土力学可靠性原理

高大钊 编著

中国建筑工业出版社

本书系统地介绍了土力学中可靠性理论的基本问题及其最新发展，其中包括岩土参数的统计分析、荷载和自然条件的统计分析、概率极限状态方程、土坡稳定的概率分析、地基稳定性的概率分析、变形问题的概率分析以及系统可靠性分析与优化决策。每一主要问题都附有例题以帮助读者理解原理。

本书可供岩土工程技术人员、科学研究人员与教师参考，也可作为研究生的教学参考书。

*　　*　　*

责任编辑：高峰

土力学可靠性原理

高大钊　编著

*

中国建筑工业出版社出版（北京西郊百万庄）

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

中国建筑工业出版社印刷厂印刷（北京阜外南礼士路）

*

开本：850×1168毫米　1/32　印张：9 1/8　字数：244 千字

1989年12月第一版　1989年12月第一次印刷

印数：1—2,130册　定价：7.85元

ISBN7—112—00830—1/TU·587

(5913)

序

学科的高度分化和高度综合是现代科学技术发展的重要特征之一，学科之间相互渗透、相互交叉，产生了许多边缘学科与分支学科。土力学学科也在经历着这种深刻的变化，在高度综合的同时出现了高度分化，发展了一些新的分支。例如，土力学与振动测试技术、振动理论、随机过程理论的结合，形成了土动力学；大型、高速计算机用于土力学计算，发展了土力学中的数值方法，正在逐渐形成为计算土力学；数值方法的广泛应用推动了土的应力、应变和时间的本构关系的研究，并成为近代土力学的一个重要标志。

土力学发展的另一个分支是研究土的亚微观结构的统计规律以及用概率方法研究土的性状与行为的变异性与不确定性，三十年来得到了很大的进展，特别是可靠性理论已在工程安全度方面开始应用，发展的趋势将形成一门学科分支——统计土力学。这一领域中涉及的面相当广泛，本书只对土力学中的可靠性原理作比较系统的归纳与论述，其目的是便于读者了解和研究这一分支领域中的基本问题。

本书是在教学和科学研究过程中形成的，作者曾将本书的一部分内容在岩土工程师进修班多次讲授，大部分是为研究生讲授的内容。这些内容多数取材于国内外最新的文献资料，同时也吸收了作者近年来的一些科研成果。在这一领域中，文献资料是非常丰富的，但由于篇幅的限制，没有能反映更多的内容；也限于作者的水平，内容取舍和论述也不一定最合适，不当之处，祈请各方面专家和读者指教。

作　者

于同济大学

主 要 符 号

A 事件
A 线性回归系数
A' 事件A的互补事件
A_e 基础的有效面积
a 非线性经验公式参数
a_i 第i个方案
B 基础底面宽度
B 线性回归系数
$B(\ )$ Beta函数
B_e 基础的有效宽度
b 非线性经验公式参数
$b(x,n,p)$ 二项分布概率密度函数
b_c, b_γ 与基础底面倾斜有关的系数
C 能力
C_T 总期望造价
$\tilde{C}$ 能力的下限估值
C_c 压缩指数
C_f 应力面积系数
C_r 再压缩指数
C_u 能力的标准化变量
CDF 概率分布函数
CFS 中心安全系数
COV 协方差
c 土的内聚力
C_γ 土的固结系数
D 基础埋置深度
D 最大水平位移
D 需求
$\tilde{D}$ 需求的上限估值
D_u 需求的标准化变量
d_q 深度系数
d_u 相关距离
E 总造价
E 事件
$E(\ )$ 数学期望
E^* 相对总造价
E_c 施工造价
E_f 失效时需要付出的代价
E_{s_i} 第i层土的压缩模量
e_k 第K个试验
F 方差比
F 最大波浪力
$F(\ )$ 概率分布函数
$F_M(\ )$ 极大值的分布函数
$F_N(\ )$ 极小值的分布函数
FS 安全系数
FS_c 内聚力的分项安全系数
FS_d 恒载的分项安全系数
FS_l 活载的分项安全系数
FS_r 内摩擦角正切的分项安全系数
F_α F分布分位值

f 频数

f 与贴现率有关的系数

$f(\ )$ 概率密度函数

$f(t)$ 样本函数

$f'(\theta)$ 先验的概率密度函数

$f''(\theta)$ 后验的概率密度函数

$f_M(\ )$ 极大值的密度函数

$f_N(\ )$ 极小值的密度函数

$G_X(S)$ 矩母函数

g_1 偏度系数

g_2 峰度系数

I 基本造价

i_τ, i_q 与合力倾斜度有关的系数

K 误差传递系数

k 潜在危险系数

L 滑动圆弧长度

$L(\theta)$ 似然函数

L_e 基础的有效宽度

M 区间数目

M 随机变量族中的极大值

M_k k阶原点矩

m_k k阶中心矩

N 随机变量族中的极小值

N_s 土坡稳定系数

n 样本容量

n 工程使用年限

P^* 设计验算点

P_f 失效概率

$P(A)$ 事件A的概率

$P(AB)$ A和B积事件的概率

$P(B/A)$ 条件概率

$P'(\theta_i)$ 先验概率

$P''(\theta_i)$ 后验概率

PDF 概率密度函数

P_i' 区间频率拟合值

P_a 年失效概率

$P_{t,t+1}$ 转移概率

p' 有效覆盖压力

p_c 前期固结压力

Q 作用在基础上的水平力

Q_M 设计基准期荷载最大值

q 地基承载力

R 可靠性

r 相关系数

r 滑动圆弧半径

r 置信水平

S^2 子样方差

SM 安全储备

S_t,S_q 与基础形状有关的系数

s_v 十字板抗剪强度

T 时间因素

T 方差分析中全部数据总和

T_1 泊松过程中第一次发生的时间

T_j 方差分析中每一列数据总和

t_α 学生氏分布分位值

U 固结度

U 必然事件

u 标准正态变量

u 极值I型分布参数

$u(\ )$ 效益值

u_k k阶未调整原点矩

V 变异系数

$V(\ )$ 方差

$V(t)$ 方差函数

X 随机变量

$\bar{x}$ 子样平均值

目　录

第一章　绪论 …… 1
第一节　可靠性理论的发展 …… 1
第二节　岩土工程是一门综合性学科 …… 4
第三节　土力学中的不确定性 …… 5
第四节　土力学中的系统研究方法 …… 7
第二章　工程中的概率概念和统计方法 ……13
第一节　随机事件与概率运算 ……13
第二节　随机变量的分布 ……20
第三节　随机变量的函数运算 ……50
第三章　岩土参数的统计分析 ……55
第一节　数据的整理与经验分布 ……55
第二节　经验分布的矩 ……60
第三节　概率分布模型的拟合 ……65
第四节　联合分布 ……81
第五节　设计参数估计 ……87
第六节　经验公式拟合 ……91
第七节　方差分析 ……106
第四章　荷载和自然条件的统计分析 ……120
第一节　概述 ……120
第二节　随机过程特征 ……121
第三节　极值分析 ……123
第四节　极值分布的参数估计 ……127
第五节　自然条件的变化规律 ……133
第五章　概率极限状态方程 ……140
第一节　安全系数 ……141
第二节　安全储备与失效概率 ……145
第三节　正态变量的极限状态方程 ……148

第四节　多个正态变量的极限状态方程 ……151
第五节　非正态分布变量的变换 ……156
第六节　非正态分布失效概率计算公式 ……162
第六章　土坡稳定的概率分析 ……167
第一节　土坡稳定的失效概率 ……167
第二节　土坡连续破坏的概率分析 ……175
第三节　逐渐发展的破坏 ……178
第四节　一些特殊的考虑 ……183
第七章　地基稳定性的概率分析 ……189
第一节　按地基承载力设计 ……189
第二节　抗滑稳定验算 ……200
第三节　地基承载力的概率取值方法 ……203
第四节　地基土强度指标的统计 ……210
第八章　变形问题的概率分析 ……217
第一节　变形极限状态方程 ……217
第二节　地基基础设计规范公式 ……218
第三节　考虑前期固结压力对沉降的影响 ……224
第四节　海洋平台的水平位移 ……231
第五节　沉降置信区间的估计 ……234
第六节　固结问题的概率分析 ……240
第九章　系统可靠性分析与优化决策 ……244
第一节　多重破坏模式系统分析 ……244
第二节　优化 ……260
第三节　决策分析 ……268

第一章 绪 论

第一节 可靠性理论的发展

本来，可靠与不可靠往往是指某人是否恪守信义，或某事物是真是伪而言的一种主观推测，而且是一个模糊的、无法预测的概念。但是，在近代发展起来的可靠性理论中，已经赋予一个可以测度定量的指标，是指人们对于一个系统可靠而又有效地工作的能力的总的认识，并用概率的语言来表达。现在已被人们广泛接受的可靠性是指一个系统在预计的时间内，在给定的条件下能满意工作的概率，与此相反的概率则是系统的失效概率。

可靠性理论萌芽于第二次世界大战期间而在战后才得到完善与发展。一九四四年，纳粹德国把扭转败局的希望寄托在刚刚研制成功的飞弹上，但大失所望的是大部分飞弹发生了故障。很多飞弹在起飞后不久，就一头栽进了英吉利海峡。在第二次发射时，竟有一枚失灵的飞弹掉过头来直奔柏林，在希特勒的防空指挥部顶上爆炸。为了研究飞弹的失灵，引用了概率论和统计学的方法，将整个火箭失灵的原因分解为由于动力部分、导航部分、引爆部分等的故障，认为飞弹不失灵的概率就是各部分不出故障概率的乘积。如果想轰炸某一军事目标，同时发射飞弹的数目应该大于这些概率乘积的倒数。与此同时，美国与日本正在太平洋海域进行激战。美军的后勤基地大多设在南太平洋的岛屿上。由于赤道附近的高温、潮湿以及运输途中的震动和冲击，军用电子器材运达这些基地时，竟有百分之六十失效。待送到前线岛屿和舰船上时，其中又有百分之五十不能工作。于是，美国军方也组织了大批专家来研究如何提高电子设备的可靠性的问题。经过浩繁的试验之后，终于摸到了电子元件失效的普遍规律。这些围绕

着军事目的的研究工作却孕育了一门新的学科——可靠性理论，为这门学科的发展奠定了基础。

在第二次世界大战以后，可靠性理论才得到了很大的发展，并在许多工程领域内得到应用，取得了显著的成效。象宇宙飞船、人造卫星、核潜艇等一些高可靠性的装备，都在研究可靠性规律的基础上，进行了极为苛刻的环境试验之后才制造成功的。现在，可靠性已被越来越多的领域列为一项不可缺少的技术指标。可靠性和质量管理的结合积极地推动了工业生产的改革，可靠性理论研究的任务就从追求可靠性这个单一目标，转变为追求包括最少投资、最节省能源、最低维护费用、最合理使用人员等在内的多目标合理规划，大大扩展了可靠性学科的领域。

可靠性理论在土木工程的结构方面的应用是开始得比较早的一个领域。早在一九四七年，苏联的尔然尼钦（A.P.Ржаницын）[1]就提出了用一次二阶矩理论的方法来估计结构的失效概率。美国的弗罗伊詹特(A.M.Freudenthal)在四十年代开创了美国结构安全度的研究工作。他的研究工作与同时代苏联尔然尼钦的工作，有某些相似之处。他在一九五一年提出，破坏概率的选择，应使结构建造费用与期望的破坏损失费的总和为最小的概念[2]。这些都是早期的研究工作。尔后，美国的康乃尔（C.A.Cornell）、洪（A.H-S），和邓(W.H.Tang）发展了工程技术中应用的概率概念和方法[3][4]。在六十年代和七十年代，土木工程结构可靠度的研究工作广泛地开展并逐步进入了实用阶段。六十年代美国成立了结构安全度委员会，七十年代由欧洲混凝土委员会倡议成立了结构安全度联合委员会，并着手编制《结构统一标准规范的国际体系》，北欧五国（丹麦、芬兰、冰岛、挪威及瑞典）房屋建筑规程委员会于一九七五年提出了《结构荷载与安全设计规程》。

我国从五十年代初期开始用数理统计方法确定超载系数和材料强度系数。七十年代成立了工业与民用建筑规范系列的《建筑结构设计统一标准》编委会和专题研究组，参考国际上的研究成

果，进行了大量的研究工作[5][6]，提出了《建筑结构设计统一标准》并经有关部门批准，作为制订建筑结构荷载规范，钢结构、薄壁型钢结构、钢筋混凝土结构、砖石结构、木结构设计规范以及地基基础和建筑抗震等设计规范应遵守的准则。近年来，我国已在着手编制工程结构设计统一标准，将概率极限状态设计原则推广到水利、铁道、公路、桥梁、港工等工程领域中。

岩土工程是可靠性理论应用的一个重要领域。早在一九五六年，卡萨格兰特（A.Casagrande）提出了土工和基础工程中计算风险的问题[7]。从六十年代开始，到七十年代取得了大量的研究成果，其中有影响的开拓者是T.H.Wu[8]-[11]，P.D.Lumb[12]-[14]，E.H.Vanmarcke[15]-[17]，O.G.Ingles[18][19]，M·E·Harr[20]。从一九七二年开始，每四年一届，召开统计学和概率论在土工和结构工程方面应用的国际学术会议，在这个会议的论文集上也发表了不少的研究成果。在历届的国际土力学和基础工程学术会议上，都有一些有关概率论和统计学在岩土工程中应用的文章发表。在第十一届国际土力学和基础工程学术会议上有一个小组专门讨论这一课题。由国际标准化组织岩土工程技术委员会（ISO/TC182）主持编制的国际标准（草案）中规定采用极限状态设计原则和分项系数方法，并对各级岩土工程提出了可靠性指标β的建议值，这是岩土工程中可靠性研究进入实用阶段的标志。用可靠性理论与方法研究岩土工程问题的许多成果表明，在岩土工程领域中，可靠性理论的应用有着广阔的前景。这是因为岩土工程本身是一门综合性的学科，存在着许多不确定性，更加需要用概率论与统计学的方法去研究和解决工程问题。

我国从七十年代末才开展土力学中可靠性问题的研究。中国力学学会岩土力学专业委员会于1983年初在同济大学举行了《概率论与统计学在岩土工程的应用》专题学术座谈会，1986年夏在长春召开了岩土力学参数的分析与解释讨论会，推动了这项研究的开展。近十年来发表了一系列的论文，其中有系统性论述

的[21]-[24]，有关于沉降概率分析[25][26]，地基承载力概率分析[27][28]，岩土参数概率模型[29][30]，渗透问题[31]和岩土参数统计规律[32]-[39]，集中反映了我国土力学可靠性研究领域的进展情况。近年来，概率有限元和蒙特卡洛模拟在土力学中的应用日益受到重视和发展值得注意的是，对于桩基础可靠性的研究，国际上很少有报导，但在我国研究工作却十分活跃。在这些方面预计；将会有可喜的成果问世。

第二节　岩土工程是一门综合性学科

可靠性方法在岩土工程中得到了发展，但由于岩土工程是一门综合性学科，给可靠性设计带来许多特殊性。什么是岩土工程呢？根据文献[40]的观点，认为岩土工程是把土力学与岩石力学应用于广义的土木工程，并与工程地质密切结合的学科。所谓广义的土木工程，包括水利、矿冶、港工、公路、铁道、桥梁、航空港、工业厂房、房屋建筑与市政工程等，这些工程既是岩土工程服务的对象，而岩土工程同时也是这些工程的组成部分。因此，岩土工程并不是孤立于土木工程以外，而是土木工程的一个部分，是与各种类型的土木工程密切有关的工程学科。也可以说，岩土工程是在广义的土木工程中，解决与土和岩石有关的工程问题的学科。从工程过程的各阶段来说，在勘察、设计、施工和运行过程中都有岩土工程问题，每个阶段特点不同，要解决的岩土工程问题也不一样，考虑可靠性的角度也就不同，解决问题的方法也是多样的。土和岩石都是岩土工程研究的对象，但土和岩石的工程地质特征有极大的差别，勘探试验方法大不一样，计算方法也各有特点，施工条件也不相同，因此可靠性问题的特点也各有异，这就使岩土工程的可靠性问题极其复杂。在本书中只能讨论岩土工程可靠性问题的一般方法和原理，而有更多的方面有待于研究发展。

岩土工程既然是一门综合性的学科，更需要用系统的方法来

研究。将复杂的岩土工程作为一个系统，用概率、统计、运筹、模拟等方法进行系统分析，建立系统模型，求得最优的结果，使工程过程的各个阶段之间、各个环节之间互相协调，互相配合，以获得技术上先进、经济上合算、运行中可靠、时间上最省的效果。这种系统的研究有两个方面的含义，一方面的含义是与上部结构的联系，将岩土工程作为整个工程系统中的一个子系统来研究；另一方面的含义是将整个工程过程看作一个系统，选址、勘察、设计、施工和运行都是整个岩土工程过程的子系统。这种系统研究给人们一种新的观点和方法来处理岩土工程问题。

岩土工程是一门综合性学科，包括土力学、岩体力学和工程地质三门学科，涉及的问题很多，本书讨论的问题只限于土力学方面应用可靠性方法的几个领域，而没有顾及在岩体力学和工程地质学方面的应用。因此，在本书以后的章节中虽多处出现岩土工程一词，但它的含义只限于土力学和基础工程的范围，而没有涉及更广泛的岩土工程问题。当然，本书阐述的原理与方法，在原则上也适用于岩土工程的其它领域。

第三节　土力学中的不确定性

岩石和土是在漫长的地质年代里形成的，又经历着各种变化着的过程，包括自然条件的变化和人类活动所引起的变化。岩土的物质组成、组织结构特点、干湿或疏密状态等性状都是自然历史的产物，是在人类无力控制的条件下形成的，完全是随机性的，因此岩土的性状表现出很大的变异性；岩土的工作条件，如自然环境的变迁，荷载的变化也往往是随机性的。人们只能在某些特定时刻，在一些特定的部位抽样试验测定，这就使得对于岩土性状及其工作条件的认识有很大的局限性。工程师的估计与实际情况之间的差别称为不确定性，岩土工程常常在许多不确定性条件下进行设计，在知道得不太多的条件下来研究人类工程活动对于岩土的影响，这就要凭经验作出判断，选择设计参数。

传统的设计方法采用“确定性”途径。这种途径是这样的，取土样，做一定数量的试验（物理性试验，力学性试验或原位试验）来确定某些指标的数值，再选用合适的公式来计算某些特定条件下土体的反应（有时用安全系数表示），最后校核得出的反应是否满足人们预期的要求。在这个方法中，计算所用的土工指标作为一个确定性的量来考虑。由于计算指标的选择是凭经验的，就使计算结果带有人为因素，可能与实际的反应相差甚远，许多原型观察结果或事故分析都说明了这一点。例如，哈恩斯和凡马克（M.E.Hynes, E.H.Vanmarcke）[41]报导了一个很有说服力的例子，说明岩土工程中存在着不确定性，当人们用经验的方法来作出判断和估计时，预测的可靠性是很差的。他们向十位知名的岩土工程师提供了一个堆堤试验的基本资料，包括地基土的勘察资料和堆堤的尺寸、方法等，要求每位工程师按自己的经验与方法预测这个堆堤试验的各项反应（如沉降、孔隙水压力、破坏时的填方高度等等）。然后开了一次讨论会，由十位预测者报告各自的估计结果，听众可以随便提问，也可以发表自己的见解，最后公布原型观测的结果。对比分析表明岩土工程中预测的可靠性是非常之低的，对于破坏时的填方高度，十个预测者中七个给出了估计的最大最小区间，三个只给出了定值估计，区间上限的最大估计值是9.1米，下限的最小估计值是1.5米，而实际的观测结果是5.7米；在七个给出区间的观测者中间，只有三个预测者估计的区间覆盖着观测值，命中率为43%。其实，出现这种情况并不奇怪，岩土工程中既然存在着众多的不确定性，工程师的估计偏离实际情况是很自然的事。问题在于用确定性的途径来解决岩土工程问题的做法本身不符合岩土工程实际，应当寻求更合理的途径。

可靠性理论所采用的概率途径方法，就是以随机事件和随机过程为研究对象的，用来研究岩土工程问题在很大程度上可以改善和弥补确定性方法的不足。因此，概率途径方法或概率方法在岩土工程中的应用得到了越来越广泛的重视。

采用概率途径方法并不意味着否定确定性途径的方法，它只是确定性途径方法的发展与补充。对土力学问题的概率分析，还是立足于对土体平衡与运动的确定性分析，采用确定性分析方法的简化图式与力学模型。不同之处仅在于将参数作为随机变量来考虑，在力学分析中采用概率的模式来描述参数，从而对力学计算的结果赋以概率的含义，对岩土体的性状与行为作出概率的预测。

第四节　土力学中的系统研究方法

人们早已发现了岩土工程中预测的不可靠性，预测者经常需要用实际观察到的资料来修正自己的估计，使之能逐步地掌握客观规律，比较有把握地进行预测，这就是经验积累的过程。在这个过程中，岩土工程师应当对全过程进行系统地研究，包括取得参数的试验方法、参数的可靠性及其对岩土工程反应预测的影响、设计计算方法的精度、对施工中可能出现问题的估计、以及实际施工及运行过程中的观测，只有进行系统的研究才能指导施工并丰富经验。裴克（R.B.Peck）总结了岩土工程中贯穿于勘察、设计、施工全过程的系统研究方法，称为观察法[42]。观察法对于岩土工程的发展有重大的影响，是符合系统工程原则的、有反馈的封闭系统的研究方法。观察法主要包括以下几项：

1.要有足够的勘察工作，至少要求能够确定沉积物的大概情形、类型及其性质，但不一定要求很详细。

2.在勘察工作基础上，对沉积物的最可能情况作出评价；并且要求估计在最不利情况下，实际条件对于以上评价可能偏离多少。这一点是非常重要的、有些评价常常并不估计最不利条件下的偏离，而是盲目地信任勘察的结果，将特定条件下得到的试验数据绝对化了。

3.根据以上两项资料，针对所估计的最可能情况下的地层特征和工程性状，提出实用的简化假设（Working hypot-

hesis），并进行计算和设计。

4.选择在施工过程（甚至运行过程）中必须要进行观察的那些量（例如沉降、孔隙水压力等）；并且按第3项的简化假设，预先估计这些量的数值可能是多少。

5.根据已经掌握的关于地层情况的数据，估计在可能的最不利情况下，第4项要观察的那些量的相应数值。

6.要预先估计到施工时所观察到的数据可能会偏离于预先估计的值。因此，要考虑在最不利的情况下，如果出现了这种偏离，应如何选择补救措施，或者改变设计。

7.在现场观察第4项所选择的那些物理量，并对现场的实测资料作业及时的分析与评价以指导施工。

8.必要时修改设计以适应于现场所发生的实际情况。

裴克指出了观察法的局限性，它只适用于有可能在施工过程中观察反应并修改设计的场合，其结果也只适用于特定的场合而不能推广到一般情况。

雷生第斯（Resendiz）对观察法提出了批评的意见[43]，他认为土力学研究的进展很慢，原因之一是由于土力学工作者太相信几十年来发展起来的观察法，因此过多地依赖于原型观察，过分强调从理论上找到普遍性规律的困难及危险。这样，一系列的原型观察结果只能成为互不相干的一堆资料。

雷生第斯认为在土力学的领域内作出理论上的概括，同其它学科一样，要有四个过程：

1.识别过程，即从原型观察的个别事例来认别哪些是有意义的（有效的）变量，这一过程就是用反演方法来作系统辨识以识别参数的过程，这是从特殊到一般的第一步。

2.归纳过程，把有关的变量归并成最少数的独立变量，这里要求舍弃一些无关的、次要的变量，在许多情况下要用到量纲分析，归纳的过程就是去粗取精的过程，只有这样才能抓住问题的关键。

3.模拟过程，即探求从归纳过程得到的诸独立变量之间的关

系式，这是从实践上升到理论的阶段。有三种不同的模拟方法，即模型试验、数学分析和数值分析方法，前面的两种是经典的方法，后一种是借助电子计算机发展起来的。模型试验由于受到模拟材料性质的限制而不容易满足相似条件；数学分析一般只能用于比较简单的弹塑性力学课题，因而他们的使用受到了局限。数值分析法虽能用以解决比较复杂的课题，但它对参数的要求更高，如果不注意模型参数的研究，数值计算结果的可靠性是存在问题的。

4.验证过程，即把以上求得量之间的关系式同现场事例比较，以验证理论与实际的符合程度。

在上述四个过程中，归纳和模拟过程是从实践上升到理论的过程，是尤其重要的。雷生第斯的四个过程，对于发展土力学理论是有指导意义的。

海切奇和凡马克（W.Hachich, E.H.Vanmarke）[44]给观察法赋于概率的含义，认为观察法基本上是一种凭经验处理不确定性的方法，因此可以预期概率理论（研究不确定性和机会的理论）对观察法的定量化方面将起重要作用，并分析观察法的几个“要素”以及考察它们的概率解释与引伸。

1.在勘察这个领域中，概率方法用得越来越广泛，对于勘察方法和试验设计都可以用到概率方法。

2.在对勘察结果作出评价时，特别是对于最可能的不利偏差的估计，概率方法不仅要求假设公式化，而且还要求对其概率作出估计。在这方面，即使是对概率方法持怀疑态度的工程师，在他们作出决策时事实上也在采用概率方法，对于自然状态在资料不很充分的条件下作出可能性的估计。

3.简化假设对于设计的作用是明显的，设计时使用的概率方法是对简化假设及设计中的不确定性对于设计结果的影响，提出定量的评价。

4.对观察量的选择以及仪表类型与安装位置的选择，通过决策分析及正确使用概率方法使之达到最佳状态。

5.对每个假设及其偏差的待观察值，在概率意义上对系统功能进行观察，预期大于最佳估计的可能性以及分布的离散程度，包括系统误差的离散范围。

6.对于每个观察值，如已被证明是可预见的重大偏差，可提前作出选择，这在概率意义上构成决策问题。这是一项非常有用的措施，能考虑问题的各个方面，对每个决策与结果作出合适的评估。

7.测定预定的观察值，并对实际条件进行评估，在概率意义上这是指在观察的基础上，对每一个假设作出概率修正。

8.在实际执行中实施按第 6 项作出的决策。

这种以概率论为基础的观察法，在原则上是从一组关于自然状态的假设中，通过实测，确定哪个假设的可能性最大。是对裴克观察法的一种发展和提高。是概率方法与传统的岩土工程相结合的系统方法。

马兹乌（Matsuo）[45]在研究深开挖的可靠性设计时提出了一个完整的动态观察法，将观察法的基本思想和可靠性设计理论紧密地结合起来，更具体地赋予观察法以概率方法的内容。

这个方法分为先期设计与动态设计两个阶段，共十一个步骤：

1.按勘探和试验结果统计土参数的统计指标。

2.计算诸如板桩墙那种支挡结构物上的土压力。

3.用设计中用到的失效概率的概念来估计施工现场的安全度。检验用于计算失效概率的计算方法的误差，这种分析误差是由设计方法的理想化和简化所引起的。鉴于分析误差可能影响到失效概率值，分析误差作为概率分布来考虑。此外，在一般工程问题上，最优状态的失效概率是小的。由于很大的计算误差将会给出错误的失效概率并将决策者引入歧途，因此不仅要检验误差的分布，而且也要检验误差本身的大小。

4.根据第1、2、3项，可求得失效概率值。

5.构造效益造价函数，它是失效概率的函数。

6.最优化的解是选择挡土墙的类型以及支挡的位置，它是根据设计中所用的评价准则来确定的。

前面的六项称为先期设计。开挖工作是根据先期设计中得到的最优解来进行的。

7.在施工中进行现场观察以便估计施工现场的安全性并用来判断是否要修改先期设计。

8.为此，需要能定量估计施工时安全度的方法。

9.检验安全度，并用第 8 项的方法判断失效是否到来，在这个过程中进行施工。

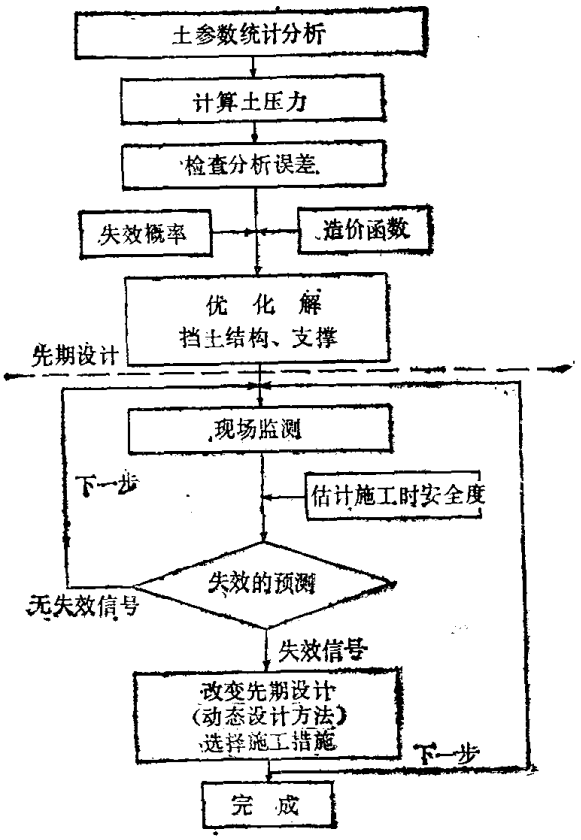


图 1-1 动态观察法流程框图

10.如果预测到失效的可能，那末就用观察到的结果来修正先期中采用的设计参数，并找到能避免失效的新的最优解。在施工中重复使用这种方法并不断修正上述的最优解。

用这种新的施工方案来改变先期设计的过程称为动态设计法。

11.用这种方法，在安全和经济的条件下完成施工。

根据上述十一个步骤可以画出动态观察法的流程框图如图1-1所示。

第二章　工程中的概率概念和统计方法

第一节　随机事件与概率运算

在岩土工程中的许多工程现象和过程，表现出很大的随机性。其特征是，实际情况往往难以预先知道，或者仅在某种程度上可加以预估而无确切的把握。例如，对于取土试验的结果，或某一原型观测的结果，我们可以预先用经验办法来估计，但实际输出却不会完全一样，有时甚至差别很大。又如，在对同一对象作两次相同的试验时，所得结果之间也表现出差别。因此，得出的试验结果或观测结果只能用一个区间或范围来表示，而不是某一个定值。在这个区间内，我们也只能估计某一个数值出现的可能性比其它数值的可能性要大些，或者小些。这种测定值可以用图2-1所示的直方图来表示。

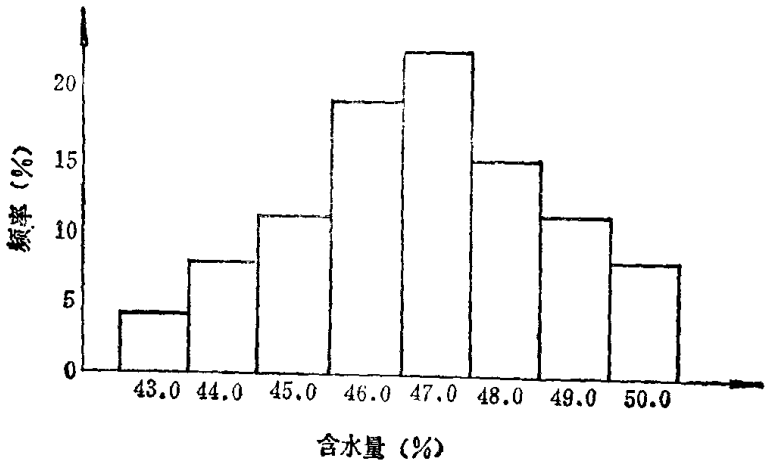


图 2-1　测定值分布直方图

如果我们研究的是土的某个指标的某个数值出现的可能性，或者是岩土工程性状的某一特征出现的可能性，我们就把这种出现的现象称为事件。例如，土坡失稳是一个事件，内摩擦角ϕ等于15°是一个事件，发生10厘米沉降是一个事件等等。我们不能确切地说，这样的事件肯定发生，或者肯定不会发生，我们只能估计其出现的可能性有多大，这类事件就称为随机事件。

自然界和人类社会所可能发生的事件不外乎三类：

第一类是必然事件。我们将事件记为A，则必然事件定义为在一组给定的条件下，事件A必然发生，发生的概率为百分之百，记为$P(A)=1$。例如，人站在地球上看，太阳从东方升起是一个必然事件；

第二类是不可能事件，定义为在一组给定的条件下，事件A肯定不会发生，则发生的概率为零，记为$P(A)=0$。例如，在没有排水通道和土体积不变的条件下，孔隙水压力消散这一事件是不可能事件；

第三类是随机事件，定义为在一组给定的条件下，事件A可能发生，也可能不发生，其发生概率介于0和1之间，记为$0<P(A)<1$。在我们所碰到的事件中，随机事件是大量的，必然事件和不可能事件终究是少数。

从上面的定义可知，我们在讨论某一事件时，一定要注意它的条件，事件的性质是与条件有关的。条件变化了，事件的性质也可能发生变化。例如，在失水条件下，土体膨胀是不可能事件，但如果具有吸水的条件，土体膨胀则是一个随机事件，取决于土的矿物成分、起始含水量等因素。

为了用数学的方法来描述与随机事件有关的问题。可以选取一个集合，它的各个元素分别代表各种可能的结果，这种集合称为相应于这个随机事件的样本空间。一个事件定义为样本空间的一个子集或元素。样本空间可能是离散的或连续的。如果是离散的，每一个样本点是离散的实体；如果是连续的，则样本空间由连续的样本点所组成。离散的样本空间，其样本点可能是有限的

或无限的；而对连续的样本空间，其样本点实际上常常是无限的。例如，粘土层的承载力在20kN/m²到40kN/m²之间变化，在这个范围内的任意数都是样本点，在这个范围内整个数值的连续体构成了样本空间。

如在样本空间中，有n个样本点，而A的元素个数为r，则概率的古典定义为

$$P(A)=\frac{r}{n} \qquad (2\text{-}1)$$

随着n数值增大，$\frac{r}{n}$值在区间[0，1]上的某个数值p附近摆动，那末规定事件A的概率$P(A)=p$，称为概率的统计定义。

我们用事件图来表示样本空间。必然事件记为U事件，它用如图2-2a所示的矩形来表示，$\Gamma(U)=1$。

在图2-2b中，事件A用矩形内的一个圆来表示，在这个圆以外的其它部分表示事件A的互补事件A'。

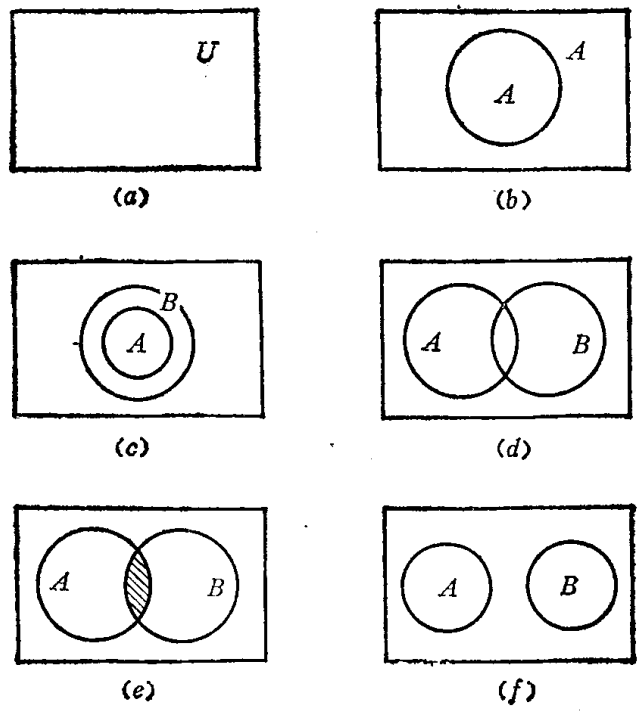


图 2-2 事件图

互补表示当A出现时，A'必定不出现，反之亦然，而且两个事件之和为一个必然事件，即

$$P(A)+P(A')=1 \qquad (2\text{-}2)$$

在图2-2c中，在矩形中有两个圆，大圆表示B事件，小圆表示A事件。如果当A出现时B一定出现，而当B出现时A不一定出现，则这两个事件是包含的关系。A事件叫做B事件的子事件，或者叫做包含在B内，或者也可叫做B包含A，记作$B\supset A$或$A\subset B$。

在图2-2d中的A、B两个圆表示两个事件的和，如图中A和B的所有边界包围的那一部分，记作$A\cup B$。在A事件或B事件中，至少有一个出现时，和事件$A\cup B$才出现。如推广到两个以上的一组事件中去，可以说一个新事件在一组事件中至少有一个出现时才出现，则这个新事件就是这组事件的和事件。若B事件是必然事件，则A和B的和事件为必然事件

$$A\cup B=U \qquad (2\text{-}3)$$

互补事件之和为必然事件

$$A\cup A'=U \qquad (2\text{-}4)$$

图2-2e表示A、B两个事件的积，如图中所示的A和B两个圆的相交公共部分，积事件记为$A\cap B$，亦可简记为AB。在A和B两个事件同时出现时，积事件AB才出现。推广到两个事件以上的一组事件上去，如果规定一个新事件的出现就是一组事件中各个事件都出现，这个新事件就叫做这组事件的积事件。在A和B两个事件中，如果B事件是必然事件，则

$$AB=A \qquad (2\text{-}5)$$

互补事件之积为不可能事件ϕ

$$AA'=\phi \qquad (2\text{-}6)$$

图2-2f表示两个互斥的事件，两个互斥的事件不可能同时出现，因此其积事件的概率为零，即

$$P(AB)=0 \qquad (2\text{-}7)$$

要注意区别互斥和互补的概念，互补的事件必然是互斥的，但互斥的事件不一定满足互补的条件。

集合的积与和都服从交换律，即

$$A \cup B = B \cup A \qquad (2\text{-}8)$$

$$AB = BA \qquad (2\text{-}9)$$

亦服从结合律，即

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \qquad (2\text{-}10)$$

$$(AB)C = A(BC) \qquad (2\text{-}11)$$

同时亦服从分配律，即

$$(A \cup B)C = AC \cup BC \qquad (2\text{-}12)$$

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C) \qquad (2\text{-}13)$$

加法定理

和事件的概率等于两个事件概率之和减去两个事件的积事件的概率。

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) \qquad (2\text{-}14)$$

如果A和B互斥，则$P(AB) = 0$，因此

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \qquad (2\text{-}15)$$

条件概率

如果一个事件发生的概率可能依赖于其它一个事件的发生（或不发生），则这个相应的概率叫做条件概率。

假定A已经发生的条件下，B的发生概率记为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (2\text{-}16)$$

这意味着我们对样本空间A中的事件B是感兴趣的，因此用了相应的规一化方式。

当我们说某一事件的概率时就意味着以样本空间U为条件，即

$$P(A|U) = \frac{P(AU)}{P(U)} \qquad (2\text{-}17)$$

由于$AU = A$，$P(U) = 1$，故

$$P(A|U) = P(A) \qquad (2\text{-}18)$$

如果一个事件的发生并不影响其它事件发生的概率，则称这两个事件为统计上的相互独立。如A和B在统计上相互独立，则

$$P(B|A)=P(B)$$
$$P(A|B)=P(A) \qquad (2\text{-}19)$$

乘法定理

根据公式（2-16）得

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \qquad (2\text{-}20)$$

推论可得

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \qquad (2\text{-}21)$$

将公式（2-20）代入公式（2-21）得

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)} \qquad (2\text{-}22)$$

对于互相独立的事件，根据公式（2-19），公式（2-20）可写为 $P(AB)=P(A)P(B)$ （2-23）

对于三个事件，乘法定理可表达为

$$P(ABC)=P(A|BC)P(B|C)P(C) \qquad (2\text{-}24)$$

或

$$P(ABC)=P(AB|C)P(C) \qquad (2\text{-}25)$$

如果这三个事件互相独立，则

$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C) \qquad (2\text{-}26)$$

全概率公式

如B事件是由两两互斥的子事件B_i所组成，且为必然事件，$\Sigma B_i=U$。对于每个子事件都满足公式（2-22）

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)} \qquad (2\text{-}27)$$

由于B_i两两互斥，因此AB_i也两两互斥，由加法定理得$P(A)=P(\Sigma AB_i)=\Sigma P(AB_i)$，根据公式（2-21），得全概率公式 $P(A)=\Sigma P(AB_i)=\Sigma P(B_i)P(A|B_i)$ （2-28）

将全概率公式代入公式（2-27）得

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\Sigma P(B_i)P(A|B_i)} \qquad (2\text{-}29)$$

公式（2-29）就是著名的贝斯（Bayes）公式，贝斯公式在岩土工程中得到了广泛的应用。在岩土工程的有关文献中，经常用

如下形式表示：

$$P''(\theta_i)=\frac{P'(\theta_i)P(Z|\theta_i)}{\Sigma P'(\theta_i)P(Z|\theta_i)} \qquad (2\text{-}30)$$

式中 θ_i——天然状态；

Z——试验输出；

$P'(\theta_i)$——先验概率；

$P''(\theta_i)$——后验概率；

$P(Z|\theta_i)$——试验概率，又称为试验输出的似然性。

公式（2-30）适用于离散的情况，θ的期望值由下式估计

$$\hat{\theta}''=E(\theta|Z)=\sum_{i=1}^{n}\theta_i P''(\theta_i) \qquad (2\text{-}31)$$

对于连续的情况，令$f'(\theta_i)$表示先验的概率密度函数，θ在θ_i到$\theta_i+\Delta\theta$之间出现的先验概率为$f'(\theta_i)\Delta\theta$，后验概率$f''(\theta_i)\Delta\theta$根据公式（2-30）求得

$$f''(\theta_i)\Delta\theta=\frac{P(Z|\theta_i)f'(\theta_i)\Delta\theta}{\sum_{i=1}^{n}P(Z|\theta_i)f'(\theta_i)\Delta\theta} \qquad (2\text{-}32)$$

极限情况得

$$f''(\theta)=\frac{P(Z|\theta)f'(\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty}P(Z|\theta)f'(\theta)d\theta} \qquad (2\text{-}33)$$

式中，$P(Z|\theta)$为条件概率或假定参数为θ时，观测到试验输出Z的似然性，因为它是θ的函数，故称为θ的似然函数。分母亦取决于θ，可简单地理解为规一化常数，则公式（2-33）可表达为

$$f''(\theta)=KL(\theta)f'(\theta) \qquad (2\text{-}34)$$

式中

$$K=\left[\int_{-\infty}^{\infty}L(\theta)f'(\theta)d\theta\right]^{-1}$$ 为规一化常数；

$L(\theta)$——似然函数。

与（2-31）式相仿，θ的期望值由下式估计

$$\hat{\theta}''=E(\theta|Z)=\int_{-\infty}^{\infty}\theta f''(\theta)d\theta \qquad (2\text{-}35)$$

第二节　随机变量的分布

一、概率分布函数和概率密度函数

在工程技术科学中，许多随机现象是与某些物理量的数值输出有关，有些虽然在本质上没有数值概念，但也可以人为地加以数量化。这种与随机事件有关的数值称为随机变量，随机变量的某个数值表示一个随机事件。随机变量的大小虽不能确切地知道，但我们可以用它小于等于某一变量的概率来描述这个随机变量的规律。

设随机变量为X，它小于等于x的概率是x的函数，记为

$$P(X \leqslant x) = F_X(x)$$

当x趋向于负无穷时，$P(X \leqslant x)$趋向于零；当x趋向于正无穷时，$P(X \leqslant x)$趋向于1。

对于离散型随机变量，x仅有一定的离散值具有正的概率；而对于连续型随机变量，对任意x值都能定义概率尺度。一个随机变量可能既有离散又有连续的情况。

$F_X(x)$称为随机变量X的概率分布函数，记为CDF。

我们还可以用离散型概率密度函数，记为PMF，来描述离散型随机变量，概率密度函数用$p_X(x)$表示，它与概率分布函数有如下的关系

$$F_X(x) = \Sigma p_X(x) \qquad (2\text{-}36)$$

对于连续型随机变量，同样也可用概率密度函数（PDF）来描述，连续型概率密度函数用$f_X(x)$表示。它与概率分布函数有如下的关系

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \qquad (2\text{-}37)$$

概率密度函数$f_X(x)$并不是一个概率，然而，$f_X(x)dx = P(x < X \leqslant x + dx)$才是随机变量$X$在区间$(x, x+dx)$内出现的概率。

概率分布函数有如下的性质：

（1）$0 \leqslant F_X(x) \leqslant 1$；

（2）对任意两个数值x_1、x_2，且$x_1 < x_2$，则有

$$F_X(x_1) \leqslant F_X(x_2)$$

这里的等号意味着随机变量 X在x_1到x_2的范围内是无定义的情况；

（3）如随机变量X的一切可能值位于区间[a , b]内，则当

$$x < a, \quad F_X(x) = 0;$$

$$x > b, \quad F_X(x) = 1;$$

（4）$F_X(x)$是连续单增函数（对连续型随机变量）；

（5）对任意两个数值x_1、x_2，且$x_1 < x_2$，则有

$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1)$$

概率密度函数具有如下的性质：

（1） $f_X(x) = \dfrac{dF_X(x)}{dx}$；

（2） $f_X(x) > 0$；

（3） $P(x_1 < X \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x)dx$

（4）如随机变量X在区间[a， b]内有定义，则

$$\int_a^b f_X(x)dx = 1;$$

（5）在一般情况下 $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$；

（6） $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

二、数字特征

如果概率密度函数的形式及其参数是已知的话，则随机变量的分布就可以完全确定，但在实际上概率分布的形式是不知道的，通常近似地用其参数来描述一个随机变量的概率分布特征。这种参数称为数字特征。数字特征可分为位置特征参数，散度特

征参数，分布特征参数和相关特征参数。

位置特征参数表示随机变量X的平均位置和特定位置，其中有平均值(mean)，众数(mode)和中位数(median)等表示方法。平均值又称为数学期望，意味着概率加权平均的概念。即考虑所有可能出现的数值，每个数值与它出现的概率相乘，将所有可能出现的这种乘积相加就得到数学期望值，记为$E(X)$。

$$\begin{aligned}&\text{对离散型}\quad E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i p_X(x)\\&\text{对连续型}\quad E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x f_X(x)dx\end{aligned}\qquad(2\text{-}38)$$

也可对随机变量的函数$g(X)$进行数学期望的运算

$$\begin{aligned}&\text{对离散型}\quad E[g(X)]=\sum_{i=1}^{n}g(x_i)p_X(x_i)\\&\text{对连续型}\quad E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty}g(x)f_X(x)dx\end{aligned}\qquad(2\text{-}39)$$

众数是最可能出现的值，即最大概率或最高概率密度的值。中位数是在它的上、下两方，X均以等概率出现。在一般情况下，平均值、众数和中位数是不相等的，只有对称和单众数的情况，这三个特征值才是重合的。

方差是随机变量离散程度的特征参数，是衡量变异性的一种尺度，记作$V(X)$，亦是对X的一种运算符号。方差定义为随机变量与其平均值之差的平方的数学期望，因此可以用公式(2-38)来计算方差。

$$\left.\begin{aligned}&\text{对离散型}\quad V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2p_X(x_i)\\&\text{对连续型}\quad V(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^2f_X(x)dx\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}40)$$

展开以后得

$$\begin{aligned}V(X)&=\int_{-\infty}^{\infty}(x^2-2\mu_X x+\mu_X^2)f_X(x)dx\\&=E(X^2)-\mu_X^2\end{aligned}\qquad(2\text{-}41)$$

将方差开平方，得到另一个更便于应用的散度参数——标准

差σ_X

$$\sigma_X=\sqrt{V(X)} \tag{2-42}$$

方差与标准差都是有量纲的参数，因此难以用来比较不同量纲随机变量的离散程度。于是，我们引入一个无量纲的参数——变异系数V_X，它定义为标准差与平均值的比值

$$V_X=\frac{\sigma_X}{\mu_X} \tag{2-43}$$

衡量随机变量分布对称性的参数（分布特征参数）用三阶中心矩来表示

$$\left.\begin{aligned}&\text{对离散型}\quad E(X-\mu_X)^3=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^3p_X(x_i)\\&\text{对连续型}\quad E(X-\mu_X)^3=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^3f_X(x)dx\end{aligned}\right\} \tag{2-44}$$

如果三阶中心矩是零，则分布对称于平均值μ_X。不对称分布的三阶中心矩是正值或者是负值。当X在大于μ_X范围内更加离散些，三阶矩为正值，否则为负值。三阶中心矩是有量纲的，为了求得无量纲的参数，三阶中心矩除以标准差的立方，得一个新的参数，称为偏度系数，用g_1表示，偏度系数用来描述分布的对称或非对称程度。

$$g_1=\frac{E(X-\mu_X)^3}{\sigma_X^3} \tag{2-45}$$

为了更好地描述一个随机变量的分布，需要进一步了解分布的高阶矩。矩母函数是一个可以形成各种高阶矩的函数，记为$G_X(S)$，定义为e^{sX}的期望值

$$G_X(S)=E(e^{sX}) \tag{2-46}$$

如果随机变量X有一个概率密度函数$f_X(x)$，则相应的矩母函数为

$$\left.\begin{aligned}&G_X(S)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{sx}f_X(x)dx\\&\text{对离散型}\quad G_X(S)=\Sigma e^{sx_i}p_X(x_i)\end{aligned}\right\} \tag{2-47}$$

对公式（2-47）求导

$$\left.\frac{dG_X(S)}{ds}\right|_{s=0}=\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx$$

因此，
$$\frac{dG_X(0)}{ds} = E(X) \qquad (2\text{-}48)$$
就是X的数学期望。
$$\frac{d^2G_X(0)}{ds^2} = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = E(X^2) \qquad (2\text{-}49)$$
$$\frac{d^nG_X(0)}{ds^n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x)dx = E(X^n) \qquad (2\text{-}50)$$
方差由下式给出
$$V(X) = \frac{d^2}{ds^2}\ln G_X(0) \qquad (2\text{-}51)$$

三、常用分布

在概率分析中，我们常常要用一个函数去描述一个物理状态或过程。可以用实测资料去拟合某个特定的函数，这种特定函数具有某些固有的性质，利用这些性质能比较方便地求得结果。常用的分布有连续型的，也有离散型的，各适用于不同的问题。

正态分布

最著名和最有用的概率分布是正态分布，亦称高斯分布。

正态分布的概率密度函数由下式给出
$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] -\infty<x<\infty \qquad (2\text{-}52)$$
式中，μ和σ是分布参数，分别为平均值和标准差，可用一个简略的符号来表示正态分布，记为$N(\mu, \sigma)$。

标准正态分布

如果令变量u等于下式
$$u = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
则u为一标准化变量，它的数学期望$E(U)=0$，方差$V(U)=1$。此标准化变量的分布称为标准正态分布，记为$N(0, 1)$，其概率密度函数为
$$f_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}u^2\right] \qquad (2\text{-}53)$$
标准正态分布具有正态分布所特有的一些性质，其概率分布函数为
$$F_U(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{u^2}{2}}du \qquad (2\text{-}54)$$

利用标准正态分布可以估计正态分布随机变量的概率。

若已知随机变量服从正态分布，则X落在区间$[x_1, x_2]$内的概率由下式求得

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx \qquad (2\text{-}55)$$

令

$$u=\frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$du=\frac{dx}{\sigma}$$

则上式就可用标准正态分布来表示

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_1}^{u_2} e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=F_U(u_2)-F_U(u_1) \qquad (2\text{-}56)$$

$$F_U(u)=\int_{-\infty}^{u} f_U(u)du=\int_{-\infty}^{0} f_U(u)du+\int_{0}^{u} f_U(u)du$$

根据正态分布的对称性

$$\int_{-\infty}^{0} f_U(u)du=\frac{1}{2}$$

如令

$$\int_{0}^{u} f_U(u)du=\psi(u)$$

则

$$F_U(u)=\frac{1}{2}+\psi(u)$$

代入公式（2-56）得

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=F_U(u_2)-F_U(u_1)=\psi(u_2)-\psi(u_1)$$

此式适用于$u_1>0$，$u_2>0$的情况。

对于$u_1<0$，$u_2<0$的情况

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\psi(u_1)-\psi(u_2)$$

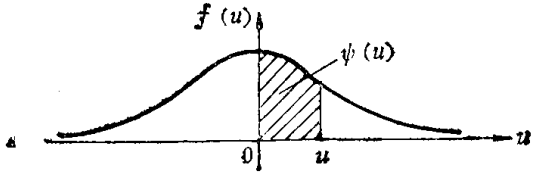
对于$u_1<0$，$u_2>0$的情况

$$P(x_1<X\leqslant x_2)=\psi(u_2)+\psi(u_1)$$

$\psi(u)$值可以从表2-1中查到。

$\psi(u)$表

表 2-1



u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0.003969	0.007978	0.011966	0.015953	0.019939	0.023922	0.027903	0.031881	0.035856
0.1	0.039828	0.043795	0.047758	0.051717	0.055670	0.059618	0.063559	0.067495	0.071424	0.075345
0.2	0.079260	0.083166	0.087064	0.090954	0.094835	0.098706	0.102568	0.106420	0.110251	0.114092
0.3	0.117911	0.121720	0.125516	0.129300	0.133072	0.136831	0.140576	0.144309	0.148027	0.151732
0.4	0.155422	0.159097	0.162757	0.166402	0.170031	0.173645	0.177242	0.180822	0.184386	0.187933
0.5	0.191462	0.194974	0.198466	0.201944	0.205401	0.208840	0.212260	0.215661	0.219043	0.222405
0.6	0.225747	0.229069	0.232371	0.235653	0.234914	0.242154	0.245373	0.248571	0.251748	0.254903
0.7	0.258036	0.261148	0.264238	0.257305	0.270350	0.273373	0.276373	0.279350	0.282305	0.285236
0.8	0.288145	0.291030	0.293892	0.296731	0.299546	0.302337	0.305105	0.307850	0.310570	0.313267
0.9	0.315940	0.318589	0.321214	0.323814	0.32 391	0.328944	0.331472	0.333977	0.336457	0.338913
1.0	0.341345	0.343752	0.346136	0.348495	0.350830	0.353141	0.355428	0.357690	0.359929	0.362143
1.1	0.364334	0.366500	0.368643	0.370762	0.372857	0.374928	0.376976	0.379000	0.381000	0.382977
1.2	0.384930	0.386861	0.388768	0.390651	0.392512	0.394350	0.396165	0.397958	0.399727	0.401475
1.3	0.403200	0.404902	0.406582	0.408241	0.409877	0.411492	0.413085	0.414657	0.416207	0.417736
1.4	0.419243	0.420730	0.422196	0.423641	0.425066	0.426471	0.427855	0.429219	0.430563	0.431888

续表

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.5	0.433193	0.434476	0.435745	0.436992	0.438220	0.439429	0.440620	0.441792	0.442947	0.444083
1.6	0.445201	0.446301	0.447384	0.448449	0.449497	0.450529	0.451543	0.452540	0.453521	0.454486
1.7	0.455435	0.456367	0.457284	0.458185	0.459070	0.459941	0.460796	0.461636	0.462462	0.463273
1.8	0.464070	0.464852	0.465620	0.466375	0.467116	0.467843	0.468557	0.469258	0.469946	0.470621
1.9	0.471283	0.471933	0.472571	0.473197	0.473610	0.474412	0.475002	0.475581	0.476148	0.476705
2.0	0.477250	0.477784	0.478308	0.478822	0.479325	0.479818	0.480301	0.480774	0.481237	0.481691
2.1	0.482136	0.482571	0.482997	0.483414	0.483823	0.484222	0.484614	0.484997	0.485371	0.485738
2.2	0.486097	0.486447	0.486791	0.487126	0.487455	0.487776	0.488089	0.488396	0.488696	0.488989
2.3	0.489276	0.489556	0.489830	0.490097	0.490358	0.490613	0.490863	0.491106	0.491344	0.491576
2.4	0.491802	0.492024	0.492240	0.492451	0.492656	0.492857	0.493053	0.493244	0.493431	0.493613
2.5	0.493790	0.493963	0.494132	0.494297	0.494457	0.494614	0.494766	0.494915	0.495060	0.495201
2.6	0.495339	0.495473	0.495604	0.495731	0.495855	0.495975	0.496093	0.496207	0.496319	0.496427
2.7	0.496533	0.496636	0.496736	0.496833	0.496928	0.497020	0.497110	0.497197	0.497282	0.497365
2.8	0.497445	0.497523	0.497599	0.497673	0.497744	0.497814	0.497882	0.497948	0.498012	0.498074
2.9	0.498134	0.498193	0.498250	0.498305	0.498359	0.498411	0.498462	0.498511	0.498559	0.498605
3.0	0.498650	0.498694	0.498736	0.498777	0.498817	0.498856	0.498893	0.498930	0.498965	0.498999
3.1	0.499032	0.499065	0.499096	0.499126	0.499155	0.499184	0.499211	0.499238	0.499264	0.499289
3.2	0.499313	0.499336	0.499359	0.499381	0.499402	0.499423	0.499443	0.499462	0.499481	0.499499
3.3	0.499517	0.499534	0.499550	0.499566	0.499581	0.499596	0.499610	0.499624	0.499638	0.499651
3.4	0.499663	0.499675	0.499687	0.499698	0.499709	0.499720	0.499730	0.499740	0.499749	0.499758
3.5	0.499767	0.499776	0.499784	0.499792	0.499800	0.499807	0.499815	0.499822	0.499828	0.499835
3.6	0.499841	0.499847	0.499853	0.499858	0.499864	0.499869	0.499874	0.499879	0.499883	0.499888
3.7	0.499892	0.499896	0.499900	0.499904	0.499908	0.499912	0.499915	0.499918	0.499922	0.499925
3.8	0.499928	0.499931	0.499933	0.499936	0.499938	0.499941	0.499943	0.499946	0.499948	0.499950
3.9	0.499952	0.499954	0.499956	0.499958	0.499959	0.499961	0.499963	0.499964	0.499966	0.499967

