第一篇　工程流体力学与流体机械

第一章　流体动力学基础

第一节　描述流体运动的两种方法

描述流体运动的方法有拉格朗日（Lagrange）法和欧拉（Euler）法。

一、拉格朗日法

拉格朗日法以研究个别流体质点的运动为基础，通过对每个流体质点运动规律的研究来获得整个流体的运动规律。这种方法又称为质点系法。

将 $t=t_0$ 时的某流体质点在空间的位置坐标（a，b，c）作为该质点的标记。在此后的瞬间 t，该质点（a，b，c）已运动到空间位置（x，y，z）。不同的质点在 t_0 时，具有不同的位置坐标，如（a'，b'，c'）、（a''，b''，c''）、…，这样就把不同的质点区别开来。同一质点在不同瞬间处于不同位置；各个质点在同一瞬间 t 也位于不同的空间位置，如图 1-1-1 所示。因而，任一瞬时 t 质点（a，b，c）的空间位置（x，y，z）可表示为：

$$\left.\begin{aligned} x&=x\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ y&=y\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ z&=z\ (a,\ b,\ c,\ t)\end{aligned}\right\} \tag{1-1-1}$$

式中：a，b，c 称为拉格朗日变数。若给定式中的 a，b，c 值，可以得到某一特定质点的轨迹方程。

将式（1-1-1）对时间 t 取偏导数，可得任一流体质点在任意瞬间的速度 $\boldsymbol{u}$ 在 x，y，z 轴向的投影：

$$\left.\begin{aligned} u_x&=\frac{\partial x}{\partial t}=u_x\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ u_y&=\frac{\partial y}{\partial t}=u_y\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ u_z&=\frac{\partial z}{\partial t}=u_z\ (a,\ b,\ c,\ t)\end{aligned}\right\} \tag{1-1-2}$$

同理，将式（1-1-2）对时间取偏导数可得流体质点的加速度 a 在各轴向的投影：

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=a_x\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ a_y&=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a_y\ (a,\ b,\ c,\ t)\\ a_z&=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=a_z\ (a,\ b,\ c,\ t)\end{aligned}\right\} \tag{1-1-3}$$

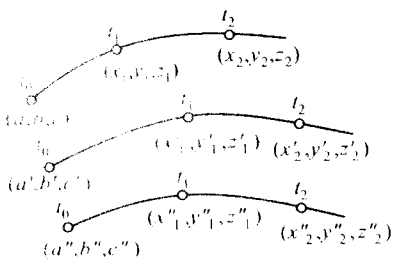


图 1-1-1 质点的运动轨迹

对于某一特定质点，给定 a，b，c 值，就可利用式（1-1-1）~式（1-1-3）确定不同时刻流体质点的坐标、速度和加速度。

拉格朗日法的基本特点是追踪单个质点的运动，概念上简明易懂，与研究固体质点运动的方法一致。但是，由于流体质点的运动轨迹（图 1-1-1）非常复杂，要寻求为数众多的不同质点的运动规律，实际上难以实现，因而除研究某些问题（如波浪运动等）外，一般不采用拉格朗日法。而且，绝大多数的工程问题并不要求追踪质点的来龙去脉，而是着眼于固定空间或固定断面的流动。例如，扭开水龙头，水从管中流出，我们并不需要追踪某个水质点自管中流出到哪里去，只要知道水从管中以怎样的速度流出即可，也就是要知道某固定断面（水龙头处）的流动状况。下面介绍普遍采用的欧拉法。

二、欧拉法

欧拉法是以考察不同流体质点通过固定的空间点的运动情况来了解整个流动空间内的流动情况，即着眼于研究各种运动要素的分布场。这种方法又称为流场法。

采用欧拉法，流场中任何一个运动要素可以表示为空间坐标和时间的函数。在直角坐标系中，流速是随空间坐标（x，y，z）和时间 t 而变化的。因而，流体质点的流速在各坐标轴上的投影可表示为：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \tag{1-1-4}$$

若令上式中 x，y，z 为常数，t 为变数，即可求得在某一空间点（x，y，z）上，流体质点在不同时刻通过该点的流速变化情况。若令 t 为常数，x，y，z 为变数，则可求得在同一时刻，通过不同空间点上的流体质点的流速分布情况（即流速场）。

在流场中，同一空间定点上不同流体质点通过该点时流速是不同的，即在同一空间点上流速随时间而变化。另一方面，在同一瞬间不同空间点上流速也是不同的。因此，欲求某一流体质点在空间定点上的加速度，应同时考虑以上两种变化。在一般情况下，任一流体质点在空间定点上的加速度在三个坐标轴上的投影为：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} \end{aligned}\right\} \tag{1-1-5}$$

因 u_x、u_y、u_z 是 x，y，z 的连续函数，经微分时段 $\mathrm{d}t$ 后流体质点将运动到新的位置，所以 x，y，z 又是 t 的函数。利用复合函数微分规则，并考虑 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u_x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_y$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=u_z$，则加速度表达式为：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_x}{\partial z} \\ a_y &= \frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_y}{\partial z} \\ a_z &= \frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x\frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y\frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned}\right\} \tag{1-1-6}$$

以上三式中等号右边第一项 $\frac{\partial u_x}{\partial t}$、$\frac{\partial u_y}{\partial t}$、$\frac{\partial u_z}{\partial t}$ 表示在每个固定点上流速对时间的变化率，称为时变加速

变加速度（当地加速度）。等号右边的第二项至第四项之和 $u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}$、$u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}$、$u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}$表示流速随坐标的变化率，称为位变加速度（迁移加速度）。因此，一个流体质点在空间点上的全加速度应为上述两加速度之和。

这两种加速度的具体含义可以通过下述例子加以说明。自水箱引出的变直径圆管中有 A、B 两点（图 1－1－2），在放水过程中，某水流质点位于 A 点，另一水流质点位于 B 点，经 $\mathrm{d}t$ 时间后，一个质点从 A 移到 A'；另一质点从 B 移动到 B'。如果水箱水面保持不变，管内流动不随时间变化，则 A 和 B 的当地加速度都是零。在管径不变处，A 和 A'的流速相同，迁移加速度也是零，这时就可以说 A 点没有加速度；而在管径改变处，B'的流速大于 B，B 点的迁移加速度不等于零。如果水箱水面随着放水过程不断下降，则管内流速也随着时间改变，各处的流速都会逐渐减小。这时，即使在管径不变的 A 处，其迁移加速度为零，但也还有负的加速度存在，这个加速度就是当地加速度；而在管径改变的 B 处，除了有当地加速度以外，还有迁移加速度，B 点的加速度是这两部分的和。

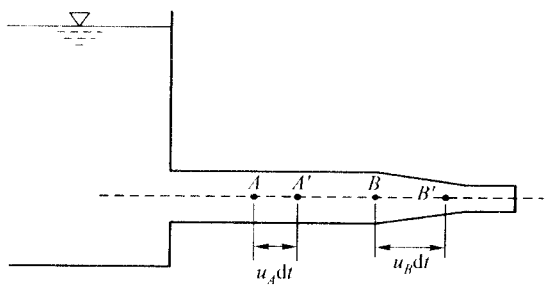


图 1－1－2　当地加速度与迁移加速度的说明

第二节　描述流体运动的几个基本概念

一、恒定流与非恒定流

（一）恒定流

如果在流场中任何空间点上所有的运动要素都不随时间改变，这种流动称为恒定流。也就是说，在恒定流的情况下，任一空间点上无论哪个流体质点通过，其运动要素都是不变的，运动要素仅仅是空间坐标的连续函数，而与时间无关。例如，对流速而言：

$$\left.\begin{aligned}u_x&=u_x(x,\ y,\ z)\\u_y&=u_y(x,\ y,\ z)\\u_z&=u_z(x,\ y,\ z)\end{aligned}\right\}\qquad(1-1-7)$$

因此，流速对时间的偏导数应等于零，即：

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=0\qquad(1-1-8)$$

所以，对恒定流来说，在式（1－1－6）加速度公式中时变加速度（当地加速度）等于零。

恒定流时，流线的形状和位置不随时间而变化，这是因为整个流场内各点流速向量均不随时间而改变。恒定流时，因为流线不随时间改变，流体质点总是沿着某条流线运动，所以说恒定流中质点的迹线与流线重合。

如图 1－1－2 所示，水箱水面保持不变，水质点作恒定流动。恒定流是指在流场中任何空间点上所有的运动要素都不随时间改变，并不是说流体质点的所有的运动要素不变，图 1－1－2 中从 B 到 B'点管道断面面积逐渐变小，虽然管中流速是变化的（$u_B<u_{B'}$），但该系统水流是恒定流。

（二）非恒定流

如果流场中任何空间点上有任何一个运动要素是随时间而变化的，这种流动称为非恒定流。例如，对

流速表达式为

$$\left.\begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned}\right\} \tag{1-1-9}$$

这里，流速不仅仅是空间坐标的函数，亦是时间的函数。

实际上，绝大多数流动为非恒定流。但是，对于某些工程上所关心的流动，可以视为恒定流动。研究每一个流动时，首先要分清流动属于恒定流还是非恒定流。在恒定流问题中，不包括时间变量，流动的分析比较简单；而非恒定流问题中，由于增加了时间变量，流动的分析比较复杂。

二、均匀流与非均匀流

（一）均匀流

如果流动过程中运动要素不随坐标位置（流程）而变化，这种流动称为均匀流。基于上述定义，均匀流具有以下特性：

（1）均匀流的流线彼此是平行的直线，其过流断面为平面，且过流断面的形状和尺寸沿程不变。

（2）均匀流中，同一流线上不同点的流速应相等，从而各过流断面上的流速分布相同，断面平均流速相等，即流速沿程不变。在式（1-1-6）加速度公式中迁移加速度等于零。

（3）均匀流过流断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同，即在同一过流断面上各点测压管水头为一常数（即位能与压能之和为常数），即：

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \tag{1-1-10}$$

上式表明，均匀流过流断面上的动水压强分布规律与静水压强分布规律相同。因此过流断面上任一点动水压强或断面上动水总压力都可以按静水压强及静水总压力的公式来计算。

（二）非均匀流

如果流动过程中运动要素随坐标位置（流程）而变化，这种流动称为非均匀流。如管径沿程缓慢均匀扩散或收缩的渐变管中水流，流线虽为直线但不互相平行，式（1-1-6）加速度公式中迁移加速度不等于零，属于非均匀流。如管径不变的弯管且曲率半径较小的水流，虽然互相平行但不是直线，也是非均匀流。

按照流线不平行和弯曲的程度，可将非均匀流分为两类：

1. 渐变流

流线为近似平行直线时的流动称为渐变流（或缓变流）。所以渐变流的极限情况就是均匀流。如果一个实际水流，其流线之间夹角很小，或者流线曲率半径很大，则可将其视为渐变流。由于渐变流的流线近似于平行直线，在过流断面上动水压强的分布规律，可近似地看作与静水压强分布规律相同。如果实际水流的流线不平行程度和弯曲程度太大，在过流断面上，沿垂直于流线方向就存在着离心惯性力，这时，再把过流断面上的动水压强按静水压强分布规律看待所引起的偏差就会很大。

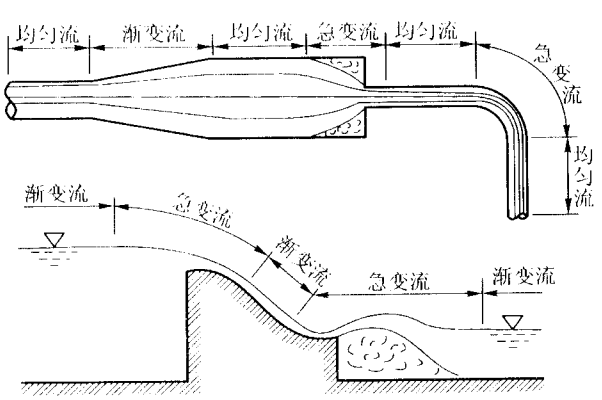


图 1-1-3 均匀流和非均匀流图示

流动是否可视为渐变流与流动的边界有密切的关系，当边界为近似于平行的直线时，流动往往是渐变流。管道转弯、断面扩大或收缩，以及明渠中由于建筑物的存在使水面发生急剧变化的水流都是急变流的例子（图 1-1-3）。

2. 急变流

若流线之间夹角很大或流线的曲率半径很小，这种流动称为急变流。

急变流的过流断面上动水压强分布与均匀流不同。如图 1-1-4（a）所示，这是一流线上凸的急变流。为简单起见，设流线为一簇互相平行的同心圆弧曲线。很显然，急变流与渐变流相比，急变流多了一个离心惯性力。离心惯性力的方向与重力沿 $n-n$ 轴方向的分力相反，因此使过流断面上动水压强比静水压强要小。图中虚线部分表示静水压强分布图，实线部分为实际的动水压强分布情况。假如急变流为一下凹的曲线流动［图 1-1-4（b）］，由于流体质点所受的离心惯性力方向与重力作用方向相同，因此过流断面上动水压强比按静水压强计算所得的数值要大，图中虚线部分仍代表静水压强分布图，实线为实际动水压强分布图。

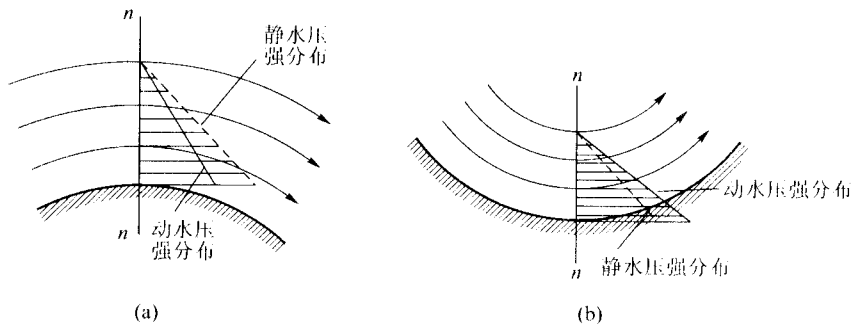


图 1-1-4　急变流过流断面上动水压强分布

【例 1-1-1】 已知流速场：$u_x=xy^2$，$u_y=-\frac{1}{3}y^3$，$u_z=xy$。试判断该液流是：（　　）

A　恒定流均匀流　　B　恒定非均匀流　　C　非恒定均匀流　　D　非恒定非均匀流

解：（1）因为运动要素（流速）与时间无关，故流体质点当地加速度（时变加速度）为零，即 $\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial z}=0$，所以，为恒定流，即限定为前两个选项。

（2）对于 x 向：$a_x=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}=xy^2\cdot y^2-\frac{1}{3}y^3\times 2xy$

除坐标原点外，流体质点的迁移加速度（位变加速度）不为零，所以为非均匀流。仅 x 方向迁移加速度不为零即可判断为非均匀流，对 y，z 向不必讨论，故选 B。

【例 1-1-2】 某流场，$u_x=2xy$，$u_y=a^2+x^2-y^2$，a 为常数。试判断该液流是：（　　）

A　非恒定均匀流　　B　非恒定非均匀流　　C　恒定均匀流　　D　恒定非均匀流

解：（1）因为流速与时间无关，故流体质点当地加速度为零，所以为恒定流，四个选项限定为后两个选项。

（2）对于 x 向：$a_x=u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}=2xy\frac{\partial(2xy)}{\partial x}+(a^2+x^2-y^2)\frac{\partial(2xy)}{\partial y}$

$$=4xy^2+2a^2x+2x^3-2xy^2=2xy^2+2a^2x$$

除原点（0，0）外，$a_x\neq 0$，即为非均匀流，故选 D。

三、有压流与无压流

过流断面的全部周界与固体边壁接触、无自由表面的流动，其流体内部的压强一般不等于大气压强，称为有压流或有压管流。如自来水管中的水流属于有压流。

具有自由表面的流动称为无压流或明渠流。如河渠中的水流属于无压流；流体未充满整个管道断面的

流体也属于无压流，如排水管道的水流。在无压流中，自由表面的压强为大气压强，其相对压强为零。

第三节 流体运动的连续性方程

一、流体运动的连续性微分方程

设想在流场中取一空间微分平行六面体（图 1-1-5），六面体的边长为 dx、dy、dz，其形心为 $A(x, y, z)$，点的流速在各坐标轴的投影为 u_x，u_y，u_z，A 点的密度为 ρ。

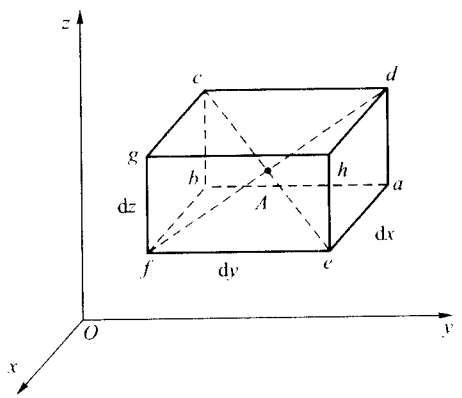


图 1-1-5 微分平行六面体

下面研究六面体流体质量的变化。根据质量守恒定律，经一微小时段 dt，从三个侧面流入的流体质量与对应的三个侧面流出的流体质量差等于经过 dt 时段后六面体内质量总的变化量，即：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t = -\left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$$

等式两边同除以 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t$，得：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left[\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z}\right] = 0 \quad (1-1-11)$$

上式就是可压缩流体非恒定流的连续性微分方程。它表达了任何可实现的流体运动所必须满足的连续性条件。其物理意义是，流体在单位时间流经单位体积空间时，流出与流入的质量差与其内部质量变化的代数和为零。对不可压缩均质流体 ρ = 常数，上式简化为：

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1-1-12)$$

式（1-1-12）为不可压缩均质流体的连续性微分方程。它说明，对于不可压缩的流体，单位时间流经单位体积空间，流出和流入的流体体积之差等于零，即体积守恒。以矢量表示为：

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{u} = 0 \quad (1-1-13)$$

即速度 $\boldsymbol{u}$ 的散度为零。

连续性微分方程中没有涉及任何力，描述的是流体运动规律。它对理想流体与实际流体、恒定流与非恒定流、均匀流与非均匀流、渐变流与急变流、有压流与无压流等都适用。

二、总流的连续性方程

不可压缩均质流体的总流连续性方程，可由式（1-1-13）导出。

$$\iiint_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \iiint_V \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \quad (1-1-14)$$

根据高斯定理，上式的体积积分可用曲面积分来表示，即：

$$\iiint_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\mathrm{d}V = \iint_S u_n \mathrm{d}S \quad (1-1-15)$$

式中：S——体积 V 的封闭表面；

u_n——封闭表面上各点处流速在其外法线方向的投影；

曲面积分 $\iint_S u_n \mathrm{d}S$——通过封闭表面的速度通量。

由式（1-1-14）及式（1-1-15）可得：

$$\iint_S u_n \mathrm{d}S = 0 \tag{1-1-16}$$

恒定流时，流管的全部表面积 S 包括两端断面和四周侧表面。在流管的侧表面上 $u_n = 0$，于是式（1-1-16）的曲面积分简化为：

$$-\iint_{A_1} u_1 \mathrm{d}A_1 + \iint_{A_2} u_2 \mathrm{d}A_2 = 0$$

式中：A_1——流管的流入断面面积；

A_2——流管的流出断面面积。

上式第一项所以取负号是因为流速 u_1 的方向与 $\mathrm{d}A_1$ 的外法线的方向相反。由此可得：

$$v_1 A_1 = v_2 A_2 = Q \tag{1-1-17}$$

式（1-1-17）就是不可压缩流体恒定总流的连续性方程。式中的 v_1 及 v_2 分别是总流过流断面 A_1 及 A_2 的断面平均流速。该式说明，对于不可压缩流体总流，任意两个过流断面所通过的流量相等。

恒定总流连续性方程是工程流体力学中三大基本方程之一，是用以解决流体力学问题的重要公式。

【例 1-1-3】 设有两种不可压缩的二元流动，其流速为（1）$u_x = 2x$，$u_y = -2y$；（2）$u_x = 0$，$u_y = 3xy$。试判断流动是：（　　）

A　符合连续条件　　B　不符合连续条件

C　可能符合也可能不符合连续条件　　D　无法判断

解：由连续性微分方程，

（1）$\dfrac{\partial(2x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(-2y)}{\partial y} = 2 - 2 = 0$，符合连续条件，选 A。

（2）$\dfrac{\partial(0)}{\partial x} + \dfrac{\partial(3xy)}{\partial y} = 0 + 3x \neq 0$，不符合连续条件，说明该流动不存在，选 B。

第四节　理想流体运动微分方程及其积分

一、理想流体运动微分方程

设想在理想流体的流场中取以任意点 A（x，y，z）为中心的微分平行六面体，如图 1-1-6 所示。六面体的各边分别与直角坐标轴平行，边长分别为 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$。设 A 点的动水压强为 p，速度投影为 u_x，u_y，u_z。下面分析作用于微分六面体上的力。

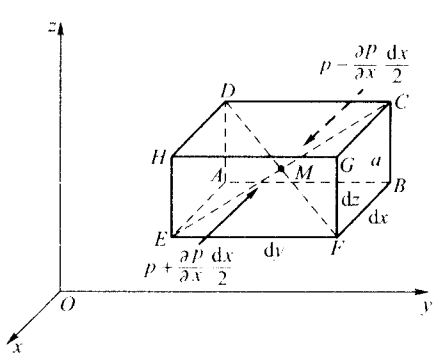


图 1-1-6　理想流体的微分平行六面体

1. 表面力

表面力只有动水压力。沿 x 轴方向作用于六面体上的动水压力分别为 $\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 和 $\left(p - \dfrac{\partial p}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

同理，沿 y、z 轴方向作用于边界面上的动水压力分别为 $\left(p - \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$、$\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 和 $\left(p - \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$、$\left(p + \dfrac{\partial p}{\partial z}\dfrac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

2. 质量力

作用于微分六面体上的质量力在 x，y，z 轴上的投影分别为 $X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$Y\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$Z\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。其中 X，Y，Z 分别为沿 x，y，z 轴上的单位质量力。

3. 根据牛顿第二定律列平衡方程

作用于微分六面体上的力在 x 轴上的投影的代数和应等于微分六面体的质量与加速度在 x 方向投影的乘积，即：

$$X\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(p-\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$$

化简后得 $X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}$。同理，可得沿 y、z 方向的关系式，并写在一起，即：

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\\Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\\Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\end{aligned}\right\}\tag{1-1-18}$$

上式就是理想流体运动微分方程，又称欧拉运动微分方程。它表述了流体质点运动和作用在它本身上的力的关系，适用于可压缩和不可压缩流体的恒定流和非恒定流、有势流和有涡流。

因加速度为时变加速度与位变加速度之和，故欧拉运动微分方程（1-1-18）可写为：

$$\left.\begin{aligned}X-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}&=\frac{\partial u_x}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_x}{\partial z}\\Y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}&=\frac{\partial u_y}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_y}{\partial z}\\Z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}&=\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_x\frac{\partial u_z}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_z}{\partial y}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{1-1-19}$$

二、理想流体运动微分方程的伯努利积分

对于不可压缩均质流体，密度 ρ 为常数，单位质量力通常可知。所以，理想流体运动微分方程中只有 u_x、u_y、u_z 与 p 未知。与不可压缩流体连续性微分方程联立有四个方程式。从理论上讲，理想流体运动微分方程可解。但是，该方程是一个一阶非线性方程组（迁移加速度包含了未知函数与其偏导数的乘积），由于数学上的困难，最常用的方法是伯努利（D. Bernoulli）积分。

（1）恒定流时，$\frac{\partial u_x}{\partial t}=\frac{\partial u_y}{\partial t}=\frac{\partial u_z}{\partial t}=\frac{\partial p}{\partial t}=0$，因而压强的全微分为：

$$\mathrm{d}p=\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z$$

（2）对于不可压缩均质流体，密度 ρ 为常数。

（3）质量力有势。设质量势为 $U(x, y, z)$，则恒定的有势质量力：

$$X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z=\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial U}{\partial z}\mathrm{d}z=\mathrm{d}U$$

（4）沿流线积分（恒定流时流线与迹线重合），则有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=u_x,\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u_y,\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=u_z$$

对式（1-1-18）分别乘以 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 再相加得：

$$(X\mathrm{d}x+Y\mathrm{d}y+Z\mathrm{d}z)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial p}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial p}{\partial z}\mathrm{d}z\right)=\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z\tag{1-1-20}$$

式（1-1-20）中：

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}x+\frac{\mathrm{d}u_y}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}y+\frac{\mathrm{d}u_z}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}z=u_x\mathrm{d}x+u_y\mathrm{d}y+u_z\mathrm{d}z=\frac{\mathrm{d}}{2}(u_x^2+u_y^2+u_z^2)=\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)$$

利用上面四个条件，式（1－1－20）可改写为：

$$\mathrm{d}U-\frac{1}{\rho}\mathrm{d}p-\mathrm{d}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0 \tag{1-1-21}$$

积分得：

$$U-\frac{p}{\rho}-\frac{u^2}{2}=C \tag{1-1-22}$$

式（1－1－2）即伯努利积分。它表明，对于不可压缩均质理想流体，在有势质量力作用下的恒定流，同一流线上的机械能保持不变，对于不同流线上的伯努利积分常数一般是不同的。

三、重力作用下理想流体元流伯努利方程

当质量力只有重力时，$X=0$，$Y=0$，$Z=-g$，当 z 轴铅垂向上时，$\mathrm{d}U=-g\mathrm{d}z$，代入式（1－1－22）积分得：

$$gz+\frac{p}{\rho}+\frac{u^2}{2}=常数 \tag{1-1-23}$$

或：

$$z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g}=常数 \tag{1-1-24}$$

对于同一条流线上的任意两点 1 和 2，上式可写为：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g} \tag{1-1-25}$$

这就是理想流体伯努利方程（又称能量方程），它是工程流体力学中普遍应用的方程。

四、伯努利方程式的意义

式（1－1－24）中 z 是某点距选定基准面的高度，称位置水头，表示单位重量流体的位置势能，简称位能。

$\frac{p}{\rho g}$ 是某点压强的作用使流体沿测压管所能上升的高度，称为压强水头，表示压力做功所能提供的单位能量，简称压能。

$\frac{u^2}{2g}$ 是以点流速 u 为初速度的铅直上升射流所能达到的理论高度，称为流速水头（速度头），表示单位重量的动能，简称动能。

前两项相加，以 H_p 表示，即：

$$H_p=z+\frac{p}{\rho g} \tag{1-1-26}$$

H_p 表示某点测压管水面相对于基准面的高度，称为测压管水头，表示单位重量流体所具有的总势能。

将三项相加，以 H 表示，即：

$$H=z+\frac{p}{\rho g}+\frac{u^2}{2g} \tag{1-1-27}$$

H 称为总水头，表示单位重量流体的总能量或总机械能。

理想流体伯努利方程式（1－1－24）、（1－1－25）表明，单位重量流体所具有的位能、压能和动能之和沿同一流线保持不变；或者说，总水头沿流程保持不变，即理想流体在流动时无能量损失。但是，位能、压能、动能之间可以相互转化。

第五节 实际流体恒定流能量方程

一、实际流体恒定元流能量方程

因为实际流体具有黏滞性，在流动过程中内摩阻力做功，一部分机械能将转化为热能等形式耗散掉，流体总机械能沿流程减小，单位重量流体从1－1过流断面至2－2过流断面的能量损失记作h'_w（称为元流的水头损失）。根据能量守恒原理，把h'_w加到理想流体伯努利方程式（1－1－25）的左边，得：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{u_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{u_2^2}{2g}+h'_w \qquad (1-1-28)$$

式（1－1－28）即是实际流体元流的能量方程。

实际流体元流的能量方程与理想流体能量方程式的物理意义基本相同。它表明，单位重量流体在1－1过流断面具有一定的机械能等于2－2过流断面单位重量流体具有的机械能与损失的能量之和。

二、实际流体恒定总流能量方程

在工程上，所考虑的流动一般都是总流。要把元流的能量方程用于解决实际问题，还必须对元流的能量沿总流过流断面积分，从而推广为总流的能量方程式。

设元流流量为dQ，则单位时间通过元流过流断面的流体重量为$\rho g dQ$，将式（1－1－28）各项乘以$\rho g dQ$，并分别在总流的两个过流断面A_1及A_2上积分，即：

$$\int_Q\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}\right)\rho g dQ+\int_Q\frac{u_1^2}{2g}\rho g dQ=\int_Q\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}\right)\rho g dQ+\int_Q\frac{u_2^2}{2g}\rho g dQ+\int_Q h'_w\rho g dQ \qquad (1-1-29)$$

在上式中共含有三种类型积分，现分别讨论。

1. $\int_Q\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g dQ$

若所取的过流断面为渐变流，则断面上$\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)$=常数，因而积分是可能的，即：

$$\int_Q\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g dQ=\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g\int_Q dQ=\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)\rho g Q \qquad (1-1-30)$$

2. $\int_Q\frac{u^2}{2g}\rho g dQ$

因$dQ=udA$，故$\int_Q\frac{u^2}{2g}\rho g dQ=\int_A\rho g\frac{u^3}{2g}dA=\frac{\rho g}{2g}\int_A u^3 dA$。它是每秒钟通过过流断面面积为$A$的流体动能的总和。若采用断面平均流速$v$来代替$u$，由于$u$的立方和大于$v$的立方和，即$\int_A u^3 dA>\int_A v^3 dA$，故不能直接把动能积分符号内$u$换成$v$，而需要乘以一个修正系数$\alpha$才能使之相等，因此：

$$\int_Q\frac{u^2}{2g}\rho g dQ=\frac{\rho g}{2g}\int_A u^3 dA=\frac{\rho g}{2g}\alpha v^3 A=\rho g Q\frac{\alpha v^2}{2g} \qquad (1-1-31)$$

式中，α称为动能修正系数，其大小取决于过流断面上的流速分布，流速分布愈均匀，α愈接近于1；不均匀分布时，$\alpha>1$；在渐变流时，一般$\alpha=1.05\sim1.1$。通常取$\alpha\approx1$。

3. $\int_Q h'_w\rho g dQ$

假定各个元流单位重量流体所损失的能量h'_w都用某一个平均值h_w来代替，则有：

$$\int_Q h'_w \rho g \mathrm{d}Q = \rho g h_w \int_Q \mathrm{d}Q = \rho g Q h_w \tag{1-1-32}$$

把上述三类积分结果代入式（1-1-29），各项同除以 ρgQ，则：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w \tag{1-1-33}$$

式（1-1-33）即为不可压缩实际流体恒定总流的能量方程。式中，z_1、z_2 为 1、2 过流断面上选定点相对于选定基准面的高程；p_1、p_2 为相应断面选定点的压强，同时用相对压强或绝对压强；v_1、v_2 为相应断面的平均流速；α_1、α_2 为相应断面的动能修正系数；h_w 为 1、2 两断面间的单位重量流体的能量损失（或称水头损失）。

式（1-1-33）中各项（除 h_w 外）的意义类似于元流伯努利方程式中的对应项，所不同的是方程中各项均指过流断面的平均值。恒定总流能量方程表明，总流各过流断面上单位流体所具有的总机械能平均值沿流程减小；各项能量之间可以相互转化。

三、恒定总流能量方程的应用条件及注意的问题

（一）应用条件

总流伯努利方程是在一定条件下导出的，因此在应用时应注意其应用条件：

（1）流体运动是恒定流。

（2）流体是不可压缩均质流体。

（3）所选取的两个过流断面应符合渐变流或均匀流条件，即符合断面上各点测压管水头等于常数的条件。所取两断面之间的流体可以不是渐变流。

（4）方程的推导中假定流量沿程不变，即在两个断面间没有流量流入或分出。由于总流能量方程中每一项都是单位重量流体所具有的能量，因此，对于两断面间有流量汇入或分出的情况，可以分别对每支流动建立能量方程。

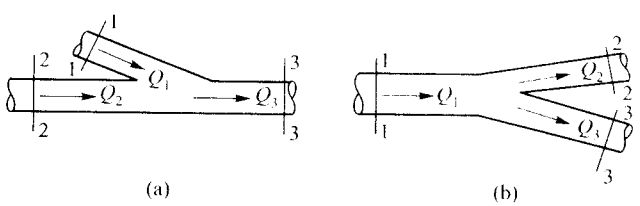


图 1-1-7　两断面间有流量汇入或分出的流动

对有流量汇入的情况［图 1-1-7（a）］：

1-1 断面和 3-3 断面间：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3}$$

2-2 断面和 3-3 断面间：

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w2-3}$$

对于有流量分出的情况［图 1-1-7（b）］：

1-1 断面和 2-2 断面间：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

1-1 断面和 3-3 断面间：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_3 + \frac{p_3}{\rho g} + \frac{\alpha_3 v_3^2}{2g} + h_{w1-3}$$

可见，两断面间虽有分出或汇入流量，但写能量方程时，只考虑断面间各支流的能量损失，而不考虑分出流量的能量损失。

（二）应用时注意的问题

（1）选好过流断面：所取断面须符合渐变流或均匀流条件。

（2）基准面的选择：基准面可以任意选择，但在同一个能量方程中只能采用同一个基准面。基准面的选择要便于问题的求解，如以通过管道出口断面中心的平面作为基准面，则出口断面的 $z=0$。

（3）选择计算点（代表点）：因渐变流同一过流断面上任何点的测压管水头 $\left(z+\frac{p}{\rho g}\right)$ 都相等，所以测压管水头可以选取过流断面上任意点来计算。以方便为原则。

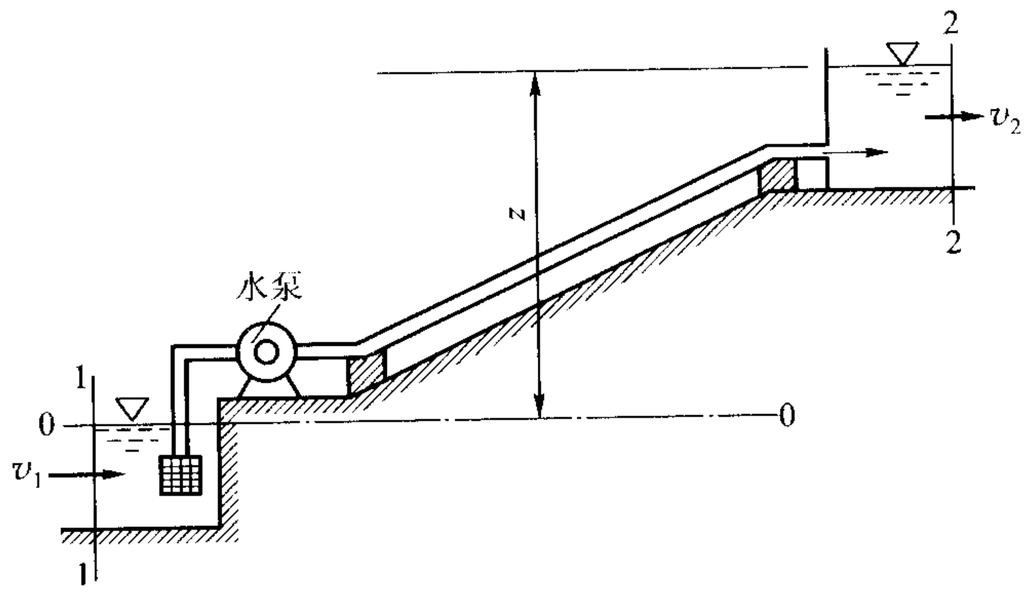
（4）能量方程中压强可以用相对压强，也可以用绝对压强，但对同一问题必须采用相同的标准。计算中通常采用相对压强。

（5）动能修正系数 α：不同过流断面上的动能修正系数 α_1 与 α_2 严格来讲是不相等的。在工程上，一般为充分湍流，流速分布相对均匀，故一般取 $\alpha_1=\alpha_2=1$。

（6）推导伯努利能量方程时没有考虑两断面间能量输入或输出情况。如果两断面间有能量输入或输出，则可以将输入或输出的单位能量 H_i 直接加到能量方程式中，即：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\pm H_i=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2} \tag{1-1-34}$$

【例 1-1-4】 例题 1-1-4 图示为一个输水管路系统，通过水泵把水提升到高位水箱。上下游水面高差为 z，流量为 Q，管径为 d，总的水头损失为 h_{w1-2}。试建立水泵扬程及水泵的轴功率的表达式。



例题 1-1-4 图

解：单位重量的水体通过水泵后增加的能量，称为水泵扬程，记为 H_i，取下游水面为基准面，列断面 1-1 和 2-2 间的能量方程，

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}+H_i=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_{w1-2}$$

因为 $z_1=0$，p_1 为大气压强，以相对压强计算，$z_1+\frac{p_1}{\rho g}=0$；$z_2=z$，p_2 也为大气压强，所以 $z_2+\frac{p_2}{\rho g}=z$。

相对于管路中的流速来说，v_1 和 v_2 均很小，下游及水箱内流速水头可以忽略，则上式可写为：

$$H_i=z+h_{w1-2}$$

上式即水泵扬程的表达式，z 称为水泵的提水几何高度，h_{w1-2} 是整个管路中的水头损失。

水泵的抽水量为 Q，则单位时间内通过水泵的水体重量为 ρgQ，所以单位时间内水体从泵中获得总能量为 ρgQH_i，即单位时间内水泵对水体所做的功。因为电动机与水泵都存在机械效率问题，令 η_p 为水泵效率，则水泵的轴功率 N_p 为：

$$N_p=\frac{\rho gQH_i}{\eta_p}$$

式中：ρ 的单位是 kg/m^3；g 的单位是 m/s^2；Q 的单位是 m^3/s；H_i 的单位是 m；N_p 的单位是 $N\cdot m/s$，称为瓦（W）。

第六节　总水头线·测压管水头线·总压线·全压线

由于能量方程各项均是单位重量流体具有的各种机械能，都具有长度的量纲。因此，可以用几何线段表示各物理量的大小，从而形象地反映总流沿程各断面上能量的变化规律。

一、总水头线与测压管水头线

总水头：

$$H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{1-1-35}$$

测压管水头：

$$H_p = z + \frac{p}{\rho g} \tag{1-1-36}$$

把各断面的总水头 H 和测压管水头 H_p 的数值，以它们距基准面的铅直距离，按一定比例在图中标出，各断面的总水头的端点沿流程的连线即为总水头线；各断面的测压管水头的端点沿流程的连线即为测压管水头线（图 1-1-8）。

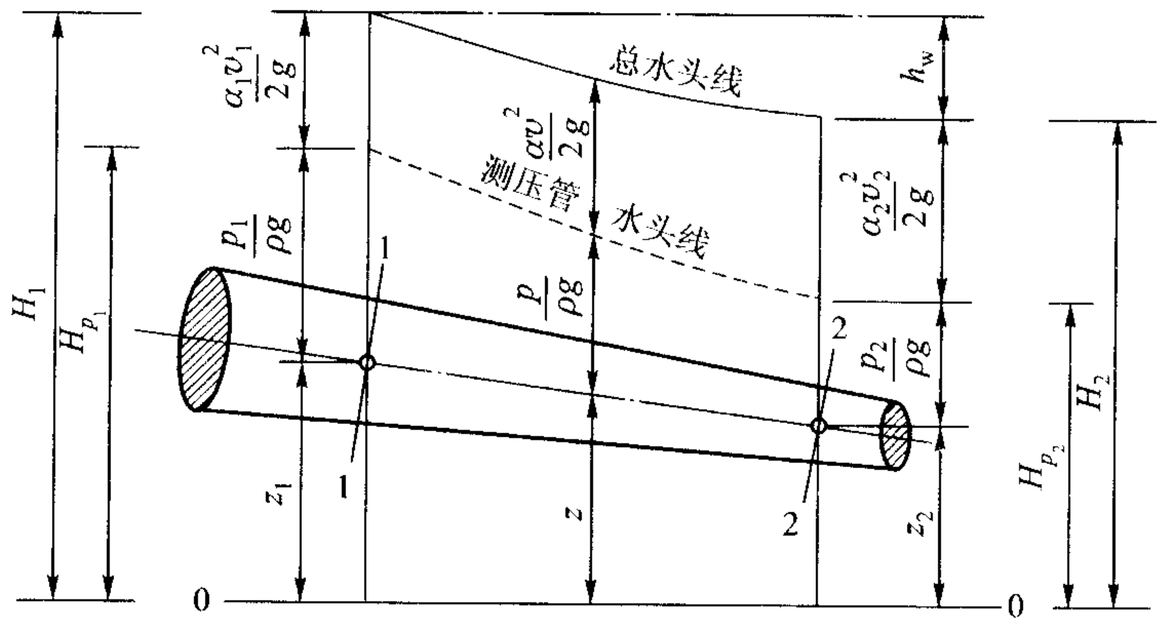


图 1-1-8　总水头线和测压管水头线

总水头线沿流程的降低值与流程长度 l 之比，称为总水头线坡度，也称水力坡度，常以 J 表示。若总水头线为直线时：

$$J = \frac{H_1 - H_2}{l} = \frac{h_w}{l} \tag{1-1-37}$$

当总水头线为曲线时，其坡度为变值，在某一断面处坡度可表示为：

$$J = -\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}h_w}{\mathrm{d}l} \tag{1-1-38}$$

由能量方程的物理意义不难得出，总水头线与测压管水头线有以下规律：

（1）由于实际流体具有黏滞性，运动状态下，产生流动阻力，造成能量损失，所以，总水头线沿程总是下降的。

（2）由于各断面的单位重量流体总水头（总的机械能）为测压管水头与流速水头之合，所以，总水头线总是在测压管水头线的上方。

（3）由于过流断面的变化，动能与压能会互相转化，测压管水头线沿程可升可降。断面扩大时，管中流速变小，动能转化为压能，测压管水头线可能上升。

（4）等直径（等断面）管道，总水头线与测压管水头线平行。

二、总压线与全压线

总流能量方程式（1-1-33），是在不可压缩流体流动模型基础上建立的，对于气体流动，在流速不太高（$v<68$ m/s）压强变化不大的情况下，同样可应用于气体。

对式（1-1-33）乘以气体容重 $\gamma=\rho g$，取 $\alpha_1=\alpha_2=1.0$，并转化为压强因次可得：

$$p_1+\gamma z_1+\frac{\rho v_1^2}{2}=p_2+\gamma z_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \tag{1-1-39}$$

式（1-1-39）中 $p_{l1-2}=h_{l1-2}$，为两断面间的压强损失。

若高差较大，气体容重 γ 和空气容重 γ_a 不等的情况下，必须考虑大气压因高度不同的差异。式（1-1-39）可改写为：

$$p_1+\frac{\rho v_1^2}{2}+(\gamma_a-\gamma)(z_2-z_1)=p_2+\frac{\rho v_2^2}{2}+p_{l1-2} \tag{1-1-40}$$

p_1，p_2 为断面1、2的相对压强，专业上习惯称为**静压**，$\frac{\rho v_1^2}{2}$，$\frac{\rho v_2^2}{2}$称为**动压**，$(\gamma_a-\gamma)(z_2-z_1)$ 为容重差与高程的乘积，称为**位压**，与水流位置水头相对应。静压与位压之和称为**势压**。静压与动压之和称为**全压**。

对于气体，要区分两种情况，绘出各种压强线。

（1）不考虑容重差与高程差：须绘制全压线与静压线，全压线与液体流动的总水头线相对应，静压线与液体流动的测压管水头线水相对应。

（2）考虑容重差与高程差：须绘制全压线、势压线和位压线，势压线与液体流动的测压管水头线水相对应，位压线与液体管流轴线相对应。

第七节 恒定总流伯努利方程的应用

伯努利能量方程是工程流体力学中的一个非常重要的方程，它与恒定总流的连续性方程联合运用，可以解决很多实际流动问题，下面通过举例说明。

文丘里（Venturi）流量计是测量管道中流量的一种装置。它是由两段锥形管和一段较细的管相连接而组成，如图1-1-9（a）所示，前面部分为收缩段，中间为喉管，后面部分为扩散段。若欲测量某管中通过的流量，则把文丘里流量计连接在管段当中，在管道和喉管上分别设置测压管（也可直接设置差压计），用以测得该两断面（图中的断面1-1和断面2-2符合渐变流条件）上测压管高度差 Δh。当已知测压管水位差 Δh 时，运用能量方程即可计算出通过管中的流量，下面分析其原理。

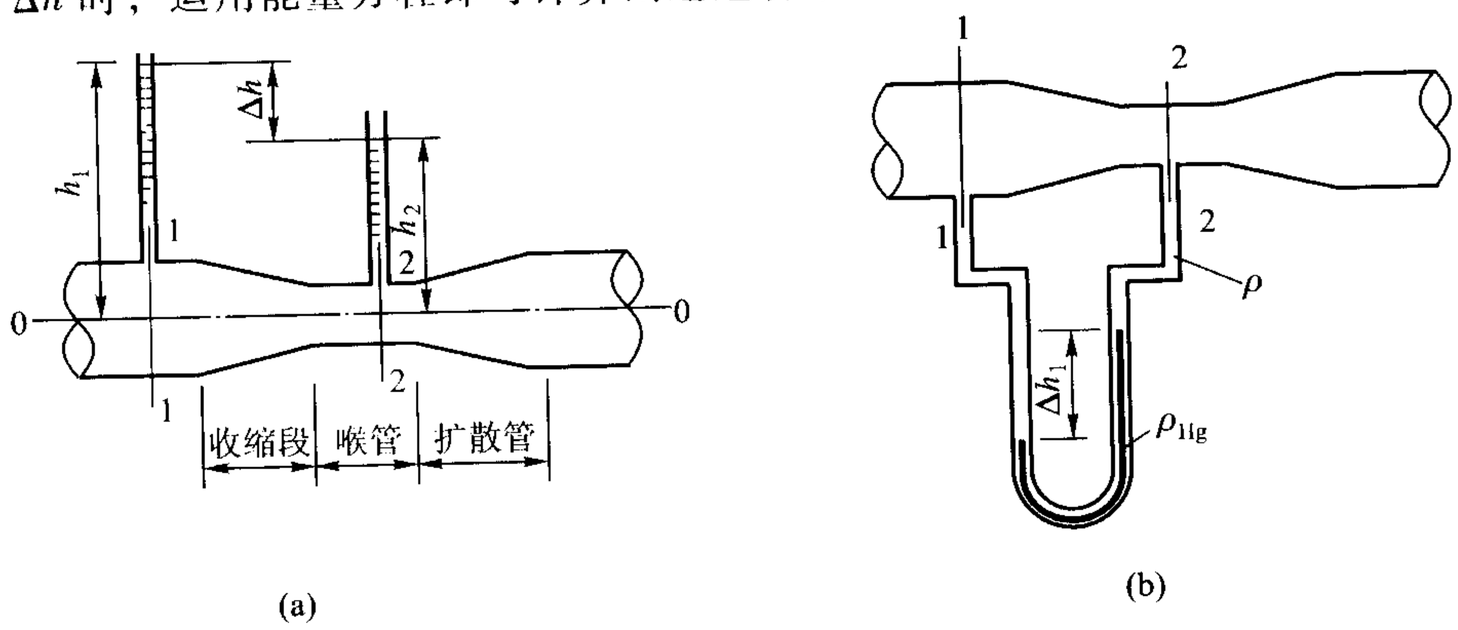


图1-1-9 文丘里流量计

假定管段水平放置，今对安装测压管的断面 1－1 和断面 2－2 写总流的能量方程式：

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

若以管轴线为基准面，则 $z_1=z_2=0$，$\frac{p_1}{\rho g}=h_1$，$\frac{p_2}{\rho g}=h_2$；设 $\alpha_1=\alpha_2=1$；因断面 1－1 和断面 2－2 相距很近，暂时不计水头损失，即 $h_w=0$；此时能量方程变为：

$$\frac{p_1}{\rho g}-\frac{p_2}{\rho g}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}\quad 或\quad h_1-h_2=\Delta h=\frac{v_2^2-v_1^2}{2g}$$

由连续性方程可得：

$$\frac{v_1}{v_2}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{d_2^2}{d_1^2}\quad 或\quad v_2=v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$$

上式中 d_1、d_2分别为断面 1－1 及断面 2－2 处管道的直径。把 v_2与 v_1的关系代入前式，可得：

$$\Delta h=\frac{v_1^2}{2g}\left[\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1\right]\quad 或\quad v_1=\sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$$

因此，通过文丘里流量计的流量为：

$$Q=A_1v_1=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g\Delta h}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$$

令：

$$K=\frac{\pi d_1^2}{4}\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^4-1}}$$

则：

$$Q=K\sqrt{\Delta h}\qquad(1-1-41)$$

显然，当水管直径 d_1及喉管直径 d_2确定以后，K 为一定值，可以预先算出。由式（1－1－41）可见，只要测得水管断面与喉管断面的测压管高差 Δh，即可求得流量 Q 值。

由于在上面的分析计算中，没有考虑水头损失，而水头损失将会使流量减小，因而实际流量比按式（1－1－41）算得的值要小些。对于这个误差一般也是用一个修正系数 μ（称为文丘里流量系数）来改正，则实际流量

$$Q=\mu K\sqrt{\Delta h}\qquad(1-1-42)$$

文丘里流量系数 μ 一般约为 0.97～0.99。

如果文丘里流量计上直接安装水银差压计（图 1－1－10b），由差压计原理可知

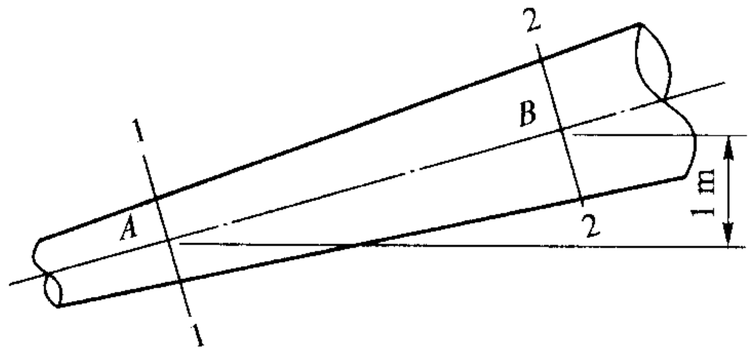
$$\frac{p_1}{\rho g}-\frac{p_2}{\rho g}=\frac{\rho_H-\rho}{\rho}\Delta h_1=12.6\Delta h_1$$

式中：Δh——水银差压计两水银面高差。

此时文丘里流量计的流量为

$$Q=\mu K\sqrt{12.6\Delta h_1}\qquad(1-1-43)$$

【例 1－1－5】 如例题 1－1－5 图所示有一锥形水管，断面 1－1 处直径 $d_1=0.15$ m，中心点 A 的相对压强为 7.2 kN/m^2，断面 2－2 直径 $d_2=0.3$ m，中心点 B 的相对压强为 6.1 kN/m^2，断面平均流速 $v_2=1.5$ m/s，A、B 两点高差为 1 m。试判别管中水流方向，并求断面 1－1、断面 2－2 间的水头损失。



例题 1－1－5 图

解：首先利用连续性方程求断面 1－1 的平均流速。

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1}v_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 v_2 = \left(\frac{0.30}{0.15}\right)^2 v_2 = 4v_2 = 6\ \text{m/s}$$

因水管直径变化缓慢，断面 1－1 及断面 2－2 水流可近似看作渐变流，以过 A 点水平面为基准面分别计算两断面的总能量。两断面的水头分别为：

$$H_1 = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = \left(0 + \frac{7.2}{1\times 9.8} + \frac{6^2}{2\times 9.8}\right)\text{m} = 2.57\ \text{m}$$

$$H_2 = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_2^2}{2g} = \left(1 + \frac{6.1}{1\times 9.8} + \frac{1.5^2}{2\times 9.8}\right)\text{m} = 1.74\ \text{m}$$

因 $H_1 > H_2$，管中水流应从 A 流向 B。

水头损失：$h_w = H_1 - H_2 = 2.57\ \text{m} - 1.74\ \text{m} = 0.83\ \text{m}$

第八节　实际流体恒定总流的动量方程

恒定总流的连续性方程和能量方程，它们对分析流体运动极为有用。但是，它们没有反映运动流体与边界上作用力之间的关系，同时，对于水头损失难以确定但又不能忽略的流动问题，能量方程的应用亦将受到限制。为此，需要利用动量方程，该方程将运动流体与固体边界相互作用力直接同运动流体的动量变化联系起来，它的优点是不需要知道流动范围内部的流动情况，而只需要知道边界面上的流动状况。

应用动量方程计算运动流体对固体边界作用力的实例很多。例如，通过弯管的水流对弯管的作用力；水流对喷嘴的作用力；射流的冲击力；泄流时水流对闸或溢流坝的作用力等。

流体力学中的动量方程是自然界动量守恒定律在流体运动中的具体表现，反映了流体在运动过程中动量的改变与作用力之间的关系。下面根据动量定理，建立流体运动的动量方程，并举例说明动量方程的应用。

一、恒定总流动量方程的推导

单位时间内物体的动量变化等于作用于该物体上外力的总和，这就是动量定理。动量等于物体的质量 m 乘以它的速度 v，用 $\boldsymbol{p}$ 表示动量，即 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$。$\sum \boldsymbol{F}$ 表示作用于该物体上的各外力的合力。动量定理可写为：

$$\sum \boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{1-1-44}$$

下面推导流体运动的动量方程，并限于恒定流情况。

在恒定总流中取出某一流段，两端过流断面为 1－1 和 2－2，如图 1－1－10 所示。以该流段为隔离体，分析它的动量变化和作用于其上的外力之间的关系。

1. 该流段的动量变化

经过微小时段 $\mathrm{d}t$，两个过流断面间流段由 1－2 位置移动到 1′－2′位置，在流动的同时，流段的动量发生改变。这个动量的改变应等于流段在 1′－2′位置和 1－2 位置所有的动量之差。然而，由于流动是不可压缩流体恒定流，故处于流段 1′－2 间的流体，其质量和流速均保持不变，即动量不变。所以，在 $\mathrm{d}t$ 时段内，所讨论流段动量的变化等于 2－2′段和 1－1′段流体动量之差。

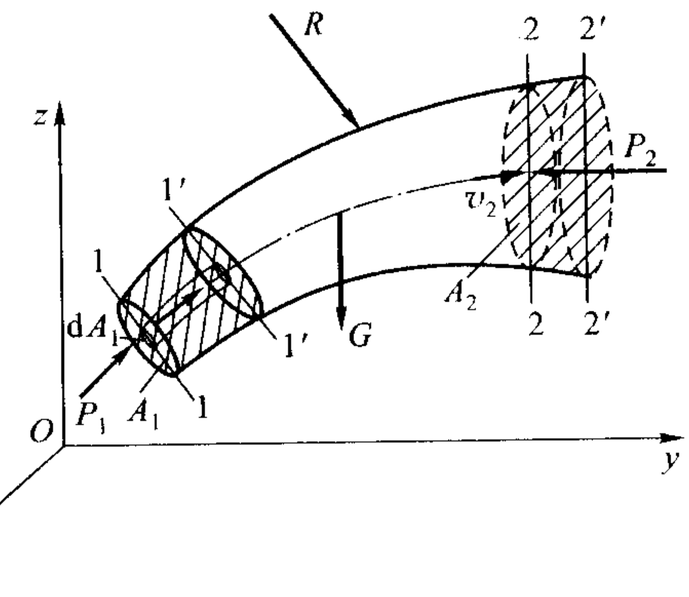


图 1－1－10　流段的动量变化和作用于其上的外力

1－1′段的动量 $\boldsymbol{p}_{1-1'}$ 可以确定如下。

$$\boldsymbol{p}_{1-1'}=\int_{A_1}\rho u_1\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}t\mathrm{d}A_1=\rho\mathrm{d}t\int_{A_1}u_1\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}A_1 \tag{1-1-45}$$

因为断面上的流速分布一般是未知的，所以需用断面平均流速 $\boldsymbol{v}_1$ 代替 u_1，所造成的误差以动量修正系数 β 来修正，则式（1-1-45）写为：

$$\boldsymbol{p}_{1-1'}=\rho\mathrm{d}t\beta_1\boldsymbol{v}_1\int_{A_1}\boldsymbol{u}_1\mathrm{d}A_1=\rho\mathrm{d}t\beta_1\boldsymbol{v}_1Q \tag{1-1-46}$$

动量修正系数 β 表示单位时间内通过断面的实际动量与单位时间内以相应的断面平均流速通过的动量的比值。在一般渐变流中，β 值约为 1.02～1.05。工程上通常取 $\beta=1.0$。

同理，2-2′流段的动量为：

$$\boldsymbol{p}_{2-2'}=\rho\mathrm{d}t\beta_2\boldsymbol{v}_2Q \tag{1-1-47}$$

则该流段的动量差为：

$$\boldsymbol{p}_{2-2'}-\boldsymbol{p}_{1-1'}=\rho Q(\beta_2\boldsymbol{v}_2-\beta_1\boldsymbol{v}_1)\mathrm{d}t \tag{1-1-48}$$

2. 作用于该流段上的力

作用在断面 1-1 至断面 2-2 流段上的外力包括：上游流体作用于断面 1-1 上的动水压力 P_1；下游流体作用在断面 2-2 上的动水压力 P_2；重力 G；以及四周边界对这段流体的总作用力 R。所有这些外力的合力以 $\sum\boldsymbol{F}$ 表示。

3. 动量方程

以上分析结果代入式（1-1-44），则得恒定总流动量方程为：

$$\rho Q(\beta_2\boldsymbol{v}_2-\beta_1\boldsymbol{v}_1)=\sum\boldsymbol{F} \tag{1-1-49}$$

上式左端代表单位时间内所研究流段通过下游断面流出的动量和通过上游断面流入的动量之差，右端则代表作用于总流流段上所有外力的矢量和。

在直角坐标系中，恒定总流的动量方程式可以写成三个投影表达式，即：

$$\left.\begin{aligned}\rho Q(\beta_2\boldsymbol{v}_{2x}-\beta_1\boldsymbol{v}_{1x})&=\sum F_x\\ \rho Q(\beta_2\boldsymbol{v}_{2y}-\beta_1\boldsymbol{v}_{1y})&=\sum F_y\\ \rho Q(\beta_2\boldsymbol{v}_{2z}-\beta_1\boldsymbol{v}_{1z})&=\sum F_z\end{aligned}\right\} \tag{1-1-50}$$

式中，$\boldsymbol{v}_{1x}$，$\boldsymbol{v}_{1y}$，$\boldsymbol{v}_{1z}$和$\boldsymbol{v}_{2x}$，$\boldsymbol{v}_{2y}$，$\boldsymbol{v}_{2z}$分别为总流上下游过流断面的断面平均流速在三个坐标方向的投影；$\sum F_x$，$\sum F_y$，$\sum F_z$ 为作用在 1-1 与 2-2 断面间流体上的所有外力在三个坐标方向的投影代数和。

二、应用动量方程的注意点及步骤

恒定总流动量方程是流体动力学中最重要的方程之一，应用较为广泛。应用时，除满足恒定流条件，还应注意以下几点：

（1）动量方程是矢量式，式中流速和作用力都是有方向的量。因此，首先要选定坐标轴并标明其正方向，然后把流速和作用力向该坐标轴投影。凡是和坐标轴指向一致的流速和作用力均为正值，反之为负值。坐标的选择以方便计算为宜。

（2）动量方程式的左端，是单位时间内所取流段的动量变化值，必须是流出的动量减去流进的动量，两者切不可颠倒。

（3）所选择的两个过流断面应符合渐变流条件，因为渐变流断面上的动水压强可按静水压强公式计算，这样便于计算两端断面上的动水压力。由于大气压强到处存在，故压强一律采用相对压强。

