 $\sigma_{x_iy_j}$ 则为 x_i 与 x_j 两个分量之间的协方差。

如果有观测值 $\underset{n\times 1}{X}$ 和 $\underset{r\times 1}{Y}$，它们的数学期望分别为 $\underset{n\times 1}{\mu_X}$ 和 $\underset{r\times 1}{\mu_Y}$。若记

$$Z=\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

则 Z 的方差阵 D_{ZZ} 为

$$D_{ZZ}=\begin{pmatrix}D_{XX} & D_{XY}\\ D_{YX} & D_{YY}\end{pmatrix}$$

式中，D_{XX} 和 D_{YY} 分别为 X 和 Y 的协方差阵，而

$$D_{XY}=\begin{pmatrix}\sigma_{x_1y_1} & \sigma_{x_1y_2} & \cdots & \sigma_{x_1y_r}\\ \sigma_{x_2y_1} & \sigma_{x_2y_2} & \cdots & \sigma_{x_2y_r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{x_ny_1} & \sigma_{x_ny_2} & \cdots & \sigma_{x_ny_r}\end{pmatrix} \tag{1-22}$$

且有

$$D_{XY}=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)^{\mathrm{T}}]=D_{YX}^{\mathrm{T}} \tag{1-23}$$

即 D_{XY} 与 D_{YX} 互为转置。D_{XY} 称为观测值向量 X 关于 Y 的互协方差阵。当 X 和 Y 的维数 $n=r=1$ 时（即 X、Y 都是一个观测值），互协方差阵就是 X 关于 Y 的协方差。

若 $D_{XY}=0$，则称 X 与 Y 是相互独立的观测向量。

二、观测值线性函数的方差

设有观测值 $\underset{n\times 1}{X}$，其数学期望为 $\underset{n\times 1}{\mu_X}$，协方差阵为 $\underset{n\times n}{D_{XX}}$，即

$$\left.\begin{aligned}X&=\begin{pmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{pmatrix},\quad \mu_X=\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E(X_1)\\E(X_2)\\\vdots\\E(X_n)\end{pmatrix}=E(X),\\ D_{XX}&=E[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^{\mathrm{T}}]=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2\end{pmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1-24}$$

式中，σ_i^2 为 x_i 的方差，σ_{ij} 为 x_i 与 x_j 的协方差。

设有 X 的线性函数为

$$\underset{1\times 1}{Z}=\underset{1\times m}{K}\underset{m\times 1}{X}+\underset{1\times 1}{k_0} \tag{1-25}$$

$$\underset{1\times n}{K}=k_1\ k_2\cdots\ k_n$$

式(1－25)的纯量形式为

$$Z=k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n+k_0$$

现在来求 Z 的方差 D_{ZZ}。对式(1－25)取数学期望，得

$$E(Z)=E(KX+k_0)=KE(X)+k_0=K\mu_X+k_0 \tag{1-26}$$

根据方差的定义可知，Z 的方差为

$$D_{\underset{1\times1}{ZZ}}=\sigma_Z^2=E[(Z-E(Z))(Z-E(Z))^{\mathrm{T}}]$$

将式(1－25)和式(1　26)代入上式，得

$$\begin{aligned}D_{\underset{1\times1}{ZZ}}=\sigma_Z^2&=E[(KX-K\mu_X)(KX-K\mu_X)^{\mathrm{T}}]\\&=E[K(X-\mu_X)(X-\mu_X)^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}]\\&=KE[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^{\mathrm{T}}]K^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

所以

$$D_{\underset{1\times1}{ZZ}}=\sigma_Z^2=\underset{1\times n}{K}\ \underset{n\times n}{D_{XX}}\ \underset{n\times1}{K^{\mathrm{T}}} \tag{1-27}$$

将上式展开成纯量形式，得

$$\begin{aligned}D_{ZZ}=\sigma_Z^2=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2+2k_1k_2\sigma_{12}+2k_1k_3\sigma_{13}+\\\cdots+2k_1k_n\sigma_{1n}+\cdots+2k_{n-1}k_n\sigma_{n-1,n}\end{aligned} \tag{1-28}$$

当向量中的各分量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两独立时，它们之间的协方差 $\sigma_{ij}=0$，此时上式为

$$D_{ZZ}=\sigma_Z^2=k_1^2\sigma_1^2+k_2^2\sigma_2^2+\cdots+k_n^2\sigma_n^2=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2 \tag{1-29}$$

通常将式(1－27)、式(1－28)和式(1－29)称为协方差传播律。其中，式(1－29)是式(1－28)的一个特例。

例 1－2　在1∶1 000 的图上，量得某两点间的距离 $d=125.7$ mm，d 的量测中误差 $\sigma_d=\pm0.2$ mm，求该两点实地距离 S 及中误差 σ_S。

解　$S=1\ 000d=1\ 000\times125.7=125\ 700$ mm$=125.7$ m

$$\sigma_S^2=1\ 000^2\sigma_d^2$$

$$\sigma_S=1\ 000\sigma_d=1\ 000\times(\pm0.2)=\pm200\ \text{mm}=\pm0.2\ \text{m}$$

最后写成

$$S=125.7\pm0.2\ \text{m}$$

例 1－3　设 X 为独立观测值 L_1、L_2、L_3 的函数

$$X=\frac{1}{7}L_1+\frac{2}{7}L_2+\frac{4}{7}L_3$$

已知 L_1、L_2、L_3 的中误差分别为 $\sigma_1=\pm3$ mm，$\sigma_2=\pm2$ mm 及 $\sigma_3=\pm1$ mm，求函数的中误差 σ_X。

解　因 L_1、L_2、L_3 是独立观测值，所以按式(1－29)得

$$\begin{aligned}\sigma_X^2&=\left(\frac{1}{7}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{2}{7}\right)^2\sigma_2^2+\left(\frac{4}{7}\right)^2\sigma_3^2\\&=\frac{1}{49}\times9+\frac{4}{49}\times4+\frac{16}{49}\times1=\frac{41}{49}=0.84\end{aligned}$$

$$\sigma_X=\pm0.9\ \text{mm}$$

例 1－4　设在测站 A 上(图 1－6)，已知$\angle BAC=\alpha$，设无误差，而观测角 β_1 和 β_2 的中误差为 $\sigma_1=\sigma_2=\pm1.4''$，协方差 $\sigma_{12}=-1(s^2)$。求角 x 的中误差 σ_x。

解　因 $x=\alpha-\beta_1-\beta_2=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\\beta_2\end{Bmatrix}+\alpha$

令

$$\beta=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}$$

则

$$D_{\beta\beta}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.96 & -1\\ -1 & 1.96\end{pmatrix}$$

由式(1－27)得

$$\sigma_x^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1.96 & -1\\ -1 & 1.96\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-0.96 & -0.96\end{bmatrix}\begin{pmatrix}-1\\ -1\end{pmatrix}=1.92$$

所以　　$\sigma_x=\pm 1.4''$

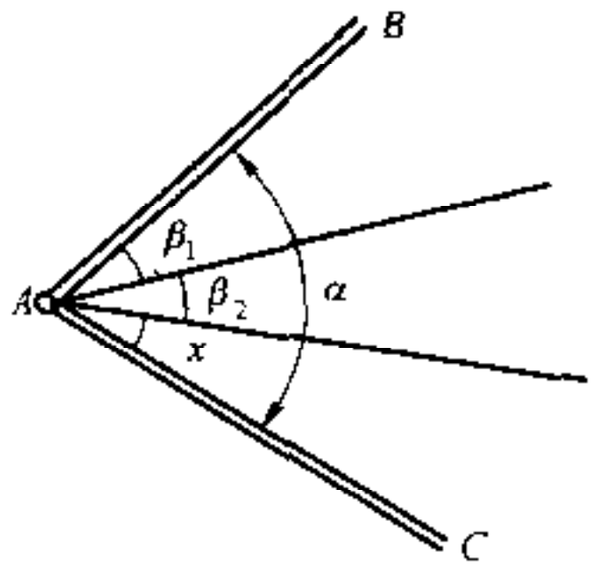


图 1－6

本题如按式(1－28)解算,则为

$$\sigma_x^2=(-1)^2\times 1.96+(-1)^2\times 1.96+2(-1)(-1)\times(-1)=1.92$$

所以　　$\sigma_x=\pm 1.4''$

三、多个观测值线性函数的协方差阵

设有观测值 $\underset{n\times 1}{X}$,它的数学期望 μ_X 与协方差阵 D_{XX} 如式(1－24),若有 X 的 t 个线性函数

$$\left.\begin{aligned}Z_1&=k_{11}X_1+k_{12}X_2+\cdots+k_{1n}X_n+k_{10}\\ Z_2&=k_{21}X_1+k_{22}X_2+\cdots+k_{2n}X_n+k_{20}\\ &\cdots\cdots\\ Z_t&=k_{t1}X_1+k_{t2}X_2+\cdots+k_{tn}X_n+k_{t0}\end{aligned}\right\}\qquad(1-30)$$

下面求函数 Z_1、Z_2、…、Z_t 的方差和它们之间的协方差。

若令

$$\underset{t\times 1}{Z}=\begin{pmatrix}Z_1\\ Z_2\\ \vdots\\ Z_t\end{pmatrix},\quad \underset{t\times n}{K}=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1n}\\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ k_{t1} & k_{t2} & \cdots & k_{tn}\end{pmatrix},\quad \underset{t\times 1}{K_0}=\begin{pmatrix}k_{10}\\ k_{20}\\ \vdots\\ k_{t0}\end{pmatrix}$$

则式(1－30)可写为

$$\underset{t\times 1}{Z}=\underset{t\times n}{K}\ \underset{n\times 1}{X}+\underset{t\times 1}{K_0}\qquad(1-31)$$

也就是要求 Z 的协方差阵 D_{ZZ}。

因为 Z 的数学期望为

$$E(Z)=E(KX+K_0)=K\mu_X+K_0\qquad(1-32)$$

所以,Z 的协方差阵为

$$\begin{aligned}\underset{t\times t}{D_{ZZ}}&=E[(Z-E(Z))(Z-E(Z))^{\mathrm{T}}]\\ &=E[(KX-K\mu_x)(KX-K\mu_X)^{\mathrm{T}}]\\ &=KE[(X-\mu_X)(X-\mu_X)^{\mathrm{T}}]K^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

即得到

$$\underset{t\times t}{D_{ZZ}}=\underset{t\times n}{K}\ \underset{n\times n}{D_{XX}}\ \underset{n\times t}{K^{\mathrm{T}}}\qquad(1-33)$$

可以看到,上式与式(1-27)在形式上完全相同,且两式的推导过程也相同,所不同的是式(1-27)中的 D_{ZZ} 是一个观测值函数的方差,而式(1-33)的 D_{ZZ} 是 t 个观测值函数的协方差阵,因而式(1-27)是式(1-33)的一种特殊情况。

设另外还有 X 的 r 个线性函数

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= f_{11}X_1 + f_{12}X_2 + \cdots + f_{1n}X_n + f_{10} \\ Y_2 &= f_{21}X_1 + f_{22}X_2 + \cdots + f_{2n}X_n + f_{20} \\ &\cdots\cdots \\ Y_r &= f_{r1}X_1 + f_{r2}X_2 + \cdots + f_{rn}X_n + f_{r0} \end{aligned}\right\} \tag{1-34}$$

若记

$$\underset{r\times 1}{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix}, \quad \underset{r\times n}{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{r1} & f_{r2} & \cdots & f_{rn} \end{pmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{F_0} = \begin{pmatrix} f_{10} \\ f_{20} \\ \vdots \\ f_{r0} \end{pmatrix}$$

则式(1-34)可写为

$$Y = FX + F_0 \tag{1-35}$$

Y 的数学期望为

$$E(Y) = F\mu_X + F_0 \tag{1-36}$$

由式(1-33)可知,Y 的协方差阵为

$$\underset{r\times r}{D_{YY}} = \underset{r\times n}{F}\ \underset{n\times n}{D_{XX}}\ \underset{n\times r}{F^{\mathrm{T}}} \tag{1-37}$$

下面再考虑更复杂的情况,来求两组线性函数 Y 关于 Z 的互协方差阵 $\underset{r\times t}{D_{YZ}}$。根据互协方差阵的定义可知

$$D_{YZ} = E[(Y - E(Y))(Z - E(Z))^{\mathrm{T}}]$$

将式(1-35)、式(1-36)及式(1-31)、式(1-32)代入上式,可得

$$\begin{aligned} D_{YZ} &= E[(FX - F\mu_X)(KX - K\mu_X)^{\mathrm{T}}] \\ &= FE[(X - \mu_X)(X - \mu_X)^{\mathrm{T}}]K^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

所以

$$\underset{r\times t}{D_{YZ}} = \underset{r\times n}{F}\ \underset{n\times n}{D_{XX}}\ \underset{n\times t}{K^{\mathrm{T}}} \tag{1-38}$$

这就是由 X 的协方差阵求它的两组函数 Y 和 Z 的互协方差阵的公式。

因为

$$D_{YZ} = D_{ZY}^{\mathrm{T}}$$

所以

$$\underset{t\times r}{D_{YZ}} = (FD_{XX}K^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \underset{t\times n}{K}\ \underset{n\times n}{D_{XX}}\ \underset{n\times r}{F^{\mathrm{T}}} \tag{1-39}$$

如果 $Y = Z$,则式(1-38)就变为式(1-33),所以式(1-33)也可以看作式(1-38)的一种特殊情况。

习惯上,将描述观测值 X 的协方差阵 D_{XX} 与观测值函数 Z 的协方差阵 D_{ZZ} 以及两组函数 Y 和 Z 的互协方差阵之间关系的公式(1-27)、式(1-33)及式(1-38)都称为协方差传播律。

例 1-5 设在一个三角形中,同精度独立观测得到三个内角 L_1、L_2、L_3,其中误差均为

σ。试求将三角形闭合差平均分配后的各角最或是值 $\hat{L}_1$、$\hat{L}_2$、$\hat{L}_3$ 的协方差阵。

解　三角形闭合差由下式计算得

$$W = L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ$$

而 $\hat{L}_1$、$\hat{L}_2$、$\hat{L}_3$ 为

$$\hat{L}_1 = L_1 - \frac{1}{3}W = \frac{2}{3}L_1 - \frac{1}{3}L_2 - \frac{1}{3}L_3 + 60^\circ$$

$$\hat{L}_2 = L_2 - \frac{1}{3}W = -\frac{1}{3}L_1 + \frac{2}{3}L_2 - \frac{1}{3}L_3 + 60^\circ$$

$$\hat{L}_3 = L_3 - \frac{1}{3}W = -\frac{1}{3}L_1 - \frac{1}{3}L_2 + \frac{2}{3}L_3 + 60^\circ$$

所以

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ 60 \end{pmatrix}$$

及

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

应用式(1－33)得 $\hat{L}$ 协方差阵为

$$D_{\hat{L}\hat{L}} = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} +\frac{2}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma^2 & +\frac{2}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 \\ -\frac{1}{3}\sigma^2 & -\frac{1}{3}\sigma^2 & +\frac{2}{3}\sigma^2 \end{pmatrix}$$

从上式可见，分配闭合差后的各角 $\hat{L}_i$ 的中误差均为 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$，而它们之间的协方差均为 $-\frac{1}{3}\sigma^2$。协方差为负，表示它们是负相关。由于 $\sqrt{\frac{2}{3}}\sigma < \sigma$，所以分配闭合差后的 $\hat{L}_i$ 精度高于观测值 L_i。

如果在实际计算中，并不要求计算所有 $\hat{L}_i$ 的中误差以及它们之间的协方差，而只要计算其中个别元素，例如只要计算 $\hat{L}_2$ 的中误差和 $\hat{L}_3$ 关于 $\hat{L}_2$ 的协方差，则由式(1－33)和式(1－38)可写出

$$D_{\hat{L}_2\hat{L}_2} = K_2 D_{LL} K_2^{\mathrm{T}}$$

$$D_{\hat{L}_3\hat{L}_2} = K_3 D_{LL} K_2^{\mathrm{T}}$$

由上例可知

$$K_2 = \begin{bmatrix} k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

所以

$$\sigma_{\hat{L}}^2 = D_{\hat{L}_2\hat{L}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\sigma^2$$

则

$$\sigma_{\hat{L}_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma$$

而

$$D_{\hat{L}_3\hat{L}_2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ +\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}\sigma^2$$

例 1－6 设有函数

$$\underset{t\times 1}{Z} = \underset{t\times n}{F_1}\ \underset{n\times 1}{X} + \underset{t\times r}{F_2}\ \underset{r\times 1}{Y} \tag{1-40}$$

已知的 X 和 Y 协方差阵分别为 $\underset{n\times n}{D_{XX}}$ 和 $\underset{r\times r}{D_{YY}}$，$X$ 关于 Y 的互协方差阵为 $\underset{n\times r}{D_{XY}}$，求 Z 的协方差阵 $\underset{t\times t}{D_{ZZ}}$ 和 Z 关于 X 及 Y 的互协方差阵 $\underset{t\times n}{D_{ZX}}$ 和 $\underset{t\times r}{D_{ZY}}$。

解 将式(1－40)写为

$$Z = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

由协方差传播律式(1－33)得

$$D_{ZZ} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} D_{XX} & D_{XY} \\ D_{YX} & D_{YY} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1^{\mathrm{T}} \\ F_2^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$$

由此得

$$D_{ZZ} = F_1 D_{XX} F_1^{\mathrm{T}} + F_1 D_{XY} F_2^{\mathrm{T}} + F_2 D_{YX} F_1^{\mathrm{T}} + F_2 D_{YY} F_2^{\mathrm{T}} \tag{1-41}$$

而 X、Y 可写为

$$X = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

根据协方差传播律式(1－38)可得

$$D_{ZX}=\begin{bmatrix}F_1 & F_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{XX} & D_{XY}\\ D_{YX} & D_{YY}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}I\\0\end{Bmatrix}$$

$$D_{ZY}=\begin{bmatrix}F_1 & F_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{XX} & D_{XY}\\ D_{YX} & D_{YY}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\I\end{Bmatrix}$$

因此

$$\left.\begin{aligned}D_{ZX}&=F_1D_{XX}+F_2D_{YX}\\ D_{ZY}&=F_1D_{XY}+F_2D_{YY}\end{aligned}\right\}\tag{1-42}$$

当 $D_{XY}=D_{YX}^{\mathrm{T}}=0$ 时，则式(1－41)和式(1－42)变为

$$\left.\begin{aligned}D_{ZZ}&=F_1D_{XX}F_1^{\mathrm{T}}+F_2D_{YY}F_2^{\mathrm{T}}\\ D_{ZX}&=F_1D_{XX}\\ D_{ZY}&=F_2D_{YY}\end{aligned}\right\}\tag{1-43}$$

四、非线性函数的协方差传播

设有观测值 $\underset{n\times1}{X}$ 的非线性函数

$$Z=f(X)\tag{1-44}$$

或写为

$$Z=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{1-45}$$

已知 $\underset{n\times1}{X}$ 的协方差阵 D_{XX}，欲求 Z 的方差 D_{ZZ}。

假定观测值 X 有近似值

$$\underset{n\times1}{X^0}=(x_1^0\quad x_2^0\quad\cdots\quad x_n^0)^{\mathrm{T}}$$

则可将函数式(1－45)按台劳级数在点 x_1^0、x_2^0、…、x_n^0 处展开为

$$Z=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0(x_1-x_1^0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0(x_2-x_2^0)+$$

$$\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0(x_n-x_n^0)+(\text{二次以上项})\tag{1-46}$$

式中 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0$ 是函数对各个变量所取的偏导数，并以近似值 x_i^0 代入所算得数值，它们都是常数，当 X^0 与 X 非常接近时，上式中二次以上各项很微小，故可以略去。因此，可将上式写为

$$Z=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0x_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0x_n+f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_0x_i^0\tag{1-47}$$

令

$$K=\begin{bmatrix}k_1 & k_2 & \cdots & k_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0\end{bmatrix}$$

$$k_0=f(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)-\sum_{i-1}^{n}k_ix_i^0$$

则

$$Z = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n + k_0 = KX + k_0 \tag{1-48}$$

这样,就将非线性函数式(1-45)化成了线性函数式(1-48),它与线性函数式(1-25)完全相同,故可以按(1-27)式求得 Z 的方差 D_{ZZ} 为

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^T \tag{1-49}$$

如果令

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}x_i &= x_i - x_i^0 \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \\ \mathrm{d}X &= (\mathrm{d}x_1 \quad \mathrm{d}x_2 \quad \cdots \quad \mathrm{d}x_n)^T \\ \mathrm{d}Z &= Z - f(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) \end{aligned}\right\} \tag{1-50}$$

则式(1-46)可写为

$$\mathrm{d}Z = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0 \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_0 \mathrm{d}x_n \approx K\mathrm{d}X \tag{1-51}$$

可知,上式是非线性函数式(1-45)的全微分。根据式(1-48)应用协方差传播律式(1-27)求 D_{ZZ} 时,只要求知道式中的系数阵 K,所以,为了求非线性函数的方差,只要对它求全微分得到各个偏导数就行了。

如果有 t 个非线性函数

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ Z_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\cdots\cdots \\ Z_t &= f_t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{1-52}$$

将 t 个函数求全微分得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}Z_1 &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \mathrm{d}x_n \\ \mathrm{d}Z_2 &= \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \mathrm{d}x_n \\ &\cdots\cdots \\ \mathrm{d}Z_t &= \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}\right)_0 \mathrm{d}x_1 + \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_2}\right)_0 \mathrm{d}x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)_0 \mathrm{d}x_n \end{aligned}\right\} \tag{1-53}$$

若记

$$\underset{t\times 1}{\mathrm{d}Z} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}Z_1 \\ \mathrm{d}Z_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}Z_t \end{pmatrix}, \quad \underset{t\times n}{K} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)_0 \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{\mathrm{d}X} = \begin{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}x_n \end{pmatrix} \tag{1-54}$$

则有

$$\mathrm{d}Z = K\mathrm{d}X \tag{1-55}$$

亦可按式(1-33)求得 $\underset{t\times 1}{Z}$ 的协方差阵

$$D_{ZZ} = KD_{XX}K^{\mathrm{T}} \tag{1-56}$$

同样,若还有 r 个非线性函数

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ Y_2 &= F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ &\cdots\cdots \\ Y_r &= F_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{aligned}\right\} \tag{1-57}$$

记

$$\underset{r\times 1}{Y} = \begin{Bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{Bmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{\mathrm{d}Y} = \begin{Bmatrix} \mathrm{d}Y_1 \\ \mathrm{d}Y_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}Y_r \end{Bmatrix}, \quad \underset{r\times n}{F} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial F_r}{\partial x_n}\right)_0 \end{Bmatrix} \tag{1-58}$$

则有

$$\mathrm{d}Y = F\mathrm{d}X \tag{1-59}$$

按式(1－33)和式(1…38)可得到

$$\left.\begin{aligned} D_{YY} &= FD_{XX}F^{\mathrm{T}} \\ D_{YZ} &= FD_{XX}K^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{1-60}$$

例 1－7　设在三角形 ABC(图 1－7)中,观测三内角 L_1、L_2、L_3,将闭合差平均分配后得到的各角之值为

$$\hat{L}_1 = 40^\circ 10' 30'', \quad \hat{L}_2 = 50^\circ 05' 20'', \quad \hat{L}_3 = 89^\circ 44' 10''$$

解得它们的协方差阵为

$$D_{\hat{L}\hat{L}} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -3 & 6 & -3 \\ -3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

已知边长 $S_0 = 1\ 500.000$ m(无误差),试求 S_a、S_b 的长度和它们的协方差阵 D_{SS}。

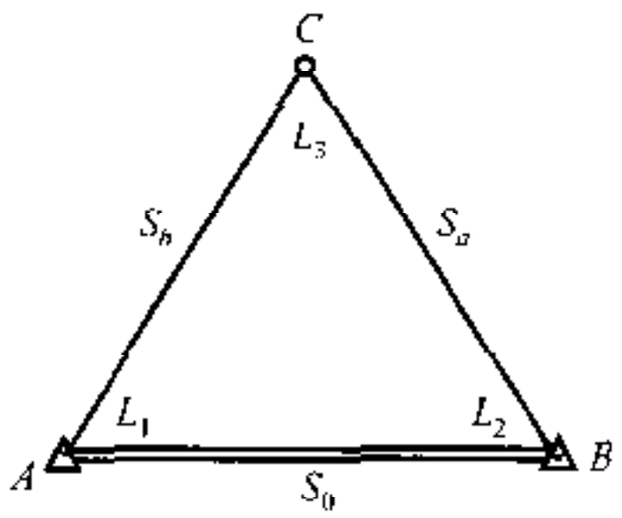


图 1－7

解　边长 S_a、S_b 可按下式计算:

$$S_a = S_0 \frac{\sin\hat{L}_1}{\sin\hat{L}_3} = 967.697 \text{ m}, \quad S_b = S_0 \frac{\sin\hat{L}_2}{\sin\hat{L}_3} = 1\ 150.573 \text{ m}$$

为了求它们的协方差阵,须对上述函数式进行全微分,也可以先将函数式取对数,再求全微分,本题解算用对数形式较为简便。

现对函数式取自然对数,得

$$\ln S_a = \ln S_0 + \ln \sin\hat{L}_1 - \ln \sin\hat{L}_3, \quad \ln S_b = \ln S_0 + \ln \sin\hat{L}_2 - \ln \sin \hat{L}_3$$

对上式取全微分得

$$\frac{\mathrm{d}S_a}{S_a}=\frac{\cos\hat{L}_1}{\sin\hat{L}_1}\mathrm{d}\hat{L}_1-\frac{\cos\hat{L}_3}{\sin\hat{L}_3}\mathrm{d}\hat{L}_3,\quad \frac{\mathrm{d}S_b}{S_b}=\frac{\cos\hat{L}_2}{\sin\hat{L}_2}\mathrm{d}\hat{L}_2-\frac{\cos\hat{L}_3}{\sin\hat{L}_3}\mathrm{d}\hat{L}_3$$

或为

$$\mathrm{d}S_a=S_a\cot\hat{L}_1\mathrm{d}\hat{L}_1-S_a\cot\hat{L}_3\mathrm{d}\hat{L}_3$$

$$\mathrm{d}S_b=S_b\cot\hat{L}_2\mathrm{d}\hat{L}_2-S_b\cot\hat{L}_3\mathrm{d}\hat{L}_3$$

写为矩阵形式

$$\mathrm{d}S=\begin{pmatrix}\mathrm{d}S_a\\ \mathrm{d}S_b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_a\cot\hat{L}_1 & 0 & -S_a\cot\hat{L}_3\\ 0 & S_b\cot\hat{L}_2 & -S_b\cot\hat{L}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{d}\hat{L}_1\\ \mathrm{d}\hat{L}_2\\ \mathrm{d}\hat{L}_3\end{pmatrix}$$

按式(1-33)就可得到 D_{SS},但在代入数值时必须注意,上式中的 $\mathrm{d}\hat{L}_i$ 是以弧度为单位的,当所给的角度的中误差(或方差、协方差)是度分秒系统时,则应除以 ρ(或 ρ^2,$\rho=206\,265''$),将其单位化为弧度系统。本例中的 $D_{\hat{L}\hat{L}}$ 是以 s^2 为单位,故有

$$D_{SS}=\begin{pmatrix}1\,146 & 0 & -4\\ 0 & 962 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -3 & -3\\ -3 & 6 & -3\\ -3 & -3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\,146 & 0\\ 0 & 962\\ -4 & -5\end{pmatrix}\times\frac{1}{(206\times10^3)^2}$$

$$=\begin{pmatrix}6\,888 & -3\,426 & -3\,426\\ -2\,871 & 5\,787 & -2\,916\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\,146 & 0\\ 0 & 962\\ -4 & -5\end{pmatrix}\times\frac{1}{(206\times10^3)^2}(\mathrm{m}^2)$$

$$=\begin{pmatrix}1.86 & -0.77\\ -0.77 & 1.32\end{pmatrix}(\mathrm{cm}^2)$$

所以 S_a 和 S_b 的中误差和协方差分别为

$$\sigma_{S_a}=\pm\sqrt{1.86}=\pm1.36\ \mathrm{cm}$$

$$\sigma_{S_b}=\pm\sqrt{1.32}=\pm1.15\ \mathrm{cm}$$

$$\sigma_{S_aS_b}=-0.77\ \mathrm{cm}$$

通过本例可以看出:

(1) 有些函数可以先取对数再求全微分,较为方便;

(2) 偏导数$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right)_0$ 的数值是用 X 的近似值代入后算出的;

(3) 用数值代入计算时,应注意各项的单位要统一。

根据以上非线性函数的协方差的计算过程,可以总结出应用协方差传播律的具体步骤为:

(1) 按要求写出函数式,如 $Z_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)\qquad(i=1,2,\cdots,t)$;

(2) 对函数式求全微分,得

$$\mathrm{d}Z_i=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0\mathrm{d}x_1+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0\mathrm{d}x_2+\cdots+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_n}\right)_0\mathrm{d}x_n\qquad(i=1,2,\cdots,t)$$

(3) 将微分关系写成矩阵形式

$$\underset{t\times 1}{\mathrm{d}Z}=\underset{t\times n}{K}\ \underset{n\times 1}{\mathrm{d}X}$$

其中

$$\mathrm{d}Z=\begin{pmatrix}\mathrm{d}Z_1\\ \mathrm{d}Z_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}Z_t\end{pmatrix},\qquad K=\begin{pmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_0\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_0\\ \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_1}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_2}\right)_0 & \cdots & \left(\frac{\partial f_t}{\partial x_n}\right)_0\end{pmatrix}$$

(4) 应用协方差传播律公式(1－27)、式(1－33)或式(1－38)求方差或协方差阵。

测量平差的主要内容之一是评定精度，即评定观测值及观测值函数的精度。协方差传播律正是用来求观测值函数的中误差和协方差的基本公式。

第四节　误差传播律在测量中的应用

一、同一个精度独立观测值的算术平均值的中误差

设对某量以同精度独立观测了 n 次，得观测值 L_1、L_2、…、L_n，它们的中误差均等于 σ，则 n 个观测值的算术平均值 x 为

$$x=\frac{[L]}{n}=\frac{1}{n}L_1+\frac{1}{n}L_2+\cdots+\frac{1}{n}L_n\qquad(1-61)$$

由协方差传播律知，平均值 x 的方差为

$$\sigma_x^2=\frac{1}{n^2}\sigma^2+\frac{1}{n^2}\sigma^2+\cdots+\frac{1}{n^2}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

中误差为

$$\sigma_x=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\qquad(1-62)$$

即 n 个同精度独立观测值的算术平均值的中误差，等于各观测值的中误差除以$\sqrt{n}$。

二、水准路线高差的中误差

经 N 个测站测定 A、B 两水准点间的高差，其中第 i 站的观测高差为 h_i，则 A、B 两水准点间的总高差 h_{AB} 为

$$h_{AB}=h_1+h_2+\cdots+h_N\qquad(1-63)$$

设各观测站观测高差是精度相同的独立观测值，其中误差均为 $\sigma_{站}$，则可由协方差传播律式(1－29)并顾及 $\sigma_{ij}=0$，求得 h_{AB} 的方差 $\sigma_{h_{AB}}^2$ 为

$$\sigma_{h_{AB}}^2=\sigma_{站}^2+\sigma_{站}^2+\cdots+\sigma_{站}^2=N\sigma_{站}^2$$

由此得中误差

$$\sigma_{h_{AB}}=\sqrt{N}\sigma_{站}\qquad(1-64)$$

若水准路线敷设在平坦地区，前后两测站间的距离 s 大致相等，设 A、B 点间的距离为 S，则测站数 $N = S/s$，代入上式得

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{\frac{S}{s}}\sigma_{站} \tag{1-65}$$

如果 $S = 1$ km，s 以 km 为单位，则 1 km 的测站数为

$$N_{km} = \frac{1}{s}$$

而一公里观测高差的中误差即为

$$\sigma_{km} = \sqrt{\frac{1}{s}}\sigma_{站} \tag{1-66}$$

所以，距离为 S 公里的 A、B 两点的观测高差的中误差为

$$\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S}\sigma_{km} \tag{1-67}$$

式(1-64)和式(1-67)是水准测量中计算高差中误差的基本公式。由式(1-64)可知，当各测站高差的观测精度相同时，水准测量高差的中误差与测站数的平方根成正比；由式(1 67)知，当各测站的距离大致相等时，水准测量高差的中误差与距离的平方根成正比。

三、距离丈量的中误差

设对长度为 S 的距离，用长度为 l 的钢尺丈量了 n 个尺段，则有

$$S = l_1 + l_2 + \cdots + l_n \tag{1-68}$$

因为每尺段都是独立观测，且精度相同，设其中误差为 σ_l，则由误差传播定律式(1-29)可得

$$\sigma_S = \sigma_l\sqrt{n} \tag{1-69}$$

因每尺段的观测值近似于钢尺的长度 l，即 $S \approx nl$，或

$$n = \frac{S}{l}$$

代入式(1-69)得

$$\sigma_S = \sigma_l\sqrt{\frac{S}{l}} = \frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}\sqrt{S} \tag{1-70}$$

如果 $S = 1$ 个单位长度，则单位长度的尺段数

$$n_{单} = \frac{1}{l}$$

则由式(1-70)可知，单位长度的丈量中误差为

$$C = \frac{\sigma_l}{\sqrt{l}} \tag{1-71}$$

将上式代入式(1-70)，得

$$\sigma_S = C\sqrt{S} \tag{1-72}$$

即距离为 S 的丈量中误差，等于单位长度丈量中误差的 $\sqrt{S}$ 倍。

四、支导线终点的位置误差

图 1-8 为一条支导线，先以其中第 i 条边 $\overrightarrow{ij}$ 为例，说明测角和量距误差对终点 E 的影响。只考虑 i 点处测角、量边的误差影响，而假定其他角、边无观测误差，则对于 i 点到 E 点

这段导线而言，量边误差使整段导线沿$\overrightarrow{ij}$边方向产生平移，平移量与该边量边误差相同；而测角误差使整段导线在 i 点处发生扭转，其影响大小不仅与 i 点处测角误差大小有关，还与 i 点到终点的连线长度成正比，影响方向垂直于连线方向。

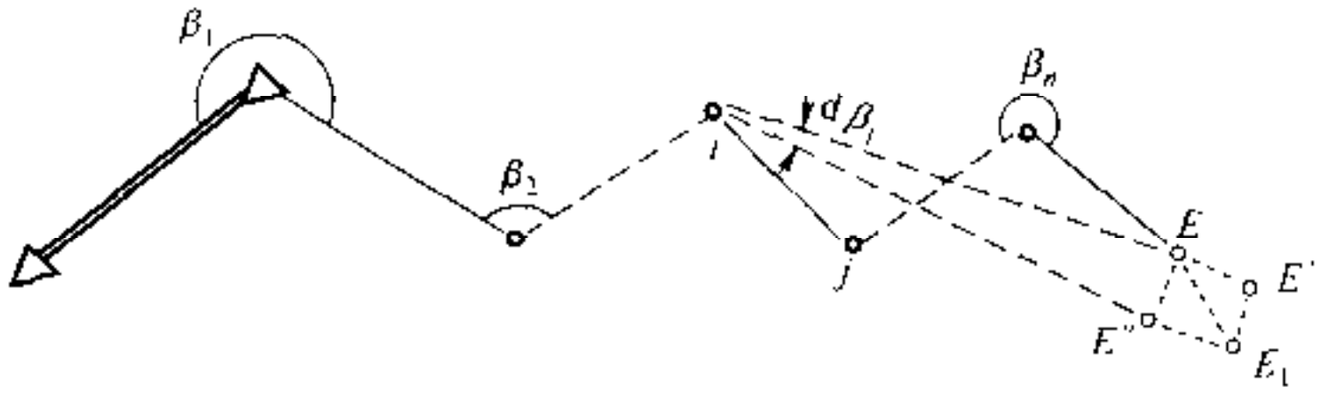


图 1-8

但事实上，每个角度和每条边长都有误差，都会对终点 E 产生影响，而且他们对终点的影响方向和大小各不相同，研究起来比较复杂。为简单起见，只对直伸形导线进行分析，此时所有边长误差的影响都沿着导线直伸方向(纵向)，而所有测角误差的影响都垂直于导线直伸方向(横向)。

在测量工作中经常会遇到这种情况：一个观测结果同时受到许多的独立误差的联合的、叠加式的影响。在这种情况下，观测结果(设为 Z)的真误差是各个独立误差的代数和，即

$$\Delta_Z = \Delta_1 + \Delta_2 + \cdots + \Delta_n \tag{1-73}$$

由于这里的真误差是相互独立的，各种误差的出现都是偶然的，因而也可由式(1-29)得出它们之间的方差关系式

$$\sigma_Z^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots + \sigma_n^2 \tag{1-74}$$

设导线各边长为 S_i，并第一个角的观测误差为 $d\beta_1$，其对导线终点产生的横向误差为 Δ_1，则

$$\Delta_1 = (S_1 + S_2 + \cdots + S_n)\frac{d\beta_1}{\rho}$$

设第二个角的观测误差为 $d\beta_2$，其对导线终点产生的横向误差为 Δ_2，有

$$\Delta_2 = (S_2 + S_3 + \cdots + S_n)\frac{d\beta_2}{\rho}$$

依此类推，第 n 个角的观测误差对终点产生的横向误差为

$$\Delta_n = S_n \frac{d\beta_n}{\rho}$$

故导线端点在所有导线角观测误差影响下，所产生的总的横向误差为

$$\Delta_{横} = \Delta_{\beta_1} + \Delta_{\beta_2} + \cdots + \Delta_{\beta_n}$$

$$= (S_1 + S_2 + \cdots S_n)\frac{d\beta_1}{\rho} + (S_2 + S_3 + \cdots S_n)\frac{d\beta_2}{\rho} + \cdots + S_n \frac{d\beta_n}{\rho}$$

设各个导线边长相等，长度均为 S，则上式变为

$$\Delta_{横} = nS \frac{d\beta_1}{\rho} + (n-1)S \frac{d\beta_2}{\rho} + \cdots + S \frac{d\beta_n}{\rho}$$

根据式(1-73)及式(1-74)，并设导线角观测中误差均为 σ_β^2，则有

$$M_{横}^2 = S^2\{n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 1^2\}\frac{\sigma_\beta^2}{\rho^2}$$

因 $$1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

所以 $$M_{横}^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}S^2\frac{\sigma_\beta^2}{\rho^2} \tag{1-75}$$

设导线总长度为 L，即 $L = nS$，或 $S = L/n$，代入上式得

$$M_{横}^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n}L^2\frac{\sigma_\beta^2}{\rho^2}$$

取 $$\frac{(n+1)(2n+1)}{6n} \approx \frac{2n+3}{6} = \frac{n+1.5}{3}$$

则 $$M_{横}^2 = \frac{n+1.5}{3}L^2\frac{\sigma_\beta^2}{\rho^2} \tag{1-76}$$

据式(1－72)知，由量边误差引起的导线终点纵向误差为

$$M_{纵}^2 = C^2L \tag{1-77}$$

故导线终点位置误差(方差)为

$$M^2 = M_{纵}^2 + M_{横}^2 = C^2L + \frac{n+1.5}{3}L^2\frac{\sigma_\beta^2}{\rho^2} \tag{1-78}$$

此式即为等边直伸形支导线终点位置误差的估算公式。

第五节　权与定权的常用方法

一定的观测条件就对应着一定的误差分布，而一定的误差分布就对应着一个确定的方差(或中误差)。因此，方差是表征精度的一个绝对的数字指标。为了比较各观测值之间的精度，除了可以应用方差之外，还可以通过方差之间的比例关系来衡量观测值之间的精度的高低。这种表示各观测方差之间比例关系的数字特征称为权。所以，权是表征相对精度的数字指标。

在测量实际工作中，平差计算之前，精度的绝对数字指标(方差)往往是不知道的，而精度的相对的数字指标(权)却可以根据事先给定的条件予以确定，然后根据平差的结果估算出表征精度的绝对的数字指标(方差)。因此，权在平差计算中将起着很重要的作用。本节将先给出权的定义和讨论权的一些性质，然后介绍测量工作中几种常用的定权方法。

一、权的定义

设有一组观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n)$，它们的方差为 $\sigma_i^2(i=1,2,\cdots,n)$，如选定任一常数 σ_0，则定义

$$p_i = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_i^2} \tag{1-79}$$

并称 p_i 为观测值 L_i 的权。

由权的定义式(1　79)可写出各观测值的权之间的比例关系为

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{\sigma_0^2}{\sigma_1^2} : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_2^2} : \cdots : \frac{\sigma_0^2}{\sigma_n^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} : \frac{1}{\sigma_2^2} : \cdots : \frac{1}{\sigma_n^2} \tag{1-80}$$

可见，对于一组观测值，其权之比等于相应方差的倒数之比，这就表明，方差(或中误差)愈小，其权愈大；或者说，精度愈高，其权愈大。因此，权可以作为比较观测值之间的精度高低的一种指标。所不同的是，方差与精度成反比，而权与精度成正比。方差是表示精度的一个绝对数字，它在"数值"上表示某个量观测误差的分布参数；而权是通过精度(方差)之间的比例关系来衡量多个观测值之间的精度的相对高低，对单个观测量使用权没有意义。特别地，当各观测值的精度相同时，它们的权相等，为计算方便，此时一般令其权均为 1。

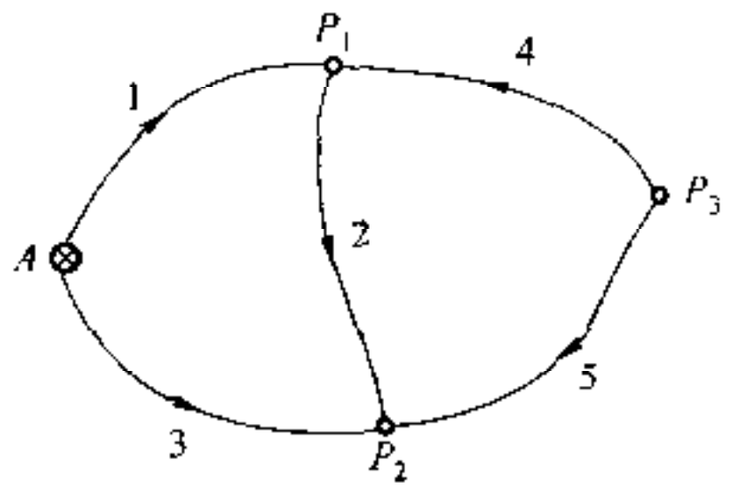


图 1－9

就普遍情况而言，式(1－79)中的方差 σ_i^2，可以是同一个量的观测值的方差，也可以是不同量的观测值的方差。就是说，用权来比较各个观测值之间精度的高低，不限于是对同一量的观测值，同样也适用于不同量的观测值。

在式(1－79)中，σ_0 可以是任意选定的常数。例如在图 1－9 的水准网中，已知各条路线的距离为 $S_1=1.5$ km，$S_2=2.5$ km，$S_3=2.0$ km，$S_4=4.0$ km，$S_5=3.0$ km。

在该水准网中，如果并不知道每公里观测高差中误差的具体数值，而只知道每公里观测高差的精度相同。例如，水准网中的所有水准路线都是按同一等级的水准测量规范的技术要求进行观测的，那么，一般就可认为每公里观测高差的精度是相同的。此时若假定每公里观测高差的中误差为 σ_{km}，则根据协方差传播律可知，各线路观测高差的中误差为

$$\sigma_1=\sqrt{1.5}\sigma_{km},\quad \sigma_2=\sqrt{2.5}\sigma_{km},\quad \sigma_3=\sqrt{2.0}\sigma_{km},\quad \sigma_4=\sqrt{4.0}\sigma_{km},\quad \sigma_5=\sqrt{3.0}\sigma_{km}$$

若令 $\sigma_0=\sigma_5=\sqrt{3.0}\sigma_{km}$，则得

$$p_1=2.0,\quad p_2=1.2,\quad p_3=1.5,\quad p_4=0.75,\quad p_5=1.0$$

可以看出，在上述事先给定的条件之下(即每公里观测高差的精度相同，各线路的距离不等)，由于 $\sigma_i=\sqrt{S_i}\sigma_{km}$，其中 σ_{km}是一个定值，S_i 为第 i 条线路的公里数，则当 S_i 愈小，σ_i 愈小，而其对应的权则愈大，反之亦然。所以，通过权的大小可以反映各观测高差的精度高低。

若另选 $\sigma_0=\sigma_1=\sqrt{1.5}\sigma_{km}$，则得

$$p'_1=1.0,\quad p'_2=0.6,\quad p'_3=0.75,\quad p'_4=0.375,\quad p'_5=0.5$$

这一组权虽然由于所取的 σ_0 值不同，其大小与前一组不同，但他们同样能反映各观测高差之间的精度高低。

由以上例子可知，对于一组已知中误差的观测值而言：

(1) 选定了一个 σ_0 值，即有一组对应的权。或者说，有一组权，必有一个对应的 σ_0 值。

(2) 一组观测值的权，其大小是随 σ_0 的不同而异，但不论 σ_0 选用何值，权之间的比例关系始终不变。

(3) 为了使权能起到比较精度高低的作用，在同一问题中只能选定一个 σ_0 值，不能同时选用几个不同的 σ_0 值，否则就破坏了权之间的比例关系。

(4) 只要事先给定了一定的条件，例如，已知每公里观测高差的精度相同和各水准线路

的公里数，则不一定要知道每公里观测高差精度的具体数值，就可以确定出权的数值。

由以上讨论可知，方差是用来反映观测值的绝对精度的，而权仅是用来比较各个观测值相互之间精度高低的比例数。因而，权的意义，不在于它们本身数值的大小，而重要的是它们之间所存在的比例关系。

二、单位权中误差

从以上所述来看，σ_0 只起着一个比例常数的作用，但 σ_0 值一经选定，它还有着具体的含义。

在上述的水准网的前一组权 p_i 中，因令 $\sigma_0=\sigma_5$，实际上就是以 h_5 的精度作为标准，其他观测高差的精度都是和它进行比较。因此，h_5 的权 $p_5=1$，而其他的观测高差的权，则是以 h_5 作为单位而确定出来的。同样，在后一组权 p'_i 中，因令 $\sigma_0=\sigma_1$，故 $p'_1=1$，其他观测高差的权，就是以 p'_1 作为单位权而确定出来的。由此可见，凡是中误差等于 σ_0 的观测值，其权必然等于1；或者说，权为1的观测值的中误差必然等于 σ_0。因此，通常称 σ_0 为单位权中误差，而 σ_0^2 称为单位权方差或方差因子，把权等于1的观测值，称为单位权观测值。在例中，前一组权的 $p_5=1$，此时是令 $\sigma_0=\sigma_5$，所以 σ_5 就是单位权中误差，h_5 就是单位权观测值；而后一组权中 $p'_1=1$，此时是令 $\sigma_0=\sigma_1$，所以 σ_1 就是单位权中误差，h_1 就是单位权观测值。

因为 σ_0 可以是任意选定的某一常数，故所选定的 σ_0 也可能不等于某一个具体观测值的中误差。例如，对于上述水准网，若选定 $\sigma_0=\sqrt{6.0}\sigma_{km}$，则可求得一组权为

$$p''_1=4.0,\quad p''_2=2.4,\quad p''_3=3.0,\quad p''_4=1.5,\quad p''_5=2.0$$

这时，σ_0 不再是5个观测值中的某一个的中误差。因而，也就不出现数值为1的权。所以为了实际的需要或计算上的方便，可以选取某一假定的观测值作为单位权观测值，以这个假定观测值的中误差作为单位权中误差。如这里选 $\sigma_0=\sqrt{6.0}\sigma_{km}$，它是代表路线长度为6 km的观测高差的中误差，因此，路线长度为6 km的观测高差就是单位权观测值，它的中误差就是单位权中误差。

在确定一组同类元素的观测值的权时，所选取的单位权中误差 σ_0 的单位，一般是与观测值中误差的单位相同，由于权是单位权中误差平方与观测值中误差平方之比，所以，权一般是一组无量纲的数值，也就是说，在这种情况下权是没有单位的。但如果需要确定权的观测值（或它们的函数）包含有两种以上的不同类型元素时，权就可能是有单位的。例如，要确定其权的观测值（或它们的函数）包含有角度和长度，它们的中误差的单位分别为“秒”“毫米”，若选取的单位权中误差的单位是秒，即与角度观测值之中误差单位相同，那么，各个角度观测值的权是无量纲（或无单位）的，而长度观测值的权的量纲则为“s^2/mm^2”。这种情况在平差计算中是常会遇到的。

三、测量上确定权的常用方法举例

前面已经提到，在测量实际工作中，往往是要根据事先给定的条件，先确定出各观测值的权，也就是先确定它们精度的相对数字指标，然后通过平差计算，一方面求出各观测值的最可靠值，另一方面求出它们精度的绝对数字指标。下面将从权的定义式(1－79)及式(1－80)出发，对于测量作业中经常遇到的几种情况，导出其实用的定权公式。这些定权方法称为定权的常用方法。

1. 水准测量的权

设在图 1 - 10 所示的水准网中，有 $n(=7)$ 条水准路线，现沿每一条路线测定两点间的高差，得各路线的观测高差为 $h_1, h_2, \cdots, h_n$，各路线的测站数分别为 $N_1, N_2, \cdots, N_n$。

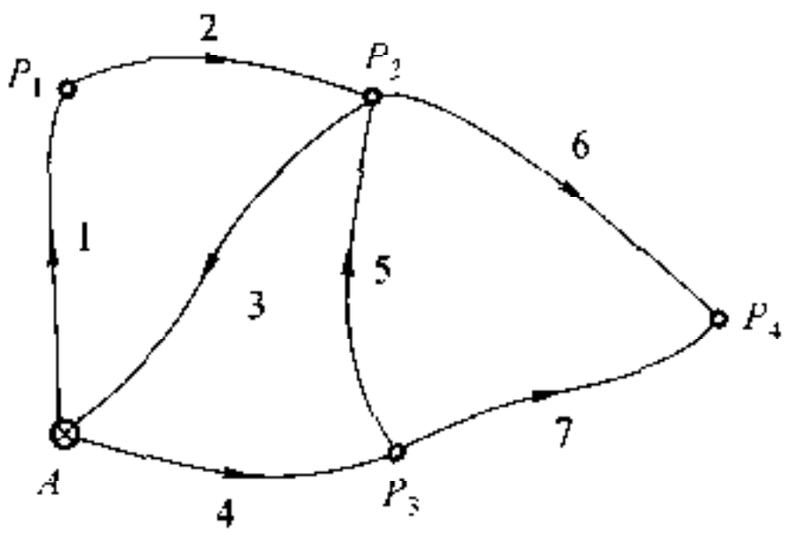


图 1 - 10

设每一测站观测高差的精度相同，其中误差均为 $\sigma_{站}$，则由式(1－64)可知，各路线观测高差的中误差为

$$\sigma_i = \sqrt{N_i}\sigma_{站} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1-81)$$

如以 p_i 代表 h_i 的权，并设单位权中误差为

$$\sigma_0 = \sqrt{C}\sigma_{站} \qquad (1-82)$$

则将式(1－81)和式(1－82)代入式(1－79)可得

$$p_i = \frac{C}{N_i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1-83)$$

且有关系

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{C}{N_1} : \frac{C}{N_2} : \cdots : \frac{C}{N_n} = \frac{1}{N_1} : \frac{1}{N_2} : \cdots : \frac{1}{N_n} \qquad (1-84)$$

即当各测站的观测高差为同精度时，各路线的权与测站数成反比。

由式(1－83)可知，如果某段高差的测站数 $N_i = 1$，则它的权为 $p_i = C$；而当 $p_i = 1$ 时，有 $N_i = C$。可见，常数 C 有两个意义：(1)C 是 1 测站的高差的权；(2)C 是单位权观测高差的测站数。

例 1－8　设在图1－10 的水准网中，已知各路线的测站数分别为 40，25，50，20，40，50，25。试确定各路线所测得的高差的权。

解　设取 $C=100$，即取 100 个测站的观测高差为单位权观测值，由式(1－83)得

$$p_1 = \frac{100}{40} = 2.5, \quad p_2 = \frac{100}{25} = 4.0, \quad p_3 = \frac{100}{50} = 2.0, \quad p_4 = \frac{100}{20} = 5.0,$$

$$p_5 = \frac{100}{40} = 2.5, \quad p_6 = \frac{100}{50} = 2.0, \quad p_7 = \frac{100}{25} = 4.0$$

在水准测量中，如已知 1 km 的观测高差的中误差均相等，设为 σ_{km}，又已知各路线的距离为 $S_1, S_2, \cdots, S_n$，则由式(1－67)知各路线观测高差的中误差为

$$\sigma_i = \sqrt{S_i}\sigma_{km} \qquad (1-85)$$

若令

$$\sigma_0 = \sqrt{C}\sigma_{km} \qquad (1-86)$$

则得

$$p_i = \frac{C}{S_i} \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (1-87)$$

$$p_1 : p_2 : \cdots : p_n = \frac{C}{S_1} : \frac{C}{S_2} : \cdots : \frac{C}{S_n} = \frac{1}{S_1} : \frac{1}{S_2} : \cdots : \frac{1}{S_n} \qquad (1-88)$$

即当每公里观测高差为同精度时，各路线观测高差的权与距离的公里数成反比。

由式(1－87)可知，若 $S_i = 1$，则 $p_i = C$；而当 $p_i = 1$ 时，$S_i = C$，可见这里的 C 的意义是：(1)C 是 1 km 观测高差的权；(2)C 是单位权观测高差的线路公里数。

例 1－9 在图1－11 中,各水准路线的长度为

$$S_1=3.0\ \text{km}, S_2=6.0\ \text{km},$$

$$S_3=2.0\ \text{km}, S_4=1.5\ \text{km}$$

设每公里观测高差的精度相同,已知第 4 条路线观测高差的权为3,试求其他各路线观测高差之权。

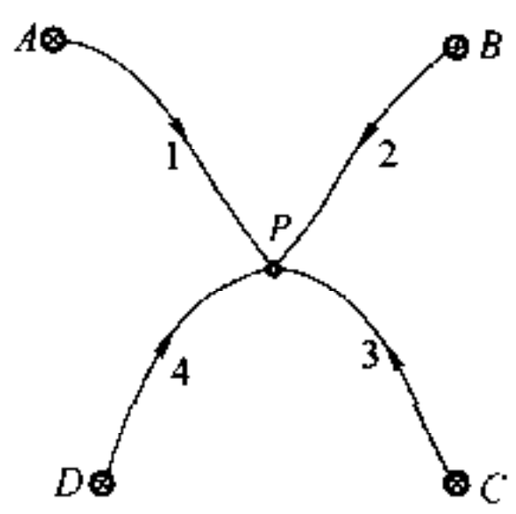


图 1－11

解 因

$$p_4=\frac{C}{S_4}$$

所以

$$C=p_4S_4=1.5\times3=4.5$$

故有

$$p_1=\frac{C}{S_1}=\frac{4.5}{3.0}=1.50,\quad p_2=\frac{C}{S_2}=\frac{4.5}{6.0}=0.75,\quad p_3=\frac{C}{S_3}=\frac{4.5}{2.0}=2.25$$

在水准测量中,究竟用水准路线的距离 S 定权,还是用测站数 N 定权,这要视具体情况而定,一般来说,起伏不大的地区,每公里的测站数大致相同,则可按水准路线的距离定权;而在起伏较大的地区,每公里的测站数相差较大,则按测站数定权。

2. 同精度观测值的算术平均值的权

设有 $L_1, L_2, \cdots, L_n$,它们分别是 $N_1, N_2, \cdots, N_n$ 次等精度观测值的平均值,若每次观测的中误差均为 σ,则由式(1－62)可知,L_i 的中误差为

$$\sigma_i=\frac{\sigma}{\sqrt{N_i}}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-89}$$

令

$$\sigma_0=\frac{\sigma}{\sqrt{C}}\tag{1-90}$$

则由权的定义可得 L_i 的权 p_i 为

$$p_i=\frac{N_i}{C}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-91}$$

即有不同次数的同精度的观测值所算得的算术平均值,其权与观测次数成正比。

若令 $N_i=1$,则 $C=\frac{1}{p_i}$;而当 $p_i=1$,则 $C=N_i$。所以 C 也有两个意义:(1)C 也是一次观测的权倒数;(2)C 是单位权观测值的观测次数。

虽然 C 可以任意确定,但不论取何值,权的比例关系不会改变,C 一经确定,单位权观测值也就确定了。

3. 丈量距离的权

在丈量距离 S 时,设用长度为 l 的钢尺丈量了 n 尺段,且每尺段都是独立的、等精度观测,其中误差均为 σ_l,则由式(1－69)知

$$\sigma_S=\sigma_l\sqrt{n}\tag{1-92}$$

将 $n\approx S/l$ 代入式(1－92)得

$$\sigma_S=\frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}\sqrt{S}\tag{1-93}$$

若令 $\sigma_0=\frac{\sigma_l}{\sqrt{l}}$，则距离 S_i 的中误差为

$$\sigma_{S_i}=\sigma_0\sqrt{S_i} \tag{1-94}$$

任一导线边观测值的权为

$$p_i=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{S_i}^2}=\frac{1}{S_i} \tag{1-95}$$

因为权具有相对性，故上式可写成

$$p_i=\frac{C}{S_i} \tag{1-96}$$

4. 三角高程测量的权

在三角高程测量中，两点间的高差按下式计算：

$$h=D\cdot\tan\alpha+i-v \tag{1-97}$$

式中，i、v 分别为仪器高和觇标高，因为它们是用钢卷尺直接测量而得，误差相对较小可忽略；D 为两点间水平距离；α 为竖直角，设它们的中误差分别为 σ_D 和 σ_α。

对式(1-97)全微分得

$$\mathrm{d}h=\tan\alpha\cdot\mathrm{d}D+\frac{D}{\rho}\sec^2\alpha\cdot\mathrm{d}\alpha$$

应用误差传播定律有

$$\sigma_h^2=\tan^2\alpha\sigma_D^2+\left(\frac{D}{\rho}\sec^2\alpha\right)^2\sigma_\alpha^2 \tag{1-98}$$

当竖直角 α 不大于 5°时，$\sec^2\alpha\approx1$，而 $\tan\alpha\approx0$，故上式中等号右边的第一项可以忽略不计。因此

$$\sigma_h^2=\left(\frac{D}{\rho}\sec^2\alpha\right)^2\sigma_\alpha^2\approx\frac{D^2}{\rho^2}\sigma_\alpha^2 \tag{1-99}$$

若令 1 km 的高差中误差为单位权中误差，即令

$$\sigma_0^2=\frac{1}{\rho^2}\sigma_\alpha^2 \tag{1-100}$$

将式(1-99)和式(1-100)代入式(1-79)可得

$$p_h=\frac{1}{D^2} \tag{1-101}$$

考虑到权的相对性，则有

$$p_h=\frac{C^2}{D^2} \tag{1-102}$$

即三角高程测量的权，与两点间距离的平方成反比。

特别地，对于式(1-102)，当 $p_i=1$ 时，有 $D=C$，可见，常数 C 是单位权观测高差的公里数。

以上几种常用的定权方法的共同特点是，虽然它们都是以权的定义式(1-79)为依据

的，但在实际定权时，并不需要知道各观测值方差的具体数字，而只要应用测站数、公里数等就可以定权了。要强调的是，在用这些方法定权时，必须注意它们的前提条件，例如，用测站数来确定观测高差权时，必须满足“每测站观测高差的精度均相等”这一前提条件，否则，就不能应用这个定权公式。

在已知 σ_0 为单位权中误差含义的基础上，由式(1－79)也可写出它的变形公式为

$$\sigma_i=\frac{\sigma_0}{\sqrt{p_i}}\text{或}\sigma_i=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{p_i}} \tag{1-103}$$

即任一观测值 L_i 的中误差 σ_i，等于单位权中误差 σ_0 乘以该观测值权倒数的平方根 $\sqrt{\frac{1}{p_i}}$。其中权 p_i 是在平差前根据本节所介绍的定权方法求得的，而单位权中误差 σ_0 是在平差结束时求出的，其计算公式将在以后有关章节给出。这样即可在精度评定中根据式(1－103)求出任一观测值的中误差了。

公式(1－103)不仅适用于计算任一观测值的中误差，也适用于计算观测值函数的中误差，此时只要把公式中的权换成该函数的权就可以了。因此，该式在测量平差中有着重要的作用。

第六节　协因数和协因数传播律

在第三节中是通过协方差的运算规律导出协方差传播律的。由于权与方差成反比，所以，可以通过协方差传播律来导出求观测值之权的计算法则，实际应用中也存在根据观测值的权来求观测值函数权的问题。在导出这种法则之前，还需要阐述协因数和协因数阵的概念。

一、协因数与协因数阵

由权的定义知道，观测值的权与它的方差成反比，因此可以利用权倒数，在方差－协方差传播律的基础上导出相应公式。设有观测值 L_i 和 L_j，它们的方差分别是 σ_i^2 和 σ_j^2，它们之间的协方差为 σ_{ij}，则令

$$\left.\begin{aligned}Q_{ii}&=\frac{1}{p_i}=\frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^2}\\Q_{jj}&=\frac{1}{p_j}=\frac{\sigma_j^2}{\sigma_0^2}\\Q_{ij}&=\frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0^2}\end{aligned}\right\} \tag{1-104}$$

或写为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^2&=\sigma_0^2Q_{ii}\\\sigma_j^2&=\sigma_0^2Q_{jj}\\\sigma_{ij}&=\sigma_0^2Q_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{1-105}$$

称 Q_{ii} 和 Q_{jj} 分别为 L_i 和 L_j 的协因数或权倒数，而称 Q_{ij} 为 L_i 关于 L_j 的互协因数或相关权倒数。在式(1－104)和式(1－105)中，σ_0 仍为单位权中误差。

由式(1－104)或式(1－105)可知，观测值的协因数 Q_{ii} 和 Q_{jj}(权倒数)与方差成正比，而互协因数 Q_{ij}(相关权倒数)与协方差成正比。容易理解，协因数 Q_{ii} 和 Q_{jj} 与权 p_i 和 p_j 有类似的作用，是比较观测值精度高低的一种指标；而互协因数 Q_{ij} 也同协方差 σ_{ij} 一样，是衡量两观测值之间相关程度的一种指标，当 $Q_{ij}(i\neq j)=0$ 时，L_i 和 L_j 互不相关。

现将协因数的概念扩展，将 n 维随机向量 $\underset{n\times 1}{X}$ 的方差阵 D_{XX} 的两端同除以方差因子 σ_0^2，并顾及式(1－104)得

$$\frac{1}{\sigma_0^2}D_{XX}=\begin{pmatrix}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_{12}}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_{1n}}{\sigma_0^2}\\ \frac{\sigma_{21}}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_{2n}}{\sigma_0^2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\sigma_{n1}}{\sigma_0^2} & \frac{\sigma_{n2}}{\sigma_0^2} & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n}\\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn}\end{pmatrix} \tag{1-106}$$

通常将由 $\underset{n\times 1}{X}$ 的协因数 Q_{ii} 和互协因数 Q_{ij} 组成的矩阵称为协因数阵，记为 Q_{XX}，即

$$Q_{XX}=\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n}\\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn}\end{pmatrix} \tag{1-107}$$

对照式(1－104)可知，在协因数阵中，主对角线上的元素 Q_{ii} 为随机变量 x_i 的协因数(权倒数)；而非主对角线元素 $Q_{ij}(i\neq j)$ 为随机变量 x_i 关于随机变量 x_j 的互协因数，且有 $Q_{ij}=Q_{ji}$，所以 Q_{XX} 为对称阵。

由式(1－106)即得同一随机向量的协方差阵与协因数阵间的关系式为

$$D_{XX}=\sigma_0^2 Q_{XX} \tag{1-108}$$

即，任意随机向量的协方差阵等于协因数阵与单位权方差因子的乘积。

同样，若有观测向量(或者是观测值函数向量) $\underset{n\times 1}{X}$ 和 $\underset{r\times 1}{Y}$，它们的方差阵分别为 $\underset{n\times n}{D_{XX}}$ 和 $\underset{r\times r}{D_{YY}}$，$X$ 关于 Y 的互协方差阵为 $\underset{n\times r}{D_{XY}}$，则

$$\left.\begin{aligned}D_{XX}&=\sigma_0^2 Q_{XX}\\ D_{YY}&=\sigma_0^2 Q_{YY}\\ D_{XY}&=\sigma_0^2 Q_{XY}\end{aligned}\right\} \tag{1-109}$$

或写为

$$\left.\begin{aligned}\underset{n\times n}{Q_{XX}}&=\frac{1}{\sigma_0^2}D_{XX}\\ \underset{r\times r}{Q_{YY}}&=\frac{1}{\sigma_0^2}D_{YY}\\ \underset{n\times r}{Q_{XY}}&=\frac{1}{\sigma_0^2}D_{XY}\end{aligned}\right\} \tag{1-110}$$

称 Q_{XX} 和 Q_{YY} 分别为 X 和 Y 的协因数阵，而称 Q_{XY} 为 X 关于 Y 的互协因数阵。由于协因

数阵 Q_{XX}中的对角元素就是各个 x_i 的权倒数，它的非对角元素是 x_i 关于 $x_j(i\neq j)$的相关权倒数；而 Q_{XY}中的元素就是 x_i 关于 y_i 的相关权倒数，所以，也称 Q_{XX}和 Q_{YY}为 X 和 Y 的权逆阵，而称互协因数阵 Q_{XY}为 X 关于 Y 的相关逆矩阵。因 $D_{YX}=D_{XY}^{\mathrm{T}}$，所以，$Q_{YX}=D_{XY}^{\mathrm{T}}$。当 $Q_{YX}=Q_{XY}^{\mathrm{T}}=0$ 时，X 和 Y 是相互独立的观测向量。

若记

$$Z=\begin{Bmatrix}X\\Y\end{Bmatrix}$$

则 Z 的方差阵 D_{ZZ}和协因数阵(权逆阵) Q_{ZZ}为

$$\left.\begin{aligned}D_{ZZ}&=\begin{Bmatrix}D_{XX}&D_{XY}\\D_{YX}&D_{YY}\end{Bmatrix}\\Q_{ZZ}&=\begin{Bmatrix}Q_{XX}&Q_{XY}\\Q_{YX}&Q_{YY}\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{1-111}$$

且有

$$Q_{ZZ}=\frac{1}{\sigma_0^2}D_{ZZ}\quad 或\quad D_{ZZ}=\sigma_0^2Q_{ZZ}\tag{1-112}$$

二、权阵

由式(1－104)知，一个观测值 L_i 的权 p_i 与其协因数 Q_{ii}互为倒数，即

$$Q_{ii}=\frac{1}{p_i}=p_i^{-1}$$

或写为

$$p_i=Q_{ii}^{-1}$$

现将上述概念推广，定义 n 维观测向量 $\underset{n\times 1}{X}$ 的权阵为

$$P_{XX}=Q_{XX}^{-1}\tag{1-113}$$

即，观测向量 X 的权阵为其协因数阵的逆阵。或者说，协因数阵与权阵互为逆阵，因此有下式成立

$$Q_{XX}=P_{XX}^{-1}\tag{1-114}$$

或

$$Q_{XX}P_{XX}=I\tag{1-115}$$

将式(1－114)代入式(1－108)，观测向量 X 的权阵与其协方差阵的关系式为

$$D_{XX}=\sigma_0^2P_{XX}^{-1}\tag{1-116}$$

当观测向量仅含有一个观测值时，式(1－116)与式(1－103)意义相同。

由于 D_{XX}是对称矩阵，故 P_{XX}也是对称矩阵。故记权阵为

$$P_{XX}=\begin{bmatrix}p_{11}&p_{12}&\cdots&p_{1n}\\p_{21}&p_{22}&\cdots&p_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\p_{n1}&p_{n2}&\cdots&p_{nn}\end{bmatrix}\tag{1-117}$$

且有 $p_{ij}=p_{ji}(i\neq j)$。

对于独立观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n$，下同)，设其方差为 σ_i^2，权为 p_i，单位权方差为 σ_0^2，现组成向量和矩阵

$$\underset{n\times 1}{L}=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix},\qquad \underset{n\times n}{D_{LL}}=\begin{pmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2\end{pmatrix}$$

则由式(1－110)知，L 的协因数阵为

$$Q_{LL}=\frac{1}{\sigma_0^2}D_{LL}=\begin{pmatrix}\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & 0 & \cdots & 0\\0 & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0\\0 & \frac{1}{p_2} & \cdots & 0\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & \frac{1}{p_n}\end{pmatrix}=P_{LL}^{-1}\qquad(1-118)$$

则有

$$P_{LL}=Q_{LL}^{-1}=\begin{pmatrix}P_1 & & & \\ & P_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & P_n\end{pmatrix}\qquad(1-119)$$

可见，独立观测向量 $\underset{n\times 1}{L}$ 的权阵 P_{LL} 是由观测值 L_i 的权 p_i 构成的对角阵。

但需要指出的是，因观测量相关，即 $\sigma_{ij}\neq 0$，$Q_{ij}\neq 0$，这时的 Q_{XX} 与 P_{XX} 均不是对角阵，权阵 P_{XX} 中的对角元素不再是 x_i 的权了。权阵 P_{XX} 的各个元素也不再有权的意义了。但是，相关观测向量的权阵在平差计算的公式中，也能起到同独立观测向量的权阵一样的作用。

三、协因数传播律

由协因数和协因数阵的定义可知，协因数阵可以由协方差阵乘上常数 $1/\sigma_0^2$ 得到；而且，观测向量的协因数阵的对角元素是相应的权倒数。因此，有了协因数和协因数阵的概念，根据协方差传播律，可以方便地得到由观测向量的协因数阵求其函数的协因数阵的计算公式，从而也就得到了函数的权。

设有观测值 $\underset{n\times 1}{X}$，已知它的协因数阵为 $\underset{n\times n}{Q_{XX}}$，又设有 X 的函数 $\underset{t\times 1}{Y}$ 和 $\underset{t\times 1}{Z}$：

$$\left.\begin{aligned}Y&=FX+F^0\\Z&=KX+K^0\end{aligned}\right\}\qquad(1-120)$$

下面根据协方差传播律式(1－33)和式(1－38)来导出由 Q_{XX} 求 Q_{YY}、Q_{ZZ} 和 Q_{YZ} 的公式。

假定单位权方差为 σ_0^2，按协方差传播律知，Y 和 Z 的协方差阵为

$$\left.\begin{aligned}D_{YY}&=FD_{XX}F^{\mathrm{T}}\\D_{ZZ}&=KD_{XX}K^{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\qquad(1-121)$$

由式(1－38)知 X 关于 Y 的互协方差阵为

$$D_{YZ}=FD_{XX}K^{\mathrm{T}}\qquad(1-122)$$

而由式(1－109)知

$$\left.\begin{aligned} D_{XX} &= \sigma_0^2 Q_{XX}, \quad D_{YY} = \sigma_0^2 Q_{YY} \\ D_{ZZ} &= \sigma_0^2 Q_{ZZ}, \quad D_{YZ} = \sigma_0^2 Q_{YZ} \end{aligned}\right\} \tag{1-123}$$

将式(1－123)代入式(1－121)及式(1－122),得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_0^2 Q_{YY} &= F(\sigma_0^2 Q_{XX})F^{\mathrm{T}} \\ \sigma_0^2 Q_{ZZ} &= K(\sigma_0^2 Q_{XX})K^{\mathrm{T}} \\ \sigma_0^2 Q_{YZ} &= F(\sigma_0^2 Q_{XX})K^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{1-124}$$

将上式两端都除以 σ_0^2,即得

$$\left.\begin{aligned} Q_{YY} &= FQ_{XX}F^{\mathrm{T}} \\ Q_{ZZ} &= KQ_{XX}K^{\mathrm{T}} \\ Q_{YZ} &= FQ_{XX}K^{\mathrm{T}} \end{aligned}\right\} \tag{1-125}$$

这就是观测值的协因数阵与其线性函数的协因数阵的关系式,通常称之为协因数传播律,或称之为权逆阵传播律。式(1－125)在形式上与协方差传播律相同,所以将协方差传播律与协因数传播律合称为广义传播律。

如果 Y 和 Z 的各个分量都是 X 的非线性函数

$$\left.\begin{aligned} Y &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ F_r(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \\ Z &= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \vdots \\ f_t(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{1-126}$$

