第7卷第4期　　西北地震学报　　Vol.7,No.4
1985年12月　NORTHWESTERN SEISMOLOGICAL JOURNAL　Dec.,1985

地形对大地电磁勘探的影响

徐世浙　　赵生凯
（山东海洋学院）（中国科技大学）

摘　要

本文讨论了地形对大地电磁场的影响。用有限元方法计算了几种地形的大地电磁影响曲线。

计算表明，地形对E_x型波视电阻率的影响，主要出现在地形起伏幅度与电磁波在地下介质中的波长可以比较时。H_x型波的地形影响比E_x波严重，随着周期的增长，H_x型波的地形影响变得稳定。地形凸起处的影响比下凹处严重。

众所周知，地形对电阻率法勘探有显著影响。大地电磁勘探是一种以天然电磁场为场源、了解地下电阻率分布的勘探方法，因而自然就产生这样一个问题，即地形对大地电磁勘探的影响程度如何？目前大地电磁正演问题是在地面为水平面的条件下推导的，但在某些测点周围有起伏的高山，例如，我国西藏羊八井地热区的测深点的地形条件就是这样。国外已将大地电磁勘探法用于金属矿[1、2]，在金属矿区经常遇到起伏的地形，所以有必要研究地形对大地电磁勘探的影响。用解析法研究任意地形对大地电磁场的影响是困难的，本文用有限元法研究这一问题。

一、二维大地电磁场的边值问题和相应的变分问题

大地电磁场中的视电阻率是根据测点处的电场与磁场的比值计算出来的，因此，首先应给出大地电磁场的边值问题。

角频率为ω的定态电磁场的方程是

$$\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H} \qquad (1)$$

$$\nabla\times\vec{H}=(\sigma-i\omega\varepsilon)\vec{E} \qquad (2)$$

其中μ是介质的导磁率，σ是介质的电导率，ε是介质的介电常数。

假定地形是二维的，取走向为x轴，y轴与x轴垂直，保持水平，z轴垂直向下（图1）。再假定入射波是平面波，将（1）、（2）式按分量展开，并考虑到$\frac{\partial}{\partial x}=0$，得两个独立的方程组，并以x分量为准，分别命名为$E_x$型和$H_x$型波。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

E_x型：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Hz}{\partial y}-\frac{\partial Hy}{\partial z}=(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x\\&\frac{\partial E_x}{\partial z}=i\omega\mu Hy\\&-\frac{\partial E_x}{\partial y}=i\omega\mu Hz\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

H_x型：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Ez}{\partial y}-\frac{\partial Ey}{\partial z}=i\omega\mu H_x\\&\frac{\partial H_x}{\partial z}=(\sigma-i\omega\varepsilon)Ey\\&-\frac{\partial H_x}{\partial y}=(\sigma-i\omega\varepsilon)Ez\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

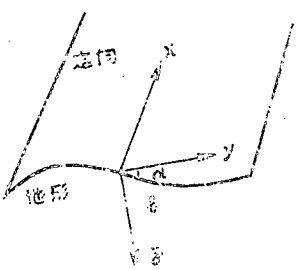


图1 地形和座标系

Fig. 1 Topography and coordinate system.

从（3）、（4）式中的第二、三式，解出Hy、Hz和Ey、Ez，並分别代入第一式，得E_x和H_x应满足的偏微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}\right)+(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x=0\qquad(5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial z}\right)+i\omega\mu H_x=0\qquad(6)$$

（5）、（6）式可统一表示成：

$$\nabla\cdot(\tau\nabla u)+\lambda u=0\qquad(7)$$

其中∇是二维哈密顿算符：$\nabla=\frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\vec{e}_z$。对于$E_x$型：$u=E_x$，$\tau=\frac{1}{i\omega\mu}$，$\lambda=\sigma-i\omega\varepsilon$；对于$H_x$型：$u=H_x$，$\tau=\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}$，$\lambda=i\omega\mu$。

为了求解方程（7），还必须给定边界条件。将区域Ω取得足够大，区域的线度约为起伏地形线度的若干倍，使地形对电磁场的影响在边界P上近似为零。这时，边界上的电磁场按天然电磁场在均匀半空间中的分布规律确定。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

