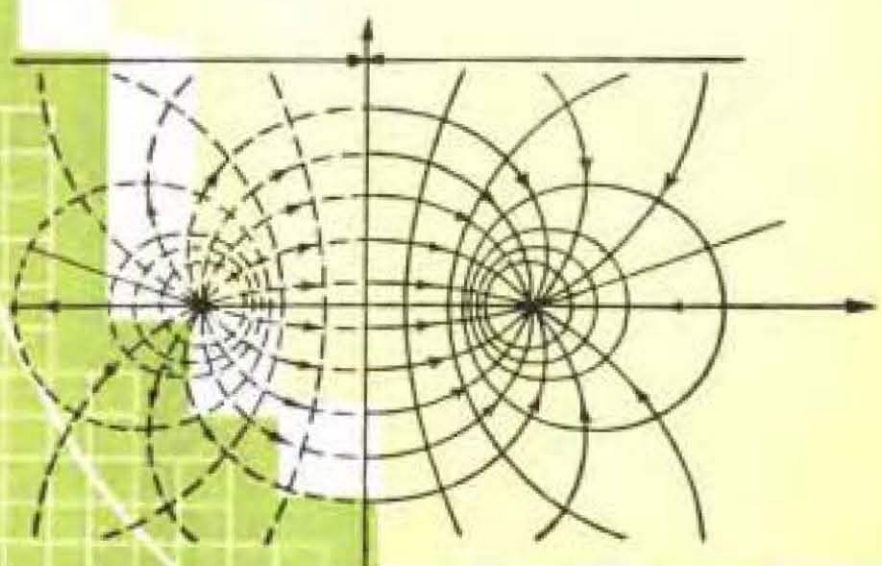
高等学校规划教材

# 地下水动力学

主　编　李义昌
副主编　李宾亭
编　者　赵　林
　　周笑绿



中国矿业大学出版社

1.2
0

责任编辑　陈贵仁
封面设计　张建集

ISBN 7-81040-441-5
P·22　　定价:15.20元

高等学校规划教材

# 地下水动力学

主　编　李义昌
副主编　李宾亭
编　者　赵　林
　　周笑绿

中国矿业大学出版社

## 内容提要

本书阐述地下水运动的原理、定量评价及室内研究方法。包括地下水运动的基本概念、基本定律、数学模型，地下水在含水层中的运动、向井的稳定、非稳定运动和含水层参数识别、裂隙介质中地下水的运动、水动力弥散及研究地下水运动的模拟方法共七章。书中循序渐进地给出了求参计算程序3个，以满足课内外各10个机时的教学要求。内容简练，重点突出，并力求与生产实际结合，同时又尽可能地反映目前国内外出现的新理论与新方法。

本书可作为煤炭、地质、石油、冶金、化工等工学类高等院校有关专业的教材，也可供水文地质科技工作者参考。

责任编辑　陈贵仁
责任校对　杜锦芝

高等学校规划教材
**地下水动力学**
主　编　李义昌
副主编　李宾亭
编　者　赵　林
　　周笑绿

中国矿业大学出版社出版
新华书店经销　中国矿业大学印刷厂印刷
开本 787×1092 毫米 1/16 印张 17.5 字数 449 千字 插页 9
1995年11月第一版　1995年11月第一次印刷
印数：1—1200册

ISBN 7-81040-441-5

P·22　　定价：15.20元

# 前　言

地下水动力学是水文地质专业的一门重要的专业基础理论课程。讲授本课程的目的是使学生掌握地下水运动的基本理论，应用这些理论分析各种水文地质条件下的运动特征，建立相应的数学模型，对水量、水位、水文地质参数进行定量评价，提高解决实际问题及计算机应用能力，为地下水资源评价、矿井水防治打下坚实的理论基础。因此，学生要牢固掌握地下水运动的基本概念、基本定律，稳定流和非稳定流解析解使用条件及其物理意义。

本教材是根据煤炭工业部（原中国统配煤矿总公司）教材编审委员会审定的大纲编写的。编写时既注重基础理论，又考虑煤矿水文地质特点，介绍了地下水在裂隙介质中运动内容，编写了水文地质求参的计算机程序，以便应用。

教材共七章。第一章介绍地下水运动的基本概念、基本定律、基本方程及数学模型，是本书重点之一；第二章介绍地下水在非饱和带及含水层中的运动；第三、四、五章分别详细论述了井流的稳定理论、非稳定理论及水文地质参数识别方法，是本书的又一个重点。第六章介绍了裂隙介质中地下水的运动及水动力弥散问题；第七章是地下水运动的模拟研究。

绪论，第一章第二、三、四、五节，第五章第三节，第六章第一节由李义昌执笔；第一章第六节，第二章第一节，第四章由李宾亭执笔；第二章第二、三节，第三章由周笑绿执笔；第一章第一节，第五章第一、二、四节，第六章第二节，第七章由赵林执笔。最后由李义昌统一审查修改定稿，并编写索引和符号说明。

对所有为本书审订、修改、出版付出了辛勤劳动的同志，对煤炭工业部教材编审委员会，编者表示衷心谢意。由于作者水平所限，书中难免有误和不当之处，恳请读者批评指正。

编者

一九九三年六月

# 目　录


**绪论**…… (1)
　第一节　地下水动力学研究的内容和方法…… (1)
　第二节　地下水动力学的发展简史…… (2)
**第一章　地下水运动的理论基础**…… (5)
　第一节　基本概念…… (5)
　第二节　地下水运动的基本定律 …… (15)
　第三节　岩层透水特征 …… (21)
　第四节　流网及其应用 …… (28)
　第五节　地下水的均衡 …… (35)
　第六节　描述地下水运动的数学模型及其解法 …… (39)
**第二章　地下水在含水介质中的运动** …… (52)
　第一节　非饱和带中的地下水运动 …… (52)
　第二节　潜水含水层中的地下水运动 …… (59)
　第三节　承压含水层中地下水的运动 …… (67)
**第三章　地下水向井(孔)的稳定运动** …… (74)
　第一节　地下水向单井的稳定运动 …… (74)
　第二节　地下水向干扰井群及边界附近井的稳定运动 …… (85)
　第三节　地下水向不完整井的稳定运动 …… (94)
**第四章　地下水向井(孔)的非稳定运动**…… (103)
　第一节　承压含水层中单井的非稳定运动…… (103)
　第二节　越流含水层中单井的非稳定运动…… (121)
　第三节　潜水含水层中单井的非稳定运动…… (127)
　第四节　地下水向干扰井群的非稳定运动…… (138)
　第五节　地下水向不完整井的非稳定运动…… (139)
**第五章　含水层参数的识别**…… (144)
　第一节　逆问题的概述…… (144)
　第二节　根据抽水试验确定含水层参数…… (147)
　第三节　根据水位恢复试验确定含水层参数…… (196)
　第四节　根据动态观测资料确定含水层参数…… (201)
**第六章　地下水运动的两个专门问题**…… (205)
　第一节　地下水在裂隙介质中的运动…… (205)

第二节　水动力弥散问题……（219）
第七章　研究地下水运动的模拟方法……（228）
第一节　导论……（228）
第二节　渗流槽模拟……（231）
第三节　窄缝槽模拟……（233）
第四节　电模拟……（236）
附录　Ⅰ　求证无越流补给承压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题
……（243）
Ⅱ　求证不考虑弱透水层本身弹性释放时，存在越流补给情况下，
半承压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题……（246）
Ⅲ　求证无压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题……（251）
索引……（257）
主要参考文献……（263）

# 绪　论

## 第一节　地下水动力学研究的内容和方法

水文地质学是研究地下水的科学，它研究地下水的贮存、分布与运动规律，地下水动力学则是研究地下水运动规律的科学。因此，地下水动力学是水文地质学的重要组成部分，是对地下水进行定量评价、合理开发利用、调蓄与管理以及兴利防害的理论基础。由于地下水的运动发生在岩石中，而地下水本身又是自然界整个水循环的组成部分，因此，地下水的运动受到各种复杂的自然因素和人为因素的影响。地下水动力学是用力学方法研究地下水在孔隙岩土、裂隙岩石和裂隙-岩溶岩石中，在自然因素或人为因素影响下的运动规律的科学。地下水动力学又是一门综合性的实用科学，广泛地为国民经济服务。如城市和工矿企业供水、矿床开采排水疏干、农田灌溉、工程建筑基坑排水、土壤疏干改良和水工建筑区的渗漏防治等，都必须借助于地下水动力学理论。

随着工农业生产的迅速发展，全球人口急剧增加，对地下水的需求量和开采规模日益扩大，人类的活动对地下水运动的干预日益强烈，从而出现了许多与地下水有关的新课题，地下水动力学研究的领域也随之不断开拓。如地下水资源不合理的过量开采，出现了地下水资源枯竭，导致地下水污染，海水入侵到正在利用的含水层等。当今，含水层正在被当作"贮冷"和"贮热"的地下库。为了解决地下水污染、海水入侵的预测，含水层蓄能等问题，需要研究溶质、热量运移问题；为了合理开发、利用、调控和保护地下水资源，使之处于对人类生活和生产最有利的状态，以获得最大的经济、社会和环境效益，需要研究地下水资源管理问题，这些都要涉及地下水的运动规律及定量评价，都要运用地下水动力学的理论与方法。

研究地下水运动规律的方法有水力学、流体力学及实验方法。流体力学的方法是用严密的数学方法来描述流体平衡与运动的规律性，将实际问题概化为典型的数学模型来求解，追求问题的精确解。水力学的方法则是针对实际问题，借助流体力学的某些结论，结合实验所获得的资料，采用数理分析和试验观测成果相结合的方法，力求能在数量上估计水力现象的主要因素，以求得能满足工程实际要求的近似解。实验方法是在复杂条件下的地下水运动，当理论上的研究不能解决时，往往利用实验模型来模拟自然条件，以确定地下水运动的规律。地下水在天然的水文地质体中的运动规律是用数学方程来描述的，即先对天然的地质、水文地质条件正确地概化抽象为一个物理模型(水文地质模型)，进而作数学描述，构成与之相对应的数学模型。求解地下水运动的数学模型，一般采用解析法、数值法和实验模拟法。解析法能给出空间上任意一点的值，对无限多个点都是精确的，在时间上和空间上都是连续的，因此，它是精确解。但由于现有的数学工具只能求解比较简单的数学模型，对复杂的地质、水文地质条件进行简化，作一系列的假设，从而不可避免地带来误差，因此，对于一些复杂条件下的地下水流问题，如含水层边界形状不规则、多种边界同时存在、含水层厚度变化

大、非均质和各向异性等很难找到它的解析解。目前，解析法主要有：分离变量法、积分变换法(Laplac 变换、Hankel 变换、Fourier 变换)、保角映射法、速端曲线法、Green 函数法等。数值法是用离散方法对地下水流和数学模型求得一个数值解，它是一种近拟的解，是求解大型地下水流问题的主要方法，一般需借助于电子计算机，其优点是适用性强，对各种复杂的水文地质条件无须作过多的简化，从而可减少因简化条件带来的误差，有时比解析法还接近实际，实际上，它对任何复杂的地下水流问题都能给出足够精度的解。数值法常用的方法有有限差分法和有限单元法。实验模拟法是对于复杂的地下水流问题难于得到数学模型的解时，在实验室根据相似性原理，用模拟实验的方法求得其解，若实验室人工制作的模型或模拟装置能如实地反映自然的水文地质条件时，一般能得到满意的结果，它的最大缺点是通用性差，每个模型或模拟装置只能代表一个具体的地下水流问题，所以，往往由于设备复杂、测量技术困难或不便等原因而受到很大的限制。

## 第二节　地下水动力学的发展简史

人类开发利用地下水已有几千年的历史。我国发现的最古老的水井是浙江余姚河姆渡井，距今约 5700 年。尧时击壤歌"日出而作，日入而息，掘井而饮"说明当时已有掘井的知识。2000 年以前春秋时代"陇中少盐，惟天水一井可煮为盐"、"用火井之火，煮盐井之盐"，当时就利用盐井取卤水，同时利用气井煮盐，说明我们的祖先劳动人民的打井技术及对地下水的认识已达到相当高的水平。明代的《农政全书》中，徐光启写道："井与江河地脉贯通，其水浅深，尺度必等。"实际上提出了地下水渗入起源学说的雏形。

旧的圣经中已提到有甚多地下水，如水井、喷泉。Tolman 曾指出公元前 800 年在波斯及埃及就有地下水道存在。古波斯时期在德黑兰附近修建了规模宏大的坎儿井，最大深度距地表约 300m、长达 26km。在长期利用井、泉作为水源的过程中，人们提出了有关地下水起源的看法。古希腊哲学家 Homer、Thales 与 Plato 假设，喷泉是内海水经山脉地道引入，经过过滤洁净后喷出地面。Aristole 则认为空气进入山脉冷却凝结为水而输出喷泉。罗马一位建筑家 Vitruvius 认为山脉接受大量雨水，渗入岩石地层和基地，而形成地下水流，即为今日的渗透原理。法国陶器工人与哲学家 B. Paliss(1509～1589)重申了渗透理论，解释了井泉和河水的关系，并指出井、泉的水起源于降水。至 17 世纪末叶，对水循环有进一步的认识，P. Perrault (1608～1680)经三年的雨量测定，估算了赛因河排泄盆地的径流量，指出降至盆地的雨量约为河流排量的 6 倍。法国物理学家 E. Mariotte(1620～1684)对巴黎赛因河作过测量，证实了 P. Perrault 的说法，支持了渗透理论。英国天文学家 E. Halle(1656～1742)证明海水蒸发，足于供给所有喷泉河流之需。

18 世纪，地质学的基本理论已建立，对地下水的存在与运动已有基本的认识。19 世纪中叶，随着地下水开发利用规模的扩大，法国打了若干自流井，生产上有了计算井涌水量的要求。法国的水力学家 Henry Darcy 研究了水在沙中的运动，于 1856 年发表论文，提出了水在多孔介质中的渗透定律，即著名的 Darcy 定律。这是研究地下水在多孔介质中的运动规律，对它作定量评价的开始，同时提出了岩石渗透系数的概念，至今仍是地下水运动理论的基础。接着，J. Dupuit(1863)以 Darcy 定律为基础，研究了一维稳定流动和向水井的二维稳定运动，将渗透定律应用到天然含水层中，得出了著名的 Dupuit 微分方程。1904 年，Boussinesq

又提出了潜水非稳定流微分方程。Darcy 定律、Dupuit 及 Boussinesq 微分方程为地下水动力学奠定了理论基础。以后，德国的 P. Forchheimer、法国的 A. Thiem 等研究了更为复杂的渗流问题。1922 年～1930 年，Н. Н. Павловский(苏联)创立了水工建筑下潜水运动的流体力学理论，提出了研究地下水运动的三种方法：水力学方法、流体力学方法和实验室方法，并运用水电比拟法研究了水工建筑的地下水运动。20 世纪 20 年代以前相当长的历史时代里，由于地下水开发利用的规模比较小，开采量比天然补给量相比小得多，井中水位一般很快出现似稳定状态，可以近似地认为地下水不随时间变化，用稳定流理论来描述。

到 20 世纪 20 年代末期，在美国地下水开采规模越来越大，地下水的天然状态不断受到破坏，一些地区地下水位出现持续下降，地下水的运动状态表现为明显的随时间而变化的特征，于是，人们开始注意地下水运动的不稳定性和承压含水层的贮水性质。1928 年美国的 O. E. Meinzer 提出了含水层和水可以压缩并具有弹性，当压力水头降低时，承压含水层能释放出一部分贮存水。1931 年美国的 L. K. Wenzel 等人通过长期抽水试验发现，在宽广的潜水含水层中抽水，是一个由近而远逐渐疏干含水层的过程，并认为它与含水层的给水度有关。上述观点动摇了以侧向补给为特征的稳定流理论。1935 年美国 C. V. Theis 利用 Meinzer、Wenzel 等人的观点及长期抽水试验所获得的实际资料，运用热传导方程，第一次提出了承压完整井非稳定流公式，即著名的 Theis 公式，它的出现使地下水动力学的发展进入了一个新阶段，为非稳定流理论的发展奠定了理论基础。在 Theis 公式出现的 30～40 年内，解非稳定流的解析法得到了很大发展，不仅对 Theis 公式的使用作了各种推广，而且在 50 年代，美国的 C. E. Jacob、M. S. Hantust 提出了有越流补给的半承压含水层中地下水的非稳定运动理论。60 年代初，美国的 W. C. Walton 通过试验发现潜水含水层水位下降历时曲线有明显的三个不同区段。1966 年，英国的 N. S. Boulton 在 Walton 研究成果的基础上，提出了潜水迟后疏干的非稳定流微分方程式，并求出其解。70 年代初，美国的 S. P. Neuman 从实际的三维流出发，导出了有迟后效应的潜水非稳定井流公式。与此同时，随着基岩地区裂隙水及石油天然气的大量开发利用，人们对裂隙水的运动规律展开了大量的研究工作，1960 年 Т. И. Баренблатт 提出了孔隙-裂隙岩层中渗流的"双重孔隙度介质"模型，为裂隙水运动研究奠定了理论基础。70 年代，T. D. Streltsova 等人应用双重介质模型于承压和无压含水层中井流的解算。目前，这一理论已成为裂隙水动力学计算的重要理论之一。1966 年，Е. С. Рамм 等人提出了裂隙网络中地下水运动方程表达式。淡-盐水界面的问题，溶质在地下水中运移问题，两种或多种流体(水、油、气)同时存在的运动规律问题，非饱和带中水分运移问题的研究都在不断地发展。但当把解析法应用于大范围的含水层系统时，其局限性马上就暴露出来了，因为实际的水文地质条件远较解析法所依据的假设条件(含水层是均质各向同性的，形状是规则的)要复杂得多。

为了解决随着地下水开采规模进一步扩大而出现的问题，必须对实际含水层系统进行研究。在 50～60 年代前期，许多研究人员转向以电网络模拟为代表的模拟技术，到 60 年代初，它已成为解决大范围含水层系统的有力工具。60 年代中期又出现了与计算机结合在一起的混合机，依靠这些模拟计算机，以有限差分理论为基础，求得地下水流的近似解。

60 年代后期，随着电子计算机的广泛使用，数值模拟在地下水计算中得到了应用，同电网络模拟相比，它有许多优越性，比电网络模拟有更大的通用性，更容易处理潜水流的问题。因此，目前数值模拟已基本上代替了电网络模拟。数值法不仅可以有效的解决地下水流问

题，还能解决水质和污染物在地下水中运移的问题、淡-盐水分界面移运问题、地下水的最优管理问题等。总之，近 20～30 年来，随着计算机和计算技术的发展，人们在解决地下水问题的能力上有了突破性的进展。

100 多年来，地下水动力学虽然得到了很大的发展。但是，这门学科还远不能满足生产发展的需要，一方面由于地下水流本身的复杂性，目前还存在不少薄弱环节，没有很好的解决；另一方面随着人类活动对地下水的影响程度的加强，出现了许多新的课题需要研究解决，不少理论问题还需进一步探索和完善，如地下水在裂隙介质、岩溶介质中运动规律问题，非饱和带水、盐运动理论问题，水中溶质运移理论问题，热量在地下水中运移问题、地下水的合理开发、利用、调蓄与最优管理问题，深层热卤水运动规律问题等，都需要进一步研究。

# 第一章　地下水运动的理论基础

## 第一节　基本概念

### 一、地下水与含水介质

地下水是指存在并运动于地表以下的岩土空隙中的水。一种物质存在于另一种物质内部时，后者就是前者的介质；某些波状运动（如声波、光波等）借以传播的物质（空气）叫做这些波状运动的介质，物理学中称为载体。地下水存在并运动于空隙岩土中，具有空隙的岩土地下水动力学中称为含水介质。根据岩石空隙的性质及其成因不同，含水介质又可分为孔隙介质、裂隙介质和岩溶介质。孔隙介质也称多孔介质，但广义上说，可以把孔隙介质、裂隙介质和一些空隙分布比较均匀的岩溶介质都称为多孔介质。

多孔介质中可能同时存在固、液、气相。固相称为骨架，气相的空气主要存在于非饱和带中，液相的地下水有多种存在形式，本书主要研究重力水的运动。

由于构成多孔介质的地质体在物质成分、颗粒大小、排列方式及后期改造作用等方面存在较大差异，造成了多孔介质中空隙的几何形状、大小及方向的复杂性，决定了地下水在其中的运动是非常复杂的，给研究地下水运动规律带来了一定困难。为此，我们引进连续介质模型这一概念。

研究表明，表征多孔介质是否连续的物理量是孔隙度（$n$）。如果物理点 $P$ 落在固体骨架上，则 $n=0$；而 $P$ 落在孔隙中时，$n=1$，显然变得不连续了。为了对多孔介质中地下水运动作连续性近似，在此通过孔隙度（$n$）引进表征性体积单元（representative elementary volume，简写为 REV，以后简称为表征性体元）。

若在多孔介质中，以 $P$ 点（称为数学点）为中心，取不同大小的体积 $\Delta V^{(i)}$，于是就有对应不同大小的孔隙度 $n^{(i)}$，即

$$n(i)=\frac{\Delta V_v^{(i)}}{\Delta V(i)} \qquad (i=1,2,3,\cdots\cdots) \qquad (1\text{-}1)$$

式中　$\Delta V_v^{(i)}$——为体积 $\Delta V^{(i)}$ 中的空隙体积。

当逐渐增大体积 $\Delta V^{(i)}$ 时，即 $\Delta V^{(1)}<\Delta V^{(2)}<\Delta V^{(3)}<\cdots\cdots$，得到相应的 $n^{(i)}$ 值，即 $n^{(1)}, n^{(2)}, \cdots\cdots$，其两者之间的关系见图 1-1。

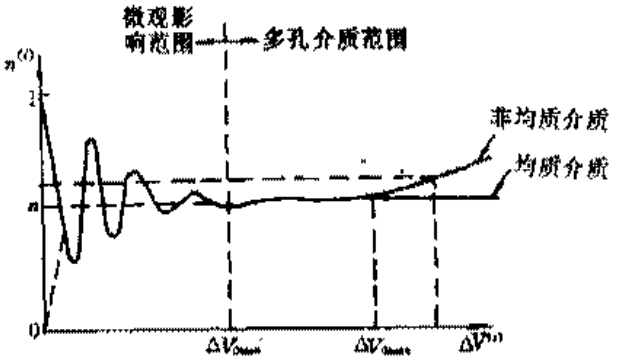



图 1-1　孔隙度与表征性体元概念示意图

（据 J. Bear）

从图 1-1 中可以看到，在 $\Delta V^{(i)}$ 由小到大取值过程中，则开始时孔隙度的值波动很大，随后波动变小，当 $\Delta V^{(i)}$ 取到某一值时

($\Delta V_{0\min}$)，$n$ 为某一定值，当 $\Delta V^{(i)}$ 继续取值到 $\Delta V_{0\max}$ 时，$n$ 始终稳定在这个值，变化不大；当 $\Delta V^{(i)}$ 在超过 $\Delta V_{0\max}$ 以外取值时，因介质的非均一性，出现 $n$ 值偏离。当 $P$ 点位于某个空隙中心，且 $\Delta V^{(i)}$ 小于空隙体积，这时 $n=1$，而当 $P$ 点取在某个固体颗粒的中心，且 $\Delta V^{(i)}$ 取得足够小时，则 $n=0$。无论是以 $n=1$，还是以 $n=0$ 开始，都反映出上述变化规律。为此，我们将 $n^{(i)}$ 值趋于稳定时对应的体积 $\Delta V_0$($\Delta V_{0\min}<\Delta V_0<\Delta V_{0\max}$)称为表征性体元(REV)。

有了表征性体元的概念，我们借助于它再来定义任意点 $P$ 的空隙度 $n$，即

$$n(P)=\lim_{\Delta V\to\Delta V_0}\frac{\Delta V_V^{(i)}(P)}{\Delta V^{(i)}(P)}=\frac{\Delta V_{V_0}}{\Delta V_0} \tag{1-2}$$

式中 $\Delta V_0$——表征性体元的体积；

$\Delta V_{V_0}$——$\Delta V_0$ 中的空隙体积。

假设 $\Delta V_0$ 及 $\Delta V_{V_0}$ 在 $P$ 点附近的变化是光滑的，于是

$$n(P)=\lim_{P'\to P}n(P')$$

这意味着在含水介质内 $n$ 是 $P$ 点位置的连续函数。这样，通过空隙度的定义，把含水多孔介质中微观变化复杂的空隙平均化为处处有空隙度 $n(P)$ 的连续介质，实际的多孔介质就被一种假想的连续介质所代替，称这种假想的介质为连续介质模型。

**二、地下水与多孔介质的压缩性及压缩系数**

地下水和多孔介质在不同条件下物理性质是不同的。为了更好地理解地下水在多孔介质中的运动规律，首先我们需要知道流体的密度 $\rho$ 和孔隙度 $n$ 随压力 $P$ 的变化情况，为此根据流体在不同条件下的物理性质导出一个状态方程。

从内压大于大气压的饱水层中取水时，将引起水和多孔介质弹性变形，可用虎克定律表示

$$\frac{\mathrm{d}V_w}{V_w}=-\beta\mathrm{d}p \tag{1-3}$$

$$\frac{\mathrm{d}V_r}{V_r}=-\alpha\mathrm{d}\sigma \tag{1-4}$$

式中 $V_r$——介质空隙加骨架的体积；

$V_w$——$V_r$ 中水的体积；

$P$——水所承受的压强；

$\sigma$——介质骨架所受的压强；

$\beta$——水的弹性压缩系数；

$\alpha$——介质的压缩系数；

'—'——表示压力与体积的变化方向相反。

因为 $\rho\cdot V_w=$常数(质量守恒)，取其全微分：$\rho\mathrm{d}V_w+V_w\mathrm{d}\rho=0$，所以有 $\frac{\mathrm{d}V_w}{V_w}=-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}$，将其代入式(1-3)得水的状态方程为：

$$\mathrm{d}\rho=\rho\beta\mathrm{d}P\approx\rho\beta\gamma\mathrm{d}h \tag{1-5}$$

式中 $\gamma$——水的容重；

$h$——水头；

$\rho$——水的密度。

式(1-5)表明水的密度的变化与原有水的密度和水头变化之积成正比。

又因为介质变形主要是垂向变形，即在垂直方向上的长度 $\Delta z$ 有变化，颗粒体积不变，所以，$V_s-V_sn=$常数，取全微分得

$$dV_s - ndV_s - V_s dn = 0$$

或

$$\frac{dV_s}{V_s} = \frac{d(\Delta z)}{\Delta z} = \frac{dn}{1-n}$$

将上式代入式(1-4)，同时注意 $\sigma+P=c$(常数)，所以 $d\sigma=-dP$，故结果得介质的状态方程为

$$dn = (1-n)\alpha dP \approx (1-n)\alpha\gamma dh \tag{1-6}$$

$$d\Delta z = \Delta z\alpha dP \approx \Delta z\alpha\gamma dh \tag{1-7}$$

式(1-6)、(1-7)表示多孔介质孔隙度的变化与水头的变化和原有孔隙度有关。

以上状态方程表明了水和介质的压缩变形规律，也说明在天然状态下，处在一定深度的多孔介质受到一定上覆岩层荷重的压力。当这种压力发生变化时，水和介质就会发生压缩变形，这便是地下水和多孔介质的压缩性。

### 三、含水层的给水度、贮水率与贮水系数

1、给水度

对潜水含水层而言，当潜水面下降一个单位时，单位面积柱体含水层水位波动带上所排出的重力水的体积称给水度，用 $\mu$ 表示，$\mu$ 表示重力排水能力(图 1-2a)，它的值一般为 0.05

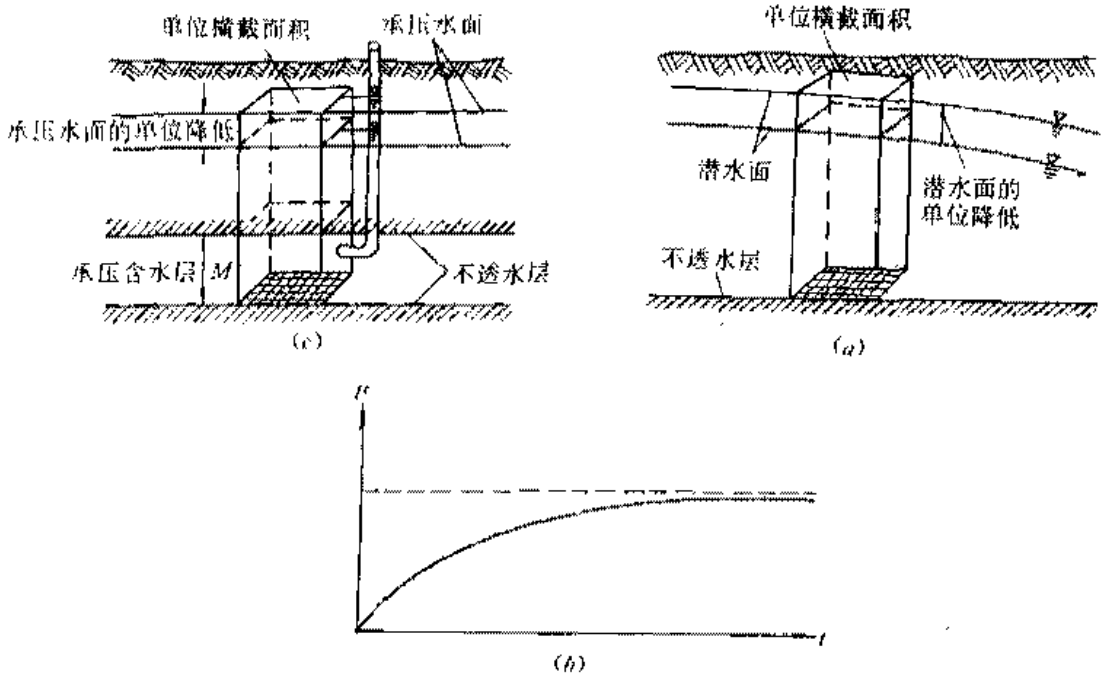



图 1-2　含水层贮水性示意图

a—潜水含水层；b—给水度随时间变化；c—承压含水层

(据 J. Bear)

~0.25。研究表明，给水度 $\mu$ 值不仅与水位波动带的岩性有关，而且与疏干时间的长短有关。当含水层水位下降很快时，由于饱和带中水分的运动迟后于水位下降速度，因此被疏干

部分所含的水不是随着地下水位下降同时排出，而是迟后一段时间，即在较短时间内，土层中释放出的重力水的水量小于该土层全部疏干后释放的水量。因而，随着排水时间长短不同，测得的 $\mu$ 值也不一样，给水度变为时间的函数。排水时间越长，给水度越大，最后趋于一个固定值(图 1-2b)。教科书上往往所给出的值是重力排水结束时的给水度值。实际工作中受时间的限制，测得的给水度值一般小于书本上所给的值。

2. 贮水率及贮水系数

式(1-6)、(1-7)展示了垂直方向厚度变化或孔隙度变化与水头变化之间的关系。现进一步讨论含水层的释水特征。从含水层中取体积为 $1m^3$ 的单元体，考察当水头下降 1m 时单元体释放的水量。此时介质有效应力增加了 $\gamma\Delta H=\gamma$，由介质压缩的虎克定律式(1-4)可得

$$-dV_c = \alpha V_c d\sigma = \alpha \cdot 1 \cdot \gamma = \alpha\gamma$$

负号表示体积减小。同时水的压强改变了 $-\gamma\Delta H=-\gamma$，由水的体积压缩的虎克定律(1-3)便有

$$dV_w = -\beta V_w dp = -\beta n(-\gamma) = \beta n\gamma$$

正号表示水体积的膨胀。二者之和为

$$-dV_c + dV_w = \alpha\gamma + n\beta\gamma = \gamma(\alpha + n\beta)$$

令

$$\mu_s = \gamma(\alpha + n\beta) = \rho g(\alpha + n\beta) \tag{1-8}$$

式中 $\mu_s$ 称为贮水率或释水率，其量纲为 $[L^{-1}]$。它表示当水头变化一个单位时，从单位体积含水层中因骨架压缩和水体膨胀而释放出水的体积。

当含水层水头上升时，则发生相反的过程，会贮存部分地下水，所以有人称这部分水量为弹性贮量。很显然，弹性贮存和弹性释放是不同条件下一个问题的两个方面。严格地讲，潜水含水层也具类似性质，但是这个量与由给水度所决定的释水量相比要小得多，因而一般被忽略。

在实际含水层中若平均厚度用 $M$ 表示，则 $\mu^* = \mu_s M$ 称为贮水系数，它的物理意义表示当水头变化一个单位时，从单位底面积、高为 $M$ 的柱体含水层中因水体膨胀和骨架压缩而释放的水体积(图 1-2c)，无量纲，其值一般在 $10^{-5}\sim10^{-3}$ 之间。

## 四、渗流与渗透速度

1. 渗流

多孔介质中固体表面的多样性和复杂性，使地下水的运动途径变得极不规则(图1-3a)，

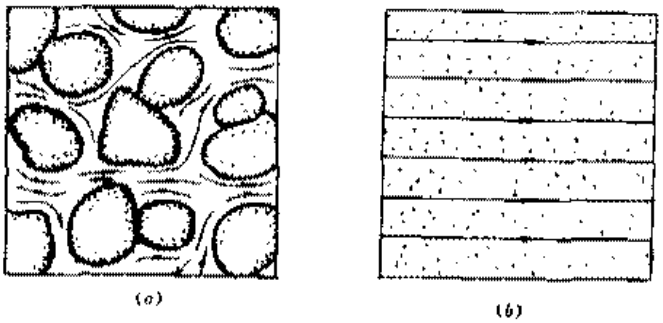



图 1-3 多孔介质中的渗透

a—实际渗透；b—假想渗流

给研究地下水的运动规律造成很大的困难。人们不可能也没有必要去研究其中单个地下水质点的运动状况，而研究具有平均性质的渗透规律，我们假想一种水流充满整个含水层所占的空间(包括空隙和颗粒)，而这种假想水流同时具备以下特点：

(1)它通过任一断面的流量与真实水流通过该断面的流量相等；

(2)在某一断面上各点的压力或水头等于与真实水流在该断面上相同点的压力或水头；

(3)它在任一含水介质体积内所受到的阻力与真实水流在该体积内所受的阻力相等。

具有这样性质的假想水流称为渗流。渗流所占据的空间区域称为渗流区或渗流场。显然通过上述定义就把整个含水空间看成都是充满水的连续流场(图 1-3*b*)。这样做既可避开研究个别空隙中地下水质点运动规律的困难，又能利用水力学和流体力学中成熟的方法来研究地下水运动规律。同时，渗流的流量、压力、阻力等和真实水流相等，不致于造成研究结果的失真。

2. *渗透速度*

渗流充满整个岩石断面，垂直于渗流方向的多孔介质断面叫过水断面。显然，过水断面包括骨架和空隙面积，它的形状随着渗流流动的曲直而发生变化，当渗流平行流动时为平面，弯曲时则为曲面。渗透速度则为过水断面上的平均流速，记为 v，则有

$$v = \frac{Q}{A} \tag{1-9}$$

式中 v——渗流速度，量纲为$[LT^{-1}]$；

$A$——过水断面积，量纲为$[L^2]$；

$Q$——渗流量，即单位时间内通过过水断面 $A$ 的水体积，量纲为$[L^3T^{-1}]$。

渗透速度也是一个假想速度，它只代表过水断面上的平均速度。在《水文地质学基础》中，已经知道渗透速度 v 与实际平均流速 $\bar{u}$ 之间的关系为

$$v = n\bar{u} \tag{1-10}$$

研究中，我们往往想知道渗流场中某一点 $P$ 的渗透速度，因此仅有上述定义渗透速度是不够的。在引入表征体元后，可这样定义渗透速度

$$v = \frac{1}{\Delta V_0}\int_{(\Delta V_{v_0})} u\,dV_v \tag{1-11}$$

式中 $\Delta V_0$——REV 的体积；

$(\Delta V_{v_0})$——REV 中的空隙体积；

$u$——质点的速度矢量。

由于实际流动是在 $\Delta V_0$ 中的空隙体积 $\Delta V_{v_0}$ 中，则有实际平均流速 $\bar{u}$ 为：

$$\bar{u} = \frac{1}{(\Delta V_{v_0})}\int_{(\Delta V_{v_0})} u\,dV_v \tag{1-12}$$

故

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{\Delta V_0}\int_{(\Delta V_{v_0})} u\,dV_v \\ &= \frac{\Delta V_{v_0}}{\Delta V_0 \cdot \Delta V_{v_0}}\int_{(\Delta V_{v_0})} u\,dV_v \\ &= n \cdot \frac{1}{\Delta V_{v_0}}\int_{(\Delta V_{v_0})} u\,dV_v \end{aligned}$$

$= n\bar{u}$

这样，从理论上说明了 $u$、$\bar{u}$ 及 $v$ 之间的关系。其形象表示见图 1-4。

## 五、压强与水头及 Bernoulli 方程

### 1. 压强

由水力学知识可知，压强为单位截面积液体上所受的压力，即

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta A} \tag{1-13}$$

式中 $P$——压强；

$\Delta A$——受力截面积；

$\Delta P$——作用于 $\Delta A$ 上的力。

对于静止液体来说，压强随着深度呈线性规律变化。任意一点的压强($P$)都等于液体表面压强($P_0$)与从该点到液体自由表面的单位面积上的液柱重量($h\gamma$)之和。即

$$P = P_0 + \gamma h \tag{1-14}$$

压强根据计算的基准不同又分为：

绝对压强：以完全真空为零算起，这种压强值称为绝对压强，常用 $P'$ 表示。

相对压强：以当地大气压 $P_a$ 为基准算起，称为相对压强 $P$。

二者之间关系见图 1-5。相对压强可正可负。若某点的绝对压强大于大气压时，则相对压强为正，如图中 $A$ 点；反之则为负，如图中 $B$ 点，称之为负压。包气带中的地下水的压强常为负压。工程上称负压强为“真空”。

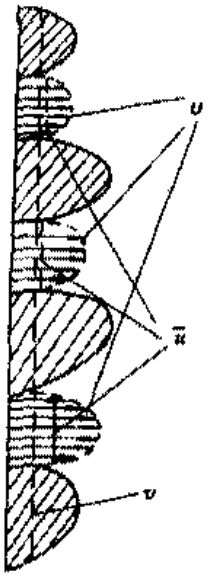



图 1-4 不同定义下的速度关系示意图
$u$—空隙质点流速；
$\bar{u}$—空隙实际平均流速；
$v$—渗透速度

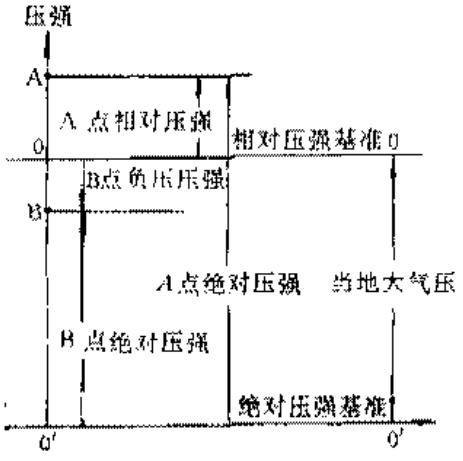



图 1-5 压强表示法

由于地下水的自由面上的压强为大气压强 $P_a$，因此，在地下水计算中，常以大气压强作为基准计算相对压强，则有

$$P = P' - P_a = \gamma h \tag{1-15}$$

### 2. 地下水水头

式(1-15)可写成

$$h_a = \frac{P}{\gamma} \tag{1-16}$$

它表示地下水中任一点(图 1-6 中的 $A$ 点)上压强的液柱高度，称为压强水头或测压高度。液柱高度 $h_a$ 实际上也反映了压强的大小，因此，压强的大小可用水柱高度表示。一个标准大气压相当于 10.33m 水柱高度。$A$ 点到基准面的高度 $Z$ 称为位置水头或位置高度。二者之和为

$$H_a = h_a + Z \tag{1-17}$$

称 $H_a$ 为测压水头。位置水头 $Z$ 表示单位重量液体从某一基准面算起所具有的位置势能。压强水头 $\frac{P}{\gamma}$ 表示单位重量液体从一个大气压起所具有的压强势能(简称压能)。

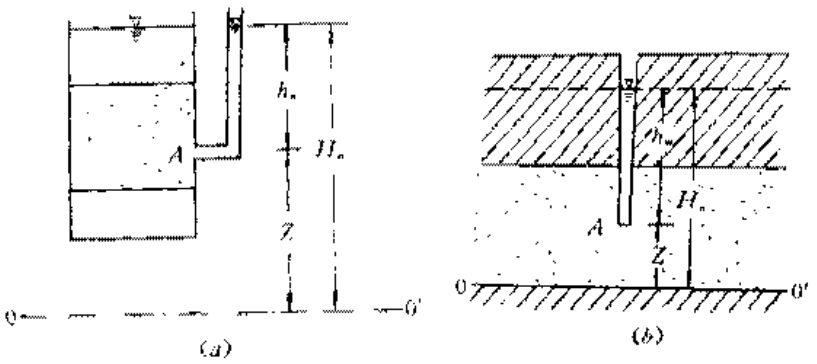



图 1-6　测压高度和测压水头

对于实际的地下水来说，由于它在运动而且有渗透速度，会产生一定的水头高度，用$\frac{v^2}{2g}$表示，称它为流速水头，代表单位重量液体所具有的动能。于是有

$$H = Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \tag{1-18}$$

称 $H$ 为总水头。然而，地下水的渗透流速 $v$ 值一般很小，相对于重力加速度 $g$ 小得多，因而流速水头$\frac{v^2}{2g}$可以忽略不计。在地下水动力学中，一般认为地下水的总水头在数值上可用测压水头代替。即

$$H = H_n = Z + \frac{P}{\gamma}$$

简称为水头，常用 $H$ 表示。

3. 伯努里(Bernoulli)方程

由物理学可知，对于绝对不可压缩的、没有粘滞性的理想液体的稳定运动，沿同一微小流束* 上的各过水断面间有下列关系

$$Z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = 常数 \tag{1-19}$$

这便是理想流体的伯努里方程。它表征了液体的运动规律。由于理想流体运动过程中无能量消耗，位于同一微小流束上所有各点的单位总机械能是相等的，因此，各断面上的总水头相等。

实际地下水运动要受到介质骨架表面的摩擦阻力，消耗一部分机械能，主要表现在水头的减小，称它为水头损失，用 $h_w$ 表示。因此，液体沿流向上的总水头不相等，总水头线永远是一条下降的曲线(图 1-7)，因而 Bernoulli 方程又可写为

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + h_w \tag{1-20}$$

式中　$h_w$——液体从断面 1 运动到断面 2 克服阻力而损失的能量。

**六、等水头面和水力坡度**

地下水不是理想流体，在运动过程中能量不断消耗，反映在水头沿流程不断减小，因而在渗流场中各点的水头并不都是相同的，将渗流场内水头值相同的各点连成一个面，称为等

* 在充满液体的空间中，取一无限小的过水断面面积 $dA$，通过面积上各点引出相应的流线，这些流线族组成一长条形的微小流束。

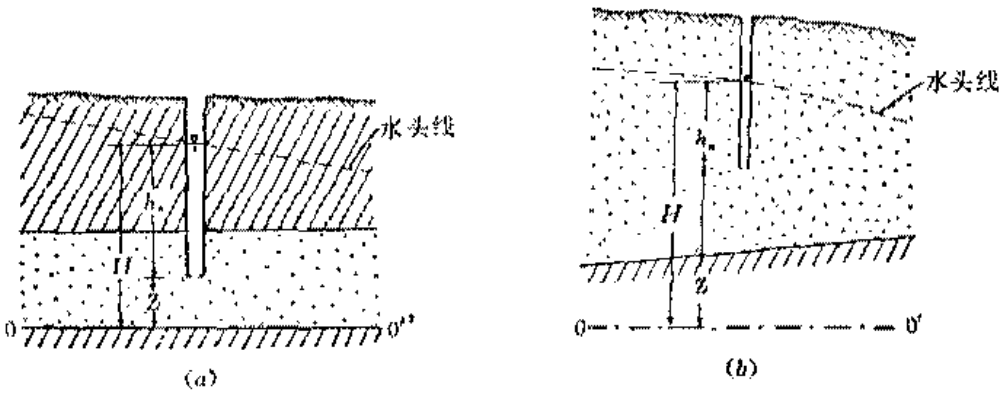



图 1-7　地下水的总水头线

*a*—承压水；　*b*—潜水

水头面。它可以是平面，也可以是曲面。通常选用等水头面与某一平面(如水平面或垂直剖面)的交线，作为等水头线。等水头面(线)在渗流场中是连续的，并且不同数值的等水头面(线)不会相交。

渗流场中各点水头一般不等，可表示为：$H=H(x,y,z,t)$，在地下水动力学中，将大小等于梯度值$\left|\frac{dH}{dn}\right|$，方向沿着等水头面的法线指向水头降低方向的矢量称为水力坡度，用 $J$ 表示，即

$$J=-\frac{dH}{dn}n \tag{1-21}$$

式中 $n$ 为法线方向单位矢量，负号则是水头沿流向总是减小的。矢量 $J$ 在空间直角坐标系中，可以表示为沿 $x,y,z$ 三方向的分量形式

$$J_x=-\frac{dH}{dx},\quad J_y=-\frac{dH}{dy},\quad J_z=-\frac{dH}{dz} \tag{1-22}$$

**七、层流与紊流**

水力学的 Reynolds 实验过程中可以看到这样的现象：当水流速度很小时，玻璃管中的液体流束彼此平行、互不混杂，但当流速达到某一值时管中的流体流束开始混杂。这种现象表明液体运动存在两种流态，即层流与紊流。流体的流束互不混杂的流动称为层流；流体的流束相互混杂而无规则的运动则为紊流。这两种流动状态在地下水运动中表现见图 1-8。

地下水流态的判别常用 $R_e$ 数，通过管流实验得到下列表达式

$$R_e=\frac{uD}{\nu} \tag{1-23}$$

式中　$u$——圆管中液体断面平均流速；

$D$——圆管直径；

$\nu$——水的运动粘滞系数，量纲是$[L^2T^{-1}]$，单位常用 $cm^2/s$ 或 $m^2/s$，它随温度的增加而减小，可用下式计算

$$\nu=\frac{0.01775}{1+0.0337t+0.000221t^2}$$

式中　$t$——水温，℃。

地下水在多孔介质中运动的流态判别则有

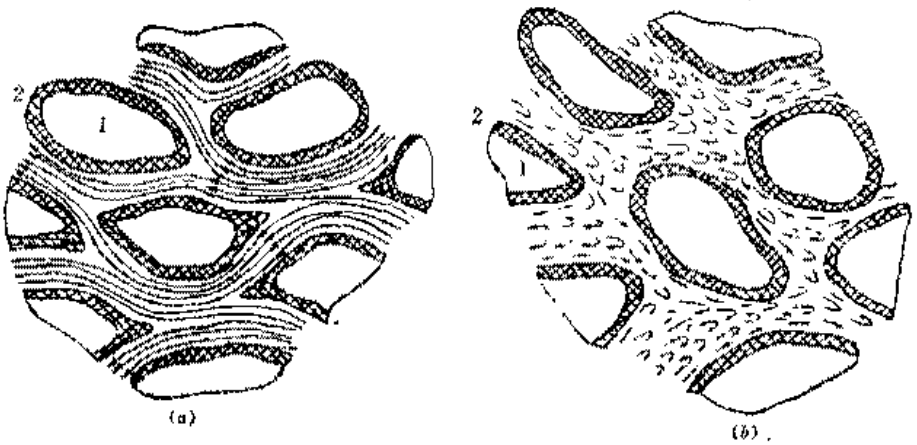



图 1-8　孔隙岩石中地下水的层流与紊流

*a*—层流；*b*—紊流

1—岩石固体颗粒；2—结合水膜；箭头表示水流运动方向

$$R_e = \frac{vd}{\nu}$$

式中　$v$——地下水的渗透速度；

$d$——多孔介质颗粒的平均粒径；

$\nu$——地下水的运动粘滞系数。

当 $R_e < R_{ec}$（临界 $R_e$ 数）时，为层流；$R_e > R_{ec}$ 时，则为紊流。对于地下水，用实验方法求 $R_{ec}$ 较困难，$R_{ec}$ 的范围认识不一。有些作者认为该值为 150～300，但 Н. Н. Павловский 求得该值为 7～9。此外，还有二种常用的判别式：

(1)对于孔隙岩层应用 Н·Н·Павловский 表达式

$$v_c = R_{ec}(0.75n + 0.23)\frac{\nu}{d_{10}} \tag{1-25}$$

式中　$v_c$——临界渗透速度；

$R_{ec}$——临界雷诺数，对于同类结构的岩层，其值相同，一般取 7～9；

$n$——含水层的孔隙度；

$\nu$——地下水的运动粘滞系数；

$d_{10}$——含水层的有效粒径。

(2)对于裂隙岩层，Г·М·Ломизе 提出根据水力坡度判别流动状态，其表达式为

$$J_c = 0.00252\frac{(1 - 0.96\alpha^{0.4})^{1.5}(1 + 6\alpha^{1.5})}{b} \tag{1-26}$$

式中　$b$——裂隙宽度，cm；

$\alpha$——裂隙相对粗糙度，$\alpha = \frac{\Delta}{b}$；

$\Delta$——裂隙绝对粗糙度，cm。

他根据大量的实验，得到了不同的 $b$ 和 $\alpha$ 时的临界水力坡度（表 1-1）。

天然孔隙含水层中地下水流的 $R_e$ 数和裂隙含水层中地下水流的水力坡度，远比临界 $R_e$ 数和临界水力坡度小，因此，天然地下水多处于层流状态。

表 1-1　　临界水力坡度表(据 Г·М·Лемше)

| 临界水力坡度 / 相对粗糙度 $\alpha$ / 裂隙宽度 $b$,cm | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 2.520 | 1.455 | 1.354 | 1.299 | 1.228 | 1.118 |
| 0.2 | 0.315 | 0.182 | 0.169 | 0.161 | 0.153 | 0.139 |
| 0.3 | 0.093 | 0.054 | 0.050 | 0.048 | 0.045 | 0.041 |
| 0.4 | 0.039 | 0.023 | 0.021 | 0.020 | 0.019 | 0.017 |
| 0.5 | 0.020 | 0.012 | 0.011 | 0.010 | 0.010 | 0.009 |

## 八、地下水运动特征的分类

为了便于研究地下水的运动，通常根据它的运动特征进行分类。表征渗透水流的运动特征的物理量称为渗透水流的运动要素，主要有渗流量 $Q$、渗透速度 $v$、压强 $P$、水头 $H$ 等。

首先，根据地下水运动要素与时间的关系，将地下水运动分为稳定运动和非稳定运动。当地下水运动要素不随时间而变化时称为稳定运动，否则称为非稳定运动。

其次，根据地下水运动方向(即渗透流速矢量方向)与空间坐标轴的关系分，有：

1)一维流(单向运动)　地下水的渗透流速只有一个坐标轴方向的分速度，其余坐标轴方向的分速度都为零，也就是说渗透速度仅仅是一个坐标的函数，如河间地块中承压水运动(图 1-9)。

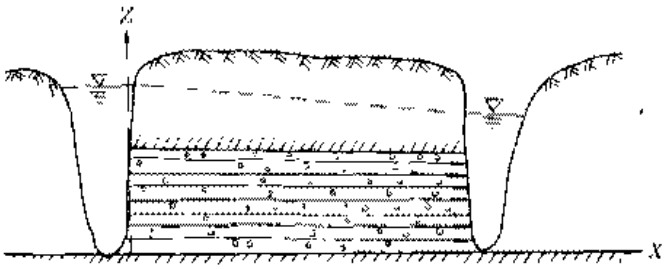



图 1-9　河间地段中地下水一维运动

2)二维流(平面运动)　地下水渗透流速只有两个坐标轴方向的分速度，即渗流速度是两个坐标的函数，此时的地下水流动与某一平面平行。这类运动可以将渗流分成任意一个单独部分，每一部分的渗流特征都是相同的，只要弄清了一个单独部分的渗透规律，就等于了解了它的全貌。所以，可以在垂直水流方向上取单位宽度进行研究(图 1-10)。

3)三维流(空间运动)　地下水在三个坐标轴方向上均有分速度，即它是三个坐标($x$, $y$, $z$)的函数(图 1-11)。

### 思考题

1. 渗流既然是一种假想水流，为什么还要研究它？试比较渗流与真实水流的流量、水头、过水断面、流速大小和水流运动方向之间有何不同？

2. 地下水能从压力小处向压力大处运动吗？为什么？

3. "水力坡度可定义为单位渗流途径上的水头下降值"，这种说法对吗？

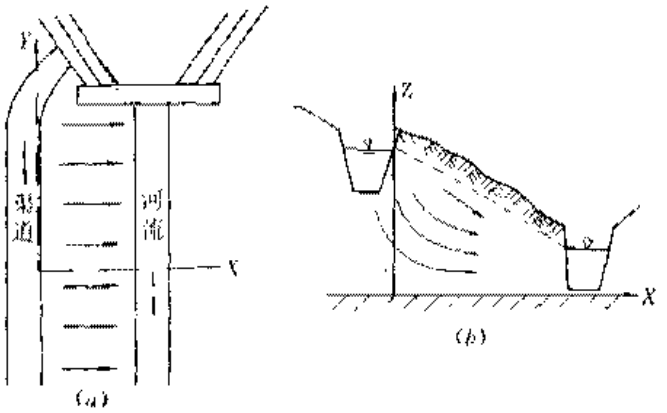



图 1-10　渠道向河流渗漏时的地下水二维运动

*a*—平面图；　*b*—剖面图

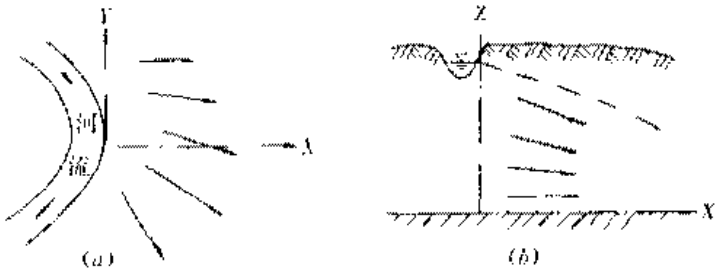



图 1-11　河弯处潜水的三维运动

*a*—平面图；　*b*—剖面图

## 第二节　地下水运动的基本定律

### 一、线性渗透定律——Darcy 定律及其适应范围

从《水文地质学基础》知道，绝大多数情况下，地下水的运动都符合线性渗透定律。这一定律被广泛用来研究渗流，Darcy 通过实验得到如下关系式

$$Q = KA\frac{H_1 - H_2}{l} = KAJ \tag{1-27}$$

$$v = \frac{Q}{A} = KJ \tag{1-28}$$

式中　$Q$——渗透流量；

$v$——渗透速度；

$H_1, H_2$——通过砂样前后 1、2 两点处的水头值；

$l$——砂样沿水流方向的长度；

$A$——实验圆筒的横截面积，或渗流过水断面的面积，包括砂粒和孔隙二部分面积在内；

$K$——渗透系数；

$J$——水力坡度。

式中的 $H$ 是测压水头。通过 1 点处的测压水头，$H_1 = Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}$；通过 2 点处的测压水头，

$H_2=Z_2+\frac{P_2}{\gamma}$。经过长度为 $l$ 的砂柱的水头损失为

$$\Delta H = H_1 - H_2 = (Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}) - (Z_2 + \frac{P_2}{\gamma})$$

当砂柱直立时(图 1-12),$Z_1=l$,$Z_2=0$,则

$$\Delta H = (Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}) - (Z_2 + \frac{P_2}{\gamma}) = l + \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

$$Q = KA(\frac{P_1 - P_2}{\gamma l} + 1) \tag{1-29}$$

当砂柱倾斜时(图 1-13),$Z_1>Z_2$,则

$$\Delta H = H_1 - H_2 = (Z_1 + \frac{P_1}{\gamma}) - (Z_2 + \frac{P_2}{\gamma})$$

$$Q = \frac{KA}{l}(Z_1 - Z_2 + \frac{P_1 - P_2}{\gamma}) \tag{1-30}$$

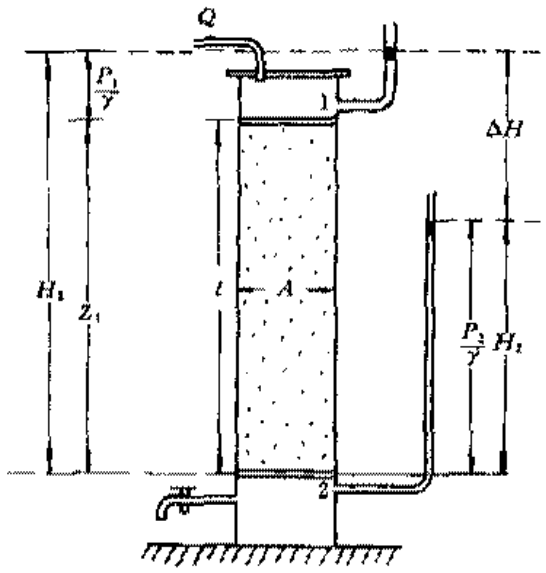



图 1-12 Darcy 的渗透实验装置

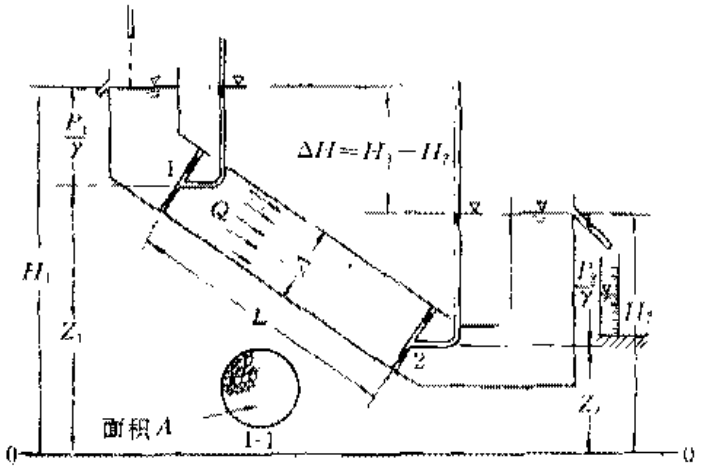



图 1-13 渗透实验的倾斜装置图

(据 J. Bear)

渗流是从高测压水头流向低测压水头,而不是从高压力水头流向低压力水头,即水流朝向压力增大而测压水头减少的方向运动。这种情况有:

$$H_1 > H_2,\ \frac{P_1}{\gamma} < \frac{P_2}{\gamma}$$

当砂柱水平时,$Z_1=Z_2$,则

$$\Delta H = \frac{P_1 - P_2}{\gamma}$$

$$Q = KA\frac{P_1 - P_2}{\gamma l} \tag{1-31}$$

这时渗流是从高压力水头流向低压力水头。

综上所述,水头随流程呈线性规律递减,因而$\frac{H_1-H_2}{l}$不仅表示 1、2 两点所在过水断面

间的平均水力坡度，亦表示其间任一断面的水力坡度，因此，Darcy 定律可写成

$$v = -K\frac{dH}{dl} \tag{1-32}$$

$$Q = -KA\frac{dH}{dl} \tag{1-33}$$

式中 $-\frac{dH}{dl}$——水力坡度。

式(1-32)反映通过任一过水断面的一维流的渗透速度与其在该断面处的水力坡度之间的关系。对于二维流，则有

$$v_x = -K\frac{\partial H}{\partial x};\quad v_y = -K\frac{\partial H}{\partial y} \tag{1-34}$$

$$\mathbf{v} = v_x i + v_y j \tag{1-35}$$

对于三维流，则有

$$v_x = -K\frac{\partial H}{\partial x};\quad v_y = -K\frac{\partial H}{\partial y};\quad v_z = -K\frac{\partial H}{\partial z} \tag{1-36}$$

$$\mathbf{v} = v_x i + v_y j + v_z k \tag{1-37}$$

式中 $v_x$、$v_y$、$v_z$——在直角坐标系中，沿三个坐标轴方向的渗透速度分量；

$i$、$j$、$k$——三个坐标轴上的单位矢量。

式(1-36)给出了渗透速度场与水头场之间的关系。只要知道了水头函数 $H(x,y,z)$，就可以通过该式算出渗流场中任一点的渗透速度矢量 $\mathbf{v}$。

Darcy 定律有一定的适用范围。超过这个范围地下水的运动就不符合 Darcy 定律了。

1. 上限

较早以前，认为 Darcy 定律的适用条件是层流，有时把 Darcy 定律称为层流渗透定律。后来，很多实验证明并不是所有地下水的层流运动都服从 Darcy 定律，即 Darcy 定律的适用范围比层流运动的范围要小。如果用 Reynolds 数表示，则 Darcy 定律适用的上限为

$$R_e = \frac{vd}{\nu} < 1 \sim 10$$

只有当雷诺数小于 1～10 时，地下水的运动才符合 Darcy 定律，而层流的适用上限则为

$$R_e < 150 \sim 300$$

比 Darcy 定律的适用上限要大。绝大多数的天然地下水运动速度不大，其雷诺数不会超过上述范围，因此，仍服从 Darcy 定律。




图 1-14 起始水力坡度
(据 J. Bear)

2. 下限

《水文地质学基础》课程中介绍了粘性土中的渗透规律。对于某些粘性土，由于粘土颗粒周围结合水的存在，必须在较大水力坡度的作用下，才能克服结合水的抗剪强度而运动，即存在一个起始水力坡度 $J_0$(图 1-14)，这就是 Darcy 定律适用的下限。当实际水力坡度小于 $J_0$ 时，几乎不发生流动，可用下式表示：

$$\begin{aligned} &\text{当 } J \leqslant J_0 \text{ 时，} v = 0 \\ &\text{当 } J > J_0 \text{ 时，} v = K(J - J_0) \end{aligned} \tag{1-38}$$

## 二、渗透系数、渗透率与导水系数

渗透系数 $K$，也称水力传导系数，是表征岩石透水性能的指标，是一个很重要的水文地质参数。从 Darcy 公式(1-28)可知，渗透系数 $K$ 是当 $J=1$ 时的渗透速度。因为水力坡度无量纲，所以渗透系数具有渗透速度的量纲，即渗透系数的单位和渗透速度的单位相同，常用 cm/s 或 m/d 表示。

渗透系数不仅取决于岩石的性质(如粒度成分、颗粒排列、充填状况、裂隙性质和发育程度等)，而且和渗透液体的物理性质(如容重、粘滞性等)有关。同一岩层，对于水是一种速度，对于石油又是另一种速度，即在相同的水力坡度下，水的渗透系数要大于石油的渗透系数。即使是水，由于水温和水的矿化度不同，也会引起水的容重和粘滞性的变化，从而渗透系数也随之而变。说明渗透系数的大小不仅与空隙介质本身有关，亦与运动在空隙介质中液体的性质有关，但是对于一般的地下水流来说，当水温、矿化度相差不大时，常常忽略了水的容重及粘滞性的变化，把渗透系数作为表征空隙介质本身透水性能的参数。在研究油田流体的运动时，就不能忽略液体的物理性质变化的影响了。为此提出了渗透率的概念，它只和介质本身的性质有关，而和渗透液体的性质无关，只反映空隙介质本身的渗透性能，即它表示介质能使液体或气体通过介质本身的性质。可以证明渗透率 $k$ 和渗透系数 $K$ 之间有如下关系

$$\frac{K}{\gamma}=\frac{k}{\mu} \tag{1-39}$$

式中 $\gamma$——液体的容重；

$$\gamma=\rho g \tag{1-40}$$

$\rho$——液体的密度；

$g$——重力加速度；

$\mu$——流体的动力粘滞系数，常用单位为帕秒(Pa·s)，量纲为$[ML^{-1}T^{-1}]$，它与运动粘滞系数 $\nu$ 的关系为

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}$$

由式(1-39)可导出渗透率的量纲

$$k=\frac{K\mu}{\rho g}=\frac{[LT^{-1}][ML^{-1}T^{-1}]}{[ML^{-3}][LT^{-2}]}=[L^2]$$

通常采用的单位是 $cm^2$ 或 da(Darcy)。da 定义为：当液体的动力粘滞系数为 0.001 Pa·s，压强差为 101325Pa 的情况下，通过面积为 $1cm^2$，长度为 1cm 岩样的流量为 $1cm^3/s$ 时，岩样的渗透率为 1da。

$$1da=9.8687\times10^{-9}cm^2$$

有时采用 cda($10^{-2}$da)或 mda($10^{-3}$da)作为渗透率的单位。

当同时考虑空隙介质及渗透液体性质时，Darcy 定律有如下形式：

$$v=-\frac{k\rho g}{\mu}\cdot\frac{dH}{dl} \tag{1-41}$$

式中，$k$ 是与空隙介质本身有关的参数；$\frac{\rho g}{\mu}$则是与渗透液体性质有关的参数。显然，渗透速度 $v$ 与水力坡度$\frac{dH}{dl}$仍然是线性的关系。

渗透系数 $K$ 能用来表示岩层的透水性，但它不能单独说明含水层的过水能力。一个 $K$ 值较大的含水层，如果厚度很小，它的过水能力也是有限的，开采价值不大。为此，引出了导

水系数的概念。

研究如图 1-15 所示厚度为 $M$ 的承压含水层中的水流，沿流向取 $x$ 轴。根据 Darcy 定律，有

$$Q = KAJ = KMBJ$$

$$q = Q/B = KMJ = TJ \tag{1-42}$$

$$T = KM \tag{1-43}$$

式中，$T$ 为导水系数，也是一个重要的水文地质参数，量纲是$[L^2T^{-1}]$，单位常用 $m^2/d$。它表示水力坡度等于 1 时，通过整个含水层厚度上的单宽流量。这个概念只适用于二维流，对于三维流，就没有意义了。

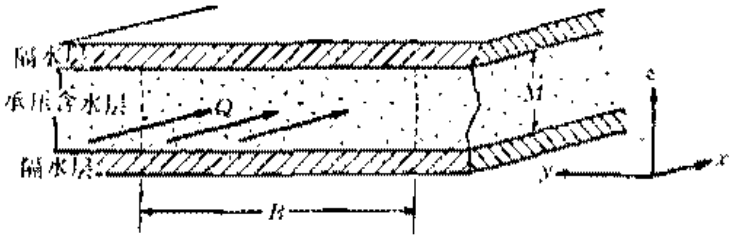



图 1-15　承压含水层中的水流
（据 J. Bear）

## 三、Poisseuille、Irmay、Kozeny-Carman 方程

### 1. Hagen-Poisseuille 方程

推导 Darcy 定律最简单的模型或许是用毛细管按不同的方式排列而成的模型。所有的模型都是以控制稳定流动的 Hagen-Poisseuille 定律为依据的。假设有一根直径为 $d$ 的直圆形毛细管，则 Hagen-Poisseuille 方程为

$$\bar{u} = \frac{d^2\rho g}{32\mu}J \tag{1-44}$$

式中　$\bar{u}$——管中的平均速度。

若把孔隙岩层的空隙介质理想化为由一系列毛细管组成的毛细管模型，其孔隙度保持不变（图 1-16），则有

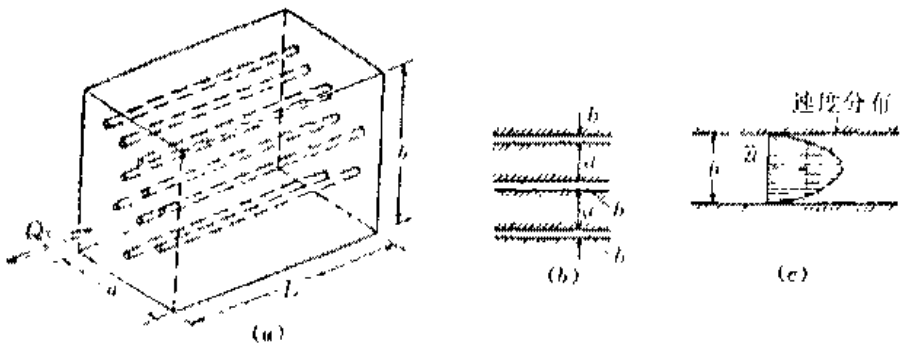



图 1-16　孔隙和裂隙介质的理想化模型
（据 J. Bear）
$a$—毛细管模型；　$b$—毛细隙缝模型；　$c$—速度分布

$$v = n\bar{u} = \frac{nd^2}{32}\frac{\rho g}{\mu}J \tag{1-45}$$

式中 $n$——孔隙岩层的孔隙度。

2. Irmar 方程

地下水在裂隙岩层中的运动，可以采用 Irmay(1955)提出的多孔介质模型来表示，他曾采用毛细隙缝和宽度不变的狭缝来表示裂隙。如果两平行的水平隔板之间隙缝的宽度用 $b$ 表示，则隙缝中的平均速度为

$$\bar{u} = \frac{b^2}{12}\frac{\rho g}{\mu}J \tag{1-46}$$

若将裂隙系统理想化成由一系列等宽的、平直的隙缝所组成，则渗透速度为

$$v = n\bar{u} = \frac{nb^2}{12}\frac{\rho g}{\mu}J \tag{1-47}$$

式中 $n$——裂隙岩层的空隙度(一般用裂隙率表示)。

3. Kozeny-Carman 方程

对于毛细管模型还经常使用水力半径 $R$ 的概念。$R$ 定义为横截面面积与润湿周长之比，对于直径为 $d$ 的直圆管，$R=\frac{d}{4}$；对于其他形状的毛细管横截面来说，可得到更一般的关系式 $R=\frac{d}{a}$($a$ 是取决于毛细管横截面形状的系数)。如果将多孔介质看成是相互连通的管道网格，水力半径 $R$ 可定义为充满流体的管道体积与其润湿表面面积之比，从这个定义可写出水力半径 $R$ 和比表面 $M_s$ 之间的关系式：$R=\frac{n}{M_s}$。这里，$R$ 代表极端复杂的流动通道的等效(或平均)水力半径。上述二式比较可得到

$$d = aR = a\frac{n}{M_s} \tag{1-48}$$

若考虑毛细管系统的水流为充满弯曲管道的水流，需引进弯曲系数，其值在 1.1～1.6 之间。根据实验成果证实，弯曲系数有下关系式

$$a = n^{-\frac{1}{4}} \tag{1-49}$$

根据 Hagen-Poisseuille 方程，由 Kozeny 提出，并且后来经 Carman 修正，得到有名的 Kozeny-Carman 方程：

$$v = \frac{C_0\rho g n^3}{a^2\mu M_s^2}J \tag{1-50}$$

式中 $C_0$——Kozeny 常数。

$$C_0 = \frac{a^2}{32} \tag{1-51}$$

根据模型中管道断面形状的不同，$C_0$ 也略有不同：圆形断面 $C_0=0.5$；正方形断面 $C_0=0.562$；等边三角形断面 $C_0=0.597$；长条形断面 $C_0=0.667$。

将式(1-45)、(1-47)以及(1-50)和式 Darcy 定律式(1-28)进行比较，不难发现渗透速度都是和水力坡度的一次方成正比的，仍为渗透直线定律。渗透系数 $K$ 在 Hagen-Poisseuille 模型中相当于 $\frac{nd^2}{32}\cdot\frac{\rho g}{\mu}$；在 Irman 模型中相当于 $\frac{nb^2}{12}\cdot\frac{\rho g}{\mu}$；在 Kozeny-Carman 模型中相当于 $\frac{C_0 n^3}{a^2 M_s^2}\cdot\frac{\rho g}{\mu}$。前面的因子表示空隙介质本身的性质，它是与岩层的透水性能有关的参数，相当

于渗透率 $k$；后面因子则表示液体的性质。

通过上述三个例子，进一步说明了 Darcy 定律中渗透速度与水力坡度、渗透系数之间，以及渗透系数与岩层空隙性质、液体物理性质之间的关系。

**四、非线性运动方程**

在某些情况下，如水力坡度较大的大孔隙、大裂隙和溶洞地层中的地下水流，Reynolds 数可能出现大于 1～10，此时，地下水运动则不符合直线定律。许多学者研究了 Reynolds 数大时 Darcy 定律不适用的情况，提出了很多非线性运动方程，比较常用的有如下列几种。

1. P. Forchheimer 公式

$$J = av + bv^2 \tag{1-52}$$

或

$$J = av + bv^m \quad 1.6 \leqslant m \leqslant 2 \tag{1-53}$$

式中的 $a$ 和 $b$ 为由实验确定的常数。

2. A. Chezy 公式

当地下水呈完全紊流运动时，地下水的渗透服从水力学上的 A. Chezy 非线性的运动方程：

$$v = K_T J^{\frac{1}{2}} \tag{1-54}$$

比较式(1-52)和式(1-54)，后者是前者 $a=0$ 时的公式。它表明渗透速度与水力坡度的 $\frac{1}{2}$ 次方成正比，$K_T$ 为地下水呈紊流运动时的渗透系数。

3. 斯姆列盖尔公式

地下水从层流到完全紊流之间有一个过渡的流态，即局部紊流或混合流，这时层流与紊流同时并存，1878 年，斯姆列盖尔提出了地下水呈混合流动状态的公式：

$$v = K_c J^{\frac{1}{m}} \tag{1-55}$$

式中 $m$——流态指数(1～2)；

$K_c$——混合流时的渗透系数。

在大孔隙、裂隙或溶洞中的地下水流，大流量泉口附近，地下暗河以及抽水井、排水矿井(坑)附近，都可能出现局部紊流状态。在这些情况下，则需采用非线性运动方程。

**思考题**

1. 在什么情况下，通过砂粒的水流才能从高压力水头流向低压力水头？

2. 在直立的圆筒中，装满了粒径为 0.5mm 的砂子，已知砂柱长度 $l$=120cm，横截面积为 200cm$^2$，孔隙度为 0.36，渗透系数为 20m/d，温度为 10℃的水从圆筒内流过，当进水口与出水口之间的水头差为 120cm$^2$ 时，试求：(1)Darcy 定律能否适用？(2)沿圆筒轴向的水力坡度；(3)总流量 $Q$；(4)渗透速度 $v$；(5)实际平均流速 $\bar{u}$。

3. 为什么说导水系数在三维流条件下是无意义的？

## 第三节　岩层透水特征

**一、岩层透水特征类型**

自然界的岩层，由于成因和形成环境不同，以及成岩后经受各种不同的地质作用，使得岩层的透水性差异很大。通常，按岩层的透水性能强弱，将岩层分为透水层、弱透水层与不透

水层。地下水动力学中，为了研究方便，常用下面二种方法对岩层进行透水性分类。

1. 按岩层透水性与空间坐标关系

根据岩层透水性是否随空间坐标变化，把岩层分为均质的和非均质的两类。如果在渗流场中，所有点都具有相同的渗透系数，称此岩层是均质的；否则，为非均质的。在非均质介质中，渗透系数 $K=K(x,y,z)$ 为坐标的函数。严格地说，自然界中绝对均质的岩层是没有的，均质和非均质只是相对而言。在实际工作中，通常把岩性、含水层类型相同、渗透系数大致相等的岩层视为均质的，根据具体情况，将渗透系数取算术平均或加权平均值。

非均质岩层一般情况下可划分为两种。第一种的透水性是渐变的，如山前洪积扇由山口至平原渗透系数逐渐变小，或某些古河床沉积物由上向下颗粒逐渐变粗，透水性逐渐增强；第二种的透水性是突变的，即在渗流场内存在某些边界，穿越边界渗透系数突变，如在砂质含水层中夹有相对隔水的粘土透镜体。

2. 按岩层透水性和渗流方向的关系

根据某一点渗透系数是否随渗流方向改变，将岩层划分为各向同性和各向异性二类。如果渗流场中某一点的渗透系数与渗流方向无关，即某一点的渗透系数在不同的方向上都相等，称此介质为各向同性，否则是各向异性的。在很多情况下，含水层都是各向异性的，如扁平状（云母片）的细粒沉积物，沉积时长轴常接近水平，沉积后受上覆岩层重量作用，形成了沿层面水平方向的渗透系数常大于垂直层面方向。在基岩区，常常沿断裂方向渗透系数较大。在碳酸盐岩地区，岩溶发育往往具有方向性，沿此方向渗透系数远比其他方向大。

值得注意，上面提到的均质与各向同性都是指的是渗透率（$k$）的属性，不是指的渗透系数（$K$）的属性。但是对于一般的地下水流来说，忽略了水的物理性质对透水性的影响，而把均质与各向同性视为渗透系数（$K$）的属性。此外，不要把均质与非均质的概念和各向同性与各向异性的概念混淆起来。前者是岩层透水性和空间坐标的关系，后者是指岩层透水性和水流方向的关系。均质岩层可以是各向异性的，如玄武岩、黄土等常是均质的，但常具柱状节理，致使垂直方向的渗透系数大于水平方向的渗透系数，因而是各向异性的。如果以 $K_x$、$K_y$ 分别表示渗流场中 $A$ 点和 $B$ 点水平与垂直方向的渗透系数（图 1-17），$K_x<K_y$，因此用椭圆表示，$A$ 点与 $B$ 点两个椭圆形状完全相同，表示同一方向二点具有相同的渗透参数。同样，非均质也有各向同性的，如砂和砂砾石层组成的含水岩组，砂和砂砾石层分别都是各向同性的，两者的透水性有差异，因而是非均质的。

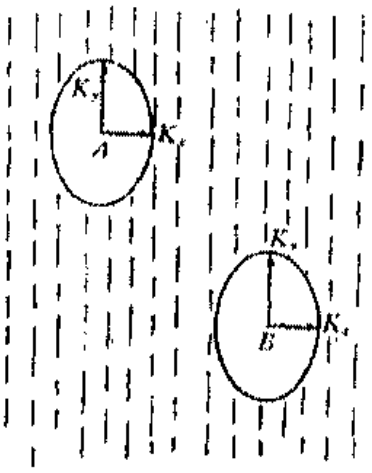


图 1-17　均质各向异性介质渗透系数图

## 二、各向异性与渗透系数张量

在 Darcy 实验的砂粒中，其介质实际上是均质且各向同性，渗透系数是常量。在各向同性介质中，渗透系数和渗流方向无关，此时，渗透系数是一个标量，根据 Darcy 公式：$v=KJ$，当 $K$ 为标量时，$v$ 和 $J$ 的方向应该一致。渗透速度矢量可用 $v_x=-K\frac{\partial H}{\partial x}$；$v_y=-K\frac{\partial H}{\partial y}$；$v_z=-K\frac{\partial H}{\partial z}$ 来表达。即使对于非均质各向同性介质中的三维流来说，这关系式依然成立。

在各向异性介质的情况就不同了，渗透系数 $K$ 和渗流方向有关，$K$ 不再是一个标量了。当 $K$ 不是标量时，根据 Darcy 公式，$v$ 和 $J$ 的方向一般是不一致的。因此，$v$ 与 $J$ 之间的关系也就不能简单地用上述渗透速度矢量公式来表达了。由于渗流方向对三维空间是任意选取的，相互垂直的坐标平面也是任意的，因此，空间上任一点的渗透系数无法简单地用坐标轴上的三个分量来定义，它是二项矢量的乘积，须采用双下标格式，用它的九个分量来表示，即用渗透系数张量来表示，于是，渗透速度相应地表示为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{xy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{xz}\frac{\partial H}{\partial z} \\ v_y &= -K_{yx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{yz}\frac{\partial H}{\partial z} \\ v_z &= -K_{zx}\frac{\partial H}{\partial x} - K_{zy}\frac{\partial H}{\partial y} - K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1-56}$$

从上式中不难看出渗透系数双下标中，前者表示与渗透速度方向一致，后者表示与水力坡度方向一致，说明在各向异性介质中，水力坡度与渗透速度二者方向是不一致的。式(1-56)也可用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H}{\partial y} \\ \dfrac{\partial H}{\partial z} \end{Bmatrix} \tag{1-57}$$

由此可见，九个渗透系数分量决定了三维空间中的渗透系数。在二维空间中则由它的四个分量所决定，通常把它们写成下列形式

$$K = \begin{Bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{Bmatrix} \tag{1-58}$$

或

$$K = \begin{Bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{Bmatrix} \tag{1-59}$$

因此，式(1-56)可写成更紧凑的形式

$$\mathbf{v} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{J} \tag{1-60}$$

由于渗透系数张量是对称张量，即

$$K_{xy} = K_{yx}; \quad K_{xz} = K_{zx}; \quad K_{yz} = K_{zy}$$

所以，在三维空间中，九个渗透系数分量实际上只有六个独立分量，二维空间中只有三个不同的分量。

研究各向异性介质发现，虽然水力坡度与渗透速度的方向不一致，但在三个方向上两者是平行的，并且这三个方向是正交的。将这三个方向称为主方向。沿主方向测得的渗透系数称为主渗透系数，分别以 $K_1$、$K_2$、$K_3$ 表示，如果采用 Descartes 坐标系，用旋转坐标轴的方法，使其三个坐标轴分别和渗透系数张量的主方向平行，则有

$$K_{xx} = K_1; \quad K_{yy} = K_2; \quad K_{zz} = K_3$$

把上述矩阵化为对角型式，即

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}K_1 & 0 & 0\\ 0 & K_2 & 0\\ 0 & 0 & K_3\end{bmatrix} \tag{1-61}$$

或

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}K_1 & 0\\ 0 & K_2\end{bmatrix} \tag{1-62}$$

在实际工作中，常把渗透性能最强与渗透性能最弱的方向取作渗透的主方向，称该方向上的渗透系数为主渗透系数，如二维流，若以 $K_{xx}$ 表示渗透性能最强方向的渗透系数，则以 $K_{yy}$ 表示渗透性能最弱方向的渗透系数，称 $K_{xx}$ 及 $K_{yy}$ 为主渗透系数。

如果测得了主渗透系数，则按下列公式求得沿渗流方向上的方向渗透系数 $K_v$：

$$\frac{1}{K_v}=\frac{\cos^2\beta_1}{K_{xx}}+\frac{\cos^2\beta_2}{K_{yy}}+\frac{\cos^2\beta_3}{K_{zz}} \tag{1-63}$$

式中 $\beta_1$、$\beta_2$、$\beta_3$——分别为渗透速度 $v$ 与 $x$，$y$，$z$ 轴的夹角；

$\cos\beta_1$、$\cos\beta_2$、$\cos\beta_3$——渗透速度的方向余弦（图 1-18）。

下面解释 $K_v$ 的几何意义（图 1-19$a$）。和 $v$ 共线的矢径 $r$ 具有分量：$x=r\cos\beta_1$；$y=r\cos\beta_2$；$z=r\cos\beta_3$，将其代入式(1-63)得

$$\frac{r^2}{K_v}=\frac{x^2}{K_{xx}}+\frac{y^2}{K_{yy}}+\frac{z^2}{K_{zz}} \tag{1-64}$$

若取 $r^2=K_v$，则上式变成典型的椭球面方程

$$\frac{x^2}{K_{xx}}+\frac{y^2}{K_{yy}}+\frac{z^2}{K_{zz}}=1 \tag{1-65}$$

它的半轴长分别为 $\sqrt{K_{xx}}$、$\sqrt{K_{yy}}$、$\sqrt{K_{zz}}$。沿渗流方向与这个椭球面相交出来的矢径长度的平方，就等于沿渗流方向上的方向渗透系数 $K_v$。若渗流方向与某个主方向一致，那么，$K_v$ 就等于这个主方向上的主渗透系数。

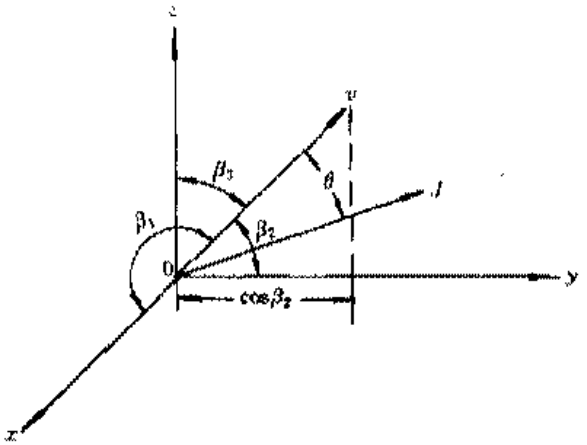



图 1-18 渗透速度的方向余弦

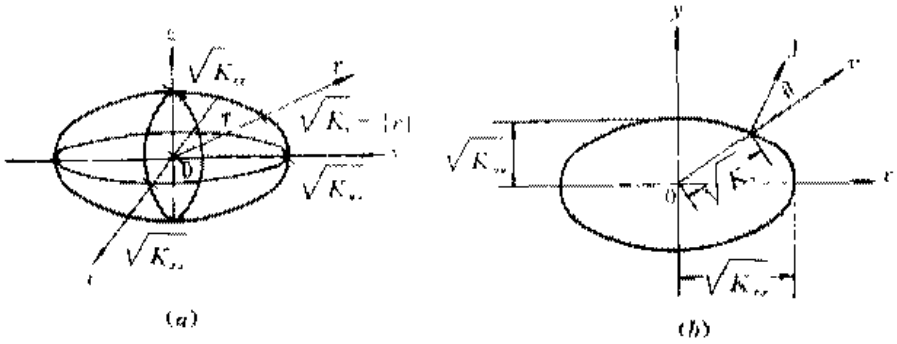



图 1-19 渗透系数的几何表示图

对于二维流，相应于式(1-65)的是椭圆方程（图 1-19$b$），此时 $K_v$ 有类似的几何解释。

$$\frac{x^2}{K_{xx}}+\frac{y^2}{K_{yy}}=1 \tag{1-66}$$

## 三、非均质与等效渗透系数

自然界广泛分布着非均质含水层，非均质含水层一般可划分成二种类型。

1. 透水性渐变的含水层及其等效渗透系数

在洪积扇发育的山前地带，潜水含水层的透水性常沿流向逐渐变小。如将渗透系数随流向视为线性变化，则可利用 Darcy 公式得到流量方程。当含水层隔水底板水平，渗透系数 $K$ 沿程 $S$ 呈线性变化(图 1-20)，$K$ 的关系式可表达为

$$K = K_1 - \frac{K_1 - K_2}{l} \cdot S$$

式中 $K_1$、$K_2$——分别为断面 1、2 的渗透系数。

将 $K$ 的关系式代入 Darcy 公式，取单位宽度的流量为

$$q = -\left(K_1 - \frac{K_1 - K_2}{l} \cdot S\right) h \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}S}$$

分离变量，并用配元法积分得

$$\int_0^l \frac{q}{K_1 - \frac{K_1 - K_2}{l} \cdot S} \mathrm{d}S = \int_{h_1}^{h_2} h \mathrm{d}h$$

$$q = \frac{K_1 - K_2}{\ln K_1 - \ln K_2} \cdot \frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \tag{1-67}$$

设想一均质含水层与上述非均质含水层等效，因而求得该含水层的等效渗透系数为

$$K_m = \frac{K_1 - K_2}{\ln K_1 - \ln K_2} \tag{1-68}$$

2. 透水性突变的含水层及其等效渗透系数

非均质含水层中，当水流通过渗透系数突变的界面时，会发生流线的折射。这种现象与光线或磁力线由一种介质传播到另一种介质时所发生的折射现象相似。设介质 I 的渗透系数为 $K_1$，介质 I 的渗透系数为 $K_2$，界面上某一点附近的渗透速度和水头在两介质中的值依次为 $v_1$、$v_2$ 和 $H_1$、$H_2$，如图 1-21 所示。

由于界面上的任一点都应满足下列条件

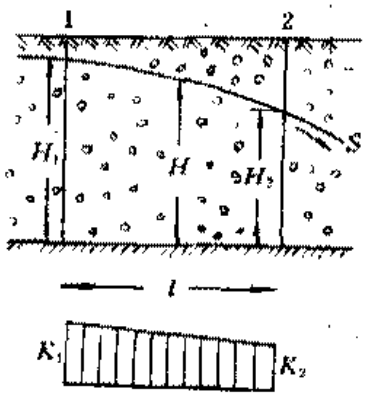



图 1-20 透水性渐变的含水层

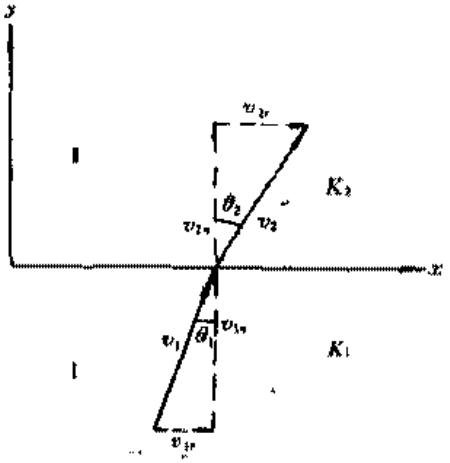



图 1-21 渗透水流的折射

$$\begin{cases} H_1 = H_2 \\ v_{1n} = v_{2n} \end{cases} \tag{1-69}$$

式中 $v_{1n}$、$v_{2n}$——分别为 $v_1$、$v_2$ 的法向分速度。

于是有

$$\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{v_{1\tau}}{v_{1n}}$$

$$\mathrm{tg}\theta_2 = \frac{v_{2\tau}}{v_{2n}}$$

两式相除有

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2} = \frac{v_{1\tau}}{v_{2\tau}} = \frac{-K_1\dfrac{\partial H_1}{\partial x}}{-K_2\dfrac{\partial H_2}{\partial x}}$$

式中 $\theta_1$、$\theta_2$——界面法线与两侧流线的夹角；

$v_{1\tau}$、$v_{2\tau}$——$v_1$、$v_2$ 的切向分速度。

因为 $H_1=H_2$，故 $\dfrac{\partial H_1}{\partial x}=\dfrac{\partial H_2}{\partial x}$，则得

$$\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta_2} = \frac{K_1}{K_2} \tag{1-70}$$

式(1-70)称为渗流的折射定律，由它可得以下结论：

(1)当 $K_1=K_2$，则 $\theta_1=\theta_2$。表示均质岩层中不发生折射。

(2)当 $K_1\neq K_2$，而且 $K_1$、$K_2$ 均不等于 0 时，如 $\theta_1=0°$，则 $\theta_2=0°$，表面水流垂直通过界面时，也不发生折射。

(3)当 $K_1\neq K_2$，而且 $K_1$、$K_2$ 均不等于 0 时，如 $\theta_1=90°$，则 $\theta_2=90°$，表明水流平行于界面时，亦不发生折射。

(4)当 $K_1\neq K_2$，流线与界面斜交时，则发生折射。介质的 $K$ 值愈大，$\theta$ 角也愈大，流线愈靠近界面。$K_1$ 与 $K_2$ 相差愈大，则 $\theta_1$ 与 $\theta_2$ 相差亦愈大，如 $\dfrac{K_1}{K_2}=\dfrac{1}{100}$，当 $\theta_1=3°$，则 $\theta_2=79°$；$\dfrac{K_1}{K_2}=\dfrac{1}{200}$ 时，$\theta_1=3°$，则 $\theta_2=85°$。

自然界常见到层状岩层(图 1-22)，设每一分层的渗透系数为 $K_i$，厚度为 $M_i$。当水流平行于层面时，通过层状含水层的总的单宽流量 $q$ 等于各分层的单宽流量之和，总厚 $M$ 等于各分层厚度之和，即

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i, \quad M = \sum_{i=1}^{n} M_i$$

对于每一分层来说，其水力坡度 $J$ 均相等，因而每一分层的单宽流量为

$$q_i = K_i M_i J = K_i M_i \frac{\Delta H}{l}$$

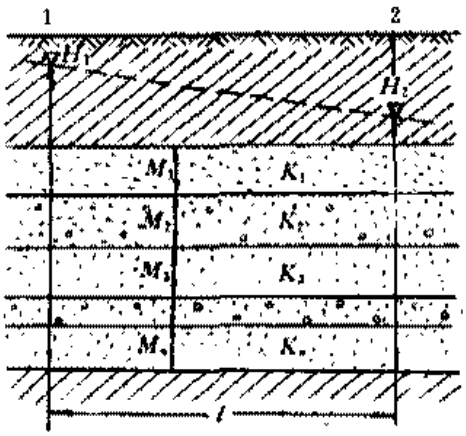



图 1-22 平行于层状岩层层面的渗流

$$q = \sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} K_i M_i \frac{\Delta H}{l}$$

类似地，用一等效的均质含水层代替层状含水层，显然等效层的厚度等于层状岩层的总厚度，并且在同一水力坡度 $\dfrac{\Delta H}{l}$ 作用下应当有相同的单宽流量 $q$，于是有

$$q = K_{\parallel} M \frac{\Delta H}{l}$$

由此得

$$K_{\parallel} M \frac{\Delta H}{l} = \sum_{i=1}^{n} K_i M_i \frac{\Delta H}{l}$$

因而求得平行层面方向的等效渗透系数为

$$K_{\parallel} = \frac{\sum_{i=1}^{n} K_i M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i} \tag{1-71}$$

当水流方向垂直于非均质岩层界面时(图 1-23),通过各分层的流量,根据水流的连续

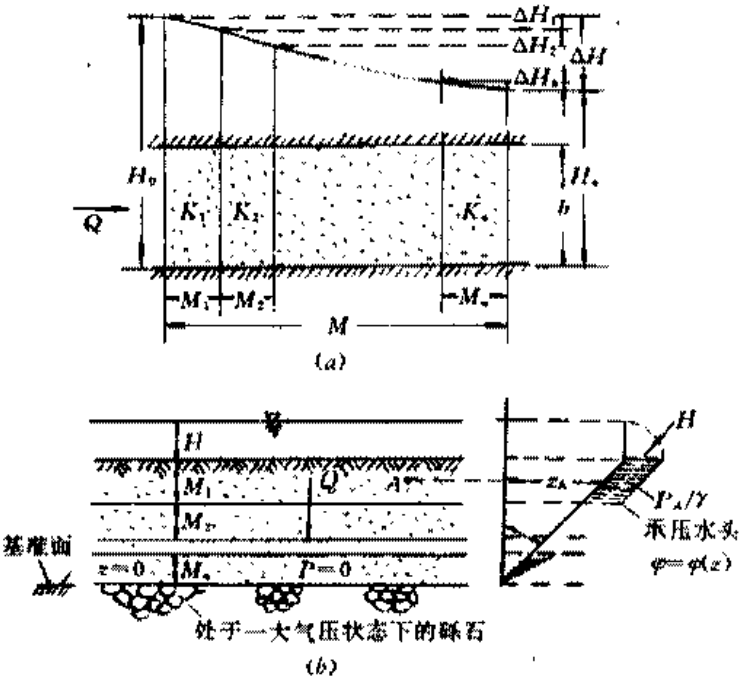



图 1-23 垂直于非均质岩层界面的渗流

(据 J. Bear)

性条件应该相同,即

$$q_1 = q_2 = \cdots\cdots = q_i = \cdots\cdots q_n = q$$

但由于各分层的渗透系数不同,即

$$K_1 \neq K_2 \neq \cdots\cdots \neq K_i \neq \cdots\cdots \neq K_n$$

因此,水头损失和水力坡度不同。总的水头损失 $\Delta H$ 等于各分层的水头损失,$\Delta H_i$ 之和,即

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i$$

因为对每一层都有

$$q = K_i b \frac{\Delta H_i}{M_i}, \quad \Delta H_i = \frac{M_i q}{K_i b}$$

所以

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{n} \Delta H_i = \frac{q}{b} \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{K_i}$$

对于等效层有 $$q = K_m b \frac{\Delta H}{M};\quad \Delta H = \frac{M}{K_m}\frac{q}{b}$$

因而有 $$\frac{q}{b}\frac{M}{K_m} = \frac{q}{b}\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{K_i}$$

由此得到垂直于非均质岩层界面方向的等效渗透系数为

$$K_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} M_i}{\sum_{i=1}^{n}\frac{M_i}{K_i}} \tag{1-72}$$

式(1-71)和(1-72)表示的等效渗透系数，实际上是各分层的加权平均渗透系数。

**思考题**

1. 各向异性含水层中任一点的渗透速度为 $v = v_x + v_y + v_z$，这种说法对吗？

2. 在二维流的各向异性含水层中，已知渗透速度的分量 $v_x = 0.1\text{m/d}$，$v_y = 0.005\text{m/d}$；水力坡度的分量 $J_x = 0.001$，$J_y = 0.002$，试求：(1)当 $x$，$y$ 是主渗透方向时的主渗透系数 $K_{xx}$、$K_{yy}$；(2)水力坡度与渗透速度之间的夹角 $\varphi$；(3)确定渗流方向上的渗透系数 $K_v$。

3. 假设有一层状岩层，由三层组成，$K_1 = K_3$。当 $K_2 < K_1$、$K_3$ 时应如何折射？画出示意图。

4. 设由 $n$ 层具有相同结构的层状岩层组成的含水层，其中每个分层的上一半厚度为 $M_1$，渗透系数为 $K_1$，下一半厚度为 $M_2$，渗透系数为 $K_2$，试求：(1)水平和垂直方向的等效渗透系数 $K_p$ 和 $K_v$；(2)证明 $K_p > K_v$。

## 第四节　流网及其应用

### 一、流函数与势函数

为了研究地下水的运动特征，常绘制流线及等水位线(潜水含水层)、等水压线图(承压含水层或越流含水层)。流线是在渗流场中一簇理想的空间几何线，它们处处与渗透速度矢量 v 相切，表示的是同一时间内不同水流质点的连线。显然，它们与表示水流质点运动轨迹的迹线是不同的概念。迹线是某一水流质点在不同时间内连续运动所得到的轨迹。一般情况下，流线和迹线在空间是不同的二条线(图 1-24)。但是，当地下水稳定运动时，经过空间

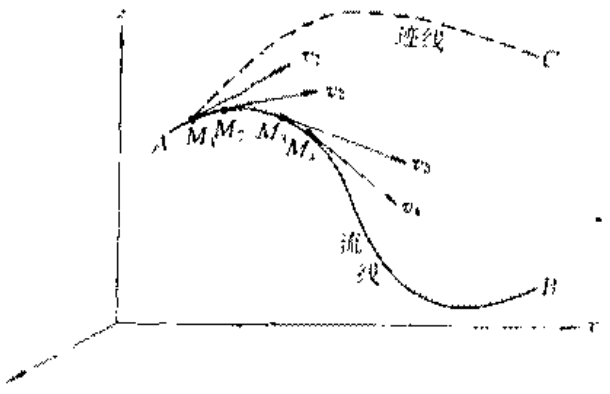



图 1-24　流线和迹线

某一点的流线和迹线是重合的。

由于流线处处与渗透速度矢量 v 相切，因此，流线表示渗流场内每一点的水流方向，显然，水流不能穿越流线流动。

根据上述定义，流线方程是

$$\mathbf{v} \times \mathbf{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{1-73}$$

式中 ×号——交叉乘积；

$\mathbf{d}\boldsymbol{S}$——沿流线的一长度单元。

在 Descartes 坐标系中，上式等价于

$$v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x = 0 \quad (\text{图 1-25}) \tag{1-74}$$

现在可以定义一个函数 $\Psi = \Psi(x, y)$，它是二元函数，其全微分为

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y \tag{1-75}$$

令

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x$$

比较上式可得

$$\mathrm{d}\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y = v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x = 0 \tag{1-76}$$

积分得

$$= \text{常数}$$

称函数 $\Psi$ 为流函数，量纲为 $[L^2T^{-1}]$。

下面阐述流函数与流量的关系（图 1-26）。在无限接近的两根流线 $\Psi$ 和 $\Psi+\mathrm{d}\Psi$ 上，沿某等水头线取 $a(x, y)$、$b(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ 两点，自 $a$、$b$ 分别作垂线和水平线，相交于 $c$。显然通过

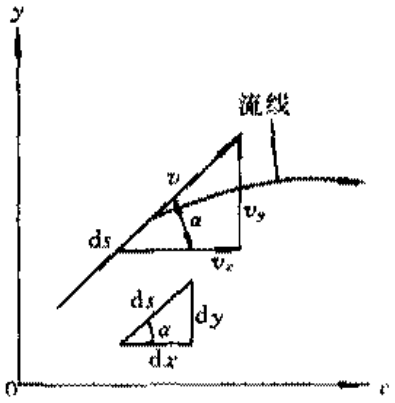



图 1-25 流线方程表示图

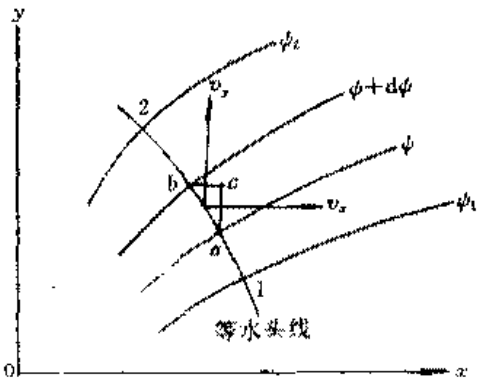



图 1-26 流函数与流量的关系

流线 $\Psi$ 和 $\Psi+\mathrm{d}\Psi$ 间的单宽流量 $\mathrm{d}q$ 可看成通过 $ac$ 和 $bc$ 的流量的代数和。根据 Darcy 定律

$$\mathrm{d}q = v_x ac + v_y bc$$

但 $ac = \mathrm{d}y$，$bc = -\mathrm{d}x$，故

$$\mathrm{d}q = v_x \mathrm{d}y - v_y \mathrm{d}x$$

与式(1-76)比较得

$$\mathrm{d}q = \frac{\partial \Psi}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\mathrm{d}x = \mathrm{d}\Psi \tag{1-77}$$

积分得

$$q = \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = \Psi_2 - \Psi_1 \tag{1-78}$$

因此，在二维平面流中两流线间的单宽流量等于和这两条流线对应的流函数之差。在同一根流线上 $\Psi$=常数，$d\Psi=0$，$dq=0$。必须指出，上述讨论的情况，对不可压缩的水流以及无源(如注水)、无汇(如抽水)时才有效。

对于一般的地下水运动，可以用测压水头代替总水头。此外，由 Bernoulli 方程可知，$z$ 表示单位重量液体所具有的位置势能，$\frac{P}{\gamma}$表示单位重量液体所具有的压强势能，如用 $\varphi$表示单位重量液体所具有的总势能，则

$$\varphi = z + \frac{P}{\gamma} \tag{1-79}$$

对于平面的稳定流，势能 $\varphi$ 随坐标而变，可写成 $\varphi=\varphi(x,y)$。与流函数 $\Psi=\Psi(x,y)$相对应，将 $\varphi$称为势函数，此时，将势能 $\varphi$相等的点相连则成一等势线或等水头线，即 $\varphi$=常数或 $H$=常数。

**二、流网及其性质**

在渗流场内可作一系列等水头线(或等势线)和流线，称一系列等水头线与流线所组成的网格为流网。流网具有下列特性：

(1)各向同性介质中，流线与等水头线处处垂直，流网是正交网。

在各向同性介质中，可以证明等水头线(等势线)梯度和流线梯度这两矢量的数量积等于零，即

$$\nabla\varphi \cdot \nabla\Psi = 0 \tag{1-80}$$

此式表示两矢量正交，即流线和等水头线的梯度是正交的，而梯度方向又和流线及等水头线本身垂直，因此流线和等水头线处处正交，流网为正交网格，此时，地下水流向与等水头线垂直。但对于各向异性介质来说，等水头线与流线是不正交的，流网不是正交网。

(2)在均质各向同性介质中，流网中每一网格边长之比为常数。

在流网中任取一网格(图 1-27)，相邻流线的间距为 $dl$，等势线间距 $dS$。根据几何关系可求得

$$dH = -\frac{1}{K}v\,dS$$

$$d\Psi = v\,dl$$

二式相除得

$$\frac{dS}{dl} = -K\frac{dH}{d\Psi} \tag{1-81}$$

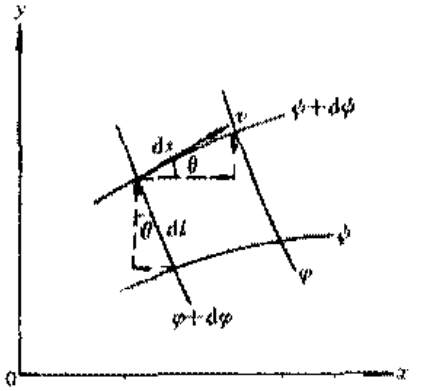


图 1-27　流网中的网格图

对于均质各向同性介质，$K$=常量，只要给定相邻流线的流函数差值 $d\Psi$ 和等水头线间的水头差值 $dH$(或势函数差值 $d\varphi$)，流网的边长比$\frac{dS}{dl}$都是一定的。为了方便，通常取$\frac{dS}{dl}=1$，流网为曲边正方形。

(3)当流网中各相邻流线的流函数差值及每个网格的水头差值相等时，通过每个网格的流量相等。

设通过每个网格的流量为 $\Delta q$，则

$$\Delta q = KJ\Delta l = K\frac{\Delta H}{\Delta S}\Delta l = K\Delta H\frac{\Delta l}{\Delta S}$$

式中 $\Delta S$——该网格相邻两等水头线间的平均长度；

$\Delta l$——相邻两流线间的平均宽度。

根据性质 2，$\Delta l/\Delta S$、$K$ 为常数，当每个网格的 $\Delta H$ 相等时，$\Delta q$ 也就相等。当流网为曲边正方形时，有

$$\Delta q = K\Delta H \tag{1-82}$$

绘制流网时，常将上下游的总水头差为

$$H_Y = H_1 - H_2$$

则每个网格的水头差为

$$\Delta H = \frac{H_Y}{m} \tag{1-83}$$

式中 $m$ 为水头带的数目。图 1-28 为承压含水层抽水井附近的流网图。

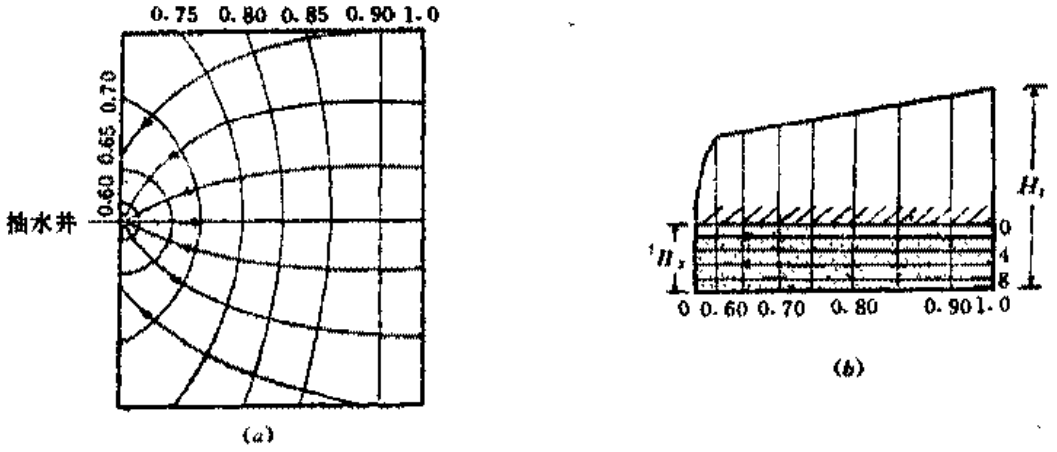



图 1-28 承压含水层中抽水井附近流网图

a—平面图；b—剖面图

(4)在非均质介质中，由于折射，在一介质为曲边正方形，穿越界面进入另一介质中，则变成曲边矩形流网(图 1-29)。

取二根流线间的流带，由水流连续性原理有

$$\Delta q = K_1\frac{\Delta H}{\Delta S_1}\Delta l_1 = K_2\frac{\Delta H}{\Delta S_2}\Delta l_2$$

若在 $K_1$ 介质中取 $\frac{\Delta l_1}{\Delta S_1}=1$，在 $K_2$ 介质中必有 $\frac{\Delta l_2}{\Delta S_2}\neq 1$，变成矩形网格了，而且 $\frac{\Delta l_2}{\Delta S_2}=\frac{K_1}{K_2}$。当 $K_1<K_2$ 时，则 $\Delta l_2<\Delta S_2$，流网成扁平方格网(图 1-29)；当 $K_1>K_2$ 时，则 $\Delta l_2>\Delta S_2$，正好相反。

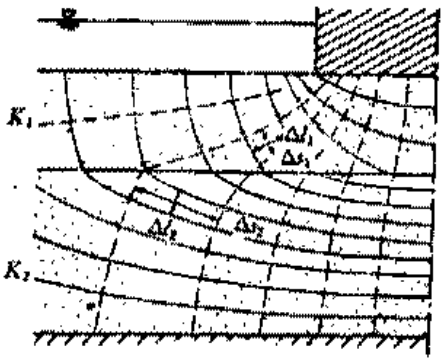



图 1-29 双层地基中的流网图

## 三、流网的绘制及应用

### 1. 流网的绘制

渗流场中的流网分布，能反映渗流特征，正确绘制流网，对分析地下水运动规律、水文地质计算有重要的意义。绘制流网前，须充分地分析水文地质条件，根据流函数与势函数的定

义及其相互间的关系，以及流网的特性，应首先确定渗流场内可以肯定的流线和等水头线，如一些界面上的流线和等水头线是可以肯定的。

(1)一般将水力坡度很小或不流动的地表水体(与地下水有水力联系)的底界面(线)作为一根等水头线(图 1-30)。

(2)含水层的底板是隔水层，隔水层面可看成一根流线。

(3)无入渗无蒸发，稳定流动时，潜水面在剖面图上为一根流线(图 1-30 左)。否则既非流线，也非等水头线(图 1-30 右)。

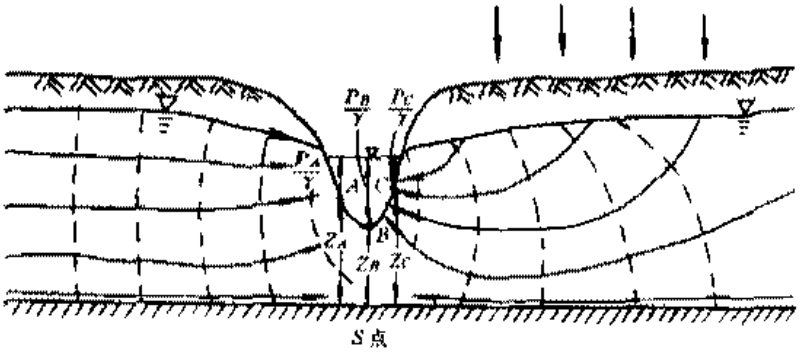



图 1-30　河谷附近潜水含水层剖面流网图

当边界上的等水头线和流线确定后，则绘制渗流场内部流网，须遵循下列两条原则：一是始终保持相邻流线的流函数差值以及每个网格的水头差值都相等；二是流线与等水头线处处正交，使绘制的流网为曲边正方网(均质各向同性介质)。根据上述原则，即可绘出流网图。