也可按第三节的方法求 Y 和 Z 的全微分,得

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}Y &= F\mathrm{d}X \\ \mathrm{d}Z &= K\mathrm{d}X \end{aligned}\right\} \tag{1-127}$$

式中

$$F = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial F_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_r}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial F_r}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_t}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_t}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_t}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

则 Y、Z 的协因数阵 Q_{YY}、Q_{ZZ}、Q_{YZ} 也可按式(1－125)求得。

对于独立观测值 $\underset{n\times 1}{L}$，假定各 L_i 的权为 p_i，则 L 的权阵为对角阵

$$\underset{n\times n}{P_{LL}}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & p_n \end{pmatrix}$$

它的协因数阵(权逆阵)也是对角阵

$$\underset{n\times n}{Q_{LL}}=\begin{pmatrix} Q_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & Q_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{p_n} \end{pmatrix}$$

如果有函数

$$Z=f(L_1,L_2,\cdots,L_n) \tag{1-128}$$

全微分得

$$\mathrm{d}Z=\frac{\partial f}{\partial L_1}\mathrm{d}L_1+\frac{\partial f}{\partial L_2}\mathrm{d}L_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial L_n}\mathrm{d}L_n=K\mathrm{d}L \tag{1-129}$$

由协因数传播律式(1－125)可得

$$Q_{ZZ}=KQ_{LL}K^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial L_1} & \dfrac{\partial f}{\partial L_2} & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial L_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{p_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{p_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \dfrac{1}{p_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial L_1} \\ \dfrac{\partial f}{\partial L_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial L_n} \end{pmatrix}$$

展开后得纯量形式为

$$\frac{1}{p_Z}=\left(\frac{\partial f}{\partial L_1}\right)^2\frac{1}{p_1}+\left(\frac{\partial f}{\partial L_2}\right)^2\frac{1}{p_2}+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial L_n}\right)^2\frac{1}{p_n} \tag{1-130}$$

这就是根据独立观测值的权倒数求其函数的权倒数的公式，通常称之为权倒数传播律。它是协因数传播律的一种特殊情况。

由于协因数传播律与协方差传播律在形式上完全相同，因此，应用协因数传播律的实际步骤也与应用协方差传播律的步骤相同，这里就不赘述了。

例 1－10　已知独立观测值 $L_i(i=1,2,\cdots,n,)$ 的权均为 p，试求算术平均值 x 的权 p_x。

解

$$x=\frac{[L]}{n}=\frac{1}{n}L_1+\frac{1}{n}L_2+\cdots+\frac{1}{n}L_n$$

由权倒数传播律得

$$\frac{1}{p_x}=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p}+\cdots+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n}{p}=\frac{1}{np}$$

所以

$$p_x=np \tag{1-131}$$

即算术平均值之权等于观测值之权的 n 倍。

当各个观测值为单位权观测值，即令 $p=1$ 时，则 $p_x=n$。

例 1-11 已知独立观测值 L_i 的权为 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，试求 $x=\dfrac{[pL]}{[p]}$ 的权 p_x。

解

$$x=\frac{[pL]}{[p]}=\frac{1}{[p]}(p_1L_1+p_2L_2+\cdots+p_nL_n) \tag{1-132}$$

应用权倒数传播律得

$$\frac{1}{p_x}=\frac{1}{[p]^2}\left(p_1^2\frac{1}{p_1}+p_2^2\frac{1}{p_2}+\cdots+p_n^2\frac{1}{p_n}\right)=\frac{1}{[p]}$$

所以

$$p_x=[p] \tag{1-133}$$

一般称式(1-132)的 x 为带权平均值，因此带权平均值的权等于各观测值之和。若 $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$ 时，则由式(1-133)得 $p_x=np$，这就是式(1-131)中的结果。例[1-10]是本例的一种特殊情况。

例 1-12 已知观测向量 X_1 和 X_2 的协因数阵 $Q_{X_1X_1}$、$Q_{X_2X_2}$ 和互协因数阵 $Q_{X_1X_2}$，或写为

$$X=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix},\quad Q_{XX}=\begin{Bmatrix}Q_{X_1X_1}&Q_{X_1X_2}\\Q_{X_2X_1}&Q_{X_2X_2}\end{Bmatrix}$$

设有函数

$$\left.\begin{aligned}Y&=FX_1\\Z&=KX_2\end{aligned}\right\} \tag{1-134}$$

试求 Y 关于 Z 的协因数阵 Q_{YZ}。

解 式(1-134)可写为

$$\left.\begin{aligned}Y&=\begin{bmatrix}F&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\\Z&=\begin{bmatrix}0&K\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}$$

应用协因数传播律得

$$\begin{aligned}Q_{YZ}&=\begin{bmatrix}F&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}Q_{X_1X_1}&Q_{X_1X_2}\\Q_{X_2X_1}&Q_{X_2X_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\K^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix}\\&=\begin{Bmatrix}FQ_{X_1X_1}&FQ_{X_1X_2}\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}0\\K^{\mathrm{T}}\end{Bmatrix}\end{aligned}$$

即有

$$Q_{YZ}=FQ_{X_1X_2}K^{\mathrm{T}} \tag{1-135}$$

式(1－135)也可以作为协因数传播律的一个公式应用。它与相应函数的协方差传播律的形式类似。

例 1－13　设已知观测值 $\underset{n\times 1}{L}$ 的协因数阵为 Q_{LL}，又设

$$\left.\begin{aligned} V &= Q_{LL}A^{\mathrm{T}}K \\ AQ_{LL}A^{\mathrm{T}}K + W &= 0 \\ W &= AL + A_0 \end{aligned}\right\} \tag{1-136}$$

式中，$AQ_{LL}A^{\mathrm{T}}$ 为对称方阵，且为可逆阵。试求 K 和 V 的协因数阵 Q_{KK}、Q_{VV} 及 K 关于 V 的互协因数阵 Q_{KV}。

解　应用协因数传播律，由式(1－136)之第三式可得 W 的协因数阵为

$$Q_{WW} = AQ_{LL}A^{\mathrm{T}} \tag{1-137}$$

又由式(1－136)的第二式得

$$K = -(AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1}W \tag{1-138}$$

所以

$$\begin{aligned} Q_{KK} &= (AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1}Q_{WW}(AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1} \\ &= (AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1}(AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})(AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1} \end{aligned}$$

即得

$$Q_{KK} = (AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{1-139}$$

又由式(1－136)按协因数传播律得

$$\left.\begin{aligned} Q_{VV} &= Q_{LL}A^{\mathrm{T}}Q_{KK}(Q_{LL}A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = Q_{LL}A^{\mathrm{T}}(AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1}AQ_{LL} \\ Q_{KV} &= IQ_{KK}(Q_{LL}A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (AQ_{LL}A^{\mathrm{T}})^{-1}AQ_{LL} \end{aligned}\right\} \tag{1-140}$$

第七节　由真误差计算中误差的实际应用

一、由三角形闭合差求测角中误差

设在一个三角网中，以同精度独立观测了 n 个三角形之内角，由各观测角值计算而得的三角形内角和的闭合差分别是 $w_1, w_2, \cdots, w_n$，它们是一组真误差。一般情况下，观测量的真值(或数学期望)是不知道的，因此真误差也就无法知道，这时也就不能直接利用式(1－14)计算中误差的估值。然而，在某些情况下，由若干个观测量(如角度、长度、高差等)所构成的函数，其真值有时是已知的，因而其真误差也是可以求得的。例如，一个平面三角形三内角之和的真值为 180°，由三内角观测值算得的三角形闭合差，就是三内角观测值之和的真误差。这时就有可能根据闭合差(真误差)算出实际作业中的观测值中误差。

由于内角和 Σ_i 是一个三角形中三个观测角值 A_i、B_i 和 C_i 之和，即

$$\Sigma_i = A_i + B_i + C_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

因各个角度一般都是等精度观测的，设观测中误差均为 σ_β，则三角形内角和的中误差为

$$\sigma_\Sigma^2 = \sigma_\beta^2 + \sigma_\beta^2 + \sigma_\beta^2 = 3\sigma_\beta^2$$

即

$$\sigma_\Sigma = \sqrt{3}\sigma_\beta \tag{1-141}$$

式中，σ_Σ 为三角形三内角和的中误差。因为三角网中三角形的个数 n 是有限的，可根据其

真误差 w 计算其估值

$$\hat{\sigma}_\Sigma = \pm\sqrt{\frac{[www]}{n}} \tag{1-142}$$

式中，$[www] = w_1^2 + w_2^2 + \cdots + w_n^2$，$n$ 为三角形的个数。兼顾式(1－141)和式(1－142)，可得测角中误差的估值为

$$\hat{\sigma}_\beta = \pm\sqrt{\frac{[www]}{3n}} \tag{1-143}$$

式(1－143)就是大家所熟知的菲列罗公式。在三角测量中经常用它来初步评定测角的精度。规范中规定：三角测量的角度观测精度，由 20 个以上的三角形闭合差算得的测角中误差，三等不应超过 $\pm 1.8''$，四等不超过 $\pm 2.5''$。

二、用不等精度的真误差计算单位权中误差

我们已经知道，对于一组同精度独立观测值，利用其真误差 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$，可根据式(1－14)计算中误差的估值，即

$$\hat{\sigma} = \pm\sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-144}$$

现在设 $L_1, L_2, \cdots, L_n$ 是一组不同精度的独立观测值，它们的中误差、权和真误差分别为

$$\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n$$

$$p_1, p_2, \cdots, p_n$$

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$$

在定义中误差时，式(1－14)中的 $\Delta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 是一系列等精度观测值的真误差，而这里的真误差 Δ_i 却是不等精度观测值的真误差，所以不能将这里的 Δ_i 直接代入式(1－144)，必须遵循中误差的定义，设法得到一组精度相同且其权为 1 的独立的真误差。有了这样一组真误差，便可由式(1－144)来求解。不妨假定一组同精度且其权为 $p' = 1$ 的独立的真误差 $\Delta'_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，并设 Δ'_i 与 Δ_i 有关系

$$\Delta'_i = \alpha_i \Delta_i \tag{1-145}$$

根据权倒数传播律知

$$\frac{1}{p'} = \alpha_i^2 \frac{1}{p_i} = 1$$

可得

$$\alpha_i = \sqrt{p_i}$$

所以

$$\Delta'_i = \sqrt{p_i}\Delta_i \tag{1-146}$$

这就是说，由式(1－146)得到的 Δ'_i 是一组同精度且权为 1 的真误差，由于 Δ_i 是独立的真误差，所以，Δ'_i 也是一组独立的真误差，即

$$\Delta'_i \sim N(0, \sigma_0^2) \tag{1-147}$$

根据式(1－144)，就可得到

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[p\Delta\Delta]}{n}} \tag{1-148}$$

式(1－148)就是根据一组不同精度的真误差计算单位权中误差的基本公式。测量平差中，

许多由不等精度观测值求单位权中误差的公式，都是基于这个公式导出的。

当所有观测值的权相等，且都等于 1 时（即 $p_i=1$），式（1－148）就变成了式（1－14）。可见式（1－14）是式（1　148）的一种特殊情况。

三、由双观测值之差求中误差

在测量工作中，常常对一系列被观测量分别进行成对的观测。例如，在水准测量中对每段路线进行往返观测；在导线测量中每条边丈量 2 次等。对同一个量所进行的两次观测称为一个观测对。而将这种成对的观测序列称为双观测列。

设对量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，各测 2 次（一般为往返测），得独立观测值为

$$L'_1,L'_2,\cdots,L'_n$$

$$L''_1,L''_2,\cdots,L''_n$$

其中，L'_i 和 L''_i 分别是量 x_i 的往返观测值。设同一观测对的两个观测值的精度相同，不同观测对的精度不同，其权分别为

$$p_1,p_2,\cdots,p_n$$

即 L'_i 和 L''_i 的权都为 p_i。则各段最或是值为

$$\hat{x}_i=\frac{L'_i+L''_i}{2}\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-149}$$

现在已对每个量 L_i 进行了 2 次观测，由于观测值带有误差，因此每个量的两个观测值的差数一般是不等于零的，设

$$L'_i-L''_i=d_i\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{1-150}$$

式中，d_i 是第 i 个观测量 L_i 的 2 次观测值的差数。各差数的真值 $\tilde{d}_i=\tilde{L}'_i-\tilde{L}''_i=0$，因此，$d_i$ 也就是各差数的真误差。即

$$\Delta_{d_i}=d_i-\tilde{d}_i=(L'_i-L''_i)-(\tilde{L}_i-\tilde{L}_i)=d_i-0=d_i\tag{1-151}$$

按权倒数传播律可得 d_i 的权倒数为

$$\frac{1}{p_{d_i}}=\frac{1}{p_i}+\frac{1}{p_i}=\frac{2}{p_i}$$

即

$$p_{d_i}=\frac{p_i}{2}\tag{1-152}$$

这样，就得到了 n 个差数的真误差 Δ_{d_i} 和它们的权 p_{d_i}。

顾及式（1　151）和式（1－152），由公式

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{[p_d\Delta_d\Delta_d]}{n}}$$

可得由双观测值之差求单位权中误差的公式为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}\tag{1-153}$$

按式（1－103），可求得各观测值 L'_i 和 L''_i 的中误差为

$$\sigma'_{L_i}=\sigma''_{L_i}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{p_i}}\tag{1　154}$$

而第 i 对观测值的平均值 $x_i=\dfrac{L'_i+L''_i}{2}$ 的中误差为

$$\sigma_{x_i}=\frac{\sigma'_{L_i}}{\sqrt{2}}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2p_i}} \tag{1-155}$$

如果所有观测值 $L'_1,L'_2,\cdots,L'_n$ 和 $L''_1,L''_2,\cdots,L''_n$ 都是同精度的，可令它们的权 $p_i=1$，则由式(1-153)得各观测值的中误差为

$$\sigma_0=\sigma_L=\pm\sqrt{\frac{[dd]}{2n}} \tag{1-156}$$

而这时每对观测值的平均值 x_i 的中误差为

$$\sigma_{x_i}=\frac{\sigma_L}{\sqrt{2}} \tag{1-157}$$

例 1-14 设分5 段测定 A、B 两水准点间的高差，每段各测 2 次，其结果列于表 1-4 中。试求：(1)各段高差平均值及全长高差最或是值；(2)每公里观测高差的中误差；(3)第二段观测高差的中误差；(4)第二段高差的平均值的中误差；(5)全长 1 次(往或返)观测高差的中误差及全长高差平均值的中误差。

表 1-4

段号	高差/m			$d_i=L'_i-L''_i$ /mm	d_id_i	距离 S/km	$p_id_id_i=\dfrac{d_id_i}{S_i}$
	L'_i	L''_i	均值 x_i				
1	+3.248	+3.240	+3.244	+8	64	4.0	16.0
2	+0.348	+0.356	+0.352	−8	64	3.2	20.0
3	+1.444	+1.437	+1.440	+7	49	2.0	24.5
4	−3.360	−3.352	−3.356	−8	64	2.6	24.6
5	−3.699	−3.704	3.702	+5	25	3.4	7.4
[ ]			−2.022			15.2	92.5

解 (1) 各段高差平均值见表 1-4 中 x_i 列，该水准路线的全长高差最或是值为

$$[x_i]=-2.022\ \text{m}$$

(2) 令 $C=1$，即令 1 km 观测高差为单位权观测值。$[pdd]$ 的计算列于表 1-4 中。单位权中误差(每公里观测高差的中误差)为

$$\sigma_0=\sigma_{\text{km}}=\pm\sqrt{\frac{[pdd]}{2n}}=\pm\sqrt{\frac{92.5}{10}}=\pm3.0\ \text{mm}$$

(3) 第二段观测高差的中误差为

$$\sigma_2=\sigma_{\text{km}}\sqrt{\frac{1}{p_2}}=\pm3.0\sqrt{3.2}\approx\pm5.4\ \text{mm}$$

(4) 第二段高差平均值的中误差为

$$\sigma_{x_2}=\frac{\sigma_2}{\sqrt{2}}=\pm3.8\ \text{mm}$$

(5) 全长一次观测高差的中误差为

$$\sigma_{\text{全}}=\sigma_{\text{km}}\sqrt{[S]}=\pm3.0\sqrt{15.2}\approx\pm11.7\ \text{mm}$$

全长高差平均值的中误差为

$$\sigma_{x_{全}}=\frac{\sigma_{全}}{\sqrt{2}}=\pm\frac{11.7}{\sqrt{2}}=\pm 8.3\ \text{mm}$$

第八节　最小二乘原理

最小二乘原理(也称最小二乘法)是测量平差的理论基础,本书以后各章所介绍的平差方法的数学模型,都是以此为基础推演出来的。不但在测量领域,在生产实践的其他领域,在涉及误差处理和未知参数的估计时,最小二乘原理都被广泛应用。下面先以一个简单、直观的实例加以说明。

在生产实践中,经常会遇到利用一组观测数据来估计某些未知参数的问题。例如,已知或预测到某变化量 y 与另一变化量 τ 有线性变化的规律(如质点的匀速运动)。即

$$y=\alpha+\tau\beta \tag{1-158}$$

式中,α 是在 $\tau=0$ 时的初始函数值;β 是平均速度。α,β 都是待估计的未知参数,可见这类问题为线性参数的估计问题。现在要确定其变化方程。如果观测没有误差,则只要在两个不同时刻 τ_1 和 τ_2 观测出相应的 y_1 和 y_2,由式(1-158)分别建立两个方程,就可以解出 α 和 β 的值了。但是,实际上在观测时,由于误差影响,观测到的不是 y 而是 $L=y+\Delta$,Δ 是观测误差。于是有

$$L=y+\Delta=\alpha+\tau\beta+\Delta$$

这样,为了求得 α 和 β,就需要在不同的时刻 τ_1、τ_2、…、τ_n 来测定其位置,得一组观测值 L_1,L_2,…,L_n,此时上式又可以得到

$$L_i=\alpha+\tau_i\beta+\Delta_i \tag{1-159}$$

若令

$$L=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&\tau_1\\1&\tau_2\\\vdots&\vdots\\1&\tau_n\end{pmatrix},\quad \tilde{X}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix},\quad \Delta=\begin{pmatrix}\Delta_1\\\Delta_2\\\vdots\\\Delta_n\end{pmatrix}$$

则式(1-159)可以写成矩阵形式

$$L=A\tilde{X}+\Delta \tag{1-160}$$

式中,L 为观测向量,A 为已知的系数矩阵,$\tilde{X}$ 为待求的未知参数向量,Δ 为观测误差向量。

如果将对应的 L_i、τ_i($i=1,2,\cdots,n$)用图解来表示,则可作出如图 1-12 所示的图形。从图中可以看出,由于存在观测误差的缘故,虽然客观上是线性变化,但由观测数据展绘出的各观测点,并不能严格描绘成直线,而是有些"摆动"。

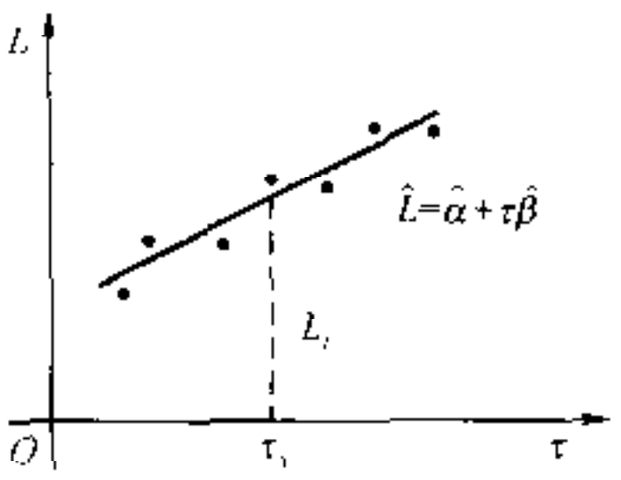


图 1-12

现在面临的问题是:如何根据这些离散的数据点拟合出该线性变化的估计方程。

$$\hat{L}_i=\hat{\alpha}+\tau_i\hat{\beta} \tag{1-161}$$

即用什么原则来对参数 α 和 β 进行估计，从而使估计直线 $\hat{L}=\hat{\alpha}+\tau\hat{\beta}$ "最佳"地拟合于诸观测点呢？这里的"最佳"一词可以有不同的理解。例如，可以认为：各观测点到直线的最大距离取最小值时，直线是"最佳"的；也可以认为，各观测点到直线的偏差的绝对值之和取最小值时，直线是"最佳"，等等。在不同的"最佳"要求下，可以求得该问题中不同的参数估值 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$。但是，在解这类问题时，一般是应用最小二乘原理。按照最小二乘原理的要求，认为"最佳"地拟合于诸观测点的估计直线，应使诸观测点到直线的偏差的平方和为最小。当然，最小二乘原理对于曲线估计也同样适用。

设观测值 L_i 的估值为 $\hat{L}_i=L_i+v_i$，v_i 是观测值 L_i 的改正数（或称偏差），则由式（1－161）可以写出

$$v_i=\hat{\alpha}+\tau_i\hat{\beta}-L_i \tag{1-162}$$

所谓最小二乘原理，就是在满足

$$\sum_{i=1}^{n}v_i^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{\alpha}+\tau_i\hat{\beta}-L_i)^2=\text{最小} \tag{1-163}$$

的条件下解出参数 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$。若令 $V^{\mathrm{T}}=[v_1,v_2,\cdots,v_n]$，则 $V=A\tilde{X}-L$，上式也可写为

$$\hat{X}=(\hat{\alpha}\quad\hat{\beta})^{\mathrm{T}}$$

$$V^{\mathrm{T}}V=(A\hat{X}-L)^{\mathrm{T}}(A\hat{X}-L)=\text{最小} \tag{1-164}$$

式中，$\hat{X}$ 表示未知参数的估计向量。式（1－164）的估计量 $\hat{X}$ 称为 $\tilde{X}$ 的最小二乘估计，这种求估计量的方法就称为最小二乘法。

从以上的推导可以看出，只要具有式（1－160）的线性关系的参数估计问题，则不论观测值属于何种统计分布，都可以按最小二乘原理进行参数的估计。换句话说，最小二乘估计是可以不考虑任何统计性质的一种估计方法，因此这种估计方法在实践中被广泛地应用。但是，如果观测列是服从正态分布的随机变量，那么，最小二乘估计和数理统计中的最大似然估计的观测结果是完全一致的，下面来说明这个问题。

设观测向量 $L_1,L_2,\cdots,L_n$ 为一组独立观测值，为使讨论更具有一般性，这里假设各观测值是不等精度的，即 L_i 是服从 $N(\mu_i,\sigma_i^2)$ 分布的随机变量。这些观测值出现的概率密度为

$$f(L_i)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(L_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}$$

按最大似然估计的基本思想，对未知量 X 的多次不等精度观测，相当于从 X 的不同样本分布中分别进行随机抽样。对于一组得到的观测值而言，它们在 n 次随机抽样中居然同时出现了，则可认为它们同时出现的概率

$$G=P\{x_1=L_1,x_2=L_2,\cdots,x_n=L_n\}=f(L_1)\cdot f(L_2)\cdots f(L_n)$$

为最大。上式称为似然函数。若令

$$L=\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{Bmatrix},\quad \mu_L=E(L)=\begin{Bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_n\end{Bmatrix},\quad D_{LL}=\begin{Bmatrix}\sigma_1^2&0&\cdots&0\\0&\sigma_2^2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&\sigma_n^2\end{Bmatrix}$$

则其似然函数（即 L 的联合密度函数）为

$$G=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|D_{LL}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(L-\mu_L)^{\mathrm{T}}D_{LL}^{-1}(L-\mu_L)\right\} \tag{1-165}$$

由式(1-160)并顾及 $E(\Delta)=0$,则知

$$\mu_L=E(L)=E(A\tilde{X})+E(\Delta)=A\tilde{X} \tag{1-166}$$

故式(1-165)可写为

$$G=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|D_{LL}|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(L-A\tilde{X})^{\mathrm{T}}D_{LL}^{-1}(L-A\tilde{X})\right\}$$

或

$$\ln G=-\ln\left\{(2\pi)^{n/2}|D_{LL}|^{1/2}\right\}-\frac{1}{2}\left\{(L-A\tilde{X})^{\mathrm{T}}D_{LL}^{-1}(L-A\tilde{X})\right\} \tag{1-167}$$

按最大似然估计的要求,应选取能使 $\ln G$ 取得极大值时的 X 作为其估计值量$\hat{X}$。由于上式右边的第二项前是负号,所以只有当该项取得极小值时,$\ln G$ 才能取得极大值,换言之,X 的估计量应满足以下条件:

$$(L-A\hat{X})^{\mathrm{T}}D_{LL}^{-1}(L-A\hat{X})=\min \tag{1-168}$$

因 $D_{LL}=\sigma_0^2Q_{LL}$,而

$$D_{LL}^{-1}=\frac{1}{\sigma_0^2}Q_{LL}^{-1}=\frac{1}{\sigma_0^2}\begin{pmatrix}p_1 & & & \\ & p_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & p_n\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma_0^2}P$$

故式(1-168)也可写成

$$\frac{1}{\sigma_0^2}(L-A\hat{X})^{\mathrm{T}}P(L-A\hat{X})=\min$$

式中,P 为权阵。考虑到上式中$(L-A\hat{X})=-V$,σ_0^2 是单位权方差,为常量,所以也就相当于要求

$$V^{\mathrm{T}}PV=\min \tag{1-169}$$

此即最小二乘原理的基本公式。当所有观测值均为等精度,即权均为 1,则上式为

$$V^{\mathrm{T}}V=\min \tag{1-170}$$

由此可见,当观测值为正态随机变量时,最小二乘估计可由最大似然估计导出,由以上两个准则出发,平差结果完全一致,且等精度是不等精度的一个特例。

例 1-15　设对某量 X 进行了 n 次等精度观测得 $\underset{n\times 1}{L}$,试按最小二乘原理求该量的估值(最或是值)。

解　设该量的估值为 x,则有

$$v_i=x-L_i$$

根据式(1-170)知。此时 $V^{\mathrm{T}}=[v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n]$应满足 $V^{\mathrm{T}}V=\min$。为此,将 $V^{\mathrm{T}}V$ 对 x 取一阶导数,并令其等于 0,得

$$\frac{\mathrm{d}V^{\mathrm{T}}V}{\mathrm{d}x}=2\underset{1\times n}{V^{\mathrm{T}}}\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}=2\sum_{i-1}^{n}v_i=0$$

将 $v_i = x - L_i$ 代入得

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = \sum_{i=1}^{n}(x - L_i) = nx - \sum_{i=1}^{n} L_i = 0$$

由此解得

$$x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = \frac{[L]}{n}$$

按最大似然估计法求得的参数值称为最似然值或最或是值，即在该种条件下最接近其真值的估值。因此，在测量中由最小二乘原理所求的估值也称为最或是值。

第九节　系统误差的传播

前几节所讨论的问题，是以观测值只含有偶然误差为前提的。也就是说，要求在测量过程中设法消除系统误差，但由于种种原因，观测成果中总是或多或少地存在残余的系统误差，这些系统误差的数值和符号随着观测条件的变化而变化。

由于系统误差产生的原因多种多样，它们的性质各不相同，因而只能对不同的具体情况采用不同的处理方法，不可能得到某些通用的处理方法。所以，对于残余的系统误差对成果的影响，也不可能有严密的计算方法。这里仅讨论估计系统误差的概念和一种在某些情况下可以应用的近似估算方法。

一、观测值的系统误差与综合误差的方差

设有观测值 L，观测量的真值为 $\tilde{L}$，则 L 的综合误差 Ω 可定义为

$$\underset{n\times 1}{\Omega} = \underset{n\times 1}{L} - \underset{n\times 1}{\tilde{L}}$$

如果综合误差 Ω 中只包含有偶然误差 Δ，由偶然误差的特性可知其数学期望应为 $E(\Omega) = E(\Delta) = 0$，如果 Ω 中除包含偶然误差 Δ 外，还包含系统误差 ε，即

$$\Omega = \Delta + \varepsilon = L - \tilde{L} \tag{1-171}$$

此时，由于系统误差 ε 不是随机变量，所以 Ω 的数学期望为

$$E(\Omega) = E(\Delta) + \varepsilon = \varepsilon \neq 0 \tag{1-172}$$

又因为

$$\varepsilon = E(\Omega) = E(L - \tilde{L}) = E(L) - \tilde{L} \tag{1-173}$$

所以，ε 也就是观测值 L 的数学期望对于观测量真值的偏差值，观测值 L 含的系统误差愈小，即 ε 愈小，则 L 的数学期望对于真值的偏差值愈小，即 L 愈准确。因此，有时也称 $\varepsilon = E(\Omega)$ 为 L 的准确度。

当观测值 L 中既存在偶然误差 Δ，又存在残余的系统误差 ε 时，常常用观测值的综合误差方差 $E(\Omega^2)$ 来表示观测值的可靠性。因为

$$\Omega^2 = \Delta^2 + 2\varepsilon\Delta + \varepsilon^2$$

其中系统误差 ε 是非随机量，所以综合误差的方差为

$$D_{LL} = E(\Omega^2) = E(\Delta^2) + 2\varepsilon E(\Delta) + \varepsilon^2$$

又因 $E(\Delta) = 0$，而 $E(\Delta^2)$ 是由偶然误差产生的方差 σ^2，故有

$$D_{LL} = E(\Omega^2) = \sigma^2 + \varepsilon^2 \tag{1-174}$$

即观测值的综合误差方差 D_{LL} 等于它的方差 σ^2 与系统误差的平方 ε^2 之和。

当系统误差 ε 为中误差 σ 的五分之一，即当 $\varepsilon = \sigma/5$ 时，则由式(1-174)得

$$\sigma_L = \sqrt{D_{LL}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{25}} = \sqrt{1.04}\sigma = 1.02\sigma$$

同样地，若 $\varepsilon = \sigma/3$ 时，则有

$$\sigma_L = \sqrt{D_{LL}} = \sqrt{\sigma^2 + \frac{\sigma^2}{9}} = \sqrt{1.11}\sigma = 1.05\sigma$$

由此可见，在这种情况下，如果不考虑系统误差的影响，对于前者，所求得的 σ_L 将减小 2%，对于后者，将减小 5%。因此，在实用上，如果系统误差部分是偶然误差部分的 $\frac{1}{3}$ 或者更小时，则可将系统误差的影响忽略不计。

二、系统误差的传播

由于某些观测值残余的系统误差的影响，使观测值函数也产生系统误差，称之为系统误差的传播。

$$\varepsilon_i = E(\Omega_i) = E(L_i) - \tilde{L}_i \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{1-175}$$

式中，$\tilde{L}_i$ 和 Ω_i 是 L_i 所对应的观测量的真值和综合误差。又设有线性函数

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 + \cdots + k_n L_n + k_0 \tag{1-176}$$

由上式容易写出函数的综合误差 Ω_Z 与各个 L_i 的综合误差 Ω_i 之间的关系式为

$$\Omega_Z = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \cdots + k_n\Omega_n \tag{1-177}$$

根据数学期望的运算规律可知

$$E(\Omega_Z) = k_1 E(\Omega_1) + k_2 E(\Omega_2) + \cdots + k_n E(\Omega_n)$$

所以得

$$\varepsilon_Z = E(\Omega_Z) = [k\varepsilon] \tag{1-178}$$

式(1－178)就是线性函数的系统误差的传播公式。

若函数 Z 是非线性形式，即

$$Z = f(L_1, L_2, \cdots, L_n) \tag{1-179}$$

也可以用微分关系代替它们的误差之间的关系，即有

$$\Omega_Z = \frac{\partial Z}{\partial L_1}\Omega_1 + \frac{\partial Z}{\partial L_2}\Omega_2 + \cdots + \frac{\partial Z}{\partial L_n}\Omega_n \tag{1-180}$$

令

$$k_i = \frac{\partial Z}{\partial L_i} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

则仍有

$$\Omega_Z = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \cdots + k_n\Omega_n$$

于是，同样可以得到式(1－178)的关系。因此式(1－178)也就是一般函数的系统误差传播公式。

三、系统误差与偶然误差的联合传播

当观测值中同时含有偶然误差和残余的系统误差时，还有必要考虑它们对观测值的函数的联合影响问题。这里只讨论独立观测值的情况。

设有函数

$$Z = k_1 L_1 + k_2 L_2 \tag{1-181}$$

式中，L_1 和 L_2 是独立观测值。假定它们的综合误差为

$$\left.\begin{aligned}\Omega_1 &= \Delta_1 + \varepsilon_1\\ \Omega_2 &= \Delta_2 + \varepsilon_2\end{aligned}\right\}$$

式中，Δ_1、Δ_2 和 ε_1、ε_2 分别为 L_1 和 L_2 包含的偶然误差和系统误差，并假定 L_1 和 L_2 由偶然误差产生的方差为 σ_1^2、σ_2^2。由式(1－181)可以写出它的误差关系

$$\Omega_Z = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 = (k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2) + (k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)$$

将等式两边平方，得

$$\Omega_Z^2 = k_1^2\Delta_1^2 + k_2^2\Delta_2^2 + 2k_1k_2\Delta_1\Delta_2 + (k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)^2 + 2(k_1\Delta_1 + k_2\Delta_2)(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)$$

再取数学期望，则函数 Z 的综合误差方差为

$$D_{ZZ} = E(\Omega_Z^2) = k_1^2E(\Delta_1^2) + k_2^2E(\Delta_2^2) + 2k_1k_2E(\Delta_1)E(\Delta_2) +$$
$$2(k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)(k_1E(\Delta_1) + k_2E(\Delta_2)) + (k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)^2$$

再顾及

$$\left.\begin{aligned}&E(\Delta_1) = E(\Delta_2) = 0\\ &E(\Delta_1^2) = \sigma_1^2,\quad E(\Delta_2^2) = \sigma_2^2\end{aligned}\right\}$$

所以得

$$D_{ZZ} = E(\Omega_Z^2) = k_1^2\sigma_1^2 + k_2^2\sigma_2^2 + (k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2)^2 \tag{1－182}$$

将上式的结果加以推广，对于线性函数

$$Z = k_1L_1 + k_2L_2 + \cdots + k_nL_n$$

它们的综合误差之间的关系为

$$\Omega_Z = k_1\Omega_1 + k_2\Omega_2 + \cdots k_n\Omega_n$$

则 Z 的综合误差方差为

$$D_{ZZ} = E(\Omega_Z^2) = [k^2\sigma^2] + [k\varepsilon]^2 \tag{1－183}$$

当 Z 为非线性函数时，亦可用它们的微分关系代替误差关系。此时，以上两式中的系数 k_i 即为偏导数 $\dfrac{\partial Z}{\partial L_i}$。

当上式中的 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 1$ 时，式(1－183)可写成

$$D_{ZZ} = [\sigma^2] + [\varepsilon]^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \cdots\sigma_n^2 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n)^2 \tag{1－184}$$

例 1－16 在用钢尺量距时，共量了 n 个尺段，设已知每一尺段的读数中误差为 σ，而检定误差为 ε，求全长的综合中误差。

解 量距的总长为

$$S = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&l_1 = l_2 = \cdots = l_n = l\\ &\sigma_1 = \sigma_2 = \cdots = \sigma_n = \sigma\\ &\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = \varepsilon\end{aligned}\right.$$

由式(1－184)知，全长的综合中误差为

$$\sigma_S^2 = n\sigma^2 + (n\varepsilon)^2$$

又因 $n = \dfrac{S}{l}$，所以还有

$$\sigma_S^2 = \frac{S}{l}\sigma^2 + \frac{S^2}{l^2}\varepsilon^2$$

思考题与习题

1－1　在相同的观测条件下，大量的偶然误差呈现出什么样的规律性？

1－2　在相同的观测条件下，对一个量进行了若干次观测，这些观测值的精度是否相同？在相同的观测条件下测得的观测值，能否理解为误差小的观测值一定比误差大的观测值精度高？

1－3　什么叫中误差？在等精度观测情况下，为什么中误差代表任意观测值的中误差？为什么只有当 n 很大时，所确定的中误差才是可靠的？

1－4　在什么情况下才应用相对误差？

1－5　已知两段距离的长度及其中误差为 300.465 m±4.5 cm，660.894 m±4.5 cm，试说明这两个长度的真误差是否相等？它们的精度是否相等？它们的相对精度是否相等？

1－6　何为误差（协方差）传播律？举例说明它是用来解决什么问题的？

1－7　在一个三角形中两角之观测值为 α、β，其中误差分别为 ±3″，±4″，试求出第三个角及其中误差？

1－8　测量一长方形厂房基地，长为 1 000 m±0.012 m；宽为 100 m±0.008 m。试求其面积及其中误差？

1－9　如果已知边长 S 及坐标方位角 α 的中误差各为 m_S 及 m_α，求坐标增量 $\Delta x = S\cdot\cos\alpha$ 及 $\Delta y = S\cdot\sin\alpha$ 的中误差 $m_{\Delta x}$，$m_{\Delta y}$。

1－10　在水准测量中，每站观测高差的中误差均为 ±1 cm，今要求从已知点推算至待定点的高程中误差不大于 ±5 cm，问可以设多少站？

1－11　若在两已知水准点间布设一条附合水准路线，已知每公里的观测中误差为 $m_h = \pm 5.0$ mm，欲使平差后最弱点的高程中误差 $m_H \leqslant 10$ mm，该路线长度最多可达几公里？

1－12　已知独立观测值 L_1，L_2 的中误差为 σ_1 和 σ_2，试求下列函数的中误差：

(1) $x = L_1 - 2L_2$　　(2) $y = \frac{1}{2}L_1^2 + L_1L_2$　　(3) $z = \sin L_1 / \sin(L_1 + L_2)$

1－13　已知观测向量 $L_{1\,n_1\times 1}$，$L_{2\,n_2\times 1}$，$L_{3\,n_3\times 1}$ 及其协方差阵为

$$\begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{pmatrix}$$

组成函数

$$\begin{cases} X = AL_1 + A_0 \\ Y = BL_2 + B_0 \\ Z = CL_3 + C_0 \end{cases}$$

式中 A，B，C 为系数阵；A_0，B_0，C_0 为常数。令 $W = (X^{\mathrm{T}} \quad Y^{\mathrm{T}} \quad Z^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$，试求协方差阵 D_{WW}。

1－14　设有观测向量 $L_{3\times 1}$，已知其协方差阵为

$$D_{LL} = \begin{pmatrix} 4 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

求下列函数的方差：(1) $F_1 = L_1 + 2L_2 - 3L_3$；(2) $F_2 = L_1 + 3L_2L_3$

1－15　权的定义是什么？权与中误差有何关系？有了中误差为什么还要引进权？

1－16　在△ABC 中，A 和 B 两角已经观测，其权都为 1，试求 C 角及其权？

1－17　设某角的三个观测值及它们的中误差分别为：30°41′20″±2″.0；30°41′26″±4″.0；30°41′26″±1″.0。试分别取 ±2″.0，±4″.0，±1″.0 作为 σ_0，按权的定义计算出三组不同的观测值的权，再按各组权分

别计算这个角的最或是值和它的中误差。

1－18　以同精度测得一三角形的三个角度 α'，β'，γ' 其权均为 1，现将三角形闭合差平均分配到各角，得 $\alpha=\alpha'-\frac{w}{3}$，$\beta=\beta'-\frac{w}{3}$，$\gamma=\gamma'-\frac{w}{3}$，式中 $w=\alpha'+\beta'+\gamma'-180°$，试求 w，α，β，γ 的权。

1－19　设函数 $\Delta x=S\cdot\cos\alpha$，$\Delta y=S\cdot\sin\alpha$，已知 S 的权为 P_S，α 的权为 P_α，试求 Δx，Δy 的权。

1－20　有一水准路线分三段进行测量，每段均作往、返观测。观测值如下：

路线长度/km	往测高差/m	返测高差/m
2.2	2.563	2.565
5.3	1.517	1.513
1.0	2.526	2.526

试求：(1) 各段单次观测高差中误差。

(2) 各段高差平均值的中误差。

(3) 全长单次观测高差的中误差。

(4) 全长双次观测高差平均值的中误差。

第二章　间接平差

第一节　测量平差概述

一、测量平差的观测值

在测量工程中，主要的目的是要确定某些几何量的大小。例如，为了求定一些点的高程而建立的水准网，为了求定某些点的坐标而建立平面控制网。前者的观测元素为高差，后者的观测值为角度和边长等元素。

在对每个元素进行野外观测时，为保证精度和检核，一般都进行 2 次或多次观测，在互差不超限时取平均值作为其最或是值。但它们仍然是有误差的。例如，对四等三角网的某个三角形的三个内角等精度地各观测 9 个测回，各取平均得到 3 个内角的最或是值。这对一个量(角度)来说问题解决了，但对一群量来说问题依然存在。这里所说的一群量是指一个三角形的三个内角，按三角形定理，三内角和应为 180°，所以只需观测两个角度就够了，第三个角度可以通过定理计算出来。现在三个角都测了，即产生一个多余观测。由于观测总是有误差，三个角度(指上述的平均值)之和就不等于 180°。对于这样的矛盾，就需用间接平差或条件平差等手段加以解决。这时每个观测要素的最或是值(平均值)就被作为平差计算的观测值了。

二、必要观测与多余观测

如上所述，为确定网中待定点高程或坐标等几何量，并不需要观测网中所有元素的大小，而只知道其中部分元素的大小就行了，其他元素可以通过它们来确定。例一：在图 2－1 的△ABC 中，为了确定 C 点的坐标，只要观测其中任意 2 个内角的大小即可。例二：在图 2－2 的水准网中，为了确定 B、C、D 点的高程，只要观测其中 3 个高差就行了。

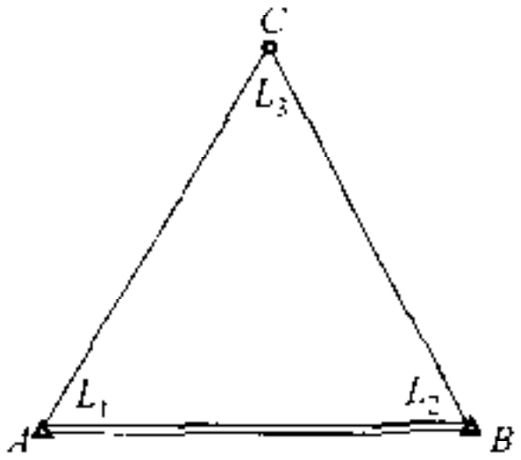


图 2－1

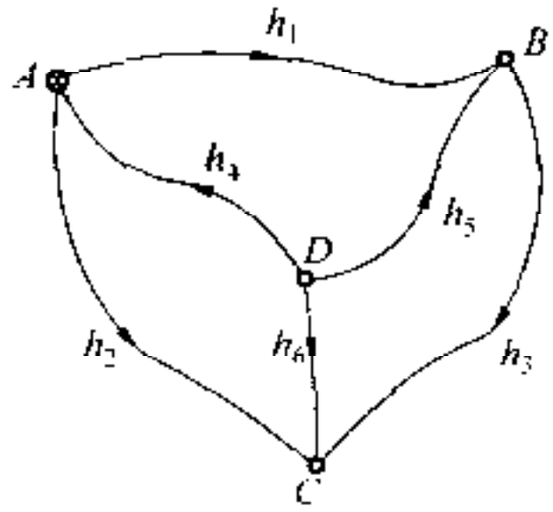


图 2－2

能够惟一地确定所有待定几何量的观测元素，称为必要观测；除了必要观测值以外的观测值称为多余观测。必要观测的个数用 t 来表示，多余观测的个数用 r 表示。若网中观测

值总个数为 n，显然

$$r = n - t \tag{2-1}$$

对于上述两种情况，分别是 $t=2$、$r=1$ 和 $t=3$、$r=3$。对于任意网型，它的 t 个必要观测之间必须不存在函数关系，相互独立，亦即其中任何一个不能表达成其余$(t-1)$个元素的函数。

在一个控制网中，除了 t 个独立量以外，若再增加一个量，则必然产生一个相应的函数关系式。仍以例一中情况为例，必要观测选为 L_1、L_2，若增加一个观测量 L_3，则存在"平差后三个角的最或是值之和应等于 180°"这样一个条件，即

$$\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 = 180^\circ \tag{2-2}$$

这样的式子在测量平差中称为"条件方程"。

诚然，如果没有多余观测就不会产生条件方程，也就不存在平差的问题，对单一量观测时道理也是如此。那么，为什么要进行多余观测呢？设总共观测了网中 n 个量的大小，若观测个数少于必要观测的个数，即 $n<t$，显然出现了数据不足的情况；若观测了 t 个独立量，即 $n=t$，可以惟一地确定所有待定量，但它们都是独立量，故不存在任何检核或条件方程。在这种情况下，如果观测结果中有粗差甚至错误，都将无法发现，故在测量工作中是不允许这样做的。为了能发现粗差和错误，并提高观测成果的精度，必须使 $n>t$。一个控制网如果有 r 个多余观测，就产生 r 个条件方程。由于观测值不可避免地存在观测误差，将观测值直接代入上述条件方程必不能满足，如例一中就有

$$L_1 + L_2 + L_3 \quad 180^\circ = w \neq 0 \tag{2-3}$$

产生条件方程的闭合差。式(2-3)中的 w，就是该三角形角度条件方程的闭合差。

由于观测不可避免地存在偶然误差，带来闭合差，使得观测值不能满足 $r=n-t$ 个条件方程。如何调整观测值，即对观测值合理地加上改正数，使其达到消除闭合差的目的，这是测量平差的主要任务。

三、测量平差的数学模型

一个测量平差的问题，首先要在观测值和待求量之间组成数学模型，然后采用最小二乘法对待求量进行估计，最后分析成果的精度。在测量工程中，涉及的是通过观测量确定某些几何量大小的数量问题，因而考虑的模型总是数学模型。平差的数学模型与一般数学只考虑函数模型不同，它还要考虑随机模型，因为观测量是一种随机变量。所以平差的数学模型同时包含函数模型和随机模型两种，在研究任何平差方法时予以考虑。

函数模型是描述观测量与待求量间的数学函数关系的模型；随机模型是描述观测量及其相互间统计性质的模型。建立这两种模型是测量平差中最基本的，也是需要首先考虑的问题。

对于一个实际平差问题，要建立不同形式的函数模型，与此同时，就产生了不同的平差方法。仍以图 2-1 为例：设 L_i 的平差值(最或是值)为 $\hat{L}_i$，同时设各观测值加上相应的改正数 v_i 即为最或是值，即

$$\hat{L}_i = L_i + v_i \quad (i=1,2,3) \tag{2-4}$$

这里若令

$$\hat{L}=\begin{pmatrix}\hat{L}_1\\ \hat{L}_2\\ \hat{L}_3\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{pmatrix}$$

则矩阵形式为

$$\hat{L}=L+V \tag{2-5}$$

将式(2－4)代入式(2－2)，并顾及式(2－3)得

$$v_1+v_2+v_3+w=0 \tag{2-6}$$

式(2－6)称为改正数条件方程，方程的个数等于多余观测的个数。对于一个控制网，会有 r 个这样的方程。若这里令

$$\underset{1\times 3}{A}=(1\quad 1\quad 1),\quad \underset{3\times 1}{V}=(v_1\quad v_2\quad v_3)^{\mathrm{T}},\quad \underset{1\times 1}{W}=(w)$$

则式(2－6)可写成

$$AV+W=0 \tag{2-7}$$

改正数方程是条件平差的函数模型。基于这种函数模型的平差方法称为条件平差法。

在一个控制网中，最多只能选出 t 个独立量，网中的所有观测量都可表达成所选 t 个独立未知参数的函数。如果在进行平差时，选网中 t 个独立量为平差参数，将每一个观测量表达成所有参数的函数，即列出 n 个函数关系式，以此为平差的函数模型，称为间接平差法，又称为参数平差法。

在图 2－1 的△ABC 中，观测量为三个内角。现选定∠A 和∠B 的最或是值为平差参数，设为 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$，则通过 $t=2$ 个参数可以惟一地确定该三角形的形状。将每个观测值表达为这两个未知参数的函数得

$$\left.\begin{aligned}\hat{L}_1&=\hat{x}_1\\ \hat{L}_2&=\hat{x}_2\\ \hat{L}_3&=180^\circ-\hat{x}_1-\hat{x}_2\end{aligned}\right\} \tag{2-8}$$

式(2－8)称为平差值方程。用矩阵可表示为

$$\underset{n\times 1}{\hat{L}}=\underset{n\times u}{B}\underset{u\times 1}{\hat{X}}+\underset{n\times 1}{d} \tag{2-9}$$

此时
$$\hat{L}=\begin{pmatrix}\hat{L}_1\\ \hat{L}_2\\ \hat{L}_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad \hat{X}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\ \hat{x}_2\end{pmatrix},\quad d=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 180^\circ\end{pmatrix}$$

将式(2－5)代入上式，并令

$$l=d-L \tag{2-10}$$

则有

$$V=B\hat{L}+l \tag{2-11}$$

式(2－11)称为误差方程，是间接平差的基本函数模型。

无论何种平差方法，其基本数据都是观测向量 $\underset{n\times 1}{L}$，因此平差时除建立其函数模型外，还

要同时考虑其随机模型，即观测向量的协方差阵：

$$\underset{n\times n}{D}=\sigma_0^2\underset{n\times n}{Q}=\sigma_0^2\underset{n\times n}{P^{-1}} \tag{2-12}$$

式中，D 为 L 的协方差阵，Q 为 L 的协因数阵，P 为 L 的权阵，Q 与 P 互为逆阵，σ_0^2 为单位权方差。以上各种平差方法的函数模型连同式(2－12)的随机模型，总称为平差方法的数学模型。

在进行平差计算之前，必须同时建立其函数模型和随机模型。前者可以按上述介绍的方法建立；对于后者，一般情况下，观测向量的协方差阵 D 在平差前都是未知的，一般都是先确定观测值的权阵 P，通过平差计算求出 σ_0^2 后，再求得 $D=\sigma_0^2Q$。

第二节　间接平差原理

间接平差法是通过选定 t 个独立参数，将每个观测量分别表达成 t 个参数的函数，建立函数模型，按最小二乘原理，用求自由极值的方法解出参数的最或是值，从而得到各观测值的平差值。

在上节中已经简述了间接平差建立函数模型和随机模型的方法，其随机模型为式(2－12)，函数模型为

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times t}{B}\underset{t\times 1}{\hat{X}}+\underset{n\times 1}{l} \tag{2-13}$$

式(2－13)表达了参数估值 $\hat{X}$ 观测值与改正数 V 之间的函数关系，称为误差方程。

由于误差方程个数为 n，待求量 X 和 V 的总数为 $n+t$，而 $n<n+t$，式(2－13)具有无穷多组解，但可按最小二乘原理，在 $V^{\mathrm{T}}PV=\min$ 下求得其惟一解。下面导出间接平差的计算公式。

一、间接平差的基础方程及其解

设某平差问题中有 n 个观测值 L，已知其协因数阵 $Q=P^{-1}$，必要观测数为 t，选定 t 个独立量为参数 X，其估计为 $\hat{X}$，观测值 L 的平差值为 $\hat{L}=L+V$。按具体平差问题，可列出 n 个平差值方程为

$$\left.\begin{aligned}
L_1+v_1&=b_{11}\hat{x}_1+b_{12}\hat{x}_2+\cdots+b_{1t}\hat{x}_t+d_1\\
L_2+v_2&=b_{21}\hat{x}_1+b_{22}\hat{x}_2+\cdots+b_{2t}\hat{x}_t+d_2\\
&\cdots\cdots\\
L_n+v_n&=b_{n1}\hat{x}_1+b_{n2}\hat{x}_2+\cdots+b_{nt}\hat{x}_t+d_n
\end{aligned}\right\} \tag{2-14}$$

令

$$\underset{n\times 1}{L}=\begin{pmatrix}L_1\\L_2\\\vdots\\L_n\end{pmatrix},\quad \underset{n\times 1}{V}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix},\quad \underset{t\times 1}{\hat{X}}=\begin{pmatrix}\hat{x}_1\\\hat{x}_2\\\vdots\\\hat{x}_t\end{pmatrix},\quad \underset{n\times 1}{d}=\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\\vdots\\d_n\end{pmatrix},\quad \underset{n\times t}{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1t}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nt}\end{pmatrix}$$

则平差值方程的矩阵形式为

$$L+V=B\hat{X}+d \tag{2-15}$$

如果引入待求未知量 $\hat{x}_i$ 的近似值 x_i^0，即令

$$\hat{x}_i = x_i^0 + \delta x_i \tag{2-16}$$

矩阵形式为

$$\hat{X} = X^0 + \delta X \tag{2-17}$$

式中

$$X^0 = \begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_t^0 \end{Bmatrix}, \quad \delta X = \begin{Bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \\ \vdots \\ \delta x_t \end{Bmatrix}$$

且令

$$l = (BX^0 + d) - L \tag{2-18}$$

于是得误差方程式为

$$\underset{n\times 1}{V} = \underset{n\times t}{B}\ \underset{t\times 1}{\delta X} + \underset{n\times 1}{l} \tag{2-19}$$

按最小二乘原理，上式的 δX 必须满足 $V^{\mathrm{T}}PV = \min$ 的要求，因为 t 个参数为独立量，故可按数学上求函数自由极值的方法，得

$$\frac{\partial V^{\mathrm{T}}PV}{\partial \delta \hat{X}} = 2V^{\mathrm{T}}P\frac{\partial V}{\partial \delta \hat{X}} = 2V^{\mathrm{T}}PB = 0$$

转置后得

$$\underset{t\times n}{B^{\mathrm{T}}}\ \underset{n\times m}{P}\ \underset{m\times 1}{V} = 0 \tag{2-20}$$

以上式(2－19)和式(2－20)中的待求量是 n 个 v 和 t 个 δx，而方程个数也是 $n+t$ 个，有惟一解，称此两式为间接平差的基础方程。

解此基础方程，一般是将式(2－19)代入式(2－20)，以便先消去 V，得

$$B^{\mathrm{T}}PB\delta X + B^{\mathrm{T}}Pl = 0 \tag{2-21}$$

令

$$\underset{t\times t}{N} = B^{\mathrm{T}}PB, \quad \underset{t\times 1}{W} = B^{\mathrm{T}}Pl$$

上式可简写成

$$N\delta X + W = 0 \tag{2-22}$$

式中系数阵 N 为满秩，即 $R(N) = t$，δX 有惟一解。上式称为间接平差的法方程，解之得

$$\delta X = -N^{-1}W \tag{2-23}$$

或

$$\delta X = -(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl \tag{2-24}$$

将求出的 δX 代入误差方程式(2－17)及式(2－19)，即可求得平差结果为

$$\hat{X} = X^0 + \delta X, \quad \hat{L} = L + V \tag{2-25}$$

法方程式的纯量形式为

$$\left.\begin{aligned} n_{11}\delta x_1 + n_{12}\delta x_2 + \cdots + n_{1t}\delta x_t + w_1 = 0 \\ n_{21}\delta x_1 + n_{22}\delta x_2 + \cdots + n_{2t}\delta x_t + w_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ n_{t1}\delta x_1 + n_{t2}\delta x_2 + \cdots + n_{tt}\delta x_t + w_t = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-26}$$

当 P 为对角阵时，即观测值间相互独立，法方程系数及常数项的计算式分别为

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_{ki} b_{kj} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,t) \tag{2-27}$$

和

$$w_i = \sum_{k=1}^{n} p_k b_{ki} l_k \qquad (i = 1,2,\cdots,t) \tag{2-28}$$

当 P 为非对角阵时，法方程系数及常数项的计算式分别为

$$n_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} p_{km} b_{ki} b_{mj} \qquad (i,j = 1,2,\cdots,t) \tag{2-29}$$

和

$$w_i = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} p_{km} b_{ki} l_m \qquad (i = 1,2,\cdots,t) \tag{2-30}$$

二、按间接平差法求平差值的计算步骤

根据上述原理，间接平差的计算步骤如下：

(1) 根据平差问题确定必要观测个数 t，选定 t 个独立未知量作为未知参数；

(2) 将每个观测量的平差值分别表达为所选未知数的函数，即列出平差值方程，并转化成误差方程。误差方程的个数等于观测值的个数；

(3) 由误差方程系数 B 和自由项 l 组成法方程，其个数等于未知数的个数 t；

(4) 解算法方程，求解未知参数 δX，计算未知数的平差值 $\hat{X} = X^0 + \delta X$；

(5) 将未知参数代入误差方程，计算改正数 V，并求观测值的平差值 $\hat{L} = L + V$。

例 2-1 如图2-3 所示，水准网中 P_1、P_2、P_3 为待定点，测得各路线高差及长度分别为：$h_1 = +1.335$ m，$S_1 = 2$ km；$h_2 = +0.055$ m，$S_2 = 2$ km；$h_3 = -1.396$ m，$S_3 = 3$ km。若令 2 km 路线上的观测高差为单位权观测，试用间接平差法求高差的平差值。

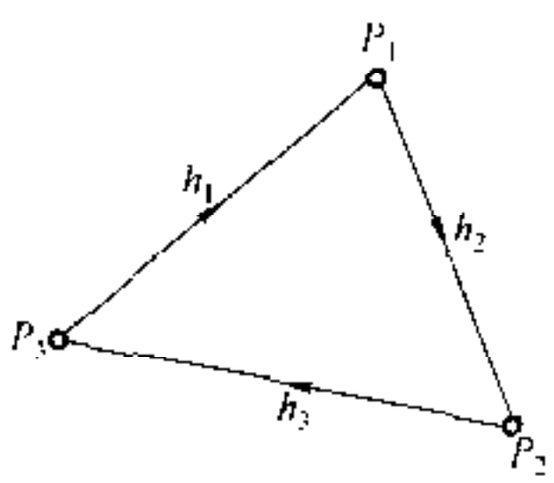


图 2-3

解 (1) 依题意必要观测个数 $t=2$，选取待定高差 h_1、h_2 的平差值为未知数 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$，设未知数的近似值为 $x_1^0 \approx h_1$，$x_2^0 \approx h_2$。

(2) 列出 $3=n$ 个平差值方程

$$h_1 + v_1 \approx \hat{x}_1$$
$$h_2 + v_2 \approx \hat{x}_2$$
$$h_3 + v_3 \approx -\hat{x}_1 - \hat{x}_2$$

将观测值移至等号右侧，并将近似值代入，即得误差方程

$$v_1 = \delta x_1$$
$$v_2 = \delta x_2$$
$$v_3 = -\delta x_1 - \delta x_2 - (x_1^0 + x_2^0 + h_3)$$

将观测值代入，为计算方便以 mm 为单位，得

$$v_1 = \delta x_1$$
$$v_2 = \delta x_2$$
$$v_3 = -\delta x_1 - \delta x_2 + 6$$

取 2 km 的观测高差为单位权中观测，即按 $P_i=\frac{C}{S_i}=\frac{2}{S_i}$ 定权，得各个观测值的权分别为：$P_1=1, P_2=2, P_3=0.67$。

(3) 按式(2－26)组成法方程，并解得

$$1.67\delta x_1+0.67\delta x_2-4.02=0$$

$$0.67\delta x_1+1.67\delta x_2-4.02=0$$

$$\delta x_1=1.72\ \text{mm},\quad \delta x_2=1.72\ \text{mm}$$

(4) 将未知数代入误差方程，计算改正数 V 及平差值

$$V=[1.72\quad 1.72\quad 2.56]^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{h}=[1.337\quad 0.0567\quad -1.394]^{\mathrm{T}}$$

第三节　误 差 方 程

利用间接平差法进行平差计算，第一步就是建立间接平差的函数模型，即误差方程。为此，首先要确定必要观测数 t，明确 t 个独立参数的选择方法，再根据具体平差问题列出误差方程。

一、确定未知参数的个数

在间接平差中，未知参数的个数必须等于必要观测的个数 t，而且要求这 t 个参数必须是独立的。这样才能有可能将每个观测量表达成这 t 个参数的函数，而这些类型的函数式正是间接平差函数模型的基本形式。

就高程网而言，如果网中有高程已知点的水准点，则 t 就等于待定点的个数；若无已知点，则等于全部点数减 1，因为这时要假定一点的高程为已知，以作为全网高程的基准。

对于平面控制网，一般每确定一个待定点的坐标，需求两个必要观测点(两个角，两个边，或一角 一边)。因此如果网中具有必要的起算数据(如两个点的已知坐标)，则 t 等于待定点数的 2 倍；否则要从中扣除必要的起算数据的个数。

二、参数的选择

在水准网中，一般选取待定点高程作为最或是值参数，也可以选取点间的高差作为最或是值参数，例如在图 2－2 中，必要观测 $t=3$，可以选取三个待定点的高程作为未知参数。如果选取高差作为参数，只要任意 3 个独立的高差就可以。例如可选取高差 1、2、4 或 1、5、6 等等作为未知参数，但不能选 1、4、5 等高差为参数，因为 $\hat{h}_1-\hat{h}_4+\hat{h}_5=0$，即三个未知参数间函数相关。

在平面网中，一般都是选取待定点的坐标最或是值为参数，这时的平差问题也称为坐标平差。如图 2－4 中 A、B、C 是已知坐标的三角点，D 是待定点。为求 D 点的坐标，观测 6 个水平角。此例，必要观测数 $t=2$，通常选取 D 点的纵横坐标的最或是值为参数，这样的参数总是相互独立的。此外，也可选取两个独立观测角度的最或是值为参数，但不能选取 $\hat{L}_2$ 和 $\hat{L}_4$，因为 $\hat{L}_2+\hat{L}_4=\angle BAC$。

三、平差值方程和误差方程的列出

通过例 2－1 看出，在参数选定以后，通常参照平差问题的图形和性质，先将各观测值的

平差值 $\hat{L}_i$ 表达为 t 个未知参数 $\hat{x}_i$ 的函数，即列出平差值方程式；然后将 $\hat{L}_i = L_i + v_i$ 和 $\hat{x}_i = x_i^0 + \delta x_i$ 代入，得到误差方程。水准网误差方程是参数的线性函数，顾及相应的权 p_i 就可以组成法方程，利用矩阵和其他方式求解即得未知数。

在图 2－4 中，不管选择怎样的一组参数，都将出现非线性形式的平差值方程。设以 D 点坐标 $\hat{x}_D$ 和 $\hat{y}_D$ 为参数，由图可列出第一个平差值方程为

$$\hat{L}_1 = \hat{\alpha}_{DB} - \hat{\alpha}_{DA} = \arctan\frac{y_B - \hat{y}_D}{x_B - x_D} - \arctan\frac{y_A - \hat{y}_D}{x_A - x_D} \tag{2-31}$$

式中 (x_A, y_A)，(x_B, y_B) 为已知点 A 和 B 的坐标。上式为非线性方程。

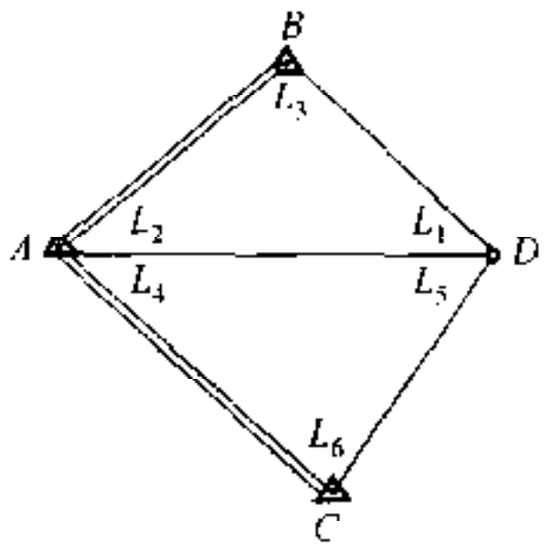


图 2－4

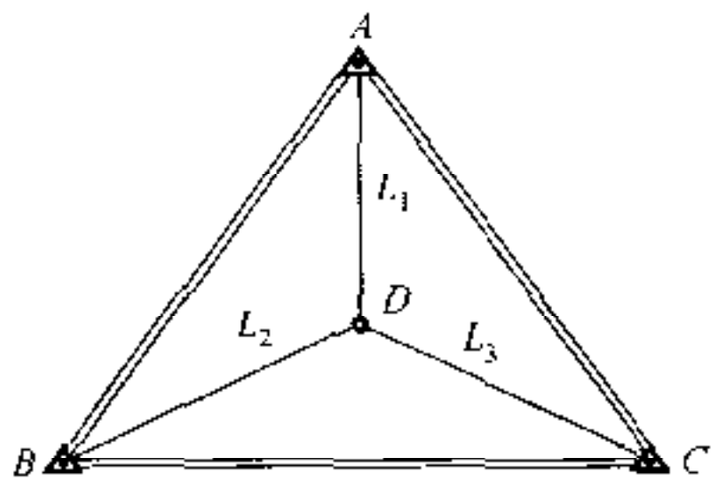


图 2－5

又如图 2－5 测边交会图形来说，若选择待定点 D 的坐标为参数，平差值为 $\hat{x}_D$、$\hat{y}_D$，由图可列出其中第 1 个边长的平差值方程为

$$\hat{L}_1 = \sqrt{(\hat{x}_D - x_A)^2 + (\hat{y}_D - y_A)^2} \tag{2-32}$$

它们也是非线性函数。

由于平面控制网的平差值方程一般为参数的非线性函数，因此组成误差方程时要有个线性化的过程。

四、误差方程线性化

将非线性方程的一般形式

$$\hat{L}_i = L_i + v_i = f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_t) \tag{2-33}$$

或

$$v_i = f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_t) - L_i \tag{2-34}$$

按台劳公式展开得

$$v_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_t^0) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_1}\right)_0 \delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_2}\right)_0 \delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_t}\right)_0 \delta x_t - L_i \tag{2-35}$$

令

$$b_{i1} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_1}\right)_0, \quad b_{i2} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_2}\right)_0, \cdots, b_{it} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial \hat{x}_t}\right)_0 \tag{2-36}$$

$$l_i = f_i(x_1^0, x_2^0, \cdots x_t^0) - L_i = L_i^0 - L_i \tag{2-37}$$

式中，L_i^0 为相应的函数的近似值，自由项 l_i 为近似值 L_i^0 与相应观测值 L_i 之差。因此式(2－35)为

$$v_i = b_{i1}\delta x_1 + b_{i2}\delta x_2 + \cdots + b_{it}\delta x_t + l_i \tag{2-38}$$

从而达到误差方程线性化的目的。

下面针对测角网、测边网和边角网，来讨论相应误差方程的线性化问题。

1. 测角网坐标平差的误差方程及线性化

从式(2－31)可以看出，角度改正数 v_i 与坐标改正数 δx_D、δy_D 之间通过方位角改正数 $\delta\alpha$ 相联系。因此先确定方位角改正数与坐标改正数之间的关系式。

在图 2－6 中，j、k 是两个待定点，它们的近似坐标为 x_j^0、y_j^0、x_k^0 和 y_k^0，据此可以计算 j、k 两点间的近似坐标方位角 α_{jk}^0 和近似边长 S_{jk}^0。设这两点的近似坐标的改正数为 δx_j、δy_j、δx_k 和 δy_k，即

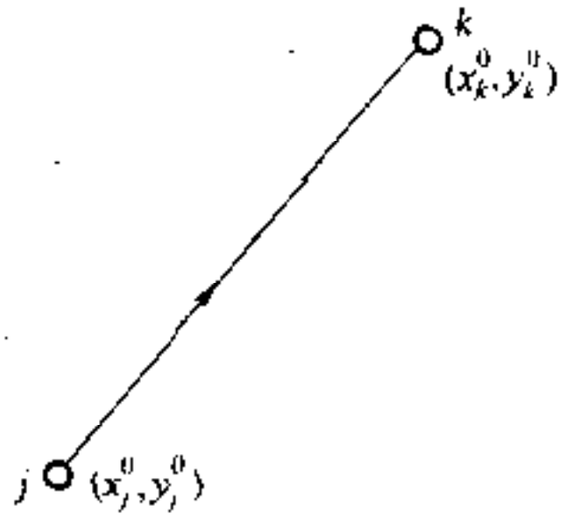


图 2－6

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}_j &= x_j^0 + \delta x_j\\ \hat{y}_j &= y_j^0 + \delta y_j\end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned}\hat{x}_k &= x_k^0 + \delta x_k\\ \hat{y}_j &= y_k^0 + \delta y_k\end{aligned}\right\}$$

由近似坐标改正数引起的近似坐标方位角的改正数为 $\delta\alpha_{jk}$，即

$$\hat{\alpha}_{jk} = \alpha_{jk}^0 + \delta\alpha_{jk} \tag{2-39}$$

现在来求坐标改正数 δx_j、δy_j、δx_k、δy_k 与坐标方位角改正数 $\delta\alpha_{jk}$ 之间的关系式。

根据图 2－6 可以写出：

$$\hat{\alpha}_{jk} = \arctan\frac{\hat{y}_k - \hat{y}_j}{\hat{x}_k - \hat{x}_j}$$

将上式微分，得

$$\mathrm{d}\hat{\alpha}_{jk} = \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_j}\right)_0\mathrm{d}\hat{x}_j + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_j}\right)_0\mathrm{d}\hat{y}_j + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_k}\right)_0\mathrm{d}\hat{x}_k + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_k}\right)_0\mathrm{d}\hat{y}_k$$

以坐标改正数和方位角改正数分别取代它们的微分符号，有

$$\delta\hat{\alpha}_{jk} = \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_j}\right)_0\delta\hat{x}_j + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_j}\right)_0\delta\hat{y}_j + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_k}\right)_0\delta\hat{x}_k + \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_k}\right)_0\delta\hat{y}_k \tag{2-40}$$

式中

$$\left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_j}\right)_0 = -\frac{\dfrac{y_k^0 - y_j^0}{(x_k^0 - x_j^0)^2}}{1 + \left(\dfrac{y_k^0 - y_j^0}{x_k^0 - x_j^0}\right)^2} = \frac{y_k^0 - y_j^0}{(x_k^0 - x_j^0)^2 + (y_k^0 - y_j^0)^2} = \frac{\Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}$$

同理得

$$\left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_j}\right)_0 = -\frac{\Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2},\quad \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{x}_k}\right)_0 = -\frac{\Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2},\quad \left(\frac{\partial\hat{\alpha}_{jk}}{\partial\hat{y}_k}\right)_0 = \frac{\Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}$$

将上列结果代入式(2－40)，并顾及全式的单位，得

$$\delta\alpha''_{jk} = \frac{\rho''\Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\delta x_j - \frac{\rho''\Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\delta y_j - \frac{\rho''\Delta y_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\delta x_k + \frac{\rho''\Delta x_{jk}^0}{(S_{jk}^0)^2}\delta y_k \tag{2-41}$$

其中 $\delta\alpha''_{jk}$ 以秒为单位。计算时 Δx_{jk}^0、Δy_{jk}^0、S_{jk}^0 以 m 为单位，δx、δy 因其数值较小，以 dm 为单位，则上式变为

$$\delta\alpha''_{jk}=\frac{\rho''\Delta y^0_{jk}}{(S^0_{jk})^2\times 10}\delta x_j-\frac{\rho''\Delta x^0_{jk}}{(S^0_{jk})^2\times 10}\delta y_j-\frac{\rho''\Delta y^0_{jk}}{(S^0_{jk})^2\times 10}\delta x_k+\frac{\rho''\Delta x^0_{jk}}{(S^0_{jk})^2\times 10}\delta y_k \quad (2-42)$$

令

$$a_{jk}=\frac{\rho''\Delta y^0_{jk}}{10(S^0_{jk})^2},\quad b_{jk}=-\frac{\rho''\Delta x^0_{jk}}{10(S^0_{jk})^2} \quad (2-43)$$

a_{jk}和b_{jk}称为方向系数,代入式(2-42)则有

$$\delta\alpha''_{jk}=a_{jk}\delta x_j+b_{jk}\delta y_j-a_{jk}\delta x_k-b_{jk}\delta y_k \quad (2-44)$$