（4）根据问题的要求，选定两个渐变流断面间的流体作为隔离体，作用在隔离体上的外力应包括：两断面上的流体压力，固体边界对流体的作用力及流体本身的重力。

（5）当所求未知作用力的方向不能事先确定时，可任意假定一个方向，若计算结果其值为正，说明假定方向正确；若其值为负，说明与假定方向相反。

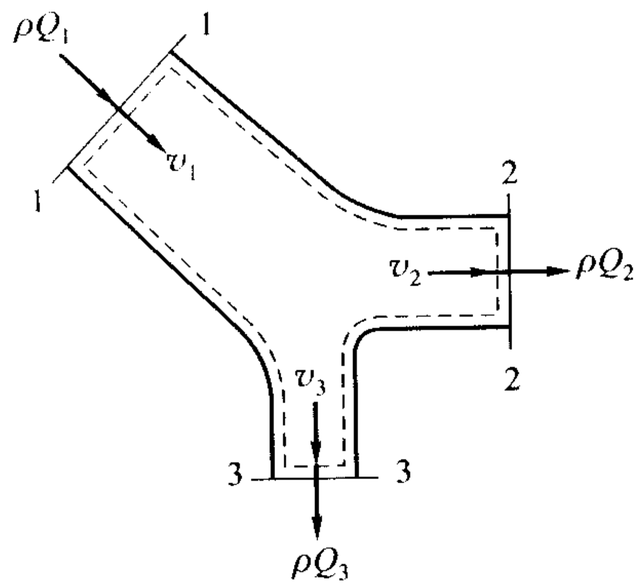


图 1-1-11 有流量汇入与流出的图示

(6) 动量方程只能求解一个未知数，若方程中未知数多于一个时，必须借助于能量方程和连续性方程联合求解。

(7) 虽然动量方程的推导是在无流量汇入与流出条件下进行的，但它可以应用于有流量汇入与流出的情况。

图 1-1-11 所示为一分叉管流，当对叉管段流体应用动量方程时，可以把沿管壁以及上下游过流断面所组成的封闭体作为控制体(图中虚线所示)。设 $\sum \boldsymbol{F}$ 为作用在分叉流段的外力，$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{v}_3$ 分别为三个断面上的平均流速，单位时间内该段总流的动量变化等于流出控制体的动量 $(\rho Q_2\beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \rho Q_3\beta_3 \boldsymbol{v}_3)$ 与流入控制体的动量 $\rho Q_1\beta_1 \boldsymbol{v}_1$ 之差。则动量方程表为

$$\rho Q_2\beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \rho Q_3\beta_3 \boldsymbol{v}_3 - \rho Q_1\beta_1 \boldsymbol{v}_1 = \sum \boldsymbol{F} \qquad (1-1-51)$$

用动量方程求解流体对固体边界的作用力时，以下步骤可供参考：

(1) 分析流体运动，找出渐变流断面，围取控制体。建立坐标，规定正方向。

(2) 分析作用在控制体上所有外力，并假设固体边界对流体作用力 R 的方向。

(3) 建立动量方程。若动量方程中的未知数多于一个，则应联合能量方程式和连续性方程，求解边界对流体的作用力 R。

(4) 根据作用力与反作用力大小相等、方向相反的原则，确定流体对固体边界的作用力 R'。

三、恒定总流动量方程的应用举例

如图 1-1-12 所示转角为 α 的弯管，管轴线位于铅垂平面上。弯管两端过水断面面积分别为 A_1 和 A_2，断面平均流速为 v_1 和 v_2，断面形心点压强为 p_1 和 p_2，弯管内通过流量 Q。试分析水流对弯管的作用力。

弯管内的水流是急变流，不能用静水压强的计算方法求管内水流对管壁的作用力。因此，应用动量方程求解。

(1) 取控制体，建立坐标：在弯管进、出口水流为渐变流处，取断面 1-1 和断面 2-2，并取两断面间的总流作为控制体。选取坐标如图所示。

(2) 分析作用于控制体上的外力：作用在此水体上的外力包括：

两端断面上的动水压力，因 1、2 断面均是渐变流断面，所以动水压力分别为：

$$P_1 = p_1A_1, \quad P_2 = p_2A_2$$

弯管对水流的反作用为 R，为计算方便，将其分解成 x 方向的 R_x 和 y 方向的 R_y，并假定其方向如图所示。

重力，因弯管的轴线是在铅垂面内，重力 G 应该考虑。$G = \rho gV$，V 为弯管控制体内水的体积。

(3) 列动量方程，求解作用力：将所有的外力和流速在坐标轴上投影，令 $\beta_1 = \beta_2 = 1$，则 x 方向动量方程：

$$\sum F_x = P_1 - P_2\cos\alpha - R_x = \rho Q(v_2\cos\alpha - v_1)$$

得：

$$R_x = p_1A_1 - p_2A_2\cos\alpha - \rho Q^2\left(\frac{\cos\alpha}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right)$$

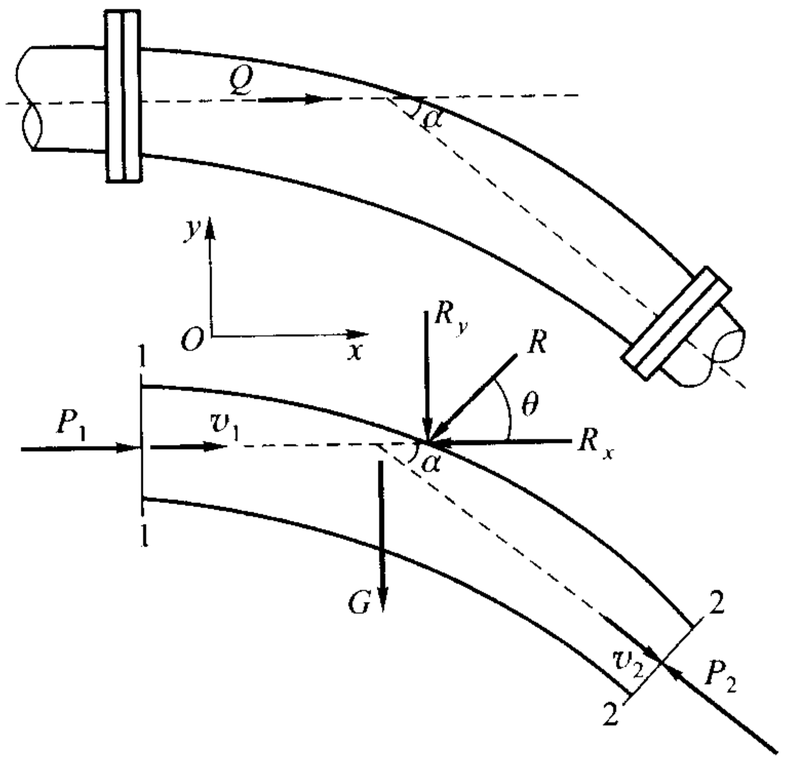


图 1-1-12 水流对弯管的作用力

y 方向动量方程：

$$\sum F_y = P_2 \sin\alpha - R_y - G = \rho Q(-v_2 \sin\alpha - 0)$$

得：

$$R_y = p_2 \sin\alpha + \frac{\rho Q^2 \sin\alpha}{A_2} - G$$

弯管对水流作用力的合力为：

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

R 与水平轴的夹角为：

$$\theta = \arctan\frac{R_y}{R_x}$$

水流对弯管的作用力大小与 R 相等，方向相反。

思　考　题

1－1－1　实际流体与理想流体有何区别？

1－1－2　流体质点表达式及其物理意义如何？

1－1－3　均匀流与非均匀流过流断面的特性有何区别？

1－1－4　均匀流和渐变流一定是恒定流，急变流一定是非恒定流，此说法对吗？为什么？

1－1－5　恒定流和非恒定流、均匀流和非均匀流、渐变流和急变流、有压流和无压流，各种流动分类的原则是什么？

1－1－6　实际流体与理想流体元流的能量方程的物理意义是什么？它们有何区别？

1－1－7　应用恒定总统能量方程时，为什么把过流断面选在渐变流段或均匀流段？

1－1－8　在写总流能量方程时，过流断面上的代表点、基准面是否可以任意选取？为什么？

1－1－9　总水头线和测压管水头线沿流程有如变化规律？均匀流的测压管水头线和总水头线的关系如何？

1－1－10　总流的动量方程为 $\rho Q(\beta_2 \boldsymbol{v}_2 - \beta_1 \boldsymbol{v}_1) = \sum \boldsymbol{F}$，试问：

(1) $\sum \boldsymbol{F}$ 中可能包括哪些力？

(2) 如果由动量方程求得的力为负值说明了什么问题？

习　　题

1－1－1　某流场，$u_x = 0$，$u_y = 3xy$。试判断该液流为：(　　)

A　非恒定流　　B　恒定流非均匀流　　C　恒定均匀流　　D　不满足流动连续性

1－1－2　某流场，$u_x = 2x$，$u_y = -2y$。试判断该液流为：(　　)

A　非恒定均匀流　　B　恒定流非均匀流　　C　恒定均匀流　　D　非恒定非均匀流

1－1－3　在水箱上接出一条长直的渐变锥管管段，末端设有阀门以便控制流量。若水箱内水面不随时间变化、阀门的开度固定，此时，管中水流为：(　　)

A　恒定均匀流　　B　恒定非均匀流　　C　非恒定均匀流　　D　非恒定非均匀流

1－1－4　对于实际流体，在绘制管路系统的总水头线与测压管水头线时，其基本规律之一是：(　　)

A　总水头线总是沿程上升的　　B　测压管水头线总是沿程下降的

C　测压管水头线一定在总水头线的上方　　D　测压管水头线一定在总水头线的下方

1－1－5　对于气体流动，若需要考虑气体的容重 γ 和高程差 z，要绘制总压线与势压线和位压线，正确的说法是：(　　)

A 总压线与液流的测压管水头线相对应　　B 位压线与液流的总水头线相对应

C 势压线与液流的测压管水头线相对应　　D 总压线与管道轴线相对应

1-1-6 对于气体流动，若不考虑气体的容重 γ 和高程差 z，要绘制全压线与静压线，正确的说法是：（　　）

A 全压线与液流的测压管水头线相对应　　B 全压线与液流的总水头线相对应

C 全压线与管道轴线相对应　　D 三种说法都不对

1-1-7 下面哪个条件不是恒定总流伯努利方程的应用条件：（　　）

A 基准面可随意选取，以方便为原则　　B 选择控制面（脱离体），注意全面分析外力

C 过流断面必须是均匀流或渐变流断面　　D 流动必须是恒定流，且流体是不可压缩的

1-1-8 下面哪个条件不是恒定总流动量方程的应用条件：（　　）

A 建立坐标系并注明方向　　B 选择控制面（脱离体），注意全面分析外力

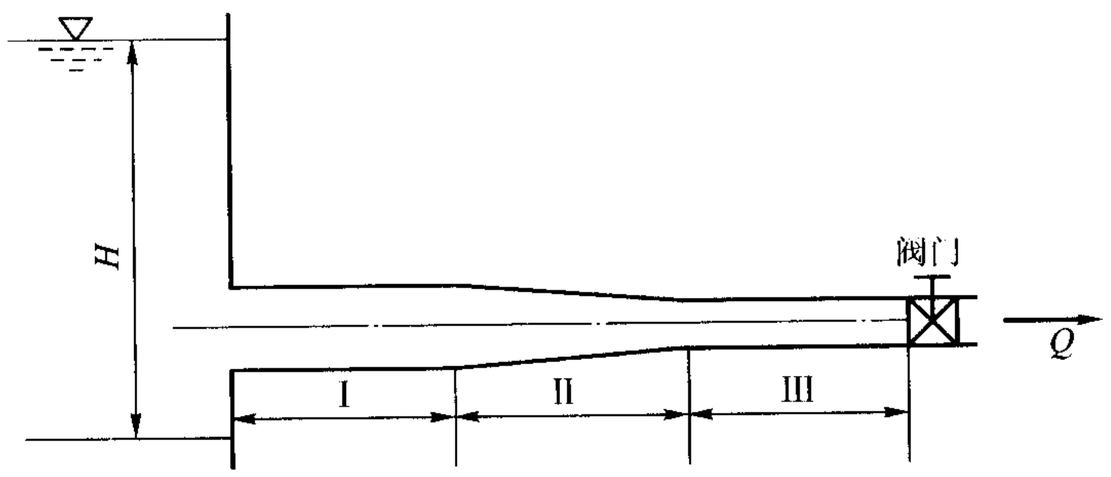
C 过流断面必须是均匀流或渐变流断面　　D 基准面可随意选取，以方便为原则

1-1-9 如习题1-1-9图所示，从水面保持恒定不变的水池中引出一管路，管路由三段管道组成，在管路末端设有阀门，当阀门开度一定，水流处于稳定状态时，试问管段Ⅱ的水流为何种流动：（　　）

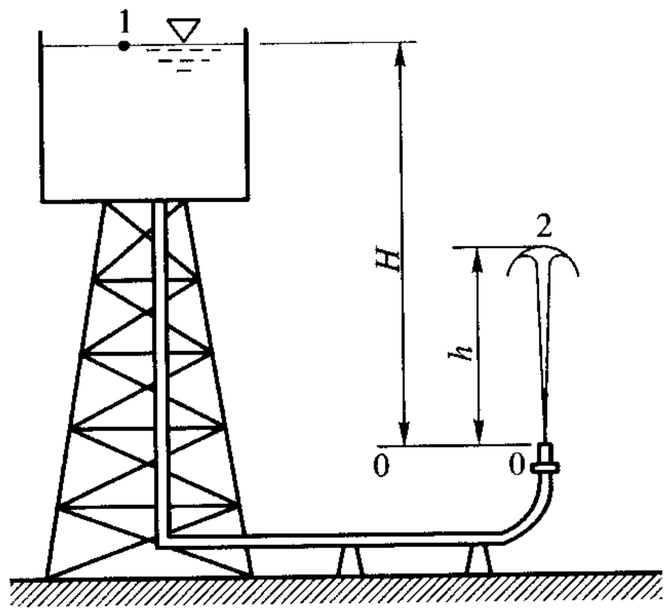
A 非恒定均匀流　　B 恒定均匀流　　C 恒定渐变流　　D 非恒定渐变流

1-1-10 条件与题1-1-9相同，试问Ⅰ号管段的水流为何种流动：（　　）

A 非恒定均匀流　　B 恒定均匀流　　C 恒定渐变流　　D 非恒定渐变流



习题1-1-9图



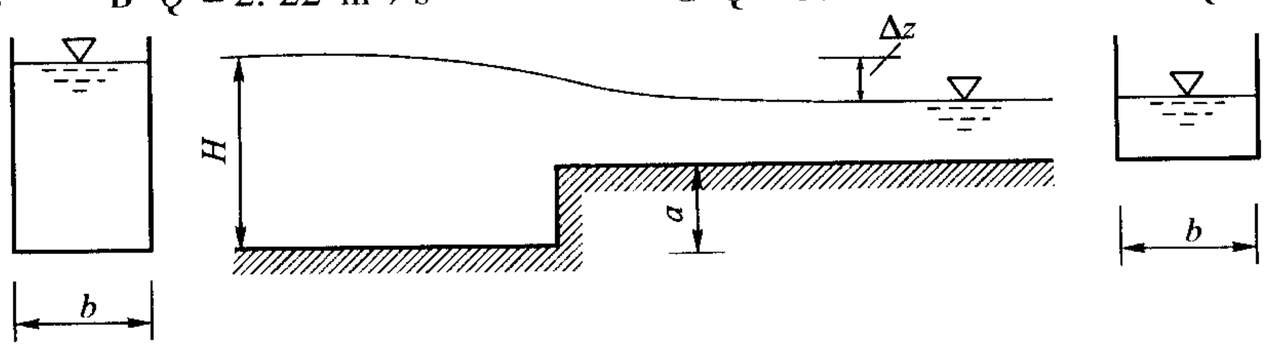
习题1-1-11图

1-1-11 在水塔引出的水管末端连接一个消防喷水枪，水枪喷嘴与水塔液面高差 H 为20 m，如习题1-1-11图所示。若管路及水枪系统总的水头损失为5 m（水柱），试问水枪所喷出的水能达到的最高度 h 为多少（不计在空气中的能量损失）：（　　）

A $h>15$ m　　B $h=15$ m　　C $h>20$ m　　D $h=20$ m

1-1-12 如习题1-1-12图所示，平底渠道，断面为矩形，宽 $b=1$ m，渠底上升的坎高 $a=0.5$ m，坎前渐变流断面处水深 $H=1.8$ m，坎后水面跌落 $\Delta z=0.3$ m，坎顶水流为渐变流，局部水头损失为下游断面流速水头的1/2。试求渠中流量 Q：（　　）

A $Q=3.50\ m^3/s$　　B $Q=2.22\ m^3/s$　　C $Q=3.125\ m^3/s$　　D $Q=3.75\ m^3/s$



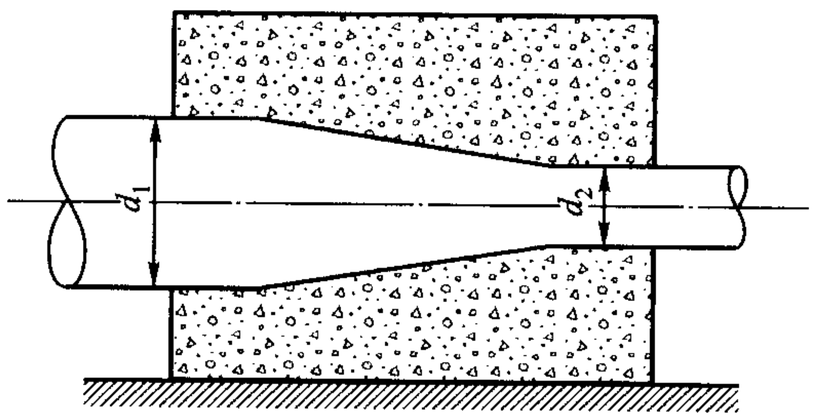
习题1-1-12图

1－1－13　习题1－1－13图示为嵌入支座内的一段输水管段。管径 $d_1=1.5$ m，$d_2=1.0$ m，渐变管前断面的相对压强 $p_1=400$ kN/m^2，管中通过流量 $Q=1.8$ m^3/s。若不计水头损失，试求镇墩所受的轴向力：(　　)

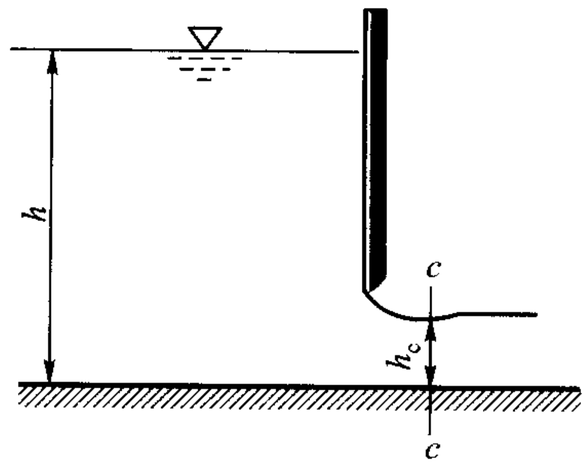
A　400 kN　　B　500 kN　　C　391.9 kN　　D　465.5 kN

1－1－14　条件与题1－1－10相同，问镇墩所受的轴向力方向是：(　　)

A　向上　　B　向下　　C　向左　　D　向右



习题1－1－13图



习题1－1－15图

1－1－15　如习题1－1－15图所示，有一个平板闸门宽 b 为2 m，当通过一定流量时，闸前水深 h 为4 m，闸孔后收缩断面水深 h_c 为0.5 m。不计水头损失，试求此时的通过流量：(　　)

A　$Q=10.0$ m^3/s　　B　$Q=9.25$ m^3/s　　C　$Q=7.65$ m^3/s　　D　$Q=8.35$ m^3/s

1－1－16　条件与题1－1－15相同，若通过流量为 $Q=8.0$ m^3/s，试求作用于平板闸门上的动水总压力（不计摩擦力）：(　　)

A　120.20 kN　　B　98.35 kN　　C　90.30 kN　　D　100.8 kN

第二章　流动阻力和能量损失

实际流体具有黏滞性，在流动过程中会产生流动阻力，克服阻力要消耗一部分能量，转化为热能，即存在着能量损失。能量损失的多少可以用几何高度表示，所以，能量损失亦称水头损失。对于实际流体，应用能量方程时，应事先确定水头损失。因此，必须弄清流动阻力和水头损失的规律，从而寻求出在各种具体情况下计算水头损失 h_w 的关系式或表达式。

第一节　液流型态及其判别标准

一、雷诺实验

1883 年英国物理学家雷诺（Reynolds）通过著名的雷诺实验，发现了流体运动有层流和湍流两种性质不同的流动型态，它们的内在结构有很大差别。

雷诺实验装置如图 1－2－1（a），由恒定水压的水箱 A 引出光滑玻璃管 B。阀门 C 用来调节管 B 的流量。容器 D 内装有与实验水体密度相近的颜色水，经细管 E 流入管 B 中。阀门 F 用来控制颜色的流动。在管 B 上游过流断面 1 处设有测压管 G，下游过流断面 2 处设有测压管 H。

实验时，轻轻开启阀门 C，管 B 内流速不要过大；再打开阀门 F，可以看到管 B 内颜色水形成一股纤细的直线流束，各流层间流体质点互不掺混，这种流动型态称为**层流**。颜色水的流动如图 1－2－1（b）所示。同时记录下管 B 的流量及 G 和 H 的测压管读数。而后徐徐增加阀门 C 的开度，使管中流速不断增加，当流速增加至某一值时，颜色水出现摆动，如图 1－2－1（c）所示。此时的流速被称为从层流向湍流过渡的**上临界流速** v'_{cr}；继续增加阀门 C 的开度，则颜色水迅速与周围清水掺混，如图 1－2－1（d）所示。这时液体质点的运动轨迹是极不规则的，各流层间的流体质点相互剧烈掺混，这种运动型态称为**湍流**。以上现象为从层流过渡到湍流。

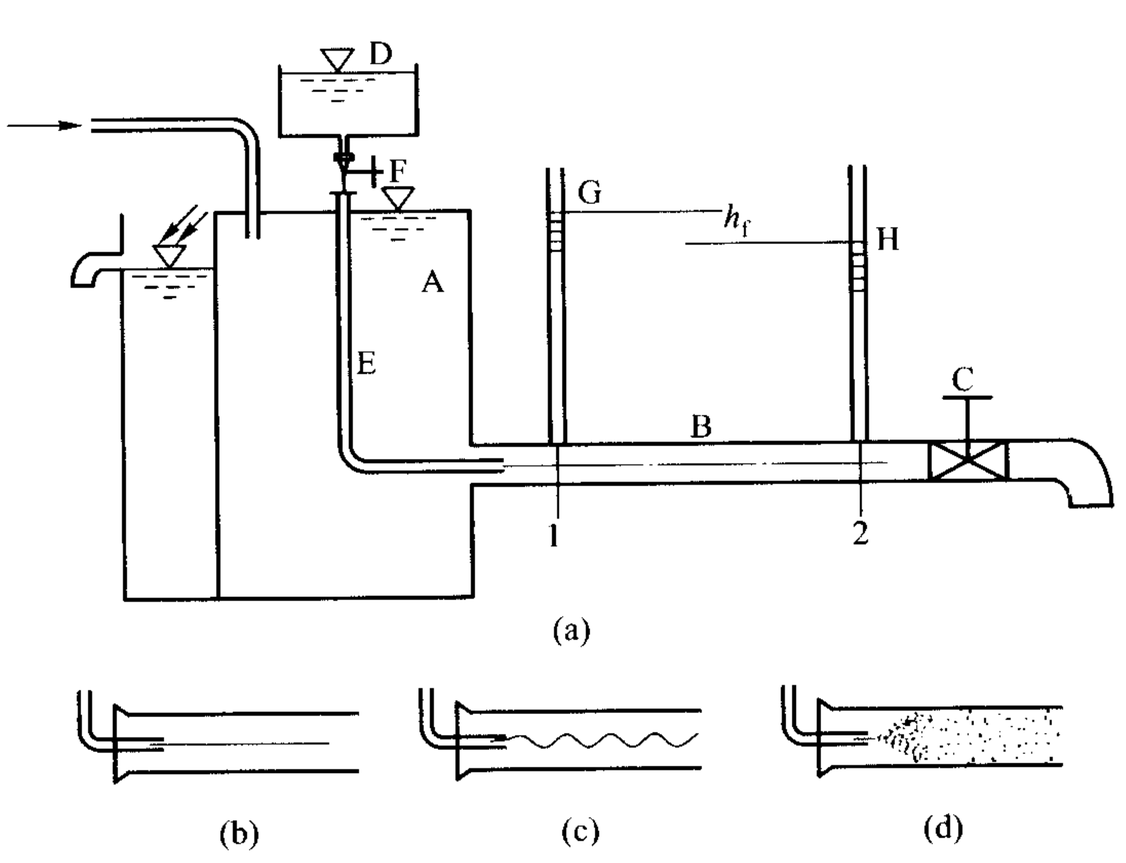


图 1－2－1　雷诺实验装置

若管中水流已处于湍流状态，按相反顺序进行实验，即阀门 C 从大开度逐渐向小开度变化，使管中流速缓慢下降，流体由湍流运动转化为层流运动。由湍流转变为层流时的流速称为**下临界流速** v_{cr}。

列出断面 1 和 2 间的总流能量方程：

$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_f$，$h_f$ 为沿程水头损失，因为管路为等直径圆管，$\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}$，则 $h_f=\left(z_1+\frac{p_1}{\rho g}\right)-\left(z_2+\frac{p_2}{\rho g}\right)=h_C-h_H$。

实验是逐步进行的，整理管 B 中流速和 G、H 测压管水头的实验数据，即可以给出 h_f 和 v 的变化过程，在双对数坐标上点绘曲线，如图 1－2－2 所示。其中，*FBC* 表示流速由小向大变化时的实验曲线，*FEC* 表示流速由大向小变化时的实验曲线，其余部分表明，不管是从层流过渡到湍流还是从湍流过渡到层流，其实验曲线是重合的。在层流状态，实验点形成斜线 *AB* 与横坐标轴成45°角，表明层流状态下，能量损失与流速的 1 次方成正比，即 $h_f \propto v$。当处在湍流状态时，实验点分布在斜率从 1.75～2.0 的曲线 *CD* 上，表明湍流型态下，能量损失与流速的 1.75～2.0 次方成正比，即 $h_f \propto v^{1.75\sim2.0}$。在 *F* 与 *C* 之间流体运动型态不稳定，可能是层流（如 *FB* 段）也可能是湍流（如 *FEC* 段），这要取决于水流的原来型态。但是在此阶段的层流是不稳定的，在有干扰的情况下，层流状态会遭到破坏，区间 *FC* 称为过渡区。

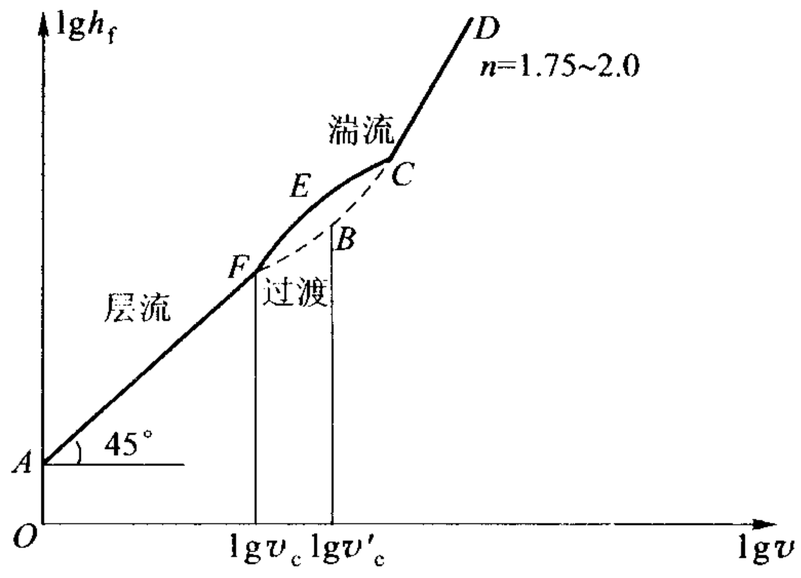


图 1－2－2　能量损失与流态关系图

雷诺实验揭示了运动流体存在着层流与湍流两种流态，对应不同流态，能量损失与流速间的变化规律不同，能量损失与液流型态密切相关。

二、流态的判别

雷诺及其以后的大量实验发现，受实验条件影响（如扰动量，管壁光滑程度，水流入口平顺程度等），从层流过渡到湍流时，上临界流速 v'_{cr}的数值变化较大，具有不确定性；从湍流过渡到层流时，下临界流速 v_{cr}的值相对比较稳定。对流速小于下临界流速 v_{cr}的流动属于稳定层流，遇扰动可能变为湍动，但解除扰动总能转变为层流；而对流速高于下临界流速 v_{cr}的层流均属于不稳定层流，稍有扰动，即转变为湍流。在实际工程中流体运动受到扰动是不可避免的，通常把下临界流速 v_{cr}作为判断流态的流速界限。

实验还发现，管径、流体密度和流体动力黏度不同，会得到不同的临界流速 v_{cr}。所以采用管径 d、流体密度 ρ、动力黏度 μ 和流速 v 组合的量纲为一的量，来区分流体运动型态。这个量纲为一的量称为**雷诺数**，用 *Re* 表示，其表达式为：

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} = \frac{v d}{\nu} \tag{1-2-1}$$

式（1－2－1）表明，雷诺数的大小与流速、特征长度管径及流体的运动黏度 ν 有关，将下临界流速代入式（1－2－1）得到**下临界雷诺数**，表示为 Re_{cr}。

$$Re_{cr} = \frac{v_{cr} d}{\nu} = 2\,000 \sim 2\,300 \tag{1-2-2}$$

实验表明，对于牛顿流体，下临界雷诺数 Re_{cr}约为 2 000～2 300。若实际雷诺数 *Re* 大于下临界雷诺数 Re_{cr}为湍流；小于下临界雷诺数 Re_{cr}为层流。因为工程上对流体的扰动是不可避免的，因此，工程上把下临界雷诺数作为层流与湍流的判别标准。

对于明渠、天然河道及非圆管管道，其特征长度量为水力半径 *R*，下临界雷诺数为：

$$Re_{cr} = \frac{v_{cr} R}{\nu} = 500 \sim 575 \tag{1-2-3}$$

雷诺数之所以能判别液流型态，是因为它反映了流体惯性力和黏滞力的对比关系。当黏滞力起主导作用时，扰动就受到黏性的阻滞而衰减，流体质点有序运动，流体呈层流状态。当惯性力起主导作用时，黏性的作用无法使扰动衰减下来，流体质点无序随机运动，流动失去稳定性，发展为湍流。

【例 1－2－1】 水温为 $t = 15$ ℃，管径为 20 mm 的输水管，水流平均流速为 8.0 cm/s，试确定管中水流型态；若水温不变，求液流型态转化时的临界流速；若水流平均流速不变，求液流型态转化时的临界水

温是多少？

解：（1）已知水温 $t=15$ ℃，查相关表得水的运动黏度 $\nu=0.011\ 4\ \text{cm}^2/\text{s}$，求得水流雷诺数为：

$$Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{8\times 2}{0.011\ 4}=1\ 403<2\ 000$$

因此，水流为层流。

（2）选取临界雷诺数 $v_{cr}=2\ 000$，计算临界流速：

$$v_{cr}=\frac{Re_{cr}\nu}{d}=\frac{2\ 000\times 0.011\ 4\ \text{cm}^2/\text{s}}{2\ \text{cm}}=11.4\ \text{cm/s}$$

当若水温不变，v 增大到 11.4 cm/s 以上时，水流状态由层流转变为湍流。

如果不改变 $v=8.0$ cm/s，增加水温，使水的运动黏度 ν 减小，水流型态同样可以由层流转变为湍流。选取临界雷诺数计算运动黏度：

$$\nu=\frac{vd}{Re_{cr}}=\frac{8\ \text{cm/s}\times 2\ \text{cm}}{2\ 000}=0.008\ \text{cm}^2/\text{s}$$

查相关表得，当水温增大到 30 ℃以上时，$\nu=0.008\ \text{cm}^2/\text{s}$，水流型态由层流转变为湍流。故 $t=30$ ℃为管径为 20 mm，平均流速为 8.0 cm/s 时的临界水温。

第二节　流动阻力的分类

由于流体具有黏滞性，流体内部剪切阻力作用会产生流动阻力；流体与固体壁相互作用也会产生流动阻力，造成能量损失。按固体边界沿流体运动方向的变化，可将水头损失（能量损失）分为沿程水头损失和局部水头损失两大类。

一、沿程阻力与沿程水头损失

水头损失与流体所处的边界条件有关，首先介绍湿周和水力半径的概念。**湿周**用 χ 表示，是指液流过流断面与固体边界接触的周界线。**水力半径**则是综合过流段面的面积 A 与湿周 χ 对液流的影响，它们的比值称为水力半径，即：

$$R=\frac{A}{\chi} \tag{1-2-4}$$

在边壁沿流程不变的均匀流中，只存在沿程剪切阻力（流体与边界、流体内部），这种阻力称为沿程阻力，克服沿程阻力引起的能量损失称为**沿程水头损失**，用 h_f 表示，其通用公式为：

$$h_f=\lambda\frac{l}{4R}\frac{v^2}{2g} \tag{1-2-5}$$

式中：h_f——单位重量流体的沿程水头损失，m；

λ——沿程阻力系数；

l——流程长度；

R——水力半径；

v——断面平均流速。

式（1-2-5）也称为达西（Darcy）公式。

二、局部阻力与局部水头损失

在边壁形状或尺寸沿程急剧变化的区域，流体内部的流速分布沿程急剧变化，并伴随产生边界层分离

现象，形成旋涡区，在局部区域出现集中的流动阻力，这种阻力称为局部阻力，克服局部阻力造成的能量损失称为局部水头损失，记为 h_j，如边壁突然扩大、突然收缩、弯道、弯管、闸门阀门处都会造成局部水头损失。局部水头损失的计算公式为：

$$h_j = \zeta \frac{v^2}{2g} \tag{1-2-6}$$

式中：h_j——单位重量流体的局部水头损失，m；

ζ——局部阻力系数。

总的能量损失是沿程损失和局部损失之和，表示为 $h_w = \sum h_f + \sum h_j$。沿程损失和局部损失计算的区别仅反映了流程的影响，而液流型态的影响则体现于确定阻力系数的变化。如图 1-2-3 的流动管道中，ab，bc，cd 管段存在沿程损失，a 处存在入口突然收缩的局部损失，b 处存在管道突然收缩的局部损失，c 处存在阀门引起的局部损失。

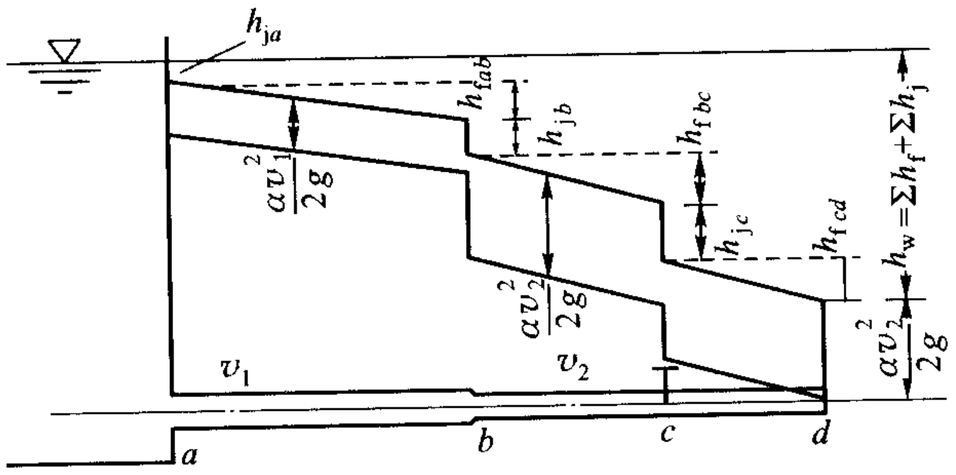


图 1-2-3　沿程损失和局部损失

第三节　均匀流基本方程

流体在均匀流的情况下只存在沿程水头损失，如图 1-2-4 所示，首先确定基面 0-0，对于两过流断面 1-1 和断面 2-2 列能量方程：

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_{w1-2}$$

根据均匀流定义有 $v_1 = v_2$，$\alpha_1 = \alpha_2$，$h_{w1-2} = h_f$，则由上式得：

$$h_f = \left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) \tag{1-2-7}$$

式（1-2-7）表明，对于均匀流，两过流断面间的沿程水头损失等于两过流断面测压管水头差。

对 1-1 和 2-2 断面间整体流段进行受力分析，1-1 断面上的动水压力为 $P_1 = p_1 A$，2-2 断面上的动水压力为 $P_2 = p_2 A$，流段的重力沿管轴线（流向）的投影为 $G\cos\alpha$，流段表面的切向力为 $T = \tau_0 \chi l$，列出水流运动方向上诸力的平衡方程：

$$p_1 A - p_2 A + \rho g A l \cos\alpha - \tau_0 \chi l = 0$$

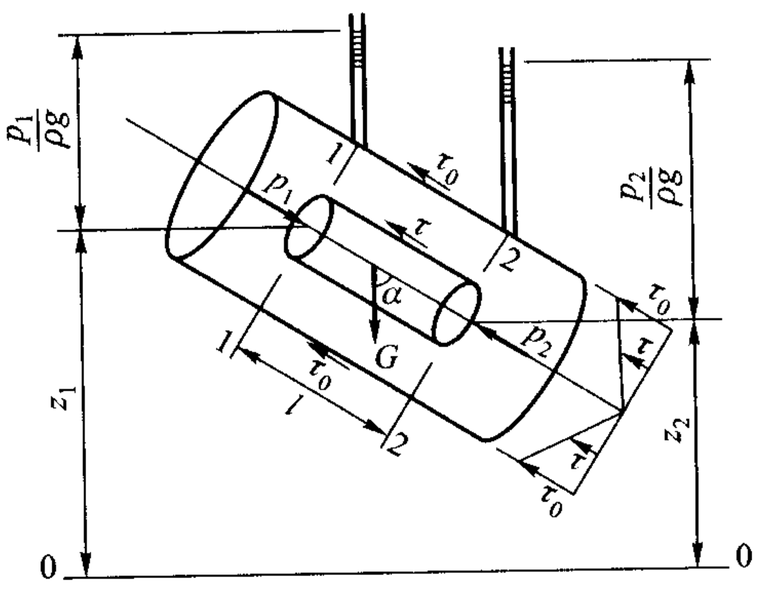


图 1-2-4　圆管均匀流动

式中：A——过流断面面积；

l——流段长；

χ——湿周；

τ_0——管壁上的切应力；

α——倾角。

从几何关系得 $l\cos\alpha = z_1 - z_2$，用 $\rho g A$ 除以上式，则：

$$\left(z_1 + \frac{p_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{p_2}{\rho g}\right) = \frac{\tau_0}{\rho g}\frac{\chi}{A} \cdot l = \frac{\tau_0}{\rho g}\frac{l}{R} \tag{1-2-8}$$

比较式（1-2-7）和式（1-2-8）得：

$$h_f = \frac{\tau_0}{\rho g}\frac{l}{R} \tag{1-2-9}$$

或：

$$\tau_0 = \rho g R J \tag{1-2-10}$$

式中：J——水力坡度，$J = \frac{h_f}{l}$。

式（1-2-9）和式（1-2-10）给出了沿程水头损失与切应力的关系，它是研究沿程水头损失的基本公式，或称均匀流基本方程。

在推导式（1-2-9）和式（1-2-10）时，考虑的是1-1和2-2断面间整体流段。如果只取流段内的一圆柱体为研究对象（图1-2-4），作用于圆柱体表面上切应力为τ，按上述方法，亦可得出：

$$\tau = \rho g \frac{r}{2} J \tag{1-2-11}$$

由式（1-2-10）管壁上的切应力亦可表示为：

$$\tau_0 = \rho g \frac{r_0}{2} J \tag{1-2-12}$$

比较式（1-2-11）和式（1-2-12）得：

$$\frac{\tau}{\tau_0} = \frac{r}{r_0} 或 \ \tau = \frac{\tau_0}{r_0} r \tag{1-2-13}$$

式（1-2-14）表明，对于圆管均匀流，过流断面上的切应力呈直线分布，管壁处的切应力最大，管轴线处的切应力为零。

对于无压均匀流，按上面的方法，列力的平衡方程，可得出与式（1-2-9）和式（1-2-10）相同的结果。所以式（1-2-9）和式（1-2-10）对有压流和无压流均适用。

对于宽浅明渠均匀流，过流断面面积$A \approx bh$，湿周$\chi = b + 2h$，因为$b \gg 2h$，所以水力半径$R = h$，则宽浅明渠均匀流边壁切应力表达式可以写为：

$$\tau_0 = \rho g h J \tag{1-2-14}$$

设距渠底为y的平面，其过流断面面积$A \approx b(h-y)$，湿周$\chi = b + 2(h-y)$，因为$b \gg 2(h-y)$，所以水力半径$R' = y$，则宽浅明渠均匀流内部切应力表达式可以写为：

$$\tau = \rho g (h-y) J \tag{1-2-15}$$

比较式（1-2-14）和式（1-2-15）得：

$$\tau = \left(1 - \frac{y}{h}\right) \tau_0 \tag{1-2-16}$$

式（1-2-15）表明，宽浅明渠均匀流过水断面上切应力的分布仍为线性分布，水面上的切应力为零，渠底处为τ_0。

欲应用式（1-2-9）和式（1-2-10）求切应力τ或求沿程水头损失h_f，必须知道τ_0。根据实验研究结果，由量纲分析可得：

$$\tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho v^2 \tag{1-2-17}$$

将式（1-2-14）代入式（1-2-9），可得达西公式（1-2-5）。

对于圆管，水力半径$R = \frac{d}{4}$，故式（1-2-5）也可写作：

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \tag{1-2-18}$$

【例1-2-2】 输油管$d = 250$ mm，管长$l = 200$ m，测得管壁切应力$\tau_0 = 40$ N/m^2，试求：（1）在200 m管长上的水头损失；（2）在圆管半径$r = 100$ mm处的切应力。

解：（1）由式（1-2-9）得：

$$h_f = \frac{4\tau_0 l}{\rho g d} = \frac{4 \times 40 \times 200}{1\,000 \times 9.8 \times 0.25} \text{ m} = 13.1 \text{ m}$$

（2）由式（1－2－13）得：

$$\tau = \tau_0 \frac{r}{r_0} = 40 \times \frac{100}{125}\ \mathrm{N/m^2} = 32\ \mathrm{N/m^2}$$

第四节　层流运动

一、层流运动的流速分布

由均匀流基本方程建立沿程水头损失的计算公式，就必须研究切应力与速度之间的关系，对于圆管中层流，由牛顿内摩擦定律 $\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，作 $y = r_0 - r$ 的变换（如图 1－2－5 所示，y 为某点距管壁的距离）得：

$$\tau = -\mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} \tag{1-2-19}$$

将上式代入牛顿内摩擦定律，整理后得：

$$\mathrm{d}u = -\frac{\rho g J}{2\mu} r \mathrm{d}r$$

积分上式得：

$$u = -\frac{\rho g J}{4\mu} r^2 + C$$

由边界条件，当 $r = r_0$ 时，$u = 0$，得 $C = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2$，则：

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu}(r_0^2 - r^2) \tag{1-2-20}$$

式（1－2－20）表明，圆管中层流的流速分布为抛物线形分布，如图 1－2－5 所示。在管壁上，$r = r_0$，流速为零；当 $r = 0$ 时，轴线上流速取得最大值为：

$$u_{\max} = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2 \tag{1-2-21}$$

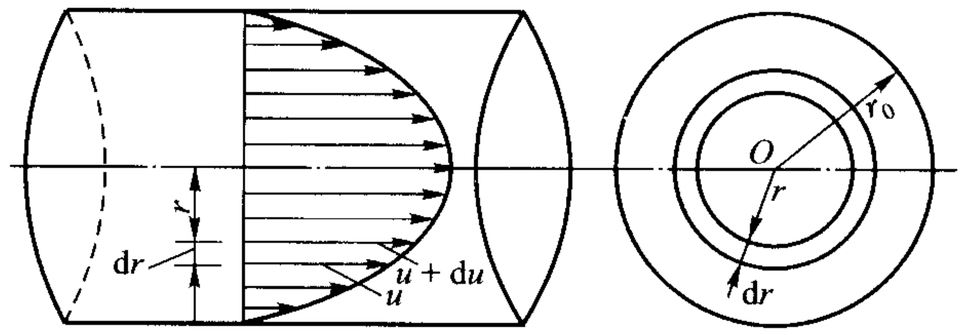


图 1－2－5　圆管中层流的流速分布

二、层流的沿程损失

圆管中层流的断面平均流速为：

$$v = \frac{Q}{A} = \frac{\int_A u \mathrm{d}A}{A} = \frac{\int_0^{r_0} 2u\pi r \mathrm{d}r}{A} = \frac{\rho g J}{8\mu} r_0^2 = \frac{\rho g J}{32\mu} d^2 = \frac{u_{\max}}{2} \tag{1-2-22}$$

将式（1－2－22）整理，得到：

$$J = \frac{32\mu v}{\rho g d^2} \text{ 或 } h_f = \frac{32\mu v l}{\rho g d^2} \tag{1-2-23}$$

式（1－2－23）即为计算圆管层流沿程水头损失的公式，表明圆管中层流的沿程损失与管流平均流速的一次方成正比，与雷诺实验完全一致。

如用达西公式 $h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$ 的形式来表示，式（1－2－23）可写为：

$$h_f = \frac{64\mu}{\rho g v} \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$$

因 $Re = \frac{\rho v d}{\mu}$，故有：

$$\lambda = \frac{64}{Re} \tag{1-2-24}$$

式（1-2-24）表明圆管中层流的阻力系数 λ 与 Re 成反比，与管壁粗糙程度无关。

【例 1-2-3】 管径为 100 mm，$\nu = 0.18\ \text{cm}^2/\text{s}$ 和 $\rho = 0.85\ \text{g/cm}^3$ 的油在管内以 $v = 6.35\ \text{cm/s}$ 的速度作层流运动，试求：（1）管中心处的流速；（2）沿程阻力系数 λ；（3）每米管长的沿程损失；（4）管壁的切应力 τ_0；（5）$r = 2\ \text{cm}$ 处的流速。

解：（1）管中心流速为：

$$u_{max} = 2v = 2 \times 6.35\ \text{cm/s} = 12.7\ \text{cm/s}$$

（2）沿程阻力系数 λ：

雷诺数：$Re = \frac{vd}{\nu} = \frac{6.35 \times 10}{0.18} = 353$

沿程阻力系数：$\lambda = \frac{64}{Re} = \frac{64}{353} = 0.181$

（3）每米管长的沿程损失：

$$h_f = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} = 0.181 \times \frac{1}{0.1} \times \frac{(0.063\ 5)^2}{2 \times 9.8}\ \text{m} = 0.000\ 37\ \text{m} = 0.037\ \text{cm}$$

（4）管壁的切应力 τ_0：

每米管长的沿程损失 $h_f = 0.000\ 37$ m，即水力坡度 $J = 0.000\ 37$，所以管壁的切应力：

$$\tau_0 = \rho g R J = \rho g J \frac{d}{4} = 0.85 \times 980 \times 0.000\ 37 \times \frac{10}{4}\ \text{g/cm} \cdot \text{s}^2 = 0.771\ \text{g/cm} \cdot \text{s}^2 = 0.077\ 1\ \text{N/m}^2$$

（5）$r = 2\ \text{cm}$ 处的流速：

当 $r = 2$ cm 时，由式（1-2-20）有：

$$u = \frac{\rho g J}{4\mu}(r_0^2 - r^2) = \frac{\rho g J}{4\mu} r_0^2 \left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = u_{max}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) = 12.7 \times \left(1 - \frac{2^2}{5^2}\right)\text{m/s} = 10.7\ \text{m/s}$$

第五节 湍流运动

一、湍流运动的分析方法

湍流运动与层流不同，湍流中，流体质点的速度、压强等运动要素在空间和时间上都具有随机性的脉动。如图 1-2-6 所示，在恒定均匀流流场中，采用激光测速仪测得质点通过某固定空间点 x 方向的瞬时流速对时间的曲线 $u_x(t)$，可以看出，流体质点的速度随时间变化，但在足够长的时段内，它始终在某一平均值不断跳动，这种跳动称为脉动。上下跳动的值 u'_x 称为脉动流速。图中直线 AB 即在 T 时段内，质点沿 x 方向的时均流速 $\overline{u}_x$，用数学关系式可表示为：

$$\overline{u}_x = \frac{1}{T}\int_T u_x(t)\,\mathrm{d}t \tag{1-2-25}$$

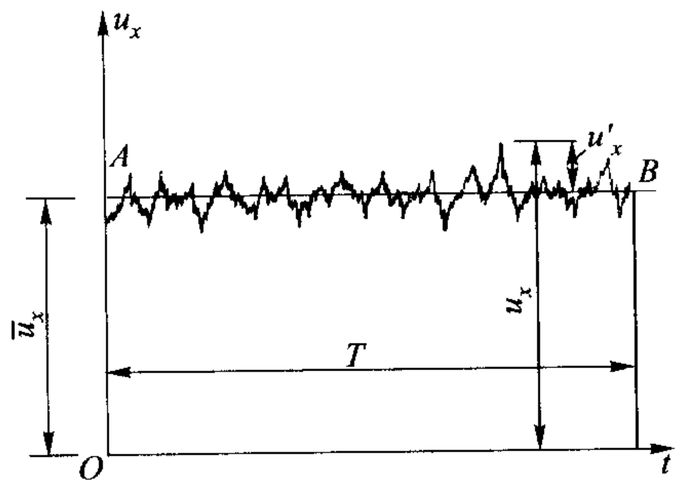


图 1-2-6 湍流运动的脉动

显然，瞬时流速是由时均流速和脉动流速两部分组成，在三维空间表示为：

$$\left.\begin{aligned} u_x &= \overline{u}_x + u'_x \\ u_y &= \overline{u}_y + u'_y \\ u_z &= \overline{u}_z + u'_z \end{aligned}\right\} \tag{1-2-26}$$

由式（1-2-25）可知，瞬时流速与时均流速之差为脉动流速，对于 x 向，即：

$$u'_x = u_x - \overline{u}_x \tag{1-2-27}$$

现在讨论脉动流速的时均值，对式（1-2-27）进行时间平均，即：

$$\overline{u'_x} = \frac{1}{T}\int_0^T u'_x \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u_x \mathrm{d}t - \frac{1}{T}\int_0^T \overline{u}_x \mathrm{d}t$$

由式（1-2-25）知 $\frac{1}{T}\int_0^T u_x \mathrm{d}t = \overline{u}_x$，因 $\overline{u}_x$ 为常数，所以，$\frac{1}{T}\int_0^T \overline{u}_x \mathrm{d}t = \overline{u}_x \frac{1}{T}\int_0^t \mathrm{d}t = \overline{u}_x$，故上式变为：

$$\overline{u'_x} = \frac{1}{T}\int_0^T u'_x \mathrm{d}t = \overline{u}_x - \overline{u}_x = 0 \tag{1-2-28}$$

式（1-2-28）表明湍流运动脉动流速 u'_x 的时均值为 0，同理 $u'_y = 0$，$u'_z = 0$。如此得到分离时均流速和脉动流速的方法，被称为时均法。时均法是研究湍流运动和化简湍流瞬时运动方程的主要手段。同理，瞬时压强也可以表示为 $p = \overline{p} + p'$。性质与瞬时流速相同。只要时均流速和时均压强不随时间变化，可以按时均意义上的恒定流动处理。

建立了时均的概念后，以前建立的恒定流与非恒定流、均匀流与非均匀流、流线与迹线等概念都适用，对于湍流只不过都具有时均的含义。

二、湍流附加切应力

基于时均法的研究思路，湍流运动的瞬时切应力 τ 也可以表示为时均流速引起的黏性切应力与脉动流速引起的附加切应力（惯性切应力）之和，即 $\tau = \tau_1 + \tau_2$。其中黏性切应力 τ_1 由牛顿内摩擦定律确定，即：

$$\tau_1 = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} \tag{1-2-29}$$

对于附加切应力可用普朗特动量传递学说来建立，这一学说认为流体质点在横向脉动过程中瞬时流速保持不变，其动量也保持不变，而到达新位置后，其动量突然改变为和新位置上流体质点相同的动量，这样，在流层之间就发生了质量交换，从而产生了动量的改变。由动量定理，这种流体质点动量的变化，在流层分界面上产生了附加切应力 $\overline{\tau}_2$。

现用动量方程说明，图 1-2-7 所示为明渠二元均匀流中流体质点沿 y 向脉动示意图。

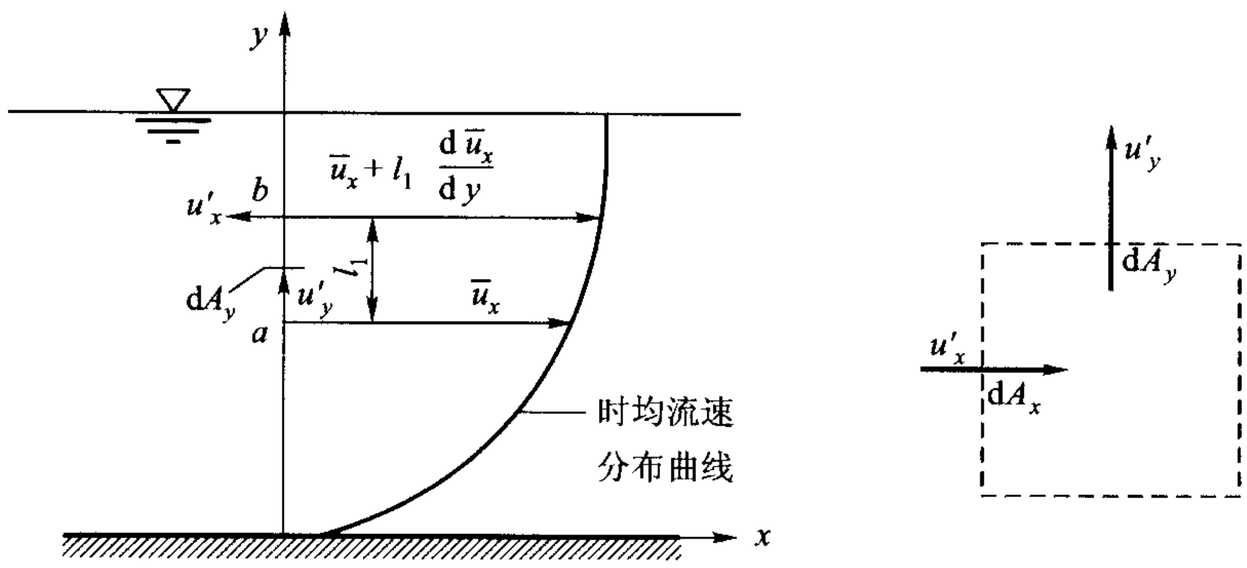


图 1-2-7　湍流中流体质点的脉动

在空间 a 点处，流体质点具有脉动流速 u'_y，在 dt 时段内，通过微小面积 dA_y 的脉动质量为：

$$\Delta m = \rho dA_y u'_y dt \tag{1-2-30}$$

处于 a 层的流体质点具有 x 向的时均流速$\overline{u}_x$，当它进入 b 层就显示出脉动流速 u'_x，脉动流速 u'_x 的大小等于 a、b 两层流体质点时均流速的差。在水流方向的动量增量为：

$$mu'_x = \rho dA_y u'_y u'_x dt$$

此动量等于湍流附加切应力的冲量，即：

$$\Delta T \cdot dt = \rho dA_y u'_y u'_x dt$$

所以，湍流附加切应力 $\tau_2 = \dfrac{\Delta T}{dA_y} = \rho u'_y u'_x$，取时均值得：

$$\overline{\tau}_2 = \rho \overline{u'_x u'_y} \tag{1-2-31}$$

现在取基元体（图 1-2-7），分析横向脉动流速 u'_x 和纵向脉动流速 u'_y 的关系。根据连续性原理，在 dt 时段内，在 dA_x 面流入的质量为 $\rho dA_x u'_x dt$，则必有质量 $\rho dA_y u'_y dt$ 从 dA_y 面流出，即 $\rho dA_x u'_x dt + \rho dA_y u'_y dt = 0$，于是：

$$u'_x = -\frac{dA_y}{dA_x} u'_y \tag{1-2-32}$$

由式（1-2-32）可知，横向脉动流速 u'_x 和纵向脉动流速 u'_y 成比例，dA_x 与 dA_y 为正值，因此，u'_x 与 u'_y 符号相反。为使湍流附加切应力以正值出现，在式（1-2-31）中加负号得：

$$\overline{\tau}_2 = -\rho \overline{u'_x u'_y} \tag{1-2-33}$$

式（1-2-33）为用脉动流速表示的湍流附加切应力基本表达式。它表明附加切应力与黏性切应力不同，它与流体的黏性无直接关系，只与流体密度和脉动强度有关，是由流体微团惯性引起的，因此又称$\overline{\tau}_2$为惯性切应力或雷诺应力。

在湍流状态下，湍流切应力为黏性切应力与附加切应力之和，即：

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} + (-\rho \overline{u'_x u'_y}) \tag{1-2-34}$$

上式两部分切应力的大小与流动情况有关，雷诺数较小时，黏性占主导，前者占主要地位；雷诺数增大，脉动加剧，后者逐渐增大，充分湍流时前者可略去不计。

普兰特设想流体质点的湍流运动与气体分子运动相类似，即流体质点由某流速的流层脉动到另一流速的流层，也需运行一段与时均流速垂直的距离 l_1 后才与周围的质点发生动量交换，l_1 被称为混合长度（图 1-2-7）。由图 1-2-7 可知，处于 a 层的流体质点具有 x 向的时均流速$\overline{u}_x$，当它进入 b 层就显示出脉动流速 u'_x，脉动流速 u'_x 的大小等于 a、b 两层流体质点时均流速的差有关，且与两层流体质点时均流速的差成比例，（为简化，以后时均水力要素不再加横杠）即：

$$u'_x = \pm c_1 l_1 \frac{du_x}{dy}$$

由式（1-2-32）知 u'_x 和 u'_y 具有同一量级，且符号相反，故：

$$u'_y = \mp c_2 l_1 \frac{du_x}{dy}$$

所以：

$$\tau_2 = -\rho u'_x u'_y = \rho c_1 c_2 (l_1)^2 \left(\frac{du_x}{dy}\right)^2$$

略去下标，并令 $c_1 c_2 l_1^2 = l^2$，得湍流附加切应力表达式：

$$\tau_2 = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{1-2-35}$$

式（1-2-35）中 l 也称为混合长度，它正比于质点到边壁的距离 y，即 $l = \kappa y$，κ 为一常数，称为卡门（Karman）通用常数，实验得出，$\kappa \approx 0.4$。

为简便计，以后所有运动要素的时均值都略去横杠，湍流时均切应力公式为：

$$\tau = \mu \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \rho l^2 \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\right)^2 \tag{1-2-36}$$

三、湍流黏性底层

由于流体具有黏滞性，有一极薄层的流体附着在固体边壁上，流速为零。在紧靠固体边界附近的地方，脉动流速很小，由式（1-2-36）可知，混合长度 l 很小的地方附加切应力很小，黏性占主导地位，流速梯度却很大，其流态属于层流，如图 1-2-8 所示，在紧靠固体边界附近的这一薄层成为黏性底层。黏性底层以外为湍流流核，在黏性底层与湍流之间存在很薄的过渡层，因其意义不大，可不考虑。黏性底层的厚度 δ，可由层流流速分析和牛顿内摩擦定律及实验资料求得：

