

韩江涛,刘国兴,金忠宝. 起伏地表三维电阻率法有限差分数值模拟. 地球物理学进展, 2009, 24(1):195~200
Han J T, Liu G X, Jin Z B. 3D numerical modeling of resistivity with surface topography by the finite-difference method. *Progress in Geophys.* (in Chinese), 2009, 24(1):195~200

起伏地表三维电阻率法有限差分数值模拟

韩江涛, 刘国兴*, 金忠宝
(吉林大学地球探测科学与技术学院, 长春 130026)

摘 要 有限差分法是地球物理数值模拟中最常用的方法之一,为了研究起伏地表对三维电阻率法的影响问题,本文基于网格变换方法将起伏地表映射成水平地表,推导出映射后坐标系下稳定电流场基本方程. 采用有限差分法对映射后的控制方程进行数值模拟. 通过对三维山谷、山脊地形进行数值模拟,分析不同测量装置的地形影响. 结果表明:起伏地表对稳定电流场的影响很大.

关键词 起伏地表, 电阻率法, 网格映射, 有限差分法, 数值模拟

中图分类号 P631 **文献标识码** A **文章编号** 1004-2903(2009)01-0195-06

3D numerical modeling of resistivity with surface topography by the finite-difference method

HAN Jiang-tao, LIU Guo-xing*, JIN Zhong-bao
(School of Geoeexploration of Science and Technology, Jilin University, Changchun 130026, China)

Abstract The finite-difference method is one of the most commonly used geophysical numerical modeling methods,. In this paper we use the method of transforming curved grids mapping the fluctuating surface topography into horizontal surface topography and derive the basic equation of the stable electric current field of the reference frame after mapping. We use the finite-difference method to model the equation after mapping. By modeling the topography of a 3D-valley and 3D-ridge, we can analyse the influence of the topography on the equipments. The result shows that the fluctuating surface topography has a great influence on the stable electric current field.

Keywords surface topography, resistivity method, grid mapping, finite-difference method, numerical modeling

0 引 言

起伏地表对三维电阻率法的影响巨大,通过数值模拟来计算地形对电阻率法的影响是提高电法资料解释的重要途径. 国内外专家对起伏地形三维电阻率法的正演模拟做过许多工作, Fox 等^[1]阐述了地形对电阻率和极化率的影响问题; Truman H T 和 George R J^[2]研究了三维地形对电阻率法的影响并进行校正; Yuguo L 和 Klaus Spitzer^[3]比较了三维直流电阻率法有限元法和有限差分法数值模拟; 黄兰珍等^[4]、田宪漠等^[5]、徐世浙等^[6]用边界元法较

好地解决了带地形的电阻率法正演问题,但是边界元法在处理复杂介质时比较困难; 吕玉增等^[7]、强建科等^[8]进行了起伏地形三维有限元的数值模拟,和有限差分法相比,有限元法计算量较大.

近年来,在处理起伏地形上, Tessmer 等^[9]、Hestholm 等^[10~11]分别提出将网格变换技术用于三维弹性波、地震波场模拟,其思路是对坐标系进行变换,推导出变换后坐标系下的弹性波方程,采用相应波场模拟技术进行数值模拟. 王祥春等^[12]将网格变换技术应用于地震波场延拓中,取得了一定的效果. 本文将该方法应用于起伏地形稳定电流场的数值模

收稿日期 2008-07-14; 修回日期 2008-11-18.
基金项目 国家“863”项目“起伏地表条件下矿体快速定位的三维直流电场法理论与技术”项目(2006AA06Z109)资助.
作者简介 韩江涛,男,1982 年生,辽宁凌源人,博士研究生,从事应用地球物理研究. (E-mail: hanjiangtao@email.jlu.edu.cn)
* 通讯作者 刘国兴,男,1951 年生,内蒙古库伦旗人,教授,博士生导师,从事应用地球物理研究. (E-mail: guoxing@jlu.edu.cn)

拟中,推导出映射后坐标系下的稳定电流场的基本方程,算法上采用有限差分法进行数值模拟.由于方程中包含起伏地表函数的一阶、二阶导数,所以这种算法比较适合于地形起伏较缓慢且相对光滑的丘陵地带和变换缓慢且曲率连续的山地地表^[13].通过基于LU分解的不完全乔勒斯基共轭梯度法求解关于电位的线性方程组,由所求电位组合成不同装置的视电阻率实现三维电阻率法的正演计算.

