

# 垂直断层附近三维不均匀体 点源电场的边界单元法

李予国\* 徐世浙

(青岛海洋大学地质地球物理研究所)

【摘要】 本文将给出垂直断层附近三维不均匀体电阻率法的数值解,所用方法是边界单元法,但基本解的选择与以往的边界单元法不同。

【关键词】 三维 边界单元法 基本解 电阻率法

## 0 引言

边界单元法是解决三维问题的一种有效方法。但对于物性界面延伸至无限远的三维问题,用以往的边界单元法求解时,需要大量节点,在一般的微机上难以实现。其实,对于这类分界面延伸至无限远的问题,可以用选择特殊的基本解的方法,使分界面不出现在积分方程中,从而使边界单元法所需的节点数大为减少。本文给出了垂直断层附近三维不均匀体电阻率法的数值解,所用方法是边界单元法,但基本解的选择与以往的边界单元法不同,可以在微机上实现。

## 1 原理

图1是垂直断层附近的不均匀体模型(三维),它由三个区域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 组成。 $\Gamma_s (= \Gamma_{s1} + \Gamma_{s2})$ 是地面, $\Gamma'$ 是区域 $\Omega_1$ 和 $\Omega_2$ 之间的垂直界面, $\Gamma$ 是区域 $\Omega_2$ 和 $\Omega_3$ 之间的界面,各界面上的正法向如图上的 $n$ 所示。用 $u_1, u_2, u_3$ 分别代表 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 中的电位。 $A$ 是电源,其中电流强度为 $I$ 。电位的方程和边界条件为<sup>[1]</sup>:

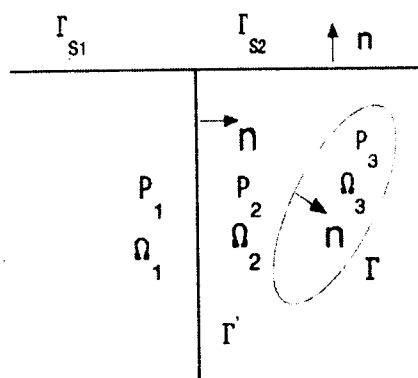


图1 垂直断层附近不均匀体模型

\* 收稿日期:1994—07—08;改稿日期:1995—11—20

地址:青岛海洋大学地质地球物理研究所  
(邮政编码 266003)

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 u_1 &= -2\rho_1(A) && \in \Omega_1 \\ \nabla^2 u_2 &= 0 && \in \Omega_2 \\ \nabla^2 u_3 &= 0 && \in \Omega_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial n} &= 0 && \in \Gamma_{s1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial n} &= 0 && \in \Gamma_{s2} \\ u_1 &= u_2, \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} && \in \Gamma' \\ u_2 &= u_3, \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} = \frac{1}{\rho_3} \frac{\partial u_3}{\partial n} && \in \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

当 $p$ 点位于地面边界 $\Gamma_{s1}$ 上时,选择如下的 $\varphi$ 为基本解:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} \varphi_1 & \in \Omega_1 \\ \varphi_2 & \in \Omega_2 + \Omega_3 \end{cases} \\ \nabla^2 \varphi_1 &= -2\delta(p) && \in \Omega_1 \\ \nabla^2 \varphi_2 &= 0 && \in \Omega_2 + \Omega_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= 0 && \in \Gamma_{s1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= 0 && \in \Gamma_{s2} \\ \rho_1 \varphi_1 &= \rho_2 \varphi_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, && \in \Gamma' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

对于区域 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ ,可分别写出格林公式:

$$\int_{\Omega_1} (u_1 \nabla^2 \varphi_1 - \varphi_1 \nabla^2 u_1) d\Omega = \int_{\Gamma_{s1} + \Gamma} (u_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \varphi_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}) d\Gamma \quad (3)$$

$$\int_{\Omega_2} (u_2 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 u_2) d\Omega = \int_{-\Gamma + \Gamma_{s2} + \Gamma} (u_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}) d\Gamma \quad (4)$$

$$\int_{\Omega_3} (u_3 \nabla^2 \varphi_2 - \varphi_2 \nabla^2 u_3) d\Omega = \int_{-\Gamma} (u_3 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} - \varphi_2 \frac{\partial u_3}{\partial n}) d\Gamma \quad (5)$$

因为用边界单元法处理点源问题时,无穷远的边界可以忽略<sup>[2]</sup>,所以式(3)、(4)中没有出现无穷远边界。

将式(1)、(2)代入式(3)、(4)、(5),整理后,得

$$u_p = \rho_1 \varphi_{1A} - (1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}) \int_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (6)$$