【例】

已知$\mu=5$，$\sigma^2=4$，估计随机变量落在区间[3，7]内的概率

$$x_1=3,\quad u_1=\frac{3-5}{2}=-1$$

$$x_2=7,\quad u_2=\frac{7-5}{2}=+1$$

查表2-1得$\psi(1)=0.341345$，由于对称性，$\psi(+1)=\psi(-1)=0.341345$

$P(3<X\leqslant 7)=2\times 0.341345=68.26\%$

从这个例子中我们看到，在正态分布曲线下面，对称轴两侧正负一倍标准差分位值之间的面积为0.6826，即出现的概率为68.26%。当这个范围扩大到正负二倍标准差时，按$u=\pm 2$查表2-1得$\psi(2)=0.47725$，则相应的概率为95.45%。如再扩大到正负三倍标准差，相应的概率为99.73%。

通常对试验数据进行筛选时，按正负三倍标准差作为舍弃的依据，即将测定值大于平均值加三倍标准差的数据以及小于平均值减三倍标准差的数据舍弃。其理由是这些数据处于正负三倍标准差范围以外，出现的概率为$1-0.9973=0.0027$，如此小的概率已可认为是不可能事件，不属于偶然误差范围，这些数据可能是由于粗差或系统误差原因而如此之大地偏离于平均值，因而可以舍弃。

贝努里数列和二项分布

在工程实践中经常需要考虑在重复“试验”中某一事件发生或者重新发生的潜在的可能性。例如，人们已注意到暴雨与非饱和土土坡失稳之间有一定的依存关系，年最大暴雨量可能超过一个临界值，也可能小于这个临界值，亦即超过临界值这个事件可能发生也可能不发生。这类问题可以用贝努里数列来模拟，它基于下列假定：

（1）每一个“试验”只有两个可能的输出，某一事件发生或者不发生；

（2）在每一个“试验”中，这事件发生的概率是一个常数；

（3）这些“试验”是互相独立的。

如果在每一个“试验”中，一个事件发生的概率是p，则不发生的概率$q=1-p$，在贝努里数列中，在n个“试验”之间恰好有x发生的概率服从于二项分布，其概率密度函数为

$$b(x;\ n,\ p)=p(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

$$x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n \qquad (2\text{-}57)$$

式中，n和p是分布的参数，

$\binom{n}{x}$是二项系数，由下式求得

$$\binom{n}{x}=\frac{n!}{x!(n-x)!}$$

尽管二项分布是一个十分简单的分布，但在工程问题中是很有用的。有两种可能输出的情况是很多的，例如在一系列钻孔中，每一个孔都可能发现或没有发现砾石层，在一个剖面中可能存在或不存在软弱透镜体，在建筑物的外墙上可能发现或不发现裂缝等等。必须注意的是，在贝努里数列中，每个“试验”必须是离散。然而，也可以把本来是连续的问题离散化。例如，时间或空间本来是连续的，但可以划分为若干间隔，在每个间隔内事件可能发生或不发生，在每个间隔中，事件出现与否就构成为一个“试验”。这种“试验”并不是真正的试验而是一种自然的过程或状态。

几何分布

在贝努里数列中，一个特定事件第一次发生的时间间隔数服从于几何分布。如果事件的第一次发生是出现在第t个时间间隔，则在$(t-1)$的时间间隔内，这个事件必然不发生。因此，如果T是相应的随机变量

$$P(T=t)=pq^{t-1} \qquad t=1,\ 2,\ \cdots\cdots \qquad (2\text{-}58)$$

这就是几何分布。

下面我们讨论重现期的概念。在一个能用贝努里数列模拟的时间或空间问题中，在事件第一次出现以前的时间（空间）间隔数称为第一次发生时间。如果每个时间（空间）间隔是独立的，则第一次发生时间亦是同一事件在两个依次发生的时间间隔，这就是说，重现时间等于第一次发生时间。因此，在贝努里数列中，重现时间也服从几何分布。在工程中常用的平均重现期由下式表示

$$\bar{T} = E(T) = \sum_{i=1}^{\infty} t\, pq^{t-1} = p(1 + 2q + 3q^2 + \cdots\cdots)$$

对于小于1的q，括号内的无限级数之和为

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p^2}$$

因此

$$\bar{T} = \frac{1}{p} \qquad (2\text{-}59)$$

公式（2-59）意味着，一个事件相邻两次发生之间的时间的平均值等于这个事件在一个时间单元内发生概率的倒数。必须强调的是重现期仅仅是事件之间的平均持续时间，而并不是两次发生之间的实际时间，实际时间T是一随机变量。

泊松分布

在工程问题中经常碰到要估计在时间（空间）上的任意点事件发生的可能性。如果一个事件在任意瞬间发生（或空间上的任意点），那么它就有可能在一个给定的时间或空间间隔内多次发生。在这种情况中，事件发生的规律更适宜于用泊松过程来描述。

泊松过程基于下面几个假定：

1.事件在任意时刻或任意空间点是随机发生的；

2.在一个给定时间（或空间）间隔中一个事件的发生，与不相重叠的间隔中事件的发生是互相独立；

3.在一个小区间Δt内，一个事件发生的概率正比例于Δt，由$\nu\Delta t$给定。ν是事件发生的平均率（假定是常数），并忽略在Δt内两次或更多次发生的概率。

在上述假定前提下，在t间隔内，事件发生的次数由泊松分布给出。如果X_t是在t时间（或空间）间隔内发生的数目

$$P(X_t=x)=\frac{(\nu t)^x}{x!}e^{-\nu t}\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots \qquad (2\text{-}60)$$

式中，ν是平均发生速率，亦就是在单位时间间隔（或空间）内，事件发生的平均数目。数学期望$E(X_t)=\nu t$；方差$V(X_t)=\nu t$。

指数分布

指数分布亦称为负指数分布。如果事件按照一个泊松过程发生，则事件第一次发生的时间T_1服从指数分布。$T_1>t$意味着在时刻t事件没有发生。因此，根据公式（2-58）

$$P(T_1>t)=P(X_t=0)=e^{-\nu t} \qquad (2\text{-}61)$$

T_1是泊松过程中第一次发生的时间。然而，由于在泊松过程中发生在不重叠时间间隔上的事件是相互独立的，T_1亦是发生时间或两个依次发生的事件之间的时间。

因此，T_1的分布函数为

$$F_{T_1}(t)=P(T_1\leqslant t)=1-e^{-\nu t}$$

其概率密度函数为

$$f_{T_1}(t)=\frac{dF}{dt}=\nu e^{-\nu t}\quad t\geqslant 0$$

如果ν是常数（与t互相独立），T_1的平均值为

$$\mu_{T_1}=\frac{1}{\nu} \qquad (2\text{-}62)$$

此式意味着，平均发生时间，或一个简单泊松过程的重现期是$\frac{1}{\nu}$。这表示对于一个简单的泊松过程，平均发生时间或重现期是$\frac{1}{\nu}$。与贝努里数列中的$\frac{1}{p}$等于重现期相比较，两者是一致的。对于很小的发生率，$\frac{1}{\nu}=\frac{1}{p}$。

χ^2分布

若随机变量X_1，X_2，……，X_n相互独立，且服从$N(0,1)$分布，则新的随机变量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

服从自由度为ν的χ^2分布，χ^2分布在拟合度检验中有着重要作用，并且也是t分布和F分布的基础。因此，χ^2分布是一个很重要的分布。

若随机变量χ^2以

$$f(\chi^2;\nu)=\frac{1}{2^{\frac{\nu}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}(\chi^2)^{\frac{\nu}{2}-1}e^{-\frac{\chi^2}{2}}\qquad \chi^2\geqslant 0$$

（2-63）

为概率密度函数，其数学期望$E(\chi^2)=\nu$，方差$V(\chi^2)=2\nu$，ν为自由度。

公式（2-63）中的$\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)$为伽玛分布。

表2-2给出了当α等于不同数值时的上侧分位数χ^2_α。

【例】

设样本容量$n=15$，$\alpha=0.05$，求$\chi^2_{0.05}$

自由度$\nu=n-1=14$，查表2-2，当$\nu=14$　$\alpha=0.05$时，得　　$\chi^2_{0.05}=23.685$。

t分布

设随机变量X，Y相互独立，且X服从N（0，1）分布，Y服从χ^2分布，则新的随机变量

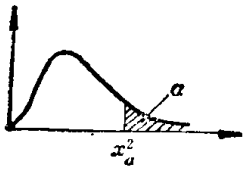
$$t=\frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

服从自由度为ν的t分布。其概率密度函数为

表 2-2

x^2-分布的上侧分位数（x_a^2）表

$P(x^2 > x_a^2) = a$



ν \ a	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.75	0.70	0.50
1	0.0^3157	0.0^3628	0.0^3982	0.0^2393	0.0158	0.0642	0.102	0.148	0.455
2	0.0201	0.0404	0.0506	0.103	0.211	0.446	0.575	0.713	1.386
3	0.115	0.185	0.216	0.352	0.584	1.005	1.213	1.424	2.366
4	0.297	0.429	0.484	0.711	1.064	1.649	1.923	2.195	3.357
5	0.554	0.752	0.831	1.145	1.610	2.343	2.674	3.000	4.351
6	0.872	1.134	1.237	1.635	2.204	3.070	3.455	3.828	5.348
7	1.239	1.564	1.690	2.167	2.833	3.822	4.255	4.671	6.346
8	1.646	2.032	2.180	2.733	3.490	4.594	5.071	5.527	7.344
9	2.088	2.532	2.700	3.325	4.168	5.380	5.899	6.393	8.343
10	2.558	3.059	3.247	3.946	4.865	6.179	6.737	7.267	9.342

续表

ν \ α	0.99	0.98	0.975	0.95	0.90	0.80	0.75	0.70	0.50
11	3.053	3.609	3.816	4.575	5.578	6.989	7.584	8.148	10.341
12	3.571	4.178	4.404	5.226	6.304	7.807	8.438	9.034	11.340
13	4.107	4.765	5.009	5.892	7.042	8.634	9.299	9.926	12.340
14	4.660	5.368	5.629	6.571	7.790	9.467	10.165	10.821	13.339
15	5.229	5.985	6.262	7.261	8.547	10.307	11.037	11.721	14.339
16	5.812	6.614	6.908	7.962	9.312	11.152	11.912	12.624	15.338
17	6.408	7.255	7.564	8.672	10.085	12.002	12.792	13.531	16.338
18	7.015	7.906	8.231	9.390	10.865	12.857	13.675	14.440	17.338
19	7.633	8.567	8.907	10.117	11.651	13.716	14.562	15.352	18.338
20	8.260	9.237	9.591	10.851	12.443	14.578	15.452	16.266	19.337
21	8.897	9.915	10.283	11.591	13.240	15.445	16.344	17.182	20.337
22	9.542	10.600	10.982	12.338	14.041	16.314	17.240	18.101	21.337
23	10.196	11.293	11.689	13.091	14.848	17.187	18.137	19.021	22.337
24	10.856	11.992	12.400	13.848	15.659	18.062	19.037	19.943	23.337
25	11.524	12.697	13.120	14.611	16.473	18.940	19.939	20.867	24.337
26	12.198	13.409	13.844	15.379	17.292	19.820	20.843	21.792	25.336
27	12.879	14.125	14.573	16.151	18.114	20.703	21.749	22.719	26.336
28	13.565	14.847	15.308	16.928	18.939	21.588	22.657	23.647	27.336
29	14.256	15.574	16.047	17.708	19.768	22.475	23.567	24.577	28.336
30	14.953	16.306	16.791	18.493	20.599	23.364	24.478	25.508	29.336

续表

ν \ α	0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.001
1	1.074	1.323	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	10.828
2	2.408	2.773	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	13.816
3	3.665	4.108	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	16.266
4	4.878	5.385	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	12.277	18.467
5	6.064	6.626	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388	15.068	20.515
6	7.231	7.841	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	22.458
7	8.383	9.037	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	24.322
8	9.524	10.219	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	26.125
9	10.656	11.389	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	27.877
10	11.781	12.549	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	29.588
11	12.899	13.701	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	31.264
12	14.011	14.845	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	32.909
13	15.119	15.984	16.985	19.812	22.362	24.736	25.472	27.688	34.528
14	16.222	17.117	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	36.123
15	17.322	18.245	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	37.697

续表

ν \ α	0.30	0.25	0.20	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.001
16	18.418	19.369	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	39.252
17	19.511	20.489	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	40.790
18	20.601	21.605	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	42.312
19	21.689	22.719	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	43.820
20	22.775	23.828	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	45.315
21	23.858	24.935	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	46.797
22	24.939	26.093	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	48.268
23	26.018	27.141	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	49.728
24	27.096	28.241	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	51.179
25	28.172	29.339	30.675	34.382	37.652	40.647	41.566	44.314	52.618
26	29.246	30.435	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	54.052
27	30.319	31.528	32.912	36.741	40.113	43.194	44.140	46.963	55.476
28	31.391	32.621	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	56.893
29	32.461	33.711	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	58.301
30	33.530	34.800	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	59.703

$$f(t;\nu)=\frac{1}{\sqrt{\nu}B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{1}{2}(\nu+1)} \tag{2-64}$$

式中 $B\left(\frac{1}{2},\ \frac{\nu}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{\nu}{2}-1}dx$，称为beta函数。对于服从$t$分布的$t$变量，其数学期望$E(t)=0$，方差$V(t)=\frac{\nu}{\nu-2}$。

t分布的图形见图2-3，从直观上可以看出，当ν较大时，t分布接近于标准正态分布。

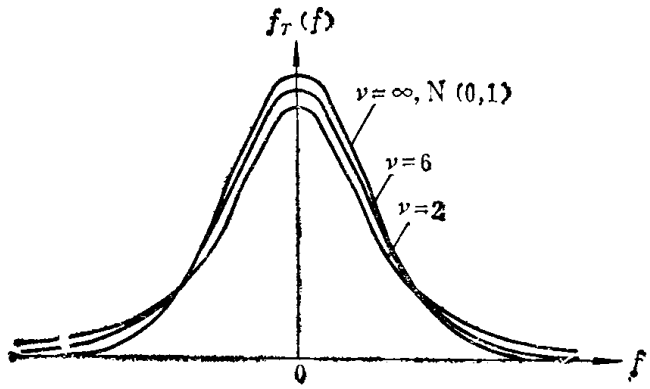


图 2-3 t 分布

表 2-3 给出了当 α 为不同数值时的双侧分位值和单侧分位值。

对于单侧 $P[t<t_\alpha]=\alpha$

或 $P[t>t_\alpha]=\alpha$

对于双侧 $P[t<t_{\alpha/2}]=\alpha/2$

及 $P[t>t_{\alpha/2}]=\alpha/2$

t 分布分位值　　表 2-3

ν	显著性水平						
	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005	0.001
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.3
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.2
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.232
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.160
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

注：显著性水平单侧为α，双侧为$\alpha/2$。

*F*分布

设随机变量X、Y相互独立，且依次服从χ^2_1及χ^2_2分布，自由度分别为ν_1和ν_2，则新的随机变量

$$F=\frac{X/\nu_1}{Y/\nu_2}$$

服从F分布，其概率密度函数为

$$f(F;\nu_1\nu_2)=\frac{1}{B\left(\frac{\nu_1}{2},\ \frac{\nu_2}{2}\right)}\nu_1^{\frac{\nu_1}{2}}\nu_2^{\frac{\nu_2}{2}}F^{\frac{\nu_1-2}{2}}\times(\nu_2+\nu_1F)^{-\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}$$

$$(0\leqslant F<\infty) \qquad (2\text{-}65)$$

式中 $B\left(\frac{\nu_1}{2},\ \frac{\nu_2}{2}\right)$beta函数。

F分布的概率函数曲线如图2-4所示，是一条偏态曲线，F_α为概率等于α的单侧上限分位值。表2-4给出了不同α值时的分位值$F_\alpha(\nu_1,\ \nu_2)$。

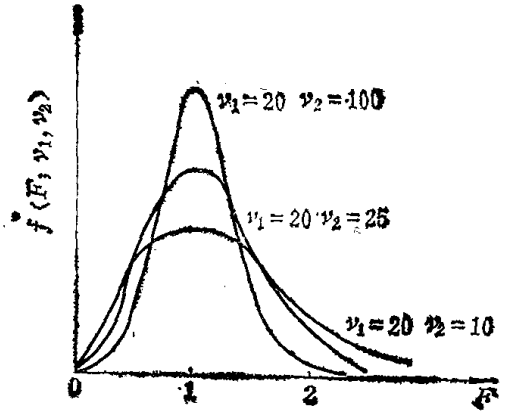
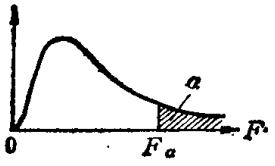


图 2-4 *F*分布

表 2-4

F分布上侧分位数$F_\alpha(\nu_1,\nu_2)$表

$$P(F>F_\alpha(\nu_1,\nu_2))=\alpha$$



$\alpha=0.10$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100
1	39.9	49.5	53.6	55.8	57.2	58.2	58.9	59.4	59.9	60.2	61.7	62.3	62.7	63.0
2	8.53	9.00	9.16	9.24	9.29	9.33	9.35	9.37	9.38	9.39	9.44	9.46	9.47	9.48
3	5.54	5.46	5.39	5.34	5.31	5.28	5.27	5.25	5.24	5.23	5.18	5.17	5.15	5.14
4	4.54	4.32	4.19	4.11	4.05	4.01	3.98	3.95	3.94	3.92	3.84	3.82	3.80	3.78
5	4.06	3.78	3.62	3.52	3.45	3.40	3.37	3.34	3.32	3.30	3.21	3.17	3.15	3.13
6	3.78	3.46	3.29	3.18	3.11	3.05	3.01	2.98	2.96	2.94	2.84	2.80	2.77	2.75
7	3.59	3.26	3.07	2.96	2.88	2.83	2.78	2.75	2.72	2.70	2.59	2.56	2.52	2.50
8	3.46	3.11	2.92	2.81	2.73	2.67	2.62	2.59	2.56	2.54	2.42	2.38	2.35	0.32
9	3.36	3.01	2.81	2.69	2.61	2.55	2.51	2.47	2.44	2.42	2.30	2.25	2.22	2.19
10	3.28	2.92	2.73	2.61	2.52	2.46	2.41	2.38	2.35	2.32	2.20	2.16	2.12	2.09

续表

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	50	100
11	3.23	2.86	2.66	2.54	2.45	2.39	2.34	2.30	2.27	2.25	2.12	2.08	2.04	2.00
12	3.18	2.81	2.61	2.48	2.39	2.33	2.28	2.24	2.21	2.19	2.06	2.01	1.97	1.94
13	3.14	2.76	2.56	2.43	2.35	2.28	2.23	2.20	2.16	2.14	2.01	1.96	1.91	1.90
14	3.10	2.73	2.52	2.39	2.31	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	1.96	1.91	1.87	1.85
15	3.07	2.70	2.49	2.36	2.27	2.21	2.16	2.12	2.09	2.06	1.92	1.87	1.83	1.79
16	3.05	2.67	2.46	2.33	2.24	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	1.89	1.84	1.79	1.76
17	3.03	2.64	2.44	2.31	2.22	2.15	2.10	2.06	2.03	2.00	1.86	1.81	1.76	1.73
18	3.01	2.62	2.42	2.28	2.19	2.13	2.08	2.04	2.00	1.98	1.84	1.78	1.73	1.70
19	2.99	2.60	2.40	2.27	2.18	2.11	2.06	2.02	1.98	1.96	1.81	1.76	1.71	1.67
20	2.97	2.59	2.38	2.25	2.16	2.09	2.04	2.00	1.96	1.94	1.79	1.74	1.69	1.65
22	2.95	2.56	2.35	2.22	2.13	2.06	2.01	1.97	1.93	1.90	1.76	1.70	1.65	1.61
24	2.93	2.54	2.33	2.19	2.10	2.04	1.98	1.94	1.91	1.88	1.73	1.67	1.62	1.58
26	2.91	2.52	2.31	2.17	2.08	2.01	1.96	1.92	1.88	1.86	1.70	1.65	1.59	1.55
28	2.89	2.50	2.29	2.16	2.06	2.00	1.94	1.90	1.86	1.84	1.68	1.62	1.57	1.53
30	2.88	2.49	2.28	2.14	2.05	1.98	1.93	1.88	1.85	1.82	1.67	1.61	1.55	1.51
40	2.84	2.44	2.23	2.09	2.00	1.93	1.87	1.83	1.79	1.76	1.61	1.54	1.48	1.43
60	2.79	2.39	2.18	2.04	1.95	1.87	1.82	1.77	1.74	1.71	1.54	1.48	1.41	1.36
120	2.75	2.35	2.13	1.99	1.90	1.82	1.77	1.72	1.68	1.65	1.48	1.41	1.34	1.27
∞	2.71	2.30	2.08	1.94	1.85	1.77	1.72	1.67	1.63	1.60	1.42	1.34	1.26	1.18

续表

$\alpha = 0.05$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	1 9.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40

续表

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.21	2.18	2.15	2.13	2.11
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.87	1.83	1.80	1.77	1.75
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69	1.67

续表

$\alpha = 0.05$

ν_2 \ ν_1	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100
1	246	246	247	248	248	249	249	249	250	250	251	252	252	252	253
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.69	8.68	8.67	8.67	8.66	8.65	8.64	8.63	8.62	8.62	8.59	8.58	8.57	8.56	8.55
4	5.84	5.83	5.82	5.81	5.80	5.79	5.77	5.76	5.75	5.75	5.72	5.70	5.69	5.67	5.66
5	4.60	4.59	4.58	4.57	4.56	4.54	4.53	4.52	4.50	4.50	4.46	4.44	4.43	4.41	4.41
6	3.92	3.91	3.90	3.88	3.87	3.86	3.84	3.83	3.82	3.81	3.77	3.75	3.74	3.72	3.71
7	3.49	3.48	3.47	3.46	3.44	3.43	3.41	3.40	3.39	3.38	3.34	3.32	3.30	3.29	3.27
8	3.20	3.19	3.17	3.16	3.15	3.13	3.12	3.10	3.09	3.08	3.04	3.02	3.01	2.99	2.97
9	2.99	2.97	2.96	2.95	2.94	2.92	2.90	2.89	2.87	2.86	2.83	2.80	2.79	2.77	2.76
10	2.83	2.81	2.80	2.78	2.77	2.75	2.74	2.72	2.71	2.70	2.66	2.64	2.62	2.60	2.59
11	2.70	2.69	2.67	2.66	2.65	2.63	2.61	2.59	2.58	2.57	2.53	2.51	2.49	2.47	2.46
12	2.60	2.58	2.57	2.56	2.54	2.52	2.51	2.49	2.48	2.47	2.43	2.40	2.38	2.36	2.35
13	2.51	2.50	2.48	2.47	2.46	2.44	2.42	2.41	2.39	2.38	2.34	2.31	2.30	2.27	2.26
14	2.44	2.43	2.41	2.40	2.39	2.37	2.35	2.33	2.32	2.31	2.27	2.24	2.22	2.20	2.19
15	2.38	2.37	2.35	2.34	2.33	2.31	2.29	2.27	2.26	2.25	2.20	2.18	2.16	2.14	2.12

续表

ν_2 \ ν_1	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100
16	2.33	2.32	2.30	2.29	2.28	2.25	2.24	2.22	2.21	2.19	2.15	2.12	2.11	2.08	2.07
17	2.29	2.27	2.26	2.24	2.23	2.21	2.19	2.17	2.16	2.15	2.10	2.08	2.06	2.03	2.02
18	2.25	2.23	2.22	2.20	2.19	2.17	2.15	2.13	2.12	2.11	2.06	2.04	2.02	1.99	1.98
19	2.21	2.20	2.18	2.17	2.16	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.03	2.00	1.98	1.96	1.94
20	2.18	2.17	2.15	2.14	2.12	2.10	2.08	2.07	2.05	2.04	1.99	1.97	1.95	1.92	1.91
22	2.13	2.11	2.10	2.08	2.07	2.05	2.03	2.01	2.00	1.98	1.94	1.91	1.89	1.86	1.85
24	2.09	2.07	2.05	2.04	2.03	2.00	1.98	1.97	1.95	1.94	1.89	1.86	1.84	1.82	1.80
26	2.05	2.03	2.02	2.00	1.99	1.97	1.95	1.93	1.91	1.90	1.85	1.82	1.80	1.78	1.76
28	2.02	2.00	1.99	1.97	1.96	1.93	1.91	1.90	1.88	1.87	1.82	1.79	1.77	1.74	1.73
30	1.99	1.98	1.96	1.95	1.93	1.91	1.89	1.87	1.85	1.84	1.79	1.76	1.74	1.71	1.70
40	1.90	1.89	1.87	1.85	1.84	1.81	1.79	1.77	1.76	1.74	1.69	1.66	1.64	1.61	1.59
50	1.85	1.83	1.81	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.70	1.69	1.63	1.60	1.58	1.54	1.52
60	1.82	1.80	1.78	1.76	1.75	1.72	1.70	1.68	1.66	1.65	1.59	1.56	1.53	1.50	1.48
80	1.77	1.75	1.73	1.72	1.70	1.68	1.65	1.63	1.62	1.60	1.54	1.51	1.48	1.45	1.43
100	1.75	1.73	1.71	1.69	1.68	1.65	1.63	1.61	1.59	1.57	1.52	1.48	1.45	1.41	1.39
120	1.72	1.70	1.69	1.67	1.66	1.63	1.61	1.58	1.57	1.55	1.50	1.46	1.43	1.39	1.37
∞	1.64	1.62	1.60	1.59	1.57	1.54	1.52	1.50	1.48	1.46	1.39	1.35	1.32	1.27	1.24

$\alpha = 0.01$

续表

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	27.0	26.9	26.9
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.4	14.3	14.2	14.2
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.00	4.90
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41

续表

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.82
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.56	2.52
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.55	2.50	2.44	2.39	2.35
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31	2.27
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31	2.26	2.22
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.40	2.34	2.28	2.23	2.19
∞	6.63	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.13	2.08	2.04

$\alpha = 0.01$ 续表

ν_2 \ ν_1	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100
2	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	26.8	26.8	26.8	26.7	26.7	26.6	26.6	26.6	26.5	26.5	26.4	26.4	26.3	26.3	26.2
4	14.2	14.1	14.1	14.0	14.0	14.0	13.9	13.9	13.9	13.8	13.7	13.7	13.7	13.6	13.6
5	9.68	9.64	9.61	9.58	9.55	9.51	9.47	9.43	9.40	9.38	9.29	9.24	9.20	9.16	9.13
6	7.52	7.48	7.45	7.42	7.40	7.35	7.31	7.28	7.25	7.23	7.14	7.09	7.06	7.01	6.99
7	6.27	6.24	6.21	6.18	6.16	6.11	6.07	6.04	6.02	5.99	5.91	5.86	5.82	5.78	5.75
8	5.48	5.44	5.41	5.38	5.36	5.32	5.28	5.25	5.22	5.20	5.12	5.07	5.03	4.99	4.96
9	4.92	4.89	4.86	4.83	4.81	4.77	4.73	4.70	4.67	4.65	4.57	4.52	4.48	4.44	4.42
10	4.52	4.49	4.46	4.43	4.41	4.36	4.33	4.30	4.27	4.25	4.17	4.12	4.08	4.04	4.01
11	4.21	4.18	4.15	4.12	4.10	4.06	4.02	3.99	3.96	3.94	3.86	3.81	3.78	3.73	3.71
12	3.97	3.94	3.91	3.88	3.86	3.82	3.78	3.75	3.72	3.70	3.62	3.57	3.54	3.49	3.47
13	3.78	3.75	3.72	3.69	3.66	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.43	3.38	3.34	3.30	3.27
14	3.62	3.59	3.56	3.53	3.51	3.46	3.43	3.40	3.37	3.35	3.27	3.22	3.18	3.14	3.11
15	3.49	3.45	3.42	3.40	3.37	3.33	3.29	3.26	3.24	3.21	3.13	3.08	3.05	3.00	2.98
16	3.37	3.34	3.31	3.28	3.26	3.22	3.18	3.15	3.12	3.10	3.02	2.97	2.93	2.89	2.86

续表

ν_2 \ ν_1	16	17	18	19	20	22	24	26	28	30	40	50	60	80	100
17	3.27	3.24	3.21	3.18	3.16	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.92	2.87	2.83	2.79	2.76
18	3.19	3.16	3.13	3.10	3.08	3.03	3.00	2.97	2.94	2.92	2.84	2.78	2.75	2.70	2.68
19	3.12	3.08	3.05	3.03	3.00	2.96	2.92	2.89	2.87	2.84	2.76	2.71	2.67	2.63	2.60
20	3.05	3.02	2.99	2.96	2.94	2.90	2.86	2.83	2.80	2.78	2.69	2.64	2.61	2.56	2.54
22	2.94	2.91	2.88	2.85	2.83	2.78	2.75	2.72	2.69	2.67	2.58	2.53	2.50	2.45	2.42
24	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.70	2.66	2.63	2.60	2.58	2.49	2.44	2.40	2.36	2.33
26	2.78	2.74	2.72	2.69	2.66	2.62	2.58	2.55	2.53	2.50	2.42	2.36	2.33	2.28	2.25
28	2.72	2.68	2.65	2.63	2.60	2.56	2.52	2.49	2.46	2.44	2.35	2.30	2.26	2.22	2.19
30	2.66	2.63	2.60	2.57	2.55	2.51	2.47	2.44	2.41	2.39	2.30	2.25	2.21	2.16	2.13
40	2.48	2.45	2.42	2.39	2.37	2.33	2.29	2.26	2.23	2.20	2.11	2.06	2.02	1.97	1.94
50	2.38	2.35	2.32	2.29	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.10	2.01	1.95	1.91	1.86	1.82
60	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.15	2.12	2.08	2.05	2.03	1.94	1.88	1.84	1.78	1.75
80	2.23	2.20	2.17	2.14	2.12	2.07	2.03	2.00	1.97	1.94	1.85	1.79	1.75	1.69	1.66
100	2.19	2.15	2.12	2.09	2.07	2.02	1.98	1.94	1.92	1.89	1.80	1.73	1.69	1.63	1.60
120	2.16	2.12	2.09	2.06	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.76	1.70	1.66	1.60	1.56
∞	2.00	1.97	1.93	1.96	1.88	1.83	1.79	1.76	1.72	1.70	1.59	1.52	1.47	1.40	1.36

第三节　随机变量的函数运算

在实际工程中，经常要估计某一变量与另一个或更多的基本变量之间的函数关系。如基本变量中的任一个是随机变量，则相关的变量也是随机变量，它的概率分布和各阶矩也与基本变量的概率分布和各阶矩存在着函数关系。

一、单一变量的函数关系

设单一变量的函数

$$Y = g(X)$$

当$Y = y$时，$X = x = g^{-1}(y)$，式中g^{-1}是g的反函数。假定$g(x)$是x的单调增加函数，并有单一的反函数$g^{-1}(y)$。因此

$$P(Y = y) = P(X = x) = P[x = g^{-1}(y)]$$

$$p_Y(y) = P_X[g^{-1}(y)]$$

$$P(Y \leqslant y) = P[x \leqslant g^{-1}(y)]$$

$$F_Y(y) = F_X[g^{-1}(y)]$$

对离散型变量X，

$$F_Y(y) = \Sigma p_X(x) \qquad (2\text{-}66)$$

对连续型变量X，

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(x)dx \qquad (2\text{-}67)$$

变换积分变量后可得

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} dy$$

概率密度函数为

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X[g^{-1}(y)] \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \qquad (2\text{-}68)$$

对于y随x增大而减少的情况

$$F_Y(y) = 1 - F_X[g^{-1}(y)]$$

$$f_Y(y) = -f_X[g^{-1}(y)]\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$$

$\frac{dg^{-1}(y)}{dy}$是负值，因此取

$$f_Y(y) = f_X[g^{-1}(y)]\left|\frac{dg^{-1}(y)}{dy}\right| \qquad (2\text{-}69)$$

二、多个变量的函数关系

考虑两个随机变量X和Y的函数

$$Z = g(X, Y)$$

则 PMF为$p_Z(z) = \sum_{g(x_i, y_i)=z} p_{X,Y}(x_i, y_i)$

CDF为$F_Z(z) = \sum_{g(x_i, y_i)\leq z} p_{X,Y}(x_i y_i)$

如果 $Z = X + Y$

$$p_Z(z) = \sum p_{X,Y}(x_i, z - x_i)$$

泊松分布随机变量之和

假如X和Y是两个独立的泊松分布变量，ν和μ为相应的参数，则

$$p_X(x) = \frac{(\nu t)^x}{x_!}e^{-\nu t}$$

$$p_Y(y) = \frac{(\mu t)^y}{y_!}e^{-\mu t}$$

如果 $Z = X + Y$

$$p_Z(z) = \sum p_{X,Y}(x, z - x)$$

$$= \sum \frac{(\nu t)^x(\mu t)^{z-x}}{x_!(z-x)_!}e^{-(\nu+\mu)t}$$

$$= e^{-(\nu+\mu)t} \cdot t^z \sum \frac{\nu^x \mu^{z-x}}{x_!(z-x)_!} \qquad (2\text{-}70)$$

式中的加和是$\frac{(\nu+\mu)^z}{z_!}$的二项展开式，因此

$$p_Z(z) = \frac{[(\nu+\mu)t]^z}{z_!}e^{-(\nu+\mu)t}$$

这说明Z亦是一个泊松分布，其参数为$(\nu+\mu)$，推广到多个泊松过程，

$$Z=\sum_{i=1}^{n}X_i$$

$$\nu_Z=\sum_{i=1}^{n}\nu_i$$

然而，两个泊松分布随机变量之差并不是一个泊松分布随机变量。

对于连续的随机变量X和Y的函数

$$Z=g(X,Y)$$

其概率分布函数为

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z}f_{X,Y}(g^{-1},y)\left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\right|dzdy \qquad (2\text{-}71)$$

概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(g^{-1},y)\left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\right|dy \qquad (2\text{-}72)$$

或

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X,Y}(x,g^{-1})\left|\frac{\partial g^{-1}}{\partial z}\right|dx \qquad (2\text{-}73)$$

在这两个公式中的g^{-1}的涵义是不同的。

如$Z=aX+bY$

我们有

$$x=\frac{z-by}{a},\quad \frac{\partial g^{-1}}{\partial z}=\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{a} \qquad (2\text{-}74)$$

则公式（2-72）变为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|a|}f_{X,Y}\left(\frac{z-by}{a},y\right)dy \qquad (2\text{-}75)$$

如果X和Y是相互独立的

$$f_Z(z)=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty}f_X\left(\frac{z-by}{a}\right)\cdot f_Y(y)dy \qquad (2\text{-}76)$$

几个随机变量之和（或差）的数学期望等于各个随机变量数学期望之和（或差）

$$E(X\pm Y)=E(X)\pm E(Y) \qquad (2\text{-}77)$$

几个两两独立的随机变量之和或差的方差均等于各个随机变量方差之和

$$V(X\pm Y\pm Z)=V(X)+V(Y)+V(Z) \qquad (2\text{-}78)$$

随机变量的积或商

如 $Z=X\cdot Y$

$$X=\frac{Z}{Y}$$

$$\frac{dx}{dz}=\frac{1}{y}$$

根据公式（2-72），我们有

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{1}{y}\right| f_{X,Y}\left(\frac{z}{y},y\right)dy \qquad (2\text{-}79)$$

如为商的情况

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|y|\, f_{X,Y}(zy,y)dy \qquad (2\text{-}80)$$

三、随机变量函数的矩

线性函数的平均值与方差　　$Y=aX+b$

式中a和b是常数

$$E(Y)=E(aX+b)=\int_{-\infty}^{\infty}(ax+b)f_X(x)dx$$

$$=a\int_{-\infty}^{\infty}xf_X(x)dx+b\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx$$

$$=aE(X)+b \qquad (2\text{-}81)$$

$$V(Y)=E[(Y-\mu_Y)^2]=E[(aX+b-a\mu_X-b)^2]$$

$$=a^2\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_x)^2f_X(x)dx$$

$$=a^2V(X) \qquad (2\text{-}82)$$

如果由两个基本变量构成函数

$$Y=a_1X_1+a_2X_2$$

$$E(Y)=a_1E(X_1)+a_2E(X_2) \qquad (2\text{-}83)$$

$$V(Y)=a_1^2V(X_1)+a_2^2V(X_2)+2a_1a_2COV(X_1,X_2) \quad (2\text{-}84)$$

$$Y=a_1X_1-a_2X_2$$

$$E(Y)=a_1E(X_1)-a_2E(X_2) \quad (2\text{-}85)$$

$$V(Y)=a_1^2V(X_1)+a_2^2V(X_2)-2a_1a_2COV(X_1,X_2) \quad (2\text{-}86)$$

对于X_1与X_2互相独立的情况，$COV(X_1,X_2)=0$，因此不论是和或差

$$V(Y)=a_1^2(X_1)+a_2^2(X_2) \quad (2\text{-}87)$$

如果是独立变量的乘积

$$Z=X_1\cdot X_2\cdots X_n$$

$$E(Z)=E(X_1)E(X_2)\cdots E(X_n) \quad (2\text{-}88)$$

$$V(Z)=E(X_1^2)E(X_2^2)\cdots E(X_n)-(\mu_{X_1}\mu_{X_2}\cdots\mu_{X_n})^2 \quad (2\text{-}89)$$

一般函数的平均值和方差

$$Y=g(X)$$

$$E(Y)\doteq g(\mu_X) \quad (2\text{-}90)$$

$$V(Y)\doteq V(X)\left(\frac{dg}{dX}\right)^2 \quad (2\text{-}91)$$

如果函数$g(X)$近似线性，用公式（2-90）（2-91）能得出很好的结果，当X的方差对于$g(\mu_X)$来说是很小时，即使函数是非线性也可以近似采用。

如取泰勒级数的高阶项，则可得到二阶近似的结果。

$$E(Y)=g(\mu_X)+\frac{1}{2}V(X)\frac{d^2g}{dX^2} \quad (2\text{-}92)$$

$$V(Y)=V(X)\left(\frac{dg}{dX}\right)^2-\frac{1}{4}V^2(X)\left(\frac{d^2g}{dX^2}\right)^2+E(X-\mu_X)^3\frac{dg}{dX}\quad\frac{d^2g}{dX^2}+\frac{1}{4}E(X-\mu_X)^4\left(\frac{d^2g}{dX^2}\right)^2 \quad (2\text{-}93)$$

第三章　岩土参数的统计分析

岩土工程的勘察、设计、施工过程常常是在不确定性条件下进行的。不确定性的客观原因在于岩土体性质及其工程性状具有较大的变异性，同时也由于工程师们难以对岩土体的特征了解得很多、很全面。在这种条件下进行决策，就要对试验观测到的数据进行尽可能详尽的统计分析，以充分利用有限的资料来得到更多规律性的认识，便于对岩土参数进行可靠的估计。这种估计建立在概率理论的基础上，所得的结果是岩土工程可靠性设计的基础。

在本章中将着重讨论数据的处理，以求得参数的经验分布、概率分布模型拟合和统计量，同时讨论了与方差分析、参数估计和回归分析有关的问题。

第一节　数据的整理与经验分布

为了预估岩土体的性状和各种结构物的行为特征，需要进行各种试验和观测，收集大量的数据。在取得这些数据之后，还必须经过处理才能显示出它的规律性，从而得到有代表性的特征值，供设计、分析与评价之用。特别在评价岩土工程的可靠性、估计失效概率时，更需要进一步了解岩土参数的概率分布特征。通常的方法是根据收集到的数据拟合某一概率模型，然后进行各种概率分析。

对同一对象，用相同的仪器与方法，在相同条件下多次重复测定或多次取样试验以测定同一物理量，但其结果并不完全相同。如果把得到的测定值按数值大小从小到大依次顺序排列，就得到变量的数列，称为值序统计量，形成一个经验的分布，称为经

验分布，这是定量研究的基础。

在讨论具体的经验分布以前，要先弄清楚几个统计的概念。上面讲到的多次测定的结果可以看作是从总体中抽取的一个子样，数据的个数 n（或 N）称为子样的样本容量，每一个数据称为个体，由 n 个个体构成一个子样，这些术语都是指概率统计计算而言的。总体是指概率统计计算所研究的全部元素组成的集合，而子样则是从总体中抽取的一部分元素的集合。组成总体的最小单位称为个体，n 个个体构成一个子样。子样所包含的个体数目是有限的，而总体所包含的个体数目可能是有限的，也可能是无限的。在岩土工程中，总体所包含的个体数目通常是无限的，或者是非常之多，从实用角度来看可以认为是无限的。

总体和子样是十分重要的基本概念，贯穿于各章内容之中，从某种意义上说，我们的研究工作所要解决的问题就是用子样统计的结果来估计总体特征，在子样和总体之间建立联系的桥梁，许多重要的规律都是在这个基本概念基础上建立的。

总体和子样的统计概念很容易和岩土工程中的地质单元和取土样相混淆。这是两类不同范畴的概念，尽管在某些方面它们之间确实存在着联系，但必须加以区别。为了在概念上区别开来，我们把所研究的地质单元称为目标总体，目标总体是有形的，具有物质性的。我们研究目标总体时要从不同方面不同角度来分析，因此描述目标总体特征的指标可能有很多，例如表示一个土层物理状态的指标有含水量、容重、液限、塑限等；表示其力学性状的指标有抗剪强度指标、压缩指数、压缩模量等。每一个指标，只要作为概率统计研究的对象就都有它自己的总体。因此一个目标总体可以有好几个总体依附于它，而总体则是目标总体的定量外观特征数据群。

对目标总体取样试验是岩土工程中经常发生的行为，这种行为与统计中的抽样是不同的。但是我们可以把取样试验所得到的结果，看成是从这个指标自己的总体中抽取的一个子样，样本容量和取土数量可以不相等。例如，从某一土层中共取50个土样，

每筒土都做了物理性指标，但其中有两筒土含水量试验有错，就只有48个含水量数据，此外用20个土样做三轴固结不排水剪，用15个土样分别做固结试验和直剪固结快剪试验。每筒土都做了容重试验。这样共得到七个指标（即w、γ、c_{cu}、ϕ_{cu}、c_{cq}、ϕ_{cq}、E_s），每个指标的样本容量并不完全相同，构成了七个子样，分别来自七个不同的总体，这七个总体从不同方面描述了目标总体的特征。这里的取土数量与各个指标子样的样本容量并不都是相等的。

下面我们讨论如何从一组数据中归纳出一个合适的经验分布来。这种分布无疑是子样的分布，总体的分布无法知道，只能根据子样的经验分布来估计总体的分布特征。

岩土参数实际上是一种连续变量，实测数据是从连续分布中得出的，然后把它们分配到一系列区间而变成离散的值，从而得到离散的经验分布。

划分区间数目的多少将会影响经验分布，区间数目过多或过少都是不合适的。区间数目应根据样本容量来确定，样本容量大的数据，区间可以多划一些，反之就应当取得少一些。区间数目M可以用sturges公式来估计[46]

$$M = 1 + 3.3\lg N \qquad (3\text{-}1)$$

已知数据的上限b和下限a，选择了区间数目M之后就可以求出区间间隔Δ

$$\Delta = \frac{b-a}{M}$$

有时为了使区间间隔Δ凑成一个比较整齐的数据，M值不一定严格按公式（3-1）计算的结果，可以适当加以调整。

划分区间以后，取每个区间的中值x'作为这个区间内所有数据的代表性数值，如某一区间内数据个数是f，则表示区间中值x'有f个权，f称为区间内数据出现的频数。统计频数的计数方法可以用散点图（图3-1）的方法。在散点图上标上数据的上、下限，标上每个区间的分界值和区间中值，将每个数据按座标点

到散点图上去，然后计数每个区间里出现的点数，即为频数 f。

对每个区间内数据出现的频数 f 加以归一化处理，即可求得每一个区间的频率 $\frac{f}{N}$，$N=\sum_{i=1}^{M} f$。按从小到大的次序，依次将小于等于区间中值的频数相加得到累计频数，作归一化处理后得每一个区间的累计频率，如依次将频率相加也能得到累计频率值。

将频率和累计频率分别绘制直方图，如图3-2，3-3所示。从图可以直观地看到经验分布的形态。如果数据不断增多，区间间隔减小，则阶梯形的直方图逐渐变成光滑的曲线。这两个直方图之间的相互关系等价于概率密度函数与概率分布函数之间的相互关系。

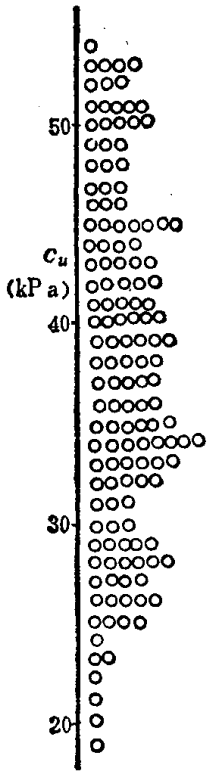


图 3-1　散点图

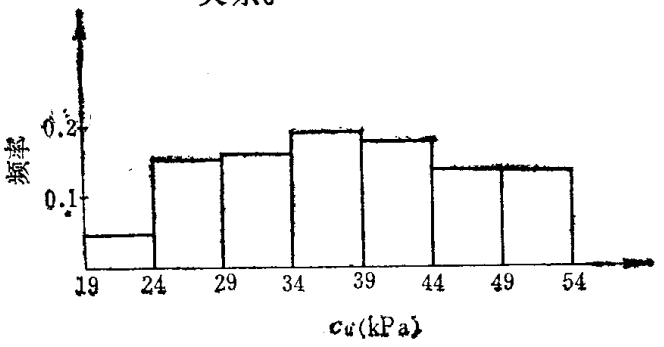


图 3-2　频率直方图

下面用软土十字板抗剪强度的实例来说明如何建立经验分布。原始数据见表3-1，共有145个数据，上限 $b=54$，下限 $a=19$，$b-a=35$，按公式(3-1)计算 $M=1+3.3\lg 145=8.13$　$\Delta=\frac{35}{8}=4.38$，如取 $M=7$，则 $\Delta=5$，是一个方便的数，因此划分为七个区间，绘制成的散点图见图3-1，计数每个区间的数据数目就可得到频数。

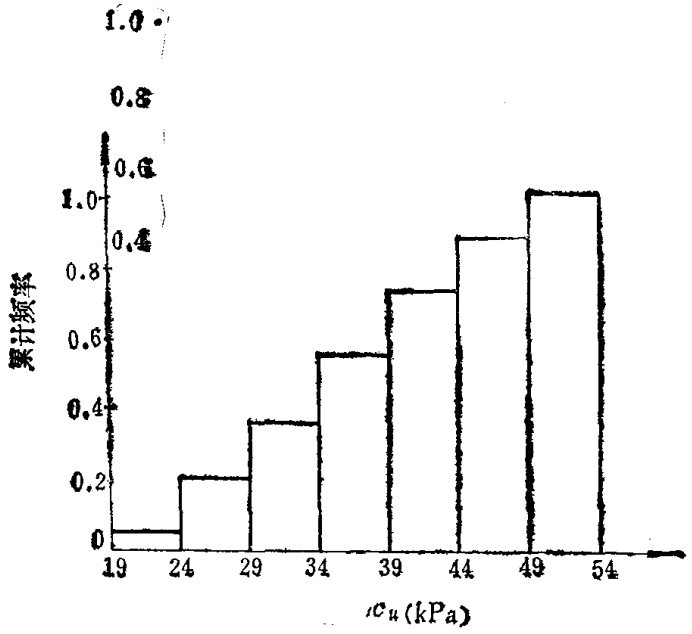


图 3-3　累计频率直方图

软土十字板抗剪强度原始数据（kPa）　　表 3-1

39	48	33	21	36	40	50	25	27	36
44	52	34	43	47	23	30	28	51	45
47	35	30	33	27	46	31	29	28	23
53	19	44	34	32	26	53	47	41	34
33	51	34	27	53	42	36	33	22	32
43	38	34	39	51	31	46	48	38	37
44	52	41	27	26	45	39	34	26	49
34	54	24	35	45	52	37	31	28	32
45	50	35	42	45	33	28	34	51	43
50	32	32	26	36	51	49	44	29	43
50	44	27	33	45	40	42	39	50	26
25	53	45	42	40	35	29	37	41	36
40	35	28	38	43	20	25	41	39	37
30	39	29	25	49	44	37	35	42	20
37	41	38	43	40					

根据散点图作业的结果，可以得到如表3-2所示的经验分布。

表3-2中，第一列是数据区间，每个区间的间隔$\Delta=5$；第二列是区间中值x'，作为每个区间内所有数据的代表性数据。如区间内数据的分布比较均匀，则中值的代表性就比较强，如分布偏于一侧，则有一定的误差，但这种误差有相互抵消的可能，并对以后的计算结果没有太大的影响；第三列是频数f，出现0.5频数的原因是因为有数据恰好落在区间界限上，于是给相邻两个区间各分配0.5的频数；第四列是频率，它是频数归一化后的数值，七个区间频率值的累加应当等于1；第五列是累计频率，它是频率项逐项累加的值。累计频率表示随机变量小于等于区间中值的可能性，实际上是概率的含义。

按表3-2所列的计算结果可以十分方便地画出图3-2（频率直方图）和图3-3（累计频率直方图）。

十字板抗剪强度的经验分布　　表 3- 2

数据区间	中值x'_i	频数f	频　率	累计频率
19～24	21.5	6.5	0.045	0.045
24～29	26.5	22.5	0.155	0.200
29～34	31.5	23	0.159	0.359
34～39	36.5	28	0.193	0.552
39～44	41.5	26	0.180	0.732
44～49	46.5	19.5	0.134	0.866
49～54	51.5	19.5	0.134	1.000

第二节　经验分布的矩

矩是最广泛的一种数字特征，数学期望和方差都是矩的一种。最常用的有两类，一类是原点矩，一类是中心矩。根据子样数据，可以求得经验分布的矩，它是一种统计量，作为总体的数

字特征的估值。

如N个随机变量X由X_1，X_2，……，X_N组成，X对于原点的k阶矩$E[X^k]$定义为

$$E[X^k]=\frac{X_1^k+X_2^k+\cdots+X_N^k}{N} \qquad (3\text{-}2)$$

k为正整数

当$k=1$时为一阶矩，$E[X']$就是X的期望值$\overline{X}_1$。

为了简化表示方法，我们把对于原点的k阶矩记为

$$E[X^k]=M_k$$

一阶矩$M_1=\overline{X}_1$。

如X_1，X_2，…，X_M各以频率f_1，f_2，…，f_M出现

$$M_k=\frac{f_1X_1^k+f_2X_2^k+\cdots+f_MX_M^k}{N} \qquad (3\text{-}3)$$

式中 $N=\sum_{i=1}^{M}f_i$

随机变量X的k阶对平均值$\overline{X}_1$的矩，又称为k阶中心矩，定义为

$$E[(X-\overline{X}_1)^k]=\frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i-\overline{X}_1)^k}{N} \qquad (3\text{-}4)$$

二阶中心矩（$k=2$）为X的方差$V(X)$，对于具有频率分别为f_1，f_2，…，f_M的随机变量，k阶中心矩为

$$E[(X-\overline{X}_1)^k]=\frac{f_1(X_1-\overline{X}_1)^k+f_2(X_2-\overline{X}_1)^k+\cdots+f_M(X_M-\overline{X}_1)^k}{N} \qquad (3\text{-}5)$$

式中 $N=\sum_{i=1}^{M}f_i$

k阶中心矩记为m_k

对于连续变量，k阶中心矩为

$$m_k=\int_a^b(x-M_1)^kf(x)dx$$

二阶中心矩

$$m_2 = \int_a^b (x - M_1)^2 f(x) dx = V[x] = S_x^2$$

已知

$$V[x] = E[x^2] - E^2[x]$$

故有

$$m_2 = M_2 - M_1^2 \qquad (3\text{-}6)$$

这是用原点矩来表示中心矩的方法。相应的其它阶中心矩来表示

$$m_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3 \qquad (3\text{-}7)$$

$$m_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4 \qquad (3\text{-}8)$$

三阶矩m_3和四阶矩m_4可用来表示经验分布的对称程度和陡峭程度。

对于对称的分布，所有的奇次中心矩都应当等于零，因此任何奇次中心矩都可以作为对称程度或偏倚程度的尺度。我们取最小的奇次中心矩——三次矩来表示。可是，中心矩是有量纲的数值，不便于用来比较不同量纲的指标。为了消去量纲，我们采用三阶中心矩的平方除以二阶中心矩的立方，得到一个称为偏度系数的指标β_1

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \qquad (3\text{-}9)$$

如β_1等于零，表示分布是对称的；如β_1不等于零，则要看m_3的符号。如m_3是正值，称为右偏、分布的长尾部在平均值的右侧；负值表示左偏，分布的长尾部在平均值的左侧。分布的形状如图3-4所示。

四阶中心矩是衡量分布峰度的尺度，无量纲系数是四阶中心矩除以二阶中心矩的平方，得峰度系数β_2

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} \qquad (3\text{-}10)$$

对于正态分布（称为中间峰度）$\beta_2 = 3$；低峰型的分布$\beta_2 <$

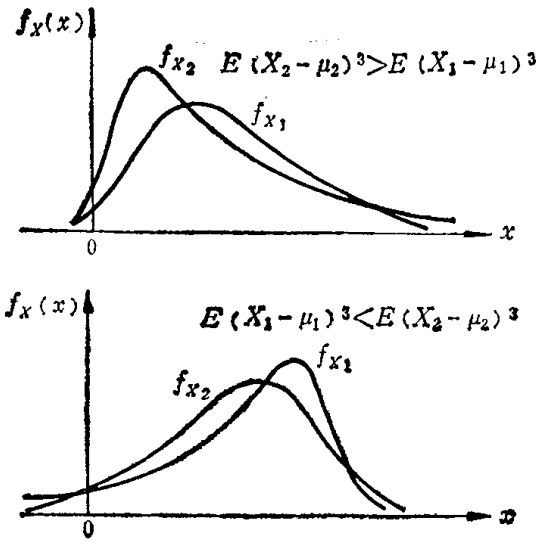


图 3-4　分布的偏度

3，均匀分布是其极限，$\beta_2=1.8$；高度型的分布$\beta_2>3$。其形状如图3-5所示。

在有些文献中[14]，用g_1表示偏度系数

$$g_1=\frac{m_3}{S_x^3}$$

与β_1比较，$g_1=\sqrt{\beta_1}$

g_2表示峰度系数

$$g_2=\frac{m_4}{m_2^2}-3$$

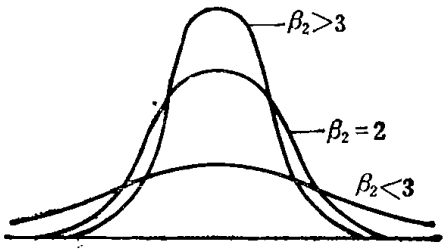


图 3-5　分布的峰度

与β_2比较，$g_2=\beta_2-3$。因此对正态分布来说，$g_2=0$，低峰型分布的g_2将是负值，高峰型分布的g_2是正值。

对于表3-2给出的经验分布，可以用矩法简捷地一次计算出数学期望、方差、偏度系数和峰度系数。

计算是用如表3-3所示的方法进行的。

令区间间隔为Δ（在表3-3中，$\Delta=5$），每个区间为等间

隔的，相邻区间中值之差总等于Δ。

矩法计算表　　表 3-3

区　间	中　值	f	y	fy	fy^2	fy^3	fy^4
19～24	21.5	6.5	－3	－19.5	58.5	－175.5	526.5
24～29	26.5	22.5	－2	－45	90	－180	360
29～34	31.5	23	－1	－23	23	－23	23
34～39	36.5	28	0	0	0	0	0
39～44	41.5	26	1	26	26	26	26
44～49	46.5	19.5	2	39	78	156	312
49～54	51.5	19.5	3	58.5	175.5	526.5	1579.5
	Σ	145	0	36	454	330	2842
			u_k	0.248	3.131	2.276	19.6

任取某一区间的中值为假定中心A（如表3-3中，$A=36.5$）对每一个区间可以计算对应于A的相对值y_i

$$y_i=\frac{x_i'-A}{\Delta} \qquad (3\text{-}11)$$

令u_k为k阶未调整原点矩

$$u_k=\frac{\Sigma f y^k}{N} \qquad (3\text{-}12)$$

$$N=\Sigma f$$

则k阶原点矩M_k由下式求得

$$M_k=\Delta^k u_k \qquad (3\text{-}13)$$

对于一阶矩

$$M_1=\Delta u_1$$

$$\bar{x}=A+\Delta u_1 \qquad (3\text{-}14)$$

令m_k为k阶中心矩，按（3-6）～（3-8）公式计算。

用表3-3中的数据代入（3-13）式求得k阶原点矩

$$M_1=5\times 0.245=1.240$$

$$M_2=5^2\times 3.131=78.275$$

$$M_3=5^3\times 2.276=284.5$$

$$M_4 = 5^4 \times 19.6 = 12250$$

数学期望值

$$\bar{x} = 36.5 + 1.240 = 37.74\text{kPa}$$

方差

$$S^2 = m_2 = M_2 - M_1^2 = 76.7$$

标准差估值

$$\hat{\sigma} = 8.76$$

三阶中心矩

$$m_3 = M_3 - 3M_1M_2 + 2M_1^3 = -2.870$$

四阶中心矩

$$m_4 = M_4 - 4M_1M_3 + 6M_1^2M_2 - 3M_1^4 = 11553.92$$

将数据代入公式（3-9）和（3-10）得

$$\beta_1 = \frac{m_3^2}{m_2^3} \doteq 0$$

$$\beta_2 = \frac{m_4}{m_2^2} = 1.97$$

可见表3-2所示的经验分布接近于对称，且分布较为平坦，接近于均匀分布。

第三节　概率分布模型的拟合

前面二节讨论了经验分布的统计方法以及经验分布统计量的计算。用数学期望、方差、偏度系数和峰度系数这四个统计量固然已经可以概略地反映了分布的特征，但并没有说明分布的全貌。为了进行概率运算，还需要了解分布的全貌，即用某一已知的函数来表示分布的概率密度函数，把经验分布拟合成一个概率分布模型。