1 稳定电流场电位满足的基本方程及网格变换原理

点电源三维电场电位满足的偏微分方程如公式(1)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial z}\right) = -I\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0). \quad (1)$$

采用一种简单的线性泛函关系对三维网格进行映射,把 (ξ, η, ζ) 域网格映射到 (x, y, z) 域中,映射关系式如公式(2~4).

$$x(\xi, \eta, \zeta) = \xi, \quad (2)$$

$$y(\xi, \eta, \zeta) = \eta, \quad (3)$$

$$z(\xi, \eta, \zeta) = z_0(\xi, \eta) + \frac{\zeta}{\zeta_{\max}} \cdot (z_{\max} - z_0(\xi, \eta)). \quad (4)$$

(ξ, η, ζ) 域网格由 $\xi = 0, \eta = 0, \zeta = 0, \zeta = \zeta_{\max}$ 来限定, (x, y, z) 域网格由 $x = 0, y = 0, z = z_0(\xi, \eta), z = z_{\max}$ 来限定.

根据链导法则推导出电位在空间上的一阶、二阶导数.

(1)求取电位对空间各方向的一阶偏导数,即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \quad (7)$$

(2)求取电位对空间各方向二阶偏导数,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta \partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2}. \quad (10)$$

上面各公式中的偏导数用公式(11~15)表示:

$$c_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial z_0(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot \frac{\zeta_{\max} - \zeta}{z_{\max} - z_0(\xi, \eta)}, \quad (11)$$

$$c_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\zeta_{\max}}{z_{\max} - z_0(\xi, \eta)}, \quad (12)$$

$$c_3 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 z_0(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\zeta_{\max} - \zeta}{z_{\max} - z_0(\xi, \eta)} - 2 \cdot \left[\frac{\partial z_0(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right]^2 \cdot \frac{(\zeta_{\max} - \zeta)}{[z_{\max} - z_0(\xi, \eta)]^2}, \quad (13)$$

$$c_4 = \frac{\partial \zeta}{\partial y} = -\frac{\partial z_0(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot \frac{\zeta_{\max} - \zeta}{z_{\max} - z_0(\xi, \eta)}, \quad (14)$$

$$c_5 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 z_0(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\zeta_{\max} - \zeta}{z_{\max} - z_0(\xi, \eta)} - 2 \cdot \left[\frac{\partial z_0(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right]^2 \cdot \frac{(\zeta_{\max} - \zeta)}{[z_{\max} - z_0(\xi, \eta)]^2}. \quad (15)$$

通过上述变化,稳定电流场基本方程变换为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) + 2c_1 \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\ & + 2c_4 \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) + (c_1^2 + c_2^2 + c_4^2) \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta}\right) \\ & + c_3 \sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta} + c_5 \sigma \frac{\partial u}{\partial \zeta} = -I\delta(\xi - \xi_0) \\ & \times (\eta - \eta_0)\delta(\zeta - \zeta_0). \end{aligned} \quad (16)$$

当地表为水平时,地形函数的偏导数为零,公式中 $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0, c_4 = 0, c_5 = 0$ 公式与水平地形的的基本方程一致.

2 有限差分法数值模拟

2.1 网格剖分

在 (x, y, z) 域中,由于起伏地表的作用,在进行近地表模型的网格剖分时,最重要的是考虑如何对地表进行有益的网格剖分,既要符合所采用的方法原理,也要符合电流场的物理机制,最好不要产生不必要的由计算方法而引起的响应.本文在计算域内采用正方体剖分,这样可以借用成熟的差分公式,根据公式(2~4)的变换准则,但在相应物理域上并非正交网格,而是相当于一种平均高差分配的相似准则.