这就是坐标方位角改正数与坐标改正数间的一般关系式。

因为角度是由两条边构成,有了方位角改正数与坐标改正数的关系,便可轻易导出角度观测值改正数与坐标改正数的关系式。如图2-7所示,其观测值方程为

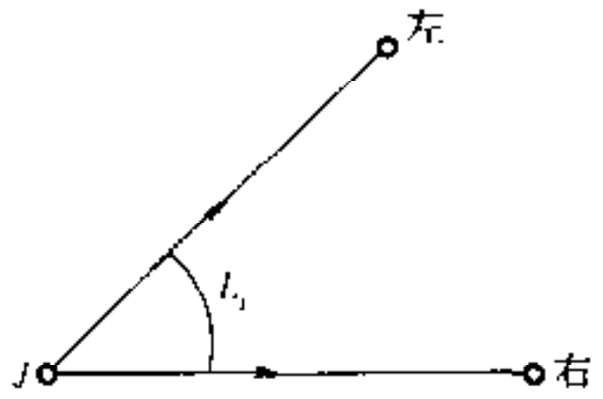


图2-7

$$L_i+v_i=\hat{\alpha}_{j右}-\hat{\alpha}_{j左} \quad (2-45)$$

将$\hat{\alpha}=\alpha^0+\delta\alpha$代入,并令

$$l_i=(\alpha^0_{j右}-\alpha^0_{j左})-L_i=L^0_i-L_i \quad (2-46)$$

可得

$$v_i=\delta\alpha_{j右}-\delta\alpha_{j左}+l_i \quad (2-47)$$

因

$$\delta\alpha''_{j右}=a_{j右}\delta x_j+b_{j右}\delta y_j-a_{j右}\delta x_{右}-b_{j右}\delta y_{右}$$
$$\delta\alpha''_{j左}=a_{j左}\delta x_j+b_{j左}\delta y_j-a_{j左}\delta x_{左}-b_{j左}\delta y_{左}$$

代入式(2-47)得

$$v_i=(a_{j右}-a_{j左})\delta x_j+(b_{j右}-b_{j左})\delta y_j-a_{j右}\delta_{x右}-b_{j右}\delta y_{右}+$$
$$a_{j左}\delta x_{左}+b_{j左}\delta y_{左}+l_i \quad (2-48)$$

这就是测角网坐标平差时角度的误差方程。

此式可根据该角的三个端点(j、右、左)是已知点还是待定点灵活运用:

(1) 当j、右和左点都是待定点时,误差方程即为式(2-48);

(2) 若测站点j、照准点(右、左)中的一个或两个为已知点,则相应的$\delta x=\delta y=0$,即已知点不加坐标改正数。这时式(2-48)有所简化。

综上所述,对于测角网,采用间接平差,选择待定点的坐标为参数时,列误差方程的步骤为:

(1) 计算各待定点的近似坐标x^0,y^0。

(2) 由待定点的近似坐标和已知点的坐标计算各未知边的近似坐标方位角α^0和近似边长S^0。

(3) 按式(2-43)计算各边的方向系数a、b。

因为

$$a_{kj}=\frac{\rho''\Delta y^0_{kj}}{10(S^0_{kj})^2},\quad b_{kj}=-\frac{\rho''\Delta x^0_{kj}}{10(S^0_{kj})^2}$$

对照式(2-43),顾及

$$\left.\begin{aligned}\Delta y_{jk}^0 &= -\Delta y_{kj}^0\\ \Delta x_{jk}^0 &= -\Delta x_{kj}^0\end{aligned}\right\}$$

有

$$a_{kj} = -a_{jk},\quad b_{kj} = -b_{jk}$$

据此，实际计算时，每条边只需计算一对方向系数即可，当方向相反时反号使用。特别地，对于已知边，因 δx、δy 皆为 0，计算方向系数已无意义。

(4) 按式(2－45)、式(2－46) 及式(2－48)列出误差方程。

例 2－2　同精度测得图2－4 中的六个角度 $L_1, L_2, \cdots, L_6$，其观测值列于表 2－1 中；已知点 B、A、C 的起算数据列于表 2－2 中。试以待定点 D 的坐标为参数，列出线性误差方程并求出平差值。

表 2－1

角　号	观测值 L_i /(° ′ ″)	角　号	观测值 L_i /(° ′ ″)
1	106 50 42.2	4	28 26 05.0
2	30 52 44.0	5	127 48 41.2
3	42 16 39.1	6	23 45 16.2

表 2－2

点　名	坐标/m		坐标方位角 α /(° ′ ″)	边长 S /m
	x	y		
B	13 737.37	10 501.92		
			225 16 38.1	6 751.24
A	8 986.68	5 705.03		
			104 35 24.3	9 306.84
C	6 642.27	14 711.75		

解　(1) 由已知点 B、A 和观测值 L_3、L_2，按前方交会公式计算待定点 D 的近似坐标

$$x_D^0 = \frac{x_A\cot L_3 + x_B\cot L_2 - y_B + y_A}{\cot L_2 + \cot L_3} = 10\ 122.12\ \text{m}$$

$$y_D^0 = \frac{y_A\cot L_3 + y_B\cot L_2 + x_B - x_A}{\cot L_2 + \cot L_3} = 10\ 312.47\ \text{m}$$

(2) 由已知点坐标和待定点近似坐标计算未知边的近似坐标方位角 α^0 和近似边长 S^0，见表 2－3。

表 2－3

方　向	近似坐标方位角 α^0 /(° ′ ″)	近似边长 S^0/m
DA	256 09 22.0	4 745
DB	2 59 59.0	3 620
DC	128 20 39.0	5 609

(3) 按式(2－43)计算方向系数。计算时边长和坐标增量以 m 为单位。对于已知边，因 $\delta\alpha = 0$，故不必计算。本例只需计算三条边的方向系数即可。有关系数的计算见表 2－4。

表 2－4

方　向	Δy^0/m	Δx^0/m	$(S^0)^2$/m^2	方向系数/s·dm^{-1}	
				a	b
DA	4 607	−1 135	$2\,252\times10^4$	−4.22	+1.04
DB	189	3 615	$1\,311\times10^4$	+0.30	−5.69
DC	4 399	−3 480	$3\,146\times10^4$	+2.88	+2.28

(4) 根据以上数据可以按式(2－48)写出误差方程式

$$\left.\begin{aligned} v_1&=4.52\delta x_D-6.73\delta y_D-5.2\\ v_2&=-4.22\delta x_D+1.04\delta y_D-0.1\\ v_3&=-0.30\delta x_D+5.69\delta y_D+0.0\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} v_4&=4.22\delta x_D-1.04\delta y_D-2.7\\ v_5&=-7.10\delta x_D-1.24\delta y_D+1.8\\ v_6&=2.88\delta x_D+2.28\delta y_D-1.5\end{aligned}\right\}$$

式中的常数项 l_i 按式(2－46)计算。

如果把属于同一个三角形的三个误差方程求和，其未知数部分自相抵消，而常数项之和就等于该三角形的闭合差反号。我们可以此作为误差方程列立是否正确的检核。

(5) 组成法方程，求参数及观测量的平差值。

由误差方程组成法方程

$$\begin{pmatrix}114.84 & -25.53\\ -25.53 & 86.57\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_D\\ \delta y_D\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-51.58\\ 32.05\end{pmatrix}=0$$

解算法方程，得

$$\delta x_D=0.393\ \text{dm}$$

$$\delta y_D=-0.254\ \text{dm}$$

代入误差方程计算观测值的改正数和平差值，并计算待定点 D 的坐标平差值，得

$$V=\begin{pmatrix}-1.7''\\ -2.0\\ -1.6\\ -0.8\\ -0.7\\ -0.9\end{pmatrix},\quad \hat{L}=\begin{pmatrix}106^\circ & 50' & 40.5''\\ 30 & 52 & 42.0\\ 42 & 16 & 37.5\\ 28 & 26 & 04.2\\ 127 & 48 & 40.5\\ 23 & 45 & 15.3\end{pmatrix},\quad \left.\begin{aligned}\hat{x}_D&=10\,122.16\ \text{m}\\ \hat{y}_D&=10\,312.44\ \text{m}\end{aligned}\right\}$$

2. 测边网坐标平差的误差方程列立与线性化

现在来讨论，在测边网平差中，选择待定点的坐标为参数时的误差方程的线性化问题。

先讨论一般情况。在图 2－8 中，测得两个待定点 j、k 间的边长 S_{jk}，以待定点的坐标平差值为参数，并令

$$\hat{x}_j=x_j^0+\delta x_j,\quad \hat{y}_j=y_j^0+\delta y_j$$

$$\hat{x}_k=x_k^0+\delta x_k,\quad \hat{y}_k=y_k^0+\delta y_k$$

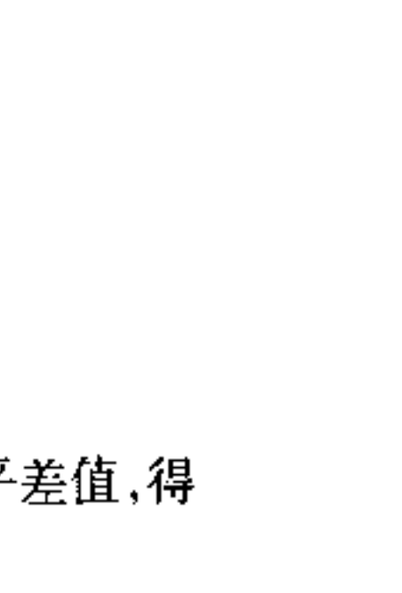


图 2－8

S_{jk}的平差值方程为

$$\hat{S}_{jk} = S_{jk} + v_{jk} = \sqrt{(\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2} \tag{2-49}$$

或

$$v_{jk} = \sqrt{(\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2} - S_{jk} \tag{2-50}$$

由于

$$\sqrt{(\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2} = S^0_{jk} + d\sqrt{(\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2}$$

而

$$d\sqrt{(\hat{x}_k - \hat{x}_j)^2 + (\hat{y}_k - \hat{y}_j)^2} = \frac{\Delta x^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta x_k + \frac{\Delta y^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta y_k - \frac{\Delta x^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta x_j - \frac{\Delta y^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta y_j$$

再令

$$l_{jk} = S^0_{jk} - S_{jk} \tag{2-51}$$

则由式(2－50)可得由 j 到 k 的边长观测的线性误差方程为

$$v_{jk} = -\frac{\Delta x^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta x_j - \frac{\Delta y^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta y_j + \frac{\Delta x^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta x_k + \frac{\Delta y^0_{jk}}{S^0_{jk}}\delta y_k + l_{jk} \tag{2-52}$$

如果改变方向，可得到由 k 到 j 的边长观测的误差方程为

$$v_{kj} = -\frac{\Delta x^0_{kj}}{S^0_{kj}}\delta x_k - \frac{\Delta y^0_{kj}}{S^0_{kj}}\delta y_k + \frac{\Delta x^0_{kj}}{S^0_{kj}}\delta x_j + \frac{\Delta y^0_{kj}}{S^0_{kj}}\delta y_j + l_{kj} \tag{2-53}$$

对以上两式比较可知，同一未知量的系数和常数项分别相等，这说明两个误差方程式完全相同。即某边的误差方程，按 jk 方向列立和按 kj 方向列立的结果相同。

式(2－52)就是测边网坐标平差误差方程的一般形式，它是在假设两端都是待定点的情况下导出的。具体计算时，可按不同情况灵活运用：

(1) 若某边的两端均为待定点，则式(2－52)就是该观测边的误差方程。其中，δx_j 与 δx_k 的系数的绝对值相等，δy_j 与 δy_k 的系数的绝对值也相等。常数项等于该边的近似值(由近似坐标算得)减其观测值。

(2) 若 j 或 k 为已知点，则相应的 δx 和 δy 为 0，误差方程有所简化。

(3) 若 j、k 均为已知点，则该边为固定边(不观测)，不需要列误差方程。

例 2－3　同精度测得如图2－5 中的三个边长，其结果为

$$L_1 = 387.363\ \text{m}$$

$$L_2 = 306.065\ \text{m}$$

$$L_3 = 354.862\ \text{m}$$

已知点 A、B、C 的起算数据列于表 2－5。试列出误差方程并求平差值。

表 2－5

点名	坐标/m		边长 S/m	方位角 α /(° ′ ″)
	x	y		
A	2 692.201	5 203.153	603.608	186 44 26.4
B	2 092.765	5 132.304	545.984	77 32 13.3
C	2 210.593	5 665.422	667.562	316 10 25.6
A				

解　(1) 本题 $t=2$，选择待定点 D 的坐标 $\hat{x}_D$ 和 $\hat{y}_D$ 为未知数，其近似值 x^0_D、y^0_D 由已知点 A、B 和观测边 L_1、L_2 交会计算而得。图 2－9 中，设 h 为三角形 ABD 底边 AB 上的高，l 为 L_1 在 AB 上的投影。得

$$l=\frac{L_1^2+\overline{AB}^2-L_2^2}{2\,\overline{AB}}=348.502$$

$$h=\sqrt{L_1^2-l^2}=169.105$$

$$\cos\alpha_{AB}=\frac{x_B-x_A}{\overline{AB}}=-0.993\,088\,2$$

$$\sin\alpha_{AB}=\frac{y_B-y_A}{\overline{AB}}=-0.117\,375\,8$$

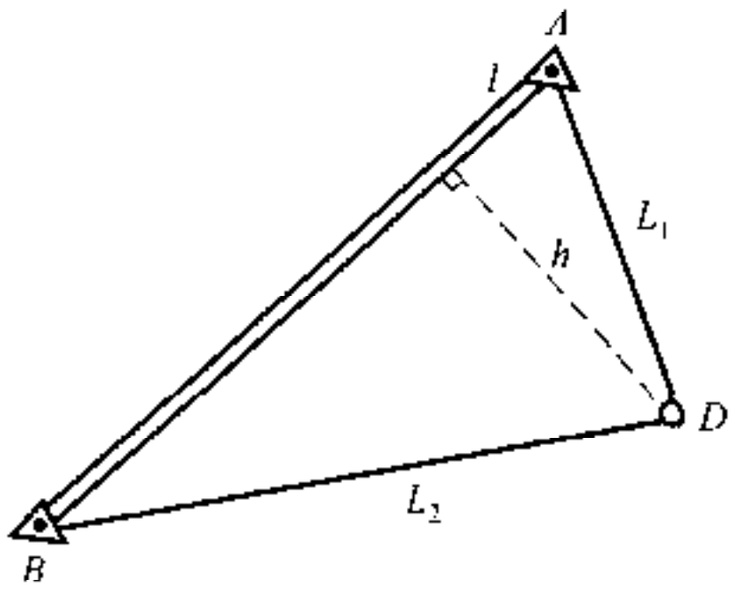


图 2-9

按此,计算待定点 D 的近似坐标为

$$\left.\begin{aligned}x_D^0&=x_A+l\cos\alpha_{AB}+h\sin\alpha_{AB}=2\,326.259\ \text{m}\\y_D^0&=y_A+l\sin\alpha_{AB}-h\cos\alpha_{AB}=5\,330.184\ \text{m}\end{aligned}\right\}$$

(2) 根据近似坐标和已知点坐标计算误差方程的系数和常数项,并组成误差方程,见表 2-6。

表 2-6

方向 jk	Δx_{jk}^0/m	Δy_{jk}^0/m	近似边长 S^0/m	$\Delta x_{jk}^0/S^0$	$\Delta y_{jk}^0/S^0$	$l-S^0-L_i$/m
AD	−365.942	127.031	387.363	−0.944 7	0.327 9	0
BD	233.491	197.880	306.065	0.762 9	0.646 5	0
CD	115.666	−335.238	354.631	0.326 2	−0.945 3	−0.231

由表 2-6 的最后三列数值,写出误差方程

$$V=\begin{pmatrix}-0.944\,7 & 0.327\,9\\ 0.762\,9 & 0.646\,5\\ 0.326\,2 & -0.945\,3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_D\\ \delta y_D\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -0.231\end{pmatrix}$$

(3) 求平差值。根据误差方程组成法方程

$$\begin{pmatrix}1.580\,8 & -0.124\,9\\ -0.124\,9 & 1.419\,2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_D\\ \delta y_D\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0.075\,3\\ 0.218\,2\end{pmatrix}=0$$

解算法方程,得 $\delta x_D=0.036$ m,$\delta y_D=-0.151$ m。待定点坐标平差值为

$$\left.\begin{aligned}\hat{X}_D&=X_D^0+\delta x_D=2\,326.295\ \text{m}\\ \hat{Y}_D&=Y_D^0+\delta y_D=5\,330.033\ \text{m}\end{aligned}\right\}$$

将上代入误差方程计算观测值的改正数并求得平差值

$$V=\begin{pmatrix}-0.083\\ -0.070\\ -0.077\end{pmatrix},\quad \hat{L}=\begin{pmatrix}387.280\\ 305.995\\ 354.785\end{pmatrix}$$

3. 边角网误差和导线网方程列立

对于高精度的工程,其控制网可以采用边角网;在各种工程测量中,导线网的应用也比较普遍,它们都是观测网中角度和边长。这时其中角度元素的误差方程与三角网相同,观测边长的误差方程与测边网相同。边角网的误差方程包括以上所有观测角度和边长的误差方程,这里不再赘述。

第四节　精 度 评 定

一、单位权中误差

任何平差方法在估算单位权方差时，都是用 $V^{\mathrm{T}}PV$ 除以多余观测数(见下式)。其推证过程涉及更深的数学知识，这里不再叙述。即单位权方差为

$$\sigma_0^2=\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}=\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t} \tag{2-54}$$

中误差为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} \tag{2-55}$$

有了单位权方差和某向量的验后协方差阵，如平差值 $\hat{L}$ 的协因数阵 $Q_{\hat{L}\hat{L}}$，即可计算平差值向量的协方差阵

$$D_{\hat{L}\hat{L}}=\sigma_0^2Q_{\hat{L}\hat{L}} \tag{2-56}$$

当 P 为对角阵时，式(2-54)中的 $V^{\mathrm{T}}PV$，可以用已经算出的 V 向量和已知的权阵 P 直接计算，其纯量形式为

$$[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2 \tag{2-57}$$

也可按下面导出的公式计算。

因为

$$V^{\mathrm{T}}PV=(B\delta X+l)^{\mathrm{T}}PV=\delta X^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}PV+l^{\mathrm{T}}PV$$

顾及式(2-20)$B^{\mathrm{T}}PV=0$，得

$$V^{\mathrm{T}}PV=l^{\mathrm{T}}\mathrm{P}(B\delta X+l)=l^{\mathrm{T}}Pl+l^{\mathrm{T}}PB\delta X$$

考虑 $L^{\mathrm{T}}PB=(B^{\mathrm{T}}Pl)^{\mathrm{T}}$，得

$$V^{\mathrm{T}}PV=l^{\mathrm{T}}Pl+(B^{\mathrm{T}}Pl)^{\mathrm{T}}\delta X=l^{\mathrm{T}}Pl+W^{\mathrm{T}}\delta X \tag{2-58}$$

当 P 为对角阵时，其纯量形式为

$$[pvv]=[pll]+w_1\delta x_1+w_2\delta x_2+\cdots+w_t\delta x_t \tag{2-59}$$

一般可用以上二式中的其中一个计算，用另外一个作为检核。

二、协因数阵

按间接平差求平差值时，首先列出误差方程

$$V=B\delta X+l \tag{2-60}$$

式中

$$l=F(X^0)-L=L^0\quad L \tag{2-61}$$

然后组成法方程式

$$B^{\mathrm{T}}PB\delta X+B^{\mathrm{T}}Pl=0 \tag{2-62}$$

或写成

$$N\delta X+W=0 \tag{2-63}$$

由法方程解得未知数

$$\delta X=-N^{-1}W=-N^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl \tag{2-64}$$

最后将 δX 代入误差方程式(2-60)计算 V，从而求得平差值

$$\hat{L} = L + V \tag{2-65}$$

在上述平差过程中使用了 L、δX、V 和 $\hat{L}$ 等向量，它们是间接平差的基本向量。已知 $Q_{LL} = Q$，下面推求各基本向量的自协因数阵和两两向量间的互协因数阵。

设 $Z = [L \quad \hat{X} \quad V \quad \hat{L}]$，则 Z 的协因数阵为

$$Q_{ZZ} = \begin{vmatrix} Q_{LL} & Q_{L\hat{X}} & Q_{LV} & Q_{L\hat{L}} \\ Q_{\hat{X}L} & Q_{\hat{X}\hat{X}} & Q_{\hat{X}V} & Q_{\hat{X}\hat{L}} \\ Q_{VL} & Q_{V\hat{X}} & Q_{VV} & Q_{V\hat{L}} \\ Q_{\hat{L}L} & Q_{\hat{L}\hat{X}} & Q_{\hat{L}V} & Q_{\hat{L}\hat{L}} \end{vmatrix}$$

式中对角线上子矩阵，就是各基本向量的自协因数阵，非对角线上为两两向量的互协因数阵，现分别推求如下：

首先将各量表达为观测值 L 的函数，得

$$L = I \cdot L \tag{2-66}$$

将式(2－61)代入式(2－63)有

$$\delta X = -N^{-1}B^{\mathrm{T}}P(L^0 - L) = N^{-1}B^{\mathrm{T}}PL - N^{-1}B^{\mathrm{T}}PL^0 \tag{2-67}$$

将上式代入式(2－60)得

$$\begin{aligned} V &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PL - BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PL^0 + L^0 - L \\ &= (BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P - I)L + (I - BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P)L^0 \end{aligned} \tag{2-68}$$

将上式代入式(2－65)有

$$\begin{aligned} \hat{L} &= L + (BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P - I)L + (I - BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P)L^0 \\ &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PL + (I - BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P)L^0 \end{aligned} \tag{2-69}$$

考虑到 $L^0 = F(x^0)$ 是由近似值算得的函数值，故它对精度不产生影响。此外，按定义知，$\hat{X} = X^0 + \delta X$，故 $Q_{\hat{X}\hat{X}} = Q_{\delta X \delta X}$，因此下面在与 δX 有关的协因数阵中，均将 δX 写成 $\hat{X}$。

对式(2－66)～式(2－69)应用协因数传播律即式(1－125)，并考虑到 $PQ = I$、对称方阵得转置仍为其本身、$NN^{-1} = I$ 等因素，有：

$$\begin{aligned} Q_{LL} &= Q \\ Q_{\hat{X}\hat{X}} &= N^{-1}B^{\mathrm{T}}PQPBN^{-1} = N^{-1} \\ Q_{VV} &= (BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P - I)Q(PBN^{-1}B^{\mathrm{T}} - I) \\ &= (BN^{-1}B^{\mathrm{T}} - Q)(PBN^{-1}B^{\mathrm{T}} - I) \\ &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PBN^{-1}B^{\mathrm{T}} - BN^{-1}B^{\mathrm{T}} - QPBN^{-1}B^{\mathrm{T}} + Q \\ &= -BN^{-1}B^{\mathrm{T}} + Q \\ Q_{\hat{L}\hat{L}} &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PQ = BN^{-1}B^{\mathrm{T}} \\ Q_{\hat{X}L} &= N^{-1}B^{\mathrm{T}}PQ = N^{-1}B^{\mathrm{T}} = Q_{L\hat{X}}^{\mathrm{T}} \\ Q_{VL} &= (BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P - I)Q = BN^{-1}B^{\mathrm{T}} - Q = Q_{LV}^{\mathrm{T}} \\ Q_{\hat{L}L} &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PQ = BN^{-1}B^{\mathrm{T}} = Q_{L\hat{L}}^{\mathrm{T}} \\ Q_{V\hat{X}} &= (BN^{-1}B^{\mathrm{T}}P - I)QPBN^{-1} \\ &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PQPBN^{-1} - QPBN^{-1} = 0 = Q_{\hat{X}V}^{\mathrm{T}} \\ Q_{L\hat{X}} &= BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PQPBN^{-1} = BN^{-1} = Q_{\hat{X}L}^{\mathrm{T}} \end{aligned}$$

$$Q_{\hat{L}V}=BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PQ(PBN^{-1}B^{\mathrm{T}}-I)$$
$$=BN^{-1}B^{\mathrm{T}}PBN^{-1}B^{\mathrm{T}}-BN^{-1}B^{\mathrm{T}}=0=Q_{V\hat{L}}^{\mathrm{T}}$$

将以上推导的全部协因数阵列于表 2－7，以备查阅。

表 2－7

平差向量	L	$\hat{X}$	V	$\hat{L}$
L	Q	BN^{-1}	$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}-Q$	$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}$
$\hat{X}$	$N^{-1}B^{\mathrm{T}}$	N^{-1}	0	$N^{-1}B^{\mathrm{T}}$
V	$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}-Q$	0	$Q-BN^{-1}B^{\mathrm{T}}$	0
$\hat{L}$	$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}$	BN^{-1}	0	$BN^{-1}B^{\mathrm{T}}$

由表 2－7 可知，平差值 $\hat{X}$、$\hat{L}$ 与改正数 V 的互协因数阵为零，说明 $\hat{L}$ 与 V，$\hat{X}$ 与 V 统计不相关，这是一个很重要的结果。

三、未知数函数的中误差

在间接平差中，解算法方程后首先求得的是 t 个未知数。有了这些参数，便可根据它们来计算该平差问题中任一量的平差值（最或然值）。如在图 2－10 的水准网中，已知 A 点的高程为 H_A，若平差时选定 AP_1、AP_2 及 P_3P_1 等三条路线高差的平差值作为参数 $\hat{x}_1$、$\hat{x}_2$、$\hat{x}_3$，则在平差后，不但求得了参数，即 AP_1、AP_2 及 P_3P_1 等三条路线高差的平差值，而且可以根据它们求出其他各观测高差或待定点高程的平差值。例如，P_3P_2 路线高差的平差值为

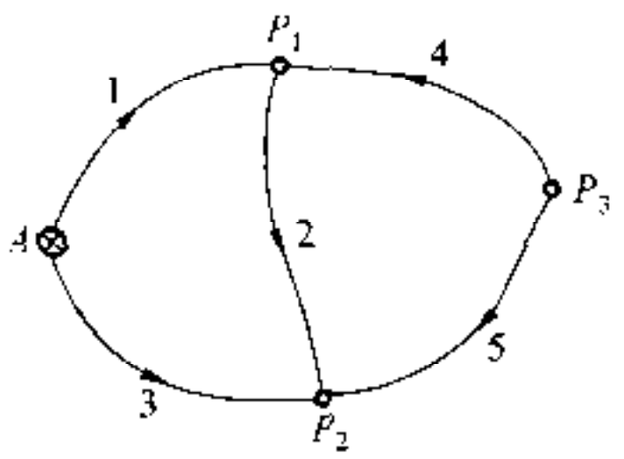


图 2－10

$$\hat{L}_5=H_A+\hat{x}_2-(H_A+\hat{x}_1-\hat{x}_3)=-\hat{x}_1+\hat{x}_2+\hat{x}_3$$

P_3 点的高程平差值为

$$H_{P_3}=H_A+\hat{x}_1-\hat{x}_3$$

又如在图 2－4 中，求得 D 点坐标平差值 $\hat{x}_D$ 和 $\hat{y}_D$ 后，即可计算任何一边的边长或坐标方位角的平差值。如 AD 间边长平差值为

$$\hat{S}_{AD}=\sqrt{(\hat{x}_D-x_A)^2+(\hat{y}_D-y_A)^2}$$

坐标方位角的平差值为

$$\hat{\alpha}_{AD}=\arctan\frac{\hat{y}_D-y_A}{\hat{x}_D-x_A}$$

通过以上举例可知，在间接平差中，任何一个量的平差值都可以由平差所选参数求得，或者说都可以表达为参数的函数。下面将从一般情况来讨论如何求参数函数的中误差的问题。

假定间接平差问题中有 t 个参数，设参数的函数为

$$\hat{\varphi}=\Phi(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\cdots,\hat{x}_t) \tag{2-70}$$

将 $\hat{x}_i=x_i^0+\delta x_i$ 代入上式后，按台劳公式展开，取至一次项，得

$$\hat{\varphi}=\Phi(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_t^0)+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}_1}\right)_0\delta x_1+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}_2}\right)_0\delta x_2+\cdots+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\hat{x}_t}\right)_0\delta x_t$$

式中，$\Phi(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_t^0)$是参数函数的近似值，当近似值一经取定，它是一个已知的常数，对计算函数 Φ 的精度没有影响，令其为 f_0；$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}_i}\right)_0$ 是函数对 $\hat{x}_i$ 的偏导数，以 $\hat{x}_i$ 的近似值 x_i^0 代入后即可计算其值，它们是已知的系数，令 $f_i = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \hat{x}_i}\right)_0$，则上式可以写成

$$\hat{\varphi} = f_0 + f_1\hat{x}_1 + f_2\hat{x}_2 + \cdots + f_t\hat{x}_t \tag{2-71}$$

或

$$\delta\hat{\varphi} = f_1\delta x_1 + f_2\delta x_2 + \cdots + f_t\delta x_t \tag{2-72}$$

对于评定函数 $\hat{\varphi}$ 的精度而言，给出 $\hat{\varphi}$ 或 $\delta\hat{\varphi}$ 是一样的。通常把式(2-72)称为参数函数的权函数式，简称权函数式。

令 $F^{\mathrm{T}} = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_t]$，则式(2-72)为

$$\delta\hat{\varphi} = F^{\mathrm{T}}\delta X \tag{2-73}$$

由表 2-7 查得 $Q_{\delta X \delta X} = Q_{\hat{X}\hat{X}} = N^{-1}$，故函数 $\hat{\varphi}$ 的协因数为

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^{\mathrm{T}}N^{-1}F \tag{2-74}$$

一般，设有函数向量 $\underset{m\times 1}{\hat{\varphi}}$ 的权函数式为

$$\underset{m\times 1}{\delta\hat{\varphi}} = \underset{m\times t}{F^{\mathrm{T}}}\ \underset{t\times 1}{\delta X} \tag{2-75}$$

即用来计算 m 个函数的精度，其协因数阵为

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^{\mathrm{T}}Q_{\hat{X}\hat{X}}F = F^{\mathrm{T}}N^{-1}F \tag{2-76}$$

式中，$Q_{\hat{X}\hat{X}}$是参数向量 $\hat{X}$的协因数阵

$$Q_{\hat{X}\hat{X}} = \begin{pmatrix} Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1} & Q_{\hat{x}_1\hat{x}_2} & \cdots & Q_{\hat{x}_1\hat{x}_t} \\ Q_{\hat{x}_2\hat{x}_1} & Q_{\hat{x}_2\hat{x}_2} & \cdots & Q_{\hat{x}_2\hat{x}_t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Q_{\hat{x}_t\hat{x}_1} & Q_{\hat{x}_t\hat{x}_2} & \cdots & Q_{\hat{x}_t\hat{x}_t} \end{pmatrix}$$

其中对角线元素 $Q_{\hat{x}_i\hat{x}_i}$是参数 $\hat{x}_i$ 的协因数，故 $\hat{x}_i$ 的中误差为

$$\sigma_{\hat{x}_i} = \sigma_0\sqrt{Q_{\hat{x}_i\hat{x}_i}} \tag{2-77}$$

函数 $\hat{\varphi}$ 的协方差阵为

$$D_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \sigma_0^2(F^{\mathrm{T}}N^{-1}F) \tag{2-78}$$

例 2-4 在图2-11 中，A、B 为已知水准点，高程为 H_A、H_B，设为无误差，各观测的路线长度分别为 $S_1 = 4$ km，$S_2 = 2$ km，$S_3 = 2$ km，$S_4 = 4$ km。试求 P_1 点和 P_2 点平差高程的协因数。

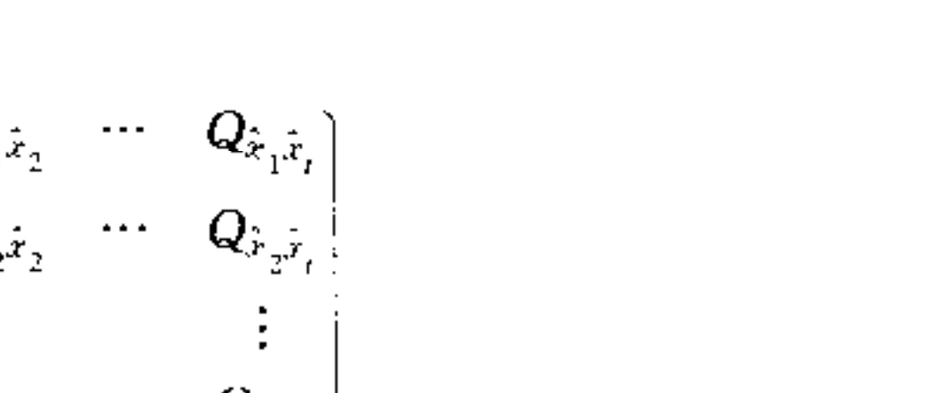


图 2-11

解 平差的参数选取 P_1 和 P_2 点高程，设为 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$，按图组成误差方程为

$$v_1 = \delta x_1 \qquad + l_1 \qquad P_1 = \frac{4}{4} = 1$$

$$v_2 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_2 \qquad P_2 = \frac{4}{2} = 2$$

$$v_3 = -\delta x_1 + \delta x_2 + l_3 \qquad P_3 = \frac{4}{2} = 2$$

$$v_4 = \qquad -\delta x_2 + l_4 \qquad P_4 = \frac{4}{4} = 1$$

定权时令 $C=4$，即以 4 km 观测高差为单位权观测值，因观测值相互独立，故 $p_i = \frac{1}{Q_{ii}}$，相关协因数 $Q_{ij}=0(i \neq j)$，由此得法方程为

$$5\delta x_1 - 4\delta x_2 + w_1 = 0$$

$$-4\delta x_1 + 5\delta x_2 + w_2 = 0$$

因为 $Q_{\hat{X}\hat{X}} = N^{-1}$，故有

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.56 & 0.44 \\ 0.44 & 0.56 \end{pmatrix}$$

平差后 P_1 和 P_2 点高程的协因数分别为

$$Q_{\hat{x}_1\hat{x}_1} = 0.56, \quad Q_{\hat{x}_2\hat{x}_2} = 0.56$$

$\hat{x}_1$ 与 $\hat{x}_2$ 的互协因数则为

$$Q_{\hat{x}_1\hat{x}_2} = 0.44$$

如果再计算出 σ_0，则可得到 P_1 点和 P_2 点平差高程的中误差 $\sigma_{H_{P_1}} = \sigma_{H_{P_2}} = \sigma_0\sqrt{0.56}$。

例 2－5　对固定角内插点的平差问题(图 2－4)，已在例 2－2 中求得参数及观测量的平差值 $\hat{X}$、$\hat{L}$，现要求平差后 D 点坐标、DA 边的坐标方位角和边长的协因数及其中误差。

解　(1) 列出 DA 边坐标方位角 $\hat{\alpha}_{DA}$ 的权函数式。已知

$$\hat{\alpha}_{DA} = \arctan\frac{y_A - \hat{y}_D}{x_A - \hat{x}_D}$$

式中 (x_A, y_A) 为 A 点已知坐标，对函数全微分得权函数式为

$$\delta\hat{\alpha}_{DA} = \frac{\rho''\Delta y^0_{DA}}{(S^0_{DA})^2 \times 10}\delta x_D - \frac{\rho''\Delta x^0_{DA}}{(S^0_{DA})^2 \times 10}\delta y_D$$

式中，$\delta\hat{\alpha}_{DA}$ 的单位为 s，δx_D、δy_D 的单位为 dm。将例 2－2 中的数据代入，即得其权函数式为

$$\delta\hat{\alpha}_{DA} = -4.22\delta x_D + 1.04\delta y_D$$

顺便指出，上式实际上就是 DA 边坐标方位角的改正数方程，在例 2－2 中列误差方程时已作过计算。由此可知，列误差方程时所用的坐标方位角改正数方程，可以直接用来作为坐标方位角的权函数式。

(2) 列出边长 $\hat{S}_{DA}$ 的权函数式。已知

$$\hat{S}_{DA} = \sqrt{(x_A - \hat{x}_D)^2 + (y_A - \hat{y}_D)^2}$$

对函数进行全微分，得

$$\delta\hat{S}_{DA} = -\frac{\Delta x^0_{DA}}{S^0_{DA} \times 10}\delta x_D - \frac{\Delta y^0_{DA}}{S^0_{DA} \times 10}\delta y_D$$

式中，$\delta\hat{S}_{DA}$、S^0_{DA}、Δx^0_{DA}、Δy^0_{DA} 的单位为 m；δx_D、δy_D 的单位为 dm。将例 2－2 中的有关数据

代入上式,得边长$\hat{S}_{DA}$的权函数式为

$$\delta\hat{S}_{DA}=0.02\delta x_D+0.10\delta y_D$$

(3) 计算协因数。综合以上两个权函数式,写成矩阵形式为

$$\delta\hat{\varphi}=\begin{pmatrix}\delta\hat{\alpha}_{DA}\\ \delta\hat{S}_{DA}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4.22 & 1.04\\ 0.02 & 0.10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x_D\\ \delta y_D\end{pmatrix}$$

按协因数计算式(1-125)得

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}=\begin{pmatrix}-4.22 & 1.04\\ 0.02 & 0.10\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{\hat{x}_D\hat{x}_D} & Q_{\hat{x}_D\hat{y}_D}\\ Q_{\hat{y}_D\hat{x}_D} & Q_{\hat{y}_D\hat{y}_D}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4.22 & 0.02\\ 1.04 & 0.10\end{pmatrix}$$

由例2-2取得法方程系数阵为

$$N=\begin{pmatrix}114.84 & -25.53\\ -25.53 & 86.57\end{pmatrix}$$

则有

$$Q_{\hat{X}\hat{X}}=\begin{pmatrix}Q_{\hat{x}_D\hat{x}_D} & Q_{\hat{x}_D\hat{y}_D}\\ Q_{\hat{y}_D\hat{x}_D} & Q_{\hat{y}_D\hat{y}_D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}114.84 & -25.53\\ -25.53 & 86.57\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0.009\,3 & 0.002\,7\\ 0.002\,7 & 0.012\,4\end{pmatrix}$$

于是

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}}=\begin{pmatrix}0.155\,2 & -0.000\,6\\ -0.000\,6 & 0.000\,14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}} & Q_{\hat{\alpha}\hat{S}}\\ Q_{\hat{S}\hat{\alpha}} & Q_{\hat{S}\hat{S}}\end{pmatrix}$$

(4) 计算单位权中误差。从例2-2中取得改正数V,观测角为同精度,权均为1,单位权观测值就是观测角度,其中误差为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}V}{n-t}}=\pm\sqrt{\frac{11.39}{4}}=\pm1.7''$$

(5) 计算$\hat{x}_D$、$\hat{y}_D$和$\hat{\alpha}_{DA}$、$\hat{S}_{DA}$的中误差

$$\sigma_{\hat{x}_D}=\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{x}_D\hat{x}_D}}=\pm1.7\sqrt{0.009\,3}=\pm0.16\ \mathrm{dm}$$

$$\sigma_{\hat{y}_D}=\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{y}_D\hat{y}_D}}=\pm1.7\sqrt{0.012\,4}=\pm0.19\ \mathrm{dm}$$

$$\sigma_{\hat{\alpha}_{DA}}=\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{\alpha}\hat{\alpha}}}=\pm1.7\sqrt{0.155\,2}=\pm0.67''$$

$$\sigma_{\hat{S}_{DA}}=\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{S}\hat{S}}}=\pm1.7\sqrt{0.000\,14}=\pm0.02\ \mathrm{dm}$$

第五节 间接平差公式汇编和示例

一、公式汇编

(1) 平差值方程和误差方程为

$$\hat{L}=L+V=B\hat{X}+d \tag{2-79}$$

$$V=B\,\delta X+l \tag{2-80}$$

$$l=L^0-L=(BX^0+d)-L \tag{2-81}$$

或

$$l = F(X^0) - L \tag{2-82}$$

(2) 法方程为

$$B^{\mathrm{T}}PB\delta X + B^{\mathrm{T}}Pl = 0 \tag{2-83}$$

其解为

$$\delta X = -(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl = -N^{-1}W \tag{2-84}$$

(3) 观测量和参数的平差值

$$\hat{L} = L + V, \quad \hat{X} = X^0 + \delta X \tag{2-85}$$

(4) 间接平差的随机模型

$$D = \sigma_0^2 Q = \sigma_0^2 P^{-1} \tag{2-86}$$

(5) 单位权中误差

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}} = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} \tag{2-87}$$

(6) 平差参数 X 的协方差阵

$$D_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{X}\hat{X}} = \sigma_0^2 N^{-1} \tag{2-88}$$

(7) 平差参数的函数的权函数式

$$\delta\hat{\varphi} = F^{\mathrm{T}}\delta X \tag{2-89}$$

(8) 平差参数的函数的协因数

$$Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = F^{\mathrm{T}}Q_{\hat{X}\hat{X}}F = F^{\mathrm{T}}N^{-1}F \tag{2-90}$$

(9) 平差参数的函数的方差

$$D_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} = \sigma_0^2 Q_{\hat{\varphi}\hat{\varphi}} \tag{2-91}$$

二、水准网按间接平差示例

例 2-6　将图2-12 中所示的水准网按间接平差，求：

(1) 各待定点的高程平差值；

(2) 待定点 P_1、P_2 高程平差值的中误差；

(3) P_1 至 P_2 点间高差平差值的中误差。

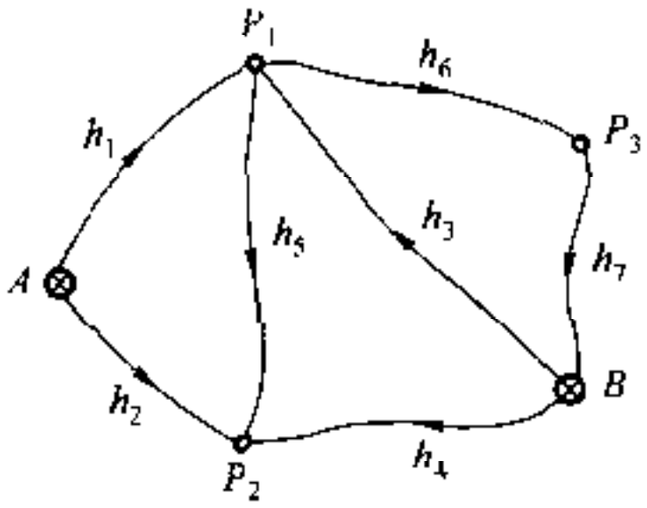


图 2-12

解　在图 2-12 所示水准网中，待定点 P_3 不是 3 条或 3 条以上水准路线相交的结点，可以把观测高差 h_6 和 h_7 合并成一条水准路线，即

$$h'_6 = h_6 + h_7$$

经平差求得 h'_6 的改正数 v'_6 后，在单一水准路线 P_1P_3B 上，将 v'_6 按路线长度比例分配给线路 P_1P_3 和 P_3B 上，可得 h_6 和 h_7 的改正数为

$$v_6 = \frac{S_6}{S_6 + S_7}v'_6$$

$$v_7 = \frac{S_7}{S_6 + S_7}v'_6$$

式中，S_6、S_7 分别为相应水准路线的长度。如此处理可以少设一个未知参数，但不能直接求

出待定点 P_3 的高程平差值的中误差。已知数据和观测数据见表 2－8。

表 2－8

线路编号	观测高差/m	线路长度/km	已知高程/m
1	+1.359	1.1	$H_A=5.016$
2	+2.009	1.7	$H_B=6.016$
3	+0.363	2.3	
4	+1.012	2.7	
5	+0.657	2.4	
$6'\begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}$	$-0.357\begin{pmatrix}+0.238\\-0.595\end{pmatrix}$	$4.0\begin{pmatrix}1.4\\2.6\end{pmatrix}$	

1. 列出误差方程

设 P_1 和 P_2 点高程平差值为 $\hat{x}_1$ 和 $\hat{x}_2$，相应的近似值取为

$$x_1^0=H_A+h_1,\quad x_2^0=H_A+h_2$$

按图 2－12 列出平差值方程

$$\left.\begin{aligned}
h_1+v_1&=\hat{x}_1-H_A\\
h_2+v_2&=\hat{x}_2-H_A\\
h_3+v_3&=\hat{x}_1-H_B\\
h_4+v_4&=\hat{x}_2-H_B\\
h_5+v_5&=\hat{x}_2-\hat{x}_1\\
h'_6+v'_6&=H_B-\hat{x}_1
\end{aligned}\right\}\tag{2-92}$$

将方程移项，并引入未知数的近似值得

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=\delta x_1 &&+(x_1^0-H_A-h_1)\\
v_2&= &\delta x_2&+(x_2^0-H_A-h_2)\\
v_3&=\delta x_1 &&+(x_1^0-H_B-h_3)\\
v_4&= &\delta x_2&+(x_2^0-H_B-h_4)\\
v_5&=-\delta x_1&+\delta x_2&+(x_2^0-x_1^0-h_5)\\
v'_6&=-\delta x_1 &&+(H_B-x_1^0-h'_6)
\end{aligned}\right\}\tag{2-93}$$

将有关观测数据代入即得误差方程

$$\left.\begin{aligned}
v_1&=\delta x_1 &&+0\\
v_2&= &\delta x_2&+0\\
v_3&=\delta x_1 &&-4\\
v_4&= &\delta x_2&-3\\
v_5&=-\delta x_1&+\delta x_2&-7\\
v'_6&=-\delta x_1 &&-2
\end{aligned}\right\}$$

式中常数项以 mm 为单位。

对于初学者，可能习惯于先列出平差值方程，再逐个方程进行移项，得到 v_i 的表达式，最后代入观测值、已知高程、近似高程，得到误差方程式。这种方法非常繁琐，其实只要掌握了水准网误差方程的列立规律，就可以对照图形快速列出水准网误差方程式。如图 2－13

所示，对于任何一个高差 h_i，如果将其箭头所指水准点名记为“头”，将箭尾对应的水准点名记为“尾”，可以从式(2－93)看出，其误差方程存在以下规律：

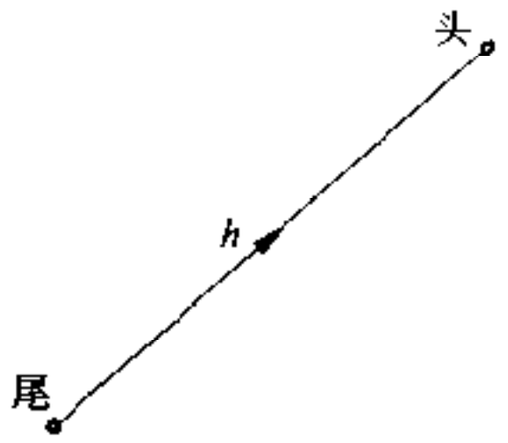


图 2－13

(1) 各误差方程的形式为

$$v_i = \delta x_{i头} - \delta x_{i尾} + l_i \qquad (2-94)$$

如果其中有一个水准点为已知点，则其对应的 δx 为 0。

(2) 各误差方程的常数项为

$$l_i = x^0_{头} - x^0_{尾} - h_i = h^0 - h_i \qquad (2-95)$$

即算得的高差近似值减去观测值。如果其中有一个水准点为已知点，则其对应的 x^0 为其已知高程。

(3) 对于计算近似高程时所用的高差，如上例的 h_1 和 h_2，其高差近似值 h^0 与观测值必然相等，所以必有 $l=0$；而对于其他高差，则必须按式(2－95)计算其 l_i。

只要掌握了以上规律，就可以根据图形，利用式(2－94)、式(2－95)，辅之以计算器计算常数项，而直接写出水准网的误差方程式。

2. 列出权函数式

P_1 至 P_2 间高差平差值的权函数式为

$$\delta\hat{h}_{12} = -\delta x_1 + \delta x_2$$

3. 组成法方程

以 1 km 水准测量的观测高差为单位权观测值，各观测值相互独立，定权式为 $p_i = \frac{1}{S_i}$，得权阵为

$$P = \begin{pmatrix} 0.91 & & & & & \\ & 0.59 & & & & \\ & & 0.43 & & & \\ & & & 0.37 & & \\ & & & & 0.42 & \\ & & & & & 0.25 \end{pmatrix}$$

由此组成法方程为

$$\begin{pmatrix} 2.01 & -0.42 \\ -0.42 & 1.38 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.72 \\ -4.05 \end{pmatrix} = 0$$

解得

$$\delta X = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.258 \\ 2.860 \end{pmatrix}$$

4. 计算 V 和 $\hat{L}$

由 $V = B\delta X + l$ 得

$$\underset{6\times 1}{V} = (-0.3 \quad 2.9 \quad -4.3 \quad -0.1 \quad -3.9 \quad -1.7)^{\mathrm{T}} \ \mathrm{mm}$$

由 $v'_6 = -1.7$ 可求得

$$v_6 = \frac{1.4}{4}(-1.7) = -0.6, \quad v_7 = \frac{2.6}{4}(-1.7) = -1.1$$

由此得高差平差值

$$\underset{7\times1}{\hat{L}} = [1.359 \quad 2.012 \quad 0.359 \quad 1.012 \quad 0.653 \quad 0.237 \quad -0.596]^{\mathrm{T}} \quad \mathrm{mm}$$

各待定点高程的平差值为

$$\hat{H}_1 = 6.375\ \mathrm{m}, \quad \hat{H}_2 = 7.028\ \mathrm{m}, \quad \hat{H}_3 = 6.612\ \mathrm{m}$$

5. 精度评定

(1) 求单位权中误差

$$V^{\mathrm{T}}PV = l^{\mathrm{T}}Pl + W^{\mathrm{T}}\delta X = 19.76$$

故
$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} = \pm\sqrt{\frac{19.76}{4}} = \pm 2.2\ \mathrm{mm}$$

(2) 求 P_1、P_2 高程中误差

$$Q_{\hat{x}\hat{x}} = N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.531 & 0.162 \\ 0.162 & 0.774 \end{pmatrix}$$

则
$$\sigma_{H_{P1}} = \pm 2.2\sqrt{0.53} \approx \pm 1.6\ \mathrm{mm}$$

$$\sigma_{H_{P2}} = \pm 2.2\sqrt{0.77} \approx \pm 1.9\ \mathrm{mm}$$

(3) 求 P_1 至 P_2 间高差平差值中误差

$$Q_{\hat{h}_{12}} = [-1 \quad 1]N^{-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.98$$

故
$$\sigma_{12} = \pm 2.2\sqrt{0.98} \approx \pm 2.2\ \mathrm{mm}$$

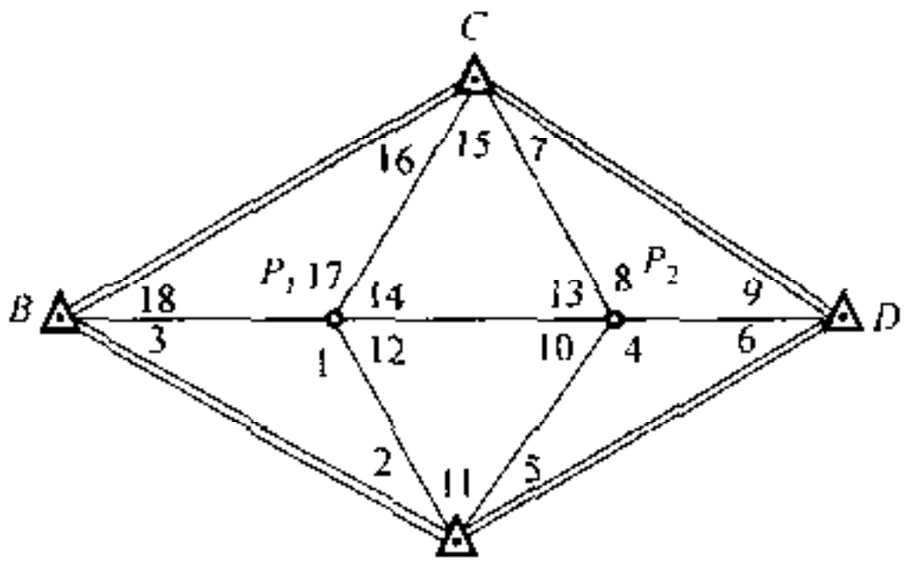


图 2-14

三、测角网坐标平差算例

例 2-7 设有一测角三角网，如图 2-14 所示，网中 A、B、C、D 是已知点，P_1、P_2 是待定点，同精度观测 18 个角度。试按间接平差法求平差后 P_1、P_2 点的坐标及 P_1、P_2 点坐标的中误差。起算数据和观测值见表 2-9 及表 2-10。

表 2-9

点名	坐标/m		边长/m	坐标方角 /(° ′ ″)
	x	y		
A	9 684.28	43 836.82		
			11 879.60	274 39 38.4
B	10 649.55	31 996.50		
			10 232.16	34 40 56.3
C	19 063.66	37 818.86		
			12 168.60	95 53 29.1
D	17 814.63	49 923.19		
			10 156.11	216 49 06.5
A				

表 2-10

角度编号	观测值 /(° ′ ″)	角度编号	观测值 /(° ′ ″)	角度编号	观测值 1 /(° ′ ″)
1	126 14 24.1	7	22 02 43.0	13	46 38 56.4
2	23 39 46.9	8	130 03 14.2	14	66 34 54.7
3	30 05 46.7	9	27 53 59.3	15	66 46 08.2
4	117 22 46.2	10	65 55 00.8	16	29 58 35.5
5	31 26 50.0	11	67 02 49.4	17	120 08 31.1
6	31 10 22.6	12	47 02 11.4	18	29 52 55.4

解　(1) 求得待定点 P_1、P_2 的近似坐标为

$$x_1^0 = 13\ 188.61\ \text{m},\quad y_1^0 = 37\ 334.97\ \text{m}$$

$$x_2^0 = 15\ 578.61\ \text{m},\quad y_2^0 = 44\ 391.03\ \text{m}$$

(2) 根据已知点的坐标和待定点的近似坐标反算各未知边的近似坐标方位角 α_{jk}^0，其结果见表 2－11。

表 2－11

方　向	近似坐标方位角 /(° ′ ″)	方　向	近似坐标方位角 /(° ′ ″)
P_1A	118 19 24.7	P_2A	185 22 17.0
P_1B	244 33 48.6	P_2C	297 56 09.0
P_1C	4 42 30.4	P_2D	67 59 31.7
P_1P_2	71 17 16.6		

(3) 计算与待定点 P_1、P_2 相连各边的方向系数，结果列于表 2－12。

表 2－12

方向	Δy^0/m	Δx^0/m	$(S^0)^2$/m^2	方向系数/s·dm^{-1}			
				δx_1	δy_1	δx_2	δy_2
P_1A	+6 502	−3 504	$5\ 455\times10^4$	+2.46	+1.32		
P_1B	−5 338	−2 539	$3\ 495\times10^4$	−3.15	+1.50		
P_1C	+484	+5 875	$3\ 475\times10^4$	+0.29	−3.49		
P_1P_2	+7 056	+2 390	$5\ 550\times10^4$	+2.62	−0.89	−2.62	+0.89
P_2A	−554	−5 894	$3\ 505\times10^4$			−0.33	+3.47
P_2C	−6 572	+3 485	$5\ 534\times10^4$			−2.45	−1.30
P_3D	+5 532	+2 236	$3\ 560\times10^4$			+3.20	−1.30

(4) 计算误差方程系数和常数项，结果列于表 2－13，表中每一行表示一个误差方程。v 为角度改正数，在解出坐标改正数 δx、δy 后算得。

表 2－13

参数 / 角号	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}	l	v
	δx_1	δy_1	δx_2	δy_2		
	−0.103 0	+2.320 8	−1.206 9	−0.534 8		
1	−5.61	+0.18			−0.2	+0.8
2	+2.46	+1.32			−0.6	+2.2
3	+3.15	−1.50			+3.1	−0.7
4			−3.53	+4.77	−0.9	+0.8
5			+0.33	−3.47	−0.5	+1.0
6			+3.20	−1.30	+2.6	−0.6
7			−2.45	−1.30	−3.1	+0.5
8			+5.65	0	+8.5	+1.7
9			−3.20	+1.30	−1.9	+1.3
10	+2.62	−0.89	−2.29	−2.58	−1.2	+0.6

续表 2－13

参数 / 角号	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}	l	v
	δx_1	δy_1	δx_2	δy_2		
	−0.103 0	+2.320 8	−1.206 9	−0.534 8		
11	−2.46	−1.32	−0.33	+3.47	+2.9	−1.4
12	−0.16	+2.21	+2.62	−0.89	−3.3	−0.8
13	−2.62	+0.89	+0.17	−2.19	−4.0	−0.7
14	+2.33	+2.60	−2.60	+0.89	−8.5	−0.0
15	+0.29	−3.49	+2.45	+1.30	+13.2	+1.4
16	−0.29	+3.49			−9.6	−1.5
17	+3.44	−4.99			+10.7	−1.2
18	−3.15	+1.50			−3.1	+0.7
[ ]	0	0	0	0	+4.1	

(5) 组成并解算法方程式

$$\begin{pmatrix} 94.61 & -22.11 & -11.45 & -6.96 \\ -22.11 & 70.51 & -6.95 & -8.42 \\ -11.45 & -6.95 & 96.09 & -20.21 \\ -6.96 & -8.42 & -20.21 & 66.63 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta y_1 \\ \delta x_2 \\ \delta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43.52 \\ 178.81 \\ -120.11 \\ -30.07 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.012\,1 & 0.004\,4 & 0.002\,3 & 0.002\,5 \\ 0.004\,4 & 0.016\,1 & 0.002\,4 & 0.003\,2 \\ 0.002\,3 & 0.002\,4 & 0.011\,7 & 0.004\,1 \\ 0.002\,5 & 0.003\,2 & 0.004\,1 & 0.016\,9 \end{pmatrix}$$

由 $\delta X = -N^{-1}W$ 可得

$$\delta X = (\delta x_1 \quad \delta y_1 \quad \delta x_2 \quad \delta y_2)^{\mathrm{T}}$$
$$= [-0.103\,0 \quad 2.320\,8 \quad -1.206\,9 \quad -0.534\,8]^{\mathrm{T}}\ \mathrm{dm}$$

(6) 平差值计算

① 坐标平差值

$$\hat{x}_1 = 13\,188.60\ \mathrm{m}, \qquad \hat{y}_1 = 37\,335.20\ \mathrm{m}$$
$$\hat{x}_2 = 15\,578.49\ \mathrm{m}, \qquad \hat{y}_2 = 44\,390.98\ \mathrm{m}$$

② 待定边坐标方位角和边长的平差值。由待定点平差后坐标和已知点坐标计算得待定边的坐标方位角和边长平差值，结果见表 2－14。

表 2－14

方　向	边　长/m	坐标方位角 /(° ′ ″)	方　向	边　长/m	坐标方位角 /(° ′ ″)
P_1A	7 385.89	118 19 27.5	P_2A	5 920.20	185 22 15.7
P_1B	5 911.73	244 33 52.4	P_2C	7 439.03	297 56 12.6
P_1C	5 894.93	4 42 22.4	P_2D	5 967.05	67 59 28.5
P_1P_2	7 449.54	71 17 17.0			

③ 观测量的平差值。将表 2－13 中的改正数 v_i 与观测值相加，即得观测量的平差值 $\hat{L}_i$(略)。

(7) 精度评定

① 单位权中误差,即测角中误差为

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{22.28}{18-4}} = \pm 1.3''$$

② 待定点坐标中误差。由 N^{-1}中取得未知数的权倒数(协因数),计算得

$$\sigma_{x_1} = \pm 1.3\sqrt{0.012\ 1} = \pm 0.14\ \text{dm}, \quad \sigma_{y_1} = \pm 1.3\sqrt{0.016\ 1} = \pm 0.16\ \text{dm}$$

$$\sigma_{P_1} = \pm\sqrt{0.14^2 + 0.16^2} = \pm 0.21\ \text{dm};$$

$$\sigma_{x_2} = \pm 1.3\sqrt{0.011\ 7} = \pm 0.14\ \text{dm}, \quad \sigma_{y_2} = \pm 1.3\sqrt{0.016\ 9} = \pm 0.17\ \text{dm}$$

$$\sigma_{P_2} = \pm\sqrt{0.14^2 + 0.17^2} = \pm 0.22\ \text{dm}$$

式中,σ_P 为点位中误差。

四、测边网坐标平差算例

例 2-8　今有测边网如图2-15 所示。网中 A、B、C 及 D 为已知点,P_1、P_2、P_3 及 P_4 为待定点,同精度观测 13 条边长。起算数据及观测边长见表 2-15。试按间接平差法求待定点坐标平差值及其中误差。

表 2-15

点　名	坐　标/m		边　长/m	坐标方位角 /(° ′ ″)
	x	y		
A	53 743.136	61 003.826	7 804.558	138 00 08.6
B	47 943.002	66 225.854		
C	40 049.229	53 782.790	7 889.381	113 19 50.8
D	36 924.728	61 027.086		

编　号	边观测角/m	编　号	边观测角/m	编　号	边观测角/m
1	5 760.706	6	8 720.162	11	5 487.073
2	5 187.342	7	5 598.570	12	8 884.587
3	7 838.880	8	7 494.881	13	7 228.367
4	5 483.158	9	7 493.323		
5	5 731.788	10	5 438.382		

解　(1) 计算待定点近似坐标

按例 2-3 中的公式,由已知点 B、A 及观测值 L_1、L_2 交会计算待定点 P_1 的近似坐标;由 P_1、A 及 L_4、L_3 交会计算 P_2 点近似坐标;由 P_1、P_2 及 L_{10}、L_5 交会计算 P_3 点的近似坐标;由 P_1、P_3 及 L_{12}、L_9 交会计算 P_4 点近似坐标。其结果为

$$x_1^0 = 48\ 580.270\ \text{m}, \quad y_1^0 = 60\ 500.505\ \text{m}$$

$$x_2^0 = 48\ 681.390\ \text{m}, \quad y_2^0 = 55\ 018.279\ \text{m}$$

$$x_3^0 = 43\ 767.223\ \text{m}, \quad y_3^0 = 57\ 968.593\ \text{m}$$

$$x_4^0 = 40\ 843.219\ \text{m}, \quad y_4^0 = 64\ 867.875\ \text{m}$$

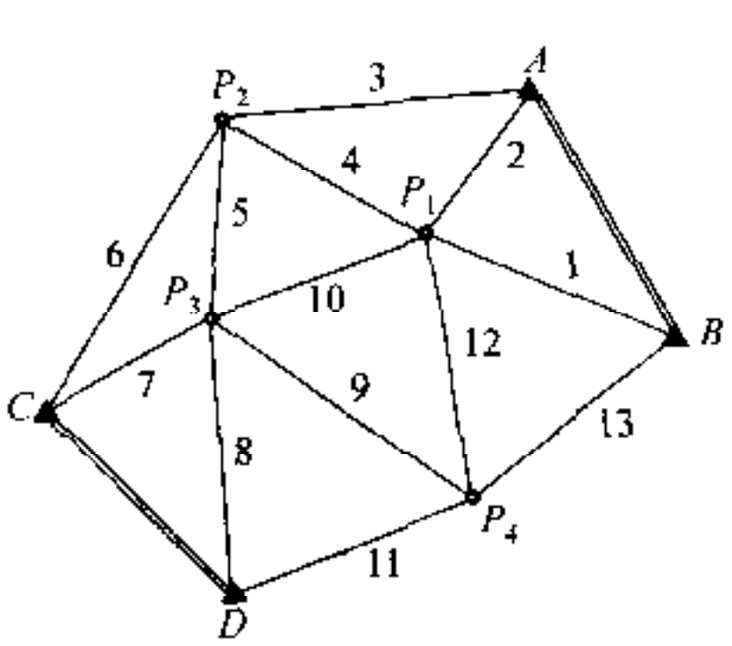


图 2-15

(2) 计算误差方程的系数及常数项

由已知点坐标和待定点近似坐标计算系数及常数项,其结果见表 2－16。

表 2－16

边号	方向	Δx^0/m	Δy^0/m	S^0/m	$a=-\Delta X^0/S^0$	$b=-\Delta Y^0/S^0$	$l=S^0-L$ /dm
1	P_1B	－637.268	5 725.349	5 760.705	0.110 6	－0.993 9	－0.001 7
2	P_1A	5 162.866	503.321	5 187.342	－0.995 3	－0.097 0	0.000 3
3	P_2A	5 061.746	5 985.547	7 838.880	－0.645 7	－0.763 6	0.003 7
4	P_2P_1	－101.120	5 482.226	5 483.158	0.018 4	－0.999 8	0.005 0
5	P_2P_3	－4 914.167	2 950.314	5 781.787	0.857 4	－0.154 7	－0.003 2
6	P_2C	－8 632.161	－1 235.489	8 720.128	0.989 9	0.141 7	－0.337 6
7	P_3C	－3 717.994	－4 185.803	5 598.609	0.664 1	0.747 7	0.393 0
8	P_3D	－6 842.495	3 058.493	7 494.939	0.912 9	－0.408 1	0.584 4
9	P_3P_4	－2 924.004	6 899.282	7 493.323	0.390 2	－0.920 7	0.001 3
10	P_3P_1	4 813.047	2 531.912	5 438.382	－0.885 0	－0.465 6	0.000 9
11	P_4D	－3 918.491	－3 840.789	5 486.914	0.714 2	0.700 0	－1.584 0
12	P_4P_1	7 737.051	－4 367.370	8 884.586	－0.870 8	0.491 6	－0.004 1
13	P_4B	7 099.783	1 357.979	7 228.487	－0.982 2	－0.187 9	1.200 9

根据表 2－16 中的 a、b 系数及常数项 l 可列出全网的误差方程,其系数和常数项结果列于表 2－17,共 13 个误差方程。

表 2－17

编号	δx_1 0.042 6	δy_1 －0.067 0	δx_2 －0.012 1	δy_2 0.105 6	δx_3 －0.346 5	δy_3 0.211 4	δx_4 0.984 6	δy_4 1.056 4	l /dm	V /dm	$\hat{L}$/m
1	0.110 6	－0.993 9							－0.001 7	0.069 6	5 760.713
2	－0.995 3	－0.097 0							0.000 3	－0.035 6	5 187.338
3			－0.645 7	－0.763 6					0.003 7	－0.069 1	7 838.873
4	－0.018 4	0.999 8	0.018 4	－0.999 8					0.005 0	－0.168 6	5 483.142
5			0.857 4	－0.514 7	－0.857 4	0.514 7			－0.003 2	0.337 9	5 731.822
6			0.989 9	－0.141 7					－0.337 6	－0.334 6	8 720.128
7					0.664 1	0.747 7			0.393 0	0.320 9	5 598.602
8					0.912 9	－0.408 1			0.584 4	0.181 9	7 494.899
9					0.390 2	－0.920 7	－0.390 2	0.920 7	0.001 3	0.259 9	7 493.349
10	0.885 0	0.465 6			－0.885 0	－0.465 6			0.000 9	0.215 6	5 438.404
11							0.714 2	0.700 0	－1.584 0	－0.141 3	5 487.059
12	0.870 8	－0.491 6					－0.870 8	0.491 6	－0.004 1	－0.272 2	8 884.560
13							－0.982 2	－0.187 9	1.200 9	0.035 3	7 228.370

(3) 组成法方程,列于表 2－18 中,求 N^{-1}列于表 2－19。按 $\delta X=-N^{-1}B^{\mathrm{T}}Pl$ 解算结果写在表 2－18 表头上,计算的改正数 v 列于表 2－17 中。

表 2－18

	$a/\delta x_1$	$b/\delta y_1$	$c/\delta x_2$	$d/\delta y_2$	$e/\delta x_3$	$f/\delta y_3$	$g/\delta x_4$	$h/\delta y_4$	V
	0.042 6	−0.067 0	−0.012 1	0.105 6	−0.346 5	0.211 4	0.984 6	1.056 4	
a	2.544 7	−0.047 8	−0.000 3	0.018 4	−0.783 2	−0.412 1	−0.758 3	0.428 1	−0.003 4
b		2.455 3	0.018 4	−0.999 6	−0.412 1	−0.216 8	0.428 1	−0.241 7	0.009 1
c			2.132 3	0.173 6	−0.735 1	0.441 3	0	0	−0.339 2
d				0.867 7	0.441 3	−0.264 9	0	0	−0.054 0
e					2.945 0	−0.264 5	−0.152 3	0.359 3	0.796 9
f	对					2.055 0	0.359 3	−0.847 7	0.052 1
g			称				2.385 3	−0.102 8	−2.307 8
h								1.614 7	−1.335 3

表 2－19

	0.540 1	−0.041 3	0.078 0	−0.083 2	0.201 5	−0.006 6	0.185 0	−0.185 9
		0.634 0	−0.094 8	0.388 1	−0.017 9	0.249 1	−0.155 6	0.230 7
			0.593 5	−0.181 3	0.190 2	−0.209 4	0.077 7	−0.182 2
				0.836 1	−0.151 1	0.279 3	−0.137 0	0.251 7
$N^{-1}=$					0.483 7	−0.053 2	0.098 2	−0.185 4
						0.803 1	−0.151 2	0.462 8
		(对	称)				0.529 0	−0.139 9
								0.978 5

(4) 平差值计算

① 坐标平差值：

$$\hat{x}_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 48\ 580.274\ \text{m}, \quad \hat{y}_1 = y_1^0 + \delta y_1 = 60\ 500.498\ \text{m}$$

$$\hat{x}_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 48\ 681.389\ \text{m}, \quad \hat{y}_2 = y_2^0 + \delta y_2 = 55\ 018.290\ \text{m}$$

$$\hat{x}_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 43\ 767.188\ \text{m}, \quad \hat{y}_3 = y_3^0 + \delta y_3 = 57\ 968.614\ \text{m}$$

$$\hat{x}_4 = x_4^0 + \delta x_4 = 40\ 843.318\ \text{m}, \quad \hat{y}_4 = y_4^0 + \delta y_4 = 64\ 867.981\ \text{m}$$

② 观测边的平差值结果见表 2－17 的 $\hat{L}$ 列。

(5) 精度计算

① 单位权中误差(测边中误差)：

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{0.611}{13-8}} = \pm 0.35\ \text{dm}$$

② 待定点坐标中误差：

由参数的协因数阵(即 N^{-1})取得参数的权倒数，计算待定点坐标和点位中误差

$$\sigma_{x_1} = \pm 0.35\sqrt{0.54} = \pm 0.26\ \text{dm}$$

$$\sigma_{y_1} = \pm 0.35\sqrt{0.63} = \pm 0.28\ \text{dm}$$

$$\sigma_{p_1} = \pm\sqrt{0.26^2 + 0.28^2} = \pm 0.38\ \text{dm}$$

$$\sigma_{x_2} = \pm 0.35\sqrt{0.59} = \pm 0.27\ \text{dm}$$

$$\sigma_{y_2} = \pm 0.35\sqrt{0.84} = \pm 0.32 \text{ dm}$$

$$\sigma_{p_2} = \pm\sqrt{0.27^2 + 0.32^2} = \pm 0.42 \text{ dm}$$

$$\sigma_{x_3} = \pm 0.35\sqrt{0.48} = \pm 0.24 \text{ dm}$$

$$\sigma_{y_3} = \pm 0.35\sqrt{0.80} = \pm 0.31 \text{ dm}$$

$$\sigma_{p_3} = \pm\sqrt{0.24^2 + 0.31^2} = \pm 0.39 \text{ dm}$$

$$\sigma_{x_4} = \pm 0.35\sqrt{0.53} = \pm 0.25 \text{ dm}$$

$$\sigma_{y_4} = \pm 0.35\sqrt{0.98} = \pm 0.35 \text{ dm}$$

$$\sigma_{p_4} = \pm\sqrt{0.25^2 + 0.35^2} = \pm 0.43 \text{ dm}$$

第六节　间接平差特例——直接平差

对同一未知量直接进行多次观测，求该量的平差值并评定精度，称为直接平差。显然直接平差是间接平差中具有一个参数的特殊情况。

设对未知量 x 独立地进行 n 次不同精度观测，观测值为 $\underset{n\times 1}{L}$，相应的权阵 $\underset{n\times n}{P}$ 为对角阵，对角线元素为 $p_1, p_2, \cdots p_n$，p_i 为 L_i 的权。按间接平差法，误差方程为

$$v_i = \hat{x} - L_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2-96}$$

组成法方程

$$[p]\hat{x} - [pL] = 0 \tag{2-97}$$

解得

$$\hat{x} = \frac{[pL]}{[p]} \tag{2-98}$$

式(2－98)称为加权平均值，即在直接平差中，未知量的平差值就是加权平均值。

为计算方便，设 $\hat{x}$ 的近似值为 x^0，即

$$\hat{x} = x^0 + \delta x$$

并令

$$\Delta L_i = L_i - x^0 \tag{2-99}$$

则式(2－96)为

$$v_i = \delta x - \Delta L_i \tag{2-100}$$

法方程及其解为

$$[p]\delta x - [p\Delta L] = 0$$

$$\delta x = \frac{[p\Delta L]}{[p]} \tag{2-101}$$

于是

$$\hat{x} = x^0 + \frac{[p\Delta L]}{[p]} \tag{2-102}$$

要注意，式中 ΔL_i 为各观测值 L_i 分别减去近似值 x^0 所得的差值。

将式(2－96)两端乘以相应的权,并取和得

$$[pv]=[p]\hat{x}-[pL]$$

顾及式(2－98)得

$$[pv]=0 \tag{2-103}$$

特别地,当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$ 时,则与式(2－98)、式(2－102)相应未知量的平差值为

$$\hat{x}=\frac{[L]}{n} \tag{2-104}$$

或

$$\hat{x}=x^0+\frac{[\Delta L]}{n} \tag{2-105}$$

并有

$$[v]=0 \tag{2-106}$$

直接平差问题仅有一个参数,即 $t=1$,故单位权中误差计算式为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \tag{2-107}$$