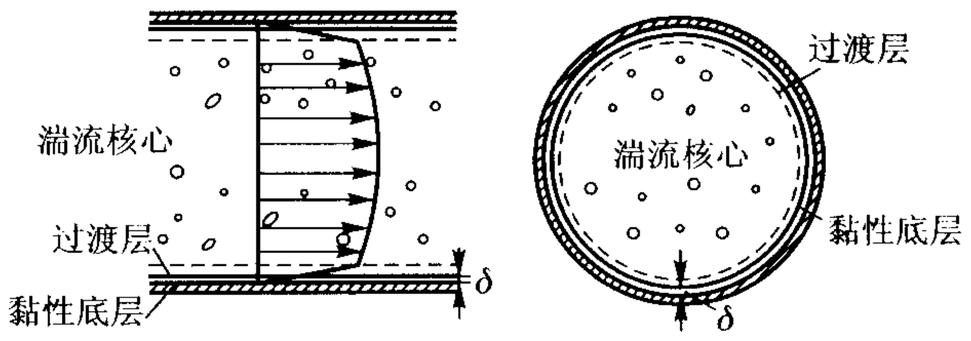


图 1-2-8　黏性底层与湍流核心

$$\delta = \frac{32.8d}{Re\sqrt{\lambda}} \tag{1-2-37}$$

上式即为黏性底层厚度的公式。

黏性底层的厚度虽很薄，一般仅有十分之几毫米，但它对水流阻力有重大影响。因为任何固体边界受加工条件的影响，总会粗糙不平，粗糙表面平均凸起高度称为绝对粗糙度 K。

由式（1-2-37）可知，黏性底层的厚度 δ 与 λ 有关，即与液流型态有关。当 Re 较小时，黏性底层的厚度 δ 可以大于绝对粗糙度 K 若干倍，粗糙凸起高度完全被黏性底层掩盖，粗糙度对湍流流核不起作用，从流体力学观点看，水流像在光滑面上运动一样，此种情况称为“水力光滑面”［图 1-2-9（a）］。

反之，当 Re 较大时，黏性底层很薄，粗糙凸起高度几乎全部暴露，粗糙凸起高度对湍流有重大影响，当湍流流核绕过凸起高度时将形成小旋涡［图 1-2-9（c）］，从而加剧湍流的脉动作用，水流阻力增大，这种情况称为“水力粗糙面”。

介于二者之间，称为湍流过渡区。

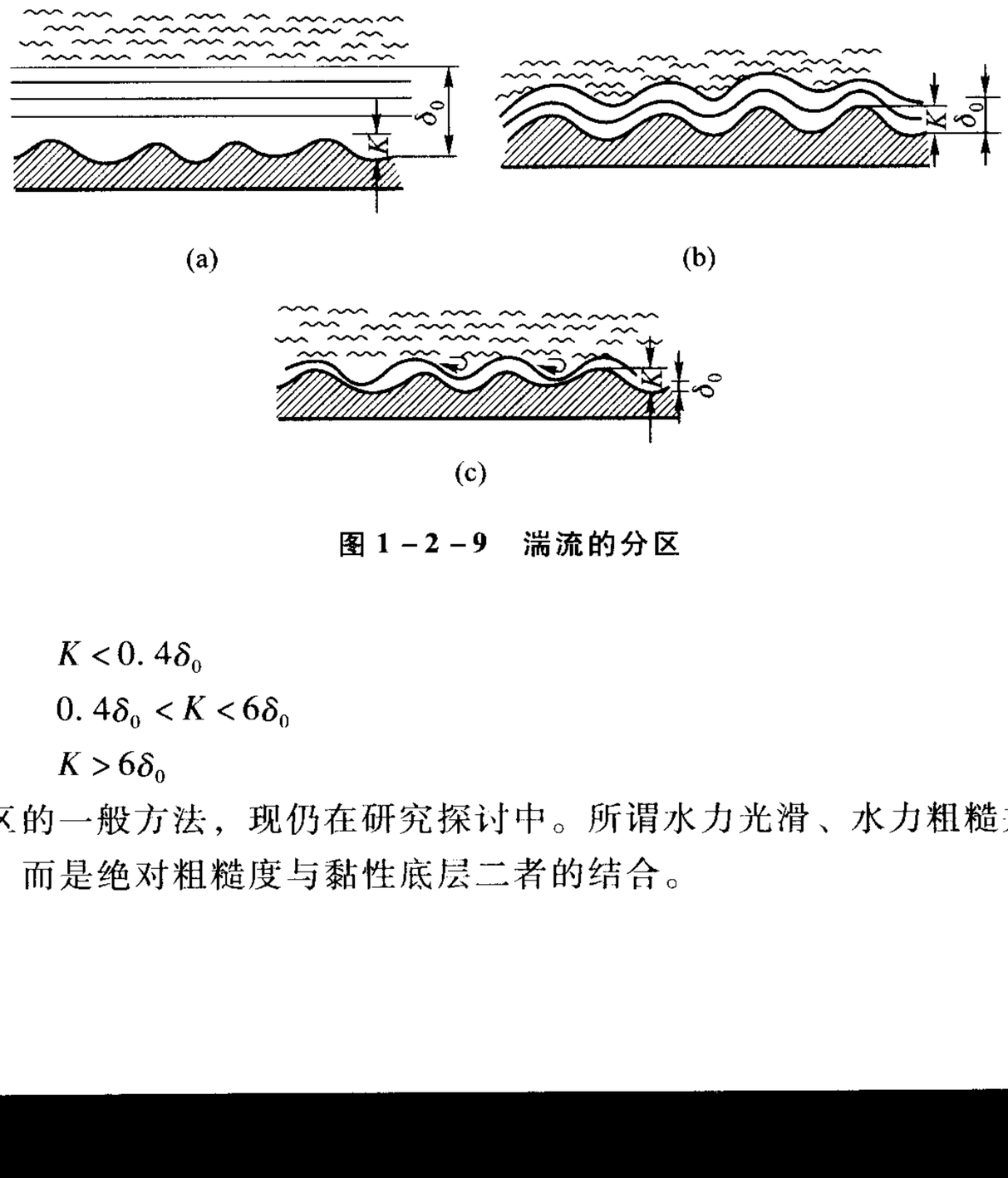


图 1-2-9　湍流的分区

湍流分区规定：

水力光滑区　　$K < 0.4\delta_0$

过渡粗糙区　　$0.4\delta_0 < K < 6\delta_0$

水力粗糙区　　$K > 6\delta_0$

以上是湍流的分区的一般方法，现仍在研究探讨中。所谓水力光滑、水力粗糙并非完全取决于固体边界的几何光滑或粗糙，而是绝对粗糙度与黏性底层二者的结合。

四、湍流速度分布

湍流过流断面上的流速分布是推导湍流的阻力系数计算公式的理论基础，现根据湍流混合长度理论推导湍流的流速分布。

当充分湍流，雷诺数足够大时，附加切应力占主导地位，式（1－2－36）中黏性切应力可略去不计，则：

$$\tau = \rho l^2 \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \tag{1-2-38}$$

又根据式（1－2－13）$\tau = \frac{\tau_0}{r_0} r$，得：

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) \tag{1-2-39}$$

由萨特克维奇整理尼古拉兹实验资料提出的公式，混合长度为：

$$l = ky\sqrt{1 - \frac{y}{r_0}} \tag{1-2-40}$$

将式（1－2－40）代入式（1－2－38），与式（1－2－39）联立得：

$$\tau_0 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right) = \rho k^2 y^2 \left(1 - \frac{y}{r_0}\right)\left(\frac{du}{dy}\right)^2$$

经整理得：

$$du = \frac{u_*}{k}\frac{dy}{y},$$

积分后得：

$$u = \frac{u_*}{k}\ln y + c_1 \tag{1-2-41}$$

将 $k = 0.4$ 代入上式，并利用换底公式，得：

$$u = 5.75 u_* \lg y + c_1 \tag{1-2-42}$$

式（1－2－41）表明，湍流过流断面上的流速分布是按对数规律分布的。因为湍流中由于流体质点相互掺混、碰撞，从而产生流体质点动量的传递，动量的传递的结果，使得流体质点的动量趋于一致，从而湍流流速分布均匀化了（图 1－2－10）。这也是在工程中动能修正系数 α、动量修正系数 β 取 1.0 的原因。

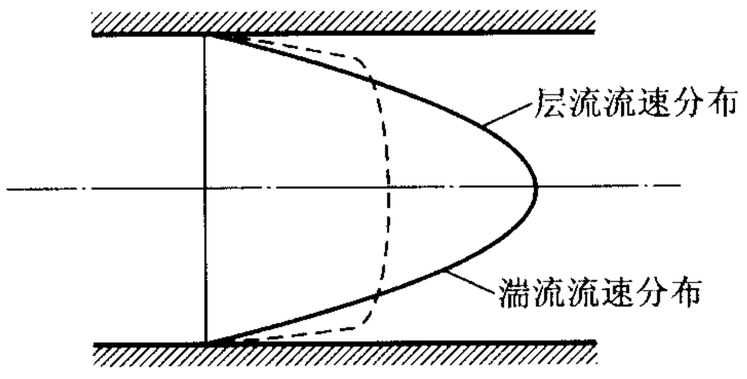


图 1－2－10 湍流流速分布

第六节 沿程阻力系数的变化规律及其影响因素

一、尼古拉兹实验

为了探索沿程阻力系数 λ 的变化规律，尼古拉兹于 1932—1933 年采用人工加糙的方法，将多种粒径的砂粒，分别粘贴在不同管径的管道内壁上，得到了 $\frac{\Delta}{d} = \frac{1}{30} \sim \frac{1}{1\,014}$ 六种不同的相对粗糙度的实验管道（图 1－2－11），图中 K 为砂子粒径，作为绝对粗糙度，$\frac{K}{d}$ 称为相对粗糙度，$\frac{d}{K}$ 称为相对光滑度。尼古拉

兹在实验中，量测流量、沿程水头损失 h_f 及水温，取得了大量资料，计算出断面平均流速 v、雷诺数 Re 和 λ 值。把实验结果点绘在双对数坐标纸上，得到图 1－2－12。根据 $Re \sim \lambda$ 的变化特征，图中曲线可分为五个区：

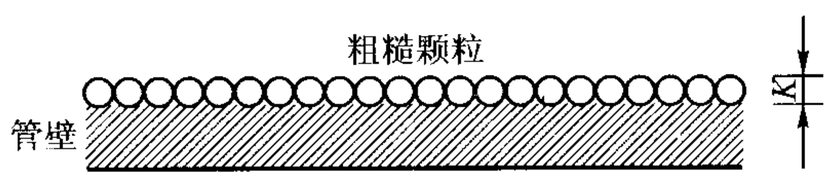


图 1－2－11　管壁的尼古拉兹粗糙度

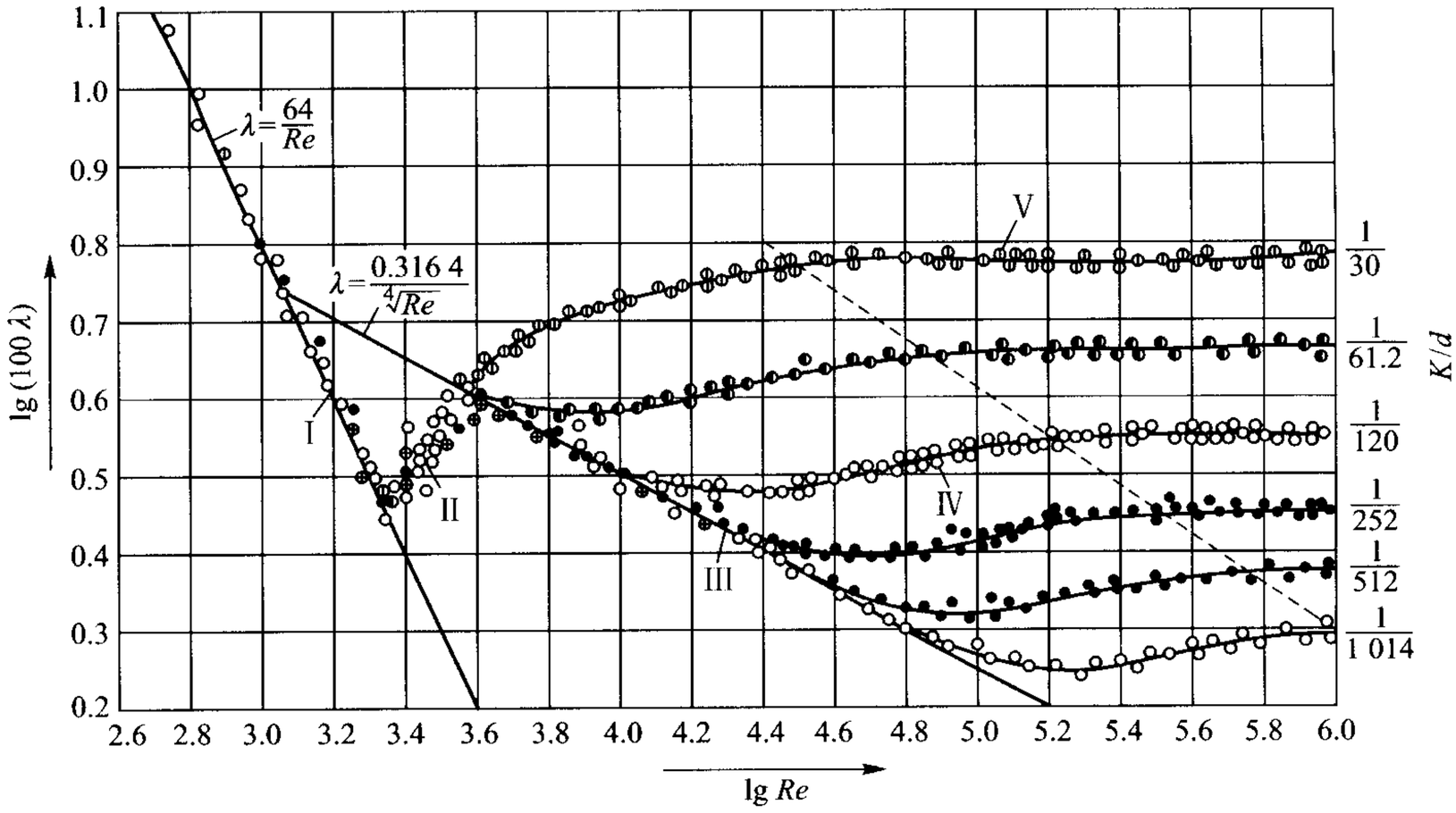


图 1－2－12　尼古拉兹实验曲线

第Ⅰ区为层流区。当 $Re < 2\,300$ 时，所有的实验点，不论其相对粗糙度如何，都集中在一根直线上，且 $\lambda = \dfrac{64}{Re}$，表明 λ 仅随 Re 变化，而与相对粗糙度 $\dfrac{K}{d}$ 无关。因此，尼古拉兹实验证实了由理论分析得到的层流沿程损失计算公式。

第Ⅱ区为层流向湍流的过渡区。在 $2\,300 < Re < 4\,000$ 范围内 λ 随 Re 的增大而增大，而与相对粗糙度 $\dfrac{K}{d}$ 无关。此区域雷诺数范围很窄，实用意义不大。

第Ⅲ区为水力光滑区。不同相对粗糙度的实验点，起初都集中在直线Ⅲ上。随着 Re 的加大，相对粗糙度较大的实验点，在较低的 Re 时就偏离了直线Ⅲ，而相对粗糙度较小的实验点，要在较大的 Re 时才偏离光滑区，即不同相对粗糙度的管道其水力光滑的区域不同。在水力光滑区，λ 只与 Re 有关，而与相对粗糙度 $\dfrac{K}{d}$ 无关。

第Ⅳ区为过渡粗糙区。在直线Ⅲ与虚线之间的范围内，不同相对粗糙度的实验点各自分散成一条波状的曲线。说明，λ 既与 Re 有关，又与相对粗糙度 $\dfrac{K}{d}$ 有关。

第Ⅴ区为粗糙区。为虚线以右的范围，不同相对粗糙度的实验点，分别落在与横坐标平行的直线上。说明，λ 只与相对粗糙度 $\dfrac{K}{d}$ 有关，而与 Re 无关。在粗糙区 λ 为常数，由达西公式可知，沿程损失与流速的平方成正比。因此，第Ⅴ区又称为阻力平方区。

沿程损失的阻力系数的变化规律可归纳如下：

层流区 $\lambda = f_1(Re)$

过渡区 $\lambda = f_2(Re)$

水力光滑区 $\lambda = f_3(Re)$

过渡粗糙区 $\lambda = f_4\left(Re, \frac{K}{d}\right)$

粗糙区（阻力平方区） $\lambda = f_3\left(\frac{K}{d}\right)$

尼古拉兹实验虽然是在人工加糙的管道中完成的，但是，它全面揭示了不同流态下沿程阻力系数 λ 与雷诺数 Re 和相对粗糙度 $\frac{K}{d}$ 的关系。从而说明，确定 λ 的各种经验公式和半经验公式在一定范围内适用。

二、人工加糙管的沿程阻力系数的半经验公式

综合尼古拉兹实验成果和普兰特理论，对湍流分区及沿程阻力系数的半经验公式分数如下：

1. 水力光滑区

尼古拉兹光滑管公式：

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\lg(Re\sqrt{\lambda}) - 0.8 \tag{1-2-43}$$

适用范围：$Re = 5 \times 10^4 \sim 3 \times 10^6$；适用条件 $4\,000 < Re < 10^5$。

2. 粗糙区

$$\lambda = \frac{1}{\left[2\lg\left(\frac{r_0}{K}\right) + 1.74\right]^2} \tag{1-2-44}$$

此式为尼古拉兹粗糙管公式，适用范围：$Re > \frac{383}{\sqrt{\lambda}}\left(\frac{r_0}{K}\right)$。

3. 过渡粗糙区

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left(\frac{K}{3.7d} + \frac{2.51}{Re\sqrt{\lambda}}\right) \tag{1-2-45}$$

式（1-2-45）是柯列勃洛克-怀特（Colebrook-White）提出的，其适用范围 $3\,000 < Re < 10^6$。上式实际上为光滑区公式和粗糙区公式的结合。当 Re 值较小时，公式右边括号内第二项很大，第一项相对很小，可略去不计，这样，此式就接近光滑区公式（1-2-43）。反之，当值 Re 很大时，括号内第二项很小，可略去不计，此式就接近粗糙区公式（1-2-44）。

三、莫迪图

工业管道壁面的粗糙是凹凸不平的，它不像人工粗糙那样有明显的凸起高度。工业管道与人工加糙的管道沿程阻力系数相比，在光滑区和粗糙区它们的 λ 值实验结果相符。因此，式（1-2-43）和式（1-2-44）也可以用于工业管道。莫迪（Moody）根据已有的研究成果以及通过柯列勃洛克-怀特公式计算，1944 年发表了他绘制的沿程阻力系数 λ 与雷诺数 Re 的关系曲线，通常称为**莫迪图**，如图 1-2-13 所示。

在工程流体力学中，把人工粗糙作为度量管壁粗糙的基本标准，提出当量粗糙高度的概念。所谓当量粗糙高度，就是指通过工业管道在湍流粗糙区沿程水头损失实验，把实验结果与人工粗糙管实验结果比较，把 λ 值相等的同直径的砂粒粗糙高度作为此类工业管道的当量粗糙高度，仍以符号 Δ 来表示，各种

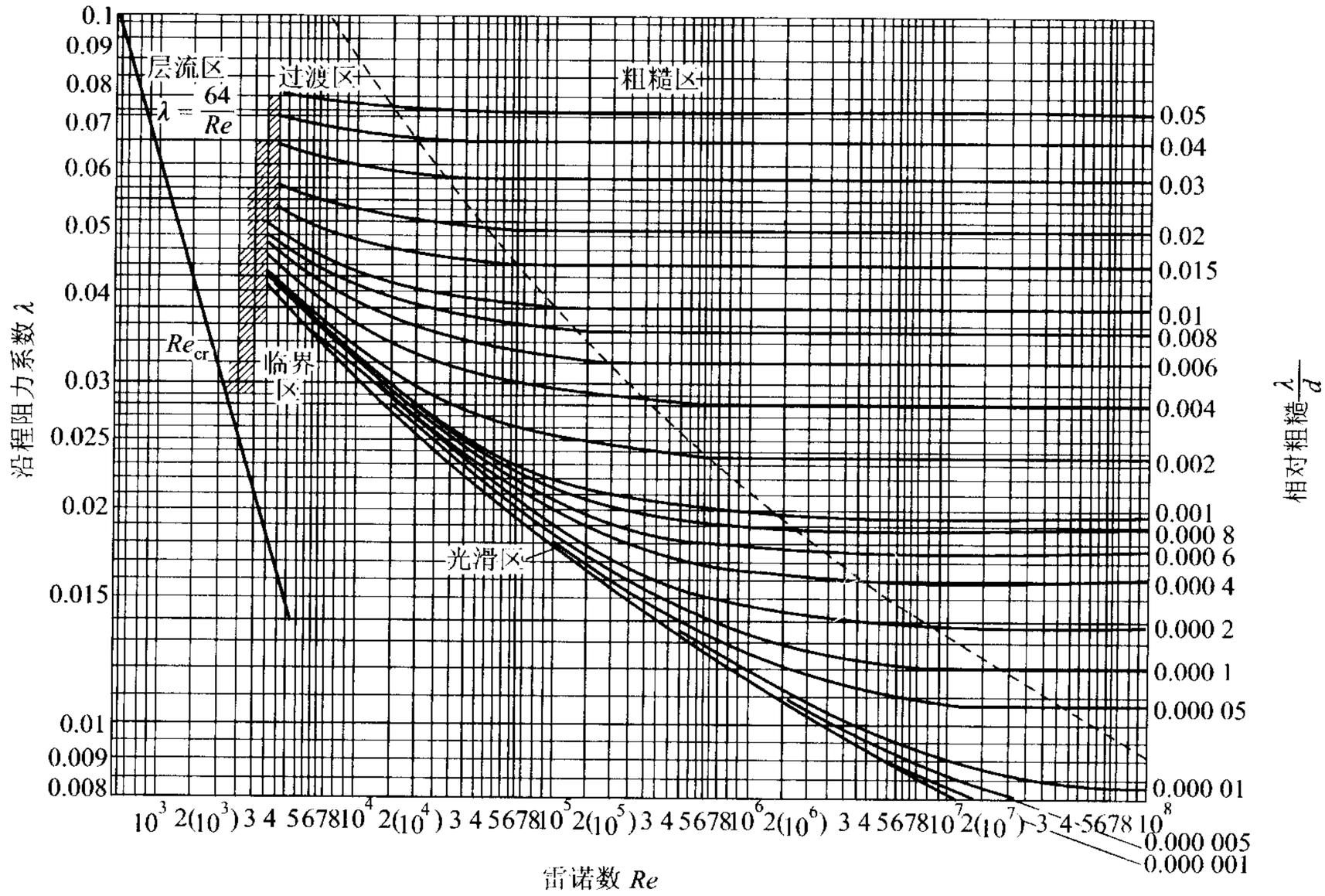


图 1－2－13　莫迪图

壁面当量粗糙度 Δ 值可查相关手册得到。为了叙述方便，“当量”两字可省略。

图 1－2－14 为人工粗糙管和工业管道 λ 曲线的比较。图中实线 A 为人工加糙管道实验曲线，虚线 B 和 C 为工业管道实验曲线。由图可见：

（1）在湍流光滑区两种管道的实验曲线是重合的。由于工业管道的粗糙高度不一致，在较小雷诺数时，就有一些较大的凸起暴露于湍流流核，使实际的 λ 曲线较早地脱离湍流光滑区。

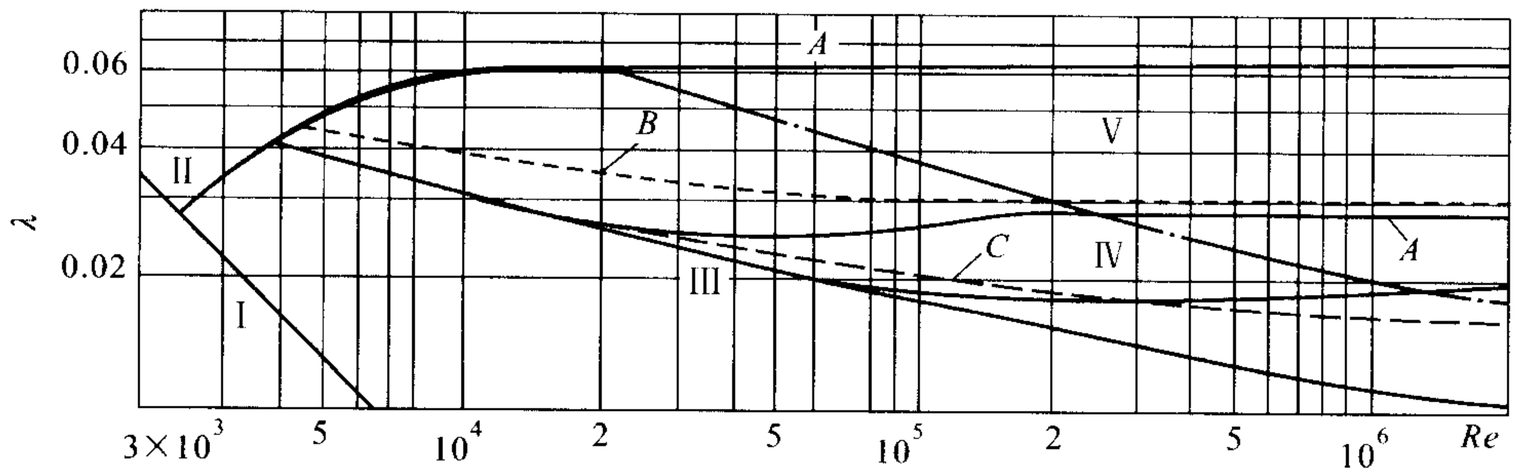


图 1－2－14　人工粗糙管和工业管道 λ 曲线的比较

（2）在过渡粗糙区两种管道的实验曲线存在较大的差异。当 Re 增加时，工业管道的阻力曲线平滑下降，而人工加糙管道的阻力曲线则有上升部分。这是由于人工管的粗糙是均匀的，随着 Re 的增大，黏性底层厚度减小，达到一定程度时，它们同时伸入湍流流核，使从光滑区到粗糙区的过渡比较突然。同时，暴露在湍流流核内的粗糙部分随着 Re 的增长而不断增大，因而过渡区阻力曲线变化剧烈，沿程损失急剧上升。而工业管道的粗糙是不均匀的，使这种过渡是逐渐进行的，因此过渡区阻力曲线变化比较平缓。

（3）在粗糙区，两种管道的实验曲线都与横坐标轴平行。这一特征给出了将工业管道的不均匀粗糙换算为当量粗糙度的可能性。从而可以定量度量工业管道的粗糙高度，并且也可以将人工管道在光滑区和粗糙区整理出来的有关公式直接应用于工业管道。

通过对尼古拉兹实验曲线与莫迪图比较，可将人工加糙管实验结果和工业管的莫迪图有机地联系起来。莫迪图可用来确定工业管道的沿程阻力系数 λ，其方法是，根据管材查出其当量粗糙度 Δ 值，再计算

出相对粗糙度$\frac{\Delta}{d}$及雷诺数，据此在图 1-2-13 中查得 λ 值。

工程上也会用到非圆管道输送流体的情况，如通风管道等。应用上述公式时，只需把非圆管道换算为当量直径 d_e 就可以了，所有圆形管道的公式、图表仍然适用。当量直径 d_e 是指在圆管与非圆管水力半径相等的条件下，圆管的直径被定义为非圆管的**当量直径**。

【例 1-2-4】 某供水管道，输送水温 20 ℃，已知管内流速 $v=0.6$ m/s，管长 $l=100$ m，直径 $d=50$ mm，管壁粗糙度 $K=0.2$ mm。试求该管道的沿程水头损失。

解：

(1) 20 ℃水温时，水的运动黏度为 $\nu=0.010\ \text{cm}^2/\text{s}$

$$\text{雷诺数 } Re=\frac{vd}{\nu}=\frac{60\times5}{0.010\ 1}=29\ 703>2\ 300\ \text{（湍流）}$$

用莫迪图查 λ 值，$\frac{K}{d}=\frac{0.2}{50}=0.004$ 时，得 $\lambda=0.029$（对应粗糙区），故：

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.029\times\frac{100}{0.05}\frac{0.6^2}{2\times9.8}\text{m}=1.065\ \text{m}$$

(2) 用经验公式（1-2-44）校核：

$$\lambda=\frac{1}{\left[2\lg\left(\frac{r_0}{\Delta}\right)+1.74\right]^2}=\frac{1}{\left[2\lg\left(\frac{2.5}{0.02}\right)+1.74\right]^2}=0.028\ 4$$

$$h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}=0.028\ 4\times\frac{100}{0.05}\frac{0.6^2}{2\times9.8}\text{m}=1.043\ \text{m}$$

两结果相近，说明了在充分湍流的粗糙区，半经验公式的实用性。

第七节 局部水头损失

在实际工程上管道往往由许多管径不同的管段组成，连接形式有串联、并联，即使是等直径管道，也可能有弯管、阀门。在渠道中也常有弯道、渐变段、拦污栅等。在流体流经这些局部突变处时，水流内部的流速分布、压强会发生改变，即水流内部结构在发生改变，形成旋涡区，造成形状阻力（压差阻力），伴随着能量损失。

局部阻力系数的计算应用理论求解相当困难，主要是水流条件复杂，固体边界上的动水压强不好确定，一般情况下通过实验确定。

计算局部损失的公式统一为：

$$h_j=\zeta\frac{v^2}{2g}\tag{1-2-46}$$

式（1-2-46）中，ζ 为局部阻力系数值，取决于流动的雷诺数及产生局部阻力处的几何形状。但由于局部阻碍处的流动受到很大干扰，很容易进入阻力平方区，所以 ζ 值往往只决定于几何形状，而与 Re 数无关，也就是说，计算局部损失时一般无需判断流态。各种管件、构件明渠扩散段、收缩段的局部阻力系数可查相关资料。

只有少数几种情况可以用理论作近似分析，如突然扩大处的局部损失，通过能量方程、动量方程及连续性方程联合运用，可推导得出局部损失的表达式（推导从略）：

$$h_j=\frac{(v_1-v_2)^2}{2g}\tag{1-2-47}$$

上式表明，突然扩大处的局部损失等于以平均流速差计算的流速水头。把式（1-2-47）变换成以某一

流速水头表示的局部损失，将连续方程 $v_1A_1 = v_2A_2$ 代入得：

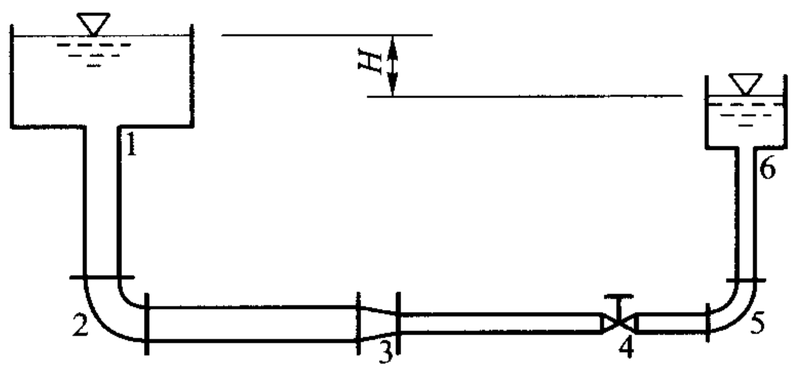
$$\left.\begin{aligned} h_j &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \frac{v_1^2}{2g} = \zeta_1 \frac{v_1^2}{2g} \\ h_j &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_2 \frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}\right\} \tag{1-2-48}$$

突然扩大的局部阻力系数表示为：

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ \zeta_2 &= \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{1-2-49}$$

突然扩大前后断面有不同的断面平均流速，因而，有相应的局部阻力系数。计算时选用的阻力系数必须与流速相适应。当液体从管道流入断面很大的水域时，$\frac{A_1}{A_2} \approx 0$，$\zeta_1 = 1$。

【例 1-2-5】 两水箱通过两段不同直径的管道相连接，如例题1-2-5图所示，1-3 管段长 $l_1 = 10$ m，直径 $d_1 = 200$ mm，$\lambda_1 = 0.019$；3-6 管段长 $l_2 = 10$ m，$d_2 = 100$ mm，$\lambda_2 = 0.018$。管路中的局部阻力有：1 为管道入口；2 和 5 为 90°煨弯弯头；3 为渐缩管（$\theta = 8°$）；4 为闸阀；6 为管道出口。若输送流量 $Q = 20$ L/s，试求水箱水面的高差 H 应为多少？



例题 1-2-5 图

解：两管段中的流速为：

$$v_1 = \frac{4Q}{\pi d_1^2} = \frac{4 \times 20 \times 10^{-3}}{3.14 \times 0.2^2}\ \text{m/s} = 0.64\ \text{m/s}$$

$$v_2 = v_1\left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 = 0.64 \times \left(\frac{200}{100}\right)^2\ \text{m/s} = 2.56\ \text{m/s}$$

由两水箱水面的能量方程得：

$$\begin{aligned} H &= (h_f + \sum h_j)_{1-3} + (h_f + \sum h_j)_{3-6} \\ &= \left(\lambda_1 \frac{l_1}{d_1} + \zeta_1 + \zeta_2\right)\frac{v_1^2}{2g} + \left(\lambda_2 \frac{l_2}{d_2} + \zeta_3 + \zeta_4 + \zeta_5 + \zeta_6\right)\frac{v_2^2}{2g} \end{aligned}$$

查表得 $\zeta_1 = 0.5$，$\zeta_2 = \zeta_5 = 0.5$，$\zeta_4 = 0.5$，$\zeta_3 = 0.024$；$\zeta_6 = 1.0$。将数据代入，得：

$$H = \left(0.019 \times \frac{10}{0.2} + 0.5 + 0.5\right) \times \frac{0.64^2}{2 \times 9.8}\ \text{m} + \left(0.018 \times \frac{10}{0.1} + 0.024 + 0.5 + 0.5 + 1.0\right) \times \frac{2.56^2}{2 \times 9.8}\ \text{m}$$

$$= 0.039\ \text{m} + 1.262\ \text{m} = 1.301\ \text{m}$$

所以，两水箱水面高差为 1.301 m。

第八节　减少阻力的措施

减阻在节约能源上意义重大，是流体力学中的重要研究课题。减小管中流体运动的阻力有两条途径。一是调整流体外部边界，改善边壁对流动的影响；二是在流体内部加入一定的添加剂，使其影响流体运动的内部结构，实现减阻的目的。

改善边壁的减阻措施有：

一是减小管壁的粗糙度，或用柔性边壁代替刚性边壁减少沿程阻力。

二是通过改进边界条件，防止或推迟流体于边壁的分离，避免旋涡区的形成或减小旋涡区的大小和强

度。例如：

（1）管道进口局部阻力系数：内插管进口 $\zeta=1.0$［图 1－2－15（a）］；

平顺进口，$\frac{r}{d}=0.2$，$\zeta=0.03$［图 1－2－15（b）］；收缩进口，$\alpha=40°\sim80°$，$\zeta=0.1\sim0.2$［图 1－2－15（c）］。

（2）渐扩管和突扩管局部阻力系数：扩散较大的渐扩管阻力系数大，如制成图 1－2－16（a）的形式，阻力系数约减小$\frac{1}{2}$；突扩管制成图 1－2－16（b）的形式，阻力系数也会减小。

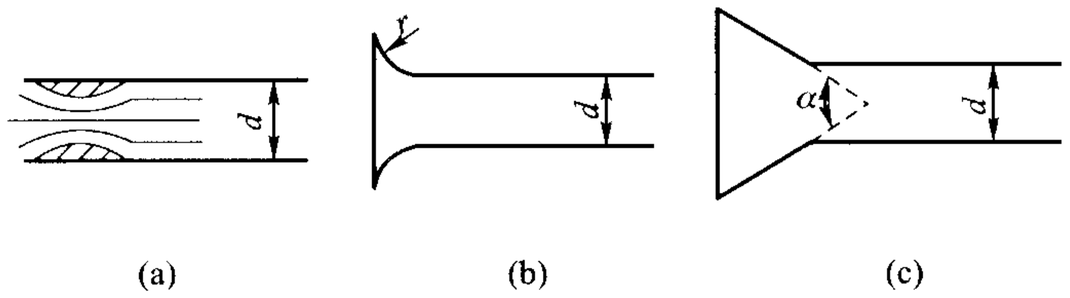


图 1－2－15 进口阻力系数

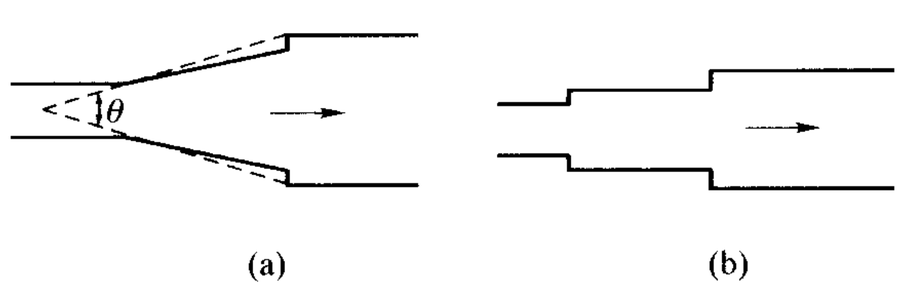


图 1－2－16 突扩管减阻

（3）弯管局部阻力系数：弯管的阻力系数在一定范围内随曲率半径的增大而减小。对于断面大的弯管，可在弯管内布置一组导叶，以减少旋涡区和二次流，减小阻力，如图 1－2－17 所示。

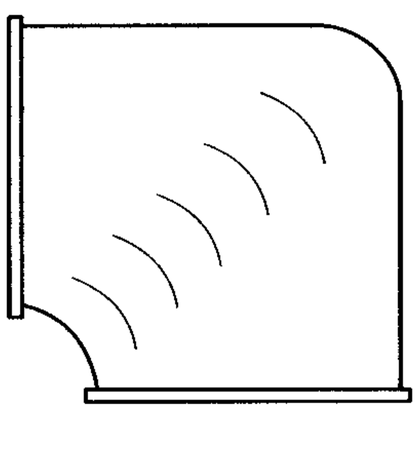


图 1－2－17 装有导叶的弯管

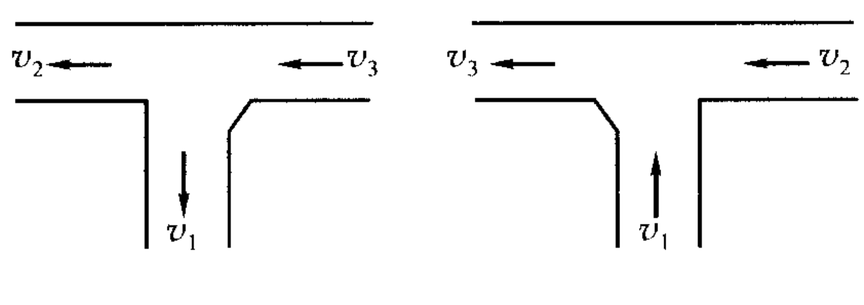


图 1－2－18 三通减阻

（4）三通：尽可能减小支管与合流管间的夹角，减小局部阻力。如图 1－2－18 所示的“T”折角切割的三通，斜角为 45°，合流时的 ζ_{1-3}和 ζ_{2-3}减小 30%～50%；分流时 ζ_{3-1}减小 20%～30%，但 ζ_{3-2}变化不大。

思 考 题

1－2－1 能量损失有几种形式？产生能量损失的物理原因是什么？

1－2－2 雷诺数 Re 有什么物理意义？它为什么能起判别流态的作用？

1－2－3 当输水管直径一定时，随流量增大，雷诺数是增大还是减少？当输水管流量一定时，随管径加大，雷诺数是增大还是减少？

1－2－4 两个不同管径的管道，通过不同黏滞性的液体，它们的临界雷诺数是否相同？

1－2－5 湍流中瞬时流速、脉动流速、时均流速、断面平均流速怎么区分？

1－2－6 绝对粗糙度为一定值的管道，为什么当 Re 数较小时，可能是水力光滑管，而当数 Re 较大时又可能是水力粗糙管？是否壁面光滑的管一定是水力光滑管，壁面粗糙的一定是水力粗糙管，为什么？

1－2－7 试述尼古拉兹实验结果，层流、湍流中各个流区的 λ 与 Re 和$\frac{\Delta}{d}$的关系怎样？

1－2－8 有两根管道，直径 d、长度 l 和绝对粗糙度 Δ 均相同，一根输送水，另一根输送油，试问：

（1）当两管道中液流的流速相等，其沿程水头损失 h_f 是否相等？

（2）两管道中液流的 Re 相等，其沿程水头损失 h_f 是否相等？

1－2－9 减小管中流体运动的阻力有哪些途径？

习　题

1-2-1　圆管直径 $d=10$ mm，管中水流流速 $v=0.2$ m/s，水温 $t=10$ ℃，动力黏度 $\mu=1.034\times10^{-3}$ Pa·s。试判别其液流型态：(　　)

A 层流　　B 湍流　　C 急流　　D 缓流

1-2-2　断面为矩形的排水沟，底宽 $b=200$ cm，水深 $h=35$ cm，流量 $Q=0.105$ m³/s，水流为恒定均匀流，水温 $t=15$ ℃，运动黏度 $\nu=1.138\times10^{-6}$ m²/s。试判别其液流型态：(　　)

A 层流　　B 湍流　　C 临界流　　D 条件不足

1-2-3　某低速送风管，管道断面为矩形，尺寸为长 $a=300$ mm，宽 $b=200$ mm，管中风速 $v=1.5$ m/s，空气的运动黏度 $\nu=16.6\times10^{-6}$ m²/s。试判别气流流态：(　　)

A 层流　　B 湍流　　C 急流　　D 缓流

1-2-4　某油管输送流量 $Q=5.67\times10^{-3}$ m³/s 的中等燃料油，其运动黏度 $\nu=6.08\times10^{-6}$ m²/s，Re 取2 000。试求保持为层流状态的最大管径 d：(　　)

A $d=594$ mm　　B $d=750$ mm　　C $d=250$ mm　　D $d=128$ mm

1-2-5　等直径圆管中湍流的过流断面流速分布是：(　　)

A 呈双线分布　　B 呈对数线分布　　C 呈椭圆曲线分布　　D 呈抛物线分布

1-2-6　等直径圆管中层流的过流断面流速分布是：(　　)

A 呈双线分布　　B 呈对数线分布　　C 呈椭圆曲线分布　　D 呈抛物线分布

1-2-7　某管路直径 $d=200$ mm，流量 $Q=0.094$ m³/s，水力坡度 $J=0.046$。试求该管道的沿程阻力系数 λ 值：(　　)

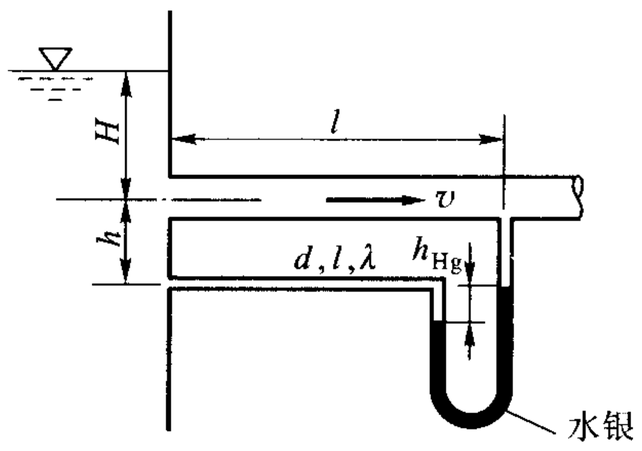
A $\lambda=0.025$　　B $\lambda=0.03$　　C $\lambda=0.02$　　D $\lambda=0.01$

1-2-8　如习题1-2-8图所示，实测管道进口局部损失系数，在水箱壁面上和距水箱 $l=100$ cm 处分别设两个测点，安装测压管。已知管径 $d=2.5$ cm，管中流速 $v=3.0$ m/s，沿程阻力系数 $\lambda=0.022$，水银面高差 $h_{Hg}=8.7$ cm。试求进口局部损失系数：(　　)

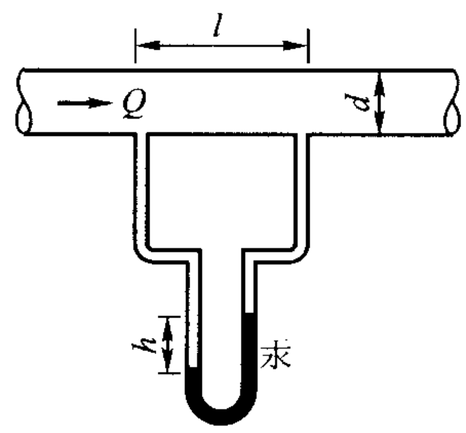
A $\zeta_e=0.402$　　B $\zeta_e=0.507$　　C $\zeta_e=0.605$　　D $\zeta_e=1.0$

1-2-9　根据尼古拉兹实验判断，水流处于湍流粗糙区时，沿程阻力系数与雷诺数、相对粗糙度的关系正确的是：(　　)

A $\lambda=f\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right)$　　B $\lambda=f(Re)$　　C $\lambda=f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$　　D 都不对



习题1-2-8图



习题1-2-10图

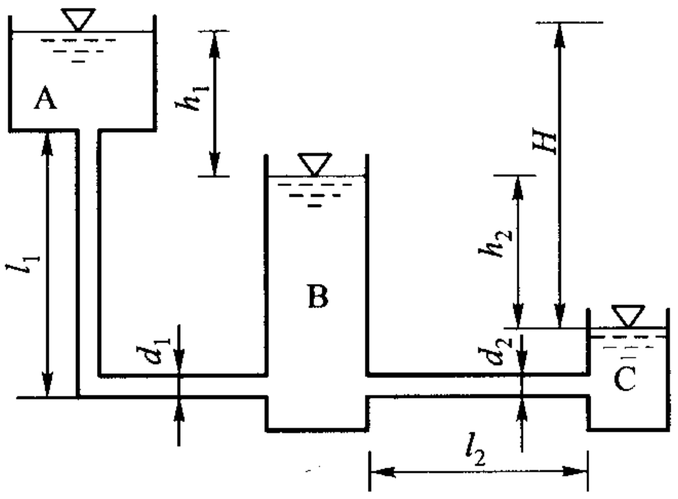
1-2-10　如习题1-2-10图所示的实验装置，用来测定管路的沿程阻力系数 λ。已知管径 $d=200$ mm，管长 $l=10$ m，水温 $t=20$ ℃，运动黏度 $\nu=1.04\times10^{-6}$ m²/s，测得流量 $Q=0.15$ m³/s，水银压差计读数 $h=0.1$ m。试求沿程阻力系数：(　　)

A $\lambda=0.025\ 0$　　B $\lambda=0.024\ 2$　　C $\lambda=0.021\ 6$　　D $\lambda=0.031\ 2$

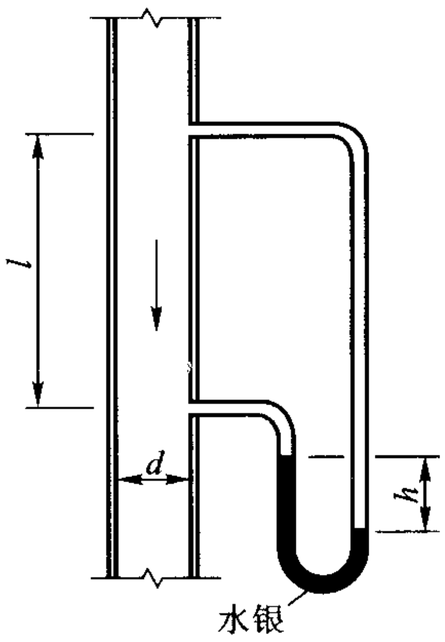
1-2-11　如习题1-2-11图所示的A、B、C三个水箱，由两段钢管相连接，水流平稳后测得，A、

C 箱水面差 $H=10$ m，已知 $l_1=50$ m，$l_2=40$ m；$d_1=250$ mm，$d_2=200$ mm；设流动在粗糙区，用 $\lambda=0.11\left(\frac{\Delta}{d}\right)^{0.25}$ 计算，管壁 $\Delta=0.2$ mm；$\zeta_{弯}=0.25$。试求流量 Q：（　　）

A $Q=0.370\ m^3/s$　　B $Q=0.685\ m^3/s$　　C $Q=0.255\ m^3/s$　　D $Q=0.475\ m^3/s$



习题 1－2－11 图



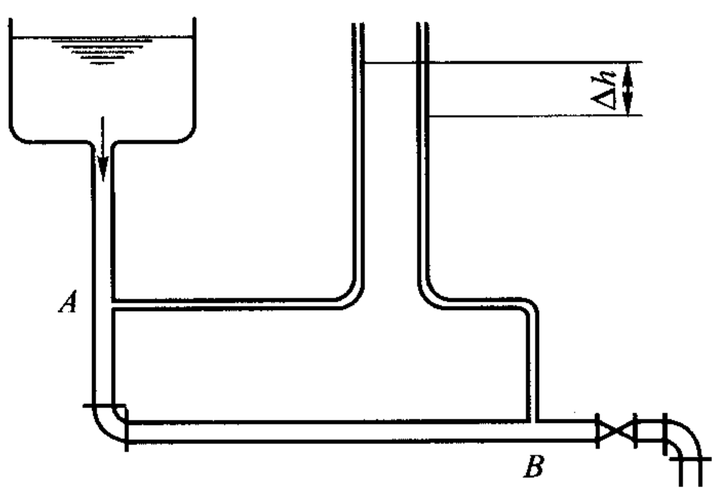
习题 1－2－12 图

1－2－12　如习题 1－2－12 图所示，某种油在管路中以 $v=1$ m/s 的速度流动，油的密度 $\rho=920\ kg/m^3$，管长 $l=3$ m，$d=25$ mm，水银压差计测得 $h=5.0$ cm，水银的密度 $\rho=13\ 580\ kg/m^3$，试求油在管路中的沿程阻力系数 λ：（　　）

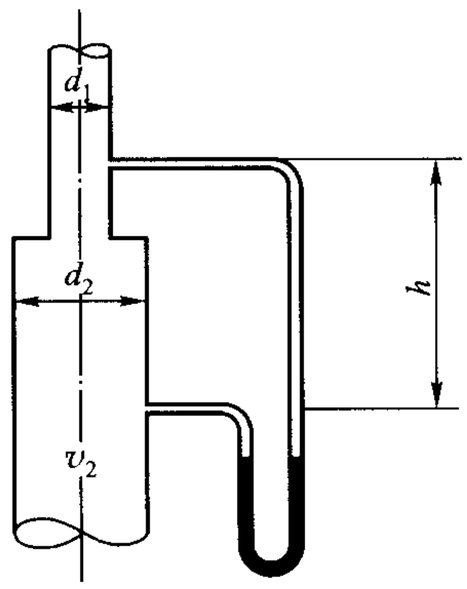
A $\lambda=0.112\ 5$　　B $\lambda=0.025\ 2$　　C $\lambda=0.029\ 8$　　D $\lambda=0.153\ 5$

1－2－13　为测定 90°弯头的局部阻力系数 ζ，可采用如习题 1－2－13 图所示的装置。已知 AB 段管长 $l=10$ m，管径 $d=50$ mm，$\lambda=0.03$。实测数据为：（1）AB 两断面测压管水头差 $\Delta h=0.629$ m（水柱）；（2）经 2 min 流入水箱的水量为 $0.329\ m^3$。试求弯头的局部阻力系数 ξ：（　　）

A $\zeta=3.15$　　B $\zeta=0.315$　　C $\zeta=0.425$　　D $\zeta=4.25$



习题 1－2－13 图



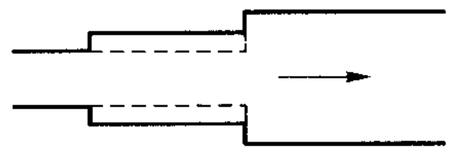
习题 1－2－14 图

1－2－14　如习题 1－2－14 图所示，一直立的突然扩大水管，已知 $d_1=150$ mm，$d_2=300$ mm，$h=1.5$ m，$v_1=4$ m/s。试确定水银比压计中的水银液面哪一侧较高？差值为多少：（　　）

A　左侧高，$\Delta h=2.43$ cm　　B　左侧高，$\Delta h=3.48$ cm

C　右侧高，$\Delta h=2.43$ cm　　D　右侧高，$\Delta h=3.48$ cm

1－2－15　今有一条管径 $d_1=100$ mm 与管径 $d_3=200$ mm 相接的管路，若不采取减阻措施为一突然放大（习题 1－2－15 图中虚线所示）；若采取减阻措施，采用两级突然放大（如图所示），中间管径 $d_2=150$ mm；试推导，采取减阻措施前后，其局部水头损失之比为：（　　）



习题 1－2－15 图

A　1.725∶1　　B　1.622∶1　　C　1.800∶1　　D　2.10∶1

第三章　有压管道水力计算

在容器壁上开孔，水经孔口流出的水流现象称之为**孔口出流**。在孔口上接一个 3～4 倍孔径的短管，水经过短管并在其出口断面形成满管出流的水力现象称之为**管嘴出流**。在实际工程中，常用管道输送液体，如自来水管、输油管线、水工建筑物的输水廊道、管道等则属于**有压管流**。

本章的任务是，根据流体运动的基本规律，分析孔口出流、管嘴出流、有压管流的水力特征，研究其水力计算的基本问题及其工程应用。

第一节　孔口出流的分类

根据孔口出流的水力特征，可以把孔口出流分为以下几种类型。

一、孔口自由出流与淹没出流

如图 1－3－1 所示，孔口流出的水体直接进入大气中称为孔口自由出流；如孔口淹没在下游水面以下，孔口流出的水体进入另一部分水体（图 1－3－2），则称为孔口淹没出流。

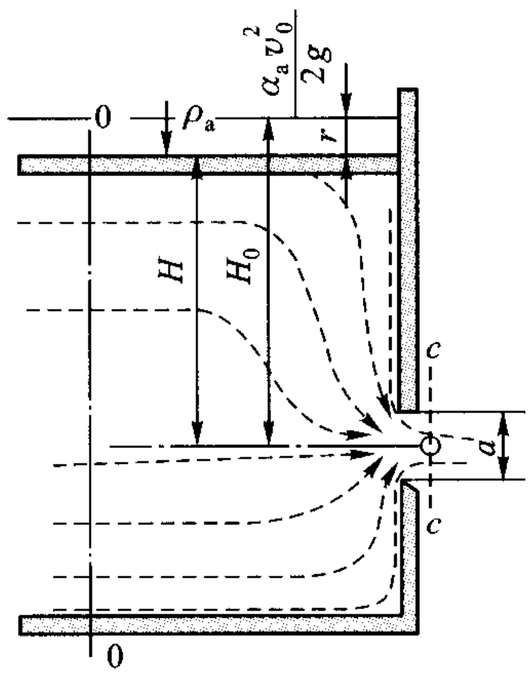


图 1－3－1　孔口自由出流

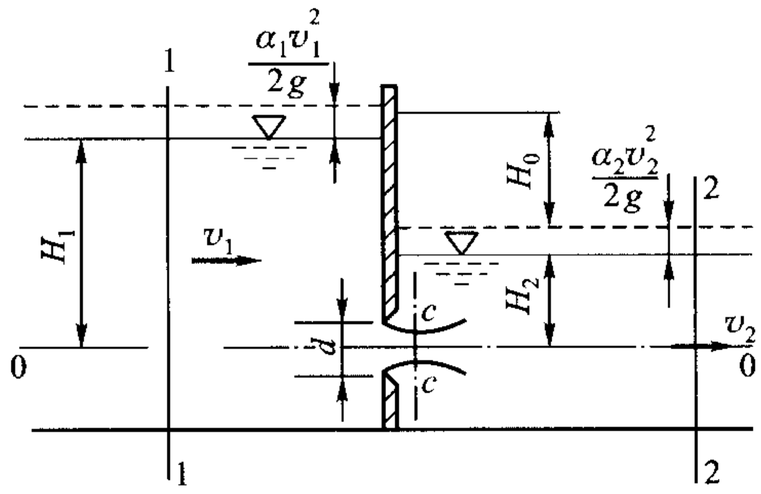


图 1－3－2　孔口淹没出流

二、小孔口出流与大孔口出流

一般说来，孔口的上下缘在上游水面下的淹没深度有所不同，如果孔口形心的淹没深度 H 远远大于孔口的直径 d（或高度 e），则可认为孔口断面上各点的作用水头相等，而忽略其差异。故此，按 H/d 的比值将孔口分为小孔口与大孔口。

若 $\frac{H}{d} \geqslant 10$，定义为小孔口，认为孔口断面上各点的作用水头相等。

若 $\frac{H}{d} < 10$，孔口断面上各点的作用水头则不可认为相等，称为大孔口（如闸孔）。

要指出的是，H 是孔口形心的淹没深度，在忽略行进流速水头 $\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$ 的情况下，H 可视为作用水头，对

于大孔口断面上各点的作用水头取决于上下游水面差，所以孔口淹没出流的情况下，孔口断面上各点的作用水头相等，故孔口淹没出流无大小孔口之分。

三、孔口恒定出流与非恒定出流

如图 1－3－1 所示，水箱内的水能及时得到补充，其水面不变，此为孔口恒定出流；若水箱内的水面随时间变化（升高或降低），孔口的流量亦随时间变化，称为孔口非恒定出流，或者称孔口变水头出流。

第二节 薄壁小孔口恒定出流

一、薄壁小孔口恒定自由出流

如图 1－3－1 所示，在容器壁上开一孔口，如孔壁与水流仅为周线接触，壁的厚度对水流现象没有影响，这种孔口称为薄壁孔口；若水箱内的水位不变，$\frac{H}{d} \geqslant 10$，则称为薄壁小孔口的恒定自由出流。水箱中水流流线自上游从各个方向趋近孔口，由于水流运动的惯性，流线呈连续、光滑、弯曲形状，在经过孔口后继续收缩，在距孔口约$\frac{d}{2}$处收缩完毕，而后扩散，$c-c$ 断面称为收缩断面，该断面上流线近似是平行的。设孔口的断面面积为 A，收缩断面的面积为 A_c，令$\frac{A_c}{A}=\varepsilon$，$\varepsilon$ 称为收缩系数。

对于图 1－3－1，取孔口形心的水平面为基准面，取水箱内符合渐变流条件的断面 0－0 和收缩断面 $c-c$，列能量方程：

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=0+\frac{p_c}{\rho g}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}+h_w$$

水箱内的水头损失很小，可略去不计，故 h_w 仅为水流经孔口处的局部损失，在容器敞口的情况下，$p_a=p_c$，均为大气压强，令 $H_0=H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$，整理可得：

$$v_c=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\zeta_0}}\sqrt{2gH_0}=\varphi\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-1}$$

式中：H_0——包含行进流速在内的作用水头（全水头）；

ζ_0——孔口的局部阻力系数；

φ——流速系数，$\varphi=\frac{1}{\sqrt{\alpha_c+\zeta_0}}$。

一般情况下，$\alpha_c=1.0$，对于圆形孔口，由实验测得流速系数 $\varphi=0.97\sim0.98$，因此，可计算出孔口的局部阻力系数 $\zeta_0=\frac{1}{\varphi^2}-1=0.04\sim0.06$。

孔口出流的流量为：

$$Q=A_c v_c=A\varepsilon\varphi\sqrt{2gH_0}=\mu A\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-2}$$

式中：μ——孔口的流量系数，$\mu=\varepsilon\varphi$。对于薄壁小孔口，$\mu=0.60\sim0.62$，由 $\varphi=0.97\sim0.98$，可计算出孔口收缩系数 $\varepsilon=0.62\sim0.63$。

若水箱水体很大，$v_0\approx0$，$H_0\approx H$，式（1－3－2）可写为：

$$Q=\mu A\sqrt{2gH} \tag{1-3-3}$$

式（1-3-2）和式（1-3-3）为薄壁小孔口的恒定自由出流的计算公式。

二、薄壁小孔口恒定淹没出流

如图1-3-2所示，孔口淹没在下游水面以下，孔口流出的水体直接进入另一部分水体，则称为孔口淹没出流。与小孔口自由出流相同，由于惯性作用，水流经孔口，流线也会收缩，而后扩散。

以0-0为基准面，列断面1-1、2-2间能量方程可导出流量公式（推导从略）为：

$$Q=v_cA_c=\varphi\varepsilon A\sqrt{2gH_0}=\mu A\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-4}$$

式中，$\mu=\varphi\varepsilon$，$\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{\zeta_{se}+\zeta_c}}$，$\zeta_{se}$为从孔口收缩断面扩大到2-2断面（图1-3-2）的突然扩大局部阻力系数，$A_2\gg A_c$，则$\zeta_{se}=1.0$。