2.2 有限差分离散

对经过坐标变换后的公式(16)进行离散化,采取节点离散方法,相应的差分运算为内部节点采用中心差分格式,边界节点采用向前差分或向后差分格式,离散后的差分方程可以表示为

$$\begin{aligned} & c_{\text{top}} u_{i,j,k-1} + c_{\text{bottom}} u_{i,j,k+1} + c_{\text{left}} u_{i-1,j,k} \\ & + c_{\text{right}} u_{i+1,j,k} + c_{\text{front}} u_{i,j-1,k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+C_{\text{back}}u_{i,j+1,k}+C_{i+1,j,k+1}u_{i+1,j,k+1}\\ &+C_{i-1,j,k+1}u_{i-1,j,k+1}+C_{i,j+1,k+1}u_{i,j+1,k+1}\\ &+C_{i,j-1,k+1}u_{i,j-1,k+1}+C_{i+1,j,k-1}u_{i+1,j,k-1}\\ &+C_{i-1,j,k-1}u_{i-1,j,k-1}+C_{i,j+1,k-1}u_{i,j+1,k-1}\\ &+C_{i,j-1,k-1}u_{i,j-1,k-1}+C_pu_{i,j,k}\\ &=-\frac{I}{\Delta V}\delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)\delta(\zeta-\zeta_0). \end{aligned} \tag{17}$$

这是由 15 点差分格式组成的线性方程组. 式中: C_{top} 、 C_{bottom} 、 C_{left} 、 C_{right} 、 C_{front} 、 C_{back} 、 $C_{i+1,j,k+1}$ 、 $C_{i-1,j,k+1}$ 、 $C_{i,j+1,k+1}$ 、 $C_{i,j-1,k+1}$ 、 $C_{i+1,j,k-1}$ 、 $C_{i-1,j,k-1}$ 、 $C_{i,j+1,k-1}$ 、 $C_{i,j-1,k-1}$ 分别是节点 (i,j,k) 上、下、左、右、前、后、右下、左下、后下、前下、右上、左上、后上、前上方的连接系数.

2.3 线性方程组的求解

将(17)描述的差分格式组成的线性方程组,表示成矩阵方程的形式

$$Au=f, \tag{18}$$

其中, A 是方程组的系数矩阵; u 是关于电位的列矢量; f 是右端项(场源项)的列矢量. 对于总节点数 N 个时,构成系数矩阵为 N 阶的线性方程组,求解此方程组确定各节点的电位值,从而表征电场的空间分布.

线性方程组解法一般分为直接法和迭代法. 直接法有列高斯消去法、行高斯消去法、高斯—亚当消去法、LU 分解法等. 迭代法包括共轭梯度法、双共轭梯度法和加预处理的共轭梯度法等. 鉴于上述待求解的方程组的矩阵是大型、稀疏、带状特点,采用吴小平^[14]采用的压缩存储方式,只存储系数矩阵的非零元素,这可大大减少所需的内存,这对于研究三维问题是必要的. 本文采用 LU 分解的不完全乔勒

斯基共轭梯度法(ICCG)求解.

LU 分解不完全乔勒斯基共轭梯度法的迭代格式如下:

将 A 分解为 l 矩阵和 u 矩阵

取初始向量 $x^{(0)}$, 并计算

$$r^{(0)}=b-Ax^{(0)},$$
$$p^{(0)}=A^T(l^T)^{-1}(u^T)^{-1}u^{-1}l^{-1}r^{(0)},$$

$i=0$

当 $r^{(i)}>\epsilon$ 时

$$s=u^{-1}l^{-1}Ap^{(i)},$$
$$a^{(i)}=\frac{(r^{(i)T},r^{(i)})}{(s^T,s)},$$
$$x^{(i+1)}=x^{(i)}+a^{(i)}p^{(i)},$$
$$r^{(i+1)}=r^{(i)}-a^{(i)}A^T(l^T)^{-1}(u^T)^{-1}s,$$
$$b^{(i)}=\frac{(r^{(i+1)T},r^{(i+1)})}{(r^{(i)T},r^{(i)})},$$
$$p^{(i+1)}=r^{(i+1)}+b^{(i)}p^{(i)}.$$

$i=i+1$

3 数值模拟结果分析

根据上述理论,利用编制的起伏地表三维电阻率法正演程序对几种常见的模型进行计算.