由式(2－97)知,法方程系数 $N=[p]$,则 $\hat{x}$ 的协因数为

$$Q_{XX}=N^{-1}=\frac{1}{[p]} \tag{2-108}$$

故 $\hat{x}$ 的中误差为

$$\sigma_{\hat{x}}=\sigma_0\sqrt{Q_{\hat{x}\hat{x}}}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{[p]}} \tag{2-109}$$

观测值 L_i 的中误差为

$$\sigma_{L_i}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{p_i}} \tag{2-110}$$

特别地,当 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1$,即为同精度观测时,精度评定公式为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \tag{2-111}$$

$$\sigma_{\hat{x}}=\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \tag{2-112}$$

亦即对某个量所作的 n 个同精度观测值的算术平均值就是该量的平差值,这时单位权中误差就是观测值中误差,平差值的权为单个观测值的权 $p_i=1$ 的 n 倍。

例 2－9　等精度观测某角6 次,观测值见表 2－20,试求该角的最或是值、观测值中误差及最或是值中误差。

解　首先设该角的近似值 $x^0=75°32'15''$,即取其秒数为接近观测值平均秒数的一个整数,这样可以计算 ΔL_i。所有计算过程列于表 2－20 中。最或是值为

$$\hat{x}=x^0+\frac{[\Delta L]}{n}=75°32'15''+\left(\frac{3}{6}\right)''=75°32'15.5''$$

表 2－20

序　号	观　测　值	ΔL	v	vv
1	75°32′13″	−2	2.5	6.25
2	18	+3	−2.5	6.25
3	15	0	0.5	0.25
4	17	+2	−1.5	2.25
5	16	+1	0.5	0.25
6	14	−1	1.5	2.25
$\sum$		+3	0	17.50

最或是值减去观测值即为改正数，其代数和为零，证明 $\hat{x}$ 和 v_i 的计算没有错误。最后算得观测值中误差及最或是值中误差分别为

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{17.50}{6-1}} = \pm 1.9''$$

$$\sigma_{\hat{x}} = \pm\frac{1.9''}{\sqrt{6}} = \pm 0.8''$$

例 2－10　对某边独立观测6 次，观测值及权见表 2－21。试求该边的最或是值及其中误差。

解　首先设该边的近似值 $x^0 = 104.612$ m，这样可以计算 ΔL_i。所有计算过程列于表 2－21 中。

表 2－21

序号	观测值/m	P	ΔL/mm	$P\Delta L$/mm	v/mm	pv	pvv
1	104.614	4.0	2	8.0	0.1	0.04	0.04
2	104.608	2.5	−4	−10.0	6.1	15.25	93.03
3	104.612	2.0	0	0	2.1	4.2	8.82
4	104.617	4.0	5	20.0	−2.9	−11.6	33.64
5	104.611	3.0	−1	−3.1	3.1	9.3	28.83
6	104.616	9.0	4	36.0	−1.9	−17.1	32.49
$\sum$		24.5		50.9		0.011	196.85

由此计算出该边的最或是值为

$$\hat{x} = x^0 + \frac{[p\Delta L]}{[p]} = 104.612\ \text{m} + \frac{50.9}{24.5}\ \text{mm} = 104.614\ 1\ \text{m}$$

检核　　$[pv] = -0.01$

单位权中误差为

$$\sigma_0 = \pm\sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{196.85}{5}} = \pm 6.3\ \text{mm}$$

最或是值中误差为

$$\sigma_{\hat{x}} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{[p]}} = \pm 1.3\ \text{mm}$$

思考题与习题

2－1　简述间接平差原理。

2－2　在间接平差中，怎样确定未知数的个数？为什么说未知数的个数等于必要观测的个数？

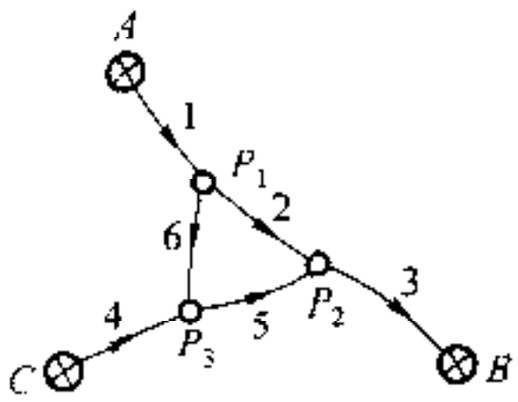
2－3　在间接平差中，选定的未知数要满足什么要求？为什么未知数之间要“函数独立”？

2－4　按间接平差法进行三角网(按角度)平差时，一般以什么作为未知数？

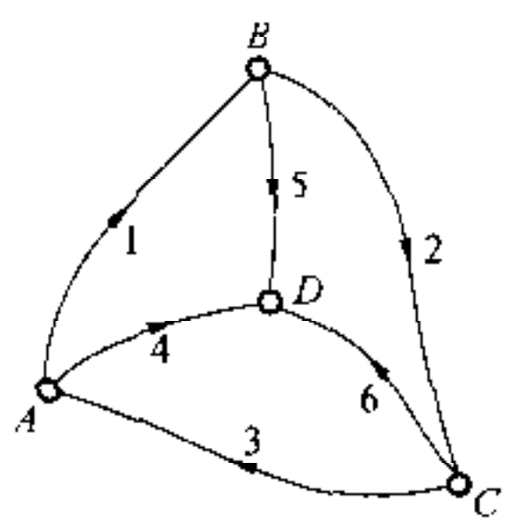
2－5　在间接平差中，法方程的个数如何确定？

2－6　简述间接平差计算步骤。

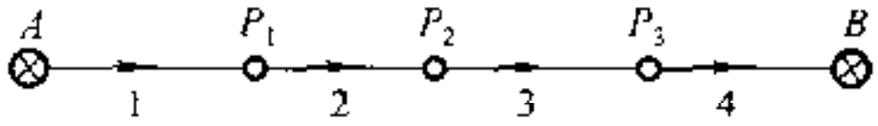
2－7　试确定图 2－16 中各个图形未知数的个数，并选择两组不同的未知数。



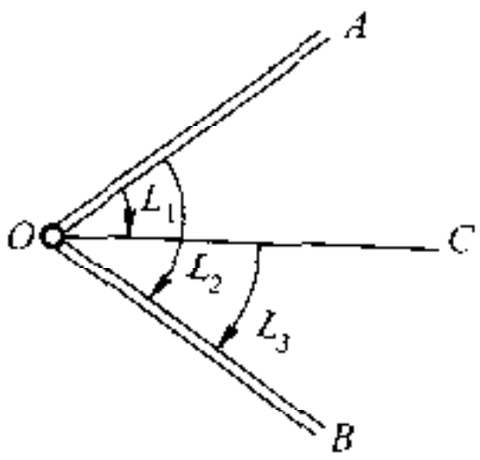
(a)



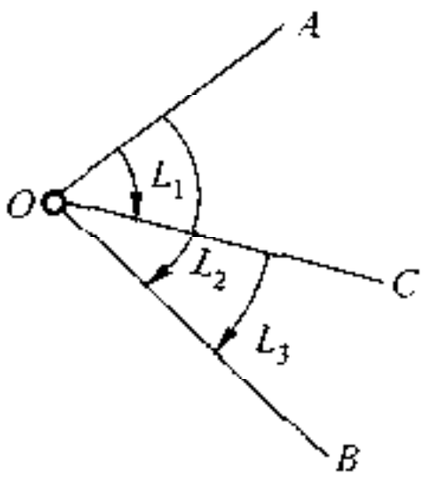
(b)



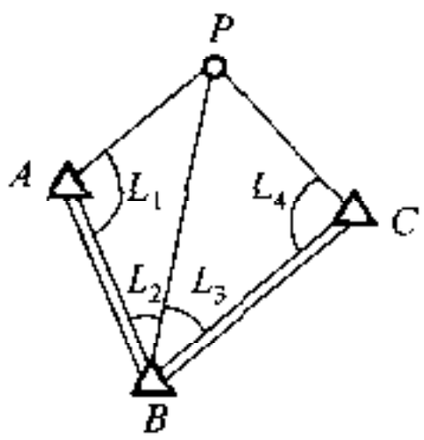
(c)



(d)



(e)



(f)

图 2－16

2－8　试列出下列各图形相应的误差方程式。

(1) 由高程已知的水准点 A、B、C 和 D 向待定点 P(图 2－17)作水准测量，得观测值及路线长度为：

$$h_1 = +3.476\ \text{m},\quad S_1 = 1\ \text{km},\quad H_A = 3.520\ \text{m}$$

$$h_2 = +1.328\ \text{m},\quad S_2 = 2\ \text{km},\quad H_B = 4.818\ \text{m}$$

$$h_3 = +2.198\ \text{m},\quad S_3 = 2\ \text{km},\quad H_C = 3.768\ \text{m}$$

$$h_4 = +3.234\ \text{m},\quad S_4 = 1\ \text{km},\quad H_D = 5.671\ \text{m}$$

(2) 某水准网中(图 2－18)，已知 A、B 两点高程，为确定 P_1、P_2、P_3 点高程进行了水准测量。观测结果为：

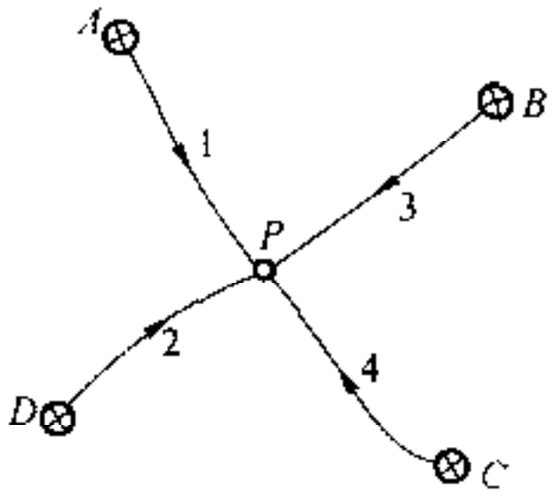


图 2－17

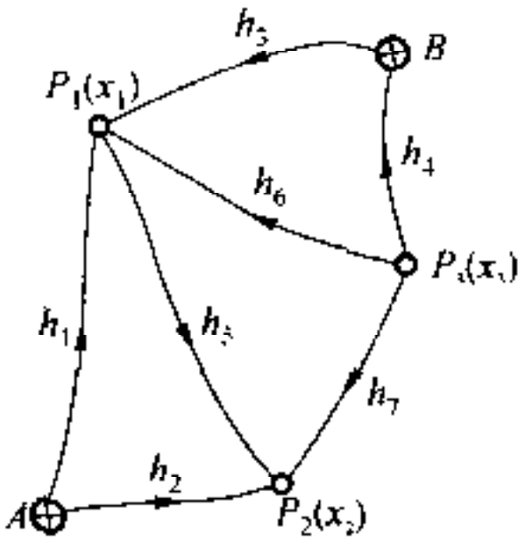


图 2－18

$$h_1 = +0.023\ \text{m}, \quad S_1 = 1\ \text{km}$$
$$h_2 = +2.009\ \text{m}, \quad S_2 = 1\ \text{km}$$
$$h_3 = +0.363\ \text{m}, \quad S_3 = 2\ \text{km}$$
$$h_4 = +0.640\ \text{m}, \quad S_4 = 2\ \text{km}$$
$$h_5 = +0.657\ \text{m}, \quad S_5 = 1\ \text{km}$$
$$h_6 = +1.000\ \text{m}, \quad S_6 = 1\ \text{km}$$
$$h_7 = +1.650\ \text{m}, \quad S_7 = 1.5\ \text{km}$$

(3) 如图 2－19 所示，观测数据如下：

观测值：

$$L_1 = 29°59'50'', \quad L_2 = 30°29'55''$$
$$L_3 = 60°29'58'', \quad L_2 = 24°30'05''$$

已知固定角：

$$\angle AOB = 85°00'00.0''$$

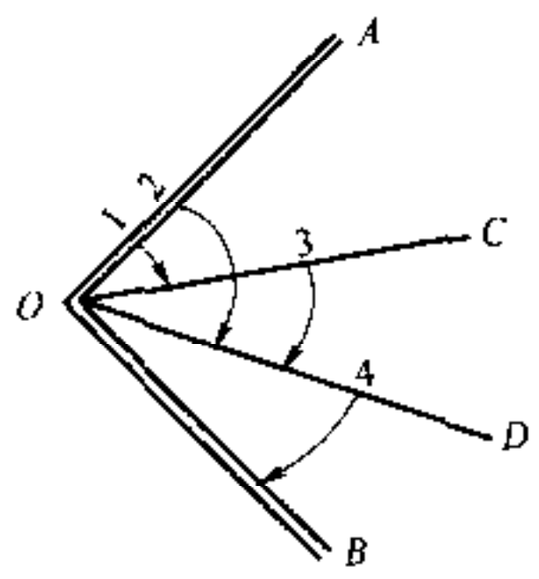


图 2－19

2－9　根据下列误差方程式及观测值的权组成法方程式。

$v_1 = \delta x_1$　　权 $p_1 = 1$

$v_2 = \delta x_2$　　$p_2 = 1$

$v_3 = \delta x_1 - 4$　　$p_3 = 0.5$

$v_4 = -\delta x_3$　　$p_4 = 0.5$

$v_5 = -\delta x + \delta x_2 - 7$　　$p_5 = 1$

$v_6 = \delta x_1 - \delta x_3 - 1$　　$p_6 = 1$

$v_7 = \delta x_2 - \delta x_3 - 1$　　$p_7 = 0.67$

2－10　图 2－20 的水准网中，A、B、C 三点为已知水准点，高差观测值和路线长度如下：

$$h_1 = +1.003\ \text{m}, \quad S_1 = 1\ \text{km}, \quad H_A = 11.000\ \text{m}$$
$$h_2 = +0.501\ \text{m}, \quad S_2 = 2\ \text{km}, \quad H_B = 11.500\ \text{m}$$
$$h_3 = +0.503\ \text{m}, \quad S_3 = 2\ \text{km}, \quad H_C = 12.008\ \text{m}$$
$$h_1 = +0.505\ \text{m}, \quad S_4 = 1\ \text{km}$$

试用间接平差法求：

(1) P_1 及 P_2 点的高程最或是值及其中误差；

(2) 求 P_1 到 P_2 点高差最或是值的中误差。

2－11　图 2－21 为一三角形中插入一点。A、B、C 三点为已知三角点，P 点为待定点。起算数据及观测角值列于表 2－22 和表 2－23 中。试用坐标平差法求待定点的坐标及其点位中误差。

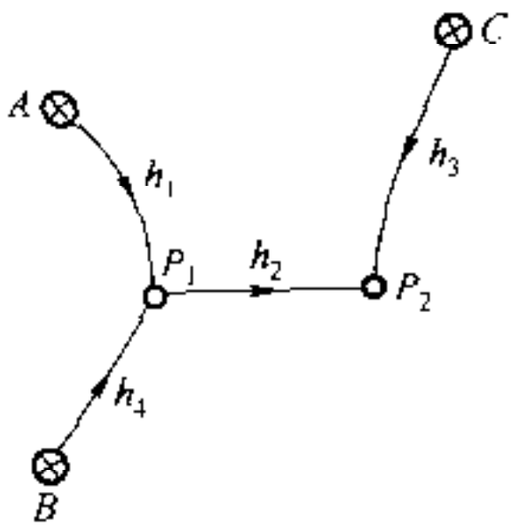


图 2－20

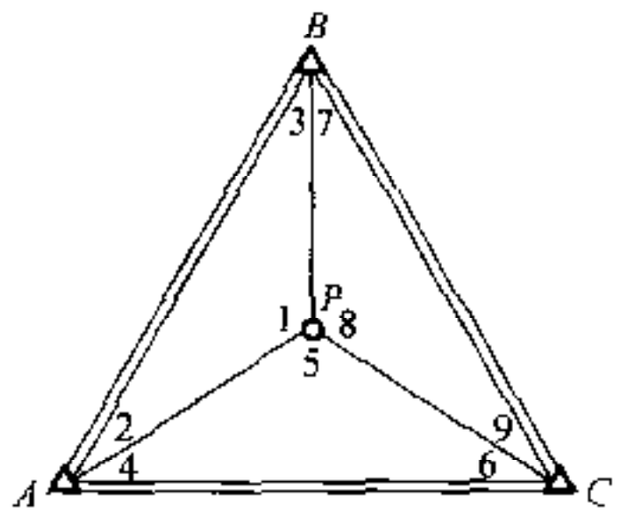


图 2－21

表 2－22

点号	坐标/m		坐标方位角 /(° ′ ″)	边长 /m	点号
	x	y			
A	8 864.53	5 392.58	45 16 38.0	6 751.24	B
B	13 615.22	10 189.47	149 19 03.0	8 250.04	C
C	6 520.12	14 399.30	284 35 24.0	9 306.84	A

表 2－23

角号	角　值 /(° ′ ″)	角号	角　值 /(° ′ ″)	角号	角　值 /(° ′ ″)
1	106 50 42	4	28 26 12	7	33 40 50
2	30 52 47	5	127 48 39	8	125 20 38
3	42 16 40	6	23 45 11	9	20 58 25

2－12　图 2－22 中，A、B、C 是已知点，P 为待定点，网中观测了三条边长 $L_1=3\ 128.86$ m、$L_2=3\ 367.20$ m、$L_3=6\ 129.88$ m。起算数据见表 2－24。求 P 点的坐标平差值。

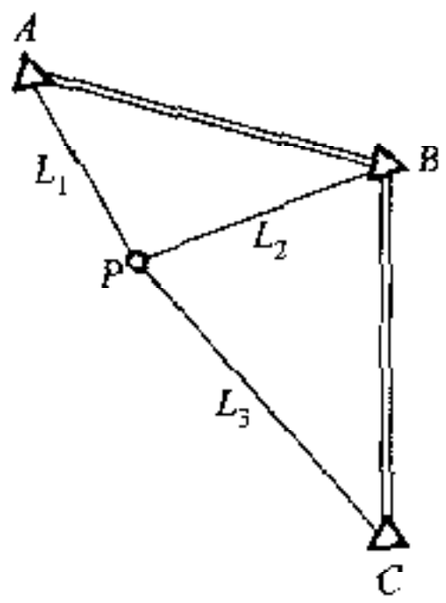


图 2－22

表 2－24

点名	坐标/m		坐标方位角 /(° ′ ″)	边长/m
	x	y		
A	60 509.596	69 902.525	117 18 33.72	4 949.186
B	58 238.935	74 300.086	187 59 34.18	6 354.379
C	51 946.286	73 416.515		

2－13　由五个已知水准点向一个待定点 A 作水准测量，分别求得 A 点的高程及路线长度如下：

$$H'_1=112.814\ \text{m},\quad S_1=2.5\ \text{km}$$
$$H'_2=112.807\ \text{m},\quad S_2=4.0\ \text{km}$$
$$H'_3=112.802\ \text{m},\quad S_3=5.0\ \text{km}$$
$$H'_4=112.817\ \text{m},\quad S_4=0.5\ \text{km}$$
$$H'_5=112.816\ \text{m},\quad S_5=1.0\ \text{km}$$

设以 20 km 水准路线测得的高差作为单位权观测，试求：

(1) A 点高程的最或是值及其中误差；

(2) 每公里水准测量的中误差。

第三章　条件平差

第一节　条件平差原理

间接平差(又称参数平差)是通过选定足以确定某个平差问题的 t 个未知数(未知参数)来消除观测值之间的不符值,并用求自由极值的方法解出未知参数的平差值,从而求得各观测量的平差值。

而条件平差是以 n 个观测量的平差值 $\hat{L}$ 作为未知数,并通过它们之间存在的 $r(=n-t)$ 个条件方程来消除观测值之间的不符值,同时运用求条件极值的原理解出改正数 V,从而求得各观测量的平差值。

在条件平差法中,通常将各观测量的最或是值 $\hat{L}$ 称为平差值,将平差值 $\hat{L}$ 应满足的方程,如第二章所述的式(2-2),称为平差值条件方程;将改正数 V 应满足的方程,如式(2-6)称为改正数条件方程,简称为条件方程。

一般而言,在某一平差问题中,如果必要观测数为 t,则只能选出 t 个独立的未知数,以后每增加一个未知数,在这些未知数之间就会产生一个物理或几何上所应满足的条件方程。而在条件平差中,选了 n 个观测量的平差值 $\hat{L}$ 作为未知数,由于多选了 $r=n-t$ 个未知数,因而就产生了 r 个条件方程。条件平差法就是在满足 r 个条件方程的要求下,求函数 $V^{\mathrm{T}}PV$ 的极小值。

一、条件平差原理

设某平差问题,有 n 个独立观测值组成的观测向量为 $\underset{n\times 1}{L}$,其相应的权阵为 $\underset{n\times n}{P}$(对角阵),改正数向量为 $\underset{n\times 1}{V}$,平差值向量为 $\underset{n\times 1}{\hat{L}}$。当有 r 个多余观测时,则平差值 $\underset{n\times 1}{\hat{L}}$ 应满足 r 个平差值条件方程。

设有 r 个平差值条件方程为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\hat{L}_1+a_{12}\hat{L}_2+\cdots+a_{1n}\hat{L}_n+a_{10}&=0\\ a_{21}\hat{L}_1+a_{22}\hat{L}_2+\cdots+a_{2n}\hat{L}_n+a_{20}&=0\\ \cdots\cdots&\\ a_{r1}\hat{L}_1+a_{r2}\hat{L}_2+\cdots+a_{rn}\hat{L}_n+a_{r0}&=0 \end{aligned}\right\}\tag{3-1}$$

式中,$a_{ij}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,n)$为条件方程系数;$a_{i0}(i=1,2,\cdots,r)$为条件方程的常数。将 $\hat{L}_i=L_i+v_i(i=1,2,\cdots,n)$代入式(3-1),得改正数条件方程为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}v_n + w_1 = 0 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}v_n + w_2 = 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}v_1 + a_{r2}v_2 + \cdots + a_{rn}v_n + w_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3-2}$$

式中，$w_i(i=1,2,\cdots,r)$称为条件方程的闭合差，或称为条件方程的不符值，即

$$\left.\begin{aligned} w_1 = a_{11}L_1 + a_{12}L_2 + \cdots + a_{1n}L_n + a_{10} \\ w_2 = a_{21}L_1 + a_{22}L_2 + \cdots + a_{2n}L_n + a_{20} \\ \cdots\cdots \\ w_r = a_{r1}L_1 + a_{r2}L_2 + \cdots + a_{rn}L_n + a_{r0} \end{aligned}\right\} \tag{3-3}$$

令

$$\underset{r\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{W} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{n\times 1}{\hat{L}} = \begin{pmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \vdots \\ \hat{L}_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{L} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}, \quad \underset{r\times 1}{A_0} = \begin{pmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \vdots \\ a_{r0} \end{pmatrix}$$

则式(3-1)、式(3-2)和式(3-3)的矩阵表达式为

$$A\hat{L} + A_0 = 0 \tag{3-4}$$

$$AV + W = 0 \tag{3-5}$$

$$W = AL + A_0 \tag{3-6}$$

由于观测值的个数 n 总是大于多余观测的个数 r，即 $n>r$，所以条件方程式(3-5)中 V 的解不是惟一的。按照平差原则，取 $V^{\mathrm{T}}PV$ 的值等于最小的一组 V 值。为此，用拉格朗日乘系数法解此问题，设 $K=(k_1,k_2,\cdots,k_r)^{\mathrm{T}}$，称为联系数向量。组成新的函数

$$\Phi = V^{\mathrm{T}}PV - 2K^{\mathrm{T}}(AV + W)$$

将 Φ 对 V 求一阶导数，并令其为零，得

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}V} = 2V^{\mathrm{T}}P - 2K^{\mathrm{T}}A = 0$$

将等式两端同除以 2，并移项后两边转置，得

$$PV = A^{\mathrm{T}}K$$

将上式两边左乘以权的逆阵 P^{-1}，得改正数 V 的计算公式为

$$V = P^{-1}A^{\mathrm{T}}K = QA^{\mathrm{T}}K \tag{3-7}$$

式(3-7)称为改正数方程，当 P 为对角阵时，其纯量形式为

$$v_j = \frac{1}{p_j}(a_1k_1 + a_2k_2 + \cdots + a_rk_r) \quad (j=1,2,\cdots,n) \tag{3-8}$$

将 n 个改正数方程式(3-7)和 r 个条件方程式(3-5)联立求解，就可以求得一组惟一

的解，即 n 个改正数和 r 个联系数。为此，将式(3－5)和式(3－7)称为条件平差的基础方程。显然，由基础方程解出的一组改正数 V，不仅能消除闭合差，同时也能满足 $V^{\mathrm{T}}PV=$最小的要求。

解基础方程时，先将式(3－7)代入式(3－5)，得

$$AP^{-1}A^{\mathrm{T}}K+W=0$$

令

$$N=AP^{-1}A^{\mathrm{T}}=AQA^{\mathrm{T}} \tag{3-9}$$

则有

$$\underset{r\times r}{N}\ \underset{r\times 1}{K}+\underset{r\times 1}{W}=0 \tag{3-10}$$

式(3－10)称为联系数法方程式，简称法方程。法方程系数矩阵 N 的秩 $R(N)=r$，N 是一个 r 阶的满秩方阵，且可逆。所以可以解得 K 的惟一解。

如果将法方程的系数矩阵 N 转置，得

$$N^{\mathrm{T}}=(AP^{-1}A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}(P^{-1})^{\mathrm{T}}(A)^{\mathrm{T}}=AP^{-1}A^{\mathrm{T}}=N$$

可见，N 是 r 阶的对称方阵。

法方程式的纯量形式为

$$\left.\begin{aligned}
&n_{11}k_1+n_{12}k_2+\cdots+n_{1r}k_r+w_1=0\\
&n_{21}k_1+n_{22}k_2+\cdots+n_{2r}k_r+w_2=0\\
&\qquad\cdots\cdots\\
&n_{r1}k_1+n_{r2}k_2+\cdots+n_{rr}k_r+w_r=0
\end{aligned}\right\} \tag{3-11}$$

式中

$$n_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}a_{jk}}{p_k}\qquad(i,j=1,2,\cdots,r) \tag{3-12}$$

由于法方程系数矩阵 N 是对称矩阵，当 $i\neq j$ 时，则有

$$n_{ij}=n_{ji}$$

从法方程解出联系数 k_i 后，将其代入改正数方程式(3－7)，求出改正数 V 值，再加上观测值 L，得平差值 $\hat{L}$。这样就完成了按条件平差法求平差值的任务。

二、条件平差求平差值的步骤与算例

1. 求平差值的步骤

综合以上内容，可将按条件平差求平差值的计算步骤归纳如下：

(1) 根据平差问题的具体情况，列出条件方程式(3－5)，条件方程的个数等于多余观测的个数 r；

(2) 根据条件式的系数、闭合差及观测值的权组成法方程式(3－10)，法方程的个数与条件方程的个数相一致；

(3) 解算法方程，求出联系数 K 值；

(4) 将 K 值代入改正数方程式(3－7)中，求出改正数 V 值，并求出平差值 $\hat{L}=L+V$；

(5) 检核。为了检查平差计算的正确性，常用平差值 $\hat{L}$ 重新列出平差值方程式(3－4)，看其是否满足方程。

上述计算步骤的具体内容，将分别在以后各节中作详细介绍。

2. 算例

例 3-1　设对图2-1 中的三个内角作同精度观测，得观测值：$L_1 = 42°12'20''$、$L_2 = 78°09'09''$、$L_3 = 59°38'40''$，试按条件平差求三内角的平差值。

解　本测量问题中 $n = 3, t = 2$，则 $r = n - t = 1$，即应列一个条件式。其平差值条件式为

$$\hat{L}_1 + \hat{L}_2 + \hat{L}_3 - 180° = 0$$

以 $\hat{L}_i = L_i + V_i$ 及 L_i 的值代入上式得改正数条件方程式

$$v_1 + v_2 + v_3 + 9'' = 0$$

式中闭合差

$$w = L_1 + L_2 + L_3 - 180° = 9''$$

上式用矩阵表示为

$$(1 \quad 1 \quad 1)\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + (9) = 0$$

因为是同精度观测，设其权 $p_1 = p_2 = p_3 = 1$，故其协因数阵亦为单位阵。组成法方程如下：

$$(1 \quad 1 \quad 1)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}(k_1) + 9 = 0$$

其纯量形式为

$$3k_1 + 9 = 0$$

解算法方程，得联系数 $k_1 = -3$。

将联系数代入改正数方程，得

$$V = P^{-1}A^{\mathrm{T}}K = A^{\mathrm{T}}K = \begin{Bmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{Bmatrix}$$

计算各角的平差值

$$\begin{Bmatrix} \hat{L}_1 \\ \hat{L}_2 \\ \hat{L}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 42°12'17'' \\ 78°09'06'' \\ 59°38'37'' \end{Bmatrix}$$

检核。将平差值 $\hat{L}$ 代入平差值条件方程，得

$$42°12'17'' + 78°09'06'' + 59°38'37'' - 180° = 0$$

可见，各角的平差值是满足方程的，说明计算无误。

例 3-2　在图3-1 中，A、B 为已知水准点，其高程 $H_A = +12.013$ m，$H_B = +10.013$ m，可将其视为无误差。为了确定 C、D 两点的高程，共观测了四条路线的高差，其高差观测值及路线长度为

$$h_1 = -1.004\ \text{m}, \quad S_1 = 2\ \text{km};$$
$$h_2 = +1.516\ \text{m}, \quad S_2 = 1\ \text{km};$$
$$h_3 = +2.512\ \text{m}, \quad S_3 = 2\ \text{km};$$
$$h_4 = +1.520\ \text{m}, \quad S_4 = 1.5\ \text{km}$$

试求 C 和 D 点高程的平差值。

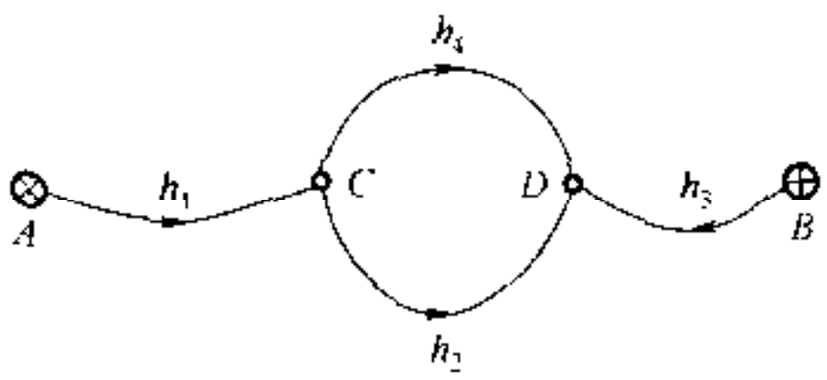


图 3-1

解 该问题 $n=4, t=2$,则 $r=n-t=2$,列出条件式如下:

$$\begin{aligned} \hat{h}_1 + \hat{h}_2 - \hat{h}_3 \qquad + H_A - H_B &= 0 \\ \hat{h}_2 \qquad - \hat{h}_4 \qquad\qquad &= 0 \end{aligned}$$

以 $\hat{h}_i = h_i + v_i$ 代入平差值条件方程(闭合差的单位为 mm),可得条件方程的最后形式为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

设每公里的观测高差为单位权观测,即 $C=1$,根据定权公式,得各条路线的权倒数为

$$\frac{1}{p_1} = 2, \quad \frac{1}{p_1} = 1, \quad \frac{1}{p_3} = 2, \quad \frac{1}{p_4} = 1.5$$

组成法方程系数阵为

$$N = AP^{-1}A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{pmatrix}$$

其法方程为

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2.5 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

解算法方程,得

$$k_1 = -0.35, \quad k_2 = +1.74$$

将其代入改正数方程,算得改正数为

$$V = \begin{Bmatrix} -0.7 \\ 1.4 \\ 0.7 \\ 2.6 \end{Bmatrix}$$

计算平差值为

$$\hat{h}_1 = -1.004\ 7\ \text{m}, \quad \hat{h}_2 = 1.517\ 4\ \text{m},$$
$$\hat{h}_3 = 2.512\ 7\ \text{m}, \quad \hat{h}_4 = 1.517\ 4\ \text{m}$$

检核,将平差值代入平差值条件方程,计算结果均适合方程。

计算 C 和 D 点高程平差值为

$$\hat{H}_C = H_A + \hat{h}_1 = 11.008\ 3\ \text{m}, \quad \hat{H}_D = H_B + \hat{h}_3 = 12.525\ 7\ \text{m}$$

第二节　必要观测和多余观测

上节已经提到，条件方程的个数与多余观测 r 相同，而 $r=n-t$，式中观测值的个数 n 是已知的。因此，条件方程个数的确定，就在于如何确定必要观测的个数 t。

一个平差问题，必要观测的个数取决于该问题本身的性质。现就不同形式的控制网分别介绍如下：

一、水准网（包括三角高程网）

水准网（包括三角高程网，下同）平差的主要目的是确定网中各待定点的高程平差值。如图 3－2 的水准网中，有 4 个已知水准点（图中以“⊗”表示的点），两个待定点（以“○”表示的点），观测了 6 段高差。从图中可以看出，要确定 E 和 F 点高程，必须观测两个观测值，如 h_1 和 h_5，或 h_4 和 h_3 等等。可见在有已知点的水准网中，必要观测的个数就等于待定点的个数。所以图 3－2 中，必要观测个数 $t=2$，而条件方程个数 $r=n-t=6-2=4$。

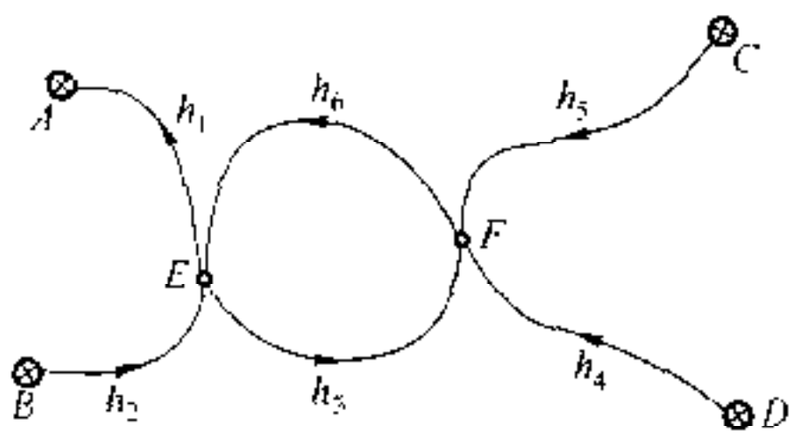


图 3－2

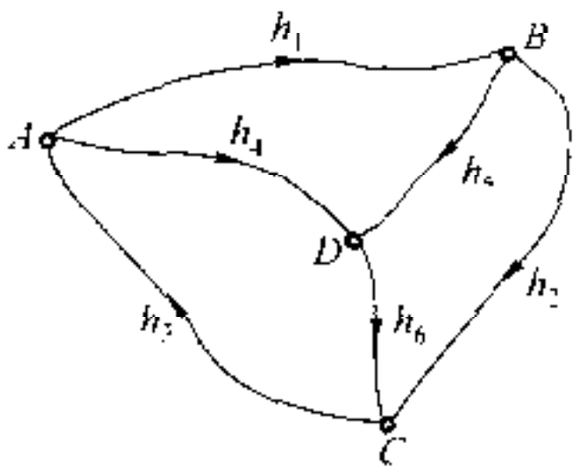


图 3－3

如果水准网中没有已知点，这时，只能假定某一点的高程为已知，并以此为基准去确定其他各点的相对高程。如图 3－3 的水准网，网中没有已知水准点，这时通过平差计算，只能确定各点的相对高程。为此，可先假定某一点高程为已知，例如设 $H_A=100.00$ m，并以此为基准，去推算 B、C、D 等点的高程。这样，只要观测了三个观测值就行了。所以，在没有已知点的水准网中，必要观测个数等于网中全部待定点的个数减 1。图 3－3 的水准网中，必要观测个数 $t=4-1=3$，而条件方程个数为 $r=6-3=3$。

二、三角网（测角、测边和边角同测三角网）

建立三角网的目的是要求网中各待定点在统一坐标系或某一局部坐标系中的坐标。根据观测量的不同，三角网分为测角三角网、测边三角网和边角同测三角网。测角三角网中观测量为角度，测边三角网中观测量为边长，而边角同测三角网中的观测量既有边长也有角度。下面分别讨论各种三角网必要观测和多余观测数目的确定方法。为讨论方便起见，规定三角网中符号“△”表示坐标已知的固定点，符号“○”表示待定点。

1. 测角三角网

在测角三角网中，如果只有角度（如观测了网中所有角度），则只能确定网的形状。为了确定其大小和在坐标系中的位置，则需要四个起算数据，其中最少应有一个已知点的坐标，另外两个可以是另一个已知点的坐标，或者是一个已知边长和已知方位角。这四个起算数据称为测角三角网的必要起算数据。当网中没有已知点时，也可以假定网中任意一点的坐

标。方位角可以是已知的或直接测定的，甚至是假定的。而起算边长如果不是已知的，则必须丈量，一般是不能假定的。因为，当网中有了一条已知边长或直接测定了某一边的长度，网的大小就随之确定了，也就是确定了点与点之间的相对位置；而任意假定一点的坐标，由于不同的假定，只能相当于使三角网在坐标系中整个地移动了一个位置；而任意假定一条边的方位角，由于不同的假定，只能相当于使三角网整个地旋转了一个角度。但后两者都不会改变点与点之间的相对位置。

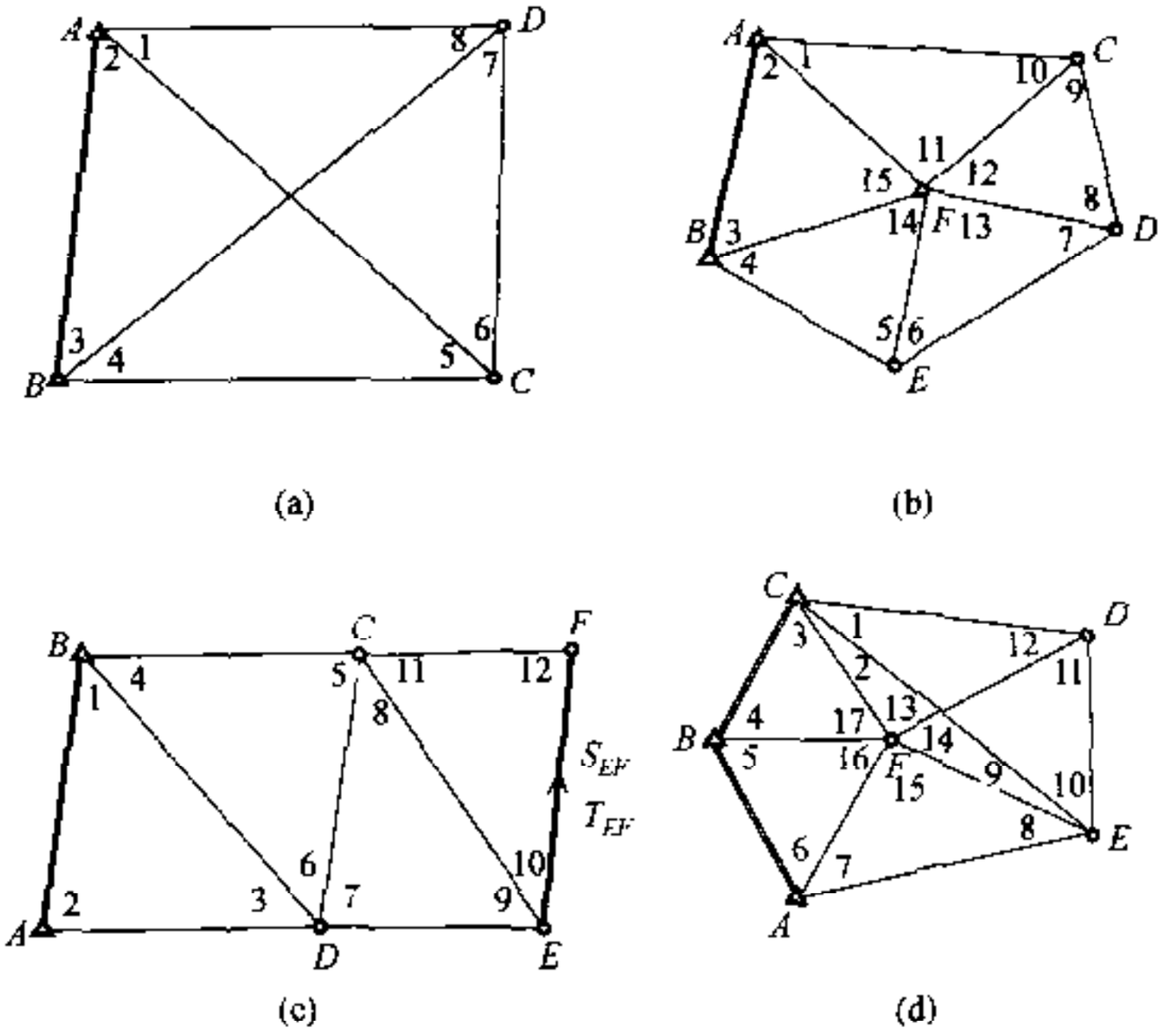


图 3－4

当网中仅有或少于上述 4 个必要起算数据时，称为独立测角网或自由测角网。除了必要起算数据之外，网中还有多余的起算数据时，则称为非独立测角网或附合测角网。例如，在图 3－4 中的(a)、(b)为独立测角网，(c)、(d)为非独立测角网。

在图 3－4(a)中有 A、B 两点相邻接的一个已知点组，其中共有 6 个起算数据，即 A、B 两点的坐标(x_A，y_A，x_B，y_B)和边长(S_{AB})、方位角(T_{AB})，但这 6 个元素之间存在着 2 个确定的函数关系。例如，B 点的坐标可以由 A 点的坐标和 S_{AB}、T_{AB} 推算而得，或者说 S_{AB} 和 T_{AB} 可以由 A、B 两点的坐标反算而得。因此在这 6 个起算数据中，只有 4 个是独立的起算数据。它们可以是(1)A、B 两点的坐标，(2)A 或 B 点的坐标以及 AB 的边长和方位角。同样图 3－4(d)中有 A、B、C 相连的一个已知点组，其中共有 10 个起算数据，即三个点的 6 个坐标值及边长和方位角各 2 个。但其中只有 6 个独立的起算数据，它们是(1)三个点的坐标；(2)任意两点的坐标(例如，A、B 两点的坐标)以及 BC 的边长和方位角；(3)任意一个点的坐标(例如，A 点的坐标)以及 AB、BC 边的边长和方位角。

现在讨论测角网中必要观测数 t 的确定。设网中共有 P 个三角点，如果取网中的某一边作为起始边，通过该边两端的交会角就能确定另一个点的位置。除了该边的两个端点外，为了确定其余的($P-2$)个点的位置，则总共需要观测 $2(P-2)$个角度。如果网中有多余的

独立起算数据，则多余一个独立的起算数据，就可以相应地减少一个观测角度。设网中除了4个必要的起算数据以外，还有 q 个多余的独立起算数据，则必要观测数为

$$t=2(P-2)-q=2P-q-4 \tag{3-13}$$

如图 3-4(a)中，$n=8, P=4, q=0$，故 $t=4$，则多余观测数 $r=4$；

图 3-4(b)中，$n=15, P=6, q=0$，则 $t=8, r=7$；

图 3-4(c)中，$n=12, P=6, q=2$，则 $t=6, r=6$；

图 3-4(d)中，$n=17, P=6, q=2$，则 $t=6, r=11$。

2. 测边三角网

测边三角网中的观测量是三角点之间的边长。为了确定一个测边网在某一坐标系中的位置和方向，至少要有一个点的坐标和一个已知方位角作为起算数据，这三个起算数据称为测边三角网的必要起算数据。如果网中没有任何已知点和已知方位角，则只能由观测边长确定网的大小和形状。在此情况下，可以假定一个点的坐标和一条边的方位角。当网中起算数据仅有或少于上述三个元素时，称为独立测边网或自由测边网。当起算数据超过上述三个元素时，称为非独立测边网或附合测边网。应当指出，当测边三角网有两个相邻的已知点时，由于已知边既不能定向，又不能定位，它与观测边的作用一样，只能确定测边网的形状和大小。所以在测边网中，已知边不能算作起算数据，故两个相邻已知三角点仍看作三个必要的起算数据，即一个已知点坐标，一条边的方位角。

如图 3-5(a)、(b)、(c)所示为独立测边网，图 3-5(d)、(e)为非独立测边网。对于独立测边网而言(图(b)独立网除外)，如图(c)确定待定点 B 时，只需观测一条边。确定其余待定点时，每确定一个待定点，必须观测两条边。设网中共有 P 个点，则全网必须观测数应为 $2(P-2)+1=2P+3$。此外，如果网中有多余独立起算数据，每多一个就相应地减少一个必要的观测边。设网中除了三个必要的起算数据外，还有 q 个多余的独立起算数据，则必要观测个数为

$$t=2P-q-3 \tag{3-14}$$

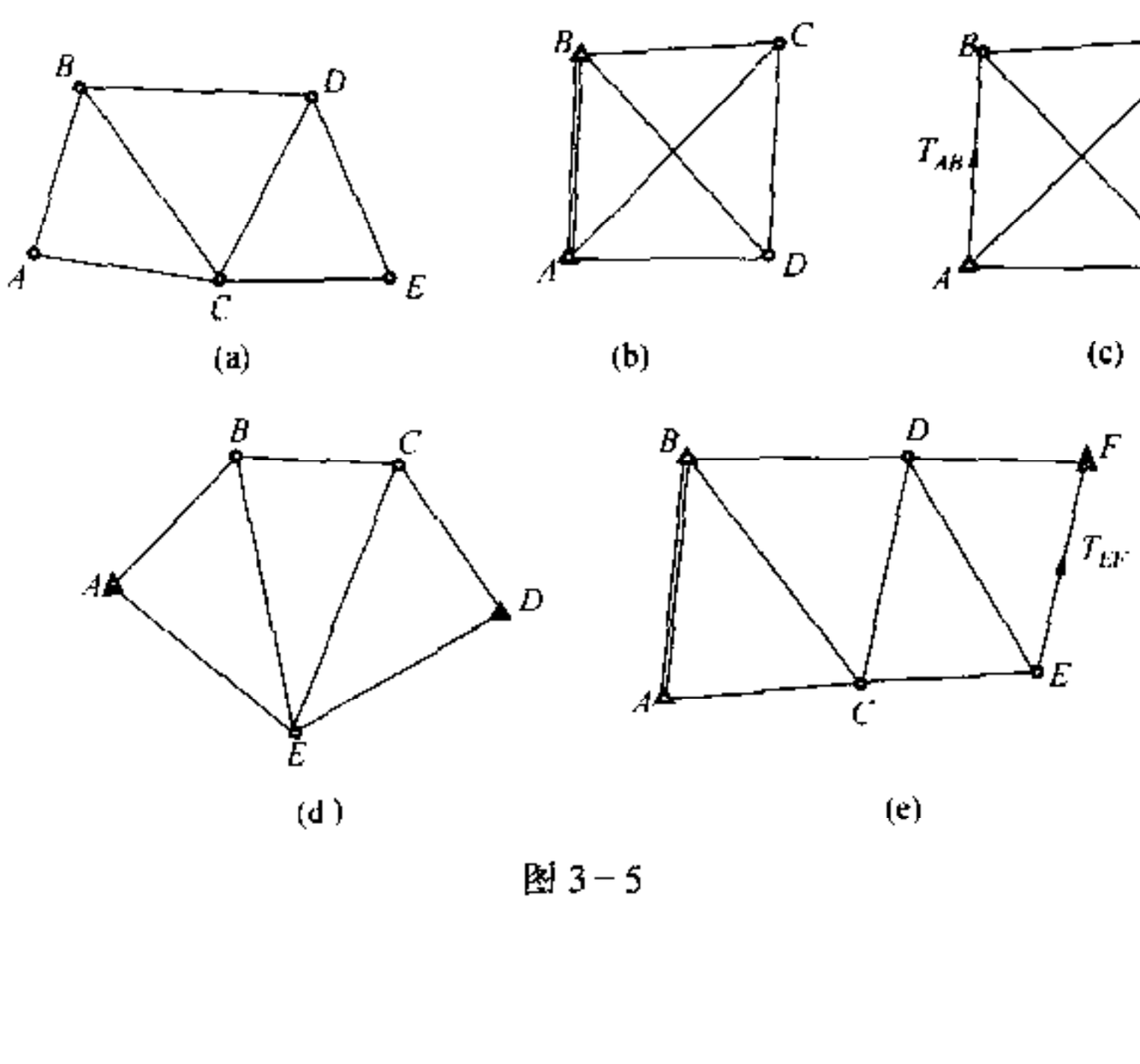


图 3-5

在图 3－5(b)中，A、B 两个相邻已知点间的已知边长 S_{AB}，在计算其必要观测数时，既可以看成是观测边，也可以将其看成是多余的起算数据。但两者仅选其一。

综上分析，图 3－5 中各网的必要观测和多余观测数应为：

图(a)中，$n=7, P=5, q=0$，则 $t=7, r=0$；

图(b)中，$n=5, P=4, q=1$，则 $t=4, r=1$；

图(c)中，$n=6, P=4, q=0$，则 $t=5, r=1$；

图(d)中，$n=7, P=5, q=1$，则 $t=6, r=1$；

图(e)中，$n=8, P=6, q=4$，则 $t=5, r=3$。

3. 边角三角网

边角网是在网中既有角度观测值又有边长观测值的三角网。它和测边网一样，必要的起算数据是一个点的坐标和一条边的方位角。当网中仅有或少于必要起算数据时，称为独立边角网；当网中有多余的起算数据时，则称为非独立边角网。如图 3－6(a)、(b)为独立边角网，图(c)为非独立边角网。在图(a)中观测了全部角度和边长，图(b)中观测了全部边长和部分角度，图(c)中观测了全部角度和部分边长。

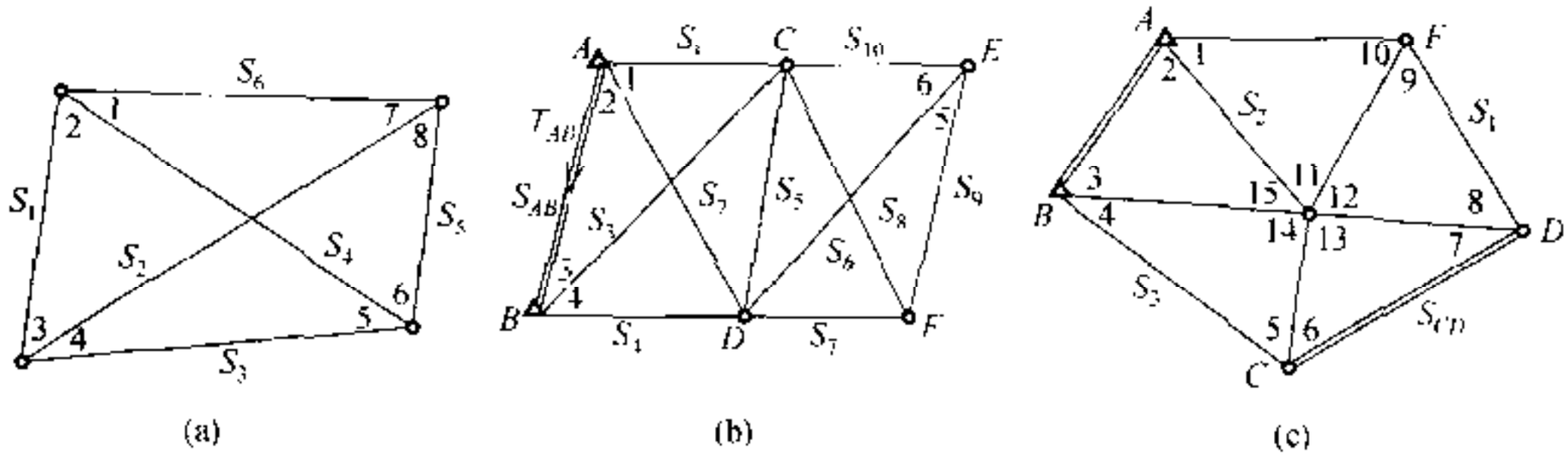


图 3－6

边角网的必要观测数 t，仍可用式(3－14)来确定。如图 3－6 所示：

图(a)中，$n=14, P=4, q=0$，则 $t=5, r=9$；

图(b)中，$n=16, P=6, q=1$，则 $t=8, r=8$；

图(c)中，$n=18, P=6, q=2$，则 $t=7, r=11$。

三、导线测量

导线测量平差计算的主要目的，是要确定各待定导线点在平面坐标系中的坐标平差值。

在图 3－7 中的单一附合导线中，M, A, B 和 N 是已知点，C, D, E, F, G, H 和 I 是待定点，

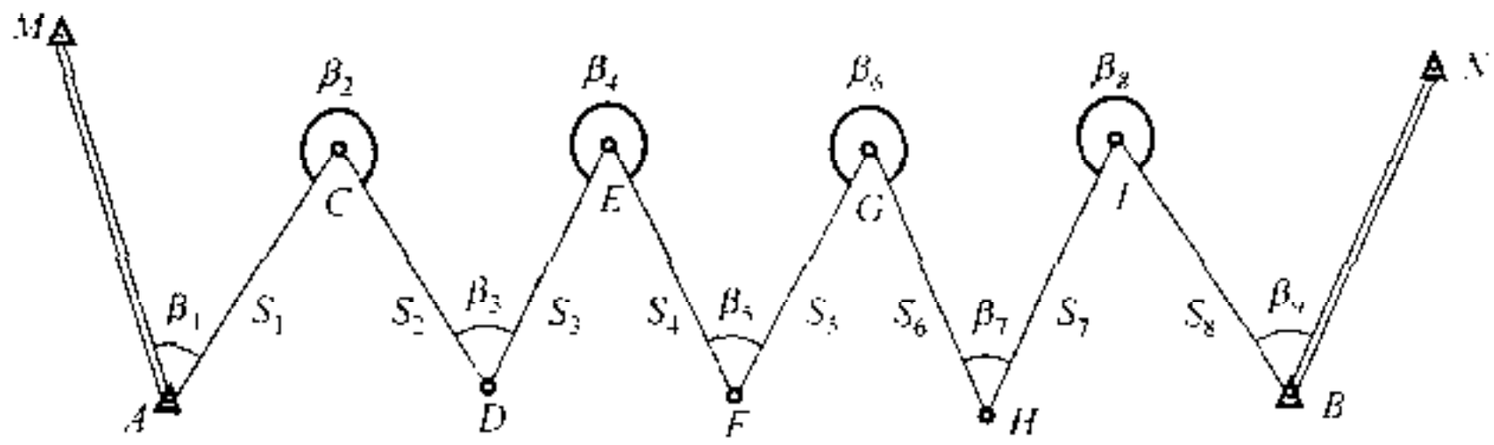


图 3－7

为了确定一个待定点的坐标，必须观测一个转折角和一条边长，即有两个必要观测。例如，为了求得 C 点的坐标，需要观测角 β_1 和丈量边长 S_1，所以在导线测量中，必要观测数为待定点个数的 2 倍。如图 3－7 所示的导线，必要观测个数 $t=2\times7=14$，而多余观测的个数 $r=17-14=3$。

不难看出，对于图 3－7 所示类型的单一导线而言，无论待定点个数有多少，其条件方程的个数总是等于 3。

第三节　水准网条件方程式

在条件平差中，根据计算平差值的步骤，确定条件方程式的个数并列出条件方程为整个平差计算的第一步。可以理解，如果条件方程式的个数确定得不正确，或者，条件方程式的列立有误，是不可能得到正确的平差结果的。当然，这样也就失去了平差计算的意义。

从本章的第一节中已经知道，一个平差问题中条件方程式的个数等于该问题多余观测的个数 r。对于条件方程式的列出，必须要注意三个方面：一是，条件方程的个数必须足数；二是，所列出的条件方程式必须彼此独立，即相互之间线性无关；三是，在确保方程总数不变的情况下，尽可能地选择形式简单，便于计算的条件方程式。

条件方程式的列立，就是将平差问题中观测量之间的几何关系用数学式子表达出来。水准网中体现了各水准点间（或者各条水准路线）的高差关系，只要将其中各独立高差的几何关系用方程的形式正确地表达出来，其条件方程式也就列立出来了。

一、单一结点水准网

图 3－8 所示为单一结点水准网，图中 A,B,C 三点为高程已知的水准点，其高程分别为 H_A,H_B,H_C。P 点为高程待定点。网中共观测了 h_1,h_2,h_3 三段高差（观测值）。根据上一节中所知，该平差问题中，必要观测数 $t=1$，观测值的个数 $n=3$，则多余观测数 $r=3-1=2$，即应该列立两个独立的条件方程式。

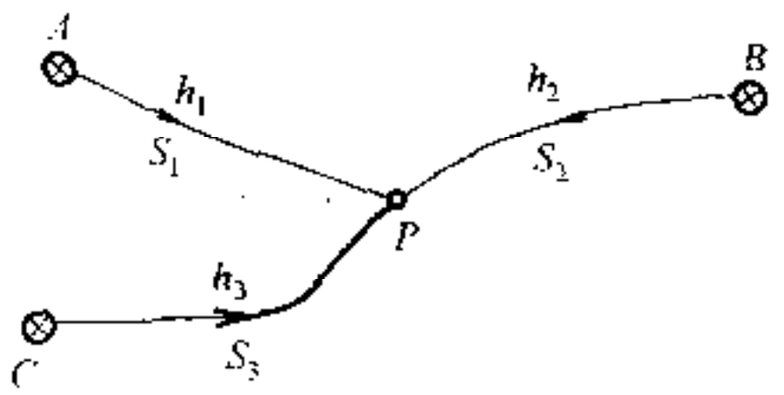


图 3－8

从图 3－8 中可见，该水准网由三条附合水准路线构成，因为有了多余观测，所以就要求高差平差值 $\hat{h}_1$、$\hat{h}_2$、$\hat{h}_3$ 满足其中的任意二条附合路线的几何要求，即满足二个附合条件。将其列立如下：

$$\left.\begin{aligned}\hat{h}_1-\hat{h}_2+(H_A-H_B)=0\\ \hat{h}_1-\hat{h}_3+(H_A-H_C)=0\end{aligned}\right\}\tag{3-15}$$

因为高差平差值等于观测高差加上改正数，即 $\hat{h}_i=h_i+v_i(i=1,2,3)$。将此式代入式（3－15）中，经整理便得到用改正数表示的条件方程式：

$$\left.\begin{aligned}v_1-v_2+w_1=0\\ v_1-v_3+w_2=0\end{aligned}\right\}\tag{3-16}$$

式中，v_i 为条件方程式中的未知数；w_i 为条件方程式中的常数项（即闭合差），其值由下式算出：

$$\left\{\begin{aligned}w_1&=h_1-h_2+H_A-H_B\\ w_2&=h_1-h_3+H_A-H_C\end{aligned}\right.\tag{3-17}$$

二、环形水准网

图 3－3 为多条闭合路线组成的环形水准网。共观测了六段高差 $h_i(i=1,2,\cdots,6)$，即 $n=6$。该水准网为自由网，故其必要观测数 $t=3$，多余观测数 $r=6-3=3$。根据网中各闭合水准路线高差平差值的几何要求，各闭合环高差平差值之和应该等于零。因此，选择图中独立的三条闭合水准路线列出其条件方程式如下：

$$\left.\begin{aligned}\hat{h}_1-\hat{h}_4+\hat{h}_5=0\\ \hat{h}_2-\hat{h}_5-\hat{h}_6=0\\ \hat{h}_3+\hat{h}_4+\hat{h}_6=0\end{aligned}\right\} \tag{3-18}$$

将式(3－18)中的高差平差值用观测值加改正数代入后经整理，便得到如下用改正数表达的条件方程式。即

$$\left.\begin{aligned}v_1-v_4+v_5+w_1=0\\ v_2-v_5-v_6+w_2=0\\ v_3+v_4+v_6+w_3=0\end{aligned}\right\} \tag{3-19}$$

式(3－19)便是图 3－3 所示的平差问题所要列立的改正数条件方程的最后形式。式中，w_1、w_2、w_3 为条件方程式中的常数项，亦称闭合差。由下式算出：

$$\left.\begin{aligned}w_1=h_1-h_4+h_5\\ w_2=h_2-h_5-h_6\\ w_3=h_3+h_4+h_6\end{aligned}\right\}$$

要注意的是，式(3－19)中三个条件并不是该测量问题中条件方程式的惟一列法。可以列出的条件式还较多，但应注意三个方程式相互间必须是独立的，且一般应是最简单的式子。

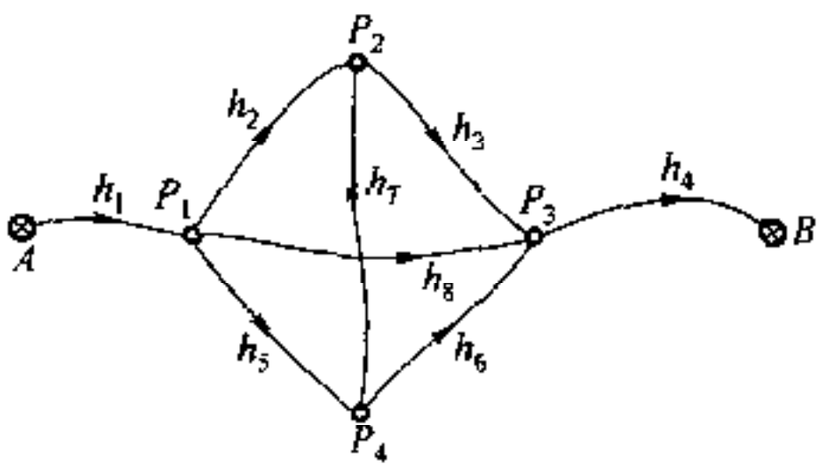


图 3－9

例 3－3 有水准网如图3－9 所示，已知点 A、B 的高程：$H_A=31.100$ m，$H_B=34.165$ m。各路线观测高差为：

$$h_1=+1.001\text{ m},\quad h_2=+1.002\text{ m}$$

$$h_3=+0.060\text{ m},\quad h_4=+1.000\text{ m}$$

$$h_5=+0.500\text{ m},\quad h_6=+0.560\text{ m}$$

$$h_7=+0.504\text{ m},\quad h_8=+1.064\text{ m}$$

试列出其改正数条件方程式。

解 该平差问题中，共观测了 8 段高差，有四个高程待定点。因此，观测值个数 $n=8$，必要观测数 $t=4$，多余观测数 $r=4$。共需列出 4 个独立的条件方程式。首先，列立出用平差值表达的条件方程式：

$$\hat{h}_1+\hat{h}_4+\hat{h}_8+H_A-H_B=0$$

$$\hat{h}_2+\hat{h}_3-\hat{h}_8=0$$

$$\hat{h}_2 - \hat{h}_5 - \hat{h}_7 = 0$$

$$\hat{h}_5 + \hat{h}_6 - \hat{h}_8 = 0$$

将式 $\hat{h}_i = h_i + v_i (i = 1,2,\cdots,8)$ 代入上面各式中，再代入观测值并经整理后，得到用改正数表达的条件方程式为：

$$v_1 + v_4 + v_8 + 0 = 0$$

$$v_2 + v_3 - v_8 - 2 = 0$$

$$v_2 - v_5 - v_7 - 2 = 0$$

$$v_5 + v_6 - v_8 - 4 = 0$$

第四节　测角网条件方程式

一、独立测角网

通常三角网由单三角形、大地四边形(对角线四边形)和中点多边形三种基本图形组成。因此在讲述独立测角网条件方程式时，应从基本图形讲起，如果能正确列出基本图形的条件方程式，就不难正确地列出任何独立测角网的条件方程式了。

1. 单三角形

单三角形是最简单的三角网，三角点仅有三个，若将其中的两个点作为起算数据，那么待定点就只有一个。如前所述，若观测了三角形的三个内角，则应有一个多余观测，即有一个条件方程式。在第二章中已经列出了它的改正数条件方程为

$$v_1 + v_2 + v_3 + w = 0$$

式中

$$w = L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ$$

此类由三角形闭合差产生的条件，通称为图形条件。

2. 中点多边形

中点多边形，常见的有中点三边形、四边形、五边形、六边形和七边形，现以中点五边形为例讨论其条件方程式，从中归纳出中点多边形的条件方程式的组成规律与列法。

如图 3－10 所示的中点多边形，共应列出七个条件方程式。其中有 5 个三角形，每个三角形可列出一个图形条件。但是，仅仅满足这 5 个条件，仍不能使中点多边形闭合，必须加一个能保证中心点上各角之和等于 360° 的条件，即

$$\hat{L}_{11} + \hat{L}_{12} + \hat{L}_{13} + \hat{L}_{14} + \hat{L}_{15} - 360^\circ = 0$$

$$v_{11} + v_{12} + v_{13} + v_{14} + v_{15} + w = 0$$

$$w = L_{11} + L_{12} + L_{13} + L_{14} + L_{15} - 360^\circ$$

此类条件方程称为圆周角条件或水平条件。

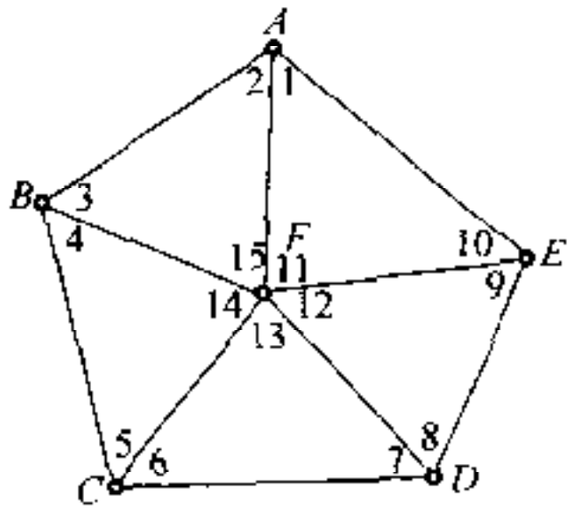


图 3－10

满足了上述 5 个图形条件和圆周角条件，仍保证不了一个中点五边形的完全闭合。还需加一个条件，即从任一边(如 FA 边)出发，经过每个三角形逐个推算边长，当推回该边时，应等于原有 FA 的边长。要满足这一要求就相当于边长比应满

足如下条件：

$$\frac{FA}{FB}\cdot\frac{FB}{FC}\cdot\frac{FC}{FD}\cdot\frac{FD}{FE}\cdot\frac{FE}{FA}-1=0$$

将上式中的边长比换成角度的正弦比，则有

$$\frac{\sin\hat{L}_2\sin\hat{L}_4\sin\hat{L}_6\sin\hat{L}_8\sin\hat{L}_{10}}{\sin\hat{L}_1\sin\hat{L}_3\sin\hat{L}_5\sin\hat{L}_7\sin\hat{L}_9}-1\approx 0 \tag{3-20}$$

该式中各边均以中心点 F 为顶点，故称这种形式的条件方程式为极条件，也称以 F 点为极的极条件。

极条件方程式组成的规律是：围绕极点各三角形中以传距边的未知边对角的正弦乘积为分子，传距边的已知边对角的正弦乘积为分母，其比值等于 1。

上面以中点五边形为例，说明其独立条件方程的个数和类型，即应列出 5 个图形条件，1 个圆周角条件和 1 个极条件。一般而言，如果是中点 N 边形，则应列出 N 个图形条件，1 个圆周角条件和 1 个极条件，总共为 $N+2$ 个条件。

图形条件方程和圆周角条件方程都是线性方程，化成改正数条件方程很简单，只需把平差值代以观测值加改正数就能获得；而极条件方程属于非线性方程，还需要化成线性的改正数条件方程式。

将极条件方程式(3－20)用函数表示为

$$F=f(\hat{L}_1,\hat{L}_2,\cdots,\hat{L}_{10})=\frac{\sin\hat{L}_2\cdot\sin\hat{L}_4\cdot\sin\hat{L}_6\cdot\sin\hat{L}_8\cdot\sin\hat{L}_{10}}{\sin\hat{L}_1\cdot\sin\hat{L}_3\cdot\sin\hat{L}_5\cdot\sin\hat{L}_7\cdot\sin\hat{L}_9}-1 \tag{3-21}$$

上式取全微分为

$$\mathrm{d}F\approx\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_1}\mathrm{d}\hat{L}_1+\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_2}\mathrm{d}\hat{L}_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_{10}}\mathrm{d}\hat{L}_{10} \tag{3-22}$$

上式中的函数微分 dF 可表示为

$$\mathrm{d}F\approx f(\hat{L}_1,\hat{L}_2,\cdots,\hat{L}_{10})-f(L_1,L_2,\cdots,L_{10}) \tag{3-23}$$

将式(3－23)代入式(3－22)，并移项后得

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_1}\mathrm{d}\hat{L}_1+\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_2}\mathrm{d}\hat{L}_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_{10}}\mathrm{d}\hat{L}_{10}+f(L_1,L_2,\cdots,L_{10})=0 \tag{3-24}$$

式中

$$f(L_1,L_2,\cdots,L_{10})=\frac{\sin L_2\cdot\sin L_4\cdot\sin L_6\cdot\sin L_8\cdot\sin L_{10}}{\sin L_1\cdot\sin L_3\cdot\sin L_5\cdot\sin L_7\cdot\sin L_9}-1=w \tag{3-25}$$

w 就是极条件方程式的闭合差。

式(3－24)中平差值 $\hat{L}_i$ 微分 $\mathrm{d}\hat{L}_i$ 可表示为

$$d\hat{L}_i=\frac{v_i}{\rho} \tag{3-26}$$

当式(3－21)中分子的角号用 i 表示，而分母的角号用 j 表示时，则式(3－24)中的偏导数可表示为

$$\frac{\partial f}{\partial\hat{L}_i}=\cot\hat{L}_i\approx\cot L_i\quad(i=2,4,6,8,10) \tag{3-27}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{L}_j} = -\cot\hat{L}_j \approx -\cot L_j \quad (j=1,3,5,7,9) \tag{3-28}$$

将式(3－25)、式(3－26)、式(3－27)和式(3－28)代入式(3－24)后并整理得

$$\begin{aligned} &-\cot L_1 v_1 + \cot L_2 v_2 - \cot L_3 v_3 + \cot L_4 v_4 - \cot L_5 v_5 + \cot L_6 v_6 - \\ &\cot L_7 v_7 + \cot L_8 v_8 - \cot L_9 v_9 + \cot L_{10} v_{10} + \rho'' w = 0 \end{aligned} \tag{3-29}$$

这就极条件式(3－20)的改正数条件方程式的线性形式。

3．大地四边形

如图 3－11 的大地四边形中应列出 4 个条件式，其中包括 3 个图形条件和 1 个极条件。图形条件可列出多种形式，但其中只有三个独立的条件式。为了方便起见，一般选择三个三角形的图形条件。例如：

