# 绪　言

地下水动力学是研究地下水在孔隙岩石、裂隙岩石和岩溶（喀斯特）岩石中运动规律的科学。它是模拟地下水流基本状态和地下水中溶质运移过程，对地下水从数量上和质量上进行定量评价和合理开发利用，以及兴利妨害的理论基础。

地下水是一种十分宝贵的资源。从人们的日常生活到发展工业、农业，以至国防建设都需要地下水。这里不仅有正确评价水资源、合理布置取水建筑物的问题，还有如何既充分利用水资源又不致引起水资源枯竭、水质恶化的问题；另外，地下水在一定条件下，又可能危及矿床的开采及基坑、水坝的安全，也可使土壤发生次生盐碱化、沼泽化。如何预测未来的矿坑涌水量及土壤中水、盐动态，规划基坑排水、减压，降低坝底扬压力和坝脚地下水逸出速度等是因地制宜地采取有效防治措施的重要依据。

随着生产的发展，还出现了许多与地下水有关的新课题，如在一些集中开采地下水的地区出现的区域性水位下降，部分地区出现地面沉降，海水入侵到正在被利用的含水层，“三废”的大量排放导致地下水受到污染等。这些规模愈来愈大的人为影响，正在使地下水资源在数量上和质量上不断恶化，并引起其它方面的不良后果。我们的任务是根据地下水动力学的理论和方法估计并预测这些影响的规模和速度，以便提出相应的治理措施。此外，含水层正在被当作“贮冷”和“贮热”的地下库，为此需要研究热量的移动问题。

由于地下水运动问题本身的复杂性和受生产力发展水平的限制，尽管人类利用地下水已有几千年的历史，但对地下水运动规律的认识却经历了很长的历史过程。在19世纪以前，还谈不上对地下水进行科学的定量计算。19世纪中叶，随着地下水开发利用规模的扩大，生产中有了计算水井涌水量的要求。达西（Henry Darcy）于1856年通过长期实验得出了水在多孔介质中的渗透定律，即著名的Darcy定律。这个定律是定量认识地下水运动的开始，直到今天仍然是地下水运动理论的基础。接着，J. Dupuit（1863年）以Darcy定律为基础研究了一维稳定流动和向水井的二维稳定运动，以后P. Forchheimer等研究了更复杂的渗流问题，从而奠定了地下水稳定流理论的基础。此后数十年内，地下水动力学一直沿着这条道路前进，对生产实践起过重要作用。直到今天，稳定流理论仍有一定的实用价值。但这种理论不包括时间这个变量，因而不能反映不断发展、变化的地下水实际运动状态，只能用来描述在一定条件下，地下水所达到的一种暂时的相对的平衡状态，具有一定的局限性。这是与当时生产力发展水平相适应的。在开采量不大的情况下，井中水位一般说来很快会出现似稳定状态，因而可以近似地认为地下水不随时间变化，用稳定流理论来描述。

到本世纪20年代末期，美国地下水的开采规模越来越大。地下水的天然状态不断受到破坏，一些地区地下水位出现持续下降，地下水的运动状态表现出明显的随时间变化的特征。于是人们开始注意地下水运动的不稳定性和承压含水层的贮水性质（O. E. Meinzer，1928年）。1935年，C. V. Theis（泰斯）在此基础上提出了地下水流向承压水井的非稳定流公式。Theis公式的出现开创了现代地下水运动理论的新纪元。在Theis公式出现以后的

三四十年内，解非稳定流的解析法得到了很大发展，不仅对 Theis 公式的使用作了各种推广，而且出现了越流理论和潜水含水层中的非稳定流理论。咸-淡水界面的问题、溶质在地下水中运移问题及非饱和带中水分运移问题等逐渐引起人们的注意。但当把解析法应用于大范围的含水层系统时，其局限性马上就暴露出来了，因为实际水文地质条件远较解析法所依据的假设条件（含水层是均质各向同性，形状是规则的）要复杂得多。

为了解决随着地下水开采规模进一步扩大所出现的问题，必须对实际含水层系统进行研究。在 50 年代至 60 年代前期，很多研究人员转向以电网络模拟为代表的模拟技术，到 60 年代初，它已成为解决大范围含水层系统的有力工具。60 年代中期，又出现了与计算机结合的方法。

60 年代后期，随着计算技术的进步，人们开始把数值模拟应用到地下水计算中来。同电网络模拟相比，它迅速显示出巨大的优越性，不仅易于处理电网络模拟不易处理的潜水流问题和无法处理的溶质运移问题，而且其本身又有很大的通用性。因此，目前在发达国家，数值模拟已完全代替了电网络模拟，后者逐渐被淘汰了。数值方法不仅可以有效地解决地下水流问题，还能解决污染物在地下水中的运移问题、咸-淡水分界面移动问题及地下水的最优管理问题等。总之，近 20 多年来，随着计算机和计算技术的进步，人们在分析地下水问题的能力上有了突破性的进展。

一百多年来，解地下水运动问题的解析法有了很大发展。目前，解析法主要有分离变量法、积分变换法（Laplace 变换、Hankel 变换、Fourier 变换）、保角映射法、速端曲线法、Green 函数法和其他方法（如镜象法、Boltzmann 变换等）。它们分别适合于解不同类型的问题。例如 Hankel 变换对解径向流问题很有用；而解二维稳定渗流问题，保角映射法相当有用。作为保角映射法的一种特殊情况的速端曲线法，对处理边界有渗出面或自由面的问题特别有用。数值法也发展了多种方法。事实上，在解地下水流问题中，应用数值法所显示出来的计算能力已远远超过我们为此搜集计算机输入所需野外资料的能力。

近十多年来，介质非均质性的研究逐渐引起人们的重视，并取得长足进步，如研究尺度对介质参数的影响等。人们逐渐认识到，不仅弥散度是尺度的函数，渗透系数也是尺度的函数。因此，它们在一定范围内还会随时间变化。从而把地质统计学引入到地下水动力学研究中来。

一百多年来，尽管地下水动力学有了很大发展，但还有不少薄弱环节。随着人类活动的加强，出现了许多有关地下水运动方面的新的课题。预计今后的研究将着重突破这些薄弱环节和新课题上。其中主要有：地下水在裂隙介质、岩溶介质中运动机制和基本运动规律的研究，非饱和带水、盐运动理论的研究，水中溶质运动机制和运移理论的研究，热量在地下水中运移的研究，地下水最优管理问题的研究和介质非均质性研究等。除了继续加强解析法的研究外，对有效地解决各种实际渗流问题的数值模拟方法进行研究将是一个主要的方面。随机理论还会进一步引入到水流和溶质运移研究中来。此外，一些理论问题，如在含多组分溶质的水流中，Darcy 定律的形式需要怎么修改等正引起人们的注意。

# 第一章　渗流理论基础

## §1—1　渗流的基本概念

### 一、地下水在含水岩石中的运动

在地下水动力学中，把具有孔隙的岩石称为多孔介质。含有孔隙水的岩层，如砂层或疏松砂岩等称为孔隙介质，也称多孔介质。含裂隙水的岩石，如裂隙发育的石英岩、花岗岩等称为裂隙介质。广义地说，可以把孔隙介质、裂隙介质和某些岩溶不十分发育的由石灰岩和白云岩组成的介质都称为多孔介质。

在多孔介质中，固、液、气三相都可能存在。固相的称为骨架。气相的空气主要存在于非饱和带中。液相的地下水可能以吸着水、薄膜水、毛管水和重力水等多种形式存在。吸着水和薄膜水的运动属于专门课题，本书不涉及。本书主要研究重力水的运动。

地下水在多孔介质中的运动非常复杂，大致可归纳为二类：一类为地下水沿多孔介质的孔隙或遍布于介质中的裂隙运动，即地下水在广义的多孔介质中的运动。另一类为地下水沿大裂隙和管道的流动，如岩溶区的地下暗河或地下水沿巨大的张开裂隙的流动。这种运动的特点是水流集中，且在相当大的范围内只有一个或几个大裂隙和管道，流量大，水流孤立，一般和别的裂隙或管道联系不密切。在这种情况下，人们关心的是在这种单个裂隙或管道中的地下水运动的计算。

### 二、地下水和多孔介质的性质

研究地下水在多孔介质中的运动，有必要先对水和多孔介质的基本性质作些了解。关于水的动力性质，在水力学基础中已经谈过，这里只介绍水的状态方程和多孔介质的一些性质。

1. 地下水的状态方程

在水力学基础中曾提到，在等温条件下，水的压缩系数为：

$$\beta = -\frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p}$$

设初始压强 $p_0$ 时，水的体积为 $V_0$，当压强变到 $p$ 时，体积变为 $V$，由上式得：

$$\int_{V_0}^{V}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -\beta\int_{p_0}^{p}\mathrm{d}p$$

积分得：

$$\frac{V}{V_0} = \mathrm{e}^{-\beta(p-p_0)}$$

改写上式，便得如下的状态方程：

$$V = V_0\,\mathrm{e}^{-\beta(p-p_0)} \tag{1—1}$$

同理可得：

$$\rho = \rho_0 e^{\beta(p-p_0)} \tag{1—2}$$

将式（1—1）和（1—2）中的指数项用 Taylor 级数展开，当压强变化不大时，因 $\beta(p-p_0)$ 的数值小，可以忽略级数的高次项，得到如下的状态方程的近似表达式：

$$V = V_0[1-\beta(p-p_0)] \tag{1—3}$$

和

$$\beta = \rho_0[1+\beta(p-p_0)] \tag{1—4}$$

此外，还可导出密度变化和压强变化之间的关系式。因为密度 $\rho$ 和液体体积 $V$ 的乘积为常数，故有：

$$d(\rho V) = \rho dV - V d\rho = 0$$

由此得：

$$d\rho = -\rho\frac{dV}{V} = \rho\beta dp \tag{1—5}$$

2. 多孔介质的某些性质

（1）多孔介质的孔隙性

多孔介质的孔隙度是指孔隙体积和多孔介质总体积之比。这里的孔隙体积 $V_V$ 是指孔隙的总体积，不管这些孔隙是否对地下水运动有意义。但从地下水运动的角度来看，只有那些相互连通的孔隙才是有意义的。对于细粒土，如一些粘性土，因为颗粒表面的结合水占据了相当一部分孔隙空间，所以对地下水运动有效的孔隙要比总的孔隙为少。我们把互相连通的、不为结合水所占据的那一部分孔隙称为有效孔隙。有效孔隙体积与多孔介质总体积之比称为有效孔隙度 $n_e$，即：

$$n_e = \frac{(V_V)_e}{V_b} \tag{1—6}$$

式中，$(V_V)_e$ 为有效孔隙体积，$V_b$ 为多孔介质的总体积。在本书以后的叙述中，孔隙度都是指有效孔隙度。

还有一种特殊类型的孔隙，称为死端孔隙。它有一端与其它孔隙连通，另一端是封闭的（图 1—1），其中的地下水是相对停滞的。从地下水运动的角度来说，这种孔隙是无效的。但其中的水在疏干时能排出，对于排水来说是有效的。因此，严格说来，研究地下水运动时所指的有效孔隙度和研究排水时所指的有效孔隙度（即给水度）是不完全相同的。

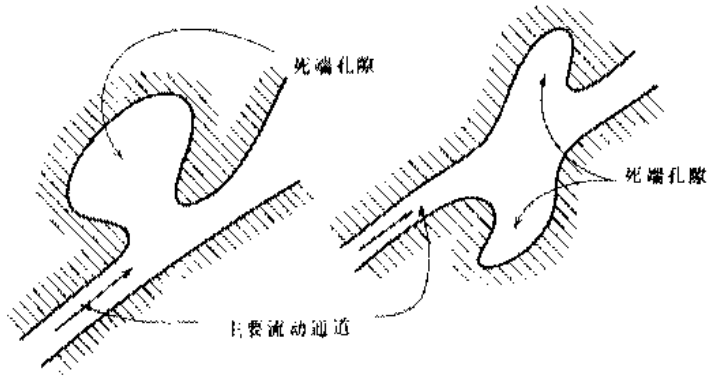



图 1—1　死端孔隙示意图

（据 J. Bear）

(2) 多孔介质的压缩性

在天然条件下，一定深度处的多孔介质。要受到上覆岩层荷重的压力。设作用在该介质表面的压强为 $\delta$；如果压强 $\delta$ 增加，要引起多孔介质的压缩。和水的压缩系数 $\beta$ 类似，多孔介质压缩系数 $\alpha$ 的表达式为：

$$\alpha = -\frac{1}{V_b}\frac{dV_b}{d\delta} \tag{1-7}$$

式中，$V_b = V_s + V_v$ 为多孔介质中所取单元体的总体积。$V_s$ 是单元体中固体骨架体积，而 $V_v$ 为其中的孔隙体积，故：

$$\frac{dV_b}{d\delta} = \frac{dV_s}{d\delta} + \frac{dV_v}{d\delta}$$

而

$$V_s = (1-n)V_b, V_v = nV_b$$

将其代入式（1—7）中，有：

$$\alpha = -\frac{1}{V_b}\frac{dV_s}{d\delta} - \frac{1}{V_b}\frac{dV_v}{d\delta} = -\frac{1-n}{V_s}\frac{dV_s}{d\delta} - \frac{n}{V_v}\frac{dV_v}{d\delta}$$

令 $\alpha_s = -\frac{1}{V_s}\frac{dV_s}{d\delta}$，称为多孔介质固体颗粒压缩系数，表示固体颗粒本身的压缩性；$\alpha_p = -\frac{1}{V_v}\cdot\frac{dV_v}{d\delta}$，称为孔隙压缩系数，表示孔隙的压缩性，则：

$$\alpha = (1-n)\alpha_s + n\alpha_p \tag{1-8}$$

固体骨架本身的压缩性要比孔隙的压缩性小得多，即 $(1-n)\alpha_s \ll \alpha$，故有：

$$\alpha \approx n\alpha_p \tag{1-9}$$

## 三、贮水率和贮水系数

下面考虑一下实际承压含水层的受力情况。为简化讨论，假设含水砂层的颗粒之间没有粘聚力。在含水层中切一水平的横截面，面积为 $A$。在这个面积中，有 $\lambda A$ 的面积为颗粒与颗粒相接触，$(1-\lambda)A$ 为水和颗粒相接触（图 1—2）。若设 $A=1$，按 Terzaghi 的观点，

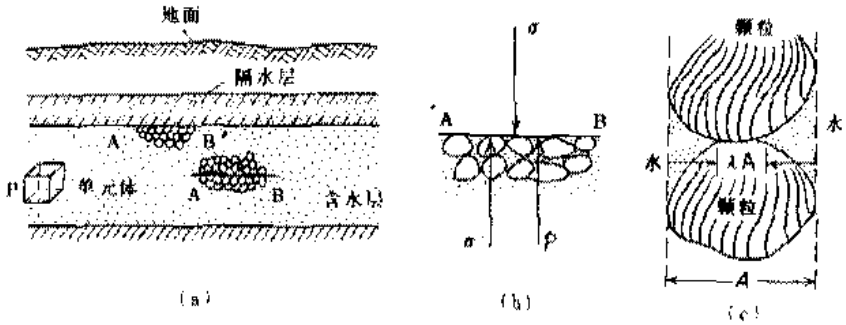



图 1—2 一个可压缩的承压含水层

（据 J. Bear）

作用在该平面上的上覆荷重分别由颗粒（固体骨架）和水承担，即：

$$\sigma = \lambda\sigma_s + (1-\lambda)p \tag{1-10}$$

式中，$\sigma$ 为上覆荷重引起的总应力；$\sigma_s$ 为作用在固体颗粒上的粒间应力；$p$ 为水的压强。

Terzaghi 令 $\lambda\sigma_s = \sigma'$，称为有效应力。因为实际上 $\lambda$ 值非常小，$(1-\lambda)p \approx p$，于是式

(1—10) 变为：

$$\sigma = \sigma' + p \tag{1—11}$$

根据 Newton 第三定律，作用力和反作用力相等。在天然状态下，上覆荷重与颗粒的反作用力及水压力相平衡。如在承压含水层中抽水，水头下降 $\Delta H$，即水的反作用力减少了 $\gamma\Delta H = \rho g\Delta H$，但上覆荷重不变，于是有：

$$\sigma = (p - \gamma\Delta H) + (\sigma' + \gamma\Delta H)$$

即作用于固体骨架上的力增加了 $\gamma\Delta H$。作用于骨架上力的增加会引起含水层的压缩，而水压力的减少将导致水的膨胀。含水层本来就充满了水，骨架的压缩和水的膨胀都会引起水从含水层中释出，前者就象用手挤压充满了水的海绵会挤出水一样。

但在含水层压缩过程中，可以认为固体颗粒体积的压缩可以忽略不计，即 $(1-n)V_b$ = 常数。故有：

$$\mathrm{d}[(1-n)V_b] = \mathrm{d}V_b - n\mathrm{d}V_b - V_b\mathrm{d}n = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}V_b}{V_b} = \frac{\mathrm{d}n}{1-n}$$

但含水层压缩时侧向受到限制，只有垂直方向上有压缩，故

$$\frac{\mathrm{d}V_b}{V_b} = \frac{\mathrm{d}(\Delta z)}{\Delta z}$$

将 (1—7) 式代入，并考虑到有效应力的变化 $\mathrm{d}\sigma'$ 和水的压强变化 $\mathrm{d}p$ 大小相等，方向相反，故有：

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{\mathrm{d}n}{1-n} = -\alpha\mathrm{d}\sigma' = \alpha\mathrm{d}p$$

得：

$$\mathrm{d}(\Delta z) = \Delta z\alpha\mathrm{d}p \tag{1—12}$$

$$\mathrm{d}n = (1-n)\alpha\mathrm{d}p \tag{1—13}$$

式 (1—12)、(1—13) 展示了垂直方向厚度变化或孔隙度变化和水的压强变化之间的关系。

为了讨论水头降低时含水层释出水的特征，我们取面积为 $1\mathrm{m}^2$、厚度为 1m（即体积为 $1\mathrm{m}^3$）的含水层，考察当水头下降 1m 时释放的水量。此时，有效应力增加了 $\gamma\Delta H = \rho g \times 1 = \rho g$。由介质压缩系数的定义可知，相应的含水层的体积变化为：

$$-\mathrm{d}V_b = \alpha \cdot V_b \cdot \mathrm{d}p = \alpha \cdot 1 \cdot \rho g = \alpha\rho g$$

负号表示体积减小。同时水压强变化了 $-\gamma\Delta H = -\rho g$，由水的体积压缩系数的定义可知，相应的水体积的变化为：

$$\mathrm{d}V = -\beta V \cdot \mathrm{d}p = -\beta n(-\rho g) = n\beta\rho g$$

正号表示水体积的膨胀。二者之和表示面积为 1 个单位、厚度为 1 个单位的含水层，当水头降低 1 个单位时所能释出的水量，用符号 $\mu_s$ 表示，即：

$$\mu_s = -\mathrm{d}V_b + \mathrm{d}V = \alpha\rho g + n\beta\rho g$$

或

$$\mu_s = \rho g(\alpha + n\beta) \tag{1—14}$$

式中，$\mu_s$ 称为贮水率或释水率。其量纲为 $[L^{-1}]$。上述由于水头降低引起的含水层释水现象称为弹性释水。相反，当水头升高时，会发生弹性贮存过程。把贮水率乘上含水层厚度

$M$，称为贮水系数或释水系数，即 $\mu^* = \mu_s M$。它表示在面积为 1 个单位、厚度为含水层全厚度 $M$ 的含水层柱体中，当水头改变一个单位时弹性释放或贮存的水量，无量纲。

贮水系数 $\mu^*$ 和贮水率 $\mu_s$ 都是表示含水层弹性释水能力的参数，在地下水动力学计算中具有重要的意义。对于承压含水层，只要水头不降低到隔水顶板以下，水头降低只引起含水层的弹性释水，可用贮水系数 $\mu^*$ 表示这种释水的能力〔图 1—3 (a)〕。对于潜水含水层，当水头下降时，可引起二部分水的排出。在上部潜水面下降部位引起重力排水，用给水度 $\mu$ 表示重力排水的能力〔图 1—3 (b)〕；在下部饱水部分则引起弹性释水，用贮水率 $\mu_s$ 表示这一部分的释水能力。

某些文献指出，大部分承压含水层的贮水系数在 $10^{-2}$ 到 $10^{-5}$ 之间（Marsily 认为，大约在 $5\times10^{-2}$ 到 $10^{-5}$ 之间）。潜水含水层的给水度值一般为 0.05～0.25。砂质潜水含水层贮水率的数量级是 $10^{-5}cm^{-1}$。由此可知，潜水含水层的重力释水量要比弹性释水量大几个数量级。因此，在某些潜水计算中，可忽略弹性释水量，只考虑重力释水量。

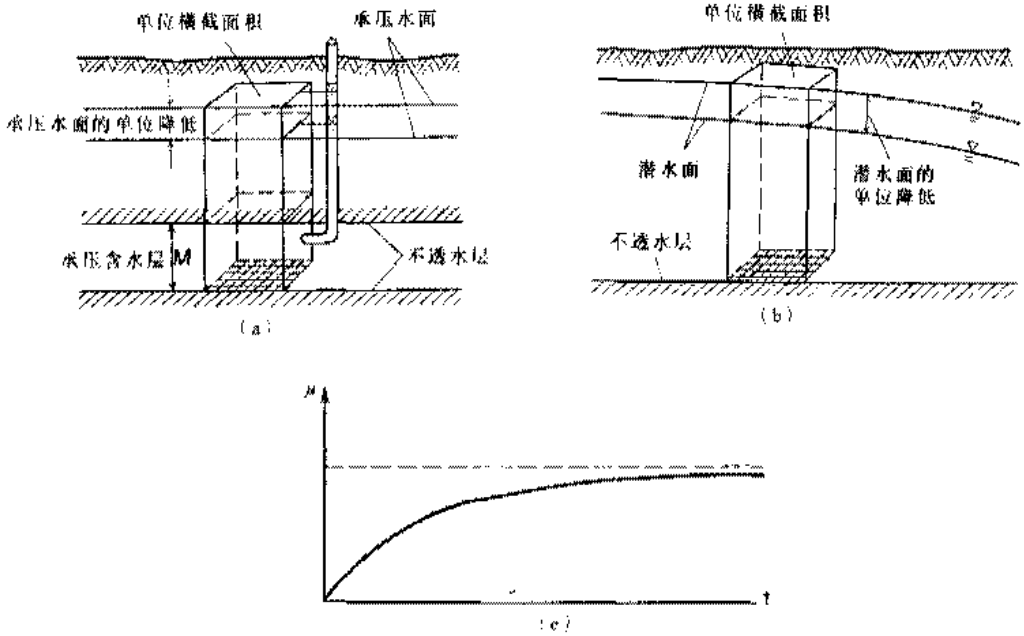



图 1—3　含水层贮水性示意图

（据 J. Bear）

(a) —承压含水层；(b) —潜水含水层；(c) —给水度随时间变化图

必须区别弹性释水和重力排水的不同特点。潜水含水层被疏干时，大部分水是在重力作用下排出的。因疏干不仅限于水位变动带，故给水度值不仅与这个带的岩性有关，而且还与包气带排水部分的岩性有关。承压含水层则是减压造成的弹性释放，故贮水系数值应与整个含水层和水的弹性性质有关。一般假设弹性释放是在瞬时完成的，并假设 $\mu^*$ 不随时间变化。潜水含水层的重力疏干则不同，地下水位下降所引起的水量释放有一个过程。当含水层水位下降较快时，由于饱水带中水分的运动滞后于地下水位的降落速度，因而被疏干部分所含的水不是随着地下水位的下降同时排出的。在较短的时间内，从土层中释放出

的水量远小于土层被疏干后全部释放的水量，存在着滞后疏干现象，即随着排水时间的长短不同，测出的给水度值也不同。当水位急剧下降时，上述现象更为明显。给水度为时间的函数。排水时间越长，给水度越大，并逐渐趋近于一个固定值〔图 1—3 (c)〕。一般教科书上所指的给水度就是指重力排水结束时所测得的给水度值。在实际工作中，由于排水时间不够长，测出的给水度值往往小于书本上所给出的值。

**四、渗流**

前面谈到，地下水是沿着一些形状不一、大小各异、弯弯曲曲的通道流动的〔如图 1—4 (a) 所示〕。因此，研究个别孔隙或裂隙中地下水的运动很困难，实际上也无此必要。因此，人们不去直接研究单个地下水质点的运动特征，而研究具有平均性质的渗透规律。

实际的地下水流仅存在于空隙空间。为了便于研究，我们用一种假想水流来代替真实的地下水流。这种假想水流的性质（如密度、粘滞性等）和真实地下水相同；但它充满了既包括含水层空隙的空间，也包括岩石颗粒所占据的空间。同时，假设这种假想水流运动时，在任意岩石体积内所受的阻力等于真实水流所受的阻力；通过任一断面的流量及任一点的压力或水头均和实际水流相同（以后将定义一个点的压力、水头等）。这种假想水流称为渗流。假想水流所占据的空间区或称为渗流区域渗流场。显然，渗流区包括空隙和岩石颗粒所占据的全部空间〔图 1—4 (b)〕。

这样做的优点是可以把实际上并不处处连续的水流当作连续水流来研究，以便有可能利用现有水力学和流体力学的成果。研究时，既避开了研究个别空隙中液体质点运动的困难，而得到的流量、阻力和水头等，又和实际水流相同，满足了实际需要。

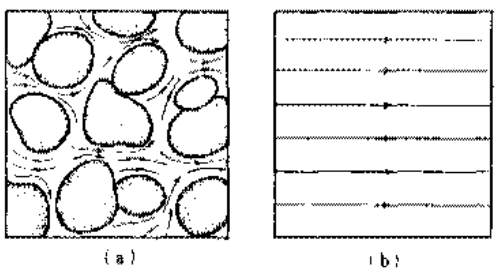



图 1—4　岩石中的地下水流
(a) —实际渗透；(b) —假想渗流

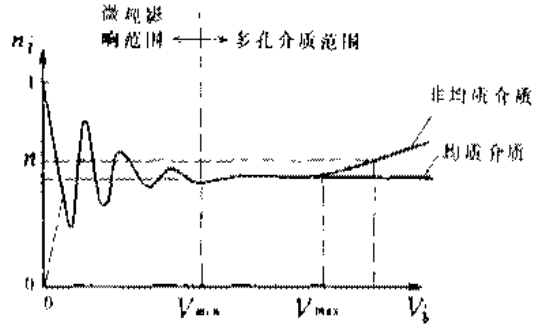



图 1—5　孔隙度随体积变化曲线
(据 J. Bear)

如上述，在渗流研究中，要牵涉到某一点的物理量，如某一点的孔隙度、压力、水头等。对于一个真实的连续水流，如河水，某一点的压力、水头、速度等的物理含义很明确。但对多孔介质则不然。例如孔隙度 $n$，如果在固体骨架上，显然 $n=0$；而在孔隙中，则 $n=1$，就变得不连续了。为了对多孔介质中地下水运动作连续性近似，引进了“典型单元体”（简写为 REV）的概念。仍以孔隙度作为例子。设 $p$ 为多孔介质中的一个数学点，它可能落在孔隙中，也可能落在固体骨架上。以 $p$ 为中心，任取一体积 $V_i$，求出其孔隙度 $n_i$，当所取体积 $V_i$ 大小不同时，孔隙度 $n_i$ 的值可能有变化；以 $p$ 点为中心取一系列不同大小的体积 $V_i$ ($i=1, 2, \cdots, N$)，相应地得到一系列的孔隙度 $n_i$ ($i=1, 2, \cdots, N$)。作 $n_i$ 和 $V_i$ 的

关系曲线，如图 1—5 所示。从图中可以看出，当 $V_i$ 小于某一数值 $V_{min}$（该值大致接近于单个孔隙的大小）时，孔隙度 $n_i$ 值突然出现大的波动，而且波动愈来愈大；当 $V_i$ 趋近于零时，孔隙度或为 1，或为零。当体积 $V_i$ 增大到某一个值 $V_{max}$ 时，若多孔介质为非均质的，则孔隙度 $n_i$ 会发生明显变化。但当体积 $V_i$ 大小在 $V_{min}$ 和 $V_{max}$ 之间时，孔隙度 $n_i$ 值的波动消失，只有由 $p$ 点周围孔隙大小的随机分布所引起的小振幅波动。我们把该范围内的体积称为“典型单元体积”，记为 $V_0$（$V_{min}<V_0<V_{max}$）。将以 $p$ 为中心的典型单元体的孔隙度，定义为 $p$ 点的孔隙度。同理，$p$ 点的其它物理量，无论是标量还是矢量，也用以 $p$ 点为中心的典型单元体内该物理量的平均值来定义。

**五、渗流速度**

先讨论一般的情况。前面已提到，渗流是充满整个岩石截面的假想水流。在垂直于渗流方向取的一个岩石截面，称为过水断面。这里的过水断面的概念与水力学中过水断面的概念是有差别的。地下水的过水断面是整个岩石截面，既包括空隙面积也包括固体颗粒所占据的面积。当渗流平行流动时，过水断面为平面，弯曲流动时则为曲面（图 1—6）。

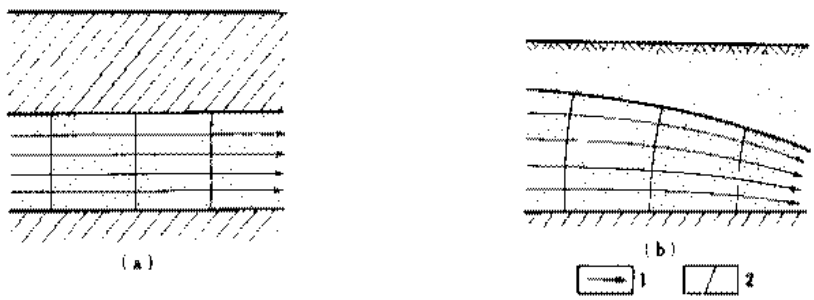



图 1—6　渗流过水断面

1—渗流方向（流线）；2—过水断面

设通过过水断面 $A$ 有一个渗流量 $Q$，则溶流速度（或称渗透速度，比流量）为：

$$v = \frac{Q}{A} \tag{1—15}$$

渗流速度代表渗流在过水断面上的平均流速。它不代表任何真实水流的速度，只是一种假想速度。假设整个过水断面都被水充满时，地下水就以这种速度流动。实际上，地下水仅仅在空隙中流动。在空隙中的不同地点，地下水运动的方向和速度都可能不同，平均速度 $\bar{u}$ 称为实际平均流速。速度 $v$ 和地下水的实际平均流速 $\bar{u}$ 之间有下列关系：

$$v = n\bar{u} \tag{1—16}$$

式中，$n$ 为含水层的空隙度。和通常的流速相似，渗流速度 $v$ 也是一个矢量。

仅仅这样定义渗流速度是不够的。我们还要知道某一点 $p$ 的渗流速度。某一点 $p$ 的渗流速度就是以 $p$ 点为中心的典型单元体积的平均渗流速度矢量。设 REV 的体积为 $\Delta V_0$，其中的空隙体积为 $(\Delta V_v)_0$。在空隙中的不同地点，流速矢量 $u$ 是不同的，将流速矢量 $u$ 在全部空隙体积 $(\Delta V_v)_0$ 中求积分，再除以典型单元体积 $\Delta V_0$，即为渗流速度，即：

$$v = \frac{1}{\Delta V_0}\int_{(\Delta V_v)_0} u\mathrm{d}V_v \tag{1—17}$$

因为实际平均流速 $\bar{u}$ 为：

$$\bar{u}=\frac{1}{(\Delta V_v)_0}\int_{(\Delta V_v)_0}u\mathrm{d}V_v \tag{1—18}$$

故

$$v=\frac{(\Delta V_v)_0}{\Delta V_0}\frac{1}{(\Delta V_v)_0}\int_{(\Delta V_v)_0}u\mathrm{d}V_v=n\bar{u}$$

说明在微观情况下，式（1—16）仍然成立。

**六、地下水的水头和水力坡度**

1. 地下水的水头

在《水力学基础》中我们已经讨论了水头的概念。测压管水头为：

$$H_p=z+\frac{p}{\gamma} \tag{1—19}$$

总水头为测压管水头和流速水头之和，即

$$H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{u^2}{2g} \tag{1—20}$$

但因自然界中地下水的运动很缓慢，流速水头很小、可以忽略不计。例如，当地下水流速 $u=1\mathrm{cm/s}=864\mathrm{m/d}$ 时（这对地下水来说已经是很快的运动速度了），流速水头仅仅为 0.0005cm 左右，比测压管水头少几个数量级，显然可以忽略不计。因此，在地下水运动计算中，可以认为总水头 $H$ 等于测压管水头 $H_p$，即：

$$H\approx H_p=z+\frac{p}{\gamma}=z+\frac{p}{\rho g} \tag{1—21}$$

在本书的以后的叙述中，不再对二者加以区别，统称水头，用 $H$ 表示。

水头 $H$ 的绝对值的大小，随所选取的基准面的不同而不同。显然，当选取的基准面不同时，有不同的位置水头 $z$ 值，因而测压管水头也就不同。

2. 等水头面和水力坡度

地下水具有粘滞性，在运动过程中能量不断消耗，反映为水头沿流程不断减小。因而在渗流场中各点的水头并不都是相同的。我们把渗流场内水头值相同的各点连成一个面，称为等水头面。它可以是平面 或曲面。等水头面上任意一条线上的水头都是相等的。通常将等水头面与某一平面的交线，称为等水头线。等水头面（线）在渗流场中是连续的，并且不同数值的等水头面（线）不会相交。

渗流场中各点水头一般是不等的，可表示为 $H=H(x,y,z,t)$，它构成一个标量场。由场论可知，标量场可构成一个梯度场。梯度的大小为 $\left|\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}n}\right|$，方向为沿着等水头面的法线、即水头变化率最大的方向。正向为指向水头增高的方向。在地下水动力学中，把大小等于梯度值，方向沿着等水头面的法线指向水头降低方向的矢量称为水力坡度，用 $\boldsymbol{J}$ 表示，即

$$\boldsymbol{J}=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}n}\boldsymbol{n} \tag{1—22}$$

式中，$\boldsymbol{n}$ 为法线方向单位矢量。矢量 $\boldsymbol{J}$ 在空间直角坐标系中的三个分量为：

$$J_x=-\frac{\partial H}{\partial x};J_y=-\frac{\partial H}{\partial y};J_z=-\frac{\partial H}{\partial z} \tag{1—23}$$

**七、地下水运动特征的分类**

为了便于对地下水运动进行研究，可以用不同的标准对地下水运动特征进行分类。

表征渗流运动特征的物理量称为渗流的运动要素。主要有渗流量 $Q$，渗流速度 $v$，压强 $p$，水头 $H$ 等。按照这些运动要素和时间的关系，可把地下水的运动分为稳定运动和非稳定运动。必须指出，地下水不断地得到补给、排泄，严格地说来，运动都是非稳定的。稳定运动只是一种暂时的平衡状态。

根据地下水运动方向（即渗透流速矢量的方向）与空间坐标轴的关系，可把地下水分为一维运动，二维运动和三维运动。

当地下水沿一个方向流动时，把这个方向取作坐标轴，因而地下水的渗透流速只有沿这一坐标轴的方向有分速度，其余坐标轴方向的分速度均为零。这类运动称为地下水的一维运动，如等厚的承压含水层中的地下水运动（图 1—7）。一维运动也称单向运动。

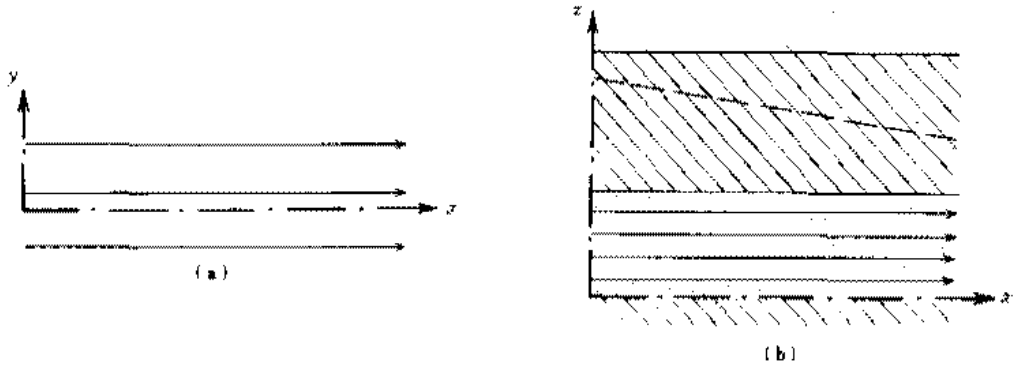



图 1—7　承压水的一维流动

(a)—平面图；(b)—剖面图

如果地下水的渗透流速沿二个坐标轴方向都有分速度，仅仅一个坐标轴方向的分速度为零，则称为地下水的二维运动，如图 1—8 的渠道向河流渗漏时的地下水运动。此时，河、渠几乎平行，而且很长。垂直渠、河方向发生渗漏，因而沿 $y$ 轴方向的分速度等于零。直角坐标系的二维运动也称平面流动。因为此时的地下水流动是平行于某一垂直平面或水平平面进行的，计算时只要沿垂直于该平面的方向（图上为 $y$ 轴方向）取单位宽度即可。单位宽度的渗流量称为单宽流量 $q$。显然，总流量 $Q$ 等于单宽流量 $q$ 乘上宽度 $B$，即：

$$Q = qB \tag{1—24}$$

本书的后面部分，如无特别声明，对于平面流动均按单位宽度进行计算。

如果地下水的渗透流速沿空间三个坐标轴的分量均不等于零，则称为地下水的三维运动，多数的地下水运动都是三维运动，也称空间流动，如图 1—9 河弯处的潜水运动。

地下水运动的维数，和所选取的坐标系有关。例如在轴对称条件下，如选用直角坐标系（$x$、$y$、$z$ 坐标系），则为三维运动。如选用柱坐标系（$r$、$\theta$、$z$ 坐标系）则变为二维运动（图 1—10）。

**八、地下水流态的判别**

地下水的运动有层流和紊流两种状态（图 1—11）。判别地下水流态的方法有多种，但常用的还是用 Reynolds 数来判别，不同研究者导出的 Reynolds 数的表达式不同。

最常用的为：

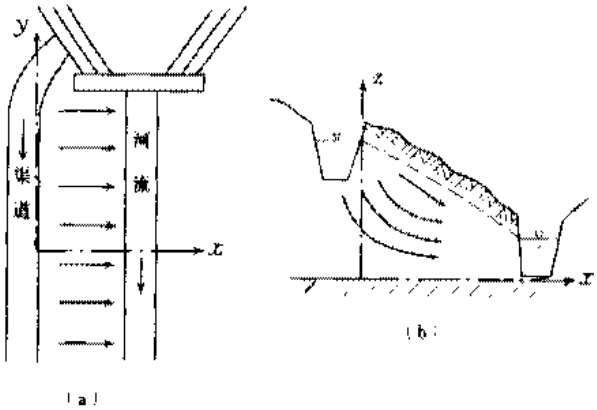



图 1—8　渠道向河流渗漏的地下水二维流动

(a) —平面图；(b) —剖面图

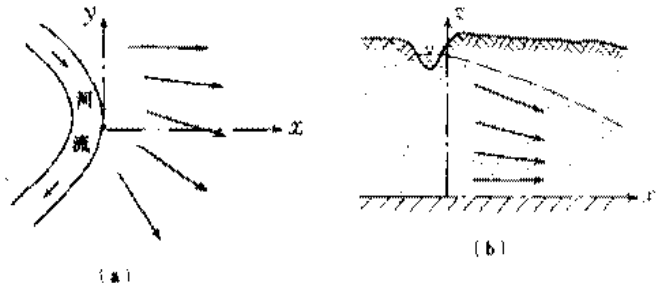



图 1—9　河弯处潜水的三维运动

(a) —平面图；(b) —剖面图

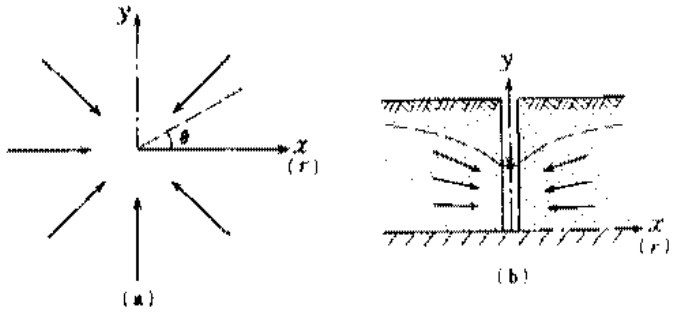



图 1—10　均质各向同性含水层中潜水井抽水时的地下水运动

(a) —平面图；(b) —剖面图

$$Re = \frac{vd}{\nu} \tag{1—25}$$

式中，$v$ 为地下水的渗流速度；$d$ 为含水层颗粒的平均粒径；$\nu$ 为地下水的运动粘度（即粘滞系数）。如果求得的 Reynolds 数小于临界 Reynolds 数，则地下水处于层流状态；若大于临界 Reynolds 数则为紊流状态。对于地下水，用实验方法求临界 Reynolds 数比较困难，不

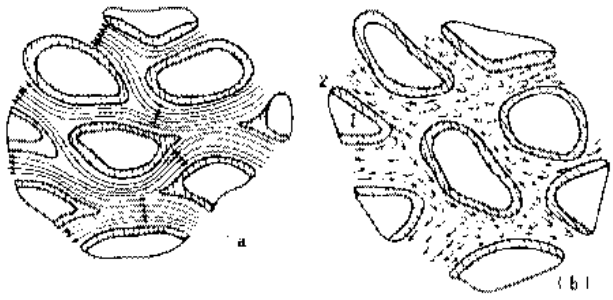


图 1—11　孔隙岩石中地下水的层流和紊流

(a) —层流；(b) —紊流

1—固体颗粒；2—结合水

(箭头表示水流运动方向)

同研究者的结果也不尽相同。有些研究者求得的该值为 150～300。

对于水在裂隙中的流动，Г. М. Ломизе（罗米捷）提出应根据水力坡度判别流动状态。他根据大量实验，得到不同的裂隙宽度 $b$ 和裂隙相对粗糙度 $a=\frac{\Delta}{b}$（$\Delta$ 为裂隙的绝对粗糙度）时的水力坡度值，见表 1—1。

**表 1—1　临界水力坡度表**

(据 Г. М. Ломизе)

| 临界水力坡度 / 相对粗糙度 $a$ / 裂隙宽度 $b$ / cm | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.520 | 1.455 | 1.354 | 1.299 | 1.228 | 1.118 |
| 0.2 | 0.315 | 0.182 | 0.169 | 0.161 | 0.153 | 0.139 |
| 0.3 | 0.093 | 0.054 | 0.050 | 0.048 | 0.045 | 0.041 |
| 0.4 | 0.039 | 0.023 | 0.021 | 0.020 | 0.019 | 0.017 |
| 0.5 | 0.020 | 0.012 | 0.011 | 0.010 | 0.010 | 0.009 |

天然孔隙含水层中地下水流的 Reynolds 数和裂隙中地下水流的水力坡度，远小于临界 Reynolds 数和临界水力坡度。因此，天然地下水多处于层流状态。

**思考题：**

1. 试把渗流和空隙中的真实水流进行对比，看看其流量、水头、过水断面、流速大小和水流运动方向有何不同？并说明两者之间的关系，并列表表示之。

2. 地下水能从压力小处向压力大处运动吗？为什么？

## §1—2 渗流基本定律

### 一、Darcy 定律及其适用范围

1856 年，法国的 H. Darcy 在装满砂的圆筒中（图 1—12）进行实验，得到如下关系式：

$$Q = KA\frac{H_1 - H_2}{l} \tag{1—26}$$

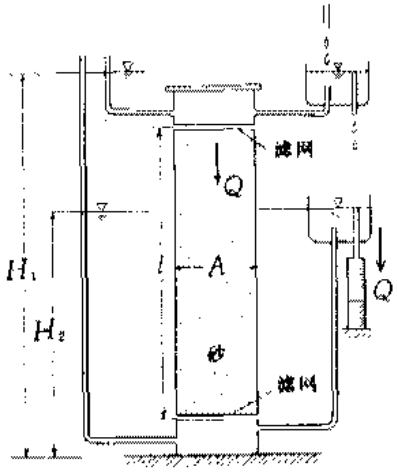



图 1—12 Darcy 实验装置

式中，$Q$ 为渗流量；$H_1$ 和 $H_2$ 为通过砂样前后的水头；$l$ 为砂样沿水流方向的长度；$A$ 为试验圆筒的横截面积，包括砂粒和孔隙二部分面积在内；$K$ 为比例系数，称为渗透系数。

上式中的 $\frac{H_1 - H_2}{l}$，即水力坡度 $J$，故可改写为：

$$v = \frac{Q}{A} = KJ \tag{1—27}$$

上述两个关系式称为 Darcy 定律。它指出渗流速度 $v$ 与水力坡度 $J$ 成线性关系，故又称线性渗透定律。

在 Darcy 实验中，地下水做一维的均匀运动，即渗流速度和水力坡度的大小和方向沿流程不变。我们把它推广到更一般的三维情况，写出 Darcy 定律的微分形式：

$$v = KJ = -K\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}S} \tag{1—28}$$

式中，$-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}S}$ 为水力坡度。在直角坐标系中，如以 $v_x$、$v_y$、$v_z$ 表示沿三个坐标轴方向的渗流速度分量，则有：

$$v_x = -K\frac{\partial H}{\partial x};\ v_y = -K\frac{\partial H}{\partial y};\ v_z = -K\frac{\partial H}{\partial z} \tag{1—29}$$

知道水头函数 $H(x, y, z)$，就可由（1—29）式算出渗流区中任一点的渗流速度矢量 $\boldsymbol{v}$：

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \tag{1—30}$$

式中，$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为三个坐标轴上的单位矢量。它给出了渗流速度场与水头场之间的关系。

Darcy 定律有一定的适用范围。超出这个范围地下水的运动不再符合 Darcy 定律。我们先讨论 Darcy 定律适用的上限。如果作渗流速度 $v$ 和水力坡度 $J$ 的关系曲线（如图 1—13 所示），若符合 Darcy 定律则为直线。直线的斜率为渗透系数的倒数。但图上的曲线表明，只有当按（1—25）式计算的 Reynolds 数不超过 1～10 时，地下水的运动才符合 Darcy 定律。读者可能注意到，在上一节中我们提到层流的临界 Reynolds 数为 150～300，它比上述 Reynolds 数的数值要大，即层流范围大，但适用 Darcy 定律的范围小，在两者之间为由层流向紊流转变的过渡带。一般用惯性力的影响来解释这一现象。由于地下水沿着弯弯曲曲的途径运动，并且在不断地改变它的运动速度、加速度和流动方向，这种变动有时很剧烈，因而产生惯性力的影响，使水流的运动不服从 Darcy 定律。地下水流动方向和流速变化取决于孔隙或裂隙通道在空间的弯曲率以及通道横断面积的变化情况。当地下水运动速度较

小时，这些惯性力的影响是不大的，有时是微不足道的。这时由液体粘滞性产生的摩擦阻力对水流运动的影响远远超过惯性力对它的影响，粘滞力占优势，液体运动服从 Darcy 定律。随着运动速度的加快，惯性力也相应地增大了。当惯性力占优势的时候，由于惯性力与速度的平方成正比，Darcy 定律就不再适用了。这时地下水的运动仍然属于层流运动。因此，不要把这种偏离 Darcy 定律的情况和层流向紊流的转变等同起来。

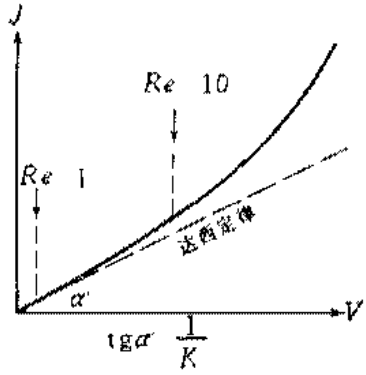



图 1—13 渗透速度和水力坡度的实验关系
（据 J. Bear）

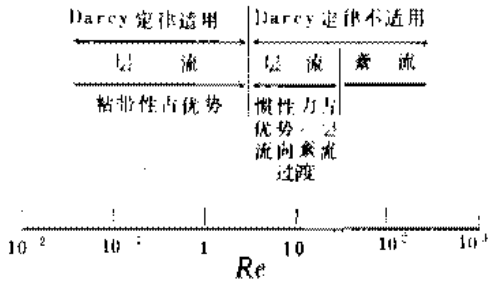



图 1—14 多孔介质中的水流状态

因此，当渗流速度由低到高时，可把多孔介质中的地下水运动状态分为三种情况（图 1—14）：(1) 当地下水低速度运动时，即 Reynolds 数小于 1 到 10 之间的某个值时，为粘滞力占优势的层流运动，适用 Darcy 定律。(2) 随着流速的增大，当 Reynolds 数大致在 1 到 100 之间时，为一过渡带，由粘滞力占优势的层流运动转变为惯性力占优势的层流运动再转变为紊流运动。(3) 高 Reynolds 数时为紊流运动。

即使这样，绝大多数的天然地下水运动仍服从 Darcy 定律。例如，当地下水通过平均粒径 $d=0.5\text{mm}$ 的粗砂层，水温为 15℃时，运动粘滞度 $\nu=0.1\text{m}^2/\text{d}$；当 Reynolds 数 $Re=1$ 时，代入（1—25）式有：

$$v = 1 \times \frac{0.1\text{m}^2/\text{d}}{0.0005\text{m}} = 200\text{m/d}$$

这表明，在粗砂中，当渗流速度 $v<200\text{m/d}$ 时，服从 Darcy 定律。在天然状况下，若取粗砂的渗透系数 $K=100\text{m/d}$，水力坡度 $J=\frac{1}{500}$，代入 Darcy 定律，给出天然状态下的地下水渗透速度为：

$$v = KJ = 100 \times \frac{1}{500} = 0.2\text{m/d}$$

远小于 200m/d。显然，在多数情况下粗砂中的地下水运动是服从 Darcy 定律的。

有些学者讨论了 Darcy 定律的下限问题。对于某些粘性土，渗流速度和水力坡度的关系如图 1—15 的曲线所示，即存在一个起始水力坡度 $J_0$。当实际水力坡度小于起始水力坡度 $J_0$ 时，几乎不发生流动。关于起始水力坡度的机制，尚未完全研究清楚。某些学者有不同看法。

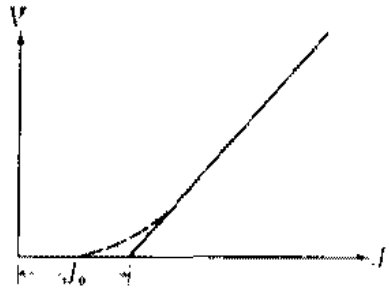



图 1—15 起始水力坡度
（据 J. Bear）

## 二、渗透系数、渗透率和导水系数

渗透系数 $K$，也称水力传导系数，是一个重要的水文地质参数。根据（1—27）式，当水力坡度 $J=1$ 时，渗透系数在数值上等于渗流速度。因为水力坡度无量纲，所以渗透系数具有速度的量纲。即渗透系数的单位和渗流速度的单位相同，常用 cm/s 或 m/d 表示。

渗透系数不仅取决于岩石的性质（如粒度、成分、颗粒排列、充填状况、裂隙性质及其发育程度等），而且与渗透液体的物理性质（容重，粘滞性等）有关。理论分析表明，空隙大小对 $K$ 值起主要作用，这就在理论上说明了为什么颗粒愈粗，透水性愈好。如果在同一套装置中对于同一块土样分别用水和油来做渗透试验，在同样的压差作用下，得到的水的流量要大于油的流量，即水的渗透系数要大于油的渗透系数。这说明，对同一岩层而言，不同的液体具有不同的渗透系数。考虑到渗透液体性质的不同，Darcy 定律有如下形式：

$$v=-\frac{k\rho g}{\mu}\frac{\mathrm{d}H'}{\mathrm{d}S} \tag{1—31}$$

式中，$\rho$ 为液体的密度；g 为重力加速度；$\mu$ 为动力粘度；$H'=z+\frac{p}{\gamma}$，对于水就是水头；$k$ 为表征岩层渗透性能的常数，称为渗透率或内在渗透率。$k$ 仅仅取决于岩石的性质，而与液体的性质无关。

比较（1—28）式和（1—31）式，可求出渗透系数和渗透率之间的关系为

$$K=\frac{\rho g}{\mu}k=\frac{g}{\nu}k \tag{1—32}$$

由上式可导出渗透率的量纲

$$k=\frac{K\nu}{g}=\frac{[\mathrm{LT}^{-1}][\mathrm{L}^2\mathrm{T}^{-1}]}{[\mathrm{LT}^{-2}]}=[\mathrm{L}^2]$$

通常采用的单位是 $\mathrm{cm}^2$ 或 D (Darcy)。D 是这样定义的：在液体的动力粘度为 0.001Pa·s，压强差为 101325Pa 的情况下，通过面积为 $1\mathrm{cm}^2$、长度为 1cm 岩样的流量为 $1\mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ 时，岩样的渗透率为 1D。D 和 $\mathrm{cm}^2$ 这二个单位之间的关系为：

$$1\mathrm{D}=9.8697\times10^{-9}\mathrm{cm}^2$$

在某些情况下，采用 cda（$10^{-8}$da）或 mda（$10^{-3}$da）作为渗透率的单位。

在一般情况下，地下水的容重和粘滞性改变不大，可以把渗透系数近似当作表示透水性的岩层常数。但当水温和水的矿化度急剧改变时，如热水、卤水的运动，容重和粘滞性改变的影响就不能忽略了。

近年来研究证实，渗透系数值和试验范围（如抽水试验的影响范围）有关，随着它的增大而增大。这种现象称为尺度效应。因而渗透系数是尺度 $x$ 的函数，$K=K(x)$。这就不难解释用长时间大降深群孔抽水试验求得的渗透系数值较用短时间小降深抽水试验求得的渗透系数值大的原因了。抽水试验持续时间越长，影响范围越大，因而在一定范围内，渗透系数值会随着抽水持续时间的增长而增大。

渗透系数 $K$ 虽然能说明岩层的透水性，但它不能单独说明含水层的出水能力。一个渗透系数较大的含水层，如果厚度非常小，它的出水能力也是有限的，开采价值不大。为此，就引出了导水系数的概念。下面考虑通过厚度为 $M$ 的承压含水层的地下水运动，如沿流向取 $x$ 轴（图 1—16）。根据 Darcy 定律

$$Q = KMBJ; q = \frac{Q}{B} = KMJ = TJ \tag{1—33}$$

上式中的 $T=KM$，称为导水系数，是又一个水文地质参数。其量纲是 $(L^2T^{-1})$，单位常用 $m^2/d$。它的物理含义是水力坡度等于 1 时，通过整个含水层厚度上的单宽流量。导水系数的概念仅适用于二维的地下水流动，对于三维流动是没有意义的。

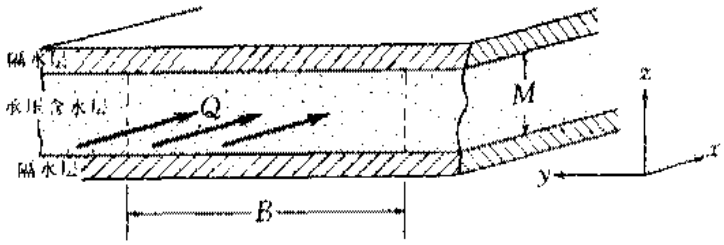



图 1—16 导水系数的概念

(据 J. Bear)

### 三、非线性运动方程

对于 Reynolds 数大于 1~10 的流动，还没有一个被普遍接受的非线性运动方程。比较常用的是 P. Forchheimer 公式：

$$J = av + bv^2 \tag{1—34}$$

或

$$J = av + bv^n \quad 1.6 \leqslant n \leqslant 2 \tag{1—35}$$

式中的 $a$ 和 $b$ 为由实验确定的常数。当 $a=0$ 时，(1—34) 式变为

$$v = K_c J^{\frac{1}{2}} \tag{1—36}$$

称为 Chezy 公式，它和计算河渠水流的 Chezy 公式类似，表明渗流速度与水力坡度的 $\frac{1}{2}$ 次方成正比，$K_c$ 为该情况下的渗透系数。

自然界的地下水运动多数服从 Darcy 定律，大于临界 Reynolds 数的流动很少出现，仅在喀斯特岩层中或井壁及泉水出口处附近可能见到。

**思考题：**

1. 在计算地下热水运动时，能否把渗透系数 $K$ 当作岩层透水性常数，为什么？
2. 为什么说导水系数在三维流条件下是无意义的？

## §1—3 岩层透水特征分类和渗透系数张量

### 一、岩层透水特征分类

根据岩层透水性随空间坐标的变化情况，可把岩层分为均质的和非均质的二类。如果在渗流场中，所有点都具有相同的渗透系数，则称该岩层是均质的；否则为非均质的。渗透系数 $K=K(x, y, z)$，为坐标的函数。自然界中绝对均质的岩层是没有的，均质与非均质只是相对而言。

非均质岩层有两种类型。一类透水性是渐变的，如山前洪积扇，由山口至平原，$K$ 逐渐变小。另一类透水性是突变的，如在砂层中夹有一些小的粘土透镜体。

根据岩层透水性和渗流方向的关系，可以分为各向同性和各向异性二类。如果渗流场中某一点的渗透系数不取决于方向，即不管渗流方向如何都具有相同的渗透系数，则介质是各向同性的；否则是各向异性的。当然，各向同性和各向异性也是相对而言的。某些扁平形状的细粒沉积物，水平方向的渗透系数常较垂直方向大。在基岩区，构造断裂常有方向性，沿裂隙方向渗透系数较大。

必须注意，不要把均质与非均质的概念和各向同性与各向异性的概念混淆起来。前者是岩层透水性和空间坐标的关系，后者是指岩层透水性和水流方向的关系。均质岩层也可以是各向异性的。如某些黄土，垂直方向的渗透系数大于水平方向的渗透系数，因而是各向异性的；而不同点上相同方向的渗透系数又是相等的，因而是均质的。图 1—17 用椭圆表示渗流场中 A 点和 B 点的渗透系数，两椭圆形状完全相同，表示同一方向有相同的渗透系数。类似地，也有非均质各向同性介质。

## 二、渗透系数张量

在各向同性介质中，渗透系数值和渗流方向无关，是一个标量。因而，水力坡度和渗流方向是一致的。渗流速度矢量可以用（1—29）式来表达。即使对于非均质各向同性介质中的三维流动来说，（1—29）式依然成立。

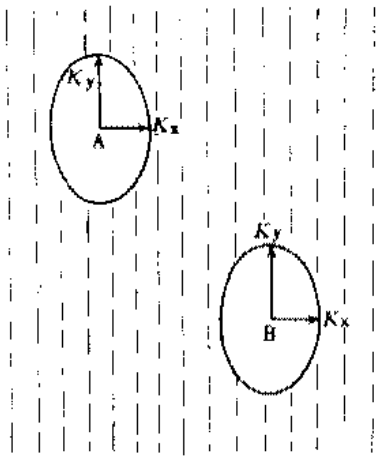



图 1—17　均质各向异性介质渗透系数图
（表示与 $xy$ 平面平行的示意剖面图，A、B 点的 $Ky$ 值也是相等的）

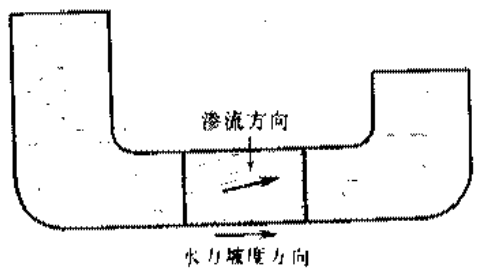



图 1—18　水力坡度方向和渗流方向不一致示意图
（据 Marsily）

各向异性介质的情况就大不相同了。渗透系数值和渗流方向有关，渗透系数不再是标量，水力坡度和渗流的方向一般是不一致的（图 1—18）。因此，渗流速度和水力坡度之间的关系也就不能简单地用（1—29）式来表达了。由于渗流方向对空间三个任意选取的、相互垂直的坐标平面来说，可以是任意的，因此，无法简单地用坐标轴上的三个分量来定义空间一个点上的渗透系数，必须像表示空间一个点上的应力那样，采用双下标格式，用它的九个分量来表示。

所采用的双下标格式的含意和应力分量的含意是一致的。在各向异性介质中，渗流速度相应地应表示为：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{xz}\frac{\partial H}{\partial z} \\ v_y &= -K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{yz}\frac{\partial H}{\partial z} \\ v_z &= -K_{zx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{zy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1-37}$$

由此可以看出，九个分量 $K_{xx}$，$K_{xy}$，…，$K_{zz}$ 决定了三维空间中渗透系数张量。在二维空间中，则由它的四个分量所决定，通常把它们写成下列形式：

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \tag{1-38a}$$

或

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \tag{1-38b}$$

因此，(1--37) 式可以写成下列更紧凑的形式：

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{J} \tag{1-39}$$

渗透系数张量是对称张量，即：

$$K_{xy} = K_{yx}, K_{xz} = K_{zx}, K_{yz} = K_{zy}$$

所以只有六个独立的分量，在二维情况下只有三个不同的分量。

研究各向异性介质发现，虽然总的说来，在各向异性介质中的水力坡度和渗流速度的方向是不一致的，但在三个方向上两者是平行的，而且这三个方向是相互正交的。这三个方向称为主方向。沿主方向测得的渗透系数称为主渗透系数或主值，分别以 $K_1$，$K_2$ 和 $K_3$ 表示之。如果所采用的 Descartes 坐标系的三个轴分别和渗透系数张量的主方向平行，则有

$$K_{xx} = K_1, K_{yy} = K_2, K_{zz} = K_3$$

此时，渗透系数张量 $\boldsymbol{K}$ 是个对角阵，即

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{bmatrix} \tag{1-40}$$

## §1—4 突变界面的水流折射和等效渗透系数

### 一、越过透水性突变界面时的水流折射

在透水性突变的界面上，如水流斜向通过界面，则会发生折射。这一现象是由界面上水流连续性条件引起的。设介质 I 的渗透系数为 $K_1$，介质 II 的渗透系数为 $K_2$，界面上某一点附近的渗流速度和水头在两介质中的值依次为 $v_1$、$v_2$ 和 $H_1$、$H_2$，如图 1—19 所示。位于界面上的任一点都应满足如下的条件：

$$\begin{cases} H_1 = H_2 \\ v_{1n} = v_{2n} \end{cases} \tag{1-41}$$

式中，$v_{1n}$、$v_{2n}$分别为$v_1$和$v_2$的法向分速度。由图1—19的几何关系可明显地看出：

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{v_{1\tau}}{v_{1n}},\operatorname{tg}\theta_2=\frac{v_{2\tau}}{v_{2n}}$$

则

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2}=\frac{v_{1\tau}}{v_{2\tau}}=\frac{-K_1\dfrac{\partial H_1}{\partial x}}{-K_2\dfrac{\partial H_2}{\partial x}}$$

式中：$\theta_1$、$\theta_2$——分界面法线与两侧流线的夹角；

$v_{1\tau}$、$v_{2\tau}$——$v_1$、$v_2$的切向分速度。

因为 $H_1=H_2$，故$\dfrac{\partial H_1}{\partial x}=\dfrac{\partial H_2}{\partial x}$，则得：

$$\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta_2}=\frac{K_1}{K_2} \tag{1—42}$$

上式为渗透水流折射时必须满足的方程（折射定律）。

由（1—42）式可得出下列几点结论：

（1）当$K_1=K_2$，则$\theta_1=\theta_2$。表示在均质岩层中不发生折射。

（2）当$K_1\neq K_2$，而且$K_1$、$K_2$均不等于0时，如$\theta_1=0°$，则$\theta_2$亦为0°，表明水流垂直通过界面时不发生折射。

（3）当$K_1\neq K_2$，而且$K_1$，$K_2$均为有限值时，如$\theta_1=90°$，则$\theta_2$亦应为90°，表明水流平行于界面时不发生折射。

（4）当水流斜向通过界面时，介质的渗透系数$K$值愈大，$\theta$角也愈大，流线也愈靠近界面。二介质的$K$值相差愈大，$\theta_1$和$\theta_2$的差别也愈大，流线通过界面后的偏移程度也愈大。

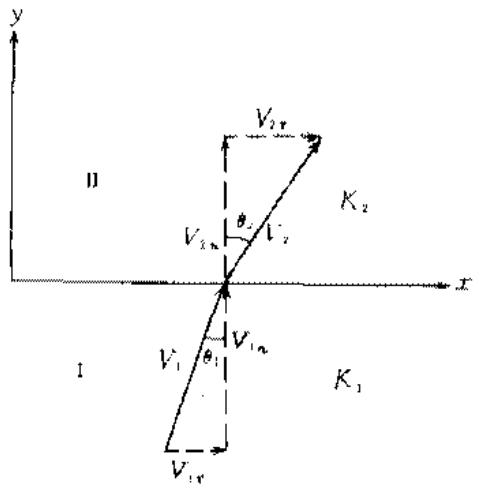



图1—19 渗透水流的折射

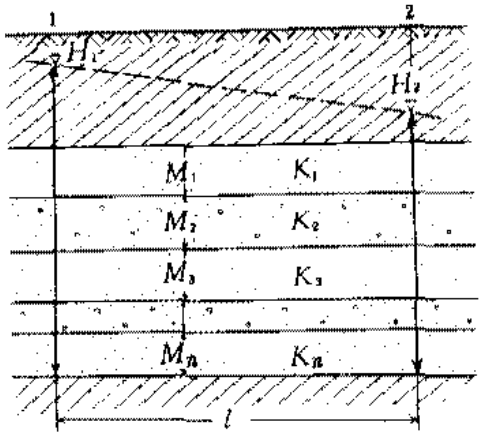



图1—20 层状岩层中平行于层面的渗流

## 二、层状岩层的等效渗透系数

在自然界中很常见的非均质岩层多是由许多透水性各不相同的薄层相互交替组成的层状岩层。每一单层的厚度比其延伸长度小得多（图1—20）。其平行于层面的渗透系数$K_{\text{平}}$和

垂直于层面的渗透系数 $K_v$ 不等。当每一分层的渗透系数 $K_i$ 和厚度 $M_i$ 已知时，可求出 $K_p$ 和 $K_v$。当水流平行于层面时（图 1—20），通过层状含水层的总的单宽流量 $q$ 等于各分层的单宽流量之和，总厚度 $M$ 等于各分层厚度之和。对于每一分层而言，水力坡度 $J$ 均为 $\Delta H/l$。因此，每一分层的流量为：

$$q_i = K_i M_i \frac{\Delta H}{l}$$

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} K_i M_i \frac{\Delta H}{l} = \frac{\Delta H}{l} \sum_{i=1}^{n} T_i$$

如果我们用一等效的均质含水层代替层状岩层，显然等效层的厚度等于层状岩层的总厚度，并且在同一水力坡度 $\Delta H/l$ 作用下应当有相同的流量 $q$，因而有：

$$q = K_p M \frac{\Delta H}{l}$$

由此得

$$K_p M \frac{\Delta H}{l} = \sum_{i=1}^{n} K_i M_i \frac{\Delta H}{l}$$

因而求得平行层面方向的等效渗透系数为：

$$K_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \tag{1—43}$$

等效导水系数为：

$$T_p = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} K_i M_i \tag{1—44}$$

类似地，如果渗透系数在垂直方向变化，且没有明显的分层界线，而是逐渐连续过渡的，即：

$$K = K(z)$$

$$K_p = \frac{1}{M}\int_0^M K(z)\mathrm{d}z; T_p = \int_0^M K(z)\mathrm{d}z \tag{1—45}$$

下面考虑水流方向垂直于岩层层面的情况（图 1—21）。该情况下通过各分层的流量相同，即：

$$q_1 = q_2 = \cdots = q_i = \cdots = q_n = q$$

但水头降落和水力坡度不同，总的水头降落 $\Delta H$ 等于各分层水头降落 $\Delta H_i$ 之和。因此，对每一层都有：

$$q = K_i b \frac{\Delta H_i}{M_i}; \Delta H_i = \frac{M_i q}{K_i b}$$

用类似方法可得垂直于层面方向的等效渗透系数为：

$$K_v = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{\sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{K_i}} \tag{1—46}$$

由（1—46）式可以发现一个有趣的现象：垂直于层面的等效渗透系数主要取决于渗透系数最小，即阻力最大的分层。如有一层 $K_i=0$，为不透水层，则 $K_v=0$。

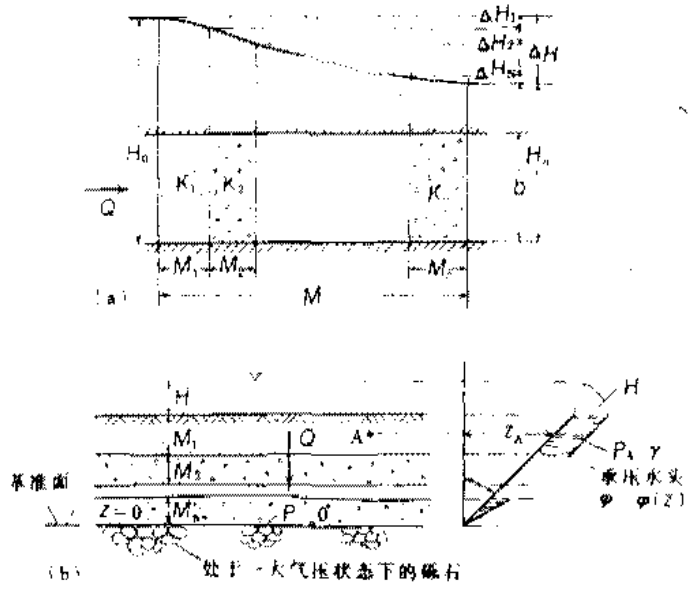



图 1—21　层状岩层中垂直于层面的渗流

（据 J. Bear 修改）

(a) —水在承压含水层中流动；(b) —通过层状土的垂直下渗，水在一个大气压（101325Pa）下流出

平行层面的等效渗透系数 $K_p$ 总是大于垂直于层面的等效渗透系数 $K_v$。

**思考题：**

1. 假设有一层状岩层，由三层组成，$K_1=K_3$。当 $K_2$ 大于 $K_1$ 和 $K_3$，水流斜向穿过该层状岩层时，应如何折射？当 $K_2$ 小于 $K_1$ 和 $K_3$ 时，应如何折射？画出示意图。

2. 试自行证明，由二层组成的层状岩层，$K_p>K_v$。

## §1—5　流　　网

### 一、流函数

地下水动力学中流线的概念和水力学中的概念是完全一致的。流线应是一根处处和渗流速度矢量相切的曲线。因此，流线簇就代表渗流区内每一个点的水流方向。根据上述定义，显然没有水流穿越流线。现在我们来研究描述流线的方程式。为此，在任一流线上取任意两点 $M(x, y)$ 和 $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$。$M$ 点的渗流速度矢量为 $v$，它与它的两个分量 $v_x$，$v_y$ 构成一个三角形 $MAB$。自 $M'$ 点作垂线 $M'b$，并延长至 $a$（图 1—22）。当 $M$ 与 $M'$ 无限逼近时，弧线 $MM'$ 可用切线 $Ma$ 来代替，故有 $Mb=\mathrm{d}x$，$ab=\mathrm{d}y$。因为 $\Delta MAB$ 与 $\Delta Mab$ 相似，所以：

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}$$

$$v_x\mathrm{d}y-v_y\mathrm{d}x=0 \tag{1—47}$$

$M$ 和 $M'$ 是任意流线上任选的两点。因此，上式对流线上的任一点都是正确的，可以把它看

成是流线的方程，用它来描述流线。

（1—47）式无论对各向同性和各向异性介质都是适用的。在各向异性介质中，如果选取的坐标轴（直角坐标系）的方向分别与渗透系数的主方向一致，则（1—47）式变为：

$$\frac{dx}{K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}}=\frac{dy}{K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}}$$

对于各向同性介质，则式中的 $K_{xx}=K_{yy}=K$。由于（1—47）式只涉及一个点的水流情况，故也适用于非均质介质。

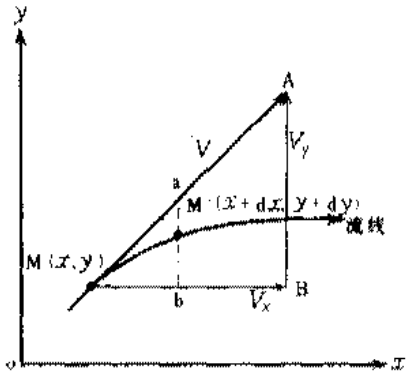



图 1—22　流线

另外，设有二元函数 $\Psi(x, y)$，其全微分为：

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy$$

如果取这样一种函数，使

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}=-v_y;\frac{\partial\Psi}{\partial y}=v_x \tag{1—48}$$

由式（1—47）得：

$$d\Psi=\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx+\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy=v_xdy-v_ydx=0 \tag{1—49}$$

积分得：

$$\Psi=常数$$

式（1—47）是描述流线的方程式，由此而得到函数 $\Psi$ 为常数的结论，表明沿同一流线，函数 $\Psi$ 为常数，不同的流线则有不同的函数值。因此，称函数 $\Psi$ 为流函数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$。为了阐明它的物理意义，在无限接近的两条流线 $\Psi$ 和 $\Psi+d\Psi$ 上，沿某等水头线取两个点 $a(x, y)$ 和 $b(x+dx, y+dy)$。自 $a$ 和 $b$ 分别做垂线和水平线，相交于 $c$（图 1—23）。显然，通过流线 $\Psi$ 和 $\Psi+d\Psi$ 间的单宽流量 $dq$ 可以看成是通过 $ac$ 和 $bc$ 的流量的代数和。将渗流速度也相应地分解为 $v_x$ 和 $v_y$，因此，

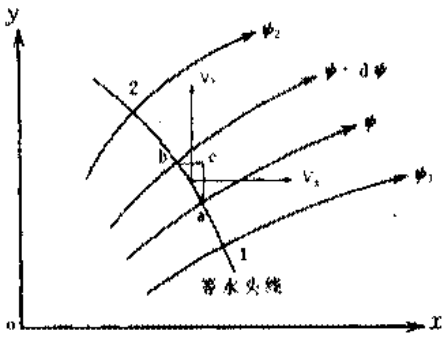



图 1—23　流函数与流量的关系

$$dq=v_xac+v_ybc$$

但　$ac=dy$，$bc=-dx$，故：

$$dq=v_xdy-v_ydx$$

把（1—48）式代入上式，并考虑（1—49）式有：

$$dq=\frac{\partial\Psi}{\partial y}dy+\frac{\partial\Psi}{\partial x}dx=d\Psi \tag{1—50}$$

将此式在 $\Psi_1$ 和 $\Psi_2$ 的范围内积分，得：

$$q=\int_{\Psi_1}^{\Psi_2}d\Psi=\Psi_2-\Psi_1 \tag{1—51}$$

由此可知，在平面运动中，两流线间的单宽流量等于和这两条流线相应的流函数之差。在同一条流线上，$d\Psi=0$，$q=0$，$\Psi=$常数。

由 Darcy 定律和（1—48）式，有：

$$v_x=-K\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{\partial \Psi}{\partial y};\ v_y=-K\frac{\partial H}{\partial y}=-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1—52}$$

将上述第一式对 $y$ 求导，第二式对 $x$ 求导，得：

$$-K\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2},\ -K\frac{\partial^2 H}{\partial y\,\partial x}=-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

因为求导数的结果和求导的次序无关，因而有：

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2};\ \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0 \tag{1—53}$$

说明在均质各向同性介质中，流函数满足 Laplace 方程。可以类似地证明，在其他情况下，流函数均不满足 Laplace 方程[2]。

从上面的讨论中可以看出，流函数有下列特性：

（1）对一给定的流线，流函数是常数。不同的流线有不同的常数值。流函数决定于流线。

（2）在平面运动中，两流线间的流量等于和这两条流线相应的两个流函数的差值。

（3）在均质各向同性介质中，流函数满足 Laplace 方程；在其他情况下均不满足 Laplace 方程。

（4）在非稳定流中，流线不断地变化，只能给出某一瞬时的流线图。因此，只有对不可压缩的液体的稳定流动，流线才有实际意义。

**二、流网及其性质**

在渗流场内，取一组流线和一组等势线（当容重不变时取一组等水头线）组成的网格称为流网。流网具有下列特性：

1. 在各向同性介质中，流线与等势线处处垂直，故流网为正交网

在均质各向同性介质中，把（1—52）式左、右两个等式交错相乘，得：

$$-K\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}=K\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x} \tag{1—54}$$

消去 $K$，得：

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}=0 \tag{1—55}$$

场论的知识告诉我们，等水头线和流线的梯度

$$\mathrm{grad}H=\nabla H=\frac{\partial H}{\partial x}i+\frac{\partial H}{\partial y}j$$

$$\mathrm{grad}\Psi=\nabla \Psi=\frac{\partial \Psi}{\partial x}i+\frac{\partial \Psi}{\partial y}j$$

式中，$i$ 和 $j$ 为单位矢量。其数量积为：

$$\nabla H\cdot\nabla \Psi=\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial \Psi}{\partial y}=0 \tag{1—56}$$

或

$$\nabla \varphi\cdot\nabla \Psi=0 \tag{1—57}$$

两矢量的数量积等于零，表示两矢量正交，即流线和等水头线的梯度是正交的；而梯度又

和流线及等水头线本身垂直，因此流线和等水头线处处正交，流网为正交网格。

用类似的方法可以证明，即使在非均质各向同性介质中仍有：

$$\nabla H \cdot \nabla \Psi = 0$$

此关系表明，在非均质各向同性介质中，流线仍处处和等水头线正交。即使是非 Darcy 流，在二维均质各向同性介质中仍可证明等水头线和流线也是处处正交的。但是，对于各向异性介质，等水头线族和流线族是不正交的[2]。流网不是正交网格。

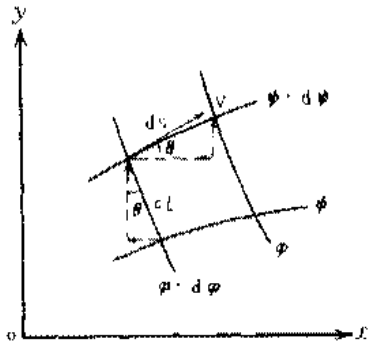



图 1—24　部分流网图

2. 在均质各向同性介质中，流网每一网格的边长比为常数

设在流网中取一网格，如图 1—24 所示。相邻流线的间距为 $dl$，等势线间距为 $ds$，则 $ds$ 在 $x$ 和 $y$ 方向的投影为：

$$dx = \cos\theta ds; dy = \sin\theta ds$$

$dl$ 在 $x$ 和 $y$ 方向的投影为：

$$dx = -\sin\theta dl;\ dy = \cos\theta dl$$ ❶

同时渗流速度矢量 $v$ 在二个坐标轴上的分量为：

$$v_x = v\cos\theta; v_y = v\sin\theta$$

对于均质各向同性介质有：

$$\begin{aligned} dH &= \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy \\ &= -\frac{1}{K}(v_x dx + v_y dy) \\ &= -\frac{1}{K}(v\cos\theta\, ds\cos\theta + v\sin\theta\, ds\sin\theta) \\ &= -\frac{1}{K}v ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\Psi &= \frac{\partial \Psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \Psi}{\partial y}dy \\ &= -v_y dx + v_x dy \\ &= -v\sin\theta(-\sin\theta dl) + v\cos\theta\cos\theta dl \\ &= v dl \end{aligned}$$

所以，

$$\frac{dH}{d\Psi} = \frac{-\frac{1}{K}v ds}{v dl} = -\frac{1}{K}\frac{ds}{dl}$$

$$\frac{ds}{dl} = -K\frac{dH}{d\Psi} \qquad (1—58)$$

由上式可知，只要给定相邻流线的流函数差值 $d\Psi$ 和等水头线间的水头差值 $dH$，则流网的

❶ 这里的 $dx$、$dy$ 和上面由 $ds$ 投影所得的 $dx$、$dy$ 不一定相等。

边长比 $ds/dl$ 都是一定的。为方便起见，通常取 $ds/dl=1$，流网为曲边正方形。

3. 当流网中各相邻流线的流函数差值相同，且每个网格的水头差值相等时，通过每个网格的流量相等

通过流网每一网格的流量 $\Delta q$ 为：

$$\Delta q = KJ\Delta l = K\frac{\Delta H}{\Delta s}\Delta l = K\Delta H\frac{\Delta l}{\Delta s} \tag{1—59}$$

式中，$\Delta s$ 为该网格相邻两等势线间的平均长度，$\Delta l$ 为相邻两流线间的平均宽度。因为流网的每一网格的 $\Delta H$ 相等，$\Delta q$ 也就相等。当 $\Delta l/\Delta s=1$，即流网为曲边正方形时，有：

$$\Delta q = K\Delta H \tag{1—60}$$

为方便起见，绘制流网时，如上下游的总水头差为：

$$H_z = H_1 - H_2$$

则每一网格的水头差为：

$$\Delta H = \frac{H_z}{m} \tag{1—61}$$

式中，m 为水头带的数目。图 1—25 为承压水完整井抽水时的流网图。

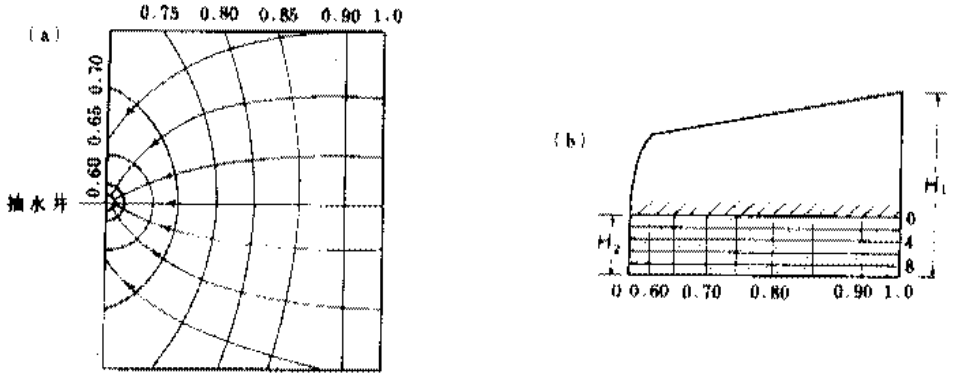



图 1—25　承压水完整井抽水时的流网图

(a) —平面图；(b) —剖面图

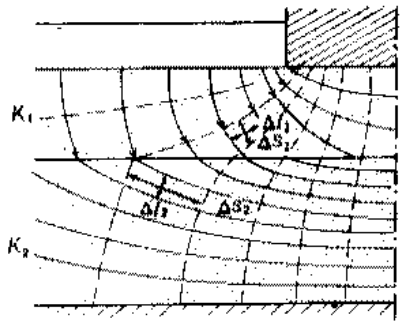



图 1—26　双层地基中的流网图

4. 当二个透水性不同的介质相邻时，在一个介质中为曲边正方形的流网，越过界面进入另一介质中，则变成曲边矩形（图 1—26）

取二条流线所限定的条带，由水流连续性原理有：

$$\Delta q = K_1\frac{\Delta H}{\Delta s_1}\Delta l_1 = K_2\frac{\Delta H}{\Delta s_2}\Delta l_2$$

若在 $K_1$ 介质中取 $\frac{\Delta l_1}{\Delta s_1}=1$，则在 $K_2$ 介质中必有 $\frac{\Delta l_2}{\Delta s_2}\neq 1$，变成矩形网格，而且保持 $\frac{\Delta l_2}{\Delta s_2}=\frac{K_1}{K_2}$，即当水流由渗透系数小的介质进入渗透系数大的介质时，流网成为扁平方格网（图 1—26），$\frac{\Delta l_2}{\Delta s_2}<1$；由渗透系数大的介质进入

渗透系数小的介质时，正好相反，$\frac{\Delta l_2}{\Delta s_2}>1$。

### 三、流网的应用

利用流网可以确定渗流各要素。

1. 水头和渗透压强

渗流区内任意点的水头 $H$，可以由等水头线确定。如该点位于两等水头线之间，则用内插法确定。知道了水头，可通过下式计算该点上的渗透压强：

$$\frac{p}{\gamma}=H\pm z \quad 或 \quad p=\gamma(H\pm z) \tag{1—62}$$

式中，$z$ 为该点到基准面的距离。如该点位于基准面下方，则取正值；反之，取负值。

2. 水力坡度和渗流速度

通过某点作流线，沿流线量出相邻两等水头线间的距离 $\Delta s$；若这两条等水头线间的水头差为 $\Delta H$，则该点的水力坡度和渗流速度分别为：

$$J=\frac{\Delta H}{\Delta s},v=KJ$$

3. 流量

在各向同性渗流场中，若同一网带内水头差值相等，则每个网格的流量相等。因此，整个渗流区单位宽度的流量 $q$ 应等于各个流线间所夹条带（流带）的流量之和。即：

$$q=K\Delta H\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta l_i}{\Delta s_i} \tag{1—63}$$

式中，$\frac{\Delta l_i}{\Delta s_i}$为第 $i$ 条流带选定的两等水头线间网格的长和宽的比值，$n$ 为流带的数目。

若网格是曲边正方形，网格又是完整的，则上式简化为：

$$q=K\Delta Hn=Kn\frac{H_1-H_2}{m} \tag{1—64}$$

通过前面分析可见，流网刻画了渗流场的水流特征。有了它，可以很方便地确定各渗流要素，解决渗流问题。因此，流网对解决稳定渗流问题有很大的实用意义。

此外，从流网（或等水头线或流线）的定性分析，可以了解水文地质条件，如地下水与河流的互补关系等。图 1—27a 表示导水性变化时的等水头线的疏密变化。图 1—27b 和 c 表示存 在不透水带或强透水带时的流网。图 1—27 中的流网图是平面图。图 1—28 为 Hubbert 流动模型的剖面流网图。从图上看出，在有入渗补给或入渗补给结束只有排泄的情况下，潜水面（浸润曲线）既非流线也非等水头线，只有当无入渗和蒸发的稳定流动时，浸润曲线才是流线。

在某一给定区域，作出不同年分的流网图（或等水头线图），可分析水文地质条件的变化，对地下水资源评价有实际意义。

绘制流网的方法有很多，除了应用解析解的结果可以绘制流网外，主要通过各种模拟试验绘制流网，也可以用渐近法徒手近似地绘制流网。

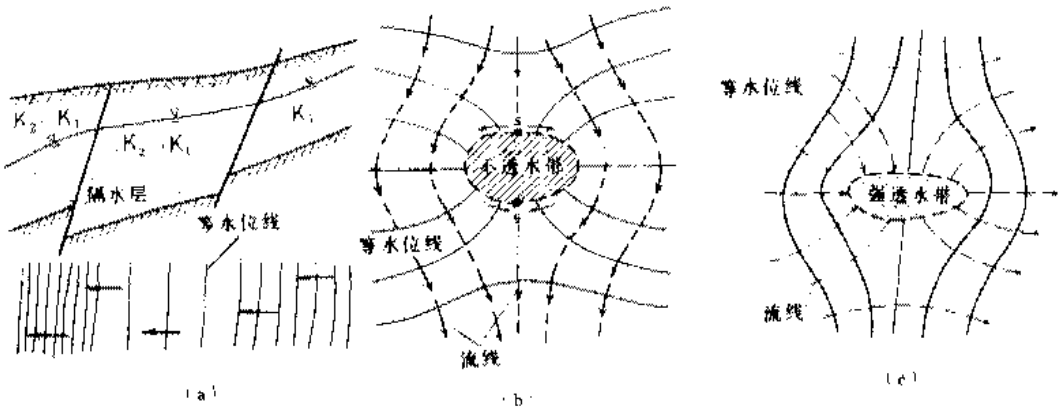



图 1—27　几种情况下的流网

(s为停滞点（驻点))

(a) —导水性变化的影响；(b) —不透水带的影响；(c) —强透水带的影响

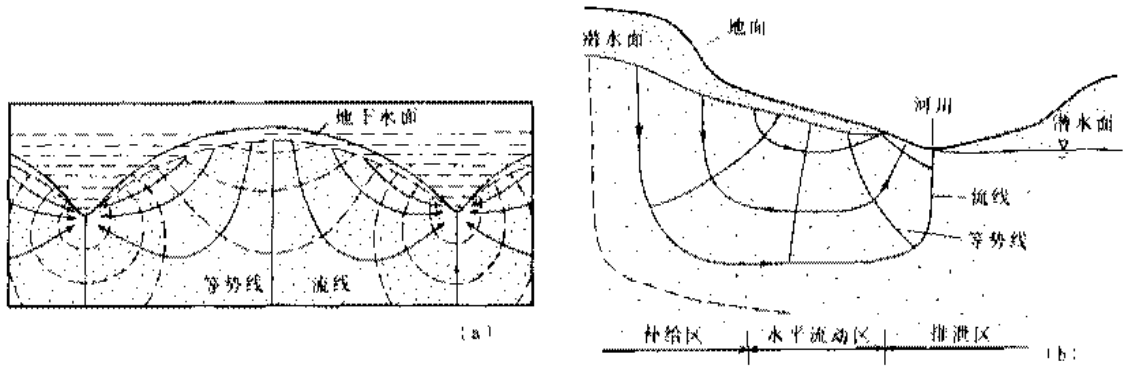



图 1—28　Hubbert 流动模型的流网图

(据 Hubbert)

(a) —Hubbert 模型；(b) —地下水流的基本状况

**思考题：**

1. 一般说来，在均质各向同性介质中，同一流网的等水头线和流线可以互相置换；因而，每个流网表示着两种水流。究竟属于哪一种，要由边界条件来决定。这种说法对吗？为什么？

2. 流网为什么只在稳定渗流问题中才有实际意义？

3. 试画出无入渗补给和有入渗补给情况下，地下水向河流排泄时的剖面流网图。

## §1—6　渗流的连续性方程

在渗流场中，各点渗流速度的大小、方向都可能不同。为了反映一般情况下液体运动中的质量守恒关系，就需要在三维空间建立以微分方程形式表达的连续性方程。设在充满

液体的渗流区内，以 $p(x,y,z)$ 点为中心取一无限小的平行六面体（其各边长度分别为 $\Delta x$，$\Delta y$，$\Delta z$，且和坐标轴平行）作为均衡单元体（图 1—29）。如 $p$ 点沿坐标轴方向的渗流速度分量为 $v_x$、$v_y$、$v_z$，液体密度为 $\rho$，则单位时间内通过垂直于坐标轴方向单位面积的水流质量分别为 $\rho v_x$，$\rho v_y$，$\rho v_z$。那么，通过 abcd 面中点 $p_1\left(x-\frac{\Delta x}{2},\ y,\ z\right)$ 的单位时间、单位面积的水流质量 $\rho v_{x_1}$，可利用 Taylor 级数求得：

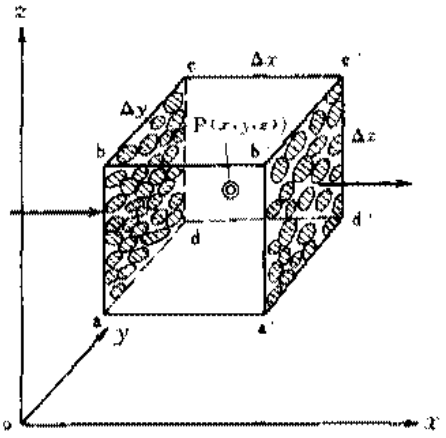


图 1—29　渗流区中的单元体

$$\rho v_{x_1}=\rho v_x\left(x-\frac{\Delta x}{2},y,z\right)$$

$$=\rho v_x(x,y,z)+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2(\rho v_x)}{\partial x^2}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n!}\frac{\partial^n(\rho v_x)}{\partial x^n}\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)^n+\cdots\cdots$$

略去二阶导数以上的高次项，于是在 $\Delta t$ 时间内由 abcd 面流入单元体的质量为：

$$\left[\rho v_x-\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z\Delta t$$

同理，可求出通过右侧 a′b′c′d′ 面流出的质量为

$$\left[\rho v_x+\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z\Delta t$$

因此，沿 $x$ 轴方向流入和流出单元体的质量差为：

$$\left\{\left[\rho v_x-\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z-\left[\rho v_x+\frac{1}{2}\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y\Delta z\right\}\Delta t$$

$$=-\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

均衡单元体取得越小，这个式子就越正确。同理，可以写出沿 $y$ 轴方向和沿 $z$ 轴方向流入和流出这个单元体的液体质量差，分别为：

$$-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t \text{ 和 } -\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

因此，在 $\Delta t$ 时间内，流入与流出这个单元体的总质量差为：

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

在均衡单元体内，液体所占的体积为 $n\Delta x\Delta y\Delta z$，其中 $n$ 为孔隙度。相应的，单元体内的液体质量为 $\rho n\Delta x\Delta y\Delta z$。因此，在 $\Delta t$ 时间内，单元体内液体质量的变化量为：

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z]\Delta t$$

单元体内液体质量的变化是由流入与流出这个单元体的液体质量差造成的。在连续流条件下（渗流区充满液体等），根据质量守恒定律，两者应该相等。因此，

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\frac{\partial}{\partial t}[\rho n\Delta x\Delta y\Delta z] \qquad (1—65)$$

式（1—65）称为渗流的连续性方程。它表达了渗流区内任何一个“局部”所必须满足的质量守恒定律。（1—65）式右端项的计算比较困难。具体应用时，为了简化计算，往往做一些假设，如假设只有垂直方向上有压缩（或膨胀）或将 $\Delta x$、$\Delta y$、$\Delta z$ 都视为常量等。如把地下水看成是不可压缩的均质液体，$\rho$=常数；同时，假设含水层骨架不被压缩，这时 $n$ 和 $\Delta x$，$\Delta y$，$\Delta z$ 都保持不变，方程（1—65）右端项等于零，于是有：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \tag{1—66}$$

此式表明，在同一时间，内流入单元体的水体积等于流出的水体积，即体积守恒。当地下水的流动是稳定流时，也可以得到相同的结果，即（1—66）式。

连续性方程是研究地下水运动的基本方程。各种研究地下水运动的微分方程都是根据连续性方程和反映动量守恒定律的方程（如 Darcy 定律）建立起来的。即使有时为了简化起见，不直接采用（1—65）或（1—66）式，但在建立有关关系式时，也必须应用能反映质量守恒原理的另一种形式的连续性方程（见以后有关章节）来代替。

**思考题：**

1. 为了简化计算，有些文献中假设（1—65）式右端的 $n$ 是变化的，$\Delta z$ 和 $\Delta x$、$\Delta y$ 是不变的常量，你认为合理吗？

2. 为什么 $n$ 是变化的？

## §1—7 承压水运动的基本微分方程

由于含水层的侧向受到限制，可假设 $\Delta x$、$\Delta y$ 为常量，只考虑垂向压缩。于是，只有水的密度 $\rho$、孔隙度 $n$ 和单元体高度 $\Delta z$ 三个量随压力而变化，则（1—65）式的右端可改写成：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n\Delta x\Delta y\Delta z)=\left(n\rho\frac{\partial(\Delta z)}{\partial t}+\rho\Delta z\frac{\partial n}{\partial t}+n\Delta z\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y \tag{1—67}$$