此外，一些对称面可视为流线或等水头线。如对称条件下的对称面，可视为流线(图 1-31*a*)。几何对称但边界条件不同的对称面则为等水头线(图 1-31*b*)。

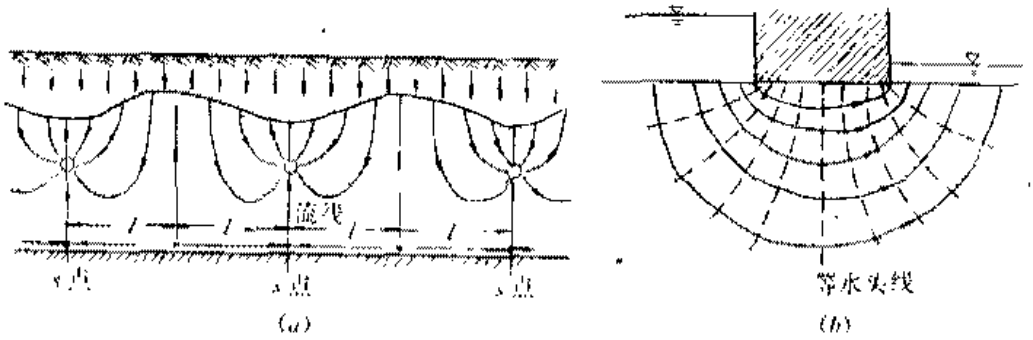



图 1-31　对称面附近的流网图

其次，在绘制流网时，还要注意一些特殊点面处流网的绘制方法，如：

(1)当存在二个以上补给、排泄点时，注意表示分流线(图 1-32)。

(2)隔水断层两边的流网，存在水头差(图 1-33)。

(3)渗流场中存在强透水的透镜体，流线将产生汇集(图 1-34*a*)；若出现不透水的透镜体，则流线绕流，此时，将出现停滞点(奇点)，如图 1-34*b* 所示。

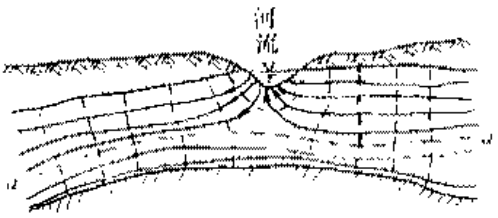



图 1-32　二个排泄点的流网图

$a$—$a$　为分流线

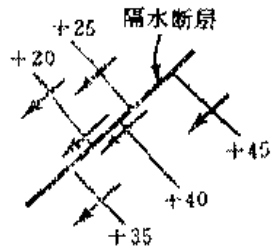



图 1-33　隔水断层两边的流网

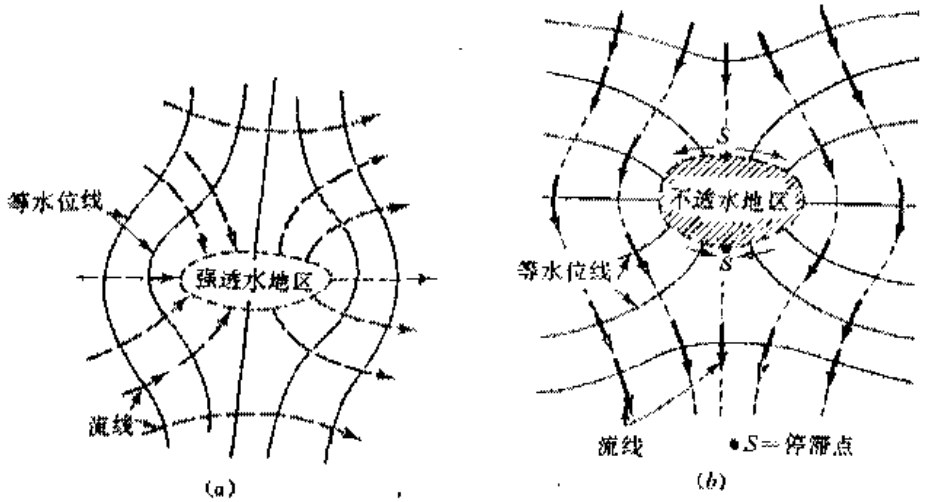



图 1-34　流线的汇集与绕行

$a$—强透水地区；　$b$—局部不透水地区

(4)注意潜水含水层在河谷渗出面附近，以及奇点处的流线和等水头线的绘制方法。在河流渗出面时，沿潜水面那根流线与渗出面应相切(图 1-35$a$)。所谓奇点是指渗透速度为零或无穷大的点，如图 1-30、图 1-31、图 1-34 等的 $S$ 点及图 1-35$b$、$c$ 中的 $S$ 点，通常流线是不

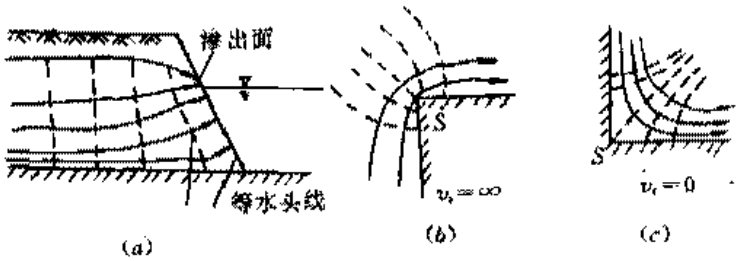



图 1-35　渗出面、奇点附近流网图

相交的，但在奇点处流线可相交，并且流线与等水头线的正交原则被破坏。

(5)在非均质介质中的流网，要注意界面上将出现折射现象(图 1-29)。

流网可通过计算机模拟绘制，也可徒手近似制作。

2. 流网的应用

流网表示了渗流场内地下水的流向和水头分布，应用流网可以分析水文地质条件，如地下水与河流的互补关系(图 1-36*a*、*b*)。根据等水头线的疏密变化，可以判断导水性变化(图 1-36*c*)，以及分析地下水分水线(图 1-36*d*)，它把水流区域分成子区域，对研究地下水污染等问题有重要意义，等等。

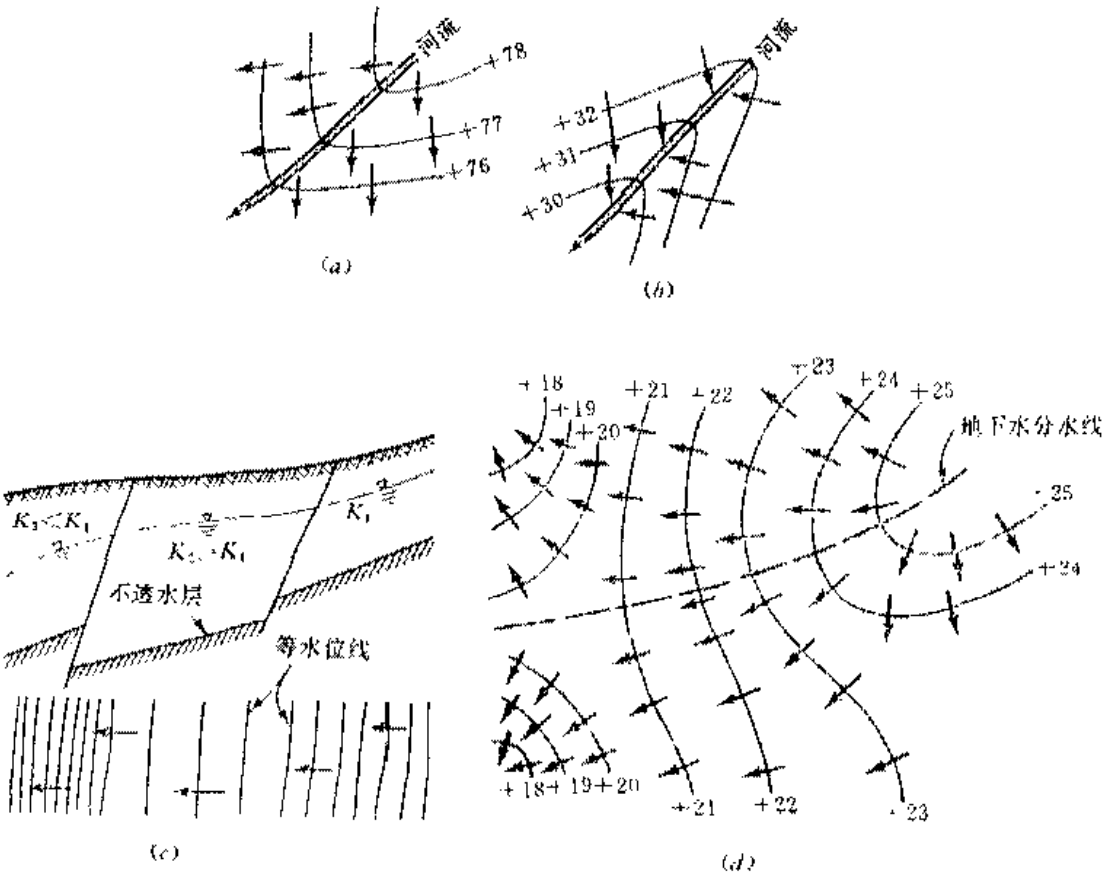



图 1-36　流网的应用

*a*—河流补给地下水；*b*—地下水补给河水；*c*—导水性变化的影响；*d*—地下水分水线

应用流网还可以确定渗流要素。由等水压线可以确定渗流场内任一点的水头值 $H$，并由 $H=\frac{P}{\gamma}+z$ 关系式，计算出该点的压强 $P$；通过某点的流线，可以量出相邻两根等水头线间的距离 $\Delta S$ 及水头差 $\Delta H$，根据 Darcy 公式，则很容易求出它们的水力坡度 $J$、渗透速度 $v$ 及单宽流量 $q$。总之，应用流网可分析研究区的水文地质条件、地下水运动特征、确定各渗流要素，对水文地质计算、地下水资源评价等解决水文地质实际问题有着重要的意义。

**思考题**

1. 流网为什么只在稳定流问题中才有实际意义？

2. 在均质各向同性的介质中，任何部位的流线和等水头线都正交，这种说法对吗？

3. 在各向同性而透水性不同的双层介质中，上层的渗透系数为 $K_1$，下层为 $K_2$，且 $K_1<K_2$，其流网形状在上层中为曲边正方形，另一层中应为什么形状？当 $K_1>K_2$ 时，又是什么形状？试用图表示。

## 第五节　地下水的均衡

研究地下水在含水层中的运动，主要应用线性及非线性渗透定律和质量守恒定律。在具体应用后者时，对于一般的地下水，由于其密度变化很小，一般用水的体积（水量）代替水的质量，用水量均衡表示水的质量守恒。

### 一、水均衡原理

地下水与其他物质一样，也遵循着物质不灭定律。表现在任一时间间隔（称均衡期）内，流入含水层某一地段（称均衡区或均衡单元）中的水量（以水的体积表示）$V_1$，从该地段中流出的水量 $V_2$ 及贮存于该地段中水的变化量 $\Delta V_s$ 之间，遵循着一定的平衡关系——水均衡原理，即

$$V_1 - V_2 = \Delta V_s \tag{1-84}$$

当 $V_1 > V_2$ 时，则 $\Delta V_s$ 增加，表现为含水层中水头上升。反之，$V_1 < V_2$ 时，则 $\Delta V_s$ 减少，水头下降。当稳定流动时，$V_1 = V_2$，$\Delta V_s = 0$，水头不变。

均衡期，可是一年、一月、一天，以至时、分；而均衡单元，小至"表征性体元"，大至区域完整的水文地质单元，一般是含水层中的一个地段。一般情况下，流入量包括含水层中地下水通过均衡单元边界、流入均衡单元的侧向补给量，通过弱透水层来自上覆或下伏含水层的越流补给量，当地降水及灌溉渗入补给量，河、湖等地表水体渗漏补给量，人工补给量（如井灌）等。流出量包括通过单元边界、从均衡单元中流出的侧向径流量，由被研究的含水层向上覆或下伏岩层越流，蒸发-蒸腾，向河、湖的排泄，泉的排泄，抽水与排水人工排泄等。

在应用水均衡原理时，应根据不同的目的和任务以及水文地质条件建立各种不同的水均衡方程式，同时，要正确的确定各均衡要素。

### 二、地下水的侧向径流与越流

1. 含水层边界上流入和流出的侧向径流量 $Q_e$

当含水层的边界透水时，均衡单元外部的地下水，可通过边界流入或流出该单元，这种水流流向受边界上水力坡度 $J$ 的控制。图 1-37 表示的是一含水层地下水流网图及拟建的水

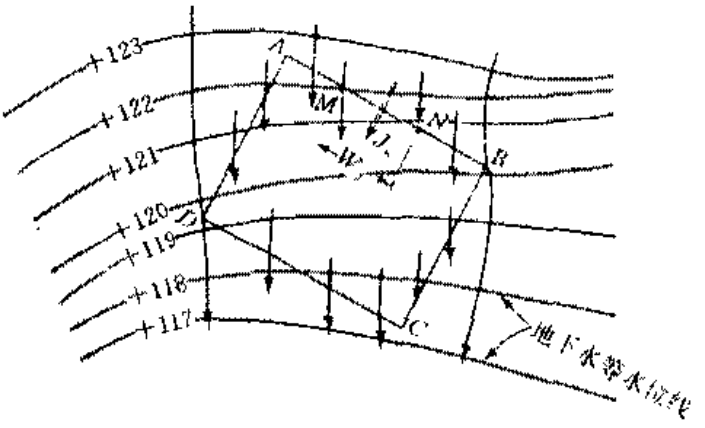



图 1-37　含水层边界上的流入与流出

均衡区 $ABCD$。地下水通过 $DAB$ 流入含水层，经 $BCD$ 流出含水层。将整个边界划分成若干个线段 $W_i$（如图中的 $MN$）。具体分段时，要使垂直于 $W_i$ 方向上的水力坡度分量 $J_{ni}$ 平均值以及沿线段的导水系数平均值 $T_i$ 能得到令人满意的表示，于是，根据 Darcy 公式，可确定该线段的流入量 $Q_i=W_iT_iJ_{ni}$。然后，将整个边界上全部线段上的流入、流出量相加，$J_{ni}$ 值对流入取正值，对流出取负，由此，可得到均衡期内流经含水层边界上的侧向净流量 $Q_s=\sum_{i=1}^{n}W_iT_iJ_{ni}$（$n$ 为边界上线段数）。

2. 越流

当含水层与上覆或下伏含水层存在水头差值时，通过弱透水层则会产生越流，其越流强度也可根据 Darcy 公式求得：

$$q_v=K_1\frac{H_s-H}{m_1} \tag{1-85}$$

式中 $q_v$——越流强度，在单位时间内单位面积上通过的水体积；

$K_1$——弱透水层的渗透系数；

$m_1$——弱透水层的厚度；

$H_s$——上覆或下伏含水层的地下水水头值；

$H$——计算含水层中地下水水头值。

如果算得的 $q_v$ 为负值则含水层越流流出。当各点的越流量不同时，则可把弱透水层划分为若干个单元区（$\Delta A_i$），分别计算 $\Delta t$ 时间内每个单元区上的平均越流量 $(\bar{q}_v)_i$。那么，$\Delta t$ 时间内越流流入含水层中的总的净入流量为

$$Q_v=\sum_{i=1}^{n}(\bar{q}_v)_i(\Delta A)_i \quad (n\text{ 为单元区数目}) \tag{1-86}$$

当抽水降低了含水层的水头值时，该含水层的越流方向可由流出变为流入，反之，当人工补给时，流入可变为流出。

## 二、大气降水的天然补给、蒸发与蒸腾

1. 大气降水的天然补给

当潜水含水层以上的岩层透水时，潜水可直接得到大气降水的补给。承压含水层会从相邻潜水含水层的地下水中获得补给。接受大气降水的补给。强度为：

$$q_p=\alpha P \tag{1-87}$$

式中 $\alpha$——降水入渗补给系数；

$P$——降水强度，量纲$[LT^{-1}]$。

如果，各点天然降水补给量有差异时，可根据影响降水入渗补给系数的因素，如地表包气带的透水性、潜水水位埋藏深度、降水特征、雨前土壤含水量、地形与植被等，将计算区划分为若干个单元区（$\Delta A_i$），分别计算 $\Delta t$ 时间（如一年）内每个单元区上的平均降水补给量 $(\bar{q}_p)_i$，那么，$\Delta t$ 时间内大气降水的天然补给量为

$$Q_P=\sum_{i=1}^{n}(\bar{q}_P)_i(\Delta A)_i \quad (n\text{ 为单元区数目}) \tag{1-88}$$

2. 蒸发与蒸腾

蒸发与蒸腾作用是指土面蒸发和叶面蒸发所消耗的地下水量。地下水蒸发量的表达式

为

$$Q_e = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (\Delta A)_i \tag{1-89}$$

式中 $\varepsilon_i$——第 $i$ 个单元区的地下水蒸发强度，量纲$[LT^{-1}]$；

$(\Delta A)_i$——第 $i$ 个单元区的面积。

当地下水面靠近地表时，蒸发-蒸腾作用在水均衡中是很重要的一项，其量相当大。某些植物根系很深，可将相当深的地下水面的水吸上来，通过叶面蒸发面消耗掉。如果地下水埋深超过蒸发极限深度时，地下水的蒸发作用实际上等于零。

**四、河流补给或排泄含水层地下水**

在地下水与河水有水力联系的情况下，当含水层水头高于河水面时，河流排泄含水层地下水(图 1-38*a*、*d*)；反之，当含水层水头低于河水面，河流补给地下水(图 1-38*b*、*d*)，即使是

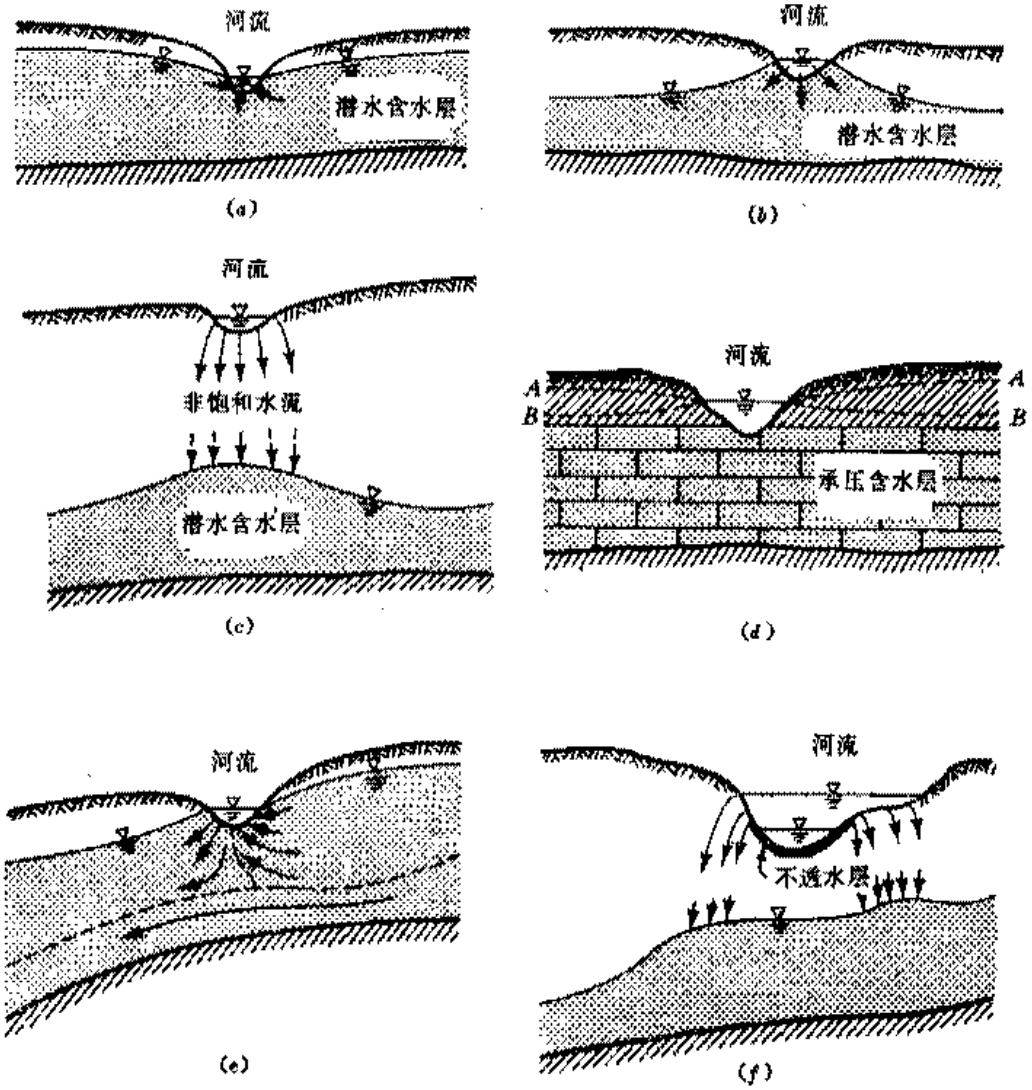



图 1-38 河流与地下水间的关系

*a*—地下水补给河流(河流排泄地下水)；*b*—河流补给地下水；*c*—地下水面深时的河流补给地下水；*d*—割切承压含水层的河流，河流补给地下水(水头面为 *B*)或地下水补给河流(水头面为 *A*)；*e*——侧地下水补给河流，另一侧河流补给地下水；*f*—部分河床被淤塞的河流补给地下水

在同一条河流上，也可以一段是河流补给地下水，而另一段是地下水补给河流。甚至同在一段上，一侧是河流补给地下水，而另一侧又是地下水补给河水(图 1-38*e*)；雨季时是河水补给

地下水，而旱季时又是地下水补给河水。在一条剖面上底部被淤填，而在一定水位以上的河床却是透水时(图 1-38f)，河流只能在河床上段发生渗漏补给地下水。当一条补给地下水的河流之下的地下水面较深时，河水的渗入会使地下水面形成一个水丘(图 1-38c)。

河流补给或排泄地下水的水量是区域水均衡组成的一部分。任何一个方向上的流量都可以计算出来(见第二章)。

**五、人工补给、抽水或排水**

人工补给是指人为有计划地操纵下将水由地面注入到含水层中的作用。它和天然补给不同，后者是在无人为干涉下进入含水层中的作用，对地下水系统来说，是不可控制的输入，而人工补给则是可控的输入。人工补给的方法很多，有：(1)增强渗入作用法，采用各种措施，使地表径流的渗入作用时间增加或渗入面积增大，如在河渠中修筑小型栏水坝，将使渗入面积增大；(2)地表引渗法：把水引流到专门建造的水池或洼地中，通过透水的基底渗入含水层中；(3)井灌补给法：利用专门建造的注水井将水注入含水层中；等等。人工补给方法目前在国内外得到广泛的应用，在地下水资源管理中有很大的意义。

抽水与排水是人工补给的反过程，是为了有效地利用地下水，在矿井、地下工程建筑物中为了防治地下水的危害，通过各种钻孔、水井、巷道、井筒等，将水抽出或排出。研究水均衡时通常关心的是均衡期内的总抽(排)水量。

**六、地下水贮存量的变化**

在一个均衡期内，全部流入量与流出量之差，将引起所研究的均衡单元内含水层贮存量的变化。在潜水含水层中，水是储存于空隙中，储存量的变化用给水度或饱和差 $\mu$ 来描述。在承压含水层中，水的储存是由于水与固体骨架的压缩引起的，储存量的变化用贮水系数 $\mu^*$ 来描述。在面积 $A$ 上，储存量的变化用下式表示：

$$\Delta V_s = \mu^*(\text{或 } \mu) \times A \times \Delta H \tag{1-90}$$

如果含水层各处的水头变幅 $\Delta H$ 不均一，而给水度或贮水系数又不同，可把均衡区划分为 $n$ 个单元区，于是有

$$\Delta V_s = \sum_{j=1}^{n} \mu_j^*(\text{或 } \mu_j) \times A_j \times (\Delta H)_j \tag{1-91}$$

**七、区域地下水的均衡**

在研究区域地下水均衡时，可用下列关系式表达：

$$\mu(\text{或 } \mu^*)\frac{\Delta H}{\Delta t}A = (Q_{\omega} + Q_{\omega'} + Q_p + Q_r + Q_c + Q_{\omega''}) - (Q_{\omega''} + Q_{\omega'} + Q_e + Q_{\omega} + Q_d) \tag{1-92}$$

式中 $\Delta H$——地下水头变化幅度，m；

$\Delta t$——均衡期，一般取 1a(365d)；

$A$——均衡单元面积，$m^2$；

$Q_{\omega}$——地下水侧向径流流入量，$m^3/d$；

$Q_{\omega'}$——地下水越流流入量，$m^3/d$；

$Q_p$——大气降水天然补给量，$m^3/d$；

$Q_r$——河渠补给地下水量，$m^3/d$；

$Q_c$——灌溉回渗补给地下水量，$m^3/d$；

$Q_{re}$——人工补给地下水量，$m^3/d$；

$Q_{co}$——地下水侧向径流流出量，$m^3/d$；

$Q_{vo}$——地下水越流流出量，$m^3/d$；

$Q_e$——地下水蒸发量，$m^3/d$；

$Q_{ri}$——河渠排泄地下水量，$m^3/d$；

$Q_d$——抽水与排水量，$m^3/d$。

上式是区域均衡的一般形式。在一定条件下，某些均衡项可以忽略，如平原区地下径流微弱，$Q_{ci}$、$Q_{ri}$可以忽略；无越流情况下，$Q_{vi}$、$Q_{vo}$不存在；地形切割微弱，河渠不发育时，$Q_{ri}$、$Q_{ro}$可从方程中取消；在强烈开采条件下，大部分天然消耗被人工夺取转变为开采量，此时$Q_{co}$、$Q_{ro}$、$Q_e$都可忽略。

**思考题**

1. 对于一般地下水流，为什么可以用水量均衡关系式代替水的质量守恒关系式？

2. 试说明当补给地下水的河流之下的地下水面较深时，河水渗漏量的计算方法。

3. 潜水含水层与承压含水层中的储存量物理意义有何不同？

4. 为什么在强烈开采条件下，大部分天然消耗量可被人工夺取转变为开采量？有什么实际意义。

## 第六节　描述地下水运动的数学模型及其解法

### 一、模型的一般概念

在研究地下水运动时，由于水文地质条件的复杂性，即使一个简单的水文地质问题也往往难以用繁杂的数学公式进行精确的描述，必须忽略一些与问题无关或关系不大的因素，使问题得以简化。这种简化，概化后所得到的天然地质体的仿真，称为模型。

“模型”一词源于拉丁文“modus(mod-ulus)”，意思是量度、样品、形象、方法。由此可见，广义的“模型”是被研究客体的一种表示和体现，一种仿真和抽象，是由与分析问题有关的要素组成的，反映和再现客观存在的内在规律的一种形式和手段。正因为如此，通过对模型的研究，有助于进一步揭示客观问题的实质。

水文地质模型就是一个概化后的设想系统或实际建立的系统，它以一定形式反映和再现水文地质客体，刻画客体的空间形式、水动力特征、参数、变量之间的关系，从而达到复制，再现实际水流系统基本状态的目的。因而，水文地质模型是保存实际问题基本特征的一种复制品。

描述地下水运动的模型一般可分为三类：

1. 概念模型

它是描述含水层系统的初始模型，通常根据水文地质条件及地下水运动的基本规律，对现实含水系统的初步认识及经验而构思的一种抽象模型。G·卡斯塔尼认为概念模型是从现场和实验中收集的资料的综合，就是用图件来表示有关含水层的结构、作用及含水层系统特征方面的数据，诸如岩性、厚度、水位、流量、补给量、径流量、贮水系数，导水系数等。

2. 物理模拟模型

根据相似原理用物质材料制作的用于模拟现实含水层系统特征的模型。如用砂石材料制作的渗流槽模型，根据渗流场和电场相似性，用电解质及电器元件制作的连续型及离散型电模拟模型，如电网络模型等。第七章将详细讨论物理模拟方法。

3. 数学模型

研究地下水运动时，对复杂的水文地质条件加以简化概括后，得到一个实际问题的概念模型，然后用一组数学方程式来刻画它的数量关系和空间形态，从而达到描述地下水运动的基本特征，内在联系及外在条件对其制约关系，复制或再现实际水流系统基本状态的目的，这样的一种数学结构，称为数学模型或定解问题。如式(4-1′)就是一个数学模型，它刻画了含水层的性质、空间分布及参数 $T$、$\mu^*$、$H$ 等之间的关系。

上述模型在解决实际问题时，各有特点，常起到相辅相成的作用。物理模拟模型比较直观，而数学模型随着电子计算机的普及和发展，显示出计算速度快、精度高、经济灵活等优点，因而也越来越广泛地被人们使用。。

## 二、描述地下水运动的数学模型

描述地下水运动的数学模型按其所含变量的性质，可分为两类，一类是确定性模型，模型中的变量取确定的值；另一类是随机模型，模型中的一个或多个变量是随机的，仅知道取值的概率而不能肯定变量所取的确定值。本书主要研究确定性模型。

地下水运动的确定性数学模型由一个(或一组)描述地下水运动规律的基本微分方程和相应的定解条件组成。下面讨论这二个问题。

1. 渗流的连续性方程

描写地下水运动的基本微分方程是以质量守恒原理和 Darcy 定律为基础，从渗流的连续性方程导出的。下面先导出渗流的连续性方程。

在充满液体的渗流域内取一无限小平行六面体，其各边长度分别为 $\Delta x$、$\Delta y$、$\Delta z$，并且和坐标轴平行。如沿坐标轴方向的渗透速度分量为 $v_x$、$v_y$、$v_z$，液体的密度为 $\rho$(图 1-39)，取平行于坐标平面 $YOZ$ 的二个平面 $abcd$ 和 $a'b'c'd'$，其面积为 $\Delta y\Delta z$。

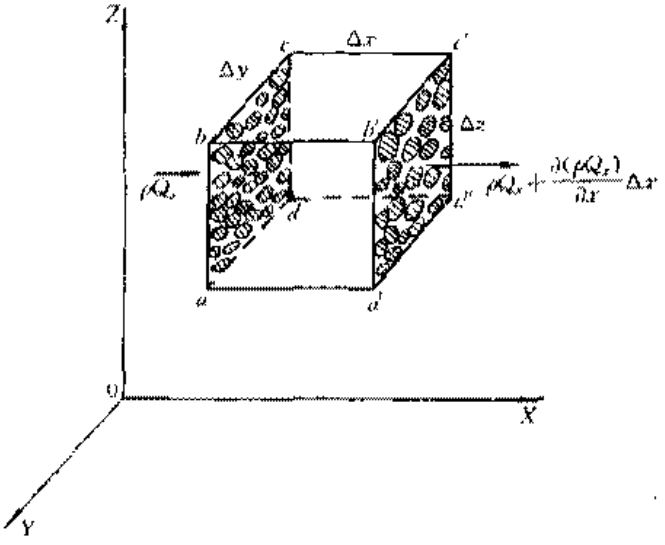



图 1-39　渗流域中单元体

在 $\Delta t$ 时间内，通过左界面 $abcd$ 流入六面体的液体质量为

$$\rho Q_x \Delta t = \rho v_x \Delta y \Delta z \Delta t$$

而从六面体右界面 $a'b'c'd'$ 流出的液体质量为

$$[\rho Q_x + \frac{\partial(\rho Q_x)}{\partial x}\Delta x]\Delta t$$

亦即

$$\rho v_x \Delta y \Delta z \Delta t + \frac{\partial(\rho v_x)}{\Delta x}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

沿 $x$ 轴方向流入和流出六面体的液体质量差为

$$\rho v_x \Delta y \Delta z \Delta t - [\rho v_x \Delta y \Delta z \Delta t + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t]$$

$$= -\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

同理，可写出沿 $y$ 轴和 $z$ 轴流入、流出六面体的液体质量差分别为

$$-\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

和

$$-\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

因此，在 $\Delta t$ 时间内，流入和流出六面体的液体总质量差为

$$-[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}]\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$$

在平行六面体内，液体所占的体积为 $n\Delta x\Delta y\Delta z$，液体的质量为 $\rho n\Delta x\Delta y\Delta x$。其中 $n$ 为孔隙度，在 $\Delta t$ 时间内，六面体内液体质量的变化为

$$\frac{\partial}{\partial t}[\rho n \Delta x \Delta y \Delta z]\Delta t$$

平行六面体内液体质量的变化是由于流入、流出六面体的液体质量差造成的，因而根据质量守恒定律，两者在数值上应该相等，即有

$$-[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}]\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial}{\partial t}[\rho n \Delta x \Delta y \Delta z] \qquad (1\text{-}93)$$

式(1-93)称为渗流的连续性方程。它表示渗流域内任何一个"局部"所必须满足的质量守恒定律，所以又称质量守恒方程。

如果把地下水当作不可压缩的均质液体($\rho$ 恒为常数)，同时假定含水层骨架不被压缩，这时 $n$、$\Delta x$、$\Delta y$、$\Delta z$ 均保持不变，方程式(1-93)右端项等于零，于是有

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \qquad (1\text{-}94)$$

表示在同一时间流入均衡单元体的液体体积等于流出的液体体积，即体积守恒，当地下水的运动是稳定流时就是如此。

2. 承压水运动的基本微分方程

承压水运动的基本微分方程可以由渗流的连续方程导出。由于含水层侧向受到限制，可假设 $\Delta x$、$\Delta y$ 为常量，仅考虑垂直方向上的压缩，只有水的密度 $\rho$、孔隙度 $n$ 和单元体高度 $\Delta z$ 三个变量随压力而变化，于是方程式(1-93)右端可写成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n \Delta x \Delta y \Delta z) = [\rho n \frac{\partial(\Delta z)}{\partial t} + \rho \Delta z \frac{\partial n}{\partial t} + n \Delta z \frac{\partial \rho}{\partial t}]\Delta x \Delta y \qquad (1\text{-}95)$$

把式(1-5)、(1-6)、(1-7)代入上式，得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho n\Delta x\Delta y\Delta z)=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{1-96}$$

于是，连续性方程(1-93)变为

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]\Delta x\Delta y\Delta z=\rho(\alpha+n\beta)\frac{\partial p}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z \tag{1-97}$$

因为水头 $H=z+\frac{P}{\gamma}$，故

$$P=\gamma(H-z)=\rho g(H-z)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+Hg\frac{\partial \rho}{\partial t}-zg\frac{\partial \rho}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+(H-z)g\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

或

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\rho g\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{P}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

将式(1-5)代入上式，得

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{\rho g}{1-\beta P}\frac{\partial H}{\partial t}$$

因水的压缩性很小，$1-\beta P\approx 1$，于是

$$\frac{\partial P}{\partial t}\approx\rho g\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-98}$$

把式(1-98)代入式(1-97)就有

$$\left[-\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\left(v_x\frac{\partial \rho}{\partial x}+v_y\frac{\partial \rho}{\partial y}+v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$=\rho^2 g(\alpha+n\beta)\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

上式中，左端第二括弧项比第一括弧项小得多，因而可略去不计。同时对于非均质各向异性含层，若取坐标轴向与渗透主方向一致，由 Darcy 定律，$v_x=-K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}$，$v_y=-K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}$，$v_z=-K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}$，将其代入上式得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$=\rho g(\alpha+n\beta)\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

把式(1-8)代入，得

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right]\Delta x\Delta y\Delta z$$

$$=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta z$$

等式两端约去 $\Delta x\Delta y\Delta z$，得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-99}$$

对于非均质各向同性介质来说式(1-99)可变为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial H}{\partial z}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-100}$$

对于均质各向同性介质，则有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-101}$$

式(1-99)、(1-100)、(1-101)为承压水三维非稳定流基本微分方程。

对于承压水二维非稳定流，并设运动方向与 $z$ 轴垂直($v_z=0$)，式(1-99)、(1-100)、(1-101)中略去左端第三项，并令 $T=KM$，$T$ 为导水系数，即可写出承压水二维非稳定流基本微分方程：

非均质各向同性含水层，$T=T(x,y)$，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-102}$$

非均质各向异性含水层，取坐标轴向与渗透主方向一致。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}M\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}M\frac{\partial H}{\partial y}\right)=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-103}$$

均质各向同性含水层，$T$ 为常数

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-104}$$

如果用柱坐标表示，对于三维流，由式(1-101)得

$$\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\gamma\frac{\partial H}{\partial r}\right)+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-105}$$

如果令 $a=\frac{T}{\mu^*}$，以 $\frac{1}{a}$ 代替 $\frac{\mu^*}{T}$，式(1-104)可写成下列形式

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=\frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-106}$$

式中　$a$——压力传导系数(导压系数)，量纲为$[L^2T^{-1}]$。

承压水非稳定运动的基本微分方程是研究承压含水层中地下水运动的基础，它反映了单位时间内流入流出单位体积含水层的水量差(基本方程等号左边各项之和)等于同一时间内单位体积含水层弹性释放(或弹性贮存)的水量(方程右端项)，同时方程通过应用 Darcy 定律反映了地下水运动中的能量守恒和转化。由此可见，基本微分方程以数学的形式表达了渗流区中任何一个"局部"都必须满足质量守恒和能量守恒定律。

当承压水运动为稳定流时，只要令上述方程右端项为零，则可写出承压水稳定流基本方程。

对于非均质各向异性含水层来说，由式(1-99)得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1-107}$$

对于均质各向同性含水层，由式(1-101)得

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0 \tag{1-108}$$

此式通常称为 Laplace 方程。它表明单位时间内净流入单元体的水量为零，即同一时间流入单元体的水量等于从单元体流出的水量。

3. 潜水非稳定运动的基本微分方程

1)Dupuit 假定

潜水面通常不是水平的，由此潜水含水层中存在垂直流速分量(图 1-40)，等水头面(过水断面)是一曲面，因而在铅直剖面上各点的水头值是不相同的。同时，潜水面又是渗流域的上边界，随时间不断变化，而变化情况在解出问题前是未知的，这给计算带来了困难。为了简化计算，Dupuit 提出了著名的 Dupuit 假定。

当潜水面坡度很小，潜水流为 $XOZ$ 平面内二维流(图 1-40)时，潜水面上任一点 $P$ 都有

$$j = -\frac{dH}{dS} = -\sin\theta$$

$$v_S = -K\frac{dH}{dS} = -K\sin\theta$$

坡度 $j$ 和渗透速度 $v_S$ 的方向在 $P$ 点与潜水面相切，它们在 $x$ 方向分量 $J_x$、$v_x$；$z$ 方向分量 $J_z$、$v_z$，而

$$J_x = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\mathrm{tg}\theta;$$

$$v_x = -K\frac{\partial H}{dx} = -K\mathrm{tg}\theta$$

因为 $\theta$ 很小，$\mathrm{tg}\theta \approx \sin\theta$，就有

$$J_x \approx j; \qquad v_x \approx v_S$$

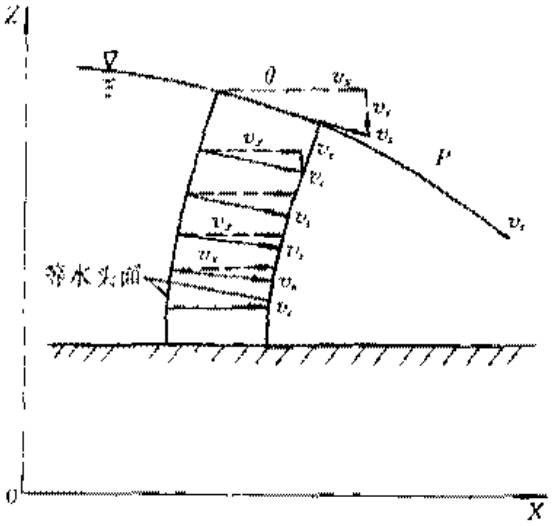



图 1-40 Dupuit 假定示意图

----→按 Dupuit 假设的渗透速度方向；

——→实际渗透速度方向

这是说，当潜水面平缓时，可用坡角的正切来代替正弦，从面以水平方向的水力坡度、渗透速度代替实际的水力坡度和渗透速度，忽略了垂直分速度。这就是著名的 Dupuit 假设。这样一来，等水头面看作是铅直的，水流是水平的，任一点的水头 $H(x,y,z,t)$ 近似用 $H(x,y,t)$ 来代替，减少了地下水运动的计算维数，即三维流、二维流可分别当作二维流和一维流处理，简化了计算。

可以证明 Dupuit 假定用于坡角很小的情况下，其流量误差 $\Delta q_v$ 的范围为 $0 < \Delta q_v < \frac{i^2}{1+i^2}$，$i = \frac{dH}{dx}$。但是，在垂直分速度大的地方由于 $v_z$ 不能忽略不计，就不能采用 Dupuit 假定了，如在有入渗的潜水分水岭地段(图 1-41$a$)、渗出面附近(图 1-41$b$)、铅直隔水边界附近(图 1-41$c$)。后者只有在 $x \geqslant 2h_0$ 的地段才能把流线近似看成水平线符合 Dupuit 假定，在下游边界上，潜水面都是终止于高出下游水面(河水面、井水面)的某个点上，该点到下游水面的这一地段称为渗出面。渗出面上潜水面往往和边界面相切，有较大的垂直分速度。

2)潜水非稳定运动的基本微分方程

根据 Dupuit 假定，Boussinesq 导出了潜水在含水层中运动的基本微分方程。先研究底面积为 $\Delta x\Delta y$，高为含水层厚度 $h$ 的均衡单元中，在 $\Delta t$ 时段内的水均衡(图 1-42)。

若潜水天然流方向与 $x$、$y$ 方向有关，潜水面又不是水平的，因此流速在 $Z$ 轴方向上有垂直分量，严格地讲潜水是三维流。但潜水面比较平缓，根据 Dupuit 假定，忽略垂直分速度，潜水简化为 $XOY$ 面内的二维流。同时，潜水面为自由水面，相对压强 $P=0$，此时对整个潜水层来说，不必考虑含水层弹性释放(或弹性贮存)。

$\Delta t$ 时间内单元体的水量变化由三部分组成：

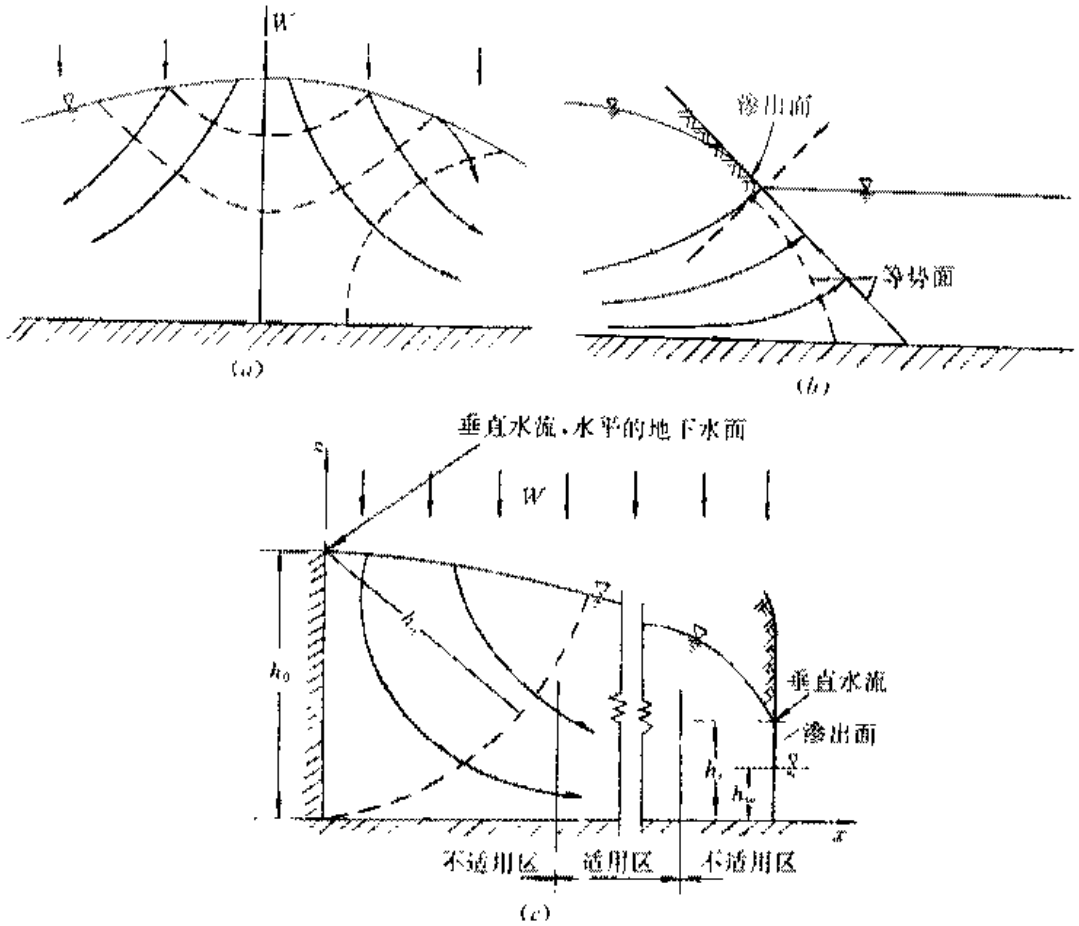



图 1-41　Dupuit 假设无效区

（据 J · Bear）

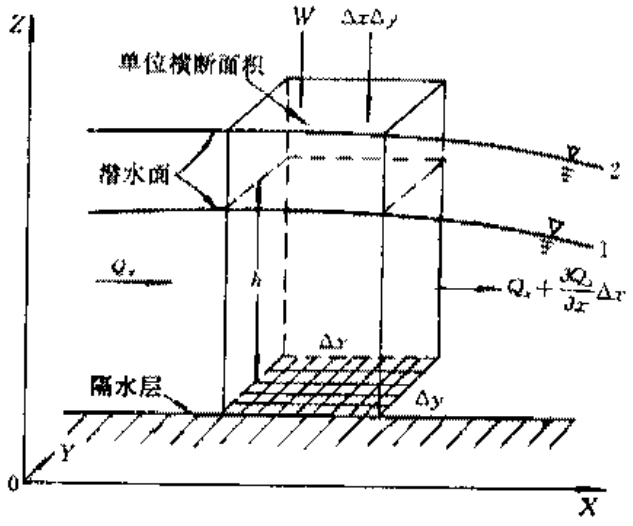



图 1-42　潜水流的均衡单元

1—$t$ 时刻；　2—$t+\Delta t$ 时刻

（据 *J · Bear*）

(1)沿 $x$ 轴方向侧向流入水量和流出水量差，流入量 $Q_x\Delta t$，流出量 $[Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x]\Delta t$，流出流入的水量差为 $-\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x\Delta t$。

(2)沿 $y$ 轴方向侧向流入流出的水量差，同理可写为 $-\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Delta y\Delta t$。

(3)潜水面接受的大气降水入渗量或蒸发量 $W\Delta x\Delta y\Delta t$，$W$ 为入渗强度或蒸发强度，即单位时间水平单位面积上的入渗量或蒸发量，入渗补给时取正号，蒸发时取负号。

因此，水量变化的总量为

$$-(\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Delta y+W\Delta x\Delta y)\Delta t$$

水量变化将引起单元体潜水面的上升或下降，由于潜水面升降引起的土体水量变化为

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}\Delta t\Delta x\Delta y$$

式中 $\mu$ 水位上升时为饱和差，下降时为给水度。此时，因潜水面相对压强恒为零，不考虑含水层的压缩性，即忽略弹性贮存的变化。

根据水流连续原理，这两个变化量是相等的，即

$$-[\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Delta y+W\Delta x\Delta y]\Delta t=\mu\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t \tag{1-109}$$

对于非均质各向异性含水层，若取坐标轴方向与主渗透方向一致

$$Q_x=-K_{xx}h\frac{\partial H}{\partial x}\Delta y;\quad Q_y=-K_{yy}h\frac{\partial H}{\partial y}\Delta x$$

则

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}h\frac{\partial H}{\partial x})\Delta y$$

$$\frac{\partial Q_y}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}h\frac{\partial H}{\partial y})\Delta x$$

将它们代入式(1-109)，整理得

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}h\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}h\frac{\partial H}{\partial y})+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-110}$$

此式为一般非均质各向异性含水层中，潜水二维非稳定运动基本微分方程，又称为 Boussinesq 方程。

对于非均质各向同性含水层，式(1-110)改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}(Kh\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(Kh\frac{\partial H}{\partial y})+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-111}$$

对于均质各向同性含水层，$K$ 为常数，式(1-111)可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\frac{\partial H}{\partial y})+\frac{W}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-112}$$

当含水层隔水底板水平并取作水头基准线时，以上诸式水头 $H$ 用含水层厚度 $h$ 代替。

有了二维潜水非稳定流基本微分方程，不难写出一维非稳定流基本方程：

对于非均质、各向异性含水层：

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}h\frac{\partial H}{\partial x})+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-113}$$

对于非均质、各向同性含水层：

$$\frac{\partial}{\partial x}(Kh\frac{\partial H}{\partial x})+W=\mu\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-114}$$

对于均质、各向同性含水层：

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{W}{K}=\frac{\mu}{K}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-115}$$

根据稳定流概念，不难写出潜水稳定运动时基本微分方程，只要将式(1-110)～式(1-115)的右端项为零，即得到对应条件的稳定流方程。

4. 越流含水层中地下水运动的基本微分方程

在自然界中有不少这样的情况，承压含水层的顶底板不是绝对隔水的，其中一个或两个是弱透水层。这时，含水层就可能经过弱透水层和相邻的含水层发生水力联系，但它还是承压的，因此，称它为半承压含水层。当含水层和相邻含水层存在水头差时，地下水就从高水头含水层通过弱透水层流向低水头含水层，这种现象称为越流，因此，半承压含水层又称越流含水层。

推导越流含水层中地下水运动的基本微分方程时，引用了以下假定：

(1)弱透水层的渗透系数 $K_1$ 远小于半承压含水层的渗透系数 $K$。事实上半承压含水层的 $K$ 值一般都比 $K_1$ 大两个数量级之上；(2)不计弱透水层的弹性释放。由于假定(1)根据折射定律 $\frac{K_1}{K}=\frac{\mathrm{tg}\theta_1}{\mathrm{tg}\theta}$，可以近似地认为越流垂直的通过弱透水层，进入含水层近乎 90°折射后，呈水平流动。有限单元法研究结果表明，这一假定引起的误差，在 $K$ 比 $K_1$ 大两个数量级以上时，误差不大于 5%；由假定(2)，弱透水层起越流通路的作用。

图 1-43$a$ 表示一个越流含水层中的地下水流，承压含水层厚度为 $M$，上下分别有一个厚为 $m_1$ 和 $m_2$、渗透系数为 $K_1$ 和 $K_2$ 的弱透水层，弱透水层的外面又分别上覆和下伏有潜水层和承压含水层。

在其中取一均衡单元体(图 1-43$b$)。根据水均衡原理可写出它的连续方程

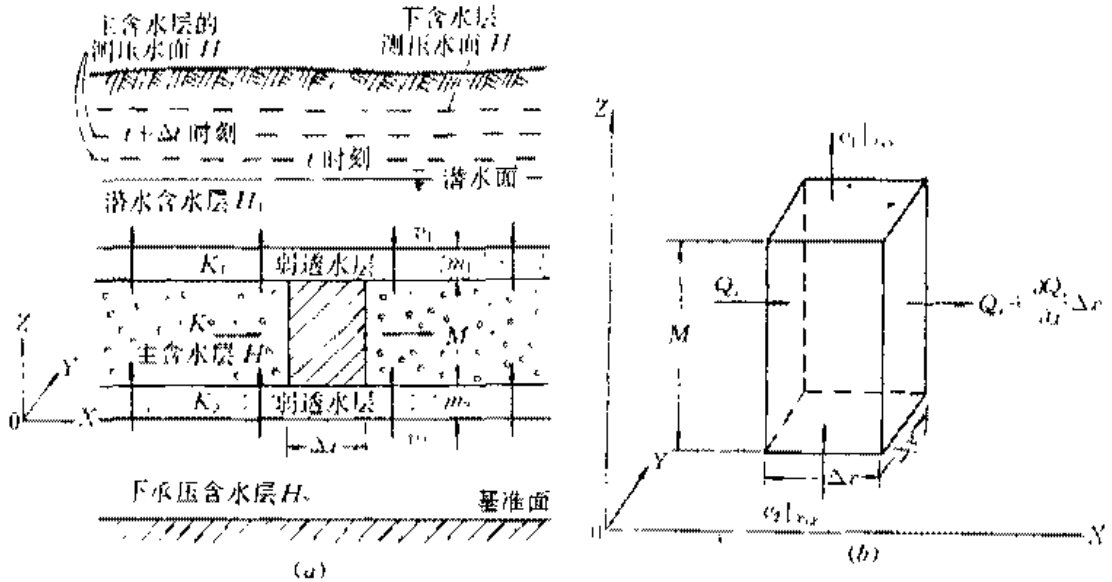



图 1-43　越流含水层中的水流

(据 J·Bear 修改)

$$[Q_x-(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}\Delta x)]\Delta t+[Q_y-(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Delta y)]\cdot\Delta t$$

$$+(v_1+v_2)\Delta x\Delta y\Delta t=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t}\Delta x\Delta y\Delta t \tag{1-116}$$

式中 $v_1$、$v_2$ 分别为通过上部和下部弱透水层的垂直越流强度，流入越流层取正值，从越流层流出时取负值。

由 Darcy 定律

$$v_1=-K_1\frac{\partial H_1}{\partial Z}=K_1\frac{H_1-H}{m_1}$$

$$v_2=-K_2\frac{\partial H_2}{\partial Z}=K_2\frac{H_2-H}{m_2}$$

其中 $H_1$ 和 $H_2$ 分别为上含水层(潜水)和下含水层中的水头。而主含水层中

$$Q_x=-T\frac{\partial H}{\partial x}\Delta y;\quad Q_y=-T\frac{\partial H}{\partial y}\Delta x$$

把它们代入式(1-116)，化简后，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y})+K_1\frac{H_1-H}{m_1}+K_2\frac{H_2-H}{m_2}=\mu^*\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-117}$$

这就是非均质各向同性越流含水层中不计弱透水层弹性释水时地下水非稳定运动的基本微分方程。不论是抽水时上下含水层补给主含水层，还是相反情况都适用。

对于均质各向同性含水层，有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{K_1}{Tm_1}(H_1-H)+\frac{K_2}{Tm_2}(H_2-H)=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-118}$$

或

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{H_1-H}{B_1^2}+\frac{H_2-H}{B_2^2}=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial H}{\partial t} \tag{1-119}$$

式中

$$B_1=\sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}},\quad B_2=\sqrt{\frac{Tm_2}{K_2}} \tag{1-120}$$

$B_1$、$B_2$ 分别称为上下弱透水层的越流因素。

越流因素 $B$ 是一个重要的水文地质参数，量纲[$L$]。从上式可以看出，弱透水层的渗透性越小，厚度越大，$B$ 越大，越流量越小；对于完全隔水的弱透层来说，$B$ 为无穷大。反映越流能力的另一个参数称越流系数 $\sigma'$，定义为

$$\sigma'=\frac{K_1}{m_1} \tag{1-121}$$

式中 $K_1$、$m_1$ 为某弱透水层的渗透系数和厚度。$\sigma'$ 表示当含水层和供给越流的另一个含水层之间的水头差为一个长度单位时，通过此含水层和弱透水层之间单位面积界面上的水流量。显然，$\sigma'$ 越大，通过弱透水层的越流量越大。

5. 定解条件

上面我们建立了不同类型的地下水基本微分方程，用一个基本微分方程描述了整个一大类地下水运动的规律。也就是说，同一类地下水(如承压水、潜水或半承压水)，不论在何时何地都满足相应的基本方程。但是不同地区，不同时间同一类地下水的水头，流量可能有天壤之别，这就是说同一个基本方程的解不是唯一的。这是因为一个具体问题的渗流特征，不仅取决于它本身变量之间的关系，还受渗流区的外部环境(边界条件)及渗流区的初始条件

的影响。因此，为了确定与具体问题对应的解(唯一的)，除了描述它的基本微分方程外，还必须给出方程的定解条件。

定解条件包括初始条件和边界条件。

1)初始条件　是给定某一个选定的时刻(记为 $t=0$)渗流区上各点的水头值 $H$(或降深值 $S$)，如对于三维流，记为

$$H(x,y,z,0)=H_0(x,y,z) \tag{1-122}$$

或

$$S(x,y,z,0)=S_0(x,y,z) \tag{1-123}$$

其中 $H_0$、$S_0$ 为 $D$ 上水头、降深的已知函数。

初始时刻可根据需要选取先于计算时间的某一个瞬时，不一定是抽水开始时间，也不要把初始水头状态理解为地下水开发前的原始状态。

2)边界条件　系指渗流区边界上水头或流量所满足的条件，反映渗流区周围环境对渗流的影响。边界条件有三类：

(1)第一类边界条件(Dirichlet 条件)：已知水头或水头随时间变化的边界称为第一类边界或给定水头边界。记为

$$H(x,y,z,t)\big|_{S_1}=\varphi_1(x,y,z,t),(x,y,z)\in S_1 \tag{1-124}$$

或

$$H(x,y,t)\big|_{\Gamma_1}=\varphi_2(x,y,t),(x,y,t)\in \Gamma_1 \tag{1-125}$$

式中 $H(x,y,z,t)\big|_{S_1}$、$H(x,y,t)\big|_{\Gamma_1}$ 分别表示点 $(x,y,z)$ 和点 $(x,y)t$ 时刻在三维渗流区和二维渗流区边界上的水头。$\varphi_1(x,y,z,t)$、$\varphi_2(x,y,t)$ 为已知函数或数值。若第一类边界上水头是不随时间变化的常数时，称定水头边界。定水头边界是给定水头边界的一个特例，给定水头边界不一定是定水头边界。

切穿含水层并且与含水层有通畅的水力联系的河流、湖泊、富水断裂带、未疏干的泉水溢出带等可作为给定水头边界处理。有时也可利用观测孔资料，根据降深规律人为的划定一条一类边界，定降深抽水时，井壁可作为定水头内边界处理。

(2)第二类边界条件(Neuman 条件)：已知流量或流量变化的边界，称为第二类边界或给定流量边界。记为

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{S_2}=q_1(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in S_2 \tag{1-126}$$

或

$$T\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\Gamma_2}=q_2(x,y,t),\ (x,y)\in \Gamma_2 \tag{1-127}$$

式中 $n$ 为三维流边界 $S_2$ 和二维流边界 $\Gamma_2$ 的外法线方向，$q_1$ 和 $q_2$ 为已知函数，表示 $S_2$ 上单位面积和 $\Gamma_2$ 上单位宽度的侧向流量，流入取正值，流出取负值。

常见的第二类边界是隔水断层和地下水分水岭组成的隔水边界($\frac{\partial H}{\partial n}=0$)；定流量抽水井井壁也可作为二类内边界处理，此时 $n$ 指向井轴，$\frac{\partial H}{\partial n}$ 为负，故

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=-\frac{Q}{2\pi r_w} \tag{1-128}$$

(3)第三类边界条件：若某段边界上 $H$ 和 $\frac{\partial H}{\partial n}$ 的线性组合

$$\frac{\partial H}{\partial n}+\alpha H=\beta \tag{1-129}$$

为已知，这类边界称第三类边界或混合边界。式中 $\alpha$、$\beta$ 为边界上已知函数。

弱导水的断层带可作为这类边界(图 1-44)。当左边含水层井排抽水时，由于弱透水断

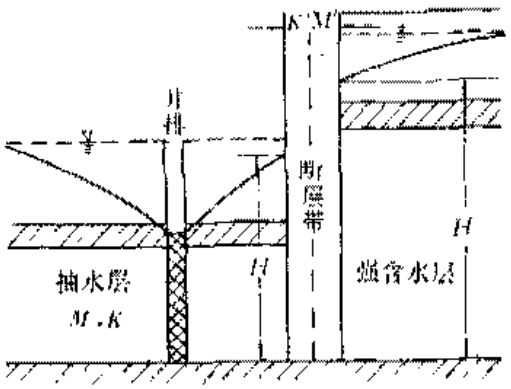



图 1-44　第三类边界示意图(J·Bear 修改)

层的阻力影响，在其两侧造成"跌水"，即水位陡坎。若不计弱透水带的贮存水量变化，则有

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{S_3}=\frac{K'}{m'}(H_1-H)=q(x,y,z,t)$$

即

$$K\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{S_3}-\frac{K'}{m'}(H_1-H)=0$$

令 $\sigma'=\frac{m'}{K'}$，则

$$K\frac{\partial H}{\partial n}-\frac{H_1-H}{\sigma'}=0 \quad 在 S_3 上 \tag{1-130}$$

对于二维流

$$T\frac{\partial H}{\partial n}-M\frac{H_1-H}{\sigma'}=0 \quad 在 \Gamma_3 上 \tag{1-131}$$

式(1-130)、(1-131)即为第三类边界条件。式中 $K'$、$m'$ 和 $H$、$H_1$ 分别为弱透水带的渗透系数、厚度和内、外侧水头。$q$ 为单位面积上的侧向补给量。

综上所述，描述地下水运动的确定性数学模型由描述这类地下水运动规律的基本微分方程及其与渗流问题相应的定解条件(边界条件及初始条件)组成。但是对于稳定流问题，由于渗流特征与时间无关，初始条件就不需要了。以后各章将讨论常见数学模型的解。

**三、数学模型的解法**

对实际渗流问题进行分析，给出了数学模型之后，在解模型之前还必须对其进行校正。由于地质条件极为复杂，认识也不可能一次完成，给出的基本方程、定解条件、参数值不一定能与实际相符，因此必须对初步给的模型进行检验，即用模型预测计算与试验(抽放水试验等)资料比较，看是否一致。若不一致，必须对模型进行修改，直到满意为止。这一步骤称为模型校正或模型识别。

校正后的数学模型就是实际问题(又称定解问题)的复制品了，可以用来进行预测计算了。若已知参数($T$、$\mu^*$ 等)和定解条件，就可以求解水头，这类问题称正问题或水头预报问题。如果利用抽放水动态资料反过来求水文地质参数，这类问题称逆问题或反求参数问题。

数学模型的解法有三种：

1. 解析法

主要用数学物理方法解数学模型，得到地下水流中各变量（$H$、$Q$、$T$、$\mu^*$等）之间关系的解析表达式，通常称为解析解或精确解。解析解应用起来比较简便。本书主要研究解析解。但解析法有很大的局限性，只适用于含水层形状规则、边界条件简单等情况，如均质各向同性、等厚含水层，具有直线性、圆形等边界条件时。对于非均质各向异性含水层，边界不规则、几种边界同时存在时，往往找不到解析解。实际问题一般都很复杂，这就限制了解析法的使用。

2. 数值法

数值解法求得的解称为数值解，它是一种近似解。目前常用的数值法有有限差分法、有限单元法等。

数值法就是用离散化方法，首先把渗流区剖分成若干子区（单元），每个子区视为均值的，从而把非均质渗流区按子区均质化；求解渗流区上的连续水头分布转化为求各结点（单元顶点或形心）的水头；第二步在离散化的基础上，把偏微分方程及边界条件转化为线性代数方程组，解此方程组，得到各结点上水头近似值。

数值法已成为求解复杂的地下水运动问题的重要方法。

3. 实验模拟法

利用其它物理现象（如电流）和渗流的相似性，用模拟实验的方法求解（详见第七章）。

**思考题**

1. 弹性释水与重力疏干排水有何区别？
2. 对于非均质各向异性越流含水层，式(1-117)应如何写？
3. 计算边界如何决定？

# 第二章　地下水在含水介质中的运动

## 第一节　非饱和带中的地下水运动

非饱和带(或称包气带)是指从地表向下到潜水面的地层区间。当大气降水、灌溉回渗等补给潜水时，补给水都要通过非饱和带。另外，堆放在地面的固体垃圾、农药、化肥等都会污染地表水，随入渗向下转移，在非饱和带发生了扩散、吸附等物理化学作用。因此，要了解潜水入渗补给、污染物的运移和富集情况，必须研究地下水在包气带的运动。

### 一、基本概念

非饱和带与饱和带不同，它的空隙一部分为水占据，一部分为空气充填。某一时间、多孔介质某一点的相对含水量，用含水率 $\theta$ 和饱和度 $S_w$ 表示

含水率 $\theta$：表示单位体积的介质中水的体积。

$$\theta = \frac{V_{w0}}{V_0} \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant n \tag{2-1}$$

饱和度 $S_w$：表示单位体积空隙中水的体积

$$S_w = \frac{V_{w0}}{V_{v0}} \qquad 0 \leqslant S_w \leqslant 1 \tag{2-2}$$

式中　$V_0$——以 $P$ 为重心的表征性体积元体积；

$V_{w0}$——单元体中水的体积；

$V_{v0}$——单元体中空隙体积。

$\theta$、$S_w$ 均无量纲，二者之间的关系为

$$\theta = n S_w \tag{2-3}$$

式中　$n$——孔隙度。

田间持水量 $\theta_s$：重水排水已终止后，单位体积介质中仍持有的水量体积。此时水以薄膜水或在颗粒接触点附近以孤立的悬挂环形式出现。显然孔隙度 $n$ 减去田间持水量就等于排水孔隙度，即重力排水时的有效孔隙度 $n_e$。

下面讨论非饱和流动中的给水度概念。

首先考查一下当潜水面下降时，潜水层排水的机理。图 2-1 是装满均质砂的砂柱，底部与一个充满水的排水管连接，最初砂被水饱和，且上面有一层厚为 $a$ 的自由水层。当排水管水位在 Ⅰ 时，砂呈饱和状态，砂表面的压力水头为 $h=a$。水位下降到 Ⅱ 时，自由水层已排完，砂表面水的压力为一个大气压，压力水头 $h=0$，水-大气界面没有压力差，因此界面是光滑的水平面(图 2-2，Ⅰ)；当水位位于 Ⅲ 时，出现负压水头($h=-b$)，上部砂层中的水被吸入孔隙中，形成弯曲界面(弯月面)，界面的曲率半径大小取决于负压值(图 2-2，Ⅱ)，排水管水位于 Ⅳ、Ⅴ 的情况与 Ⅲ 相似，只是负压更大。大的负压要求曲率大的弯月面与其平衡。大曲率

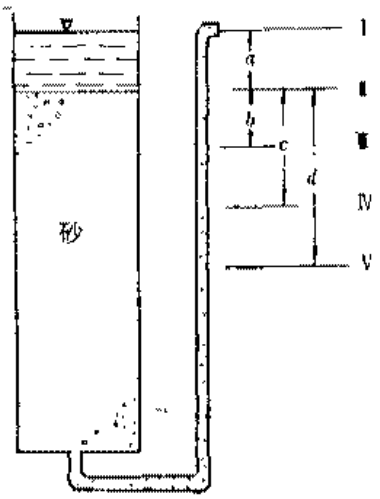



图 2-1　砂柱模型
（据 Gillham）

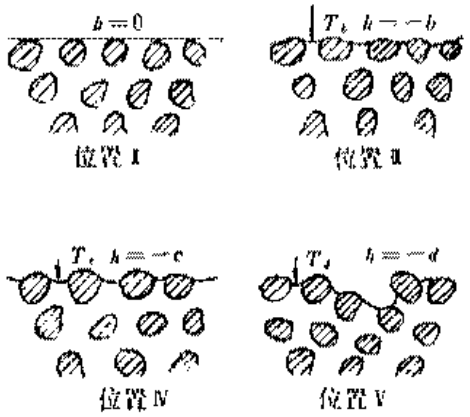



图 2-2　出水管不同位置时(图 2-1)空气-水界面示意图
（据 Gillham）

的弯月面只有在小孔隙中才能形成，当孔隙较大时，形成的弯月面不能与高负压平衡，就开始排水，而后，随负压不断增加，较小的孔隙也开始排水了。假如孔隙大小完全一致，则在一定负压下会突然同时排出其中的水(孤立的悬挂水等除外)。通常，孔隙的大小总是不同的，排水是一个连续的过程。

图 2-3 绘出了排水和吸湿过程中毛管水头 $h_c$ 与含水率 $\theta$ 关系的典型曲线。它反映了包气带中水的基本特征，称为水分特征曲线。从曲线中可以看出，即使在相当大的压强下，土中仍保持一部分水不能排出，含水率不再减小，这部分水称残留水，残留含水率记为 $\theta_0$，残留饱和度 $S_{w_0}=\frac{\theta_0}{n}$，同时，不同毛细压强或毛细水头，土的含水率不同。

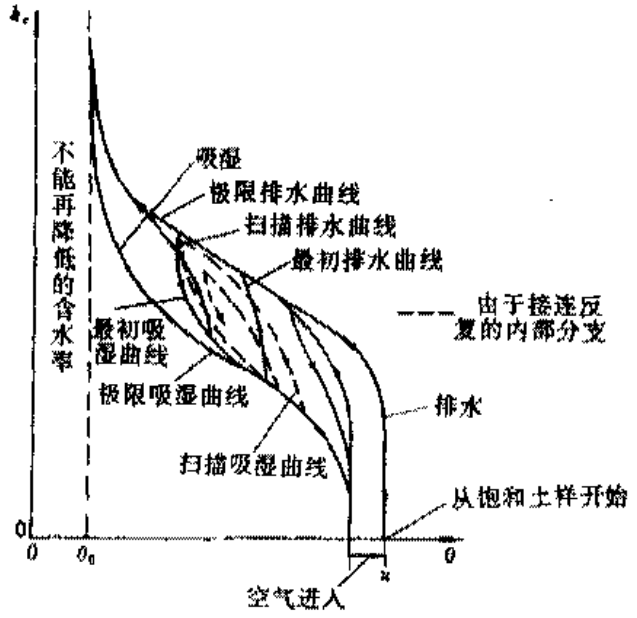



图 2-3　吸湿和排水情况下水分分布特征曲线
（据 J. Bear）

当潜水面下降时，水并不能同时全部排出，仍有部分水存在非饱和带中。在非饱和带渗流研究中，给水度是指当地下水位下降一个单位时，从地下水位延伸到地表的单位水平面积土柱中排出的水的体积。用公式表示（坐标原点取在地面）如下：

$$\mu(d',d'',t)=\frac{V_s}{d''-d'}$$

$$=\frac{1}{\Delta h}\left[n\Delta h+\int_{Z'=-d'}^{Z'=0}\theta'(Z',t)\mathrm{d}Z'-\int_{Z''=-d''}^{Z''=0}\theta''(Z'',t)\mathrm{d}Z''\right] \tag{2-4}$$

式中 $\mu(d',d'',t)$——给水度；

$V_s$——排出的水体积；

$d'$——排水前的潜水面深度；

$d''$——排水后的潜水面深度；

$\theta'(Z',t)$——排水前的含水率；

$\theta''(Z'',t)$——排水后的含水率；

$\Delta h$——$d''-d'$。

从式(2-4)式可知，给水度是时间及潜水面埋深的函数。图 2-4 给出了它们之间的关系。当潜水面埋藏足够深时（图 2-4a），对于均质各向同性土，两条曲线 $\theta'=\theta'(Z',t)$和 $\theta''=\theta''(Z'',t)$交于 $\theta_0$，因而给水度 $\mu=n-\theta_0$，当潜水面较浅时（图 2-4b），排水前后两条曲线形状不同，得出的给水度是小于第一章的定义值。

同时，由图 2-4c 可知，给水度是 $t$ 的函数，当 $t$ 足够长时，才趋于一个常数值。

毛管水头：当两种不相混溶的流体（如水和空气）相接触时，界面两侧压力不连续，存在压力差，对于非饱和带孔隙中水和气而言，这个压力差称为毛管压强，并有关系式

$$P_c=P_a-P_w>0 \tag{2-5}$$

式中 $P_c$——毛管压强；

$P_a$——空气压强；

$P_w$——水压强。

假定孔隙中空气的压强为一个大气压，并以大气压作为测量压强的基点（即 $P_a=0$），于是

$$P_c=-P_w$$

同时，由式(2-5)可知，非饱和带中水的压强小于 1 个大气压。

仿照饱和水流的情况，非饱和带中水流的水头（毛管水头）$H$ 用下式表示

$$H=Z+\frac{P_w}{\gamma}=Z-\frac{P_c}{\gamma}=Z-h_c\quad(P_c>0) \tag{2-6}$$

式中 $\gamma$——水的容量；

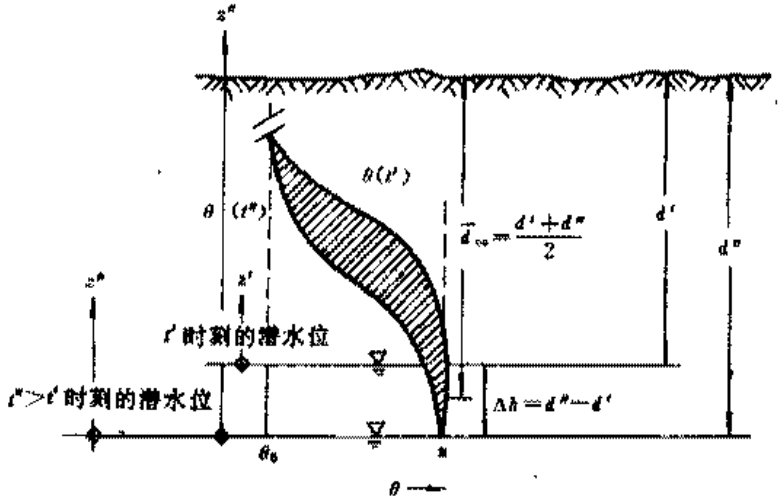
$h_c=\frac{P_c}{\gamma}=-\frac{P_w}{\gamma}$——毛管压力水头。

如果用符号 $\psi$ 表示压力水头负值，即 $\psi=-\frac{P_w}{\gamma}>0$，则

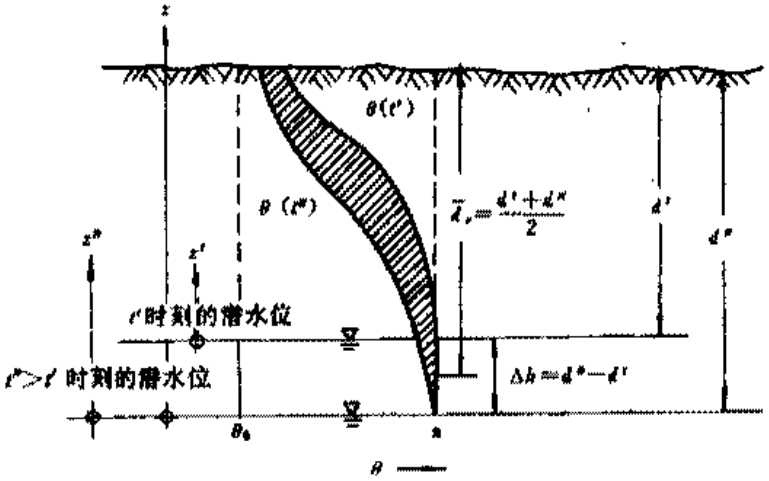
$$H=Z-\psi \tag{2-7}$$

对于饱和-非饱和流动，可以写出统一的水头表达式

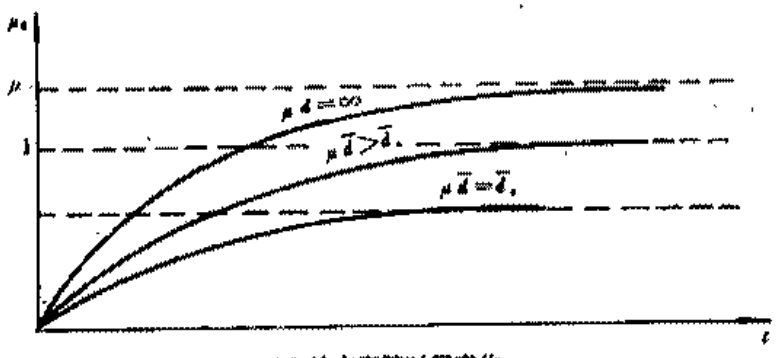
$$H=Z+\frac{P}{\gamma} \tag{2-8}$$




(a) 潜水面埋深大时




(b) 潜水面埋深小时




(c) 给水度随时间变化

图 2-4　潜水埋深和时间对给水度的影响

(据 J. Bear)

式中，$P$ 在饱和带取水的压强，为正；在非饱和带取毛管压强 $P_c$ 的负数，为负值。

二、运动方程

非饱和带水的运动，A. Richards 认为仍符合达西定律，但非饱和带中渗透系数 $K$ 不再是常数，而是土壤含水量$(\theta, S_w)$的函数。这样，由 Darcy 定律得

$$v = K(\theta) j$$

$v$ 在三个坐标轴上的分量为

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial x} \\ v_y &= -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial y} \\ v_z &= -K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2-9}$$

式(2-9)为非饱和带中水的运动方程。负号表示水流运动方向与水头增加方向相反。

用渗透率表示，则有

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -\frac{k(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial x} \\ v_y &= -\frac{k(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial y} \\ v_z &= -\frac{k(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2-9'}$$

也可用相对渗透率表示

$$\left.\begin{aligned} v_x &= -k\frac{k_r(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial x} \\ v_y &= -k\frac{k_r(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial y} \\ v_z &= -k\frac{k_r(S_w)\gamma}{\mu}\frac{\partial H}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{2-9''}$$

式中 $k$——饱和土的渗透率；

$k(S_w)$——非饱和土的渗透率，饱和度 $S_w$ 的函数；

$k_r(S_w)=\dfrac{k(S_w)}{k}$——相对渗透率；

$\mu$——水的动力粘滞系数。

相对渗透率为非饱和土的渗透率与同种土的饱和渗透率的比值，它也是饱和度的函数。当饱和度降低时，首先大孔隙排水、小孔隙为水流通道，随着不断排水，通道越来越小，越来越弯曲，同时颗粒近处粘滞力越来越大，这样非饱和带的渗透系数、渗透率、相对渗透率都将迅速变小。

三、基本微分方程

根据水均衡原理，将连续方程式(1-93)的 $n$ 以含水率 $\theta$ 代替，同时非饱和流中一般不计 $\Delta x\Delta y\Delta z$ 随时间变化，于是就有

$$-\left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}\right]=\frac{\partial(\rho\theta)}{\partial t} \tag{2-10}$$

由于非饱和带中，水密度 $\rho$ 变化很小，可视为常数，并将式(2-9)代入，上式则变为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial y}]+\frac{\partial}{\partial z}[K(\theta)\frac{\partial H}{\partial z}] \tag{2-11}$$

式(2-11)即为非饱和流的基本微分方程，称为 Richards 方程。

式(2-11)可以写成其他形式：

若将 $H=Z-h_c$ 代入，上式可改写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x}[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x}]-\frac{\partial}{\partial y}[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y}]$$

$$-\frac{\partial}{\partial z}[K(\theta)\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}\frac{\partial\theta}{\partial z}]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial z} \tag{2-11'}$$

式中，$-\frac{\mathrm{d}h_c}{\mathrm{d}\theta}=\frac{1}{C}$，$C=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h_c}$。$C$ 为容水度，表示毛管压力水头变化一个单位时含水率 $\theta$ 的变化。显然，$C$ 是 $\theta$ 的函数，即 $C=C(\theta)$。若令

$$D(\theta)=\frac{K(\theta)}{C(\theta)}=-K(\theta)/\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}h_c}$$

则基本方程(2-11)可改写为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}]+\frac{\partial}{\partial y}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial y}]+\frac{\partial}{\partial z}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}]+\frac{\partial K(\theta)}{\partial Z} \tag{2-11''}$$

式中，$D(\theta)$是非饱和带渗透系数和容水度之比，称为扩散系数，$[L^2T^{-1}]$，在数学意义上同电、热扩散系数、含水层扩散性($a=\frac{T}{\mu^*}$)相似。

上述基本微分方程都是非线性的，$K(\theta)$、$D(\theta)$都与含水率 $\theta$ 有关，只有在简单的情况下才有解析解。本节介绍垂直入渗模型及其在某种特定条件下的解。

**四、数学模型及其解**

1. 垂直入渗时的数学模型

垂直入渗时，为沿 $Z$ 轴向下的一维流，由式(2-11'')，此时基本方程为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}[D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial z}]-\frac{\partial K(\theta)}{\partial Z} \qquad \text{(负号表示 } Z \text{ 向下)}$$

初始条件：$\theta(Z,0)=\theta_0 \quad Z\geqslant 0,\ t=0$

$\theta_0$ 为入渗前非饱和带中土壤平均含水率。

边界条件：上部边界指地面，不同的入渗条件，上边界的含水率不同。对于大雨或灌溉后，可以认为边界具有饱和含水率 $\theta_s$，于是

$$\theta(0,t)=\theta_s$$

下部边界指非饱和带下界面。当潜水面很深时，认为下渗水在研究的时间内一直不能到达潜水面，此时边界条件为

$$\theta(\infty,t)=\theta_0$$

当潜水面深度 $L$ 不大时，潜水面即为下界面，相应的边界条件为

$$\theta(l,t)=\theta_s$$

2. Green-Ampt 模型及其解

1911 年 Green-Ampt 提出了简单的垂直入渗模型。它假定：

(1)地表积水层厚度为 $H_s$，为有压入渗；

(2)入渗水达到的前缘为一明显湿润锋面，锋面上的毛管水头都是 $hc$；

(3)锋面后土壤饱和，含水率为 $\theta_s$，渗透系数 $K(\theta_t)=K$，入渗前土壤含水率为 $\theta_0$。

若原点放在地表，$Z$ 向下为正(图 2-5)，由 Dupuit 公式，单位面积的入渗水量

$$q_i = K\frac{H_a + h_c + Z}{Z}$$

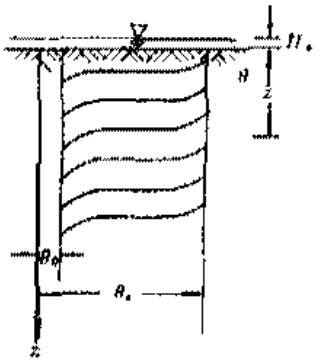


图 2-5 Green-Ampt 模型

该时段内土体增加的水量为

$$q = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\Delta\theta = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(\theta_s - \theta_0)$$

根据水均衡原理，$q_i=q$，即

$$K\frac{H_a + h_c + Z}{Z} = \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(\theta_s - \theta_0) \qquad (2\text{-}12)$$

为了求解入渗过程中单位面积入渗量 $q_i$、入渗深度 $Z$、入渗总量 $V_t$ 与时间 $t$ 的关系，对上式，在 $t$:0→$t$，$Z$:0→$Z$ 积分，得

$$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{K}\left[Z - (H_a + h_c)\ln\frac{H_a + h_c + Z}{H_a + h_c}\right] \qquad (2\text{-}13)$$

式中 $Z$——$t$ 时刻入渗深度；

$t$——入渗时间。

当上覆水层很薄时，$H_a\to 0$，由式(2-13)

$$t = \frac{\theta_s - \theta_0}{K}\left[Z - h_c\ln\frac{h_c + Z}{h_c}\right] \qquad (2\text{-}14)$$

入渗之初，$H_a+h_c\approx H_a+h_c+Z$，由式(2-12)

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} = \frac{K}{\theta_s - \theta_0}\cdot\frac{H_a + h_c}{Z} \qquad (2\text{-}15)$$

解得：

$$\left.\begin{aligned} Z &= \sqrt{\frac{2K}{\theta_s - \theta_0}(H_a + h_c)t} \\ q_i &= \sqrt{\frac{K(\theta_s - \theta_0)(H_a + h_c)}{2t}} \\ V_t &= \int_0^t q_i\mathrm{d}t = \sqrt{2K(\theta_s - \theta_0)(H_a + h_c)t} \end{aligned}\right\} \qquad (2\text{-}16)$$

式中 $q_i$——入渗率，即单位时间单位面积上的入渗量；

$V_t$——$t$ 时段内单位面积上入渗总量；

其他符号同前。

从上式可以看出，在入渗初期入渗深度 $Z$ 和入渗总量 $V_t$ 与 $\sqrt{t}$ 成正比，而入渗率 $q_i$ 与 $\sqrt{t}$ 成反比。

研究证明，Green-Ampt 模型具有一定的实际意义。

**思考题：**

1. 土壤水分特征曲线的滞后现象中，为什么排水曲线总是位于吸湿曲线的上方？
2. 非饱和带中，某一点的渗透率是否常数？为什么？

## 第二节　潜水含水层中的地下水运动

### 一、潜水含水层中地下水的稳定运动

天然状态下，由于大气降水的入渗补给、蒸发、排泄以及其他因素的影响，地下水在潜水含水层中的运动多为非稳定运动。但是，在某一时段内，当地下水的水位变化不大时，也可近似地视为稳定运动。

潜水的天然状态稳定运动可以归结为河间地块地下水的稳定流模型之中。

1. 水文地质模型(图 2-6)

研究时，作以下假定：

(1)潜水含水层均质各向同性，隔水底板水平；

(2)两条平行排列，相距为 $l$ 的河流切割潜水含水层；

(3)两河流水位稳定，分别为 $h_1$ 及 $h_2$；

(4)含水层上部有大气降水的均匀入渗补给，强度为 $W$；

(5)潜水流符合 Dupuit 假设。

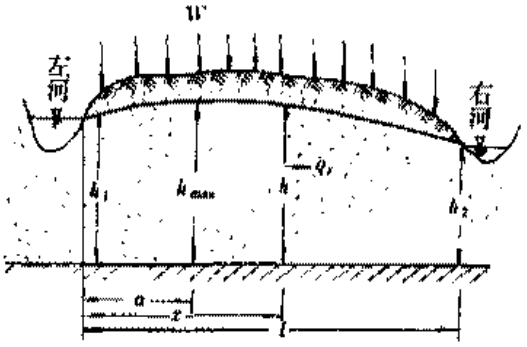


图 2-6　河间地块潜水的运动

2. 数学模型及其解

根据所给条件，描述上述水文地质模型的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(h\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}\right)+\dfrac{W}{K}=0 \\ h|_{x=0}=h_1 \\ h|_{x=l}=h_2 \end{cases} \tag{2-17}$$

对(2-17)式积分，得通解

$$h^2=-\frac{W}{K}x^2+C_1x+C_2 \tag{2-18}$$

根据边界条件，求得积分常数 $C_1$、$C_2$ 为

$$C_1=h_1^2;\quad C_2=\frac{h_2^2-h_1^2}{l}+\frac{W}{K}l$$

将 $C_1$、$C_2$ 值代入式(2-18)得

$$h^2=h_1^2+\frac{h_2^2-h_1^2}{l}x+\frac{W}{K}(l-x)x \tag{2-19}$$

式(2-19)即为河渠间有入渗或蒸发(入渗时 $W$ 取正；蒸发时 $W$ 取负)时，潜水流的浸润曲线方程(或称为水头方程)。若已知含水层的渗透系数 $K$、降水入渗强度 $W$，两河流(或两个任意断面的)水位 $h_1$、$h_2$，就可预测两断面间任一位置的水头值 $h$。

利用式(2-19)，还可以求出河间地块任一断面的单宽流量表达式。

根据 Darcy 公式，任一断面的单宽流量 $q_x$ 为

$$q_x = -Kh\frac{dh}{dx} \tag{2-20}$$

为了确定 $h\frac{dh}{dx}$，对式(2-19)求导，得

$$h\frac{dh}{dx} = \frac{h_2^2 - h_1^2}{2l} + \frac{W}{2K}(l - 2x) \tag{2-21}$$

将式(2-21)代入式(2-20)，得

$$q_x = -K\left[\frac{h_2^2 - h_1^2}{2l} + \frac{W}{2K}\right](l - 2x)$$

$$= K\frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} + Wx - \frac{1}{2}Wl \tag{2-22}$$

式(2-22)即为河渠间任一断面处单宽流量计算公式。

3. 解的讨论

1)潜水天然流的 Dupuit 公式

在公式(2-19)和式(2-22)中，令 $W=0$，得到

$$h^2 = h_1^2 - \frac{h_1^2 - h_2^2}{l}x \tag{2-23}$$

$$q = K\frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \tag{2-24}$$

即为潜水天然流的 Dupuit 公式，模型如图 2-6 所示。可见，这时的潜水流水头方程已不是椭圆方程，而是抛物线方程。通过任一断面的流量是一个常量。

应该指出的是，在推导潜水天然流的公式时，要用到 Dupuit 假设，即忽略了流速的垂直分量，因而利用式(2-23)计算的水头降落曲线与实际曲线有偏差。一般情况下，理论曲线较实际曲线偏低。但利用式(2-24)计算的流量却是符合实际的。

2)地下水分水岭的位置

当 $W>0$ 时，一般情况下河渠间会出现分水岭。只有当两河流水位差很大、$W$ 很小时，才有可能不出现分水岭。

地下水的分水岭是水头最高的位置，所以可以通过对式(2-19)求极大值的方法，求出分水岭($x=a$)的位置。对式(2-19)求导得到式(2-21)。令$\frac{dh}{dx}=0$，得

$$a = \frac{l}{2} - \frac{K}{W}\frac{h_1^2 - h_2^2}{2l} \tag{2-25}$$

根据式(2-25)可知，分水岭的位置取决于两河流的水位、水位差、含水层的渗透系数以及 $W$ 的大小。

(1)当 $h_1=h_2$ 时，$a=\frac{l}{2}$，分水岭位于两河中央；

(2)当 $h_1>h_2$ 时，$a<\frac{l}{2}$，分水岭靠近左河；

(3)当 $h_1<h_2$ 时，$a>\frac{l}{2}$，分水岭靠近右河；。

由此可见，分水岭的位置总是靠近水位高的河流一侧。另外，当两河水位差越大，$K$ 越大及 $W$ 越小时，分水岭偏移中央位置的程度也越大。

3)河流渗漏或补给量的计算

(1)当河间地块存在分水岭(即 $a>0$)时,引起潜水含水层中地下水运动的水流全部来自大气降雨的入渗量(即 $q_{入}=Wl$)。水流自分水岭向两河运动。

流入左河的流量 $q_0=-aW$

流入右河的流量 $q_l=(l-a)W$

(2)前已谈过,在某些情况下,也可能不出现分水岭,即 $a=0$ 或 $a<0$ 的情形,这时,两河的流量是怎样的呢?

①当 $a=0$ 时,分水岭恰好位于左河边界。这时

$q_0=0$,左河既不接受补给,也无水量流出,处于极限状态。

$q_l=Wl$,右河的补给量全部来自大气降雨的入渗。

②当 $a<0$ 时,不存在分水岭。

$$q_0=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}-\frac{Wl}{2} \tag{2-26}$$

$$q_l=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}+\frac{Wl}{2} \tag{2-27}$$

通过以上分析,可以获得判断水库渗漏问题的重要因素。设左河为一水库,则有:

$a>0$,水库无渗漏,有补给量 $Wa$;

$a=0$,水库无渗漏,无补给量;

$a<0$,水库有渗漏,渗漏量为:

$$q_0=K\frac{h_1^2-h_2^2}{2l}-\frac{Wl}{2} \quad (即式(2-26)$$

将式(2-26)与式(2-24)进行比较,可以发现,当其他条件相同时,有入渗时水库的渗漏量要比无入渗时水库的渗漏量相应地减少$\frac{Wl}{2}$,所以 $W$ 愈大,$l$ 愈大时,渗漏量就愈小。此外,含水层的渗透系数 $K$ 及邻近河渠的水位等也是应考虑的因素。

4)确定排水渠道的合理间距

在农田水利建设中,需要进行引渠灌溉;而对于土地复垦的采矿沉陷区,常需挖渠排涝,将地下水水位或者说将地下水分水岭控制在一定的高度内,以避免积水和土壤沼泽化。为此,可利用式(2-19)计算出排水渠的合理间距。

如果所布置的排水渠道尺寸相同,水位也一致($h_1=h_2$),那么,分水岭的位置也必然位于$\frac{l}{2}$处。在式(2-19)中,将 $h_1=h_2=h_0$,$a=\frac{l}{2}$,分水岭的水位 $h=h_{max}$ 代入即得

$$l=2\sqrt{\frac{K}{W}(h_{max}^2-h_0^2)} \tag{2-28}$$

上述结果表明,在一定的水位条件下,入渗强度愈大,含水层的渗透性愈弱,排水渠的合理间距就愈小。

## 二、潜水含水层中地下水的非稳定运动

当河渠水位发生变化时,河间地块含水层的水位会发生相应的变化,这种变化是随河渠水位变化特征的不同而不同的。一般来说可以归为两种简单的情况:(1)河水位瞬时变化至一定值;(2)河渠水位不断变化。

### (一)河渠水位瞬时变化至一定值时,河渠间地下水的非稳定运动

1. 水文地质模型(图 2-7)

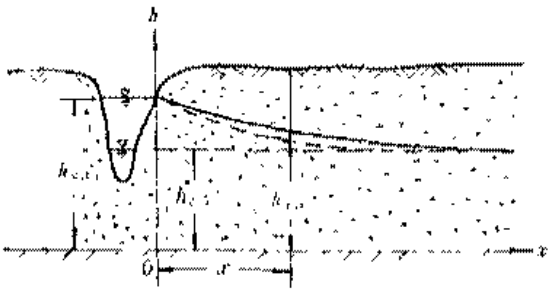


图 2-7 河渠水位迅速上升时河渠附近潜水的非稳定运动

(1)潜水含水层均质,各向同性,侧向无限延伸,隔水底板水平;

(2)初始潜水面水平,无垂向补给量;

(3)平面上直线延伸的河渠切穿潜水含水层,河渠水位瞬时上升为定值;

(4)河渠间地下水为一维流动。

2. 数学模型及其解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} = \dfrac{K}{\mu}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(h\dfrac{\partial h}{\partial x}\right) \\ h|_{x=0} = h_{0,t} \\ h|_{x=\infty} = h_{0,0} \\ h|_{t=0} = h_{0,0} \end{cases} \tag{2-29}$$

此模型中 Boussinesq 微分方程为二阶非线性的偏微分方程,求解困难,常将它进行线性化:

若水位变化幅度不大,$\Delta h < 0.1h$ 时,括号内中因子 $h$ 视为常数,提到括号外,并用时段始、末水流厚度的平均值 $h_m$ 代替,微分方程化为

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{Kh_m}{\mu}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \tag{2-30}$$

这种方法称为 Boussinesq 方程的第一种线性化方法。

令 $\dfrac{K}{\mu}h_m = a$,则有

$$\frac{\partial h}{\partial t} = a\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

这样就得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial h}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2} & (2\text{-}31) \\ h(0,t) = h_{0,t} & (2\text{-}32) \\ h(\infty,t) = h_{0,0} & (2\text{-}33) \\ h(x,0) = h_{0,0} & (2\text{-}34) \end{cases}$$

这一模型的解为

$$h_{x,t} = h_{0,0} + \Delta h_{0,t}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\beta^2}d\beta \tag{2-35}$$

设
$$F(\lambda)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta=\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right) \tag{2-36}$$

其值列于表 2-1 中，则有

$$h_{x,t}=h_{0,0}+\Delta h_{0,t}F(\lambda) \tag{2-37}$$

式中 $F(\lambda)$——余误差函数。

若已知含水层的压力传导系数 $a$，要求任一时刻 $t$ 距河渠任一距离 $x$ 处由于河渠水位的突变所引起的潜水位的变化，则只需要求出 $\lambda=\frac{x}{2\sqrt{at}}$，查表 2-1 得 $F(\lambda)$，再代入公式(2-37)中即可求出要求的水位。

表 2-1　　$F(\lambda)$数值表

| $\lambda$ | $\lambda^2$ | $F(\lambda)$ | $\lambda$ | $\lambda^2$ | $F(\lambda)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03162 | 0.0010 | 0.9643 | 0.5000 | 0.25 | 0.4795 |
| 0.0400 | 0.0016 | 0.9549 | 0.6325 | 0.40 | 0.3711 |
| 0.0500 | 0.0025 | 0.9436 | 0.7746 | 0.60 | 0.2733 |
| 0.06325 | 0.0040 | 0.9287 | 0.8944 | 0.80 | 0.2059 |
| 0.07746 | 0.0060 | 0.9128 | 1.000 | 1.00 | 0.1573 |
| 0.08944 | 0.0080 | 0.8994 | 1.140 | 1.30 | 0.1069 |
| 0.1000 | 0.010 | 0.8875 | 1.265 | 1.60 | 0.0736 |
| 0.1265 | 0.016 | 0.8580 | 1.378 | 1.90 | 0.0513 |
| 0.1581 | 0.025 | 0.8231 | 1.483 | 2.20 | 0.0359 |
| 0.2000 | 0.040 | 0.7731 | 1.581 | 2.50 | 0.0254 |
| 0.2449 | 0.060 | 0.7291 | 1.643 | 2.70 | 0.0202 |
| 0.2828 | 0.080 | 0.6892 | 1.732 | 3.00 | 0.0143 |
| 0.3162 | 0.10 | 0.6548 | 1.789 | 3.20 | 0.0114 |
| 0.4000 | 0.16 | 0.5716 | | | |

3. 解的讨论

1)水位变化规律

(1)由式(2-36)可知，当 $x$ 一定时，$\lambda$ 值随时间 $t$ 的增大而减小，而 $F(\lambda)$值与 $\lambda$ 成反比，即 $t$ 增大，$F(\lambda)$将增大，故 $h_{x,t}$值也增大。表明同一过水断面处的水位随 $t$ 的增大而增大，符合非稳定运动的特征。

(2)当 $t$ 为一定值时，$\lambda$ 值则随距离 $x$ 的增大而增大，$F(\lambda)$则减小，$h_{x,t}$也将减小，表明同一时刻地下水的水位值距河渠越远，变化越小。

2)河渠补给量(或排泄量)的确定

利用式(2-35)我们可以求出河渠的单宽侧渗量。由 Darcy 定律

$$q=vh_m=-Kh_m\frac{\partial h_{x,t}}{\partial x} \tag{2-38}$$

式中 $h_m$——潜水含水层的平均厚度；

$h_{x,t}$——潜水含水层中的水头。

由 $$v=-K\frac{\partial h_{x,t}}{\partial x}=-K\frac{\partial}{\partial x}(\Delta h_{0,t}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\lambda}^{\infty}e^{-\beta^2}d\beta=K\frac{\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}e^{-\frac{x^2}{4at}} \tag{2-39}$$

得 $$q=Kh_m\frac{\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}e^{-\frac{x^2}{4at}} \tag{2-40}$$

根据式(2-40)，可知：

(1)当 $t$ 一定时，流量 $q$ 随距离 $x$ 的增大而减小，在 $x=0$ 处，流量 $q$ 值最大，其值为

$$q=Kh_m\frac{\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}$$

(2)当 $x$ 一定时，同一断面处的流量随时间的增大而减小。

(3)当河渠水位上升后 $t$ 时段内，河渠附近($x=0$)处地下水的单宽总补给量为

$$q_t=\int_0^t Kh_m\frac{\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}dt$$

$$=\frac{Kh_m\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}\int_0^t t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$=1.128\,Kh_m\Delta h_{0,t}\sqrt{\frac{t}{a}}$$

3)渗透速度的变化规律

根据式(2-39)，可以分析地下水在不同时间、不同距离的渗透速度的变化情况。

(1)同一时刻($t=c$ 时)，不同断面($x$ 变化)地下水的渗透速度是不同的。$x$ 越大，$v$ 越小；$x=0$ 时，$v$ 最大，其值为

$$v=\frac{K\Delta h_{0,t}}{\sqrt{\pi at}}$$

(2)同一过水断面处(即当 $x$ 一定时)。渗透速度将随时间 $t$ 的增大而减小。时间很长时(即 $t\to\infty$)。渗透速度也趋于零($v\to0$)。

4)求参

依据上述导得的公式以及动态观测资料，我们可以利用配线法反求含水层的水文地质参数(见第五章第四节)。

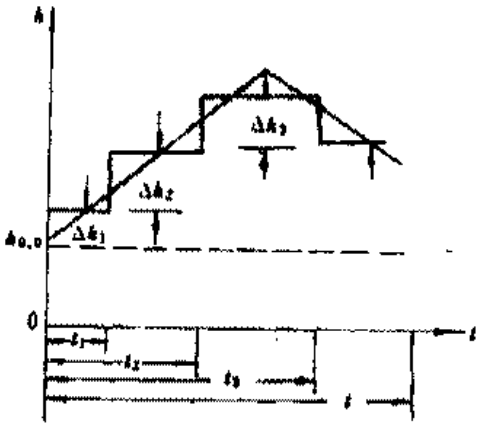



图 2-8 水位连续变化近似曲线

(二)河渠水位不断变化时河渠附近地下水的非稳定运动

在实际情况中，河渠的水位不可能长期保持不变，而是在不断地变化，这种变化常常是连续性的，如图 2-8 所示。为了计算方便，可假定这种变化是阶梯状变化的，这样一来就可以利用上述已推导的公式，将水位连续变化过程看作数个瞬时变化的叠加。

设在时间 $\Delta t$ 内($\Delta t_1=t-t_0$，$\Delta t_2=t-t_1$，……，$\Delta t_n=t-\Delta t_{n-1}$，$t_0=0$)，河渠水位的变化量为 $\Delta h$($\Delta h_1=h_{0,1}-h_{0,0}$，$\Delta h_2=h_{0,2}-h_{0,1}$，……，$\Delta h_n=h_{0,n}-h_{0,n-1}$)，所对应的含水层的水位增量为 $\Delta S$($\Delta S_1=h_{x,1}-h_{0,0}$，$\Delta S_2=h_{x,2}-h_{x,1}$，……，$\Delta S_n=h_{x,n}-h_{x,n-1}$)，则有

$$\Delta S_1 = \Delta h_1 F\left(\frac{x}{2\sqrt{a\Delta t_1}}\right)$$

$$\Delta S_2 = \Delta h_2 F\left(\frac{x}{2\sqrt{a\Delta t_2}}\right)$$

$$\Delta S_3 = \Delta h_3 F\left(\frac{x}{2\sqrt{a\Delta t_3}}\right)$$

……

$$\Delta S_n = \Delta h_n F\left(\frac{x}{2\sqrt{a\Delta t_n}}\right)$$

总水位变化量为各时段水位变化量之和

$$S = \Delta S_1 + \Delta S_2 + \Delta S_3 + \cdots\cdots + \Delta S_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i F\left(\frac{x}{2\sqrt{a\Delta t_i}}\right) \tag{2-41}$$

将 $S = h_{x,t} - h_{0,0}$，$\Delta t_i = t - t_{i-1}$，代入，得

$$h_{x,t} = h_{0,0} + \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i F\left(\frac{x}{2\sqrt{a(t - t_{i-1})}}\right) \tag{2-42}$$

此即为河渠水位连续变化时，任一时刻 $t$，距河渠任一距离 $x$ 处，含水层水位计算公式，与之相应的单宽流量计算公式为

$$q_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{Kh_m \Delta h_i}{\sqrt{\pi a(t - t_i)}} e^{-\frac{x^2}{4a(t-t_i)}} \tag{2-43}$$

当 $x=0$ 时，即为河渠的单宽渗流量

$$q_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{Kh_m \Delta h_i}{\sqrt{\pi a(t - t_i)}} \tag{2-44}$$

在 $t$ 时段内，含水层所接受的河渠的单宽侧渗补给总量为

$$q_t = 1.128 Kh_m \sum_{i=1}^{n} \Delta h_i \sqrt{\frac{t - t_{i-1}}{a}} \tag{2-45}$$

### 三、潜水不完整河渠(巷道)

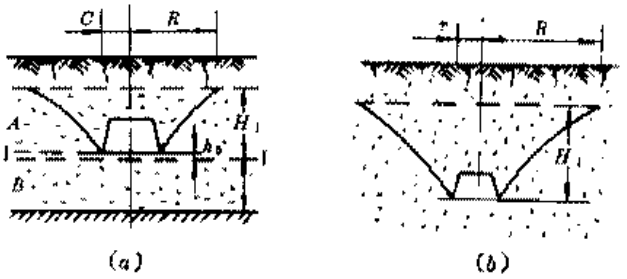
当潜水含水层的厚度较大，河渠(巷道)未开挖至含水层底部时，就形成了潜水不完整河渠(巷道)。

根据潜水含水层的厚度大小，可将潜水不完整河渠(巷道)分为两种形式：厚度有限的潜水不完整河渠(巷道)，厚度无限的潜水不完整河渠(巷道)。

#### 1. 厚度有限的潜水不完整河渠(巷道)

此种情况的流量计算，目前常采用丘加也夫的近似计算(图 2-9a)。通过水平巷道底板作一水平线，将流向巷道的地下水流分成两段($A$ 段和 $B$ 段)，$A$ 段看作无压水流，$B$ 段看作承压水流，于是可将流量分解为侧面流量与底面流量两部分，其流量计算公式(两侧进水)为

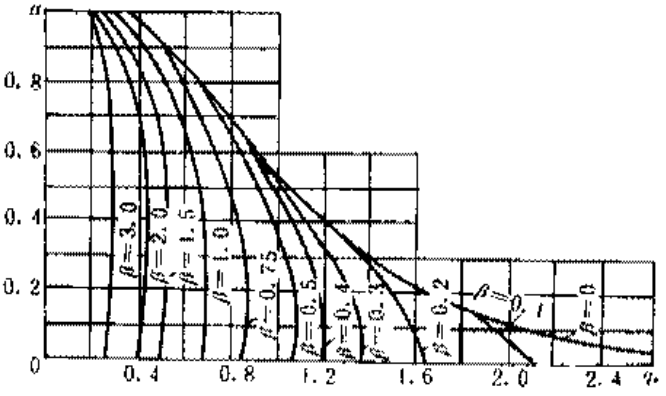
$$Q = 2lK\left(\frac{H_1^2 - h_0^2}{2R} + Sq_y\right) \tag{2-46}$$



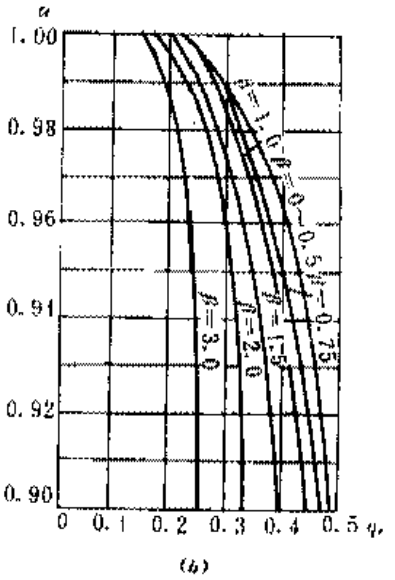

(a) (b)

图 2-9 不完整的水平巷道

a—厚度有限的潜水不完整巷道；b—厚度无限的潜水不完整巷道




(a)




(b)

式中 $S$——水位降深，$S=H_1-h_0$；

$l$——河渠(巷道)的长度；

$R$——河渠(巷道)在补给方向上(或排泄方向上)的影响宽度；或河渠(巷道)至补给边界(或排泄边界)的距离；

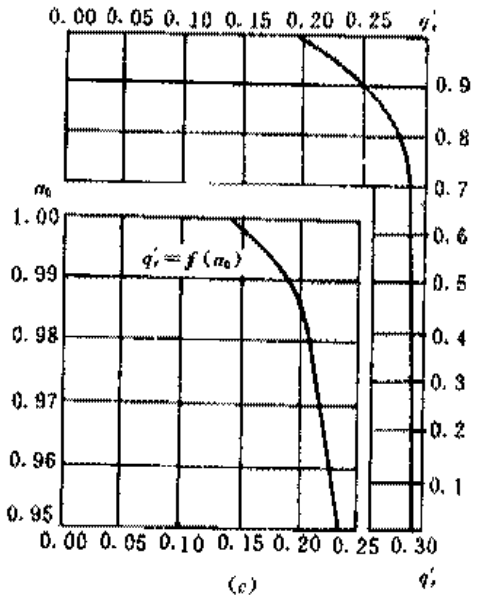
$q_r$——引用流量，它是根据 $\alpha$、$\beta$ 值，由图2-10 $a$,$b$ 求得，而 $q_r=f(\alpha,\beta)$，$\alpha=\dfrac{R}{R+C}$，$\beta=\dfrac{R}{T}$；

$C$——河渠(巷道)宽度之半；

$T$——河渠(巷道)底板至含水层底板间之距离。

当 $\beta>3$ 时，$q_r$ 值用下式确定

$$q_r=\frac{q_r'}{(\beta-3)q_r'+1}$$




(c)