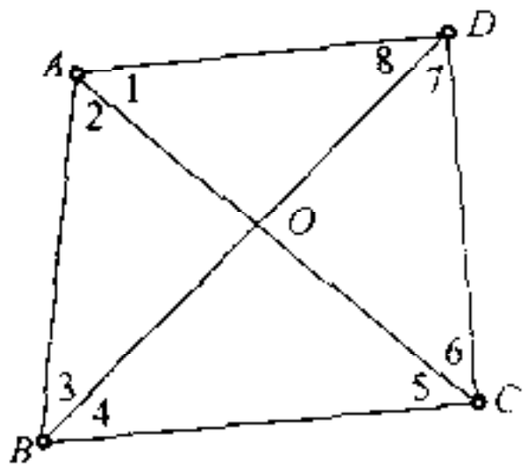


图 3－11

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 + v_3 + v_8 + w_1 &= 0 \\ v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + w_2 &= 0 \\ v_4 + v_5 + v_6 + v_7 + w_3 &= 0 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} w_1 &= L_1 + L_2 + L_3 + L_8 - 180^\circ \\ w_2 &= L_2 + L_3 + L_4 + L_5 - 180^\circ \\ w_3 &= L_4 + L_5 + L_6 + L_7 - 180^\circ \end{aligned}$$

大地四边形的极条件可用顶点 A、B、C、D 的任一点为极。如以 A 点为极时，其边长比关系式为

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{AC}{AD}\cdot\frac{AD}{AB}=1$$

换成角度的正弦比为

$$\frac{\sin(\hat{L}_3+\hat{L}_4)\cdot\sin\hat{L}_6\cdot\sin\hat{L}_8}{\sin\hat{L}_5\cdot\sin(\hat{L}_7+\hat{L}_8)\cdot\sin\hat{L}_3}-1=0 \tag{3-30}$$

除此之外，还可以以对角线交叉点 O 为极，其角度正弦比的关系式为

$$\frac{\sin\hat{L}_2\cdot\sin\hat{L}_4\sin\hat{L}_6\cdot\sin\hat{L}_8}{\sin\hat{L}_1\cdot\sin\hat{L}_3\cdot\sin\hat{L}_5\cdot\sin\hat{L}_7}-1=0 \tag{3-31}$$

由上述可知，大地四边形中可以列出 5 个以不同点为极的极条件。但可以证明，在满足了 3 个图形条件的情况下，只需要满足其中任意一个极条件，其余极条件也必然满足。一般情况下，以对角线交叉为极较为方便，因为极条件中将不出现复合角的正弦项。不难看出，式(3－30)写成改正数条件方程的线性形式为

$$\begin{aligned} &-\cot L_1 v_1 + \cot L_2 v_2 - \cot L_3 v_3 + \cot L_4 v_4 - \cot L_5 v_5 + \\ &\cot L_6 v_6 - \cot L_7 v_7 + \cot L_8 v_8 + \rho'' w_4 = 0 \end{aligned}$$

式中

$$\rho'' w_4 = \left(\frac{\sin L_2\cdot\sin L_4\cdot\sin L_6\cdot\sin L_8}{\sin L_1\cdot\sin L_3\cdot\sin L_5\cdot\sin L_7}-1\right)\cdot\rho''$$

列立极条件时，一般可以不必写出平差值条件式，可对照三角网草图直接写出其改正数

方程的线性形式。

下面举例说明由这些基本图形构成的测角三角网中的条件式的数目、种类及列立方法。

例 3-4 如图3-12 所示测角三角网，观测了网中的各个角度，试确定该三角网条件方程式的数目及种类，并列出这些条件式。

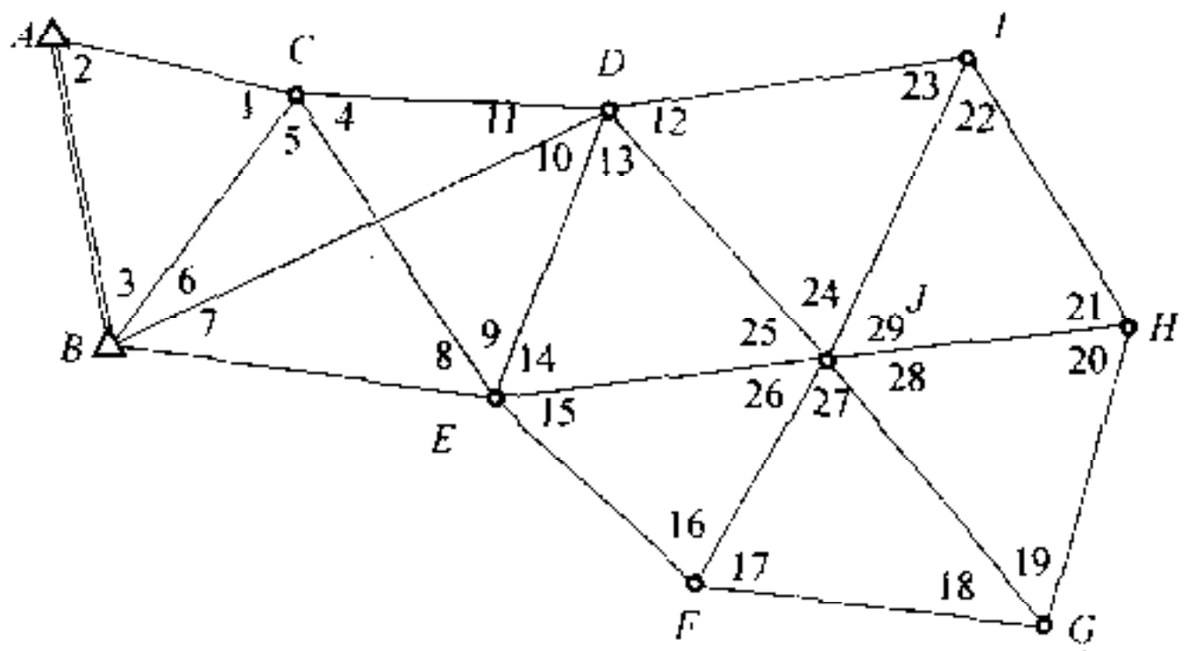


图 3 12

解 由图 3-12 知，$n=29, P=10$，则 $t=2\times10-4=16$，故条件式总数为：$r=n-t=29-16=13$。

该三角网由单三角形 ABC、大地四边形 $BCDE$ 和中点多边形 $DEFGHIJ$ 组成。由前面分析知道，单三角形 ABC 只有一个图形条件，而大地四边形 $BCDE$ 有 3 个图形条件和 1 个图形条件，在中点多边形中有 6 个图形条件和 1 个圆周角条件及 1 个极条件，共计 13 个条件。在这 13 个条件中，有图形条件 10 个，圆周角条件 1 个，极条件 2 个。下面直接列出这些条件的改正数条件方程的线性形式。

$$v_1+v_2+v_3+w_1=0 \tag{1}$$

$$v_5+v_6+v_7+v_8+w_2=0 \tag{2}$$

$$v_7+v_8+v_9+v_{10}+w_3=0 \tag{3}$$

$$v_4+v_9+v_{10}+v_{11}+w_4=0 \tag{4}$$

$$v_{13}+v_{14}+v_{25}+w_5=0 \tag{5}$$

$$v_{15}+v_{16}+v_{26}+w_6=0 \tag{6}$$

$$v_{17}+v_{18}+v_{27}+w_7=0 \tag{7}$$

$$v_{19}+v_{20}+v_{28}+w_8=0 \tag{8}$$

$$v_{21}+v_{22}+v_{29}+w_9=0 \tag{9}$$

$$v_{12}+v_{23}+v_{24}+w_{10}=0 \tag{10}$$

$$v_{24}+v_{25}+v_{26}+v_{27}+v_{28}+v_{29}+w_{11}=0 \tag{11}$$

$$\cot L_4 v_4-\cot L_5 v_5+\cot L_6 v_6-\cot L_7 v_7+\cot L_8 v_8-\cot L_9 v_9+\cot L_{10} v_{10}-\cot L_{11} v_{11}+\rho'' w_{12}=0 \tag{12}$$

$$-\cot L_{12} v_{12}+\cot L_{13} v_{13}-\cot L_{14} v_{14}+\cot L_{15} v_{15}-\cot L_{16} v_{16}+\cot L_{17} v_{17}-\cot L_{18} v_{18}+\cot L_{19} v_{19}-\cot L_{20} v_{20}+\cot L_{21} v_{21}-\cot L_{22} v_{22}+\cot L_{23} v_{23}+\rho'' w_{13}=0 \tag{13}$$

其中

$$w_1 = L_1 + L_2 + L_3 - 180^\circ$$
$$w_2 = L_5 + L_6 + L_7 + L_8 - 180^\circ$$
$$w_3 = L_7 + L_8 + L_9 + L_{10} - 180^\circ$$
$$w_4 = L_4 + L_9 + L_{10} + L_{11} - 180^\circ$$
$$w_5 = L_{13} + L_{14} + L_{25} - 180^\circ$$
$$w_6 = L_{15} + L_{16} + L_{26} - 180^\circ$$
$$w_7 = L_{17} + L_{18} + L_{27} - 180^\circ$$
$$w_8 = L_{19} + L_{20} + L_{28} - 180^\circ$$
$$w_9 = L_{21} + L_{22} + L_{29} - 180^\circ$$
$$w_{10} = L_{12} + L_{23} + L_{24} - 180^\circ$$
$$w_{11} = L_{24} + L_{25} + L_{26} + L_{27} + L_{28} + L_{29} - 360^\circ$$
$$\rho'' w_{12} = \left(\frac{\sin L_4 \cdot \sin L_6 \cdot \sin L_8 \cdot \sin L_{10}}{\sin L_5 \cdot \sin L_7 \cdot \sin L_9 \cdot \sin L_{11}} - 1\right)\rho''$$
$$\rho'' w_{13} = \left(\frac{\sin L_{13} \cdot \sin L_{15} \cdot \sin L_{17} \cdot \sin L_{19} \cdot \sin L_{21} \cdot \sin L_{23}}{\sin L_{12} \cdot \sin L_{14} \cdot \sin L_{16} \cdot \sin L_{18} \cdot \sin L_{20} \cdot \sin L_{22}} - 1\right)\rho''$$

二、非独立测角网

对于非独立测角网确定条件方程式时分为两步：第一步，先按独立测角网确定其条件方程式；第二步，根据有一个多余起算数据便产生一个条件的原则，列出一个相应的条件式。有几个多余的起算数据，便有几个相应的条件式。这些因有多余起算数据而产生的条件式，称为附合条件。而独立测角网的条件式称为几何条件式。

如图 3－13 所示，A、B、C 和 D 为已知，1、2、3、4 和 5 为待定点。角度观测值是按符号 A_i、B_i 和 C_i 编写的，C_i 表示间隔角，A_i 和 B_i 表示传距角，而 A_i 表示未知边所对的角，B_i 表示已知边所对的角。这样编号的目的，便于归纳附合条件式的规律，即可以按规律直接写出附合条件式。

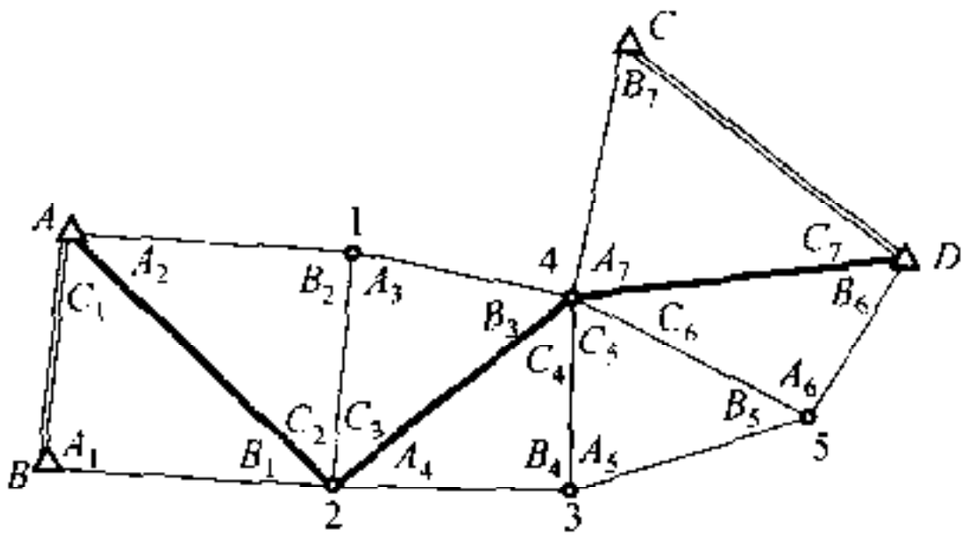


图 3－13

这个网有 5 个待定点，必须观测 10 个角，实际观测了 21 个角度。有多余观测 11 个即应有 11 个条件式。首先，把这个网看作独立网，有 7 个几何条件式，因为这个网全是由单三角形组成，所以这 7 个条件都是图形条件。然后根据多余起算数据的数目，决定附合条件式的数目。该网的起算数据中，如果 A 和 B 是必须的，则 C 和 D 就是多余的起算数据，因此，有 4 个附合条件式。下面就讨论这些附合条件式的列立方法。

前已认定 A 和 B 点是必须的起算数据，而 C 和 D 点则为多余的起算数据。具体分解为：由已知边 S_{AB} 出发，用传距角的平差值推算出 CD 的边长，其推算值应与已知值 S_{CD} 相等，这个条件称为边条件；由已知方位角 T_{AB} 出发。用间隔角的平差值推算出 CD 的方位

角，其推算值应与已知值 T_{CD}相等，这个条件称为方位角条件；最后由 A（或 B）点出发，用角度平差值推算出 D（或 C）点的坐标，其推算值应与已知值 x_D（或 x_C）和 y_D（或 y_C）相等，该条件称为纵坐标条件和横坐标条件。下面就介绍这些条件式的列立方法。

1. 方位角条件

如图 3－13 所示，设观测值 A_i、B_i 和 C_i 相应的平差为 $\hat{A}_i$、$\hat{B}_i$ 和 $\hat{C}_i$。由已知方位角 T_{AB} 出发，推算至 DC 的方位角为

$$T_{DC} = T_{AB} - \hat{C}_1 + 180^\circ + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 + 180^\circ - \hat{C}_4 - \hat{C}_5 - \hat{C}_6 + 180^\circ + \hat{C}_7$$

整理得

$$-\hat{C}_1 + \hat{C}_2 + \hat{C}_3 - \hat{C}_4 - \hat{C}_5 - \hat{C}_6 + \hat{C}_7 + T_{AB} - T_{DC} \pm 3 \times 180^\circ = 0 \qquad (3-32)$$

将 $\hat{C}_i = C_i + v_{C_i}$ 代入式(3－32)得方位角改正数条件方程式

$$-v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3} - v_{C_4} - v_{C_5} - v_{C_6} + v_{C_7} + w_T = 0 \qquad (3-33)$$

$$w_T = -C_1 + C_2 + C_3 - C_4 - C_5 - C_6 + C_7 + T_{AB} - T_{DC} + 3 \times 180^\circ$$

不难看出，方位角条件方程式的组成规律为：按推算的前进方向，在导线边之左者，间隔角改正数 v_{C_i} 为正；在导线边之右者，间隔角改正数 v_{C_i} 为负；起算边的已知方位角为正，终了边的已知方位角为负；180°的个数就是间隔角正负变化的次数。

2. 边长条件

边长条件与极条件的推导很相似，如从 S_{AB} 出发，沿着推导方位角条件式的路线，推出已知边 S_{CD} 的长度为

$$S_{CD} = S_{AB} \frac{\sin\hat{A}_1 \cdot \sin\hat{A}_2 \cdot \sin\hat{A}_3 \cdot \sin\hat{A}_4 \cdot \sin\hat{A}_5 \cdot \sin\hat{A}_6 \cdot \sin\hat{A}_7}{\sin\hat{B}_1 \cdot \sin\hat{B}_2 \cdot \sin\hat{B}_3 \cdot \sin\hat{B}_4 \cdot \sin\hat{B}_5 \cdot \sin\hat{B}_6 \cdot \sin\hat{B}_7}$$

两端同除 S_{CD}，得

$$\frac{S_{AB} \cdot \sin\hat{A}_1 \cdot \sin\hat{A}_2 \cdot \sin\hat{A}_3 \cdot \sin\hat{A}_4 \cdot \sin\hat{A}_5 \cdot \sin\hat{A}_6 \cdot \sin\hat{A}_7}{S_{CD} \cdot \sin\hat{B}_1 \cdot \sin\hat{B}_2 \cdot \sin\hat{B}_3 \cdot \sin\hat{B}_4 \cdot \sin\hat{B}_5 \cdot \sin\hat{B}_6 \cdot \sin\hat{B}_7} - 1 = 0 \qquad (3-34)$$

把边长条件式化成改正数条件方程为

$$\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + \cdots + \cot A_7 v_{A_7} - \cot B_7 v_{B_7} + \rho'' w_S = 0$$

$$\rho'' w_S = \left(\frac{S_{AB} \cdot \sin A_1 \cdots \sin A_7}{S_{CD} \cdot \sin B_1 \cdots \sin B_7} - 1 \right) \cdot \rho'' \qquad (3-35)$$

易见，边长条件与极条件的区别就在于，在闭合差表示式中分子多了起始已知边长，分母多了终了已知边长。

3. 纵横坐标条件

如图 3－13 所示，根据角度平差值，由已知点 A 出发，沿着传距边粗线表示的路线，经过 2 和 4 点，最后推出 D 点的坐标，其计算值应与已知值相等，故有

$$x_D = x_A + \Delta\hat{x}_{A2} + \Delta\hat{x}_{24} + \Delta\hat{x}_{4D}$$

$$y_D = y_A + \Delta\hat{y}_{A2} + \Delta\hat{y}_{24} + \Delta\hat{y}_{4D}$$

或

$$\left.\begin{aligned}\Delta\hat{x}_{A2}+\Delta\hat{x}_{24}+\Delta\hat{x}_{4D}+x_A-x_D=0\\ \Delta\hat{y}_{A2}+\Delta\hat{y}_{24}+\Delta\hat{y}_{4D}+y_A-y_D=0\end{aligned}\right\}\tag{3-36}$$

该式称为纵、横坐标条件方程式。把式(3－36)化成观测值改正数条件方程式，将是一项很繁琐的工作，首先设

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\hat{x}_{A2}=\Delta x_{A2}+\mathrm{d}(\Delta x_{A2}),\quad \Delta\hat{y}_{A2}=\Delta y_{A2}+\mathrm{d}(\Delta y_{A2})\\ &\Delta\hat{x}_{24}=\Delta x_{24}+\mathrm{d}(\Delta x_{24}),\quad \Delta\hat{y}_{24}=\Delta y_{24}+\mathrm{d}(\Delta y_{24})\\ &\Delta\hat{x}_{4D}=\Delta x_{4D}+\mathrm{d}(\Delta x_{4D}),\quad \Delta\hat{y}_{4D}=\Delta y_{4D}+\mathrm{d}(\Delta y_{4D})\end{aligned}\right\}\tag{3-37}$$

式中，$\Delta x_{A2},\Delta x_{24},\Delta x_{4D},\Delta y_{A2},\Delta y_{24},\Delta y_{4D}$是根据观测角值计算出来的坐标增量的近似值，$\mathrm{d}(\Delta x_{A2}),\mathrm{d}(\Delta x_{24}),\mathrm{d}(\Delta x_{4D}),\mathrm{d}(\Delta y_{A2}),\mathrm{d}(\Delta y_{24}),\mathrm{d}(\Delta y_{4D})$是其相应的坐标增量误差(或称坐标增量的改正数)，将式(3－37)代入式(3－36)，且令

$$\left.\begin{aligned}\Delta x_{A2}+\Delta x_{24}+\Delta x_{4D}+x_A-x_D=w_x\\ \Delta y_{A2}+\Delta y_{24}+\Delta y_{4D}+y_A-y_D=w_y\end{aligned}\right\}\tag{3-38}$$

这里 w_x 和 w_y 为纵、横坐标条件式闭合差，则有

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}(\Delta x_{A2})+\mathrm{d}(\Delta x_{24})+\mathrm{d}(\Delta x_{4D})+w_x=0\\ \mathrm{d}(\Delta y_{A2})+\mathrm{d}(\Delta y_{24})+\mathrm{d}(\Delta y_{4D})+w_y=0\end{aligned}\right\}\tag{3-39}$$

因为坐标增量是边长和方位角的函数，那么坐标增量误差就是边长误差和方位角误差的函数。而边长和方位角分别是传距角和间隔角的函数，所以边长误差和方位角误差又分别是传距角和间隔角的函数。这里所说的传距角和间隔角误差，就是平常所说的观测角值的改正数。基于上述分析，首先把坐标增量的误差变为观测角值改正数的函数，按此思路就能导出纵、横坐标改正数条件方程式。

因为

$$\Delta x_{A2}=S_{A2}\cdot\cos T_{A2}$$
$$\Delta y_{A2}=S_{A2}\cdot\sin T_{A2}$$

取全微分得

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}(\Delta x_{A2})&=\cos T_{A2}\cdot\mathrm{d}S_{A2}-S_{A2}\cdot\sin T_{A2}\cdot\frac{\mathrm{d}T_{A2}}{\rho''}\\ \mathrm{d}(\Delta y_{A2})&=\sin T_{A2}\cdot\mathrm{d}S_{A2}+S_{A2}\cdot\cos T_{A2}\cdot\frac{\mathrm{d}T_{A2}}{\rho''}\end{aligned}\right\}\tag{3-40}$$

由图 3－13 可知

$$S_{A2}=S_{AB}\cdot\frac{\sin A_1}{\sin B_1}$$
$$T_{A2}=T_{AB}-C_1$$

上式分别取全微分得

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{d}S_{A2}&=\frac{S_{A2}}{\rho''}\cdot(\cot A_1 v_{A_1}-\cot B_1 v_{B_1})\\ \mathrm{d}T_{A2}&=-v_{C_1}\end{aligned}\right.\tag{3-41}$$

而

$$\cos T_{A2}=\frac{\Delta x_{A2}}{S_{A2}},\quad \sin T_{A2}=\frac{\Delta y_{A2}}{S_{A2}}\tag{3-42}$$

将式(3-41)和式(3-42)代入式(3-40)后,并整理得

$$d(\Delta x_{A2}) = \frac{\Delta x_{A2}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1}) - \frac{\Delta y_{A2}}{\rho''}(-v_{C_1}) \tag{3-43}_1$$

$$d(\Delta y_{A2}) = \frac{\Delta y_{A2}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1}) + \frac{\Delta x_{A2}}{\rho''}(-v_{C_1}) \tag{3-43}_2$$

仿照式(3-40)、式(3-41)中的 $d(\Delta x_{24})$和 $d(\Delta y_{24})$可写为

$$\left.\begin{aligned} d(\Delta x_{24}) &= \cos T_{24}\cdot dS_{24} - S_{24}\cdot \sin T_{24}\cdot \frac{dT_{24}}{\rho''} \\ d(\Delta y_{24}) &= \sin T_{24}\cdot dS_{24} + S_{24}\cdot \cos T_{24}\cdot \frac{dT_{24}}{\rho''} \end{aligned}\right\} \tag{3-44}$$

由图 3-13 可知

$$S_{24} = S_{AB}\frac{\sin A_1\cdot \sin A_2\cdot \sin A_3}{\sin B_1\cdot \sin B_2\cdot \sin B_3}$$

$$T_{24} = T_{AB} - C_1 + C_2 + C_3 + 180^\circ$$

上式分别取全微分,则有

$$\begin{cases} dS_{24} = \dfrac{S_{24}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + \cot A_2 v_{A_2} - \cot B_2 v_{B_2} + \cot A_3 v_{A_3} - \cot B_3 v_{B_3}) \\ dT_{24} = -v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3} \end{cases} \tag{3-45}$$

而

$$\cos T_{24} = \frac{\Delta x_{24}}{S_{24}}, \quad \sin T_{24} = \frac{\Delta y_{24}}{S_{24}} \tag{3-46}$$

将式(3-45)和式(3-46)代入式(3-44)后,并整理得

$$d(\Delta x_{24}) = \frac{\Delta x_{24}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + \cot A_2 v_{A_2} - \cot B_2 v_{B_2} + \cot A_3 v_{A_3} - \cot B_3 v_{B_3}) - \frac{\Delta y_{24}}{\rho''}(-v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3}) \tag{3-47}_1$$

$$d(\Delta y_{24}) = \frac{\Delta y_{24}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + \cot A_2 v_{A_2} - \cot B_2 v_{B_2} + \cot A_3 v_{A_3} - \cot B_3 v_{B_3}) + \frac{\Delta x_{24}}{\rho''}(-v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3}) \tag{3-47}_2$$

同样,可以导出式(3-39)中的 $d(\Delta x_{4D})$和 $d(\Delta y_{4D})$为

$$d(\Delta x_{4D}) = \frac{\Delta x_{4D}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + cot A_2 v_{A_2} - \cot B_2 v_{B_2} + \cdots + \cot A_6 v_{A_6} - \cot B_6 v_{B_6}) - \frac{\Delta y_{4D}}{\rho''}(-v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3} - v_{C_4} - v_{C_5} - v_{C_6}) \tag{3-48}_1$$

$$d(\Delta y_{4D}) = \frac{\Delta y_{4D}}{\rho''}(\cot A_1 v_{A_1} - \cot B_1 v_{B_1} + \cot A_2 v_{A_2} - \cot B_2 v_{B_2} + \cdots + \cot A_6 v_{A_6} - \cot B_6 v_{B_6}) + \frac{\Delta x_{4D}}{\rho''}(-v_{C_1} + v_{C_2} + v_{C_3} - v_{C_4} - v_{C_5} - v_{C_6}) \tag{3-48}_2$$

将式$(3-43)_1$、式$(3-47)_1$和式$(3-48)_1$代入式(3-39)的第一式，将式$(3-43)_2$、式$(3-47)_2$和式$(3-48)_2$代入式(3-39)的第二式，并取坐标差以公里为单位，闭合差以米为单位，经过整理得

$$\begin{aligned}&(x_D-x_A)(\cot A_1 v_{A_1}-\cot B_1 v_{B_1})+(x_D-x_2)(\cot A_2 v_{A_2}-\cot B_2 v_{B_2})+\\&(x_D-x_2)(\cot A_3 v_{A_3}-\cot B_3 v_{B_3})+(x_D-x_4)(\cot A_4 v_{A_4}-\cot B_4 v_{B_4})+\\&(x_D-x_4)(\cot A_5 v_{A_5}-\cot B_5 v_{B_5})+(x_D-x_4)(\cot A_6 v_{A_6}-\cot B_6 v_{B_6})-\\&(y_D-y_A)(-v_{C_1})-(y_D-y_2)(+v_{C_2})-(y_D-y_2)(+v_{C_3})-(y_D-y_4)(-v_{C_4})-\\&(y_D-y_4)(-v_{C_5})\cdots(y_D-y_4)(-v_{C_6})+206.265w_x=0\end{aligned}\tag{3-49}_1$$

$$\begin{aligned}&(y_D-y_A)(\cot A_1 v_{A_1}-\cot B_1 v_{B_1})+(y_D-y_2)(\cot A_2 v_{A_2}-\cot B_2 v_{B_2})+\\&(y_D-y_2)(\cot A_3 v_{A_3}-\cot B_3 v_{B_3})+(y_D-y_4)(\cot A_4 v_{A_4}-\cot B_4 v_{B_4})+\\&(y_D-y_4)(\cot A_5 v_{A_5}-\cot B_5 v_{B_5})+(y_D-y_4)(\cot A_6 v_{A_6}-\cot B_6 v_{B_6})+\\&(x_D-x_A)(-v_{C_1})+(x_D-x_2)(+v_{C_2})+(x_D-x_2)(+v_{C_3})+(x_D-x_4)(-v_{C_4})+\\&(x_D-x_4)(-v_{C_5})+(x_D-x_4)(-v_{C_6})+206.265w_y=0\end{aligned}\tag{3-49}_2$$

式中闭合差可按下式计算

$$w_x=x'_D-x_D$$

$$w_y=y'_D-y_D$$

式中，x'_D 和 y'_D 为从起始点 A 按已定的推算路线，根据观测角度值计算的终点 D 的坐标值，x_D 和 y_D 为终点 D 的已知坐标值。

式$(3-49)_1$和式$(3-49)_2$是根据图 3-13 导出的纵、横坐标改正数条件方程式。该式虽然复杂，但它们仍然是很有规律的。现将纵、横坐标改正数条件方程式的一般形式归纳如下：

$$[(x_{终}-x_{C_{i前}})(\cot A_i v_{A_i}-\cot B_i v_{B_i})]-[(y_{终}-y_{C_{i前}})(\pm v_{C_i})]+206.265w_x=0\tag{4-50}_1$$

$$[(y_{终}-y_{C_{i前}})(\cot A_i v_{A_i}-\cot B_i v_{B_i})]+[(x_{终}-x_{C_{i前}})(\pm v_{C_i})]+206.265w_y=0\tag{4-50}_2$$

下面对上式作一些说明：

(1) 在写上式之前，首先确定推算路线。由一个已知点作为始点出发，推到另一个已知点，称它为终点。推算路线必须沿着传距边走，如图 3-13 所示，推算路线取 $A\rightarrow 2\rightarrow 4\rightarrow D$。当推算路线确定之后，接着要确定推算传距边边长必须经过的传距角和推算传距边方位角必须经过的间隔角。同一个角不能既是传距角，同时又是间隔角。

(2) 式(4-50)中的$(\cot A_i v_{A_i}-\cot B_i v_{B_i})$是推算路线上计算各个传距边必须经过的各个三角形传距角的改正数。式(4-50)中的$(\pm v_{C_i})$是推算路线上计算各传距边方位角的间隔角改正数，其正负与方位角条件相同。

(3) 式中坐标差的被减数 $x_{终}$ 和 $y_{终}$ 是推算路线上终点的坐标。坐标差的减数 $x_{C_i顶}$ 和 $y_{C_i顶}$ 是推算路线上间隔角 C_i 顶点坐标值。

第五节 测边网与边角网条件方程式

一、测边网

在测边网中，基本图形单三边形没有多余观测边，大地四边形和中点多边形各有一个多余观测边。所以单三边形没有条件方程式，大地四边形和中点多边形各有一个条件方程式。要推导这个条件方程式，首先要根据边长观测值算出三边形的各角度，列出角度应满足的条件，然后，把式中的角度改正数换成边长观测值的改正数，这便是边改正数所表示的条件方程式。

根据平面三角中的余弦定理，导出任一三边形用边改正数表示的角度改正数的公式，是测边网列出改正数条件方程式的基本公式。如图 3－14 所示，S_a、S_b 和 S_c 是边长观测值；A、B 和 C 是根据边长观测值按余弦定理计算出来的角度值。

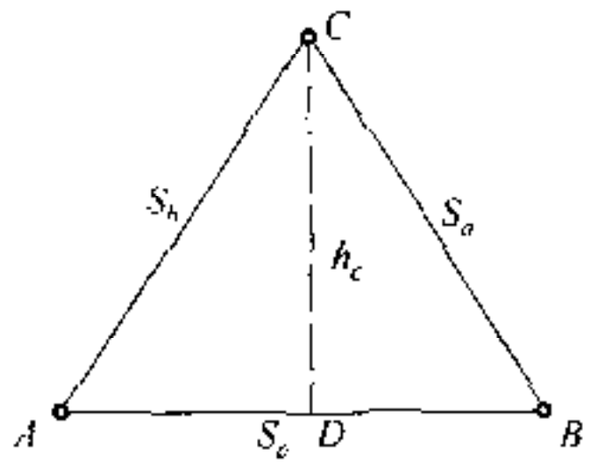


图 3－14

由余弦定理

$$S_c^2 = S_a^2 + S_b^2 - 2S_aS_b\cos C \tag{3-51}$$

取微分则有

$$2S_c\mathrm{d}S_c = 2S_a\mathrm{d}S_a + 2S_b\mathrm{d}S_b - 2S_b\cos C\mathrm{d}S_a - 2S_a\cos C\mathrm{d}S_b + 2S_aS_b\sin C\mathrm{d}C$$

等式两端除以 $2S_c$，得

$$\mathrm{d}S_c = \frac{S_a - S_b\cos C}{S_c}\mathrm{d}S_a + \frac{S_b - S_a\cos C}{S_c}\mathrm{d}S_b + \frac{S_aS_b\sin C}{S_c}\mathrm{d}C \tag{3-52}$$

余弦定理另外两式为

$$S_b^2 = S_a^2 + S_c^2 - 2S_aS_c\cos B \tag{3-53}_1$$

$$S_a^2 = S_b^2 + S_c^2 - 2S_bS_c\cos A \tag{3-53}_2$$

将式(3－51)和式$(3-53)_1$相加得

$$S_c^2 + S_b^2 = S_c^2 + S_b^2 + 2S_a^2 - 2S_aS_b\cos C - 2S_aS_c\cos B$$

化简后为

$$\cos B = \frac{S_a - S_b\cos C}{S_c} \tag{3-54}$$

将式(3－51)和式$(3-53)_2$相加，并化简后为

$$\cos A = \frac{S_b - S_a\cos C}{S_c} \tag{3-55}$$

在图 3－14 中从 C 点向对边作垂线 h_c，则

$$h_c = S_b\sin A \tag{3-56}$$

在$\triangle ABC$ 中

因为

$$\frac{\sin A}{S_a} = \frac{\sin C}{S_c}$$

那么
$$\sin A = \frac{S_a \sin C}{S_c} \tag{3-57}$$

将式(3－57)代入式(3－56)得

$$h_c = \frac{S_a S_b \sin C}{S_c} \tag{3-58}$$

将式(3－54)、式(3－55)和式(3－58)代入式(3－52)得

$$dS_c = \cos B dS_a + \cos A dS_b + h_a dC$$

上式中边长微分 dS_a、dS_b 和 dS_c 分别用边长观测值改正数 v_{S_a}、v_{S_b} 和 v_{S_c} 表示；角度微分 dC 用角度改正数 v_C 表示，则上式变为

$$v_{S_c} = \cos B v_{S_a} + \cos A v_{S_b} + \frac{h_c v''_C}{\rho''}$$

移项后为

$$v''_C = \frac{\rho''}{h_c}(v_{S_c} - \cos B v_{S_a} - \cos A v_{S_b}) \tag{3-59}$$

把边长改正数变为以秒为单位，则有

$$v''_S = \frac{v_S}{S}\rho''$$

移项后为

$$v_S = \frac{v''_S \cdot S}{\rho''}$$

将上式代入式(3－59)得

$$v''_C = \frac{S_c}{h_c}v''_{S_c} - \frac{S_a}{h_c}\cos B v''_{S_a} - \frac{S_b}{h_c}\cos A v''_{S_b}$$

因为

$$\frac{S_c}{h_c} = \frac{1}{h_c}(\overline{AD} + \overline{DB}) = \frac{\overline{AD}}{h_c} + \frac{\overline{DB}}{h_c} = \cot A + \cot B$$

$$\frac{S_a}{h_c}\cos B = \cot B, \quad \frac{S_b}{h_c}\cos A = \cot A$$

则

$$v''_C = (\cot A + \cot B)v''_{S_c} - \cot A v''_{S_b} - \cot B v''_{S_c} \tag{3-60}$$

这就是一个三边形中，用以秒为单位的边改正数表示的角度改正数公式。这个式子的组成规律是：某角的改正数等于其对边改正数乘上该对边两个相邻角余切之和，减去某角两邻边改正数乘其相应邻角(某角除外)的余切。

如图 3－15 是一个测边中点四边形，其中 A 点坐标和 AB 边的方位角 T_{AB} 为已知，B、C、D 为待定点，观测了网中所有的边长(共 8 条边)，应有一个条件方程式。设图中角度 L_1、L_2、…、L_{12} 是根据边长观测值计算而得；相应角度平差值 $\hat{L}_1$、$\hat{L}_2$、…、$\hat{L}_{12}$ 是根据边长平差值计算而得。所以这个测边中点四边形应有一个条件方程式为

$$\hat{L}_2 + \hat{L}_5 + \hat{L}_8 + \hat{L}_{11} - 360^\circ = 0 \tag{3-61}$$

这个条件方程式仍称为圆周角条件方程式。因为

$$\hat{L}_i = L_i + v_i$$

代入式(3－61)得

$$v_2 + v_5 + v_8 + v_{11} + w_{圆} = 0 \qquad (3-62)$$

其中 $w_{圆} = L_2 + L_5 + L_8 + L_{11} - 360^\circ$

式中角度改正数用边改正数表示，按式(3－60)规律写出

$$v''_2 = (\cot L_1 + \cot L_3) v''_{S_2} - \cot L_1 v''_{S_3} - \cot L_3 v''_{S_1}$$

$$v''_5 = (\cot L_4 + \cot L_6) v''_{S_4} - \cot L_6 v''_{S_3} - \cot L_4 v''_{S_5}$$

$$v''_8 = (\cot L_7 + \cot L_9) v''_{S_6} - \cot L_9 v''_{S_5} - \cot L_7 v''_{S_7}$$

$$v''_{11} = (\cot L_{10} + \cot L_{12}) v''_{S_8} - \cot L_{10} v''_{S_1} - \cot L_{12} v''_{S_7}$$

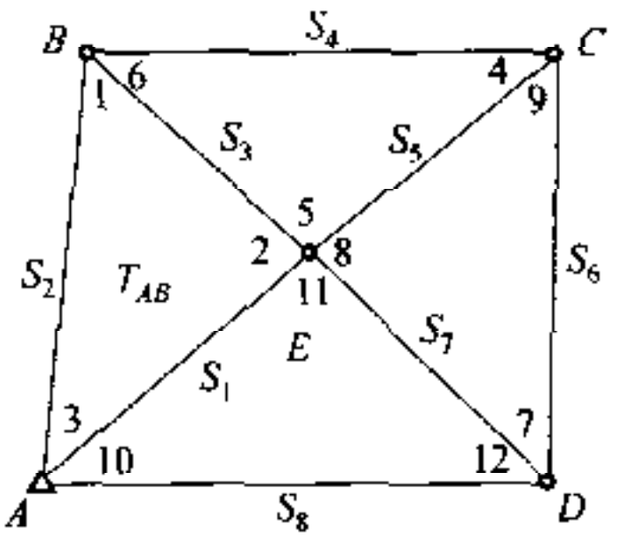


图 3－15

代入式(3－62)整理后得

$$(\cot L_1 + \cot L_3) v''_{S_2} + (\cot L_4 + \cot L_6) v''_{S_4} + (\cot L_7 + \cot L_9) v''_{S_6} +$$
$$(\cot L_{10} + \cot L_{12}) v''_{S_8} - (\cot L_1 + \cot L_6) v''_{S_3} - (\cot L_3 + \cot L_{10}) v''_{S_1} -$$
$$(\cot L_4 + \cot L_9) v''_{S_5} - (\cot L_7 + \cot L_{12}) v''_{S_7} + w_{圆} = 0 \qquad (3-63)$$

此式就是测边中点四边形圆周角改正数条件方程式。

如图 3－16 是测边大地四边形，它与测边中点多边形一样，也只有一个条件方程式。设角度 L_1、L_2、…、L_9 是根据边长观测值计算而得；相应角度平差值 $\hat{L}_2$、$\hat{L}_5$、…、$\hat{L}_9$ 是根据边长平差值计算而得。因此，它们必须满足下式

$$\hat{L}_2 + \hat{L}_5 - \hat{L}_8 = 0 \qquad (3-64)$$

这个式子就是测边大地四边形的图形条件方程式。

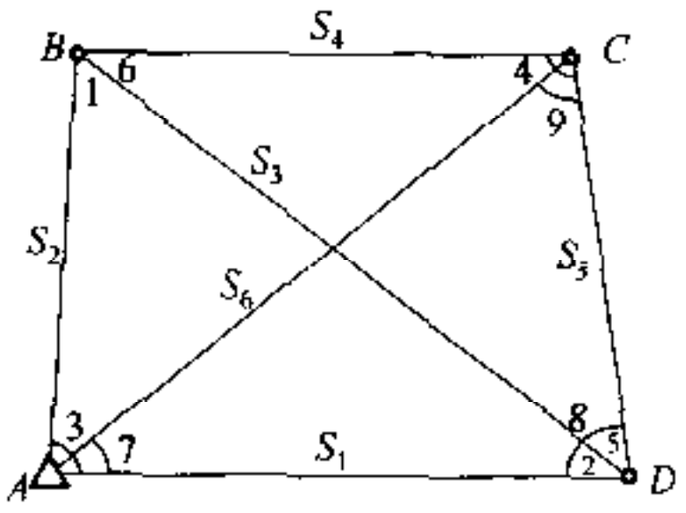


图 3－16

将 $\hat{L}_i = L_i + v_i$ 代入式(3－64)得

$$v_2 + v_5 - v_8 + w_{图} = 0 \qquad (3-65)$$

式中 $w_{图} = L_2 + L_5 - L_8$

按式(3－60)的规律写出

$$v''_2 = (\cot L_1 + \cot L_3) v''_{S_2} - \cot L_3 v''_{S_1} - \cot L_1 v''_{S_3}$$

$$v''_5 = (\cot L_4 + \cot L_6) v''_{S_4} - \cot L_6 v''_{S_3} - \cot L_4 v''_{S_5}$$

$$v''_8 = (\cot L_7 + \cot L_9) v''_{S_6} - \cot L_7 v''_{S_1} - \cot L_9 v''_{S_5}$$

代入式(3－65)整理得

$$(\cot L_1 + \cot L_3) v''_{S_2} + (\cot L_4 + \cot L_6) v''_{S_4} - (\cot L_7 + \cot L_9) v''_{S_6} -$$
$$(\cot L_1 + \cot L_6) v''_{S_3} - (\cot L_3 - \cot L_7) v''_{S_1} - (\cot L_4 - \cot L_9) v''_{S_5} + w_{图} = 0 \qquad (3-66)$$

式(3－66)就是测边大地四边形改正数条件方程式。

为了说明式(3－63)和式(3－66)组成的规律，约定凡参与条件方程式(3－61)和式(3－65)的角度称为该条件的间隔角，三角形中其余二角称为传距角，间隔角所对的边称为间隔边，传距角所对的边称为传距边。条件方程式中负角所在的三角形称为负三角形。式(3－63)和式(3－66)组成规律为：以秒为单位的各边改正数的系数均为该边上两传距角余切之和，间隔边改正数系数取正号，传距边改正数系数取负号，但负三角形传距角的余切应反号。

二、边角网

首先介绍基本图形单三角形的条件方程式，如图 3－17 所示，L_1、L_2 和 L_3 为角度观测值，S_1、S_2 和 S_3 为边长观测值，A 为已知点，T_{AB}为已知方位角。欲求待定点 B，只需观测 AB 的边长；欲求待定点 C，则需观测两条边，或两个角，或一边一角。由此可知，图 3－17 中应有三个多余观测，即应有三个条件方程式。如果观测了图中所有六个元素，故应有一个图形条件和两个边条件。

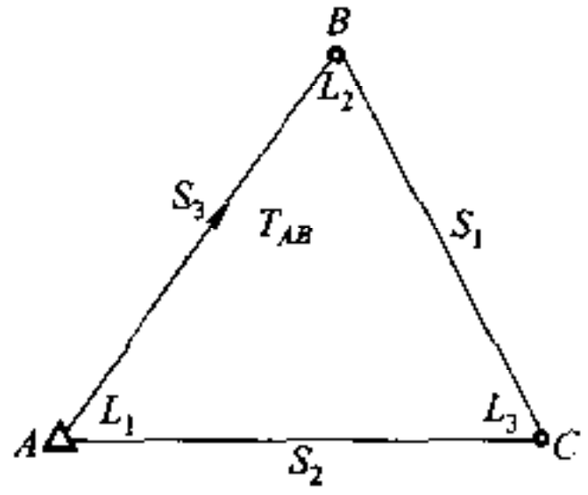


图 3－17

设角度平差值为 $\hat{L}_i$，其相应的改正数为 v_i，边长平差值为 $\hat{S}_i$，其相应的改正数为 v_{S_i}。故图形条件为

$$\hat{L}_1+\hat{L}_2+\hat{L}_3-180^\circ=0$$

其改正数条件式及闭合差为

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2+v_3+w_1&=0\\ w_1&=L_1+L_2+L_3-180^\circ\end{aligned}\right\} \tag{3-67}$$

两个边长条件方程式按正弦定理写为

$$\frac{\hat{S}_3}{\sin\hat{L}_3}=\frac{\hat{S}_1}{\sin\hat{L}_1},\quad \frac{\hat{S}_3}{\sin\hat{L}_3}=\frac{\hat{S}_2}{\sin\hat{L}_2}$$

或

$$\left.\begin{aligned} \hat{S}_3\sin\hat{L}_1-\hat{S}_1\sin\hat{L}_3&=0\\ \hat{S}_3\sin\hat{L}_2-\hat{S}_2\sin\hat{L}_3&=0\end{aligned}\right\} \tag{3-68}$$

式(3－68)就其产生的原因，被称为边条件方程式；就其式子形式，亦称为正弦条件式。下面将正弦条件方程式化为线性的改正数条件式，首先取角度平差值的正弦函数的全微分，得

$$\mathrm{d}\sin\hat{L}_i=\cos\hat{L}_i\mathrm{d}L_i\approx\cos L_i v_i=\cos L_i\frac{v_i''}{\rho''}$$

但

$$\mathrm{d}\sin\hat{L}_i\approx\sin\hat{L}_i-\sin L_i$$

则正弦函数化为线性式为

$$\sin\hat{L}_i=\sin L_i+\cos L_i\frac{v_i''}{\rho''}$$

将上式代入式(3－68)的第一式并顾及 $\hat{S}_i=S_i+v_i(i=1,2,3)$，得

$$(S_3+v_{S_3})\left(\sin L_1+\cos L_1\frac{v_1''}{\rho''}\right)-(S_1+v_{S_1})\left(\sin L_3+\cos L_3\frac{v_3''}{\rho''}\right)=0$$

展开后为

$$S_3\sin L_1+\sin L_1 v_{S_3}+\frac{S_3\cos L_1}{\rho''}v''_1+\frac{\cos L_1}{\rho''}v''_1 v_{S_3}-S_1\sin L_3-\sin L_3 v_{S_1}-$$
$$\frac{S_1\cos L_3}{\rho''}v''_3-\frac{\cos L_3}{\rho''}v''_3 v_{S_1}=0$$

式中

$$\frac{\cos L_1}{\rho''}v''_1 v_{S_3}-\frac{\cos L_3}{\rho''}v''_3 v_{S_1}\approx 0$$

并令 $$S_3\sin L_1-S_1\sin L_3=w_2$$

则得到改正数条件方程式为

$$\sin L_1 v_{S_3}-\sin L_3 v_{S_1}+\frac{S_3\cos L_1}{\rho''}v''_1-\frac{S_1\cos L_3}{\rho''}v''_3+w_2=0 \tag{3-69}$$

同样可以把正弦条件方程式(3-68)的第二式化为线性的正弦改正条件方程式为

$$\sin L_2 v_{S_3}-\sin L_3 v_{S_2}+\frac{S_3\cos L_2}{\rho''}v''_2-\frac{S_2\cos L_3}{\rho''}v''_3+w_2=0 \tag{3-70}$$

式中 $$w_3=S_3\sin L_2-S_2\sin L_3$$

在式(3-69)和式(3-70)中,边长、边长改正数和闭合差单位应相同,至于角度改正数当然以秒为单位。

根据式(3-69)和式(3-70),可以归纳出正弦改正数条件方程式的组成规律为:

(1) 在同一三角形内,两条边及其两个对角按正弦定理,其正弦条件闭合差应为:上述某角度观测值的正弦与上述相邻边观测值之乘积减去上述另外一角度观测值的正弦与上述邻边观测值的乘积。

(2) 正弦改正数条件方程式可根据其闭合差的式子,取全微分后将其微分换以观测值改正数即得。

在三角形中,如果

(1) 少观测一条边(即观测两条边),则少一个正弦条件。

(2) 少观测两条边(即观测一条边),则没有正弦条件。

(3) 少观测一个角,则没有图形条件。

(4) 少观测两个角,只有一个余弦条件。

如只观测 L_1,按余弦定理写出余弦条件方程式为

$$\hat{S}_1^2-\hat{S}_2^2\quad\hat{S}_3^2+2\hat{S}_2\hat{S}_3\cos\hat{L}_1=0 \tag{3-71}$$

对上式取微分,整理后得余弦改正数条件方程式为

$$2S_1 v_{S_1}-2(S_2-S_3\cos L_1)v_{S_2}-2(S_3-S_2\cos L_1)v_{S_3}+2S_2S_3\sin L_1\frac{v''_1}{\rho''}+w=0 \tag{3-72}$$

式中 $$w=S_1^2-S_2^2-S_3^2+2S_2S_3\cos L_1$$

在讨论基本图形单三角形的基础上,其余两个基本图形就容易了。现在,简单介绍中点多边形条件式,以中点四边形为例,如图 3-18 所示,边观测 8 条,角观测 12 个,4 个待定点,只需观测 7 个观测值,故有 13 个多余观测,即应有 13 个条件方程式。四个三角形,每个三角形可列出一个图形条件和两个正弦条件,共 12 个条件式,剩下一个就是圆周角条件。

最后介绍一下，大地四边形的条件式。如图 3－19 所示，它应有 9 个条件式，任选三个三角形，每个三角形列出一个图形条件和两个正弦条件即可。

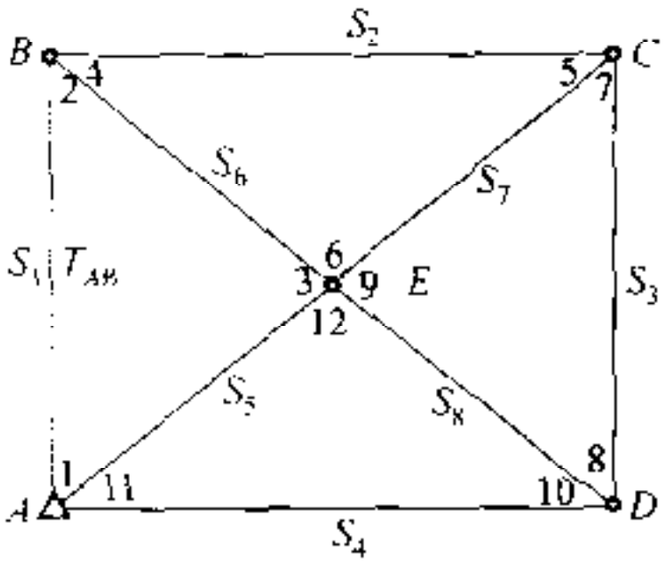


图 3－18

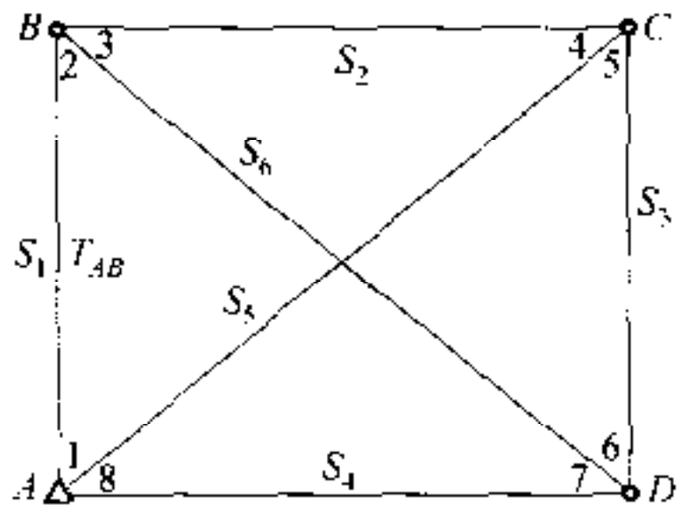


图 3－19

第六节　导线网条件方程式

导线网是由一些折线所组成的。它的观测值不仅有长度，而且还有角度。现在仅以单一附合导线为例，讨论其条件方程式的列立方法。

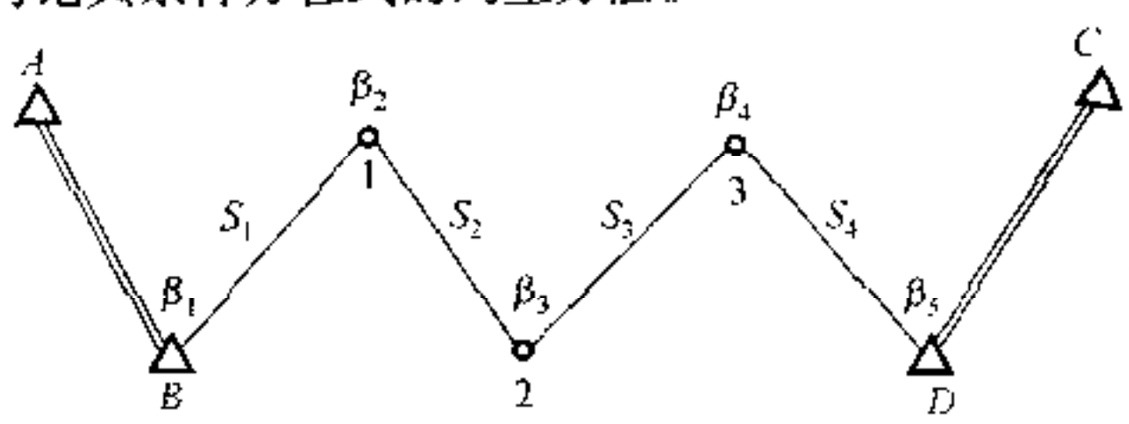


图 3－20

如图 3－20 是一条单一附合导线。A、B、C 和 D 为已知点；1、2 和 3 为待定点；S_1、S_2、S_3和 S_4是导线边边长观测值；β_1、β_2、β_3、β_4 和 β_5 是导线角观测值。

在图 3－20 中，已知点 B 和已知方位角 T_{BA}若为必须的起算数据，则已知点 D 和已知方位角 T_{DC}就是多余的起算数据。因有三个待定导线点，必须观测三条导线边和三个导线角，于是多余观测了一个导线边和两个导线角。因观测数据有三个多余的，起算数据也多余三个，所以这三个条件式应为附合条件式，即应有一个方位角条件，一个纵坐标条件和一个横坐标条件。方位角条件式的列法与三角网完全相同，可直接列出为

$$\left.\begin{aligned} &v_1+v_2+v_3+v_4+v_5+w_T=0\\ &w_T=\beta_1+\beta_2+\beta_3+\beta_4+\beta_5+T_{BA}-T_{DC}+4\times180^\circ \end{aligned}\right\} \tag{3-73}$$

用坐标增量误差(改正数)表示的纵、横坐标条件式为

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{d}(\Delta x_{B1})+\mathrm{d}(\Delta x_{12})+\mathrm{d}(\Delta x_{23})+\mathrm{d}(\Delta x_{3D})+w_x=0\\ &\mathrm{d}(\Delta y_{B1})+\mathrm{d}(\Delta y_{12})+\mathrm{d}(\Delta y_{23})+\mathrm{d}(\Delta y_{3D})+w_y=0 \end{aligned}\right\} \tag{3-74}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} w_x&=\Delta x_{B1}+\Delta x_{12}+\Delta x_{23}+\Delta x_{3D}+x_B-x_D=x_{D计}-x_{D已}\\ w_y&=\Delta y_{B1}+\Delta y_{12}+\Delta y_{23}+\Delta y_{3D}+y_B-y_D=y_{D计}-y_{D已} \end{aligned}\right\}$$

式中的坐标增量是根据导线边观测值和导线角观测值计算的,即

$$\Delta x_{B1} = S_1 \cos T_{B1} \qquad \Delta y_{B1} = S_1 \sin T_{B1}$$

$$\Delta x_{12} = S_2 \cos T_{12} \qquad \Delta y_{12} = S_2 \sin T_{12}$$

$$\Delta x_{23} = S_3 \cos T_{23} \qquad \Delta y_{23} = S_3 \sin T_{23}$$

$$\Delta x_{3D} = S_4 \cos T_{3D} \qquad \Delta y_{3D} = S_4 \sin T_{3D}$$

微分得

$$\mathrm{d}(\Delta x_{B1}) = \cos T_{B1} \mathrm{d}S_1 - S_1 \sin T_{B1} \mathrm{d}T_{B1} = \frac{\Delta x_{B1}}{S_1} v_{S_1} - \frac{\Delta y_{B1}}{\rho''} v''_1$$

同理

$$\mathrm{d}(\Delta x_{12}) = \frac{\Delta x_{12}}{S_2} v_{S_2} - \frac{\Delta y_{12}}{\rho''}(v''_1 + v''_2)$$

$$\mathrm{d}(\Delta x_{23}) = \frac{\Delta x_{23}}{S_3} v_{S_3} - \frac{\Delta y_{23}}{\rho''}(v''_1 + v''_2 + v''_3)$$

$$\mathrm{d}(\Delta x_{3D}) = \frac{\Delta x_{3D}}{S_4} v_{S_4} - \frac{\Delta y_{3D}}{\rho''}(v''_1 + v''_2 + v''_3 + v''_4)$$

将上列微分代入式(3-74),整理后得

$$\frac{\Delta x_{B1}}{S_1} v_{S_1} + \frac{\Delta x_{12}}{S_2} v_{S_2} + \frac{\Delta x_{23}}{S_3} v_{S_3} + \frac{\Delta x_{3D}}{S_4} v_{S_4} - \frac{y_D - y_B}{\rho''} v''_1 -$$

$$\frac{y_D - y_1}{\rho''} v''_2 - \frac{y_D - y_2}{\rho''} v''_3 - \frac{y_D - y_3}{\rho''} v''_4 + w_x = 0$$

同样,可以导出横坐标条件改正数条件方程式为

$$\frac{\Delta y_{B1}}{S_1} v_{S_1} + \frac{\Delta y_{12}}{S_2} v_{S_2} + \frac{\Delta y_{23}}{S_3} v_{S_3} + \frac{\Delta y_{3D}}{S_4} v_{S_4} + \frac{x_D - x_B}{\rho''} v''_1 +$$

$$\frac{x_D - x_1}{\rho''} v''_2 + \frac{x_D - x_2}{\rho''} v''_3 + \frac{x_D - x_3}{\rho''} v''_4 + w_y = 0$$

以上两式中的 x、y、Δx、Δy 和 S 若以公里为单位,w 以米为单位,v_{S_i} 以毫米为单位,v''_i 以秒为单位,则上两式变为

$$0.206\,3 \frac{\Delta x_{B1}}{S_1} v_{S_1} + 0.206\,3 \frac{\Delta x_{12}}{S_2} v_{S_2} + 0.206\,3 \frac{\Delta x_{23}}{S} v_{S_3} + 0.206\,3 \frac{\Delta x_{3D}}{S_4} v_{S_4} -$$

$$(y_D - y_B) v''_1 - (y_D - y_1) v''_2 - (y_D - y_2) v''_3 - (y_D - y_3) v''_4 + 206.265 w_x = 0 \tag{3-75}$$

$$0.206\,3 \frac{\Delta y_{B1}}{S_1} v_{S_1} + 0.206\,3 \frac{\Delta y_{12}}{S_2} v_{S_2} + 0.206\,3 \frac{\Delta y_{23}}{S_3} v_{S_3} + 0.206\,3 \frac{\Delta y_{3D}}{S_4} v_{S_4} +$$

$$(x_D - x_B) v''_1 + (x_D - x_1) v''_2 + (x_D - x_2) v''_3 + (x_D - x_3) v''_4 + 206.265 w_y = 0 \tag{3-76}$$

式(3-75)和式(3-76)就是纵、横坐标改正数条件方程式。

第七节 精度评定

在条件平差中,精度评定包括给出单位权方差的估值计算公式和平差值函数的协因数及其中误差的计算公式。为此还要导出有关向量平差后的协因数阵,或称验后协因数阵。

在一般情况下,观测向量的协方差阵往往是不知道的,为了评定精度,还要利用改正数计

算单位权方差的估值 $\hat{\sigma}_0^2$，然后才能计算所需要的各向量的协方差阵和任何平差结果的精度。

一、单位权方差估值的计算

计算任何平差方法中的单位权方差估值，都是用 $V^{\mathrm{T}}PV$ 除以多余观测值的个数 r，即

$$\hat{\sigma}_0^2=\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r} \tag{3-77}$$

其标准差(中误差)为

$$\hat{\sigma}_0=m_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}} \tag{3-78}$$

在按上式计算单位权方差时，须先算 $V^{\mathrm{T}}PV$ 的值。$V^{\mathrm{T}}PV$ 可用下列方法计算。

(1) 直接计算。当 P 为对角阵时，可用求得的改正数 v_i 按下式计算

$$V^{\mathrm{T}}PV=[pvv]=p_1v_1^2+p_2v_2^2+\cdots+p_nv_n^2 \tag{3-79}$$

(2) 由改正数方程式(3-7)知 $V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$，故

$$V^{\mathrm{T}}PV=V^{\mathrm{T}}PP^{-1}A^{\mathrm{T}}K=V^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}K=(AV)^{\mathrm{T}}K$$

顾及条件方程式(3-5)，上式可写为

$$V^{\mathrm{T}}PV=-W^{\mathrm{T}}K \tag{3-80}$$

上式的纯量形式为

$$V^{\mathrm{T}}PV=-w_1k_1-w_2k_2-\cdots-w_rk_r=-[wk] \tag{3-81}$$

即 $V^{\mathrm{T}}PV$ 等于法方程中联系数与相应闭合差 w 的乘积和并反号。

二、协因数阵

在条件平差中，观测值向量 L 的权阵和协因数阵分别为 P 和 Q，其他一些向量如闭合差向量 W，联系数向量 K，改正数向量 V 及平差值向量 $\hat{L}$，均可表示为观测值向量 L 的函数，本节将推出它们各自的协因数阵以及两两向量的互协因数阵。

设

$$Z^{\mathrm{T}}=(L\quad W\quad K\quad V\quad \hat{L})$$

则 Z 的协因数阵为

$$Q_{ZZ}=\begin{bmatrix} Q_{LL} & Q_{LW} & Q_{LK} & Q_{LV} & Q_{L\hat{L}} \\ Q_{WL} & Q_{WW} & Q_{WK} & Q_{WV} & Q_{W\hat{L}} \\ Q_{KL} & Q_{KW} & Q_{KK} & Q_{KV} & Q_{K\hat{L}} \\ Q_{VL} & Q_{VW} & Q_{VK} & Q_{VV} & Q_{V\hat{L}} \\ Q_{\hat{L}L} & Q_{\hat{L}W} & Q_{\hat{L}K} & Q_{\hat{L}V} & Q_{\hat{L}\hat{L}} \end{bmatrix}$$

上述各向量与观测值向量 L 的关系式为

$$L=L \tag{3-82}$$

$$W=AL+A_0 \tag{3-83}$$

$$K=-N^{-1}W=-N^{-1}AL-N^{-1}A_0 \tag{3-84}$$

$$V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K=-P^{-1}A^{\mathrm{T}}N^{-1}AL-P^{-1}A^{\mathrm{T}}N^{-1}A_0 \tag{3-85}$$

$$\hat{L}=L+V=(I-P^{-1}A^{\mathrm{T}}N^{-1}A)L-P^{-1}A^{\mathrm{T}}N^{-1}A_0 \tag{3-86}$$

则向量 Z 为

$$Z=\begin{Bmatrix}L\\W\\K\\V\\\hat{L}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}I\\A\\-N^{-1}A\\-P^{-1}A^{T}N^{-1}A\\I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A\end{Bmatrix}L+\begin{Bmatrix}0\\A_0\\-N^{-1}A_0\\-P^{-1}A^{T}N^{-1}A_0\\-P^{-1}A^{T}N^{-1}A_0\end{Bmatrix} \tag{3-87}$$

由协因数传播律,得

$$Q_{LL}=IQI=Q$$

$$Q_{WW}=AQA^{T}=N$$

$$Q_{KK}=-N^{-1}AQ(-N^{-1}A)^{T}=N^{-1}$$

$$Q_{VV}=-P^{-1}A^{T}N^{-1}AQ(-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=QA^{T}N^{-1}AQ$$

$$Q_{\hat{L}\hat{L}}=(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)Q(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=Q-QA^{T}N^{-1}AQ$$

$$Q_{LW}=IQA^{T}=QA^{T}$$

$$Q_{LK}=IQ(-N^{-1}A)^{T}=-QA^{T}N^{-1}$$

$$Q_{LV}=IQ(-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=-QA^{T}N^{-1}AQ$$

$$Q_{L\hat{L}}=IQ(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=Q-QA^{T}N^{-1}AQ$$

$$Q_{WK}=AQ(-N^{-1}A)^{T}=-I$$

$$Q_{WV}=AQ(-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=-AQ$$

$$Q_{W\hat{L}}=AQ(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=0$$

$$Q_{KV}=-N^{-1}Q(-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=N^{-1}AQ$$

$$Q_{K\hat{L}}=-N^{-1}Q(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=0$$

$$Q_{V\hat{L}}=-P^{-1}A^{T}N^{-1}AQ(I-P^{-1}A^{T}N^{-1}A)^{T}=0$$

对照上列等式可知,前五个式子就是 L、W、K、V 和 $\hat{L}$ 的协因数阵,而其他式子便是互协因数阵。如果将上述协因数阵乘以单位权方差 σ_0^2,即得相应的协方差阵。根据协因数阵的对称性,得向量 Z 的协因数阵为

$$Q_{ZZ}=\begin{Bmatrix}Q & QA^{T} & -QA^{T}N^{-1} & -QA^{T}N^{-1}AQ & Q-QA^{T}N^{-1}AQ\\AQ & N & -I & AQ & 0\\-N^{-1}AQ & -I & N^{-1} & N^{-1}AQ & 0\\-QA^{T}N^{-1}AQ & QA^{T} & QA^{T}N^{-1} & QA^{T}N^{-1}AQ & 0\\Q-QA^{T}N^{-1}AQ & 0 & 0 & 0 & Q-QA^{T}N^{-1}AQ\end{Bmatrix} \tag{3-88}$$

三、平差值函数的协因数

在条件平差中,经过平差计算,首先得到的是各个观测量的平差值。例如,在水准网平差计算中,先求得的是观测高差的平差值;在三角网中则是先求得观测角度的平差值。但水准网平差后要求得到是各待定点高程的平差值,测角网平差后则要知道点的坐标、边长和方位角等。这些都是观测量平差值的函数。如何计算平差值函数的协因数,进而计算其方差(或中误差),是下面要讨论的问题。

如在例 3-2 中,为求 C 点高程平差值可建立如下函数式:

$$\hat{H}_C = H_A + \hat{h}_1$$

这是一种线性形式。

又如，在图 3－21 中，为求平差后 CD 边方位角 $\hat{T}_{CD}$，CD 边边长 S_{CD} 和 D 点坐标 $\hat{x}_D$ 和 $\hat{y}_D$，可列出平差值函数式，即

$$\hat{T}_{CD} = T_{AB} + \hat{L}_1 + \hat{L}_7 + \hat{L}_8$$

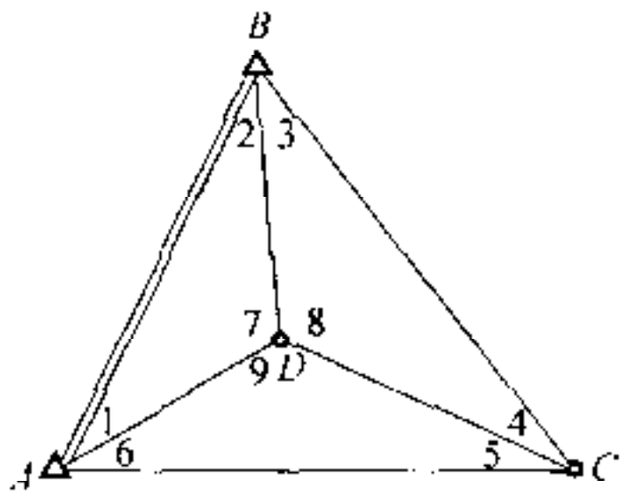


图 3－21

和

$$\hat{S}_{CD} = S_{AB}\frac{\sin \hat{L}_1 \sin \hat{L}_3}{\sin \hat{L}_7 \sin \hat{L}_4}$$

及

$$\hat{x}_D = x_A + \hat{S}_{AD}\cos \hat{T}_{AD} = x_A + \hat{S}_{AB}\frac{\sin \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_7}\cos(T_{AB} + \hat{L}_1)$$

$$\hat{y}_D = y_A + \hat{S}_{AD}\sin \hat{T}_{AD} = y_A + \hat{S}_{AB} + \frac{\sin \hat{L}_2}{\sin \hat{L}_7}\sin(T_{AB} + \hat{L}_1)$$

从以上讨论可以看出，所求各量均为平差值的函数。就函数形式来说，前述第一种是线性的，第二、第三种都是非线性的。

为了计算某一平差值函数的中误差，当单位权中误差 σ_0 求出以后，如果知道它们的协因数，其中误差也就知道了，所以下面推导计算平差值函数的协因数公式。

现在从一般情况讨论。设有一平差值函数为

$$F = F(\hat{L}) \tag{3-89}$$

如果 F 为一线性函数

$$F = f_1\hat{L}_1 + f_2\hat{L}_2 + \cdots + f_n\hat{L}_n + f_0 \tag{3-90}$$

其中，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ 是函数中的系数，f_0 为常数。若令

$$f^{\mathrm{T}} = [f_1 \quad f_2 \quad \cdots \quad f_n], \quad \hat{L}^{\mathrm{T}} = [\hat{L}_1 \quad \hat{L}_2 \quad \cdots \quad \hat{L}_{nn}]$$

则式(3－90)可写为

$$F = f^{\mathrm{T}}\hat{L} + f_0 \tag{3-91}$$

应用协因数传播律可得

$$Q_{FF} = f^{\mathrm{T}}Q_{\hat{L}\hat{L}}f \tag{3-92}$$

如果 F 为一非线性函数，只须求函数 F 的全微分

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{L}_1}\right)\mathrm{d}\hat{L}_1 + \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{L}_2}\right)\mathrm{d}\hat{L}_2 + \cdots + \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{L}_n}\right)\mathrm{d}\hat{L}_n$$

若令

$$f_i = \left(\frac{\partial F}{\partial \hat{L}}\right)_L$$

则线性化后的函数形式为

$$\mathrm{d}F = f_1\mathrm{d}\hat{L}_1 + f_2\mathrm{d}\hat{L}_2 + \cdots + f_n\mathrm{d}\hat{L}_n \tag{3-93}$$

令

$$\mathrm{d}\hat{L}^{\mathrm{T}} = [\mathrm{d}\hat{L}_1 \quad \mathrm{d}\hat{L}_2 \quad \cdots \quad \mathrm{d}\hat{L}_n]$$

则上式可写为

$$\mathrm{d}F = f^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\,\hat{L} \tag{3-94}$$

由于 $Q_{\mathrm{d}F\mathrm{d}F} = Q_{FF}$，$Q_{\mathrm{d}\hat{L}\mathrm{d}\hat{L}} = Q_{\hat{L}\hat{L}}$，所以非线性函数的协因数仍可用式(3-92)计算，只是式中 f 向量表示的意义不同，前者代表线性函数的系数，后者则为非线性函数式的偏导数。

将式(3-88)中的 $Q_{\hat{L}\hat{L}} = Q - QA^{\mathrm{T}}N^{-1}AQ$ 代入式(3-92)，则得到计算平差值函数的协因数计算公式为

$$Q_{FF} = f^{\mathrm{T}}(Q - QA^{\mathrm{T}}N^{-1}AQ)f = f^{\mathrm{T}}Qf - f^{\mathrm{T}}QA^{\mathrm{T}}N^{-1}AQf \tag{3-95}$$

令

$$\underset{r\times 1}{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_r \end{pmatrix} = -N^{-1}AQf \tag{3-96}$$

则

$$Q_{FF} = f^{\mathrm{T}}Qf + f^{\mathrm{T}}QA^{\mathrm{T}}q = f^{\mathrm{T}}Qf + (AQf)^{\mathrm{T}}q \tag{3-97}$$

而 q 由下式解出

$$Nq + AP^{-1}f = 0 \tag{3-98}$$

不难看出，上式是与法方程的系数相同的线性方程组，通常称上式为转换系数方程式，而 q 称为转换系数。其纯量形式为

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\frac{a_1a_{1j}}{p_j}q_1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_1a_{2j}}{p_j}q_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_1a_{rj}}{p_j}q_r + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_1f_j}{p_j} = 0\\
&\sum_{j=1}^{n}\frac{a_2a_{1j}}{p_j}q_1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_2a_{2j}}{p_j}q_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_2a_{rj}}{p_j}q_r + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_2f_j}{p_j} = 0\\
&\cdots\cdots\\
&\sum_{j=1}^{n}\frac{a_ra_{1j}}{p_j}q_1 + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_ra_{2j}}{p_j}q_2 + \cdots + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_ra_{rj}}{p_j}q_r + \sum_{j=1}^{n}\frac{a_rf_j}{p_j} = 0
\end{aligned}$$