把式（1—5）、（1—12）和（1—13）代入上式，化简得：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho n\Delta x\Delta y\Delta z)&=\left(n\rho\Delta x\alpha\frac{\partial p}{\partial t}+\rho\Delta x(1-n)\alpha\frac{\partial p}{\partial t}+n\Delta x\rho\beta\frac{\partial p}{\partial t}\right)\Delta x\Delta y\\&=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta x\end{aligned} \tag{1—68}$$

于是连续性方程（1—65）变为：

$$-\left(\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{1—69}$$

因为水头 $H=z+\frac{p}{\gamma}$，故有：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+Hg\frac{\partial\rho}{\partial t}-zg\frac{\partial\rho}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+(H-z)g\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

或：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{p}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

将（1—5）式代入上式得：

$$\frac{\partial p}{\partial t}=\frac{\rho g}{1-\beta p}\frac{\partial H}{\partial t}$$

因为水的压缩性很小，$1-\beta p\approx 1$，所以，

$$\frac{\partial p}{\partial t}\simeq \rho g\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—70}$$

将（1—70）式代入（1—69）式，得：

$$\left[-\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\left(v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$=\rho^2 g(\alpha+n\beta)\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

上式中，左端第二个括弧项比第一个括弧项要小得多。因此，我们假设左端第二个括弧项所代表的 $\rho$ 的空间变化远小于右端项中所包含的 $\rho$ 的局部的、瞬时的变化，即 $v\cdot \mathrm{grad}\rho\ll n\Delta z\frac{\partial \rho}{\partial t}$，因而可以忽略不计，于是上式变为：

$$-\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z=\rho^2 g(\alpha+n\beta)\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

同时，根据 Darcy 定律在各向同性介质中，有：

$$v_x=-K\frac{\partial H}{\partial x},v_y=-K\frac{\partial H}{\partial y},v_z=-K\frac{\partial H}{\partial z}$$

将其代入上式，得：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\rho g(\alpha+n\beta)\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

根据（1—14）式贮水率的定义，上式可改写为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

上式有明确的物理意义。等式左端表示单位时间内流入和流出单元体的水量差；右端表示该时间段内单元体弹性释放（或贮存）的水量。因为单元体没有其他流入或流出水的“源”或“汇”，水量差只可能来自弹性释水（或贮存），等式显然成立。单元体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$，根据假设为无限小，可从等式两端约去，得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—71}$$

对于各向异性介质来说，如把坐标轴的方向取得和各向异性介质的主方向一致，则有：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—72}$$

对于均质各向同性的含水层来说，还可进一步简化为：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—73}$$

在二维流的情况下，常用 $\mu^*$ 和 $T$ 来表示，于是（1—71）式可写成下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—74}$$

上述方程就是承压水非稳定运动的基本微分方程和它的几个常见的特例。在推导过程中，从实用观点出发，除了已经谈到的假设外，还假设：（1）水流服从 Darcy 定律；（2）$K$

不因 $\rho=\rho(p)$ 的变化而改变；(3) $\mu_s$ 和 $K$ 也不受 $n$ 变化（由于骨架变形）的影响。

如果化为柱坐标，则（1—73）式变为：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—75}$$

该基本微分方程是研究承压含水层中地下水运动的基础。它反映了承压含水层中地下水运动的质量守恒关系，表明单位时间内流入、流出单位体积含水层的水量差等于同一时间内单位体积含水层弹性释放（或弹性贮存）的水量。它还通过应用 Darcy 定律反映了地下水运动中的能量守恒与转化关系。可见，基本微分方程表达了渗流区中任何一个“局部”都必须满足质量守恒和能量守恒定律。这一结论也适用于下面将要提到的基本微分方程。

有了这些概念就可以灵活地把基本微分方程应用于解决实际问题。虽然方程中没有考虑抽水、注水及越流补给等的影响，但要考虑也不难。既然方程的左端代表单位时间内从各个方向流入单位体积含水层水量的总和，那只要在建立连续性方程时加一项来表示这些交换水量就行了。其结果是在方程（1—71）、(1—72)、(1—73)、(1—74）等的左端加一项 $W$，通常称为源汇项。它是位置和时间的函数。当垂向有水流出（包括抽水）时，$W$ 为负值，表示汇；当垂向有水流入（包括注水）含水层时，$W$ 为正，表示源。但要注意，对于三维问题，$W$ 表示单位时间从单位体积含水层流入或流出的水量；对于二维问题，$W$ 表示单位时间在垂向从单位面积含水层中流入或流出的水量。如由（1—71）式得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)+W=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—76}$$

由（1—74）式得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+W=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—77}$$

有些文献中，令 $a=\dfrac{T}{\mu^*}$，称其为压力传导系数（导压系数）。于是对二维情况下的均质各向同性含水层来说，有：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—78}$$

绪论中已指出，地下水总是在不断地发展、变化着，在自然界一般不存在稳定流。所谓稳定只是在有限时间段内的一种暂时平衡现象。当地下水变化极其缓慢时，可近似地看作是一种相对的稳定状态。因此，地下水稳定运动，可以看成是地下水非稳定运动的特例。只要把非稳定运动方程右端的$\dfrac{\partial H}{\partial t}$项等于零，就可以得到相应的稳定运动方程。对于一般的非均质各向同性含水层来说，由（1—71）式可得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1—79}$$

对于均质各向同性的含水层来说，由（1—73）式可得：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0 \tag{1—80}$$

上式也称 Laplace 方程。稳定运动方程的右端都等于零，意味着同一时间内流入单元体的水量等于流出的水量。这个结论不仅适用于承压含水层，也适用于潜水含水层和越流含水层。

**思考题：**

1. 基本微分方程中没有包含水的密度 $\rho$，为什么说它表示了质量守恒定律？
2. 弹性释水的物理意义实质是什么？和重力疏干排水有何区别？
3. 下列方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(T\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}$$

是否正确？并申述理由。

## §1—8 越流含水层（半承压含水层）中地下水非稳定运动的基本微分方程

在自然界中，有不少这样的情况：承压含水层的上、下岩层并不是绝对隔水的，其中一个或者两个可能是弱透水层。虽然含水层会通过弱透水层和相邻含水层发生水力联系，但它还是承压的。因此，称其为半承压含水层。当这个含水层和相邻含水层间存在水头差时，地下水便会从高水头含水层通过弱透水层流向低水头含水层。对指定含水层来说，可能流入也可能流出该含水层。这种现象称为越流。因此，半承压含水层也称越流含水层。在含水层中抽水，由于人为地造成水头降低，这种现象就更容易发生。这种情况在我国比较普遍。

当弱透水层的渗透系数 $K_1$ 比主含水层的渗透系数 $K$ 小很多时，可以近似地认为水基本上是垂直地通过弱透水层，折射 90°后在主含水层中基本上是水平流动的。经用有限元法对此进行研究，发现当主含水层的渗透系数比弱透水层的渗透系数大二个以上数量级时，这个假定所引起的误差一般小于 5%。实际上，含水层的渗透系数常常比相邻弱透水层的渗透系数高出三个数量级，故上述假设是允许的。在这种情况下，主含水层中的水流可近似地作二维流问题处理，将水头看作是整个含水层厚度上水头的平均值：

$$\overline{H}=\overline{H}(x,y,t)=\frac{1}{M}\int_0^M H(x,y,z,t)\mathrm{d}z$$

为简化起见，在以后叙述中略去 $H$ 上方的横杠；同时假设，和主含水层释放的水及相邻含水层的越流量相比，弱透水层本身释放的水量小到可以忽略不计。

图 1—30 表示一个各向同性越流含水层中的水流。厚度为 $M$ 的承压含水层的上、下各有一个厚度为 $m_1$ 和 $m_2$、渗透系数为 $K_1$ 和 $K_2$ 的弱透水层。弱透水层的外面又上覆、下伏有潜水含水层或承压含水层。由于物理意义的实质相同，上述结果也适用于水流方向相反的情况。

由图 1—30（b）的均衡单元体，根据水均衡原理可以写出下列形式的连续性方程：

$$\left[\left(Q_x-\frac{\partial Q_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)-\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\right]\Delta t$$
$$+\left[\left(Q_y-\frac{\partial Q_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)-\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right)\right]\Delta t+(v_2-v_1)\Delta x\Delta y\Delta t$$
$$=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t \qquad (1—81)$$

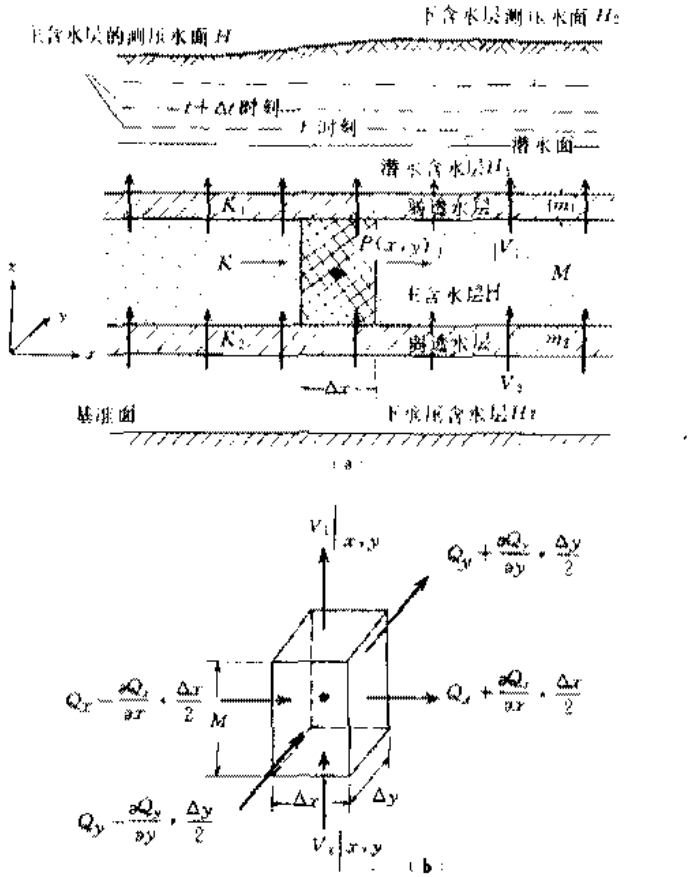



图 1—30　越流含水层中的水流

（据 J. Bear 修改）

式中，$v_1$、$v_2$ 分别为通过上部和下部弱透水层的垂直越流速率或越流强度，即：

$$v_1 = -K_1\frac{\partial H_1}{\partial z} = K_1\frac{H-H_1}{m_1}, v_2 = -K_2\frac{\partial H_2}{\partial z} = K_2\frac{H_2-H}{m_2} \tag{1—82}$$

其中，$H_1(x, y, t)$ 和 $H_2(x, y, t)$ 分别为上含水层（图中为潜水含水层）和下含水层中的水头，如以 $T$ 表示主含水层的导水系数，则：

$$Q_x = -T\frac{\partial H}{\partial x}\Delta y, Q_y = -T\frac{\partial H}{\partial y}\Delta x$$

把它们代入（1—81）式，并在两端分别约去无限小的 $\Delta x\Delta y\Delta t$，则有：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+K_1\frac{H_1-H}{m_1}+K_2\frac{H_2-H}{m_2} = \mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—83}$$

这就是不考虑弱透水层弹性释水条件下非均质各向同性越流含水层中非稳定运动的基本微分方程。对于均质各向同性介质来说，有：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{H_1-H}{B_1^2}+\frac{H_2-H}{B_2^2} = \frac{\mu^*}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—84}$$

式中，

$$B_1 = \sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}}, B_2 = \sqrt{\frac{Tm_2}{K_2}} \tag{1—85}$$

分别称为上，下两个弱透水层的越流因素。

越流因素 $B$ 的量纲为 [L]。弱透水层的渗透性愈小，厚度越大，则 $B$ 越大，越流量越小。在自然界中，越流因素值的变化很大，可以从几米到若干公里。对于一个完全隔水的覆盖层来说，$B$ 为无穷大。另一个反映越流能力的参数是越流系数 $\sigma'$。其定义为：当主含水层和供给越流的含水层间的水头差为一个长度单位时，通过主含水层和弱透水层间单位面积界面上的水流量。因此，

$$\sigma' = \frac{K_1}{m_1} \tag{1-86}$$

$K_1$、$m_1$ 分别为弱透水层的渗透系数和厚度。$\sigma'$ 越大，相同水头差下的越流量越多。

**思考题：**

如果垂直方向还有别的水量交换，方程应该怎样建立？是否能用源汇项来一并表示越流项？

## §1—9 研究潜水运动的基本微分方程

### 一、Dupuit 假设

潜水面不是水平的，含水层中存在着垂向上的流速分量。潜水面又是渗流区的边界，随时间变化，它的位置在问题解出以前是未知的。为了较方便地求解，就引出了 Dupuit 假设。

Dupuit 于 1863 年根据潜水面的坡度对大多数地下水流而言是很小的这一事实，提出了如下假设（图 1—31）：对潜水面（在垂直的二维平面 $xz$ 平面内）上任意一点 $p$ 有：

$$J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = -\sin\theta \tag{1—87}$$

该点的渗流速度方向与潜水面相切，其大小，根据 Darcy 定律有：

$$v_s = -KJ = -K\sin\theta$$

由于坡角 $\theta$ 很小，可以用 $\mathrm{tg}\theta$ 代替 $\sin\theta$。这个 $\theta$ 很小的假设，意味着假设潜水面比较平缓，等水头面铅直，水流基本上水平，可忽略渗流速度的垂直分量 $V_z$，$H\ (x, y, z, t)$ 可近似地用 $H\ (x, y, t)$ 代替。这么一来，铅直剖面上各点的水头就变成相等的了；或者说，水头不随深度而变化，同一铅直剖面上各点的水力坡度和渗透速度都相等，渗流速度可以表示为：

$$v_x = -K\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, H = H(x) \tag{1—88}$$

相应地，通过宽度为 $B$ 的铅直平面（在此假设下可近似地看成是过水断面）的流量为：

$$Q_x = -KhB\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, H = H(x) \tag{1—89}$$

式中，$Q_x$ 为 $x$ 方向的流量；$h$ 为潜水含水层厚度，在隔水层水平的情况下，$h=H$。

对于更一般的情况，$H=H\ (x, y)$，则有：

$$v_x = -K\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}, v_y = -K\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y}, H = H(x, y) \tag{1—90}$$

和

$$Q_x = -KhB\frac{dH}{dx}, Q_y = -KhB\frac{dH}{dy} \tag{1—91}$$

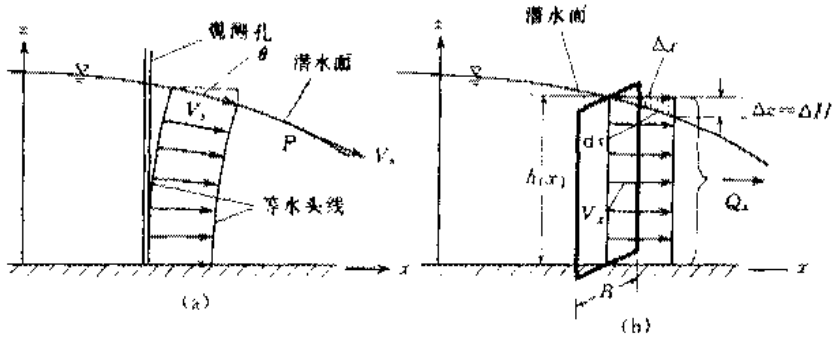



图 1—31 Dupuit 假设

Dupuit 假设在 $\theta$ 不大的情况下是合理的，很有用。它减少自变量 $z$，从而简化了计算。

引入 Dupuit 假设后，会产生多大误差，显然是人们关心的一个问题。经验算，应用 Dupuit 假设，相当于在流量公式中以 $\frac{h^2}{2}$ 代替 $h\overline{H}-\frac{h^2}{2}$，由此引起的误差为：

$$0 < \frac{\frac{h^2}{2} - \left(h\overline{H} - \frac{h^2}{2}\right)}{\frac{h^2}{2}} < \frac{i^2}{1+i^2}, \quad i = \frac{dh}{dx} \tag{1—92}$$

故只要 $i^2 \ll 1$（这里 $i$ 是潜水面坡度），产生的误差是很小的。对于各向异性介质，$K_{xx} \neq K_{zz}$，则上式中的 $i^2$ 应代之以 $\left(\frac{K_{xx}}{K_{zz}}\right)i^2$。

Dupuit 的假设忽略了渗流速度的垂直分量 $v_z$，故在 $v_z$ 大的地段就不能采用，例如在有入渗的潜水分水岭地段〔图 1—32 (a)〕，渗出面附近〔图 1—32 (b)〕和垂直的隔水边界附近〔图 1—32 (c)〕。后者只有在 $x > 2h_0$ 的地段才能把等势线看成是铅直线。在下游边界上，潜水面都终止在高出下游水面（河水面、井水面）的某个点上。在下游边界面上，潜水面以下、下游水面以上的地段称为渗出面。渗出面上潜水面往往和边界面相切，有较大的垂向分速度。

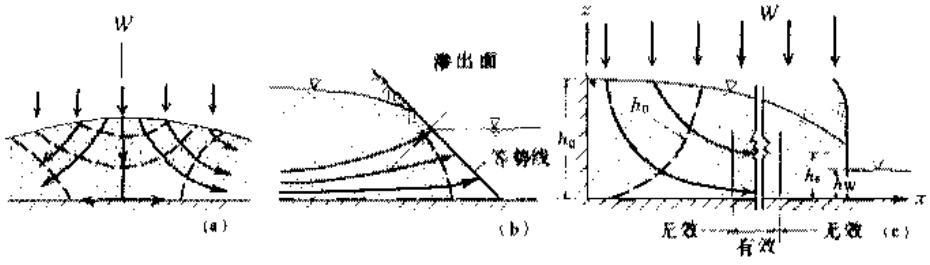



图 1—32 Dupuit 假设无效的地区

（据 J. Bear）

## 二、Boussinesq 方程

根据 Dupuit 假设，可以建立有关潜水含水层中地下水流的方程。潜水面是个自由面，相对压强 $p=0$。因此，对整个含水层来说，可以不考虑水的压缩性。

先考虑一维问题。取平行于 $xoz$ 平面的单位宽度进行研究。在渗流场内取一土体（图 1—33）。它的上界面是潜水面，下界面为隔水底板，左右为二个相距 $\Delta x$ 的垂直断面。引起小土体内水量变化的因素，除从上断面流入的流量 $q-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ 和下断面流出的流量 $q+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$ 外，还有由大气降水入渗补给或由潜水蒸发构成的垂向的水量交换。设单位时间、单位面积上垂向补给含水层的水量为 $W$（入渗补给或其它人工补给取正值，蒸发等取负值）。

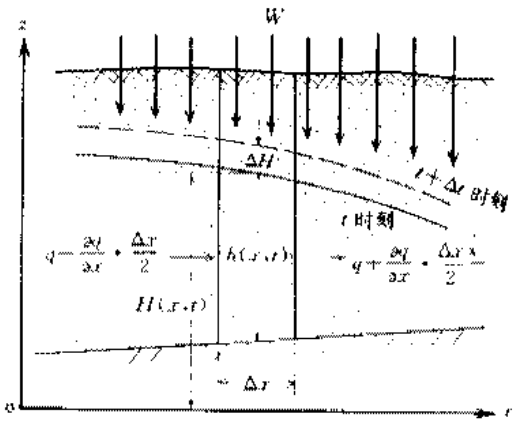



图 1—33　潜水的非稳定运动

在 $\Delta t$ 时间内，从上游流入和由下游流出的水量差，根据 Dupuit 假设为：

$$\left(q-\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta t-\left(q+\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right)\Delta t=-\frac{\partial q}{\partial x}\Delta x\Delta t=-\frac{\partial(v_x h)}{\partial x}\Delta x\Delta t$$

在 $\Delta t$ 时间内，垂直方向的补给量为 $W\Delta x\Delta t$。因此，$\Delta t$ 时间内小土体中水量总的变化为：

$$\left[-\frac{\partial(v_x h)}{\partial x}+W\right]\Delta x\Delta t$$

小土体内水量的变化必然会引起潜水面的升降。设潜水面变化的速率为 $\frac{\partial H}{\partial t}$，则在 $\Delta t$ 时间内，由于潜水面变化而引起的小土体内水体积的增量为：

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta t$$

当潜水面上升时 $\mu$ 为饱和差，下降时为给水度，此时忽略了水和固体骨架弹性贮存的变化。

由于假设水是不可压缩的，根据连续性原理，这两个增量应相等，即：

$$\left[-\frac{\partial(v_x h)}{\partial x}+W\right]\Delta x\Delta t=\mu\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta t$$

将（1—88）式代入上式，得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{W}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t}\qquad(1—93)$$

上式为有入渗补给的潜水含水层中地下水非稳定运动的基本方程（沿 $x$ 方向的一维运动），通常称为 Boussinesq 方程。在二维运动情况下，可用类似方法导出相应的方程为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{W}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t}\qquad(1—94)$$

当隔水层水平时，上式中 $h=H$。对于非均质含水层，Boussinesq 方程有如下形式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial y}\right)+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t}\qquad(1—95)$$

Boussinesq 方程是研究潜水运动的基本微分方程。方程中的含水层厚度 $h$ 也是个未知数，因此，它是一个二阶非线性偏微分方程。除某些个别情况能找到几个特解外，一般没有解析解。为了求解，往往近似地把它转化为线性方程后求解。目前广泛采用的是数值法。

应注意，推导方程时应用了 Dupuit 假设，忽略了弹性贮存；取的小土体是一个包括整个含水层厚度在内的土柱，与推导承压水非稳定运动方程时取的无限小的单元体不同。因此，应用 Boussinesq 方程得到的 $H(x, y, t)$ 只代表该点整个含水层厚度上平均水头的近似值，不能用它来计算同一垂直剖面上不同点的水头变化。对某些无压渗流问题，如排水沟降低地下水位及土坝渗流等是不适用的，应采用不用 Dupuit 假设的一般形式的方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—96}$$

对各向异性介质，如把坐标轴取得与各向异性的主方向一致，则有：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—97}$$

对无压渗流来说，它的弹性释水与潜水面下降疏干出来的水量相比，是微不足道的。因此，有时干脆把（1—96）和（1—97）式的右端项以零代替，认为无压渗流区内水头应满足方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1—98}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1—99}$$

注意，这时相当于假设固体骨架是不可压缩的，$\mu_s=0$，同时一开始曾假设忽略水的压缩性，即 $\rho=$常数，故右端项为零。

这些方程与承压含水层中水头应满足的方程没有什么不同。方程右端采用的是贮水率 $\mu_s$ 而不是给水度或饱和差 $\mu$。其原因是为了计算渗流区内任一点的水头，必须从渗流区内部取一个无限小的单元体来考虑。对这样的单元体来说，因位于渗流区内部，考虑其贮存量的变化时只能是弹性释水而不是疏干排水，因而推导出的无压水非稳定运动方程和承压水非稳定运动方程就没有什么不同了。在这种情况下，地下水非稳定流动的特征则由边界条件反映。如潜水面升降所引起的水量变化可以作为边界条件来处理。因为潜水面是渗流区的上部边界，潜水面升降所引起的水量变化可以作为一种补给水源（水位上升时取负值），用第二类边界条件来处理，其具体处理方法将在本章定解条件一节中予以阐述。方程（1—96）或（1—97）与以后将要谈到的潜水面应满足的边界条件结合起来，便可求解一般的无压渗流问题（当然，还要结合反映渗流区具体情况的其它定解条件）。

对潜水位变化很小的情况，和承压水流一样，可以看成是稳定运动。潜水稳定运动的方程式，当不存在入渗和蒸发时，由（1—95）和（1—94）式，令右端项为零，得：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(Kh\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \tag{1—100}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\partial H}{\partial y}\right)=0 \tag{1—101}$$

在有些文献中，把（1—74）式和（1—95）式写成一个统一的表达式

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(F\frac{\partial H}{\partial y}\right)+W=E\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1—102}$$

其中，

$$F=\begin{cases}T=KM & \text{在承压含水层区}\\ Kh=K\ (H-z) & \text{在潜水含水层区；}\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}\mu^* & \text{在承压含水层区}\\ \mu & \text{在潜水含水层区；}\end{cases}$$

$z$ 为含水层底板标高。

**思考题：**

人们发现，历年来强调的 $K$、$T$ 在评价我国东部平原区区域性地下水资源中意义不大，反而以往不怎么受到重视的入渗补给却有重要作用，人们能取用的主要是这一部分垂向补给的水量，为什么？

## §1—10 定解条件

从前面几节可以看出，不同类型的地下水流用不同形式的偏微分方程描述；同一形式的偏微分方程又代表着整个一大类地下水流的运动规律。例如，均质各向同性无越流承压含水层中地下水的稳定渗流都用一个 Laplace 方程描述。但由于补给、径流、排泄条件的差异，以及边界性质、边界形状的不同，不同含水层中水头的分布却毫无共同之处。如用它来研究地下水向井的运动和坝下渗流，两者的水头分布是不会相同的。非稳定渗流问题的情况也是相似的。由于方程本身并不包含反映渗流区特定条件的信息，所以每个方程有无数个可能的解，每一个解对应于一个特定渗流区中的水流情况。

为了从大量可能解中求得和所研究特定问题相对应的唯一的特解，就需要提供偏微分方程本身所没有包括的一些补充信息。它们是：

（1）方程中有关参数的值。方程中总是包含一些表示含水层水文地质特征的参数，如导水系数 $T$、贮水系数 $\mu^*$ 等。有时还包含表示含水层所受天然或人为影响的源汇项 $W$。只有当这些参数在所研究的渗流区中的实际数值被确定后，方程本身才算确定。

（2）渗流区的范围和形状（边界有时是无限的，有时部分是未知的）。一个偏微分方程，只有规定了它所定义的区域（即渗流区）后，才能谈得上对它的求解。

（3）边界条件，即渗透区边界所处的条件，用来表示水头 $H$（或渗流量 $q$）在渗流区边界上所应满足的条件，也就是渗流区内水流与其周围环境相互制约的关系。

（4）初始条件。非稳定渗流问题，除了需要列出边界条件外，还要列出初始条件。所谓初始条件就是在某一选定的初始时刻（$t=0$）渗流区内水头 $H$ 的分布情况。

边界条件和初始条件合称定解条件。求解非稳定渗流问题要同时列出边界条件和初始条件；求解稳定渗流问题只要列出边界条件就够了。一个或一组数学方程与其定解条件加在一起，构成一个描述某实际问题的数学模型。前者用来刻画研究区地下水的流动规律，后者用来表明所研究实际问题的特定条件，两者缺一不可。我们用这样的模型来再现一个实际水流系统。给定了方程或方程组和相应定解条件的数学物理问题又称定解问题。因此，所

求的某个渗流问题的解，必然是这样的函数：一方面要适合该渗流区地下水运动的偏微分方程（或方程组），另一方面又要满足该渗流区的边界条件和初始条件。

如以 $D$ 表示所考虑的渗流区，在三维空间中它是由光滑或分片光滑的曲面 S 所围成的一个立体；在二维空间中，它是由光滑或分段光滑的曲线 Γ 所围成的一个平面。除了由封闭曲线、曲面所围成的有限区域外，有时还可能碰到在某个方向或各个方向上可以把所考虑的渗流区视为无限延伸的区域的情况。

下面我们分别介绍地下水流问题中定解条件的类型。

**一、边界条件**

地下水流问题中碰到的边界条件有下列几种类型：

1. 第一类边界条件（Dirichlet 条件）

如果在某一部分边界（设为 $S_1$ 或 $\Gamma_1$）上，各点在每一时刻的水头都是已知的，则这部分边界就称为第一类边界或给定水头的边界，表示为：

$$H(x,y,z,t)|_{S_1} = \varphi_1(x,y,z,t),(x,y,z) \in S_1 \tag{1—103}$$

或

$$H(x,y,t)|_{\Gamma_1} = \varphi_2(x,y,t),(x,y) \in \Gamma_1 \tag{1—104}$$

式中，$H(x, y, z, t)$ 和 $H(x, y, t)$ 分别表示在三维和二维条件下边界段 $S_1$ 和 $\Gamma_1$ 上点 $(x, y, z)$ 和 $(x, y)$ 在 $t$ 时刻的水头。$\varphi_1(x, y, z, t)$ 和 $\varphi_2(x, y, t)$ 分别是 $S_1$ 和 $\Gamma_1$ 上的已知函数。

可以作为第一类边界条件来处理的情况不少，例如当河流或湖泊切割含水层，两者有直接水力联系时，这部分边界就可以作为第一类边界处理。此时，水头 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 是一个由河湖水位的统计资料得到的关于 $t$ 的函数。但要注意，某些河、湖底部及两侧沉积有一些粉砂、亚粘土和粘土，使地下水和地表水的直接水力联系受阻，就不能作为第一类边界条件来处理。区域内部的抽水井或疏干巷道也可以作为给定水头的内边界来处理。此时，水头通常是按某种要求事先给定。

注意，给定水头边界不一定是定水头边界。上面介绍的都只是给定水头的边界。所谓定水头边界，意味着函数 $\varphi_1$ 和 $\varphi_2$ 不随时间而变化。当区域内部的水头比它低时，它就供给水，要多少有多少。当区域内部的水头比它高时，它吸收水，需要它吸收多少就吸收多少。在自然界，这种情况很少见。就是附近有河流、湖泊，也不一定能处理为定水头边界，还要视河流、湖泊与地下水水力联系的情况，以及这些地表水体本身的径流特征而定。在没有充分依据的情况下，千万不要随意把某段边界确定为定水头边界，以免造成很大误差。

2. 第二类边界条件（Neumann 条件）

当知道某一部分边界（设为 $S_2$ 或 $\Gamma_2$）单位面积（二维空间为单位宽度）上流入（流出时用负值）的流量 $q$ 时，称为第二类边界或给定流量的边界。相应的边界条件表示为：

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{S_2} = q_1(x,y,z,t),(x,y,z) \in S_2 \tag{1—105}$$

或

$$T\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2} = q_2(x,y,t),(x,y) \in \Gamma_2 \tag{1—106}$$

式中，$n$ 为边界 $S_2$ 或 $\Gamma_2$ 的外法线方向。$q_1$ 和 $q_2$ 则为已知函数，分别表示 $S_2$ 上单位面积和

$\Gamma_2$ 上单位宽度的侧向补给量。

最常见的这类边界就是隔水边界，此时侧向补给量 $q=0$。在介质各向同性的条件下，上面两个表达式都可简化为：

$$\frac{\partial H}{\partial n}=0 \tag{1—107}$$

边界条件（1—107）还可用在下列场合：（1）地下分水岭；（2）流线。

抽水井或注水井也可以作为内边界来处理。取井壁 $\Gamma_w$ 为边界，根据 Darcy 定律有：

$$2\pi rT\frac{\partial H}{\partial r}=Q(x,y,t)$$

式中，$r$ 为径向距离；$Q$ 为抽水井流量（$Q<0$，为注水井流量）。

由于此时外法线方向 $n$ 指向井心，故上式可改写为下列形式：

$$T\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_w}=-\frac{Q}{2\pi r_w} \tag{1—108}$$

式中，$r_w$ 为井的半径。

3. 第三类边界条件

若某段边界 $S_3$ 或 $\Gamma_3$ 上 $H$ 和 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 的线性组合已知，即：

$$\frac{\partial H}{\partial n}+\alpha H=\beta \tag{1—109}$$

式中，$\alpha$，$\beta$ 为已知函数，这种类型的边界条件称为第三类边界条件或混合边界条件。

当研究区的边界上如果分布有相对较薄的一层弱透水层（带），边界的另一侧是地表水体或另一个含水层分布区时，则可以看作是这类边界。如图 1—34 所示，淤泥层两侧的同一位置上的 A 点和 p 点有水头差，如以 $H$ 表示边界内侧研究区的水头，$H_n$ 为边界外侧的水头，当忽略弱透水层内贮存的变化时，有：

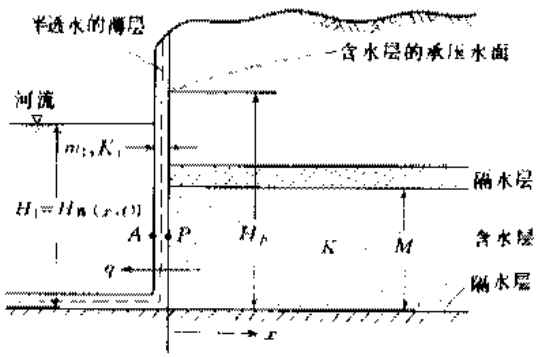



图 1—34 第三类边界条件

（据 J. Bear）

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{S_3}=\frac{K_1}{m_1}(H_n-H)=q(x,y,z,t)$$

式中，$K$ 为研究区的渗透系数；$K_1$ 和 $m_1$ 分别为弱透水层的渗透系数和宽度；$q$ 为和（1—105）式中 $q_1$ 相当的侧向流入量（流出为负值）。上式还可进一步改写为：

$$K\frac{\partial H}{\partial n}-\frac{H_n-H}{\sigma'}=0 \qquad 在\ S_3\ 上 \tag{1—110}$$

式中，$\sigma'=\frac{m_1}{K_1}$。对于图 1—34 这种二维情况，则有：

$$T\frac{\partial H}{\partial n}-M\frac{H_n-H}{\sigma'}=0 \qquad 在\ \Gamma_3\ 上 \tag{1—111}$$

这就是第三类边界条件。

边界的性质和边界距抽水井的距离对计算结果有很大影响，具体选用时必须慎重。在

实际工作中，必须用相当多的勘探工作量查明边界的性质，以便正确地确定边界条件。

下面以不考虑入渗补给的地下水向井中的稳定运动（图 1—35）作为例子，来具体说明它的边界条件。在图 1—35 所示的渗流区中，水头 $H$ 在各边界上必须适合的条件为：

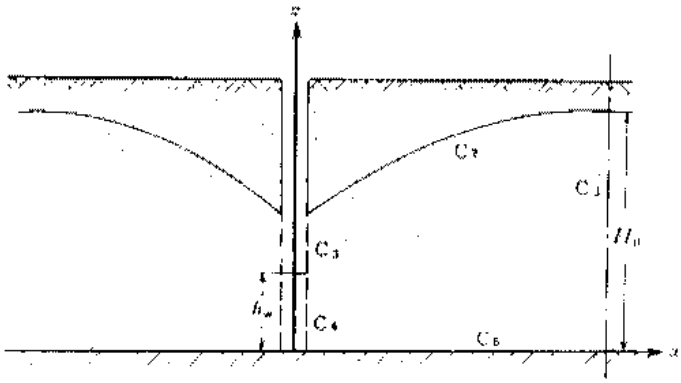



图 1—35　地下水向均质各向同性介质中水井的稳定运动

在上游边界 $C_1$ 上，水头均假设等于 $H_0$，所以有边界条件：

$$H|_{C_1} = H_0 \tag{1—112}$$

浸润曲线 $C_2$ 上，压强等于大气压强，测压管高度等于零，$C_2$ 上任何一点的水头 $H^*$ 应等于该点的纵坐标 $z$：

$$H^*|_{C_2} = z \tag{1—113}$$

同时，浸润曲线又是一条流线，所以有边界条件：

$$\left.\frac{\partial H^*}{\partial n}\right|_{C_2} = 0 \tag{1—114}$$

渗出面 $C_3$ 上，压强也等于大气压强，故有：

$$H|_{C_3} = z$$

井壁 $C_4$ 上，边界条件为：

$$H|_{C_4} = h_w$$

隔水边界 $C_6$ 上，边界条件为：

$$\left.\frac{\partial H}{\partial n}\right|_{C_6} = 0$$

对于非稳定渗流问题，情况相似只是边界条件中有关值都是时间的函数而已。

要注意，对于有浸润曲线的渗流问题（如排水沟降低地下水位问题、土坝渗流问题等），由于这时浸润曲线本身在不断地变化着，此边界条件就要另行描述了，即除了要满足（1—113）式外，还要满足反映浸润面移动规律的条件。描述的方式有多种，本书介绍一种数值计算中常用的方法。这种方法把浸润曲线作为有流量补给的边界来处理。图 1—36 上表示出 $t$ 时刻和 $t+dt$ 时刻的两条浸润曲线。在其间取一宽为 $dr$、$y$ 方向长为 1 个单位长度的小土体。如以 $q$ 表示从浸润曲线边界流入渗流区的单位面积流量，则在 $dt$ 时间内通过小土体这部分边界的补给量为 $qdrdt$。若取流入为正，则相应的边界条件为：

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\Big|_{C_2}=q \qquad (1—115)$$

当浸润曲线下降时，从浸润曲线边界流入渗流区的单位面积流量 $q$ 为：

$$q=\mu\frac{\partial H^*}{\partial t}\cos\theta \qquad (1—116)$$

式中，$\mu$ 为给水度，$\theta$ 为浸润曲线外法线与铅垂线间的夹角。

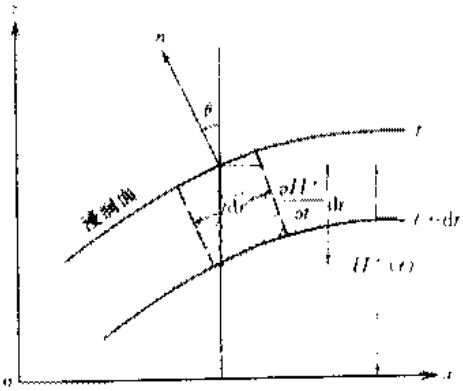



图 1—36　浸润曲线的处理

**二、初始条件**

所谓初始条件，就是给定某一选定时刻（通常表示为 $t=0$）渗流区内各点的水头值，即：

$$H(x,y,z,t)|_{t=0}=H_0(x,y,z),(x,y,z)\in D \qquad (1—117)$$

或

$$H(x,y,t)|_{t=0}=H_0(x,y),(x,y)\in D \qquad (1—118)$$

其中，$H_0$，$H_0$ 为 $D$ 上的已知函数。初始条件对计算结果的影响，将随着计算时间的延长逐渐减弱。可以根据需要，任意选择某一个瞬时作为初始时刻，不一定是实际开始抽水的时刻，也不要把初始状态理解为地下水没有开采以前的状态。

**思考题：**

1. 为什么初始时刻可以任意选定，不一定选用地下水的原始状态？

2. 为什么可以根据具体条件任意用一个区作为计算区，它的周界就作为边界？如果选用天然边界作为计算区边界，有什么优越性？

3. 边界上的泉一般作为什么边界条件？如在开采过程中泉水可能被疏干，还能作为边界吗？

## §1—11　描述地下水运动的数学模型及其解法

**一、地下水流问题的数学模型**

要确定一个地下水流问题的数学模型，只有在查明地质、水文地质条件的基础上才有可能。但天然地质体一般比较复杂，且处于不停的变动之中。为了便于解决问题，必须忽略一些和研究问题无关或关系不大的因素，使问题简化。这种对地质、水文地质条件加以概化后所得到的是天然地质体的一个物理模型。再从这个物理模型出发，用简洁的数学语言，即一组数学关系式来刻画它的数量关系和空间形式，从而反映所研究地质体的地质、水文地质条件和地下水运动的基本特征，达到复制或再现一个实际水流系统基本状态的目的。这样建立的一种数学结构便是数学模型。这个过程通常称为建立模型。

数学模型有两类。如果数学关系式中含有一个或多个随机变量的模型称为随机模型。如果数学模型中各变量之间有严格确定的关系，则称为确定性模型。本书主要讨论后者。

用确定性模型来描述实际地下水流时，如前述，必须具备下列条件：(1) 有一个（或

一组）能描述这类地下水运动规律的偏微分方程；同时，确定了相应渗流区的范围、形状和方程中出现的各种参数值。（2）给出了相应的定解条件。但问题到此并没有完结，因为这时我们对通过上述步骤建立的模型是否能确实代表所研究的地质体还没有把握；模型中出现的参数这时一般也不能确切给出。因此，必须对所建立的模型进行检验，即把模型预测的结果与通过抽水试验或其它试验对含水层施加某种影响后所得到的实际观测结果或一个地区地下水动态长期观测资料进行比较，看两者是否一致。若不一致，就要对模型进行校正，即修正条件（1）和（2），直至满意地拟合为止。这一步骤称为识别模型或校正模型。

经过校正后的模型，能代表所研究的地质体，或者说是实际水流系统的复制品了，因而可以根据需要，用这个模型进行计算或预测，例如预测矿床疏干时的涌水量及地下水污染情况预测等。

此外，模拟实际问题的数学模型还应满足下列基本条件：（1）解（即满足条件1和2的解）是存在的（存在性）；（2）解是唯一的（唯一性）；（3）这个解对原始数据是连续依赖的（稳定性）。要求所提问题的解存在和唯一是不言而喻的。第三个条件，即稳定性的要求，意味着当参数或定解条件发生微小变化时，所引起的解的变化也是很微小的。只有有了这条保证，当参数和定解条件的数据有某些误差时，所求得的解才能仍然接近于真解；否则，解是不可信的，并应该认为此时的数学模型是有毛病的。在实际工作中，原始数据有某种误差，在所难免，所以这个条件很重要。满足上述三个条件的问题称为适定问题，只要有一条不满足就是不适定问题。本书中所述及的问题都是适定的。

下面我们通过几个例子来说明如何用数学模型来描述地下水流问题。

**例一** 研究区的地质情况如图1—37所示。设 $W(x, y, t)$ 代表单位时间、单位面积上的垂向补给量，$P(x, y, t)$ 为计划开采区单位面积上的抽水流量，试写出它的数学模型。

边界BC为天然隔水边界。河流切割整个含水层，两者有密切的水力联系。因此，边界

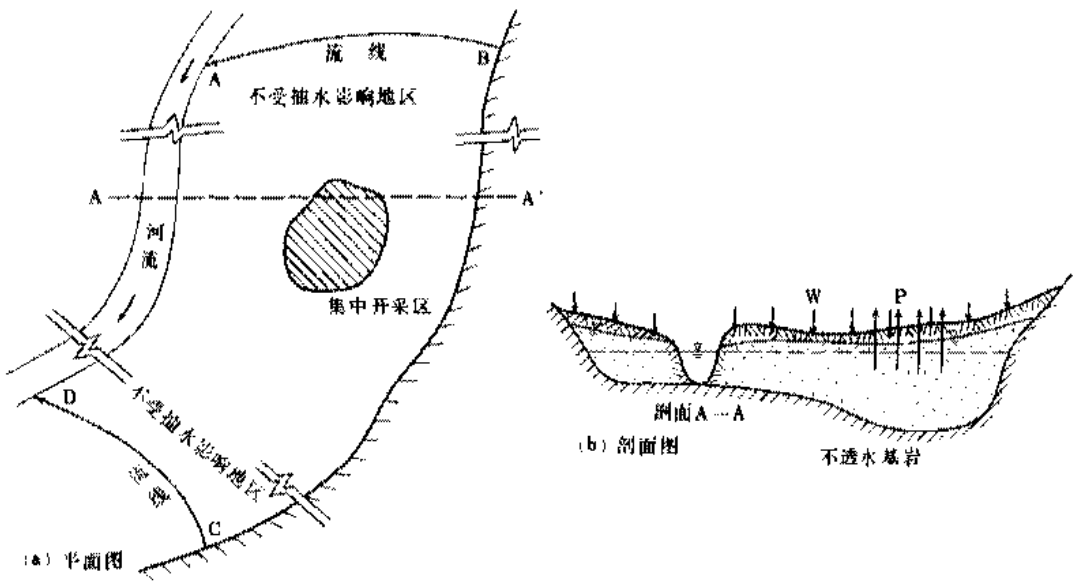



图1—37 某研究区示意图

（据J. Bear）

AD 可以作第一类边界处理。另外，有两个方向没有天然边界，含水层延伸很远，如何处理？一种办法是在远离开采区的、实际上不受该区抽水影响的地段人为地划定一条边界。在该地段根据有关资料选择由若干个有动态观测资料的钻孔组成的连线或选择一条等水头线或流线作为边界。在图 1—37 中以二条流线（BA 和 CD）作为边界（事实上其他两种方式可能更好些）。这时计算区就由 ABCDA 所围的区域组成。边界 BA 和 CD 是在假设那里实际上不受抽水影响的前提下人为划定的。显然，这个假设是否有效还要经过检验。另一种方法是在计算结束后把边界移向更远的地方，重复进行计算。如水位降深事实上不怎么受影响，则边界选择是合理的；否则，应把边界移到更远离开采区的地方，直至边界附近水头没有明显影响为止。

根据给出的条件描述这一潜水流的方程应是（1—95）式。渗流区是 ABCDA，记为 D。边界 BA 和 CD 相当于隔水边界。数学模型如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[K(H-z)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(H-z)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+W-P=\mu\frac{\partial H}{\partial t};(x,y)\in \mathrm{D},t\geqslant 0\\
&H(x,y,0)=H_0(x,y); \qquad (x,y)\in \mathrm{D}\\
&H(x,y,t)=f(x,y,t); \qquad \text{在 AD 上}\\
&\frac{\partial H}{\partial n}=0; \qquad \text{在 AB,BC 和 CD 上}
\end{aligned}\right\} \tag{1—119}$$

式中，$H_0$，$f$ 为已知函数，$f$ 为不同时刻的河水位；$z$（$x$，$y$）为隔水层标高。

**例二** 有的河流，由于河底有一弱透水层，河水与地下水没有直接的水力联系，只是通过弱透水层越流补给地下水。这段河流就不能作为第一类边界处理，应作越流项处理。如其它情况假设与例一相似，则方程式应改写为：

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[K(H-z)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(H-z)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\\
&\frac{K_s}{d_s}(H_s-H)+W-P=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \quad (x,y)\in \mathrm{D}
\end{aligned} \tag{1—120}$$

如抽水按（1—108）式处理，则去掉（1—120）式左端 $P$ 这一项，另加边界条件：

$$K(H-z)\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{r_{w_j}}=-\frac{Q_j}{2\pi r_{w_j}};j=1,2,\cdots,n \tag{1—121}$$

上述式中，$K_s$ 和 $d_s$ 分别为河底弱透水层的垂向渗透系数和厚度，$H_s$ 为作越流项处理的河流的水位，均为已知值；$r_{w_j}$ 和 $Q_j$ 分别为第 $j$ 口井的半径和流量；$n$ 为井数。

有了数学模型后，如果给定含水层的水文地质参数（$T$，$\mu$ 等）和定解条件，就可以求解水头 $H$。这类问题常称为正问题或水头预报问题。如果根据动态观测资料或抽水试验资料反过来确定水文地质参数，那么这一类问题就是前者的逆问题或反求参数问题。

**二、地下水流问题的解法**

对于正问题通常有三种解法：（1）解析法；（2）数值法；（3）模拟法。

1. 解析法

用解析方法求解数学问题可以得到解的解析表达式，通常称为解析解或精确解。应用解析表达式可以给出所求未知量 $H$ 在各种参数值的情况下渗流区中任何一点上的值（非稳定渗流问题给出的还是任意时刻的值）。有了这种表达式后，一般用起来比较简便。因此，

在可能条件下应尽量利用这种方法。但是，这种方法有很大的局限性，只适用于含水层几何形状规则、方程式简单、边界条件单一的情况。例如均质各向同性、等厚的含水层，渗流区是圆形、矩形或者无限的，只有定水头边界或隔水边界等。实际问题往往复杂得多，如含水层边界形状不规则，厚度变化，非均质和各向异性，多种边界条件同时存在等，这些问题一般都找不到它的解析解，不得不应用别的方法去求它的近似解。

2. 数值法

用数值方法求得的解称为数值解。它是一种近似解。用数值法求解一般都要借助于计算机。它是求解大型地下水流问题的主要方法。这种方法的要点是把整个渗流区分割成若干个形状规则的小块（称为单元）。这些小块，可以近似地看成是均质的，因而很容易建立起描述各个单元地下水流动的关系式。把本来是形状不规则的、非均质问题转化为容易计算的形状规则的、均质问题。各个单元可以根据需要选择合适的水文地质参数，单元形状也可以不同。把所有单元合在一起就能表现出渗流区域在几何上的不规则形状和在水文地质上的非均质性，代表原来的渗流区。单元划分多少，根据计算结果的精度要求可以任意选择。要求精度高，剖分的单元就要多一些，相应的计算工作量也要大一些。对于非稳定渗流问题，还要把整个计算时间段划分为许多时段，它们的集合就是原来所要研究的时间段。划分多少个时段，也和单元的划分一样，可以视需要选择。这时所建立的是描述某时段每个单元地下水流动的关系式。然后通过某种方式把这些关系式集合起来，加上定解条件便成为一个方程组，求解这个方程组便可得到该时段原问题的解。这个时段解决了，按划分的时段，一个时段一个时段地算下去，直到把划分的时段全部算完为止。这样未知量（通常是水头或降深）随时间和空间变化的过程就给模拟出来了。因此，这种方法的特点是把全体分割成很多部分，然后再由部分到全体（称为离散化）。用这种方法所求得的解只是渗流区中离散点（如各单元的公共顶点或单元的中心点）上未知量满足某种精度要求的近似值。它不能像解析法那样能给出未知量在渗流区中任何一点在任意时刻的值。

数值法可以很方便地处理解析法难以解决的困难。事实上，它对任何复杂的地下水流问题都能给出有足够精度的解，适用于水文地质的很多领域，如水量计算、水质模拟等。常用的数值法有有限差分法和有限元法等。

3. 模拟法

利用其它物理现象（如电流）和水流的相似性，在实验室用模拟实验的方法求解，详见第 8 章。

**思考题：**

1. 为什么一定要有识别（校正）模型这个阶段？直接用野外试验所得的参数值和边界条件建立模型，不经过上述阶段行不行？

2. 在识别模型，反求参数过程中得到的一个厚度有限的含水层的 $T$ 值有时很大，达数千、数万 $m^2/d$，甚至更大，你相信吗？如相信，怎么解释？

# 第二章　地下水向河渠的运动

河渠水位和流量的变化是影响附近地区地下水动态的重要因素。研究河渠附近地下水运动规律，对地下水资源评价、人工排水和灌溉等都有着重要意义。

## §2—1　河渠间地下水的稳定运动

### 一、潜水的稳定运动

由于大气降水入渗补给或浅层潜水蒸发等因素的影响，河渠间潜水的运动是非稳定的。如果入渗均匀，即在时间和空间分布上都是比较均匀的情况下，为了简化计算，有时把潜水的运动当作稳定运动来研究。

研究河渠间潜水的运动，作如下假设：

（1）含水层均质各向同性，底部隔水层水平，上部有均匀入渗，并可用入渗强度即单位时间，单位面积上的入渗补给量 $W$ 来表示。在此情况下，$W$ 为常数；

（2）河渠基本上彼此平行潜水流可视为一维流；

（3）潜水流是渐变流并趋于稳定。

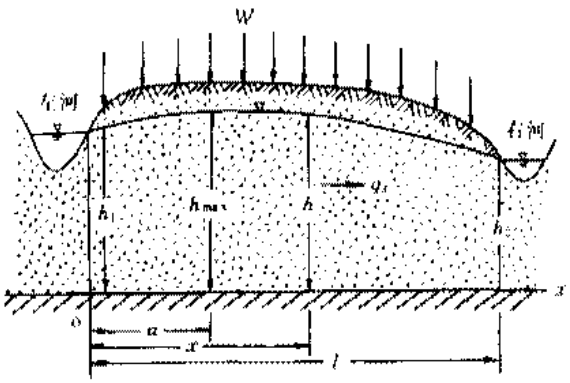



图 2—1　河渠间潜水的运动

在上述假设条件下，取垂直于河渠的单位宽度来研究，如按图 2—1 取坐标，根据（1—93）式可以写出上述问题的数学模型如下：

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\left(h\dfrac{dh}{dx}\right)+\dfrac{W}{K}=0 & (2—1) \\ h|_{x=0}=h_1 & (2—2) \\ h|_{x=l}=h_2 & (2—3) \end{cases}$$

式中 $h$ 为离左端起始断面 $x$ 处的潜水流厚度，$h_1$、$h_2$ 分别为左、右两侧河渠边潜水流厚度。

对（2—1）式积分，得通解：

$$h^2=-\frac{W}{K}x^2+C_1x+C_2 \qquad (2—4)$$

式中 $C_1$，$C_2$ 为积分常数。把（2—2）和（2—3）式代入（2—4）式得

$$C_2=h_1^2, C_1=\frac{h_2^2-h_1^2}{l}+\frac{W}{K}l$$

将 $C_1$，$C_2$ 值代入（2—4）式得：

$$h^2=h_1^2+\frac{h_2^2-h_1^2}{l}x+\frac{W}{K}(lx-x^2) \qquad (2—5)$$

式（2—5）为河渠间有入渗或蒸发（取入渗为正，蒸发为负）时，潜水流的浸润曲线方程（或降落曲线方程）。若已知参数 $K$，$W$，只要测定两个断面的水位 $h_1$ 和 $h_2$ 就可预测两断面间任何断面上的潜水位 $h$。

潜水位 $h$ 是 $x$ 的函数，将（2—5）式对 $x$ 求导数得：

$$h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=\frac{h_2^2-h_1^2}{2l}+\frac{W}{2K}(l-2x) \tag{2—6}$$

由此，根据 Darcy 定律可得河渠间任意断面潜水流的单宽流量为：

$$q_x=-Kh\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} \tag{2—7}$$

式中，$q_x$ 为距左河 $x$ 处任意断面上潜水流的单宽流量。把（2—6）式代入（2—7）式得：

$$q_x=K\frac{(h_1^2-h_2^2)}{2l}-\frac{1}{2}Wl+Wx \tag{2—8}$$

式（2—8）为单宽流量公式。若已知两个断面上的水位值，可以用它来计算两断面间任一断面的流量。应该指出的是，因沿途有入渗补给，所以 $q_x$ 随 $x$ 而变化。

下面我们根据上面得到的公式来讨论河渠间潜水运动的一些特点及其应用。

1. 有入渗时河渠间分水岭的移动规律

式（2—5）反映的浸润曲线形状为：

当 $W>0$ 时，为椭圆曲线；

当 $W<0$ 时，为双曲线；

当 $W=0$ 时，为抛物线。

有入渗时，河渠间的浸润曲线形状为一椭圆曲线的上半支。河渠间形成分水岭，由于分水岭上水位最高，可用求极值的方法求出分水岭的位置。将（2—5）式对 $x$ 求导数，并令 $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=0$，把 $x=a$ 代入，即可得分水岭位置的计算公式：

$$a=\frac{l}{2}-\frac{K}{W}\frac{h_1^2-h_2^2}{2l} \tag{2—9}$$

根据（2—9）式，当其他条件不变时，我们来讨论分水岭位置 $a$ 与两侧河渠水位 $h_1$，$h_2$ 的关系：

如果 $h_1=h_2$，则 $a=\frac{l}{2}$，分水岭位于河渠中央；

如果 $h_1>h_2$，则 $a<\frac{l}{2}$，分水岭靠近左河；

如果 $h_1<h_2$，则 $a>\frac{l}{2}$，分水岭靠近右河。

由此可见，分水岭的位置总是靠近高水位河渠的。

2. 排水渠合理间距的确定

在排水渠设计中，为了避免产生河渠间的盐渍化或沼泽化，需要把分水岭水位 $h_{max}$ 控制在一定标高，这时排水渠的间距就是合理的。根据（2—5）式，令 $x=a$，$h=h_{max}$，得：

$$h_{max}^2=h_1^2+\frac{h_2^2-h_1^2}{l}a+\frac{W}{K}(la-a^2) \tag{2—10}$$

上式中的 $l$，$a$ 都是待求量，可同（2—9）式结合起来，用试算法解出合理间距 $l$。其方法是：按分水岭移动规律给出 $a$ 值，由（2—9）式算出 $l$ 值；再代入（2—10）式，看是否满足等

式。如不满足，则重复这一过程，直到满足为止。这时的 $l$ 值就是要求的合理间距。

在两渠水位相等的特殊条件下，即 $h_1=h_2=h_w$，分水岭位置 $a=\frac{l}{2}$，这时（2—10）式可简化为：

$$l=2\sqrt{\frac{K}{W}(h_{max}^2-h_w^2)}$$

由此可见，当水位条件一定时，在入渗强度愈大和渗透性愈弱的含水层中，排水渠间距愈小，反之则愈大。

3. 河渠间单宽流量的计算

河渠间的单宽流量取决于是否存在分水岭，如果存在分水岭的话，它的位置在那儿？当 $a>0$ 时，说明河渠间存在分水岭。此时，

$$q_1=-Wa \quad \text{（负号表示流向左河）}$$

$$q_2=W(l-a) \quad \text{（流向右河）}$$

当 $a=0$ 时，分水岭位于左河边的起始断面上，此时，

$q_1=0$，左河既不渗漏也得不到入渗补给

$q_2=Wl$，全部入渗量流入右河

当 $a<0$ 时，不存在分水岭。此时不仅全部入渗量流入右河，而且水位高的左河还要发生向水位低的右河渗漏。

$$q_1=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}-\frac{Wl}{2} \quad \text{从左河流出的渗漏量}$$

$$q_2=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}+\frac{Wl}{2} \quad \text{右河得到的补给量}$$

从上述分析可知，若左河为水库时，它的渗漏量由于存在入渗而减少，减少量等于整个库渠间入渗量的一半，即 $\frac{1}{2}Wl$。因此，在选择库址时，除了要考虑岸边岩石的渗透系数 $K$ 和河渠（库）之间的宽度 $l$ 外，还要考虑入渗量 $W$ 的大小等，以预测水库蓄水后分水岭存在的可能性和渗漏量的大小。

4. 无入渗时潜水流的方程式

当 $W=0$ 时，（2—5）式和（2—8）式可简化为：

$$h^2=h_1^2-\frac{h_1^2-h_2^2}{l}x \qquad (2—11)$$

$$q=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l} \qquad (2—12)$$

这就是 Dupuit 公式。降落曲线的形状已经不是椭圆曲线，而是二次抛物线了。通过河渠间所有断面的单宽流量也变成相等的了。

需要指出的是，本节导出的公式都是在应用 Dupuit 假设，忽略了渗流垂向分速度的情况下导出的。因此，用（2—11）式计算出的浸润曲线较实际浸润曲线偏低（图 2—2）。潜水面坡度愈大，两曲线间的差别也愈大。П. А. Чарный（恰尔内）证实，虽然用了 Dupuit 假设，但按（2—12）式计算的流量仍然是准确的。

在自然界中，除了上述均质含水层外，还经常见到含水层为非均质的情况。常见的有双层结构的含水层，其上层渗透系数往往比下层的渗透系数小得多（图 2—3）。在这种情况

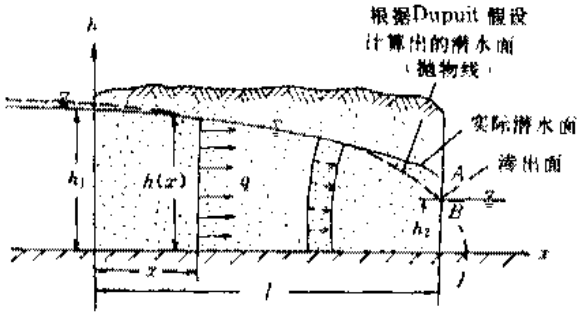



图 2—2　计算出的潜水面与实际潜水面的比较
（据 J. Bear）
——→按 Dupuit 假设的渗透流速方向
— →实际渗透流速方向

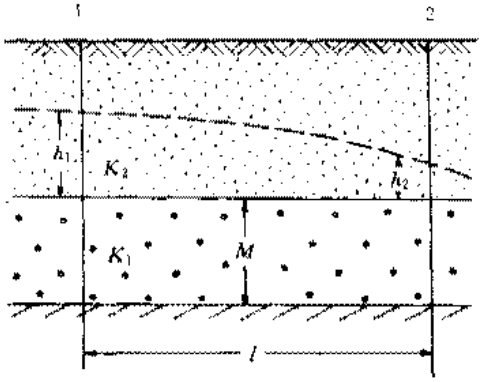



图 2—3　双层岩层中的渗流

下，可以将地下水流分成二部分，将分界面以上当作潜水，以下当作承压水看待。通过整个含水层的单宽流量等于通过下层的单宽流量和通过上层的单宽流量之和，即：

$$q = K_1 M \frac{h_1 - h_2}{l} + K_2 \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \tag{2—13}$$

在自然界中，含水层的透水性沿水流方向急剧变化的情况也是常见的（图 2—4）。根据水流连续性原理，通过两种透水性不同的岩层的流量应当是相等的。

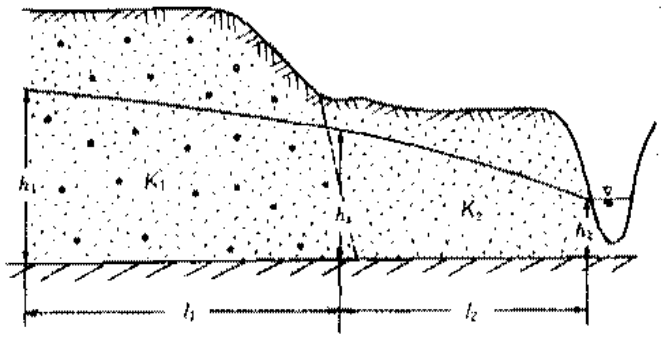



图 2—4　岩层透水性急剧变化时的潜水流

对于渗透系数为 $K_1$ 的岩层，单宽流量 $q$ 为：

$$q = K_1 \frac{h_1^2 - h_s^2}{2l_1}$$

或

$$h_1^2 - h_s^2 = \frac{2ql_1}{K_1} \tag{2—14}$$

对于渗透系数为 $K_2$ 的岩层，单宽流量为：

$$h_1^2 - h_2^2 = \frac{2ql_2}{K_2} \tag{2—15}$$

将（2—14）和（2—15）式相加，消去 $h_0$ 得

$$q = \frac{h_1^2 - h_2^2}{2\left(\frac{l_1}{K_1} + \frac{l_2}{K_2}\right)} \tag{2—16}$$

式中，$h_1$，$h_2$ 为断面 1 和 2 上的潜水流厚度；$K_1$，$K_2$ 为相邻两种岩层的渗透系数；$l_1$，$l_2$ 为断面 1 和 2 到岩层分界面的距离。

绘制浸润曲线时，先按（2—14）式算出 $h_0$ 值，然后用（2—11）式分段进行绘制。

例题 2—1：河流与排水渠道间的岩层由冲积成因的细砂组成，平均渗透系数为 10m/d，年平均降水量为 445mm；考虑到当地的条件，取年平均入渗系数为 0.35，其他资料列于图

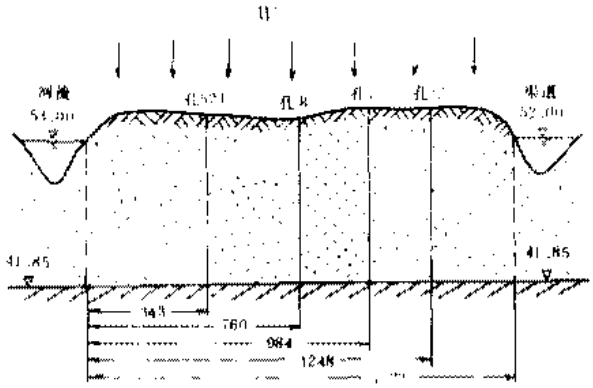



图 2—5　均匀入渗时，河渠间地下水的运动

（据 Н. А. Скабаланович）

2—5 中。试确定河流与排水渠道间的 521 号、8 号、10 号、12 号孔以及分水岭上潜水面的位置，并计算流入河流和排水渠道中的渗流量。

解：年平均入渗量为：

$$W = \frac{0.445 \times 0.35}{365} = 0.00044\text{m/d}$$

潜水流厚度为，在河边　$h_1 = 53.00 - 41.85 = 11.15\text{m}$

在渠边　$h_2 = 52.60 - 41.85 = 10.75\text{m}$

用（2—5）式计算孔 521、孔 8、孔 10、孔 12 的潜水流厚度：

$$h = \sqrt{h_1^2 + \frac{h_2^2 - h_1^2}{l}x + \frac{W}{K}(lx - x^2)}$$

对于孔 521，$x = 343.00\text{m}$

$$h_{521} = \sqrt{(11.15)^2 + (10.75^2 - 11.15^2)\frac{343}{1722} + \frac{0.00044}{10}(1722 \times 343 - 343^2)} = 11.96\text{m}$$

孔 521 中的潜水面标高：$H_{521} = 41.85 + 11.96 = 53.81\text{m}$

用相同的方法可以求得：

8号孔中　　$h_8=12.35\text{m}$，$H_8=54.20\text{m}$

10号孔中　　$h_{10}=12.30\text{m}$，$H_{10}=54.15\text{m}$

12号孔中　　$h_{12}=11.99\text{m}$，$H_{12}=53.84\text{m}$

分水岭的位置可由（2—9）式确定：

$$a=\frac{l}{2}-\frac{K}{W}\frac{(h_1^2-h_2^2)}{2l}=\frac{1722}{2}-\frac{10(11.15^2-10.75)^2}{0.00044\times2\times1722}=803\text{m}$$

据此可求出分水岭上的潜水流厚度：

$$h_{max}=\sqrt{h_1^2+(h_2^2-h_1^2)\frac{a}{l}+\frac{W}{K}(l-a)a}$$

$$=\sqrt{11.15^2+(10.75^2-11.15^2)\frac{803}{1722}+\frac{0.00044}{10}(1722-803)803}=12.36\text{m}$$

$$H_{max}=41.85+12.36=54.21\text{m}$$

流入河流的潜水单宽流量为：

$$q_1=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}-W\frac{l}{2}$$

$$=10\frac{11.15^2-10.75^2}{2\times1722}-0.00044\frac{1722}{2}=-0.35\text{m}^3/(\text{d}\cdot\text{m})$$

负号表示水流方向和 $x$ 轴方向相反，即流向河流。

流入渠道的潜水单宽流量为：

$$q_2=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}+W\frac{l}{2}$$

$$=10\frac{11.15^2-10.75^2}{2\times1722}+0.00044\frac{1722}{2}=0.40\text{m}^3/(\text{d}\cdot\text{m})$$

## 二、承压水的稳定运动

承压含水层（图2—6），没有入渗补给，如含水层厚度 $M$ 为常数，其他条件和潜水含水层相同，为一维流，则这种情况下方程 $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=0$ 在有关边界条件下，积分得

$$H=H_1-\frac{H_1-H_2}{l}x \tag{2—17}$$

由 Darcy 定律可得：

$$q=KM\frac{H_1-H_2}{l} \tag{2—18}$$

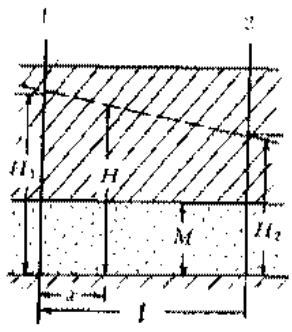



图 2—6　承压水流

上述结果表明，在厚度不变的承压水流中，降落曲线是均匀倾斜的直线。如果含水层厚度变化时，则 $M$ 取上、下游断面含水层厚度的平均值。

在地下水坡度较大的地区，有时会出现上游是承压水，下游由于水头降至隔水顶板以下而转为无压水的情况，形成承压-无压流（图2—7）。

此时可用分段法计算，如厚度 $M$ 不变，承压水地段的单宽流量为：

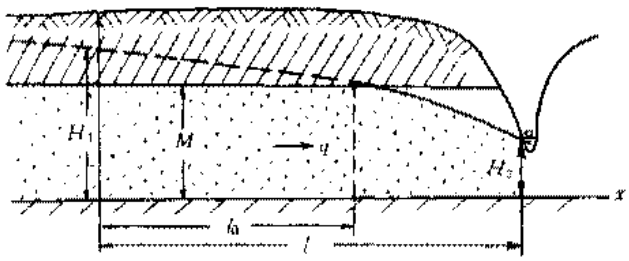



图 2－7　承压-无压流

$$q_1 = KM\frac{H_1 - M}{l_0}$$

式中，$l_0$ 为承压水流地段长度。无压水流地段单宽流量为：

$$q_2 = K\frac{M^2 - H_2^2}{2(l - l_0)}$$

根据水流连续性原理，$q_1 = q_2 = q$，由此得：

$$l_0 = \frac{2lM(H_1 - M)}{M(2H_1 - M) - H_2^2}$$

把 $l_0$ 代入任何一个流量公式，可得承压-无压流的单宽流量：

$$q = K\frac{M(2H_1 - M) - H_2^2}{2l} \qquad (2—19)$$

**思考题：**

1. 不考虑入渗的潜水含水层，当隔水底板倾斜时，怎样求得它的流量和降落曲线？如果隔水底板的坡度是变化的，又怎么求得？

2. 承压含水层的厚度变化和降落曲线的坡度、形状有什么关系？

## §2—2　河渠间地下水的非稳定运动

河渠水位的变化是影响两岸地下水动态的重要因素。在地表水和两岸潜水存在水力联系的情况下，当河水位（或库水位）高于两岸潜水位时，将补给地下水；当河水位低于附近地下水位时，河渠就成为地下水的排泄通道。因此，在地表水和两岸潜水存在水力联系的情况下，河水位（或库水位）的抬高，会引起潜水位相应的抬高，这种现象通常称为潜水回水。利用河渠地表水的侧渗作用来补充地下水，以达到灌溉农田的目的，叫河渠引渗或引渗回灌。研究潜水非稳定运动的规律，对地下水水位、流量进行动态预报，就有可能合理地进行灌溉，防止土壤盐渍化和沼泽化。因此，研究河渠附近潜水运动规律，对地下水资源评价、人工回灌系统的规划设计、河道建闸蓄水对两岸地下水动态影响的预测、土壤盐碱化的预防和改良，以及在浅层地下水为咸水的地区如何进行排咸补淡等都有重要的意义。

**一、河渠水位迅速上升（或下降）为定值时，河渠间地下水的非稳定运动**

研究时作了如下假设：

（1）含水层均质，各向同性，位于水平隔水层上。上部入渗量可忽略不计，即设 $W=0$、河渠引渗后的潜水流可视为一维流；

（2）潜水流的初始状态为稳定流，水位可用（2—11）式表示，即：

$$h_{x,0}^2 = h_{0,0}^2 - \frac{h_{0,0}^2 - h_{l,0}^2}{l}x$$

（3）两侧河渠水位同时出现水位上升，发生瞬时回水，左河水位自 $h_{0,0}$ 上升至 $h_{0,t}$，右河自 $h_{l,0}$ 上升至 $h_{l,t}$（图 2—8）。

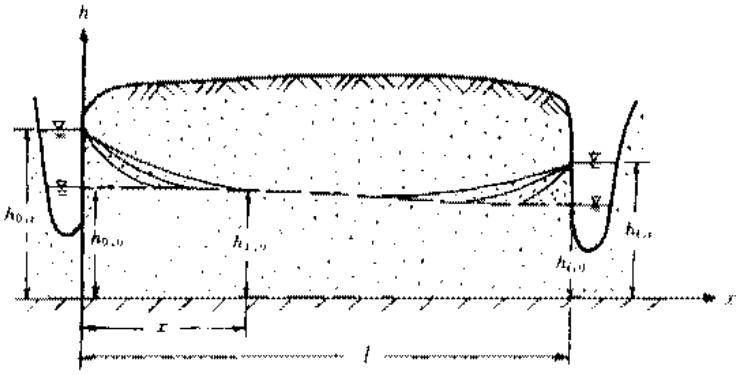



图 2—8 河渠间潜水的非稳定流动

在上述情况下，地下水的运动仍可用 Boussinesq 方程式（1—93）来描述，只是 $W=0$ 而已，因此有：

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{K}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

为了把上述方程线性化，在方程两端同时乘以潜水流厚度 $h$，则有：

$$h\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Kh}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\partial h}{\partial x}\right)$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h^2}{2}\right) = \frac{Kh}{\mu}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{h^2}{2}\right)$$

如令 $u^* = \frac{h^2}{2}$，则上式可改写为：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = \frac{Kh}{\mu}\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2}$$

如潜水流厚度变化不大，可以近似地作为常数来看待，用其平均值 $h_m$ 来代替，则上式可进一步改写为齐次的 Fourier 方程：

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^2} \tag{2—20}$$

式中：

$$a = \frac{Kh_m}{\mu} \tag{2—21}$$

这是以 $u^*$ 表示的线性方程。显然，只有当求解问题的初始条件和边界条件对于 $u^*$ 也是线性

的时候，问题本身才是以 $u'$ 表示的线性问题。这种线性化的方法是 Boussinesq 方程的第二种线性化方法。

根据前面给出的假设，我们可以写出以 $u'$ 表示的定解条件如下：

$$u^*(x,0)=\frac{1}{2}h_{0,0}^2-\frac{h_{0,0}^2-h_{l,0}^2}{2l}x$$

$$u^*(0,t)=\frac{1}{2}h_{0,t}^2$$

$$u^*(l,t)=\frac{1}{2}h_{l,t}^2$$

为了便于求解，取一新函数：

$$u(x,t)=u'(x,t)-u^*(x,0)=\frac{h^2(x,t)}{2}-\frac{h^2(x,0)}{2}$$

并把它代入（2—20）式和相应的定解条件，于是定解问题变为：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},u=\dfrac{1}{2}[h^2(x,t)-h^2(x,0)] & (2\text{—}22)\\ u(x,0)=0 & (2\text{—}23)\\ u(0,t)=\dfrac{1}{2}(h_{0,t}^2-h_{0,0}^2)=\dfrac{1}{2}\Delta(h_{0,t}^2) & (2\text{—}24)\\ u(l,t)=\dfrac{1}{2}(h_{l,t}^2-h_{l,0}^2)=\dfrac{1}{2}\Delta(h_{l,t}^2) & (2\text{—}25)\end{cases}$$

这个问题可通过有限 Fourier 正弦变换求解，结果得：

$$u=\frac{1}{2}\left[\Delta(h_{0,t}^2)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x+\Delta(h_{l,t}^2)\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\cdot\left(1-e^{-\frac{n^2\pi^2}{l^2}at}\right)\qquad(2\text{—}26)$$

利用下列展开式：

$$1-\frac{x}{l}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\frac{x}{l}=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

及 $u=\frac{1}{2}(h_{x,t}^2-h_{x,0}^2)$，并设 $\bar{x}=\frac{x}{l}$，$\bar{t}=\frac{at}{l^2}$ 代入（2—26）式得：

$$h_{x,t}^2=h_{x,0}^2+\Delta(h_{0,t}^2)\left[1-\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\bar{x})e^{-n^2\pi^2\bar{t}}\right]$$

$$+\Delta(h_{l,t}^2)\left[\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi\bar{x})e^{-n^2\pi^2\bar{t}}\right]$$

设

$$F(\bar{x},\bar{t})=1-\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi\bar{x})e^{-n^2\pi^2\bar{t}}$$

$$F'(\bar{x},\bar{t})=\bar{x}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi\bar{x})e^{-n^2\pi^2\bar{t}}$$

则上式简化为：

$$h_{x,t}^2=h_{0,0}^2+\Delta(h_{0,t}^2)F(\bar{x},\bar{t})+\Delta(h_{l,t}^2)F'(\bar{x},\bar{t})\qquad(2\text{—}27)$$

式中：$\bar{x}=\frac{x}{l}$——相对距离；

$\bar{t}=\frac{at}{l^2}$——相对时间；

$F(\bar{x},\bar{t})$——河渠水位函数，当 $x$ 在 0～1 的区间变化时，有表可查（表 2—1）；

$F'(\bar{x},\bar{t})$——可根据 $\bar{x}$，$\bar{t}$ 由 $F'(\bar{x},\bar{t})=F(1-\bar{x},\bar{t})$ 求得。

表 2—1　函数 $F(\bar{x},\bar{t})$ 数值表

| $\bar{t}$ \ $\bar{x}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.02 | 1 | 0.6169 | 0.3174 | 0.1336 | 0.0457 | 0.0125 | 0.0027 | 0.0005 | 0.0001 | 0 | 0 |
| 0.03 | 1 | 0.6803 | 0.4145 | 0.2212 | 0.1028 | 0.0417 | 0.0147 | 0.0044 | 0.0014 | 0.0004 | 0 |
| 0.04 | 1 | 0.7234 | 0.4795 | 0.2888 | 0.1537 | 0.0771 | 0.0339 | 0.0133 | 0.0047 | 0.0014 | 0 |
| 0.05 | 1 | 0.7519 | 0.5272 | 0.3427 | 0.2059 | 0.1138 | 0.0578 | 0.0269 | 0.0113 | 0.0039 | 0 |
| 0.075 | 1 | 0.7963 | 0.6056 | 0.4389 | 0.3017 | 0.1966 | 0.1210 | 0.0699 | 0.0370 | 0.0156 | 0 |
| 0.10 | 1 | 0.8230 | 0.6547 | 0.5022 | 0.3707 | 0.2628 | 0.1780 | 0.1139 | 0.0664 | 0.0303 | 0 |
| 0.15 | 1 | 0.8547 | 0.7141 | 0.5820 | 0.4617 | 0.3551 | 0.2646 | 0.1836 | 0.1187 | 0.0657 | 0 |
| 0.20 | 1 | 0.8726 | 0.7479 | 0.6283 | 0.5158 | 0.4115 | 0.3160 | 0.2286 | 0.1481 | 0.0727 | 0 |
| 0.30 | 1 | 0.8898 | 0.7809 | 0.6733 | 0.5686 | 0.4670 | 0.3687 | 0.2735 | 0.1806 | 0.0898 | 0 |
| 0.40 | 1 | 0.8990 | 0.7930 | 0.6900 | 0.5880 | 0.4880 | 0.3880 | 0.2900 | 0.1950 | 0.0960 | 0 |
| 0.50 | 1 | 0.8900 | 0.7969 | 0.6960 | 0.5960 | 0.4950 | 0.3950 | 0.2960 | 0.1980 | 0.1000 | 0 |
| 0.60 | 1 | 0.9000 | 0.8000 | 0.7000 | 0.6000 | 0.5000 | 0.4000 | 0.3000 | 0.2000 | 0.1000 | 0 |

式（2—27）为河渠水位迅速上升，然后保持不变时，计算河渠间任一断面任一时刻水位的公式。公式表明，它为 $\Delta h_{0,t}^2$ 乘上小于 1 的函数，故河渠间任一断面的水位变幅总是小于河渠的水位变幅的。

取（2—27）式对 $x$ 的导数，代入 $q=-Kh\frac{\partial h}{\partial x}$ 中得：

$$q_{x,t}=q_{x,0}+\frac{K}{2l}[\Delta(h_{0,t}^2)G(\bar{x},\bar{t})-\Delta(h_{l,t}^2)G'(\bar{x},\bar{t})] \tag{2—28}$$

式中：$q_{x,0}$——$x$ 断面处回水前单宽流量；

$q_{x,t}$——$x$ 断面处回水后 $t$ 时刻的单宽流量；

$G(\bar{x},\bar{t})=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi\bar{x})\,e^{-n^2\pi^2\bar{t}}$——河渠流量函数，其值可查表 2—2；

$G'(\bar{x},\bar{t})=G(1-\bar{x},\bar{t})$。

式（2—28）表明，当河渠水位迅速上升，然后保持不变时，任意时刻任一断面的单宽流量与稳定流不同，它不仅随时间变化，且与坐标有关。虽然没有沿途的入渗补给，但因同一时刻在不同断面上有不同的水位变幅和流速，故不同断面的流量也是不同的。

将（2—28）式在 0～$t$ 区间内积分得：

$$\sum_{i=1}^{t}q_{xi}=q_{0,t}t+\frac{Kl}{2a}[\Delta(h_{0,t}^2)H(\bar{x},\bar{t})-\Delta(h_{l,t}^2)H'(\bar{x},\bar{t})] \tag{2—29}$$

式中，$H'(\bar{x},\bar{t})=H(1-\bar{x},\bar{t})$；$H(\bar{x},\bar{t})$的值可查表 2—3。

表 2-2 函数 $G(\bar{x}, \bar{t})$ 数值表

| $\bar{t}$ \ $\bar{x}$ | 0.0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 5.6416 | 1.3939 | 2.0752 | 0.5956 | 0.1041 | 0.0109 | 0.0004 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.02 | 3.9894 | 3.5027 | 2.4197 | 1.2952 | 0.5399 | 0.1752 | 0.0444 | 0.0087 | 0.0013 | 0.0002 | 0 |
| 0.04 | 2.8209 | 2.5600 | 2.1970 | 1.6073 | 1.0378 | 0.5913 | 0.3073 | 0.1320 | 0.0520 | 0.0193 | 0.0109 |
| 0.07 | 2.1324 | 2.0576 | 1.8466 | 1.5463 | 1.2044 | 0.8374 | 0.5915 | 0.3757 | 0.2294 | 0.1465 | 0.1199 |
| 0.10 | 1.7843 | 1.7403 | 1.6149 | 1.4260 | 1.1989 | 0.9614 | 0.7387 | 0.5502 | 0.4090 | 0.3221 | 0.2993 |
| 0.20 | 1.2786 | 1.2648 | 1.2250 | 1.1630 | 1.0853 | 0.9993 | 0.9135 | 0.8365 | 0.7755 | 0.7364 | 0.7229 |
| 0.30 | 1.1035 | 1.0985 | 1.0838 | 1.0609 | 1.0320 | 1.0000 | 0.9680 | 0.9391 | 0.9162 | 0.9015 | 0.8965 |
| 0.40 | 1.0386 | 1.0367 | 1.0312 | 1.0227 | 1.0119 | 1.0000 | 0.9881 | 0.9773 | 0.9688 | 0.9633 | 0.9604 |
| 0.50 | 1.0144 | 1.0137 | 1.0116 | 1.0085 | 1.0044 | 1.0000 | 0.9956 | 0.9915 | 0.9884 | 0.9863 | 0.9856 |
| 0.60 | 1.0054 | 1.0051 | 1.0043 | 1.0032 | 1.0017 | 1.0000 | 0.9983 | 0.9968 | 0.9957 | 0.9949 | 0.9946 |
| 0.70 | 1.0020 | 1.0019 | 1.0016 | 1.0012 | 1.0006 | 1.0000 | 0.9994 | 0.9988 | 0.9984 | 0.9981 | 0.9980 |
| 0.80 | 1.0007 | 1.0007 | 1.0006 | 1.0004 | 1.0002 | 1.0000 | 0.9998 | 0.9996 | 0.9994 | 0.9993 | 0.9993 |
| 1.00 | 1.0001 | 1.0001 | 1.0001 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 | 0.9999 |
| 0 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 |

表 2-3 函数 $H_0(\bar{x}, \bar{t})$ 数值表

| $\bar{t}$ \ $\bar{x}$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.01 | 0.1123 | 0.0399 | 0.0101 | 0.0017 | 0.0002 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.02 | 0.1516 | 0.0789 | 0.0233 | 0.0117 | 0.0034 | 0.0008 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0.04 | 0.2257 | 0.1396 | 0.0799 | 0.0419 | 0.0201 | 0.0087 | 0.0034 | 0.0012 | 0.0004 | 0.0001 | 0 |
| 0.07 | 0.2985 | 0.2092 | 0.1402 | 0.0896 | 0.0546 | 0.0313 | 0.0173 | 0.0090 | 0.0045 | 0.0023 | 0.0017 |
| 0.10 | 0.3568 | 0.2657 | 0.1919 | 0.1343 | 0.0908 | 0.0513 | 0.0375 | 0.023 | 0.0141 | 0.0094 | 0.0079 |
| 0.15 | 0.4371 | 0.3144 | 0.2660 | 0.2013 | 0.1492 | 0.1085 | 0.0777 | 0.0555 | 0.0406 | 0.0321 | 0.0293 |
| 0.20 | 0.5052 | 0.4416 | 0.3306 | 0.2618 | 0.2047 | 0.1583 | 0.220 | 0.0949 | 0.0761 | 0.0651 | 0.0615 |
| 0.25 | 0.5661 | 0.4720 | 0.3894 | 0.3183 | 0.2581 | 0.2083 | 0.1686 | 0.1384 | 0.1172 | 0.1047 | 0.1005 |
| 0.30 | 0.6228 | 0.5284 | 0.4449 | 0.3722 | 0.3101 | 0.2583 | 0.2166 | 0.1845 | 0.1618 | 0.1483 | 0.1482 |
| 0.40 | 0.7294 | 0.6346 | 0.5502 | 0.4760 | 0.4121 | 0.3583 | 0.3145 | 0.2806 | 0.2575 | 0.2420 | 0.2372 |
| 0.50 | 0.8319 | 0.7370 | 0.6528 | 0.5775 | 0.5129 | 0.4583 | 0.4138 | 0.3792 | 0.3545 | 0.3397 | 0.3348 |
| 0.60 | 0.9328 | 0.8378 | 0.7529 | 0.6780 | 0.6132 | 0.5582 | 0.5135 | 0.4786 | 0.4538 | 0.4388 | 0.4339 |
| 0.70 | 1.0331 | 0.9382 | 0.8532 | 0.7782 | 0.7133 | 0.6583 | 0.6134 | 0.5784 | 0.5534 | 0.5385 | 0.5335 |
| 0.80 | 1.1333 | 1.0383 | 0.9633 | 0.8783 | 0.8133 | 0.7583 | 0.7133 | 0.6784 | 0.6535 | 0.6384 | 0.6334 |
| 1.0 | 1.3333 | 1.2383 | 1.1533 | 1.0783 | 1.0383 | 0.9583 | 0.9133 | 0.8783 | 0.8533 | 0.8383 | 0.8333 |
| 1.5 | 1.8330 | 1.7380 | 1.6480 | 1.575 | 1.516 | 1.458 | 1.4180 | 1.38 | 1.3500 | 1.336 | 1.333 |
| 2.0 | 2.3330 | 2.2380 | 2.1480 | 2.076 | 2.016 | 1.958 | 1.9190 | 1.88 | 1.858 | 1.836 | 1.833 |
| ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ | ∞ |

式（2—29）为从引渗开始经历时间 $t$ 后任一断面的总单宽侧渗量（单位长度上河渠补给地下水的总量）。

## 二、河渠水位变化时，河渠间地下水的非稳定运动

河水位常有一定涨落，呈阶梯状变化或连续地变化。为简化起见，对后者常将变化曲线

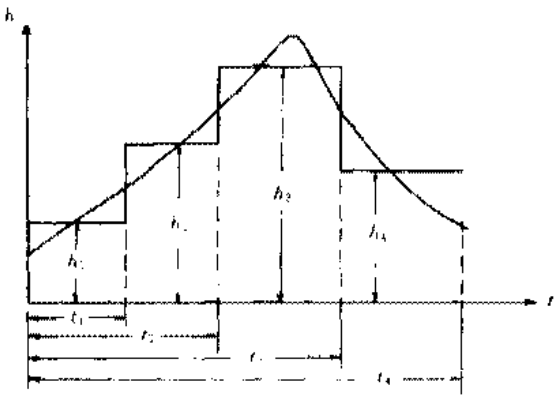


图 2—9　水位连续变化近似处理为阶梯状线段

概化成阶梯状线段(图 2—9)。为了计算方便，左右二河渠概化的时段数应该相同。每一时段视为定水位，相邻时段之间变化仍看作瞬时回水。各时段回水之和便是整个变化过程，应用叠加原理可得下列计算公式：

$$h^2_{x,t}=h^2_{x,0}+\sum_{i=1}^{n}[(h^2_{0,i}-h^2_{0,i-1})F(\overline{x},\overline{t}_{t-i})+(h^2_{l,i}-h^2_{l,i-1})F'(\overline{x},\overline{t}_{t-i})] \tag{2—30}$$

同时得：

$$q_{x,t}=q_{x,0}+\frac{K}{2l}\sum_{i=1}^{n}[(h^2_{0,i}-h^2_{0,i-1})G(\overline{x},\overline{t}_{t-i})-(h^2_{l,i}-h^2_{l,i-1})G'(\overline{x},\overline{t}_{t-i})] \tag{2—31}$$

式(2—53)和式(2—54)为将左右二河渠水位概化成同时段阶梯状变化时河渠间任一时刻任一断面上潜水水位和单宽流量的计算公式。

## 三、应用分析

(1) 当 $l\to\infty$，$\Delta(h^2_{l,t})=0$ 时，双侧有河渠渗透转变为单侧有河渠渗透的半无限问题

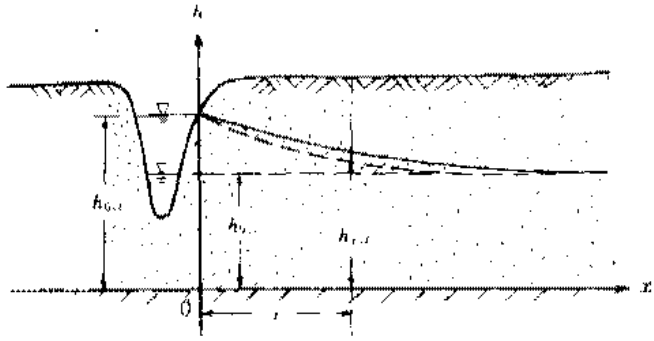


图 2—10　河渠水位迅速上升时河渠附近潜水的非稳定运动

(图 2—10)。此时，(2—27)式简化为：

$$h^2_{x,t}=h^2_{x,0}+\Delta(h^2_{0,t})\lim_{l\to\infty}F(\overline{x},\overline{t})$$

为了求极限值，可将级数化为积分，结果得：

$$h^2_{x,t}=h^2_{x,0}+\Delta(h^2_{0,t})F(\lambda) \tag{2—32}$$

式中：$F(\lambda)=\mathrm{erfc}(\lambda)=1-\mathrm{erf}(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\infty}\mathrm{e}^{-\beta^2}\mathrm{d}\beta$

$$\lambda=\frac{x}{2\sqrt{at}}$$

称 $\lambda$ 为河渠水位对地下水位的影响系数，数值列于表 2—4 中。

表 2—4　$F(\lambda)$数值表

| $\lambda$ | $\lambda^2$ | $F(\lambda)$ | $\lambda$ | $\lambda^2$ | $F(\lambda)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03162 | 0.0010 | 0.9643 | 0.5000 | 0.25 | 0.4795 |
| 0.0400 | 0.0016 | 0.9549 | 0.6325 | 0.40 | 0.3711 |
| 0.0500 | 0.0025 | 0.9436 | 0.7746 | 0.60 | 0.2733 |
| 0.06325 | 0.0040 | 0.9287 | 0.8944 | 0.80 | 0.2059 |
| 0.07746 | 0.0060 | 0.9128 | 1.000 | 1.00 | 0.1573 |
| 0.08944 | 0.0080 | 0.8994 | 1.140 | 1.30 | 0.1069 |
| 0.1000 | 0.010 | 0.8875 | 1.265 | 1.60 | 0.0736 |
| 0.1265 | 0.016 | 0.8580 | 1.378 | 1.90 | 0.0513 |
| 0.1581 | 0.025 | 0.8231 | 1.483 | 2.20 | 0.0359 |
| 0.2000 | 0.040 | 0.7731 | 1.581 | 2.50 | 0.0254 |
| 0.2449 | 0.060 | 0.7291 | 1.643 | 2.70 | 0.0202 |
| 0.2828 | 0.080 | 0.6892 | 1.732 | 3.00 | 0.0143 |
| 0.3162 | 0.10 | 0.6548 | 1.789 | 3.20 | 0.0114 |
| 0.4000 | 0.16 | 0.5716 | | | |

erfc(λ)为误差函数的补函数(余误差函数)。

$\mathrm{erf}(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\lambda}e^{-\beta^2}d\beta$，为误差函数。

如果含水层的压力传导系数 $a$ 已知，欲求在任一距离 $x$，任一时间 $t$ 内因河渠水位突然变化 $\Delta h_{0,t}$所引起的地下水位变化，可先求出 $\lambda=\frac{x}{2\sqrt{at}}$，然后由表（2—4）查得 $F(\lambda)$值，代入（2—32）式，即可确定 $h_{x,t}$值。

同理，(2—28) 式简化为：

$$q_{x,t}=q_{x,0}+\frac{K\Delta(h_{0,t}^2)}{\sqrt{at}}G(\lambda) \tag{2—33}$$

式中，$G(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\lambda^2}$。

式（2—32）和式（2—33）为一侧有河渠渗透时，任一断面潜水位和单宽流量的计算公式。

（2）当 $\Delta h_{l,t}^2=0$ 时，即当左河渠回水，右河渠水位保持不变时，(2—27) 式和 (2—28) 式分别简化为：

$$h_{x,t}^2=h_{x,0}^2+\Delta(h_{0,t}^2)F(\bar{x},\bar{t}) \tag{2—34}$$

$$q_{x,t}=q_{x,0}+\frac{K\Delta(h_{0,t}^2)}{2l}G(\bar{x},\bar{t}) \tag{2—35}$$

沿河渠布置井排开采地下水，可以夺取河渠水的补给。这时，可近似地把井排看作水平渠道（相当于右渠），且动水位不变，利用上面两个公式可计算潜水位和河水对地下水的补给量。

（3）确定排灌渠的合理间距。在排水或灌溉的地区，设计出合理的渠道间距，是水文地质工作的重点之一。

如图 2—8 所示，相邻河渠水位变幅相等，即 $\Delta(h_{0,t}^2)=\Delta(h_{l,t}^2)$ 时，可取河渠中间断面的潜水位为计算指标（引渗时最低，排水时最高）。在预计时间内，如该断面上的潜水位

满足设计要求，则其余断面的水位必然都能达到预期的引渗或排水效果。这时河渠间距就是合理的。

按照上面的分析，在 $x=\frac{1}{2}l$ 处，$F(\bar{x},\bar{t})=F'(\bar{x},\bar{t})$，这时（2—27）式可简化为

$$\frac{h_{x,t}^2-h_{x,0}^2}{\Delta(h_{0,t}^2)}=2F(\bar{x},\bar{t})$$

上式左端表示中间断面回水前后潜水位的平方差占回水前后河渠水位平方差的百分比。如果取该值为 0.8～0.9（即 80%～90%），则可在 $\bar{x}=\frac{1}{2}l$ 条件下反查表 2—1，求得相应的 $\bar{t}$ 值。由 $\bar{t}=\frac{at}{l^2}$ 得：

$$l=\sqrt{\frac{at}{\bar{t}}}=\sqrt{\frac{Kh_m}{\mu}\frac{t}{\bar{t}}} \qquad (2—36)$$

式（2—36）说明了河渠的合理间距 $l$ 和其他参数的关系。在渠水位变幅一定时，含水层透水性和平均厚度越小，给水度越大，预计排灌时间越短，则 $l$ 越小；反之，则越大。

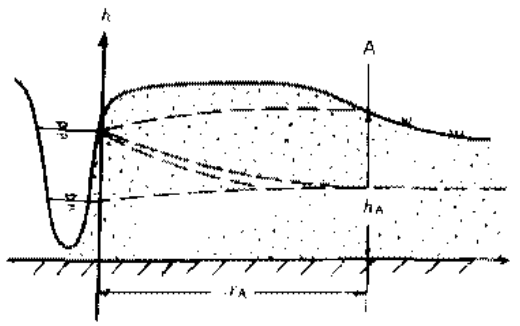


图 2—11 潜水回水

（4）回水引起的浸没范围预测。河流回水，特别是水库蓄水后引起的回水将造成两岸潜水水位相应升高，并逐渐自岸边向远处扩展；经过一定时间，在某些低凹地区，回水后的潜水位可能接近，甚至高出地面，形成一定范围的浸没（图 2—11），引起种种不良后果。利用（2—32）式计算出不同断面某一时刻的潜水位，把它们连成一条光滑的曲线，即为该时刻的浸润曲线。潜水位等于或高于地表的区域就是可能的浸没区。可应用此法进行浸没范围的预测。