对于垂直入射的平面电磁波，取上边界AB（图2）处的$u=1$。假定地形对左右边界是对称的，取左右边界BC、DA处的法向导数$\frac{\partial u}{\partial n}=0$。在下边界CD处，电磁波在无限均匀介质中传播，其方程为$u=u_0e^{ikz}$，其中k为复波数，$k=(1+i)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$，$\sigma$为CD以下的介质的电导率。对u求偏导：$\frac{\partial u}{\partial z}=iku$。因为在CD处有$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial n}$，所以CD处的边界条件为$\frac{\partial u}{\partial n}-iku=0$。可见在本问题中包括了三类边界条件。为方便电算程序的编制，将这三类边界条件写成统一的形式。边值问题可简写成：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot(\tau\nabla u)+\lambda u=0 \quad \text{在区域}\Omega\text{中}\\&\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha u=\beta \quad \text{在边界}\Gamma\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

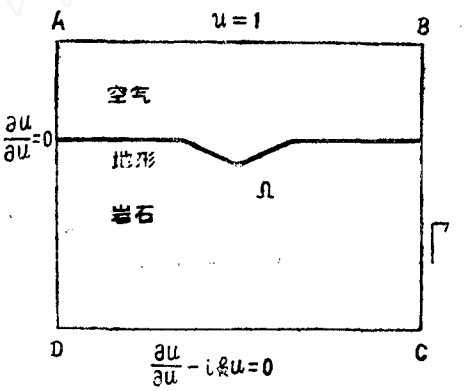


图2　区域与边界

Fig. 2　Domain and boundary.

在AB上令α为足够大的数，例如$\alpha=10^{20}$，再令$\beta=\alpha$，这时$\frac{\partial u}{\partial n}$可忽略，于是得$u=1$。在BC、DA上，令$\alpha=0$，$\beta=0$，得$\frac{\partial u}{\partial n}=0$。在CD上，令$\alpha=-ik$，$\beta=0$，得$\frac{\partial u}{\partial n}-iku=0$。

根据变分理论可知，与边值问题（8）相应的变分问题是：求u，使泛函

$$F(u)=\iint_{\Omega}\left[\frac{1}{2}\tau(\nabla u)^2-\frac{1}{2}\lambda u^2\right]ds+\oint_{\Gamma}\tau\left(\frac{\alpha}{2}u^2-\beta u\right)dl \tag{9}$$

的变分$\sigma F(u)=0$。下面用有限元法求解变分问题（9）。

二、有限元法

本文将区域Ω剖分成许多小三角元，在单元e内进行二次函数插值。为此，在单元e上取6个点：三个角点和三边中点，如图3所示。三角点按顺时针编号为i、j、m，三中点编号

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

为p、q、r。角点坐标为(y_i, z_i),(y_j, z_j),(y_m, z_m)。六个点的待定u值记为u_i、u_j、u_m、u_p、u_q、u_r。

首先按(9)式计算单元e的$F^{(e)}(u)$,然后将各单元的$F^{(e)}(u)$相加组成总体的F(u),它是各节点u值的函数。令F(u)的变分为零,可求得各节点的u。

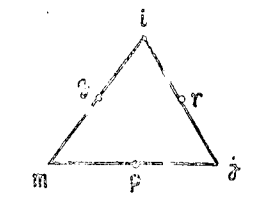


图3 二次三角单元

Fig. 3 Quadratic triangular element.

经适当计算,对于单元e,(9)式右侧第一项面积分为

$$\iint_e \frac{1}{2}\tau(\nabla u)^2 ds = \frac{1}{2}\{u\}_e^T[K1]_e\{u\}_e \tag{10}$$

其中$\{u\}_e = \{u_i, u_j, u_m, u_p, u_q, u_r\}^T$是单元的u值列向量,

$$[K1]_e = \frac{\tau}{12\Delta}\begin{pmatrix} 3C_1^TC_1 & & & & & \\ -C_1^TC_2 & 3C_2^TC_2 & & \text{对} & & \\ -C_1^TC_3 & -C_2^TC_3 & 3C_3^TC_3 & & \text{称} & \\ 0 & 4C_2^TC_3 & 4C_2^TC_3 & -8(C_1^TC_2+C_2^TC_3+C_3^TC_1) & & \\ 4C_1^TC_3 & 0 & 4C_1^TC_3 & 8C_1^TC_2 & -8(C_1^TC_2+C_2^TC_3+C_3^TC_1) & \\ 4C_1^TC_2 & 4C_1^TC_2 & 0 & 8C_1^TC_3 & 8C_2^TC_3 & -8(C_1^TC_2+C_2^TC_3+C_3^TC_1) \end{pmatrix}$$