图 2-10 $q_r$ 和 $q_r'$ 值曲线图

式中 $q_0=f(\alpha_0)$，它是根据 $\alpha_0$ 值，由图 2-10c 查得，而

$$\alpha_0=\frac{T}{T+\frac{1}{3}C}$$

2. 厚度无限的潜水不完整河渠

河渠底距含水层底板较远，底板对水流进入河渠无影响时，则可作为无限厚度潜水含水层看待(图 2-9b)。此情况下流量(两侧进水)的计算公式

$$Q=\frac{2uKlH_1}{\ln R-\ln r} \tag{2-47}$$

$$u=\frac{\pi}{2}+\frac{H_1}{R} \tag{2-48}$$

式中各种符号意义同上。

**思考题：**

1. 若修建一水库，为避免渗漏，是应修在距离邻河近处呢？还是远处好？水库的水位与邻河水位是一致好？还是高或低好？

2. 当河间地块含水层无入渗补给，仅存在蒸发排泄时，浸润曲线的形状还会是上凸的曲线吗？

## 第三节 承压含水层中地下水的运动

矿山开采(露天、井下)疏降承压水的巷道或直线取水井排等，均属此类课题。水流可以是承压的，承压-无压的，稳定流和非稳定流。

### 一、承压含水层中的稳定水流

1. 水文地质模型(图 2-11)

(1)承压含水层为均质、各向同性，隔水顶底板水平，无垂直方向补给量。

(2)两条直线延伸的平行河渠切穿了承压含水层，河渠水位稳定，分别为 $H_1$、$H_2$。

(3)承压含水层中的地下水流线均为平行直线，符合一维流动。

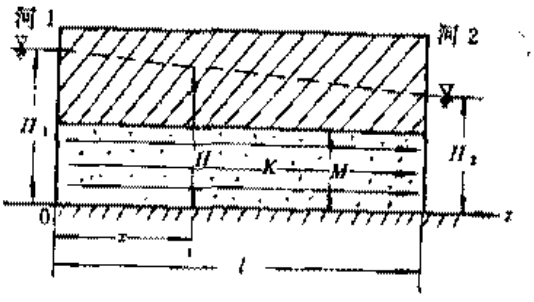



图 2-11 地下水在承压含水层中一维流动

2. 数学模型及其解

符合上述条件的承压含水层中的地下水运动可用下述定解问题来描述

$$\begin{cases}\dfrac{d^2H}{dx^2}=0\\ H|_{x=0}=H_1\\ H|_{x=l}=H_2\end{cases} \tag{2-49}$$

对微分方程两次积分，得其通解为

$$H_1=C_1x+C_2 \tag{2-50}$$

代入边界条件，确定 $C_1$、$C_2$，得

$$C_2 = H_1$$

$$C_1 = -\frac{H_1 - H_2}{l}$$

将 $C_1$、$C_2$ 代回式(2-50)，得

$$H = H_1 - \frac{H_1 - H_2}{l}x \tag{2-51}$$

此式即承压含水层一维稳定运动的水头方程。它是一线性方程。根据该式，可以计算出任一距离 $x$ 处的水头值。对于无限延伸的承压含水层而言，只要知道任意二个钻孔的水位标高，就可以求得任一断面的水位标高。

利用式(2-51)可以求出地下水的单宽流量表达式，根据 Darcy 定律有

$$q_l = -KM\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} \tag{2-52}$$

对式(2-51)求一次导数，得

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = -\frac{H_1 - H_2}{l} \tag{2-53}$$

将式(2-53)代入式(2-52)，得

$$q = KM\frac{H_1 - H_2}{l} \tag{2-54}$$

3. 几种特殊情况的解

1)含水层的隔水底板倾斜　这种情况(图 2-12)的承压含水层水流，当倾角 $\theta<10°$时，仍可用以上公式进行流量和水头的计算。虽然严格地讲，这时的过水断面不应将钻孔揭露的含水层厚度 $M$ 进行计算，应为 $M'$，而水流通过的距离也不是钻孔之间的孔距 $l$，而是 $l'$。但经检验证明，用 $M$ 和 $l$ 代之以 $M'$ 和 $l'$ 所造成的误差<1.5%，这在水文地质计算中是完全允许的。

2)含水层厚度变化　若承压含水层的厚度是变化的(图 2-13)，$M$ 就是一随 $x$ 而变化的量。一般情况下要找出 $M$ 和 $x$ 之间的函数关系是比较困难的。实际应用上，常用一种近似法代替，即取上下断面的含水层厚度的平均值代替 $M$，则有

$$q = K\frac{M_1 + M_2}{2}\frac{H_1 - H_2}{l} \tag{2-55}$$

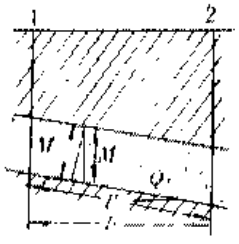



图 2-12　隔水底板倾斜时承压水的单向运动

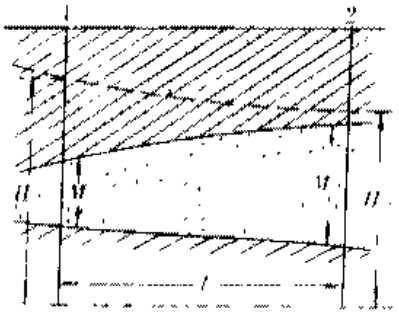



图 2-13　含水层厚度变化时承压水的运动

当 $M$ 与 $x$ 呈线性关系变化时，可用 $M_{cp}=\frac{M_2-M_1}{\ln M_2-\ln M_1}$ 代替 $M$。

## 二、承压-无压含水层中的稳定水流

### 1. 承压-无压完整河渠

当水头降至隔水顶板以下时，原来的承压含水层就转变为无压含水层了。当地下水坡降比较大时，有可能出现下游转为无压水，上游仍为承压水的承压-无压运动(图 2-14)。出现这种情况时，常采用分段法计算。

设水文地质模型如图 2-14 所示，以 $P$ 点为分界点，上游以承压水流公式计算，下游以潜水流公式计算。

$$q_1=KM\frac{H_1-M}{l_1},\quad q_2=K\frac{M^2-H_2^2}{2(l-l_1)}$$

根据水流的连续性原理，这两个流量是相等的，所以有

$$KM\frac{H_1-M}{l_1}=K\frac{M^2-H_2^2}{2(l-l_1)}$$

化简后可得分界点 $P$ 的坐标为

$$l_1=\frac{2lM(H_1-M)}{M(2H_1-M)-H_2^2} \tag{2-56}$$

将以上两个流量公式中的任一个，便得到流量计算公式

$$q=K\frac{M(2H_1-M)-H_2^2}{2l} \tag{2-57}$$

水头降落方程可分段计算，承压段按式(2-51)计算，只将式中 $H_2$ 换为 $M$ 即可

$$H=H_1-\frac{H_1-M}{l_1}x \tag{2-58}$$

无压段应用式(2-23)的关系写出

$$H=\sqrt{H_2^2+\frac{x'}{l-l_1}(M^2-H_2^2)} \tag{2-59}$$

式中 $x'=x-l_1$。

### 2. 承压-无压不完整河渠(巷道)

当河渠或巷道位于承压含水层时，形成不完整河渠(巷道)时，随着水流向河渠或巷道的排泄，含水层中形成承压-无压流区。这种情况更常见于煤矿的巷道掘进中(图 2-15$a$,$b$)。实际情况中，含水层多数为倾斜的，所以必须考虑倾角的问题。现分为两种情况计算，倾角 $\alpha$ 小于 20°时及 $\alpha$ 介于 20°至 45°之间时的流量计算。

1)$\alpha$ 小于 20°时(图 2-15$a$)

$$\frac{R}{h_0}=\frac{2KlM(H-M)+Kl(M^2-h_0^2)}{Qh_0}=\frac{2Klh_0}{Q}f_1\left(\frac{Q}{Klh_0}\right)-f_2\left(\frac{Q}{Klh_0}\right) \tag{2-60}$$

式中各符号如图 2-15$a$ 所示；$Q$(两侧进水)用试算法求得；式中 $f_1\left(\frac{Q}{Klh_0}\right)$ 及 $f_2\left(\frac{Q}{Klh_0}\right)$ 两个函数可查表 2-2 确定。

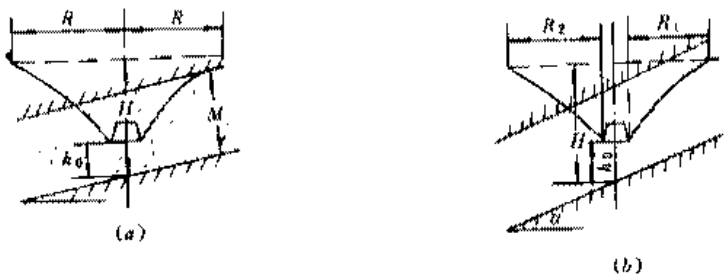



图 2-15　承压-无压不完整河渠(巷道)

表 2-2　　$f_1(\frac{Q}{Klh_0})$和$f_2(\frac{Q}{Klh_0})$函数表

| $\frac{Q}{Klh_0}$ | 0.06 | 0.12 | 0.18 | 0.24 | 0.30 | 0.36 | 0.42 | 0.48 | 0.54 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(\frac{Q}{Klh_0})$ | 0.057 | 0.099 | 0.129 | 0.150 | 0.173 | 0.191 | 0.205 | 0.218 | 0.229 |
| $f_2(\frac{Q}{Klh_0})$ | 0.020 | 0.038 | 0.056 | 0.071 | 0.087 | 0.100 | 0.113 | 0.127 | 0.140 |

| $\frac{Q}{Klh_0}$ | 0.60 | 0.66 | 0.72 | 0.78 | 0.84 | 0.90 | 0.96 | 1.02 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(\frac{Q}{Klh_0})$ | 0.237 | 0.244 | 0.251 | 0.258 | 0.263 | 0.266 | 0.269 | 0.270 |
| $f_2(\frac{Q}{Klh_0})$ | 0.151 | 0.163 | 0.174 | 0.186 | 0.197 | 0.206 | 0.214 | 0.221 |

2)$\alpha$ 介于 20°至 45°之间时(图 2-15*b*)

计算公式为

$$\frac{R_1}{2h_0}=\frac{Kl(H^2-h_0^2)}{2Qh_0}-\frac{Klh_0}{Q}f_1(\frac{Q}{Klh_0})-f_2(\frac{Q}{Klh_0}) \tag{2-61}$$

计算方法同上。

### 三、承压含水层中地下水的非稳定运动

#### 1. 定降深沟渠

一完整排水沟切割承压含水层,沟中水位瞬时下降了 $S_w$ 之后,保持不变(图 2-16)。

研究时假定:

(1)承压含水层是均质各向同性、均厚、顶底板水平,侧向无限延伸;

(2)天然水位水平,排水来自承压含水层的弹性释放,弹性释放瞬时完成;

(3)定降深排水,沟宽无限小;

(4)一维流,符合 Darcy 定律。

数学模型为

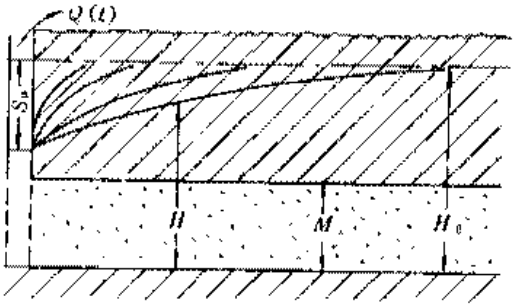



图 2-16　定降深沟流

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial t} & t>0,0<x<\infty\\ S(x,0)=0 & 0<x<\infty\\ S(\infty,t)=0 & t>0\\ S(0,t)=S_w & t>0\end{cases}$$

其解为

$$S=S_w D_t(u) \tag{2-62}$$

式中 $S$——距沟为 $x$ 处的降深；

$D_t(u)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt$——承压沟水位降深函数(表 2-3)。

表 2-3 $D_t(u)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_u^\infty e^{-t^2}dt$

| $u$ | $u^2$ | $D_t(u)$ | $u$ | $u^2$ | $D_t(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.03162 | 0.0010 | 0.9643 | 0.5000 | 0.25 | 0.4795 |
| 0.0400 | 0.0016 | 0.9549 | 0.6325 | 0.40 | 0.3711 |
| 0.0500 | 0.0025 | 0.9436 | 0.7746 | 0.60 | 0.2733 |
| 0.06325 | 0.0040 | 0.9287 | 0.8944 | 0.80 | 0.2059 |
| 0.07746 | 0.0060 | 0.9128 | 1.000 | 1.00 | 0.1573 |
| 0.08944 | 0.0080 | 0.8994 | 1.140 | 1.30 | 0.1069 |
| 0.1000 | 0.010 | 0.8875 | 1.265 | 1.60 | 0.0736 |
| 0.1265 | 0.016 | 0.8590 | 1.378 | 1.90 | 0.0513 |
| 0.1581 | 0.025 | 0.8231 | 1.483 | 2.20 | 0.0359 |
| 0.2000 | 0.040 | 0.7730 | 1.581 | 2.50 | 0.0254 |
| 0.2449 | 0.060 | 0.7291 | 1.643 | 2.70 | 0.0202 |
| 0.2828 | 0.080 | 0.6892 | 1.732 | 3.00 | 0.0143 |
| 0.3162 | 0.10 | 0.6548 | 1.789 | 3.20 | 0.0114 |
| 0.4000 | 0.16 | 0.5716 | | | |

将式(2-62)对 $x$ 求导，使用 Darcy 定律，求得 $x$ 处断面的单宽流量

$$q_x=\frac{TS_w}{\sqrt{\dfrac{T\pi t}{\mu^*}}}e^{-\frac{\mu^* x^2}{4Tt}} \tag{2-63}$$

排水沟一侧的单宽流量(此时 $x=0$)

$$q_0=S_w\sqrt{\frac{T\mu^*}{\pi t}} \tag{2-64}$$

当两个排水沟同时工作或排水沟位于平行隔水边界，补给边界附近时，可利用叠加原理和映像法求解，方法与相应条件下的井流类同。

2. 水位等速下降(上升)的排水沟

沟中水位以速度 $v_0$ 等速下降，其他条件同上。定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial t} & 0<x<\infty,t>0\\ S(x,0)=0 & 0<x<\infty\\ S(\infty,t)=0 & t>0\\ S(0,t)=v_0 t & t>0\end{cases}$$

其解为

$$S=v_0 tR(u_A) \tag{2-65}$$

式中 $S$——距沟 $x$ 处的降深；

$R(u_A)$——水位降深函数(表 2-4)。

表 2-4　　函数 $R(u_A)$表

| $u_A$ | $R(u_A)$ | $u_A$ | $R(u_A)$ | $u_A$ | $R(u_A)$ | $u_A$ | $R(u_A)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.00 | 1 | 0.17 | 0.670 | 0.34 | 0.435 | 0.52 | 0.264 |
| 0.01 | 0.978 | 0.18 | 0.654 | 0.35 | 0.423 | 0.54 | 0.249 |
| 0.02 | 0.956 | 0.19 | 0.638 | 0.36 | 0.412 | 0.56 | 0.235 |
| 0.03 | 0.934 | 0.20 | 0.622 | 0.37 | 0.401 | 0.58 | 0.222 |
| 0.04 | 0.913 | 0.21 | 0.607 | 0.38 | 0.391 | 0.60 | 0.209 |
| 0.05 | 0.892 | 0.22 | 0.592 | 0.39 | 0.380 | 0.65 | 0.180 |
| 0.06 | 0.872 | 0.23 | 0.578 | 0.40 | 0.370 | 0.70 | 0.154 |
| 0.07 | 0.852 | 0.24 | 0.563 | 0.41 | 0.360 | 0.75 | 0.132 |
| 0.08 | 0.832 | 0.25 | 0.549 | 0.42 | 0.350 | 0.80 | 0.112 |
| 0.09 | 0.813 | 0.26 | 0.535 | 0.43 | 0.341 | 0.90 | 0.0803 |
| 0.10 | 0.793 | 0.27 | 0.522 | 0.44 | 0.331 | 1.00 | 0.0568 |
| 0.11 | 0.775 | 0.28 | 0.509 | 0.45 | 0.322 | 1.10 | 0.0396 |
| 0.12 | 0.757 | 0.29 | 0.496 | 0.46 | 0.313 | 1.20 | 0.0272 |
| 0.13 | 0.739 | 0.30 | 0.483 | 0.47 | 0.305 | 1.30 | 0.0184 |
| 0.14 | 0.721 | 0.31 | 0.470 | 0.48 | 0.296 | 1.40 | 0.0122 |
| 0.15 | 0.704 | 0.32 | 0.458 | 0.49 | 0.288 | 1.50 | 0.0080 |
| 0.16 | 0.687 | 0.33 | 0.446 | 0.50 | 0.280 | 2.00 | 0.00076 |
| | | | | | | $\infty$ | 0 |

$$R(u_A)=(1+2u_A^2)\operatorname{erfc}(u_A)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}u_A e^{-u_A^2}$$

$\operatorname{erfc}(u_A)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{u_A}^{\infty}e^{-y^2}dy$，为 $u_A$ 的余误差函数。$u_A=\dfrac{x}{2}\sqrt{\dfrac{\mu^*}{Tt}}$。

一侧进水时，排水沟单宽流量(排泄量)为

$$q_0=1.128\,v_0\sqrt{\mu^* Tt} \tag{2-66}$$

时间 $t$ 内的总排泄量为

$$q_{0-t}=\int_0^t q_0=0.75v_0 t\sqrt{\mu^* Tt} \tag{2-67}$$

若水位变化不规则，可概化为阶梯状水位的变化，用叠加原理解决。

3. 定流量沟流

在本节假定的地质条件下，地下水向排水沟作定流量排泄时，J. G. Ferris、Theis 给出了

它的解：

$$S = \frac{q_0 x}{T} W(u_h) \tag{2-68}$$

式中，$q_0$ 为一侧进水时单位宽度地下水的排泄量（或河渠水的渗漏量），常用单位为 $m^3/d \cdot m$；$W(u_h)$值可由表 2-5 查得，它的表达式为

$$W(u_h) = \frac{e^{-u_h^2}}{u_h \sqrt{\pi}} - 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{u_h} e^{-y^2} dy$$

$$u_h = \frac{x}{2} \sqrt{\frac{\mu^*}{Tt}}$$

表 2-5　　函数 $W(u_h)$表

| $u_h$ | $u_h^2$ | $1/u_h^2$ | $W(u_h)$ | $u_h$ | $u_h^2$ | $1/u_h^2$ | $W(u_h)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.05 | 0.0025 | 400 | 10.320 | 0.3 | 0.09 | 11.1111 | 1.0490 |
| 0.06 | 0.0036 | 277.8 | 8.468 | 0.3317 | 0.11 | 9.0909 | 0.8810 |
| 0.07 | 0.0049 | 204.1 | 7.109 | 0.3605 | 0.13 | 7.6923 | 0.7598 |
| 0.08 | 0.0064 | 156.25 | 6.130 | 0.4 | 0.16 | 6.2500 | 0.6284 |
| 0.09 | 0.0081 | 123.46 | 5.331 | 0.4359 | 0.19 | 5.2632 | 0.5324 |
| 0.1 | 0.01 | 100 | 4.714 | 0.4796 | 0.23 | 4.3478 | 0.4384 |
| 0.114 | 0.013 | 76.923 | 4.008 | 0.5291 | 0.28 | 3.5714 | 0.3517 |
| 0.1265 | 0.016 | 62.5 | 3.532 | 0.5745 | 0.33 | 3.0303 | 0.2895 |
| 0.1414 | 0.02 | 50 | 3.079 | 0.6164 | 0.38 | 2.6316 | 0.2434 |
| 0.1581 | 0.025 | 40 | 2.657 | 0.6633 | 0.44 | 2.2727 | 0.2008 |
| 0.1732 | 0.03 | 33.333 | 2.354 | 0.7071 | 0.5 | 2 | 0.1837 |
| 0.1871 | 0.035 | 28.571 | 2.109 | 0.7616 | 0.58 | 1.7241 | 0.1345 |
| 0.2 | 0.04 | 25 | 1.943 | 0.8124 | 0.66 | 1.5151 | 0.1094 |
| 0.2236 | 0.05 | 20 | 1.658 | 0.8718 | 0.76 | 1.3158 | 0.0864 |
| 0.2449 | 0.06 | 16.667 | 1.441 | 0.9486 | 0.9 | 1.1111 | 0.0623 |
| 0.2646 | 0.07 | 14.286 | 1.282 | 1 | 1 | 1 | 0.0507 |

含水层参数 $T$、$\mu^*$ 及 $q_0$ 已知时，利用式(2-68)可计算不同时间 $t$、不同断面 $x$ 处的地下水位变化值；亦可根据地下水位观测资料及 $q_0$ 值，应用配线法（见第五章第四节）确定含水层参数。

**思考题**

1. 承压含水层的厚度越大，是否给出的水量越多？
2. 承压含水层的厚度变化和降落曲线的疏度、形状有什么关系？

# 第三章　地下水向井(孔)的稳定运动

下面二章介绍地下水向人工集水建筑物的运动。集水建筑物的类型很多，根据不同的划分原则，有不同的类型。

(1)按集水建筑物的空间分布形式，可分为水平的集水建筑物和垂直的集水建筑物两类。水平的集水建筑物有排水渠、集水管、集水巷道等；垂直的集水建筑物有钻孔、水井、竖井等。

(2)按含水层的性质，可分为潜水集水建筑物和承压水集水建筑物。

(3)按揭露含水层的程度，可分为完整的集水建筑物和不完整的集水建筑物。

(4)按进水形式，又可分为井底进水的集水建筑物、井壁进水集水建筑物和井底井壁同时进水的集水建筑物三种。

关于水平集水建筑物，如排水渠、水平巷道等的水流，其运动规律与河渠相似，在前一章作了介绍，后面主要介绍井流问题。水井最常用的是将(2)、(3)两种划分类型综合起来进行的划分形式，即潜水完整井、潜水不完整井和承压水完整井、承压水不完整井等(图 3-1)、图(3-2)。

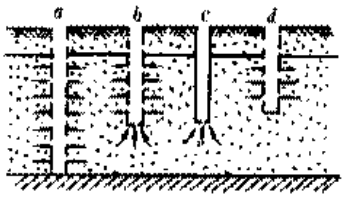



图 3-1　潜水井的类型

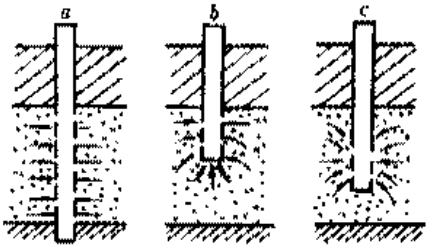



图 3-2　承压水井的类型

## 第一节　地下水向单井的稳定运动

自然界中地下水的运动属于稳定流的情况是不多的，亦即流量、水头、速度等均随时间而不断地变化。只可能在三种特殊的情况下才存在稳定运动：(1)抽水后，降落漏斗扩展到补给边界，补给水源丰富，抽水量等于补给量；(2)含水层可以获得越流补给，抽水量等于补给量；(3)可接受降水等入渗补给，补给量等于抽水量。本章主要讨论这些情况下的地下水稳定运动的问题。

需要说明的是，虽然实际的稳定运动很少，但可以化为稳定运动的情况仍为数不少。只要符合下述情况的非稳定运动，均可近似地当作为稳定运动来处理，当抽水时间很长后，各观测孔的降深非常小，以致在某一个有限的时间段内，几乎观测不到明显的水位下降。这种情况也称似稳定状态。

## 一、承压含水层中单井的稳定运动

1. 水文地质模型(图 3-3)

关于承压含水层中单井的稳定运动，作如下的假设

(1)在一具有圆形定水头补给边界的承压含水层中打了一口完整抽水井，当降落漏斗扩展到边界时，$Q_{补}=Q_{抽}$，水位达到稳定。

(2)含水层均质，各向同性，隔水底板水平，抽水前初始水面水平，水头为 $H_0$。

(3)抽水井的井径为无限小，定流量抽水。

(4)无垂直补给。

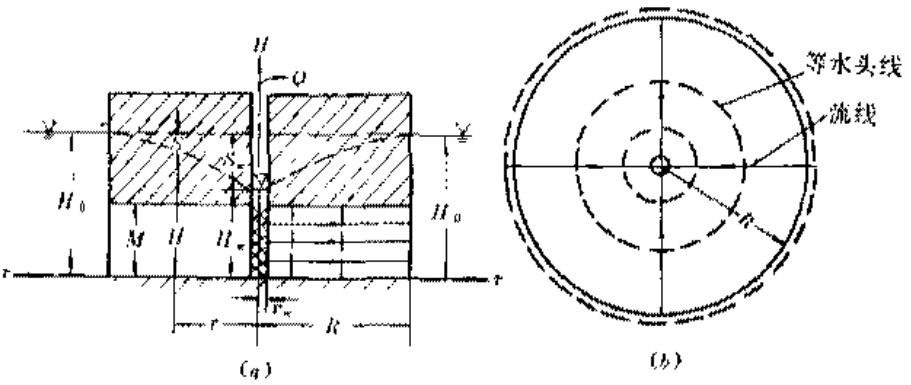



图 3-3 具有圆形定水头供水边界含水层中地下水向承压完整井运动

a—剖面图；b—平面图

2. 数学模型及其解

根据假设及承压含水层的基本微分方程，符合上述条件的稳定流偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}=0$$

用柱坐标表示，并给出边界条件

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\right)=0 & (3\text{-}1)\\ H|_{r=R}=H_0 & (3\text{-}2)\\ r\dfrac{\partial H}{\partial r}\Big|_{r=r_w}=\dfrac{Q}{2\pi T}\ \text{或}\ H|_{r=r_w}=h_w & (3\text{-}3)\end{cases}$$

因为 $\frac{1}{r}$ 不等于 0，所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}\right)=0$$

积分二次，得

$$r\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r}=C_1$$

$$H=C_1\ln r+C_2 \qquad (3\text{-}4)$$

代入边界条件，得

$$C_1=\frac{Q}{2\pi T}$$

$$C_2=H_0-\frac{Q}{2\pi T}\ln R$$

将 $C_1$、$C_2$ 代入式(3-4)，得

$$S = H_0 - H = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r}，当\ r = r_w\ 时，H = h_w$$

于是

$$S_w = H_0 - h_w = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_w} \tag{3-5}$$

也可化为

$$Q = 2\pi T\frac{S_w}{\ln\dfrac{R}{r_w}} \tag{3-6}$$

或

$$Q = 2.73\frac{KMS_w}{\lg\dfrac{R}{r_w}} \tag{3-7}$$

式中 $R$——影响半径(圆形含水层的半径)，其余符号同前。

式(3-7)即承压水井的 Dupuit 公式。

3. 引用影响半径

在推导式(3-7)时，假定井位于圆形补给边界的承压含水层中，这种情况在实际中很少见。公式更多应用于以下二种情况：

(1)含水层侧向有补给边界，但边界非圆形，当抽水一定时间后，$Q_{补}=Q_{抽}$，这时的漏斗形状近井处为圆，而远离井则不规则，影响半径可用引用影响半径 $R_0$ 代替。则有

$$Q = 2.73\frac{KMS_w}{\lg\dfrac{R_0}{r_w}} \tag{3-8}$$

这样，仍可用 Dupuit 公式近似计算，此时的引用影响半径是一个假想的含水层半径。在假想含水层中抽水的效果和实际含水层相同，周边保持常水头 $H_0$。

(2)含水层为无限含水层，严格地说不可能出现稳定流，但长时间抽水，可看作似稳定状态。此时，影响半径可用德国学者 Thiem 给出的定义，即影响半径是指从抽水井起至实际上已观察不到水位降深的总的水平距离。目前，许多人认为这一定义有所欠缺，因为观测手段在不断改进，这意味着影响半径值会越来越大。根据此定义，用类似的方法，可导出

有二个观测孔时

$$Q = 2.73\frac{KM(S_1 - S_2)}{\lg\dfrac{r_2}{r_1}} \tag{3-9}$$

有一个观测孔时

$$Q = 2.73\frac{KM(S_w - S_1)}{\lg\dfrac{r_1}{r_w}} \tag{3-10}$$

式中 $S_1$、$S_2$——距井轴的距离 $r_1$、$r_2$ 处观测孔的水位降深。

式(3-9)称为 Thiem 公式。根据 Thiem 关于影响半径的定义，影响半径 $R$ 指的是实际上可以观测出来的降落漏斗半径。在实际情况中，降落漏斗都不是规则的圆形，因此，通常用等效的圆形降落漏斗来代替实际的降落漏斗。这种等效的圆形降落漏斗的半径就称为引用影响半径。也就是说实际计算中所采用的影响半径均为引用影响半径(补给半径)，所以一般并不把影响半径和引用影响半径加以区别。

有关引用影响半径的确定，许多学者进行了研究，给出了各种情况的经验及半经验公式如下：

半经验公式有

Lembke 公式　　$R_0=H_0\sqrt{\frac{K}{2W}}$　　(3-11)

Weber 公式　　$R_0=2.45\sqrt{\frac{H_0Kt}{\mu}}$　　(3-12)

Kycakин 公式　　$R_0=1.9\sqrt{\frac{H_0Kt}{\mu}}$　　(3-13)

经验公式有

Siechardt 公式　　$R_0=3000S_w\sqrt{K}$　　(3-14)

Kycakин 公式　　$R_0=575S_w\sqrt{H_0K}$　　(3-15)

式中　$t$——抽水延续时间，s；

$K$——渗透系数，m/s；

$\mu$——潜水为给水度，承压水为贮水系数；

$W$——降水入渗补给强度。

在我国水文地质工作中，长期采用的就是上述二种经验公式。实践表明，按这两种公式计算出来的 $R_0$ 值常常与实际有很大误差，对 Dupuit 公式也不适合。

近年来，人们更倾向于接受以下二种方式确定的影响半径值：

(1)抽水井位于一补给边界附近，抽水后漏斗扩展到边界，此时 $Q_{补}=Q_{井}$。引用影响半径的大小完全取决于边界的形状和抽水井距边界的距离，为一常数。L·Huisman 给出了各种边界情况下引用影响半径的计算公式(图 3-4)。

(2)对于无限含水层，$R_0$ 并非一个常数，而是 $t$ 的函数。

$$R_0=1.5\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}} \tag{3-16}$$

4. 非线性流动的井流

当地下水运动服从 Chezy 定律时，有

$$Q=2\pi rMK_c(\mathrm{d}H/\mathrm{d}r)^{1/2} \tag{3-17}$$

分离变量，积分得

$$H-h_w=\frac{Q^2}{4\pi^2K_c^2M^2}\left(\frac{1}{r_w}-\frac{1}{r}\right) \tag{3-18}$$

即

$$Q=2\pi K_cM\sqrt{r_wS_w} \tag{3-19}$$

(因 $R\gg r_w$，$1/R$ 值很小而被忽略)。

更一般的情况，当地下水运动服从式(1-52)时，有

$$H-h_w=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r}{r_w}+\frac{bQ^2}{4\pi^2M^2}\left(\frac{1}{r_w}-\frac{1}{r}\right) \tag{3-20}$$

当地下水的运动符合 Darcy 定律井流时，则公式(3-20)的右边第二项为零，化为承压稳定运动的 Dupuit 公式(3-5)。当地下水运动满足 Chezy 定律时，公式(3-20)中的右边第一项为零。此时若令 $b=\frac{1}{K_c^2}$，$r\to R$，$H\to H_0$，则公式又变为式(3-18)。

## 二、潜水含水层中单井的稳定运动

1. 水文地质模型(图 3-5)

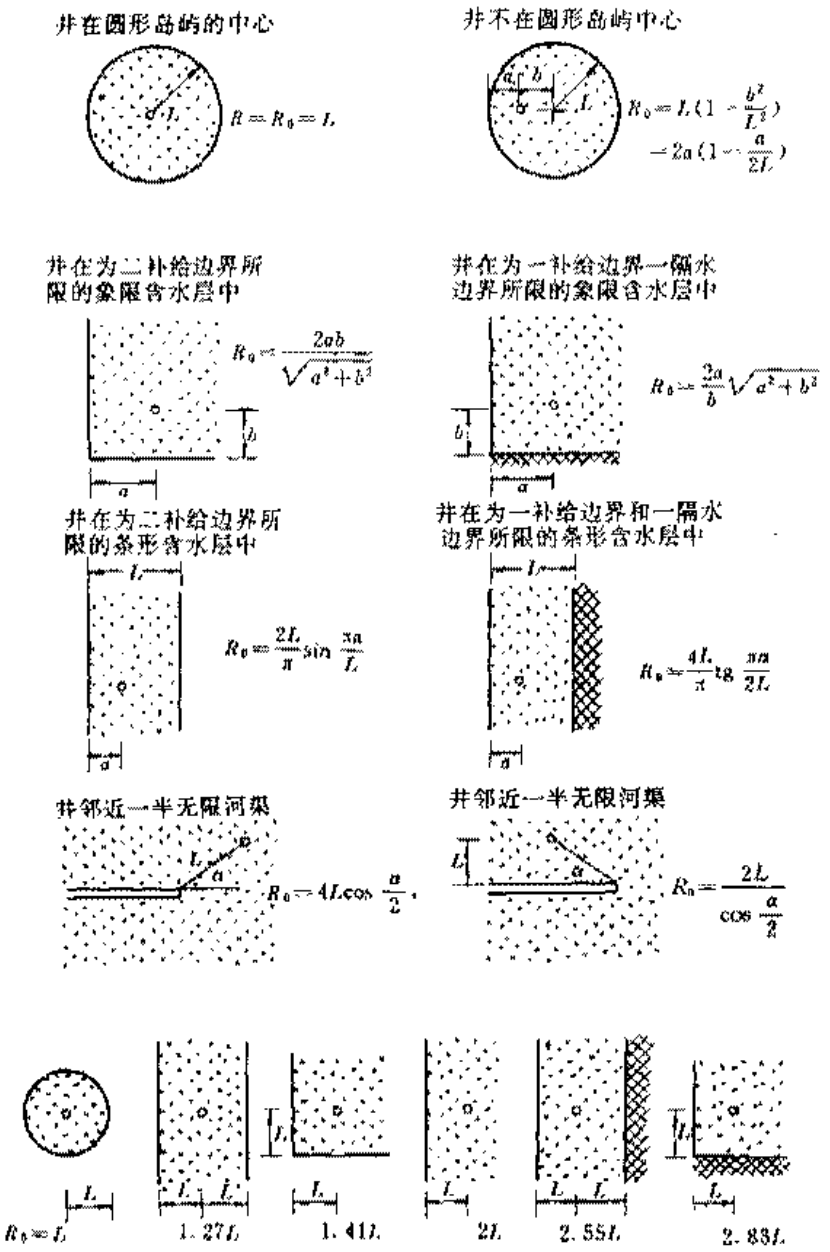



图 3-4　不同边界情况下引用影响半径公式

(据 L. Huisman)

根据 Dupuit 假设

(1)在一均质、各向同性的潜水含水层中打了一口完整抽水井，含水层隔水底板水平；

(2)含水层初始水面水平；

(3)抽水井以定流量抽水，水流符合 Darcy 定律和 Dupnit 假定；

(4)无降雨入渗补给；

(5)抽水一定时间后，水流达到稳定。

2. 数学模型及其解

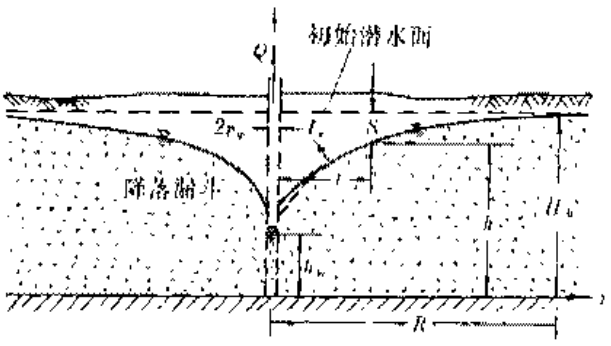



图 3-5　向潜水井的稳定流动

地下水运动的微分方程应为

$$\frac{\partial}{\partial x}(h\frac{\partial h}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(h\frac{\partial h}{\partial y})=0$$

此即潜水含水层稳定运动的 Boussinesq 方程，将它线性化为

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2(h^2)}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2(h^2)}{\partial y^2}=0 \tag{3-21}$$

化为柱坐标，得

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(r\dfrac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r})]=0 & (3\text{-}22)\\ h|_{r=r_w}=h_w & (3\text{-}23)\\ r\dfrac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r}|_{r=r_w}=\dfrac{Q}{\pi K} & (3\text{-}24)\\ h|_{r=R}=H_0 & (3\text{-}25)\end{cases}$$

对式(3-22)积分一次，得

$$r\frac{\mathrm{d}(h^2)}{\mathrm{d}r}=C_1 \tag{3-26}$$

根据边界条件式(3-24)，$C_1=\dfrac{Q}{\pi K}$，代入式(3-26)积分得

$$h^2=\frac{Q}{\pi K}\ln r+C_2 \tag{3-27}$$

将边界条件式(3-23)、(3-25)代入，化简得

$$H_0^2-h_w^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R}{r_w} \tag{3-28}$$

化为常用对数，整理后得

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-S_w)S_w}{\lg\dfrac{R}{r_w}} \tag{3-29}$$

式中的 $R$ 可以用 $R_0$ 代替

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-S_w)S_w}{\lg\dfrac{R_0}{r_w}} \tag{3-30}$$

式(3-28)、(3-30)称为潜水井的 Dupuit 公式。

当有一个观测孔时，可以解出流量公式为

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-S_w-S_1)(S_w-S_1)}{\lg\dfrac{r_1}{r_w}} \tag{3-31}$$

当有两个观测孔存在时，同样可给出潜水井的 Thiem 公式

$$Q=1.366K\frac{(2H_0-S_1-S_2)(S_1-S_2)}{\lg\dfrac{r_2}{r_1}} \tag{3-32}$$

3. 有恒定入渗量($W$)补给时潜水井流公式

图 3-6 表示流向潜水含水层中单井稳定水流。该井具有到达潜水面为恒定入渗量($W$)的补给，并符合 Dupuit 的其它假设条件，因而得

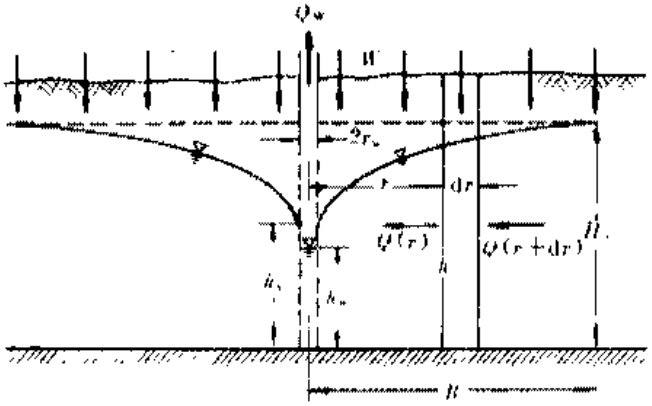


图 3-6　具有入渗补给的潜水含水层中的稳定水流

$$Q_w = \pi(r^2 - r_w^2)W + 2\pi Kh\frac{dh}{dr}$$

如果在 $r=r_w, h=h_w$（即忽略了渗出面），和某一距离 $r$ 之间进行积分得

$$h^2 - h_w^2 = \frac{Q_w}{\pi K}\ln\frac{r}{r_w} - \frac{W}{2K}(r^2 - r_w^2) + \frac{r_w^2 W}{K}\ln\frac{r}{r_w} \tag{3-33}$$

4. 承压-无压水井流公式

在承压含水层中进行 $S$ 降深抽排水时，常会使承压水头降至隔水顶板以下，形成承压-无压水流（图 3-7）。这在煤矿排水、放水试验中经常出现。对于这种情况，常用分段法来进行计算。设 $a$ 为井轴至承压-无压分界点的距离，则无压水流区为

$$Q = 1.366K\frac{M^2 - h_w^2}{\lg a - \lg r_w}$$

承压水流区为 $Q = 2.73\dfrac{KM(H_0 - M)}{\lg R - \lg a}$

从二式中消去 $\lg a$，即得

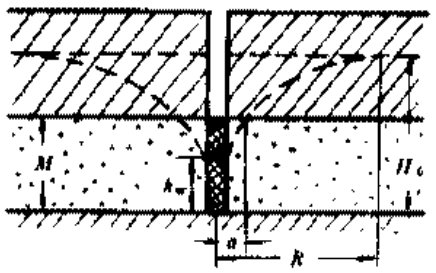


图 3-7　承压-无压水井

$$Q = 1.366\frac{K(2H_0M - M^2 - h_w^2)}{\lg\dfrac{R}{r_w}} \tag{3-34}$$

此即为承压-无压井流计算公式。

5. 非线性流动的井流

对于不服从 Darcy 定律，流动是非线性的，地下水向潜水井稳定运动时，有

$$Q = 2\pi rhK_c\left(\frac{dh}{dr}\right)^{1/2}$$

经计算化简，得

$$Q \simeq \frac{2}{\sqrt{3}}\pi K_c\sqrt{r_w(H_0^3 - h_w^3)} \tag{3-35}$$

## 三、越流含水层中单井的稳定运动

当含水层由一越流系统组成，对位于主含水层中的井进行抽水时，随着主含水层与相邻含水层之间的水头差的加大，相邻含水层的水就会通过弱透水层向主含水层进行越流。当抽

水一段时间后，$Q_{抽}=Q_{越}$，这时越流含水层中地下水的运动达到了稳定。

1. 水文地质模型(图 3-8)

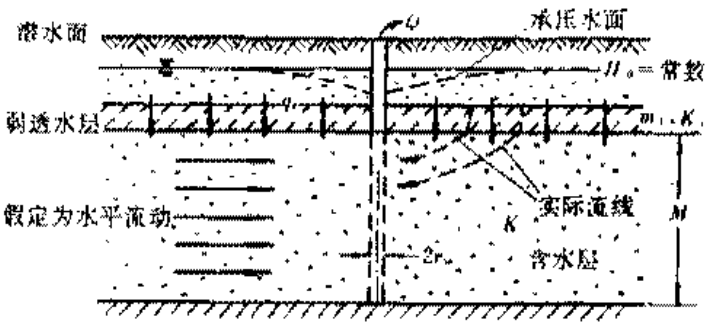



图 3-8 越流含水层中的抽水井

(据 J. Bear)

(1)在一均质、各向同性的越流含水层中打了一口抽水井，含水层隔水底板水平，抽水前初始水面水平；

(2)抽水过程中，相邻含水层中的水头保持不变，水井以定流量抽水；

(3)主含水层中的渗透系数 $K$ 较弱透水层中的渗透系数 $K'$ 大得多；

(4)不考虑弱透水层的弹性释放量。

2. 数学模型及其解

有关越流含水层的非稳定运动偏微分方程已在前面进行了推导。可看式(1-119)，只要令 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$，$B_2\to\infty$，$B_1=B$，$H_1=H_0$，则有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{H_0-H}{B^2}=0 \tag{3-36}$$

用柱坐标表示，并令 $S=H_0-H$，得

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}-\frac{S}{B^2}=0$$

其定解问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}-\dfrac{S}{B^2}=0 & (3\text{-}37)\\ S|_{r\to\infty}=0 & (3\text{-}38)\\ \dfrac{\partial S}{\partial r}|_{r=r_w}=-\dfrac{Q}{2\pi r_w T} & (3\text{-}39)\end{cases}$$

式(3-37)经变换，变为零阶虚宗量贝塞尔方程：

$$\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 S}{\partial(\frac{r}{B})^2}+\frac{1}{rB}\frac{\partial S}{\partial(\frac{r}{B})}-\frac{S}{B^2}=0$$

两边同乘以 $r^2$，得

$$(\frac{r}{B})^2\frac{\partial^2 S}{\partial(\frac{r}{B})^2}+\frac{r}{B}\frac{\partial S}{\partial(\frac{r}{B})}-S(\frac{r}{B})^2=0$$

方程的通解为

$$S = \alpha I_0\left(\frac{r}{B}\right) + \beta K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3-40}$$

式中 $\alpha$、$\beta$——待定常数；

$I_0\left(\frac{r}{B}\right)$——零阶第一类虚宗量贝塞尔函数；

$K_0\left(\frac{r}{B}\right)$——零阶第二类虚宗量贝塞尔函数。

代入边界条件，整理得特解为

$$S = \frac{Q}{2\pi T}\frac{K_0\left(\frac{r}{B}\right)}{\left(\frac{r_w}{B}\right)K_1\left(\frac{r_w}{B}\right)} \tag{3-41}$$

式中 $K_1\left(\frac{r_w}{B}\right)$为一阶第二类虚变量贝塞尔函数。

对于越流含水层而言，一般来说越流因素 $B$ 均很大，即$\frac{r_w}{B}$很小，常有$\frac{r_w}{B} \ll 1$；而对于贝塞尔函数，若 $x \ll 1$，则 $xK_1(x) \simeq 1$（当 $x < 0.02$ 时，误差小于 1%）。所以有近似解

$$S \simeq \frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{B}\right) \tag{3-42}$$

式(3-41)、(3-42)中均含贝塞尔函数。为了求解，可利用贝塞尔函数查阅有关数值（表 3-1），代入公式中计算。

表 3-1　　虚宗量 Bessel 函数表

| $x$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.010 | 4.7212 | 99.9739 | 1.0000 | 0.0050 |
| 0.020 | 4.0285 | 49.9547 | 1.0001 | 0.0100 |
| 0.030 | 3.6235 | 33.2715 | 1.0002 | 0.0150 |
| 0.040 | 3.3365 | 24.9233 | 1.0004 | 0.0200 |
| 0.050 | 3.1142 | 19.9097 | 1.0006 | 0.0250 |
| 0.060 | 2.9329 | 16.5637 | 1.0009 | 0.0300 |
| 0.070 | 2.7798 | 14.1710 | 1.0012 | 0.0350 |
| 0.080 | 2.6475 | 12.3742 | 1.0016 | 0.0400 |
| 0.090 | 2.5310 | 10.9749 | 1.0020 | 0.0451 |
| 0.1 | 2.4271 | 9.8538 | 1.0025 | 0.0501 |
| 0.2 | 1.7527 | 4.7760 | 1.0100 | 0.1005 |
| 0.3 | 1.3725 | 3.0560 | 1.0226 | 0.1517 |
| 0.4 | 1.1145 | 2.1843 | 1.0404 | 0.2040 |
| 0.5 | 0.9244 | 1.6564 | 1.0635 | 0.2579 |
| 0.6 | 0.7775 | 1.3028 | 1.0921 | 0.3137 |
| 0.7 | 0.6605 | 1.0503 | 1.1263 | 0.3719 |
| 0.8 | 0.5663 | 0.8618 | 1.1665 | 0.4327 |
| 0.9 | 0.4867 | 0.7165 | 1.2130 | 0.4971 |

续表

| $x$ | $K_0(x)$ | $K_1(x)$ | $I_0(x)$ | $I_1(x)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 0.4210 | 0.6019 | 1.2661 | 0.5652 |
| 1.5 | 0.2138 | 0.2774 | 1.6467 | 0.9817 |
| 2.0 | 0.1139 | 0.1399 | 2.2796 | 1.5906 |
| 2.5 | 0.0624 | 0.0739 | 3.2898 | 3.5167 |
| 3.0 | 0.0347 | 0.0402 | 4.8808 | 3.9534 |
| 3.5 | 0.0196 | 0.0222 | 7.3782 | 6.2058 |
| 4.0 | 0.0112 | 0.0125 | 11.3019 | 9.7595 |
| 4.5 | 0.0064 | 0.0071 | 17.4812 | 15.3892 |
| 5.0 | 0.0037 | 0.0040 | 27.2399 | 24.3356 |

当 $r$ 较小，$B$ 较大，$\frac{r}{B}\ll 1$ 时，据 $x\ll 1$，$K_0(\frac{r}{B})\simeq\ln(\frac{1.123}{x})$，有 $K_0(\frac{K}{B})\simeq\ln(\frac{1.123B}{r})$。则有

$$S=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{1.123B}{r} \tag{3-43}$$

式(3-43)的误差估计如下：

当 $\frac{r}{B}<0.35$ 时，误差<5%

$\frac{r}{B}<0.18$ 时，误差<1%

3. 求参

利用式(3-42)和式(3-43)可以反求越流系统含水层的参数(见第五章第二节)。

**四、井损及井的单位涌水量**

在实际观测中可以发现，抽水时井内的水位往往低于井壁的水位现象(图 3-9)。井损产生的原因很多，主要有以下几类：

(1)当水流通过井壁进入井内时，由于水井施工时泥浆的堵塞，增加了水流阻力所造成的水头损失；

(2)水流通过过滤器孔眼时要产生水头损失。

(3)水流在滤水管内运动时的水头损失，具体包括：①水流由通过过滤器孔眼时的水平运动转向垂直运动，水流的偏转所产生的水头损失；②当水流在滤水管内由下往上运动时，流程的增加、水流的不断涌入，使流量不断增加、流速发生变化，造成部分水头损失等。

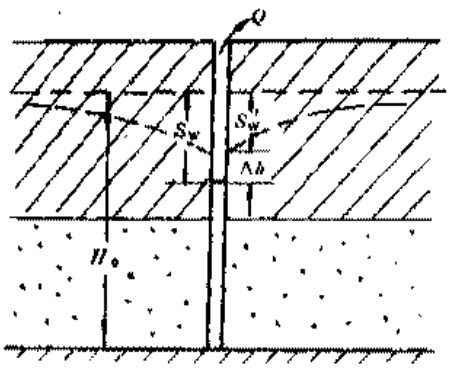


图 3-9 井损及井损值 $\Delta h$

(4)进入井内的水流由下向上运动至水泵吸水口处，沿程的摩擦阻力所造成的水头损失。

值得注意的是，不要将井损与水跃的概念相混淆。水跃是指潜水含水层中的集水建筑物存在内外水位不一致，即潜水出口处有一渗出面。对于承压水则不存在水跃。同时，潜水的

水跃不仅存在于井内，而且对于河、渠等也都存在。

由于井损的存在，在利用抽水井中水位降深 $S_w$ 进行水文地质计算时，会造成一定的误差。消除的办法是在抽水井的附近打一个观测孔，利用观测孔中的降深代替井中的降深进行计算，或者直接利用两个观测孔的试验资料来进行求参等计算，此外，还可以利用抽水试验资料来计算井损值。下面介绍这一个方法。

根据以上论述，井中的实测水位降深 $S_w$，应由两部分组成，一是水流在含水层中运动时造成的水头损失 $S_{w1}$，二是上述的井损 $S_{w2}$，即

$$S_w = S_{w1} + S_{w2} \tag{3-44}$$

C·E·Jacob 提出，井中的水头损失应与流量的二次方成正比。表达式为 $CQ^2$。这样，式(3-44)可进一步表示为

$$S_w = AQ + CQ^2 \tag{3-45}$$

式中 $A$——系数，稳定流情况下为 $\frac{\ln\frac{R}{r_w}}{2\pi T}$，非稳定流情况下它是时间的函数，记为 $A(r_w \cdot t)$；

$C$——井损常数。

有人认为，当大流量抽水时，井中或井附近可出现紊流，所以井损变为 $CQ^n$，即

$$S_w = AQ + CQ^n \tag{3-46}$$

利用式(3-45)和(3-46)来确定井损，需要进行多次降深的抽水试验。

若抽水量不大时，$n=2$，可用式(3-45)进行计算。将公式两端同除以 $Q$，得

$$\frac{S_w}{Q} = A + CQ \tag{3-47}$$

可见，$\frac{S_w}{Q}$ 与 $Q$ 之间是线性关系。这要求稳定流抽水试验有三次以上的降深。将多次降深的抽水试验资料点在坐标纸上，画出最佳拟合曲线(图 3-10)，即可求出 $A$ 和 $C$ 值，从而求出井损值 $S_{w2}$

$$S_{w2} = CQ^2$$

若大流量抽水时，$n\neq 2$，利用式(3-46)有

$$\frac{S_w}{Q} = A + CQ^{n-1} \quad 或 \quad \frac{S_w}{Q} - A = CQ^{n-1} \tag{3-48}$$

此时，常数变为三个，$A$、$C$、$n$，需利用试算法。取一张双对数纸，先设一个 $A$ 值，以 $\frac{S_w}{Q}-A$ 为纵坐标，$Q$ 为横坐标作图。不断改变 $A$ 值，作不同 $A$ 值的双对数图，直到各点在图上显示为一直线为止。此时的 $A$ 值即为所要求的值。而直线在纵轴上截距为 $C$，斜率为 $n-1$，可求出井损 $CQ^{n-1}$。

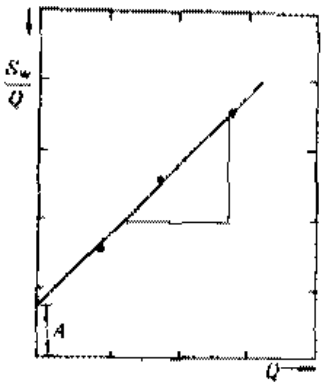


图 3-10 $\frac{S_w}{Q}-Q$ 拟合曲线图

在生产实际及水文地质计算中，常常用到单位涌水量——井中水头下降 1m 时的涌水量值，即 $\frac{Q}{S}$，量纲为 $L^2T^{-1}$。其中，$Q$ 为抽水井的涌水量；$S$ 严格地讲，应为式(3-44)中的 $S_{w1}$。因此，单位涌水量应表示为 $q=\frac{Q}{S_{w1}}$，常用它来描述含水层的富水性。

**思考题**

1. 有人说，对潜水含水层而言，水跃与井损是一回事，它们都表示井内的水位与井壁的水位不一致。对吗？

2. Dupuit 假设的实质是什么？

3. 什么情况下影响半径 $R$ 是一常数，什么情况下 $T$、$R$ 是 $t$ 的函数？

## 第二节　地下水向干扰井群及边界附近井的稳定运动

以上讨论的为单口井位于无限延伸或圆形含水层中工作情形。在生产实际中常见到数口井同时抽水，含水层中也并非圆形的，本节介绍这两方面的内容。

### 一、叠加原理与映象法

#### 1. 叠加原理

当相距不远的数口井同时工作时，井与井之间必然产生一定的干扰，这时干扰区内任一点所产生的降深值，在一定条件下，等于各井单独工作时在这一点所产生的降深值的叠加，这就是叠加原理的概念。

从数学角度简述叠加原理：设 $L(H)=0$ 是关于水头 $H$ 的线性齐次偏微分方程，$H_1$ 和 $H_2$ 是它的二个解，$C_1$ 和 $C_2$ 是两个任意常数，则线性组合

$$H = C_1H_1 + C_2H_2 \tag{3-49}$$

也是该方程的解。一般来说，如果 $H_i(i=1,2,,\cdots\cdots,n)$ 是方程 $L(H)=0$ 的 $n$ 个特解，则

$$H = C_1H_1 + C_2H_2 + \cdots + C_nH_n = \sum_{i=1}^{n} C_iH_i \tag{3-50}$$

也是该方程的解，式中 $C_i$ 为任意常数。

干扰井的叠加就是利用了数学中的这种线性解的叠加原理进行的。值得注意的是，叠加的前提是方程的解均为线性的，对于非线性解则不成立或须将其化为线性方程求解后再进行叠加。已知描述承压含水层中地下水运动的方程均为线性的，所以得到的解可直接用 $S$ 进行叠加。对于潜水井流，一般来说方程均为非线性的，但在求解时，常常是先将它们线性化后再求解，所以求得的解仍可进行叠加，只是潜水井是用 $H_0^2-h^2$（或 $\Delta h^2$）进行叠加。。

#### 2. 映象法原理

前已述及，自然界中的含水层常是有边界的，当位于边界附近的井抽水时，漏斗不断扩展以至达到边界时，边界对地下水的运动就会产生一定的影响。

在边界附近井流的计算中，对边界的处理常采用映象法，就是将边界作为一面镜子，抽水实井作为实象通过对镜子的映射成一虚象——虚井，用虚井的工作来代替边界的存在，即用虚井的注水或抽水来代替补给边界的作用或隔水边界的作用，最后利用类似于干扰井的叠加方法进行求解。

对于边界的映象，应遵守以下规则和要求：

(1)虚井和实井的位置对称于边界；

(2)虚井的流量与实井相等；

(3)虚井的性质取决于边界的性质，对于定水头补给边界，虚井的性质与实井相反，如实井为抽水井，则虚井为注水井；对隔水边界，虚井的性质与实井相同，如实井为抽水井，则虚

井也是抽水井；

(4)虚井与实井同步工作。

利用映象法，可将实际的边界附近的单井计算问题化为虚构的无限含水层中的干扰井的计算问题来求解，从而避开了研究中边界的作用，简化了计算。

## 二、地下水向干扰井群的稳定运动

### 1. 任意排列的干扰井群

在干扰井群中抽水时，抽水时间持续较长也可形成一个相对稳定的范围。设含水层中有一点 $A$，它与抽水井 $i$ 的距离为 $r_{i-A}$，则可写出第 $i$ 号抽水井单独工作时在 $A$ 点处产生的水位降深值 $S_{i-A}$。当边界条件为齐次时(如抽水前的初始水头和边界水头 $H_0$ 为常数，因而 $S=0$)，根据叠加原理，当有 $n$ 口任意排列的井同时工作时，在 $A$ 点处所产生的总降深为

$$S_A = \sum_{i=1}^{n} S_{i-A} \tag{3-51}$$

对于承压水含水层有

$$S_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{2\pi T} \ln \frac{R_i}{r_{i-A}} \tag{3-52}$$

式中 $Q_i$——第 $i$ 口井的抽水量(各井抽水量相等)，如注水井，则取负值；

$R_i$——第 $i$ 口井的影响半径；

$r_{i-A}$——第 $i$ 口井到 $A$ 点的距离。

对于越流含水层有

$$S_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{2\pi T} K_0\left(\frac{r_{i-A}}{B}\right) \tag{3-53}$$

或

$$S_A = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{2\pi T} \ln \frac{1.123B}{r_{i-A}} \tag{3-54}$$

对于潜水含水层，根据叠加原理，由于潜水含水层中的初始条件和边界条件为非齐次的(即 $h=H_0$，并非 $h=0$)，因此，不能对 $h^2$ 进行叠加，而是对 $H_0^2-h^2$ 进行叠加，当应用 Dupuit 假设时，则有

$$H_0^2 - h_A^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{\pi K} \ln \frac{R_i}{r_{i-A}} \tag{3-55}$$

式中 $h_A$——$A$ 点的潜水含水层厚度；

$H_0$——抽水前潜水含水层的初始厚度。

### 2. 环形排列的干扰井群

当干扰井群均匀排列在以半径为 $r$ 的圆周上，如果各抽水井的流量 $Q_i$ 及 $R_i$ 相等，则

$$\sum_{i=1}^{n} \ln \frac{R_i}{r_{i-A}} = \ln \frac{R^n}{r_{1-A} \cdot r_{2-A} \cdot r_{3-A} \cdots\cdots r_{n-A}}$$

如果 $A$ 点置于第 1 口抽水井的井壁上，则有

$$r_{1-A} \cdot r_{2-A} \cdot r_{3-A} \cdots\cdots r_{n-A} = r_w \cdot r_{2-1} \cdot r_{3-1} \cdots\cdots r_{n-1}$$

由几何关系可知

$$r_w \cdot r_{2-1} \cdot r_{3-1} \cdots\cdots r_{n-1} = n r_w \cdot r^{n-1}$$

式中 $r_w$——第 1 口抽水井的半径，如果各抽水井半径是相同的，$r_w$ 则为各抽水井的半径；

$r_{2-1} \cdot r_{3-1} \cdots\cdots r_{n-1}$——由 1 号抽水井至第 2，3 号……各井的距离；

$r$——环形圆周的半径。

因而有

承压水井

$$Q=\frac{2\pi KMS_w}{\ln\frac{R^n}{nr_w r^{n-1}}} \tag{3-56}$$

潜水井

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\frac{R^n}{nr_w r^{n-1}}} \tag{3-57}$$

式中 $Q$——各抽水井的流量；

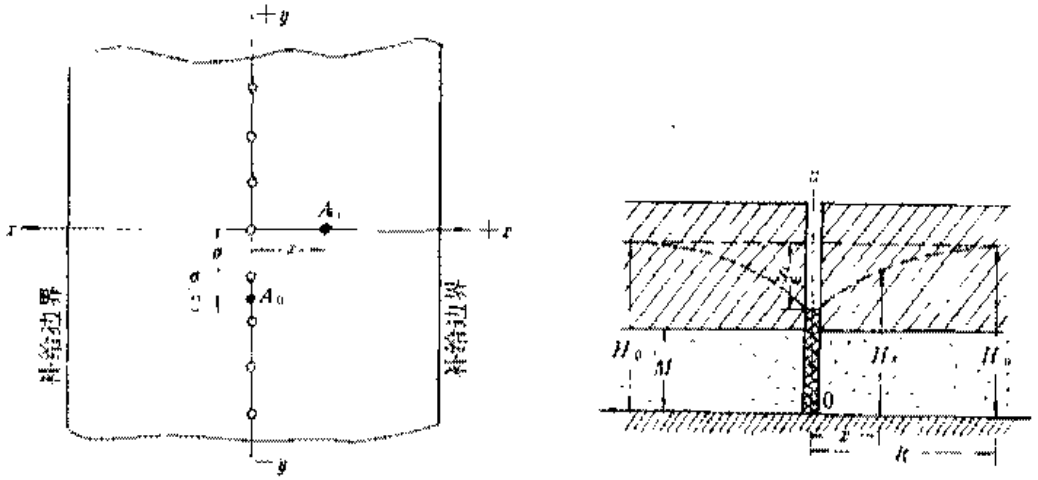
$r_w$——抽水井的半径；

$r$——环形圆周的半径。

式(3-56)和(3-57)对于两口、三口、四口……的干扰井群均适用，只要它们均匀布置于以 $r$ 为半径的环形圆周上，即两口井布置直径为 $2r$ 的两端，三口井按等边三角形布置于环形圆周上，四口井按正方形布置于环形圆周上，……，此时，$nr_w r^{n-1}$ 分别为 $2r_w r$、$3r_w r^2$、$4r_w r^3$、……。

**3. 直线排列的井群**

如有直线排列、无限延伸的井群，井距为 $\sigma$，井排距两侧的补给边界距离相等($R$)，边界水头均为 $H_0$(图 3-11)。如果各井半径 $r_w$ 相同，则可认为各井的降深 $S_w$、流量 $Q$ 均相同。




(a) 平面图　　(b) 沿 $x$ 轴的剖面图

图 3-11　补给边界对称分布的直线井排

$a$—平面图；$b$—沿 $x$ 轴的剖面图

承压水

$$Q=2.73\frac{KMS_w}{\lg\frac{\sigma}{\pi r_w}+\lg\mathrm{sh}\frac{\pi R}{\sigma}} \tag{3-58}$$

潜水

$$Q=1.366\frac{K(2H_0-S_w)S_w}{\lg\frac{\sigma}{\pi r_w}+\lg\mathrm{sh}\frac{\pi R}{\sigma}} \tag{3-59}$$

## 三、地下水向边界附近井的稳定运动

(一)位于直线边界附近的井流

1. 直线补给边界

设一抽水井距离河流为 $a$，以流量 $Q$ 抽水，则据映象法原理在对称位置上，有一映射的注水井(图 3-12)。坐标选择如图所示。据叠加原理，渗流场中任一点 $P$ 所产生的降深 $S$，应

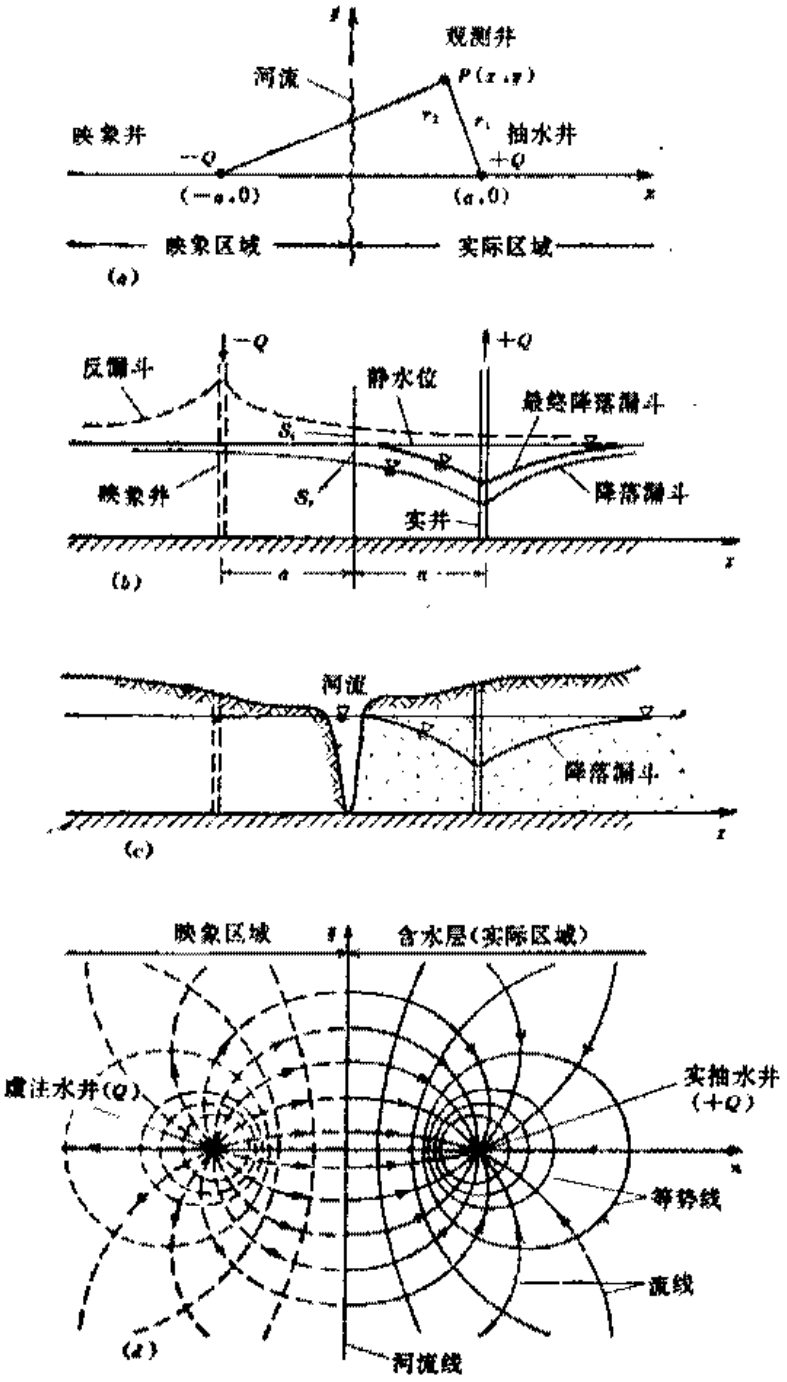



图 3-12　直线补给边界附近的稳定井流

(据 J. Bear)

等于实井与虚井在这点处所产生的降深的代数和，即

$$S = S_1 + (-S_2) \tag{3-60}$$

对于承压含水层

$$S=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0}{r_1}+\frac{-Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0}{r_2}=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1} \tag{3-61}$$

式中 $S$——边界附近 $P$ 点处降深；

$S_1$——实井引起的降深；

$S_2$——虚井引起的降深；

$r_1$——$P$ 点至实井的距离，$r_1=\sqrt{(x-a)^2+y^2}$；

$r_2$——$P$ 点至虚井的距离，$r_2=\sqrt{(x+a)^2+y^2}$。

对于潜水井，方程是非线性的，$S$ 不能直接叠加，而用 $\Delta h^2$ 进行叠加，即

$$\begin{aligned}\Delta h^2&=H_0^2-h^2=\Delta h_1^2+(-\Delta h_2^2)\\&=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R_0}{r_1}+\frac{-Q}{\pi K}\ln\frac{R_0}{r_2}\\&=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{r_2}{r_1}\end{aligned} \tag{3-62}$$

如果要求抽水井中的水位降深 $S_w$ 或流量 $Q$，则把 $P$ 点移至抽水井井壁，这时 $r_1=r_w$，$r_2\simeq 2a$，则有

承压水井

$$S_w=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{2a}{r_w} \tag{3-63}$$

或

$$Q=2\pi\frac{KMS_w}{\ln\dfrac{2a}{r_w}} \tag{3-64}$$

潜水井

$$Q=\pi K\frac{(2H_0-S_w)S_w}{\ln\dfrac{2a}{r_w}} \tag{3-65}$$

式中 $H_0$——承压含水层初始水头或潜水含水层初始厚度。

2. 直线隔水边界

据映射原理，抽水井对隔水边界的映射虚井仍为抽水井(图 3-13)，则有

承压水

$$S=S_1+S_2=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^2}{r_1r_2} \tag{3-66}$$

潜水

$$\Delta h^2=H_0^2-h^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R_0^2}{r_1r_2} \tag{3-67}$$

将 $P$ 点移至实井井壁 $r_1=r_w$，$r_2=2a$，则可求出实井的降深、流量计算公式

承压水

$$S_w=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^2}{2ar_w} \tag{3-68}$$

或

$$Q=2\pi T\frac{S_w}{\ln\dfrac{R_0^2}{2ar_w}} \tag{3-69}$$

潜水井

$$H_0^2-h_w^2=\frac{Q}{\pi K}\ln\frac{R_0^2}{2ar_w} \tag{3-70}$$

或

$$Q=\pi K\frac{(2H_0-S_w)S_w}{\ln\dfrac{R_0^2}{2ar_w}} \tag{3-71}$$

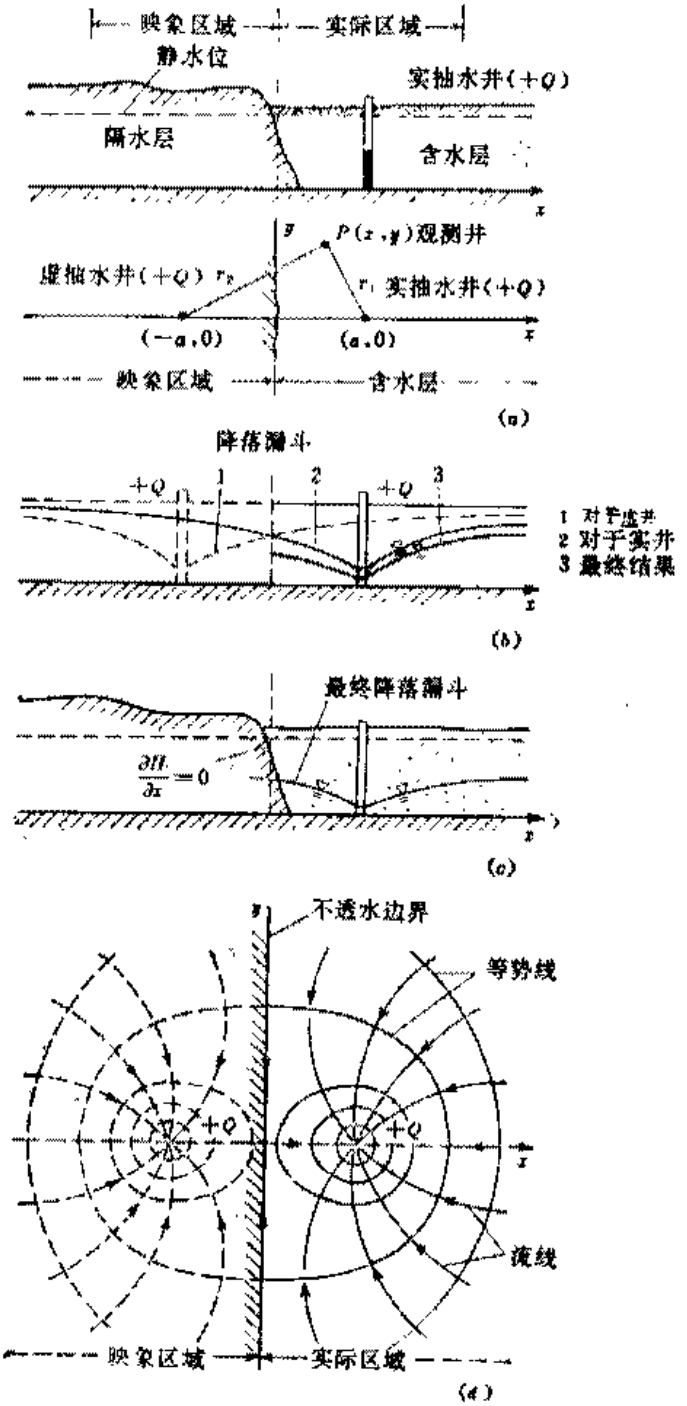



图 3-13　直线隔水边界附近的稳定井流

(据 J. Bear)

(二)扇形含水层中的井流

具有两条相交的直线边界含水层，称为扇形含水层。在扇形含水层中使用映象法时，除了要符合上述映射要求外，还要满足以下条件：

(1)由于扇形含水层由两条相交边界组成，因此，对于某一边界而言，不仅要对井映射，而且也要映射另一条边界，两者都要进行连续映射，直到虚井和虚边界布满整个平面为止。

(2)在映射时，虚井的性质随边界性质的不同而异，而虚边界的性质则不变。

(3)实井和虚井的位置轨迹在平面上为一圆，圆心是扇形的顶点，半径为顶点至井的距离。

(4)并非所有角度的扇形含水层均能应用映象法。它不仅取决于扇形的夹角 $\theta$，而且取决于夹角与边界性质的组合。一般来说，两边界性质相同时，$\theta$ 角必须能整除 180°，即 $\theta$ 等于 90°、60°、45°、30°、20°……；当两边界性质相反时，$\theta$ 角必须能整除 90°，即 $\theta$ 角等于 90°、45°、30°、15°……。

在实际应用中，不可能要求角度完全与理论值相同，只要相近即可。

1. 象限含水层

夹角为 90°的扇形含水层，称为象限含水层。这种情况有三种映射结果(图 3-14)。

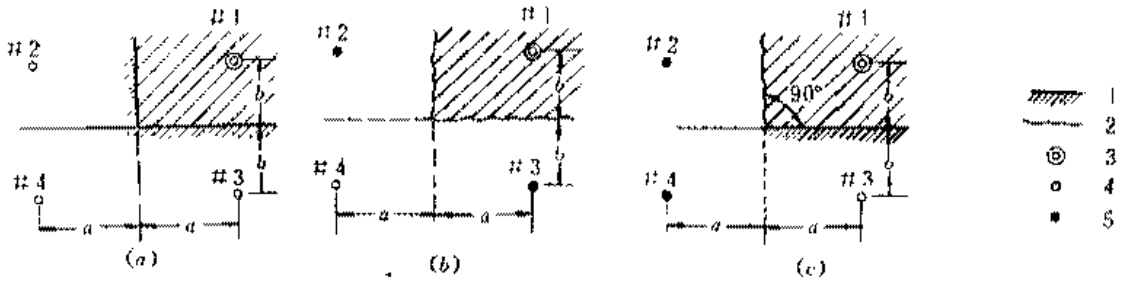



图 3-14 象限含水层中的映象法

a—两条隔水边界的情况；b—两条补给边界的情况；c—一条补给边界一条隔水边界的情况；1—隔水边界；2—补给边界；3—实抽水井；4—虚抽水井；5—虚注水井

第一种情况(图 3-14a)：两条都是隔水边界，含水层中任一点 $P$ 的降深为

承压水

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^4}{r_1 r_2 r_3 r_4} \tag{3-72}$$

式中 $R_0$——引用影响半径；

$r_i$——第 $i$ 口井至 $P$ 点的距离。

当 $P$ 点位于实井井壁时，$r_1 = r_w$，$r_2 = 2a$，$r_3 = 2b$，$r_4 = 2\sqrt{a^2+b^2}$，则有

$$S_w = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^4}{8r_w ab\sqrt{a^2+b^2}} \tag{3-73}$$

或

$$Q = \frac{2\pi KMS_w}{\ln\dfrac{R_0^4}{8r_w ab\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{3-74}$$

潜水井

$$Q = \frac{\pi K(H_0^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{R_0^4}{8r_w ab\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{3-75}$$

第二种情况(图 3-14*b*)：两条都是补给边界，因井 2、3 均为注水井，所以位于任一点 $P$ 的降深为：

承压井

$$S = S_1 + (-S_2) + (-S_3) + S_4 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2 r_3}{r_1 r_4}$$

$$Q = \frac{2\pi KMS_w}{\ln\dfrac{2ab}{r_w\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{3-76}$$

潜水井

$$Q = \frac{\pi K(H_0^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{2ab}{r_w\sqrt{a^2+b^2}}} \tag{3-77}$$

第三种情况(图 3-14*c*)：一条隔水边界，另一条为补给边界，井 2、4 为注水井，有

承压水井

$$S = S_1 + (-S_2) + S_3 + (-S_4) = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2 r_4}{r_1 r_3}$$

$$Q = \frac{2\pi KMS_w}{\ln\dfrac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{r_w b}} \tag{3-78}$$

潜水井

$$Q = \frac{\pi K(H_0^2 - h_w^2)}{\ln\dfrac{2a\sqrt{a^2+b^2}}{r_w b}} \tag{3-79}$$

2. 其它角度的扇形含水层

其它角度的扇形含水层很多，现仅以夹角为 60°的扇形含水层为例加以说明。

如图 3-15 所示(夹角为 60°扇形含水层)，当水井位于角平分线上时，有两种情况：

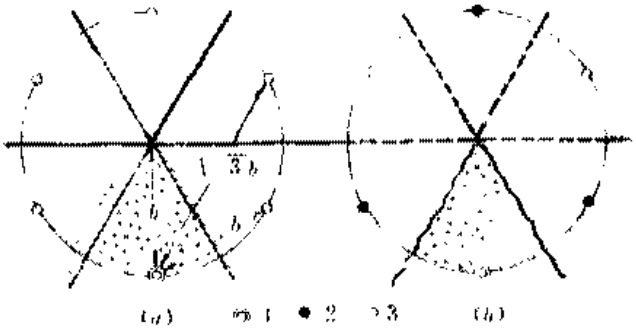



图 3-15　夹角 60°的扇形含水层中的映象法

*a*—两条隔水边界的情况；*b*—两条补给边界的情况；

1—实抽水井；2—虚注水井；3—虚抽水井

第一种情况，两边界同为隔水边界，则有

承压水井

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 + S_6 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R_0^6}{r_1 r_2 r_3 r_4 r_5 r_6} \tag{3-80}$$

若计算实井的水量，则有 $r_1 = r_w$，$r_2 = r_6 = b$，$r_3 = r_5 = \sqrt{3}\,b$，$r_4 = 2b$

$$Q = \frac{2\pi KMS_w}{\ln\dfrac{R_0^6}{6r_w b^5}} \tag{3-81}$$

同样，对潜水井有

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{R_0^6}{6r_w b^5}} \tag{3-82}$$

第二种情况，两边界同为补给边界，这时

承压水井 $$S=S_1+(-S_2)+S_3+(-S_4)+S_5+(-S_6)$$

$$=\frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2 r_4 r_6}{r_1 r_3 r_5} \tag{3-83}$$

对抽水井有 $$Q=\frac{2\pi KMS_w}{\ln\dfrac{2b}{3r_w}} \tag{3-84}$$

对潜水井 $$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\dfrac{2b}{3r_w}} \tag{3-85}$$

对于其它角度的扇形含水层计算与此类似，具体步骤为

(1)作出映射图；

(2)根据三角函数或勾股定理分别求出 $r_i$ 值；

(3)利用相应的承压水、潜水井流公式进行相应的叠加运算。

(三)条形含水层中的井流

由两条相互平行的直线边界组成的含水层，称条形含水层。它可以由断层、岩脉、河渠等平行排列所组成，组合形式有三类：(1)两边界均为隔水的；(2)两条均为补给边界的；(3)由一条隔水边界和一条补给边界组成的。

条形含水层的映射与上述两种含水层的映射不同，它的映射要进行无穷多次。其映射图见图 3-16。为避免计算上的复杂性及考虑到实用性，一般来说映射的次数在 3～5 之间即可满足精度要求。

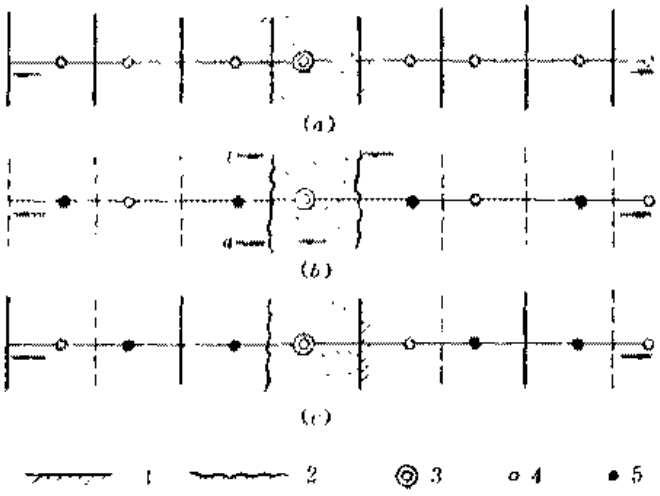



图 3-16 条形含水层的映象法

1—隔水边界；2—补给边界；3—实抽水井；4—虚抽水井；5—虚注水井

根据映射图中井的性质和分布，利用叠加原理可得到。

第一种情况，两边界均为补给边界（图 3-16*b*），这时

承压水井

$$Q=\frac{2\pi KMS_w}{\ln\left(\frac{2l}{\pi r_w}\sin\frac{\pi a}{l}\right)} \tag{3-86}$$

式中 $l$——两平行边界之间的垂直距离；

$a$——实井距边界的距离。

对潜水井

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\left(\frac{2l}{\pi r_w}\sin\frac{\pi a}{l}\right)} \tag{3-87}$$

第二种情况，两边界为隔水边界（图 3-16*a*），此时

承压水井

$$Q=\frac{4\pi KMS_w}{\ln\left\{\dfrac{\left[\mathrm{ch}\dfrac{\pi R_0}{l}-1\right]\left[\mathrm{ch}\dfrac{\pi R_0}{l}-\cos\dfrac{2\pi a}{l}\right]}{4\left(\dfrac{\pi r_w}{2l}\right)^2\sin^2\dfrac{\pi a}{l}}\right\}} \tag{3-88}$$

潜水井

$$Q=\frac{\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\left\{\dfrac{\left[\mathrm{ch}\dfrac{\pi R_0}{l}-1\right]\left[\mathrm{ch}\dfrac{\pi R_0}{l}-\cos\dfrac{2\pi a}{l}\right]}{4\left(\dfrac{\pi r_w}{2l}\right)^2\sin^2\dfrac{\pi a}{l}}\right\}} \tag{3-89}$$

第三种情况，一边界为补给边界，另一为隔水边界时（图 3-16*c*），有

承压水井

$$Q=\frac{2\pi KMS_w}{\ln\left[\frac{4l}{\pi r_w}\mathrm{tg}\frac{\pi a}{2l}\right]} \tag{3-90}$$

潜水井

$$Q=\frac{2\pi K(H_0^2-h_w^2)}{\ln\left[\frac{4l}{\pi r_w}\mathrm{tg}\frac{\pi a}{2l}\right]} \tag{3-91}$$

（四）矩形含水层中的井流

由四条正交的直线边界构成的含水层，称为矩形含水层。矩形含水层的映射图布满整个平面。它在 $x$ 和 $y$ 方向都要进行无限次的映射（图 3-17）。有关它的计算，与条形含水层类似，这里不再论述。

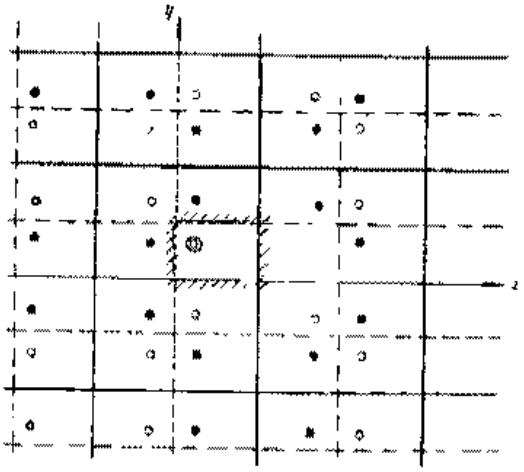


图 3-17 矩形含水层符号同前

## 第三节 地下水向不完整井的稳定运动

在很厚含水层中开采地下水，往往采用不完整井即可满足需水量。不完整井的研究对生产实际有很大的意义。

### 一、地下水向不完整井运动的特征

不完整井的水流特征与完整井的水流特征有所不同，主要在于三维流的出现（即在不完整井附近，渗流存在垂直分速度）（图 3-18）。离抽水井越近，三维流特征越明显，流线弯曲也

越大；远离井，则逐渐过渡到水平流。因此，整个流域可划分为两个区：在含水层厚度 $M$ 和径向距离 $r$ 的比值 $\frac{r}{M}<1.5\sim2.0$ 内为三维流区；在 $\frac{r}{M}\geqslant1.5\sim2.0$ 的地方为二维流区。所以，在研究不完整井水流时，经常分段进行讨论。

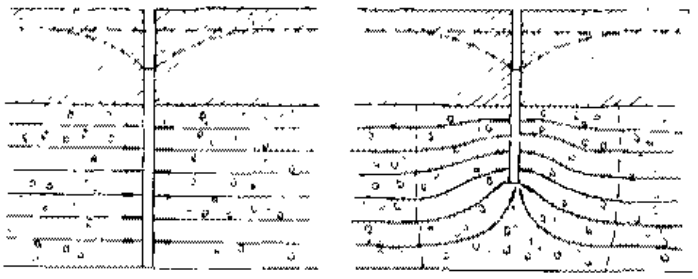


图 3-18　不完整井与完整井运动特征对比

不完整井与完整井的另一区别在于流量的不同。当其它条件相同时，不完整井的流量始终小于完整井的流量。这是由于流线在不完整井附近产生弯曲而引起阻力增大的缘故。

试验证明，不完整井的流量和过滤器长度 $l$ 与含水层厚度 $M$ 的比值有关，随 $\frac{l}{M}$ 增大而增大。当 $\frac{l}{M}=1$ 时，流量达到最大，为完整井流量。

不完整井的第三个特点是，在计算中必须考虑过滤器安装的部位及上下隔水层对过滤器附近水流状态的影响。

**二、无限厚含水层中的承压不完整井**

应该说自然界中是不存在无限厚含水层的。这里所讲的无限厚含水层，是指过滤器的长度 $l$ 与含水层厚度 $M$ 相比要小得多、含水层的隔水底板对过滤器附近的水流不产生影响的含水层。

根据不完整井的第三个特点及无限厚含水层的因素，在计算中，必须考虑隔水顶板的影响。这种影响与平面上井位于直线隔水边界附近的情况相似，可用映象法和叠加原理进行求解。

由于圆柱形过滤器不是一个点，计算上有困难，因此将它看成是由无数汇点组成的空间汇线，用以替代过滤器的作用。

所谓汇点是这样定义的：渗流以一定强度从各个方向沿径向（半径方向）流向一点，并被这点吸收。与之对应的是源点，它的定义是渗流从某点沿径向流出。可以将空间汇点理解为直径无限小的球形过滤器，渗流沿各半径方向流入球形过滤器并被吸收（图 3-19）。

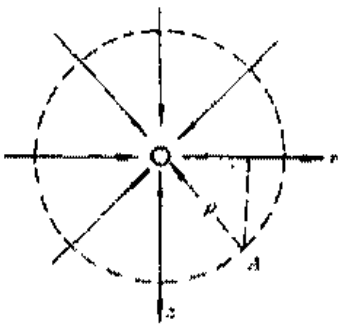



图 3-19　无限厚含水层中水流向汇点的情况

现设离汇点距离为 $\rho$ 处的降深为 $S$，过水断面面积为 $A=4\pi\rho^2$，则流向汇点的渗流量 $Q'$ 为

$$Q'=-K\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\rho}4\pi\rho^2$$

故 $$dS = -\frac{Q'}{4\pi K\rho^2}d\rho$$

在 $\rho$ 至影响边界 $R_0$ 范围内积分上式，得

$$S = \frac{Q'}{4\pi K}(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{R_0})$$

因影响半径 $R_0$ 较 $\rho$ 大得多，故将 $\frac{1}{R_0}$ 舍去，得

$$S = \frac{Q'}{4\pi K\rho} \tag{3-92}$$

这就是空间汇点的降深表达式。它表示在汇点作用下任意点 $A$(离汇点为 $\rho$)的降深。

对于汇线上的任一汇点而言，假设流量沿汇线 $l$ 均匀分布，在汇线上取一微小汇线段 $\Delta\eta_i$ 作为空间汇点(图 3-20)，则流入它的流量应为

$$\Delta Q = \frac{Q}{Z_2 - Z_1}\Delta\eta_i$$

它所引起的空间任一点的降深 $S_i$ 为

$$S_i = \frac{\Delta Q}{4\pi K\rho_i}$$

当汇点靠近隔水顶板时，隔水顶板会对其产生影响，处理的办法仍是映象法，即以隔水顶板为一镜面，在顶板上方对称位置映射出一等强度虚汇点，组成一虚汇线(图 3-20)，则空间任一点的降深值应为实汇点与虚汇点所产生的降深的叠加，即

$$S_i = \frac{\Delta Q}{4\pi K}[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}]$$

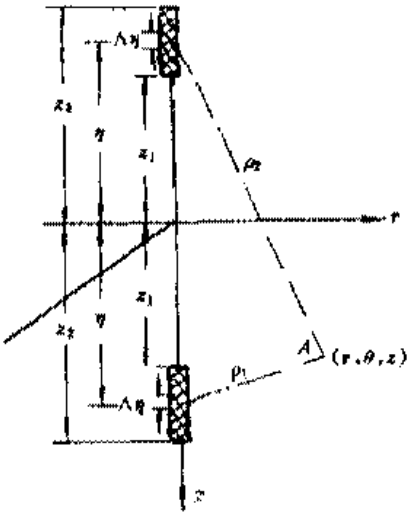



图 3-20 空间汇线示意图

式中，$\rho_1$ 和 $\rho_2$ 分别表示实汇点和虚汇点至这一点的距离。$\rho_1 = \sqrt{r^2+(Z-\eta)^2}$，$\rho_2 = \sqrt{r^2+(Z+\eta)^2}$。将 $\rho_1$、$\rho_2$ 及 $\Delta Q$ 代入，则得到汇线上任一距离 $\eta$ 处汇点所产生的降深

$$S_i = \frac{Q}{4\pi K(Z_2 - Z_1)}[\frac{1}{\sqrt{r^2+(Z-\eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(Z+\eta)^2}}]\Delta\eta_i \tag{3-93}$$

式中 $Z_1$、$Z_2$——汇线两端点坐标；

$\eta$——线段 $\Delta\eta_i$ 中点坐标。

现在回过头来研究汇线，它就是由无数个汇点组成的，所以汇线对任意点的总降深应等于任一汇点对该点产生降深的无限次累加。由于汇点在汇线上的分布是连续的，均匀的，所以可以用积分来求和。

$$S_i = \frac{Q}{4\pi K(Z_2 - Z_1)}\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta\eta_i\to 0}}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(Z-\eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(Z+\eta)^2}}\right)\Delta\eta_i$$

$$= \frac{Q}{4\pi K(Z_2 - Z_1)}\int_{Z_1}^{Z_2}\left(\frac{1}{\sqrt{r^2+(Z-\eta)^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+(Z+\eta)^2}}\right)d\eta$$

积分后得

$$S = \frac{Q}{4\pi K(Z_2 - Z_1)}[\mathrm{Arsh}\frac{Z+Z_2}{r} - \mathrm{Arsh}\frac{Z+Z_1}{r}$$

$$- \text{Arsh}\frac{Z-Z_2}{r} + \text{Arsh}\frac{Z-Z_1}{r}] \tag{3-94}$$

这就是空间汇线靠近隔水顶板时的任意点降深表达式。下面利用此式讨论过滤器距隔水顶板不同距离处的不完整井计算公式。

1. 过滤器紧靠隔水顶板(图 3-21)

在此情况下，$Z_1=0$，$Z_2=l$，由(3-94)式得

$$S=\frac{Q}{4\pi K l}\left(\text{Arsh}\frac{Z+l}{r}+\text{Arsh}\frac{l-Z}{r}\right) \tag{3-95}$$

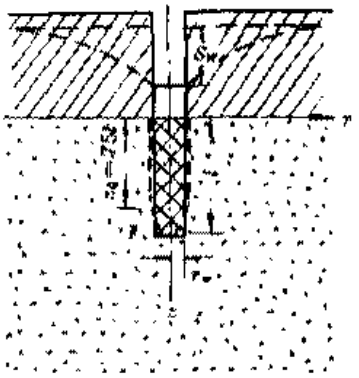


图 3-21 无限承压含水层中过滤器紧靠隔水顶板的不完整井

式(3-95)是由汇点、汇线导出的，它所代表的等降深面的形状是对称于 $Z$ 轴的半旋转椭球面。而真实过滤器是圆柱面，所以汇线不能用它来代表真实的过滤器。但如果用一假想过滤器，使它的形状与汇线附近的某等降深面相同，则它的流量显然是可以用式(3-95)来计算的。

现在假想过滤器的水头与真实井壁处的水头相等，将两者套在一起时，它们之间有一相交点 $P$，坐标为($r_w$，$Z_0$)。将这点代入公式则得到井中的降深 $S_w$ 为

$$S_w=\frac{Q}{4\pi K l}\left(\text{Arsh}\frac{l-Z_0}{r_w}+\text{Arsh}\frac{Z_0+l}{r_w}\right)$$

式中 $r_w$——真实过滤器半径；

$Z_0$——待定坐标。

这样，就得到了假想过滤器的流量计算公式

$$Q=\frac{4\pi K l S_w}{\text{Arsh}\dfrac{l-Z_0}{r_w}+\text{Arsh}\dfrac{Z_0+l}{r_w}} \tag{3-96}$$

分析上式可知，Q 随 $Z_0$ 的增大而增大。当 $Z_0=0$ 时，Q 最小，小于真实流量；当 $Z_0=l$ 时，Q 最大，大于真实流量。这是由于 $Z_0$ 的大小直接决定着假想过滤器表面积大小的缘故(图 3-22)。所以，正确的 $Z_0$ 值应在 0 和 $l$ 之间。根据 Бабушкин 的大量实验证明，$Z_0=0.75l$ 时，按照式(3-96)计算出的水量才与真实流量相等，为

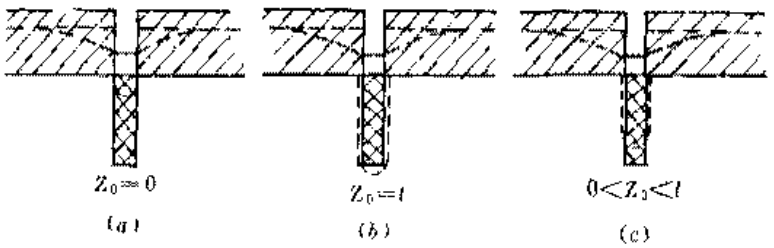



图 3-22 不同 $Z_0$ 值与假想过滤器表面积的关系

$$Q=\frac{4\pi K l S_w}{\text{Arsh}\dfrac{0.25l}{r_w}+\text{Arsh}\dfrac{1.75l}{r_w}}=\frac{2\pi K l S_w}{\ln\dfrac{1.32l}{r_w}} \tag{3-97}$$

Бабушкин 在推导上述公式时，虽假设含水层为半无限含水层，但在实际应用时，当 $l<$

0.3$M$ 的有限厚含水层，$R\leqslant(5\sim8)M$ 时，仍可应用，误差仅为 10%。

另外，Гиринский 根据使假想过滤器与真实过滤器表面积相等的方式，也导出了与式(3-97)相似的公式

$$Q=\frac{2\pi KlS_w}{\ln\dfrac{1.6l}{r_w}} \tag{3-98}$$

将上式与式(3-97)比较，可见，它们之间唯一的不同在于 1.32 和 1.6，面实际上对这两数取对数后，数值相差无几，不会影响精度。

2. 过滤器不紧靠隔水顶板(图 3-23)

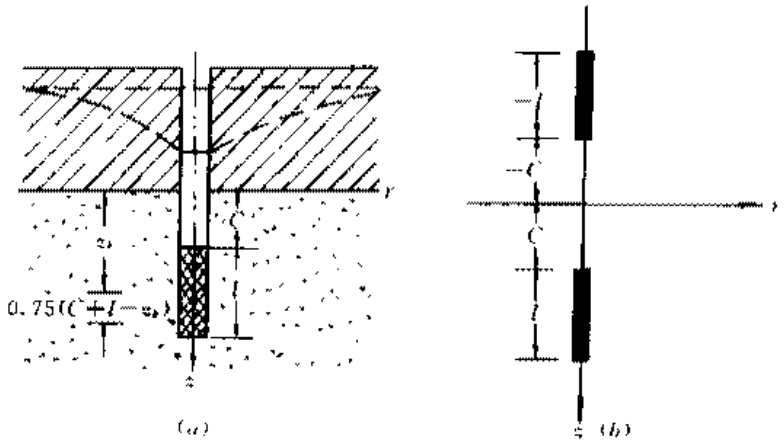



图 3-23 过滤器不紧靠隔水顶板的不完整井

$a$—不完整井；$b$—汇线映射图

此时，设 $Z_1=C$，$Z_2=C+l$，则有

$$S=\frac{Q}{4\pi Kl}\left(\operatorname{Arsh}\frac{Z+C+l}{r}-\operatorname{Arsh}\frac{Z+C}{r}-\operatorname{Arsh}\frac{Z-C-l}{r}+\operatorname{Arsh}\frac{Z-C}{r}\right) \tag{3-99}$$

与过滤器紧靠隔水顶板的情况类似，用一与真实过滤器相交于坐标($r_w$，$Z_0$)的假想过滤器代替真实过滤器，则得到

$$Q=\frac{4\pi KlS_w}{\operatorname{Arch}\dfrac{Z_0+C+l}{r_w}-\operatorname{Arch}\dfrac{Z_0+C}{r_w}+\operatorname{Arch}\dfrac{C+l-Z_0}{r_w}+\operatorname{Arch}\dfrac{Z_0-C}{r_w}} \tag{3-100}$$

上式分母中最小项$\left(\dfrac{Z_0-C}{r_w}\right)\geqslant1$，故所有的反双曲函数都可以用对数的近似值代替。

$$Q=\frac{4\pi KlS_w}{\ln\dfrac{4(Z_0-C)[(C+l)^2-Z_0^2]}{r_w^2(C+Z_0)}} \tag{3-101}$$

上式中 $Z_0$ 值仍为待定系数。假想过滤器上半轴和下半轴的交截面是一水平流面，此处 $\dfrac{\partial S}{\partial Z}=0$，得

$$Z_0=C(0.13+0.87a)=C+0.87l$$

代入式(3-101),得

$$Q = 5.46\frac{KlS_w}{B + 2\lg\frac{C}{r_w}} \tag{3-102}$$

式中

$$B = \lg\frac{4[\alpha^2 - (0.13 + 0.87\alpha)^2](\alpha - 1)}{1.3 + \alpha} \tag{3-103}$$

$$\alpha = \frac{C + l}{C}$$

$B$ 值也可由图 3-24 直接查得

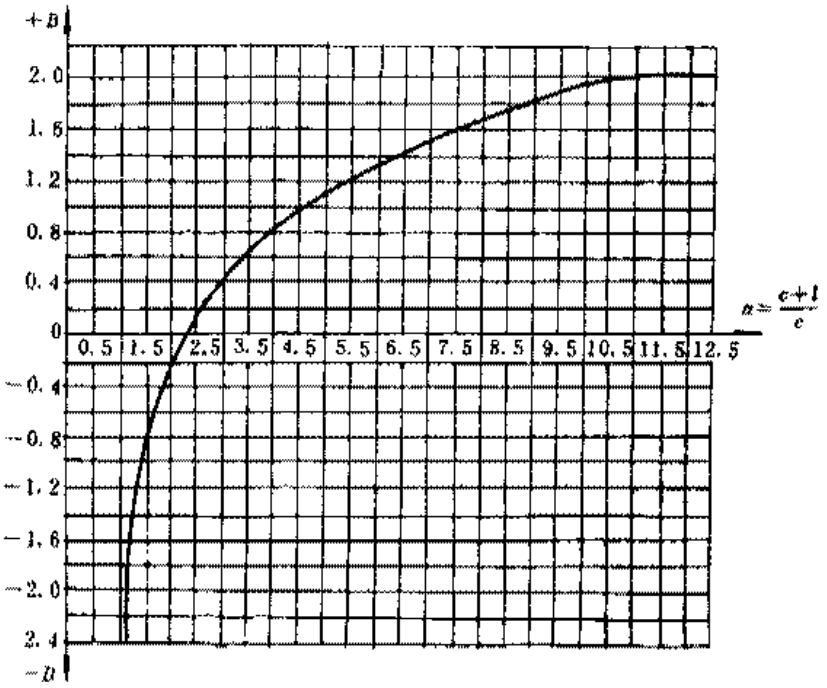



图 3-24 $B$ 和 $\alpha=\frac{C+l}{C}$ 的曲线图

(据 Бабушкин)

上式在理论上的适用条件虽规定为半无限含水层,但在实际应用时只要 $l<0.3M$ 的有限厚含水层,$R<(5\sim8)M$ 时,误差仅为 10%,除此以外,由于计算中的简化,要求 $\frac{l}{r_w}>5$。

### 三、有限厚含水层中的承压不完整井

当含水层厚度有限时,含水层的顶、底板都要对水流产生影响,因此映射的次数就要有无限多次,与平面上井位于条形含水层中的映射类似。这时,根据过滤器的位置不同,仍有两种计算公式。

1. 过滤器紧靠隔水顶板

此情况(图 3-25)的计算公式是由 M. Muskat 给出的。

$$Q = \frac{2\pi KMS_w}{\frac{1}{2\alpha}[2\ln\frac{4M}{r_w} - 2.3A] - \ln\frac{4M}{R}} = \frac{2.73KMS_w}{\frac{1}{2\alpha}[2\lg\frac{4M}{r_w} - A] - \lg\frac{4M}{R}} \tag{3-104}$$

式中 $\alpha=\frac{l}{M}$

$$A = f(\alpha) = \lg \frac{\Gamma(0.875\alpha)\Gamma(0.125\alpha)}{\Gamma(1-0.875\alpha)\Gamma(1-0.125\alpha)}$$ （也可由图 3-26 直接查得）

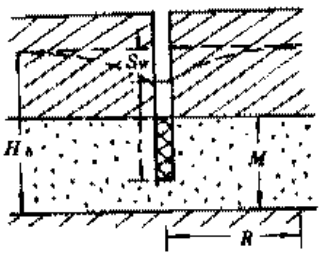



图 3-25 有限厚含水层中过滤器紧靠上覆隔水层的不完整井

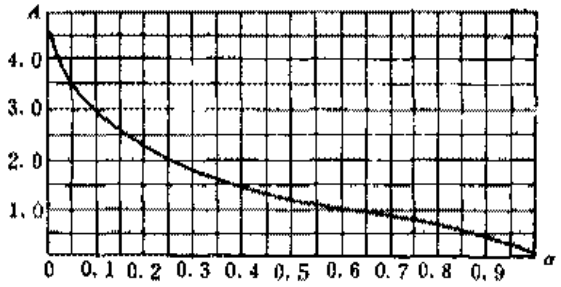



图 3-26 $A=f(\alpha)$曲线图

当 $\alpha=1$ 时，$A=0$，式(3-104)变为完整井公式，说明 Muskat 公式的正确一面；但当 $\alpha$ 很小时，$A$ 变得很大，这时有可能使式(3-104)中分母的$[2\ln\frac{4M}{r_w}-2.3A]\to 0$，从面使式(3-104)变化为

$$Q=\frac{2\pi KMS_w}{\ln\frac{R}{4M}}$$

与完整井流量计算公式比较可知，这时的流量相当于半径为 $4M$ 的完整井的流量。因为当 $\alpha$ 很小时，$r_w \ll 4m$，就是说不完整井的流量竟然比同条件下半径为 $r_w$ 的完整井流量还要大。这显然是不合理的。这是 Muskat 公式不合理的一面。经试验证实，在$\frac{l}{r_w}>5$ 的条件下，式(3-104)可给出较满意的结果，误差不大于 10%。

2. 过滤器不紧靠隔水顶板

当过滤器不紧靠隔水顶板时(图 3-27)，研究流网发现，流线在过滤器上下端弯曲很大，在中部弯曲度变缓，流面接近于平面。利用这一特征，可以通过过滤器的中线把过滤器分为上下两部分，即把过滤器不与隔水顶板接触的不完整井分成两个过滤器与隔水顶板直接接触的不完整井来研究。这样，流量应等于二个不完整井流量之和，即

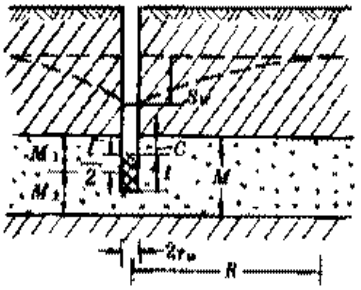



图 3-27 过滤器不紧靠隔水层顶板的不完整井

$$Q=2.73KS_w(B+D) \qquad (3\text{-}105)$$

式中

$$B=\frac{m_1}{\frac{1}{2\alpha_1}(2\lg\frac{4m_1}{r_w}-A_1)-\lg\frac{4m_1}{R}} \qquad (3\text{-}106)$$

$$D=\frac{m_2}{\frac{1}{2\alpha_2}(2\lg\frac{4m_2}{r_w}-A_2)-\lg\frac{4m_2}{R}} \qquad (3\text{-}107)$$

$$\left.\begin{aligned} A_1=f(\alpha_1),\ \alpha_1=\frac{0.5l}{m_1}\\ A_2=f(\alpha_2),\ \alpha_2=\frac{0.5l}{m_2}\end{aligned}\right\}$$ ($A_1$，$A_2$ 也可由图 3-27 确定)。

式中 $m_1$、$m_2$——由过滤器中部至隔水顶、底板的距离。

**四、潜水不完整井**

根据过滤器所处的不同位置，可将潜水不完整井分为以下两种情况：

1. 过滤器未淹没

研究该情况(图 3-28)流网发现，流线在被淹没段的中心为水平线，向两端逐渐弯曲成对称。据此可将过滤器未淹没的潜水井分为上下两部分。上部分为潜水完整井，下部为承压水不完整井。总流量应等于上、下两部分之和。

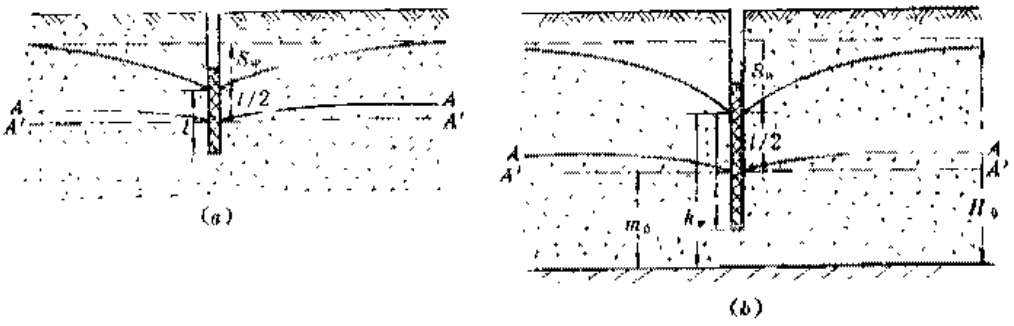



图 3-28 潜水不完整井

(据 C. K. Абрамов 和 В. Д. Бибушкин)

$a$—含水层无限厚时；$b$—含水层有限厚时

上段按潜水完整井计算，据式(3-28)，有

$$Q_1 = \frac{\pi K[(S_w + 0.5l)^2 - (0.5l)^2]}{\ln \frac{R}{r_w}}$$

下段分两种情况：当 $\frac{l}{2} < 0.3m_0$ 时，可将其看作含水层厚度是无限的，据式(3-97)有

$$Q'_2 = \frac{2\pi K(0.5l)S_w}{\ln \frac{1.32(0.5l)}{r_w}} = \frac{\pi KlS_w}{\ln \frac{0.66l}{r_w}}$$

当 $\frac{l}{2} > 0.3m_0$ 时，含水层厚度有限，据式(3-104)有

$$Q''_2 = \frac{2\pi Km_0S_w}{\frac{1}{2\alpha}[2\ln \frac{4m_0}{r_w} - 2.3A] - \ln \frac{4m_0}{R}}$$

式中 $m_0 = H_0 - S_w - \frac{l}{2}$，从 $A'—A'$ 中线到隔水底板的距离；

$\alpha = \frac{0.5l}{m_0}$。

于是潜水不完整井流量为：

当过滤器距离隔水底板较远，$\frac{l}{2} < 0.3m_0$ 时，

$$Q = Q_1 + Q'_2 = \pi KS_w\left(\frac{l + S_w}{\ln \frac{R}{S_w}} + \frac{l}{\ln \frac{0.66l}{r_w}}\right) \tag{3-108}$$

当过滤器距离隔水底板很近，$\frac{l}{2} > 0.3m_0$ 时

$$Q = Q_1 + Q_2' = \pi K S_w \left( \frac{l + S_w}{\ln \frac{R}{r_w}} + \frac{2m_0}{\frac{1}{2\alpha}(2\ln \frac{4m_0}{r_w} - 2.3A) - \ln \frac{4m_0}{R}} \right) \tag{3-109}$$

2. 过滤器被淹没(图 3-29)