模型 1:

水平地形模拟验证,给定三层一维介质模型,K 型曲线,第一层电阻率为 $50\ \Omega\cdot\text{m}$,厚度 5 m;第二层电阻率为 $200\ \Omega\cdot\text{m}$,厚度为 5 m,第三层电阻率为 $10\ \Omega\cdot\text{m}$. 本文方法与数字滤波方法计算的解析解对比情况,见图 1. 利用有限差分计算的结果与解析解结果误差不大于 10%.

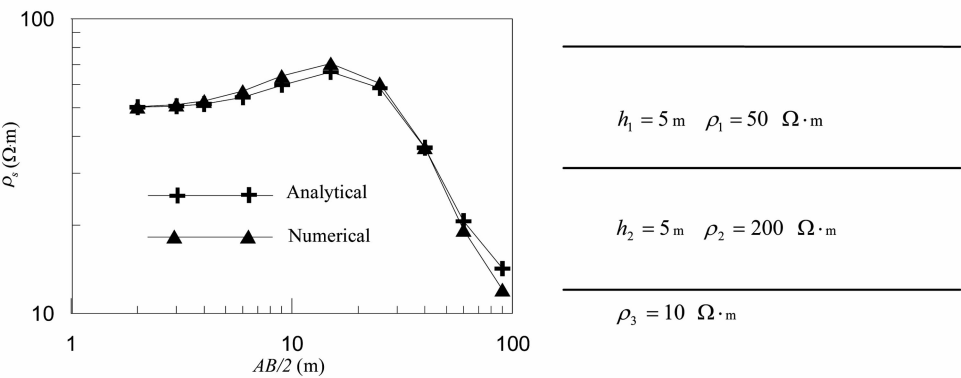


图 1 解析解与数值解的对比图

Fig. 1 Comparison between analytical and numerical solutions

模型 2:

为了验证本算法对起伏地形的计算效果,本文设计了坡度角为 26.6° 的三维山谷地形,如图 2. 网格大小为 $45\times 23\times 17\text{ m}$,等间距剖分. 山谷主剖面 ($Y=0$) 跨度为 12 m . 旁测线依次递减 2 m ,采用中间梯度装置测量, $AB=42\text{ m}$. 图 3 给出了不同测线中间梯度法视电阻率曲线. 可以看出,各条测线视电阻率曲线与地形呈镜像,随着不同测线山谷范围的变小,地形引起的异常幅度也变小.