其中C_1, C_2, C_3是列向量,

$$C_1 = (a_1 b_1)^T,\ C_2 = (a_2, b_2)^T,\ C_3 = (a_3, b_3)^T,$$

$$a_1 = z_j - z_m,\ a_2 = z_m - z_i,\ a_3 = z_i - z_j,$$

$$b_1 = y_m - y_j,\ b_2 = y_i - y_m,\ b_3 = y_j - y_i,$$

$\Delta = \frac{1}{2}(a_1 b_2 - a_2 b_1)$是三角元面积。

(9)式右侧第二项面积分为:

$$\iint_e \frac{1}{2}\lambda u^2 ds = \frac{1}{2}\{u\}_e^T[K2]_e\{u\}_e \tag{11}$$

其中$[K2]_e$ =

$$\frac{\lambda\Delta}{180}\begin{pmatrix} 6 & & & & & \\ -1 & 6 & & \text{对} & & \\ -1 & -1 & 6 & & \text{称} & \\ -4 & 0 & 0 & 32 & & \\ 0 & -4 & 0 & 16 & 32 & \\ 0 & 0 & -4 & 16 & 16 & 32 \end{pmatrix}。$$

(9)式右侧的线积分只对边界单元进行。设线段jm落在边界上,用l_i代表jm的长度,

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

经适当计算，得

$$\frac{1}{2}\int_{l_m}\tau\alpha u^2 dl = \frac{1}{2}\{u\}_e^T[K3]_e\{u\}_e \tag{12}$$

其中$[K3]_e = \frac{\tau\alpha l_1}{30}\begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & 4 & & \text{对} & & \\ 0 & -1 & 4 & & \text{称} & \\ 0 & 2 & 2 & 16 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\int_{l_m}\tau\beta u dl = \{u\}_e^T[P]_e \tag{13}$$

其中$[P]_e = \frac{\tau\beta l_1}{6}[0,\ 1,\ 1,\ 4,\ 0,\ 0]^T$

由（10）式—（13）式相加，得单元e的$F^{(e)}(m)$，将各单元的$F^{(e)}(u)$相加，得总体的$F(u)$：

$$F(u) = \Sigma F^{(e)}(u) = \frac{1}{2}\{u\}^T([K1]-[K2]+[K3])\{u\}-\{u\}^T[P]$$

$$= \frac{1}{2}\{u\}^T[K]\{u\}-\{u\}^T[P] \tag{14}$$

其中$\{u\}$是全体节点的u组成的列向量，$[K1]$、$[K2]$是各单元矩阵$[K1]_e$、$[K2]_e$扩展后的迭加，$[K3]$、$[P]$是边界单元的矩阵$[K3]_e$、$[P]_e$扩展后的迭加，$[K]=[K1]-[K2]+[K3]$是正定、对称、稀疏矩阵。令（14）式的$F(u)$的变分为零，得线性方程组

$$[K]\{u\} = [P] \tag{15}$$

解这个线性方程组，得各节点的u值，即E_x值或H_x值。

三、视电阻率的计算

在平地形条件下，大地电磁勘探的视电阻率的定义如下：

$$\left.\begin{aligned} &E_x\text{型波：}\ \rho_{xy} = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{E_x}{H_y}\right|^2 \\ &H_x\text{型波：}\ \rho_{yx} = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{E_y}{H_x}\right|^2 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中E_x、E_y、H_x、H_y为地面测点的电场和磁场的x、y分量。当地形起伏时，E_x、H_x、H_y的测量状态未变，但电场E_y不能测得，只能测得E沿地表的分量E_1（见图1），所以ρ_{xy}的计算公式不变，而ρ_{yx}的实际计算公式应为：

$$\rho_{yx} = \frac{1}{\omega\mu}\left|\frac{E_1}{H_x}\right|^2 = \frac{1}{\omega\mu}\frac{|E_y\cos\alpha + E_x\sin\alpha|^2}{|H_x|^2} \tag{17}$$

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

其中α是地形与y轴的夹角。

由（16）、（17）式可知，计算E_x型的视电阻率ρ_{xy}时，除E_x外，还需知道H_y；计算H_x型的视电阻率ρ_{yx}时，除H_x外，还需知道E_y、E_z。根据（3）、（4）式，有：

$$H_y=\frac{1}{i\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z},\quad E_y=\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial z},\quad E_z=\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\frac{\partial H_x}{\partial y} \tag{18}$$