如取 A 点作为浸没区的边点，已知该点地表标高为 $h_A$，设 $h_A=h_{x,t}$，回水前 A 点潜水位用 $h_{A,0}$ 表示，则按（2—32）式有：

$$\frac{h_A^2-h_{A,0}^2}{\Delta(h_{0,t}^2)}=F(\lambda)$$

利用表 2—4，由 $F(\lambda)$ 可查得 $\lambda$，又根据

$$\lambda_A=\frac{x_A}{2\sqrt{at}} \text{ 或 } t=\frac{x_A^2}{4a\lambda_A^2}=\frac{\mu x_A^2}{4Kh_m\lambda_A^2}$$

可知 A 点开始浸没的时间与距离平方成正比，且与岸区地层岩性有关，渗透系数越大，给水度越小，被浸没的时间来得越快。

**思考题：**

当库水位长期稳定在一定高度时，潜水回水最终会趋于什么情况？这种情况经常出现吗？研究它有什么意义？

# 第三章　地下水向完整井的稳定运动

## §3—1　概　　述

### 一、水井的类型

水井是常见的集水建筑物。根据水井井径的大小和开凿方法的不同，可分为管井和筒井两类。管井的直径小，通常小于0.5m，而深度比较大，常用钻机开凿。筒井的直径大，可达1m到数米，而深度较浅，通常用人工开挖。此外，还有一些特殊类型的井，如我国西北黄土高原区的辐射井和淮北地区的大骨料井等。

根据水井揭露的地下水类型，水井分为潜水井和承压水井两类。无论潜水井还是承压水井，根据揭露含水层的程度和进水条件不同，都可分为完整井和不完整井两类。凡是贯穿整个含水层，在全部含水层厚度上都安装有过滤器，并能全面进水的井，称为完整井，如图3—1中的a，如果水井没有贯穿整个含水层，只有井底和含水层的部分厚度上能进水，则称为不完整井，如图3-1中的井b、c、d。

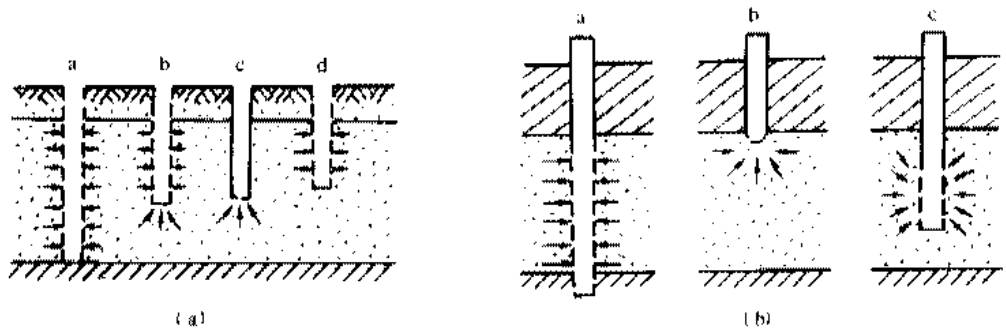



图3—1　完整井和不完整井

(a)—潜水井；(b)—承压水井

本章主要讲述地下水向管井类完整井的运动；对不完整井问题，留在第六章介绍。

### 二、井附近的水位降深

从井中抽水时，井周围含水层中的水流入井内，井中和井附近的水位将降低。设某点$(x, y)$的初始水头为$H_0(x, y, 0)$，抽水$t$时间后的水头为$H(x, y, t)$，则此时该点的水头降低值$s$为：

$$s(x,y,t) = H_0(x,y,0) - H(x,y,t)$$

称$s$为水位降深，简称降深。在井附近的不同地点，降深$s$不同。井中心最大，离井越远，降深越小。总体上形成的漏斗状水头下降区，被称为降落漏斗。对潜水井来讲，降落漏斗

在含水层内部扩展，抽水量主要来自含水层的疏干量；于承压水井则不同，降落漏斗不在含水层内部发展，而是形成承压水头的降低区。抽水量主要靠含水层的弹性释水量来供给。随着抽水时间的延续，降深不断增大，漏斗不断扩展。若没有其它补给源时，地下水向井的运动始终处于非稳定状态。但在下列两种水文地质条件下，可能形成稳定运动：

（1）在有侧向补给的有限含水层中，当降落漏斗扩展到补给边界后，侧向补给量和抽水量平衡时，地下水向井的运动便可达到稳定状态。

（2）在有垂向补给的无限含水层中，随着降落漏斗的扩大，垂向补给量不断增大。当它增大到与抽水量相等时，将形成稳定的降落漏斗，地下水向井的运动也进入稳定状态。在没有补给的无限含水层中，严格说来，不可能出现稳定流。但实际观察证明，随着抽水时间的延长，水位降深的速率会越来越小，降落漏斗的扩展也极其缓慢。当降落漏斗内的水位降深速率变得如此地小，以致在一个较短的时间间隔内几乎观测不到明显的水位下降时，如果延长观测时间间隔，仍能看到水位在缓缓下降。此时漏斗区内的水流便可近似作为稳定运动来研究。这种情况称为似稳定状态，也称似稳定。

位于水平埋藏的承压含水层中的完整井，水流基本上水平，同一地点不同深度上的观测孔内的水位也一致。承压水不完整井，水流不再水平，等势线呈弯曲状，同一地点不同深度上的观测孔内的水位不同，降深也不同。潜水井的情况与此相似，观测孔进水口处的水头不等于观测孔所在地的潜水位。潜水面坡度愈大，差别愈大。

下面简单介绍一下井径和井内外降深的关系。总的来看，有三种类型的井。为简单起见，以承压水完整井为代表加以介绍。图 3—2（a）为打在基岩中的裸井，未下过滤器。这时的井半径 $r_w$ 就是裸孔的半径，井壁和井中的水位降深一致。图 3—2（b）为下了过滤器的井。在正常情况下，将过滤器的直径作为井径。但水位降深的情况要复杂些。当井管外面的水通过过滤器的孔眼进入井内时，有水头损失，同时在井管内部水向上运动至水泵吸水口的途中也有水头损失。这些水头损失，统称井损。因此，井管外面的水头高于井管内部的水头。图 3—2c 为过滤器周围填砾的井，井周围的降深要比未填砾时要小。此时，井损仍然存在，如井径仍用过滤器直径会造成较大的计算误差。因此，引进了有效井半径的概

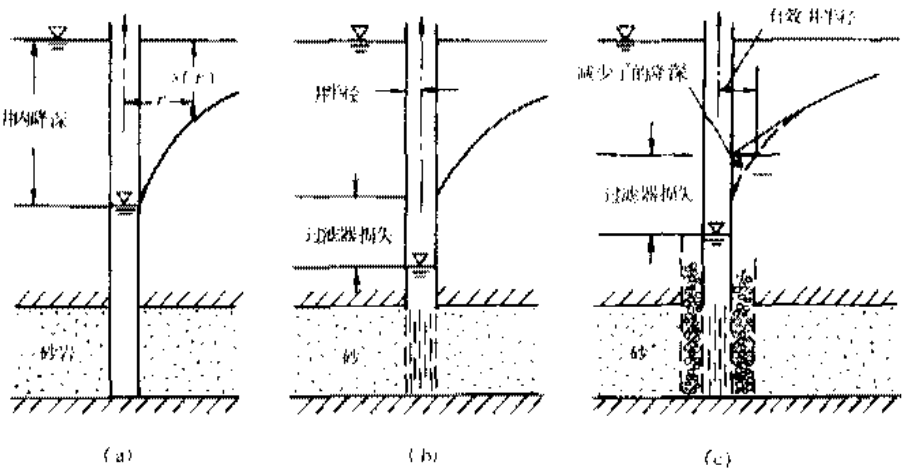



图 3—2　承压含水层中的水位降深和有效井径

（据 Jacob）

（a）—裸井；（b）—下过滤器的井；（c）—填砾的井

念。有效井半径是由井轴到井管外壁某一点的水平距离。在该点，按稳定流计算的理论降深正好等于过滤器外壁的实际降深。在以后各节建立的公式中，都不考虑井损和有效井半径问题。在本章最后一节中，将介绍有关井损和有效井半径的确定方法。

在以后几节中，除了特别提到的以外，一般都采用了以下假设：

(1) 含水层均质、各向同性，产状水平，厚度不变，分布面积很大，可视为无限延伸；

(2) 抽水前的地下水面是水平的，并视为稳定的；

(3) 含水层中的水流服从 Darcy 定律，并在水头下降的瞬间水就释放出来。如有弱透水层，则忽略其弹性释水量。

**思考题：**

1. 为什么说在无限含水层中抽水时，如无其他补给源，就不可能存在稳定流？

2. 当水流为非稳定流时，通过距井轴不同距离 $r_i$ 的过水断面上的流量 $Q_i$ 相同吗？为什么？

3. 在一潜水井中抽水，在井附近打一观测孔，观测孔的过滤器安装在含水层的下部。此时，观测孔中的水位和该处潜水位相比，是高还是低？为什么？

## §3—2 地下水向承压水井和潜水井的稳定流动

### 一、承压水井的 Dupuit 公式

可以把在无限含水层中的抽水情况设想为一半径为 $R$ 的圆形岛状含水层的情况。岛边界上的水头 $H_0$ 保持不变。如从井中定流量抽水，地下水经过一定时间的非稳定运动后，降落漏斗扩展到岛的边界，周围的补给量等于抽水量，则地下水运动出现稳定状态，并符合上一节的假设条件。此时，水流有如下特征：①水流为水平径向流，即流线为指向井轴的径向直线，等水头面为以井为共轴的圆柱面，并和过水断面一致；②通过各过水断面的流量处处相等，并等于井的流量。

上述径向流的水头分布满足 Laplace 方程。把它转换成柱坐标形式，并考虑水流是水平对称的，则方程可简化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{3—1}$$

其边界条件是：

$H=H_0$　　当 $r=R$ 时

$H=h_w$　　当 $r=r_w$ 时

对 (3—1) 式积分，有：

$$r\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}=C$$

因不同过水断面的流量相等，并等于井的流量，即 $Q_r=2\pi KMr\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}=Q$，故可得积分常数为：

$$C=\frac{Q}{2\pi KM}$$

代入前式得：

$$r\frac{dH}{dr}=\frac{Q}{2\pi KM} \tag{3-2}$$

分离变量，再按给出的边界条件取定积分：

$$\int_{h_w}^{H_0}dH=\frac{Q}{2\pi KM}\int_{r_w}^{R}\frac{dr}{r}$$

得：

$$H_0-h_w=s_w=\frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{R}{r_w} \tag{3-3}$$

或

$$Q=2.73\frac{KMs_w}{\lg\frac{R}{r_w}} \tag{3-4}$$

式中：$s_w$——井中水位降深；

$Q$——抽水井流量；

$M$——含水层厚度；

$K$——渗透系数；

$r_w$——井的半径；

$R$——影响半径。

此处 $R$ 即圆形岛的半径，该处降深为零。在实际应用时，考虑到随着抽水时间的延长，会出现似稳定状态，距离 $R$ 应看作是从抽水井起到实际上观测不出（或可忽略）水位降深处的径向距离（图 3-3）。有关 $R$ 值，在下一章中将进一步予以讨论。

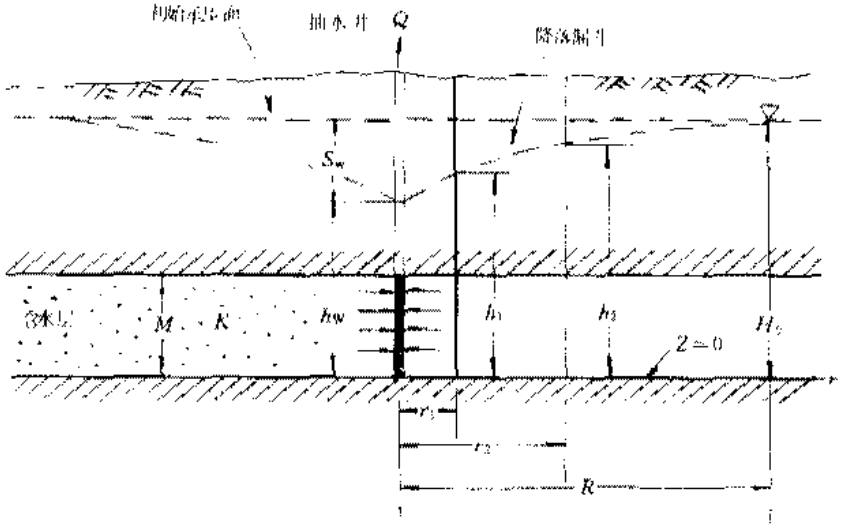



图 3-3 承压完整井的径向流

式（3—3）和（3—4）称为 Dupuit 公式。

如距抽水井中心 $r$ 处有一观测孔，测得水位为 $H$，在 $r_w$ 和 $r$ 两断面间积分（3-2）式，得：

$$H-h_w=s_w-s=\frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{r}{r_w} \tag{3—5}$$

同理，如有两个观测孔，距井中心的距离分别为 $r_1$ 和 $r_2$，水位分别为 $H_1$ 和 $H_2$（图 3—3），在 $r_1$ 到 $r_2$ 区间积分（3—2）式得：

$$H_2-H_1=s_1-s_2=\frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{3—6}$$

式中，$s_1$ 和 $s_2$ 分别为 $r_1$ 和 $r_2$ 处的水位降深。

式（3—6）也称 Thiem 公式。它和非稳定井流在长时间抽水后的近似式完全一致。这表明，在无限承压含水层中的抽水井附近，确实存在似稳定流区。

如果联立求解（3—3）和（3—5）式，则可得抽水井附近的承压水水头分布方程（或称降落曲线方程）：

$$H=h_w+(H_0-h_w)\frac{\ln\frac{r}{r_w}}{\ln\frac{R}{r_w}} \tag{3—7}$$

式中没有包含 $Q$ 和 $K$。这说明水流相对稳定时，只要给定井内水位和边界水头，抽水井附近的水头分布就确定了，不管渗透系数和抽水量的大小如何。

**二、潜水井的 Dupuit 公式**

图 3—4 表示在无限潜水层中的一口完整井。经过长时间定流量抽水后，在井附近形成相对稳定的降落漏斗。因降落漏斗是在潜水含水层中发展，存在着垂向分速度，等水头面不是圆柱面，而是共轴的旋转曲面，为空间径向流，所以和承压井流不同。这类问题很难求得它的解析解。

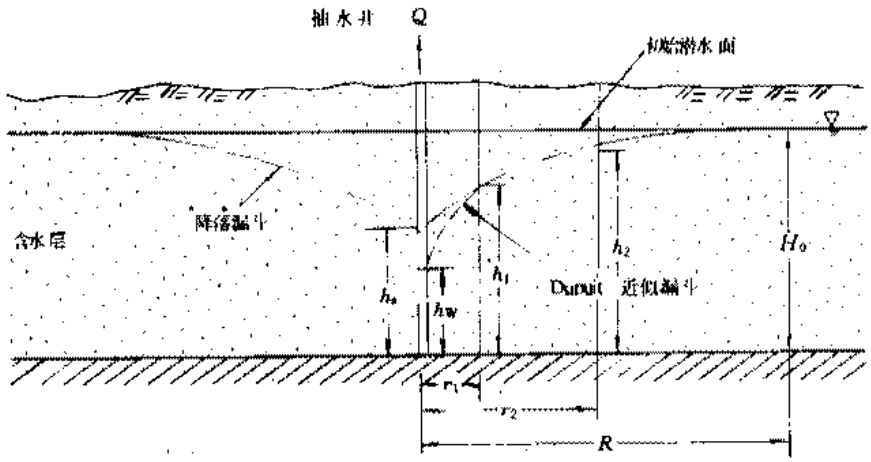



图 3—4　潜水完整井的径向流

为实用目的，对上述潜水井应用 Dupuit 假设：认为流向井的潜水流是近似水平的，因而等水头面仍是共轴的圆柱面，并和过水断面一致。这一假设，在距抽水井 $r\geqslant 1.5H_0$ 的区域是足够准确的。同时认为，通过不同过水断面的流量处处相等，并等于井的流量。这时，漏斗区潜水流的水头分布满足（1—101）式。如以潜水含水层的底板作基准面，$h=H$，并

用柱坐标形式表示，则方程简化为：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}h^2}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{3—8}$$

其边界条件和承压水井相似，为：

$h=h_w$，当 $r=r_w$ 时

$h=H_0$，当 $r=R$ 时

对（3—8）式进行积分，得：

$$r\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r}=C$$

因各断面流量相等，根据通过任意断面的流量 $Q=2\pi rhK\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}r}=\pi rK\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r}$，可得积分常数：

$$C=\frac{Q}{\pi K}$$

故有：

$$r\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r}=\frac{Q}{\pi K}$$

分离变量，按给出的边界条件对上式积分得：

$$H_0^2-h_w^2=(2H_0-s_w)s_w=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R}{r_w} \tag{3—9}$$

或

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-s_w)s_w}{\lg\frac{R}{r_w}} \tag{3—10}$$

式中，$R$ 为潜水井的影响半径，其含义和承压水井的相同。

式（3—9）和（3—10）称为潜水井的 Dupuit 公式。

同理，可以分别给出有一个观测孔和两个观测孔时的计算式：

$$h^2-h_w^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r}{r_w} \tag{3—11}$$

$$h_2^2-h_1^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{3—12}$$

式(3—12)也称潜水井的 Thiem 公式。它同 Theis 公式在长时间抽水后的近似式完全一致。

联立求解（3—9）和（3—11）式，同样可得潜水位分布方程（或称为浸润曲线方程）：

$$h^2=h_w^2+(H_0^2-h_w^2)\frac{\ln r/r_w}{\ln R/r_w} \tag{3—13}$$

结果表明，潜水位的分布，同样由边界水位决定，而与流量和渗透系数无关。但由上式计算的浸润曲线，仅在 $r>H_0$ 区域同实际曲线一致。在 $r<H_0$ 区，特别是在井壁处，Dupuit 浸润曲线总是低于实际浸润曲线，如图 3—4 所示。这是因为 Dupuit 公式没有考虑潜水井存在渗出面，采用了 Dupuit 假设造成的。

下面讨论在三种常见水文地质条件下，如何推广应用 Dupuit 公式的问题。

（1）巨厚含水层中的潜水井。井中降深仅占潜水层厚度的很小部分，在供水中常遇到这种情况。此时，可将潜水井 Dupuit 公式改写为：

$$H_0 - h_w = \frac{Q}{\pi K(H_0 + h_w)} \ln \frac{R}{r_w}$$

当井中降深 $H_0 - h_w \ll H_0$ 时，$H_0 + h_w \approx 2H_0$，于是得近似式：

$$H_0 - h_w = s_w \approx \frac{Q}{2\pi K H_0} \ln \frac{R}{r_w} \tag{3—14}$$

可见，已转化为承压水井公式（3—3）。这表明，当含水层很厚而降深相对较小时，潜水含水层可近似地按承压含水层来处理。

设距潜水井 $r_1$ 和 $r_2$ 处的降深分别为 $s_1$ 和 $s_2$，则按式（3—12）有：

$$h_2^2 - h_1^2 = (H_0 - s_2)^2 - (H_0 - s_1)^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

或变为：

$$s'_1 - s'_2 = \frac{Q}{2\pi K H_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \tag{3—15}$$

式中，$s' = s - \frac{s^2}{2H_0}$，称为修正降深。这个降深可以出现在等效的承压含水层中。对潜水含水层中的井流，有时采用这种线性化的方法。

（2）承压-潜水井。在承压水井中大降深抽水时，如果井水位低于含水层顶板，井附近就会出现无压水流区，变成承压-潜水井。用于疏干的水井常出现这种情况（图 3—5）。

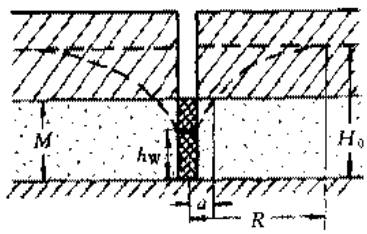



图 3—5 承压-潜水井

可用分段法计算流向井的流量。设距井 $r = a$ 处为由承压水转变为无压水处。该处水位为 $M$，在径向距离 $a$ 以内为无压水区，按式（3—11）有：

$$M^2 - h_w^2 = \frac{Q}{\pi K} \ln \frac{a}{r_w}$$

在径向距离 $a$ 以外为承压水区，按式（3—3）有：

$$H_0 - M = \frac{Q}{2\pi K M} \ln \frac{R}{a}$$

从二式中消去 $\ln a$，即得承压-潜水井公式：

$$Q = 1.366 \frac{K(2H_0 M - M^2 - h_w^2)}{\lg \frac{R}{r_w}} \tag{3—16}$$

（3）注水井或补给井。当进行地下水人工补给或利用含水层人工贮能时，有时需要向井中注水。在某些情况下，为了求得含水层参数，也需要进行注水试验。注水井的工作情况正好和抽水井相反。井水位最高，周围水位逐渐降低，成锥体状，如图 3—6 所示。地下水的运动为发散的径向流。如作粗略的估算，只要把前面几节公式中的水位降深换成水位升高，便适用于注水井。例如，对承压水注水井有：

$$Q = 2.73 \frac{KM(h_w - H_0)}{\lg R / r_w} \tag{3—17}$$

对潜水注水井有：

$$Q = 1.366 \frac{K(h_w^2 - H_0^2)}{\lg R / r_w} \tag{3—18}$$

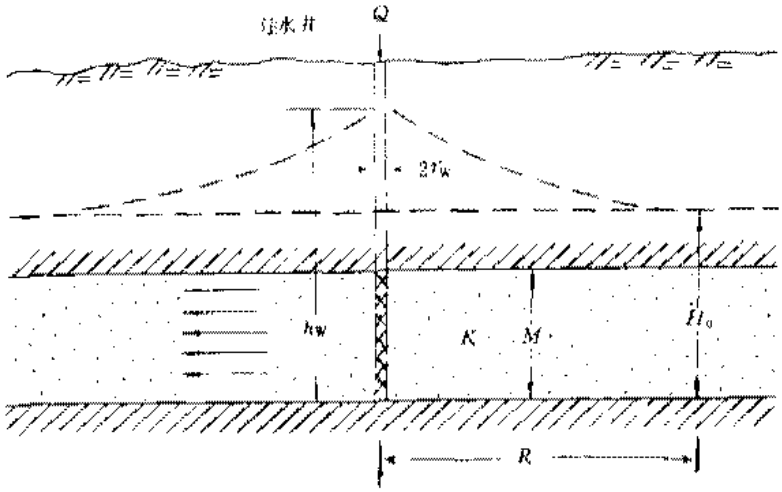



图 3 6 承压注水井示意图

二式中的 $h_w - H_0$ 为井中的水位升高值。

注水和抽水的不同，除了一个是发散的径向流，一个是收敛的径向流外，还要强调二者物理条件的区别。抽水时，因井周围的过水断面小，流速大，含水层中的细颗粒将随水进入井内，因而在井周围常形成一个渗透性增高的地带；而注水井的情况正好相反。注水井注入的水向井外流动，速度逐渐减小，水流携带的杂质将在一定距离内沉淀在含水层中。水中的某些溶解物质可能和固体骨架或含水层中原有水起作用，产生阻塞。某些细菌也可能在过滤器上生长。因此，在注水井周围往往形成一个渗透性降低的地带。

**三、Dupuit 公式的应用**

前面导出的 Dupuit 公式，可以解决下列两类问题：

(1) 求含水层参数。这时可将 Dupuit 公式写成便于求参数的形式。

对于承压水井有：

$$K = 0.366 \frac{Q}{Ms_w} \lg \frac{R}{r_w} \tag{3—19}$$

$$K = 0.366 \frac{Q}{M(s_1 - s_2)} \lg \frac{r_2}{r_1} \tag{3—20}$$

对于潜水井有：

$$K = 0.732 \frac{Q}{(2H_0 - s_w)s_w} \lg \frac{R}{r_w} \tag{3—21}$$

$$K = 0.732 \frac{Q}{(2H_0 - s_1 - s_2)(s_1 - s_2)} \lg \frac{r_2}{r_1} \tag{3—22}$$

对其它公式，也可作类似变换，不再一一列举了。

将抽水试验趋近稳定时测得的流量 $Q$ 及抽水井或观测孔的水位降深 $s$ 代入以上各式，可直接求出渗透系数 $K$ 或导水系数 $T$。在单井抽水条件下，$R$ 常用经验值，也可用下一章将要介绍的由 Theis 公式导出的近似式进行估算。当然，取经验值或估算的 $R$ 值可能误差较大。但在公式中，它以 $\ln R$ 形式出现，即使 $R$ 值有较大误差，对求参结果的影响仍比较

小。

在抽水试验时，最好在有代表性的抽水井附近打两个观测孔，利用观测孔的降深资料按 Thiem 公式计算参数。这样，既可避开难以求准的 $R$ 值，又可减少抽水井存在井损的影响，求得的参数比较可靠。但必须注意，两个观测孔不宜离抽水井太远；否则，当抽水时间不足，通过观测孔过水断面的流量 $Q_r$ 比抽水井流量 $Q$ 小得多时，求出的 $K$ 值会偏大。

此外，根据观测孔降深资料，也可用下列公式计算 $R$ 值。

对于承压水井，如利用观测孔 1，则有：

$$s_1 = \frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{R}{r_1}$$

如利用观测孔 1 和 2，则有：

$$s_1 - s_2 = \frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

联立求解以上二式，得：

$$\lg R = \frac{s_1\lg r_2 - s_2\lg r_1}{s_1 - s_2} \tag{3—23}$$

对于潜水井，用同样的方法可得：

$$\lg R = \frac{s_1(2H_0 - s_1)\lg r_2 - s_2(2H_0 - s_2)\lg r_1}{(2H_0 - s_1 - s_2)(s_1 - s_2)} \tag{3—24}$$

这样求得的 $R$ 值，既可用于条件类似地区只有单井实验的计算中，又可作为设计合理井距的依据。

(2) 预报流量或降深。根据 Dupuit 公式，在已知含水层厚度和参数的情况下，只要给出设计的降深值，即可预报井的开采量；也可按需要的流量，预报开采后的可能降深值。但要注意，利用本章公式预报时，含水层必须有补给源，且能和抽水量平衡，真正达到稳定流；否则，不可能出现稳定流，利用稳定流公式预报，会得出错误的结果。

**四、Dupuit 公式的讨论**

1. 井径和流量的关系

Dupuit 公式中井径和流量的关系，并不完全符合实际情况。

按 Dupuit 公式，井径对流量的影响不太大，因为井半径 $r_w$ 以对数形式出现在公式中，井径增大时流量增加很少。如井径增大一倍，流量约增加 10%；井径增大 10 倍，流量仅增加 40%左右。但实际情况远非如此，井径对流量的影响比 Dupuit 公式反映的关系要大得多。如冶金工业部勘察总公司在北京南苑试验场进行的井径和流量关系的对比试验，其 100mm、150mm、200mm 三种井径的 $Q$-$s_w$ 关系曲线表示在图 3—7 中，并得出如下认识：①当降深 $s_w$ 相同时，井径增加同样的幅度，强透水岩层中井的流量增加得比弱透水层中的井多；②对于同一岩层，井径增加同样的幅度，大降深抽水的流量增加得多，小降深抽水时流量增加得少；③对于同样的岩层和降深，小井径时，由井径增加（如 100mm 增至 150mm，或 150mm 增到 200mm）所引起的流量增长率大；中等井径时（如 300mm 至 500mm 时），增长率减小；大井径时，流量随井径的增加就不明显了。这种现象，理论解释不一。有些学者认为，这是由于井周围的紊流和三维流的影响所致。也有人认为，研究井径和流量的关系，应考虑含水层内流动和井管内流动两个方面。这两个方面是地下水先从含水层流至井壁，再通过井管壁流入管内，并向上运动至吸水口。两种流动是串联关系。前者取

决于含水层的透水能力，后者受井管过水能力的制约。如果仅考虑含水层中水的流动，则 Dupuit 公式中井径和流量的关系是正确的。当含水层的透水性较好或水位降深较大时，含水层有可能提供较大的流量；但受井管的过水能力所限，井径增加时，流量明显增大。这对小口径井特别明显。但当井径已经足够大或含水层的透水性较差时，井管的过水能力对流量的影响已居次要地位，井径和流量的关系就比较符合 Dupuit 公式。

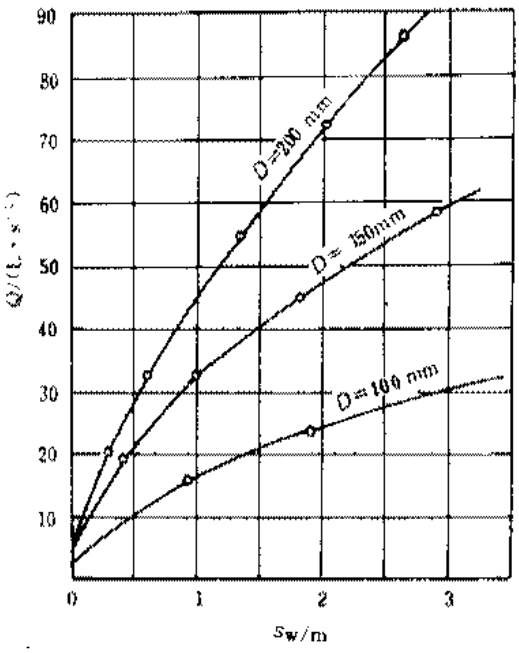



图 3—7　不同井径的 $Q$-$s_w$ 关系
（据冶金部勘察总公司）

2. 渗出面（水跃）及其对 Dupuit 公式计算结果的影响

在第一章介绍 Dupuit 假设时，曾谈到潜水的出口处一般都存在渗出面。当潜水流入井中时也存在渗出面，也称水跃，即井壁水位 $h_s$ 高于井中水位 $h_w$（图 3—8），而潜水井的 Dupuit 公式并没有考虑渗出面的存在。

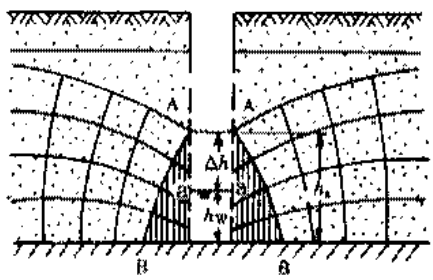



图 3—8　潜水井渗出面示意图

渗出面的存在有两个作用：①井附近的流线是曲线，等水头面是曲面，只有当井壁和井中存在水头差时，图 3—8 中阴影部分的水才能进入井内；②渗出面的存在，保持了适当高度的过水断面，以保证把流量 $Q$ 输入井内。否则，当井中水位降到隔水底板时，井壁处的过水断面将等于零，就无法通过流量了。早期，某些学者认为，潜水井的水位只能降到含水层厚度的一半，并认为此时井的流量最大。这种看法没有考虑渗出面的存在，是片面的。那么，Dupuit 潜水井公式用井内水位 $h_w$，是否正确？要不要用井壁水位 $h_s$ 来代替井内水位 $h_w$？下面分别从浸润曲线和流量两个方面加以说明。

因渗出面的存在，按 Dupuit 公式算出的浸润曲线（以下简称 Dupuit 曲线）在井附近低于实际的浸润曲线。杨式德（1949）曾对一潜水井的例子用张弛法求得精确解。结果表明：当 $r>\frac{9}{10}H_0$ 时，Dupuit 曲线与用精确解算出的曲线完全一致；当 $r<\frac{9}{10}H_0$ 时，二者开始偏离，到井壁处，实际的浸润面高悬于井内动水位之上。一般说来，在 $r\leqslant H_0$ 的区域，用 Dupuit 公式计算潜水井的浸润曲线是不准确的。但是，用 Dupuit 公式计算的流量却是精确的。对此，И. А. Чарный（1951）曾做过严格的数学证明[63]。因此，用 Dupuit 公式计算流量时，用井内水位 $h_w$ 是正确的。如用井壁水位 $h_s$ 代替 $h_w$，反而是错误的了。

**思考题：**

1. 当一个潜水井抽水时，在井周围观测孔中的水面是高于还是低于该处的潜水面？为什么？

2. 井损和渗出面的概念有何不同？承压水井和潜水井都同时有井损和渗出面吗？

3. 在什么情况下影响半径 $R$ 随时间变化？在什么情况下不随时间变化？

4. 在实践中进行抽水试验时，无论是对承压水井还是对潜水井，通常都要求有三次水位降深，为什么？

## §3—3 非线性流情况下的地下水向完整井的稳定运动

在少数情况下，地下水不服从 Darcy 定律，其流动是非线性的。下面对该情况下向完整井的运动做一简单讨论。

**一、承压水井**

当地下水运动服从 Chezy 公式（1—36）时，有：

$$Q = 2\pi rMK\left(\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

分离变量，在井壁和任意 $r$ 断面之间积分，得：

$$H - h_w = \left(\frac{Q}{2\pi MK}\right)^2\left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}\right) \tag{3—25}$$

当 $r \to R$ 时，$H \to H_0$；将其代入上式，并令 $s_w = H_0 - h_w$，代表抽水井的水位降深。同时，因为 $R \gg r_w$，$\frac{1}{R}$ 的数值很小，可以忽略不计，故（3—25）式可简化为：

$$Q = 2\pi KM\sqrt{r_w s_w} \tag{3—26}$$

现在考虑更一般的情况。当地下水运动服从（1—34）式时，有：

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r} = a\left(\frac{Q}{2\pi rM}\right) + b\left(\frac{Q}{2\pi rM}\right)^2$$

分离变量，并积分得：

$$H - h_w = \frac{aQ}{2\pi M}\ln\frac{r}{r_w} + \frac{bQ^2}{4\pi^2M^2}\left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}\right)$$

令常数 $a = \frac{1}{K}$，则上式可化为：

$$H - h_w = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_w} + \frac{bQ^2}{4\pi^2M^2}\left(\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}\right) \tag{3—27}$$

如果地下水运动完全满足 Darcy 定律，则上式右端第二项等于零，即为 Dapuit 公式（3—5）。如地下水运动完全满足 Chezy 公式，则上式右端第一项等于零。这时如令常数 $b = \frac{1}{K^2}$，$r \to R$、$H \to H_0$，则上式又变为（3—26）式。

**二、潜水井**

其流量表示式为：

$$Q = 2\pi r h K \left(\frac{dh}{dr}\right)^{\frac{1}{2}}$$

和承压水井类似，也可导出相应的公式。如$\frac{1}{R}$可以忽略不计，该式可进一步化简为：

$$Q \simeq \frac{2}{\sqrt{3}}\pi K \sqrt{r_w(\overline{H_0^2} - \overline{h_w^2})} \qquad (3-28)$$

**思考题：**

本节所介绍的非线性公式，主要适用在什么条件下？

## §3—4 越流含水层中地下水向承压水井的稳定流动

图3—9表示有越流补给时，在无限承压含水层中的一口完整井。因从井中抽水，造成水头降低，和相邻含水层（图中为潜水含水层）之间产生水头差或将原有的水头差扩大，相邻含水层中的水通过弱透水层越流补给抽水含水层。当抽水延续一定时间后，进入抽水含

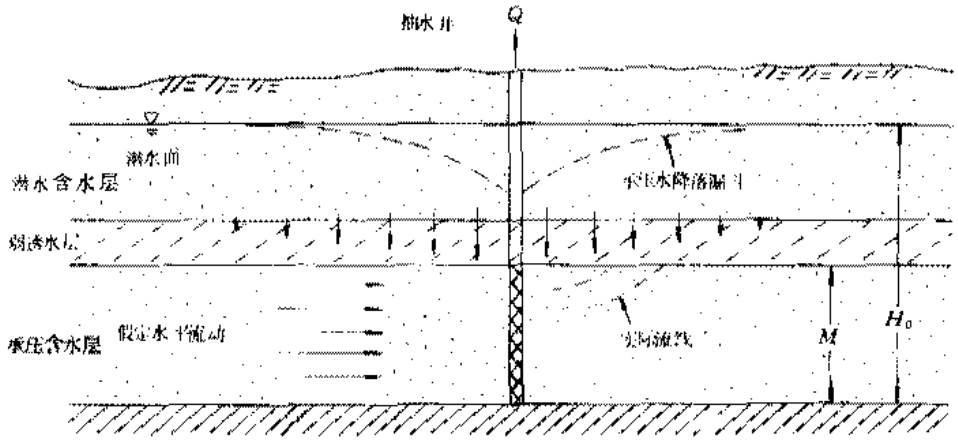



图3—9 有越流含水层中的完整井

水层降落漏斗范围内的越流量和抽水量平衡时，水流达到稳定状态。此时假设：发生越流的潜水含水层，有足够的补给量维持初始水位不变；弱透水层的弹性释放量很小，可以忽略不计，且流向井的水流基本上仍保持水平流动。在此假设条件下，抽水含水层内的水头满足方程（1—84）。对于稳定流动，与该方程相应的以柱坐标表示的方程为：

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{H_0 - H}{B^2} = 0 \qquad (3-29)$$

把水头改用降深表示，令$H_0 - H = s$，并代入上式，经变量代换后得：

$$\left(\frac{r}{B}\right)^2 \frac{\partial^2 s}{\partial\left(\frac{r}{B}\right)^2} + \left(\frac{r}{B}\right)\frac{\partial s}{\partial\left(\frac{r}{B}\right)} - \left(\frac{r}{B}\right)^2 s = 0 \qquad (3-30)$$

相应的边界条件为：

$s=0$，当 $r\to\infty$ 时

$r\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r}=-\dfrac{Q}{2\pi KM}$，当 $r=r_w$ 时

方程（3—30）是零阶虚宗量 Bessel 方程。其通解为：

$$s=\alpha I_0\left(\frac{r}{B}\right)+\beta K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3—31}$$

式中，$\alpha$ 和 $\beta$ 为待定系数，$I_0\left(\dfrac{r}{B}\right)$ 和 $K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)$ 分别为零阶第一类和第二类虚宗量 Bessel 函数。由边界条件知，当 $r\to\infty$ 时，$K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)=0$，而 $I_0\left(\dfrac{r}{B}\right)\neq 0$，把它们代入（3—31）式可得 $\alpha=0$。因而有：

$$s=\beta K_0\left(\frac{r}{B}\right)$$

再考虑井壁边界条件：

$$Q=-2\pi r_w MK\frac{\partial s}{\partial r}\bigg|_{r=r_w}=2\pi KM\frac{r_w}{B}\beta K_1\left(\frac{r_w}{B}\right)$$

得：

$$\beta=\frac{Q}{2\pi KM\left(\dfrac{r_w}{B}\right)K_1\left(\dfrac{r_w}{B}\right)}$$

最后得

$$s=\frac{Q}{2\pi KM}\frac{K_0(r/B)}{(r_w/B)K_1(r_w/B)} \tag{3—32}$$

式中的 $K_1\left(\dfrac{r_w}{B}\right)$ 为一阶第二类虚宗量 Bessel 函数。

在一般越流含水层中，越流因素 $B$ 都有相当大的值，故实际上 $\dfrac{r_w}{B}\ll 1$。对于 Bessel 函数，当 $x\ll 1$ 时，$xK_1(x)\approx 1$（如当 $x<0.02$ 时，误差小于 1%）。因此，（3—32）式可简化为：

$$s\approx\frac{Q}{2\pi KM}K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3—33}$$

式（3—33）称为 Hantush-Jacob 公式。

为了便于应用（3—32）式和（3—33）式，兹列出简单的虚宗量 Bessel 函数表（表 3—1）。

在抽水井附近，$\dfrac{r}{B}\ll 1$。对于第二类零阶虚宗量 Bessel 函数，当 $x\ll 1$ 时，有 $K_0(x)\approx\ln(1.123/x)$。故（3—33）式又可简化为：

$$s\simeq\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1.123B}{r} \tag{3—34}$$

用此式计算，误差不大。当 $\dfrac{r}{B}<0.35$ 时，误差小于 5%；当 $\dfrac{r}{B}<0.1$ 时，误差小于 1%。

下面讨论一下越流量占井中抽水量的比例。设 $Q_r$ 代表径向距离 $r$ 处的侧向流入量，则有：

$$Q_r=-2\pi rKM\frac{\partial s}{\partial r}=2\pi KM\beta\frac{r}{B}K_1\left(\frac{r}{B}\right)$$

表 3—1　虚宗量 Bessel 函数表

| $x$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.010 | 4.7212 | 99.9739 | 1.0000 | 0.0050 |
| 0.020 | 4.0285 | 49.9547 | 1.0001 | 0.0100 |
| 0.030 | 3.6235 | 33.2715 | 1.0002 | 0.0150 |
| 0.040 | 3.3365 | 24.9233 | 1.0004 | 0.0200 |
| 0.050 | 3.1142 | 19.9097 | 1.0006 | 0.0250 |
| 0.060 | 2.9329 | 16.5637 | 1.0009 | 0.0300 |
| 0.070 | 2.7798 | 14.1710 | 1.0012 | 0.0350 |
| 0.080 | 2.6475 | 12.3742 | 1.0016 | 0.0400 |
| 0.090 | 2.5310 | 10.9749 | 1.0020 | 0.0451 |
| 0.1 | 2.4271 | 9.8538 | 1.0025 | 0.0501 |
| 0.2 | 1.7527 | 4.7760 | 1.0100 | 0.1005 |
| 0.3 | 1.3725 | 3.0560 | 1.0226 | 0.1517 |
| 0.4 | 1.1145 | 2.1843 | 1.0404 | 0.2040 |
| 0.5 | 0.9244 | 1.6564 | 1.0635 | 0.2579 |
| 0.6 | 0.7775 | 1.3028 | 1.0921 | 0.3137 |
| 0.7 | 0.6605 | 1.0503 | 1.1263 | 0.3719 |
| 0.8 | 0.5663 | 0.8618 | 1.1665 | 0.4327 |
| 0.9 | 0.4867 | 0.7165 | 1.2130 | 0.4971 |
| 1.0 | 0.4210 | 0.6019 | 1.2661 | 0.5652 |
| 1.5 | 0.2138 | 0.2774 | 1.6467 | 0.9817 |
| 2.0 | 0.1139 | 0.1399 | 2.2796 | 1.5906 |
| 2.5 | 0.0624 | 0.0739 | 3.2898 | 3.5167 |
| 3.0 | 0.0347 | 0.0402 | 4.8808 | 3.9534 |
| 3.5 | 0.0196 | 0.0222 | 7.3782 | 6.2058 |
| 4.0 | 0.0112 | 0.0125 | 11.3019 | 9.7595 |
| 4.5 | 0.0064 | 0.0071 | 17.4812 | 15.3892 |
| 5.0 | 0.0037 | 0.0040 | 27.2399 | 24.3356 |

井的流量为：

$$Q = -2\pi KM\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)_{r=r_w} = 2\pi KM\beta\frac{r_w}{B}K_1\left(\frac{r_w}{B}\right)$$

取二式比值，并注意当$\frac{r_w}{B}\ll 1$时，$\frac{r_w}{B}K_1\left(\frac{r_w}{B}\right)\approx 1$，因而有：

$$\frac{Q_r}{Q}\approx\frac{r}{B}K_1\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3—35}$$

上式表明，侧向流入量占抽水井流量的比例，仅仅和径向距离$r$与越流因素$B$的比值有关。图 3—10 为$Q_r/Q$与$r/B$的关系曲线。由图可以看出，当$r=4B$时，$Q_r/Q=0.05$，表示侧向流入量（来自该断面到无穷远处的越流量）只占抽水井流量的 5%，而 95%的抽水井流量是来自$r<4B$地段的越流量。

可利用式（3—33）和式（3—34），根据稳定流抽水试验资料求参数。此时，要求有距抽水井不同距离$r$的若干个观测孔。测得各观测孔的水位降深后，可用下述方法求出导水系数$T$，越流因素$B$和越流系数$\sigma'$。

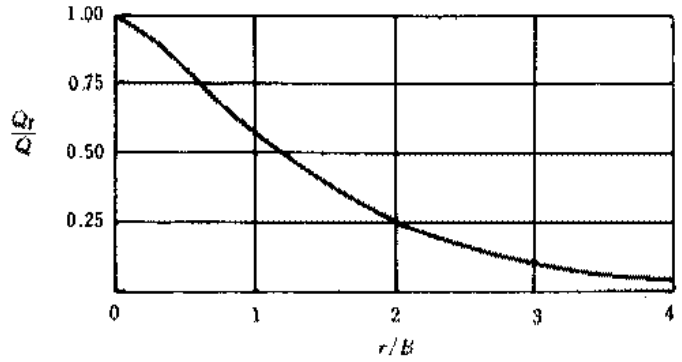



图 3—10　$Q_r/Q$ 与 $r/B$ 关系曲线

（据 J. Bear）

（1）配线法

对式 $s=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right)$ 和式 $r=\frac{r}{B}\cdot B$ 两边取对数，得：

$$\lg s=\lg\left[K_0\left(\frac{r}{B}\right)\right]+\lg\frac{Q}{2\pi T}$$

$$\lg r=\lg\frac{r}{B}+\lg B$$

因 $\lg Q/2\pi T$ 和 $\lg B$ 均为常数，故在双对数纸上，$K_0\left(\frac{r}{B}\right)-\frac{r}{B}$ 曲线和 $s$-$r$ 曲线的形状相同。因此，求参数时，可先根据表 3—1 在双对数纸上做 $K_0\left(\frac{r}{B}\right)-\frac{r}{B}$ 标准曲线（图 3—11），再根据不同 $r$ 的 $s$ 值，在模数相同的透明双对数纸上做 $s$-$r$ 实际曲线。把实际曲线叠合在标准曲线

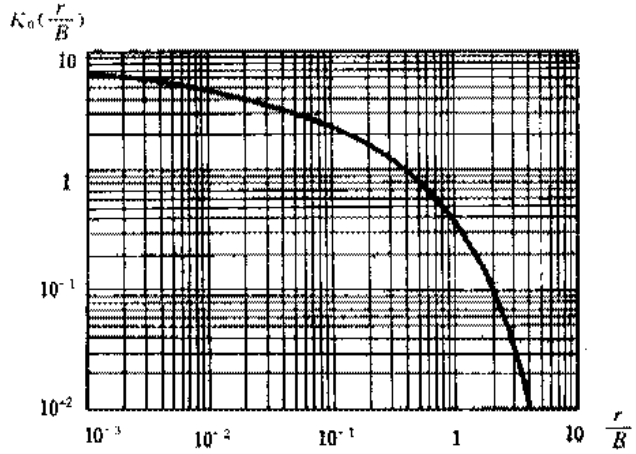



图 3　11　越流含水层稳定流抽水试验的标准曲线

（据 W. C. Walton）

上，保持二者的坐标轴平行，移动坐标纸，直到二曲线重合时为止。然后在图上任取一点作为匹配点，读出匹配点在二张图上的坐标 $s$、$r$、$K_0\left(\frac{r}{B}\right)$ 和 $\frac{r}{B}$ 值，代入以下二式，即可求出参数值。

$$T=\frac{Q}{2\pi[s]}\left[K_0\left(\frac{r}{B}\right)\right] \tag{3--36}$$

$$B=\frac{[r]}{\left(\frac{r}{B}\right)},\sigma'=\frac{T}{B^2} \tag{3--37}$$

(2) 直线图解法

由近似式（3—34）有：

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1.123B}{r}=-\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\left(0.89\frac{r}{B}\right)$$

此式表明，在单对数纸上，$s$ 和 $r$ 为线性关系。如将实测的 $s$ 取普通坐标、$r$ 取对数坐标作图，则应为一直线。直线的斜率 $i=-2.30Q/2\pi T$。由此可求得导水系数。

$$T=-\frac{2.30Q}{2\pi i}=0.366\frac{Q}{|i|} \tag{3—38}$$

直线在零降深线上的截距为 $r_0$，即：

$$0=-\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\left(0.89\frac{r_0}{B}\right)$$

显然，只有 $\lg\left(0.89\frac{r_0}{B}\right)=0$ 或 $0.89\frac{r_0}{B}=1$。由此求得

$$B=0.89r_0 \tag{3—39}$$

## §3—5 流量和水位降深关系的经验公式

前已提到，在评价小型水源地或勘探开采井的单井出水量时，可用理论公式进行流量预报。但因水文地质条件的差异性、水流状态和井损的影响，实际抽水中的流量和降深关系，并非完全像理论公式：

$$Q=2.73\frac{KM}{\lg\frac{R}{r_w}}s_w=qs_w,\ q\text{ 为单位流量}\qquad\text{（对于承压水井）}$$

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-s_w)\,s_w}{\lg\frac{R}{r_w}}$$

$$=1.366\frac{2KH_0}{\lg\frac{R}{r_w}}s_w-\frac{1.366K}{\lg\frac{R}{r_w}}s_w^2\qquad\text{（对于潜水井）}$$

所显示的那样为一过原点的直线（承压水井）和二次抛物线（潜水井），而常常表现为各种各样的曲线。因此，为使预报的流量符合实际情况，常根据多次降深（或落程）抽水试验得出的 $Q$-$s_w$ 关系建立经验公式，进行流量预报。

大量抽水井的实际资料证明，常见的几种 $Q$-$s_w$ 曲线类型有直线型、抛物线型、幂函数曲线型和对数曲线型。下面分别对这几种曲线类型的经验公式、判别方法、确定系数和应用范围加以讨论。

1. 直线型

反映直线型关系的表达式为：

$$Q=qs_w \tag{3—40}$$

它和承压水井 Dupuit 公式一致。其中，$q$ 为待定系数。

首先，用图解法判别抽水试验得出的 $Q$-$s_w$ 关系曲线的类型。将不同落程的 $Q_i$ 和 $s_{w_i}$ 资料点绘在坐标纸上。如果这些点分布在一条直线上，并通过坐标原点时，即可判定为直线型，符合式（3—40）。

然后确定系数 $q$。当资料不多，且资料点基本分布在同一直线上时，可直接取直线的斜率确定 $q$ 值；当资料较多，且点沿直线两侧分布较分散时，可采用最小二乘法确定 $q$ 值，即使残差平方和为最小，则有：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}\left[\sum_{i=1}^{n}(Q_i - qs_{w_i})^2\right] = 0$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i s_{w_i} - q\sum_{i=1}^{n} s_{w_i}^2 = 0$$

由此求得待定系数：

$$q = \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i s_{w_i}}{\sum_{i=1}^{n} s_{w_i}^2} \tag{3—41}$$

式中，$n$ 为抽水试验降深的次数。将所求 $q$ 值代回（3—40）式，给出井中设计降深 $s_e$，即可预报流量。

2. 抛物线型

反映这种曲线的经验公式为：

$$s_w = aQ + bQ^2 \tag{3—42}$$

式中，$a$、$b$ 为待定系数。如将公式两边除以 $Q$，则得代表抛物线关系的方程：

$$\frac{s_w}{Q} = a + bQ$$

由此可见，当用图解法判别抽水试验的关系类型时，只要以 $s_w/Q$ 为纵坐标，以 $Q$ 为横坐标作图为一直线，即可判定为抛物线型，符合经验公式（3—42）。在 $s_w/Q$ 轴上的截距为 $a$，直线斜率为 $b$。当有 $n$ 个抽水落程时，也可按最小二乘法求待定系数 $a$ 和 $b$。此时，

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} s_{w_i} - \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{i=1}^{n} \frac{s_{w_i}}{Q}}{n\sum_{i=1}^{n} Q_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Q_i\right)^2} \tag{3—43}$$

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{s_{w_i}}{Q} - b\sum_{i=1}^{n} Q_i}{n} \tag{3—44}$$

3. 幂函数曲线型

反映这种曲线的经验公式为：

$$Q = q_0 s_w^{1/m} \tag{3—45}$$

式中，$q_0$、$m$ 为待定系数。对上式两边取对数，得：

$$\lg Q = \lg q_0 + \frac{1}{m}\lg s_w$$

由此可见，如在双对数坐标纸上绘出 $Q$-$s_w$ 关系曲线为一直线，则可判定其为幂函数曲线型，

符合经验公式（3—45）。直线在 $\lg Q$ 轴上的截距为 $q_0$，直线斜率的倒数为 $m$ 值。当有 $n$ 个落程资料时，同样可用最小二乘法求待定系数，有：

$$m=\frac{n\sum_{i=1}^{n}(\lg s_{w_i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}\right)^2}{n\sum_{i=1}^{n}(\lg s_{w_i}\lg Q_i)-\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}\sum_{i=1}^{n}\lg Q_i} \tag{3—46}$$

$$\lg q_0=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lg Q_i-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}}{n} \tag{3—47}$$

4. 对数曲线型

反映这种曲线的经验公式为：

$$Q=a+b\lg s_w \tag{3—48}$$

式中，$a$ 和 $b$ 为待定系数。

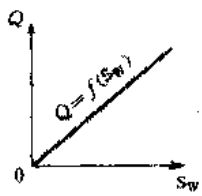
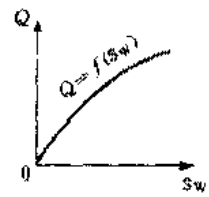
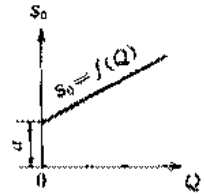
当用图解法判别抽水试验关系类型时，可在单对数坐标纸上，$Q$ 取普通坐标，$s_w$ 取对数坐标，绘出 $Q$-$\lg s_w$ 关系曲线。若为直线，则可判定为对数曲线型，符合公式（3—48）。$Q$ 轴的截距为 $a$，直线的斜率为 $b$。当有 $n$ 个落程资料时，同样可用最小二乘法确定系数，有：

$$b=\frac{n\sum_{i=1}^{n}(Q_i\lg s_{w_i})-\sum_{i=1}^{n}Q_i\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}}{n\sum_{i=1}^{n}(\lg s_{w_i})^2-\left(\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}\right)^2} \tag{3—49}$$

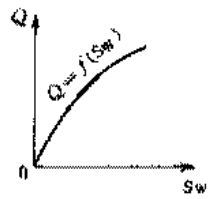
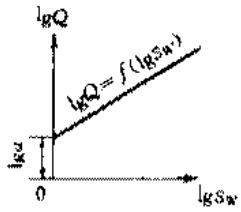
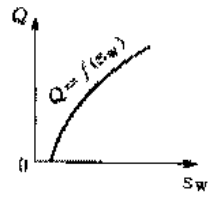
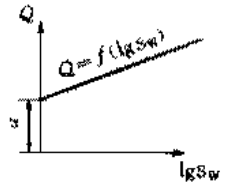
$$a=\frac{\sum_{i=1}^{n}Q_i-b\sum_{i=1}^{n}\lg s_{w_i}}{n} \tag{3—50}$$

将上述四种经验公式及其图解归纳为表 3—2。当然，在实际抽水试验中，还可能遇到

表 3—2

| 经验公式和图形 | | 变形后的公式和图形 | |
|---|---|---|---|
| 经验公式 | $Q$-$s$ 关系曲线 | 变形公式 | 变形的关系曲线 |
| 直线<br>$Q=qs_w$ |  | | 抽水试验的资料点连线为直线，并通过坐标原点的，为直线型；不通过原点的，为曲线型 |
| 抛物线<br>$s_w=aQ+bQ^2$ |  | 方程两端除以 $Q$<br>$\frac{s_w}{Q}=a+bQ$ |  |

续表

| 经验公式和图形 | | 变形后的公式和图形 | |
|---|---|---|---|
| 经验公式 | $Q$-$s$ 关系曲线 | 变形公式 | 变形的关系曲线 |
| 幂函数曲线<br>$Q=q_0 s_w^{1/m}$ |  | 方程两边取对数<br>$\lg Q=\lg q_0+\frac{1}{m}\lg s_w$ |  |
| 对数曲线<br>$Q=a+b\lg s_w$ |  | 仍用原式<br>$Q=a+b\lg s_w$ |  |

其他类型的曲线，均可用类似的方法处理。建立经验公式的目的就是为了预报流量。通常预报的设计降深往往大于抽水试验降深，因而希望对经验公式进行外推。一些原苏联学者曾指出，对直线型经验公式，外推降深的最大范围不能超过抽水试验时最大降深的 1.5 倍，对抛物线型、幂函数曲线型和对数曲线型方程，不能超过 1.75～3.0 倍。必须指出，经验公式是根据实测数据找出变量之间函数近似表达式的。因此，经验公式只能说明在观测数据范围以内的自变量和因变量之间的关系。严格说来，它是不能外推的。因为这种关系不一定就是变量之间真正的函数关系。即使要外推，外推范围也不能过大。考虑到经验公式的上述性质和统计学的有关理论，上述原苏联学者的意见虽然在我国流传很广，由于允许外推范围过大，缺乏依据仍有待商榷。应用时，需慎之又慎，特别是当外推范围较大时。有关应用本法的具体实例，可参阅文献〔1〕或与本书配套的习题集。

**思考题：**

1. 如果勘探时的抽水试验井井径和以后的生产井井径不同，能用经验方程预报生产井的流量吗？

2. 试自行推导确定幂函数型经验公式参数的表达式（3—46）和式（3—47）。

3. 能否用小降深抽水试验得出的经验公式预报大降深时的流量？为什么？

4. 以往有些水文地质书籍，把向上弯曲的 $Q$-$s_w$ 曲线作为错误的曲线，结论是抽水试验不正确。这一结论是否普遍适用？实际工作中有没有可能出现曲线向上弯曲的情况？

# §3—6 地下水向干扰井群的稳定运动

## 一、叠加原理

对于由线性偏微分方程和线性定解条件组成的定解问题，可以运用叠加原理，它对于求解干扰井问题和边界附近的井流问题用处很大。因此，有必要先对它做一简单介绍。

叠加原理可表述为：如 $H_1$，$H_2$，…$H_n$ 是关于水头 $H$ 的线性偏微分方程的特解，$C_1$，$C_2$，…$C_n$ 为任意常数，则这些特解的线性组合：

$$H = \sum_{i=1}^{n} C_i H_i \tag{3—51}$$

仍是原方程的解。式（3—51）中的这些常数，要根据 $H$ 所满足的边界条件来确定。如方程是非齐次的，并设 $H_0$ 为该非齐次方程的一个特解，$H_1$ 和 $H_2$ 为相应的齐次方程的二个解，则

$$H = H_0 + C_1 H_1 + C_2 H_2 \tag{3—52}$$

也是该非齐次方程的解。常数 $C_1$ 和 $C_2$ 由 $H$ 所满足的边界条件确定。

下面举一简单例子，具体说明叠加原理的含义。设在河湾处的承压含水层中有抽水井 $P_1$ 和 $P_2$，分别以流量 $Q=A$ 和 $Q=B$ 抽水。渗流区 $D$ 的边界 $\Gamma$ 是由河流和渠道组成的第一类边界。边界 $\Gamma_1$ 上有 $H=H^{(1)}$，$\Gamma_2$ 上为 $H=H^{(2)}$，如图 3—12 所示。在含水层为均质各向同性，地下水流为稳定流的条件下，水头 $H$ 满足 Laplace 方程，并可表示为如下定解问题。

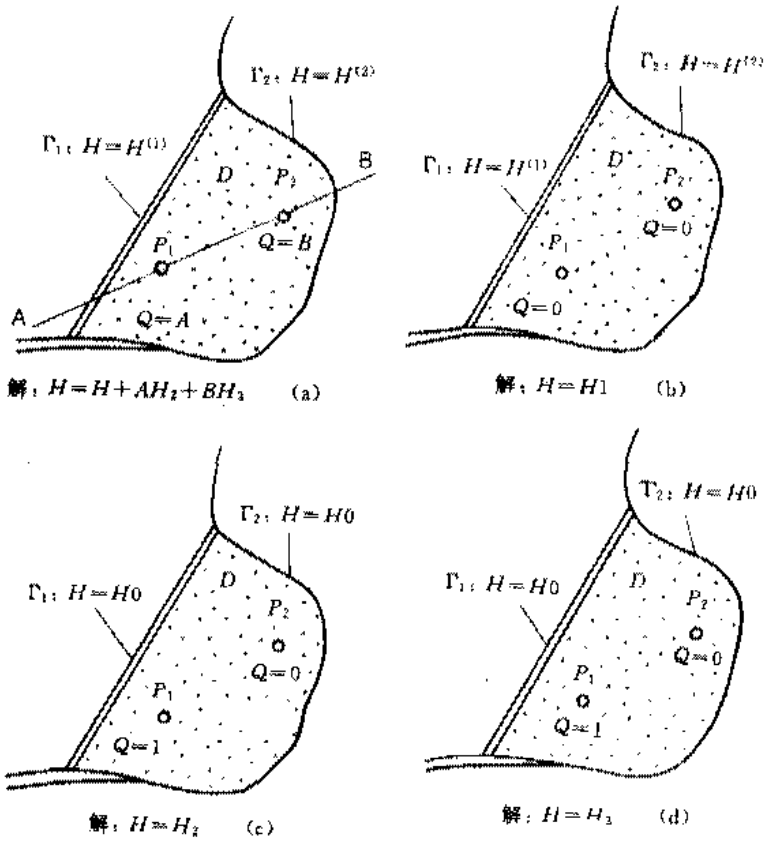



图 3—12 渗流区边界条件和井流的分解平面图

$$\nabla^2 H=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0 \text{ 在 } D \text{ 内}$$

边界条件为：$H=H^{(1)}$，在 $\Gamma_1$ 上；

$H=H^{(2)}$，在 $\Gamma_2$ 上。

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)=\frac{A}{2\pi T} \quad \text{在 } P_1 \text{ 点}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)=\frac{B}{2\pi T} \quad \text{在 } P_2 \text{ 点}$$

根据叠加原理，上述定解问题可分解为三个子问题：一是边界条件和原定解问题相同，但渗流区内没有井，即 $P_1$ 井和 $P_2$ 井的 $Q=0$，此时的解为 $H_1(x, y)$（图 3—12b）；二是在齐次边界条件下（即 $\Gamma_1$ 和 $\Gamma_2$ 上的 $H=0$），$P_2$ 井没有抽水，$Q=0$，$P_1$ 井以 $Q=1$ 抽水，这时的解为 $H_2(x, y)$（图 3—12c）；三是在齐次边界条件下，$P_1$ 井的 $Q=0$，只有 $P_2$ 井以 $Q=1$ 抽水，其解为 $H_3(x, y)$（图 3—12d）。此时，三个特解的线性组合：

$$H(x,y)=H_1(x,y)+AH_2(x,y)+BH_3(x,y)$$

即为原定解问题的解。为了证明这一点，可将上式分别代入偏微分方程和边界条件，有：

$$\begin{aligned}\nabla^2 H&=\nabla^2(H_1+AH_2+BH_3)\\&=\nabla^2 H_1+A\nabla^2 H_2+B\nabla^2 H_3\\&=0+0+0\\&=0\end{aligned}$$

在 $\Gamma_1$ 上
$$\begin{aligned}H&=H_1+AH_2+BH_3\\&=H^{(1)}+0+0\\&=H^{(1)}\end{aligned}$$

在 $\Gamma_2$ 上
$$\begin{aligned}H&=H_1+AH_2+BH_3\\&=H^{(2)}+0+0\\&=H^{(2)}\end{aligned}$$

在 $P_1$ 点
$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)&=\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(H_1+AH_2+BH_3)\right)\\&=0+A\frac{1}{2\pi T}+0\\&=\frac{A}{2\pi T}\end{aligned}$$

在 $P_2$ 点
$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial H}{\partial r}\right)&=0+0+B\frac{1}{2\pi T}\\&=\frac{B}{2\pi T}\end{aligned}$$

可见，$H=H_1+AH_2+BH_3$ 既满足 Laplace 方程，又满足全部边界条件，故为原定解问题的解。

叠加解的物理意义表示在图 3—13 中。由图可见，首先求出不存在抽水井时，由边界条件单独影响形成的水头 $H_1(x, y)$；然后，在齐次边界条件下，即假设边界水头均为零（$H=0$），分别求出 $P_1$ 井流量为 $A$ 和 $P_2$ 井流量为 $B$ 时，单独抽水时产生的降深（负水头值分别为 $-s_1(x, y)$ 和 $-s_2(x, y)$）。三者叠加 $H=H_1-s_1-s_2$，便得边界条件和抽水井共同作用下的水头值。

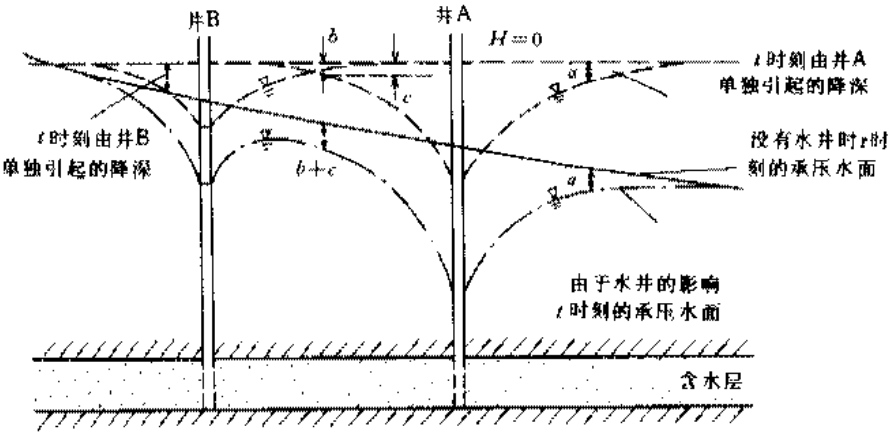



图 3—13　剖面上解的叠加示意图

上述例子可推广到有多口抽水井或注水井的情况。对非稳定井流，也可作类似分析[2],[19]，这里不再重复。

综合上例分析，不难得出下列结论：

(1) 各个边界条件的作用彼此是独立的。一个边界条件的存在，并不影响其他边界条件存在时所得到的结果（对于初始条件也是如此）。不同类边界条件所造成的结果之间彼此也互不影响。因此，若干个不同类边界条件的综合结果等于各单个边界条件单独作用所得结果的叠加。

(2) 各抽水井的作用也是独立的。在齐次定解条件下，承压井群产生的降深，等于各井单独产生降深的叠加。

(3) 潜水含水层的微分方程是非线性的，不能应用叠加原理，但用线性化方法，把描述潜水运动的微分方程线性化后，仍可应用叠加原理。

**二、干扰井群**

无论供水或排水，单井情况比较少见，通常都是利用井群抽水。当井群中各井之间的距离小于影响半径时，彼此间的降深和流量就会发生干扰。干扰的表现是：同样降深时，一个干扰井的流量比它单独工作时的流量要小；欲使流量保持不变，则在干扰情况下，每个井的降深就要增加。也就是说，干扰井的降深大于同样流量未发生干扰时的水位降深。干扰的程度，除受含水层性质、补给和排泄条件等自然因素影响外，主要受井的数量、间距、布井方式（和井的结构）等因素的影响。

设在无限含水层中任意布置几口抽水井。当群井抽水持续时间较长时，同样会形成一个相对稳定的区域降落漏斗。在此漏斗范围内，第 $j$ 口井单独抽水对任一点 $i$ 产生的降深为：

$$s_{ij}=\frac{Q_j}{2\pi T}\ln\frac{R_j}{r_{ij}}$$

而几口井抽水对 $i$ 点产生的总降深，按叠加原理有：

$$s_i=\sum_{j=1}^{n}s_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{2\pi T}\ln\frac{R_j}{r_{ij}}\qquad(3—53)$$

式中，$R_j$ 和 $Q_j$ 分别为第 $j$ 口井的影响半径和流量；$r_{ij}$ 为第 $j$ 口井至 $i$ 点的距离。

式（3—53）是干扰井群计算的基本公式。当已知 $R_j$ 和 $Q_j$ 时，按式（3—53）可以计算任一点 $i$ 的降深值。如把 $i$ 点分别移到各井井壁处，可以写出如下几个方程：

$$\begin{cases} s_{w_1} = \dfrac{Q_1}{2\pi T}\ln\dfrac{R_1}{r_{w_1}} + \sum\limits_{j=2}^{n}\dfrac{Q_j}{2\pi T}\ln\dfrac{R_j}{r_{ij}} \\ s_{w_2} = \dfrac{Q_2}{2\pi T}\ln\dfrac{R_2}{r_{w_2}} + \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq 2}}^{n}\dfrac{Q_j}{2\pi T}\ln\dfrac{R_j}{r_{ij}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{w_n} = \dfrac{Q_n}{2\pi T}\ln\dfrac{R_n}{r_{w_n}} + \sum\limits_{j=1}^{n-1}\dfrac{Q_j}{2\pi T}\ln\dfrac{R_j}{r_{ij}} \end{cases} \tag{3—54}$$

联立求解上述线性方程组，可由给定的各井流量 $Q_j$ 求出各井的降深 $s_{w_i}$，或由 $s_{w_i}$ 求出 $Q_j$。在各井流量 $Q_j$ 和影响半径 $R_j$ 分别彼此相等的特殊情况下，（3—53）可简化为：

$$s_i = \frac{Q}{2\pi T}\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{R}{r_{ij}} = \frac{nQ}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_i^*} \tag{3—55}$$

式中，$r_i^* = \sqrt[n]{r_{i_1}\cdot r_{i_2}\cdots r_{i_n}}$ 称为等效距离。

类似地，对于越流含水层中的地下水的稳定运动有：

$$s_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{2\pi T}K_0\left(\frac{r_{ij}}{B}\right) \tag{3—56}$$

或

$$s_i = \sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{2\pi T}\ln\frac{1.123B}{r_{ij}} \tag{3—57}$$

对于隔水底板水平的潜水含水层中的井群，为了满足齐次边界条件，对降深项 $H^2-h^2$ 进行叠加，故有：

$$H_0^2 - h_i^2 = \sum_{j=1}^{n}\frac{Q_j}{\pi K}\ln\frac{R_j}{r_{ij}} \tag{3—58}$$

式中，$H_0$ 为潜水含水层的初始厚度，$h_i$ 为任意点 $i$ 处潜水含水层的厚度。其余符号同前。

在各井流量和影响半径相等的特殊情况下，（3—58）式同样可化简为：

$$H_0^2 - h_i^2 = \frac{nQ}{\pi K}\ln(R/r^*) \tag{3—59}$$

$$r^* = \sqrt[n]{r_{i_1}\cdot r_{i_2}\cdot r_{i_3}\cdots r_{i_n}} \tag{3—60}$$

下面介绍几种规则布井的干扰井群公式。有些公式可直接由（3—55）式和（3—59）式经过简单变换得出，读者可自行推导。

（1）相距为 $L$ 的两口井，影响半径相等，两井的流量和降深 $s_{w_1}=s_{w_2}=s_w$ 相同，则有：

承压水井　　$$Q_1=Q_2=\frac{2\pi KMs_w}{\ln(R^2/r_wL)} \tag{3—61}$$

潜水井　　$$Q_1=Q_2=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln(R^2/r_wL)} \tag{3—62}$$

由上两式可以看出，总流量 $Q_1+Q_2$ 等于半径为 $\sqrt{r_wL}$ 的单井流量。但因 $\sqrt{r_wL}\gg r_w$，在技术上打两口井要比打一口直径很大的井容易些。

（2）布置在正方形（边长为 $L$）顶点的四口井，同样有：

承压水井　$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=\frac{2\pi KMs_w}{\ln(R^4/\sqrt{2}r_wL^3)}\tag{3—63}$$

潜水井　$$Q_1=Q_2=Q_3=Q_4=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln(R^4/\sqrt{2}r_wL^3)}\tag{3—64}$$

（3）按半径为 $r$ 的圆周均匀布置 $n$ 口井。

由图 3—14 中的几何关系知：

$$r_w\cdot r_{1,2}\cdot r_{1,3}\cdots r_{1,n}=nr_w\cdot r^{n-1}$$

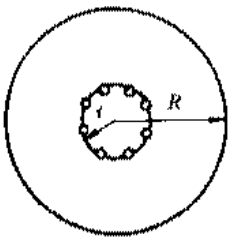



图 3—14　沿圆周分布的井群

其中，$r_{1,2}$、$r_{1,3}$、$\cdots r_{1,n}$ 为 1 号井至 2 号、3 号、…各井的距离。因而有：

承压水井　$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\dfrac{R^n}{nr_wr^{n-1}}}\tag{3—65}$$

潜水井　$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{R^n}{nr_wr^{n-1}}}\tag{3—66}$$

（4）补给边界对称分布的无限井排，如图 3—15（a）所示。设井距为 $\sigma$，等距分布，井

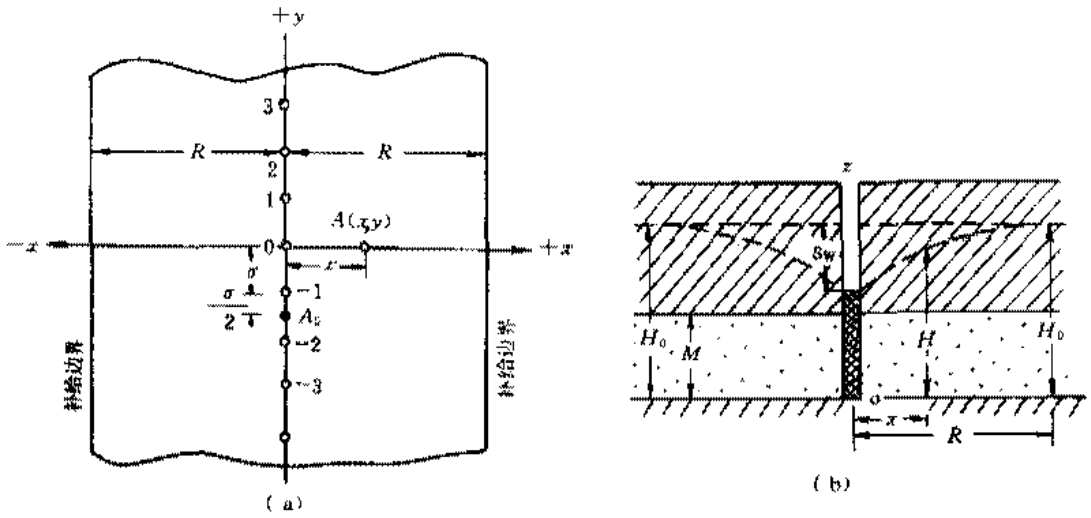



图 3—15　补给边界对称分布的无限井排

（a）—平面图；（b）—沿 $x$ 轴的剖面图

排距两侧补给边界的距离相等，边界水头均为 $H_0$。如果各井半径相等，则可认为各井的降深和流量都相同，有：

承压水井　$$Q=2.73\frac{KMs_w}{\lg\dfrac{\sigma}{\pi r_w}+\lg\mathrm{sh}\dfrac{\pi R}{\sigma}}\tag{3—67}$$

潜水井　$$Q=1.366\frac{K(2H_0-s_w)s_w}{\lg\dfrac{\sigma}{\pi r_w}+\lg\mathrm{sh}\dfrac{\pi R}{\sigma}}\tag{3—68}$$

**思考题：**

1. 叠加原理适用什么条件？试对定水头边界的非稳定流问题应用叠加原理进行分解。

2. 承压井群计算时，为什么对降深 $s$ 进行叠加，而不是对水头直接叠加？

3. 本节讨论潜水井群计算时，是对 $H_0^2-h^2$ 进行计算的。如果潜水的运动是非稳定的，也能这样计算么？

## §3—7 均匀流中的井

在以前各节的井流计算中，都假定抽水前的地下水面是水平的。但在自然界中，绝对水平的地下水面是很少的。当水面坡度不大时，可以近视地当做水平面来处理。如果地下水面有一定坡度，则要考虑地下水流对井流的影响。这里只介绍一种最简单的情况，即承压地下水流为均匀流时（水力坡度和渗透系数均为常数），一口抽水井的情况。

在一均质各向同性的承压含水层中，含水层厚度 $M$ 是常数。有一口井位于坐标原点，以定流量抽水。均匀流的方向为 $-x$，渗透速度为 $v_0$。根据前面介绍的叠加原理，这一问题可分解为两个子问题：一是假设不存在抽水井的承压均匀流，水力坡度为常数，如取原点处的水头作为基准面（即原点处的水头为零），则任一点（$x$，$y$）处的水头为 $H_1$，则有：

$$v_0 = KJ = K\frac{H_1}{x}$$

或

$$H_1(x,y) = \frac{v_0}{K}x$$

二是假设初始承压水面为水平时存在一半径为 $r_w$ 的抽水井。设任一点（$x$，$y$）处的水头为 $H_2$，按 Dupuit 公式有：

$$H_2 - h_w = \frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{r}{r_w},\quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

因取位于原点处抽水井的水位为基准面，故有 $h_w=0$，上式变为：

$$H_2 = \frac{Q}{2\pi KM}\ln\frac{r}{r_w}$$

将 $H_1$ 和 $H_2$ 叠加，即得原问题的解：

$$H(x,y) = H_1 + H_2 = \frac{v_0}{K}x + \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_w} \qquad (3—69)$$

这就是均匀流中的承压水井公式。根据该式可绘出流网，如图 3—18 所示。流网中有一条分水线和一个驻点（停滞点）。在分水线以内，地下水流向井中；在分水线以外，水向下游流走，而不进入井中。显然，抽水井的稳定流量应等于分水线以内的天然流量。因此，当 $x$ 增大时，分水线以水平线 $y=\pm\frac{Q}{2v_0M}$ 为渐近线（图 3—16）。所谓驻点，即水流速度 $v=0$ 的点。按（3—69）式，在驻点 $s(x_s,y_s)$ 处有：

$$v_y = -K\frac{\partial H}{\partial y} = -K\frac{Q}{2\pi T}\frac{y_s}{x_s^2+y_s^2} = 0$$

$$v_x = -K\frac{\partial H}{\partial x} = -v_0 - \frac{Q}{2\pi M}\frac{x_s}{x_s^2} = 0$$

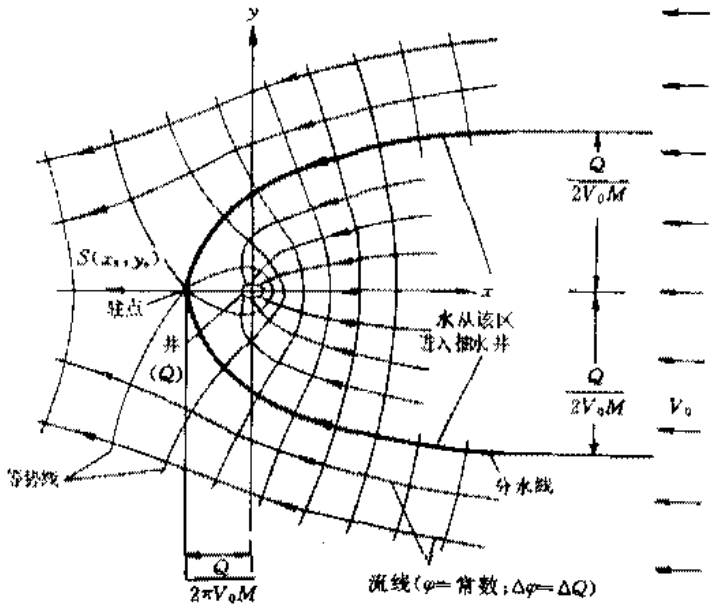



图 3—16 均匀流中抽水井的流网

(据 J. Bear)

由此得驻点的坐标为：

$$\begin{cases} x_s = -\dfrac{Q}{2\pi M v_0} \\ y_s = 0 \end{cases} \tag{3—70}$$

均匀流中注水井的流网如图 3—17 所示。这时，天然流速 $v_0$ 的方向和 $x$ 轴方向一致。同

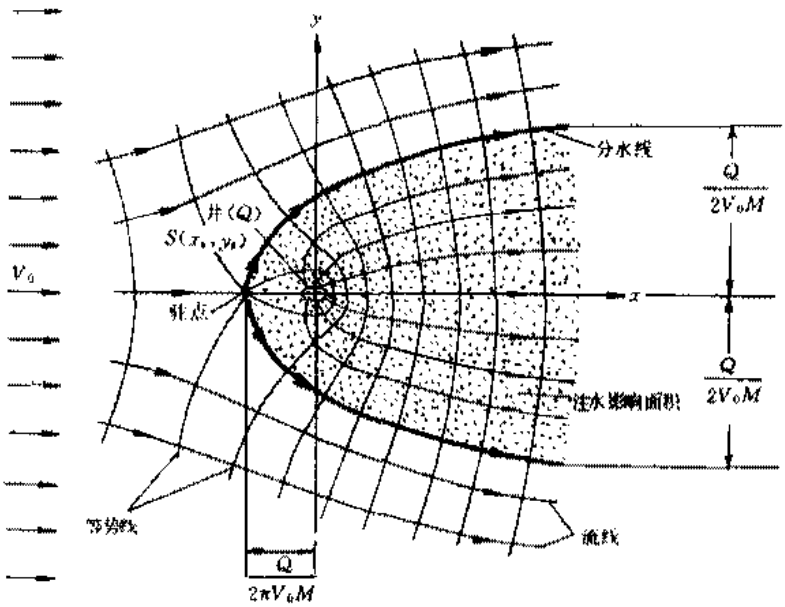



图 3—17 均匀流中注水井的流网

(据 J. Bear)

样也有分水线和驻点。图中的阴影部分表示注水影响的面积，即注水水取代了原来的天然水流。

## §3—8 井损与有效井径的确定方法

在抽水井中测得的降深是多种原因造成的水头损失的叠加。用前面各节中公式计算的降深，仅仅代表地下水在含水层中向水井流动时所产生的水头损失。这部分水头损失 $s_w$ 有时称为含水层损失。此外，还有§3—1节提到的井损 $\Delta h$。这部分水头损失通常包括三部分：①水流通过过滤器时所产生的水头损失；②水流穿过过滤器时，由接近水平的运动变为滤水管内的垂向运动，因水流方向偏转所产生的水头损失；水流在滤水管内向上运动时，不断有水流入井内，因流量和流速不断增加所引起的水头损失；③水流在井管内向上运动至水泵吸水口的沿程水头损失。

C. E. Jacob 认为，井损值和抽水井流量 $Q$ 的二次方成正比，即 $\Delta h=CQ^2$，$C$ 称为井损常数。因此，总降深 $s_{t,w}$ 可表示为：

$$s_{t,w} = s_w + CQ^2 = BQ + CQ^2 \tag{3—71}$$

其中，$B$ 为系数。稳定流时按 Dupuit 公式有 $\ln(R/r_w)/2\pi T$；非稳定流时，记为 $B(r_w, t)$，是时间的函数。

M. I. Rorabangh 认为，在井附近和井内可能出现紊流，井损常数和 $Q^n$ 成正比，$n$ 可能不等于 2。于是（3—71）式可表示为更一般的形式：

$$s_{t,w} = BQ + CQ^n \tag{3—72}$$

稳定流时，井内的总降深和井损值随抽水井流量的变化的曲线，见图 3—18。

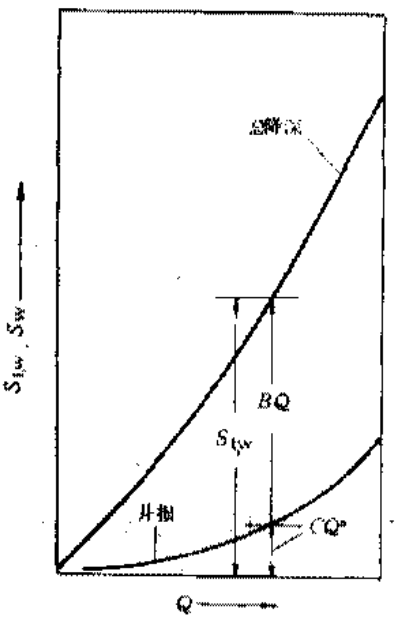


图 3—18 当 $B$ 为常数时总降深和井损随流量的变化

迄今为止，我们都假定井半径 $r_w$ 的大小对抽水井的降深影响不大，这主要是指 $B$ 值。对 $C$ 值是有相当影响的。因为水在井内的流速同井管截面积大小有关，而截面积又和井半径的平方成正比，所以井半径对井损有较大的影响。从图 3—18 可以看出，当流量较小时，井损很小，实际上可以忽略。但当大流量抽水时，井损在总降深中就占有相当大的比例。

井损值和有效半径，可用如下两种抽水试验资料确定。

(1) 多次降深的稳定抽水试验。要有三次以上的降深和观测孔资料。将（3—71）式改写为：

$$\frac{s_{t,w}}{Q} = B + CQ$$

由此可知，如以 $s_{t,w}/Q$ 为纵坐标，$Q$ 为横坐标，将三次以上稳定降深的抽水资料点绘在方格纸上，可绘出最佳的拟合直线。直线的斜率为 $C$，直线在纵坐标上的截距为 $B$。于是可求得井损：

$$\Delta h = CQ^2 \tag{3—73}$$

再将根据观测孔资料求得的参数 $T$ 和 $R$ 代入下式中，便可以算出有效半径 $r_w$。

$$B = \frac{\ln(R/r_w)}{2\pi T} \tag{3—74}$$

当大流量抽水，$n \neq 2$ 时，将（3—72）式改写为：

$$\frac{s_{t,w}}{Q} - B = CQ^{n-1} \tag{3—75}$$

上式包含三个待定常数 $B$、$C$ 和 $n$。因而要用试算法。取一张双对数纸，假设一个 $B$ 值，以 $\left(\frac{s_{t,w}}{Q} - Q\right)$ 为纵坐标，以 $Q$ 为横坐标做图。不断改变 $B$ 值，直到各点在图上能连成一直线时为止。这时的 $B$ 值即为要求的 $B$ 值，直线在纵轴上的截距为 $C$，斜率为 $n-1$。求出 $B$、$C$ 和 $n$ 以后，按（3—73）和（3—74）式就可以求得井损和有效半径。

（2）阶梯降深抽水试验。它同多次降深稳定抽水试验不同之处在于：①流量呈阶梯状增加，每一阶段流量为常数，二阶梯之间没有水位恢复阶段，如图 3—19 所示；②每一阶段抽水不一定达到稳定状态，故此多次降深稳定抽水试验节省时间。但也要有观测孔资料用来求参数。

应用叠加原理，在第 $j$ 阶梯的某一时刻 $t$ 的总降深可写成：

$$s_{t,w,j}(t) = C(Q_j)^2 + \sum_{i=1}^{j}(Q_i - Q_{i-1})B(r_w, t - t_i) \tag{3—76}$$

式中，$s_{t,w,j}(t)$ 为某一时刻 $t$ 的总降深，$t$ 为从抽水开始算起的时间；$Q_j$ 为 $j$ 阶梯的流量；$t_i$ 为 $i$ 阶梯抽水开始的时间，以第一阶段抽水开始时为零，即 $t_1=0$；$Q_i$ 为 $i$ 阶梯的流量，$i<j$；$B(r_w, t-t_i)$ 为同时间有关的系数。

如取一固定的时间段 $t^* = t - t_j$，并以 $\delta s_{t,w,i}(t^*)$ 表示 $i$ 阶梯抽水 $t^*$ 时间以后，由于流量的增加造成的降深增量（图 3—19a），则按（3—76）式，且因 $Q_0=0$，有：

$$\delta s_{t,w,1}(t^*) = C(Q_1)^2 + Q_1 B(r_w, t^*)$$

而 $\delta s_{t,w,2}(t^*)$ 应为实际的 $s_{t,w,2}(t)$ 和假设不存在第三个流量阶梯时，由流量 $Q_1$ 一直抽水到 $t$ 时刻的假想降深 $s_{t,w,1}(t)$ 之差。按（3—76）式有：

$$s_{t,w,2}(t) = C(Q_2)^2 + Q_1 B(r_w, t) + (Q_2 - Q_1)B(r_w, t^*)$$

$$s_{t,w,1}(t) = C(Q_1)^2 + Q_1 B(r_w, t)$$

于是 $\delta s_{t,w,2}(t^*) = s_{t,w,2}(t) - s_{t,w,1}(t)$

$$= C(Q_2)^2 - C(Q_1)^2 + Q_2 B(r_w, t^*) - Q_1 B(r_w, t^*)$$

同理可求得：

$$\delta s_{t,w,3}(t^*) = C(Q_3)^2 - C(Q_2)^2 + Q_3 B(r_w, t^*) - Q_2 B(r_w, t^*)$$

由此得三个阶梯的降深增量之和

$$\sum_{i=1}^{3}\delta s_{t,w,i}(t^*) = C(Q_3)^2 + B(r_w, t^*)Q_3 = s_{t,w,3}(t^*)$$

结果说明，三次降深增量相加的结果，恰好等于一开始就用定流量 $Q_3$ 抽水抽 $t^*$ 时间后应得的降深值。予以推广，可得：

$$\sum_{i=1}^{j}\delta s_{t,w,i}(t^*) = s_{t,w,j}(t^*) = B(r_w, t^*)Q_j + C(Q_j)^2 \tag{3—77}$$

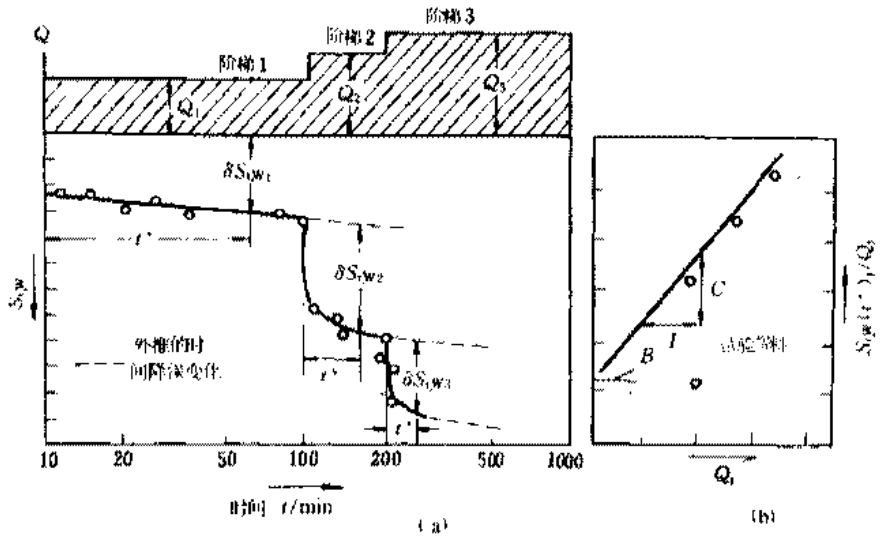



图 3—19　阶梯降深试验曲线

(据 J. Bear)

根据（3—77）式，可按下列步骤确定井损和有效井半径：

(1) 取固定的时间 $t^*$，一般为 1～2h。然后在图 3—19a 的降深-时间曲线上量取相应时间段的降深增量 $\delta s_{t,w,i}$ $(t^*)$。

(2) 按(3—77)式计算出和每一流量阶梯相应的降深 $s_{t,w,j}(t^*)$，如 $s_{t,w,3}(t^*)=\sum_{i=1}^{3}\delta s_{t,w,i}$ $(t^*)$，$s_{t,w,2}$ $(t^*)$ $=\sum_{i=1}^{2}\delta s_{t,w,i}$ $(t^*)$ 等，同时求出每一阶梯的单位降深：

$$s_{t,w,1}(t^*)/Q_1, s_{t,w,2}(t^*)/Q_2, s_{t,w,3}(t^*)/Q_3$$

(3) 在方格纸上，以 $s_{t,w,j}$ $(t^*)$ $/Q_j$ 为纵坐标，以 $Q_j$ 为横坐标做图，求出最佳配合直线（图 3—19b）。由直线在纵轴上的截距求得 $B$，由直线的斜率求得 $C$。将 $C$、$B$ 代入（3—73）和（3—74）式，便可计算出井损和有效井半径。

**思考题：**

1. 怎样利用叠加原理求得（3—76）式？

2. 为什么根据（3—75）式在双对数纸上做图，截距为 $C$，斜率为 $n-1$？

3. 为什么根据阶梯降深试验求井损要做如此复杂的处理？用稳定流的处理方法求井损行吗？为什么？

# 第四章　地下水向完整井的非稳定运动

## §4—1　承压含水层中的完整井流

当承压含水层侧向边界离井很远，边界对研究区的水头分布没有明显影响时，可以把它看作是无外界补给的无限含水层。

### 一、定流量抽水时的 Theis 公式

承压含水层中单井定流量抽水的数学模型是在下列假设条件下建立的：

（1）含水层均质各向同性、等厚，侧向无限延伸，产状水平；

（2）抽水前天然状态下水力坡度为零；

（3）完整井定流量抽水，井径无限小；

（4）含水层中水流服从 Darcy 定律；

（5）水头下降引起的地下水从贮存量中的释放是瞬时完成的。

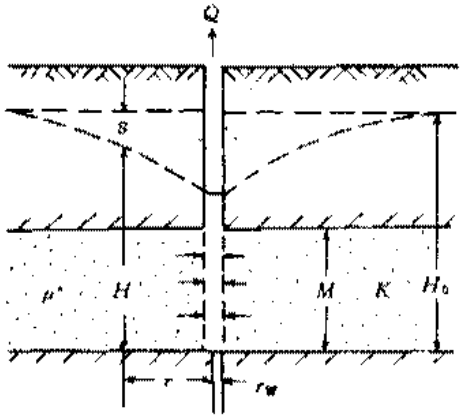



图 4—1　承压水完整井流

在上述假设条件下，抽水后将形成以井轴为对称轴的下降漏斗，将坐标原点放在含水层底板抽水井的井轴处，井轴为 $Z$ 轴，如图 4—1 所示。此时，单井定流量的承压完整井流，可归纳为如下的数学模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s}{\partial r}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & t>0,0<r<\infty \qquad (4—1)\\ s(r,0)=0, & 0<r<\infty \qquad (4—2)\\ s(\infty,t)=0,\quad \dfrac{\partial s}{\partial r}\Big|_{r\to\infty}=0 & t>0 \qquad (4—3)\\ \lim\limits_{r\to 0} r\dfrac{\partial s}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T} & \qquad (4—4) \end{cases}$$

式中，$s=H_0-H$。下边我们来研究如何求降深函数 $s(r,t)$。为此，利用 Hankel 变换，将方程式（4—1）两端同乘以 $rJ_0(\beta r)$，并在 0—∞区间内对 $r$ 积分。

设导压系数　　$a=\dfrac{T}{\mu^*}$，则有：

$$a\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r=\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t}rJ_0(\beta r)\mathrm{d}r$$

方程式右端

$$\int_0^\infty \frac{\partial s}{\partial t} r J_0(\beta r)\mathrm{d}r = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty s r J_0(\beta r)\mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}t}$$

方程式左端，利用分部积分，同时注意到边界条件式（4—3）与式（4—4），有：

$$a\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) r J_0(\beta r)\mathrm{d}r = \frac{aQ}{2\pi T} - a\beta\int_0^\infty s\mathrm{d}[rJ_1(\beta r)]$$

按 Bessel 函数的性质，有：

$$\int_0^\infty s\mathrm{d}[rJ_1(\beta r)] = \int_0^\infty s\beta r J_0(\beta r)\mathrm{d}r$$

因此，有：

$$a\int_0^\infty \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) r J_0(\beta r)\mathrm{d}r = \frac{aQ}{2\pi T} - a\beta^2\bar{s}$$