对于此情况，根据流线之特征，同样可以沿过滤器中部将其分为上、下两部分，这两部分均按承压不完整井及过滤器紧靠隔水顶板时的公式(3-105)来计算。

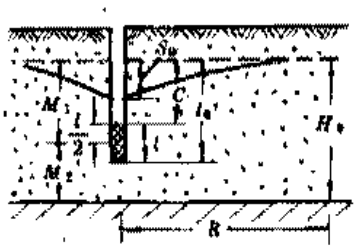



图 3-29 过滤器被淹没的潜水井

**思考题**

1. 利用映象法时，井要进行映射，边界是否也要进行映射?映射后井的性质可能改变，那么边界的性质也改变吗？观测孔是否也要映射？

2. 当两边界性质相反，夹角为 60°时，可否应用映射法？

3. 处理边界井的方法是什么？处理不完整井的方法是什么？二者有何异同点？

4. 在计算不完整井流量时，为什么要考虑过滤器安装的部位？

# 第四章　地下水向井(孔)的非稳定运动

本章介绍地下水向井(孔)运动的非稳定流理论，主要解决两个问题：1)利用水文地质试验资料，确定含水层的水文地质参数；2)当水文地质参数已知时，预测水位、水量。

## 第一节　承压含水层中单井的非稳定运动

### 一、无界承压含水层中单井非稳定流

自然中任何含水层都是有边界的，若边界对流场影响甚小，此时含水层可当作无界处理。无界承压含水层中单井包括定流量抽水井、变流量抽水井、定降深抽水井三种情况。下面分别讨论。

1. 定流量抽水单井

重点介绍承压完整单井定流量抽水情况下的 Theis 公式和 Jacob 公式。推导公式时，使用了以下假定：

(1)承压含水层是均质、各向同性、产状水平、等厚、平面上无限延伸的；

(2)井径无限小，定流量 $Q$ 抽水；

(3)抽出的水量全部来自含水层本身的弹性释放，随水头下降弹性释放瞬时完成；

(4)抽水前水位水平；

(5)渗流服从 Darcy 定律。

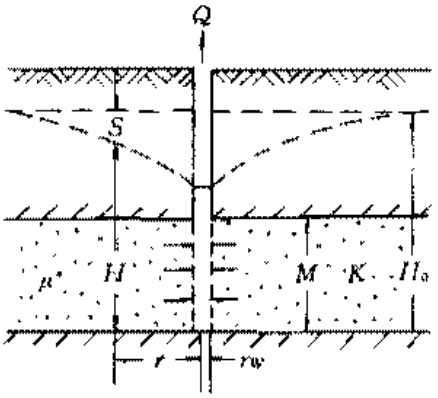


图 4-1　承压水完整井流

这样，随着不断抽水，含水层中水位不断下降，影响范围不断向外扩展，永远达不到稳定状态，形成以抽水井为中心的对称降落漏斗。地下水运动满足方程(1-104)，同时，地下水的运动是关于井轴对称的平面径向流(图 4-1)，也就是说流场中水头 $H$(或降深 $S$)与圆柱面坐标系的极坐标经度 $\theta$ 角与 $Z$ 轴无关，仅是时间 $t$ 及径向距离 $r$ 的函数，因此，地下水运动应满足二维承压水流基本方程

$$\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial S}{\partial t}$$

极据假定条件，其数学模型归纳为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial T} & t>0,0<r<\infty\\ S(r,0)=0 & 0<r<\infty\\ S(\infty,t)=0 & t>0\\ \lim\limits_{r\to 0} r\dfrac{\partial S}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T}\end{cases} \tag{4-1'}$$

其解①为

$$S(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^{\infty}\frac{e^{-y}}{y}dy \tag{4-1}$$

式中 $S$——流场中任一点任一时刻水位降深；

$Q$——井流量；

$T$——导水系数；

$\mu^*$——贮水系数；

$r$——计算点到抽水井的距离；

$t$——自抽水开始到计算时刻的时间。

$u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$

式(4-1)即为无补给时承压完整井定流量非稳定流降深公式，也就是著名的 Theis 公式。

为了计算方便，利用井函数 $W(u)$代替式(4-1)中的指数积分，即

$$W(u)=-E_i(-u)=\int_u^{\infty}\frac{1}{y}e^{-y}dy$$

式(4-1)可写成

$$S(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}W(u) \tag{4-2}$$

式中，$W(u)$又称为 Theis 井函数。其值可利用表 4-1 查得。

这样，只要计算出 $u$，即可查得 $W(u)$，代入式(4-2)求出降深 $S$。

$W(u)$可用收敛级数表示：

$$W(u)=\int_u^{\infty}\frac{1}{y}e^{-y}dy=-0.577216-\ln u+u-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{n\cdot n!}$$

式中 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n u^n}{n\cdot n!}$是一个交错级数。根据交错级数的性质可知，这个级数的和不大于$\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$，当 $u$ 很小时，截断误差不超过 $2u=\frac{r^2\mu^*}{2Tt}$，$W(u)$可用级数前面两项近似表示，即

$$W(u)\approx-0.577216-\ln u=\ln\frac{1}{u}-\ln 1.78=\ln\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}$$

因此，式(4-2)、(4-1)又可近似表示为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\ln\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*}\ 或\ S=\frac{2.30Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*} \tag{4-3}$$

式(4-3)即称作 Jacob 公式。

式(4-3)与式(4-1)比较，由于舍去 $2u=\frac{r^2\mu^*}{2Tt}$，引起的误差值如下：

当 $u\leqslant 0.01$(即 $t\geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}$)时，相对误差$\leqslant 0.25\%$；

当 $u\leqslant 0.05$(即 $t\geqslant 5\frac{r^2\mu^*}{T}$)时，相对误差$\leqslant 2\%$；

① 求解过程见附录 I

表 4-1

## $W(\alpha)$ 数 值 表

(Ferris, Brown 和 Stallman 等 1962)

| $N$ \ $\alpha$ | $N\times10^{-16}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 33.9616 | 31.6590 | 29.3564 | 27.0538 | 24.7512 | 22.4486 | 20.1460 | 17.8435 | 15.5409 | 13.2383 | 10.9357 | 8.6332 | 6.3315 | 4.0379 | 1.8229 | 0.2194 |
| 1.1 | 33.8662 | 31.5637 | 29.2611 | 26.9585 | 24.6559 | 22.3533 | 20.0507 | 17.7482 | 15.4456 | 13.1430 | 10.8404 | 8.5379 | 6.2363 | 3.9436 | 1.7371 | 0.1860 |
| 1.2 | 33.7792 | 31.4767 | 29.1741 | 26.8715 | 24.5689 | 22.2663 | 19.9637 | 17.6611 | 15.3586 | 13.0560 | 10.7534 | 8.4509 | 6.1494 | 3.8576 | 1.6595 | 0.1584 |
| 1.3 | 33.6992 | 31.3966 | 29.0940 | 26.7914 | 24.4889 | 22.1863 | 19.8837 | 17.5811 | 15.2785 | 12.9759 | 10.6734 | 8.3709 | 6.0695 | 3.7785 | 1.5889 | 0.1355 |
| 1.4 | 33.6251 | 31.3225 | 29.0199 | 26.7173 | 24.4147 | 22.1122 | 19.8096 | 17.5079 | 15.2044 | 12.9018 | 10.5993 | 8.2968 | 5.9955 | 3.7054 | 1.5241 | 0.1162 |
| 1.5 | 33.5561 | 31.2535 | 28.9509 | 26.6483 | 24.3458 | 22.0432 | 19.7406 | 17.4380 | 15.1354 | 12.8328 | 10.5303 | 8.2278 | 5.9266 | 3.6374 | 1.4645 | 0.1000 |
| 1.6 | 33.4916 | 31.1890 | 28.8864 | 26.5838 | 24.2812 | 21.9786 | 19.6760 | 17.3735 | 15.0709 | 12.7683 | 10.4657 | 8.1634 | 5.8621 | 3.5739 | 1.4092 | 0.08631 |
| 1.7 | 33.4309 | 31.1283 | 28.8258 | 26.5232 | 24.2206 | 21.9180 | 19.6154 | 17.3128 | 15.0103 | 12.7077 | 10.4051 | 8.1027 | 5.8016 | 3.5143 | 1.3578 | 0.07465 |
| 1.8 | 33.3738 | 31.0712 | 28.7686 | 26.4660 | 24.1634 | 21.8608 | 19.5583 | 17.2557 | 14.9531 | 12.6505 | 10.3479 | 8.0455 | 5.7446 | 3.4581 | 1.3089 | 0.06471 |
| 1.9 | 33.3197 | 31.0171 | 28.7145 | 26.4119 | 24.1094 | 21.8068 | 19.5042 | 17.2016 | 14.8990 | 12.5964 | 10.2929 | 7.9915 | 5.6906 | 3.4050 | 1.2649 | 0.05620 |
| 2.0 | 33.2684 | 30.9658 | 28.6632 | 26.3607 | 24.0581 | 21.7555 | 19.4529 | 17.1503 | 14.8477 | 12.5451 | 10.2426 | 7.9402 | 5.6394 | 3.3547 | 1.2227 | 0.04890 |
| 2.1 | 33.2196 | 30.9170 | 28.6145 | 26.3119 | 24.0093 | 21.7067 | 19.4041 | 17.1015 | 14.7989 | 12.4964 | 10.1938 | 7.8914 | 5.5907 | 3.3069 | 1.1829 | 0.04261 |
| 2.2 | 33.1731 | 30.8705 | 28.5679 | 26.2653 | 23.9628 | 21.6602 | 19.3576 | 17.0550 | 14.7524 | 12.4498 | 10.1473 | 7.8449 | 5.5443 | 3.2614 | 1.1454 | 0.03719 |
| 2.3 | 33.1286 | 30.8261 | 28.5235 | 26.2209 | 23.9183 | 21.6157 | 19.3131 | 17.0106 | 14.7080 | 12.4054 | 10.1028 | 7.8004 | 5.4999 | 3.2179 | 1.1099 | 0.03259 |
| 2.4 | 33.0861 | 30.7835 | 28.4809 | 26.1783 | 23.8758 | 21.5732 | 19.2706 | 16.9680 | 14.6654 | 12.3628 | 10.0603 | 7.7579 | 5.4575 | 3.1763 | 1.0762 | 0.02844 |
| 2.5 | 33.0452 | 30.7427 | 28.4401 | 26.1375 | 23.8349 | 21.5323 | 19.2298 | 16.9272 | 14.6246 | 12.3220 | 10.0194 | 7.7172 | 5.4167 | 3.1365 | 1.0443 | 0.02491 |
| 2.6 | 33.0060 | 30.7035 | 28.4009 | 26.0983 | 23.7957 | 21.4931 | 19.1905 | 16.8880 | 14.5854 | 12.2828 | 9.9802 | 7.6779 | 5.3776 | 3.0983 | 1.0139 | 0.02185 |
| 2.7 | 32.9683 | 30.6657 | 28.3631 | 26.0606 | 23.7580 | 21.4554 | 19.1523 | 16.8502 | 14.5476 | 12.2450 | 9.9425 | 7.6401 | 5.3400 | 3.0615 | 0.9849 | 0.01918 |
| 2.8 | 32.9319 | 30.6294 | 28.3268 | 26.0242 | 23.7216 | 21.4190 | 19.1164 | 16.8138 | 14.5113 | 12.2087 | 9.9061 | 7.6038 | 5.3037 | 3.0261 | 0.9573 | 0.01686 |
| 2.9 | 32.8968 | 30.5943 | 28.2917 | 25.9891 | 23.6865 | 21.3839 | 19.0813 | 16.7788 | 14.4762 | 12.1736 | 9.8710 | 7.5687 | 5.2687 | 2.9920 | 0.9309 | 0.01482 |

续表

| n / N | $N\times10^{-15}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3.0 | 32.8639 | 30.5694 | 28.2578 | 25.9552 | 23.6526 | 21.3500 | 19.0474 | 16.7449 | 14.4423 | 12.1397 | 9.8371 | 7.5348 | 5.2349 | 2.9591 | 0.9057 | 0.01305 |
| 3.1 | 32.8302 | 30.5275 | 28.2250 | 25.9224 | 23.6198 | 21.3172 | 19.0146 | 16.7121 | 14.4095 | 12.1069 | 9.8043 | 7.5020 | 5.2022 | 2.9273 | 0.8815 | 0.01149 |
| 3.2 | 32.7954 | 30.4958 | 28.1932 | 25.8907 | 23.5880 | 21.2855 | 18.9829 | 16.6803 | 14.3777 | 12.0751 | 9.7726 | 7.4703 | 5.1706 | 2.8965 | 0.8583 | 0.01013 |
| 3.3 | 32.7676 | 30.4651 | 28.1625 | 25.8599 | 23.5573 | 21.2547 | 18.9521 | 16.6495 | 14.3470 | 12.0444 | 9.7418 | 7.4395 | 5.1399 | 2.8668 | 0.8361 | 0.008939 |
| 3.4 | 32.7378 | 30.4352 | 28.1326 | 25.8300 | 23.5274 | 21.2249 | 18.9223 | 16.6197 | 14.3171 | 12.0145 | 9.7120 | 7.4097 | 5.1102 | 2.8379 | 0.8147 | 0.007891 |
| 3.5 | 32.7068 | 30.4062 | 28.1036 | 25.8019 | 23.4985 | 21.1959 | 18.8933 | 16.5907 | 14.2881 | 11.9855 | 9.6830 | 7.3807 | 5.0813 | 2.8099 | 0.7942 | 0.006970 |
| 3.6 | 32.6806 | 30.3780 | 28.0755 | 25.7729 | 23.4703 | 21.1677 | 18.8651 | 16.5625 | 14.2599 | 11.9574 | 9.6548 | 7.3526 | 5.0532 | 2.7827 | 0.7745 | 0.006160 |
| 3.7 | 32.6532 | 30.3506 | 28.0481 | 25.7455 | 23.4429 | 21.1403 | 18.8377 | 16.5351 | 14.2325 | 11.9300 | 9.6274 | 7.3252 | 5.0259 | 2.7563 | 0.7554 | 0.005448 |
| 3.8 | 32.6266 | 30.3240 | 28.0214 | 25.7188 | 23.4162 | 21.1136 | 18.8110 | 16.5085 | 14.2059 | 11.9033 | 9.6007 | 7.2985 | 4.9993 | 2.7306 | 0.7371 | 0.004820 |
| 3.9 | 32.6006 | 30.2980 | 27.9954 | 25.6928 | 23.3902 | 21.0877 | 18.7851 | 16.4825 | 14.1799 | 11.8773 | 9.5748 | 7.2725 | 4.9735 | 2.7056 | 0.7194 | 0.004267 |
| 4.0 | 32.5753 | 30.2727 | 27.9701 | 25.6675 | 23.3649 | 21.0623 | 18.7598 | 16.4572 | 14.1546 | 11.8520 | 9.5495 | 7.2472 | 4.9482 | 2.6813 | 0.7024 | 0.003779 |
| 4.1 | 32.5506 | 30.2480 | 27.9454 | 25.6428 | 23.3402 | 21.0376 | 18.7351 | 16.4325 | 14.1299 | 11.8273 | 9.5248 | 7.2225 | 4.9236 | 2.6576 | 0.6859 | 0.003349 |
| 4.2 | 32.5265 | 30.2239 | 27.9213 | 25.6187 | 23.3161 | 21.0136 | 18.7110 | 16.4084 | 14.1058 | 11.8032 | 9.5007 | 7.1985 | 4.8997 | 2.6344 | 0.6700 | 0.002969 |
| 4.3 | 32.5029 | 30.2004 | 27.8978 | 25.5952 | 23.2926 | 20.9900 | 18.6874 | 16.3884 | 14.0823 | 11.7797 | 9.4771 | 7.1749 | 4.8762 | 2.6119 | 0.6546 | 0.002633 |
| 4.4 | 32.4800 | 30.1774 | 27.8748 | 25.5722 | 23.2696 | 20.9670 | 18.6644 | 16.3619 | 14.0595 | 11.7567 | 9.4541 | 7.1520 | 4.8533 | 2.5899 | 0.6397 | 0.002335 |
| 4.5 | 32.4575 | 30.1549 | 27.8523 | 25.5497 | 23.2471 | 20.9446 | 18.6420 | 16.3394 | 14.0368 | 11.7342 | 9.4317 | 7.1295 | 4.8310 | 2.5684 | 0.6253 | 0.002073 |
| 4.6 | 32.4355 | 30.1329 | 27.8303 | 25.5277 | 23.2252 | 20.9226 | 18.6200 | 16.3174 | 14.0148 | 11.7122 | 9.4097 | 7.1075 | 4.8091 | 2.5474 | 0.6114 | 0.001841 |
| 4.7 | 32.4140 | 30.1114 | 27.8088 | 25.5062 | 23.2037 | 20.9011 | 18.5985 | 16.2959 | 13.9933 | 11.6907 | 9.3882 | 7.0860 | 4.7877 | 2.5268 | 0.5979 | 0.001635 |
| 4.8 | 32.3929 | 30.0904 | 27.7878 | 25.4852 | 23.1826 | 20.8800 | 18.5774 | 16.2748 | 13.9723 | 11.6697 | 9.3671 | 7.0650 | 4.7667 | 2.5068 | 0.5848 | 0.001453 |
| 4.9 | 32.3723 | 30.0697 | 27.7672 | 25.4646 | 23.1620 | 20.8594 | 18.5568 | 16.2542 | 13.9516 | 11.6491 | 9.3465 | 7.0444 | 4.7462 | 2.4871 | 0.5721 | 0.001291 |

续表

| n / N | $N\times10^{-15}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.0 | 32.3521 | 30.0495 | 27.7470 | 25.4444 | 23.1418 | 20.8392 | 18.5366 | 16.2340 | 13.9314 | 11.6289 | 9.3263 | 7.0242 | 4.7261 | 2.4679 | 0.5598 | 0.001148 |
| 5.1 | 32.3323 | 30.0297 | 27.7271 | 25.4246 | 23.1220 | 20.8194 | 18.5168 | 16.2142 | 13.9116 | 11.6091 | 9.3065 | 7.0044 | 4.7064 | 2.4491 | 0.5478 | 0.001021 |
| 5.2 | 32.3123 | 30.0103 | 27.7077 | 25.4051 | 23.1026 | 20.8000 | 18.4974 | 16.1948 | 13.8922 | 11.5896 | 9.2871 | 6.9850 | 4.6871 | 2.4306 | 0.5362 | 0.0009086 |
| 5.3 | 32.2939 | 29.9913 | 27.6887 | 25.3861 | 23.0835 | 20.7809 | 18.4783 | 16.1758 | 13.8732 | 11.5706 | 9.2687 | 6.9659 | 4.6681 | 2.4126 | 0.5250 | 0.0008086 |
| 5.4 | 32.2752 | 29.9726 | 27.6700 | 25.3674 | 23.0648 | 20.7622 | 18.4596 | 16.1571 | 13.8545 | 11.5519 | 9.2494 | 6.9473 | 4.6495 | 2.3948 | 0.5140 | 0.0007198 |
| 5.5 | 32.2568 | 29.9512 | 27.6516 | 25.3491 | 23.0465 | 20.7439 | 18.4413 | 16.1387 | 13.8361 | 11.5336 | 9.2310 | 6.9289 | 4.6313 | 2.3775 | 0.5034 | 0.0006409 |
| 5.6 | 32.2388 | 29.9362 | 27.6336 | 25.3310 | 23.0285 | 20.7259 | 18.4233 | 16.1207 | 13.8181 | 11.5155 | 9.2130 | 6.9109 | 4.6134 | 2.3604 | 0.4930 | 0.0005708 |
| 5.7 | 32.2211 | 29.9185 | 27.6159 | 25.3133 | 23.0108 | 20.7082 | 18.4056 | 16.1030 | 13.8004 | 11.4978 | 9.1953 | 6.8932 | 4.5958 | 2.3437 | 0.4830 | 0.0005085 |
| 5.8 | 32.2037 | 29.9011 | 27.5985 | 25.2959 | 22.9934 | 20.6908 | 18.3882 | 16.0856 | 13.7830 | 11.4804 | 9.1779 | 6.8758 | 4.5785 | 2.3272 | 0.4732 | 0.0004532 |
| 5.9 | 32.1866 | 29.8840 | 27.5814 | 25.2789 | 22.9763 | 20.6737 | 18.3711 | 16.0685 | 13.7659 | 11.4633 | 9.1606 | 6.8588 | 4.5615 | 2.3111 | 0.4637 | 0.0004039 |
| 6.0 | 32.1698 | 29.8672 | 27.5646 | 25.2620 | 22.9595 | 20.6569 | 18.3543 | 16.0517 | 13.7491 | 11.4465 | 9.1440 | 6.8420 | 4.5448 | 2.2953 | 0.4544 | 0.0003601 |
| 6.1 | 32.1533 | 29.8507 | 27.5481 | 25.2455 | 22.9429 | 20.6403 | 18.3378 | 16.0352 | 13.7326 | 11.4300 | 9.1275 | 6.8254 | 4.5283 | 2.2797 | 0.4454 | 0.0003211 |
| 6.2 | 32.1370 | 29.8344 | 27.5318 | 25.2293 | 22.9267 | 20.6241 | 18.3215 | 16.0189 | 13.7163 | 11.4138 | 9.1112 | 6.8092 | 4.5122 | 2.2645 | 0.4366 | 0.0002864 |
| 6.3 | 32.1210 | 29.8184 | 27.5158 | 25.2133 | 22.9107 | 20.6081 | 18.3055 | 16.0029 | 13.7003 | 11.3978 | 9.0952 | 6.7932 | 4.4963 | 2.2494 | 0.4280 | 0.0002555 |
| 6.4 | 32.1053 | 29.8027 | 27.5001 | 25.1975 | 22.8949 | 20.5923 | 18.2898 | 15.9872 | 13.6846 | 11.3820 | 9.0795 | 6.7775 | 4.4806 | 2.2346 | 0.4197 | 0.0002279 |
| 6.5 | 32.0898 | 29.7872 | 27.4846 | 25.1820 | 22.8794 | 20.5768 | 18.2742 | 15.9717 | 13.5691 | 11.3665 | 9.0640 | 6.7620 | 4.4652 | 2.2201 | 0.4115 | 0.0002034 |
| 6.6 | 32.0745 | 29.7719 | 27.4693 | 25.1667 | 22.8641 | 20.5616 | 18.2590 | 15.9564 | 13.6538 | 11.3512 | 9.0487 | 6.7467 | 4.4501 | 2.2058 | 0.4036 | 0.0001816 |
| 6.7 | 32.0595 | 29.7569 | 27.4543 | 25.1517 | 22.8491 | 20.5465 | 18.2439 | 15.9414 | 13.5388 | 11.3362 | 9.0337 | 6.7317 | 4.4351 | 2.1917 | 0.3959 | 0.0001621 |
| 6.8 | 32.0446 | 29.7421 | 27.4395 | 25.1369 | 22.8343 | 20.5317 | 18.2291 | 15.9265 | 13.5240 | 11.3214 | 9.0189 | 6.7169 | 4.4204 | 2.1779 | 0.3883 | 0.0001448 |
| 6.9 | 32.0300 | 29.7275 | 27.4249 | 25.1223 | 22.8197 | 20.5171 | 18.2145 | 15.9119 | 13.5094 | 11.3068 | 9.0043 | 6.7023 | 4.4059 | 2.1643 | 0.3810 | 0.0001293 |

续表

| $N$ \ $N^*$ | $N\times10^{-15}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7.0 | 32.0156 | 29.7131 | 27.4105 | 25.1079 | 22.8053 | 20.5027 | 18.2001 | 15.8976 | 13.5950 | 11.2924 | 8.9899 | 6.6879 | 4.3916 | 2.1508 | 0.3738 | 0.0001155 |
| 7.1 | 32.0015 | 29.6989 | 27.3963 | 25.0937 | 22.7911 | 20.4885 | 18.1860 | 15.8834 | 13.5808 | 11.2782 | 8.9757 | 6.6737 | 4.3775 | 2.1376 | 0.3668 | 0.0001032 |
| 7.2 | 31.9875 | 29.6849 | 27.3823 | 25.0797 | 22.7771 | 20.4746 | 18.1720 | 15.8694 | 13.5668 | 11.2642 | 8.9617 | 6.6598 | 4.3636 | 2.1246 | 0.3599 | 0.00009219 |
| 7.3 | 31.9737 | 29.6711 | 27.3685 | 25.0659 | 22.7633 | 20.4608 | 18.1582 | 15.8556 | 13.5530 | 11.2504 | 8.9479 | 6.6460 | 4.3500 | 2.1118 | 0.3532 | 0.00008239 |
| 7.4 | 31.9601 | 29.6575 | 27.3549 | 25.0523 | 22.7497 | 20.4472 | 18.1446 | 15.8420 | 13.5394 | 11.2368 | 8.9343 | 6.6324 | 4.3364 | 2.0991 | 0.3467 | 0.00007364 |
| 7.5 | 31.9467 | 29.6441 | 27.3415 | 25.0389 | 22.7363 | 20.4337 | 18.1311 | 15.8286 | 13.5260 | 11.2234 | 8.9209 | 6.6190 | 4.3231 | 2.0867 | 0.3403 | 0.00006583 |
| 7.6 | 31.9334 | 29.6308 | 27.3282 | 25.0257 | 22.7231 | 20.4205 | 18.1179 | 15.8153 | 13.5127 | 11.2102 | 8.9076 | 6.6057 | 4.3100 | 2.0744 | 0.3341 | 0.00005886 |
| 7.7 | 31.9203 | 29.6178 | 27.3152 | 25.0126 | 22.7100 | 20.4074 | 18.1048 | 15.8022 | 13.4997 | 11.1971 | 8.8946 | 6.5927 | 4.2970 | 2.0623 | 0.3280 | 0.00005263 |
| 7.8 | 31.9074 | 29.6048 | 27.3023 | 24.9997 | 22.6971 | 20.3945 | 18.0919 | 15.7893 | 13.4868 | 11.1842 | 8.8817 | 6.5798 | 4.2842 | 2.0503 | 0.3221 | 0.00004707 |
| 7.9 | 31.8947 | 29.5921 | 27.2895 | 24.9869 | 22.6844 | 20.3818 | 18.0792 | 15.7766 | 13.4740 | 11.1714 | 8.8689 | 6.5671 | 4.2716 | 2.0386 | 0.3163 | 0.00004210 |
| 8.0 | 31.8821 | 29.5795 | 27.2769 | 24.9744 | 22.6718 | 20.3692 | 18.0666 | 15.7640 | 13.4614 | 11.1589 | 8.8563 | 6.5545 | 4.2591 | 2.0269 | 0.3106 | 0.00003767 |
| 8.1 | 31.8697 | 29.5671 | 27.2645 | 24.9619 | 22.6594 | 20.3568 | 18.0542 | 15.7516 | 13.4490 | 11.1464 | 8.8439 | 6.5421 | 4.2468 | 2.0155 | 0.3050 | 0.00003370 |
| 8.2 | 31.8574 | 29.5548 | 27.2523 | 24.9497 | 22.6471 | 20.3445 | 18.0419 | 15.7393 | 13.4367 | 11.1342 | 8.8317 | 6.5298 | 4.2346 | 2.0042 | 0.2996 | 0.00003015 |
| 8.3 | 31.8453 | 29.5427 | 27.2401 | 24.9375 | 22.6350 | 20.3324 | 18.0298 | 15.7272 | 13.4246 | 11.1220 | 8.8195 | 6.5177 | 4.2226 | 1.9930 | 0.2943 | 0.00002669 |
| 8.4 | 31.8333 | 29.5307 | 27.2282 | 24.9256 | 22.6230 | 20.3204 | 18.0178 | 15.7152 | 13.4126 | 11.1101 | 8.8076 | 6.5057 | 4.2107 | 1.9820 | 0.2891 | 0.00002415 |
| 8.5 | 31.8215 | 29.5189 | 27.2163 | 24.9137 | 22.6112 | 20.3086 | 18.0060 | 15.7034 | 13.4008 | 11.0982 | 8.7957 | 6.4939 | 4.1990 | 1.9711 | 0.2840 | 0.00002162 |
| 8.6 | 31.8098 | 29.5072 | 27.2046 | 24.9020 | 22.5995 | 20.2969 | 17.9943 | 15.6917 | 13.3891 | 11.0865 | 8.7840 | 6.4822 | 4.1874 | 1.9604 | 0.2790 | 0.00001936 |
| 8.7 | 31.7982 | 29.4957 | 27.1931 | 24.8905 | 22.5879 | 20.2853 | 17.9827 | 15.6801 | 13.3776 | 11.0750 | 8.7725 | 6.4707 | 4.1759 | 1.9498 | 0.2742 | 0.00001733 |
| 8.8 | 31.7868 | 29.4842 | 27.1816 | 24.8790 | 22.5765 | 20.2739 | 17.9713 | 15.6687 | 13.3661 | 11.0635 | 8.7610 | 6.4592 | 4.1646 | 1.9393 | 0.2694 | 0.00001552 |
| 8.9 | 31.7755 | 29.4729 | 27.1703 | 24.8678 | 22.5652 | 20.2626 | 17.9600 | 15.6574 | 13.3548 | 11.0523 | 8.7497 | 6.4480 | 4.1534 | 1.9290 | 0.2647 | 0.00001390 |

续表

| n / N | $N\times10^{-15}$ | $N\times10^{-14}$ | $N\times10^{-13}$ | $N\times10^{-12}$ | $N\times10^{-11}$ | $N\times10^{-10}$ | $N\times10^{-9}$ | $N\times10^{-8}$ | $N\times10^{-7}$ | $N\times10^{-6}$ | $N\times10^{-5}$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.0 | 31.7643 | 29.4618 | 27.1592 | 24.8566 | 22.5540 | 20.2514 | 17.9488 | 15.6462 | 13.3437 | 11.0411 | 8.7386 | 6.4360 | 4.1423 | 1.9187 | 0.2602 | 0.00001245 |
| 9.1 | 31.7533 | 29.4507 | 27.1481 | 24.8455 | 22.5429 | 20.2404 | 17.9378 | 15.6352 | 13.3326 | 11.0300 | 8.7275 | 6.4258 | 4.1313 | 1.9087 | 0.2557 | 0.00001115 |
| 9.2 | 31.7424 | 29.4398 | 27.1372 | 24.8346 | 22.5320 | 20.2294 | 17.9268 | 15.6243 | 13.3217 | 11.0191 | 8.7166 | 6.4148 | 4.1205 | 1.8987 | 0.2513 | 0.000009988 |
| 9.3 | 31.7315 | 29.4290 | 27.1264 | 24.8238 | 22.5212 | 20.2186 | 17.9160 | 15.6135 | 13.3109 | 11.0083 | 8.7058 | 6.4040 | 4.1098 | 1.8888 | 0.2470 | 0.000008948 |
| 9.4 | 31.7208 | 29.4133 | 27.1157 | 24.8131 | 22.5105 | 20.2079 | 17.9053 | 15.6028 | 13.3002 | 10.9976 | 8.6951 | 6.3934 | 4.0992 | 1.8791 | 0.2429 | 0.000008018 |
| 9.5 | 31.7103 | 29.4077 | 27.1051 | 24.8025 | 22.4999 | 20.1973 | 17.8948 | 15.5922 | 13.2896 | 10.9870 | 8.6845 | 6.3828 | 4.0887 | 1.8695 | 0.2387 | 0.000007185 |
| 9.6 | 31.6998 | 29.3972 | 27.0946 | 24.7920 | 22.4895 | 20.1869 | 17.8843 | 15.5817 | 13.2791 | 10.9765 | 8.6740 | 6.3723 | 4.0784 | 1.8599 | 0.2347 | 0.000006439 |
| 9.7 | 31.6894 | 29.3868 | 27.0843 | 24.7817 | 22.4791 | 20.1765 | 17.8739 | 15.5713 | 13.2688 | 10.9662 | 8.6637 | 6.3620 | 4.0681 | 1.8505 | 0.2308 | 0.000005771 |
| 9.8 | 31.6792 | 29.3766 | 27.0740 | 24.7714 | 22.4688 | 20.1663 | 17.8637 | 15.5611 | 13.2585 | 10.9559 | 8.6534 | 6.3517 | 4.0579 | 1.8412 | 0.2269 | 0.000005173 |
| 9.9 | 31.6690 | 29.3664 | 27.0639 | 24.7613 | 22.4587 | 20.1561 | 17.8535 | 15.5509 | 13.2483 | 10.9458 | 8.6433 | 6.3416 | 4.0479 | 1.8320 | 0.2231 | 0.000004637 |

当 $u\leqslant 0.1$（即 $t\geqslant 2.5\frac{r^2\mu^*}{T}$）时，相对误差≤5%。

现对 Theis 公式作如下讨论：

(1)由于 $W(u)$ 随 $u$ 值增大而减小(表 4-1)，因此，从式(4-2)可知，随着 $r$ 增加，$u$ 增大而 $S$ 减小，当 $r\to\infty$ 时，$u\to\infty$，$W(u)\to 0$，$S$ 趋近于零；随着抽水时间 $t$ 的延长，$u$ 减小而 $S$ 增大，当 $t=0$ 时，$S=0$。这就是说，对于无限含水层而言，距抽水井愈近，降深愈大，无限远处降深趋于零；而在同一 $r$ 处，抽水时间越长，降深越大。

(2)水头下降速度由式(4-1)对时间 $t$ 求导数，得

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{\partial}{\partial t}\int_u^\infty\frac{e^{-y}}{y}dy=\frac{Q}{4\pi T}\frac{\partial}{\partial t}\int_\infty^u(-\frac{e^{-y}}{y})dy$$

$$=\frac{Q}{4\pi T}\frac{\partial}{\partial u}\left[\left(\int_\infty^u(-\frac{e^{-u}}{u})du\right)\right]\frac{\partial u}{\partial t}$$

将 $u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$ 代入，则有

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\tag{4-4}$$

由式(4-4)可知，水头下降速度是时间 $t$ 和距离 $r$ 的函数。对于同一时间 $t$，$r$ 较大时，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}$ 小，这表明近井处水位下降速度快，远处下降慢。

另外，当 $t$ 足够大时，如 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\leqslant 0.01$，则 $e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}=0.99\approx 1$，于是

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\cdot\frac{1}{t}\tag{4-5}$$

说明当抽水时间足够长时，在井周围一定范围内，水头下降的速度基本相同，而与距离无关。即经过一定时间的抽水后，抽水井附近的降落漏斗曲面近乎等速下降。实际上，只要 $t\geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}$，则 $e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}=0.99\approx 1$，在相应的 $r$ 范围内就会出现这种情况。

(3)通过距抽水井不同径向距 $r$ 的圆柱形过水断面的流量 $Q_r$。由 Theis 公式对 $r$ 求导数，得

$$\frac{\partial S}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T}\frac{1}{r}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\tag{4-6}$$

因此

$$Q_r=-2\pi Tr\frac{\partial S}{\partial r}=Qe^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\tag{4-7}$$

这说明当 $t$ 一定时，$Q_r$ 与 $r$ 有关，通过各过水断面的流量是不等的，而且由于 $\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$ 恒为正值，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}<1$，因而 $Q_r<Q$。只有在抽水井壁处，$r\to 0$，$e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}\to 1$，$Q_r$ 才趋近于 $Q$；距水井愈远的圆柱形过水断面，通过它的流量 $Q_r$ 和井流量 $Q$ 差异愈大。这一点和稳定流理论中假设无垂向水量交换条件下通过任何断面的流量都相等的结论不同。

(4)井径无限小($r_w\to 0$)的假定条件对 Theis 公式实际应用的影响。

由式(4-7)，通过实际井壁的流量

$$Q_{r_w}=Qe^{-u}$$

只有 $r_w\to 0$ 的断面($u=\frac{r_w^2\mu^*}{4Tt}=0$)，$Q_{r_w}$ 才等于假定中的井流量 $Q$，事实上 $u=0.01$ 时，$e^{-u}=0.99$，$Q_{r_w}=0.99Q$，也就是说，只要 $u=\frac{r_w^2\mu^*}{4Tt}\leqslant 0.01$，即

$$r_w \leqslant 0.2\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}$$

时，通过实际井井壁流量 $Q_w$ 与 $r_w=0$ 时流量 $Q$ 的相对误差不超过 1%。这种条件一般抽水初期就能满足，$r_w \to 0$ 的假定不影响 Theis 公式的应用。

(5)似稳定状态及其特征。由式(4-6)，距井 $r$ 处断面的渗透速度

$$v_r = K\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{-Q}{2\pi Mr}e^{-u}$$

式中 $\frac{-Q}{2\pi Mr}$ 为承压完整井稳定井流 $r$ 处的渗透速度。其中负号表示速度与 $r$ 的正向相反。由于 $e^{-u}<1$，所以非稳定时流速小于稳定流时流速。但随着抽水时间增加，$e^{-u}\to 1$，两者就十分接近了。当 $u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\leqslant 0.01$(即 $t\geqslant 25\frac{r^2\mu^*}{T}$ 或 $r\leqslant 0.2\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}$)，非稳定流速和稳定流速相差不超过 1%，可以认为达到了相对稳定(似稳定)。此时，在 $r$ 范围内，地下水水位出现等幅下降，流量 $Q_r$ 与井流量 $Q$ 相差不大于 1%，计算时可用稳定流 Thiem 公式

$$S_1 - S_2 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_2}{r_1}$$

式中 $S_1$、$S_2$——$r_1$、$r_2$ 处($r_2<r_1\leqslant r$)的降深。

(6)关于初始水位水平的假定。一般情况下，承压水头面的坡度很小，尤其在平原区，通常只有几千分之一。这种假定是允许的。

Theis 公式通常用于计算如下问题：

(1)当含水层的水文地质参数($\mu^*$，$T$)已知时，预报水位，即预测抽水影响范围内任一点任一时刻水位降深或水位。因为此时 $\mu^*$、$T$ 已知，只要给出抽水开始至计算时刻的抽水连续时间 $t$ 及计算点距井的距离 $r$，即可算出 $u$，查表(4-1)得 $W(u)$，代入式(4-2)，即求出 $S$。

(2)根据非稳定抽水试验资料，可求出含水层的贮水系数 $\mu^*$ 和导水系数 $T$。

利用抽水试验资料求水文地质参数，是水文地质工作的重要组成部分，将在第五章中系统讨论。

2. 变流量抽水单井

Theis 公式是在假定水井流量不变的条件下导出的。实际上，生产井的流量总是不断变化的，如农业灌溉井，旱季抽水量大，雨季抽水量小，城市生活用水夏季多，冬季少。计算时，首先要给出生产井的 $Q-f(t)$ 曲线，即流量过程线，它和坐标轴围成的面积为总抽水量；然后根据总水量相等的原则，用折线近似原曲线(图 4-2)，最后将折线与坐标轴围成的面积分割为若干矩形，其中每一个矩形都是一个定流量井，其流量分别为 $Q_1$，$Q_2-Q_1$，$Q_3-Q_2$，……，$Q_i-Q_{i-1}$，使用 Theis 公式计算降深，按叠加原理加起来，即得变流量时水位降深。

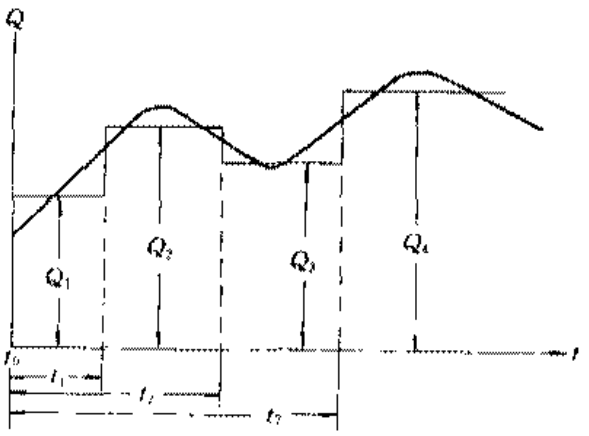



图 4-2 流量概化呈阶梯状变化图

如图 4-2 所示，计算 $t$ 时刻 $r$ 处的降深：

在 $t$ 时刻，$Q_1$ 引起的降深

$$S_1 = \frac{Q_1}{4\pi T}W(u_1)；\quad u_1 = \frac{r^2\mu^*}{4Tt}$$

$Q_2-Q_1$ 引起的降深

$$S_2 = \frac{Q_2 - Q_1}{4\pi T}W(u_2)；\quad u_2 = \frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_1)}$$

$Q_3-Q_2$ 引起的降深

$$S_3 = \frac{Q_3 - Q_2}{4\pi T}W(u_3)；\quad u_3 = \frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_2)}$$

……

$Q_i-Q_{i-1}$ 引起的降深

$$S_i = \frac{Q_i - Q_{i-1}}{4\pi T}W(u_i)；\quad u_i = \frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_{i-1})}$$

$t$ 时刻 $r$ 处的总降深为

$$S = S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_i = \frac{1}{4\pi T}\sum_{j=1}^{i}(Q_j - Q_{j-1})W\left[\frac{r^2\mu^*}{4T(t-t_{j-1})}\right] \qquad (4\text{-}8)$$

$$(t_{i-1} < t < t_i)$$

式中 $t_0=0$，$Q_0=0$。

3. 定降深单井

在平面无界的承压含水层中抽水时，如果在抽水全过程井中水头（或降深 $S_w$）始终保持不变，随着含水层不断释放弹性贮量，含水层水位 $H(r)$ 将不断下降，井流量 $Q$ 则逐渐变小。当 $t\to\infty$ 时，$S(r)\to S_w$，$Q\to 0$。刚刚打开井盖的自流井、坑道断层突水，井下放水钻孔出水时，水位迅速下降到出水口标高，最初流量最大，而后逐渐减小，它们均可作定降深井处理（图 4-3）。

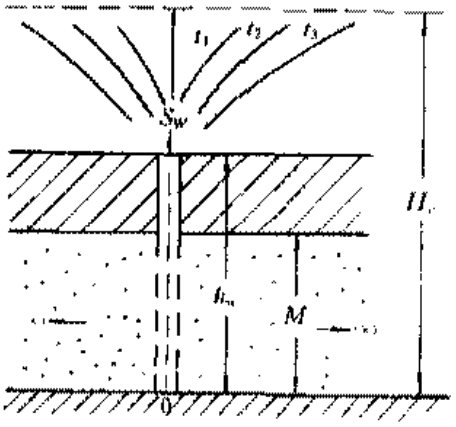



图 4-3 承压含水层中定降深井流

如果其他条件同 Theis 假定，这类定解问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial S}{\partial r}\right) = \dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial t} & t>0, 0<r<\infty \\ S(r,0) = 0 & 0<r<\infty \\ S(\infty,t) = 0 & t>0 \\ S(0,t) = S_w & t>0 \end{cases} \qquad (4\text{-}9')$$

其解为

$$S = S_w A(\lambda,\bar{r}) \qquad (4\text{-}9)$$

式中 $S_w$——井中降深；

$A(\lambda,\bar{r})$——无越流补给承压含水层定降深井流的降深函数，其值列于表 4-2 中；

$\bar{r}=\dfrac{r}{r_w}$——无量纲径向距离；

$\lambda=\dfrac{Tt}{r^2\mu^*}$——无量纲时间。

表 4-2

## 函 数 $A(\lambda,\bar{r})$ 数 值 表

| $\lambda$ \ $\bar{r}$ | 1 | 1.5 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1.000 | 0.606 | 0.351 | 0.095 | 0.018 | 0.002 | 0.001 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 2 | 1.000 | 0.677 | 0.458 | 0.194 | 0.071 | 0.022 | 0.005 | 0.001 | 0 | 0 | | | | | | | | | | |
| 3 | 1.000 | 0.711 | 0.511 | 0.256 | 0.119 | 0.049 | 0.018 | 0.006 | 0.002 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 4 | 1.000 | 0.731 | 0.544 | 0.300 | 0.157 | 0.076 | 0.034 | 0.014 | 0.006 | 0.002 | 0 | | | | | | | | | |
| 5 | 1.000 | 0.746 | 0.568 | 0.332 | 0.188 | 0.101 | 0.051 | 0.024 | 0.010 | 0.004 | 0.002 | | | | | | | | | |
| 6 | 1.000 | 0.757 | 0.586 | 0.357 | 0.214 | 0.123 | 0.067 | 0.035 | 0.017 | 0.008 | 0.003 | | | | | | | | | |
| 7 | 1.000 | 0.767 | 0.601 | 0.378 | 0.235 | 0.142 | 0.082 | 0.046 | 0.024 | 0.012 | 0.006 | | | | | | | | | |
| 8 | 1.000 | 0.773 | 0.613 | 0.395 | 0.254 | 0.159 | 0.097 | 0.056 | 0.032 | 0.017 | 0.009 | | | | | | | | | |
| 9 | 1.000 | 0.779 | 0.623 | 0.409 | 0.270 | 0.175 | 0.110 | 0.067 | 0.039 | 0.022 | 0.012 | 0 | | | | | | | | |
| 10 | 1.000 | 0.784 | 0.631 | 0.422 | 0.284 | 0.188 | 0.122 | 0.077 | 0.047 | 0.028 | 0.016 | 0 | | | | | | | | |
| 20 | 1.000 | 0.813 | 0.681 | 0.497 | 0.370 | 0.277 | 0.207 | 0.153 | 0.122 | 0.081 | 0.057 | 0.001 | 0 | | | | | | | |
| 30 | 1.000 | 0.827 | 0.705 | 0.534 | 0.415 | 0.325 | 0.256 | 0.201 | 0.157 | 0.122 | 0.094 | 0.004 | 0 | | | | | | | |
| 40 | 1.000 | 0.836 | 0.720 | 0.558 | 0.444 | 0.358 | 0.290 | 0.235 | 0.190 | 0.153 | 0.123 | 0.009 | 0 | | | | | | | |
| 50 | 1.000 | 0.843 | 0.731 | 0.574 | 0.464 | 0.381 | 0.314 | 0.260 | 0.215 | 0.177 | 0.146 | 0.016 | 0.001 | 0 | | | | | | |
| 60 | 1.000 | 0.848 | 0.739 | 0.588 | 0.481 | 0.399 | 0.334 | 0.281 | 0.236 | 0.199 | 0.167 | 0.023 | 0.002 | 0 | | | | | | |
| 70 | 1.000 | 0.851 | 0.746 | 0.598 | 0.494 | 0.414 | 0.350 | 0.297 | 0.253 | 0.216 | 0.184 | 0.031 | 0.003 | 0 | | | | | | |
| 80 | 1.000 | 0.855 | 0.752 | 0.607 | 0.505 | 0.427 | 0.364 | 0.312 | 0.268 | 0.230 | 0.198 | 0.038 | 0.005 | 0 | | | | | | |
| 90 | 1.000 | 0.857 | 0.756 | 0.614 | 0.514 | 0.437 | 0.374 | 0.323 | 0.280 | 0.242 | 0.210 | 0.046 | 0.007 | 0.001 | 0 | | | | | |
| 100 | 1.000 | 0.860 | 0.760 | 0.621 | 0.522 | 0.446 | 0.385 | 0.334 | 0.291 | 0.254 | 0.222 | 0.053 | 0.010 | 0.001 | 0 | 0 | | | | |
| 200 | 1.000 | 0.874 | 0.784 | 0.658 | 0.569 | 0.500 | 0.444 | 0.397 | 0.357 | 0.322 | 0.291 | 0.110 | 0.038 | 0.011 | 0.001 | 0.001 | 0 | | | |
| 300 | 1.000 | 0.881 | 0.796 | 0.677 | 0.593 | 0.528 | 0.475 | 0.430 | 0.392 | 0.358 | 0.328 | 0.146 | 0.064 | 0.026 | 0.009 | 0.003 | 0.001 | 0 | | |
| 400 | 1.000 | 0.886 | 0.804 | 0.690 | 0.609 | 0.546 | 0.495 | 0.451 | 0.414 | 0.382 | 0.353 | 0.173 | 0.086 | 0.040 | 0.018 | 0.007 | 0.003 | 0.001 | 0 | |
| 500 | 1.000 | 0.889 | 0.810 | 0.699 | 0.620 | 0.559 | 0.510 | 0.468 | 0.432 | 0.400 | 0.372 | 0.194 | 0.104 | 0.054 | 0.026 | 0.012 | 0.005 | 0.002 | 0.001 | 0 |
| 600 | 1.000 | 0.891 | 0.814 | 0.706 | 0.629 | 0.569 | 0.520 | 0.479 | 0.444 | 0.413 | 0.385 | 0.210 | 0.119 | 0.066 | 0.035 | 0.018 | 0.008 | 0.004 | 0.002 | 0.001 |
| 700 | 1.000 | 0.893 | 0.818 | 0.712 | 0.636 | 0.578 | 0.530 | 0.490 | 0.455 | 0.424 | 0.397 | 0.223 | 0.132 | 0.077 | 0.044 | 0.024 | 0.012 | 0.006 | 0.003 | 0.001 |
| 800 | 1.000 | 0.895 | 0.821 | 0.716 | 0.642 | 0.585 | 0.538 | 0.498 | 0.464 | 0.434 | 0.407 | 0.235 | 0.145 | 0.087 | 0.052 | 0.030 | 0.016 | 0.009 | 0.004 | 0.002 |
| 900 | 1.000 | 0.897 | 0.824 | 0.720 | 0.647 | 0.591 | 0.544 | 0.504 | 0.471 | 0.442 | 0.415 | 0.245 | 0.153 | 0.096 | 0.059 | 0.035 | 0.020 | 0.011 | 0.006 | 0.003 |
| 1000 | 1.000 | 0.898 | 0.826 | 0.724 | 0.652 | 0.596 | 0.550 | 0.511 | 0.478 | 0.449 | 0.422 | 0.254 | 0.162 | 0.104 | 0.066 | 0.041 | 0.024 | 0.014 | 0.008 | 0.004 |

表 4-3　　$G(\lambda)$ 数 值 表

| $N$ \ $\lambda$ | $N\times10^{-4}$ | $N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N\times10^{0}$ | $N\times10^{1}$ | $N\times10^{2}$ | $N\times10^{3}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 56.9 | 18.34 | 6.13 | 2.249 | 0.985 | 0.534 | 0.346 | 0.251 |
| 2 | 40.4 | 13.11 | 4.47 | 1.716 | 0.803 | 0.461 | 0.311 | 0.232 |
| 3 | 33.1 | 10.79 | 3.74 | 1.477 | 0.719 | 0.427 | 0.294 | 0.222 |
| 4 | 28.7 | 9.41 | 3.30 | 1.333 | 0.667 | 0.405 | 0.283 | 0.215 |
| 5 | 25.7 | 8.47 | 3.00 | 1.234 | 0.630 | 0.389 | 0.274 | 0.210 |
| 6 | 23.5 | 7.77 | 2.78 | 1.160 | 0.602 | 0.377 | 0.268 | 0.206 |
| 7 | 21.8 | 7.23 | 2.60 | 1.103 | 0.580 | 0.367 | 0.263 | 0.203 |
| 8 | 20.4 | 6.79 | 2.46 | 1.057 | 0.562 | 0.359 | 0.258 | 0.200 |
| 9 | 19.3 | 6.43 | 2.35 | 1.018 | 0.547 | 0.352 | 0.254 | 0.198 |
| 10 | 18.3 | 6.13 | 2.25 | 0.985 | 0.534 | 0.346 | 0.251 | 0.196 |

| $N$ \ $\lambda$ | $N\times10^{4}$ | $N\times10^{5}$ | $N\times10^{6}$ | $N\times10^{7}$ | $N\times10^{8}$ | $N\times10^{9}$ | $N\times10^{10}$ | $N\times10^{11}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.1964 | 0.1608 | 0.1360 | 0.1177 | 0.1037 | 0.0927 | 0.0838 | 0.0764 |
| 2 | 0.1841 | 0.1524 | 0.1299 | 0.1131 | 0.1002 | 0.0899 | 0.0814 | 0.0744 |
| 3 | 0.1777 | 0.1479 | 0.1266 | 0.1106 | 0.0982 | 0.0883 | 0.0801 | 0.0733 |
| 4 | 0.1733 | 0.1449 | 0.1244 | 0.1089 | 0.0968 | 0.0872 | 0.0792 | 0.0726 |
| 5 | 0.1701 | 0.1426 | 0.1227 | 0.1076 | 0.0958 | 0.0864 | 0.0785 | 0.0720 |
| 6 | 0.1675 | 0.1408 | 0.1213 | 0.1066 | 0.0950 | 0.0857 | 0.0779 | 0.0716 |
| 7 | 0.1654 | 0.1393 | 0.1202 | 0.1057 | 0.0943 | 0.0851 | 0.0774 | 0.0712 |
| 8 | 0.1636 | 0.1380 | 0.1192 | 0.1049 | 0.0937 | 0.0846 | 0.0770 | 0.0709 |
| 9 | 0.1621 | 0.1369 | 0.1184 | 0.1043 | 0.0932 | 0.0842 | 0.0767 | 0.0706 |
| 10 | 0.1608 | 0.1360 | 0.1177 | 0.1037 | 0.0927 | 0.0838 | 0.0764 | 0.0704 |

(据 Jscob 和 Lohman)

将式(4-9)对 $r$ 求导并代入 Darcy 定律，得

$$Q = 2\pi T S_w G(\lambda) \tag{4-10}$$

式中 $Q$——井流量；

$G(\lambda)$——无越流补给承压含水层定降深井流的流量函数(表 4-3)。

$$\lambda = \frac{Tt}{\mu^* r_w^2}$$

由于 $A(\lambda,\bar{r})$是一个小于 1 的函数，由式(4-9)可知，任一点的降深均小于井中降深 $S_w$。随着抽水时间 $t$ 增加，$\lambda$ 增大，$G(\lambda)$减小(表 4-3)，由式(4-10)可知，井流量 $Q$ 逐渐减小。

## 二、有界承压含水层中单井水流

与稳定井流相似，含水层的边界对非稳定井流的影响，只有当抽水时间足够短、漏斗没影响到边界时，才可以忽略。一般说，边界对渗流都有明显影响。下面讨论各种边界情况下的非稳定井流问题。

边界附近的非稳定井流计算，也是利用映象法和叠加原理进行的。

### (一)位于直线边界附近的承压抽水井

#### 1. 直线补给边界时

流量为 $Q$ 的抽水井位于定水头补给边界附近时，映射虚井为流量 $-Q$ 的注水井(用此虚井代替边界作用)(图 3-12)，根据叠加原理，对承压井而言，利用 Theis 公式，降深 $S$ 为

$$S = S_1 + (-S_2) = \frac{Q}{4\pi T}[W(u_1) - W(u_2)] \tag{4-11}$$

式中 $$u_i = r_i^2\mu^*/4Tt \quad (i = 1,2)$$

随着抽水时间 $t$ 延长，$u_1$ 和 $u_2$ 都变得小于 0.01 时，则可采用 Jacob 公式，于是

$$S = \frac{2.30Q}{4\pi T}\left[\lg\frac{2.25Tt}{r_1^2\mu^*} - \lg\frac{2.25Tt}{r_2^2\mu^*}\right]$$

化简后，得

$$S = \frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2}{r_1} \tag{4-12}$$

式(4-11)、(4-12)即为直线补给边界附近承压井定流量抽水时，含水层中任一点降深的计算公式。式(4-12)中没有时间因素 $t$，说明补给边界时，随着抽水时间增加，降深可以达到稳定。

#### 2. 直线隔水边界(图 3-13)

虚井为抽水井，对承压井利用叠加原理得

$$S = S_1 + S_2 = \frac{Q}{4\pi T}[W(u_1) + W(u_2)] \tag{4-13}$$

当 $u_1$、$u_2$ 均小于 0.01 时，则有

$$S = \frac{2.30Q}{4\pi T}\left[\lg\frac{2.25Tt}{r_1^2\mu^*} + \lg\frac{2.25Tt}{r_2^2\mu^*}\right]$$

化简后，得

$$S = \frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{r_1 r_2\mu^*} \tag{4-14}$$

式(4-14)中包含时间因素 $t$，表明在半无限含水层中位于隔水边界附近的井流降深不可

能稳定。

将式(4-14)与式(4-3)比较可知，在单对数纸上，$S\sim t$ 直线的斜率对于无界含水层为$\frac{2.30Q}{4\pi T}$，而在隔水边界影响的情况下是$\frac{2.30Q}{2\pi T}$。换言之，隔水边界附近的井抽水时，在单对数纸上 $S\sim t$ 曲线出现两个直线段，早期直线表示边界未发生影响，后期直线边界已起作用，后者的斜率是前者的两倍(图 4-4)。

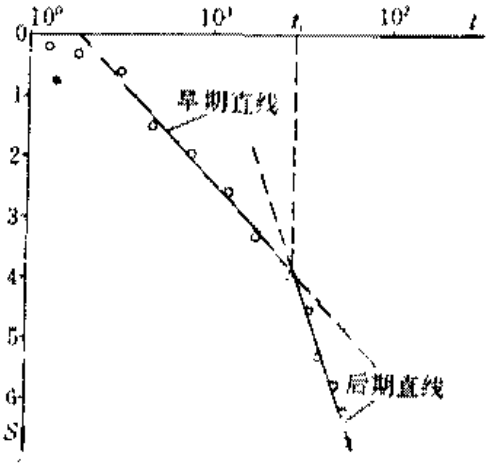


图 4-4　直线隔水边界附近井的 $S\sim\lg t$ 曲线

(二)扇形含水层中的承压抽水井

扇形含水层中的承压完整井流问题也是用映射原理和叠加原理解决的，表 4-4 给出了不同边界条件下的实虚井分布及其降深公式。

1. 象限含水层($\theta=90$)

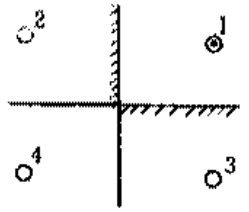
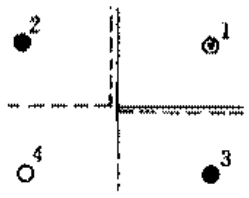
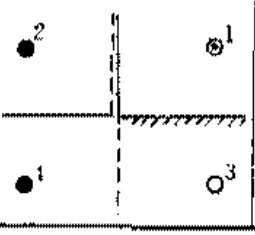
(1)当两条边界均为隔水边界时(表 4-4a)，虚井为三口抽水井，承压含水层任一点降深为

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{4}W(u_i) \tag{4-15}$$

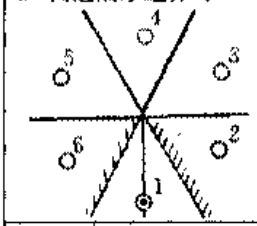
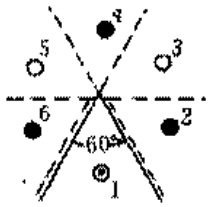
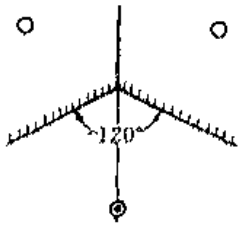
式中

$$u_i=\frac{r_i^2\mu^*}{4Tt}\quad(i=1,2,3,4)$$

表 4-4　　扇形含水层承压井流

| | 图　形 | 降　深　公　式 | 说　明 |
|---|---|---|---|
| 象限含水层($\theta$为90°) | a. 两边为隔水时<br><br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{4}W(u_i)$<br>$u_i=\frac{r_i^2\mu^*}{4\pi T}, i=1,2,3,4$ (4-15)<br>$S=\frac{2.30Q}{\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{\mu^*\sqrt{r_1r_2r_3r_4}}$ (4-16) | 1. ⊙ 抽水实井<br>○ 虚抽水井<br>● 虚注水井<br>2. 不能达到稳定<br>3. $S\sim\lg t$ 直线斜率为无限含水层的 4 倍。 |
| | b. 两边为补给边界时<br><br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)-W(u_2)-W(u_3)+W(u_4)]$ (4-17)<br>$S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_3}{r_1r_4}$ (4-18) | 长时间抽水后，可以稳定 |
| | c. 一边为隔水边界，一边为补给边界<br><br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)+W(u_3)-W(u_2)-W(u_4)]$ (4-19)<br>$S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_4}{r_1r_3}$ (4-20) | 可以稳定 |

续表

| | | | |
|---|---|---|---|
| 夹角为60°的扇形含水层 | d. 两边隔水边界时<br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{6}W(u_i),i=1,2,3,4,5,6$ (4-21)<br>$S=\frac{3\times 2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{\mu^*(r_1r_2r_3r_4r_5r_6)^{1/3}}$ (4-22) | 1. 抽水井在角平分线上<br>2. 不能稳定 |
| | e. 两边为补给边界时<br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)+W(u_2)+W(u_5)-W(u_3)-W(u_4)-W(u_6)]$ (4-23)<br>$S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_5r_6}{r_1r_3r_4}$ (4-24) | 1. 抽水井在角平分线上<br>2. 可以达到稳定<br>3. 一边隔水一边补给时，不能映射 |
| 夹角为120°的扇形含水层 | f. 两边都为隔水边界<br> | $S=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{3}W(u_i)$ (4-25)<br>$S=\frac{3\times 2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{\mu^*(r_1r_2r_3)^{2/3}}$ (4-26) | 1. 抽水井在角平分线上<br>2. 其边界情况不能映射<br>3. 不能稳定 |

当抽水时间足够长，$u_i\leqslant 0.01$ 时，由 Jacob 公式得

$$S=\frac{2.30Q}{\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{\sqrt{r_1r_2r_3r_4\mu^*}} \tag{4-16}$$

此式与式(4-3)比较得知，象限含水层 $S\sim\lg t$ 曲线的斜率是无限含水层的 4 倍。

(2)当两边都是补给边界时(表 4-4b)：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)-W(u_2)-W(u_3)+W(u_4)] \tag{4-17}$$

当 $u_i\leqslant 0.01$ 时

$$S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_3}{r_1r_4} \tag{4-18}$$

(3)一边是隔水边界，一边是补给边界的情况下(表 4-4c)：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)+W(u_3)-W(u_2)-W(u_4)] \tag{4-19}$$

或

$$S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_4}{r_1r_3} \tag{4-20}$$

2. 其它角度的扇形含水层

夹角为 60°，井在夹角平分线上(表 4-4)。

(1)对于两边都是隔水边界(表 4-4d)：

$$S=\sum_{i=1}^{6}S_i=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{6}W(u_i) \tag{4-21}$$

式中，$u_i=\frac{r_i^2\mu^*}{4Tt}$，当 $u_i$ 满足 Jacob 公式条件时，则有

$$S=3\times\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{\mu^*(r_1r_2r_3r_4r_5r_6)^{1/3}} \tag{4-22}$$

(2)对于两边都是补给边界时(表 4-4e)：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u_1)-W(u_2)+W(u_3)-W(u_4)+W(u_5)-W(u_6)] \tag{4-23}$$

或近似为 $S=\frac{2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{r_2r_4r_6}{r_1r_3r_5}$ (4-24)

若一边为隔水边界，另一边为补给边界，映射法不能使用。

(3)夹角 120°的含水层两边为隔水边界，井在夹角平分线上(表 4-4f)：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{3}W(u_i) \tag{4-25}$$

或

$$S=\frac{3\times2.30Q}{2\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{(r_1r_2r_3)^{2/3}\mu^*} \tag{4-26}$$

其他边界情况或井不在角平分线上，当映射出现矛盾时，不能应用。

(三)条形和矩形含水层中的承压抽水井

1. 条形含水层(图 3-16)

两条平行边界的条形含水层中的井流，用映射法计算时，理论上要进行无穷次映射，这样条形含水层中的一口井就成了无限含水层中的无穷井排，然后根据叠加原理进行计算。

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\sum_{i=1}^{\infty}W(u_i) \tag{4-27}$$

式中 $W(u_i)$对于抽水井取正值，注水井取负值。为实用目的，一般映射 3～5 次就够了。

也可以用下述方法近似计算：

当含水层一条或两条边界为补给边界，抽水时间足够长，达到稳定时，用第三章稳定流公式计算。当含水层两条边界为隔水边界，抽水时间足够长时，降深可采用下面的近似公式

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}f(\lambda)+\frac{e^{\frac{2\pi x}{l}}}{4\left[ch\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x+a)}{l}\right]\left[ch\frac{\pi y}{l}-\cos\frac{\pi(x-a)}{l}\right]}\right\} \tag{4-28}$$

对于抽水井壁

$$S_w=\frac{Q}{4\pi T}\left\{\frac{4\pi}{l}\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}f(\lambda)+2\ln\left(\frac{l}{2\pi r_w}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi a}{l}}\right)\right\} \tag{4-29}$$

式中，$f(\lambda)=ierfc(\lambda)=\frac{e^{-\lambda^2}}{\sqrt{\pi}}-\lambda erfc(\lambda)$，其值列于图 4-5 曲线图中。$ierfc(\lambda)$为 $\lambda$ 的余误差函数；$\lambda=\sqrt{\frac{y^2\mu^*}{4Tt}}$。

2. 矩形含水层(图 3-17)

映射方法和叠加计算原理与上述情况类似，用稳定流或非稳定流公式计算。

**三、有限直径井中的贮水效应**

以上讨论井流时，总是假定井径 $r_w\to0$，从而忽略了井筒的贮水量。但当井径较大(如水

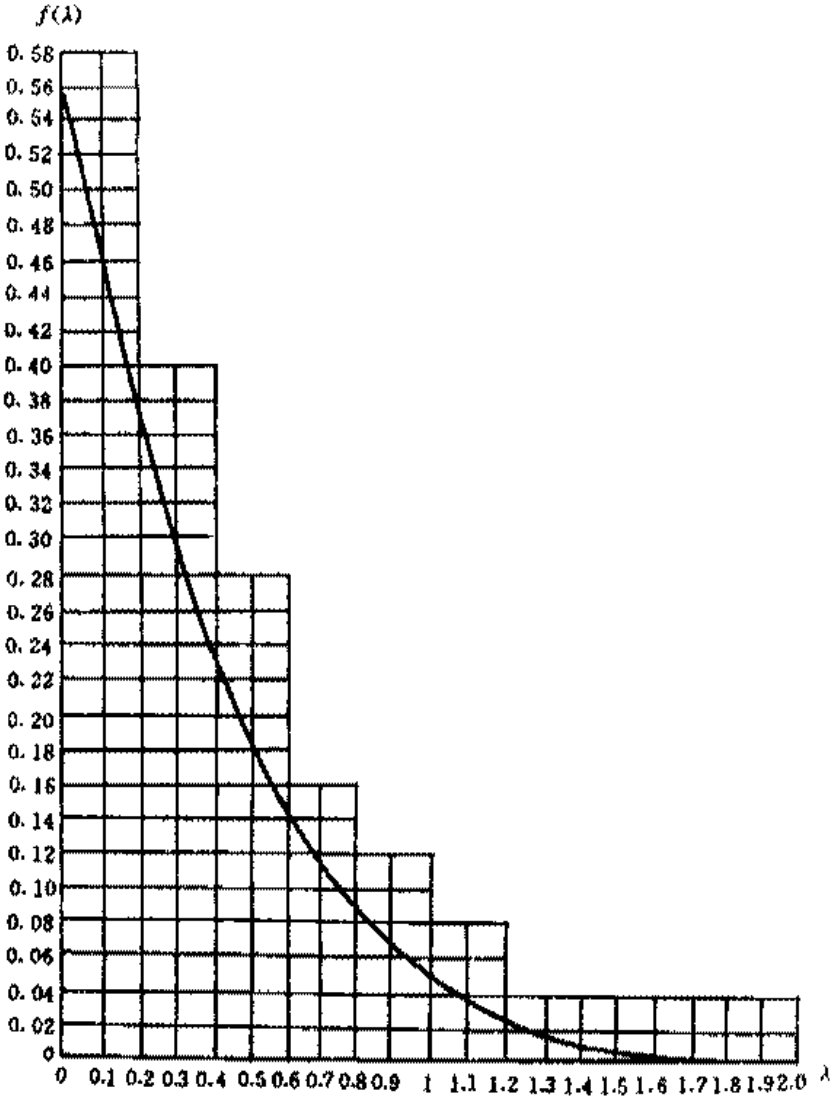



图 4-5 $f(\lambda)=\text{ierfc}(\lambda)$函数曲线

井)时,有必要考虑井的贮水效应。

如图 4-6 所示,套管内半径为 $r_c$,降深为 $S_w(t)$,井过滤器(或裸井孔)半径 $r_w$,降深为 $S(r_w,t)$,若不考虑井损[$S_w(t)=S(r_w,t)$],定流量 $Q_w$ 抽水,对具有 Theis 条件的含水层来说,该问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial H}{\partial t} & \\ S(r,0)=0 & r\geqslant r_w \\ S(r,0)=0 & 0<r<r_w \\ S(\infty,t)=0 & t>0 \\ S(r_w,t)=S_w(t) & t>0 \\ 2\pi r_w T\partial S(r,t)/\partial r-\pi r_c^2\partial S_w(t)/\partial t=-Q_w & \end{cases} \tag{4-30'}$$

1967 年 Papadopulos 和 Cooper 求得其解为

$$S_w = \frac{Q_w}{4\pi T} F(u_w, \alpha) \qquad (4\text{-}30)$$

式中 $S_w$——井中降深；

$Q_w$——井流量；

$F(u_w, \alpha)$——大口径井井函数（表4-5），$u_w = \frac{r_w^2 \mu^*}{4Tt}$；

$\alpha = \frac{r_w^2 \mu^*}{r_c^2}$。

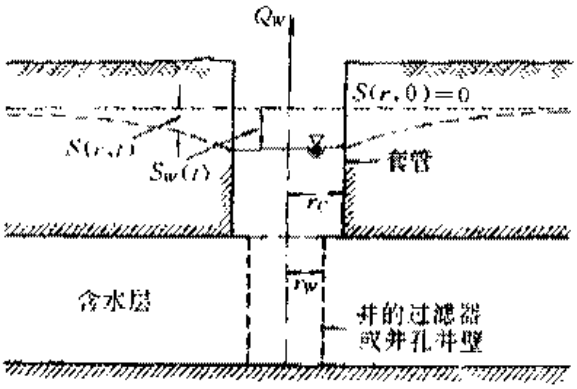



图 4-6 大口径井

（据 Papadopulos 和 Cooper，1967 年）

当抽水时间较长，$t \geqslant 250 r_c^2/T$，即 $u_w/\alpha < 10^{-3}$ 时，$F(u_w, \alpha) \approx W(u_A)$，式(4-30)与 Theis 公式相同。当抽水时间很短（如 $t$ 为几秒，几分……），即 $u_w$ 很大时，式(4-30)简化为

$$S_w = \frac{Q_w t}{\pi r_c^2} \quad 或 \quad Q_w t = \pi r_c^2 S_w \qquad (4\text{-}31)$$

即抽出的全部水量来自井筒的储水。

表 4-5 大口径井的井函数 $F(u_w, \alpha)$

| $u_w$ | $\alpha=10^{-1}$ | $\alpha=10^{-2}$ | $\alpha=10^{-3}$ | $\alpha=10^{-4}$ | $\alpha=10^{-5}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 10 | $9.755\times10^{-3}$ | $9.976\times10^{-4}$ | $9.998\times10^{-5}$ | $1.000\times10^{-5}$ | $1.000\times10^{-6}$ |
| 1 | $9.192\times10^{-2}$ | $9.914\times10^{-3}$ | $9.991\times10^{-4}$ | $1.000\times10^{-4}$ | $1.000\times10^{-5}$ |
| $5\times10^{-1}$ | $1.767\times10^{-1}$ | $1.974\times10^{-2}$ | $1.997\times10^{-3}$ | 2.000 | 2.000 |
| 2 | 4.062 | 4.890 | 4.989 | 4.999 | 5.000 |
| 1 | 7.336 | 9.665 | 9.966 | 9.997 | $1.000\times10^{-4}$ |
| $5\times10^{-2}$ | $1.260\times10^{0}$ | $1.896\times10^{-1}$ | $1.989\times10^{-2}$ | $1.999\times10^{-3}$ | 2.000 |
| 2 | 2.303 | 4.529 | 4.949 | 4.995 | 5.000 |
| 1 | 3.276 | 8.520 | 9.834 | 9.984 | $1.000\times10^{-3}$ |
| $5\times10^{-3}$ | 4.255 | $1.540\times10^{0}$ | $1.945\times10^{-1}$ | $1.994\times10^{-2}$ | 2.000 |
| 2 | 5.420 | 3.043 | 4.725 | 4.972 | 4.998 |
| 1 | 6.212 | 4.545 | 9.069 | 9.901 | 9.992 |
| $5\times10^{-4}$ | 6.960 | 6.031 | $1.668\times10^{0}$ | $1.965\times10^{-1}$ | $1.997\times10^{-2}$ |
| 2 | 7.866 | 7.557 | 3.523 | 4.814 | 4.982 |
| 1 | 8.572 | 8.443 | 5.526 | 9.340 | 9.932 |
| $5\times10^{-5}$ | 9.318 | 9.229 | 7.631 | $1.768\times10^{0}$ | $1.975\times10^{-1}$ |
| 2 | $1.024\times10^{1}$ | $1.020\times10^{1}$ | 9.676 | 3.828 | 4.861 |
| 1 | 1.093 | 1.087 | $1.068\times10^{1}$ | 6.245 | 9.493 |
| $5\times10^{-6}$ | 1.163 | 1.162 | 1.150 | 8.991 | $1.817\times10^{0}$ |
| 2 | 1.255 | 1.254 | 1.249 | $1.174\times10^{1}$ | 4.033 |
| 1 | 1.324 | 1.324 | 1.321 | 1.291 | 6.779 |
| $5\times10^{-7}$ | 1.393 | 1.393 | 1.392 | 1.378 | $1.013\times10^{1}$ |
| 2 | 1.485 | 1.485 | 1.484 | 1.479 | 1.371 |
| 1 | 1.554 | 1.554 | 1.554 | 1.551 | 1.513 |
| $5\times10^{-8}$ | 1.623 | 1.623 | 1.623 | 1.622 | 1.605 |
| 2 | 1.705 | 1.705 | 1.705 | 1.714 | 1.708 |
| 1 | 1.784 | 1.784 | 1.784 | 1.784 | 1.781 |
| $5\times10^{-9}$ | 1.854 | 1.854 | 1.854 | 1.854 | 1.851 |
| 2 | 1.945 | 1.945 | 1.945 | 1.945 | 1.940 |
| 1 | 2.015 | 2.015 | 2.015 | 2.015 | 2.015 |

（据 Papadopulos 和 Cooper，1967 年）

## 第二节　越流含水层中单井的非稳定运动

在越流含水层中抽水时会发生越流。把抽水含水层、弱透水层和相邻含水层称为越流系统。下面分两种情况讨论越流含水层中单井的非稳定运动。

### 一、忽略弱透水层弹性释水补给

1. 基本方程

假定：(1)越流系统中每一层都是均质、各向同性、无限延伸的；各含水层和弱透水层都是水平分布、均厚的；抽水前抽水含水层与相邻含水层水头相等；

(2)抽水过程中相邻含水层水头保持不变；

(3)抽水层的渗透系数 $K$ 远大于弱透层的渗透系数 $K_1$；

(4)弱透水层的弹性释水忽略不计；

其他假定同 Theis 假定(图 3-8)。

根据上述假定，通过弱透水层的水流为垂向一维流，抽水层中为平面径向流。由基本方程式(1-119)中去掉等号前第一项，并把水头以降深 $S$ 表示，改用柱坐标，于是越流含水层中完整单井的数学模型归纳为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}-\dfrac{S}{B^2}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial t} & \\ S|_{t=0}=0 & 0<r<\infty \\ S|_{r=\infty}=0 & t>0 \\ \lim\limits_{r\to 0}\left(r\dfrac{\partial S}{\partial r}\right)=-\dfrac{Q}{2\pi T} & t>0 \end{cases} \tag{4-32'}$$

其解[①] 为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\frac{r}{B}\right) \tag{4-32}$$

式中

$$W\left(u,\frac{r}{B}\right)=\int_u^\infty \frac{1}{y}\,\mathrm{e}^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}\,\mathrm{d}y \tag{4-33}$$

$$u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt} \tag{4-34}$$

式(4-32)为 Hantush 和 Jacob 于 1955 年建立的有越流的承压完整井公式。其中 $W(u,r/B)$ 为不考虑相邻弱透水层弹性释水时越流系统井函数，其值列于表 4-6 中。

2. 公式讨论

1)降深-时间曲线形状　越流含水层的标准曲线(图 4-7)表明有越流补给时 $S\sim t$ 关系大致可分为三个阶段：

(1)抽水早期，降深曲线和 Theis 曲线一致，表明越流尚未进入抽水层，抽出的水几乎全部来自抽水层的弹性释水。

标准曲线组又反映出不同的 $\frac{r}{B}$ 和 Theis 曲线一致的时间也不一样。当 $r$ 一定时，越流系

① [注] 求解过程见附录 I。

表 4-6　　$W(u,r/B)$或$W(u',a)$数值表

| $r/B$或$a$ / $u$或$u'$ | 0.01 | 0.015 | 0.03 | 0.05 | 0.075 | 0.10 | 0.15 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.000001 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.000005 | 9.4413 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.00001 | 9.4176 | 8.6313 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.00005 | 8.8827 | 8.4533 | 7.2450 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0001 | 8.3983 | 8.1414 | 7.2122 | 6.2882 | 5.4288 | | | | | | | | | | | | | | |
| 0.0005 | 6.9750 | 6.9152 | 6.6219 | 6.0821 | 5.4062 | 4.8539 | | | | | | | | | | | | | |
| 0.001 | 6.3069 | 6.2765 | 6.1202 | 5.7965 | 5.3078 | 4.8292 | 4.0695 | 3.5054 | | | | | | | | | | | |
| 0.005 | 4.7212 | 4.7152 | 4.6829 | 4.6084 | 4.4713 | 4.2960 | 3.8821 | 3.4567 | 2.7428 | 2.2290 | | | | | | | | | |
| 0.01 | 4.0356 | 4.0326 | 4.0167 | 3.9795 | 3.9091 | 3.8159 | 3.5725 | 3.2875 | 2.7104 | 2.2253 | 1.8486 | 1.5550 | 1.3210 | 1.1307 | | | | | |
| 0.05 | 2.4675 | 2.4670 | 2.4642 | 2.4576 | 2.4448 | 2.4271 | 2.3776 | 2.3110 | 2.1371 | 1.9283 | 1.7075 | 1.4927 | 1.2955 | 1.1210 | 0.9700 | 0.8409 | | | |
| 0.1 | 1.8227 | 1.8225 | 1.8213 | 1.8184 | 1.8128 | 1.8050 | 1.7829 | 1.7527 | 1.6704 | 1.5644 | 1.4422 | 1.3115 | 1.1791 | 1.0505 | 0.9297 | 0.8190 | 0.4217 | 0.2278 | |
| 0.5 | 0.5598 | 0.5597 | 0.5596 | 0.5594 | 0.5588 | 0.5581 | 0.5561 | 0.5532 | 0.5453 | 0.5344 | 0.5206 | 0.5044 | 0.4860 | 0.4658 | 0.4440 | 0.4210 | 0.3007 | 0.1944 | 0.1174 |
| 1.0 | 0.2194 | 0.2194 | 0.2193 | 0.2193 | 0.2191 | 0.2190 | 0.2186 | 0.2179 | 0.2161 | 0.2135 | 0.2103 | 0.2065 | 0.2020 | 0.1970 | 0.1914 | 0.1855 | 0.1509 | 0.1139 | 0.0803 |
| 5.0 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0011 | 0.0010 | 0.0010 | 0.0009 |

(据 Hantush)

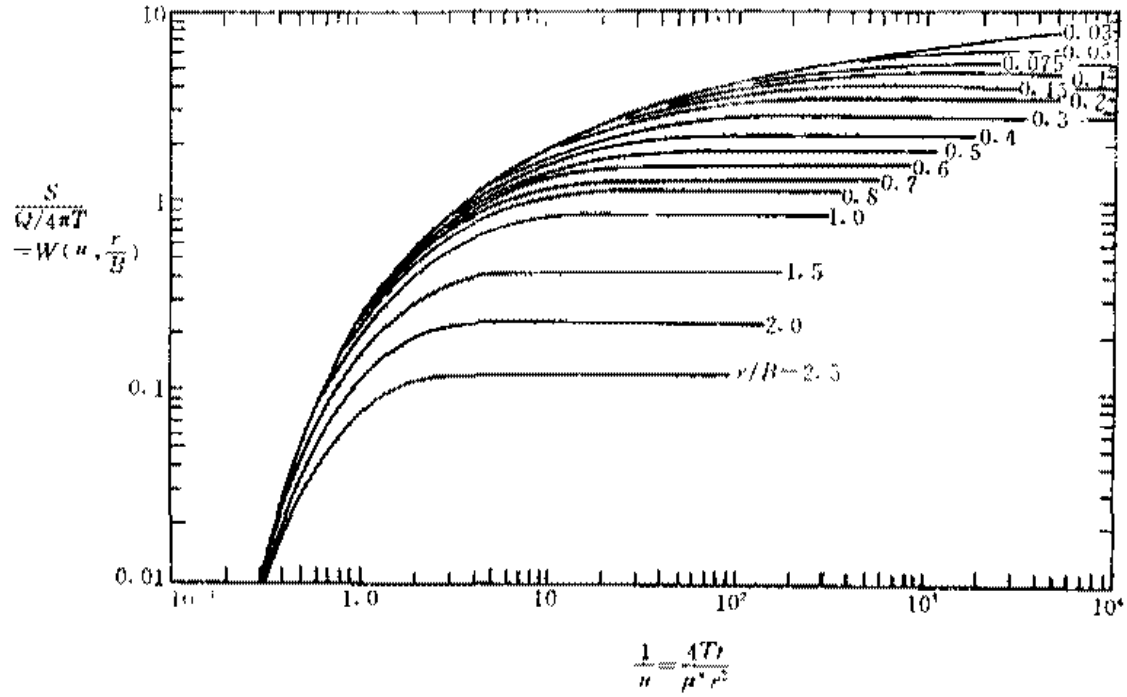



图 4-7　越流含水层的标准曲线

数$\frac{K_1}{m_1}$越小($\frac{r}{B}=\frac{r}{\sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}}}$越小)，同 Theis 曲线一致的过程越长。这说明弱透水层 $K_1$ 越小，厚度越大，过水能力越差，越流进入抽水层的时间越迟。

(2)抽水中期，水位下降变缓而开始向下偏离 Theis 曲线，这说明越流已进入抽水含水层，抽出的水一部分来自抽水层的弹性释放，另一部分来自越流补给。所以在相同的抽水条件下，越流含水层的降深小于无越流含水层的降深。越流量越大，相差越大。

(3)抽水后期，曲线趋于水平直线，表明抽水层水头不随时间而变化，非稳定流已转化为稳定流，此时抽出的水量等于越流补给量。方程式(4-32)转化为式(3-42)，即

$$S=\frac{Q}{2\pi T}K_0(\frac{r}{B})$$

2)水头下降速度

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{\partial}{\partial u}\left(\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy\right)\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$=\frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt}+\frac{Tt}{\mu^*B^2}\right)} \tag{4-35}$$

与式(4-4)比较，越流含水层水位下降速度比无越流含水层慢。

3)当 $K_1=0$ 时，$B\to\infty$，式(4-32)变为 Theis 公式，同时说明当$\frac{K_1}{m_1}$很小时，越流现象可能表现极不明显，曲线完全同 Theis 曲线一致。

**二、有弱透水层弹性释水补给时**

越流系统含水层抽水时会引起弱透水层水位下降，从而产生弹性释水补给抽水层。当弱透水层较厚时，这种补给量相当大，不能忽略不计。

1. 基本方程

S. Hantush 研究这一课题时，作了如下假定：

(1)越流系统含水层、弱透水层是均质各向同性、产状水平、平面上无限延伸的；

(2)水位天然坡度为零，抽水时相邻含水层(如果有的话)的水头保持不变；

(3)含水层抽水时，有来自弱透水层的弹性释水补给；

(4)弱透水层的渗透系数比含水层的渗透系数要小两个数量级以上；

其他条件同 Theis 假定。

上述条件下，抽水含水层中地下水的运动符合式(1-116)，式中越流强度 $v_1$、$v_2$ 分别用上、下弱透层中降深 $S_1$、$S_2$ 表示，则有

$$v_1 = -K_1\frac{\partial S_1}{\partial Z} \quad ; \quad v_2 = K_2\frac{\partial S_2}{\partial Z}$$

式中负号表示 $S_1$ 沿 $Z$ 轴正向减少。

由此式(1-116)可改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y}) - K_1\frac{\partial S_1}{\partial z} + K_2\frac{\partial S_2}{\partial z} = \mu^*\frac{\partial H}{\partial t}$$

式中 $H$ 改用降深 $S=H_0-H$，并用柱坐标表示，上式变为

$$T(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}) + K_1\frac{\partial S_1}{\partial z} - K_2\frac{\partial S_2}{\partial z} = \mu^*\frac{\partial S}{\partial t}$$

相应的上、下弱透水层中地下水运动的基本方程为

$$T_1\frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = \mu_1^*\frac{\partial S_1}{\partial t} \quad 和 \quad T_2\frac{\partial^2 S_2}{\partial z^2} = \mu_2^*\frac{\partial S_2}{\partial t}$$

式中 $\mu^*$、$T$、$S$、$\mu_1^*$、$T_1$、$S_1$、$\mu_2^*$、$T_2$、$S_2$ 分别为抽水含水层、上弱透水层、下弱透水层的贮水系数、导水系数和水位降深。下面分三种常见的情况分别给出相应的数学模型(图 4-8)。

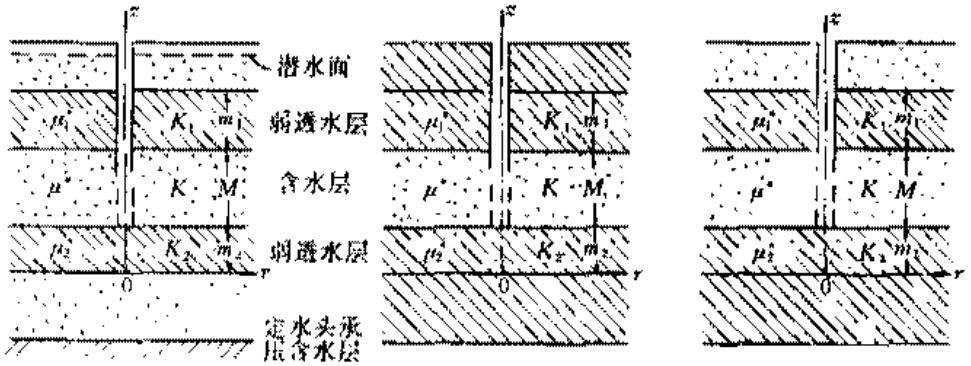



图 4-8 越流系统组成的三种情况

第一种情况：与上、下弱透水层相邻的是两个定水头含水层。

其数学模型为

上弱透水层

$$\begin{cases} T_1\dfrac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = \mu_1^*\dfrac{\partial S}{\partial t} & (4\text{-}36) \\ S_1(r,z,0) = 0 & (4\text{-}37) \\ S_1(r,m_2+M+m_1,t) = 0 & (4\text{-}38) \\ S_1(r,m_2+M,t) = S(r,t) & (4\text{-}39) \end{cases}$$

抽水含水层

$$\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}\right)+K_1\dfrac{\partial}{\partial z}S_1(r,m_2+M,t) \\ \quad -K_2\dfrac{\partial}{\partial z}S_2(r,m_2,t)=\mu^*\dfrac{\partial S}{\partial t} & (4\text{-}40) \\ S(r,0)=0 & (4\text{-}41) \\ S(\infty,t)=0 & (4\text{-}42) \\ \lim\limits_{r\to 0} r\dfrac{\partial S(r,t)}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T} & (4\text{-}43) \end{cases}$$

下弱透水层

$$\begin{cases} T_2\dfrac{\partial^2 S_2}{\partial z^2}=\mu_2^*\dfrac{\partial S_2}{\partial t} & (4\text{-}44) \\ S_2(r,z,0)=0 & (4\text{-}45) \\ S_2(r,0,t)=0 & (4\text{-}46) \\ S_2(r,m_2,t)=S(r,t) & (4\text{-}47) \end{cases}$$

第二种情况，与上、下两个弱透水层相邻的是两个隔水层。其数学模型与第一种情况基本相同，只是将式(4-38)及式(4-46)分别以

$$\frac{\partial}{\partial z}S_1(r,m_2+M+m_1,t)=0 \tag{4-48}$$

和

$$\frac{\partial}{\partial z}S_2(r,0,t)=0 \tag{4-49}$$

代替。

第三种情况：与两个弱透水层相邻的，一是定水头含水层，另一个是隔水层。其数学模型基本同第一种情况一致，只是将式(4-46)用

$$\frac{\partial}{\partial z}S_2(r,0,t)=0 \tag{4-50}$$

代替。

上述定解问题对于足够短和足够长的抽水时间有近似解。

(1)抽水初期的解：

当 $t<\dfrac{m_1\mu_1^*}{10K_1}$ 和 $t<\dfrac{m_2\mu_2^*}{10K_2}$ 时，三种情况的近似解为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}H(u,\beta) \tag{4-51}$$

式中

$$H(u,\beta)=\int_u^\infty \frac{e^{-y}}{y}\operatorname{erfc}\left(\frac{\beta\sqrt{u}}{\sqrt{y(y-u)}}\right)\mathrm{d}y \tag{4-52}$$

其值见表 4-7；

$$u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$$

$$\beta=\frac{r}{4B_1}\sqrt{\frac{\mu_1^*}{\mu^*}}+\frac{r}{4B_2}\sqrt{\frac{\mu_2^*}{\mu^*}}$$

$$B_1=\sqrt{\frac{Tm_1}{K_1}}\quad ;\quad B_2=\sqrt{\frac{Tm_2}{K_2}}$$

$H(u,\beta)$ 为考虑弱透水层弹性释水时的越流系统井函数。

表 4-7　　$H(u,\beta)$数值表

| $u$ \ $\beta$ | (−3) | | | (−2) | | | (−1) | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 | 1 | 2 | 5 |
| 1(−6) | 11.9842 | 11.4237 | 10.5928 | 9.9259 | 9.2469 | 8.3395 | 7.0497 | 6.9590 | 6.0463 |
| 5(−6) | 10.8959 | 10.4566 | 9.7174 | 9.0866 | 8.4251 | 7.5284 | 6.8427 | 6.1548 | 5.2459 |
| 1(−5) | 10.3789 | 9.9987 | 9.3203 | 8.7142 | 8.0657 | 7.1771 | 6.4944 | 5.8085 | 4.9024 |
| 5(−5) | 9.0422 | 8.8128 | 8.3171 | 7.8031 | 7.2072 | 6.3523 | 5.6821 | 5.0045 | 4.1090 |
| 1(−4) | 8.4258 | 8.2487 | 7.8386 | 7.3803 | 6.8208 | 5.9906 | 5.3297 | 4.6581 | 3.7700 |
| 5(−4) | 6.9273 | 6.8375 | 6.6024 | 6.2934 | 5.8561 | 5.1223 | 4.4996 | 3.8527 | 2.9933 |
| 1(−3) | 6.2624 | 6.1969 | 6.60193 | 5.7727 | 5.4001 | 4.7290 | 4.1337 | 3.5045 | 2.6650 |
| 5(−3) | 4.6951 | 4.6549 | 4.5786 | 4.4474 | 4.2231 | 3.7415 | 3.2483 | 2.6891 | 1.9250 |
| 1(−2) | 4.0163 | 3.9950 | 3.9334 | 3.8374 | 3.6669 | 3.2752 | 2.8443 | 2.3325 | 1.6193 |
| 5(−2) | 2.4590 | 2.4502 | 2.4243 | 2.3826 | 2.3040 | 2.1007 | 1.8401 | 1.4872 | 0.9540 |
| 1(−1) | 1.8172 | 1.8116 | 1.7949 | 1.7677 | 1.2157 | 1.5768 | 1.3893 | 1.1207 | 0.6947 |
| 5(−1) | 0.5584 | 0.5570 | 0.5530 | 0.5463 | 0.5333 | 0.4969 | 0.4436 | 0.3591 | 0.2083 |
| 1(0) | 0.2189 | 0.2184 | 0.2169 | 0.2144 | 0.2097 | 0.1961 | 0.1758 | 0.1427 | 812(−4) |
| 5(0) | 115(−5) | 114(−5) | 114(−5) | 112(−5) | 110(−5) | 104(−5) | 934(−6) | 763(−6) | 423(−6) |
| 10(0) | 415(−8) | 414(−8) | 411(−8) | 407(−8) | 399(−8) | 375(−8) | 339(−8) | 277(−8) | 153(−8) |
| 1(−6) | 5.3575 | 4.6721 | 3.7756 | 3.1110 | 2.4671 | 1.6710 | 1.1361 | 0.6879 | 0.2698 |
| 5(−6) | 4.5617 | 3.8836 | 3.0055 | 2.3661 | 1.7633 | 1.0574 | 0.6256 | 0.3091 | 787(−4) |
| 1(−5) | 4.2212 | 3.5481 | 2.6822 | 2.0590 | 1.4816 | 0.8285 | 0.4519 | 0.1978 | 388(−4) |
| 5(−5) | 3.4394 | 2.7848 | 1.9622 | 1.3943 | 0.8994 | 0.4024 | 0.1685 | 494(−4) | 405(−5) |
| 1(−4) | 3.1082 | 2.4658 | 1.6704 | 1.1359 | 0.6878 | 0.2698 | 963(−4) | 222(−4) | 107(−5) |
| 5(−4) | 2.3601 | 1.7604 | 1.0564 | 0.6252 | 0.3089 | 787(−4) | 166(−4) | 169(−5) | 129(−7) |
| 1(−3) | 2.0506 | 1.4776 | 0.8271 | 0.4513 | 0.1976 | 388(−4) | 590(−5) | 361(−6) | |
| 5(−3) | 1.3767 | 0.8915 | 0.4001 | 0.1677 | 493(−4) | 403(−5) | 205(−6) | 228(−8) | |
| 1(−2) | 1.1122 | 0.6775 | 0.2670 | 955(−4) | 221(−4) | 106(−5) | 274(−7) | | |
| 5(−2) | 0.5812 | 0.2923 | 755(−4) | 160(−4) | 164(−5) | 126(−7) | | | |
| 1(−1) | 0.3970 | 0.1789 | 359(−4) | 552(−5) | 300(−6) | | | | |
| 5(−1) | 0.1006 | 325(−4) | 388(−5) | 151(−6) | 171(−8) | | | | |
| 1(0) | 365(−4) | 993(−5) | 547(−6) | 151(−7) | | | | | |
| 5(0) | 167(−6) | 309(−7) | | | | | | | |
| 10(0) | | | | | | | | | |

注：括号内的数字为 10 的幂次，如 488(−4)=0.0488　5(−5)=5×10$^{-5}$　(据 Hantush)

(2)长时间抽水时的解：

对于第一种情况，当 $t>5\dfrac{m_1\mu_1^*}{K_1}$ 和 $t>5\dfrac{m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u_1,\alpha) \tag{4-53}$$

式中　$W(u_1,\alpha)$——不考虑弱透水层弹性释水时越流系统井函数(表 4-6)；

$$u_1=\frac{r^2\left(\mu^*+\dfrac{\mu_1^*}{3}+\dfrac{\mu_2^*}{3}\right)}{4Tt}$$

$$\alpha=r\sqrt{\frac{1}{B_1^2}+\frac{1}{B_2^2}}$$

对于第二种情况，当 $t>10\dfrac{m_1\mu_1^*}{K_1}$ 和 $t>10\dfrac{m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，其解为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u_2) \tag{4-54}$$

式中 $W(u_2)$——无越流含水层井函数(表 4-1)；

$$u_2=\frac{r^2(\mu^*+\mu_1^*+\mu_2^*)}{4Tt}$$

对于第三种情况，当 $t>5\frac{m_1\mu_1^*}{K_1}$ 和 $t>\frac{10m_2\mu_2^*}{K_2}$ 时，其解为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_3,\frac{r}{B_1}\right) \tag{4-55}$$

式中 $W(u_3,r/B_1)$——不考虑弱透水层弹性释水时越流系统井函数(表 4-6)；

$$u_3=\frac{r^2(\mu^*+\mu_2^*+\mu_1^*/3)}{4Tt}$$

2. 公式讨论

(1)当 $K_1=K_2=0$，$\mu_1^*=\mu_2^*=0$ 时，即无越流时，上述降深公式和 Theis 公式一致。

(2)对于一、三两种情况，当 $K_2=0$，$\mu_1^*=\mu_2^*=0$ 时，降深公式同不考虑弱透水层弹性释水的降深公式相同。

(3)在双数纸上 $H(u,\beta)\sim\frac{1}{u}$ 标准曲线(图 4-9)表示 $\frac{S}{\frac{Q}{4\pi T}}$ 与 $u$ 和 $\beta$ 之间的关系。总的说，$S$ 随 $\beta$ 的增大而减小，这表明：①随 $r$ 增大 $S$ 减小；②随 $\mu_1^*$、$\mu_2^*$ 增大 $S$ 减小。因为弱透水层的贮水系数增大，可以释放出更多的水，抽水层的降深减小；③随越流因素 $B$ 的减小，$S$ 也会减小。

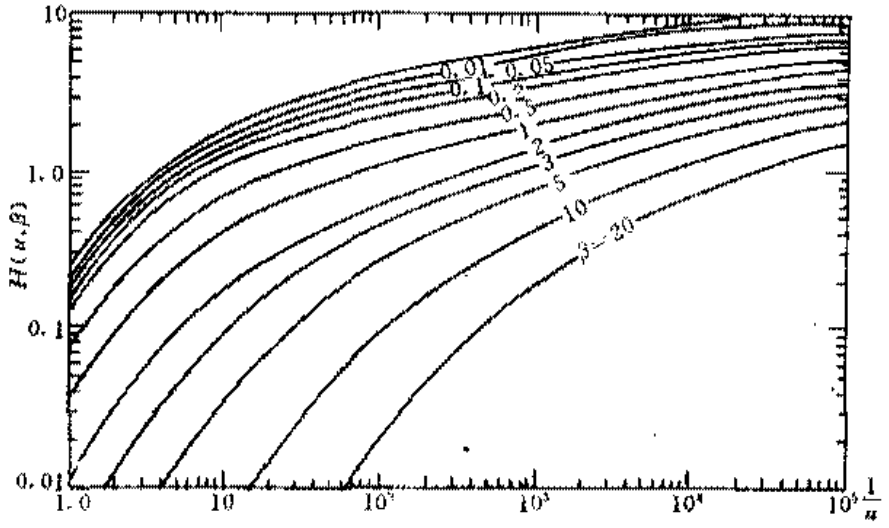



图 4-9 考虑弱透水层弹性释水，越流系统短期抽水时的标准曲线
(据 Walton)

## 第三节 潜水含水层中单井的非稳定运动

潜水非稳定井流与承压水不同，潜水面是一个随着抽水而不断变化的界面；因此它的运动远比承压井流复杂，主要表现在以下几个方面(图 3-5)：

(1)潜水含水层中导水系数 $T=Kh$ 随距离 $r$ 和时间 $t$ 面变化，而承压井流 $T=KM$ 和 $r$、$t$ 无关($K$ 不变时)；

(2)潜水井流当降深较大时，垂直分速度不可忽略，因而在井附近存在三维流区，而承压井流一般为二维流或近似作二维流处理；

(3)潜水井抽水时，水量主要来自潜水层的重力疏干，而重力疏干不是随水位下降立即发生、瞬时完成的，而是逐渐排出重力水，因而出现明显地"迟后"和"延迟给水"现象。承压水井抽出的水，按 Theis 理论是来自含水层的弹性释水，弹性释水是瞬时完成的。

到目前为止，还没有同时考虑上述三种情况的潜水井流公式。

当潜水完整井降深不大，即 $S\leqslant 0.1H_0$（$H_0$ 为抽水前潜水流厚度）时，对于均质各向同性、等厚、隔水底板水平、侧向无界的潜水含水层中定流量井流，可以用 Theis 公式进行近似计算。此时潜水层厚度 $H_m=\dfrac{H_0+H}{2}$，$T'=KH_m$。

由 Theis 公式，$H_0-H=\dfrac{Q}{4\pi T}W(u)$，将 $H_m$、$T'$ 代入，则有

$$H_0-H=\frac{Q}{2\pi K(H_0+H)}W(u)$$

得

$$H_0^2-H^2=\frac{Q}{2\pi K}W(u)$$

$$u=r^2\mu/4T't$$

也可采用修正降深值 $S'$ 直接利用 Theis 公式

$$S'=S-\frac{S^2}{2H_0}=\frac{Q}{4\pi T}W(u)$$

$$u=\frac{r^2\mu}{4Tt}$$

$$T=KH_0$$

式中 $S'$——修正降深；

$S$——实际观测降深；

$H_0$——潜水流初始厚度。

目前计算潜水完整井流的方法主要有：(1)考虑潜水井附近流速垂直分量时的 N. S. Boulton 第一潜水井流模型；(2)考虑迟后排水的 N. S. Boulton 第二井流模型；(3)考虑流速垂直分量和潜水层弹性释水的 S. P. Neuman 模型。本节只介绍后两种模型。

**一、考虑迟后排水的 Boulton 模型**

1960 年 Boulton 对潜水含水层抽水时降深历时曲线作了分析。完整潜水井的降深历时曲线明显地分为三个阶段：

第一阶段　抽水早期(也许只有几分钟)，降深历时曲线和 Theis 曲线一致(图 4-10)。这是由于排水引起潜水而下降，但含水层不能立即因重力排水把其中的水排出，而只是由于压力降低引起含水层的瞬时弹性释水，含水层的反应和贮水系数很小的承压含水层相似。

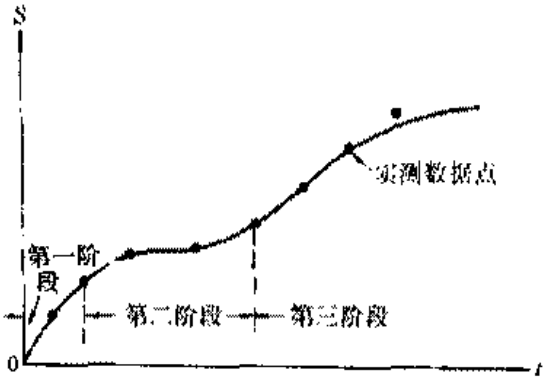



图 4-10　潜水含水层的 $S$-$t$ 曲线

第二阶段　抽水中期，降深历时曲线斜率

变小，明显地向下偏离 Theis 曲线，有的甚至出现短时间的假稳定，它反映了潜水层疏干排水时，好象含水层得到了补给使水位下降变慢，含水层的反应与有越流补给时的承压含水层类似。

第三阶段　可以在抽水后几分钟到几天后出现，这取决于含水层条件。降深历时曲线又重新和 Theis 曲线一致，说明随着抽水时间的延长，重力疏干速度逐渐赶上水位下降速度，抽水来自重力排水，降落漏斗不断扩大，此时给水度的作用相当于承压含水层的贮水系数。

Boulton 通过上述降深历时曲线三阶段分析，提出了滞后疏干（延迟给水）的概念。所谓滞后疏干，是指潜水含水层抽水时，重力排水使水位下降，在潜水面之上形成非饱和带（包气带），由于毛细作用，非饱和带水运动总是滞后于饱和带水的运动，因此潜水含水层中水的疏干不是瞬时完成的，而是逐渐被排出，从而出现的重力疏干明显地迟后于水位下降的现象。正是由于潜水的迟后给水作用，在潜水含水层抽水的初期，虽然水位下降了，但重力排水尚不能立即把含水层的水排出，抽出的水完全为弹性释水；第二阶段，疏干水量开始起作用，井中抽出的水部分或全部是沿垂向缓慢移动的疏干排水量。第三阶段延迟给水小到可以忽略不计，疏干给水与水位下降几乎是同时进行的。

1. 基本微分方程

为了定量描述潜水含水层抽水时降深-时间曲线，1963 年 Boulton 提出了考虑迟后疏干的计算模型。他作了如下假设：抽水开始后，在 $\tau$ 至 $t+\Delta\tau$ 时段间潜水面下降了 $\Delta S$，此时含水层排出的水量由两部分组成：

1）弹性释放水量　水位下降 $\Delta S$ 时，单位面积含水层的弹性释水量为 $\mu\cdot\Delta S\cdot 1$；

2）迟后疏干排水量　由于水位下降引起的重力排水面疏干含水层，但这部分水是逐渐释放出来的，降深 $\Delta S$ 时，单位水平面积含水层于 $t$ 时刻（$t>\tau$）排出的重力水量（强度）假设为

$$\Delta S\cdot\alpha\cdot\mu\cdot e^{-\alpha(t-\tau)}\cdot 1$$

其中 $\mu$ 为给水度，$\alpha$ 为一经验系数。这一假设的根据是：

（1）迟后疏干排水量 $\Delta S\alpha\mu\,e^{-\alpha(t-\tau)}$ 与 $t-\tau$ 关系与经验一致（图 4-11）；

（2）在 $\tau$ 时刻之后，单位水平面积含水层内降深为 1 个单位时，迟后重力排水的总体积为

$$\int_{\tau}^{\infty}\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)}\,dt=\mu$$

它等于给水度，在水均衡上是正确的。

（3）在 $\tau$-$t$ 时段内迟后排水总量为

$$\int_{\tau}^{t}\Delta S\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)}\,dt=\Delta S\mu[1-e^{-\alpha(t-\tau)}]$$

式中 $\alpha$ 越大，$\tau$ 至 $t$ 时段内排水量越大，即迟后性越小，或者说 $1/\alpha$ 小，迟后性小，故称 $1/\alpha$ 为延迟指数。

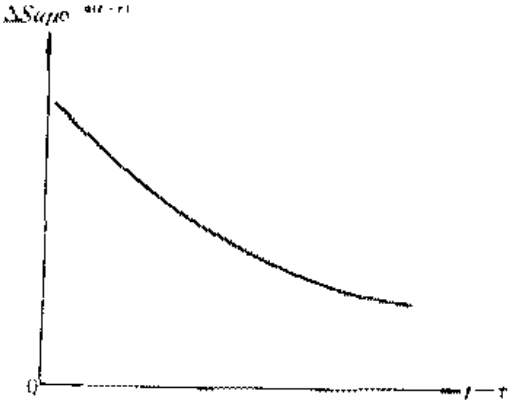



图 4-11　滞后给水过程曲线

Boulton 是在忽略速度的垂直分量和假定 $T$ 保持不变的前提下建立潜水运动的微分方程的。这时，如果只考虑含水层的弹性释水而忽略迟后重力排水，则方程是

$$T\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\mu^*\frac{\partial S}{\partial t}$$

如果考虑迟后重力排水，则方程的右端（用水头 $H$ 表示的微分方程则在左端）还需加上一项，即在 $t$ 时刻单位水平面积含水层中单位时间内迟后重力排水体积 $\Delta q$。$\Delta q$ 可以这样求得：将 0 到 $t$ 时刻这一时间段分成 $n$ 个时间小段，每个时间段用 $\Delta\tau_i$ 表示，$\Delta\tau_i=\tau_{i+1}-\tau_i$（$i=0,1,2,\cdots\cdots,n-1,n$，而 $\tau_0=0$）。在 $\Delta\tau_i$ 时间段内相应的水位降为 $\Delta S_i$（图 4-12）。在时刻 $t$ 由降深 $\Delta S_i$ 引起的排水量为 $\Delta S_i\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)}$。显然，由于迟后排水，$t$ 时刻之前的每个 $\Delta S_i$ 都有排水到达 $t$ 时刻的潜水面。$t$ 时刻单位水平面积的潜水水面上，单位时间接受的迟后排水总量为

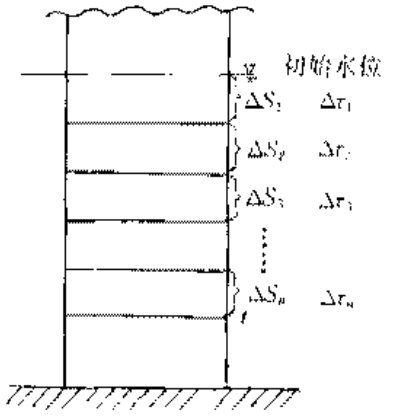



图 4-12　潜水位下降过程分割图

$$\Delta q=\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta S_i}{\Delta\tau_i}\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau_i)}\Delta\tau_i$$

当 $n\to\infty$，$\Delta\tau_i\to 0$ 时，$\frac{\Delta S_i}{\Delta\tau_i}\to\frac{\partial S}{\partial\tau}$，上式变为

$$\Delta q=\int_0^t\frac{\partial S}{\partial\tau}\alpha\mu e^{-\alpha(t-\tau)}\,d\tau$$

所以，考虑迟后重力排水时，流向潜水完整井非稳定井流的偏微分方程为

$$T\left(\frac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}\right)=\mu^*\frac{\partial S}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial S}{\partial\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau \tag{4-56}$$

相应的定解条件为

$$S(r,0)=0 \tag{4-57}$$

$$S(\infty,t)=0\qquad t>0 \tag{4-58}$$

$$\lim_{r\to 0}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T}\quad t>0 \tag{4-59}$$

该定解问题的解[①] 为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty\frac{2}{x}\left\{1-e^{-u_1}\left[\mathrm{ch}u_2+\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2}\mathrm{sh}\,u_2\right]\right\}J_0\left(\frac{r}{\nu D}x\right)dx \tag{4-60}$$

式中　$S$——定流量抽水时，距井 $r$ 处 $t$ 时刻的降深；

$$u_1=\frac{\alpha t\eta(1+x^2)}{2};$$

$$u_2=\frac{\alpha t\sqrt{\eta^2(1+x^2)^2-4\eta x^2}}{2};$$

$$\eta=\frac{\mu+\mu^*}{\mu^*};$$

$$\nu=\sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}};$$

① 求解过程见附录 Ⅱ。

$D=\sqrt{\frac{T}{\alpha\mu}}$ ——疏干因素(量纲为[$L$]);