其中 $u$ 是地面点 $p$ 的电位, $u$ 是 $\Gamma$ 上的电位, $\varphi_{1A}$ 是 $A$ 点的 $\varphi_1$ 。式(6)表明,只要已知 $\Gamma$ 上的 $u$ ,就可用积分的方法计算地面点的 $u$ 。

当 $p$ 点位于界面 $\Gamma$ 上时,选择如下的 $\varphi$ 为基本解:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \begin{cases} \varphi_1 & \in \Omega_1 \\ \varphi_2 & \in \Omega_2 + \Omega_3 \end{cases} \\ \nabla^2 \varphi_1 &= 0 & \in \Omega_1 \\ \nabla^2 \varphi_2 &= -\delta(p) & \in \Omega_2 + \Omega_3 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= 0 & \in \Gamma_{,1} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= 0 & \in \Gamma_{,2} \\ \rho_1 \varphi_1 &= \rho_2 \varphi_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 0, & \in \Gamma' \end{cases} \quad (7)$$

将式(1)、(7)代入式(3)、(4)、(5),整理后,得

$$\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \frac{\omega_{3p}}{4\pi}\right] u_p = \rho_1 \varphi_{1,p} - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \int_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} d\Gamma \quad (8)$$

其中 $\omega_{3p}$ 是 $p$ 点对区域 $\Omega_3$ 的边界 $\Gamma$ 张的立体角, $u_p$ 是边界 $\Gamma$ 上 $p$ 点的位,积分号后的 $u$ 也是 $\Gamma$ 上的位,所以式(8)是积分方程。用边界元法解此积分方程,可求出 $\Gamma$ 上的 $u$ ,然后代入式(6),即可得地面点的 $u$ 。

式(6)、(8)中没有界面 $\Gamma'$ 的积分,从而边界单元法的求解大为简化。在式(2)中,

$$\text{令} \quad \rho_1 \varphi_1 = U_1 \quad \rho_2 \varphi_2 = U_2 \quad (9)$$

$$\text{代入式(2),有} \quad \left. \begin{aligned} \nabla^2 U_1 &= -2\rho_1 \delta(p) & \in \Omega_1 \\ \nabla^2 U_2 &= 0 & \in \Omega_2 \\ \frac{\partial U_1}{\partial n} &= 0 & \in \Gamma_{,1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial n} &= 0 & \in \Gamma_{,2} \\ U_1 &= U_2, \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial U_2}{\partial n} & \in \Gamma' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

实际上,此处的 $U_1, U_2$ 正是电流强度为1,电源位于地面 $\Gamma_{,1}$ 上 $p$ 点时,垂直断层两侧的电位。用同样的方法,将式(7)中的 $\varphi_1, \varphi_2$ 变换成 $U_1, U_2$ ,则此 $U_1, U_2$ 正是电流强度为1,电源位于 $\Omega_2$ 时,垂直断层两侧的电位。由此可知,式(6)、(8)中的 $\rho_1 \varphi_{1,p}$ 正是断层两侧无不均匀体时 $p$ 点的正常电位,记为 $U_{op}$ 。 $U_1, U_2$ 的求解用电象法容易得到,按式(9)将它变换为基本解:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} + \frac{k_{12}}{r''} + \frac{k_{12}}{r'''} \right) & p \in \Omega_1, q \in \Omega_1 \\ \frac{1 - k_{12}}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) & p \in \Omega_1, q \in \Omega_2 \\ \frac{1 + k_{12}}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) & p \in \Omega_2, q \in \Omega_1 \\ \frac{1}{4\pi} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} - \frac{k_{12}}{r''} - \frac{k_{12}}{r'''} \right) & p \in \Omega_2, q \in \Omega_2 \end{cases} \quad (11)$$

其中 $k_{12} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$ 为反射系数, $r, r', r'', r'''$ 是 $p$ 点及其地面、界面对称点 $p', p'', p'''$ 至任意点 $q$ 的距离(见图2)。至此,垂直断层附近不均匀体问题就可用(8)、(6)两式求解。