上述定解问题，经过 Hankel 变换，消去了变量 $r$，转变为常微分方程的初值问题，即：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\bar{s}}{\mathrm{d}t} + a\beta^2\bar{s} = \dfrac{aQ}{2\pi T} \\ \bar{s}\big|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

其解为：

$$\bar{s} = \int_0^t \frac{aQ}{2\pi T} e^{-a\beta^2(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

再通过 Hankel 逆变换由 $\bar{s}$ 求 $s$，即：

$$\begin{aligned} s &= \int_0^\infty \bar{s}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta \\ &= \frac{aQ}{2\pi T}\int_0^t\left[\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta\right]\mathrm{d}\tau \end{aligned} \qquad (4—5)$$

先计算方括号内的积分，为此设：

$$F(r) = \int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta \qquad (4—6)$$

将（4—6）式对 $r$ 求导数，有：

$$\begin{aligned} F'(r) &= \int_0^\infty \beta e^{-a\beta^2(t-\tau)}\frac{\partial}{\partial r}J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta \\ &= -\frac{1}{2a(t-\tau)}\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta r J_0(\beta r)\mathrm{d}\beta \end{aligned}$$

根据（4—6）式，有：

$$F'(r) = -\frac{r}{2a(t-\tau)}F(r)$$

$$\frac{\mathrm{d}F(r)}{F(r)} = -\frac{r}{2a(t-\tau)}\mathrm{d}r$$

两边积分得：

$$\ln F(r) = -\frac{r^2}{4a(t-\tau)} + C_1$$

令 $C_1 = \ln C$，则有：

$$\ln\frac{F(r)}{C}=-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}$$

故：

$$F(r)=Ce^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}} \tag{4—7}$$

利用 $r=0$ 时的 $F(r)$ 值，由（4—6）可以确定 $C$ 值：

$$F(0)=\int_0^\infty e^{-a\beta^2(t-\tau)}\beta J_0(0)d\beta=\frac{1}{2a(t-\tau)}$$

但由（4—7）式，有：

$$F(0)=C,C=\frac{1}{2a(t-\tau)}$$

$$F(r)=\frac{1}{2a(t-\tau)}e^{-\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}$$

把上式代入（4—5）式，有：

$$s=\frac{aQ}{2\pi T}\int_0^t\frac{1}{2a(t-\tau)}e^{\frac{r^2}{4a(t-\tau)}}d\tau \tag{4—8}$$

为计算方便，对（4—8）式进行变量代换，令：

$$y=\frac{r^2}{4a(t-\tau)},d\tau=\frac{r^2}{4ay^2}dy$$

同时更换积分上下限，当 $\tau=0$ 时，$y=\frac{r^2}{4at}$；当 $\tau=t$ 时，$y=\infty$

于是，

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2}{4at}}^\infty\frac{e^{-y}}{\frac{r^2}{4ay}}\frac{r^2}{4ay^2}dy=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty\frac{e^{-y}}{y}dy \tag{4—9}$$

其中，

$$u=\frac{r^2}{4at}=\frac{r^2\mu^*}{4Tt} \tag{4—10}$$

在地下水动力学中，采用井函数 $W(u)$ 代替（4—9）式中的指数积分式：

$$W(u)=-E_i(-u)=\int_u^\infty\frac{e^{-y}}{y}dy$$

则（4—9）式可改写成：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}W(u) \tag{4—11}$$

式中，$s$ 为抽水影响范围内，任一点任一时刻的水位降深；$Q$ 为抽水井的流量；$T$ 为导水系数；$t$ 为自抽水开始到计算时刻的时间；$r$ 为计算点到抽水井的距离；$\mu^*$ 为含水层的贮水系数。

（4—9）式为无补给的承压水完整井定流量非稳定流计算公式，也就是著名的 Theis 公式。为了计算方便，通常将 $W(u)$ 展开成级数形式：

$$W(u)=\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y}dy=-0.577216-\ln u+u-\sum_{n=2}^\infty(-1)^n\frac{u^n}{n\cdot n!}$$

并制成数值表（表 4—1），只要求出 $u$ 值，从表 4—1 中就可查出相应的 $W(u)$ 值；反之亦然。

## 表 4—1　W (u) 数值表

(据 Wenzel, 1942)

| $N$ \ $u$ 或 $u_{xy}$ | $N\times10^{-15}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 33.9616 | 31.6590 | 29.3564 | 27.0538 | 24.7512 | 22.4486 | 20.146 0 | 17.8435 |
| 1.5 | 33.5561 | 31.2535 | 28.9509 | 26.6483 | 24.3458 | 22.0432 | 19.7406 | 17.4380 |
| 2.0 | 33.2684 | 30.9658 | 28.6632 | 26.3607 | 24.0581 | 21.7555 | 19.4529 | 17.1503 |
| 2.5 | 33.0453 | 30.7427 | 28.4401 | 26.1375 | 23.8349 | 21.5323 | 19.2298 | 16.9272 |
| 3.0 | 32.8629 | 30.5604 | 28.2578 | 25.9552 | 23.6526 | 21.3500 | 19.0474 | 16.7449 |
| 3.5 | 32.7088 | 30.4062 | 28.1036 | 25.8010 | 23.4985 | 21.1959 | 18.8933 | 16.5907 |
| 4.0 | 32.5753 | 30.2727 | 27.9701 | 25.6675 | 23.3649 | 21.0623 | 18.7598 | 16.4572 |
| 4.5 | 32.4575 | 30.1549 | 27.8523 | 25.5497 | 23.2471 | 20.9446 | 18.6420 | 16.3394 |
| 5.0 | 32.3521 | 30.0495 | 27.7470 | 25.4444 | 23.1418 | 20.8392 | 18.5366 | 16.2340 |
| 5.5 | 32.2568 | 29.9542 | 27.6516 | 25.3491 | 23.0465 | 20.7439 | 18.4413 | 16.1387 |
| 6.0 | 32.1698 | 29.8672 | 27.5646 | 25.2620 | 22.9595 | 20.6569 | 18.3543 | 16.0517 |
| 6.5 | 32.0898 | 29.7872 | 27.4845 | 25.1820 | 22.8794 | 20.5768 | 18.2742 | 15.9717 |
| 7.0 | 32.0156 | 29.7131 | 27.4105 | 25.1079 | 22.8053 | 20.5027 | 18.2001 | 15.8976 |
| 7.5 | 31.9467 | 29.6441 | 27.3415 | 25.0389 | 22.7363 | 20.4337 | 18.1311 | 15.8280 |
| 8.0 | 31.8821 | 29.5795 | 27.2769 | 24.9744 | 22.6718 | 20.3692 | 18.0666 | 15.7640 |
| 8.5 | 31.8215 | 29.5189 | 27.2163 | 24.9137 | 22.6112 | 20.3086 | 18.0060 | 15.7034 |
| 9.0 | 31.7643 | 29.4618 | 27.1592 | 24.8566 | 22.5540 | 20.2514 | 17.9488 | 15.6462 |
| 9.5 | 31.7103 | 29.4077 | 27.1051 | 24.8025 | 22.4999 | 20.1973 | 17.8948 | 15.5922 |

| $N$ \ $u$ 或 $u_{xy}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 15.5409 | 13.2383 | 10.9357 | 8.6332 | 6.3315 | 4.0379 | 1.8229 | 0.2194 |
| 1.5 | 15.1354 | 12.8328 | 10.5303 | 8.2278 | 5.9266 | 3.6374 | 1.4645 | 0.1000 |
| 2.0 | 14.8477 | 12.5451 | 10.2426 | 7.9402 | 5.6394 | 3.3547 | 1.2227 | 0.04890 |
| 2.5 | 14.6246 | 12.3220 | 10.0194 | 7.7172 | 5.4167 | 3.1365 | 1.0443 | 0.02491 |
| 3.0 | 14.4423 | 12.1397 | 9.8371 | 7.5348 | 5.2349 | 2.9591 | 0.9057 | 0.01305 |
| 3.5 | 14.2881 | 11.9855 | 9.6830 | 7.3807 | 5.0813 | 2.8099 | 0.7942 | 0.006970 |
| 4.0 | 14.1546 | 11.8520 | 9.5495 | 7.2472 | 4.9482 | 2.6813 | 0.7024 | 0.003779 |
| 4.5 | 14.0368 | 11.7342 | 9.4317 | 7.1295 | 4.8310 | 2.5684 | 0.6253 | 0.002073 |
| 5.0 | 13.9314 | 11.6280 | 9.3263 | 7.0242 | 4.7261 | 2.4679 | 0.5598 | 0.001148 |
| 5.5 | 13.8361 | 11.5330 | 9.2310 | 6.9289 | 4.6313 | 2.3775 | 0.5034 | 0.0006409 |
| 6.0 | 13.7491 | 11.4465 | 9.1440 | 6.8420 | 4.5448 | 2.2953 | 0.4544 | 0.0003601 |
| 6.5 | 13.6691 | 11.3665 | 9.0640 | 6.7620 | 4.4652 | 2.2201 | 0.4115 | 0.0002034 |
| 7.0 | 13.5950 | 11.2924 | 8.9899 | 6.6879 | 4.3916 | 2.1508 | 0.3738 | 0.0001155 |
| 7.5 | 13.5260 | 11.2234 | 8.9209 | 6.6190 | 4.3231 | 2.0867 | 0.3403 | 0.0000658 |
| 8.0 | 13.4614 | 11.1589 | 8.8563 | 6.5545 | 4.2591 | 2.0269 | 0.3106 | 0.0000376 |
| 8.5 | 13.4008 | 11.0982 | 8.7957 | 6.4939 | 4.1990 | 1.9711 | 0.2840 | 0.0000215 |
| 9.0 | 13.3437 | 11.0411 | 8.7386 | 6.4368 | 4.1423 | 1.9187 | 0.2602 | 0.0000124 |
| 9.5 | 13.2896 | 10.9870 | 8.6845 | 6.3828 | 4.0887 | 1.8695 | 0.2387 | 0.0000071 |

## 二、流量变化时的计算公式

Theis 公式是在假定流量固定不变的情况下导出的。这种情况通常只有在抽水试验时才能做到。实际上，很多生产井的流量是季节性变化的。如农用井在灌溉季节抽水量大，非灌溉季节抽水量小。工业用水也有类似情况，常随需水量的变化。在这种情况下，怎样应用 Theis 公式？首先需要绘出生产井的 $Q=f(t)$ 关系曲线，即流量过程线。然后将流量过程线概化，用阶梯形折线代替原曲线，坐标选择如图 4—2 所示。概化原则是矩形面积等于曲线与横坐标所围成的面积。其中，每一个阶梯都可视为定流量，应用 Theis 公式。把各阶梯流量产生的降深，按叠加原理叠加起来，即得流量变化时水位降深的计算公式。

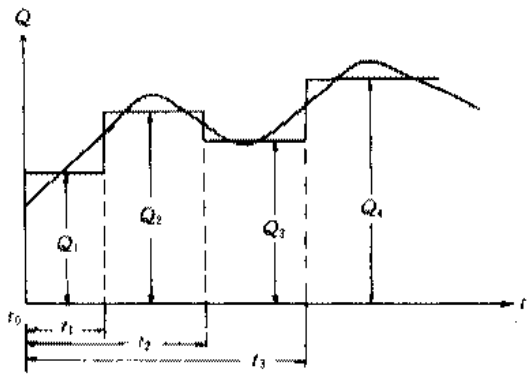



图 4—2　流量概化呈阶梯状变化图

当 $0<t<t_1$ 时，水位降深为：

$$s=\frac{Q_1}{4\pi T}W\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\right)$$

当 $t_{i-1}<t<t_i$ 时，水位降深为：

$$s=\frac{Q_1}{4\pi T}W\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\right)+\frac{Q_2-Q_1}{4\pi T}W\left[\frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_1)}\right]+\cdots+\frac{Q_i-Q_{i-1}}{4\pi T}W\left[\frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_{i-1})}\right]$$

$t$ 时刻经历若干个阶梯流量后所产生的总水位降深为：

$$s=\frac{1}{4\pi T}\sum_{i=1}^{n}(Q_i-Q_{i-1})W\left[\frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_{i-1})}\right]$$

$$t_{i-1}<t<t_i \qquad (4—12)$$

式中，设 $t_0=0$，相应的 $Q_0=0$。

(4—12) 式为流量变化时，经概化呈阶梯状变化后的计算公式。

## 三、Theis 公式的近似表达式

如前述，Theis 公式中的井函数，可以展开成无穷级数形式，即：

$$W(u)=\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y}dy$$

$$=-0.577216-\ln u+u-\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{u^n}{n\cdot n!}$$

前三项之后的级数是一个交错级数。根据交错级数的性质可知，这个级数之和不超过 $u$。也就是说，当 $u$ 很小，井函数 $W(u)$ 用级数前两项 $(-0.577216-\ln u)$ 代替时，其舍掉部分不超过 $2u$。因此，当 $u\leqslant 0.01\left(即\ t\geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}\right)$ 井函数用级数前两项代替时，其相对误差不超过 0.25%；当 $u\leqslant 0.05$ 时 $\left(即\ t\geqslant 5\frac{r^2\mu^*}{T}\right)$，相对误差不超过 2%；当 $u\leqslant 0.1$ 时 $\left(即\ t\geqslant 2.5\frac{r^2\mu^*}{T}\right)$，相对误差不超过 5%。

一般生产上允许相对误差在 2% 左右。因此，当 $u\leqslant 0.01$ 或 $u\leqslant 0.05$ 时，井函数可用级数的前两项代替，即：

$$W(u) \simeq -0.577216 - \ln u = \ln \frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}$$

于是，Theis 公式可以近似地表示为下列形式：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}\ln \frac{2.25Tt}{r^2\mu^*} = \frac{0.183Q}{T}\lg \frac{2.25Tt}{r^2\mu^*} \qquad (4—13)$$

(4—13)' 式称为 Jacob 公式（1946）。

流量阶梯状变化时，当 $u_i \leqslant 0.01$，即 $(t-t_i) \geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}(i=1,2\cdots n)$，(4—12) 式可近似地表示为：

$$s = \frac{0.183}{T}\sum_{i=1}^{n}(Q_i - Q_{i-1})\lg \frac{2.25T(t-t_{i-1})}{r^2\mu^*} \qquad (4—14)$$

**四、对 Theis 公式和与之有关的几个问题的讨论**

1. Theis 公式反映的降深变化规律

将（4—11）式改写成无量纲降深形式，即 $s/\frac{Q}{4\pi T} = W(u)$，并给出 $W(u)$-$\frac{1}{u}$ 曲线〔图 4—3（a）〕。曲线表明，同一时刻随径向距离 $r$ 增大，降深 $s$ 变小，当 $r \to \infty$ 时，$s \to 0$，这一点符合假设条件。同一断面（即 $r$ 固定），$s$ 随 $t$ 的增大而增大，当 $t=0$ 时，$s=0$，符合实际情

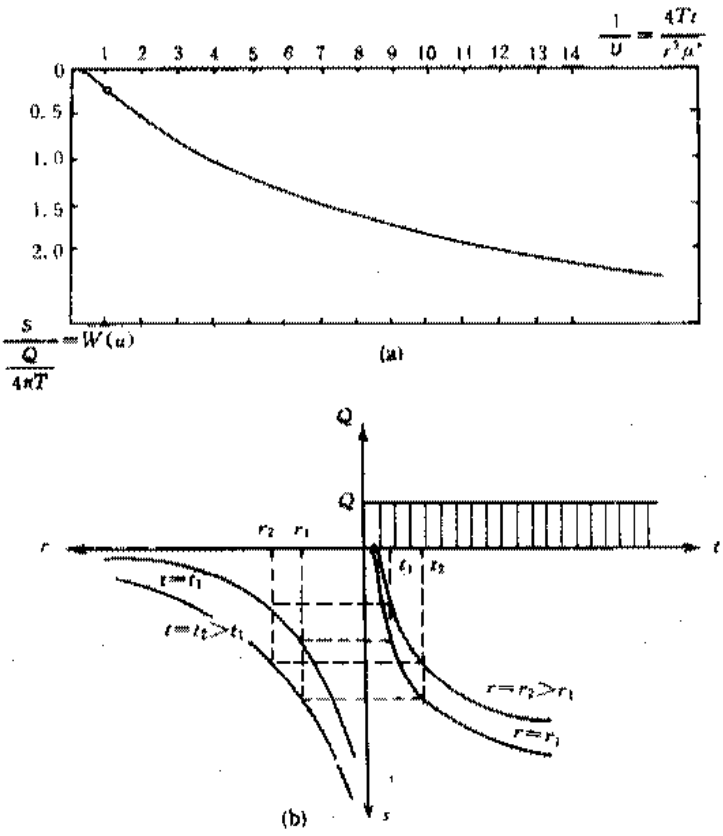



图 4—3

(a) —$W(u)$-$\frac{1}{u}$曲线；(b) —承压含水层中的降深 $s(r,t)$

况。当 $t \to \infty$ 时，实际上 $s$ 不能趋向无穷大。因此，降落漏斗随时间的延长，逐渐向远处扩展。这种永不稳定的规律是符合实际的，恰好反映了抽水时在没有外界补给而完全消耗贮存量时的典型动态。图 4—3 反映了上述结论。

从（4—11）或（4—13）式还可以看出：同一时刻的径向距离 $r$ 相同的地点，降深相同，这说明抽水后形成的等水头线（$s$ = 常数）是一些同心圆，圆心在井轴。当 $u \leqslant 0.05$ 时，可直接由（4—13）式导出描述它们的方程式为：

$$x^2 + y^2 = \frac{2.25Tt}{\mu^*} e^{-\frac{4\pi s}{Q}} \tag{4—15}$$

2. Theis 公式反映的水头下降速度的变化规律

将（4—9）式对 $t$ 求导数，得：

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{e^{-u}}{u}du\right)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}} \tag{4—16}$$

式（4—16）表明，抽水初期随着 $r$ 的增大，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}$ 值减小。因此，近处水头下降速度大，远处下降速度小。当 $r$ 一定时，(4—16) 式又表明，不同时刻的水头下降速度 $\frac{\partial s}{\partial t}$，由于 $\frac{1}{t}$ 和 $e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}$ 两个因素起着增、减两个方向相反的作用，所以 $\frac{\partial s}{\partial t}$ 不是 $t$ 的单调函数；$s$-$t$ 曲线（图 4—3b）不能沿着同一斜率变化，存在着拐点。可以利用 $\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$，找出拐点的位置。为此有：

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t^2}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt} - 1\right) = 0$$

所以

$$\frac{r^2\mu^*}{4Tt} = 1$$

拐点出现的时间（此时 $u = 1$）为：

$$t_i = \frac{r^2\mu^*}{4T} \tag{4—17}$$

图 4—3 的曲线也反映了上述结论，即每个断面的水头降速度初期由小逐渐增大，当 $\frac{1}{u} = 1$ 时达到最大；而后下降速度又由大变小，最后趋近于等速下降。

式(4—17) 还表明不同断面拐点出现的时间 $t_i$ 不同。将(4—17) 式代入(4—11) 式，得拐点处降深 $s_i$ 为：

$$s_i = \frac{Q}{4\pi T}W\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt_i}\right) = 0.0175\frac{Q}{T} \tag{4—18}$$

式（4—18）反映出拐点处降深 $s_i$ 与 $r$ 无关。说明任一断面都经历着一个相同的过程，当 $s = s_i$ 时，出现最大下降速度，即：

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)_i = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t_i}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt_i}} = \frac{0.117Q}{\mu^* r^2}$$

当抽水时间足够长时，$t > 25\frac{r^2\mu^*}{T}$（即 $u = \frac{r^2\mu^*}{4Tt} < 0.01$，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}} = 0.99 \simeq 1$）。(4—16) 式变为：

$$\frac{\partial s}{\partial t} \simeq \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t} \tag{4—19}$$

上式意味着：$t$ 足够大时，在抽水井周围一定范围内，下降基本上是相同的，与 $r$ 无关。换言

之，经过一定时间抽水后，下降速度变慢，在一定范围内产生大致等幅的下降。

3. Theis 公式反映出的流量和渗流速度变化规律

将（4—9）式对 $r$ 求导数，得：

$$\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du\right)\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}} \qquad (4-20)$$

又根据 Darcy 定律，可写出 $r$ 处过水断面的流量为：

$$Q_r=-2\pi KMr\frac{\partial s}{\partial r}$$

将（4—20）式代入上式，得：

$$Q_r=Qe^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}} \qquad (4—21)$$

因为 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$ 恒取正值，所以 $e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}<1$，因而 $Q_r<Q$，当 $r\to 0$ 时，$Q_r\to Q$。

式（4—21）说明，通过不同过水断面的流量是不等的，$r$ 值越小，即离抽水井越近的过水断面，流量越大。这一点是和稳定流理论无垂向水量交换条件下通过任何断面的流量都是相等的结论不同。它反映了地下水在流向抽水井的过程中，不断得到贮存量的补给。当抽水延续时间 $t$ 大到一定程度以后（如 $t\geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}$，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}=0.99\simeq 1$）则 $Q_r\simeq Q$，换言之，这时在该断面范围内释放出的水量（$Q-Q_r$）就微不足道了。

由（4—20）式还可知，水井抽水时地下水渗流速度为：

$$v=-K\frac{\partial s}{\partial r}=\frac{Q}{2\pi Mr}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}$$

式中负号表示速度与 $r$ 的正方向相反。式中 $\frac{Q}{2\pi Mr}$ 为抽水达到稳定时的渗流速度。由于沿途含水层的释水作用，使得渗流速度小于稳定状态的渗流速度。但随着时间的增加，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}$ 逐渐趋于1，又接近稳定渗流速度。当 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt}=0.01$ 时，与稳定流速相差只有1%了。这时可以认为达到相对稳定（似稳定）。在距离 $r$ 处，稳定出现的时间为：

$$t=25\frac{r^2\mu^*}{T}$$

4. 关于“影响半径”的问题

Theis 公式本身不包含“影响半径”的概念。因此，理论上讲，在无限延伸的无越流补给的承压含水层中是不存在“影响半径”的。但把（4—13）式稍加改变，即可改写为：

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1.5(Tt/\mu^*)^{1/2}}{r}$$

和 Dupuit 公式比较，有人定义影响半径为：

$$R=1.5\left(\frac{Tt}{\mu^*}\right)^{1/2} \qquad (4—22)$$

它能近似地说明某一时刻的相对影响范围。

经长时间抽水后 $\left(t>25\frac{r^2\mu^*}{T}\right)$，由（4—13）式可得某一时刻离井 $r_1$ 和 $r_2$ 两点的降深分别为：

$$s_1 = \frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r_1^2\mu^*}$$

$$s_2 = \frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r_2^2\mu^*}$$

两式相减得：

$$s_1 - s_2 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

和稳定流的 Thiem 公式（3—6）完全相同。如取 $r_1 = r_w$ $r_2 = r$，则可得（3—5）式。这说明，在无越流补给且侧向无限延伸的承压含水层中抽水时，虽然理论上不可能出现稳定状态，但随着抽水时间的增加，降落漏斗范围不断向外扩展，自含水层四周向水井汇流的面积不断增大，水井附近地下水测压水头的变化渐渐趋于缓慢，在一定的范围内，接近稳定状态（似稳定流），和稳定流的降落曲线形状相同。但要注意，这不能说明地下水头降落以达稳定。

5. 关于假设井径 $r_w \to 0$ 和天然水力坡度为零的问题

要求 $r_w \to 0$ 是为了不必考虑井筒中的水量，可以把井当作汇点或源点来处理。实际上，井径 $r_w$ 总是个有限值。这样一个假设条件对 Theis 公式的应用有什么限制呢？由（4—20）式可以直接看出，在边界条件式（4—4）中使用这个假设，是为了使

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \lim_{r\to 0}\left(-\frac{Q}{2\pi T}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\right) = -\frac{Q}{2\pi T}$$

即 $e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}} \to 1$，我们知道 $e^{-0.01} = 0.99$，可近似地等于 1，误差不超过 1%，所以只要 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt} \leqslant 0.01\left(\text{或 } t \geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}\right)$，上述假设所引起的误差不超过 1%。实际上，要满足上述要求并不困难，在抽水早期就能满足。

在推导 Theis 公式的过程中，假设初始的承压水头面是水平的，这一假设是否会影响公式的使用呢？从实际资料看来，承压水头面一般坡度很小，尤其在平原区，通常为千分之几到万分之几。因此，从实用观点看来，这种假设不影响 Theis 公式的实际使用。

**五、利用 Theis 公式确定水文地质参数**

Theis 公式既可以用于水位预测，也可以用于求参数。当含水层水文地质参数已知时，可进行水位预测，也可预测在允许降深条件下井的涌水量。反之，可根据抽水试验资料来确定含水层的参数。这里着重介绍下列几种求参数的方法：

1. 配线法

（1）原理

对（4—11）和（4—10）式两端取对数：

$$\lg s = \lg W(u) + \lg\frac{Q}{4\pi T},\lg\frac{t}{r^2} = \lg\frac{1}{u} + \lg\frac{\mu^*}{4T}$$

二式右端的第二项在同一次抽水试验中都是常数。因此，在双对数坐标系内，对于定流量抽水 $s$-$\frac{t}{r^2}$ 曲线和 $W(u)$-$\frac{1}{u}$ 标准曲线在形状上是相同的，只是纵横坐标平移了 $\frac{Q}{4\pi T}$ 和 $\frac{\mu^*}{4T}$ 的距离而已。只要将二曲线重合，任选一匹配点，记下对应的坐标值，代入（4—10）式（4—11）式即可确定有关参数。此法称为降深-时间距离配线法。

同理，由实际资料绘制的 $s$-$t$ 曲线和 $s$-$r^2$ 曲线，分别与 $W(u)$-$\frac{1}{u}$ 和 $W(u)$-$u$ 标准曲线有相同的形状。因此，可以利用一个观测孔不同时刻的降深值，在双对数纸上绘出 $s$-$t$ 曲线和 $W(u)$-$\frac{1}{u}$ 曲线，进行拟合，此法称为降深-时间配线法。

如果有三个以上的观测孔，可以取 $t$ 为定值，利用所有观测孔的降深值，在双对数纸上绘出 $s$-$r^2$ 实际资料曲线与 $W(u)$-$u$ 标准曲线拟合，称为降深-距离配线法。

（2）计算步骤

①在双对数坐标纸上绘制 $W(u)$-$1/u$ 的标准曲线。

②在另一张模数相同的透明双对数纸上绘制实测的 $s$-$t/r^2$ 曲线或 $s$-$t$ 曲线。

③将实际曲线置于标准曲线上，在保持对应坐标轴彼此平行的条件下相对平移，直至两曲线重合为止（图 4—4）。

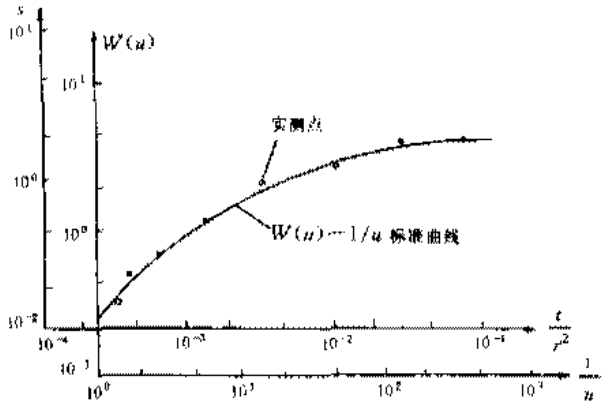



图 4—4　降深-时间距离配线法

④任取一匹配点（在曲线上或曲线外均可），记下匹配点的对应坐标值：$W(u)$，$\frac{1}{u}$，$s$ 和 $\frac{t}{r^2}$（或 $t$），代入（4—11），（4—10）式，分别计算有关参数。

$$T=\frac{Q}{4\pi[s]}[W(u)],\mu^*=\frac{4Tu}{\left[\frac{1}{u}\right]}\left[\frac{t}{r^2}\right]$$

配线法的最大优点是，可以充分利用抽水试验的全部观测资料，避免个别资料的偶然误差，提高计算精度。但也存在一定的缺点：第一，抽水初期实际曲线常与标准曲线不符。因此，非稳定抽水试验时间不宜过短。第二，当抽水后期曲线比较平缓时，同标准曲线不容易拟合准确，常因个人判断不同引起误差。因此在确定抽水延续时间和观测精度时，应考虑所得资料能绘出 $s$-$t$ 或 $s$-$\frac{t}{r^2}$ 曲线的弯曲部分，便于拟合。如果后期实测数据偏离标准曲线，则可能是含水层外围边界的影响或含水层岩性发生了变化等。这就需要把试验数据和具体水文地质条件结合起来分析。有关边界的影响，以后还要专门论述。

例题 4—1：承压含水层多孔抽水试验，抽水井稳定流量为 60m³/h，有四个观测孔，其观测资料如表 4—2 所示，试用配线法求含水层参数。

表 4—2

| 孔号 / 距离 / 流量及降深 / 累计时间/min | 14 | 观 2 | 观 15 | 观 10 | 观 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 抽水井 | 43m | 140m | 510m | 780m |
| | 流量/$m^3 \cdot h^{-1}$ | 降深/m | 降深/m | 降深/m | 降深/m |
| 10 | 60 | 073 | 0.16 | 0.04 | 0 |
| 20 | 60 | 1.28 | 0.48 | | |
| 30 | 60 | 1.53 | 0.54 | | |
| 40 | 60 | 1.72 | 0.65 | 0.06 | |
| 60 | 60 | 1.96 | 0.75 | 0.20 | |
| 80 | 60 | 2.14 | 1.00 | 0.20 | 0.04 |
| 100 | 60 | 2.28 | 1.12 | 0.20 | |
| 120 | 60 | 2.39 | 1.22 | 0.21 | 0.08 |
| 150 | 60 | 2.54 | 1.36 | 0.24 | 0.09 |
| 210 | 60 | 2.77 | 1.55 | 0.40 | 0.16 |
| 270 | 60 | 2.99 | 1.70 | 0.53 | 0.25 |
| 330 | 60 | 3.10 | 1.83 | 0.63 | 0.34 |
| 400 | 60 | 3.20 | 1.89 | 0.65 | 0.42 |
| 450 | 60 | 3.26 | 1.98 | 0.73 | 0.50 |
| 645 | 60 | 3.47 | 2.17 | 0.93 | 0.71 |
| 870 | 60 | 3.68 | 2.38 | 1.14 | 0.87 |
| 990 | 60 | 3.77 | 2.46 | 1.24 | 0.96 |
| 1185 | 60 | 3.85 | 2.54 | 1.35 | 1.06 |

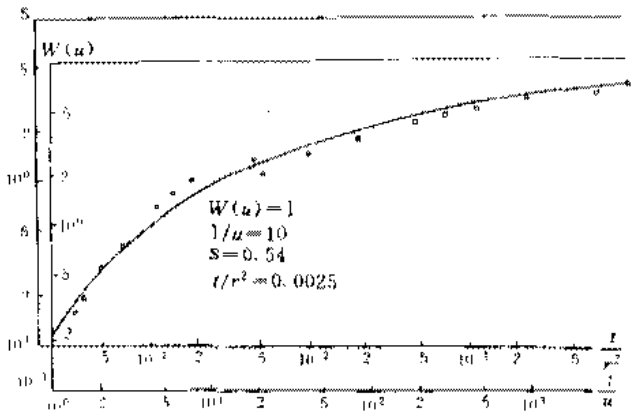



图 4—5 $s$-$\frac{t}{r^2}$配线法

解：为了全面综合利用试验资料，按 $s$-$t/r^2$ 配线法求参数，首先根据表 4—2 资料计算与 $s$ 对应的 $t/r^2$ 值。依据这些数据在透明双对数纸上绘制 $s$-$t/r^2$ 实际资料曲线；将此曲线重叠在 $W(u)$-$1/u$ 标准曲线上，在保持对应坐标轴彼此平行的条件下，使实际资料曲线与标准曲线尽量拟合（图 4—5）。拟合之后，任选一匹配点 $A$，取坐标值：

$$W(u)=1,\frac{1}{u}=10,s=0.54,\frac{t}{r^2}=0.0025$$

代入（4—11）式、（4—10）式进行计算：

$$T=\frac{Q}{4\pi(s)}[W(u)]=\frac{60\times 24}{4\times 3.14\times 0.54}=212.3\text{m}^2/\text{d}$$

$$\mu^*=\frac{4T}{\left(\frac{1}{u}\right)}\left(\frac{t}{r^2}\right)=\frac{4\times 212.3}{10\times 60\times 24}\times 0.0025=1.47\times 10^{-4}$$

例题 4—2：根据例题 4—1 中第 15 号观测孔观测资料，利用降深-时间配线法求参数。

解：首先根据实测的不同时间的降深值，绘制 $s$-$t$ 曲线；然后将它与 $W(u)$-$1/u$ 标准曲线拟合，方法同前（图 4—6）。取匹配点 $A$ 的坐标值：

$$W(u)=1,\frac{1}{u}=10,s=0.58\text{m},t=85\text{min}$$

代入有关公式计算：

$$T=\frac{Q}{4\pi[s]}[W(u)]=\frac{60\times 24}{4\times 3.14\times 0.58}\times 1$$

$$=197.67\text{m}^2/\text{d}$$

$$\mu^*=\frac{4T[t]}{r^2\left[\frac{1}{u}\right]}=\frac{4\times 197.67\times 85}{10\times 140^2\times 1440}$$

$$=2.31\times 10^{-4}$$

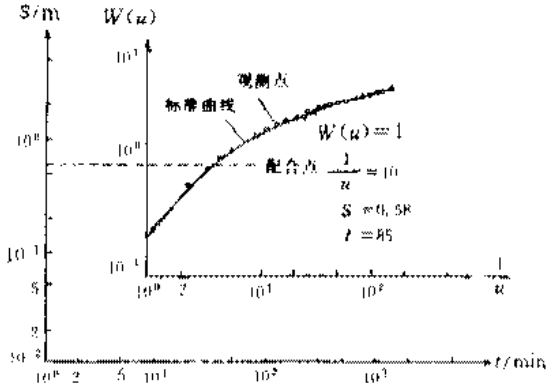



图 4—6　降深-时间配线法

2. Jacob 直线图解法

当 $u\leqslant 0.01$ 时，可利用 Jacob 公式（4—13）计算参数。首先把它改写成下列形式：

$$s=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25T}{\mu^*}+\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t}{r^2}$$

上式表明，$s$ 与 $\lg\frac{t}{r^2}$ 呈线性关系，斜率为 $\frac{2.3Q}{4\pi T}$。利用斜率可求出导水系数 $T$（图 4—7）：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i}$$

式中，$i$ 为直线的斜率，此直线在零降深线上的截距为 $\left(\frac{t}{r^2}\right)$。把它代入（4—13）有：

$$0=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25T}{\mu^*}\left(\frac{t}{r^2}\right)$$

因此，

$$\lg\frac{2.25T}{\mu^*}\left(\frac{t}{r^2}\right)=0,\ \frac{2.25T}{\mu^*}\left(\frac{t}{r^2}\right)_0=1$$

于是得：

$$\mu^*=2.25T\left(\frac{t}{r^2}\right)$$

以上是利用综合资料（多孔长时间观测资料）求参数，称为 $s$-$\lg\frac{t}{r^2}$ 直线图解法。同理，由(4—13)式还可看出，$s$-$\lg t$ 和 $s$-$\lg r$ 均呈线性关系。直线的斜率分别为 $\frac{2.3Q}{4\pi T}$ 和 $-\frac{2.3Q}{2\pi T}$。因此，如果只有一个观测孔，可利用 $s$-$\lg t$ 直线的斜率求导水系数 $T$，利用该直线在零降深线上截距 $t_0$ 值，求贮水系数 $\mu^*$。

如果有三个以上观测孔资料，可利用 $s$-$\lg r$ 直线的值求 $\mu^*$。

这种方法的优点是，既可以避免配线法的随意性，又能充分利用抽水后期的所有资料。但是，必须满足 $u\leqslant 0.01$ 或放宽精度要求 $u\leqslant 0.05$，即只有在 $r$ 较小，而 $t$ 值较大的情况下才能使用；否则，抽水时间短，直线斜率小、截距值小，所得的 $T$ 值偏大，而 $\mu^*$ 值偏小。

例 4—3：根据例 4—1 资料，利用 $s$-$\lg t/r^2$ 直线图解法计算参数。

解：(1) 根据上述资料，绘制 $s$-$\lg t/r^2$ 曲线（图 4—7）；

(2) 将 $s$-$\lg\frac{t}{r^2}$ 曲线的直线部分延长，在零降深线上的截距为 $(t/r^2)_0=0.00092$；

(3) 求直线斜率 $i$。最好取和一个周期相对应的降深 $\Delta s$，这就是斜率 $i$。由此得 $i=\Delta s=1.36$；

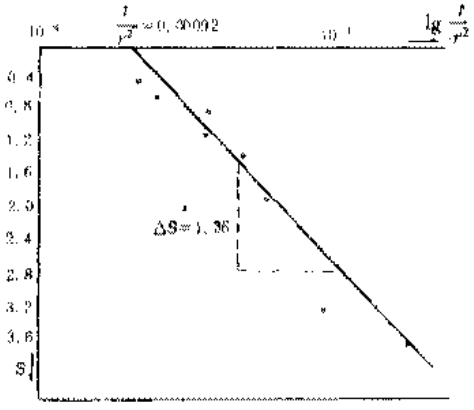



图 4—7 $s$-$\frac{t}{r^2}$ 直线图解法

(4) 代入有关公式进行计算：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi\Delta s}=\frac{2.3\times60\times24}{4\times3.14\times1.36}=194\text{m}^2/\text{d}$$

$$\mu^*=2.25T\left(\frac{t}{r^2}\right)=2.25\times194\times0.00092/1440$$

$$=2.78\times10^{-4}$$

3. 水位恢复试验

如不考虑水头惯性滞后动态，水井以流量 $Q$ 持续抽水 $t_P$ 时间后停抽恢复水位，那么在时刻($t>t_P$)的剩余降深 $s'$(原始水位与停抽后某时刻水位之差)，可理解为流量 $Q$ 继续抽水一直延续到 $t$ 时刻的降深和从停抽时刻起以流量 $Q$ 注水 $t-t_P$ 时间的水位抬升的叠加。两者均可用 Theis 公式计算。故有：

$$s'=\frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\right)-W\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt'}\right)\right] \tag{4—23}$$

式中，$t'=t-t_P$。当 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt'}\leqslant0.01$ 时，(4—23) 式可简化为：

$$s'=\frac{2.3Q}{4\pi T}\left(\lg\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}-\lg\frac{2.25Tt'}{r^2\mu^*}\right)=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t}{t'} \tag{4—24}$$

式 (4—24) 表明，$s'$ 与 $\lg\frac{t}{t'}$ 呈线性关系，$i=\frac{2.3Q}{4\pi T}$，为直线斜率。利用水位恢复资料绘出 $s'$ $\lg\frac{t}{t'}$ 曲线，求得其直线段斜率 $i$，由此可以计算参数 $T$：

$$T=0.183\frac{Q}{i}$$

如已知停抽时刻的水位降深 $s_P$，则停抽后任一时刻的水位上升值 $s^*$ 可写成：

$$s^*=s_P-\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t}{t'}$$

或

$$s^*=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25at_P}{r^2}-\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t}{t'} \tag{4—25}$$

式 (4—25) 表明，$s^*$ 与 $\lg\frac{t}{t'}$ 呈线性关系，斜率为 $-\frac{2.3Q}{4\pi T}$。如根据水位恢复试验资料绘出 $s^*$-$\lg\frac{t}{t}$ 曲线，求出其直线段斜率，也可计算 $T$ 值。

又根据 $s_P=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25at_P}{r^2}$，将求出的 $T=-\frac{2.3Q}{4\pi i}$ 代入，可得：

$$a=0.44\frac{r^2}{t_P}10^{-\frac{s_P}{i}} \tag{4—26}$$

利用式 (4—26) 可求出导压系数 $a$ 和贮水系数 $\mu^*$。

**六、定降深井流的计算**

在侧向无限延伸的承压含水层中抽水，如果在整个抽水期间保持井中水头 $h_w$ 或降深 $s_w$ 不变，那么抽水量 $Q$ 将随着抽水时间的延续而逐渐减少；除了抽水井本身以外，含水层中任一点的水头 $H$ 也将随着时间的延续而逐渐降低。当 $t\to\infty$ 时，$Q\to0$，$s(r)\to s_w$。一口顶盖密封住的自流井，会保持原来水头。在打开井盖的瞬间，水从井中溢出，水位迅速降

低到井口附近。在一定时间内，自流井内保持一定的水位，流量则逐渐减少。对自流井放水来说，基本上属于这种定降深变流量问题（图 4—8）。坑道放水钻孔也类似于这种情况。如果其他条件同推导 Theis 公式时的假设一样，则该定解问题的数学模型为：

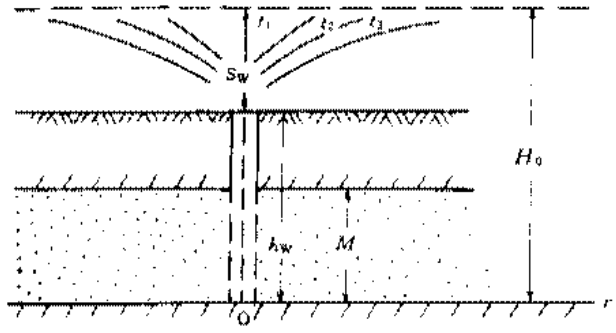



图 4—8　承压含水层中定降深抽（放）水试验

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial s}{\partial r}\right)=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & t>0 \quad 0<r<\infty \\ s(r,0)=0 & 0<r<\infty \\ s(\infty,t)=0 & t>0 \\ s(0,t)=s_w & t>0 \end{cases}$$

这个数学模型通过 Laplace 变换求得其解为：

$$s = s_w A(\lambda,\bar{r}) \tag{4-27}$$

式中，$s_w$ 为井中降深；$A(\lambda,\bar{r})$为以 $\lambda$ 和 $\bar{r}$ 为变量的函数，称为无越流补给承压含水层定降深井流的降深函数，其值列于表 4—3 中；$\bar{r}=\dfrac{r}{r_w}$为无量纲径向距离；$\lambda=\dfrac{Tt}{r_w^2\mu^*}$为无量纲时间。

**表 4—3　函数 $A(\lambda,\bar{r})$ 数值表**

| $\lambda$ \ $\bar{r}$ | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 0.606 | 0.351 | 0.095 | 0.018 | 0.002 | 0.001 | 0 | 0 |
| 2 | 1.000 | 0.677 | 0.458 | 0.194 | 0.071 | 0.022 | 0.005 | 0.001 | 0 |
| 3 | 1.000 | 0.711 | 0.511 | 0.256 | 0.119 | 0.049 | 0.018 | 0.006 | 0.002 |
| 4 | 1.000 | 0.731 | 0.544 | 0.300 | 0.157 | 0.076 | 0.034 | 0.014 | 0.005 |
| 5 | 1.000 | 0.746 | 0.568 | 0.332 | 0.188 | 0.101 | 0.051 | 0.024 | 0.010 |
| 6 | 1.000 | 0.757 | 0.586 | 0.357 | 0.214 | 0.123 | 0.067 | 0.035 | 0.017 |
| 7 | 1.000 | 0.767 | 0.601 | 0.378 | 0.235 | 0.142 | 0.082 | 0.046 | 0.024 |
| 8 | 1.000 | 0.773 | 0.613 | 0.395 | 0.254 | 0.159 | 0.097 | 0.056 | 0.032 |
| 9 | 1.000 | 0.779 | 0.623 | 0.409 | 0.270 | 0.175 | 0.110 | 0.067 | 0.039 |
| 10 | 1.000 | 0.784 | 0.631 | 0.422 | 0.284 | 0.188 | 0.122 | 0.077 | 0.047 |
| 20 | 1.000 | 0.813 | 0.681 | 0.497 | 0.370 | 0.277 | 0.207 | 0.153 | 0.122 |
| 30 | 1.000 | 0.827 | 0.705 | 0.534 | 0.415 | 0.325 | 0.256 | 0.201 | 0.157 |
| 40 | 1.000 | 0.836 | 0.720 | 0.558 | 0.444 | 0.358 | 0.290 | 0.235 | 0.190 |
| 50 | 1.000 | 0.843 | 0.731 | 0.574 | 0.464 | 0.381 | 0.314 | 0.260 | 0.215 |
| 60 | 1.000 | 0.848 | 0.739 | 0.588 | 0.481 | 0.399 | 0.334 | 0.281 | 0.236 |
| 70 | 1.000 | 0.851 | 0.746 | 0.598 | 0.494 | 0.414 | 0.350 | 0.297 | 0.253 |

续表

| $\lambda$ \ $\bar{r}$ | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 80 | 1.000 | 0.855 | 0.752 | 0.607 | 0.505 | 0.427 | 0.364 | 0.312 | 0.268 |
| 90 | 1.000 | 0.857 | 0.756 | 0.614 | 0.514 | 0.437 | 0.374 | 0.323 | 0.280 |
| 100 | 1.000 | 0.860 | 0.760 | 0.621 | 0.522 | 0.446 | 0.385 | 0.334 | 0.291 |
| 200 | 1.000 | 0.874 | 0.784 | 0.658 | 0.569 | 0.500 | 0.444 | 0.397 | 0.357 |
| 300 | 1.000 | 0.881 | 0.796 | 0.677 | 0.593 | 0.528 | 0.475 | 0.430 | 0.392 |
| 400 | 1.000 | 0.886 | 0.804 | 0.690 | 0.609 | 0.546 | 0.495 | 0.451 | 0.414 |
| 500 | 1.000 | 0.889 | 0.810 | 0.699 | 0.620 | 0.559 | 0.510 | 0.468 | 0.432 |
| 600 | 1.000 | 0.891 | 0.814 | 0.706 | 0.629 | 0.569 | 0.520 | 0.479 | 0.444 |
| 700 | 1.000 | 0.893 | 0.818 | 0.712 | 0.636 | 0.578 | 0.530 | 0.490 | 0.455 |
| 800 | 1.000 | 0.895 | 0.821 | 0.716 | 0.642 | 0.586 | 0.538 | 0.498 | 0.464 |
| 900 | 1.000 | 0.897 | 0.824 | 0.720 | 0.647 | 0.591 | 0.544 | 0.504 | 0.471 |
| 1000 | 1.000 | 0.898 | 0.826 | 0.724 | 0.652 | 0.596 | 0.550 | 0.511 | 0.478 |

| $\lambda$ \ $\bar{r}$ | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 0 | | | | | | | | | | |
| 3 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 4 | 0.002 | 0 | | | | | | | | | |
| 5 | 0.004 | 0.002 | | | | | | | | | |
| 6 | 0.008 | 0.003 | | | | | | | | | |
| 7 | 0.012 | 0.006 | | | | | | | | | |
| 8 | 0.017 | 0.009 | | | | | | | | | |
| 9 | 0.022 | 0.012 | 0 | | | | | | | | |
| 10 | 0.028 | 0.016 | 0 | | | | | | | | |
| 20 | 0.081 | 0.057 | 0.001 | 0 | | | | | | | |
| 30 | 0.122 | 0.094 | 0.004 | 0 | | | | | | | |
| 40 | 0.153 | 0.123 | 0.009 | 0 | | | | | | | |
| 50 | 0.177 | 0.146 | 0.016 | 0.001 | 0 | | | | | | |
| 60 | 0.199 | 0.167 | 0.023 | 0.002 | 0 | | | | | | |
| 70 | 0.216 | 0.184 | 0.031 | 0.003 | 0 | | | | | | |
| 80 | 0.230 | 0.198 | 0.038 | 0.005 | 0 | | | | | | |
| 90 | 0.242 | 0.210 | 0.046 | 0.007 | 0.001 | 0 | | | | | |
| 100 | 0.254 | 0.222 | 0.053 | 0.010 | 0.001 | 0 | 0 | | | | |
| 200 | 0.322 | 0.291 | 0.110 | 0.038 | 0.011 | 0.001 | 0.001 | 0 | | | |
| 300 | 0.358 | 0.328 | 0.146 | 0.064 | 0.026 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0 | | |
| 400 | 0.382 | 0.353 | 0.173 | 0.086 | 0.040 | 0.018 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0 | |
| 500 | 0.400 | 0.372 | 0.194 | 0.104 | 0.054 | 0.026 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0 |
| 600 | 0.413 | 0.385 | 0.210 | 0.119 | 0.066 | 0.035 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 700 | 0.424 | 0.397 | 0.223 | 0.132 | 0.077 | 0.044 | 0.024 | 0.012 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 800 | 0.434 | 0.407 | 0.235 | 0.145 | 0.087 | 0.052 | 0.030 | 0.016 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 900 | 0.442 | 0.415 | 0.245 | 0.153 | 0.096 | 0.059 | 0.035 | 0.020 | 0.011 | 0.006 | 0.003 |
| 1000 | 0.449 | 0.422 | 0.254 | 0.162 | 0.104 | 0.066 | 0.041 | 0.024 | 0.014 | 0.008 | 0.004 |

将（4—27）式对 $r$ 求导数并代入 Darcy 定律，得：

$$Q = 2\pi T s_w G(\lambda) \qquad (4—28)$$

式中，$Q$ 为随时间变化的流量；$G(\lambda)$ 为无越流补给承压含水层定降深井流的流量函数（表4—4）。

表 4—4 $G(\lambda)$ 数值表

（据 Jacob 和 Lohman）

| $N$ \ $\lambda$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N\times10^{0}$ | $N\times10^{1}$ | $N\times10^{2}$ | $N\times10^{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56.9 | 18.34 | 6.13 | 2.249 | 0.985 | 0.534 | 0.346 | 0.251 |
| 2 | 40.4 | 13.11 | 4.47 | 1.716 | 0.803 | 0.461 | 0.311 | 0.232 |
| 3 | 33.1 | 10.79 | 3.74 | 1.477 | 0.719 | 0.427 | 0.294 | 0.222 |
| 4 | 28.7 | 9.41 | 3.30 | 1.333 | 0.667 | 0.405 | 0.283 | 0.215 |
| 5 | 25.7 | 8.47 | 3.00 | 1.234 | 0.630 | 0.389 | 0.274 | 0.210 |
| 6 | 23.5 | 7.77 | 2.78 | 1.160 | 0.602 | 0.377 | 0.268 | 0.206 |
| 7 | 21.8 | 7.23 | 2.60 | 1.103 | 0.580 | 0.367 | 0.263 | 0.203 |
| 8 | 20.4 | 6.79 | 2.46 | 1.057 | 0.562 | 0.359 | 0.258 | 0.200 |
| 9 | 19.3 | 6.43 | 2.35 | 1.018 | 0.547 | 0.352 | 0.254 | 0.198 |
| 10 | 18.3 | 6.13 | 2.25 | 0.985 | 0.534 | 0.346 | 0.251 | 0.196 |
| $N$ \ $\lambda$ | $N\times10^{4}$ | $N\times10^{5}$ | $N\times10^{6}$ | $N\times10^{7}$ | $N\times10^{8}$ | $N\times10^{9}$ | $N\times10^{10}$ | $N\times10^{11}$ |
| 1 | 0.1964 | 0.1608 | 0.1360 | 0.1177 | 0.1037 | 0.0927 | 0.0838 | 0.0764 |
| 2 | 0.1841 | 0.1524 | 0.1299 | 0.1131 | 0.1002 | 0.0899 | 0.0814 | 0.0744 |
| 3 | 0.1777 | 0.1479 | 0.1266 | 0.1106 | 0.0982 | 0.0883 | 0.0801 | 0.0733 |
| 4 | 0.1733 | 0.1449 | 0.1244 | 0.1089 | 0.0968 | 0.0872 | 0.0792 | 0.0726 |
| 5 | 0.1701 | 0.1426 | 0.1227 | 0.1076 | 0.0958 | 0.0864 | 0.0785 | 0.0720 |
| 6 | 0.1675 | 0.1408 | 0.1213 | 0.1066 | 0.0950 | 0.0857 | 0.0779 | 0.0716 |
| 7 | 0.1654 | 0.1393 | 0.1202 | 0.1057 | 0.0943 | 0.0851 | 0.0774 | 0.0712 |
| 8 | 0.1636 | 0.1380 | 0.1192 | 0.1049 | 0.0937 | 0.0846 | 0.0770 | 0.0709 |
| 9 | 0.1621 | 0.1369 | 0.1184 | 0.1043 | 0.0932 | 0.0842 | 0.0767 | 0.0706 |
| 10 | 0.1608 | 0.1360 | 0.1177 | 0.1037 | 0.0927 | 0.0838 | 0.0764 | 0.0704 |

如果在双对数坐标纸上绘制 $G(\lambda)$-$\lambda$ 曲线（图4—9），由此曲线可以看出，随时间的增加，$\lambda$ 增大，$G(\lambda)$ 减小，流量 $Q$ 也随着减小。

$A(\lambda,\bar{r})$ 是一个小于1的函数。由（4—27）式可以看出，各点降深等于自流井或放水井的降深乘以一个小于1的函数。这个函数在同一时刻随着 $\bar{r}$ 的增加而减小；在同一断面上随着 $t$ 增加、$\lambda$ 增大而逐渐增加。因此，各点降深在同一时刻随远离自流（放水）井而逐渐减小；在同一断面上随着时间增加而增大。这是符合实际情况的。

利用自流井做放水试验可以确定水文地质参数，这是一种既简单又经济的办法。确定参数方法的原理和定流量抽水试验相似。兹介绍如下：

1. 配线法

对（4—28）式和 $\frac{Tt}{\mu^*\bar{r}^2}=\lambda$ 式两侧取对数，有：

$$\lg Q=\lg G(\lambda)+\lg 2\pi T s_w$$

$$\lg t = \lg\lambda + \lg\frac{r^2\mu^*}{T}$$

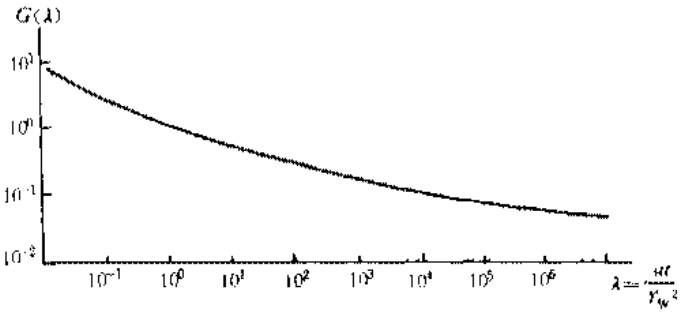



图 4—9　$G(\lambda)$—$\lambda$ 曲线

在双对数坐标纸上，$Q$-$t$ 曲线与 $G(\lambda)$-$\lambda$ 曲线形状相同，可以利用匹配点坐标 $G(\lambda)$、$\lambda$、$Q$ 和 $t$ 来确定参数。

$$T = \frac{[Q]}{2\pi s_w[G(\lambda)]},\ \mu^* = \frac{T[t]}{[\lambda]r_w^2}$$

2. 直线图解法

根据（4—28）式，当 $\lambda = \frac{Tt}{r^2\mu^*} > 5000$ 时，有下列近似关系：

$$G(\lambda) \approx \frac{2}{\ln\frac{2.25Tt}{r_w^2\mu^*}}$$

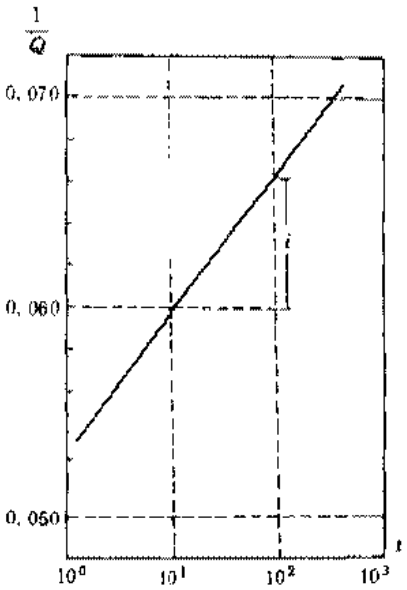



图 4—10　定降深放水试验应用直线图解法确定水文地质参数

于是有：

$$Q = \frac{4\pi Ts_w}{\ln\frac{2.25Tt}{r_w^2\mu^*}}$$

或

$$\frac{1}{Q} = \frac{2.3}{4\pi Ts_w}\lg\frac{2.25Tt}{r_w^2\mu^*} = \frac{0.183}{Ts_w}\lg\frac{2.25T}{r_w^2\mu^*} + \frac{0.183}{Ts_w}\lg t$$

由上式可以看出，$\frac{1}{Q}$ 与 $\lg t$ 为线性关系（图 4—10）。利用斜率 $i$ 得：

$$T = \frac{0.183}{s_w i}$$

将直线延长，交 $t$ 轴于一点 $t_0$，利用 $t_0$ 点的 $\frac{1}{Q} = 0$，可计算 $\mu^*$。

**思考题：**

1. Theis 公式的假设条件是什么？它的应用有没有局限性？

2. 有人说降深和时间关系为一对数曲线 $s = a + b\lg t$，您认为有根据吗？

3. 单对数纸上的水位恢复直线 $s' = f(1 + \frac{t_p}{t})$ 是否应该通过坐标原点？为什么？

## §4—2 有越流补给的完整井流

### 一、基本方程

在第1章中，我们曾谈到在越流含水层中抽水时会发生越流。有时，人们把这种系统，包括越流含水层、弱透水层和相邻的含水层（如果有的话）称为越流系统（图1—30）。第3章探讨了这种情况下的稳定运动（图3—9）。现在进而探讨这种情况下的非稳定运动。研究时采用了和研究稳定运动时相同的地质模型（图3—9）和假设，即：

（1）越流系统中每一层都是均质各向同性，无限延伸的；含水层底部水平，含水层和弱透水层都是等厚的；

（2）含水层中水流服从Darcy定律；

（3）虽然发生越流，但相邻含水层在抽水过程中水头保持不变（这在径流条件比较好的含水层中不难达到）；

（4）弱透水层本身的弹性释水可以忽略，通过弱透水层的水流可视为垂向一维流；

（5）抽水含水层天然水力坡度为零，抽水后为平面径向流；

（6）抽水井为完整井，井径无限小，定流量抽水。

在上述假设条件下，根据微分方程（1—83），把水头化为以降深表示，并改用柱坐标，于是有越流补给的抽水含水层中地下水运动的基本方程为：

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r} - \frac{s}{B^2} = \frac{\mu^*}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{4—29}$$

相应的定解条件为：

$$s|_{t=0} = 0 \qquad 0 < r < \infty \tag{4—30}$$

$$s|_{r=\infty} = 0 \qquad t > 0 \tag{4—31}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right) = -\frac{Q}{2\pi T} \quad t > 0 \tag{4—32}$$

对方程（4—29）施行Hankel变换，于是原定解问题变为常微分方程的初值问题，可以很容易地求得它的特解。再施行逆变换可求得其解为：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W\left(u, \frac{r}{B}\right) \tag{4—33}$$

其中，

$$W\left(u, \frac{r}{B}\right) = \int_u^\infty \frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy \tag{4—34}$$

$$u = \frac{r^2\mu^*}{4Tt} \tag{4—35}$$

有关推导过程请参阅文献[2]。（4—33）式为Hantush和Jacob于1955年建立的有越流补给的承压水完整井公式。其中，$W\left(u, \frac{r}{B}\right)$ 为不考虑相邻弱透水层弹性释水时越流系统的井函数，其值列于表4—5中。

表 4—5　$W(u, r/B)$ 或 $W(u', a)$ 数值表

（据 Hantush）

| $u$ 或 $u'$ ＼ $r/B$ 或 $a$ | 0.01 | 0.015 | 0.03 | 0.05 | 0.075 | 0.10 | 0.15 | 0.2 | 0.3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000001 | | | | | | | | | |
| 0.000005 | 9.4413 | | | | | | | | |
| 0.00001 | 9.4176 | 8.6313 | | | | | | | |
| 0.00005 | 8.8827 | 8.4533 | 7.2450 | | | | | | |
| 0.0001 | 8.3983 | 8.1414 | 7.2122 | 6.2882 | 5.4288 | | | | |
| 0.0005 | 6.9760 | 6.9152 | 6.6219 | 6.0821 | 5.4062 | 4.8530 | | | |
| 0.001 | 6.3069 | 6.2765 | 6.1202 | 5.7965 | 5.3078 | 4.8292 | 4.0595 | 3.5054 | |
| 0.005 | 4.7212 | 4.7152 | 4.6829 | 4.6084 | 4.4713 | 4.2960 | 3.8821 | 3.4567 | 2.7428 |
| 0.01 | 4.0356 | 4.0326 | 4.0167 | 3.9795 | 3.9091 | 3.8150 | 3.5725 | 3.2875 | 2.7104 |
| 0.05 | 2.4679 | 2.4670 | 2.4642 | 2.4576 | 2.4448 | 2.4271 | 2.3776 | 2.3110 | 2.1371 |
| 0.1 | 1.8227 | 1.8225 | 1.8213 | 1.8184 | 1.8128 | 1.8050 | 1.7829 | 1.7527 | 1.6704 |
| 0.5 | 0.5598 | 0.5597 | 0.5596 | 0.5594 | 0.5588 | 0.5581 | 0.5561 | 0.5532 | 0.5453 |
| 1.0 | 0.2194 | 0.2194 | 0.2193 | 0.2193 | 0.2191 | 0.2190 | 0.2186 | 0.2179 | 0.2161 |
| 5.0 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 |

| $u$ 或 $u'$ ＼ $r/B$ 或 $a$ | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000001 | | | | | | | | | | |
| 0.000005 | | | | | | | | | | |
| 0.00001 | | | | | | | | | | |
| 0.00005 | | | | | | | | | | |
| 0.0001 | | | | | | | | | | |
| 0.0005 | | | | | | | | | | |
| 0.001 | | | | | | | | | | |
| 0.005 | 2.2290 | | | | | | | | | |
| 0.01 | 2.2253 | 1.8486 | 1.5550 | 1.3210 | 1.1307 | | | | | |
| 0.05 | 1.9283 | 1.7075 | 1.4927 | 1.2955 | 1.1210 | 0.9700 | 0.8409 | | | |
| 0.1 | 1.5644 | 1.4422 | 1.3115 | 1.1701 | 1.0505 | 0.9297 | 0.8190 | 0.4217 | 0.2278 | |
| 0.5 | 0.5344 | 0.5206 | 0.5044 | 0.4860 | 0.4658 | 0.4440 | 0.4210 | 0.3007 | 0.1944 | 0.1174 |
| 1.0 | 0.2135 | 0.2103 | 0.2065 | 0.2020 | 0.1970 | 0.1914 | 0.1855 | 0.1509 | 0.1139 | 0.0803 |
| 5.0 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0009 |

## 二、公式讨论

### 1. 降深-时间曲线的形状

将（4—33）式写成无量纲降深形式：

$$\frac{s}{\frac{Q}{4\pi T}} = W\left(u, \frac{r}{B}\right)$$

根据表 4—5 的井函数表，绘制 $W\left(u, \frac{r}{B}\right) \sim \frac{1}{u}$ 曲线（图 4—11）。曲线反映出，有越流补给的 $s$-$t$ 关系大致可分为三个阶段：

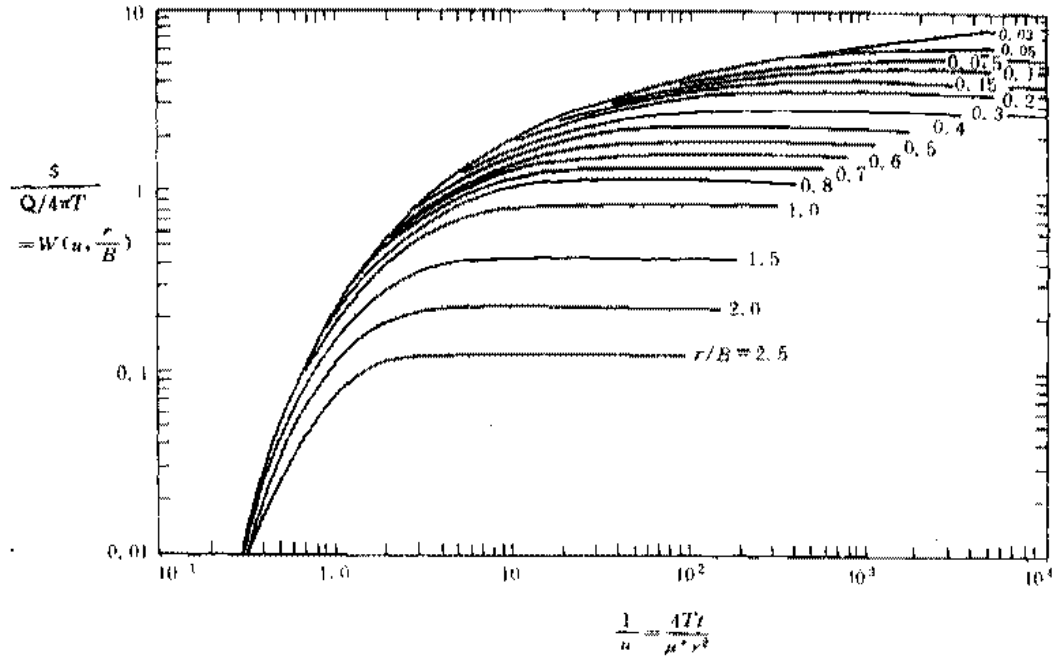



图 4—11　越流含水层的标准曲线

(1) 抽水早期，降深曲线同 Theis 曲线一致。这表明越流尚未进入主含水层，抽水量几乎全部来自主含水层的弹性释水。在理论上，相当于$\frac{K_1}{m_1}=0$ 或 $B\to\infty$，$W\left(u,\frac{r}{B}\right)\to W(u)$。此时和 Theis 曲线一致。

标准曲线组中又反映出，$\frac{r}{B}$ 不同时，与 Theis 曲线吻合的时间也不一样。在其他条件一定时，如果越流系数 $\frac{K_1}{m_1}$ 越小(即 $\frac{r}{B}$ 越小)，同 Theis 曲线一致的过程就越长。这说明，弱透水层透水性越小，厚度越大，阻力越大，越流进入抽水层的时间越晚，当弱透水层透水性无限小时，在有限的抽水时间内，可能没有明显的越流反映，而同 Theis 曲线相一致。

(2) 抽水中期，因水位下降变缓而开始偏离 Theis 曲线，说明越流已经开始进入抽水含水层。这时，抽水量由两部分组成：一是抽水含水层的弹性释水，二是越流补给，$\frac{r^2}{4yB^2}$ 值由零进入有限值，即：

$$W\left(u,\frac{r}{B}\right)=\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy<\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y}dy=W(u)$$

因此，越流含水层的降深小于无越流含水层的降深，而且随 $\frac{K_1}{m_1}$ 增大(即 $\frac{r}{B}$ 越大)，越流含水层的降深比无越流含水层的降深小得越多。

(3) 抽水后期，曲线趋于水平直线，抽水量与越流补给量平衡，表示非稳定流已转化为稳定流。此时方程 (4—33)，当 $t\to\infty$，$u\to 0$ 时，可简化成 (3—33) 式，即：

$$s=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right)$$

式中，$K_0\left(\frac{r}{B}\right)$ 为虚宗量第二类 Bessel 函数 (表 4—6)。

表 4—6 $K_0\left(\frac{r}{B}\right)$ 数值表

(据 Hantush，1956)

| $N$ | $r/B=N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N\times1$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 7.0237 | 4.7212 | 2.4271 | 0.4210 |
| 1.5 | 6.6182 | 4.3159 | 2.0300 | 0.2138 |
| 2.0 | 6.3305 | 4.0285 | 1.7527 | 0.1139 |
| 2.5 | 6.1074 | 3.8056 | 1.5414 | 0.0623 |
| 3.0 | 5.9251 | 3.6236 | 1.3725 | 0.0347 |
| 3.5 | 5.7709 | 3.4697 | 1.2327 | 0.0196 |
| 4.0 | 5.6374 | 3.3365 | 1.1145 | 0.0112 |
| 4.5 | 5.5196 | 3.2192 | 1.0129 | 0.0064 |
| 5.0 | 5.4143 | 3.1142 | 0.9244 | 0.0037 |
| 5.5 | 5.3190 | 3.0195 | 0.8466 | |
| 6.0 | 5.2320 | 2.9329 | 0.7775 | 0.0012 |
| 6.5 | 5.1520 | 2.8534 | 0.7159 | |
| 7.0 | 5.0779 | 2.7798 | 0.6605 | 0.0004 |
| 7.5 | 5.0089 | 2.7114 | 0.6106 | |
| 8.0 | 4.9443 | 2.6476 | 0.5653 | |
| 8.5 | 4.8837 | 2.5873 | 0.5242 | |
| 9.0 | 4.8266 | 2.5310 | 0.4867 | |
| 9.5 | 4.7725 | 2.4776 | 0.4524 | |

2. 水头下降速度

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y}\frac{r^2}{4B^2}dy\right)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=\frac{Q}{4\pi Tt}\frac{1}{t}e^{-\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt}+\frac{\tau_1}{\mu^*B^2}\right)}\qquad(4—36)$$

与（4—16）式比较可以看出，越流含水层水位下降速度比无越流含水层慢。另外，与无越流含水层一样，当 $t$ 足够大时，在一定的范围内，水位下降速度是相同的。

**三、利用抽水试验资料确定越流系统的参数**

1. 配线法

用定流量抽水试验实测的 lg$s$-lg$t$ 曲线与标准曲线 $\lg W\left(u,\frac{r}{B}\right)$-lg $\frac{1}{u}$ 的形状是相同的，只是其纵、横坐标彼此平移了 lg $\frac{Q}{4\pi T}$ 和 lg $\frac{r^2\mu^*}{4T}$ 而已。下面仅简单地写出其步骤：

(1) 在双对数坐标纸上绘制 $W\left(u,\frac{r}{B}\right)-\frac{1}{u}$ 标准曲线；

(2) 在另一同模数的透明双对数坐标纸上，投上 $s$-$t$ 实测数据；

(3) 在保持对应坐标轴彼此平行的前提下，相对移动两坐标纸；在一组 $\frac{r}{B}$ 标准曲线中找出最优重合曲线(图 4—12)；

(4) 两曲线重合以后，任选一匹配点，记下对应的四个坐标值 $\frac{1}{u}$，$W\left(u,\frac{r}{B}\right)$，$ts$。将它们分别代入(4—33)和(4—35)式，可以计算含水层的参数 $T$ 和 $\mu^*$，即：

$$T=\frac{Q}{4\pi[s]}\left(W\left(u,\frac{r}{B}\right)\right)$$

$$\mu^* = \frac{4T\left(\frac{1}{u}\right)}{r^2\left[\frac{1}{u}\right]}$$

(5) 已知 $\left[\frac{r}{B}\right]$和 $r$，可计算出 $B$ 值和$\frac{K_1}{m_1}$ 值：

$$B = \frac{r}{\left[\frac{r}{B}\right]}, \frac{K_1}{m_1} = \frac{T}{B^2}$$

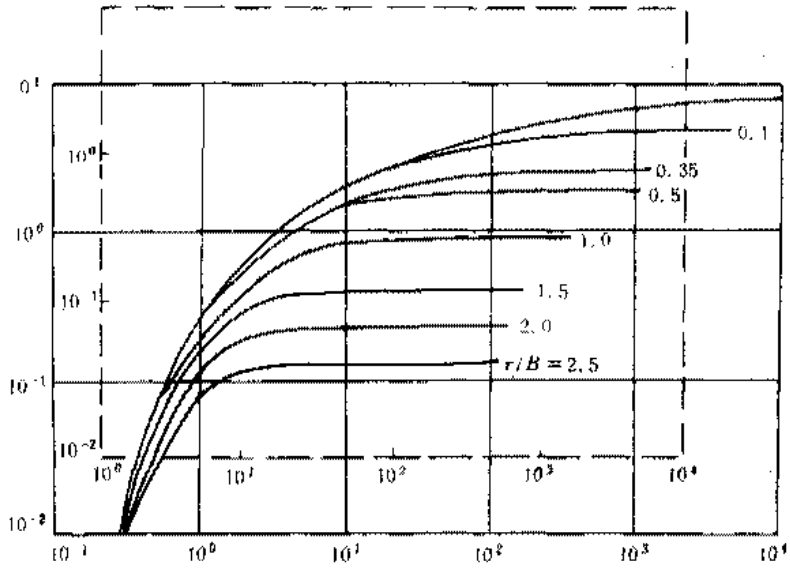



图 4—12 越流含水量的配线法

2. 拐点法

(1) 原理

(a) 取 (4—33) 式对 lg$t$ 的导数，由 (4—36) 式有：

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial \lg t}\frac{\mathrm{d}\lg t}{\mathrm{d}t} = \frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}-\frac{Tt}{\mu^* B^2}}$$

故有：

$$\frac{\partial s}{\partial \lg t} = \frac{2.3Q}{4\pi T}\mathrm{e}^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}-\frac{Tt}{\mu^* B^2}} \tag{4—37}$$

从 (4—37) 可看出，同一观测孔的 $s$-lg$t$ 曲线的斜率变化规律是由小到大，又由大变到小，存在着拐点。可以通过 $s$ 对 lg$t$ 的二阶导数等于零来确定其位置。设拐点为 P，则：

$$\frac{\partial^2 s}{\partial(\lg t)^2} = \frac{(2.3)^2 Q}{4\pi T}\mathrm{e}^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^* B^2}}\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^* B^2}\right) = 0$$

故在拐点有：

$$\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^* B^2} = 0$$

解得拐点处的时间 $t_P$ 为：

$$t_P = \frac{\mu^* Br}{2T} \tag{4—38}$$

相应的 $u$ 值为：

$$u_P = \frac{r^2\mu^*}{4Tt_P} = \frac{r}{2B} \tag{4—39}$$

将（4—39）式代回（4—37）式，得拐点处切线的斜率为：

$$i_P = \frac{2.3Q}{4\pi T} e^{-\frac{r}{B}} \tag{4—40}$$

（b）求拐点处降深：把（4—39）式代入（4—33）式，得：

$$s_P = \frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r}{2B}}^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}} dy \tag{4—41}$$

根据（4—33）式拐点处降深又可写成：

$$s_P = \frac{Q}{4\pi T}\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{y} e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}} dy - \int_0^{u_P} \frac{1}{y} e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}} dy\right)$$

进行变量代换：

$$\text{设} \quad \xi = \frac{r^2}{4B^2 y}, y = \frac{r^2}{4B^2\xi}, dy = -\frac{r^2}{4B^2\xi^2} d\xi$$

$$\text{当 } y = 0, \quad \xi = \infty$$

$$\text{当 } y = u_P, \quad \xi = \frac{r^2}{4B^2 u_P} = \frac{r}{2B}$$

则

$$s_P = \frac{Q}{2\pi T} K_0\left(\frac{r}{B}\right) - \frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r}{2B}}^{\infty} \frac{1}{\xi} e^{-\xi-\frac{r^2}{4B^2\xi}} d\xi \tag{4—42}$$

将（4—41）式和（4—42）式相加，得：

$$s_P = \frac{Q}{4\pi T} K_0\left(\frac{r}{B}\right) = \frac{1}{2} s_{max} \tag{4—43}$$

（4—43）式表明，拐点处降深等于最大降深的一半（图 4—13）。

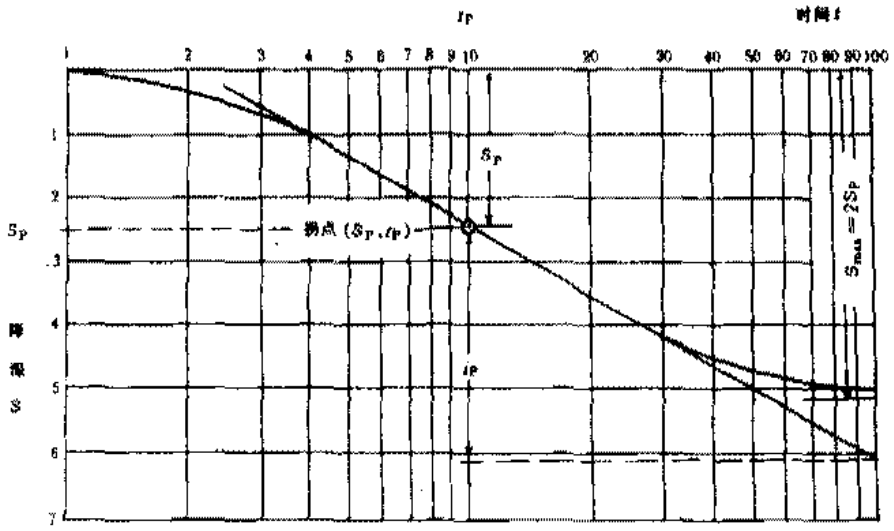



图 4—13　$s$-lg$t$ 曲线

（c）建立拐点 $P$ 处降深 $s_P$ 与斜率 $i_P$ 之间的关系。用（4—40）式除（4—43）式得：

$$\frac{2.3 s_P}{i_P} = K_0\left(\frac{r}{B}\right) e^{\frac{r}{B}} \tag{4—44}$$

（4—44）式右端的值已列成表 4—7。

## 表 4—7　$e^x, K(x), e^xK(x), -E_i(-x)$和$-E_i(-x)e^x$的数值表

（据 Hantush）

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i$ $(-x)$ | $-E_i$ $(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i$ $(-x)$ | $-E_i$ $(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.010 | 1.0101 | 4.7212 | 4.7687 | 4.0379 | 4.0787 | 0.055 | 1.0565 | 3.0194 | 3.1901 | 2.3775 | 2.5120 |
| 0.011 | 1.0111 | 4.6260 | 4.6771 | 3.9436 | 3.9874 | 0.056 | 1.0576 | 3.0015 | 3.1744 | 2.3604 | 2.4964 |
| 0.012 | 1.0121 | 4.5390 | 4.5938 | 3.8576 | 3.9044 | 0.057 | 1.0587 | 2.9839 | 3.1589 | 2.3437 | 2.4811 |
| 0.013 | 1.0131 | 4.4590 | 4.5173 | 3.7785 | 3.8282 | 0.058 | 1.0597 | 2.9666 | 3.1437 | 2.3273 | 2.4663 |
| 0.014 | 1.0141 | 4.3849 | 4.3467 | 3.7054 | 3.7578 | 0.059 | 1.0608 | 2.9496 | 3.1288 | 2.3111 | 2.4516 |
| 0.015 | 1.0151 | 4.3159 | 4.3812 | 3.6374 | 3.6925 | 0.060 | 1.0618 | 2.9329 | 3.1142 | 2.2953 | 2.4371 |
| 0.016 | 1.0161 | 4.2514 | 4.3200 | 3.5739 | 3.6315 | 0.061 | 1.0629 | 2.9165 | 3.0999 | 2.2797 | 2.4230 |
| 0.017 | 1.0171 | 4.1908 | 4.2627 | 3.5143 | 3.5746 | 0.062 | 1.0640 | 2.9003 | 3.0858 | 2.2645 | 2.4092 |
| 0.018 | 1.0182 | 4.1337 | 4.2088 | 3.4587 | 3.5209 | 0.063 | 1.0650 | 2.8844 | 3.0719 | 2.2494 | 2.3956 |
| 0.019 | 1.0192 | 4.0797 | 4.1580 | 3.4050 | 3.4705 | 0.064 | 1.0661 | 2.8688 | 3.0584 | 2.2346 | 2.3822 |
| 0.020 | 1.0202 | 4.0285 | 4.1098 | 3.3547 | 3.4225 | 0.065 | 1.0672 | 2.8534 | 3.0450 | 2.2201 | 2.3691 |
| 0.021 | 1.0212 | 3.9797 | 4.0642 | 3.3069 | 3.3771 | 0.066 | 1.0682 | 2.8382 | 3.0319 | 2.2058 | 2.3562 |
| 0.022 | 1.0222 | 3.9332 | 4.0207 | 3.2614 | 3.3340 | 0.067 | 1.0693 | 2.8233 | 3.0189 | 2.1917 | 2.3434 |
| 0.023 | 1.0233 | 3.8888 | 3.9793 | 3.2179 | 3.2927 | 0.068 | 1.0704 | 2.8086 | 3.0052 | 2.1779 | 2.3310 |
| 0.024 | 1.0243 | 3.8463 | 3.9398 | 3.1763 | 3.2535 | 0.069 | 1.0714 | 2.7941 | 2.9937 | 2.1643 | 2.3188 |
| 0.025 | 1.0253 | 3.8056 | 3.9019 | 3.1365 | 3.2159 | 0.070 | 1.0725 | 2.7798 | 2.9814 | 2.1508 | 2.3067 |
| 0.026 | 1.0263 | 3.7664 | 3.8656 | 3.0983 | 3.1799 | 0.071 | 1.0736 | 2.7657 | 2.9693 | 2.1376 | 2.2949 |
| 0.027 | 1.0274 | 3.7287 | 3.8307 | 3.0615 | 3.1452 | 0.072 | 1.0747 | 2.7519 | 2.9573 | 2.1246 | 2.2832 |
| 0.028 | 1.0284 | 3.6924 | 3.7972 | 3.0261 | 3.1119 | 0.073 | 1.0757 | 2.7382 | 2.9455 | 2.1118 | 2.2717 |
| 0.029 | 1.0294 | 3.6574 | 3.7650 | 2.9920 | 3.0800 | 0.074 | 1.0768 | 2.7247 | 2.9340 | 2.0991 | 2.2603 |
| 0.030 | 1.0305 | 3.6235 | 3.7339 | 2.9591 | 3.0494 | 0.075 | 1.0779 | 2.7114 | 2.9226 | 2.0867 | 2.2492 |
| 0.031 | 1.0315 | 3.5908 | 3.7039 | 2.9273 | 3.0196 | 0.076 | 1.0790 | 2.6983 | 2.9113 | 2.0744 | 2.2381 |
| 0.032 | 1.0325 | 3.5591 | 3.6749 | 2.8965 | 2.9908 | 0.077 | 1.0800 | 2.6853 | 2.9002 | 2.0623 | 2.2273 |
| 0.033 | 1.0336 | 3.5284 | 3.6468 | 2.8668 | 2.9631 | 0.078 | 1.0811 | 2.6726 | 2.8894 | 2.0503 | 2.2165 |
| 0.034 | 1.0346 | 3.4986 | 3.6196 | 2.8379 | 2.9362 | 0.079 | 1.0822 | 2.6599 | 2.8786 | 2.0386 | 2.2062 |
| 0.035 | 1.0356 | 3.4697 | 3.5933 | 2.8099 | 2.9101 | 0.080 | 1.0833 | 2.6475 | 2.8680 | 2.0269 | 2.1957 |
| 0.036 | 1.0367 | 3.4416 | 3.5678 | 2.7827 | 2.8848 | 0.081 | 1.0844 | 2.6352 | 2.8575 | 2.0155 | 2.1856 |
| 0.037 | 1.0377 | 3.4143 | 3.5430 | 2.7563 | 2.8603 | 0.082 | 1.0855 | 2.6231 | 2.8472 | 2.0042 | 2.1754 |
| 0.038 | 1.0387 | 3.3877 | 3.5189 | 2.7306 | 2.8364 | 0.083 | 1.0865 | 2.6111 | 2.8370 | 1.9930 | 2.1655 |
| 0.039 | 1.0398 | 3.3618 | 3.4955 | 2.7056 | 2.8133 | 0.084 | 1.0876 | 2.5992 | 2.8270 | 1.9820 | 2.1557 |
| 0.040 | 1.0408 | 3.3365 | 3.4727 | 2.6813 | 2.7907 | 0.085 | 1.0887 | 2.5875 | 2.8171 | 1.9711 | 2.1460 |
| 0.041 | 1.0419 | 3.3119 | 3.4505 | 2.6576 | 2.7688 | 0.086 | 1.0898 | 2.5759 | 2.8073 | 1.9604 | 2.1364 |
| 0.042 | 1.0429 | 3.2879 | 3.4289 | 2.6344 | 2.7474 | 0.087 | 1.0909 | 2.5645 | 2.7976 | 1.9498 | 2.1270 |
| 0.043 | 1.0439 | 3.2645 | 3.4079 | 2.6119 | 2.7267 | 0.088 | 1.0920 | 2.5532 | 2.7881 | 1.9393 | 2.1176 |
| 0.044 | 1.0450 | 3.2415 | 3.3574 | 5.5899 | 2.7064 | 0.089 | 1.0931 | 2.5421 | 2.7787 | 1.9290 | 2.1086 |
| 0.045 | 1.0460 | 3.2192 | 3.3673 | 2.5684 | 2.6866 | 0.090 | 1.0942 | 2.5310 | 2.7694 | 1.9187 | 2.0994 |
| 0.046 | 1.0471 | 3.1973 | 3.3478 | 2.5477 | 2.6672 | 0.091 | 1.0953 | 2.5201 | 2.7602 | 1.9087 | 2.0906 |
| 0.047 | 1.0481 | 3.1758 | 3.3287 | 2.5268 | 2.6483 | 0.092 | 1.0964 | 2.5093 | 2.7511 | 1.8987 | 2.0818 |
| 0.048 | 1.0492 | 3.1549 | 3.3100 | 2.5068 | 2.6300 | 0.093 | 1.0975 | 2.4986 | 2.7421 | 1.8888 | 2.0729 |
| 0.049 | 1.0502 | 3.1342 | 3.2918 | 2.4871 | 2.6120 | 0.094 | 1.0986 | 2.4881 | 2.7333 | 1.8791 | 2.0643 |
| 0.050 | 1.0513 | 3.1142 | 3.2733 | 2.4679 | 2.5945 | 0.095 | 1.0997 | 2.4779 | 2.7246 | 1.8695 | 2.0558 |
| 0.051 | 1.0523 | 3.0945 | 3.2564 | 2.4491 | 2.5773 | 0.096 | 1.1008 | 2.4673 | 2.7159 | 1.8599 | 2.0473 |
| 0.052 | 1.0534 | 3.0752 | 3.2393 | 2.4306 | 2.5604 | 0.097 | 1.1019 | 2.4571 | 2.7074 | 1.8505 | 2.0390 |
| 0.053 | 1.0544 | 3.0562 | 3.2226 | 2.4126 | 2.5440 | 0.098 | 1.1030 | 2.4470 | 2.6989 | 1.8412 | 2.0307 |
| 0.054 | 1.0555 | 3.0376 | 3.2062 | 2.3948 | 2.5278 | 0.099 | 1.1041 | 2.4370 | 2.6906 | 1.8320 | 2.0227 |
| 0.100 | 1.1052 | 2.4271 | 2.6823 | 1.8229 | 2.0147 | 0.55 | 1.7330 | 0.8466 | 1.4573 | 0.5034 | 0.8725 |

续表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.11 | 1.1163 | 2.3333 | 2.6046 | 1.7371 | 1.9391 | 0.56 | 1.7507 | 0.8321 | 1.4567 | 0.4930 | 0.8631 |
| 0.12 | 1.1275 | 2.2479 | 2.5345 | 1.6595 | 1.8771 | 0.57 | 1.7683 | 0.8180 | 1.4464 | 0.4830 | 0.8541 |
| 0.13 | 1.1388 | 2.1695 | 2.4707 | 1.5889 | 1.8094 | 0.58 | 1.7860 | 0.8042 | 1.4363 | 0.4732 | 0.8451 |
| 0.14 | 1.1503 | 2.0972 | 2.4128 | 1.5241 | 1.7532 | 0.59 | 1.8040 | 0.7907 | 1.4262 | 0.4637 | 0.8366 |
| 0.15 | 1.1618 | 2.0300 | 2.3585 | 1.4645 | 1.7015 | 0.60 | 1.8221 | 0.7775 | 1.4167 | 0.4544 | 0.8280 |
| 0.16 | 1.1735 | 1.9674 | 2.3088 | 1.4092 | 1.6537 | 0.61 | 1.8404 | 0.7646 | 1.4073 | 0.4454 | 0.8197 |
| 0.17 | 1.1853 | 1.9088 | 2.2625 | 1.3578 | 1.6094 | 0.62 | 1.8589 | 0.7520 | 1.3980 | 0.4366 | 0.8116 |
| 0.18 | 1.1972 | 1.8537 | 2.2193 | 1.3098 | 1.5981 | 0.63 | 1.8776 | 0.7397 | 1.3889 | 0.4280 | 0.8036 |
| 0.19 | 1.2093 | 1.8018 | 2.1788 | 1.2649 | 1.5295 | 0.64 | 1.8965 | 0.7277 | 1.3800 | 0.4197 | 0.7960 |
| 0.20 | 1.2214 | 1.7527 | 2.1408 | 1.2227 | 1.4934 | 0.65 | 1.9155 | 0.7159 | 1.3713 | 0.4115 | 0.7882 |
| 0.21 | 1.2337 | 1.7062 | 2.1049 | 1.1829 | 1.4593 | 0.66 | 1.9348 | 0.7043 | 1.3627 | 0.4036 | 0.7809 |
| 0.22 | 1.2461 | 1.6620 | 2.0710 | 1.1454 | 1.4273 | 0.67 | 1.9542 | 0.6930 | 1.3543 | 0.3959 | 0.7737 |
| 0.23 | 1.2586 | 1.6199 | 2.0389 | 1.1099 | 1.3969 | 0.68 | 1.9739 | 0.6820 | 1.3461 | 0.3883 | 0.7665 |
| 0.24 | 1.2713 | 1.5798 | 2.0084 | 1.0762 | 1.3681 | 0.69 | 1.9937 | 0.6711 | 1.3380 | 0.3810 | 0.7596 |
| 0.25 | 1.2840 | 1.5415 | 1.9793 | 1.0443 | 1.3409 | 0.70 | 2.0138 | 0.6605 | 1.3301 | 0.3738 | 0.7528 |
| 0.26 | 1.2969 | 1.5048 | 1.9517 | 1.0139 | 1.3149 | 0.71 | 2.0340 | 0.6501 | 1.3223 | 0.3668 | 0.7461 |
| 0.27 | 1.3100 | 1.4697 | 1.9253 | 0.9849 | 1.2902 | 0.72 | 2.0544 | 0.6399 | 1.3147 | 0.3599 | 0.7394 |
| 0.28 | 1.3231 | 1.4360 | 1.9000 | 0.9573 | 1.2666 | 0.73 | 2.0751 | 0.6300 | 1.3072 | 0.3532 | 0.7329 |
| 0.29 | 1.3364 | 1.4036 | 1.8758 | 0.9309 | 1.2441 | 0.74 | 2.0959 | 0.6202 | 1.2998 | 0.3467 | 0.7266 |
| 0.30 | 1.3499 | 1.3720 | 1.8526 | 0.9057 | 1.2226 | 0.75 | 2.1170 | 0.6106 | 1.2926 | 0.3403 | 0.7204 |
| 0.31 | 1.3634 | 1.3425 | 1.8304 | 0.8815 | 1.2018 | 0.76 | 2.1383 | 0.6012 | 1.2855 | 0.3341 | 0.7144 |
| 0.32 | 1.3771 | 1.3136 | 1.8089 | 0.8583 | 1.1820 | 0.77 | 2.1598 | 0.5920 | 1.2785 | 0.3280 | 0.7084 |
| 0.33 | 1.3910 | 1.2857 | 1.7883 | 0.8361 | 1.1630 | 0.78 | 2.1815 | 0.5829 | 1.2716 | 0.3221 | 0.7027 |
| 0.34 | 1.4050 | 1.2587 | 1.7685 | 0.8147 | 1.1446 | 0.79 | 2.2034 | 0.5740 | 1.2649 | 0.3163 | 0.6969 |
| 0.35 | 1.4191 | 1.2327 | 1.7493 | 0.7942 | 1.1270 | 0.80 | 2.2255 | 0.5653 | 1.2582 | 0.3106 | 0.6912 |
| 0.36 | 1.4333 | 1.2075 | 1.7308 | 0.7745 | 1.1101 | 0.81 | 2.2479 | 0.5568 | 1.2517 | 0.3050 | 0.6856 |
| 0.37 | 1.4477 | 1.1832 | 1.7129 | 0.7554 | 1.0936 | 0.82 | 2.2705 | 0.5484 | 1.2452 | 0.2996 | 0.6802 |
| 0.38 | 1.4623 | 1.1596 | 1.6956 | 0.7371 | 1.0779 | 0.83 | 2.2933 | 0.5402 | 1.2389 | 0.2943 | 0.6749 |
| 0.39 | 1.4770 | 1.1367 | 1.6789 | 0.7194 | 1.0626 | 0.84 | 2.3264 | 0.5321 | 1.2326 | 0.2891 | 0.6697 |
| 0.40 | 1.4918 | 1.1145 | 1.6627 | 0.7024 | 1.0478 | 0.85 | 2.3397 | 0.5242 | 1.2265 | 0.2840 | 0.6644 |
| 0.41 | 1.5068 | 1.0930 | 1.6470 | 0.6859 | 1.0335 | 0.86 | 2.3632 | 0.5165 | 1.2205 | 0.2790 | 0.6593 |
| 0.42 | 1.5220 | 1.0721 | 1.6317 | 0.6700 | 1.0197 | 0.87 | 2.3869 | 0.5088 | 1.2145 | 0.2742 | 0.6545 |
| 0.43 | 1.5373 | 1.0518 | 1.6169 | 0.6546 | 1.0063 | 0.88 | 2.4109 | 0.5013 | 1.2086 | 0.2694 | 0.6495 |
| 0.44 | 1.5527 | 1.0321 | 1.6025 | 0.6397 | 0.9933 | 0.89 | 2.4351 | 0.4940 | 1.2029 | 0.2647 | 0.6445 |
| 0.45 | 1.5683 | 1.0129 | 1.5886 | 0.6253 | 0.9807 | 0.90 | 2.4596 | 0.4867 | 1.1972 | 0.2602 | 0.6400 |
| 0.46 | 1.5841 | 0.9943 | 1.5750 | 0.6114 | 0.9685 | 0.91 | 2.4843 | 0.4796 | 1.1916 | 0.2557 | 0.6352 |
| 0.47 | 1.6000 | 0.9761 | 1.5617 | 0.5979 | 0.9566 | 0.92 | 2.5093 | 0.4727 | 1.1860 | 0.2513 | 0.6306 |
| 0.48 | 1.6161 | 0.9584 | 1.5489 | 0.5848 | 0.9451 | 0.93 | 2.5345 | 0.4658 | 1.1806 | 0.2470 | 0.6260 |
| 0.49 | 1.6323 | 0.9412 | 1.5363 | 0.5721 | 0.9338 | 0.94 | 2.5600 | 0.4591 | 1.1752 | 0.2429 | 0.6218 |
| 0.50 | 1.6437 | 0.9244 | 1.5241 | 0.5598 | 0.9229 | 0.95 | 2.7857 | 0.4524 | 1.1699 | 0.2387 | 0.6172 |
| 0.51 | 1.6653 | 0.9081 | 1.5122 | 0.5478 | 0.9123 | 0.96 | 2.6117 | 0.4459 | 1.1647 | 0.2347 | 0.6130 |
| 0.52 | 1.6820 | 0.8921 | 1.5006 | 0.5362 | 0.9019 | 0.97 | 2.6379 | 0.4396 | 1.1595 | 0.2308 | 0.6088 |
| 0.53 | 1.6989 | 0.8766 | 1.4892 | 0.5250 | 0.8919 | 0.98 | 2.6645 | 0.4333 | 1.1544 | 0.2269 | 0.6046 |
| 0.54 | 1.7160 | 0.8614 | 1.4781 | 0.5140 | 0.8820 | 0.99 | 2.6912 | 0.4271 | 1.1494 | 0.2231 | 0.6004 |
| 1.00 | 2.7183 | 0.4210 | 1.1445 | 0.2194 | 0.5964 | 3.1 | 22.1980 | 0.0310 | 0.6871 | 0.0115 | 0.2551 |
| 1.1 | 3.0042 | 0.3656 | 1.0983 | 0.1860 | 0.5588 | 3.2 | 24.5325 | 0.0276 | 0.6770 | 0.0101 | 0.2485 |
| 1.2 | 3.3201 | 0.3185 | 1.0575 | 0.1584 | 0.5259 | 3.3 | 27.1126 | 0.0246 | 0.6673 | 0.0089 | 0.2424 |