当上下游水体较大时，$v_1\approx v_2\approx 0$，$H_0\approx H$，H即上下游水位差。式（1-3-4）可写为：

$$Q=\mu A\sqrt{2gH} \tag{1-3-5}$$

这里需要指出的是，比较式（1-3-3）与式（1-3-5）可知，自由出流与淹没出流的流量计算公式形式上相同，流量系数相等，这是因为自由出流时出口保留一个流速水头，$\alpha_c=1.0$；淹没出流时这个流速水头在水流突然扩大时损失掉了，$\zeta_{se}=1.0$。不同的是，自由出流其作用水头为孔口形心点的淹没深度H，而淹没出流其作用水头为两水面高差。

第三节　管嘴恒定出流

一、圆柱形外延管嘴恒定出流

在孔口断面处接出一根与孔口直径相同，其长度$l=(3\sim4)d$的短管，则构成圆柱形外延管嘴（图1-3-3）。当水流进入管嘴后也形成收缩断面，在$c-c$断面出水流与边壁脱离，形成旋涡区，而后扩散形成满管流，称为管嘴为自由出流。下面讨论圆柱形外延管嘴流量的计算。

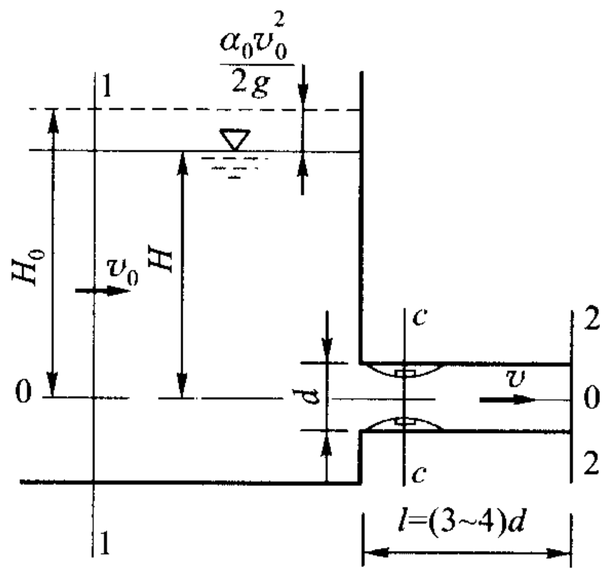


图1-3-3　管嘴恒定出流

取管中心线所在的水平面为基准面，列断面1-1至断面2-2的伯努利方程：

$$H+\frac{\alpha_0 v_0^2}{2g}=\frac{\alpha v^2}{2g}+h_w$$

式中，h_w为管嘴的水头损失，可忽略其沿程水头损失，仅为进口和收缩断面后的突然放大所造成的局部损失，即$h_w=\zeta_n\dfrac{v^2}{2g}$，式中$\zeta_n$为管嘴局部阻力系数，令$H_0=H+\dfrac{\alpha_0 v_0^2}{2g}$，整理可得：

$$v=\frac{1}{\sqrt{\alpha+\zeta_n}}\sqrt{2gH_0}=\varphi_n\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-6}$$

管嘴流量：

$$Q=\varphi_n A\sqrt{2gH_0}=\mu_n A\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-7}$$

对于管嘴局部阻力系数 ζ_n，直角进口 $\zeta_n=0.5$，所以：

管嘴流速系数，$\varphi_n=\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+\zeta_n}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+0.5}}=0.82$

μ_n 为管嘴流量系数，$\mu_n=\varphi_n=0.82$。

比较式（1-3-3）与式（1-3-7）可知，孔口出流与管嘴出流的流量公式形式相同，但 $\mu_n=1.32\mu$，即相同的管（孔）径，作用水头相等，管嘴出流的流量是孔口出流流量的 1.32 倍。因为管嘴出流的流量要大于孔口出流，所以管嘴常用作泄水设施。

为什么接管嘴后局部阻力增加了，而流量却增大呢？这是因为在收缩断面处存在真空，与孔口出流比较，对 $c-c$ 断面而言，管嘴出流实际上提高了作用水头。

二、圆柱形外延管嘴的真空压强

求解 $c-c$ 断面真空压强，由图 1-3-3 可知，可列 1-1 断面和 $c-c$ 断面或 $c-c$ 断面至 2-2 断面间的伯努利方程。现对 $c-c$ 断面至 2-2 断面列伯努利方程：

$$\frac{p_c}{\rho g}+\frac{\alpha_c v_c^2}{2g}=\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}+h_j$$

式中：h_j——收缩断面向满管流扩大的局部水头损失，即：

$$h_j=\zeta_{sc}\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{A_c}{A}-1\right)^2\frac{v^2}{2g}=\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\frac{v^2}{2g}$$

由式（1-3-6），$\dfrac{v^2}{2g}=\varphi_n^2 H_0$，故上式可写为：

$$\frac{p_c}{\rho g}=\frac{p_a}{\rho g}-\left[\frac{\alpha_c}{\varepsilon^2}-\alpha-\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)^2\right]\varphi_n^2 H_0$$

取 $\alpha_c=\alpha=1$，$\varepsilon=0.64$，$\varphi_n=0.82$，代入上式得：

$$\frac{p_c}{\rho g}=\frac{p_a}{\rho g}-0.75H_0$$

圆柱形外延管嘴的真空压强：

$$\frac{p_v}{\rho g}=\frac{p_a-p_c}{\rho g}=0.75H_0 \qquad (1-3-8)$$

式（1-3-8）表明，圆柱形外延管嘴的真空压强可达作用水头的 75%，相当于收缩断面处作用水头增加了 0.75 倍，这就是同等条件下管嘴比孔口出流流量增大的原因。

三、圆柱形外延管嘴的工作条件

从以上分析可知，作用水头愈大，收缩断面处的真空压强愈大。然而，当流体内部压强低于饱和蒸气压时［水在 15 ℃～25 ℃饱和蒸气压为 -8～-7 m（水柱）］，将发生气化（空化）现象；再者，收缩断面处的真空压强过大时，管嘴也会吸入空气，破坏原有真空压强，失去流动的稳定性。因此，管嘴正常出流对作用水头有一定限制。由式（1-3-8）有：

$$[H_0]\leqslant\frac{7\ \text{m}}{0.75}=9\ \text{m（水柱）}$$

另外，短管的长度也有要求，短管长度太短，管嘴出口不能形成满管流，其流态如同孔口，流量不会增加；短管的长度过大，则会增加水流阻力，降低流量。因此，圆柱形外延管嘴的工作条件是：

（1）作用水头：$H_0\leqslant 9$ m（水柱）

（2）管嘴长度：$l=(3\sim4)d$

第四节　孔口（管嘴）的变水头出流

对于孔口（管嘴）出流，若容器中水面随时间变化（上升或下降），孔口（管嘴）的流量也随时间变化，这种情况称为变水头出流。变水头出流实质是非恒定流，工程上一般水体很大，水位变化缓慢，惯性水头可略去不计，在微小时段内可视为恒定流，即认为水位恒定，可以用恒定流公式计算流量，把非恒定流转化为恒定流处理。如沉淀池放空，船坞船闸灌泄水、水库流量调节等。

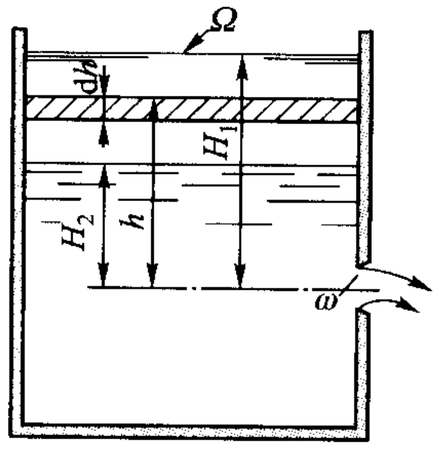


图 1-3-4　孔口变水头出流

如图 1-3-4 所示的孔口出流，水箱中不再补水，为孔口变水头出流，设水箱水面表面积为 Ω，初始时刻孔口淹没深度为 H_1。下面介绍求解水位降至孔口淹没深度为 H_2 或水箱放空的时间。

设在某时刻，孔口的水头为 h，经过 $\mathrm{d}t$ 时段，则孔口流出的水体为 $Q\mathrm{d}t=\mu A\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$，同时，水箱内水面下降了 $\mathrm{d}h$，水箱内水体增量为 $\mathrm{d}V=-\Omega\mathrm{d}h$，水箱内流出的水体也就是水箱内水体减少的体积，所以：

$$-\Omega\mathrm{d}h=\mu A\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t$$

于是：

$$\mathrm{d}t=-\frac{\Omega}{\mu A\sqrt{2g}}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}$$

对上式积分，则可得出水面降至某水位所需时间为：

$$t=\int_{H_1}^{H_2}-\frac{\Omega}{\mu A\sqrt{2g}}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}=\frac{2\Omega}{\mu A\sqrt{2g}}(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2}) \tag{1-3-9}$$

若泄空时定为 $H_2=0$，则泄空时间为：

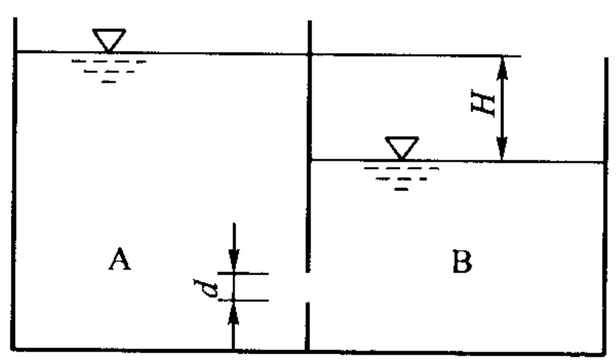
$$t=\frac{2\Omega\sqrt{H_1}}{\mu A\sqrt{2g}}=\frac{2\Omega H_1}{\mu A\sqrt{2gH_1}}=\frac{2V}{Q_{\max}} \tag{1-3-10}$$

式中：V——水箱泄空时排出的水体；

$Q_{\max}$——孔口初始流量。

从式（1-3-10）可以看出，水箱泄空所需时间是在水位为 H_1 恒定流情况下流出相同水体所需时间的 2 倍。

【例 1-3-1】 如例题 1-3-1 图所示，水流由水池 A 经孔口流入水箱 B，水池 A 面积很大，水箱 B 横截面面积 $\Omega=4\ \mathrm{m}\times5\ \mathrm{m}$，孔口直径 $d=10\ \mathrm{cm}$。已知 $H=3.0\ \mathrm{m}$，孔口流量系数 $\mu=0.62$。试计算水箱 B 充满时所需时间？



例题 1-3-1 图　孔口灌水

解： 水箱泄空所需时间与水箱灌水所需时间计算公式相同，由式（1-3-9）有：

$$t=\frac{2\Omega}{\mu A\sqrt{2g}}(\sqrt{H_1}-\sqrt{H_2})=\frac{2\times4\times5}{0.62\dfrac{\pi\times0.1^2}{4}}\times(\sqrt{3.0}-0)\ \mathrm{s}=14\ 235\ \mathrm{s}=3.954\ \mathrm{h}$$

第五节　短管的水力计算

在工程上通常用管道输送流体，流体充满管道，无自由液面，管道内压强一般不等于大气压强，故称为有压管流。为了水力计算方便，把管路分为长管与短管。所谓**短管**是指管路的水头损失中，局部水头损

失与沿程水头损失及流速水头都占有相当比重，进行水力计算时都不可忽略的管路，如水泵的吸水管、虹吸管、倒虹吸管、输水廊道等。**长管**是指管路的水头损失中，沿程水头损失占绝对比重，进行水力计算时可略去局部水头损失和流速水头的管路，如给水管路等。

短管的水力计算有自由出流与淹没出流之分。本节讨论的水力计算在恒定流范畴。

一、短管自由出流

如图 1-3-5 所示，水箱内水面恒定，水经过管路直接流入大气，即短管恒定自由出流。以管道出口中心所在的水平面为基准面，列 1-1 和 2-2 过流断面的伯努利方程：

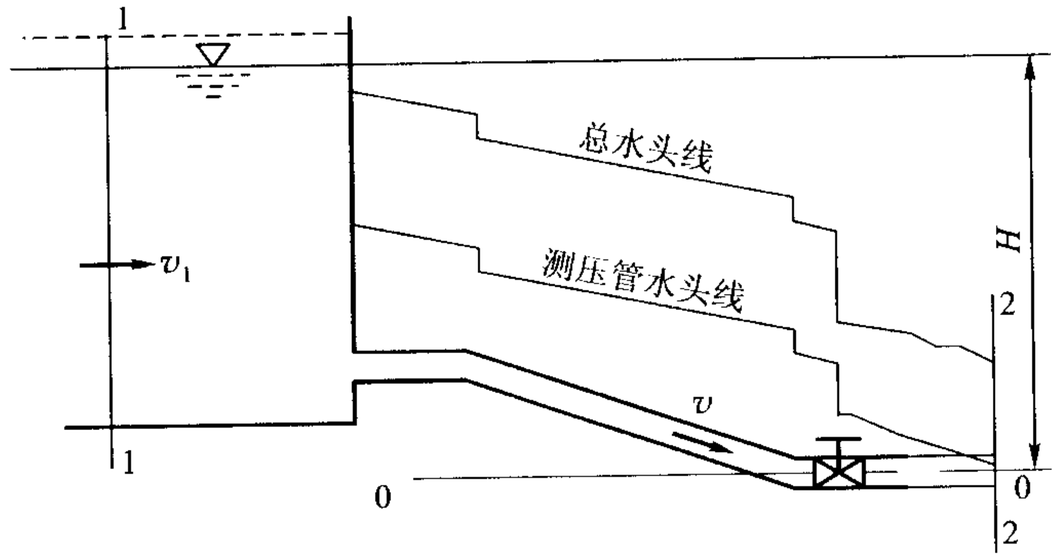


图 1-3-5 短管自由出流

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

式中：p_a——大气压强；

h_w——沿程水头损失与局部水头损失之总和，即：

$$h_w=h_f+\sum h_j=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\sum\zeta\frac{v^2}{2g}=\zeta_c\frac{v^2}{2g} \tag{1-3-11}$$

式中：ζ_c——管路系统损失系数；

$\sum\zeta$——局部损失系数之合，本例中包含局部水头损失系数有 ζ_1（进口）、$2\zeta_2$（弯头）及 ζ_3（阀门），即：

$$\sum\zeta=\zeta_1+2\zeta_2+\zeta_3$$

令 $H_0=H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$ 代入上式得：

$$H_0=(\alpha+\zeta_c)\frac{v^2}{2g} \tag{1-3-12}$$

取 $\alpha=1.0$，管出口流速为：

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_c}}\sqrt{2gH_0}$$

流量为：

$$Q=\frac{A}{\sqrt{1+\zeta_c}}\sqrt{2gH_0}=\mu_c A\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-13}$$

式中：μ_c——管路流量系数，$\mu_c=\frac{1}{\sqrt{1+\zeta_c}}$。

二、短管淹没出流

图 1-3-6 为短管淹没出流，取下游水面为基准面，列过断面 1-1 至断面 2-2 间的伯努利方程：

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

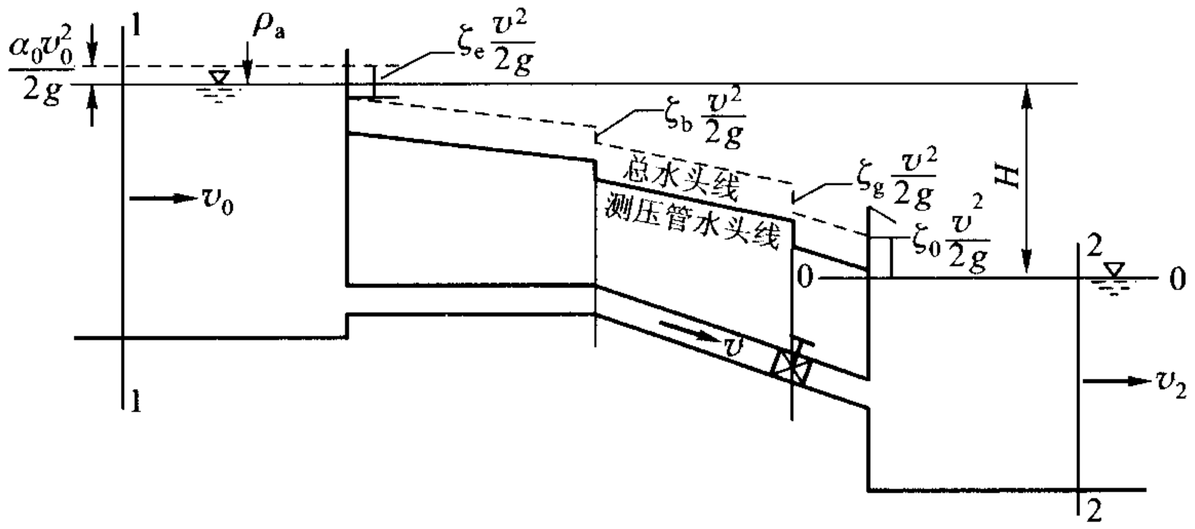


图 1-3-6　短管淹没出流

令 $H_0=H+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}$，考虑到下游水域较大，$A_2 \gg A$，可认为 $v_2 \approx 0$，故上式可写为：

$$H_0=h_w$$

h_w 为沿程水头损失与局部水头损失之和，本例中局部水头损失包含有进口、两个弯头、一个阀门及出口的局部水头损失，即：

$$h_w=h_f+\sum h_j=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}+\sum\zeta\frac{v^2}{2g}=\zeta_c\frac{v^2}{2g}$$

代入上式得：$H_0=\zeta_c\frac{v^2}{2g}$，所以：

管中流速为：

$$v=\frac{1}{\sqrt{\zeta_c}}\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-14}$$

管中流量为：

$$Q=\frac{A}{\sqrt{\zeta_c}}\sqrt{2gH_0}=\mu_c A\sqrt{2gH_0} \tag{1-3-15}$$

式中：μ_c——管路流量系数，$\mu_c=\frac{1}{\sqrt{\zeta_c}}$。

若上游水体较大，$v_1 \approx 0$，也可以用 H 代替 H_0。

比较式（1-3-13）、式（1-3-15）发现，两公式形式相同，若管路系统一样，作用水头相同，自由出流与淹没出流的管路流量系数也是相同的，这是因为，虽然淹没出流 ζ_c 中少一个 $\alpha=1.0$ 系数，但多一个 ζ_{se} 出口局部损失系数，而 $A_2 \gg A$，故 $\zeta_{se}=1.0$。不同的是，作用水头的计算不一样，自由出流其作用水头为管中心点与上游水面的高差的 H，而淹没出流其作用水头为上下游两水面高差 H。

三、短管水力计算类型

在实际工程中，短管水力计算主要有三种类型：

（1）已知作用水头、管的长度、管径、管材以及管路布置（局部阻力），确定流量。

（2）已知流量、管的长度、管径、管材以及管路布置（局部阻力），确定作用水头。

（3）已知作用水头、流量、管的长度、管材以及管路布置（局部阻力），确定管径。

求解上述问题，可直接用前面推导的公式，也可列能量方程求解，关键是合理选择局部阻力系数。举例如下：

1. 虹吸管的水力计算

虹吸管是跨越高地的一种输水管路（图 1-3-7），其工作原理是：管道的进、出口均淹没在水下，在顶部装有真空泵，工作时先开启真空泵抽气，管内形成负压，水则沿管道徐徐上升，当确定管道内无空气时，关闭真空泵，水在重力作用下从管道流出，此时管道内仍为负压，在两侧水位差和大气压强的作用下，水通过管道连续流出，这种管道称为虹吸管。

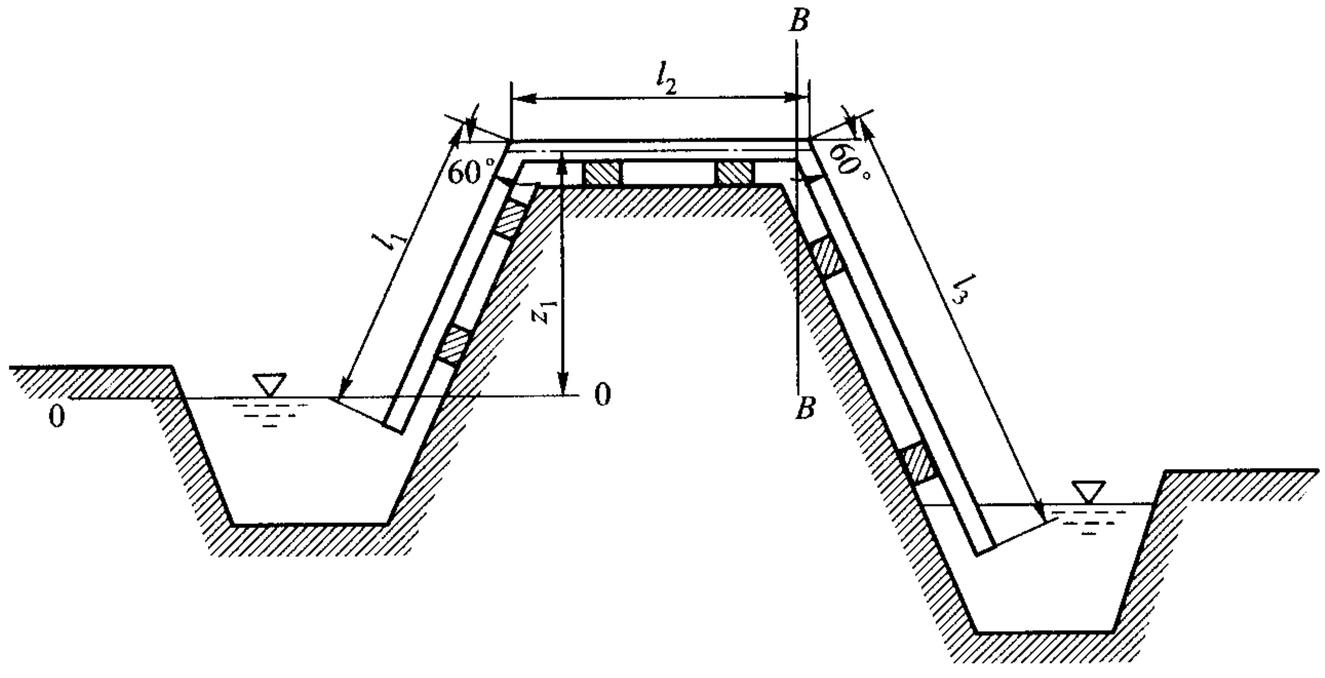


图 1-3-7 虹吸管

虹吸管的水力计算主要有：过流能力（流量）、最大真空压强。因为虹吸管内的真空压强有一定限制，一般不超过 7~8 m（水柱），超过此值，管内的水会发生气化，破坏水流的连续性，甚至发生气蚀，造成管道破坏。这就要调整安装高度或加大局部阻力，保证工程安全。

【例 1-3-2】 如图 1-3-7 所示，虹吸管跨越高地引水，若上下游水位差 $H=2.0$ m，管长 $l_1=7$ m，$l_2=5$ m，$l_3=20$ m，管径 $d=0.25$ m，选用铸铁管，粗糙系数为 0.011，局部水头损失系数为：弯头 $\zeta_1=\zeta_2=0.3$，进口 $\zeta_e=4.0$，出口 $\zeta_{se}=1.0$，虹吸管顶部管中心线与上游水面高差 $h_z=5.0$ m。试求：（1）虹吸管流量；（2）虹吸管最大真空压强；（3）若允许真空压强 $[h_v]\leqslant 7.0$ m（水柱），安装高度是否合理？

解：（1）求虹吸管流量：

因上游水域宽阔，不计行进流速，且管道中水流在阻力平方区，则

沿程阻力系数：

$$c=\frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0.011}\times\left(\frac{0.25}{4}\right)^{\frac{1}{6}}\ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{s}=57.27\ \mathrm{m}^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{s}$$

$$\lambda=\frac{8g}{c^2}=0.023\ 9$$

流量系数：

$$\mu_c=\frac{1}{\sqrt{\sum\lambda\frac{l}{d}+\sum\zeta}}=\frac{1}{\sqrt{0.023\ 9\times\frac{7+5+20}{0.25}+4.0+0.3\times2+1.0}}=0.340$$

流量：$Q=\mu_c A\sqrt{2gH}=0.340\times\frac{0.25^2\pi}{4}\sqrt{2\times9.81\times2.0}\ \mathrm{m^3/s}=0.104\ \mathrm{m^3/s}$

（2）虹吸管最大真空压强：

由上面计算结果，管中流速：

$$v=\frac{Q}{A}=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.104}{3.14\times0.25^2}\ \mathrm{m/s}=2.12\ \mathrm{m/s}$$

最大真空压强出现在管道最高和管段最长的位置，以上游水面为基准面，列上游断面和 $B-B$ 断面间

的能量方程：

$$0+0+0=h_z+\frac{p_B}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}+h_w$$

$$\frac{p_B}{\rho g}=-h_z-\frac{\alpha v^2}{2g}-\left(\lambda\frac{l_1+l_2}{d}+\zeta_e+\zeta_1\right)\frac{\alpha v^2}{2g}$$

$$=-5.0\ \text{m}-\left[1+0.023\,9\frac{7+5}{0.25}+4.0+0.3\right]\times\frac{2.12^2}{2\times9.81}\ \text{m}=-6.48\ \text{m}$$

最大真空压强 $h_v=6.48$ m

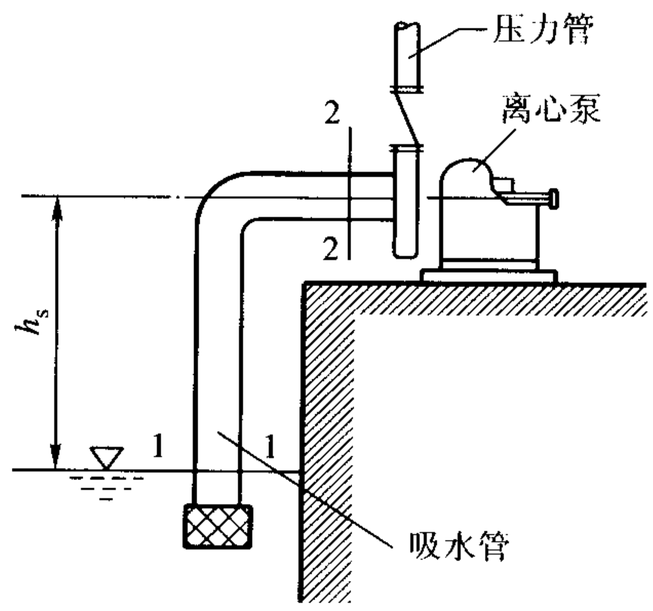
(3) 判断安装高度的合理性：

因为 $h_v=6.48\ \text{m}<[h_v]=7.0\ \text{m}$，所以安装高度合理。

2. 水泵安装高度的水力计算

建筑工程中常用的水泵为离心式水泵，工作时，离心式水泵进口及吸水管会产生真空，在大气压强作用下水会经过底阀进入吸水管，连续供水。水泵进口处的真空压强有一定限制，由厂家提供，一般允许吸水真空压强为 $[h_v]\leqslant4\sim7$ m（水柱），真空压强大于该值，水则发生气化，破坏水流的连续性，水泵不能正常工作，甚至发生气蚀造成水泵部件的损坏。因此，离心水泵的安装高度需要计算。

【例 1-3-3】 如例题 1-3-3 图所示的离心式水泵，抽水流量 $Q=0.02\ \text{m}^3/\text{s}$，吸水管为铸铁管，管长 $l=8$ m，管径 $d=0.1$ m，沿程阻力系数 $\lambda=0.032$，进水阀局部损失系数 $\zeta_e=6.0$，弯头局部损失系数 $\zeta=0.53$，允许吸水真空压强为 $[h_v]=7$ m（水柱），安装高度 $h_s=3.0$ m。试校核水泵的安装是否合理？最大安装高度是多少？



例题 1-3-3 图

解：(1) 管中流速：

$$v=\frac{4Q}{\pi d^2}=\frac{4\times0.02}{3.14\times0.1^2}\ \text{m/s}=2.548\ \text{m/s}$$

(2) 以 1-1 断面为基准面，列断面 1-1～断面 2-2 的伯努利方程，忽略行进流速，则：

$$0+0+0=h_s+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{2g}+h_w$$

$$\frac{p_2}{\rho g}=-\left[h_s+\left(\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\zeta_e+\zeta\right)\frac{v^2}{2g}\right]$$

$$=-3\ \text{m}-\left(1+0.032\frac{8}{0.1}+6+0.53\right)\times\frac{2.548^2}{2\times9.81}\ \text{m}=6.34\ \text{m}$$

允许吸水真空压强为 $[h_v]=7$ m（水柱），安装高度 $h_s=3.0$ m，是合理的且偏于安全。

(3) 最大安装高度：

由上面的伯努利方程，$h_{s\,max}=[h_v]-\left(\alpha+\lambda\frac{l}{d}+\zeta_e+\zeta\right)\frac{v^2}{2g}$

$$=7\ \text{m}-\left(1+0.032\times\frac{8}{0.1}+6+0.53\right)\times\frac{2.548^2}{2\times9.81}\ \text{m}=3.66\ \text{m}$$

3. 倒虹吸管的水力计算

当路基横跨河道时，路基下要铺设过流管道；或输水管道横穿河道，也要在河道下铺设管道，这种管道称为倒虹吸管，如图 1-3-8 所示。过流流量一般由水文资料确定。

倒虹吸管的水力计算有两类：一是当管径、管材确定时，计算上下游水面差；二是上下游水面差确定时，计算

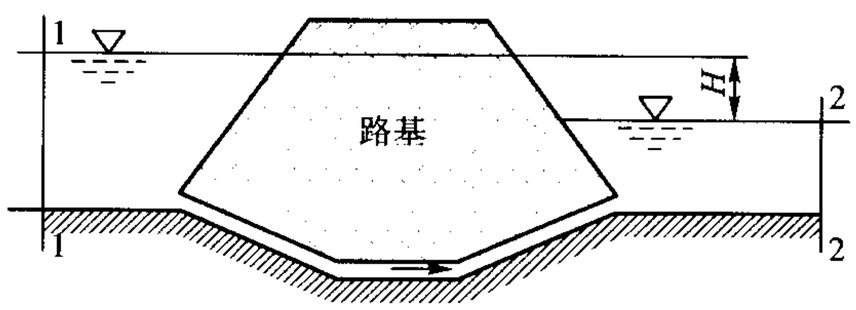


图 1-3-8　倒虹吸管

（设计）管径。

【例 1-3-4】 如图 1-3-8 所示，路基下铺设一条圆形涵管，管长 $l=30$ m，工程上水流一般为湍流粗糙区，混凝土管沿程阻力系数 $\lambda=0.032$，上下游水位差 $H=0.6$ m，局部损失系数为 $\zeta_e=0.5$，$\zeta_{弯}=0.3$，出口 $\zeta_{se}=1.0$。若过流流量为 $Q=2\ m^3/s$，试确定管径。

解： 以下游水面为基准面，列 1-1～2-2 断面间的伯努利方程，略去行进流速，则：

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+0=0+\frac{p_a}{\rho g}+0+h_w$$

$$H=h_w=\left(\lambda\frac{l}{d}+\zeta_e+2\zeta_{弯}+\zeta_{se}\right)\left(\frac{4Q}{\pi d^2}\right)^2\frac{1}{2g}$$

代入数据得：

$$0.6=\left(0.032\times\frac{30}{d}+0.5+2\times0.5+1.0\right)\times\left(\frac{4\times2}{3.14d^2}\right)^2\times\frac{1}{2\times9.81}$$

整理得：

$$0.6d^5-0.827\ 5d-0.318=0$$

试算得：

$d=1.16$ m，取标准管径：$d=1.20$ m。

第六节 长管的水力计算

长管一般管路布置比较复杂，按组合情况分为简单管路、串联管路、并联管路、管网的类型。本节讨论的水力计算在恒定流范畴。

一、简单管路

管径、流量不变的管道称为简单管路。如图 1-3-9 所示，由水箱引出一条长度为 l，直径为 d 的管道，管道出口距水面高差为 H，其水力计算分析如下：

由于长管的水力计算略去局部损失、流速水头，水面至管道出口的连线即总水头线，也是测压管水头线。以管道出口断面形心点所在的水平面为基准面，列断面 1-1 至 2-2 间的伯努利方程：

$$H+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=0+\frac{p_a}{\rho g}+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$$

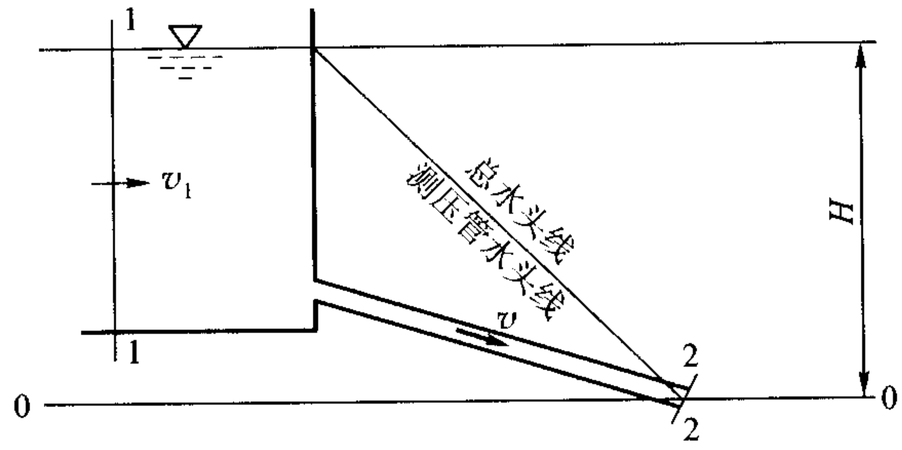


图 1-3-9 简单管路

略去局部水头损及流速水头，上式化简为：

$$H=h_f \tag{1-3-16}$$

式（1-3-16）表明，在进行长管水力计算时，作用水头完全用来克服沿程水头损失。长管水力计算也分为三种类型，即确定流量、作用水头、管径。本书仅介绍比阻法。

式（1-3-16）可写为：

$$H=h_f=\lambda\frac{l}{d}\frac{v^2}{2g}\ （达西公式）$$

将 $v=\dfrac{4Q}{\pi d^2}$ 代入得：

$$H=\frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}lQ^2$$

令：

$$S_0 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5} \tag{1-3-17}$$

上式可写为：

$$H = S_0 l Q^2 \tag{1-3-18}$$

式（1-3-18）为简单管路的计算公式，S_0 称为比阻（s^2/m^6），它是管道单位长度上通过单位流量时所需水头。从式（1-3-17）可知，比阻的值取决于管径及沿程阻力系数 λ，而沿程阻力系数 λ 与流态流区有关，故此，比阻的取值也与流态流区有关。

对于式（1-3-18）也可写为另外的形式，由曼宁公式，$v = C\sqrt{RJ}$，所以 $Q = Av = AC\sqrt{RJ}$，令 $K = AC\sqrt{R}$，则：

$$H = \frac{Q^2}{K^2} l \tag{1-3-19}$$

式中：K——流量模数，具有流量的量纲，与比阻的关系是 $K^2 = \frac{1}{S_0}$。式（1-3-19）可用于明渠均匀流的水力计算。

二、串联管路的水力计算

由于供水管路沿程有流量分出，管径也会有变化，由管径不同的多条管段首尾顺次连接组成的管路称为**串联管路**（图 1-3-10），不同管径管段的连接处（有流量分出）称为**节点**。串联管路各段的管径、流量、流速均不相同，所以应分段计算其沿程损失。

计算原则：

（1）节点流量，流进为正，流出为负，满足连续方程：

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i = 0 \tag{1-3-20}$$

或表示为：

$$Q_i = Q_{i+1} + q_i \tag{1-3-20'}$$

（2）总的水头损失为各段水头损失之和，即：

$$H = \sum_{i=1}^{n} h_f = h_{f1} + h_{f2} + h_{f3} + \cdots + h_{fn} \tag{1-3-21}$$

或写为

$$H = \sum_{i=1}^{n} S_{0i} l_i Q_i^2 = S_{01} l_1 Q_1^2 + S_{02} l_2 Q_2^2 + \cdots + S_{0n} l_n Q_n^2 \tag{1-3-21'}$$

【例 1-3-5】 如图 1-3-10 所示，由 3 条管段组成的供水系统，已知 $l_1 = 500$ m，$d_1 = 400$ mm，$l_2 = 450$ m，$d_2 = 350$ mm，$l_3 = 350$ m，$d_3 = 300$ mm，管道为铸铁管，$Q_3 = 0.1$ m^3/s，转输流量 $q_1 = 0.05$ m^3/s，$q_2 = 0.05$ m^3/s。管路水平布置，管道末端高程 $\nabla = 0.0$ m，服务水头（自由水头）$H_z = 10.0$ m。试求水塔的高度？

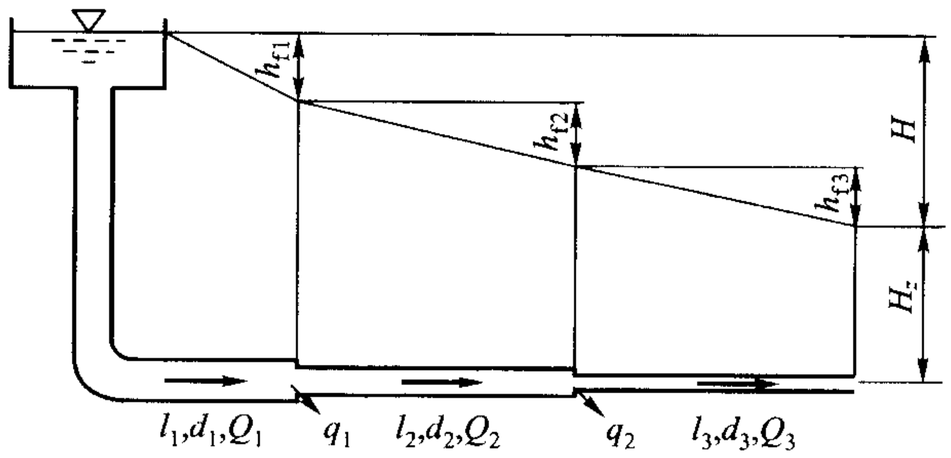


图 1-3-10　串联管路

解：（1）求各管中流量、流速：

流量：

$$Q_2 = Q_3 + q_2 = 0.10\ m^3/s + 0.05\ m^3/s = 0.15\ m^3/s$$

$$Q_1 = Q_2 + q_1 = 0.15\ m^3/s + 0.05\ m^3/s = 0.20\ m^3/s$$

流速：

$$v_1 = 1.59\ \text{m/s},\ v_2 = 1.56\ \text{m/s},\ v_3 = 1.42\ \text{m/s}$$

（2）求各管段的比阻：

查相关表得，$S_{01} = 0.196\ \text{s}^2/\text{m}^5$，$S_{02} = 0.401\ \text{s}^2/\text{m}^5$，$S_{03} = 0.911\ \text{s}^2/\text{m}^5$。因为管中流速均大于1.2 m/s，故比阻不修正。

（3）求总的水头损失：

$$\begin{aligned}\sum h_f &= S_{01} l_1 Q_1^2 + S_{02} l_2 Q_2^2 + S_{03} l_3 Q_3^2 \\ &= 0.196 \times 500 \times 0.20^2\ \text{m} + 0.401 \times 450 \times 0.15^2\ \text{m} + 0.911 \times 350 \times 0.10^2\ \text{m} \\ &= 3.92\ \text{m} + 4.06\ \text{m} + 3.19\ \text{m} = 11.17\ \text{m}\end{aligned}$$

（4）求水塔高：

$$H = \sum h_f + H_z = 11.17\ \text{m} + 10\ \text{m} = 21.17\ \text{m}$$

三、并联管路的水力计算

串联管路的特点是节省管材，但供水的可靠性低，若某条管段出现问题，则不能正常供水，为了提高供水的可靠性可在节点处并联几条管道，组成并联管路，如图1－3－11所示。

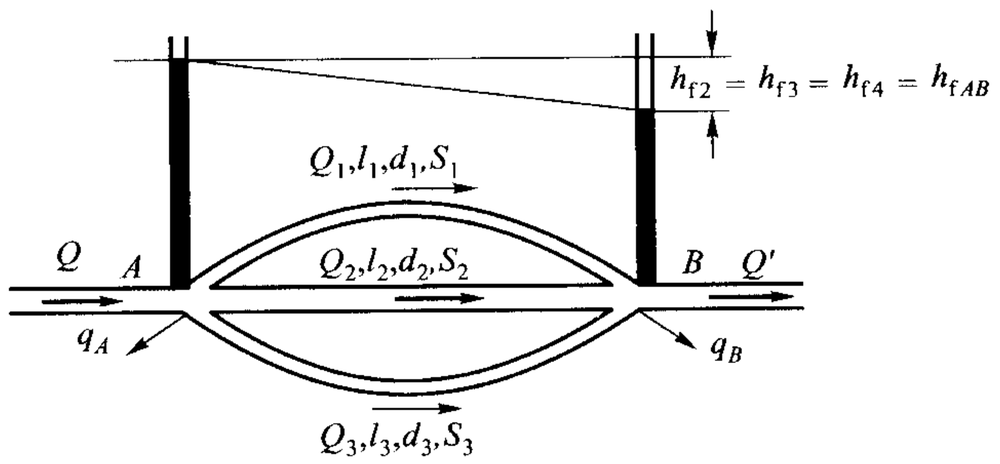


图1－3－11　并联管路示意图

如图1－3－11所示，假定在A、B两点分别设一个测压管，其测压管水差h_{fAB}为AB两点间的水头损失，由于这三条管道具有公共节点，即：

$$h_{fAB} = h_{f1} = h_{f2} = h_{f3} \qquad (1-3-22)$$

也就是说，对于每一条管道，单位重量流体从A点流到B点沿程水头损失是相同的。并联管段一般按长管计算，每条管段均为简单管路，用比阻法表示为：

$$S_{01} l_1 Q_1^2 = S_{02} l_2 Q_2^2 = S_{03} l_3 Q_3^2 \qquad (1-3-23)$$

一般情况下，并联管段管长、管径、管材不同，各管中的流量也不相同，各管段流量分配满足节点流量平衡条件，流进节点的流量等于由该节点流出的流量。总流量为各管流量之和，即：

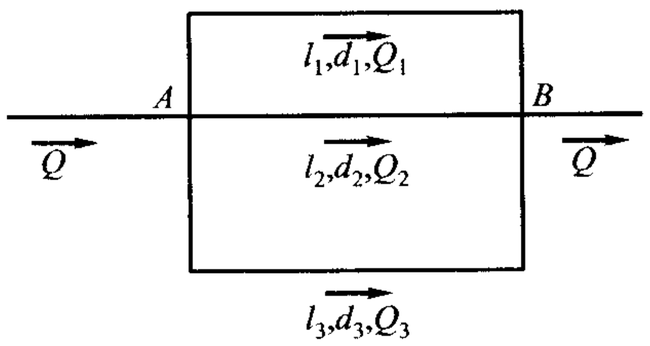
$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i \qquad (1-3-24)$$

如图1－3－12所示管路，对于A点有：

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + q_A \qquad (1-3-25)$$

实质是，并联管路的水力计算满足能量方程和连续性方程的条件，式（1－3－23）和式（1－3－25）联立可求解管道中的流量分配。

需要指出的是，式（1－3－23）表示的是单位重量流体从A点流到B点沿任何一条管道造成的沿程水头损失相同，并不意味着各管道上总的能量损失相等，总的能量损失与通过的流量有关。



例题1－3－6图

【例1－3－6】如例题1－3－6图所示，三条并联的铸铁管道，已知总流量$Q = 0.25\ \text{m}^3/\text{s}$，管道粗糙系数$n = 0.012$，管径及管长如下：$l_1 = 300\ \text{m}$，$d_1 = 200\ \text{mm}$；$l_2 = 200\ \text{m}$，$d_2 = 150\ \text{mm}$；$l_3 = 350\ \text{m}$，$d_3 = 250\ \text{mm}$。试求各管中流量及水头损失。

解：（1）求管道比阻：

将数据代入以下公式求解比阻：$c = \frac{1}{n} R^{\frac{1}{6}}$，$\lambda = \frac{8g}{c^2}$，$S_0 = \frac{8\lambda}{g\pi^2 d^5}$。

$$S_{01} = 7.92\ \text{s}^2/\text{m}^5,\ S_{02} = 36.7\ \text{s}^2/\text{m}^5,\ S_{03} = 2.41\ \text{s}^2/\text{m}^5$$

（2）计算流量：

由（1-3-23）式，$S_{01}l_1Q_1^2=S_{02}l_2Q_2^2=S_{03}l_3Q_3^2$

$$7.92\times300Q_1^2=36.7\times200Q_2^2=2.41\times350Q_3^2$$

$$2.376Q_1^2=7.34Q_2^2=0.843\ 5Q_3^2$$

则

$$Q_1=0.596Q_3,\quad Q_2=0.339Q_3$$

由（1-3-24）式，有：

$$Q=Q_1+Q_2+Q_3$$

$$0.25=0.596Q_3+0.339Q_3+Q_3$$

解之得：

$$Q_3=0.129\ \text{m}^3/\text{s}=129\ \text{L/s}$$

$$Q_2=0.0434\ \text{m}^3/\text{s}=43.4\ \text{L/s}$$

$$Q_1=0.0769\ \text{m}^3/\text{s}=76.9\ \text{L/s}$$

（3）计算水头损失：

由于 $v_1=\dfrac{4Q_1}{\pi d_1^2}=\dfrac{4\times0.076\ 9}{3.14\cdot0.2^2}\ \text{m/s}=2.45\ \text{m/s}>1.2\ \text{m/s}$，故比阻不修正。所以，

$$h_{f1}=h_{f2}=h_{f3}=7.92\times300\times0.076\ 9^2\ \text{m}=14.05\ \text{m}$$

思　考　题

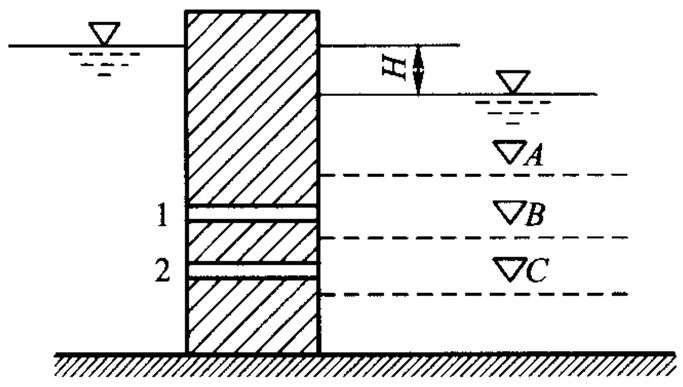
1-3-1　大孔口与小孔口的含义是什么？为什么在进行孔口淹没出流水力计算时，无需判别大孔口与小孔口？

1-3-2　在水箱侧壁的同一高程，设置孔径相同的一个孔口与一个外延管嘴，二者哪个流量大？为什么？

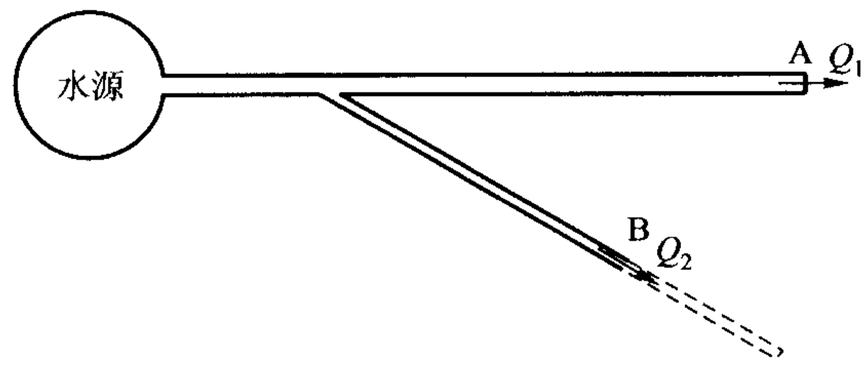
1-3-3　为什么总水头线沿程不可以上升？在什么情况下短管的测压管水头线会沿程上升？

1-3-4　如思考题1-3-4图所示的等厚隔墙上设两条管材、管径相同的短管，上游水位不变。试比较：当下游水位为∇A、∇B、∇C时，两管流量的大小。

1-3-5　思考题1-3-5图示分叉管路，若管A、管B的流量为Q_1、Q_2。若把管B接长（图中虚线所示），试问，在其他条件不变的情况下，两管流量是否变化？为什么？



思考题1-3-4图

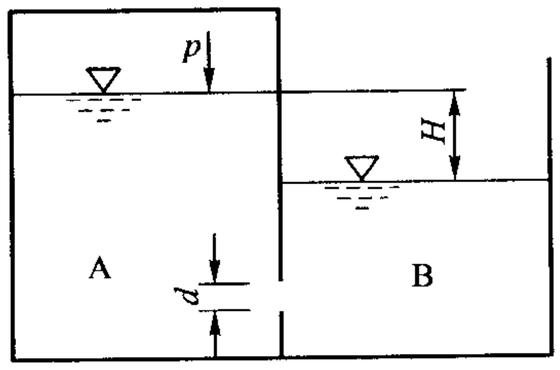


思考题1-3-5图

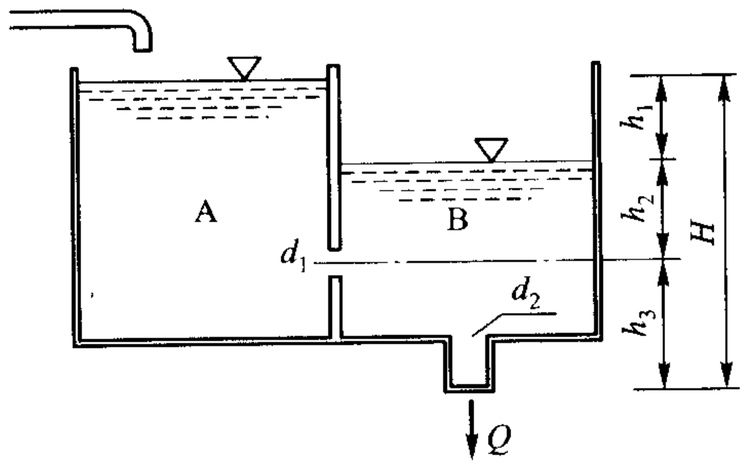
习　　题

1-3-1　如习题1-3-1图所示，水流由水箱A经孔口流入水箱B，孔口直径$d=10$ cm，已知$H=3.0$ m，水箱A水面相对压强$p=49$ kPa，孔口流量系数$\mu=0.62$，试计算通过孔口的流量：（　　）

A　60.94 L/s　　B　65.78 L/s　　C　35.45 L/s　　D　55.45 L/s



习题 1-3-1 图



习题 1-3-2 图

1-3-2 如习题1-3-2图所示，水箱分为A、B两室，隔墙上设一孔口，$d_1=5$ cm，孔口流量系数$\mu=0.62$；B室底部有一圆柱形外延管嘴，$d_2=4$ cm，流量系数$\mu=0.82$。已知$H=3.0$ m，$h_3=0.8$ m。试求在水流恒定时，h_1，h_2为：（　　）

A $h_1=1.325$ m，$h_2=0.825$ m　　B $h_1=1.252$ m，$h_2=0.948$ m

C $h_1=1.520$ m，$h_2=0.68$ m　　D $h_1=h_2=1.10$ m

1-3-3 今有一大水箱，长$l=15$ m，宽$b=5$ m，在侧壁设有泄水孔口，孔口直径$d=200$ mm，孔口流量系数$\mu=0.62$，初始其作用水头$H_1=2.0$ m。试求放空所需时间（水面与孔口中心齐平）：（　　）

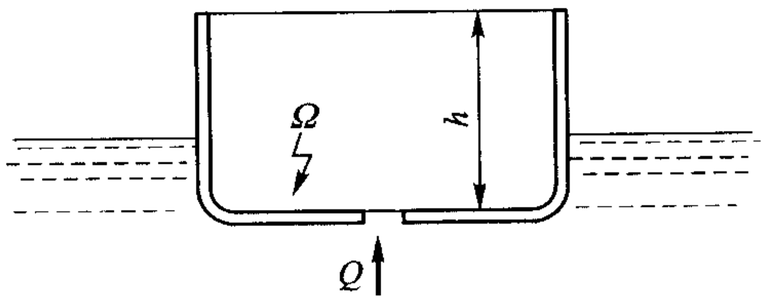
A $t=0.68$ h　　B $t=1.5$ h　　C $t=1.93$ h　　D $t=2.0$ h

1-3-4 今有一沉淀池，长$l=30$ m，宽$b=15$ m，在侧壁设有3个泄水管嘴，外延管嘴的管径$d=200$ mm，孔口流量系数$\mu_n=0.82$，初始其作用水头$H_1=3.0$ m，求放空所需时间（水面与管嘴中心齐平时才为放空）：（　　）

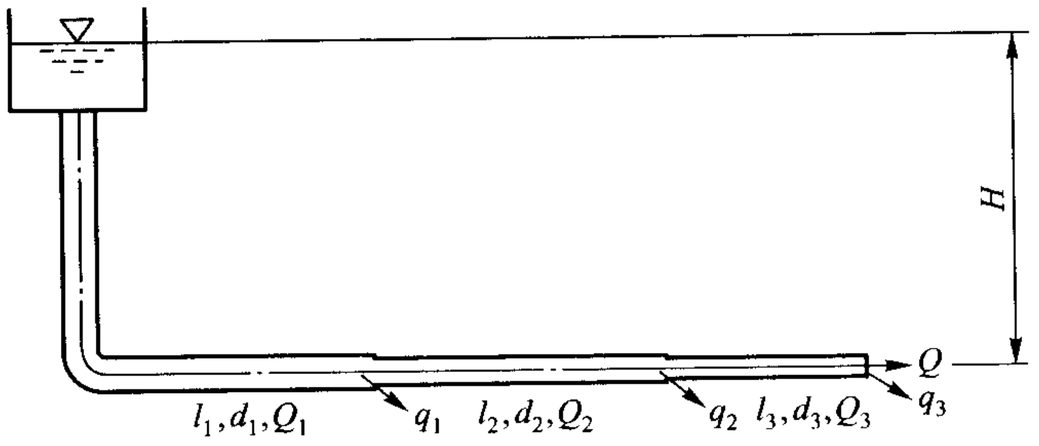
A $t=1.27$ h　　B $t=1.42$ h　　C $t=1.51$ h　　D $t=1.80$ h

1-3-5 有一平底空船（如习题1-3-5图所示），其水平面积$\Omega=8$ m^2，船舷高$h=0.5$ m，船自重$G=9.8$ kN。船底突然出现一个$d=10$ cm的破孔，水自圆孔漏入船中，试问经过多长时间该船将沉没（孔口流量系数为$\mu=0.62$）：（　　）

A $t=425.5$ s　　B $t=394.8$ s　　C $t=242.5$ s　　D $t=525.6$ s



习题 1-3-5 图



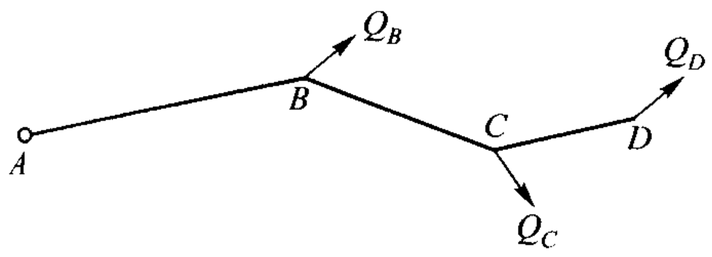
习题 1-3-6 图

1-3-6 一水塔供水系统如习题1-3-6图所示，已知管道末端要求的自由水头$H_z=10$ m，管径$d_1=450$ mm，$d_2=350$ mm，$d_3=250$ mm，管长$l_1=1\,500$ m，$l_2=1\,000$ m，$l_3=1\,000$ m，$q_1=0.10$ m^3/s，$q_2=0.08$ m^3/s，$q_3=0.02$ m^3/s，$Q=0.03$ m^3/s，管道的沿程阻力系数$\lambda_1=0.012$，$\lambda_2=0.015$，$\lambda_2=0.018$。试确定水塔高度H：（　　）

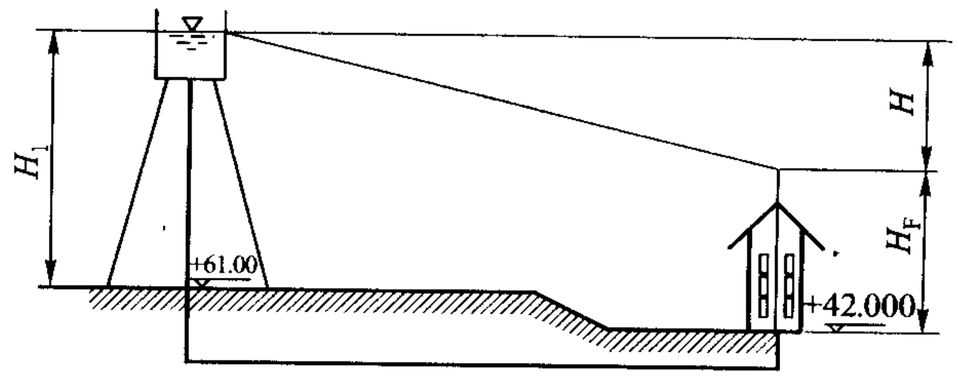
A 25.20 m　　B 23.85 m　　C 30.52 m　　D 22.08 m

1-3-7 某供水管路系统，如习题1-3-7图所示，由水泵A向B、C、D三处供水，已知流量$Q_B=0.025$ m^3/s，$Q_C=0.015$ m^3/s，$Q_D=0.01$ m^3/s，管长$l_{AB}=350$ m，$l_{BC}=300$ m，$l_{CD}=250$ m，管径$d_{AB}=200$ mm，$d_{BC}=150$ mm，$d_{CD}=100$ mm；沿程阻力系数$\lambda_{AB}=\lambda_{BC}=\lambda_{CD}=0.02$，场地水平，$D$点服务水头$H_z=8$ m。试求水泵A出口压强（水柱）：（　　）

A　20.76 m（水柱）　　B　12.76 m（水柱）　　C　28.05 m（水柱）　　D　30.00 m（水柱）



习题 1－3－7 图



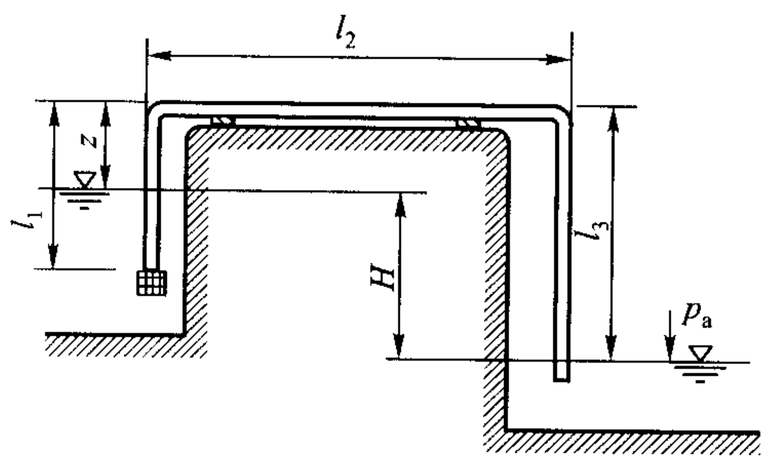
习题 1－3－8 图

1－3－8　某供水管路系统，如习题 1－3－8 图所示，水塔地形高程为 61.00 m，塔高 $H_1=30$ m，由两条串联管路为供水点供水，$l_1=400.00$ m，$d_1=250$ mm，$l_2=300.0$ m，$d_2=200$ mm，沿程阻力系数 $\lambda_1=\lambda_2=0.025$，供水点地形高程为 42.00 m，服务水头 $H_z=10.00$ m。试求供水最大流量：（　　）