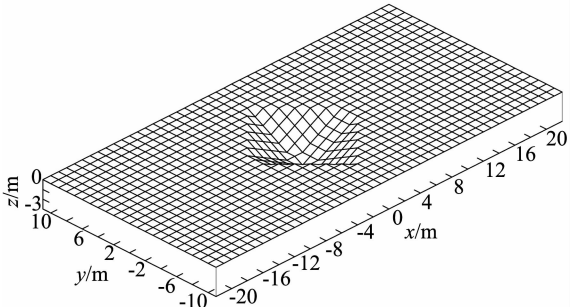


图 2 三维山谷地形示意图

Fig. 2 Schematic diagram for 3D valley terrain

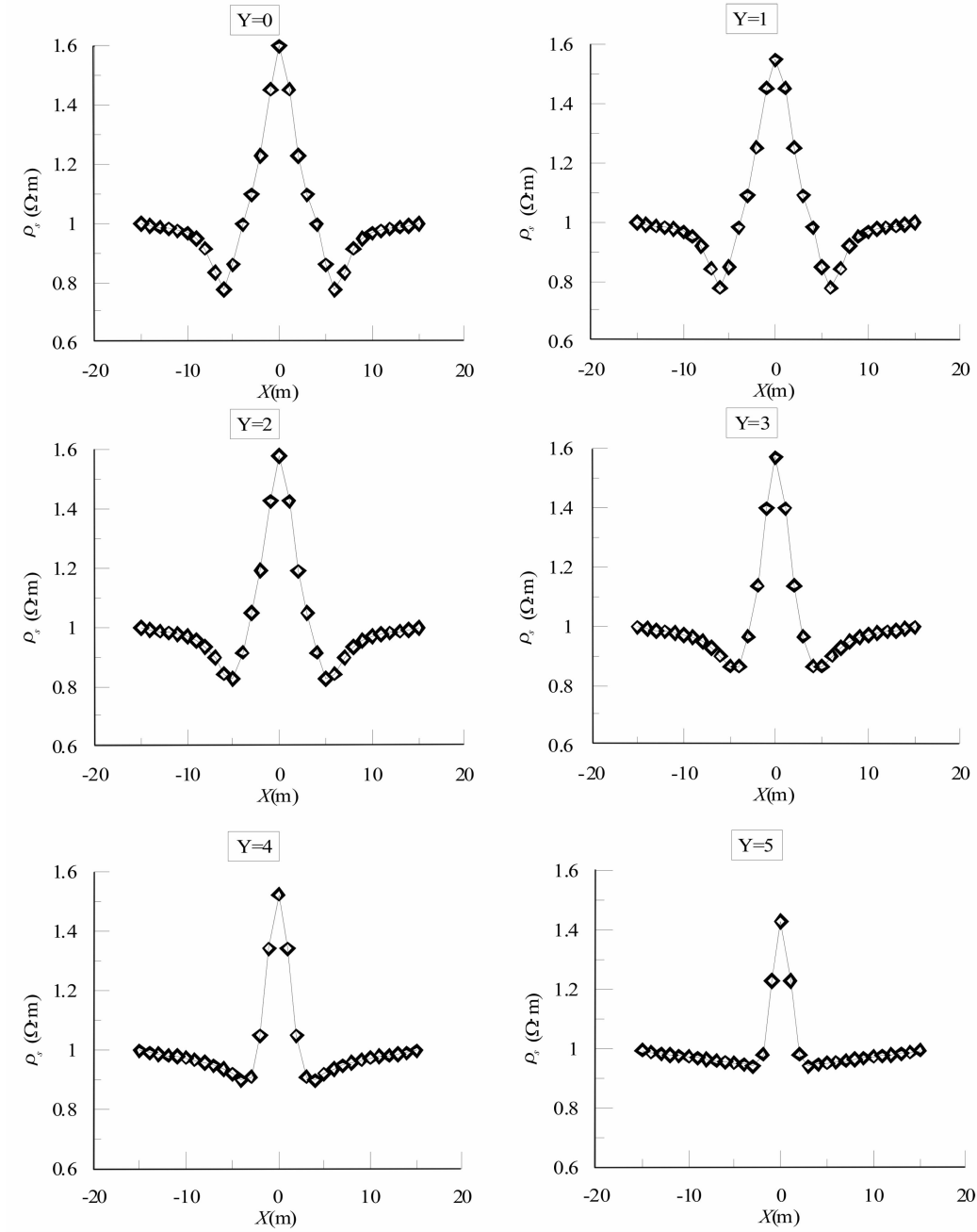


图 3 山谷地形不同测线中间梯度法视电阻率曲线

Fig. 3 Apparent resistivity curves of intermediate gradient method in different traverses for valley terrain

模型 3:

设计了坡度角为 26.6° 的三维山脊地形,见图 4. 网格大小为 $45 \times 23 \times 17\text{ m}$. 山脊主剖面跨度 12 m . 采用二极装置测量, $AM=2\text{ m}$, 记录点取 AM 中点. 分别计算纯山脊地形、水平地形加低阻体、山脊地形加低阻体的结果. 围岩电阻率为 $100\text{ }\Omega \cdot \text{m}$, 低阻异常 $1\text{ }\Omega \cdot \text{m}$, 大小为 $4 \times 4 \times 4\text{ m}$. 从图 5(a)可以看出, 二极装置视电阻率曲线形态与地形保持一致, 图 5(b)为水平地表时含低阻异常体的视电阻率曲线, 显得比较光滑. 图 5(c)为山脊地形和低阻异常体的混合异常. 山脊地形改变了低阻异常体的曲线特征. 在水平地形上规则变化的异常, 由于地形的影响, 在低阻异常背景上叠加了一个高阻信息.