续表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i$ $(-x)$ | $-E_i$ $(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i$ $(-x)$ | $-E_i$ $(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.3 | 3.6693 | 0.2782 | 1.0210 | 0.1355 | 0.4972 | 3.4 | 29.9641 | 0.0220 | 0.6580 | 0.0079 | 0.2365 |
| 1.4 | 4.0552 | 0.2497 | 0.9861 | 0.1162 | 0.4712 | 3.5 | 33.1155 | 0.0196 | 0.6490 | 0.0070 | 0.2308 |
| 1.5 | 4.4817 | 0.2138 | 0.9582 | 0.1000 | 0.4482 | 3.6 | 36.5982 | 0.0175 | 0.6405 | 0.0062 | 0.2254 |
| 1.6 | 4.6530 | 0.1880 | 0.9309 | 0.0863 | 0.4275 | 3.7 | 40.4473 | 0.0156 | 0.6322 | 0.0055 | 0.2204 |
| 1.7 | 5.4739 | 0.1655 | 0.9059 | 0.0747 | 0.4086 | 3.8 | 44.7012 | 0.0140 | 0.6243 | 0.0048 | 0.2155 |
| 1.8 | 6.0496 | 0.1459 | 0.8828 | 0.0647 | 0.3915 | 3.9 | 49.4025 | 0.0125 | 0.6166 | 0.0043 | 0.2108 |
| 1.9 | 6.6859 | 0.1288 | 0.8614 | 0.0562 | 0.3758 | 4.0 | 54.5982 | 0.0112 | 0.6093 | 0.0038 | 0.2063 |
| 2.0 | 7.3891 | 0.1139 | 0.8416 | 0.0489 | 0.3613 | 4.1 | 60.3403 | 0.0100 | 0.6022 | 0.0033 | 0.2021 |
| 2.1 | 8.1662 | 0.1008 | 0.8230 | 0.0426 | 0.3480 | 4.2 | 66.6863 | 0.0089 | 0.5953 | 0.0030 | 0.1980 |
| 2.2 | 9.0250 | 0.0893 | 0.8057 | 0.0372 | 0.3356 | 4.3 | 73.6998 | 0.0080 | 0.5887 | 0.0026 | 0.1941 |
| 2.3 | 9.9742 | 0.0791 | 0.7894 | 0.0325 | 0.3242 | 4.4 | 81.4509 | 0.0071 | 0.5823 | 0.0022 | 0.1903 |
| 2.4 | 11.0232 | 0.0702 | 0.7740 | 0.0284 | 0.3135 | 4.5 | 90.0171 | 0.0064 | 0.5761 | 0.0021 | 0.1866 |
| 2.5 | 12.1825 | 0.0623 | 0.7596 | 0.0249 | 0.3035 | 4.6 | 99.4843 | 0.0057 | 0.5701 | 0.0018 | 0.1832 |
| 2.6 | 13.4637 | 0.0554 | 0.7459 | 0.0219 | 0.2942 | 4.7 | 109.9472 | 0.0051 | 0.5643 | 0.0016 | 0.1798 |
| 2.7 | 14.8797 | 0.0493 | 0.7329 | 0.0192 | 0.2854 | 4.8 | 121.5104 | 0.0046 | 0.5586 | 0.0014 | 0.1766 |
| 2.8 | 16.4446 | 0.0438 | 0.7206 | 0.0169 | 0.2773 | 4.9 | 134.2898 | 0.0041 | 0.5531 | 0.0013 | 0.1734 |
| 2.9 | 18.1742 | 0.0390 | 0.7089 | 0.0148 | 0.2693 | 5.0 | 148.4132 | 0.0037 | 0.5478 | 0.0011 | 0.1704 |
| 3.0 | 20.0855 | 0.0347 | 0.6978 | 0.0131 | 0.2621 | | | | | | |

应用上述原理，根据某一观测孔的观测资料绘出 $s$-lg$t$ 曲线，就可计算有关参数。

(2) 步骤

(a) 有一个观测孔时：

①在单对数坐标纸上绘制 $s$-lg$t$ 曲线，用外推法确定最大降深 $s_{max}$(图 4—13)，并用(4—43)式计算拐点处降深 $s_P$。

②根据 $s_P$ 确定拐点位置，并从图上读出拐点出现的时间 $t_P$。

③作拐点 P 处曲线的切线，并从图上确定拐点 P 处切线的斜率 $i_P$。

④根据(4—44)，求出有关数值后，查表 4—7 确定 $\left(\frac{r}{B}\right)$ 和 $e^{\frac{r}{B}}$ 值。

⑤根据 $\frac{r}{B}$ 值求 $B$ 值：

$$B=\frac{r}{\left(\frac{r}{B}\right)}$$

按(4—40)式和(4—38)式分别计算 $T$ 和 $\mu^*$ 值：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i_P}e^{-\frac{r}{B}},\ \mu^*=\frac{2Tt_P}{Br},\ \frac{K_1}{m_1}=\frac{T}{B^2}$$

⑥验证，因为图解出的 $s_{max}$ 和 $s_P$ 常有较大的随意性而引起误差，所以进行验证是必要的。将所求得的参数代入(4—33)式，并给出不同的 $t$ 值，计算理论深降。然后把它同实测降深比较，如果不吻合，则应重新图解计算。

(b) 有多个观测孔时：当抽水时间不长，观测孔降深未趋于稳定，不知道或不可能外推求出 $s_{max}$ 时，不能用上面介绍的方法。此时可利用下述方法求参数。

根据(4—40)式有：

$$i_P = \frac{2.3Q}{4\pi T} e^{-\frac{r}{B}}$$

两边同时取对数：

$$\ln i_P = \ln \frac{2.3Q}{4\pi T} - \frac{r}{B}$$

$$r = 2.3B\lg \frac{2.3Q}{4\pi T} - 2.3B\lg i_P \tag{4—45}$$

式（4—45）表明，$r$ 与 $\lg i_P$ 呈线性关系。如有二个以上的观测孔资料能绘制出 $r$-$\lg i_P$ 曲线时，可以用它来计算参数。具体步骤如下：

①绘每个观测孔的 $s$-$\lg t$ 曲线（图 4—14），并从图上确定每条曲线直线段的斜率 $i_P$ 近似地代替拐点处的斜率。

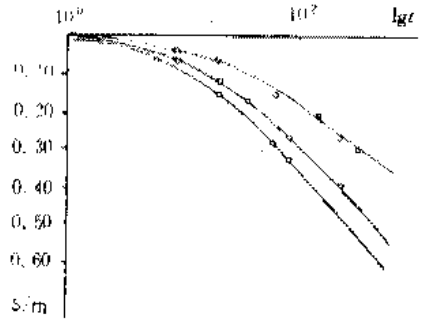



图 4—14　各观测孔的 $s$-$\lg t$ 曲线

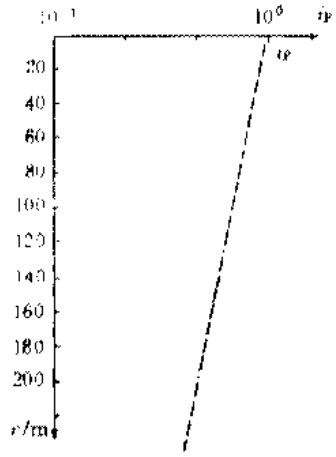



图 4—15　$r$-$\lg i_P$ 曲线

②根据各孔的斜率作 $r$-$\lg i_P$ 曲线（图 4—15），应为一直线。取该直线段的斜率，得：

$$\frac{\Delta r}{\Delta(\lg i_P)} = -2.3B, B = -\frac{\Delta r}{2.3\Delta(\lg i_P)}$$

③将 $r$-$\lg i_P$ 直线段延长交横轴于一点，读得 $r=0$ 时的 $(i_P)_0$ 值。把它代入（4—45）式，得：

$$r = 0, \lg \frac{2.3Q}{4\pi T} = \lg (i_P)_0$$

$$T = \frac{2.3Q}{4\pi (i_P)_0} \frac{K_1}{m_t} = \frac{T}{B^2}$$

④将所求得的 $B$、$T$ 代入（4—43）式，计算出不同观测孔的拐点处降深：

$$s_P = \frac{Q}{4\pi T} K_0\left(\frac{r}{B}\right)$$

利用 $s_P$ 从 $s$-$\lg t$ 曲线上读得 $t_P$ 值，然后按（4—38）式算出各孔的 $\mu^*$ 值：

$$\mu^* = \frac{2Tt_P}{Br}$$

最后取其平均值。

**思考题：**

式（4—33）的假设条件是什么？有何局限性？

## §4—3 有弱透水层弹性释水补给和越流补给的完整井流

在层状含水层分布区一个含水层常被弱透水层覆盖或下伏有弱透水层，形成双层或多层结构的含水层组。从含水层中抽水时，会引起弱透水层弹性释水补给抽水含水层。当弱透水层厚度较大时这种补给相当大，不能忽略不计。1960 年 M. S. Hantush 研究了这个课题。

**一、基本方程**

下面讨论考虑弱透水层弹性释水，而相邻含水层（如果有的话）水头保持不变的越流系统的基本方程。其他假设条件如下：

（1）含水层和弱透水层是均质各向同性和等厚的，产状水平，分布无限。天然水力坡度为零。单井定流量抽水。

（2）含水层抽水时，能得到弱透水层弹性释水的补给。弱透水层渗透系数与含水层渗透系数相比，要小的多（差两个数量级以上）。因此可以认为，通过弱透水层中的水流是垂向运动，而抽水含水层中则为水平径向运动，服从 Darcy 定律。

在上述假设条件下，含水层中地下水的运动应遵循（1—83）式，相应地在弱透水层中地下水的运动服从（1—71）式。如果越流强度改用降深表示，则由（1—82）式有：

$$v_1 = -K_1\frac{\partial H_1}{\partial z} = K_1\frac{\partial s_1}{\partial z}, v_2 = -K_2\frac{\partial H_2}{\partial z} = K_2\frac{\partial s_2}{\partial z}$$

式中，$K_1$、$H_1$、$K_2$、$H_2$ 分别为上、下弱透水层垂直方向的渗透系数和水头。如整个方程组也改用降深表示，则有：

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_1\frac{\partial s_1}{\partial z}-K_2\frac{\partial s_2}{\partial z}=\mu^*\frac{\partial s}{\partial t}$$

$$T_1\frac{\partial^2 s_1}{\partial z^2}=\mu_1^*\frac{\partial s_1}{\partial t}$$

$$T_2\frac{\partial^2 s_2}{\partial z^2}=\mu_2^*\frac{\partial s_2}{\partial t}$$

式中，$\mu^*$、$T$、$s(r,t)$、$\mu_1^*$、$T_1$、$s_1(r,z,t)$、$\mu_2^*$、$T_2$、$s_2(r,z,t)$ 分别为抽水含水层、上弱透水层和下弱透水层的贮水系数、导水系数和水位降深。根据连续性原理，在抽水含水层的底板（即 $z=m_2$ 处）和顶板（即 $z=m_2+M$ 处）（图 1—30）分别有：

$$s_2(r,m_2,t)=s(r,t)$$

$$s_1(r,m_2+M,t)=s(r,t)$$

常见的考虑含水层弹性释水补给而相邻含水层（如果有的话）的水头保持不变的越流系统，主要有下列三种情况（图 4—16）：

第一种情况，与上、下弱透水层相邻的是两个定水头的含水层；第二种情况，与上、下弱透水层相邻的是两个隔水层；第三种情况，与第一个弱含水层相邻的是定水头含水层，与另一个弱含水层相邻的是隔水层。

对于这三种情况，可以分别写出它们的微分方程和定解条件。先看第一种情况：

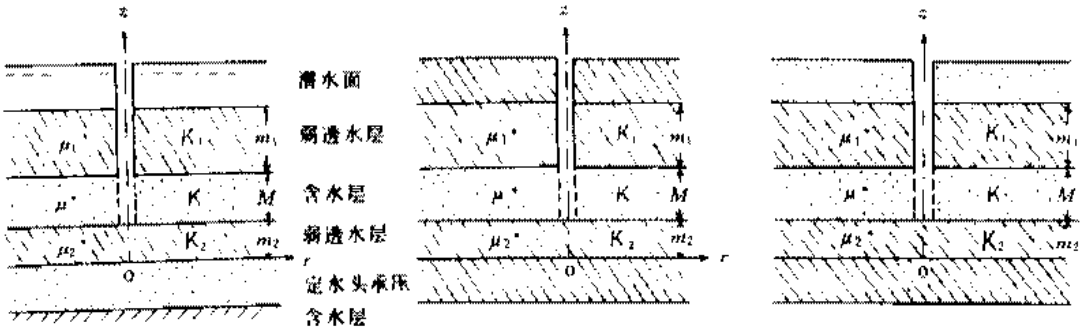



图 4—16　弱透水层弹性释水的三种情况

(据 Hantush)

$$\text{上弱透水层}\begin{cases} T_1\dfrac{\partial^2 s_1}{\partial z^2}=\mu_1^*\dfrac{\partial s_1}{\partial t} & (4\text{—}46)\\ s_1(r,z,0)=0 & (4\text{—}47)\\ s_1(r,m_2+M-m_1,t)=0 & (4\text{—}48)\\ s_1(r,m_2+M,t)=s(r,t) & (4\text{—}49)\end{cases}$$

$$\text{抽水含水层}\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s}{\partial r}\right)+K_1\dfrac{\partial}{\partial z}s_1(r,m_2+M,t)\\ \quad -K_2\dfrac{\partial}{\partial z}s_2(r,m_2,t)=\mu^*\dfrac{\partial s}{\partial t} & (4\text{—}50)\\ s(r,0)=0 & (4\text{—}51)\\ s(\infty,t)=0 & (4\text{—}52)\\ \lim\limits_{r\to 0}r\dfrac{\partial s(r,t)}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T} & (4\text{—}53)\end{cases}$$

$$\text{下弱透水层}\begin{cases} T_2\dfrac{\partial^2 s_2}{\partial z^2}=\mu_2^*\dfrac{\partial s_2}{\partial t} & (4\text{—}54)\\ s_2(r,z,0)=0 & (4\text{—}55)\\ s_2(r,0,t)=0 & (4\text{—}56)\\ s_2(r,m_2,t)=s(r,t) & (4\text{—}57)\end{cases}$$

第二种情况和第一种情况基本相同，只是将（4—48）和（4—56）式分别以下式代替：

$$\frac{\partial}{\partial z}s_1(r,m_2+M+m_1,t)=0 \qquad (4\text{—}58)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}s_2(r,0,t)=0 \qquad (4\text{—}59)$$

第三种情况也和第一种情况基本相同，只是将式（4—56）用下式代替：

$$\frac{\partial}{\partial z}s_2(r,0,t)=0$$

上述定解问题，对于足够短的时间和足够长的时间有近似解。

(1) 抽水初期的解：

当 $t<\dfrac{m_1\mu_1^*}{10K_1}$ 和 $t<\dfrac{m_2\mu_2^*}{10K_2}$ 时，三种情况有相同形式的近似解：

$$s = \frac{Q}{4\pi T} H(u,\beta) \tag{4—60}$$

式中，$H(u,\beta) = \int_u^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} \operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{u}}{\sqrt{y(y-u)}}\right) dy$ (4—61)

$$u = \frac{r^2\mu^*}{4Tt}$$

$$\beta = \frac{r}{4B_1}\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\mu^*}} + \frac{r}{4B_2}\sqrt{\frac{\mu_2^*}{\mu^*}}$$

$B_1 = \sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}}$，$B_2 = \sqrt{\frac{Tm_2}{K_2}}$，分别为上、下两个弱水层的越流因数。

考虑弱透水层弹性释水时，越流系统的井函数 $H(u,\beta)$ 的值列于表 4—8 中。

**表 4—8 $H$ $(u,\beta)$ 数值表**

(據 Hantush)

| $u$ \ $\beta$ | (−3) | | | (−2) | | | (−1) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 |
| 1 (−6) | 11.9842 | 11.4237 | 10.5928 | 9.9259 | 9.2469 | 8.3395 | 7.6497 | 6.9590 | 6.0463 |
| 5 (−6) | 10.8959 | 10.4566 | 9.7174 | 9.0866 | 8.4251 | 7.5284 | 6.8427 | 6.1548 | 5.2459 |
| 1 (−5) | 10.3789 | 9.9987 | 9.3203 | 8.7142 | 8.0657 | 7.1771 | 6.4944 | 5.8085 | 4.9024 |
| 5 (−5) | 9.0422 | 8.8128 | 8.8171 | 7.8031 | 7.2072 | 6.3523 | 5.6821 | 5.0045 | 4.1090 |
| 1 (−4) | 8.4258 | 8.2487 | 7.8386 | 7.3803 | 6.8208 | 5.9906 | 5.3297 | 4.6581 | 3.7700 |
| 5 (−4) | 6.9273 | 6.8375 | 6.6024 | 6.2934 | 5.8561 | 5.1223 | 4.4996 | 3.8527 | 2.9933 |
| 1 (−3) | 6.2624 | 6.1969 | 6.60193 | 5.7727 | 5.4001 | 4.7290 | 4.1337 | 3.5045 | 2.6650 |
| 5 (−3) | 4.6951 | 4.6649 | 4.5786 | 4.4474 | 4.2231 | 3.7415 | 3.2483 | 2.6891 | 1.9250 |
| 1 (−2) | 4.0163 | 3.9950 | 3.9334 | 3.8374 | 3.6669 | 3.2752 | 2.8443 | 2.3325 | 1.6193 |
| 5 (−2) | 2.4590 | 2.4502 | 2.4243 | 2.3826 | 2.3040 | 2.1007 | 1.8401 | 1.4872 | 0.9540 |
| 1 (−1) | 1.8172 | 1.8116 | 1.7949 | 1.7677 | 1.2157 | 1.5768 | 1.3893 | 1.1207 | 0.6947 |
| 5 (−1) | 0.5584 | 0.5570 | 0.5530 | 0.5463 | 0.5333 | 0.4969 | 0.4436 | 0.3591 | 0.2083 |
| 1 (0) | 0.2189 | 0.2184 | 0.2169 | 0.2144 | 0.2097 | 0.1961 | 0.1758 | 0.1427 | 812 (−4) |
| 5 (0) | 115 (−5) | 114 (−5) | 114 (−5) | 112 (−5) | 110 (−5) | 104 (−5) | 934 (−6) | 763 (−6) | 423 (−6) |
| 10 (0) | 415 (−8) | 414 (−8) | 411 (−8) | 407 (−8) | 399 (−8) | 375 (−8) | 339 (−8) | 277 (−8) | 153 (−8) |

| $u$ \ $\beta$ | (0) | | | (1) | | | (2) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 |
| 1 (−6) | 5.3575 | 4.6721 | 3.7756 | 3.1110 | 2.4671 | 1.6710 | 1.1361 | 1.6879 | 0.2698 |
| 5 (−6) | 4.5617 | 3.8836 | 3.0055 | 2.3661 | 1.7633 | 1.0574 | 0.6256 | 0.3091 | 787 (−4) |
| 1 (−5) | 4.2212 | 3.5481 | 2.6822 | 2.0590 | 1.4816 | 0.8285 | 0.4519 | 0.1978 | 388 (−4) |
| 5 (−5) | 3.4394 | 2.7848 | 1.9622 | 1.3943 | 0.8994 | 0.4024 | 0.1685 | 494 (−4) | 405 (−5) |
| 1 (−4) | 3.1082 | 2.4658 | 1.6704 | 1.1359 | 0.6878 | 0.2698 | 963 (−4) | 222 (−4) | 107 (−5) |
| 5 (−4) | 2.3601 | 1.7604 | 1.0564 | 0.6252 | 0.3089 | 787 (−4) | 166 (−4) | 169 (−5) | 129 (−7) |
| 1 (−3) | 2.0506 | 1.4776 | 0.8271 | 0.4513 | 0.1976 | 388 (−4) | 590 (−5) | 361 (−6) | |
| 5 (−3) | 1.3767 | 0.8915 | 0.4001 | 0.1677 | 493 (−4) | 403 (−5) | 205 (−6) | 228 (−8) | |
| 1 (−2) | 1.1122 | 0.6775 | 0.2670 | 955 (−4) | 221 (−4) | 106 (−5) | 274 (−7) | | |
| 5 (−2) | 0.5812 | 0.2923 | 755 (−4) | 160 (−4) | 164 (−5) | 126 (−7) | | | |
| 1 (−1) | 0.3970 | 0.1789 | 359 (−4) | 552 (−5) | 300 (−6) | | | | |
| 5 (−1) | 0.1006 | 325 (−4) | 388 (−5) | 151 (−6) | 171 (−8) | | | | |
| 1 (0) | 365 (−4) | 993 (−5) | 547 (−6) | 151 (−7) | | | | | |
| 5 (0) | 167 (−6) | 309 (−7) | | | | | | | |
| 10 (0) | | | | | | | | | |

注：表中括号内的数字为 10 的幂次，如 488 (−4) =0.0488，5 (−5) =5×10⁻⁵。

(2) 抽水时间较久时的解：

第一种情况：当 $t > 5\frac{m_1\mu_1^*}{K_1}$，同时 $t > 5\frac{m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，其解为：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u_1, \alpha) \tag{4—62}$$

式中，$W(u_1, \alpha)$ 为不考虑弱透水层弹性释水的越流系统的井函数（表 4—5）；

$$u_1 = \frac{r^2\left(\mu^* + \frac{\mu_1^*}{3} + \frac{\mu_2^*}{3}\right)}{4Tt}$$

$$\alpha = r\sqrt{\frac{1}{B_1^2} + \frac{1}{B_2^2}}$$

第二种情况：当 $t > 10\frac{m_1\mu_1^*}{K_1}$，同时 $t > 10\frac{m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，其解为：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W(u_2) \tag{4—63}$$

式中，$W(u_2)$ 为无越流含水层的井函数（表 4—1）；

$$u_2 = \frac{r^2(\mu^* + \mu_1^* + \mu_2^*)}{4Tt}$$

第三种情况：当 $t > 5\frac{m_1\mu_1^*}{K_1}$，同时 $t > 10\frac{m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，其解为：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}W\left(u_3, \frac{r}{B_1}\right) \tag{4—64}$$

式中，$W\left(u_3, \frac{r}{B_1}\right)$ 为不考虑弱透水层弹性释水的越流系统的井函数（表 4—5）；

$$u_3 = \frac{r^2\left(\mu^* + \mu_2^* + \frac{\mu_1^*}{3}\right)}{4Tt}$$

## 二、公式讨论

1. 上面列举的是在一般情况下的解。如果在上述三种情况的任何一个解中，令 $B_1 = B_2 = \infty$，$\mu_1^* = \mu_2^* = 0$ 时，$\beta \to 0$，$\mathrm{erfc}(0) = 1$ 就成了无越流补给的承压含水层的 Theis 公式。

在第一、第三种情况中，如果取 $K_2 = 0$，$\mu_1^* = \mu_2^* = 0$，此时(4—62) 式和(4—64) 式转化为(4—33) 式，即不考虑弱透水层弹性释水的越流系统。

2. 在双对数坐标纸上绘制 $H(u, \beta)$-$\frac{1}{u}$ 标准曲线（图 4—17）。由（4—60）式有：

$$\frac{s}{\frac{Q}{4\pi T}} = H(u, \beta)$$

可知，曲线反映出 $s$ 与 $t$ 的关系，也反映出 $s$ 与 $\beta$ 的关系。总的说来，$s$ 随着 $\beta$ 的增大而减小。当 $\beta = 0$ 时，曲线和 Theis 曲线一致。这意味着：①随着 $\mu_1^*$ 和 $\mu_2^*$ 的增大，$s$ 会减小。因此，弱透水层的贮水系数增大，可以释放出更多的水，抽水含水层的降深就会相应地减小；②随着 $r$ 的增大，$s$ 会减小；③ 随着越流因素 $B$ 的减小，$s$ 也会减小。

## 三、利用抽水试验资料确定水文地质参数

根据抽水初期或短时间抽水的资料，利用配线法求参数的原理同前。利用观测孔的全部观测资料，在双对数透明纸上绘出 $s$-$t$ 曲线，把抽水初期的曲线（或短时间抽水的曲线）同

标准曲线 $H(u,\beta)$-$\frac{1}{u}$(图 4—17) 重合，记下匹配点的坐标 $H(u,\beta)$，$\frac{1}{u}$，$\beta$，$s$，$t$，代入公式(4—60)，求出含水层的参数 $T$ 和 $\mu^*$

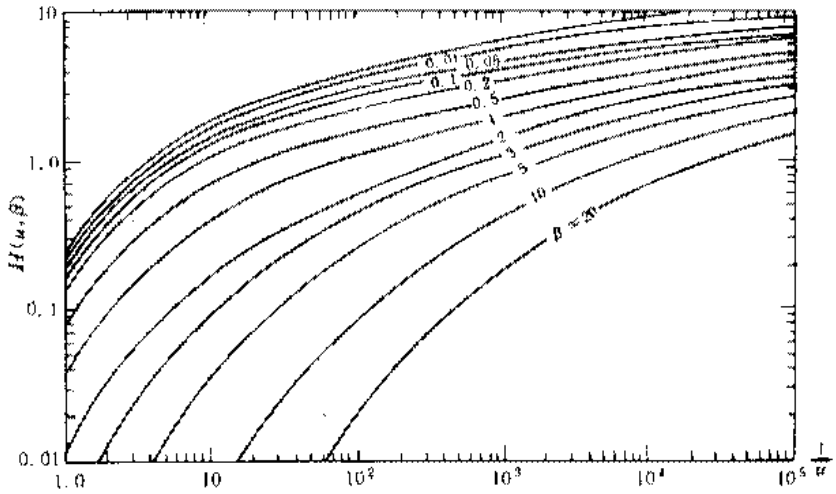



图 4—17　考虑弱透水层弹性释水，越流系统短期抽水时的标准曲线
(据 Walton)

$$T=\frac{Q}{4\pi[s]}[H(u,\beta)],\mu^*=\frac{4T[t]}{r^2\left[\frac{1}{u}\right]}$$

对于长时间抽水，第一种情况〔(4—62) 式〕和第三种情况〔(4—64) 式〕利用配线法确定参数的原理和方法同有越流补给的 (4—33) 式相同，标准曲线都是用 (图 4—11) 所示的曲线。

根据长期解的第二种情况〔(4—63) 式〕，利用配线法确定参数和利用 Theis 公式的配线法相同。

**思考题：**

如果抽水含水层位于隔水层之上，它上面被一本身贮存有水、且释放问题不能忽略不计的弱透水层覆盖时，如何计算？请写出有关公式？

## §4—4　潜水完整井流

前面重点讨论了承压完整井流，下面讨论潜水完整井流问题。潜水井流与承压水井流不同，它的上界面是一个随时间而变化的浸润曲面（自由面）。因而它的运动与承压含水层中的情况不同，主要表现在下列几点：

(1) 潜水井流的导水系数 $T=Kh$ 随距离 $r$ 和时间 $t$ 而变化，而承压水井流 $T=KM$，和 $r$，$t$ 无关；

(2) 当潜水井流降深较大时，垂向分速度不可忽略，在井附近为三维流。而水平含水层中的承压水井流垂向分速度可忽略，一般为二维流或可近似地当二维流来处理；

(3) 从潜水井抽出的水主要来自含水层的重力疏干。重力疏干不能瞬时完成，而是逐

渐被排放出来，因而出现明显地迟后于水位下降的现象。潜水面虽然下降了，但潜水面以上的非饱和带内的水继续向下不断地补给潜水。因此，测出的给水度在抽水期间是以一个递减的速率逐渐增大的。只有抽水时间足够长时，给水度才实际上趋于一个常数值。承压水井流则不同，抽出的水来自含水层贮存量的释放，接近于瞬时完成，贮水系数是常数。

到目前为止，还没有同时考虑上述三种情况的潜水井流公式。

在一定条件下，也可将承压水完整井流公式应用于潜水完整井流的近似计算。如果满足§4—1前面的四个假设条件，条件（5）虽然不同，但当抽水相当长时间以后，迟后排水现象已不明显，可近似地认为已满足条件（5）。因此，潜水完整井在降深不大的情况下，即$s \leqslant 0.1H_0$，$H_0$为抽水前潜水流的厚度，可用承压水井流公式作近似计算。此时，潜水流厚度可近似地用$H_m = \frac{1}{2}(H_0 + H)$，来代替。于是承压水井公式中的$2Ms$用$H_0^2 - H^2$代替，则有：

$$H_0^2 - H^2 = \frac{Q}{2\pi K}W(u), u = \frac{r^2\mu}{4T't}(T' = KH_m) \tag{4—65}$$

也可采用修正降深值，直接利用 Theis 公式：

$$s' = s - \frac{s^2}{2H_0} = \frac{Q}{4\pi T}W(u), u = \frac{r^2\mu}{4Tt}(T = KH_0) \tag{4—66}$$

式中，$s'$为修正降深；$s$为实际观测降深；$H_0$为潜水流初始厚度。

有关计算潜水完整井流的方法主要有：①考虑井附近流速垂直分量的 Boulton 第一潜水井流模型；②考虑迟后排水的 Boulton 第二潜水井流模型；③既考虑流速的垂直分量又考虑潜水含水层弹性释水的 Neuman 模型。这里简单地介绍后两种模型。

**一、考虑迟后疏干的 Boulton 模型**

1. 假设条件及井流状态分析

Boulton 是在下列条件下进行讨论的：

（1）均质、各向同性、隔水底板水平的无限延伸的含水层；

（2）初始自由水面水平；

（3）完整井，井径无限小，降深$s \ll H_0$（潜水流初始厚度）的定流量抽水；

（4）水流服从 Darcy 定律；

（5）抽水时，水位下降，含水层中的水不能瞬时排出，存在着迟后现象。

分析潜水完整井抽水时的降深—时间曲线，可以明显地看到三个阶段：

第一个阶段：抽水早期（也许只有几分钟），降深—时间曲线与承压水完整井抽水时的 Theis 曲线一致，主要表现为潜水位下降了。但含水介质不能立即通过重力排水把其中的水排出，而只是由于压力降低引起水的瞬时释放，即弹性释水。含水层的反应和一个贮水系数小的承压含水层相似。一般来说，水流主要是水平运动。

第二个阶段：降深—时间曲线的斜率减小，明显地偏离 Theis 曲线，有的甚至出现短时间的假稳定。它反映疏干排水的作用，好象含水层得到了补给，使水位下降速度明显减缓。含水层的反应类似于一个受到越流补给的承压含水层。但降落漏斗仍以缓慢速度扩展着。

第三个阶段：这个阶段的降深—时间曲线又与 Theis 曲线重合。说明重力排水已跟得上水位下降，迟后疏干影响逐渐变小，可以忽略不计。抽水量来自重力排水，降落漏斗扩展速度增大。此时，给水度所起的作用相当于承压含水层的贮水系数。决定于含水层的条件，

这一阶段可以从抽水后的几分钟到几天后开始。

Boulton 根据抽水过程中降深—时间曲线的特征提出了考虑迟后疏干的计算方法。他作了如下假设：抽水开始后的时间 $t$ 和 $t+\Delta t$ 之间潜水面下降了 $\Delta s$，此时含水层排出水量由两部分组成：

(1) 弹性释放出的水量：水位下降 $\Delta s$ 时，单位面积含水层的弹性释水量为：

$$\mu^* \Delta s \cdot 1$$

(2) 迟后疏干排水量：降深 $\Delta s$ 时，单位水平面积含水层于 $t$ 时刻($t > \tau$) 排出的重力水量假设为：

$$\Delta s \cdot \alpha \cdot \mu e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot 1$$

式中，$\mu$ 为给水度，$\alpha$ 为一经验系数。假设是有一定道理的，因为：

(a) 迟后疏干排水量 $\Delta s\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)}$ 与 $t-\tau$ 的关系如图 4—18 所示，符合一般经验。

(b) 在 $\tau$ 时刻以后，单位水平面积含水层内降深为一个单位时，迟后重力排水的总体积为：

$$\int_{\tau}^{\infty} \alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \mu$$

它等于含水层的给水度。因此，在水量均衡上没有矛盾，符合实际，假设是合理的。

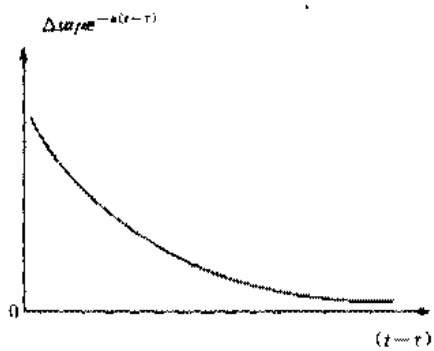



图 4—18 迟后疏干排水过程线

(c) 在 $\tau$ 和 $t$ 区间迟后排水总量为：

$$\int_{\tau}^{t} \Delta s\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)} dt = \Delta s\mu[1 - e^{-\alpha(t-\tau)}]$$

由上式可了解 $\alpha$ 的意义。若 $\alpha$ 大，则 $\tau$ 到 $t$ 时间内排出的水量大，即迟后性小；或者说，$1/\alpha$ 小，迟后性小。因此，称 $1/\alpha$ 为延迟指数。

2. 数学模型及其解

如果只考虑贮存水的释放，不考虑迟后重力排水，并假设降深很小 ($s \ll H_0$)，$T$ 值保持不变，则潜水非稳定径向运动的偏微分方程可写为：

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \mu^* \frac{\partial s}{\partial t}$$

如果考虑迟后重力排水，则方程式的右边还要加上一项，即在 $t$ 时刻单位水平面积含水层中单位时间内迟后重力排水的体积。这个值可以这样来求得：

将 0 到 $t$ 这一时间段分成 $n$ 个时间小段，$\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots n-1, n$，而 $\tau_0 = 0$)，每一小段 $\Delta\tau_i$ 对应的降深为 $\Delta s_i$ ($i = 1, 2, \cdots\cdots n-1, n$)。

由上述假设知，在 $t$ 时刻由 $\Delta s_i$ 引起的排水量为 $\Delta s_i\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)}$。显然，由于迟后排水，$t$ 时刻以前的每一个 $\Delta s_i$ 都会排水到达 $t$ 时刻的潜水面。在 $t$ 时刻单位水平面积的潜水面上，单位时间接受的迟后排水总量为：

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta s_i\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta s_i}{\Delta\tau_i}\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)}\Delta\tau_i$$

当 $n \to \infty$，$\Delta\tau_i \to 0$ 时，$\frac{\Delta s_i}{\Delta\tau_i} \to \frac{\partial s}{\partial\tau}$，则有：

$$\int_0^t \frac{\partial s}{\partial \tau}\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau$$

因此，考虑迟后重力排水时，流向潜水完整井非稳定运动的偏微分方程为：

$$T\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\mu^*\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t \frac{\partial s}{\partial \tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \qquad (4-67)$$

相应的定解条件为：

$$s(r,0)=0 \qquad (4-68)$$

$$s(\infty,t)=0 \qquad t>0 \qquad (4-69)$$

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T} \qquad t>0 \qquad (4-70)$$

Boulton 求得上述定解问题的解为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty \frac{2}{x}\left\{1-e^{-u_1}\left(\mathrm{ch}u_2+\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2}\mathrm{sh}u_2\right)\right\}J_0\left(\frac{r}{\nu D}x\right)dx \qquad (4-71)$$

式中：$s$—— 定流量抽水，距抽水井为 $r$ 处 $t$ 时刻的降深；

$$u_1=\frac{\alpha t\eta(1-x^2)}{2},u_2=\frac{\alpha t\sqrt{\eta^2(1+x^2)^2-4\eta x^2}}{2};$$

$$\nu=\sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu^*+\mu}};\eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*};$$

$D=\sqrt{\frac{T}{\alpha\mu}}$—— 疏干因素(量纲为 $L$)；

$\mu^*$—— 贮水系数；

$\mu$—— 给水度；

$\frac{1}{\alpha}$—— 延迟指数；

$x$—— 积分变量；

$J_0(x)$ ——第一类零阶 Bessel 函数。

当 $\eta\to\infty$ 时，即给水度比贮水系数大得多时，(4—71) 式可简化为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty 2J_0\left(\frac{r}{D}x\right)\left(1-\frac{1}{x^2+1}e^{-\frac{\alpha t x^2}{x^2+1}}-F\right)\frac{dx}{x} \qquad (4-72)$$

式中，$F=\frac{x^2}{x^2+1}e^{-\alpha\eta t(x^2+1)}$。(4—72) 式的积分部分可用 $W\left(u_{a,y},\frac{r}{D}\right)$ 来表示，称为无压含水层中完整井的井函数(表 4—9)。其中的 $u_{a,y}$，在抽水早期取 $u_a$ 值，抽水后期取 $u_y$ 值。它所描述的曲线形状，也就是理论上降深—时间曲线的形状。据此，可将上述解分为三部分：

抽水早期：
$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_a,\frac{r}{D}\right) \qquad (4-73)$$

抽水中期：
$$s=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{D}\right) \qquad (4-74)$$

抽水晚期：
$$s=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_y,\frac{r}{D}\right) \qquad (4-75)$$

式中：$W\left(u_a,\frac{r}{D}\right)$—— 无压含水层中完整井流 $A$ 组井函数；

$W\left(u_y,\frac{r}{D}\right)$—— 无压含水层中完整井流 $B$ 组井函数；

$$u_a = \frac{r^2\mu^*}{4Tt} \tag{4—76}$$

$$u_y = \frac{r^2\mu}{4Tt} \tag{4—77}$$

$K_0(\frac{r}{D})$ —— 虚宗量第二类 *Bessel* 函数。

3. 讨论

在 $t$ 相当小时（相当于抽水的初期），（4—72）式中的 $\frac{1}{x^2+1}e^{-\frac{ax^2}{x^2+1}} \longrightarrow \frac{1}{x^2+1}$，$1-\frac{1}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}$

（4—72）式可写成：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty 2J_0\left(\frac{r}{D}x\right)\frac{x^2}{x^2+1}\left[1-e^{-a(x^2+1)}\right]\frac{dx}{x} \tag{4—78}$$

此式经适当变换，可证明它与（4—33）式一样，只是（4—33）式中的 $u$ 和 $\frac{r}{B}$ 在此变为 $u_a$ 和 $\frac{r}{D}$ 而已。说明在抽水初期，潜水位下降过程和越流承压含水层的水位下降过程是相同的。

当 $t$ 很大时（相当于抽水延续时间很长的情况），可以证明定解问题的解和 Theis 公式（4—11）相当，此时的 $u$ 值即 $\bar{u}=\frac{r^2(\mu^*+\mu)}{4Tt}$。说明在长时间抽水后，潜水含水层中完整井的降深计算是可以采用 Theis 公式的。

井函数 $W\left(u_{a,y},\frac{r}{D}\right)$ 不能用初等函数表示，但可求出它的数值解（表 4—9）。根据这些数值在双对数纸上画出标准曲线族，如图 4—19 所示。它包括两组曲线：左边是 $A$ 组 $W\left(u_a,\frac{r}{D}\right)-\frac{1}{u_a}$ 曲线，适用于抽水早期；右边是 $B$ 组 $W\left(u_y,\frac{r}{D}\right)-\frac{1}{u_y}$ 曲线，适用于抽水后期。两组曲线间用它们的共同切线连接。由于（4—72）式是在 $\eta\to\infty$ 时，由（4—71）式简化得来的，这时曲线的中间部分为一水平线，可以用（4—74）式来表达。当 $\eta\geqslant 100$ 时，曲线的中间部分仍趋近于一水平线，因而（4—74）式仍然适用。如果 $\eta<100$ 时，则曲线的中间部分就不是水平线，而是一条比早期和后期曲线的斜率小得多的曲线。

曲线组反映了迟后排水的影响。在抽水初期，因以弹性释水为主，水位降深同左边的 Theis 曲线吻合。当迟后重力排水发生影响后便偏离 Theis 曲线，下降速度变小，并随 $\frac{r}{D}$ 的不同，以不同方式向水平线趋近。在抽水后期，迟后重力排水影响减弱，下降速度由小变大，曲线斜率增加。当迟后重力排水影响基本结束时，又趋向右边的 Theis 曲线，和前面分析的三个阶段是一致的。

4. 利用抽水试验资料确定水文地质参数

（1）配线法：

①根据表 4—9 在双对数纸上绘制标准曲线（图 4—19）。当 $5<\eta<100$ 时，严格讲，应按（4—71）式另作标准曲线。但 T. A. Prickett 经对比表明，按（4—71）式制作的 $\eta$ 为有限值的标准曲线和根据联结 A 组、B 组曲线的切线来表示中间过渡带的方法绘制的标准曲线差别不太大。因此，可以用后者作为前者的近似。

②根据试验资料，在模数和标准曲线相同的透明双对数纸上，绘制 $s$-$t$ 曲线。

## 表 4—9　$W\ (u_{a,y}, r/D)$ 数值表

(据 Boulton)

$1/u_a = N \times 10^n$

| $r/D=0.01$ | | | | $r/D=0.1$ | | | | $r/D=0.2$ | | | | $r/D=0.316$ | | | | $r/D=0.4$ | | | | $r/D=0.6$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ |
| 1 | 1 | 1.82 | | 1 | 1 | 1.80 | | 5 | 0 | 1.19 | | 1 | 0 | 0.216 | | 1 | 0 | 0.213 | | 1 | 0 | 0.206 | |
| 1 | 2 | 4.04 | | 5 | 1 | 3.24 | | 1 | 1 | 1.75 | | 2 | 0 | 0.544 | | 2 | 0 | 0.534 | | 2 | 0 | 0.504 | |
| 1 | 3 | 6.31 | | 1 | 2 | 3.81 | | 5 | 1 | 2.95 | | 5 | 0 | 1.153 | | 5 | 0 | 1.111 | | 5 | 0 | 0.996 | |
| 5 | 3 | 7.82 | | 2 | 2 | 4.30 | | 1 | 2 | 3.29 | | 1 | 1 | 1.655 | | 1 | 1 | 1.564 | | 1 | 1 | 1.311 | |
| 1 | 4 | 8.40 | | 5 | 2 | 4.71 | | 5 | 2 | 3.50 | | 5 | 1 | 2.504 | | 5 | 1 | 2.181 | | 2 | 1 | 1.493 | |
| 1 | 5 | 9.42 | | 1 | 3 | 4.83 | | 1 | 3 | 3.51 | | 1 | 2 | 2.623 | | 1 | 2 | 2.225 | | 5 | 1 | 1.553 | |
| 1 | 6 | 9.44 | | 1 | 4 | 4.86 | | | | | | 1 | 3 | 2.648 | | 1 | 3 | 2.229 | | 1 | 2 | 1.555 | |
| $r/D=0.08$ | | | | $r/D=1.0$ | | | | $r/D=1.5$ | | | | $r/D=2.0$ | | | | $r/D=2.5$ | | | | $r/D=3.0$ | | | |
| $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_a, \frac{r}{D})$ |
| 5 | −1 | 0.046 | | 5 | −1 | 0.0444 | | 5 | −1 | 0.0394 | | 3.33 | −1 | 0.0100 | | 5 | −1 | 0.0271 | | 5 | −1 | 0.0210 | |
| 1 | 0 | 0.197 | | 1 | 0 | 0.1855 | | 1 | 0 | 0.1509 | | 5 | −1 | 0.0335 | | 1 | 0 | 0.0803 | | 1 | 0 | 0.0534 | |
| 2 | 0 | 0.466 | | 2 | 0 | 0.421 | | 1.25 | 0 | 0.199 | | 1 | 0 | 0.144 | | 1.25 | 0 | 0.0961 | | 1.25 | 0 | 0.0607 | |
| 5 | 0 | 0.837 | | 5 | 0 | 0.716 | | 2 | 0 | 0.301 | | 1.25 | 0 | 0.114 | | 2 | 0 | 0.1174 | | 2 | 0 | 0.0681 | |
| 1 | 1 | 1.050 | | 1 | 1 | 0.819 | | 5 | 0 | 0.413 | | 2 | 0 | 0.194 | | 5 | 0 | 0.1247 | | 5 | 0 | 0.0695 | |
| 2 | 1 | 1.121 | | 2 | 1 | 0.841 | | 1 | 1 | 0.427 | | 5 | 0 | 0.227 | | 1 | 1 | 0.1247 | | 1 | 1 | 0.0695 | |
| 5 | 1 | 1.131 | | 5 | 1 | 0.842 | | 2 | 1 | 0.428 | | 1 | 1 | 0.228 | | | | | | | | | |

$1/u_y = N \times 10^n$

| $r/D=0.01$ | | | | $r/D=0.1$ | | | | $r/D=0.2$ | | | | $r/D=0.316$ | | | | $r/D=0.4$ | | | | $r/D=0.6$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ |
| 4 | 2 | 9.45 | | 4 | 0 | 4.86 | | 4 | −1 | 3.51 | | 4 | −1 | 2.66 | | 1 | −1 | 2.33 | | 4.44 | −1 | 1.586 | |
| 4 | 3 | 9.54 | | 4 | 1 | 4.95 | | 4 | 0 | 3.54 | | 4 | 0 | 2.74 | | 1 | 0 | 2.26 | | 4.22 | 0 | 1.707 | |
| 4 | 4 | 10.23 | | 4 | 2 | 5.64 | | 2 | 1 | 3.69 | | 4 | 1 | 3.38 | | 5 | 0 | 2.40 | | 4.44 | 0 | 1.844 | |
| 4 | 5 | 12.31 | | 4 | 3 | 7.72 | | 4 | 1 | 3.85 | | 4 | 2 | 5.42 | | 1 | 1 | 2.55 | | 1.67 | 1 | 2.448 | |
| 4 | 6 | 14.61 | | 4 | 4 | 10.01 | | 1.5 | 2 | 4.55 | | 4 | 3 | 7.72 | | 3.75 | 1 | 3.20 | | 4.44 | 1 | 3.255 | |
| | | | | | | | | 4 | 2 | 5.42 | | | | | | 1 | 2 | 4.05 | | | | | |
| $r/D=0.8$ | | | | $r/D=1.0$ | | | | $r/D=1.5$ | | | | $r/D=2.0$ | | | | $r/D=2.5$ | | | | $r/D=3.0$ | | | |
| $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W$ | $(u_y, \frac{r}{D})$ |
| 2.5 | −2 | 1.133 | | 4 | −2 | 0.844 | | 7.11 | −2 | 0.444 | | 4 | −2 | 0.239 | | 2.56 | −2 | 0.1321 | | 1.78 | −2 | 0.0743 | |
| 2.5 | −1 | 1.158 | | 4 | −1 | 0.901 | | 3.55 | −1 | 0.509 | | 2 | −1 | 0.283 | | 1.28 | −1 | 0.1617 | | 8.89 | −2 | 0.0939 | |
| 1.25 | 0 | 1.264 | | 4 | 0 | 1.356 | | 7.11 | −1 | 0.587 | | 4 | −1 | 0.337 | | 2.56 | −1 | 0.1988 | | 1.78 | −1 | 0.1189 | |
| 2.5 | 0 | 1.387 | | 4 | 1 | 3.140 | | 2.67 | 0 | 0.963 | | 1.5 | 0 | 0.614 | | 9.6 | −1 | 0.3990 | | 6.67 | −1 | 0.2618 | |
| 9.37 | 0 | 1.938 | | | | | | 7.11 | 0 | 1.569 | | 4 | 0 | 1.111 | | 2.56 | 0 | 0.7977 | | 1.78 | 0 | 0.577) | |
| 2.5 | 1 | 2.704 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

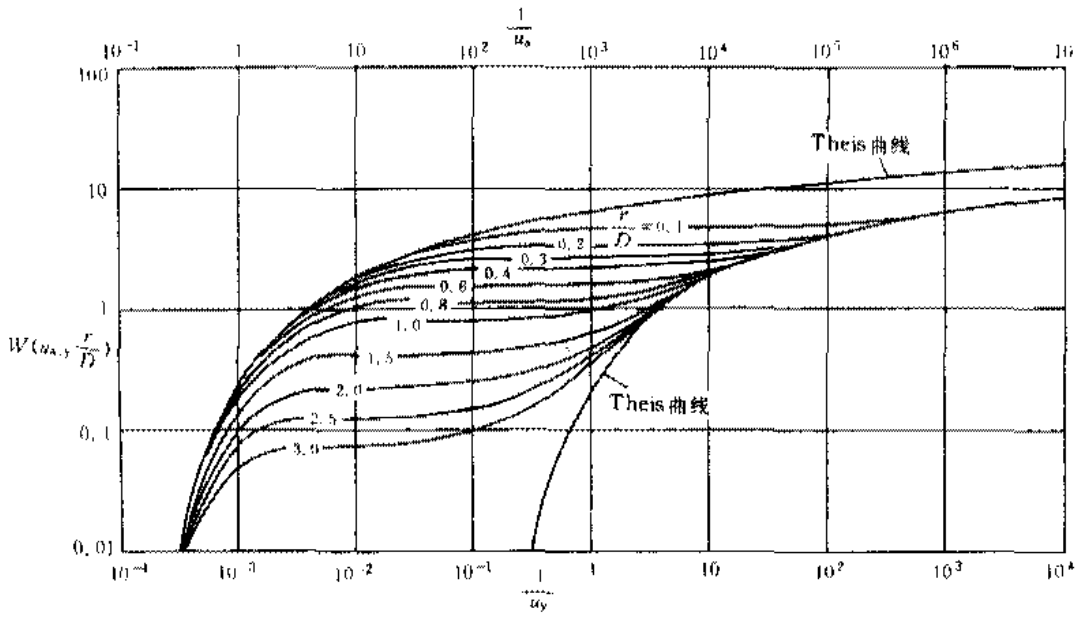



图 4—19　Boulton 潜水完整井流标准曲线

（据 T. A. Prickett）

③把 $s$-$t$ 曲线叠置在标准曲线上，保持对应坐标轴平行，使 $s$-$t$ 曲线尽可能多地与某一条 A 组曲线重合。任选一匹配点，取坐标：$s$，$t$，$W\left(u_a,\ \frac{r}{D}\right)$，$\frac{1}{u_a}$和重合曲线的$\frac{r}{D}$值，代入有关公式计算参数：

$$T=\frac{Q}{4\pi(s)}\left[W\left(u_a,\frac{r}{D}\right)\right],\mu^*=\frac{4T(t)}{r^2\left(\frac{1}{u_a}\right)}$$

④使 $s$-$t$ 曲线的剩余部分尽可能多地与 B 组曲线重合，$\frac{r}{D}$值不变。任选匹配点，取坐标值：$s$，$t$，$W\left(u_y,\ \frac{r}{D}\right)$，$\frac{1}{u_y}$，代入有关公式计算参数：

$$T=\frac{Q}{4\pi(s)}\left[W\left(u_y,\frac{r}{D}\right)\right],\mu=\frac{4T(t)}{r^2\left(\frac{1}{u_y}\right)}$$

$$\eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*}$$

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{4t}{\left(\frac{r}{D}\right)^2\left(\frac{1}{u_y}\right)}\qquad(4—79)$$

把 $\mu$ 的表达式代入 $D$ 的表达式，即可得上式。

⑤上述计算是在假设降深 $s$ 与含水层厚度 $H_0$ 之比比较小的情况下，以 $T$ 值不变为前提的。但实际上，$T$ 在改变，随着含水层被疏干，厚度减小，相应的 $T$ 值也减小。为减小这方面的误差，需对观测降深用（4—66）式进行校正。

⑥由标准曲线图可以看出，随着$\frac{1}{u_y}$的增加，B 组曲线逐渐向 Theis 曲线靠近，最终两者

非常靠近而重合。这个使 B 组曲线变为 Theis 曲线的时间 $t_{w,\alpha}$，是迟后重力排水对降深影响基本结束的时间。将配合点的$\frac{1}{u_y}$值代入（4—79）式可得：

$$\alpha t_{w,\alpha}=\frac{1}{4}\left[\frac{r}{D}\right]^2\frac{1}{u_y}$$

上式反映$\frac{r}{D}$与$\alpha t_{w,\alpha}$有对应关系，故可作出$\alpha t_{w,\alpha}-\frac{r}{D}$曲线（图 4—20）。然后，根据前面求得的$\frac{r}{D}$，由图 4—20 得$\alpha t_{w,\alpha}$，再把$\frac{1}{\alpha}$值代入，就可求出$t_{w,\alpha}$来。

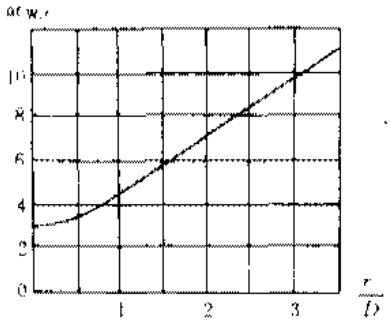



图 4—20　计算$t_{w,\alpha}$的关系曲线
（据 Boulton）

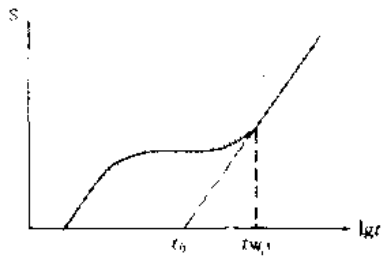



图 4—21　潜水完整井抽水的 $s$-lg$t$ 曲线

（2）直线图解法：抽水持续足够长时间后，迟后重力排水影响消除，$s$-lg$t$ 关系与无越流补给的承压完整井一样呈线性关系，故可利用直线图解法计算参数。

绘制 $s$-lg$t$ 曲线，如图 4—21 所示。由（4—13）式得：

$$s=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25T}{r^2\mu}+\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg t$$

运用和 § 4—1 中所讲述的直线图解法相同的方法，可得：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i},\mu=\frac{2.25Tt_0}{r^2}$$

式中，$i$ 和 $t_0$ 分别为从图 4—21 上读得的直线斜率和在横轴（$s=0$）上的截距。

Boulton 法考虑了潜水含水层的弹性释水性质，并引进了迟后重力排水的假设，有一经验系数 $\alpha$，虽有一定道理，但其物理意义并不十分明确。因此，考虑迟后疏干的 Boulton 法仍是一种不完善的方法。

**二、考虑流速垂直分量和弹性释水的 Neuman 模型**

在 Boulton 模型中，延迟指数$\frac{1}{\alpha}$缺乏明确的物理意义，也不能保证 $\alpha$ 是常数，用它解释无压含水层从贮存中释放水的机制就会有困难。下面将要介绍的 Neuman 模型，不仅考虑了流速的垂直分量和弹性释水，还把潜水面视为可移动的边界，建立了有关潜水面变动的连续性方程，并简化得到潜水面边界条件的近似表达式。这样就不涉及非饱和带和物理意义不明确的延迟指数了。

1. 定解问题及其解

Neuman 模型是在下列假设条件下建立的：

(1) 含水层均质各向异性，侧向无限延伸，坐标轴和主渗透方向一致，隔水层水平；

(2) 初始潜水面水平；

(3) 水流服从 Darcy 定律；

(4) 完整井，定流量抽水；

(5) 抽水期间自由面上没有入渗补给或蒸发；潜水面降深和含水层厚度相比小得多，因此在建立潜水面边界条件时可以忽略水头 $H$ 对 $x$，$y$ 的导数或对 $r$ 的导数。

在上述假设条件下，可以写出潜水完整井流（图 4—22）的定解问题为：

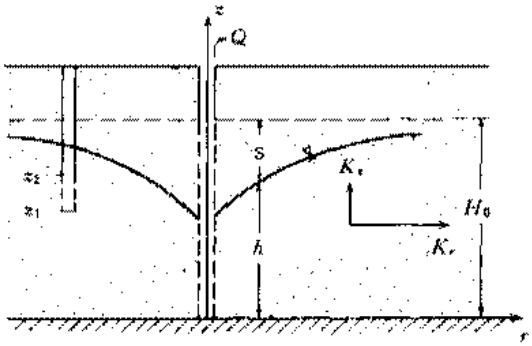



图 4-22 潜水完整井流示意图

$$K_r\left(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}\right)+K_z\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\mu_s\frac{\partial s}{\partial t},\quad 0<z<H_0 \tag{4—80}$$

$$s\ (r,\ z,\ 0)\ =0 \tag{4—81}$$

$$s\ (\infty,\ z,\ t)\ =0 \tag{4—82}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}s\ (r,\ 0,\ t)\ =0 \tag{4—83}$$

$$K_z\frac{\partial}{\partial z}s\ (r,\ H_0,\ t)\ =-\mu\frac{\partial}{\partial t}s\ (r,\ H_0,\ t) \tag{4—84}$$

$$\lim_{r\to 0}\int_0^{H_0} r\frac{\partial s}{\partial r}\mathrm{d}z=-\frac{Q}{2\pi K_r} \tag{4—85}$$

式中，$K_r$ 为水平径向渗透系数；$K_z$ 为垂向渗透系数；$\mu_s$ 为贮水率；$\mu$ 为给水度；$H_0$ 为潜水流初始厚度。

通过积分变换，可求得上述定解问题的解。降深 $s$ 用无量纲参数（$\beta$，$\sigma$，$z_d$ 和 $t_S$）表示为：

$$s\ (r,\ z,\ t)\ =\frac{Q}{4\pi T}\int_0^{\infty}4yJ_0\ (y\beta^{1/2})\ \left[\omega_0\ (y)\ +\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n\ (y)\right]\mathrm{d}y \tag{4—86}$$

式中：

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_S\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\mathrm{ch}(\gamma_0 z_d)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\mathrm{ch}(\gamma_0)} \tag{4—87}$$

$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[-t_S\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\cos(\gamma_n z_d)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2+\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\cos(\gamma_n)} \tag{4—88}$$

其中，$\gamma_0$，$\gamma_n$ 分别为下列两个方程的根：

$$\sigma\gamma_0\mathrm{sh}\ (\gamma_0)\ -\ (y^2-\gamma_0^2)\ \mathrm{ch}\ (\gamma_0)\ =0\qquad \gamma_0^2<y^2 \tag{4—89}$$

$$\sigma\gamma_n\sin(\gamma_n)+(\gamma^2+\gamma_n^2)\cos(\gamma_n)=0 \tag{4—90}$$

此处，

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<\gamma_n<n\pi \qquad n\geqslant 1$$

$$\sigma=\frac{\mu^*}{\mu},\quad K_d=\frac{K_r}{K_z},\quad z_d=\frac{z}{H_0},\quad h_d=\frac{H_0}{r}$$

$$t_S=\frac{Tt}{\mu^* r^2},\quad t_y=\frac{Tt}{\mu r^2},\quad \beta=\frac{K_d}{h_d^2}=\frac{r^2K_r}{H_0^2K_z}$$

在实际工作中，在完整观测孔所观测到的降深是降深在整个含水层厚度上的平均值 $s(r,t)$。此时，上述解仍可用（4—86）式来表达，只是 $\omega_0(y)$ 和 $\omega_n(y)$ 需要按下式重新定义：

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_S\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\,\mathrm{th}(\gamma_0)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\gamma_0} \tag{4—91}$$

$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[-t_S\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\,\mathrm{tg}(\gamma_n)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2+\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\gamma_n} \tag{4—92}$$

2. Neuman 解的特点

（1）降深-时间曲线的特点：解析解描述的降深-时间曲线和抽水过程的三个阶段相一致。图 4—23 反映的是各向同性含水层（$K_d=1$）中位于距抽水孔等于含水层厚度（$H_0=1$）处含水层底部（$z_d=0$）的降深。纵坐标是无量纲降深 $s_d\left(=\frac{4\pi T}{Q}s\right)$，横坐标是无量纲时间 $t_S\left(=\frac{Tt}{\mu^* r^2}\right)$ 六条曲线对应不同的 $\sigma$。抽水早期，这些曲线和 Theis 曲线一致，说明此时抽水量基本上来自弹性释水。第二阶段，由于重力排水的影响，曲线和获得“越流补给”的情况相似。$\sigma$ 越小，重力排水的作用愈大，这种类似于“越流补给”的影响愈显著（表现为这个阶段愈长）。随着抽水时间的进一步延长，进入第三阶段，弹性释水的影响完全消失，曲线再一次和 Theis 曲线一致。

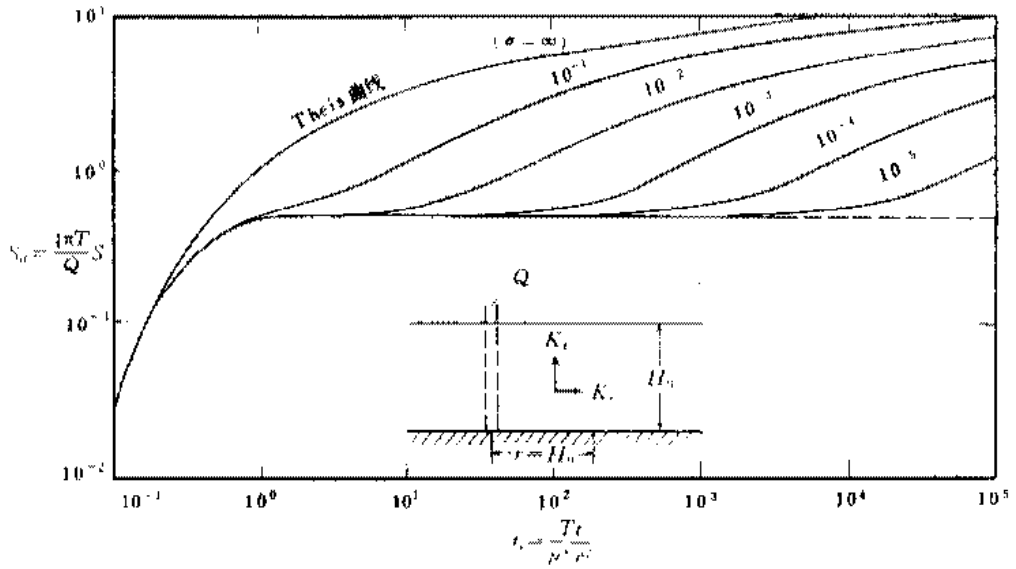



图 4—23　$z_d=0$，$h_d=1$ 和 $K_d=1$，无量纲降深 $s_d$ 与无量纲时间 $t_s$ 关系曲线

（据 S. P. Neuman）

在横轴为无量纲时间 $t_y$ 的图 4—24 上，曲线也反映了抽水的三个阶段。$\mu^*$ 愈小（$\sigma$ 愈

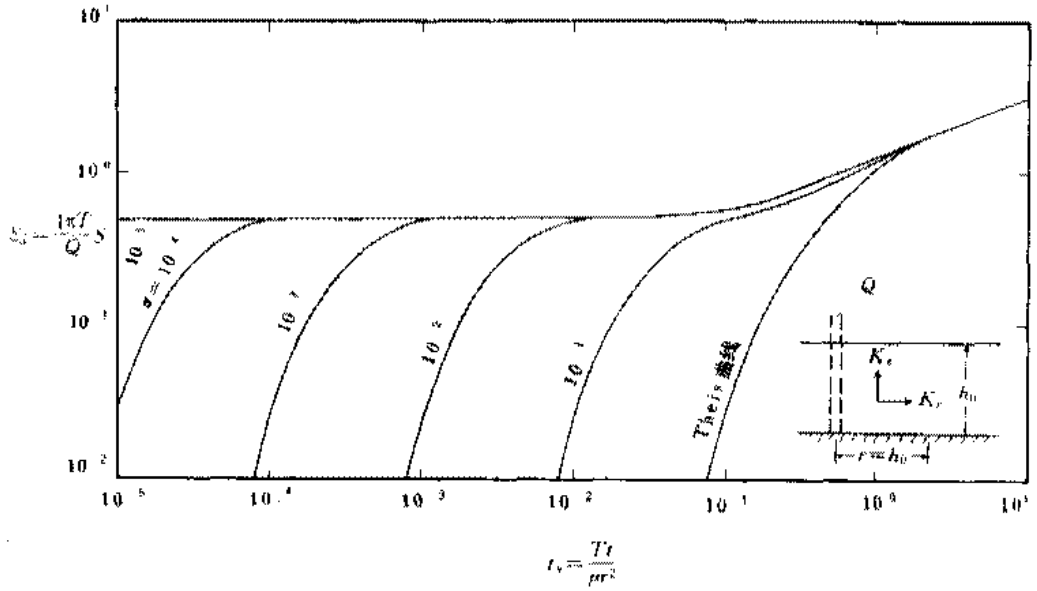



图 4—24　$z_d=0$，$h_d=1$ 和 $K_d=1$ 时，无量纲降深 $s_d$ 与无量纲时间 $t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

小），降深-时间曲线第一阶段所占的时间也愈短。当 $\sigma$ 趋近于零时，第一阶段就完全消失了。此时，潜水面以下各点的水头，由于忽略弹性释水的作用，会在抽水开始的那一瞬间突然下降。图 4—23 和图 4—24 说明，虽然潜水含水层的 $\mu_s$ 和 $\mu$ 相比是如此地小，但一般地讲，潜水含水层的弹性释水还不应把它忽略不计。

（2）降深-时间曲线和观测点在含水层中位置的关系：图 4—25 表示在 $\sigma=10^{-2}$ 的典型情况下，降深—时间曲线和观测点位置 $z_d$ 的关系。从此图可以看出，在抽水早期和中期，潜

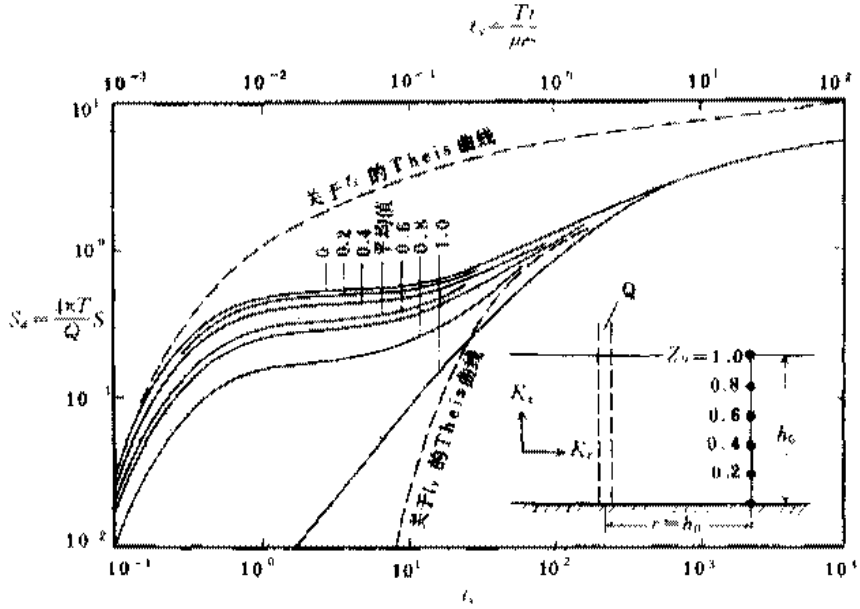



图 4—25　$\sigma=10^{-2}$，$h_d=1$，$K_d=1$ 时，无量纲降深-时间 $t_s$、$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

水面处的降深点小于含水层中任何一点的降深。所谓“迟后排水”或“潜水面迟后反应”就是从这个现象引出来的。

（3）水流状态变化：$h_d=1$ 的剖面上，不同时刻的降深分布曲线（图 4—26）反映出：抽

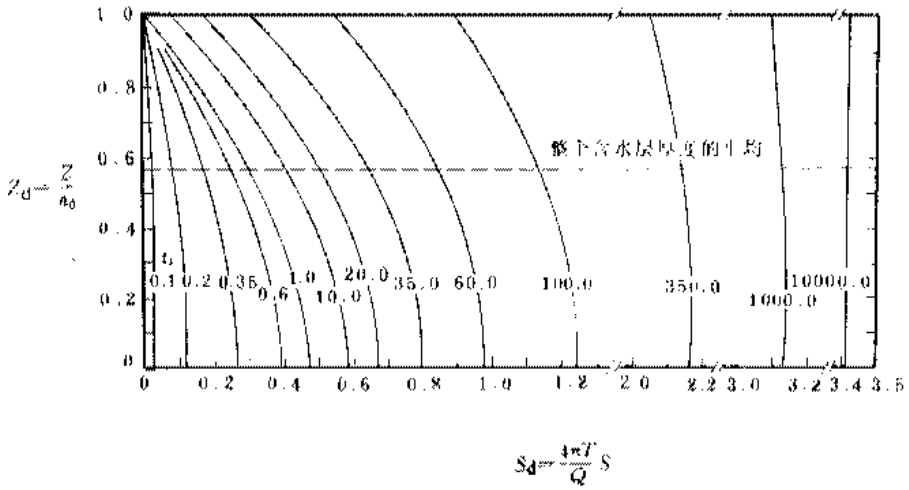



图 4—26　$\sigma=10^{-2}$，$h_d=1$，$K_d=1$ 时，无量纲高程 $z_d$ 与无量纲降深 $s_d$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

水早期和后期，降深分布曲线基本上是垂直线，即同一剖面不同深度的降深几乎是相同的，不存在垂向分速度，水流实质上是水平的，和 Dupuit 假设一致。因此，Theis 解成立，降深-时间曲线分别与有关 $\mu^*$ 及 $\mu$ 的 Theis 曲线一致。而在中间阶段，含水层上部存在着明显的垂向分速度。

（4）降深-时间曲线随径向距离的变化：图 4—27 显示出，在 $z_d=0$ 处距抽水井不同

$$t_s=\frac{Tt}{\mu^* r^2}$$

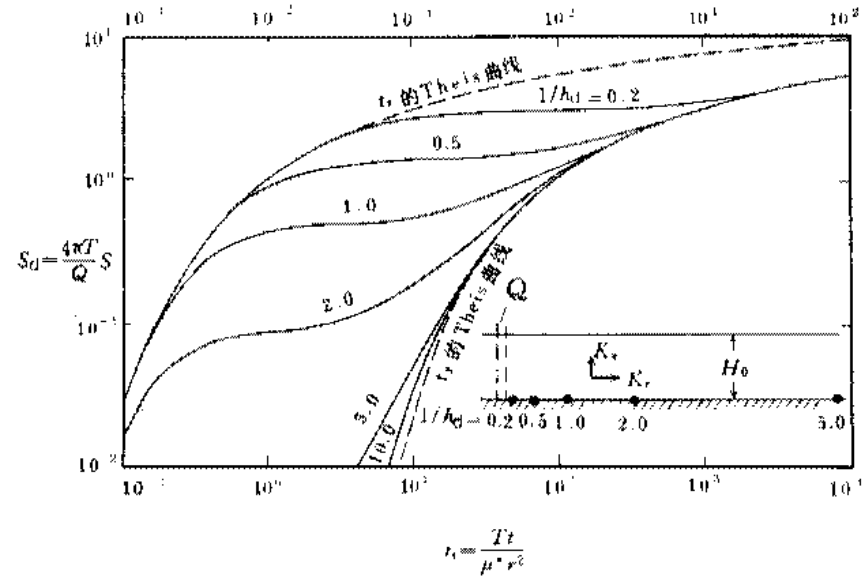



图 4—27　$\sigma=10^{-2}$，$z_d=0$，$K_d=1$ 时，无量纲降深 $s_d$ 与无量纲时间 $t_s$，$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

径向距离 $r$ 的点上，降深-时间曲线的形状不同。随着 $r$ 的增大，弹性贮存的作用逐渐减弱。在 $r>10H_0$ 的地段，弹性贮存的影响小到可以完全忽略不计。降深-时间曲线和与 $\mu$ 有关的 $t_y$ 的 Theis 曲线一致。

从图中还可以看出，潜水面迟后反应也随 $r$ 的增大减弱了。因此，前面讨论的降深-时间曲线的三个阶段，只是在 $r$ 不大的情况下才会明显地表现出来。

（5）各向异性对降深-时间曲线的影响：图 4—28 证实，在各向异性介质中，$K_0$ 愈小，水平分速度愈大，因而弹性释水作用和迟后反应愈明显。

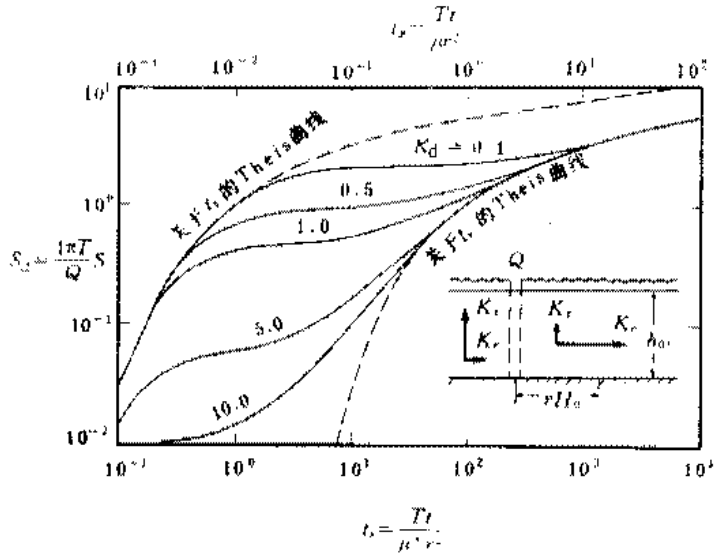



图 4—28　$\sigma=10^{-2}$，$z_d=0$，$h_d=1$ 时无量降深 $s_d$ 和无量纲时间 $t_s$，$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

3. 利用抽水试验资料确定水文地质参数

（1）配线法：当抽水井和观测孔都是完整井时，由（4—86）式确定的观测孔中的降深 $s(r,t)$ 包括三个独立的无量纲参数 $\sigma$，$\beta$ 和 $t_s$（或 $t_y$）。一般地讲，它们不能绘在一张图纸上。为了便于作图，必须减少独立参数的个数。为此，设 $\mu^*$ 远小于 $\mu$，令 $\sigma=0$，使独立参数减为两个，得到两组标准曲线，分别称为 A 组标准曲线（表示于图 4—29 的左侧）和 B 组标准曲线（表示于图 4—29 的右侧）。与 A 组标准曲线对应的坐标 $t_s$ 标在图的上端；与 B 组标准曲线对应的坐标 $t_y$ 标在图的下端。它们分别用来分析抽水早期和后期的降深资料。A 组曲线的右边部分和 B 组曲线的左边部分都趋近于一组水平的渐近线。当 $\sigma\to 0$ 时，二组标准曲线彼此相距无限远的距离。为此，必须采用不同的尺度（一个与 $t_s$ 对应，一个与 $t_y$ 对应）作图，才能把它们绘在一张图纸上。表 4—10 列出了绘制二组标准曲线的数据。

利用标准曲线确定有关参数的步骤如下：

①将观测孔中不同时刻的实测降深资料点在透明双对数坐标纸上，绘制 $s$-$t$ 曲线；

②把 $s$-$t$ 曲线重叠在 B 组曲线上，保持对应坐标轴平行，使后期 $s$-$t$ 曲线和 B 组曲线中某一曲线最优地重合，记下该曲线的 $\beta$ 值。在重叠部位任选一匹配点，读出相应坐标 $s$，$t$，$s_d$ 和 $t_y$。代入下式计算有关参数：

表 4-10a 完整井绘制标准

| $t_d$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.03$ | $\beta=0.06$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1\times10^{-1}$ | $2.48\times10^{-2}$ | $2.43\times10^{-2}$ | $2.41\times10^{-2}$ | $2.35\times10^{-2}$ | $2.30\times10^{-2}$ | $2.24\times10^{-2}$ | $2.14\times10^{-2}$ | $1.99\times10^{-2}$ | $1.88\times10^{-2}$ |
| $2\times10^{-1}$ | $1.45\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.36\times10^{-1}$ | $1.31\times10^{-1}$ | $1.27\times10^{-1}$ | $1.19\times10^{-1}$ | $1.08\times10^{-1}$ | $9.88\times10^{-2}$ |
| $3.5\times10^{-1}$ | $3.58\times10^{-1}$ | $3.52\times10^{-1}$ | $3.45\times10^{-1}$ | $3.31\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $3.04\times10^{-1}$ | $2.79\times10^{-1}$ | $2.44\times10^{-1}$ | $2.17\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{-1}$ | $6.62\times10^{-1}$ | $6.48\times10^{-1}$ | $6.33\times10^{-1}$ | $6.01\times10^{-1}$ | $5.70\times10^{-1}$ | $5.40\times10^{-1}$ | $4.83\times10^{-1}$ | $4.03\times10^{-1}$ | $3.43\times10^{-1}$ |
| $1\times10^{0}$ | $1.02\times10^{0}$ | $9.92\times10^{-1}$ | $9.63\times10^{-1}$ | $9.05\times10^{-1}$ | $8.49\times10^{-1}$ | $7.92\times10^{-1}$ | $6.88\times10^{-1}$ | $5.42\times10^{-1}$ | $4.38\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{0}$ | $1.57\times10^{0}$ | $1.52\times10^{0}$ | $1.46\times10^{0}$ | $1.35\times10^{0}$ | $1.23\times10^{0}$ | $1.12\times10^{0}$ | $9.18\times10^{-1}$ | $6.69\times10^{-1}$ | $4.97\times10^{-1}$ |
| $3.5\times10^{0}$ | $2.05\times10^{0}$ | $1.97\times10^{0}$ | $1.88\times10^{0}$ | $1.70\times10^{0}$ | $1.51\times10^{0}$ | $1.31\times10^{0}$ | $1.03\times10^{0}$ | $6.90\times10^{-1}$ | $5.07\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{0}$ | $2.52\times10^{0}$ | $2.41\times10^{0}$ | $2.27\times10^{0}$ | $1.99\times10^{0}$ | $1.73\times10^{0}$ | $1.47\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $6.96\times10^{-1}$ | |
| $1\times10^{1}$ | $2.97\times10^{0}$ | $2.80\times10^{0}$ | $2.61\times10^{0}$ | $2.22\times10^{0}$ | $1.85\times10^{0}$ | $1.53\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ | | |
| $2\times10^{1}$ | $3.56\times10^{0}$ | $3.30\times10^{0}$ | $3.00\times10^{0}$ | $2.41\times10^{0}$ | $1.92\times10^{0}$ | $1.55\times10^{0}$ | | | |
| $3.5\times10^{1}$ | $4.01\times10^{0}$ | $3.65\times10^{0}$ | $3.23\times10^{0}$ | $2.48\times10^{0}$ | $1.93\times10^{0}$ | | | | |
| $6\times10^{1}$ | $4.42\times10^{0}$ | $3.93\times10^{0}$ | $3.37\times10^{0}$ | $2.49\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ | | | | |
| $1\times10^{2}$ | $4.77\times10^{0}$ | $4.12\times10^{0}$ | $3.43\times10^{0}$ | $2.50\times10^{0}$ | | | | | |
| $2\times10^{2}$ | $5.16\times10^{0}$ | $4.26\times10^{0}$ | $3.45\times10^{0}$ | | | | | | |
| $3.5\times10^{2}$ | $5.40\times10^{0}$ | $4.29\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | | | | | | |
| $6\times10^{2}$ | $5.54\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | | | | | | | |
| $1\times10^{3}$ | $5.59\times10^{0}$ | | | | | | | | |
| $2\times10^{3}$ | $5.62\times10^{0}$ | | | | | | | | |
| $3.5\times10^{3}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.50\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ | $1.55\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ | $6.96\times10^{-1}$ | $5.07\times10^{-1}$ |

表 4-10b 完整井绘制标准

| $t_d$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.03$ | $\beta=0.06$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1\times10^{-4}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.50\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ | $1.56\times10^{0}$ | $1.09\times10^{0}$ | $6.97\times10^{-1}$ | $5.08\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{-4}$ | | | | | | | | | |
| $3.5\times10^{-4}$ | | | | | | | | | |
| $6\times10^{-4}$ | | | | | | | | | |
| $1\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.97\times10^{-1}$ | $5.08\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.97\times10^{-1}$ | $5.09\times10^{-1}$ |
| $3.5\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.98\times10^{-1}$ | $5.10\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{-3}$ | | | | | | | | $7.00\times10^{-1}$ | $5.12\times10^{-1}$ |
| $1\times10^{-2}$ | | | | | | | | $7.03\times10^{-1}$ | $5.16\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{-2}$ | | | | | | $1.56\times10^{0}$ | $1.09\times10^{0}$ | $7.10\times10^{-1}$ | $5.24\times10^{-1}$ |
| $3.5\times10^{-2}$ | | | | | $1.94\times10^{0}$ | $1.56\times10^{0}$ | $1.10\times10^{0}$ | $7.20\times10^{-1}$ | $5.37\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{-2}$ | | | | $2.50\times10^{0}$ | $1.95\times10^{0}$ | $1.57\times10^{0}$ | $1.11\times10^{0}$ | $7.37\times10^{-1}$ | $5.57\times10^{-1}$ |
| $1\times10^{-1}$ | | | | $2.51\times10^{0}$ | $1.96\times10^{0}$ | $1.58\times10^{0}$ | $1.13\times10^{0}$ | $7.63\times10^{-1}$ | $5.89\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{-1}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.52\times10^{0}$ | $1.98\times10^{0}$ | $1.61\times10^{0}$ | $1.18\times10^{0}$ | $8.29\times10^{-1}$ | $6.67\times10^{-1}$ |
| $3.5\times10^{-1}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.31\times10^{0}$ | $3.47\times10^{0}$ | $2.54\times10^{0}$ | $2.01\times10^{0}$ | $1.66\times10^{0}$ | $1.24\times10^{0}$ | $9.22\times10^{-1}$ | $7.80\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{-1}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.31\times10^{0}$ | $3.49\times10^{0}$ | $2.57\times10^{0}$ | $2.06\times10^{0}$ | $1.73\times10^{0}$ | $1.35\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $9.54\times10^{-1}$ |
| $1\times10^{0}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.32\times10^{0}$ | $3.51\times10^{0}$ | $2.62\times10^{0}$ | $2.13\times10^{0}$ | $1.83\times10^{0}$ | $1.50\times10^{0}$ | $1.29\times10^{0}$ | $1.20\times10^{0}$ |
| $2\times10^{0}$ | $5.64\times10^{0}$ | $4.35\times10^{0}$ | $3.56\times10^{0}$ | $2.73\times10^{0}$ | $2.31\times10^{0}$ | $2.07\times10^{0}$ | $1.85\times10^{0}$ | $1.72\times10^{0}$ | $1.68\times10^{0}$ |
| $3.5\times10^{0}$ | $5.65\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $3.63\times10^{0}$ | $2.88\times10^{0}$ | $2.55\times10^{0}$ | $2.37\times10^{0}$ | $2.23\times10^{0}$ | $2.17\times10^{0}$ | $2.15\times10^{0}$ |
| $6\times10^{0}$ | $5.67\times10^{0}$ | $4.44\times10^{0}$ | $3.74\times10^{0}$ | $3.11\times10^{0}$ | $2.86\times10^{0}$ | $2.75\times10^{0}$ | $2.68\times10^{0}$ | $2.66\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ |
| $1\times10^{1}$ | $5.70\times10^{0}$ | $4.52\times10^{0}$ | $3.90\times10^{0}$ | $3.40\times10^{0}$ | $3.24\times10^{0}$ | $3.18\times10^{0}$ | $3.15\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ |
| $2\times10^{1}$ | $5.76\times10^{0}$ | $4.71\times10^{0}$ | $4.22\times10^{0}$ | $3.92\times10^{0}$ | $3.85\times10^{0}$ | $3.83\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ |
| $3.5\times10^{1}$ | $5.85\times10^{0}$ | $4.94\times10^{0}$ | $4.58\times10^{0}$ | $4.40\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ |
| $6\times10^{1}$ | $5.99\times10^{0}$ | $5.23\times10^{0}$ | $5.00\times10^{0}$ | $4.92\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ |
| $1\times10^{2}$ | $6.16\times10^{0}$ | $5.59\times10^{0}$ | $5.46\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ |

**曲线 A 的 $s_d$ 数值表**　　（根据 Neuman）

| $t_y$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.03$ | $\beta=0.06$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta=0.8$ | $\beta=1.0$ | $\beta=1.5$ | $\beta=2.0$ | $\beta=2.5$ | $\beta=3.0$ | $\beta=4.0$ | $\beta=5.0$ | $\beta=6.0$ | $\beta=7.0$ |
| $1.79\times10^{-3}$ | $1.70\times10^{-3}$ | $1.53\times10^{-3}$ | $1.38\times10^{-2}$ | $1.25\times10^{-2}$ | $1.13\times10^{-2}$ | $9.33\times10^{-3}$ | $7.72\times10^{-2}$ | $6.39\times10^{-3}$ | $5.30\times10^{-2}$ |
| $9.15\times10^{-2}$ | $8.49\times10^{-2}$ | $7.13\times10^{-2}$ | $6.03\times10^{-2}$ | $5.11\times10^{-2}$ | $4.35\times10^{-2}$ | $3.17\times10^{-2}$ | $2.34\times10^{-2}$ | $1.74\times10^{-2}$ | $1.31\times10^{-2}$ |
| $1.94\times10^{-1}$ | $1.75\times10^{-1}$ | $1.36\times10^{-1}$ | $1.07\times10^{-1}$ | $8.46\times10^{-2}$ | $6.78\times10^{-2}$ | $4.45\times10^{-2}$ | $3.02\times10^{-2}$ | $2.10\times10^{-2}$ | $1.51\times10^{-2}$ |
| $2.96\times10^{-1}$ | $2.56\times10^{-1}$ | $1.82\times10^{-1}$ | $1.33\times10^{-1}$ | $1.01\times10^{-1}$ | $7.67\times10^{-2}$ | $4.76\times10^{-2}$ | $3.13\times10^{-2}$ | $2.14\times10^{-2}$ | $1.52\times10^{-2}$ |
| $3.60\times10^{-1}$ | $3.00\times10^{-1}$ | $1.99\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.79\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ | | $2.15\times10^{-2}$ | |
| $3.91\times10^{-1}$ | $3.17\times10^{-1}$ | $2.03\times10^{-1}$ | $1.41\times10^{-1}$ | | | | | | |
| $3.94\times10^{-1}$ | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| | | | | | | | | | |
| $3.94\times10^{-1}$ | $3.17\times10^{-1}$ | $2.03\times10^{-1}$ | $1.41\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.79\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ | $3.18\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ | $1.52\times10^{-2}$ |

注：表中数值是由(4—175)式取 $\alpha=10^{-2}$ 求得的。

**曲线 B 的 $s_d$ 数值表**　　（根据 *Neuman*）

| $t_y$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.03$ | $\beta=0.06$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\beta=0.8$ | $\beta=1.0$ | $\beta=1.5$ | $\beta=2.0$ | $\beta=2.5$ | $\beta=3.0$ | $\beta=4.0$ | $\beta=5.0$ | $\beta=6.0$ | $\beta=7.0$ |
| $3.95\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $2.04\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.80\times10^{-2}$ | $4.79\times10^{-2}$ | $1.14\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ | $1.53\times10^{-2}$ |
| | | | | | $7.81\times10^{-2}$ | $4.80\times10^{-2}$ | $3.15\times10^{-2}$ | $2.16\times10^{-2}$ | $1.53\times10^{-2}$ |
| | | | | $1.03\times10^{-1}$ | $7.83\times10^{-2}$ | $4.81\times10^{-2}$ | $3.16\times10^{-2}$ | $2.17\times10^{-2}$ | $1.54\times10^{-2}$ |
| | | | | $1.04\times10^{-1}$ | $7.85\times10^{-2}$ | $4.84\times10^{-2}$ | $3.18\times10^{-2}$ | $2.19\times10^{-2}$ | $1.56\times10^{-2}$ |
| $3.95\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $2.04\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.04\times10^{-1}$ | $7.89\times10^{-2}$ | $4.88\times10^{-2}$ | $3.21\times10^{-2}$ | $2.21\times10^{-2}$ | $1.58\times10^{-2}$ |
| $3.96\times10^{-1}$ | $3.19\times10^{-1}$ | $2.05\times10^{-1}$ | $1.43\times10^{-1}$ | $1.05\times10^{-1}$ | $7.99\times10^{-2}$ | $4.96\times10^{-2}$ | $3.29\times10^{-2}$ | $2.28\times10^{-2}$ | $1.64\times10^{-2}$ |
| $3.97\times10^{-1}$ | $3.21\times10^{-1}$ | $2.07\times10^{-1}$ | $1.45\times10^{-1}$ | $1.07\times10^{-1}$ | $8.14\times10^{-2}$ | $5.09\times10^{-2}$ | $3.41\times10^{-2}$ | $2.39\times10^{-2}$ | $1.73\times10^{-2}$ |
| $3.99\times10^{-1}$ | $3.23\times10^{-1}$ | $2.09\times10^{-1}$ | $1.47\times10^{-1}$ | $1.09\times10^{-1}$ | $8.38\times10^{-2}$ | $5.32\times10^{-2}$ | $3.61\times10^{-2}$ | $2.57\times10^{-2}$ | $1.89\times10^{-2}$ |
| $4.03\times10^{-1}$ | $3.27\times10^{-1}$ | $2.13\times10^{-1}$ | $1.52\times10^{-1}$ | $1.13\times10^{-1}$ | $8.79\times10^{-2}$ | $5.68\times10^{-2}$ | $3.93\times10^{-2}$ | $2.86\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ |
| $4.12\times10^{-1}$ | $3.37\times10^{-1}$ | $2.24\times10^{-1}$ | $1.62\times10^{-1}$ | $1.24\times10^{-1}$ | $9.80\times10^{-2}$ | $6.61\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ | $3.62\times10^{-2}$ | $2.84\times10^{-2}$ |
| $4.25\times10^{-1}$ | $3.50\times10^{-1}$ | $2.39\times10^{-1}$ | $1.78\times10^{-1}$ | $1.39\times10^{-1}$ | $1.13\times10^{-1}$ | $8.06\times10^{-2}$ | $6.12\times10^{-2}$ | $4.86\times10^{-2}$ | $3.98\times10^{-2}$ |
| $4.47\times10^{-1}$ | $3.74\times10^{-1}$ | $2.65\times10^{-1}$ | $2.05\times10^{-1}$ | $1.66\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.06\times10^{-1}$ | $8.53\times10^{-2}$ | $7.14\times10^{-2}$ | $6.14\times10^{-2}$ |
| $4.83\times10^{-1}$ | $4.12\times10^{-1}$ | $3.07\times10^{-1}$ | $2.48\times10^{-1}$ | $2.10\times10^{-1}$ | $1.84\times10^{-1}$ | $1.49\times10^{-1}$ | $1.28\times10^{-1}$ | $1.13\times10^{-1}$ | $1.02\times10^{-1}$ |
| $5.71\times10^{-1}$ | $5.06\times10^{-1}$ | $4.10\times10^{-1}$ | $3.57\times10^{-1}$ | $3.23\times10^{-1}$ | $2.98\times10^{-1}$ | $2.66\times10^{-1}$ | $2.45\times10^{-1}$ | $2.31\times10^{-1}$ | $2.20\times10^{-1}$ |
| $6.97\times10^{-1}$ | $6.42\times10^{-1}$ | $5.62\times10^{-1}$ | $5.17\times10^{-1}$ | $4.89\times10^{-1}$ | $4.70\times10^{-1}$ | $4.45\times10^{-1}$ | $4.30\times10^{-1}$ | $4.19\times10^{-1}$ | $4.11\times10^{-1}$ |
| $8.89\times10^{-1}$ | $8.50\times10^{-1}$ | $7.92\times10^{-1}$ | $7.63\times10^{-1}$ | $7.45\times10^{-1}$ | $7.33\times10^{-1}$ | $7.18\times10^{-1}$ | $7.09\times10^{-1}$ | $7.03\times10^{-1}$ | $6.99\times10^{-1}$ |
| $1.16\times10^{0}$ | $1.13\times10^{0}$ | $1.10\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $1.06\times10^{0}$ | $1.06\times10^{0}$ | $1.05\times10^{0}$ | $1.05\times10^{0}$ |
| $1.66\times10^{0}$ | $1.65\times10^{0}$ | $1.64\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ |
| $2.15\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $24.1\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ |
| $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ |
| $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ |
| $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ |
| $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ |
| $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ |
| $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $4.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ |

注：表中数值是由(4—175 式)取 $\alpha=10^{-6}$ 求得的。

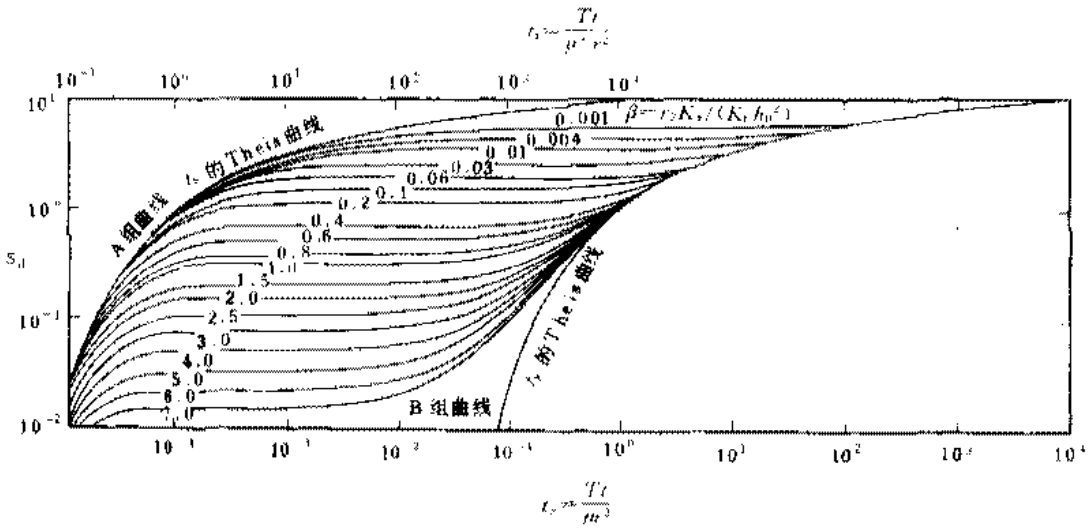



图 4—29　潜水含水层完整井定流量抽水时的标准曲线

（据 S. P. Neuman）

$$T=\frac{1Q\ [s_d]}{4\pi\ [s]}=0.08\frac{Q\ [s_d]}{[s]},\qquad \mu=\frac{T\ (t)}{r^2\ [t_y]} \tag{4—93}$$