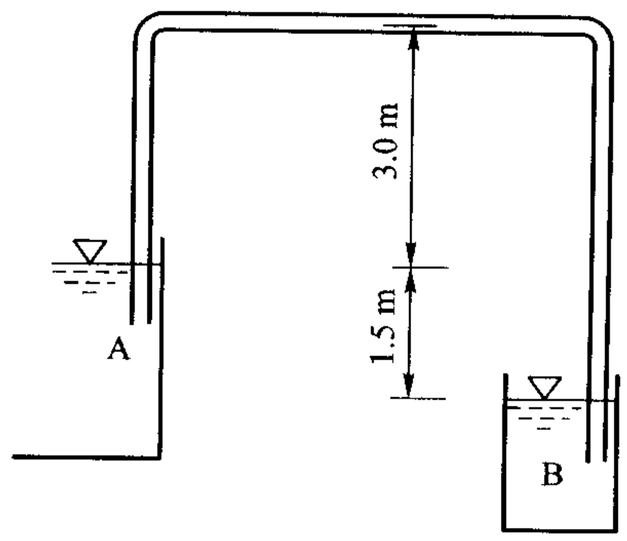
A　$Q=0.210\ m^3/s$　　B　$Q=0.118\ m^3/s$　　C　$Q=0.120\ m^3/s$　　D　$Q=0.250\ m^3/s$

1－3－9　如习题 1－3－9 图所示，两水池用虹吸管连通，上下游水位差 $H=2$ m，管长 $l_1=2$ m，$l_2=6$ m，$l_3=3$ m，管径 $d=200$ mm，沿程损失系数 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.025$，进口局部损失系数 $\zeta_1=6.0$，一个弯头损失系数 $\zeta_2=0.3$。试求虹吸管的过流流量：（　　）

A　$Q=2.0\ m^3/s$　　B　$Q=0.066\ m^3/s$　　C　$Q=2.22\ m^3/s$　　D　$Q=2.85\ m^3/s$



习题 1－3－9 图



习题 1－3－10 图

1－3－10　如习题 1－3－10 图所示，通过虹吸管由 A 池向 B 池供水，管路由 3 段组成，管径相同，$d=0.20$ m，$l_1=5.0$ m，$l_2=5.0$ m，$l_3=8.0$ m，沿程阻力系数 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.02$，进口局部损失系数 $\zeta_e=3.0$，中间有两个弯头，每个弯头的局部损失系数 $\zeta=0.3$。试求通过流量：（　　）

A　$Q=0.065\ 1\ m^3/s$　　B　$Q=0.085\ 0\ m^3/s$　　C　$Q=0.097\ 3\ m^3/s$　　D　$Q=0.067\ 3\ m^3/s$

1－3－11　条件与习题 1－3－10 相同，试求虹吸管路中最大真空压强；若最大允许真空压强 $[h_v]=7$ m（水柱），其安装高度是否合理：

A　$h_v=3.89$ m $<[h_v]$（水柱），安装合理　　B　$h_v=4.20$ m $<[h_v]$（水柱），安装合理

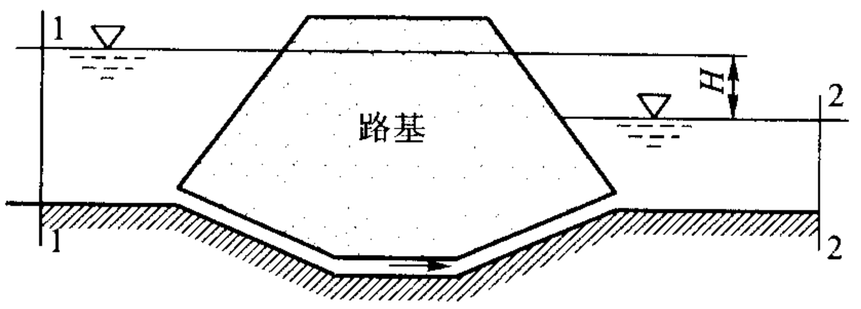
C　$h_v=8.20$ m $>[h_v]$（水柱），安装不合理　　D　$h_v=7.25$ m $>[h_v]$（水柱），安装不合理

1－3－12　如习题 1－3－12 图所示，某路基横跨一条小河，小河最大流量为 $Q_{max}=1.5\ m^3/s$，今设两条倒虹吸管过流。要求作用水头 $H=0.45$ m，管长 $l=30$ m，拟设计管径 $d=0.80$ m，沿程阻力系数 $\lambda=0.024$，倒虹吸管进口局部损失系数 $\zeta_e=0.8$，每个折管部分局部损失系数 $\zeta=0.4$。试校核是否能通过最大流量：（　　）

A　$Q=1.673\ m^3/s>Q_{max}$，能通过最大流量

B　$Q=1.595\ m^3/s>Q_{max}$，能通过最大流量

C　$Q=1.264\ m^3/s<Q_{max}$，不能通过最大流量

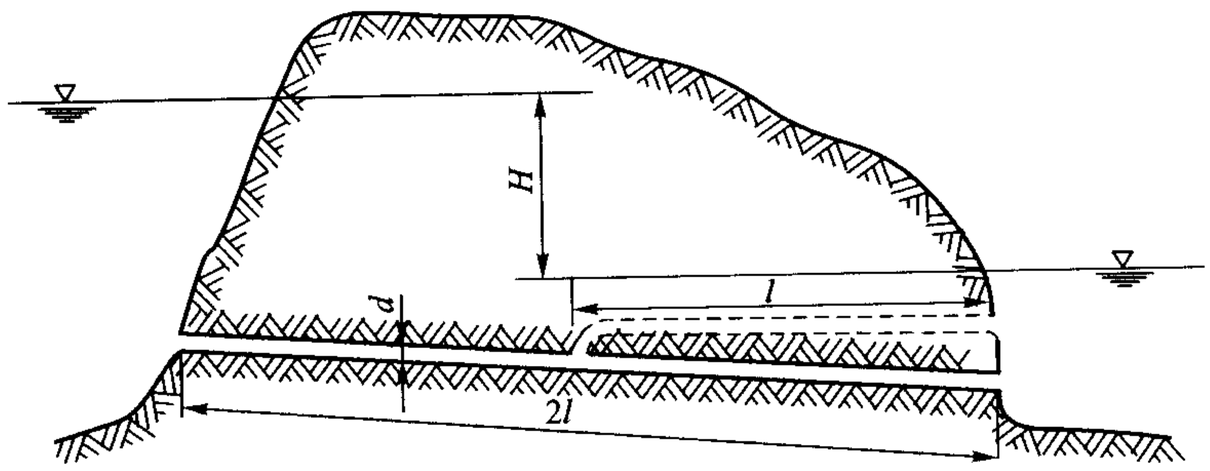


习题 1－3－12 图

D $Q=0.797\ \mathrm{m^3/s}<Q_{max}$，不能通过最大流量

1－3－13　如习题1－3－13图所示，直径为d，管长为$2l$的管路，若在其中点并联接出管径管材相同，管长为l的管道（虚线所示）。假定上下游水位不变，试求，并联后流量之比：（　　）

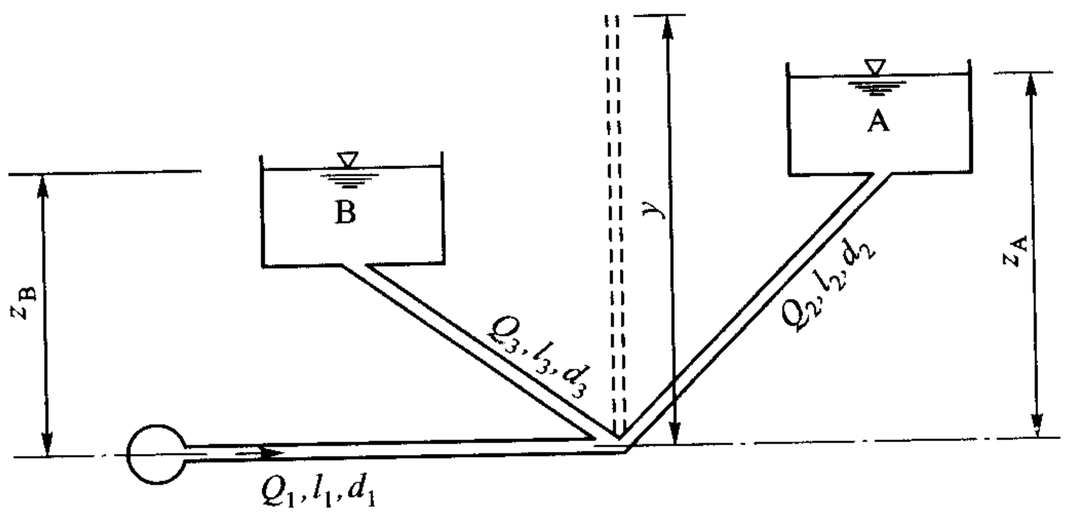
A $\frac{Q_2}{Q_1}=2.25$　　B $\frac{Q_2}{Q_1}=1.265$　　C $\frac{Q_2}{Q_1}=1.325$　　D $\frac{Q_2}{Q_1}=2.0$



习题1－3－13图

1－3－14　一水泵向两水池供水如习题1－3－14图所示，管长及管径分别为，$l_1=200\ \mathrm{m}$，$d_1=0.25\ \mathrm{m}$，$l_2=200\ \mathrm{m}$，$d_2=0.20\ \mathrm{m}$，$l_3=150\ \mathrm{m}$，$d_3=0.15\ \mathrm{m}$。已知供水管为铸铁管，$\lambda=0.002$，$z_A=15\ \mathrm{m}$，$z_B=10\ \mathrm{m}$，A池的供水流量$Q_2=0.12\ \mathrm{m^3/s}$。试求B池的供水量Q_3（提示：按长管计算，y为该节点的虚拟测压管水头）：（　　）

A $Q=0.092\ \mathrm{m^3/s}$　　B $Q=0.085\ \mathrm{m^3/s}$　　C $Q=0.052\ \mathrm{m^3/s}$　　D $Q=0.078\ \mathrm{m^3/s}$



习题1－3－14图

第四章　明渠恒定流

明渠是指人工修建的渠道或自然形成的河道。明渠流具自由表面，自由表面上各点压强均为大气压强，相对压强为零，故又称为无压流。天然河道、输水渠道、无压隧洞、渡槽、涵洞中的水流都属明渠水流。

当明渠中水流的运动要素不随时间变化时，被称为明渠恒定流，否则称为明渠非恒定流。在明渠恒定流中，如果水流任一点运动要素不随流程变化，称为明渠恒定均匀流，简称明渠均匀流；否则称为明渠恒定非均匀流，简称明渠非均匀流。在明渠非均匀流中，若流线接近于相互平行的直线，称为渐变流，否则称为急变流。

本章仅限于明渠恒定流，首先讨论明渠恒定均匀流，而后讨论明渠恒定非均匀流。

第一节　明渠的类型

明渠的断面形状、尺寸及底坡的变化对明渠水流运动有十分重要的影响，通常把明渠分为以下类型。

一、顺坡、平坡和逆坡渠道

明渠的底为一斜面，在纵剖面上，渠底为一长斜线，其纵向的倾斜程度称为底坡，用符号 i 表示。i 的大小用底坡线与水平面夹角的正弦表示，即 $i=\dfrac{\Delta z}{l}=\sin\theta$，式中 θ 为渠底坡线与水平面的夹角。通常土渠的底坡 i 不大，即 θ 很小，故常用 $i\approx\dfrac{\Delta z}{l_x}=\tan\theta$ 表示，式中 l_x 为渠底坡线的水平投影长度，如图 1－4－1a 所示。

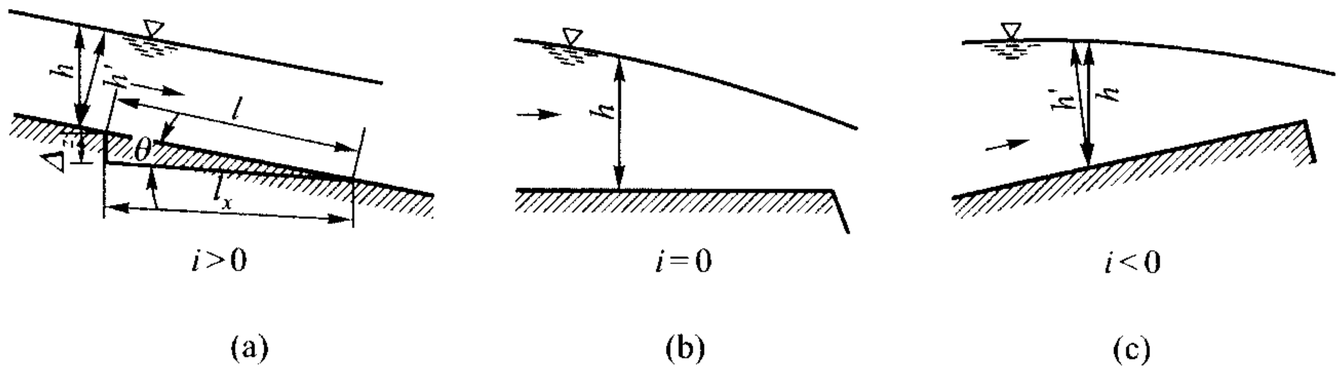


图 1－4－1　明渠底坡

当渠底沿程降低时，称为**顺坡渠道**，即 $i>0$，如图 1－4－1（a）所示；当渠底水平时，称为**平坡渠道**，即 $i=0$，如图 1－4－1（b）所示；当渠底沿程升高时，称为**逆坡渠道**，即 $i<0$，如图 1－4－1（c）所示。

应当指出，明渠水流的水深应在垂直于底坡线的过流断面上量取 h'，对于底坡较小的渠道，水流的水深可取其铅垂方向 h［图 1－4－1（a）］，当 $i\leqslant 0.1$，（$\theta\leqslant 6°$）时，水深的误差均小于 1%，在实用上可认为并无差异。本章仅讨论底坡不大的渠道，对于底坡较大的渠道，其误差明显，应引起注意。

二、棱柱形渠道与非棱柱形渠道

按纵向几何条件，凡断面形状、尺寸及底坡沿程不变的长直渠道，称为棱柱形渠道。否则，称为非棱

柱形渠道。棱柱形渠道的过流断面面积仅随水深变化，即 $A=f(h)$，而非棱柱形渠道上过流断面面积不仅随水深改变，而且沿流程改变，即 $A=f(h,s)$。断面规则的人工渠道、渡槽、涵洞是典型的棱柱形渠道。对于断面形状尺寸变化不大的顺直河段，在进行水力计算时往往按棱柱形渠道处理。

三、明渠的横断面

人工明渠的横断面通常是对称的几何形状，常见的有矩形、梯形、圆形、半圆形，若横断面为梯形称之为梯形断面渠道，其他以此类推。其水力要素如图 1-4-2 所示，图中 b 为底宽，h 为水深，B 为水面宽度。

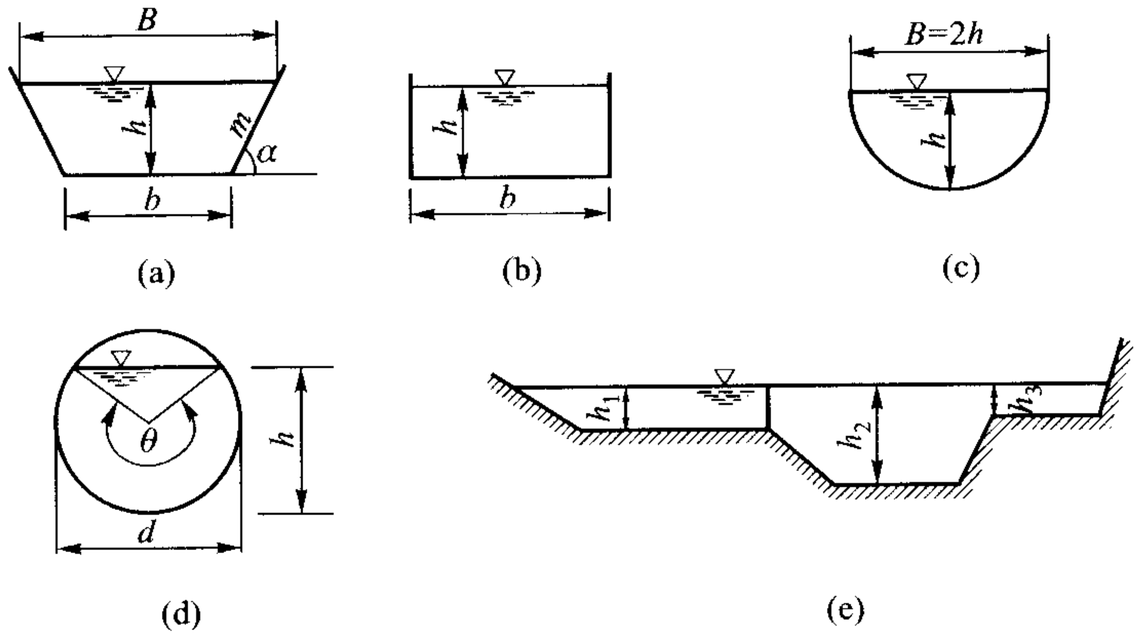


图 1-4-2 渠道断面

对于梯形断面渠道，工程中应用最广，其过水断面的水力要素的关系如下。

水面宽度：

$$B=b+2mh \tag{1-4-1}$$

过水断面面积：

$$A=(b+mh)h \tag{1-4-2}$$

湿周：

$$\chi=b+2h\sqrt{1+m^2} \tag{1-4-3}$$

水力半径：

$$R=\frac{A}{\chi}=\frac{(b+mh)h}{b+2h\sqrt{1+m^2}} \tag{1-4-4}$$

式中：m——梯形渠道两侧边坡的斜倾程度，称为**边坡系数**，$m=\cot\alpha$，m 的大小根据土的种类或护面材料及维护情况确定，应用时查相关资料。

矩形断面渠道通常是在岩石上开凿或两侧用条石砌成，或是混凝土渠道。圆形断面通常是指无压隧洞、涵洞或排水管道。天然河道断面一般是不规则的，可近似用图 1-4-2（e）表示，称为复式断面渠道。

第二节 明渠均匀流的特征及形成条件

一、明渠均匀流的水力特征

明渠均匀流的流线是与底坡平行的一簇平行直线，故有以下水力特征：

①过流断面面积、水深沿程不变。

②过流断面平均流速、过流断面上流速分布沿程不变。

③底坡线、总水头线、水面线三线平行，即 $i = J = J_p$，如图1-4-3所示。

④水体的重力沿水流方向的分力等于阻碍水流运动的摩阻力。

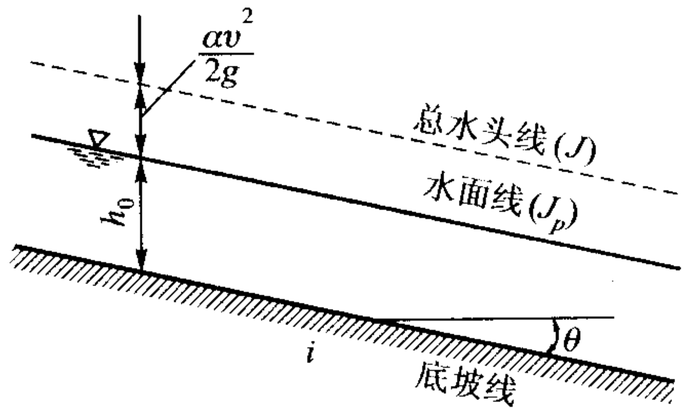


图1-4-3　均匀流特征

二、明渠均匀流形成的条件

根据明渠均匀流的水力特征，不难得出其形成的条件：

（1）明渠中水流必须是恒定流。若为非恒定流，水面波动，流线不可能为平行直线，必然形成非均匀流。

（2）渠道必须是长直棱柱形渠道，粗糙系数 n 沿程不变，且无闸、坝、桥、涵等水工建筑物。

（3）明渠中的流量沿程不变，即无支流汇入或流出。

（4）渠道必须是顺坡，即 $i>0$。否则，水体重力沿水流方向的分力不等于摩阻力。

实际工程中的渠道很难严格满足上述条件，而且渠道一般建有水工建筑物。因此，明渠水流多为非均匀流。但是，对于顺直的棱柱形渠道，只要有足够的长度，在离开进口或出口，或离开建筑物一定距离后，总是有形成均匀流的趋势，在实际工程中可按均匀流处理。人工明渠一般都尽量使其顺直，基本上可满足均匀流形成的条件。对于天然河道，由于其断面形状，尺寸坡度、粗糙系数一般沿程是变化的，所以常发生非均匀流。对于较为顺直，整齐的河段也常按均匀流进行近似计算，所以明渠均匀流理论是进一步研究明渠非均匀流的基础。

第三节　明渠均匀流的基本计算公式

工程上明渠水流一般都属于湍流粗糙区。其水力计算基本公式为：

$$Q = Av = \text{const} \tag{1-4-5}$$

$$v = C\sqrt{RJ} \tag{1-4-6}$$

式中：C——谢才系数。式（1-4-5）是连续性方程，流量为常数；式（1-4-6）为明渠均匀流的动力方程式，亦称谢才（Chezy）公式。由于明渠均匀流中，水力坡度 J 与底坡 i 相等，所以式（1-4-6）可改写为：

$$v = C\sqrt{Ri} \tag{1-4-7}$$

将式（1-4-7）代入式（1-4-5），得：

$$Q = AC\sqrt{Ri} \tag{1-4-8}$$

或写为：

$$Q = K\sqrt{i} \tag{1-4-9}$$

式中：K——$K = AC\sqrt{R}$，称为明渠水流的流量模数，m^3/s。

流量模数综合反映明渠的断面形状尺寸和粗糙度对过流能力的影响。

在明渠均匀流情况下，渠中水深定义为正常水深，用 h_0 表示，相应的过流断面面积为 A_0，水力半径为 R_0，谢才系数为 C_0，流量模数为 K_0，加脚标0是为了与明渠非均匀流中的水力要素相区别。谢才系数 C 与明渠的断面形状、尺寸、护面的粗糙系数 n 有关，即 $C = f(R, n)$。

通常采用曼宁（Manning）公式和巴甫洛夫斯基（Павловский）公式确定。

曼宁公式：

$$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}} \tag{1-4-10}$$

曼宁公式在明渠和管道中均可应用，在 $n<0.020$ 及 $R<0.5$ m 范围内较好，水流一定在粗糙区流动。

巴甫洛夫斯基公式：

$$C = \frac{1}{n}R^{y} \tag{1-4-11}$$

式中：y——$y=2.5\sqrt{n}-0.13-0.75\sqrt{R}(\sqrt{n}-0.1)$。

y 值依公式计算，因其计算繁琐，根据巴甫洛夫斯基公式计算的谢才系数 C 的数值表，应用时可查相关手册。指数 y 亦可用近似公式确定，当 $R<1$ m 时，$y=1.5\sqrt{n}$；当 $R>1$ m 时，$y=1.3\sqrt{n}$。巴甫洛夫斯基公式适用范围：0.1 m $<R<$ 3.0 m，管道、明渠中均可采用，水流一定在粗糙区流动。

这里特别指出，由式（1-4-10）和式（1-4-11）可知，水力半径 R 对谢才系数 C 的影响要比粗糙系数 n 对 C 的影响小得多（n 在分母，且 $n<<1.0$），所以在设计渠道的断面尺寸，计算明渠输水能力时，正确地选用合适的 n 值就显得十分重要。若 n 值估计小了，即运行时的水流阻力也估计小了，而实际水流阻力要大，这样流量就达不到设计要求，或造成渠道水流漫溢或泥沙淤积。反之，设计断面尺寸偏大会造成建设费用的浪费，还可能因实际流速过大而引起渠道冲刷。

第四节 水力最优断面及允许流速

一、水力最优断面

从明渠均匀流的计算公式可知，明渠的输水能力取决于明渠断面的形状、尺寸、底坡和粗糙系数的大小。在设计渠道时，底坡一般依地形条件，粗糙系数取决于渠道的土质、护面材料及维护情况。当 i、n 和 A 一定的前提下，渠道输水能力最大的那种断面形状称为**水力最优断面**。

把曼宁公式代入式（10-4-8），得：

$$Q = Av = AC\sqrt{Ri} = \frac{1}{n}AR^{\frac{2}{3}}i^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n}\frac{A^{\frac{5}{3}}i^{\frac{1}{2}}}{\chi^{\frac{2}{3}}}$$

上式表明，当 i、n 和 A 一定时，湿周 χ 越小，其过水能力越大。不难想象，当面积 A 一定时，边界最小的几何图形是圆形，即湿周最小。对于明渠，半圆形断面是水力最优的。但是，半圆形断面不易施工，仅在混凝土制作的渡槽等水工建筑物中使用。一般明渠为梯形断面，那么梯形断面有无水力最优的条件呢？

梯形断面的面积大小由底宽 b、水深 h 及边坡系数 m 决定，边坡系数取决于边坡稳定和施工条件，在已确定边坡系数的前提下，面积 $A=(b+mh)h$，则底宽：

$$b = \frac{A}{h} - mh \tag{1-4-12}$$

湿周：

$$\chi = b + 2h\sqrt{1+m^2}$$

将式（1-4-12）代入，得：

$$\chi = \frac{A}{h} - mh + 2h\sqrt{1+m^2} \tag{1-4-13}$$

根据水力最优断面的定义，若面积一定，则湿周应最小。对式（1-4-13）求导，解出极小值，即水力最优的条件。

$$\frac{d\chi}{dh} = -\frac{A}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} \tag{1-4-14}$$

再求二阶导数，得：

$$\frac{d\chi^2}{dh^2} = 2\frac{A}{h^3} > 0$$

二阶导数大于零，这说明湿周存在极小值。

令：

$$-\frac{A}{h^2} - m + 2\sqrt{1+m^2} = 0$$

把 $A=(b+mh)h$ 代入上式，整理可得：

$$\beta_h = \left(\frac{b}{h}\right)_h = 2\left(\sqrt{1+m^2} - m\right) \tag{1-4-15}$$

式中：$\frac{b}{h}$——宽深比，加脚标 h 表示水力最优时的宽深比。

β_h 是水力最优宽深比的符号，β_h 仅仅为边坡系数 m 的函数，也就是说，若 m 值确定后，按式（1-4-15）计算可得出宽深比的值，按此值设计的渠道断面的尺寸是水力最优的。

矩形断面是梯形断面的一个特例，即 $m=0$，其水力最优的宽深比为 $\beta_h=\left(\frac{b}{h}\right)_h=2$，说明矩形渠道水力最优断面的底宽应是水深的 2 倍。在一般土渠中，边坡系数 m 一般大于 1，按式（1-4-15）解出的 β_h 都小于 1，即梯形渠道的水力最优断面是窄深型的。按水力最优断面设计的渠道工程量虽小，但不便于施工和维护。

所以，水力最优不一定是工程上最优的。一般来讲，对于小型土渠既有衬砌的渠道可采用水力最优断面设计，因为它施工容易，维护相对简便，费用不高；对于无衬护的大中型渠道，考虑到施工和维护，一般不用水力最优断面。实际工程中必须按工程造价、施工技术、输水要求及维护等诸方面条件综合比较，选定技术先进、经济合理的断面。

总起来讲，水力最优是从水力学原理提出的，对明渠断面形状的确定，要依据工程实际进行分析。

二、允许流速

对于设计合理的渠道，除考虑过流能力和工程造价等因素外，还应保证渠道不被冲刷或淤积。因此，设计流速不应大于允许流速 v'，否则渠道将被冲刷。v'指渠道免遭冲刷的最大允许流速，简称**不冲流速**。相反渠道中的流速也不要过小，否则悬浮的固体颗粒下沉造成淤积，或滋生杂草。v''指渠道免遭淤积的最小允许流速，简称**不淤流速**。

渠道的不冲流速的确定，取决于土质、渠道有无衬砌及衬砌的材料。设计时可参考有关水力手册。不淤流速的大小还与水流条件与挟沙特性等因素有关，设计时可查相关资料。

第五节　明渠均匀流水力计算

对于梯形断面，各水力要素的关系可表述为：$Q=AC\sqrt{Ri}=f(m,b,h,n,i)$，此式中有 6 个变量，一般情况下，边坡系数 m、粗糙系数 n 根据土质条件确定，其余 4 个变量再按工程条件预先确定 3 个变量，然后求解另一个变量。

输水工程中应用最广泛的是梯形断面渠道，现以梯形断面渠道为例，讨论明渠均匀流水力计算的基本问题。

一、校核渠道的输水能力

此类问题大多数是对已建工程进行校核性水力计算。已知渠道的断面尺寸、底坡、粗糙系数，求通过流量或断面平均流速。因为6个变量中有5个已知，即 m，b，h，i，n 确定，仅流量未知，可用公式 $Q = AC\sqrt{Ri}$，直接求解流量，在计算时，A，χ 均以 m 计。

二、确定渠道的底坡

此类问题相当于根据水文资料和地质条件确定了设计流量、断面形状、尺寸、粗糙系数 n 及边坡系数 m，即6个变量中有5个已知。设计渠道的底坡 i，可以利用式（1-4-9）求解，即：

$$i = \frac{Q^2}{K^2} \tag{1-4-16}$$

三、确定渠道断面尺寸

若根据水文资料及地质条件已确定流量、底坡、边坡系数、粗糙系数，即4个变量已知，可能有多组解（h，b）满足方程式 $Q = f(m,h,b,i,n)$，一般要根据工程条件先确定 b 或 h，再求解 h 或 b。

1. 确定渠道的水深

若已确定渠道的底宽 b，将 $A = (b + mh)h$，$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$，$R = \frac{A}{\chi}$，$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$ 代入 $Q = AC\sqrt{Ri}$，整理可得 $Q = \frac{1}{n} \cdot \frac{[(b + nh)h]^{\frac{5}{3}} \cdot i^{\frac{1}{2}}}{(b + 2h\sqrt{1 + m^2})^{\frac{2}{3}}}$，这是一个关于未知量 h 的高次方程，求解十分困难，可以用试算－图解法。即先假定水深 h 一系列值，代入上式求出流量 Q，然后绘制 $h - Q$ 的关系曲线，根据已知流量，在曲线上查出所要求的值（参见例1-4-1）。也可以用图解法求解（省略介绍）。

2. 确定渠道的底宽

已知渠道的设计流量 Q，水深 h，底坡 i，粗糙系数 n，求解底宽 b。此类问题与水深求解的方法类似，也要用试算－图解法。不同的是假定底宽 b 的一系列值，求出各物理量，绘制 $b - Q$ 关系曲线图，根据已知流量在曲线上查找对应的底宽 b。

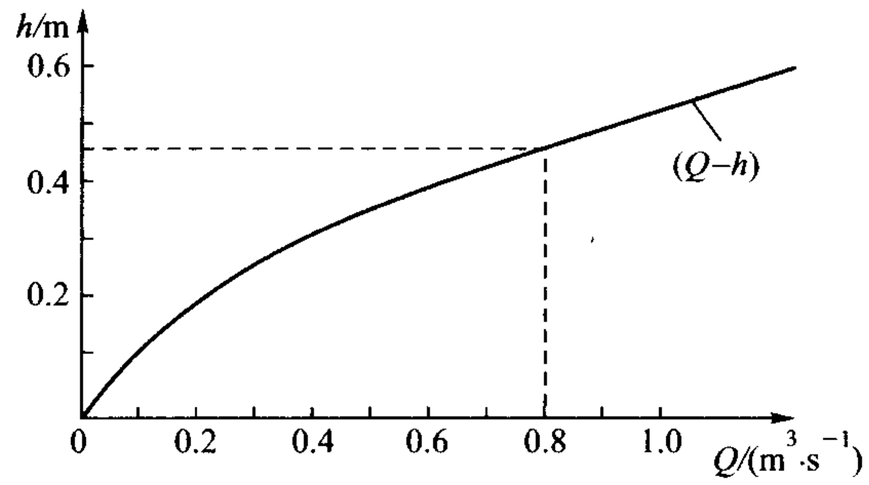
【例1-4-1】 某输水渠道，梯形断面，土质为沙壤土，边坡系数 $m = 2.2$，底宽 $b = 2$ m，通过流量 0.8 m^3/s，岸边有杂草，粗糙系数 $n = 0.027$，底坡 $i = 0.001\,2$。试求正常水深 h_0？

解： 用试算－图解法，设水深为一系列值，计算 A、χ、R、C、Q，列表如下：

例题1-4-1表 计算列表

h/m	$A = (b + mh)h$/m^2	$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$/m	$R = \frac{A}{\chi}$/m	$c = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$/($m^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}$)	$Q = Ac\sqrt{Ri}$/($m^3 \cdot s^{-1}$)
0.3	0.789	3.450	0.231	29.01	0.385
0.4	1.152	3.934	0.293	30.18	0.652
0.5	1.55	4.417	0.315	31.11	0.99

由上表数据绘 $Q-h$ 的关系曲线，根据已知流量在图中求出正常水深 $h_0=0.45$ m。



例题 1-4-1 图

【例 1-4-2】 有一梯形断面小型渠道，土质为沙壤土，边坡系数 $m=2.0$，粗糙系数 $n=0.025$，流量 $Q=2.5\ \mathrm{m^3/s}$，底坡 $i=0.001\ 6$。试确定渠道的断面底宽 b 和水深 h，试校核不冲流速 $v'=0.7$ m/s 是否满足不冲刷条件，是否需要衬护？

解：因为是小型渠道，可用水力最优条件求解。

宽深比：

$$\beta_h=\left(\frac{b}{h}\right)_h=2\left(\sqrt{1+m^2}-m\right)=2\left(\sqrt{1+2^2}-2\right)=0.472$$

则：

$$b=0.472h$$

断面面积：

$$A=(b+mh)h=(0.472h+2h)h=2.472h^2$$

湿周：

$$\chi=b+2h\sqrt{1+m^2}=0.472h+2h\sqrt{1+2^2}=4.944h$$

水力半径：

$$R=0.5h$$

所以：

$$Q=AC\sqrt{Ri}=A\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{2}}i^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{A}{n}R^{\frac{2}{3}}i^{\frac{1}{2}}=\frac{2.472h^2}{0.025}\times(0.5h)^{\frac{2}{3}}\times(0.001\ 6)^{\frac{1}{2}}=2.492h^{\frac{8}{3}}$$

水深：

$$h=\left(\frac{Q}{2.492}\right)^{\frac{3}{8}}=\left(\frac{2.5}{2.492}\right)^{\frac{3}{8}}\ \mathrm{m}=1.00\ \mathrm{m}$$

所以，底宽：

$$b=0.472\ h=0.472\times1.0\ \mathrm{m}=0.472\ \mathrm{m}$$

校核流速，则：

$$v=\sqrt{Ri}=\frac{1}{n}R^{\frac{2}{3}}i^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{0.025}\times\ (0.50)^{\frac{2}{3}}\times\ (0.001\ 6)^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{m/s}=1.01\ \mathrm{m/s}$$

显然 $v>v'$，不满足不冲条件，该渠道需要衬护。若用单层块石铺砌，允许流速可提高到 3.5 m/s。若衬护则重新确定边坡系数，再按水力最优断面设计断面尺寸。

对于渠道断面形状、尺寸的确定，小型渠道或有衬砌的渠道，可按水力最优断面设计，或是按技术要求先给定宽深比 β，补充这一条件后，也可用解析的方法求解底宽 b 或水深 h。对于大、中型渠道的设计，则通过经济比较，有通航条件的渠道按通航的要求设计。

第六节 管道无压流的水力计算

如图 1-4-2（d）所示，排水管渠、涵管，在不满流时，有自由液面，也属明渠水流，θ 为**充满角**，水深与管径的比值称为**充满度**，用 α 表示，$\alpha=\frac{h}{d}$，通常排水管道、涵管采用圆形断面，考虑了水力最优的条件，同时还考虑到施工方便，若流量较大时从结构的角度考虑采用城门洞型断面。本节仅分析讨论圆形断面管道、涵管。

一、管道无压流的水流特征

如上所述，管道不满流也属明渠水流，若管道有足够长，管径不变，底坡不变，流量恒定，也产生均匀流，具有明渠均匀流的特征。此外，它还具有另外一种特征，即在未达到满管流之前流量达到最大值，流速也达到最大值。现在引入 Q_0 和 v_0 与 Q，v 进行比较。Q_0 和 v_0 分别是刚达到满流时的流量、流速，Q，v 是不满流时的流量和流速。不同的充满度对应一个流量和流速，采用量纲为一的结合量，表示充满度与流量、流速的关系，如图 1-4-4 所示。

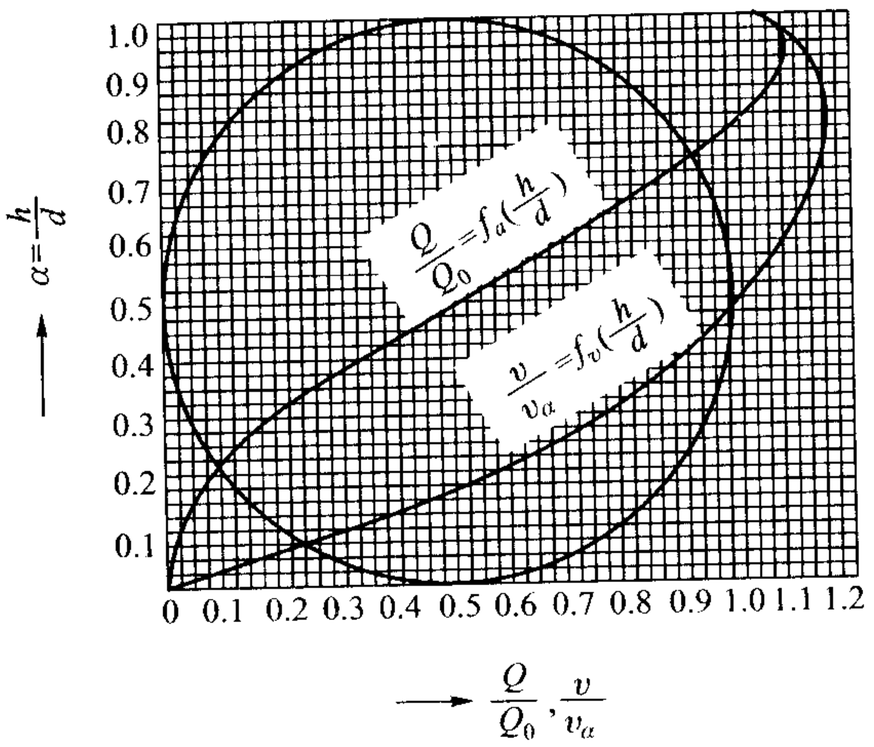


图 1-4-4 管道满流与不满流关系

从图 1-4-4 可知，当 $\alpha=\frac{h}{d}=0.95$ 时，$\frac{Q}{Q_0}=1.075$，即 Q 达到最大值，是满流的 1.075 倍。当 $\frac{h}{d}=0.81$ 时，$\frac{v}{v_0}=1.16$，v 达到最大值。这是因为在水深超过半径后，过水断面的面积随水深增长缓慢，而湿周相对增加要快些，即当 $\alpha=0.81$ 时水力半径 R 达到最大值，其后 R 相对减小，所以流速达到最大值。当 $\alpha>0.81$ 后，A 继续增大，由公式 $Q=Av$ 可知，流量还在增加。当 $\alpha=0.95$ 时，流量达到最大。当 $\alpha>0.95$ 后，随着水力半径 R 的减小，流速也变小，而流量也相对变小了。

二、管道无压流的水力计算

1. 不满流时水力要素计算公式

断面面积：

$$A=\frac{d^2}{8}(\theta-\sin\theta) \tag{1-4-17}$$

式中：θ 以弧度计。

湿周：

$$\chi=\frac{d}{2}\theta \tag{1-4-18}$$

水力半径：

$$R=\frac{d}{4}\left(1-\frac{\sin\theta}{\theta}\right) \tag{1-4-19}$$

充满度：

$$\alpha=\frac{h}{d}=\sin\frac{\theta}{4} \tag{1-4-20}$$

为了避免上式的繁杂计算，可以用查表的方法计算，见表 1－4－1。

表 1－4－1　不同充满度的圆形管道的水力要素（d 以 m 计）

充满度 α	过水断面面积 A/m^2	水力半径 R/m	充满度 α	过水断面面积 A/m^2	水力半径 R/m
0.05	$0.014\ 7d^2$	$0.032\ 6d$	0.55	$0.442\ 2d^2$	$0.264\ 9d$
0.10	$0.040\ 0d^2$	$0.063\ 5d$	0.60	$0.492\ 0d^2$	$0.277\ 6d$
0.15	$0.073\ 9d^2$	$0.092\ 9d$	0.65	$0.540\ 4d^2$	$0.288\ 1d$
0.20	$0.111\ 8d^2$	$0.120\ 6d$	0.70	$0.587\ 2d^2$	$0.296\ 2d$
0.25	$0.153\ 5d^2$	$0.146\ 6d$	0.75	$0.631\ 9d^2$	$0.301\ 7d$
0.30	$0.198\ 2d^2$	$0.170\ 9d$	0.80	$0.673\ 6d^2$	$0.304\ 2d$
0.35	$0.245\ 0d^2$	$0.193\ 5d$	0.85	$0.711\ 5d^2$	$0.303\ 3d$
0.40	$0.293\ 4d^2$	$0.214\ 2d$	0.90	$0.744\ 5d^2$	$0.298\ 0d$
0.45	$0.342\ 8d^2$	$0.233\ 1d$	0.95	$0.770\ 7d^2$	$0.286\ 5d$
0.50	$0.392\ 7d^2$	$0.250\ 0d$	1.00	$0.785\ 4d^2$	$0.250\ 0d$

2. 管道无压流的水力计算类型

（1）已知 α，d，i，n 求 Q；

（2）已知 Q、α、d、n 求 i；

（3）已知 Q、h、i、n 求 d。

进行上述水力计算，仍应用 $Q = AC\sqrt{Ri}$，$Q = \frac{A}{n}R^{\frac{2}{3}}i^{\frac{1}{2}}$，设计管径、底坡时，还要根据《室外排水设计规范》（GB 50014—2006）进行。

第七节　明渠恒定非均匀流水流特征

人工渠道或天然河道中的水流，绝大多数为非均匀流，这是因为天然河道中不存在棱柱形渠道。即使是人工渠道，其断面形状、尺寸可能改变，底坡也可能改变，就是长直棱柱形渠道上也往往建有闸、涵等水工建筑物。因此，一般明渠很难满足均匀流的形成条件。

明渠恒定非均匀流重点研究内容是：明渠恒定非均匀流的水力要素（重点是水深）的变化规律及其水力计算，确定水面线形式及其位置，以便确定明渠的边墙高度和建筑物（闸、坝、桥、涵）前的壅水深度及回水淹没的范围，这在工程中具有十分重要的意义。

一、明渠非均流水力特征

如图 1－4－5 所示，与明渠均匀流相比，明渠非均流有以下特征：

① 断面平均流速、水深沿程改变，即 $h = f(s)$，$A = f(h, s)$；

② 水力坡度 J、水面线 J_p、底坡 i 三者不再相等，即底坡线、水面线、总水头线不再平行。

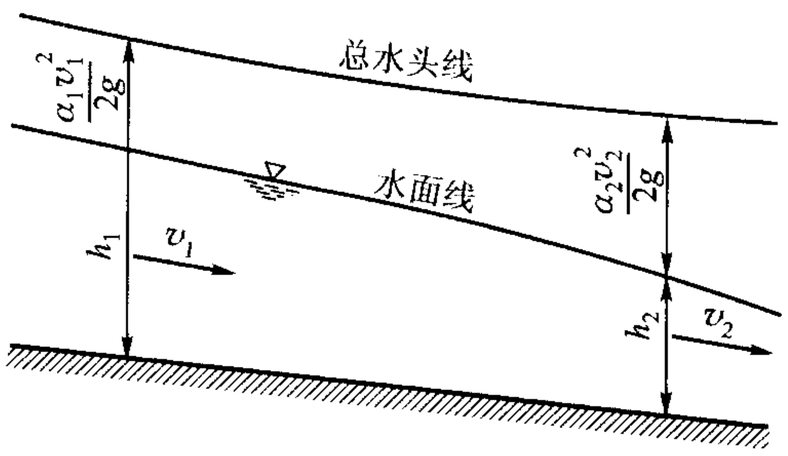


图 1－4－5　明渠非均匀流

二、急流、缓流、临界流

明渠水流具有自由液面与大气相接触，它与有压流不同，分为三种流态：急流、缓流、临界流。通过下面的实例可明确的认识这三种流态。假定将小石子投向湖水中，小石子会激起微小的干扰波，以小石子落点为中心向四周传播，干扰波传播如图 1-4-6（a）所示。其传播速度用 c 表示。$c=\sqrt{gh_m}$，式中 h_m 为平均水深。若把小石子投向渠道水流中，干扰波传播如图 1-4-6（b）、（c）、（d）所示。

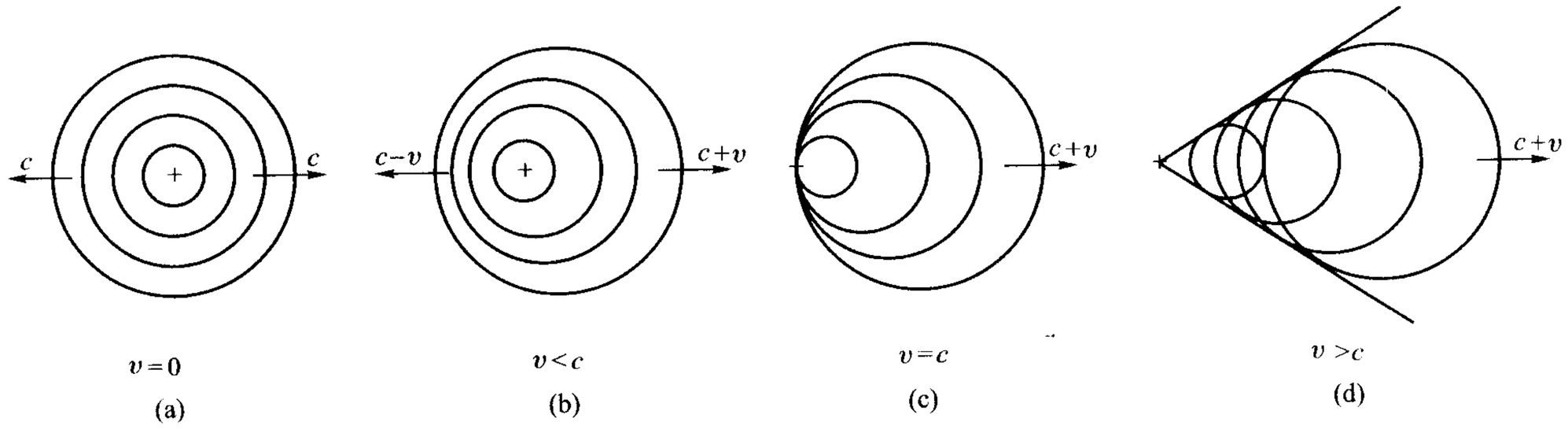


图 1-4-6 干扰波传播示意图

图 1-4-6（c）所表示的是水流流速等于波速 c，只能向下游传播，向上游传播速度 $c-v=0$，这种水流称为**临界流**；图 1-4-6（b）所示，渠道中水流流速小于波速 c，干扰波向下流传播的速度为 $v+c$，向上游传播速度为 $c-v>0$，这种水流称为**缓流**；图 1-4-6（d）所示，渠道中水流流速大于波速 c，干扰波不能向上游传播，向上传播的速度为 $c-v<0$，向下游传播速度为 $c+v$。这种水流称为**急流**。根据以上定义，缓流、急流、临界流就有了判别标准。

当 $v<c$ 时，为缓流，干扰波向上游传播。

当 $v=c$ 时，为临界流，干扰波不能向上游传播。

当 $v>c$ 时，为急流，干扰波不能向上游传播。

对于临界流 $v=c=\sqrt{gh_m}$，可以改写为量纲为一的纯数，

$$Fr=\frac{v}{\sqrt{gh}} \tag{1-4-21}$$

Fr 称为**弗劳德数**，Fr 就成为急流、缓流的另一个判别标准。

当 $Fr<1$ 时为缓流，当 $Fr=1$ 时为临界流，当 $Fr>1$ 时为急流。

第八节 断面单位能量与临界水深

一、断面单位能量的概念

如图 1-4-7 所示，明渠渐变流的过水断面上，以 0-0 为基准面，其单位重量液体总的机械能为：

$$E=z+\frac{P}{\rho g}+\frac{\alpha v^2}{zg}=z_0+h\cos\theta+\frac{\alpha v^2}{2g} \tag{1-4-22}$$

式中：θ——明渠底面与水平面的夹角。

在实际工程中 θ 较小，可近似认为 $\cos\theta\approx1$，所以式（1-4-22）可改写为：

$$E=z_0+h+\frac{\alpha v^2}{2g} \tag{1-4-23}$$

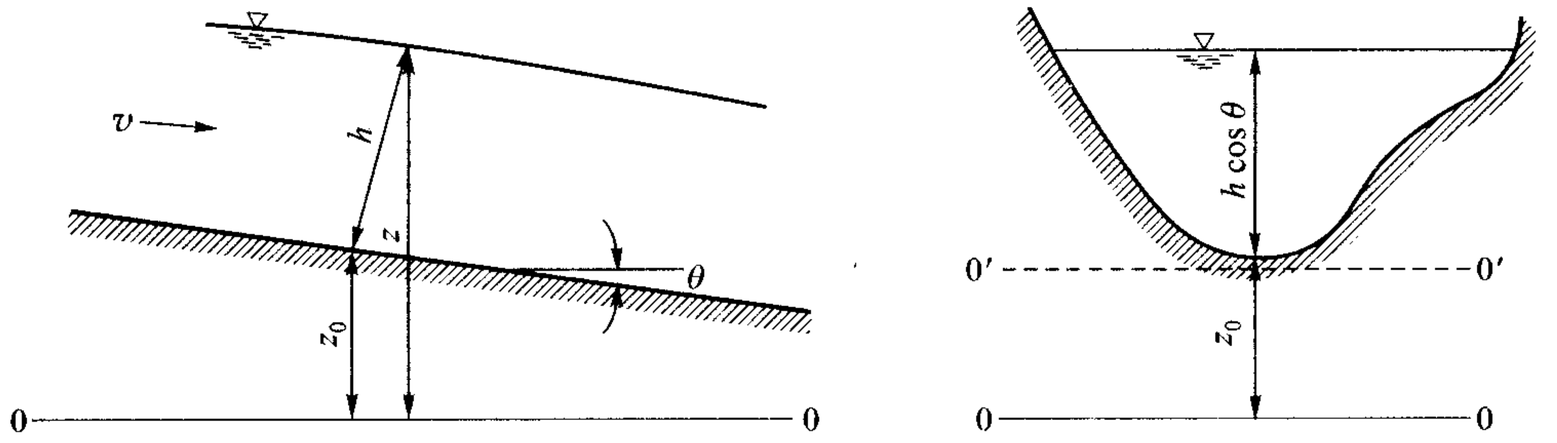


图 1-4-7　断面单位能量

如果把基准面选在渠底的位置上，那么，过水断面上单位重量液体具有的总机械能，称为**断面单位能量**（亦称**断面比能**），以 E_s 表示，则：

$$E_s = E - z_0 = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \tag{1-4-24}$$

或写成：

$$E_s = h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2} \tag{1-4-25}$$

为什么要引入断面单位能量的概念呢？由第二章可知，因为流体具有黏滞性，流体在运行时产生流动阻力，造成沿程水头损失，单位重量流体总的机械能沿程减少，即 $\frac{dE}{ds}<0$。断面单位能量则不同，断面单位能量 E_s，沿程可大、可小或沿程不变，即 $\frac{dE_s}{ds}>0$，$\frac{dE_s}{ds}<0$，$\frac{dE_s}{ds}=0$（均匀流），这是因为基准面选在明渠底部，基准面是变化的。既然 E_s 沿程改变，也就是说，E_s 是水深 h 和流程 s 的连续函数，即 $E_s=f(h,s)$。若为棱柱形渠道，则 E_s 仅仅是水深 h 的连续函数，研究断面单位能量沿程变化，则可分析水面曲线的变化规律。

二、断面单位能量（比能函数）图示

对于梯形断面棱柱形渠道，$E_s = h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2}$，因为 $A=(b+mh)h$，在 Q，b，m 一定时，$A=f(h)$，所以 $E_s=f(h)$，由式（1-4-25）可知：当 $h\to 0$ 时，$A\to 0$，$\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\to\infty$，所以 $E_s\to\infty$；当 $h\to\infty$ 时，$A\to\infty$，$\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\to 0$。因此 $E_s\to\infty$，即 $E_s\approx h_0$。

以 E_s 为横坐标，h 为纵坐标，根据以上讨论，可绘出断面单位能量曲线，亦称比能函数曲线，如图1-4-8所示。

曲线上端与以坐标轴呈45°角的直线渐近，下端与横轴为渐近线，该曲线有极小值，对应 K 点，断面单位能量最小，K 点把曲线分为上、下两半支，上支断面单位能量随水增加而增加，即 $\frac{dE_s}{dh}>0$；下支断面单位能量随水深减小而增大，即 $\frac{dE_s}{dh}>0$，将式（1-4-25）对 h 求导，得：

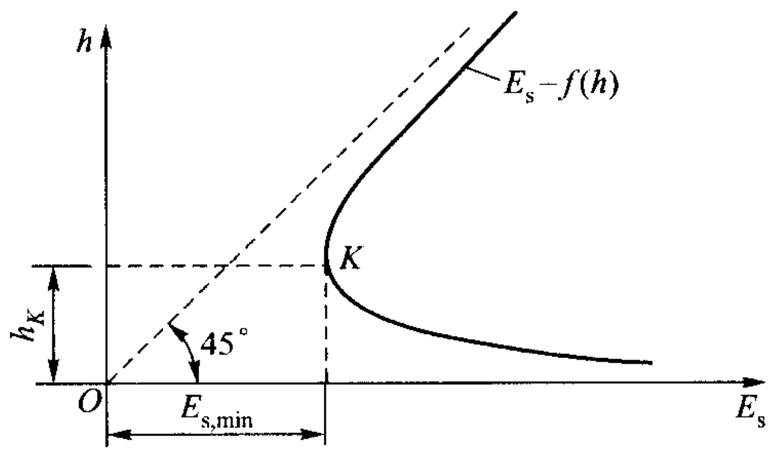


图 1-4-8　断面单位能量示意图

$$\frac{dE_s}{dh} = \frac{d}{dh}\left(h + \frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right) = 1 - \frac{\alpha Q^2}{2gA^3}\frac{dA}{dh}$$

式中：$\frac{dA}{dh}\frac{dA}{dh}=B$，$B$ 为过水断面的水面宽度，如图 1-4-9 所示。

那么：

$$\frac{dE_s}{dh}=1-\frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}=1-\frac{\alpha v^2}{\frac{gA}{B}}=1-\frac{\alpha v^2}{gh_m} \tag{1-4-26}$$

取 $\alpha=1.0$，上式可写为：

$$\frac{dE_s}{dh}=1-Fr^2 \tag{1-4-27}$$

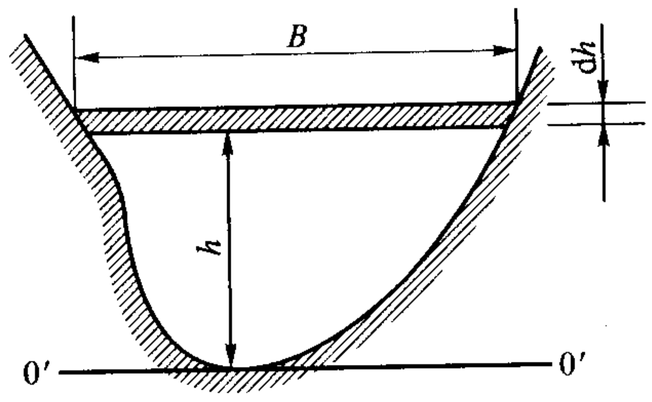


图 1-4-9 水面宽度示意图

分析式（1-4-27）可知，对于缓流，$Fr<1$，所以$\frac{dE_s}{dh}>0$，相当于上半支，所以上支为缓流；对于急流 $Fr>1$，则$\frac{dE_s}{dh}<0$，对应为下半支，所以下半支为急流；对于临界流 $Fr=1$，则$\frac{dE_s}{dh}=0$，对应为 K 点，所以 K 点为急流、缓流的分界点。

三、临界水深

从以上分析可知，K 点对应临界流，是断面单位能量最小值所对应的水深，称为**临界水深**，用 h_K 表示。满足临界水深的条件是$\frac{dE_s}{dh}=0$，由式（1-4-27），得：

$$\frac{dE_s}{dh}=1-\frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}=0$$

把临界流对应的水力要素均加脚标 K，则有：

$$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{A_K^3}{B_K} \tag{1-4-28}$$

上式为临界流的普遍表达式，若给定流量和过水断面的形状、尺寸，可以求解临界水深。

1. 矩形断面渠道临界水深的计算

将 $B_K=b$，$A_K=bh_K$ 代入式（1-4-28）则有$\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{(bh_K)^3}{B_K}=b^2h_K^3$，所以：

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha Q^2}{gb^2}} \tag{1-4-29}$$

或改为：

$$h_K=\sqrt[3]{\frac{\alpha q^2}{g}} \tag{1-4-30}$$

式中：q——单宽流量，即过水断面上单位宽度上通过的流量。

2. 梯形断面渠道临界水深的计算

梯形断面渠道 $A=(b+mh)h$，对于临界流方程式（1-4-28），式中$\frac{A_K^3}{B_K}$，是水深 h 的隐函数，直接求解十分困难，故通常用试算图解法，其方法如下：对于给定的断面形状和尺寸以及边坡系数 m，假设一系列值，依次计算出相对应的过水断面面积 A，水面宽度 B，计算$\frac{A^3}{B}$。横轴表示$\frac{A^3}{B}$值，纵轴为水深 h，$\frac{A^3}{B}$与 h

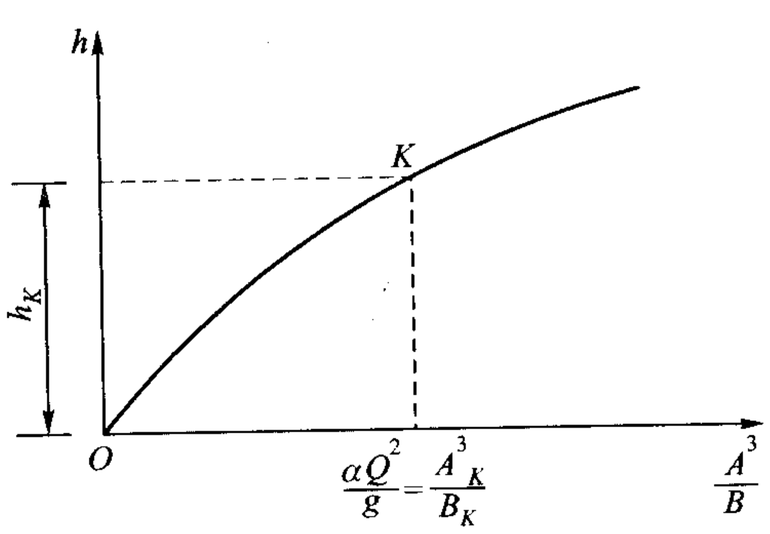


图 1-4-10 临界水深求解图

值可联成曲线，如图 1－4－10 所示。由临界流方程可知，$\frac{\alpha Q^2}{g}$的值所对应的点 K 即为临界流，K 点对应的水深为临界水深 h_K。

以上这种方法，不仅适用梯形断面渠道，同时也适用于各种类型的断面渠道。

综上所述，断面单位能量最小值 K 点，把断面单位能量曲线分为上支与下支，上支为缓流，下支为急流，K 点所对应的水深为临界水深，临界水深是可以计算的。那么，临界水深 h_K 又成为一个判别急流、缓流的标准。即：