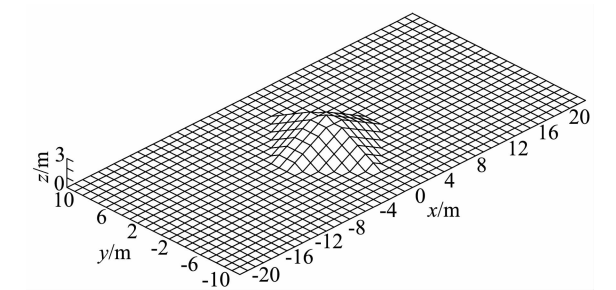


图 4 三维山脊地形示意图

Fig. 4 Schematic diagram for 3D ridges terrain

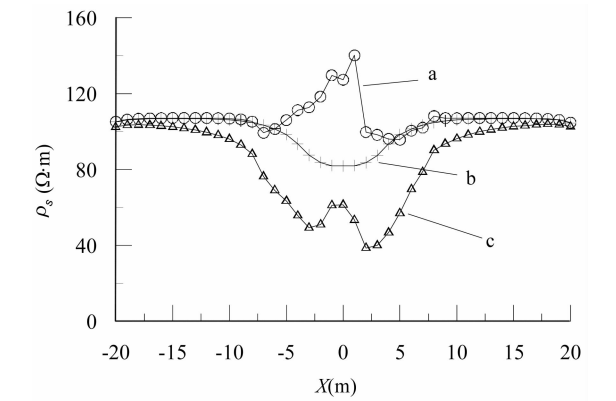


图 5 水平地形和山脊地形二极法测量结果

(a) 纯山脊地形异常; (b) 水平地形低阻体异常; (c) 山脊地形低阻体异常

Fig. 5 The measurements of pole-pole method for horizontal terrain and ridge terrain

(a) The abnormality of simplex ridge terrain;
(b) The abnormality of low resistivity object for horizontal terrain;
(c) The abnormality of low resistivity object for ridge terrain

模型 4:

计算偶极测深法在山谷地形上的纯异常. 山谷

地形如图 2 中所示. 偶极装置属电位梯度测量法, 通过改变偶极之间的距离来增加勘探深度, 一般成图时采用断面等值线, 其分辨率相对较强. 地下为均匀介质, 电阻率为 $100\text{ }\Omega \cdot \text{m}$, 记录点为 AN 或 BM 中点, 偶极法在山谷地形 ($Y=0$) 测线上断面图如图 6, 纵坐标取视深度 $-OO'/2$. 在山谷的正下方存在异常的极小值, 最小可达到 0.2 倍的背景值, 在山谷两侧的拐点处有异常的极大值, 最大可达到 1.6 倍的背景值. 可见, 地形对偶极测量的结果影响也很大.

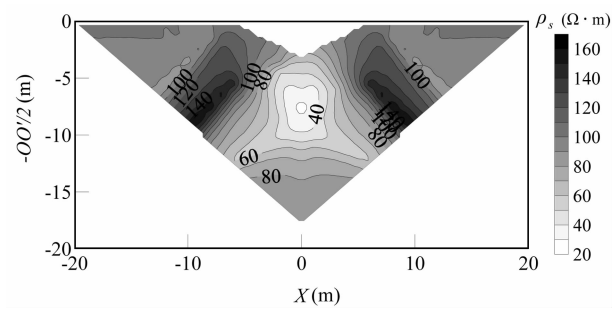


图 6 山谷地形偶极测深法视电阻率拟断面图

Fig. 6 The pseudosection map of dipole electrode array method for valley terrain

4 结 论

在稳定电流场的数值模拟中, 采用网格映射的办法来解决难以处理的起伏地表问题是有效可行的, 结合有限差分法对较缓地形的三维电阻率法进行数值模拟效果较为理想. 从计算的结果上看, 地形对电阻率法中不同装置影响各异, 中间梯度法的视电阻率曲线形态与地形呈镜像对称, 二极法、偶极法的视电阻率曲线形态与地形起伏保持一致, 在地形拐点处 (曲率变化较大) 的测量结果影响最大, 在资料解释的时候必须尤为注意.