当电源 $A$ 和测点 $P$ 位于其它位置时,很容易导出类似计算公式。显然,这些公式也容易推广到断层附近有多个不均匀体的情形。

## 2 边界单元法

用三角单元对 $\Gamma$ 进行剖分,剖分时使每个三角单元 $\Gamma$ 近似为平面。三角元的顶点为节点,节点编号为 $j, k, m$ ,节点坐标为 $(x_j, y_j, z_j)$ 、 $(x_k, y_k, z_k)$ 、 $(x_m, y_m, z_m)$ ,节点数为 $n$ 。将边界积分式(8)分解为诸单元 $\Gamma$ 积分之和。对节点 $i$ ,式(8)可写成

$$\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \frac{\omega_{3i}}{4\pi}\right] u_i = u_{0i} -$$

$$\left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma$$

内采用线性插值的等参单元  $u = \sum_l N_l u_l$ ,

$$x = \sum_l N_l x_l, \quad y = \sum_l N_l y_l,$$

$$z = \sum_l N_l z_l, \quad l = j, k, m.$$

其中 $N_l (l = j, k, m)$ 是线性插值的形函数。单元积分

$$\int_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = \sum_l f_{il} u_l$$

其中  $f_{il} = \int_{\Gamma} N_l \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma$ , 可用四点高斯积分公式计算。例如

$$f_{ij} = \int_{\Gamma} N_j \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = \sum_{q=1}^4 N_j^{(q)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^{(q)} \omega_q \Delta \quad (13)$$

其中 $N_j^{(q)}$ 是高斯积分系数,  $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)^{(q)}$ 是 $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ 在 $q$ 点的值, $q$ 点的坐标是

$$x_q = \sum_l N_l^{(q)} x_l, \quad y_q = \sum_l N_l^{(q)} y_l, \quad z_q = \sum_l N_l^{(q)} z_l, \quad l = j, k, m.$$

$\omega_q$ 是加权系数, $\Delta$ 为三角元的面积。

$$\text{式(12)中所有单元积分和记作 } \sum_{\Gamma} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = \sum_{j=1}^n F_{ij} u_j$$

其中 $n$ 是节点总数, $F_{ij}$ 是 $j$ 节点周围诸单元的 $f_{ij}$ 之和。对于节点 $i$ ,式(12)可写成

$$\left[1 - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \frac{\omega_{3i}}{4\pi}\right] u_i = u_{0i} - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \sum_{j=1}^n F_{ij} u_j \quad (15)$$

$$\text{由全部节点,得方程组 } \left[I - \left(1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}\right) \frac{\omega}{4\pi} - F\right] U = U_0 \quad (16)$$

其中 $I$ 是单位矩阵, $\omega = \text{diag}(\omega_i)$ ,  $F = (F_{ij})$ ,  $u = (u_j)^T$ ,  $u_0 = (u_{0j})^T$ ,  $i, j = 1, \dots, n$ 。

方程组式(16)由 $n$ 个方程组成,含有 $n$ 个未知数,用高斯消去法解方程组,可得 $n$ 个节点的电位,再代入式(6),即可求得地表各点的电位。其数值计算公式为:

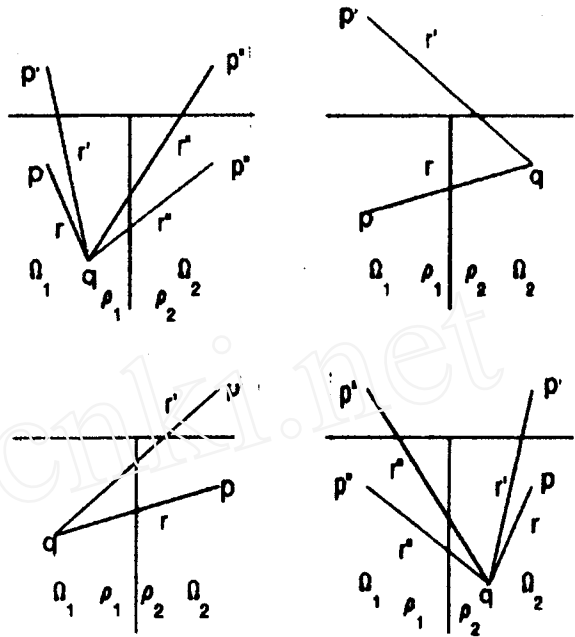


图2 对称点至任意点的距离

$$u_i = u_{or} - (1 - \frac{\rho_2}{\rho_3}) \sum_{j=1}^n F_{ij} u_j \quad (17)$$