所以还需计算E_x、H_x的偏导数。经适当计算，在一个单元内，各节点的偏导数为：

$$\begin{Bmatrix}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_j\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_m\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_p\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_q\\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_r\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}3a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 4a_3 & 4a_2\\ -a_1 & 3a_2 & -a_3 & 4a_3 & 0 & 4a_1\\ -a_1 & -a_2 & 3a_3 & 4a_2 & 4a_1 & 0\\ -a_1 & a_2 & a_3 & -2a_1 & 2a_1 & 2a_1\\ a_1 & -a_2 & a_3 & 2a_2 & -2a_2 & 2a_2\\ a_1 & a_2 & -a_3 & 2a_3 & 2a_3 & -2a_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ u_j\\ u_m\\ u_p\\ u_q\\ u_r\end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_i\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_j\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_m\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_p\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_q\\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_r\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\Delta}\begin{pmatrix}3b_1 & -b_2 & -b_3 & 0 & 4b_3 & 4b_2\\ -b_1 & 3b_2 & -b_3 & 4b_3 & 0 & 4b_1\\ -b_1 & -b_2 & 3b_3 & 4b_2 & 4b_1 & 0\\ -b_1 & b_2 & b_3 & -2b_1 & 2b_1 & 2b_1\\ b_1 & -b_2 & b_3 & 2b_2 & -2b_2 & 2b_2\\ b_1 & b_2 & -b_3 & 2b_3 & 2b_3 & -2b_3\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ u_j\\ u_m\\ u_p\\ u_q\\ u_r\end{Bmatrix}。$$

对于相邻单元的公共节点，用各单元求得的导数的平均值，作为该点的导数值。

按上法求得$\frac{\partial E_x}{\partial z}$、$\frac{\partial H_x}{\partial z}$、$\frac{\partial H_x}{\partial y}$后，代入（18）式，再代入（16）、（17）式，即可计算视电阻率。

改变电磁波的角频率ω，即可得各测点的视电阻率与频率的关系曲线，即所谓的大地电磁测深曲线。

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

四、算例和讨论

本文讨论的是垂直入射的平面电磁波。为了减少单元数目，所用的单元在水平方向是狭长的。先用ρ＝1的均匀半空间试算。所得E_x型波的视电阻率如图4所示。对T＝0.1秒的波，计算误差可达11%，其原因简单说明如下：

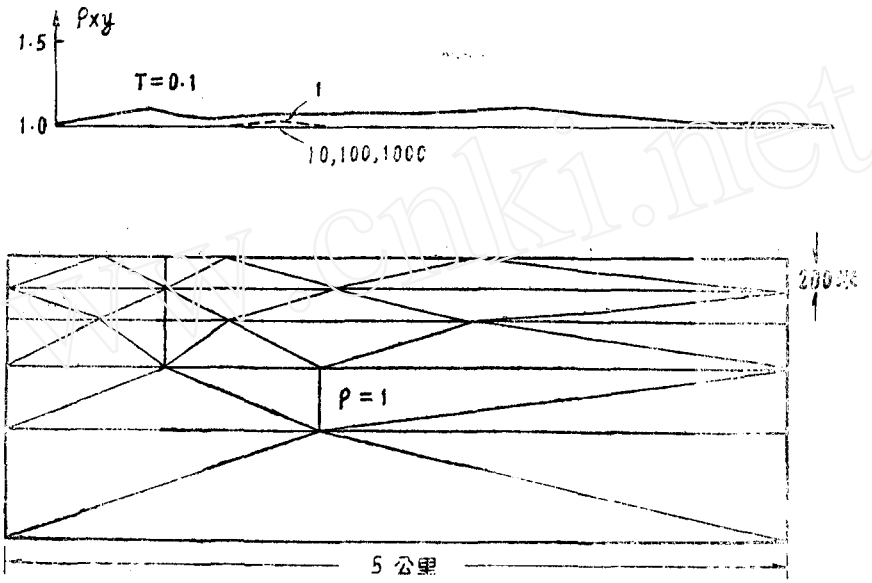


图4　均匀半空间的有限元法网格剖分及计算视电阻率的误差（E_x型）

Fig. 4　Element division in homogeneous half-space and error in calculating apprent resistivity (Expolarization).