因此，求平差值函数的协因数，也可以通过求转换系数 q 后，由式(3-97)求得。求出协因数后，用下式便可求得平差值函数 F 的中误差。

$$\hat{\sigma}_F = \hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{FF}} \tag{3-99}$$

第八节　条件平差算法与算例

一、条件平差基本公式汇编

条件方程式个数	$r = n - t$
条件方程	$AV + W = 0$
式中	$W = AL + A_0$
改正数方程	$V = P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$
法方程	$NK + W = 0$
式中	$N = AP^{-1}A^{\mathrm{T}}$
观测量平差值	$\hat{L} = L + V$
单位权方差的估值	$\hat{\sigma}_0^2 = \dfrac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}$，　$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\dfrac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}$

其中　　$V^{\mathrm{T}}PV=[pvv]$(当 P 为对角阵时)

$$V^{\mathrm{T}}PV=-W^{\mathrm{T}}K$$

平差值函数　　$$F=F(\hat{L})$$

其中　　$$\hat{L}^{\mathrm{T}}=(\hat{L}_1 \quad \hat{L}_2 \quad \cdots \quad \hat{L}_n)$$

权函数式为　　$$\mathrm{d}F=f_1\mathrm{d}\hat{L}_1+f_2\mathrm{d}\,\hat{L}2+\cdots+f_n\mathrm{d}\,\hat{L}_n \qquad \left(f_i=\frac{\partial F}{\partial \hat{L}_i}\right)$$

平差函数的协因数阵

$$Q_{FF}=f^{\mathrm{T}}Q_{\hat{L}\hat{L}}f$$

$$Q_{FF}=f^{\mathrm{T}}Qf-f^{\mathrm{T}}QA^{\mathrm{T}}N^{-1}AQf$$

$$Q_{FF}=f^{\mathrm{T}}Qf+(AP^{-1}f)^{\mathrm{T}}q$$

式中转换系数 q 由方程 $Nq+AP^{-1}f=0$ 中解出。

平差值函数的中误差

$$\hat{\sigma}_F=\hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{FF}}$$

二、条件平差算法

(1) 首先列出条件方程式(3－2)；

(2) 定权或确定观测值的协因数阵 Q；

(3) 计算法方程系数阵 N；

(4) 解法方程,求出联系数 K；

(5) 用式(3－8)计算改正数 V；

(6) 将改正数与观测值代入 $\hat{L}=L+V$ 中,计算平差值 $\hat{L}$；

(7) 将平差值代入式(3－1)进行检核；

(8) 精度评定。

三、算例

例 3－5　如图3－22 所示三角网中,等精度观测所有角度,其观测值分别为:$L_1=45°30'46''$,$L_2=67°22'03''$,$L_3=67°07'14''$,$L_4=69°03'14''$,$L_5=52°32'22''$,$L_6=58°24'18''$。图中 AB 为已知边,设无误差。试求各角度的平差值及 CD 边边长相对中误差 $\frac{\sigma_{S_{CD}}}{S_{CD}}$。

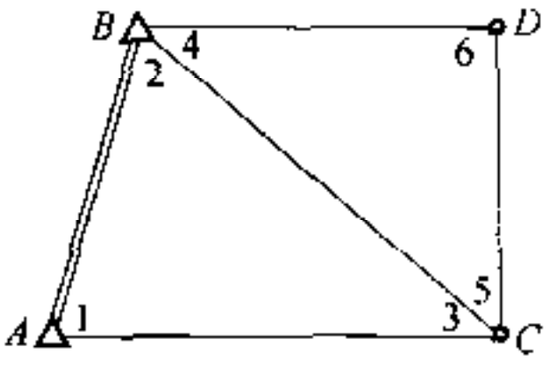


图 3－22

解　1. 列立条件方程式及平差值函数式

(1) 条件方程式列立

本题中。观测值个数 $n=6$,必要观测数 $t=4$,则条件方程数 $r=2$,很显然是 2 个图形条件,即

$$\left.\begin{aligned} v_1+v_2+v_3+3=0 \\ v_4+v_5+v_6-6=0 \end{aligned}\right\}$$

(2) 列平差值函数式

平差后 CD 边长的函数式为

$$\hat{S}_{(I)}=S_{AB}\frac{\sin\hat{L}_1\sin\hat{L}_4}{\sin\hat{L}_3\sin\hat{L}_6}$$

对该式取全微分,整理后得其权函数式为

$$\mathrm{d}F=\frac{\mathrm{d}\hat{S}_{CD}}{\hat{S}_{CD}}\rho''=\cot\hat{L}_1\mathrm{d}\hat{L}_1-\cot\hat{L}_3\mathrm{d}\hat{L}_3+\cot\hat{L}_4\mathrm{d}\hat{L}_4-\cot\hat{L}_6\mathrm{d}\hat{L}_6$$

在计算 $f_i=\frac{\partial F}{\partial\hat{L}_i}$ 时,以 L_i 代替 $\hat{L}_i$ 的值,对计算平差值函数精度影响甚微,故把上式中的 $\hat{L}_i$ 以 L_i 代入,得

$$\mathrm{d}F=\frac{\mathrm{d}\hat{S}_{(I)}}{\hat{S}_{(I)}}\rho''=0.98\mathrm{d}\hat{L}_1-0.42\mathrm{d}\hat{L}_3+0.38\mathrm{d}\hat{L}_4-0.77\mathrm{d}\hat{L}_6$$

可知 $f_2=f_5=0,\quad f_1=0.98,\quad f_3=-0.42,\quad f_4=0.38,\quad f_6=-0.77$

2. 组成法方程

由于是等精度观测,可令观测值的权 $p_i=1(i=1,2,\cdots,6)$,因此,$P=I$,$Q=I$,则法方程系数阵为

$$N=AP^{-1}A^{\mathrm{T}}=AA^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}$$

因此,法方程为

$$\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=0$$

3. 解法方程

由 $K=-N^{-1}W$,得

$$K=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}3\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$$

即 $k_1=-1,k_2=2$。

4. 计算改正数 V

由 $V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$,得

$$V=A^{\mathrm{T}}K=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\\v_4\\v_5\\v_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\\1&0\\0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\2\\2\\2\end{pmatrix}$$

5. 计算平差值，并进行检核

由 $\hat{L}=L+V$，得

$$\hat{L}=\begin{pmatrix}\hat{L}_1\\ \hat{L}_2\\ \hat{L}_3\\ \hat{L}_4\\ \hat{L}_5\\ \hat{L}_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\\ L_5\\ L_6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\\ v_4\\ v_5\\ v_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}45°30'45''\\ 67°22'02''\\ 47°01'13''\\ 69°03'16''\\ 52°32'24''\\ 58°24'20''\end{pmatrix}$$

检核计算，将上述平差值代入下列平差值方程

$$\hat{L}_1+\hat{L}_2+\hat{L}_3-180°=0$$

$$\hat{L}_4+\hat{L}_5+\hat{L}_6-180°=0$$

6. 计算观测值中误差

$$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}V}{r}}=\pm\sqrt{\frac{15}{2}}=\pm 2.74''$$

7. 计算平差值函数的中误差

首先计算平差值函数的协因数。由式(3－97)知：

$$f^{\mathrm{T}}Qf=f^{\mathrm{T}}f=\begin{pmatrix}0.98 & 0 & -0.42 & 0.38 & 0 & -0.77\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.98\\ 0\\ -0.42\\ 0.38\\ 0\\ -0.77\end{pmatrix}=1.87$$

$$\sum_{j=1}^{6}\frac{a_{1j}f_j}{p_j}=\sum_{j=1}^{6}a_{1j}f_j=+0.56,\quad \sum_{j=1}^{6}\frac{a_{2j}f_j}{p_j}=\sum_{j=1}^{6}a_{2j}f_j=-0.39$$

组成转换系数方程

$$\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1\\ q_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.56\\ -0.39\end{pmatrix}=0$$

解得：

$$q=\begin{pmatrix}q_1 & q_2\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}-0.19 & +0.13\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

而

$$f^{\mathrm{T}}P^{-1}A^{\mathrm{T}}q=f^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}q=\begin{pmatrix}0.98 & 0 & -0.42 & 0.38 & 0 & -0.77\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-0.19\\ +0.13\end{pmatrix}=-0.16$$

则 $$Q_{FF}=f^{\mathrm{T}}Qf+f^{\mathrm{T}}P^{-1}A^{\mathrm{T}}q=1.87-0.16=1.71$$

平差值函数的中误差为

$$\hat{\sigma}_F=\hat{\sigma}_0\cdot\sqrt{Q_{FF}}=\pm2.74\sqrt{1.71}=\pm3''.58$$

由于前面列出的平差值函数式是 $\mathrm{d}F=\dfrac{\mathrm{d}\hat{S}_{CD}}{\hat{S}_{CD}}\rho''$，因而有 $\hat{\sigma}_F=\dfrac{\sigma_{S_{CD}}}{\hat{S}_{CD}}\rho''=\pm3''.58$，于是 CD 边的相对误差应为

$$\frac{\sigma_{S_{CD}}}{\hat{S}_{CD}}=\frac{\hat{\sigma}_F}{\rho''}=\frac{3.58}{206\ 265}\approx\frac{1}{58\ 000}$$

例 3-6 在水准网(图 3-23)中，A 和 B 是已知高程点，并假设这些已知高程无误差。图中 P_1、P_2 和 P_3 是待定点。A 和 B 点的高程，观测高差和相应的水准路线长度见表 3-1。试按条件平差求：(1) 各待定点的高程平差值；(2) P_1 到 P_2 点间高差平差值的中误差。

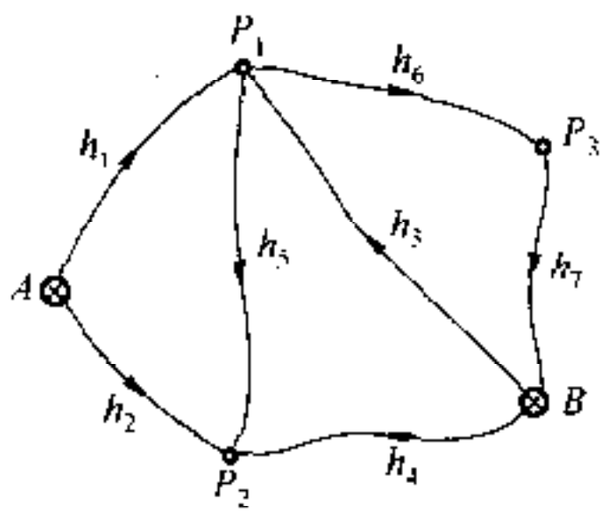


图 3-23

解 1. 列条件方程和平差值函数式

本题有 7 个观测值，有 3 个待定点，所以有条件方程 $r=n-t=7-3=4$ 个。

(1) 条件方程为

表 3-1

路线号	观测高差/m	水准路线长度/km	已知高程/m
1	+1.359	1.1	$H_A=15.016$
2	+2.009	1.7	$H_B=16.016$
3	+0.363	2.3	
4	+1.102	2.7	
5	+0.657	2.4	
6	+0.238	1.4	
7	−0.595	2.6	

$$v_1-v_2+v_5+7=0$$

$$v_3-v_4+v_5+8=0$$

$$v_3+v_6+v_7+6=0$$

$$v_2-v_4-3=0$$

式中闭合差以 mm 为单位。

(2) P_1 至 P_2 点间的高差平差值函数式

$$F=\hat{h}_5$$

所以 $$f_1=f_2\approx f_3=f_4=f_6=f_7=0,\quad f_5=1$$

2. 定权

令 $C=1$，即以 1 km 观测高差为单位权观测，于是 $p_i=\dfrac{1}{S_i}$，$Q_{ii}=\dfrac{1}{p_i}=S_i(i=1,2,\cdots,7)$。因各观测高差互不相关，故协因数阵为对角阵，即

$$\underset{7\times7}{Q}=p_i=\begin{Bmatrix}1.1 & & & & & & \\ & 1.7 & & & & & \\ & & 2.3 & & & & \\ & & & 2.7 & & & \\ & & & & 2.4 & & \\ & & & & & 1.4 & \\ & & & & & & 2.6\end{Bmatrix}$$

3. 计算法方程系数阵 N,即组成法方程

由条件方程知其系数阵为

$$\underset{4\times7}{A}=\begin{Bmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\end{Bmatrix}$$

则法方程系数阵为

$$N=AP^{-1}A^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix}5.2 & 2.4 & 0 & -1.7\\ 2.4 & 7.4 & 2.3 & 2.7\\ 0 & 2.3 & 6.3 & 0\\ -1.7 & 2.7 & 0 & 4.4\end{Bmatrix}$$

4. 解算法方程。可用解线性方程组的任意方法解算,得

$$k_1=-0.222\,6,\quad k_2=-1.402\,8,\quad k_3=-0.441\,4,\quad k_4=-1.456\,8$$

5. 计算改正数。利用改正数方程 $V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$,求得

$$V=\{0.2\quad 2.9\quad -4.2\quad -0.1\quad -3.9\quad -0.6\quad -1.2\}^{\mathrm{T}}(\mathrm{mm})$$

6. 计算高差观测值的平差值

$$\hat{h}=\{1.358\,8\quad 2.011\,9\quad 0.358\,8\quad 1.011\,9\quad 0.653\,1\quad 0.237\,4\quad -0.596\,2\}^{\mathrm{T}}$$

7. 计算 P_1、P_2 和 P_3 点的高程平差值

$$H_{P_1}=H_A+\hat{h}_1=16.374\,8\ \mathrm{m}$$

$$H_{P_2}=H_A+\hat{h}_2=17.027\,9\ \mathrm{m}$$

$$H_{P_3}=H_B-\hat{h}_7=16.612\,1\ \mathrm{m}$$

8. 计算单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}=\pm\sqrt{\frac{19.80}{4}}=\pm2.2\ \mathrm{mm}$$

即该水准网每公里观测高差的验后中误差为 ±2.2 mm。

9. 计算平差后 P_1 至 P_2 点间高差中误差

首先根据式(3－95)或式(3－97),计算出平差值函数 $F=\hat{h}_5$ 的协因数 Q_{FF},下面采用式(3－97)计算。

因为

$$f^{\mathrm{T}}Qf=2.4$$

而

$$\sum_{j=1}^{7}\frac{a_{1j}f_j}{p_j}=2.4,\quad \sum_{j=1}^{7}\frac{a_{2j}f_j}{p_j}=2.4,\quad \sum_{j=1}^{7}\frac{a_{3j}f_j}{p_j}=0,\quad \sum_{j=1}^{7}\frac{a_{4j}f_j}{p_j}=0$$

故转换系数方程为

$$\begin{pmatrix} 5.2 & 2.4 & 0 & -1.7 \\ 2.4 & 7.4 & 2.3 & 2.7 \\ 0 & 2.3 & 6.3 & 0 \\ -1.7 & 2.7 & 0 & 4.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2.4 \\ 2.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

解此方程,得

$$q = (-0.337\,2 \quad -0.252\,2 \quad 0.091\,8 \quad 0.024\,4)^{\mathrm{T}}$$

计算

$$f^{T}QA^{T}q = -1.41$$

则协因数 Q_{FF} 为

$$Q_{FF} = f^{T}Qf + f^{T}QA^{T}q = 0.99$$

由式(3-99),得

$$\sigma_F = \hat{\sigma}_0 \sqrt{Q_{FF}} = \pm 2.2 \sqrt{0.99} = \pm 2.2 \text{ mm}$$

例 3-7 如图3-24 所示的附合导线,其测角中误差的预期值为 $\sigma_\beta = \pm 2.5''$,测边中误差按测距仪标称精度公式 $\sigma_D = \pm(5 + 5 \times D)$mm 计算($D$ 的单位为 km)。起算数据和观测值列于表 3-2 中,试用条件平差法求:(1) 各观测量的平差值;(2) 各未知点的坐标;(3) 评定导线点 2 的精度。

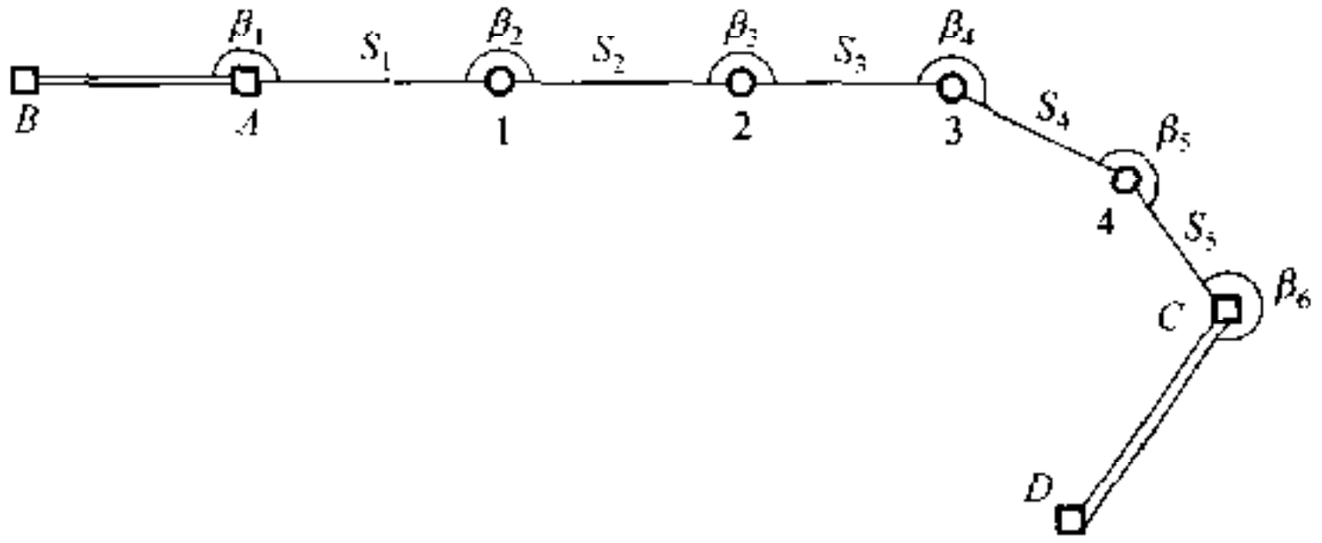


图 3-24

表 3-2

点号	观测角值 /(° ′ ″)	已知方位角 /(° ′ ″)	观测边长/m	已知点坐标/m	
				X	Y
B					
		110 23 10			
A	179 53 44			5 832.114	5 075.285
		110 16 54	143.454		
1	179 04 23				
		109 21 17	131.165		
2	183 44 37				
		113 05 54	123.726		
3	226 26 52				
		159 32 46	78.213		
4	194 03 56				
		173 36 42	84.531		
C	244 02 17			5 533.156	5 484.195
		237 38 53			
D					

解 根据题意有 3 个条件方程,其中 1 个方位角条件,2 个坐标条件。

1. 组成条件方程式和权函数式

坐标方位角条件

$$v_{\beta_1} + v_{\beta_2} + v_{\beta_3} + v_{\beta_4} + v_{\beta_5} + v_{\beta_6} + w_\alpha = 0$$

纵、横坐标条件

$$\sum_1^5 \cos\alpha_i v_{S_i} - \frac{1}{\rho}\sum_1^5 (y_C^0 - y_i^0) v_{\beta_i} + w_x = 0$$

$$\sum_1^5 \sin\alpha_i v_{S_i} + \frac{1}{\rho}\sum_1^5 (x_C^0 - x_i^0) v_{\beta_i} + w_y = 0$$

式中

$$w_\alpha = \alpha_{BA} + \sum_{i=1}^{6}\beta_i + 6\times 180^\circ - \alpha_{CD} = 6$$

$$w_x = x_C^0 - x_C = -65 \text{ mm}$$

$$w_y = y_C^0 - y_C = -54 \text{ mm}$$

表 3-3

点号	近似方位角 /(° ′ ″)	观测边长/m	$\cos\alpha^0$	$\sin\alpha^0$	近似点坐标/m	
					X	Y
B						
	110 23 10*					
A					5 832.114*	5 075.285*
	110 16 54	143.454	−0.346 64	0.938 00		
1					5 782.388	5 209.845
	109 21 17	131.165	−0.331 42	0.943 48		
2					5 738.918	5 333.597
	113 05 54	123.726	−0.392 31	0.919 83		
3					5 690.379	5 447.404
	159 32 46	78.213	−0.936 95	0.349 45		
4					5 617.097	5 474.736
	173 36 42	84.531	−0.993 79	0.111 27		
C					5 533.091	5 484.141
					5 533.156*	5 484.195*
	237 38 53*					
D						

注：带 * 号者为已知数据。

表 3-4

点号	$-\frac{y_c^0 - y_i^0}{206.265}$	$\frac{x_c^0 - x_i^0}{206.265}$	$-\frac{y_2^0 - y_i^0}{206.265}$	$\frac{x_2^0 - x_i^0}{206.265}$
A				
1	−1.967 6	−1.449 7	−1.252 3	−0.451 8
2	−1.315 3	−1.208 6	−0.600 0	−0.210 7
3	−0.715 3	−0.997 9		
4	−0.163 6	−0.762 6		
5(C)	−0.031 1	−0.407 3		
D				

通过表 3-3 近似坐标及条件方程式系数计算式及表 3-4 条件方程式和权函数式系数计算式的计算，得出三个条件方程式如下：

$$\begin{Bmatrix} 1 & -1.967\,6 & -1.449\,7 \\ 1 & -1.315\,3 & -1.208\,6 \\ 1 & -0.715\,3 & -0.997\,9 \\ 1 & -0.163\,6 & -0.762\,6 \\ 1 & -0.031\,1 & -0.407\,3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.346\,6 & 0.938\,0 \\ 0 & -0.331\,4 & 0.943\,5 \\ 0 & -0.392\,3 & 0.919\,8 \\ 0 & -0.937\,0 & 0.349\,5 \\ 0 & -0.993\,8 & 0.111\,3 \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} v_{\beta_1} \\ v_{\beta_2} \\ v_{\beta_3} \\ v_{\beta_4} \\ v_{\beta_5} \\ v_{\beta_6} \\ v_{D_1} \\ v_{D_2} \\ v_{D_3} \\ v_{D_4} \\ v_{D_5} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6 \\ -65 \\ -54 \end{Bmatrix} = 0$$

2 号点纵、横坐标权函数式

$$\left.\begin{aligned} V_{Fx2} &= \sum_{j-1}^{2} \cos\alpha_j^0 v_{S_j} - \frac{1}{\rho} \sum_{j=A}^{1} (y_2^0 - y_j^0) v_{\beta_j} \\ V_{Fy2} &= \sum_{j=1}^{2} \sin\alpha_j^0 v_{S_j} + \frac{1}{\rho} \sum_{j=A}^{1} (x_2^0 - x_j^0) v_{\beta_j} \end{aligned}\right\}$$

同样根据表 3－3、3－4 中的数据，得到权函数式为

$$V_{Fx2} = -1.252\,3 v_{\beta_1} - 0.600 v_{\beta_2} - 0.346\,6 v_{D_1} - 0.331\,4 v_{D_2}$$

$$V_{Fx2} = -0.451\,8 v_{\beta_1} - 0.210\,7 v_{\beta_2} - 0.938\,0 v_{D_1} - 0.943\,5 v_{D_2}$$

2. 定权，组成法方程及计算平差值函数的协因数所需的系数

设单位权中误差取测角中误差的预期值，$\sigma_0 = \pm 2.5''$，边长取平均值 0.11 km，其中误差为 $\sigma_D = \pm(5 + 5 \times 0.11)\text{mm} = \pm 5.55$ mm。故角度观测值的权倒数为 1，边长观测值的权倒数为 5，见协因数阵 Q。

根据条件方程系数阵和观测协因数阵，以及条件方程式常数项组成法方程式

$$Q = \begin{Bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & & 5 & & & & \\ & & & & & & & 5 & & & \\ & & & & & & & & 5 & & \\ & & & & & & & & & 5 & \\ & & & & & & & & & & 5 \end{Bmatrix}$$

组成的法方程为

$$\begin{pmatrix} 6 & -4.192\,9 & -4.826\,1 \\ -4.192\,9 & 17.388\,1 & 1.890\,3 \\ -4.826\,1 & 1.890\,3 & 19.058\,6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 \\ -65 \\ -54 \end{pmatrix}=0$$

组成转换系数方程为

$$Nq_x+AQf_{x_2}=0 \quad Nq_y+AQf_{y_2}=0$$

同时组成计算权倒数要用到的系数为

$$f_{x_2}^{\mathrm{T}}Qf_{x_2}=3.078\,0 \qquad AQf_{x_2}=\begin{pmatrix} -1.852\,3 \\ 4.403\,0 \\ -0.648\,3 \end{pmatrix} \qquad AQf_{y_2}=\begin{pmatrix} -0.662\,5 \\ -2.022\,8 \\ 9.759\,8 \end{pmatrix}$$

$$f_{y_2}^{\mathrm{T}}Qf_{y_2}=9.098\,7$$

3. 解算法方程及转换系数方程组

$$\mathrm{K}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7.632 \\ 6.163 \\ 5.377 \end{pmatrix} \qquad q_x=\begin{pmatrix} q_{x_1} \\ q_{x_2} \\ q_{x_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.239 \\ -0.187 \\ 0.076 \end{pmatrix} \qquad q_y=\begin{pmatrix} q_{y_1} \\ q_{y_2} \\ q_{y_3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -0.434 \\ -0.057 \\ -0.628 \end{pmatrix}$$

4. 计算观测值改正数平差值(表 3-5)

表 3-5

点号	观测角值 /(° ′ ″)	改正数 /(″)	平差后角值 /(° ′ ″)	边号	观测值 /m	改正数 /mm	平差后边值 /m
A	179 53 44	-12.3	179 53 31.7	D_1	143.454	14.5	143.468 5
1	179 04 23	-7.0	179 04 16.0	D_2	131.165	15.2	131.180 2
2	183 44 37	-2.1	183 44 34.9	D_3	123.726	12.6	123.738 6
3	226 26 52	2.5	226 26 54.5	D_4	78.213	-19.5	78.193 5
4	194 03 56	5.3	194 04 01.3	D_5	84.531	-27.6	84.503 4
C	244 02 17	7.6	244 02 24.6				

计算出改正数后,经代入条件方程式检验后,计算无误。

5. 导线平差值计算

见表 3-6。

表 3-6

点号	观测角值 /(° ′ ″)	方位角平差值 /(° ′ ″)	边长平差值 /m	X 增量/m Y 增量/m	已知点坐标/m X	 Y
B						
		110 23 10*				
A	179 53 31.7				5 832.114*	5 075.285*
				-49.723		
		110 16 41.7	143.468 5			
				134.576		
1	179 04 16.0				5 782.391	5 209.861
				-43.464		
		109 20 57.7	131.180 2			
				123.770		
2	183 44 34.9				5 738.927	5 333.631
				-48.532		
		113 05 32.6	123.738 6			
				113.824		
3	226 26 54.5				5 690.395	5 447.455

续表 3-6

点号	观测角值 /(° ′ ″)	方位角平差值 /(° ′ ″)	边长平差值 /m	X 增量/m Y 增量/m	已知点坐标/m X	 Y
		159 32 27.1	78.193 5	-73.261 27.332		
4	194 04 01.3				5 617.134	5 474.787
		173 36 28.4	84.503 4	-83.978 9.408		
C	244 02 24.6				5 533.156*	5 484.195*
		237 38 53*				
D						

6. 评定精度

(1) 计算单位权中误差

经计算[PVV]=645，$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{645}{3}}=\pm14.7''$

(2) 计算平差值函数协因数为

$$Q_{F_xF_x}=f_{x_2}^{\mathrm{T}}Qf_{x_2}+(AQf_{x_2})^{\mathrm{T}}q_x=1.762\ 7$$

$$Q_{F_yF_y}=f_{y_2}^{\mathrm{T}}Qf_{y_2}+(AQf_{y_2})^{\mathrm{T}}q_y=3.372\ 4$$

(3) 计算 2 号点坐标中误差

$$\hat{\sigma}_{x_2}=\hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{F_xF_x}}=\pm14.7\sqrt{1.762\ 7}=\pm19.5\ \mathrm{mm}$$

$$\hat{\sigma}_{y_2}=\hat{\sigma}_0\sqrt{Q_{F_yF_y}}=\pm14.7\sqrt{3.372\ 4}=\pm27.0\ \mathrm{mm}$$

(4) 计算 2 号点点位中误差

$$\hat{\sigma}_2=\pm\sqrt{\hat{\sigma}_{x_2}^2+\hat{\sigma}_{y_2}^2}=\pm33.3\ \mathrm{mm}$$

思考题与习题

3-1 何为条件平差？条件平差的目的是什么？

3-2 在条件平差中，条件方程式的个数和法方程式的个数是如何确定的？

3-3 列条件方程时应注意什么问题？怎样的一组条件方程是彼此线性无关的？

3-4 什么是极条件？为什么会产生这一条件？

3-5 什么是方位角条件？什么是边条件？什么情况下会产生这些条件？

3-6 怎样列平差值的权函数式？如何将非线性的平差值函数式线性化？

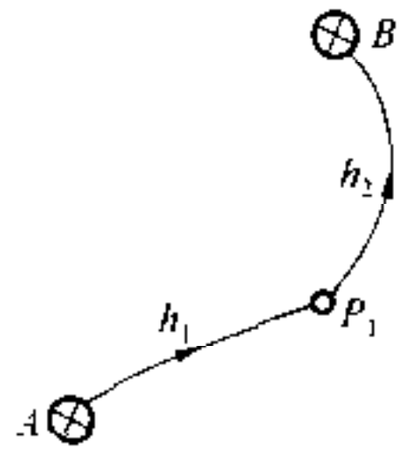
3-7 试确定图 3-25 中各图形的条件方程式个数。

3-8 如图 3-26 所示的水准网，试列出该网的改正数条件方程式。

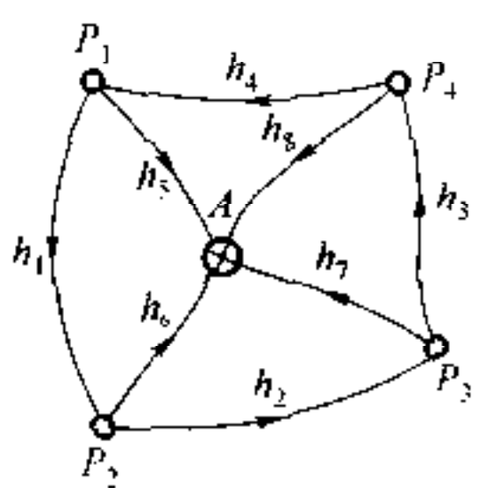
已知数据：$H_A=238.744$ m，$H_B=258.732$ m，$H_C=241.431$ m，$H_D=262.130$ m

观测数据：

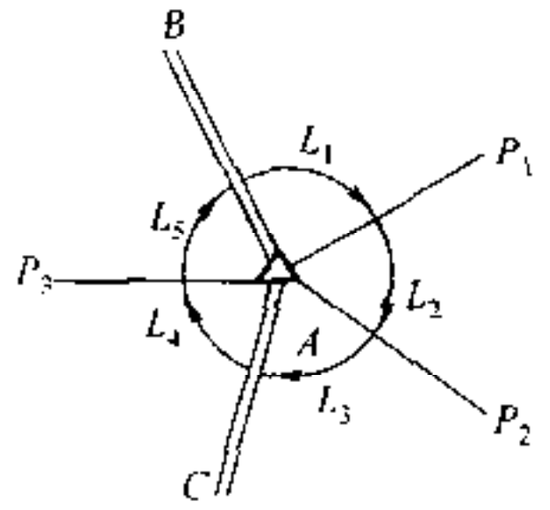
$$\begin{cases} h_1=+13.019\ \mathrm{m} & S_1=20.4\ \mathrm{km} \\ h_2=-3.092\ \mathrm{m} & S_2=18.8\ \mathrm{km} \\ h_3=+2.175\ \mathrm{m} & S_3=23.0\ \mathrm{km} \\ h_4=+6.949\ \mathrm{m} & S_4=19.5\ \mathrm{km} \\ h_5=+7.251\ \mathrm{m} & S_5=16.1\ \mathrm{km} \\ h_6=-5.255\ \mathrm{m} & S_6=23.3\ \mathrm{km} \\ h_7=+8.238\ \mathrm{m} & S_7=17.1\ \mathrm{km} \end{cases}$$



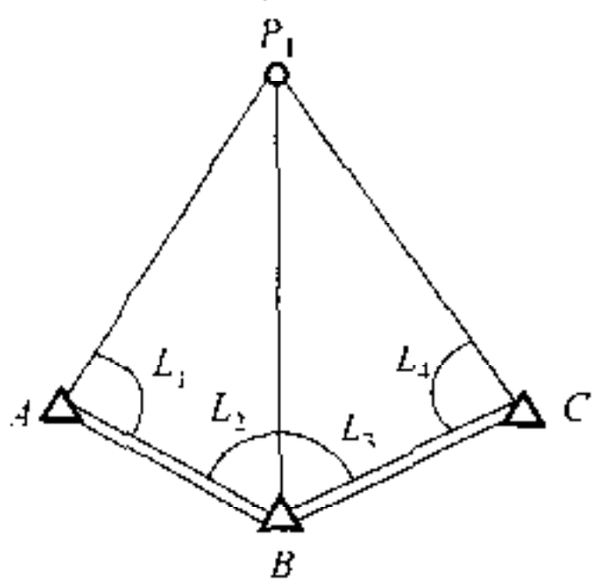
(a)



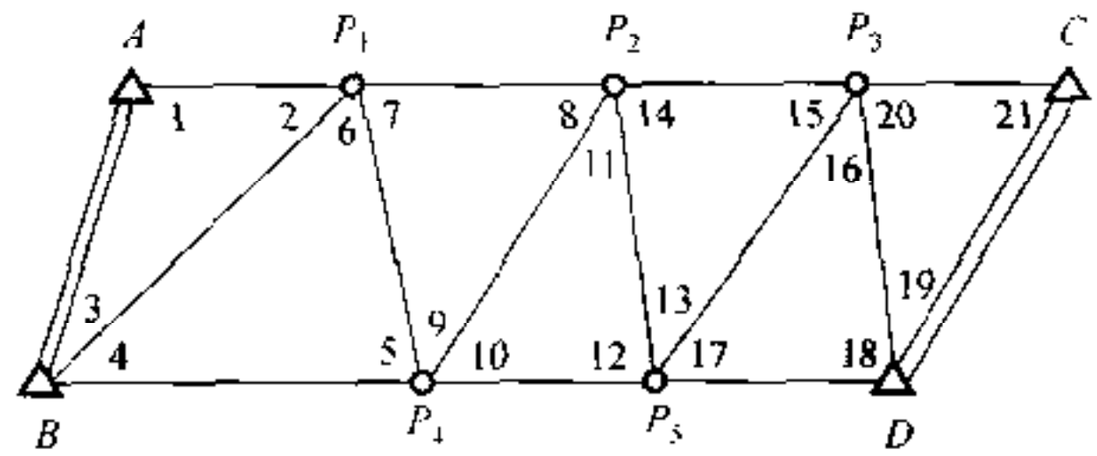
(b)



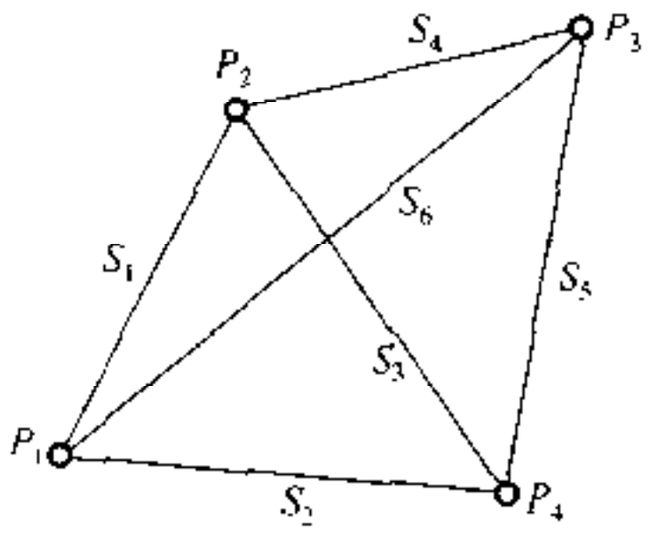
(c)



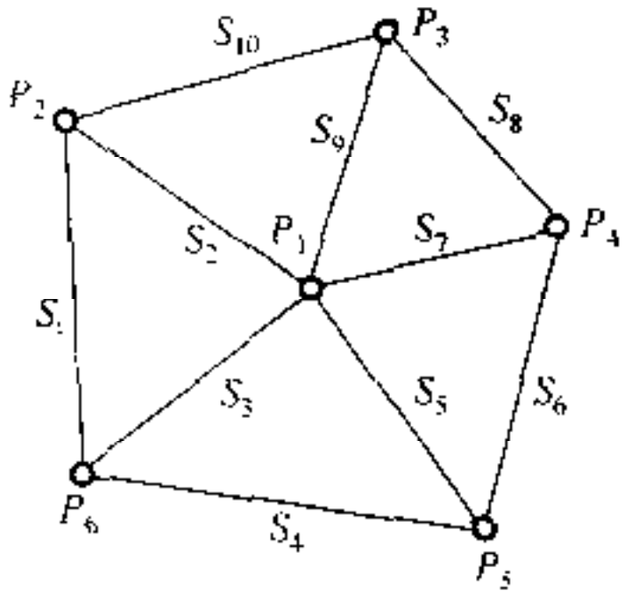
(d)



(e)



(f)



(h)

图 3－25

3－9　试用文字符号写出三角网(图 3　27)的全部改正数条件方程式(非线性条件写出线性化后的形式)。图中 A，B 为已知点，C，D，E，F 为待定点。

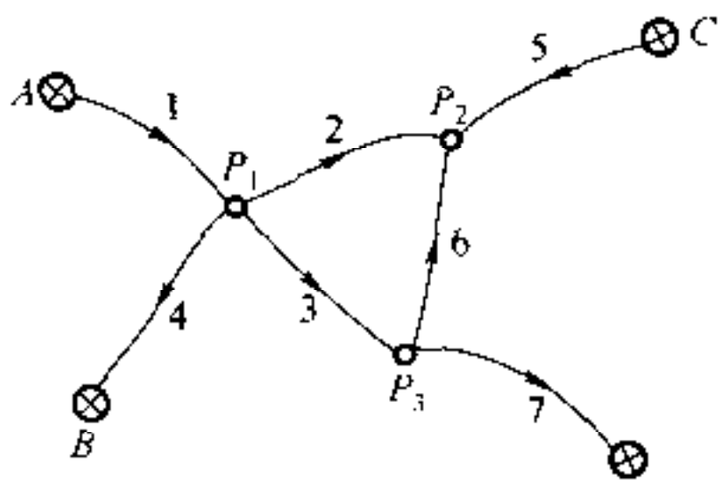


图 3－26

3－10　设有等精度观测的条件方程为

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 + v_3 \qquad\qquad + 2 &= 0 \\ v_3 + v_4 \qquad + v_7 + 1 &= 0 \\ v_2 \qquad + v_5 + v_6 + v_7 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

试组成法方程。

3－11　设某水准网有 4 个条件方程

$$\begin{aligned} v_2 \qquad - v_5 \qquad - v_7 \qquad - 2 &= 0 \\ v_3 \qquad - v_6 + v_7 \qquad + 4 &= 0 \\ - v_5 - v_6 \qquad + v_8 + 4 &= 0 \\ v_1 \qquad + v_4 \qquad\qquad + v_8 + 0 &= 0 \end{aligned}$$

而水准路线长为

$S_1=1$ km，$S_2=2$ km，$S_3=2$ km，$S_4=1$ km

$S_5=2$ km，$S_6=2$ km，$S_7=2.5$ km，$S_8=2.5$ km

设以 1 km 水准测量作为单位权观测，试组成法方程。

3－12　在水准网(图 3－28)中，已知数据及观测数据如下：

已知数据：　$H_A=62.222\ m$，$H_B=61.222\ m$

观测数据：

$h_1=-1.003$ m，$S_1=2$ km

$h_2=-0.500$ m，$S_2=1$ km

$h_3=-0.501$ m，$S_3=0.5$ km

试用条件平差求：(1)P_1、P_2 点的高程平差值；(2)平差后 P_1 到 P_2 点间高差的中误差。

3－13　如图 3－29 所示为一 5″级三角网，AB 为已知边长，其相对误差为 $\frac{1}{50\,000}$，角度观测值见表 3－7，试求出角度平差值及 CD 边长的相对误差。

表 3－7

角　号	角度观测值 /(° ′ ″)	角　号	角度观测值 /(° ′ ″)
1	30 20 12.2	4	19 54 45.6
2	72 54 53.3	5	39 08 00.0
3	56 50 01.4	6	43 28 13.5

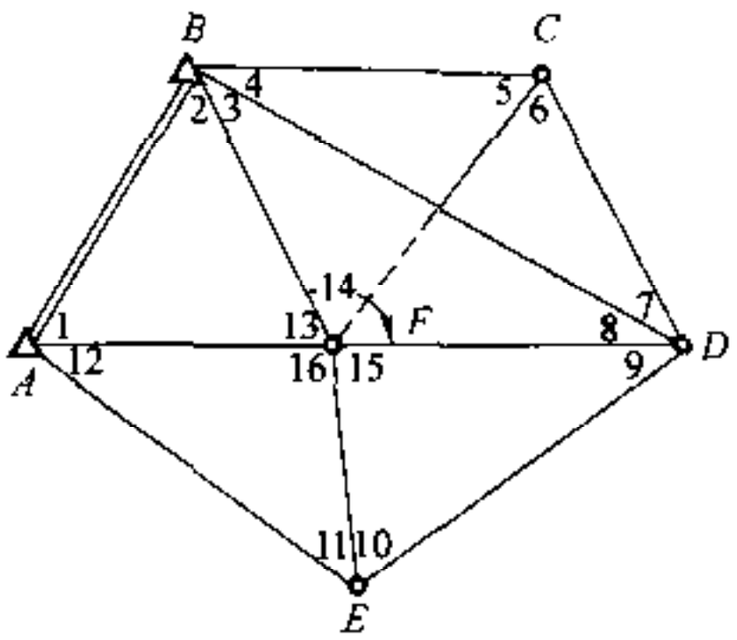


图 3－27

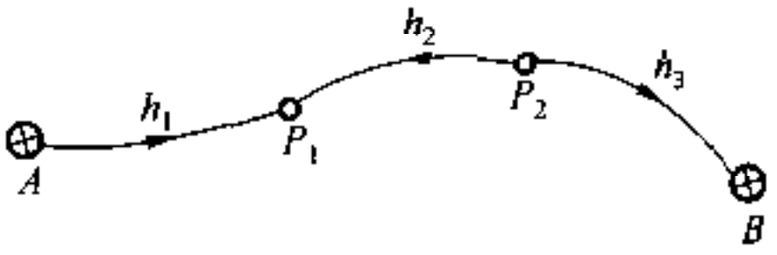


图 3－28

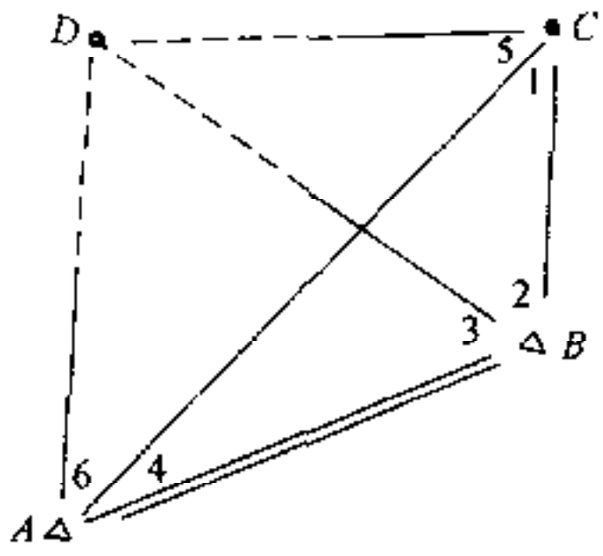


图 3－29

第四章　误差椭圆

第一节　概　　述

控制点的平面位置是用一对平面直角坐标来确定的。为了确定待定点的平面坐标，通常需进行一系列观测，由于观测值总是带有误差，因而根据观测值，通过平差计算所得的是待定点坐标的平差值平差 x、y，它们并不是待定点坐标的真值 $\tilde{x}$、$\tilde{y}$。

在图 4－1 中，A 为已知点，假设它们的坐标是不带有误差的数值。P 为待定点的真位置，P'为由观测值通过平差所求得的最或然点位，P'点相对 P 点的偏移量 ΔP 称为 P 点的点位真误差。而

$$\left.\begin{aligned}\Delta x &= x - \tilde{x}\\ \Delta y &= y - \tilde{y}\end{aligned}\right\} \qquad (4-1)$$

为 ΔP 在 x、y 坐标轴上的投影，分别称为 x 坐标真位差(Δx)和 y 坐标真位差(Δy)。

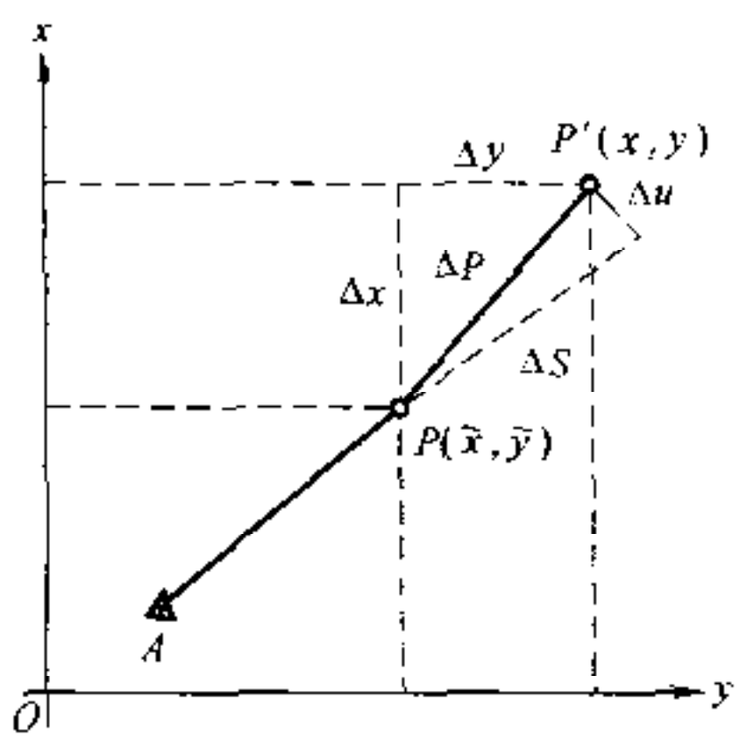


图 4－1

由图可知

$$\Delta P^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \qquad (4-2)$$

P 点的坐标平差值 x 和 y 都是由同一组观测值通过平差所求得的结果。设平差后的坐标 x、y 与观测向量之间的线性函数关系为

$$x = \alpha_0 + \alpha L, \quad y = \beta_0 + \beta L$$

显然，随着观测值的不同，x 和 y 也将取得不同的数值。换言之，对应不同的子样观测值，将得到不同的 x、y 值，因而就出现不同的 Δx、Δy 和 ΔP 值，所以它们都是随机变量。对以上两式取数学期望，得

$$E(x) = \alpha_0 + \alpha E(L) = \alpha_0 + \alpha\tilde{L} = \tilde{x}$$
$$E(y) = \beta_0 + \beta E(L) = \beta_0 + \beta\tilde{L} = \tilde{y}$$

根据方差的定义及式(4－1)，则有

$$\sigma_x^2 = E[(x - E(x))^2] = E[(x - \tilde{x})^2] = E(\Delta x^2)$$
$$\sigma_y^2 = E[(y - E(y))^2] = E[(y - \tilde{y})^2] = E(\Delta y^2)$$

对式(4－2)两边取数学期望，得

$$E(\Delta P^2) = E(\Delta x^2) + E(\Delta y^2) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

式中，$E(\Delta p^2)$是 P 点真位差平方的理论平均值，通常定义为 P 点的点位方差，并记为 σ_P^2，

于是有

$$\sigma_P^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 \tag{4-3}$$

如果将图 4－1 中的坐标系旋转某一个角度，即以 $x'Oy'$ 为坐标系(图 4－2)，则 A、P、P' 各点的坐标分别为 $(\tilde{x}'_A, \tilde{y}'_A)$，$(\tilde{x}', \tilde{y}')$ 和 (x', y')。虽然在新坐标系中对应的真误差 $\Delta x'$ 和 $\Delta y'$ 的大小变了，但 ΔP 的大小将不受坐标轴的变动而发生变化，此时 $\Delta P^2 = \Delta x'^2 + \Delta y'^2$，仿式(4－3)可以直接写出

$$\sigma_P^2 = \sigma_{x'}^2 + \sigma_{y'}^2 \tag{4-4}$$

由式(4－3)和式(4　4)可见，点位方差 σ_P^2 总是等于两个相互垂直的方向上的坐标方差 σ_x^2 和 σ_y^2 或 $\sigma_{x'}^2$ 和 $\sigma_{y'}^2$ 的平方和，即点位方差 σ_P^2 的大小与坐标系的选择无关。

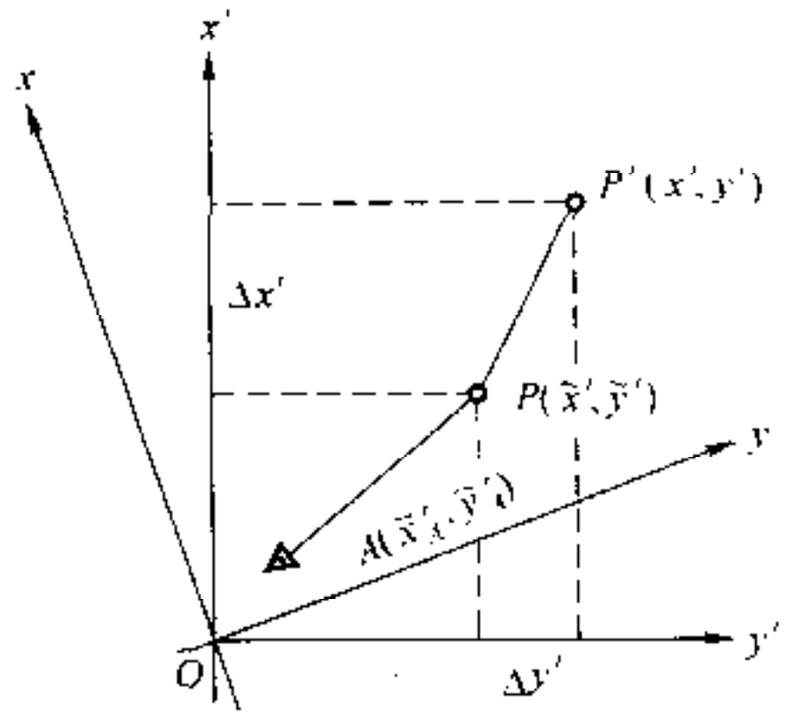


图 4－2

如果再将 P 点的真位差 ΔP 投影于 AP 方向和垂直 AP 的方向上，则得 ΔS 和 Δu(图 4－1)，此时有

$$\Delta P^2 = \Delta S^2 + \Delta u^2$$

仿式(4－3)又可以写出

$$\sigma_P^2 = \sigma_s^2 + \sigma_u^2 \tag{4-5}$$

式中，σ_s 称为纵向误差，σ_u 称为横向误差。通过纵、横向误差来求定点位误差，这在测量工作中也是一种常用的方法。

从以上的讨论中可以看出，点位中误差 σ_P 虽然可以用来评定待定点的点位精度，但是它却不能代表该点在某一任意方向上的位差大小。而上面提到的 σ_x、σ_y、σ_s 和 σ_u 等等，也只能代表待定点在 x 和 y 轴上以及在 AP 边的纵向和横向上的位差。但在有些情况下，往往需要研究点位在哪一个方向上的位差最大，在哪一个方向上的位差最小。例如，在工程放样工作中，就经常需要研究这个问题。为了便于求待定点点位在任意方向上位差的大小，一般是通过求待定点的点位误差椭圆来实现的，通过误差椭圆可以求得待定点在任意方向上的位差，这样就可以较精确地、形象而全面地反映待定点点位在各个方向上误差的分布情况。

第二节　点位误差

一、点位误差的计算

1．待定点的纵横坐标的方差计算

待定点的纵横坐标的方差是按下式计算的：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_0^2 \frac{1}{p_x} = \sigma_0^2 Q_{xx} \\ \sigma_y^2 &= \sigma_0^2 \frac{1}{p_y} = \sigma_0^2 Q_{yy} \end{aligned}\right\} \tag{4-6}$$

根据式(4－3)可求得点位方差

$$\sigma_P^2 = \sigma_0^2 (Q_{xx} + Q_{yy}) \tag{4-7}$$

2. 协因数 Q_{xx}、Q_{yy}的计算

当以三角网中待定点的坐标作为未知数，按间接平差法平差时，法方程系数阵的逆阵就是未知数的协因数阵 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$，当平差问题中只有一个待定点时

$$Q_{\hat{X}\hat{X}}=(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}\begin{bmatrix}Q_{xx} & Q_{xy}\\ Q_{yx} & Q_{yy}\end{bmatrix} \tag{4-8}$$

其中，主对角线元素 Q_{xx}、Q_{yy}就是待定点坐标 x 和 y 的权倒数，而 Q_{xy}或 Q_{yx}则是它们的相关权倒数。当平差问题中有多个待定点，例如 S 个待定点时，未知数的协因数阵为

$$Q_{\underset{2S\times 2S}{\hat{X}\hat{X}}}=(B^{\mathrm{T}}PB)^{-1}=\begin{bmatrix}
Q_{x_1x_1} & Q_{x_1y_1} & \cdots & Q_{x_1x_i} & Q_{x_1y_i} & \cdots & Q_{x_1x_s} & Q_{x_1y_s}\\
Q_{y_1x_1} & Q_{y_1y_1} & \cdots & Q_{y_1x_i} & Q_{y_1y_i} & \cdots & Q_{y_1x_s} & Q_{y_1y_s}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
Q_{x_ix_1} & Q_{x_iy_1} & \cdots & Q_{x_ix_i} & Q_{x_iy_i} & \cdots & Q_{x_ix_s} & Q_{x_iy_s}\\
Q_{y_ix_1} & Q_{y_iy_1} & \cdots & Q_{y_ix_i} & Q_{y_iy_i} & \cdots & Q_{y_ix_s} & Q_{y_iy_s}\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
Q_{x_sx_1} & Q_{x_sy_1} & \cdots & Q_{x_sx_i} & Q_{x_sy_i} & \cdots & Q_{x_sx_s} & Q_{x_sy_s}\\
Q_{y_sx_1} & Q_{y_sy_1} & \cdots & Q_{y_sx_i} & Q_{y_sy_i} & \cdots & Q_{y_sx_s} & Q_{y_sy_s}
\end{bmatrix} \tag{4-9}$$

待定点坐标的权倒数仍为相应的对角线上的元素，而相关权倒数则在相应的权倒数连线的两侧。

当三角网按条件平差时，待定点的坐标平差值是观测值的函数，求待定点的坐标平差值的协因数，可根据第三章中求平差值函数的协因数的方法计算。

二、任意方向 φ 的位差

为了求待定点 P 在某一任意方向 φ 上的位差，需先找出 P 点在 φ 方向上的真误差 $\Delta\varphi$ 与纵横坐标的真误差 Δx、Δy 的函数关系，然后求出位差。P 点在 φ 方向上的位置真误差，实际上就是 P 点的点位真误差在 φ 方向上的投影值。如图 4 - 3 所示，点位真误差 PP'在 φ 方向的投影值为 PP'''。

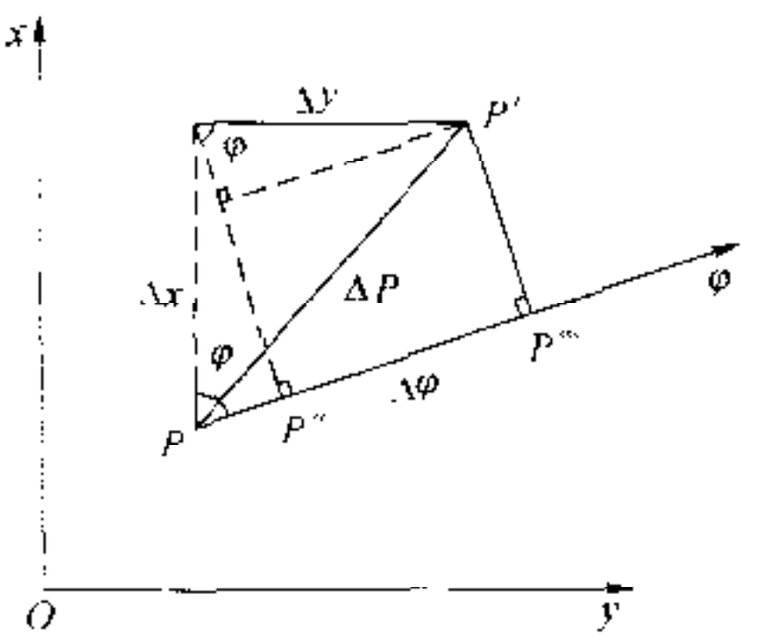


图 4 - 3

由图 4 - 3 可以看出 $\Delta\varphi$ 与 Δx、Δy 的关系为

$$\Delta\varphi=\overline{PP''}+\overline{P''P'''}=\Delta x\cos\varphi+\Delta y\sin\varphi$$

又

$$\sigma_x^2=\sigma_{\Delta x}^2,\quad \sigma_y^2=\sigma_{\Delta y}^2$$

根据协方差传播律，得

$$\sigma_\varphi^2=\sigma_x^2\cos^2\varphi+\sigma_y^2\sin^2\varphi+\sigma_{xy}\sin 2\varphi \tag{4-10}_1$$

或

$$\sigma_\varphi^2=\sigma_0^2Q_{\varphi\varphi}=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi+Q_{yy}\sin^2\varphi+Q_{xy}\sin 2\varphi) \tag{4-10}_2$$

式(4-10)是求任意方位 φ 方向上点位方差的计算公式。

三、位差的极大值 E 和极小值 F 及极值方向

在实际工作中，有时需要知道在一定的观测精度下，P 点的位差在什么方向具有极大值和极小值。在式(4-10)中，σ_0 代表单位权观测值的精度，它的大小与 φ 角无关，而 $Q_{\varphi\varphi}$的大小则随着 φ 值的改变而改变。因此，为了求位差的极大值和极小值，只要将 $Q_{\varphi\varphi}$对 φ 角取导数，并令其为零，即可求出取得极值时的方向 φ_0。也就是使

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}(Q_{xx}\cos^2\varphi+Q_{yy}\sin^2\varphi+Q_{xy}\sin^2\varphi)=0$$

即 $$-2Q_{xx}\cos\varphi_0\sin\varphi_0+2Q_{yy}\sin\varphi_0\cos\varphi_0+2Q_{xy}\cos2\varphi_0=0$$

或 $$-Q_{xx}\sin2\varphi_0+Q_{yy}\sin2\varphi_0+2Q_{xy}\cos2\varphi_0=0$$

由此得 $$\tan2\varphi_0=\frac{2Q_{xy}}{Q_{xx}-Q_{yy}} \tag{4-11}$$

根据上式可得两个解 $2\varphi_0$ 和 $2\varphi_0+180°$，极值方向为 φ_0 和 $\varphi_0+90°$。在这两个方向中，哪一个是极大值方向，哪一个是极小值方向呢？为此，将 φ_0 代入式$(4-10)_2$得

$$\sigma_{\varphi_0}^2=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi_0+Q_{yy}\sin^2\varphi_0+Q_{xy}\sin2\varphi_0)$$

$$=\sigma_0^2\left(Q_{xx}\cos^2\varphi_0+Q_{yy}\sin^2\varphi_0+Q_{xy}\frac{2\tan\varphi_0}{1+\tan^2\varphi_0}\right)$$

上式中，括号内前两项恒为正值，因此，当 Q_{xy} 与 $\tan\varphi_0$ 同号时，$\sigma_{\varphi_0}^2$ 为极大值，而 $\sigma_{\varphi_0+90°}^2$ 为极小值；当 Q_{xy} 与 $\tan\varphi_0$ 异号时，$\sigma_{\varphi_0}^2$ 为极小值，而 $\sigma_{\varphi_0+90°}^2$ 为极大值。可见在 φ_0 方向是取得极大值，还是极小值，取决于 Q_{xy} 与 $\tan\varphi_0$ 的符号，据此，判别极值方向的方法总结为：

当 $Q_{xy}>0$ 时，极大值在第Ⅰ、Ⅲ象限($\tan\varphi_0>0$)；极小值在第Ⅱ、Ⅳ象限($\tan\varphi_0<0$)。

当 $Q_{xy}<0$ 时，极大值在第Ⅱ、Ⅳ象限($\tan\varphi_0<0$)；极小值在第Ⅰ、Ⅲ象限($\tan\varphi_0>0$)。

特别地：

当 $Q_{xy}=0$，且 $Q_{xx}\neq Q_{yy}$ 时，若 $Q_{xx}>Q_{yy}$ 极大值方向为 0°(x 轴)；若 $Q_{xx}<Q_{yy}$ 极大值为 90°(y 轴)。

习惯上，用 φ_E 表示极大值方向，φ_F 表示极小值方向；用 E、F 分别表示位差的极大值和极小值。φ_E 与 φ_F 总是互差 90°，即 $\varphi_E=\varphi_F+90°$。因此计算位差极值的公式为

$$\left.\begin{aligned}E^2&=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi_E+Q_{yy}\sin^2\varphi_E+Q_{xy}\sin2\varphi_E)\\F^2&=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi_F+Q_{yy}\sin^2\varphi_F+Q_{xy}\sin2\varphi_F)\end{aligned}\right\} \tag{4-12}$$

此外，还可以导出计算位差极值的常用公式，其推导如下：

将 φ_0 代入式$(4-10)_2$，并考虑到

$$\cos^2\varphi_0=\frac{1+\cos2\varphi_0}{2},\quad \sin^2\varphi_0=\frac{1-\cos2\varphi_0}{2}$$

得

$$\sigma_{\varphi_0}^2=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi_0+Q_{yy}\sin^2\varphi_0+Q_{xy}\sin2\varphi_0)$$

$$=\varphi_0^2\left(Q_{xx}\frac{1+\cos2\varphi_0}{2}+Q_{yy}\frac{1-\cos2\varphi_0}{2}+Q_{xy}\sin2\varphi_0\right)$$

$$=\frac{\sigma_0^2}{2}\{(Q_{xx}+Q_{yy})+(Q_{xx}-Q_{yy})\cos2\varphi_0+2Q_{xy}\sin2\varphi_0\}$$

顾及式$(4-11)$，则

$$\sigma_{\varphi_0}^2=\frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{(Q_{xx}+Q_{yy})+\frac{2Q_{xy}}{\tan2\varphi_0}\cos2\varphi_0+2Q_{xy}\sin2\varphi_0\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{(Q_{xx}+Q_{yy})+\frac{2Q_{xy}}{\sin2\varphi_0}\right\}$$

而 $$\frac{1}{\sin2\varphi_0}=\pm\sqrt{1+\cot^2 2\varphi_0}$$

则

$$\sigma_{\varphi_0}^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{(Q_{xx}+Q_{yy}) \pm 2Q_{xy}\sqrt{1+\cot^2 2\varphi_0}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{(Q_{xx}+Q_{yy}) \pm 2Q_{xy}\sqrt{1+\frac{(Q_{xx}-Q_{yy})^2}{(2Q_{xy})^2}}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{Q_{xx}+Q_{yy} \pm \sqrt{(Q_{xx}-Q_{yy})^2+4Q_{xy}^2}\right\}$$

令

$$K = \sqrt{(Q_{xx}-Q_{yy})^2+4Q_{xy}^2} \tag{4-13}$$

则

$$\left.\begin{aligned} E^2 &= \frac{1}{2}\sigma_0^2\{(Q_{xx}+Q_{yy})+K\} \\ F^2 &= \frac{1}{2}\sigma_0^2\{(Q_{xx}+Q_{yy})-K\} \end{aligned}\right\} \tag{4-14}$$

不难看出，σ_P^2 与 E^2 及 F^2 存在下面关系

$$\sigma_P^2 = E^2 + F^2 \tag{4-15}$$

四、用极值 E、F 表示任意方向 ψ 上的位差

上面已经导出求待定点在任意方向上位差的实用公式(4－10)，式中方向 φ 是从纵坐标 x 轴算起的。为了后面的讨论方便起见，现导出以极值 E、F 表示的任意方向 ψ 上位差的计算公式，此处方向 ψ 是以极大值 E 的方向为起始轴。即把坐标 xOy 旋转 φ_E 角后形成 x_eOy_e 坐标系，亦即以极大值方向为纵轴 x_e，极小值方向为横轴 y_e。

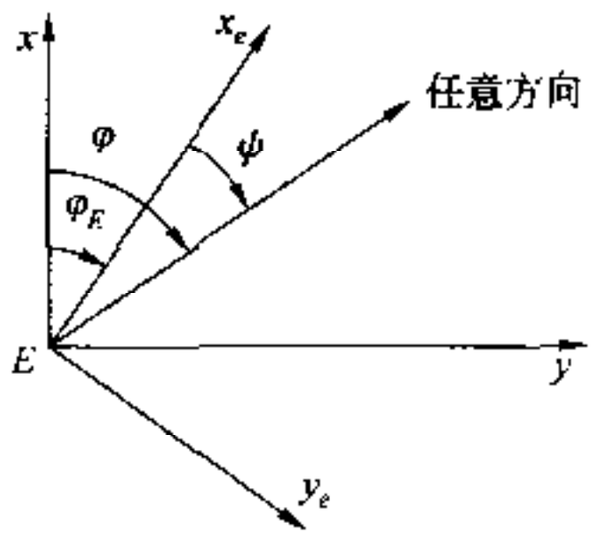


图 4－4

由图 4－4 可知，任意方向在两个坐标系中的方位角有以下关系

$$\varphi = \psi + \varphi_E$$

把 $\varphi = \psi + \varphi_E$ 代入式$(4-10)_1$式得

$$\sigma_\psi^2 = \sigma_\varphi^2 = \sigma_x^2\cos^2(\psi+\varphi_E) + \sigma_y^2\sin^2(\psi+\varphi_E) + \sigma_{xy}\sin(2\psi+2\varphi_E)$$

$$= \sigma_x^2\left(\cos^2\psi\cos^2\varphi_E + \sin^2\psi\sin^2\varphi_E - \frac{1}{2}\sin 2\psi\sin 2\varphi_E\right) +$$

$$\sigma_y^2\left(\sin^2\psi\cos^2\varphi_E + \cos^2\psi\sin^2\varphi_E + \frac{1}{2}\sin 2\psi\sin 2\varphi_E\right) +$$

$$\sigma_{xy}(\sin 2\psi\cos 2\varphi_E + \cos^2\psi\sin 2\varphi_E - \sin^2\psi\sin 2\varphi_E)$$

$$= \cos^2\psi(\sigma_x^2\cos^2\varphi_E + \sigma_y^2\sin^2\varphi_E + \sigma_{xy}\sin 2\varphi_E) +$$

$$\sin^2\psi(\sigma_x^2\sin^2\varphi_E + \sigma_y^2\cos^2\varphi_E - \sigma_{xy}\sin 2\varphi_E) -$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\psi\{(\sigma_x^2-\sigma_y^2)\sin 2\varphi_E - 2\sigma_{xy}\cos 2\varphi_E\}$$

考虑式(4－11)和式(4－12)，则上式为

$$\sigma_\psi^2 = E^2\cos^2\psi + F^2\sin^2\psi \tag{4-16}$$

这就是以极大值方向起始轴，用 E、F 表示的任意方向 ψ 上的位差 σ_ψ 的计算公式。

例 4－1　如图4－5 所示，在固定三角形内插入一点 P，经过平差后得 P 点坐标的协因数阵为：

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.81 & 0.36 \\ 0.36 & 2.93 \end{pmatrix} \quad (\mathrm{cm}^2/\mathrm{s})$$

单位权方差为 $\sigma_0^2 = 1.96\ \mathrm{s}^2$

试求：(1) 位差的极值方向 φ_E 和 φ_F；

(2) 位差的极大值 E 与极小值 F；

(3) 已算出 PM 方向的方位角 $T_{PM} = 75°29'$，PM 方向上的点位误差为多少；

(4) P 点的点位方差。

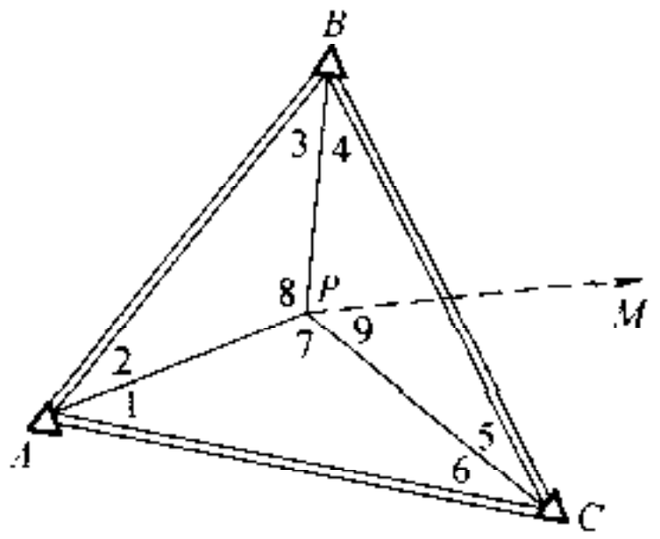


图 4－5

解 (1) 计算极值方向。由式(4－11)有

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2Q_{xy}}{Q_{xx} - Q_{yy}} = \frac{2 \times 0.36}{3.81 - 2.93} = 0.818\ 18$$

解得：$2\varphi_0 = 39°17'$ 或 $219°17'$，即极值方向为 $19°38'30''$ 或 $199°38'30''$。因为 $Q_{xy} > 0$，故：

$$\varphi_E = 19°38'30''\text{或}\ 199°38'30'' \qquad \varphi_F = 109°38'30''\text{或}\ 289°38'30''$$

(2) 求位差的极值

由式(4－13)和式(4－14)有

$$K = \sqrt{(Q_{xx} - Q_{yy})^2 + 4Q_{xy}^2} = \sqrt{(3.81 - 2.93)^2 + 4 \times 0.36^2} = 1.14$$

则有

$$E^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2(Q_{xx} + Q_{yy} + K) = 7.72\ \mathrm{cm}^2$$

$$F^2 = \frac{1}{2}\sigma_0^2(Q_{xx} + Q_{yy} - K) = 5.49\ \mathrm{cm}^2$$

即

$$E = \pm 2.78\ \mathrm{cm}, \quad F = \pm 2.34\ \mathrm{cm}$$

也可用式(4－12)计算为

$$E = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}\cos^2\varphi_E + Q_{yy}\sin^2\varphi_E + Q_{xy}\sin 2\varphi_E} = \pm 2.78\ \mathrm{cm}$$

$$F = \sigma_0 \sqrt{Q_{xx}\cos^2\varphi_F + Q_{yy}\sin^2\varphi_F + Q_{xy}\sin 2\varphi_F} = \pm 2.34\ \mathrm{cm}$$

(3) 求 P 点在 PM 方向上的位差

将 PM 的方位角 $T_{PM} = 75°29'$ 代入式(4－10)得

$$\sigma_{T_{PM}}^2 = \sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2 T_{PM} + Q_{yy}\sin^2 T_{PM} + Q_{xy}\sin 2T_{PM}) = 6.19\ \mathrm{cm}^2$$