$\mu$——给水度;

$\mu^*$ ——贮水系数;

$x$——积分变量;

$J_0$——第一类零阶 Bessel 函数。

当 $\eta\to\infty$时,即给水度比贮水系数大得多时,式(4-60)可简化为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^{\infty}2J_0\left(\frac{r}{D}x\right)\left[1-\frac{1}{x^2+1}e^{-\frac{\alpha t x^2}{x^2+1}}-F\right]\frac{dx}{x} \tag{4-61}$$

或

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_{a,y},\frac{r}{D}\right) \tag{4-62}$$

式中

$$W\left(u_{a,y},\frac{r}{D}\right)=\int_0^{\infty}2J_0\left(\frac{r}{D}x\right)\left[1-\frac{1}{x^2+1}e^{-\frac{\alpha t x^2}{x^2+1}}-F\right]\frac{dx}{x}$$

$$F=\frac{x^2}{x^2+1}e^{-\alpha\eta(x^2+1)}$$

$W(u_{a,y},r/D)$称为无压含水层中完整井的井函数(表 4-8)。其中 $u_{a,y}$,在抽水早期取 $u_a$ 值,抽水后期取 $u_y$ 值。它描述的标准曲线为一簇 $S$ 型曲线,反映了抽水的三个阶段降深特征(图 4-13)。由式(4-61),得

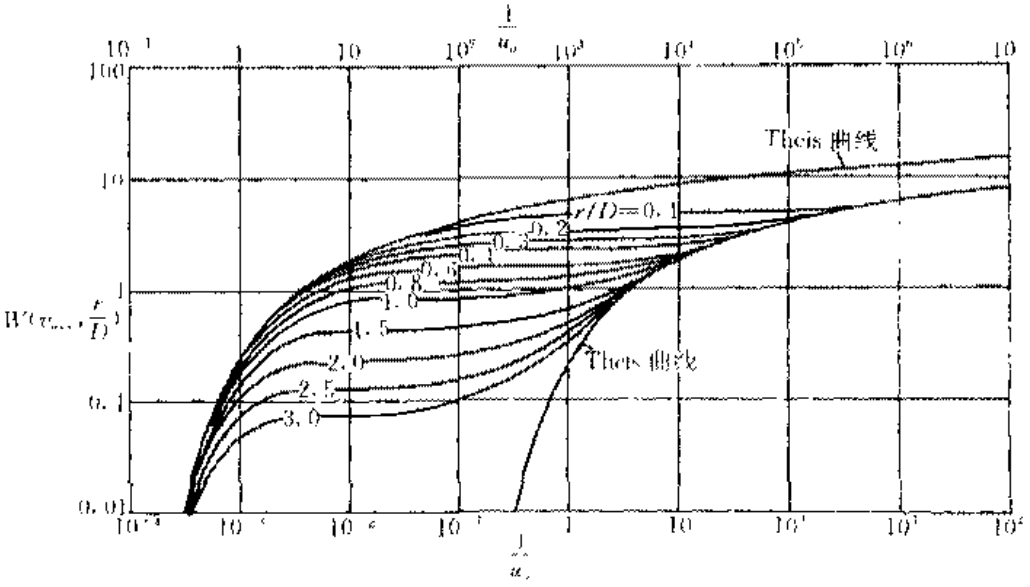



图 4-13 Boulton 潜水完整井流标准曲线

(据 T. A. Prickett)

对于抽水早期

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_a,\frac{r}{D}\right) \tag{4-63}$$

抽水中期

$$S=\frac{Q}{2\pi T}K_0\left(\frac{r}{D}\right) \tag{4-64}$$

抽水晚期

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u_y,\frac{r}{D}\right) \tag{4-65}$$

式中 $W(u_a,\frac{r}{D})$——无压含水层中完整井流 $A$ 组井函数；

$W(u_y,\frac{r}{D})$——无压含水层中完整井流 $B$ 组井函数；

$K_0(\frac{r}{D})$——虚宗量第二类 Bessel 函数。

2. 讨论

(1)由图 4-13 可以看出，标准曲线分为两组，左边 $A$ 组 $W(u_a,\frac{r}{D})\sim\frac{1}{u_a}$ 曲线，适用于

表 4-8　　$W(u_{a,y},r/D)$ 数值表

$1/u_a=N\times10^n$

| $r/D=0.01$ | | | $r/D=0.1$ | | | $r/D=0.2$ | | | $r/D=0.316$ | | | $r/D=0.4$ | | | $r/D=0.6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ |
| 1 | 1 | 1.82 | 1 | 1 | 1.30 | 5 | 0 | 1.19 | 1 | 0 | 0.216 | 1 | 0 | 0.213 | 1 | 0 | 0.206 |
| 1 | 2 | 6.04 | 5 | 1 | 3.24 | 1 | 1 | 1.75 | 2 | 0 | 0.544 | 2 | 0 | 0.534 | 2 | 0 | 0.504 |
| 1 | 3 | 6.31 | 1 | 2 | 3.81 | 5 | 1 | 2.95 | 5 | 0 | 1.153 | 5 | 0 | 1.114 | 5 | 0 | 0.996 |
| 5 | 3 | 7.82 | 2 | 2 | 4.30 | 1 | 2 | 3.29 | 1 | 1 | 1.655 | 1 | 1 | 1.564 | 1 | 1 | 1.311 |
| 1 | 4 | 8.40 | 5 | 2 | 4.71 | 5 | 2 | 3.50 | 5 | 1 | 2.594 | 5 | 1 | 2.181 | 2 | 1 | 1.493 |
| 1 | 5 | 9.42 | 1 | 3 | 4.83 | 1 | 3 | 3.51 | 1 | 2 | 2.623 | 1 | 2 | 2.225 | 5 | 1 | 1.553 |
| 1 | 6 | 9.44 | 1 | 4 | 4.85 | | | | 1 | 3 | 2.648 | 1 | 3 | 2.229 | 1 | 2 | 1.555 |

| $r/D=0.8$ | | | $r/D=1.0$ | | | $r/D=1.5$ | | | $r/D=2.0$ | | | $r/D=2.5$ | | | $r/D=3.0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_a,\frac{r}{D})$ |
| 5 | −1 | 0.046 | 5 | −1 | 0.0444 | 5 | −1 | 0.0394 | 3.33 | −1 | 0.0100 | 5 | −1 | 0.0271 | 5 | −1 | 0.0210 |
| 1 | 0 | 0.197 | 1 | 0 | 0.1855 | 1 | 0 | 0.1509 | 5 | −1 | 0.0335 | 1 | 0 | 0.0803 | 1 | 0 | 0.0534 |
| 2 | 0 | 0.466 | 2 | 0 | 0.421 | 1.25 | 0 | 0.199 | 1 | 0 | 0.114 | 1.25 | 0 | 0.0961 | 1.25 | 0 | 0.0607 |
| 5 | 0 | 0.857 | 5 | 0 | 0.715 | 2 | 0 | 0.301 | 1.25 | 0 | 0.144 | 2 | 0 | 0.1174 | 2 | 0 | 0.0681 |
| 1 | 1 | 1.050 | 1 | 1 | 0.819 | 5 | 0 | 0.413 | 2 | 0 | 0.194 | 5 | 0 | 0.1247 | 5 | 0 | 0.0695 |
| 2 | 1 | 1.121 | 2 | 1 | 0.841 | 1 | 1 | 0.427 | 5 | 0 | 0.227 | 1 | 1 | 0.1247 | 1 | 1 | 0.0695 |
| 5 | 1 | 1.131 | 5 | 1 | 0.842 | 2 | 1 | 0.428 | 1 | 1 | 0.228 | | | | | | |

$1/u_y=N\times10^n$

| $r/D=0.01$ | | | $r/D=0.1$ | | | $r/D=0.2$ | | | $r/D=0.316$ | | | $r/D=0.4$ | | | $r/D=0.6$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ |
| 4 | 2 | 9.45 | 4 | 0 | 4.86 | 4 | −1 | 3.51 | 4 | −1 | 2.66 | 1 | −1 | 2.23 | 4.44 | −1 | 1.586 |
| 4 | 3 | 9.54 | 4 | 1 | 4.95 | 4 | 0 | 3.54 | 4 | 0 | 2.74 | 1 | 0 | 2.26 | 4.22 | 0 | 1.707 |
| 4 | 4 | 10.23 | 4 | 2 | 5.61 | 2 | 1 | 3.69 | 4 | 1 | 3.38 | 5 | 0 | 2.40 | 4.44 | 0 | 1.844 |
| 4 | 5 | 12.31 | 1 | 3 | 7.72 | 4 | 1 | 3.85 | 4 | 2 | 3.42 | 1 | 1 | 2.55 | 1.67 | 1 | 2.448 |
| 4 | 6 | 14.61 | 1 | 4 | 10.01 | 1.5 | 2 | 4.55 | 4 | 3 | 7.72 | 3.75 | 1 | 3.20 | 4.44 | 1 | 3.255 |
| | | | | | | 4 | 2 | 5.42 | | | | 1 | 2 | 4.05 | | | |

| $r/D=0.8$ | | | $r/D=1.0$ | | | $r/D=1.5$ | | | $r/D=2.0$ | | | $r/D=2.5$ | | | $r/D=3.0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ | $N$ | $n$ | $W(u_y,\frac{r}{D})$ |
| 2.5 | −2 | 1.133 | 4 | −2 | 0.844 | 7.11 | −2 | 0.444 | 4 | −2 | 0.239 | 2.56 | −2 | 0.1321 | 1.78 | −2 | 0.0743 |
| 2.5 | −1 | 1.158 | 4 | −1 | 0.901 | 3.55 | −1 | 0.509 | 2 | −1 | 0.283 | 1.28 | −1 | 0.1617 | 8.89 | −2 | 0.0939 |
| 1.25 | 0 | 1.264 | 4 | 0 | 1.356 | 7.11 | −1 | 0.587 | 4 | −1 | 0.337 | 2.56 | −1 | 0.1988 | 1.78 | −1 | 0.1189 |
| 2.5 | 0 | 1.387 | 4 | 1 | 3.140 | 2.67 | 0 | 0.963 | 1.5 | 0 | 0.614 | 9.6 | −1 | 0.3990 | 6.67 | −1 | 0.2618 |
| 9.37 | 0 | 1.938 | | | | 7.11 | 0 | 1.569 | 1 | 0 | 1.111 | 2.56 | 0 | 0.7977 | 1.78 | 0 | 0.3771 |
| 2.5 | 1 | 2.704 | | | | | | | | | | | | | | | |

(据 Hantush)

抽水早期；右边 $B$ 组 $W(u_y,\frac{r}{D})\sim 1/u_y$ 曲线适用于抽水后期。

(2)曲线组反映了迟后排水的影响。在抽水初期，因以弹性释水为主，降深曲线同左边的泰斯曲线一致；当迟后排水发生影响时，便偏离 Theis 曲线，下降速度变小，逐渐向水平线趋近；抽水后期，迟后重力排水影响减弱，下降速度又逐渐增大，曲线斜率增加，当迟后重力排水影响结束时，又和右边的 Theis 曲线一致。

**二、考虑流速分量和弹性释水的 Neuman 模型**

Boulton 模型中引入了一个常数 $\alpha$，缺乏明确的物理意义，用它难以解释延迟给水的实质。Neuman 考虑了渗流垂直分速度，把潜水面视为可移动的边界来建立模型，求解完整潜水井流问题。

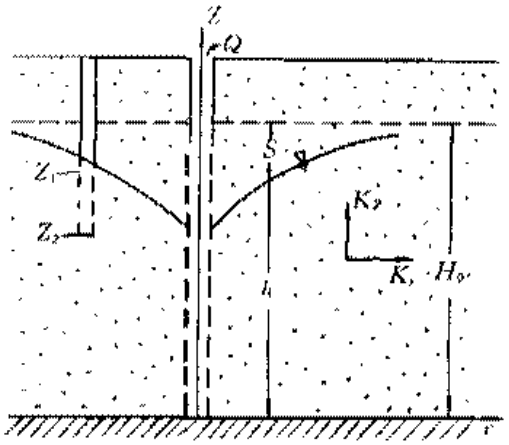


图 4-14　潜水完整井流

1. 定解问题及其解

Neuman 模型基于以下假设：

(1)潜水含水层侧向无界，隔水底板水平；

(2)含水层是均质各向异性的，坐标轴与主渗透方向一致；

(3)初始水位水平，无渗入和越流补给；

(4)抽水引起的水位降深远比含水层厚度小；

(5)完整井定流量抽水，井径无限小；

(6)含水层中水流符合 Darcy 定律。

在上述假定条件下，定解问题为(图 4-14)：

$$\begin{cases} K_r\left[\dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}\right]+K_z\dfrac{\partial^2 S}{\partial z^2}=\mu_s\dfrac{\partial S}{\partial t} & 0<Z<H_0 \\ S(r,z,0)=0 \\ S(\infty,z,t)=0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial z}(r,0,t)=0 \\ K_z\dfrac{\partial}{\partial z}S(r,H_0,t)=-\mu\dfrac{\partial}{\partial t}S(r,H_0,t) \\ \lim\limits_{r\to 0}\int_0^{H_0} r\dfrac{\partial S}{\partial r}\mathrm{d}z=-\dfrac{Q}{2\pi K_r} \end{cases} \tag{4-66'}$$

式中　$K_r$——水平径向渗透系数；

$K_z$——垂向渗透系数；

$\mu_s$——贮水率；

$\mu$——给水度；

$H_0$——潜水流初始厚度。

上述定解问题的解为

$$S(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty 4yJ_0(y\beta^{1/2})\left[w_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}w_n(y)\right]\mathrm{d}y \tag{4-66}$$

式中

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\mathrm{ch}(\gamma_0 z_d)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\mathrm{ch}(\gamma_0)} \tag{4-67}$$

$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[1-t_s\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\cos(\gamma_n z_d)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2-\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\cos(\gamma_n)} \tag{4-68}$$

其中 $\gamma_0$、$\gamma_n$ 分别为下列两个方程的根

$$\sigma\gamma_0\mathrm{sh}(\gamma_0)-(y^2-\gamma_0^2)\mathrm{ch}(\gamma_0)=0 \qquad \gamma_0^2>y^2 \tag{4-69}$$

$$\sigma\gamma_n\sin(\gamma_n)+(y^2+\gamma_n^2)\cos(\gamma_n)=0 \tag{4-70}$$

此处

$$(2n-1)\frac{\pi}{2}<\gamma_n<n\pi, n\geqslant 1 \tag{4-71}$$

$$\sigma=\mu^*/\mu \qquad h_d=H_0/r$$

$$K_d=K_z/K_r \qquad t_s=\frac{Tt}{\mu^* r^2}$$

$$Z_d=z/H_0 \qquad \beta=\frac{K_d}{h_d^2}=\frac{r^2K_z}{H_0^2K_r}$$

实际工作中，一般不观测某一点的降深 $S(r,z,t)$。对于观测孔中 $z_1$ 至 $z_2$ 深度观测到的降深 $S_{z_1z_2}$ 是该段各点水位降深的平均值，即

$$S_{z_1z_2}(r,t)=\frac{1}{z_2-z_1}\int_{z_1}^{z_2}S(r,z,t)\mathrm{d}z$$

对于完整观测孔，观测到的值是整个含水层中的平均值。这时式(4-66)仍然适用，只是 $\omega_0(y)$、$\omega_n(y)$ 按下式重新定义：

$$\omega_0(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2-\gamma_0^2)]\}\mathrm{th}(\gamma_0)}{\{y^2+(1+\sigma)\gamma_0^2-[(y^2-\gamma_0^2)^2/\sigma]\}\gamma_0}$$

$$\omega_n(y)=\frac{\{1-\exp[-t_s\beta(y^2+\gamma_n^2)]\}\mathrm{tg}(\gamma_n)}{\{y^2-(1+\sigma)\gamma_n^2-[(y^2-\gamma_n^2)^2/\sigma]\}\gamma_n}$$

可以证明：如果没有重力排水，$\mu=0$，含水层为承压含水层，式(4-66)就转化为 $t_r$ 的 Theis 公式

$$S(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{1}{4t_r}}^{\infty}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \tag{4-72}$$

当抽水时间长而含水层很薄时，式(4-66)就转化为 $t_y$ 的 Theis 公式

$$S(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{1}{4t_y}}^{\infty}\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y \tag{4-73}$$

式中

$$1/4t_y=\frac{r^2\mu}{4Tt},1/4t_r=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$$

2. Neuman 解的特点

1）降深历时曲线特点　Neuman 解描述的降深历时曲线和实测曲线的三个阶段是一致的，如图 4-15，它反映的是各向同性含水层($K_d=1$)中径距 $r$ 等于潜水含水层厚度($h_d=1$)，潜水含水层底板上($Z_d=0$)一点的降深情况。纵坐标是无量纲降深 $S_d(=\frac{4\pi T}{Q}S)$，横坐标是无量纲时间 $t_s(=\frac{Tt}{\mu^* r^2})$，六条曲线对应不同的 $\sigma(=\frac{\mu^*}{\mu})$。左边第一条对应于 $\mu=0$(即 $\sigma=\infty$)，就是 Theis 公式；其他五条曲线完整地反映了抽水过程三阶段。由图可以看出，抽水早期，这些曲线都和 Theis 曲线一致，说明这个阶段抽出的水来自弹性释水；第二阶段由于重力排水

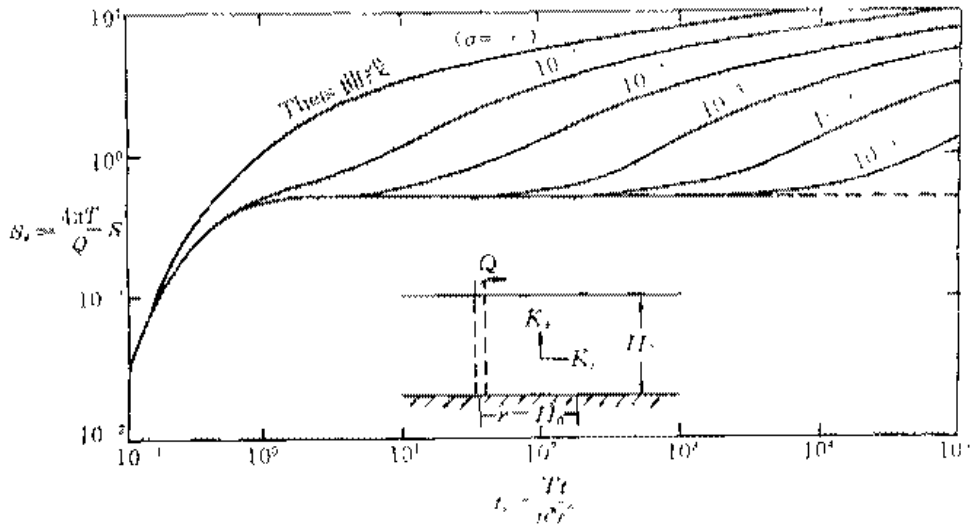



图 4-15　$Z_d=0, h_d=1$ 和 $K_d=1$，无量纲降深 $S_d$ 与无量纲时间 $t_y$ 关系曲线

（据 S. P. Neuman）

影响，曲线和获得"越流补给"的情况相似，而且 $\sigma$ 越小，即 $\mu$ 越大，重力排水作用越大，这一阶段延续的越长；进入第三阶段，弹性释水完全消失，曲线再次和 Theis 曲线一致。

图 4-16 的横坐标为无量纲时间 $t_y$，该图也明显反映出抽水过程三阶段。从图中可以看出，不论 $\sigma$ 怎样变化，第三阶段的曲线都与关于 $t_y$ 的 Theis 曲线一致，而且，$\sigma$ 愈小（$\mu^*$ 越小）降深历时曲线的第一阶段延续的时间越短。当 $\sigma=0$ 时，$\mu^*$ 近似等于零，第一阶段消失。

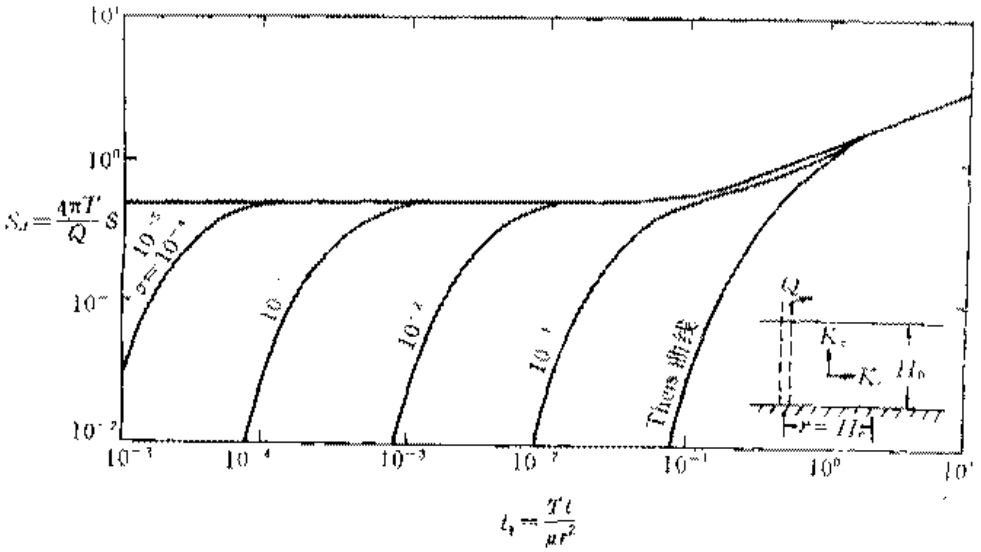



图 4-16　$Z_d=0, h_d=1$ 和 $K_d=1$，无量纲降深 $S_d$ 与无量纲时间 $t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

2）降深和观测点位置关系　图 4-17 显出在径向距离 $r$ 等于含水层厚度 $H_0$ 的剖面上各点的降深情况。从图中可以看出，抽水的早期和中期，潜水面上降深最小，底板处降深最大，说明潜水面的降深总是落后于它下面的任一点的降深。所谓"迟后排水"或"潜水面迟后反映"，正是由此面引起的。

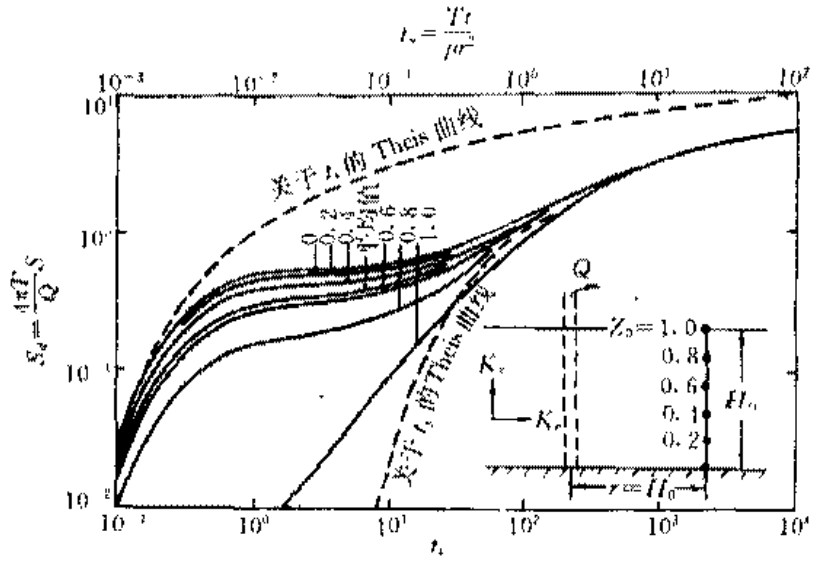



图 4-17　$\sigma=10^{-2}$，$h_d=1$，$K_d=1$ 时，无量纲降深 $S_d$ 与时间 $t_r$，$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

3）降深历时曲线与径向距离 $r$ 的关系　图 4-18 表示在 $Z_d=0$ 处，不同 $r$ 处降深历时曲线的形状不同。当 $r$ 逐渐增大时，弹性释放和迟后反应现象则逐渐变小，在 $r$ 大于含水层厚度 10 倍的地方，弹性释放就变得很小，可以忽略不计。这时降深历时曲线就与关于 $t_y$ 的

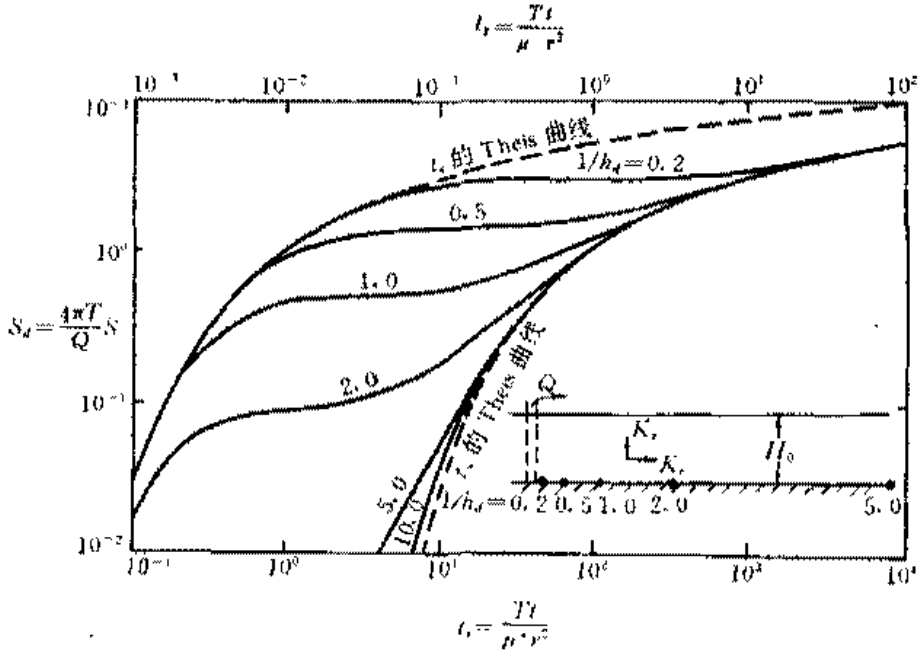



图 4-18　$\sigma=10^{-2}$，$z_d=0$，$K_d=1$ 时，无量纲降深 $S_d$ 与无量纲时间 $t_r$，$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

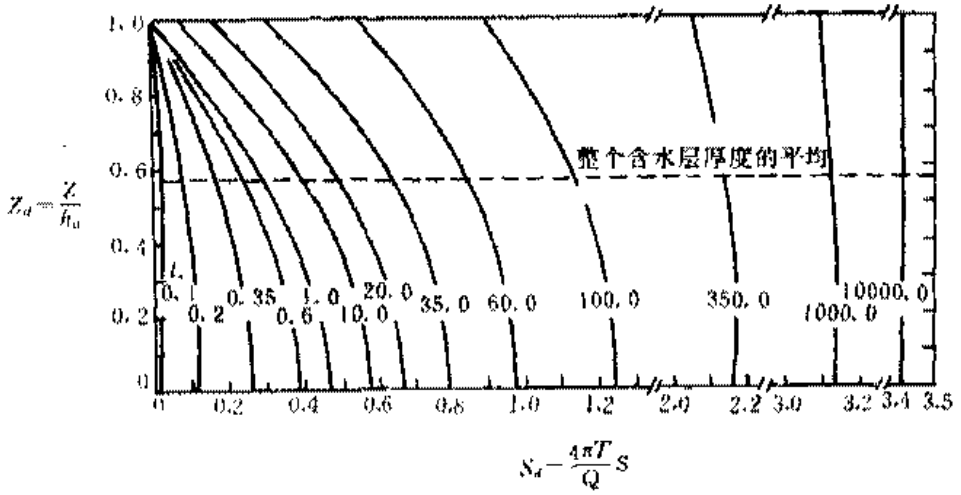



图 4-19　$\sigma=10^{-4}$，$h_d=1$，$K_d=1$ 时，无量纲高程 $z_d$ 与无量纲降深 $S_d$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

Theis 曲线吻合。反之，$r$ 越小，则早期弹性释放和迟后反应就愈明显，所以潜水降深的三个阶段，只有在 $r$ 不大的情况下才会明显地表现出来。

4）水流状态的变化　图 4-19 反映出 $h_d=1$ 的剖面上不同时刻降深曲线分布情况。在抽水的早期和后期，降深分布曲线基本上是垂直线，即同一剖面上各点的降深相同，不存在垂

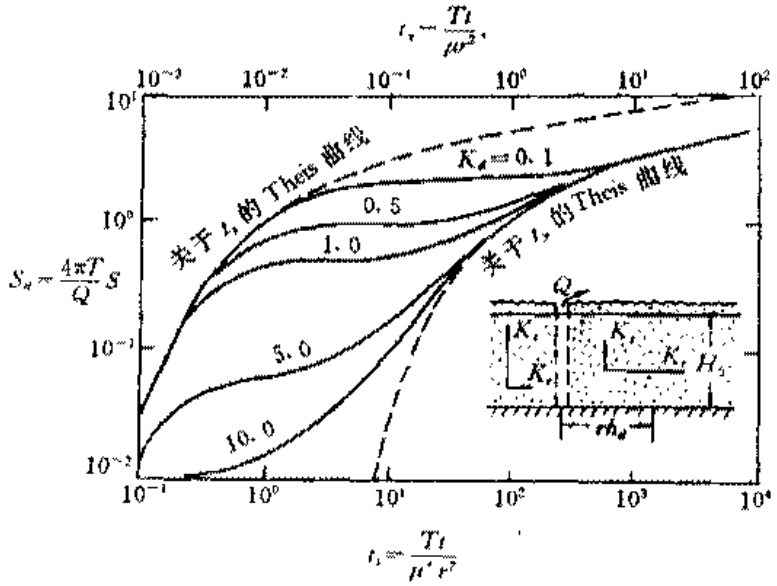



图 4-20　$\sigma=10^{-4}$，$z_d=0$，$h_d=1$ 时，无量纲降深 $S_d$ 和无量纲时间 $t_d$、$t_y$ 的关系曲线

（据 S. P. Neuman）

向分速度，水流是水平的。而在抽水的第二阶段，降深曲线弯曲，存在明显的垂直分速度。第三阶段降深曲线又呈现垂直，水流为水平的。

5）降深历时曲线与各向异性的关系　图 4-20 表明在各向异性介质中，$K_z$ 愈小，水平分速愈大，弹性释水和迟后反映愈明显。

## 第四节　地下水向干扰井群的非稳定运动

多口承压井组成的井群抽水时，各井之间将互相干扰。在某一观测点引起的降深，根据叠加原理，应等于各井以同样流量单独工作时在观测点引起的降深之和，即

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i=\frac{Q_1}{4\pi T}W(u_1)+\frac{Q_2}{4\pi T}W(u_2)+\cdots\cdots+\frac{Q_n}{4\pi T}W(u_n)$$

或

$$S=\frac{1}{4\pi T}\sum_{i=1}^{n}Q_iW(u_i) \tag{4-74}$$

$$u_i=\frac{r_i^2\mu^*}{4Tt_i},\ i=1,2,\cdots,n \tag{4-75}$$

式中　$S$——井群抽水时观测点的降深；

$Q_i$——第 $i$ 口井的流量；

$S_i$——第 $i$ 口井单独工作时在观测点引起的降深；

$r_i$——第 $i$ 口井到观测点的距离；

$t_i$——第 $i$ 口井的抽水延续时间。

当抽水井流量呈阶梯状变化时，可仿照第一节讲述的方法处理。

当抽水较长时，如 $u_i\leqslant 0.01(i=1,2,3,\cdots\cdots,n)$，式(4-74)可写为

$$S=\sum_{i=1}^{n}S_i=\frac{2.30}{4\pi T}\sum_{i=1}^{n}Q_i\lg\frac{2.25Tt_i}{r_i^2\mu^*} \tag{4-76}$$

将上式两端同除以 $\sum_{i=1}^{n}Q_i$

$$\frac{S}{\sum_{i=1}^{n}Q_i}=\frac{2.30}{4\pi T}\left[\sum_{i=1}^{n}Q_i\lg\frac{2.25Tt_i}{r_i^2\mu^*}\Big/\sum_{i=1}^{n}Q_i\right]$$

式中　$\dfrac{S}{\sum_{i=1}^{n}Q_i}$——单位流量降深，称单位降深。

对于潜水井群可用近似公式计算，即

$$H_0^2-H^2=\frac{1}{2\pi K}\sum Q_iW(u_i)$$

式中　$u_i=\dfrac{r_i^2\mu}{4T't_i}$，$T'=KH_*$，其他符号同前。

# 第五节　地下水向不完整井的非稳定运动

## 一、定流量抽水承压不完整井

M. S. Hantush 研究了定流量抽水时承压和有越流不完整井的非稳定井流问题。

1. 基本方程

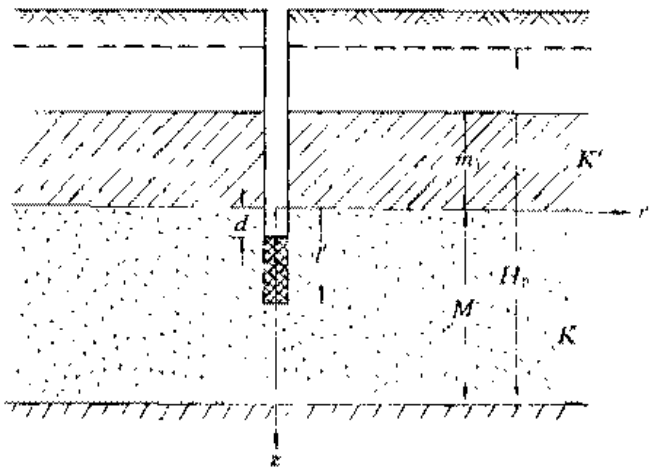



图 4-21　承压水不完整井

M. S. Hantush 把越流量作为发生在主含水层中的垂向等效补给量处理，从而含水层顶、底板视为绝对隔水的。同时还假定：

(1)承压含水层是均质各向同性、等厚、水平分布的，侧向无界。定流量抽水，井径无限小；

(2)上下含水层的初始水头面一致，水平；

(3)水流服从 Darcy 定律；

(4)不考虑弱透水层的弹性释水。

该问题的数学模型为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 S}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}+\dfrac{\partial^2 S}{\partial z}-\dfrac{S}{B^2}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial S}{\partial t} \\ S(r,z,0)=0 \\ S(\infty,z,t)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial Z}S(r,0,t)=0 \\ \dfrac{\partial}{\partial Z}S(r,M,t)=0 \\ \lim\limits_{r\to 0}\left[(l'-d)r\dfrac{\partial S}{\partial r}\right]=\begin{cases} 0 & 0<z<d \\ -\dfrac{Q}{2\pi K} & d<Z<l' \\ 0 & l'<Z<M \end{cases} \end{cases}$$

式中　$l'$——含水层顶板至过滤器底部的距离；

$d$——含水层顶板至过滤器顶部的距离；

$B$——越流因素。

模型可求出精确解，但难以计算，其近似解为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\{W(u,\frac{r}{B})+\xi(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B})\} \tag{4-77}$$

式中 $\xi$——不完整井阻力系数；

$$\xi(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B})=\frac{2M^2}{\pi^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin^2(\frac{n\pi d}{M})\int_u^{\infty}\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{(\frac{n\pi r}{M})^2+(\frac{r}{B})^2}{4y})\mathrm{d}y$$

$l$——过滤器长度。

这就是有越流补给时，过滤器在含水层中某个部位，承压不完整井井流的计算公式。

式(4-77)表明降深由两部分组成：第一部分$\frac{Q}{4\pi T}W(u,\frac{r}{B})$表示有越流时完整井的降深，第二部分$\frac{Q}{4\pi T}\xi(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B})$代表由于井的不完整性引起的附加降深，它与$Q,T,M,l$及$d$等有关。由于附加阻力的影响，不完整井的降深大于同条件下的完整井，井的附近流线弯曲，为三维流。Hantush 认为三维区的范围大约为$r\leqslant 1.5M$，之外，阻力系数值可以忽略不计，当作二维流区。

2. 讨论

(1)无越流时($K_1=0,B\to\infty$)或$r$较小($r/B\leqslant 0.01$)时，井流为无越流的承压不完整井流，它的数学模型只要在前模型中去掉$\frac{S}{B^2}$一项即可。这时降深的近似解为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\{W(u)+\xi_0(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M})\} \tag{4-78}$$

式中 $$\xi_0(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M})=\frac{2M^2}{(\pi l)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi nd}{M})}{n^2}\int_u^{\infty}\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{(\frac{\pi nr}{M})^2}{4y})\mathrm{d}y$$

(2)$d=0$，即过滤器紧靠顶板时，有越流的承压不完整井流，降深近似表达式：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u,\frac{r}{B})+\xi_a(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B}] \tag{4-79}$$

式中 $$\xi_a(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M},\frac{r}{B})=\frac{2M^2}{\pi^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{\pi nl}{M})}{n^2}\int_u^{\infty}\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{(\frac{\pi nr}{M})^2+(\frac{r}{B})^2}{4y})\mathrm{d}y$$

(3)当$d=0,B\to\infty$时，即无越流补给，过滤与隔水顶板相联的承压不完整井，降深按下式近似计算：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u)+\xi_b(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M})] \tag{4-80}$$

式中 $$\xi_b(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M})=\frac{2M^2}{\pi^2l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2(\frac{n\pi l}{M})}{n^2}\int_u^{\infty}\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{(\frac{n\pi r}{M})^2}{4y})\mathrm{d}y \tag{4-81}$$

式(4-80)可简化为

$$S=\frac{Q}{4\pi T}[W(u)+\xi_b(u,\frac{l}{M},\frac{r}{M})]=\frac{Q}{4\pi T}W(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M}) \tag{4-80'}$$

表 4-9 给出了 $\frac{l}{M}=0.25,0.5,0.75$ 的井函数为 $W(u,\frac{r}{M},\frac{L}{M})$ 值。利用此表可作有关水文地质的计算。

(4)抽水时间很长，同时 $\frac{r}{B}\leqslant 0.01$ 时，有越流的非稳定井流可近似认为达到稳定，可用稳定流不完整井公式计算。

表 4-9　　$W(u,\frac{r}{M},\frac{l}{M})$ 数值表

| $l/M$ / $r/M$ / $u$ | 0.25 | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1.00 | 0.75 | 0.20 | 0.10 | 0.03 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.3385 | 13.9367 | 16.2123 | 18.9845 | 25.1707 | 31.4176 | 44.9781 |
| $10^{-5}$ | 11.0395 | 11.6341 | 13.9097 | 16.6837 | 22.8681 | 29.1150 | 40.7960 |
| $10^{-4}$ | 8.6334 | 9.3361 | 11.6072 | 14.3794 | 20.5656 | 26.7666 | 33.5338 |
| $10^{-3}$ | 6.4317 | 7.0299 | 9.3055 | 12.0777 | 18.2045 | 22.6026 | 24.9428 |
| $10^{-2}$ | 4.1381 | 4.7363 | 7.0119 | 9.7382 | 13.8971 | 15.3684 | 15.9702 |
| $10^{-1}$ | 1.9231 | 2.5213 | 4.4451 | 5.7545 | 6.8298 | 7.1101 | 7.1913 |
| 1 | 0.2981 | 0.4959 | 0.7160 | 0.7856 | 0.8493 | 0.8549 | 0.8531 |
| 2 | 0.0806 | 0.1271 | 0.1675 | 0.1794 | 0.1900 | 0.1875 | 0.1893 |
| 3 | 0.0245 | 0.0366 | 0.0454 | 0.0472 | 0.0501 | 0.0481 | 0.0481 |

| $l/M$ / $r/M$ / $u$ | 0.50 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.5 | 0.2 | 0.1 | 0.03 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.5665 | 14.4689 | 15.4989 | 17.6358 | 19.7506 | 24.2954 |
| $10^{-5}$ | 11.2639 | 12.1663 | 13.1963 | 15.3332 | 17.4498 | 21.1506 |
| $10^{-4}$ | 8.9641 | 9.8638 | 10.8938 | 13.0307 | 15.1224 | 17.0340 |
| $10^{-3}$ | 6.6597 | 7.5621 | 8.5921 | 10.6994 | 11.9812 | 12.5845 |
| $10^{-2}$ | 4.3661 | 5.2685 | 6.2757 | 7.4555 | 7.8851 | 8.0462 |
| $10^{-1}$ | 2.1511 | 2.8822 | 3.2520 | 3.5306 | 3.6050 | 3.6304 |
| 1 | 0.0334 | 0.3986 | 0.4185 | 0.4319 | 0.4349 | 0.4353 |
| 2 | 0.0308 | 0.0910 | 0.0942 | 0.0964 | 0.0966 | 0.0968 |
| 3 | 0.0223 | 0.0247 | 0.0252 | 0.0254 | 0.0254 | 0.0255 |

| $l/M$ / $r/M$ / $u$ | 0.75 | | |
|---|---|---|---|
| | 0.1 | 0.01 | 0.001 |
| $10^{-6}$ | 13.8767 | 15.2580 | 16.7637 |
| $10^{-5}$ | 11.5741 | 12.9554 | 14.2530 |
| $10^{-4}$ | 9.2716 | 10.6478 | 11.3995 |
| $10^{-3}$ | 6.9699 | 8.1392 | 8.3991 |
| $10^{-2}$ | 4.6712 | 5.2967 | 5.3635 |
| $10^{-1}$ | 2.2597 | 2.4103 | 2.4198 |
| 1 | 0.2823 | 0.2898 | 0.2898 |
| 2 | 0.0634 | 0.0643 | 0.0645 |
| 3 | 0.0167 | 0.0169 | 0.0169 |

## 二、定降深承压不完整井

当矿层下伏含水层的水头压力超过顶板的强度，或在井筒掘进刚刚揭露强含水层时，巷道和井筒就会发生突水，水位将迅速降到突水点的标高。这时突水点可看作半径为 $\rho_w$ 的球

形定降深承压不完整井(图 4-22),地下水为三维流。

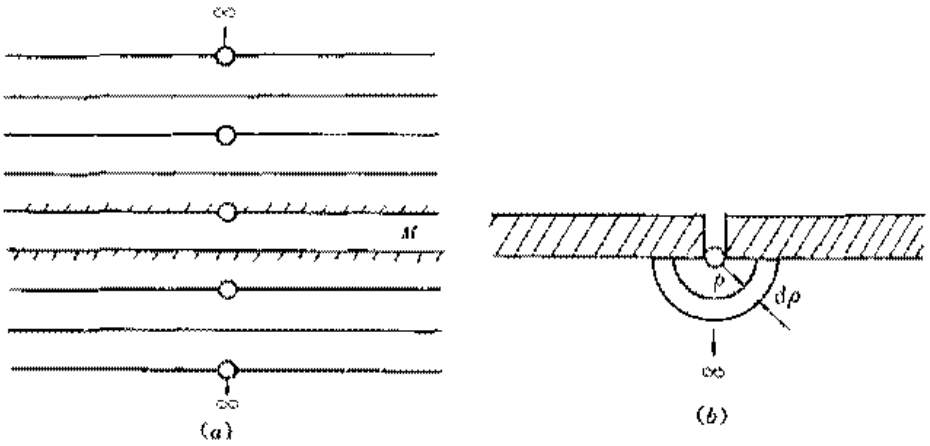



图 4-22 球状定降深承压不完整井

*a*—含水层无限厚; *b*—含水层有限厚

对于图中 *a* 所示的情况,根据水均衡原理,基本方程为

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial S}{\partial \rho}=\frac{\mu_s}{K}\frac{\partial S}{\partial t}$$

定解条件为

$$S(\rho,0)=0; \quad 0<\rho<\infty$$

$$S(\rho_w,t)=S_w; \quad t>0$$

$$S(\infty,t)=0; \quad t>0$$

其解为

$$S=\frac{\rho_w \cdot S_w}{\rho}\operatorname{erfc}\left[\frac{\rho-\rho_w}{2\sqrt{\frac{Kt}{\mu_s}}}\right] \tag{4-82}$$

对上式求导,代入 Darcy 公式

$$Q_w=-2\pi\rho_w^2 K\frac{\partial S}{\partial \rho}\Big|_{\rho=\rho_w}=2\pi K S_w \rho_w^2\left[\frac{1}{\rho_w}+\frac{1}{\sqrt{\pi t\frac{K}{\mu_s}}}\right] \tag{4-83}$$

式中 $\rho_w$——井(球)半径;

$S_w$——井中降深;

$S$——任一点 $\rho$ 处的降深;

$Q_w$——井(半球形)突水量。

式(4-82)、(4-83)即为半无限厚含水层中定降深单个球状井流的降深公式和半球井的流量公式。

当抽水时间足够长,$t\to\infty$时,式(4-83)转变为 $Q_w=2\pi K\rho_w S_w$,即为稳定流公式。

对于有限厚含水层,如图中 *b* 所示的情况,根据映射原理,半球井映射成直线井排,通过叠加计算,含水层中的实际降深为

$$S=\rho_w S_w\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\rho^2+(2nM+z)^2}}\operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{r^2+(2nM+z)^2}-\rho_w}{2\sqrt{\frac{tT}{\mu^*}}}\right]\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r^2+(2nM-z)^2}}\operatorname{erfc}\left[\frac{\sqrt{r^2+(2nM-z)^2}-\rho_w}{2\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}}\right]\Bigg\} \tag{4-84}$$

半球井的流量为

$$Q_w=\pi\rho_w^2KS_w\left\{\frac{2}{\rho_w}+\frac{2}{\sqrt{\frac{\pi tT}{\mu^*}}}\rho_w\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2nM)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\operatorname{erfc}\left(\frac{2nM-\rho_w}{2\sqrt{\frac{Tt}{\mu^*}}}\right)+\frac{1}{2nM\sqrt{\frac{\pi Tt}{\mu^*}}}e^{-\frac{(2nM-\rho_w)^2}{\frac{4Tt}{\mu^*}}}\right]\right\} \tag{4-85}$$

式中符合同前述。当含水层厚度无限时，式(4-85)可转变为式(4-83)。

**思考题**

1. 推导 Theis 公式时，为何要求抽水前水位水平。
2. 潜水井群如何应用叠加原理求降深或水位。
3. 试指出承压、半承压、潜水完整井非稳定井流解中 $S$-$t$ 曲线的区别，说明理由。

# 第五章　含水层参数的识别

## 第一节　逆问题的概述

### 一、一般概念

在水文地质计算中，一方面根据计算公式或描述地下水运动的微分方程及定解条件在各种参数已知的情况下求任意一点及任意时刻的水位或流量，这一问题叫正问题或正演问题；反过来，根据地下水的天然动态或抽水试验的观测资料确定其中的某些水文地质参数，这样的问题叫逆问题或含水层参数的识别问题。由此可以看出，求逆问题总是利用过去一段时期的资料来研究含水层的激发（如抽水）和响应（如地下水位）关系，并确定模型方程式的参数值，使这些模型方程能满足上列两组相关的数据。

根据目前的理论及生产实践的总结，逆问题可有以下五种类型：

（1）单纯求水文地质参数，包括导水系数、贮水系数等；

（2）求微分方程中的源汇项，包括求蒸发量、入渗量、未知的开采流量等；

（3）求初始条件；

（4）求边界条件；

（5）以上几种的混合。

在实际应用方面多属第（5）种类型，但对第（1）、（2）种类型以前研究较多。

### 二、逆问题的适定性讨论

在数学上求微积分的反问题时，若问题的解存在、唯一且稳定，就说该问题是适定的，否则是不适定的。根据抽水实验资料和天然动态观测资料反求水文地质参数时，也需考虑这三个问题。这便是含水层参数识别的适定性问题，即

（1）根据实际资料反求渗流区水文地质参数时，其解是否存在，即解的存在性问题；

（2）求得的参数是否唯一，即解的唯一性问题；

（3）当实测资料有微小误差时（实际工作中由于受各种条件的限制，这种情况是难免的），反求的水文地质参数的误差是否也微小，即水文地质参数是否连续依赖于实测资料，即解的稳定性问题。

由于在解决实际水文地质问题时，正问题的数学模型往往都是根据对实际地区的地质、水文地质条件的研究，通过概化得出的，因此，研究区的形状、边界条件和初始条件是确定的，并且模型中含有能描述该地区地下水运动规律的微分方程，方程中的某些系数及常数项尚可确定。在这种情况下，解的存在是无疑的。现仅对解的唯一性和稳定性加以讨论。

#### 1. 解的唯一性

不同的水文地质条件可能产生相同的水头分布，因此在反求水文地质参数中往往存在多解性，必须事先进行研究。现以承压二维流为例讨论问题。

二维承压稳定流方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}(T\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T\frac{\partial H}{\partial y})+\varepsilon=0 \qquad x,y\in D \tag{5-1}$$

方程式(5-1)又可写成

$$T\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+T\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+\varepsilon=0$$

因水头 $H$ 是已知的，故$\frac{\partial H}{\partial x}$、$\frac{\partial H}{\partial y}$、$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$、$\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$亦已知。

令 $A=\frac{\partial H}{\partial x}$，$B=\frac{\partial H}{\partial y}$，$C=\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}$，则式(5-1)可改写为

$$A\frac{\partial T}{\partial x}+B\frac{\partial T}{\partial y}+CT+\varepsilon=0 \tag{5-2}$$

这样，方程式(5-1)就变成了关于 $T$ 的一阶线性偏微分方程，其通解包括任意函数。

若 $T$ 是方程(5-2)的一个解，而 $T'$ 是方程 $A\frac{\partial T}{\partial x}+B\frac{\partial T}{\partial y}+CT=0$ 的一个解，则 $T+T'$ 也应是方程(5-2)的解。这是因为

$$A\frac{\partial}{\partial x}(T+T')+B\frac{\partial}{\partial y}(T+T')+C(T+T')+\varepsilon$$

$$=(A\frac{\partial T}{\partial x}+B\frac{\partial T}{\partial y}+CT+\varepsilon)+(A\frac{\partial T'}{\partial x}+B\frac{\partial T'}{\partial y}+CT')=0$$

由此说明，在反求参数时解一般是不唯一的，但是若根据实际水文地质条件加一些限制条件是可以使反演问题获得唯一正确的解。下面以一维承压流为例，予以说明。

数学模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}(T\dfrac{\partial H}{\partial x})=0 & 0\leqslant x\leqslant L\\ H|_{x=0}=h_1\\ H|_{x=L}=h_2\end{cases} \tag{5-3}$$

水头 $H$ 已知，可得$\frac{\partial H}{\partial x}$。对上式微分方程求积分得

$$T\frac{\partial H}{\partial x}=C$$

即

$$T=\frac{C}{\frac{\partial H}{\partial x}} \tag{5-4}$$

此方程中 $C$ 是一个不确定的任意常数，$T$ 将随 $C$ 的取值变化而变化，则 $T$ 不唯一。假设经过勘探，已经知道边界 $L$ 处断面的流量，这样将式(5-3)中 $L$ 处的边界条件改为流量边界，即

$$T\frac{\partial H}{\partial x}|_{x=L}=-q$$

则式(5-4)中 $C$ 便可唯一确定下来，即 $C=-q$，从而得到 $T$ 为

$$T=\frac{-q}{\frac{\partial H}{\partial x}}$$

这时 $T$ 就是唯一确定的。

2. 解的稳定性

仍以承压二维流为例，对均质各向同性的承压二维流数学模型为

$$\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+\varepsilon=0 & x,y\in D \\ H|_{\Gamma}=\varphi(x,y) \end{cases} \tag{5-5}$$

若区域 $D$ 上的水头和垂向补给量 $\varepsilon$ 是已知的，由式(5-5)$T$ 为

$$T=\frac{-\varepsilon}{\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}} \tag{5-6}$$

如果实测水头 $H^*$ 有微小误差 $\delta$，$H^*=H+\delta$，则 $T^*$ 为

$$T^*=\frac{-\varepsilon}{\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}\right)}$$

那么

$$T-T^*=\frac{T\left(\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}\right)}{\left(\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}\right)} \tag{5-7}$$

从数学上讲，即使 $\delta$ 很小，但其 $\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 \delta}{\partial y^2}$ 也可能很大，从而决定 $T$ 与 $T^*$ 之间的误差也可能很大。由此表明，逆问题的解常常是不稳定的。通常，通过一些补救措施(在计算技术和勘探技术方面)，还是能使求逆问题达到稳定的。

**三、逆问题求解，对水文地质勘探的要求**

含水层参数识别问题不是单纯的数学问题，有的问题从数学角度看可能不适定，但借助于其它可以利用的可靠信息，包括水文地质勘探的资料，水文地质科技人员对研究区的认识程度和判断准确性等，采用一些特殊措施(如增加一些约束条件，将待求的参数 $T$，$\mu^*$ 等假设在某一小区间内是常数，每一参数又被限制在指定范围之内)，从而使问题的解唯一和可靠。为此对水文地质勘探及资料有以下要求：

(1) 对研究地区的水文地质条件，包括边界条件、含水层系统的结构、分布、地下水类型应清楚，避免计算区内未知因素过多、缺乏水文地质约束。例如，应查清含水层系统的组成、各层厚度分布、水力性质、均质性、各层间水力联系、越流补给等条件，减少参数识别过程中可能的多解性。

(2) 计算区范围与边界条件同时确定，尽量保持正演模型范围与反演模型范围一致，以保证参数识别时资料在面上控制。

(3) 根据对研究区水文地质条件的认识，合理设计抽水试验，布置动态观测点，主要应注意：①主井位置的选择。主井位置的确定应以抽水试验的目的为依据，若是为供水评价或矿山疏干为目的，则应尽量结合未来生产井或矿区疏干孔位置选取；若为了查清某个地段的水文地质条件，则应将主井位置选择在需了解的地段，使主井附近产生大的降深，充分暴露该地段的水文地质条件，从而使参数的识别更为精确。②观测孔的选择。观测孔的个数要与待求参数的个数相适应，位置分布要合理，一般来说，观测孔宜较均匀地分布在全区，但在参数或水文地质条件变化的地段应有观测孔控制，以提高求参精度。③地下水动态观测对查清研究的边界条件、各含水层间的水力联系等水文地质条件至关重要，因此，在各勘探阶段初期就应布置并进行动态观测，这方面的资料对含水层参数识别工作有重要的价值。尤其是区

域大面积分布的含水层的参数识别问题，即使是大型抽水试验，也难以控制整个区域，此时区域的动态观测资料将更为有用。

## 第二节　根据抽水试验确定含水层参数

含水层参数识别的主要任务是如何合理地确定含水层参数，如导水系数 $T$、压力传导系数 $a$ 或渗透系数 $K$、贮水系数 $\mu^*$ 及给水度 $\mu$ 等。目前求参数的途径主要通过实验室实验及抽水试验来实现，本节主要介绍依据抽水试验资料求参的有关方法。

### 一、试点法(试算法)

基本原理是在已知井的抽水量(Q)、观测降深值(S)及抽水时间(t)(对非稳定流而言)条件下，先给出一组参数的初值，代入已知解析式或方程组，解出某个值(降深、流量或水头)，然后与相应的观测值进行比较，看是否吻合或误差精度是否满足计算要求。若不满足对参数加以修正，再代入解析式或方程组进行运算、比较，直至达到要求为止。下面以泰斯公式为例阐述试算法。

与抽水孔距离为 $r$ 处有 1 个观测孔，获得了不同时刻 $t_1$ 和 $t_2$ 相应的水位降深 $S_1(r,t_1)$ 和 $S_2(r,t_2)$值，由泰斯公式

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(\frac{r^2}{4at}\right)$$

得

$$\begin{cases} S_1=\dfrac{Q}{4\pi T}W\left(\dfrac{r^2}{4at_1}\right) \\ S_2=\dfrac{Q}{4\pi T}W\left(\dfrac{r^2}{4at_2}\right) \end{cases} \tag{5-8}$$

可得

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{W\left(\dfrac{r^2}{4at_1}\right)}{W\left(\dfrac{r^2}{4at_2}\right)} \tag{5-9}$$

首先给出一个初值(由经验判断)$a_0$，然后代入式(5-9)，看是否满足方程式，若不满足，则再给出一个 $a_1$ 再试点，反复此过程，直至满足精度要求为止。最终满足方程式(5-9)的 $a$ 值，即为选定的 $a$ 值。

由求得的 $a$ 值，代入式(5-8)求得 $T$ 值，其计算式为

$$T=\frac{Q}{4\pi S_1}W\left(\frac{r^2}{4at_1}\right) \tag{5-10}$$

同理，有两个观测孔资料时，可取同一时刻两个观测孔的降深资料，应用上述过程试算可求得参数 $a$ 及 $T$。

对无压(或潜水)含水层，当降深不大时，用 $H_0^2-H^2$ 代替承压水井公式中的 $2MS$，上述原理方法依然适用。

### 二、含水层阻力常数法

#### 1. 基本原理

根据单孔稳定流抽水试验求参时，井损的存在会造成所求渗透系数误差较大。由第三章第二节可知，井中的水位降深 $S_w$，是由含水层中地下水流阻力、井内井周的水力阻力、地下

水不同的流态所造成的阻力以及含水层的边界条件等综合因素影响决定的。有的学者提出，$Q\sim S$ 关系可用一个简单的多项式表示，其一般形式为

$$S = a_1Q + a_2Q^2 + \cdots\cdots + a_nQ^n \tag{5-11}$$

式中的一阶常数 $a_1$ 表示地下水在含水层中作径向流的水力阻力常数，$a_1Q$ 项表示由该阻力引起的水位降深，相应的 $Q\sim S$ 呈直线关系，称 $a_1$ 为含水层阻力常数。于是，可以利用单孔稳定流抽水试验的多次降深的 $S$ 值和流量 $Q$ 值资料，列出多项式，取流量一次方项的常数 $a_1$，利用 Dupuit 公式求得渗透系数 $K$，这样便可消除由于井损等因素的影响所造成的误差，提高所求参数的精度。

2. 方法

一般来说，式(5-11)在同一含水层和成井条件下，水位下降越大，井内井周的水力阻力越大，$Q\sim S$ 曲线越偏离线性关系，在式(5-11)右端则出现流量的高次方项分配。反之，水位下降小时，多项式往往易呈线性关系。当一次项常数以后的各次项常数为零时，则式(5-11) $Q\sim S$ 便呈直线关系，即

$$S = aQ \tag{5-12}$$

式(5-12)揭示的关系正是 Dupuit 公式所表示的关系，由 Dupuit 公式

$$S = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{R}{r_w} \tag{5-13}$$

则式(5-12)和(5-13)的对应关系为

$$a_1 = \frac{\ln\dfrac{R}{r_w}}{2\pi T} = \frac{\ln\dfrac{R}{r_w}}{2\pi KM} \tag{5-14}$$

当 $a_1$ 已知时，便可求得未知的渗透系数。而 $a_1$ 可根据抽水试验获得的 $Q$、$S$ 资料作均差表求出。

同理，可写出不同边界条件下的含水层阻力常数表达式：

直线傍河边界

$$a_1 = \frac{\ln\dfrac{2a}{r_w}}{2\pi KM} \tag{5-15}$$

直角傍河边界

$$a_1 = \frac{\ln\dfrac{2ab}{r_w\sqrt{a^2+b^2}}}{2\pi KM} \tag{5-16}$$

条形傍河边界

$$a_1 = \frac{\ln\dfrac{0.63L\sin\dfrac{\pi a}{L}}{r_w}}{2\pi KM} \tag{5-17}$$

式中 $a$、$b$——井到边界的距离；

$L$——为两平行边界之间的距离。

$a_1$ 同样可根据 $Q\sim S$ 资料由均差表求出，然后代入相应的含水层阻力常数表达式，求出参数 $K$。

例 5-1 某含水层为砂卵石，厚 $M=36.8$m，滤水管长 33.7m。放置在含水层顶部。井的半径 $r_w=0.1$m，作三次水位降深稳定流抽水试验，其抽水量分别为 $Q_1=2780$m³/d，$Q_2=4700$m³/d，$Q_3=7465$m³/d，降深观测资料见表 5-1。求渗透参数。

表 5-1　　抽水试验水位观测表

| 孔号 | 抽水孔 | 观 1 | 观 2 | 观 3 | 观 4 | 观 5 | 观 6 | 观 7 | 观 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r$, m | | 1.05 | 2.97 | 8.00 | 14.95 | 32.00 | 40.00 | 48.00 | 90.00 |
| $S_1$, m | 0.675 | 0.388 | 0.282 | 0.216 | 0.192 | 0.140 | 0.128 | 0.112 | 0.078 |
| $S_2$, m | 1.358 | 0.718 | 0.437 | 0.368 | 0.325 | 0.260 | 0.206 | 0.189 | 0.300 |
| $S_3$, m | 2.64 | 1.24 | 0.721 | 0.613 | 0.527 | 0.368 | 0.317 | 0.289 | 0.798 |

解：　首先根据抽水孔的 $Q$、$S$ 资料作出均差表①（表 5-2）。

表 5-2　　抽水试验 $Q\sim S$ 均差表

| $n$ | $Q$ | $S$ | 一阶均差 | 二阶均差 | 三阶均差 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $0(Q_0)$ | $0(S_0)$ | | | |
| 1 | $2780(Q_1)$ | $0.675(S_1)$ | $\frac{2.43\times10^{-4}}{(S_{0,1})}$ | $\frac{2.4\times10^{-8}}{(S_{0,1,2})}$ | |
| 2 | $4700(Q_2)$ | $1.358(S_2)$ | $\frac{3.56\times10^{-4}}{(S_{1,2})}$ | $\frac{2.25\times10^{-8}}{(S_{1,2,3})}$ | $\frac{-2.01\times10^{-13}}{(S_{0,1,2,3})}$ |
| 3 | $7465(Q_3)$ | $2.64(S_3)$ | $\frac{4.64\times10^{-4}}{(S_{2,3})}$ | | |

表中的一阶均差　$S_{i,i+1}=\dfrac{S_{i+1}-S_i}{Q_{i+1}-Q_i}$　　$(i=0,1,2,\cdots)$

二阶均差　　$S_{i,i+1,i+2}=\dfrac{S_{i+1,i+2}-S_{i,i+1}}{Q_{i+2}-Q_i}$　　$(i=0,1,2,\cdots)$

三阶均差　　$S_{i,i+1,i+2,i+3}=\dfrac{S_{i+1,i+2,i+3}-S_{i,i+1,i+2}}{Q_{i+3}-Q_i}$　　$(i=0,1,2,\cdots)$

由表中看出，三阶均差可视为零，故取二次多项式表示抽水试验中 $Q\sim S$ 关系式，表中画横线的差值分别为一次项、二次项、三次项的阻力常数值，所以有：

$$S=S_0+S_{0,1}(Q-Q_0)+S_{0,1,2}(Q-Q_0)(Q-Q_1)$$
$$=2.43\times10^{-4}Q+2.4\times10^{-8}Q(Q-2780)$$
$$=1.76\times10^{-4}Q+2.4\times10^{-8}Q^2$$

由上式可知，含水层阻力常数 $a_1=1.76\times10^{-4}$，井阻力常数 $a_2=2.4\times10^{-8}$，现取影响半径 $R=300$m。由式(5-14)求出的渗透系数为 195.2m/d。利用观测孔 6、观测孔 7 的资料，由 Thiem 公式计算的 $K$ 值为 211m/d，二者相差 7.5%，其原因是由于没有考虑井的非完整性。

**三、标准曲线对比法**

标准曲线对比法也称配线法、拟合图解法、典型曲线法等。它是通过试验获得的实际曲线与理论曲线的对比来确定参数的方法，优点在于能充分利用试验中所取得的数据求参，结果较为可靠。

（一）应用 Theis 理论曲线对比法求参

1. 原理

由 Theis 公式

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u)\qquad u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$$

① 均差表的做法可参看"误差理论与实验数据处理"有关书籍。

对上式两边分别取对数，则有

$$\lg S = \lg W(u) + \lg \frac{Q}{4\pi T}$$

$$\lg t = \lg \frac{1}{u} + \lg \frac{r^2\mu^*}{4T}$$

以上二式中对同一次抽水试验和同一观测孔的观测数据来说，方程右端第二项都是常数，上述二方程式代表的曲线形状相同。因此，在双对数坐标系中，$S\sim t$ 实际曲线和 $W(u)\sim\frac{1}{u}$ 标准曲线形状也是相同的，只是纵坐标平移了 $\frac{Q}{4\pi T}$ 和横坐标平移了 $\frac{r^2\mu^*}{4T}$，只要将二曲线平移便可重合，在重合处任选一点（匹配点），都是二曲线方程的解，于是，可取该点的四个坐标值代入上式，便可确定参数。

上述的是由任意一观测孔不同时刻的降深观测值组成的曲线，即 $S\sim t$ 曲线与 $W(u)\sim\frac{1}{u}$ 标准曲线的拟合求参，称为时间-降深配线法。同理，当有若干个观测孔时，可用 $S\sim\frac{t}{r^2}$，$S\sim r^2$ 曲线分别与 $W(u)\sim\frac{1}{u}$ 和 $W(u)\sim u$ 标准曲线拟合，求得参数值，分别称为降深-时间距离配线法和降深-距离配线法。

2. 步骤

(1) 根据井函数表 4-1 中的 $W(u)$，$\frac{1}{u}$ 的数据，在双对数坐标纸上做出 $W(u)\sim\frac{1}{u}$ 或 $W(u)\sim u$ 标准曲线；

(2) 在另一张模数相同的透明双对数坐标纸上绘制出实测的 $S\sim t$ 或 $S\sim\frac{t}{r^2}$，或 $S\sim r^2$ 的曲线；

(3) 将二曲线拟合，方法是保持对应坐标轴平行，移动曲线图，直至两曲线达到最大限度地重合为止（图 5-1）。

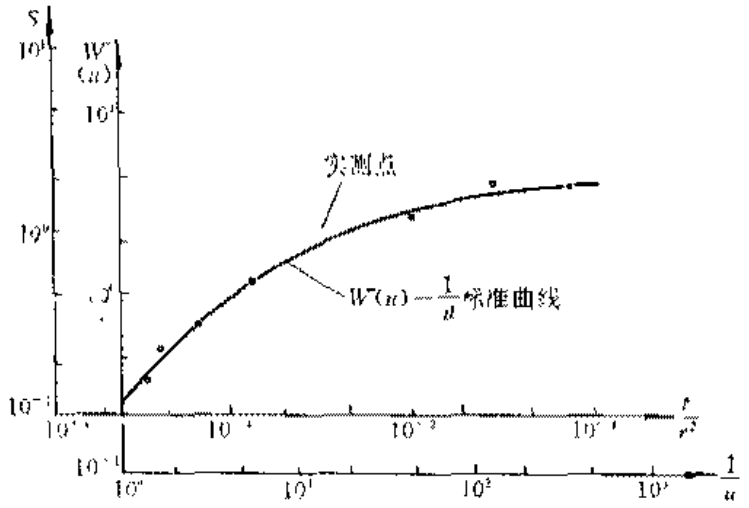



图 5-1 $S\sim\frac{t}{r^2}$ 配线法图

(4) 任意选取一个匹配点 $A$，记下 $A$ 点在两个坐标系中的坐标值〔$S$〕、〔$\frac{t}{r^2}$〕、〔$W(u)$〕和

$\left[\frac{1}{u}\right]$，并代入公式分别计算有关参数，即

$$T=\frac{Q}{4\pi[S]}[W(u)] \tag{5-18}$$

$$\mu^{*}=\frac{4T}{\left[\frac{1}{u}\right]}\left[\frac{t}{r^{2}}\right] \tag{5-19}$$

上述原理及步骤是以 $S\sim\frac{t}{r^{2}}$ 标准曲线对比法为例来说明的，有关 $S\sim t$ 及 $S\sim r^{2}$ 配线法的原理方法相同。

前已述及，标准曲线对比法的最大优点是可以充分利用全部的观测资料。但是拟合的精度往往受人为的感观不同而存在一定的误差，尤其是抽水后期曲线比较平缓，不易拟合；同时，由于自然界的实际情况常与理论假设存在一定的距离而使求参结果产生一定的偏离，如泰斯公式中假设贮存量瞬时释放，而实际上总有个过程；此外，抽水初期抽水量往往不很稳定，与理论要求也不符等原因，造成初期抽水的实际观测曲线不准确而影响拟合精度。如果后期实测曲线偏离标准曲线，则可能是含水层外围边界或含水层岩性发生了变化的影响。因此，一般应选在实际曲线曲率较大的线段进行拟合较为方便。

例 5-2　承压含水层进行多孔抽水试验，抽水井稳定流量为 60m³/h，有四个观测孔，其观测资料如表 5-3 和表 5-4 所示，试用配线法求含水层参数。

表 5-3

| 孔号 / 距离 / 流量 / 降深 / 累计时间 min | 14 | 观 2 | 观 15 | 观 10 | 观 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| | 抽水井 | 43(m) | 140(m) | 510(m) | 780(m) |
| | 流量 m³/h | 降深 m | 降深 m | 降深 m | 降深 m |
| 10 | 60 | 0.73 | 0.16 | 0.04 | 0 |
| 20 | 60 | 1.28 | 0.48 | | |
| 30 | 60 | 1.53 | 0.54 | | |
| 40 | 60 | 1.72 | 0.65 | 0.06 | |
| 60 | 60 | 1.96 | 0.75 | 0.20 | |
| 80 | 60 | 2.14 | 1.00 | 0.20 | 0.04 |
| 100 | 60 | 2.28 | 1.12 | 0.20 | |
| 120 | 60 | 2.39 | 1.22 | 0.21 | 0.08 |
| 150 | 60 | 2.54 | 1.36 | 0.24 | 0.09 |
| 210 | 60 | 2.77 | 1.55 | 0.40 | 0.16 |
| 270 | 60 | 2.99 | 1.70 | 0.53 | 0.25 |
| 330 | 60 | 3.10 | 1.83 | 0.63 | 0.34 |
| 400 | 60 | 3.20 | 1.89 | 0.65 | 0.42 |
| 450 | 60 | 3.26 | 1.98 | 0.73 | 0.50 |
| 645 | 60 | 3.47 | 2.17 | 0.93 | 0.71 |
| 870 | 60 | 3.68 | 2.38 | 1.14 | 0.87 |
| 990 | 60 | 3.77 | 2.46 | 1.24 | 0.96 |
| 1185 | 60 | 3.85 | 2.54 | 1.35 | 1.06 |

表 5-4

| 孔　号 | 距离抽水井距离 $r$，m | $r^2$，$m^2$ | 时间 $t$，min | $t/r^2$ $min/m^2$ | 降深 $S$，m |
|---|---|---|---|---|---|
| 观测孔 2 | 43 | 1849 | 10 | 0.0054 | 0.74 |
| | | | 20 | 0.011 | 1.26 |
| | | | 60 | 0.032 | 1.96 |
| | | | 100 | 0.054 | 2.28 |
| | | | 210 | 0.11 | 2.77 |
| | | | 400 | 0.22 | 3.20 |
| | | | 870 | 0.47 | 3.68 |
| | | | 1185 | 0.64 | 3.85 |
| 观测孔 15 | 140 | 19600 | 20 | 0.0010 | 0.48 |
| | | | 100 | 0.0051 | 1.12 |
| | | | 210 | 0.010 | 1.55 |
| | | | 400 | 0.020 | 1.89 |
| | | | 870 | 0.044 | 2.38 |
| | | | 1185 | 0.061 | 2.54 |
| 观测孔 10 | 510 | 260100 | 100 | 0.00038 | 0.20 |
| | | | 210 | 0.00081 | 0.40 |
| | | | 400 | 0.0015 | 0.65 |
| | | | 870 | 0.0033 | 1.14 |
| | | | 1185 | 0.0046 | 1.35 |
| 观测孔 1 | 780 | 608400 | 210 | 0.00035 | 0.16 |
| | | | 330 | 0.00054 | 0.34 |
| | | | 400 | 0.00066 | 0.42 |
| | | | 645 | 0.0011 | 0.71 |
| | | | 870 | 0.0014 | 0.87 |
| | | | 1185 | 0.0019 | 1.06 |

**解：** 为了全面综合利用试验资料，按 $S\sim\frac{t}{r^2}$ 配线法求参数，首先将表 5-3 资料整理如表 5-4 所示。

依据表 5-4 的数据在透明双对数纸上绘制 $S\sim\frac{t}{r^2}$ 实际资料曲线；保持对应坐标轴彼此平行将此曲线重叠在 $W(u)\sim\frac{1}{u}$ 标准曲线上，使实际资料曲线与标准曲线尽量似合（图 5-2）。拟合之后，任选一匹配点 $A$，取坐标值：$[W(u)]=1$，$[\frac{1}{u}]=10$，$[S]=0.54$，$[\frac{t}{r^2}]=0.0025$ 代入式(5-18)、(5-19)进行计算：

$$T=\frac{Q}{4\pi[S]}[W(u)]=\frac{60\times 24}{4\times 3.14\times 0.54}=212.3\ m^3/d$$

$$\mu^*=\frac{4T}{[\frac{1}{u}]}[\frac{t}{r^2}]=\frac{4\times 212.3}{10\times 60\times 24}\times 0.0025=1.47\times 10^{-4}$$

（二）应用越流系统理论的标准曲线对比法求参

1. 单井稳定运动的越流理论的标准曲线对比法

该方法理论已在第三章第一节作过介绍。由式(3-42)有

$$\begin{cases}S=\dfrac{Q}{2\pi T}K_0(\dfrac{r}{B})\\ r=\dfrac{r}{B}\cdot B\end{cases}\qquad(5\text{-}20)$$

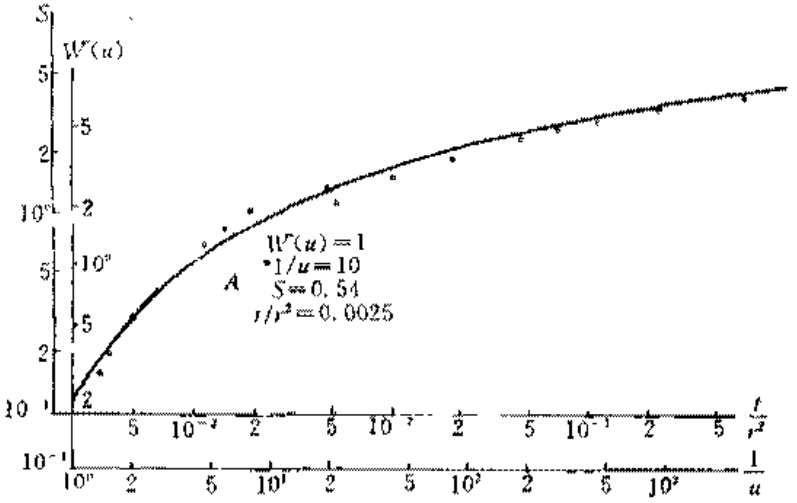



图 5-2　$S\sim t/r^2$ 配线法图

两边取对数

$$\begin{cases}\lg S=\lg\left[K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)\right]+\lg\dfrac{Q}{2\pi T}\\ \lg r=\lg\left[\dfrac{r}{B}\right]+\lg B\end{cases}\tag{5-21}$$

式(5-21)中右端第二项均为常数，同样，在双对数坐标中 $S\sim r$ 与 $K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)\sim\dfrac{r}{B}$ 二曲线形状相同，可用标准曲线对比法求其中参数 $T$、$B$ 及 $\sigma'$。步骤如下：

(1) 根据表 3-1 中数据在双对数坐标纸上作出 $K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)\sim\dfrac{r}{B}$ 标准曲线(图 5-3)；

(2) 根据实测的 $S$、$r$ 值，在相同模数的双对数透明纸上作出 $S\sim r$ 实际曲线；

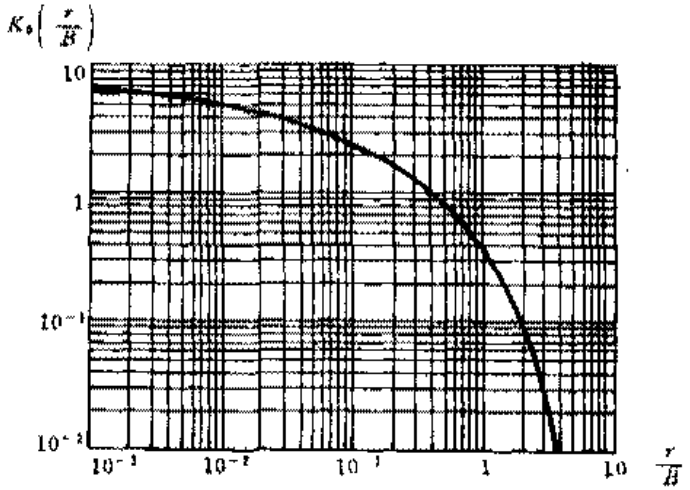



图 5-3　越流含水层稳定流抽水试验标准曲线
(据 W. C. Walton)

(3) 将二曲线进行最大限度的拟合配置；

(4) 在图上任取一匹配点，记下该点的四个坐标值，即[$S$]、[$r$]、$\left[K_0\left(\dfrac{r}{B}\right)\right]$和$\left[\dfrac{r}{B}\right]$，代入相应计算式求参，即

$$T=\frac{Q}{2\pi[S]}[K_0(\frac{r}{B})] \qquad B=[r]/[\frac{r}{B}]$$

$$\sigma'=\frac{T}{B^2}\quad(越流系数)$$

2. 无弱透水层弹性释水时的非稳定越流理论的标准曲线对比法

根据式(4-32)$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u,\frac{r}{B})$求参。其原理及步骤与前述相似。

例 5-3　在某地进行抽水试验。抽水含水层为第一承压含水层，潜水通过 2～3m 厚的淤泥砂质粘土、粘土质砂对它进行越流补给。抽水井的流量 $Q=10.65m^3/h$，观测孔离抽水井 56.67m，观测孔的水位降深资料列于表 5-5 中。试用配线法确定水文地质参数。

表 5-5　　丰县王沟中学水位降深资料

| 累计时间 $t$,h | 水位降深 $S$,m | 累计时间 $t$,h | 水位降深 $S$,m |
|---|---|---|---|
| 0.017 | 0.005 | 1.333 | 0.25 |
| 0.033 | 0.005 | 1.667 | 0.33 |
| 0.05 | 0.006 | 2.00 | 0.40 |
| 0.067 | 0.006 | 2.25 | 0.43 |
| 0.083 | 0.007 | 2.30 | 0.47 |
| 0.10 | 0.007 | 3.00 | 0.52 |
| 0.133 | 0.007 | 3.50 | 0.56 |
| 0.167 | 0.009 | 4.00 | 0.60 |
| 0.20 | 0.01 | 5.00 | 0.65 |
| 0.25 | 0.01 | 6.00 | 0.66 |
| 0.333 | 0.027 | 8.00 | 0.68 |
| 0.417 | 0.033 | 10.00 | 0.69 |
| 0.50 | 0.04 | 12.00 | 0.69 |
| 0.667 | 0.08 | 15.00 | 0.68 |
| 0.833 | 0.12 | 18.00 | 0.705 |
| 1.00 | 0.16 | | |

**解：**　首先根据表 4-6 中数据，在双对数坐标纸上以$\frac{1}{u}$为横坐标，以 $W(u,\frac{r}{B})$为纵坐标，作出不同$\frac{r}{B}$值的标准曲线图(图 5-4)。根据抽水资料在透明双对数纸上作 $S\sim t$ 关系曲线，把它叠置在标准曲线上，保持坐标轴平行，移动至与$\frac{r}{B}=1.30$(在 1.0 与 1.5 的二根曲线之间)的标准曲线重合较好时为止。取匹配点，并读出匹配点的坐标为：

$$[W(u,\frac{r}{B})]=0.091,[\frac{1}{u}]=0.95,[S]=0.10,[t]=1.00$$

则
$$T=0.08\frac{Q}{[S]}[W(u,\frac{r}{B})]=\frac{0.08\times10.65}{0.10}\times0.091=0.776m^2/h$$

$$\mu^*=\frac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u}]}=\frac{4\times0.776\times1.00}{(56.67)^2\times0.95}=1.014\times10^{-3}$$

$$B=\frac{r}{[\frac{r}{B}]}=\frac{56.67}{1.30}=43.60\ m$$

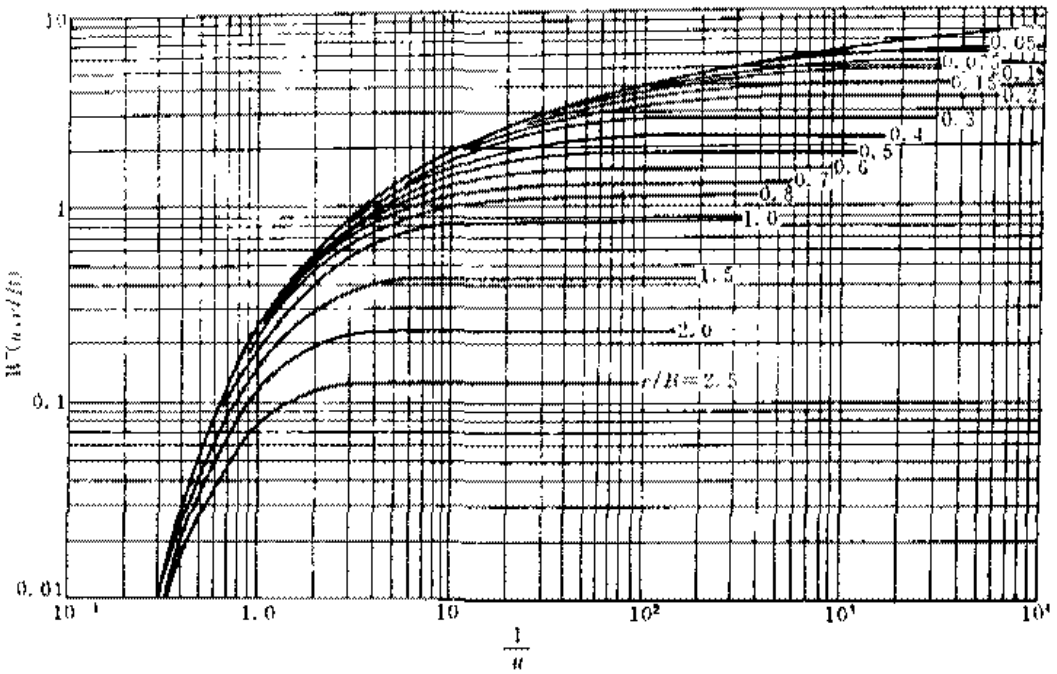



图 5-4　半承压含水层中完整井定流量抽水时标准曲线

(据 W. C. Walton)

$$\sigma' = \frac{K'}{m'} = \frac{T}{B^2} = \frac{0.776}{(43.6)^2} = 4.08 \times 10^{-4}$$

3. 有弱透水层弹性释水时非稳定越流系统理论的标准曲线对比法

由式(4-51)有抽水初期的解

$$\begin{cases} S = \dfrac{Q}{4\pi T} H(u \cdot \beta) \\ u = \dfrac{r^2 u^*}{4Tt} \\ \beta = \dfrac{r}{4B_1}\sqrt{\dfrac{\mu_1^*}{\mu^*}} + \dfrac{r}{4B_2}\sqrt{\dfrac{\mu_2^*}{\mu^*}} \end{cases} \tag{5-22}$$

式中　$H(u,\beta)$——越流井函数，其值见表 4-7。

后期解分三种情况，分别为

第一种情况由式(4-53)有

$$\begin{cases} S = \dfrac{Q}{4\pi T} W(u_1,\alpha) \\ u_1 = \dfrac{r^2}{4Tt}\left(\mu^* + \dfrac{\mu_1^*}{3} + \dfrac{\mu_2^*}{3}\right) \\ \alpha = r\sqrt{\dfrac{1}{(B_1)^2} + \dfrac{1}{(B_2)^2}} \end{cases} \tag{5-23}$$

式中　$W(u_1,\alpha)$——井函数，其数值见表 4-6。

第二种情况由式(4-54)有

$$\begin{cases} S = \dfrac{Q}{4\pi T} W(u_2) \\ u_2 = \dfrac{r^2}{4Tt}(\mu_1^* + \mu_2^* + \mu^*) \end{cases} \tag{5-24}$$

式中 $W(u_2)$——无越流承压含水层的井函数，其值见表 4-1。

第三种情况由式(4-55)有

$$\begin{cases} S = \dfrac{Q}{4\pi T} W(u_3, \dfrac{r}{B_1}) \\ u_3 = \dfrac{r^2}{4Tt}(\mu^* + \mu_2^* + \dfrac{\mu_1^*}{3}) \end{cases} \tag{5-25}$$

式中 $W(u_3, \frac{r}{B_1})$——不考虑弱透水层释水时越流井函数，其值见表 4-6。

1. 根据短期抽水资料求参

由短时间的抽水试验资料，可求出 $T$、$\mu^*$。其原理和方法同前，具体步骤如下：

首先据表 4-7 数值，在双对数坐标纸上作出 $\frac{1}{u}$ 与 $H(u,\beta)$ 的标准曲线簇(图 5-5)。

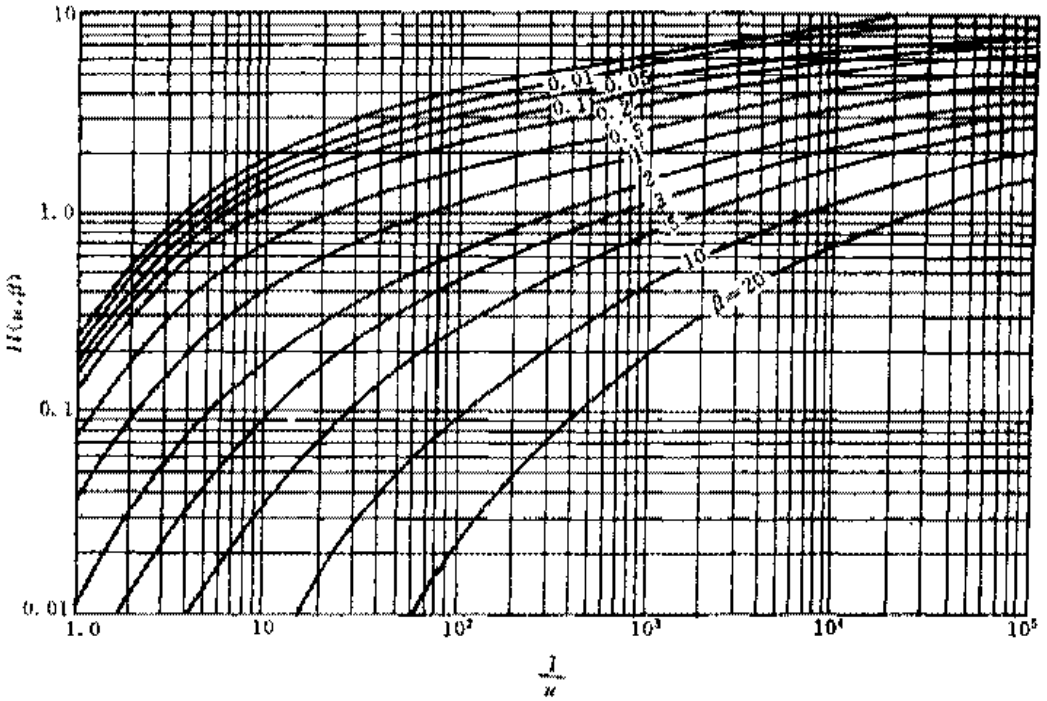



图 5-5 考虑弱透水层贮水释放、半承压含水层短时间抽水时的标准曲线

(据 W. C. Walton)

然后在相同模数的双对数坐标透明纸上作出 $S\sim t$ 的关系曲线，同标准曲线进行配线。

最后读出匹配点的坐标值〔$H(u,\beta)$〕、〔$\frac{1}{u}$〕、〔$S$〕和〔$t$〕，代入公式求参，即

$$T = \frac{Q}{4\pi[S]}[H(u,\beta)] \qquad \mu^* = \frac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u}]}$$

2. 利用长时期抽水资料求参

利用长期抽水试验观测资料，可以求出参数 $T$、$\mu^*$ 及弱透水层的参数，如越流系数等。其中第一种情况与第三种情况参数的确定方法及原理与前面的无弱透水层弹性释水时的情况相似，分别读出匹配点的坐标，即〔$S$〕、〔$t$〕、〔$\frac{1}{u_1}$〕、〔$\frac{1}{u_3}$〕，〔$W(u_1,\alpha)$〕，〔$W(u_3,\frac{r}{B_1})$〕，代入相应的计算公式，求得参数如下

$$\begin{cases} T=\dfrac{Q}{4\pi[S]}[W(u_1,\alpha)] & \text{第一种情况} \\ T=\dfrac{Q}{4\pi[S]}[W(u_3,\dfrac{r}{B_1})] & \text{第三种情况} \end{cases} \tag{5-26}$$

$$\begin{cases} \mu^*+\dfrac{\mu_1^*+\mu_2^*}{3}=\dfrac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u_1}]} & \text{第一种情况} \\ \mu^*+\mu_2^*+\dfrac{\mu_1^*}{3}=\dfrac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u_3}]} & \text{第三种情况} \end{cases} \tag{5-27}$$

越流系数 $\frac{K'}{m'}$ 可由重合的那条标准曲线的 $\frac{r}{B_1}$ 值，先求出 $B_1$（$r$ 已知），再由 $\frac{K'}{m'}=\frac{T}{(B_1)^2}$（第三种情况）求出。

第二种情况与 Theis 情况相似，故可利用泰斯标准曲线法求参，把实际资料曲线与标准曲线拟合，取下拟合点坐标，即〔$S$〕、〔$t$〕、〔$W(u_2)$〕及〔$\frac{1}{u_2}$〕，然后用下式求参：

$$T=\frac{Q}{4\pi[S]}[W(u_2)]$$

$$\mu^*+\mu_1^*+\mu_2^*=\frac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u_2}]}$$

由于 $\mu^*$ 在短期解中已求出，如果存在弱透水层时则可直接求得 $\mu_1^*$ 或 $\mu_2^*$。

例 5-4　在某地的一个抽水井中对下更新统的深层地下水进行非稳定流抽水试验。含水层埋藏在 96.44～167.15m 深度处，岩性为棕黄色细砂与含砾细砂，含水层上覆有几十米厚的砂质粘土与粘土质砂，其贮水性不可忽略。抽水井以流量 47.33m³/h 抽水，抽水持续 60h，观测孔距抽水井 80.70m，静水位埋深为 5.74m，观测孔的水位降深资料列于表 5-6 中。

解：　根据上述资料，在透明双对数纸上作降深-时间曲线（图 5-6）。由于抽水时间较短，该曲线类似于半承压含水层当上覆弱透水层的贮水性不可忽略时的短时间的标准曲线。因此，用该标准曲线进行配线，求出抽水含水层的导水系数 $T$ 和贮水系数 $\mu^*$。因为没有长时间的抽水资料，弱透水层的贮水系数 $\mu^*$ 无法计算。

把图 5-6 的降深——时间曲线叠置在标准曲线上，保持坐标轴平行，将曲线前后左右平行移动，发现实测曲线和 $\beta=10$ 的标准曲线重合较好。取一匹配点，分别读出匹配点在实测曲线图和标准曲线图上的坐标，其值为：〔$S$〕=1m，〔$t$〕=1h，〔$\frac{1}{u}$〕=93，〔$W(u,\beta)$〕=0.40；另外，$Q$=47.33m³/h，$r$=80.70m。代入式(5-22)得：

表 5-6　　某地抽水试验资料

| 抽水延续时间 | | 水位降深 | 抽水延续时间 | | 水位降深 |
|---|---|---|---|---|---|
| min | h | $S$,m | min | h | $S$,m |
| 1 | 0.0167 | 0 | 570 | 9.5 | 1.03 |
| 2 | 0.033 | 0 | 600 | 10 | 1.06 |
| 3 | 0.05 | 0 | 660 | 11 | 1.10 |
| 4 | 0.067 | 0 | 720 | 12 | 1.16 |
| 5 | 0.083 | 0 | 780 | 13 | 1.21 |
| 6 | 0.1 | 0 | 840 | 14 | 1.25 |
| 7 | 0.116 | 0.01 | 900 | 15 | 1.28 |
| 8 | 0.133 | 0.01 | 960 | 16 | 1.325 |
| 9 | 0.150 | 0.03 | 1020 | 17 | 1.35 |
| 10 | 0.167 | 0.04 | 1200 | 20 | 1.37 |
| 11 | 0.183 | 0.04 | 1260 | 21 | 1.39 |
| 12 | 0.2 | 0.045 | 1320 | 22 | 1.44 |
| 13 | 0.217 | 0.045 | 1380 | 23 | 1.52 |
| 15 | 0.25 | 0.05 | 1440 | 24 | 1.53 |
| 18 | 0.3 | 0.06 | 1500 | 25 | 1.58 |
| 20 | 0.333 | 0.06 | 1560 | 26 | 1.61 |
| 25 | 0.417 | 0.08 | 1620 | 27 | 1.69 |
| 30 | 0.50 | 0.18 | 1740 | 29 | 1.71 |
| 50 | 0.833 | 0.22 | 1800 | 30 | 1.73 |
| 60 | 1 | 0.26 | 1860 | 31 | 1.75 |
| 90 | 1.5 | 0.34 | 1920 | 32 | 1.80 |
| 120 | 2 | 0.43 | 2040 | 34 | 1.86 |
| 150 | 2.5 | 0.52 | 2160 | 36 | 1.93 |
| 180 | 3 | 0.56 | 2280 | 38 | 1.98 |
| 210 | 3.5 | 0.585 | 2400 | 40 | 2.02 |
| 240 | 4 | 0.632 | 2520 | 42 | 2.05 |
| 270 | 4.5 | 0.66 | 2640 | 44 | 2.10 |
| 300 | 5 | 0.72 | 2760 | 46 | 2.14 |
| 330 | 5.5 | 0.78 | 2880 | 48 | 2.17 |
| 360 | 6 | 0.81 | 3000 | 50 | 2.22 |
| 390 | 6.5 | 0.86 | 3120 | 52 | 2.25 |
| 420 | 7 | 0.88 | 3240 | 54 | 2.30 |
| 450 | 7.5 | 0.91 | 3360 | 56 | 2.32 |
| 480 | 8 | 0.94 | 3480 | 58 | 2.35 |
| 510 | 8.5 | 0.97 | 3600 | 60 | 2.37 |
| 540 | 9 | 1.00 | | | |

注：抽水曾中断几分钟。

$$T=\frac{Q}{4\pi[S]}[H(u,\beta)]=\frac{47.33}{4\times3.14\times1}\times0.40=1.514\ \mathrm{m^2/h}$$

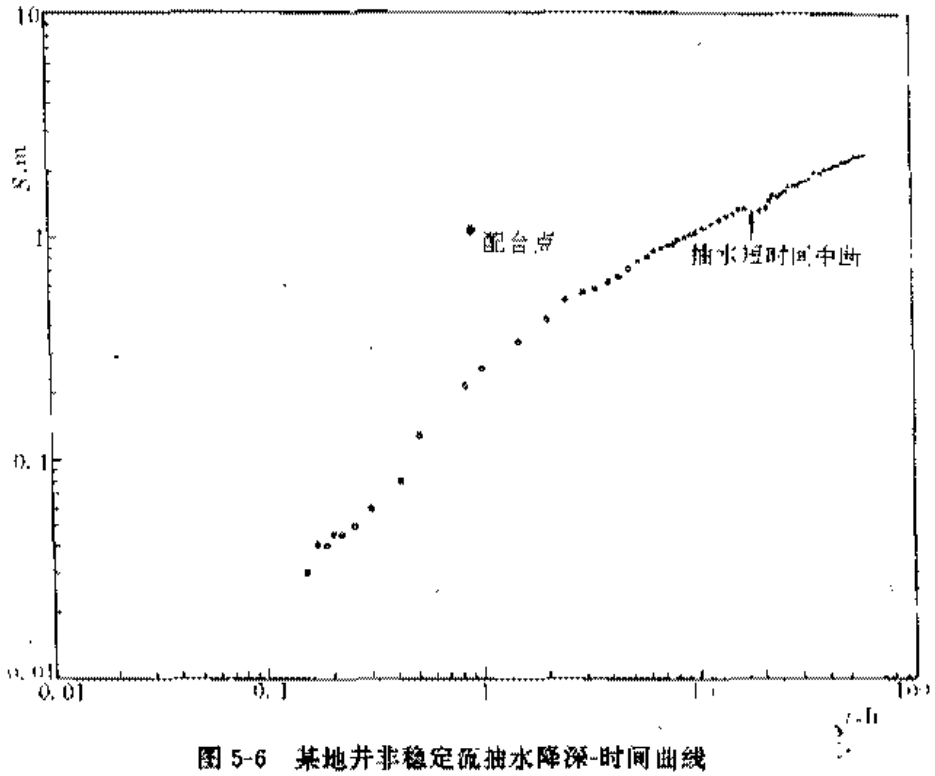



图 5-6　某地井非稳定流抽水降深-时间曲线
（据江苏水文地质队资料）

$$\mu^* = \frac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u}]} = \frac{4 \times 1.514}{(80.70)^2 \times 93} = 1.42 \times 10^{-5}$$

（三）据潜水完整井非稳定运动理论的标准曲线对比法求参

1. 考虑滞后排水时理论曲线对比法(Boulton)法

由式(4-62)有

$$S = \frac{Q}{4\pi T} W(u_{a,y}, \frac{r}{D}) \tag{5-28}$$

式中　$D=\sqrt{\frac{T}{a\mu}}$——疏干因素；

$\mu^*$——贮水系数；

$\mu$——给水度；

$\frac{1}{\alpha}$——延迟指数；

$\eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*}$。

$W(u_{a,y}, \frac{r}{D})$为延迟给水无压含水层中完整井的井函数，在抽水初期、中期及后期有不同形式，分别为

$W(u_a, \frac{r}{D})$为无压含水层完整井流 $A$ 组井函数；

$2K_0(\frac{r}{D})$为虚宗量第二类零阶 Bessel 函数；

$W(u_y,\frac{r}{D})$为无压含水层中完整井流 $B$ 组井函数。

由式(4-63)～(4-65)有

$$\begin{cases} S=\dfrac{Q}{4\pi T}W(u_a,\dfrac{r}{D}) & \text{(抽水早期)} \\ S=\dfrac{Q}{4\pi T}K_0(\dfrac{r}{D}) & \text{(抽水中期)} \\ S=\dfrac{Q}{4\pi T}W(u_y,\dfrac{r}{D}) & \text{(抽水后期)} \end{cases} \tag{5-29}$$

根据上述公式应用配线法求参数 $T,\mu^*,\frac{1}{\alpha}$及 $\eta$。具体作法如下：

(1) 据表 4-8 数据绘制标准曲线见图 5-7，其中以$\frac{1}{u_y}$为横坐标，以 $W(u_{a\cdot y},\frac{r}{D})$为纵坐标，每一$\frac{r}{D}$值作一条曲线，所得到的曲线簇称为 $B$ 组标准曲线(即后期曲线)，那么，以前期公式绘制的曲线簇(其中$\frac{r}{D}$值与 $B$ 组对应)称为 $A$ 组标准曲线(即前期曲线)。其间的过渡部分是以 $\eta\to\infty$为前提的，因此 $A,B$ 组标准曲线之间是一水平线。若不满足 $\eta\to\infty$时有以下特征：当 $\eta\geqslant 100$ 时，$A,B$ 间过渡带基本上是水平线，故上述标准曲线也是适用的；当 $5<\eta<100$ 时，严格地讲应按式(4-60)的解另绘制标准曲线，但经 T. A. Prickett 对比研究表明，即便是对于 $\eta=6.5$ 这样小的数值，用近似法获得的标准曲线与按精确方程式所作的曲线，差别不大，因此可用近似代替。

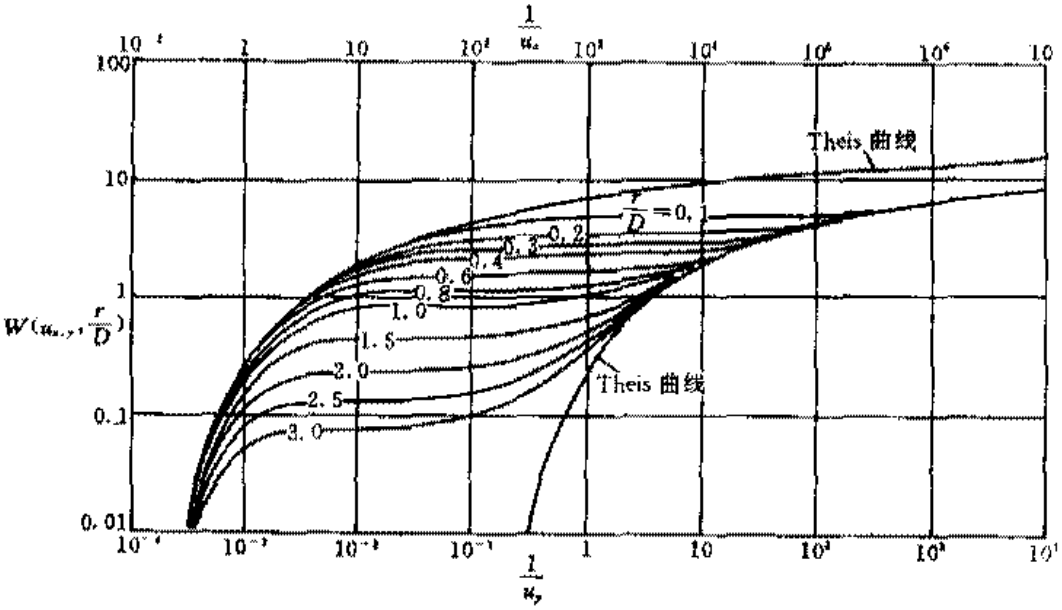



图 5-7 Boulton 潜水完整井流标准曲线

(据 T. A. Prickett)

(2) 由抽水试验资料，在相同模数的透明对数坐标纸上绘出降深-时间曲线。

(3) 将实际的 $S\sim t$ 曲线叠置于标准曲线之上，首先将其前部弯曲段尽量与 $A$ 组某一条曲线重合，此时应使 $S\sim t$ 曲线中没有重合段(中间段)，置于 $A,B$ 组之间的直线段上，任选

一点，取下它的坐标值即〔$W(u_a,\frac{r}{D})$〕，〔$\frac{1}{u_a}$〕，〔$S$〕及〔$t$〕，代入理论公式求参有：

$$\begin{cases} T=\dfrac{Q}{4\pi[S]}[W(u_a,\dfrac{r}{D})] \\ \mu^*=\dfrac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u_a}]} \end{cases} \tag{5-30}$$

(4) 将 $S\sim t$ 曲线水平移动，在保持 $\frac{r}{D}$ 不变的情况下，使后期曲线与 $B$ 组标准曲线拟合。同理可记下匹配点坐标〔$S$〕，〔$t$〕，〔$W(u_y,\frac{r}{D})$〕及〔$\frac{1}{u_y}$〕，用下式求得参数：

$$\begin{cases} T=\dfrac{Q}{4\pi[S]}[W(u_y,\dfrac{r}{D})] \\ \mu=\dfrac{4T[t]}{r^2[\frac{1}{u_y}]} \end{cases} \tag{5-31}$$

两次求得的 $T$ 值应大体相当，有时取其算术平均值。

上述参数求得之后可求 $\eta$，$\frac{1}{\alpha}$ 如下：

$$\eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*} \qquad \frac{1}{\alpha}=\frac{4t}{(\frac{r}{D})^2(\frac{1}{u_y})} \tag{5-32}$$

这里需注意：(1)上述计算是在假设降深 $S$ 与含水层厚度 $H_0$ 之比，比较小的情况下，视导水系数 $T$ 为常量而导出的。实际上 $T$ 是变化的，随着含水层的疏干，厚度减小，相应的 $T$ 也变小。为了减小误差，在计算时对观测降深值应按前面提到的公式修正，即

$$S'=S-\frac{S^2}{2H_0}$$

式中 $S$——观测降深值；

$H_0$——含水层原始饱和厚度；

$S'$——修正后用于计算参数的降深值。

(2) 随着抽水时间的加长，滞后疏干的影响逐渐减小以至消失。这一过程中，$B$ 组曲线逐渐向 Theis 曲线靠近，最后两者基本重合，此时可按有 Theis 配线法求参。

2. 考虑流速垂直分量及弹性释水时的标准曲线对比法(Neuman 法)

由式(4-66)可知，当观测孔及抽水井都为完整井(孔)时，任意观测孔中的降深为

$$S(r,z,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty 4yJ_0(y\beta^{\frac{1}{2}})[\omega_0(y)+\sum_{n=1}^{\infty}\omega_n(y)]\mathrm{d}y$$

式中含有三个相对独立的无量纲参数 $\sigma$，$\beta$ 和 $t_r$(或 $t_y$)。在此情况下，一般不能将三个独立因子绘在一张图纸上，为此需采取类似于 Boulton 的方法。设 $\mu^*$ 远小于 $\mu$，令 $\sigma=0$，使独立参数减少为两个，这样可获得两组标准曲线(图 5-8)，其中左侧的称为 $A$ 组标准曲线，它们对应的坐标 $t_r$ 标在图的上边；位于图中右侧的一组曲线为 $B$ 组标准曲线，其对应的坐标 $t_y$ 标在图的下边。两组曲线分别用来分析抽水早期资料($A$ 组曲线)和后期资料($B$ 组曲线)。该两组标准曲线中 $A$ 组的右边部分和 $B$ 组的左边部分都接近于一组水平渐近线。当 $\sigma\to 0$ 时，二组标准曲线彼此相距无穷远的距离。因此，在实际应用时，必须采用不同的横坐标标度，一个是

对应 $t_1$，一个是对应 $t_2$，这样才能绘在一张图纸上。表 5-7 列出了两组曲线的基本数据。

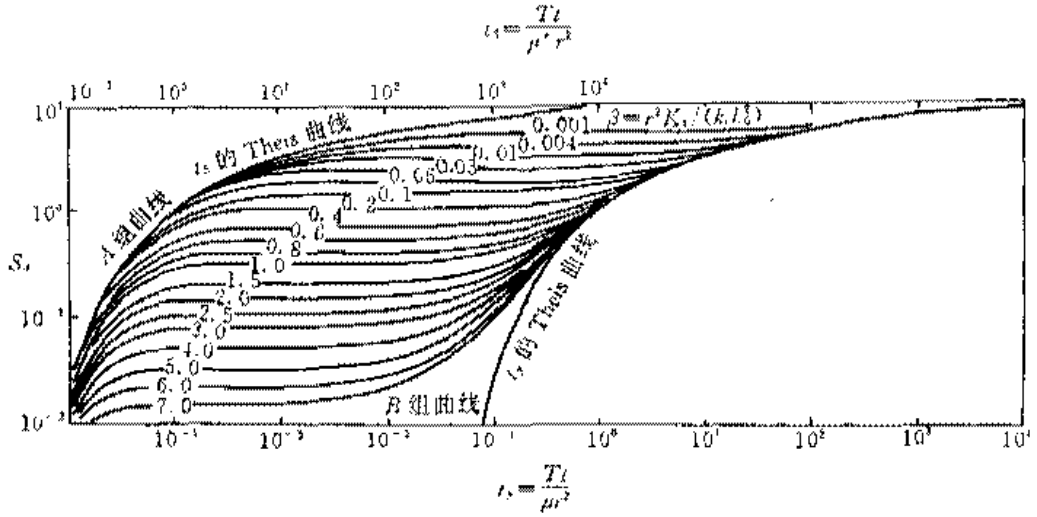



图 5-8　潜水含水层完整井定流量抽水时的标准曲线

（据 S. P. Neuman）

有了标准曲线组之后，便可用配线法求参。其步骤如下：

（1）根据实际观测资料，在双对数透明坐标纸上作出 $S\sim t$ 曲线。

（2）将 $S\sim t$ 曲线叠置在标准曲线上，保持两组坐标平行移动，使后期曲线尽量与 $B$ 组中某一条曲线达到最优拟合，并记下该曲线的 $\beta$ 值。任选一匹配点，读下相应的坐标值即 $[S_d]$，$[t_2]$、$[S]$和$[t]$，代入相应公式计算导水系数及给水度：

$$\begin{cases} T=\dfrac{Q[S_d]}{4\pi[S]} \\ \mu=\dfrac{T[t]}{r^2[t_2]} \end{cases} \tag{5-33}$$

（3）在保持与上一步 $\beta$ 值相同的前提下，将 $S\sim t$ 曲线前期部分与 $A$ 组标准曲线达到最佳组合。同样取下相应的坐标值$[S]$，$[t]$，$[S_d]$和$[t_1]$，由下式求得有关参数：

$$\begin{cases} \mu^*=\dfrac{T[t]}{r^2[t_1]} \\ T=\dfrac{Q[S_d]}{4\pi[S]} \end{cases} \tag{5-34}$$