其中  $F_{ij}, u_j$  的意义及计算公式与式(14)相同。

### 3 算例

用本文提出的方法对如图3(a)所示模型进行了计算,正方体边长为1个单位,埋深为1

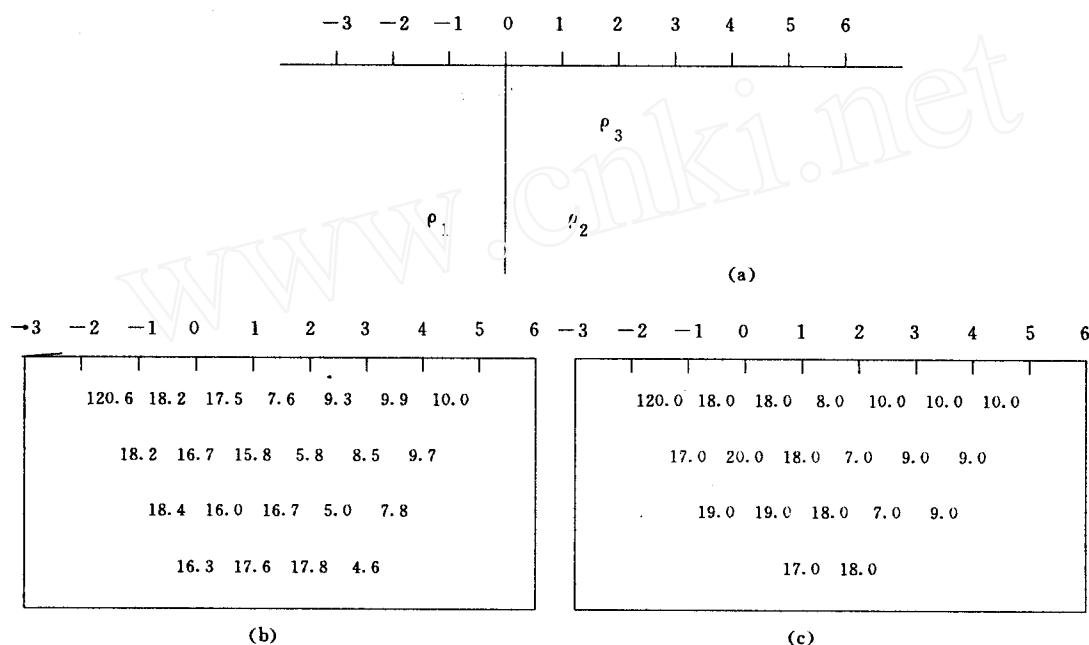


图3 模型及其计算结果

个单位,电阻率为  $\rho_1=100\Omega M$ ,  $\rho_2=10\Omega M$ ,  $\rho_3=1\Omega M$ 。正方体表面剖分成48个单元和26个节点。图3(b)为我们计算的偶极-偶极视电阻率拟断面。图3(c)为M. Okabe<sup>[3]</sup>计算的结果。由图可见,两个计算结果基本一致。

### 参 考 文 献

- 1 徐世浙等. 水平地形三维电场的边界单元解法. 物化探计算技术. 1984;6(3).
- 2 徐世浙,赵生凯. 三维地形上点电源电场的边界单元解法. 桂林冶金地质学院学报. 1985;5(2)
- 3 M. Okabe. Boundary element method for the arbitrary inhomogeneities problem in electrical prospecting. Geophysical Prospecting. 1981;29

## BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR A 3—D INHOMOGENEITIES BURIED NEAR A FAULT ON THE ELECTRIC FIELD OF A POINT SOURCE

Li Yuguo Xu Shizhe

(Institute of Geology and Geophysics, Ocean University of Qingdao) (下转156页)

号。如图2d中3号模型为增加模型。

人机交互共有五个模块,即预处理模块、构造模型模块、正演模块、修改模型模块和成图模块,所有模块采用QUICK—BASIC语言编写。

### 参考文献

- 1 申宁华等. 磁法勘探问题. 北京:地质出版社. 1984
- 2 曾青石. 重磁似二度体人机联作最优化反演方法. 物化探计算技术. 1986;8(4)

## INTERACTIVE DESIGN USED IN MAGNETIC AMONALY INTERPRETATION

*Dong Shouhua*

(China University of Mining and Technology)

**Abstract** Both text and graphics of the microcomputer are used to build the magnetic a-momaly models by interactive, when there is no peripheral devices. By analyzing the characters of magnetic anomaly, it also can realize moving, rotation, magnification, reduction, as well as modification of parameters of the models on the screen.

**Key words** Magnetic amomaly, Interpreting, Interactive

【作者简况】董守华,男,33岁,江苏盐城人。1986年毕业于中国矿业大学,获硕士学位,讲师,现从事磁法和地震数据处理的教学和科研工作。

(上接151页)

**Abstract** The paper presents a numerical solution for the resistivity method of three-dimensional inhomogeneities buried near a fault. The approach used here is the boundary element method. But the choice of the fundamental solution is different from that used before.

**Key words** three—dimension, boundary element method, basic solution, resistivity method.

【作者简况】李予国,男,1965年生,1985年毕业于西安地质学院应用地球物理系,主要从事电磁法和地磁测深法的正反演研究工作,现在青岛海洋大学读博士。