③类似第②步，使早期 $s$-$t$ 曲线和 A 组曲线中某一曲线最优地重合。此曲线的 $\beta$ 值应和第②步所得 $\beta$ 值相同；否则，这两步要重做。在重叠部位任选一匹配点，读出相应坐标 $s$，$t$，$s_d$ 和 $t_s$。代入（4—93）式和下式计算有关参数。两次求得的 $T$ 值应大致相近。

$$\mu^*=\frac{T\ (t)}{r^2\ [t_s]} \tag{4—94}$$

④确定了导水系数后，由下式计算径向渗透系数：

$$K_r=\frac{T}{H_0} \tag{4—95}$$

并由式

$$K_d=\beta\frac{H_0^2}{r^2} \tag{4—96}$$

根据 $\beta$ 值确定各向异性的主渗透系数的比值 $K_d$。已知 $K_r$ 和 $K_d$ 后，还可由下式确定垂向渗透系数 $K_z$：

$$K_z=K_dK_r \tag{4—97}$$

$\sigma$ 值则由下式确定：

$$\sigma=\frac{\mu^*}{\mu} \tag{4—98}$$

上法只适用于完整观测孔。对于非完整观测孔，首先需要为此观测孔计算出两组（A 组和 B 组）特定的标准曲线的数据，并据此绘成曲线。其它步骤则和完整观测孔相似。

（2）直线图解法：把表 4—10 中的数据点在一张单对数坐标纸上（图 4—30），则抽水后期的数据落在直线

$$s_d=2.3\lg2.25t_y \tag{4—99}$$

上，中期的数据则位于一条水平直线上，某些早期的数据则落在直线

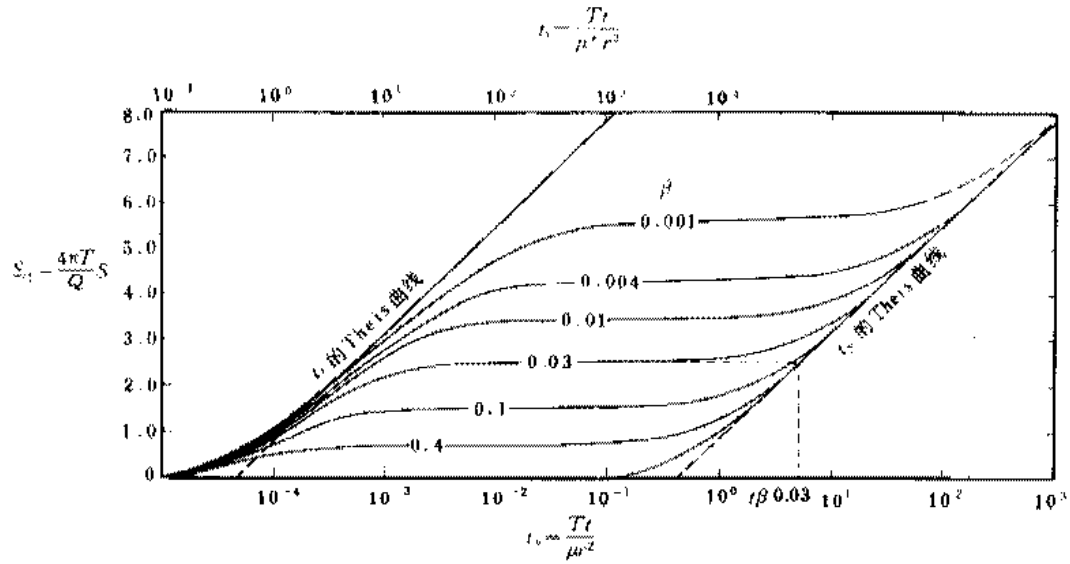



图 4—30 完整观测孔无量纲降深-无量纲时间的半对数曲线

（据 S. P. Neuman）

$$s_d=2.3\lg 2.25t_y \tag{4—100}$$

的附近。利用上述性质确定有关参数的步骤如下：

①将实测 $s$-$t$ 数据点在单对数坐标纸上；

②后期的 $s$-$t$ 数据应位于一条直线上，量得此直线段的斜率为 $i_L$，延长此直线段，读得它在 $s_d=0$ 的横坐标上的截距为 $t_L$。于是可按下式计算导水系数和给水度：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i_L}=0.183\frac{Q}{i_L},\qquad \mu=\frac{2.25Tt_L}{r^2} \tag{4—101}$$

③将实测曲线中间的水平直线段向右延长，和后期直线（或其延长线）交于一点。读得此点的横坐标为 $t_{y\beta}$。然后根据上一步求得的 $T$ 和 $\mu$，由下式计算相应的 $t_{y\beta}$ 值：

$$t_{y\beta}=\frac{Tt_\beta}{\mu r^2} \tag{4—102}$$

于是从图 4—31 可直接读出 $\beta$ 值。如 $t_{y\beta}$ 在 4.0—100.0 间，则可由下式计算 $\beta$ 值：

$$\beta=\frac{0.195}{t_{y\beta}^{1.1053}} \tag{4—103}$$

④如果实测 $s$-$t$ 曲线的早期部分也出现直线段，而且和后期部分的直线段彼此平行，则可用下述方法确定 $T$ 和 $\mu'$；否则，不能用这一步，仍需通过配线法确定参数。

量出早期直线段的斜率 $i_L$，延长此直线段，读得它在 $s_d=0$ 的横轴上的截距 $t_E$。然后按下式计算有关参数：

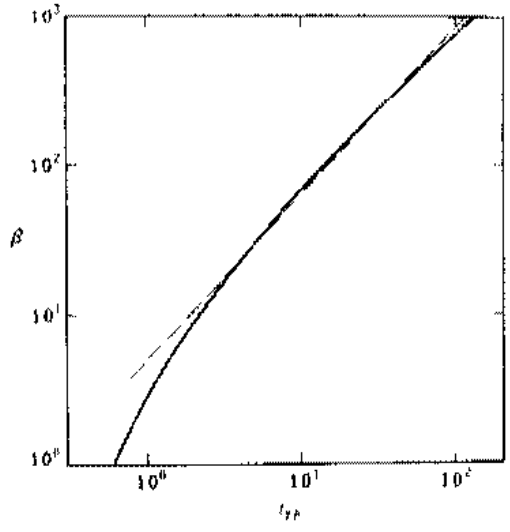



图 4—31 完整观测孔的 $\frac{1}{\beta}$ 与 $t_{y\beta}$ 关系曲线

（据 S. P. Neuman）

$$T=0.183\frac{Q}{i_E},\qquad \mu'=2.25\frac{Tt_E}{r^2} \tag{4—104}$$

这一步和第②步确定的两个 $T$ 值应大致相等。

⑤根据（4—95）至（4—98）式计算 $K_r$、$K_\theta$、$K_z$ 和 $\sigma$。$\sigma$ 值也可由下式确定：

$$\sigma=\frac{t_E}{t_L} \tag{4—105}$$

（3）恢复水位法：Neuman 模型不述及非饱和带水运动理论，仅仅把自由面视为可移动边界，故不论潜水面上升还是下降，（4—86）式都可应用。因此，可以根据抽水井或观测孔的水位恢复资料确定含水层的导水系数。设 $t_p$ 为抽水持续时间，$t'$ 为从停泵开始算起的水位恢复时间。绘制 $s'$-$\lg\left(1+\frac{t_p}{t'}\right)$ 曲线（$s'$ 为剩余降深），在 $1+\frac{t_p}{t'}$ 较小，即恢复时间较长的情况下，会出现直线段。根据此直线段的斜率，可由（4—101）式计算导水系数。

最后应指出，（4—86）式是在潜水面下降远小于含水层厚度 $H_0$ 的情况下导出的。如不满足上述条件，应该用（4—66）式对降深修正。（4—66）式是在 Dupuit 假设的前提下导出的。但由于“潜水面迟后反应”，含水层中的水流不能始终保持 Dupuit 假设。因此，只能对后期抽水数据用（4—66）式修正。

**思考题：**

1. Boulton 模型的基本假设是什么？理论解释上有何困难？试评述之。
2. 如何理解 Neuman 的迟后排水的概念？
3. 为了求得潜水含水层的给水度 $\mu$，对抽水试验的延续时间有什么要求？

# 第五章　地下水向边界附近井的运动

在自然界中，任何含水层的分布都是有限的。当边界距抽水井较远，且抽水时间较短，在抽水过程中边界对抽水井不发生明显影响时，就可当作无限含水层来处理。但当井打在边界附近，或在长期抽水情况下，边界对水流有明显影响时，就必须考虑边界的存在。

边界基本上分为补给边界（供水边界）和隔水边界（不透水边界）二类。属于哪一类边界，要据具体水文地质条件来确定。

实际的边界常常是弯曲的、不规则的。为便于计算，常把它简化成直线，并把含水层的分布范围简化成规则的几何形状。

## §5—1　镜像法原理及直线边界附近的井流

### 一、镜像法原理

如在平面镜前放一物体，镜中就有一虚像存在。物体和虚像的位置对镜子是对称的，形状是相同的。为此，把直线边界想象成一面镜子，若边界附近存在工作的真实的井（称为实井），相应地在边界的另一侧会映出一口虚构的井（称为虚井）。为了将有界井流问题化为无界井流问题，且变化后保持原问题的边界性质不变，虚井应有下列特征：

（1）虚井和实井的位置对边界是对称的；

（2）虚井的流量和实井相等；

（3）虚井性质取决于边界性质，对于定水头补给边界，虚井性质和实井相反；如实井为抽水井，则虚井为注水井；对于隔水边界，虚井和实井性质相同，都是抽水井；

（4）虚井的工作时间和实井相同；

边界的影响可用虚井的影响代替，把实际上有界的渗流区化为虚构的无限渗流区，把求解边界附近的单井抽水问题，化为求解无限含水层中实井和虚井同时抽（注）水问题。但要求仍保持原有的其他边界条件和水流状态。利用叠加原理，可求得原问题的解。数学上可以证明这是合理的。这样，利用虚井把有界含水层的解和无界含水层的解联系起来，后者有现成的解析解，因此有界含水层的求解就比较容易了。这种方法称为镜像法或映射法。

### 二、直线边界附近的井流

1、稳定流

（1）直线补给边界附近的稳定井流：先考虑承压水井。设抽水井的流量为$Q$，井中心至边界的垂直距离为$a$，则在边界的另一侧$-a$的位置上映出一口流量为$-Q$的注水井（图5—1）。因为承压水的降深$s$为线性函数，故可进行叠加。

$$s=s_1+(-s_2)=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_1}+\frac{-Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{R_2}=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{5—1}$$

式中：$s$——边界附近任一点$p(x,y)$的降深值；

$s_1$——由实井引起的降深；

$s_2$——由虚井引起的降深；

$r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$——研究点至实井的距离；

$r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$——研究点至虚井的距离。

相应的流网表示在图 5—1（d）中。

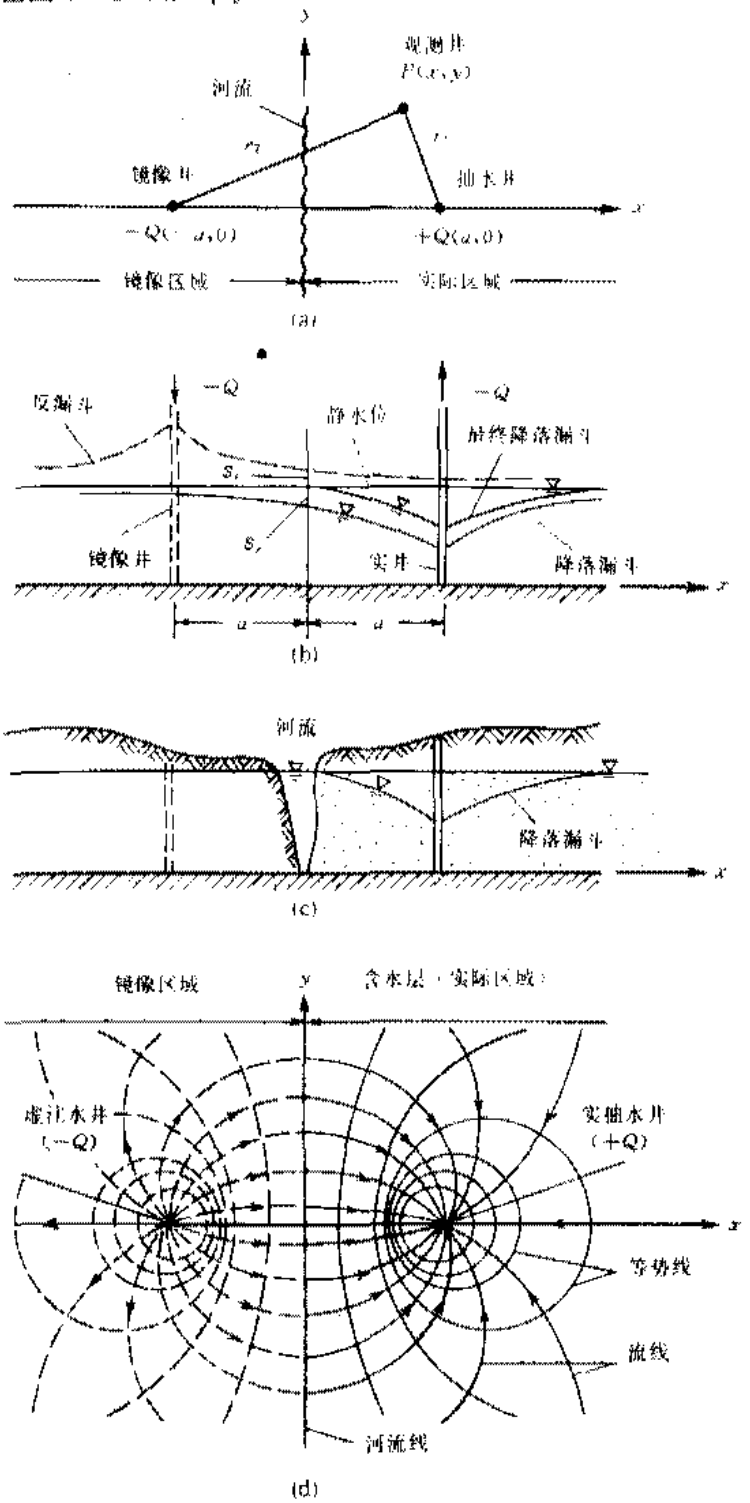



图 5—1　直线补给边界附近的稳定井流

（据 J. Bear）

对于潜水含水层，$s$ 不是线性函数，不能进行叠加。但 $\frac{1}{2}h^2$ 是线性函数，故有

$$\Delta h^2 = H_0^2 - h^2 = \Delta h_1^2 + (-\Delta h_2^2)$$

$$= \frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R}{r_1} + \frac{-Q}{\pi K}\ln\frac{R}{r_2}$$

$$= \frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r_2}{r_1} \qquad (5-2)$$

为了便于计算，把研究点移至抽水井井壁，即 $r_1 = r_w$，$r_2 \simeq 2a$，则得承压水

$$Q = 2\pi\frac{KMs_w}{\ln\frac{2a}{r_w}} \qquad (5\ \ 3)$$

潜水：

$$Q = \pi K\frac{(2H_0 - s_w)\ s_w}{\ln\frac{2a}{r_w}} \qquad (5-4)$$

式中，$r_w$ 为水井半径，$H_0$ 为承压含水层的初始水头或潜水含水层的初始厚度。上述推导的前提是 $2a \ll R$，式中 $R$ 为影响半径。否则，边界在抽水过程中不发生影响，如果仍用（5—3）式和（5—4）式计算，将会产生不合理的结果。

（2）直线隔水边界附近的稳定井流（图 5—2）：根据镜像法原理，在边界的另一侧映出一个流量也是 $Q$ 的虚井。对于承压含水层，该情况下降深等于实井和虚井降深的叠加。

$$s = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_1} + \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_2} = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R^2}{r_1 r_2} \qquad (5-5)$$

对于潜水含水层，有：

$$H_0^2 - h^2 = \frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R^2}{r_1 r_2} \qquad (5-6)$$

为了便于计算，把研究点 $p$（$x$，$y$）移至抽水井井壁，则 $r_1 = r_w$，$r_2 \simeq 2a$，得：

承压水：

$$Q = 2\pi T\frac{s_w}{\ln\frac{R^2}{2ar_w}} \qquad (5-7)$$

潜水：

$$Q = \pi K\frac{(2H_0 - s_w)\ s_w}{\ln\frac{R^2}{2ar_w}} \qquad (5-8)$$

式中符号同前。同理，以上各式也只适用于 $a < R_0/2$ 的情况。

2. 非稳定流

（1）直线补给边界附近的非稳定井流：和稳定流的情况相似，虚井是流量为 $-Q$ 的注水井，利用叠加原理，对承压水井可得：

$$s = \frac{Q}{4\pi T}[W(u_1) - W(u_2)] \qquad (5-9)$$

式中：

$$u_i = \frac{r_i^2\mu^*}{4Tt} \qquad (i = 1,\ 2)$$

当抽水时间 $t$ 延长到一定程度，使 $u_1$ 和 $u_2$ 均小于 0.01 时，则可利用 Jacob 近似公式，于是（5—9）式变为：

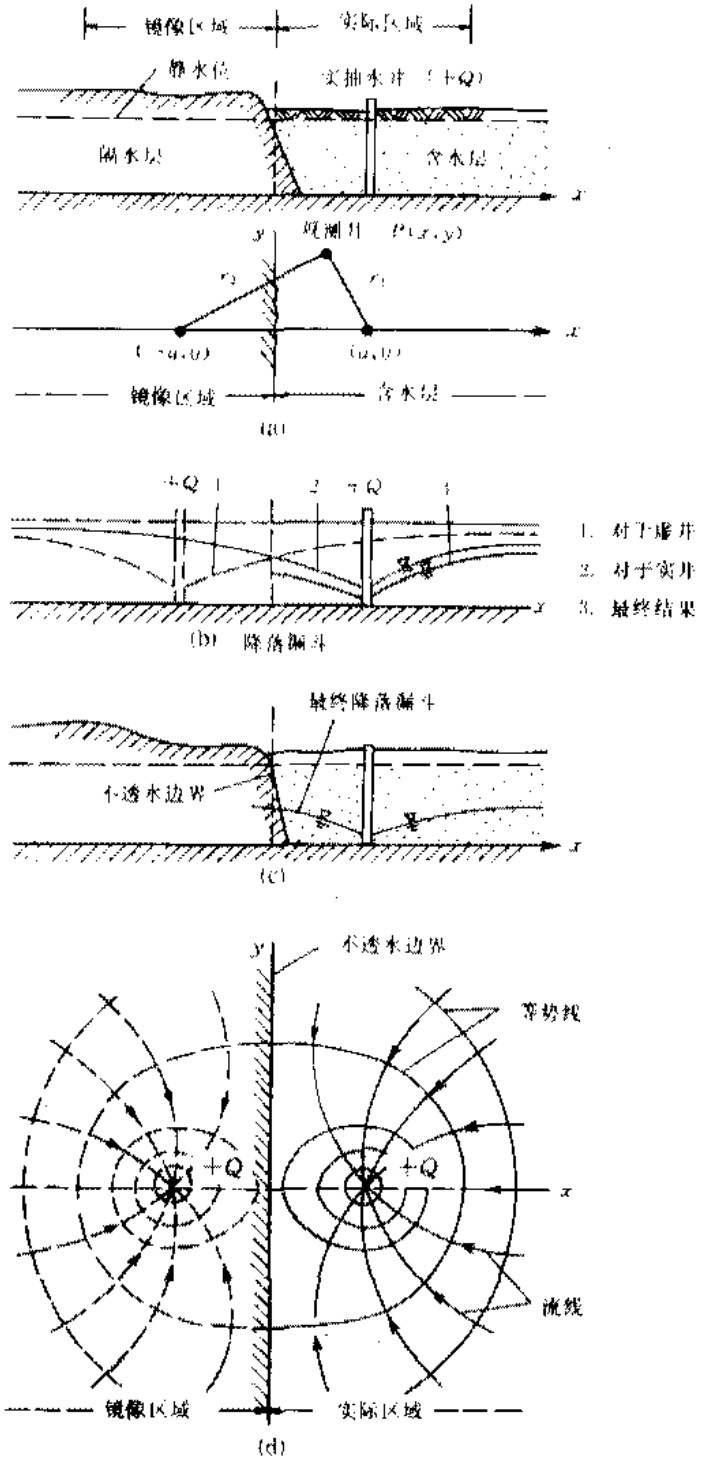



图 5—2　直线隔水边界附近的稳定井流

(据 J. Bear)

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left(\ln\frac{2.25Tt}{r_1^2\mu^*}-\ln\frac{2.25Tt}{r_2^2\mu^*}\right)=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{5—10}$$

对于潜水，当降深不大时，忽略三维流的影响，类似地可得：

$$H_0^2-h^2=\frac{Q}{2\pi K}\left[W\left(u_1\right)-W\left(u_2\right)\right] \tag{5—11}$$

式中，$u_i=\frac{r_i^2\mu}{4Tt}$ $(i=1,2)$；$\mu$ 为给水度；$T=Kh_m$，导水系数；$h_m$ 为平均厚度。当 $\mu\leqslant 0.01$ 时有：

$$H_0^2-h^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{5—12}$$

式（5—11）和式（5—12）式都没有包含时间因素 $t$，和稳定流公式（5—1）式和（5—2）式完全相同，表示存在补给边界时，抽水一定时间以后降深能达到稳定。

（2）直线隔水边界附近的非稳定井流：该情况下虚并是抽水井，对承压水井利用叠加原理得：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(u_1\right)+W\left(u_2\right)\right] \tag{5—13}$$

随着抽水时间的延长，$u_1$ 和 $u_2$ 都变得小于 0.01 以后，（5—13）式变为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left(\ln\frac{2.25Tt}{r_1^2\mu^*}+\ln\frac{2.25Tt}{r_2^2\mu^*}\right)=0.366\frac{Q}{T}\lg\frac{2.25Tt}{r_1r_2\mu^*} \tag{5—14}$$

对于潜水则有

$$H_0^2-h^2=\frac{Q}{2\pi K}\left[W\left(u_1\right)+W\left(u_2\right)\right]=0.732\frac{Q}{K}\lg\frac{2.25Tt}{r_1r_2\mu} \tag{5—15}$$

由（5—14）式或（5—15）式可看出，随着 $t$ 的增大，降深 $s$ 也增大。因此，隔水边界附近的井流如果没有其他的补给源，不可能达到稳定。

（3）根据非稳定流抽水试验资料求参数：求参数的方法，一般仍用直线图解法和配线法。应用配线法时，要根据抽水井和观测孔的位置制定特定的标准曲线。

下面举一个特定标准曲线的例子，即当观测孔位于抽水井到边界的垂直线上。若抽水井至边界的距离为 $a$，至观测孔的距离为 $r$，则 $r_1=r$，$r_2=2a\pm r$（取负号表示观测孔位于抽水井和边界之间，取正号表示观测孔和边界分别位于抽水井两侧），则：

$$\frac{u_2}{u_1}=\frac{r_2^2}{r_1^2}=\left(\frac{2a}{r}\pm 1\right)^2$$

故有：

$$u_2=\left(\frac{2a}{r}\pm 1\right)^2u_1 \tag{5—16}$$

这样，只要已知 $u_1$ 和 $\frac{r}{a}$ 值，即可算出 $u_2$。查井函数表 4—1 得 $W\left(u_2\right)$。因而可求得 $W\left(u_1\right)\pm W\left(u_2\right)$ 值。如果引进二个新的井函数：

$$\Phi\left(u_1,\frac{r}{a}\right)=W\left(u_1\right)+W\left(u_2\right)$$

$$\Phi'\left(u_1,\frac{r}{a}\right)=W\left(u_1\right)-W\left(u_2\right)$$

则计算隔水边界附近井流的（5—13）式变为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\Phi\left(u_1,\frac{r}{a}\right)=\frac{0.08Q}{T}\Phi\left(u_1,\frac{r}{a}\right) \tag{5—17}$$

计算补给边界附近井流的（5—9）式变为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\Phi'\left(u_1,\frac{r}{a}\right)=\frac{0.08Q}{T}\Phi'\left(u_1,\frac{r}{a}\right) \tag{5—18}$$

我们可以作 $\frac{1}{u_1}$ 和 $\Phi\left(u,\frac{r}{a}\right)$ 及 $\Phi'\left(u,\frac{r}{a}\right)$ 的关系曲线（图 5—3）。$\Phi\left(u_1,\frac{r}{a}\right)-\frac{1}{u_1}$ 曲线位于

Theis 曲线的上部。$\Phi'\left(u_1, \frac{r}{\alpha}\right)-\frac{1}{u_1}$曲线位于 Theis 曲线的下部，曲线的右部出现水平段，表示抽水已达稳定状态。有了标准曲线，即可应用配线法求参数。必须注意，图 5--3 的标准曲线是特定的，当抽水井和观测孔的连线不垂直于边界时不能应用。

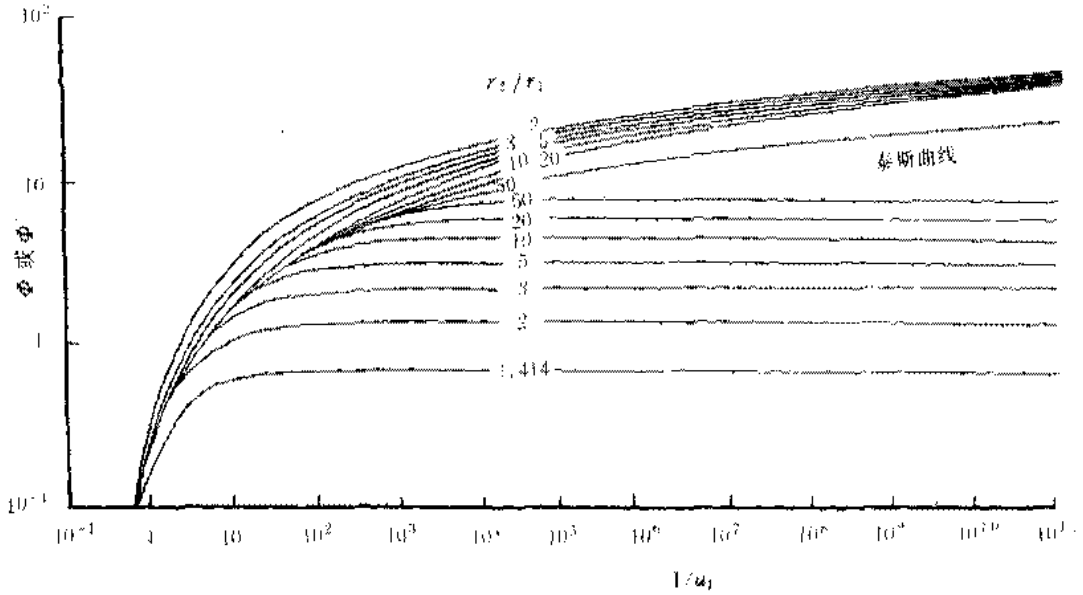



图 5 -3 边界附近水井非稳定流抽水的标准曲线

不管观测孔的位置如何，只要抽水的时间足够长，都可用直线图解法求参数。

由上一章可知，当边界尚未发生影响时，其情况和无限含水层相同，有公式：

$$s=\frac{0.183Q}{T}\lg\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}$$

单对数纸上的 $s$-$t$ 曲线为直线，斜率为$\frac{0.183Q}{T}$。而在隔水边界影响的情况下，由（5—14）式可知，$s$-$t$ 直线的斜率为 $0.366\frac{Q}{T}$，增加了一倍，单对数纸上的 $s$-$t$ 曲线出现二个斜率相差一倍的直线段。早期直线在横轴上的截距为 $t_0$，早期直线和晚期直线交点的横坐标为 $t_i$（图 5 -4 的曲线 b）。如利用早期直线段求导水系数，则公式为：

$$T=0.183\frac{Q}{i} \qquad (5-19)$$

如利用晚期直线段求导水系数，则有：

$$T=0.366\frac{Q}{i} \qquad (5-20)$$

式中，$i$ 为直线段斜率。

求贮水系数利用下式：

$$\mu^*=\frac{2.25Tt_0}{r^2} \qquad (5-21)$$

在有补给边界影响的情况下，抽水一定时间以后达到稳定，在单对数纸上出现水平线段。它和边界影响前的倾斜直线有个交点，交点的横坐标也以 $t_i$ 表示，倾斜直线在横坐标上的截距为 $t_0$（图 5—4 中的曲线 a）。此时仍用（5—19）式和（5--21）式计算参数。

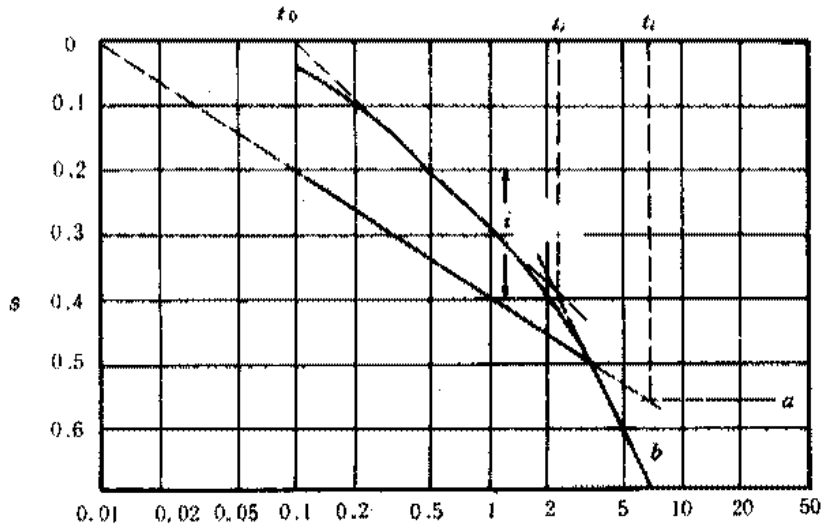



图 5—4　直线边界附近的 $s$-lg$t$ 曲线

a—补给边界附近的曲线；b—隔水边界附近的曲线

**思考题：**

1. 用镜像法求得的流网中，补给边界是流线还是等势线？隔水边界呢？

2. 设补给边界附近有二口抽水井和一口注水井同时工作，试用镜像法映出它们的像，并写出相应的计算公式。

## §5—2　扇形含水层中的井流

两个会聚边界可组成扇形含水层。对扇形含水层使用镜像法时，除了要满足上面提到的一般规则以外，还要满足下列条件：

（1）扇形含水层有两条边界，对于某一条边界而言，不仅映出井的像，而且也映出另一条边界的像。这样就要连续映像，直到虚井和虚边界布满整个平面为止。

（2）水井必须是整数，所以在扇形含水层应用镜像法时，对其夹角有一定要求，即 360° 必须能被扇形的夹角 $\theta$ 所整除。当含水层中只有一口实井时，平面上的总井数为：

$$n=\frac{360}{\theta} \tag{5—22}$$

虚井数为：

$$n_{虚}=\frac{360}{\theta}-1 \tag{5—23}$$

（3）实井和虚井在平面上位置的轨迹为一个圆，圆心在扇形的顶点，半径等于从水井至扇形顶点的距离。

（4）根据 J. G. Ferris 等人的研究，对扇形含水层应用镜像法时，其夹角和边界性质的组合还必须满足一定的条件。如两边界都是补给边界或都是隔水边界时，$\theta$ 角必须能整除 180°；如两边界一个是补给边界，另一个是隔水边界，则 $\theta$ 角必须能整除 90°。如不满足这个条件，应用镜像法的结果将出现矛盾。$\theta$ 角为 120°时是一个特殊情况，只有当两条边界都是隔水边界，而且抽水井位于 $\theta$ 角的平分线上时，才能应用镜像法。

当然，自然界中的扇形含水层不可能正好具有上述夹角。只要夹角相近，应用镜像法不至于引起很大的误差，可以用来进行近似的计算。

下面列举几种常见的扇形含水层。

## 一、象限含水层（$\theta$ 角为 90°）

象限含水层的几种情况如图 5—5 所示。下面分别讨论其稳定流和非稳定流计算。

1、稳定流计算

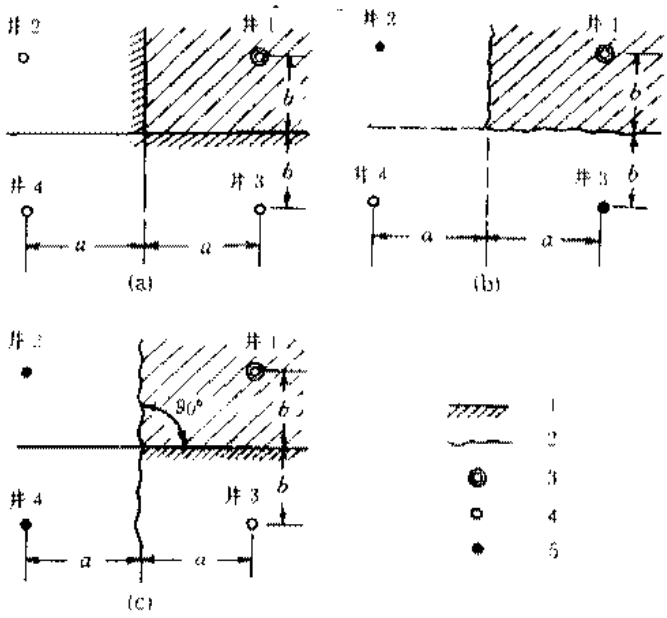



图 5—5　象限含水层中的镜像法

(a) —两条隔水边界的情况；(b) —两条补给边界的情况；(c) —一条补给边界一条隔水边界的情况

1—隔水边界；2—补给边界；3—实抽水井；4—虚抽水井；5—注水井

当两边界都是隔水边界时，三口虚井都是抽水井〔图 5—5 (a)〕，边界的影响相当于含水层中有四口井同时抽水。假设影响半径 $R$ 相当大，利用叠加原理，可得承压含水层中任一点的降深为：

$$s=s_1+s_2+s_3+s_4=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^4}{r_1r_2r_3r_4}$$

式中，$r_1$、$r_2$、$r_3$、$r_4$ 分别为任意点至各井的距离。如果考虑抽水井的降深，则有：

$$r_1=r_w,\ r_2=2a,\ r_3=2b,\ r_4=2\sqrt{a^2+b^2}$$

$$s_w=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R^4}{8r_wab\sqrt{a^2+b^2}} \tag{5—24}$$

或

$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\dfrac{R^4}{8r_wab\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{5—25}$$

类似地，对于潜水井有：

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{R^4}{8r_wab\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{5—26}$$

当两边界都是补给边界时〔图 5—5 (b)〕，井 2、3 为注水井，1、4 为抽水井。根据叠加原理有：

$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\dfrac{2ab}{r_w\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{5—27}$$

同理，对于潜水井有：

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{2ab}{r_w\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{5—28}$$

当一个边界为补给边界，另一个边界为隔水边界时，井 1、3 为抽水井，井 2、4 为注水井〔图 5—5 (c)〕。读者可自行推导有关公式。

2. 非稳定流计算

先考虑二条隔水边界的情况，对于承压含水层中任一点有：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)+W(u_2)+W(u_3)+W(u_4)]$$

式中，$u_i=\dfrac{r_i^2\mu^*}{4Tt}$ $(i=1,2,3,4)$；$W(u_i)$ 为关于 $u_i$ 的 Theis 井函数（表 4—1）。

当时间 $t$ 足够长、使 $u_i<0.01$ 时，可利用 Jabcob 近似公式得：

$$s=\frac{Q}{\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{\sqrt{r_1r_2r_3r_4}\mu^*} \tag{5—29}$$

在单对数纸上，$s$-lg$t$ 直线的斜率为：

$$i=\frac{2.3Q}{\pi T}=4\times\frac{2.3Q}{4\pi T} \tag{5—30}$$

表明在象限含水层的情况下，在抽水时间足够长，两隔水边界充分影响以后，单对数纸上 $s$-lg$t$ 直线的斜率为无限含水层的 4 倍。二边都是补给边界或一边为补给边界，一边为隔水边界时，处理类似，请读者自行推导。

**二、其他角度的扇形含水层**

下面仅以夹角为 60°的扇形含水层为例，加以说明。当抽水井位于分角线上时，虚、实井的分布如图 5—6 所示。

1. 稳定流计算

当两边界都是补给边界时，应有 3 口抽水井、3 口注水井〔图 5—6 (b)〕。对于承压含水层中任一点有：

$$s=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5} \tag{5—31}$$

对抽水井有：

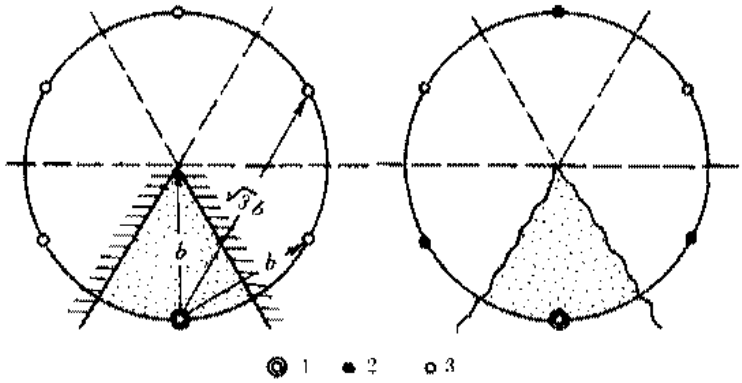
$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\dfrac{2b}{3r_w}} \tag{5—32}$$

对于潜水井有：

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{2b}{3r_w}} \tag{5—33}$$

2. 非稳定流计算

当两边界都是补给边界时，有：




(a) (b)

图 5—6 夹角 60°的扇形含水层中的镜像法

(a) —两条隔水边界的情况；(b) —两条补给边界的情况

1—实抽水井；2—虚抽水井；3—虚注水井

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(u_1\right)-W\left(u_2\right)+W\left(u_3\right)-W\left(u_4\right)+W\left(u_5\right)-W\left(u_6\right)\right] \quad (5—34)$$

当抽水相当长时间以后，代入 Jacob 近似公式得：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\ln\left(\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5}\right)^2=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5}$$

就是（5—34）式。表明该情况下抽水已经达到稳定。推论到一般情况，当存在补给边界时，在抽水相当长时间以后是能够达到稳定的。

**思考题：**

1. 扇形含水层的夹角为 60°，一边为隔水边界，另一边为补给边界时，能否用镜像法？试画图说明。

2. 扇形含水层的夹角为 120°，抽水井不位于分角线上，为什么无论何种边界，都不能应用镜像法？

## §5—3 条形含水层中的井流

两条平行的边界中间的含水层为条形含水层，应用镜像法时，因为同时要映出另一边界的像，如此重复，一共要映射无穷多次。这样，条形含水层中的一口井就变成了无限含水层中的一个无穷井排（图 5—7）。

为实用目的，一般只要映射 3—5 次就够了，然后用非稳定流或稳定流的单井计算公式，进行叠加即可，也可用下面推导的公式进行计算。

1. 稳定流

为一般化起见，设水井不位于含水层的中部，映出的水井分布如图 5—8 所示。应用叠加原理，可得任一点 A（$x$，$y$）的降深为：

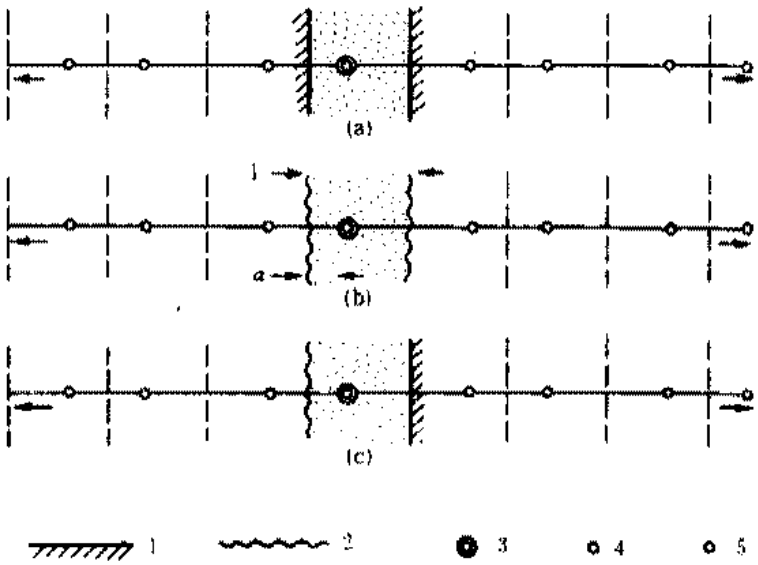



图 5—7　条形含水层的镜像法

1—隔水边界；2—补给边界；3—实抽水井；4—虚抽水井；5—虚注水井

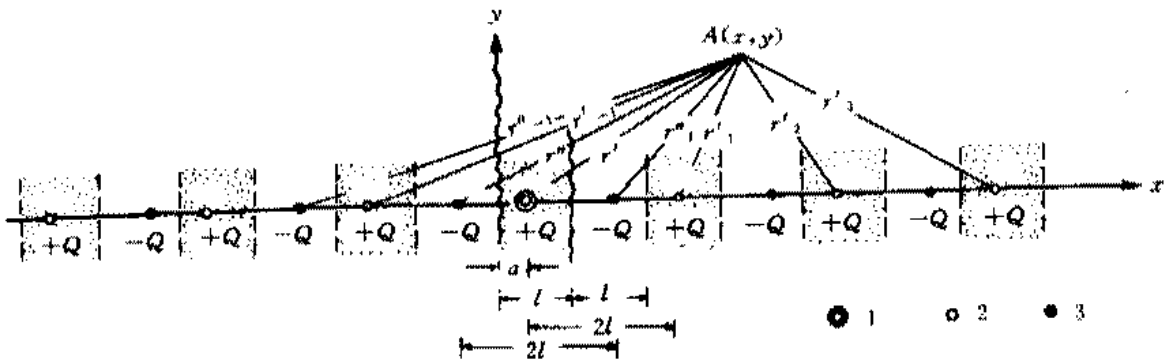



图 5—8　两平行补给边界附近的抽水井

1—实抽水井；2—虚抽水井；3—虚注水井

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\ln\left[\frac{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi\ (x+a)}{l}}{\operatorname{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi\ (x-a)}{l}}\right] \tag{5—35}$$

式中：$l$——条形含水层的宽度，即两平行边界之间的垂直距离；

$a$——实井至纵轴的距离（纵轴沿边界取）。

把 A 点移到抽水井的井壁上（$x=a-r_w$；$y=0$），经化简得：

$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\left(\frac{2l}{\pi r_w}\sin\frac{\pi a}{l}\right)} \tag{5—36}$$

对于潜水含水层有：

$$Q=\frac{\pi K\ (H_0^2-h_w^2)}{\ln\left(\frac{2l}{\pi r_w}\sin\frac{\pi a}{l}\right)} \tag{5—37}$$

类似地，可以导出两隔水边界情况下和一个边界为补给边界，另一边界为隔水边界时的计算公式。

当抽水井位于条形含水层的中央，即 $a=\frac{l}{2}$ 时，公式（5—36）、（5—37）可以简化。当两边界均为补给边界时，对于承压水有：

$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\ln\frac{2l}{\pi r_w}} \tag{5—38}$$

2. 非稳定流

条形含水层具有二个或一个补给边界时，抽水能达到稳定，可用相应的稳定流公式进行计算。当两边都是隔水边界时，可用积分变换法求得任一点的解。当抽水时间足够长时，可采用下列近似表达式：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}f(\lambda)+\frac{e^{\frac{2\pi x}{l}}}{4\left[\mathrm{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+a)}{l}\right]\left[\mathrm{ch}\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-a)}{l}\right]}\right\} \tag{5—39}$$

对于抽水井井壁的降深，上式可化简为：

$$s_w=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}f(\lambda)+2\ln\left\{\frac{l}{2\pi r_w}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi a}{l}}\right\}\right\} \tag{5—40}$$

式中：$f(\lambda)=i\mathrm{erfc}(\lambda)=\frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}}-\lambda\mathrm{erfc}(\lambda)$，其数值列于图 5—9 的曲线图中：

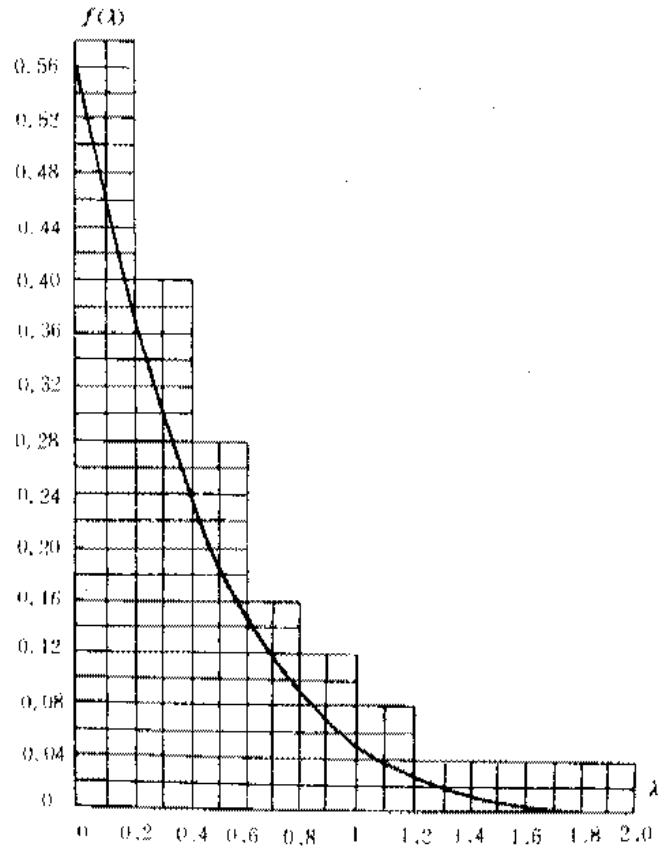



图 5—9 $f(\lambda)=i\mathrm{erfc}(\lambda)$ 函数曲线

erfc（λ）为λ的余误差函数；$\lambda=\sqrt{\frac{y^2\mu}{4Tt}}$。

**思考题：**

1. 设有一条形含水层，一边为补给边界，一边为隔水边界，在中线上有一抽水井和一观测井，如图5—10所示，试问在抽水相当长时间以后，观测孔测得的水位降深是否和无限含水层的情况相同？

2. 试自行推导由两隔水边界组成的条形含水层的稳定流计算公式。

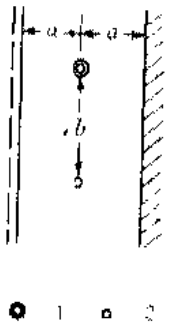



图5—10　在条形含水层中布置的井
1—抽水井；2—注水井

# 第六章　地下水向不完整井的运动

## §6—1　地下水向不完整井运动的特点

在含水层很厚或埋藏较深的地区，由于受经济技术条件限制或因含水层部分厚度能满足需水量要求，常采用不完整井开采地下水。不完整井在供水或人工降低水位时都有应用。

按过滤器在含水层中的进水部位不同，不完整井分为井底进水，井壁进水和井底、井壁同时进水三类(图 6—1)。本章主要研究前两类不完整井，并以井壁进水不完整井为重点。

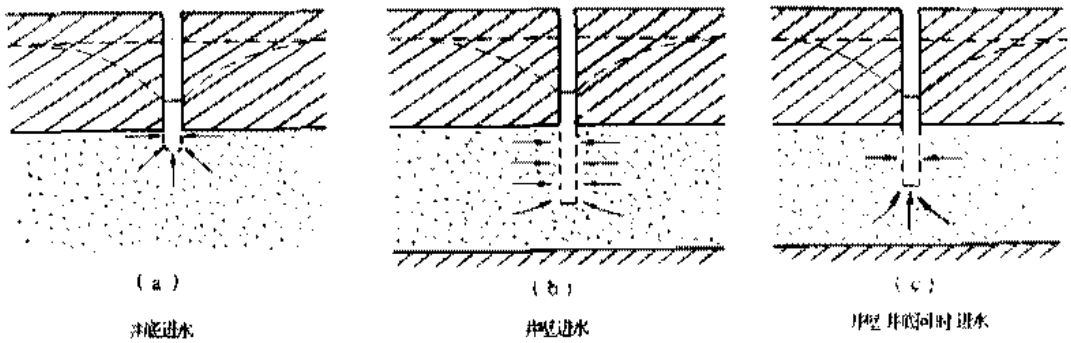



图 6—1　不完整井的类型

地下水流向不完整井的水流形式与完整井的水流形式有所不同。以承压水井为例，地下水流向完整井的水流为平面径向流，流线是对称井轴的径向直线；而流向不完整井的水流，由于受井的不完整性影响，流线在井附近有很大弯曲，垂向分速度不可忽略，因而流向不完整井的地下水流为三维流。

通过实验发现，在含水层厚度和径向距离的比值 $r/M<1.5\sim2.0$ 的区段内，流线有明显弯曲，而且离不完整井愈近，弯曲得愈厉害，形成三维流区。但在 $r/M>1.5\sim2.0$ 的地方，流线趋于平行层面，垂向分速度很小，由三维流逐渐过渡为平面径向流。因此，研究地下水向不完整井运动规律的重点应是井附近的三维流区，并往往采用分为两段的研究法。

地下水流向不完整井的另一特点是，在其它条件相同时，不完整井的流量小于完整井的流量。这是由于流线弯曲、阻力大的缘故。

设 $l$ 为不完整井过滤器的长度，$M$ 为含水层的厚度。试验结果表明，不完整井的流量随比值 $l/M$ 的增大而增大，随 $l/M$ 值的减小而减小。当 $l/M=1$ 时，变成完整井，流量达到该情况下的最大值。

研究不完整井的第三个特点是，必须考虑过滤器在含水层中的位置和顶、底板对水流状态的影响。如果含水层很厚，则可近似地忽略隔水底板对水流的影响，按半无限厚含水

层来研究；否则，应当同时考虑顶、底板的影响，作有限含水层来处理。

## §6—2 地下水向不完整井的稳定运动

### 一、半无限厚含水层中的不完整井

1. 井底进水的承压水不完整井

如井底刚好揭穿承压含水层的顶板，就构成井底进水的不完整井（图 6—2）。如含水层厚度很大，则其底板对井流的影响可以忽略不计。这时，如井底形状为半球形，则流线为径向直线，等水头面是半个同心球面。在球坐标系中则为一维流。这种不完整井流可用空间汇点来求解。

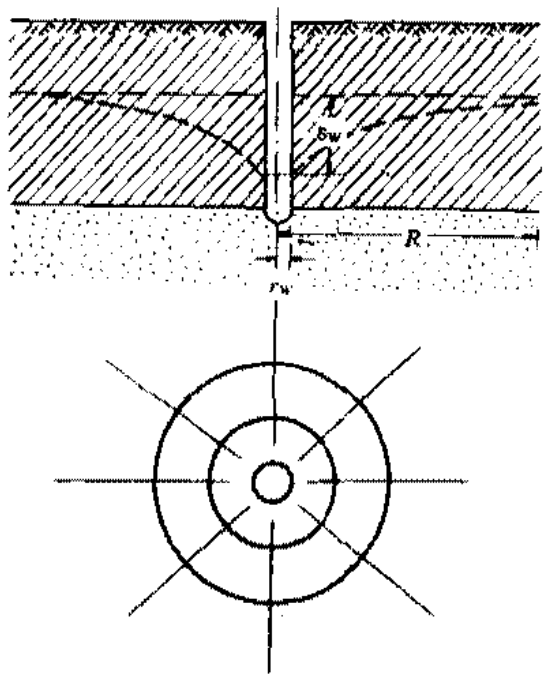



图 6—2 井底进水的承压水不完整井

在均质含水层中，如果渗流以一定强度从各个方面沿径向流向一点，并被该点吸收，则称该点为汇点。反之，渗流由一点沿径向流出，则称该点为源点。空间汇点，可以理解为直径无限小的球形过滤器，渗流沿半径方向流入球形过滤器而被吸收掉。

设离汇点距离为 $\rho$ 的任意点 $A$ 的降深为 $s$，球形过水断面面积为 $4\pi\rho^2$。按 Darcy 定律，流向汇点的流量 $Q'$ 为：

$$Q'=-K\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\rho}\cdot 4\pi\rho^2$$

分离变量后，在 $\rho$ 和影响半径 $R$ 的区间内积分上式，得：

$$s=\frac{Q'}{4\pi K}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{R}\right)$$

通常，$R\gg\rho$，$\frac{1}{R}$很小，可以忽略不计，故有：

$$s=\frac{Q'}{4\pi K\rho} \tag{6—1}$$

上式为空间汇点的降深表达式，即在空间汇点作用下任意点的降深。

现在回过来再研究半球形井底进水的不完整井。设想在井轴和含水层顶板交界处放一空间汇点来代替井的作用，则空间汇点流量的一半相当井的流量，即 $Q'=2Q$，半径为 $r_w$ 的半球形等水头面可视为进水的井底，即令 $\rho=r_w$，$s=s_w$。将这些条件代入（6—1）式，即得井底进水的承压水不完整井公式：

$$Q=2\pi K r_w s_w \tag{6—2}$$

式中，$s_w=H_0-h_w$ 为井中水位降深；$H_0$ 为抽水前的初始水头；$h_w$ 为抽水井中的动水位。

2. 井壁进水的承压水不完整井

井壁进水的圆柱状过滤器不是一个点，其作用不能直接用空间汇点代替。但是，可用

无数个空间汇点组成的空间汇线来近似代替过滤器的作用，如图 6—3 所示。

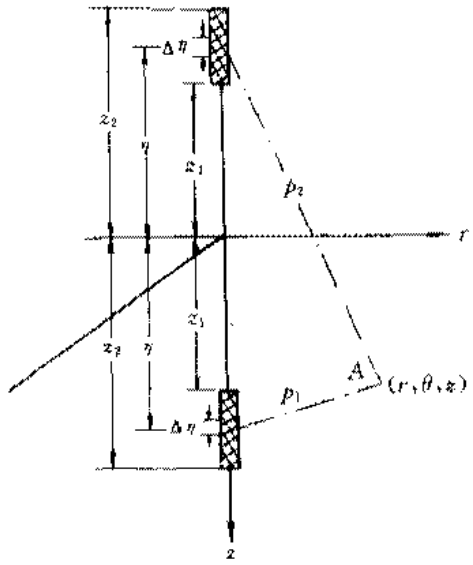


图 6—3 空间汇线示意图

假设流量 $Q$ 沿长度为 $l$ 的汇线均匀分布。在汇线上取一微小的汇线段 $\Delta\eta_i$ 视为空间的汇点，流向该点的流量 $\Delta Q$ 可用下式来表示：

$$\Delta Q_i = \frac{Q}{z_2 - z_1}\Delta\eta_i$$

在此汇点作用下，相距 $\rho_1$ 的 A 点所产生的降深为 $\Delta s_i$，按（6—1）式有：

$$\Delta s_i = \frac{\Delta Q_i}{4\pi K\rho_1} = \frac{Q}{4\pi K\rho_1 (z_2 - z_1)}\Delta\eta_i$$

对于隔水顶板附近的汇点，为了考虑隔水顶板对汇点的影响，可用镜像法在顶板上方的对称位置上映出一个等强度的虚汇点（图 6—3）。这时，A 点的降深 $\Delta s_i$ 应等于实汇点和虚汇点分别产生的降深的叠加，即：

$$\Delta s_i = \frac{Q}{4\pi K (z_2 - z_1)}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\Delta\eta_i$$

将 $\rho_1$ 和 $\rho_2$ 换成柱坐标表示：

$$\rho_1 = \sqrt{(z-\eta)^2 + r^2},\quad \rho_2 = \sqrt{(z+\eta)^2 + r^2}$$

代入上式，即得距隔水边界为 $\eta$ 的汇点在 A 点产生的降深：

$$\Delta s_i = \frac{Q}{4\pi K (z_2 - z_1)}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+\eta)^2 + r^2}}\right)\Delta\eta_i$$

汇线是由无数个汇点组成的。所以汇线对 A 点产生的总降深 $s$，显然等于上式无限次叠加的结果。由于汇点沿汇线是均匀连续分布的，故无限叠加可用沿汇线长度的积分来代替，得：

$$s = \frac{Q}{4\pi K (z_2 - z_1)}\lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta\eta_i \to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+\eta)^2 + r^2}}\right)\Delta\eta_i$$

$$= \frac{Q}{4\pi K (z_2 - z_1)}\int_{z_1}^{z_2}\left(\frac{1}{\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+\eta)^2 + r^2}}\right)d\eta$$

当过滤器和隔水底板相接时（图 6—4），相当于汇线两端坐标 $z_1 = 0$，$z_2 = l$，代入上式有：

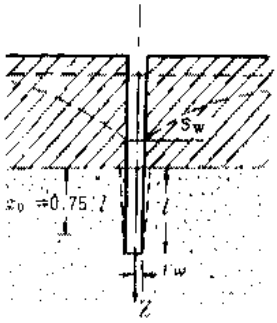


图 6—4 井壁进水不完整井

$$s = \frac{Q}{4\pi Kl}\int_0^l\left(\frac{1}{\sqrt{(z-\eta)^2 + r^2}} + \frac{1}{\sqrt{(z+\eta)^2 + r^2}}\right)d\eta$$

$$= \frac{Q}{4\pi Kl}\left(\mathrm{Arsh}\frac{z+l}{r} + \mathrm{Arsh}\frac{l-z}{r}\right) \qquad (6-3)$$

这是半无限承压含水层中流量为 $Q$ 的与隔水顶板相接的空间汇线作用于任意点的降深。分析上式可知，它所反映的等降深面是对称于 Z 轴的半旋转椭球面。如果选一与上述等降深面形状相同的半旋转椭球面作为假想过滤器，显然可用（6—3）式计算它形成的降深。如在选择假想过滤器时，使它的水头与真实井壁

的动水位相等，把它同不完整井真实过滤器套在一起时，将在坐标（$r_w$、$z_0$）处相交，则由（6—3）式可得：

$$s_w=\frac{Q}{4\pi Kl}\left(\text{Arsh}\frac{l+z_0}{r_w}+\text{Arsh}\frac{l-z_0}{r_w}\right) \tag{6—4}$$

式中，$s_w$ 为真实井壁的降深，$r_w$ 为真实过滤器的半径，$z_0$ 为待定坐标。

为了能用（6—4）式计算，还要确定 $z_0$ 值，使计算出的流量和通过真实过滤器的流量相等。显然，$z_0$ 值应在 0—$l$ 区间变化。经 В. Д. Бабушкин 的大量实验证实，当 $z_0=0.75l$ 时，按（6—4）式计算出的流量才与真实不完整井的流量相等。将这个条件代入（6—4）式，最后得井壁进水不完整井的流量为：

$$Q=\frac{4\pi Kls_w}{\text{Arsh}\frac{0.25l}{r_w}+\text{Arsh}\frac{1.75l}{r_w}}=\frac{2\pi Kls_w}{\ln\frac{1.32l}{r_w}} \tag{6—5}$$

导出上述结果时，利用了下列关系式，即 $x\gg1$ 时，$\text{Arsh}x=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)\simeq\ln 2x$。因此，应用（6—5）式时，应满足上述假设。通常要求是 $l/r_w>5$。

式（6—5）也称 Бабушкин 公式。理论上导出公式的条件是半无限厚含水层。但在实际上，在 $l<0.3M$ 的有限厚含水层中，当 $R\leqslant$（5—8）$M$ 时，仍可应用，误差只有 10%（Бабушкин）。H. K. Гиринский 根据假想过滤器与真实过滤器表面积相等的原则，将半椭球面换算成圆柱面后，也得到类似的公式：

$$Q=\frac{2\pi Kls_w}{\ln\frac{1.6l}{r_w}} \tag{6—6}$$

其差别是系数不同。但将 1.32 和 1.6 取对数后，数值相近，实际上不影响计算精度。

3. 井壁进水的潜水不完整井

Бабушкин 在砂槽中研究过潜水向不完整井的运动。他发现，流线有明显的对称弯曲。在过滤器上下两端流线的弯曲程度较大，当从两端移向过滤器中线时，流线弯曲逐渐变缓，流线与过滤器中线 N—N 近似重合，流面几乎是水平面，如图 6—5 所示。

根据流面上水头的法向导数为零的特点，N—N 流面可视为不透水面。它把过滤器未淹没的潜水不完整井分成上下两段。上段可视为潜水完整井，下段看成是半无限厚含水层中的承压水不完整井。而潜水不完整井的流量，应等于上下两段流量之和。这样计算所得的上段流量偏大些，下段流量偏小些。但两段流量之和可以抵消部分误差。

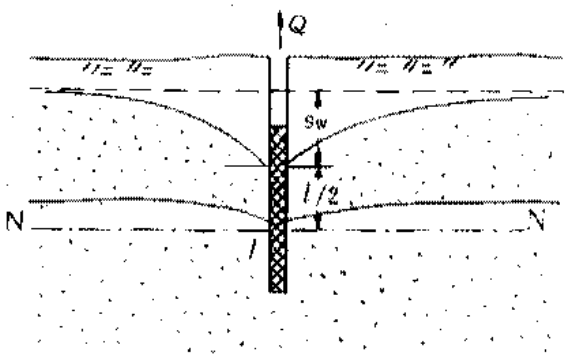



图 6—5　潜水不完整井

上段按潜水完整井计算，根据 Dupuit 公式有：

$$Q_1=\frac{\pi K\left[(s_w+0.5l)^2-(0.5l)^2\right]}{\ln R/r_w}=\frac{\pi K(s_w+l)s_w}{\ln R/r_w}$$

下段，当 $l/2<0.3m_0$ 时（$m_0$ 为由 N—N 中线到隔水底板的距离），可以认为含水层厚度是无限的。按（6—6）式有：

$$Q_2=\frac{2\pi K\ (0.5l)\ s_w}{\ln\frac{1.32\ (0.5l)}{r_w}}=\frac{\pi K l s_w}{\ln\frac{0.66l}{r_w}}$$

于是，当过滤器埋藏相对较浅，$l/2<0.3m_0$ 时，潜水不完整井流量有：

$$Q=Q_1+Q_2=\pi K s_w\left[\frac{l+s_w}{\ln\frac{R}{r_w}}+\frac{l}{\ln\frac{0.66l}{r_w}}\right] \tag{6—7}$$

## 二、有限厚含水层中的不完整井

当含水层厚度有限时，不仅要考虑隔水顶板对水流的影响，还要考虑隔水底板的影响。

Muskat 研究了有限厚含水层中井过滤器与隔水顶板相接时稳定流的水头分布，采用汇线无限次映像得承压水不完整井的流量为：

$$Q=\frac{2\pi KMs_w}{\frac{1}{2\alpha}\left[2\ln\frac{4M}{r_w}-2.3A\right]-\ln\frac{4M}{R}} \tag{6—8}$$

式中：$\alpha=\frac{l}{M}$；

$A=f\ (\alpha)\ =\lg\frac{\Gamma\ (0.875\alpha)\ \Gamma\ (0.125\alpha)}{\Gamma\ (1-0.875\alpha)\ \Gamma\ (1-0.125\alpha)}$ 可由图 6—6 直接查出。其中，$\Gamma$ 为伽马函数；

$R$——影响半径。

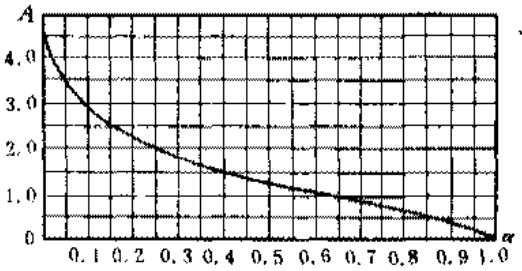



图 6—6　$A$ 与 $\alpha$ 的关系曲线

当 $\alpha=1$ 时，$A=0$，(6—16) 式变为完整井公式，说明上式是合理的。但当 $\alpha$ 很小时，$A$ 变得很大，就可能使 (6—8) 式分母中的第一项趋于零，使该式计算出的流量与半径为 $M$ 的完整井流量相等。这显然是不合理的。这说明，当 $\alpha$ 很小时，该式失去意义，应予注意。试验证实，在 $\frac{l}{r_w}>5$ 的条件下，(6—8) 式可给出较满意结果，误差不超过 10%。这样的条件是不难满足的。

如过滤器不与隔水顶板接触，且其底部位于含水层中部以下时，由于过滤器中部流面接近于水平面，可近似地通过过滤器中线把过滤器分为上下两部分，即把这种类型的不完整井分成两个过滤器与隔水顶板接触的不完整井来处理，流量等于二者之和。于是有：

$$Q=2.73Ks_w\ (B+D) \tag{6—9}$$

式中：$B=\frac{m_1}{\frac{1}{2\alpha_1}\left[2\lg\frac{4m_1}{r_w}-A_1\right]-\lg\frac{4m_1}{R}}$；

$D=\frac{m_2}{\frac{1}{2\alpha_2}\left[2\lg\frac{4m_2}{r_w}-A_2\right]-\lg\frac{4m_1}{R}}$；

$A_1=f_1\ (\alpha_1)$，$\alpha_1=\frac{0.5l}{m_1}$，由图 6—6 确定；

$A_2=f_2\ (\alpha_2)$，$\alpha_2=\frac{0.5l}{m_2}$，由图 6—6 确定；

$m_1$，$m_2$——分别为过滤器中部至隔水顶、底板的距离。

对于有限厚含水层中的潜水不完整井，如前述，当过滤器埋藏相对较浅，$l/2<0.3m_0$ 时，可用（6—7）式计算。当过滤器埋藏较深时，$l/2>0.3m_0$ 时（图 6—4），必须考虑隔水底板的影响。为此，采用分段法计算时，下段宜用（6—8）式，上段则仍按潜水完整井计算，于是有：

$$Q=\pi K s_w\left(\frac{l+s_w}{\ln\frac{R}{r_w}}+\frac{2m_0}{\frac{1}{2\alpha}\left(2\ln\frac{4m_0}{r_w}-2.3A\right)-\ln\frac{4m_0}{R}}\right) \tag{6—10}$$

式中，$m_0$ 为过滤器中部至隔水底板的距离。

## §6—3 地下水向承压不完整井的非稳定运动

### 一、基本方程

设不完整井所在的承压含水层符合推导 Theis 公式时用的假设条件，并有上覆潜水含水层通过弱透水层发生越流补给。忽略弱透水层的弹性释水，上下含水层初始水头一致。柱坐标系的取法如图 6—7 所示。

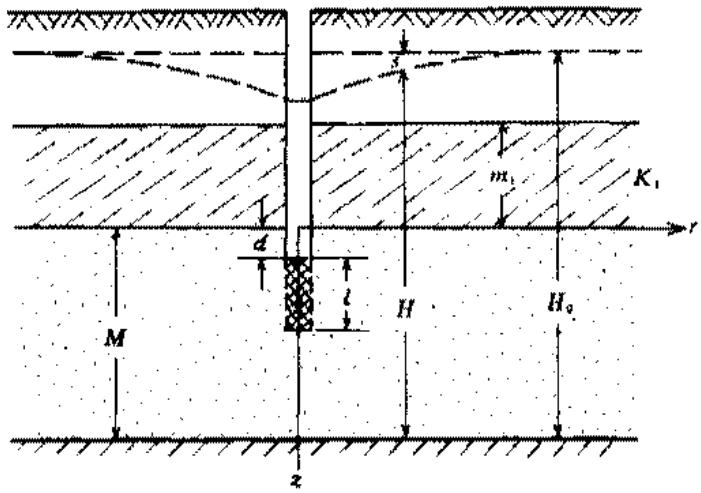



图 6—7 越流承压含水层中的不完整井

为了研究方便，将越流补给量等效地看作是随坐标变化的含水层内的垂向补给量，这样就可把上覆透水层视为隔水层。在这些假设条件下，由式（1—83）可知，地下水向不完整井的运动满足下列方程：

$$\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}-\frac{s}{B^2}=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial s}{\partial t} \tag{6—11}$$

相应的定解条件为：

$$s(r,\ z,\ 0)=0 \tag{6—12}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z}\Big|_{z=0}=0 \tag{6—13}$$

$$\frac{\partial s}{\partial z}\Big|_{z=M}=0 \tag{6—14}$$

$$s(r,\infty,t)=0 \tag{6—15}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(lr\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\begin{cases}0 & 0<z<d\\ -\dfrac{Q}{2\pi K} & d<z<l+d\\ 0 & l+d<z<M\end{cases} \tag{6—16}$$

式中，$B$ 为越流因素；$l$ 为过滤器长度；$d$ 为含水层顶板至过滤器顶部的距离。Hantush 给出了上述定解问题，并导出了相应的解。对于过滤器与顶板相接 $d=0$ 的情况，Hantush 给出的几个解为：

(1) 越流含水层中的非稳定流：

$$s(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(u,\frac{r}{B}\right)+\frac{2M}{\pi l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi z}{M}\sin\frac{n\pi l}{M}W_n\left(u,\sqrt{\left(\frac{n\pi r}{M}\right)^2+\left(\frac{r}{B}\right)^2}\right)\right] \tag{6—17}$$

式中，$u=\dfrac{r^2\mu}{4Tt}$；$W\left(u,\dfrac{r}{B}\right)=\int_u^{\infty}\dfrac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy$；$W_n(u,\lambda)=\int_u^{\infty}\dfrac{1}{y}e^{-y-\frac{\lambda^2}{4y}}dy$；

$\lambda=\sqrt{\left(\dfrac{n\pi r}{M}\right)^2+\left(\dfrac{r}{B}\right)^2}$。

式中含有 $z$ 值，实用时常用沿过滤器长度积分，取平均值的方法消去 $z$，即取平均降深作为降深的近似值，则有：

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(u,\frac{r}{B}\right)+\xi_n\left(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B}\right)\right] \tag{6—18}$$

式中，$\xi_n\left(u,\dfrac{l}{M},\dfrac{r}{M},\dfrac{r}{B}\right)=\dfrac{2M^2}{\pi^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n\pi l}{M}\right)}{n^2}W_n(u,\lambda)$ (6—19)

(2) 承压含水层中的非稳定流：当 $B\to\infty$，无越流补给时，由 (6—17) 式有

$$s(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W(u)+\frac{2M}{\pi l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{n\pi z}{M}\right)\sin\left(\frac{n\pi l}{M}\right)W_n\left(u,\frac{n\pi r}{M}\right)\right] \tag{6—20}$$

消去 $z$，采用平均降深，由 (6—18) 式有：

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\left[W(u)+\xi_h\left(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M}\right)\right] \tag{6—21}$$

式中，$\xi_h\left(u,\dfrac{l}{M},\dfrac{r}{M}\right)=\dfrac{2M^2}{\pi^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n\pi l}{M}\right)}{n^2}W_n\left(u,\dfrac{n\pi r}{M}\right)$ (6—22)

(3) 越流含水层中的稳定流：当抽水时间很长，趋于稳定流时，在理论上可设 $t\to\infty$，因而 $u\to 0$。这时，可有下列近似关系：

$$W\left(u,\frac{r}{B}\right)=\int_u^{\infty}\frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy\approx 2K_0\left(\frac{r}{B}\right)$$

$$W_n(u,\lambda)=W_n\left(u,\sqrt{\left(\frac{n\pi r}{M}\right)^2+\left(\frac{r}{B}\right)^2}\right)\approx 2K_0\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi r}{M}\right)^2+\left(\frac{r}{B}\right)^2}\right)$$

把上述结果代入 (6—17) 式，不难得出稳定流条件下的相应表达式，代入 (6—18) 式，则得近似表达式：

$$s(r,t)=\frac{Q}{2\pi T}\left[K_0\left(\frac{r}{B}\right)+\xi\left(\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B}\right)\right] \tag{6—23}$$

其中，$\xi\left(\frac{l}{M},\ \frac{r}{M},\ \frac{r}{B}\right)=\frac{2M^2}{\pi^2 l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi l}{M}\right)}{n^2}K_0\left(\sqrt{\left(\frac{n\pi r}{M}\right)^2+\left(\frac{r}{B}\right)^2}\right)$ （6—24）

上述各式表明，在非稳定流情况下，降深也由两部分组成，前者代表相应的完整井降深，后者表示由抽水井不完整性引起的由抽水井附近流线弯曲所造成的附加降深，它是 $z$ 的函数。其值除与井流量、导水系数有关外，还与过滤器长度 $l$、不完整程度 $\frac{l}{M}$ 和计算断面到抽水井的相对距离 $\frac{r}{M}$ 有关。式（6—19）、（6—22）和（6—24）所代表的附加阻力称为附加阻力系数，其值随 $r$ 的增大而减小。如 Hantush 指出的，从实用角度看，当 $r\geqslant 1.5M$ 时，这些阻力系数可忽略不计，简化为相应的完整井公式。对于各向异性含水层，这个范围则按 $r\geqslant 1.5M\sqrt{K_z/K_r}$ 确定。

当承压含水层的厚度很大时，允许忽略隔水底板的影响。当 $M\to\infty$ 时，由（6—21）式可导出半无限含水层中不完整井非稳定流的相应表达式。它与（6—5）式、（6—6）式很相近，只是对数项的系数略有不同，为 1.47 而已。

当抽水时间很长，趋于稳定时，只要 $u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\leqslant 0.01$，就可利用第四章中提及的近似关系式：

$$W(u)\simeq\ln\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}=2\ln\frac{R}{r}$$

式中，$R=1.5\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}$，即影响半径。同时，在 $t$ 很大，$u\to 0$ 时有：

$$W_0\left(u,\ \frac{n\pi r}{M}\right)\simeq 2K_0\left(\frac{n\pi r}{M}\right)$$

把这些关系代入（6—21）式、（6—22）式，便得承压含水层中不完整井稳定流表达式：

$$s(r)=\frac{Q}{2\pi T}\left[\ln\frac{R}{r}+\xi\left(\frac{l}{M},\ \frac{r}{M}\right)\right] \qquad (6—25)$$

式中，$\xi\left(\frac{l}{M},\ \frac{r}{M}\right)=\frac{2M^2}{\pi^2 l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi l}{M}\right)}{n^2}K_0\left(\frac{n\pi r}{M}\right)$（如表 6—1 所示）。 （6—26）

**表 6—1 $\xi\left(\frac{l}{M},\ \frac{r}{M}\right)$ 数值表**

| $l/M$ \ $r/M$ | 2 | 1 | 1/3 | 0.1 | 1/30 | 0.01 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0.0005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 0.00391 | 0.1220 | 2.0400 | 10.4 | 24.3 | 12.8 | 53.3 | 70.2 | 79.6 | 90.9 |
| 0.3 | 0.00297 | 0.0908 | 1.2900 | 4.79 | 9.23 | 14.5 | 17.7 | 21.8 | 24.9 | 28.2 |
| 0.5 | 0.00165 | 0.0494 | 0.6550 | 2.26 | 4.21 | 6.65 | 7.86 | 9.64 | 11.0 | 12.4 |
| 0.7 | 0.000596 | 0.0167 | 0.2370 | 0.879 | 1.69 | 2.67 | 3.24 | 4.01 | 4.58 | 5.19 |
| 0.9 | 0.000048 | 0.0015 | 0.0251 | 0.128 | 0.334 | 0.528 | 0.664 | 0.846 | 0.983 | 1.12 |

如取 $r=r_w$，则有 $\xi\left(\frac{l}{M},\ \frac{r}{M}\right)=\xi_w\left(\frac{l}{M},\ \frac{r_w}{M}\right)$，代入式（6—25）可得相应的有关 $s_w$ 的表达式。把它和（6—25）式相减，便得只有一个观测孔时的承压含水层中不完整井的稳定流

表达式。

## 二、根据抽水试验资料确定水文地质参数

在不完整井抽水试验中，如在 $r>1.5M$ 区有观测孔，则可根据相应的完整井公式计算。因此，第四章中介绍的各种求参数的方法，在这里都有效。

表 6—2　$W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)$ 数值表

（据 Walton）

| $u$ \ $l/M$, $r/M$ | 0.25 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.00 | 0.75 | 0.20 | 0.10 | 0.03 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.3385 | 13.9367 | 16.2123 | 18.9845 | 25.1707 | 31.4176 | 44.9781 |
| $10^{-5}$ | 11.0395 | 11.6341 | 13.9097 | 16.6837 | 22.8681 | 29.1150 | 40.7960 |
| $10^{-4}$ | 8.6334 | 9.3361 | 11.6072 | 14.3794 | 20.5656 | 26.7666 | 33.5338 |
| $10^{-3}$ | 6.4317 | 7.0299 | 9.3055 | 12.0777 | 18.2045 | 22.6026 | 24.9428 |
| $10^{-2}$ | 4.1381 | 4.7363 | 7.0119 | 9.7382 | 13.8971 | 15.3684 | 15.9702 |
| $10^{-1}$ | 1.9231 | 2.5213 | 4.4451 | 5.7545 | 6.8298 | 7.1101 | 7.1913 |
| 1 | 0.2981 | 0.4959 | 0.7160 | 0.7856 | 0.8493 | 0.8549 | 0.8531 |
| 2 | 0.0806 | 0.1271 | 0.1675 | 0.1794 | 0.1900 | 0.1875 | 0.1893 |
| 3 | 0.0245 | 0.0366 | 0.0454 | 0.0472 | 0.0501 | 0.0481 | 0.0481 |

| $u$ \ $l/M$, $r/M$ | 0.50 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.5 | 0.2 | 0.1 | 0.03 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.5665 | 14.4689 | 15.4989 | 17.6358 | 19.7506 | 24.2954 |
| $10^{-5}$ | 11.2639 | 12.1663 | 13.1963 | 15.3332 | 17.4498 | 21.1506 |
| $10^{-4}$ | 8.9641 | 9.8638 | 10.8938 | 13.0307 | 15.1224 | 17.0340 |
| $10^{-3}$ | 6.6597 | 7.5621 | 8.5921 | 10.6994 | 11.9812 | 12.5845 |
| $10^{-2}$ | 4.3661 | 5.2685 | 6.2757 | 7.4555 | 7.8851 | 8.0462 |
| $10^{-1}$ | 2.1511 | 2.8822 | 3.2620 | 3.5305 | 3.6050 | 3.6304 |
| 1 | 0.0334 | 0.3986 | 0.4185 | 0.4319 | 0.4349 | 0.4353 |
| 2 | 0.0308 | 0.0910 | 0.0942 | 0.0964 | 0.0966 | 0.0968 |
| 3 | 0.0223 | 0.0247 | 0.0252 | 0.0254 | 0.0254 | 0.0255 |

| $u$ \ $l/M$, $r/M$ | 0.75 | | |
|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.8767 | 15.2580 | 16.7637 |
| $10^{-5}$ | 11.5741 | 12.9554 | 14.2530 |
| $10^{-4}$ | 9.2716 | 10.6478 | 11.3995 |
| $10^{-3}$ | 6.9699 | 8.1392 | 8.3991 |
| $10^{-2}$ | 4.6712 | 5.2967 | 5.3635 |
| $10^{-1}$ | 2.2597 | 2.4103 | 2.4193 |
| 1 | 0.2823 | 0.2898 | 0.2898 |
| 2 | 0.0634 | 0.0643 | 0.0645 |
| 3 | 0.0167 | 0.0169 | 0.0169 |

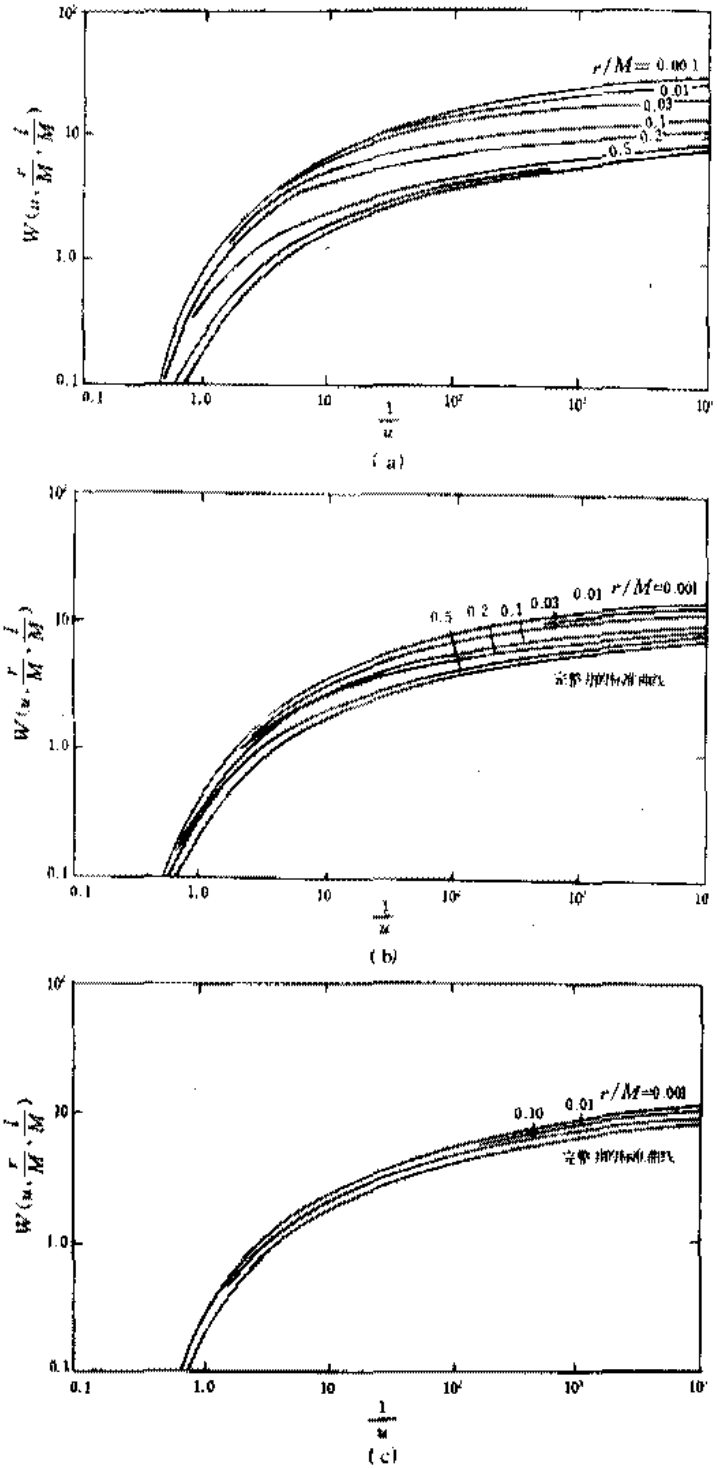



图 6—8　无越流补给承压含水层中不完整井的标准曲线

(据 Walton)

(a) $\frac{l}{M}=0.25$ 时的标准曲线；(b) $\frac{l}{M}=0.5$ 时的标准曲线；(c) $\frac{l}{M}=0.75$ 时的标准曲线

在$r<1.5M$区有观测孔（包括抽水井）时，必须按相应的不完整井公式计算。因为不完整井的井函数包含变量较多，目前还没能做出通用的标准曲线供求参数使用，所以下面仅以无越流补给的不完整井为例，简单介绍据抽水试验资料确定参数的方法。

在$r<1.5M$区内，如有一个观测孔或多个观测孔的长时间观测资料，均可用配线法求参数。为此，把（6—21）式简化为：

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left[W(u)+\xi_1\left(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M}\right)\right]=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right) \qquad (6—27)$$

由此可见，在双对数纸上的$W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)\frac{1}{u}$曲线和$s$-$t$曲线或$s$-$\frac{t}{r^2}$曲线的形状是相似的。表6—2给出了常用范围内井函数$W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)$值，根据这些资料，可在双对数坐标纸上绘出三张$W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)$-$\frac{1}{u}$标准曲线（图6—8）。然后，在同模数的透明双对数纸上绘出实测的$s$-$\frac{t}{r^2}$曲线或$s$-$t$曲线。把实测曲线叠置在相应$\frac{l}{M}$和$\frac{r}{M}$的某一标准曲线上，二者应能拟合。重合后，任选一匹配点，并记下该点坐标。如用$s$-$t$拟合，则有$W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)$、$\frac{1}{u}$、$s$和$t$值，将其再代入下式，便可求出参数：

$$T=\frac{Q}{4\pi\ (s)}\left[W\left(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}\right)\right]$$

$$\mu^*=\frac{4Tu}{r^2\left(\frac{1}{u}\right)}\ (t)$$

**思考题：**

1. 非完整井流和完整井流有什么不同？

2. 非稳定承压非完整井流中任一点降深总是大于或等于同样条件下完整井流的降深。这种说法是否正确？为什么？

# 第七章　地下水运动中的若干专门问题

## §7—1　非饱和带的地下水运动

在地下水面以上的非饱和带（即包气带）也有水的运动。在许多情况下，研究非饱和带的地下水运动具有很大的意义。例如，在地下水资源评价中，必须研究"三水"（即大气水、地表水和地下水）的相互转化，而非饱和带的地下水运动是其转化的重要环节。入渗的水必须经过非饱和带才能到达潜水面，故研究水在非饱和带的运动，对于入渗的计算很重要。其次，各种施加在地表的污染物将随入渗的水一起运动，经过非饱和带进入地下水中。因此研究地下水污染时，也必须研究非饱和带中水的运动。

由于问题的复杂性，本书只介绍基本原理和基本方程。

### 一、关于非饱和带水分的基本知识

1. 含水率、饱和度和田间持水量

在非饱和带中，空隙空间的一部分充填了水，其余部分充填了空气。水分和空气的相对份量是变化的。可以用二个变量来表示水分含量的多少。一为含水率 $\theta$，表示单位体积中水所占的体积

$$\theta = \frac{(V_w)_0}{V_0} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant n \tag{7—1}$$

式中，$\theta$ 为含水率，无量纲；$(V_w)_0$ 为典型单元体中水的体积；$V_0$ 为典型单元体的体积；另一个为饱和度 $S_w$，表示岩石的空隙空间中被水占据部分所占的比例，

$$S_w = \frac{(V_w)_0}{(V_0)_0} \qquad 0 \leqslant S_w \leqslant 1 \tag{7—2}$$

式中，$S_w$ 为饱和度，无量纲；$(V_0)_0$ 为典型单元体中的空隙体积。

显然，含水率 $\theta$ 不能大于空隙度 $n$，而饱和度 $S_w$ 不能大于 1。两者之间有下列关系：

$$\theta = nS_w \tag{7—3}$$

因为利用了典型单元体的概念，上述定义对于任一点都是适用的。

在长时间重力排水后仍然保留在土中的水量称为田间持水量。此时，水以薄膜水的形式和在土颗粒接触点附近以孤立的悬挂环形式存在。从图 7—1 可以看出，空隙度减去田间持水量，相当于排水空隙度，即排水时的有效空隙度。

2. 毛管压力

当多孔介质空孔隙中有两种不相混溶的流体（如水和空气）接触时，这两种液体之间的压力存在着不连续性。此压力差的大小取决于该点界面的曲率（它又取决于饱和度），这个压力差 $p_c$ 称为毛管压强：

$$p_c = p_a - p_w \tag{7—4}$$

式中，$p_a$ 为空气的压强，$p_w$ 为水的压强。如假设孔隙中的空气是在101325Pa（一个大气压）下，并取大气压强作为测量流体压强的基准，则 $p_a=0$，于是：

$$p_c = -p_w \tag{7—5}$$

故非饱和带孔隙中的水处于小于大气压强的情况下。正如和大家在毛细管现象中见到的一样，在周围水面以上的毛管内的压强是负的。

和饱和带的情况一样，我们可以定义非饱和带水流中任何点的水头（毛管水头）：

$$H = z + \frac{p_w}{\gamma} = z - \frac{p_c}{\gamma} = z - h_c \qquad \begin{matrix} p_c > 0 \\ p_a = 0 \end{matrix} \tag{7—6}$$

式中，$\gamma$ 为水的容重；

$$h_c = \frac{p_c}{\gamma} = -\frac{p_w}{\gamma} \tag{7—7}$$

称为毛管压力水头。某些作者用符号 $\psi$ 表示压力水头的负值，即：

$$\psi = -\frac{p_w}{\gamma} > 0 \tag{7—8}$$

$$H = z - \psi \tag{7—9}$$

对于饱和—非饱和流动，可写出统一的水头表达式：

$$H = z + \frac{p}{\gamma} \tag{7—10}$$

式中，压强 $p$ 可正可负。在饱和带中，$p$ 为水的压强，取正值；在非饱和带，为毛管压强的负数，取负值。其余符号同前。

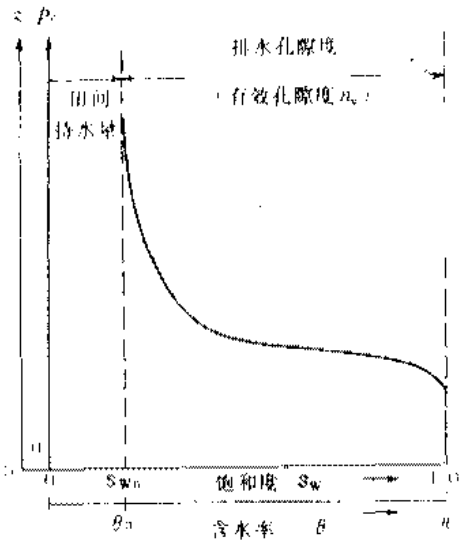



图 7—1 非饱和带的含水率曲线

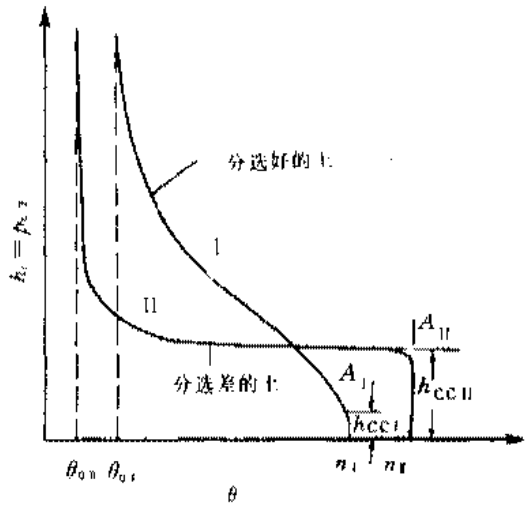



图 7—2 土壤水分特征曲线
（据 Richards 和 Weaner）

3. 土壤水分特征曲线

反映毛管压强 $p_c$ 或毛管压力水头 $h_c$ 和土壤含水率 $\theta$ 或饱和度 $S_w$ 关系的曲线，称为水分特征曲线（图 7—2）。它表示非饱和带中水分的能量和数量之间的关系，反映了包气带中水的基本特征。从曲线上还可以看出，即使在相当高的压强下，土样中仍保持一定的水，含水率不再进一步减小。这个含水率记作 $\theta_0$，相应的饱和度为：

$$S_{w_0} = \frac{\theta_0}{n}$$

不同土的水分特征曲线是不同的。在同样条件下，粘性土要比砂保持更多的水分，具有更

高的含水率。土的颗粒级配，对特征曲线的形状也有影响，如图 7—2 的曲线 Ⅰ 和 Ⅱ。温度的变化也对它有影响。温度升高时，表面张力降低，在同样吸力下含水率要低一些。

水分特征曲线斜率的负倒数称为容水度，记作 $C$：

$$C = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}H} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h_c} \tag{7—11}$$

容水度不是常数，它随含水率或毛管压强而变化，记作 $C(\theta)$ 或 $C(h_c)$。它表示毛管压力水头变化一个单位时从单位体积土中释放出的水体积，是计算非饱和带水运动的重要参数。

实验表明：同一土样在同样的温度下，排水过程和吸湿过程的水分特征曲线是不同的（图 7—3）。在同一 $p_c$ 或 $h_c$ 下，排水时的含水率要大于吸湿时的含水率。这种现象称为滞后现象。土样从饱和到干燥或从干燥到饱和的水分特征曲线称为主线。土样从部分湿润到开始排水或从半干燥状态重新润湿时，水分特征曲线是顺着一些中间曲线由一条主线移至另一条主线，这些中间曲线称为扫描曲线。因此，水分特征曲线随土壤的干、湿历史的不同而变化。故容水度 $C(\theta)$ 不是含水率 $\theta$ 的单值函数。

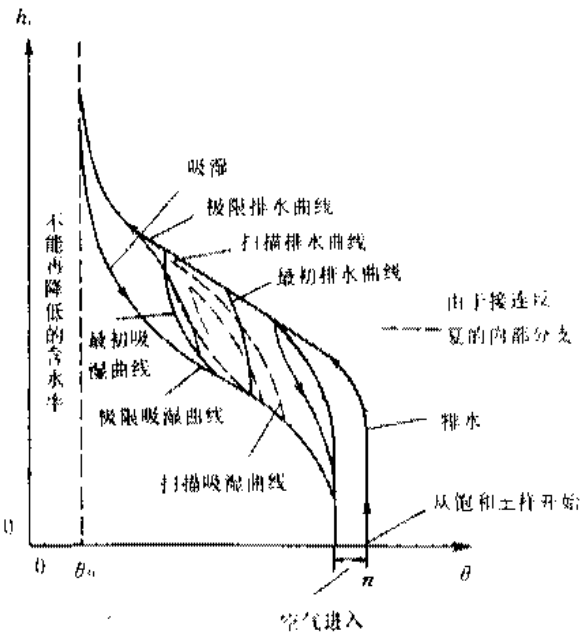



图 7—3　吸湿和排水情况下的水分特征曲线
（据 J. Bear）

4. 非饱和流动中的给水度概念

已经介绍过给水度的概念。给水度是单位体积含水层中所排出的重力水的体积。但实际上，当潜水面下降时，其间的水并未全部排出，只是由饱和带的水变成非饱和带的水，水分分布曲线发生相应的改变。实际排出的水体积只相当于排水前后两条水分分布曲线间的那一部分面积。为此，需要这样来定义给水度：一个单位水平面积从地表一直延伸到含水层底板的垂直土柱，当潜水面降低一个单位时，由重力所排出的水的体积。由于重力排水的迟后，给水度 $\mu$ 也是时间 $t$ 的函数。只有当长时间排水后才趋近于某一常数值。

## 二、非饱和带水运动的基本方程

1. 运动方程

1931 年，Richards 提出，Darcy 定律可引伸应用于非饱和带水的运动。但此时的渗透率 $k$ 和渗透系数 $K$ 不再是常数，而与土壤的含水率有关。当含水率（或饱和度）减小时，一部分空隙为空气充填，因而过水断面减小，渗流途径的弯曲程度增加，导致渗透率或渗透系数减小。因此，该情况下 $k$ 和 $K$ 可记作含水率 $\theta$ 或饱和度 $S_w$ 的函数 $k(\theta)$，$K(\theta)$ 或 $k(S_w)$，$K(S_w)$。这样，非饱和带中的 Darcy 定律表达式为：

$$v = K(\theta)J \tag{7—12}$$

如用渗透率来表达时，则有：

$$v = -\frac{k(S_w)\gamma}{\mu}\nabla\left(\frac{p}{\gamma}-z\right) = -k\frac{k_r(S_w)\gamma}{\mu}\nabla\left(\frac{p}{\gamma}+z\right) \tag{7—13}$$