两次求得的 $T$ 值大体相近。

（4）由上述求出的已知参数 $T$，$\mu^*$，$\mu$ 及 $\beta$ 分别求得其它参数：

$$\begin{cases} K_r=\dfrac{T}{H_0} & \text{（径向渗透系数）} \\ K_z=\beta\left(\dfrac{H_0^2}{r^2}\right) & \text{（主渗透系数）} \\ K_z=K_dK_r & \text{（垂向渗透系数）} \end{cases} \tag{5-35}$$

$$\sigma=\frac{\mu^*}{\mu} \tag{5-36}$$

至此，已求得有关潜水含水层的全部参数。

表 5-7a

## 完整井绘制标准曲线 $A$ 的 $S_r$ 数值表

| $ts$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.02$ | $\beta=0.05$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ | $\beta=0.8$ | $\beta=1.0$ | $\beta=1.5$ | $\beta=2.0$ | $\beta=2.5$ | $\beta=3.0$ | $\beta=4.0$ | $\beta=5.0$ | $\beta=6.0$ | $\beta=7.0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1\times10^{-1}$ | $2.48\times10^{-2}$ | $2.43\times10^{-2}$ | $2.41\times10^{-2}$ | $2.35\times10^{-2}$ | $2.30\times10^{-2}$ | $2.24\times10^{-2}$ | $2.14\times10^{-2}$ | $1.99\times10^{-2}$ | $1.88\times10^{-2}$ | $1.79\times10^{-2}$ | $1.70\times10^{-2}$ | $1.53\times10^{-2}$ | $1.38\times10^{-2}$ | $1.25\times10^{-2}$ | $1.13\times10^{-2}$ | $9.33\times10^{-3}$ | $7.72\times10^{-3}$ | $6.39\times10^{-3}$ | $5.30\times10^{-3}$ |
| $2\times10^{-1}$ | $1.45\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.36\times10^{-1}$ | $1.31\times10^{-1}$ | $1.27\times10^{-1}$ | $1.19\times10^{-1}$ | $1.08\times10^{-1}$ | $9.88\times10^{-2}$ | $9.15\times10^{-2}$ | $8.49\times10^{-2}$ | $7.33\times10^{-2}$ | $6.03\times10^{-2}$ | $5.11\times10^{-2}$ | $4.35\times10^{-2}$ | $3.17\times10^{-2}$ | $2.34\times10^{-2}$ | $1.74\times10^{-2}$ | $1.31\times10^{-2}$ |
| $3.5\times10^{-1}$ | $3.58\times10^{-1}$ | $3.52\times10^{-1}$ | $3.45\times10^{-1}$ | $3.31\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $3.04\times10^{-1}$ | $2.79\times10^{-1}$ | $2.44\times10^{-1}$ | $2.17\times10^{-1}$ | $1.94\times10^{-1}$ | $1.75\times10^{-1}$ | $1.36\times10^{-1}$ | $1.07\times10^{-1}$ | $8.45\times10^{-2}$ | $6.78\times10^{-2}$ | $4.45\times10^{-2}$ | $3.02\times10^{-2}$ | $2.10\times10^{-2}$ | $1.51\times10^{-2}$ |
| $6\times10^{-1}$ | $6.62\times10^{-1}$ | $6.48\times10^{-1}$ | $6.33\times10^{-1}$ | $6.01\times10^{-1}$ | $5.70\times10^{-1}$ | $5.40\times10^{-1}$ | $4.83\times10^{-1}$ | $4.03\times10^{-1}$ | $3.43\times10^{-1}$ | $2.96\times10^{-1}$ | $2.56\times10^{-1}$ | $1.89\times10^{-1}$ | $1.33\times10^{-1}$ | $1.01\times10^{-1}$ | $7.62\times10^{-2}$ | $4.76\times10^{-2}$ | $3.13\times10^{-2}$ | $2.14\times10^{-2}$ | $1.52\times10^{-2}$ |
| $1\times10^{0}$ | $1.02\times10^{0}$ | $9.92\times10^{-1}$ | $9.63\times10^{-1}$ | $9.05\times10^{-1}$ | $8.49\times10^{-1}$ | $7.92\times10^{-1}$ | $6.88\times10^{-1}$ | $5.42\times10^{-1}$ | $4.38\times10^{-1}$ | $3.60\times10^{-1}$ | $3.00\times10^{-1}$ | $1.99\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.79\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ |  | $2.15\times10^{-2}$ |  |
| $2\times10^{0}$ | $1.57\times10^{0}$ | $1.52\times10^{0}$ | $1.46\times10^{0}$ | $1.35\times10^{0}$ | $1.23\times10^{0}$ | $1.12\times10^{0}$ | $9.16\times10^{-1}$ | $6.59\times10^{-1}$ | $4.97\times10^{-1}$ | $3.91\times10^{-1}$ | $3.17\times10^{-1}$ | $2.03\times10^{-1}$ | $1.41\times10^{-1}$ |  |  |  |  |  |  |
| $3.5\times10^{0}$ | $2.05\times10^{0}$ | $1.97\times10^{0}$ | $1.88\times10^{0}$ | $1.70\times10^{0}$ | $1.51\times10^{0}$ | $1.34\times10^{0}$ | $1.03\times10^{0}$ | $6.90\times10^{-1}$ | $5.07\times10^{-1}$ | $3.94\times10^{-1}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $6\times10^{0}$ | $2.52\times10^{0}$ | $2.41\times10^{0}$ | $2.27\times10^{0}$ | $1.99\times10^{0}$ | $1.73\times10^{0}$ | $1.47\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $6.96\times10^{-1}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $1\times10^{1}$ | $2.97\times10^{0}$ | $2.80\times10^{0}$ | $2.61\times10^{0}$ | $2.22\times10^{0}$ | $1.85\times10^{0}$ | $1.53\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $2\times10^{1}$ | $3.56\times10^{0}$ | $3.30\times10^{0}$ | $3.00\times10^{0}$ | $2.41\times10^{0}$ | $1.92\times10^{0}$ | $1.55\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $3.5\times10^{1}$ | $4.01\times10^{0}$ | $3.65\times10^{0}$ | $3.23\times10^{0}$ | $2.48\times10^{0}$ | $1.93\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $6\times10^{1}$ | $4.42\times10^{0}$ | $3.93\times10^{0}$ | $3.37\times10^{0}$ | $2.54\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $1\times10^{2}$ | $4.77\times10^{0}$ | $4.12\times10^{0}$ | $3.43\times10^{0}$ | $2.59\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $2\times10^{2}$ | $5.16\times10^{0}$ | $4.26\times10^{0}$ | $3.45\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $3.5\times10^{2}$ | $5.40\times10^{0}$ | $4.29\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $6\times10^{2}$ | $5.54\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $1\times10^{3}$ | $5.59\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $2\times10^{3}$ | $5.62\times10^{0}$ |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| $3.5\times10^{3}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.50\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ | $1.55\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ | $6.96\times10^{-1}$ | $5.07\times10^{-1}$ | $3.94\times10^{-1}$ | $3.17\times10^{-1}$ | $2.03\times10^{-1}$ | $1.41\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.79\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ | $3.13\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ | $1.52\times10^{-2}$ |

表中数值是由式(4-66)取 $\alpha=10^{-3}$ 求得的。(根据 Neuman)

表 5-76

## 完整井绘制标准曲线 $B$ 的 $S_d$ 数值表

| $t_r$ | $\beta=0.001$ | $\beta=0.004$ | $\beta=0.01$ | $\beta=0.03$ | $\beta=0.06$ | $\beta=0.1$ | $\beta=0.2$ | $\beta=0.4$ | $\beta=0.6$ | $\beta=0.8$ | $\beta=1.0$ | $\beta=1.5$ | $\beta=2.0$ | $\beta=2.5$ | $\beta=3.0$ | $\beta=4.0$ | $\beta=5.0$ | $\beta=6.0$ | $\beta=7.0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1\times10^{-4}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.50\times10^{0}$ | $1.94\times10^{0}$ | $1.56\times10^{0}$ | $1.09\times10^{0}$ | $6.97\times10^{-1}$ | $5.08\times10^{-1}$ | $3.95\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $2.04\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.03\times10^{-1}$ | $7.80\times10^{-2}$ | $4.79\times10^{-2}$ | $3.14\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ | $1.53\times10^{-2}$ |
| $2\times10^{-4}$ | | | | | | | | | | | | | | | $7.81\times10^{-2}$ | $4.80\times10^{-2}$ | $3.15\times10^{-2}$ | $2.16\times10^{-2}$ | $1.53\times10^{-2}$ |
| $3.5\times10^{-4}$ | | | | | | | | | | | | | | $1.03\times10^{-1}$ | $7.83\times10^{-2}$ | $4.81\times10^{-2}$ | $3.16\times10^{-2}$ | $2.17\times10^{-2}$ | $1.54\times10^{-2}$ |
| $6\times10^{-4}$ | | | | | | | | | | | | | | $1.04\times10^{-1}$ | $7.85\times10^{-2}$ | $4.84\times10^{-2}$ | $3.18\times10^{-2}$ | $2.19\times10^{-2}$ | $1.56\times10^{-2}$ |
| $1\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.97\times10^{-1}$ | $5.08\times10^{-1}$ | $3.95\times10^{-1}$ | $3.18\times10^{-1}$ | $2.04\times10^{-1}$ | $1.42\times10^{-1}$ | $1.04\times10^{-1}$ | $7.89\times10^{-2}$ | $4.88\times10^{-2}$ | $3.21\times10^{-2}$ | $2.21\times10^{-2}$ | $1.58\times10^{-2}$ |
| $2\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.97\times10^{-1}$ | $5.09\times10^{-1}$ | $3.96\times10^{-1}$ | $3.19\times10^{-1}$ | $2.05\times10^{-1}$ | $1.43\times10^{-1}$ | $1.05\times10^{-1}$ | $7.99\times10^{-2}$ | $4.96\times10^{-2}$ | $3.29\times10^{-2}$ | $2.28\times10^{-2}$ | $1.64\times10^{-2}$ |
| $3.5\times10^{-3}$ | | | | | | | | $6.98\times10^{-1}$ | $5.10\times10^{-1}$ | $3.97\times10^{-1}$ | $3.21\times10^{-1}$ | $2.07\times10^{-1}$ | $1.45\times10^{-1}$ | $1.07\times10^{-1}$ | $8.14\times10^{-2}$ | $5.09\times10^{-2}$ | $3.41\times10^{-2}$ | $2.39\times10^{-2}$ | $1.73\times10^{-2}$ |
| $6\times10^{-3}$ | | | | | | | | $7.00\times10^{-1}$ | $5.12\times10^{-1}$ | $3.99\times10^{-1}$ | $3.23\times10^{-1}$ | $2.09\times10^{-1}$ | $1.47\times10^{-1}$ | $1.09\times10^{-1}$ | $8.38\times10^{-2}$ | $5.32\times10^{-2}$ | $3.61\times10^{-2}$ | $2.57\times10^{-2}$ | $1.89\times10^{-2}$ |
| $1\times10^{-2}$ | | | | | | | | $7.03\times10^{-1}$ | $5.16\times10^{-1}$ | $4.03\times10^{-1}$ | $3.27\times10^{-1}$ | $2.13\times10^{-1}$ | $1.52\times10^{-1}$ | $1.13\times10^{-1}$ | $8.79\times10^{-2}$ | $5.68\times10^{-2}$ | $3.93\times10^{-2}$ | $2.86\times10^{-2}$ | $2.15\times10^{-2}$ |
| $2\times10^{-2}$ | | | | | | $1.56\times10^{0}$ | $1.09\times10^{0}$ | $7.10\times10^{-1}$ | $5.24\times10^{-1}$ | $4.12\times10^{-1}$ | $3.37\times10^{-1}$ | $2.24\times10^{-1}$ | $1.62\times10^{-1}$ | $1.24\times10^{-1}$ | $9.80\times10^{-2}$ | $6.61\times10^{-2}$ | $4.78\times10^{-2}$ | $3.62\times10^{-2}$ | $2.88\times10^{-2}$ |
| $3.5\times10^{-2}$ | | | | | $1.94\times10^{0}$ | $1.56\times10^{0}$ | $1.10\times10^{0}$ | $7.29\times10^{-1}$ | $5.37\times10^{-1}$ | $4.25\times10^{-1}$ | $3.50\times10^{-1}$ | $2.39\times10^{-1}$ | $1.78\times10^{-1}$ | $1.39\times10^{-1}$ | $1.11\times10^{-1}$ | $8.05\times10^{-2}$ | $6.12\times10^{-2}$ | $4.86\times10^{-2}$ | $3.98\times10^{-2}$ |
| $6\times10^{-2}$ | | | | $2.50\times10^{0}$ | $1.95\times10^{0}$ | $1.57\times10^{0}$ | $1.11\times10^{0}$ | $7.37\times10^{-1}$ | $5.57\times10^{-1}$ | $4.47\times10^{-1}$ | $3.74\times10^{-1}$ | $2.65\times10^{-1}$ | $2.05\times10^{-1}$ | $1.66\times10^{-1}$ | $1.40\times10^{-1}$ | $1.06\times10^{-1}$ | $8.53\times10^{-2}$ | $7.14\times10^{-2}$ | $6.14\times10^{-2}$ |
| $1\times10^{-1}$ | | | | $2.51\times10^{0}$ | $1.96\times10^{0}$ | $1.58\times10^{0}$ | $1.13\times10^{0}$ | $7.63\times10^{-1}$ | $5.89\times10^{-1}$ | $4.83\times10^{-1}$ | $4.12\times10^{-1}$ | $3.07\times10^{-1}$ | $2.48\times10^{-1}$ | $2.10\times10^{-1}$ | $1.84\times10^{-1}$ | $1.49\times10^{-1}$ | $1.28\times10^{-1}$ | $1.13\times10^{-1}$ | $1.02\times10^{-1}$ |
| $2\times10^{-1}$ | $5.62\times10^{0}$ | $4.30\times10^{0}$ | $3.46\times10^{0}$ | $2.52\times10^{0}$ | $1.98\times10^{0}$ | $1.61\times10^{0}$ | $1.18\times10^{0}$ | $8.29\times10^{-1}$ | $6.87\times10^{-1}$ | $5.71\times10^{-1}$ | $5.06\times10^{-1}$ | $4.10\times10^{-1}$ | $3.57\times10^{-1}$ | $3.23\times10^{-1}$ | $2.98\times10^{-1}$ | $2.66\times10^{-1}$ | $2.45\times10^{-1}$ | $2.31\times10^{-1}$ | $2.20\times10^{-1}$ |
| $3.5\times10^{-1}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.31\times10^{0}$ | $3.47\times10^{0}$ | $2.54\times10^{0}$ | $2.01\times10^{0}$ | $1.66\times10^{0}$ | $1.24\times10^{0}$ | $9.22\times10^{-1}$ | $7.80\times10^{-1}$ | $6.97\times10^{-1}$ | $6.42\times10^{-1}$ | $5.62\times10^{-1}$ | $5.17\times10^{-1}$ | $4.89\times10^{-1}$ | $4.70\times10^{-1}$ | $4.45\times10^{-1}$ | $4.30\times10^{-1}$ | $4.19\times10^{-1}$ | $4.11\times10^{-1}$ |
| $6\times10^{-1}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.31\times10^{0}$ | $3.49\times10^{0}$ | $2.57\times10^{0}$ | $2.06\times10^{0}$ | $1.73\times10^{0}$ | $1.35\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $9.54\times10^{-1}$ | $8.89\times10^{-1}$ | $8.50\times10^{-1}$ | $7.92\times10^{-1}$ | $7.63\times10^{-1}$ | $7.45\times10^{-1}$ | $7.33\times10^{-1}$ | $7.15\times10^{-1}$ | $7.09\times10^{-1}$ | $7.03\times10^{-1}$ | $6.99\times10^{-1}$ |
| $1\times10^{0}$ | $5.63\times10^{0}$ | $4.32\times10^{0}$ | $3.51\times10^{0}$ | $2.62\times10^{0}$ | $2.13\times10^{0}$ | $1.83\times10^{0}$ | $1.50\times10^{0}$ | $1.29\times10^{0}$ | $1.20\times10^{0}$ | $1.16\times10^{0}$ | $1.13\times10^{0}$ | $1.10\times10^{0}$ | $1.08\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $1.07\times10^{0}$ | $1.06\times10^{0}$ | $1.06\times10^{0}$ | $1.05\times10^{0}$ | $1.05\times10^{0}$ |
| $2\times10^{0}$ | $5.64\times10^{0}$ | $4.35\times10^{0}$ | $3.56\times10^{0}$ | $2.73\times10^{0}$ | $2.31\times10^{0}$ | $2.07\times10^{0}$ | $1.85\times10^{0}$ | $1.73\times10^{0}$ | $1.68\times10^{0}$ | $1.66\times10^{0}$ | $1.65\times10^{0}$ | $1.64\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ | $1.63\times10^{0}$ |
| $3.5\times10^{0}$ | $5.65\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $3.63\times10^{0}$ | $2.88\times10^{0}$ | $2.55\times10^{0}$ | $2.37\times10^{0}$ | $2.23\times10^{0}$ | $2.17\times10^{0}$ | $2.25\times10^{0}$ | $2.15\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.24\times10^{0}$ | $24.1\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ | $2.14\times10^{0}$ |
| $6\times10^{0}$ | $5.67\times10^{0}$ | $4.44\times10^{0}$ | $3.74\times10^{0}$ | $3.11\times10^{0}$ | $2.85\times10^{0}$ | $2.75\times10^{0}$ | $2.68\times10^{0}$ | $2.66\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.65\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ | $2.64\times10^{0}$ |
| $1\times10^{1}$ | $5.70\times10^{0}$ | $4.52\times10^{0}$ | $3.89\times10^{0}$ | $3.40\times10^{0}$ | $3.24\times10^{0}$ | $3.18\times10^{0}$ | $3.15\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ | $3.14\times10^{0}$ |
| $2\times10^{1}$ | $5.76\times10^{0}$ | $4.71\times10^{0}$ | $4.22\times10^{0}$ | $3.92\times10^{0}$ | $3.85\times10^{0}$ | $3.83\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ | $3.82\times10^{0}$ |
| $3.5\times10^{1}$ | $5.85\times10^{0}$ | $4.94\times10^{0}$ | $4.58\times10^{0}$ | $4.40\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $4.38\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ | $4.37\times10^{0}$ |
| $6\times10^{1}$ | $5.99\times10^{0}$ | $5.23\times10^{0}$ | $5.00\times10^{0}$ | $4.92\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ | $4.91\times10^{0}$ |
| $1\times10^{2}$ | $6.16\times10^{0}$ | $5.59\times10^{0}$ | $5.46\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ | $5.42\times10^{0}$ |

表中数值是由式(4-66)取 $\sigma=10^{-3}$ 求得的。(根据 Neuman)

## 四、直线图解法

直线图解法也是利用抽水试验资料进行求含水层参数的有效方法之一。其基本思想是：在某种条件下，降深 $S$ 与时间 $t$ 的关系在单对数坐标中某一部分呈现出直线关系，因而可以依据直线的两个要素(斜率及截距)来确定含水层的有关参数。此方法在其适用的条件下，在利用和解释的简便方面，比其它图解法有明显的优越性，可避免随意性。

### (一) Jacob 直线图解法

#### 1. 原理

当 $u\leqslant 0.01$ 时，Theis 公式可近似表示为

$$S=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25Tt}{r^2\mu^*} \qquad \text{(Jacob 公式)}$$

或

$$S=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25T}{r^2\mu^*}+\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg t$$

对于此式，在单对数纸上 $S\sim\lg t$ 呈直线关系，其直线的斜率为 $i=\frac{2.3Q}{4\pi T}$，则 $T=\frac{2.3Q}{4\pi i}$。直线在横轴上的截距，即 $S=0$ 时为 $t_0$，则有

$$0=\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25Tt_0}{r^2\mu^*}$$

于是

$$\mu^*=\frac{2.25Tt_0}{r^2}$$

由此可求出参数 $T$ 及 $\mu^*$。

#### 2. 步骤

(1) 在单对数坐标纸上作出 $S\sim\lg t$ 曲线。

(2) 取下直线部分的一个对数周期的斜率 $i=\Delta S$ 及直线延长于横轴的截距 $t_0$(图 5-9)。

(3) 由公式可得参数 $T$ 和 $\mu^*$ 值如下：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi(i)} \qquad \mu^*=\frac{2.25T(t_0)}{r^2} \tag{5-37}$$

例 5-5　某承压完整井以 $Q=0.01577\text{m}^3/\text{s}$ 定流量抽水，在距主井 15.27m 处的观测井进行水位降深 $S$ 的观测，资料如表 5-8 所示。

表 5-8

| 观测时间 $t$,s | 1800 | 3000 | 4200 | 5400 | 7200 | 9000 | 12000 | 24000 | 36000 | 54000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 水位降深 $S$,m | 1.98 | 2.74 | 3.34 | 3.77 | 4.29 | 4.68 | 5.17 | 6.45 | 7.18 | 7.90 |

由上表绘制 $S=f(\lg t)$ 关系直线(图 5-10)。

在直线上按对数周期取两点，$S_1=0.8$，$S_2=4.9$，由图量得 $\Delta S=S_2-S_1=4.9-0.8=4.1$，按公式

$$T=\frac{0.183Q}{\Delta S}=\frac{0.183\times 0.01577}{4.1}=0.000703\ \text{m}^2/\text{s}$$

延长该直线与横轴相交得，$S=0$ 时，$t_0=620\text{s}$，代入公式

$$a=\frac{r^2}{2.25t_0}=\frac{(15.27)^2}{2.25\times 620}=0.16\ \text{m}^2/\text{s}$$

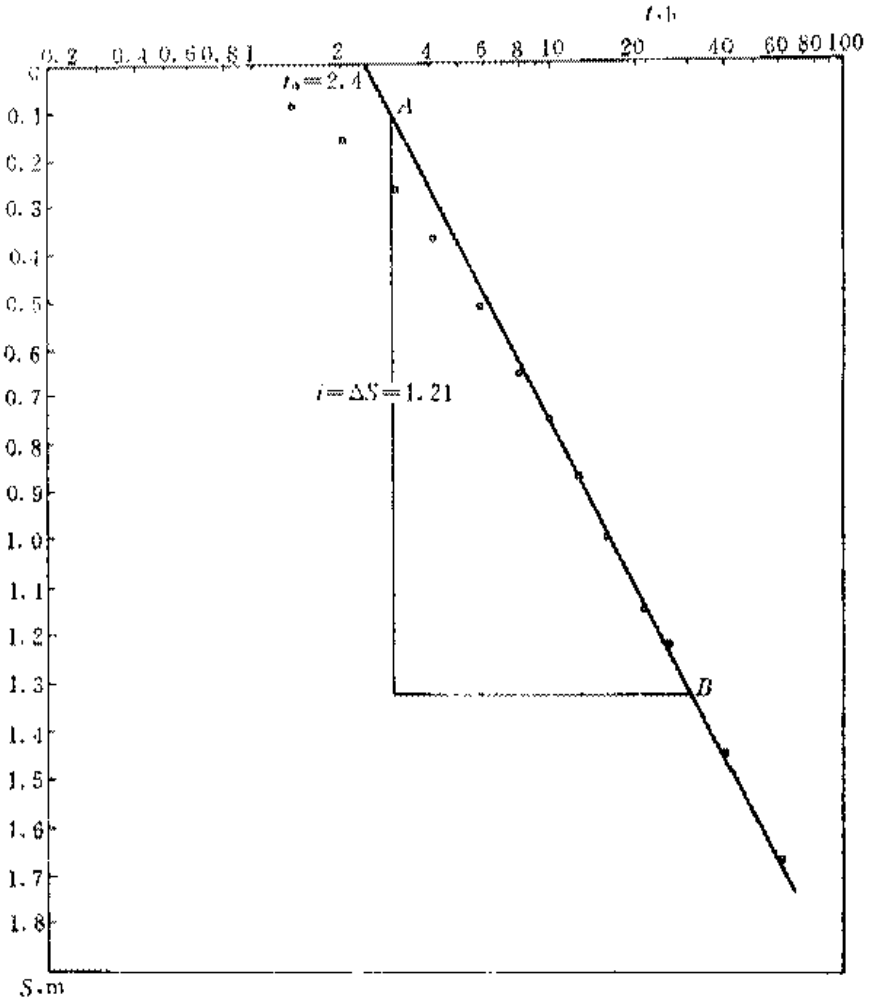



图 5-9 $S\sim\lg t$ 直线图解法图

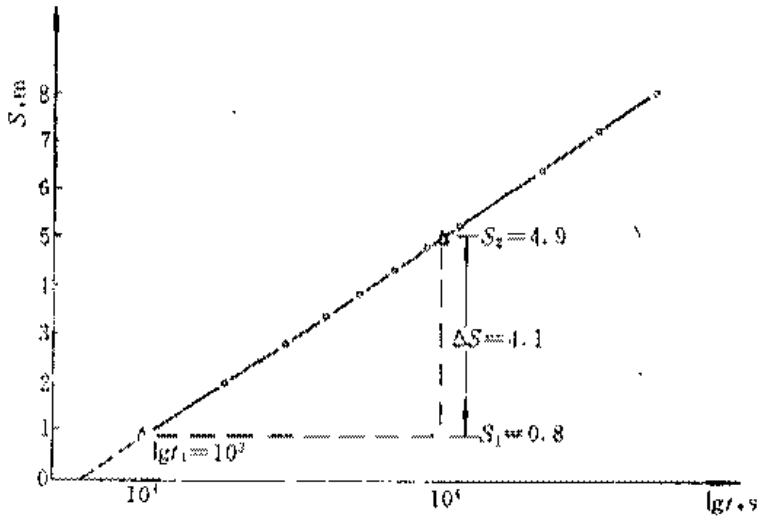



图 5-10 某地承压含水层中的 $S\sim\lg t$ 直线图解法图

$$\mu^* = \frac{T}{a} = \frac{0.000703}{0.16} = 0.00439$$

以上是由 $S\sim\lg t$ 关系求参。同理，可由综合资料（多孔长时间观测资料），利用 $S\sim\lg\frac{t}{r^2}$ 及 $S\sim\lg r$ 关系求参，但注意后者的斜率为负。

（二）潜水非稳定流的直线图解法

1. Boulton 法中的直线图解

抽水时间的延续足够后，迟后重力排水消失，此时与承压完整井的 Theis 水流状态相似，$S\sim\lg t$ 满足 Jacob 直线关系（见图 5-11）。因此，可用直线图解法求参。步骤如下

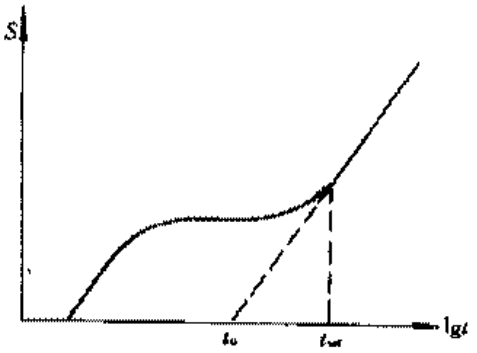



图 5-11　潜水完整井抽水的 $S\sim\lg t$ 曲线

（1）根据抽水试验资料（主要是后期）在单对数坐标纸上作出 $S\sim\lg t$ 关系曲线图（图 5-9）。

（2）取下直线一个对数周期的斜率 $i=\Delta S$，延长直线至横轴，记下直线在横轴上的截距 $(S=0)t_0$。

（3）由公式

$$T = \frac{2.3Q}{4\pi i} \qquad \mu = \frac{2.25Tt_0}{r^2} \tag{5-38}$$

求出其参数。

2. Neuman 法中的直线图解

若将表 5-7a,b 中的数据绘制在单对数坐标纸上，可得结果（见图 5-12）。从图中可以看出曲线的“初、后”期部分都趋一条直线，其方程分别为：

$$S_d = 2.3\lg 2.25t_s \qquad \text{（初期）}$$

$$S_d = 2.3\lg 2.25t_y \qquad \text{（后期）}$$

由此可应用直线图解法求参如下：

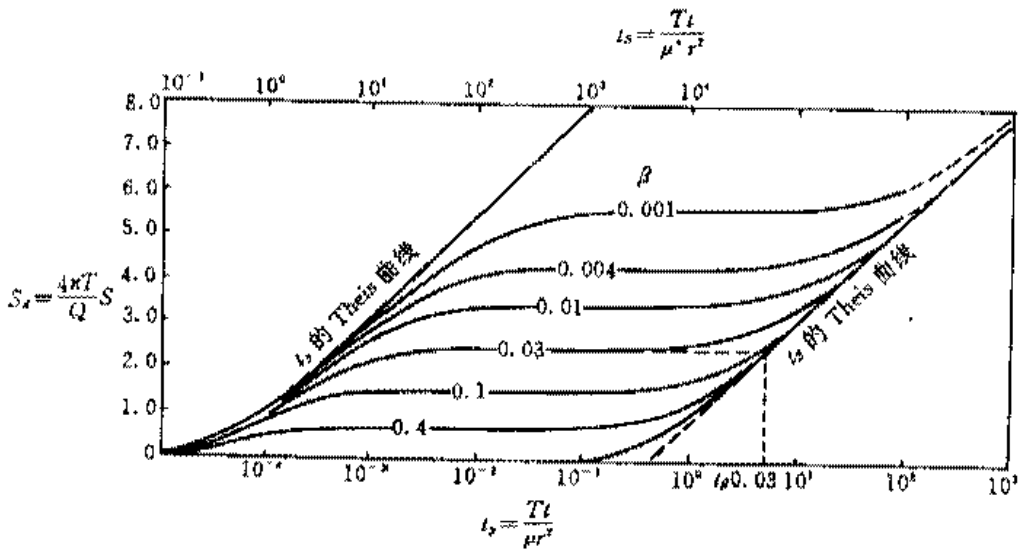



图 5-12　完整观测孔无量纲 $S_d\sim t_s$ 的半对数曲线图

（据 S. P. Neuman）

(1) 将实测的 $S\sim t$ 资料绘制在单对数坐标纸上得 $S\sim\lg t$ 曲线；

(2) 利用后期直线，取一个对数周期的斜率，即 $\Delta\lg t=1$ 时的斜率 $i_l=\Delta S_l$，同时延长直线到横轴，并记下在横轴上的截距(即 $S_d=0$ 时)$t_{0l}$，由上式(后期)及 $S_d=\frac{4\pi T}{Q}S$，$t_y=\frac{Tt}{\mu r^2}$关系，可求得：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i_l}\qquad \mu=\frac{2.25Tt_{0l}}{r^2} \tag{5-39}$$

(3) $S\sim\lg t$ 曲线中间部分资料位于一条水平线上，延长水平线与后期直线或延长线相交，其交点的横坐标为 $t_\beta$，再由已求出的 $T$、$\mu$，由下式计算相应的 $t_{y\beta}$：

$$t_{y\beta}=\frac{Tt_\beta}{\mu r^2} \tag{5-40}$$

若 $4.0\leqslant t_{y\beta}\leqslant 100.0$ 时，可由下式计算 $\beta$ 值：

$$\beta=\frac{0.195}{t_{y\beta}1.1053} \tag{5-41}$$

或直接从图 5-13 之中直接查得。

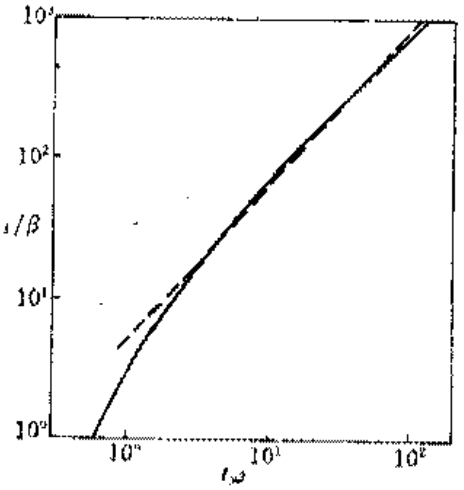



图 5-13 完整井$\frac{1}{\beta}$与$t_{y\beta}$的关系曲线图

(据 S. P. Neuman)

(4) 利用前期部分直线(此直线大体与后期直线平行)，其斜率与后期直线斜率大体相等(若明显不等，则此法失效)，同样在直线上截取一个对数周期斜率 $i_E=\Delta S_E$，以及在横轴上的截距 $t_{0E}$，同理可求参数

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i_E}\qquad \mu^*=\frac{2.25Tt_{0E}}{r^2} \tag{5-42}$$

(5) 用配线法第(4)步的式(5-35)可求出 $K_r$、$K_d$、$K_s$。而 $\sigma$ 值可由下式求出：

$$\sigma=\frac{t_{0E}}{t_{0l}} \tag{5-43}$$

**五、拐点法**

应用拐点法可以确定越流系统的参数。

1. 原理

(1) 求拐点处斜率

由式(4-32)：

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u,\frac{r}{B})=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty\frac{1}{y}e^{-y-\frac{r^2}{4B^2y}}dy$$

对 $\lg t$ 取导数，由式(4-35)有

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial\lg t}\cdot\frac{d\lg t}{dt}=\frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}-\frac{Tt}{\mu^*B^2}} \tag{5-44}$$

则有

$$\frac{\partial S}{\partial\lg t}=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}-\frac{Tt}{\mu^*B^2}}=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-(u+\frac{r^2}{4B^2u})} \tag{5-45}$$

从上式可以看出，对某一观测孔 $S\sim\lg t$ 曲线斜率变化规律是由小到大，又由大变小，存在着拐点。对拐点 $P$ 有

$$\frac{\partial^2 S}{\partial(\lg t)^2}=\frac{(2.3)^2Q}{4\pi T}e^{-\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^*B^2}}\left(\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^*B^2}\right)=0$$

即 $$\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}-\frac{Tt_P}{\mu^*B^2}=0$$

解得拐点的时间为 $$t_P=\frac{\mu^*Br}{2T} \tag{5-46}$$

对应 $u$ 式为 $$u_P=\frac{r^2\mu^*}{4Tt_P}=\frac{r}{2B} \tag{5-47}$$

将 $u_P$ 代入式(5-45)，有

$$\frac{\partial S}{\partial \lg t}=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-\frac{r}{B}}=i_P \qquad \text{(拐点切线的斜率)}$$

(2) 求拐点处降深($S_P$)的方程

将式(5-47)代入式(4-32)，得

$$S_P=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r}{2B}}^{\infty}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy \tag{5-48}$$

根据积分性质，上式又可写成

$$\begin{aligned}S_P&=\frac{Q}{4\pi T}\left(\int_{\frac{r}{2B}}^{0}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy+\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy\right)\\&=\frac{Q}{4\pi T}\left(\int_0^{\infty}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy-\int_0^{\frac{r}{2B}}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy\right)\\&=\frac{Q}{4\pi T}\left(2K_0(\frac{r}{B})-\int_0^{\frac{r}{2B}}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy\right)\end{aligned}$$

现对方程右端第二部分进行换元处理：

令 $x=\frac{r^2}{4B^2y}$，则 $y=\frac{r^2}{4B^2x}$，$dy=-\frac{r^2}{4B^2x^2}dx$，有

$$\int_0^{\frac{r}{2B}}\frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy=\int_{\frac{r}{2B}}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-(x+\frac{r^2}{4B^2x})}dx$$

因此 $$S_P=\frac{Q}{4\pi T}\left[2K_0(\frac{r}{B})-\int_{\frac{r}{2B}}^{\infty}\frac{1}{x}e^{-(x+\frac{r^2}{4B^2x})}dx\right] \tag{5-49}$$

将式(5-48)与(5-49)相加，得

$$2S_P=\frac{Q}{2\pi T}K_0(\frac{r}{B})$$

$$S_P=\frac{Q}{4\pi T}K_0(\frac{r}{B})=\frac{1}{2}S_{max} \tag{5-49'}$$

此式说明，拐点处的降深为最大降深的一半。

(3) 建立 $S_P$ 与 $i_P$ 之间的关系

由式 $S_P=\frac{Q}{4\pi T}K_0(\frac{r}{B})$ 及 $i_P=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-\frac{r}{B}}$ 得

$$S_P=\frac{i_P}{2.3}e^{\frac{r}{B}}\cdot K_0(\frac{r}{B})$$

即 $$\frac{2.3S_P}{i_P}=K_0(\frac{r}{B})e^{\frac{r}{B}} \tag{5-50}$$

式(5-50)右端的函数值已制成表 5-9。

表 5-9　　$e^x, K(x), e^xK(x), -E_1(-x)$和$-E_i(-x)e^x$的数值表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_1(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_1(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.010 | 1.0101 | 4.7212 | 4.7687 | 4.0379 | 4.0787 | 0.055 | 1.0565 | 3.0194 | 3.1991 | 2.3775 | 2.5120 |
| 0.011 | 1.0111 | 4.6260 | 4.6771 | 3.9486 | 3.9874 | 0.056 | 1.0576 | 3.0015 | 3.1741 | 2.3604 | 2.4964 |
| 0.012 | 1.0121 | 4.5390 | 4.5938 | 3.8576 | 3.9044 | 0.057 | 1.0587 | 2.9839 | 3.1589 | 2.3437 | 2.4811 |
| 0.013 | 1.0131 | 4.4590 | 4.5173 | 3.7785 | 3.8282 | 0.058 | 1.0597 | 2.9666 | 3.1437 | 2.3273 | 2.4663 |
| 0.014 | 1.0141 | 4.3849 | 4.8467 | 3.7054 | 3.7578 | 0.059 | 1.0608 | 2.9496 | 3.1288 | 2.3111 | 2.4516 |
| 0.015 | 1.0151 | 4.3159 | 4.3812 | 3.6374 | 3.6925 | 0.060 | 1.0618 | 2.9329 | 3.1142 | 2.2953 | 2.4371 |
| 0.016 | 1.0161 | 4.2514 | 4.3200 | 3.5739 | 3.6315 | 0.061 | 1.0629 | 2.9165 | 3.0999 | 2.2797 | 2.4230 |
| 0.017 | 1.0171 | 4.1908 | 4.2627 | 3.5143 | 3.5746 | 0.062 | 1.0640 | 2.9003 | 3.0858 | 2.2045 | 2.4092 |
| 0.018 | 1.0182 | 4.1337 | 1.2088 | 3.4581 | 3.5209 | 0.063 | 1.0650 | 2.8844 | 3.0719 | 2.2494 | 2.3956 |
| 0.019 | 1.0192 | 4.0797 | 4.1580 | 3.4050 | 3.4705 | 0.064 | 1.0661 | 2.8688 | 3.0584 | 2.2346 | 2.3822 |
| 0.020 | 1.0202 | 4.0285 | 4.1098 | 3.3547 | 3.4225 | 0.065 | 1.0672 | 2.8534 | 3.0450 | 2.2201 | 2.3691 |
| 0.021 | 1.0212 | 3.9797 | 4.0642 | 3.3069 | 3.3771 | 0.066 | 1.0682 | 2.8382 | 3.0319 | 2.2058 | 2.3562 |
| 0.022 | 1.0222 | 3.9332 | 4.0207 | 3.2614 | 3.3340 | 0.067 | 1.0693 | 2.8233 | 3.0189 | 2.1917 | 2.3434 |
| 0.023 | 1.0233 | 3.8888 | 3.9793 | 3.2179 | 3.2927 | 0.068 | 1.0704 | 2.8086 | 3.0052 | 2.1779 | 2.3310 |
| 0.024 | 1.0243 | 3.8463 | 3.9398 | 3.1763 | 3.2535 | 0.069 | 1.0714 | 2.7941 | 2.9937 | 2.1643 | 2.3188 |
| 0.025 | 1.0253 | 3.8056 | 2.9019 | 3.1365 | 3.2159 | 0.070 | 1.0725 | 2.7798 | 2.9814 | 2.1508 | 2.3067 |
| 0.026 | 1.0263 | 3.7664 | 3.8656 | 3.0983 | 3.1799 | 0.071 | 1.0736 | 2.7657 | 2.9693 | 2.1376 | 2.2949 |
| 0.027 | 1.0274 | 3.7287 | 3.8307 | 3.0615 | 3.1452 | 0.072 | 1.0747 | 2.7519 | 2.9573 | 2.1246 | 2.2832 |
| 0.028 | 1.0284 | 3.6924 | 3.7972 | 3.0261 | 3.1119 | 0.073 | 1.0757 | 2.7382 | 2.9455 | 2.1118 | 2.2717 |
| 0.029 | 1.0294 | 3.6574 | 3.7650 | 2.9920 | 3.0800 | 0.074 | 1.0768 | 2.7247 | 2.9340 | 2.0991 | 2.2603 |
| 0.030 | 1.0305 | 3.6235 | 3.7339 | 2.9591 | 3.0494 | 0.075 | 1.0779 | 2.7114 | 2.9226 | 2.0867 | 2.2492 |
| 0.031 | 1.0315 | 3.5908 | 3.7039 | 2.9273 | 3.0196 | 0.076 | 1.0790 | 2.6983 | 2.9113 | 2.0744 | 2.2381 |
| 0.032 | 1.0225 | 3.5591 | 3.6749 | 2.8965 | 2.9908 | 0.077 | 1.0800 | 2.6853 | 2.9002 | 2.0623 | 2.2273 |
| 0.033 | 1.0336 | 3.5284 | 3.6468 | 2.8668 | 2.9631 | 0.078 | 1.0811 | 2.6726 | 2.8894 | 2.0503 | 2.2165 |
| 0.034 | 1.0346 | 3.4986 | 3.6196 | 2.8379 | 2.9362 | 0.079 | 1.0822 | 2.6599 | 2.8786 | 2.0386 | 2.2062 |
| 0.035 | 1.0356 | 3.4697 | 3.5933 | 2.8099 | 2.9101 | 0.080 | 1.0833 | 2.6475 | 2.8680 | 2.0269 | 2.1957 |
| 0.036 | 1.0367 | 3.4416 | 3.5678 | 2.7827 | 2.8848 | 0.081 | 1.0844 | 2.6352 | 2.8575 | 2.0155 | 2.1856 |
| 0.037 | 1.0377 | 3.4143 | 2.5430 | 2.7563 | 2.8603 | 0.082 | 1.0855 | 2.6231 | 2.8472 | 2.0042 | 2.1764 |
| 0.038 | 1.0387 | 3.3877 | 3.5189 | 2.7306 | 2.8364 | 0.083 | 1.0865 | 2.6111 | 2.8370 | 1.9930 | 2.1655 |
| 0.039 | 1.0398 | 3.3618 | 3.4955 | 2.7056 | 2.8133 | 0.084 | 1.0876 | 2.5992 | 2.8270 | 1.9820 | 2.1557 |
| 0.040 | 1.0408 | 3.3365 | 3.4727 | 2.6813 | 2.7907 | 0.085 | 1.0887 | 2.5875 | 2.8171 | 1.9711 | 2.1460 |
| 0.041 | 1.0419 | 3.3119 | 3.4505 | 2.6576 | 2.7688 | 0.086 | 1.0898 | 2.5759 | 2.8073 | 1.9604 | 2.1364 |
| 0.042 | 1.0429 | 3.2879 | 3.4289 | 2.6344 | 2.7474 | 0.087 | 1.0909 | 2.5645 | 2.7976 | 1.9498 | 2.1270 |
| 0.043 | 1.0439 | 3.2645 | 3.4079 | 2.6119 | 2.7267 | 0.088 | 1.0920 | 2.5532 | 2.7881 | 1.9393 | 2.1176 |
| 0.044 | 1.0450 | 3.2415 | 3.3574 | 5.5899 | 2.7064 | 0.086 | 1.0931 | 2.5421 | 2.7787 | 1.9290 | 2.1086 |

续表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.045 | 1.0460 | 3.2192 | 3.3673 | 2.5684 | 2.6866 | 0.090 | 1.0942 | 2.5310 | 2.7694 | 1.9187 | 2.0994 |
| 0.046 | 1.0471 | 3.1973 | 3.3478 | 2.5477 | 2.6672 | 0.091 | 1.0953 | 2.5201 | 2.7602 | 1.9087 | 2.0906 |
| 0.047 | 1.0481 | 3.1758 | 3.3287 | 2.5268 | 2.6483 | 0.092 | 1.0964 | 2.5093 | 2.7511 | 1.8987 | 2.0818 |
| 0.048 | 1.0492 | 3.1549 | 3.3100 | 2.5068 | 2.6300 | 0.093 | 1.0975 | 2.4986 | 2.7421 | 1.8888 | 2.0729 |
| 0.049 | 1.0502 | 3.1342 | 3.2918 | 2.4871 | 2.6120 | 0.094 | 1.0986 | 2.4881 | 2.7333 | 1.8791 | 2.0643 |
| 0.050 | 1.0513 | 3.1142 | 3.2733 | 2.4679 | 2.5945 | 0.095 | 1.0997 | 2.4779 | 2.7246 | 1.8695 | 2.0558 |
| 0.051 | 1.0523 | 3.0945 | 2.2564 | 2.4491 | 2.5773 | 0.096 | 1.1008 | 2.4673 | 2.7159 | 1.8599 | 2.0473 |
| 0.052 | 1.0534 | 3.0752 | 3.2393 | 2.4306 | 2.5604 | 0.097 | 1.1019 | 2.4571 | 2.7074 | 1.8505 | 2.0590 |
| 0.053 | 1.0544 | 3.0562 | 3.2226 | 2.4126 | 2.5440 | 0.098 | 1.1030 | 2.4470 | 2.6989 | 1.8412 | 2.0307 |
| 0.054 | 1.0555 | 3.0376 | 3.2062 | 2.3948 | 2.5278 | 0.099 | 1.1041 | 2.4370 | 2.6906 | 1.8320 | 2.0227 |
| 0.100 | 1.1052 | 2.4271 | 2.6823 | 1.8229 | 2.0147 | 0.55 | 1.7330 | 0.8466 | 1.4673 | 0.5034 | 0.8725 |
| 0.11 | 1.1163 | 2.3333 | 2.6046 | 1.7371 | 1.9391 | 0.56 | 1.7507 | 0.8321 | 1.4567 | 0.4930 | 0.8631 |
| 0.12 | 1.1275 | 2.2479 | 2.5345 | 1.6595 | 1.8771 | 0.57 | 1.7683 | 0.8180 | 1.4464 | 0.4830 | 0.8541 |
| 0.13 | 1.1388 | 2.1695 | 2.4707 | 1.5889 | 1.8094 | 0.58 | 1.7860 | 0.8042 | 1.4363 | 0.4732 | 0.8451 |
| 0.14 | 1.1503 | 2.0972 | 2.4128 | 1.5241 | 1.7532 | 0.59 | 1.8040 | 0.7907 | 1.4262 | 0.4637 | 0.8365 |
| 0.15 | 1.1618 | 2.0300 | 2.3585 | 1.4645 | 1.7015 | 0.60 | 1.8221 | 0.7775 | 1.4167 | 0.4544 | 0.8280 |
| 0.16 | 1.1735 | 1.9674 | 2.3088 | 1.4092 | 1.6537 | 0.61 | 1.8404 | 0.7646 | 1.4073 | 0.4454 | 0.8197 |
| 0.17 | 1.1853 | 1.9088 | 2.2625 | 1.3578 | 1.6094 | 0.62 | 1.8589 | 0.7520 | 1.3980 | 0.4366 | 0.8116 |
| 0.18 | 1.1972 | 1.8537 | 2.2193 | 1.3098 | 1.5981 | 0.63 | 1.8776 | 0.7397 | 1.3889 | 0.4280 | 0.8035 |
| 0.19 | 1.2093 | 1.8018 | 2.1788 | 1.2649 | 1.5295 | 0.64 | 1.8965 | 0.7277 | 1.3800 | 0.4197 | 0.7960 |
| 0.20 | 1.2214 | 1.7527 | 2.1408 | 1.2227 | 1.4934 | 0.65 | 1.9155 | 0.7159 | 1.3713 | 0.4115 | 0.7882 |
| 0.21 | 1.2337 | 1.7062 | 2.1049 | 1.1829 | 1.4593 | 0.66 | 1.9348 | 0.7043 | 1.3627 | 0.4036 | 0.7809 |
| 0.22 | 1.2461 | 1.6620 | 2.0710 | 1.1454 | 1.4273 | 0.67 | 1.9542 | 0.6930 | 1.3543 | 0.3959 | 0.7737 |
| 0.23 | 1.2586 | 1.6199 | 2.0389 | 1.1099 | 1.3969 | 0.68 | 1.9739 | 0.6820 | 1.3461 | 0.3883 | 0.7665 |
| 0.24 | 1.2713 | 1.5798 | 2.0084 | 1.0762 | 1.3681 | 0.69 | 1.9937 | 0.6711 | 1.3380 | 0.3810 | 0.7656 |
| 0.25 | 1.2840 | 1.5415 | 1.9793 | 1.0443 | 1.3409 | 0.70 | 2.0138 | 0.6605 | 1.3301 | 0.3738 | 0.7528 |
| 0.26 | 1.2969 | 1.5048 | 1.9517 | 1.0139 | 1.3149 | 0.71 | 2.0340 | 0.6501 | 1.3223 | 0.3668 | 0.7461 |
| 0.27 | 1.3100 | 1.4697 | 1.9253 | 0.9849 | 1.2902 | 0.72 | 2.0544 | 0.6399 | 1.3147 | 0.3599 | 0.7394 |
| 0.28 | 1.3231 | 1.4360 | 1.9000 | 0.9573 | 1.2666 | 0.73 | 2.0751 | 0.6300 | 1.3072 | 0.3532 | 0.7329 |
| 0.29 | 1.3364 | 1.4036 | 1.8758 | 0.9309 | 1.2441 | 0.74 | 2.0959 | 0.6202 | 1.2998 | 0.3467 | 0.7266 |
| 0.30 | 1.3499 | 1.3720 | 1.8526 | 0.9057 | 1.2226 | 0.75 | 2.1170 | 0.6106 | 1.2926 | 0.3403 | 0.7204 |
| 0.31 | 1.3634 | 1.3425 | 1.8304 | 0.8815 | 1.2018 | 0.76 | 2.1383 | 0.6012 | 1.2855 | 0.3341 | 0.7144 |
| 0.32 | 1.3771 | 1.3136 | 1.8089 | 0.8583 | 1.1820 | 0.77 | 2.1598 | 0.5920 | 1.2785 | 0.3280 | 0.7084 |
| 0.33 | 1.3910 | 1.2857 | 1.7883 | 0.8361 | 1.1630 | 0.78 | 2.1815 | 0.5829 | 1.2716 | 0.3221 | 0.7027 |
| 0.34 | 1.4050 | 1.2587 | 1.7685 | 0.8147 | 1.1446 | 0.79 | 2.2034 | 0.5740 | 1.2649 | 0.3163 | 0.6969 |

续表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.35 | 1.4191 | 1.2327 | 1.7493 | 0.7942 | 1.1270 | 0.80 | 2.2255 | 0.5653 | 1.2582 | 0.3106 | 0.6912 |
| 0.36 | 1.4333 | 1.2075 | 1.7308 | 0.7745 | 1.1101 | 0.81 | 2.2479 | 0.5568 | 1.2517 | 0.3050 | 0.6856 |
| 0.37 | 1.4477 | 1.1832 | 1.7129 | 0.7554 | 1.0936 | 0.82 | 2.2705 | 0.5484 | 1.2452 | 0.2996 | 0.6802 |
| 0.38 | 1.4623 | 1.1596 | 1.6956 | 0.7371 | 1.0779 | 0.83 | 2.2933 | 0.5402 | 1.2389 | 0.2943 | 0.6749 |
| 0.39 | 1.4770 | 1.1367 | 1.6789 | 0.7194 | 1.0626 | 0.84 | 2.3254 | 0.5321 | 1.2326 | 0.2891 | 0.6697 |
| 0.40 | 1.4918 | 1.1145 | 1.6627 | 0.7024 | 1.0478 | 0.85 | 2.3397 | 0.5242 | 1.2265 | 0.2840 | 0.6644 |
| 0.41 | 1.5068 | 1.0930 | 1.6470 | 0.6859 | 1.0335 | 0.86 | 2.3632 | 0.5165 | 1.2205 | 0.2790 | 0.6593 |
| 0.42 | 1.5220 | 1.0721 | 1.6317 | 0.6700 | 1.0197 | 0.87 | 2.3869 | 0.5088 | 1.2145 | 0.2742 | 0.6545 |
| 0.43 | 1.5373 | 1.0518 | 1.6169 | 0.6546 | 1.0063 | 0.88 | 2.4109 | 0.5013 | 1.2086 | 0.2694 | 0.6495 |
| 0.44 | 1.5527 | 1.0321 | 1.6025 | 0.6397 | 0.9933 | 0.89 | 2.4351 | 0.4940 | 1.2029 | 0.2647 | 0.6445 |
| 0.45 | 1.5683 | 1.0129 | 1.5886 | 0.6253 | 0.9807 | 0.90 | 2.4596 | 0.4867 | 1.1972 | 0.2602 | 0.6400 |
| 0.46 | 1.5841 | 0.9943 | 1.5750 | 0.6114 | 0.9685 | 0.91 | 2.4843 | 0.4796 | 1.1916 | 0.2557 | 0.6352 |
| 0.47 | 1.6000 | 0.9761 | 1.5617 | 0.5979 | 0.9566 | 0.92 | 2.5093 | 0.4727 | 1.1860 | 0.2513 | 0.6306 |
| 0.48 | 1.6161 | 0.9584 | 1.5489 | 0.5848 | 0.9451 | 0.93 | 2.5345 | 0.4658 | 1.1806 | 0.2470 | 0.6260 |
| 0.49 | 1.6323 | 0.9412 | 1.5363 | 0.5721 | 0.9338 | 0.94 | 2.5600 | 0.4591 | 1.1752 | 0.2429 | 0.6218 |
| 0.50 | 1.6437 | 0.9244 | 1.5241 | 0.5598 | 0.9229 | 0.95 | 2.7857 | 0.4524 | 1.1699 | 0.2387 | 0.6172 |
| 0.51 | 1.6653 | 0.9081 | 1.5122 | 0.5478 | 0.9123 | 0.96 | 2.6117 | 0.4459 | 1.1647 | 0.2347 | 0.6130 |
| 0.52 | 1.6820 | 0.8921 | 1.5006 | 0.5362 | 0.9019 | 0.97 | 2.6379 | 0.4396 | 1.1595 | 0.2308 | 0.6088 |
| 0.53 | 1.6989 | 0.8766 | 1.4892 | 0.5250 | 0.8919 | 0.98 | 2.6645 | 0.4333 | 1.1544 | 0.2269 | 0.6046 |
| 0.54 | 1.7160 | 0.8614 | 1.4781 | 0.5140 | 0.8820 | 0.99 | 2.6912 | 0.4271 | 1.1494 | 0.2231 | 0.6004 |
| 1.00 | 2.7183 | 0.4210 | 1.1445 | 0.2194 | 0.5964 | 3.1 | 22.1980 | 0.0310 | 0.6871 | 0.0115 | 0.2551 |
| 1.1 | 3.0042 | 0.3656 | 1.0983 | 0.1860 | 0.5588 | 3.2 | 24.5325 | 0.0276 | 0.6770 | 0.0101 | 0.2485 |
| 1.2 | 3.3201 | 0.3165 | 1.0575 | 0.1584 | 0.5259 | 3.3 | 27.1126 | 0.0246 | 0.6673 | 0.0089 | 0.2424 |
| 1.3 | 3.6693 | 0.2782 | 1.0210 | 0.1355 | 0.4972 | 3.4 | 29.9641 | 0.0220 | 0.6580 | 0.0079 | 0.2365 |
| 1.4 | 4.0552 | 0.2437 | 0.9881 | 0.1162 | 0.4712 | 3.5 | 33.1155 | 0.0196 | 0.6490 | 0.0070 | 0.2308 |
| 1.5 | 4.4817 | 0.2138 | 0.9582 | 0.1000 | 0.4482 | 3.6 | 36.5982 | 0.0175 | 0.6405 | 0.0062 | 0.2254 |
| 1.6 | 4.6530 | 0.1880 | 0.9309 | 0.0863 | 0.4275 | 3.7 | 40.4473 | 0.0156 | 0.6322 | 0.0055 | 0.2204 |
| 1.7 | 5.4739 | 0.1655 | 0.9059 | 0.0747 | 0.4086 | 3.8 | 44.7012 | 0.0140 | 0.6243 | 0.0048 | 0.2155 |
| 1.8 | 6.0496 | 0.1459 | 0.8828 | 0.0647 | 0.3915 | 3.9 | 49.4025 | 0.0125 | 0.6166 | 0.0043 | 0.2108 |
| 1.9 | 6.6859 | 0.1288 | 0.8614 | 0.0562 | 0.3758 | 4.0 | 54.5982 | 0.0112 | 0.6093 | 0.0038 | 0.2063 |
| 2.0 | 7.3891 | 0.1139 | 0.8416 | 0.0489 | 0.3613 | 4.1 | 60.3403 | 0.0100 | 0.6022 | 0.0033 | 0.2021 |
| 2.1 | 8.1662 | 0.1008 | 0.8230 | 0.0426 | 0.3480 | 4.2 | 66.6863 | 0.0089 | 0.5953 | 0.0030 | 0.1980 |
| 2.2 | 9.0250 | 0.0893 | 0.8057 | 0.0372 | 0.3356 | 4.3 | 73.6998 | 0.0080 | 0.5887 | 0.0026 | 0.1941 |
| 2.3 | 9.9742 | 0.0791 | 0.7894 | 0.0325 | 0.3242 | 4.4 | 81.4509 | 0.0071 | 0.5823 | 0.0022 | 0.1903 |
| 2.4 | 11.0232 | 0.0702 | 0.7740 | 0.0284 | 0.3135 | 4.5 | 90.0171 | 0.0064 | 0.5761 | 0.0021 | 0.1866 |

续表

| $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ | $x$ | $e^x$ | $K_0(x)$ | $e^xK_0(x)$ | $-E_i(-x)$ | $-E_i(-x)e^x$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2.5 | 12.1825 | 0.0623 | 0.7596 | 0.0249 | 0.3035 | 4.6 | 99.4843 | 0.0057 | 0.5701 | 0.0018 | 0.1832 |
| 2.6 | 13.4637 | 0.0554 | 0.7459 | 0.0219 | 0.2942 | 4.7 | 109.9472 | 0.0051 | 0.5643 | 0.0016 | 0.1798 |
| 2.7 | 14.8797 | 0.0493 | 0.7329 | 0.0192 | 0.2854 | 4.8 | 121.5104 | 0.0046 | 0.5586 | 0.0014 | 0.1766 |
| 2.8 | 16.4446 | 0.0438 | 0.7206 | 0.0169 | 0.2773 | 4.9 | 134.2898 | 0.0041 | 0.5531 | 0.0013 | 0.1734 |
| 2.9 | 18.1742 | 0.0390 | 0.7089 | 0.0148 | 0.2693 | 5.0 | 148.4132 | 0.0037 | 0.5478 | 0.0011 | 0.1704 |
| 3.0 | 20.0855 | 0.0347 | 0.6978 | 0.0131 | 0.2621 | | | | | | |

2. 方法

应用上述原理，根据观测孔的降深及时间数据可求参。其步骤如下：

(1) 首先在单对数坐标纸上作出 $S\sim\lg t$ 实际曲线；

(2) 用外推法确定出最大降深 $S_{max}$，并由 $S_P=\frac{1}{2}S_{max}$ 确定出拐点处的降深 $S_P$。

(3) 由 $S_P$ 在图上标出拐点 $i$ 的位置，并找出对应时间 $t_P$。

(4) 过 $P$ 点作其切线，求出其斜率 $i_P$(取一个对数周期为 $\Delta S$)。

(5) 由式(5-50)中 $2.3\frac{S_P}{i_P}$ 的计算值，从表 5-9 中查得相应的 $\frac{r}{B}$ 和 $e^{\frac{r}{B}}$ 的值。

(6) 由上述的 $\left[\frac{r}{B}\right]$，$\left[e^{\frac{r}{B}}\right]$，$[t_P]$，$[S_P]$，$[i_P]$，根据相应的公式求参数：

$$\begin{cases} B=\dfrac{r}{\left[\frac{r}{B}\right]} \\ T=\dfrac{2.3Q}{4\pi[i_P]}e^{-\frac{r}{B}} \\ \mu^*=\dfrac{2T[t_P]}{Br} \\ a=\dfrac{Br}{2[t_P]} \\ \dfrac{K_1}{m_1}=\dfrac{T}{B^2} \end{cases} \tag{5-51}$$

上述六步完成了求参任务。但由于其中 $S_{max}$ 和 $i_P$ 值是用图解法求出，带有随意性，因此在此基础上求得的参数是否可靠尚无保证，需验证，其方法是将求得的参数代入

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W\left(u,\frac{r}{B}\right)$$

给定不同时间 $t$ 计算出理论降深，然后与实测降深比较或作出理论曲线和实测曲线，看二者是否吻合，特别是中后期应较好地吻合，否则说明误差较大，应重新图解 $S_{max}$，$i_P$，再进行求参，反复验证直至满意为止。

例 5-6　某农场有一完整井，以定流量 $Q=8150m^3/d$ 抽取越流承压含水层中的地下水，在离它 323m 的观测井中观测降深，其数据表示在图 5-14 中。试计算参数 $T$，$a$ 和 $B$。

解：(1) 用外推法确定 $S_{max}=5.95$ m；

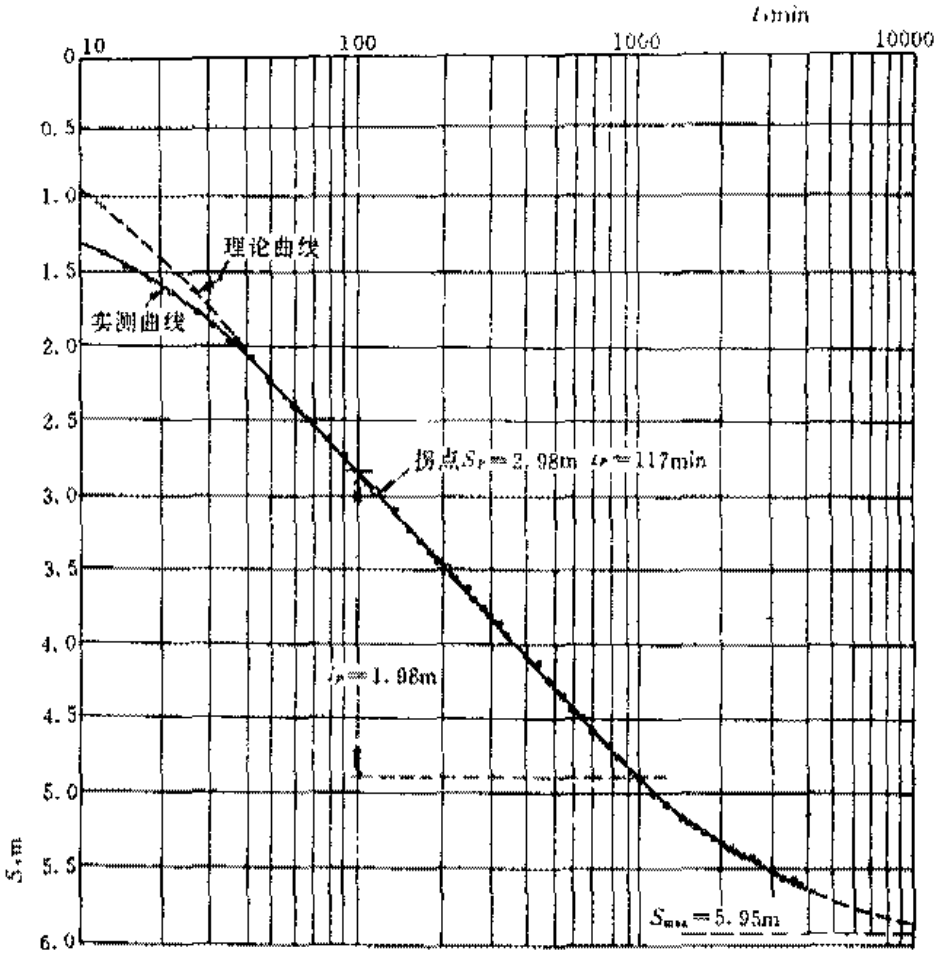



图 5-14　一个观测孔的 $S\sim\lg t$ 实测数据与理论曲线图

(2) $S_P=\frac{1}{2}S_{max}=0.5\times5.95=2.98$ m;

(3) 从图上确定 $t_P=117$ min;

(4) $i_P=\frac{\Delta S}{1\text{对数周期}}=1.98$ m;

(5) $f(\frac{r}{B})=e^{\frac{r}{B}}K_0(\frac{r}{B})=2.3\frac{S_P}{i_P}=2.3(\frac{2.98}{1.98})=3.45$

从表 5-9 得 $\frac{r}{B}=0.041$ 和 $e^{\frac{r}{B}}=1.042$，因此

$$B=\frac{r}{(\frac{r}{B})}=\frac{323}{0.041}=7880\text{ m}$$

(6) $T=0.183\frac{Q}{(i_P)}e^{-\frac{r}{B}}=\frac{0.183\times8150}{1.98\times1.042}=721\text{ m}^2/\text{d}$

(7) $\mu^*=\frac{2T(t_P)}{Br}=\frac{2\times721\times\frac{117}{1440}}{7880\times323}=4.5\times10^{-5}$

(8) $\frac{K_1}{m_1}=\frac{721}{7880^2}=1.5\times10^{-5}\ 1/d$

利用一个观测孔 $S\sim t$ 资料进行拐点法求参时，若抽水时间不长，观测孔降深又未趋稳

定，此时尚求不出 $S_{max}$ 及 $i_P$，拐点法将会失败。若有多个观测孔（至少有 3 个）时，可按下述方法步骤求参：

（1）分别作出各个观测孔的 $S\sim\lg t$ 曲线，并从图上确定其各自的斜率 $i_P$（图 5-15），近似地代替拐点处的斜率。

（2）根据各孔的斜率作出 $r\sim\lg i_P$ 的曲线（图 5-16）。

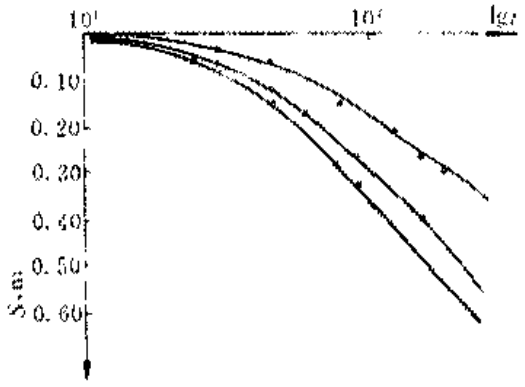



图 5-15　各观测孔的 $S\sim\lg t$ 曲线图

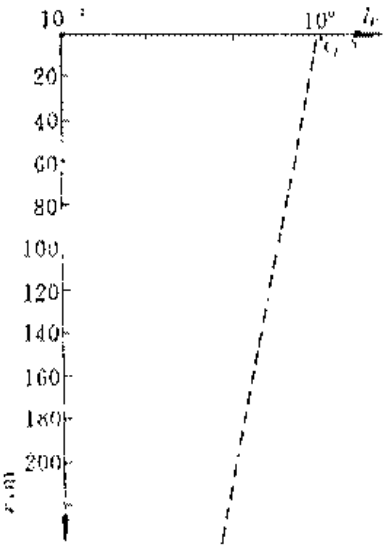



图 5-16　$r\sim\lg i_P$ 曲线图

（3）从图 5-16 确定出直线的斜率，即 $\frac{\Delta r}{\Delta(\lg i_P)}$。由

$$i_P=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-\frac{r}{B}}$$

有

$$\ln i_P=\ln\frac{2.3Q}{4\pi T}-\frac{r}{B}$$

$$r=2.3B\lg\frac{2.3Q}{4\pi T}-2.3B\lg i_P$$

此式反映出该图中 $r\sim\lg i_P$ 的直线关系，并有斜率

$$\frac{\Delta r}{\Delta(\lg i_P)}=-2.3B$$

因此

$$B=-\frac{\Delta r}{2.3\Delta(\lg i_P)} \tag{5-52}$$

延长直线交横轴一点，其截距为 $(r=0)(i_P)_0$，则由上式得

$$\lg(i_P)_0=\lg\frac{2.3Q}{4\pi T} \tag{5-53}$$

解得 $T=\frac{2.3Q}{4\pi(i_P)_0}$。由 $T,B$ 可求出 $\frac{K_1}{m_1}=\frac{T}{B^2}$。

（4）由 $T,B$ 值代入式(5-49′)分别求出各观测孔的拐点处降深 $S_P$，并从 $S\sim\lg t$ 曲线上找出对应的 $t_P$，再由下式

$$\mu^*=\frac{2Tt_P}{Br} \tag{5-54}$$

求出各孔的 $\mu^*$，最后取其平均值作为含水层的贮水系数值。

例 5-7　某抽水井的流量 $Q=2940m^3/d$，有 1、2 和 3 号三个观测孔，它们至主井的距离为 $r_1=738m$，$r_2=854m$，$r_3=1200m$。三个观测井的 $S\sim lgt$ 曲线表示在图 5-17 中，求各参数。

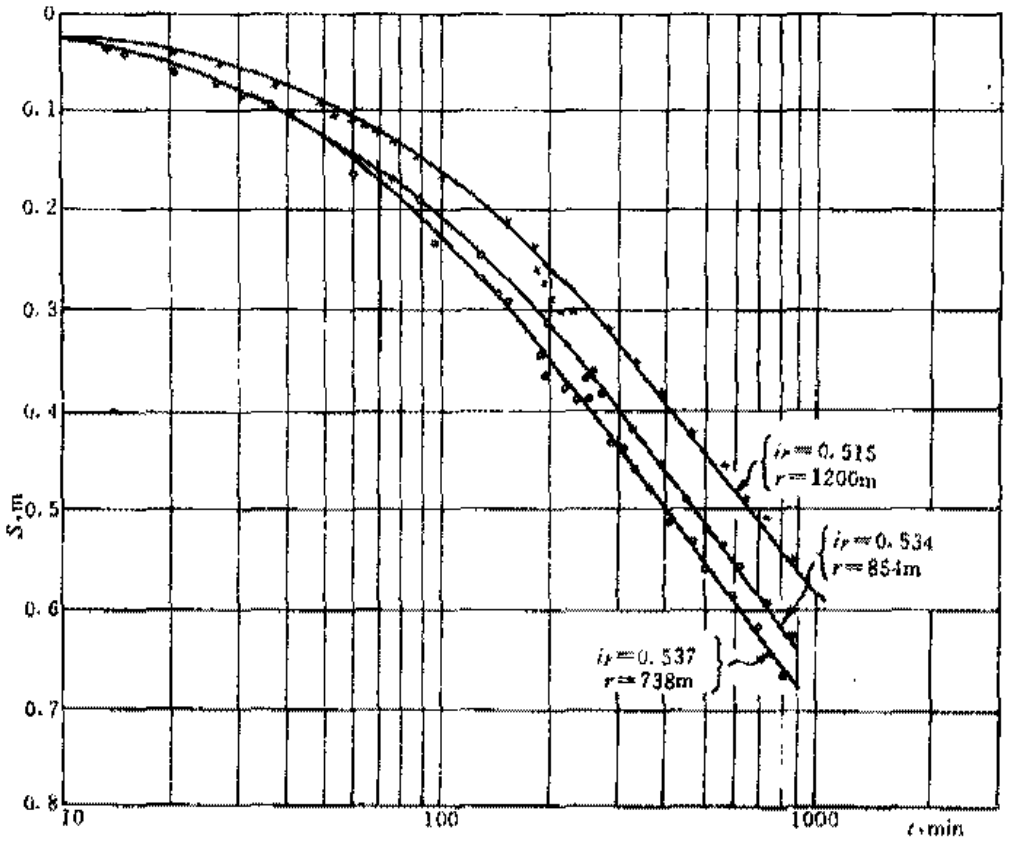



图 5-17　三个观测孔的 $S\sim lgt$ 实测曲线图

**解：** 分别测出三根 $S\sim lgt$ 实际测量曲线的直线部分的斜率 $i_P$，它们是 0.537，0.534 和 0.513，将三个井的 $r$ 和 $i_P$ 值投到图 5-18 的 $r\sim lgi_P$ 坐标系中，并作出最合适的直线。得

$$\frac{\Delta r}{\Delta(\lg i_P)}=-23900\ m$$

$$(i_P)_0=0.58$$

$$B=-\frac{\Delta r}{2.3\Delta\lg i_P}$$

$$=0.434\times 23900$$

$$=10400\ m$$

$$T=\frac{2.30Q}{4\pi(i_P)}$$

$$=930\ m^2/d$$

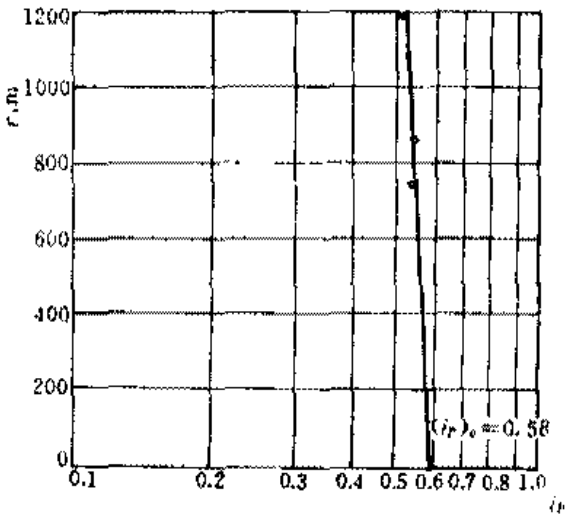



图 5-18　$r\sim lgi_P$ 直线图

据上述第(4)步骤，利用各井的资料计算 $a$ 值，最后取其平均值(表 5-10)。

表 5-10

| 井号 | $r$，m | $\frac{r}{B}$ | $K_0(\frac{r}{B})$（表 5-9） | $S_P$，m（5-49'） | $t_P$，min（图 5-18） | $a$，$m^2/d$（5-51）式 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 738 | 0.071 | 2.766 | 0.696 | 930 | $4.13\times10^6$ |
| 2 | 854 | 0.082 | 2.623 | 0.56 | 950 | $4.67\times10^6$ |
| 3 | 1200 | 0.117 | 2.273 | 0.57 | 920 | $6.79\times10^6$ |
| 平均 | | | | | | $5.2\times10^6$ |

## 六、切线法

应用切线法同样可以计算越流系统的参数。

由式(5-46)可以看出，当含水层的导水系数很大，越流系数($B$)较小，而观测孔到主井的距离又较近时，拐点出现的时间非常短，以致于在 $S\sim\lg t$ 曲线上看不出拐点，而很快趋于稳定。在此情况下，拐点法不适用，可借助一个观测孔的数据资料用一种近似的方法——切线法求参。

1. 原理

由式(4-32)

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy$$

$$=\frac{Q}{4\pi T}\left[\int_0^\infty \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy-\int_0^u \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy\right]$$

$$=\frac{Q}{4\pi T}\left[2K_0(\frac{r}{B})-\int_0^u \frac{1}{y}e^{-(y+\frac{r^2}{4B^2y})}dy\right]$$

令 $\xi=\frac{r^2}{4B^2y}$，$\delta=\frac{r^2}{4B^2u}=\frac{Tt}{\mu^*B^2}$ 得

$$S=\frac{Q}{4\pi T}\left[2K_0(\frac{r}{B})-\int_\delta^\infty \frac{1}{\xi}e^{-(\xi+\frac{r^2}{4B^2t})}d\xi\right]$$

当抽水时间相当长或曲线渐近地趋于最大降深(出现拐点)时，即 $u\ll\delta$，任意一点的斜率：

$$i=\frac{\partial S}{\partial(\lg t)}=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-(u+\frac{r^2}{4B^2u})}\approx\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-\delta} \tag{5-55}$$

降深为

$$S\approx S_{max}-\frac{Q}{4\pi T}W(\delta) \tag{5-56}$$

式中 $W(\delta)$——泰斯函数。

将上二式联合：

$$S_{max}-S=\frac{i}{2.3}e^{\delta}W(\delta)$$

$$f(\delta)=e^{\delta}W(\delta)=\frac{2.3(S_{max}-S)}{i} \tag{5-57}$$

按上式计算出 $f(\delta)$值后，查表 5-9 可得 $e^{\delta}$，$W(\delta)$和 $\delta$ 值，进而可求参数：

$$T=\frac{2.3Q}{4\pi i}e^{-\delta}$$

或
$$T \approx \frac{Q}{4\pi(S_{max}-S)}W(\delta) \tag{5-58}$$

由 $K_0(\frac{r}{B})=\frac{2\pi T}{Q}S_{max}$，据表 5-11 查出$[\frac{r}{B}]$值，于是

$$\begin{cases} B=\dfrac{r}{[\frac{r}{B}]} \\ \dfrac{K_1}{m_1}=\dfrac{T}{B^2} \\ \mu^*=\dfrac{Tt_P}{B^2\delta} \end{cases} \tag{5-59}$$

表 5-11　　$K_0(\frac{r}{B})$　数　值　表　　(M. S. Hantush, 1956)

| $N$ | $r/B=N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N\times1$ | $N$ | $r/B=N\times10^{-3}$ | $N\times10^{-2}$ | $N\times10^{-1}$ | $N\times1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 7.0237 | 4.7212 | 2.4271 | 0.4210 | 5.5 | 5.3190 | 3.0195 | 0.8466 | |
| 1.5 | 6.6182 | 4.3159 | 2.0300 | 0.2138 | 6.0 | 5.2320 | 2.9329 | 0.7775 | 0.0012 |
| 2.0 | 6.3305 | 4.0285 | 1.7527 | 0.1139 | 6.5 | 5.1520 | 2.8534 | 0.7159 | |
| 2.5 | 6.1074 | 3.8056 | 1.5415 | 0.0623 | 7.0 | 5.0779 | 2.7798 | 0.6605 | 0.0004 |
| 3.0 | 5.9251 | 3.6235 | 1.3725 | 0.0347 | 7.5 | 5.0089 | 2.7114 | 0.6106 | |
| 3.5 | 5.7709 | 3.4697 | 1.2327 | 0.0196 | 8.0 | 4.9443 | 2.6475 | 0.5653 | |
| 4.0 | 5.6374 | 3.3365 | 1.1145 | 0.0112 | 8.5 | 4.8837 | 2.5875 | 0.5242 | |
| 4.5 | 5.5196 | 3.2192 | 1.0129 | 0.0064 | 9.0 | 4.8266 | 2.5310 | 0.4867 | |
| 5.0 | 5.4143 | 3.1142 | 0.9244 | 0.0037 | 9.5 | 4.7725 | 2.4776 | 0.4524 | |

2. 步骤

(1) 在单对数坐标中作出 $S\sim t$ 曲线，确定出最大降深值 $S_{max}$。

(2) 在 $S\sim\lg t$ 曲线上任选一点 $P$，记下 $P$ 点的坐标 $t_P$ 和 $S_P$。

(3) 过 $P$ 点作曲线的切线，并确定出切线的斜率 $i_P$。

(4) 由 $f(\delta)=\frac{2.3(S_{max}-S)}{i_P}$计算出 $f(\delta)$值，由表 5-9 查出 $e^\delta$，$W(\delta)$及 $\delta$ 值。

(5) 将上述求得的值，分别代入上述相应公式，便可求出含水层全部参数。

例 5-8　某井以定流量进行抽水，$Q=8150m^3/d$，观测井至该井的距离 $r=39.6m$，观测井中的水位数据以 $S\sim\lg t$ 曲线的形式表示在图 5-19 中，求有关参数。

**解**　(1) 用图解法近似确定 $S_{max}=0.385$ m；

(2) 任选一点 $P$，其坐标为 $t_P=50$min，$S_P=0.375$m；

(3) 作点 $P$ 的切线，测得其斜率 $i_P=\Delta S/$(一个时间对数周期)$=0.035$m；

(4) 根据式(5-57)

$$f(\delta)=e^\delta W(\delta)=\frac{2.3(S_{max}-S_P)}{i_P}=\frac{2.3(0.385-0.375)}{0.035}=0.656$$

查表 5-8 得

$$W(\delta)=0.276 \quad e^\delta=2.38 \quad \delta=0.87$$

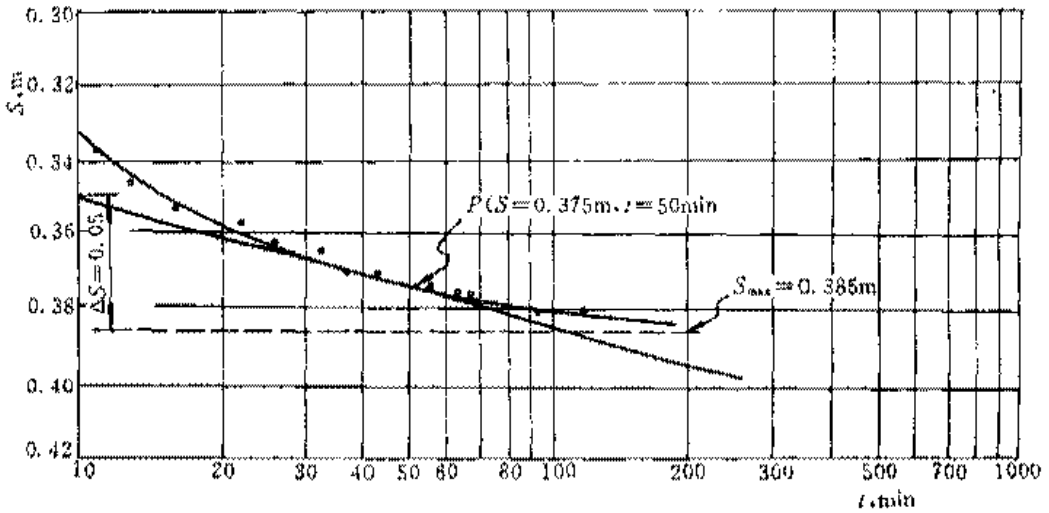



图 5-19　落在拐点之后的 $S\sim\lg t$ 实测数据图

(5) 根据式(5-58)

$$T\approx\frac{2.3Q}{4\pi i_P}\cdot e^{-s}=\frac{2.3\times 8150}{4\times 3.14\times 0.035\times 2.38}=17916\ \mathrm{m^2/d}$$

由　　$K_0(\frac{r}{B})=\frac{2\pi TS_{max}}{Q}=\frac{6.28\times 17900\times 0.385}{8150}=5.31$

再查表 5-11，得 $\frac{r}{B}=0.0055$，故 $B=\frac{r}{[\frac{r}{B}]}=\frac{39.6}{0.0055}=7200\mathrm{m}$，按式(5-59)：$\mu^*=\frac{Tt_P}{B^2\delta}=$

$$\frac{17916\times\frac{50}{1440}}{7200^2\times 0.87}=1.38\times 10^{-5}$$

**七、周文德(Ven Te Chow)法求参**

周文德法也是根据抽水试验数据确定含水层参数的一种图解法，其基本原理是根据非稳定流理论，利用 $S\sim\lg t$ 曲线上某个时刻 $t_A$ 的降深与该点曲线的斜率$\frac{\partial S}{\partial\lg t}$之间的比值来确定参数的方法。

1. 原理

由泰斯式

$$S=\frac{Q}{4\pi T}W(u)=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty\frac{e^{-u}}{u}du$$

由式(4-4)可知

$$\frac{\partial S}{\partial t}=\frac{\partial S}{\partial\lg t}\frac{d(\lg t)}{dt}=\frac{\partial S}{\partial\lg t}\left[\frac{1}{2.3t}\right]=\frac{Q}{4\pi T}\frac{1}{t}e^{-u}$$

故

$$\frac{\partial S}{\partial(\lg t)}=\frac{2.3Q}{4\pi T}e^{-u}\qquad(6\text{-}60)$$

$$\frac{S}{\frac{\partial S}{\partial(\lg t)}}=\frac{1}{2.3}W(u)e^{u}\qquad(5\text{-}61)$$

令 $$F(u)=\frac{S}{\frac{\partial S}{\partial(\lg t)}}$$，则

$$F(u)=\frac{W(u)\,e^{u}}{2.3} \tag{5-62}$$

因此，对于某一个 $u$ 值，可由 $S=\frac{Q}{4\pi T}W(u)$ 及式(5-62)求得相应的 $W(u)$ 和 $F(u)$。表 5-12 列出了相应的 $u$，$W(u)$ 和 $F(u)$ 值。

表 5-12　　与 $u$ 值相应的 $W(u)$ 和 $F(u)$ 值表

| $u$ | $W(u)$ | $F(u)$ | $u$ | $W(u)$ | $F(u)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1.14(−3) | 7.84(−2) | 9(−3) | 4.14 | 1.82 |
| 4 | 3.78(−3) | 8.98(−2) | 8(−3) | 4.26 | 1.87 |
| 3 | 1.30(−2) | 1.17(−1) | 7(−3) | 4.39 | 1.92 |
| 2 | 4.89(−2) | 1.57(−1) | 6(−3) | 4.54 | 1.99 |
| 1 | 2.19(−1) | 2.50(−1) | 5(−3) | 4.73 | 2.07 |
| | | | 4(−3) | 4.95 | 2.16 |
| 9(−1) | 2.60(−1) | 2.76(−1) | 3(−3) | 5.23 | 2.28 |
| 8(−1) | 3.11(−1) | 3.01(−1) | 2(−3) | 5.64 | 2.46 |
| 7(−1) | 3.74(−1) | 3.27(−1) | 1(−3) | 6.33 | 2.75 |
| 6(−1) | 4.54(−1) | 3.60(−1) | | | |
| 5(−1) | 5.60(−1) | 4.01(−1) | 9(−4) | 6.44 | |
| 4(−1) | 7.02(−1) | 4.55(−1) | 8(−4) | 6.55 | |
| 3(−1) | 9.06(−1) | 5.32(−1) | 7(−4) | 6.69 | |
| 2(−1) | 1.22 | 6.47(−1) | 6(−4) | 6.84 | |
| 1(−1) | 1.82 | 8.74(−1) | 5(−4) | 7.02 | |
| | | | 4(−4) | 7.25 | |
| 9(−2) | 1.92 | 9.13(−1) | 3(−4) | 7.53 | |
| 8(−2) | 2.03 | 9.56(−1) | 2(−4) | 7.94 | |
| 7(−2) | 2.15 | 1.00 | 1(−4) | 8.63 | |
| 6(−2) | 2.30 | 1.06 | | | |
| 5(−2) | 2.47 | 1.13 | 9(−5) | 8.71 | |
| 4(−2) | 2.68 | 1.21 | 8(−5) | 8.86 | |
| 3(−2) | 2.96 | 1.33 | 7(−5) | 8.99 | |
| 2(−2) | 3.35 | 1.49 | 6(−5) | 9.14 | |
| 1(−2) | 4.04 | 1.77 | 5(−5) | 9.33 | |

这样，在 $S\sim\lg t$ 曲线上选一点 $A$，取其时间 $t_A$，降深 $S_A$ 及该点曲线的斜率 $\frac{\partial S}{\partial(\lg t)}$ 之间的比值，代入上述有关公式则可求参。

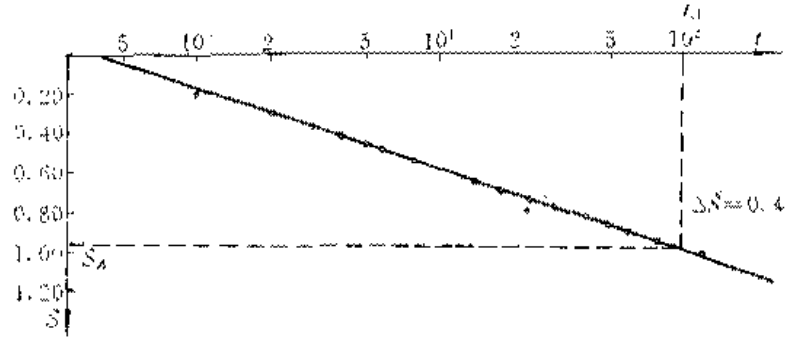



图 5-20　周文德(Ven Te Chow)法 $S$~lg$t$ 曲线

2. 步骤

(1) 在单对数坐标纸上作出 $S$~$t$ 曲线(图 5-20)。

(2) 在曲线上任取一点 $A$,作该点切线,记下此点 $S_A$,$t_A$ 及斜率$\frac{\partial S_A}{\partial(\lg t_A)}$;为了计算简便,可取一个对数周期的斜率 $\Delta S_A$。

(3) 由 $F(u)=\frac{S_A}{\Delta S_A}$的值,从表 5-12 查出 $u$ 及 $W(u)$值。

(4) 由

$$T=\frac{Q}{4\pi(S_A)}[W(u)] \tag{5-63}$$

$$\mu^*=\frac{4Tt_A}{r^2}[u] \tag{5-64}$$

求得参数。

**八、降深比值法**

上述图解方法一般都需要比较长的时间、降深系列观测资料。在资料缺乏时,上述方法则受到很大的限制,此时可以用一种简便易行的降深比值法求参。其原理方法如下:

在定流抽水试验时,若已知某一观测孔两个时刻 $t_1$,$t_2$ 对应的降深 $S_1$ 和 $S_2$,由泰斯公式

$$S_1=\frac{Q}{4\pi T}W(u_1) \qquad u_1=\frac{r^2\mu^*}{4Tt_1}$$

$$S_2=\frac{Q}{4\pi T}W(u_2) \qquad u_2=\frac{r^2\mu^*}{4Tt_2}$$

两式之比得

$$\alpha=\frac{S_1}{S_2}=\frac{W(u_1)}{W(u_2)} \tag{5-65}$$

设 $A=\frac{u_1}{u_2}=\frac{t_1}{t_2}$,$u_1=Au_2$,代入式(5-65)有

$$\alpha=\frac{W(Au_2)}{W(u_2)} \tag{5-66}$$

由此式绘出的不同 $A$ 值相对应的 $\alpha$~$u_2$ 关系曲线如(图 5-21)所示。

由抽水试验资料选取两适当的时刻($t_1$,$t_2$)及其对应的降深 $S_1$,$S_2$,先求出 $\alpha$ 及 $A$,再利用 $\alpha$~$u_2$ 关系曲线查出 $u_2$,然后计算出 $u_1$,将这些值代入 Theis 公式便可求参,其计算公式如下:

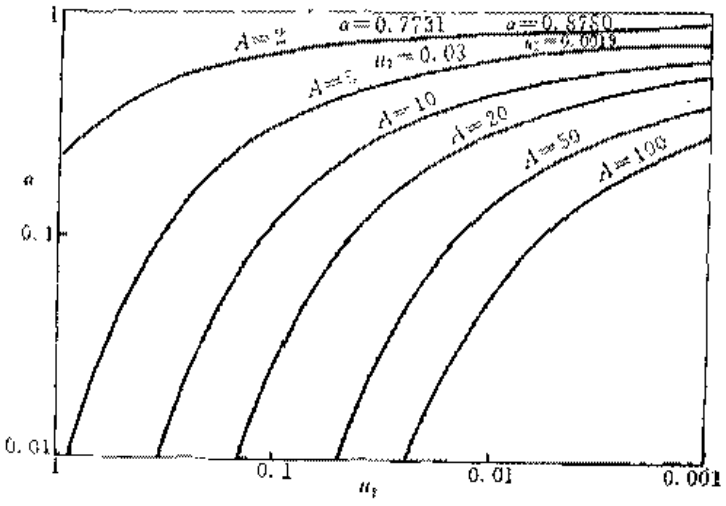



图 5-21 $a\sim u_2$ 关系曲线图

$$\begin{cases} T_1 = \dfrac{Q}{4\pi S_1} W(u_1) \\ T_2 = \dfrac{Q}{4\pi S_2} W(u_2) \\ \mu_1^* = \dfrac{4Tt_1u_1}{r^2} \\ \mu_2^* = \dfrac{4Tt_2u_2}{r^2} \end{cases} \tag{5-67}$$

最后可取二者平均值作为最终参数。

该方法的缺点是不能充分利用所有资料，同时因 $t_1$，$t_2$ 时间选择不当会受到局部数据波动和错误而影响计算精度，但在资料不足的情况下，可作估计参数的方法。

**九、电子计算机在含水层参数计算中的应用**

近年来，由于计算机在各个领域的广泛应用，推动了计算技术的飞速发展，特别在地下水动力学领域，计算机的出现及应用，使一些计算方法（如数值法、最优化技术方法等）在解决水文地质计算问题成为可能，同时也加快了计算速度。下面主要介绍利用抽水试验资料求参的几个算例，程序用 BASIC 语言编写。

（一）利用单孔稳定流抽水试验资料求渗透系数及影响半径

在实际工作中，经常遇到只有一个抽水孔的观测资料的情况，此时按 Dupuit 公式求参，由于公式中存在两个未知数不能直接求得，需利用经验公式，采用试点法求解。

1. 原理方法

由承压完整井 Dupuit 公式

$$\begin{cases} S = \dfrac{Q}{2\pi KM} \ln \dfrac{R}{r_0} \\ K = \dfrac{Q}{2\pi MS} \ln \dfrac{R}{r_0} \end{cases} \tag{5-68}$$

而影响半径的经验公式为

$$R = 10S\sqrt{K} \qquad \text{(W. Siechardt 公式)}$$

故
$$K=\frac{Q}{2\pi MS}(\ln 10SK^{\frac{1}{2}}-\ln r_0) \tag{5-69}$$

上式是关于 $K$ 的超越方程，很难从等式中解出 $K$ 来，所以采用试点法，先据经验给出初值 $K_0$，然后由上式计算 $K$，令其值为 $K'$，若 $K_0$ 与 $K'$ 值比较相近(满足精度的要求)则 $K_0$ 为所求参数；否则，再给一个 $K_0$ 重复上述过程，直至满足精度要求为止。

同理，对潜水完整井有

$$\begin{cases}K=\dfrac{Q}{\pi(2H_0-S)S}\ln\dfrac{R}{r_0}\\ R=2S\sqrt{KH_0}\qquad (\text{И. П. Кусакин 公式})\end{cases} \tag{5-70}$$

构成迭代公式

$$K=\frac{Q}{\pi(2H_0-S)S}(\ln 2S(KH_0)^{\frac{1}{2}}-\ln r_0) \tag{5-71}$$

按承压井相同的过程求参。

2. 程序与说明

(1) 程序说明：

Q——抽水井或钻孔的涌水量，$m^3/d$；

$H_0$——静止水位，m；

R——影响半径，m；

K——渗透系数，m/d；

S——井中水位降深，m；

JD——精度；

PB$——判别承压水和潜水用字符串；

$R_0$——抽水孔半径，m；

M——承压含水层厚度，潜水赋值为 1。

运行时按程序中的汉字提示操作即可。

程序中计算机自动给出首次假设值 $K_0=1$，然后，每次都用本次计算的 $K'$ 作为下一次的假设值反复计算，直至满足精度要求为止。程序后半部分，提供了用大井法预计给定设计降深求涌水量的预计功能。

(2) 计算机程序：

```
10 REM DJWDLQC PROGRAM
20 PRINT  "* * * * * 现在进入稳定流求参 * * * * *"
30 LPRINT CHR $ (27);"G";LPRINT "* * * * * 稳定流求参 * * * * *";
   LPRINT CHR $ (27);"H"
40 INPUT "单位是:1———(m/d),2———(m/h),3———(L/s)";D
50 IF D=1 OR D=2 OR D=3 THEN 70
60 GOTO 40
70 DW $ ="(m/d)"
80 PRINT "输—1 则结束"
90 INPUT "涌水量=?";Q
```

```
100 IF Q=-1 THEN END
110 IF D=2 THEN Q=Q*24
120 IF D=3 THEN Q=Q*24*3.6
130 LINE INPUT "选:1----承压水,2----潜水?";PB$
140 IF PB$="1" OR PB$="2" THEN 160
150 GOTO 130
160 INPUT "输原始水位,厚度,井半径,水位降深,精度=?";H0,M,R0,S,JD
170 A=Q/3.1415926#/S: K=1
180 R1=10*S*SQR(K): R2=R1/5*SQR(H0)
190 IF R0>2 THEN R1=R0+R1: R2=R0+R2
200 IF PB$="1" THEN K1=A/2/M*LOG(R1/R0): R=R1:GOTO 220
210 K1=A/(2*H0-S)*LOG(R2/R0): R=R2
220 IF ABS((K-K1)*2/(K+K1))>JD THEN K=K1: GOTO 180
230 GOSUB 370
240 IF PB$="1" THEN LPRINT TAB(15): "%%%%%承压水的原始资料%%%%%"
250 IF PB$="2" THEN LPRINT TAB(15): "%%%%%潜水的原始资料%%%%%"
260 LPRINT "Q=";Q;"r0=";RO;"H0=";H0;"M=";M;"S=";S:LPRINT
270 LPRINT TAB(8);"%%%%%结  果%%%%%"
280 LPRINT "渗透系数 K=";K:DW$;"影响半径 R=";R:LPRINT "精度 JD=";JD
290 IF R0<2 THEN 360
300 LPRINT: LPRINT "下面是预计情况": LPRINT
310 LPRINT "设计降深";:INPUT "s=";S:LPRINT S
320 IF S=-1 THEN 360
330 IF PB$="1" THEN Q=3.1415926#*K*M*S/(LOG(R/R0))*2
340 IF PB$="2" THEN Q=3.1415926#*K*(2*H0-S)*S/(LOG(R/R0))
350 LPRINT "涌水量 Q=";Q:GOTO 310
360 GOSUB 370: GOTO 80
370 LPRINT "*********************":RETURN
```

3. 算例

某地长兴灰岩潜水含水层的平均厚度为 43.6m,在此含水层中打一完整井,井径为0.15 m,当水位下降 2.8m 时,获得涌水量为 2380m³/d。求渗透系数和影响半径。

因本题是潜水含水层,单位是米与日,所以,PB=2,M 对潜水无用,赋值为 1 以便使程序顺利执行。$Q$=2380m³/d,$H$=43.6m,$s$=2.8m,$r_0$=0.15m,$JD$ 在本例中随便给为 $10^{-4}$。

按程序说明执行 DJWDLQC 程序,运行结果如下:

```
*****稳定流求参*****
**********************
```

%%%%%潜水的原始资料%%%%%

Q=2380($m^3$/d)　r0=0.15(m)　H0=43.6(m)　M=1(m)　S=2.8(m)

%%%%%结果%%%%%%

渗透系数 K=22.65695 (m/d)　　影响半径 R=176.0078(m)

精度 JD=0.0001

(二) Theis 公式的试算法求参

本节首先介绍了试点法，以了解反求参的过程。实际上，由于计算工作量大，手算是难于完成的。在给定一个初值 $a_0$ 值去寻求使等式成立的 $a$ 值时，需要计算许多次，而每计算一次又要查两次井函数表，工作量也相当大。同时，由于井函数表中变量[$u$]及井函数值[$W(u)$]

表 5-13

| No | $t$,min | $S$,m | No | $t$,min | $S$,m |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 8 | 0.002 | 13 | 900 | 1.00 |
| 2 | 12 | 0.006 | 14 | 1200 | 1.15 |
| 3 | 30 | 0.02 | 15 | 1500 | 1.22 |
| 4 | 60 | 0.05 | 16 | 1800 | 1.32 |
| 5 | 120 | 0.165 | 17 | 2100 | 1.39 |
| 6 | 180 | 0.27 | 18 | 2400 | 1.45 |
| 7 | 240 | 0.37 | 19 | 3000 | 1.51 |
| 8 | 300 | 0.455 | 20 | 3600 | 1.67 |
| 9 | 360 | 0.53 | 21 | 4200 | 1.71 |
| 10 | 480 | 0.655 | 22 | 4800 | 1.72 |
| 11 | 600 | 0.755 | 23 | 5820 | 1.73 |
| 12 | 720 | 0.88 | | | |

又不是连续的，也会影响计算精度而增大计算工作量，因此，试点法最好借助于计算机完成方能提高效率。

1. 原理及方法

取 $t_1$，$t_2$ 时刻的降深 $S_1$，$S_2$ 两组资料，由式(5-8)有

$$\begin{cases} S_1 = \dfrac{Q}{4\pi T}W(u_1) & u_1 = \dfrac{r^2\mu^*}{4Tt_1} \\ S_2 = \dfrac{Q}{4\pi T}W(u_2) & u_1 = \dfrac{r^2\mu^*}{4Tt_2} \end{cases} \tag{5-76}$$

对应式相除整理得

$$\begin{cases} W(u_1) = \dfrac{S_1}{S_2}W(u_2) \\ u_2 = \dfrac{t_1}{t_2}u_1 \end{cases} \tag{5-77}$$

改变形式有　$W(u_1)-\dfrac{S_1}{S_2}W(u_2)=W(u_1)-\dfrac{S_1}{S_2}W(\dfrac{t_1}{t_2}u_1)=0$。

从上式可以看出，只要找到一个 $u_1$ 基本满足方程，则此($u_1$)值便是方程的解，也就是所求的 $t_1$ 时刻的 $u_1$。知道 $u_1$ 后，便可由上式求出参数 $T$ 及 $\mu^*$。求 $u_1$ 时采用的是试算法，即先给出一个初始值 $u_1$，然后代入公式计算，看是否满足方程，若结果满足方程，则说明 $u_1$ 就是所求的解，否则应再给一个 $u_1$，重复上述过程，直至满足为止。由于试算法寻求真正的 $u_1$ 时是要花费很多机时，且实际也不必要，只要满足一定的精度要求，便认可。关于计算精度的要求，视不同的勘探阶段和计算目的而异。

2. 程序及说明

1) 程序说明

n—观测组数

s(n)—水位降深数组

x(n)—在"s—t"中为观测时间数组(min)；V 为观测孔至抽水孔距离(m)，Pb$ 为"s—t"；

在"s—r"中为观测孔至抽水孔距离数组(m)，V 为观测时间(min)，Pb$ 为"s—r"；

Q—钻孔或井的涌水量，$m^3/min$；

a—压力传导系数，$m^2/min$；

T—导水系数，$m^2/min$；

Us—储水系数；

K—渗透系数，m/min；

$W(u_1)$，$W(u_2)$—井函数；

$u_1$，$u_2$—井函数自变量；

B—确定泰斯公式和 Jacob 公式的检索范围。(取值 0～15)；

m—承压水含水层厚度，潜水赋值 1，m；

WJ—分析用变量，在计算机没计算出结果时出现：WF＝－1 说明本组资料有误，计算无解或 B1 和 B2 取值太小所致；WJ＝－2 说明解 u 在大于 10 的范围内，可另取 $u_s$($u_s$＞10)再重新算或无解；WJ＝－3 说明解 u 应小于 10^(－15)，可改变 $u_s$＝10^(1－15)重新算或无解；WJ＝－4 试算中没有遇到这种情况，若出现可能是 B2 值太小。

2) 程序

```
10 REM SSFQC Program
20 PRINT "承压水输入 1，潜水输入 2"：INPUT PA$
30 IF PA$ ="1"OR PA$ ="2" THEN 50
40 GOTO 20
50 INPUT "承压含水层厚度或潜水含水层水位 HM"：HM
60 INPUT "组数 N"；N：N1＝N
70 READ PB$，Q，V
80 DIM X(N)，S(N)，Q(N)
90 FOR I＝1 TO N：READ X(I)：NEXT I
100 FOR I＝1 TO N：READ S(I)：NEXT I
110 PRINT：SCREEN 1，0：CLS：SCREEN  2
120 PRINT "＊＊＊＊＊非稳定流试算法求水文地质参数＊＊＊＊＊"：PRINT
```

```
130 P1=1: PRINT: WZ=18
140 S3 $="水位降深": T3$="抽水时间": R3$="观测孔距离": QS="涌水量"
150 HM$="承压含水层厚度或潜水水位": JG$="结果"
160 CH$="承压水": QI$="潜水"
170 IF PA$="1" THEN PA$=CH$
180 IFPA$="2" THEN PA$=QI$
184 SY$="剩余水位降深": TT$="停止抽水时间"
186 HT$="水位恢复时间"
190 INPUT "(1---不选择,2---选择;精度 jd,td)?";PD
200 IF PD=1 OR PD=2 THEN GOTO 220
210 GOTO 190
220 ON PD GOTO 270 230
230 PRINT "(jd=2~0.1,td=1~0.01)"
240 INPUT "jd="; JD:INPUT "td="; TD
250 R0 $=MID$(R$,1,P2+1):R0=VAL(RO$)
260 GOTO 280
270 TD=0.03 : JD=0.1
280 DIM Y(N),H(N),A(N)
290 GOSUB 1600
300 LPRINT CHR$(27);"G"
310 LPRINT: LPRINT "*****非稳定流试算法求水文地质参数*****":
    LPRINT
320 LPRINT CHR$(27);"H":LPRINT "所有资料的单位:m、min"
330 LPRINT "$$$
```

```
490 NEXT I
500 PRINT $$$$
```

```
810 LPRINT "A=";A(K) * 1440;"m²/d";"T=";T(K) * 1440;"m²/d";"US=";US
    (K);"K=";K1(K) * 1440;"m/d"
820 PRINT "结果";PRINT "W1(";U1;")="; W1(K)
830 PRINT "A="; A(K) * 1440; "(m²/d)"; "T=" T(K) * 1440; "m²/d"; "US=";
    US(K);"K=";K1(K) * 1440; "m/d"
840 NEXT K
850 IF P<=2 THEN 870
860 T4=TJ * 1440: A4=AJ * 1440: K4=K1 * 1440
870 TJ=0: AJ=0: K1=0
880 FOR K=1 TO P: TJ=TJ+T(K): AJ=AJ+A(K): K1=K1+K1(K): NEXT K
890 TJ=TJ/P: AJ=AJ/P: K1=K1/P
900 IF P<=1 OR JD<=TD THEN 1010
910 FOR J=1 TO P: T8(J)=ABS(T(J)-TJ): NEXT J
920 T8=T8(P): G=P
930 FOR I=1 TO P-1: IF T8<T8(I) THEN T8=T8(I): G=I
940 NEXT I
950 IF T8/TJ>JD THEN T(G)=T(P): K1(G)=K1(P): A(G)=A(P): S1(G)=S1
    (P): S2(G)=S2(P): T1(G)=T1(P): T2(G)=T2(P): P=P-1
960 GOTO 860
970 JD=JD/2: GOTO 860
980 LPRINT STRING$ (3," "): LPRINT STRING$ (40,"-")
990 LPRINT: LPRINT "求参结果输出": LPRINT
1000 IF A4=0 THEN LPRINT "选择 XZ=2": GOTO 140
1010 LRPITN "导水系数="; T4; "m²/d"; TAB(40); "压力传导系数=;" A4; "m²/
     d"
1020 LPRINT "储水系数="; T4/A4; TAB(40); "渗透系数="; K4; "m/d"
1030 LPRINT "精度="; JD
1040 LPRINT:LPRINT "参加求参的组数="; 2 * P
1050 FOR I=1 TO P:PRINT "S(";I;")="; S1(I); TAB(15); "t(";I;")=";T1(I);
     NEXT I
1060 FOR I=1 TO P:PRINT "S(";I+P;")="; S2(I); TAB(15); "t(";I+p;")=";
     T2(I):NEXT I
1070 FOR I=1 TOP:PRINT "a(";I;")=";A(I);"t(";I;")=';T(I) NEXT I
1080 GOSUB 1600
1090 END
1100 UI=10^ (-B): UA=10: M1=0: M2=0
1110 UI=(UI+UA)/2
1120 IF M1>B1 AND M2>B1 THEN WJ=-1: GOTO 1320
1130 U=U1: GOSUB 1330: W1(K)=W
```

```
1140 IF PB$ = "s—r"OR PB$ ="S—R" THEN
     U=U1 * T2(K) * T2(K) /T1(K) /T1(K): GOSUB 1330: W2(K)=W: GO-
     SUB 1160
1150 U=U1 * T1(K)/T2(K): GOSUB 1330: W2(K)=W
1160 C=W1(K)—S1(K)/S2(K) * W2(K)
1170 IF ABS(C)<0.00001 THEN 1250
1180 IF C>0 THEN 1220
1190 UA=UI: M2=M2+1
1195 IF M1>B1 AND M2=0 THEN 1440
1200 GOTO 1110
1210 UI=U1: M2=M2+1
1220 UI=U1: M2=M2+1
1230 IF M>B1 AND M1=0 THEN WJ=—2: GOTO 1320
1240 GOTO 1110
1250 IF PB$ ="S—R" OR PB$ ="s—r" THEN A=T1(K) * T1(K)/(4 * U1 * V):
     GOTO 1270
1260 A=V * V/(4 * U1 * T1(K))
1270 A(K)=A
1280 T=0.0397887364#
1290 T=Q * (W1(K)/S1(K)+W2(K)/S2(K)) * T
1295 T(K)=T: US(K)=T/A: K1(K)=T/HM
1300 IF PA$ ="潜水" THEN K1(K)=2 * T: US(K)=K1(K) * HC/A:T(K)=
     K1(K) * HC
1320 RETURN
1330 S=0: I=1: F=10
1340 F=F/I: S2=S
1350 IF I<30 THEN 1380
1360 S=S+(—1)^ (I—16) * U^ (I+15) * F/I * U^ 15
1370 GOTO 1390
1380 S=S+(—1)^ I * U^ I * F/I
1390 Z=S—S2
1400 IF ABS(Z)<10^ (—10) THEN 1420
1410 I=I+1: GOTO 1340
1420 W=—0.57721566# —S—LOG(u)
1430 RETURN
1440 DEF FN W3(X)=—0.57721566# —LOG(X)
1450 UI=10^ (—15): UA=10^ (—B): M3=0: M4=0
1460 U1=(UI+UA)/2
1470 IF M3>B2 AND M4>B2 THEN WJ=—1: GOTO 1320
```

```
1480 W1(K)=FN W3(U1)
1490 IF PB$ ="s-r"OR PB$ ="S-R" THEN U=U1 * T2(K) * T2(K)/T1(K)/
     T1(K):W2(K)=FNW3(U):GOTO 1510
1500 U=U1 * T1(K)/T2(K): W2(K)=FN W3(U)
1510 C=W1(K)-S1(K)/S2(K) * W2(K)
1520 IF ABS(C)<0.0000001 THEN 1160
1530 IF C>0 THEN 1570
1540 UA=U1: M3=M3+1
1550 IF M3>B2 AND M4=0 THEN WJ=-3: GOTO 1320
1560 GOTO 1460
1570 UI=U1: M4=M4=1
1580 IF M4>B2 AND M3=0 THEN WJ=-4: GOTO 1320
1590 GOTO 1460
1600 LPRINT " * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *";
     RETURN
1610 DATA "S-t",0.111,10
1620 DATA 5,10,15,20,30,40,60,90,120,180,240
1630 DATA 0.31,0.42,0.49,0.54,0.60,0.65,0.72,0.79,0.84,0.90,0.95
```