$h > h_K$，为缓流；

$h = h_K$，为临界流；

$h < h_K$，为急流。

【例 1－4－3】 有长直的矩形断面渠道，通过流量 $Q = 1.5\ \mathrm{m^3/s}$，底宽 $b = 2.5\ \mathrm{m}$，底坡 $i = 0.003$，渠道用混凝土制成，粗糙系数 $n = 0.014$，输水时形成均匀流，正常水深 $h_0 = 0.363\ \mathrm{m}$。试问该水流为急流还是缓流？

解：

$$h_K = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} = \sqrt[3]{\frac{1.5^2}{9.8 \times 2.5^2}}\ \mathrm{m} = 0.332\ \mathrm{m}$$

因为：

$$h_0 = 0.363\ \mathrm{m} > h_K = 0.332\ \mathrm{m}$$

所以该水流为缓流。

第九节　临界底坡、缓坡、陡坡

一、临界底坡

断面形状、尺寸一定的水槽，底坡 $i > 0$，流量恒定，水流为均匀流，具有一定的正常水深 h_0，若改变底坡的大小，但底坡总大于 0，那么，在每种情况下得到一个正常水深，根据水深和断面单位能量的变化，可以绘制与图 1－4－9 相类似的曲线，断面单位能量的最小值对应的水流是临界流，水深为 h_K，相应的底坡称为**临界底坡**，记做 i_K。相比之下，$i < i_K$ 对应的是缓流，此底坡称为**缓坡**；$i > i_K$ 对应为急流，此底坡称为**陡坡**。也就是说陡坡上形成急流，缓坡上的水流是缓流。请注意一点，临界底坡 i_K 的值是在流量、渠道断面形状尺寸一定的前提下确定的。当流量、断面尺寸有一个量改变了，临界底坡的大小即改变。

综上所述，临界底坡 i_K 也是急流、缓流、临界流判别标准：

$i > i_K$ 为急流，$i = i_K$ 为临界流，$i < i_K$ 为缓流。

二、临界底坡的计算

临界底坡上形成的均匀流，要满足临界流方程式$\frac{\alpha Q^2}{g} = \frac{A_K^3}{B_K}$，同时也满足均匀流量基本方程式 $Q = A_K C_K \sqrt{R_K i_K}$，联立上面二式可以解出：

$$i_K = \frac{Q^2}{A_K^2 C_K^2 R_K} \tag{1-4-31}$$

$$i_K = \frac{g\chi_K}{\alpha c_K^2 B_K} \tag{1-4-32}$$

式中：C_K，R_K，B_K——分别为渠道的临界水深所对应的谢才系数、水力半径、水面宽度。

由式（1-4-31）、式（1-4-32）可知，临界底坡的大小仅与流量、断面形状、尺寸，粗糙系数有关，而与底坡 i 无关。因此，临界底坡也可认为是一个计算值，是一个标准，在实际工程中 i_K 并不一定出现。

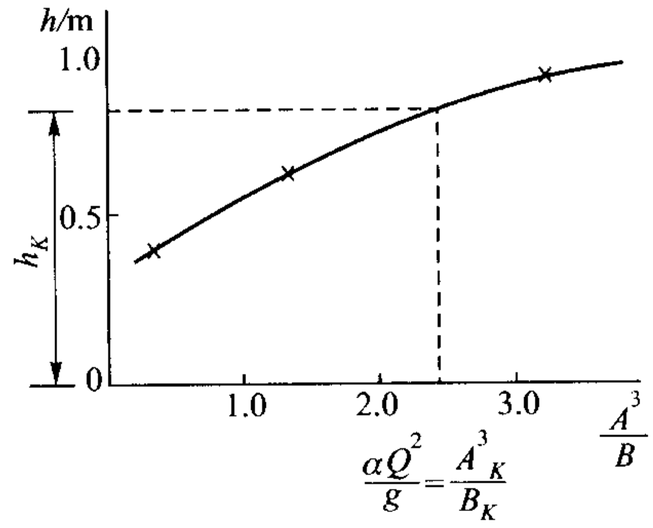
【例 1-4-4】 梯形断面渠道，已知流量 $Q=5\ \mathrm{m^3/s}$，底宽 $b=2\ \mathrm{m}$，边坡系数 $m=1.5$，粗糙系数 $n=0.014$，底坡 $i=0.001$。试求此流量断面形状尺寸下的临界底坡 i_K，并判断该渠道是缓坡渠道还是陡坡渠道？

解：首先求出临界水深，由式（1-4-27）可知，A_K，B_K都为 m，h 的隐函数，直接求解困难，用试算-图解法求解。方法是，设水深为一系列值，计算 A、B、$\frac{A^3}{B}$，列表如下：

例题 1-4-4 表 计算列表

h/m	$A=(b+mh)h/\mathrm{m}$	$B=b+2mh/\mathrm{m}$	$\frac{A^3}{B}/\mathrm{m^2}$
0.4	1.04	3.2	0.352
0.6	1.74	3.8	1.386
0.8	2.56	4.4	3.355

根据上表计算的值可绘制出右图。



例题 1-4-4 图

计算 $\frac{\alpha Q^2}{g}=\frac{1\times 5^2}{9.8}=2.55$，查例题 1-4-4 图中曲线得：

$$h_K = 0.71\ \mathrm{m}$$

$$A_K=(b+mh_K)h_K=(2+1.5\times 0.71)\times 0.71\ \mathrm{m^2}=2.18\ \mathrm{m^2}$$

$$B_K=b+2mh_K=2\ \mathrm{m}+2\times 1.5\times 0.71\ \mathrm{m}=4.13\ \mathrm{m}$$

$$\chi_K=b+2h_K\sqrt{1+m^2}=2\ \mathrm{m}+2\times 0.71\sqrt{1+1.5^2}\ \mathrm{m}=4.56\ \mathrm{m}$$

$$R_K=\frac{A_K}{\chi_K}=0.906\ \mathrm{m}$$

$$C_K=\frac{1}{n}R_K^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0.014}0.906^{\frac{1}{6}}\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}=70.26\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}$$

$$i_K=\frac{gA_K}{\alpha C_K^2 R_K B_K}=\frac{9.8\times 2.18}{70.26\times 0.906\times 4.13}=0.081$$

$i=0.001<i_K=0.081$，所以为缓流。

第十节 水跃与跌水

一、跌水

在上游缓坡渠道和下游陡坡渠道的相接处或缓坡渠道的末端有一跌坎，可以出现水面急剧降落，这种从缓流到急流过渡的局部水力现象，叫做**跌水**（亦称**水跌**）。如图 1-4-11 所示。

从图 1－4－11 可以看出，底坡变大或下游有跌坎，阻力减小，在重力作用下水流加速运动，跌坝处水深为临界水深，但由式（1－4－29）确定的临界水深 h_K 是指均匀流状态，突变流的临界水深要比由式（1－4－29）计算的临界水深小些。实验证明，矩形断面渠道 $0.67 < \frac{h_e}{h_K} < 0.73$；水深为 h_K 的断面距跌坎的距离约为（3～4）h_K。对于缓坡与陡坡相接的渠道，如图 1－4－11（a）所示，水面曲线上游趋近均匀流水深 h_{01}，而下游趋近于均匀流水深 h_{02}，在两底坡相接处水深为临界水深 h_K。

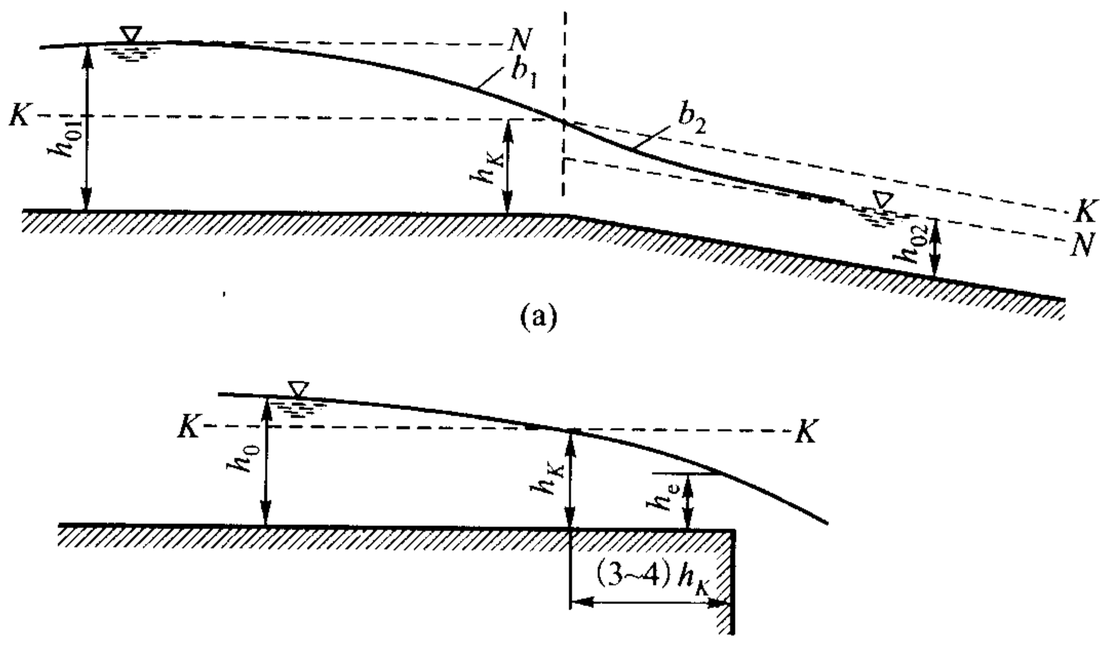


图 1－4－11　跌水

二、水跃

明渠中的水流由急流状态过渡到缓流状态时，水流的自由表面会突然跃起，并且在表面形成旋滚，这种现象叫做**水跃**。在闸、坝及陡槽等泄水建筑物下游，常有此水力现象。如图 1－4－12 所示，由于形成表面旋滚，其底部为主流，水流紊动，流体质点互相碰撞，掺混强烈。旋滚与主流间质量不断交换，致使水跃段内有较大的能量损失，故此，常常用水跃消除泄水建筑物下游高速水流的巨大能量。

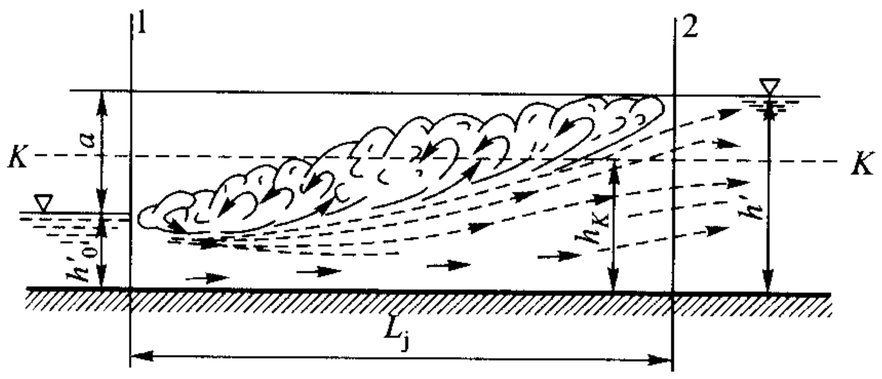


图 1－4－12　水跃

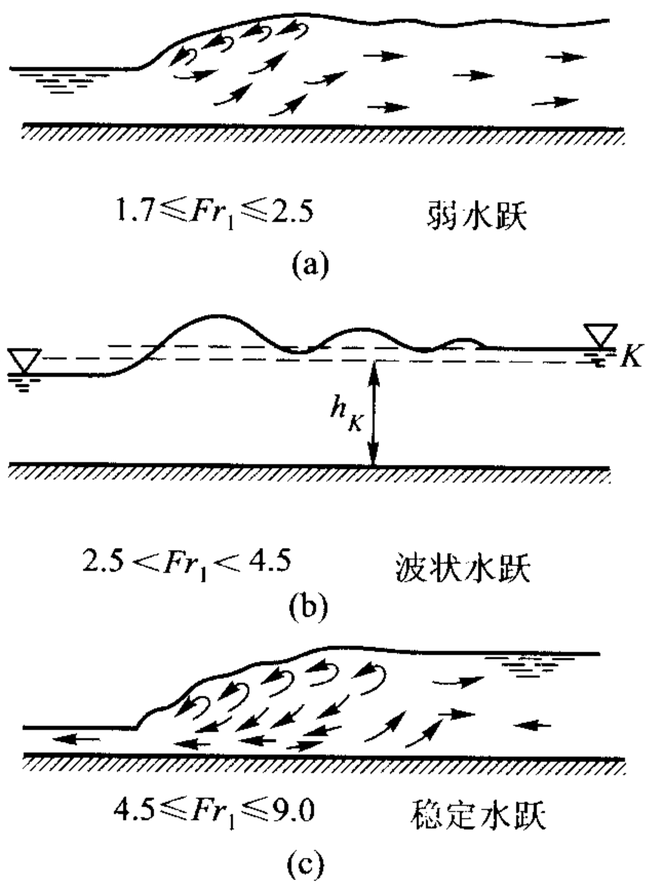


图 1－4－13　水跃的三种类型

水跃有三种类型：

（1）弱水跃：跃前跃后水深相差不大的水跃，跃前段 $Fr_1 = 1.7 \sim 2.5$，$\frac{h''}{h'} = (3 \sim 4)$，如图 1－4－13（a）所示。

（2）波状水跃：跃前、跃后水深相差很小，$\frac{h''}{h'} = (2 \sim 3)$，表面不形成旋滚，呈波状，$Fr_1 = 2.5 \sim 4.5$，如图 1－4－13（b）所示。

（3）稳定水跃（完整水跃）：跃前跃后水深相差明显，$\frac{h''}{h'} = (6 \sim 12)$，$Fr_1 = 4.5 \sim 9.0$，表面旋滚明

显，如图 1－4－13（c）所示。

三、水跃的基本方程

现以平坡渠道上的完整水跃为例（图 1－4－14），建立水跃方程。因为水跃区内部水流十分紊乱，其阻力分布规律尚不清楚，不宜用能量方程。因为动量方程不涉及能量损失，可利用动量方程推导。渠道为棱柱形梯形断面，跃前水深为 h'，跃后水深为 h''，假设：

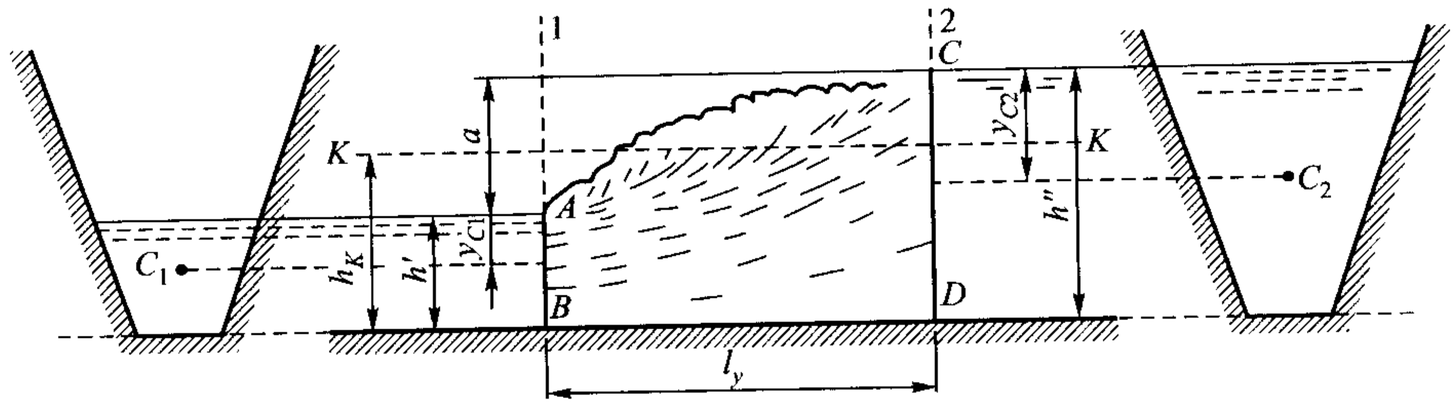


图 1－4－14 平坡渠道完整水跃

（1）水跃区内渠壁、底的摩阻力不大，略去不计。

（2）水跃区的前后两断面 1－1 及 2－2 为渐变流断面，作用在两断面上的动水压强符合静水压强分布规律。

（3）动量修正系数 $\beta_1=\beta_2=1.0$。

取 $ABCD$ 为控制体，全面分析外力，断面 1－1 作用有 $P_1=\rho g y_{C1}A_1$，断面 2－2 作用有 $P_2=\rho g y_{C2}A_2$，y_C 为断面形心点的淹没深度。重力沿水流方向分力为 0。控制体 $ABCD$ 上，在单位时间内，动量的改变为 $\rho Q(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)$，列出动量方程：

$$\rho Q(\beta_2 v_2-\beta_1 v_1)=\rho g y_{C1}A_1-\rho g y_{C2}A_2 \tag{1-4-33}$$

由连续性方程，$v_1=\dfrac{Q}{A_1}$　$v_2=\dfrac{Q}{A_2}$，代入上式，得

$$\frac{\beta_1 Q^2}{gA_1}+A_1 y_{C1}=\frac{\beta_2 Q^2}{gA_2}+A_2 y_{C2} \tag{1-4-34}$$

当流量、断面形状、尺寸一定时，跃前、后断面面积 A 和形心点淹没深度仅为水深 h 的函数，故方程（1－4－34）的左右两边都是水深 h 的函数，用符号 $\theta(h)$ 表示，即：

$$\theta(h)=\frac{Q^2}{gA}+Ay_C \tag{1-4-35}$$

于是式（1－4－34）可写为：

$$\theta(h')=\theta(h'') \tag{1-4-36}$$

式中：h'，h''——共轭水深。

即水跃的跃前水深 h' 的函数值等于跃后水深 h'' 的函数值。所谓共轭，是指 h' 与 h'' 互相依存。式（1－4－34）和式（1－4－36）为棱柱形平坡渠道中完整水跃的基本方程，也适用于底坡很小的顺坡渠道中的水跃。

四、水跃函数图示

水跃函数 $\theta(h)$ 是水深的函数，当流量、断面形状尺寸一定时，给定 h，即可求出 A 和 y_C，由式（1－4－35）可知：当 $h\to 0$，$A\to 0$ 时，则 $\theta(h)=\dfrac{\beta Q^2}{gA}+Ay_C\to\infty$；当 $h\to\infty$，$A\to\infty$ 时，则 $\theta(h)=\dfrac{\beta Q^2}{gA}+Ay_C\to\infty$。由于 $\theta(h)$ 是水深的连续函数，绘出其函数图形，如图 1－4－15（a）所示。当水跃形成时，$\theta(h')=$

$\theta(h'')$，在 $\theta(h)-h$ 的曲线上，A 点对应跃前水深 h'，B 点对应跃后水深 h''，AB 两点的高差为跃高。

$$a=h''-h' \tag{1-4-37}$$

如果把断面单位能量图形绘在一起［图 1-4-15（b）］，可以看出，跃前水深 h'对应的断面单位能量为 E_{s1}，跃前水深对应的断面单位能量为 E_{s2}，显然，$E_{s1}>E_{s2}$，差值 ΔE_s 为水跃消耗的能量，水跃的消能效果是明显的。

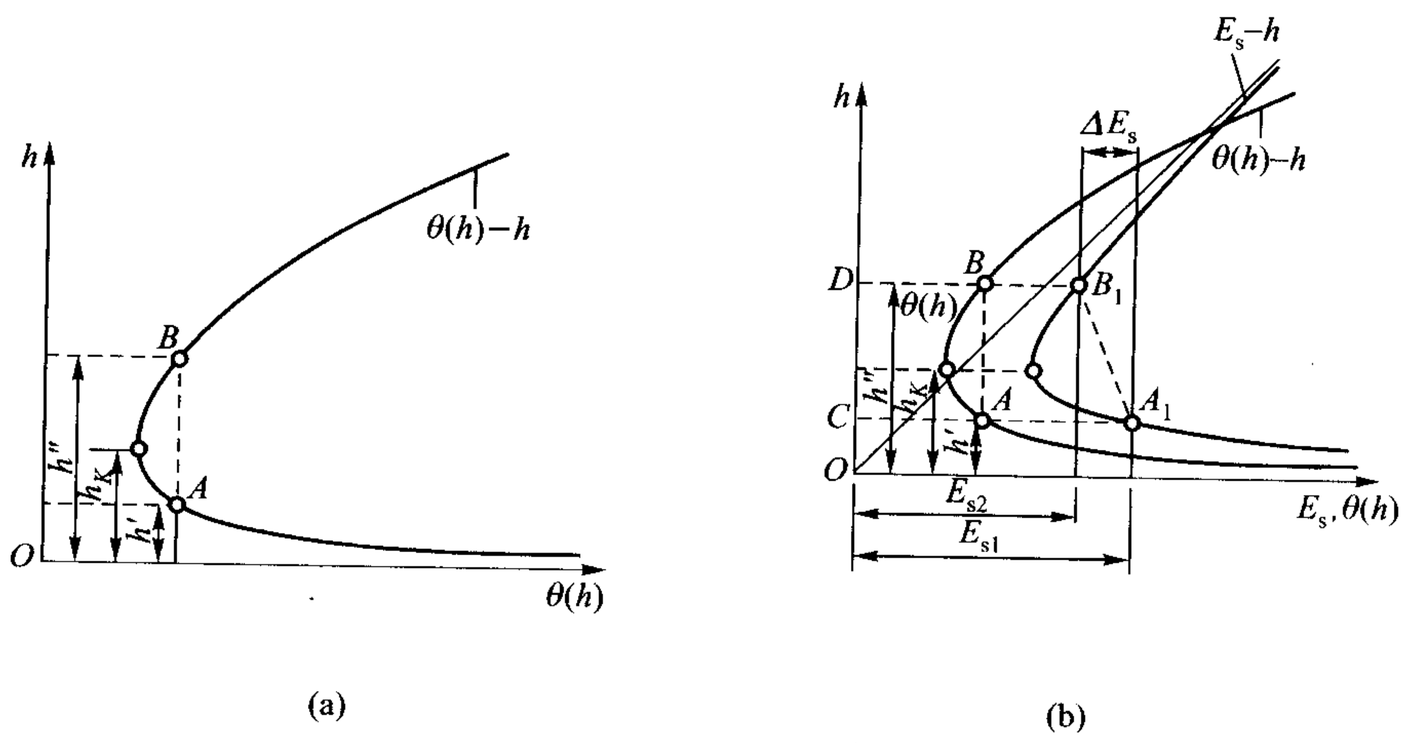


图 1-4-15　水跃函数与比能函数图示

五、共轭水深的计算

在工程上，往往要求解跃前水深 h'或跃后水深 h''，即共轭水深的计算。

1. 共轭水深的一般解法

对于梯形断面渠道，$A=f(h)$，$y_C=f(h)$，因此，式（1-4-34）是一个复杂函数，不易直接求解，可采用试算-图解法。这种方法对其他断面形状的明渠也适用。

共轭水深的计算还可用图解法求解（这里也不做介绍）。

2. 矩形断面棱柱形渠道共轭水深的解法

对于矩形断面棱柱形渠道，$A=bh$，$y_C=\dfrac{h}{2}$，$q=\dfrac{Q}{b}$（单宽流量）及 $h_K=\sqrt[3]{\dfrac{\alpha q^2}{g}}$，令 $\beta=\alpha$，其水跃函数

$$\theta(h)=\frac{\beta Q^2}{gA}+y_CA=\frac{\alpha b^2q^2}{gbh}+\frac{h}{2}bh=b\left(\frac{\alpha q^2}{gh}+\frac{h^2}{2}\right)=b\left(\frac{h_K^3}{h}+\frac{h^2}{2}\right)$$

因为 $\theta(h')=\theta(h'')$，所以该式可写为 $b\left(\dfrac{h_K^3}{h'}+\dfrac{h'^2}{2}\right)=b\left(\dfrac{h_K^3}{h''}+\dfrac{h''^2}{2}\right)$

整理可得：

$$h'h''(h'+h'')=2h_K^3$$

或

$$h'^2h''+h'h''^2-2h_K^3=0$$

解得：

$$\left.\begin{aligned}h'&=\frac{h''}{2}\left[\sqrt{1+8\left(\frac{h_K^3}{h''}\right)^3}-1\right]\\h''&=\frac{h'}{2}\left[\sqrt{1+8\left(\frac{h_K^3}{h'}\right)^3}-1\right]\end{aligned}\right\} \tag{1-4-38}$$

式中：$\left(\dfrac{h_K}{h}\right)^3=\dfrac{\alpha q^2}{gh^3}=\dfrac{\alpha vs^2}{gh}=Fr$，所以式（1-4-38）可改写为：

$$\left.\begin{aligned} h' &= \frac{h''}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_2}-1\right] \\ h'' &= \frac{h'}{2}\left[\sqrt{1+8Fr_1}-1\right] \end{aligned}\right\} \tag{1-4-39}$$

六、水跃的能量损失与水跃长度

（一）水跃能量损失的原因

如图 1-4-16 所示，在水跃段 l_j，最大流速在底部，流速分布变化大，造成附加切应力，水面旋滚区激烈紊动，质点碰撞、掺混，同时与表面空气摩擦也造成能量损失，E_j 表示水跃段能量损失，这是主要的。在跃后段 l_{jj}，其断面流速梯度也较大，且底部流速不为 0，同样造成附加切应力，也会造成能量损失 E_{jj}，能量损失主要集中在水跃段。

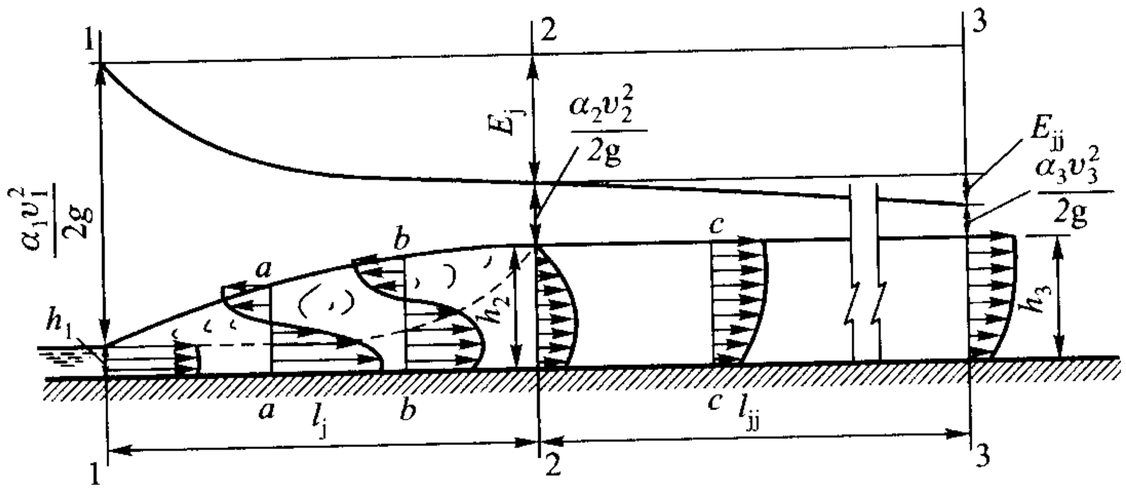


图 1-4-16 水跃长度

（二）水跃段能量损失的计算

从图 1-4-16 可知，水跃能量损失 ΔE_s 与跃高 $a = h'' - h'$ 有关，应用能量方程可以导出棱柱形水平渠道的水跃段能量损失的表达式，工程上，水跃多发生在棱柱形矩形断面水平段渠道中，对于矩形断面渠道水跃段能量损失可用式（1-4-40）计算（推导从略）：

$$\Delta E_s = \frac{(h''-h')^3}{4h'h''} \tag{1-4-40}$$

上式表明跃高越大，造成的能量消耗越大，消能率越大，故在工程上往往用强水跃消能。

（三）水跃长度的计算

从图 1-4-16 可知，水跃的长度由水跃段 l_j 与跃后段 l_{jj} 组成，即 $l = l_j + l_{jj}$，并且还可看出，由于水跃形成后，渠道底部流速很大，会对渠道造成冲刷，故需要加固，加固的长短直接关系到经费的投入，所以水跃的长度需要计算。

由于水跃运动形式的复杂，目前水跃长度的计算仍采用经验公式，对于矩形渠道：

$$l_j = 4.5h'' \tag{1-4-41}$$

或：

$$l_j = \frac{1}{2}(4.5h'' + 5a) \tag{1-4-42}$$

式中：a——跃高。

跃后段长度可用下式计算：

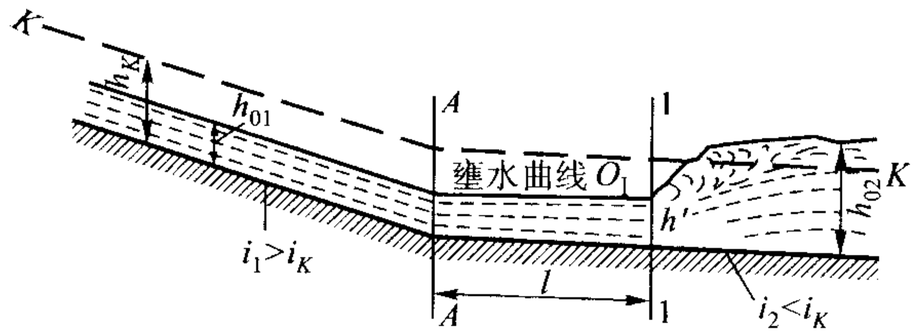
$$l_{jj} = (2.5 \sim 3.0)l_j \tag{1-4-43}$$

以上公式仅适用于底坡较小的渠道，在工程上用来初步估算水跃长度，对于大中型工程，水跃长度要通过水工模型实验确定。对于其他断面渠道中水跃长度的计算公式，参考相关手册。

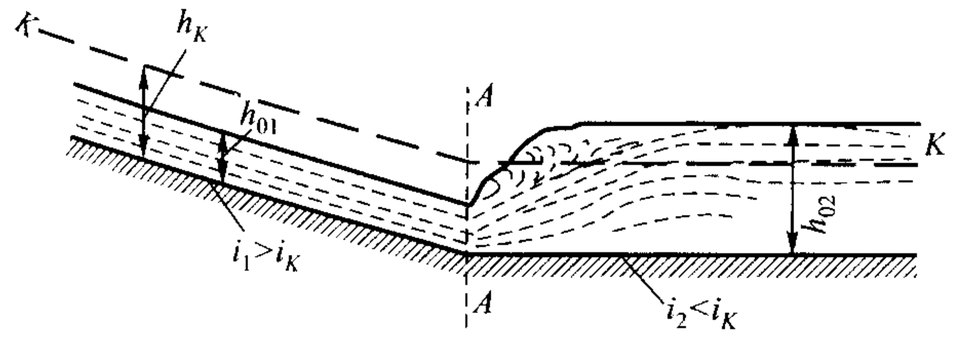
七、水跃发生的位置

因为水跃发生时，其水力条件及边界条件不同，水跃发生的位置也不一样，有三种形式。水跃发生的位置要通过计算来确定，本书仅作定性分析。

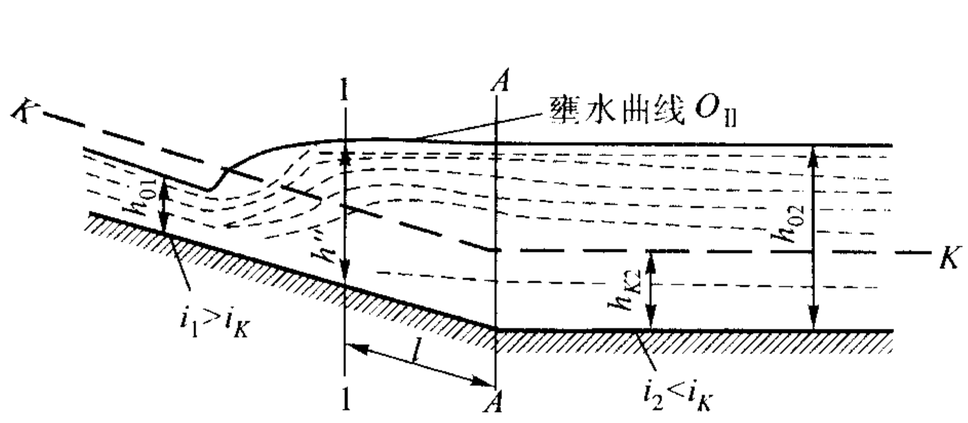
图 1－4－17 为两条底坡不同，但断面尺寸相同的棱柱形渠道。当上游渠道正常水深 h_{01} 与下游渠道正常水深 h_{02} 共轭时，即发生水跃，称为**临界式水跃**，如图 1－4－17（b）所示；若上游渠道正常水深 h_{01} 与下游渠道正常水深 h_{02} 不共轭，下游水深大于上游渠道正常水深 h_{01}（跃前水深 h'）所要求的跃后水深 h''，即 $h_t > h''$，因为下游断面单位能量大于跃后断面单位能量，所以水跃将被推向上游，淹没了两渠道相接的断面，称为**淹没式水跃**，如图 1－4－17（c）所示；若下游水深小于上游渠道正常水深 h_{01}（跃前水深 h'）所要求的跃后水深 h''（$h_t < h''$），即下游断面单位能量小于跃后断面单位能量，水跃会向下游推进，待新的 h' 与 h'' 共轭时，水面跃起形成水跃，称为**远驱式水跃**，如图 1－4－17（a）所示。



(a)



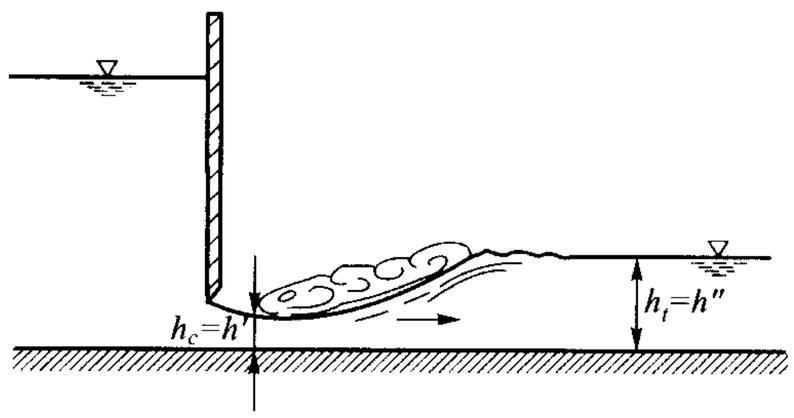
(b)



(c)

图 1－4－17　远驱式、临界式、淹没式水跃

【例 1－4－5】 如例题 1－4－5 图示为一水闸，矩形渠道，底宽 $b=7$ m，过闸流量 $Q=24$ m^3/s，若已知闸孔出流的收缩断面水深 $h_c=0.37$ m，问恰好发生临界式水跃时，下游渠道的水深 h_t 是多少？



例题 1－4－5 图

解：若恰好发生临界式水跃，则 $h_c=h'=0.37$ m，$h''=h_t$

$$v_1=\frac{Q}{A_1}=\frac{24}{7\times0.37}\ \text{m/s}=9.27\ \text{m/s}$$

$$Fr_1=\frac{v_1^2}{gh'}=\frac{9.27^2}{9.81\times0.37}=23.67$$

$$h''=\frac{h'}{2}(\sqrt{1+8Fr_1}-1)$$

$$=\frac{0.37}{2}(\sqrt{1+8\times23.67}-1)\ \text{m}=2.37\ \text{m}$$

即当下游水深 $h_t=2.37$ m 时，闸下发生临界式水跃。

第十一节 明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程

一、明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程的建立

如图 1-4-18 所示，取明渠恒定非均匀渐变流中一微分段 ds，1-1 断面水深为 h，渠底高程为 z_0，断面平均流速为 v；2-2 断面水深为 $h+dh$，渠底高程为 z_0+dz_0，断面平均流速为 $v+dv$。

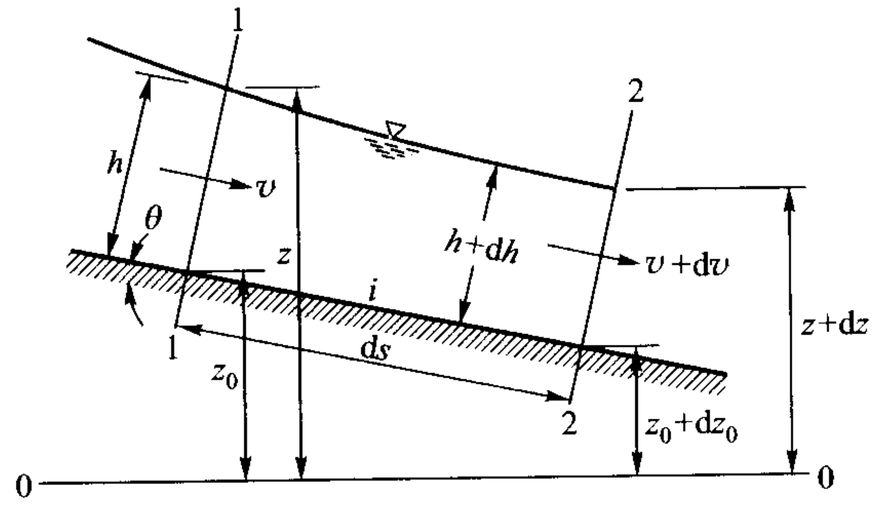


图 1-4-18 非均匀渐变流

对此微分段 1-1 断面和 2-2 断面建立能量方程：

$$z_0+h\cos\theta+\frac{\alpha_1 v^2}{2g}$$

$$=(z_0+dz_0)+(h+dh)\cos\theta+\frac{\alpha_2(v+dv)^2}{2g}+dh_j+dh_f \tag{1-4-44}$$

令 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$，而：

$$\frac{\alpha(v+dv)^2}{2g}=\frac{\alpha(v^2+2vdv+dv^2)}{2g}\approx\frac{\alpha(v^2+2vdv)}{2g}=\frac{\alpha v^2}{2g}+d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)$$

式中：dh_f——沿程水头损失，

dh_j——局部损失，$dh_j=\zeta\left(\frac{v^2}{2g}\right)$。

因为 $z_0-ids=z_0+dz_0$，则 $dz_0=-ids$，式（1-4-44）可写为：

$$-ids+dh\cos\theta+(\alpha+\zeta)d\left(\frac{v^2}{2g}\right)+dh_f=0 \tag{1-4-45}$$

若明渠的底坡较小（$i<0.1$），$\theta<6°$，取 $\cos\theta\approx1.0$，即水深可取其铅垂方向。对于非均匀渐变流局部损失可以忽略不计。式（1-4-45）可简化为：

$$-ids+dh+d\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)+dh_f=0 \tag{1-4-46}$$

用 ds 除以式（1-4-46），得：

$$-i+\frac{dh}{ds}+\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)+\frac{dh_f}{ds}=0 \tag{1-4-47}$$

$$\frac{d(\alpha v^2)}{ds(2g)}=\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha Q^2}{2gA^2}\right)=-\frac{\alpha Q^2}{2gA^3}\frac{dA}{ds}=-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\left(\frac{\partial A}{\partial h}\frac{dh}{ds}+\frac{\partial A}{\partial s}\right)=-\frac{\alpha Q^2}{gA^3}\left(B\frac{dh}{ds}+\frac{\partial A}{\partial s}\right) \tag{1-4-48}$$

因为 $A=f(h,s)$，即 A 是 h、s 的隐函数，故对面积 A 求导，先对水深 h 求导，再对 s 求导，$\frac{\partial A}{\partial h}=B$，$B$ 是水面宽度，对于棱柱形渠道，$A=f(h)$，即 A 仅是水深 h 的函数，即 $\frac{\partial A}{\partial s}=0$，则式（1-4-48）为：

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\alpha v^2}{2g}\right)=-\frac{\alpha Q^2 B}{gA^3}\frac{dh}{ds} \tag{1-4-49}$$

式（1-4-47）中 $\frac{dh_f}{ds}=J_p\approx J$，对微分段水头损失按均匀流处理 $i=J$，则有：

$$\frac{dh_f}{ds}=J=\frac{Q^2}{K^2}=\frac{Q^2}{A^2C^2R} \tag{1-4-50}$$

将式（1-4-49）和式（1-4-50）代入式（1-4-47），得：

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}s}=\frac{i-\frac{Q^2}{K^2}}{1-\frac{\alpha Q^2}{g}\cdot\frac{B}{A^3}} \tag{1-4-51}$$

式（1-4-51）为底坡较小的棱柱形明渠恒定非均匀渐变流的基本微分方程，反映明渠渐变流水面线的变化规律，对其积分可以计算水面线。

二、棱柱形明渠恒定渐变流水面曲线计算

前面建立了棱柱形明渠恒定非均匀渐变流微分方程式（1-4-51），对其积分，可以得到解析解，但因为积分十分困难，只能是近似解法。本章仅介绍**分段求和法**。将式（1-4-51）变成有限差分式，进行计算。

1. 基本计算公式

对于底坡不大的棱柱形明渠，以壅水曲线为例，如图1-4-19所示，取Δs流段，列断面1-1～断面2-2的能量方程：

$$z_1+h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+\Delta h_{\mathrm{f}} \tag{1-4-52}$$

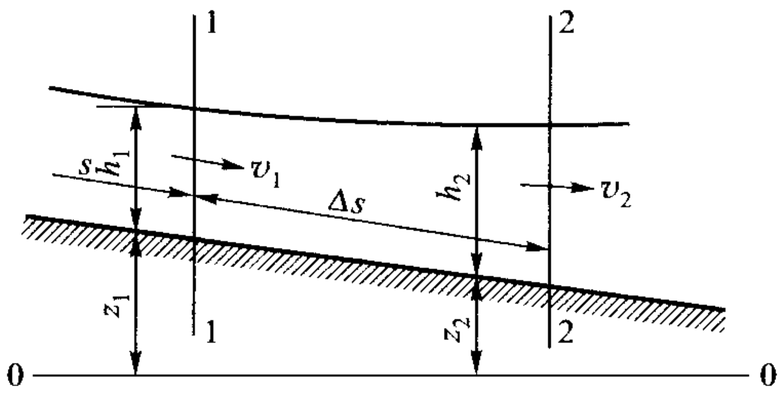


图1-4-19　壅水曲线

对式（1-4-52）整理可得：

$$(z_1-z_2)-\left(h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)+\left(z_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)-\Delta h_{\mathrm{f}}=0 \tag{1-4-53}$$

式（1-4-53）中，Δh_{f}仅为沿程水头损失，略去了局部水头损失。$\frac{\Delta h_{\mathrm{f}}}{\Delta s}=\bar{J}$，则：

$$\Delta h_{\mathrm{f}}=\bar{J}\cdot\Delta s \tag{1-4-54}$$

因为是渐变流，近似按均匀流处理：

$$\bar{J}=\frac{\bar{Q}^2}{\bar{K}^2}=\frac{\bar{Q}^2}{\bar{A}^2\bar{C}^2\bar{R}}=\frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}} \tag{1-4-55}$$

式（1-4-55）中，断面平均流速：$\bar{v}=\frac{v_1+v_2}{2}$；断面平均谢才系数：$\bar{C}=\frac{C_1+C_2}{2}$；断面平均水力半径：$\bar{R}=\frac{R_1+R_2}{2}$。

式（1-4-52）中：

$$z_1-z_2=i\cdot\Delta s \tag{1-4-56}$$

将式（1-4-54）和式（1-4-56）代入式（1-4-53）中可得：

$$\left(h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)-\left(h_1+\frac{\alpha_1 v_1^2}{2g}\right)=(i-\bar{J})\Delta s \tag{1-4-57}$$

因为：

$$\left(h_2+\frac{\alpha_2 v_2^2}{2g}\right)-\left(h_1+\frac{\alpha_0 v_1^2}{2g}\right)=E_{s2}-E_{s1}=\Delta E_{\mathrm{s}}$$

所以，式（1-4-57）可改写为：

$$\Delta s=\frac{\Delta E_{\mathrm{s}}}{i-\bar{J}} \tag{1-4-58}$$

式（1-4-58）即分段求和法计算棱柱形明渠水面曲线的基本计算公式。

式中：Δs——所取流段长度；

ΔE_s——所取流段间断面单位能量的增量有限差值；

i——渠道的底坡；

J——所取流段两段断面间的平均水力坡度。

由已知水深为起始断面，设第二断面水深，通过上式计算出 Δs，然后以第二断面作为已知断面，设第三断面水深，以此类推，进行计算，分段越小，精度越高。此方法计算虽然复杂，若用计算机编程运算，则极为方便，且精度也高。

2. 分段求和法计算步骤

进行分段求和法计算时，有两点特别注意：第一，把已知水深的断面为起始断面；第二，ΔE_s 永远是 $E_{s下游}-E_{s上游}$，不可颠倒。其方法步骤以例题说明。

【例 1-4-6】 有一长直棱柱形明渠，梯形断面，$b=2.0$ m，$m=1.5$，$n=0.014$，$i=0.001$，下游为一排水闸，当排水闸通过流量 $Q=5.0\ \mathrm{m^3/s}$ 时，闸前水深 $h=3.5$ m。试计算水面曲线并绘图。

解：（1）首先判断渠道是缓流还是急流及水面曲线的类型：

本题条件与例 1.4.4 相同，例 1-4-4 已计算出 $h_K=0.71$ m，并判断出为缓流。由于下游建有排水闸，水流受阻，所以水面曲线应为 a 型壅水曲线，下游为闸前水深，上游为 $N-N$ 线渐近。

（2）计算均匀流水深 h_K：

$$K=\frac{Q}{\sqrt{i}}=\frac{5}{\sqrt{0.001}}\ \mathrm{m^3/s}=158.1\ \mathrm{m^3/s}$$

$$\frac{b^{2.67}}{nK}=\frac{2^{2.67}}{0.014\times158.1}=2.88$$

查图得深宽比 $\frac{h}{b}=0.462$，所以：

$$h_0=0.462b=0.462\times2\ \mathrm{m}=0.924\ \mathrm{m}$$

因为 $h_0>h_K$，进一步确定水面曲线应为 a_1 型壅水曲线。上游计算到正常水深 h_0 略大些的水深即可（$h=1.01h_0$）。

$$h=1.01h_0=1.01\times0.924\ \mathrm{m}=0.933\ \mathrm{m}$$

（3）计算水面线：

取闸前已知水深 $h_1=2.0$ m 为控制断面，设第一个水深 h_2 为 1.8 m 计算 Δs。

$$A_1=(b+mh_1)h_1=(2+1.5\times2.0)\times2\ \mathrm{m^2}=10.0\ \mathrm{m^2}$$

$$A_2=(b+mh_2)h_2=(2+1.5\times1.8)\times1.8\ \mathrm{m^2}=8.46\ \mathrm{m^2}$$

$$\chi_1=b+2h_1\sqrt{1+m^2}=2\ \mathrm{m}+2\times2\times\sqrt{1+1.5^2}\ \mathrm{m}=9.21\ \mathrm{m}$$

$$\chi_2=b+2h_2\sqrt{1+m^2}=2\ \mathrm{m}+2\times1.8\times\sqrt{1+1.5^2}\ \mathrm{m}=8.49\ \mathrm{m}$$

$$R_1=\frac{A_1}{\chi_1}=\frac{10}{9.21}\ \mathrm{m}=1.09\ \mathrm{m}$$

$$R_2=\frac{A_2}{\chi_2}=\frac{8.46}{8.49}\ \mathrm{m}=1.0\ \mathrm{m}$$

$$\overline{R}=\frac{R_1+R_2}{2}=\frac{1.09+1}{2}\ \mathrm{m}=1.05\ \mathrm{m}$$

$$C_1=\frac{1}{n}R_1^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0.014}\times1.09^{\frac{1}{6}}\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}=72.46\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}$$

$$C_2=\frac{1}{n}R_2^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{0.014}\times1^{\frac{1}{6}}\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}=71.43\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}$$

$$\overline{C}=\frac{C_1+C_2}{2}=\frac{72.46+71.43}{2}\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}=71.95\ \mathrm{m^{\frac{1}{2}}/s}$$

$$v_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{5}{10}\ \text{m/s} = 0.5\ \text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{Q}{A_2} = \frac{5}{8.46}\ \text{m/s} = 0.59\ \text{m/s}$$

$$\bar{v} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{0.5 + 0.59}{2}\ \text{m/s} = 0.55\ \text{m/s}$$

$$\bar{J} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}} = \frac{0.55^2}{71.95^2 \times 1.05} = 5.57 \times 10^{-5}$$

$$\Delta E_s = \left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g}\right) - \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g}\right) = \left(2 + \frac{0.5^2}{2 \times 9.8}\right)\ \text{m} - \left(1.8 + \frac{0.59^2}{2 \times 9.8}\right)\ \text{m} = 0.19\ \text{m}$$

$$\Delta l = \frac{\Delta E_s}{i - \bar{J}} = \frac{0.19}{0.001 - 0.000\,055}\ \text{m} = 201.06\ \text{m}$$

其余各级计算相同，列表进行计算。

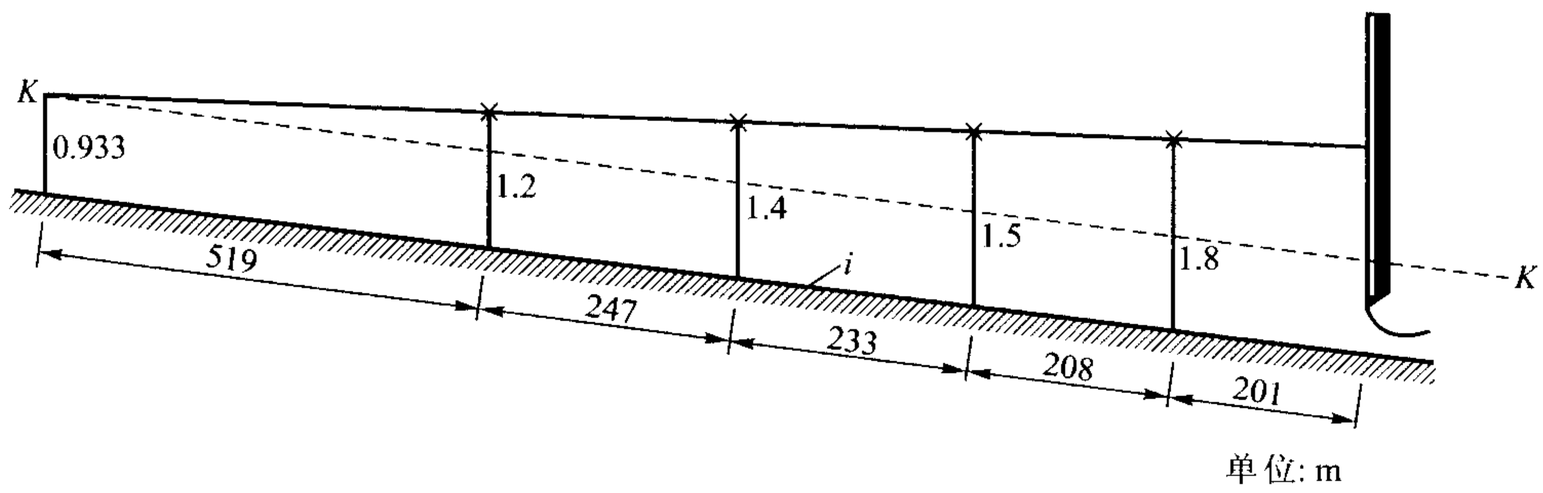
已知值：$Q = 5\ \text{m}^3/\text{s}$，$b = 2.0\ \text{m}$，$m = 1.5$，$n = 0.014$，$i = 0.001$，$1.01h = 0.933\ \text{m}$。

计算公式：$A = (b + mh)h$，$\chi = b + 2h\sqrt{1 + m^2}$，$C = \frac{1}{n}R^{\frac{1}{6}}$，$\bar{J} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}}$。

例题 1－4－6 表　计算列表

断面	h /m	A /m²	v /(m·s⁻¹)	$\bar{v}$ /(m·s⁻¹)	$E_s = h + \frac{v^2}{2g}$ /m	ΔE_s /m	χ /m	R /m	$\bar{R}$ /m	C /(m^½·s⁻¹)	$\bar{C}$ /(m^½·s⁻¹)	$\bar{J} = \frac{\bar{v}^2}{\bar{C}^2\bar{R}}$ /10⁻⁴	$i - \bar{J}$ /10⁻⁴	$\Delta s = \frac{\Delta E_s}{i - \bar{J}}$ /m	$s = \sum \Delta s$ /m
1	2.0	10	0.50	0.55	2.01	0.19	9.21	1.09	1.05	72.46	71.95	0.55	9.45	201	0
2	1.8	8.46	0.59	0.65	1.82	0.19	8.49	1.00	0.96	71.43	70.87	0.88	9.12	208	201
3	1.6	7.04	0.71	0.79	1.63	0.19	7.77	0.91	0.87	70.31	69.71	1.48	8.52	223	409
4	1.4	5.74	0.87	0.99	1.44	0.18	7.04	0.82	0.77	69.10	68.36	2.72	7.28	247	632
5	1.2	4.56	1.10	1.34	1.26	0.20	6.33	0.72	0.66	67.62	66.52	6.15	3.85	519	879
6	0.933	3.17	1.58		1.06		5.36	0.59		65.42					1 398

水面曲线见下图：



例题 1－4－6 图

思　考　题

1－4－1　明渠均匀流水力特征是什么？明渠均匀流形成应具有什么条件？

1－4－2　明渠恒定非均匀流水力特征是什么？明渠恒定非均匀流形成应具有什么条件？

1－4－3　水力最优断面含义是什么？是否在设计渠道时一定采用水力最优断面，为什么？

1－4－4　急流、缓流、临界流是如何区分的？判别标准是什么？

1-4-5 断面单位能量 E_s 与单位重量流体总的机械能有何区别？在讨论非均匀流时，为什么引入断面单位能量这个概念？

1-4-6 为什么正确地选用合适的粗糙系数 n 值，在渠道的设计中十分重要？

1-4-7 若两段断面形状尺寸相同的长直棱柱形渠道，试分析下列情况下，其正常水深哪个大？

(1) $i_1 > i_2$，m、b、n 相等，Q 不变。

(2) $n_1 < n_2$，m、b、i 相等，Q 不变。

(3) $b_1 > b_2$，m、n、i 相等，Q 不变。

1-4-8 试分析下列明渠流的说法是否正确。

(1) 均匀流一定是恒定流。

(2) 测压管水头线（水面线）沿程不可能上升。

(3) 临界流一定是均匀流。

(4) 水面线与总能水头可以重合。

1-4-9 水跃和跌水为急变流中局部水力现象，发生水跃和跌水的水力条件是什么？

习 题

1-4-1 水力最优断面在渠道的设计中：（ ）

A 是渠道设计必须遵循的原则　　B 是设计大型渠道遵循的原则

C 是设计中型渠道遵循的原则　　D 是设计小型渠道遵循的原则

1-4-2 不冲流速是指（ ）

A 渠道使用时免遭淤积的最大允许流速　　B 渠道使用时免遭冲刷的最大允许流速

C 渠道使用时免遭淤积的最小允许流速　　D 渠道使用时免遭冲刷的最小允许流速

1-4-3 粗糙系数 n 是指渠道的粗糙程度，它在渠道的设计中起着非常大的作用，若选取的粗糙系数 n 比实际工程上的粗糙系数偏大，则会造成：（ ）

A 渠道断面设计过大，提高工程投资

B 渠道断面设计偏小，输水能力不足

C 渠道断面设计底坡偏小，运行时会造成冲刷

D 渠道断面设计底坡偏大，运行时会造成渠道淤积

1-4-4 有两条断面形状、尺寸完全相同的棱柱形渠道，$n_1 < n_2$，在通过流量相同的情况下，则：（ ）

A $h_{01} > h_{02}$　　B $h_{01} < h_{02}$　　C $h_{01} = h_{02}$　　D 无法判断

1-4-5 有一条养护良好的土质渠道，梯形断面，有足够长，底坡不变，底坡 $i = 0.001$，底宽 $b = 0.8$ m，边坡系数 $m = 1.5$，粗糙系数 $n = 0.025$，当水深 $h = 0.6$ m 时，通过流量是：（ ）

A $Q = 1.2$ m^3/s　　B $Q = 0.633$ m^3/s　　C $Q = 0.789$ m^3/s　　D $Q = 1.025$ m^3/s

1-4-6 与习题 1-4-1 条件相同，水温 $T = 20$ ℃，运动黏度 $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ m^2/s，该水流是：（ ）

A 层流　　B 湍流　　C 渐变流　　D 急变流

1-4-7 有一条梯形长直渠道（土质为中壤土），底宽 $b = 2$ m，边坡系数 $m = 2.0$，底坡 $i = 0.001\,5$，水深 $h_0 = 0.8$ m，粗糙系数 $n = 0.025$，通过流量是多少？若不冲流速 $v' = 1.2$ m/s，是否需要衬护？（ ）

A $Q = 3.25$ m^3/s，需要衬护　　B $Q = 3.35$ m^3/s，需要衬护

C $Q = 2.55$ m^3/s，不需要衬护　　D $Q = 2.87$ m^3/s，不需要衬护

1-4-8 铁路路基排水沟，用小片石干砌护面，边度系数 $m = 1.0$，粗糙系数 $n = 0.020$，底坡 $i = 0.003$，通过流量 $Q = 1.2$ m^3/s，排水沟断面为梯形，按水力最优断面设计，其断面尺寸为：（ ）

A $b=0.577$ m，$h=0.70$ m　　B $b=2.12$ m，$h=1.25$ m

C $b=1.50$ m，$h=1.50$ m　　D $b=1.0$ m，$h=1.5$ m

1-4-9　有一条长直的棱柱形渠道，梯形断面，设计流量一定，边坡系数 $m=2.0$，按水力最优断面设计，最后确定为底宽 $b=2.0$ m，正常水深为：（　　）

A $h=4.236$ m　　B $h=2.543$ m　　C $h=3.50$ m　　D $h=3.70$ m

1-4-10　已知一条矩形渠道，通过流量为 $Q=1.50$ m^3/s，底宽 $b=2.0$ m，渠道正常水流 $h_0=0.65$ m，粗糙系数 $n=0.015$，该渠道的底坡为：（　　）

A $i=0.003\ 5$　　B $i=0.001\ 0$　　C $i=0.002\ 8$　　D $i=0.003\ 2$

1-4-11　由混凝土衬护的长直矩形渠道，$b=2.0$ m，水深 $h=0.7$ m，通过流量 $Q=1.6$ m^3/s，该水流是：（　　）

A　急流　　B　缓流　　C　临界流　　D　不清楚

1-4-12　矩形断面排水沟，渠宽 $b=4$ m，粗糙系数 $n=0.025$，通过流量 $Q=30$ m^3/s，若底坡 $i=0.005$，临界水深为：（　　）

A $h_K=0.97$ m　　B $h_K=1.05$ m　　C $h_K=1.79$ m　　D $h_K=1.98$ m

1-4-13　跌水为急变流中局部水力现象，发生跌水的水力条件是：（　　）

A　从急流过渡到缓流　　B　从缓流过渡到急流

C　从急流过渡到急流　　D　从缓流过渡到缓流

1-4-14　水跃为急变流中局部水力现象，发生水跃的水力条件是：（　　）

A　从急流过渡到缓流　　B　从缓流过渡到急流

C　从急流过渡到急流　　D　从缓流过渡到缓流

第五章　湍流射流与湍流扩散

流体自孔口、管嘴、管口或窄缝向周围流体喷出所形成的流动，称为流体淹没射流。当出口流速较大，流动呈湍流状态时，被称为湍流射流。

射流的空间的大小，对射流的流动关系很大。当射流到无限空间时，流动不受固体边界条件的影响，称为无限空间射流（自由射流）。反之为有限空间射流（受限射流）。本章仅讨论无限空间射流。

第一节　湍流射流特征

一、湍流射流的运动与结构

以无限空间中圆断面湍流射流为例，分析射流的运动及其结构图形，如图 1－5－1 所示。由于湍流横向掺混，使射流边界上的气体与周围气体之间发生动量交换，从而把周围的气体卷吸到射流中，随同射流一起运动，促使射流的流量、横断面积沿射程不断增加，形成向周围扩散的锥体状流场，如图 1－5－1 中所示的锥体 *CAMDF*。