式中：$k$ ——饱和土的渗透率；

$k\ (S_w)$ ——非饱和土的渗透率，为饱和度 $S_w$ 的函数；

$k_r(S_w)$——相对渗透率，$k_r(S_w)=\dfrac{k(S_w)}{k}$；

$\mu$——水的动力粘滞系数。

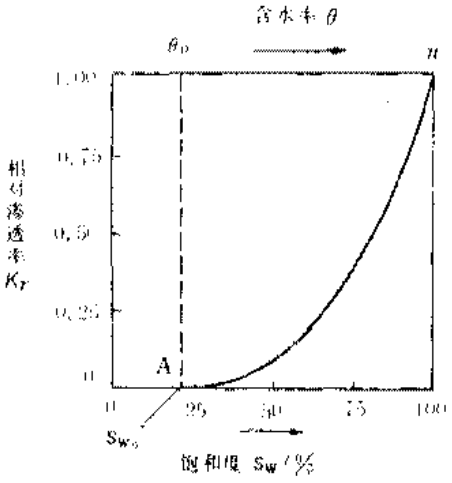



图 7—4 非饱和砂的相对渗透率与饱和度的关系

（据 Wyckoff 和 Botset，1936）

相对渗透率为非饱和土的渗透率和同一种土饱和时的渗透率的比值，为含水率 $\theta$ 或饱和度 $S_w$ 的函数。非饱和砂的相对渗透率和饱和度的关系表示在图 7—4 中。当饱和度（含水率）减少时，大孔隙首先开始排水，渗透在较小的孔隙中进行，过水断面减小，渗流途径的弯曲度增加，相对渗透率急剧减小。到达 A 点，孔隙中的水变得不连续了，相对渗透率等于零。此时的饱和度为 $S_{w_0}$，相应的含水率为 $\theta_0=nS_{w_0}$。

2. 基本微分方程

在第一章中，我们已经得到了渗流的连续性方程（1—65）式。对于非饱和流动，把等式右端的空隙度 $n$ 换成含水率 $\theta$，方程仍然是适用的。在非饱和带中，一般不考虑介质的变形，即单元体体积 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 不随时间而变化，于是可以约去等式两端的 $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$；同时，在非饱和流动中，水的密度 $\rho$ 变化很小，可当作常数。于是，相应的连续性方程为：

$$-\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial \theta}{\partial t} \tag{7—14}$$

将运动方程（7—12）式代入（7—14）式中，得：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}\right] \tag{7—15}$$

式（7—15）即为非饱和流的基本微分方程，称为 Richards 方程。

上述方程中，既含有含水率 $\theta$，又含有水头 $H$，为解决问题方便起见，可以把基本微分方程化成以下几种表达形式。

（1）以含水率 $\theta$ 为因变量的表达式：前已述及，非饱和带的水头 $H=z-h_c$，又由水分特征曲线、毛管压力水头 $h_c$ 和含水率 $\theta$ 之间存在着函数关系，因此（7—15）式可改写为：

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{7—16}$$

式中，$-\frac{dh_c}{d\theta}=\frac{1}{-\frac{d\theta}{dh_c}}=\frac{1}{C}$，$C$ 为容水度。

由于水分特征曲线各处的斜率不同，$C$ 不是常数、而是随含水率 $\theta$ 而变的变数，即 $C=C(\theta)$。令：

$$D(\theta)=\frac{K(\theta)}{C(\theta)}=-K(\theta)/\frac{d\theta}{dh_c} \tag{7—17}$$

参数 $D(\theta)$ 是渗透系数和容水度的比值，称为扩散系数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$。它是一个重要的参数。引入 $D(\theta)$ 以后，(7—16) 式变为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{7—18}$$

这是二阶的非线性偏微分方程。对于一维的垂直流动，可简化为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\pm\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{7—19}$$

$z$ 轴向上取正值，$z$ 轴向下取负值。

(2) 以毛管压力水头为因变量的表达式：从水分特征曲线可知，毛管压力水头和含水率之间存在着函数关系。因此，非饱和土的渗透系数同样是毛管压力水头的函数，即 $K=K(h_c)$ 或 $K(\psi)$，$C=C(h_c)$ 或 $C(\psi)$。于是，

$$v=K(\psi)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}i+\frac{\partial\psi}{\partial y}j+\frac{\partial\psi}{\partial z}k\right)-K(\psi)k \tag{7—20}$$

把它代入 (7—14) 式得

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]+\frac{\partial K(\psi)}{\partial z} \tag{7—21}$$

考虑到

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial\theta}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial t}=-C(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

于是

$$-C(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[K(\psi)\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]-\frac{\partial K(\psi)}{\partial z}=0 \tag{7—22}$$

(3) 饱和-非饱和流的表达式：在饱和-非饱和流动中，常以压强 $p$ 或水头 $H$ 为因变量，有 $H=z+\frac{p}{r}$。如果不忽略密度的变化，连续性方程 (7—14) 可写为：

$$\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho v)=0 \tag{7—23}$$

再将 $v$ 用运动方程 (7—13) 代入，容重 $\gamma=\rho g$，含水率 $\theta=nS_w$，则得：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho nS_w)=\nabla\cdot\left[\frac{\rho k(S_w)}{\mu}(\nabla p+\rho gk)\right] \tag{7—24}$$

该方程中的某些参数的取值范围如下：

| 饱和带 | 非饱和带 |
| --- | --- |
| $p\geqslant 0$，$S_w=1$ | $p<0$，$S_w=S_w(p)$；$S_{w_0}\leqslant S_w<1$ |
| $k(S_w)=k=$ 常数 | $k=\begin{cases}k(S_w) & \text{对于 } S_w>S_{w_0}\\ 0 & \text{对于 } 0\leqslant S_w\leqslant S_{w_0}\end{cases}$ |

以上考虑的模型都是单相流模型，只研究水的运动，即凡是水流到的地方，空气自然被排走。实际上，岩石空隙是既存在空气也存在水的二相系统，也必然是更复杂的模型，这里就不介绍了，请读者参考有关的专著。

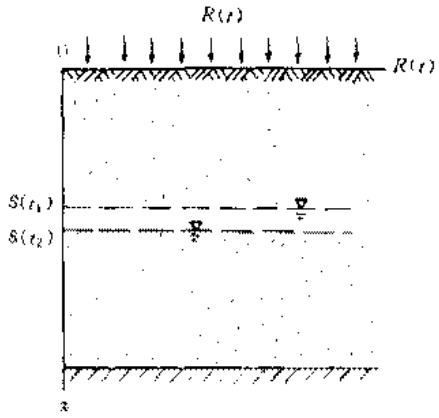



图 7—5　垂直入渗情况下的饱和-非饱和流动模型

**思考题：**

1. 为什么对于饱和流动，不透水边界的边界条件为$\frac{\partial H}{\partial n}=0$，而对于垂直入渗的非饱和流动，不透水边界的边界条件为$\frac{\partial h_c}{\partial z}=1$？

2. 图 7—5 为一个垂直入渗情况下的饱和-非饱和流动模型。地面入渗率为 $R(t)$，潜水面的埋深 $s(t)$ 随时间而变化，初始埋深为 $s(0)=L$，潜水含水层底板隔水。试写出该情况下的饱和-非饱和流动的数学模型。

## §7—2　双重介质渗流学说

### 一、基本假定

有关裂隙介质中地下水运动的研究，到目前为止还很不够。这是因为裂隙的形状、大小和分布都很不均匀，同一岩层不同部位的富水性相差悬殊。赋存条件的这种差异，必然反映到地下水运动上来，表现出不同的运动特点。因此，要建立描述裂隙水运动的一般微分方程是困难的，求解就更为不易。因此，人们都把裂隙介质按等效孔隙介质渗流理论来研究，建立相应的数学模型，即用研究孔隙水的数学模型来处理裂隙水的运动问题。50 年代，通过油田地质研究，人们发现，在发育裂隙的孔隙岩层（孔隙-裂隙岩层）中，同时存在着两种空隙和渗流系统：空隙总体积较大而渗透性相对弱的多孔岩块系统和分割多孔岩块的裂隙系统。后者空隙体积较小，渗透性却相对较强（图 7—6）。岩层中的水流大部分是由裂隙传输的。也就是说，地下水主要是贮存在孔隙中，水的运动主要是在裂隙中进行。在此基础上，Г. И. Баренблатт 等人于 1960 年提出了“孔隙-裂隙二重性”的假定，并导出描述孔隙-裂隙岩层中液体运动的基本微分方程，建立了相应的数学模型，并在 70 年代中期引入到地下水研究中来。这就是所说的双重介质渗流学说。他在建立微分方程时应用了下列假定：

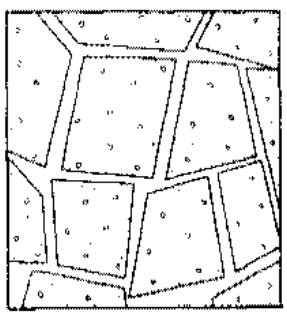


图 7—6　孔隙-裂隙岩层
（据 T. D. Streltsova）

（1）具有原生孔隙的岩层中广泛发育有随机分布的裂隙，二者都充满着整个研究区，形成两个重叠的连续系统。也就是说，孔隙和裂隙的分布彼此都是连续的，即所

谓的“二重性”假定。双重介质的名称即由此而来。根据这一假定，在渗流区中的每个点上都有两个水头，一个是孔隙水头 $H$，另一个是裂隙水头 $H_f$；

(2) 孔隙以贮水为主，裂隙以导水为主，水自孔隙经裂隙流向别处，其总的渗透性决定于裂隙的渗透性；水在裂隙中的流动服从 Darcy 定律；

(3) 孔隙和裂隙的初始水头相等，它们之间交换的水量与其水头差成正比，即：

$$Q_{p_f} = C(H - H_f) \tag{7—25}$$

式中，$Q_{p_f}$为单位体积的含水层在单位时间内从孔隙流入裂隙的水量，$C$ 是比例常数；

(4) 含水层骨架可以压缩，但其固体颗粒的压缩性忽略不计，看成是刚性的。

## 二、微分方程的建立

根据上述假定和水流连续性原理，可以建立裂隙承压含水层的微分方程。仍然考虑图 1—29 中那个单元体的水均衡，所取坐标轴和主渗透方向一致。根据第二个假定，这个单元体中的水通过裂隙流入、流出，并服从 Darcy 定律。因此，在 $\Delta t$ 时段内沿 $x$ 轴方向流入这个单元体与流出这个单元体的水量之差（净流入这单元体的水量）为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

式中，$K_{xx}^{f}$为裂隙的主渗透系数（与 $x$ 轴平行）。同理可得，$\Delta t$ 时段内沿 $y$ 轴方向和 $z$ 轴方向净流入这个单元体的水量分别为：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

式中，$K_{yy}^{f}$、$K_{zz}^{f}$为裂隙的主渗透系数（分别与 $y$ 轴和 $z$ 轴平行）。根据假设，孔隙中释放出的水要进入裂隙，其量为：

$$C(H - H_f)\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

因此，在 $\Delta t$ 时间内单元体中总的水量变化（净流入量）为：

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial z}\right)+C(H - H_f)\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

这个时间内，单元体内由于贮存的变化所引起的水量变化为：

$$\mu_s^{f}\frac{\partial H_f}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

式中 $\mu_s^{f}$ 为裂隙贮水率。

单元体内水量变化必然引起贮存的变化，两者应相等。于是得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial z}\right)+C(H - H_f)=\mu_s^{f}\frac{\partial H_f}{\partial t} \tag{7—26}$$

同理，对孔隙有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)-C(H - H_f)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{7—27}$$

式中，$K_{xx}$，$K_{yy}$，$K_{zz}$为沿 $x$，$y$，$z$ 轴方向孔隙的主渗透系数，$\mu_s$ 为岩块的贮水率。

由于孔隙中的水力坡降很小，可以认为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0$$

故有：

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\gamma(H_f-H) \tag{7-28}$$

式中，$\gamma=\frac{C}{\mu_s}$，称为承压水迁移系数。为了建立关于 $H_f$ 的方程，把（7—28）式改写为：

$$\frac{\partial(H-H_f)}{\partial t}+\gamma(H-H_f)=-\frac{\partial H_f}{\partial t}$$

这是关于（$H-H_f$）的一阶线性微分方程。按已知公式，可求得其通解为：

$$H-H_f=Ce^{-\gamma t}-\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \tag{7-29}$$

再利用初始条件：

$$H(x,y,0)=H_f(x,y,0)=H_0(x,y)$$

代入上式，可得 $C=0$。由此求得其解为：

$$H=H_f-\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \tag{7-30}$$

把上式代入（7-28）式可得：

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\gamma(H_f-H)-\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \tag{7-31}$$

把它代入（7-26）式，便可得只包括裂隙水头 $H_f$ 的方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}^f\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}^f\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}^f\frac{\partial H_f}{\partial z}\right)=\mu_s^f\frac{\partial H_f}{\partial t}+\mu_s\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \tag{7-32}$$

上式是描述承压双重介质裂隙水流的基本微分方程。在二维情况下可简化为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}^f\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}^f\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)=\mu^f\frac{\partial H_f}{\partial t}+\mu^*\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \tag{7-33}$$

式中，$T_{xx}^f$、$T_{yy}^f$为裂隙的主导水系数（分别与 $x$，$y$ 轴平行）。$\mu^f$、$\mu^*$ 为裂隙和岩块的贮水系数。

把上述方程和描述多孔介质中渗流的基本微分方程比较，其不同之处只是多了一项：

$$\mu_s\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau\left(\text{二维情况下为 }\mu^*\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau\right)$$

从前面的讨论中不难发现，它表示：

$$\mu_s\frac{\partial H}{\partial t}=C(H_f-H)\left(\text{或 }\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}\right)$$

因此，它的物理意义为单位时间内单位体积含水层（二维情况下为单位面积的柱体）中从孔隙流入裂隙的水量。它是一个和时间有关的量。抽水早期，即 $t$ 值很小时，它很小，抽出的水主要来自裂隙内水的释放，从而造成裂隙水头的迅速下降。随着时间的增长，这一水量相应地增大，裂隙水头的下降速度也随之减缓。可见，多孔岩块中的水是逐渐释放出来的。这是由该数学表达式的性质决定的，从而造成孔隙水头的下降落后于裂隙水头的下降，在时间上存在着迟后。因此，这部分水量也可以称为延迟弹性释水量。随着时间的增长，迟后效应逐渐变小，孔隙中释放的水量逐渐跟得上裂隙中水位的下降，最后迟后效应小到可

以忽略不计。和潜水 Boulton 方程比较，不难发现，两者在形式上是相似的，都包含有延迟效应项，即延迟弹性释水量项和潜水迟后重力排水项。但前者有明确的物理含意。

延迟弹性释水项中包含一个新的参数——承压水迁移系数 $\gamma$。根据定义，其中比例常数 $C$ 是反映孔隙和裂隙之间水量交换特征的参数，与孔隙的渗透系数 $K$ 及多孔岩块的几何特征有关。T. D. Streltsova（1976）认为，$C=\frac{K}{L}$，$L$ 为岩块的特征长度，用岩块的平均大小或岩块中心到它表面的平均距离来表示。所以 $\gamma$ 值取决于 $K$，$L$，$\mu_*$ 等，它是反映孔隙、裂隙发育情况及其连通程度的特征量。$\gamma$ 越小，从孔隙向裂隙运移的水量越少，延迟时间越长；反之，$\gamma$ 越大，从孔隙向裂隙运移的水量越多，延迟的时间越短。

对无压含水层，相应近似的裂隙水流基本方程，在二维情况下为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T_{xx}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_{yy}^{f}\frac{\partial H_f}{\partial y}\right)=\mu^{f}\frac{\partial H_f}{\partial t}+(\mu^{*}+\mu)\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{\partial H_f}{\partial \tau}d\tau \qquad (7—34)$$

式中，$\alpha=\frac{Ch}{\mu^{*}+\mu}$，称为水迁移系数，$h$ 为含水层厚度。方程右端第二项的物理含意为延迟弹性释水量与延迟重力排水量之和。

对于完整抽水井，如果含水层是均质、等厚的承压含水层，抽水前，所有裂隙和孔隙中的静水压力相等，以定流量抽水，则有：

$$T^{f}\left(\frac{\partial^2 s_f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s_f}{\partial r}\right)=\mu^{f}\frac{\partial s_f}{\partial t}+\mu^{*}\gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)}\frac{\partial s_f}{\partial \tau}d\tau \qquad (7—35)$$

式中，$s_f$ 为裂隙中的降深，此时有定解条件：

$$s_f(r,0)=0 \qquad (7—36)$$

$$s_f(\infty,t)=0 \qquad (7—37)$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial s_f}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T^{f}} \qquad (7—38)$$

38）这个定解问题和 Boulton 问题在形式上相似。因此，不难参照后者的解法求得它的解。

**思考题：**

1、双重介质渗流学说，为什么要假设一个点有两个水位？在钻孔中测出的水位代表什么水位？

2、边界条件（7—38）改写成 $\lim_{r\to 0} r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T}$，可以吗？

## §7—3 水动力弥散理论

随着近年来地下水遭到不同程度的污染，地下水中溶质运移理论愈来愈引起人们的关注。它不仅可以用来模拟地下水中污染物的运移过程，预测地下水污染的发展趋势，控制地下水污染，还可以用于防止海水入侵及土壤盐碱化等方面。

### 一、水动力弥散现象及其机理

先考察两个实例。通过它们可以大致了解水动力弥散现象是怎么回事。

**例 1**：若在一口井中瞬时注入某种浓度的一种示踪剂，则在附近观测孔中可以观察到示踪剂不仅随地下水流一起位移，而且逐渐扩散开来，超出了仅按平均实际流速所预期到达

的范围，并有垂直于水流方向的横向扩散（如图 7—7 所示），不存在突变的界面。

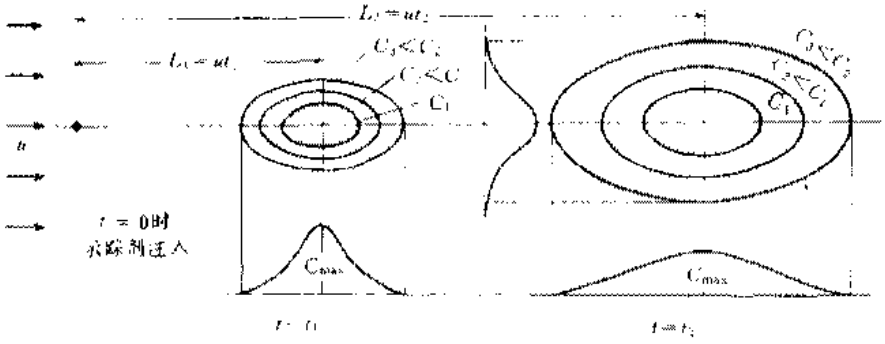



图 7—7　示踪剂的纵向、横向扩展

（据 J. Bear）

**例 2**：将装满均质砂的圆柱形管用水饱和，并让水流不断地稳定均匀通过，在某一时刻（$t=0$），开始注入含有示踪剂浓度为 $c_0$ 的水去替代原来不含示踪剂的水，在砂柱末端测量示踪剂浓度的变化 $c\ (t)$。绘制示踪剂相对浓度对时间的曲线（图 7—8）。曲线呈 S 形，而不是图中虚线所示的形状。

上述事实说明，存在一种特殊的现象。因为如果不存在这种现象，示踪剂应按水流的平均流速移动；含示踪剂和不含示踪剂的水的接触界面应该是突变的；示踪剂也不应在横向扩展开来；图 7—8 中，曲线应出现虚线所示形式，即有一个以实际平均流速移动的直立锋面。以上事实说明，在两种成分不同的可以混溶的液体之间存在着一个不断加宽的过渡带。这种现象称为水动力弥散。因此，所谓水动力弥散就是多孔介质中所观察到的两种成分不同的可混溶液体之间过渡带的形成和演化过程。这是一个不稳定的不可逆转的过程。

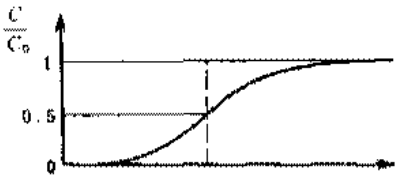



图 7—8　砂柱中的一维流动

水动力弥散是由溶质在多孔介质中的机械弥散和分子扩散所引起的。兹分述如下。

1. 机械弥散

在多孔介质中，无论液体运动速度的大小还是方向，都是很不均一的。这主要和下列情况有关：由于液体有粘滞性以及结合水对重力水的摩擦阻力，使得最靠近隙壁部分的（重力）水流速度趋近于零，向轴部流速逐渐增大，至轴部最大〔图 7—9a〕；孔隙的大小不一，造成不同孔隙间轴部最大流速有差异〔图 7—9b〕；孔隙本身弯弯曲曲，水流方向也随之不断改变，因此对水流平均方向而言，具体流线的位置在空间是摆动的〔图 7—9c〕。这几种现象是同时发生的，由此造成开始时彼此靠近的示踪剂质点群在流动过程中不是一律按平均流速运动，而是不断向周围扩展，超出按平均流速所预期的扩展范围。沿平均速度方向和垂直它的方向上，都可以看到这种扩展现象。液体通过多孔介质流动时，由于速度不均一所造成的这种物质运移现象称为机械弥散。

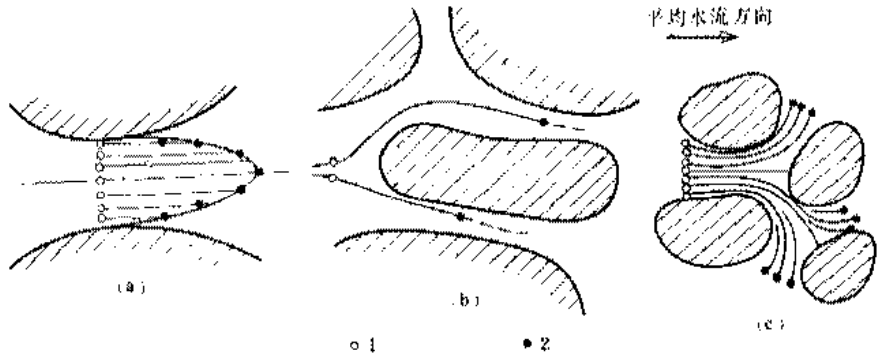



图 7—9　机械弥散引起的示踪剂扩展

1，2 分别为 $t$ 时刻和 $t+\Delta t$ 时刻液体质点的位置

2. 分子扩散

分子扩散是由于液体中所含溶质的浓度不均一而引起的一种物质运移现象。浓度梯度使得物质从浓度高的地方向浓度低的地方运移，以求浓度趋向均一。因此，即使在静止液体中也会发生分子扩散，使示踪剂扩散到越来越大的范围。分子扩散使同一流束内的浓度趋于均一，而且相邻流束间在浓度梯度的作用下也有物质交换，导致横向浓度差的减小。

物理学的知识告诉我们，分子扩散服从 Fick 定律。该定律揭示了溶液中溶质的扩散，在单位时间内通过单位面积的溶质质量 $I_s$ 与该溶质的浓度梯度成正比，即：

$$I_s = -D_d \frac{dc}{ds} \tag{7—39}$$

式中：$\frac{dc}{ds}$为该溶质在溶液中的浓度 $c$ 沿方向 $s$ 变化的浓度梯度，比例系数 $D_d$ 称为扩散系数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$。不同溶质的扩散系数各不相同，同一物质在不同温度下的扩散系数也不同。在浓度低的情况下，可以认为它是一个与浓度无关的常数。由于扩散是沿着浓度减小的方向进行的，而扩散系数总是正的，所以式中要加一负号。

液体在多孔介质中流动时，机械弥散和分子扩散是同时出现的，事实上也不可分。这种划分带有某种人为的性质。事实上，“纯”机械弥散不可能存在。因为当示踪剂质点沿着微小的流管运移时，分子扩散不仅使流管中的浓度趋于拉平，而且还使示踪剂质点从一条流管移向相邻的另一条流管，导致横向浓度差的减小。但分子扩散，即使在没有水流运动的情况下也能单独存在。当流速较大时，机械弥散是主要的；当流速甚小时，分子扩散的作用就变得很明显。显然，机械弥散和分子扩散都会使溶质既沿平均流动方向扩展又沿垂直于它的方向扩展。前者称为纵向弥散，后者称为横向弥散。

除了机械弥散和分子扩散外，某些其它现象也会影响多孔介质中溶质的浓度分布，如多孔介质中固体颗粒表面对溶质的吸附、沉淀，水对固体骨架的溶解及离子交换等。此外，液体内部的化学反应也可导致溶质浓度的变化。

一般来说，溶质浓度的变化会导致液体密度和粘度的变化。这些变化反过来会影响水流状态，即流速的变化。但在通常情况下，这类影响不大，可以忽略。

## 二、水动力弥散系数

如在第一章中所说的，由于多孔介质几何结构的复杂性，从微观水平上研究一个点的运动规律实际上是不可能的；同样，从微观水平来研究弥散也是困难的。因此，和定义渗流速度一样，也从宏观上来描述弥散现象。下面所述及的物理量，和渗流速度一样，都是定义在典型单元体（REV）上的平均值。

分子扩散服从 Fick 定律，通过实验和理想模型的研究，证实机械弥散也能用这个定律来描述。根据 Fick 定律，多孔介质中的分子扩散可用下式描述：

$$\boldsymbol{I}'' = -\boldsymbol{D}'' \cdot \mathrm{grad}c \tag{7—40}$$

式中，$\boldsymbol{D}''$为多孔介质中的分子扩散系数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$、是二秩张量；$c$ 为该溶质在溶液中的浓度；$\boldsymbol{I}''$为由于分子扩散在单位时间内通过单位面积的溶质质量，对于机械弥散有：

$$\boldsymbol{I}' = -\boldsymbol{D}' \cdot \mathrm{grad}c \tag{7—41}$$

式中，$\boldsymbol{D}'$为机械弥散系数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$，也是二秩张量；$\boldsymbol{I}'$为由于机械弥散造成的在单位时间内通过单位面积的溶质质量，$c$ 的含义同前。$\boldsymbol{D}'$和 $\boldsymbol{D}''$的量纲相同，由此定义水动力弥散系数 $\boldsymbol{D}$：

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}' + \boldsymbol{D}'' \tag{7—42}$$

$\boldsymbol{D}$ 也是二秩张量。由于水动力弥散在单位时间内通过单位面积的溶质的质量则为 $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}'+\boldsymbol{I}''=-\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{grad}c$，如果我们选择 $x$ 轴与该点处的平均流速方向一致，$y$ 轴和 $z$ 轴则与平均流速方向垂直，则上式也可以写成下列更容易被我们理解的形式：

$$I_x = -D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x},\quad I_y = -D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y},\quad I_z = -D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z} \tag{7—43}$$

或

$$\begin{bmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial c}{\partial x} \\ \dfrac{\partial c}{\partial y} \\ \dfrac{\partial c}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{7—44}$$

此时水动力弥散系数张量：

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix} \tag{7—45}$$

坐标轴方向称为弥散主轴。$D_{xx}$称为纵向弥散系数；$D_{yy}$，$D_{zz}$称为横向弥散系数。由于弥散主轴的方向依赖于流速方向，即使在均质各向同性介质中，各点弥散主轴的方向也会随着水流方向的改变而各不相同。

水动力弥散系数在研究地下水物质运移问题中的意义可以和渗透系数在研究地下水运动问题中的意义相比拟，是一个很重要的参数。通过大量在未固结的多孔介质中的实验，得到了如图 7—10 所示的曲线。图中，纵坐标是从实验室得到的纵向弥散系数 $D_L$ 与溶质在所研究的液相中的分子扩散系数 $D_d$ 的比值，横坐标是一个无量纲的量：

$$Pe = \frac{ud}{D_d} \tag{7—46}$$

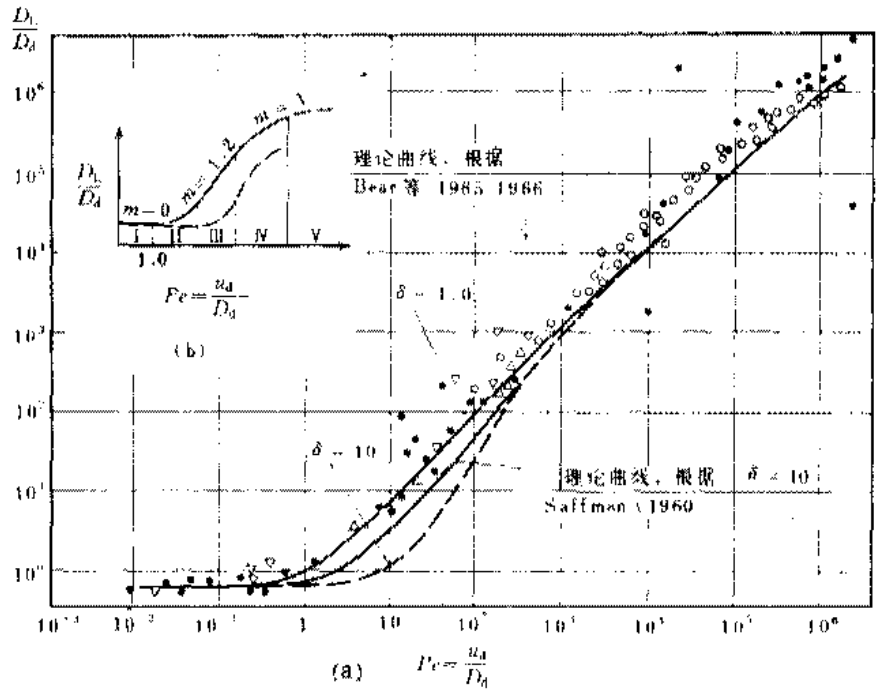



图 7—10　分子扩散和水动力弥散间的关系

（据 J. Bear）

称为 Peclet 数。其中，$u$ 为实际平均流速；$d$ 为多孔介质的某种特征长度，如多孔介质的平均粒径等。该无量纲数表示实际流速和分子扩散系数相比的相对大小，Pe 数愈大，表示流速相对愈大。根据这条曲线的变化情况，大致上可以分五个区。

第 I 区：实际流速很小，以分子扩散为主，相当于曲线上$\frac{D_L}{D_d}$接近于常数的一段。

第 II 区：对应的 Peclet 数 Pe 约在 0.4 到 5 之间，曲线开始向上弯曲，机械弥散已达到和分子扩散相同的数量级。因此，应当研究两者的和，而不应忽略其中的任何一个。

第 III 区：物质运移主要由机械弥散和横向分子扩散相结合而产生。横向分子扩散往往会削弱纵向的物质运移，实验结果得出$\frac{D_L}{D_d}=\alpha\ (\mathrm{Pe})^m$，　　$\alpha\approx 0.5$，　　$1<m<1.2$

第 IV 区：以机械弥散为主，分子扩散的作用已经可以忽略不计，但流速尚未达到偏离 Darcy 定律的程度。本区相当于图中的直线部分。实验给出$\frac{D_L}{D_d}=\beta \mathrm{Pe}$，$\beta\approx 1.8$。

第 V 区：仍属于机械弥散为主的区域，与第 IV 区的区别在于水流速度已达到越出 Darcy 定律适用的范围。惯性力和紊流的影响造成纵向物质运移的减少，曲线斜率减缓。

横向弥散试验得到了和纵向弥散相类似的结果。

上述曲线说明，弥散系数和水流速度、分子扩散有关。它们间的关系如下式所示：

$$D'_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}\alpha_{ij,km}\frac{u_k u_m}{u}f(\mathrm{Pe},\delta) \tag{7—47}$$

式中：$D'_{ij}$——机械弥散系数，为一个二秩对称张量，这是它的一个分量；

$\alpha_{ij,km}$——多孔介质的弥散度，为一四秩张量；在饱和流动中它反映多孔介质固体骨架

的几何性质，量纲为〔L〕；

$u$——实际平均流速，$u_k$，$u_m$ 分别为它在坐标轴 $x_k$、$x_m$ 上的分量；

$\delta$——表示水流通道形状特征的系数，无量纲；

$f(\mathrm{Pe},\delta)=\dfrac{\mathrm{Pe}}{2+\mathrm{Pe}+4\delta^2}$ 在微观水平上考虑相邻流线之间由分子扩散所引起的对物质运移影响的函数，这个影响和机械弥散是不可分的。

Pe 较大时，由 $f(\mathrm{Pe},\delta)$ 的表达式可以看出，$f(\mathrm{Pe},\delta)\simeq 1$。也就是说，分子扩散对机械弥散系数的影响就变得微不足道了。由（7—47）式不难看出，这时机械弥散系数和实际平均流速之间呈线性关系。对于大多数实际问题来说，都属于这种情形，总是假定 $f(\mathrm{Pe},\delta)=1$。

如果在某一点上选择坐标轴，使得其中一个坐标轴（如 $x$ 轴）和该点处的平均流速方向一致（即弥散主轴），并忽略分子扩散，$f(\mathrm{Pe},\delta)=1$，则：

$$D'_{xx}=\alpha_L u,\quad D'_{yy}=D'_{zz}=\alpha_T u,\quad D'_{xy}=D'_{xz}=D'_{yz}=\cdots=0 \qquad (7-48)$$

式中，$\alpha_L$，$\alpha_T$ 分别称为纵向弥散度和横向弥散度。纵向机械弥散系数 $D'_{xx}$ 和横向机械弥散系数 $D'_{yy}$ 及 $D'_{zz}$ 称为弥散系数的主值。由于弥散主轴依赖于水流方向，所以除了均匀流（$u_x$=常数，$u_y=u_z=0$）以外，一般说来即使在各向同性介质中各点的弥散系数也各不相同，随空间位置而变化。

### 三、对流-弥散方程及其定解条件

考虑由某种溶质和溶剂组成的二元体系。以充满液体的渗流区内任一点 $p$ 为中心，取一无限小的六面体单元，各边长为 $\Delta x$、$\Delta y$ 和 $\Delta z$，选择 $x$ 轴与 $p$ 点处的平均流速方向一致，我们来研究该单元中溶质的质量守恒。

先研究由水动力弥散所引起的物质运移。$\Delta t$ 时间内沿 $x$ 轴方向水动力弥散流入的溶质质量为 $I_x n\Delta y\Delta z\Delta t$。其中，$n$ 为空隙度。而 $\Delta t$ 时间内从单元体流出的溶质的质量为 $\left(I_x+\dfrac{\partial I_x}{\partial x}\Delta x\right)n\Delta y\Delta z\Delta t$。因此，沿 $x$ 轴方向流入与流出单元体的溶质质量差即单元体内溶质质量的变化为：

$$-\frac{\partial I_x}{\partial x}n\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

同理，沿 $y$ 轴方向和 $z$ 轴方向单元体内溶质质量的变化分别为：

$$-\frac{\partial I_y}{\partial y}n\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t,\qquad -\frac{\partial I_z}{\partial z}n\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

如前述，溶质还要随水流一起运移，现在来研究由于这种运动所引起的单元体内溶质质量的变化。$\Delta t$ 时间内沿 $x$ 轴方向随水流一起流入的溶质的质量为 $cv_x\Delta y\Delta z\Delta t$，流出单元体的溶质的质量为 $\left(cv_x+\dfrac{\partial(v_x c)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z\Delta t$。因此，沿 $x$ 轴方向流入与流出的溶质质量差，即由水流运动所引起的单元体内溶质质量的变化为：

$$-\frac{\partial(v_x c)}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

同理，沿 $y$ 轴和 $z$ 轴方向由水流运动所引起的单元体内溶质质量的变化分别为：

$$-\frac{\partial(v_y c)}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t,\qquad -\frac{\partial(v_z c)}{\partial z}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

在 $\Delta t$ 时间内，由于弥散和水流运动所引起的单元体内总的溶质质量变化为：

$$-\left[n\left(\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial(v_x c)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y c)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z c)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

若 $\Delta t$ 时间内单元体内溶质的浓度发生了 $\frac{\partial c}{\partial t}\Delta t$ 的变化，单元体内的液体体积为 $n\Delta x\Delta y\Delta z$，则由它所引起的该单元体中溶质质量的变化为：

$$n\frac{\partial c}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

如果没有由于化学反应及其它原因（如抽水、吸附等）所引起的溶质质量变化，则根据质量守恒定律，两者应该相等，即：

$$n\frac{\partial c}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t=-\left[n\left(\frac{\partial I_x}{\partial x}+\frac{\partial I_y}{\partial y}+\frac{\partial I_z}{\partial z}\right)+\frac{\partial(v_x c)}{\partial x}+\frac{\partial(v_y c)}{\partial y}+\frac{\partial(v_z c)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$$

当坐标轴与水流平均流速方向一致时：

$$I_x=-D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x};\qquad I_y=-D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y};\qquad I_z=-D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z}$$

代入上式并化简得：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial(u_x c)}{\partial x}-\frac{\partial(u_y c)}{\partial y}-\frac{\partial(u_z c)}{\partial z}\tag{7—49}$$

式（7—49）称为对流—弥散方程（水动力弥散方程）。它右端后三项表示水流运动（习惯地把它喻为对流）所造成的溶质运移，前三项表示水动力弥散所造成的溶质运移。

如果还有化学反应或其它原因所引起的溶质质量变化，且单位时间单位体积含水层内由此而引起的溶质质量的变化为 $f$，则应把它加到方程式（7—49）的右端，有：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial(u_x c)}{\partial x}-\frac{\partial(u_y c)}{\partial y}-\frac{\partial(u_z c)}{\partial z}+f\tag{7—50}$$

要确定一个水动力弥散问题的解，即求得浓度的分布，还要给出下列信息：①研究空间区域 $\Omega$ 和时间区间 $[0,T]$；②研究区域水头场的分布；③有关参数，如弥散度 $\alpha_L$ 和 $\alpha_T$ 等；④定解条件。

初始条件给出初始时刻（$t=0$）区域 $\Omega$ 上的浓度分布，即：

$$c(x,y,z,0)=c_0(x,y,z)\tag{7—51}$$

$c_0$ 是已知函数。

边界条件通常有二种类型。一种是已知浓度的边界条件，即：

$$c(x,y,z,t)|_{\Gamma_1}=\varphi(x,y,z,t)|_{(x,y,z)\in\Gamma_1}\qquad 0<t<T\tag{7—52}$$

式中，$\Gamma_1$ 为研究区的边界，$\varphi$ 是已知函数。另一种是已知单位时间内通过边界单位面积的溶质质量的边界条件。在三维条件下，形式复杂，不易理解。兹以一维问题的几种常见例子具体说明如下：

(1) 多孔介质 a 的边界外为另一多孔介质 b，根据单位时间通过边界的溶质的质量要保持连续的原则，当渗透速度为 $v$ 时有：

$$\left(vc-nD_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Big|_a=\left(vc-nD_L\frac{\partial c}{\partial x}\right)\Big|_b\tag{7—53}$$

(2) 如边界为隔水边界，则通过边界的流量和溶质的量均为零，由上式 $vc-nD_L\frac{\partial c}{\partial x}=0$ 及 $v=0$ 得边界 $\Gamma_2$ 上有边界条件

$$\left.\frac{\partial c}{\partial x}\right|_{\Gamma_2}=0 \tag{7—54}$$

**四、一维弥散问题的解**

考虑流速方向与 $x$ 轴方向一致的半无限一维均匀流的情况，示踪剂连续注入，纵向弥散系数 $D_x=D_L$ 在均匀流情况下不随坐标 $x$ 而变化，$u_x=u$ 为常数，一维情况下 (7—49) 式化为：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=D_L\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}-u\frac{\partial c}{\partial x} \tag{7—55}$$

同时有定解条件：

$$\begin{cases} c(x,0)=0 & 0\leqslant x<\infty \\ c(0,t)=c_0 & t>0 \\ c(\infty,t)=0 & t>0 \end{cases} \tag{7—56}$$

当 $\frac{x}{\alpha_L}$ 足够大时，该定解问题的解为：

$$c_R\simeq\frac{1}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x-ut}{2(D_Lt)^{1/2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-ut}{2(D_Lt)^{1/2}}}^{\infty}e^{-y^2}dy \tag{7—57}$$

利用 (7—57) 式可以求得任意时刻 $t$，任意距离 $x$ 处的相对浓度 $c_R$。因为示踪剂浓度 $c_0$ 是已知的，即可求得该处的浓度 $c$ $(x,t)$。反之，也可利用实验室或野外的一维弥散的实际观测资料，求出纵向弥散系数 $D_L$。因为流速 $u$ 已知，也可以算出纵向弥散度 $\alpha_L$。

根据对流-弥散方程，在适当的初始条件、边界条件下求得的解，可以用来预报地下水中污染物的时、空分布。其结果和实验室的实验结果，一般也拟合得很好。但应用于野外试验时，却发现利用对流-弥散方程反求得的弥散度值要比实验室实验所得的值大几个数量级，而且弥散度值看来和污染物分布的范围有关，随着它的增大而增大（称为尺度效应）。对产生这种现象的较普遍的看法是，是受岩层非均质性影响的结果。非均质性引起复杂的速度分布。这种分布导致在一定程度上与均质介质中因粒间速度变化引起的机械弥散现象相类似的污染物分布。虽然非均质性是造成上述现象的主要原因已没有多少疑问，但这种影响的方式还没有了解得很清楚。总之，虽然过去 20 多年中对地下水中溶质运移的研究已经取得了很大成绩，但这个领域的研究还只是处于它的“幼年阶段”。还需要大量的室内和野外试验，以便积累在野外尺度上溶质运移过程的知识，为发展其数学模型提供基础。没有这些，就难以充分地评价人类活动对地下水环境质量的影响。

**思考题：**

1. 试写出轴对称条件下一维的弥散方程式。

2. 为什么确定弥散问题的解需要给出研究区域水头场的分布？如果只知道水头的初始状态、边值和有关参数怎么办？

## §7—4 海岸带含水层中的咸淡水界面

在天然条件下，海岸带含水层中的淡水和咸水维持着一种平衡，它们之间有一个界面。界面以上的淡水流向海洋（图 7—11）。抽取淡水后，会引起潜水位（或测压水头）的下降。如果淡水抽水量超过了它的补给量，使得海岸附近的潜水位（或测压水头）下降到淡水体水头低于附近海水楔形体的水头时，界面就要向陆地推进，直至形成新的平衡。这种现象称为海水入侵。因此，海岸带含水层中咸淡水界面的研究对沿海地区人民生活和工农业生产有很重要的意义。

淡水和咸水很容易混合，它们之间的接触带由于水动力弥散常形成一个由淡水、低矿化水逐渐变为高矿化水、咸水的过渡带。如这个过渡带较宽，就需要作为水动力弥散问题加以研究。然而，在不少情况下，这个带的宽度相对来说（和含水层厚度相比）较窄，可以近似地把它看成是不相混溶的两种液体之间的突变界面来研究，本节第一小节就是这样处理的。

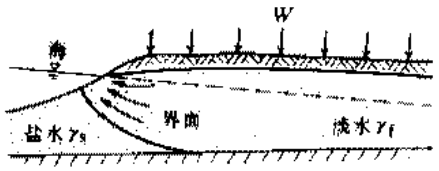



图 7—11 海岸带无压含水层中咸淡水界面示意图

### 一、作突、变界面处理——静止界面的近似解

上世纪末本世纪初，Ghyben 和 Herzberg 曾假设淡水和海水处于一种静平衡状态，对相对静止的海水来说，淡水区的压强可认为是按静水压强分布（图 7—12）的。故在深度 $h_s$ 的界面上，有：

$$\gamma_f(h_s + h_f) = \gamma_s h_s$$

式中，$\gamma_f$，$\gamma_s$ 分别为淡水和海水的容重；$h_f$，$h_s$ 为离海岸某一距离处，淡水高出海面的高度和界面位于海面以下的深度。故：

$$h_s = \frac{\gamma_f}{\gamma_s - \gamma_f} h_f = \delta h_f, \qquad \delta = \frac{\gamma_f}{\gamma_s - \gamma_f} \qquad (7—58)$$

如海水的密度为 1.025g/cm³，淡水的密度为 1.000g/cm³，则 $\gamma_s = 10045\text{N/m}^3$，$\gamma_f = 9800\text{N/m}^3$，$\delta = 40$，$h_s = 40h_f$，即在离海岸任一距离上，稳定界面在海面以下的深度为该处淡水高出海面的 40 倍。

这种假设有缺陷。因为靠近海，水流垂直方向的分速度较大，不应加以忽略。其次，图 7—12 中左边没有淡水流向海洋的出口。事实上，不仅有出口（图 7—13），而且潜水流在海面上还有渗出面。界面的实际深度（图 7—13 中 A 点）大于按（7—58）式算出的值。但这种方法对于确定厚度固定的承压含水层中界面坡脚的深度〔图 7—14 (a) 点 G〕，效果还是比较好的，误差小于 5%。

为了确定界面的形状及海水入侵范围与淡水流向的关系，一种比较简易的近似方法是把 Dupuit 假设应用于上述模型。兹介绍如下。

首先研究厚度固定的水平承压含水层中的界面问题（图 7—14）。水流是稳定流。设原点位于坡脚（点 G）。该点流向海的淡水流的单宽流量为 $q_0$，应用 Dupuit 假设，并令：

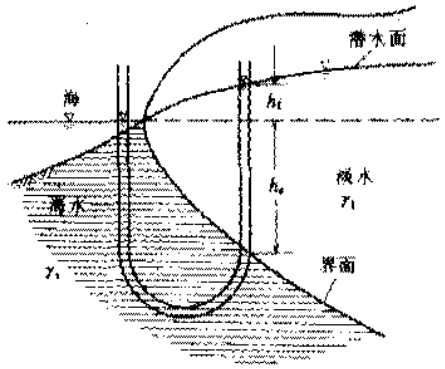



图 7—12 Ghyben-Herzbarg 的咸淡水界面模型

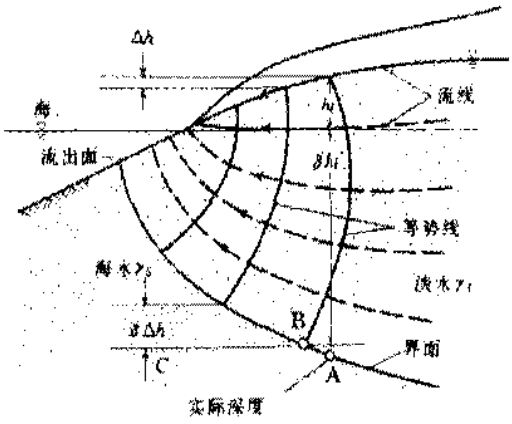



图 7—13 海岸附近的实际水流模型

(据 J. Bear)

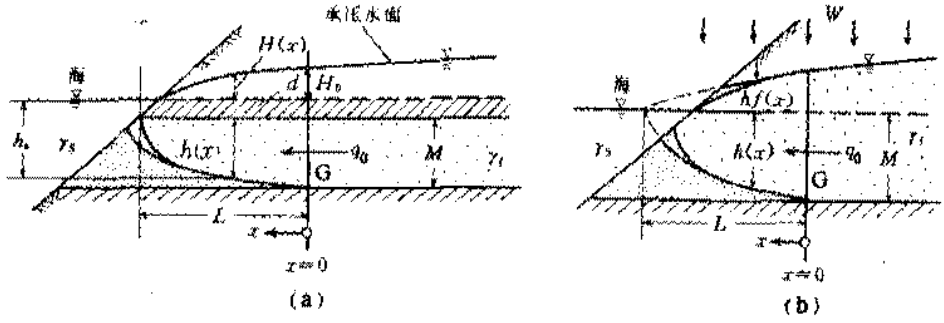



图 7—14 Dupuit-Ghyben-Herzberg 法所确定的咸淡水界面形状

(据 J. Bear)

$$\left.\begin{aligned} q_0 &= -K_f h(x)\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = 常数 \\ K &= K_f = \frac{kr_f}{\mu_f} \\ H &= H_f \end{aligned}\right\} \tag{7—59}$$

式中，$k$ 为含水层渗透率；$K_f$ 为该含水层对淡水的渗透系数；$\mu_f$ 为该淡水的粘滞系数；$h(x)$ 为界面在隔水顶板以下的深度。由 (7—58) 式得：

$$h_s = d + h(x) = \delta H, \qquad d + M = \delta H_0$$

式中，$d$ 为隔水顶板到海平面（平均值）的垂直距离；$H_0$ 为 $x=0$ 断面上的水头值。把它们代入 (7—59) 式得：

$$q_0 = -\frac{Kh}{\delta}\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x} \tag{7—60}$$

考虑边界条件，当 $x=0$ 时，$H=H_0$（或 $h=M$），积分上式得：

$$q_0 x = \frac{K(M^2 - h^2)}{2\delta} \tag{7—61}$$

表明界面的形状是一条抛物线。当 $q_0$ 已知时，利用（7—60）式可计算不同 $x$ 值时的 $h$ 值，确定界面的位置。

在 $x=l$ 处，　取 $h=0$，　$d+h=d=\delta H$，　　因 $d+M=\delta H_0$，于是有

$$q_0 l=\frac{KH_0}{2}(\delta H_0-2d)+\frac{Kd^2}{2\delta}=\frac{K}{2\delta}M^2 \tag{7—62}$$

式（7—62）清楚地表示出海水入侵深度 $l$ 与流向海的淡水流量和界面坡脚以上测压水头 $H_0$ 之间的关系。当 $q_0$ 增大时，$l$ 减小。这说明可以通过调节 $q_0$ 或者通过调节补给或开采量来控制海水入侵的范围。

其次，研究潜水含水层中的界面问题（图 7—14b）。含水层上部有均匀入渗补给。假设含水层中的水流是稳定流，而且基本上是水平流动，$h(x)=\delta h_f(x)$，故有：

$$q_0+Wx=-K(h+h_f)\frac{\partial h_f}{\partial x}=-K(1+\delta)h_f\frac{\partial h_f}{\partial x} \tag{7—63}$$

式中，$h(x)$ 为界面在平均海平面以下的深度；$W$ 为单位时间、单位面积上的入渗补给量。分离变量，积分，并考虑 $x=0$ 时，$h_f=H_0$，$h=M$，得：

$$H_0^2-h_f^2=\frac{2q_0x+Wx^2}{K(1+\delta)} \tag{7—64}$$

在 $x=l$ 处，因 $h_f=0$，故有：

$$H^2=\frac{2q_0l+Wl^2}{K(1+\delta)} \tag{7—65}$$

从（7—64）式可以看出，界面的形状为一抛物线。图 7—14b 虚线描述的就是按 Dupuit 假设得到的曲线。式（7—65）表示出 $q_0$ 和 $l$ 的关系。通过控制 $q_0$（用人工补给）可以控制海水入侵的影响。如在距海岸 $x_0$ 处有抽水流量 $Q$，当 $Q$ 不太大时，海岸带附近水流状态如图 7—15 所示。抽水井截取了流向海洋的部分稳定淡水流。在界面坡脚 G 处，潜水面的标高 $H_0=\frac{M}{\delta}$。$S$ 为驻点，分水线通过该点，该点流速为零。$S$ 点右侧的水流向井，左侧的流

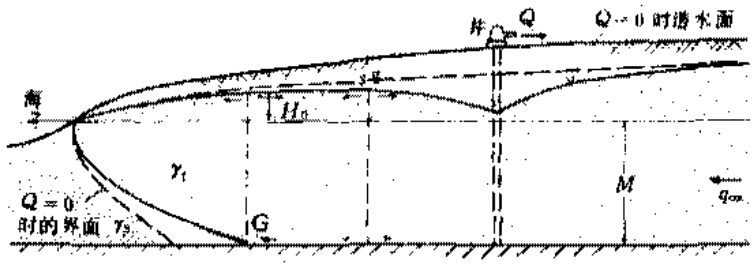



图 7—15　海岸带单井抽水时的界面位置

（据 J. Bear）

向海洋。在平面图上，G 点和 S 点的投影中间相隔某一距离。随着抽水流量的增加，界面逐渐向陆地推进，两点在平面上的投影逐渐彼此靠近，最终重合在一起，即出现水头 $H_0=\frac{M}{\delta}$ 的驻点。界面也将向陆地推进到此点。这是一种不稳定的临界状态。以后，即使稍微增加一点开采量 $Q$，都会造成潜水面的进一步下降，导致界面向陆地急速推进（图 7—16），直

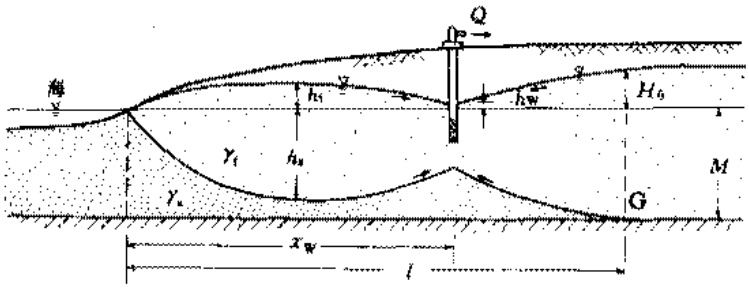



图 7—16　海岸含水层中在界面上抽水的井

（据 J. Bear）

至达到新的平衡。这种情况对不完整井会引起升锥。在某些条件下，在升锥界面到达抽水井以前可以形成新的平衡；在另一些条件下，上升的界面最后将到达抽水井中，井内出现咸水。如系前者，井内就不会出现咸水。对完整井来说，临界状态的破坏，必然会造成界面向陆地推进，到达抽水井，导致井内出现咸水。因此，一种安全和稳定的情况，就是在抽水井和海岸带之间保持一个潜水面高于$\frac{M}{\delta}$的有某种宽度的带，如图 7—15 所示，起到防止海水进一步入侵的屏障作用。为了维持这一屏障，除了控制抽水量外，实践证明，进行人工补给是个好办法。

Strack 计算了界面坡脚 G 和驻点 S 在平面上一致时，即不稳定的临界状态出现时的临界抽水流量 $Q$ 应满足：

$$\lambda = 2\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\mu}{\pi}\ln\frac{1-\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\left(1-\frac{\mu}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{7—66}$$

式中，$\lambda$、$\mu$ 为无量纲常数：

$$\lambda = \frac{KM^2}{q_{0_x}x_w}\frac{1+\delta}{\delta^2}, \qquad \mu = \frac{Q}{q_{0_x}x_w} \tag{7—67}$$

因为 $q_{0_x}$、$Q$、$x_w$ 都是正的，又必须满足（7—66）式，所以 $\mu$ 必然有 $0\leqslant\mu\leqslant\pi$。

**二、考虑过渡带的解法**

当过渡带比较宽时（如山东渤海沿岸盐淡水界面宽达 1.5—6.0km），海水入侵问题必须作为水动力弥散问题来研究，未知变量是地下水中溶解盐分（如 $Cl^-$）的浓度。确定了盐分浓度的分布，过渡带的位置和界面特征及其移动规律也就迎刃而解了。

严格说来，考虑过渡带的海水入侵问题，必须用二个方程来描述。第一个方程用来描述溶液浓度不断变化，导致密度不断改变，从而影响水头变化的液体（淡水和海水的混合物）的流动。第二个方程用来描述地下水中盐分的运移。

由（1—21）式可知，过渡带中随着地下水密度 $\rho$ 的不断改变，在同一压强 $p$ 下的实际水头值 $H$ 会有不同的值，这给以 $H$ 为基础的描述地下水运动的方程（水流方程）带来很大困难。因此，改用以等效淡水水头（参考水头）为基础来建立水流方程：

$$h = \frac{p}{\rho_0 g} + z \tag{7—68}$$

式中，$\rho_0$ 为淡水密度。此时，方程有下列形式（坐标轴与各向异性介质的主方向一致）：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial h}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{zz}\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\eta c\right)\right]=\mu_s\frac{\partial h}{\partial t}+n\eta\frac{\partial c}{\partial t}-\frac{\rho}{\rho_0}q \tag{7—69}$$

式中，$n$ 为孔隙度；$\eta=\frac{\varepsilon}{c_s}$ 为密度耦合系数；$\varepsilon=\frac{\rho_s-\rho_0}{\rho_0}$，为密度差率；$c_s$ 为与最大密度 $\rho_s$ 对应的浓度；$c$ 为溶液浓度；$q$ 为单位体积多孔介质源（或汇）的流量。上式是在假设液体动力粘滞系数变化很小，并等于淡水粘滞系数，忽略液体压强对密度影响并假设密度随浓度线性变化的基础上导出的。与第一章所述水流方程不同之处是，它多了 $\eta c$ 和 $n\eta\frac{\partial c}{\partial t}$ 两项。前者表示垂向上由于各点密度不同，在重力作用下所引起的自然对流。后者表示浓度随时间变化所引起的质量变化。由（7—69）式配以相应的定解条件，即构成描述海水入侵含水层中水头分布的数学模型。

描述盐分的运移，采用下列对流-弥散方程（当 $x$ 轴与平均流速方向一致时）：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(u_x c)-\frac{\partial}{\partial y}(u_y c)-\frac{\partial}{\partial z}(u_z c)$$
$$=\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{q}{n}(c-c^*) \tag{7—70}$$

式中，$c^*$ 为注入水（或抽出水）中盐分的浓度。它与式（7—50）是一致的。求解时，还要给出相应的定解条件，如：

$$c(x,y,z,0)=c_0(x,y,z) \tag{7—71}$$

$$c(x,y,z,t)\big|_{\Gamma_1}=\bar{c}(x,y,z,t) \tag{7—72}$$

$$D_{xx}\frac{\partial c}{\partial x}n_x+D_{yy}\frac{\partial c}{\partial y}n_y+D_{zz}\frac{\partial c}{\partial z}n_z\Big|_{\Gamma_2}=0 \tag{7—73}$$

式中，$\Gamma_1$、$\Gamma_2$ 分为浓度给定的第一类边界和隔水边界；$c_0$ 为浓度初值，$\bar{c}$ 为 $\Gamma_1$ 上给定的浓度；$n_x$、$n_y$、$n_z$ 为隔水边界 $\Gamma_2$ 上外法向单位矢量在各坐标轴上的投影。

方程（7—69）和（7—70），通过运动方程（坐标轴与主方向一致）耦合起来：

$$u_x=-\frac{K^0_{xx}}{\varphi}\frac{\partial h}{\partial x},\qquad u_y=-\frac{K^0_{yy}}{\varphi}\frac{\partial h}{\partial y},\qquad u_z=-\frac{K^0_{zz}}{\varphi}\left(\frac{\partial h}{\partial z}+\eta c\right) \tag{7—74}$$

式中，$K^0$ 为淡水条件下的渗透系数。方程（7—69）、（7—70）和相应的初始条件、边界条件以及（7—74）式，构成描述海水入侵的完整的数学模型。（7—69）式中含有浓度 $c$，（7—70）式的求解又离不开通过水头 $H$ 来求得的实际流速 $u$。因此（7—69）与（7—70）式不能分开求解，必须合在一起用迭代法才能解出不同时刻的浓度分布。

## §7—5 多孔介质中的热量运移

热量会随地下水流运移。为了研究热水、含水层贮能及由此而引起的热污染，需要研究多孔介质中的热量运移问题。

引起温度变化、热量运移的作用主要有：①对流通过液相输运热量；②热传导通过液相和固相输运热量；③和溶质运移中的机械弥散现象相似，由于局部流速不均一所造成的热量运移。此外，还有固相与液相间由于温度差引起的热量运移等。热交换迅速，固相和

液相的温度几乎立刻趋于一致（在粒径小于 1mm 的介质中不到 1min 即变为相同；在 10cm 的砾石中，小于 2h），故后者常可忽略不计。

多孔介质中的热量运移和溶质运移现象有许多相似的地方，如对流引起的热量运移与溶质随水流一起运移相似；热传导与分子扩散相当；热机械弥散与溶质运移的机械弥散相似。因此，热动平衡方程和溶质运移的水动力弥散方程在形式上相似，可直接写出（当取坐标轴和水流流速方向一致时）：

$$C\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_{zz}\frac{\partial T}{\partial z}\right)-C_{\mathrm{w}}\frac{\partial(v_xT)}{\partial x}-C_{\mathrm{w}}\frac{\partial(v_yT)}{\partial y}-C_{\mathrm{w}}\frac{\partial(v_zT)}{\partial z} \tag{7—75}$$

式中，$T$ 为温度〔℃〕；$C$、$C_{\mathrm{w}}$ 分别为多孔介质和水的热容量〔J/（$m^3$·℃）〕；$\lambda$ 为热动力弥散系数〔J/（m·d·℃）〕

$$\lambda=\lambda_{\mathrm{C}}+\lambda_{\mathrm{V}}=\lambda_{\mathrm{C}}+C_{\mathrm{w}}\beta u \tag{7—76}$$

$\lambda_{\mathrm{C}}$ 为介质的热传导系数；$\lambda_{\mathrm{V}}$ 为热机械弥散系数；三者均为二秩张量，$\lambda_{xx}$、$\lambda_{yy}$、$\lambda_{zz}$为其分量；$\beta$ 为热弥散度；$u$ 为实际平均流速；$v_x$、$v_y$、$v_z$ 为渗流速度的三个分量。推导（7—75）式时，忽略了由于温度差造成水密度不同而引起的上、下自然对流，并认为水和固体骨架间的热交换是瞬时完成的。等式左端表示单位时间单位体积含水层内由于温度变化所造成的热量变化（增量），右端表示该时间内流入、流出该单位体积含水层内的热量。右端前三项表示由热传导和热机械弥散造成的热量运移，后三项表示由于水流运动（对流）所造成的热量运移。如（7—50）式改用渗流速度表示，显然和（7—76）式是可以对比的。

求解热量运移问题还要给出初始条件：

$$T(x,y,z,0)=T_0(x,y,z)\qquad(x,y,z)\in D \tag{7—77}$$

和相应的边界条件。如取第一类边界条件，有

$$T(x,y,z,t)|_{\Gamma_1}=\varphi(x,y,z,t)\qquad(x,y,z)\in\Gamma_1 \tag{7—78}$$

$$T(x,y,z,t)|_{w_i}=\psi_i(z,t) \tag{7—79}$$

式中，$D$ 为计算区；$\Gamma_1$ 为计算区的外边界；$T_0$ 为温度初值；$\varphi$ 为已知温度；$\psi_i$ 为注水井井壁温度。需要指出的是，多孔介质中的温度受地温梯度支配，所以 $T_0$ 实为天然动态下的地温，计算区上、下界面的温度 $\varphi$ 也不可能相同；其次，热传导不仅在含水层中进行，在隔水层中也有热传导，只是方程中 $v=0$，$\lambda_{\mathrm{V}}=0$，$\lambda=\lambda_{\mathrm{c}}$ 而已。建立模型时必须加以一并考虑。

# 第八章　研究地下水运动的模拟法

前面所述的解析法只能解决简单的渗流问题。稍微复杂的渗流问题，必须采用数值法和模拟法来求解。

模拟法（指物理模拟）是用相似模型再现渗流动态和过程的实验方法。它不仅能够模拟解析法难以求解的复杂问题，而且在检验基本理论和需要观察渗流过程中可能出现的物理现象（如弥散和管涌现象）时，更离不开模拟法。但由于模拟法所固有的一些局限性，近十多年来，在解决实际水文地质问题中，模拟法已基本上为数值法所取代了。

## §8—1　模拟的相似基础

### 一、相似模型

用原样（实际含水层样品）造型研究渗流规律有很多缺陷，如样品缺乏代表性；很难保持原样的物理性质和结构等。因此，实验结果往往偏离实际，甚至歪曲实际。后来采用非原样的多孔物质模型，即用任选的砂样等制造模型，并利用相似的变量和参数模拟渗流规律。这就是常用的砂槽模拟。这种模拟法，不用担心会破坏模型的各种渗流过程，导致失真。其缺点是模拟装置比较笨重，测量方法有待改进。模拟无压流时，常因模型中产生的毛细管上升现象而引起测量误差。

随着科学的发展，发现许多物理现象都和渗流规律存在着相似性。已知渗流场中任一点的渗流服从 Darcy 定律：

$$v = -K\mathrm{grad}H \tag{8—1}$$

它反映该点渗流速度 $v$ 和水头梯度 $\mathrm{grad}H$ 成正比。式中，$K$ 为含水层的渗透系数。

这一数学形式同样反映了下列各种物理现象的变化规律：粘性流体在窄缝槽或阻力管网络中流动的层流定律，这时的 $v$，$K$ 和 $\mathrm{grad}H$ 分别代表流场中一点的平均速度、透水系数和压力梯度或水力坡度；电流在导电介质中传导的 Ohm 定律，上述各符号分别代表电场中一点的电流强度、导电系数和电位梯度；热流中导热介质中传输的 Fourier 定律，上述符号分别代表温度场中一点的热流通量、导热系数和温度梯度。此外，在应力场中，薄膜的横向形变和剪应力的关系也可用（8—1）式来表示，等等。

这种相同的数学形式说明，渗流和这些物理现象都遵守同样的规律。如能给出相似的定解条件，则它们应有相似的解。这就启发人们，用这些物理现象的实体组成相似模型，利用模型的相似解就能模拟多孔介质中的渗流规律。

用相似模型模拟渗流，比用原样实验方便得多。首先，可以缩小渗流区的几何尺寸，便于从整体上，而不是在局部上研究渗流的分布特征；其次，可以加速渗流的演变速度，在模型上只用几秒或几分钟的时间就能模拟几天，甚至几十年的渗透过程，从而节省大量时间；模型制备简单，便于控制和测量，并能改变某些变量和参数的数量级，以提高测量精

度。

表 8—1，给出了几种相似模型的应用范围。本书重点介绍砂槽模型、窄缝槽模型和电模拟模型，其余模型的原理可参考有关文献[18]。

表 8—1 模拟模型及其应用范围

| 应用 \ 模型 | 砂槽模型 | 流体模型 | | 电模拟模型 | | 离子模型 | 薄膜模拟装置 | 热模拟装置 | 备注 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 窄缝槽 | 阻力管网 | 电解液 | 电阻网 | | | | |
| 模拟维数 | 1—3 | 2 | 2—3 | 2—3 | 2—3 | 2 | 2 | 2 | * 号表示垂直缝隙槽 |
| 模拟时态 | 稳定<br>非稳定 | 稳定<br>非稳定 | 稳定<br>非稳定 | 稳定 | 稳定<br>非稳定 | 稳定 | 稳定 | 稳定<br>非稳定 | |
| 模拟贮存 | 可 | 可 | 可 | 可<br>二维运动 | 可 | 不可 | 不可 | 可 | |
| 模拟自由面 | 可 | 可* | 可 | 可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 模拟非均质各向异性 | 可 | 可 | 可 | 可 | 可 | 可 | 可<br>(非均质不可) | 可 | |
| 模拟入渗和越流 | 可 | 可 | 可 | 可 | 可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 模拟弥散 | 可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 模拟不溶混流体 | 可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 模拟毛管压力 | 可 | 可* | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 流线和迹线观测 | 可 | 可 | 可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | 不可 | |
| 场的性质 | 渗流场 | 压力场 | 压力场 | 电场 | 电场 | 扩散场 | 应力场 | 温度场 | |
| 介质类型 | 连续 | 连续 | 离散 | 连续 | 离散 | 连续 | 连续 | 连续 | |

## 二、相似条件

利用模型再现渗流区（以后称为原型）动态和过程的依据是原型和模型这两个系统中的物理现象具有相似的数学模型。而相似的数学模型包括两个方面：微分方程的形式相同，定解条件相似。

在原型中，我们已知渗流场中任一点水头的微分方程为

$$\mathrm{div}(K \cdot \mathrm{grad}H) = \mu_s \frac{\partial H}{\partial t} \tag{8—2}$$

综合比较不难发现，描写各种模型中物理量的微分方程，都有和（8—2）式类似的形式。

在砂槽模型中，除几何尺寸、介质参数和原型不同外，两个系统都是水通过多孔介质流动，所以它们的微分方程的形式必然是相同的。

在电模拟模型中，电流在充放电原件的导电介质中传导时，电位分布方程和（8—2）的形式也是相同的。这时的参数 $\mu_s$ 和 $K$，代表电容和导电系数，$\mathrm{grad}H$ 表示电位梯度，$t$ 为时间。

定解条件相似，包括：

(1) 几何相似，即在原型和模型的有限空间内，对应点的坐标或对应长度应满足固定的比值，即：

$$\alpha_l = \frac{x_m}{x} = \frac{y_m}{y} = \frac{z_m}{z} = \frac{l_m}{l}$$

有下标 m 的为模型的坐标或长度；无下标 m 的为原型的坐标或长度。由此不难推知，两个系统的面积和体积也应满足固定比值：

$$\alpha_F = \alpha_l^2, \qquad \alpha_V = \alpha_l^3$$

但是，当把各向异性介质转化为各向同性模型时，常采用变形模型。在变形模型中不能保持严格的几何相似，常取 $\alpha_x \neq \alpha_y \neq \alpha_z$ 或 $\alpha_x = \alpha_y \neq \alpha_z$。这种几何不相似的两个系统，对应物理量的变化规律，仍能保持相似。

(2) 时间相似，原型和模型可以同步运行；但在渗流模拟中很少应用。常用的是模型过程需要加速进行，所以原型和模型的时间也应保持固定比值 $\alpha_t = \frac{t_m}{t}$，而且在整个运行过程中 $\alpha_t$ 保持不变。

由几何相似和时间相似的关系可知，在砂槽模型和流体模型中，必然保持速度相似，即

$$\alpha_u = \frac{u_m}{u} = \frac{l_m/t_m}{l/t} = \frac{\alpha_l}{\alpha_t}$$

由此可以观察到真实（不变形）的流线或迹线。但在变形模型中，因 $\alpha_l$ 同方向有关，所以 $\alpha_u$ 将随流速方向而变化，即：

$$\alpha_{ux} = \frac{\alpha_x}{\alpha_t}, \alpha_{uy} = \frac{\alpha_y}{\alpha_t}, \alpha_{uz} = \frac{\alpha_z}{\alpha_t}$$

这说明在变形模型中不能保持运动相似。

(3) 参数相似，在两个系统中对应的物理参数，必须保持线性关系。

(4) 初值相似，在两个系统中，对应物理量的初值，都应满足固定比值。

(5) 边值相似，在两个系统中，对应物理量及其导数在边界上分布的边值同样应当满足固定比值。当边值随时间变化时，还要保持边值的时间相似。

总之，在微分方程形式相同的情况下，所有的对应物理量均应保持固定比值，这是原型和模型两个系统相似的充分和必要条件。这些条件成为建立模型和模拟渗流规律的相似基础。

### 三、相似比例

确定相似系统对应物理量间的比例关系，是设计正确模型的准则，是模拟成败的关键，也是把模拟结果转成原型量的依据。确定相似比例有两种常用方法：量纲分析法和方程分析法。两种方法分析的途径虽不同，但所得结果一致。

如果仅知道参与系统的主要变量和参数，而不了解它们的组成关系，即不知道描述系统的微分方程时，可用量纲分析法。这种方法在有关文献中有详细的论述。如果已知描述系统的微分方程时，可用方程分析法确定模型比例。下面我们简单地介绍与这种方法有关的改进法。

根据原型和模型的两组方程，引入全部对应量的比值。将比值代入原型方程，并同模型方程比较，按照两组方程应有相同形式的要求，就可以直接求出各项比例数。

以均质各向同性介质中的非稳定流问题为例，具体说明这种方法。已知原型的方程为：

$$K\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{8—3}$$

在均质各向同性的砂槽模型中，非稳定流方程为：

$$K_m\left(\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}+\frac{\partial^2 H_m}{\partial y_m^2}+\frac{\partial^2 H_m}{\partial z_m^2}\right)=\mu_m\frac{\partial H_m}{\partial t_m} \tag{8—4}$$

取比值：

$$\left.\begin{aligned}\alpha_x&=\frac{x_m}{x},\quad \alpha_y=\frac{y_m}{y},\quad \alpha_z=\frac{z_m}{z}\\ \alpha_k&=\frac{K_m}{K},\quad \alpha_t=\frac{t_m}{t},\quad \alpha_\mu=\frac{\mu_m}{\mu_s}\end{aligned}\right\} \tag{8—5}$$

代入原型方程（8—3），得

$$\frac{K_m}{\alpha_k\alpha_H}\left(\alpha_x^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}+\alpha_y^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial y_m^2}+\alpha_z^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial z_m^2}\right)=\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu\alpha_H}\mu_m\frac{\partial H_m}{\partial t_m} \tag{8—6}$$

同模型方程（8—4）比较可见，如果下式成立：

$$\frac{\alpha_x^2}{\alpha_k}=\frac{\alpha_y^2}{\alpha_k}=\frac{\alpha_z^2}{\alpha_k}=\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu} \tag{8—7}$$

则式（8—6）和式（8—4）便有相同的形式。结果可直接求出各项比例数。（8—7）式给出三个等式，表示了六个比值 $\alpha_x$、$\alpha_y$、$\alpha_z$、$\alpha_t$、$\alpha_k$、$\alpha_\mu$ 之间的关系。所以在确定相似比例时，可视情况任选三个比值，余者按（8—7）式计算。

## §8—2 砂槽模拟

砂槽（渗流槽）模拟用多孔物质制作模型，在模型中研究原型的渗流动态。

### 一、砂槽结构

砂槽形状，取决于模拟的原型流场。模拟井流时，因轴对称性，可用扇形槽；模拟一般的一维、二维和三维流时，常用矩形槽（图 8—1）。

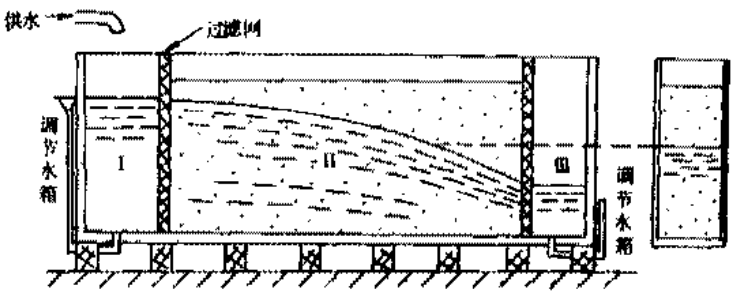



图 8—1 矩形槽示意图

矩形槽由槽首（Ⅰ）、槽身（Ⅱ）和槽尾（Ⅲ）三段组成。各段之间用可移动的过滤网隔开，使槽身（Ⅱ）有伸缩性，以便适应设计模型大小的变化。槽首（Ⅰ）同供水系统连接，用调整供水量和水位的方式模拟补给区的边界条件。槽身（Ⅱ）装有多孔介质模型，前

壁为透明玻璃板；后壁和底部与测量系统连接，以记录模型中水头的分布和变化。槽尾（Ⅱ）与排水系统连接，用调整排水量和水位的方法模拟排泄区的边界条件。槽身顶部也可临时安装喷水装置，以便模拟入渗量。

在模型的槽身中可装入砂或其它多孔材料。对多孔材料的要求：结构要稳定，化学性质有惰性。装填时应保持规定的均匀性或非均质性，不能残存气体。采用的流体，在模拟饱和流、非饱和流时，常用均质水；在模拟咸淡水界面运移时，可采用密度、粘度不同的异质流体；在模拟水动力弥散时，常用均质水加示踪剂。选择流体的基本要求是无侵蚀性、毒性和易燃性。

**二、砂槽模型**

下面以承压水流模型为例，说明如何确定模型比例。

在均质各向同性介质中，在剖面上为一维承压水流的微分方程组为：

$$K\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t};\qquad v=-K\frac{\partial H}{\partial x} \tag{8—8}$$

引入一组无量纲的比值：

$$\alpha_H=\frac{H_m}{H},\qquad \alpha_\mu=\frac{\mu_m}{\mu_s},\qquad \alpha_k=\frac{K_m}{K}$$

$$\alpha_x=\frac{x_m}{x},\qquad \alpha_t=\frac{t_m}{t},\qquad \alpha_v=\frac{v_m}{v} \tag{8—9}$$

有下标 m 的表示模型量，无下标 m 的为原型量。把原型量代入（8—8）式，整理后得：

$$\left(\frac{\alpha_x^2}{\alpha_k\alpha_H}\right)K_m\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}=\left(\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu\alpha_H}\right)\mu_m\frac{\partial H_m}{\partial x_m}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_v}\right)v_m=-\left(\frac{\alpha_x}{\alpha_k\alpha_H}\right)K_m\frac{\partial H_m}{\partial x_m}$$

如令各项比值的组合满足下列等式：

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_x^2}{\alpha_k},\qquad \alpha_v=\frac{\alpha_k\alpha_H}{\alpha_x}$$

则所得方程便转化为和（8—8）式有相同形式的模型方程。这就意味着，如果原型流场用（8—8）式描述，则按上述比值缩成相似模型，在模型中的渗流规律就可用相同形式的模型方程来求解，且不失真。

两个等式包含六个比值，显然需要结合模拟的技术条件选定四个比值，其余可按等式计算。如根据原型规模和砂槽尺寸，确定 $\alpha_H$ 和 $\alpha_x$，常取 $\alpha_H=\alpha_x$；同时按已知的介质参数可直接确定 $\alpha_k$ 和 $\alpha_\mu$。余下的 $\alpha_t$ 和 $\alpha_v$ 由等式得：

$$\alpha_t=\frac{\alpha_x^2}{\alpha_k}\alpha_\mu,\qquad \alpha_v=\frac{\alpha_k\alpha_H}{\alpha_x}=\alpha_k$$

这样，在选定 $\alpha_H$、$\alpha_k$、$\alpha_\mu$ 后，根据已知的原型量便可求出相似的模型量：

$$H_m=\alpha_H H,\qquad x_m=\alpha_H x,\qquad K_m=\alpha_k K$$

$$v_m=\alpha_k v,\qquad \mu_m=\alpha_\mu\mu_s,\qquad t_m=\frac{\alpha_H^2}{\alpha_k}\alpha_\mu wqt$$

据此，可以组装砂槽模型。给出定解条件后，即可进行模拟实验。

### 三、模拟方法

首先，根据研究问题的性质和有关资料做好模拟的准备工作。选好砂槽和拟做模型的多孔物质，初步确定模型比例。组装模型，均匀捣实，缓慢充水，驱除残留气体。

其次，标定模型参数。如模型的渗透系数、弥散系数等。标定方法是：调整边界条件，使模型中渗流达到符合解析解的状态。再把测定的要素代入解析解计算参数。根据标定的模型参数，再调整模型比例。

其三，拟合原型参数。如入渗量和含水层参数。这一步主要是根据模拟水头和长期观测资料的拟合程度，检查所给参数的正确性，同数值法中反求参数相似。

其四，开始模拟实验。对模型给出相似的定解条件。如属无压流，只要给出上下游水位，便可自动形成自由面边界。随时记录水头、流量或溶质浓度等。对流线可用染料形成水线来观察；对变形较快的自由面，常用照相记录。

最后，整理模拟结果。一切记录的要素，由模型量转到原型量时，都必须乘以相似比。

单宽流量，它的相似比：

$$\alpha_q = \frac{q_m}{q} = \frac{v_m z_m}{vz} = \alpha_v \alpha_z = \alpha_k \alpha_H$$

所以相似模型测定的单宽流量、可换算为：

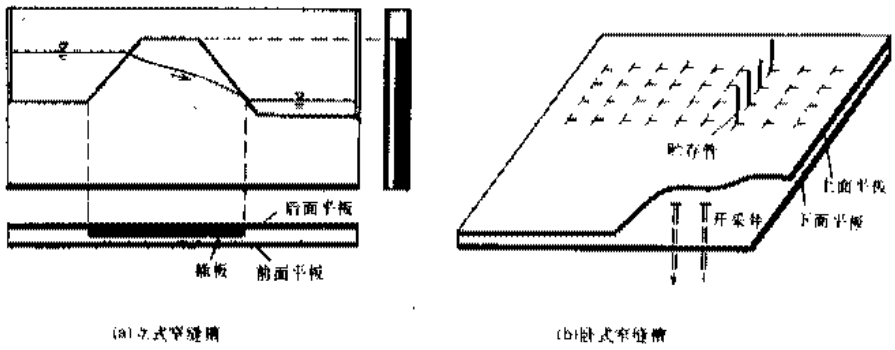
$$q = \frac{1}{\alpha_v \alpha_z} q_m = \frac{1}{\alpha_k \alpha_H} q_m$$

## §8—3 窄缝槽模拟

### 一、窄缝槽结构

窄缝槽结构很简单，主要是由两片平行板组成。平行板之间保持着一定的缝隙（隙宽约为 0.8—3.5mm），可供粘性流体（水或甘油等）缓慢流动。流动区可作为原型的模型。模型的边界条件和渗流区一样：常用不透水垫片模拟隔水边界；用与供水或排水系统连接、以调节水位或流量的方法模拟透水边界。

窄缝槽常组装为立式和卧式两种形式。无论立式或卧式，在两片平行板中，至少应有一片采用透明的有机玻璃板，以便观察和记录渗流要素，如图 8—2 所示。




(a)立式窄缝槽　　(b)卧式窄缝槽

图 8—2　窄缝槽结构示意图

立式窄缝槽，可利用垂直的缝隙流模拟剖面上的二维流问题。模拟无压流时，除须给出底部和侧面的边界条件外，自由面和渗出面的边界条件能自动形成。如在顶部安装供水分配管，在底部设一组排水孔，则可模拟无压流的入渗项和蒸发项。

卧式窄缝槽，可利用水平的缝隙流模拟平面上的二维流问题。模拟承压流时，常在上面平板设置离散的贮存管，用它模拟含水层的弹性贮水率。如设贮存管本身的截面积为 $A$，该管控制的面积为 $F$，缝隙宽度为 $b$，则模型的贮水率 $\mu_m=A/Fb$。若在下面平板上穿孔、装上开关，并同供水或排水系统连接，则可模拟注水井或开采井。模拟越流补给的承压流时，可在平行板之间插入一个等厚的带有网眼的插板模拟弱透水层，利用通过网眼的水流模拟越流量。

无论立式窄缝槽或卧式窄缝槽，通常只能模拟均质各向同性介质。如需模拟非均质和各向异性问题，则需对窄缝适当改装。

## 二、模拟原理

粘性流体在窄缝槽中二维流动的一般式为：

$$\bar{u}=-C_m\mathrm{grad}H_m \tag{8—10}$$

式中，$u$ 为质点流速；$C_m=\frac{b^2}{12}\frac{g}{\nu}$ 为透水系数，有速度量纲；$\nu=\frac{\mu}{\rho}$ 为流体的运动粘滞系数。

根据上式和连续方程，很容易求得描述流体在窄缝槽中保持层流运动的微分方程：

$$-\mathrm{div}(C_m\cdot\mathrm{grad}H_m)=\mu_m\frac{\partial H_m}{\partial t} \tag{8—11}$$

式中，$\mu_m$ 为窄缝槽模型的贮水率。如果不考虑它，则取 $\mu_m=0$。如果存在入渗、开采和越流项，应在方程右端加上源汇项。

把（8—11）式和原型的渗流方程（8—2）比较可见，两组方程的物理量个数相等，互相对应，并以同样关系联结着。因此，两个系统微分方程的形式完全相同，如再给出相似的定解条件，使数学模型完全相似，则用窄缝槽模型就能全面模拟原型的动态和过程。

## 三、窄缝槽模型

根据两个系统的微分方程，可以确定模型比例。对所有情形，都假定 $C_m=\frac{b^2}{12}\frac{g}{\nu}$ 为定值。下面以剖面上的无压流模型为例来说明如何确定模型比例。

在原型的均质各向异性介质中，设坐标轴与渗透主方向平行，且 $K_{xx}$ 最大，$K_{zz}$ 最小。略去弹性释放量，即近似地令 $\mu_s=0$。考虑均匀入渗补给强度 $W$。这种无压二维流的方程组为：

$$K_{xx}\frac{\partial^2H}{\partial x^2}+K_{zz}\frac{\partial^2H}{\partial z^2}=0,\qquad \mu\frac{\partial H}{\partial t}+K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}-K_{zz}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{dz}{dx}=W$$

第二个方程表示自由面的边界条件，其中 $\mu$ 为给水度。

引入无量纲比值 $\alpha_{kx}=\frac{C_m}{K_{xx}}$，$\alpha_{kz}=\frac{C_m}{K_{zz}}$，$\alpha_W=\frac{W_m}{W}$ 和（8—5）式的有关比值，代入原型方程组。在满足形式相同的模型方程条件下，求得下列关系：

$$\frac{\alpha_x^2}{\alpha_{kx}}=\frac{\alpha_z^2}{\alpha_{kz}},\qquad \frac{\alpha_t}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_x}{\alpha_{kx}}=\frac{\alpha_z^2}{\alpha_{kz}\alpha_z}=\frac{\alpha_H}{\alpha_W}$$

四个等式，包含八个比值，有五个比值可按模拟的技术条件选定。首先，可以选定三个参数比 $\alpha_\mu$、$\alpha_{kx}$、$\alpha_{kz}$。因为它们取决于已知的模型参数，即窄缝充满流体、无骨架，所以模型给水度是已知的，常取 $\mu_m=1$；按拟用的流体性质 $\nu$ 和窄缝宽度 $b$，模型的透水系数 $C_m$

也是已知的。其次，按原型规模和窄缝槽尺寸，可以适当选定 $\alpha_H=\alpha_z$。应当注意，这里的 $\alpha_l$ 和 $\alpha_z$ 只能任选一个。余下的三个比值 $\alpha_x$、$\alpha_t$ 和 $\alpha_W$ 可按下式计算：

$$\alpha_x=\alpha_z\sqrt{\frac{\alpha_{kx}}{\alpha_{kz}}}=\alpha_H\sqrt{\frac{K_{xx}}{K_{zz}}},\alpha_t=\frac{\alpha_\mu\alpha_H}{\alpha_{kz}}$$

$$\alpha_W=\frac{\alpha_{kz}\alpha_H}{\alpha_z}=\alpha_{kz}$$

这样选法，实际上只要确定四个独立比值 $\alpha_H$，$\alpha_{kx}$，$\alpha_{kz}$，$\alpha_\mu$，就能求得设计需要的模型量：

$$H_m=\alpha_H H,\qquad C_m=\alpha_{kx}K_{xx}=\alpha_{kz}K_{zz}$$

$$\mu_m=\alpha_\mu\mu,z_m=\alpha_H z,x_m=\alpha_H\sqrt{\frac{K_{zz}}{K_{xx}}}x,$$

$$t_m=\frac{\alpha_\mu\alpha_H}{\alpha_{kz}}t,W_m=\alpha_W W$$

按这些量缩制的模型，是一个均质各向同性的变形模型。即原型的厚度、水头和初边值水头，都用同一比值 $\alpha_H$ 缩小，但在 $x$ 方向上要用缩短距离所产生的效应来模拟 $K_{xx}>K_{zz}$ 的各向异性。

## §8—4 电 模 拟

按空间介质是否连续，电模拟分为连续型电模拟和离散型电模拟两类。前者，以渗流和电流两个连续场的数学模型相似为基础。对任意空间点均可模拟出相应的渗流要素；但只能模拟稳定流，用起来有一定局限性，近年来，已很少有人应用了。后者，则以两个离散场的差分模型相似为依据，只能在指定的结点上确定渗流要素；但对稳定流和非稳定流都能模拟。处理介质的非均质性和各向异性也比较简单。本节重点介绍离散型电模拟。

目前，模拟非稳定流的电阻网络有两种。一种是用电阻模拟含水层的渗透阻力，用结点电容的贮、放电量模拟渗流的贮存和释放，简称 *R-C* 网络，属于空间离散、时间连续的模拟系统；二是用时间电阻代替结点电容，简称 R-R 网络，属于空间、时间均离散的模拟系统。现以 R-C 网络为例加以说明。

**一、模拟原理**

在各向异性介质的渗流区中，由（1—76）式有：

$$K_{xx}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+K_{zz}\frac{\partial^2 H}{\partial z}+W=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t}$$

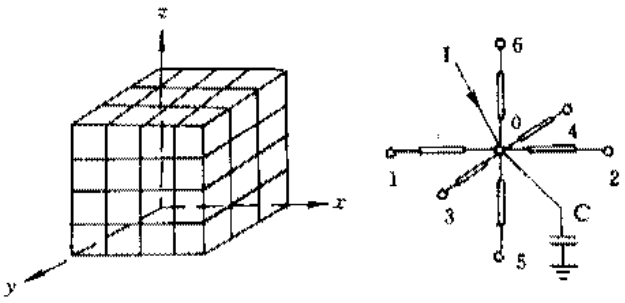
式中，$W$ 为单位时间内从单位体积介质中流入或流出的水量（源汇项）。

若把渗流区剖分成许多正交单元体，剖分步长为 $\Delta x=\Delta y=\Delta z=\Delta l$，如图 8—3（a）所示，而时间仍保持连续变量，则上述微分方程可围绕任一单元体的中心点 O（也称结点）离散成差分方程：

$$\frac{H_1+H_2-2H_0}{\frac{1}{K_{xx}\Delta l}}+\frac{H_3+H_4-2H_0}{\frac{1}{K_{yy}\Delta l}}+\frac{H_5+H_6-2H_0}{\frac{1}{K_{zz}\Delta l}}+Q=\mu_s\Delta l^3\frac{\partial H_0}{\partial t}$$

（8—12）

式中：$H$——结点水头（m），编号和图 8—3（b）相对应；




(a) 渗流区离散的单元体　　(b) R-C 网络结点

图 8—3　离散单元和网络结点

$\mu_s \Delta l^3$——单元体的贮存或释放量（$m^2$）；

$\frac{1}{K\Delta l}$——渗流通过单元体的渗流阻力（$d/m^2$）；

$Q=W\Delta l^3$——沿垂向流入或流出单元体的流量（$m^3/d$）。

现在考虑网络结点的电流方程。设图 8—3（b）为模拟单元体渗流的 R-C 网络结点。通过结点 O 的电流有：周围六个电阻的电流，可用 Ohm 定律表示；连接能源的电流 $I$；结点电容释放的电流 $I_0=C\frac{\partial U_0}{\partial t_m}$。根据 Kirchhoff 第一定律，流入结点各项电流的代数和为零，得：

$$\frac{U_1+U_2-2U_0}{R_x}+\frac{U_3+U_4-2U_0}{R_y}+\frac{U_5+U_6-2U_0}{R_z}+I=C\frac{\partial U_0}{\partial t_m} \tag{8—13}$$

式中：$U$——结点电位（V）；

$C$——结点电容（F）；

$R$——结点 O 和相邻结点之间的电阻（Ω）；

$I$——电流强度（A）。

比较方程（8—12）和（8—13）可见，两组对应的差分方程形式相同，在相似的定解条件下必有相似的差分解。从网络模型中测出的电位解，按相似性可转为渗流区水头分布的数值解。这就是使用 R-C 网络可以模拟渗流的理论依据。

在用 R-C 网络模拟渗流时，根据方程（8—12）和（8—13）的相似性，由对应要素之间的比值，可求得有关关系如下：

$$\frac{\beta_t}{\beta_\mu}=\beta_{R_x}=\beta_{R_y}=\beta_{R_z}=\frac{\beta_H}{\beta_Q}$$

式中，$\beta_t=\frac{t_m}{t}$，$\beta_R=\frac{R}{\frac{1}{K\Delta l}}=\frac{R}{\frac{1}{T}}$，$T$ 为导水系数。

四个等式包含七个比值，只要确定三个独立比值 $\beta_H$、$\beta_k$、$\beta_\mu$，其余都可计算出来。于是得设计 R-C 网络模型时必需的模型量：

$$U=\beta_H H,\qquad R_x=\frac{\beta_{R_x}}{K_{xx}\Delta l},\qquad R_y=\frac{\beta_{R_y}}{K_{yy}\Delta l},\qquad R_z=\frac{\beta_{R_z}}{K_{zz}\Delta l}$$

$$C=\beta_\mu \mu_s \Delta l^3,\qquad I=\frac{\beta_H}{\beta_R}Q,\qquad t_m=\beta_R\beta_t t \tag{8—14}$$

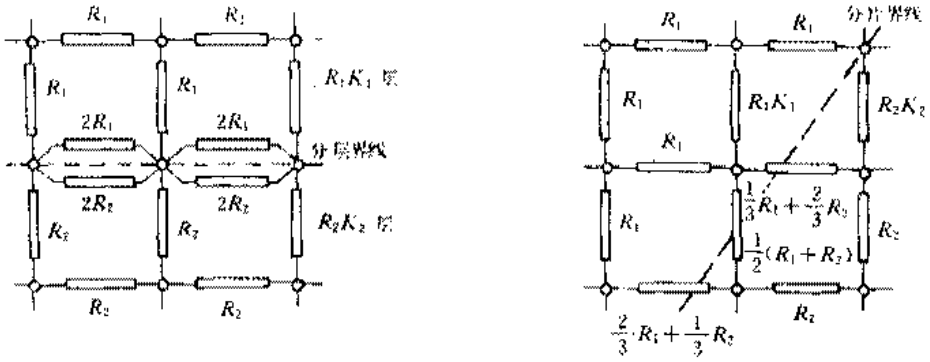
其中三个独立比值都是有量纲量，即 $\beta_H$ (V/m)，$\beta_K$ ($\Omega \cdot m^2/d$)，$\beta_\mu$ ($F/m^2$)。由方程（8—14）可以看出，采用 R-C 网络模拟渗流时，是用电位 $U$ 模拟水头 $H$，电阻 $R$ 模拟单元体的渗透阻力 $1/(K\Delta l)$，电容 $C$ 模拟水头变化一个单位时单元体贮存或释放的水量，电流强度 $I$ 模拟流量 $Q$。模拟时间 $t_m$ 和渗流时间 $t$ 有着不同的数量级，在模型中的过程进行得很快，只用几秒或几分钟的时间就能模拟渗流在几十天甚至几十年的变化过程。

## 二、网络模型

电网络模拟装置，通常包括三部分：一是运算网络；二是给出定解条件的激发装置；三是测量或显示的反映装置。对激发和反映装置本书不予介绍，需要时可参考有关文献。重点介绍的是运算网络。它常由显示模型的网眼板和装有固定或可调电阻、电容的电阻板和电容板等组成。各板之间用导线相连，并装有开关，可以随时切断或接通电路。这样组装的运算网络可布置成电阻网络模型，也可结合需要，布置成 R-R 或 R-C 网络模型。对三维空间模型，更需要切成若干断面，分别布置在网眼板平面的不同区域上。

1. 模型区内部的电阻

如属均质区，由于 $\beta_K$ 的任意性，只要酌情选定一种单元电阻 $R$，就可以布置网络模型。但对分层或分片的非均质区，各层或各片的单元电阻，只允许任选一层或一片的单元电阻，其余层、片的单元电阻要按相似条件计算。设已选定 $K_1$ 层的单元电阻为 $R_1$，如图 8—4（a）所示。按（8—14）式，$R_1$ 应满足等式 $R_1=\frac{\beta_K}{K_1\Delta l}$。$K_2$ 层的单元电阻应为 $R_2=\frac{\beta_K}{K_2\Delta l}$，取定比值后可得 $R_2$ 的计算式 $R_2=\frac{K_1}{K_2}R_1$。对多层的单元电阻，应按类似方法推算。




（a）分层界线和网络线重合　　（b）分片界线和网络线斜交

图 8—4　非均质界线上电阻网布置图

对分层或分片界线附近的电阻也要进行调整。如果分层界线和网络线重合，如图 8—4（a）所示，则这个界线即是 $R_1$ 区的边界，又是 $R_2$ 区的边界。界线两侧电阻代表的体积都比单元体积小一倍，所以阻值应为单元电阻的二倍，而界线上的总电阻应相当 $2R_1$ 和 $2R_2$ 两个电阻并联，可用一个等效电阻代替，即：

$$R=\frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} \tag{8—15}$$

如果分片界线和网络线斜交，如图 8—4（b）所示，则根据交点和两侧结点的间距，按

比例求出两侧阻值后再相加。

2. 模型边界附近的电阻

这里步长有变化，应按边界线和网络线的交叉关系调整边界电阻。同隔水边界平行的边界电阻，要根据它代表的体积（或面积）按反比确定（图 8—5）。例如，同隔水边界重合的边界电阻 $R_5$ 代表的体积，比单元体积小一倍，故阻值应取单元电阻的二倍。同透水边界或隔水边界正交的边界电阻，要根据它所代表的体积按正比确定。如 $R_1$ 代表的体积为单元体积的 3/4，故取阻值 $R_1=3/4R$。为了简化起见，也可近似地根据边界电阻和边界点到内结点的距离来确定。