把经验分布拟合成一个理论模型后，还要进行拟合优度检验，简称拟合检验。先建立统计假设H_0：假设随机变量X服从某一概率分布，然后在一定的显著性水平上来检验假设是否可

信。如果可信表示H_0成立，经验分布与假定的分布相差不太远，就认为随机变量符合假定的分布；反之，表示经验分布与假定的分布相差甚远，就有理由否定H_0。

假如经验分布已经统计好，第i区间的频数为f_i。根据统计假设中假定的分布，可以求得在经验分布各个区间上的理论概率P_i。若经验分布的样本容量是N，则NP_i是概率模型在第i个区间上的频数，称为理论频数。f_i与NP_i之差值反映了经验分布与假定分布之间的差别。取f_i-NP_i的平方就可以消去正负号抵消的影响，再给NP_i相除就得差别的相对值，将每个区间的这个相对值相加得到一个统计量D

$$D=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-NP_i)^2}{NP_i} \qquad (3\text{-}15)$$

其中$NP_i\neq 0$。

当$N\to\infty$时，统计量D趋向于χ^2分布。χ^2的临界值χ^2_α从表2-2中查得

$P[D>\chi^2_\alpha]=\alpha$，$\alpha$一般取0.05，如$D<\chi^2_\alpha$表示统计假设可信，$D>\chi^2_\alpha$表示统计假设不可信。

在查临界值时，自由度$\nu=k-a-1$，k为经验分布的区间数，a称为约束数。如果假设的概率分布的统计量是已知的，则约束数$a=0$；如果只给出分布的形状而不知分布的统计参数值，在计算P_i值时只好按样本给出的统计参数点估计值来确定，这时的约束数就是由样本估计的统计量个数，如期望值和方差，$a=2$。

为了计算的方便，对公式（3-15）的形式稍加修改，取标准化变量

$$z=\frac{x'-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x} \qquad (3\text{-}16)$$

这里用了两个统计量，故$a=2$。根据所假定的概率分布模型，用其概率密度函数$f(z)$值乘以区间的标准化间隔$\Delta z=z_{i+1}-z_i$，就能得到理论频率$P_i=f(z)\Delta z$。

令公式（3-15）中的 $f_i = N\frac{f_i}{N} = NP_i$，则统计量

$$D = N\sum_{i=1}^{R}\frac{(P_i - f(z)\Delta z)^2}{f(z)\Delta z} = N\sum_{i=1}^{k} d_i \qquad (3\text{-}17)$$

一、正态分布拟合

如假定的概率分布是正态分布，且每一个区间中值相对应的 z 值已求得，按 z 值查表3-4得正态分布的 $f(z)$ 值，然后按公式（3-17）计算统计量 D。如 $D < \chi^2_\alpha$，表示统计假设可信，随机变量符合正态分布；如 $D > \chi^2_\alpha$，表示统计假设不可信，随机变量不符合正态分布。

如已知随机变量的经验分布，拟合优度检验步骤如下：

第一步计算每个区间的标准化变量 z 值

$$z = \frac{x' - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}$$

第二步从标准正态分布概率密度表查得每个区间中值的理论概率密度值 $f(z)$。

第三步计算标准化了的区间间隔 Δz

$$\Delta z = \frac{\Delta}{\hat{\sigma}_x}$$

每个区间的理论频率为 $f(z)\Delta z$。

第四步计算每个区间的统计量 d_i 及总的统计量 D。

第五步按自由度 ν 和 $\alpha = 0.05$ 查 $\chi^2_{0.05}$ 值，比较 D 与 $\chi^2_{0.05}$ 来检验拟合优度。

【例】

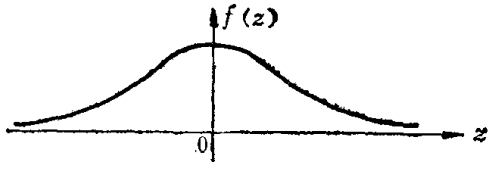
软土的压缩指数 C_c 的样本容量 $N = 70$，平均值 $\overline{C_c} = 0.376$，标准差 $\hat{\sigma} = 0.106$，检验是否符合正态分布。已知经验分布如表3-5所示，其分为10个区间，$k = 10$。区间中值 x' 和频率 P_i 分别列于表3-5中的第1列和第2列。

按公式（3-16）计算每个区间中值的标准化变量 z 示于表中的第3列。

假设压缩指数 C_c 符合正态分布，查表3-4得每个区间的理论

标准正态概率密度函数表　　表 3-4

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left|-\frac{z^2}{2}\right|$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	.39894	.39892	.39886	.39876	.39862	.39844	.39822	.39797	.39767	.39733
.1	.39695	.39654	.39608	.39559	.39505	.39448	.39387	.39322	.39253	.39181
.2	.39104	.39024	.38940	.38853	.38762	.38667	.38568	.38466	.38361	.38251
.3	.38139	.38023	.37903	.37780	.37654	.37524	.37391	.37255	.37115	.36973
.4	.36827	.36678	.36526	.36371	.36213	.36053	.35889	.35723	.35553	.35381
.5	.35207	.35029	.34849	.34667	.34482	.34294	.34105	.33912	.33718	.33521
.6	.33322	.33121	.32918	.32713	.32506	.32297	.32086	.31874	.31659	.31443
.7	.31225	.31006	.30785	.30563	.30339	.30114	.29887	.29659	.29431	.29200
.8	.28969	.28737	.28504	.28269	.28034	.27798	.27562	.27324	.27086	.26848
.9	.26609	.26369	.26129	.25888	.25647	.25406	.25164	.24923	.24681	.24439
1.0	.24197	.23955	.23713	.23471	.23230	.22988	.22747	.22506	.22265	.22025
1.1	.21785	.21546	.21307	.21069	.20831	.20594	.20357	.20121	.19886	.19652
1.2	.19419	.19186	.18954	.18724	.18494	.18265	.18037	.17810	.17585	.17360
1.3	.17137	.16915	.16694	.16474	.16256	.16038	.15822	.15608	.15395	.15183
1.4	.14973	.14764	.14556	.14350	.14145	.13943	.13742	.13542	.13344	.13147
1.5	.12952	.12758	.12566	.12376	.12188	.12001	.11816	.11632	.11450	.11270
1.6	.11092	.10915	.10741	.10567	.10396	.10226	.10059	.09893	.09728	.09566
1.7	.09405	.09246	.09089	.08933	.08780	.08628	.08478	.08329	.08183	.08038
1.8	.07895	.07754	.07614	.07477	.07341	.07206	.07074	.06943	.06814	.06687
1.9	.06562	.06438	.06316	.06195	.06077	.05959	.05844	.05730	.05618	.05508
2.0	.05399	.05292	.05186	.05082	.04980	.04879	.04780	.04682	.04586	.04491
2.1	.04398	.04307	.04217	.04128	.04041	.03955	.03871	.03788	.03706	.03626
2.2	.03547	.03470	.03394	.03319	.03246	.03174	.03103	.03034	.02965	.02898
2.3	.02833	.02768	.02705	.02643	.02582	.02522	.02463	.02406	.02349	.02294
2.4	.02239	.02186	.02134	.02083	.02033	.01984	.01936	.01888	.01842	.01797
2.5	.01753	.01709	.01667	.01625	.01585	.01545	.01506	.01468	.01431	.01394
2.6	.01358	.01323	.01289	.01256	.01223	.01191	.01160	.01130	.01100	.01071
2.7	.01042	.01014	.00987	.00961	.00935	.00909	.00885	.00861	.00837	.00814
2.8	.00792	.00770	.00748	.00727	.00707	.00687	.00668	.00649	.00631	.00613
2.9	.00595	.00578	.00562	.00545	.00530	.00514	.00499	.00485	.00470	.00457
3.0	.00443	.00430	.00417	.00405	.00393	.00381	.00370	.00358	.00348	.00337
3.1	.00327	.00317	.00307	.00298	.00288	.00279	.00271	.00262	.00254	.00246
3.2	.00238	.00231	.00224	.00216	.00210	.00203	.00196	.00190	.00184	.00178
3.3	.00172	.00167	.00161	.00156	.00151	.00146	.00141	.00136	.00132	.00127
3.4	.00123	.00119	.00115	.00111	.00107	.00104	.00100	.00097	.00094	.00090
3.5	.00087	.00084	.00081	.00079	.00076	.00073	.00071	.00068	.00066	.00063
3.6	.00061	.00059	.00057	.00055	.00053	.00051	.00049	.00047	.00046	.00044
3.7	.00042	.00041	.00039	.00038	.00037	.00035	.00034	.00033	.00031	.00030
3.8	.00029	.00028	.00027	.00026	.00025	.00024	.00023	.00022	.00021	.00021
3.9	.00020	.00019	.00018	.00018	.00017	.00016	.00015	.00015	.00014	.00014

压缩指数正态拟合优度检验　　表 3-5

区间编号	1	2	3	4	5	6
	x'	P_i	z	$f(z)$	$f(z)\Delta z$	$d_i\times10^{-3}$
1	0.125	0.0143	−2.37	0.0241	0.0114	0.738
2	0.175	0.0143	−1.90	0.0656	0.0309	8.918
3	0.225	0.0571	−1.42	0.1456	0.0687	1.959
4	0.275	0.1857	−0.95	0.2541	0.1199	36.110
5	0.325	0.1857	−0.48	0.3555	0.1677	1.932
6	0.375	0.1571	0	0.3989	0.1882	5.139
7	0.425	0.1286	0.46	0.3589	0.1693	9.784
8	0.475	0.1000	0.93	0.2589	0.1221	4.000
9	0.525	0.0857	1.40	0.1497	0.0706	3.230
10	0.575	0.0714	1.88	0.0681	0.0321	48.115

概率密度$f(z)$示于表中的第 4 列。

计算标准化的变量区间间隔Δz

$$\Delta z=\frac{\Delta}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}}=\frac{0.05}{0.106}=0.47$$

表中第 5 列为理论频率$f(z)\Delta z$。

表中第6列为按公式（3-17）计算的d_i值。

计算统计量D

$$D=N\Sigma d_i=70\times0.1199=8.393$$

自由度$\nu=10-2-1=7$，$\alpha=0.05$，查表 2-2 得$\chi^2_{0.05}=14.07$，$D<\chi^2_{0.05}$表示在 0.05显著性水平上可以接受正态分布的假设。

在岩土工程中正态分布假定用得最为普遍，这不仅是为了数学上处理的方便，而且亦为许多拟合检验所证实[13][29]。

采用正态分布的主要理论根据是中心极限定理，这个定理讨论的是独立和的分布函数向正态分布收敛的最普遍条件，论证了当N足够大的时候，N个互相独立的随机变量的数列是趋近于正态分布的。

但是，正态分布也有它固有的弱点，它规定随机变量在整个

实数轴上都有定义，分布的两个尾部延伸到正、负无穷处，尽管在远离平均值的地方随机变量出现的可能性已经很小，但怎还存在着一个小概率，其值为百分之几或者千分之几，这样小的概率在一般情况下可以忽略，但在估计系统失效概率时，即使是百分之零点几的概率也是不容忽略的。因为一般允许的失效概率是在$10^{-3}\sim10^{-4}$数量级。这时，计算分布尾部小概率的误差就成为估计失效概率的关键问题。用正态分布假定会使估计的失效概率偏大，甚至大得完全失真，使估算的结果失去了实际意义。

正态分布的局限性不仅在于尾部小概率的数值对失效概率的影响，更重要的还在于物理机理上的失真。许多岩土参数仅在有限范围内是有定义的，超出了这个范围便失去了物理意义。例如，对于一定级配的土来讲，孔隙比的下限是颗粒完全接触时的孔隙比，即最小孔隙比，其值不可能为零，更不可能是负值；土的抗剪强度可能减小到零，但负值是没有意义的；同样，接近于零的压缩模量也是不可思议的。由此可见，岩土参数的物理机理所规定的有限定义域与正态分布的无限定义域之间存在着矛盾，用正态分布假定估计的尾部概率中有相当一部分是不可能出现的概率，这就是正态概率估计失真的内在物理原因。

当然，并不是说正态分布假定就没有实用价值了。正态分布如用以估计中央部分的大概率，或用以分析在均值附近的变异规律，正态分布还是有它的优越性，利用标准正态分布表使概率估计的计算工作大大简化，而且误差也不大。因此，岩土参数分布的双重假定，应当是允许的，根据所研究的问题性质，可以采用不同的分布假定。

二、β分布拟合

前面已经说过，并不是所有的设计参数都符合正态分布的。如经过χ^2拟合度检验，否定了正态分布的假设，就必须采用其它分布来拟合试验数据；或者虽然经χ^2拟合度检验，说明在5%显著性水平上，这些参数能作为正态分布变量，但在它们的尾部上与正态分布差别过大；或者设计参数具有明显的有限范围，用

正态分布会对所计算的问题带来过大的误差；或者试验数据的分布具有明显的不对称性。这些情况都需要寻求更适合于经验分布的特殊模型。这时用易变的β分布是最合适的了，β分布是一种适应性非常广泛的模型，当调整它的两个参数时，分布的形状就会发生变化，因此β分布适宜用于模拟各种有规律的连续型随机变量的分布。

β分布的概率密度函数为

$$f_x(x)=\frac{(b-a)^{-(1+\alpha+\beta)}}{B(\alpha+1,\beta+1)}(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta} \quad (3\text{-}18)$$

$a\leqslant x\leqslant b,\ \beta>-1,\ \alpha>-1$

式中 a和b分别为分布有限范围的下限和上限；

α和β为分布的尺度参数；

$B(\alpha+1,\ \beta+1)$为beta函数；

$$B(\alpha+1,\beta+1)=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

$\Gamma(\ \ )$为gamma(γ)函数

β分布的概率密度函数亦可用下式表示

$$f_x(x)=\frac{1}{(b-a)B(\alpha+1,\ \beta+1)}\times\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{\alpha}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^{\beta} \quad (3\text{-}19)$$

尺度参数α和β对分布形状的影响列于表3-6。某些例子见图3-6。

尺度参数α和β是用实测数据来估计的。下面讨论分布的数学期望、方差与α、β参数的关系。

设变量x分布在a、b范围内，取归一化变量

$$y=\frac{x-a}{b-a} \qquad 0<y<1$$

y的概率密度函数为

$$f_Y(y)=\frac{1}{B(\alpha+1,\ \beta+1)}y^{\alpha}(1-y)^{\beta} \quad (3\text{-}20)$$

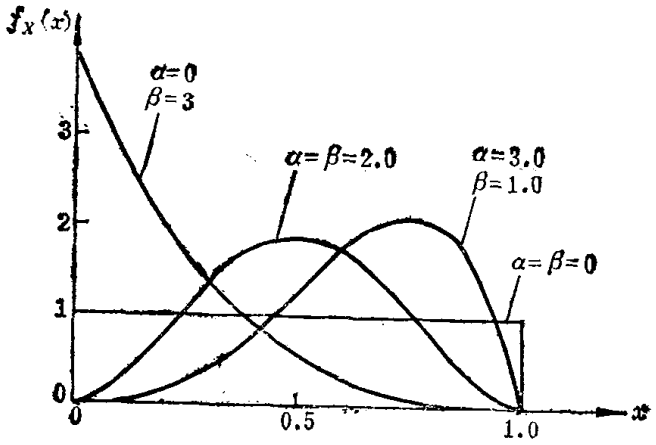


图 3-6 β分布概率密度函数

α和β变化对分布形状的影响 表 3-6

α 和 β 的 数 值	分 布 的 形 状
$\alpha=0$, $\beta=0$	矩形或均匀分布
$\alpha=0$, $\beta=1$或$\alpha=1$, $\beta=0$	三角形分布
$\alpha=\beta$	对称于$\frac{a+b}{2}$
$\beta>\alpha$	右 偏
$\alpha>\beta$	左 偏
$\alpha<0$, $\beta<0$	U形分布
$\alpha\geqslant 0$, $\beta<0$	J形分布
$\alpha\leqslant 0$, $\beta>0$	反J形分布
在$x=a+\alpha(b-a)/(\alpha+\beta)$处 α和β符号相同时	钟形分布(一般偏倚)

注 当α和β两个参数的值互相对换时，分布图象在[a, b]范围内产生对称交换。

$$f_X(x)=f_Y(y)(b-a)^{-1}\text{或}f_Y(y)=f_X(x)(b-a)$$

归一化变量y的数学期望和方差分别为

$$E[y]=\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta+2} \qquad (3\text{-}21)$$

$$V[y]=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{(\alpha+\beta+2)^2(\alpha+\beta+3)} \qquad (3\text{-}22)$$

尺度参数α和β由上面两式联立解得

$$\alpha=\frac{E^2[y]}{V[y]}(1-E[y])-(1-E[y]) \qquad (3\text{-}23)$$

$$\beta=\frac{\alpha+1}{E[y]}-(\alpha+2) \qquad (3\text{-}24)$$

从归一化变量表达式可知

$$E[y]=\frac{E[x]-a}{b-a}=\frac{\overline{x}-a}{b-a} \qquad (3\text{-}25)$$

$$V[y]=\frac{1}{(b-a)^2}V[x]=\left(\frac{\hat{\sigma}}{b-a}\right)^2 \qquad (3\text{-}26)$$

对于已知的实测数据，可以求得它的子样平均值$\overline{x}$和子样方差估值$\hat{\sigma}^2$，用公式（3-25）和（3-26）可分别求得归一化变量的数学期望和方差，然后代入公式（3-23）和（3-24）即可得到尺度参数α和β。

求得尺度参数α和β后，可应用Γ函数表按Γ函数运算规律计算β分布中的B函数。

Γ函数用$\Gamma(C)$表示，定义为

$$\Gamma(C)=\int_0^\infty x^{C-1}e^{-x}dx$$

当$C>0$时，上式是收敛的。

Γ函数的递推或循环公式是

$$\Gamma(C+1)=C\Gamma(C)$$

当$C=1$时 $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$，于是

$$\Gamma(1)=1$$

$$\Gamma(2)=1\Gamma(1)=1!$$

$$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!$$

一般表达式为

$$\Gamma(N+1)=N!$$

或者

$$\Gamma(N)=(N-1)!$$

由循环公式得

$$\Gamma(C)=\frac{\Gamma(C+1)}{C}=\frac{\Gamma(C+2)}{C(C+1)}=\frac{\Gamma(C+3)}{C(C+1)(C+2)}$$

$$=\cdots=\frac{\Gamma(C+k+1)}{C(C+1)(C+2)\cdots(C+k)} \qquad (3\text{-}27)$$

因此

$$\Gamma(C+k+1)=C(C+1)(C+2)\cdots(C+k)\Gamma(C)$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots \qquad (3\text{-}28)$$

运用上述规律，可以根据表（3-7）给出的Γ函数表（表中$\Gamma(C)$的C值仅在1～2之间）计算任意值的Γ函数。当C小于1时，可用公式（3-27）计算。

【例】

用表（3-7）计算$\Gamma(3.5)$

我们希望把查表用的变量减少到大于等于1且小于等于2，可取整数（必须是整数）$k=1$，查表用的变量$C=3.5-1-k=1.5$，查表3-7$\Gamma(1.5)=0.8862$得

$$\Gamma(3.5)=(1.5)(2.5)\Gamma(1.5)=1.5\times2.5\times0.8862=3.323$$

【例】

计算$\Gamma(-2.5)$

这里我们需要$1\leqslant(-2.5+k+1)\leqslant2$，故取$k=3$，使$-2.5+k+1=1.5$，根据公式（3-27）

$$\Gamma(-2.5)=\frac{\Gamma(1.5)}{(-2.5)(-1.5)(-0.5)(0.5)}$$

$$=\frac{\Gamma(1.5)}{-0.9375}=-0.945$$

【例】

计算B函数$B(3.5,\ -2.5)$

利用上面两个例子的结果计算

gamma 函 数 表 表 3-7

C	$\Gamma(C)$	C	$\Gamma(C)$	C	$\Gamma(C)$	C	$\Gamma(C)$
1.00	1.00000	1.25	0.90640	1.50	0.88623	1.75	0.91906
1.01	0.99433	1.26	0.90440	1.51	0.88659	1.76	0.92137
1.02	0.98884	1.27	0.90250	1.52	0.88704	1.77	0.92376
1.03	0.98355	1.28	0.90072	1.53	0.88757	1.78	0.92623
1.04	0.97844	1.29	0.89904	1.54	0.88818	1.79	0.92877
1.05	0.97350	1.30	0.89747	1.55	0.88887	1.80	0.93138
1.06	0.96874	1.31	0.89600	1.56	0.88964	1.81	0.93408
1.07	0.96415	1.32	0.89464	1.57	0.89049	1.82	0.93685
1.08	0.95973	1.33	0.89338	1.58	0.89142	1.83	0.93969
1.09	0.95546	1.34	0.89222	1.59	0.89243	1.84	0.94261
1.10	0.95135	1.35	0.89115	1.60	0.89352	1.85	0.94561
1.11	0.94740	1.36	0.89018	1.61	0.89468	1.86	0.94869
1.12	0.94359	1.37	0.88931	1.62	0.89592	1.87	0.95184
1.13	0.93993	1.38	0.88854	1.63	0.89724	1.88	0.95507
1.14	0.93642	1.39	0.88785	1.64	0.89864	1.89	0.95838
1.15	0.93304	1.40	0.88726	1.65	0.90012	1.90	0.96177
1.16	0.92980	1.41	0.88676	1.66	0.90167	1.91	0.96523
1.17	0.92670	1.42	0.88636	1.67	0.90330	1.92	0.96877
1.18	0.92373	1.43	0.88604	1.68	0.90500	1.93	0.97240
1.19	0.92089	1.44	0.88581	1.69	0.90678	1.94	0.97610
1.20	0.91817	1.45	0.88566	1.70	0.90864	1.95	0.97988
1.21	0.91558	1.46	0.88560	1.71	0.91057	1.96	0.98374
1.22	0.91311	1.47	0.88563	1.72	0.91258	1.97	0.98768
1.23	0.91075	1.48	0.88575	1.73	0.91467	1.98	0.99171
1.24	0.90852	1.49	0.88595	1.74	0.91683	1.99	0.99581
						2.00	1.00000

不排水剪强度c,的经验分布 表 3-8

数据区间 (kPa)	中值 x_i(kPa)	频率 P_i(%)	拟合值 P_i'(%)
15～20	17.5	9	12.5
20～25	22.5	18	19.7
25～30	27.5	25.4	21.8
30～35	32.5	19.7	20.1
35～40	37.5	17.2	15.8
40～45	42.5	6.6	8.3
45～50	47.5	4.1	2.8

注：数据总数$N=122$

$$B(3.5,\ -2.5)=\frac{\Gamma(3.5)\Gamma(-2.5)}{\Gamma(3.5-2.5)}$$

$$=\frac{(3.323)(-0.945)}{1}=-3.140$$

【例】

已知软土的不排水剪强度c_u的经验分布如表3-8所示，试用β分布逼近这组数据，求经验分布的概率密度函数。

在表3-8中，P_i'表示第i个区间内拟合分布出现的频率，亦可以看作是中值x_i'出现的频率。P_i'与概率密度有如下的关系

$$P_i'=f(x)\Delta=f(x)\frac{b-a}{k}$$

以公式（3-18）β分布的概率密度函数代入

$$P_i'=\frac{(b-a)^{-(\alpha+\beta)}}{kB(\alpha+1,\beta+1)}(x-a)^{\alpha}(b-x)^{\beta}\qquad(3\text{-}29)$$

实测数据的数学期望$E[x]$和方差$V[x]$用矩法求得

$$\overline{c_u}=E[x]=\Sigma x_i'P_i=30.2(\mathrm{kPa})$$

$$\hat{\sigma}^2=V[x]=\Sigma(x_i'-\overline{x})^2P_i=59.5(\mathrm{kPa})^2$$

代入公式（3-25）和（3-26）可分别求得归一化变量y的数学期望$E[y]$和方差$V[y]$

$$E[y]=\frac{E[x]-a}{b-a}=\frac{30.2-15.0}{50.0-15.0}=0.43$$

$$V[y]=\frac{V[x]}{(b-a)^2}=\frac{59.5}{(50.0-15.0)^2}=0.05$$

尺度参数α和β可用公式（3-23）和（3-24）求得

$$\alpha=\frac{E^2[y]}{V[y]}(1-E[y])-(1+E[y])$$

$$=\frac{0.43^2}{0.05}(1-0.43)-(1+0.43)=0.68$$

$$\beta=\frac{\alpha+1}{E[y]}-(\alpha+2)=\frac{0.68+1}{0.43}-(0.68+2)=1.23$$

B函数可用Γ函数表求得

$$B(1.68,\ 2.23)=\frac{\Gamma(1.68)\Gamma(2.23)}{\Gamma(1.68+2.23)}$$

$$\Gamma(1.68)=0.905\text{（查表3-7）}$$

$$\Gamma(2.23)=\Gamma(1.23+1)=1.23\Gamma(1.23)=1.23\times0.91$$
$$=1.119$$

$$\Gamma(3.91)=\Gamma(1.91+1+1)=1.91\times2.91\times\Gamma(1.91)=5.364$$

$$B(1.68,\ 2.23)=\frac{0.905\times1.119}{5.364}=0.189$$

将上面的计算结果代入公式（3-20）和（3-18）即可求得不排水强度c_u的β分布概率密度函数。

用归一化变量表示

$$f_Y(y)=5.29y^{0.68}(1-y)^{1.23}\qquad(3\text{-}30)$$

用原变量表示

$$f_X(x)=1.70\times10^{-4}(x-15.0)^{0.68}(50.0-x)^{1.23}\qquad(3\text{-}31)$$

为了与各区间的频率P_i相比较，以检验经验分布与实测资料的符合程度，按下式计算β分布的拟合值

$$P_i'=8.5\times10^{-4}(x-15.0)^{0.68}(50.0-x)^{1.23}$$

计算结果示于表3-8中。

将表3-8中的频率值和拟合值分别画直方图如图3-7所示。从图可以看出用β分布得出的直方图比正态分布更加接近于实测频率直方图。从图3-7还可以看出，不排水剪强度c_u实测数据呈偏态分布，长尾在右边，称为右偏。β分布拟合所得的尺度参数$\beta>\alpha$，亦表明分布是右偏。因此，我们可以直接根据尺度参数α和β的数值来判断分布的形状而不必画出直方图。

为了定量地说明分布的偏倚程度，我们用公式（3-32）计算β分布的偏度系数β_1

$$\sqrt{\beta_1}=\frac{2(\beta-\alpha)}{(\alpha+\beta+4)}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+3}{(\alpha+1)(\beta+1)}}\qquad(3\text{-}32)$$

峰度系数β_2用以量度分布的陡峭程度，对于β分布，β_2可用下式计算

$$\beta_2=\frac{3(\alpha+\beta+3)[2(\alpha-\beta)^2+(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+4)]}{(\alpha+1)(\beta+1)(\alpha+\beta+4)(\alpha+\beta+5)}$$

（3-33）

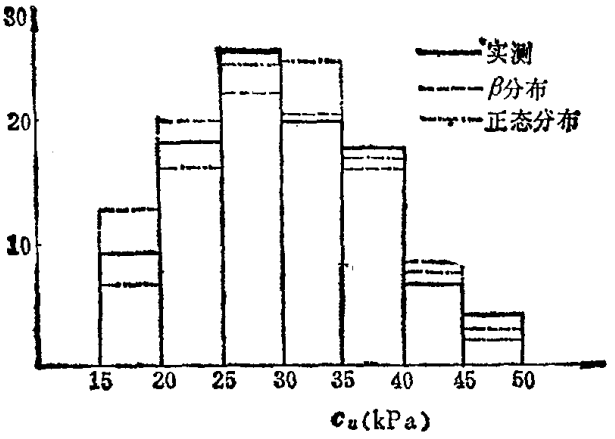


图 3-7 β分布拟合

【例】

试计算上例不排水剪强度c_u分布的偏度系数和峰度系数

已知$\alpha = 0.68$，$\beta = 1.23$

代入公式（3-32）得

$$\sqrt{\beta_1} = \frac{2(1.23-0.68)}{(1.23+0.68+4)}\sqrt{\frac{1.23+0.68+3}{1.68\times 2.23}} = 0.213$$

$$\beta_1 = 0.045\ (\alpha < \beta \text{故取正值})$$

$$\beta_2 = \frac{3\times 4.91[2\times 0.55^2 + 1.68\times 2.23\times 5.91]}{1.68\times 2.23\times 5.91\times 6.91} = 2.19$$

可见不排水抗剪强度c_u的经验分布稍稍右偏，但峰度系数远小于3，是比正态分布平坦得多的一种分布。

拟合β分布之后，也需经χ^2拟合优度检验，如统计量D小于χ^2_α，表示统计假设可信，接受β分布；否则就拒绝接受β分布假设。

现以软土的十字板抗剪强度s_v为例来说明β分布与正态分布χ^2拟合优度检验结果的比较。

十字板抗剪强度s_v的样本容量为145，已求得数学期望为37.7

kPa，方差77（kPa）²，尺度参数 $\alpha=0.58$，$\beta=0.38$，得概率密度函数为

$$f(x)=2.14\times10^{-3}(s_v-19)^{0.58}(54-s_v)^{0.38}$$

拟合值 $P_i'=10.7\times10^{-3}(s_v-19)^{0.58}(54-s_v)^{0.38}$

χ^2拟合优度检验如表3-9所示

β分布χ^2拟合优度检验　　表 3-9

x_i'	P_i	P_i'	$d_i\times10^{-3}$
21.5	0.045	0.068	7.779
26.5	0.159	0.121	11.934
31.5	0.155	0.151	0.105
36.5	0.193	0.166	4.392
41.5	0.179	0.154	4.058
46.5	0.134	0.157	3.369
51.5	0.134	0.114	3.509
			$\Sigma35.146\times10^{-3}$

$$D=145\times0.035=5.075<\chi^2_{0.05}\ (9.488)$$

说明可以接受β分布模型；对同一组数据用正态分布拟合，得D值为25.90，超过9.488甚多，说明应拒绝接受正态分布模型。

在β分布概率密度函数曲线下，从下限a算起的某一尾部面积K相对应的分位值X_K由下式求得

$$x_K=a+F(b-a)\qquad(3\text{-}34)$$

F按K值查图3-8，由不同的α与β值查得。

【例】

计算不排水抗剪强度c_u的β分布尾部面积$K=5\%$的分位值$c_{u,0.05}$

已知　$\alpha=0.68$，$\beta=1.23$，$a=15.0$，$b=50.0$

从图3-8查得$F=0.10$，代入公式（3-34）

$c_{u,0.05}=15.0+0.10(50.0-15.0)=18.5$（kPa）

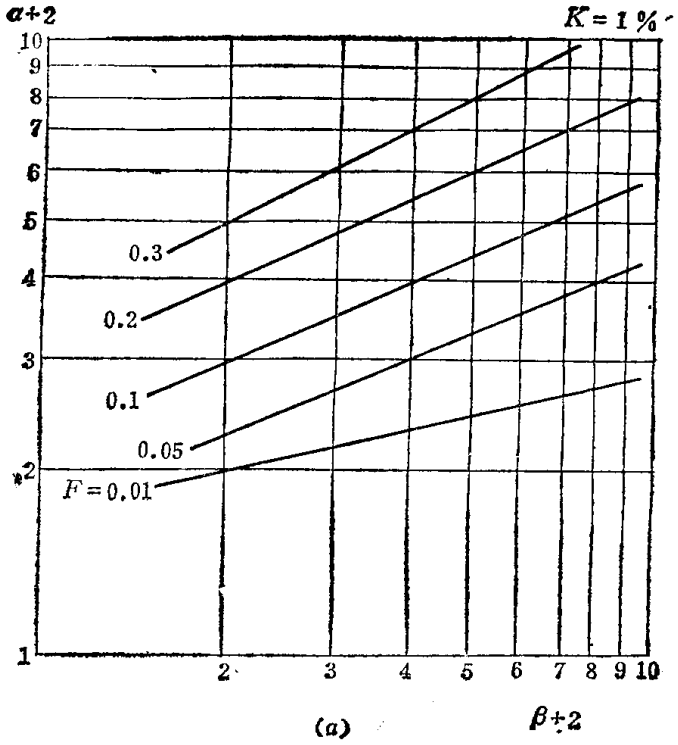


图 3-8*a* 列线图

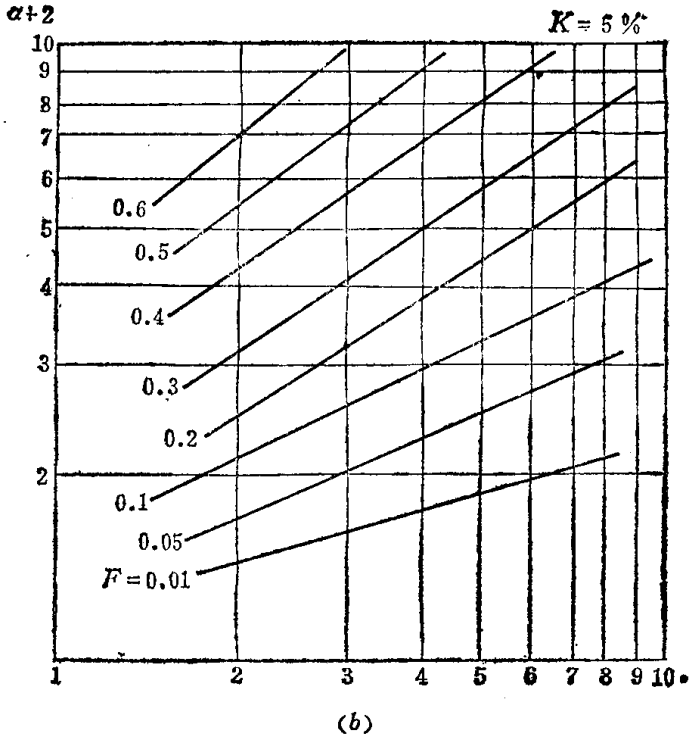


图 3-8*b* 列线图

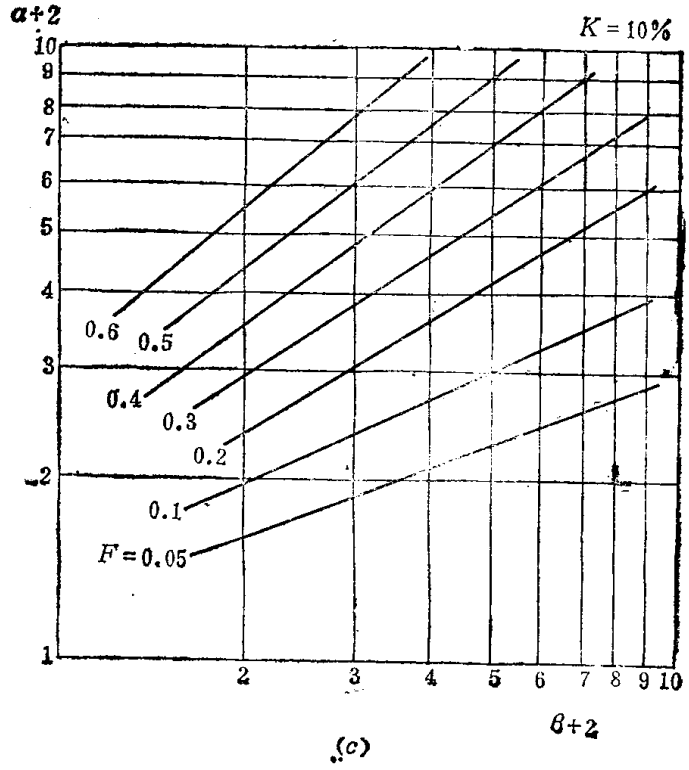


图 3-8c　列线图

第四节　联　合　分　布

在岩土的工程性质指标中，抗剪强度指标c和ϕ是一对有密切联系的设计参数。它们从同一组试验中求得，分别代表摩尔强度包线的截距和倾角。许多试验数据表明，同一土层中各组试验的c值和ϕ值并不是互相独立的变量，有时还是密切相关的，且呈负相关。在拟合抗剪强度指标的经验分布时，比方说用β分布来逼近实测数据，当然可以分别对c和ϕ求得β分布的概率密度函数；如果考虑到两者之间的相关性，则可以用联合分布拟合方法[47]。

两个相关的变量u、v的联合分布概率密度函数可用下式表示

$$f_{u,v}(u,\ v)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+3)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)\Gamma(\gamma+1)}u^{\alpha}v^{\beta}(1-u-v)^{\gamma} \tag{3-35}$$

$$u,\ v\geqslant 0,\quad 0\leqslant u+v\leqslant 1$$

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma>-1$$

式中u和v分别为变量X、Y的归一化变量

$$u=\frac{1}{2}\frac{X-X_{\min}}{X_{\max}-X_{\min}}$$

$$v=\frac{1}{2}\frac{Y-Y_{\min}}{Y_{\max}-Y_{\min}}$$

$X_{\max}$，$X_{\min}$，$Y_{\max}$，$Y_{\min}$分别为双变量X和Y的分布上限和下限。

两个边缘分布$f_u(u)$和$f_v(v)$分别由下式求得

$$\left.\begin{aligned}f_u(u)&=\int_{v_{\min}}^{v_{\max}}f_{u,v}(u,\ v)\,dv\\ f_v(v)&=\int_{u_{\min}}^{u_{\max}}f_{u,v}(u,\ v)\,du\end{aligned}\right\} \tag{3-36}$$

式中 $u_{\min}=v_{\min}=0$，$u_{\max}=v_{\max}=\frac{1}{2}$

如已知c和ϕ的平均值和方差分别为$\bar{c}$，$\bar{\phi}$和$\hat{\sigma}_c^2$，$\hat{\sigma}_{\phi}^2$，则归一化变量u和v的平均值和方差分别由下式求得

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=\frac{1}{2}\frac{\bar{c}-c_{\min}}{c_{\max}-c_{\min}}\\ \bar{v}&=\frac{1}{2}\frac{\bar{\phi}-\phi_{\min}}{\phi_{\max}-\phi_{\min}}\\ \hat{\sigma}_u^2&=\frac{\hat{\sigma}_c^2}{4(c_{\max}-c_{\min})^2}\\ \hat{\sigma}_v^2&=\frac{\hat{\sigma}_{\phi}^2}{4(\phi_{\max}-\phi_{\min})^2}\end{aligned}\right\} \tag{3-37}$$

如已知c和ϕ之间的相关系数为$r_{c,\phi}$，由于是线性相关，故u和v之间的相关系数

$$r_{u,v}=r_{c,\phi}$$

在求得归一化变量u，v的统计参数以后，可以用下式计算联合β分布的尺度参数α、β和ν

$$\left.\begin{aligned}\beta &= -\frac{\bar{u}\,\bar{v}^2}{r_{u,v}\hat{\sigma}_u\hat{\sigma}_v}-\bar{v}-1\\ \alpha &= (\beta+1)\frac{\bar{u}}{\bar{v}}-1\\ \nu &= \frac{\beta+1}{\bar{v}}-(\alpha+\beta+3)\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}38)$$

归一化变量u和v的累计联合分布$F_{u,v}(u_0,\ v_0)$定义为

$$F_{u,v}(u_0,\ v_0)=\int_0^{u_0}\int_0^{v_0} f_{u,v}(u,\ v)\,du\,dv$$

$$0\leqslant u_0,\ v_0\leqslant\frac{1}{2} \qquad (3\text{-}39)$$

式中 $f_{u,v}(u,v)$为联合β分布的概率密度函数，$F_{u,v}(u_0,v_0)$表示u和v小于等于u_0和v_0的概率，亦即

$$F_{u,v}(u_0,\ v_0)=P[u\leqslant u_0,\ v\leqslant v_0] \qquad (3\text{-}40)$$

在得到了u和v双变量的联合分布和边缘分布的数学表达式后，就能按下面的方法估计某一置信水平的u_0和v_0值。

令r表示u和v变量同时小于或等于对应的u_0和v_0的概率，即置信水平为r（例如，90%，95%等等）。s表示两个之中的一个变量（比方说是v）小于等于某一数值（v_0）的概率。

$$P[u\leqslant u_0,\ v\leqslant v_0]=r$$

$$P[v\leqslant v_0]=s$$

根据累计分布的定义，我们得到

$$\left.\begin{aligned} F_{u,v}(u_0,v_0)&=\int_{u_{min}}^{u_0}\int_{v_{min}}^{v_0} f_{u,v}(u,v)dudv=r \\ F_v(v_0)&=\int_{v_{min}}^{v_0} f_v(v)dv=s \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}41)$$

注意到u和v是一对相关的变量，因此置信水平r通常小于或者最多是等于s（$r\leqslant s$）。

土的抗剪强度指数c和ϕ是一对呈负相关的变量，可以拟合成联合β分布。

表3-10给出了抗剪强度指标的十组数据。平均值、标准差、相关系数以及最大值和最小值见表3-11。

抗剪强度指标c、ϕ值　　表 3-10

	c (kPa)	ϕ (度)		c (kPa)	ϕ (度)
1	20	21	6	16	17
2	7	26	7	6	26
3	11	21	8	2	29
4	7	28	9	11	25
5	14	21.5	10	17	18

抗剪强度指标的统计量　　表 3-11

统　计　量	c (kPa)	ϕ (度)
最小值	2	17
最大值	20	29
平均值	11.1	23.2
标准差	5.37	4.13
极　差	18	12
相关系数	−0.872	

根据表3-11所列的数据，可以用公式（3-37）计算c、ϕ的归一化变量的统计量

$$\bar{u}=\frac{1}{2}\frac{\bar{c}-c_{\min}}{c_{\max}-c_{\min}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{11.1-2}{18}=0.25$$

$$\bar{v}=\frac{1}{2}\frac{\bar{\phi}-\phi_{\min}}{\phi_{\max}-\phi_{\min}}=\frac{1}{2}\frac{23.2-17}{12}=0.26$$

$$\hat{\sigma}_u^2=\frac{\hat{\sigma}_c^2}{4(c_{\max}-c_{\min})}=\frac{5.37^2}{4\times18^2}=0.022$$

$$\hat{\sigma}_v^2=\frac{\hat{\sigma}_\phi^2}{4(\phi_{\max}-\phi_{\min})}=\frac{4.13^2}{4\times12^2}=0.0296$$

$$\hat{\sigma}_u=0.15 \qquad \hat{\sigma}_v=0.17$$

按公式(3-38)计算尺度参数

$$\beta=\frac{\bar{u}\,\bar{v}^2}{r_{uv}\hat{\sigma}_u\hat{\sigma}_v}-\bar{v}-1=\frac{0.25\times0.26^2}{0.872\times0.15\times0.17}$$

$$-0.26-1=-0.50$$

$$\alpha=(\beta+1)\frac{\bar{u}}{\bar{v}}-1=0.5\ \frac{0.25}{0.26}-1=-0.52$$

$$\gamma=\frac{\beta+1}{\bar{v}}-(\alpha+\beta+3)=\frac{0.5}{0.26}-(0.50-0.52+3)$$

$$=-0.057$$

代入公式（3-35）即可求得抗剪强度指标c和φ的联合β分布的概率密度函数

$$f_{u,v}(u,\ v)=0.286u^{-0.52}v^{-0.50}(1-u-v)^{-0.057}$$

将公式（3-35）代入（3-41）就可以求得联合累计分布函数$F_{c,\varphi}(c_0,\ \phi_0)$和边缘累计分布$F_\varphi(\phi_0)$。如选取了显著性水平$r$和$s$，就可求得$\phi_0$和$c_0$值。文献[56]给出了一个实例，$c$与$\phi$的相关系数为－0.325，$\phi$的最小值为25.0°，最大值为46.1°，$c$的最大值为62.27kPa，最小值为0，拟合的联合β分布概率密度函数为

$$f_{u,v}(u,\ v)=1480u^{1.35}v^{1.17}(1-u-v)^{2.73}$$

将拟合的密度函数代入公式（3-41），并绘制如图3-9所示的曲线。图3-9a是联合累计分布函数曲线，图3-9b是边缘累计分布函

数曲线。使用时先按s值在边缘累计分布函数曲线上选取ϕ_0值，然后根据ϕ_0和r值在联合累计分布函数曲线上选取c_0值。

如取$r=90\%$，$s=95\%$，从图3-9b按$s=95\%$查得$\phi_0=43.3°$，再从图3-9a按ϕ_0和$r=90\%$查得$c_0=58.0\text{kPa}$。

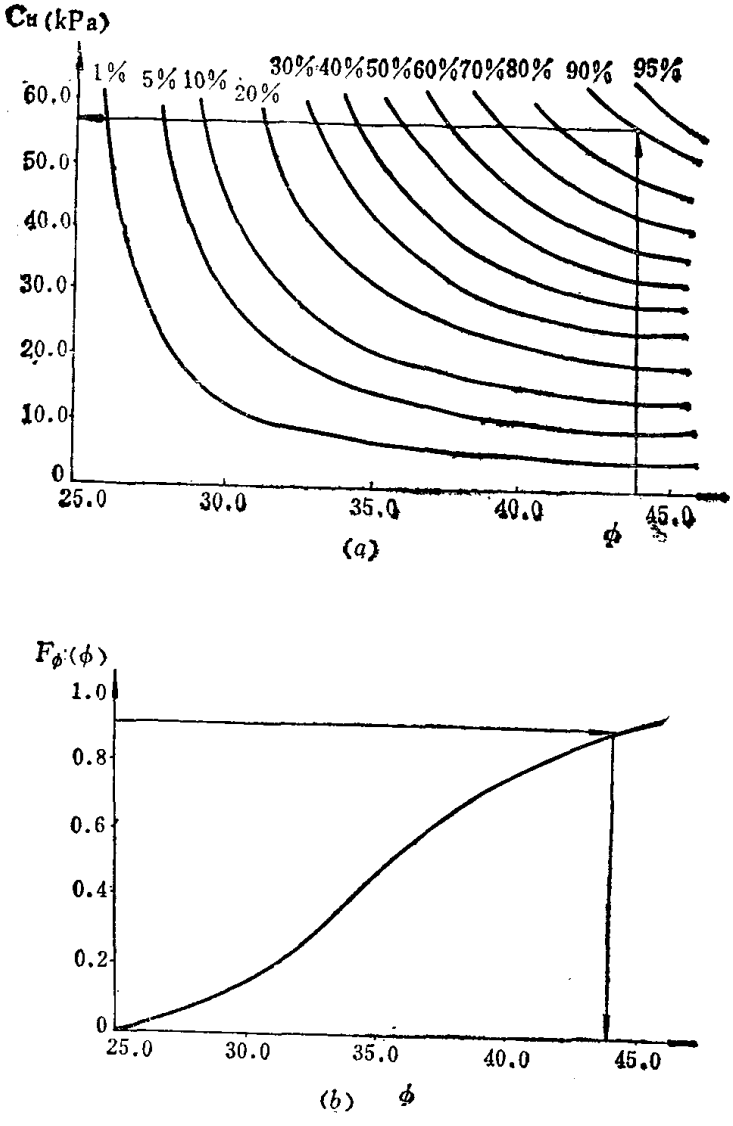


图 3-9 联合累计分布函数曲线（a）与边缘累计分布函数曲线（b）

第五节　设计参数估计

对岩土设计参数的估计，实质上是对总体平均值作置信区间的估计。

我们用测试方法测定研究对象的性状和行为，其目的是要了解研究对象总体的性状与行为，抽样仅是一种手段而非目的。因此，抽样所得的子样结果并非我们的最终目标。例如，我们取土做三轴试验，求得的强度指标仅是所取土样的性状的反映，这些指标在多大程度上反映了整个土层的实际性状呢？我们感兴趣的并不是几筒土样，而是整个土层，需要了解的是整个土层强度的平均趋势，亦就是需要了解强度指标的总体。但是从土样试验得出的仅仅是子样而不是总体，如何从中得出关于总体的结论呢？我们只能从占有土样的数据出发，正确评价这些数据的可靠性，并根据子样数据来估计总体平均值。这种从有限样品的结果出发来估计总体的特征，从特殊的抽样数据来推断一般的总体特征的方法，在统计学上称为统计推断。

总体平均值μ是客观存在的，但却是未知的。我们从这个总体中抽取n个个体，得到一个子样，可以求得子样的平均值$\bar{x}$和标准差$\hat{\sigma}$，根据子样的这两个统计参数来估计总体平均值，这就是设计参数估计的基本方法。首先要估计总体平均值的分布，常用总体数字特征——数学期望和标准差来表示，对平均值进行数学期望和方差运算的结果为

$$E(\bar{x}) = \mu$$

$$V(\bar{x}) = \frac{1}{n}\hat{\sigma}^2$$

$$\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}$$

这里我们用的是一次抽样的标准差来估计总体标准差的方法，如果已知随机变量服从正态分布，就可以用区间估计理论来估计设计参数。

假如已知总体平均值的分布，我们就可以定出一个以μ为中心的区间

$$[\mu - u\hat{\sigma}_{\bar{x}},\ \mu + u\hat{\sigma}_{\bar{x}}]$$

式中 u为标准化变量

$$u = \frac{\bar{x} - \mu}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}}$$

一次抽样得到的平均值$\bar{x}$以（$1-\alpha$）的概率落在这个区间内

$$P[\mu - u\hat{\sigma}_{\bar{x}} < \bar{x} < \mu + u\hat{\sigma}_{\bar{x}}] = 1 - \alpha \quad (3\text{-}42)$$

$\bar{x}$落在这个区间以外的概率为

$$\left.\begin{aligned} P[\bar{x} < \mu - u\hat{\sigma}_{\bar{x}}] &= \alpha/2 \\ P[\bar{x} > \mu + u\hat{\sigma}_{\bar{x}}] &= \alpha/2 \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}43)$$

如为小子样，则公式中的u用$t_{\alpha/2}$代替。

读者不难发现，公式（3-42）和（3-43）是无法实用的，因为μ是未知数，区间在数轴上的位置是不定的。为了实际应用的目的，我们给出一个以$\bar{x}$为中心的区间，区间的幅值不变，则可证明$\bar{x}$以（$1-\alpha$）的概率落在$[\mu - u\hat{\sigma}_{\bar{x}},\ \mu + u\hat{\sigma}_{\bar{x}}]$区间内这样一个事件等价于区间$[\bar{x} - u\hat{\sigma}_{\bar{x}},\ \bar{x} + u\hat{\sigma}_{\bar{x}}]$以（$1-\alpha$）的概率覆盖着总体平均值$\mu$。这样，我们就可以用子样统计量来定义一个区间，它以一定的概率覆盖着μ。

前面所说的区间是双侧的，就是有两个界限值和两个界限以外的尾部概率$\alpha/2$。但在岩土工程中，参数估计所用的区间常常并不要求有两个界限，只要一个界限就够了。譬如说，只要区间的下限$\bar{x} - t_{\alpha/2}\hat{\sigma}_{\bar{x}}$，此时可设想为区间的上限为无穷大，只要将参数的总体平均值低于这个下限值的概率限制在一个小概率就够了；至于上限并不受限制，总体平均值越大越安全。这称为单侧下限，适用于抗剪强度、压缩模量一类指标；但对另一类指标，如含水量、压缩系数等指标，应当用单侧上限方法来估计，可以设想这种区间的下限是负无穷大。

单侧区间估计可用下式表示

$$\left.\begin{array}{ll}\text{单侧下限} & P\left[\bar{x}-t\alpha\hat{\sigma}_{\bar{x}}<\mu<\infty\right]=1-\alpha \\ \text{或} & P\left[\mu<\bar{x}-t_{\alpha}\hat{\sigma}_{\bar{x}}\right]=\alpha\end{array}\right\} \quad (3\text{-}44)$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{单侧上限} & P\left[-\infty<\mu<\bar{x}+t_{\alpha}\hat{\sigma}_{\bar{x}}\right]=1-\alpha \\ \text{或} & P\left[\mu>\bar{x}+t_{\alpha}\hat{\sigma}_{\bar{x}}\right]=\alpha\end{array}\right\} \quad (3\text{-}45)$$

【例】

已知$\bar{x}=15$，$\bar{\sigma}_{\bar{x}}=2$，$n=15$，取$\alpha=0.05$试估计双侧的上、下限和单侧下限值。

【解】

双侧　自由度$\nu=15-1=14$，按$\alpha/2=0.025$查表2-3得$t_{\alpha/2}=2.145$

双侧下限　$15-2.145\times2=10.7$

双侧上限　$15+2.145\times2=19.3$

单侧　自由度$\nu=15-1=14$，按$\alpha=0.05$查表2-3得$t_{\alpha}=1.761$

单侧下限　$15-1.761\times2=11.5$

岩土设计参数的估值，即标准值x_K由平均值$\bar{x}$乘以统计修正系数求得

$$x_K=\gamma_s\bar{x} \quad (3\text{-}46)$$

γ_s为统计修正系数，按单侧界限给出

$$\gamma_s=1\pm\frac{t_{\alpha}}{\sqrt{n}}V \quad (3\text{-}47)$$

n为样本容量，V为变异系数，用小数表示

$$V=\frac{\hat{\sigma}}{\bar{x}}$$

统计修正系数γ_s值反映了参数的变异性，样本容量和允许承担的风险对标准值的综合影响。

参数的变异性由变异系数表示，它既反映了所测定的岩土性质的变异，也反映了取土试验技术对试验结果重现性的影响。总之，变异系数是一个能够综合反映设计参数质量水平的指标。变异系数越大，说明试验结果的可靠性越差，在相同置信概率1－

α的条件下，区间的范围也越大，使用这个参数时应当更加谨慎，标准值取得更安全些。

鉴于变异系数的重要性，许多国家的学者致力于这方面的研究，表3-12给出了一些土工指标变异系数的资料[20][46]。

根据我国的研究工作，一些地区土的变异系数资料见表3-13，3-14和3-15[28][35]。

国外的变异系数资料　　表 3-12

指　　标	根　　据[46]	根　　据[20]
内摩擦角(砂土)	5～15	5.3～14
内摩擦角(粘土)	12～56	
内聚力(粘土)	20～50	
无侧限抗压强度	6～100	30　～85
压缩指数		25.5～52
孔 隙 比	13～42	13.3～31.6
含 水 量	6～63	6.3～22.8

上海地区若干物理指标的变异系数　　表 3-13

土　　层	w	γ	e	w_L	w_P	I_P
表 土 层	10～20	1.4～5	10～20	5～15	3～10	5～25
灰色软粘土	5～15	1.8～3.3	5～15	5～10	5～12	10～20
暗绿色硬粘土	5～20	1.5～3.1	9～16	5～15	7～16	12～25
黄色粉砂	7～20	1.1～1.2	5～10			

上海地区若干力学指标的变异系数　　表 3-14

土　　层	$a_{1\sim2}$	c_c	c_{cg}	ϕ_{cq}	c_u	s_v
灰色软粘土	20～30	15～28	5～10	15～20	20～30	10～30
黄色粉砂	20～40					

我国若干地区的变异系数　　表 3-15

地区	土　　层	γ	E_s	ϕ_{cq}	c_{cq}
上海	淤泥质粘土	1.7～2.0	4.4～21.3	20.6～30.8	4.9～8.9
	淤泥质亚粘土	1.9～2.3	16.6～17.8	19.7～42.4	4.9～8.9
	暗绿色亚粘土	1.5～3.1		9.7～26.8	33.3～64.6
江苏	粘　　土	0.5～3.3	17.7～25.7	12～37	15.6～36.6
	亚 粘 土	1.3～3.0	12.2～30	10～36	23～55
安徽	粘　　土	2.0～3.4	17　～50	14～16.8	28～30
河南	亚 粘 土	1.5～1.8	16.6～46.9		
	轻亚粘土	1.7～4.4	20.9～41.7		

样本容量的大小反映了人们对客观事物的了解详细程度。对于变异系数较小的指标，可以容许用较少的样本容量；如果指标的变异系数比较大，则应取更多的样本容量以便能更详尽地了解指标的变异情况。当然，样本容量越大所需的勘探试验费用也越大，但在统计修正系数的取值上可以使设计参数取得更合理，以便可以有把握地降低工程造价。因此在确定取土试验数量时要综合考虑技术和经济两个方面。

允许承担的风险α值的取用，取决于工程的重要性和设计工作阶段，一般取$\alpha=0.05$；对于特别重要的工程可提高要求，将风险降低到$\alpha=0.01$；对于初步设计阶段和可以允许承担较大风险的场合，可取$\alpha=0.10$或更大一些。

第六节　经验公式拟合

在岩土工程中，经验公式用得十分广泛。经验公式定量地描述若干土工指标之间的关系，可用以估计设计参数；提供应力和应变之间的数值关系，以建立数学模型；还可用来表示土工指标在空间上的分布规律和岩土工程性状随时间的变化规律，以预测某些变化趋势。

经验公式是根据实测数据用一定的数学方法拟合的数学关系式，回归分析是拟合经验公式的常用方法。

按经验公式中所包含的自变量的数目可以分为一元的和多元的两种；按数学关系的性质可分为线性的和非线性两种，在非线性的经验公式中类型很多，如幂函数、指数函数、抛物线方程、双曲线方程等；按自变量和因变量之间的物理关系可分为有理公式和无理公式两种。

有理公式是指变量之间的数学关系可以从物理概念或理论上导得，但待定参数按实测数据拟合；无理公式是指变量之间虽然在数值上存在着一定的依存关系，但在机理上并没有什么必然的联系，不存在物理概念上的内在关系。例如，可以利用对比试验方法求得标准贯入击数N与土的压缩模量E_s之间的经验关系，但两者之间既不存在物理概念上的联系，更无法从理论上导得。但这类经验关系在岩土工程中被大量地采用。有人认为没有物理概念联系的物理量之间，不能用统计方法来求得经验关系，这是不合适的。事实上，岩土工程中许多著名的经验公式是无理公式。

有理经验公式的线型可以根据理论推导或量纲分析来确定，无理公式只能根据数据的散点来判断线型。将实测数据画在各种座标纸上的图件称为散点图，散点密集的条带称为散点带，按散点带的趋势可以判断变量之间存在着什么样的依存关系，选用什么函数式来描述比较符合实际情况。如果发现变量之间存在着非线性的依存关系，还必须通过适当的数学处理，把非线性关系变换为线性关系，然后才能计算待定参数。求得线性方程的参数后，通过反演再换算为非线性方程的参数，这才最终得到拟合的经验公式。在以后的讨论中，凡是线性方程，都用大写字母Y、X来分别表示因变量和自变量，线性方程的参数用大写字母A和B表示；凡是非线性方程，都用小写字母y、x、a和b来分别表示变量和参数，以示区别。