3. 算例

某潜水层的平均厚度为 17m，有一口完整井以 0.111m³/min 流量进行了抽水试验，在距离抽水井 10m 处有一观测孔，观测的水位见下表，试求水文地质参数。

| 累计时间(min) | 5 | 10 | 15 | 20 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 水位降深(m) | 0.31 | 0.42 | 0.49 | 0.54 | 0.60 | 0.65 |
| 累计时间(min) | 60 | 90 | 120 | 180 | 240 | |
| 水位降深(m) | 0.72 | 0.79 | 0.84 | 0.90 | 0.95 | |

```
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
* * * * * *非稳定流试算法求水文地质参数* * * * *
所有资料的单位:m、min
$ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $
潜水                    s-t
涌水量                  承压水厚度或潜水初期水位
.111                    17
观测孔距离              数组
    10                  11
-------------------------------------------------------------------------
(2H-s)s                 抽水时间
s(1)=10.4439            X(1)=5
```

s(2)=14.1036　　X(2)=10
s(3)=16.4199　　X(3)=15
s(4)=18.0634　　X(4)=20
s(5)=20.04　　X(5)=30
s(6)=21.6775　　X(6)=40
s(7)=23.3816　　X(7)=60
s(8)=26.2359　　X(8)=90
s(9)=27.3544　　X(9)=120
s(10)=29.79　　X(10)=180
s(11)=31.3975　　X(11)=240

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

S1(1)=0.31　　t1(1)=5　　S2(1)=0.95　　t2(1)=240
结果　　W1(9.338864E-02)=1.885023
A=77097(m²/d)　　T=76.55141(m²/d)　　US=9.929211E-0.4
K=4.591541(m/d)

---

S1(2)=0.42　　t1(2)=10　　S2(2)=0.90　　t2(2)=180
结果　　W1(0.045364)=2.560676
A=79358(m²/d)　　T=77.00596(m²/d)　　US=9.703606E-0.4
K=4.618804(m/d)

---

S1(3)=0.49　　t1(3)=15　　S2(3)=0.84　　t2=120
结果　　W1(3.033648E-02)=2.948297
A=79112(m²/d)　　T=76.15536(m²/d)　　US=9.62619E-0.4
K=4.567786(m/d)

---

S1(4)=0.54　　t1(4)=20　　S2(4)=0.79　　t2(4)=90
结果　　W1(2.134691E-02)=3.290867
A=84321(m²/d)　　T=77.2487(m²/d)　　US=9.161225E-0.4
K=4.633364(m/d)

---

S1(5)=0.6　　t1(5)=30　　S2(5)=0.72　　t2(5)=60
结果　　W1(1.727829E-02)=3.498293
A=69451(m²/d)　　T=74.03861(m²/d)　　US=1.066051E-0.3
K=4.440823(m/d)* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
求参的结果：
导水系数=76.20001(m²/d)　　压力传导系数=77868.13(m²/d)
储水系数=9.785776E-04　　渗透系数=4.570463(m/d)
精度=0.025　　参加求参的组数=10

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *

（三）用灵敏度法求参数 T 及 $\mu^*$

灵敏度分析方法是采用计算机自动拟合求参的有效方法，可用于不同类型的含水层，如承压含水层中的完整井流与非完整井流、半承压及无压含水层中的井流等。现就应用 Theis 公式求参问题阐述其原理及应用。

1. 原理方法

由 Theis 公式

$$S = \frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{1}{u}e^{-u}du \tag{5-72}$$

可知，对任一径向距离的观测孔，$S=f(x,y,t,T,\mu^*,Q)$，当参数 T 或 $\mu^*$ 有一个微小变化 $\Delta T$，$\Delta\mu^*$ 时，必然引起降深 S 的变化，变为 $S^*=f(x,y,t,T+\Delta T,\mu^*,Q)$，因为其中参数 T，$\mu^*$，Q 是相互独立的，因此可将 $S^*=f(x,y,t,T+\Delta T,\mu^*,Q)$ 展成 *Taylor* 级数，忽略高次项有：

$$S^*(x,y,t,T+\Delta T,\mu^*,Q) = S(x,y,t,T,\mu^*,Q) + V_T\Delta T$$

$$V_T = \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{-S}{T} + \frac{Q}{4\pi T^2}\exp\left(-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\right) \tag{5-73}$$

同理，取 $\mu^*$ 微小变化时，按同样方法求得

$$V_{\mu^*} = \frac{\partial S}{\partial \mu^*} = -\frac{Q}{4\pi T}\exp\left(-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}\right) \tag{5-74}$$

式中 $V_T, V_{\mu^*}$——灵敏度系数。

为了求得最佳参数 $T,\mu^*$，采用最小二乘法求得一些参变量如下

$$\Delta T = \frac{E - C\Delta S}{B}$$

$$\Delta\mu^* = \frac{B\times D - C\times E}{A\times B - C^2}$$

其中 $A=\sum_i V_{\mu^*}^2(t_i)$　　$D=\sum_i V_{\mu^*}(t_i)[S_e(t_i)-S(t_i)]$

$B=\sum_i V_T^2(t_i)$　　$E=\sum_i V_T(t_i)[S_e(t_i)-S(t_i)]$

$C=\sum_i V_{\mu^*}(t_i)V_T(t_i)$

式中 $S_e(t_i)$——实测降深，$m$；

$S(t_i)$——计算降深，$m$。

由上述计算式，首先给出一个 $T$、$\mu^*$ 的估计初值，然后计算 $\Delta T$、$\Delta\mu^*$，用 $\Delta T$、$\Delta\mu^*$ 修正 $T$、$\mu^*$；再用修正的 $T$、$\mu^*$，用最小二乘法求出新的 $\Delta T$、$\Delta\mu^*$。如此反复，直到 $\Delta T$、$\Delta\mu^*$ 很小，前后两次 $T$、$\mu^*$ 变化不大时为止，此时的 $T$、$\mu^*$ 为所求参数值。

2. 计算机程序及说明

1）程序说明

程序中变量标识符代表的含义如下：

$S$——贮水系数；

$S_1$——迭代一次的贮水系数 $S$ 的修正值 $\Delta S$；

$T$——导水系数，$m^2/d$；

$T_1$——迭代一次的导水系数 $T$ 的修正值 $\Delta T$；

$S_0, T_0$——分别为所赋的贮水系数和导水系数的初值；

$a$——压力传导系数；

$BB$——资料利用起点序数；

$Se(i)$——水位降深的观测值，m；

$y(i)$——观测时间，min；

$S(i)$——计算的水位降深，m；

$N$——资料组数；

$A$——灵敏度系数 $V_{\mu_e}$；

$B$——灵敏度系数 $V_T$；

$R$——观测孔至抽水井的距离，m；

$Q$——抽水量，$m^3/d$；

$JfWC$——计算得到的降深均方差；

$PJWC$——计算得到的降深的平均误差；

$N_0$——计算点序数；

$T(h)$——输出时的观测时间，h；

$Sg$——输出时的实际观测降深，m；

$Ds$——最后一次迭代获得的计算降深与实测降深之差，m；

$Sj$——最后一次获得的计算降深，m。

按上述变量的含义输入有关数据，起动程序后，按提示分别给出 $BB$ 及初值 $S$ 和 $T$ 值，然后程序自动迭代、循环计算，直到满足精度要求后输出结果。

2) 源程序

```
1 red LMDQC program
5 rem this is the the program to calculate parameters using sensitivity method
10 read q, r, n, nl
20 Dim y(n),z(n),se(n),s(n)
30 for i=1 to n
40 read y(i), se(i)
50 y(i)=y(i)/60
60 next i

100 input "bb=";bb
110 input "s0=";s
115 input "t0=";t:qi=0
120 Iprint "          to=";t
130 Iprint "       s0=";s
140 Iprint "jfwc","              pjwc"
150 Iprint "s","          s1"
160 Iprint "t","            t1"
```

```
170 s0=s:t0=t
180 l=0:m=0:f=0:k=0:g=0:ef=0:jf=0
190 for i=bb to n
200 u=24*r^2*s/(4*t*y(i))
210 gosub 1000
220 a=-q*exp(-u)/(4*3.1415926*t*s)
230 b=-h/t+q*exp(-u)/(4*3.1415926*t^2)
240 l=a^2+l
250 f=b^2+f
260 g=a*b+g
270 fe=se(i)-n1-h
280 k=a*fe+k
290 m=b*fe+m
300 jf=fe^2+jf
310 ef=abs(fe)+ef
320 if gi <>1 goto 380
330 y(i)=int(y(i)*1e+3+0.5)/1e+3
340 s(i)=int(h*1e+4+0.5)/1e+4
350 lprint "NO.   T(h)        sg              ds              sj"
360 lprint i;tab(6);y(i);tab(14);se(i);tab(35);int(fe*1e+3+.5)/1e+3;tab(49);
    s(i)
370 gosub 1200
380 next i
390 if gi<>1 goto 397
395 goto 400
397 ww=sqr(jf/n):ee=ef/n
398 lprint ww,ee
400 s1=(f*k-g*m)/(l*f-g^2)
410 s=s1+s
420 t1=(m-s1*g)/(f)
430 t=t1+t
440 lprint s,s1
450 lprint t,t1
460 gosub 1200
470 if s>0 and s<2 and t>0 goto 510
480 if s>0 or s>2 then s=s0/10
490 if t<0 then t=t0/10
500 goto 170
510 if abs(t1)>1e-4 or abs(s1)>1e-8 goto 180
```

```
520 if gi<>1 goto 580
530 Iprint "jfwc=";int (sqr(jf/n) * 1e+6+.5)/1e+6
540 Iprint "pjwc=";int(ef/n * 1e+6+.5)/1e+6
550 Iprint "s=";s
560 Iprint "t=";t;"d"
570 Iprint "a=";int(t/s * 1e+4+.5)/1e+4
580 qi=1+gi
590 if gi=1 goto 180
600 end
1000 if u<1 goto 1040
1010 wu=q * (.250621+2.334733 * u+u * u)/(1.681534+3.330657 * u+u * u)
1020 h=wu/(4 * 3.1415926 * t * u) * exp(-u)
1030 return

1040 wu=-log(u)-.577216+u-.24991 * u * u+.0552 * u ^ 3-.0099 * u ^ 4+
     .0011 * u ^ 5
1050 h=wu * q/(4 * 3.1415926 * t)
1060 return
1200 Iprint "————————————————————————————————"
1210 return
2000 data 542.2,117.85,23,0
2010 data 8,.002,12,.006,30,.02,60,.05,120,.165,180,.27,240.37,300,.455
2020 data 360,.53,480,.655,600,.755,720,.88,900,1.,1200,1.15,1500,1.22
2030 data 1800,1.32,2100,1.39,2400,1.45,3000,1.51,3600,1.67,4200,1.71
2040 data 4800,1.72,5820,1.73
```

3) 算例

在某承压含水层中进行了非稳定流抽水试验，抽水量(Q)为 542.2m³/d，在距离抽水井 117.85m 处有一观测孔，其观测资料表 5-13，试求含水层参数。

根据题中数据，按程序要求输入数据见程序 2000 至 2040 句，然后运行 LMDQC 程序，得最终结果为：贮水系数 $\mu^* = 1.41 \times 10^{-3}$；导水系数 $T = 86.03\ m^2/d$；压力传导系数 $a = 61035.46\ m^2/d$。

## 第三节　根据水位恢复试验确定含水层参数

抽水试验井、注水井和长期开采井等都可利用停抽、停注和停采后井中的水位恢复资料来识别含水层参数。水位恢复的过程可排除抽水过程中一些因素的干扰，如抽水试验在许多情况下，要求固定流量，在现场由于种种原因这点不易做到，从而常引起 $S \sim \lg t$ 曲线的跳动。因此，根据水位恢复试验确定含水层参数是一种经常使用而有效的方法。

## 一、基本原理

抽水井停抽后，井中水位将迅速回升，而上升速度逐渐减缓。在抽水井附近的观测孔中水位上升速度则较慢；在远处的观测孔中的水位，在停抽后的一段时间内，水位不但不回升，反而继续下降，达到最大降深时下降速度等于零，随后才逐渐回升（图 5-22*a*），这点类似于地下水"惯性滞后"的动态反应。与阶梯流量井流试验相似，设抽水井以定流量 $Q$ 抽水，持续了 $t_P$ 时间后停止抽水，恢复水位，可以想象为该井仍以流量 $Q$ 继续抽水，井从停抽时刻起，有一个流量为 $Q$ 的注水井开始工作。这样，正负流量相互抵销，得到停止抽水的效果（图 5-22*b*）。

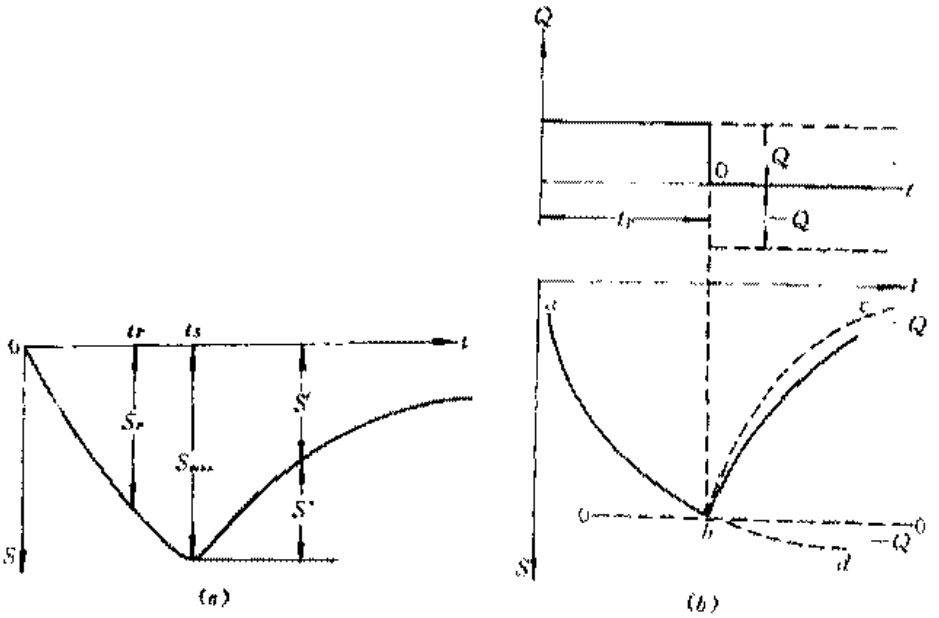



图 5-22　水位恢复试验 $S$～$t$ 曲线

*a*—有"惯性滞后"的水位恢复曲线；*b*—无"惯性滞后"的水位恢复曲线

如果不考虑水头"惯性滞后"动态，根据渗流的叠加原理，停止抽水后的剩余降深 $S'$ 可理解为流量 $Q$ 继续抽水一直延续到 $t$ 时刻的降深，和从停抽时刻起以流量 $Q$ 注水 $t-t_P$ 时间的水位回升的叠加。两者均可用 Theis 公式计算。故有

$$S' = \frac{Q}{4\pi T}\left[W\left(\frac{r^2}{4at}\right) - W\left(\frac{r^2}{4at'}\right)\right] \tag{5-78}$$

式中　$t'$——水位恢复延续时间；

$t = t_P + t'$

$t_P$——抽水持续时间。

当 $\frac{r^2}{4at'} \leqslant 0.01$ 时，上式可简化为

$$S' = \frac{2.3Q}{4\pi T}\left(\lg\frac{2.25at}{r^2} - \lg\frac{2.25at'}{r^2}\right) = -\frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t'}{t} \tag{5-79}$$

式(5-79)表明 $S'$ 与 $\lg\frac{t}{t'}$ 呈直线关系，直线斜率 $i = \frac{2.3Q}{4\pi T}$。

如果知道停抽时刻的水位降深 $S_P$，则停抽后任一时刻的水位上升值 $S'$ 为

$$S^* = S_p - S' = \frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25at_p}{r^2} + \frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{t'}{t}$$

$$= \frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\left(\frac{2.25at_p}{r^2}\cdot\frac{t'}{t}\right) \tag{5-80}$$

式(5-80)中，$\frac{t_p}{t} = \frac{t_p}{t_p+t'}$，当 $t_p \gg t'$ 时，$\frac{t_p}{t_p+t'} \approx 1$，于是式(5-80)可写成

$$S^* = \frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25at'}{r^2} = \frac{2.3Q}{4\pi T}\left(\lg\frac{2.25a}{r^2} + \lg t'\right) \tag{5-81}$$

式(5-80)、(5-81)表明 $S^*$ 与 $\lg\frac{t'}{t}$、$S^*$ 与 $\lg t'$ 也呈直线关系，直线斜率仍然是 $i = \frac{2.3Q}{4\pi T}$。因此，可根据恢复水位资料来识别含水层的参数。

## 二、方法与应用

### 1. 水位恢复曲线的绘制与解释

根据式(5-79)、(5-81)，可以利用水位恢复观测资料，在单对数纸上绘制 $S'$ 与 $\lg\frac{t}{t'}$，$S'$ 与 $\lg\frac{t'}{t}$ 和 $S^*$ 与 $\lg t'$ 曲线(图 5-23)。为了分析问题方便，最好 $S'\sim\lg\frac{t'}{t}$ 和 $S^*\sim\lg t'$ 曲线同时绘制。应强调指出，野外水位恢复试验时，应特别注意取得停泵后的 1～2 小时内的观测数据，这段时间的水位恢复曲线能反映井管、井壁及井周条件的特征，在生产实际中有重要意义，

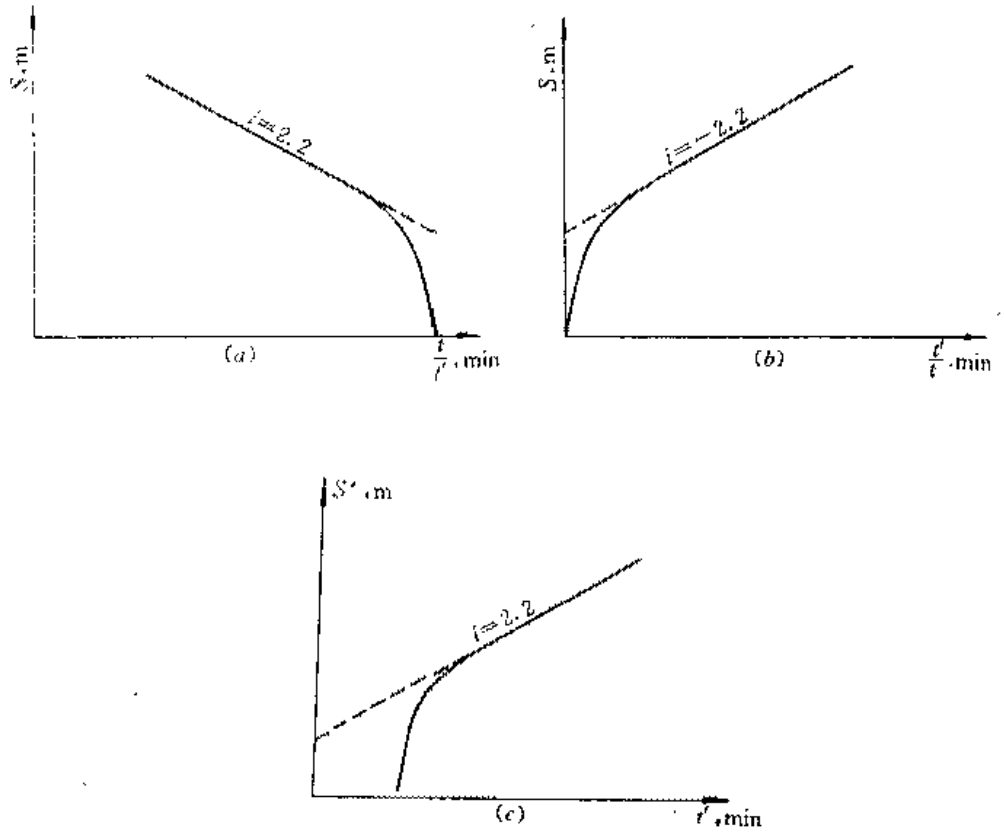



图 5-23　水位恢复试验曲线

$a$—$S'\sim\lg\frac{t}{t'}$ 曲线；$b$—$S'\sim\lg\frac{t'}{t}$ 曲线；$c$—$S^*\sim\lg t'$ 曲线

因此，这段时间内观测的水位数据应有足够的数量与精度，一般情况下可按表 5-14 中时间

间隔进行观测。

表 5-14　　水位恢复观测时间表

| 时间间隔，min | 1 | 5 | 10 | 30 或 60 |
|---|---|---|---|---|
| 次　　数 | 5～10 | 5～10 | 4～6 | 至稳定 |

一条完整的水位恢复曲线应包括曲线首段、直线段(中间段)及尾段(图 5-24)。首段曲线反映井管、井壁及井周的条件；尾段曲线反映边界条件；直线段曲线反映含水层本身的条件，用作水文地质参数的识别。

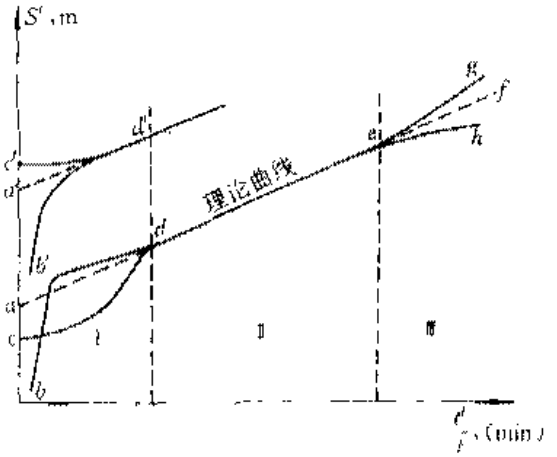



图 5-24　完整的水位恢复曲线

(据孙继璇，修改)

Ⅰ—首段曲线；Ⅱ—直线段(中间段)曲线；Ⅲ—尾段曲线

首段曲线(Ⅰ)：主要由于人为因素和自然因素的影响，使抽水井附近含水层的渗透性发生了改变。如含水层中存在软弱夹层、溶洞中泥砾的搬运或止水不妥引起井径收缩，因泥浆堵塞，孔壁坍塌，过滤器网眼堵塞以及井周含水层的渗透性突然变弱等，可使井孔周围的渗透性变小；钻孔揭露溶洞或因过滤器选择不佳而产生涌砂掏空等引起井径扩大，井下放炮、酸化、人工填砾以及井周含水层的渗透性突然变强等，可使井孔周围的渗透性变大。这种由于人为因素和自然因素的影响，在抽水井附近所造成的与含水层中不同的渗透系数称为条件性系数，记作 $K_c$。

当 $K_c<K$ 时，说明井周的渗透性低于含水层的渗透性，曲线的斜率变大，如图 5-24 中的 $bd$、$b'd'$ 段。图 5-25 表示了山东省东部某处混合花岗岩裂隙含水层中抽水试验的恢复曲线。生产中的供水井如果恢复曲线形态为这个类型，可利用井下爆破、酸化处理和压裂技术等改变井周条件，增大条件性系数、增大供水井的涌水量。

当 $K_c=K$ 时，说明井周的渗透性与含水层的渗透性一致，曲线斜率不变，如图 5-24 中的 $ad$ 段，与理论直线重合。

当 $K_c>K$ 时，说明井周的渗透性比含水层的渗透性大，曲线的斜率变小，如图 5-24 中的 $cd$，$c'd'$ 段。后面二种类型曲线的供水井，井的涌水量都没有扩大的可能，尤其第三种类型曲线，当补给条件不佳，还可能导致涌水量的减少。

此外，由于井损等原因都可能引起附加水头损失，表现在首段曲线偏离直线（Jacob 理论曲线）。

尾段曲线（Ⅲ）：反映边界条件的影响。图 5-24 中 *eg* 段曲线斜率增大偏离直线而上挠，说明受阻水条件的影响，如遇到阻水断层、含水层尖灭、透水性突然变弱等条件的影响。*eh* 段曲线斜率减小偏离直线而下挠，说明受供水条件的影响，如遇到与含水层有水力联系的地表水体、导水断层、透水性突然变强、含水层突然变厚等条件的影响。若为无界含水层，则尾段曲线不发生偏离，仍保留直线（*ef* 段）。

2. 含水层参数的计算

含水层参数的求得可利用恢复曲线中的直线段（Ⅰ），如图 5-24 中的 *de* 段。从直线斜率的关系式，很容易求得导水系数 $T$

$$T = 0.183\frac{Q}{i} \qquad (5\text{-}82)$$

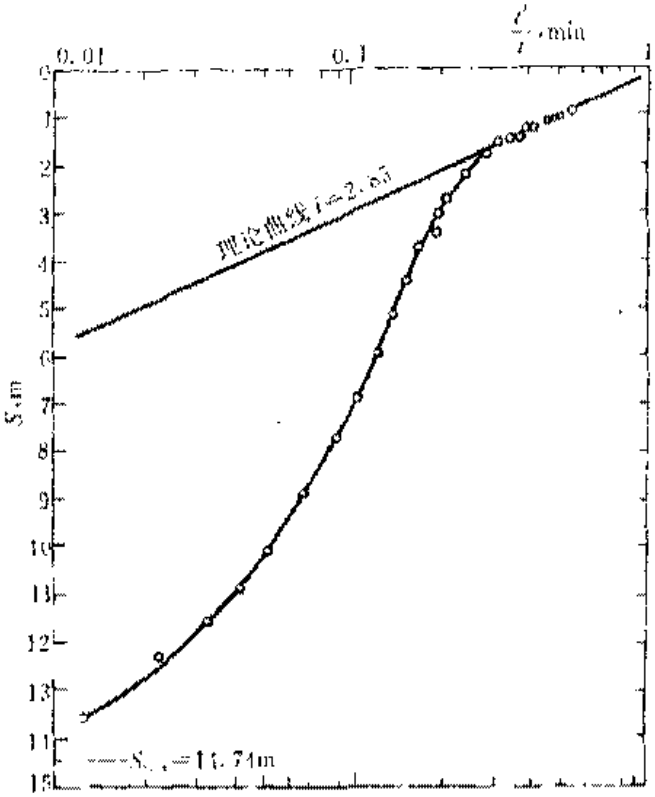



图 5-25　$K_c<K$ 的水位恢复曲线

（$S'\sim\lg\frac{t'}{t}$ 曲线）

图 5-23 是某煤田石炭系太原组上部薄层灰岩段抽水孔的一条恢复曲线，曲线的首段反映出 $K_c<K$。直线斜率 $i=2.2$，抽水的流量为 927.97m³/d，代入式(5-82)得导水系数 $T$ 为 77.19m²/d。

求得 $T$ 值后，则可利用停抽时刻降深的 Jacob 表达式求压力传导系数 $a$ 和贮水系数 $\mu^*$：

$$S_p = \frac{2.3Q}{4\pi T}\lg\frac{2.25at_p}{r^2} \qquad T = -\frac{2.3Q}{4\pi i}$$

将后式代入前式得

$$a = 0.44\frac{r^2}{t_p}10^{-\frac{S_p}{i}} \qquad (5\text{-}83)$$

例 5-9　浅层承压含水层中有一口完整井，以 159.84m³/d 的流量进行抽水试验，抽到 240min 的时刻停，在距抽水井 10m 处的观测孔观测水位如表 5-15 所示，试求含水层参数。

表 5-15　　水位恢复试验资料

| 累积时间 $t$ min | 240（停泵） | 245 | 250 | 255 | 260 | 270 | 280 | 300 | 330 | 360 | 420 | 480 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 剩余降深 $S'$，m | 0.95 | 0.73 | 0.61 | 0.55 | 0.50 | 0.44 | 0.40 | 0.34 | 0.29 | 0.26 | 0.22 | 0.19 |
| 回升高度 $S^*$，m | | 0.22 | 0.34 | 0.40 | 0.45 | 0.51 | 0.55 | 0.61 | 0.66 | 0.69 | 0.73 | 0.76 |
| $t/t'$ | | 49 | 25 | 17 | 13 | 9 | 7 | 5 | 3.67 | 3 | 2.32 | 2 |

解 (1) 根据表 5-15 的资料绘制 $S'\sim\lg\frac{t}{t'}$ 曲线(图 5-26);

(2) 求直线段斜率,取一个对数周期相应的降深 $\Delta S=i=-0.38$ 为直线斜率;

(3) 计算参数

$$T=-\frac{2.3Q}{4\pi i}$$

$$=\frac{2.3\times 159.84}{4\times 3.14\times 0.38}$$

$$=77\ \mathrm{m^2/d}$$

$$a=0.44\frac{r^2}{t_p}10^{-\frac{s_r}{s}}$$

$$=0.44\frac{10^2\times 60\times 24}{240}\times 10^{2.5}$$

$$=83484\ \mathrm{m^2/d}$$

$$\mu^*=\frac{T}{a}=\frac{77}{83484}=9.2\times 10^{-4}$$

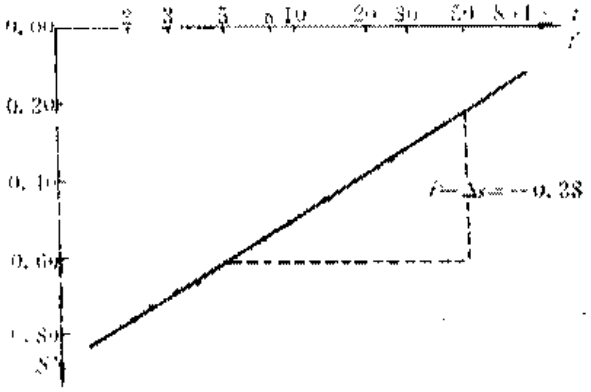



图 5-26 水位恢复试验 $S'\sim\lg\frac{t}{t'}$ 曲线

## 第四节 根据动态观测资料确定含水层参数

前几节,主要介绍了利用抽水试验资料求参,本节将介绍利用地下水动态观测资料求水文地质参数的方法。

### 一、标准曲线对比法确定含水层参数

#### 1. 潜水含水层

1) 原理

当潜水含水层中地下水作非稳定运动时,由式(2-37)有

$$\begin{cases}\dfrac{h_{x,t}-h_{0,0}}{\Delta h_{0,t}}=F(\lambda)=\dfrac{\Delta h_{x,t}}{\Delta h_{0,t}}\\ \lambda=\dfrac{X}{2\sqrt{at}}\ \text{或}\ t=\dfrac{x^2}{4a\lambda^2}\end{cases}$$

对上二式两边取对数,得

$$\lg\frac{\Delta h_{x,t}}{\Delta h_{0,t}}=\lg F(\lambda)$$

$$\lg t=\lg\frac{1}{\lambda^2}+\lg\frac{x^2}{4a}$$

对同一观测孔,上式 $\lg\frac{x^2}{4a}$ 为常数,表明在双对数纸上 $\frac{\Delta h_{x,t}}{\Delta h_{0,t}}\sim t$ 曲线和 $F(\lambda)\sim\frac{1}{\lambda^2}$ 曲线的图形相同,只是横坐标平移了 $\frac{x^2}{4a}$ 而已。这时可用标准曲线对比法求 $a$。

2) 步骤

(1) 在双对数坐标纸上作出 $F(\lambda)\sim\frac{1}{\lambda^2}$ 标准曲线;

(2) 在另一张模数相同的双对数坐标纸上作出$\frac{\Delta h_{r,t}}{\Delta h_{0,t}}\sim t$实测曲线；

(3) 将实测曲线与标准曲线进行配线，使其完全重合，重合后，任选一点，读出该点的坐标值〔$t$〕、〔$\frac{1}{\lambda^2}$〕；

(4) 将这些数值代入下列公式中即可求出参数$a$。

$$a=\frac{X^2}{4[t]\left[\frac{1}{\lambda^2}\right]} \tag{5-84}$$

2. 承压含水层

1) 原理

在承压含水层中，地下水向排水沟作非稳定运动时，由式(2-68)式有

$$S=\frac{q_0x}{T}W(u_h)$$

$$u_h=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\mu^*}{Tt}} \qquad 或 \qquad t=\frac{r^2\mu^*}{4T}\cdot\frac{1}{u_h^2}$$

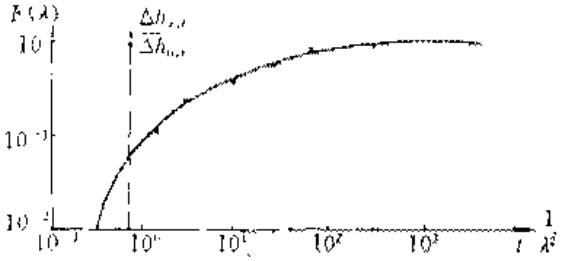



图 5-27 水位变幅-时间配线法

对上二式取对数得：

$$\lg S=\lg W(u_h)+\lg\frac{q_0x}{T}$$

$$\lg t=\lg\frac{1}{u_h^2}+\lg\frac{x^2\mu^*}{4T}$$

2) 步骤

根据表 2-5 数据在双对数纸上作$W(u_h)\sim\frac{1}{u_h^2}$理论曲线，然后，与$S\sim t$实测曲线配线，选取任一匹配点，取四个坐标值：〔$S$〕、〔$t$〕、〔$\frac{1}{u_h}$〕、〔$W(u_h)$〕，按下列公式求参：

$$\begin{cases}T=\dfrac{q_0x}{[S]}[W(u_h)]\\[2ex]\mu^*=\dfrac{4T[t]}{x^2\left[\frac{1}{u_h^2}\right]}\end{cases} \tag{5-85}$$

二、局部均衡法确定潜水含水层的参数

若某地段有 6 个观测孔(图 5-28)，以观测孔 1 为中心形成均衡域，即图中阴影部分，可按下述方法求参：

(1) 先找出与中心孔有关的所有三角形的外心，然后把各三角形的外心连接起来，得到围绕观测孔 1 的一个多边形均衡域；

(2) 采用有限差分法，对该均衡域建立起有限差分的均衡方程：

$$\sum_{i=1}^{n}T\frac{\bar{h}_i-\bar{h}_1}{L_{1i}}l_{1i}=A_1\mu\frac{\Delta h_1}{\Delta t}-A_1W \tag{5-86}$$

式中 $A_1$——均衡域的面积；

$L_{1i}$——观孔 1 与周围任一观测孔 $i$ 的间距；

$\bar{h}_i$——时段内任一观测孔 $i$ 的平均水位；

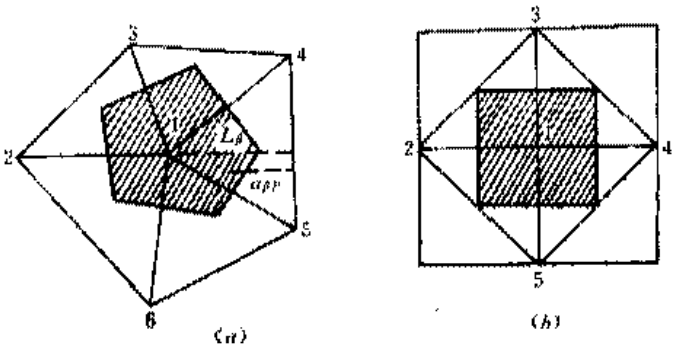



图 5-28　均衡单元划分图

$\bar{h}_1$——时段内中心观测孔 1 的平均水位；

$l_{1i}$——由中心孔与相邻观测孔连线的中垂线组成的多边形的边长；

$T$——含水层 $\Delta t$ 内的平均导水系数；

$\mu$——含水层的给水度；

$\Delta h_1$——中心观测孔在计算时段内的水位变化值；

$n$——中心孔 1 周围观测孔数(此时 $n=5$)；

$\Delta t$——计算时段；

$W$——时段内单位面积上水的交换量。

3. 求参

(1) 若 $T$ 已知，利用上式采用任一时段钻孔的水位观测资料及 $W$ 值，便可求出给水度 $\mu$ 值；反之，如果事先知道 $\mu$ 值，也可求出 $T$ 值。

为了减少利用个别时段观测资料求参产生的随机误差，可以根据多个时段的实测资料，当 $W=0$ 或 $W$ 不变时在方格纸上绘制 $A_1\frac{\Delta h_1}{\Delta t}$ 与 $\sum_{i=1}^{n} l_{1i}\frac{\bar{h}_i-\bar{h}_1}{L_{1i}}$ 关系图如图 5-29 所示，即为一直线，截得直线的斜率：

$$i=\frac{T}{\mu}=\frac{A_1\dfrac{\Delta h_1}{\Delta t}}{\sum\limits_{i}^{n}\dfrac{\bar{h}_i-\bar{h}_1}{L_{1i}}l_{1i}}$$

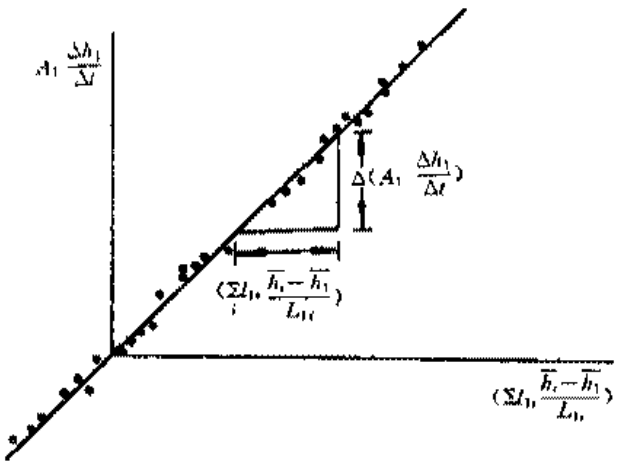



图 5-29　$\sum_i l_{1i}\frac{\bar{h}_i-\bar{h}_1}{L_{1i}}$ 与 $A_1\frac{\Delta h_1}{\Delta t}$ 关系图

得 $T=i\mu$ 或 $\mu=\frac{T}{i}$，即求得 $\mu$ 或 $T$。

由于直线通过大多数数据点，因此可以提高 $\mu$ 或 $T$ 值的精度。

(2) 如果 $T$ 和 $\mu$ 值均为未知时，则可用两个时段的动态资料分别列出两个方程式：

$$\begin{cases} T\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i-\bar{h}_1}{L_{ti}}l_{ti}\right]_1-\mu\left[A_1\frac{\Delta h_1}{\Delta t}\right]_1+A_1W_1=0 \\ T\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{h_i-\bar{h}_1}{L_{ti}}l_{ti}\right]_2-\mu\left[A_1\frac{\Delta h_1}{\Delta t}\right]_2+A_1W_2=0 \end{cases} \tag{5-87}$$

进行联合求解，可求得 $\mu$ 及 $T$ 值。

根据上述求参原理，可将此法推广到大均衡区求区域含水层参数。对于大面积含水层参数的识别，应根据水文地质条件将大区域划分为若干个水文地质小单元，然后建立多单元模型进行识别。前面介绍的参数确定的试算法也存在明显的缺点，主要是它没有什么系统途径的算法来逼近"最优解"。同时，由于以上提到的存在非唯一性问题，即使是实际上已经达到了最优估计值，但也难以发现。类似这些问题的解决，需借助于计算机应用最优化技术方法，此内容将在后续课程中陆续加以介绍。

# 第六章　地下水运动的两个专门问题

## 第一节　地下水在裂隙介质中的运动

### 一、导论

前面叙述的主要研究对象是多孔介质中的渗流。裂隙介质以及在其中的地下水运动，有着许多不同的特点和规律。

(1) 裂隙的几何形状与孔隙不同。孔隙空间一般是各向同形的、杂乱的，并且规模很小，而裂隙空间则多为直线分布，曲率不很大，有时长度可以很大，长比宽可大几个数量级。因此，在某些实际问题中，往往需要研究一个或若干个主干裂隙中水流的水力学规律，或者需要根据反映裂隙网络结构规律模型的分析，对裂隙水流进行评价。

(2) 裂隙介质的渗透性具有更明显的非均质性和各向异性。裂隙发育程度极不均匀，小的有岩石的各个矿物颗粒中晶格的位移，大者有贯穿整个区域的巨大构造断裂。按照裂隙的规模可划分为三个等级，微裂隙(长 0.01～10cm，宽<0.1mm)、大裂隙(长 0.10～100m，宽>0.1mm)、巨大裂隙(长>100m)。微裂隙的透水性十分微弱，比大裂隙可小几个数量级。因此，在研究裂隙介质中地下水运动时，一般把大裂隙构成的连通透水网络视为基本的导水途径。裂隙发育的极不均匀性，裂隙介质中地下水运动存在着很多与多孔介质中渗流的不同特征。在平面上，可能存在个别大的断裂带，特别是岩溶地区，在断裂带上的导水性比整个断裂岩层地区要大得多，而形成主径流带。隔水断层的作用，可造成两侧水头值不连续，发生突变。如河北省邯郸铁矿南洛河断层南北两侧地下水水头差 21m 以上，距此不远的峰峰煤矿断层两侧常出现水头成阶梯状的突变。在基岩地区，有时可能存在与整个地下水系统没有联系的孤立的地下水体，地下水位的变化取决于局部条件而和整个地下水系统的水动力条件无关，故不能利用局部地区的观测孔水位资料来确定水文地质参数。各个裂隙导水性的差异，造成了地下水位分布的反常现象。如距抽水井或天然排泄点近的地下水位反而高于远处的水位，这是由于近处的地下水位不在主径流带上，而是绕道远处流入导水性好的大裂隙再进入水井或天然排泄点的缘故。在剖面上，裂隙介质的透水性一般随深度的增加而减弱，这是由于裂隙和岩溶的发育程度随深度增加而减弱造成的。另外，在剖面上还可能存在不透水的地层，阻隔了上下含水层地下水的联系，引起二层水位不同而产生双层水位。如峰峰矿区奥陶系碳酸盐岩中存在双层水位现象。

裂隙介质中，由于裂隙分布具有明显的方向性，往往造成渗透性的各向异性，在抽水井某个方向相距十多米甚至几米的观测孔影响不大，而另一方向上相距几百米甚至几千米的观测孔则反应灵敏，反映出明显的连通性。这种各向异性，要求将渗透系数看成一个张量。

(3) 裂隙介质的储水能力要比多孔介质小。虽然对于单个裂隙来说，如溶洞、张开的大裂隙，其空隙空间比单个的孔隙要大得多，但裂隙数量则比孔隙少得很多，就整体而言，裂隙

介质的裂隙率，通常比多孔介质的孔隙度小得多，因此，裂隙介质中的给水度和贮水系数比多孔介质小。由于裂隙介质的贮水性较小，因此往往具有相当大的地下水位年变幅。如山东省博山良庄岩溶裂隙水，年水位变幅达 40～50m，且越靠近补给区，地下水位年变幅越大，在山东省淄博地区，靠近补给区的博山神头水源井，年水位变幅达 50～60m，位于下游的第二化肥厂的水源井，年水位变幅为 8～10m，在其上游几公里处的炼油厂水源井，年水位变幅则为 10～14m。

(4) 裂隙介质的贮水性主要取决于遍布整个岩层中的孔隙(如粒间孔隙、溶孔、气孔等)和微裂隙，而导水性则主要取决于一些大的裂隙和溶蚀裂隙。

目前，研究液体在裂隙介质中的运动，主要有二个方向：

(1) 把裂隙岩石视为连续介质，用连续介质方法研究裂隙岩石中的液体渗流问题，此时，忽略了单个裂隙在空间的规模、形状及排列等特征，只考虑介质总体对渗流的影响。如前面叙述的按多孔介质处理的裂隙岩石的渗流问题，以及下面将要介绍的孔隙——裂隙介质中地下水运动的双重介质模型。

(2) 把裂隙岩石看作是一种由按一定的几何规律分布的裂隙系统所分割的不连续介质。这种处理要考虑裂隙结构特征，即要考虑单个裂隙规模、几何形状、排列、空间分布，裂隙充填等，需要研究裂隙的方位、隙宽(或裂隙张开度)、密度(或隙间距)等几何参数(叫裂隙的水力参数)，建立各种裂隙介质的水动力学模型。显然，这种研究途径比第一种考虑得更符合实际，但也困难得多，主要原因是目前野外的探测技术还难以确定每一个裂隙的上述几何参数。因此，这种研究方法如何应用于实际，一些问题还有待于进一步探索。

**二、孔隙——裂隙介质中的地下水流**

在 50 年代以前，人们多用多孔介质模型来近似研究裂隙水流问题，而忽视了多孔介质与裂隙介质的区别。后来，石油部门通过大量的研究发现：原生致密的基岩粒间孔隙率相当大，约为 2%～27%，但渗透率很低，为 $0.01\times10^{-10}$～$1.5\times10^{-10}mm^2$，而裂隙所占的裂隙率一般为0.1%～0.4%，渗透率则为 $10^{-5}$～$10^{-3}mm^2$，因此，岩石的贮水性质主要取决于孔隙，而导水性质主要取决于裂隙。这就是基岩中的孔隙-裂隙岩层的基本特点。

1960 年 T·N·Баренблатт 提出了孔隙-裂隙岩层中渗流的"双重介质"模型，为裂隙水运动研究奠定了理论基础。70 年代 T·D·Streltsova 等人应用双重介质模型于承压和无压井流的计算。目前，这一理论已成为裂隙水动力学计算的重要理论之一。

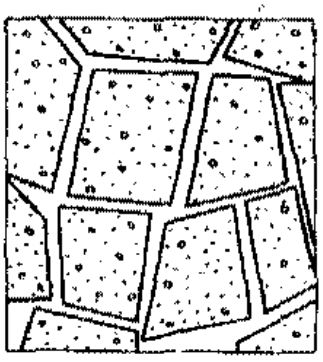


图 6-1 裂隙介质结构图
(据 T. D. Strelsova)

1. 基本定义与假设

双重介质的基本思想是将裂隙岩层看作具有两种不同渗流特征的结构——裂隙和带有孔隙的岩块(图 6-1)。岩块和裂隙有着绝然不同的孔隙度和渗透率。岩块的孔隙度大而渗透率小得多，裂隙则渗透率大面孔隙度小得多，即地下水主要贮存于具有大量孔隙的岩块中，而地下水的运动主要在裂隙中进行。孔隙与裂隙分别连续分布于整个研究区，形成两个重叠的连续系统，它们共同构成连续介质的统一体，这就是双重介质模型。

建立数学模型时作如下假设：

(1) 孔隙和裂隙发育均匀，即孔隙度与裂隙率之比在各处大致相等，而裂隙的分布则是

随机的。

(2) 由于双重介质存在孔隙、裂隙两个重叠的连续系统，因此，在渗流区中每一个点上都有两个水头，一个孔隙水头 $H^p$，另一个裂隙水头 $H^f$。

(3) 孔隙以贮水为主，裂隙以导水为主；水自孔隙到裂隙，通过裂隙输送到水井或其他排泄点。

(4) 当孔隙水头和裂隙水头不同时，如抽水时首先裂隙中水头降低，形成了孔隙与裂隙之间的水头差，二者则发生水量交换，交换量 $q_{pf}$ 与水头差成正比：

$$q_{pf} = C(H^p - H^f) \tag{6-1}$$

式中 $q_{pf}$——单位体积的含水层，在单位时间内从孔隙流入裂隙的水量；

$C$——比例常数。

此外，水在裂隙中的运动服从 Darcy 定律。

2. 数学模型的建立

根据上述基本假设和水流连续性原理，可以建立裂隙承压含水层的基本微分方程。为了方便，在含水层中任取一微小的平行六面体均衡单元(图 1-39)，坐标轴取得和主渗透方向一致。对于裂隙系统，根据第(3)个假设，该均衡单元的水是通过裂隙流入、流出，并服从 Darcy 定律。根据水均衡原理，在 $\Delta t$ 时间内沿 $x$、$y$、$z$ 轴方向流入与流出该单元的水量差，等于这个时间内该单元裂隙内储存量的变化。于是有

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}^f \frac{\partial H^f}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}^f \frac{\partial H^f}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_{zz}^f \frac{\partial H^f}{\partial z}) + C(H^p - H^f) = \mu_t^f \frac{\partial H^f}{\partial t} \tag{6-2}$$

式中 $K_{xx}^f$、$K_{yy}^f$、$K_{zz}^f$——与 $x$、$y$、$z$ 轴平行的裂隙主渗透系数；

$H^f$、$H^p$——裂隙、孔隙的水头值；

$\mu_t^f$——裂隙的贮水率。

上式与前面的多孔介质中承压水流的基本微分方程比较，双重介质承压水流的微分方程中仅多方程左边的第四项，它表示由孔隙流向裂隙的交换水量(取正值)。

同理，对于孔隙系统有

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}^p \frac{\partial H^p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}^p \frac{\partial H^p}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_{zz}^p \frac{\partial H^p}{\partial z}) - C(H^p - H^f) = \mu_t^p \frac{\partial H^p}{\partial t} \tag{6-3}$$

式中 $K_{xx}^p$、$K_{yy}^p$、$K_{zz}^p$——沿 $x$、$y$、$z$ 轴方向孔隙系统的主渗透系数；

$\mu_t^p$——孔隙岩块的贮水率。

方程左边第四项表示的是从孔隙流出的交换水量，取负值。

裂隙介质系统以输水为主，当抽水时裂隙中的水头首先下降，尤其在抽水井附近形成较大的水力坡度；孔隙介质系统则是以贮水为主，尽管裂隙介质中水头已下降，但孔隙水还来不及流入裂隙，尤其是抽水初期阶段，因此孔隙介质中的水力坡度很小，于是有

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}^p \frac{\partial H^p}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}^p \frac{\partial H^p}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_{zz}^p \frac{\partial H^p}{\partial z}) \approx 0$$

故有

$$\mu_t^p \frac{\partial H^p}{\partial t} = C(H^f - H^p) \tag{6-4}$$

或

$$\frac{\partial H^p}{\partial t} = \varepsilon(H^f - H^p) \tag{6-5}$$

$$\varepsilon = \frac{C}{\mu_t^p} \tag{6-6}$$

式中，$\varepsilon$ 称双重介质水量迁移系数，是反映孔隙和裂隙之间水量交换特征的参数，与孔隙的渗透性、多孔岩块的几何特征等有关。其他条件相同时，$\varepsilon$ 越小，从孔隙向裂隙迁移的水量也越小。

为了建立裂隙水的基本微分方程，将式(6-5)用降深表示，得

$$\frac{\partial S^p}{\partial t} = \varepsilon(S^f - S^p) \tag{6-7}$$

这是一个非齐次的一阶线性微分方程，它的通解为

$$\begin{aligned} S^p &= e^{-\int_0^t \varepsilon dt}\left(\int_0 \varepsilon S^f(\tau) e^{\int_0^t \varepsilon dt} d\tau + C_1\right) \\ &= e^{-\varepsilon t}\left(\int_0 \varepsilon S^f(\tau) e^{\int_0^t \varepsilon dt} d\tau + C_1\right) \\ &= e\int_0 S^f(\tau) e^{-\varepsilon(t-\tau)} d\tau + C) \end{aligned}$$

将初始条件 $S^p - S^f = 0$（$t=0$ 时）代入，可得 $C=0$，故有

$$S^p = \varepsilon\int_0 e^{-\varepsilon(t-\tau)} S^f(\tau) d\tau \tag{6-8}$$

用分部积分法有

$$\begin{aligned} &\int_0 e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial S^f(\tau)}{\partial t} d\tau = \int_0 e^{-\varepsilon(t-\tau)} dS^f \\ &= e^{-\varepsilon t}\int_0 e^{\varepsilon\tau} dS^f = e^{-\varepsilon t}\left[e^{\varepsilon\tau} S^f\Big|_0^t - \int_0 \varepsilon e^{\varepsilon\tau} S^f d\tau\right] \\ &= e^{-\varepsilon t}\left[e^{\varepsilon t} S^f - \int_0 \varepsilon e^{\varepsilon\tau} S^f d\tau\right] \end{aligned}$$

利用式(6-8)得

$$S^f - S^p = \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial S^f}{\partial t} d\tau \tag{6-9}$$

将式(6-9)再化回水头表示

$$H^p = H^f - \int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial H^f}{\partial t} d\tau \tag{6-10}$$

将它代入式(6-5)得

$$\varepsilon(H^f - H^p) = \frac{\partial H^p}{\partial t} = \varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial H^f}{\partial t} d\tau$$

将它代入式(6-2)便可得到只包括裂隙水头 $H^f$ 的方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K^f_{xx}\frac{\partial H^f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K^f_{yy}\frac{\partial H^f}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K^f_{zz}\frac{\partial H^f}{\partial z}\right) = \mu^f_s \frac{\partial H^f}{\partial t} + \mu^p_s \varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial H^f}{\partial \tau} d\tau \tag{6-11}$$

式(6-11)是描述双重介质承压水流的基本微分方程式。在二维流情况下，此式可简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T^f_{xx}\frac{\partial H^f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(T^f_{yy}\frac{\partial H^f}{\partial y}\right) = \mu^f_s \frac{\partial H^f}{\partial t} + \mu^p_s \varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)} \frac{\partial H^f}{\partial \tau} d\tau \tag{6-12}$$

式中 $T^f_{xx}$、$T^f_{yy}$——裂隙的主导水系数（分别与 $x$、$y$ 轴平行）；

$\mu^f_s$、$\mu^p_s$——裂隙和孔隙岩块的贮水系数。

对于均质各向同性裂隙含水层中的完整抽水井而言，则有

$$T^f\left(\frac{\partial^2 H^f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H^f}{\partial r}\right)=\mu_*^f\frac{\partial H^f}{\partial t}+\mu_*^f\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial H^f}{\partial \tau}d\tau \tag{6-13}$$

式中 $T^f$——裂隙的导水系数。

式(6-11)、(6-12)、(6-13)与多孔介质中承压水流的基本微分方程比较，只多出一项

$$\mu_*^f\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial H^f}{\partial \tau}d\tau$$

或在二维情况下为

$$\mu_*^f\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial H^f}{\partial \tau}d\tau$$

此式表示的是单位时间内单位体积(二维时为单位面积的柱体)含水层中，从孔隙流入裂隙的水量。显然，它是一个和时间有关的量。在抽水初期，$t$ 值很小，上述积分值微小，抽出的水主要来自裂隙内水的释放。由于裂隙贮水系数 $\mu_*^f$ 较小，从而造成裂隙水头迅速下降，引起裂隙水头低于孔隙水头。在水头差的作用下，多孔岩块的水流向裂隙。随着时间的增长，裂隙水头的下降速度也随之减缓。可见，多孔岩块中的水是逐渐释放出来的，从而造成孔隙水头的下降落后于裂隙水头的下降，在时间上存在着迟后。从孔隙流向裂隙的那一部分水量也可称为延迟弹性释水量。随着时间的进一步增长，迟后效应逐渐变小，孔隙中释放的水量逐渐跟得上裂隙中水位下降，最后迟后效应小到可以忽略。将式(6-13)和潜水 Boulton 方程比较，不难发现二者在形式上是相似的，都包含有延迟效应项。该项包含水量迁移系数 $\varepsilon$。$\varepsilon$ 越小，从孔隙向裂隙迁移的水量越少，延迟时间越长，反之，$\varepsilon$ 越大，从孔隙向裂隙迁移的水量越多，延迟时间就越短。

如果是均质各向同性、等厚的承压含水层，抽水前所有的裂隙、孔隙中的水头视为相等；井是完整的，并以定流量抽水，则方程(6-13)可改写以降深表示

$$T^f\left(\frac{\partial^2 S^f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S^f}{\partial r}\right)=\mu_*^f\frac{\partial S^f}{\partial t}+\mu_*^f\varepsilon\int_0^t e^{-\varepsilon(t-\tau)}\frac{\partial S^f}{\partial \tau}d\tau \tag{6-14}$$

式中 $S^f$ 为裂隙中的降深。此时有边界条件

$$S^f(\infty,t)=0 \tag{6-15}$$

$$\lim_{r\to 0} r\frac{\partial S^f}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi T^f} \tag{6-16}$$

和初始条件 $S^f(r,0)=0$

T·D·Streltsova 根据上述定解问题，得到了如下的解

$$S^f=\frac{Q}{4\pi T^f}W_f\left(\frac{r}{B},\varepsilon,\eta\right) \tag{6-17}$$

式中 $W_f$——裂隙水流井函数；

$r$——从轴水井到任一点的径向距离；

$B$——$\sqrt{\frac{T^f}{C}}$；

$\eta$——$\frac{\mu_*^f}{(\mu_*^f+1)}$；

$\varepsilon$——$\frac{C}{\mu^f}$；

$C$——$\frac{K^f}{l}$；

$l$——岩块的特征长度，以岩块的平均大小或岩块中心到它表面的平均距离表示；

$t$——抽水时间。

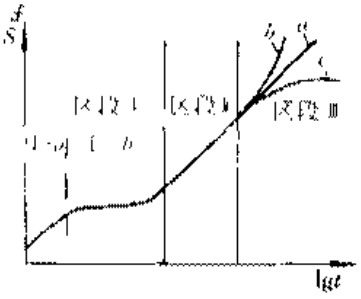



图 6-2　双重介质中抽水的 $S\sim\lg t$ 曲线的标准形式

在双对数纸上可以绘制 $\lg S^f\sim\lg t$ 曲线，在单对数纸上可以绘制 $S^f\sim\lg t$ 或 $S^f\sim\lg(\frac{t}{r^2})$ 曲线等。双重介质的抽水试验曲线和有延迟给水的潜水含水层相似(图 6-2)。标准的 $S^f\sim\lg t$ 曲线大致有三个区段。I 区段又可分为两部分，I-$a$ 为陡的倾斜直线，反映抽水初期大裂隙的释水，它和 Boulton 潜水含水层抽水曲线的早期部分对应。但是由于裂隙的贮水系数 $\mu_*^f$ 很小，而 $T^f$ 很大，这一部分很快消失，实际工作中很难观测到，通常反映在抽水开始时观测孔水位的急剧跳动上，因而很难用它来确定参数。I-$b$ 为近似水平段，和潜水的迟后排水补给相似，它是由于裂隙释水后裂隙水头降低，造成裂隙与孔隙之间的水头差、孔隙岩块中的水不断补给裂隙。II 区段又是倾斜的直线，它和 Boulton 曲线的晚期部分相对应，可以利用它来求参。区段 III 是由于边界的影响或非均质性影响的结果。如无影响则曲线尾部如 $a$ 所示，为 I 区段的直线外延部分。若是隔水边界，曲线尾部上挠而变陡，如 $b$ 所示；若是补给边界则曲线变缓趋于水平，如 $C$ 所示。

裂隙或岩溶含水层中的水文地质参数，最好用直线图解法根据抽水试验资料来确定。在判别曲线的计算区段时，$S\sim\lg(\frac{t}{r^2})$ 图解的效果较好。它有三种情况(图 6-3)：

(1) 当双重孔隙度效应不存在或实际上没有显示时，与一般的多孔介质半对数曲线一样，其初始部分没有滞后现象(图 6-3$a$)。

(2) 与 Boulton 曲线类似，具有滞后形成的一般渐近线区段(图 6-3$b$)。

(3) 不同的观测孔的半对数曲线的渐近线区段大致平行，都有滞后现象(图 6-3$c$)。

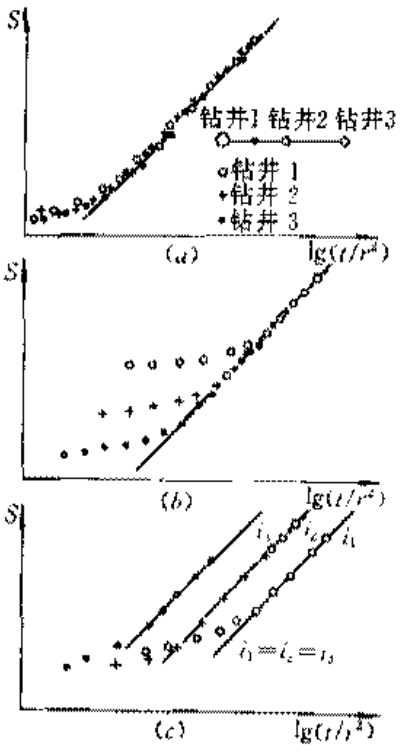



图 6-3　双重介质中抽水的 $S$-$\lg\frac{t}{r^2}$ 曲线的标准形式

(据 B. B. 博列夫斯基等)

由倾斜直线(相当于图 6-2 中的 I 段)的斜率，可以求出裂隙的导水系数 $T^f$

$$T^f=\frac{0.183Q}{i} \tag{6-18}$$

式中　$Q$——水井抽水流量；

$i$——直线的斜率。

由该段直线在横轴上的截距 $t_0$ 可求出孔隙的贮水系数 $\mu_*^f$

$$\mu_*^f=2.25\frac{T^f t_0}{r^2} \tag{6-19}$$

式中　$r$——观测孔至抽水井的径向距离。

上述三种情况中的前二种与一般的多孔介质中求参相

似，在正确解释下确定的参数与实际情况相符；后一种情况所计算的参数可能偏大或偏小。这与抽水井相对应观测孔的位置及含水层裂隙性质有关，$T^f$ 的计算值随观测孔与抽水井的距离的增加而增高，即抽水井附近的观测孔所求得的 $T^f$ 值偏低，而远处的观测孔所求的 $T^f$ 值偏高，这种现象是强裂隙含水层的典型特点。当存在其他水源补给时，如近河地段的补给，也可能产生若干个平行的曲线簇，根据这些曲线所求得的参数可能偏高。为了准确的求得水文地质参数，应在离抽水井不同的距离上有足够数量的观测孔。

类似地，可导出双重介质中无压水流的微分方程。由于存在自由水面，水头降低后将释放出与给水度 $\mu$ 有关的水量。因此在式(6-2)的右端将出现一个与此有关的量。在二维情况下有

$$\frac{\partial}{\partial x}(T^f_{xx}\frac{\partial H^f}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(T^f_{yy}\frac{\partial H^f}{\partial y})=\mu^f\frac{\partial H^f}{\partial t}+(\mu^k_s+\mu^p)\alpha\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{\partial H^f}{\partial \tau}d\tau \qquad (6\text{-}20)$$

式中 $\alpha=\dfrac{Ch}{\mu^k_s+\mu^p}$——无压水的水迁移系数；

$h$——无压含水层厚度；

$\mu^f$、$\mu^p$——裂隙、孔隙的给水度；

$\mu^k_s$——孔隙的贮水系数。

方程(6-20)右端的第二项，物理含义是延迟弹性释水量和延迟重力释水量之和，即单位时间内单位面积含水层柱体中，在弹性和重力的联合作用下从孔隙流入裂隙的水量。

对于均质各向同性介质中的单井抽水有

$$T^f(\frac{\partial^2 H^f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H^f}{\partial r})=\mu^f\frac{\partial H^f}{\partial t}+(\mu^k_s+\mu^p)\alpha\cdot\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{\partial H^f}{\partial \tau}d\tau \qquad (6\text{-}21)$$

T·D·Streltsova 等人。根据上述微分方程，将定解条件代入得到了无压水流微分方程的解为

$$S_f=\frac{Q}{2\pi T^f}W_f(\frac{r}{B},\alpha t,\eta)$$

式中，$W_f$——无压裂隙水井函数。

N·S·Boulton 和 T·D·Streltsova 根据他们对非承压裂隙水流微分方程的解

$$W=\frac{S_f}{\frac{Q}{4\pi T^f}}$$

绘制了距抽水井不同距离 $r$，$\mu^k_s=0.0001$，$\mu^k_s=0.001$，$\mu^p=0.1$，$\alpha_1=1000$，$\alpha_2=0.1$ 的标准曲线(图 6-4，$\alpha_1$、$\alpha_2$ 分别为承压和无压含水层延迟系数)。随着时间的推移，每条时间-降深曲线代表不同的反应。抽水初期代表裂隙弹性反应，孔隙弹性反应甚微，井函数 $W$ 接近泰斯曲线，与 $W(\theta_1)$ 曲线汇合，其中 $\theta_1=\dfrac{4T^f t}{r^2\mu^f_s}$。面后，多孔岩块的延迟弹性反应对裂隙水流产生影响，出现弹性延迟的过渡曲线。再后，曲线与泰斯曲线

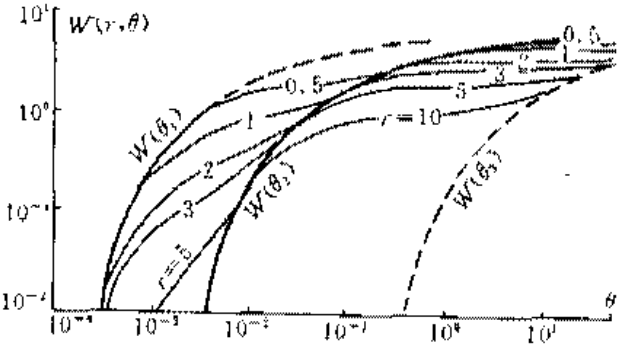



图 6-4 无压裂隙水流 $W(r,\theta)\sim\theta$ 标准曲线形式

$W(\theta_2)$近似，其中 $Q_2=\frac{4T't}{r^2(\mu_s'+\mu_s'')}$。最后，无压含水层水位变化的影响取代抽水时含水层的弹性反应，先出现重力排水延迟的过渡曲线，后来又与泰斯曲线 $W(\theta_3)$交汇，其中 $Q_3=\frac{4T't}{r^2(\mu_s'+\mu_s''+\mu')}$。这就是抽水过程中时间-降深曲线全过程。

### 三、不连续裂隙介质中的地下水流

#### (一) 管道水流

在裂隙或岩溶地层中存在许多裂隙及溶洞空隙，其大小比岩石中原生孔隙要大得多。如果这些空隙相互连通形成一条水流通道，其导水能力在很多情况下相当强。因而在分析水流运动时，可以忽略孔隙的渗透作用，而着重研究上述空隙中水的运动规律，如岩溶地层中通过洞穴系统的管道流(地下暗河等)。该问题的解属于水力学范畴，可建立一些用来计算圆状管道系统的地下水运动方程。在管道流的情况下，从层流过渡到紊流状态的临界 Reynolds 数($Re=2320$)，比多孔介质中的渗透($Re=150\sim300$)大得多，并且比裂隙中的水流($Re=550\sim700$)也大。也就是说，裂隙中的水流，从层流到紊流状态的临界 Reynolds 数介于管道流与多孔介质中的渗流之间。在压力作用下，沿某一地段的水力坡度 $J$ 可根据 Bernoulli 方程确定：

$$J=\left[\frac{D}{l}(1+\Sigma\xi_D)+\lambda_D\right]\frac{1}{D}\frac{\bar{u}_D^2}{2g} \tag{6-22}$$

式中 $D$——管道直径；

$l$——管道长度；

$\xi_D$——管道内的局部水头损失系数；

$\lambda_D$——管内摩擦系数；

$\bar{u}_D$——横断面的平均速度。

对于层流，摩擦系数为

$$\lambda_D=\frac{64}{Re_D} \tag{6-23}$$

$$Re_D=\frac{\bar{u}_D D}{\mu/\rho} \tag{6-24}$$

式中 $\mu$——地下水动力粘滞系数。

对于光滑管道中的紊流，Karman 和 Pronde、Blasius 导出的摩擦系数关系式为

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_D}}=2\lg\frac{Re_D\sqrt{\lambda_D}}{2.51} \tag{6-25}$$

$$\lambda_D=\frac{0.3164}{Re_D^{1/4}} \tag{6-25a}$$

当用粗糙度 $\Delta$ 表示的规则粗糙管道时，Nikuradse 得到了如下关系式

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_D}}=2\lg\frac{3.7D}{\Delta} \tag{6-26}$$

式中 $\Delta$——粗糙度(裂隙壁面凸出部分高度，参看图 6-5$a$)。

关于局部水头损失系数 $\xi_D$ 的表达式，可在有关水力学的教科书中找到。

自然界地下水流管道空隙很少是圆形的，因此，对上述建立起来的关系式应该进行修正。常用的修正形式是引入水力半径 $R$。对于圆管道

$$R=\frac{\frac{\pi D^2}{4}}{\pi D}=\frac{D}{4} \tag{6-27}$$

用 $R$ 代替圆形管道的 $D$。

（二）单个裂隙水流

裂隙将岩石分割大小不等、形状各异的岩块，当岩块的渗透率很低时，水几乎全部通过裂隙流动，这样，可以着重研究单独裂隙的渗透规律。单个裂隙的渗透能力取决于裂隙本身的几何特征及裂隙充填物等，一条连续裂隙的性质，包括裂隙张开度（宽度）沿纵向的变化、纵向曲率和内壁的粗糙度等，它们对裂隙的渗透能力影响甚大。如果张开度沿纵向的变化率大于 0.1 时，即

$$\frac{b-b'}{l}\gg\frac{1}{10} \tag{6-28}$$

可认为是楔状裂隙。对于楔状裂隙（图 6-5$b$）及横断面突变（图 6-5$c$）的裂隙，要考虑局部水头损失。如果张开度沿纵向的变化率小于 0.1 时，水流就被看作是通过粗糙裂隙的运动了。裂隙的粗糙性用绝对粗糙度 $\Delta$，以及相对粗糙度（绝对粗糙度 $\Delta$ 与裂隙张开度 $b$ 之比）来表示。如果裂隙向上或向下弯曲比裂隙张开度大几倍（图 6-5$d$），即 $\bar{b}\gg b$ 时，则裂隙被认为是曲线状的。对裂隙的曲率情况用曲率系数 $\beta$ 表示，对于角状裂隙 $\beta=\frac{1}{\cos\theta}$（图 6-5$e$），对于弧状裂隙 $\beta=1+\frac{1}{6}\mathrm{tg}^2\theta$（图 6-5$f$）。在张开度为 $b$ 的光滑裂隙中，每单位水流宽度的水力半径为

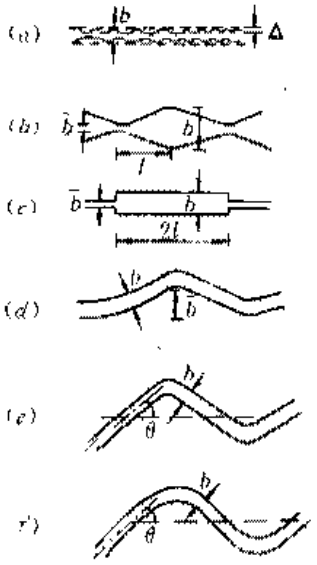


图 6-5　裂隙的特征

$$R=\frac{1\cdot b}{2\cdot 1}=\frac{b}{2} \tag{6-29}$$

在粗糙裂隙中，水力半径可根据充满流体的裂隙体积与其润湿表面面积之比来确定，即可用裂隙中单位面积上充满水的体积与其润湿的两壁的面积之比来确定。显然，由于是粗糙裂隙，在计算上述几何量时，应减去裂隙两壁上凸出部分的量。H·Václav 和 Š·Jan 得到的粗糙裂隙水力半径的关系式为

$$R=\frac{b}{2}\left(1-\frac{NV}{b}\right) \tag{6-30}$$

式中　$b$——裂隙的张开度；

$N$——裂隙壁面凸出部分个数；

$V$——凸出部分的体积。

如果凸出部分形状为半球体，则有

$$R=\frac{b}{2}\left(1-\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\frac{\Delta}{b}\right) \tag{6-31}$$

1. 充水裂隙的层流

与管道水流类似，根据 Bernoulli 方程可写出充水裂隙层流的关系式

$$J=\left[\frac{b}{l}(1+\sum\xi)+\beta\lambda_b\right]\frac{1}{b}\frac{\bar{u}_b^2}{2g} \tag{6-32}$$

$$\lambda=\frac{b}{l}(1+\sum\xi)+\beta\lambda_b \tag{6-33}$$

$$J=\lambda\frac{1}{b}\frac{\bar{u}_b^2}{2g} \tag{6-34}$$

式中 $\bar{u}_b$——裂隙中横断面的平均速度；

$l$——裂隙长度；

$b$——裂隙的张开度；

$J$——平均水力坡度；

$\xi$——局部水头损失系数；

$\lambda_b$——裂隙的摩擦系数。

$\beta$——裂隙曲率系数。

当 $\lambda$ 与 $Re_b$ 数成反比时，则有

$$\lambda_b=\frac{N_1}{Re_b},\ \sum\xi=\frac{N_2}{Re_b} \tag{6-35}$$

式中 $N_1$ 和 $N_2$——比例常数。

如果裂隙非常粗糙，需考虑水流质点运动弯曲途径及裂隙中线偏离实际水流平均方向的影响，用 $\alpha^2$ 来表示。对于对称的粗糙度来说

$$\alpha^2=(1-\frac{NV}{b})^{-1/4}=(\frac{2R}{b})^{-1/4} \tag{6-36}$$

这时有 $$N_1=\frac{12\alpha^2 b}{R}$$

因此 $$\lambda_b=\frac{24\alpha^2}{Re_b}\frac{b}{2R} \tag{6-37}$$

或 $$\lambda_b=\frac{24}{Re_b}(\frac{b}{2R})^{5/4} \tag{6-38}$$

在光滑裂隙中，$N=0$，$\alpha^2=1$ 和 $R=b/2$，则

$$\lambda_b=\frac{24}{Re_b} \tag{6-39}$$

现在研究局部水头损失。设有长度为 $l$，张开度为 $b$，系数为 $\lambda_b$、$\beta$、$\alpha^2$ 的一条裂隙，在其内部有一段长度为 $\Delta l$，张开度为 $\bar{b}$，系数为 $\bar{\lambda}_b$、$\bar{\beta}$、$\bar{\alpha}^2$ 的收缩段。在没有入口和出口水头损失的情况下有

$$\xi=\frac{\Delta l}{b}\alpha\lambda_b\left[\frac{\bar{\beta}}{\beta}\frac{\bar{\lambda}_b}{\lambda_b}(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha})^2(\frac{b}{\bar{b}})^3-1\right]-1 \tag{6-40}$$

$$\lambda=\beta\lambda_b\left\{\frac{\Delta l}{l}\left[\frac{\bar{\beta}}{\beta}\frac{\bar{\lambda}_b}{\lambda_b}(\frac{\bar{\alpha}}{\alpha})^2(\frac{b}{\bar{b}})^3-1\right]+1\right\} \tag{6-41}$$

因为裂隙和裂隙收缩段的 Reynotlds 数相同，故有

$$\lambda=\frac{24}{Re_b}N_0 \tag{6-42}$$

式中 $N_0$——比例常数。

根据式(6-35)，$\lambda_b$及$\sum\xi$与$Re_b$成反比，以及$Re_b=\frac{\bar{u}_b b}{\mu/\rho}$的关系式，并用$N_0$表示粗糙及局部水头损失的影响，可以得出

$$J=\frac{1}{b}\frac{24\mu}{\bar{u}_b b\rho}N_0\frac{\bar{u}^2}{2g}=\frac{12\mu N_0}{\rho g b^2}\bar{u}_b$$

令

$$C_*=\frac{12\mu N_0}{\rho g b^2} \tag{6-43}$$

称$C_*$为裂隙中层流的阻力系数，于是得到线性关系式

$$\bar{u}_b=\frac{1}{C_*}J=K_*J \tag{6-44}$$

在没有局部紊流或当局部紊流(速度水头$\frac{\bar{u}_b^2}{2g}$)的影响可忽略时，$C_*$值为常数，$K_*$也是常数，称$K_*$为层流机理下裂隙的渗透系数。不难看出，它与Darcy公式型式相似，有了$\bar{u}_b$就可计算裂隙水流的流量$Q_b$。

2. 充水裂隙中的紊流

当裂隙相对粗糙相当大时，应该考虑紊流弯曲度的影响。通过实验，得到对称粗糙度的裂隙中紊流弯曲度系数与裂隙孔隙度之间有如下关系

$$\alpha=n^{-\frac{1}{2}} \tag{6-45}$$

式中，$\alpha$为紊流弯曲度系数。$\alpha^2$值包括弯曲度的影响以及裂隙中线方向与弯曲水流平均方向上偏差的影响；$n$为受单位面积上凸出部分的个数$N$和平均凸出部分的体积$V$影响的裂隙孔隙度，有如下的关系式

$$n=\frac{b-NV}{b}=1-\frac{NV}{b} \tag{6-46}$$

因此

$$\alpha=(1-\frac{NV}{b})^{-\frac{1}{2}} \tag{6-47}$$

将上式与式(6-30)比较得

$$\alpha=(\frac{2R}{b})^{-\frac{1}{2}} \tag{6-48}$$

和裂隙中的层流相类似，充水裂隙的紊流有

$$J=\left[\frac{b}{l}(1+\sum\xi_i)+\beta\lambda_b\right]\frac{1}{b}\frac{\bar{u}_b^2}{2g} \tag{6-49}$$

式中 $\xi_i$——裂隙中紊流的局部水头损失系数。

与方程(6-22)比较可得到

$$D=2b,\lambda_D=2\lambda_b \tag{6-50}$$

参照式(6-50)和(6-31)，将方程(6-26)重新整理后得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_b}}=-\frac{2\sqrt{2}}{\alpha}\lg\frac{3\sqrt{3}}{14.8\pi}(1-\frac{2R}{b}) \tag{6-51}$$

对于光滑裂隙，采用式(6-25)，并将其右边的$\lambda_D$用式(6-25a)代替，经整理后得

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_b}}=-2\sqrt{2}\lg\frac{2.4352}{Re_b^{7/8}} \tag{6-52}$$

式中，$Re_b$是根据裂隙张开度$b$确定的Reynolds数；

$$Re_b = \frac{\bar{u}_b b}{\mu/\rho} \tag{6-53}$$

Colebrook 和 White 得到

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_b}} = -\frac{2\sqrt{2}}{2.3}\ln\left\{\frac{2.4352}{Re_b^{7/8}} + \left[\frac{3\sqrt{3}}{14.8\pi}\left(1-\frac{2R}{b}\right)\right]^{1/a}\right\} \tag{6-54}$$

式中，$a$ 是根据式(6-48)求得的，$R$ 是根据式(6-30)导出的。方程(6-54)对于光滑裂隙及粗糙裂隙同样适用。

裂隙中紊流的局部水头损失系数 $\xi_i$，可用 Bord 水头损失来计算。它是从张开度 $b_1$ 的裂隙突然变到 $b_2$ 时的水头损失值，即

$$\xi_i = C\left[\left(\frac{b_2}{b_1}-1\right)^2 + \frac{1}{9}\right] \tag{6-55}$$

式中 $C$——Corriolis 系数。

式(6-49)中右边方括号内的各项表示损失总量，用 $\lambda_t$ 表示，则方程(6-49)可写成

$$J = \lambda_t \frac{1}{b}\frac{\bar{u}_b^2}{2g} \tag{6-56}$$

$$\lambda_t = \frac{b}{l}(1+\xi_i) + \beta\lambda_b \tag{6-57}$$

令

$$C_{rl} = \sqrt{\frac{\lambda_t}{2bg}} \tag{6-58}$$

则有

$$\bar{u}_b = \frac{1}{C_{rl}}\sqrt{J} = K_{rl}\sqrt{J} \tag{6-59}$$

式中 $C_{rl}$——紊流机理下裂隙中水流的阻力系数；

$K_{rl}$——紊流机理下裂隙中的渗透系数。

式(6-59)与哲才-克拉斯诺波里斯基公式的型式相似。同样，得到 $\bar{u}_b$ 后，可计算裂隙中的流量 $Q_b$。

与式(6-40)和(6-41)类似，可以得到局部损失系数 $\xi_i$ 与摩擦系数 $\lambda_b$ 的关系式。在长度为 $l$，张开度为 $b$ 的裂隙中，有一段长度为 $\Delta l$ 和张开度为 $\bar{b}$ 的收缩段。收缩入口和出口段上的损失可以忽略。裂隙中的速度 $\bar{u}_b$ 和收缩段中的速度 $\bar{u}'_b$ 之比为

$$\frac{\bar{u}_b}{\bar{u}'_b} = \frac{\bar{b}}{b} \tag{6-60}$$

于是有

$$\xi_i = \frac{\Delta l}{b}\beta\lambda_b\left[\frac{\beta\lambda_b}{\beta\lambda_b}\left(\frac{b}{\bar{b}}\right)^3 - 1\right] - 1 \tag{6-61}$$

$$\lambda_t = \beta\lambda_b\left\{\frac{\Delta l}{b}\left[\frac{\bar{\beta}}{\beta}\frac{\bar{\lambda}_b}{\lambda_b}\right)\left(\frac{b}{\bar{b}}\right)^3 - 1\right] + 1\right\} \tag{6-62}$$

3. 充填泥砂的裂隙中的水流

充填泥砂的裂隙会发生渗水。充填在裂隙中的泥砂，其渗透性能通常比裂隙差得多，这时岩块的渗透作用就不能忽略了。水在其中运动实际上服从水流的线性定律，可视为连续介质。水流沿裂隙中线方向的渗透速度可用下式来描述：

$$v = [K_B + \frac{b}{B}(K_{TP} - K_B)]J = KJ$$

$$K_{TP} > K_B \tag{6-63}$$

式中 $K_B$——岩块的渗透系数；

$K_{TP}$——裂隙中充填物的渗透系数；

$b$——裂隙的张开度；

$B$——平行裂隙的间距。

（三）裂隙网络中的地下水流

岩体中的裂隙网络是各种各样的，有的是由互相平行的裂隙所组成的系统网络和排列混乱的裂隙网络，包括各种不同方向裂隙的杂乱网络；有的是在空间上变化的连续裂隙和不连续裂隙的网络，以及全空的裂隙网络及充填透水物质的裂隙网络等。最近几十年，根据裂隙网络的这些差异，建立了各种不同的裂隙网络模型，下面介绍一种有代表性的 E·C·Pomm 模型(1958，1966 年)及其计算方法。

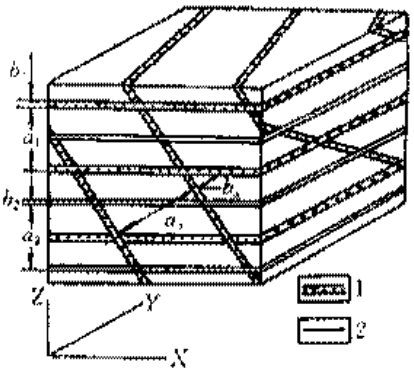



图 6-6 裂隙网络示意图

1—裂隙层；2—裂隙带

$a_1$、$a_2$、$a_3$—系统 1、2、3 中裂隙的隙间距；

$b_1$、$b_2$、$b_3$—系统 1、2、3 中的裂隙宽度。

设想裂隙岩石的透水空间结构如图 6-6 所示，它是由任意个系统所组成的裂隙网络连续系统。Pomm 认为对于同一方位的裂隙系统中的裂隙，其方向、密度(裂隙间距)及张开度(宽度)是固定不变的，而不同方位的裂隙系统中的裂隙，上述水力参数则不相同。

如果是层流，则有

$$\mathrm{u} = \mathrm{KJ} = -\mathrm{KgradH} \tag{6-64}$$

式中 $u$——裂隙网络水流的速度矢量，在 Descartes 坐标系中，它沿 $x$、$y$、$z$ 方向的分量为 $u_x$、$u_y$、$u_z$；

$J$——水力坡度矢量，$J = -\mathrm{gradH}$，它在 $x$、$y$、$z$ 方向的分量分别为 $J_x = -\dfrac{\partial H}{\partial x}$，$J_y = -\dfrac{\partial H}{\partial y}$，$J_z = -\dfrac{\partial H}{\partial z}$；

$K$——渗透系数张量。

E·C·Pomm 提出(1966)渗透系数张量的表达式为

$$K = \frac{1}{12} \times \begin{vmatrix} A_{11} & -A_{12} & -A_{13} \\ -A_{21} & A_{22} & -A_{23} \\ -A_{31} & -A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \tag{6-65}$$

$$A_{11} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}(1-\alpha_{1i}^2);\ A_{12} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{1i}\alpha_{2i};\ A_{13} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{1i}\alpha_{3i};$$

$$A_{21} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{2i}\alpha_{1i};\ A_{22} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}(1-\alpha_{2i}^2);\ A_{23} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{2i}\alpha_{3i};$$

$$A_{31} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{3i}\alpha_{1i};\ A_{32} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}\alpha_{3i}\alpha_{2i};\ A_{33} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^3}{a_i}(1-\alpha_{3i}^2)$$

裂隙充填透水物质时，C. H. Черныш(1971)提出了渗透系数张量的表达式

$$K = K_{TP}\begin{vmatrix} B_{11} & -B_{12} & -B_{13} \\ -B_{21} & B_{22} & -B_{23} \\ -B_{31} & -B_{32} & B_{33} \end{vmatrix} \tag{6-66}$$

$$B_{11} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(1-\alpha_{1i}^2);\quad B_{12} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{1i}\alpha_{2i};\quad B_{13} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{1i}\alpha_{3i};$$

$$B_{21} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{2i}\alpha_{1i};\quad B_{22} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(1-\alpha_{2i}^2);\quad B_{23} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{2i}\alpha_{3i};$$

$$B_{31} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{3i}\alpha_{1i};\quad B_{32} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}\alpha_{3i}\alpha_{2i};\quad B_{33} = \sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}(1-\alpha_{3i}^2)$$

式中 $n$——岩体中裂隙系统的数量；

$i$——裂隙系统的顺序号；

$b_i$——第 $i$ 个系统内裂隙的平均宽度；

$a_i$——第 $i$ 个系统内裂隙间的距离；

$\alpha_{1i}$、$\alpha_{2i}$、$\alpha_{3i}$——在 $x$、$y$、$z$（$x$—东，$y$—北，$z$—上）坐标中，第 $i$ 个系统裂隙面的法线方向余弦（$\cos\varphi_1$，$\cos\varphi_2$，$\cos\varphi_3$）；

$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$——第 $i$ 个系统裂隙面的法线与 $x$、$y$、$z$ 轴的夹角；

$K_{TP}$——裂隙充填物的渗透系数。

与水流的水力坡度方向一致的岩体渗透系数可按下式计算：

$$K = \frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}\{1-[\sin\beta_i(\cos\alpha_i\cos\varphi_2+\sin\alpha_i\cos\varphi_1)+\cos\beta_i\cos\varphi_3]^2\}$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iK_{TP}}{a_i+b_i}\{1-[\sin\beta_i(\cos\alpha_i\cos\varphi_2+\sin\alpha_i\cos\varphi_1)+\cos\beta_i\cos\varphi_3]^2\} \tag{6-67}$$

式中 $K$——岩体的渗透系数；

$\rho$——水的密度；

$g$——重力加速度；

$\mu$——水的动力粘滞系数；

$\alpha_i$——第 $i$ 个系统的裂隙的倾向；

$\beta_i$——第 $i$ 个系统的裂隙的倾角；

$\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$——所求渗透系数的方向与 $x$、$y$、$z$ 轴之间的夹角；

$K_{TP}$——裂隙充填物的渗透系数。

上式在一些特殊方向上可以进一步简化。

（1）水平面上的渗透

$$K_{\lambda} = \frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}[\sin^2\beta_i\sin^2(\alpha_i-\varphi_2)+\cos^2\beta_i]+$$

$$+K_{TP}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}[\sin^2\beta_i\sin^2(\alpha_i-\varphi_2)+\cos^2\beta_i] \tag{6-68}$$

（2）在同一平面上，向南或向北的渗透

$$K_{x,x} = \frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}[\sin^2\beta_i\sin^2\alpha_i+\cos^2\beta_i]+$$

$$+K_{TP}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}[\sin^2\beta_i\sin^2\alpha_i+\cos^2\beta_i] \tag{6-69}$$

(3) 在同一平面上，向东或向西的渗透

$$K_{e,w}=\frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}(\sin^2\beta_i\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i)+$$

$$+K_{TP}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}(\sin^2\beta_i\cos^2\alpha_i+\cos^2\beta_i) \tag{6-70}$$

(4) 垂直方向上的渗透

$$K_v=\frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}\sin^2\beta_i+K_{TP}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i}\sin^2\beta_i \tag{6-71}$$

如果各个裂隙系统充填物的渗透系数不相同，上列各式中的 $K_{TP}$ 求和符号之内，如式(6-71)应变为

$$K_v=\frac{\rho g}{12\mu}\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i^3}{a_i+b_i}\sin^2\beta_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{(K_{TPi})b_i}{a_i+b_i}\sin^2\beta_i \tag{6-72}$$

## 第二节　水动力弥散问题

随着对地下水问题研究的深入和人类活动对地下水污染的加剧，在对地下水资源量及开发利用研究的同时，人们愈来愈对地下水水质的演变给予极大的关注，污染物质在地下水中运移理论成了当前研究的热点。这一方面的研究对于模拟地下水中污染物质的运移过程，定量评价及预测地下水水质演变趋势，以便有效地控制地下水污染，加强地下水资源的保护和管理都有着重大的理论和现实意义。

### 一、弥散的基本概念

在日常生活或实验中，常常可以观察到这样的现象：静止水中投入少量带颜色的示踪剂，就会发现在示踪剂刚入水中时，仅在其周围形成一个很小的球形色晕，随着时间的延长，这个色晕逐渐向周围扩展，直到水与示踪剂的颜色溶为一体为止。这一过程便是一种弥散现象。J·Bear 给出了作为溶质在地下水产生弥散的两个例子。

例 6-1　在一口井中把示踪剂瞬时注入平均流速为 $u$ 的均匀流动的含水层中，通过足够数目的观测孔的连续观测，发现示踪物质不仅随地下水一起运移，而且沿水流方向扩展，在垂直于水流方向也变得愈来愈宽(图 6-7)。

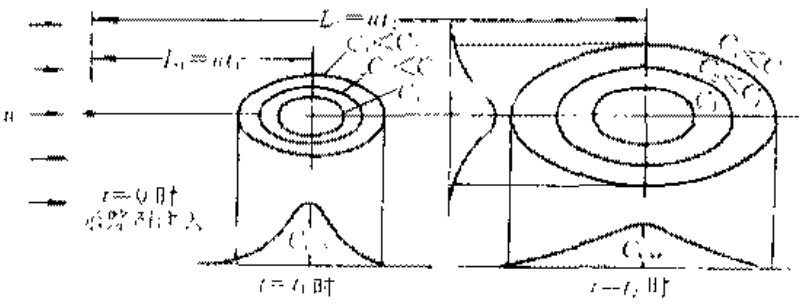



图 6-7　示踪剂的纵、横向弥散现象

(据 J. Bear)

例 6-2　取装满均质砂的圆柱形管，用水饱和后，使水流通过并作稳定运动。在 $t=0$ 时刻开始注入浓度为 $C_0$ 的示踪剂以取代原不含示踪剂的水，在砂柱末端测量示踪剂浓度变化 $C(t)$，绘制相对浓度 $C/C_0$ 与时间 $t$ 的曲线（图 6-8），曲线呈 S 形而不是图中虚线的形状，表明弥散现象的存在。

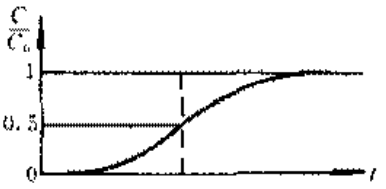


图 6-8　砂柱中的一维流动

上例表明示踪剂在地下水中的运动并非按地下水流的平均流速流动；在含示踪剂水与不含示踪剂水中间不存在（如图中虚线所示的）一个突变界面，而在两者之间存在一个模糊的不断加宽的过渡带。这种现象称之为水动力弥散（弥散），即在多孔介质中出现的两种成分不同的可溶混的液体之间过渡带的形成和演化过程。这是一个不稳定的不可逆转的过程。

上述弥散现象的发生主要由液体在地下多孔介质中的对流迁移及水动力弥散（机械弥散和分子扩散）作用造成的。对流迁移主要是与地下水平均运动速度相同的速度液体的整体运移，在观测曲线上则表现为直立峰面（图 6-8 中虚线），而水动力弥散的机理相对较为复杂。

1. 机械弥散

多孔介质中的水流，由于质点流速的不均，使得彼此靠近的示踪剂质点群在流动过程中不是一律按平均速度运动，而是不断地向外扩展而分离。这种特有的物质运移现象称为机械弥散。它的发生主要与三种因素有关：(1) 液体通过孔隙时，孔壁的摩擦阻力造成通过该孔隙液体的不同质点的流速不一样（图 6-9*a*）。其中紧靠孔壁的质点流速趋于零，向孔隙中心的速度增大，水流速度分布如图 6-9*a* 所示；(2)孔隙大小不同，造成不同的孔隙，孔隙中心液体质点最大流速的差异（图 6-9*b*）；(3)孔隙的弯曲造成质点流向随着孔隙弯曲不同面改变，使液体质点向不同方向扩散（图 6-9*c*）。这些因素的同时影响便造成了机械弥散。

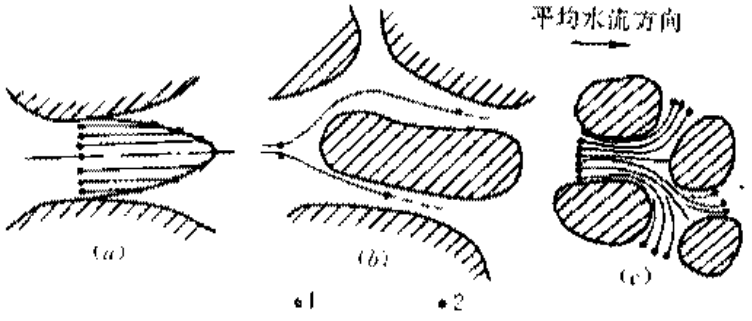


图 6-9　机械弥散引起的示踪剂扩展

1—$t$ 时刻；2—$t+\Delta t$ 时刻液体质点的位置

2. 分子扩散

由于液体中所含溶质的浓度不均一，一种浓度溶液的分子向另一种浓度溶液中运动而不断扩散的物质运移现象，称为分子扩散。分子扩散的实质是浓度梯度驱动力场作用，使物质从浓度高处向低的方向运移，最终趋于一体均匀化。这一作用机制可由 Fick 定律表示：

$$J_f = -nD_f \frac{dC}{dx} \tag{6-73}$$

式中　$J_f$——溶质扩散通量；

$\frac{dC}{dx}$——溶质在溶液中的浓度 $C$ 在 $x$ 方向上的浓度梯度；

$D_f$——扩散系数，量纲$[L^2T^{-1}]$；

$n$——多孔介质孔隙度。

式(6-73)表示单位时间内单位面积上溶质的通量与该溶质的浓度梯度成正比。由于浓度梯度的存在导致分子扩散的发生，因此出现了图 6-8 的扩散现象，分子扩散在流速较低时表现更为突出。

以上叙述了水动力弥散的两种机理。人们所以使用水动力弥散这一术语来表述由机械弥散和分子扩散所引起的综合和宏观效应，是因为实际上二者是不可分离的，只是作用过程中主次不同，作用方向不同而已。例如，当流速较大时，机械弥散在水动力弥散中起主要作用；当流速较小时，如示踪剂在粘土质砂、砂质粘土介质水流中运移时，分子扩散的作用变得明显，甚至在静水情况下也存在弥散作用，这正是水动力弥散现象成为不可逆的原因所在。无论是机械弥散，还是分子扩散，都会使溶质既沿平均流动方向运移又沿垂直于平均流动的方向扩展。前者称为纵向弥散，后者称为横向弥散。

应该指出的是，多孔介质中溶质运移过程的溶质浓度变化，除上述作用机理外，还受到其它一些作用的影响，如介质与水溶液及其内部之间的吸附、沉淀、溶解、离子交换、化学反应以及放射性衰变等都会影响溶质浓度的变化。在研究某些特殊问题时(如海水入侵)，应相应地对此加以考虑。

**二、水动力弥散的费克(Fick)定律及水动力弥散系数**

前已述及，分子扩散作用可由 Fick 定律描述，即

$$J_f = -nD_f\frac{dC}{dx} = -nD_f\mathrm{grad}C \tag{6-74}$$

式中 $D_f$——分子扩散系数，量纲$[L^2T^{-1}]$；它是二秩张量；

$C$——溶质的浓度；

$J_f$——由于分子扩散，在单位时间内通过单位面积上溶质的质量(通量)。

大量的实验研究证明，机械弥散规律也符合 Fick 定律，因此有

$$J_j = -nD_j\frac{dC}{dx} = -nD_j\mathrm{grad}C \tag{6-75}$$

式中 $D_j$——机械弥散系数，量纲$[L^2T^{-1}]$，为二秩张量；

$J_j$——机械弥散作用下单位时间内通过单位面积上的溶质质量(通量)。

二式相结合，有

$$J = J_f + J_j = -n(D_f + D_j)\mathrm{grad}C \tag{6-76}$$

令 $D = D_f + D_j$

则 $J = -nD\mathrm{grad}C$

上式即为水动力弥散的 Fick 定律。其中 $D=D_f+D_j$ 为水动力弥散系数，是二秩张量。它表示由于水动力弥散作用在单位时间内通过单位面积上溶质质量($J$)。

在渗流场(水化学场)中，通过建立笛卡儿坐标系可将式(6-75)写成如下形式：

$$\begin{cases} J_x = -nD_{xx}\dfrac{\partial C}{\partial x} \\ J_y = -nD_{yy}\dfrac{\partial C}{\partial y} \\ J_z = -nD_{zz}\dfrac{\partial C}{\partial z} \end{cases} \tag{6-77}$$

现选定坐标轴之一，如 $x$ 轴与地下水的平均流速方向一致，其它两轴垂直于平均流速方向，则上式可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{bmatrix} = -[n] \begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial C}{\partial x} \\ \dfrac{\partial C}{\partial y} \\ \dfrac{\partial C}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{6-78}$$

令

$$D = \begin{bmatrix} D_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & D_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & D_{zz} \end{bmatrix}$$

上述三个坐标轴方向称为弥散主轴，它们分别对应的弥散系数为 $D_{xx}$、$D_{yy}$和 $D_{zz}$称为水动力弥散系数的主值。它与地下水平均速度方向一致的弥散系数($D_{xx}$)称为纵向弥散系数，与其垂直的另外两个弥散系数 $D_{yy}$、$D_{zz}$为横向弥散系数。一般情况下，弥散主轴往往随地下水平均流速方向变化而改变，流速方向又受到多孔介质特征的制约。

水动力弥散系数是地下水溶质运移模拟中的一个重要参数，它的作用和地位可与渗透系数在研究地下水运动中的作用相比拟。对于水动力弥散系数的影响因素及其各参量间相互关系，Bear 和 Bachmat(1967 年)运用相互连通的毛细管网络构成的模型，推导出机械弥散系数 $D$ 与多孔介质骨架的几何性质、流速、分子扩散之间的关系式如下

$$D'_{i,j} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{m=1}^{3} \alpha_{i,j,k,m}\frac{u_k u_m}{u} f(Pe,\delta) \tag{6-79}$$

式中 $u$——实际平均流速，$u_k$、$u_m$ 分别为它在坐标轴 $x_k$、$x_m$ 上的分量；

$Pe=\dfrac{ud}{D_f}$为 Peclet 数，其中 $d$ 为多孔介质的某种特征长度，$D_f$ 为分子扩散系数；

$\delta$——表征多孔介质中水流通道形状特征系数，等于基本通道的长度与它的横截面的特征长度之比，无量纲；

$f(Pe,\delta)$——在微观水平上考虑了在机械弥散相伴随的相邻流线之间，由分子扩散所引起的对物质运移影响的函数，这里 $f(Pe,\delta)=\dfrac{Pe}{(2+Pe+4\delta^2)}$；

$\alpha_{i,j,k,m}$——多孔介质的弥散度，它仅反映饱和流动中固体骨架的几何特征对溶质运移的影响，与溶质性质无关，是一个对称四秩张量，其值的大小与多孔介质基本通道的传导能力、弯曲度、渗透率及特征长度有关。

上式中由于机械弥散系数表达式中加入了分子扩散的影响，由函数 $f(Pe,\delta)$体现，由此说明纯机械弥散是不可能单独存在的。当 $Pe$ 较大时，即实际平均流速很大时，$f(Pe,\delta)\simeq 1$，分子扩散的影响变得微不足道。由式(6-78)可以看出，机械弥散系数和实际平均流速之间为线性关系。同样，若选定某坐标轴(设为 $x$)与该处的平均流速方向一致(即弥散主轴)，并忽

略分子扩散，$f(Pe,\delta)=1$，则有

$$\begin{aligned} D'_{xx} &= \alpha_L u \\ D'_{yy} &= \alpha_T u \\ D'_{zz} &= \alpha_T u \\ D'_{xy} &= D'_{zx} = D'_{yz} = \cdots\cdots = 0 \end{aligned} \tag{6-80}$$

式中，$\alpha_L$、$\alpha_T$ 分别称为纵向弥散度和横向弥散度，纵向机械弥散系数 $D^T_{xx}$和横向机械弥散系数 $D'_{yy}$和 $D'_{zz}$，称为弥散系数的主值。同样可写成矩阵形式

$$D'_{ij} = \begin{bmatrix} \alpha_{L_x} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{T_y} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{T_z} \end{bmatrix} \tag{6-81}$$

为进一步研究和证实机械弥散与分子扩散的关系，人们作了大量的研究和实验工作，Bear、Bachmat 和 Saffman 先后采用未固结的多孔介质进行实验研究，结果见图 6-10，图中纵坐标为纵向弥散系数 $D_L$ 与溶质在液相中的分子扩散系数 $D_f$ 之比，横坐标为 peclet 数。

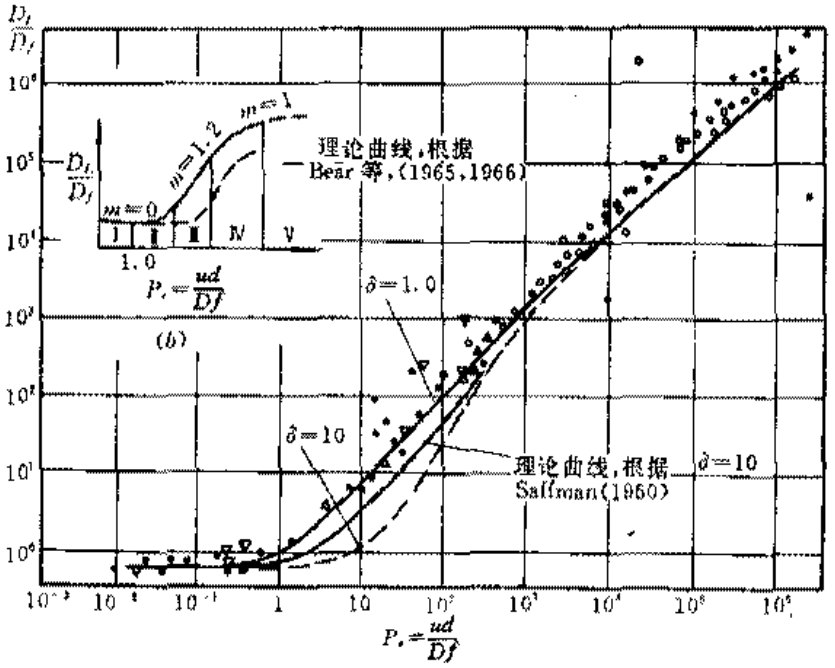



图 6-10　分子扩散与水动力弥散之间的关系

(据 J. Bear)

从图 6-10 上曲线变化情况，大体上可分为五个特征区：

Ⅰ区　$Pe$ 值在 0.02～0.4 之间，曲线段表现为近水平直线，说明$\frac{D_L}{D_f}$接近常数，该区实际流速很小，以分子扩散为主；

Ⅱ区　$Pe$ 值在 0.4～5 之间，曲线开始向上弯曲，在这区段分子扩散与机械弥散作用具有相同的数量级，二者在水动力弥散中的作用均不能忽略；

Ⅲ区　$Pe$ 值约在 5～$5\times10^2$ 之间，曲线呈近直线上升，在此区段内，机械弥散作用有所加强，伴随着机械弥散，横向分子扩散共同作用，二者不可分开、相互干扰，横向分子扩散往

往会削弱纵向物质运移。该段内实验结果绘出的理论曲线为

$$\frac{D_L}{D_f}=\alpha(Pe)^m \quad \alpha\approx 0.5 \quad 1<m<1.2 \tag{6-82}$$

Ⅳ区　$Pe$ 数值在 $5\times10^{0}\sim5\times10^{1}$ 之间，该段曲线为斜率近 45°直线。以机械弥散为主，分子扩散几乎可忽略，但流速尚未超出 Darcy 定律适用范围，曲线的表达式为

$$\frac{D_L}{D_f}=\beta Pe \quad \beta\approx 1.8 \tag{6-83}$$

Ⅴ区　$Pe$ 数大于 $10^{1}$，为纯机械弥散区段，曲线斜率变缓，流速已超出 Darcy 定律适用的范围。惯性力和紊流的影响不能忽略，造成纵向物质运移减少。

**三、水动力弥散方程**

由水动力弥散作用引起的溶质运移，即单位时间通过任一单位面积上的溶质通量为

$$J_s=J_f+J_j=-n(D_f\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}+D_j\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}) \tag{6-84}$$

由对流作用引起的溶质迁移，即单位时间内单位面积上溶质通量为

$$J_c=unC \tag{6-85}$$

故由对流及水动力弥散作用造成的溶质运移总通量为

$$J=unC-n(D_f\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}+D_j\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x})=unC-nD\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x} \tag{6-86}$$

现在不考虑其他物理化学反应的情况，建立一维溶质运移方程(即对流-弥散方程)。任取一微元 $AB$，$A$、$B$ 的坐标分别为 $x$，$x+\mathrm{d}x$，则通过 $A$ 点的溶质通量(流进 $AB$ 微元的质量)为

$$J_a=\left[unC-nD\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_x \tag{6-87}$$

通过 $B$ 点的溶质通量(流出 $AB$ 微元的质量)为

$$J_b=\left[unC-nD\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}\right]_{x+\mathrm{d}x} \tag{6-88}$$

在单位时间内，在微元 $AB$ 中积余的溶质通量为

$$\Delta J=J_a-J_b=(unC-nD\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x})_x-(unC-nD\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x})_{x+\mathrm{d}x}$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x}(unC-nD\frac{\partial C}{\partial x})\mathrm{d}x \tag{6-89}$$

由于 $AB$ 内部溶质质量的积余必然引起 $AB$ 内溶质浓度的变化，由质量守恒定律，便可得到

$$\frac{\partial(nC)}{\partial t}\mathrm{d}x=-\frac{\partial}{\partial x}\left[unC-nD\frac{\partial C}{\partial x}\right]\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\partial(nC)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(nD\frac{\partial C}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial x}(unC) \tag{6-90}$$

将此结果推广到三维情况，并注意到取 $x$ 轴方向与平均水流方向一致，$y$、$z$ 轴垂直于平均水流方向以及 $n$ 为常量时，则有

$$\frac{\partial(nC)}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(nD_{xx}\frac{\partial C}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(nD_{yy}\frac{\partial C}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(nD_{zz}\frac{\partial C}{\partial z})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_xnC)-\frac{\partial}{\partial y}(u_ynC)-\frac{\partial}{\partial z}(u_znC)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_xC)-\frac{\partial}{\partial y}(u_yC)-\frac{\partial}{\partial z}(u_zC) \tag{6-91}$$

上式即为对流-弥散方程(或称水动力弥散方程)。方程右端前三项表示水动力弥散作用造成的溶质运移;后三项则表示水流运动(对流作用)所造成的溶质运移。

在溶质运移过程中,往往还有化学反应或其它原因而引起的溶质质量变化。假定单位时间内单位体积含水层中由此造成溶质质量的变化量为 $I$,则应将它加到方程中去,有

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z})-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(u_xC)-\frac{\partial}{\partial y}(u_yC)-\frac{\partial}{\partial z}(u_zC)+I \tag{6-92}$$

$I$ 的具体含义和表达式可据具体代表的物理含义而定。例如,若 $I$ 是由抽水引起的,设单位时间内从单位体积含水层中抽出的水量为 $W$,则有

$$I=-\frac{W}{n}C \tag{6-93}$$

若 $I$ 表示的是在单位时间内单位体积内由离子交替吸附作用所引起的溶质质量的变化,则

$$I=-\frac{1-n}{n}K'_d\frac{\partial C}{\partial t} \tag{6-94}$$

式中 $K'_d$——Freundlich 方程中的常数。

**四、水动力弥散的定解条件**

与解水量的微分方程解一样,在求解溶质运移方程时也需要一定的初始条件和边界条件。通常,初始条件可表示为研究区域 $\Omega$ 上的初始($t=0$)的浓度分布,其表达式为

$$C(x,y,z,0)=C_0(x,y,z) \tag{6-95}$$

$C_0$ 为已知函数,在未污染区,它表示该区浓度背景值;在已污染区,它表示预测开始时刻的浓度。

边界条件一般有二种类型:

第一类边界条件为已知浓度的边界条件,也称 Dirichlet 边界条件,其表示式为

$$C(x,y,z,t)|_{\Gamma_1}=\varphi(x,y,z,t)|_{(x,y,z)\in\Gamma_1}$$

$$0<t<T \tag{6-96}$$

式中 $\Gamma_1$——研究区的边界;

$\varphi$——已知函数;

$T$——研究终止时间。

第二类边界条件,即在单位时间内通过边界 $\Gamma_2$ 的溶质通量 $q$ 是已知的,则有

$$D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}n_1+D_{yy}\frac{\partial C}{\partial y}n_2+D_{zz}\frac{\partial C}{\partial z}n_3-u_xCn_1-u_yCn_2-$$

$$-u_zCn_3=q(x,y,z,t)\quad[(x,y,z)\in\Gamma_2,0<t<T] \tag{6-97}$$

式中 $n_1$、$n_2$、$n_3$——边界法向 $n$ 在 $x$、$y$、$z$ 方向上的余弦。

在不透水边界 $q\simeq0$。

## 五、简单问题的解析解

由于水动力弥散问题比较复杂，求解溶质运移方程非常困难，一般采用数值方法，只有在理想条件下，才能求出它的解析解或近似解析解。现仅对一维情况作一介绍。

考虑流速方向与 $x$ 轴方向一致的半无限一维均匀流的情况，示踪剂连续注入，其水动力弥散方程由式(6-91)化为

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{xx}\frac{\partial C}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(u_x C) \tag{6-98}$$