参 考 文 献 (References):

[1] Fox R C, Hohmann G W, Killpack T J, et al. Topographic effects in resistivity and induced-polarization surveys [J]. Geophysics. 1980, 45(1):75~93.
[2] Truman H T, George R J. Three-dimensional terrain corrections in resistivity surveys[J]. Geophysics, 1984, 49(4):439~452.
[3] Yuguo L, Klaus Spitzer. Three-dimensional DC resistivity forward modeling using finite elements in comparison with finite-difference solutions [J]. Geophysical Journal International. 2002, 151(3):924~934.
[4] 黄兰珍, 田宪漠. 电阻率法地形改正及其在工程地质勘查中的

- 应用[J]. 物探化探计算技术, 1997, 19(3): 238~241.
- Huang L Z, Tian X M. Topographic correction for resistivity method and its application to engineering geological prospecting. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 1997, 19(3): 238~241.
- [5] 田宪漠, 黄兰珍. 点源场电阻率法三维地形改正的边界元法[J]. 成都地质学院学报, 1986, 13(3): 170~175.
- Tian X M, Huang L Z. The boundary element method of the 3-D topographic correction for the resistivity method in the point source field. Computing Techniques for Geophysical and Geochemical Exploration (in Chinese), 1986, 13(3): 170~175.
- [6] Xu S Z, Gao Z C, Zhao S K. An intergral formulation for three-dimensional terrain modeling for resistivity surveys[J]. Geophysics, 1988, 53(4): 546~552.
- [7] 吕玉增, 阮百尧. 复杂地形条件下四面体剖分电阻率三维有限元数值模拟[J]. 地球物理学进展, 2006, 21(4): 1302~1308.
- Lü Y Z, Ruan B Y. 3-D resistivity FEM numerical modeling based on tetrahedral element division under complicated terrain [J]. Progress in Geophysics, 2006, 21(4): 1302~1308.
- [8] 强建科, 罗延忠. 三维地形直流电阻率法有限元法模拟[J]. 地球物理学报, 2007, 50(5): 1606~1613.
- Qiang J K, Luo Y Z. The resistivity FEM numerical modeling on 3-D undulating topography[J]. Chinese Journal of geophysics, 2007, 50(5): 1606~1613.
- [9] Tessmer E, Kosloff D, Behle A. Elastic wave propagation simulation in the presence of surface topography [J]. Geophysics J Int, 1992, 108: 621~632.
- [10] Hestholm S, Ruud B. 3-D finite-difference elastic wave modeling including surface topography[J]. Geophysics, 1998, 63(2): 613~622.
- [11] Hestholm S. Elastic wave modeling with free surfaces: stability of long simulations [J]. Geophysics, 2003, 68(1): 314~321.
- [12] 王祥春, 刘学伟. 变换坐标系下相移法起伏地表地震波场延拓[J]. 地球物理学进展, 2005, 20(3): 677~680.
- Wang X C, Liu X W. Downward Continuing the Seismic record of topography using coordination transformed method[J]. Progress in Geophysics, 2005, 20(3): 677~680.
- [13] 孙建国. 复杂地表条件下地球物理场数值模拟方法评述[J]. 世界地质, 2007, 26(3): 345~362.
- Sun J G. Methods for numerical modeling of geophysical fields under complex topographical conditions: a critical review[J]. Global Geology, 2007, 26(3): 345~362.
- [14] 吴小平, 徐果明. 不完全 Cholesky 共轭梯度法及其在地电场计算中的应用[J]. 石油地球物理勘探, 1998, 33(1): 89~94.
- Wu X P, Xu G M. Incomplete Cholesky conjugate gradient method and its application in geoelectric field computation [J]. Oil Geophysical Prospecting, 1998, 33(1): 89~94.