即

$$\sigma_\varphi = \sigma_{T_{PM}} = \pm 2.49\ \mathrm{cm}$$

也可以用式(4－16)计算 PM 方向上的位差。此时，以极大值方向为坐标纵轴、PM 的方向角为：

$$\psi = T_{PM} - \varphi_E = 55°50'$$

则

$$\sigma_\psi^2 = E^2\cos^2\psi + F^2\sin\psi = 6.19\ \mathrm{cm}^2$$

$$\sigma_\psi = \pm 2.49\ \mathrm{cm}$$

(4) 点位方差计算

$$\sigma_P^2 = \sigma_0^2(Q_{xx} + Q_{yy}) = 13.21\ \mathrm{cm}^2$$

即

$$\sigma_P = \pm 3.63\ \mathrm{cm}$$

或　　$$\sigma_P = \pm\sqrt{E^2 + F^2} = \pm 3.63 \text{ cm}$$

例 4－2　如图4－6 所示，已知 $x_A = 4\ 578.67$ m，$y_A = 3\ 956.74$ m，$T_{AB} = 345°18'$。为确定 P 点的位置，作如下观测：$\beta = 89°15'42'' \pm 4''$，$S = 600.150$ m ± 10 mm，试确定 P 点位差的极大值及其方向。

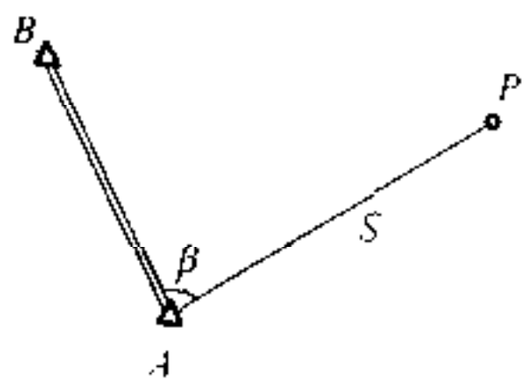


图 4－6

解法一　由 P 点的坐标差计算 φ_E 及 E。列函数式：

$$x_P = x_A + S\cos(T_{AB} + \beta)$$

$$y_P = y_A + S\sin(T_{AB} + \beta)$$

求全微分 $\mathrm{d}x_P$、$\mathrm{d}y_P$，且 dS 以毫米(mm)为单位，得

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}x_P \\ \mathrm{d}y_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos T_{AP} & -\dfrac{1\,000}{\rho}\Delta y_{AP} \\ \sin T_{AP} & \dfrac{1\,000}{\rho}\Delta x_{AP} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}S \\ \mathrm{d}\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.266 & -2.084 \\ 0.964 & 0.774 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{d}S \\ \mathrm{d}\beta \end{pmatrix}$$

对上式应用协方差传播律，得

$$\begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.266 & -2.084 \\ 0.964 & 0.774 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 2 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.266 & 0.964 \\ -2.084 & 0.774 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132.874 & -9.082 \\ -9.082 & 102.515 \end{pmatrix}$$

由式(4－11)得

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} = \frac{2\times(-9.082)}{132.874 - 102.515} = -0.598\ 31$$

解得　　$$2\varphi_0 = 149°06'27''\text{或}\ 329°06'27''$$

即　　$$\varphi_0 = 74°33'14''\text{或}\ 164°33'14''$$

由于　　$$\sigma_{xy} = -9.082 < 0$$

所以极大值方向为

$$\varphi_E = 164°33'14''$$

极大值为

$$E = \pm\sqrt{\sigma_x^2\cos^2\varphi_E + \sigma_y^2\sin^2\varphi_E + \sigma_{xy}\sin 2\varphi_E} = \pm 11.64 \text{ mm}$$

或　　$$E = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2) + 4\sigma_{xy}^2}} = \pm 11.64 \text{ mm}$$

解法二　以 AP 方向为纵轴，建立坐标系 $x'Oy'$，该坐标系相当于 xOy 坐标系顺时针旋转 $T_{AP} = 74°33'42''$ 而得到。

在 $x'Oy'$ 坐标系中，P 点纵坐标的方差 $\sigma_{x'}^2$ 就是 P 点的纵向方差 σ_S^2，即

$$\sigma_{x'}^2 = \sigma_S^2 = 100 \text{ mm}^2$$

P 点横向坐标的方差就是 P 点横向方差，即

$$\sigma_{y'}^2 = \sigma_u^2 = \frac{1}{\rho^2}S^2\sigma_\beta^2 = 135.45 \text{ mm}^2$$

由于　　$$\tan 2\varphi'_0 = \frac{2\sigma_{x'y'}}{\sigma_{x'}^2 - \sigma_{y'}^2} = 0$$

解得　　$$2\varphi'_0 = 0\text{ 或 }180°$$

即　　$$\varphi'_0 = 0\text{ 或 }90°$$

因为 $$\sigma_{x'y'}=0,\quad \sigma_{x'}^2<\sigma_{y'}^2$$

故在 $x'Oy'$ 坐标系中，P 点位差极大值方向 $\varphi'_E=90°$。

位差极大值为

$$E=\sqrt{\sigma_{x'}^2\cos^2\varphi'_E+\sigma_{y'}^2\sin^2\varphi'_E+\sigma_{x'y'}\sin 2\varphi'_E}=\pm 11.64\ \text{mm}$$

把 φ'_E 化为 xOy 坐标系中的方位角，得

$$\varphi_E=\varphi'_E+74°33'42''=164°33'42''$$

例 4－3 在例4－1 中平差后已经算得 PA 的坐标方位角 $T_{PA}=248°15'30''$，边长 $S_{PA}=1\ 827.46$ m，试求 PA 边的方位角误差 $\sigma_{T_{PA}}$ 及边长相对误差。

解 因为 PA 边长的中误差就是 PA 方向上的位差，则有

$$\sigma_{S_{PA}}^2=\sigma_{T_{PA}}^2=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2 T_{PA}+Q_{yy}\sin^2 T_{PA}+Q_{xy}\sin 2T_{PA})=6.465$$

$$\sigma_{S_{PA}}=\pm 2.54\ \text{cm}$$

边长相对中误差为

$$\frac{\sigma_{S_{PA}}}{S_{PA}}=\frac{2.54}{182\ 746}=\frac{1}{71\ 800}$$

要计算 PA 边的方位误差，首先要计算 PA 边的横向误差，即垂直于 PA 边方向上的 P 点位差，垂直方向的方位角 $\varphi=248°15'30''\pm 90°$。则有

$$\sigma_u^2=\sigma_\varphi^2=\sigma_0^2(Q_{xx}\cos^2\varphi+Q_{yy}\sin^2\varphi+Q_{xy}\sin 2\varphi)=6.745$$

$$\sigma_u=\pm 2.597\ \text{cm}$$

由于 $$\sigma_u=\frac{1}{\rho}\cdot S_{PA}\cdot\sigma_{T_{PA}}$$

得 $$\sigma_{T_{PA}}=\frac{\rho\sigma_u}{S_{PA}}=\pm\frac{206\ 265\times 2.597}{182\ 746}=\pm 2.93''$$

第三节 误差曲线

在工程控制测量中，除了计算待定点在某一给定方向上的位差以外，有时为了更清楚，更直观地了解某些待定点的位差在平面各方向上的分布情况，需要把待定点各方向上的位差分解出来，以便分析研究待定点的点位误差特性、优化测量方案。

以不同的 $\psi(0°\leqslant\psi\leqslant 360°)$ 值代入下式

$$\sigma_\psi^2=E^2\cos^2\psi+F^2\sin^2\psi$$

算出各个方向的 σ_ψ 值，以 ψ 和 σ_ψ 为极坐标的点的轨迹必为一闭合曲线(图 4－7)。该曲线称为误差曲线，或称为精度曲线。很显然，这条曲线在任意方向 ψ 上的向径 $\overline{PM}$ 就是点 P 在该方向的位差。当 $\psi=0°$ 时，$\sigma_\psi=E$；当 $\psi=90°$ 时，$\sigma_\psi=F$。而且误差曲线是关于 x_e 轴、y_e 轴对称的。

待定点的误差曲线，可以用作图的方法画出来。现介绍如下：

第一步，按前述的有关公式计算出 φ_E、E 和 F 的值。

第二步，用图解法确定曲线的向径 σ_ψ。如图 4－8 所示，以极值方向为坐标轴，按一定比例尺在Ⅰ、Ⅲ象限内，以点 O 为圆心，分别以 E、F 为半径画弧，再以 x_e 为起始方向，过原点 O 作一系列 ψ 角(如取 ψ 为 20°，40°，60°，80°)的直线，将直线与圆弧的交点分别投影到

x_e、y_e 轴上，得到交点 a' 和 a''。线段 $\overline{a'a''}$ 长度便是角度 ψ 对应的误差曲线的向径 σ_ψ，亦即 ψ 方向的位差。在 ψ 方向的直线上，自 O 点量取线段 $\overline{Oa}=\overline{a'a''}$ 得 a 点，便是误差曲线上的点。不难证明 $\overline{a'a''}=\sigma_\psi$，因为

$$\overline{a'a''}^2=\overline{Oa'}^2+\overline{Oa''}^2=E^2\cos^2\psi+F^2\sin^2\psi=\sigma_\psi^2$$

即

$$\overline{a'a''}=\sigma_\psi$$

第三步，根据 ψ 的不同取值，可用上述方法确定其各向径的长度，便可绘出待定点的误差曲线。具体方法是：首先用较小比例尺绘出三角点位置图，如图 4－9 所示。图中 A、B、C 为已知点。以待定点 P 为原点，建立 xOy 坐标系，并根据已求出的 φ_E 值，确定极值 E（x_e 轴）、F（y_e 轴）的方向。然后以较大的比例尺在 x_e、y_e 轴上取 $\overline{Pc}=E$，$\overline{Pd}=F$，再以 x_e 为起始方向，将不同的 ψ 值及其相应的向径，仍按该比例尺逐一展绘上去，平滑地依次将各点连接起来，就得到了待定点 P 的误差曲线图。

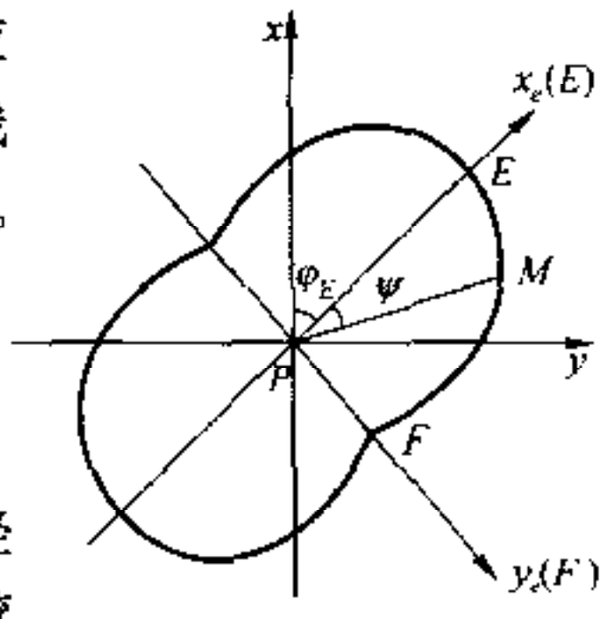


图 4－7

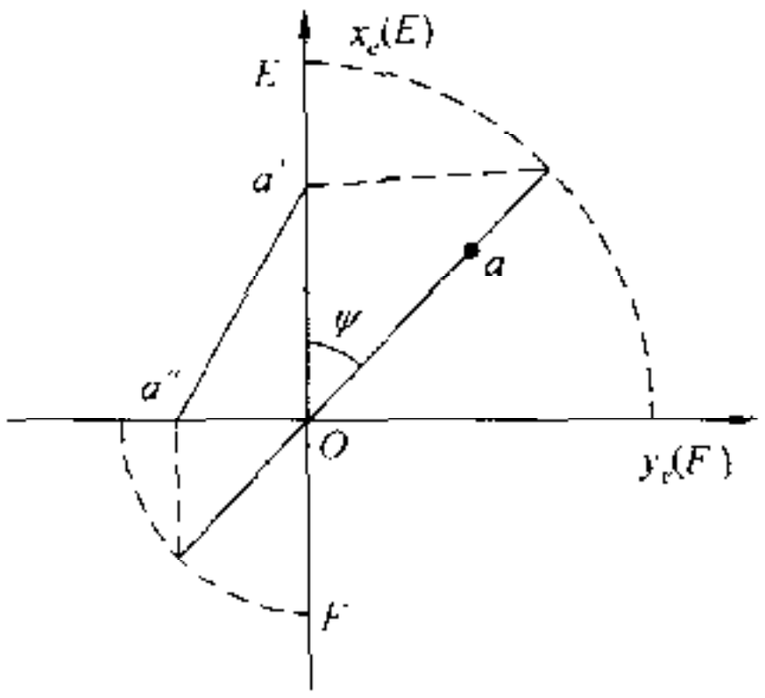


图 4－8

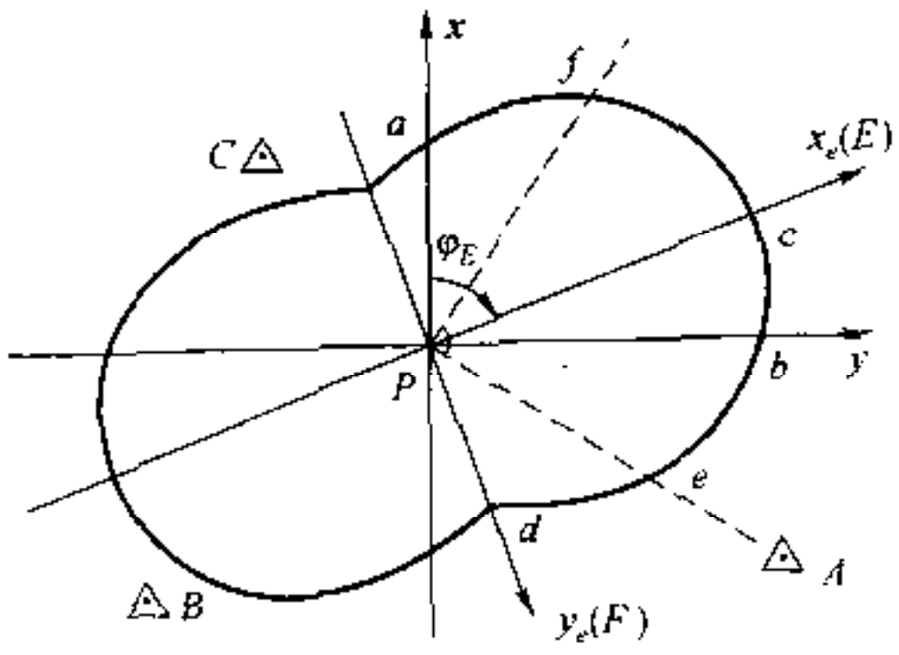


图 4－9

误差曲线的用途颇为广泛，利用该图可以得到待定点的各种误差信息：

（1）待定点任意方向位差。例如：$\sigma_{P_x}=\overline{Pa}$，$\sigma_{P_y}=\overline{Pb}$，$\sigma_{\varphi_E}=\overline{Pc}$，$\sigma_{\varphi_F}=\overline{Pd}$。

（2）确定点位中误差。例如：$\sigma_P=\pm\sqrt{\overline{Pa}^2+\overline{Pb}^2}=\pm\sqrt{\overline{Pc}^2+\overline{Pd}^2}$。

（3）待定点 P 至任意已知三角点（视其无误差）的边长中误差。例如 PA 边的边长中误差为：$\sigma_{S_{PA}}=\pm\overline{Pe}$。

（4）待定点 P 至任意已知三角点（视其无误差）的方位角中误差。例如 PA 边的方位角中误差为 $\sigma_{T_{PA}}=\pm\rho''\dfrac{\overline{Pf}}{S_{PA}}$。

第四节　误 差 椭 圆

误差曲线不是一种典型曲线，作图也不方便，因此降低了它的实用价值。但其形状与以 E、F 为长短半轴的椭圆很相似。在以 x_e、y_e 为坐标轴的坐标系中，该椭圆的方程为

$$\frac{x_e^2}{E^2}+\frac{y_e^2}{F^2}=1 \tag{4-17}$$

椭圆是一种规则图形，作图也比较容易。所以，实际上常以 E、F 为长、短半轴的椭圆来代替相应的误差曲线，用来计算待定点在各方向上的位差，故称该椭圆为误差椭圆。将确定误差椭圆的三个参数 φ_E、E、F 称为误差椭圆元素。

现由图 4－10 来说明误差椭圆与误差曲线之间的关系。在图所示椭圆上任意一点 $T(x_{e1}、y_{e1})$ 作切线 TQ，再由椭圆中心 O 向该切线引垂线交于 D，D 点为垂足。若令 OD 与 x_e 轴夹角为 ψ，那么，线段 $\overline{OD}$ 的长度就是误差曲线在 ψ 方向上的向径，即为该方向上的位差 σ_ψ。下面就来证明 $\overline{OD}=\sigma_\psi$。

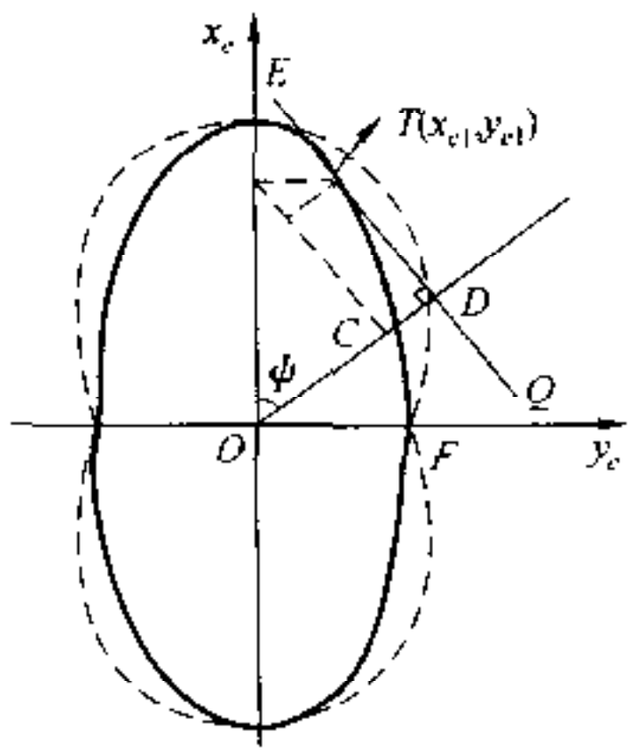


图 4－10

由图可知：

$$\overline{OD}=\overline{OC}+\overline{CD}=x_{e1}\cos\psi+y_{e1}\sin\psi$$

将上式平方，得

$$\overline{OD}^2=x_{e1}^2\cos^2\psi+y_{e1}^2\sin^2\psi+2x_{e1}y_{e1}\sin\psi\cos\psi \tag{4-18}$$

过点 T 的切线斜率 k，由式(4－17)，得

$$k=\frac{\mathrm{d}y_e}{\mathrm{d}x_e}=-\frac{F^2x_{e_1}}{E^2y_{e_1}}$$

又知切线 TD 与直线 OD 垂直，则切线斜率为

$$k=-\frac{1}{\tan\psi}$$

则有

$$\frac{F^2x_{e_1}}{E^2y_{e_1}}=\frac{1}{\tan\psi}$$

即

$$-\frac{x_{e_1}}{E^2}\sin\psi+\frac{y_{e_1}}{F^2}\cos\psi=0$$

将上式平方并两端同乘以 E^2F^2，得

$$\frac{x_{e_1}^2}{E^2}F^2\sin^2\psi+\frac{y_{e_1}^2}{F_2}E^2\cos^2\psi-2x_{e_1}y_{e_1}\sin\psi\cos\psi=0$$

移项得

$$2x_{e_1}y_{e_1}\sin\psi\cos\psi=\frac{x_{e_1}^2}{E^2}F^2\sin^2\psi+\frac{y_{e_1}^2}{F^2}E^2\cos^2\psi$$

将上式代入式(4－18)，得

$$\begin{aligned}\overline{OD}^2&=x_{e_1}^2\cos^2\psi+y_{e_1}^2\sin^2\psi+\frac{x_{e_1}^2}{E^2}F^2\sin^2\psi+\frac{y_{e_1}^2}{F^2}E^2\cos^2\psi\\&=\frac{x_{e_1}^2}{E^2}(E^2\cos^2\psi+F^2\sin^2\psi)+\frac{y_{e_1}^2}{F^2}(E^2\cos^2\psi+F^2\sin^2\psi)\\&=\left(\frac{x_{e_1}^2}{E^2}+\frac{y_{e_1}^2}{F^2}\right)(E^2\cos^2\psi+F^2\sin^2\psi)\end{aligned}$$

因 $T(x_{e_1}, y_{e_1})$ 为椭圆上的点，故其坐标满足方程

$$\frac{x_{e_1}^2}{E^2} + \frac{y_{e_1}^2}{F^2} = 1$$

则

$$\overline{OD}^2 = E^2\cos^2\psi + F^2\sin^2\psi \tag{4-19}$$

将式(4-19)与式(4-16)对比可知 $\overline{OD} = \sigma_\psi$，也就是说，$\overline{OD}$ 的长度就是位差 σ_ψ。这样 D 点的轨迹所形成的闭合曲线，便是误差曲线。

以上的证明，也间接地说明了如何利用误差椭圆求某点在任意方向 ψ 上的位差 σ_ψ 的方法：即在求 σ_ψ 时，只要在垂直于 ψ 方向上作椭圆的切线，则垂足与原点的连线长度就是 ψ 方向上的位差。

第五节　相对误差椭圆

在平面控制网中，有时不仅需要研究待定点相对于起始点的精度，而且还要了解任意两个待定点之间相对位置的精度情况。前面讨论了可以给每一个待定点作出一个点位误差曲线，且利用这些曲线图求定所需要的某些量的中误差的方法。但却不能利用这些待定点上的误差曲线来确定待定点与待定点之间的某些精度指标。为了确定任意两个待定点之间相对位置的某些精度，就需要进一步作出两待定点之间的相对误差椭圆。

设有两个待定点为 P_i 和 P_k，其坐标平差值的协因数阵为

$$\begin{pmatrix} Q_{x_ix_i} & Q_{x_iy_i} & Q_{x_ix_k} & Q_{x_iy_k} \\ Q_{y_ix_i} & Q_{y_iy_i} & Q_{y_ix_k} & Q_{y_iy_k} \\ Q_{x_kx_i} & Q_{x_ky_i} & Q_{x_kx_k} & Q_{x_ky_k} \\ Q_{y_kx_i} & Q_{y_ky_i} & Q_{y_kx_k} & Q_{y_ky_k} \end{pmatrix}$$

两待定点平差以后的相对位置可通过坐标差来表示，即

$$\Delta x_{ik} = x_k - x_i, \quad \Delta y_{ik} = y_k - y_i$$

其矩阵表达式为

$$\begin{pmatrix} \Delta x_{ik} \\ \Delta y_{ik} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_i \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix} \tag{4-20}$$

根据协因数传播律，得

$$\left.\begin{aligned} Q_{\Delta x\Delta x} &= Q_{x_ix_i} + Q_{x_kx_k} - 2Q_{x_ix_k} \\ Q_{\Delta y\Delta y} &= Q_{y_iy_i} + Q_{y_ky_k} - 2Q_{y_iy_k} \\ Q_{\Delta x\Delta y} &= Q_{x_iy_i} + Q_{x_ky_k} - Q_{x_iy_k} - Q_{x_ky_i} \end{aligned}\right\} \tag{4-21}$$

利用这些协因数，根据式(4-11)和式(4-14)，就可得 P_i 和 P_k 点间相对误差椭圆元素的三个公式为

$$\left.\begin{aligned}
\tan 2\varphi_0 &= \frac{2Q_{\Delta x\Delta y}}{Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y}} \\
E^2 &= \frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{Q_{\Delta x\Delta x}+Q_{\Delta y\Delta y}+\sqrt{(Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y})^2+4Q_{\Delta x\Delta y}^2}\right\} \\
F^2 &= \frac{1}{2}\sigma_0^2\left\{Q_{\Delta x\Delta x}+Q_{\Delta y\Delta y}-\sqrt{(Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y})^2+4Q_{\Delta x\Delta y}^2}\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{4-22}$$

在计算出相对误差椭圆元素以后,便可用绘制误差椭圆的方法画出相对误差椭圆。只是误差椭圆是以待定点为中心绘制的;而相对误差椭圆则通常以两待定点连线的中点为中心。根据相对误差椭圆便可图解出所需要的任意方向上的相对位差大小。

例 4-4 如图4-11 所示测角网,已知点A(14 899.84, 130.81)、B(22 939.70,2 136.89)、C(51 721.82,15 542.85),平差后待定点 P_1(16 467.745,4 986.847)、P_2(6 126.997, 5 957.482),单位权中误差为 $\sigma_0=\pm 2.4''$,未知数的协因数阵为:

$$\begin{pmatrix}
10.61 & 0.81 & -0.60 & 0.12 \\
0.81 & 13.48 & 0.52 & 0.94 \\
-0.60 & 0.52 & 11.72 & -2.86 \\
0.12 & 0.94 & -2.86 & 14.21
\end{pmatrix}$$

试作出 P_1,P_2 点的误差椭圆及相对误差椭圆。并求 P_1P_2 边的相对中误差及坐标方位角的中误差。

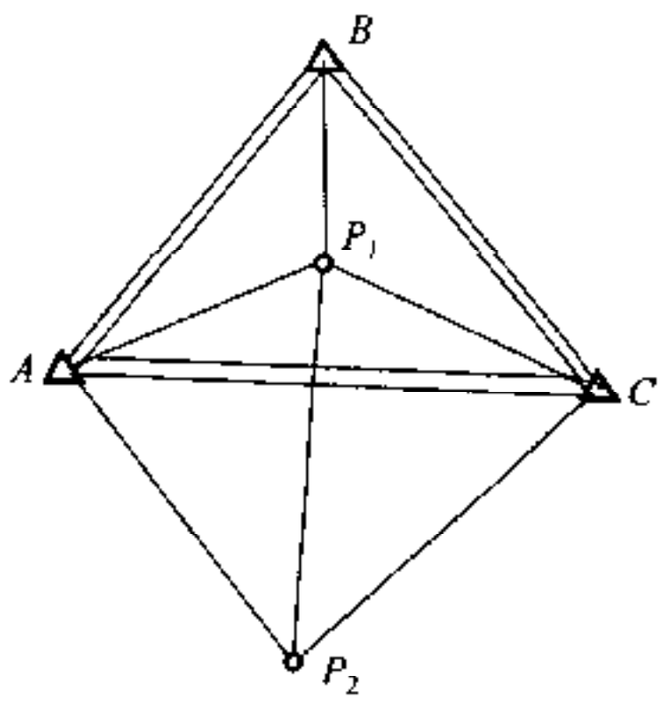


图 4-11

解 (1) 计算 P_1 点的误差椭圆元素

由于

$$\tan 2\varphi_0=\frac{2Q_{x_1y_1}}{Q_{x_1x_1}-Q_{y_1y_1}}=\frac{2\times 0.81}{10.61-13.48}=-0.564\ 4$$

得

$$\varphi_{E_1}=75^\circ 16'47''$$

$$E_1=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(Q_{x_1x_1}+Q_{y_1y_1})+\sqrt{(Q_{x_1x_1}-Q_{y_1y_1})^2+4Q_{x_1y_1}^2}\right\}}$$

$$=\pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(10.61+13.48)+\sqrt{(10.61-13.48)^2+4\times 0.81^2}\right\}}=\pm 8.9\ \text{cm}$$

$$F_1=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(Q_{x_1x_1}+Q_{y_1y_1})-\sqrt{(Q_{x_1x_1}-Q_{y_1y_1})^2+4Q_{x_1y_1}^2}\right\}}$$

$$=\pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(10.61+13.48)-\sqrt{(10.61-13.48)^2+4\times 0.81^2}\right\}}=\pm 7.7\ \text{cm}$$

(2) 计算 P_2 点的误差椭圆元素

$$\tan 2\varphi_0=\frac{2\times(-2.86)}{11.72-14.21}=2.297\ 2$$

$$\varphi_{E_2}=123^\circ 14'16''$$

$$E_2=\pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(11.72+14.21)+\sqrt{(11.72-14.21)^2+4\times(-2.86)^2}\right\}}=\pm 9.6\ \text{cm}$$

$$F_2=\pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\left\{(11.72+14.21)-\sqrt{(11.72-14.21)^2+4\times(-2.86)^2}\right\}}=\pm 7.5\ \text{cm}$$

(3) 计算 P_1 与 P_2 的相对误差椭圆元素

由式(4－20)和式(4－21)得

$$\begin{pmatrix} Q_{\Delta x\Delta x} & Q_{\Delta x\Delta y} \\ Q_{\Delta y\Delta x} & Q_{\Delta y\Delta y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23.53 & -2.69 \\ -2.69 & 25.81 \end{pmatrix}$$

$$\tan 2\varphi_0 = \frac{2Q_{\Delta x\Delta y}}{Q_{\Delta x\Delta x} - Q_{\Delta y\Delta y}} = \frac{2\times(-2.69)}{23.53-25.81} = 2.359\ 6$$

$$\varphi_{E_{12}} = 123°31'00''$$

$$E_{12} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\{(Q_{\Delta x\Delta x}+Q_{\Delta y\Delta y})+\sqrt{(Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y})^2+4Q_{\Delta x\Delta y}^2}\}}$$

$$= \pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\{(23.53+25.81)+\sqrt{(23.53-25.81)^2+4\times(-2.69)^2}\}} = \pm 12.6\ \text{cm}$$

$$F_{12} = \sigma_0\sqrt{\frac{1}{2}\{(Q_{\Delta x\Delta x}+Q_{\Delta y\Delta y})-\sqrt{(Q_{\Delta x\Delta x}-Q_{\Delta y\Delta y})^2+4Q_{\Delta x\Delta y}^2}\}}$$

$$= \pm 2.4\sqrt{\frac{1}{2}\{(23.53+25.81)-\sqrt{(23.53-25.81)^2+4\times(-2.69)^2}\}} = \pm 11.2\ \text{cm}$$

(4) 绘制误差椭圆和相对误差椭圆

以 1∶2 万的比例尺,先将已知点和待定点画在图纸上。然后以 1∶10 的比例尺,在定点上画误差椭圆,在待定点连线的中点上绘相对误差椭圆。如图 4－12 所示。

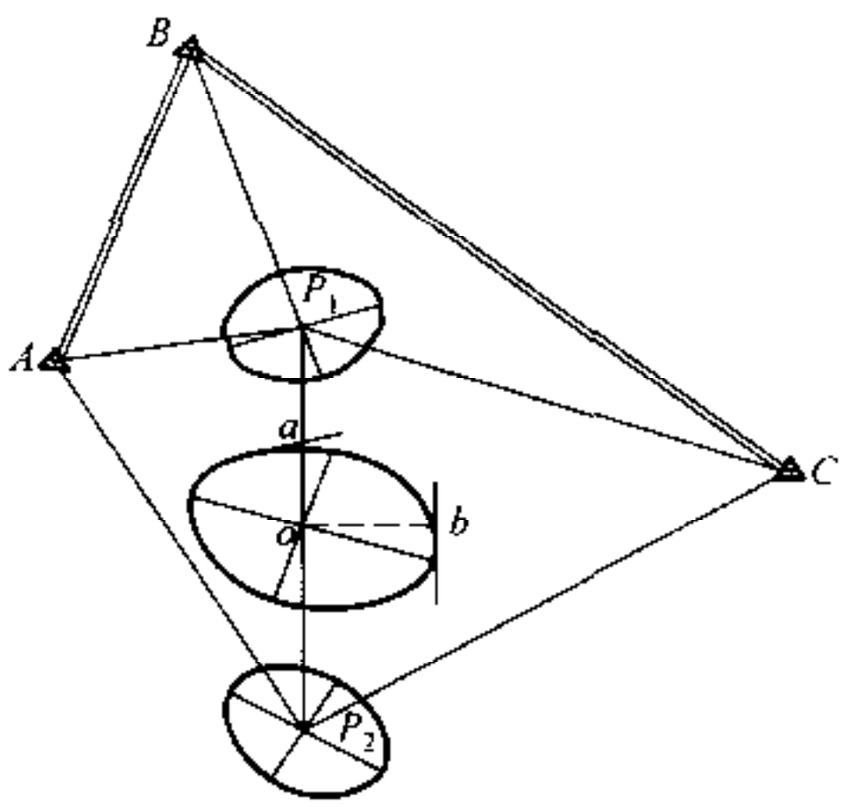


图 4－12

(5) 求 P_1P_2 边的相对中误差及方位角中误差

首先计算 P_1P_2 方向的纵向和横向误差。可以把 P_1P_2 的方位角 $T_{P_1P_2} = 174°38'16''$ 在以极值方向为坐标系中的角值 $\psi_{P_1P_2} = T_{P_1P_2} - \varphi_{E_{12}} = 51°07'16''$ 代入下式

$$\sigma_\psi^2 = E_{12}^2\cos^2\psi + F_{12}^2\sin^2\psi$$

算得其纵向误差

$$\sigma_S = \sigma_\psi = \pm 11.7\ \text{cm}$$

P_1P_2 边的边长相对中误差为

$$\frac{\sigma_S}{S_{P_1P_2}} = \frac{11.7}{1\ 038\ 620} = \frac{1}{88\ 800}$$

其横向误差也可把 $\psi + 90°$ 代入上式,得

$$\sigma_u = \sigma_{\psi+90°} = \pm 12.1\ \text{cm}$$

P_1P_2 边的方位角中误差为

$$\sigma_{T_{P_1P_2}} = \rho''\frac{\sigma_u}{S_{P_1P_2}} = \pm 2.4''$$

P_1P_2 方向的相对纵向误差 σ_S 和横向误差 σ_u 也可以在相对误差椭圆上图解出来。σ_S 就是 P_1P_2 连线方向上的位差，在图 4－12 所示相对误差椭圆上作垂直于 $\overline{P_1P_1}$ 的椭圆的切线，交 $\overline{P_1P_2}$ 与 a 点，量得 $\sigma_S=\overline{oa}$。同样，在相对误差椭圆上作平行于 $\overline{P_1P_2}$ 的椭圆的切线，与过 o 点且垂直于 $\overline{P_1P_2}$ 的射线交于 b 点，则可量得 $\sigma_u=\overline{ob}$。

第五章　法方程式的解算方法

在测量平差计算中，不论采用哪一种方法，都要解算法方程式，特别是当法方程式个数较多时，法方程式解算的工作量在整个平差计算中占了很大的比重。当然大量的法方程式解算问题是由计算机来完成的，在此介绍法方程式的解算方法，旨在使读者了解法方程解算理论，为编写测量平差计算程序奠定基础。

测量平差中的法方程式均是线性方程组，线性方程组的解算方法一般分为两类：一类是直接解法，这种解法如果运算中没有凑整误差的影响，则通过 n 步运算就能求出方程组的准确解。但是，运算中不可避免地有凑整误差的影响，所以运算结果在一定范围内仍是近似的。在平差计算中，常用的直接解法有：高斯消去法和矩阵分解法等。线性方程组的另外一类解算方法是间接解法，或称迭代法。这种解法是按一定的迭代格式(计算公式)，周而往复地逐次逼近方程组的解，通过多次运算，最后求出方程组在一定误差范围内的近似解。

第一节　高斯消去法

一、基本方法

高斯消去法是一种特殊的加减消元法，其特点是：从方程组中的第一个未知数开始，依次消去各未知数，直至解出最后一个未知数，再按相反的次序回代求解。下面以 4 阶方程组为例叙述高斯消去法(以下简称消去法)的基本步骤。

设一个 4 阶线性方程组的一般形式为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+a_{24}x_4&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+a_{34}x_4&=b_3\\ a_{41}x_1+a_{42}x_2+a_{43}x_3+a_{44}x_4&=b_4 \end{aligned}\right\} \tag{5-1}$$

假设其系数矩阵非奇异，从而有且仅有一组解。

第一步：若 $a_{11}\neq 0$，式(5-1)中第 1 个方程保持不变，将其余方程中 x_1 系数化为零。为此，记

$$l_{21}=\frac{a_{21}}{a_{11}},\quad l_{31}=\frac{a_{31}}{a_{11}},\quad l_{41}=\frac{a_{41}}{a_{11}}$$

以 $-l_{21}$ 遍乘第 1 个方程各项，然后加到第 2 个方程上去；以 $-l_{31}$ 遍乘第 1 个方程各项，然后加到第 3 个方程上去；以 $-l_{41}$ 遍乘第 1 个方程各项，然后加到第 4 个方程上去，得到与式(5-1)等价的方程组。

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1\\ a_{22\cdot1}x_2+a_{23\cdot1}x_3+a_{24\cdot1}x_4&=b_{2\cdot1}\\ a_{32\cdot1}x_2+a_{33\cdot1}x_3+a_{34\cdot1}x_4&=b_{3\cdot1}\\ a_{42\cdot1}x_2+a_{43\cdot1}x_3+a_{44\cdot1}x_4&=b_{4\cdot1} \end{aligned}\right\} \tag{5-2}$$

式中

$$a_{ij\cdot1}=a_{ij}-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\times a_{1j}\qquad(i,j=2,3,4)$$

$$b_{i\cdot1}=b_i-\frac{a_{i1}}{a_{11}}\times b_1\qquad(i=2,3,4)$$

第二步:若 $a_{22\cdot1}\neq0$,式(5-2)中第1、2两个方程保持不变,将其余方程中 x_2 的系数化为零。为此,记

$$l_{32}=\frac{a_{32\cdot1}}{a_{22\cdot1}},\qquad l_{42}=\frac{a_{42\cdot1}}{a_{22\cdot1}}$$

以 $-l_{32}$ 遍乘第2个方程各项,然后加到第3个方程上去;以 $-l_{42}$ 遍乘第2个方程各项,然后加到第4个方程上去,得到与式(5-2)等价的方程组。

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1\\ a_{22\cdot1}x_2+a_{23\cdot1}x_3+a_{24\cdot1}x_4&=b_{2\cdot1}\\ a_{33\cdot2}x_3+a_{34\cdot2}x_4&=b_{3\cdot2}\\ a_{43\cdot2}x_3+a_{44\cdot2}x_4&=b_{4\cdot2} \end{aligned}\right\} \tag{5-3}$$

式中

$$a_{ij\cdot2}=a_{ij\cdot1}-\frac{a_{i2\cdot1}}{a_{22\cdot1}}\times a_{2j\cdot1}\qquad(i,j=3,4)$$

$$b_{i\cdot2}=b_{i\cdot1}-\frac{a_{i2\cdot1}}{a_{22\cdot1}}\times b_{(i-1)\cdot1}\qquad(i=3,4)$$

第三步:若 $a_{33\cdot2}\neq0$,式(5-3)中第1、2、3三个方程保持不变,将第4个方程中 x_3 的系数化为零。为此,记

$$l_{43}=\frac{a_{43\cdot2}}{a_{33\cdot2}}$$

以 $-l_{43}$ 遍乘第3个方程各项,然后加到第4个方程上去,得到与式(5-3)等价的方程组。

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+a_{14}x_4&=b_1\\ a_{22\cdot1}x_2+a_{23\cdot1}x_3+a_{24\cdot1}x_4&=b_{2\cdot1}\\ a_{33\cdot2}x_3+a_{34\cdot2}x_4&=b_{3\cdot2}\\ a_{44\cdot3}x_4&=b_{4\cdot3} \end{aligned}\right\} \tag{5-4}$$

式中

$$a_{44\cdot3}=a_{44\cdot2}-\frac{a_{43\cdot2}}{a_{33\cdot2}}\times a_{34\cdot2},\qquad b_{4\cdot3}=b_{4\cdot2}-\frac{a_{43\cdot2}}{a_{33\cdot2}}\times b_{3\cdot2}$$

式(5-4)是一个三角形方程组,最后解此方程组,得

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= \frac{b_{4\cdot 3}}{a_{44\cdot 3}} \\ x_3 &= \frac{1}{a_{33\cdot 2}}(b_{3\cdot 2} - a_{34\cdot 2}x_4) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22\cdot 1}}(b_{2\cdot 1} - a_{23\cdot 1}x_3 - a_{24\cdot 1}x_4) \\ x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - a_{14}x_4) \end{aligned}\right\} \tag{5-5}$$

由于式(5－4)与式(5－1)等价，因而式(5－5)就是式(5－1)的解，将方程式(5－1)化为三角形方程式(5－4)的过程称为消元过程。以上共进行了三步消元，a_{11}，$a_{22\cdot 1}$，$a_{33\cdot 2}$，$a_{44\cdot 3}$分别称为各步消元的主元素，l_{21}，l_{31}，l_{41}；l_{32}，l_{42}，l_{43}分别称为各步消元的乘数。求解三角形方程组的过程称为回代过程，消元过程与回代过程一起，组成消去法的全过程。

对于 n 阶线性方程组，其一般形式为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}\right\} \tag{5-6}$$

不难理解，当经过 $n-1$ 次消元后，得到三角形方程组为

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22\cdot 1}x_2 + \cdots + a_{2n\cdot 1}x_n &= b_{2\cdot 1} \\ \cdots\cdots & \\ a_{nn\cdot(n-1)}x_n &= b_{n\cdot(n-1)} \end{aligned}\right\} \tag{5-7}$$

式中

$$\begin{cases} a_{ij\cdot k} = a_{ij\cdot(k-1)} - \dfrac{a_{ik\cdot(k-1)}}{a_{kk\cdot(k-1)}} \cdot a_{kj\cdot(k-1)} & (i,j = k+1,\cdots,n) \\ b_{i\cdot k} = b_{i\cdot(k-1)} - \dfrac{a_{ik\cdot(k-1)}}{a_{kk\cdot(k-1)}} \cdot b_{k\cdot(k-1)} & (i = k+1,\cdots,n) \end{cases} \tag{5-8}$$

最后进行回代，得

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b_{n\cdot(n-1)}}{a_{nn\cdot(n-1)}} \\ x_k = \dfrac{1}{a_{kk\cdot(k-1)}}\left(b_{k\cdot(k-1)} - \sum\limits_{j=k+1}^{n} a_{kj\cdot(k\ \ 1)}x_j\right) & (k = n-1, n-2,\cdots,1) \end{cases} \tag{5-9}$$

例 5－1　用消去法求3 阶方程组

$$\begin{cases} 4x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 5 & (1) \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 3 & (2) \\ -x_1 + x_2 - 3x_3 = -4 & (3) \end{cases}$$

解　(1) 第一步消元。它的主元素 $a_{11}=4$，而乘数为：$l_{21}=\dfrac{2}{4}=0.5$，$l_{31}=\dfrac{-1}{4}=-0.25$

以 $-l_{21}$遍乘方程(1)加到方程(2)上，以 $-l_{31}$遍乘方程(1)加到方程(3)上，得

$$\begin{cases} 4x_1-9x_2+2x_3=5 & (1)\\ 0.5x_2+5x_3=0.5 & (4)\\ -1.25x_2-2.5x_3=-2.75 & (5)\end{cases}$$

(2) 第二步消元。主元素 $a_{22\cdot1}=0.5$,而乘数为:$l_{32}=\dfrac{-1.25}{0.5}=-2.5$,以 $-l_{32}$ 遍乘方程(4)加到方程(5)上,得

$$\begin{cases} 4x_1-9x_2+2x_3=5 & (1)\\ 0.5x_2+5x_3=0.5 & (4)\\ 10x_3=-1.5 & (6)\end{cases}$$

(3) 回代求解,得

$$x_3=-0.15,\quad x_2=2.5,\quad x_1=6.95$$

二、消去法的矩阵形式

由于方程组的解只依赖于系数及右端项(常数项),求解过程也只是对系数及右端项做一些必要的运算。因此不难想像,若将系数及右端项从方程中分离出来,那么消元过程完全可以用矩阵来描述。

设线性方程组矩阵表达式为

$$AX=b \qquad (5-10)$$

式中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$

假设 A 非奇异,则式(5-10)的增广矩阵为

$$[A,b]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{pmatrix} \qquad (5-11)$$

消去法的消元过程,可以通过增广矩阵式(5-11)作一系列初等变换来实现。

第一步:设 $a_{11}\neq0$,令 $l_{i1}=\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}(i=2,3,\cdots,n)$,组成初等下三角阵

$$L_1=\begin{pmatrix} 1 & & & & 0\\ -l_{21} & 1 & & & \\ -l_{31} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -l_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

则

$$L_1\cdot[A,b]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ 0 & a_{22\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1} & b_{2\cdot1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & a_{n2\cdot1} & \cdots & a_{nn\cdot1} & b_{n\cdot1}\end{pmatrix}$$

即消元过程的第一步相当于用 L_1 左乘增广矩阵式(5－11)。

第二步：设 $a_{22\cdot1}\neq0$，令 $l_{i2}=\dfrac{a_{i2\cdot1}}{a_{22\cdot1}}(i=3,4,\cdots,n)$

组成

$$L_2=\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ 0 & 1 & & & \\ 0 & -l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & -l_{n2} & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

则

$$L_2\cdot L_1\cdot[A,b]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{n1} & b_1\\ 0 & a_{22\cdot1} & a_{23\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1} & b_{2\cdot1}\\ 0 & 0 & a_{33\cdot2} & \cdots & a_{3n\cdot2} & b_{3\cdot2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & a_{n3\cdot2} & \cdots & a_{nn\cdot2} & b_{n\cdot2}\end{pmatrix}$$

即消元过程第二步相当于用 $L_2\cdot L_1$ 左乘增广矩阵式(5－11)，如此下去，经过 $n-1$ 步消元后，得

$$L_{n-1}\cdot L_{n-2}\cdots L_{2\cdot1}\cdot L_1\cdot[A,b]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ & a_{22\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1} & b_{2\cdot1}\\ & & \ddots & \vdots & \vdots\\ & & & a_{nn\cdot(n-1)} & b_{n\cdot(n-1)}\end{pmatrix}$$

若 $L_k(k=1,2,\cdots,n-1)$皆是非奇异矩阵，它们的逆阵 L_k^{-1}都存在。

令

$$L=L_1^{-1}\cdot L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1},\quad R=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22\cdot1} & \cdots & a_{2n\cdot1}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn\cdot(n-1)}\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}b_1\\ b_{2\cdot1}\\ \vdots\\ b_{n\cdot(n-1)}\end{pmatrix}$$

则得

$$L^{-1}\cdot[A,b]=[R,Y]$$

或

$$L^{-1}A=R,\quad L^{-1}b=Y$$

其中 $L^{-1}=L_{n-1}\cdot L_{n-2}\cdots L_1$ 是一个对角元素为 1 的下三角阵，称为单位下三角阵，消去法回代过程，就是求解

$$RX=Y$$

又由 $L^{-1}A=R$，可得

$$A=LR \tag{5-12}$$

其中

$$L=L_1^{-1}\cdot L_2^{-1}\cdots L_{n-1}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}$$

这说明，在 $a_{kk\cdot(k-1)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n-1)$ 条件下，通过消去法，可以把 A 分解为单位下三角阵 L 与上三角阵 R 的乘积。这种把矩阵分解为简单的矩阵因子积的方法在矩阵运算中有着重要的地位。上述分解称为 A 的 LR 分解。

在求解一批右端向量不同的方程组的时候，可以把 A 作 LR 分解，然后根据不同的右端向量求解。其步骤为：

$$AX=b\rightarrow LRX=b\rightarrow\begin{cases}LY=b & (5-13)\\ RX=Y & (5-14)\end{cases}$$

式(5－13)为下三角形方程组

$$\begin{pmatrix}1 & & & & \\ l_{21} & 1 & & & \\ l_{31} & l_{32} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{n,n-1} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$$

其解为

$$y_k=b_k-\sum_{j-1}^{k-1}l_{kj}\cdot y_j\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

式(5－14)为上三角形方程组

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22\cdot 1} & \cdots & a_{2n\cdot 1}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn\cdot(n-1)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

其解为

$$x_k=\frac{1}{a_{kk\cdot(k-1)}}\left(y_k-\sum_{j=k+1}^{n}a_{kj\cdot(k-1)}\cdot x_j\right)\quad(k=n,n-1,\cdots,2,1)$$

按公式编制程序后，只要输入不同的一组 b 值，就可得各组不同的解。

三、主元素法

以上介绍的消去法，不妨称为顺序消去法，即是按照方程及未知元素既定的排列顺序依次消元。如果在消元过程中，发现某个主元素为零，消元过程将无法继续进行。此外即使主元素不为零，然而当与该主元素所在列的对角线以下各元素相比，它的绝对值甚小(以下称为小主元)时，用其做除数，将使该步消元的乘数绝对值很大，势必造成舍入误差的严重扩散，致使计算的解极不可靠。

例 5－2 用顺序消去法求解方程组

$$\begin{cases}0.5x_1+1.1x_2+3.1x_3=6.0\\ 2.0x_1+4.5x_2+0.36x_3=0.02\\ 5.0x_1+0.96x_2+6.5x_3=0.96\end{cases}$$

增广矩阵是

$$\begin{pmatrix}0.5 & 1.1 & 3.1 & 6.0\\ 2.0 & 4.5 & 0.36 & 0.02\\ 5.0 & 0.96 & 6.5 & 0.96\end{pmatrix}$$

若采用三位有效数字运算(即运算过程中,每个参与运算的数及运算结果都舍入到三位有效数字),消元过程用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} 0.500 & 1.10 & 3.10 & 6.00 \\ 0 & 0.100 & -12.0 & -24.0 \\ 0 & -10.0 & -24.5 & -59.0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0.500 & 1.10 & 3.10 & 6.00 \\ 0 & 0.100 & -12.0 & -24.0 \\ 0 & 0 & -1\,220 & -2\,460 \end{pmatrix}$$

经回代得其解向量为

$$X' = (-5.80,\quad 2.40,\quad 2.02)^{\mathrm{T}}$$

事实上,方程组的准确解是 $X = (-2.6, 1, 2)^{\mathrm{T}}$,显然 X' 是一个很坏的结果。其原因是第一步消元时,使用了小主元 $a_{11} = 0.500$,第二消元时,又使用了小主元 $a_{22\cdot 1} = 0.100$。这样每步消元的乘数绝对值都很大,$l_{21} = 4$,$l_{31} = 10$,更有甚者 $l_{32} = -100$,那么消元过程必然将主行(每步消元时,主元素所在的行)各元素的舍入误差放大许多倍,传给以后的各行,致使计算的解极不可靠。

为了避免采用小主元进行消元,可将第 1 个方程与第 3 个方程对换,那么增广阵应是

$$\begin{pmatrix} 5.0 & 0.96 & 6.5 & 0.96 \\ 2.0 & 4.5 & 0.36 & 0.02 \\ 0.5 & 1.1 & 3.1 & 6.0 \end{pmatrix}$$

仍用顺序消去法,且采用三位有效数字运算,消元过程为

$$\begin{pmatrix} 5.0 & 0.960 & 6.50 & 0.960 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \\ 0 & 1.00 & 2.45 & 5.90 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5.0 & 0.960 & 6.50 & 0.960 \\ 0 & 4.12 & -2.24 & -0.364 \\ 0 & 0 & 2.99 & 5.99 \end{pmatrix}$$

回代得解向量为

$$X = (-2.60,\quad 1.00,\quad 2.00)^{\mathrm{T}}$$

上例充分说明了选主元的必要性,以及选主元技巧的有效性。所谓选主元,简单地说就是选取绝对值最大的元素作为主元,具体作法如下:

第一步,在增广矩阵$[A, b]$的第一列 $a_{i1}(i = 1, 2, \cdots, n)$中,选取绝对值最大的元,比如为 a_{p1};然后调换第一行与第 p 行,再进行消元的第一步,得$[A_1, b_1]$。在$[A_1, b_1]$的第二列 $a_{i2\cdot 1}(i = 2, 3, \cdots, n)$中选取绝对值最大的元,比如 $a_{q2\cdot 1}$,然后调换第 2 行与第 q 行,再进行消元的第二步。如此做下去,一直到 $n-1$ 步,完成消元过程,得

$$[A_{n-1}, b_{n-1}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & a_{22\cdot 1} & \cdots & a_{2n\cdot 1} & b_{2\cdot 1} \\ & & & \vdots & \vdots \\ & & & a_{nn\cdot(n-1)} & b_{n\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

与上面的增广矩阵对应的三角形方程为

$$A_{n-1}X = b_{n-1}$$

由最后一个方程开始逐次回代，即可求得全部解。

上述选主元的方法，称为列主元消去法。有些具有特殊系数矩阵的方程组，按顺序消去法，若能保证主元绝对值最大，或者舍入误差能得到控制，就不必选主元。这类矩阵有对称的严格对角占优阵、对称正定矩阵等。

所谓严格对角占优阵，是指 A 的元素满足如下条件的矩阵：

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}| \quad (i,j = 1,2,\cdots,n)$$

可以证明，严格对角占优阵必定是非奇异阵，并且经过一步高斯消元后，仍保持对角占优的性质。

第二节 正定矩阵三角分解法

一、正定矩阵的三角分解

设线性方程组中的系数阵为正定矩阵，即

$$N = \begin{Bmatrix} n_{11} & & & \text{对称} \\ n_{21} & n_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ n_{t1} & n_{t2} & \cdots & n_{tt} \end{Bmatrix} \tag{5-15}$$

将 N 分解为下三角阵 L 与其转置矩阵的乘积，即

$$N = L \cdot L^{T} \tag{5-16}$$

式中

$$L = \begin{Bmatrix} \sqrt{l_{11}} & & & 0 \\ l_{21} & \sqrt{l_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & \sqrt{l_{tt}} \end{Bmatrix} \tag{5-17}$$

式(5－16)又可写为

$$\begin{Bmatrix} n_{11} & & & \text{对称} \\ n_{21} & n_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ n_{t1} & n_{t2} & \cdots & n_{tt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{l_{11}} & & & \\ l_{21} & \sqrt{l_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & \sqrt{l_{tt}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sqrt{l_{11}} & l_{21} & \cdots & l_{t1} \\ & \sqrt{l_{22}} & \cdots & l_{t2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \sqrt{l_{tt}} \end{Bmatrix}$$

用比较法得

$$\left.\begin{aligned} l_{ii} &= n_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^{2} && (i = 1,2,\cdots,t) \\ l_{ji} &= \frac{1}{\sqrt{l_{ii}}}\left(n_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} \cdot l_{ik}\right) && (j = i+1,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-18}$$

当 $i=1$ 时,有

$$\left.\begin{aligned} l_{11} &= n_{11} \\ l_{j1} &= \frac{n_{j1}}{\sqrt{n_{11}}} \qquad (j=2,3,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-19}$$

由式(5-18)和式(5-19),归纳整理可得

$$\left.\begin{aligned} l_{ii} &= n_{ii\cdot(i-1)} && (i=1,2,\cdots,t) \\ l_{ji} &= \frac{1}{\sqrt{n_{ii\cdot(i-1)}}}\cdot n_{ji\cdot(i-1)} && (j=i+1,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-20}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} n_{ii\cdot(i-1)} &= n_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1}\frac{n_{ik\cdot(k-1)}^2}{n_{kk\cdot(k-1)}} && (i=1,2,\cdots,t) \\ n_{ji\cdot(i-1)} &= n_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1}\frac{n_{jk\cdot(k-1)}}{n_{kk\cdot(k-1)}}\cdot n_{ik\cdot(k-1)} && (j=i+1,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-21}$$

二、具有正定系数阵的线性方程组及其函数的解算

1. 求线性对称方程组中的未知数

设线性对称方程组为

$$NX+U=0 \text{ 或 } NX=-U \tag{5-22}$$

其中

$$X=(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_t)^{\mathrm{T}}$$

$$U=(u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_t)^{\mathrm{T}}$$

将式(5-16)代入式(5-22)得

$$LL^{\mathrm{T}}X=-U \tag{5-23}$$

令

$$L^{\mathrm{T}}X=Y \tag{5-24}$$

$$Y=(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_t)^{\mathrm{T}} \tag{5-25}$$

则有

$$LY=-U \tag{5-26}$$

即

$$\begin{pmatrix} \sqrt{l_{11}} & & & \\ l_{21} & \sqrt{l_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & \sqrt{l_{tt}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \\ \vdots \\ -u_t \end{pmatrix}$$

求解上述三角形方程组,得计算公式为

$$y_i=\frac{1}{\sqrt{l_{ii}}}\left(-u_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}\cdot y_k\right) \quad (i=1,2,\cdots,t) \tag{5-27}$$

由式(5-20)、式(5-21)和式(5-22)对式(5-27)归纳整理,得

$$y_i=\frac{-u_{i\cdot(i-1)}}{\sqrt{n_{ii\cdot(i-1)}}} \quad (i=1,2,\cdots,t) \tag{5-28}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} u_{i\cdot(i-1)} &= u_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{n_{ik\cdot(k-1)}}{n_{kk\cdot(k-1)}} \cdot u_{k\cdot(k-1)} \qquad (i = 2,3,\cdots,t) \\ u_{1\cdot 0} &= u_1 \qquad\qquad (i = 1) \end{aligned}\right\} \tag{5-29}$$

同理,由三角形方程组式(5-24),解得

$$x_i = \frac{1}{\sqrt{l_{ii}}}\left(y_i - \sum_{k=i+1}^{t} l_{ik} \cdot x_k\right) \quad (i = t, t-1, \cdots, 1) \tag{5-30}$$

由式(5-20)、式(5-21)和式(5-29)对式(5-30)归纳整理,得

$$x_i = \frac{1}{n_{ii\cdot(i-1)}}\left(-u_{i\cdot(i-1)} - \sum_{k-i+1}^{t} n_{ki\cdot(i-1)} \cdot x_k\right) \quad (i = t, t-1, \cdots, 1) \tag{5-31}$$

当 $i=t$ 时,有

$$x_t = -\frac{u_{t\cdot(t-1)}}{n_{tt\cdot(t-1)}} \tag{5-32}$$

由此可见,用矩阵三角分解法导出的求线性方程组中未知数的计算公式,与用高斯消去法导出的相应求解公式完全相同。

2. 求线性对称方程组中未知数的函数

设线性对称方程组中未知数的函数为

$$F = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_t x_t + f_0 \tag{5-33}$$

将式(5-31)和式(5-32)依次代入式(5-33),并归纳整理,得

$$F = f_0 - \sum_{k=1}^{t} \frac{f_{k\cdot(k-1)}}{n_{kk\cdot(k-1)}} \cdot u_{k\cdot(k-1)} \tag{5-34}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} f_{i\cdot(i-1)} &= f_i - \sum_{k=1}^{t-1} \frac{n_{i\cdot(k-1)}}{n_{kk\cdot(k-1)}} \cdot f_{k\cdot(k-1)} \qquad (i = 2,3,\cdots,t) \\ f_{i\cdot 0} &= f_1 \qquad\qquad (i-1) \end{aligned}\right\} \tag{5-35}$$

当式(5-33)中 $f_i = u_i (i=1,2,\cdots,t)$ 时,得

$$F = f_0 - \sum_{k=1}^{t} \frac{u_{k\cdot(k-1)}^2}{n_{kk\cdot(k-1)}} \tag{5-36}$$

3. 线性对称方程组中未知数及其函数解的紧凑格式

利用式(5-32)和式(5-31)可求得线性对称方程组中的未知数,利用式(5-34)和式(5-36)可求得线性对称方程组中的未知数函数值,这些计算均可在下面的"紧凑格式"矩阵中进行。

$$\begin{bmatrix} (n_{11}) & & & & & (x_1) \\ (n_{21}) & (n_{22}) \leftarrow n_{22\cdot 1} & & & & (x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & & & \vdots \\ (n_{t1}) & (n_{t2} \leftarrow n_{t2\cdot 1}) & \cdots & (n_{tt}) \leftarrow n_{tt\cdot(t-1)} & & (x_t) \\ (u_1) & (u_2) \leftarrow u_{2\cdot 1} & \cdots & (u_t) \leftarrow u_{t\cdot(t-1)} & & t+1 \\ (f_1) & (f_2) \leftarrow f_{2\cdot 1} & \cdots & (f_t) \leftarrow f_{t\cdot(t-1)} & (f_0) \leftarrow F & t+2 \end{bmatrix}$$

上面矩阵中，每个括号内分别存放线性对称方程组中系数矩阵下三角的相应元素 n_{ji}，线性方程组中的常数 u_i 和未知数系数 f_i；$(n_{ji})\leftarrow n_{ji\cdot(i-1)}$、$(u_i)\leftarrow u_{i\cdot(i-1)}$、$(f_i)\leftarrow f_{i\cdot(i-1)}$和 $(f_0)\leftarrow F$ 表示用 $n_{ji\cdot(i-1)}$、$u_{i\cdot(i-1)}$、$f_{i\cdot(i-1)}$和 F 的值分别替换括号中的 n_{ji}、u_i、f_i 和 f_0 的值。当 $f_i=u_i$ 时，u_i 所在的行可以略去，若未知数的函数不只一个，则每增加一个函数在矩阵中增加一行，填入相应 f_i 和 f_0 的值，按计算 F 的方法计算即可。

(1) 约化系数 $n_{ji\cdot(i-1)}$的计算规律：

$n_{ji\cdot(i-1)}$等于其原系数 n_{ji}减去一个乘积和，乘积和的每一项是 n_{ji}左边的 $n_{jk\cdot(k-1)}(k=1,2,\cdots,i-1)$，乘以其同列上方第 i 行 $n_{ik(k-1)}$，再乘以 k 列对角元素 $n_{kk\cdot(k-1)}$的倒数。

(2) 约化常数项的计算规律：

$u_{i\cdot(i-1)}(f_{i\cdot(i-1)})$等于原系数 $u_i(f_i)$减去一个乘积和，乘积和的每一项是 $u_i(f_i)$左边同行的 $u_{k\cdot(k-1)}(f_{k\cdot(k-1)})$乘以其上方第 i 行 $n_{ik\cdot(k-1)}(k=1,2,\cdots,i-1)$，乘以 k 列对角元素 $n_{kk\cdot(k-1)}$的倒数。

(3) 未知数 x_i 的计算规律：

x_i 等于 $-u_{i\cdot(i-1)}$减去一个乘积和，然后再除以第 i 列的对角元素，乘积和的每一项等于第 i 列的 $n_{ji\cdot(i-1)}$乘以 $x_j(j=t,t-1,\cdots,i+1)$，当 $i=t$ 时乘积和为零。

(4) 未知数函数 F 的计算规律：

未知数的函数 F 等于常数 f_0 减去一个乘积和，乘积和的每一项等于第 i 列的 $u_{i\cdot(i-1)}$乘以 $f_{i\cdot(i-1)}$，然后再乘以第 i 列的对角元素的倒数$(i=1,2,\cdots,t)$。

例 5-3　已知线性方程组

$$\begin{aligned}4x_1+2x_2+x_3+2x_4+1.0&=0\\2x_1+17x_2+2.5x_3+5x_4-17.5&=0\\x_1+2.5x_2+4.5x_3+3x_4&=0\\2x_1+5x_2+3x_3+7x_4-7.0&=0\end{aligned}$$

未知数函数式为

$$F=x_1-17.5x_2-7x_4+36$$

按线性方程组解算的“紧凑格式”，求 $x_i(i=1,2,3,4)$和 F 之值。

解　此例中，因未知数函数式中的系数 $f_i=u_i$，所以在利用“紧凑格式”计算时，u_i 行可以省掉。将线性方程组系数阵下三角部分的各元素 n_{ji}和未知数函数式中的系数 f_i 以及常数项 f_0 分别填入“紧凑格式”矩阵中的相应位置，按式(5-31)、式(5-32)和式(5-36)及相应计算规律和计算步骤解算。其结果如下：

$$\begin{Bmatrix}(4.0) & & & & (-1.0)\\(2.0) & (17.0)\leftarrow 16 & & & (1.0)\\(1.0) & (2.5)\leftarrow 2.0 & (4.5)\leftarrow 4.0 & & (-1.0)\\(2.0) & (5.0)\leftarrow 4.0 & (3.0)\leftarrow 2.0 & (7.0)\leftarrow 4.0 & (1.0)\\(1.0) & (-17.5)\leftarrow -18.0 & (0.0)\leftarrow 2.0 & (-7.0)\leftarrow -4.0 \quad (36.0)\leftarrow 10.5 & \end{Bmatrix}$$

即

$$x_1=-1,x_2=1,x_3=-1,x_4=1,F=10.5$$

第三节 正定矩阵三角分解求逆法

线性方程组除可用前述方法解算外，还可以用矩阵求逆法求解，即：$X=-N^{-1}U$。当线性方程组的系数阵为正定阵时，可以按三角分解法将其分解为下三角阵与其转置阵的乘积。先求出下三角阵的逆阵，然后再利用下三角阵的逆阵求得线性方程系数阵的逆阵。平差中要求得某平差量的协因数阵时，首先应求出法方程（线性对称方程组）系数阵的逆阵。下面讨论利用正定矩阵三角分解求线性对称方程组系数阵的逆阵的方法。

一、求下三角阵 L 的逆阵

设

$$L^{-1}=C=\begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{t1} & c_{t2} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix} \tag{5-37}$$

由

$$LC=I$$

即

$$\begin{pmatrix} \sqrt{l_{11}} & & & \\ l_{21} & \sqrt{l_{22}} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{t1} & l_{t2} & \cdots & \sqrt{l_{tt}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & & & \\ c_{21} & c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_{t1} & c_{t2} & \cdots & c_{tt} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \tag{5-38}$$

用比较法可得 L 阵的逆阵 C 的全部元素。即

$$\left.\begin{aligned} c_{ii} &= \frac{1}{\sqrt{l_{ii}}} && (i=1,2,\cdots,t) \\ c_{ji} &= -\frac{1}{\sqrt{l_{jj}}}\sum_{k-1}^{j-1} l_{jk}\cdot c_{ki} && (j=i+1,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-39}$$

将式(5-20)代入式(5-39)，得

$$\left.\begin{aligned} c_{ii} &= \frac{1}{\sqrt{n_{ii\cdot(i-1)}}} && (i=1,2,\cdots,t) \\ c_{ji} &= -\frac{1}{\sqrt{n_{jj\cdot(j-1)}}}\sum_{k-i}^{j-1} n_{jk\cdot(k-1)}\cdot c_{kk}\cdot c_{ki} && \\ &= -c_{jj}\sum_{k-i}^{j-1} n_{jk\cdot(k-1)}\cdot c_{kk}\cdot c_{ki} && (j=i+1,\cdots,t) \end{aligned}\right\} \tag{5-40}$$

二、利用下三角阵 L 的逆阵 C 求 N 的逆阵

由于 $N^{-1}=(LL^{\mathrm{T}})^{-1}=(L^{\mathrm{T}})^{-1}L^{-1}=C^{\mathrm{T}}C$，设

$$Q = N^{-1} = \begin{pmatrix} Q_{11} & & & \text{对称} \\ Q_{21} & Q_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ Q_{t1} & Q_{t2} & \cdots & Q_{tt} \end{pmatrix} = C^{\mathrm{T}}C$$

用比较法可得计算 Q 阵中下三角诸元素的公式，即

$$Q_{ji} = \sum_{k=j}^{t} c_{ki} \cdot c_{kj} \qquad (j = 1,2,\cdots,t;i = 1,2,\cdots,j) \tag{5-41}$$

三、正定矩阵求逆的紧凑格式

1. 求下三角矩阵 L 逆阵 C 的紧凑格式

利用约化系数 $n_{ji\cdot(i-1)}$ 可在下列“紧凑格式”矩阵中求得 L 阵的逆阵 C。

$$\begin{pmatrix} (n_{11})\leftarrow c_{11} & & & \\ (n_{21})\leftarrow c_{21} & (n_{22\cdot1})\leftarrow c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (n_{t1})\leftarrow c_{t1} & (n_{t2\cdot1})\leftarrow c_{t2} & \cdots & (n_{tt\cdot(t-1)})\leftarrow c_{tt} \end{pmatrix}$$

c_{ii}、c_{ji} 的计算规律：主对角线上的元素 c_{ii}，等于其原位置上的约化系数 $n_{ii\cdot(i-1)}$ 开平方再取倒数；非对角线元素 c_{ji}，等于其同行的主元素 c_{jj} 的负值乘以一个乘积和，乘积和中的项数等于 c_{ji} 的下标之差，即 $(j-i)$，乘积的每一项是主元素 c_{kk} 乘以与其同行的 c_{ki}，再乘以与其同列的 $n_{jk\cdot(k-1)}(k = i, i+1,\cdots,j-1)$。即主元素 $c_{ii} = \dfrac{1}{\sqrt{n_{ii\cdot(i-1)}}}$，非对角线元素 $c_{ji} = c_{jj}\sum_{k-1}^{j-1} c_{kk} \cdot c_{ki} \cdot n_{jk\cdot(k-1)}$。

2. 利用下三角阵 L 的逆阵 C 计算 N 的逆阵 Q 的紧凑格式

利用 C 阵元素可在下列“紧凑格式”阵中求得矩阵 Q 的下三角诸元素。

$$\begin{pmatrix} (c_{11})\leftarrow Q_{11} & & & \\ (c_{21})\leftarrow Q_{21} & (c_{22})\leftarrow Q_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (c_{t1})\leftarrow Q_{t1} & (c_{t2})\leftarrow Q_{t2} & \cdots & (c_{tt})\leftarrow Q_{tt} \end{pmatrix}$$

Q_{ji} 的计算规律：Q_{ji} 等于一个乘积和，乘积和的每一项是第 k 行第 i 列的元素 c_{ki} 乘以同行第 j 列的元素 $c_{kj}(k = j, j+1,\cdots,t)$。即 $Q_{ji} = \sum_{k=j}^{t} c_{ki} \cdot c_{kj}$

例 5-4　设线性方程同例5-3，试求线性方程组系数阵的逆阵。

解　(1) 利用“紧凑格式”和例 5-3 中求出的约化系数 $n_{ji\cdot(i-1)}$ 求下三角阵 L 逆阵 C。

$$\begin{pmatrix} (4.0)\leftarrow 0.500 & & & \\ (2.0)\leftarrow -0.125 & (16)\leftarrow 0.250 & & \\ (1.0)\leftarrow 0.094 & (2.0)\leftarrow -0.062 & (4.0)\leftarrow 0.500 & \\ (2.0)\leftarrow -0.140 & (4.0)\leftarrow -0.094 & (2.0)\leftarrow -0.250 & (4.0)\leftarrow 0.500 \end{pmatrix}$$

(2) 利用 C 阵中的各元素在“紧凑格式”中求线性方程组系数阵的逆阵 Q

$$\begin{bmatrix} (0.500)\leftarrow 0.294 & & & \\ (-0.125)\leftarrow -0.012 & (0.250)\leftarrow 0.075 & & \\ (-0.094)\leftarrow -0.012 & (-0.062)\leftarrow -0.008 & (0.500)\leftarrow 0.312 & \\ (-0.140)\leftarrow -0.070 & (-0.094)\leftarrow -0.047 & (-0.250)\leftarrow -0.125 & (0.500)\leftarrow 0.250 \end{bmatrix}$$

其 Q 阵为

$$Q=\begin{Bmatrix} 0.294 & & & \text{对称} \\ -0.012 & 0.075 & & \\ -0.012 & -0.008 & 0.312 & \\ -0.070 & -0.047 & -0.125 & 0.250 \end{Bmatrix}$$

前面所述的利用正定矩阵的三角分解导出的求线性对称方程中的未知数、未知数函数和系数矩阵逆阵的计算公式及其“紧凑格式”，具有较强的计算规律，计算器计算与计算机编程计算均通用，特别是利用计算机计算时节省内存，在不增加内存的情况下，使得求逆运算简单易行，可广泛用于测量平差教学和各类控制网平差的实践中。

第四节　线性方程的迭代解法

一、雅可比迭代法

设有线性方程组

$$\underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{X}=\underset{n\times 1}{b} \tag{5-42}$$

其中

$$\underset{n\times n}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad \underset{n\times 1}{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad \underset{n\times 1}{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

若 A 阵中的主元素 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，且令

$$\underset{n\times n}{D}=\operatorname{diag}(a_{11}\quad a_{22}\quad \cdots\quad a_{nn})$$

$$\underset{n\times n}{E}=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ a_{21} & 0 & & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix},\quad \underset{n\times n}{F}=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & 0 & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & a_{n-1,n} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

则有

$$A=D+E+F \tag{5-43}$$

将式(5－43)代入式(5－42)，得

$$\begin{aligned}(D+E+F)X&=b\\ DX+(E+F)X&=b\\ X&=-D^{-1}(E+F)X+D^{-1}b\end{aligned}\tag{5-44}$$