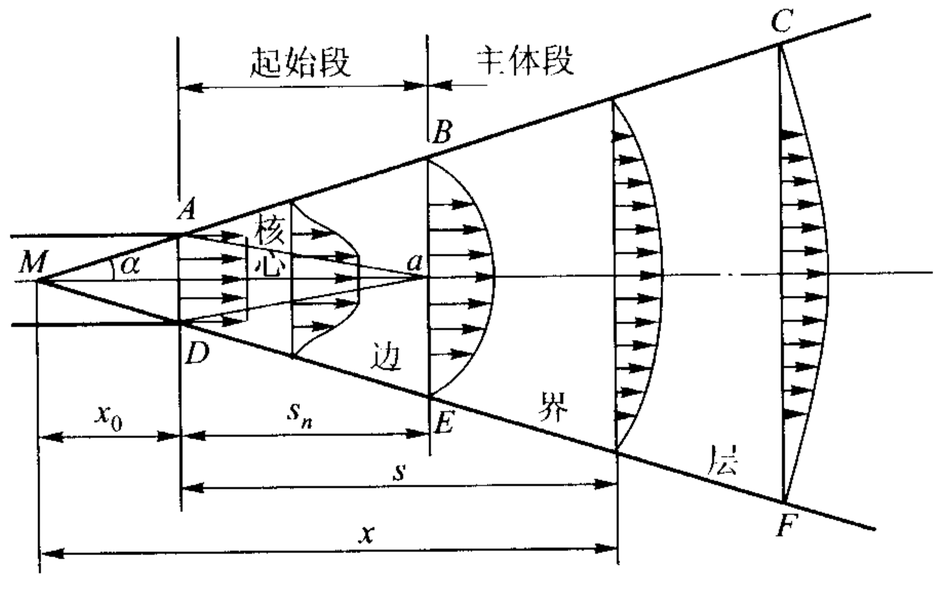


图 1－5－1　射流结构

同时，由于动量交换使从外界带入的气体与射流自身气体的速度趋于均等，促使射流速度沿射程不断减小，射程较远处断面流速分布呈扁平状（如图 1－5－1 中 *C－F* 断面）。

射流保持出口流速 v_0 的部分称为**射流核心**，速度小于 v_0 的部分称为**边界层**，射流核心消失的断面 *BOE* 称为**过渡断面**。从出口至过渡断面称为**射流起始段**，过渡断面以后称为射流主体段。

二、射流的几何特征

如图 1－5－1 所示，将射流外边界（流速为零的边界）*AB*、*DE* 延至喷嘴内交于 *M* 点，*M* 点称为**极点**，∠*AMD* 的一半称为**极角** α。可用下式计算：

$$\tan \alpha = a \cdot \varphi \tag{1-5-1}$$

式中：a——湍流系数，它反映喷嘴处流速分布的紊乱程度，由实验确定，应用时可查相关资料，某些喷嘴的湍流系数见表 1－5－1；

φ——喷嘴断面形状系数，实验证明，圆断面射流，$\varphi = 3.4$，长条缝喷出的平面射流，$\varphi = 2.44$。

式（1－5－1）表明，射流的扩散角取决于喷嘴形状与出口流速，当喷嘴形状与出口流速一定时，射流的边界层的外边界线即被决定，并按一定的扩散角 α 向前做扩散运动，此即射流的几何特征。

表 1-5-1　湍流系数

喷嘴种类	a	2α	喷嘴种类	a	2α
带有收缩口的喷嘴	0.006 0.071	25°20′ 27°10′	带金属网格的轴流风机	0.24	78°40′
圆柱形管	0.076 0.08	29°00′	收缩极好的平面喷口	0.108	29°30′
带有导叶的轴流式通风机	0.12	44°30′	平面壁上锐缘狭缝	0.118	32°10′
带导流板的直角弯管	0.20	68°30′	具有导叶且加工磨圆边口的风道上纵向缝	0.155	41°20′

对于圆断面射流，根据射流的几何特征，利用式（1-5-1）并取扩散角 $\alpha = 14°33'$，可推导出射流半径沿射程的变化规律（图 1-5-1 和图 1-5-2）。

$$\frac{R}{r_0} = \frac{x_0 + s}{x_0} = 1 + \frac{s}{\frac{r_0}{\tan\alpha}}$$

$$= 1 + 3.4a\frac{s}{r_0} = 3.4\left(\frac{as}{r_0} + 0.294\right) \quad (1-5-2)$$

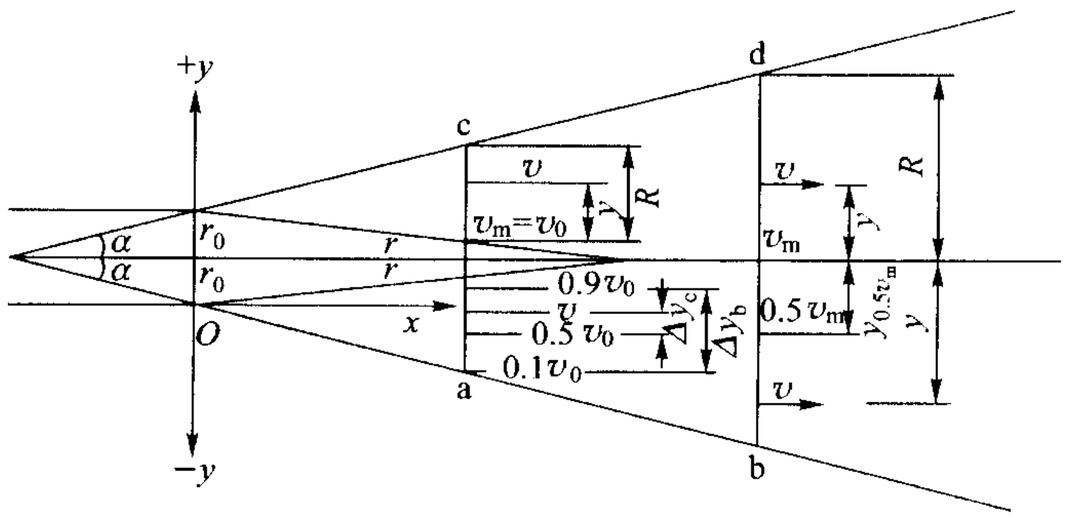


图 1-5-2　射流半径及流速分布

也可表示为：

$$\frac{R}{r_0} = \frac{\frac{x_0}{r_0} + \frac{s}{r_0}}{\frac{x_0}{r_0}} = \frac{\overline{x_0} + \bar{s}}{\frac{1}{\tan\alpha}} = 3.4a(\overline{x_0} + \bar{s}) = 3.4a\,\bar{x} \quad (1-5-3)$$

式中：$\bar{s}$——以出口截面算起的量纲为一的距离，$\bar{s} = \frac{s}{r_0}$；

$\bar{x}$——以极点算起的量纲为一的距离，$\bar{x} = \frac{x_0 + s}{r_0} = \overline{x} + \bar{s}$。

射流直径沿射程的变化规律可表示为：

$$\frac{D}{d_0} = 6.8\left(\frac{as}{d_0} + 0.147\right) \quad (1-5-4)$$

式中：D——射流直径；

d_0——喷嘴直径；

a——湍流系数；

s——射流断面离喷嘴的距离（射程）。

三、射流的运动特征

为探讨射流的流速分布规律，许多学者做了大量实验，对不同横断面上的速度分布进行了测定。图 1-5-3 给出了特留彼尔的实验结果。从图 1-5-3（a）中可知，无论起始段还是主体段内，轴心处速度最大，从轴心向边界层边缘速度逐渐减小至零；离喷嘴的距离越远，轴心上的速度越小，边界层的厚度越大。

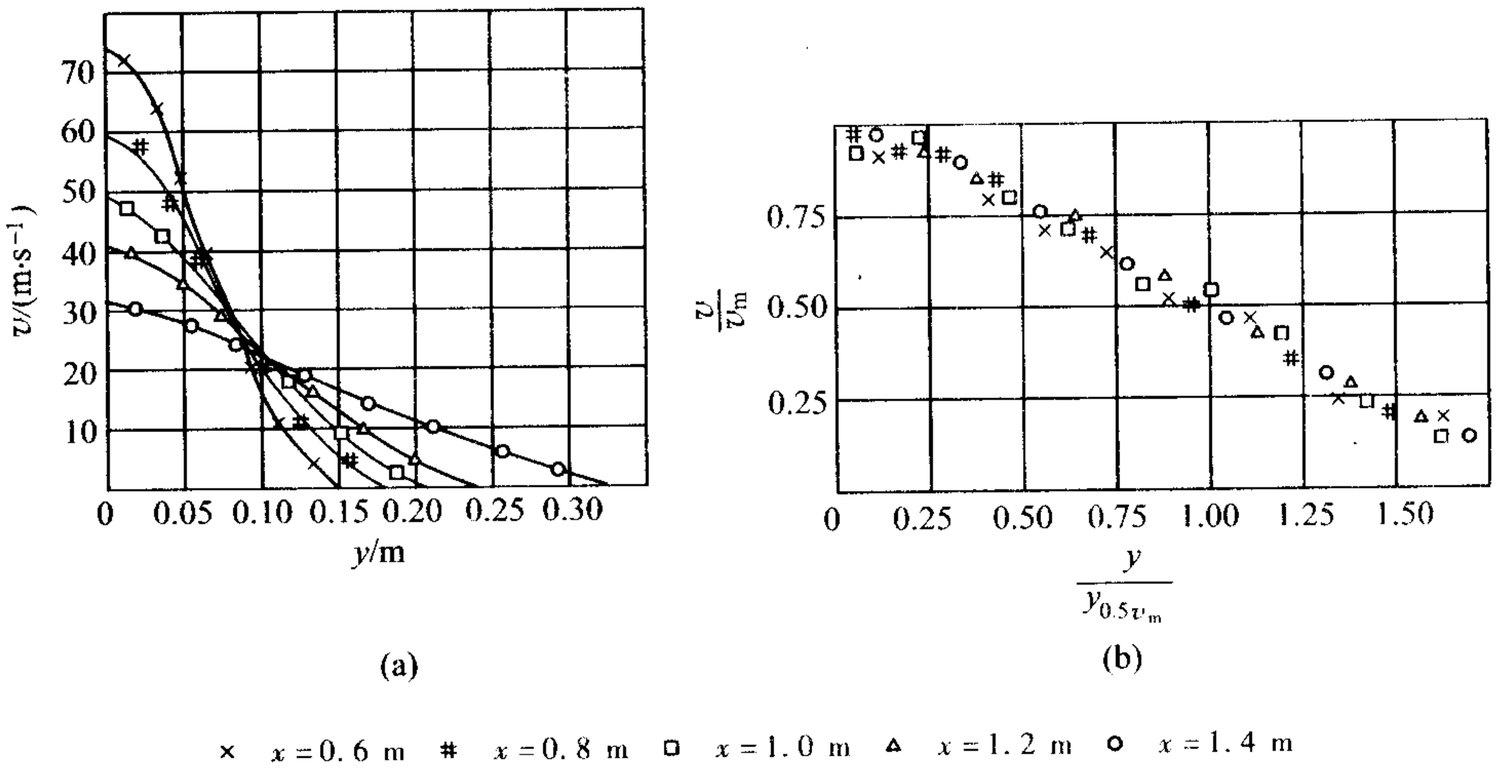


图 1-5-3 主体段流速分布

用相对速度（量纲为一）和相对距离（量纲为一）整理上面资料，横坐标为$\frac{y}{y_{0.5v_m}}$，纵坐标为$\frac{v}{v_m}$，可得图 1-5-3b。可以看出，各断面不同的速度分布曲线用量纲为一的量表示可以变换为同一条量纲为一速度分布曲线，此即射流的运动特征［阿勃拉莫维奇（Abramovich）对射流的起始段也作了相同的工作，起始段具有同样的特征］。这说明，射流各断面速度分布的相似性，所以射流主体段的速度分布可用半经验公式表示：

$$\frac{v}{v_m}=\left[1-\left(\frac{y}{R}\right)^{1.5}\right]^2 \tag{1-5-5}$$

令：

$$\frac{y}{R}=\eta$$

则：

$$\frac{v}{v_m}=[1-\eta^{1.5}]^2 \tag{1-5-6}$$

式中：y——某横断面上任意点至轴心的距离；

R——该断面上射流半径（半宽度）；

v——y 点的速度；

v_m——该断面的轴心速度。

y 的取值为 $0\rightarrow R$，故$\frac{y}{R}$变化范围为 $0\rightarrow 1$；v 的取值为 $v_m\rightarrow 0$，故$\frac{v}{v_m}$的变化范围为 $1\rightarrow 0$。

四、射流的动力特征

实验证明，射流任意点上的压强均等于周围的大气压强。通过动量方程可以证明，各横断面上的动量相等——动量守恒，即：

$$\pi\rho r_0^2 v_0^2=\int_0^R 2\pi\rho u^2 y\mathrm{d}y \tag{1-5-7}$$

这是射流的动力特征，是研究射流运动的基本关系。

第二节　圆断面射流的运动分析

一、轴心速度 v_m

对式（1-5-4）两端除以 $\pi\rho R^2 v_m^2$，并应用式（1-5-5），整理可得：

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^2\left(\frac{v_0}{v_m}\right)^2 = 2\int_0^1\left(\frac{v}{v_m}\right)^2\frac{y}{R}\mathrm{d}\left(\frac{y}{R}\right) = 2\int_0^1[(1-\eta^{1.5})^2]^2 \tag{1-5-8}$$

令 $\int_0^1[(1-\eta^{1.5})^2]^2 = B_2$，并根据 $\frac{y}{R}$ 及 $\frac{v}{v_m}$ 的变化范围，从量纲为一的速度分布曲线上分段积分，可得 $B_2 = 0.046\,4$，则：

$$\frac{v_m}{v_0} = 3.28\frac{r_0}{R}$$

再将射流半径 R 沿程变化规律表达式（1-5-2）和式（1-5-3）代入上式，得：

$$\frac{v_m}{v_0} = \frac{0.965}{\frac{as}{r_0}+0.294} = \frac{0.48}{\frac{as}{d_0}+0.147} = \frac{0.96}{a\bar{x}} \tag{1-5-9}$$

式（1-5-9）反映量纲为一轴心速度与量纲为一距离 $\bar{x}$ 成反比的关系。

二、断面流量 Q

取量纲为一流量：

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{2\pi\int_0^R uy\mathrm{d}y}{\pi r_0^2 v_0} = 2\int_0^{\frac{R}{r_0}}\left(\frac{v}{v_0}\right)\left(\frac{y}{r_0}\right)\mathrm{d}\left(\frac{y}{r_0}\right)$$

经整理，将式（1-5-2）和式（1-5-9）代入，得：

$$\frac{Q}{Q_0} = 2.2\left(\frac{as}{r_0}+0.294\right) = 4.4\left(\frac{as}{d_0}+1.47\right) = 2.2a\bar{x} \tag{1-5-10}$$

式（1-5-10）说明，断面流量 Q 沿程逐渐增大。

三、断面平均流速 v_1

断面平均流速 $v_1 = \frac{Q}{A}$，$v_0 = \frac{Q_0}{A_0}$，用量纲为一断面平均流速：

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{QA_0}{Q_0A} = \frac{Q}{Q_0}\left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

将式（1-5-2）和式（1-5-10）代入，得：

$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{0.19}{\frac{as}{r_0}+0.294} = \frac{0.095}{\frac{as}{d_0}+0.147} = \frac{0.19}{a\bar{x}} \tag{1-5-11}$$

【例1-5-1】 用轴流风机水平送风，风机直径 $d_0 = 600$ mm，出口风速 $v_0 = 10$ m/s。试求距离出口10 m处的轴心速度和风量。

解：由表 1-5-1 查得 $a=0.12$。用式（1-5-9）：

$$\frac{v_m}{v_0}=\frac{0.48}{\frac{as}{d_0}+0.147}=\frac{0.48}{\frac{0.12\times10}{0.6}+0.147}=0.225$$

$$v_m=0.225v_0=0.225\times10\ \text{m/s}=2.25\ \text{m/s}$$

应用式（1-5-10）

$$\frac{Q}{Q_0}=4.4\left(\frac{as}{d_0}+1.47\right)=4.4\times\left(\frac{0.12\times10}{0.6}+1.47\right)=9.45$$

$$q=9.45Q_0=9.45\times\frac{\pi d_0^2}{4}v_0=9.45\times\frac{\pi\times0.6^2}{4}\times10\ \text{m/s}=26.7\ \text{m}^3/\text{s}$$

（质量平均流速、起始段核心长度、核心收缩角、起始段流量、起始段平均流速、起始段质量平均流速等从略。）

思 考 题

1-5-1 何谓“气体淹没射流”、“气体湍流射流”？

1-5-2 何谓“气体自由射流”、“气体受限射流”？

1-5-3 射流边界层是指的什么区域？

1-5-4 气体自由射流有哪几部分组成？

1-5-5 气体自由射流的主要几何特征有哪些？

1-5-6 气体自由射流的主要运动特征有哪些？

习 题

1-5-1 气体自由射流边界层是指：（ ）

A 流速小于喷嘴初始流速 v_0 及流速由 $v_0\rightarrow0$ 的整个区域

B 流速大于喷嘴初始流速 v_0 的区域

C 流速等于初始流速 v_0 的区域

D 以上说法全不对

1-5-2 射流的运动特征之一是：（ ）

A 射流流速随射程 x 增大而增大

B 射流流速随射程 x 增大而减小，射程 x 越大流速分布越扁平化。

C 射流流速随射程 x 增大不发生变化

D 以上三种说法全不对

1-5-3 射流的运动运动特征之一是：（ ）

A 射流内部任一点的压强都大于大气压强　　B 射流内部任一点的压强都小于大气压强

C 射流内部任一点的压强都等于大气压强　　D 以上三种说法全不对

1-5-4 射流外边界夹角成为“极角”，极角的一半为 α，$\tan\alpha=a\varphi$，a 为湍流系数，φ 反映喷嘴断面形状系数。当喷嘴形状与出口流速一定时，则：（ ）

A 射流的边界层的外边界线不能确定

B 射流的边界层的外边界线不能确定，沿射程不断变化

C 射流的边界层的外边界线就被决定了

D 以上三种说法全不对

第六章　气体动力学基础

气体在通常情况下可视为不可压缩流体，当气流速度较高，压差较大时，气体的密度会发生较大的变化，运动参数也变化显著，必须考虑其可压缩性。因此，研究压缩性流体动力学问题，不只是考虑流速、压强，还要包含密度、温度问题。在进行气体动力学计算时，压强、温度必须用绝对值，不用相对值。

第一节　理想气体一元恒定流的运动方程

对于理想气体一元恒定流，当质量力仅有重力，气体在同介质中流动时，浮力与重力平衡，即不计质量力。应用理想流体欧拉运动微分方程，可以建立理想气体欧拉运动微分方程。

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+v\mathrm{d}v=0 \tag{1-6-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\rho}+\mathrm{d}\left(\frac{v^2}{2}\right)=0 \tag{1-6-2}$$

式（1-6-2）确定了气体一元流动 p、ρ、v 三者之间的关系。积分上式，必须知道气体 p、ρ 之间的函数关系，这就要借助热力学过程方程式。

一、气体一元定容流动

热力学中等容过程是指气体的容积不变的流动，亦即密度不变的不可压缩流体运动。因此，前面建立的运动方程可用于气体一元定容流动。

对式（1-6-2）积分可得：

$$\frac{p}{\rho}+\frac{v^2}{2}=\text{常数} \tag{1-6-3}$$

或写为：

$$\frac{p}{\gamma}+\frac{v^2}{2g}=\text{常数} \tag{1-6-4}$$

式（1-6-3）为不可压缩理想气体方程，它表明，理想气体流动时单位质量气体的压能、动能保持不变，并且压能、动能可互相转化。

二、气体一元等温流动

热力学中等温过程是指气体在温度不变的条件下进行的热力过程。等温流动则是指气体温度 T 保持不变的流动。气体状态参数服从等温过程方程。

$$\frac{p}{\rho}=RT=c \tag{1-6-5}$$

将式（1-6-5）代入式（1-6-2）积分并整理，得：

$$\frac{p}{\rho}\ln p+\frac{v^2}{2}=\text{常量} \tag{1-6-6}$$

沿流任意两断面方程可写为：

$$\frac{p}{\rho}\ln p_1 + \frac{v_1^2}{2} = \frac{p}{\rho}\ln p_2 + \frac{v_2^2}{2} \tag{1-6-7}$$

三、气体一元绝热流动

热力过程中，若无能量损失且与外界又无热量交换的条件下，为可逆的绝热过程，又称等熵过程。理想气体的绝热流动即为等熵流动。气体状态参数变化服从等熵过程方程。

$$\frac{p}{\rho^k} = c \tag{1-6-8}$$

式中：k——绝热指数，$k = \frac{c_p}{c_V}$，为定压比热与定容比热之比。

所以，密度与压强的变化可表示为：

$$\rho = \left(\frac{p}{c}\right)^{\frac{1}{k}} = c^{-\frac{1}{k}} \cdot p^{\frac{1}{k}} \tag{1-6-9}$$

将式（1-6-9）代入式（1-6-2），积分并整理，得：

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 常量 \tag{1-6-10}$$

式（1-6-10）为多变流动运动方程。

对于任意两断面有：

$$\frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{v_1^2}{2} = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{v_2^2}{2} \tag{1-6-11}$$

式（1-6-10）可以改写为：

$$\frac{1}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 常量 \tag{1-6-12}$$

与不可压缩理想气体方程式（1-6-3）比较，式（1-6-12）多了一项$\frac{1}{k-1} \cdot \frac{p}{\rho}$。从热力学可知，此项为绝热过程中，单位质量气体所具有的内能 u。于是，式（1-6-12）可改写为：

$$u + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 常量 \tag{1-6-13}$$

式（1-6-13）表明，理想气体绝热流动（等熵流动），沿流断面上单位质量气体所具有的内能、压能、动能之和保持守恒。

式（1-6-13）为绝热流动的伯努利方程，又称为绝热流动的全能方程，它不仅适用于无摩阻的绝热流中，也适用于有黏性的实际气流的绝热流动。

【例1-6-1】 空气在管道中作绝热流动（无摩擦损失），已知空气的绝热指数 $k=1.4$，气体常数 $R=287\ \mathrm{J/kg \cdot K}$，断面1处气体流速 $v_1=2.0\ \mathrm{m/s}$，温度 $t=30\ ℃$；断面2处流速 $v_2=3.0\ \mathrm{m/s}$。试求断面2处的温度。

解： 由式（1-6-10）可知：$\frac{k}{k-1}\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 常量$，代入绝热指数 $k=1.4$，得：

$$3.5\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = 常数$$

因为气体状态参数服从等温过程方程$\frac{p}{\rho} = RT$，代入上式：

$$3.5 \times 287T + \frac{v^2}{2} = 常数$$

列出两断面间的多变流动运动方程：

$$3.5\times287T_1+\frac{v_1^2}{2}=3.5\times287T_2+\frac{v_2^2}{2}$$

整理得：$2\ 009T_1+v_1^2=2\ 009T_2+v_2^2$

对于断面 1：$T_1=273\ \text{K}+30\ \text{K}=303\ \text{K}$，$v_1=2.0\ \text{m/s}$，$v_2=3.0\ \text{m/s}$ 代入上式，解出，$T_2=302.997\ 5\text{K}$，$T_2=29.997\ 5\ ℃$。

第二节　声速、马赫数

一、声速

流体内某处受外力作用，使其压力发生变化，称为压力扰动，从而产生压力波，压力波传播速度的快慢取决于流体的性质——压缩性（弹性）和密度。

微小扰动在流体中的传播速度，即声音在流体中的传播速度。声速用 c 表示，其计算可用下面的公式：

$$c=\sqrt{\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}} \tag{1-6-14}$$

式（1-6-14）反映微小扰动压力波传播速度与流体内压强变化和流体密度变化的关系，该式对气体和液体都适用。用弹性模量可表示为：

$$c=\sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{1-6-15}$$

式（1-6-15）说明，声速与流体弹性模量平方根成正比，与流体密度平方根成反比，声速在一定程度上反映流体的可压缩性。

压力波传播的速度极快，在传播过程中来不及与外界进行热交换，忽略摩阻，其整个传播过程可视为等熵过程。由气体状态方程 $p/\rho=RT$，及式（1-6-14）可以导出声速的又一计算公式：

$$c=\sqrt{kRT} \tag{1-6-16}$$

式中：k——气体的绝热指数；

R——气体常数。

该式说明：

① 不同的气体有不同的绝热指数及不同的气体常数，所以不同的气体有各自不同的声速值。

如常压下，空气温度为 15 ℃，绝热指数 $k=1.4$，气体常数 $R=287\ \text{J/kg}\cdot\text{K}=287\ \text{m}^2/\text{s}^2\cdot\text{K}$，热力学温度 $T=273\ \text{K}+15\ \text{K}=288\ \text{K}$。

$$c=\sqrt{kRT}=\sqrt{1.4\times287\times288}\ \text{m/s}=340\ \text{m/s}$$

压力及温度与空气相同的氢气的声速为 $c=1\ 295\ \text{m/s}$。

② 同一种气体声速值也不是固定不变的，还与气体的热力学温度的平方根成正比。

常压条件下空气中的声速计算公式可表示为：

$$c=\sqrt{1.4\times287}\cdot\sqrt{T}=20.1\sqrt{T} \tag{1-6-17}$$

【例 1-6-2】 声波在气体中的传播速度可看作等熵过程，在常压条件下，空气温度为 $t=20$ ℃，当地声速为多少？若温度上升到 $t=25$ ℃，当地声速又是多少？

解：（1）温度为 $t=20$ ℃，热力学温度 $T=273\ \text{K}+20\ \text{K}=293\ \text{K}$

由式（1-6-17）可得声速为：

$$c = 20.1\sqrt{T} = 20.1\ \sqrt{293}\ \text{m/s} = 344\ \text{m/s}$$

(2) 温度为 $t = 25\ ℃$，热力学温度 $T = 273\ \text{K} + 25\ \text{K} = 298\ \text{K}$

声速：$c = 20.1\sqrt{T} = 20.1\ \sqrt{298}\ \text{m/s} = 347\ \text{m/s}$

可见，在压力不变的情况下，空气的声速随温度的升高而增大。

二、马赫数

由式（1-6-15）可知，声速在一定程度上反映流体的可压缩性。气流流速越大，压缩现象则越显著，则声速越小。马赫首先将有关影响压缩效果的 v 与 c 两个参数联系起来，取指定点当地气流速度 v 与该点当地声速的比值称为马赫数 Ma，即：

$$Ma = \frac{v}{c} \tag{1-6-18}$$

$Ma > 1$，则 $v > c$，即气流速度大于声速，其流中参数变化（压力波）不向上游传播。这就是超声速气流。

$Ma < 1$，则 $v < c$，即气流速度小于声速，其流中参数变化（压力波）能各向传播。这就是亚声速气流。

Ma 是气体动力学中一个重要量纲为一量，它反映惯性力与弹性力的相对比值。是确定气流状态的准数。

【例 1-6-3】 某飞机在海平面或 11 000 m 高空均以 1 150 km/h 的速度飞行，试问这架飞机在海平面和 11 000 m 高空的飞行 Ma 数是否相同？

解： 飞机飞行速度

$$v = 1\ 150 \times 1\ 000 \div 3\ 600\ \text{m/s} = 319\ \text{m/s}$$

(1) 常压下海平面上的声速 $c = 340\ \text{m/s}$，故 Ma 为：

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{319}{340} = 0.938$$

$Ma < 1$，即在海平面上空为亚声速飞行。

(2) 11 000 m 高空的声速为 295 m/s，故 Ma 为：

$$Ma = \frac{v}{c} = \frac{319}{295} = 1.08$$

$Ma > 1$，即在 11 000 m 高空为超声速飞行。

第三节 气体恒定一元流的连续性方程

一、连续性微分方程

根据质量守恒原则，连续性方程为

$$\rho v A = \text{常量}$$

为了反映流速与断面之间的变化关系，对上式微分：

$$\mathrm{d}(\rho v A) = \rho v \mathrm{d}A + v A \mathrm{d}\rho + \rho A \mathrm{d}v = 0$$

或：

$$\frac{\mathrm{d}v}{v} + \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} + \frac{\mathrm{d}A}{A} = 0 \tag{1-6-19}$$

根据式（1-6-1）：

$$\frac{dp}{\rho}+vdv=0$$

则 $\rho=-dp/vdv$，代入式（1-6-19），并根据式（1-6-14），

$$c^2=\frac{dp}{d\rho},\quad Ma=\frac{v}{c}$$

整理可得：

$$\frac{dA}{A}=(Ma^2-1)\frac{dv}{v} \tag{1-6-20}$$

式（1-6-20）为可压缩流体的连续性微分方程的又一形式。

二、气流速度与过流断面的关系

讨论式（1-6-19），可得出以下结论：

① $Ma<1$ 为亚声速气流，式（1-6-20）中 $Ma^2-1<0$，方程式右边为负值，即 dv 与 dA 正负号相反，说明气流速度随断面增大而减小；反之，过流断面减小而流速增大，这与不可压缩流体运动规律相同，如图 1-6-1（a）所示。

② $Ma=1$，即气流与当地声速相等，这种速度称为临界速度，气流达到临界状态的断面称为临界断面，记为 A_K，相应参数也加脚注“K”，即临界气流速度 v_K，临界当地声速 c_K，以及 p_K，ρ_K，T_K 等。式（1-6-18）中，$Ma=1$，$Ma^2-1=0$，即方程式右边的值为0，说明 $dA=0$，即断面面积沿流变化出现极值。联系式（1-6-19）有密度相对变化$\frac{d\rho}{\rho}$的增或减等于压强度相对变化$\frac{dp}{p}$的减或增。当 $Ma<1$ 时，速度增加，只有面积减小才能达到气流流速等于声速，即 $v=c$，说明 A_K 是极小值。于是，可得出结论：对于可压缩流体气流，只有在最小断面上才能达到声速。

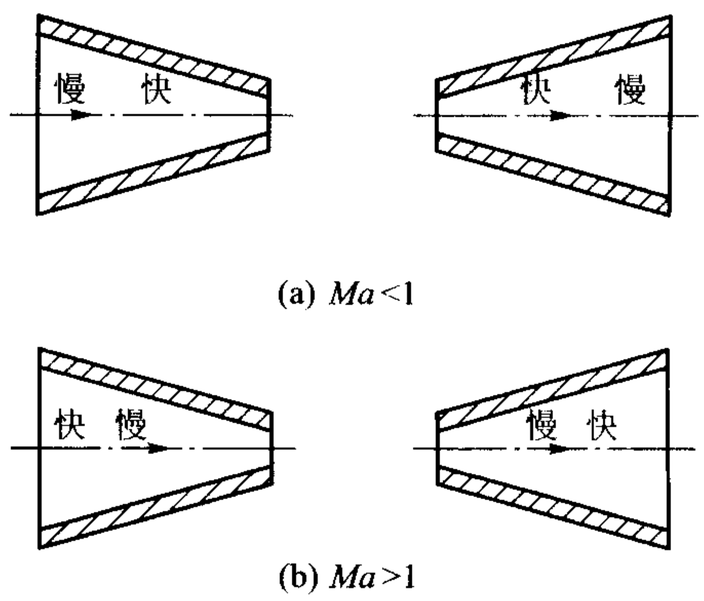


图 1-6-1　气流速度与断面关系

③ $Ma>1$ 为超声速气流，$Ma^2-1>0$，说明式（1-6-20）等号右边为正值，必须使 $dA>0$ 才能满足方程的要求，说明气流速度随断面增大而加快；反之，过流断面减小而流速减小，如图 1-6-1（b）所示。

第四节　实际喷管性能

喷管在工程上有着广泛的用途，设置喷管的目的是使流体降压增速（$dp<0$，$dv>0$）。通常喷管的形式有：渐缩喷管、渐扩喷管、渐缩渐扩喷管（简称缩放喷管，也称拉法尔喷管）等。

1. 渐缩喷管

渐缩喷管［图 1-6-2（a）］断面面积 $dA<0$，当进入喷管的气流为亚声速气流（$Ma<1$）时，$Ma^2-1<0$，式（1-6-20）等号右边为负值，说明 $dv>0$，流速是不断增大的。只有当收缩到临界断面，面积微分才能 $dA=0$，气流可达到声速。因此，亚声速的一般收缩形气流，在渐缩喷管内不可能达到超声速流动，最多是在收缩管出口断面达到声速。

2. 渐扩喷管

渐扩喷管断面面积 $dA>0$，当进入喷管的气流为亚声速气流时，$Ma^2-1<0$，式（1-6-20）等号右边为负值，说明 $dv<0$，即速度不断减小，这与不可压缩流体运动规律相同。

当进入喷管的气流为超声速气流时，$Ma^2-1>0$，式（1-6-20）等号右边为正值，即 $dv>0$，说明速度不断增大，渐扩喷管保持超声速气流。

3. 渐缩渐扩喷管

通过以上分析可知，为了获得超声速气流，可使亚声速气流流经渐缩喷管，使其在最小断面上达到声速，然后在进入渐扩喷管，满足气流进一步膨胀增速，才能获得超声速气流。这就确定了从亚声速获得超声速气流的喷管形状，如图 1-6-2（b）所示，这种喷管称为“**拉法尔喷管**”。

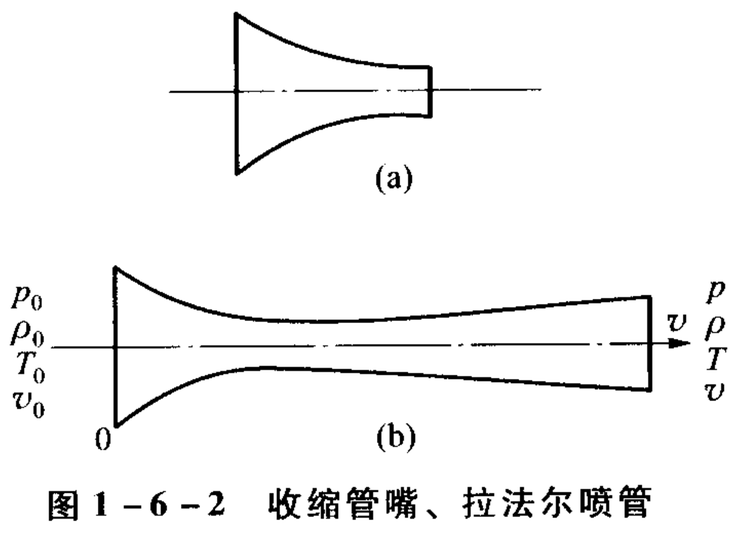


图 1-6-2 收缩管嘴、拉法尔喷管

思 考 题

1-6-1 什么是气体定容流动、等温流动、绝热流动？

1-6-2 绝热流动的全能方程的物理意义。

1-6-3 声速、马赫数的定义是什么？

1-6-4 当地声速值与哪些因素有关？

1-6-5 对于压力与温度相同的不同气体，它们的声速值是否相同？

1-6-6 气流和液流在沿流程上速度的变化与过流断面的关系有何相同与不同？

1-6-7 渐缩喷管、渐扩喷管、渐缩渐扩喷管内气流沿流程的变化有何不同（分亚声速和超声速两种情况考虑）？

1-6-8 为什么亚声速气流在渐缩管路中，无论管路多长，也得不到超声速气流？

1-6-9 超声速流动中，速度随断面积增大而增大的关系，其物理含义是什么？

1-6-10 拉法尔喷管的喷管形状及气流有何特征？

习 题

1-6-1 亚声速气流速度随过流断面增大而：（ ）

A 增大 B 减小 C 不变 D 与不可压缩流体运动规律不同

1-6-2 超声速气流速度随过流断面增大而：（ ）

A 增大 B 减小 C 不变 D 与不可压缩流体运动规律相同

1-6-3 气体动力学中声速定义为：（ ）

A 微小扰动形成的压力波在流体中单向传播的速度

B 微小扰动形成的压力波在流体中双向传播的速度

C 微小扰动形成的压力波在流体四面传播的速度

D 以上说法都不对

1-6-4 压力波传播的速度极快，在传播过程中来不及与外界进行热交换，其整个传播过程可视为等熵过程。同一种气体声速值随气体温度的增加而：（ ）

A 增大 B 减小 C 不变 D 说不清

1-6-5 声速与流体弹性模量平方根：（ ）

A 成反比 B 成正比 C 无关 D 说不清

1-6-6 同一种气体声速值随气体的温度变化的关系是：（ ）

A 随气体温度的增加声速值增大。

B 随气体温度的增加声速值减小。

C 随气体温度的增加声速值不变。

D 说不清

1-6-7　亚声速气流在渐缩喷管出口：(　　)

A 能达到超声速　　B 不能达到超声速

C 不能达到声速　　D 只能保持亚声速

1-6-8　能获得超声速的喷管是：(　　)

A 渐缩喷管　　B 渐扩喷管　　C 拉法尔喷管　　D 扩压管

1-6-9　某飞机在海平面上空以 1 350 km/h 的速度飞行，已知气温 $t=15$ ℃，空气的绝热指数 $k=1.4$，气体常数 $R=287$ J/kg·K。这架飞机的飞行状态为：(　　)

A 亚声速飞行　　B 超声速飞行　　C 等声速飞行　　D 说不清

第七章　相似原理和模型实验方法

前面建立了描述流体运动的基本方程式，研究流体运动的主要途径之一就是借助各种数学运算，利用这些基本方程求解未知的函数关系，这种方法即为理论分析法。由于流体运动及边界条件的复杂性，使得某些导出的微分方程无法求解；对于一些极其复杂的流动，甚至连数学表达式也难以导出。在这种情况下，常常要先进行定性的理论分析，或者通过实验，找出各种变量之间的内在的关系。此时，量纲分析和相似原理可以提供定性分析和正确提出实验方案和处理数据的方法。在量纲分析和相似原理指导下的科学实验，不仅可以验证理论分析、弥补理论分析的不足，有时还可解决理论分析难以解决的问题。

第一节　量纲分析法

一、量纲

每一个物理量都包括量的数值及量的种类（类别）（如长度、时间、质量……），而物理量的种类习惯上就称为量纲（或因次）。量纲就其基本性质而论，可以为分两类，即基本量纲与导出量纲。在工程流体力学中，常用质量 M、长度 L 及时间 T 作为基本量纲（它们之间是彼此独立的），其他量的量纲则为导出量纲，它们都可以由这三种量纲以不同方式组合而成的。例如，速度 v、运动黏度 ν、流量 Q 等的量纲可以表示为 $\dim v = LT^{-1}$；$\dim \nu = L^2T^{-1}$；$\dim Q = L^3T^{-1}$ 等。

二、量纲和谐原理

大量事实证明，凡是正确反映客观规律的物理方程式，必然是一个齐次量纲式（即式中各项的量纲应是相同的），此即量纲和谐原理。

例如，连续方程 $v_1A_1 = v_2A_2$，方程中各项的量纲均为 L^3T^{-1}；能量方程 $z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2g} + h_w$，方程中各项的量纲均为 L。

利用量纲和谐原理可以检验某一物理方程式的正确性。当发现经验公式的量纲不一致时，必须根据量纲和谐原理，定出式中各项所采用的单位。

既然物理方程具有量纲齐次性，必然可写成量纲为一形式，这一点极为重要。例如，能量方程可以写为下面的形式，其物理性质不变。

$$\frac{z_1}{H} + \frac{p_1}{\rho g H} + \frac{\alpha_1 v_1^2}{2gH} = \frac{z_2}{H} + \frac{p_2}{\rho g H} + \frac{\alpha_2 v_2^2}{2gH} + \frac{h_w}{H}$$

上式中各项均为量纲为一的量。

三、π 定理

任一物理过程，不仅各物理量之间关系有规律性，而且这些物理量相应的量纲之间也存在规律性。利用量纲之间的规律性去推求各物理量之间的规律性的方法称为量纲分析法。π 定理是具有普遍性的量纲分

析法，它首先由布金汉（Buckinghanm，1914）提出，所以也称布金汉定理。

π定理可表述如下：任何一物理过程，包括 n 个有量纲的物理量，q_1，q_2，q_3，…，q_n，总可以写出其表达式

$$f(q_1,\ q_2,\ q_3,\ \cdots,\ q_n)=0$$

如果选择其中 m 个物理量作为基本量，那么其他的物理量可以用这 m 个物理量表示量纲为一的π式，即第 i 个量表示为：

$$\pi_i=\frac{q_i}{q_1^{\alpha}q_2^{\beta}q_3^{\gamma}} \tag{1-7-1}$$

式中 α，β，γ 可由分子分母的量纲相等来确定。因为前 m 个π式均等于1，所以总共可表示为（$n-m$）个有效π式。

这个物理过程总可以为由量纲为一的π式所组成的关系式来描述，即：

$$\varphi(\pi_4,\ \pi_5,\ \pi_6,\ \cdots,\ \pi_{n-m})=0$$

利用量纲和谐原理，推求某一物理过程的函数关系，这种方法被称为π定理。工程流体力学中通常 $m=3$，这3个物理量分别为一个几何量、一个运动量、一个动力量。

但应当指出，π定理不是万能工具，不是任何物理过程通过推导演算即可找到表达的方程式。π定理的应用，必须依赖于通过理论分析或实验研究对所研究的物理过程的深入了解，正确地确定影响该物理过程的主要物理量。否则，即使量纲分析本身完全正确，也可能导致错误结论。下面通过实例来说明π定理的应用。

【例1-7-1】 已知有压管流两断面的压强差 Δp 受下列因素的影响：断面平均流速 v、圆管直径 d、运动黏度 ν、管道长度 l、管壁面糙度 Δ 及液体密度 ρ。试用π定理推求压强差 Δp 的表达式。

解： 依题意，可写成如下的函数关系：

$$\Delta p=f(v、d、\rho、\nu、l、\Delta)$$

今选 v，d，ρ 作为基本物理量，对于 Δp 有：

$$\pi_4=\frac{\Delta p}{v^{\alpha}d^{\beta}\rho^{\gamma}}=\frac{ML^{-1}T^{-2}}{(LT^{-1})^{\alpha}(L)^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma}}$$

即：

$$ML^{-1}T^{-2}=(LT^{-1})^{\alpha}\ (L)^{\beta}\ (ML^{-3})^{\gamma}$$

由量纲和谐原理，对于M，$1=\gamma$；对于T，$-2=-\alpha$，解出 $\alpha=2$；对于L，$-1=\alpha+\beta-3\gamma$，解出 $\gamma=0$。

则 $\pi_4=\dfrac{\Delta p}{\rho v^2}$。

同理，对于运动黏度 ν

$$\pi_5=\frac{\nu}{v^{\alpha}d^{\beta}\rho^{\gamma}}=\frac{L^2T^{-1}}{(LT^{-1})^{\alpha}(L)^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma}}$$

即

$$L^2T^{-1}=(LT^{-1})^{\alpha}(L)^{\beta}(ML^{-3})^{\gamma}$$

由量纲和谐原理，解出，$\alpha=1$，$\beta=1$，$\gamma=0$，所以，$\pi_5=\dfrac{\nu}{vd}$。

同理可解出，$\pi_6=\dfrac{l}{d}$；$\pi_7=\dfrac{\Delta}{d}$。

上述物理过程可表示为：

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2}=f\left(\frac{\nu}{vd},\ \frac{l}{d},\ \frac{\Delta}{d}\right)$$

大量实验表明，压强损失 Δp 与管长 l 成正比，与管径 d 成反比，而 $\frac{\nu}{vd}=\frac{1}{Re}$，$Re$ 为雷诺数。所以上式可写为：

$$\frac{\Delta p}{\rho v^2}=f_1\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right)\frac{l}{d}$$

或：

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=f_2\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right)\frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

令 $f_2\left(Re,\ \frac{\Delta}{d}\right)=\lambda$，上式可写为：

$$\frac{\Delta p}{\rho g}=\lambda\ \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

如以水头损失 $h_f=\frac{\Delta p}{\rho g}$ 表示，则上式可写为达西公式：

$$h_f=\lambda\ \frac{l}{d}\ \frac{v^2}{2g}$$

式中 λ 称为沿程阻力系数，与雷诺数 Re 和相对粗糙度 $\frac{\Delta}{d}$ 有关。

第二节 流动相似的概念

模型实验方法是研究流体运动的重要手段。模型实验的实质，就是针对要研究的水（气）流现象，按工程设计（原型）制作成模型（一般是缩小），然后进行实验研究，模拟水（气）流现象，研究探讨工程实际问题。如何制作一个模型，在实验中做到模型与原型的水（气）流现象相似，如何将模型中的实测资料应用到原型中去，均须借助于相似理论。

要做到模型与原型的水（气）流现象相似，并且把模型实验结果应用于原型，则模型与原型须做到几何相似、运动相似及动力相似，初始条件及边界条件亦应相似。在下面的叙述中，原型中的物理量注以下标 p，模型中的物理量注以下标 m。

一、几何相似

几何相似是指原型和模型的线性变量间存在着固定的比例关系，即对应的线性长度的比值相等。设 l_p 为原型的线性长度，l_m 为模型的线性长度，则长度比尺（或线性比尺）为：

$$\lambda_l=\frac{l_p}{l_m}\tag{1-7-2}$$

由此可推导出面积比尺和体积比尺，即：

$$\lambda_A=\frac{A_p}{A_m}=\frac{l_p^2}{l_m^2}=\lambda_l^2\tag{1-7-3}$$

$$\lambda_V=\frac{V_p}{V_m}=\frac{l_p^3}{l_m^3}=\lambda_l^3\tag{1-7-4}$$

二、运动相似

运动相似是指原型和模型两个流动中的相应质点，沿着几何相似的轨迹运动，而且运动相应线段的相

应时间比值相等。或者说，运动相似是指原型和模型两个流动中的相应质点的运动要素对应成比例。因此，时间比尺、速度比尺、加速度比尺可分别表示为：

$$\lambda_t = \frac{t_p}{t_m} \tag{1-7-5}$$

$$\lambda_u = \frac{u_p}{u_m} = \frac{\frac{l_p}{t_p}}{\frac{l_m}{t_m}} = \frac{\lambda_l}{\lambda_t} \tag{1-7-6}$$

$$\lambda_a = \frac{a_p}{a_m} = \frac{\frac{u_p}{t_p}}{\frac{u_m}{t_m}} = \frac{\lambda_u}{\lambda_t} = \frac{\lambda_l^2}{\lambda_t} \tag{1-7-7}$$

三、动力相似

动力相似是指原型和模型中相应点处流体质点所受的同名力的方向相同且具有同一比值。

当动力相似时，模型与原型相应点处质点的同名力 F（如重力 G，黏滞力 T，压力 P，表面张力 S，弹性力 E，惯性力 I）的比尺相等，则力比尺可表示为：

$$\lambda_F = \frac{F_p}{F_m} = \frac{G_p}{G_m} = \frac{T_p}{T_m} = \frac{P_p}{P_m} = \frac{S_p}{S_m} = \frac{E_p}{E_m} = \frac{I_p}{I_m} \tag{1-7-8}$$

或：

$$\lambda_F = \lambda_G = \lambda_T = \lambda_P = \lambda_S = \lambda_E = \lambda_I \tag{1-7-9}$$

以上三种相似是模型和原型两流动保持完全相似的重要特征。几何相似是运动相似和动力相似的前提，动力相似是决定模型和原型流动相似的主导因素，运动相似是几何相似和动力相似的具体表现。

四、初始条件和边界条件的相似

任何流动过程的发展都受到初始状态的影响。如初始时刻的流速、加速度、密度、温度等运动要素是否随时间变化对其后的流动过程起重要作用，因此要使模型与原型中的流动相似，应使其初始状态的运动要素相似。在非恒定流中，保证流动各运动要素的初始条件相似是必须的；在恒定流中，初始条件则失去意义。

边界条件同样是影响流动过程的重要因素。边界条件是指模型和原型中对应的边界的性质相同，几何尺度成比例。如原型中是固体壁面，则模型中对应的部分也应是固体壁面；原型中是自由液面，则模型中对应部分也应是自由液面。

第三节　相似准则

要满足模型和原型两流动保持完全相似，保证几何相似、运动相似和动力相似，模型的设计并非是随意的，要遵循一定的原理，即相似准则。

一、一般相似准则

对于相似流动，各比尺（λ_l、λ_t、λ_u……）的选择并不是任意的，它们之间有着一定的关系，可以通

过牛顿相似定律表述。

作用于流体中任一质点上诸力的合力可以用质量和加速度的乘积来表示，即牛顿第二定律 $F = ma$。于是，惯性力的比尺可表示为：

$$\lambda_F = \frac{F_p}{F_m} = \frac{(ma)_p}{(ma_m)} = \frac{(\rho Va)_p}{(\rho Va)_m} = \lambda_\rho \lambda_l^3 \lambda_l \lambda_t^{-2} = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_u^2 \tag{1-7-10}$$

或写为：

$$\frac{F_p}{\rho_p l_p^2 u_p^2} = \frac{F_m}{\rho_m l_m^2 u_m^2} \tag{1-7-11}$$

式中：$\frac{F}{\rho l^2 u^2}$——量纲为一的量，称为牛顿数（或牛顿相似准数），以 Ne 表示。

式（1-7-11）表明，两流动的动力相似，归结为牛顿数相等，即：

$$(Ne)_p = (Ne)_m \tag{1-7-12}$$

上式称为牛顿相似准则，它是流动相似的基本准则。

自然界的水（气）流运动一般都受到多种力的作用，但在不同的流动现象中，这些力的影响程度有所不同。要使流动完全满足牛顿相似准则，就要求作用在相应点上各种同名力具有同一力的比尺。但由于各种力的性质不同，影响它们的因素不同，实际上很难做到这一点。在某一具体流动中占主导地位的力往往只有一种，因此在模型实验中只要让这种力满足相似条件即可。这种相似虽然是近似的，但实践证明，结果是令人满意的。下面分别介绍只考虑一种主要作用力的相似准则。

二、重力相似准则（弗劳德准则）

当作用在流体上的外力，主要为重力时，可求出只有重力作用下的流动相似准则。重力 $G = mg = \rho gV$，作用于模型和原型的两流动相应质点的重力成比例，则：

$$\lambda_G = \frac{G_p}{G_m} = \frac{m_p g_p}{m_m g_m} = \frac{\rho_p l_p^3 g_p}{\rho_m l_m^3 g_m} = \lambda_\rho \lambda_l^3 \lambda_g$$

根据式（1-7-9），$\lambda_G = \lambda_F$，则：

$$\lambda_\rho \lambda_l^3 \lambda_g = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_u^2$$

即：

$$\frac{\lambda_u^2}{\lambda_g \lambda_l} = 1 \tag{1-7-13}$$

或：

$$\frac{u_p^2}{g_p l_p} = \frac{u_m^2}{g_m l_m}$$

开方后有：

$$\frac{u_p}{\sqrt{g_p l_p}} = \frac{u_m}{\sqrt{g_m l_m}} \tag{1-7-14}$$

式中：$\frac{u}{\sqrt{gl}}$——量纲为一的量，称为弗劳德数，以 Fr 表示。

所以式（1-7-14）用弗劳德数表示，即：

$$(Fr)_p = (Fr)_m \tag{1-7-15}$$

式（1-7-15）表明，在重力作用下的相似系统，其弗劳德数应该是相等的，这就叫重力相似准则，或称弗劳德准则。

三、黏滞力相似准则（雷诺准则）

当作用力主要为黏滞力时，则作用于模型和原型的两流动相应的黏滞力成一固定比例，根据牛顿内摩擦定律，黏滞力 $T=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}$，又 $\mu=\rho\cdot\nu$，则：

$$\lambda_T=\frac{T_\mathrm{p}}{T_\mathrm{m}}=\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_l^2\lambda_u\lambda_l^{-1}=\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_l\lambda_u$$

根据式（1-7-9），$\lambda_F=\lambda_T$，则 $\lambda_\rho\lambda_\nu\lambda_l\lambda_u=\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2$，即：

$$\frac{\lambda_u\lambda_l}{\lambda_\nu}=1 \tag{1-7-16}$$

或写成：

$$\frac{u_\mathrm{p}l_\mathrm{p}}{\nu_\mathrm{p}}=\frac{u_\mathrm{m}l_\mathrm{m}}{\nu_\mathrm{m}}$$

式中：$\frac{ul}{\nu}$——量纲为一的量，称为雷诺数，以 Re 表示，即：

$$(Re)_\mathrm{p}=(Re)_\mathrm{m} \tag{1-7-17}$$

式（1-7-17）表明，在单一黏滞力作用下的相似系统，其雷诺数应该相等，称为黏滞力相似准则，或称雷诺准则。

四、欧拉准则

当作用力主要为压力时，作用于模型和原型的相应质点上的动水压力成一固定比例。压力 $P=pA$，p 为压强，A 为面积。所以：

$$\lambda_P=\frac{p_\mathrm{p}A_\mathrm{p}}{p_\mathrm{m}A_\mathrm{m}}=\lambda_p\lambda_l^2$$

根据式（1-7-9），$\lambda_F=\lambda_P$，则 $\lambda_p\lambda_l^2=\lambda_\rho\lambda_l^2\lambda_u^2$，即：

$$\frac{\lambda_p}{\lambda_u^2\lambda_\rho}=1 \tag{1-7-18}$$

或写成：

$$\frac{p_\mathrm{p}}{u_\mathrm{p}^2\rho_\mathrm{p}}=\frac{p_\mathrm{m}}{u_\mathrm{m}^2\rho_\mathrm{m}}$$

式中：$\frac{p}{u^2\rho}$——$\frac{p}{u^2\rho}=Eu$，为欧拉数，则：

$$(Eu)_\mathrm{p}=(Eu)_\mathrm{m} \tag{1-7-19}$$

式（1-7-19）表明，在单一动水压力作用下的相似系统，其欧拉数应该是相等的。

还可以推导出表面张力相似准则（韦伯准则）、弹性力相似准则（柯西准则）等。

第四节　模 型 设 计

在进行模型实验之前，应首先依据相似理论进行模型设计，计算模型各种比尺。当长度比尺确定后，根据占主导地位的作用力去选择相应的相似准则，确定模型中各物理量的比尺。例如，当重力为主时，选择弗劳德准则设计模型；当黏滞力为主时，选择雷诺准则设计模型。

一、重力起主导作用的水流模型

对于重力起主导作用的流动，应保证模型和原型的弗劳德数相等，即按弗劳德相似准则设计模型。由式（1－7－13）：

$$\frac{\lambda_u^2}{\lambda_g \lambda_l} = 1$$

可得出流速比尺：

$$\lambda_u = \sqrt{\lambda_g \lambda_l}$$

通常 $\lambda_g = 1$，所以：

$$\lambda_u = \lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{1-7-20}$$

流量比尺：

$$\lambda_Q = \lambda_A \lambda_u = \lambda_l^2 \lambda_l^{\frac{1}{2}} = \lambda_l^{\frac{5}{2}} \tag{1-7-21}$$

时间比尺：

$$\lambda_t = \frac{\lambda_l}{\lambda_u} = \frac{\lambda_l}{\lambda_l^{\frac{1}{2}}} = \lambda_l^{\frac{1}{2}} \tag{1-7-22}$$

力的比尺：

$$\lambda_F = \lambda_\rho \lambda_l^2 \lambda_u^2 = \lambda_\rho \lambda_l^2 (\lambda_l^{\frac{1}{2}})^2 = \lambda_\rho \lambda_l^3 \tag{1-7-23}$$

当模型和原型的流体相同时，$\lambda_\rho = 1$，则上式为 $\lambda_F = \lambda_l^3$。

还可以导出其他量的比尺。对于重力起主导作用的水流模型其运动量流速比尺满足式（1－7－20），流量比尺满足式（1－7－21），这是不难做到的。

二、黏滞力起主导作用的水流模型

对于黏滞力起主导作用的流动，应保证模型和原型的雷诺数相等，即按雷诺相似准则设计模型。由式（1－7－22）：

$$\frac{\lambda_u \lambda_l}{\lambda_\nu} = 1$$

若采用与原型相同的介质 $\lambda_\nu = 1$，可得流速比尺为：

$$\lambda_u = \lambda_l^{-1} \tag{1-7-24}$$

流量比尺、时间比尺和力的比尺分别为：

$$\lambda_Q = \lambda_l \tag{1-7-25}$$

$$\lambda_t = \lambda_l^2 \tag{1-7-26}$$

$$\lambda_F = 1 \tag{1-7-27}$$

对于黏滞力起主导作用的水流模型，采用与原型相同的介质，其运动量流速比尺满足式（1－7－24），流量比尺满足式（1－7－25），这也是不难做到的。

三、同时考虑重力和黏滞力的水流模型

对于重力和黏滞力同时起主要作用的水流，若保证模型和原型中的重力和黏滞力同时相似，应同时满足弗劳德准则和雷诺准则。

由弗劳德准则，重力作用要求流速比尺 $\lambda_u = \lambda_l^{\frac{1}{2}}$；由雷诺准则，黏滞力作用要求流速比尺 $\lambda_u = \lambda_l^{-1}$。

重力和黏滞力同时作用，上述流速比尺必须同时成立，则有：

$$\lambda_l^{\frac{1}{2}} = \lambda_\nu \lambda_l^{-1}$$

或写为：

$$\lambda_\nu = \lambda_l^{1.5} \tag{1-7-28}$$

上式表明，要实现重力与黏滞力同时相似，模型与原型必须为不同介质，则要求模型中液体的运动黏度 ν_m 要缩小到原型运动黏滞系数的 ν_p 的 $\lambda_l^{1.5}$ 倍，这显然是难以实现或很不经济的。

若模型与原型为同一介质，即 $\lambda_\nu = 1$，只有当 $\lambda_l = 1$ 时式（1-7-28）才能满足，即为原型，则失去模型实验的意义。

因此，一般说来，同时满足上述两个相似准则的模型，是不易做到的。但在水流处于湍流阻力平方区时，情况则有所不同。我们知道，雷诺数 Re 是判别流动型态的标准，Re 不同，流动型态就不同。不同的流动型态，黏滞力对流动阻力的影响是不同的。当 Re 超过某一数值以后进入湍流阻力平方区，阻力系数就不再随 Re 而变化。也就是在一定的 Re 范围内，阻力的大小与 Re 无关，这个流动范围称为自模区。在这种情况下，只要维持模型水流处于阻力平方区，就只需保持重力相似（Fr 数相等），即可获得相似的水流。

下面举例说明模型设计及应注意的问题。

【例 1-7-2】 桥的过流能力水工模型实验。

（1）工程资料：有一双孔桥，锥体护坡，设计桥墩长 $l_p = 24$ m，桥墩宽 $b_p = 2.3$ m，河道中水深 $h_p = 6.5$ m，平均流速 $v_p = 1.3$ m/s，两桥墩间距 $B_p = 35$ m，桥墩面及桥下混凝土面粗糙系数 $n = 0.014$，桥下单孔设计过流量 300 m^3/s。

（2）实验内容：整体模型实验，验证过流能力和桥前壅水深度。

（3）实验室条件：场地足够大，供水能力为 $Q = 0.90$ m^3/s。

解：（1）模型相似准则及几何比尺的确定：

桥下过流时水流有自由表面，是重力流，采用重力相似准则设计模型。因为场地足够大，初拟几何比尺 $\lambda_l = 15$，计算其他量比尺。

流速比尺　　$\lambda_\nu = \lambda_l^{\frac{1}{2}} = 15^{\frac{1}{2}} = 3.873$

流量比尺　　$\lambda_Q = \lambda_l^{2.5} = 15^{2.5} = 871.42$

粗糙系数比尺　　$\lambda_n = \lambda_l^{\frac{1}{6}} = 0.01^{\frac{1}{6}} = 0.491$

校核实验室供水能力：

$$Q_m = \frac{Q_p}{\lambda_Q} = \frac{300 \times 2}{871.42}\ m^3/s = 0.688\ 5\ m^3/s < Q = 0.90\ m^3/s$$