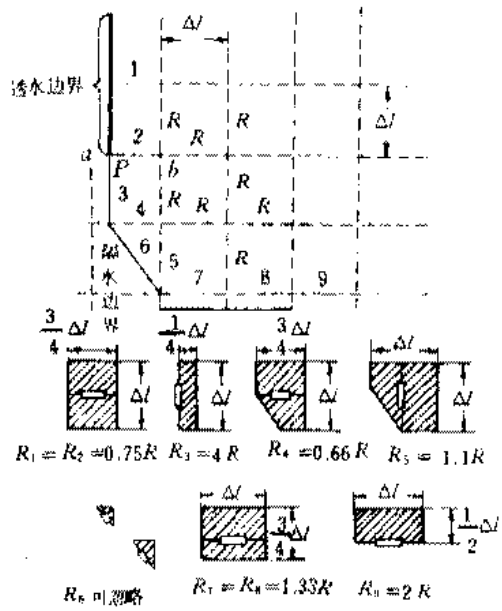



图 8—5 边界附近电阻配置图
（据 Karplus）

3. 井孔附近的电阻

通常，模拟井流是在相应结点处引入一个控制的电流。这样做法，在离井足够远处测量的电位相当准确。但在井孔所在的结点上测量的电位则是错误的。这是由于单元电阻模拟的是平行流，而井孔附近存在径向流，从而造成偏差。要使井孔所在结点的电位接近实际，必须改用模拟径向流的电阻，如图 8—6 所示。

例如，承压水完整井的附近为径向流，单元电阻可模拟径向流阻力的 1/4。按 Dupuit 公式有：

$$\frac{Q}{4}=\frac{\pi T(H-h_W)}{2\ln\dfrac{\Delta l}{r_W}}$$

式中，$Q$ 为井流量；$T$ 为导水系数；$\Delta l$ 为剖分步长；$r_W$ 为井半径；$H$ 为对应点的水头；$h_W$ 为井中水位。

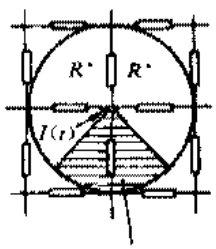



图 8 6 模拟径向流阻力的电阻 $R^*$
（据 J. Bear）

根据 $\beta_Q=\dfrac{I}{Q/4}$，得 $\dfrac{Q}{4}=\dfrac{\beta_R}{\beta_H}I$；$H-h_W=\dfrac{U-U_0}{\beta_H}=\dfrac{R^*I}{\beta_H}$。把这些代入上式得：

$$R^*=\beta_R\frac{2}{\pi T}\ln\frac{\Delta l}{r_W} \qquad (8—16)$$

如用 $R^*$ 代替井孔附近的单元电阻 $R_1$，则在完整井所在结点上测量的电位将比较准确。

组装 R-C 网络模型时，在所有结点上还要配置结点电容。对均质区，可任选一组相同的电容。对分片的非均质区，如图 8—7 的 a 区和 b 区，若选定 a 区的结点电容为 $C_a$，由此确定了比值 $\beta_n$，则 b 区的结点电容应按 $C_b=\beta_n\mu_a^{(5)}\Delta l^3$ 计算。在分区界线上的结点电容，要按结点控制不同区体积的比例计算，如 $C_{10}=\dfrac{1}{2}(C_a+C_b)$。

在模型边界附近的结点电容，应和它代表的单元体积成正比。例如，当边界线和网络线重合时，结点代表的体积比单元体积小一倍，这时应取单元结电容的一半。其他几种边界的结点电容值如图 8—7 所示。

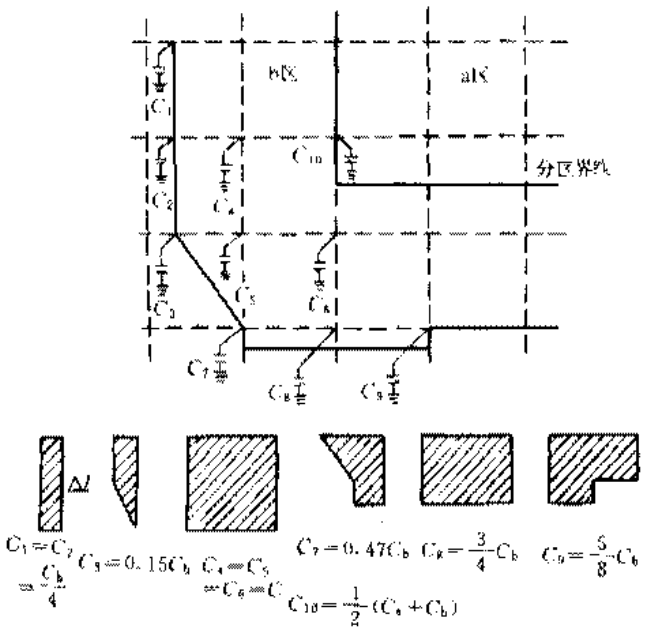



图 8—7　结点电容配置图

(据 Karplus)

### 三、模拟方法

通常按下列步骤工作。

1. 给出定解条件

初始条件模拟，就是在网络模型中形成一个和初始水头分布相似的电位分布。形成方法主要是把各观测孔的初始水头 $H_i$，按 $U=\beta_H H_i$ 换算成对应的电位 $U_i$，再用初始条件函数发生器加到模型的相应结点上，实行强制模拟。

边界条件模拟。常遇到的边界条件主要有两类：

第一类边界条件，按选定的 $\beta_H$，把边界水头换算成相应的常电位或阶跃式电位，再加到模型边界的相应结点上。

第二类边界条件按 $I=\frac{\beta_H}{\beta_K}Q$，把边界流量换算成相应的常电流或阶跃式电流，并加到模型边界的相应结点上。隔水边界由一个开路模拟。对垂向的开采量或入渗量，同样按其变化曲线换算成常电流或阶跃式电流，再加到模型的对应结点上。

2. 反演模拟

反演模拟也称校正模拟。它是利用不同时刻的水头分布资料，通过模拟水头和实测水头拟合的办法，反解出含水层参数。反演模拟的一般做法是：在布置好的网络模型上，按给出的定解条件，模拟不同时刻的结点水头，再和相应时刻的实测水头相比较。如果出现局部偏差，可调整模型的电阻、电容及其分区，然后再模拟。如果存在系统偏差，可调整

独立比值 $\beta_H$，$\beta_K$ 或 $\beta_\mu$，再重新模拟。经过若干次比较和调整，直到模拟水头和实测水头的分布基本吻合为止。在网络模型上，经过调整后的电阻、电容及其分区，可作为下一步正演模拟的依据。

3. 正演模拟

正演模拟也称运转模型。它是在校正模型的基础上，利用合理外推的边界条件，模拟未来不同时刻的水头分布和流量变化，达到预报水位动态或开采量的目的。

目的不同，正演模拟的程序也不一样。预报开采量的模拟程序大致是：在校正模型的基础上，根据设计开采方案，把开采井布局和分配的开采量加到模型上去，然后给出推断的边界条件，按预定时间逐个时段地模拟结点水头，并随时检查预报时间和降深是否超过允许值。如果未到预报时间而超过允许降深，或已到极报时间但降深过小，都应调整开采方案（调整井位、井数及各井分配量等），重新模拟。一直调整到预报时间和降深都接近允许值，并趋近稳定状态为止。这时，开采井布局是合理的，总开采量是有补给保证的。

最后应指出，如 J. Bear 于 1979 年指出的那样，“近年来，数值法有了很大的发展，再应用 R-C 网络就没有优越性了”[19]。现以他的结论作为本节的结语“总之，除了特殊情况外，应用模拟方法预报含水层的水流动态不值得推荐”[19]。

**思考题：**

有人用电网络来模拟地下水中溶质运移问题，并把如何改进模拟溶质运移结果不佳作为其研究方向。你认为这样的选题正确吗？为什么？

# 附录　水力学基础

## §1　引　　论

水力学是研究液体平衡和机械运动规律及其在生产实践中应用的一门科学。它的研究对象是以水为代表的液体。在研究水在含水层中的运动时，要用到一些与水力学有关的知识。因此，有必要把水力学的一些基本知识，在这里作一简单的介绍。

**一、连续介质的假设**

在水力学中，假设液体是连续介质。实际上液体是由大量分子所组成，分子间是不连续的，分子间空隙的尺度远大于分子本身。每个分子无休止地做不规则的运动，相互之间经常碰撞，交换着动量和能量。因此，从微观上看，无论在空间上或时间上液体都呈现出不均匀性、离散性和随机性。但在宏观上，在人们的肉眼和仪器测量所及的范围内，液体却显示出均匀性、连续性和确定性。这是因为个别分子的行为不影响大量分子统计平均后所得的宏观物理量。水力学不关心各个分子的微观运动，只研究大量分子的集合——分子团所显示的特征，因而可以采用连续介质的假设。

连续介质假设：真实液体所占据的空间可近似看作是由“液体质点”连续地、无空隙地充满着。在每一个空间点每个时刻都有确定的物理量（如密度、速度等）。它们都是空间坐标和时间的连续函数。

**二、液体的基本特征及其主要的物理性质**

液体的性状介于气体和固体之间。其主要特征为易流动性和难压缩性。和固体相比，液体分子间距离较远，分子间的吸引力较小，因而没有固体那种保持自身形状的能力。它只能承受压力，在拉力和切力的作用下，液体极易变形。只要有切力存在，不管力是多么微小，液体多要发生流动。这就是易流动性。液体和气体是相似的。所以两者合称流体。但液体也有和气体不同的方面，就是难压缩性。它能保持一定的体积。当容器的体积大于它的体积时，它不能充满容器，形成一个自由液面。而气体很容易被压缩，没有固定的体积，能够充满任何容器。

液体的平衡和运动，除了与作用于液体的外部因素有关外，更重要的是取决于液体本身的物理性质。所以需要对液体的主要物理性质，作一扼要介绍。

1. 质量

液体与其它物体一样，具有质量。单位体积内具有的质量称为密度，以 $\rho$ 表示。如在液体内任选一点 A，在 A 点周围取一微小的液体体积 $\Delta V$，该体积中包含的质量为 $\Delta m$，则当 $\Delta V$ 趋近于零时，比值 $\Delta m / \Delta V$ 的极限定义为液体在 A 点的密度，用下式表示：

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \tag{1}$$

密度的单位常采用 $kg/m^3$ 或 $g/cm^3$。

地心对液体的引力就是重力。物体的重力 $G$ 和质量 $m$ 之间有下列关系

$$G = mg \tag{2}$$

g 为重力加速度。单位体积的重力称为容重，也称重度，用 $\gamma$ 表示，单位常用 $N/m^3$。如果体积为 $V$ 的液体重力为 $G$，则：

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g \tag{3}$$

纯净的水，在标准气压下，4℃时的密度 $\rho = 1g/cm^3 = 1000kg/m^3$。

2. 粘滞性

液体在一微小的切力作用下就会产生流动。在流动的液体中，由于各液层的速度不同而有相对运动。由于相对运动在相互接触的两液层之间产生的内摩擦阻力，简称内摩阻力。内摩阻力对流动有阻抗作用，使流动得快的液层变慢，使原来流得慢的液层加快。液体的这种阻抗流动的性质称为粘滞性，简称粘性。

1686 年 Newton 提出了内摩阻力定律。其主要内容为：内摩阻力 $F$ 的大小和液体性质有关，并与速度梯度 $\frac{du}{dn}$ 和接触面积 $A$ 成正比，而与接触面上压力无关，可用下式表示：

$$F = \mu A \frac{du}{dn} \tag{4}$$

式中，$u$ 为液体的流速；$n$ 为与流速方向垂直的法线方向。单位面积上的内摩阻力称为切应力，有：

$$\tau = \frac{F}{A} = \mu \frac{du}{dn} \tag{5}$$

式（4）和式（5）中的比例系数 $\mu$ 称为动力粘滞系数。它和液体的种类有关。$\mu$ 愈大，流体愈难流动。动力粘滞系数的量纲为 $[ML^{-1}T^{-1}]$。常用单位为帕秒（Pa·s）。

液体粘滞性的大小，也可用运动粘滞系数 $\nu$ 来表示：

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{6}$$

$\nu$ 的量纲是 $[L^2T^{-1}]$，单位常用 $cm^2/s$ 或 $m^2/s$。水的粘滞系数随温度的增加而减小。

不是所有的液体都适用 Newton 内摩阻力定律。符合此定律的液体（如水）称为 Newton 液体。不符合 Newton 内摩阻力定律的液体，称为非 Newton 液体。

最后说明一点，粘滞性只对于运动的液体才有意义。当液体静止或平衡时，粘滞性是不显示作用的。如果运动的液体粘性较小，运动的相对速度也不大，我们可以近似地把液体看成是无粘性的，对切向变形没有任何抗拒能力，这样的液体称为理想液体。因此，在研究中就把液体分成无粘性的理想液体和有粘性的粘滞液体（实际液体）两大类。理想液体只是一种近似模型，真正的理想液体在实际中是不存在的。

3. 压缩性

液体的体积随压力的增加而减小，这种性质称为压缩性。设液体原来的体积为 $V$，当压强增加 $dp$ 之后，相应的体积压缩了 $dV$。根据 Hooke 定律，有：

$$dp = -E \frac{dV}{V} \tag{7}$$

式中负号表示压力增加时体积减少。比例系数 $E$ 称为体积弹性系数（弹性模量），单位为 $N/cm^2$。$E$ 愈大，表示液体愈不易压缩。（7）式可改写成：

$$E = -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \tag{8}$$

因为水在压缩前后的质量 $m$ 不变，因而有

$$\mathrm{d}m = \mathrm{d}(\rho V) = \rho \mathrm{d}V + V\mathrm{d}\rho = 0$$

$$\frac{\rho}{\mathrm{d}\rho} = -\frac{V}{\mathrm{d}V}$$

故体积弹性系数也可表示为：

$$E = \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho} \tag{9}$$

也可采用体积压缩系数 $\beta$ 来表示压缩性。体积压缩系数是体积弹性系数的倒数，即：

$$\beta = \frac{1}{E}(\mathrm{cm}^2/\mathrm{N}) \tag{10}$$

20℃ 的水的体积弹性系数 $E \approx 2.1\times10^5 \mathrm{N/cm}^2$。如水温保持不变，增加 10132500Pa，水的体积仅缩小约 0.5%。因此，在实用上有时把水看作是不可压缩的。液体按压缩性可分为不可压缩液体和可压缩液体两大类。不可压缩液体只是真实液体的一种近似模型。

水的温度对它的密度、容重、粘滞系数、体积弹性系数和体积压缩系数均有影响，详见表 1。

**表 1　不同温度时水的物理性质表**

| 温度 $t$ /℃ | 容重 $\gamma$ /(N·m$^{-3}$) | 密度 $\rho$ /(kg·m$^{-3}$) | 运动粘滞系数 $\nu$ /(cm$^2$·s$^{-1}$) | 体积弹性系数 $E$ /(N·cm$^{-2}$) | 体积压缩系数 $\beta$ /(cm$^2$·N$^{-1}$) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9798.73 | 999.87 | 0.017940 | $19.5\times10^3$ | $5.13\times10^{-5}$ |
| 10 | 9797.55 | 999.73 | 0.013101 | $20.29\times10^3$ | $4.92\times10^{-5}$ |
| 20 | 9782.95 | 998.25 | 0.010105 | $21.07\times10^3$ | $4.74\times10^{-5}$ |
| 30 | 9763.57 | 995.70 | 0.008032 | $21.46\times10^3$ | $4.65\times10^{-5}$ |

4. 表面张力

液体自由表面上的每个质点，因为邻近质点分子引力的作用，被拉向液体的内部。因此，液体的自由表面好像一张绷紧的薄膜，沿表面的切线方向有拉力产生。液体自由表面单位长度的拉力称为表面张力，用 $\sigma$ 表示，单位一般采用 N/m。不同液体的 $\sigma$ 值是不同的，同一种液体则随温度的升高而减少。由于数值不大，一般在水利工程中常加以忽略。但在研究非饱和带的水分运动时，表面张力则是一个重要因素。

## 三、作用于液体的力

无论是处于平衡（包括静止）或运动的液体都受到外力的作用。作用于液体的力按其性质分为两类：一类是质量力，另一类是表面力。

1. 质量力

质量力作用在液体的每个质点上，它的大小与液体的质量成正比。均质液体的质量力，也称体积力。属于这一类的力有重力、惯性力等。质量力的单位为 $N$。在水力学中常常采用每单位质量液体所受的质量力的表示方法，称为单位质量力。单位质量力在坐标 $x$、$y$、$z$ 轴上的分量用 $X$、$Y$、$Z$ 表示。显然，单位质量力具有加速度的量纲。

2. 表面力

表面力是作用在液体表面上的力。它的大小与受力的表面面积成正比，故也称面积力。它与液体本身的质量无关。这类力有液体的压力、运动液体的内摩阻力、固体对液体的摩擦力和压力等。

一般，作用于液体某一面积上的表面力与该面的法线有一夹角，故可分解为与受力面相切的切向分力和与受力面垂直的法向分力两种。沿液体表面内法线方向的分力为压力。

**思考题：**

1. 为什么对静止液体来说，粘滞系数是没有意义的？

2. 原体积为 $1m^3$ 的水，当压强由 101325Pa 增加到 10132500Pa 时，它的体积改变是多少？

## §2 静水压力

### 一、静水压强及其特性

设在静水中取一作用面，其面积为 $\Delta A$，其上的压力为 $\Delta P$。当面积 $\Delta A$ 趋于零时，比值 $\frac{\Delta P}{\Delta A}$ 的极限值就是该点的静水压强，用符号 $p$ 表示：

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{11}$$

在水力学中规定，压强取正值。压强 $p$ 的单位为帕斯卡（Pa），简称帕（$1Pa = 1N/m^2$）。

静水压强有两个特性：

（1）静水压强的方向是垂直压向作用面的，即它的方向和内法线的方向一致。

（2）任一点处的静水压强的大小与受力面的方向无关，即该点处各个方向上的静水压强值的大小都相等。

### 二、液体平衡的微分方程

现在，我们建立表示液体平衡条件的微分方程。在平衡的液体中任一点 $M(x,y,z)$ 处，划出以该点为中心的微小平行六面体，各边分别与坐标轴平行，边长为 $dx$、$dy$、$dz$，如图 1 所示。作用于这一微小六面体上的外力有表面力和质量力。

表面力为相邻液体作用于微小六面体上的压力。设 $M$ 点的压强为 $p$，它是坐标的连续函数，即 $p = p(x,y,z)$。在 ABCD 的中心 $M'\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right)$ 点，应用 Taylor 级数，略去高次项可得压强：

$$p_1 = p\left(x - \frac{dx}{2}, y, z\right) \approx p - \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

同理，可得 A′ B′ C′ D′ 的中心 $M''$ 的压强：

$$p_2 = p + \frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}dx$$

因为六面体是无限小的，可以认为各面上的压强是均匀分布的，并以中心点为代表。因此，$x$ 方向的表面力为

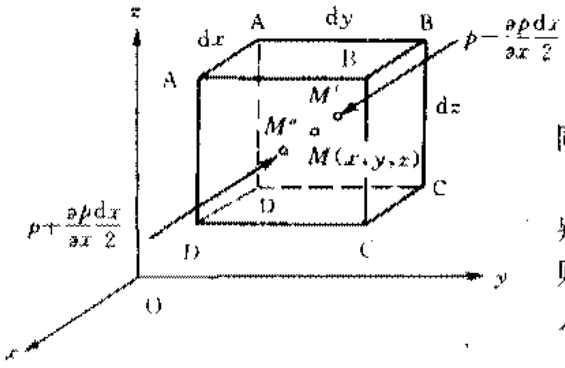



图 1　液体的平衡微分方程

ABCD 面上　　$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

A′B′C′D′ 面上　　$\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

同理，可得其他面上的表面力。

已知六面体的质量为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。$X$、$Y$、$Z$ 分别为单位质量的质量力在坐标轴方向的分量，则 $x$ 方向的质量力为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot X$，$y$ 方向和 $z$ 方向分别为 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot Y$ 和 $\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\cdot Z$。

此外，别无其它力的作用。根据液体的平衡条件，这两种作用力必须相互平衡，即各力在 $x$ 轴方向上的分力之和应为零，即：

$$\left(p-\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+X\cdot\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

化简后得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-X=0\\ \text{同理可得}\quad&\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-Y=0,\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-Z=0\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

这个液体的平衡微分方程是 Euler 导出的，故也称 Euler 平衡方程。它表明处于静止（或平衡）状态的液体，其单位质量液体质量力的分量（$X,Y,Z$）和表面力分量 $\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)$ 是对应地相等的。

将方程（12）的各式依次乘以 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$，相加后移项得：

$$\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z=\rho(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)$$

上式左端项为静水压强 $p$ 的全微分 $\mathrm{d}p$，即：

$$\mathrm{d}p=\rho(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)\tag{13}$$

对于不可压缩液体，$\rho$ 为常数。(13) 式左端为 $p$ 的全微分，只有右端括号内也是某一函数 $U$ 的全微分等式才有意义。即

$$\mathrm{d}U=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}p=\rho\mathrm{d}U\tag{14}$$

因而得

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}\tag{15}$$

满足 (15) 式的函数 $U(x,y,z)$ 对某方向的偏导数等于单位质量力在该方向的分量。这样的函数称为势函数。具有这样的势函数的质量力称为有势力，如重力、惯性力。势函数存在的场称为势场，只有当质量力是有势力时，液体才能处于平衡状态。

对 (14) 式进行积分，并考虑已知液体表面或内部任意点处的势函数 $U_0$ 和压强 $p_0$，则：

$$p = p_0 + \rho(U - U_0) \tag{16}$$

上式就是不可压缩液体平衡微分方程积分后的表达式。

在同一种的连续的静止液体中，压强相等的各点所组成的面叫等压面。等压面上 $p$ = 常数，即 $dp = 0$，由（13）式得：

$$X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z = 0 \tag{17}$$

在静止液体的自由表面上各点的压强均为 101325Pa（一个大气压），故 $dp = 0$，自由表面为等压面。因为等压面上 $dp = 0$，故有 $dU = 0$，所以平衡液体中等压面也就是等势面。式（17）中，$\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 表示等压面上任意微小位移 $\boldsymbol{ds}$ 沿三个坐标轴的分量，$X$、$Y$、$Z$ 表示单位质量力 $\boldsymbol{f}$ 沿坐标轴的三个分量。故（17）式可改写成：

$$\boldsymbol{f} \cdot \mathbf{ds} = 0 \tag{18}$$

由场论可知，二矢量的数量积为零，表示两矢量正交（垂直），而 $\mathbf{ds}$ 是沿等压面任意选取的，故表明等压面与质量力正交。

### 三、重力作用下的液体平衡

1. 重力作用下的液体平衡方程

设有重力作用下的静止液体，此时的质量力只有重力。将直角坐标系原点取在自由表面上时，$z$ 轴垂直向上（图 2）。此时，单位质量力各分量为：

$$X = 0 \quad Y = 0 \quad Z = -g$$

于是平衡微分方程（13）式变为：

$$\mathrm{d}p = -\rho g\mathrm{d}z = -\gamma\mathrm{d}z$$

上式中 $g$ 为重力加速度，$\gamma$ 为液体的容重。对于不可压缩液体，$\gamma$ = 常数。积分上式得：

$$p = -\gamma z + C \tag{19}$$

在自由表面上，$z = 0$，$p = p_0$，由此求得 $C = p_0$。一般用液面以下的深度 $h$ 代替方向朝上的 $z$ 更为方便，故令 $h = -z$，上式变为：

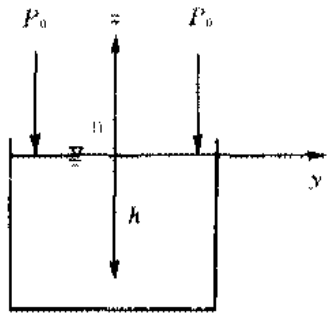


图 2　重力作用下的液体平衡

$$p = p_0 + \gamma h \tag{20}$$

式（20）为重力作用下的液体平衡方程。它表明在静止液体中，压强随着深度按线性规律变化。从（20）式同时可以看出，位于同一深度 $h$ 的各点具有相同的压强值。说明在重力作用下静止液体的等压面是水平面，它与重力加速度的方向垂直。

2. 绝对压强，相对压强，负压

压强 $p$ 的大小可以从不同的基准算起。以完全真空为零算起，这种压强值称为绝对压强 $p'$。绝对压强总是取正值，最小为零。绝对压强的大小可用（20）式表示。即：

$$p' = p_0 + \gamma h$$

在地面水和地下水的自由表面上，其压强的大小常为大气压强 $p_a$，则：

$$p' = p_a + \gamma h \tag{21}$$

在地面水及地下水计算中，压强常以当地大气压为基准算起，称为相对压强，常用 $p$ 表示。即：

$$p = p' - p_a = \gamma h \tag{22}$$

相对压强与绝对压强的关系如图 3 所示。相对压强可正可负，如某点的绝对压强大于当地

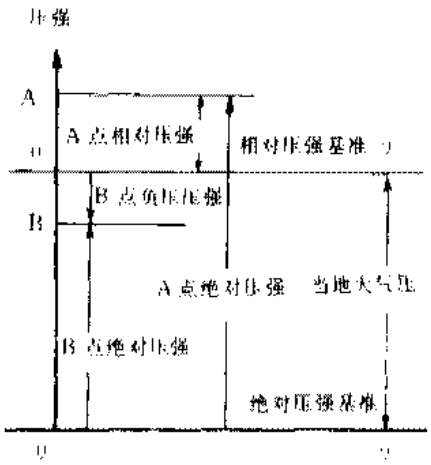



图 3 压强表示法

大气压，则相对压强取正值，如图中的 A 点。反之，则相对压强取负值，称为负压，在工程上称为“真空”，如图中的 B 点。包气带中的地下水压强常为负值。

(22) 式可变换形式如下

$$h = \frac{p}{\gamma} \tag{23}$$

因为容重 $\gamma$ 一般变化不大，可当作常数看待，故液柱高度 $h$ 就反映了压强的大小。因此压强的大小也可用水柱高度表示。一个标准大气压相当于 10.33m 水柱高度。

3. 位置水头，压强水头，测管水头

重力作用下的液体平衡方程如 (19) 式所示，又可写作：

$$z + \frac{p}{\gamma} = C_1 \tag{24}$$

上式表明，在重力作用下，静止液体中无论哪一点的 $\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)$ 总是一个常数，$z$ 具有 〔L〕 的量纲，$\frac{p}{\gamma}$ 的量纲为 $\frac{〔L^{-1}T^{-2}M〕}{〔L^{-3}T^{-2}M〕} = 〔L〕$，表明二者都可用长度的单位表示。

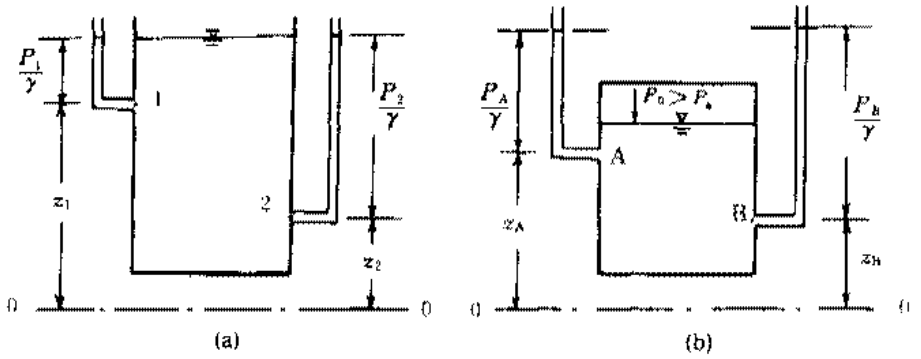



图 4 位置水头、压强水头和测管水头

图 4 表示开口容器和密闭容器中测压管的水头。如取 0—0 作为基准面，则从测压管液面到基准面的高度由两部分组成：$z$ 表示该点位置到基准面的高度，称为位置水头；$\frac{p}{\gamma}$ 表示该点压强的液柱高度，称为压强水头。两者之和 $z + \frac{p}{\gamma}$ 称为测压管水头，简称测管水头。位置水头 $z$ 表示单位重力液体从某一基准面算起所具有的位置势能，简称位能。显然，基准面位置不同，位能 $z$ 也不相同。压强水头 $\frac{p}{\gamma}$ 表示单位重力液体从一个大气压起算所具有的压强势能，简称压能。压能是一种潜在的势能。如果在某点安置测压管，在压能作用下，液

面会上升 $\frac{p}{\gamma}$ 的高度。单位重力液体所增加的位置势能 $\frac{p}{\gamma}$ 就是由原来的压能转变而来的。(24) 式表明，静止液体中，各点的测管水头都是相等的。

**思考题：**

1. 除了重力以外还有哪些质量力；等压面是否仍然是水平面？
2. 为什么地下水计算中常用相对压强而不用绝对压强？

## §3 水动力学的理论基础

### 一、描述流体运动的两种方法

研究流体的运动有两种观点和方法，即 Lagrange 法和 Euler 法。Lagrange 法着眼于流体质点，描述流体质点的运动过程，即质点的位置随时间变化的规律。如果所有质点的运动规律清楚了，就搞清了整个流体的运动状况。因此，Lagrange 法首先要区分不同的流体质点。设在初始时刻 $t=t_0$ 在选定的坐标系中流体质点的坐标为 $(a,b,c)$。不同的质点有不同的 $(a,b,c)$ 数值，则这个起始坐标 $(a,b,c)$ 就可以作为该质点的标志，称为 Lagrange 变数。而任何时刻 $t$，任何质点的空间位置 $(x,y,z)$ 都看成是自变量 $(a,b,c)$ 和时间 $t$ 的函数，则有：

$$\left.\begin{aligned} x &= x(a,b,c,t) \\ y &= y(a,b,c,t) \\ z &= z(a,b,c,t) \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

在 (25) 式中，对某一特定质点而言，$(a,b,c)$ 为常数。(25) 式代表流体质点任意时刻所处的位置，描述了该质点的运动规律。

对 (25) 式取偏导数，可得任一流体质点任意时刻的速度：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_y &= \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial y(a,b,c,t)}{\partial t} \\ u_z &= \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z(a,b,c,t)}{\partial t} \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

同理，加速度为 (26) 式对时间 $t$ 的偏导数

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y(a,b,c,t)}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z(a,b,c,t)}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Lagrange 法的物理概念比较清楚。但用这个方法分析水流运动，数学上较难。因此水力学中经常采用另一种方法，即 Euler 法。

Euler 法的着眼点不是流体质点，而是空间点，从空间的每一点出发描述流体运动的过程。如果每一点的流体运动都已知道，则整个流体运动状况也就清楚了。因为不同时刻将

有不同的流体质点经过空间某一固定点，从固定点的角度无法了解经过它的流体质点从前和今后的运动状况。所以 Euler 法是一种流场法。各运动要素是空间点的坐标（$x,y,z$）和时间 $t$ 的函数。空间点的坐标（$x,y,z$）也称 Euler 变数。在此处作为自变数。例如流速场 $u$ 和压强场 $p$ 均为（$x,y,z$）和 $t$ 的函数，则有：

$$u = u(x,y,z,t) \tag{28}$$

其在三个坐标轴的分量为：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x,y,z,t) \\ u_y &= u_y(x,y,z,t) \\ u_z &= u_z(x,y,z,t) \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

压强场和密度场也均为 $(x,y,z)$ 和 $t$ 的函数。

假定函数 $u$ 具有连续的一阶偏导数，质点的运动轨迹为 $L$。时刻 $t$ 时质点位于 $M$ 点（图 5），速度为 $u(M,t)$，过了 $\Delta t$ 时刻以后，该质点运动到 $M'$，速度为 $u(M',t+\Delta t)$。



图 5　液体的加速度

因此，加速度为：

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(M',t+\Delta t)-u(M,t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{u(M',t+\Delta t)-u(M',t)}{\Delta t}+\frac{u(M',t)-u(M,t)}{\Delta t}\right] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(M',t+\Delta t)-u(M,t)}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{MM'}{\Delta t}\cdot \\ &\quad \lim_{MM'\to 0}\frac{u(M',t)-u(M,t)}{MM'} \end{aligned}$$

上式中，等式右端第一项代表在同一空间点 $M'$ 上随时间变化由流速变化引起的加速度，记为 $\frac{\partial u}{\partial t}$，称为时变加速度。右端第二项由二部分组成：$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{MM'}{\Delta t}$ 即速度 $u$，$\lim\limits_{MM'\to 0}\frac{u(M',t)-u(M,t)}{MM'}$ 表示流体质点由 $M$ 点流至 $M'$ 点，在同一时间内由于空间位置不同而引起速度变化所造成的加速度，记为 $\frac{\partial u}{\partial s}$。$s$ 代表位置。这种加速度称为位移加速度。最后有：

$$a = \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2/2)}{\partial s} \tag{30}$$

为了加强对流体质点加速度的理解，兹举图 6 的例子。一个水箱的放水管中有 A、B 两点，一个水流质点占据 A 点，另一个占据 B 点。如放水时水箱水面维持不变，一个质点从 A 移到 A′，一个从 B 移到 B′。因为水箱水面不变，流动不随时间变化，时变加速度为零。A—A′ 处管径不变，A 点和 A′ 点流速相同，故位移加速度为零。因此 A 点没有加速度。B—B′ 管径改变，B′ 点流速大于 B 点，故位移加速度不等于零。如水箱中不加水，水面随着放水过程不断下降，流速逐渐减小，时变加速度不等于零。那么在 B 点既有时变加速度，又有位移加速度。B 点的加速度可用（30）式表示。

在（30）式中，$\frac{Du}{Dt}$ 有一个专门名称，叫做流速 $u$ 的水动力导数。不仅流速 $u$，只要和液体运动有关的物理变量，如渗透速度 $v$，溶质浓度 $C$，密度 $\rho$，温度 $T$ 等等，都有水动力导数。例如对于溶质浓度 $C$，也可写出类似（30）式的表达式：

$$\frac{DC}{Dt}=\frac{\partial C}{\partial t}+u\cdot\frac{\partial C}{\partial s} \tag{31}$$

水动力导数在地下水运动计算中有重要的应用。

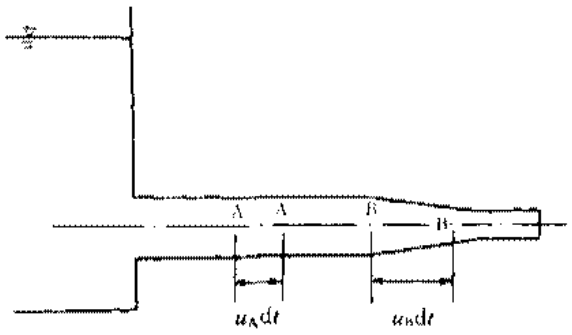



图 6　流体质点的加速度

用 Euler 法描述流动时，如流场中液体质点通过空间点时所有的运动要素（流速、压强、密度等）不随时间而变化，这种流动叫稳定流。对于稳定流来说，时变加速度 $\frac{\partial u}{\partial t}=0$，即运动要素仅仅是空间坐标的函数；否则，称为非稳定流。在上述例子中，水箱水面维持不变的运动就是稳定流，水面下降时为非稳定流。

一般的流动都是三维的。如流动平行于某一坐标轴，则称为一维运动。在流动过程中运动要素不随坐标位置和时间而改变的一维流动称为均匀流。反之，为非均匀流。对于均匀流来说，不存在时变加速度和位移加速度，流体作匀速直线运动。如上例中水箱水面高度不变时，从 A 点到 A′ 点的流动就是均匀流。

**二、流线与迹线，元流与总流，流量与断面流速**

把某一质点在连续的时间过程内所占据的空间位置连成线，就是迹线。迹线就是液体质点运动的轨迹。流线是某一瞬时在流场中绘出的曲线，在这条曲线上，所有各质点的流速矢量都和该曲线相切。

必须注意流线和迹线概念的区别。迹线是由同一质点在不同时刻的位置连成的曲线；而流线则是同一时刻不同质点所组成的曲线，它给出该时刻不同流体质点的运动方向。两者的作图方法也有区别。作流线时，考虑某一固定时刻的速度场，在场内取一点 $M_1$，作 $M_1$ 点的速度矢量 $u_1$，在 $u_1$ 上取一与 $M_1$ 邻近的点 $M_2$，作 $M_2$ 的速度矢量 $u_2$；在 $u_2$ 上取一与 $M_2$ 邻近的点 $M_3$；如此继续下去得到一条折线 $M_1M_2M_3\cdots\cdots$（图 7），令各点之间的距离趋于零，得到一条连续光滑的曲线，就是流线。作迹线的方法就不同。设 $t=t_1$ 时，流体质点位于 $M_1$ 点，作速度矢量 $u_1$，经过时刻 $\Delta t$ 以后，流体质点沿 $u_1$ 方向移动到 $M_2$ 点。一般说来，$t$ 时刻 $M_2$ 点的速度矢量为 $u_2$，到 $t+\Delta t$ 时刻不再是 $u_2$ 而是 $u'$；再经 $\Delta t$ 时刻流体质点沿 $u'$ 移动至 $M'$；又经 $\Delta t$ 时刻流体质点由 $M'$ 点沿 $u''$ 移动至 $M''$；如此继续下去，得到折线 $M_1M_2M'$ $M''$ ……，令时间间隔 $\Delta t\to 0$，得到一条连续光滑的曲线，就是迹线。当液体作非稳定运动时，流体和迹线是两条线；稳定运动时两条线重合。

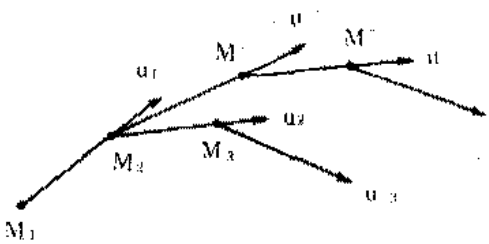



图 7　流线和迹线的作图法

还要提到一点，除了在源点、汇点外，一般流线是不能相交的。否则交点处的流速矢量同时与两条流线相切，即一个液体质点同时有两个速度矢量，这是不可能的。同时，液体质点也不能穿过流线。

在分析液体流动时，要用到元流和总流的概念。

在流动区域设想有一条微小的封闭曲线，通过这条曲线上的每一个点都可以引出一条流线，这些流线组成一个封闭的管状曲面，称为流管，如图 8 所示。流管中的液体称为元流（也叫纤流）。在稳定流中，流线不随时间改变，所以元流也不随时间改变。非稳定流中，元流是变化的，只有瞬时的意义。由于元流的侧壁都是流线，液流质点不能穿越流线，所以元流中的质点不能穿过侧壁离开元流，外边的质点也不能穿过侧壁进入元流。

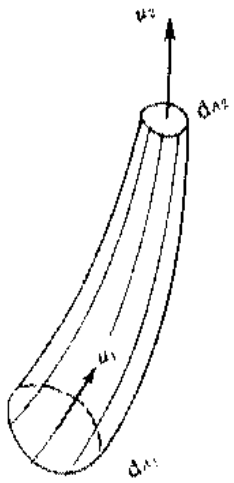


图 8　流管

垂直于元流流向的横断面叫过水断面。因为元流是无限小的，所以它的过水断面是一个无限小的面积 $dA$，可以认为该面积上各点的流速和压强都是相等的。单位时间内通过某一过水断面的液体体积称为流量，常用符号 $Q$ 表示，单位是 $m^3/s$，或 L/s。对于元流来说，过水断面 $dA$ 上的各点流速相等，均为 $u$。因此，流量 $dQ$ 为

$$dQ = udA \tag{32}$$

如果过水断面不是无限小的面积而是有一定的尺寸，则这股水流就是总流。总流可以看成是由无数元流所组成的。总流的过水断面在流线平行的情况下是一个平面，流线不平行时是曲面。过水断面上的流动要素一般不相等。如图 9 管道中的水流，管壁处流速最小，中间流速最大，$u$ 是变数。通过过水断面 $A$ 的流量 $Q$ 为

$$Q = \int dQ = \int_A udA$$

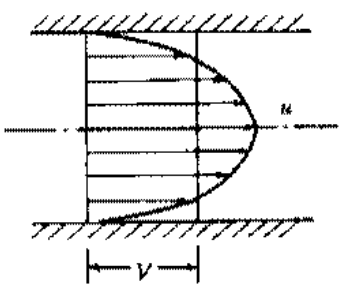


图 9　管道中的流速分布和平均速度

为了简化起见，引起断面平均流速的概念。断面平均流速 $v$ 是一个假想的流速，当整个过水断面上的水流都以这个流速流动时，通过过水断面的流量正好等于实际流量 $Q$。故有：

$$Q = vA, v = \frac{Q}{A} \tag{33}$$

## 三、稳定流的连续性方程

液流的连续性方程是质量守恒定律在连续介质中的一种表现形式。

先考虑元流的情况。取一流管如图 8 所示。因为四周都被流线所围，无水流质点通过，只有两端的过水断面有质点流进流出。在 $dt$ 时间内，从上游断面流入的质量为 $\rho_1 u_1 dA_1 dt$，从下游断面流出的质量为 $\rho_2 u_2 dA_2 dt$。因为是稳定流，密度 $\rho_1$、$\rho_2$ 不随时间变化。根据质量守恒定律，流入流出的液体质量必然相等，又考虑液体不可压缩，$\rho_1 = \rho_2$，故可得：

$$dQ = u_1 dA_1 = u_2 dA_2 = 常数$$

即通过流管的流量为常数。上式可推广到总流的情况：

$$Q = v_1 A_1 = v_2 A_2 \tag{34}$$

移项后得：

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{A_1}{A_2} \tag{35}$$

这就是稳定总流的连续性方程。它表明断面平均流速与过水断面面积成反比。这一关系在地下水稳定流动中也有重要意义。

**四、稳定流的能量方程**

水流必须遵守自然界物质运动的最基本规律，除了遵守质量守恒定律外，还必须遵守能量的守恒与转化定律。水流的能量方程就是后一定律在水流运动中的具体表现。

1. 理想液体稳定元流的能量方程

设有一稳定元流，我们取其中 1—1 断面至 2—2 断面之间的流段进行分析，如图 10 所示。过水断面为微小面积 $dA_1$ 和 $dA_2$，故可认为流速和压强在面上均匀分布，分别为 $u_1$ 和 $u_2$ 及 $p_1$ 和 $p_2$。断面中心距基准面的高度分别为 $z_1$ 和 $z_2$。先考虑为理想液流的情形。

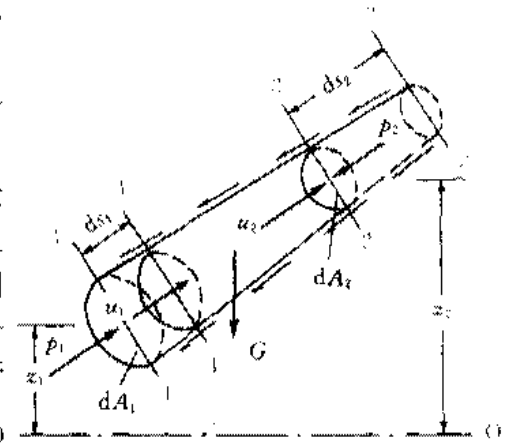



图 10　Bernoulli 方程的推导

在物理学中的动能定理可知，运动物体在某一时段的动能的增量等于作用于该物体上的各个外力所作功之和。动能定理对于水流运动也同样适用。假设 1—1 到 2—2 断面之间的水流，经过时间 $dt$ 以后，流动到 1′—1′ 至 2′—2′ 之间位置，现分析其动能变化及作用力所作之功。

（1）流段的动能增量

因为考虑的是稳定流，在 $dt$ 时间段内，断面 1′—1′ 至 2—2 之间的所有水流质点的流速和质量都没有变化，即动能 $\frac{1}{2}mu^2$ 不变，所以整个流段的动能变化仅仅体现在由 1—1′ 段的动能变成了 2—2′ 段的动能。又因为可以认为水流是不可压缩的，1-1′ 段和 2—2′ 段的水流体积相同，均为 $dV$。因此，流动过程仅仅相当于把 $dV$ 这块水体从位置 1—1′ 移到 2—2′。该水体的重力为 $\gamma dV$，质量为 $dm=\frac{\gamma dV}{g}$。由于水流体积微小，可以认为在 1—1′ 内各质点的流速均为 $u_1$，在 2—2′ 内均为 $u_2$，则动能增量为：

$$\Delta E=\frac{1}{2}dmu_2^2-\frac{1}{2}dmu_1^2=\frac{\gamma dV}{2g}(u_2^2-u_1^2) \tag{36}$$

（2）作用力所作的功

对于理想流体，作用在流段 1—2 上的力有重力及边界周围的水压力。下面分析各种力所作的功。

重力所作的功 $W_1$：

经历时间 $dt$ 以后，1′—2 流段的水流位置没有变化，没有作功。整个流段 1—2 在 $dt$ 时间内所作的功等于体积为 $dV$ 的这部分水从位置 1—1′ 移动到 2—2′ 所作的功。体积 $dV$ 很小，其重心距基准面的高度可近似看作断面中心的高度 $z_1$、$z_2$。位置高度的变化为 $(z_1-z_2)$，则：

$$W_1 = \gamma dV(z_1 - z_2)$$

式中，$z_1 > z_2$ 时，重力作正功；$z_1 < z_2$ 时，重力作负功。

压力所作的功 $W_2$：

断面 1—1 和断面 2—2 上的水压力方向和流动方向平行，压力虽是作功的，但流管侧壁上的水压力与流动方向垂直，不作功。断面 1—1 上的总压力为 $p_1 dA_1$，移动距离为 $ds_1$，移动方向与力的作用方向一致，作功 $p_1 dA_1 ds_1$。断面 2—2 的总压力为 $p_2 dA_2$，移动距离 $ds_2$。移动方向与力的作用方向相反，作功 $-p_2 dA_2 ds_2$。整个流段上的压力所作的功：

$$W_2 = p_1 dA_1 ds_1 - p_2 dA_2 ds_2 = (p_1 - p_2)dV$$

对于理想液体，摩擦阻力为零不作功，故总功为：

$$\Sigma W = W_1 + W_2 = \gamma dV(z_1 - z_2) + dV(p_1 - p_2) \tag{37}$$

根据动能定理，(36) 式和 (37) 式应当相等，故有：

$$\frac{\gamma dV}{2g}(u_2^2 - u_1^2) = \gamma dV(z_1 - z_2) + dV(p_1 - p_2)$$

以 $\gamma dV$ 除以等式两边，对于单位重力的水，经整理后得：

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} \tag{38}$$

上式就是理想的不可压缩液体稳定元流的能量方程，又称 Bernoulli 方程。它反映了稳定流中沿流程各点的位置高度 $z$、压强 $p$ 和流速 $u$ 三者之间的变化规律。

上式中，$z$ 为位置水头，代表单位重力流体的位置势能；$\frac{p}{\gamma}$ 为压强水头，代表单位重力流体相对于大气压的压强势能；两者之和为测管水头，代表单位重力液体所具有的总势能。对于流动的水还有动能。速度为 $u$、质量为 $m$ 的物体单位重力物体的动能为 $\frac{\frac{1}{2}mu^2}{mg} = \frac{u^2}{2g}$，量纲为 [L]。这表明 (38) 式中的最后一项 $\frac{u^2}{2g}$ 具有长度的量纲，称为流速水头。我们把

$$H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \tag{39}$$

称为总水头，代表单位重力流体的总机械能。(39) 式表明，理想流体在流动过程中总机械能守恒。

2. 实际液体稳定元流的能量方程

对于实际液体，图 10 中的流管侧壁的摩擦阻力不等于零，它也要作功。但因阻力总与流动方向相反，作负功。设单位重力水流由于摩擦阻力所作的功为 $-\Delta h'$，整个流段的摩擦阻力作功为：

$$W_3 = -\gamma dV \Delta h'$$

故总功为：

$$\Sigma W = W_1 + W_2 + W_3 = \gamma dV(z_1 - z_2) + dV(p_1 - p_2) - \gamma dV \Delta h' \tag{40}$$

根据动能定理，令 (40) 式等于 (36) 式，得：

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta h' \tag{41}$$

$\Delta h'$ 代表单位重力液体在流动过程中克服阻力作功而消耗的机械能。这部分机械能转化成

热能而散失，称为水头损失。

式（41）表明：在元流从一个断面流到另一个断面的过程中，断面上的各项能（位能、压能、动能）在一定条件下可互相转化。对于单位重力流体来说，前一断面的总机械能等于后一断面的总机械能与两断面之间水头损失之和。它反映了能量守恒与转化这一普遍规律。

3. 实际液体稳定总流的能量方程

在讨论之前，先要引进急变流和渐变流的概念。急变流和渐变流都是非均匀流。当非均匀流的流速大小和方向沿流线急剧改变时，称为急变流（图 11）。显然，急变流流线的曲率半径较小，流线之间夹角较大，过水断面一般为曲面。如果非均匀流的流速大小和方向沿流线逐渐缓慢地改变，则称为渐变流。渐变流的曲率半径较大，流线之间的夹角较小。如取不长的流段来看，流线可近似看作是平行直线，过水断面可近似地看作是一个平面。但过水断面的形状和大小以及断面上的流速分布是沿流程逐渐改变的。

可以证明，对于均匀流和渐变流，同一过水断面上动水压强的分布规律和静水压强的分布规律是相同的，过水断面上各点的测管水头相同，即 $z+\frac{p}{\gamma}=$常数。但急变流则不同，由于存在离心惯性力，使弯管外侧压强增大，水头增高，而弯管内侧压强减少，水头减低。

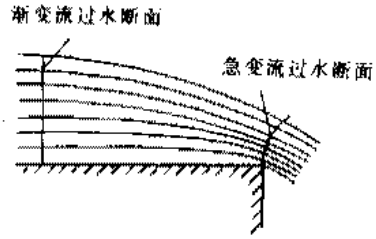


图 11　渐变流和急变流

经过一系列的推导，可求出总流的能量方程如下：

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\Delta h \qquad (42)$$

将（42）式和（41）式比较，可知流速水头处的 $\alpha$ 换成了平均流速 $v$，并乘上了一个修正系数 $\alpha$。一般的渐变流，$\alpha=1.05\sim1.10$。断面上的流速分布愈均匀，$\alpha$ 愈接近于 1。除了流速水头要修正外，其余都是一致的。此时单位重力液体的总机械能，即水头 $H$ 的表达式为：

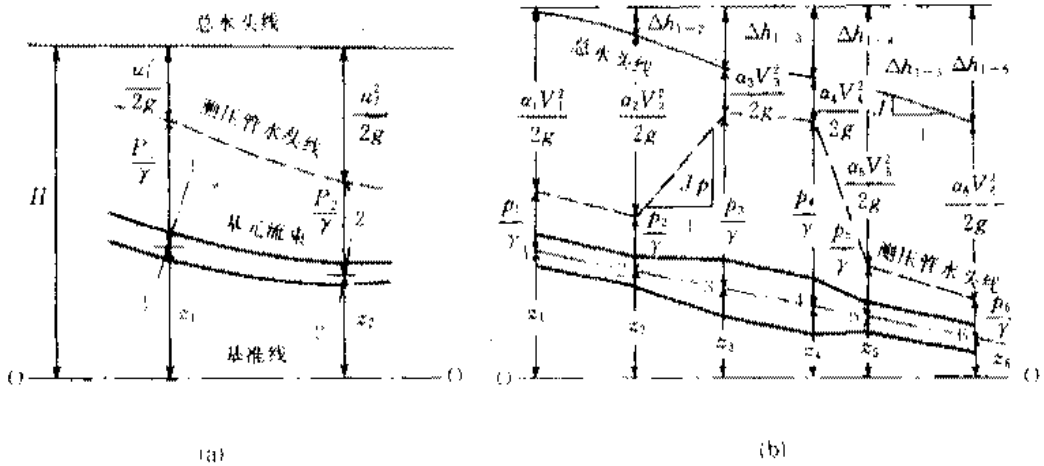
$$H=z+\frac{p}{\gamma}+\frac{\alpha v^2}{2g} \qquad (43)$$

4. 能量方程的几何表示——水头线

无论是元流或总流的能量方程，式中各项都表示单位重力液体的能量，而且都具有长度的量纲，因而可用几何线段表示，形象地反映出沿流程的能量变化。

图 12（a）为理想元流的水头线。作法是先画出基准面 0—0，量出元流断面中心离基准面的高度 $z$，由断面中心向上作铅垂线，截取高度等于压强水头 $\frac{p}{\gamma}$，得到测管水头 $\left(z+\frac{p}{\gamma}\right)$。把各断面上的测管水头连起来得到测管水头线。在测管水头以上截取垂直高度等于流速水头 $\frac{u^2}{2g}$，得到总水头。各断面的总水头连线称为总水头线。理想液体的总水头线必然是一条水平直线。图 12（b）为实际总流的水头线，总水头线是沿程降落的。两断面之间总水头线的降落高度即两断面之间的水头损失 $\Delta h$。

沿流程单位距离上的总水头损失称为水力坡度 $J$。




(a) (b)

图 12 Bernoulli 方程的几何表示

(a)—理想元流，(b)—实际总流

$$J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{\alpha v^2}{2g}\right)}{\mathrm{d}s} \tag{44}$$

式中的负号是因为实际水流沿程总有水头损失 $\mathrm{d}H$，总取负值，而水力坡度总是正的，所以要加一负号。

5. 非稳定流的影响

对于非稳定流，时变加速度 $\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$，因此局部惯性力 $m\frac{\partial u}{\partial t} \neq 0$。此惯性力要作功。在推导方程时，总功中要加上局部惯性力作的功。这部分由局部惯性力所作的功称为惯性水头。设非稳定总流的惯性水头为 $h_i$，则非稳定总流的能量方程为：

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + \Delta h + h_i \tag{45}$$

6. 能量方程的应用条件

元流和总流的 Bernoulli 方程的适用条件为：(1) 液体是不可压缩的；(2) 液体为稳定流，对非稳定流要作惯性水头修正；(3) 作用于液体上的质量力只有重力；(4) 所取的二个断面为均匀流或渐变流断面；(5) 在两断面间没有支流汇入或流出，也没有能量的输入或输出；(6) 总流的 Bernoulli 方程具有总体平均值的性质，在同一总流的不同元流或流线上不能应用总流的 Bernoulli 方程；(7) 动能修正系数 $\alpha_1$ 和 $\alpha_2$ 一般是不相等的，但在大多数情况下，可近似化简为 $\alpha_1 = \alpha_2 = 1.0$。

**思考题：**

1. 为什么稳定流时流线与迹线一致，非稳定流时不一致？

2. 试自行推导非稳定总流的连续性方程。

3. 设水流在一个管径不变的弯曲水管内流动，如流量不随时间而变化，在水管弯曲处有没有时变加速度和位移加速度？

4. 设地下水流的速度 $v = 0.1\mathrm{m/d}$，动能修正系数 $\alpha = 1.0$，试计算地下水流的流速水

头；试问该水头在地下水计算中有没有意义？

## §4 水流阻力及水头损失

### 一、流动的两种类型——层流和紊流

由于粘滞性的存在使实际液体的流动具有两种不同的型态。1883 年 Reynolds 通过试验揭示了这两种流态的不同本质。下面介绍 Reynolds 实验。

1. Reynolds 实验

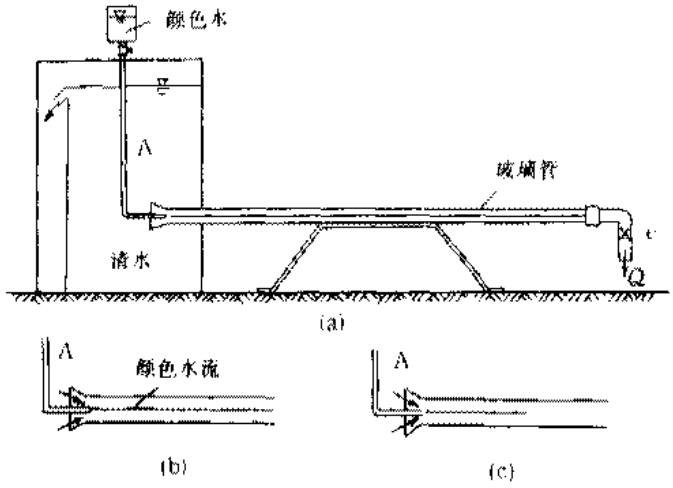



图 13 Reynolds 实验

(a) —Reynolds 实验装置；(b) —层流时情况；(c) —紊流时情况

装置如图 13 所示。在水箱的侧壁安装一根带喇叭形进口的玻璃管，管的下游处有一阀门 c，喇叭口处有一针形小管 A，与贮有颜色水的小水箱连接，可向玻璃管内注入颜色水。

试验时，保持水箱的水位固定，管内水流是稳定流。轻微打开出水阀门，使水箱中的水经玻璃管流出。同时，开启颜色水箱的开关，使颜色水随水箱中的清水进入玻璃管。这时可以看到玻璃管中出现一条固定而清晰的着色直线，不与周围清水掺混〔图 13 (b)〕。如果逐渐开大阀门 c，玻璃管中水的流速也随着增大；当流速达到某一数值后，着色直线开始加粗、弯曲、波状摆动、呈现紊乱状态，最后与清水完全掺混〔图 13 (c)〕。

试验说明：同一种液体在同一管道内流动，因流速不同形成两种性质不同的流态。流速较小时，液体质点作有条不紊的线状运动，彼此不相掺混。这种流态叫做层流。流速较大时，液体质点的运动轨迹曲折混乱，互相掺混。这种流态叫做紊流。上述实验改用任何其它的实际流体在任何形状的边界范围内流动，都可以发现这两种流态。因此，可以得出如下的结论：任何实际流体的流动都具有两种流态，即层流和紊流。

若以相反的程序进行实验。使玻璃管内的流速由大到小。紊流发生后，逐渐关小出水阀门，流态将从紊流转变为层流。但可以发现，由紊流转变成层流时的平均流速比由层流转变为紊流时的平均流速要小。

*2. 流态的判别*

流态转变时，圆管中水流的断面平均流速称为临界流速。由层流转变到紊流时的流速叫上临界流速 $v'_c$，从紊流转变到层流时的流速叫下临界流速 $v_c$。上临界流速大于下临界流速。如果用不同管径的玻璃管进行 Reynolds 实验，发现临界流速不同。管径越大临界流速越小。这使得难以用临界流速来判别流态。

临界流速不仅与管径有关，而且和液体的密度及粘滞性有关。它们之间的关系为：

$$v_c = c\frac{\mu}{\rho d} \tag{46}$$

式中，$d$ 为管子直径，$c$ 为比例常数。上式也可写成下列形式：

$$c = \frac{v_c d}{\nu}$$

$c$ 为一无量纲的常数。不管玻璃管的直径和流速如何，流态转变时的 $c$ 值为一固定常数，称为临界 Reynolds 数 $Re_c$。与上临界流速相应有上临界 Reynolds 数 $Re'_c$；与下临界流速相应的有下临界 Reynolds 数 $Re_c$。所以可以用 Reynolds 数作为判别流态的标准，即：

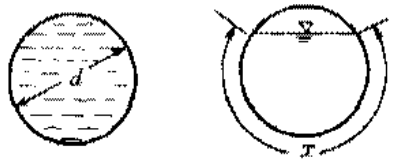
$$Re = \frac{vd}{\nu} \tag{47}$$

如果算出的 Reynolds 数小于临界 Reynolds 数，即 $Re \ll Re_c$，流态为层流；否则，为紊流。但是上临界 Reynolds 数和下临界 Reynolds 数不同。下临界 Reynolds 数比较稳定。上临界 Reynolds 数的数值不一致，与试验时的水流扰动情况有关。因此，采用下临界 Reynolds 数作为判别流态的标准。例如对于圆管流动，当 Reynolds 数 $Re \ll 2300$（即临界 Reynolds $Re_c = 2300$）时，不论其管径大小和液体性质如何，流态应为层流。

对于其它断面形状的管道和无压流动，计算 Reynolds 数时要用水力半径 $R$ 代替管径 $d$。水力半径为过水断面的面积除以湿周，即

$$R = \frac{A}{x} \tag{48}$$

式中，$x$ 为湿周，即过水断面边界上水流与固体边界的接触长度（图 14）。




(a)　　(b)

图 14　过水断面与湿周

3. 不同流态时的水头损失

不同流态时，能量损失的规律不同。为了找出沿程水头损失 $\Delta h$ 和断面平面流速之间的关系，可在 Reynolds 实验的玻璃管上取两断面 1—1 和 2—2 安装测压管。据 Bernoulli 方程，当试验时管径大小不变，$v_1 = v_2$ 时，有：

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = \Delta h \tag{49}$$

逐步打开阀门 e，改变平均流速 $v$ 的数值并读出相应的水头损失 $\Delta h$。然后在双对数纸上作图，横坐标代表 $\lg v$，纵坐标代表 $\lg(\Delta h)$。流速较小时，试验点落在一条 45°角的斜线上（图 15 中的 AE 段），说明层流时 $\Delta h$ 与 $v$ 的一次方成正比。当流速增大到达 B 点，水头损失突然增加，相当于层流到紊流的转换点。此时的流速为上临界流速。流速继续增大到达图中的 CD 段，试验点落在斜率为 $m$ 的直线段上，表明 $\Delta h$ 与 $v^m$ 成正比。指数值 $m = 1.75 - 2.0$。如果紊流充分发展，$m = 2$，即水头损失与流速的平方成正比。然后按相反的方向逐步关小阀门，流速由大变小，到达 C 点时水流开始从紊流向层流过渡，到达 E 点时完全变成层流。E

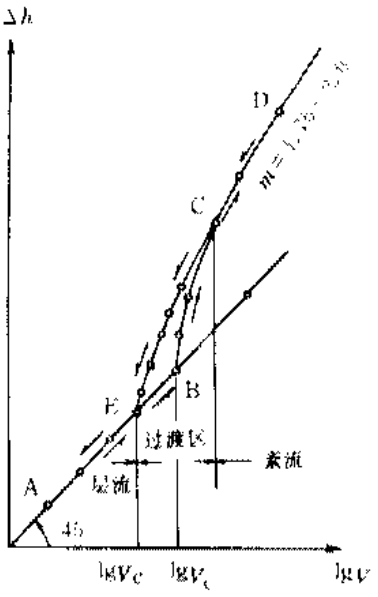



图 15　沿程水头损失和平均流速的关系

点的流速为下临界流速。EC 段为层流与紊流之间的过渡区。

## 二、水头损失的分类

根据水头损失产生的机制及其表现型式，可将其分为两种类型：沿程水头损失和局部水头损失。沿程水头损失是由于克服摩擦阻力作功消耗能量而损失的水头。沿程水头损失是随着流程的长度而增加的。局部水头损失是由于边界形态急剧改变而引起的水头损失。总水头损失是上述两部分水头损失的叠加。

## 三、沿程水头损失与切应力的关系

以圆管中的稳定均匀流为例进行讨论，其结果对于其它的均匀总流也是适用的。

以管轴为中心线取一任意大小的流管，在流管上取两个相距为 $l$ 的过水断面 1 和 2，其面积为 $A'$；边界面的周长为 $\chi'$；作用于断面 1 和 2 上的压强为 $p_1$ 和 $p_2$；管轴在断面 1 和 2 的高程为 $z_1$ 和 $z_2$（图 16）。因为是均匀流，水流作匀速直线运动，沿水流方向上各个力相平衡。沿流动方向的作用力计有：

压力：$(p_1 - p_2)A'$，$p_2$ 的方向与流动方向相反，取负值。

重力沿流动方向的分力：$G\cos\theta$，$G$ 为 1—2 之间流管中水流的重力；$\theta$ 为重力和流动方向之间的夹角。因而有：

$$G\cos\theta = \gamma A' l \frac{z_1 - z_2}{l} = \gamma A'(z_1 - z_2)$$

摩擦阻力：$-\tau l\chi'$。因为切应力对称于管轴线，故在流管表面均匀分布。在一般情况下可用平均值 $\tau$ 代替。负号表示摩擦阻力方向和流动方向相反。

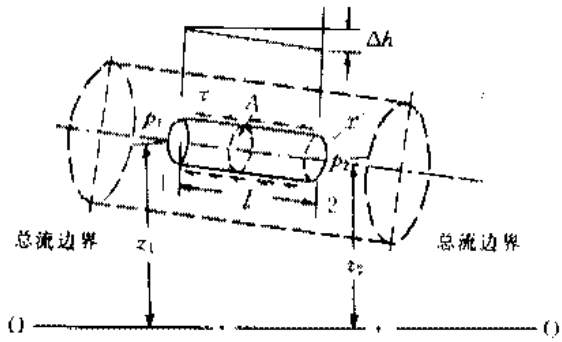



图 16　切应力与沿程水头损失

列出平衡方程式，上述三项相加应等于零，除以 $\gamma A'$，则有

$$\frac{\tau\chi'}{\gamma A'} l = \left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right)$$

对于均匀流，流速沿程不变，流速水头相等，而且没有局部水头损失，$\Delta h = h_f$。故：

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\gamma}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\gamma}\right) = h_f$$

将这一关系代入上式得：

$$\tau = \gamma \frac{A'}{\chi'} \frac{h_f}{l} = \gamma R' J \tag{50}$$

式中 $R'=\frac{A'}{\chi'}$ 为流管的水力半径；$J$ 为水力坡度。

把（50）式的结果扩大到总流，有

$$\tau_0=\gamma RJ \tag{51}$$

式中，$\tau_0$ 为管壁对水流的切应力，也叫单位摩阻力；$R$ 为圆管的水力半径，其值为 $r_0/2$，$r_0$ 为圆管的半径。由（50）和（51）式得：

$$\frac{\tau}{\tau_0}=\frac{R'}{R}=\frac{r}{r_0} \tag{52}$$

上式表明，圆管中稳定均匀流各液层上的切应力在过水断面上按线性规律分布。在管轴中心，$\tau=0$；在管壁处最大，$\tau=\tau_0$（图 17）。式（52）无论对于层流或紊流都适用。这是因为该式只建立了表面切应力与能量损失的关系而不管内部切应力与能量损失的关系如何。

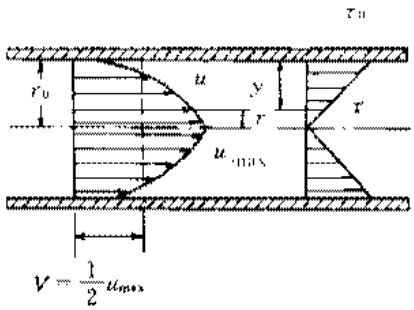


图 17　水管中流速和切应力的分布

虽然建立了均匀流中上述切应力和水头损失（或水力坡度）之间的基本关系式（50）和（51）。但用它来求解水头损失 $h_f$ 和水力坡度 $J$ 仍有困难，因为切应力 $\tau_0$ 仍然是未知的。所以要寻找便于计算的普遍表达式。

通过大量的实验得知，切应力的大小和单位体积液体的动能 $\frac{1}{2}\rho v^2$ 有关：

$$\tau_0=C\frac{\rho v^2}{2} \tag{53}$$

$C$ 为无量纲系数，称为阻力系数。

对于圆管中的总流，由（51）式得：

$$\tau_0=\gamma RJ=\gamma\frac{d}{4}\frac{h_f}{l}$$

$$h_f=\frac{4\tau_0}{\gamma}\frac{l}{d}=\frac{4C}{\gamma}\frac{\rho v^2}{2}\frac{l}{d}$$

令 $\lambda=4C$ 得：

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g} \tag{54}$$

这就是圆管中均匀流的沿程水头损失的计算公式。对于非圆管中的均匀流，用水力半径 $R$ 代替 $d/4$，（54）式变为：

$$h_f=\lambda\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g} \tag{55}$$

上二式中的系数 $\lambda$ 为一无量纲数，称为沿程阻力系数。

**四、圆管中层流运动时过水断面上的流速分布及沿程水头损失**

在圆管均匀流中，以管轴为中心取一流管。在层流情况下，切应力应服从 Newton 内摩阻力定律：

$$\tau=-\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$$

所以取负号是因为流速 $u$ 随着 $r$ 的增加而减小。同时，切应力也可用（50）式表示：

$$\tau=\gamma R'J=\gamma\frac{r}{2}J$$

两式相等，由此得：

$$du = -\frac{\gamma J}{2\mu} r dr$$

积分上式，得：

$$u = \frac{\gamma J}{4\mu}(r_0^2 - r^2) \tag{56}$$

上式表明，圆管中层流的流速分布是以管轴为中心的旋转抛物面。在管轴线（$r = 0$）上流速最大，为：

$$u_{max} = \frac{\gamma J}{4\mu} r_0^2 = \frac{\gamma J}{16\mu} d^2 \tag{57}$$

断面平均流速为：

$$v = \frac{\int_A u dA}{A} = \frac{\gamma J}{4\mu} \int_0^{r_0} \frac{(r_0^2 - r^2) 2\pi r dr}{\pi r_0^2} = \frac{\rho g d^2}{32\mu} J \tag{58}$$

上式表明，圆管中的层流流速与水力坡度的一次方成正比。由（57）式和（58）式可知：

$$v = \frac{1}{2} u_{max}$$

即圆管中均匀层流的平均流速为管轴处最大流速的一半。流量为：

$$Q = vA = \frac{\gamma J}{8\mu} r_0^2 \pi r_0^2 = \frac{\gamma \pi J}{8\mu} r_0^4 \tag{59}$$

即圆管中稳定均匀层流的流量与管径（或管半径）的四次方成正比。

将（58）式的形式稍加改变：

$$J = \frac{h_f}{l} = \frac{32\mu}{\rho g d^2} v ; h_f = \frac{32\mu l}{\gamma d^2} v \tag{60}$$

式（60）为计算圆管层流运动沿程水头损失的公式。由该式可以看出，沿程水头损失与断面平均流速的一次方成正比。把（60）式和（54）式进行对比，可得：

$$\lambda = \frac{64\mu}{\rho v d} = \frac{64}{\frac{v d}{\mu/\rho}} = \frac{64}{\frac{v d}{\nu}} = \frac{64}{\mathrm{Re}} \tag{61}$$

表明圆管层流的沿程阻力系数 $\lambda$ 与 Reynolds 数 Re 成反比。

用类似方法可求得两平行边界间层流运动的流速分布及沿程水头损失的相应表达式。其平均流速为：

$$v = \frac{\rho g b^2}{12\mu} J \tag{62}$$

流速也和水力坡度的一次方成正比。水头损失：

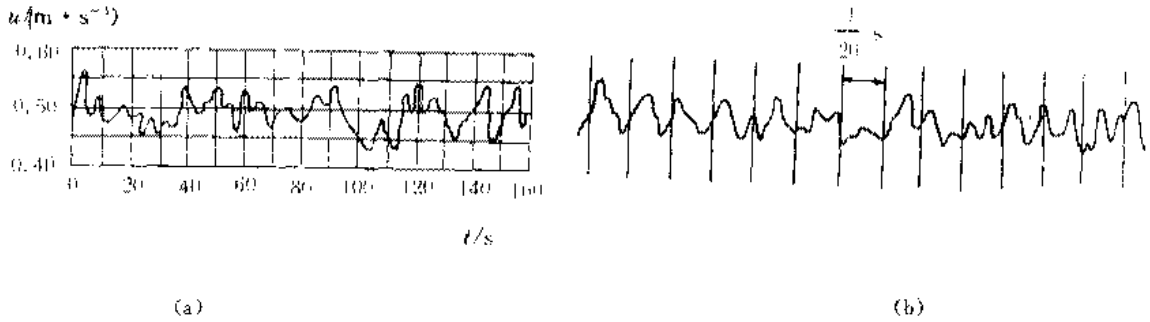
$$h_f = \frac{12\mu l}{\rho g b^2} v \tag{63}$$

**五、紊流的沿程水头损失**

1. 紊流运动的特征

紊流运动的基本特征是运动过程中液体质点互相掺混，结果使各点的压强、流速等运动要素在时间上和空间上都有随机性质的波动。尽管从总体看是稳定运动，但各个瞬时在同一点的流速（或压强）并不是常数，而是以某一常数值为中心随时间不断地跳动。这种

波动称为脉动。图 18 中的（a）和（b）分别为实测的流速脉动和压强脉动情况。因此，严格地说，紊流运动总是非稳定的，只有在时间平均的意义上才有紊流的稳定运动。




(a)　　(b)

图 18　紊流中的运动要素的脉动

(a) —流速；(b) —压强

2. 紊流的断面流速分布

紊流的断面流速分布和层流不同。紊流中由于旋涡和掺混，使时均流速分布均匀化。断面流速的分布如图 19 中的下图所示，紊流中的平均流速 $v$ 远大于最大流速的一半，即：

$$v > \frac{1}{2}u_{max}$$

Reynolds 数愈大，流速的分布愈趋于均匀化。

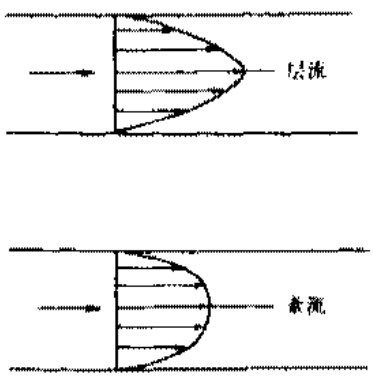



图 19　层流和紊流的断面流速分布

3. Chezy 公式

早在 1775 年 Chezy 就提出了在紊流条件下稳定均匀流的如下计算公式：

$$v = C\sqrt{RJ} \tag{64}$$

式中，$v$ 为断面平均流速；$R$ 为断面的水力半径；$J$ 为水力坡度；$C$ 为系数、其量纲为 $[L^{\frac{1}{2}}T^{-1}]$，称为 Chezy 系数。Chezy 公式是一个古老的公式，和图 15 的 CD 段的试验结果一致，目前仍被广泛采用。为了将它与（55）式对比，作如下变换：

$$h_f = lJ = \frac{2g}{C^2}\frac{l}{R}\frac{v^2}{2g}$$

令 $\frac{2g}{C^2} = \frac{\lambda}{4}$ 得：

$$h_f = \lambda\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g} \tag{65}$$

即为（55）式。沿程阻力系数 $\lambda$ 和 Chezy 系数 $C$ 有如下关系：

$$\lambda = \frac{8g}{C^2},\ C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \tag{66}$$

**思考题：**

1. 你认为地面水的流态主要是层流还是紊流？地下水呢？在井管中流动的井水呢？

2. 沿程水头损失的普遍公式

$$h_f = \lambda \frac{l}{4R} \frac{v^2}{2g}$$

既适合于层流，又适合于紊流；但我们又说层流的水头损失与流速的一次方成正比，紊流水头损失与流速的二次方成正比，这里是否有矛盾？为什么？

# 主要参考文献


[1] 薛禹群、朱学愚，地下水动力学，地质出版社，1979。

[2] 薛禹群主编，地下水动力学原理，地质出版社，1986。

[3] 薛禹群、谢春红，水文地质学的数值法，煤炭工业出版社，1989。

[4] 薛禹群、张幼宽，双重介质渗流模型及其里兹有限元解在矿坑涌水量预测中的应用，水文地质工程地质，No. 2，1984。

[5] 薛禹群、谢春红、吴吉春、刘培民、时洪文，海水入侵咸淡水界面移动规律研究，南京大学出版社，1990。

[6] 陈雨孙等，试论影响半径，勘探技术资料，第6期，1976。

[7] 陈雨孙，单井水力学，中国建筑工业出版社，1977。

[8] 北京地质学院，地下水动力学，中国工业出版社，1961。

[9] 杨天行、傅泽周、刘金山、林学钰，地下水流向井的非稳定运动的原理和计算方法，地质出版社，1980。

[10] 张蔚蓁，地下水非稳定流计算和地下水资源评价，科学出版社，1983。

[11] 陈崇希，地下水不稳定井流计算方法，地质出版社，1983。

[12] 供水水文地质手册编写组，供水水文地质手册（第二册），地质出版社，1977。

[13] 陈钟祥，姜礼尚，双重介质渗流方程组的精确解，中国科学，No. 2，1978。

[14] 清华大学水力学教研组编，水力学（修订版），人民教育出版社，1981。

[15] 天津大学水力学教研组编，水力学，人民教育出版社，1980。

[16] 吴望一，流体力学，北京大学出版社，1982。

[17] 张宏仁等，地下水非稳定流理论的发展和应用，地质出版社，1975。

[18] J. Bear，多孔介质流体动力学，中国建筑工业出版社，1983（原版1972）。

[19] J. Bear，地下水水力学，地质出版社，1985（原版1979）。

[20] L. Remson, G. M. Hornberger, F. J. Molz，地下水文学的数值法，地质出版社，1977（原版1971）。

[21] В. Н. Аравин, С. Н. Нумеров，渗流理论，高等教育出版社，1959（原版1953）。

[22] Ф. Н. Каменский，地下水动力学原理，地质出版社，1955（原版1943）。

[23] П. Я. Полубаринова-Кочина，地下水运动原理，地质出版社，1957（原版1952）。

[24] Н. А. Скабалланович，水文地质计算，煤炭工业出版社，1957（原版1954）。

[25] В. Н. Щелкачев, В. В. Лапук，地下水力学，燃料工业出版社，1955（原版1949）。

[26] Boulton, N. S., The drawdown of the water table under non-steady conditions near a pumped well in an unconfined formation, Proc. Instu. Civil Engrs., part Ⅱ, Vol. 3, No. 2, 564—579, 1954.

[27] Boulton, N. S., Analysis of data from non-equilibrium pumping tests allowing for delayed yield from storage, Proc. Instu. Civil Engrs., Vol. 26, No. 11, 469—482, 1963.

[28] Boulton, B. S. and T. D. Streltsova, Unsteady flow to a pumped well in a fissured water-bearing formation, J. Hydrol. Vol. 35, 257—269, 1977.

[29] Darcy, H., Determination of the laws of flow of water through sand, Les Fontaines Publiques De La Ville De Dijon, Victor Dalmont Paris, 1856, (English translation by R. A. Freeze, Physical Hydro geology, Ed. by R. A. Freeze and W. Back).

[30] Dagan G., Flow and transport in porous formation, Springer-Verlag, 1989.

[31] Fried, J. J., Groundwater Pollution, Elsevier, 1975.

[32] Hantush, M. S. and C. E. Jacob, Non-steady radial flow in an infinite leaky aquifer, Am. Geophys. Union Trans. Vol. 36, 95—100, 1955.

[33] Hantush, M. S., Modification of the theory of leaky aquifers, J. Geophy. Research, Vol. 65, No. 11, 3713—3715, 1960.

[34] Hantush, M. S., Hydraulics of wells, Advances in Hydroscience (V. T. Chow, Ed.), Vol. 11, Academic Press, 281—442, 1964.

[35] Hantush, M. S., Flow to wells in aquifers separted by a semipervious layer, J. Geophy. Research, Vol. 72, No. 6, 1909—1920, 1967.

[36] Huyakorn, P. S., P. F. Anderson, J. W. Mercer and H. O. White, JR., Salt water intrusion in aquifers: Development and testing of a three dimensional finite element model, water Resour. Res., Vol. 23, No. 2, 293—312, 1987.

[37] Gillham, R. W. and J. A. Chery, Contaminant migration in saturated unconsolidated geologic deposits, Recent Trends in Hydrogeology (T. N. Narasimhan Ed.), 1982.

[38] Huiaman, L., Groundwater Recovery, MacMillan, 1972.

[39] Karplus, W. J., Analogy simulation solutions of fluid problems, McGraw-Hill, 1958.

[40] Mironer, A., Engineering Fluid Mechanics, McGraw-Hill 1979.

[41] Marsily, G. de, Quantitative Hydrogeology, Academic Press, 1986.

[42] Neuman, S. P. and P. A. Watherspoon, Applicability of current theories of flow in leaky aquifers, Water Resour. Res., Vol. 5, No. 4, 817—829, 1969.

[43] Neuman, S. P. and P. A. Watherspoon, Analysis of nonsteady flow with a free surface using the finite element method, Water Resour. Res., Vol. 7, No. 3, 1971.

[44] Neuman, S. P., Theory of flow in unconfined aquifers considering delayed response of water table, Water Resour. Res., Vol. 8, No. 4, 1031—1045, 1972.

[45] Neuman, S. P., Analysis of pumping rest data from anisotropic unconfined aquifers considering delayed gravity response, Water Resour. Res., 11, No. 2, 329—342, 1975.

[46] Prickett, T. A., Type-curve solution to aquifer test under water-table conditions, Ground Water, Vol. 3, No. 3, 5—14, 1965.

[47] Streltsova, T. D., Hydrodynamics of ground water flow in a fractured formation, Water Resour. Res., Vol. 12, No. 3, 405—414, 1976.

[48] Theis, C. V., The relation between the lowering of the piezometric surface and the rate and the duration of discharge of a well using ground-water storage, AM. Geophys. Union Trans., Vol. 16, 519—524, 1935.

[49] Walton W. C., Ground water resource evaluation, McGraw-Hill, 1970.

[50] Wiest, R. J. M. De, Geohydrology, John Wiley, & Son, 1965.

[51] Абрамов С. К., В. Л. Бабушин, Методы расчета притока воды к буровым скважинам, Госстройиздат, 1955.

[52] Абрамов С. К., Гидрогеотические расчеты вертикальных дренажей при осушении угольных месторождений, Углетехиздат, 1955.

[53] Чарный И. А., Строгое Доказательство формулы дюпюи для безнапорной фильтрации с промежутком высачивания, Доклады А. Н. СССР, Т. 79, №6, 1951.

# 中英文名词对照

## B

包气带 Zone of aeration
饱和带 Zone of saturation
饱和度 Saturation or Degree of saturation
保角映射 Conformal mapping
半承压含水层 Semiconfined aquifer
Bernoulli 方程 Bernoulli's equation
边界条件 Boundary conditoins
边界附近井 Well near boundaries
表面张力 Surface tension
标准曲线 Type curre
标准曲线对比法 Type curve method
薄膜模拟 Membrane analog
薄膜水 Pellicular water
Boussinesq 方程 Boussinesq's equation
Boussinesq 方程的第二种线性化方法 Secod nmethod of linearization of Boussinesq equation
不完整井 Partially penetratng well
不能再降低的含水率 Irreducible water content
不透水层 Impervious formation
补给，注水 Recharge
补给边界 Recharge boundary
补给井 Recharge well

## C

参考水头 Reference hydraulic head referred to as the fresh water head
测压管 Piezometer
测压管水头（测管水头）Piezometric head
层流 Laminar flow
常用对数 The logarithm ban ten
承压水 Confined water
承压水流 Confined flow
承压含水层 Confined aquifer
承压水水井 Well in a confined aquifer
迟后疏干 Delayed yield
迟后重力排水 Delayed yield
抽水试验 pumping test
抽水井 pumping well
初始条件 Initial conditions
初始厚度 Initial thickness
初始承压水面 Original piezometric surface

## D

最大密度 Maximum density
单宽流量 Discharge per unit width
单位涌水量 Specific discharge of a well
淡水 Fresh water
淡水密度 Density of the fresh water
弹性贮存 Elastic storage
弹性模量 Modulus of elasticity
导水系数 Transmissivity or coefficient of transmissibility
导电纸 Conducting paper
Da Darcy
Darcy 定律 Darcy's law
Darcy 定律适用范围 Range of validity of Darcy's law
等势线 Equipotential line
等水头线 Groundwater contour
等效导水系数 Equivalent transmissibility
等效渗透系数 Equivalent hydraulic conductivity
等效淡水水头 Equivalent fresh water head
第一类边界条件 Boundary condition of first type
第二类边界条件 Boundary condition of second type
第三类边界条件 Boundary condition of third type
地下水 Groundwater
地下水动力学 Dynamics of groundwater
地下水资源 Groundwater resources
地下水分水岭（地下分水岭）Groundwater divide
地下水污染 Groundwater pollution
地下水面 Water table
地面沉降 Land subsidence
Dirichlet 条件 Dirichlet boundary condition
电网络模拟 Resistance network analog
电导率 Electric conductivity
电解槽模拟 Electrolytic tank analog
电模拟 Electric analog
电阻网络 Resistance network

典型单元体积 Representative elementary volume
定水头边界 Boundary of constant head
定流量抽水 Pumping at constant rate
叠加原理 Principle of superposition
动力粘滞系数 Dynamic viscosity
对流 Convection advection
对流一弥散方程 Advection-dispersion equation
多孔介质 Porous medium
多孔介质的弥散度 Dispersivity of porous medium
多孔介质的压缩系数 Compressibility coefficient of a porous madium
Dupuit 假设 Dupuit assumptions
Dupuit 假设计算出的潜水面 Water table by Dupuit assumptions
Dupuit 公式 Dupuit-Forchheimer formula
多孔介质固体颗粒压缩系数 Compressibility coefficient of the solids of a porous medium

## E

二阶张量 Second rank tenser
二个重叠的连续统 Two overlapping continuous system
Euler 法 Eulerian approach

## F

非饱和流动 Unsaturated flow
非饱和带 Unsaturated zone
非均质 Inhomogeneity
非均质介质 Inhomogeneous medium or heterogeneous medium
非均质各向同性介质 Inhomogeneous isotropic medium
非达西流 Non-Darcy flow
非线性运动方程 Nonlinear motion equation
非牛顿液体 Non-Newtonian fluid
非稳定流 Unsteady flow
分水岭 Water divide
分子扩散 Molecular diffusion
分子扩散系数 Coefficient of molecular diffusion
Fick 定律 Fick's law

## G

Galerkin 法 Galerkin method
各向同性 Isotropy
各向同性介质 Isotropic medium
各向异性 Anisotropy
各向异性介质 Anisotropic medium
给定水头的边界条件 Boundary condition of prescribed head
给定流量的边界条件 Boundary condition of prescribed flux
给水度 Specific yield
隔水层 Aquiclude or water resisting layer
隔水边界 Impervious boundary
隔水底板 Impervious base
Ghyben-Herzberg 界面模型 Ghyben-Herzberg interface model
骨架 matrix
固体骨架 Solid matrix
拐点 Inflection point
观测孔 Observation well
惯性力 Inertial force
过滤器 Screen
过滤器损失 Screen loss
过水断面 Cross-sectional area, area measured normal to direction of velocity of fluid
过渡带 Trasition zone

## H

海水入侵 Sea water intrusion or sea water encroachment
海岸含水层 Coastal aquifer
含水层 Aquifer
含水层厚度 Thickness of aquifer
含水层损失 Formation loss
含水率 Water content or moisture content
横向弥散度 Transversal dispersivity
横向弥散系数 Coefficient of transversal dispersion
汇 Sink
恢复试验 Recovery test
混合边界条件 Mixed boundary condition

## J

积分变换 Integral transformation
几何相似 Geometric similarity
迹线 Pathline
极限吸湿曲线 Boundary wetting curve
极限排水曲线 Boundary drying curve
机械弥散 Mechanical dispersion
机械弥散系数 Coefficient of mechanical dispersion

基本方程 Foundamental equation
基函数 Basis function
基准面 Datum plane or datum level
校正模型 Calibration of a model
界面 Interface
界面坡脚 Toe of interface
介质 Medium
结点 Node
解的唯一性 Uniqueness of the solution
解的存在性 Existance of the solution
解的稳定性 Stability of the solution
解析解 Analytic solution
阶梯降深试验 Step-drawdown test
降落曲线 Depression curve or drawdown curve
降落漏斗 Cone of depression
降深 Drawdown
井径 Radius of well
井函数 Well function
井损 Well loss
井损常数 Well loss constant
井群 Multiple well system
井水位降深 Drawdown in pumping well
经验公式 Empirical formula
镜象法 Method of images
静止界面 Stationary interface
均质 Homogeneity
均质各向同性介质 Homogeneous isotropic medium
均质各向异性介质 Homogeneous anisotropic medium
均匀流 Uniform flow

## K

孔隙 Pores
孔隙度 Porosity
孔隙水头 Pore hydraulic head
孔隙降深 Pore flow drawdown
孔隙压缩系数 Compresaibility of the pores of a porous medium
扩散系数 Diffusivity or diffusivity in unsaturated flow

## L

Lagrange 法 Lagrangian approach
Laplace 方程 Laplace equation
离散 Discrete
离散电模拟 Discrete electric analog
离子模拟 Ion motion analog
粒间应力 Intergranular stress
连续性方程 Continuity equation
连续电模拟 Continuous electric analog
裂隙 Fissure
裂隙介质 Fissured medium
裂隙水头 Fissure hydraulic head
裂隙中的降深 Fissure flow drawdown
裂隙贮水率 Specific storativity of the fissure
裂隙贮水系数 Coefficient of storage of fissured space
临界雷诺数 Critical Reynolds number
流管 Stream tube
流体力学 Fluid dynamics
流量 Discharge flow rate
流函数 Stream function
流网 Flow nets
流线 Streamline
流速水头 Velocity head
裸井 Uncased hole

## M

毛管水 Capillary water
毛管压力 Capillary pressure
毛管压强 Capillary pressure
毛管压力水头 Capillary pressure head
毛管水头 Capillary head
毛管上升 Capillary rise
密度 Density
密度差率 Density difference ratio
密度耦合系数 Density coupling coefficient
弥散 Dispersion
弥散现象 Phenomena of dispersion
弥散度 Dispersivity
弥散系数 Dispersion coefficient
弥散主轴 Principal axes of the dispersion
模拟法 Analog method
摩擦阻力 Friction resistance

## N

能量守恒与转化定律 Equation of energy conservation
Newton 液体 Newtonian fluid
Neumann 条件 Neumann's condition
逆问题 Inverse problem
逆变换 Inverse transformation
粘滞性 Viscosity
浓度 Concentration

## O

Ohm 定律 Ohm's Law

## P

排水 Drainage
排水孔隙度 Drainable porosity
Peclet 数 Peclet number
配线法 Type curve method
匹配点 Match point
平均流速 Average velocity

## Q

起始水力坡度 Threshold hydraulic gradient
潜水 Phreatic water
潜水含水层 Phreatic aquifer or water table aquifer
潜水面 Phreatic surface
潜水面迟后反应 Delayed response of water table
潜水井 Well in a phreatic aquifer
确定性模型 Deterministic model

## R

热传导 Heat transfar by conduction
热传导系数 Thermal conductivity
热动力弥散系数 Coefficient of heat dispersion
热机械弥散系数 Coefficient of mechanical heat dispersion
热交换 Heat exchange
热量 Heat
热量运移 Heat transfer
热弥散度 Dispersity of heat
热容量 Heat capacity
人工补给 Artificial recharge
容重 Specific weight
容水度 Specific water capacity or specific water Storativity
Reynolds 数 Reynolds number
溶质在液相中的分子扩散系数 Coefficient of molecular diffusion of the solute in the considered liquid phase
入渗补给 Accretion
入渗补给强度 Accretion
弱透水层 Aquitard, Semipervious formation
R-C 网络 Resistance-capacitance network or R-C network

## S

三维流 Three dimensional flow
扫描吸湿曲线 Scanning wetting curve
扫描排水曲线 Scanning drying curve
砂槽模型 Sand box model
渗流 Seepage flow
渗流区（域） Flow domain
渗流量 Discharge or seepage discharge
渗流阻力 Resistance to flow
渗出面 Seepage surface
渗透 Seepage
渗透速度 Filtration velocity or specific discharge or Seepage velocity
渗透系数 Coefficient of permeability or hydraulic conductivity
渗透系数张量 Tensor of hydraulic conductivity, Hydraulic conductirity tensor
渗透率 Intrinsic permeability
渗透定律 Seepage law
渗透系数主方向 Principal directions of hydraulic conductivity
剩余降深 Residual drawdown
势函数 Potential function
适定问题 Well posed problem
识别模型 Model identification
升锥 Upconing
实际潜水面 Actual water table
实际水头 True head
实际资料曲线 Data curve
实井 Real well
示踪剂 Tracer
数值法 Numerical method
数值解 Numerical solution
数值模拟 Numerical analog
数学模型 Mathematical model
双重介质 Double-porosity medium
似稳定状态 Quasi-steady state
死端孔隙 Deed-end pores
水的压缩系数 Coefficient of compressibility of water
收敛 Convergance
水动力弥散 Hydrodynamic dispersion
水动力弥散方程 Equation of hydrodynamic dispersion
水动力弥散系数 Coefficient of hydrodynamic dispersion
水分特征曲线 Typical retention curve

水力半径 Hydraulic radius
水力传导系数 Hydraulic conductivity
水力坡度 Hydraulic gradient
水力学 Hydraulics
水均衡 Water balance
水头 Hydraulic head
水位损失 lost head
水头恢复 Recovery of water levels
水位降深 Drawdown
水跃 Scepage face
水流方程 Flow equation
水流折射 Refraction of flow
速端曲线法 Hodograph method

## T

Taylor 级数 Taylor series
透水性 Permeability
Thiem 公式 Thiem equation
Theis 公式 Theis's equation
Theis 曲线 Theis's curve
填砾井 Gravel-packed well
田间持水量 Field capacity
停滞点 Stagnation point
突变界面 Abrupt interface

## W

完整井 Fully penetrating well
位置水头 Potential head
温度 Temperature
稳定的 Stable
稳定流 Steady flow
紊流 Turbulent flow
无限含水层 Infinite aquifer
无限直线井排 Infinite array of wells
无压水流 Unconfined flow
误差函数 Error function

## X

吸着水 Hygroscopic water
下过滤器的井 Screened well
咸水 Salt water
线性方程 Linear equation
线性插值法 Linear interpolation
线性算子 Linear operator
显式方法 Explict method
相对粗糙度 Relative roughness
相对渗透率 Relative permeability
相似 Similarity
虚井 Imaginary well
虚宗量 Bassel 方程 Modified Bassel equation
虚宗量 Bassel 函数 Modified Bassel function

## Y

压力 Pressure
压强 Pressure
压强水头 Preasure head
压缩性 Compressibility
压缩系数 Coefficient of Compressibility
延迟指数 Delayed index
岩块特征长度 Average porous block dimension
岩块贮水率 Specific storativity
隐式方法 Implicit method
应力 Stress
映射法 Method of images
影响半径 Radius of influence
涌水量 Discharge
有限差分法 Finite difference method
有限元法 Finite element method
有效孔隙度 Effective porosity
有效井径 Effective well radius
有效应力 Effective stress
余误差函数 Complementary error function
预报问题 Forcasting problem
源 source
源汇项 Source/sink term
越流 Leakage
越流含水层 Leaky aquifer
越流量 Leakage
越流系数 Coefficient of leakage
越流因素 Leakage factor
运动粘滞系数 Kinematic viscosity

## Z

张量 Tensor
折射定律 Refraction law
窄缝槽模拟 Hele-Shaw analog or parallel-plate analogy
质量守恒定律 Mass conservation law
直线图解法 Straight line method
滞后 Hysteresis

自由面 Free surface
重力水 Gravitational water
重力排水 Gravity drainage
自然对流 Natural convection
自然对数 Naperian logarithm
总水头 Total head
总应力 Total stress
纵向弥散度 Longitudinal dispersivity
纵向弥散系数 Coefficient of the longitudinal dispersion
注水井 Injection well
贮水率 Specific storativity
贮水系数 Storativity or coefficient of storage
贮水性 Storage
状态方程 Equation of state
自流井 Artesian well or flowing well
驻点 Stagnation point