令　$B=-D^{-1}(E+F),\quad g=D^{-1}b$

则有

$$X=BX+g\tag{5-45}$$

其纯量形式为

$$\left.\begin{aligned}x_1&=-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n+\frac{b_1}{a_{11}}\\ x_2&=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1-\frac{a_{23}}{a_{22}}x_3-\cdots-\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n+\frac{b_2}{a_{22}}\\ &\cdots\cdots\\ x_n&=-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2-\cdots-\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}+\frac{b_n}{a_{nn}}\end{aligned}\right\}\tag{5-46}$$

可简写成

$$x_i=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j+b_i\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5-47}$$

为了进行迭代计算，首先对未知数向量任意给定一组近似值：

$$X^0=(x_1^{(0)}\quad x_2^{(0)}\quad\cdots\quad x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$$

$x_i^{(0)}$ 也称为初始值。将初始值向量 X^0 代入式(5－45)的右端，即得到向量的第一次近似值 $X^{(1)}$：

$$X^{(1)}=BX^{(0)}+g$$

再将向量 $X^{(1)}$代入式(5－45)的右端，又可算得解向量的第二次近似值 $X^{(2)}$：

$$X^{(2)}=BX^{(1)}+g$$

重复以上程序，将 $X^{(2)}$代入式(5－45)的右端，算出 $X^{(3)}\cdots$，如此反复进行，则有：

$$X^{(k+1)}=BX^{(k)}+g\tag{5-48}$$

根据式(5－47)可以写出它的纯量形式为

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5-49}$$

当未知数前后两次相等，或者其差异小于某个给定的数值时，也就是当

$$|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}|<\varepsilon\qquad(i=1,2,\cdots,n)\tag{5-50}$$

时，迭代计算结束，并将向量 $X^{(k+1)}$作为方程式(5－42)的精确解。式(5－50)中的 ε 称为迭代误差限，其大小可根据实际要求达到的计算精度而定。

迭代公式(5－49)称为解方程式(5－42)的雅可比迭代式，其中 B 称为雅可比迭代矩阵。

上述迭代法的特点是，各未知数的$(k+1)$次近似值 $X^{(k+1)}$都是用未知数的第 k 次近似值$X^{(k)}$计算出来的，因此雅可比迭代法又称为同步迭代法。

二、赛德尔迭代法

如果给定了未知数的初始值 $X^0=(x_1^{(0)}\quad x_2^{(0)}\quad\cdots\quad x_n^{(0)})^{\mathrm{T}}$，可由式(5－46)的第一式算得第一个未知数的第一次近似值 $X^{(1)}$：

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(0)}-a_{13}x_3^{(0)}-\cdots-a_{1n}x_n^{(0)}+b_1)$$

为了充分利用前面已经算得的近似值 $x_1^{(1)}$，在计算第二个未知数的第一次近似值 $x_2^{(1)}$ 时，就不再用 $x_1^{(0)}$，而用 $x_1^{(1)}$。于是由式(5－46)的第二个式子可得：

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(1)}-a_{23}x_3^{(0)}-\cdots-a_{2n}x_n^{(0)}+b_2)$$

同样，在计算第三个未知数的第一次近似值 $x_3^{(1)}$ 时，就不再用 $x_1^{(0)}$ 和 $x_2^{(0)}$，而是利用已经算得的 $x_1^{(1)}$ 和 $x_2^{(1)}$。这样，一个方程一个方程地逐个更换下去，则有：

$$x_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(-\sum_{j-1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}+b_i\right)\quad(i=1,2,\cdots,n)\qquad(5-51)$$

将式(5－48)中的 B 写成：

$$B=B_1+B_2$$

则式(5－48)应改写成：

$$X^{(k+1)}=B_1X^{(k+1)}+B_2X^{(k)}+g\qquad(5-52)$$

上式中

$$B_1=-D^{-1}E,\quad B_2=-D^{-1}F$$

式(5－52)称为赛德尔迭代式，其中 B_1、B_2 称为赛德尔迭代矩阵。即

$$X^{(k+1)}=-D^{-1}EX^{(k+1)}-D^{-1}FX^{(k)}+D^{-1}b$$

两边左乘 $-D$，得

$$-DX^{(k+1)}=EX^{(k+1)}+FX^{(k)}-b$$

移项整理，得

$$X^{(k+1)}=-(D+E)^{-1}FX^{(k)}+(D+E)^{-1}b$$

记

$$\tilde{B}=-(D+E)^{-1}F,\quad \tilde{g}=(D+E)^{-1}b$$

则

$$X^{(k+1)}=\tilde{B}X^{(k)}+\tilde{g}\qquad(5-53)$$

$\tilde{B}$ 也称为赛德尔迭代矩阵。

与雅可比迭代法相比，赛德尔迭代的优点是，在计算第 i 个未知数的第 $k+1$ 次近似值 $x_i^{(k+1)}$ 时，充分利用了前面已经算得的 $x_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,(i-1))$ 的数值，这样，可以加快收敛的速度。因为赛德尔迭代法是逐个方程变更其近似值，因而又称它为异步迭代法。

例 5－5 用雅可比迭代法与赛德尔迭代法求下列方程组的解

$$\begin{cases}64x_1-3x_2-x_3=14\\2x_1-90x_2+x_3=-5\\x_1+x_2+40x_3=20\end{cases}$$

采用 5 位有效数字运算，取误差限 $\varepsilon=0.000\ 01$。

解 首先应用雅可比迭代法，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{64}(\qquad\quad 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 14) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{90}(2x_1^{(k)} \qquad\quad + x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{40}(-x_1^{(k)} - x_2^{(k)} \qquad\quad + 20) \end{cases}$$

取初始向量 $X^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$，计算结果见表 5－1。

表 5－1

$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$	$X^{(6)}$
0.218 75	0.229 16	0.229 59	0.229 55	0.229 54	0.229 54
0.055 56	0.065 98	0.066 16	0.066 13	0.066 13	0.066 13
0.500 00	0.495 92	0.492 62	0.492 61	0.492 61	0.492 61

其次用赛德尔迭代法，迭代公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{64}(\qquad\quad 3x_2^{(k)} + x_3^{(k)} + 14) \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{90}(2x_1^{(k+1)} \qquad\quad + x_3^{(k)} + 5) \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{40}(-x_1^{(k+1)} - x_2^{(k+1)} \qquad\quad + 20) \end{cases}$$

初始向量仍取 $X^{(0)} = (0,0,0)^{\mathrm{T}}$，计算结果见表 5－2。

表 5－2

$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	$X^{(3)}$	$X^{(4)}$	$X^{(5)}$
0.218 75	0.229 16	0.229 59	0.229 54	0.229 54
0.055 56	0.066 21	0.066 13	0.066 13	0.066 13
0.500 00	0.492 62	0.492 61	0.492 61	0.492 61

雅可比迭代，迭代了 6 次，赛德尔迭代了 5 次。

第六章　平差应用实例

第一节　概　　述

在前面各章中介绍了间接平差法、条件平差法以及法方程式的解算方法。本章将利用这些知识，结合具体的平差实例，对测量控制网的平差计算作进一步的讨论。

平差计算可采用计算器计算，也可采用电子计算机计算。采用计算器计算的目的是为了使初学者更好地理解平差的基本原理和基本方法，为电子计算机应用程序的编制打下良好的基础。本章介绍的平差实例均采用计算器计算方法进行，旨在使初学者更好的掌握平差计算的数据结构、计算规律。为使计算过程清晰有序，平差计算的全过程均在表格中进行。

一、间接平差的计算表格及应用

由误差方程式

$$\underset{n\times 1}{V}=\underset{n\times t}{B}\ \underset{t\times 1}{\delta X}+\underset{n\times 1}{l}$$

式中
$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1t}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2t}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nt}\end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix},\quad l=\begin{pmatrix} l_1\\ l_2\\ \vdots\\ l_n\end{pmatrix}$$

为评定平差问题中某量的精度，所列的函数式为

$$\mathrm{d}\hat{\varphi}=F^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\hat{X}$$

或
$$\delta\hat{\varphi}=F^{\mathrm{T}}\delta X$$

式中
$$F=\begin{pmatrix} f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{pmatrix},\quad \delta X=\begin{pmatrix} \delta x_1\\ \delta x_2\\ \vdots\\ \delta x_t\end{pmatrix}$$

依据上述有关数据可编制误差方程系数及常数项表，见表 6－1。

表 6－1

观测编号	b_{i1}	b_{i2}	$\cdots$	b_{it}	l_i	p_i	v_i
	δx_1	δx_2	$\cdots$	δx_t			
1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1t}	l_1	p_1	v_1
2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2t}	l_2	p_2	v_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nt}	l_n	p_n	v_n

根据表中的数据，便可组成法方程式 $N\delta X + U = 0$、转换系数方程式 $Nq - F = 0$，计算其系数阵中的元素 n_{ji}和常数项 u_j，以及 $V^{\mathrm{T}}Pl = l^{\mathrm{T}}Pl + U^{\mathrm{T}}\delta X$ 中的 $l^{\mathrm{T}}Pl$，即

$$n_{ji} = \sum_{k=1}^{n} p_k b_{kj} b_{ki} \qquad (j = 1,2,\cdots,t;i = 1,2,\cdots,t)$$

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} p_i b_{ij} l_i \qquad (j = 1,2,\cdots,t)$$

$$l^{\mathrm{T}}Pl = \sum_{i=1}^{n} p_i l_i^2$$

将上述计算结果填写在编制好的法方程(转换系数方程)及其函数($V^{\mathrm{T}}PV$，$-\frac{1}{P_{\varphi}}$)计算表中，见表 6－2。

表 6－2　法方程系数及其函数计算表

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
(n_{11}) & & & & & & (\delta x_1) \\
(n_{21}) & (n_{22}) & & & & & (\delta x_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots \\
(n_{t1}) & (n_{t2}) & \cdots & (n_{tt}) & & & (\delta x_t) \\
(u_1) & (u_2) & \cdots & (u_t) & (l^{\mathrm{T}}Pl) & & \\
(-f_1) & (-f_2) & \cdots & (-f_t) & (0) & &
\end{array}\right]$$

表中后两行分别是函数

$$V^{\mathrm{T}}PV = l^{\mathrm{T}}Pl + u_1\delta x_1 + u_2\delta x_2 + \cdots + u_t\delta x_t$$

$$-\frac{1}{P_{\varphi}} = 0 - f_1q_1 - f_2q_2 - \cdots - f_tq_t$$

上表填写完毕后，即可在表中按第五章第二节所述的相应公式和计算规律计算 δx_i($i = 1,2,\cdots,t$)、$V^{\mathrm{T}}PV$ 和 $-\frac{1}{P_{\varphi}}$。将计算结果填于表 6－2 中相应元素的右边，见表 6－3。

表 6－3　法方程及其函数解算表

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
(n_{11}) & & & & & & (\delta x_1) \\
(n_{21}) & (n_{22})\leftarrow n_{22\cdot 1} & & & & & (\delta x_2) \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
(n_{t1}) & (n_{t2})\leftarrow n_{t2\cdot 1} & \cdots & (n_{tt})\leftarrow n_{tt\cdot(t-1)} & & & (\delta x_t) \\
(u_1) & (u_2)\leftarrow u_{2\cdot 1} & \cdots & (u_t)\leftarrow u_{t\cdot(t-1)} & (l^{\mathrm{T}}Pl)\leftarrow V^{\mathrm{T}}PV & & \\
(-f_1) & (-f_2)\leftarrow f_{2\cdot 1} & \cdots & (-f_t)\leftarrow f_{t\cdot(t-1)} & (0)\leftarrow -\frac{1}{P_{\varphi}} & &
\end{array}\right]$$

求得未知数近似值向量 X^0 的改正数向量 δX 后，按 $\hat{X} = X^0 + \delta X$ 求出未知数平差值向量$\hat{X}$；代入误差方程可求得改正数向量 V，v_i 的计算可在表 6－1 中(可将算得的 δx_i 填入表 6－1 中，按 $v_i = b_{i1}\delta x_1 + b_{i2}\delta x_2 + \cdots + b_{it}\delta x_t + l_i$ 计算)进行；按 $\hat{L}_i = L_i + v_i$ 可求得观测值的平差值向量 $\hat{L}$；按公式 $\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}}$，$\sigma_{\hat{\varphi}} = \hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}}$ 可求得单位权中误差和平差值函数的中误差。

若要求未知数平差值协因数 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$，则由 $Q_{\hat{X}\hat{X}} = N^{-1} = (LL^{\mathrm{T}})^{-1} = (L^{-1})^{\mathrm{T}}L^{-1} = C^{\mathrm{T}}C$，

按第五章第三节的相应公式和计算规律，计算出 c_{ji} 和 Q_{jt}，分别填于表 6－4 和表 6－5 中。

表 6－4　求 L 阵逆矩阵 C 的诸元素表

$$\begin{bmatrix} (n_{11})\leftarrow c_{11} & & & \\ (n_{21})\leftarrow c_{21} & (n_{22.1})\leftarrow c_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (n_{t1})\leftarrow c_{t1} & (n_{t2.1})\leftarrow c_{t2} & \cdots & (n_{tt.(t-1)})\leftarrow c_{tt} \end{bmatrix}$$

表中 $n_{ji\cdot(i-1)}$ 是法方程约化过程中的约化系数，c_{ji} 是求得的 L 阵逆阵 C 中的诸元素。

表 6－5　求 Q_{XX} 阵下三角元素计算表

$$\begin{bmatrix} (c_{11})\leftarrow Q_{11} & & & \\ (c_{21})\leftarrow Q_{21} & (c_{22})\leftarrow Q_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ (c_{t1})\leftarrow Q_{t1} & (c_{t2})\leftarrow Q_{t2} & \cdots & (c_{tt})\leftarrow Q_{tt} \end{bmatrix}$$

表中 c_{ji} 是下三角阵 L 的逆阵 C 中的诸元素，Q_{ji} 是 Q_{XX} 阵下三角阵部分的诸元素。

二、条件平差的计算表格及其应用

由条件方程式

$$\underset{r\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{V}+\underset{r\times 1}{W}=0$$

式中

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix},\quad V=\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}$$

为评定平差问题中某量的精度，所列的权函数式为

$$\underset{1\times 1}{\mathrm{d}\hat{\varphi}}=\underset{1\times n}{f^{\mathrm{T}}}\ \underset{n\times 1}{\mathrm{d}\hat{L}}$$

式中

$$f=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\qquad \mathrm{d}\hat{L}=\begin{bmatrix} \mathrm{d}\hat{L}_1 \\ \mathrm{d}\hat{L}_2 \\ \vdots \\ \mathrm{d}\hat{L}_n \end{bmatrix}$$

依据上述有关数据可编制条件方程及权函数式系数表，见表 6－6。

表 6－6

观测编号	a_{1i} / k_1	a_{2i} / k_2	… / …	a_{ri} / k_r	f_i	$\frac{1}{p_i}$	v_i
1	a_{11}	a_{21}	…	a_{r1}	f_1	$\frac{1}{p_1}$	v_1
2	a_{12}	a_{22}	…	a_{r2}	f_2	$\frac{1}{p_2}$	v_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮	⋮	⋮
n	a_{1n}	a_{2n}	…	a_{rn}	f_n	$\frac{1}{p_n}$	v_n

根据表 6－6 中的数据，便可计算法方程 $NK+W=0$(转换系数方程 $Nq+AP^{-1}f=0$)的系数 n_{ji}和转换系数方程中的常数项 $fe_i(AP^{-1}f)$，以及平差值函数的权倒数计算式 $\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}=f^{\mathrm{T}}P^{-1}f+(AP^{-1}f)^{\mathrm{T}}q$ 中的 $f^{\mathrm{T}}P^{-1}f$。即

$$n_{ji}=\sum_{k-1}^{n}\frac{a_{jk}a_{ik}}{p_k}\qquad(i=1,2,\cdots r;i=1,2,\cdots r)$$

$$fe_i=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_{ik}f_k}{p_k}\qquad(i=12,\cdots,r)$$

$$f^{\mathrm{T}}P^{-1}f=\sum_{i-1}^{n}\frac{f_i^2}{p_i}$$

将上述计算结果填于编制好的法方程(转换系数方程)及函数$\left(-V^{\mathrm{T}}PV,\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}\right)$解计算表中，见表 6－7。

表 6－7　法方程系数及其函数计算表

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
(n_{11}) & & & & & & (k_1)\\
(n_{21}) & (n_{22}) & & & & & (k_2)\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots\\
(n_{r1}) & (n_{r2}) & \cdots & (n_{rr}) & & & (k_r)\\
(w_1) & (w_2) & \cdots & (w_r) & (0) & & \\
(f_{e_1}) & (f_{e_2}) & \cdots & (f_{e_r}) & (f^{\mathrm{T}}P^{-1}f) & &
\end{array}\right]$$

表中后两行分别是函数

$$-V^{\mathrm{T}}PV=0+w_1k_1+w_2k_2+\cdots+w_rk_r$$

$$\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}=f^{\mathrm{T}}P^{-1}f+f_{e_1}q_1+f_{e_2}q_2+\cdots+f_{e_r}q_r$$

上表填写完毕后，即可在表中按第五章第二节所述公式和相应计算规律，求解 $k_i(i=1,2,\cdots,r)$、$-V^{\mathrm{T}}PV$ 及 $\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}$，计算结果填于表 6－7 中相应元素的右边，见表 6－8。

表 6－8　法方程及其函数解算表

$$\left[\begin{array}{ccccccc}
(n_{11}) & & & & & & (k_1)\\
(n_{21}) & (n_{22})\leftarrow n_{22\cdot1} & & & & & (k_2)\\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \vdots\\
(n_{r1}) & (n_{r2})\leftarrow n_{r2\cdot1} & \cdots & (n_{rr})\leftarrow n_{rr\cdot(r-1)} & & & (k_r)\\
(w_1) & (w_2)\leftarrow w_{2\cdot1} & \cdots & (w_r)\leftarrow w_{r\cdot(r-1)} & 0 & -V^{\mathrm{T}}PV & \\
(f_{e_1}) & (f_{e_2})\leftarrow f_{e_2\cdot1} & \cdots & (f_{e_r})\leftarrow f_{e_r\cdot(r-1)} & (f^{\mathrm{T}}P^{-1}f) & \frac{1}{P_{\hat{\varphi}}} &
\end{array}\right]$$

求得联系数向量 K 后，将其填入表 6－6 中，按 $v_i=\frac{1}{p_i}(a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\cdots+a_{ri}k_r)(i=1,2,\cdots,n)$在表中求出改正数向量 V；再按 $\hat{L}_i=L_i+v_i$ 求得观测值的平差值向量$\hat{L}$；并按 $\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}$，$\sigma_{\hat{\varphi}}=\sigma_0\sqrt{\frac{1}{P_{\hat{\varphi}}}}$求得单位权中误差和平差值函数的中误差。

第二节 水准网平差算例

一、水准网间接平差算例

例 6-1 如图6-1 所示水准网，A、B 为已知点，其高程分别为：

$H_A = 168.214$ m，$H_B + 178.059$ m

观测高差及路线长度如下：

$h_1 = -5.038$ m，　$S_1 = 11.7$ km

$h_2 = +18.649$ m，$S_2 = 14.8$ km

$h_3 = +3.787$ m，　$S_3 = 13.1$ km

$h_4 = +2.149$ m，　$S_4 = 18.5$ km

$h_5 = -6.309$ m，　$S_5 = 14.3$ km

$h_6 = +4.185$ m，　$S_6 = 8.4$ km

$h_7 = -14.488$ m，$S_7 = 13.4$ km

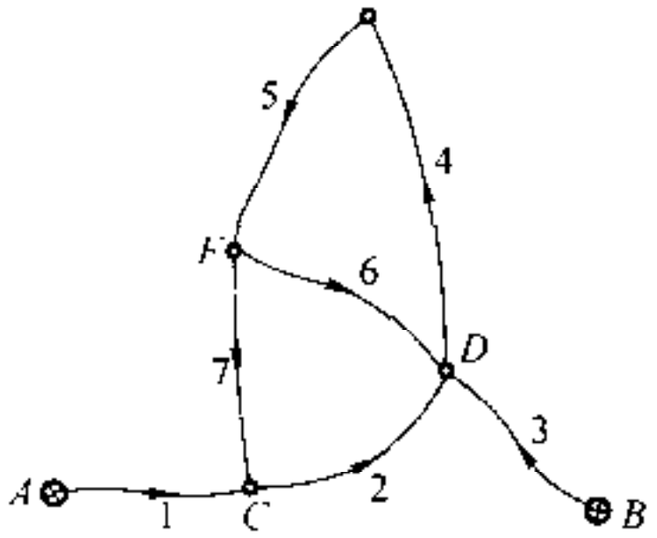


图 6-1

试求 C、D、E 和 F 点的高程平差值，评定 E 点高程平差值的精度及求未知点高程的协方差阵 $D_{\hat{X}\hat{X}}$。

解 (1) 列误差方程及权函数式

取未知点高程的平差值为未知参数，并计算其近似值。即

$$\hat{X} = (\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2 \quad \hat{x}_3 \quad \hat{x}_4)^{\mathrm{T}} = (\hat{H}_C \quad \hat{H}_D \quad \hat{H}_E \quad \hat{H}_F)^{\mathrm{T}}$$

$$x_1^0 = H_A + h_1 = 163.176 \text{ m}$$

$$x_2^0 = H_A + h_1 + h_2 = 181.825 \text{ m}$$

$$x_3^0 = H_A + h_1 + h_2 + h_4 = 183.974 \text{ m}$$

$$x_4^0 = H_A + h_1 + h_2 + h_4 + h_5 = 177.665 \text{ m}$$

误差方程式为

$$v_1 = \delta x_1 + 0$$

$$v_2 = -\delta x_1 + \delta x_2 + 0$$

$$v_3 = \delta x_2 - 21$$

$$v_4 = -\delta x_2 + \delta x_3 + 0$$

$$v_5 = -\delta x_3 + \delta x_4 + 0$$

$$v_6 = \delta x_2 - \delta x_4 - 25$$

$$v_7 = \delta x_1 - \delta x_4 - 1$$

未知参数的函数为　　$F = \hat{H}_E = \hat{x}_3$

权函数式为

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}\hat{H} = \delta x_3 \quad (\text{即 } f_3 = 1, f_1 = f_2 = f_4 = 0)$$

(2) 编制误差方程系数及常数项表(表 6-9)

定权时，取 $C = 10$ km，即以 10 km 水准观测高差为单位权观测值，则 $p_i = \dfrac{10}{S_i}$。

表 6-9

观测序号	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}	l_i	p_i	v_i	高差平差值
	4.599	15.946	6.166	−1.403	/mm		/mm	/m
1	1	0	0	0	0	0.855	4.6	−5.033 4
2	−1	1	0	0	0	0.676	11.3	18.660 3
3	0	1	0	0	−21	0.763	−5.1	3.781 9
4	0	−1	1	0	0	0.541	−9.8	2.139 2
5	0	0	−1	1	0	0.699	−7.6	−6.316 6
6	0	1	0	−1	−25	1.09	−7.7	4.177 3
7	1	0	0	−1	−1	0.746	5	−14.483 0

(3) 组成法方程并求解未知数及其函数

由表 6-9 中的数据计算法方程系数及其常数项，依次填入表 6-10 中，将平差值权函数式中未知数系数反号，依次填入表中最后一行。然后在表中按有关公式和计算规律计算出 $\delta x_i(i=1,2,\cdots,7)$、$V^{\mathrm{T}}PV$ 和 $-\dfrac{1}{P_F}$的值，见表 6-10。

表 6-10　法方程及其函数解算表

(2.277)								δx_1	4.599
(−0.676)	(3.170)	2.969 2						δx_2	15.946
(0)	(0.541)	−0.541 0	(1.240)	1.141 4				δx_3	6.166
(−0.764)	(−1.190)	−1.416 8	(−0.699)	(−0.957 1)	(2.635)	0.900 1		δx_4	−1.403
(0.764)	(−45.773)	−45.998 8	(0)	−8.381 2	(30.496)	1.263 0	(1 080.979)	304.788 3	$\leftarrow V^{\mathrm{T}}PV$
(0)	(0)	0	(−1)	−1	(0)	−0.838 5	(0)	−1.657 2	$\leftarrow -\frac{1}{P_F}$

表中计算结果为：$\delta x_1 = 4.599$，$\delta x_2 = 15.946$，$\delta x_3 = 6.166$，$\delta x_4 = -1.403$，$V^{\mathrm{T}}PV = 304.788\ 3$，$-\dfrac{1}{P_F} = -1.657\ 2$。

(4) 计算观测值改正数及高差平差值

计算结果见表 6-9。

(5) 计算各待定点高程的平差值

$$\hat{H}_C = \hat{x}_1 = x_1^0 + \delta x_1 = 163.181\ \mathrm{m}$$

$$\hat{H}_D = \hat{x}_2 = x_2^0 + \delta x_2 = 181.841\ \mathrm{m}$$

$$\hat{H}_E = \hat{x}_3 = x_3^0 + \delta x_3 = 183.980\ \mathrm{m}$$

$$\hat{H}_F = \hat{x}_4 = x_4^0 + \delta x_4 = 177.664\ \mathrm{m}$$

(6) 精度评定

单位权中误差

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} = \pm\sqrt{\frac{304.788}{3}} = \pm 10.1\ \mathrm{mm}$$

每公里观测高差的中误差

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{km}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{10}} = \pm 3.2\ \mathrm{mm}$$

E 点高程平差值的中误差

$$\hat{\sigma}_{\hat{H}_E}=\hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{P_E}}=\pm 10.1\sqrt{1.657\,2}\approx\pm 13.0\ \text{mm}$$

(7) 求未知点高程方差阵 $D_{\hat{X}\hat{X}}$

① 求 L 阵的逆阵 C,见表 6－11。

表 6－11　C 阵诸元素计算用表

$$\begin{bmatrix}
(2.277) & 0.662\,7 & & & & & & \\
(-0.676) & 0.172\,3 & (2.961\,2) & 0.580\,3 & & & & \\
(0) & 0.050\,6 & (-0.541\,0) & 0.170\,5 & (1.141\,4) & 0.936\,0 & & \\
-(0.764) & 0.550\,7 & (-1.416\,8) & 0.663\,9 & (-0.957\,1) & 0.883\,8 & (0.900\,1) & 1.054\,0
\end{bmatrix}$$

② 求未知点高程平差值协因数阵 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$,见表 6－12。

表 6－12　$Q_{\hat{X}\hat{X}}$ 阵下三角元素计算表

$$\begin{bmatrix}
(0.662\,7) & 0.774\,7 & & & & & & \\
(0.172\,3) & 0.474\,2 & (0.580\,3) & 0.806\,6 & & & & \\
(0.050\,6) & 0.534\,1 & (0.170\,5) & 0.746\,3 & (0.936\,0) & 1.657\,2 & & \\
(0.550\,7) & 0.580\,4 & (0.663\,9) & 0.699\,8 & (0.883\,8) & 0.931\,5 & (1.054\,0) & 1.110\,9
\end{bmatrix}$$

③ 求未知点高程平差值的协方差阵 $D_{\hat{X}\hat{X}}$:

$$D_{\hat{X}\hat{X}}=\hat{\sigma}_0^2Q_{\hat{X}\hat{X}}=10.1^2\times\begin{pmatrix}
0.774\,7 & & & \\
0.474\,2 & 0.806\,6 & & \\
0.534\,1 & 0.746\,3 & 1.657\,2 & \\
0.580\,4 & 0.699\,8 & 0.931\,5 & 1.110\,9
\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}
79.048 & & & \\
48.373 & 82.281 & & \\
54.483 & 76.130 & 169.051 & \\
59.206 & 71.387 & 95.022 & 113.323
\end{pmatrix}$$

二、水准网条件平差算例

例 6－2　如图6－2 所示水准网。已知 A 点的高程为:$H_A=11.100$ m,观测高差及路线长度为:

$h_1=0.893$ m,　　$S_1=15$ km

$h_2=9.125$ m,　　$S_2=20$ km

$h_3=10.012$ m,　　$S_3=10$ km

$h_4=2.640$ m,　　$S_4=30$ km

$h_5=6.193$ m,　　$S_5=25$ km

$h_6=6.481$ m,　　$S_6=20$ km

$h_7=6.999$ m,　　$S_7=20$ km

$h_8=1.712$ m,　　$S_8=15$ km

$h_9=1.212$ m,　　$S_9=5$ km

$h_{10}=26.214$ m,　　$S_{10}=30$ km

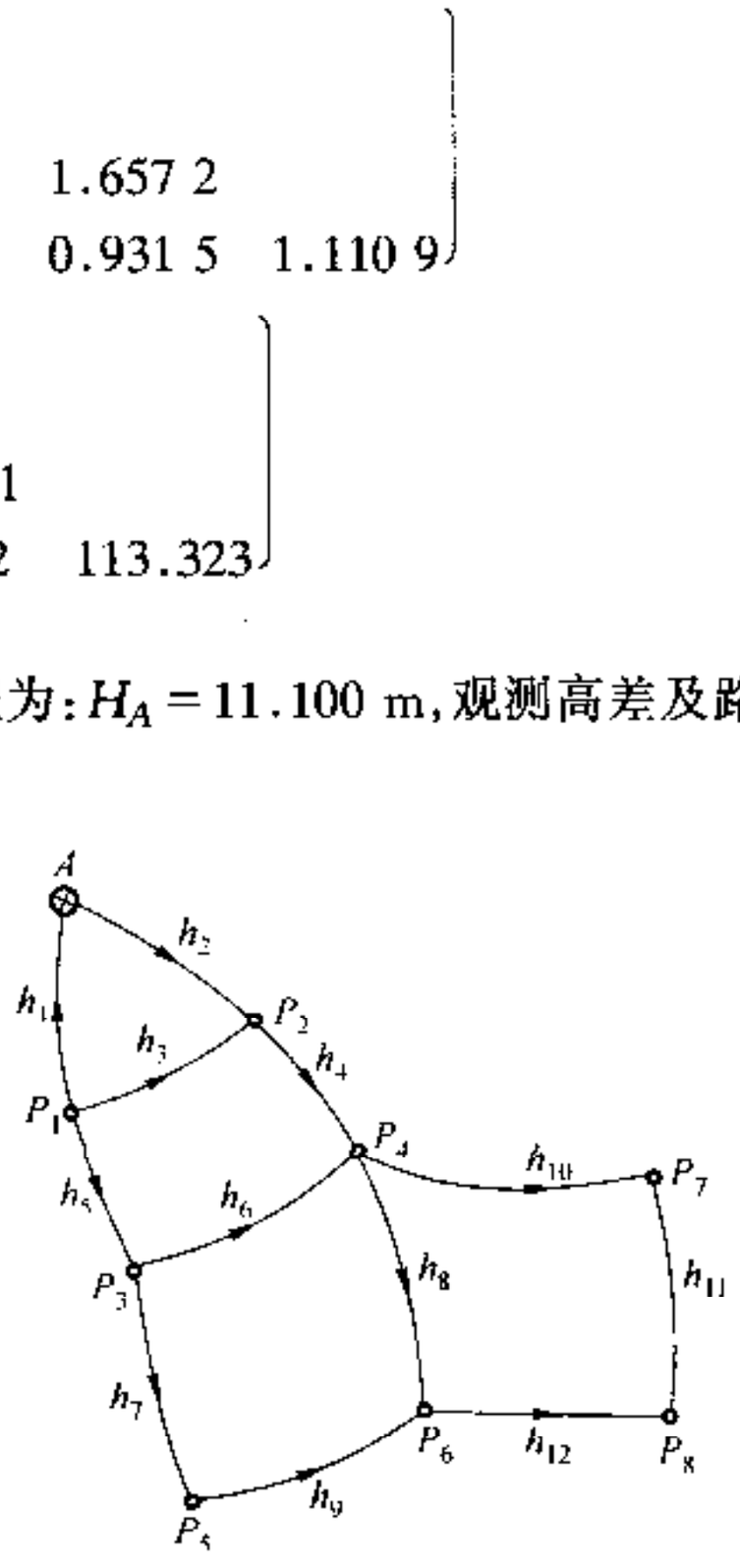


图 6－2

$h_{11}=39.844$ m，　$S_{11}=10$ km

$h_{12}=64.388$ m，　$S_{12}=25$ km

试用条件平差法求：

(1) 待定点 P_i 高程的平差值；

(2) 最弱点 P_8 高程平差值的中误差。

解　(1) 列条件方程和权函数式

本题中，$n=12$，$t=8$，则条件数 $r=4$。其条件方程为

$$v_1+v_2-v_3+6=0$$

$$v_3+v_4-v_5-v_6-22=0$$

$$v_6-v_7+v_8-v_9-18=0$$

$$-v_8+v_{10}+v_{11}-v_{12}-42=0$$

最弱点 P_8 平差后高程平差值函数式为

$$F=H_A+\hat{h}_2+\hat{h}_4+\hat{h}_8+\hat{h}_{12}$$

权函数式为

$$\mathrm{d}F=\mathrm{d}\hat{h}_2+\mathrm{d}\hat{h}_4+\mathrm{d}\hat{h}_8+\mathrm{d}\hat{h}_{12}$$

(2) 建立条件方程系数及权函数式系数表

见表 6－13。表中取 30 km 水准观测高差为单位权观测值。

表 6－13

观测序号	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	f_i	$\frac{1}{p_i}$	v_i /mm	高差平差值 /m
	−1.413	11.579	17.589	19.059				
1	1					0.50	−0.7	0.892
2	1				1	0.67	−0.9	9.124
3	−1	1				0.33	+4.3	10.016
4		1			1	1.00	+11.8	2.652
5		−1				0.83	−9.8	6.183
6		−1	1			0.67	+3.9	6.485
7			−1			0.67	−11.8	6.987
8			1	−1	1	0.50	−0.7	1.711
9			−1			0.17	−3.0	1.209
10				1		1.00	+19.1	26.233
11				1		0.33	+6.3	39.850
12				−1	1	0.83	−15.8	64.372

(3) 组成并解算法方程未知数及其函数

由于观测值的权阵为对角阵，可由表 6－13 中的数据计算法方程(转换系数方程)系数和转换系数方程的常数项，将计算结果依次填入法方程未知数及其函数解算表中(带括号的各项)，并在表中解算 K、$V^{\mathrm{T}}PV$ 和 $\frac{1}{P_F}$ 的值，见表 6－14。

表 6－14　法方程未知数及其函数解算表

(1.50)								k_1	−1.413
(−0.33)	(2.83)	2.76						k_2	11.759
(0)	(−0.67)	−0.67	(2.01)	1.85				k_3	17.589
(0)	(0)	0	(−0.50)	−0.50	(2.67)	2.53		k_4	19.059
(6.00)	(−22.00)	−20.67	(−18.00)	−23.01	(−42.00)	−48.22	(0)	−1 384.03	$\leftarrow -V^{\mathrm{T}}PV$
(0.67)	(1.00)	1.15	(0.50)	0.78	(−1.33)	−1.12	(3.00)	1.40	$\leftarrow \frac{1}{P_F}$

(4) 计算观测值改正数 v_i 及平差值 $\hat{h}_i$

由改正数方程 $V=P^{-1}A^{\mathrm{T}}K$，顾及 P 为对角阵，则有

$$v_i=\frac{1}{p_i}(a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\cdots+a_{ri}k_r)\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

计算时，将解出的联系数向量 K 填入表 6－13 中，可方便地在表中进行计算。

(5) 计算待定点的高程平差值

$$H_{P_1}=10.208\ \mathrm{m},\quad H_{P_2}=20.224\ \mathrm{m},\quad H_{P_3}=16.391\ \mathrm{m}$$

$$H_{P_4}=22.87\ \mathrm{m},\quad H_{P_5}=23.378\ \mathrm{m},\quad H_{P_6}=24.587\ \mathrm{m}$$

$$H_{P_7}=49.109\ \mathrm{m},\quad H_{P_8}=88.959\ \mathrm{m}$$

(6) 精度评定

单位权中误差：$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}=\pm\sqrt{\frac{1\ 384.03}{4}}\approx\pm18.6\ \mathrm{mm}$

每公里高差观测中误差：$\hat{\sigma}_{\mathrm{km}}=\frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{C}}=\pm3.4\ \mathrm{mm}$

最弱点 P_8 高程平差值的中误差：$\hat{\sigma}_F=\hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{P_F}}=\pm18.6\sqrt{1.4}=\pm22.0\ \mathrm{mm}$

第三节　三角网平差算例

一、三角网间接平差算例

例 6－3　如图6－3 所示三角网，A、B 为已知点，其坐标为：

$$x_A=5\ 764.394\ \mathrm{m},\quad y_A=3\ 842.726\ \mathrm{m}$$

$$x_B=5\ 187.511\ \mathrm{m},\quad y_B=5\ 720.851\ \mathrm{m}$$

同精度观测了网中各内角，其中误差为 $\pm2.5''$，并用标称精度为 $5\ \mathrm{mm}+5\times10^{-6}D$ 的测距仪观测了两条边，观测值见表 6－15。试求 P_1、P_2 点的坐标平差值，P_1、P_2 点间边长平差值的相对中误差，以及未知点坐标平差值的方差—协方差阵。

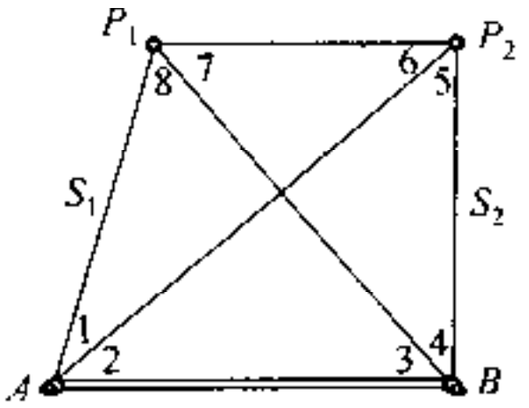


图 6－3

表 6－15

编　　号	1	2	3	4	5	6	7	8	9(s_1)	10(s_2)
观测值/(° ′ ″)	61 07 56	30 57 02	49 26 16	70 22 00	29 14 34	42 01 15	38 22 20	38 28 37	2 398.897 m	2 068.435 m

解　(1) 计算待定点的近似坐标

根据观测角度及边长算得 P_1、P_2 点的近似坐标为

$$x^0_{P_1}=8\ 081.637\ \text{m},\quad y^0_{P_1}=4\ 463.284\ \text{m}$$
$$x^0_{P_2}=6\ 601.365\ \text{m},\quad y^0_{P_2}=7\ 230.632\ \text{m}$$

(2) 计算各边的近似方位角、近似边长及方向系数

计算结果见表 6－16。

表 6－16

方　向	T^0 /(° ′ ″)	S^0 /m	a /(s/cm)	b /(s/cm)
AP_1	14 59 31.3	2 398.897	0.222	−0.931
AP_2	76 07 23.2	3 489.760	0.574	−0.142
BP_1	336 30 50.0	315.541	−0.260	−0.600
BP_2	46 52 45.3	2 068.435	0.728	−0.682
P_1P_2	118 08 33.4	3 138.379	0.580	0.310

(3) 列误差方程及权函数式

误差方程系数和常数及权列于表 6－17。取 ±2.5″为单位权中误差，则角度观测值的权均为 1，边长观测值的权为：

$$P_S=\frac{2.5^2}{(0.5+0.5S_{km})}(″)^2/\text{cm}^2$$

表 6－17

序　号	b_{i1} 1.839	b_{i2} −3.272	b_{i3} −1.700	b_{i4} 2.280	l_i/(″)	p_i	v_i/(″)	$\hat{L}_i$ /(° ′ ″)
1	0.222	0.831	−0.574	0.142	−4.1	1	0.3	61 07 56.3
2			0.574	−0.142	4.1	1	2.8	30 57 04.8
3	0.260	0.600			4.7	1	3.2	49 26 19.2
4	−0.260	−0.600	−0.728	0.682	−4.7	1	0.4	70 21 59.6
5			0.154	−0.540	3.9	1	2.4	29 14 36.4
6	0.580	0.310	−0.006	−0.452	−4.8	1	−5.8	42 01 09.2
7	−0.320	0.290	0.580	0.310	−3.4	1	−5.2	38 22 14.8
8	−0.482	0.331			4.3	1	2.7	38 28 37.9
9(S_1)	0.966	0.259				2.16	0.93 cm	2 398.906
10(S_2)			0.684	0.730		2.60	0.50 cm	2 068.440
F	0.471	−0.882	−0.471	0.882				

(4) 组成并解算法方程及转换系数方程

见表 6－18。

表 6－18　法方程未知数及其函数解算表

(2.871)									δx_{P_1} 1.839
(0.643)	(1.711)	1.567							δy_{P_1} －3.272
(－0.127)	(1.080)	1.108	(2.766)	1.977					δx_{P_2} －1.700
(－0.507)	(－0.577)	－0.463	(0.738)	1.043	(2.483)	1.706			δy_{P_2} 2.280
(－2.235)	(7.566)	8.067	(6.786)	0.983	(－5.360)	－3.890	(146.100)	93.472	← $V^{\mathrm{T}}PV$
(－0.471)	(0.882)	0.987	(0.471)	－0.248	(－0.882)	－0.543	(0)	－0.903	← $\frac{1}{P_F}$

(5) 求观测值改正数及平差值

计算结果见表 6－17。

(6) 求待定点坐标平差值

$$\hat{x}_{P_1} = x^0_{P_1} + \delta x_{P_1} = 8\,081.655\ \mathrm{m}, \quad \hat{y}_{P_1} = y^0_{P_1} + \delta y_{P_1} = 4\,463.251\ \mathrm{m}$$

$$\hat{x}_{P_2} = x^0_{P_2} + \delta x_{P_2} = 6\,601.348\ \mathrm{m}, \quad \hat{y}_{P_2} = y^0_{P_2} + \delta y_{P_2} = 7\,230.655\ \mathrm{m}$$

(7) 精度评定

单位权中误差为：

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} = \pm\sqrt{\frac{93.472}{10-4}} = \pm 3.9''$$

P_1、P_2 点间边长平差值的中误差为：

$$\hat{\sigma}_S = \hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{P_F}} = \pm 3.9''\sqrt{0.903} = \pm 3.8\ \mathrm{cm}$$

P_1、P_2 点间边长相对中误差为：

$$\frac{\hat{\sigma}_S}{S_{P_1P_2}} = \frac{3.8}{313\,837.9} = \frac{1}{82\,000}$$

(8) 未知点坐标平差值方差—协方差阵

① 求下三角阵 L 的逆阵 C，见表 6－19。

表 6－19　C 阵诸元素计算用表

(2.871)	0.590 2						
(0.643)	－0.178 9	(1.567)	0.798 9				
(－0.127)	0.144 1	(1.108)	－0.502 9	(1.977)	0.711 2		
(－0.507)	0.002 7	(－0.463)	0.511 8	(1.043)	－0.403 9	(1.706)	0.765 6

② 计算坐标平差值协因数阵的诸元素，见表 6－20。

表 6－20　坐标平差值协因数阵下三角元素计算用表

(0.590 2)	0.401 1						
(－0.178 9)	0.214 0	(0.798 9)	1.153 1				
(0.144 1)	0.101 4	(－0.502 9)	－0.564 4	(0.711 2)	0.668 9		
(0.002 7)	0.002 1	(0.511 8)	0.391 8	(－0.403 9)	－0.309 2	(0.765 6)	0.586 1

③ 计算坐标平差值的方差——协方差阵：

$$D_{\hat{X}\hat{X}}=\hat{\sigma}_0 Q_{\hat{X}\hat{X}}=3.9^2\times\begin{Bmatrix}0.401\,1 & & & \text{对称}\\ -0.214\,0 & 1.153\,1 & & \\ 0.101\,4 & -0.564\,4 & 0.668\,9 & \\ 0.002\,1 & 0.391\,8 & -0.309\,2 & 0.586\,1\end{Bmatrix}$$

$$=\begin{Bmatrix}6.100\,7 & & & \text{对称}\\ -3.254\,9 & 17.538\,7 & & \\ 1.542\,3 & -8.584\,5 & 10.174\,0 & \\ 0.031\,9 & 5.959\,3 & -4.702\,9 & 8.914\,6\end{Bmatrix}$$

二、三角网条件平差算例

例 6-4　如图6-4 所示测角网，A、B 为已知点，坐标为：

$$x_A=74\,743.471\ \text{m},\quad y_A=489\,447.672\ \text{m}$$

$$x_B=73\,970.481\ \text{m},\quad y_B=491\,964.253\ \text{m}$$

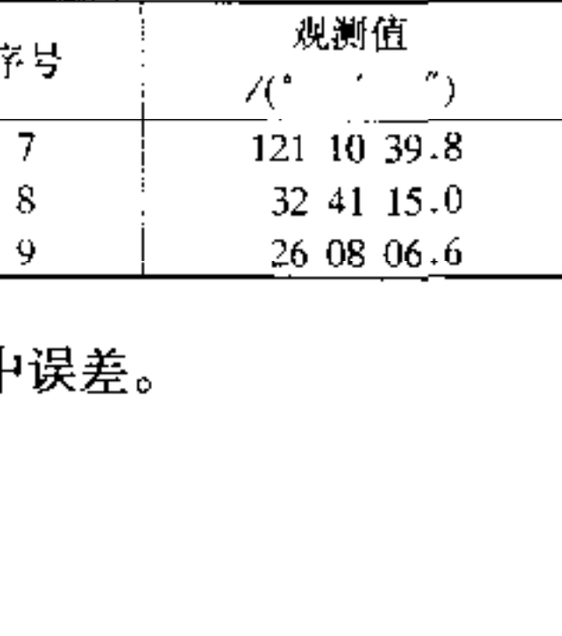


图 6-4

同精度观测角度值见表 6-21。

表 6-21

序号	观测值 /(° ′ ″)	序号	观测值 /(° ′ ″)	序号	观测值 /(° ′ ″)
1	145 28 40.8	4	93 27 39.4	7	121 10 39.8
2	18 19 35.3	5	34 51 42.0	8	32 41 15.0
3	16 18 45.3	6	51 40 32.0	9	26 08 06.6

试求 P_1、P_2 点坐标平差值，并计算 P_1、P_2 点间边长的相对中误差。

解　(1) 列立条件方程式和权函数式

本例中 $n=9$、$t=4$、$r=9-4=5$，其条件方程式为

$$v_1+v_2+v_3+1.4=0$$

$$v_4+v_5+v_6-6.6=0$$

$$v_7+v_8+v_9+1.4=0$$

$$v_1+v_4+v_7+0=0$$

$$3.019v_2-3.147v_3+1.436v_5-0.790v_6+1.558v_8-2.038v_9+0.958=0$$

平差值函数式为

$$\hat{S}_{P_1P_2}=\frac{S_{AB}\sin\hat{L}_8\sin\hat{L}_2}{\sin\hat{L}_7\sin\hat{L}_3}$$

取全微分后，得其权函数式为

$$\mathrm{d}F=\frac{\mathrm{d}\hat{S}_{P_1P_2}}{S_{P_1P_2}}\rho''=3.109v_2-3.147v_3+0.605v_7+1.558v_8$$

(2) 建立条件方程系数和权函数式系数表(表 6-22)

表 6-22

序号	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	f_i	v_i/(″)	$\hat{L}_i$ /(° ′ ″)
	-0.269	2.430	-0.271	-0.630	-0.092			
1	1			1			-0.90	145 21 39.90
2	1				3.019	3.019	-0.55	18 19 34.75
3	1				-3.417	-3.417	0.05	16 18 45.35

续表 6－22

序号	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	a_{4i}	a_{5i}	f_i	v_i/(″)	$\hat{L}_i$ /(° ′ ″)
	−0.269	2.430	−0.271	−0.630	−0.092			
4		1		1			1.80	93 27 41.20
5		1			1.436		2.30	34 51 44.30
6		1			−0.790		2.50	51 40 34.50
7			1	1		0.605	−0.90	121 10 38.90
8			1		1.558	1.558	−0.41	32 41 14.59
9			1		2.038		−0.09	26 08 06.51

(3) 计算法方程系数及转换系数方程常数项,并求解联系数及其函数

利用表 6－22 中的数据依次计算法方程系数及转换系数方程常数项,应注意到此例中观测值的权均相等,且可令它们均为 1。将计算的结果填入表 6－23,并在表中求解联系数及其函数的值。

表 6－23 法方程未知数及其函数解算表

(3)										k_1	−0.269
(0)	(3)	3								k_2	2.430
(0)	(0)	0	(3)	3						k_3	−0.271
(1)	(1)	1	(1)	1	(3)	2				k_4	−0.630
(−0.398)	(0.646)	0.646	(−0.48)	−0.48	(0)	0.077	(30.057)	29.784		k_5	−0.092
(1.4)	(−6.6)	−6.6	(1.40)	1.4	(0)	1.267	(0.958)	2.740	(0)	$-V^{\mathrm{T}}V$	−16.811
(−0.398)	(0)	0	(2.163)	2.163	(0.605)	0.017	(23.218)	23.511	(23.584)	$\frac{1}{P_F}$	3.412

(4) 求观测值改正数及平差值

由 $V=A^{\mathrm{T}}K$ 或 $v_i=a_{1i}k_1+a_{2i}k_2+\cdots+a_{5i}k_5$,将解出的联系数向量填入表 6－22 中,计算出观测值的改正数,再由 $\hat{L}_i=L_i+v_i$ 求得平差。计算结果见表 6－22。

(5) 求待定点的坐标平差值

利用观测值的平差值按前方交会计算得:

$$\hat{x}_{P_1}=75\ 005.158\ \mathrm{m},\quad \hat{y}_{P_1}=491\ 088.712\ \mathrm{m}$$

$$\hat{x}_{P_2}=76\ 290.370\ \mathrm{m},\quad \hat{y}_{P_2}=492\ 433.644\ \mathrm{m}$$

(6) 精度评定

单位权中误差为 $$\hat{\sigma}_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}V}{r}}=\pm\sqrt{\frac{16.881}{5}}=\pm1.84''$$

平差值函数的中误差 $$\hat{\sigma}_F=\hat{\sigma}_0\sqrt{\frac{1}{P_F}}=\pm1.84\sqrt{3.142}=\pm3.39$$

P_1、P_2 点间边长的相对中误差 $$\frac{\hat{\sigma}_{P_1P_2}}{S_{P_1P_2}}=\frac{\hat{\sigma}_F}{\rho''}=\frac{3.39}{206\ 265}=\frac{1}{60\ 800}$$

第四节 导线网平差算例

导线网是平面控制网的布设形式之一,随着光电测距仪和全站仪的迅速发展,导线网这种灵活方便的布网形式,更多地被生产实践所采用。

导线网外业观测结束后,对外业观测数据进行必要整理和概算,便可进行平差处理。在

平差时，由于观测量为角度和边长，因此，要首先确定这两种观测量的权，根据权的定义式可求得

$$P_{角}=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{角}^2}\qquad P_{边}=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_{边}^2}$$

式中，σ_0^2 为任选的比例系数。随 σ_0^2 的不同取值及单位，角度和边长的权亦有不同的值及单位，但比例关系不变。定权的关键问题是如何确定测角与测边的中误差。导线测角中误差可由导线网中各导线闭合环的闭合差 $w_{环i}$，按下式近似地估算：

$$m_{角}=\pm\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{1}\frac{w_{环i}}{n_i}}$$

式中，N 为导线环数；n_i 为第 i 个导线环中的转折角个数。当导线中导线环数很少时，可采用相应等级导线测量规程中要求的测角中误差。

测距中误差，一般采用测距仪或全站仪出厂的标称精度，其表达式为：

$$m_S=\pm(a+bS)$$

式中第一项为固定误差，第二项为比例误差。

一、导线网间接平差算例

例 6－5　为确定 P_1、P_2 点的平面位置，布设如图 6－5 所示的导线网，并观测了所有的转折角与边长。起算数据与观测值分别列于表 6－24 和表 6－25 中。试按间接平差法求 P_1、P_2 点的坐标平差值及其方差—协方差阵，以及 P_1、P_2 点的点位中误差。

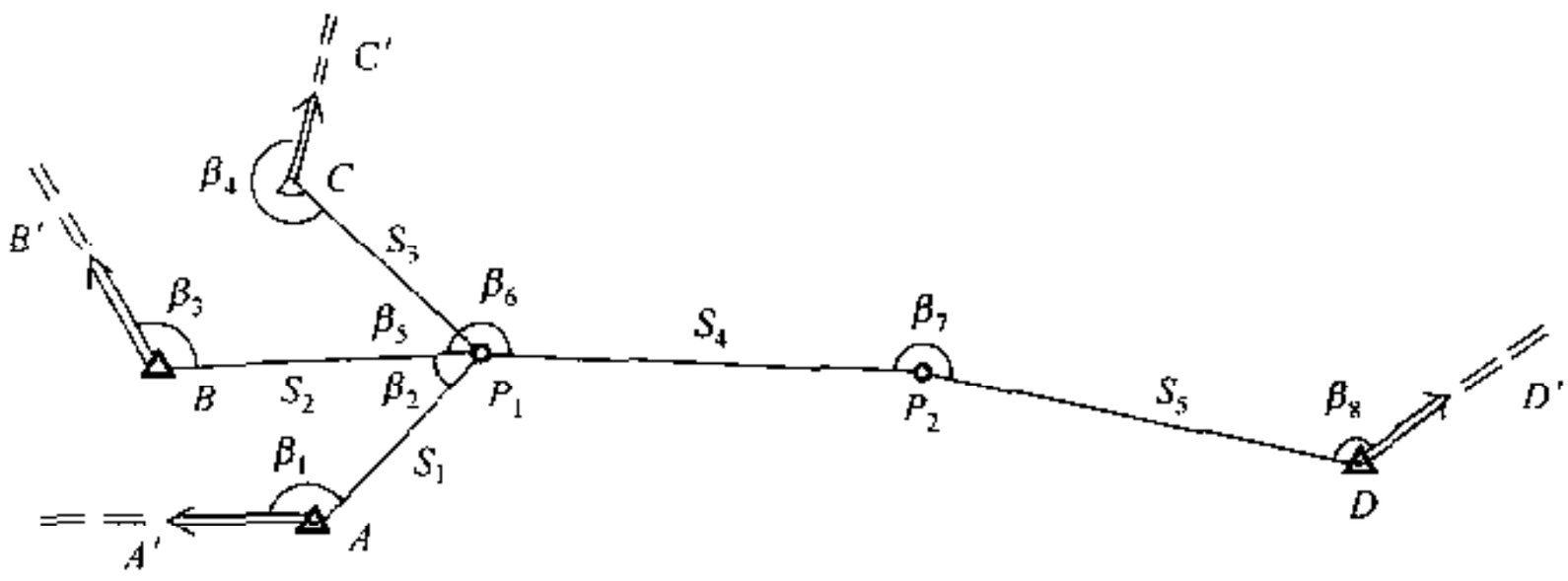


图 6－5

表 6－24

点名	x/m	y/m	至点	坐标方位角 /(° ′ ″)
A	3 143.237	5 260.334	A'	260 54 27.0
B	4 609.361	5 025.696	B'	330 52 06.0
C	7 657.661	5 071.897	C'	0 52 06.0
D	4 157.197	8 853.254	D'	109 31 44.9

表 6－25

编　号	观 测 值	编　号	观 测 值
β_1	134°05′44.8″ ± 2.5″	β_8	168°01′45.2″ ± 2.5″
β_2	42°43′27.2″ ± 2.5″	S_1	2 185.070 m ± 3.3 cm
β_3	106°51′40.7″ ± 2.5″	S_2	1 522.853 m ± 2.3 cm
β_4	208°45′20.9″ ± 2.5″	S_3	3 082.621 m ± 4.6 cm
β_5	74°22′55.1″ ± 2.5″	S_4	1 500.017 m ± 2.2 cm
β_6	127°25′56.1″ ± 2.5″	S_5	1 009.021 m ± 1.5 cm
β_7	201°57′34.0″ ± 2.5″		

解　(1) 计算待定点的近似坐标

$$x^0_{P_1} = 4\ 933.013\ \text{m},\quad y^0_{P_1} = 6\ 513.013\ \text{m}$$

$$x^0_{P_2} = 4\ 684.283\ \text{m},\quad y^0_{P_2} = 7\ 992.948\ \text{m}$$

(2) 由已知点坐标和待定点近似坐标计算待定边近似方位角和近似边长，以及方向系数，计算结果见表 6－26。

表 6－26

方向	T^0 /(° ′ ″)	S^0 /m	$\frac{\rho''\sin T^0}{S^0 10^{-2}}$	$-\frac{\rho''\cos T^0}{S^0 10^{-2}}$	$\cos T^0$	$\sin T^0$
P_1A	215 00 11.89	2 185.001	−0.542	0.773	−0.819	−0.574
P_1B	257 43 43.99	1 522.798	−1.334	0.288	−0.213	−0.977
P_1C	332 06 48.60	3 082.614	−0.313	−0.591	0.884	−0.468
P_1P_2	99 32 41.27	1 500.012	1.356	0.228	−0.166	0.986
P_2D	121 29 40.79	1 008.933	1.743	1.068	−0.522	0.857

(3) 计算误差方程及常数项，其结果见表 6－27。

表 6－27

序号	b_{i1}	b_{i2}	b_{i3}	b_{i4}	l_i	p_i	v_i	$\hat{L}_i$
	2.812	6.395	11.176	1.208				
β_1	−0.542	0.773			+ 0.06	1	3.48	134°05′48.3″
β_2	−0.782	−0.485			+ 4.93	1	−0.37	42°43′26.8″
β_3	−1.324	0.188			− 2.71	1	−4.59	106°51′36.1″
β_4	0.313	0.591			− 3.50	1	1.16	208°45′22.1″
β_5	1.011	−0.897			+ 9.51	1	6.62	74°23′01.7″
β_6	1.669	0.819	−1.356	−0.228	− 3.43	1	−8.93	127°25′47.2″
β_7	−1.356	−0.228	3.099	1.296	−34.48	1	−3.55	201°57′30.4″
β_8			−1.743	−1.068	+18.91	1	−1.86	168°01′43.3″
S_1	0.819	0.574			− 6.9	0.6	−0.93 cm	2 185.061 m
S_2	0.213	0.977			− 5.5	1.2	1.35	1 522.876 m
S_3	0.884	0.468			− 0.7	0.3	−0.19	3 082.619 m
S_4	0.166	−0.986	−0.166	0.986	− 0.5	1.3	−7.00	1 499.947 m
S_5			0.522	−0.853	− 8.8	0.8	−4.00	1 008.981 m

(4) 组成并解算法方程，计算结果见表 6－28。

表 6－28　法方程未知数及其函数解算表

(9.129)							δx_1	2.812
(0.746)	(5.432)	5.371					δx_2	6.395
(－6.501)	(－1.605)	－1.074	(15.278)	10.434			δx_3	11.176
(－1.925)	(－1.746)	－1.589	(4.729)	3.040	(6.172)	1.410	δx_4	1.208
(44.535)	(－16.783)	－20.422	(－147.910)	－120.728	(－43.728)	5.327	(－1 974.732)	286.812 ← $V^{\mathrm{T}}PV$

(5) 求观测值改正数 v_i 及平差值$\hat{L}_i$，计算结果见表 6－27。

(6) 计算待定点坐标平差值

$$\hat{x}_{p_1} = x^0_{p_1} + \delta x_1 = 4\ 933.041\ \mathrm{m}$$

$$\hat{y}_{p_1} = y^0_{p_1} + \delta y_1 = 6\ 513.077\ \mathrm{m}$$

$$\hat{x}_{p_2} = x^0_{p_2} + \delta x_2 = 4\ 684.295\ \mathrm{m}$$

$$\hat{y}_{p_2} = y^0_{p_2} + \delta y_2 = 7\ 992.960\ \mathrm{m}$$

(7) 精度评定

① 单位权中误差为

$$\hat{\sigma}_0 = \pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{n-t}} = \pm\sqrt{\frac{286.812}{13-4}} = \pm 5.6''$$

② 计算 P_1、P_1 点坐标平差值的方差—协方差阵

A. 计算 L 阵的逆阵C 阵，见表 6－29

表 6－29　C 阵诸元素计算表

(9.129)	0.331 0						
(0.746)	－0.035 3	(5.371)	0.431 5				
(－6.501)	0.215 5	(－1.074)	0.061 9	(10.434)	0.309 6		
(－1.925)	－0.077	(－1.589)	0.113 1	(3.040)	－0.138 8	(4.410)	0.476 2

B. 计算坐标平差值协因数阵 $Q_{\hat{X}\hat{X}}$的下三角阵诸元素，见表 7－30。

表 6－30　$Q_{\hat{x}\hat{x}}$阵下三角元素计算表

(0.331 0)	0.157 3						
(－0.035 3)	－0.002 8	(0.431 5)	0.202 8				
(0.215 5)	0.067 8	(0.061 9)	0.003 5	(0.309 6)	0.115 1		
(－0.077)	－0.003 9	(0.113 1)	0.053 7	(－0.138 8)	0.066 1	(0.476 2)	0.226 8

C. 计算未知点坐标平差值的方差—协方差阵。

$$D_{\hat{X}\hat{X}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{X}\hat{X}} = 5.6^2 \times \begin{Bmatrix} 0.157\ 3 & & & \\ -0.028\ 0 & 0.202\ 8 & & \\ 0.067\ 8 & 0.003\ 5 & 0.115\ 1 & \\ 0.003\ 9 & 0.053\ 7 & 0.066\ 1 & 0.226\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 4.932\ 9 & & & \\ -0.878\ 1 & 6.359\ 8 & & \\ 2.126\ 2 & 0.109\ 8 & 3.609\ 5 & \\ -0.116\ 0 & 1.690\ 3 & -2.072\ 9 & 7.112\ 4 \end{Bmatrix}$$

③ 计算点位中误差

$$M_{P_1}=\pm\sqrt{m_{x_1}^2+m_{y_1}^2}=\pm\sqrt{4.932\ 3+6.359\ 8}$$

$$=\pm 3.36\ \text{cm}$$

$$M_{P_2}=\pm\sqrt{m_{x_2}^2+m_{y_2}^2}=\pm\sqrt{3.609\ 5+7.112\ 4}$$

$$=\pm 3.27\ \text{cm}$$

二、导线网条件平差算例

例 6－6 如图6－6 所示是单一闭合导线网，A、B 为已知点，其坐标为：

$x_A=6\ 556.947$ m，　$y_A=4\ 101.735$ m

$x_B=8\ 748.155$ m，　$y_B=6\ 667.647$ m

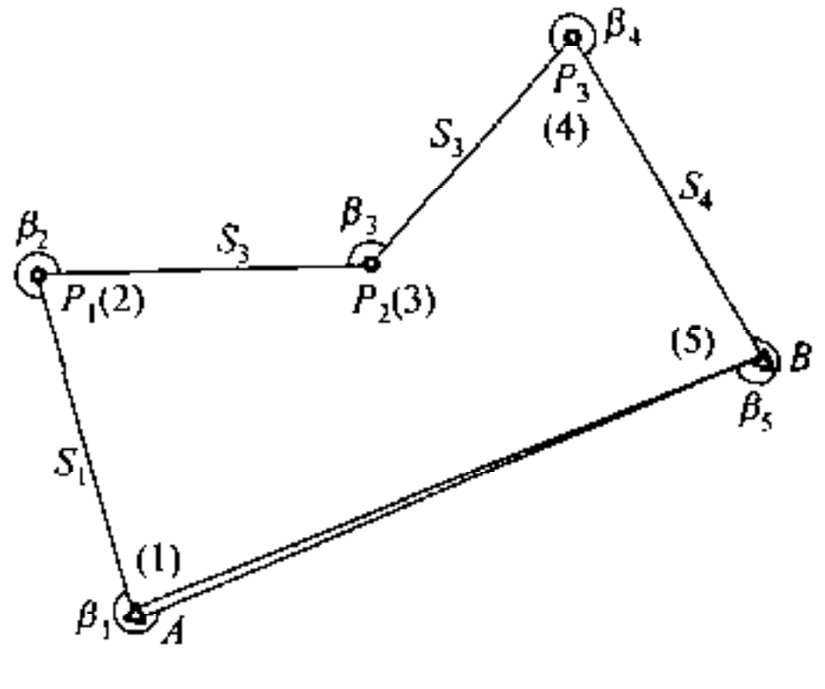


图 6－6

测角误差 $m_\beta=\pm 3''$，测距精度为：5 mm＋5×10⁻⁶S，观测值见表 6－31。

表 6－31

编　号	观测值 /(° ′ ″)	编　号	观测值/m
β_1	291 45 27.8	S_1	1 628.524
β_2	275 16 43.8	S_2	1 293.480
β_3	128 49 32.3	S_3	1 229.421
β_4	274 57 18.2	S_4	1 511.185
β_5	289 10 52.9		

试求 P_1、P_2 和 P_3 点的坐标平差值及 P_2 点的点位中误差。

解 (1) 列立条件方程式及权函数式

本题中 $n=9$，$t=6$，则共有 $r=9-6=3$ 个条件方程式，其中一个方位角条件，两个坐标条件。为表示方便，把导线点 A、P_1、…、B 依次编号为 1、2、…、5。条件方程式为：

$$\sum_{i=1}^{5} v_{\beta_i}+w_\beta=0$$

$$\sum_{i=1}^{4}\cos T_i v_{S_i}-\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{4}(y_5-y_i)v_{\beta_i}+w_x=0$$

$$\sum_{i=1}^{4}\sin T_i v_{S_i}+\frac{1}{\rho}\sum_{i=1}^{4}(x_5-x_i)v_{\beta_i}+w_y=0$$

式中

$$w_\beta=T_{AB}+\sum_{i=1}^{5}\beta_i-4\times 180^\circ-T_{BA}$$

$$w_x=x_1+\sum\Delta x-x_5$$

$$w_y=y_1+\sum\Delta y-y_5$$

权函数式为：

$$\mathrm{d}\hat{x}_{P_2}=\cos T_{12}\mathrm{d}\hat{S}_1+\cos T_{23}\mathrm{d}\hat{S}_2-\frac{1}{\rho''}(y_3-y_1)\mathrm{d}\hat{\beta}_1-\frac{1}{\rho''}(y_3-y_2)\mathrm{d}\hat{\beta}_2$$

$$\mathrm{d}\hat{y}_{P_2}=\sin T_{12}\mathrm{d}\hat{S}_1+\sin T_{23}\mathrm{d}\hat{S}_2+\frac{1}{\rho''}(x_3-x_1)\mathrm{d}\hat{\beta}_1-\frac{1}{\rho''}(x_3-x_2)\mathrm{d}\hat{\beta}_2$$

为了计算条件式和权函数式的系数，首先计算导线点的近似坐标及导线边的近似方位

角，计算结果见表 6－32。

表 6－32

点号	方位角 /(° ′ ″)	Δx/m	Δy/m	x_i/m	y_i/m
$B(5)$				8 748.155	6 667.647
	229 33 13.4				
$A(1)$				6 556.947	4 101.734
	341 15 41.2	1 542.203	－523.164		
$P_1(2)$				8 099.150	3 578.571
	76 32 25.0	301.073	1 257.953		
$P_2(3)$				8 400.223	4 836.524
	25 21 57.3	1 110.893	526.681		
$P_3(4)$				9 511.116	5 363.205
	120 19 15.5	－762.912	1 304.471		
$B(5)$				8 748.204	6 667.676
	49 30 08.4				
$A(1)$					

(2) 编制条件方程式系数和权函数式系数表

条件方程和权函数系数根据表 6－32 中的数据算得。取单位权中误差为 ±3″，则角度观测值的权均为 1，由 $m_{S_i}=(0.5+0.5\times10^{-6}S_i)$cm 求出 P_S，即 $P_{S_i}=\dfrac{9}{m_{S_i}^2}(s^2\cdot\text{cm}^{-2})$，且取坐标条件的闭合差以 cm 为单位，其系数及闭合差计算结果列于表 6－33。

表 6－33

序号	a_{1i}	a_{2i}	a_{3i}	$f_i^{(1)}$	$f_i^{(2)}$	$\dfrac{1}{P_i}$	v_i	$\hat{L}_i$
	0.090	－2.171	－3.998					
β_1	1	－1.244	1.062	－0.356	0.894	1	－1.45″	174°27′26.4″
β_2	1	－1.498	0.315	－0.610	0.146	1	2.08	275°16′45.9″
β_3	1	－0.888	0.169			1	1.34	128°49′33.6″
β_4	1	－0.632	－0.370			1	2.94	274°57′21.1″
β_5	1					1	0.09	189°10′53.0″
S_1		0.947	－0.321	0.947	0.321	0.192	－0.15 cm	1 628.522 m
S_2		0.233	0.972	0.233	0.972	0.146	－0.64	1 293.474 m
S_3		0.904	0.428			0.138	－0.51	1 229.416 m
S_4		－0.505	0.863			0.175	－0.41	1 511.181 m
w	－5.00″	4.90 cm	2.90 cm					

(3) 组成并解算法方程及其函数，见表 6－34。

表 6－34　法方程未知数及其函数计算表

(5)							k_1	－0.090
(－4.262)	(5.317)	1.684					k_2	－2.171
(1.176)	(－1.757)	－0.755	(1.706)	1.091			k_3	－3.998
(－5.00)	(4.90)	0.638	(2.90)	4.362	(0)	－22.68	←	$V^{\mathrm{T}}PV$
(－0.966)	(1.537)	0.714	(－0.596)	－0.049	(0.679)	0.187	←	$\dfrac{1}{F_{x_2}}$
(1.040)	(－1.239)	－0.353	(1.114)	0.711	(0.978)	0.224	←	$\dfrac{1}{F_{y_2}}$

(4) 求观测值改正数及平差值,计算结果见表 6－33。

(5) 利用平差后的角度和边长及起算数据计算待定点的坐标为

$$x_{P_1}=8\ 099.144\ \text{m},\quad y_{P_1}=3\ 578.557\ \text{m}$$

$$x_{P_2}=8\ 400.213\ \text{m},\quad y_{P_2}=4\ 836.507\ \text{m}$$

$$x_{P_3}=9\ 511.098\ \text{m},\quad y_{P_3}=5\ 363.197\ \text{m}$$

(6) 精度评定

单位权中误差为

$$\sigma_0=\pm\sqrt{\frac{V^{\mathrm{T}}PV}{r}}=\pm\sqrt{\frac{22.68}{3}}=\pm 2.75''$$

P_2 点的点位误差为

$$\sigma_{P_2}=\pm\sqrt{\sigma_{x_{p_2}}^2+\sigma_{y_{p_2}}^2}=\pm\sigma_0\sqrt{\frac{1}{F_{x_2}}+\frac{1}{F_{y_2}}}$$

$$=\pm 2.75\sqrt{0.187+0.224}=\pm 1.76\ \text{cm}$$

主要参考文献

1　纪兴君，夏春林．测量平差．北京：教育科学出版社，2003

2　於宗俦，鲁林成．测量平差基础．北京：测绘出版社，1983

3　高士纯，于正林．测量平差基础习题集，北京：测绘出版社，1983

4　赵长胜，石金峰．测量平差．北京：教育科学出版社，2000

5　武汉测绘科技大学测量平差教研室．测量平差基础．北京：测绘出版社，1996

6　黑志坚，鲍建宽，周秋生等．测量平差．哈尔滨地图出版社，1999

7　刘启沐．测量平差．北京：测绘出版社，1974

8　杨凤翔，陆君良．数值分析．天津：天津大学出版社，1985

9　布耶哈马著．广义测量平差．魏子卿译．北京：测绘出版社，1983

10　李庆海，陶本藻．概率统计原理和在测量中的应用．北京：测绘出版社，1982

11　李德仁．误差处理和可靠性理论．北京：测绘出版社，1988

中国矿业大学（北京）教材编审室策划
全国煤炭高职高专“十一五”规划教材

- 矿山地质系列
- 工程测量系列
- 采矿工程系列
- 矿山机械系列
- 矿山机电系列
- 矿井通风与安全系列
- 矿山电气（自动化）系列
- 建筑工程系列
- 计算机科学系列
- 经济管理系列
- 基础课程系列

地形测量
测量平差
控制测量
工程测量
GPS 测量技术
地籍测量
生产矿井测量
数字化测图
地理信息系统应用
摄影测量与遥感
采煤概论
电子技术

总 策 划：张乃新
丛书策划：刘永清
责任编辑：刘永清
封面设计：雅格工作室

ISBN 978-7-5020-3077-3
9 787502 030773 >
定价：22.00 元