一、曲线类型判别与变量变换

在直角座标图上表现为非线性的散点带，其趋势不外乎三种

情况。

第一种是当自变量x增大时，因变量y逐渐减小；第二种是当x增大时y随之增大，但斜率逐渐减小并趋于常量或减小到零；第三种是当x增大时不仅y随之增大，而且斜率也不会减小。这三种情况的图形见表3-16。

在表3-14中，幂函数

$$y = ax^b \tag{3-48}$$

是一种适应性比较强的线型，广泛地适用于各种情况。当$b<0$时，它符合第一种情况的曲线特征；当$0<b<1$时，它符合第二种情况的曲线特征；当$b>1$时它又符合第三种情况。

介于上述三种情况的中间过渡状态是二条直线。当$b=0$时，y与x无关，成为一条截距为a的水平线；当$b=1$时，则表现为一条斜率为a的直线方程。因此，幂函数的b系数可用来初步判别曲线图形的特征。当然，对每一种特征来说，并不都服从幂函数的规律，根据散点带的特点又可采用各不相同的函数式来拟合实测数据。例如在第一种情况中，幂函数是以x轴为渐近线的，如果散点带是以某一常数a为渐近线的话，则可选用

$$y = a + b\frac{1}{x} \tag{3-49}$$

这样的线型为宜。又如在第三种情况中，如散点带通过$x=0$，$y=0$的原点，则可选用幂函数；如$x=0$时，y为某一常量，则可选用指数函数

$$y = ae^{bx} \tag{3-50}$$

或抛物线方程

$$y = a + bx^2 \tag{3-51}$$

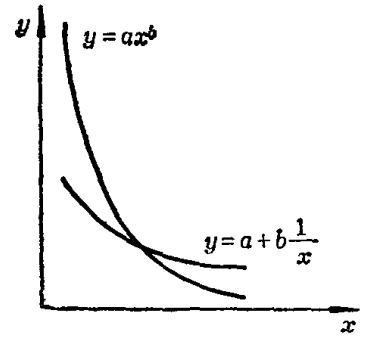
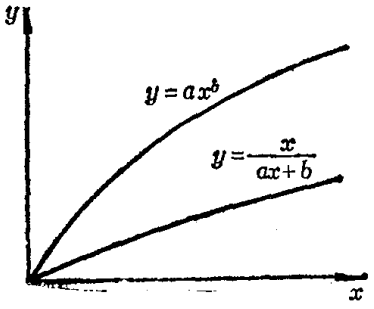
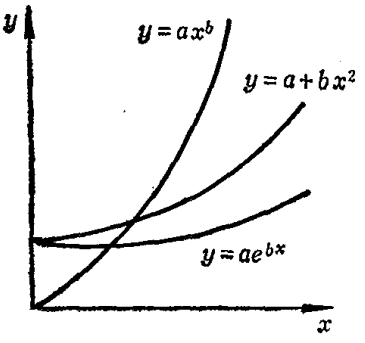
在拟合沉降与时间曲线时，常采用双曲线方程

$$y = \frac{x}{ax + b} \tag{3-52}$$

许多研究结果表明，这种线型对于研究沉降随时间的发展趋势是很适用的。

选择了适合于实测数据的线型之后，需要将各种非线性方程

曲线类型判别与变量变换　　表 3-16

曲线图形	特征	表达式	座标变换	A，B公式
	当 x 增大时 y 逐渐减小	$y=ax^b$ $(b<0)$ $y=a+b\frac{1}{x}$	$Y=\log y$ $X=\log x$ $Y=y$ $X=\frac{1}{x}$	$A=\log a$ $B=b$ $A=a$ $B=b$
	当 x 增大时 y 逐渐增大，但斜率趋向常量或减小到零	$y=ax^b$ $(0<b\leqslant 1)$ $y=\frac{x}{ax+b}$	$Y=\log y$ $X=\log x$ $Y=\frac{1}{y}$ $X=\frac{1}{x}$	$A=\log a$ $B=b$ $A=a$ $B=b$
	当 x 增大时 y 逐渐增大，且斜率也不会减小	$y=ax^b$ $(b>1)$ $y=ae^{bx}$ $y=a+bx^2$	$Y=\log y$ $X=\log x$ $Y=\log y$ $X=x$ $Y=y$ $X=x$	$A=\log a$ $B=b$ $A=\log a$ $B=b\log e$ $A=a$ $B=b$

变换为一个统一的线性表达式

$$Y = A + BX \qquad (3\text{-}53)$$

然后再求待定参数A和B。

这种线型的变换实际上是通过变量的变换来实现的。我们先以幂函数为例，如已选择了幂函数

$$y = ax^b$$

来拟合实测数据。

我们对等式两边各取对数，得

$$\log y = \log a + b\log x \qquad (3\text{-}54)$$

令

$$\log y = Y$$
$$\log x = X$$
$$\log a = A$$
$$\log b = B$$

即可变换为线性方程

$$Y = A + BX$$

公式（3-54）表示幂函数的散点带在双对数纸上必然呈现线性的趋势，因此这种散点特征可以作为选用幂函数的依据。

对于指数函数公式（3-50），同样可以用两边取对数的办法得一线性方程

$$\log y = \log a + bx\log e \qquad (3\text{-}55)$$

显然，令 $\log y = Y$

$$x = X$$
$$\log a = A$$
$$b\log e = B$$

立即变为线性方程（3-53）。公式（3-55）表明，符合指数函数的散点带在半对数纸上必然呈现为线性特征，如出现这种散点趋势，可立即判定为指数函数。

对于双曲线方程（3-52），一下子似乎看不出非线性变量与线性变量之间的关系，但稍作处理之后就可以看出是双倒数的变量变换。

对公式（3-52）

$$y=\frac{x}{ax+b}$$

的等号两边都取倒数

$$\frac{1}{y}=\frac{ax+b}{x}=a+b\frac{1}{x} \qquad (3\text{-}56)$$

立即可以看出，如令

$$\frac{1}{y}=Y$$

$$\frac{1}{x}=X$$

$$a=A$$

$$b=B$$

就变换为线性方程（3-53）。

至于公式（3-49）和（3-51），可以比较清楚地看出因变量未作变换，仅对自变量作倒数变换（$\frac{1}{x}=X$）和平方变换（$x^2=X$）罢了。

变量变换关系综合表示于表3-16。

二、回归分析的基本概念和公式推导

实测数据的散点图如图3-10所示。假定线性方程$Y=A+BX$所代表的直线已经画出，则任取一点M来分析时，M与回归直线在纵向的座标差为$Y-Y'$，Y'表示用横座标值X代入线性方程求得的值，Y为实测值，两者之差称为离差。除了在回归线上的点，总是存在误差的。不在直线上的点越多，点子离直线越远，则离差的总和就越大。但由于离差有正有负，离差的代数和就有互相抵消的可能性，就不能反映误差的情况，所以通常用离差的平方和Q来表示

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\left(Y-Y'\right)^2=\sum_{i=1}^{N}\delta^2 \qquad (3\text{-}57)$$

对于一定的散点，具有一定位置和走向的直线就有一个对应的Q值。当位置和走向变化时，Q值也随之变化。在这样的变化

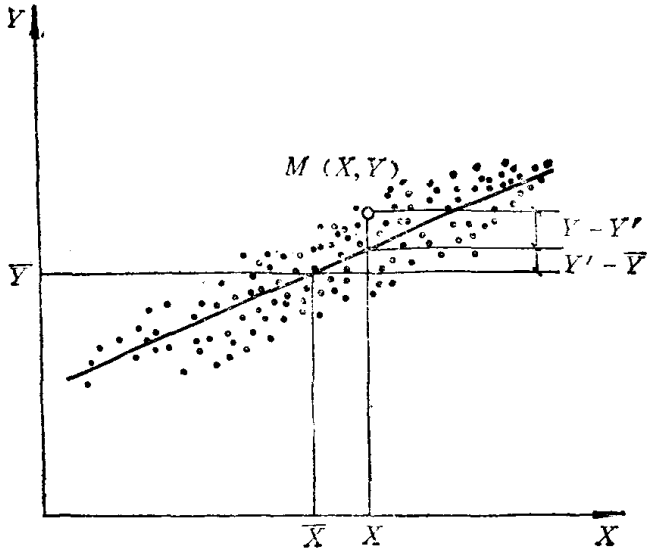


图 3-10　散点与回归线

中可以找到一个最小的Q值，与之相应的直线的位置与走向就是最佳的，由此确定的A、B系数是最理想的。这种方法就叫做最小二乘法，用以确定的A、B系数称为回归系数。

将自变量X代入线性方程求得Y'

$$Y' = A + BX$$

离差

$$\delta = Y - Y' = Y - (A + BX) = Y - A - BX$$

离差平方和

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \left(Y - A - BX \right)^2$$

根据求极值原理，离差平方和最小的条件为

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} > 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = 0 \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial B^2} > 0$$

在这样的条件下确定的系数A和B是最理想的。

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(Y - A - BX\right)\left(-1\right)$$

$$= -2[\Sigma Y - nA - B\Sigma X] \qquad (3\text{-}58)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial A^2} = 2n > 0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial B} = 2\sum_{i=1}^{n}(Y - A - BX)(-X)$$

$$= -2[\Sigma XY - A\Sigma X - B\Sigma X^2] \qquad (3\text{-}59)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial B^2} = 2\Sigma X^2 > 0$$

由公式（3-58）得

$$\Sigma Y - nA - B\Sigma X = 0 \qquad (3\text{-}60)$$

由公式（3-59）得

$$\Sigma XY - A\Sigma X - B\Sigma X^2 = 0 \qquad (3\text{-}61)$$

解联立方程得A、B系数

$$A = \bar{Y} - B\bar{X} \qquad (3\text{-}62)$$

$$B = \frac{\Sigma XY - \dfrac{\Sigma X \Sigma Y}{n}}{\Sigma X^2 - \dfrac{(\Sigma X)^2}{n}} \qquad (3\text{-}63)$$

令

$$SS_X = \Sigma(X - \bar{X})^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{n} \qquad (3\text{-}64)$$

$$SS_Y = \Sigma(Y - \bar{Y})^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{n} \qquad (3\text{-}65)$$

$$SS_{XY} = \Sigma(X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{n} \qquad (3\text{-}66)$$

则回归系数

$$B = \frac{SS_{XY}}{SS_X} \qquad (3\text{-}67)$$

三、回归方程的评价与统计假设检验

回归系数既然是在离差平方和为最小的条件下求得的，那么必然存在着剩余的离差平方和Q

$$Q=\Sigma(Y-A-BX)^2=\Sigma[Y-(\bar{Y}-B\bar{X})-BX]^2$$

$$=\Sigma(Y-\bar{Y}+B\bar{X}-BX)^2=\Sigma[(Y-\bar{Y})-B(X-\bar{X})]^2$$

$$=\Sigma(Y-\bar{Y})^2+B^2\Sigma(X-\bar{X})^2-2B\Sigma(X-\bar{X})(Y-\bar{Y})$$

$$=SS_Y-\frac{SS_{XY}^2}{SS_X^2}SS_X-2\frac{SS_{XY}}{SS_X}SS_{XY}$$

$$=SS_Y-\frac{SS_{XY}^2}{SS_X}=SS_Y-U \qquad (3\text{-}68)$$

式中 SS_Y——Y变量离差平方和；

U——回归平方和。

回归平方和表示从总的Y的离差平方和中，经回归作用而失去随机性的那部分，即$(Y'-\bar{Y})^2$的总和

$$U=\Sigma(Y'-\bar{Y})^2$$

剩余的离差平方和分担到每个数据上的部分，或者讲是每个自由度对于剩余离差平方和的贡献称为方程剩余方差，它的平方根就是回归方程的剩余标准差$\hat{\sigma}$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{Q}{n-2}}=\sqrt{\frac{SS_Y-\frac{SS_{XY}^2}{SS_X}}{n-2}} \qquad (3\text{-}69)$$

剩余标准差是衡量经验公式精度的指标。

衡量两个变量之间关系密切程度的指标是相关系数r。

如果散点完全在一条直线上，对任一对数据来说都满足$\delta=Y-Y'=0$，则$Q=0$

根据公式(3-68)

$$SS_Y=U=\frac{SS_{XY}^2}{SS_X}=B^2SS_X$$

$$\frac{B^2SS_X}{SS_Y}=1$$

如果散点满天飞，两个变量完全不相关，则回归不起作用

$U=0$，$Q=SS_Y$

$$\frac{B^2SS_X}{SS_Y}=0$$

根据对于两种极端情况的分析，我们提出一个指标来衡量介于这两种极端情况之间的相关程度，令r^2等于$\frac{B^2SS_X}{SS_Y}$，开平方后得r值

$$r=\sqrt{\frac{SS_{XY}^2}{SS_XSS_Y}}=\frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_XSS_Y}} \qquad (3\text{-}70)$$

对于完全相关的情况，$r=1$；对于完全不相关的情况，$r=0$；对于介于中间状态的情况$0<r<1$，这个r值称为相关系数。相关系数越接近于1，表示两个变量之间的相关程度越密切；反之，表示越不密切。

计算相关系数时，开平方根只取正号，但SS_{XY}本身带有正负号，因此相关系数亦带有正负号。正号表示自变量增大时因变量亦随之增大，称为正相关；负号表示自变量增大时因变量反而减小，称为负相关。相关系数r与回归系数B的正负号相同。

从一个子样得到的相关系数固然可以说明子样的相关程度，但是否就能肯定总体也是如此程度的相关呢？由于抽样的偶然性，即使子样相关系数比较大，也不能完全排斥总体相关系数为零的可能性。比方说，从完全不相关的总体中只抽取两个个体，则不管如何抽法，两点之间肯定是一条直线，相关系数r总等于1。当然我们不会相信总体相关系数也等于1，因为数据太少，未必能相信子样相关系数是可靠的。所以，不仅要看子样相关系数的数值大小，还要看数据的多少。这就提出了对子样相关系数进行统计假设检验的问题，通过检验来取得对子样相关系数的信任。

先作出两个总体不相关的统计假设，即假设总体相关系数ρ等于零，然后用t分布检验假设是否可信。如可信，即使子样相关系数较大，这个回归方程也不能成立；如不可信，则表示回归方

程可以成立。

统计假设H_0：$\rho=0$

计算统计量

$$t_r=\frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} \qquad (3\text{-}71)$$

按自由度$\nu=n-2$，查t分布表得临界值$t_{\alpha/2}$。如$|t_r|>t_{\alpha/2}$，表示否定假设，$\rho=0$不可信，检验通过如$|t_r|<t_{\alpha/2}$，表示接受假设，$\rho=0$可信，检验未通过，回归方程不能成立。

除了检验相关系数外，还可以用方差分析方法检验回归方程。前面讨论过回归作用使因变量总的离差平方和分解为两部分，一部分称为回归离差平方和，另一部分称为剩余离差平方和。与此相应的有两部分方差，因此我们可以用方差分析方法来检验回归总体方差是否大于剩余总体方差，如果大于则认为回归作用是显著的，就接受回归方差，否则就拒绝回归方程。

回归平方和 $U=\Sigma(Y'-\bar{Y})^2=\dfrac{SS_{XY}^2}{SS_X}$

剩余平方和 $Q=\Sigma(Y-Y')^2=SS_Y-\dfrac{SS_{XY}^2}{SS_X}$

自由度 $\nu_1=1$，$\nu_2=n-2$

方差比

$$F=\frac{U/\nu_1}{Q/\nu_2}=\frac{U}{Q}(n-2) \qquad (3\text{-}72)$$

$F>F_\alpha$表示回归作用是显著的，接受回归方程；$F\leqslant F_\alpha$表示回归作用不显著，拒绝接受回归方程。

关于方差分析的概念参阅本章第七节。

【例】

试用表3-17所示的数据拟合线性经验公式

$$E=A+BE_s$$

1.计算五个加和

令$Y=E$，$X=E_s$

$\Sigma Y^2=1892.24$　　$\Sigma Y=114.4$

模量对比试验结果　　表 3-17

E(MPa)	19.0	18.3	16.4	15.3	13.1	16.3	16.0
E_s(MPa)	8.6	8.8	9.1	6.8	3.5	5.5	7.3

$\Sigma X^2 = 376.24$　　$\Sigma X = 49.6$

$\Sigma XY = 830.02$

2.计算平均值及离差平方和

$$\bar{Y} = \frac{114.4}{7} = 16.3$$

$$\bar{X} = \frac{49.6}{7} = 7.1$$

$$SS_Y = 1892.24 - \frac{114.4^2}{7} = 22.62$$

$$SS_X = 376.24 - \frac{49.6^2}{7} = 24.79$$

$$SS_{XY} = 830.02 - \frac{114.4 \times 49.6}{7} = 19.42$$

3.计算回归系数

$$B = \frac{SS_{XY}}{SS_X} = \frac{19.42}{24.79} = 0.78$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{X} = 16.3 - 0.78 \times 7.1 = 10.8$$

得经验公式

$$E = 10.8 + 0.78E_s$$

4.计算相关系数及剩余标准差

$$r = \frac{SS_{XY}}{\sqrt{SS_X SS_Y}} = \frac{19.42}{\sqrt{24.79 \times 22.62}} = 0.82$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{SS_Y - \frac{SS_{XY}^2}{SS_X}}{n-2}} = \sqrt{\frac{22.62 - \frac{19.42^2}{24.79}}{7-2}}$$

$$= 1.22(\text{MPa})$$

5.检验相关系数

$$t_r = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}} = \frac{0.82}{\sqrt{\frac{1-0.82^2}{5}}} = 3.20$$

$\alpha = 0.05$，$\gamma = 5$，查得$t_{\alpha/2} = 2.57$

$$t_r > t_{\alpha/2}$$

结论：$\rho = 0$不可信，接受回归方程。

6.方差分析

$$U = \frac{SS_{XY}^2}{SS_X} = \frac{19.42^2}{24.79} = 15.21$$

$$Q = SS_Y - U = 22.62 - 15.21 = 7.41$$

$$F = \frac{15.21}{7.41} \times 5 = 10.26$$

$$F_{0.05} = 6.61,\quad F_{0.01} = 16.26$$

F值介于两者之间，说明回归作用显著，接受回归方程。

四、经验公式的误差估计[34]

用经验公式预估土的设计参数包括两部分误差。第一部分与经验公式的精度有关；第二部分与代入指标的变异性有关。用经验公式时必须注意这两个问题，并估计其误差大小来修正设计参数的取值。

1.回归方程的置信带

与单个指标的置信区间一样，回归方程也有它自己的置信带。

回归线$Y = A + BX$是通过子样平均值（即散点的重心）的直线，可用下式表示：

$$Y = \bar{Y} + B(X - \bar{X}) \qquad (3\text{-}73)$$

对公式等号两侧进行方差运算：

$$V[Y] = V[\bar{Y}] + (X - \bar{X})^2 V[B]$$

$$= \left[\frac{1}{n} + \frac{(X - \bar{X})^2}{SS_X}\right]\hat{\sigma}^2 \qquad (3\text{-}74)$$

预估设计参数$\hat{y}$的置信界限由下式给出：

$$A + BX - t_{\alpha/2}\sqrt{V[Y]} < \hat{Y} < A + BX + t_{\alpha/2}\sqrt{V[Y]} \qquad (3\text{-}75)$$

将公式（3-74）代入公式（3-75）

$$A+BX-t_{\alpha/2}\hat{\sigma}\left[\frac{1}{n}+\frac{(X-\bar{X})^2}{SS_X}\right]^{\frac{1}{2}}<\hat{y}<A+BX+t_{\alpha/2}\hat{\sigma}\left[\frac{1}{n}+\frac{(X-\bar{X})^2}{SS_X}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (3\text{-}76)$$

从公式（3-76）可以看出，置信带的边界是两条曲线，在散点重心处误差最小；在离重心越远的地方，误差越大。由经验公式精度所决定的误差既取决于经验公式的标准差，也取决于使用经验公式的线段，在经验公式适用区间的端部精度最低。

在公式（3-76）中，如$t_{\alpha/2}$换以t_α就成为单侧置信界限了，其余的地方都不变。

2.代入指标的变异性

代入指标X的误差通过经验公式传递后影响到设计参数的估值，这种影响用统计安全系数η来表示

$$\eta=1\pm\frac{t_\alpha}{\sqrt{n_0}}KV_{x_0} \quad (3\text{-}77)$$

式中 n_0——代入指标的样本容量；

V_{x_0}——代入指标的变异系数；

K为误差传递系数，对于不同的经验公式，K的表达式见表3-18。

公式（3-77）中的正负号取用与单指标的原则相同，分别适

误差传递系数K值公式[32] 表3-18

经验公式	K值公式
$Y=A+BX$	$K=\frac{BX_0}{A+BX_0}$
$y=a\exp bx^{-1}$	$K=-bx^{-1}$
$y=\frac{x}{ax-b}$	$K=-\frac{b}{ax-b}$
$y=ax^{-b}$	$K=-b$
$y=a+x^{\frac{1}{2}}$	$K=\frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{a+x^{\frac{1}{2}}}$

用于单侧区间的上限和下限的指标。

只考虑代入指标的影响，经验公式应写作

$$Y=(A+B\bar{X}_0)\eta$$

同时考虑经验公式的精度，设计参数的估值公式为

$$\hat{Y}=(A+B\bar{X}_0\pm t_\alpha\psi\hat{\sigma})\eta \qquad (3\text{-}78)$$

式中$\bar{X}_0$为代入指标的平均值；

ψ为影响系数 $\psi=\frac{1}{\sqrt{n}}(1+Z^2)^{\frac{1}{2}}$

$$Z=\frac{\bar{X}_0-\bar{X}}{\hat{\sigma}_x}$$

3.非线性经验公式

非线性经验公式的误差传递系数K的计算公式见表3-16。

对于幂函数，设计参数的估值公式为

$$\hat{y}=\mu^{\pm 1}a\bar{x}_0^b\eta \qquad (3\text{-}79)$$

$$\mu=10^{\lg\alpha\psi\hat{\sigma}}$$

对于双曲线方程

$$\hat{y}=\frac{\bar{x}_0}{(a\pm t_\alpha\psi\hat{\sigma})\bar{x}_0+b}\eta \qquad (3\text{-}80)$$

在公式（3-79）和（3-80）中所有符号的意义均见前面有关公式。

在所有公式中，凡带“0”脚标的均表示代入指标的参数；凡不带脚标的均表示拟合经验公式时的参数。

【例】

对某一土层曾分别三次抽样对比试验，统计得三个相似的经验公式，统计参数见表3-19，经验公式为 $E_s=A+BP_s$

式中P_s为静力触探比贯入阻力（MPa）

现有$n_0=10$的P_s统计参数$\bar{P}_s=2.0$MPa，$V_{x_0}=0.10$，取$\alpha=0.05$，试分别代入三个经验公式计算E_s的设计值。

用公式（3-78）计算的结果见表3-20。从计算结果可以看出，甲和丙两个经验公式的剩余标准差比较接近，公式有相近的

经 验 公 式 对 比　　表 3-19

参　数	公式		
	甲　式 $E_s=3.85+2.12P_s$	乙　式 $E_s=3.46+2.25P_s$	丙　式 $E_s=3.00+2.25P_s$
n	147	12	15
$\hat{\sigma}$	1.75	0.79	1.83
$\overline{X}$	2.85	2.93	3.73
SS_X	665.08	56.57	49.57
$\hat{\sigma}_X$	2.13	2.17	1.81
V_X	0.747	0.740	0.485

计 算 结 果 的 比 较　　表 3-20

结　果	公式		
	甲　式	乙　式	丙　式
K	0.52	0.57	0.60
η	0.96	0.96	0.90
ψ	0.089	0.314	0.357
$\overline{E}_s$	80.9	79.6	75.0
$\hat{E}_s$	75.0	71.7	58.7
$\hat{E}_s/\overline{E}_s$	0.93	0.90	0.78

精度，但样本容量相差悬殊，甲公式数据多，综合精度高，估值与平均值之比就较大；乙丙两个经验公式的数据个数相差不多，但乙公式的剩余标准差明显地低于丙公式，因而综合精度也比丙公式高，估值与平均值之比大于丙公式。这说明回归方程置信带的影响反映在n与$\hat{\sigma}$两个参数上，对于比较离散的数据，用加多数据个数的办法可以提高经验公式的综合精度。

第七节　方　差　分　析

无论是勘探试验或者是原型观测都会得到大量的数据。在这

些数据中包含着两类可能的影响因素。一类是系统因素，一类是随机因素。对于可能存在的系统因素，必须仔细地鉴别出来，从中发现勘探试验和量测技术上存在的问题而加以处理。鉴别是否存在系统因素的影响，对两组数据可用t检验方法，对多组数据可用方差分析法。

方差分析时，要先估计哪些因素可能有系统的影响，然后加以检验，检验这些变异因素是否有显著性影响。如果只有一个变异因素称为一个因素的方差分析；如果是两个变异因素则称为两个因素的方差分析。两个因素的方差分析中还要区别是否有交互作用，即区别是否存在因素之间的相互作用。

一、总体均值检验

鉴别两组数据（来自两个土层或用两种方法取得）是否来自同一统计总体时，可用检验总体均值是否相等的方法。这方法也可用于检验某一子样来自的总体均值是否与一已知值相等，这种情况要用统计学中的假设检验。

假设检验是先作出统计假设，然后检验这个假设是否可信。统计假设的符号是H_0：，在具体检验时先假定某一总体平均值μ等于已知值μ_0，写作

统计假设H_0：$\mu=\mu_0$

μ_0是一个包括零在内的已知数。

对于给定的显著性水平α，$\mu=\mu_0$的否定域为

$$|t|>t_{\alpha/2} \qquad (3\text{-}81)$$

式中

$$|t|=\frac{|\bar{x}-\mu_0|}{\hat{\sigma}_{\bar{x}}}$$

$t_{\alpha/2}$值系根据样本容量n和显著性水平α从表2-3查得。

如$|t|>t_{\alpha/2}$，表示统计假设不可信，即说明$\mu=\mu_0$的可能性已小于显著性水平α，或者说在α显著性水平上。$\mu=\mu_0$为不可信。

【例】

已知$\bar{\phi}=2°$，$\hat{\sigma}_{\phi}=0.5°$，$n=20$，问

$\mu_{\text{差}}=0$的假设是否可信，α用0.01。

统计假设H_0：$\mu=\mu_0=0$

$$|t|=\frac{|2-0|}{0.5}=4$$

从表2-3查得$t_{\alpha/2}=2.861$

得$|t|>t_{\alpha/2}$，表示$\mu=0$假设不可信，总体平均值小于零的可能性已小于1%。

如令μ_1，μ_2分别表示两个总体的平均值，则用t分布检验可以用来鉴别两组数据是否来自同一总体。如来自同一总体就可以合并统计；如分属两个总体，则应分别统计。这种称为检验两个总体的数学期望相等的统计假设。

统计假设H_0：$\mu_1=\mu_2$

其否定域为$|t|>t_{\alpha/2}$ （3-82）

式中 $$|t|=\sqrt{\frac{n_1n_2(n_1+n_2-2)}{n_1+n_2}}\frac{|\bar{x}_1-\bar{x}_2|}{\sqrt{n_1s_1^2+n_2s_2^2}}$$

$\bar{x}_1$和$\bar{x}_2$分别为两个子样的平均值；

n_1和n_2分别为两个子样的样本容量；

S_1^2和S_2^2分别为两个子样的方差；

从表2-3查$t_{\alpha/2}$值时，自由度$\nu=n_1+n_2-2$。

【例】

已知土的含水量的两个子样数据，试检验这两个子样是否来自同一总体

	$\bar{w}$	S	n
第一组	46.8	1.84	26
第二组	45.0	2.50	20

计算 t 值

$$t=\sqrt{\frac{26\times20(26+20-2)}{26+20}}\frac{46.8-45.0}{\sqrt{26\times1.84^2+20\times2.50^2}}$$

$$=2.75$$

以$\alpha=0.05$，$\nu=26+20-2=44$查表2-3得

$$t_{\alpha/2}=2.02$$

2.75＞2.02统计假设不可信

说明这两个含水量子样不是来自同一总体，存在着显著性差异。

如果要检验两个以上的子样是否来自同一总体，就要用方差分析的方法。

二、方差分析的基本公式

方差分析用于鉴别数据中是否存在系统性影响的因素，这种因素称为变异因素，构成的原因可能是数据的不同来源、不同的试验方法与条件，不同规格型号的仪器设备。这些因素可能是数量化的，如试样面积的不同，压板尺寸的差别等；也可能是非数量的，如仪器的型号为A型、B型和C型等。这种划分称为因素等级。在每个因素等级条件下要多次测定，各得若干个数据，这种试验次数称为试验分批。试验的批数可以是相等的，也可以不相等。

设变异因素分为b个等级，用脚标j识别，即因素等级是$j=1, 2\cdots, b$。每个等级都做a批试验，用脚标i识别分批次序，即$i=1, 2, \cdots, a$。在不同等级的因素控制之下分别都做a批试验，对同一测定对象共得$a\times b$个测定值。测定值用x表示，则每个数据用x_{ij}识别。将数据排列成如表3-21所示的格式。

下面推导方差分析的计算公式

先求每一列的平均值$\bar{x}_j$

方差分析数据表　　表 3-21

j / i		因素等级 1	2	3	…	b
试验分批	1	x_{11}	x_{12}	x_{13}		x_{1b}
	2	x_{21}	x_{22}	x_{23}		x_{2b}
	3	x_{31}	x_{32}	x_{33}		x_{3b}
	…					
	a	x_{a1}				x_{ab}

$$\bar{x}_j = \frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} x_{ij} \qquad (3\text{-}83)$$

令 $$T_j = \sum_{i=1}^{a} x_{ij}$$

则 $$T_j = a\,\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{a} x_{ij} \qquad (3\text{-}84)$$

再求全部数据的平均值$\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{ab}\sum_{j=1}^{b} T_j$$

$$= \frac{1}{ab}\sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a} x_{ij} \qquad (3\text{-}85)$$

令 $$T = \sum_{j=1}^{b} T_j$$

则 $$T = \sum_{j=1}^{b} a\bar{x}_j = a\sum_{j=1}^{b} \bar{x}_j \qquad (3\text{-}86)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{ab}T \qquad (3\text{-}87)$$

$$b\bar{x} = \frac{1}{a}T = \sum_{j=1}^{b} \bar{x}_j \qquad (3\text{-}88)$$

然后考虑数据离散的情况，这可用离差平方和来度量离散的总和，有三种情况。

第一种考虑的情况是每一个数据与总平均值之间的离散程度，用每一个数据与总平均值的离差平方和表示，称为总离差平方和，由下式求得

$$SS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b} (x_{ij} - \bar{x})^2 \qquad (3\text{-}89)$$

第二种考虑的情况是在每个因素等级的数据内部的离散情况，表示只受随机因素控制的离散性，称为组内离差平方和，用每一列中的各个数据与每一列平均值$\bar{x}_j$之间的离差来表示，每一列有a个数，因此，脚标i从1加和到a；一共有b个因素，因此脚标j要从1加和到b，将$a \times b$个数据的离差全部加和起来得

$$SS_2 = \sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 \qquad (3\text{-}90)$$

第三种考虑的情况是变异因素所引起的离散性，用每列平均值与总平均值的离差平方和表示，称为组间离差平方和。共有 b 例，因此 j 从 1 加和到 b；每一列有 a 个数据，故每一个列的平均值 $\bar{x}_j$ 具有的权数为 a。组间离差平方和由下式表示

$$SS_1 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 \qquad (3\text{-}91)$$

总离差平方和 SS 为组间离差平方和与组内离差平方和之和

$$SS = SS_1 + SS_2 \qquad (3\text{-}92)$$

证明如下

$$SS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[(x_{ij} - \bar{x}_j) + (\bar{x}_j - \bar{x})]^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}[(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + 2(x_{ij} - \bar{x}_j)(\bar{x}_j - \bar{x}) + (\bar{x}_j - \bar{x})^2]$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2 + \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 + 2\sum_{j=1}^{b}$$

$$[(\bar{x}_j - \bar{x})(\sum_{i=1}^{a}x_{ij} - a\bar{x}_j)]$$

$$= SS_2 + SS_1 + 2\sum_{j=1}^{b}[(\bar{x}_j - \bar{x})(\sum_{i=1}^{a}x_{ij} - a\bar{x}_j)]$$

由公式（3-84）知

$$a\bar{x}_j = \sum_{i=1}^{a}x_{ij}$$

则

$$\sum_{i=1}^{a=1}x_{ij} - a\bar{x}_j = 0$$

因此

$$SS = SS_1 + SS_2$$

为了计算的方便，我们将公式（3-90）和（3-91）变换成下面的形式。

$$SS_1 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j^2 - 2\bar{x}_j\bar{x} - \bar{x}^2)$$

$$= a\sum_{j=1}^{b}\bar{x}_j^2 - 2a\sum_{j=1}^{b}\bar{x}_j\bar{x} + ab\bar{x}^2$$

$$= a\sum_{j=1}^{b}\frac{T_j^2}{a^2} - 2ab\bar{x}^2 + ab\bar{x}^2 \quad \text{根据公式(3-84)(3-88)}$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2 - ab\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2 - \frac{1}{ab}T^2 \quad \text{根据公式(3-87)}$$

同理

$$SS_2 = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 - a\sum_{j=1}^{b}\bar{x}_j^2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 - \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2$$

三、方差分析的检验方法

前面已经说过，使数据离散的原因有两类，一类与系统因素无关，只反映了随机因素的作用，其大小用组内离差平方和SS_2表示；另一类是系统因素，作用的结果用组间离差平方和SS_1表示。

离散平方和是离差平方的总和，它的大小不仅反映了离散程度，也反映了数据的多少。因此不能用来比较不同数据组之间的离散情况。为了相互比较，我们引入方差的概念，即单位自由度的离差平方和，并用方差之比来检验系统因素是否有显著的影响。设组间的总体方差为σ_1^2，组内的总体方差为σ_2^2。如$\hat{\sigma}_1^2 > \hat{\sigma}_2^2$，则表示系统因素确有影响。

但是，我们无法确切地知道总体方差是多大，我们所能知道的只是子样的方差$\hat{\sigma}_1^2$和$\hat{\sigma}_2^2$，如已知组间自由度$\nu_1 = b-1$，组内自由度$\nu_2 = ab-b$（对应于每个因素等级的试验批数相同的情况），则子样方差由下式求得

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}_1^2 &= \frac{SS_1}{b-1}\\ \hat{\sigma}_2^2 &= \frac{SS_2}{ab-b}\end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}93)$$

方差分析利用F分布来检验$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$的统计假设。

统计假设H_0：$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$，对于给定的显著性水平$\alpha$，其否定域为

$$F > F_\alpha \tag{3-94}$$

式中F为方差比，由下式求得

$$F = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2} \tag{3-95}$$

F_α为显著性水平α相应的F分位值，作为F检验的临界值。根据α，ν_1和ν_2由表2-4查得。

如满足$F > F_\alpha$，表示统计假设不可信，否定了$\sigma_1^2 \leqslant \sigma_2^2$的统计假设，就意味着肯定了总体方差$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$，表示系统因素对试验结果有影响；反之，就否定了系统因素的影响。

临界值F_α的大小与α值有关，α值取得越小，相应的F_α值就会越大，表示要求越严格；为了满足$F > F_\alpha$的条件，方差比F就必须更大些，要求更高些；在这种条件下如能检验通过，就表示系统因素的影响更显著些。因此，在实用上常按不同的α值，分别给出不同的评价，其标准见表3-22。

方差分析的评价标准　　表 3-22

方差比的范围	评价
$F > F_{0.01}$	影响特别显著
$F_{0.01} \geqslant F > F_{0.05}$	影响显著
$F_{0.05} \geqslant F > F_{0.1}$	有一定影响
$F_{0.1} \geqslant F$	看不出有多大影响

四、列表计算方法与实例

为了便于计算，利用前面导得的简便公式采用列表计算的方法，不仅计算方便而且也便于校核。

将观测所得的全部数据填入如表3-23所示的标准表格内，先按列计算所需的数值，再按行加和，得到全部计算因子。最后用

计 算 因 子 表　　表 3-23

	10cm²	15cm³	20cm²
1	16.87	14.44	14.25
2	11.22	9.76	9.47
3	19.29	16.01	16.31
4	13.64	12.90	11.93
5	18.77	16.40	16.83
6	14.73	13.25	13.49
7	18.19	9.69	10.31
8	10.88	16.77	15.53
9	13.27	10.43	8.88
10	15.44	15.66	10.48
11	11.84	16.17	15.47
12	17.05	11.33	12.06
13	12.23	17.34	16.12
14	9.16	11.18	11.30
15	19.13	8.95	8.69
16	11.05	20.62	19.39
17	11.35	12.22	11.80
18	12.59	12.43	12.66
19	21.35	18.74	19.13
20	21.24	18.35	21.47
21	12.26	11.38	11.33
22	18.60	20.71	24.34
23	11.96	10.35	12.48
24	28.31	20.23	25.94

25	13.13	13.65	11.56	$\sum_{j=1}^{3}$	T^2	$\frac{1}{75}T^2$
$T_j=\sum_{i=1}^{25}x_{ij}$	383.55	358.96	361.22	1103.73	1218219.91	16242.93
T_j^2	147110.60	128852.28	130479.89	406442.77		
$\sum_{i=1}^{25}x_{ij}^2$	6361.54	5473.82	5735.78	17571.14		

表3-24所示的方差分析表很方便地求得方差比与临界值。

方 差 分 析 表　　表 3-24

离差平方和		自由度	方差	方差比	显著性
组　间	$SS_1=14.78$	2	7.39	0.405	$F_{0.1}=2.38$
组内部	$SS_2=1313.43$	72	18.24		
总　和	$SS_3=1328.21$	74		$F \ll F_{0.1}$几乎没有什么影响	

【例】

单桥探头的静力触探仪有三种规格的探头面积，分别为10cm²，15cm²和20cm²。现用这三种规格的探头对同一种土各测定了25次，试用方差分析方法检验探头面积对于比贯入阻力是否有显著性影响。

计算结果列于表3-23和表3-24。

五、试验批数不相等

当各个因素等级的试验批数不相等时，即$a_1 \neq a_2 \neq \cdots \neq a_b$时，可将$a$处理为带有脚标$j$的变量，在计算公式中将

$$\frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2 \text{ 改变为 } \sum_{j=1}^{b}\frac{1}{a_j}T_j^2$$

$$\frac{1}{ab}T^2 \text{ 改变为 } \left[\sum_{j=1}^{b}a_j\right]^{-1}T^2$$

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 \text{ 改变为 } \sum_{j=1}^{b}\sum_{i=1}^{a_j}x_{ij}^2$$

并在计算因子表中增加一行a_j，其余均和等批数时相同。

六、两个因素的方差分析

当有两个系统因素对数据有影响时，可用两个因素的方差分析来鉴别其影响是否显著。例如。载荷试验承压板面积和埋置深度这两个因素对承载力都有影响；土的塑性指数和含水量这两个因素对抗剪强度指标都有影响等等。

与一个因素方差分析相仿，两个因素都要分别划分为几个等

级。第一个因素的各个等级分别填写在计算因子表的每一行中，用脚标i表示等级的顺序$i=1, 2, \cdots, a$。这个因素的影响称为行作用；第二个因素的各个等级分别填在表的每一列中，用脚标j表示等级的顺序，$j=1, 2, \cdots, b$。这个因素的影响称为列作用。

由行作用构成的离差平方和

$$SS_1 = b\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}T_j^2 - \frac{1}{ab}T^2 \qquad (3\text{-}96)$$

由列作用构成的离差平方和

$$SS_2 = a\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2 - \frac{1}{ab}T^2 \qquad (3\text{-}97)$$

总离差平方和

$$SS = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(x_{ij} - \bar{x}) = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 - \frac{1}{ab}T^2 \qquad (3\text{-}98)$$

显然，在两个因素的方差分析中

$$SS \neq SS_1 + SS_2$$

因为除了这两个变异因素之外，还有偶然因素在起作用，这使离差平方和中必然还有剩余项SS_3

$$SS_3 = SS - SS_1 - SS_2$$

$$= \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}x_{ij}^2 - \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{a}T_i^2 - \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{b}T_j^2 + \frac{1}{ab}T^2 \qquad (3\text{-}99)$$

自由度分别为

$$\nu_1 = a - 1$$

$$\nu_2 = b - 1$$

$$\nu_3 = (a-1)(b-1)$$

相应的方差分别为

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{SS_1}{a-1}$$

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{SS_2}{b-1}$$

$$\hat{\sigma}_3^2 = \frac{SS_3}{(a-1)(b-1)}$$

方差比分别由下式求得

$$F_1 = \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_3^2}$$

$$F_2 = \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_3^2}$$

若$F_1 > F_\alpha$，表示第一因素有显著性影响；

若$F_2 > F_\alpha$，表示第二因素有显著性影响；

若$F_1 > F_2$，表示第一因素的作用比第二因素大。

如果要研究这两个因素之间是否互相有影响，这种影响称为交互作用，则每一组合的试验必须平行做C次，至少要做两次。

对于每一组合，用C次的平均值来代替无交互作用时每一组合的数据，平均值$\bar{x}_{ij}$为

$$\bar{x}_{ij} = \frac{1}{C}\sum_{k=1}^{C} x_{ijk}$$

各部分的离差平方和为

行作用

$$SS_1 = bC\sum_{i=1}^{a}(\bar{x}_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{bC}\sum_{i=1}^{a} T_i^2 - \frac{1}{abC}T^2 \qquad (3\text{-}100)$$

列作用

$$SS_2 = aC\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{aC}\sum_{j=1}^{b} T_j^2 - \frac{1}{abC}T^2 \qquad (3\text{-}101)$$

交互作用

$$SS_3 = C\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}(\bar{x}_{ij} - \bar{x}_i - \bar{x}_j + \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{C}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{C} x_{ijk}\right)^2 - \frac{1}{bC}\sum_{i=1}^{a} T_i^2$$

$$-\frac{1}{aC}\sum_{j=1}^{b}T_j^2+\frac{1}{abC}T^2 \qquad (3\text{-}102)$$

剩余项

$$SS_4=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{C}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{C}x_{ijk}^2-\frac{1}{C}\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\left(\sum_{k=1}^{C}x_{ijk}\right)^2 \qquad (3\text{-}103)$$

总和

$$SS=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{C}(x_{ijk}-\bar{x})^2$$

$$=\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{C}x_{ijk}^2-\frac{1}{abC}T^2 \qquad (3\text{-}104)$$

各部分的自由度分别为

$$\nu_1=a-1$$

$$\nu_2=b-1$$

$$\nu_3=(a-1)(b-1)$$

$$\nu_4=a\cdot b(C-1)$$

$$\nu=a\cdot b\cdot C-1$$

相应的方差比F值为

$$F_1=\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_4^2}$$

$$F_2=\frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_4^2}$$

$$F_3=\frac{\hat{\sigma}_3^2}{\hat{\sigma}_4^2}$$

统计假设检验方法与前面的类似。

【例】

有一组在中砂上做的载荷试验，压板直径分别为20cm，27.7cm，35.7cm和56.5cm，相对埋深分别为0和0.5两种。分

析这两个因素对试验结果是否有显著性影响。

方差分析的计算因子表和方差分析表分别见表3-25和3-26。

方差分析结果表明，对于$\alpha=0.05$的显著性水平，压板直径影响并不显著，而相对埋深这一因素才有显著的影响。

计 算 因 子 表 **表 3-25**

压板直径 B (j) / 相对埋深 $D/B(i)$		1 20cm	2 27.7cm	3 35.7cm	4 56.5cm	$T_i=\sum_{j=1}^{4}x_{ij}$	T_i^2
1	0	7	8	9	11.5	33.5	1260.25
2	0.5	9	14	12	15	50	2500
$T_j=\sum_{i=1}^{2}x_{ij}$		16	22	21	26.5	$T=85.5$	$\sum_{i=1}^{2}T_i^2=3760.25$
T_j^2		256	484	441	702.25	$T^2=7310.25$	$\sum_{j=1}^{4}T_j^2=1883.25$
$\sum_{i=1}^{2}x_{ij}^2$		130	260	226	357.25	$\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{2}x_{ij}^2=972.25$	

方 差 分 析 表 **表 3-26**

	离 差 平 方 和	自由度	方差	F	$F_{0.05}$
相对埋深	$SS_1=\frac{1}{4}3760.25-\frac{1}{8}7310.25=26.28$	1	26.28	18.25	10.13
压板直径	$SS_2=\frac{1}{2}1883.25-\frac{1}{8}7310.25=27.85$	3	9.28	6.44	9.28
剩 余	$SS_3=SS-SS_1-SS_2=4.34$	3	1.44		
总 和	$SS=97225-\frac{1}{8}7310.25=58.47$	7			

第四章　荷载和自然条件的统计分析

第一节　概　　述

岩土工程的性状与行为取决于岩土体在荷载和自然条件作用下的反应。这种反应可分为两类，一类是力学行为的反应，如土体在荷载作用下的变形或失稳；另一类是物理的、物理化学行为的反应，如土体内水份的迁移与积聚，吸水膨胀或失水收缩。无论那一种反应都与岩土体本身的特性有关，亦与荷载或自然条件变化的规律有关。在第三章里已经讨论了反映岩土特性的参数概率模型，在这一章里着重讨论荷载和自然条件变化的规律，这种变化规律通常都与时间因素有关。

岩土工程的荷载从来源划分可分为两类。一类是由岩土体本身自重产生的荷载，它的变异性是由土的物理力学特性指标的变异性引起的。如填土引起的沉降，挡土结构物的侧向土压力，土坡滑动的驱动力等；另一类是由上部结构传给岩土体的，如结构的自重，楼面荷载，码头上的货物，仓库内的堆载等，它的变异性是由结构特性以及运行条件决定的。按荷载性质可以分为恒载（死荷载）、定期停留荷载（有规律的活荷载）和临时荷载三类。

由结构物材料自重所产生的重力荷载在整个使用年限内通常并不变化，称为恒载。一般来说，恒载比较容易估计得准确一些，但也存在着不确定性，主要由于材料容重的变异性、设计尺寸的偏差、最终选用材料的变化以及一些建筑装修等因素引起的。

作用在基础上的恒载是各个分量的总和，假如上部结构一个典型层的变异系数是V_a，那末具有n层的建筑物（假定每层的变

异系数是相同的，总的恒载变异系数V_y由下式求得[48]

$$V_y = V_x\sqrt{\frac{1+(n-1)\rho}{n}} \qquad (4\text{-}1)$$

式中 ρ——任意两层之间的相关系数。

对于以恒载为主的建筑物，荷载变异系数一般不超过0.10。

作用在基础上的许多荷载是随时间而变化的，例如居住的人群、家具、设备等楼面荷载。对于筒仓、油罐一类构筑物，这种荷载往往起着控制的作用，是一种典型的定期停留荷载。

临时荷载包括雪、风、波浪、地震以及短暂的停留荷载，在计算沉降时可忽略这类荷载，但对瞬时变形是有作用的；对于土的稳定问题来说，临时荷载是一种主要的荷载，甚至是起决定作用的因素。

从统计学观点来研究荷载，对于与时间无关的恒载，一般采用随机变量概率模型，其拟合方法见第三章；对于与时间参数有关的可变荷载，如楼面荷载、筒仓荷载、风荷载、雪荷载等，通常采用随机过程概率模型。

自然条件是指对岩土性状有控制作用的自然环境因素。例如降雨后雨水入渗引起土体饱和及强度降低、地下水位升降引起力学条件与物理化学条件的变化、气温和地温的变化引起土中水分的迁移等。这方面的研究工作比对荷载的研究少得多。

第二节 随机过程特征

许多荷载和自然条件是随时间而变化的，可用随机过程概率模型来描述。

令$\{X_t;\ t\in T\}$是一个随机变量族，T考虑为整数集1，2，…，n或为R^N的子集，特别考虑T是区间$[a,\ b]$的情况，对于后一情况，X_t假定连续并可导。在岩土工程中，T可作为设计基准期，在这个时间区域内，随机变量族就构成一个随机过程，它的特点是：

1.在时间域$[a, b]$内，取定任一时刻t_0，一切可能的结果可以用一个随机变量描述，称为截口随机变量，对于荷载随机过程则称为任意时点荷载。

2.在整个时间域$[a, b]$内进行一次连续的观测，其结果可以用一个依赖于时间t的函数$f(t)$表示，$f(t)$称为样本函数。

若随机过程在任一给定时间t_0，随机变量X_{t_0}的平均值$E(X_{t_0})=E(t_0)$存在，是一个与t_0有关的常数。于是称$E(X_{t_0})=E(t)$，$t\in[a, b]$为平均值函数。$E(t)$实际上可以看作是随机过程全部样本函数的平均，它是反映随机过程取样平均水平的指标。

随机过程的协方差函数定义为

$$COV(s, t)=E\{[X_s-E(s)][X_t-E(t)]\} \qquad (4\text{-}2)$$

当$s=t$时

$$COV(t, t)=E\{[X_t-E(t)]^2\} \qquad (4\text{-}3)$$

称为随机过程的方差函数，写作

$$V(t)=COV(t, t)t\in[a, b] \qquad (4\text{-}4)$$

方差函数是描写随机过程取值离散程度的一个指标，协方差函数则是反映随机过程中任意两个时刻（t，s）随机变量之间相互关系密切程度的指标。

相关函数也是反映相互关系密切程度的指标，但它的特点是无量纲的，其大小只取决于随机变量之间的线性相关程度，而不取决于随机变量取值的量级。

相关函数由下式求得

$$r(s,t)=\frac{COV(s,t)}{\sqrt{V(s)V(t)}} \qquad (4\text{-}5)$$

对于随机过程$\{X_t, t\in[a, b]\}$，任一时刻$t_0\in[a, b]$时随机变量X_{t_0}的概率分布

$$F(x; t_0)=P(x_{t_0}\leqslant x) \qquad (4\text{-}6)$$

与t_0无关，时间参数t不同，$F(x; t)$一般也不相同，这族分布

函数$\{F(x;\ t),\ t\in[a,\ b]\}$称为随机过程的一维分布律。

对于任意给定的N个时刻t_1，t_2，t_3，…，t_n，相应的n个随机变量X_{t_1}，X_{t_2}，…，X_{t_n}的n维联合分布

$$F(x_1,x_2,\cdots x_n;\ t_1,t_2,\cdots,t_n)=$$
$$P(x_{t_1}\leqslant x_1,x_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,x_{t_n}\leqslant x_n) \qquad (4\text{-}7)$$

依赖于时间参数t_1，t_2，…，t_n。这n维分布函数族$\{F(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ t_1,t_2\cdots,t_n);\ t_1,t_2,\cdots t_n\in[a,\ b]\}$称为随机过程的$n$维分布律。

一般而言，随机过程的全面的统计规律需要靠这些不同维数的概率分布来描述，这是十分复杂的。不过，有些特殊类型的随机过程，只要掌握其一、二维分布律就能全面了解其任何维数的分布律。如马尔柯夫过程、泊松过程、宽平稳过程等都可以用一、二维分布律来表达任意维数的分布律。

第三节　极　值　分　析

从安全角度出发，对于荷载取用设计基准期内的最大值

$$Q_M=\max_{0\leqslant t\leqslant T}Q(t) \qquad (4\text{-}8)$$

并用数学推理方法，在已知统计参数及任意时点分布$F(x)$的基础上，求得设计基准使用期最大值随机变量Q_M的概率分布以参予概率极限状态方程的运算，这就要用极值分析方法。

岩土的工程性质在有些情况下随自然条件变化，如果是影响荷载的参数，亦取用设计基准期内的最大值；如果是影响抗力的参数，则取用设计基准期内的最小值。这也要用极值分析方法。

对$\{X_t,t\in T\}$随机变量族，将时间域T等分为n个时段，每个时段$\tau=\dfrac{T}{n}$，则得n个独立的随机变量$\eta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，每个随机变量都有相同的分布函数$F(X)$。在这个随机变量族中，极大值为

$$M=\max(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (4\text{-}9)$$

极小值为

$$N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n) \qquad (4\text{-}10)$$

在上述两个假定（独立、具有相同的分布函数）的前提下，极大值的分布函数为

$$F_M(x)=P(M\leqslant x)=P(\eta_1\leqslant x,\ \eta_2\leqslant x,\cdots,\eta_n\leqslant x)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(\eta_i\leqslant x)=[F(x)]^n \qquad (4\text{-}11)$$

$F(x)$为原始分布。

如$F(x)$的相应密度函数为$f(x)$，则

$$f_M(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$$

令$F_N(x)=P(N\leqslant x)$

$$P(N\leqslant x)+P(N>x)=1$$

$$P(N>x)=P(\eta_1>x,\ \eta_2>x,\ \cdots,\ \eta_n>x)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(\eta_i>x)=[1-F(x)]^n \qquad (4\text{-}12)$$

故极小值的分布函数为

$$F_N(x)=P(N\leqslant x)=1-P(N>x)=1-[1-F(x)]^n \qquad (4\text{-}13)$$

相应的密度函数为

$$f_N(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x) \qquad (4\text{-}14)$$

假如原始分布$F(x)$对称于$F(0)$，即

$F(-x)=1-F(x)$则$F_M(x)$与 $F_N(x)$之间存在着如下关系

$$F_M(x)=1-F_N(-x) \qquad (4\text{-}15)$$

对于密度函数之间存在着如下关系

$$f_M(x)=f_N(-x) \qquad (4\text{-}16)$$

$F_M(x)$与原始分布$F(x)$有着密切的关系，极值统计理论已经证明了对于三种类型的连续型随机变量原始分布，根据其分布尾部的不同形式，当$n\to\infty$时其极限分布只有三种类型。

1.指数型原始分布

若原始分布$F(x)$的密度函数$f(x)$无限延伸，其导数满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1-F(x)}=-\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$$

且$f(x)$有任意阶导数，则$F(x)$称为指数型分布，包括指数分布、正态分布、对数正态分布、卡埃分布、韦泊分布等。

对于指数型的原始分布$F(x)$，当n趋向于无穷大时，极大值M的分布$F_M(x)$趋向于重指数分布，即

$$\lim_{n\to\infty}F_M(x)=\lim_{n\to\infty}[F(x)]^n=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\} \tag{4-17}$$

这种重指数分布称为极值Ⅰ型分布，或称龚贝(Gumbel)分布，式中α和u为分布参数。

2.哥西型原始分布

若$F(x)$满足以下两个条件：

$$\lim_{x\to\infty}x^k[1-F(x)]=A,\quad x\geqslant 0,\quad k>0$$

$$\lim_{x\to-\infty}(-x)^jF(x)=B>0,\quad x\leqslant 0,\quad j>0$$

则称$F(x)$为哥西型分布，式中A和B为常数。

不难看出，哥西分布

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{du}{1+u^2}$$

满足以上两个条件，所以$F(x)$就是一个哥西型分布。哥西分布的特点是它的各阶矩都不存在。

理论上已经证明，当原始分布$F(x)$为哥西型分布时，最大值X_M的极限分布为

$$\lim_{n\to\infty}F_M(x)=\lim_{n\to\infty}[F(x)]^n=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{\alpha}{x}\right)^k\right] & x\geqslant 0\\ 0 & x<0\end{cases} \tag{4-18}$$

这种极限分布习惯上称为极值Ⅱ型分布，或弗雷切特(Frechet)分布，式中α和k为分布参数。

3.有界型原始分布

顾名思义，有界型分布的密度函数在一个有限的区间$[a, b]$以外等于零，如均匀分布、三角形分布等。

均匀分布

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

其密度函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

理论上已经证明，对于有界型原始分布$F(x)$，最大值X_m的极限分布为

$$\lim_{n\to\infty}F_M(x)=\lim_{n\to\infty}[F(x)]^n=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{\omega-x}{\omega-a}\right)^k\right], & -\infty<x\leqslant\omega\\ 1 & x>\omega\end{cases}\qquad(4\text{-}19)$$

这种分布习惯上称为极值Ⅲ型分布，式中a和k为分布参数。

为了分析上述三种极值分布之间的关系，我们把这三个分布中的符号稍加改变以便能够区分。

$$F_{\mathrm{I}}(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$$

$$F_{\mathrm{II}}(y)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{\mu}{y}\right)^k\right] & y\geqslant 0\\ 0 & y<0\end{cases}$$

$$F_{\mathrm{III}}(z)=\begin{cases}\exp\left[-\left(\dfrac{\omega-z}{\omega-r}\right)^k\right], & -\infty<z\leqslant\omega\\ 1 & z>\omega\end{cases}$$

可以通过变量变换，将其中之一变成另一种形式。

先将$F_{\mathrm{I}}(x)$变换成$F_{\mathrm{II}}(y)$的形式

令$x=\ln y \quad u=\ln\mu \quad \alpha=k$则得

$$F_{\mathrm{I}}(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$$

$$= \exp\{-\exp[-k(\ln y - \ln \mu)]\}$$

$$= \exp\left\{-\exp\left[\ln\left(\frac{y}{\mu}\right)^{-k}\right]\right\}$$

$$= \exp\left\{-\left(\frac{\mu}{y}\right)^{k}\right\} \quad y \geqslant 0$$

$$= F_{\text{II}}(y) \qquad (4\text{-}20)$$

再将$F_{\text{II}}(y)$变成$F_{\text{III}}(z)$的形式

只要在$F_{\text{II}}(y)$中令$y = \omega - z$，$\mu = \omega - r$，$k = -k$，则得

$$F_{\text{II}}(y) = \exp\left[-\left(\frac{\mu}{y}\right)^{k}\right]$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{\omega - r}{\omega - z}\right)^{-k}\right]$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{\omega - z}{\omega - r}\right)^{k}\right] \quad z \leqslant \omega$$

$$= F_{\text{III}}(z) \qquad (4\text{-}21)$$

由于$y < 0$时$F_{\text{II}}(y) = 0$，故由$y = \omega - z$知

当$z > \omega$时$F_{\text{III}}(z) = 0$

最后再由$F_{\text{III}}(z)$变换成$F_{\text{I}}(x)$的形式，令

$\omega - z = e^{-x}$，$\omega - r = e^{-u}$，$k = \alpha$代入$F_{\text{III}}(z)$

$$F_{\text{III}}(z) = \exp\left[-\left(\frac{\omega - z}{\omega - r}\right)^{k}\right]$$

$$= \exp\{-[e^{-x}e^{u}]^{\alpha}\}$$

$$= \exp\{-\exp[-\alpha(x - u)]\}$$

$$= F_{\text{I}}(x) \qquad (4\text{-}22)$$

第四节　极值分布的参数估计

鉴于三种极值分布之间存在着互相变换的关系，这里只讨论极值Ⅰ型的参数估计

令$E(x)$表示极值Ⅰ型分布的数学期望

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\text{I}}(x)\,dx$$

极值Ⅰ型的概率密度函数为

$$f_1(x)=\alpha\exp[-\alpha(x-u)]\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$$