在均匀导电介质中，电磁波的波长λ与周期T、电阻率ρ的关系为$\lambda = 3.16\sqrt{T\rho}$(公里)当T＝0.1秒时，λ＝1公里。岩石中最上部三角元的高度Δz＝200米，与波长之比$\frac{\Delta z}{\lambda}=0.2$。在某一时刻（如t＝0），电磁波的相对场强与深度的关系为

$$E/E_0 = e^{-\frac{2\pi}{\lambda}z}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}z\right)。$$

按上式作出的E/E_0与z/λ的关系如图5所示。可以看出，在$\frac{\Delta z}{\lambda}=0.2$的范围内，场强有急剧变化，二次插值函数不能很好地符合场强变化规律，因而出现较大的计算误差。对于T＝1秒的波，其波长为3.16公里，最上部三角元高度与波长之比$\frac{\Delta z}{\lambda}=0.063$，在此范围内，二次插值函数与场强的变化规律符合较好，因而视电阻率的计算误差降至3%以下。当T≥10秒时，波长λ≥10公里，这时$\frac{\Delta z}{\lambda}\leqslant 0.02$，视电阻率的计算误差<0.1%。总之，对于本文所

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

选用的狭长三角单元，当周期T≥1时，计算结果是比较可靠的。

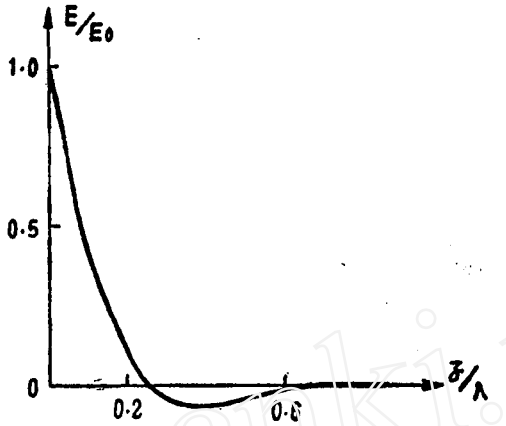


图5 均匀导电介质中电磁波相对强度E/E_0与相对深度z/λ的关系

Fig. 5 Curve of relative strength E/E_0 of electromagnetic wave propagated in homogeneous conductive medium against relative depth z/λ.

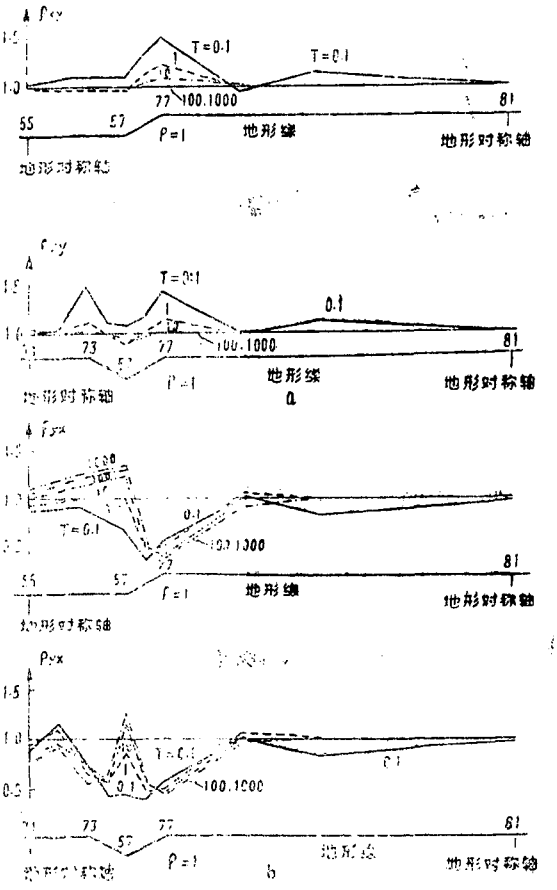


图 6

a.地形对E_x型视电阻率的影响（图中地形线上的数字为节点号）
b.地形对H_x型视电阻率的影响

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

图6 a是斜坡和山谷地形上的E_x型波的视电阻率曲线。从图可以看出：1)地形对E_x型视电阻率存在着畸变，T = 0.1秒时，畸变为50%，T = 1 秒时，畸变为 20 % 左右，在局部凸起处，畸变较大；2)随着周期加长（T>10秒），畸变渐趋消失。这可简单解释如下：图6 a上地形起伏的幅度h约为200米，而T≥10秒的波的波长λ≥10公里，当波长远大于起伏幅度时（$\frac{\lambda}{h}>50$），地形对E_x型波视电阻率的畸变消失。由此可知，地形对E_x型波视电阻率的畸变，主要出现在地形起伏幅度与电磁波的波长可比较时。