由于纵向弥散系数 $D_{xx}=D_L$，在均匀情况下不随坐标 $x$ 变化，$u_x=u$ 为常数，上式变为

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_L\frac{\partial C}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial x}(uC) \tag{6-99}$$

由定解条件

$$\begin{cases}C(x,0)=0 & 0\leqslant x<\infty\\ C(0,t)=C_0 & t>0\\ C(\infty,t)=0 & t>0\end{cases} \tag{6-100}$$

利用 Laplace 变换即可求上述定解问题的解。

$$C(x,t)=\frac{C_0}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right)+\frac{C_0}{2}\exp\left(\frac{ux}{D_L}\right)\mathrm{erfc}\left(\frac{x+ut}{2\sqrt{D_L t}}\right) \tag{6-101}$$

上式右端第二项与第一项相比小得多，特别是当 $D_L/u$ 较小时，第二项可忽略，上式变为

$$\begin{aligned}C(x,t)&\simeq\frac{C_0}{2}\mathrm{erfc}\left(\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}\right)\\ &=\frac{C_0}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-ut}{2\sqrt{D_L t}}}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6-102}$$

利用上式可以求得任一时刻 $t$ 任意点 $x$ 处的溶质浓度，达到对污染物质运移规律的预测目的。当然，也可以利用实验室或野外一维弥散试验的实际观测资料求出参数 $D_L$。在流速已知的情况下，可以算出纵向弥散度 $\alpha_L$。其方法如下：

据式(6-102)，令 $C_R=\dfrac{C(x,t)}{C_0}$，$y=\dfrac{\eta}{\sqrt{2}}$，则

$$C_R=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{x-ut}{\sqrt{2D_L t}}}^{\infty}\exp\left(-\frac{\eta^2}{2}\right)\mathrm{d}\eta=1-\Phi\left[\frac{x-ut}{\sqrt{2D_L t}}\right] \tag{6-103}$$

式中 $\Phi$——正态分布函数，均值为 $ut$，标准差为 $\sqrt{2D_L t}$。

当 $\dfrac{x-ut}{\sqrt{2D_L t}}=1$ 时，$x-ut=\sqrt{2D_L t}=\delta$，$x=ut+\delta$，此时有

$C_R=1-\Phi(1)=1-0.841=0.159$，当 $\dfrac{x-ut}{\sqrt{2D_L t}}=-1$ 时，$x-ut=-\sqrt{2D_L t}=-\delta$，

$x=ut-\delta$，此时有

$C_R=1-\Phi(1)=1-0.159=0.841$。

这样，可由实际观测资料作出某时刻 $t$ 的 $C_R$ 与距离 $x$ 的关系曲线(图 6-11)，在图上分别找出与 $C_R=0.159$和 $0.841$ 两点对应距离 $x_{0.159}$和 $x_{0.841}$。由上述分析可知

$$x_{0.159}=ut+\delta;\quad x_{0.841}=ut-\delta$$

因此 $$x_{0.159}-x_{0.841}=2\delta=2\sqrt{2D_Lt}$$

则有 $$D_L=(x_{0.159}-x_{0.841})^2/8t$$

在野外，为方便起见常常利用一个观测孔不同时间观测资料，此时 $x$ 为常数，$t$ 为变量。当 $C_R=0.159$ 时，有

$$\frac{x-ut_{0.159}}{\sqrt{2D_Lt_{0.159}}}=1$$

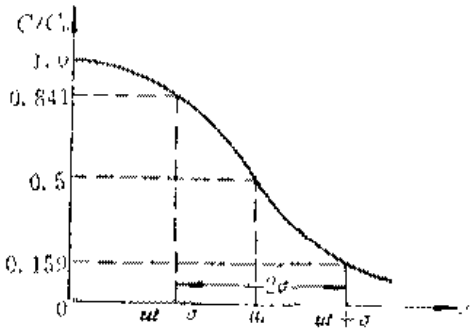



图 6-11 正态分布的浓度剖面

当 $C_R=0.841$ 时，有 $\dfrac{x-ut_{0.841}}{\sqrt{2D_Lt_{0.841}}}=-1$

故

$$\frac{x-ut_{0.159}}{\sqrt{2D_Lt_{0.159}}}-\frac{x-ut_{0.841}}{\sqrt{2D_Lt_{0.841}}}=2$$

$$D_L=\frac{1}{8}\left[\frac{x-ut_{0.159}}{\sqrt{t_{0.159}}}-\frac{x-ut_{0.841}}{\sqrt{t_{0.841}}}\right]^2$$

因此，根据野外试验资料，作出 $C_R\sim t$ 的关系曲线，在曲线上查出分别与 $C_R=0.159$ 和 0.841 对应的横坐标 $t_{0.159}$ 和 $t_{0.841}$ 值，代入上式便可求出 $D_L$ 值，然后再由 $D_L=\alpha_L u$，求 $\alpha_L$。

关于一维溶质运移理论应用的例子在实际中也比较常见，如常州运河污染物质向含水层运移的研究，便是其中的一例。同样方法可应用到求解其它情况的溶质运移问题，限于篇幅，不能一一赘述，请参考有关专著。

需要说明的是，虽然根据对流-弥散方程在适当的定解条件下求得的解可以用于地下水中污染物质在时空分布规律的预报，并且结果与实验室结果较为一致，但在实际应用中还存在不少问题，尚待进一步研究。总之，水动力弥散理论在实际中得到广泛的应用，特别是在地下水环境质量评价及污染预测方面，它已是不可缺少的理论方法，但它毕竟还处于发展阶段，仍需进行大量的研究工作，才能使其更加完善。

**思考题**

1. 什么叫水动力弥散？水动力弥散方程中各项的含义是什么？
2. 求水动力弥散问题的解与水头有何关系？

# 第七章　研究地下水运动的模拟方法

## 第一节　导　　论

前面叙述的主要是了解地下水运动的解析方法。但对比较复杂的水文地质问题，解析法则难以求解，需借助于数值法或模拟法。本章介绍一些模拟方法。

**一、模拟概念**

所谓模拟，通常指的是物理模拟，即用相似模型以更为方便的比例再现某种现象（原型）动态和变化过程的技术。在人类征服自然和改造自然的科学研究中，模拟技术起到了重要的作用，特别是在人工智能方面的仿生模拟已经有了重大的突破。在地下水问题的研究中，模拟主要是指用相似模型再现渗流区动态和过程的实验方法。它不仅能够模拟解析法难以求解的复杂问题，而且在检验基本理论和需要观察渗流过程中可能出现的物理现象方面，也是一种极为有效的方法。

在模拟系统中，存在两种系统，一种是研究系统（如含水层系统），也称为原型系统或原型；另一种是模型系统。根据两种系统中对应各要素之间的关系，又分为直接模拟和间接模拟。前者应该是两系统中各对应要素之间存在一一对应的关系，且对于原型系统的每一个要素，在模型系统中必须存在一个具有相似激发-响应关系的要素；此外，对应的要素必须彼此以类似的方式建立起相应的关系。而后者则属特殊类型的数值模拟，它是用数学方程表示所要研究的水流问题，并通过由各种能够执行某种专门运算（如加法、乘法和积分等）的计算元件相互连接起来的装置来完成数学方程的求解，以此达到模拟研究问题的目的。

**二、模拟原理**

模拟是根据两系统中各要素及其组合关系具有相似性的原理，在专门设计的装置上完成。其中相似的基础有以下几方面：

（一）两系统的基本定律相似

在渗流场中任一点的渗流大多数服从 Darcy 定律：

$$v = -K\mathrm{grad}H \tag{7-1}$$

它反映该点的渗透速度和该点的水头梯度 $\mathrm{grad}H$ 成正比，式中的比例系数 $K$ 为含水层的渗透系数。

同样，许多其它物理现象都具有与 Darcy 定律相同的变化规律和数学表达式，只是其中各项要素的物理意义不同而已。例如，电流在导电介质中传导的 Qhm 定律：$i=-C\frac{\partial U}{\partial S}$，其中各符号分别代表电场中一点的电流强度、导电系数和电位梯度；溶质在溶液中扩散的 Fick 定律：$J=-D\mathrm{grad}C$，其中各符号分别代表扩散场中任一点的溶质通量、扩散系数和浓度梯度；热流在导热介质中传输的 Fourier 定律，表达式中各项要素分别表示温度场中任一点的

热流通量、导热系数和温度梯度，等等。这些相同的表达式说明，这些物理现象的运动都遵循同样的能量守恒定律，也表明地下水在多孔介质中的运动与电流、溶质和热液在各自的传输介质中的流动具有相似性。因而，人们可以按照这种相似原理，通过设计专门模型（如电模型、热模型等），用研究电、热的流动规律来代替研究地下水的运动规律，以解决较为复杂的实际问题。

用相似模型模拟渗流比原样实验具有方便、省时、经济的优点。针对不同问题的需要可设计缩小的模型，便于从整体上研究渗流的分布特征，同时便于控制和测量，使研究者易于操作。

（二）两系统数学模型相似

在模拟渗流的动态过程中，两系统应遵守数学模型相似的原则。

在渗流场（原型）中，已经导出了描述地下水运动的微分方程

$$\begin{cases} \mathrm{div}(K,\mathrm{grad}H)=0 & \text{（稳定流）} \\ \mathrm{div}(K,\mathrm{grad}H)=\mu_s\dfrac{\partial H}{\partial t} & \text{（非稳流）} \end{cases} \tag{7-2}$$

勿用置疑，大多数物理现象的稳定运动规律都遵循 Laplace 方程，即式（7-2）中第一方程。研究表明，描写各种物理量的微分方程也都具有与式（7-2）第二方程相同的形式。例如，在电模型中，电流在有充放电原件的导电介质中传导时，电位分布方程与式（7-2）第二方程具有相同形式，只是其中参数 $\mu_s$ 和 $K$ 代表电容和导电系数，$\mathrm{grad}H$ 表示电位梯度。

对数学模型相似而言，仅有微分方程相似不够，还应具备定解条件相似，其中包括：

（1）几何相似：指原型和模型对应点坐标或对应长度满足固定的比值，即

$$\alpha_L=\frac{x_m}{x}=\frac{y_m}{y}=\frac{z_m}{z}=\frac{l_m}{l} \tag{7-3}$$

式中，无下标的为原型的坐标和长度，有下标 $m$ 的是指模型的坐标或长度。以此类推，两系统中面积和体积之间也应满足固定比值。

$$\alpha_F=\alpha_L^2,\qquad \alpha_V=\alpha_L^3 \tag{7-4}$$

在变形模型中，不能保持几何相似，其长度比例 $\alpha_L$ 取决于所测量长度的方法，但不影响模拟规律。对集中参数模型，不需要几何相似；

（2）初值相似：在两系统中，对应物理量的初值都应满足固定比例；

（3）边值相似：在两系统中，对应物理量及其导数在边界分布的边值也需要满足固定比值。当边值随时间变化时，还应保持边值的时间相似。

此外，由于一般模拟过程中为达到经济高效，往往需要使模型加速运转，所以原型和模型的时间应保持固定比值 $\alpha_t=\frac{t_m}{t}$，而且在整个运行过程中 $\alpha_t$ 保持不变。

为了保证模拟的可靠，在微分方程形式相同的情况下，所有对应物理量保持固定比值是模拟的充分必要条件。

（三）两系统的比例相似

两模型（即由原型和模型代表的两系统）的比例相似是模型设计的准则，是模拟成败的关键，也是把模拟结果转换成原型量的依据。

确定模型相似比例常用量纲分析和方程分析两种方法。如果仅知道系统的主要变量和参数，而不知道它们的组合关系，可用量纲分析法；倘若知道描述系统的微分方程时，宜采用

方程分析法确定比例。在此仅简单地介绍方程分析法及其改进方法，量纲分析法请参阅有关文献。

1. 方程分析法

在模拟系统的原型和模型两组方程建立以后，根据相似定理，两个相似系统的方程写成无量纲形式后，方程中对应的每一项的比例数必然相同。将方程转化成无量纲形式，再根据独立的相似比例数的个数，即方程的项数 $n$ 减 1，共 $n-1$ 个来确定相似比例。现举例说明。

已知描述某区地下水运动的微分方程为

$$K\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\right)=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t} \tag{7-5}$$

在砂槽模型中对上述渗流进行模拟，其方程为

$$K_m\left(\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}+\frac{\partial^2 H_m}{\partial y_m^2}+\frac{\partial^2 H_m}{\partial z_m^2}\right)=\mu_{sm}\frac{\partial H_m}{\partial t_m} \tag{7-6}$$

分别用各自方程左端末项去除每项，将式(7-5)和(7-6)转化为无量纲量，同时注意各项的比例系数只反映物理量之间的量纲关系，不考虑其变化，故可略去微分符号，对分析无影响。结果无量纲形式有：

$$\frac{\mu_s z^2}{Kt}-\frac{z^2}{x^2}-\frac{z^2}{y^2}-1=0$$

$$\frac{\mu_{sm}z_m^2}{K_m t_m}-\frac{z_m^2}{x_m^2}-\frac{z_m^2}{y_m^2}-1=0$$

根据相似定理得三个独立的比例数如下：

$$\frac{\mu_s z^2}{Kt}=\frac{\mu_{sm}z_m^2}{K_m t_m},\quad \frac{z^2}{x^2}=\frac{z_m^2}{x_m^2},\quad \frac{z^2}{y^2}=\frac{z_m^2}{y_m^2}$$

取对应比值用 $\alpha$ 表示，有

$$\left.\begin{aligned}\alpha_x=\frac{x_m}{x},\alpha_y=\frac{y_m}{y},\alpha_z=\frac{z_m}{z}\\ \alpha_K=\frac{K_m}{K},\alpha_t=\frac{t_m}{t},\alpha_\mu=\frac{\mu_{sm}}{\mu_s}\end{aligned}\right\} \tag{7-7}$$

三个比例数写成比值形式为：

$$\frac{\alpha_K\alpha_t}{\alpha_\mu\alpha_z^2}=1,\frac{\alpha_x^2}{\alpha_z^2}=1,\frac{\alpha_y^2}{\alpha_z^2}=1 \tag{7-8}$$

式(7-8)中含六个比值，在确定相似比例时，可任选三个，其余三个可按式(7-8)计算得出。究竟选哪些比值，视具体情况而定，一般选几何比值或参数比值。

2. 改进法

此方法是根据两系统的描述方程，找出全部对应量的比值，将比值代入原型方程，并同模型方程相比较，按照两组方程应具有相同形式的原则，直接求出各项比例数。

在上例中，取 $\alpha_H=\frac{H_m}{H}$ 连同式(7-7)一起代入式(7-5)得

$$\frac{K_m}{\alpha_K\alpha_H}\left(\alpha_x^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}+\alpha_y^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial y_m^2}+\alpha_z^2\frac{\partial^2 H_m}{\partial z_m^2}\right)=\frac{\alpha_t}{\partial_\mu\alpha_H}\cdot\mu_{sm}\frac{\partial H_m}{\partial t_m} \tag{7-9}$$

同模型方程(7-6)比较可知，只有

$$\frac{\alpha_x^2}{\alpha_K}=\frac{\alpha_y^2}{\alpha_K}=\frac{\alpha_z^2}{\alpha_K}=\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu} \tag{7-10}$$

成立，式(7-9)和(7-5)才有相同形式，结果可直接求出各项比例数。与前述方法一样，它同样给出三个等式表示六个比值 $\alpha_x$、$\alpha_y$、$\alpha_z$、$\alpha_t$、$\alpha_K$、$\alpha_\mu$ 之间的关系，在确定相似比例时，可视具体情况任选三个，再由式(7-10)计算另外三个。

**三、模拟方法**

模拟方法，常视用于模拟地下水运动规律的物理现象不同而异，分同质模拟和异质模拟，前者如渗流槽、窄缝槽模拟；后者如电模拟，其中包括连续介质电模拟(水电比拟)和非连续介质电模拟，如 $R$-$R$ 电网络和 $R$-$C$ 电网络模拟等；此外，有热模拟和薄膜模拟等。本章主要介绍渗流槽模拟、窄缝槽模拟及连续介质电模拟。

## 第二节　渗流槽模拟

渗流槽模拟也称砂槽模拟。它是用多孔物质(一般用砂)制作的同质模拟模型，用此模型研究原型中渗流的运动特征。

**一、渗流槽结构**

渗流槽结构常由原型流场决定的形状不同而不同，在模拟井流时常用扇形槽；在模拟一维、二维流时常用矩形槽。

矩形槽常用角钢、铁板、玻璃板、橡胶管、玻璃测压管及水位调节装置组装(图 7-1)，由槽首(Ⅰ)、槽身(Ⅱ)和槽尾(Ⅲ)三部分组成。各部分之间用可移动的过滤网隔开，这样槽身(Ⅱ)可以根据设计模型的大小而伸缩变化。槽首(Ⅰ)与供水系统连接，具有调节供水量和水位的功能，用以模拟补给区的边界条件。槽身(Ⅱ)前壁为透明玻璃板，可直接观察渗流现象；后壁和底部同测量系统连接，安装测压管，用于记录模型中测压管水头，了解水头分布和变化，其内装有用于模拟的多孔介质材料。槽尾(Ⅲ)同排水系统连接，以调整排水量和水位的方法，模拟排泄区的边界条件。在槽身上面可根据需要安装喷水装置，以达到模拟入渗量。

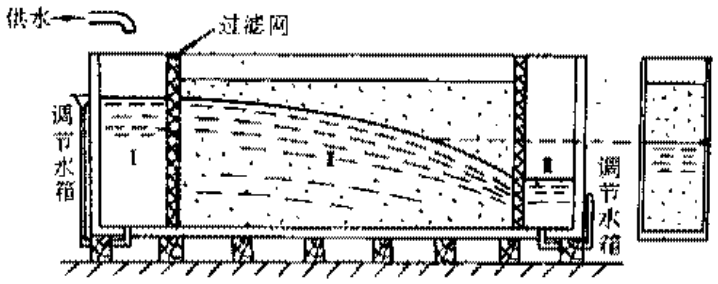



图 7-1　渗透槽的结构示意图

渗流槽的形状及结构，可根据模拟区流场的形态、特征及边界形状条件等专门设计。

用于模拟多孔介质的材料，在结构上要稳定、不易起化学反应，装填时在均匀性方面应尽量保持与原型一致。

模拟用的流体视模拟对象而定，若模拟饱和流和非饱和流的运动，则用均质水；模拟咸淡水界面运移时，可采用密度、粘度不同的异质流体；模拟水动力弥散时，常采用均质水加示

踪剂。选择流体时应避免侵蚀性、有毒性和易燃性。

**二、渗流槽模型**

渗流槽模拟实质为同质同型模拟，故两系统具有相同形式的微分方程。根据两系统的比例相似原则，可以找到一组比值作为渗流槽模型设计的依据。现以承压水流模型为例说明。

设该承压水流在均质各向同性介质中，呈剖面一维非稳定运动，有微分方程：

$$K\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}=\mu_s\frac{\partial H}{\partial t},\ v=-K\frac{\partial H}{\partial x} \tag{7-11}$$

引入下列无量纲比值：

$$\alpha_H=\frac{H_m}{H},\ \alpha_\mu=\frac{\mu_{sm}}{\mu_s},\ \alpha_K=\frac{K_m}{K}$$

$$\alpha_x=\frac{x_m}{x},\ \alpha_y=\frac{y_m}{y},\ \alpha_z=\frac{z_m}{z} \tag{7-12}$$

式中有下标 $m$ 者为模型量，无下标 $m$ 者为原型量。现将原型量代入式(7-11)，整理后得：

$$\left(\frac{\alpha_x^2}{\alpha_K\alpha_H}\right)K_m\frac{\partial^2 H_m}{\partial x_m^2}=\left(\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu\alpha_H}\right)\mu_{sm}\frac{\partial H_m}{\partial t_m}$$

$$\left(\frac{1}{\alpha_v}\right)v_m=-\left(\frac{\alpha_x}{\alpha_K\alpha_H}\right)K_m\frac{\partial H_m}{\partial x_m}$$

只要令各项比值的组合满足下列关系：

$$\frac{\alpha_t}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_x^2}{\alpha_K},\ \alpha_v=\frac{\alpha_K\alpha_H}{\alpha_x} \tag{7-13}$$

则所得方程便可转化为与式(7-11)有相同形式的模型方程。也就是说，若实际渗流场用式(7-11)描述，则按式(7-13)比值缩成相似模型，则原型中的渗流规律就可以用相同形式的模型方程求解，也不致于失真。

式(7-13)共有六个比值。为了进行相似模型设计，需要结合模拟的技术条件选定四个比值，其余可按式(7-13)计算求得。若已知原型规模和渗流槽尺寸，可确定 $\alpha_H$ 和 $\alpha_x$，常取 $\alpha_H=\alpha_x$；根据已知的介质参数可直接确定 $\alpha_K$ 和 $\alpha_\mu$。而 $\alpha_t$ 和 $\alpha_v$ 可由等式 $\alpha_t=\frac{\alpha_x^2}{\alpha_K}\cdot\alpha_\mu$ 和 $\alpha_v=\frac{\alpha_K\cdot\alpha_H}{\alpha_x}=\alpha_K$ 求得。这样，在选定比值 $\alpha_H$、$\alpha_K$ 和 $\alpha_\mu$ 后，根据已知的原型量便可求出相似的模型量：

$$H_m=\alpha_H\cdot H,\ x_m=\alpha_H\cdot x,\ K_m=\alpha_K\cdot K$$

$$v_m=\alpha_v\cdot v,\ \mu_{sm}=\alpha_\mu\cdot\mu_s,\ t_m=\frac{\alpha_H^2}{\alpha_K}\cdot\alpha_\mu\cdot t \tag{7-14}$$

由上述模型量组装渗流槽模型。给出定解条件，进行模拟实验。

**三、模拟方法**

对某一实际问题模拟大致分以下几个步骤：

第一，概化原理。为达到准确模拟渗流区地下水运动特征，应查明该区地质、水文地质条件，圈定渗流区范围，确定微分方程，给出定解条件及拟合所用的长期观测资料。

第二，组装模型。根据两系统模型的几何尺寸，初步确定模型比例，选好用于模拟的多孔介质材料，然后进行组装，组装时要将介质放入均匀捣实、缓慢充水、排出残留气体。

第三，标定模型系数。模型系数主要指渗透系数、贮水系数或给水度、弥散系数或弥散度等。标定就是逐渐调整边界条件，使模型中渗流符合解析解的状态，再把测定的有关要素代

入解析解计算参数；然后根据标定好的模型参数，再调整模型的相似比例。

第四，拟合原型参数。根据模拟水头和长期观测资料的拟合程度，对不合适的参数进行修正，如同数值模拟中的反求参。

第五，模拟实验。根据原型的定解条件，给出模型相似的定解条件。对于无压流只要给出模型的上、下游水位便可以自动形成自由水面边界。在实验过程中应随时记录水头、流量或溶质浓度等，对变形较快的自由面常用照像记录；对流线可用染色形成水线来观察；渗透速度可用水流速度乘以孔隙度确定。

第六，实验结果整理。根据观测记录到的数据，通过相似比将模型量转换成原型量，然后进行绘图分析。如根据换算后的各时刻的水头分布，绘制等水压线图，以便分析动态的发展趋势等，以单宽流量为例，说明换算方法：

由单宽流量的相似比

$$\alpha_q = \frac{q_m}{q} = \frac{v_m z_m}{v_z} = \alpha_v \alpha_z = \alpha_K \alpha_H \tag{7-15}$$

所以原型量可用下式换算

$$q = \frac{1}{\alpha_v \alpha_z} \cdot q_m = \frac{1}{\alpha_K \alpha_H} q_m \tag{7-16}$$

## 第三节　窄缝槽模拟

窄缝槽也称缝隙槽，它是以粘性流体在其中运动来模拟实际渗流规律的。

### 一、窄缝槽的结构

窄缝槽的结构比渗流槽的结构简单，它主要由一组平行板组成。平行板间留有缝隙，一般缝宽 0.8～3.5mm 不等，视实际需要而定，用它模拟渗流区，边界模拟常用不透水垫片模拟隔水边界；用与能调节水位的供水系统连接，以模拟水位边界；用与控制流量的排水系统连接，以模拟透水边界。窄缝槽有立式和卧式两种(图 7-2)。为了便于观察，在两平板中可安装一块有机玻璃板。

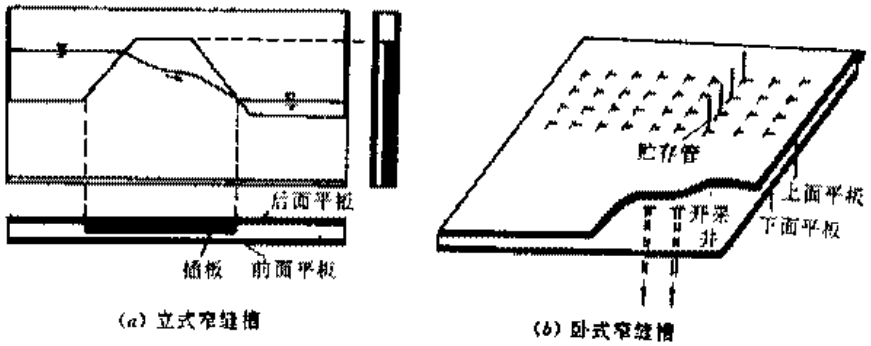



图 7-2　窄缝槽结构示意图

立式窄缝槽常利用垂直的缝隙流模拟剖面上的无压二维流问题。模拟时只需给出底部和侧面的边界条件，上边界自由面和下游边界的渗出面则可自动形成。若需模拟入渗和蒸发项，在顶部安装供水分配管、在底部增设排水孔即可。

卧式窄缝槽为水平的缝隙，用流体在其中的运动，模拟平面上的二维流问题，在模拟承压二维流时，常在上面平板上设置离散的贮存管，用它模拟含水层的弹性贮水率。其计算方法是：设贮存管本身的截面积为 $A$，该管控制的面积为 $F$，缝隙宽度 $b$，则模型的贮水率 $\mu_m=\frac{A}{Fb}$。在下面平板上装上能控制流量并与排水或供水系统连接的小孔，以模拟开采井和注水井。在两平行板之间插入等厚的带有网眼的插板代表弱透水层来模拟越流现象。

窄缝槽模拟具有简单、轻便的优点，但它只能模拟均质各向同性的二维流。而对非均质各向异性的问题模拟，则需要对窄缝槽进行专门设计。

**二、模拟原理**

在窄缝槽模拟时常用粘性流体来模拟实际流体。根据流体力学中阐述粘性不可压缩流体运动的一般方程，以及粘性流体在窄缝槽中运动的特点(即二维流动)，有效体积力只有重力，惯性力可以忽略，垂直于窄缝槽方向的流速梯度远远大于其它方向，这样在方程中可略去流速在其它方向的导数。设坐标的选取如图 7-3 所示，则可写出粘性不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程：

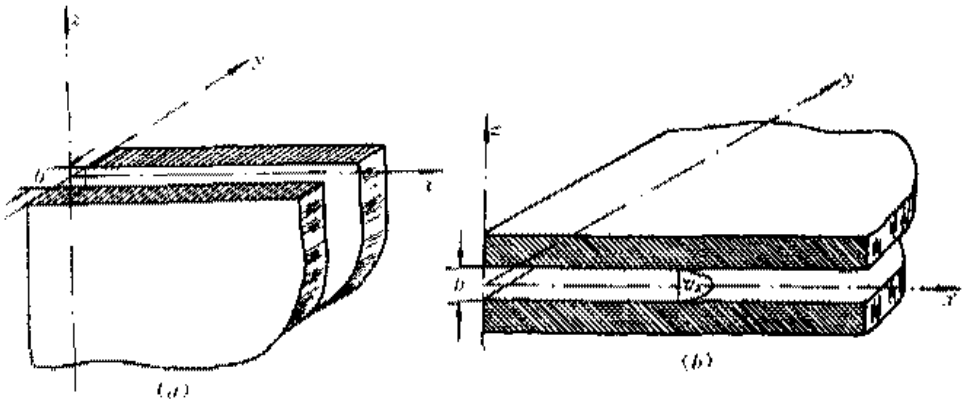


图 7-3　窄缝槽坐标选取示意图

$$\begin{cases}\dfrac{du_x}{dt}=f_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x}+v\nabla^2u_x\\[2ex]\dfrac{du_y}{dt}=f_y-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y}+v\nabla^2u_y\\[2ex]\dfrac{du_z}{dt}=f_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z}+v\nabla^2u_z\end{cases}\tag{7-17}$$

式中 $\frac{du_x}{dt}$、$\frac{du_y}{dt}$、$\frac{du_z}{dt}$——流体动力导数；

$u_x$、$u_y$、$u_z$——$x$、$y$、$z$ 方向的速度分量；

$v$——运动粘滞系数；

$f_x$、$f_y$、$f_z$——作用在单位质量流体上的外力的分量。

根据粘性流体在窄缝中运动的特点，式(7-17)可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(P+\gamma_z)}{\partial x}&=\mu\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \qquad (a)\\ \frac{\partial(P+\gamma_z)}{\partial y}&=0 \qquad (b)\\ \frac{\partial(P+\gamma_z)}{\partial z}&=\mu\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \qquad (c)\end{aligned}\right\} \tag{7-18}$$

式中 $P$——压强；

$\mu,\gamma$——液体的动力粘滞系数和容重。

由式(7-18)可以看出，在垂直于窄缝的方向($y$)上$(P+\gamma_z)$为常量。现对式(7-18)中 $a$ 和 $c$ 式积分并考虑边界条件 $y=0$ 时，$\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_z}{\partial y}=0$，则有

$$\left.\begin{aligned}y\frac{\partial(P+\gamma_z)}{\partial x}\gamma&=\mu\frac{\partial u_x}{\partial_y}\\ y\frac{\partial(P+\gamma_z)}{\partial z}\gamma&=\mu\frac{\partial u_z}{\partial_y}\end{aligned}\right\} \tag{7-19}$$

再积分一次，并注意到 $y=\pm\frac{b}{2}$ 时，$u_x=u_z=0$，有结果

$$\left.\begin{aligned}u_x&=\frac{\gamma}{\partial\mu}(y^2-\frac{b^2}{4})\frac{\partial}{\partial x}(P+\gamma_z)\\ u_z&=\frac{\gamma}{\partial\mu}(y^2-\frac{b^2}{4})\frac{\partial}{\partial z}(P+\gamma_z)\end{aligned}\right\} \tag{7-20}$$

现引入测压水头 $H_m=z+\frac{P}{\gamma}$，并在宽度 $b$ 内进行积分再除以 $b$，便得窄缝内流体平均流速

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}_x&=\frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}u_x\mathrm{d}_y=-\frac{b^2}{12}\frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial H_m}{\partial x}=-C_m\frac{\partial H_m}{\partial x}\\ \bar{u}_z&=\frac{1}{b}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}u_z\mathrm{d}_y=-\frac{b^2}{12}\frac{\gamma}{\mu}\frac{\partial H_m}{\partial z}=-C_m\frac{\partial H_m}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{7-21}$$

式中 $C_m=\frac{b^2}{12}\cdot\frac{g}{\upsilon}$——透水系数，有速度量纲；

$\upsilon=\frac{\mu}{\rho}$——流体的运动粘滞系数。

由此，粘性流体在窄缝槽中二维流动的一般式可写为

$$\bar{u}=-C_m\cdot\mathrm{grad}\,H_m \tag{7-22}$$

根据上式和连续性方程，便可写出流体在窄缝槽中层流运动的微分方程：

$$-\mathrm{div}(C_m\mathrm{grad}H_m)=\mu_m\frac{\partial H_m}{\partial t} \tag{7-23}$$

式中 $\mu_m$——窄缝槽模型的贮水率。

若存在入渗，开采及越流时，应在方程式的右端加上源汇项。

将上式与式(7-2)比较发现，两方程中的物理量个数相等，位置对应，组合关系相同。特别是模型的透水系数 $C_m=\frac{b^2}{12}\frac{g}{\upsilon}$ 和裂隙介质的理想模型 $\bar{u}=\frac{b^2}{12}\frac{g}{\upsilon}J$ 中系数 $K=\frac{b^2}{12}\frac{g}{\upsilon}$ 不仅相似，而且还包括了介质输运流体能力的一项($\frac{b^2}{12}$)和流体性质项($\frac{g}{\nu}$)，量纲相同，表明两系统

的微分方程的形式完全相同；若再给出相似的定解条件，使数学模型相似，便可以全面模拟原型的动态及过程。

**三、窄缝槽模型**

根据模拟原理，由两系统的微分方程可以确定模型的相似比例。现以无压流模型为例说明确定模型的比例，对所有情形都假定 $C_m=\frac{b^2}{12}\cdot\frac{g}{\upsilon}$ 为定值。

原型是均质各向异性介质。设 $x$ 坐标轴与主渗透方向平行，$K_x$ 为最大，$K_z$ 为最小。由于无压，所以弹性释放量可忽略，$\mu_s=0$。考虑均匀入渗补给强度为 $W$，则描述这种状态的方程为

$$K_{xx}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+K_{zz}\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0$$

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}+K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z}-K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=W \tag{7-24}$$

式中 $\mu$ 为给水度。第二个方程为自由面的边界条件。引入无量纲比值 $\alpha_{Kx}=\frac{C_m}{K_{xx}}$，$\alpha_{Kz}=\frac{C_m}{K_{zz}}$，$\alpha_W=\frac{W_m}{W}$，连同式(7-7)中的比值代入原型方程，在满足形式相同的模型方程情况下，求出关系式：

$$\frac{\alpha_x^2}{\alpha_{Kx}}=\frac{\alpha_z^2}{\alpha_{Kz}},\ \frac{\alpha_t}{\alpha_\mu}=\frac{\alpha_w}{\alpha_{Kz}}=\frac{\alpha_x^2}{\alpha_{Kx}\alpha_z}=\frac{\alpha_H}{\alpha_W}$$

上述关系式包括八个比值，其中有五个可以按模拟的技术条件选定。首先根据已知的参数值选定三个比值 $\alpha_x$、$\alpha_{kx}$、$\alpha_{kz}$；然后按原型及模型的尺寸，可适当选定 $\alpha_x$ 和 $\alpha_z$ 中的一个与 $\alpha_H$ 相等，这里选 $\alpha_H=\alpha_z$，余下的三个比值 $\alpha_x$、$\alpha_t$ 和 $\alpha_W$ 可以按下式计算得到：

$$\alpha_x=\alpha_z\sqrt{\frac{\alpha_{kx}}{\alpha_{kz}}}=\alpha_H\sqrt{\frac{K_{zz}}{K_{xx}}}$$

$$\alpha_t=\frac{\alpha_s\cdot\alpha_H}{\alpha_{kz}}$$

$$\alpha_W=\frac{\alpha_{kz}\alpha_H}{\alpha_s}=\alpha_{kx} \tag{7-25}$$

这样，设计所需的模型量可由 $\alpha_H$、$\alpha_{kx}$、$\alpha_{kz}$及 $\alpha_\mu$ 求得：

$$H_m=\alpha_H H,\ C_m=\alpha_{kx}K_{xx}=\alpha_{kz}K_{zz},\ \mu_m=\alpha_\mu\mu,$$

$$z_m=\alpha_H z,\ x_m=\alpha_H\sqrt{\frac{K_{zz}}{K_{xx}}}x,\ t_m=\frac{\alpha_s\cdot\alpha_H}{\alpha_{kz}}t,$$

$$W_m=\alpha_W W$$

按这些量进行模型缩制，便得到一个均质、各向同性的变形模型，即原型的厚度、水头和定解条件，都按同一比值 $\alpha_H$ 缩小，但在 $x$ 方向上用缩短距离所产生的效应来模拟 $K_{xx}>K_{zz}$ 的各向异性，以此完成两系统的相似模拟。

## 第四节 电 模 拟

电模拟是应用较为广泛的一种模拟方法，它按介质在空间上是否连续以及介质传播方

式分为连续型、离散型和离子运动型的电模拟。连续型是以渗流和电流两个连续场中流动的数学模型相似为基础，能模拟出稳定渗流场内任意一点的渗流要素；离散型则是以两个离散场的差分模型相似为依据，在指定的结点上模拟稳定的或非稳定的乃至各向异性的渗流要素；而离子运动型是以在直流电位梯度作用下电解液中离子运动的速度，与在水力梯度作用下多孔介质中的液体质点的平均速度相似的事实为依据，其主要优点在于除了通常能测量势的分布外，还能直接观察到两种不混溶流体界面运动，多用于采油工程中的二维驱替问题。本节主要介绍连续型电模拟。

### 一、模拟原理

用连续型电模拟装置模拟渗流问题的原理，在于地下水在多孔介质中的稳定流动与电流在导电介质中的流动具有相似性，这种相似表现于描述两种场的数学模型相似。其相似的物理量及对应的组合关系见表 7-1。从表中可以看出，描述两种场的微分方程的形式完全相同。这种数学相似又支配着两场的定解条件相似。

(1) 两场的边界条件相似。一一对应的边界关系(表 7-1)中，自由面边界可由绝缘面和 $U=az$ 模拟；而渗出面边界则可用电位 $U=az$ 的边界模拟。

表 7-1

| 渗　流　场 | 电　场 |
|---|---|
| 多孔介质 | 导电介质 |
| Darcy 定律 $v=-K\cdot \mathrm{grad}H$ | Ohm 定律 $i=-\sigma\cdot \mathrm{grad}U$ |
| 流量 $Q=\iint_A v\cdot \mathrm{d}A$ | 电流强度 $I=\iint_S I\cdot \mathrm{d}s$ |
| 渗透速度 $v$ | 电流密度 $i$ |
| 渗透系数 $K$ | 电导率 $\sigma$ |
| 水头梯度 $-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}s}$ | 电位梯度 $\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}$ |
| 过水断面 $A$ | 导体截面 $S$ |
| 数学模型 | 数学模型 |
| 水头方程 | 电位方程 |
| $\frac{\partial}{\partial x}(K_{xx}\frac{\partial H}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(K_{yy}\frac{\partial H}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(K_{zz}\frac{\partial H}{\partial z})=0$ | $\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}\frac{\partial U}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{yy}\frac{\partial U}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{zz}\frac{\partial U}{\partial z})=0$ |
| 定解条件 | 定解条件 |
| 给定水头边界，$H=f_1(x,y,z)$ | 给定电位边界 $U=\varphi_1(x,y,z)$ |
| 给定流量边界，$Q=f_2(x,y,z)$ | 给定电流边界 $I=\varphi_2(x,y,z)$ |
| 隔水边界，$\frac{\partial H}{\partial n}=0$ | 绝缘边界 $\frac{\partial H}{\partial n}=0$ |

(2) 两个场的介质参数相似。在模拟均质介质时，导电介质可任选，只要求电导率和渗透系数保持固定比值；在模拟非均质介质时，两场中各层的对应参数应满足：

$$\frac{\sigma_1}{K_1}=\frac{\sigma_2}{K_2}=\cdots\cdots=\frac{\sigma_n}{K_n}$$

或
$$\frac{1}{\rho_1 K}=\frac{1}{\rho_2 K_2}=\cdots\cdots=\frac{1}{\rho_n K_n} \tag{7-26}$$

式中 $\sigma_1,\sigma_2\cdots\cdots\sigma_n$ 和 $\rho_1,\rho_2\cdots\cdots\rho_n$——模型各层介质的导电率及电阻率；

$K_1,K_2\cdots\cdots K_n$——原型各层的渗透系数。

由相似理论可知，两个系统的数学模型相似必有相似解，这样可以通过建立在相似基础上的模型装置研究渗流问题，用简单易测的电场求解代替对复杂难测的渗流规律的求解。

连续介质电模拟装置组成比较简单，其主体是导电介质，目前常用的导电介质有两类：固态的导电纸和液态的电解质。前者的优点是可随意做成各种模型形状，但它不能模拟三维流，且其本身常有微小的各向异性而影响测量精度。后者常用自来水或硫酸铜、氯化钠等溶液，装在不漏水的电解槽内，再加上测量装置组成模型(图 7-4)。在模拟时，可根据原型的边界轮廓和性质在电解槽内缩成电解质模型，用这种电模型即可以模拟二维流，也能模拟三维流的地下水运动问题，但注意不能用直流电以防止电极发生极化。

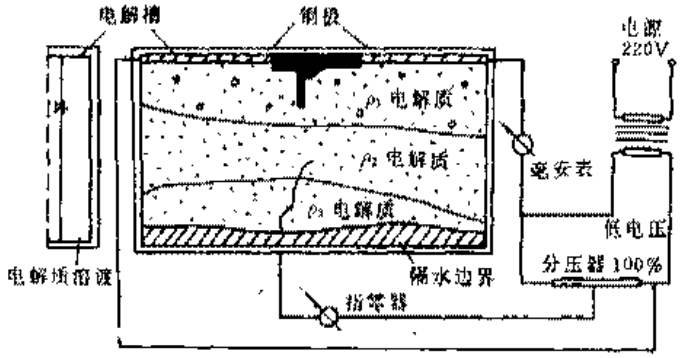



图 7-4 连续介质电模拟(电解槽)装置示意图

## 二、连续介质模型

为了进行模型设计，仍需根据两系统描述的方程确定模型相似比例。与前面二种模型不同的是，原型和模型对应的物理量具有不同的物理性质，因而对应量比值并非全是无量纲，故用 $\beta$ 表示其比值：

$$\beta_H=\frac{U}{H},\ \beta_{kx}=\frac{\sigma_{xx}}{K_{xx}},\ \beta_{ky}=\frac{\sigma_{yy}}{K_{yy}},\ \beta_{kz}=\frac{\sigma_{zz}}{K_{zz}},$$

$$\beta_x=\frac{x_m}{x},\ \beta_y=\frac{y_m}{y},\ \beta_z=\frac{z_m}{z},\ \beta_Q=\frac{I}{Q} \tag{7-27}$$

把原型量代入 Darcy 定律和稳定流的 Laplace 方程：

$$\begin{cases} U=-\boldsymbol{K}\cdot\mathrm{grad}H \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K_{xx}\dfrac{\partial H}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(K_{yy}\dfrac{\partial H}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(K_{zz}\dfrac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \end{cases} \tag{7-28}$$

同时满足 Ohm 定律及稳定电位的 Laplace 方程，即

$$\begin{cases} i=-\sigma\cdot\mathrm{grad}U \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\dfrac{\partial U}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{yy}\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{zz}\dfrac{\partial U}{\partial z}\right)=0 \end{cases} \tag{7-29}$$

式中 $i$——电流密度；

$U$——电位；

$\sigma, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$——电导率及其在三个方向上的分量。

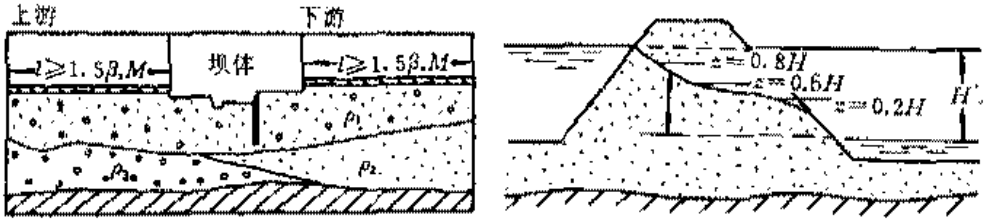
在上述的条件下，可得出下列比值的组合关系：

$$\beta_Q = \frac{\beta_{k_x}\beta_y\beta_z\beta_H}{\beta_x}, \quad \frac{\beta_x^2}{\beta_{k_x}} = \frac{\beta_y^2}{\beta_{k_y}} = \frac{\beta_z^2}{\beta_{k_z}} \tag{7-30}$$

上述三个等式包含八个比值，在模拟均质各向同性的原型时，导电介质需各向同性，即 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_{(x,y)}$，所以经常选定比值 $\beta_H$、$\beta_{k_x}$、$\beta_{k_y}$、$\beta_{k_z}$、$\beta_\sigma$。剩下的三个比值 $\beta_x$、$\beta_y$ 和 $\beta_Q$ 可按式(7-30)计算。由上述比值可以组装相似模型。

下面以典型条件下的二维坝基承压流模型的模拟过程说明模型的设计。

在各向同性介质的剖面二维流条件下，取 $xz$ 平面为模拟剖面，参数比 $\beta_{k_x} = \beta_{k_z} = \beta_k$（如图 7-5），此时式(7-30)简化为




(a) 坝基承压流模型　　(b) 坝体无压流模型

图 7-5　坝基承压流模型示意图

$$\beta_x = \beta_z, \quad \beta_Q = \beta_k \cdot \beta_H$$

在选定三个独立比值 $\beta_H$、$\beta_K$ 和 $\beta_z$ 后，可计算模型设计所需的模型量：

$$U = \beta_H H, \quad \sigma = \beta_k K, \quad x_m = \beta_x x, \quad z_m = \beta_z z, \quad I = \beta_k \beta_H q$$

这里，$q$ 为单宽流量；比值 $\beta_H$ 和 $\beta_K$ 是有量纲，$\beta_H$ 通常用 $\frac{V}{m}$，$\beta_K$ 用 $\mathrm{d}/(\Omega \cdot \mathrm{m}^2)$。

由上述模型量进行缩制模型，要经过下列过程：

第一，合理截取模型范围。通常，要模拟的渗流区范围较大、不能整体缩制时，应截取有代表性的部分制成模型，保证模拟结果不会失真。截取的方法是半经验指标法：

若坝体下含水层的厚度 $M$ 有限时，可按下式截取：

$$l = (1.5 \sim 2)\beta_l M$$

式中　$l$——坝体上、下游透水边界的模型长度，上、下游相等(图 7-5)。

若坝体下的含水层的厚度很大时，在距坝体足够远的地段，渗流已接近半圆形，所以模型范围(图 7-6)可以坝底中心点为圆心，近似按半圆形截取。半圆半径 $R$ 满足：

$$R \geqslant 1.5\beta_z l_b$$

$$R \geqslant 3\beta_z l_t$$

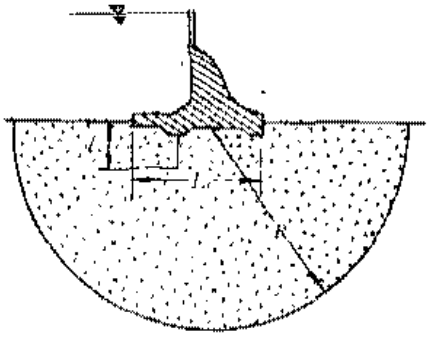



图 7-6　含水层厚度大时模型范围截取示意图

式中　$l_b$——坝体底板宽度；

$l_t$——坝基板桩的长度。

若坝体下是由一系列透水性不同的层状透水岩层组成时，则一般取渗透参数小、埋深大

于 $l_b$ 的一层作为模型的下边界，并按隔水边界处理。

第二，模型制作。在模型范围确定以后，参照原型的含水层特征及边界条件，分别用金属、绝缘材料以及不同导电介质材料进行模型制作。常用金属板装上电位控制装置模拟定水头边界；用导电材料模拟渗透边界；用绝缘材料模拟隔水边界。常用的绝缘材料有玻璃板、胶木板、石蜡和橡皮泥等。若有抽水井，则可用铜杆、铜丝或白金丝等模拟井的透水边界。

第三，注入电解质。模型制作完毕后，可根据需要选定一种电解质注入模型。如属均质层，可任选一种电解质作为模型介质；若为层状非均质层，则应选一种电解质，设其电导率为 $\sigma_1$，参数比为 $\beta_i$，其它层电解质的电导率应按相似条件选取；可取 $\sigma_2=\beta_1K_2$，$\sigma_3=\beta_1K_3$ 等。电导率不同的电解质常用调整模型内部不同层位溶液浓度的方法获得。为了防止不同浓度电解质的混合，一般在分界处用导电隔板分开，这种隔板既能隔开不同浓度的电解质，又能传导隔板两侧的电流而不影响电场电位分布。

**三、模拟方法**

完成上述两步后，便可进入模拟运行阶段。首先按 $U=\beta_H H$ 给出模型边界条件，在模型内的电解质中便有电位分布，然后采用电测装置测量各点的电位，找出等电势线的分布，便可间接了解等水头线的分布。在模拟中常用的电测装置为电学上的 Wheatstone 电桥装置(图 7-7)。AC 和 CB、AD 和 DB 均为串联电路，ACB 和 ADB 为并联电路。当桥路中无电流通过时(以零为示)，则 C、D 两点电位应相等。通过 ACB 的电流为 $I_1$，通过 ADB 的电流为 $I_2$。当 $C$、$D$ 两点电位相等时，由 Ohm 定律有

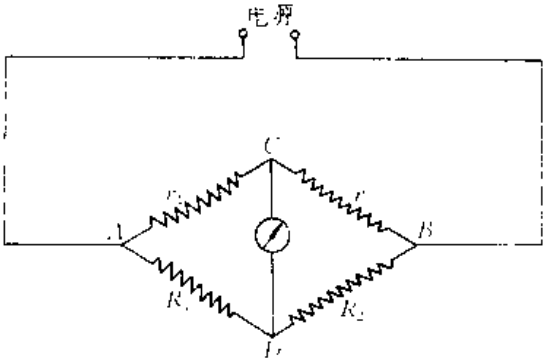



图 7-7　Wheatstone 电桥线路图

$$I_1r_1 = I_2R_1,\ I_1r_2 = I_2R_2$$

故

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

再由 Ohm 定律可知 $R_1=\dfrac{U_A-U_D}{I_2}$，$R_2=\dfrac{U_D-U_B}{I_2}$，$U$ 为相应点电位，故上式可写成

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{U_A-U_D}{U_D-U_B}$$

按合比定理可进一步推得

$$\frac{r_2}{r_1+r_2} = \frac{U_D-U_B}{U_A-U_B} \tag{7-31}$$

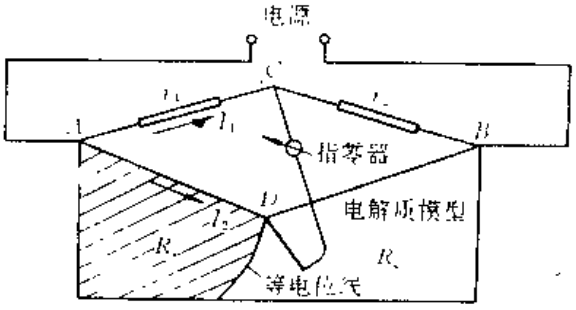



图 7-8　模型电模拟装置示意图

由此可知，并联电路分点 C 和 D 电位相等时，CB 段电阻与 ACB 全长电阻比值等于支路 DB 间电位差与全路 ADB 间电位差的比值。利用上述原理可建立模型电测装置(图 7-8)。这时模型中的等电位线将电解质分成两部分，它们的电阻值分别代替电桥中的 $R_1$ 和 $R_2$，电模型和电桥中一对电阻臂共同组成电桥。由上述

原理可知，当 $C$、$D$ 两点电位相等（电桥平衡）时，电位计上两段电阻之比，应等于模型中相应两段电位差之比；电位计上一段电阻和全路电阻之比，应等于模型中相应的一段电位差与全路电位差之比。利用这一关系，便可测量模型区的等电位点。

假设已给出模型上、下游边界条件分别为：上游电位为 100%，下游电位为 0，电位差为 100，这时模型区自动形成以下游为基准面的电位分布。测量时，先选定 $\frac{r_1}{r_2}$ 或 $\frac{r_2}{r_1+r_2}$ 的一个比值，然后将测针在模型中垂直移动，直到平衡（电位计指零）该位置就是一个等电位点。对同一个阻值比，在模型区内有若干个等电位点。在测出一定数量（一般不小于 5 个）的等电位点后，便可连成一个等电位线；按同样方法，改变比值可得若干条等势线。测完模型中等电位点后，接着测模型电阻。其方法是：用一台电阻测定仪或电桥装置与模型组成测定装置，如图 7-9 所示。图中的 $R_K$ 为已知的标准电阻，同模型串联，同标准电位计并联，中间连一检流计，测量时，一边调整 $r_1$ 与 $r_2$ 的比值，另一方面可调整 $R_K$ 的电阻值，直至无电流通过桥路时，根据上述读数用下式计算电阻：

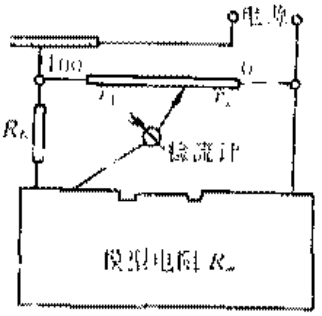



图 7-9 模型电阻测量装置示意图

$$R_m = \frac{r_2}{r_1} \cdot R_K$$

由模拟所得的等电位线，经 $\beta_H$ 换算后便是模拟渗流区的等水头线，再用图解法绘出流线而形成流网。

根据流网可计算各项渗流要素。流量也可通过测量模型的电阻、电压、电流直接计算求得。

在三维流时，由已知比值 $\beta_Q=\beta_k\beta_x\beta_y\frac{\beta_H}{\beta_z}$ 中解出：

$$Q=\frac{\beta_z}{\beta_k\beta_H\beta_y\beta_x}I$$

在各向同性介质条件下，由模型相似基础，有 $\beta_x=\beta_y=\beta_z=\beta_l$，$\beta_k=\frac{\sigma}{K}=\frac{1}{\rho K}$，$\beta_H=\frac{\Delta U}{\Delta H}$，代入上式得：

$$Q=\frac{\rho K\Delta H}{\beta_l\frac{\Delta U}{I}}=\frac{\rho K\Delta H}{\beta_l R_m} \tag{7-32}$$

式中 $R_m=\frac{\Delta U}{I}$——模型总电阻；

$\Delta H$——原型上、下游水头差。

在平面二维流时，若模型的电解质厚度为 $\delta$，原型含水层的厚度 $M=\frac{\delta}{\beta_l}$，若其中有井的开采量为 $Q$ 对应模拟井的电流强度为 $I$，代入式(7-32)得：

$$Q=\frac{\rho K\Delta HM}{\delta\Delta U}I \tag{7-33}$$

若为剖面二维流，对应含水层厚度为 $b=\frac{\delta}{\beta_l}$，代入式(7-32)得单宽流量：

$$q=\frac{Q}{b}=\frac{\rho K\Delta H}{\delta R_m} \tag{7-34}$$

**思考题**

1. 为什么能用其它物理现象来模拟地下水的运动?
2. 在模型制作时应注意什么问题?
3. 如何提高模型的仿真度?

# 附录 Ⅰ

## 求证无越流补给承压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题

下列定解问题*

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial H}{\partial r}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial H}{\partial t} & (\mathrm{I}\text{-}1)\\ H(\infty,t)=H_0 \quad (t\geqslant 0) & (\mathrm{I}\text{-}2)\\ \lim\limits_{r\to 0}\left(r\dfrac{\partial H}{\partial r}\right)=\dfrac{Q}{2\pi T} \quad (t>0) & (\mathrm{I}\text{-}3)\\ H(r,0)=H_0 \quad (t=0) & (\mathrm{I}\text{-}4)\end{cases}$$

的解为

$$s=H_0-H=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$$

进一步展开，可得

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left(-0.5772-\ln u+u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\frac{u^3}{3\cdot 3!}-\frac{u^4}{4\cdot 4!}+\cdots\right)$$

式中 $u=\dfrac{r^2\mu^*}{4Tt}$。

解： 在方程(Ⅰ-1)内将自变量 $t$ 换为 $y=\dfrac{T}{\mu^*}t$，于是方程变为

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r}=\frac{\partial H}{\partial y} \qquad (\mathrm{I}\text{-}5)$$

用分离变量法求这个方程的特解。令 $H=R(r)Y(y)$，代入式(Ⅰ-5)得

$$\left(R''+\frac{1}{r}R'\right)Y=RY' \qquad (\mathrm{I}\text{-}6)$$

此处

$$R'=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r},\ Y'=\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}y}$$

于是

$$\frac{R''+\dfrac{1}{r}R'}{R}=\frac{Y'}{Y}$$

上式左边是 $r$ 的函数，右边是 $t$ 的函数。$r$ 和 $t$ 又是独立变量，所以上式左右两边应等于常数，记作 $-\lambda^{2}$** $(\lambda>0)$。于是得

$$R''+\frac{1}{r}R'+\lambda^2 R=0,\ Y'+\lambda^2 Y=0$$

---

* 附录Ⅰ～Ⅱ摘自《地下水动力学》，薛禹群、朱学愚，地质出版社，1979。

** 这里取负常数是因为 $H$ 是 $t$ 的减函数。

由此分别求得它们的解为

$$R = J_0(\lambda R),\ Y = e^{-\lambda^2 y}$$

式中 $J_0$ 表示第一类零阶贝塞尔函数。由此得式(Ⅰ-5)的特解为

$$A(\lambda)J_0(\lambda r)e^{-\lambda^2 y} \qquad 0 < \lambda < \infty$$

根据叠加原理，下式

$$H(r,y) = \int_0^\infty A(\lambda)J_0(\lambda r)e^{-\lambda^2 y}\,d\lambda \tag{Ⅰ-7}$$

必然也适合式(Ⅰ-5)。取 $A(\lambda)=\lambda$，并应用韦柏(Weber)公式*得

$$\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda^2 y}\,\lambda d\lambda = \frac{1}{2y}\exp(-\frac{r^2}{4y}) \tag{Ⅰ-8}$$

所以

$$H = \frac{\mu^*}{2Tt}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4Tt})$$

是方程(Ⅰ-1)的一个解。可是，由此得到的

$$\frac{\partial H}{\partial r} = -\frac{r\mu^{*2}}{4T^2t^2}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4Tt})$$

及

$$\lim_{r\to 0}(r\frac{\partial H}{\partial r}) = -\lim_{r\to 0}\frac{-r^2\mu^*}{4T^2t^2}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4Tt}) = 0$$

与边界条件式(Ⅰ-3)有矛盾。为了解决这个矛盾，设函数 $H(r,\tau)$ 适合方程

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\mu^*}{T}\frac{\partial H}{\partial \tau}$$

对 $\tau$ 进行从 0 到 $t$ 积分，并注意到 $\lim_{t\to 0^+} H(r,t)=0$，于是有

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\int_0^t H(r,\tau)d\tau\right] + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\int_0^t H(r,\tau)d\tau\right] = \frac{\mu^*}{T}\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\int_0^t H(r,\tau)d\tau\right]$$

所以

$$\int_0^t \frac{\mu^*}{2T\tau}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4T\tau})d\tau$$

必然适合方程(Ⅰ-1)。因为边界条件要求 $H<H_0$，且 $r\to\infty$ 时，$H\to H_0$，所以解的形式应该是

$$H(r,t) = H_0 - \int_0^t \frac{c\mu^*}{2T\tau}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4T\tau})d\tau \tag{Ⅰ-9}$$

它适合方程(Ⅰ-1)和条件式(Ⅰ-2)和(Ⅰ-4)。其中 $c$ 为待定的常数。但对我们所研究的定解问题来说，还必须适合条件式(Ⅰ-3)。为此，对上式求导数得

$$\frac{\partial H}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left[H_0 - \int_0^t \frac{c\mu^*}{2T\tau}\exp(-\frac{r^2\mu^*}{4T\tau})d\tau\right] = \frac{c\mu^*}{rT}\exp(\frac{r^2\mu^*}{4Tt})$$

于是

$$\lim_{r\to 0}(r\frac{\partial H}{\partial r}) = \frac{c\mu^*}{T}$$

由边界条件式(Ⅰ-3)，上式还应等于 $\frac{Q}{2\pi T}$，故 $c=\frac{Q}{2\pi\mu^*}$。把它代入式(Ⅰ-9)，得适合定解问题(Ⅰ)的解为

---

* 韦柏公式

$$\int_0^\infty J_0(at)\exp(-p^2t^2)t\,dt = \frac{1}{2p^2}\exp(-\frac{a^2}{4p^2})$$

$$H(r,t)=H_0-\frac{Q}{4\pi T}\int_0^t\frac{1}{\tau}\exp\left(-\frac{r^2\mu^*}{4T\tau}\right)d\tau$$

令 $u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$，则上式变成

$$H(r,t)=H_0-\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \tag{I-10}$$

或

$$s=H_0-H=\frac{Q}{4\pi T}\int_{\frac{r^2\mu^*}{4Tt}}^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du \tag{I-10'}$$

此即式(4-2)。其中指数积分可进一步展开为

$$\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=\int_\delta^{\infty}e^{-u}u^{-1}du-\int_\delta^u\frac{e^{-u}}{u}du$$

$$=-e^{-\delta}\ln\delta+\int_\delta^{\infty}e^{-u}\ln u\,du-\int_\delta^u\frac{e^{-u}}{u}du$$

此处假定 $\delta>0$，于是

$$\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=-e^{-\delta}\ln\delta+\int_\delta^{\infty}e^{-u}\ln u\,du$$

$$-\int_\delta^u\frac{1-u+\frac{u^2}{2!}-\frac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{u^n}{n!}+\cdots}{u}du$$

$$=-e^{-\delta}\ln\delta+\int_\delta^{\infty}e^{-u}\ln u\,du-\ln u+\ln\delta$$

$$+\int_\delta^u\left(1-\frac{u}{2!}+\frac{u^2}{3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^{n-1}}{n!}+\cdots\right)du$$

$$=(1-e^{-\delta})\ln\delta+\int_\delta^{\infty}e^{-u}\ln u\,du-\ln u$$

$$+\left[u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\frac{u^3}{3\cdot 3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n\cdot n!}+\cdots\right]_\delta^u \tag{I-11}$$

再令 $\delta\to 0^+$，则

$$(1-e^{-\delta})\ln\delta\to 0$$

$$\int_\delta^{\infty}e^{-u}\ln u\,du\to\int_0^{\infty}e^{-u}\ln u\,du=\Gamma'(1)$$

此处 $\Gamma(x)$ 为 $\Gamma$ 函数，其中

$$-\Gamma'(1)=0.5772$$

即尤拉常数。把它们分别代入式(I-11)，得

$$\int_u^{\infty}\frac{e^{-u}}{u}du=-0.5772-\ln u+u-\frac{u^2}{2\cdot 2!}+\frac{u^3}{3\cdot 3!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{u^n}{n\cdot n!}-\cdots$$

把它代入式(I-10)，便得到定解问题(I)的解式(4-2)。

# 附录 Ⅱ

## 求证不考虑弱透水层本身弹性释放时，存在越流补给情况下，半承压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题

下列定解问题

$$(\text{Ⅰ})\begin{cases}\dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial S}{\partial r}-\dfrac{s}{B^2}=\dfrac{\mu^*}{T}\dfrac{\partial s}{\partial t} & (\text{Ⅱ-1})\\ s(r,0)=0 \quad (t=0,r\geqslant 0) & (\text{Ⅱ-2})\\ s(\infty,t)=0 \quad (t\geqslant 0) & (\text{Ⅱ-3})\\ \lim\limits_{r\to 0} r\dfrac{\partial s}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T} \quad (t>0) & (\text{Ⅱ-4})\end{cases}$$

的解为

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty \frac{1}{y}\exp\left(-y-\frac{r^2}{4B^2y}\right)\mathrm{d}y$$

可进一步展开为

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\left\{2K_0\left(\frac{r}{B}\right)-I_0\left(\frac{r}{B}\right)\left[-E_i\left(-\frac{r^2}{4B^2u}\right)\right]+\exp\left(-\frac{r^2}{4B^2u}\right)\right.$$

$$\times\left\{0.5772+\ln u+\left[-E_i(-u)\right]-u+\frac{u\left[I_0\left(\frac{r}{B}\right)-1\right]}{\frac{r^2}{4B^2}}\right.$$

$$\left.\left.-u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!}{[(n+2)!]^2}\left(\frac{r^2}{4B^2}\right)^m u^{n-m}\right\}\right\}$$

式中 $$u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt},\ B=\sqrt{\frac{Tm'}{K'}},\ -E_i(-u)=\int_u^\infty\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$

解 令 $r=B\xi, t=\dfrac{B^2S}{T}\eta$，则式(Ⅱ-1)可化为

$$\frac{\partial^2 s}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial s}{\partial\xi}=s+\frac{\partial s}{\partial\eta} \qquad (\text{Ⅱ-5})$$

再令 $s=\mathrm{e}^{-\eta}\bar{s}$，则式(Ⅱ-5)可再次化简为

$$\frac{\partial^2\bar{s}}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{\partial\bar{s}}{\partial\xi}=\frac{\partial\bar{s}}{\partial\eta} \qquad (\text{Ⅱ-6})$$

应用附录1中所得的结果式(Ⅰ-7)和(Ⅰ-8)，可得式(Ⅱ-6)的解为

$$\bar{s}=\frac{1}{2\eta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta}\right)$$

所以

$$S=\frac{1}{2\eta}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4\eta}\right)\mathrm{e}^{-\eta}=\frac{1}{2\eta}\exp\left(-\eta-\frac{\xi^2}{4\eta}\right)$$

是式(Ⅰ-5)的解。

由于 $$\eta=\frac{Tt}{B^2u^*},\quad \xi=\frac{r}{B}$$

故 $$s=\frac{B^2u^*}{2Tt}\exp(-\frac{Tt}{B^2S}-\frac{r^2u^*}{4Tt})$$

由此求得 $$\lim_{r\to 0}r\frac{\partial s}{\partial r}=0$$

不符合边界条件式(Ⅰ-4)。为此，参照式(Ⅰ-9)，考虑式(Ⅰ-1)的另一种形式的解，有

$$s=c\int_0^t\frac{B^2u^*}{2B\tau}\exp(-\frac{T\tau}{B^2u^*}-\frac{r^2u^*}{4T\tau})d\tau$$

此处 $c$ 为待定常数。

令 $y=\frac{r^2u^*}{4T\tau}$，$u=\frac{r^2\mu^*}{4Tt}$，则

$$s=c\int_u^\infty\frac{B^2u^*}{2Ty}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (Ⅰ-7)$$

对 $r$ 求导数，得

$$\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{cB^2\mu^*}{Tr}\exp(-u-\frac{r^2}{4B^2u})+c\int_u^\infty\frac{B^2\mu^*}{2Ty}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})(-\frac{r}{4B^2y})dy$$

因此 $$\lim_{r\to 0}r\frac{\partial s}{\partial r}=-\frac{cB^2\mu^*}{T}$$

把边界条件式(Ⅰ-4)代入，求得

$$c=\frac{Q}{2\pi B^2\mu^*}\quad 或\quad \frac{cB^2\mu^*}{T}=\frac{Q}{2\pi T}$$

代入式(Ⅰ-7)得

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_u^\infty\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (Ⅰ-8)$$

如前所述，它不仅适合定解条件式(Ⅰ-2)和(Ⅰ-3)，而且也适合条件式(Ⅰ-4)。因此，它是定解问题(Ⅰ)的解，即式(4-33)。

为了把式(Ⅰ-8)右端的指数积分展开，利用贝塞尔函数中的关系式：

$$K_0(\frac{r}{B})=\frac{1}{2}\int_0^\infty\exp(-\tau-\frac{r^2}{4B^2\tau})\frac{d\tau}{\tau}$$

此处，$K_0(\frac{r}{B})$为第二类零阶虚宗量贝塞尔函数。从而有

$$\begin{aligned}s&=\frac{Q}{4\pi T}[\int_0^\infty-\int_0^u]\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy\\&=\frac{Q}{2\pi T}K_0(\frac{r}{B})-\frac{Q}{4\pi T}\int_0^u\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy\end{aligned} \qquad (Ⅰ-9)$$

上式右端的积分可分解为

$$\begin{aligned}\int_0^u\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy=&-\int_0^u\frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy\\&+\int_0^u\frac{1}{y(1+y)}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy\end{aligned} \qquad (Ⅰ-10)$$

令$\int_0^u \frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})dy=\Phi(u)$，对上式右端第一部分进行分部积分，得

$$-\int_0^u \frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=-\Phi(u)\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})+\int_0^u \Phi(y)\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})\frac{r^2}{4B^2y^2}dy \qquad (\text{I}-11)$$

其中

$$\Phi(u)=\int_0^u \frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})dy$$

$$=\int_0^\infty \frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})dy-\int_u^\infty \frac{1}{y}(\frac{1}{1+y}-e^{-y})dy$$

$$=0.5772+\ln u-\ln(1+u)-E_i(-u) \qquad (\text{I}-12)$$

$$\int_0^u \Phi(y)\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})\frac{r^2}{4B^2y^2}dy=\int_0^u \exp(-\frac{r^2}{4B^2y})\frac{r^2}{4B^2y^2}\cdot$$

$$[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot n!}y^n-\ln(1+y)]dy=[u-\ln(1+u)]\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-\int_0^u \frac{y}{1+y}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+2)!}\frac{r^2}{4B^2}\int_0^u y^n\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (\text{I}-13)$$

把式(Ⅰ-11)、(Ⅰ-12)和式(Ⅰ-13)代入式(Ⅰ-10)，整理后得

$$\int_0^u \frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy=\int_0^u \frac{1-y}{y}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy-$$

$$-[0.5772+\ln u-u-E_i(-u)]\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+2)!}\frac{r^2}{4B^2}\int_0^u y^n\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (\text{I}-14)$$

由于根据$-E_i(-u)$的定义

$$-E_i(-\frac{r^2}{4B^2u})=\int_{\frac{r^2}{4B^2u}}^{\infty}\frac{e^{-x}}{x}dx=\int_0^u \frac{e^{-\frac{r^2}{4B^2y}}}{y}dy$$

所以

$$\int_0^u \exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy=\int_{\infty}^{\frac{1}{u}}\exp(-\frac{r^2x}{4B^2})(-\frac{dx}{x^2})$$

$$=u\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})-\int_0^u \frac{r^2}{4B^2}\frac{1}{y}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=u\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})+\frac{r^2}{4B^2}E_i(-\frac{r^2}{4B^2u}) \qquad (\text{I}-15)$$

$$\int_0^u \frac{1-y}{y}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy=-E_i(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-[u\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})+\frac{r^2}{4B^2}E_i(-\frac{r^2}{4B^2u})]$$

因此，式(Ⅰ-14)可进一步化为

$$\int_0^u \frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy=-[0.5772+\ln u-E_i(-u)]\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-(1+\frac{r^2}{4B^2u})E_i(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+2)!}\frac{r^2}{4B^2}\int_0^u y^n\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (\text{I}-16)$$

对上式中的最后一项积分，逐次应用分部积分公式，可以把它改写为

$$\int_0^u y^n\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy=[\frac{u^{n+1}}{n+1}-\frac{1}{n(n+1)}\frac{r^2}{4B^2}u^n+$$

$$+\frac{1}{(n+1)n(n-1)}(\frac{r^2}{4B^2})^2u^{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(\frac{r^2}{4B^2})^{n-1}u^2}{(n+1)n\cdots3\cdot2}]$$

$$\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})+(-1)^n\frac{(\frac{r^2}{4B^2})^n}{(n+1)!}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m u^{n-m+1}}{\frac{(n+1)!}{(n-m)!}}(\frac{r^2}{4B^2})^m\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$+\frac{(-1)^n(\frac{r^2}{4B^2})^n}{(n+1)!}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

把它代入式(Ⅰ-16)的最后一项，得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)(n+2)!}\frac{r^2}{4B^2}\int_0^u y^n\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n+m-1}(n-m)!u^{n-m+1}}{(n+2)!(n+2)!}(\frac{r^2}{4B^2})^{m+1}\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{(n+2)!(n+2)!}(\frac{r}{4B^2})^{n+1}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy-\frac{r^2}{16B^2}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!u^{n-m}}{[(n+2)!]^2}(\frac{r^2}{4B^2})^m\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-\frac{4B^2}{r^2}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n!n!}(\frac{\frac{r}{B}}{2})^{2n}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy-\frac{r^2}{16B^2}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$=u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!u^{n-m}}{[(n+2)!]^2}(\frac{r^2}{4B^2})^m\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-\frac{4B^2}{r^2}I_0(\frac{r}{B})\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy+\frac{4B^2}{r^2}[1+\frac{r^2}{4B^2}+\frac{1}{4}(\frac{r^2}{4B^2})^2]$$

$$\times\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy-\frac{r^2}{16B^2}\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy \qquad (\text{I}-17)$$

把式(Ⅰ-17)代入式(Ⅰ-16)，并注意到式(Ⅰ-15)的结果，化简后便得

$$\int_0^u\frac{1}{y}\exp(-y-\frac{r^2}{4B^2y})dy=-[0.5772+\ln u-E_i(-u)-$$

$$-u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!u^{n-m}}{[(n+2)!]^2}(\frac{r^2}{4B^2})^m]\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$-\frac{4B^2}{r^2}I_0(\frac{r}{B})\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy+(1+\frac{4B^2}{r^2})\int_0^u\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})dy$$

$$-\left(1+\frac{r^2}{4B^2}\right)E_i\left(-\frac{r^2}{4B^2u}\right)$$

$$=-I_0\left(\frac{r}{B}\right)E_i\left(-\frac{r^2}{4B^2u}\right)-\{0.5772+\ln u-E_i(-u)-u+\frac{u[I_0(\frac{r}{B})-1]}{\frac{r^2}{4B^2}}$$

$$-u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!u^{n-m}}{[(n+2)!]^2}\{(\frac{r^2}{4B^2})^m\}\exp(-\frac{r^2}{4B^2y})$$

把上式代入式(1-9)，便得我们所要求的结果

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\{2K_0(\frac{r}{B})-I_0(\frac{r}{B})[-E_i(-\frac{r^2}{4B^2u})]+\exp(-\frac{r^2}{4B^2u})$$

$$\times\{0.5772+\ln u+[-E_i(-u)]-u+\frac{u[I_0(\frac{r}{B})-1]}{\frac{r^2}{4B^2}}$$

$$-u^2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{n+m}(n-m+1)!}{[(n+2)!]^2}(\frac{r^2}{4B^2})^m u^{n-m}\}\}$$

# 附录 Ⅲ

## 求证无压含水层中地下水向完整井的非稳定运动问题

下列定解问题

$$(\text{Ⅲ})\quad\begin{cases} T\left(\dfrac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial s}{\partial r}\right)=\mu^*\dfrac{\partial s}{\partial t}+\alpha\mu\displaystyle\int_0^t\frac{\partial s}{\partial\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau & (\text{Ⅲ-1})\\ s(\infty,t)=0\quad(t\geqslant 0) & (\text{Ⅲ-2})\\ \lim\limits_{r\to 0}r\dfrac{\partial s}{\partial r}=-\dfrac{Q}{2\pi T}\quad(t>0) & (\text{Ⅲ-3})\\ s(r,0)=0\quad(t=0) & (\text{Ⅲ-4}) \end{cases}$$

的解为

$$s=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty\frac{2}{x}\{1-e^{-u_1}[\mathrm{ch}u_2+\frac{\alpha\eta(1-x)^2t}{2u_2}\mathrm{sh}u_2]\}J_0(\frac{rx}{vD})dx$$

式中

$$u_1=\frac{\alpha t\eta(1+x^2)}{2};\quad u_2=\frac{1}{2}\alpha t\sqrt{\eta^2(1+x^2)^2-4\eta x^2}$$

$$v=\sqrt{\frac{\eta-1}{\eta}}=\sqrt{\frac{\mu}{\mu^*+\mu}};\quad D=\sqrt{\frac{T}{\alpha\mu}};\quad \eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*}$$

解　将方程式(Ⅲ-1)的两边对 $t$ 求导数，再利用式(Ⅲ-1)消去积分式，得

$$T'(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})\frac{\partial s}{\partial t}=\mu^*\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}+\alpha\mu\frac{\partial s}{\partial t}-\alpha^2\mu\int_0^t\frac{\partial s}{\partial\tau}e^{-\alpha(t-\tau)}d\tau$$

$$=\mu^*\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}+\alpha\mu\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha(\mu^*\frac{\partial s}{\partial t}-T\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}-\frac{T}{r}\frac{\partial s}{\partial r})$$

整理上式，并代入关系式 $\eta=\frac{\mu^*+\mu}{\mu^*}$ 后得

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha s)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha s)=\frac{\mu^*}{T}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha\eta s)$$

即

$$(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha)(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r})=\frac{\mu^*}{T}(\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}+\alpha\eta\frac{\partial s}{\partial t})\qquad(\text{Ⅲ-5})$$

令 $s=R(r)V(t)$，代入上式，整理得

$$\frac{R''+\frac{1}{r}R'}{R}=\frac{\mu^*}{T}\frac{V''+\alpha\eta V'}{V'+\alpha V}$$

上式左边只是 $r$ 的函数，右边只是 $t$ 的函数。$r$ 和 $t$ 是独立变量，这两个变量互不相干的函数要相等必须都等于同一个常数。取这个常数等于 $-\frac{\mu^*}{T}\lambda^2$。从而得到两个常微分方程

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \frac{\mu^*}{T}\lambda^2 R = 0 \qquad (\text{Ⅲ-6})$$

$$V'' + (\alpha\eta + \lambda^2)V' + \alpha\lambda^2 V = 0 \qquad (\text{Ⅲ-7})$$

由式(Ⅲ-6)可求得两个线性独立的解

$$J_0(\sqrt{\frac{\mu^*}{T}}\lambda r), \qquad Y_0(\sqrt{\frac{\mu^*}{T}}\lambda r)$$

此处 $J_0$,$Y_0$ 分别代表第一类、第二类零阶贝塞尔函数。

用二阶常系数线性方程的解法,求得式(Ⅲ-7)的两个线性独立的解

$$\exp[\frac{-(\alpha\eta + \lambda^2) \pm \sqrt{(\alpha\eta + \lambda^2)^2 - 4\alpha\lambda^2}}{2}t]$$

显然

$$\exp(-\frac{\alpha\eta + \lambda^2}{2}t)\mathrm{ch}(\frac{\sqrt{(\alpha\eta + \lambda^2)^2 - 4\alpha\lambda^2}}{2}t)$$

和

$$\exp(-\frac{\alpha\eta + \lambda^2}{2}t)\mathrm{sh}(\frac{\sqrt{(\alpha\eta + \lambda^2)^2 - 4\alpha\lambda^2}}{2}t)$$

也是式(Ⅲ-7)的解。如令 $\lambda = \sqrt{\alpha\eta}x$($x$ 作为参数),则

$$u_1 = \frac{\alpha\eta + \lambda^2}{2}t = \frac{\alpha\eta(1 + x^2)}{2}t$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{(\alpha\eta + \lambda^2)^2 - 4\alpha\lambda^2}}{2}t = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\eta^2(1 + x^2) - 4\eta x^2}t$$

于是式(Ⅲ-7)的两个特解可以写为

$$\mathrm{e}^{-u_1}\mathrm{ch}u_2, \quad \mathrm{e}^{-u_1}\mathrm{sh}u_2$$

引入常数 $\upsilon = \sqrt{\frac{\mu}{\mu^* + \mu}} = \sqrt{\frac{\eta - 1}{\eta}}$, $D = \sqrt{\frac{T}{\alpha\mu}}$,于是

$$\sqrt{\frac{\mu^*}{T}} = \frac{1}{D\upsilon}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\eta}}, \qquad \sqrt{\frac{\mu^*}{T}}\lambda r = \frac{rx}{D\upsilon}$$

从而

$$R(Y) = AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon}) + BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})$$

$$V(t) = \mathrm{e}^{-u_1}(\mathrm{ch}u_2 + l\mathrm{sh}u_2)$$

这里,$A$、$B$、$l$ 对 $r$、$t$ 来说都是常数,但应当作为参数 $x$ 的函数。因此,方程(Ⅲ-5)的解可以写为

$$s = \mathrm{e}^{-u_1}(\mathrm{ch}u_2 + l\mathrm{sh}u_2)\left[AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon}) + BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})\right] \qquad (\text{Ⅲ-8})$$

此式适合式(Ⅲ-5),但不一定适合式(Ⅲ-1),因为由式(Ⅲ-1)到式(Ⅲ-5)曾对 $t$ 求导数一次。

现在要求此式适合式(Ⅲ-1),从而确定 $l$ 值。为了方便起见,令 $u_1 = \sigma_1 t$, $u_2 = \sigma_2 t$,即

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\alpha\eta(1 + x^2), \ \sigma_2 = \frac{1}{2}\alpha\sqrt{\eta^2(1 + x^2)^2 - 4\eta x^2} \qquad (\text{Ⅲ-9})$$

由此,先计算式(Ⅲ-1)右端第二项

$$\int_0^t \frac{\partial S}{\partial\tau}\mathrm{e}^{-u(t-\tau)}\mathrm{d}\tau = R(r)\int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\{\mathrm{e}^{-u\tau}[\mathrm{ch}u_2 + l\mathrm{sh}u_2]\}\mathrm{e}^{-u(t-\tau)}\mathrm{d}\tau$$

$$= R(r)\{\frac{1}{2}(1+l)\frac{\sigma_2-\sigma}{\sigma_2-\sigma_1+\alpha}[e^{(\sigma_2-\sigma_1)t}-e^{-\alpha t}]$$

$$-\frac{1}{2}(1-l)\frac{\sigma_2+\sigma_1}{\sigma-\sigma_1-\sigma_2}[e^{-(\sigma_1+\sigma_2)t}-e^{-\alpha t}]\}$$

显然，把式(Ⅱ-8)式的 $s$ 值代入式(Ⅱ-1)的其它各项不可能出现 $e^{-\alpha t}$ 项。所以上式中出现的 $e^{-\alpha t}$ 的系数必须等于零，即

$$\frac{(1+l)(\sigma_2-\sigma_1)}{\sigma_2-\sigma_1+\alpha}=\frac{(1-l)(\sigma_1+\sigma_2)}{\alpha-\sigma_1-\sigma_2}$$

故

$$l=\frac{\alpha\sigma_1+\sigma_2^2-\sigma_1^2}{2\sigma_2}$$

把式(Ⅱ-9)中的 $\sigma_1,\sigma_2$ 值代入，便得

$$l=\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2} \qquad (Ⅱ-10)$$

把它代入式(Ⅱ-8)，得

$$s=e^{-u_1}[\mathrm{ch}u_2+\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2}\mathrm{sh}u_2][AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon})+BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})]$$

把上式直接代入式(Ⅱ-1)，不难证明它确实适合方程式(Ⅱ-1)。但要作为定解问题(Ⅱ)的解还必须适合边界条件和初始条件式(Ⅱ-2)、(Ⅱ-3)和(Ⅱ-4)。下面就来讨论这个问题。

应当指出，当 $x\to+\infty$ 时，贝塞尔函数 $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$ 的渐近表达式为

$$J_0(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\cos(x-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x})]$$

$$Y_0(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\sin(x-\frac{\pi}{4})+O(\frac{1}{x})]$$

所以上面找到的函数 $s(r,t,x)$ 在 $x>0$ 时，无疑是满足第一个边界条件的。

根据叠加原理，显然积分

$$\int_0^\infty e^{-u_1t}[\mathrm{ch}\sigma_2t+\frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2t][AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon})+BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})]dx$$

也适合方程式(Ⅱ-1)和第一个边界条件。可是上式当 $t=0$ 时，所得的

$$\int_0^\infty\{AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon})+BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})\}dx$$

不适合第三个条件式(Ⅱ-4)。所以考虑积分

$$\int_0^\infty\{1-e^{-u_1t}[\mathrm{ch}\sigma_2t+\frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2t]\}[AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon})+BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})]dx$$

它适合条件式(Ⅱ-2)和(Ⅱ-4)。和前面一个比较，多了一项

$$L(Y)=\int_0^\infty[AJ_0(\frac{rx}{D\upsilon})+BY_0(\frac{rx}{D\upsilon})]dx$$

它不依赖于 $t$，代入方程式(Ⅱ-1)后应得 $\frac{\partial^2L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r}=0$。为此，计算

$$\frac{\partial^2L}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r}=\int_0^\infty A[\frac{x^2}{D^2\upsilon^2}J_0(\frac{rx}{D\upsilon})+\frac{1}{r}\frac{x}{D\upsilon}J'(\frac{rx}{D\upsilon})]dx$$

$$+\int_0^\infty B[\frac{x^2}{D^2\upsilon^2}Y_0(\frac{rx}{D\upsilon})+\frac{1}{r}\frac{x}{D\upsilon}Y_0(\frac{rx}{D\upsilon})]dx$$

$$= \frac{A}{r}\frac{x^2}{D\upsilon}J_0(\frac{rx}{D\upsilon})\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{D\upsilon r}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ax^2) - Ax]J_0(\frac{rx}{D\upsilon})\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{B}{r}\frac{x^2}{D\upsilon}Y_0(\frac{rx}{D\upsilon})\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty \frac{1}{D\upsilon r}[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Bx^2) - Bx]Y_0(\frac{rx}{D\upsilon})\mathrm{d}x$$

并因此选择 $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Ax^2) - Ax = 0 \quad$ 和 $\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Bx^2) - Bx = 0$

即 $\quad x^2\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}x} + Ax = 0 \quad$ 和 $\quad x^2\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x} + Bx = 0$

从而得 $\quad A = \frac{a}{x}, \quad B = \frac{b}{x}$

式中 $a$ 和 $b$ 为待定常数。

这样，选定 $A$ 和 $B$ 之后，有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial r} = [\frac{ax}{D\upsilon r}J_0(\frac{rx}{D\upsilon}) + \frac{bx}{D\upsilon r}Y_0(\frac{rx}{D\upsilon})]_{x=0}^{x=\infty}$$

根据 $J_0(x)$ 和 $Y_0(x)$ 的定义，有

$$\lim_{x\to 0^+} J_0(\frac{rx}{D\upsilon}) = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} xY_0(\frac{rx}{D\upsilon})\frac{b}{D\upsilon} = \frac{2b}{r\pi}$$

由于我们希望 $\frac{\partial^2 L}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial L}{\partial r} = 0$，故取 $b=0$；这样，取作为解的那个函数应为

$$s(r,t) = \int_0^\infty \frac{a}{x}\{1 - \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\mathrm{ch}\sigma_2 t + \frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2 t]\}J_0(\frac{rx}{D\upsilon})\mathrm{d}x \qquad (\text{Ⅲ-11})$$

由于 $x\to\infty$ 时，$J_0(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}[\cos(x - \frac{\pi}{4}) + O(\frac{1}{x})]$，被积函数在 $x=+\infty$ 的数量级为 $O(\frac{1}{x^{3/2}})$，此积分在上限是收敛的。在 $x\to 0^+$ 时

$$1 - \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\mathrm{ch}\sigma_2 t + \frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2 t] = O(x^2)$$

故 $$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\{1 - \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\mathrm{ch}\sigma_2 t + \frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2 t]\}J_0(\frac{rx}{D_v}) = 0$$

积分下限 $x=0$ 不是积分的奇点。所以对于 $t\geqslant 0$ 和一切 $r$ 值，函数 $s(r,t)$ 都是有定义的。

仅仅这些还是不够的，还须验证这样找到的 $s(r,t)$ 确实适合所给的方程(Ⅲ-1)。为了简便起见，令

$$M = \mathrm{e}^{-\sigma_1 t}[\mathrm{ch}\sigma_2 t + \frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2 t] \equiv M(x,t)$$

所以 $\quad M(0,t) = 1$

当 $x\to+\infty$ 时

$$\frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2} = -(1 - \frac{1}{x^2})[1 + \frac{2}{x^2}(1 - \frac{2}{\eta}) + \frac{1}{x^4}]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= -(1 - \frac{1}{x^2})[1 - \frac{1}{x^2}(1 - \frac{2}{\eta}) + O(\frac{1}{x^4})]$$

$$= -1 + \frac{2}{x^2}(1 - \frac{1}{\eta}) + O(\frac{1}{x^4})$$

$$\mathrm{ch}\sigma_2 t + \frac{\alpha\eta(1-x^2)}{2\sigma_2}\mathrm{sh}\sigma_2 t \approx \frac{1}{x^2}(1 - \frac{1}{\eta})\mathrm{e}^{\sigma_2 t} + \mathrm{e}^{-\sigma_2 t}$$

$$M(x,t)\approx\frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{\eta})\,e^{-(\alpha_1-\alpha_2)t}+e^{-(\alpha_1+\alpha_2)t}$$

$$\approx\frac{1}{x^2}(1-\frac{1}{\eta})\,e^{-\alpha_1 t}+O(e^{-\alpha_1 t^2})$$

$$\approx\frac{1}{x^2}\frac{S_y}{S+S_y}e^{-\alpha_1 t}$$

所以，$x\to\infty$时，$M(x,t)=O(\frac{1}{x^2})$。

此外，还要注意由前面所得的结论可知 $M(x,t)J_0(\frac{rx}{Dv})$ 适合方程(Ⅱ-1)，故有恒等式

$$TM(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r})J_0(\frac{rx}{Dv})=[\mu^*\frac{\partial M}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial M}{\partial\tau}e^{-\alpha\mu(t-\tau)}d\tau]J_0(\frac{rx}{Dv})\qquad(Ⅱ-12)$$

而
$$s(r,t)=\alpha\int_0^\infty\frac{1}{x}[1-M(x,t)]J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

故
$$\frac{\partial s}{\partial r}=\alpha\int_0^\infty(1-M)J_0(\frac{rx}{Dv})\frac{1}{Dv}dx$$

$$=\frac{\alpha}{r}(1-M)J_0(\frac{rx}{Dv})\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\frac{\alpha}{r}\int_0^\infty\frac{\partial M}{\partial x}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

$$=\frac{\alpha}{r}\int_0^\infty\frac{\partial M}{\partial x}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

从而
$$r\frac{\partial s}{\partial r}=\alpha\int_0^\infty\frac{\partial M}{\partial x}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial s}{\partial r})=r\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{\partial s}{\partial r}=\alpha\int_0^\infty\frac{\partial M}{\partial x}\frac{x}{Dv}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

所以
$$T(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r})=\frac{\alpha T}{r}\int_0^\infty\frac{\partial M}{\partial x}\frac{x}{Dv}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

另一方面

$$\mu^*\frac{\partial s}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial s}{\partial\tau}e^{-\alpha\mu(t-\tau)}d\tau$$

$$=-\alpha\int_0^\infty\frac{1}{x}\{\mu^*\frac{\partial M}{\partial t}+\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial M}{\partial\tau}e^{-\alpha\mu(t-\tau)}d\tau\}J_0(\frac{rx}{Dv})dx$$

$$=-\alpha\int_0^\infty\frac{TM}{x}[\frac{\partial^2}{\partial r^2}J_0(\frac{rx}{Dv})+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}J_0(\frac{rx}{Dv})]dx$$

$$=-\alpha T\cdot\frac{Mx}{Dvr}J_0(\frac{rx}{Dv})\Big|_{x=0}^{x=\infty}+\int_0^\infty\frac{\alpha xT}{Dvr}\frac{\partial M}{\partial x}J_0(\frac{rx}{Dv})]dx$$

因此
$$T(\frac{\partial^2 s}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial r})-\mu^*\frac{\partial s}{\partial t}-\alpha\mu\int_0^t\frac{\partial s}{\partial\tau}e^{-\alpha\mu(t-\tau)}d\tau$$

$$=\frac{\alpha T}{Dvr}\lim_{x\to\infty}\{xMJ_0(\frac{rx}{Dv})\}$$

$$=\frac{\alpha T}{Dvr}\lim_{x\to\infty}\{xM(x,t)J_1(\frac{rx}{Dv})\}\qquad(Ⅱ-14)$$

由于 $x\to\infty$时，$M(x,t)=O(\frac{1}{x^2})$

$$J_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\cos\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

上式中的极限值为零。既然式(Ⅱ-14)右端等于零，那就完全证明了所找到的解式(Ⅱ-11)满足方程(Ⅱ-1)。

目前找到的解只适合方程(Ⅱ-1)和边界条件式(Ⅱ-2)、初始条件式(Ⅱ-4)，还须确定能否选择常数 $\alpha$ 使之满足条件式(Ⅱ-3)。为此，由式(Ⅱ-13)得

$$\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=\alpha\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x}M(x,t)\mathrm{d}x=\alpha M(x,t)\Big|_{x=0}^{x=\infty}=-\alpha$$

条件式(Ⅱ-3)是 $\lim_{r\to\infty}\left(r\frac{\partial s}{\partial r}\right)=-\frac{Q}{2\pi T}$，故

$$\alpha=\frac{Q}{2\pi T}$$

代入式(Ⅱ-11)，得所求的解为

$$s(r,t)=\frac{Q}{4\pi T}\int_0^\infty\frac{2}{x}(1-\mathrm{e}^{-u_1}[\mathrm{ch}u_2+\frac{\alpha\eta(1-x^2)t}{2u_2}\mathrm{sh}u_2])J_0(\frac{rx}{D\upsilon})]\mathrm{d}x$$

这就是所要证明的式(4-60)。

# 索 引


A

暗河 Buried Channel(21)

B

包气带 Zone of acration(36,52)
饱和带 Zone of saturation(7,52)
饱和水流 Saturated flow(54)
饱和度 Water saturation(52)
保角映射 Conformal mapping(2)
半承压含水层 Semiconfined aquifer(47,154)
Bernoulli 方程 Bernoulli's equation(79,11)
比表面 Specific surface(20)
边界条件 Boundary condition(49,57,144)
标量 Scarlar(22)
标准曲线 Type curve(150,153,154)
标准曲线对比法 Type curve method(149,153)
薄膜模拟 Membrane analog(231)
薄膜水 Pellicular water(52)
Boussinesq 方程 Boussinesq's equation(46,79)
不可压缩的 Incompressible(30,41)
不完整井 Partially penetrating well(94,95)
不透水边界 Impervious boundary(225)
不可逆的 Irreversible(220)
补给边界 Recharge boundary(76)
不相混溶流体 Immisible fluid(236)

C

残留含水率 Irreducible water content(53)
残留饱和度 Irreducible water saturation(53)
测压管水头 Piezometric head(11,231)
测压管 Piezometer(231)
层流 Laminar flow(12)
承压水 Confined water(41,67)
承压水流 Confined flow(68)
承压含水层 Confined aquifer(67,68)
承压水水井 Well in a confined aquifer(74)
迟后疏干 Delayed yield(3,129)
迟后重力排水 Delayed yield(129)
迟后效应 Delayed effect(3,209)
贮水系数 Storativity(7,159)
贮水率 Specipic storativity(8)
抽水试验 Pumping test(84,154)
抽水井 Pumping well(75,85)
初始条件 Initial condition(49,57)
初始厚度 Initial thickness(86,128)

D

单元 Element(5)
单位降深 Specific drawdown(138)
单宽流量 Discharge per unit width(59,71,233)
单位涌水量 Specific discharge of a well(83)
弹性贮存 Elastic storage(8)
导水系数 Transmissibivity(18,43)
导电纸 Conducting paper(238)
Da Darcy(18)
Darcy 定律 Darcy's law(17)
Darcy 定律适用范围 Range of validity of Darcy's law(15,17)
等势线 Equipotential line(30)
等水头线 Groundwater contour(12,29)
等效渗透系数 Equivalent hydraulic conductivity(27)

第一类边界条件 Boundary condition of first type(49,225)
第二类边界条件 Boundary condition of second type(49,225)
第三类边界条件 Boundary condition of third type(49)
地下水 Groundwater(1)
地下水动力学 Dynamics of groundwater (1)
地下水资源 Groundwater resources(1)
地下水资源管理 Management of the groundwater resources(1)
地下水分水岭 Groundwater divide(60)
地下水污染 Groundwater pollution(1,219)
Dirichlet 条件 Dirichlet boundary condition (225)
电网络模拟 Resistance network analog (231)
电网络模型 Resistance network model(40)
电导率 Electric conductivity(237)
电解槽模拟 Electrolytic tank analog(238)
电模拟 Electric analog(238)
电网络 Resistance network(231)
定降深 Constant drawdown(49,70)
定降深抽水 Pumping at constant drawdown(103)
定流量 Constant rate(72)
定流量抽水 Pumping at constant rate(75)
定水头边界 Boundary of constant head(49, 75,85)
叠加原理 Principle of Superposition(72,85)
动力粘滞系数 Dynamic viscosity(56,212)
对流—弥散方程 Advection — dispersion equation(224)
多孔介质 Porous medium(5)
多孔介质的弥散度 Dispersivity of porous medium(221)
Dupuit 假设 Dupuit assumptions(43)
Dupuit 公式 Dupuit formula(76,79)



E

二维流 Two — dimensional flow (14, 128, 144)
二秩张量 Second rank tenser(221)
二个重叠的连续系统 Two overlapping continuous system(207)

F

非饱和流动 Unsaturated flow(52)
非饱和带 Unsaturated zone(3,5,52)
非均质 Inhomogeneity(2,22)
非均质介质 Inhomogeneous medium(22)
非均质各向同性介质 Inhomogeneous isotropicmedium(22)
非稳定流 Unsteady flow(3,14,43,59,229)
分水岭 Water divide(44)
分子扩散 Molecular diffusion(220)
分子扩散系数 Coefficient of molecular diffusion(221)
Fick 定律 Fick's law(220)

G

概念模型 Conceptual model(39)
各向同性 Isotropy(22,61)
各向同性介质 Isotropic medium(30)
各向异性 Anisotropy(2,22)
各向异性介质 Anisotropic medium(23)
给定水头边界 Boundary condition of prescribed head(49)
给定流量边界 Boundary condition of prescribed flux(49)
给水度 Specific yield(7,236)
隔水层 Aquiclude(95)
隔水边界 Impervious boundary(85,233)
隔水底板 Impervious base(75,78,81)
骨架 Matrix(6,41)
固体骨架 Solid matrix(38,222)
拐点 Inflection point(147)

观测孔 Observation well(151)
过滤器 Screen(83,95)
过水断面 Cross—sectional area(44)

H

含水层 Aquifer(1,51)
含水层厚度 Thickness of aquifer(1,68,86)
含水介质 Water bearing medium(52)
含水层参数的识别 Identification of aquifer parameter(144)
含水层系统 Aquifer system(3,39,146)
含水率 Water content(53)
横向弥散度 Transversal dispersivity(222)
横向弥散系数 Coefficient of transversal dispersion(222)
汇 Sink(144,235)
恢复试验 Recovery test(198)
混合边界条件 Mixed boundary condition (49)

J

积分变换法 Integral transform method(2)
几何相似 Geometric similarity(229)
迹线 Pathline(28)
机械弥散 Mechanical dispersion(220)
机械弥散系数 Coefficient of mechanical dispersion(222)
基准面 Datum plane(240)
基准线 Datum line(46)
介质 Medium(5)
结点 Node(51)
解的唯一性 Uniqueness of the solution (143)
解的存在性 Existance of the solution(43)
解的稳定性 Stability of the solution(143)
解析解 Analytic solution(50)
截断误差 Truncation(104)
降落漏斗 Cone of depression(75)
降深 Drawdown(76)
井径 Radius of well(75)
井函数 Well function(104)
井损 Well loss(83)
井损常数 Well loss constant(84)
井群 Multiple well system(85)
井水位降深 Drawdown in pumping well(89)
经验公式 Empirical formula(77)
激发-响应关系 Excitation-response relationship(144)
均质 Homogeneity(22,61)
均质各向同性介质 Homogeneous isotropic medium(70,232)
均匀流 Uniform flow(220)
均衡 Balance(35)

K

孔隙 Pores(54,205,208)
孔隙度 Porosity(41,52)
孔隙水头 Pore hydraulic head(207)
扩散系数 Diffusivity(220)
孔隙贮水系数 Pore storativity(208)

L

Laplace 方程 Laplace equation(229)
离散 Discrete(236)
离散电模拟 Discrete electric analog(40)
离子模拟 Ion-motion analog(236)
连续性方程 Continuity equation(40)
连续电模拟 Continuous electric analog(231)
裂隙 Fissure(205,208)
裂隙介质 Fissured medium(205)
裂隙水头 Fissure hydraulic head(207)
裂隙水流 Fissure flow(206)
裂隙中的降深 Fissure flow drawdown (209)
裂隙贮水系数 Coefficient of storage of fissured space(208)

裂隙中的渗透系数 Coefficient of permeability inside fissure(215)
裂隙导水系数 Transmissibivity inside fissure(209)
裂隙中局部水头损失系数 Coefficient of locas losses in fissure(212)
裂隙的摩擦系数 Coefficient of friction in fissure(214)
裂隙阻力系数 Coefficient of resistance in fissure(215)
临界雷诺数 Critical Reynolds number(13,212)
灵敏度分析 Sensitivity analysis(193)
灵敏度系数 Coefficient of sensitivity(193)
流体力学 Fluid dynamics(9)
流量 Discharge(9)
流函数 Stream function(28)
流网 Flow nets(28,241)
流线 Streamline(28,67,78,233)
流速水头 Velocity head(11)
裸井 Uncased hole(119)

M

毛管压强 Capillary pressure(54)
毛管压力水头 Capillary pressure head(54)
毛管水头 Capillary head(54)
毛细管模型 Capillary model(238)
密度 Density(231)
弥散 Dispersion(219)
弥散现象 Phenomena of dispersion(220)
弥散度 Dispersivity(222)
弥散主轴 Principal axes of the dispersion(222)
模拟法 Anatog method(51)
模型 Model(39)
模型校正 Model calibration(50)
模型识别 Identification of model(50)

N

能量守恒与转化定律 Equation of energy conservation(43,229)
Neumann 法 Neumann method(161)
逆问题 Inverse problem(144)

P

排水 Drainage(1)
排水孔隙度 Drainable porosity(52)
Peclet 数 Peclet number(222)
配线法 Type curve method(149)
匹配点 Match point(150)
平均流速 Average velocity(10,236)

Q

起始水力坡度 Threshold hydraulic gradient(17)
潜水 Phreatic water(43,127)
潜水含水层 Phreatic aquifer(44,59,127)
潜水面 Phreatic surface(44,127)
潜水面迟后反应 Delayed response of water table(135)
潜水井 well in a phreatic aquifer(74,78,128)
确定性模型 Deterministic model(40)

R

人工补给 Artificial recharge(36)
容重 Specific weight(235)
Reynolds 数 Reynolds number(12)
溶质在液相中的分子扩散系数 Coefficient of molecular diffusion of the solute in the considered liquid phase(222)
入渗补给系数 Coefficient of accretion(36)
入渗补给强度 Accretion(46)
弱透水层 Semipervious layer(36,234)
R-C 网络 R-C network(231)
Richards 方程 Richards's equation(56)

S

三维流 Three dimensional flow(14,128)
砂槽模型 Sand box model(230)
渗流 Seepage flow(8,9)
渗流区 Flow domain(9)
渗流量 Discharge(15)
渗出面 Seepage face(44)
渗透 Seepage(8)
渗透速度 Seepage velocity(9,15)
渗透系数 Coefficient of permeability(15,18)
渗透系数张量 Tenser of hydraulic conductivity(22)
渗透率 Intrinsic permeability(18)
渗透定律 Seepage law(15)
渗透系数主方向 Principal directions of hydraulic conductivity(23)
剩余降深 Residual drawdown(197)
势函数 Potential function(28)
适定问题 Well posed problem(144)
实井 Real well(85)
试算法 Trial and error(147,185)
示踪剂 Tracer(220)
数值法 Numerical method(1,51)
数值解 Numerical solution(2)
数值模拟 Numerical analog(3,228)
数学模型 Mathematical model(1,40)
双重介质 Double-porosity medium(3)
似稳定状态 Quasi-steady state(74,75,76)
收敛 convergence(104)
水动力弥散 Hydrodynamic dispersion(219)
水动力弥散方程 Equation of hydrodynamic dispersion(224)
水动力弥散系数 Coefficient of hydrodynamic dispersion(221,222)
水分特征曲线 Typical retention curve(53)
水力半径 Hydraulic radius(20,213)
水力传导系数 Hydraulic conductivity(18)
水力坡度 Hydraulic gradient(11,15)
水力联系 Hydraulic contact(146,220)
水循环 Hydrologic cycle(1)
水力学 Hydraulics(1,9,12)
水均衡 Water balance(47)
水头 Hydraulic head(6)
水头损失 Loss head(83)
水头恢复 Recovery of water levels(196)
水位降深 Drawdown(84,154)
水跃 Seepage face(83)
水流折射 Refraction of flow(25)
速端曲线法 Hodograph method(2)
随机模型 Random phenomenon(40)

T

透水性 Permeability(18)
透水边界 Boundary of permeability(233)
Theis 公式 Theis's equation(103)
Theis 曲线 Theis's curve(149)
田间持水量 Field capacity(52)
停滞点 Stagnation point(32)

W

完整井 Fully penetrating well(75)
位置水头 Elevation head(10)
唯一的 Unique(48)
稳定的 Stable(14)
稳定流 Steady flow(41,59,67)
紊流 Turbulent flow(12,84)
无限含水层 Infinite aquifer(85)
无限直线井排 Infinite array of wells(118)
物理模拟 Physical analog(39)

X

吸湿 Hygroscopic(53)
线性方程 Linear equation(85)
线性化 Linearization(62,79)
相对渗透率 Relative permeability(56)
相似 Similarity(229)

虚井 Image well(85)
虚宗量Bassel方程 Modified Bassel equation (81)
虚宗量Bassel函数 Modified Bassel function (82,132)

Y

压力 Pressure(9)
压力传导系数 Pressure conductivity(43)
压强 pressure(10,235)
压强水头 Pressure head(10)
压缩性 Compressibility(6)
压缩系数 Compressibility(6)
延迟指数 Delayed index(129)
一维流 One—dimension flow(14)
岩块特征长度 Average porous block dimension(209)
映象法 Method of images(85)
影响半径 Radius of influence(76)
有限差分法 Finite difference method(2,51)
有限元法 Finite element method(2,47,51)
有效孔隙度 Effective porosity(52)
有效应力 Effective stress(8)
余误差函数 Complementary error function (72)
源 Source(144,235)
越流 Leakage(36,47,146)
越流含水层 Leakage aquifer(28,47,80)
越流量 Leakage(48)
越流系数 Coefficient of leakage(48)
越流因素 Leakage factor(48)
运动粘滞系数 Kinematic viscosity(13)

Z

张量 Tensor(23)
折射定律 Refraction law(26)
蒸发 Evaporation(36)
蒸腾 Transpiration(36)
蒸发—蒸腾作用 Evapotranspiration(36)
质点流速 Local velocity(10)
质量守恒定律 Mass conservation law(6, 40)
窄缝槽模拟 Hele-shaw analog(233)
直线图解法 Straight line method(165)
滞后 Hysteresis(129)
自由面 Free surface(233)
总水头 Total head(11)
纵向弥散度 Longitudinal dispersivity(222)
纵向弥散系数 Coefficient of the longitudinal dispersion(222)
主渗透系数 Main hydraulic conductivity(24,207)
主导水系数 Main Transmissibivity(208)
注水井 Injection well(38,234)
贮水率 Specific storativity(8)
状态方程 Equation of state(6)

# 主要参考文献


[1] 薛禹群主编:《地下水动力学原理》,地质出版社,1986

[2] 薛禹群、朱学愚:《地下水动力学》,地质出版社,1979

[3] 李俊亭、王鲁吉:《地下水动力学》,地质出版社,1987

[4] 梁定伟:《水力学基础》,中国地质大学出版社,1988

[5] 陈崇希:《地下水不稳定井流计算方法》,地质出版社,1983

[6] 北京地质学院:《地下水动力学》,中国工业出版社,1961

[7] 杨天行、傅泽周、刘金山、林学钰:《地下水向井的非稳定运动原理和计算方法》,地质出版社,1980

[8] 张蔚臻:《地下水非稳定流计算和地下水资源评价》,科学出版社,1983

[9] 潘文全:《流体力学基础》,机械工业出版社,1982

[10] 张宏仁等:《地下水非稳定流理论的发展和应用》,地质出版社,1975

[11] 供水水文地质手册编写组:《供水水文地质手册》(第二册),地质出版社,1977

[12] 柴登榜等:《矿井地质工作手册》(下册),煤炭工业出版社,1984

[13] 陈雨孙:《单井水力学》,中国建筑工业出版社,1977

[14] 朱学愚、谢春红:《地下水运移模型》,中国建筑工业出版社,1990

[15] 陈葆仁、洪再吉等:《地下水动态及其预测》,科学出版社,1988

[16] 杨天行、朱政嘉:《水系统污染数学模型及应用》,吉林大学出版社,1990

[17] 孙德璇:《单井抽水水位恢复曲线研究》,中国矿业大学出版社,1993

[18] J. Bear 著,李竞生等译:《多孔介质流体动力学》,中国建筑工业出版社,1983

[19] J. Bear 著,许涓铭等译:《地下水水力学》,地质出版社,1985

[20] Г. Н. Каменский:《地下水动力学原理》,地质出版社,1955

[21] П. Я. Полябаринова-Кочина:《地下水运动原理》,地质出版社,1957

[22] И. А. Скабалланович:《水文地质计算》,煤炭工业出版社,1957

[23] М. К. Гавич:《水文地质学中应用模拟的理论与实践》,地质出版社,1980

[24] L. G. 埃弗雷特等:《包气带水勘察和研究方法》,地质出版社,1986

[25] VÁCLAV, H. and Š. Jan, *Groundwater Hydraulics*, ACADEMIA. PRAGUE, 1979

[26] 李国敏:矿坑底板突水时不整井流计算问题,《勘察科学技术》,1989 年,第 3 期

[27] 胡珏:用含水层阻力常数计算渗透系数的方法,《水文地质技术方法》,第七辑,地质出版社,1980

[28] Carld, M., Theis parameter evaluation from pumping tests by sensitivity analysis, *Groundwater*, Vol. 18, No. 2, 1980

[29] 刘忠席等:《相关分析拟公式与水文地质程序集》,中国矿业大学出版社,1993