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\alpha x\exp[-\alpha(x-u)]\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}dx$$

令$y=\alpha(x-u)$，$dy=\alpha dx$代入上式右端得

$$E(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{y}{\alpha}+u\right)\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}y\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy+u\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy$$

上式右端第一个积分为尤拉常数，其值c_1等于0.57722…，第二个积分中令$v=\exp(-y)$代入得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy=\int_{0}^{\infty}\exp(-v)dv$$

$$=[\exp(-v)]_0^{\infty}=1$$

因此，数学期望

$$E(x)=\frac{c_1}{\alpha}+u \qquad (4\text{-}23)$$

令$V(x)$表极值Ⅰ型分布的方差，根据方差定义

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}[x-E(x)]^2f_1(x)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-\frac{c_1}{\alpha}-u\right]^2\alpha\exp[-\alpha(x-u)]\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}dx$$

令$y=\alpha(x-u)$，$dy=\alpha dx$，代入上式右端得

$$V(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{y-c_1}{\alpha}\right]^2\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\int_{-\infty}^{\infty}[y-c_1]^2\exp(-y)\exp[-\exp(-y)]dy$$

$$= \frac{1}{\alpha^2}\frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{c_2}{\alpha}\right)^2 \qquad (4\text{-}24)$$

标准差 $\hat{\sigma} = \sqrt{V(x)} = \frac{c_2}{\alpha}$ (4-25)

$$c_2 \doteq 1.28255$$

如已用矩法求得数学期望和方差，就可根据公式（4-23）和（4-24）计算分布参数α和u。

$$\alpha = \frac{1.28255}{\hat{\sigma}} \qquad (4\text{-}26)$$

$$u = E(x) - \frac{0.57722}{\alpha} \qquad (4\text{-}27)$$

极值Ⅰ型分布具有一个非常重要的性质，若原始分布为极值Ⅰ型分布，则最大值的概率分布函数为

$$\begin{aligned} F_M(x) &= [F_1(x)]^n \\ &= \{\exp[-\exp(-\alpha x+\alpha u)]\}^n \\ &= \{\exp[-\exp(-\alpha x+\alpha u)]e^{\ln n}\} \\ &= \{\exp[-\exp(-dx+\alpha u+\ln n)]\} \\ &= \exp\{-\exp[-\alpha(x-\mu)]\} \qquad (4\text{-}28) \end{aligned}$$

式中 $\mu = u + \alpha^{-1}\ln n$

可见，当原始分布为极值Ⅰ型时，最大值的分布函数$F_M(x)$也是极值Ⅰ型分布，其标准差保持不变，即

$$\hat{\sigma}_M = \hat{\sigma}$$

数学期望

$$E_M(x) = \frac{c_1}{\alpha} + \mu = \frac{c_1}{\alpha} + u + \alpha^{-1}\ln n$$

等于原始分布的数学期望平移$\alpha^{-1}\ln n$距离。

【例】

某地气象台从1951年至1975年历年标准风压（kPa）如表

4-1所示

25年标准风压数值（kPa）　　表 4-1

1114	1381	1431	4367	3529	3744	2142	1980	2396	2225
3144	2183	1980	1804	1482	1381	2042	2020	1980	1189
1980	1604	1267	798	1012					

对于这个年标准风压的子样，可以求得平均值和标准差：

$$\overline{W}_t = 1999(\mathrm{kPa})$$

$$\hat{\sigma}_{W_t} = 881(\mathrm{kPa})$$

变异系数

$$V_W = 0.441$$

根据表4-1数据绘制的直方图表明是一个正偏的分布，拟以极值Ⅰ型分布来拟合，分布参数α和u由下式求得

$$\alpha = \frac{c_2}{\hat{\sigma}} = \frac{1.28255}{881} = 1.456 \times 10^{-3}$$

$$u = E(x) - \frac{0.57722}{\alpha} = 1999 - \frac{0.57722}{1.456} \times 10^3$$

$$= 1602.6\ (\mathrm{kPa})$$

年最大风压的极值Ⅰ型分布为

$$F_{W_t}(x) = \exp\{-\exp[-1.456 \times 10^{-3}(x - 1602.6)]\}$$

对于已经拟合的极值Ⅰ型分布，用K-S法进行拟合度检验，列于表4-2。

在表4-2中，统计量D_n由下式求得

$$D_n = \left| F(x) - \frac{\Sigma f_i}{n} \right|$$

在统计量D_n中，最大值为$D_{n\max} - 0.132$如最大的统计量$D_{n\max}$小于一定显著性水平α条件下的临界值$D_{n,\alpha}$，表示经验分布与拟合的分布一致，没有理由拒绝用极值Ⅰ型拟合。

统计量计算和检验表　　表 4-2

x_i	f_i	Σf_i	$z=\frac{x-1602.6}{687.2}$	$F(x)=\exp[-\exp(z)]$	$\frac{\Sigma f_i}{n}$	D_n
798	1	1	-1.1708	0.0398	0.0400	0.002
1012	1	2	-0.8594	0.0943	0.0800	0.014
1114	1	3	-0.7110	0.1305	0.1200	0.010
1189	1	4	-0.6019	0.1611	0.1600	0.011
1267	1	5	-0.4884	0.1960	0.2000	0.004
1381	2	7	-0.3225	0.2514	0.2800	0.029
1431	1	8	-0.2497	0.2770	0.3200	0.043
1482	1	9	-0.1755	0.3037	0.3600	0.056
1604	2	11	0.0020	0.3686	0.4400	0.071
1980	4	15	0.5492	0.5613	0.6000	0.039
2020	1	16	0.6074	0.5800	0.6400	0.060
2040	1	17	0.6365	0.5891	0.6800	0.091
2142	1	18	0.7849	0.6337	0.7200	0.086
2183	1	19	0.8446	0.6507	0.7600	0.109
2225	1	20	0.9057	0.6675	0.8000	0.132
2369	1	21	1.1153	0.7205	0.8400	0.120
3144	1	22	2.2430	0.8993	0.8800	0.019
3529	1	23	2.8033	0.9412	0.9200	0.021
3744	1	24	3.1161	0.9566	0.9600	0.003
4367	1	25	4.0227	0.9823	1.0000	0.018

临界值$D_{n,\alpha}$由表4-3给出。

按$\alpha=0.05$，$n=25$查表4-3得

$$D_{n,\alpha}=0.264$$

$D_{n\max}<D_{n,\alpha}$表示没有理由拒绝用极值Ⅰ型分布来拟合表4-1的年最大标准风压。

如设计基准期$T=50$年，求设计基准期最大标准风压的概率模型。

已知原始分布是极值Ⅰ型分布，统计时段为一年，即$\tau=1$，故$n=\frac{T}{\tau}=50$。

根据极值Ⅰ型分布的特征可知，设计基准期最大标准风压分

K-S检验的临界值($D_{n,\alpha}$)表 $P(D_n > D_{n,\alpha}) = \alpha$　　表 4-3

n \ α	0.20	0.10	0.05	0.01
1	0.90000	0.95000	0.97500	0.99500
2	0.68377	0.77639	0.84189	0.92929
3	0.56481	0.63604	0.70760	0.82900
4	0.49265	0.56522	0.62394	0.73424
5	0.44698	0.50945	0.56328	0.66853
6	0.41037	0.46799	0.51926	0.61661
7	0.38148	0.43607	0.48342	0.57581
8	0.35831	0.40962	0.45427	0.54179
9	0.33910	0.38746	0.43001	0.51332
10	0.32260	0.36866	0.40925	0.48893
11	0.30829	0.35242	0.39122	0.46770
12	0.29577	0.33815	0.37543	0.44905
13	0.28470	0.32549	0.36143	0.43247
14	0.27481	0.31417	0.34890	0.41762
15	0.26588	0.30397	0.33760	0.40420
16	0.25778	0.29472	0.32733	0.39201
17	0.25039	0.28627	0.31796	0.38086
18	0.24360	0.27851	0.30936	0.37062
19	0.23735	0.27136	0.30143	0.36117
20	0.23156	0.26473	0.29408	0.35241
21	0.22617	0.25858	0.28724	0.34427
22	0.22115	0.25283	0.28087	0.33666
23	0.21645	0.24746	0.27490	0.32954
24	0.21205	0.24242	0.26931	0.32286
25	0.20790	0.23768	0.26404	0.31657
26	0.20399	0.23320	0.25907	0.31064
27	0.20030	0.22893	0.25438	0.30502
28	0.19680	0.22497	0.24993	0.29971
29	0.19348	0.22117	0.24571	0.29466
30	0.19032	0.21756	0.24170	0.28987
31	0.18732	0.21412	0.23788	0.28530
32	0.18445	0.21085	0.23424	0.28094
33	0.18171	0.20771	0.23076	0.27677
34	0.17909	0.20472	0.22743	0.27279
35	0.17659	0.20185	0.22425	0.26897
36	0.17418	0.19910	0.22119	0.26532
37	0.17188	0.19646	0.21826	0.26180
38	0.16966	0.19392	0.21544	0.25843
39	0.16753	0.19148	0.21273	0.25518
40	0.16547	0.18913	0.21012	0.25205
41	0.16349	0.18687	0.20760	0.24904
42	0.16158	0.18468	0.20517	0.24613
43	0.15974	0.18257	0.20283	0.24332
44	0.15796	0.18053	0.20056	0.24060
45	0.15623	0.17856	0.19837	0.23798

续表

n \ α	0.20	0.10	0.05	0.01
46	0.15457	0.17665	0.19625	0.23544
47	0.15295	0.17481	0.19420	0.23298
48	0.15139	0.17302	0.19221	0.23059
49	0.14987	0.17128	0.19028	0.22828
50	0.14840	0.16959	0.18841	0.22604
55	0.14164	0.16186	0.17981	0.21574
60	0.13573	0.15511	0.17231	0.20673
65	0.13052	0.14913	0.16567	0.19877
70	0.12586	0.14381	0.15975	0.19167
75	0.12167	0.13901	0.15442	0.18528
80	0.11787	0.13467	0.14960	0.17949
85	0.11442	0.13072	0.14520	0.17421
90	0.11125	0.12709	0.14117	0.16938
95	0.10833	0.12375	0.13746	0.16493
100	0.10563	0.12067	0.13403	0.16081

布的标准差与原始分布相同。

$$\hat{\sigma}_{W_T} = \hat{\sigma}_{W_i} = 881\ (\mathrm{kPa})$$

平均值平移距离为$\ln n/\alpha = \dfrac{\ln 50}{1.456} \times 10^3 = 2687$

$$\overline{W}_T = \overline{W}_i + 2687 = 4686\ (\mathrm{kPa})$$

$$\alpha_T = 1.456 \times 10^{-3}$$

$$\mu_T = \overline{W}_T - \frac{0.57722}{\alpha_T} = 4686 - \frac{0.57722}{1.456} \times 10^3 = 4290$$

故得设计基准期最大标准风压的概率模型为

$$F_T(x) = \exp\{-\exp[-1.456 \times 10^{-3}(x - 4290)]\}$$

第五节　自然条件的变化规律

岩土体的性状与自然环境有着密切的关系。当自然条件发生较大的变化时，岩土性状有时会发生很大的变化。如果对这种影响估计不足，或者没有很好地掌握其规律，因而在设计时没有考虑到这种变化产生的后果，一旦自然条件确实发生了变化，就会

出现意想不到的事故。这是工程中常有的事，但人们苦于对自然条件变化的规律了解不多，还缺少方法。

人们已经注意到了降雨与土坡失稳之间的联系，勒姆（P. Lumb）研究了香港地区的资料，找出了暴雨与土坡失稳的某些规律[49]。将土坡失稳的事故从宏观上分为三种类型

1.灾害性的，用D表示。如果在一天中发生超过50起单独的事故，并在整个地区范围内引起灾害性的危险就称为灾害性的。

2.严重的，用S表示。如果一天中发生10到50起事故，在某些范围内产生较为普遍的危险就称为严重的。

3.不严重的，用M表示。如果一天中发生10起以下的事故，并只在有限地方发生危险的就称为不严重的。

将降雨也划分为三个等级，见表4-4

表 4-4

名　称	符　号	一天总降雨量超过	十五天总降雨量超过	重现期
暴　雨	d	100mm	350mm	五　年
大　雨	s	100mm	200mm	半　年
中等的	m	50mm	50mm	45　天

同时考虑降雨时的风力情况分为季节风和暴风两类。

根据香港地区1884～1939，1947～1976共86年降雨资料，拟合为泊松分布，参数ν见表4-5。

暴雨和大雨的联合分布可以看作是两个独立的泊松分布的乘积

泊松分布的参数ν　　表 4-5

	季　风	暴　风
大　雨	0.465	0.233
暴　雨	0.186	0.093

$$P(s,\ d)=P(s)P(d) \qquad (4\text{-}29)$$

表4-6给出了86年中季风时降雨期望联合发生数与观察数的比较，看来用双变量的泊松分布能很好地拟合而不需用其它更复杂的表达式。表中括号内的数值是观察数。

表4-7给出了季风暴雨与暴雨暴雨的联合概率。任何一年三

期望值与观察值的比较 **表 4-6**

	每年暴雨次数(d)				总和(s)
	0	1	2	>2	
0	44.8	8.3	0.8	0.0	53.9
	(48)	(8)	(0)	(0)	(56)
每年大1	20.9	3.9	0.4	0.0	25.2
	(20)	(1)	(2)	(0)	(23)
雨次数2	4.9	0.9	0.1	0.0	5.9
(s)	(2)	(3)	(0)	(0)	(5)
3	0.8	0.1	0.0	0.0	0.9
	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)
4	0.1	0.0	0.0	0.0	0.1
	(1)	(0)	(0)	(0)	(1)
>4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	(0)	(0)	(0)	(0)	(0)
总和(d)	71.5	13.2	1.3	0.0	86.0
	(72)	(12)	(2)	(0)	(86)

暴雨年概率 **表 4-7**

	每年暴风暴雨次数					$P(d)_m$
	0	1	2	3	>3	
0	0.7566	0.0703	0.0032	0.0001	0.0001	0.8303
每年季风1	0.1407	0.0131	0.0006	0.0000	0.0000	0.1544
暴雨次数2	0.0131	0.0012	0.0001	0.0000	0.0000	0.0144
3	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0009
>3	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$P(d)_e$	0.9112	0.0847	0.0039	0.0001	0.0001	1.0000

次或三次以上暴雨的概率是非常小的，大约为0.1%，实际观察到的是在1932年最大的观察数是一次暴风暴雨对二次季风暴雨。

由降雨而引起土坡失稳用条件概率来表示，在表 4-8 中给出了三种条件概率$P(D/d)$、$P(S/s)$和$P(S/d)$。

表4-9给出了各种类型失效与各种等级降雨之间关系。

以降雨为条件的概率　　表 4-8

灾害性事件			
$P(D \mid d)$	暴风暴雨	1955年前	0.167
		1955年后	1.00
	季风暴雨	所有年份	0
严重事件			
$P(S \mid s)$	全部中等降雨	1955年前	0.225
		1955年后	0.500
$P(S \mid d)$	全部暴雨	1988～1976年	0.125

失效事件与降雨的关系　　表 4-9

降雨等级		失效程度				
		0	M	S	D	总计
全部	m	—	(48)	1	0	—
	s	24	17	19	0	60
	d	8	7	3	6	24
总计		—	(72)	23	6	—
季风雨	m	—	(38)	1	0	—
	s	14	13	13	0	40
	d	5	3	2	6	16
暴风雨	m	—	(10)	0	0	—
	s	10	4	6	0	20
	d	3	4	1	0	8

注：括号表示不完全统计
—表示数目不知道

表4-10给出在86年中各种类型事件与月平均降雨量的关系。

环境因素对于路面基层土的承载力有重要影响。可以分为两

类，一类是外部因素，即气候环境，包括日照持续时间、气温、湿度、降雨量、蒸发等；另一类内部因素，即地下环境，包括含水量、地温、土的吸力、地表温度等。

失效事件数　　表 4-10

月	4	5	6	7	8	9	10	11
平均降雨量	136	293	401	372	371	279	99	43mm
灾害性的		2	3	1				
严重的		2	6	3	7	4	1	
不严重的		12	20	12	19	12		

对非饱和土来说，土的吸力与强度有直接的关系[见第六章，公式（6-48）]。根据长期观测的资料分析、发现土的吸力随季节而发生周期性的变化，周期方程可以用富里哀级数的形式来表达[50]

$$S = A + B_1 \sin\left(\frac{\pi}{12}T + \theta_1\right) + B_2 \sin\left(\frac{\pi}{6}T + \theta_2\right) + B_3 \sin\left(\frac{\pi}{12}T + \theta_3\right) \qquad (4\text{-}30)$$

式中　S——吸力（pF）；

A——土的平均吸力（pF）；

B_1——第二项的幅值（pF）；

B_2——第三项的幅值（pF）；

B_3——第四项的幅值（pF）；

θ_1——第二项的幅值（rad）；

θ_2——第三项的幅值（rad）；

θ_3——第四项的幅值（rad）；

T——时间周期数，半年划分为星期。

公式（4-30）中的系数见表4-11。

周期方程的系数　　表 4-11

调查期	深度(cm)	A	B_1	θ_1	B_2	θ_2	B_3	θ_3	s_e
7～12月	7	2.163	0.4436	6.3538	0.2167	4.0004	0.0762	3.1797	0.062
	30	1.955	0.4107	6.2100	0.2797	4.1574	0.1624	2.8366	0.045
	50	1.911	0.3076	6.6032	0.2446	4.1373	0.1389	3.0559	0.116
	100	1.802	0.2762	6.4122	0.2679	3.9287	0.1387	2.6986	0.089
1～6月	7	1.999	0.3456	1.2992	0.1158	5.9579	0.0775	4.3427	0.053
	30	1.725	0.2811	1.3847	0.2302	6.0313	0.0643	4.6326	0.066
	50	1.625	0.2609	1.0943	0.2008	6.6096	0.1167	4.7359	0.074
	100	1.619	0.2601	1.2541	0.1687	6.1826	0.0567	4.2699	0.074

膨胀土的性状与自然条件有着密切的关系。潜在的膨胀势只有在一定条件才表现为膨胀量或膨胀力，对收缩也是如此。在工程实践中，膨胀土含水量的最小值是进行地基土评价，预估膨胀土地基收缩变形量的一个重要参数。

我国膨胀土多位于亚干旱和亚湿润区的气候条件，多年观测结果表明，在地势较平坦和丘陵地区的主要胀缩变形层中（如地面以下 4 m范围内），地基土含水量的变化具有随气候季节性变化，周期性增减的特征。各地区天然含水量变化的幅度虽然不同，却具有在塑限附近一定范围内波动变化的共同规律。因此可将研究天然含水量随自然条件而变化的问题，转换为研究天然含水量与塑限的比值-湿度状态系数K的变化规律问题[30]。

已有研究K值的原始分布服从正态分布，可以认为它的极值分布服从极值Ⅰ型分布。如果假定每一年的K值是互相独立的，可以推得设计基准期K的最小值的概率分布。

根据六年的观测资料得最小K值的平均值为0.870，方差为0.106。设计基准期取50年，求K最小值的概率分布。

按公式（4-26）和（4-27）

$$\alpha = \frac{1.28255}{\hat{\sigma}_K} = \frac{1.28255}{\sqrt{0.106}} = 3.93$$

$$u = \bar{K} - \frac{0.57722}{\alpha} = 0.870 - \frac{0.57722}{3.93} = 0.72$$

按公式（4-28）

$$\mu = u + \alpha^{-1}\ln n = 0.79 + \frac{\ln 50}{3.93} = 1.71$$

求得设计基准期50的湿度状态系数K的极值分布

$$F_N(K) = 1 - \exp\{-\exp[-\alpha(K-\mu)]\}$$
$$= 1 - \exp\{-\exp[-3.93(K-1.71)]\}$$

研究表明，在地下水位深的地区，土中含水量的变化则主要受气候因素的降水和蒸发之间的湿度平衡所控制，湿度状态系数K与气候条件存在着一定的相关性[51]，线性回归方程为

$$K = 1.152 - 0.726\beta_e - 0.001073C$$

式中 $C = \Sigma(E-R)$

E——蒸发力（mm）；

R——降水量（mm）；

Σ——$K_0 > 1$的月分的$(E-R)$之总和

$$K_0 = \frac{\text{蒸发力}}{\text{降水量}}$$

$$\beta_e = \frac{\text{9月至次年2月蒸发力之总和}}{\text{全年蒸发力总和}}$$

我国若干地区的资料见表4-12。

我国若干地区膨胀土的系数　　表 4-12

地　区	β_e	C	K
合　肥	0.270	90.200	0.84
贵　阳	0.323	23.160	0.89
开　远	0.332	328.480	0.56
信　阳	0.250	1.356	0.97

第五章　概率极限状态方程

岩土工程的状态是由有限个相互独立的参数确定的，这些参数大多是随机变量，因而岩土工程问题往往带有很大的不确定性。但长期以来处理岩土工程的安全度问题主要采用定值论的方法，用安全系数来表示安全程度。从定值论的观点来看，只要采用了适当的安全系数，工程的安全就得到了保证。但事实并非如此，计算的安全系数大于1而发生破坏的事例并不是绝无仅有的现象，用传统的定值论的方法却无法提供评价岩土工程可靠性的指标。

岩土工程问题既然是非确定性的，从理论上说，一项工程不可能不冒一定的风险，在经济上也要冒一定的风险。问题是如何把所冒的风险限制在人们可以接受的限度以内，这就是可靠性设计的目的。

当整个岩土工程结构或结构的某一部分超过某一特定状态就不能满足设计规定的某一功能要求，这种特定状态称为该功能的极限状态*。描述极限状态的功能函数称为极限状态方程，极限状态方程中的基本变量作为随机变量考虑时，这种极限状态方程称为概率极限状态方程。岩土工程中的极限状态设计方法正在发展中[52]。

根据概率极限状态方程中基本变量的概率分布，采用平均值和标准差两个统计量来估计失效概率的方法是一种实用的近似概率计算法，称为“一次二阶矩法”。二阶矩还可以按随机变量的实际分布，分为两种情况，第一种称为中心点法，它假定服从正

---

* 极限状态(limit states)亦可写作界限状态以与土力学中极限(ultimate)一词区别。本书按我国《建筑结构设计统一标准》的术语，采用“极限状态”一词。

态分布，并在平均值处（即中心点）赋值；第二种要考虑实际分布将非正态分布当量正态化，并在设计验算点进行迭代，计算可靠性指标和失效概率，称为验算点法。

本章除讨论一次二阶矩法外，还介绍了失效概率的解析表达式，包括一些非正态变量失效概率计算公式。

第一节 安 全 系 数

在岩土工程中，安全系数FS一般由下式定义

$$FS=\frac{\tilde{C}}{\tilde{D}} \tag{5-1}$$

式中 $\tilde{C}$——系统有效运行能力的下限估值；

$\tilde{D}$——对系统需求的上限估限。

在不同的工程问题中，C和D分别定义为不同的物理量。例如在承载力计算问题中，C定义为地基承载力，D定义为基底压力；在挡土结构物倾覆稳定验算问题中，C定义为抗倾覆力矩，D定义为倾覆力矩。

与结构工程相比，岩土工程中有更多的不确定性和近似性，这是因为土的性状非常复杂，人们对于影响土质条件的认识还很不充分，因此习惯采用比结构工程大得多的安全系数来对付可能发生的偏差。表5-1给出了岩土工程中常用的总安全系数值。

表中上限数值用于正常使用条件，下限值则用于临时荷载或最大荷载条件，下限值有时也用于取用原位足尺试验的结果。

尽管在岩土工程中采用了很大的安全系数，但并不能保证系统一定不破坏，这是因为能力的下限估值与需求的上限估值并不一定是同时发生的。由于这两个都是随机变量，就有可能发生$C<D$的情况，这时就发生了破坏。因此，安全系数大于1给人们以一种安全的感觉而掩盖了可能发生的（尽管概率也许很小）破坏危险性。

确定岩土工程状态的这些参数之间在变异性上是有差异的。

总 安 全 系 数　　表 5-1

破坏类型	土工问题类型	安全系数 FS	
		根据Meyerhof[53]	根据Bowles[54]
剪　　切	土工结构物	1.3～1.5	1.2～1.6
	挡土结构物	1.5～2.0	1.5～2.0
	板桩、围堰		1.2～1.6
	有支撑的开挖		1.2～1.5
	海洋平台基础	1.5～2.0	
	陆上基础	2～3	
	独立基脚		2～3
	片筏基础		1.7～2.5
	浮 托 力		1.7～2.5
渗　　透	隆　　起	1.5～2.5	1.5～2.5
	管　　涌	3～5	3～5

例如，静载的变异性是很小的，活载却是随时间而变化的，土的两个抗剪强度指标 c 与 ϕ 的变异性也是不同的。采用一个总安全系数的办法不能反映这些差异，采用分项安全系数的方法可以消除这个缺点，比总安全系数方法前进了一步。

用分项安全系数表示的极限状态方程可用下式表示

$$D(FS_d p_d + FS_l p_l) = C\left(\frac{c}{FS_c}, \frac{\mathrm{tg}\,\phi}{FS_t}\right) \qquad (5\text{-}2)$$

式中　p_d，p_l——分别为静载和活载；

c，ϕ——分别为土的内聚力和内摩擦角；

FS_d，FS_l——荷载的分项安全系数；

FS_c，FS_t——土的抗剪强度指标的分项安全系数。

岩土工程中分项安全系数一般值见表5-2。

不论是总安全系数还是分项安全系数，其大小取决于所得资料（包括荷载和土的性状）的可靠性、施工和运行的经济性及在使用期间失效的概率和危害性。安全储备的大小与下面几个因素有关，荷载和荷载效应、土的强度和变形特征（包括取土与扰动程度，试样尺寸，加荷的速率与荷载的变化，各向异性，孔隙水

分项安全系数（根据Meyerhof[53]）　　表 5-2

项　　目	强　度　指　标	安全系数
土工构筑物和挡土墙	内聚力 c	1.5
	内摩擦角　$\mathrm{tg}\phi$	1.2
	内聚力与内摩擦角	1.3～1.5
基　础　工　程	内聚力 c	2～2.5
	内摩擦角　$\mathrm{tg}\phi$	1.2～1.5
恒　　载		0.9～1.2
活　　载		1.0～1.5
静水压力		1.0～1.2
环境荷载		1.2～1.4

压力和排水条件）、分析方法和施工条件。分析方法是指方法的精度、假定、机理和土层剖面的简化等方面。施工条件包括施工的质量和几何尺寸的误差，材料和工艺，运行期的维护等。可见，影响安全储备的因素是非常复杂的。尽管如此，对安全系数取值起决定作用的还是荷载和土的性状参数两个方面的变异性。考虑变异系数来取用安全系数的资料见表5-3和表5-4[58]。

按定值论方法的安全系数概念，系统的极限状态方程为

$$FS = \frac{\tilde{C}}{\tilde{D}} = 1 \qquad (5\text{-}3)$$

总变异性与总安全系数[53]　　表 5-3

变异系数 V	稳定问题	沉降问题	稳定安全系数 99%可靠性	沉降系数 90%可靠性
低	土　坡		1.3～1.9	
0.1～0.2	（砂）			
中　等	粘土中土坡与基	粘土中的基础	1.9～3.3	1.3～1.6
0.2～0.3	础，挡土结构物			
高	砂土中的基础	砂土中的基础	>3.3	>1.6
0.3～0.4				
很　高				
>0.4	桩(动力分析)			

分项变异性和分项安全系数[53]　　表 5-1

变异系数	荷　　载	土的性状	安全系数 90%可靠性
很　　低 <0.1	恒　　载 静水压力	容　　重	<1.1
低 0.1～0.2	孔隙水压力	砂土指示指标 内摩擦角	1.1～1.3
中　　等 0.2～0.3	活　　载 环境荷载	粘土指示指标 内 聚 力	1.3～1.6
高 0.3～0.4		压缩、固结 贯入阻力	>1.6
很　　高 >0.4		渗　　透	

安全系数FS大于1表示系统是安全的，安全系数越大应当表示系统越安全。但事实并不如此，我们并不能不加条件地说，$FS=2$的系统一定比$FS=1.5$要安全些。从表5-1可以看出，不同岩土工程问题的安全系数相差非常大。对有支撑的开挖，$FS=1.5$已足够安全了，但对管涌来说$FS=2$还是不安全的。这就说明了安全系数的局限性，当选用某一确定的安全系数值时，实际上的安全储备是不确定的，其安全储备不仅随项目性质而异，而且也与参数的变异性有关，安全系数作为描述系统功能的准则，不符合稳定性的要求。

即使对于同一个岩土工程问题，由不同的简化计算图式所得到的安全系数，其意义也不相同。例如，对图5-1所示的土坡，安全系数FS可以用下面两种方式来表示

$$FS=\frac{\tau_f Lr}{W_1 a_1-W_2 a_2} \qquad (5\text{-}4)$$

$$FS=\frac{\tau_f Lr+W_2 a_2}{W_1 a_1} \qquad (5\text{-}5)$$

式中　τ_f——假定滑动面上的抗剪强度值；

L——滑动圆弧AB的长度；

r——滑动圆弧的半径；

W_1，W_2——分别为图5-1所示两部分截面的土体重量；

a_1，a_2——分别为图5-1所示两部分截面形心至圆心的水平距离。

用上面两个公式计算土坡的安全系数都是可以的，但所得的安全系数值却是不相同的。当采用某个安全系数(例如1.5)时，并没有说明真实的安全度有多少。可见传统的安全系数方法存在着一些难以克服的缺点，因此寻求更合理的评价系统安全程度的方法是必要的。可靠性分析方法在一定程度上可以弥补上述不足之处。

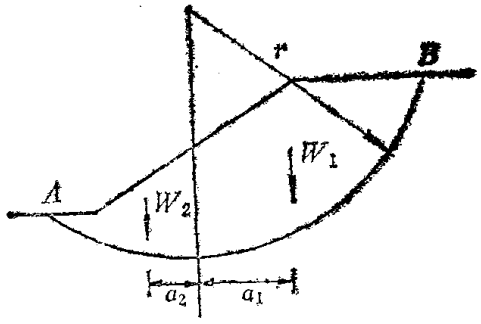


图 5-1　土坡稳定简化图式

第二节　安全储备与失效概率

定值论方法在设计原则上没有把确定系统状态的参数作为随机变量或随机过程来处理；在安全系数计算上采用经验的办法来考虑可能发生的最不利情况，但既不能排除失效的可能，也无法估计这种可能性究境有多大；在评价标准上采用大于1的安全系数容许值给人们一种绝对安全的满足而掩盖了可能发生失效的风险。

可靠性设计的基本出发点是借助于概率分析来评价系统的安

全度，同时给出了计算失效概率的方法和评价可靠性的标准。

安全储备是保证系统安全运行的必要定量指标。安全储备大于零表示系统能满足设计时所规定的功能要求，系统的失效可定义为安全储备小于零（当然亦应包括安全储备等于零的极限状态）。安全储备SM为能力C与需求D的差值

$$SM = C - D \tag{5-6}$$

由于能力C和需求D都是随机变量，安全储备SM也是随机变量。尽管在设计时取用大于1的安全系数，但安全储备SM小于零的可能性是存在的，这种可能性的定量估计就是失效概率P_f。失效概率定义为安全储备等于小于零的概率

$$P_f = P[SM \leqslant 0] = P[(C - D) \leqslant 0] \tag{5-7}$$

如已知能力C和需求D的概率密度函数，并如图5-2所示，则两支概率密度函数曲线相交部分的阴影面积就是失效概率。失效概率的一般表达式可以用积分式来表示。

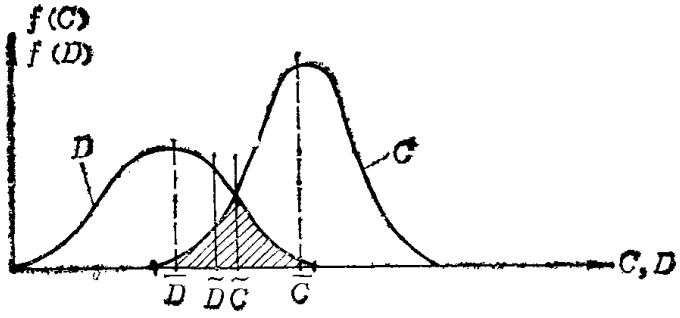


图 5-2　失效概率

在需求D的某一水平D_1，随机变量D在微小区间dD内出现的概率为

$$P\left[D_1 - \frac{dD}{2} < D < D_1 + \frac{dD}{2}\right] = f_D(D_1)dD \tag{5-8}$$

式中　$f_D(D_1)$为需求D的概率密度函数在D_1处的赋值。

能力C小于需求D_1的概率可用下式表示：

$$P[C<D_1]=\int_{-\infty}^{D_1} f_O(C)dC \qquad (5\text{-}9)$$

在需求水平D_1，失效概率为上述两个概率的乘积，即

$$P_f=f_D(D_1)dD\int_{-\infty}^{D_1} f_O(C)dC \qquad (5\text{-}10)$$

考虑到所有可能的需求值，用积分的办法得到失效概率

$$P_f=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{D} f_O(C)dC\right]f_D(D)dD \qquad (5\text{-}11)$$

失效概率也可用下式表示

$$P_f=\int_{-\infty}^{\infty} F_O(D)f_D(D)dD \qquad (5\text{-}12)$$

式中$F_O(D)$表示能力C的概率分布函数以需求D赋值。

若已知能力和需求的经验分布，代入失效概率的一般表达式就可以求得失效概率值P_f。

如能力和需求都符合正态分布，则安全储备必然亦服从正态分布，并具有下面的概率密度函数

$$f_{SM}(SM)=\frac{1}{\hat{\sigma}_{SM}\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{SM-\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}\right)^2\right] \qquad (5\text{-}13)$$

式中 $\hat{\sigma}_{SM}$ = 为$\sqrt{\hat{\sigma}_D^2+\hat{\sigma}_C^2}$为安全储备的标准差；

$\hat{\sigma}_D$，$\hat{\sigma}_O$——分别为需求和能力的标准差。

取标准化变量

$$u=\frac{SM-\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}} \qquad (5\text{-}14)$$

则失效概率P_f可以利用标准正态分布的累计概率函数ψ（u）来求得

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi(u) \qquad (5\text{-}15)$$

$\psi(u)$可以从表2-1查得。

图5-3给出了安全储备SM的概率密度分布曲线，根据失效概率的定义，图中纵座标轴左侧曲线下的阴影面积即为失效概率P_f，亦即令公式（5-14）中的$SM=0$，并代入公式（5-15）得

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi\left(\frac{\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}\right)=\frac{1}{2}-\psi\left(\frac{\overline{C}-\overline{D}}{\sqrt{\hat{\sigma}_D^2+\hat{\sigma}_C^2}}\right) \tag{5-16}$$

如令能力和需求平均值之比为中心安全系数CFS

$$CFS=\frac{\overline{C}}{\overline{D}} \tag{5-17}$$

则失效概率P_f可用中心安全系数CFS表示

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi\left[\frac{CFS-1}{\sqrt{(CFS)^2V_C^2+V_D^2}}\right] \tag{5-18}$$

式中V_C，V_D分别为能力和需求的变异系数。

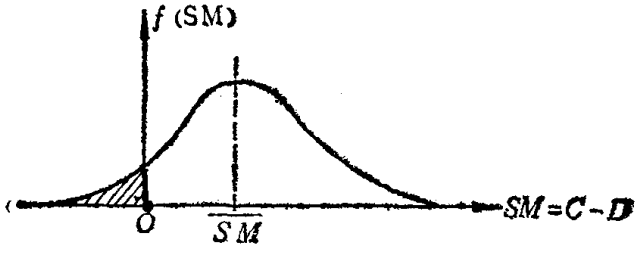


图 5-3　安全储备概率密度分布曲线

第三节　正态变量的极限状态方程

用安全储备定义的系统极限状态方程

$$SM=C-D=0 \tag{5-19}$$

在图5-4所示的COD座标系统中，极限状态方程是一条与水平轴构成45°的斜直线，称为极限状态直线。在直线的左上侧为可靠区（或安全区），右下侧为失效区（破坏区）。

如分别将极限状态方程中的基本变量C、D变换为标准正态变量

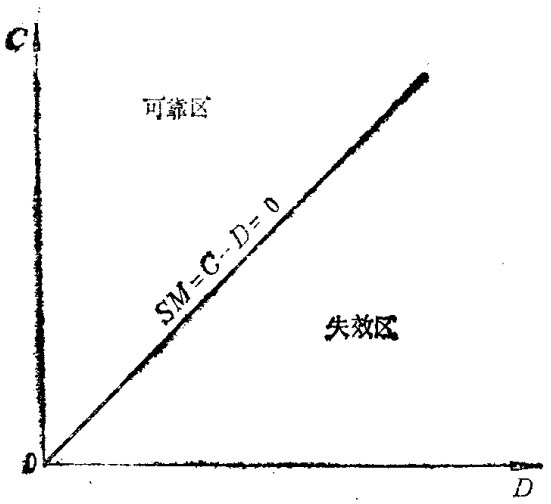


图 5-4 极限状态直线

$$C_u = \frac{C - \overline{C}}{\hat{\sigma}_C} \tag{5-20}$$

$$D_u = \frac{D - \overline{D}}{\hat{\sigma}_D} \tag{5-21}$$

则极限状态方程变换为

$$C_u\hat{\sigma}_C + \overline{C} - (D_u\hat{\sigma}_D + \overline{D}) = 0 \tag{5-22}$$

$$C_u\hat{\sigma}_C - D_u\hat{\sigma}_D + \overline{C} - \overline{D} = 0$$

除以 $-\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}$ 得

$$-C_u\frac{\hat{\sigma}_C}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} + D_u\frac{\hat{\sigma}_D}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} - \frac{\overline{C} - \overline{D}}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} = 0$$

令 $\dfrac{-\hat{\sigma}_C}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} = \cos\theta_C$ $\dfrac{+\hat{\sigma}_D}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} = \cos\theta_D$

$$\frac{\overline{C} - \overline{D}}{\sqrt{\hat{\sigma}_C^2 + \hat{\sigma}_D^2}} = \beta = \overline{OP}^*$$

则在图5-5所示的C_uOD_u座标系中，极限状态方程可用直线的法线式表示

$$C_u\cos\theta_C+D_u\cos\theta_D-\overline{OP}^*=0 \qquad (5\text{-}23)$$

或

$$C_u\cos\theta_C+D_u\cos\theta_D-\beta=0 \qquad (5\text{-}24)$$

式中$\cos\theta_C$，$\cos\theta_D$分别为法线$\overline{OP}^*$对座标轴C，D的方向余弦；β称为可靠性指标，它的几何意义从图5-5中可以看出是标准正态变量座标系统中，原点O到极限状态方程直线的最短距离。从物理意义来说，β是安全储备的变异系数的倒数。由图可知，P^*的座标为

$$C_u^*=\beta\cos\theta_C \qquad (5\text{-}25)$$

$$D_u^*=\beta\cos\theta_D$$

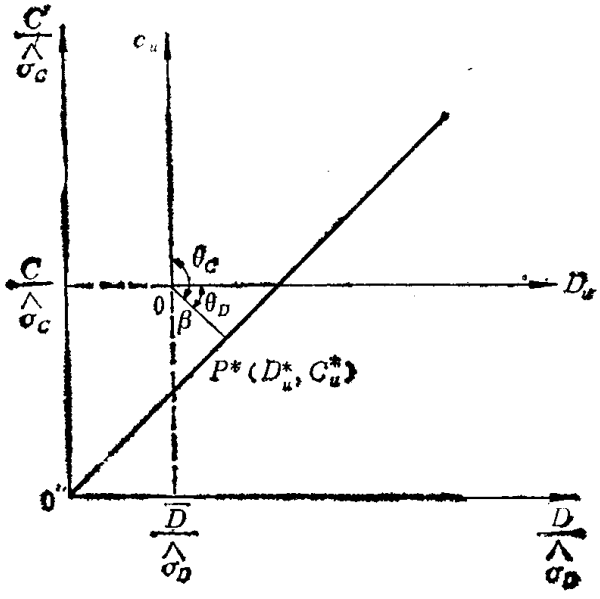


图 5-5 标准化变量座标系统

将公式（5-25）代入公式（5-20）和（5-21），可得P^*点在原座标系统中的座标值

$$D^*=\overline{D}+\beta\,\hat{\sigma}_D\cos\theta_D \qquad (5\text{-}26)$$

$$C^*=\overline{C}+\beta\,\hat{\sigma}_D\cos\theta_C$$

因P^*在极限状态直线上，故满足极限状态条件

$$C^* - D^* = 0 \qquad (5\text{-}27)$$

P^*（D^*，C^*）点称为设计验算点，它是满足极限状态方程的基本变量C和D的各种组合取值中，出现概率最大的一组取值。

当采用统计修正系数来表示设计表达式时，基本变量的设计验算点座标值即为满足极限状态方程的设计值C_d和D_d，它们分别由相应的标准值C_k和D_k乘以统计修正系数γ_s求得。当然，能力的统计修正系数必然小于1而需求的统计修正系数一定大于1。

这种概念和方法同样可以推广到多个随机变量的情况。

第四节　多个正态变量的极限状态方程

一、一般讨论

如极限状态方程由多个相互独立的正态变量$X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$组成，则极限状态方程为

$$Z = g(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n) = 0 \qquad (5\text{-}28)$$

方程（5-28）表达为座标系统$O—X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$中的一个面，这个面把$n$维空间分为可靠区和失效区两个部分。方程可能是线性的，也可能是非线性的，不同性质的极限状态面，解的方法也就不同。

与前面一节一样，我们分别将随机变量X_i变换为标准正态变量

$$X_{u_i} = \frac{X_i - \overline{X}_i}{\hat{\sigma}_{x_i}} (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (5\text{-}29)$$

在座标系统$O—X_{u_i}$中，极限状态方程表达为

$$Z = g(X_{u_1}\hat{\sigma}_{x_1} + \overline{X}_1,\ X_{u_2}\hat{\sigma}_{x_2} + \overline{X}_2,\ \cdots,$$
$$X_{u_n}\hat{\sigma}_{x_n} + \overline{X}_n) = 0 \qquad (5\text{-}30)$$

与两个正态分布相类似，此时的可靠性指标β表示在标准正态座标空间$O-X_{u_i}$中，原点O到极限状态曲面的最短距离，也就是验算点P^*处沿极限状态曲面的切平面法线方向到原点O的长度。

如只有三个正态变量，则如图5-6所示，β为极限状态状态面上验算点P^*到座标原点O的距离。

由于标准正态变换时座标轴是平移的，P^*点的法线与座标向量的方向余弦在两个座标系统中是相同的。

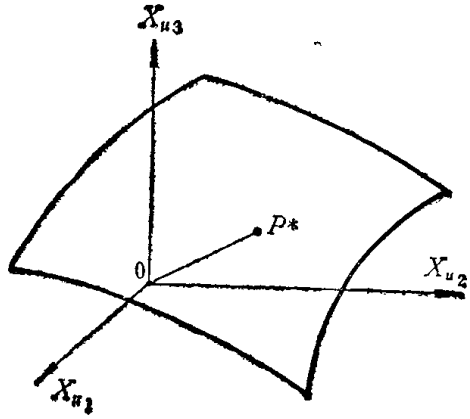


图 5-6　极限状态曲面

多个正态变量经标准化变换后的方向余弦由下式表示

$$\cos\theta_{X_{u_i}} = \cos\theta_{X_i} = \frac{-\left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{P^*} \cdot \hat{\sigma}_{X_i}}{\left[\Sigma\left(\left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{P^*} \cdot \hat{\sigma}_{X_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{5-31}$$

式中$\left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{P^*}$表示$g(X_i)$对$X_i$的一阶偏导数在验算点$P^*$的赋值。

由方向余弦定义可得：

$$X^*_{u_i} = \overline{OP}^* \cos\theta_{X_i} = \beta\cos\theta_{X_i}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (5\text{-}32)$$

根据公式（5-29）和（5-32）可得验算点 P^* 在标准正态座标系统中的座标值：

$$X^*_{u_i} = \frac{X^*_i - \overline{X}_i}{\hat{\sigma}_{X_i}} = \beta\cos\theta_{X_i} \qquad (5\text{-}33)$$

因而验算点P^*在原座标系统中的座标值为

$$X^*_i = \overline{X}_i + \beta\hat{\sigma}_{X_i}\cos\theta_{X_i} \qquad (5\text{-}34)$$

已知验算点P^*极限状态面上的一个点，应当满足极限状态方程，故得：

$$g(X^*_1,\ X^*_2,\ \cdots,\ X^*_n) = 0 \qquad (5\text{-}35)$$

由公式（5-31）（5-34）及（5-35）可以联立求解 β 及X^*_i（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）。

前一节讨论的两个正态变量的情况，可以看作是多个正态变量的特例。

二、线性方程

如果极限状态方程是线性的，则可直接根据公式（5-31）（5-34）及（5-35）联立求解β及X^*_i（$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$）。

最简单的线性方程为

$$g(R,\ G,\ L) = R - G - L = 0 \qquad (5\text{-}36)$$

式中，R为抗力，G为恒载效应，L为活载效应，三个变量都服从正态分布，则由（5-31）可得：

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\partial g}{\partial R}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_R &= -\hat{\sigma}_R \\ -\frac{\partial g}{\partial G}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_G &= \hat{\sigma}_G \\ -\frac{\partial g}{\partial L}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_L &= \hat{\sigma}_L \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}37)$$

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_R &= \frac{-\hat{\sigma}_R}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}}\\ \cos\theta_G &= \frac{\hat{\sigma}_G}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}}\\ \cos\theta_L &= \frac{\hat{\sigma}_L}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}38)$$

由公式（5-34）可得

$$\left.\begin{aligned}R^* &= \overline{R}+\beta\hat{\sigma}_R\cos\theta_R\\ G^* &= \overline{G}+\beta\hat{\sigma}_G\cos\theta_G\\ L^* &= \overline{L}+\beta\hat{\sigma}_L\cos\theta_L\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}39)$$

将R^*，G^*，L^*代入（5-36）式，可得

$$\overline{R}-\overline{G}-\overline{L}-\beta\left(\frac{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}}\right)=0$$

$$\beta=\frac{\overline{R}-\overline{G}-\overline{L}}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_G^2+\hat{\sigma}_L^2}} \qquad (5\text{-}40)$$

三、非线性极限状态方程

当极限状态方程为非线性时，用公式（5-31）（5-34）及（5-35）联立求解β及X_i^*（$i=1, 2, \cdots, n$）时碰到了困难。这是因为在用公式（5-34）求解验算点座标时需要代入方向余弦值，这需用公式（5-31）计算，但在公式（5-31）中计算偏导数在验算点赋值时就要用到未知的验算点座标。求解β也有类似的情况，这就需求用迭代法求解。

用迭代法求解时，先假定X_i^*（$i=1, 2, \cdots, n$）值（第一次迭代时可令$X_i^*=\overline{X}_i$），用公式（5-31）求方向余弦，然后用公式（5-34）求X_i^*值，再用公式（5-35）计算β值，求得新的X_i^*值后与假定的（或上一次的）X_i^*值比较，其差值如大于允

许误差，则以新的X_i^*值重新进行一次计算，直到满足要求时为止。也可以用β来比较，直到新的β值与上一次的β值之差值小于允许误差为止。

迭代法的计算框图如图5-7所示。

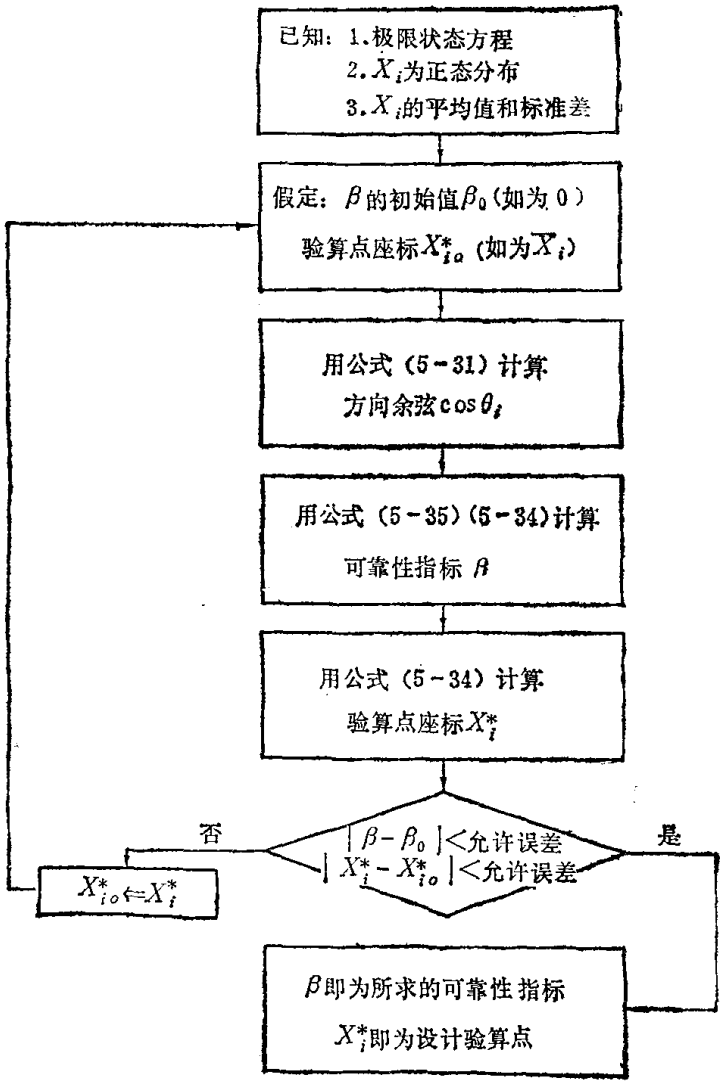


图 5-7　正态变量迭代法

岩土工程中多个正态变量非线性极限状态方程的迭代法求解的一些实例见文献[55]。

第五节　非正态分布变量的变换

在失效概率的解析表达式（5-11）或（5-12）中，如能力C和需求D的分布均已知为正态分布，就可利用标准正态分布来计算失效概率。当采用验算点法计算可靠性指标β时，对于正态变量的情况，可以用第三节和第四节的方法来计算。

本节讨论的是非正态变量的情况。在极限状态方程中如有一个或多个非正态变量，可以用变换的方法来处理，经过处理以后可仍按前面讨论过的适用于正态变量的方法来计算。

一、对数正态变换

若随机变量Y的对数$X=\ln Y$是一个正态分布变量，则Y服从对数正态分布，称为对数正态变量。

设正态变量X的概率密度函数为$f_X(x)$，对数正态变量Y的概率密度函数为$f_Y(y)$，这两个变量当量变换的条件是X变量在$x+dx$区间内出现的概率等于Y变量在$y+dy$区间内出现的概率，即

$$f_Y(y)dy=f_X(x)dx$$

$$f_Y(y)=\frac{f_X(x)}{\left|\frac{dy}{dx}\right|} \tag{5-41}$$

对$X=\ln Y$两边取微分得

$$dx=\frac{1}{y}dy,$$

$$\frac{dy}{dx}=y$$

已知

$$f_X(x)=\frac{1}{\hat{\sigma}_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right]$$

代入公式（5-41）得

$$f_Y(y)=\frac{1}{y\hat{\sigma}_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\overline{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right] \qquad (5\text{-}42)$$

或

$$f_Y(y)=\frac{1}{y\sqrt{2\pi}\,\hat{\sigma}_{\ln y}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\overline{\ln y}}{\hat{\sigma}_{\ln y}}\right)^2\right] \qquad (5\text{-}43)$$

对数正态分布变量y的数学期望和方差分别为

$$\left.\begin{aligned}E(y)&=\exp\left[\overline{x}+\frac{\hat{\sigma}_x^2}{2}\right]\\ V(y)&=(E^2[y])(\exp\hat{\sigma}_x^2-1)\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}44)$$

公式（5-44）亦可写成用对数正态变量的数学期望和方差表示的正态变量的相应参数。

$$\left.\begin{aligned}\hat{\sigma}_x^2&=\ln\left(1+\frac{V[y]}{E^2[y]}\right)=\ln(1+V_y^2)\\ \overline{x}&=\ln E[y]-\frac{\hat{\sigma}_x^2}{2}=\ln\left[\frac{E[y]}{\sqrt{1+V_y^2}}\right]\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}45)$$

式中

$V_y=\dfrac{\sqrt{V[y]}}{E[y]}$ 为对数正态变量Y的变异系数。如果变异系数不太大，比方说

$$V_y\leqslant 0.30$$

则

$$\ln(1+V_y^2)\approx V_y^2$$

$$\hat{\sigma}_x^2\approx V_y^2$$

当对数正态变量Y在区间$a\leqslant y\leqslant b$之间取值时，其概率为

$$P[a\leqslant y\leqslant b]=\int_a^b\frac{1}{y\hat{\sigma}_x\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right]dy$$

令

$$z=\frac{\ln y-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}$$

两边取微分得 $d_y = y\hat{\sigma}_x dz$

$$P[a \leqslant y \leqslant b] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln a - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}}^{\frac{\ln b - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz$$

$$= \psi\left(\frac{\ln b - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right) - \psi\left(\frac{\ln a - \bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)$$

下面研究可靠性指标β，若已知能力C和需求D都符合对数正态分布，令$C = y_1$，$D = y_2$，则可靠性指标为

$$\beta = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\hat{\sigma}_{x_1}^2 + \hat{\sigma}_{x_2}^2}}$$

根据对数正态变量的统计参数与正态变量的统计参数之间的关系，我们可以得到

$$\beta = \frac{\ln\left[\frac{E[y_1]}{\sqrt{1+V_{y_1}^2}}\right] - \ln\left[\frac{E[y_2]}{\sqrt{1+V_{y_2}^2}}\right]}{\sqrt{\ln(1+V_{y_2}^2) + \ln(1+V_{y_1}^2)}}$$

$$= \frac{\ln\left[\frac{E[y_1]}{E[y_2]}\sqrt{\frac{1+V_{y_2}^2}{1+V_{y_1}^2}}\right]}{\sqrt{\ln[(1+V_{y_2}^2)(1+V_{y_1}^2)]}} \qquad (5\text{-}46)$$

以C和D分别代入上式得

$$\beta = \frac{\ln\left[\frac{\bar{C}}{\bar{D}}\sqrt{\frac{1+V_D^2}{1+V_C^2}}\right]}{\sqrt{\ln[(1+V_D^2)(1+V_C^2)]}}$$

求得可靠性指标β后就可利用标准正态分布的累计概率函数计算失效概率

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(\beta)$$

二、当量正态变换

在讨论对数正态分布变量变换为正态分布变量时，我们利用了在相应微分段内概率相等的假定和$Y = \ln X$的关系导得了有关

的公式，这可以看作是一种特殊的情况。对于其它非正态分布变量，情况就比较复杂，它们与正态变量之间一般并不存在着简单的函数关系。但是，我们可以把两个变量的概率相等的概念引用过来，并把这个条件限制在计算点上，令两者在P^*点处有相同的累计分布函数值和相同的概率密度函数值，以此为条件求得当量正态分布的平均值和标准差，然后按正态分布变量计算可靠性指标和失效概率。

设非正态分布随机变量Y的概率分布函数为$F_Y(y)$，概率密度函数为$f_Y(y)$；变换后的当量正态分布的统计参数为平均值$\bar{x}'$和标准差$\hat{\sigma}'_x$。

根据在验算点P^*处概率分布函数相等的条件

$$\Phi\left(\frac{y^*-\bar{x}'}{\hat{\sigma}'_x}\right)=F_Y(y^*)$$

或

$$\frac{y^*-\bar{x}'}{\hat{\sigma}'_x}=\Phi^{-1}[F_Y(y^*)]$$

得

$$\bar{x}'=y^*-\Phi^{-1}[F_Y(y^*)]\cdot\hat{\sigma}'_x \qquad (5\text{-}47)$$

式中 $\Phi^{-1}[\ ]$为标准正态分布概率分布函数的反函数。$\Phi[\ ]$值由表5-4查得

根据在P^*点处概率密度函数值相等的条件

$$f_Y(y^*)=\frac{d}{dx'}\left[\Phi\left(\frac{x'-\bar{x}'}{\hat{\sigma}'_x}\right)\right]_{x'=y^*}=\varphi\left(\frac{y^*-\bar{x}'}{\hat{\sigma}'_x}\right)\Big/\hat{\sigma}'_x \qquad (5\text{-}48)$$

整理后得

$$\hat{\sigma}'_x=\varphi\{\Phi^{-1}[F_Y(y^*)]\}/f_y(y^*) \qquad (5\text{-}49)$$

式中 $\varphi[\ ]$为标准正态分布的概率密度函数。

对于对数正态分布，当量正态分布计算公式可作如下简化

由于

$$F_Y(y^*)=\Phi\left(\frac{\ln y^*-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)$$

因此

$$\Phi^{-1}[F_Y(y^*)]=\frac{\ln y^*-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x} \tag{5-50}$$

$$\varphi\{\Phi^{-1}[F_Y(y^*)]\}=\varphi\left(\frac{\ln y^*-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\ln y^*-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right] \tag{5-51}$$