满足供水能力。

校核粗糙系数的相似性：模型粗糙系数

$$n_m = \frac{n_p}{\lambda_n} = \frac{0.014}{1.57} = 0.008\ 9$$

有机玻璃 $n = 0.008$，用有机玻璃可以做到粗糙系数 n 基本相似。

（2）验算水流流态：

模型中流速：　　$v_m = \frac{v_p}{\lambda_\nu} = \frac{1.3}{3.873}\ m/s = 0.336\ m/s$

原型水力半径：　　$R_p = \frac{A_p}{x_p} = \frac{B_p \cdot h_p}{B_p + 2h_p} = \frac{35 \times 6.5}{35 + 2 \times 6.5}\ m = 4.74\ m$

模型水力半径：　　$R_m = \frac{R_p}{\lambda_l} = \frac{4.74}{15}\ m = 0.316\ m$

水温取 20 ℃，$\nu = 0.010\ 105\ \text{cm}^2/\text{s}$，则模型中雷诺数：

$$Re_m = \frac{v_m R_m}{\nu} = \frac{0.336 \times 10^2 \times 0.316 \times 10^2}{0.010\ 105} = 1.05 \times 10^5 > 1 \times 10^4$$

在阻力平方区的范围，所以确定几何比尺 $\lambda_l = 15$。

(3) 模型设计与加工：

由几何比尺计算其他几何量：

模型桥墩长：$$l_m = \frac{l_p}{\lambda_l} = \frac{24}{15}\ \text{m} = 1.60\ \text{m}$$

模型桥墩宽：$$b_m = \frac{b_p}{\lambda_l} = \frac{2.3}{15}\ \text{m} = 0.153\ \text{m}$$

模型桥墩间距：$$B_m = \frac{B_p}{\lambda_l} = \frac{35}{15}\ \text{m} = 2.33\ \text{m}$$

按上述尺寸，材料用有机玻璃，按图加工。

(4) 实验与实验报告：

实测模型流量 Q_m 及桥前壅水深度 h_m，分析实验结果并换算到原型，写出实验报告。

第五节 实验数据处理方法

做模型实验的目的是验证工程设计的可靠性，以及通过模型实验对原设计方案提出改进或优化建议，因此需要把模型实验的数据引申到原型。

一、模型与原型数据换算关系

要把模型实验的数据引申到原型，模型与原型数据间存在一定的换算关系，列表如下。

表 1-7-1 各相似准则的模型比尺关系（$\lambda_\rho = 1$，$\lambda_\nu = 1$）

名称	比尺			
	弗劳德准则（重力）	雷诺准则（黏滞力）	韦伯准则（表面张力）	柯西准则（弹性力）
线性比尺 λ_l	λ_l	λ_l	λ_l	λ_l
面积比尺 λ_A	λ_l^2	λ_l^2	λ_l^2	λ_l^2
体积比尺 λ_V	λ_l^3	λ_l^3	λ_l^3	λ_l^3
流速比尺 λ_v	$\lambda_l^{\frac{1}{2}}$	λ_l^{-1}	$\lambda_\sigma^{\frac{1}{2}} \lambda_l^{-\frac{1}{2}}$	$\lambda_K^{\frac{1}{2}}$
流量比尺 λ_Q	$\lambda_l^{\frac{5}{2}}$	λ_l	$\lambda_\sigma^{\frac{1}{2}} \lambda_l^{\frac{2}{3}}$	$\lambda_K^{\frac{1}{2}} \lambda_l^2$
时间比尺 λ_t	$\lambda_l^{\frac{1}{2}}$	λ_l^2	$\lambda_\sigma^{\frac{1}{2}} \lambda_l^{\frac{2}{3}}$	$\lambda_K^{-\frac{1}{2}} \lambda_l$
力的比尺 λ_F	λ_l^3	$\lambda_l^0 = 1$	$\lambda_\sigma \lambda_l$	$\lambda_K \lambda_l^2$
压强比尺 λ_p	λ_l	λ_l^{-2}	$\lambda_\sigma \lambda_l^{-1}$	λ_K
功的比尺 λ_W	λ_l^4	λ_l	$\lambda_\sigma \lambda_l^2$	$\lambda_K \lambda_l^3$
功率比尺 λ_N	$\lambda_l^{3.5}$	λ_l^{-1}	$\lambda_\sigma^{\frac{3}{2}} \lambda_l^{\frac{1}{2}}$	$\lambda_K^{\frac{3}{2}} \lambda_l^2$

二、实验数据处理

数据处理是把模型实验数据按各物理量的比尺换算到原型上，下面通过例题介绍数据处理方法。

【例 1-7-3】 有一 3 孔公路桥，锥体护坡，桥墩面及桥下混凝土面，在重力相似准则下进行整体模型实验，长度比尺 $\lambda_l=12$，测得实验数据为：桥前壅水深度 $H_m=0.32$ m，流量 $Q_m=0.132$ m^3/s；若设计流量为 $Q=60$ m^3/s，桥前允许壅水深度为 $H'=3.90$ m，该桥设计是否合理？

解：（1）实验数据处理：

通过流量：$Q_p=3Q_m\lambda_l^{2.5}=0.042\times12^{2.5}\times3$ $m^3/s=62.85$ m^3/s

桥前壅水深度：$H_p=H_m\lambda_l=0.32\times12$ m $=3.84$ m。

（2）结论：

通过流量：$Q_p=62.85$ $m^3/s>Q=60$ m^3/s，满足设计流量要求。

桥前壅水深度：$H_p=3.84$ m $<H'=3.90$ m，满足设计流量要求。

故设计合理。

通常模型实验要按照行业制定的模型实验规程进行，几何比尺足够大，雷诺数足够大，模型实验的数据可以直接引申到原型，在特殊情况下还要考虑缩尺影响、流态的影响等。

思　考　题

1-7-1　作为一个正确反映客观规律的物理方程式，在量纲上有何特征？

1-7-2　在流体力学中基本量纲是哪些？

1-7-3　什么是 π 定理？π 定理有何用途？

1-7-4　在应用 π 定理时如何选择基本物理量？

1-7-5　解释流动相似的概念，几何相似、运动相似、动力相似在两流动相似中是什么关系？

1-7-6　在什么情况下采用佛劳德准则设计模型？写出其流速比尺、流量比尺、时间比尺与长度比尺的关系。

1-7-7　在什么情况下采用雷诺准则设计模型？其流速比尺、流量比尺、时间比尺与长度比尺的关系如何？

1-7-8　原型和模型中采用同一种液体，能否同时满足重力相似和黏滞力相似？

习　　题

1-7-1　以 LMT 为基本量纲，推出动力黏度 μ 的量纲：（　　）

A L/s^2　　B L^2/T　　C M/LT　　D M/Ls

1-7-2　试分析伯努利方程 $z_1+\dfrac{p_1}{\rho g}+\dfrac{\alpha_1 v_1^2}{2g}=z_2+\dfrac{p_2}{\rho g}+\dfrac{\alpha_2 v_2^2}{2g}+h_w$，（　　）量纲和谐原理。

A 符合　　B 不符合　　C 公式错误　　D 为经验公式

1-7-3　试分析欧拉平衡微分方程 $f_x-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x}=0$（　　）量纲和谐原理？

A 符合　　B 不符合　　C 公式错误　　D 为经验公式

1-7-4　已知自由湍流射流的断面流量 Q 与距喷嘴（风口）的距离 s，风口半径 R_0 及初始流量 Q_0 有关，断面流量可表示为 $Q=f(Q_0, R_0, s)$，应用 π 定理，选择 R_0 和 Q_0 为基本量，推导断面流量表达式：（　　）

A $Q=f\left(\frac{s}{R_0}\right)Q_0$　　B $Q=f\left(\frac{R_0}{s}\right)Q_0$　　C $Q=KR_0sQ_0$　　D $Q=kR_0sQ_0^{0.5}$

1-7-5 在做模型实验时，应用同一介质，遵循雷诺相似准则，其流速比尺是：（　　）

A $\lambda_v=\sqrt{\lambda_l}$　　B $\lambda_v=\lambda_l$　　C $\lambda_v=\frac{1}{\lambda_l}$　　D $\lambda_v=\lambda_l^2$

1-7-6 在做模型实验时，应用同一介质，遵循雷诺相似准则，其流量比尺是：（　　）

A $\lambda_Q=\lambda_l^{0.5}$　　B $\lambda_Q=\lambda_l$　　C $\lambda_Q=\lambda_l^2$　　D $\lambda_Q=\lambda_l^{2.5}$

1-7-7 在做模型实验时，应用同一介质，遵循弗劳德相似准则，其流量比尺是：（　　）

A $\lambda_Q=\lambda_l^{0.5}$　　B $\lambda_Q=\lambda_l$　　C $\lambda_Q=\lambda_l^2$　　D $\lambda_Q=\lambda_l^{2.5}$

1-7-8 在做模型实验时，应用同一介质，遵循弗劳德相似准则，其流速比尺是：（　　）

A $\lambda_v=\sqrt{\lambda_l}$　　B $\lambda_v=\lambda_l$　　C $\lambda_v=\frac{1}{\lambda_l}$　　D $\lambda_v=\lambda_l^2$

1-7-9 弧形闸门闸下出流，重力为流动的主要作用力。今采用长度比尺为1：20的模型来研究，如模型中测得的收缩断面流量 $Q_m=45$ L/s，则原型中的相应流量为：（　　）

A $Q_p=0.90\ m^3/s$　　B $Q_p=18.0\ m^3/s$

C $Q_p=80.5\ m^3/s$　　D $Q_p=360.0\ m^3/s$

1-7-10 条件与上题相同，如模型中测得的收缩断面平均流速 $v_m=2.3$ m/s，则原型中的相应断面平均流速为：（　　）

A $v_p=46.0$ m/s　　B $v_p=23.0$ m/s

C $v_p=10.29$ m/s　　D $v_p=20.58$ m/s

1-7-11 进行船舶行进中的阻力模型实验，遵循雷诺相似准则，同一介质，采用长度比尺 $\lambda_l=10$，模型中船舶行进速度 $v_m=15$ m/s，原型中船舶行进速度为：（　　）

A 1.5 m/s　　B 15 m/s　　C 0.5 m/s　　D 30 m/s

1-7-12 有一座双孔公路桥，锥体护坡，在重力相似准则下进行整体正态模型实验，采用长度比尺 $\lambda_l=15$，测得模型流量 $Q_m=0.052\ m^3/s$；若设计流量为 $Q=45\ m^3/s$，该桥的设计：（　　）

A $Q_p=45.32\ m^3/s<Q=45.0\ m^3/s$ 需要修改设计

B $Q_p=46.82\ m^3/s>Q=45.0\ m^3/s$，不需要修改设计

C $Q_p=44.20\ m^3/s<Q=45.0\ m^3/s$，需要修改设计

D $Q_p=46.35\ m^3/s>Q=45.0\ m^3/s$，不需要修改设计

第八章　泵与风机

泵与风机是将机械能或其他能源转换为输送流体的压能和动能的流体机械。泵是输送液体的流体机械；风机是输送气体的流体机械。

第一节　泵与风机的工作原理及性能参数

一、泵与风机的工作原理

离心式泵与风机由叶轮、压出室、吸入室、扩压管等部件组成。当叶轮随轴高速旋转时，叶轮上的叶片将推动流体旋转，使流体获得离心力，流体从叶片之间的出口处甩出，进入压出室。被甩出的流体压入机壳，使流体压能和动能增加，在螺线形机壳的导向作用下，流体被导向出口经扩压管排出。在离心力作用下，叶轮中心部分压强降低，泵或风机外部的流体通过吸入室进入叶轮中心部分。当叶轮连续旋转时，流体连续地排出、吸入，连续不断地输送流体，使泵或风机连续工作（图 1－8－1）。

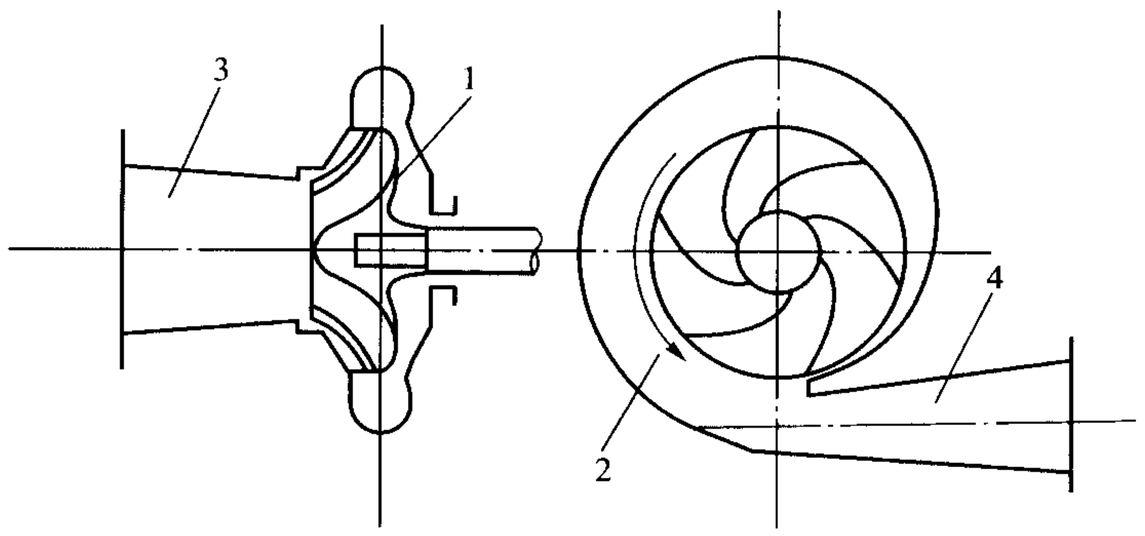


图 1－8－1　离心式泵与风机示意图

1. 叶轮；2. 压出室；3. 吸入室；4. 扩压管

二、泵与风机的主要性能参数

（一）离心泵的主要性能参数

（1）流量：泵的流量是泵在单位时间内所输送的液体量。体积流量用 Q 表示，单位是 m^3/s 或 m^3/h；质量流量用 G 表示，单位是 kg/s 或 t/h。

（2）扬程：泵的扬程是单位重量液体从进口到出口的能量增值，也就是单位重量液体通过泵所获得的有效能量。用 H 表示，单位是 m。

泵的扬程的数学表达式为：

$$H = H_1 - H_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + z_2 - z_1 \qquad (1-8-1)$$

式中，下标 1 表示进口的物理量，下标 2 表示出口的物理量。

对高压水泵扬程可写为：

$$H=\frac{p_2-p_1}{\rho g} \tag{1-8-2}$$

（3）轴功率：轴功率通常是指泵的输入功率，也就是原动力传到泵轴上的功率。用 N 表示，单位是 W 或 kW。

（4）有效功率（输出功率）：有效功率是指单位重量液体在单位时间内从泵中获得的能量。也称为输出功率，用 N_e 表示，单位是 W 或 kW。

$$N_e=\rho g Q H \tag{1-8-3}$$

（5）效率：有效功率与轴功率之比称为泵的效率，用 η 表示，通常以小数或百分数计：

$$\eta=\frac{N_e}{N} \tag{1-8-4}$$

（6）转速：泵的转速是泵轴每分钟的转数，用 n 表示，单位是 r/min。它是泵的一个重要因素，当转速变化时，泵的流量、扬程、功率等都将发生变化。

（二）风机的主要性能参数

（1）流量：风机的流量是在单位时间内通过风机进口的气体体积。用 Q 表示，单位是 m^3/s 或 m^3/h。

（2）全压：风机全压是指单位体积气体从风机进口截面经叶轮到风机出口截面所获得的机械能，用 p 表示，单位是 Pa。忽略位能变化的风机全压公式为：

$$p=\frac{\rho(v_2^2-v_1^2)}{2}+p_2-p_1 \tag{1-8-5}$$

式中：下标 1 表示进口的物理量，下标 2 表示出口的物理量。

（3）静压：风机的全压减去风机出口处的动压 p_{d2} 称为风机的静压，用 p_{st} 表示，公式为

$$p_{st}=p-p_{d2}=p_2-p_1-\frac{1}{2}\rho v_1^2 \tag{1-8-6}$$

（4）功率：风机的功率通常是指输入功率，也称为轴功率，用 N 表示，单位是 W 或 kW。

（5）效率：风机效率一般指全压效率，等于全压有效功率和轴功率之比，用 η 表示，通常以百分数计，公式为：

$$\eta=\frac{Qp}{N}\times 100\% \tag{1-8-7}$$

（6）转速：风机的转速是风机轴每分钟的转数，用 n 表示，单位是 r/min。

【例 1-8-1】 有一普通用途的离心式风机，其全压 $p=3\ 000$ Pa，流量 $Q=47\ 000\ m^3/h$，全压效率 $\eta=0.82$。如果风机轴和原动力轴采用弹性联轴器连接，试求风机的全压有效功率、轴功率。

解： 全压有效功率为 $N_e=Qp=\dfrac{47\ 000\times 3\ 000}{1\ 000\times 3\ 600}\ \text{kW}=39.17\ \text{kW}$

轴功率 $N=\dfrac{N_e}{\eta}=\dfrac{39.17}{0.82}\text{kW}=47.76\ \text{kW}$

第二节 泵与风机的基本方程

一、理想叶轮假定

由于流体在叶轮内的流动相当复杂，为了分析其流动规律，欧拉在其透平理论中提出了理想叶轮假定：

① 流体通过叶轮的流动是恒定的，且可看成是无数层垂直于转动轴线的流面的总和，在层与层的流

面之间的流动互不干扰。

(2) 叶轮具有无限多的叶片，叶片厚度很薄，流体在叶片间流道作相对流动时，其流线与叶片形状一致，流体进出泵或风机时，不会出现冲击。

(3) 流经叶轮的流体是理想不可压缩流体，在流动过程中，不计能量损失。

当叶轮旋转时，在叶片进口“1”处，流体一方面随叶轮旋转作圆周牵连运动，其圆周速度为 u_1；另一方面又沿叶片方向作相对流动，其相对速度为 w_1。因此，流体在进口处的绝对速度 v_1 应为 u_1 与 w_1 两者之矢量和。同理，在叶片出口“2”处，流体的圆周速度 u_2 与相对速度 w_2 之矢量和为绝对速度 v_2（图 1-8-2）。

为了便于分析，常常将绝对速度 v 分解为与流量有关的径向分速度 v_r 和与压头有关的切向分速度 v_u。v_r 的方向与叶轮的半径方向相同，v_u 与叶轮的圆周运动方向相同。

将上述流体质点各速度绘在同一张速度图上，就可以得到流体质点的速度三角形图（图 1-8-3）。

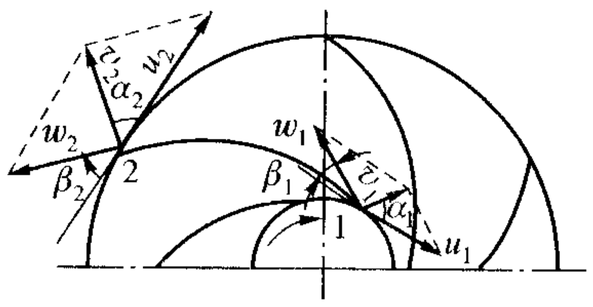


图 1-8-2　叶片进出口处流体速度图

1. 进口；2. 出口

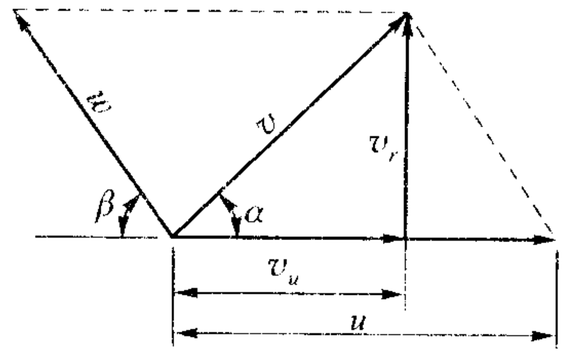


图 1-8-3　叶轮中流体运动速度三角形

速度 v 和 u 之间的夹角 α 称为叶片的工作角。α_1 是叶片进口工作角，α_2 是叶片出口工作角。显然，工作角与要计算出的径向分速度及切向分速度有关。

速度三角形除清楚地表达了流体在叶轮流道中的流动情况外，也是研究泵或风机的一个重要手段。

当叶轮流道几何形状及尺寸确定后，可求得叶轮内任何半径 r 上某点的速度三角形。

流体的圆周速度为 $u=\omega r=\dfrac{\pi dn}{60}$

式中 n 的单位为 r/min。由于叶轮流量 Q_T 等于径向分速度 v_r 乘以垂直于 v_r 的过流断面面积 A，即 $Q_T=v_rA$，可以求出径向分速度 v_r。其中 A 是一个环周面积，可近似认为它是以半径 r 处的叶轮宽度 b 作母线，绕轴心线旋转一周所形成的曲面，过流断面面积为：

$$A=2\pi rb\varepsilon \tag{1-8-8}$$

式中：ε——叶片排挤系数，反映叶片厚度对流道过流面积的遮挡程度。

二、欧拉方程

根据欧拉理想叶轮假定，流体进入理想叶轮之后，叶轮从外界向流体所提供的能量，会全部被流体获得。

(一) 流体的理论扬程

由动量矩定理可以导出作用于流体的外力矩 M，与流量为 Q 的流体的动量矩变化率间的关系。用下标 T 表示理想流体，下标 ∞ 表示叶轮叶片无限多，得到 $M=\rho Q_{T\infty}(r_2v_{u2T\infty}-r_1v_{u1T\infty})$。因为外加功率 $N=M\omega=\rho gQ_{T\infty}H_{T\infty}$，可以得到理想条件下单位重量流体的能量增量与流体在叶轮中运动的关系，即欧拉方程：

$$H_{T\infty}=\frac{1}{g}(u_{2T\infty}v_{u2T\infty}-u_{1T\infty}v_{u1T\infty}) \tag{1-8-9}$$

欧拉方程也是泵与风机的基本方程，有以下特点：

① 流体的理论扬程 $H_{T\infty}$ 与流体在叶片进出口处的速度有关，而与流动过程无关。

② 流体的理论扬程 $H_{T\infty}$ 与被输送流体的种类无关。

（二）离心泵的基本方程

在有限多叶片的流道中，除有流量为 Q_T 的均匀相对流动之外，还有一个因流体惯性而产生的轴向相对涡流运动，使叶片无限多的扬程 $H_{T\infty}$ 降低为叶片有限多的扬程 H_T，用小于 1 的涡流修正系数 k 来修正理论扬程及流体运动项，得：

$$H_T = kH_{T\infty} = \frac{k}{g}\left(u_{2T\infty}v_{u2T\infty} - u_{1T\infty}v_{u1T\infty}\right) \tag{1-8-10}$$

k 一般在 0.78 ~ 0.85 之间，去掉下标 ∞ 及流体运动项下标 T 得离心泵的基本方程：

$$H_T = \frac{1}{g}\left(u_2v_{u2} - u_1v_{u1}\right) \tag{1-8-11}$$

风机的能量方程为：

$$p_T = \rho\left(u_2v_{u2} - u_1v_{u1}\right) \tag{1-8-12}$$

【例 1-8-2】 已知某离心式风机的转速为 $n = 1\ 500$ r/min，叶轮外径 $D_2 = 600$ mm，内径 $D_1 = 480$ mm，叶片进口安装角 $\beta_1 = 60°$，出口安装角 $\beta_2 = 120°$，叶片出口径向分速度 $v_{2r\infty} = 19$ m/s，叶片进口相对速度 $w_{1\infty} = 25$ m/s，空气密度 $\rho = 1.2$ kg/m^3，求风机的理想全压 $p_{T\infty}$。

解： 风机叶片进口和出口的圆周速度分别为：

$$u_1 = \frac{\pi D_1 n}{60} = \frac{3.14 \times 0.480 \times 1\ 500}{60}\ \text{m/s} = 37.68\ \text{m/s}$$

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{3.14 \times 0.6 \times 1\ 500}{60}\ \text{m/s} = 47.1\ \text{m/s}$$

出口绝对速度的周向分速度为：

$$v_{2u\infty} = u_2 - v_{2r\infty}\cot\beta_2 = 47.1\ \text{m/s} - 19\ \text{m/s} \times \cot 120° = 58.07\ \text{m/s}$$

$$v_{1u\infty} = u_1 - w_{1\infty}\cos\beta_1 = 37.68\ \text{m/s} - 25\ \text{m/s} \times \cos 60° = 25.18\ \text{m/s}$$

风机的全压为

$$p_{T\infty} = \rho\left(u_2v_{2u\infty} - u_1v_{1u\infty}\right) = 1.2 \times (47.1 \times 58.07 - 37.68 \times 25.18)\,\text{Pa} = 2\ 143.58\ \text{Pa}$$

【例 1-8-3】 已知某离心式水泵的转速为 $n = 1\ 500$ r/min，叶轮外径 $D_2 = 360$ mm，内径 $D_1 = 138$ mm，叶片进口工作角 $\alpha_1 = 90°$，出口安装角 $\beta_2 = 30°$，叶片数 $Z = 7$，叶轮的理论流量 $Q_T = 0.08$ m^3/s，叶轮出口的有效过流面积 $F_2 = 0.02$ m^2，涡流修正系数 $k = 0.75$，求水泵的理想扬程 $H_{T\infty}$ 和理论扬程 H_T。

解： 出口径向分速度为：

$$v_{2r} = \frac{Q_T}{F_2} = \frac{0.08}{0.02}\ \text{m/s} = 4\ \text{m/s}$$

叶轮圆周速度为：

$$u_2 = \frac{\pi D_2 n}{60} = \frac{3.14 \times 0.36 \times 1\ 500}{60}\ \text{m/s} = 28.26\ \text{m/s}$$

出口切向分速度为：

$$v_{2u} = u_2 - v_{2r}\cot\beta_2 = 28.26\ \text{m/s} - 4\ \text{m/s} \times \cot 30° = 21.33\ \text{m/s}$$

进口切向分速度为：

$$v_{1u} = v_1\cos\alpha_1 = 0$$

理想扬程为：

$$H_{T\infty} = \frac{1}{g}\left(u_2v_{2u} - u_1v_{1u}\right)_{T\infty} = \frac{28.26 \times 21.33}{9.81}\ \text{m} = 61.45\ \text{m}$$

理论扬程为：

$$H_T = kH_{T\infty} = 0.75 \times 61.45 \text{ m} = 46.08 \text{ m}$$

第三节　泵与风机的性能曲线

泵与风机的性能主要指在一定转速下，扬程（全压）、轴功率、效率与流量之间的关系，反映这些关系的图线，称为泵与风机的性能曲线。主要包括：扬程（全压）与流量的关系曲线、轴功率与流量的关系曲线、效率与流量的关系曲线、泵与风机的实际性能曲线。

一、泵与风机的理论性能曲线

（一）扬程与流量的关系曲线——$H_T - Q_T$

当进口切向分速度 $v_{u1} = v_1 \cos \alpha_1 = 0$ 时，欧拉方程简化为 $H_T = \frac{1}{g} u_2 v_{u2}$，代入由速度三角形确定的关系 $v_{u2} = u_2 - v_{r2} \cot \beta_2$，得：

$$H_T = \frac{1}{g}\left(u_2^2 - \frac{u_2 Q_T}{\varepsilon \pi D_2 b_2} \cot \beta_2\right)$$

令 $A = \frac{u_2^2}{g}$，$B = \frac{u_2}{g} \frac{1}{\varepsilon \pi D_2 b_2}$，当泵与风机确定后 A、B 均为常数。$H_T - Q_T$ 性能曲线为 $H_T = A - BQ_T \cot \beta_2$，当取向前、径向和向后三种叶型时 β_2 取值不同，即：叶轮为前向叶型时 $\beta_2 > 90°$，$\cot \beta_2 < 0$；叶轮为径向叶型时 $\beta_2 = 90°$，$\cot \beta_2 = 0$；叶轮为后向叶型时 $\beta_2 < 90°$，$\cot \beta_2 > 0$。

$H_T - Q_T$ 具有不同形状的曲线（图 1－8－4）。

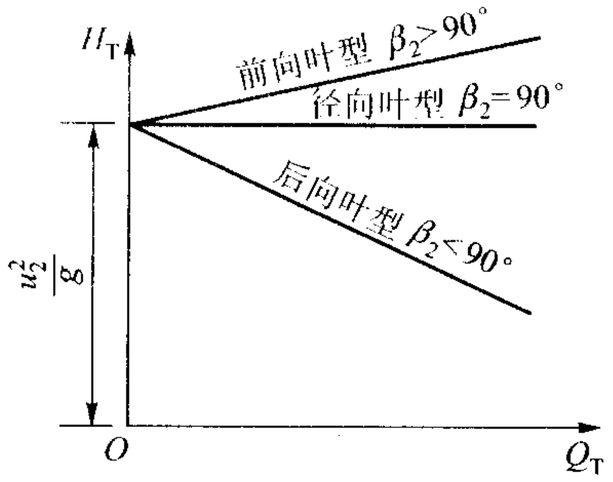


图 1－8－4　三种叶型的 $H_T - Q_T$ 曲线

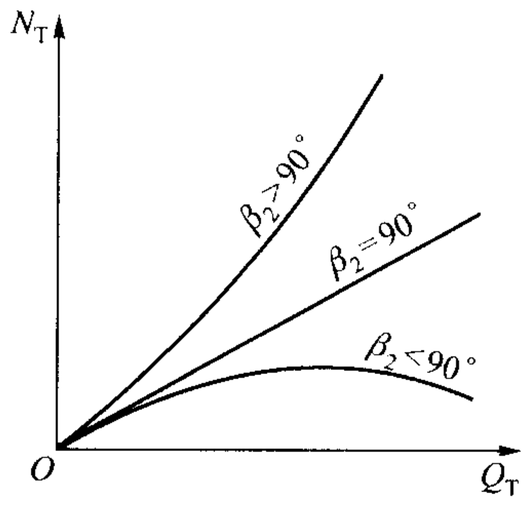


图 1－8－5　三种叶型的 $N_T - Q_T$ 曲线

（二）轴功率与流量性能曲线——$N_T - Q_T$

在无损失流动条件下，理论上的有效功率等于轴功率，即：$N_e = N_T = \rho g Q_T H_T = \rho g Q_T (A - BQ_T \cot \beta_2)$，取三种叶型时，$N_T - Q_T$ 具有不同形状的曲线，三条曲线同交于原点（图 1－8－5）。前向叶型的泵与风机所需要的轴功率随流量的增加而增长很快，原动力超载的可能性比径向叶型的泵与风机大得多，而后向叶型的泵与风机一般不会发生原动力超载现象，这是后向叶型被离心式泵与风机广泛采用的原因之一。

（三）效率与流量的性能曲线——$\eta_T - Q_T$

泵与风机的理论 $\eta_T - Q_T$ 性能曲线为常数 1，有效功率等于轴功率。

二、泵与风机的实际性能曲线

泵或风机在实际运行中会产生各种能量损失，能量损失按其产生的原因分为三类：机械损失、容积损

失和水力损失。

机械损失是指泵或风机的轴承和轴封的摩擦损失及叶轮盖板旋转时与机壳内流体之间发生的圆盘摩擦损失。

容积损失是因为在泵或风机的运动部件和固定部件之间存在着一定的间隙，叶轮工作时，不可避免地有部分流体从高压区泄漏而回流到低压区，使部分流体能量在克服间隙阻力上被消耗。

水力损失是流体流经泵或风机时所产生的在叶轮和蜗壳体上的水力损失。包括蜗壳体表面粗糙产生的摩擦损失和入口、扩压管、转弯处的冲击涡流损失。

利用泵与风机内部的各种能量损失，对理论性能曲线逐步进行修正，可得出泵与风机的实际性能曲线。

现以后向叶型的理论性能曲线为例。根据理论流量与扬程的关系可以绘出一条 $H_T - Q_T$ 曲线，它是一条下倾的直线，如图 1-8-6 中的Ⅱ。如按无限多叶片的欧拉方程，可以绘出一条 $H_{T\infty} - Q_{T\infty}$ 关系曲线Ⅰ，曲线Ⅰ位于曲线Ⅱ上方。

当考虑机内水力损失时，消耗部分能量用来克服流动阻力，从曲线Ⅱ中扣除水力损失后得到曲线Ⅲ，直线阴影部分表示撞击损失，斜线阴影部分表示沿程和局部阻力损失。

容积损失以泄漏流量 q 的大小来估算，从曲线Ⅲ中扣除相应的 q 后得到曲线Ⅳ，曲线Ⅳ就是泵与风机的实际性能曲线 $H-Q$（图 1-8-6）。

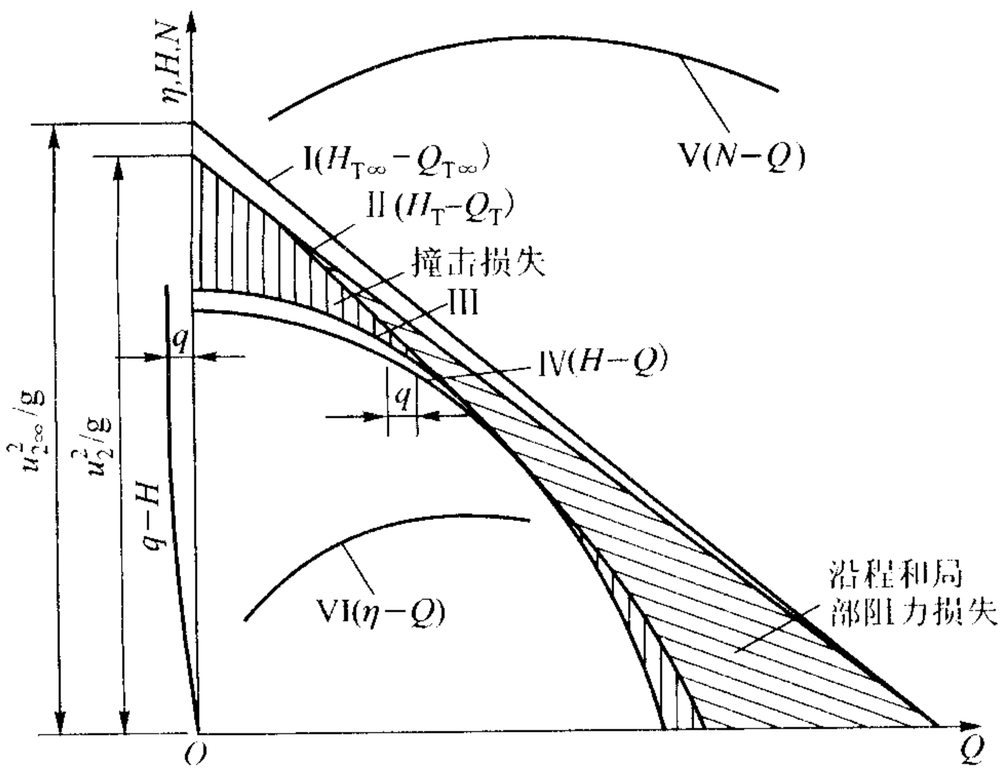


图 1-8-6 泵与风机的实际性能曲线

第四节 管路系统的特性曲线

泵或风机的管路系统是指泵或风机整个装置中除泵或风机以外的所有附件、吸入管路、压出管路、吸入容器和压出容器的总和。

管路系统的特性曲线是指流体流经管路系统时，管路系统的水头损失与通过管路中流量的关系曲线。

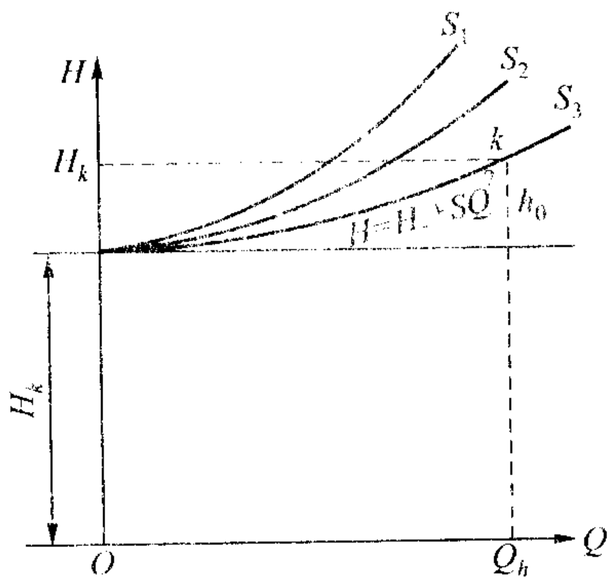


图 1-8-7 管路系统的特性曲线

流体在管路中流动时所消耗的能量，用于补偿压强差、高程差和阻力损失，管路系统水头损失为：

$$H = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} + \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + h_{1-2}$$

一般取 $\frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} \approx 0$，令 $H_{st} = z_2 - z_1 + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} = H_z + \frac{p_2 - p_1}{\rho g}$ 称为静扬程，$h_{1-2} = SQ^2$ 为阻力损失与流量的两数关系，S 为管路阻抗，单位为 s^2/m^5。

管路系统的特性方程为，扬程 H 为静扬程与阻力损失之和：

$$H = H_{st} + SQ^2 \qquad (1-8-13)$$

管路系统的特性曲线见图 1-8-7。

第五节　管路系统中泵与风机的工作点

管路系统的特性是由实际工程需要所决定的，与泵或风机本身的性能无关。

理论上讲经泵或风机的性能曲线与管路系统的特性曲线求出的扬程和流量的解，就是泵或风机与管路系统的工作点。在实际工程中往往要考虑工作点的效率问题。

管路系统的特性曲线 $Q-h_l$ 是一条二次曲线，泵或风机的性能 $H-Q$ 是一条实测曲线，可以将两条曲线绘在同一张坐标图上，这两条曲线的交点记为 M，将效率曲线 $\eta-Q$ 绘在同一张坐标图上，如果 M 点在高效率区范围内，则泵或风机的性能曲线与管路系统特性曲线的交点 M 就是泵或风机的工作点（图 1-8-8）。

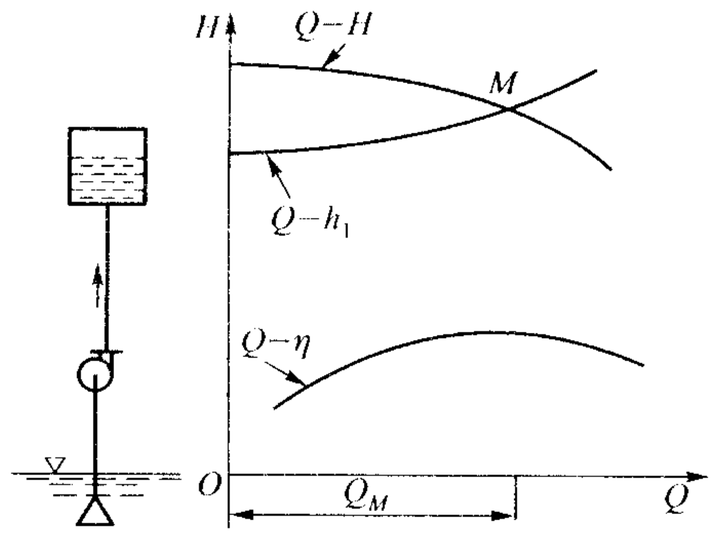


图 1-8-8　泵的工作点

第六节　离心式泵与风机的工况调节

在实际工程中，随着外界条件或要求的变化，泵与风机要经常进行流量调节。泵或风机在管网系统中工作，工作点是泵或风机的性能曲线与管路系统性能曲线的交点，要改变这个工作点，就应从改变泵或风机的性能曲线或改变管路系统性能曲线两方面考虑。

一、改变管路系统性能曲线的调节方法

在泵或风机转速不变的情况下，调节管路阀门开度，改变管路性能曲线。

（一）压出管上阀门节流

通过改变泵或风机压出管上阀门开度，从而改变管路的阻抗系数 S，在不改变泵或风机性能曲线的条件下，使管路性能曲线改变，工作点发生变化，达到调节流量的目的。此方法十分简单，应用较广，用增加阻力的方法减小流量，浪费了多余的能量。

（二）吸入管上阀门节流

调整吸入管上的阀门开度，不仅改变了管路性能曲线，同时也改变了泵或风机性能曲线。对风机来讲，当吸入阀关小时，风机入口气体的压强也降低，相应的气体密度就变小，其风机性能曲线也发生相应的变化，节流后的工作点向流量减小方向移动，节流的额外压头损失也相应减小，较压出端节流有利。对水泵只能采用压出端节流方法，不能采用吸入端节流，因为调节阀装在吸水管上，会使泵吸水口真空度增大，易引起气蚀。

二、改变泵或风机的性能曲线

不改变管路和阀门的设置，改变泵或风机的性能曲线。

（一）改变泵或风机的转速

由相似律可知，当改变泵或风机转速时，效率基本不变，但流量、压头和功率变化符合下式：

$$\frac{Q}{Q_m}=\sqrt{\frac{H}{H_m}}=\sqrt[3]{\frac{N}{N_m}}=\frac{n}{n_m} \tag{1-8-14}$$

式中带下脚标 m 的为额定转速下泵的性能参数项，不带下脚标的为实际转速下的性能参数，由式（1-8-14）可将泵或风机在某一定转速下的性能曲线换算成另一转速下的新的性能曲线。当采用变速法时，应验算泵或风机是否超过最高允许转速和电机是否过载。改变转速可以采用以下几种方法：

① 采用可变磁极对（数）的双速电机。

② 变频调速。

③ 调换带轮变速、齿轮箱变速或水力耦合器变速。

（二）改变风机进口的导流叶片角度

风机进口导流器又称为风机启动多叶调节阀，有轴向、径向两种。当改变导流叶片角度时，导流叶片使气流预旋改变了进入叶轮的气流方向，能使风机本身的性能曲线改变。

由于导流器的结构简单，使用方便，其调节效率虽比改变转速差，但比单纯改变管路性能曲线好，是风机常用的调节法。

（三）切削叶轮直径改变泵的性能曲线

切削叶轮直径是离心泵的一种独特调节方法。叶轮直径切小后，叶轮出口处参数的变化使泵性能曲线下降，达到调节流量的目的。

三、改变并联泵台数调节性能曲线

在大型排灌站或热水系统中，可用改变并联泵运行台数进行流量调节，这是一种较简单的调节方法。为避免减少泵运行台数时可能会因流量过大（大于并联运行时单机流量）而发生气蚀，此方法常和节流共同使用。

【例 1-8-4】 有一单吸单级离心泵，铭牌上水泵参数：流量 $Q=0.056\ \mathrm{m^3/s}$，扬程 $H=12.5\ \mathrm{m}$，转速 $n=2\ 200\ \mathrm{r/min}$。为提高泵的特性曲线，改换电机转速 $n=2\ 500\ \mathrm{r/min}$，试求改装后泵的以上工作参数有何变化？

解： 电机转速变化，工作参数相应变化，由式（1-8-14）可得：

（1）流量：

$$Q=\frac{n}{n_{\mathrm{m}}}\cdot Q_{\mathrm{m}}=\frac{2\ 500}{2\ 200}\times 0.056\ \mathrm{m^3/s}=0.063\ 6\ \mathrm{m^3/s}$$

（2）扬程：

$$H=\left(\frac{n}{n_{\mathrm{m}}}\right)^2\cdot H_{\mathrm{m}}=\left(\frac{2\ 500}{2\ 200}\right)^2\times 12.5\ \mathrm{m}=16.14\ \mathrm{m}$$

第七节 离心式泵与风机的选择

由于用途和使用条件不同，合理正确地选择泵或风机的类型、大小和台数以满足各种不同的工程要求是十分必要的。现将选择步骤和方法简单介绍如下。

一、确定设备类型

首先要明确工程对泵或风机的要求，取得对设备的用途和使用条件等方面的资料作为依据选定设备类型。例如：输送有爆炸危险气体时，应选用防爆型风机；空气中含有木屑、纤维或尘土时，采用排尘风机；输送清水用清水泵；输送酸性水用耐酸泵；锅炉给水用专用泵等（可参考相关资料）。

二、确定选用依据

根据工程实际最不利工况的要求，通过水力计算，确定工况最大流量 Q_{max} 和最高扬程 H_{max}。然后，考虑计算中的误差及管路泄漏等未预见因素。分别加上 10% ~15% 的附加值，即：

$$Q = (1.1 \sim 1.15) Q_{max} \tag{1-8-15}$$

$$H = (1.1 \sim 1.15) H_{max} \tag{1-8-16}$$

作为选用泵或风机的依据。

三、确定设备的型号、大小及台数

泵或风机的类型确定之后，根据已知的流量、扬程（或压头）及管道水力计算，在泵或风机的 $Q-H$ 性能曲线综合图上点绘出管路性能曲线。根据管路性能曲线与 $Q-H$ 性能曲线的相交情况，确定所需泵或风机的型号和台数。然后，再查单台设备的性能曲线图或表，确定该选定设备的转速、功率、效率及配套电机的功率和型号。

对于流量比较小而均匀，用一台泵或风机可以满足需要的情况，不必作出管路性能曲线，可根据已知的流量和扬程（或压头），查阅有关产品样本或手册中的性能曲线图或表，直接选择大小型号合适的泵或风机。

四、几点注意事项

（1）需要多台设备并联运行，应尽可能选用同型号、同性能的设备，互为备用。在选用通风机时，应尽量避免采用串联的工作方式，当不可避免地需要采用串联时，第一级通风机到第二级通风机间应有一定的管长。

（2）尽量选用大泵，一般大泵效率较高。当系统损失 h_l 变化较大时，要考虑大小兼顾，以便灵活调配。

（3）在选用设备时，应使其工作点处于其 $Q-H$ 性能曲线下降段的高效区域（即最高效率点的 ±10% 区间内），以保证工作点的稳定和高效运行。

（4）泵或风机样本上所提供的参数，是在特定标准状态下实测而得的。当实际条件与标准状态不符时，应按有关公式进行换算，将使用工况状态下的流量、扬程（或压头）换算为标准状态下的流量、扬程（或压头），再根据换算后的参数查设备样本或手册进行设备选用工作。

（5）选择水泵时，还应查明设备的允许真空高度或允许气蚀余量，以便确定水泵的安装高度。在选用允许真空高度 H_s 时，应考虑使用介质温度及当地大气压强值进行修正。

（6）选择风机时，应根据管路布置及连接要求确定风机叶轮的旋转方向及出风口位置。对于有噪声要求的通风机系统，应尽量选用效率高、叶轮圆周速度低的风机，并根据通风系统产生噪声和振动的传播方式，采取相应的消声和减振措施。

【例 1-8-5】 某空气调节系统需要自冷水箱向空气处理室供水，最低水温为 10 ℃，要求供水量为 24 m^3/h（日用水量变化不大），几何扬水高度为 6.2 m，空气处理室喷嘴前应保证有 16.5 m 的压头。经计算知供水管路损失为 5.8 m。为了便于系统随时启动，故将水泵装设在冷水箱之下。试选择水泵。

解：（1）确定水泵类型：

根据已知条件可知，要求输送的液体是温度不高的清水，且泵的位置较低，故而不必考虑气蚀问题，可以选用吸送清水的 IS 型离心泵。

（2）确定选泵依据：

根据工程实际要求，计算依据参数

$$Q=(1.1\sim1.15)Q_{max}=1.1\times24\ m^3/h=26.4\ m^3/h$$

$$H=(1.1\sim1.15)H_{max}=1.1\times(6.2+16.5+5.8)m=31.35\ m$$

(3) 确定泵的型号、大小、台数及有关参数：

考虑该输水系统用水量比较小且比较均匀，选择单台水泵可满足工程需要，因而可以直接查阅有关产品样本或手册选择一合适的水泵。查9—6IS型单级单吸离心泵性能表，选用一台IS65—50—160型水泵。该泵转速 $n=2\ 900$ r/min时，流量为25 m^3/h 扬程32 m，配套电动机功率为4 kW，泵的效率为66%。流量、扬程满足要求，效率较高，该型号泵合适。

第八节 水泵安装高度的计算

一、泵的气蚀现象

如果泵内某处的压强低至该处液体温度下的汽化压强，即 $p_k\leqslant p_v$，部分液体就开始汽化，形成气泡；与此同时，由于压强降低，原来溶解于液体的某些活泼气体，如水中的氧也会逸出而成为气泡。这些气泡随液体进入泵内高压区，由于该处压强较高，气泡很快破灭，产生高频冲击力。此外，在凝结热的作用下，活泼气体还对金属发生化学腐蚀，水泵构件会遭到剥蚀。这种现象就是气蚀。

产生气蚀的原因有以下几种：

① 泵的安装位置高出吸液面的高差太大，即泵的几何安装高度 H_g 过大。

② 泵安装地点的大气压较低，如安装在高海拔地区。

③ 泵所输送的液体温度过高。

二、离心式水泵吸入口真空高度水力计算

用能量方程建立管吸入口与泵入口断面 $s-s$ 之间（图1-8-9）的能量方程：

$$z_0+\frac{p_0}{\gamma}+\frac{v_0^2}{2g}=z_s+\frac{p_s}{\gamma}+\frac{v_s^2}{2g}+\sum h_s$$

池水面流速 $v_0=0$，池水面为大气压强 $p_0=p_a$，池水面与水泵高程差为 $H_g=z_s-z_0$，令 $H_s=\frac{p_0}{\gamma}-\frac{p_s}{\gamma}$，整理上式得离心式水泵吸入口真空高度公式：

$$H_s=\frac{p_a}{\gamma}-\frac{p_s}{\gamma}=H_g+\frac{v_s^2}{2g}+\sum h_s \qquad (1-8-17)$$

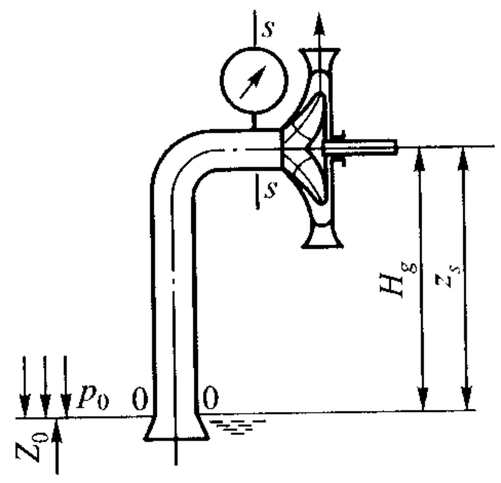


图1-8-9 离心式水泵几何安装高度

式中：H_g——实际安装高度；

H_s——吸入口真空高度；

$\sum h_s$——吸水管总的水头损失。

当吸入口真空高度 H_s 达到某一最大值 H_{smax} 时，即泵的吸入口处压强接近液体的汽化压强 p_v 时，泵内就会开始发生气蚀。为了确保泵的正常运行，规定了允许吸入口的真空高度，用 $[H_s]$ 表示。

$$H_s\leqslant[H_s]=H_{smax}-0.3\ m \qquad (1-8-18)$$

三、水泵最大安装高度的计算

为了确保泵的正常运行，水泵安装高度应小于或等于水泵允许真空高度，允许真空高度由制造厂家提供。

水泵最大安装高度最大值应满足在水泵运行时，水泵进口真空高度等于水泵允许真空高度。

由式（1－8－17）得：

$$H_g = [H_s] - \left(\frac{v_s^2}{2g} + \sum h_s\right) \tag{1-8-19}$$

【例1－8－6】 有一台吸入口径为600 mm的双吸单级泵，输送常温清水，流量为 $Q=880$ L/s，允许吸上真空高度为6.0 m（水柱），吸入管段的阻力估计为2.0 m，求安装高度为3.0 m时，该泵能否正常工作？

解：计算管中流速：

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4\times 0.88}{3.14\times 0.6^2}\ \text{m/s} = 2.83\ \text{m/s}$$

由式（1－8－19）可得：

$$H_g = [H_s] - \left(\frac{v_s^2}{2g} + \sum h_s\right) = 6.0\ \text{m} - \left(\frac{2.83^2}{2g} + 2\right)\text{m} = 2.41\ \text{m}$$

因为安装高度小于允许吸上真空高度，即 $H_g < H_s$，泵能正常工作。

思　考　题

1－8－1　欧拉方程指出：泵或风机所产生的理论扬程 H_T，与流体种类无关。这个结论应如何理解？在工程实践中，泵在启动前必须预先向泵内充水，排除空气，否则水泵就不能提水，这与上述结论有矛盾吗？

1－8－2　H 代表扬程，p 代表风机的压头，而在工程实践中，风机样本上又常以 H 表示风机的压头，单位为Pa，此压头 H 与扬程 H 及压头 p 有何异同？

1－8－3　在计算泵或风机的轴功率时，常采用下列公式：

$$N = \frac{\gamma QH}{\eta};\quad N = \frac{QH}{102\eta};\quad N = \frac{Qp}{\eta}$$

其中，N 的单位为kW，公式中 γ、Q、H 及 p 都应采用什么单位？

1－8－4　泵的扬程与泵出口总水头是否是一回事，两者何时相等，何时扬程大于出口总水头？何时小于出口总水头？

1－8－5　在实际工程中，是在额定的流量下计算管路阻力，管路系统特性曲线是如何确定的？

1－8－6　管路特性曲线与泵的特性曲线相交点有何含义？机器功率 N、效率 η 如何确定。

1－8－7　关闭节流设备使泵或风机在零流量下运行，这时轴功率并不等于零，为什么？是否可以使风机或泵长时间在零流量下工作？

1－8－8　水泵产生气蚀的原因和产生气蚀的具体条件是什么？

1－8－9　为什么要考虑水泵的安装高度？

习　　题

1－8－1　对于水泵的扬程的表述，下列说法正确的是：（　　）

A 水泵提升水的几何高度　　B 水泵出口的压强水头

C 单位重量流量流体所获得的有效能量　　D 以上说法均正确

1-8-2 在管网系统中不变的条件下，要改变泵或风机的工作点，不可行的方法之一是：（　　）

A 调节管路中的阀门开度　　B 改变泵或风机的转速

C 增大泵或风机的电机的轴功率　　D 以上方法都不可行

1-8-3 以下调节方法不能改变泵与风机特性曲线的是：（　　）

A 改变进口导流叶片的角度　　B 改变叶轮转速

C 改变出口处阀门的开度　　D 切削叶轮直径

1-8-4 某单吸单级离心泵，铭牌标示为：流量 $Q=0.080\ m^3/s$，扬程 $H=15.5\ m$，转速 $n=2\ 000\ r/min$。为改变泵的特性曲线，改换转速 $n=2\ 500\ r/min$，改装后泵的工作参数为：（　　）

A $Q=0.10 m^3/s$，$H=24.22\ m$　　B $Q=0.080\ m^3/s$，$H=17.70\ m$

C $Q=0.090\ m^3/s$，$H=16.50\ m$　　D $Q=0.75\ m^3/s$，$H=20.50\ m$

1-8-5 某单吸单级离心泵，$Q=0.073\ 5\ m^3/s$，$H=14.65\ m$，用电机由带拖动，测得 $n=1\ 420 r/min$，$N=3.3\ kW$；后因改为电机直接联动，n 增大为 1 450 r/min，此时泵的工作参数为：（　　）

A $Q=0.073\ 5\ m^3/s$，$H=15.18\ m$，$N=3.78\ kW$

B $Q=0.075\ m^3/s$，$H=14.28\ m$，$N=3.54\ kW$

C $Q=0.075\ m^3/s$，$H=15.28\ m$，$N=3.514\ kW$

D $Q=0.080\ m^3/s$，$H=15.58\ m$，$N=3.654\ kW$

1-8-6 某供水系统，水泵轴线标高 130 m，吸水面标高 126 m，上水池液面标高 170 m，吸水管段水头损失 0.81 m，压水管段水头损失 1.91 m。泵所需的扬程为：（　　）

A 42.74 m　　B 46.74 m

C 44.0 m　　D 40.0 m

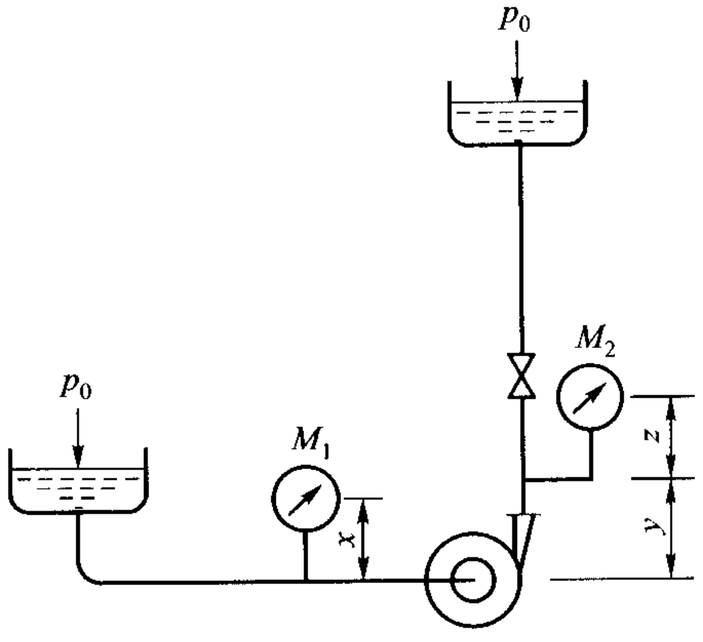
1-8-7 如习题 1-8-7 图所示的泵装置从低水箱抽送重度 $\gamma=9.80\ kN/m^3$ 的液体。已知条件如下：

$x=0.1\ m$；$y=0.35\ m$；$z=0.11\ m$；M_1 读数为 54 kPa；M_2 读数为 104 kPa；

$Q=0.025\ m^3/s$；$\eta=0.80$。此泵所需的轴功率为：（　　）

A 5.0 kW　　B 5.2 kW

C 4.5 kW　　D 4.98 kW



习题 1-8-7 图

1-8-8 有一泵装置的已知条件如下：$Q=0.12\ m^3/s$，吸入管径 $D=0.25\ m$，水温为 40 ℃（重度 $\gamma=992\ kN/m^3$），允许真空高度 $[H_s]=5\ m$，吸水面标高 102 m，水面为标准大气压，吸水管阻力为 0.79 m。泵轴的标高最高为：（　　）

A 5.0 m　　B 3.6 m

C 3.9 m　　D 6.0 m

第一篇习题参考答案

1-1-1	D	1-1-2	B	1-1-3	B	1-1-4	D	1-1-5	C	1-1-6	B
1-1-7	B	1-1-8	D	1-1-9	C	1-1-10	B	1-1-11	B	1-1-12	B
1-1-13	C	1-1-14	D	1-1-15	D	1-1-16	B				

1-2-1	A	1-2-2	B	1-2-3	B	1-2-4	A	1-2-5	B	1-2-6	D
1-2-7	C	1-2-8	B	1-2-9	C	1-2-10	C	1-2-11	A	1-2-12	A
1-2-13	B	1-2-14	C	1-2-15	B						

1-3-1	A	1-3-2	B	1-3-3	A	1-3-4	A	1-3-5	B	1-3-6	D
1-3-7	A	1-3-8	B	1-3-9	B	1-3-10	D	1-3-11	B	1-3-12	B
1-3-13	B	1-3-14	D								

1-4-1	D	1-4-2	B	1-4-3	B	1-4-4	B	1-4-5	B	1-4-6	B
1-4-7	D	1-4-8	A	1-4-9	A	1-4-10	B	1-4-11	B	1-4-12	C
1-4-13	B	1-4-14	A								

1-5-1	A	1-5-2	B	1-5-3	C	1-5-4	C				

1-6-1	B	1-6-2	A	1-6-3	C	1-6-4	C	1-6-5	A	1-6-6	B
1-6-7	A	1-6-8	B	1-6-9	C	1-6-10	B				

1-7-1	C	1-7-2	A	1-7-3	A	1-7-4	A	1-7-5	C	1-7-6	B
1-7-7	D	1-7-8	A	1-7-9	C	1-7-10	C	1-7-11	A	1-7-12	A

1-8-1	C	1-8-2	C	1-8-3	C	1-8-4	A	1-8-5	C	1-8-6	B
1-8-7	D	1-8-8	C								

主要参考文献

[1] 严新华. 水力学：工程流体力学. 北京：科学技术文献出版社，1997.

[2] 周谟仁. 流体力学泵与风机. 2 版. 北京：中国建筑工业出版社，1993.

[3] 邱信立，廉乐明，李力能. 工程热力学. 北京：中国建筑工业出版社，1992.

[4] 高学平，张效先. 水力学. 北京：中国建筑工业出版社，2006.