图6 b是斜坡和山谷地形上的H_x型波的视电阻率曲线。从图看出：1)地形对H_x型波视电阻率的畸变较E_x型严重；2)随着周期加长，畸变没有消失，而是趋向稳定值；3)地形对长周期的H_x型波的视电阻率的畸变与地形对直流电场视电阻率的畸变十分类似：在地形下凹处，视电阻率增大，上凸处，视电阻率减少。其原因简单解释如下：H_x型波视电阻率的计算公式是（17）式，在地表处，磁场成分H_x接近常数，所以视电阻率与E_1成正比。与H_x相应的电场E_1分布在剖面内，当周期增大时，垂直入射的电磁波的电场成分逐渐趋近于起源于无限远处的稳定电场，所以地形对长周期H_x型波视电阻率的畸变与地形对直流电场视电阻率的畸变十分类似。

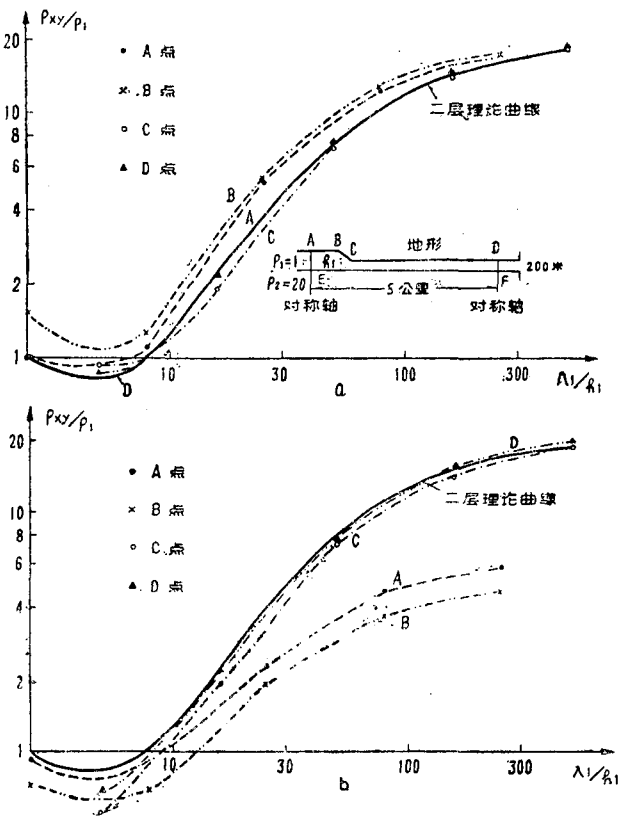


图　7

a.地形对E_x型大地电磁测深曲线的影响

b.地形对H_x型大地电磁测深曲线的影响

图7是$\rho_2/\rho_1 = 20$的E_x和H_x型二层大地电磁测深曲线。其中实线是用解析法算出的二

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

层理论曲线。用有限元法算出的A、B、C、D点的测深曲线也绘在图上。由图可见：1)在局部凸起处（A、B点），E_x和H_x型测深曲线均有畸变，而且H_x型的畸变十分严重；2)在C、D处，地形对测深曲线的畸变较小。

根据本文讨论可知，起伏的地形使大地电磁探测结果存在着畸变，尤其对于H_x型的视电阻率，畸变十分严重，因而在地形起伏地区解释大地电磁勘探资料时，应当考虑地形的影响。

参 考 文 献

〔1〕P.Silvester, C. R. S. Haslam, Magnetotelluric modelling by the finite element method, Geophysical Prospecting, Vol.20, P.872--891, 1972.

〔2〕Charles T.Young, Magnetotelluric measurments of conductivity anomalies in Northern Wisconsin, Wisconsin Report, №77—3, 1977.

THE TOPOGRAPHIC EFFECTS ON MAGNETOTELLURIC RESPONSE

Xu Shi—zhe Zhao Sheng—kai

(*Shandong College of Oceanology*)

(*China University of Science and Technology*)

Abstract

This paper discusses the topographic effects on magnetotelluric response. The authors here calculated several magnetotelluric response curves on different topography with finite element method, using quadratic triangular element. In the case of E_x—polarization, the effects occur only on the frequency band in which the length of wave propagated under ground is comparable with the amplitude of undulation of topography. In the case of H_x—polarization, the topographic effects are severer than that in E_x—polarization, and it becomes stable as the period increases. The effects are severer on convex place than on concave place.

© 1994-2007 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net