对数正态分布的概率密度函数为

$$f_Y(y^*)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,y^*\hat{\sigma}_x}\exp\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\ln y^*-\bar{x}}{\hat{\sigma}_x}\right)^2\right] \tag{5-52}$$

将公式（5-51）和（5-52）代入公式（5-49）得

$$\hat{\sigma}'_x=y^*\,\hat{\sigma}_x \tag{5-53}$$

将公式（5-50）和（5-53）代入公式（5-47）得

$$\bar{x}'=y^*(1+\bar{x}-\ln y^*)$$

将非正态分布随机变量Y换算为计算点P^*处的当量正态分布，并求得当量正态分布的统计参数$\bar{x}$和$\hat{\sigma}'_x$后就可用下式计算可靠性指标β和失效概率P_f

$$\beta=\frac{\bar{x}'_1-\bar{x}'_2}{\sqrt{\hat{\sigma}'^2_{x_1}+\hat{\sigma}^2_{x_2}}} \tag{5-54}$$

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi(\beta) \tag{5-55}$$

但是，在换算当量正态分布时需要事先知道验算点P^*的座标y_i^*，而y_i^*值又是由下式求得的

$$y_i^*=\beta\cos\theta_{y_i}\,\hat{\sigma}'_{x_i}+\bar{x}'_i \tag{5-56}$$

因此必须先假定y_i^*（通常第一次假定为平均值），用公式（5-49）和（5-47）求得$\bar{x}'_i$和$\hat{\sigma}'_{x_i}$后代入公式（5-31）计算方向余弦，再用极限状态方程求得β值，同时可以求得y_i^*的计算值，再重复计算、反复迭代，直到两次的β值误差小于允许值为止。

迭代法的计算框图如图5-8所示。

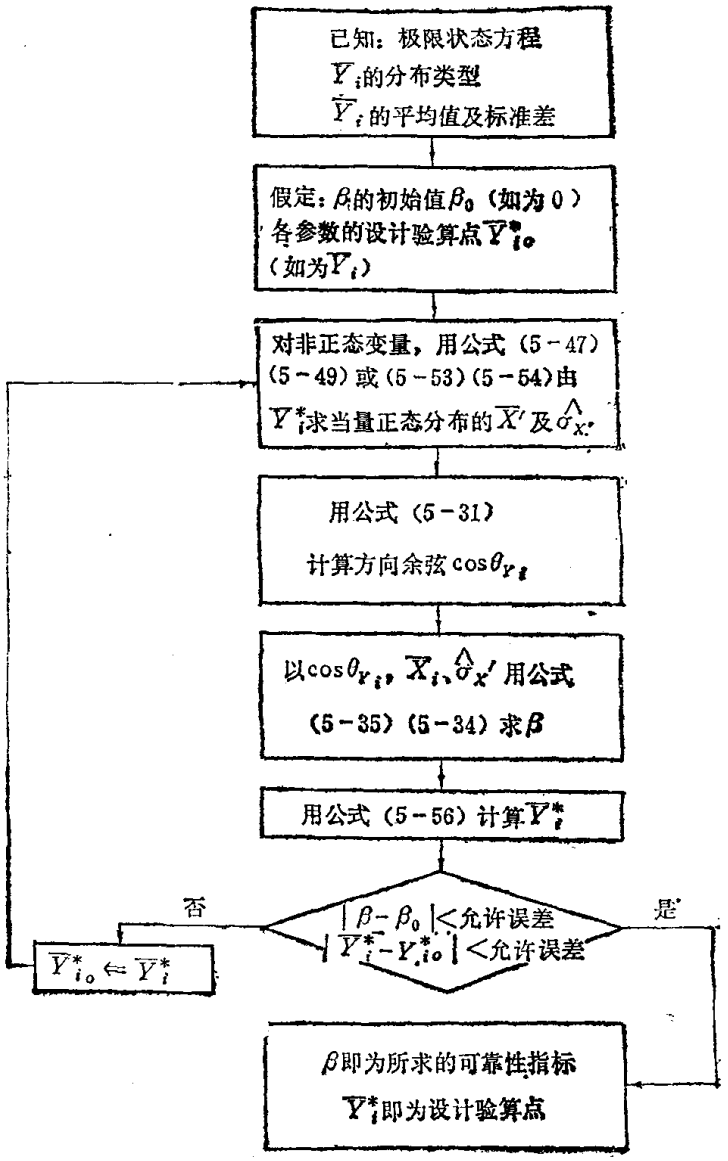


图 5-8　非正态变量迭代法

第六节　非正态分布失效概率计算公式

对于能力和需求都具有相同非正态分布的情况，已经导得了失效概率的计算公式[56]。

一、指数分布

$$f_O(C)=a_O\exp(-a_OC)$$

$$f_D(D)=a_D\exp(-a_DD)$$

$$P_f=\frac{a_D}{a_O+a_D} \tag{5-57}$$

二、均匀分布

$$f_O(C)=\frac{1}{C_{\max}-C_{\min}}$$

$$f_D(D)=\frac{1}{D_{\max}-D_{\min}}$$

$$P_f=\frac{1}{2}\,\frac{D_{\max}-2C_{\min}+D_{\min}}{C_{\max}-C_{\min}} \tag{5-58}$$

三、Rayleigh分布

$$f_O(C)=a_OC\exp\left(-a_O\frac{C^2}{2}\right)$$

$$f_D(D)=a_DD\exp\left(-a_D\frac{D^2}{2}\right)$$

$$P_f=\frac{4a_O(a_O+2a_D)}{a_D(a_O+a_D)} \tag{5-59}$$

四、gamma分布

$$f_O(C)=\frac{\lambda^nC^{n-1}e^{-\lambda O}}{\Gamma(n)}$$

$$f_D(D)=\frac{\mu^mD^{m-1}e^{-\mu D}}{\Gamma(m)}$$

$$P_f=1-\frac{\Gamma(m+n)}{\Gamma(m)\Gamma(n)}B_{\mu/(\mu+\lambda)}(m,n) \tag{5-60}$$

式中 $B(\quad)$为Beta函数❶；

$B_{\mu/(\mu+\lambda)}$为不完全的Beta函数❷。

五、Beta分布

$$f_O(C)=\lambda_O(C-C_{\min})^{\alpha_O-1}(C_{\max}-C)^{\beta_O-1}$$

$$f_D(D)=\lambda_D(D-D_{\min})^{\alpha_D-1}(D_{\max}-D)^{\beta_D-1}$$

$$P_f=\lambda_D\int_{D_{\min}}^{D_{\max}}\frac{B_u(\alpha_O,\beta_O)}{B(\alpha_O,\beta_O)}(D-D_{\min})^{\alpha_D-1}(D_{\max}-D)^{\beta_D-1}dD \tag{5-61}$$

式中 $B_u(\quad)$为不完全的Beta函数❷。

$$u=\frac{D-C_{\min}}{C_{\max}-C_{\min}}$$

六、Weibull分布

$$f_O(C)=\frac{\beta_O}{\theta_O}\left(\frac{C-C_{\min}}{\theta_O}\right)^{\beta_O-1}\exp\left[-\left(\frac{C-C_{\min}}{\theta_O}\right)^{\beta_O}\right]$$

$$f_D(D)=\frac{\beta_D}{\theta_O}\left(\frac{D-D_{\min}}{\theta_D}\right)^{\beta_D-1}\exp\left[-\left(\frac{D-D_{\min}}{\theta_D}\right)^{\beta_D}\right]$$

$$P_f=\int_0^{\infty}e^{-Y}\exp\left\{-\left[\frac{\theta_O}{\theta_D}Y^{1/\beta_O}+\left(\frac{C_{\min}-D_{\min}}{\theta_D}\right)\right]^{\beta_D}\right\}dY \tag{5-62}$$

---

❶ Beta函数

$$B(\alpha,\ \beta)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

$$B(\alpha,\ \beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

❷ 不完全的Beta函数

$$B_u(\alpha,\ \beta)=\int_0^u x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$$

公式(5-61)中积分式中第一项

$$\frac{B_u(\alpha_C,\ \beta_C)}{B(\alpha_C,\ \beta_C)}=\beta(u|\ \alpha,\beta)$$

称为不完全的Beta函数比。

标准正态概率分布函数值　　表 5-8

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500000	0.50	0.691463	1.00	0.841345
0.01	0.503989	0.51	0.694975	1.01	0.843752
0.02	0.507978	0.52	0.698468	1.02	0.846136
0.03	0.511966	0.53	0.701944	1.03	0.848495
0.04	0.515954	0.54	0.705401	1.04	0.850830
0.05	0.519939	0.55	0.708840	1.05	0.853141
0.06	0.523922	0.56	0.712260	1.06	0.855428
0.07	0.527904	0.57	0.715661	1.07	0.857690
0.08	0.531882	0.58	0.719043	1.08	0.859929
0.09	0.535857	0.59	0.722405	1.09	0.862143
0.10	0.539828	0.60	0.725747	1.10	0.864334
0.11	0.543796	0.61	0.729069	1.11	0.866500
0.12	0.547759	0.62	0.732371	1.12	0.868643
0.13	0.551717	0.63	0.735653	1.13	0.870762
0.14	0.555671	0.64	0.738914	1.14	0.872857
0.15	0.559618	0.65	0.742154	1.15	0.874928
0.16	0.563560	0.66	0.745374	1.16	0.876976
0.17	0.567494	0.67	0.748572	1.17	0.878999
0.18	0.571423	0.68	0.751748	1.18	0.881000
0.19	0.575345	0.69	0.754903	1.19	0.882977
0.20	0.579260	0.70	0.758036	1.20	0.884930
0.21	0.583166	0.71	0.761148	1.21	0.886860
0.22	0.587064	0.72	0.764238	1.22	0.888767
0.23	0.590954	0.73	0.767305	1.23	0.890651
0.24	0.594835	0.74	0.770350	1.24	0.892512
0.25	0.598706	0.75	0.773373	1.25	0.894350
0.26	0.602568	0.76	0.776373	1.26	0.896165
0.27	0.606420	0.77	0.779350	1.27	0.897958
0.28	0.610262	0.78	0.782305	1.28	0.899727
0.29	0.614092	0.79	0.785236	1.29	0.901475
0.30	0.617912	0.80	0.788145	1.30	0.903199
0.31	0.621720	0.81	0.791030	1.31	0.904902
0.32	0.625517	0.82	0.793892	1.32	0.906583
0.33	0.629301	0.83	0.796731	1.33	0.908241
0.34	0.633072	0.84	0.799546	1.34	0.909877
0.35	0.636831	0.85	0.802337	1.35	0.911492
0.36	0.640576	0.86	0.805105	1.36	0.913085
0.37	0.644309	0.87	0.807850	1.37	0.914656
0.38	0.648027	0.88	0.810570	1.38	0.916207
0.39	0.651732	0.89	0.813267	1.39	0.917735
0.40	0.655422	0.90	0.815940	1.40	0.919243
0.41	0.659097	0.91	0.818589	1.41	0.920730
0.42	0.662757	0.92	0.821214	1.42	0.922196
0.43	0.666402	0.93	0.823815	1.43	0.923641
0.44	0.670032	0.94	0.826391	1.44	0.925066
0.45	0.673645	0.95	0.828944	1.45	0.926471
0.46	0.677242	0.96	0.831473	1.46	0.927855
0.47	0.680823	0.97	0.833977	1.47	0.929219
0.48	0.684387	0.98	0.836457	1.48	0.930563
0.49	0.687933	0.99	0.838913	1.49	0.931888

续表

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.50	0.933193	2.00	0.977250	2.50	0.993790
1.51	0.934478	2.01	0.977784	2.51	0.993963
1.52	0.935744	2.02	0.978308	2.52	0.994132
1.53	0.936992	2.03	0.978822	2.53	0.994297
1.54	0.938220	2.04	0.979325	2.54	0.994457
1.55	0.939429	2.05	0.979818	2.55	0.994614
1.56	0.940620	2.06	0.980301	2.56	0.994766
1.57	0.941792	2.07	0.980774	2.57	0.994915
1.58	0.942947	2.08	0.981237	2.58	0.995060
1.59	0.944083	2.09	0.981691	2.59	0.995201
1.60	0.945201	2.10	0.982136	2.60	0.995339
1.61	0.946301	2.11	0.982571	2.61	0.995473
1.62	0.947384	2.12	0.982997	2.62	0.995604
1.63	0.948449	2.13	0.983414	2.63	0.995731
1.64	0.949497	2.14	0.983823	2.64	0.995855
1.65	0.950529	2.15	0.984223	2.65	0.995975
1.66	0.951543	2.16	0.984614	2.66	0.996093
1.67	0.952540	2.17	0.984997	2.67	0.996207
1.68	0.953521	2.18	0.985371	2.68	0.996319
1.69	0.954486	2.19	0.985738	2.69	0.996427
1.70	0.955435	2.20	0.986097	2.70	0.996533
1.71	0.956367	2.21	0.986447	2.71	0.996636
1.72	0.957284	2.22	0.986791	2.72	0.996736
1.73	0.958185	2.23	0.987126	2.73	0.996833
1.74	0.959071	2.24	0.987455	2.74	0.996928
1.75	0.959941	2.25	0.987776	2.75	0.997020
1.76	0.960796	2.26	0.988089	2.76	0.997110
1.77	0.961636	2.27	0.988396	2.77	0.997197
1.78	0.962462	2.28	0.988696	2.78	0.997282
1.79	0.963273	2.29	0.988989	2.79	0.997365
1.80	0.964070	2.30	0.989276	2.80	0.997445
1.81	0.964852	2.31	0.989556	2.81	0.997523
1.82	0.965621	2.32	0.989830	2.82	0.997599
1.83	0.966375	2.33	0.990097	2.83	0.997673
1.84	0.967116	2.34	0.990358	2.84	0.997744
1.85	0.967843	2.35	0.990613	2.85	0.997814
1.86	0.968557	2.36	0.990863	2.86	0.997882
1.87	0.969258	2.37	0.991106	2.87	0.997948
1.88	0.969946	2.38	0.991344	2.88	0.998012
1.89	0.970621	2.39	0.991576	2.89	0.998074
1.90	0.971284	2.40	0.991802	2.90	0.998134
1.91	0.971933	2.41	0.992024	2.91	0.998193
1.92	0.972571	2.42	0.992240	2.92	0.998250
1.93	0.973197	2.43	0.992451	2.93	0.998305
1.94	0.973810	2.44	0.992656	2.94	0.998359
1.95	0.974412	2.45	0.992857	2.95	0.998411
1.96	0.975002	2.46	0.993053	2.96	0.998462
1.97	0.975581	2.47	0.993244	2.97	0.998511
1.98	0.976148	2.48	0.993431	2.98	0.998559
1.99	0.976705	2.49	0.993613	2.99	0.998605

续表

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3.00	0.998650	3.50	0.999767	4.00	0.316712E-04
3.01	0.998694	3.51	0.999776	4.05	0.256088E-04
3.02	0.998736	3.52	0.999784	4.10	0.206575E-04
3.03	0.998777	3.53	0.999792	4.15	0.166238E-04
3.04	0.998817	3.54	0.999800	4.20	0.133458E-04
3.05	0.998856	3.55	0.999807	4.25	0.106885E-04
3.06	0.998893	3.56	0.999815	4.30	0.853906E-05
3.07	0.998930	3.57	0.999821	4.35	0.680688E-05
3.08	0.998965	3.58	0.999828	4.40	0.541254E-05
3.09	0.998999	3.59	0.999835	4.45	0.429351E-05
3.10	0.999032	3.60	0.999841	4.50	0.339767E-05
3.11	0.999065	3.61	0.999847	4.55	0.268230E-05
3.12	0.999096	3.62	0.999853	4.60	0.211245E-05
3.13	0.999126	3.63	0.999858	4.65	0.165968E-05
3.14	0.999155	3.64	0.999864	4.70	0.130081E-05
3.15	0.999184	3.65	0.999869	4.75	0.101708E-05
3.16	0.999211	3.66	0.999874	4.80	0.793328E-06
3.17	0.999238	3.67	0.999879	4.85	0.617307E-06
3.18	0.999264	3.68	0.999883	4.90	0.479183E-06
3.19	0.999289	3.69	0.999888	4.95	0.371067E-06
3.20	0.999313	3.70	0.999892	5.00	0.286652E-06
3.21	0.999336	3.71	0.999896	5.10	0.169827E-06
3.22	0.999359	3.72	0.999900	5.20	0.996443E-07
3.23	0.999381	3.73	0.999904	5.30	0.579013E-07
3.24	0.999402	3.74	0.999908	5.40	0.333204E-07
3.25	0.999423	3.75	0.999912	5.50	0.189896E-07
3.26	0.999443	3.76	0.999915	5.60	0.107176E-07
3.27	0.999462	3.77	0.999918	5.70	0.599037E-08
3.28	0.999481	3.78	0.999922	5.80	0.331575E-08
3.29	0.999499	3.79	0.999925	5.90	0.181751E-08
3.30	0.999516	3.80	0.999928	6.00	0.986588E-09
3.31	0.999533	3.81	0.999931	6.10	0.530343E-09
3.32	0.999550	3.82	0.999933	6.20	0.282316E-09
3.33	0.999566	3.83	0.999936	6.30	0.148823E-09
3.34	0.999581	3.84	0.999938	6.40	0.77688 E-10
3.35	0.999596	3.85	0.999941	6.50	0.40160 E-10
3.36	0.999610	3.86	0.999943	6.60	0.20558 E-10
3.37	0.999624	3.87	0.999946	6.70	0.10421 E-10
3.38	0.999637	3.88	0.999948	6.80	0.5231 E-11
3.39	0.999650	3.89	0.999950	6.90	0.260 E-11
3.40	0.999663	3.90	0.999952	7.00	0.128 E-11
3.41	0.999675	3.91	0.999954	7.10	0.624 E-12
3.42	0.999687	3.92	0.999956	7.20	0.301 E-12
3.43	0.999698	3.93	0.999958	7.30	0.144 E-12
3.44	0.999709	3.94	0.999959	7.40	0.68 E-13
3.45	0.999720	3.95	0.999961	7.50	0.32 E-13
3.46	0.999730	3.96	0.999963	7.60	0.15 E-13
3.47	0.999740	3.97	0.999964	7.70	0.70 E-14
3.48	0.999749	3.98	0.999966	7.80	0.30 E-14
3.49	0.999758	3.99	0.999967	7.90	0.15 E-14

第六章　土坡稳定的概率分析

土坡稳定是土力学中的一个重要课题，对于水工、港工、铁路和公路等工程都有很大的实际意义。

确定性的土坡稳定验算方法已发展得很多。计算方法虽已比较成熟，但实际工程中的失稳事故仍屡见不鲜，给经济建设带来巨大损失。究其原因，主要不在于计算方法的精度如何，而在于设计时是否充分考虑了各种变化的因素及其对土的参数的影响。这种变化着的因素往往是随机性的，用确定性的方法难以反映这种随机性变化因素的影响。因此用确定性的安全系数无法提供土坡实际可能具备的安全储备的量以及潜在的失效概率。

由于确定性方法的缺点，土坡稳定的概率分析方法得到了重视与发展，成为一个十分活跃的领域。近年来，有许多新的进展，例如，土坡稳定的运动单元法[57]，土坡可靠性的响应面法[58]，两个潜在滑动面之间的连续破坏概率[59]，破坏从滑动面上一点向其他部位扩展的转移概率[60]，考虑末端影响来确定不稳定区的长度[61]，土坡稳定的局部安全系数[62]等。

在本章中将讨论常用的概率分析方法以及一些特殊的考虑。

第一节　土坡稳定的失效概率

现行的土坡稳定分析方法很多，其中大多数都可归属于极限平衡法。

极限平衡法的基本假设是所假定的破坏面（它可以是平面、圆弧面，对数螺线曲面或其他不规则面）要满足破坏准则。从边坡中取出一个隔离体，考虑作用在隔离体上力系的平衡。只考虑整个隔离体的方法包括柯尔曼（Culmann）法和摩擦圆法。其

它方法是把隔离体分成许多个竖向的土条，然后考虑每一个土条的静力平衡，其中最著名的是瑞典圆弧法和毕肖普（Bishop）方法。极限平衡法广泛地应用于分析土坡稳定问题，但它的主要缺点是将滑动土体作为刚塑体考虑，忽视了土的应力应变关系。另一种方法是极限分析法，它采用屈服准则的概念以及考虑了应力应变关系的相应流动规律。现有的关于土坡稳定的概率分析大多建立在极限平衡法的基础上。

对于只有内摩擦角而无内聚力的砂土，土的坡角为α，土坡稳定的安全系数可由下式表示：

$$FS=\frac{\mathrm{tg}\phi}{\mathrm{tg}\alpha} \tag{6-1}$$

对于给定的土坡，安全系数的平均值和方差分别由下式求得

$$\overline{FS}=\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right]\overline{\mathrm{tg}\phi} \tag{6-2}$$

$$V[FS]=\left[\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}\right]^2 V[\mathrm{tg}\phi] \tag{6-3}$$

对于粘性土土坡，若假定破坏面为一平面，如图6-1所示。隔离体ABO上的作用力为土楔重量W，W可分解为平行于破坏面的分力T和垂直于破坏面的分力N；作用在破坏面上的抗滑力由内聚力和内摩擦力组成，前者为$C=cL$，后者为$N\mathrm{tg}\phi$。

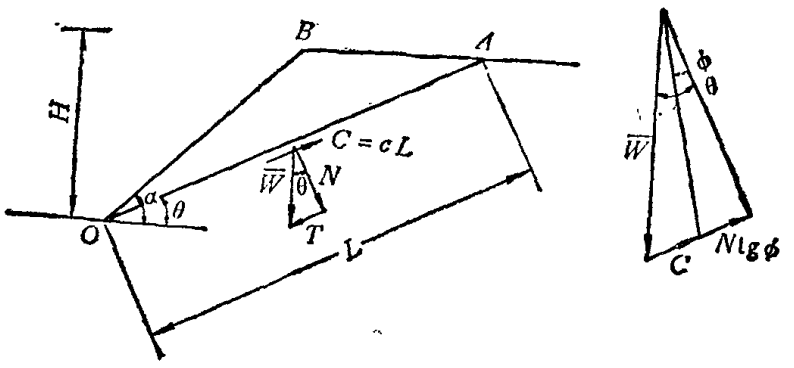


图 6-1　假定破坏面为平面

土楔体重量由下式求得

令 $$L=\frac{H}{\sin\theta},\quad l=\frac{H}{\sin\alpha}$$

$$W=\frac{rH^2}{2}\frac{\sin(\alpha-\theta)}{\sin\alpha\sin\theta} \tag{6-4}$$

极限平衡时，极限状态方程为

$$W\cos\theta\,\mathrm{tg}\varphi+cL-W\sin\theta=0 \tag{6-5}$$

如令

$$N_s=\frac{\gamma H}{C}$$

为稳定系数，将公式（6-4）代入公式（6-5），移项后即可得N_s的表达式

$$N_s=\frac{2\sin\alpha}{\sin(\alpha-\theta)(\sin\theta-\cos\theta\,\mathrm{tg}\phi)} \tag{6-6}$$

N_s是无量纲系数。

当c和φ一定时，土坡的临界高度H_c直接取决于破坏平面与水平面的夹角θ。

为了确定临界高度，我们取N_s对于θ的导数，得

$$\theta_{cr}=\frac{\alpha+\phi}{2} \tag{6-7}$$

公式（6-7）说明当平面夹角为坡角α与土的φ角的二等分值时，土坡将破坏。将临界夹角θ_{cr}代入公式（6-6），就能得到临界的稳定系数

$$N_{s_{cr}}=\frac{2\sin\alpha\cos\phi}{\sin^2\left[\frac{\alpha-\phi}{2}\right]}$$

对于竖直土坡，$\alpha=\frac{\pi}{2}$

$$N_s=\frac{4\cos\phi}{1-\sin\phi}=4\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)=\frac{\gamma H_c}{c} \tag{6-8}$$

H_c表示不需要水平支撑而能站住的竖直坡度的最大高度。

下面讨论H_c的变异性，如令$\phi=0$则得

$$H_c = c\left[\frac{2\sin\alpha}{\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right] \qquad (6\text{-}9)$$

对于给定的土坡，括号中的值是常数，因此H_c的方差为

$$V[H_c] = \left[\frac{2\sin\alpha}{\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right]^2 V[c] \qquad (6\text{-}10)$$

H_c的平均值为

$$\bar{H}_c = \left[\frac{2\sin\alpha}{\gamma\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right] c \qquad (6\text{-}11)$$

由此可见，在$\varphi = 0$的情况下，H_c的变异系数等于内聚力的变异系数，即$V_{H_c} = V_c$。如果$\varphi > 0$，则H_c中的不确定性还要增加，我们得到如下的不等式

$$V_{H_c} \geqslant V_c \qquad (6\text{-}12)$$

条分法

假定滑动面为一圆弧，并将滑动土体划分为若干竖直土条，求各土条对滑动圆心的抗滑力矩和滑动力矩，各取其总和。

$$\text{滑动力矩} M_0 = R\sum_{i=1}^{n} W_i \sin\alpha = R\sum_{i=1}^{n} \gamma V \sin\alpha \qquad (6\text{-}13)$$

式中 R为滑动圆弧的半径，V为滑动土条的体积，n为土条数目，α为土条底面的倾角。

抗滑力矩由两部分构成，由内聚力产生的力矩为M_{R_1}

$$M_{R_1} = R\sum_{i=1}^{n} cb\sec\alpha \qquad (6\text{-}14)$$

式中 b为土条宽度。

由内摩擦角产生的力矩为M_{R_2}

$$M_{R_2} = R\sum_{i=1}^{n} \gamma V \cos\alpha \operatorname{tg}\phi \qquad (6\text{-}15)$$

土坡稳定的极限状态方程为

$$M_{R_1} + M_{R_2} - M_0 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} cb\sec\alpha + \sum_{i=1}^{n} \gamma V \cos\alpha \operatorname{tg}\phi - \sum_{i=1}^{n} \gamma \sin\alpha = 0 \qquad (6\text{-}16)$$

如用中心点法计算，则需分别求出抗滑力矩和滑动力矩的数学期望和方差

$$\left.\begin{aligned}
E(M_{R_1}) &= \sum_{i=1}^{n} \bar{c} b \sec\alpha \\
V(M_{R_1}) &= \sum_{i=1}^{n} (b\sec\alpha)^2 V(c) \\
E(M_{R_2}) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma} V \cos\alpha \operatorname{tg} \overline{\phi} \\
V(M_{R_2}) &= \sum_{i=1}^{n} (\gamma V \cos\alpha)^2 V(\operatorname{tg}\phi) + \\
&\quad \sum_{i=1}^{n} (V \operatorname{tg}\varphi \cos\alpha)^2 V(\gamma) \\
E(M_0) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\gamma} V \sin\alpha \\
V(M_0) &= \sum_{i=1}^{n} (V\sin\alpha)^2 V(\gamma)
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}17)$$

若c和$\operatorname{tg}\varphi$互相独立，且都符合正态分布，则抗滑力矩和滑动力矩也互相独立并都符合正态分布，则

$$\left.\begin{aligned}
E(M_R) &= E(M_{R_1}) + E(M_{R_2}) \\
V(M_R) &= V(M_{R_1}) + V(M_{R_2})
\end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}18)$$

可靠性指标

$$\beta = \frac{E(M_R) - E(M_0)}{\sqrt{V(M_R) + V(M_0)}} \quad (6\text{-}19)$$

失效概率

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(\beta)$$

若$c\cdot\phi$和γ均符合对数正态分布，则失效概率为

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi\left[\frac{\ln\dfrac{E(M_R)}{E(M_0)}\sqrt{\dfrac{1+V_0^2}{1+V_R^2}}}{\sqrt{\ln(1+V_R^2)(1+V_0^2)}}\right] \quad (6\text{-}20)$$

式中 V_0为滑动力矩M_0的变异系数

$$V_0 = \frac{\sqrt{V(M_0)}}{E(M_0)}$$

V_R为抗滑力矩M_R的变异系数

$$V_R=\frac{\sqrt{V(M_R)}}{E(M_R)}$$

如果考虑c和ϕ之间以及c、ϕ和γ之间的相关性，则抗滑力矩的方差由下式求得

$$\begin{aligned}V(M_R)&=V(M_{R_1}+M_{R_2})\\&=V(M_{R_1})+V(M_{R_2})+2r_1\sqrt{V(M_{R_1})}\sqrt{V(M_{R_2})}\end{aligned}\qquad(6\text{-}21)$$

式中r_1为M_{R_1}与M_{R_2}之间的相关系数

$$r_1=\frac{COV(M_{R_1},M_{R_2})}{\sqrt{V(M_{R_1})}\sqrt{V(M_{R_2})}}$$

公式中的第三项反映了两部分抗滑力矩之间的相关性对抗滑力矩变异性的影响。

如果再考虑土条之间滑动力矩的相关性和抗滑力矩的相关性，则上述计算先限于一个土条，在分别求得n个土条的所有统计参数之后再计算整个滑动土体的方差

$$\left.\begin{aligned}V(M_0)&=\sum_{i=1}^{n}V(M_0)_i+\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}COV(M_{0i}M_{0j}\\V(M_R)&=\sum_{i=1}^{n}V(M_R)_i+\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}COV(M_{R_i},M_{R_j})\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}22)$$

Bishop法

如果土坡是由几种c和φ值各不相同的土层所组成，而且土坡中的孔隙水压力u为已知或者可以估计时，可采用Bishop条分法。

这种方法的特点是在分析图6-2中土条力系平衡时考虑了作用在两个相邻土条之间接触面上的法向力E和切向力T，令$Q=0$。由土的静力平衡条件$\Sigma y=0$得

$$\Delta F_n\cdot\cos\alpha=W+(T_1-T_2)-ul\cos\alpha-\Delta F_t\sin\alpha\qquad(6-23)$$

如果土坡有足够的强度储备，即$FS>1$，则滑动面上切向力ΔF_t等于滑动面上的抗剪强度除以安全系数FS

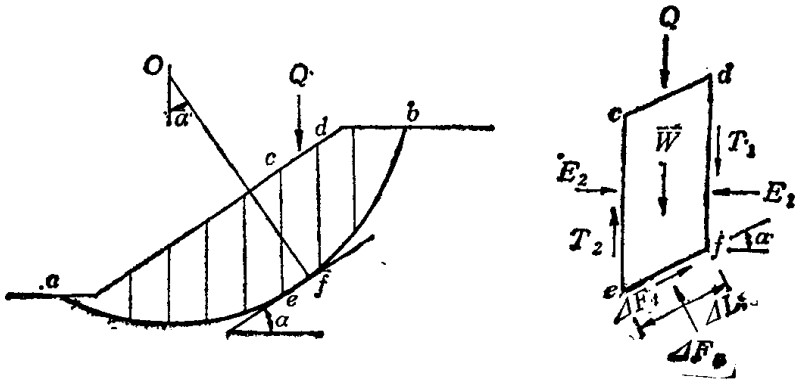


图 6-2 Bishop条分法

$$\Delta F_t=\frac{c'\cdot l}{FS}+\Delta F_n\frac{\mathrm{tg}\phi'}{FS} \tag{6-24}$$

将此式代入公式（6-23）中求解ΔF_n，可得

$$\Delta F_n=\left[W+(T_1-T_2)-ul\cos\alpha-\frac{c'}{FS}l\sin\alpha\right]\times\left[\cos\alpha+\frac{\mathrm{tg}\phi'}{FS}\sin\alpha\right]^{-1} \tag{6-25}$$

安全系数FS由下式表示

$$FS=\frac{\Sigma(c'l+\Delta F_n\mathrm{tg}\phi')}{\Sigma W\sin\alpha} \tag{6-26}$$

将公式（6-25）代入公式（6-26）可得

$$FS=\frac{\Sigma\{c'l\cos\alpha+[(W-ul\cos\alpha)+(T_1-T_2)]\mathrm{tg}\phi'\}}{\Sigma W\sin\alpha}\times\frac{\left[\cos\alpha+\frac{\mathrm{tg}\phi'}{FS}\sin\alpha^{-1}\right]}{\Sigma W\sin\alpha} \tag{6-27}$$

为了求解安全系数，（T_1-T_2）值必须用逐次逼近法计算。可采用满足每个土条的静力平衡条件的E_1和T_1的试算值和下列条件

$$\Sigma(E_1-E_2)=0$$
$$\Sigma(T_1-T_2)=0$$

如果假定$\Sigma(T_1-T_2)\mathrm{tg}\varphi'$等于零，则计算能够简化，就可以用试算的方法。先假定一个任意FS值，连同土的性质c'、φ'、γ、u和土坡的几何形状α一并代入公式（6-27）中算出FS值。如计算值与假定值相差很大，则再作一次逼近，并重复计算，直到计算值和假定值相符合为止。

用Bishop法估计土坡的可靠性指标和失效概率时，当土坡处于极限平衡状态，令

$$FS=1$$

则土坡稳定的极限状态方程为

$$\Sigma\frac{c'l\cos+(\gamma V-ul\cos\alpha)\mathrm{tg}\phi'}{m_\alpha}-\Sigma\gamma V\sin\alpha=0 \tag{6-28}$$

式中　$m_\alpha=\cos\alpha+\mathrm{tg}\phi'\sin\alpha$；$V$为滑动土体的体积。

在这个极限状态方程中，有四个随机变量c'、γ、u和φ'，土坡的几何参数可以作为确定性数值来处理。如果土坡是由不同性质的土层所组成，则每个土条中破坏面上的抗剪强度指标可能不同。如n个土条的强度参数和孔隙水压力值各不相同，则每一个参数都有n个随机变量。假如土的容重相差不大，可以认为是均匀的，就只有一个随机变量。

用验算点法计算可靠性指标和失效概率时，对这四个参数的一阶偏导数如下：

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial g}{\partial c'}\right|_{P^*}=\frac{l\cos\alpha}{m_\alpha}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n\\
&\left.\frac{\partial g}{\partial\varphi'}\right|_{P^*}=\frac{\gamma V-ul\cos\alpha}{m_\alpha\cos^2\phi'}-\frac{(\gamma V-ul\cos\alpha)\mathrm{tg}\phi'}{m_\alpha^2\cos^2\phi'}\qquad i=1,\ 2,\cdots\cdots,n\\
&\left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{P^*}=\frac{-l\cos\alpha\mathrm{tg}\phi'}{m_\alpha}\qquad i=1,\ 2,\cdots\cdots,n\\
&\left.\frac{\partial g}{\partial\gamma}\right|_{P^*}=\Sigma\frac{V\mathrm{tg}\phi'}{m_\alpha}-\Sigma V\sin\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{6-29}$$

式中　n为划分的土条数。

第二节　土坡连续破坏的概率分析

在工程实践中我们经常发现这样的现象，在一个滑动面上发生破坏以后，紧接着在另一个滑动面上又发生了破坏，从最外缘逐步地向内扩展而形成连续的滑动破坏。对这样的问题可以设想如果破坏在一个滑动面上确实发生了，那就有可能在邻近土体中又发生另一次破坏，这种概率究竟有多大取决于两个滑动面上“破坏”这样一个事件的相关性。

我们考虑有A和B两个潜在的滑动面，在这两个滑动面上的安全储备分别由下式求得

$$\left.\begin{aligned} SM_A &= r_A[\Sigma cl_i + \Sigma \mathrm{tg}\varphi W_i \cos\alpha_i - \Sigma W_i \sin\alpha_i] \\ SM_B &= r_B[\Sigma cl_j + \Sigma \mathrm{tg}\varphi W_j \cos\alpha_j - \Sigma W_j \sin\alpha_j] \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}30)$$

如只考虑c和$\mathrm{tg}\varphi$作为随机变量，则安全储备的数学期望和方差分别由下面公式求得

$$\left.\begin{aligned} \overline{SM_A} &= r_A[\bar{c}a_1 + \overline{\mathrm{tg}\varphi} b_1 - d_1] \\ \overline{SM_B} &= r_B[\bar{c}a_2 + \overline{\mathrm{tg}\varphi} b_2 - d_2] \end{aligned}\right\} \quad (6\text{-}31)$$

式中

$$a_1 = \Sigma l_i,\quad b_1 = \Sigma W_i \cos\alpha_i,\quad d_1 = \Sigma W_i \sin\alpha_i$$

$$a_2 = \Sigma l_j,\quad b_2 = \Sigma W_j \cos\alpha_j,\quad d_2 = \Sigma W_j \sin\alpha_j$$

$$V(SM_A) = r_A^2[V(c)a_1^2 + V(\mathrm{tg}\phi)b_1^2 + 2a_1b_1COV(c,\ \mathrm{tg}\phi)]$$

$$V(SM_B) = r_B^2[V(c)a_2^2 + V(\mathrm{tg}\phi)b_2^2 + 2a_2b_2COV(c,\ \mathrm{tg}\phi)] \quad (6\text{-}32)$$

式中　$COV(c,\ \mathrm{tg}\phi)$是c和$\mathrm{tg}\phi$的协方差。

下面讨论这两个安全储备之间的相关系数r_{AB}

$$r_{AB} = r_{SM_A SM_B} = \frac{COV(SM_A,\ SM_B)}{\sqrt{V(SM_A)V(SM_B)}} \quad (6\text{-}33)$$

根据定义，我们能写出协方差

$$COV(SM_A,\ SM_B) = E(SM_A,\ SM_B) - E(SM_A)E(SM_B)$$

$$= E(SM_A,\ SM_B) - \overline{SM_A}\,\overline{SM_B} \quad (6\text{-}34)$$

按线性函数方差运算，我们有

$$COV(SM_A,\ SM_B)=r_A\cdot r_B[V(c)a_1a_2+V(\mathrm{tg}\varphi)b_1b_2 + COV(c,\ \mathrm{tg}\varphi)(a_1b_2+b_1a_2)] \tag{6-35}$$

对于A和B两个潜在的滑动面，分别写出它们的失效概率

$$\left.\begin{aligned} P_A&=P[SM_A\leqslant 0]=\int_{-\infty}^{0} f_{SM_A}(SM_A)dSM_A \\ P_B&=P(SM_B\leqslant 0)=\int_{-\infty}^{0} f_{SM_B}(SM_B)dSM_B \end{aligned}\right\} \tag{6-36}$$

P_A和P_B是A和B滑动面分别单独发生的失效概率。

沿着A和B两个滑动面同时发生破坏的失效概率称为联合失效概率$P_{(A,B)}$

$$P_{(A,B)}=P[SM_A\leqslant 0,\ SM_B\leqslant 0]$$

$$=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f(SM_A,\ SM_B,\overline{SM_A},\ \overline{SM_B},\ \hat{\sigma}_{SM_A},\ \hat{\sigma}_{SM_B},\ r_{AB}) \times dSM_AdSM_B \tag{6-37}$$

计算了公式（6-37）中五个独立的统计参数之后，采用适当的数值积分方法，可以从二元分布计算得到联合失效概率。联合失效概率是沿着A面和B面所分别发生破坏的积事件的概率。

现在我们研究在A面发生了破坏的条件下，在B面又发生破坏的概率，这个概率称为连续破坏的概率。

A和B连续破坏的概率又称连续失效概率，连续破坏可以定义为

$$F_{ai_{AB}}=[F_{ai_B}|\ F_{ai_A}]=[SM_B\leqslant 0|\ SM_A\leqslant 0]$$

则连续失效概率可定义为

$$P_{AB}=P[SM_B\leqslant 0|\ SM_A\leqslant 0]=\frac{P[SM_A\leqslant 0,\ SM_B\leqslant 0]}{P[SM_A\leqslant 0]} \tag{6-38}$$

在如图6-3所示的土坡中，有两个潜在的滑动面A和B，若已

知坡高$H=7.62\text{m}$，坡角$\alpha=45°$，土的容重$\gamma=18.84\text{kN/m}^3$，内聚力的平均值$\bar{c}=23.94\text{kPa}$，变异系数$V_c=0.5$，内摩擦角$\overline{\text{tg}\phi}=0.78$，变异系数$V_{\text{tg}\phi}=0.5$，这两个变量的相关系数$r_{c,\text{tg}\phi}=-0.20$，半径$r_A=13.45\text{m}$，交于距坡顶3.4m处，半径$r_B=18.3\text{m}$，交于距坡顶16.8m处。用前面讨论过的方法来计算A和B的连续失效概率，并改变内聚力c和内摩擦角的变异系数，以研究土性指标变异系数的影响。

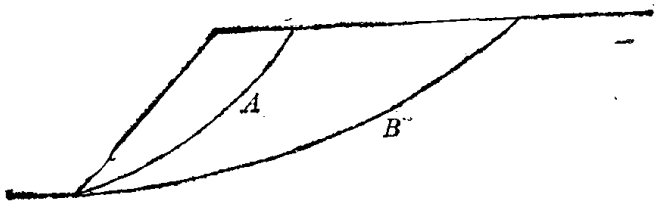


图 6-3　两个潜在的滑动面

对于c和$\text{tg}\phi$的变异系数各为0.5的情况，沿着A面破坏的失效概率$P_A=3.29\times10^{-2}$，沿着B面破坏的失效概率$P_B=2.42\times10^{-2}$，沿着这两个面上安全储备的相关系数

$$r_{AB}=0.89$$

在A面发生破坏的条件下，沿着B面发生破坏的连续失效概率$P_{AB}=0.495$。

从上述数值可以看出，即使在单独发生破坏的失效概率很小的情况下，连续失效概率仍然可能是比较大的，也说明了研究这个问题的重要性。

土的抗剪强度指标的变异性对于连续失效概率的影响是显著的，特别是内摩擦角的影响远大于内聚力，试算的一些结果见表6-1和表6-2。

$$V_{\text{tg}\phi}=0.1$$

当$V_c=0.8$时　$P_{AB}=1.48\times10^{-2}$

从表6-1和表6-2可以看出，当内摩擦角变异系数很小时，不论内聚力的变异系数如何变化，连续失效概率都是很小的；但当内摩擦变异系数很大时，连续失效概率都很大，而且还受内聚力

指 标 变 异 性 的 影 响　　表 6-1

V_c	P_A	P_B	r_{AB}	P_{AB}
0.2	5.89×10^{-9}	5.85×10^{-18}	0.87	0
0.3	3.99×10^{-5}	1.31×10^{-12}	0.91	≈0
0.4	1.42×10^{-3}	5.33×10^{-9}	0.94	≈0
0.5	8.42×10^{-3}	9.53×10^{-7}	0.96	≈0

注：假定内摩擦角的变异系数不变

指 标 变 异 性 的 影 响　　表 6-2

V_c	P_A	P_B	r_{AB}	P_{AB}'
0.2	1.03×10^{-2}	2.19×10^{-2}	0.97	0.959
0.3	1.42×10^{-2}	2.19×10^{-2}	0.94	0.810
0.4	2.16×10^{-2}	2.26×10^{-2}	0.91	0.634
0.5	3.29×10^{-2}	2.42×10^{-2}	0.89	0.494

注：$V_{\tan\phi}=0.5$

变异系数的影响，内聚力变异系数增大，连续失效概率反而减小。

第三节　逐渐发展的破坏

实际上发生的土坡失稳现象往往并不是在同一时间内滑动面上各点一起达到极限状态，最可能的模式是先从一个局部开始破裂，然后向其它部分发展，最后形成整体滑动。有时局部破坏只发展到某一部位为止而不再向其余部分扩展，此时就不会发生整体滑动。这种破坏的模式称为逐渐发展的破坏或称为渐进性的破坏。

引起渐进性破坏的原因可能是

1.应力和应变分布的不均匀性；

2.发生应变软化特性；

3.应力释放；

4.出现裂缝以及土在水作用下的软化；

5.土体存在节理或不连续的结构面；

6.孔隙水压力增长；

7.小地质构造；

8.环境影响

不同的条件下，渐进性破坏的起始部位是不同的。

在开挖的斜坡上，应力集中于坡趾；而在天然边坡上，破坏可能从坡顶开始；路堤的破坏可能起源于坡顶。这些都已被离心模型所证实。长期破坏很可能从滑动面端部(坡顶或坡趾)开始；短期形成的破坏很可能起源于土坡内部，然后再向外部扩展。

分析时，对各土条编号，按破坏发展的机理，在开始部位顺序号为1，依次编号。

我们拿出第i个土条来进行分析，其安全储备为

$$SM_i = C_i - D_i$$

$$C_i = cl_i + \overline{W}_i \cos\alpha_i \mathrm{tg}\phi$$

$$D_i = \overline{W}_i \sin\alpha_i$$

第i土条的失效概率为

$$P_{f_i} = P[SM_i \leqslant 0]$$

当破坏从第i条扩展第$i+1$条时，这个扩展的部位称为结合部。

如安全储备服从正态分布，则结合部需五个统计参数来描述。

第i土条的安全储备平均值$\overline{SM}_i$

第$i+1$土条的安全储备平均值$\overline{SM}_{i+1}$

第i土条的安全储备方差$V(SM_i)$

第$i+1$土条的安全储备的方差$V(SM_{i+1})$

第i土条与第$i+1$土条的安全储备之间的相关系数r_{SM_i}，SM_{i+1}

$$SM_i = cl_1 + \overline{W}_i \cos\alpha_i \mathrm{tg}\phi - \overline{W}_i \sin\alpha_i$$

$$SM_{i+1} = cl_{i+1} + \overline{W}_{i+1} \cos\alpha_{i+1} \mathrm{tg}\phi - \overline{W}_{i+1} \sin\alpha_{i+1}$$

$$r_{SM_i,SM_{i+1}}=\frac{COV(SM_i,SM_{i+1})}{\sqrt{V(SM_i)V(SM_{i+1})}}$$

协方差由下式求得

$$COV(SM_i,SM_{i+1})=l_il_{i+1}V(c)+\overline{W}_i\cos\alpha_i\times W_{i+1}\cos\alpha_{i+1}V(\mathrm{tg}\phi)+(l_iW_{i+1}\cos\alpha_{i+1}-l_{i+1}\overline{W}_i\cos\alpha_i)\cdot COV(c,\mathrm{tg}\phi)\qquad(6\text{-}39)$$

下面研究破坏扩展的概率。

当土坡中某一部分的破坏达到一定状态后或者向邻近部位转移，或者不转移。破坏不可能跳过几个尚未破坏的部位而直接进入较远的部位，因此只有两种可能。如破坏不再进一步扩展就达到了吸收状态，此时$P=1$，亦即在第i条停止转移时$P_{i,i}=1$；如可能向邻近部位转移，则$P_{i,i+1}\neq 1$。这里的$P_{i,i}$和$P_{i,i+1}$称为转移概率，可用矩阵来表示，称为转移矩阵$\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{P}$为n阶方阵。

$\boldsymbol{P}$矩阵的特征为

1.每一行的总和必等于1，由于它代表了互斥和穷举的事件，$P_{i,i}+P_{i,i+1}=1$，$i=1,2,\cdots\cdots,n$；

2.矩阵的最末一行对应于吸收状态，所以$P_{n,n}=1$，而$P_{n,i}=0$，$i=1,2,\cdots\cdots,n-1$。

$\boldsymbol{P}$矩阵中所有元素除了在主对角线及其相邻右边的一条对角线上的元素以外，其余均为零。

	1	2	3	4 ……	i	$i+1$ ……	n
1	P_{11}	P_{12}	0	0	0	0	0
2	0	P_{22}	P_{23}	0	0	0	0
3	0	0	P_{33}	P_{34}	0	0	0
⋮							
i	0	0	0	0	P_{ii}	$P_{i,i+1}$	0
$i+1$	0	0	0	0	0	$P_{i+1}P_{i+1}$	0
⋮							
n	0	0	0	0 ……	0	0	1

转移概率的确定

转移概率$P_{i,i+1}$为在第i条发生破坏的条件下，第$i+1$条发生破坏的概率，因此可以写成

$$P_{i,i+1}=P[F_{ai_{i+1}}\mid F_{ai_i}]$$
$$=P[SM_{i+1}\leqslant 0\mid SM_i\leqslant 0] \qquad (6\text{-}40)$$
$$P_{i,i}=P[SM_{i+1}>0\mid SM_i\leqslant 0] \qquad (6\text{-}41)$$

因此，
$$P_{i,i+1}+P_{i,i}=1$$
$$P_{i,i+1}=\frac{P[(SM_i\leqslant 0)\text{和}(SM_{i+1}\leqslant 0)]}{P[SM_i\leqslant 0]} \qquad (6\text{-}42)$$

分母
$$P[SM_i\leqslant 0]=\int_{-\infty}^{0} f_{SM_i}(x)dx=F_{SM_i}(0) \qquad (6\text{-}43)$$

分子等于在原点的累计两维正态分布

$$P[(SM_i\leqslant 0)\text{和}(SM_{i+1}\leqslant 0)]=\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f_{SMi,SM_{i+1}}(x,y)$$
$$\times dxdy=F_{SM_i,\,SM_{i+1}}(0,0) \qquad (6\text{-}44)$$

式中x和y为虚设的积分变量

$f_{SM_i,SMi+1}(x,y)$为两维正态概率密度函数

$$f_{SM_i,SMi+1}(SM_i,SM_{i+1})$$
$$=\frac{1}{2\pi\hat{\sigma}_{SM_i}\hat{\sigma}_{SM_{i+1}}\sqrt{1-r^2}}\times\exp\left\{\frac{-1}{2(1-r^2)}\right.$$
$$\times\left[\left(\frac{SM_i-\overline{SM_i}}{\hat{\sigma}_{SM_i}}\right)^2-2r\left(\frac{SM_i-\overline{SM_i}}{\hat{\sigma}_{SM_i}}\right)\right.$$
$$\left.\left.\times\left(\frac{SM_{i+1}-\overline{SM}_{i+1}}{\hat{\sigma}_{SM_{i+1}}}\right)+\left(\frac{SM_{i+1}-\overline{SM_{i+1}}}{\hat{\sigma}_{SM_{i+1}}}\right)^2\right]\right\} \qquad (6\text{-}45)$$

式中r为SM_i与SM_{i+1}的相关系数$r_{SM_i,SM_{i+1}}$

对于坡高为7.62m，坡角$\alpha=45°$的土坡，土的容重$\gamma=18.84$

kN/m³；内聚力平均值 $\overline{c}=23.94\text{kPa}$，变异系数$V_c=0.50$；内摩擦角平均值为38°（$\text{tg}\phi=0.78$），$\text{tg}\phi$的变异系数为0.10，$c$和$\text{tg}\phi$的相关系数为－0.20。土坡如划分为九条，对每个土条用力矩表示的安全储备的统计参数见表6-3。

安全储备的统计参数　　表 6-3

	$\overline{SM_i}$	$\hat{\sigma}_{SM_i}$	$COV(SM_i,SM_{i+1})$	$r_{SM_i,SM_{i+1}}$
1	1.10×10^5	4.47×10^4		
2	1.43	4.63	1.87×10^9	0.90
3	1.64	4.91	1.91	0.84
4	1.79	5.70	2.26	0.81
5	1.55	5.80	2.61	0.79
6	1.16	5.83	2.63	0.78
7	1.00	6.81	3.16	0.80
8	0.758	6.90	3.98	0.85
9	1.51	9.22	5.87	0.92

各土条的失效概率$P_{f_i}=P[SM_i\leqslant0]$可由标准正态分布求得，其结果见表6-4。

各土条的失效概率　　表 6-4

	标准正态变量	$P_{f_i}=P[SM_i\leqslant0]$
1	－2.46	6.59×10^{-3}
2	－3.09	1.00×10^{-3}
3	－3.34	4.19×10^{-4}
4	－3.14	8.45×10^{-4}
5	－2.67	3.79×10^{-3}
6	－1.99	2.33×10^{-2}
7	－1.47	7.08×10^{-2}
8	－1.10	1.36×10^{-1}
9	－1.64	4.5×10^{-2}

所得的转移矩阵为

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0.87	0.13	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0.81	0.19	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0.64	0.36	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0.49	0.51	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0.31	0.69	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0.26	0.74	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0.19	0.81	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0.65	0.35
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1.00

第四节　一些特殊的考虑

在研究土坡稳定时，必须注意区别几种不同的情况。

首先要区分施工期间的稳定问题还是建成以后使用期间的稳定问题。在施工期间可以允许有较高的失效概率，因为破坏所引起的直接损失以及间接损失相对来说是比较小的，而且可以事先准备好应急措施。在使用期间的土坡失稳通常是没有预先警报的，所造成的危害是比较严重的。特别对于挖方土坡，随着时间的增长，其安全储备会逐渐减小，因此长期的风险分析是控制性的。

其次要区分是浅层滑动还是深层滑动。对于灵敏性高的粘土或很松的砂，深层的滑动是逐渐形成的，土体非常缓慢地移动，其位移可能是连续的或者是间歇性的，并且是以数日，数月甚至数年才达到最终的破坏，位移速度之慢足以可以进行监测和预报危险情况的出现。对于这种类型土坡要求完全稳定会使造价过于昂贵，通常可以设置警报系统，采取清除危险性的措施，有时还存在从危险区撤离的可能性。与此相反，陡坡的浅层破坏往往是突然发生的，来不及发出预报，全部滑动可以在几分钟之内完成，其后果通常是严重的。如果移动的土石量很大，则后果更为严重。尤其是在山区，浅层滑动的可能性会更大些。

第三要区分滑动区的土是饱和的还是非饱和的。对饱和土来说，降雨作用的结果在层间含水层中是提高孔隙水压力，在非层间含水层中则是提高地下水位。地表降水的渗入，蓄水库水位提高或在土坡上方江水面积中集水的流入都有可能会发生这种情况。在层间含水层中，土坡内产生响应的时间接近于最大降雨时间，而在非层间含水层中则比最大降雨时间滞后，产生后效破坏。对于厚的非饱和土层，雨水通过无保护层的地表面直接渗入土中并形成一个逐渐推进的潮湿峰，这就减小了土的吸力从而降低土的强度，就有可能使上层土失稳而下层土还保持干燥和稳定。破坏时间取决于潮湿峰推进的速度，亦即取决于土的入渗能力，通常是在最大降雨时间发生破坏。

第四要区别土坡失稳发生在高度发展的市区还是不发达的郊区。在郊区发生土坡失稳会阻塞交通，中断联络，而生命损失较少，但在市区，特别是人口密集区更为危险。

从上面的分析可以看出在估计土坡稳定安全度时充满了不确定性，重要的是要仔细地区别土坡破坏的机理，要估计土的性质，土体不连续性特征，地下水状况，土的入渗能力等等。有些在设计时没有充分估计到的因素，常常可能是导致土坡失稳的主要因素。例如，打桩引起孔隙水压力的增长常常威胁码头岸坡在施工期间的稳定性，这种因素在设计时一般是不太注意的，考虑打桩影响的土坡稳定可靠性分析方法现已有了新的发展。又如，码头后方填土过高或填筑速度过快也常使码头失稳，这不仅涉及对荷载的估计，而且也涉及如何正确地估计土的抗剪强度参数以及正确估计堆载所产生的孔隙水压力发展规律。在设计和施工过程中要努力地去了解这些信息以使破坏的可能性降到最小。

在估计土的抗剪强度时要注意土的应力历史和应力水平的影响。土的抗剪强度曲线呈现如图6-4所示的三个阶段。

在图6-4中，第Ⅰ阶段是低侧压力状态，第Ⅱ阶段是再压缩阶段，第Ⅲ阶段是正常固结阶段。

第Ⅰ阶段相应于伪塑性的脆性状态，在第Ⅱ、Ⅲ阶段才是库

仑理论可以适用的塑性阶段。象高灵敏粘土和湿陷性土这种具有不稳定结构的土可以看作具有如第Ⅰ阶段的那种特征，其抗剪强度参数可用完全排水的直接抗拉试验和完全排水的无侧限抗压强度试验求得。具有比较稳定结构的土，在破坏时会发生膨胀或收缩，在低应力水平时也具有某些脆性特征，但起支配作用的是如第Ⅱ或第Ⅲ阶段的特性。

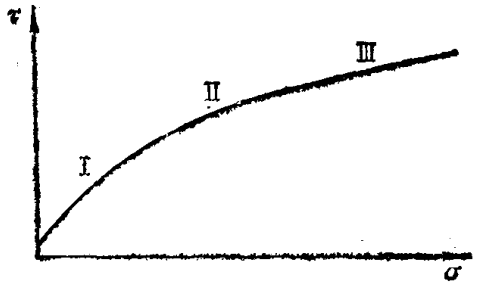


图 6-4　强度曲线三阶段

土坡几何形状的变化将会引起有效应力的变化，卸除应力时土的状态从第Ⅲ阶段移向第Ⅱ阶段；增加应力时又从第Ⅱ阶段移向第Ⅲ阶段。天然的侵蚀、开挖会产生卸载作用；天然冲积和填筑填土却会引起应力的增加。在同一土坡的不同部位都可能产生应力的卸除或增加。因此，对每个土坡都必须仔细地确定不同的试验方法，同时考虑短期的和长期的稳定条件。

在第Ⅱ和第Ⅲ区，用有效应力表示的抗剪强度表达式为

$$\tau = c' + (\sigma - u_a)\operatorname{tg}\phi' + (u_a - u_w)\operatorname{tg}\psi \qquad (6\text{-}46)$$

式中　σ——法向总应力；

u_a——超孔隙气压力；

u_w——超孔隙水压力；

c'，ϕ'——有效内聚力和有效内摩擦角；

ψ——剪阻力的附加角。

对于完全饱和的土，$u_a = 0$，$u_w = u$

$$\tau = c' + (\sigma - u)\operatorname{tg}\phi' \qquad (6\text{-}47)$$

对于非饱和土，u_a一般取作零，$u_w = s$，s为孔隙水吸力

$$\tau = c' + s\operatorname{tg}\psi + \sigma\operatorname{tg}\phi' = c + \sigma\operatorname{tg}\phi' \qquad (6\text{-}48)$$

经验参数c'，ϕ'，ψ对于各个区域是不相同的，但可看作是时间不变量。

对于深层破坏，土层一般是饱和的，而且呈第Ⅲ区的特征，产生破坏的根本原因是孔隙水压力的增长；对于浅层破坏，土一般是非饱和土，而且呈现第Ⅱ或第Ⅲ区的特征。产生破坏的根本原因是吸力的减少，这是由于雨水的渗入而引起的。

选用合适的土样在正确的条件下进行试验对于土坡稳定的概率分析是必要的。假定已完成充分的试验，这就可以用条件概率的分布函数$f(\tau|\sigma)$来表示整个有效的总体分布函数。

在讨论土的抗剪强度的变异性时必须区分土的单元体和土的分量的概念。

在潜在的破坏区中可以划分体积为A的分量，在一个分量之中应力σ是比较均匀的；而土的单元体是表示抗剪强度比较均匀的基本单位，其体积a是比较难以确定的，它取决于土所固有的变异性。这要对一个很大的土体中进行抗剪强度试验对比来估计单元体积。

对于特定的分量，土的特征强度τ^*的上、下限由下式确定

$$\operatorname*{Min}_{A}\{\tau\} < \tau^* < \frac{1}{A}\int_{A} \tau f(\tau|\sigma)\,dA \qquad (6\text{-}49)$$

对于无应力软化效应的塑性土可取为上限，特征强度τ^*的期望值等于总体平均值μ

$$\mu = \int \tau f(\tau|\sigma)\,d\tau$$

$$E(\tau^*) = \mu \qquad (6\text{-}50)$$

特征强度的方差用总体条件方差求得

$$V(\tau^*) = \frac{V(\tau)}{n} \qquad (6\text{-}51)$$

式中　n——分量中单元体的数量$n = A/a$

$$V(\tau) = \int (\tau - \mu)^2 f(\tau|\sigma)\,d\tau \qquad (6\text{-}52)$$

就脆性土而言，在超过峰值之后强度完全损失。如果某个单元破坏就意味着逐个扩展到所有单元而形成整体破坏，这种破坏犹如链的作用，因此特征强度应当取其下限，一般来说，这是相当保守的估计。因为在最弱的单元破坏之后，某些荷载会转移到相邻较强的单元上去，这就有可能抵抗住破坏从而阻止破坏的扩展。

将组成分量的单元看作为并联单元的作用，对于互相独立的单元，分量强度由下式表示

$$\tau^* = \mathrm{Max}\frac{n-r+1}{n}\tau_r \qquad (6\text{-}53)$$

式中 τ_r是第r个最小的单元强度，

$$\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \cdots < \tau_r < \cdots < \tau_n$$

对于很大的n值

$$E(\tau^*) = \mathrm{Max}\{(1-P)\tau_P\} = \mu x_n \qquad (6\text{-}54)$$

式中 τ_P为尾部概率为P的分位值，即

$$P[\tau < \tau_P] = P$$

$$E[V(\tau^*)] = \frac{[E(\tau^*)]^2}{n}\frac{P^*}{1-P^*} \qquad (6\text{-}55)$$

式中 $P[\tau < \tau^*] = P^*$

或者

$$V^* = \left[\frac{P^*}{n(1-P^*)}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\sqrt{n}} \qquad (6\text{-}56)$$

对于强度的正态分布总体，且具有平均值μ和变异系数V时，x_n和y值均可从表6-5中查得[63]。

x_n 与 y 值 表　　表 6-5

V	n 为不同数值时的 x_n 值						y
	5	10	20	50	100	∞	
1	0.600	0.561	0.534	0.518	0.512	0.506	1.110
0.5	0.602	0.568	0.548	0.534	0.530	0.526	0.766
0.2	0.767	0.720	0.696	0.683	0.679	0.674	0.400
0.1	0.884	0.864	0.816	0.804	0.799	0.794	0.244
0.05	0.942	0.923	0.907	0.889	0.885	0.880	0.150
0.01	0.988	0.985	0.981	0.978	0.975	0.970	0.058

【例】

已知$n=10$，$V=0.5$，对正态变量用表6-5计算特征强度和标准差

当$n=10$，$V=0.5$时，从表6-5查得

$$x_n=0.568$$

$$y=0.766$$

根据公式（6-54）

$$\tau^*=x_n\mu=0.568\mu$$

根据公式（6-56）

$$V^*=\frac{y}{\sqrt{n}}=0.242$$

标准差

$$\hat{\sigma}^*=0.568\times0.242\mu=0.137\mu$$

第七章　地基稳定性的概率分析

地基的稳定性是建筑物安全可靠的保证。建筑物的可靠性不但取决于结构构件和整个结构体系的可靠性，而且也取决于地基基础的可靠性，两者应当是协调的。在取用地基基础的可靠性指标或失效概率时，应将整个建筑物（包括地基基础在内）作为一个整体来考虑。本书只从土的方面来对地基的稳定性作概率分析而并不涉及上部结构的问题。

我国现行规范用地基容许承载力进行地基设计，给概率极限状态设计带来一定的麻烦。地基容许承载力作为一种界限承载力，当然并没有到达地基整体失稳的极限状态，但确已到达一种界限状态（limit states），从这个意义上讲，也是一种极限状态，完全符合概率极限状态设计原则所定义的极限状态。辛卜森[64]（B·simpson）在讨论岩土工程中的极限状态设计方法时着重指出，极限状态设计方法不能和塑性力学中的极限理论混淆。尽管如此，在本章中当涉及地基容许承载力时，我们只讨论取值的概率方法而不作极限状态分析。

第一节　按地基承载力设计

一、地基极限承载力的一般表达式

按地基承载力设计时要用到地基极限承载力的公式，在工程实践中所应用的地基承载力公式又很多，讨论可靠性设计时不可能涉及到所有的公式，为了说明概率分析的基本原理，这里先对地基极限承载力的一般表达式作基本的分析。

地基极限承载力的一般表达式为

$$q = N_B\gamma_B B + N_D\gamma_D D + N_c c \qquad (7\text{-}1)$$

式中 γ_B——地基持力层土的容重（kN/m³）；

γ_D——基础底面以上土层的平均容重(kN/m³)；

B——基础底面宽度（m）；

D——基础埋置深度（m）；

c——土的内聚力（kPa）。

N_B，N_D，N_c是承载力系数，都是土的内摩擦角φ的函数。

在公式（7-1）中，基础宽度和基础埋置深度等几何量都可以作为确定性的量；其余的变量，如内聚力c，内摩擦角φ和土的容重γ_B、γ_D都作为随机变量处理。因此，地基极限承载力q亦是一个随机变量。如果这四个随机变量都服从正态分布，则q亦服从正态分布。

若已知这四个随机变量的统计参数数学期望和方差，并已知这四个随机变量互相独立，则地基极限承载力的数学期望和方差可由下式求得：

$$E(q)=E(N_B)E(\gamma_B)B+E(N_D)E(\gamma_D)D+E(N_c)E(c) \tag{7-2}$$

$$V(q)=\left(\frac{\partial q}{\partial c}\right)^2V(c)+\left(\frac{\partial q}{\partial \varphi}\right)^2V(\varphi)+\left(\frac{\partial q}{\partial r_D}\right)^2V(r_D)+\left(\frac{\partial q}{\partial r_B}\right)^2V(\gamma_B) \tag{7-3}$$

在公式(7-3)中，一阶偏导数均在平均值赋值。

对于公式(7-1)中的各个随机变量，一阶偏导数的公式如下

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial c}&=N_c\\ \frac{\partial q}{\partial \phi}&=\gamma_B B\frac{\partial N_B}{\partial \phi}+\gamma_D D\frac{\partial N_D}{\partial \phi}+C\frac{\partial N_c}{\partial \phi}\\ \frac{\partial q}{\partial \gamma_D}&=DN_D\\ \frac{\partial q}{\partial \gamma_B}&=BN_B\end{aligned}\right\} \tag{7-4}$$

只要确定了采用何种地基极限承载力公式，三个承载力系数

表达为ϕ的函数就可给出，则公式(7-4)中承载力系数对ϕ的偏导数均可求得。用公式（7-3）计算时，必须注意$V(\phi)$是用弧度为单位代入公式。

二、普朗特尔（Prandtl）公式

1920年普朗特尔首先根据塑性平衡理论导出了介质达到极限状态时，沿着曲面发生滑动的数学方程，以后不少学者在他研究的基础上进一步作了各种修正，成为在工程中实用的极限承载力公式。

在普朗特尔极限承载力公式中，三个承载力系数分别由下式求得

$$\left.\begin{aligned} N_D &= N_\phi e^{\pi \operatorname{tg}\phi} \\ N_c &= (N_D-1)\operatorname{ctg}\phi \\ N_B &= \frac{N_D-1}{2}\sqrt{N_\phi} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}5)$$

式中

$$N_\phi = \operatorname{tg}^2\left(45^\circ + \frac{\phi}{2}\right)$$

三个承载力系数对内摩擦角φ的一阶偏导数为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_D}{\partial \phi} &= \frac{N_D\pi}{\cos^2\phi} + \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)} e^{\pi \operatorname{tg}\phi} \\ \frac{\partial N_c}{\partial \phi} &= \frac{\partial N_D}{\partial \phi}\operatorname{ctg}\phi - \frac{N_D-1}{\sin^2\phi} \\ \frac{\partial N_B}{\partial \phi} &= \frac{N_D-1}{4}\frac{1}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)} + \frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)}{2}\frac{\partial N_D}{\partial \phi} \end{aligned}\right\}$$

（7-6）

于是，公式（7-2）和（7-3）的数学期望和方差都可以求得。

若基底压力p和极限承载力q都服从正态分布，已知数学期望$E(p)=\overline{p}$，$E(q)=\overline{q}$，标准差$\hat{\sigma}_p$和$\hat{\sigma}_q$，就可求得相应的变异系

数V_p和V_q。

令中心安全系数

$$CFS=\frac{\overline{q}}{\overline{p}}$$

则可靠性指标β由下式求得

$$\beta=\frac{CFS-1}{\sqrt{CFS^2V^2_q+V^2_p}} \qquad (7\text{-}7)$$

失效概率p_f为

$$p_f=\frac{1}{2}-\psi(\beta) \qquad (7\text{-}8)$$

若基底压力p和极限承载力q都服从对数正态分布，则可靠性指标β由下式求得

$$\beta=\frac{\ln\left[CFS\sqrt{\frac{1+V^2_p}{1+V^2_q}}\right]}{\sqrt{\ln(1+V^2_p)(1+V^2_q)}} \qquad (7\text{-}9)$$

【例】

已知基底压力$\overline{p}=360\text{kPa}$，基础宽度$B=3\text{m}$，埋置深度$D=2\text{m}$，基底压力的变异系数$V_p=0.25$。土的容重$\overline{\gamma_B}=\overline{\gamma_D}=21.5\text{kN/m}^3$，标准差$\hat{\sigma}_\gamma=0.1\text{kPa}$，内摩擦角$\overline{\phi}=0.33\text{rad}$，标准差$\hat{\sigma}_\phi=0.024\text{rad}$，内聚力$\overline{c}=31.68\text{kPa}$，标准差$\hat{\sigma}_D=3.7_3\text{kPa}$。若所有随机变量均服从正态分布，试求失效概率$P_f$。

【解】

承载力系数平均值

$$\overline{N}_\phi=\text{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\bar{\varphi}}{2}\right)=1.96$$

$$\overline{N}_D=\overline{N}_\phi e^{\pi\,\text{tg}\bar{\varphi}}=5.74$$

$$\overline{N}_c=(\overline{N}_D-1)\text{ctg}\phi=13.84$$

$$\overline{N}_B\approx\frac{\overline{N}_D-1}{2}\sqrt{\overline{N}_\phi}=3.32$$

承载力对随机变量的一阶偏导数

$$\frac{\partial q}{\partial c}=\bar{N}_c=13.84$$

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma_D}=D\bar{N}_D=11.48$$

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma_B}=B\bar{N}_B=9.96$$

$$\frac{\partial N_D}{\partial \phi}=\frac{\bar{N}_D\pi}{\cos^2\phi}+\frac{\operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)}e^{\pi\operatorname{tg}\phi}=32.28$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial \phi}=\frac{\partial N_D}{\partial \phi}\operatorname{ctg}\phi-\frac{\bar{N}_D-1}{\sin^2\phi}=4.91$$

$$\frac{\partial N_B}{\partial \phi}=\frac{\bar{N}_D-1}{\Delta}\frac{1}{\cos^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)}+\frac{\sqrt{\bar{N}_\phi}}{2}\frac{\partial N_D}{\partial \phi}=29.6$$

$$\frac{\partial q}{\partial \phi}=\gamma_B B\frac{\partial N_B}{\partial \phi}+\bar{\gamma}_D D\frac{\partial N_D}{\partial \phi}+\bar{C}\frac{\partial N_c}{\partial \phi}=4848.8$$

极限承载力的平均值

$$\bar{q}=33.2\times21.5\times3+5.74\times21.5\times2+13.84\times31.68$$
$$=899.4\text{kPa}$$

极限承载力的标准差

$$\hat{\sigma}_q$$
$$=\sqrt{3.72^2\times13.84^2+0.024^2\times4848.8^2+0.1^2\times11.48^2+0.1^2\times9.96}$$
$$=127.3\text{kPa}$$

极限承载力的变异系数

$$V_q=\frac{127.3}{899.4}=0.142$$

中心安全系数

$$CFS=\frac{899.4}{360}=2.5$$

可靠性指标

$$\beta=\frac{2.5-1}{\sqrt{2.5^2\times0.142^2+0.25^2}}=3.45$$

$$\psi(3.45)=0.49972$$

$$P_f=\frac{1}{2}-0.49972=2.8\times10^{-4}$$

三、用验算点法计算

在地基承载力极限状态方程所含的随机变量中，若有非正态分布的变量，或者极限状态方程是非线性时，就需要用验算点法求可靠性指标。

这里，我们进一步介绍汉森（Hansen）公式

$$q=\frac{1}{2}\gamma N_\gamma B_e s_\gamma i_\gamma b_\gamma+(\gamma D-c\mathrm{ctg}\phi)N_q d_q s_q i_q b_q-c\mathrm{ctg}\phi \tag{7-10}$$

式中 N_γ，N_q——承载力系数，由下式求得

$$N_\gamma=1.5(N_q-1)\mathrm{tg}\phi$$

$$N_q=e^{\pi\mathrm{tg}\phi}\mathrm{tg}^2\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)$$

s_γ，s_q——与基础形状有关的系数，分别由下式求得

$$s_\gamma=1-0.4\frac{Bi_\gamma}{L}$$

$$s_q=1+\sin\phi\left(\frac{Bi_q}{L}\right)+\sin\phi\left(\frac{Li_q}{B}\right)$$

i_γ，i_q——与基础底面作用合力的倾斜率有关的倾斜系数，分别由下式求得

$$i_\gamma=\left(1-\frac{0.7Q}{N+A_e c\mathrm{ctg}\phi}\right)^5$$

$$i_q=\left(1-\frac{0.5Q}{N+A_e c\mathrm{ctg}\phi}\right)^5$$

d_q——与基础埋深有关的深度系数

$$d_q=1+2\mathrm{tg}\varphi(1-\sin\varphi)^2\mathrm{arctg}\frac{D}{B}$$

b_γ，b_q——与基础底面倾斜有关的系数分别由下式求得

$b_\gamma = e^{2.7\nu \operatorname{tg}\phi} = \exp[-2.7\nu \operatorname{tg}\phi]$

$b_q = \exp[-2\nu \operatorname{tg}\phi]$

ν为基础底面与水平面的夹角

B_e——基础的有效宽度　$B_e = B - 2e_B$

L_e——基础的有效长度　$L_e = L - 2e_L$

e_B——在宽度方向的偏心距

e_L——在长度方向的偏心距

A_e——基础的有效面积　$A_e = B_e \cdot L_e$

L——基础的长度

B——基础的宽度

D——基础的埋置深度

N——作用在基础上的竖向力（kN）

Q——作用在基础上的水平力（kN）

γ——土的容重（kN/m^3）

ϕ——土的内摩擦角

c——土的内聚力（kPa）。

用汉森公式计算地基承载力时，极限状态方程

$$g(p,\ c,\ \varphi,\ \gamma) = 0$$

为非线性方程，需用迭代法求解

为了简化问题，这里只讨论水平地基上只承受中心竖直荷载的条形基础中，因此公式（7-10）中

$$B_e = B$$

$$s_\gamma = s_q = 1$$

$$i_\gamma = i_q = 1$$

$$b_\gamma = b_q = 1$$

极限承载力公式简化为

$$q = \frac{1}{2}\gamma N_\gamma B + (D\gamma + c\operatorname{ctg}\phi)N_q d_q - c\operatorname{ctg}\phi \qquad (7\text{-}11)$$

【例】

如已知基础宽度$B = 4m$，埋深$D = 1m$，基本变量为荷载p，

地基土容重γ，内聚力c和内摩擦角ϕ，其统计特征如表7-1所示。

基本变量的统计特征　　表 7-1

基本变量	符　号	名　　称	分　　布	平均值	标准差
x_1	p	荷载(kPa)	极值Ⅰ型	200	40
x_2	γ	容重(kN/m³)	正　　态	20	2
x_3	c	内聚力(kPa)	正　　态	10	1.5
x_4	φ	内摩擦角(°)	正　　态	25	3

将上述数据代入公式（7-11），式中

$$d_q = 1 + 0.49\mathrm{tg}\phi(1-\sin\phi)^2$$

用迭代法求解步骤如下

1.极限状态方程

$$Z = q - p = g(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$$

2.假定设计验算点P^*的座标值

令$x_i^* = \bar{x}_i$

荷载P　$x_1^* = 200\mathrm{kPa}$

容重γ　$x_2^* = 20\mathrm{kN/m^3}$

内聚力c　$x_3^* = 10\mathrm{kPa}$

内摩擦角ϕ　$x_4^* = 25°$（0.4346）

3.由于p为极值Ⅰ型，根据第五章的方法换算为当量正态分布。当量正态变量的标准差为

$$\hat{\sigma}_1' = \frac{\phi[\Phi^{-1}F_1(200)]}{f_1(200)}$$

由于极值Ⅰ型的方差

$$V(x) = \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{\pi^2}{6}$$

分布参数

$$\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{6}\,\hat{\sigma}_1} = \frac{\pi}{\sqrt{6}\times 40} = 0.03206$$

$$u = E(x) - \frac{0.57722}{\alpha} = 200 - \frac{0.57722}{0.03206} = 181.99836$$

因此，在假定验算点x_1^*处极值Ⅰ型分布的概率密度函数和概率分布函数分别为

$$f_1(x_1^*) = f_1(200) = \alpha\exp[-\alpha(x_1^* - u)]\exp\{-\exp[-\alpha(x_1^* - u)]\} = 0.03206\exp[-0.03206(200 - 181.99836)]\exp\{-\exp[-0.03206(200 - 181.99836)]\} = 0.01027$$

$$F_1(x_1^*) = F_1(200) = \exp\{-\exp[-\alpha(x_1^* - u)]\} = \exp\{-\exp[-0.03206(200 - 181.99836)]\} = 0.57037$$

于是，标准差为

$$\hat{\sigma}_1' = \frac{\phi[\Phi^{-1}(0.57037)]}{0.01027} = 38.24579$$

平均值为

$$\bar{x}_1' = x_1^* - \Phi^{-1}[F_1(x_1^*)]\,\hat{\sigma}_1' = 200 - \Phi^{-1}[0.5703] \times 38.24579 = 193.21734$$

4.计算方向余弦

$$\frac{\partial g}{\partial x_1} = \frac{\partial g}{\partial p}\bigg|_{P^*} = -1$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{\partial g}{\partial \gamma}\bigg|_{P^*} = 2N_\gamma = 13.51659$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3} = \frac{\partial g}{\partial c}\bigg|_{P^*} = (N_q d_q - 1)\operatorname{ctg}\phi = 22.46205$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_4} = \frac{\partial g}{\partial \phi}\bigg|_{P^*} = 2\gamma N_\gamma' + 20(N_q' d_q + N_q d_q') + c\left[(N_q' d_q + N_q d_q')\operatorname{ctg}\phi - (N_q d_q - 1)\frac{1}{\sin^2\phi}\right]$$

式中 $N_q' = e^{\pi\operatorname{tg}\phi}\operatorname{tg}\left(45° + \frac{\phi}{2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(45° + \frac{\phi}{2}\right)}\right.$

$$+\frac{\pi}{\cos^2\phi}\mathrm{tg}\left(45^\circ+\frac{\phi}{2}\right)\Bigg]=64.30834$$

$$N'_\gamma=1.5\left[(N_q-1)\frac{1}{\cos^2\phi}+N'_q\,\mathrm{tg}\phi\right]=62.62586$$

$$d'_q=0.49(1-\sin\phi)\left[\frac{1-\sin\phi}{\cos^2\phi}-2\sin\phi\right]=-0.04026$$

求得

$$\frac{\partial g}{\partial x_4}=\frac{\partial g}{\partial \phi}\Big|_{P^*}=4769.05712$$

因为

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}'_1=-1\times 38.24579=-38.24579$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_2=13.51659\times 2=27.03318$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_3}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_3=22.46205\times 1.5=33.69308$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_4}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_4=4769.05712\times 0.05236=249.70783$$

$$M=\left[\sum_{i=1}^{4}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_i\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=(65.682,75768)^{\frac{1}{2}}$$

$$=256.28648$$

各方向余弦为

$$\cos\theta_1=38.24579/256.28648=0.14923$$

$$\cos\theta_2=-27.03318/256.28648=-0.10548$$

$$\cos\theta_3=-33.69308/256.28648=-0.13147$$

$$\cos\theta_4=-249.70783/256.28648=-0.97433$$

5.以$\cos\theta_i$，$\bar{x}_i$和$\hat{\sigma}_i$分别代入下式以计算验算点的座标

$$x_1^*=\bar{x}'_1+\hat{\sigma}'_1\beta\cos\theta_1=193.21734+38.24579\times 0.14923\beta$$

$$=193.21734+5.70742\beta$$

$$x_2^*=20-0.10548\times 2\beta=20-0.21096\beta$$

$$x_3^*=10-0.13147\times 1.5\beta=10-0.19721\beta$$

$$x_4^*=25-0.97433\times 3\beta=25-2.92299\beta$$

将这些结果代入极限状态方程，用试算法解可靠性指标β，令其

值为β_1。

6.将β_1代入上式求得x_i^*

7.重复步骤3～5，解出新的可靠性指标β_2，若$|\beta_2-\beta_1|<0.001$，则计算结束；否则重复步骤6和7，直到满足这个条件为止。

本例经过五次迭代，计算结果见表7-2。

迭代计算的结果　　表 7-2

迭代次数	Z	β	P^*	γ^*	c^*	φ^*
1	0.0935	3.8281	215.066	19.192	9.245	13.8
2	0.0407	3.5281	278.760	19.660	8.842	16.6
3	−0.0488	3.3500	301.898	19.609	9.097	17.3
4	0.0828	3.3359	305.861	19.599	9.150	17.4
5	0.0223	3.3359	306.369	19.598	9.158	17.4

【例】

对于宽度为4 m，埋深为1 m的条形基础分别用汉森公式和太沙基公式计算的结果见表7-4，基本变量的统计参数见表7-3[65]。

基本变量的统计参数　　表 7-3

基本变量	内聚力 c (kPa)	内磨擦角 ϕ (°)	容重 γ_h (kN/m³)	容重 γ_d (kN/m³)	水平荷载 P_h (kPa)	竖直荷载 P_v (kPa)
平均值	10	25	20	20	40	200
标准差	1.5	3	2	2	5	40

条形基础承载力可靠性计算结果　　表 7-4

计算条件 \ 结果		安全系数 FS	可靠性指标 β	失效概率 P_f (%)	分项系数 γ					
					γ_c	γ_φ	γ_{γ_b}	γ_{γ_d}	γ_{P_h}	γ_{P_v}
汉森公式	$P_h\neq 0$	2.08	2.07	1.92	0.94	0.77	0.99	0.98	1.05	1.11
	$P_h=0$	3.64	3.47	0.025	0.89	0.64	0.98	0.96	0	1.31
太沙基公式	$P_h\neq 0$	4.47	4.15	0.0017	0.88	0.57	0.96	0.96	0	1.36

第二节 抗滑稳定验算

对于承受水平荷载的构筑物或承受水平荷载的建筑物基础都需验算抗滑稳定性。由于水平荷载和基底摩擦系数等的计算中都存在着不确定性，需估计抗滑稳定的失效概率。

如果水平荷载是由填土产生的土压力，则土的容重和内摩擦角的变异性都会影响水平荷载的变化。

设填土表面为一平面，与水平面夹角为β，墙背与水平面的夹角为α，墙背与填土之间的摩擦角为δ，主动土压力E_A可由下式求得

$$E_A=\frac{1}{2}\gamma H^2\frac{\sin^2(\alpha+\phi)}{\sin^2\alpha\sin(\alpha-\delta)}\times\frac{1}{\left[1+\sqrt{\dfrac{\sin(\phi+\delta)\sin(\phi-\beta)}{\sin(\alpha-\delta)\sin(\phi+\beta)}}\right]^2} \qquad (7\text{-}12)$$

若挡土墙每延米自重为N，基础底面与土的摩擦系数为f，且不考虑挡土墙前的被动土压力，则挡土墙的抗滑稳定极限状态为

$$(N+E_A\sin\psi)f-E_A\cos\psi=0 \qquad (7\text{-}13)$$

式中 ψ为土压力与水平面的夹角，当墙背为俯斜时，$\psi=\delta+90^\circ-\alpha$。

若N、f、ϕ和δ为随机变量，这个极限状态为非线性方程，需用迭代法求解可靠性指标及失效概率。

验算蓄水土坝的抗滑稳定性时，水平荷载是由水压力构成的，它是一个与水位h有关的函数，则抗滑稳定极限状态方程为

$$Nf-\frac{1}{2}\gamma_w h^2=0 \qquad (7\text{-}14)$$

若N、f和h为随机变量，此极限状态方程为三个变量的非线性方程。

【例】

已知某砌石坝坝体容重γ为正态分布，平均值$\overline{\gamma}=21.8\text{kN/}$

m^3，变异系数$V_r=0.03$；基础底面与地基土的摩擦系数f为正态分布，平均值$\bar{f}=0.60$，变异系数$V_f=0.131$；水位h取以坝底高程为零的相对高程，假定为对数正态分布，其平均值$\bar{h}=32.80\text{m}$，变异系数$V_h=0.03$；水的容重$\gamma_w\approx 10\text{kN/m}^3$；根据坝截面算出坝体自重$N=567\gamma$，代入极限状态方程

$$567f\gamma-5h^2=0$$

解题步骤：

1.将服从对数正态分布的水位h的平均值和标准差换算为当量正态分布的平均值$\bar{h}'$和标准差$\hat{\sigma}'_h$。

根据第五章中导得的公式，我们有

$$\bar{x}=\ln\left[\frac{\bar{h}}{\sqrt{1+V_h^2}}\right]=\ln\frac{32.8}{\sqrt{1+0.03^2}}=3.490$$

$$\hat{\sigma}_x=\sqrt{\ln(1+V_h^2)}=\sqrt{\ln(1+0.03^2)}=0.030$$

$$\hat{\sigma}'_h=h^*\hat{\sigma}_x=0.03h^*$$

$$\bar{h}'=h^*(1+\bar{x}-\ln h^*)=h^*(4.49-\ln h^*)$$

2.写出以验算点座标表示的极限状态方程

已知验算座标为

$$\gamma^*=\bar{\gamma}+\beta\hat{\sigma}_\gamma\cos\theta_\gamma$$

$$f^*=\bar{f}+\beta\hat{\sigma}_f\cos\theta_f$$

$$h^*=\bar{h}'+\beta\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h$$

代入极限状态方程

$$567(\bar{f}+\beta\hat{\sigma}_f\cos\theta_f)(\bar{\gamma}+\beta\hat{\sigma}_\gamma\cos\theta_\gamma)-5(\bar{h}'+\beta\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h)^2=0$$

或

$$[113.4\hat{\sigma}_f\hat{\sigma}_\gamma\cos\theta_f\cos\theta_\gamma-(\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h)^2]\beta^2+[113.4(\bar{f}\hat{\sigma}_\gamma\times\cos\theta_\gamma+\bar{\gamma}\hat{\sigma}_f\cos\theta_f)-2\bar{h}'\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h]\beta+(113.4\bar{f}\bar{\gamma}-\bar{h}'^2)=0$$

可将极限状态方程简写为

$$a\beta^2+b\beta+c=0$$

3.假设验算点座标

$$f^* = \bar{f} = 0.60$$

$$\gamma^* = \bar{\gamma} = 2.18$$

$$h^* = \bar{h}' = \bar{h}(4.49 - \ln\bar{h}) = 32.79$$

4.计算方向余弦

$$-\frac{\partial g}{\partial f}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_f = -567\gamma^*\hat{\sigma}_f$$

$$-\frac{\partial g}{\partial \gamma}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}_\gamma = -567 f^*\hat{\sigma}_\gamma$$

$$-\frac{\partial g}{\partial h}\Big|_{P^*}\hat{\sigma}'_h = h^*\hat{\sigma}'_h$$

$$M = [(567\gamma^*\hat{\sigma}_f)^2 + (567 f^*\hat{\sigma}_\gamma)^2 + (h^*\hat{\sigma}'_h)^2]^{\frac{1}{2}} = 104.8$$

$$\cos\theta_f = \frac{-567\gamma^*\hat{\sigma}_f}{104.8} = -0.927$$

$$\cos\theta_\gamma = \frac{-567 f^*\hat{\sigma}_\gamma}{104.8} = -0.2124$$

$$\cos\theta'_h = \frac{32.79\hat{\sigma}'_h}{104.8} = 0.3081$$

5.代入极限状态方程求解β值

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0$$

$$a = 113.4\hat{\sigma}_f\hat{\sigma}_\gamma\cos\theta_f\cos\theta_\gamma - (\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h)^2 = 113.4 \times 0.0786 \times 0.654 \times 0.927 \times 0.2124 - (0.9840 \times 0.3081)^2$$

$$= 1.056$$

$$b = 113.4(\bar{f}\hat{\sigma}_\gamma\cos\theta_\gamma + \bar{\gamma}\hat{\sigma}_f\cos\theta_f) - 2\bar{h}'\hat{\sigma}'_h\cos\theta'_h$$

$$= 113.4[0.6 \times 0.654 \times (0.2124) + 21.8 \times 0.0786 \times (-0.927)] - 2 \times 32.79 \times 0.9840 \times 0.3081 = -209.6$$

$$c = 113.4 \times 0.6 \times 21.8 - 32.79^2 = 408.1$$

6.计算可靠性指标及验算点座标

$$\beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = 1.967$$

$$f^* = \bar{f} + \beta\hat{\sigma}_f\cos\theta_f = 0.6 + 1.967 \times 0.0786 \times (-0.927)$$

$$= 0.4567$$

$$\gamma^* = \overline{\gamma} + \beta\ \hat{\sigma}_\gamma \cos\theta_\gamma = 21.8 + 1.967 \times 0.654 \times (-0.2124)$$
$$= 21.53\ (\mathrm{kN/m^3})$$
$$h^* = \overline{h'} + \beta\ \hat{\sigma}_{h'} \cos\theta_{h'} = 32.79 + 1.967 \times 0.984 \times 0.3081$$
$$= 33.39\ (\mathrm{m})$$

7.用P^*的座标值，重复第4步到第6步的计算，直到两次所得的β值之差小于0.001为止。

本例经3次迭代就可求得结果

$$\beta = 1.963$$
$$f^* = 0.4563$$
$$\gamma^* = 21.59\ (\mathrm{kN/m^3})$$
$$h^* = 33.42\ (\mathrm{m})$$

第三节　地基承载力的概率取值方法

《建筑地基基础设计规范》所推荐的地基承载力表实质上是经验公式的表格化。正如第三章第六节所指出的，经验公式有两个误差来源，在制表和使用表时都应当用概率取值方法[27]。

在编制地基承载力表时，要考虑回归方程的剩余标准差和样本容量对置信带的影响，根据置信下限来确定所提供的地基承载力表的取值。

两个代入指标的承载力表是按二元回归方程编制的。如粉土承载力取决于孔隙比和含水量，这两个变量的影响是非线性的，经变换后的线性方程为

$$\log(100q) = b_0 + b_e \log(100e) + b_w \log(10w) \qquad (7\text{-}15)$$

考虑置信带后的置信下限为

$$\log(100q) = b_0 + b_e \log(100e) + b_w \log(10w) - t_\alpha \hat{\sigma} \psi \qquad (7\text{-}16)$$

式中　$\hat{\sigma}$——为回归方程的剩余标准差；

ψ——影响系数；

$$\psi=\left[\frac{1}{n}+\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(x_{0i}-\overline{x_i})(x_{0j}-\overline{x_j})c_{ij}\right]^{\frac{1}{2}}$$

c_{ij}——SS矩阵的逆阵中的元素；

x_{0i}、x_{0j}——代入指标的平均值；

$\overline{x_i}$、$\overline{x_j}$——回归方程所依据的子样平均值。

公式（7-16）可以反演为非线性方程

$$q=10^{(b_0+2b_e+b_w-2-t_\alpha\hat{\sigma}\psi)}e^{b_e}w^{b_w}$$

$$=k_qe^{b_e}w^{b_w} \qquad (7\text{-}17)$$

$$k_q=10^{(b_0+2b_e+b_w-2-t_\alpha\hat{\sigma}\psi)}$$

地基承载力表按公式（7-17）计算的结果编制，由承载力表查得的承载力值是基本值q_0。

在使用地基承载力表时必须注意表的不确定性，当代入指标具有变异性时，所得的结果也不是一个确定性的值，而带有一定的误差，这是由代入指标的误差经过经验公式传递而影响到查表值的。q的标准差$\hat{\sigma}_q$由下式计算

$$\hat{\sigma}_q=\left[\left(\frac{\partial q}{\partial e}\right)^2\hat{\sigma}_e^2+\left(\frac{\partial q}{\partial w}\right)^2\hat{\sigma}_w^2\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7\text{-}18)$$

$$=q_0(b_e^2V_e^2+b_w^2V_w^2)^{\frac{1}{2}}$$

式中 V_e——e的变异系数；

V_w——w的变异系数。

查表地基承载力的标准值由下式求得

$$q_k=q_0-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n_0}}\hat{\sigma}_q=q_0\left[1-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n_0}}(b_e^2V_e^2+b_w^2V_w^2)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=q_0\cdot\gamma_g \qquad (7\text{-}19)$$

式中 γ_g——回归修正系数；

$$\gamma_g=1-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n_0}}(b_e^2V_e^2+b_w^2V_w^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$=1-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n_0}}Vb_e \qquad (7\text{-}20)$$

n_0——代入指标的样本容量；

V——综合变异系数

$$V=\left(V_e^2+\frac{b_w^2}{b_e^2}V_w^2\right)^{\frac{1}{2}}\approx V_e+\xi V_w$$

如$b_w \ll b_e$，则可取折算系数$\xi=0$

为了便于使用，将公式（7-20）拟合为一个经验表达式

$$\gamma_g=1-(2.884/\sqrt{n_0}+7.918/n_0^2)V \qquad (7\text{-}21)$$

【例】

粘性土承载力表如表7-5所示，此表的代入指标为孔隙比e与液性指数I_L、ξ取0.1。

粘性土承载力基本值q_0（kPa）　　表 7-5

e \ I_L	0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25
0.5	475	430	390	(360)		
0.6	400	360	325	295	(265)	
0.7	325	295	265	240	210	170
0.8	275	240	220	200	170	135
0.9	230	210	190	175	135	105
1.0	200	180	160	135	115	
1.1		160	135	115	105	

注：有括号者仅供内插用
折算系数ξ为0.1
孔隙比e为第一指标

已知地基土的孔隙比平均值$\overline{e}=0.90$，液性指数平均值$\overline{I}_L=0.75$；孔隙比的标准差$\hat{\sigma}_e=0.15$，液性指数的标准差$\hat{\sigma}_{I_L}=0.10$，$n_0=15$。查表求承载力的标准值q_k。

$$V_e=\frac{0.15}{0.90}=0.17$$

$$V_{I_L}=\frac{0.10}{0.75}=0.13$$

综合变异系数

$$V=0.17+0.1\times 0.13=0.18$$

回归修正系数

$$\gamma_y=1-(2.884/\sqrt{15}+7.918/15^2)\times 0.18$$

$$=1-0.14=0.86$$

用 $\bar{e}=0.90$，$\bar{I}_L=0.75$查表7-5得基本值

$$q_0=170\text{kPa}$$

标准值

$$q_k=q_0\cdot\gamma_s=170\times0.86=146.2\text{kPa}$$

《建筑地基基础设计规范》推荐的地基承载力公式

$$q=N_b\gamma_b b+N_d\gamma_d d+N_c c \qquad (7\text{-}22)$$

是以塑性区开展四分之一基宽的临界荷载公式为基础再加经验修正得到的，承载力系数值见表7-6。

可以从两条途径对公式（7-22）进行概率分析[28]。

承载力系数及其对 φ 的一阶导数　　表 7-6

内摩擦角 φ(度)	N_B	N_D	N_c	$\frac{dN_B}{d\phi}$	$\frac{dN_D}{d\phi}$	$\frac{dN_c}{d\phi}$
0	0	1.00	3.14	0.79	3.14	4.93
2	0.03	1.12	3.32	0.88	3.51	5.27
4	0.06	1.25	3.51	0.98	3.92	5.64
6	0.10	1.39	3.71	1.10	4.39	6.05
8	0.14	1.55	3.93	1.23	4.92	6.49
10	0.18	1.73	4.17	1.38	5.53	6.98
12	0.23	1.91	4.42	1.56	6.22	7.53
14	0.29	2.17	4.69	1.75	7.01	8.13
16	0.36	2.43	5.00	1.98	7.92	8.80
18	0.43	2.72	5.31	2.24	8.97	9.55
20	0.51	3.06	5.66	2.80	10.19	10.39
22	0.61	3.44	6.04	3.90	11.60	11.32
24	0.80	3.87	6.45	5.80	13.24	12.38
26	1.10	4.37	6.90	8.20	15.16	13.57
28	1.40	4.93	7.40	10.80	17.42	14.92
30	1.90	5.59	7.95	14.56	20.09	16.46
32	2.50	6.35	8.55	18.80	23.27	18.21
34	3.20	7.21	9.22	24.55	27.06	20.23
36	4.20	8.25	9.97	32.25	31.61	22.55
38	5.50	9.44	10.80	42.32	37.12	25.25
40	7.20	10.81	11.73	55.18	43.82	28.40

第一条途径将设计参数c和φ的标准值代入公式（7-22），即用标准值ϕ_k查表7-6得三个承载力系数，公式（7-22）中的c用c_k代入，所求得的承载力即为标准值q_k。

第二条途径是考虑c和ϕ的误差在公式（7-22）中的传递，求得地基承载力的标准差$\hat{\sigma}_q$，再用统计修正系数公式（3-47）计算统计修正系数γ_s；承载力的基本值q_0用公式（7-22）计算，指标均用平均值$\overline{c}$和$\overline{\phi}$代入。地基承载力的标准值

$$q_k = q_0 \cdot \gamma_s$$

地基承载力的标准差由下式求得

$$\hat{\sigma}_q = \left[\hat{\sigma}_\phi^2 \left(\gamma_b b \frac{dN_b}{d\phi} + \gamma_d d \frac{dN_d}{d\phi} + c \frac{dN_c}{d\phi} \right)^2 + \hat{\sigma}_c^2 N_c^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{7-23}$$

式中，$\hat{\sigma}_\phi$和$\hat{\sigma}_c$分别为内摩擦角和内聚力的标准差，三个承载力系数对内摩擦角的一阶导数$\frac{dN_b}{d\phi}$、$\frac{dN_d}{d\phi}$和$\frac{dN_c}{d\phi}$均见表7-6。其中承载力系数N_b是经过经验修正了的承载力系数，经拟合成函数式以后再求导数的。

下面分析影响统计修正系数的因素。

对于内摩擦角$\phi = 30°$的土，假定$V_\phi = V_c$，则当变异系数为不同数值时，统计修正系数γ_s与样本容量的关系见图7-1。

在图7-1中，图a是第一种途径的结果，图b是第二种途径的结果，可以看出，这两种途径所得的结果是一致的。

从图可以看出，对于$\phi = 30°$的土，当$V < 0.15$时，样本容重为10已经足够了；但对于$V > 0.15$的情况，加大样本容量是必要的。

图7-2给出了不同样本容量时，统计修正系数γ_s与变异系数V的关系。从图可见，小于10的样本容量，从设计值的取值对工程造价的影响来看是很不经济的。同时还可以看出，减少变异系数对于提高统计修正系数有显著的作用。说明正确划分地质单元提高取土技术和试验技术，从而减少数据离散性以提高可靠性，

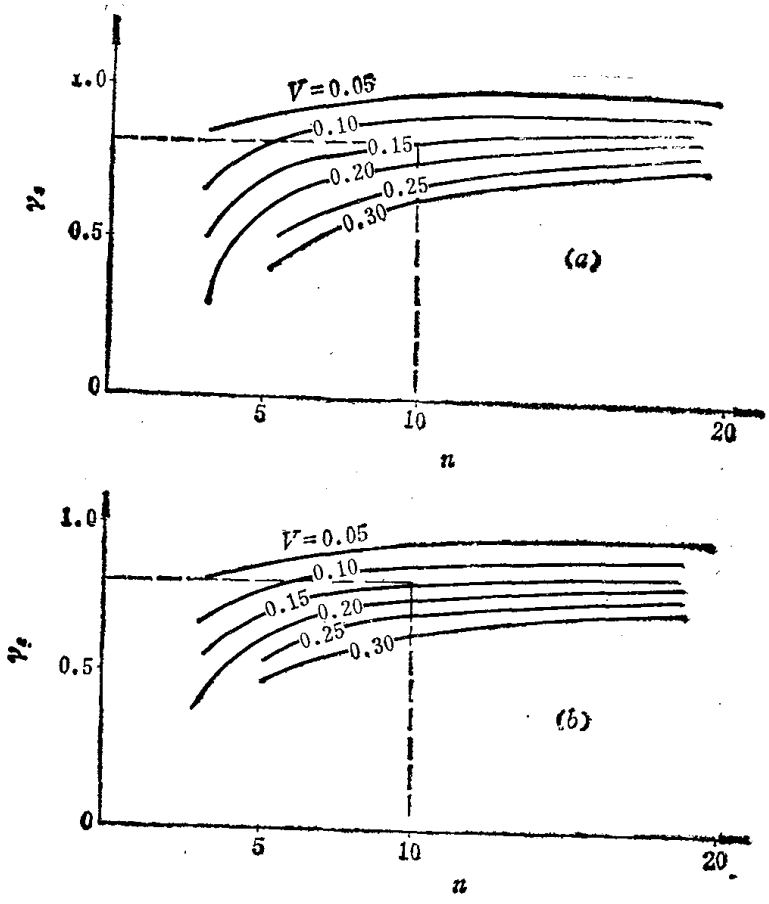


图 7-1　统计修正系数γ_s与样本容量n的关系

有重要的经济意义。

不同内摩擦角值的土，统计修正系数变化的敏感性是不同的。图7-3给出了分别为$\phi=14°$和$\phi=30°$两种土的结果，说明研究变异性的影响应着重放在砂土上。从图也可以看出，当ϕ与c的变异系数不相等时，内摩擦角ϕ的变异系数对统计修正系数的影响比内聚力大得多。

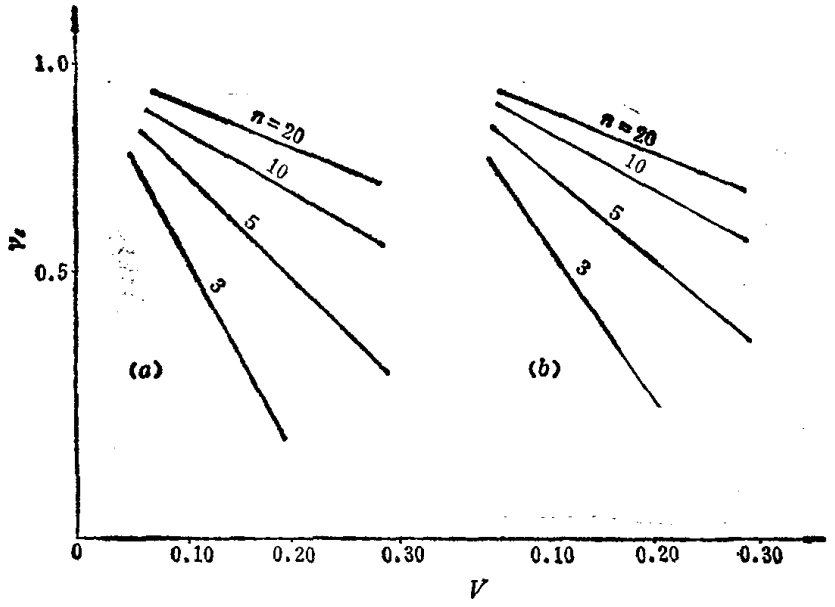


图 7-2　统计修正系数γ_s与变异系数V的关系

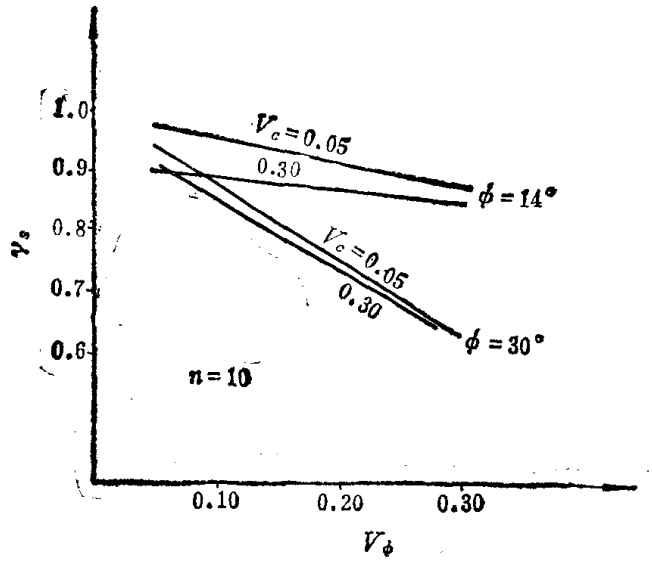


图 7-3　统计修正系数γ_s与内摩擦角ϕ的关系

第四节　地基土强度指标的统计

对地基承载力作概率分析时需要用到地基土抗剪强度指标的统计量，即数学期望和方差。究竟要取多少深度范围内的数据来统计呢？我们可以这样来设想，假设地基已经达到强度极限而形成了连续的破裂面，则在破裂面切割最大深度范围以内土层的抗剪强度特性将会影响地基的极限承载力。在这个最大深度以下的土层，它的特性对承载力的影响是不大的。当然，即使在地基还没有达到强度极限时，或者破裂面尚未出现时，仍应当考虑这个最大深度范围以内的所有土层的抗剪强度性状。

破裂面的最大切割深度T的大小与过渡区的滑动线形状有关。许多承载力公式都是以普朗特尔公式为基础，假定过渡区的滑动线形状为对数螺线。因此，我们分析普朗特尔公式的过渡区，从几何上找破裂面的最大切割深度作为估计统计取值深度的依据。

图7-4给出普朗特尔公式的假定滑动线，从过渡区对数螺线上任一点A作竖直线T，T与r的夹角为β，从几何关系可以得到

$$\beta = \theta - \alpha$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}$$

则T可表达为θ的函数

$$T = r\cos\beta = r\cos(\theta - \alpha) \qquad (7\text{-}24)$$

已知

$$r = \frac{B}{2}\csc\alpha e^{\theta \operatorname{tg}\varphi}$$

则

$$T = \frac{B}{2}\csc\alpha e^{\theta \operatorname{tg}\varphi} \cos(\theta - \alpha) \qquad (7\text{-}25)$$

令

$$\frac{dT}{d\theta} = 0$$

得　$\mathrm{tg}\phi = \mathrm{tg}(\theta - \alpha)$即当$\beta = \theta - \alpha = \phi$时$T$为最大值，导得破裂面最大切割深度$T$的估算公式

$$T = \frac{B}{2}\csc\alpha e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\phi}{2}\right)\mathrm{tg}\phi}\cos\phi \qquad (7\text{-}26)$$

按公式计算计算的$\frac{T}{B}$值见表7-7。

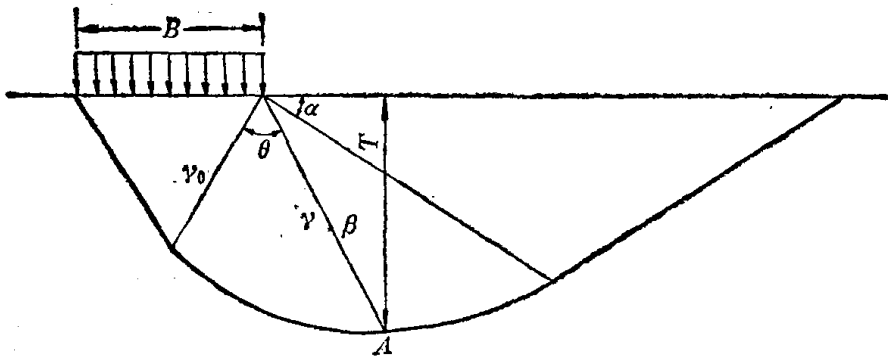


图 7-4　普朗特尔公式的破裂面

最大切割深度临界比值　　表 7-7

ϕ	0	5	10	15	20	30	40
$\frac{T}{B}$	0.71	0.79	0.88	1.01	1.16	1.59	2.34

根据临界比值确定的深度范围内若有二个以上的不同力学层时应取第一力学层厚度范围内的指标进行统计；如第一力学层的强度大于第二力学层，则应验算第二层是否满足软弱下卧层的强度。有时，由于土层的外观特征上的差别而划分出不同层次，但其强度经显著性检验并无显著性差异时，可视为同一力学层统计。

在一般应力水平上，通常假定莫尔强度包线是一条直线，因此用线性回归分析方法来统计抗剪强度参数是合适的[33][38]。

线性回归方程

$$Y = A + BX$$

式中，A和B是回归系数，它们都是随机变量，A相当于内聚力c，B相当于内摩擦角的正切$\mathrm{tg}\phi$。

若有n组试验，每组有k个土样在不同竖直压力或周围压力作用下剪切，则共有m对数据，$m = n \times k$。

对于直剪试验的结果，竖直压力为p，抗剪强度为τ，则统计参数由下式求得

$$\overline{c} = \overline{\tau} - \overline{p}\,\overline{\mathrm{tg}\phi} \tag{7-27}$$

$$\overline{\mathrm{tg}\phi} = \frac{m\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i - \sum_{i=1}^{m}\tau_i \sum_{i=1}^{m} p_i}{\Delta} \tag{7-28}$$

$$\hat{\sigma}_c = \hat{\sigma}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m} p_i}{\Delta}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{7-29}$$

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\phi} = \hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7-30}$$

内聚力的平均值也可以由下式求得

$$\bar{c}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m}\tau_i \sum_{i=1}^{m} p_i^2 - \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{i=1}^{m} p_i\tau_i}{\Delta} \tag{7-31}$$

内摩擦角的标准差可由公式（7-30）求得

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\phi} = \hat{\sigma}_\phi \frac{d\,\mathrm{tg}\phi}{d\phi} = \hat{\sigma}_\phi \sec^2\phi \tag{7-32}$$

$$\hat{\sigma}_\phi = \hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\phi}\cos^2\phi = \hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\cos^2\phi \tag{7-33}$$

在公式（7-27）至公式（7-33）中，$\hat{\sigma}$为回归方程的标准差

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m(m-2)}} \times \sqrt{\left\{\left[m\sum_{i=1}^{m}\tau_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m}\tau\right)^2\right] - \frac{1}{\Delta}\left[m\sum_{i=1}^{m} p_i\tau_i - \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{i=1}^{m}\tau_i\right]^2\right\}}$$

Δ为计算因子

$$\Delta = m\sum_{i=1}^{m} p_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{m} p_i\right)^2$$

对于三轴试验的结果不能直接套用直剪试验的公式。

如令

$$p=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$$

$$\tau=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

则按p-τ数据用回归分析方法求得的回归线并不是莫尔强度包线而是最大剪应力点的连线K_f线，两者的关系见图7-5。

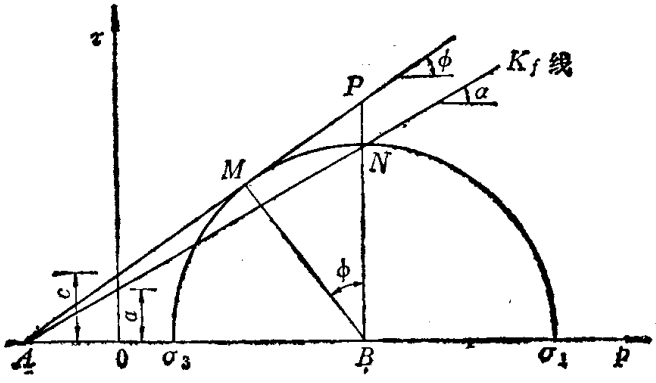


图 7-5　莫尔强度包线与K_f线的关系

从图可知，K_f线的倾角的正切tgα和K_f线与纵座标轴的截距a可以套用直剪试验的分析公式：

$$\overline{\mathrm{tg}\alpha}=\frac{m\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i-\sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i}{\Delta} \qquad (7\text{-}34)$$

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\alpha}=\hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7\text{-}35)$$

$$\bar{a}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i^2-\sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i}{\Delta} \qquad (7\text{-}36)$$

$$\hat{\sigma}_a=\hat{\sigma}\left[\frac{\sum_{i=1}^{m}p_i^2}{\Delta}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7\text{-}37)$$

只要找出c与a，ϕ与α之间的关系，就可以从公式（7-34）

至（7-35）导得三轴试验的抗剪强度指标的统计参数。

根据图7-5所示的几何关系可得

$$\sin\phi = \mathrm{tg}\alpha \qquad (7\text{-}38)$$

$$\phi = \arcsin(\mathrm{tg}\alpha) \qquad (7\text{-}39)$$

$$a = c \cdot \cos\phi \qquad (7\text{-}40)$$

$$c = \frac{a}{\cos\phi} \qquad (7\text{-}41)$$

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}} = \frac{\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\alpha}}{\cos^3\phi} \qquad (7\text{-}42)$$

$$\hat{\sigma}_c = \frac{\hat{\sigma}_a}{\cos\phi} + c\,\mathrm{ctg}\phi\,\hat{\sigma}_\phi \qquad (7\text{-}43)$$

将公式（7-34）代入（7-39）得

$$\overline{\phi} = \arcsin\left[\frac{m\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i - \sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i}{\Delta}\right] \qquad (7\text{-}44)$$

将公式（7-36）代入（7-41）得

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i - \sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i}{\Delta\cos\phi}$$

$$= \frac{1}{\Delta\mathrm{tg}\alpha}\left(\sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i^2 - \sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i\right)\mathrm{tg}\overline{\phi} \qquad (7\text{-}45)$$

将公式（7-34）代入（7-45）得

$$\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i^2 - \sum_{i=1}^{m}p_i\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i}{m\sum_{i=1}^{m}\tau_i p_i - \sum_{i=1}^{m}\tau_i\sum_{i=1}^{m}p_i}\mathrm{tg}\overline{\phi} \qquad (7\text{-}46)$$

将公式（7-35）代入（7-42）得

$$\hat{\sigma}_{\mathrm{tg}\phi} = \frac{\hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos^3\overline{\phi}} \qquad (7\text{-}47)$$

$$\hat{\sigma}_\phi = \frac{\hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}}{\cos\overline{\phi}}\,\frac{180}{\pi} \qquad (7\text{-}48)$$

将公式（7-37）代入（7-43）得

$$\hat{\sigma}_o = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Delta}\cos\overline{\phi}}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{m} p_i^2} + \overline{c}\,\overline{\mathrm{tg}\phi}\sqrt{m}\right) \quad (7\text{-}49)$$

至此已全部求得三轴试验的抗剪强度指标统计公式。

用上述方法求得直剪或三轴抗剪强度指标的统计参数，适用于估计基础以下有限范围内地基抗剪强度指标的平均趋势及置信下限值，用以提供设计参数的标准值。

【例】

已知三轴试验的18对试验结果p-τ值，其值如表7-8所示，试计算抗剪强度指标的平均值与标准差。

三轴试验结果（kPa）　　表 7-8

p	155	315	430	590	160	325	470	150	280
τ	55	115	130	190	60	125	170	50	80
p	400	545	175	320	470	610	300	460	590
τ	100	145	75	120	170	210	100	160	190

【解】

1.计算五个加和

$\Sigma p = 6745$　　$\Sigma p^2 = 2942025$

$\Sigma \tau = 2245$　　$\Sigma \tau^2 = 322025$

$\Sigma \tau p = 967025$

2.计算因子

$\Delta = m\Sigma p^2 - (\Sigma p)^2 = 18 \times 2942025 - 6745^2 = 7461425$

3.内摩擦角平均值（公式7-44）

$$\overline{\phi} = \arcsin\left[\frac{m\Sigma \tau p - \Sigma \tau \Sigma p}{\Delta}\right]$$

$$= \arcsin\left[\frac{18\times 967025 - 2245\times 6745}{7461425}\right]$$

$$= 17.70$$

4.内聚力平均值（公式7-46）

$$\bar{c} = \frac{\Sigma\tau\Sigma p^2 - \Sigma p\Sigma\tau p}{m\Sigma\tau p - \Sigma\tau\Sigma p}\,\mathrm{tg}\bar{\phi}$$

$$= \frac{2245\times 2942025 - 6745\times 967025}{7461425}\mathrm{tg}17.70$$

$$= 36\times 0.32 = 11.5\ (\mathrm{kPa})$$

5.回归方程的剩余标准差

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{m(m-2)}\left\{[m\Sigma\tau^2 - (\Sigma\tau)^2] - \frac{1}{\Delta}[m\Sigma p\tau - \Sigma p\Sigma\tau]^2\right\}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{18\times 16}\cdot\left[(18\times 322025 - 2245^2) - \frac{(18\times 967025 - 2245\times 6745)^2}{7461425}\right]}$$

$$= 17.2\ (\mathrm{kPa})$$

6.内摩擦角的标准差（公式7-48）

$$\hat{\sigma}_\phi = \frac{\hat{\sigma}\left(\frac{m}{\Delta}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{180}{\pi}}{\cos\bar{\phi}} = \frac{17.2}{0.9528}\left(\frac{18}{7641425}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{180}{\pi} = 1.6^\circ$$

7.内聚力的标准差（公式7-49）

$$\hat{\sigma}_c = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\Delta}\cos\bar{\phi}}\left(\sqrt{\Sigma p^2} + \bar{c}\,\mathrm{tg}\bar{\phi}\sqrt{m}\right)$$

$$= \frac{17.2}{2764\times 0.9528}\left(1715 + 11.5\times 0.32\times\sqrt{18}\right)$$

$$= 0.0065\times 1730 = 11.2\ (\mathrm{kPa})$$

第八章　变形问题的概率分析

第一节　变形极限状态方程

变形极限状态是指在满足承载力有足够安全度的前提下，建筑物基础或岩土结构物的变形已达到正常使用或耐久性能的某项规定限值。这种变形包括沉降、水平位移和沉陷，在沉降中包括了绝对沉降量、差异沉降值和倾斜。过大的变形会使建筑物和构筑物发生开裂，或者影响使用，或者影响美观，造成不安的社会心理。例如，高等级刚性路面因路基过大的差异沉降而开裂，降低了路面的使用质量；柱间的过大差异沉降会使行车发生滑轨或卡轨，轻则影响生产，重则发生事故；过大的差异沉降使各种管道开裂，对于高压管道的危害性更大；高层建筑物的倾斜会使居民感到不安全，也影响城市的美观。

变形极限状态方程可用下式表示

$$\Delta - S = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

式中　Δ——容许的变形值；

S——估计实际发生的变形值。

估计实际发生的变形值S的大小取决于土层的变形性状，压缩土层的厚度，作用于土体的荷载大小以及计算模型的误差等因素。在确定性设计方法中，这些因素都可以用定量的数值来表示，如土的压缩模量E_s（或压缩指数C_c），土层厚度Δz，基底附加压力p_0以及经验修正系数ψ_s等。但实际上由于土的性质的变异性，土层厚度的不均匀性以及荷载的不确定性，这些变量都可以全部或部分地作为随机变量来处理。至于经验修正系数，它是根据计算变形和实测变形的对比分析得出的经验系数，本身也是一个随机变量。

容许变形值有时是确定性的数值，如根据使用要求而提出的限值；但有时也是随机变量，如根据工程实测调查得出的临界值，这种临界值是统计的结果，具有一定的变异性。

如以确定变形极限状态的独立变量来表示，变形极限状态方程的一般表达式为

$$g(\Delta,\ E_s,\ \Delta z,\ p_0,\ \psi_s)=0 \qquad (8\text{-}2)$$

第二节　地基基础设计规范公式

工业与民用建筑地基基础设计规范采用以分层总和法为基础、并考虑经验修正的应力面积法计算沉降

$$S=\psi_s\sum_{i=1}^{n}\frac{p_0}{E_{s_i}}(z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1}) \qquad (8\text{-}3)$$

式中　ψ_s——沉降计算经验系数，根据沉降观测资料及经验确定。当根据沉降观测资料时，实测沉降为S_0，未加修正的计算沉降为S'，则$\psi_s=\dfrac{S_0}{S'}$

若有m个实测值，就可得到ψ_s的平均值$E(\psi_s)$和方差$V(\psi_s)$；

n——地基变形计算深度范围内的土层数；

p_0——基础底面处的附加压力（kPa）；

$$p_0=p-\gamma D$$

p为基底总压力（kPa）　D为基础埋置深度(m)

γ为土的容重（kN/m³）

E_{s_i}——基础底面下第i层土的压缩模量（MPa）；

z_i,z_{i-1}——基础底面至第i层和第$i-1$层底面的距离（m）；

C_i,C_{i-1}——基础底面的计算点至第i层和第$i-1$层底面范围内的平均附加压力系数。

$$C=\frac{\int_0^z\alpha(z)dz}{z}$$

$\alpha(z)$为竖向附加应力系数，它是深度z的函数；

C值可按规范附录有关表查用[69]

对于公式（8-3），变形极限状态方程为

$$\Delta-\psi_s p_0\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_{s_i}}(z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1})=0 \qquad (8\text{-}4)$$

式中，E_{s_i}变量共有n个，z_i变量共有$2n-1$个，其中当$i=1,2,\cdots,n-1$时z_i各出现两次，$i=n$时，z_i只出现一次，因此共有$3n+2$个变量。

各个变量的一阶偏导数由下式求得：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial \Delta}=1\\
&\frac{\partial g}{\partial E_{s_i}}=\frac{\psi_s p_0}{E_{s_i}^2}(z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1})=\frac{S_i}{E_{s_i}}\qquad i=1,2,\cdots,n\\
&\frac{\partial g}{\partial z_i}=-\frac{\psi_s p_0}{E_{s_i}}C_i=-\frac{S_iC_i}{z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1}}\qquad i=1,2,\cdots,n\\
&\frac{\partial g}{\partial z_{i-1}}=\frac{S_iC_{i-1}}{z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1}}\qquad i=1,2,\cdots,n\\
&\frac{\partial g}{\partial p_0}=-\frac{S}{p_0}\\
&\frac{\partial g}{\partial \psi_s}=-\frac{S}{\psi_s}
\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}5)$$

令公式（5-31）中方向余弦的分母项为M，并将公式（8-5）中的各项偏导数代入得

$$M=\left[\Sigma\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\Big|_{p^*}\hat{\sigma}_{X_i}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left\{\hat{\sigma}_{\Delta}^2+S^2\left[\left(\frac{\hat{\sigma}_{p_0}}{p_0}\right)^2+\left(\frac{\hat{\sigma}_{\psi_s}}{\psi_s}\right)^2\right]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_i\hat{\sigma}_{E_{s_i}}}{E_{s_i}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S_iC_i\hat{\sigma}_{z_i}}{z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{S_iC_i\hat{\sigma}_{z_{i-1}}}{z_iC_i-z_{i-1}C_{i-1}}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (8\text{-}6)$$

各变量的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}
\cos\theta_{\Delta} &= -\frac{\hat{\sigma}_{\Delta}}{M} \\
\cos\theta_{p_0} &= \frac{S\hat{\sigma}_{p_0}}{p_0 M} \\
\cos\theta_{\psi_s} &= \frac{S\hat{\sigma}_{\psi_s}}{\psi_s M} \\
\cos\theta_{E_{s_i}} &= -\frac{S_i\hat{\sigma}_{E_{s_i}}}{E_{s_i} M} \qquad i = 1,\ 2\cdots,\ n \\
\cos\theta_{z_i} &= \frac{S_i C_i \hat{\sigma}_{z_i}}{(z_i C_i - z_{i-1} C_{i-1}) M} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \\
\cos\theta_{z_{i-1}} &= -\frac{S_i C_{i-1}\hat{\sigma}_{z_{i-1}}}{(z_i C_i - z_{i-1} C_{i-1}) M} \qquad i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n
\end{aligned}\right\} \quad (8\text{-}7)$$

根据公式（5-34）得验算点P^*的座标

$$\left.\begin{aligned}
\Delta^* &= \overline{\Delta} + \beta\,\hat{\sigma}_{\Delta}\cos\theta_{\Delta} \\
p_0^* &= \overline{p_0} + \beta\hat{\sigma}_{p_0}\cos\theta_{p_0} \\
\psi_s^* &= \overline{\psi_s} + \beta\,\hat{\sigma}_{\psi_s}\cos\theta_{\psi_s} \\
z_i^* &= \overline{z_i} + \beta\,\hat{\sigma}_{z_i}\cos\theta_{z_i} \qquad i = 1,\ 2\cdots,\ n \\
z_{i-1}^* &= \overline{Z_{i-1}} + \beta\,\hat{\sigma}_{z_{i-1}}\cos\theta_{z_{i-1}} \qquad i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\
E_{si}^* &= \overline{E_{s_i}} + \beta\,\hat{\sigma}_{E_{s_i}}\cos\theta_{ES_i} \qquad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n
\end{aligned}\right\} \quad (8\text{-}8)$$

这些验算点座标必然符合变形极限状态方程，将公式（8-8）所示的座标值代入公式（8-4）得

$$\Delta^* - \psi_s^* p_0^* \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{E_{s_i}^*}(z_i^* C_i - z_{i-1}^* C_{i-1}) = 0 \qquad (8\text{-}9)$$

可靠性指标β用迭代法计算，计算时先假定验算点座标为各自的平均值，用公式（8-7）对方向余弦赋值，用公式（8-8）求得验算点座标值后代入公式（8-9）求解β值。解出β值后再用公式（8-8）计算座标值，再次用公式（8-7）赋值，进行第二次计算，如两次求得的β值的差值绝对值小于0.001时，计算就终止。

【例】

已知方形柱基础宽度$B=4$m，基础底面以下第一层土为平均厚度2 m的表土层，土层厚度的标准差为20cm，第二层为软土层，平均厚度为18m，第三层为密实砂层，软土层底面距基础底面之间距离的标准差为100cm。第一层土的压缩模量平均值$\bar{E}_{s_1}=7$MPa，标准差$\hat{\sigma}_{E_{s_1}}=1$MPa；第二层土的压缩模量平均值$\bar{E}_{s_2}=4$ MPa，标准差$\hat{\sigma}_{E_{s_2}}=0.5$MPa。绝对沉降的容许值为$\overline{\Delta}=12$cm，标准差$\hat{\sigma}_{\Delta}=1$cm。若基底压力和经验修正系数都作为确定性变量，$p_0=100$kPa，$\psi_s=1.0$，假定随机变量都符合正态分布，试用迭代法计算可靠性指标和失效概率。已查得平均附加压力系数$C_1=0.900$，$C_2=0.206$。

【解】

1.假定验算点座标P^*

$\Delta^* = \overline{\Delta}=12$cm

$E_{s_1}^* = \bar{E}_{s_1}=7$MPa

$E_{s_2}^* = \bar{E}_{s_2}=4$MPa

$Z_1^* = \bar{Z}_1=200$cm

$Z_2^* = \bar{Z}_2=2000$cm

2.计算以验算点赋值的沉降S^*

$$S^* = S_1^* + S_2^* = \frac{100}{7\times10^3}(200\times0.900) + \frac{100}{4\times10^3}$$

$(2000\times0.206-200\times0.900)=2.57+5.80=8.37\text{cm}$

3.计算方向余弦

$$M=\left\{1^2+\left(\frac{2.57\times1}{7}\right)^2+\left(\frac{5.8\times0.5}{4}\right)^2+\left(\frac{2.57\times20\times0.9}{200\times0.9}\right)^2+\left(\frac{5.8\times0.206\times100}{2000\times0.206-200\times0.900}\right)^2+\left(\frac{5.8\times0.9\times20}{2000\times0.206-200\times0.900}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$=(1+0.134+0.526+0.066+0.265+0.203)^{\frac{1}{2}}=1.48$$

$$\cos\theta_{\Delta}=\frac{-1}{1.48}=-0.676$$

$$\cos\theta_{E_{x_1}}=\frac{-2.57\times\frac{1}{7}}{1.48}=-0.248$$

$$\cos\theta_{E_{x_2}}=\frac{-5.8\times\frac{0.5}{4}}{1.48}=-0.490$$

$$\cos\theta_{z_i}=\frac{0.257}{1.48}=0.174\quad i=1$$

$$\cos\theta_{z_i}=\frac{0.515}{1.48}=0.348\quad i=2$$

$$\cos\theta_{z_{i-1}}=\frac{0.45}{1.48}=-0.304\quad i=2$$

4.计算验算点座标

$\Delta^*=12-0.676\beta$

$E^*_{x_1}=7000-248\beta$

$E^*_{x_2}=4000-245\beta$

$z^*_1=200+3.48\beta\quad i=1$

$z^*_2=2000+34.8\beta\quad i=2$

$z^*_1=200-6.08\beta\quad i=2$

5.代入极限状态方程

$$12-0.676\beta-\left\{\frac{100}{7000-248\beta}-[0.9\times(200+3.48\beta)]\right.$$

$$+\frac{100}{4000-245\beta}[(0.206(2000+34.8\beta)-0.900(200$$

$$-6.08\beta)]\Big\}=0$$

用试算法求得$\beta=2.26$

6.代入验算点座标公式得

$\Delta^*=10.47\text{cm}$

$E^*_{s_1}=6439.52\text{kPa}$

$E^*_{s_2}=3446.3\text{kPa}$

$z^*_1=207.86\text{cm}$

$z^*_2=2078.65\text{cm}\quad i=2$

$z^*_1=186.26\text{cm}\quad i=2$

7.将求得的验算点座标值重复第2步到第6步。

$$S^*=S^*_1+S^*_2=2.90+7.56=10.46\text{cm}$$

$$M=1.77$$

$$\cos\theta_\Delta=-0.565$$

$$\cos\theta_{E_{s_1}}=-0.254$$

$$\cos\theta_{E_{s_2}}=-0.626$$

$$\cos\theta_{z_i}=0.158\quad i=1$$

$$\cos\theta_{z_i}=0.337\quad i=2$$

$$\cos\theta_{z_{i-1}}=-0.295\quad i=2$$

将方向余弦代入验算点座标，然后代入极限状态方程，用试算法求得$\beta=2.23$，得验算点座标值为：

$$\Delta^*=10.74\text{cm}$$

$$E^*_{s_1}=6433.5\text{kPa}$$

$$E^*_{s_2}=3302\text{kPa}$$

$$z^*_1=207.5\text{cm}\quad i=1$$

$$z^*_2=2075.15\text{cm}\quad i=2$$

$$z^*_1=186.84\text{cm}\quad i=2$$

$$S^*=S^*_1+S^*_2=2.90+7.85=10.75\text{cm}$$

$$M = 1.84$$

求得方向余弦后代入极限状态方程，用试算法求得可靠性指标$\beta = 2.20$，再重复计算验算点座标值后按第 2 步到第 6 步，求出$\beta = 2.20$，两次求得的β相等，故计算终止。最终求得的验算点座标为

$$\Delta^* = 10.8\text{cm}$$

$$E_{s_1}^* = 6467.6\text{kPa}$$

$$E_{s_2}^* = 3285\text{kPa}$$

$$z_1^* = 206.6\text{cm} \quad i = 1$$

$$z_2^* = 2074.8\text{cm} \quad i = 2$$

$$z_1^* = 186.9\text{cm} \quad i = 2$$

失效概率 $$P_f = \frac{1}{2} - \psi(2.20) = \frac{1}{2} - 0.486 = 1.4\%$$

第三节 考虑前期固结压力对沉降的影响

一般的分层总和法所用的变形指标是压缩模量或压缩系数，只适用于正常固结的土层，在计算模型中没有反映应力历史的影响。如果土层是超压密的，计算结果就会偏大；反之，对欠压密的土层将会得到偏小的结果。在沉降计算中考虑前期固结压力p^c的影响，会使计算结果更加符合实际情况。这时，计算指标用压缩指数C_c和再压缩指数C_r，并区别不同情况采用不同的计算公式。

对于超压密状态的土层，沉降由两部分组成。第一部分是由于从现有的自重压力p'增加到前期固结压力p_c的应力变化所引起的再压缩

$$S_1 = \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} C_r \log \frac{p_c}{p'} \qquad (8\text{-}10)$$

第二部分是由于从前期固结压力增加到土体承受荷载后的应力状态的应力增量所引起的压缩

$$S_2 \simeq \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} C_c \log \frac{p' + \Delta p}{p_c} \qquad (8\text{-}11)$$

$$S_1 + S_2 = \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} \left[C_r \log \frac{p_c}{p'} + C_c \log \frac{p' + \Delta p}{p_c} \right] \qquad (8\text{-}12)$$

对于正常压密土层 $p_c = p'$，沉降只有公式（8-12）中的第2项，即

$$S = \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} C_c \log \frac{p' + \Delta p}{p'} \qquad (8\text{-}13)$$

对于欠压密土层，$p_c < p'$，在计算沉降时应当考虑从前期固结压力起算的应力变化所引起的全部压缩

$$S = \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} C_c \log \frac{p_c + \Delta p}{p_c} \qquad (8\text{-}14)$$

对于承受荷载后的总应力状态没有超过前期固结压力的情况，所发生的变形是非常之小的，其计算公式为

$$S = \Sigma \frac{\Delta z}{1+e} C_r \log \frac{p' + \Delta p}{p'} \qquad (8\text{-}15)$$

在公式（8-10）到（8-15）中，压缩指数C_c，再压缩指数C_r，孔隙比e，自重压力p'，前期固结压力p_c和土层厚度Δz实际上都是随机变量。当然，在变异性不太大的时候，可以把其中几个作为确定性变量来处理。

这些随机变量之间可能存在着相关性，在概率分析时应当考虑这些相关性。同时亦应注意土的指标与深度之间的相关关系。

下面讨论各个随机变量的方差。

土层厚度Δz_i的方差

$$\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$$

式中 z_i——第i层土层底面的埋藏深度；

z_{i-1}——第$i-1$层土层底面的埋藏深度；

$$V(\Delta z_i) = V(z_i) + V(z_{i-1}) - 2COV(z_i, z_{i-1}) = V(z_i) + V(z_{i-1}) - \rho(z_i, z_{i-1}) \sqrt{V(z_i) V(z_{i-1})} \qquad (8\text{-}16)$$

式中 $\rho(z_i, z_{i-1})$为z_i与z_{i-1}的相关系数。

土层压缩指标的方差

土的压缩指标（C_c或C_r）沿土体中不同深度的试验值可看作是随机变量的一个子样，它的平均值也是一组随机变量。计算沉降时所用的方差应该用在所研究的土层厚度Δz范围内压缩指标平均值的方差。在计算平均值方差时，样本容量并不用所研究厚度范围内全部测定值的个数，而用在所研究的厚度Δz内不相关的试样个数n_e。

$$n_e = \frac{\Delta z}{du} \tag{8-17}$$

式中du称为相关距离，它的物理概念是当两点的间距大于du时，试验指标就互不相关，根据自相关系数的衰减规律来求得。

自相关系数表示距离为j倍ΔX时两点测定值的相关程度。当ΔX的倍数越少时，即两点距离越近，测定值之间的相关程度越高，随着倍数增大，相关系数逐渐减小，其衰减规律可取指数形式

$$\rho(\Delta X) = \exp\left(-\left|\frac{\Delta X}{du}\right|\right) \tag{8-18}$$

取$\rho(\Delta X) = e^{-1} = 0.368$时的$\Delta X$值，即为所求的相关距离$du$。

压缩指数的空间平均值方差由下式求得

$$V(\bar{C}_c) = \frac{V(C_c)}{n_e} \tag{8-19}$$

前期固结压力的方差计算方法与压缩性指标相同。

在统计指标时也可以分别取压缩比

$$R_c = \frac{C_c}{1+e}$$

再压缩比

$$R_r = \frac{C_r}{1+e}$$

来分析。

在分别求得了沉降计算公式中各随机变量的统计参数之后，就可以用公式（8-12）到（8-15）来计算，用验算点法来估计可靠性指标和失效概率P_f。

【例】

若已知图8-1所示的土层剖面，计算由正常压密粘土层引起A点的沉降超过6.35cm的失效概率。

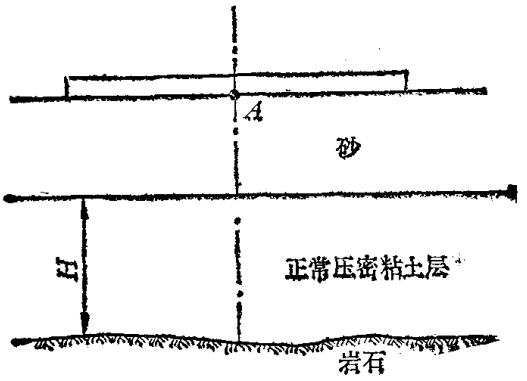


图 8-1　土层剖面

各随机变量的统计参数见表8-1

随机变量的统计参数　　表 8-1

随机变量	平均值	标准差	随机变量	平均值	标准差
ψ	1.0	0.1	H	4.27(m)	0.21(m)
C_c	0.396	0.099	p'	185(kPa)	8.9(kPa)
e	1.19	0.179	Δp	25(kPa)	4.8(kPa)

对于一层正常固结土层，根据公式（8-13）得计算公式

$$S=\psi\frac{C_c}{1+e}H\log\frac{p'+\Delta p}{p'}$$

沉降极限状态方程为

$$6.35-\psi\frac{C_c}{1+e}H\log\frac{p'+\Delta p}{p'}=0$$

为计算方便引入各随机变量的标准化变量

$$u_i=\frac{X_i-\overline{X}_i}{\hat{\sigma}_i}$$

则

$$\frac{\partial g}{\partial u_i}=\frac{\partial g}{\partial X_i}\frac{\partial X_i}{\partial u_i}=\frac{\partial g}{\partial X_i}\hat{\sigma}_i \qquad (8\text{-}20)$$

因此，用验算点座标赋值的偏导数由下列公式求得

$$\left.\begin{aligned}
\left.\frac{\partial g}{\partial u_\psi}\right|_{P^*} &= -\frac{c_c^*}{1+e^*}H^*\ \log\frac{p'^*+\Delta p^*}{p'^*}\hat{\sigma}_\psi\\
\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma_0}}\right|_{P^*} &= -\frac{\psi^*}{1+e^*}H^*\ \log\frac{p'^*+\Delta p^*}{p'^*}\hat{\sigma}_{\sigma_0}\\
\left.\frac{\partial g}{\partial u_e}\right|_{P^*} &= \psi^*\ \frac{C_c^*}{(1+e^*)^2}H^*\ \log\frac{p'^*+\Delta p^*}{p'^*}\hat{\sigma}_e\\
\left.\frac{\partial g}{\partial u_H}\right|_{P^*} &= -\psi^*\ \frac{C_c^*}{1+e^*}\log\frac{p'^*+\Delta p^*}{p'^*}\hat{\sigma}_H\\
\left.\frac{\partial g}{\partial p'}\right|_{P^*} &= \psi^*\frac{C_c^*}{1+e^*}H^*\ \frac{1}{\ln 10}\frac{\Delta p^*}{(p'^*+\Delta p^*)p'^*}\hat{\sigma}_{p'}\\
\left.\frac{\partial g}{\partial \Delta p}\right|_{P^*} &= -\psi^*\ \frac{C_c^*}{1+e^*}H^*\ \frac{1}{\ln 10}\frac{1}{p^*+\Delta p^*}\hat{\sigma}_{\Delta p}
\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}21)$$

在上面这些公式基础上，就可以用迭代法计算可靠性指 标β

第一次迭代时假定验算点座标值为相应的平均值

$$\psi^*=\overline{\psi}=1.0$$
$$C_*^c=\overline{C_c}=0.396$$
$$e^*=\overline{e}=1.19$$
$$H^*=\overline{H}=427\ (\text{cm})$$
$$p'^*=\overline{p'}=185\ (\text{kPa})$$
$$\Delta p^*=\overline{\Delta p}=25\ (\text{kPa})$$

偏导数在验算点的赋值由公式（8-21）求得

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_\psi}\right|_{P^*}=-0.421$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma_0}}\right|_{P^*}=-1.057$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_e}\right|_{P^*}=0.345$$
$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_H}\right|_{P^*}=-0.21$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{p'}}\right|_{,*} = 0.198$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\Delta p}}\right|_{,*} = -0.795$$

相应的方向余弦为

$$\cos\theta_{\psi} = 0.290$$

$$\cos\theta_{C_c} = 0.724$$

$$\cos\theta_{e} = -0.236$$

$$\cos\theta_{H} = 0.145$$

$$\cos\theta_{p'} = -0.136$$

$$\cos\theta_{\Delta p} = 0.544$$

验算点座标为

$$\psi^* = 1.00 + 0.029\beta$$

$$C_c^* = 0.396 + 0.0717\beta$$

$$e^* = 1.19 - 0.042\beta$$

$$H^* = 427 + 3.045\beta$$

$$p'^* = 185 - 1.21\beta$$

$$\Delta p^* = 25 + 2.61\beta$$

代入极限状态方程

$$6.35 - (1 + 0.029\beta)\frac{0.396 + 0.0717\beta}{1 + (1.19 - 0.042\beta)}(427 + 3.045\beta)$$

$$\log\left[\frac{185 - 1.21\beta) + (25 + 2.61\beta)}{185 - 1.21\beta}\right] = 0$$

用试算法求得$\beta = 1.27$

得验算点座标

$$\psi^* = 1.037$$

$$C_c^* = 0.487$$

$$e^* = 1.137$$

$$H^* = 430.87$$

$$p'^* = 183.79$$

$$\Delta p^* = 28.31$$

用新得到的验算点座标值进行第二次迭代，先代入公式（8-21）计算偏导数在新座标处的赋值

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\psi}}\right|_{P^*} = -0.612$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\sigma_c}}\right|_{P^*} = -1.290$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{e}}\right|_{P^*} = 0.531$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{H}}\right|_{P^*} = -0.320$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u'_{p}}\right|_{P^*} = 0.297$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{\Delta p}}\right|_{P^*} = -1.039$$

相应的方向余弦为

$$\cos\theta_{\psi} = 0.323$$

$$\cos\theta_{\sigma_c} = 0.681$$

$$\cos\theta_{e} = -0.280$$

$$\cos\theta_{H} = 0.166$$

$$\cos\theta'_{p} = -0.157$$

$$\cos\theta_{\Delta p} = 0.548$$

验算点的座标为

$$\psi^* = 1.00 + 0.0323\beta$$

$$C_c^* = 0.396 + 0.0674\beta$$

$$e^* = 1.19 - 0.05\beta$$

$$H^* = 427 + 3.486\beta$$

$$p^* = 185 - 1.397\beta$$

$$\Delta p^* = 25 + 2.63\beta$$

代入极限状态方程

$$6.35 - (1 + 0.0323\beta)\frac{0.396 + 0.0674\beta}{1 + (119 - 0.05\beta)}(427 + 3.486\beta)$$

$$\log\left[\frac{(185-1.397\beta)+(25+2.63\beta)}{185-1.397\beta}\right]=0$$

用试算法得$\beta=1.27$

验算点座标为

$$\psi^*=1.041$$

$$C_v^*=0.482$$

$$e^*=1.127$$

$$H^*=430.87$$

$$p'^*=183.22$$

$$\Delta p^*=28.34$$

迭代计算结束

沉降超过容许沉降的失效概率

$$P_f=\frac{1}{2}-\psi(1.27)=10.2\%$$

第四节　海洋平台的水平位移

在暴风雨期间，重复作用的波浪荷载使海洋平台产生一个水平的往复旋转位移、用有限元方法可以计算在最大的波浪力作用在重力式平台上所产生的最大往复位移。由于土的刚度随着应力水平的增大而减小，在较高荷载作用下位移亦增加得更快。这种关系可以用二次方程来近似地描述

$$D=AF+BF^2+\varepsilon \qquad (8\text{-}22)$$

式中　D——最大水平位移；

F——最大波浪力；

A、B——系数；

ε——二次方程的误差。

公式中的A、B两个系数取决于土的性质，可作为随机变量处理。

四个随机变量的统计参数见表8-2，位移D用（cm）表示。

随机变量的统计参数　　表 8-2

随机变量	平均值	标准差	分布
F	25	5.75	对数正态
A	0.0113	3.39×10^{-3}	正态
B	0.0006	1.8×10^{-4}	正态
e	0	0.10	正态

假定容许的位移为1cm，则极限状态方程为

$$1-AF-BF^2-e=0 \qquad (8\text{-}23)$$

将对数正态变量变换为当量正态分布，根据公式（5-53）和（5-54），当量正态的统计参数为

$$\hat{\sigma}'_x=y^*\hat{\sigma}_y$$

$$\bar{x}'=y^*(1+\bar{x}-\ln y^*)$$

根据公式（5-45），$\hat{\sigma}_y$和$\bar{x}$分别由下式求得

$$\hat{\sigma}_x^2=\ln(1+V_x^2)\approx V_x^2$$

$$\hat{\sigma}_y\approx 0.23$$

$$\bar{x}=\ln\bar{y}+\frac{1}{2}\hat{\sigma}_x^2=\ln 25-\frac{1}{2}(0.23)^2$$

$$=3.192$$

代入上式得

$$\hat{\sigma}'_y=F^*\times 0.23$$

$$\overline{F}'=F^*(1+3.192-\ln F^*)$$

以验算点座标赋值的各偏导数为

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_F}\right|_{P^*}=(-A^*-2B^*F^*)\,\hat{\sigma}_F$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_A}\right|_{P^*}=-F^*\,\hat{\sigma}_A$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_B}\right|_{P^*}=-(F^*)^2\hat{\sigma}_B$$

$$\left.\frac{\partial g}{\partial u_\varepsilon}\right|_{P^*} = -\hat{\sigma}_\varepsilon$$

第一次迭代时，验算点座标以平均值代入

$$F^* = \overline{F} = 25$$

$$A^* = \overline{A} = 0.113$$

$$B^* = \overline{B} = 0.0006$$

$$\varepsilon^* = \overline{\varepsilon} = 0.0$$

迭代计算过程见表8-3。最终的验算点座标为

$$F^* = 30.06$$

$$A^* = 0.01217$$

$$B^* = 0.000674$$

$$\varepsilon^* = 0.0253$$

迭代法计算结果　　表 8-3

迭代次数 β	X_i	x_i^*	$\hat{\sigma}_{x_i}$	$\overline{x_i}$	$\left.\frac{\partial g}{\partial u_{x_i}}\right\|_P$	$\cos\theta_i$	新验算点 x_i^*
1	F	25.0	5.75	24.33	−0.237	−0.808	$24.33+4.646\beta$
	A	0.0113	0.00339	0.0113	−0.0848	−0.289	$0.0113+0.000979\beta$
$\beta=1.134$	B	0.0006	0.00018	0.0006	−0.113	−0.384	$0.0006+0.000691\beta$
	ε	0.0	0.1	0.0	−0.1	−0.341	0.0341β
2	F	29.598	6.807	23.81	−0.357	−0.86	$23.81+5.854\beta$
	A	0.0124	0.00339	0.0113	−0.100	−0.241	$0.0113+0.000817\beta$
$\beta=1.07$	B	0.000678	0.00018	0.0006	−0.158	−0.379	$0.0006+0.0000682\beta$
	ε	0.0387	0.1	0.0	−0.1	−0.241	0.0241β
3	F	30.07	6.916	23.71	−0.364	−0.859	$23.71+5.94\beta$
	A	0.01217	0.00339	0.0113	−0.102	−0.241	$0.0113+0.000817\beta$
$\beta=1.07$	B	0.000673	0.00018	0.0006	−0.163	−0.384	$0.006+0.0000691\beta$
	ε	0.0258	0.1	0.0	−0.1	−0.236	0.0236β

超过容许位移的概率为

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi(1.07) = 14\%$$

第五节　沉降置信区间的估计

用概率方法预报沉降实质上是对沉降的置信区间作业估计。由于计算沉降的公式中包含了许多变异因素，沉降计算是在不确定性条件下进行，计算的结果并不是一个确定性的数值，而是一个置信区间。实际发生的沉降将以一个大的概率落在估计的区间内，落在这个区间以外的风险将被限制在一个很小的概率。

沉降的置信区间上、下限由下式求得

$$S_{\substack{\max\\ \min}} = \bar{S}(1 \pm t_{\alpha/2} V_s) \qquad (8\text{-}24)$$

式中　V_s——沉降的变异系数

$$V_s = \frac{\sqrt{V[S]}}{\bar{S}} \qquad (8\text{-}25)$$

$\bar{S}$——估计沉降的数学期望$E(S)$

$V[S]$——估计沉降的方差；

$t_{\alpha/2}$——风险率为α时的学生氏函数分位值。

沉降的数学期望和方差由不同的沉降计算模式给出不同的表达式。

一、施默特曼（J.H.Schmertmann）方法[25]

砂土地基可用施默特曼方法来计算沉降的数学期望和方差

$$\bar{S} = C_1 C_2 \Delta p \sum_{i=1}^{n} I_{z_i} \left(\frac{1}{\bar{E}_i}\right) \Delta z_i \qquad (8\text{-}26)$$

式中　n——$2B$范围内划分的计算土层数；

Δp——均布荷载的基底净压力；

$\bar{E}_i$——第i层弹性模量平均值；

I_{z_i}——第i层垂直应变影响因素；

Δz_i——第i层土的厚度；

C_1——考虑埋深的修正系数

$$C_1 = 1 - 0.5\left(\frac{p'_0}{\Delta p}\right) \qquad (8\text{-}27)$$

p_0'为基底处的有效自重压力

C_2——考虑时间因素

$$C_2 = 1 - 0.2\log\left(\frac{t}{0.1}\right) \qquad (8\text{-}28)$$

t以年计

$$V[S] = \sum_{i=1}^{n} (V_{E_i}^2 + V_{\Delta p}^2)\bar{S}_i^2 \qquad (8\text{-}29)$$

式中 V_{E_i}——第 i 层土模量的变异系数；

$V_{\Delta p}$——Δp的变异系数；

$\bar{S}_i$——第i层沉降的均值。

沉降的变异系数

$$V_s = \frac{1}{\bar{S}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(V_{E_i}^2 + V_{\Delta p}^2)\bar{S}^2}$$

【例】

有一基础，宽度$B = 6\text{m}$，埋深$D = 1\text{m}$。基底净压力$\Delta p = 180\text{kPa}$。地基为中细砂，厚10m，可划分为三个亚层，模量及变异系数见表8-4。砂层以下为基岩。地下水位在基础底面以下0.5m处。设Δp为确定性量，试求20年后地基的沉降置信区间。

沉降计算资料　　表 8-4

编　号	Δz_i(m)	z_{c_i} (m)	E_i(MPa)	V_{E_i}	I_{z_i}
1	2.0	1.0	5.05	0.131	0.20
2	1.0	2.5	7.52	0.079	0.50
3	3.0	4.5	7.52	0.079	0.50
4	4.0	8.0	11.0	0.210	0.27

$p_0' = 18\text{kPa}$

代入（8-27）式

$$C_1 = 1 - 0.5\left(\frac{18}{180}\right) = 0.95$$

用$t = 20$年代入（8-28）式

$$C_2 = 1 + 0.2\log\left(\frac{20}{0.1}\right) = 1.46$$

将表8-3数据及C_1和C_2代入公式（8-26）

$\bar{S} = 0.95 \times 1.46 \times 180 \times 4.434 \times 10^{-4} = 0.111\text{m} = 11.1\text{cm}$

变异系数

$$V_s = 0.064$$

对于风险率$\alpha = 10\%$，$t_{\alpha/2} = 1.645$，

置信上限

$$\bar{S}(1 + 1.645 \times 0.064) = 12.3\text{cm}$$

置信下限

$$\bar{S}(1 - 1.645 \times 0.064) = 9.9\text{cm}$$

亦即我们可以预报地基的实际沉降值有90%的可能位于9.9cm和12.3cm之间。

二、应力面积法用于估计路堤沉降

应力面积法是一种简化的分层总和法，它将每一个土层都作为统计上的均匀土层，用压缩模量的数学期望和方差来代表，而不必再划分为几个薄层来加和。这种方法比较适宜于采用概率方法分析。

高等级公路的路堤通常是比较高的，软土地基上的高路堤会产生很大的沉降，由于沿线地质条件的变化和路堤高度的变化，用典型断面计算的结果很难控制全线沉降的情况。如考虑各种变异因素，将一条路段作为估计沉降的总体，钻孔试验的结果看成是从这个总体中抽取的子样，就可以估计全线沉降的数学期望和方差，用公式（8-24）可以求得全线沉降将以多大的概率位于一个什么样的范围之内。

估计沉降的数学期望由下式求得

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{\gamma}\bar{H}}{\bar{E}_i}(\bar{z}_i C_i - \bar{z}_{i-1} C_{i-1}) \qquad (8\text{-}30)$$

式中 n——土层的层数；

$\bar{E}_i$——第i层土的压缩模量的数学期望；

$\bar{\gamma}$——路堤土的容重的数学期望；

$\bar{H}$——路堤高度的数学期望；

$\bar{z}_i$——第i层土底面到路堤底面的距离的数学期望；

$\bar{z}_{i-1}$——第i层土顶面到路堤底面的距离的数学期望；

C_i——按第i层底面查得的应力面积系数；

C_{i-1}——按第i层顶面查得的应力面积系数。

假定这些变量都是独立的。估计沉降的方差由下式求得

$$V[S]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i}{\bar{E}_i}\right)^2 V[\bar{E}_i]+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i C_i}{z_i C_i-z_{i-1}C_{i-1}}\right)^2 \times V[\bar{z}_i]+\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i C_{i-1}}{z_i C_i-z_i+C_{i-1}}\right)^2 V[\bar{z}_{i-1}]+\frac{\bar{S}^2}{H^2}V[H]+\frac{\bar{S}^2}{\gamma^2}V[\gamma] \qquad (8\text{-}31)$$

式中 $\bar{S}_i$——第i层沉降的数学期望；

$V[\bar{E}_i]$——第i层压缩模量平均值的方差；

$V[\bar{z}_i]$——第i层底面到路堤底面距离平均值的方差；

$V[\bar{z}_{i-1}]$——第i层顶面到路堤顶面距离平均值的方差；

$V[H]$——路堤高度的方差；

$V[\gamma]$——路堤土的容重的方差。

【例】

某公路路堤高度为4 m，按工程地质条件分为三个路段A、B和C，地基土由五个土层组成，土的压缩模量E和土层埋深z的统计参数见表8-5。按应力面积法计算全线沉降置信区间，风险率各取5%和10%。

计算结果见表8-6。用公式（8-31）计算沉降的方差时，注意压缩模量和土层埋深的方差是相应变量平均值的方差而不是子样的方差。

三、e-log$p$方法

利用e-log$p$曲线求得的参数来计算沉降，能更好地反映土的应力历史对变形的影响，但对试验的要求比较高，需要测定土的前期固结压力和压缩指数C_c。分层计算的原则与应力面积法相

沉降计算资料　　表 8-5

路段	土层	压缩模量 (MPa)			土层埋深 (m)		
		$\overline{E}$	$\hat{\sigma}$	V(%)	$\overline{z}$	$\hat{\sigma}$	V(%)
	1	4.90	1.72	35.0	1.75	0.69	39.0
	2	2.87	1.81	63.0	3.35	0.67	20.0
A	3	1.60	0.42	26.0	11.40	3.79	33.3
	4	1.93	0.53	27.6	21.20	3.58	17.0
	5	2.65	0.62	23.3	29.00	0.96	3.0
	1	5.06	1.51	29.9	2.17	0.58	26.8
	2	3.86	1.01	26.2	3.69	0.85	23.0
B	3	3.43	1.41	41.0	10.90	0.70	6.5
	4	2.59	0.49	19.0	19.40	0.97	5.0
	5	4.49	1.08	24.0	24.40	0.45	1.9
	1	4.06	1.16	28.7	2.12	0.44	21.0
	2	2.71	0.92	35.0	5.50	1.90	34.4
C	3	10.61	3.66	34.5	10.40	1.22	11.7
	4	2.37	0.76	31.9	14.80	2.29	15.5
	5	3.05	0.94	30.8	23.60	0.77	3.3

沉降概率估计结果　　表 8-6

路　段	H (m)	α	沉降的置信区间	$\overline{S}$(cm)
A	4	0.05	81.1～122.1(cm)	101.6
		0.10	88.6～114.6(cm)	
B	4	0.05	50.0～57.0(cm)	53.8
		0.10	51.6～55.8(cm)	
C	4	0.05	40.8～55.8(cm)	48.3
		0.10	43.4～53.2(cm)	

同，此法也适宜于用概率方法来分析。

估计沉降的数学期望由下式求得

$$\overline{S}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\overline{\Delta z_i}}{1+\hat{e}_i}\overline{C}_{c_i}\ \log\frac{\overline{p}_{2i}}{\overline{p}_{c_i}} \qquad (8\text{-}32)$$

式中 n——土层的层数；

$\bar{C}_{c_i}$——第i层土的天然孔隙比的数学期望；

$\bar{e}_i$——第 i 层土的天然孔隙比的数学期望；

$\overline{\Delta z_i}$——第i层土厚度的数学期望；

$\overline{p_{c_i}}$——第i层土的前期固结压力的数学期望；

$\overline{p_{z_i}} = \overline{p_{c_i}} + \alpha\bar{\gamma}\bar{H}$

α——应力扩散系数；

$\bar{\gamma}$——路堤土容重的数学期望；

$\bar{H}$——路堤高度的数学期望。

估计沉降的方差由下式求得

$$V[S] = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i}{1+\bar{e}_i}\right)^2 V[\bar{e}_i] + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i}{\bar{C}_{c_i}}\right)^2 V[\bar{C}_{c_i}]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{0.4343\bar{p}_{c_i}}{\bar{p}_{z_i}}\log\frac{\bar{p}_{c_i}}{\bar{p}_{z_i}}\bar{S}_i\right)^2 V\left[\frac{p_{z_i}}{p_{c_i}}\right]$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\bar{S}_i}{\overline{\Delta z_i}}\right)^2 V[\overline{\Delta z_i}] \qquad (8\text{-}33)$$

式中

$$V\left[\frac{p_{z_i}}{p_c}\right] = \left(1 + \frac{\alpha\bar{\gamma}\bar{H}}{\bar{p}^2_{c_i}}\right)^2 V[p_{c_i}]$$

$$+\left(1+\frac{\alpha\bar{p}}{\bar{P}_{c_i}}\right)^2 V[H]$$

$$+\left(1+\frac{\alpha\bar{H}}{\bar{P}_{c_i}}\right)^2 V[\gamma]$$

$V[\bar{e}_i]$——第i层土的天然孔隙比平均值的方差；

$V[\bar{C}_{c_i}]$——第i层土的压缩指数平均值的方差；

$V[p_{c_i}]$——第i层土的前期固结压力的方差；

$V[\overline{\Delta z_i}]$——第i层土的厚度平均值的方差；

$V[H]$——路堤高度的方差；

$V[\gamma]$——路堤土容重的方差。

第六节　固结问题的概率分析

在土力学中，固结问题是一个重要领域。由于土的固结系数的变异性，边界条件的不确定性以及计算模式的误差，固结计算的结果与实际固结过程之间往往有较大的差别。因此，固结计算也仅仅是一种估计，是对实际固结过程的一种概率估计[86][87]。用蒙特卡洛有限元或蒙特卡洛有限差分方法可以估计地基中任一点在任意时刻的沉降和孔隙水压力的置信区间。

这里，我们只讨论最简单的一维固结问题的概率数值解，固结微分方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (8\text{-}34)$$

式中　z——竖向座标；

u——超孔隙水压力；

t——时间；

C_v——固结系数。

对于双面排水的情况，起始条件和边界条件为

$$t = 0,\ u = u_0 \quad 对于 \quad 0 \leqslant z \leqslant 2H$$

对所有时刻 t，$z = 0$，$u = 0$

$$z = 2H$$

式中H为土层厚度的一半，u_0是起始孔隙水压力，假定u_0在不同深度都是常数。

微分方程的解

$$U = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-M^2 T} \qquad (8\text{-}35)$$

式中　U——固结度；

$$U = \frac{\int_0^{2H} u_0 dz - \int_0^{2H} u dz}{\int_0^{2H} u_0 dz}$$

$$M=\pi(2n+1)/2$$

$T=C_v t/H^2$称为时间因素。

固结系数c_v作为随机变量考虑，固结度作为固结系数的函数，也是一个随机变量。固结系数c_v是用试验测定的，可用矩法求得它的数学期望和方差。固结度U的数学期望和方差取决于固结系数的统计参数。

固结度U的数学期望

$$E(U)=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{M^2}E[e^{-M^2C_v t/H^2}] \qquad (8\text{-}36)$$

U的标准差

$$\hat{\sigma}_U=[E(U^2)-E^2(U)]^{\frac{1}{2}} \qquad (8\text{-}37)$$

式中

$$E(U^2)=E\left\{\left[1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{M^2}e^{-M^2C_v t/H^2}\right]^2\right\}$$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{M^2}E[e^{-M^2C_v t/H^2}]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{M_n^2M_m^2}E[e^{-C_v t(M_n^2+M_m^2)/H^2}] \qquad (8\text{-}38)$$

式中 $M_j=\pi(2j+1)/2$

根据对固结系数c_v的资料分析，其概率模型为对数正态分布或伽玛分布。这里，我们采用伽玛分布，其概率密度函数为

$$f_x(x)=\frac{\lambda^\eta}{(\eta-1)!}x^{\eta-1}e^{-\lambda x}\quad,\quad x\geqslant 0 \qquad (8\text{-}39)$$

式中，η和λ为伽玛分布的两个参数。

从伽玛分布的特征可知，固结系数c_v的数学期望和方差分别为

$$\left.\begin{aligned}\bar{c}_v&=\frac{\eta}{\lambda}\\ \hat{\sigma}^2_{c_v}&=\frac{\eta}{\lambda^2}\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}40)$$

求得以$\overline{C}_v$、$\hat{\sigma}^2_{c_v}$表达的η与λ值

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= \frac{\bar{c}_v}{\hat{\sigma}^2_{c_v}}\\ \eta &= \frac{\bar{c}_v^2}{\hat{\sigma}^2_{c_v}} = \left(\frac{1}{V_{c_v}}\right)^2\end{aligned}\right\} \qquad (8\text{-}41)$$

根据固结系数 c_v 服从伽玛分布的假设，可以很方便地求得固结度 U 的数学期望和方差。我们注意到公式（8-36）和（8-37）中都存在着求解 $E[e^{\alpha c_v}]$ 的问题，它恰好就是带有 α 的 C_v 的矩母函数

$$G_X(S) = E(e^{Sx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{Sx} f_x(x)dx$$

因此，

$$E[e^{\alpha c_v}] = [\lambda/(\lambda-\alpha)]^{\eta} \qquad (8\text{-}42)$$

将公式（8-42）代入公式（8-36）和（8-37）就能得到固结度 U 的数学期望和方差，并令

$$\overline{T} = \frac{\bar{c}_v t}{H^2}$$

$$V_{c_v} = \frac{\hat{\sigma}_{c_v}}{\bar{c}_v}$$

$$E(U) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{M^2}\left[\frac{1}{1+M^2\overline{T}V^2_{c_v}}\right]^{\frac{1}{V^2_{c_v}}} \qquad (8\text{-}43)$$

$$V(U) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{M_n^2 M_m^2}\left[\frac{1}{1+(M_n^2+M_m^2)\overline{T}V^2_{c_v}}\right]^{\frac{1}{V^2_{c_v}}} - \left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{M^2}\left[\frac{1}{1+M^2\overline{T}V^2_{c_v}}\right]^{\frac{1}{V^2_{c_v}}}\right\}^2 \qquad (8\text{-}44)$$

可以看出，固结度 U 的平均值和标准差都是时间和固结系数

的变异系数的两元函数，当V_{c_v}为不同数值时，$\overline{U}$和$\hat{\sigma}_v$随时间因素$\overline{T}$的变化曲线见图8-2。

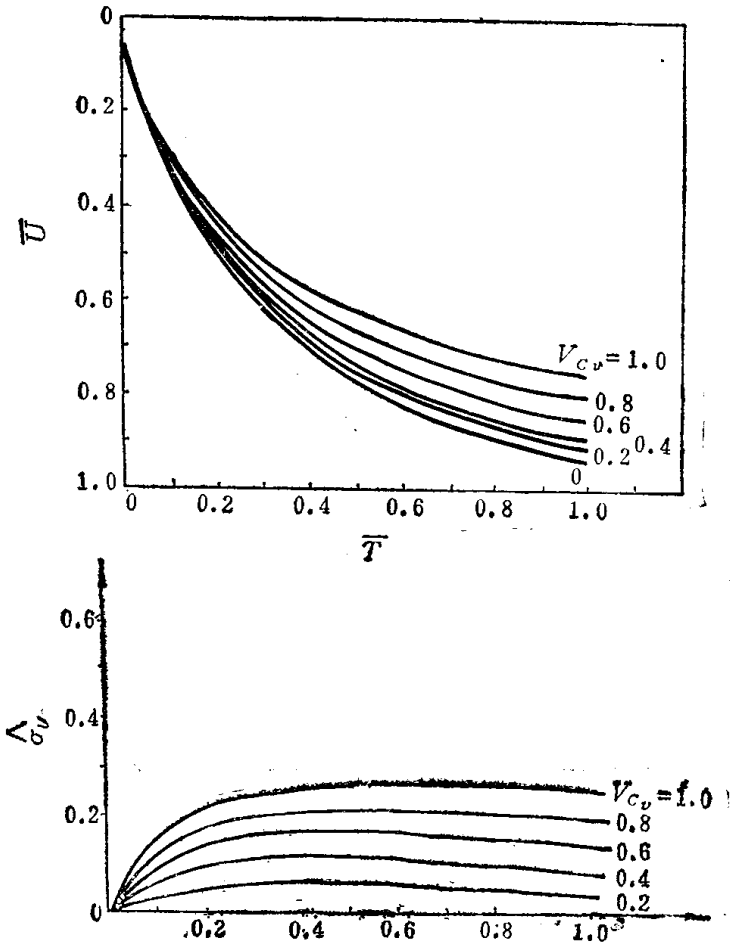


图 8-2　固结度统计量与时间因数的关系

第九章　系统可靠性分析与优化决策

在第五章里已经讨论过用一个极限状态方程定义的单一破坏模式，提出用验算点法估计可靠性指标和失效概率的方法。从第六章到第八章分别讨论了岩土工程中各种特定模式的极限状态方程以及求解的方法，所求得的可靠性指标和失效概率都只对应于某种单一的破坏模式。但是在实际工程中，建筑物的性状常常并不只取决于一种破坏模式，而是同时存在着几种潜在的破坏模式。例如，对于建筑物基础来说，失效的原因可能是承载力不足，也可能是过大的沉降；桩基础承载力的失效，可能是土对桩支承力的不足，也可能是桩身混凝土强度不足；一个挡土结构物的失效可能有三种模式，即倾覆、滑移和承载力不足。因此，在估计单个模式失效概率的基础上应当进行系统可靠性分析。如果将基础作为整个建筑物的一部分，就要涉及更大范围内的系统分析。

系统分析的目的是求得最经济合理的方案，这就要进行风险条件下的优化与决策。讨论优化与决策问题必然要涉及工程造价和费用，这就要研究技术和经济的关系，需要确定一系列的经济指标。研究经济问题比技术问题更为复杂，这不仅与社会经济体制有关，而且也与经济政策有关。获得经济指标比技术指标更为困难，这涉及到经济统计的完备程度与公开程度。但作为一个完整的可靠性设计就离不开研究经济问题。

在这一章里将讨论多重破坏模式的系统分析，优化的基本概念，风险决策的准则与方法。

第一节　多重破坏模式系统分析

一个系统的性状取决于几个破坏模式称为多重破坏模式系

统。

一个多重破坏模式的系统是由若干个分量或子系统组成的。有的系统是有冗余分量的，而有的系统为无冗余分量。对于无冗余分量的系统，一个分量的失效会引起整个系统的失效。有冗余分量的系统又可分为活动型和备用型两种。活动型系统中所有分量都参加工作，而在备用型系统中有一些分量是不活动的，只有当某些分量失效之后才参加工作。在分析系统可靠性时，这两种系统是有区别的。对于活动型系统，除非分量完全相关和具有相同的分布，分量的失效总是依次发生的。因此，除第一个发生失效的分量以外，依次发生的失效概率是条件概率。对于备用型系统，分量的失效概率事件可能是相互独立的。备用型系统能提高系统的可靠性，而活动型系统可能很少提高系统的可靠性。

我们可以用逻辑图来研究子系统或分量之间的关系及其对大系统的影响。第一步，确定该系统完成系统功能的方法；第二步，确定完成系统功能所必需的分量；第三步弄清每个分量的破坏模式及其对系统功能的影响。

图9-1是一个大系统模型的逻辑图，由七个分量组成，我们可以将这七个分量归并为三个子系统，由这三个子系统并联构成大系统。第一个子系统由两个分量串联而成，第三个子系统由E和F分量先并联再和D、G分量串联而成。

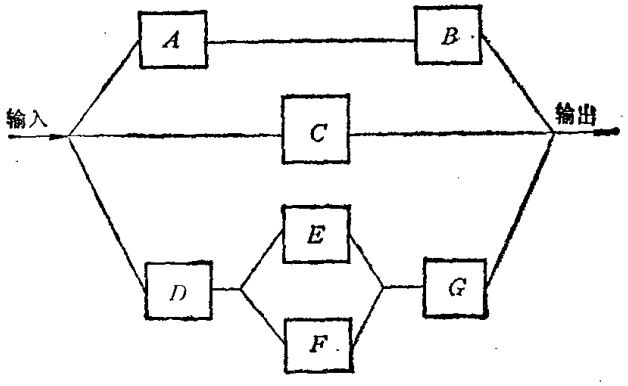


图 9-1　系统逻辑图

设一个系统由 k 个分量组成，第 i 个分量的失效概率为 P_{f_i}，可靠性即成功的概率

$$P_{s_i}=1-P_{f_i}$$

将一个系统分解为基本的组合元件——串联和并联两种。在串联系统中，任一分量的失效都会使整个系统失效；而并联系统则是由几个分量同时完成一个功能，只有每一个分量失效，才会使整个系统失效。应当注意的是，逻辑图中的串联或并联与实际系统的结构联结形式无关；有时在系统结构图中是并联的分量，按其失效模式在逻辑图中却是串联，相反的情况也是如此。例如采用灌浆防渗时，在系统结构图中灌浆孔之间的联结是并联的，但任一灌浆孔的失效都会引起整个防渗功能的失效，因此在逻辑图上应当用串联表示。

一、互相独立的多重破坏模式

设系统的 k 个分量是互相独立的，则系统的失效概率按不同的基本组合形式计算。

串联元件的逻辑图如图9-2所示，从输入到输出是单行路线，象一根链条一样，任一环节的破坏都会使整个系统遭到破坏，整个系统可靠工作的前提是每一分量都要可靠，因此整个系统的可靠性 R 是每一分量可靠性的乘积。对有 k 个分量的系统，R 和 P_f 可用下式表示：

$$R=\prod_{i=1}^{k}R_i \qquad (9\text{-}1)$$

$$P_f=1-R=1-\prod_{i=1}^{k}R_i=1-\prod_{i=1}^{k}(1-R_{f_i}) \qquad (9\text{-}2)$$

如果 k 个分量的失效概率 P_{f_i} 近似相等，且其均值等于 P，则

$$P_f=1-(1-P)^k \qquad (9\text{-}3)$$

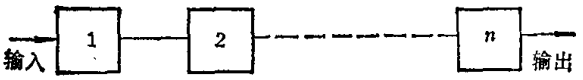


图 9-2 串联元件的逻辑图

并联元件的逻辑图如图9-3所示，从输入到输出之间有k条路径，只有在全部路径被堵塞时整个系统才破坏。因此整个系统的失效概率P_f是每个分量的失效概率P_{f_i}之积，即

$$P_f = \prod_{i=1}^{k} P_{f_i} \qquad (9\text{-}4)$$

如果k个分量的失效概率P_{f_i}近似相等，且其均值等于P则

$$P_f = P^k \qquad (9\text{-}5)$$

任何复杂的模型都可以分解为串联和并联两种最基本的元件组合，然后按公式（9-1）到(9-5)综合求出整个系统的失效概率。

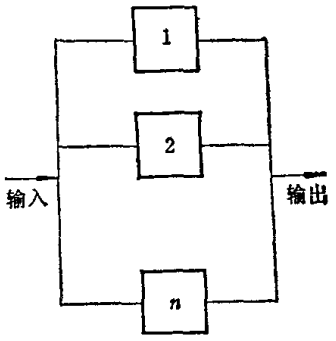


图 9-3 并联元件的逻辑图

实际工程中的系统都是由串联和并联元件组成的组合系统。对组合系统进行分析时，要先分析其基本组成是串联还是并联。如图9-1所示的系统，基本组成是并联，系统的失效概率按公式（9-4）是三个子系统失效概率的乘积；第一个子系统是串联系统，应按公式（9-2）计算；第三个子系统也是串联，但串联元件中有一个并联的元件。因此综合公式（9-2）和（9-4）来计算。综上所述，系统的失效概率为

$$P_f = [1-(1-P_A)(1-P_B)][P_C][1-(1-P_D)(1-P_E P_F)\times(1-P_G)]$$

再如图9-4所示的系统，基本组成是串联，其中有两个子系统是并联元件。因此，系统的失效概率为

$$P_f = 1-(1-P_1)(1-P_2)(1-P_3P_4P_5)(1-P_6)(1-P_7P_8)$$

如果由k个分量组成的系统中有冗余的分量，但要求至少有r个分量必须为整个系统的可靠工作起作用，亦即当$k-r$个分量失效时，系统仍能可靠地工作。这种模型称为k中之r模型。

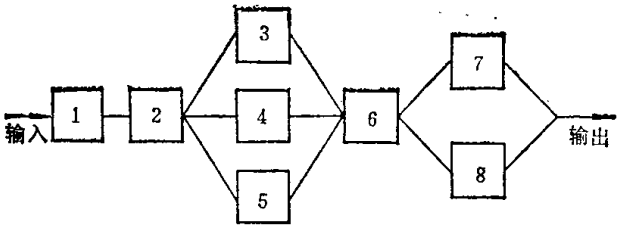


图 9-4 逻辑图

当一个事物只有两种可能的状态或结果时可以使用二项式。研究可靠性时，只有可靠与失效两种状态，且$R+P=1$，则$(R+P)^k=1$，展开后得：

$$p^k+kp^{k-1}R+\frac{k(k-1)p^{k-2}R^2}{2!}+\frac{k(k-1)(k-2)p^{k-3}R^3}{3!}+\cdots+R^k=1 \qquad (9\text{-}6)$$

在上式中，p^k项中R的幂次为零，故称为零项，则R的r次幂的项称为r项，可表达为

$$\frac{k!}{r!(k-r)!}p^{k-r}R^r \qquad (9\text{-}7)$$

式中 k为事件总数；r为成功的事件数。

我们分析展开式（9-6）中每一项的意义，k表示具有相同可靠性和相同失效概率的分量总数。零项表示所有分量都破坏的概率，相当于并联元件；最后一项表示所有分量都可靠的概率，相当于串联元件。中间任意项r项表示只有r个分量是可靠的概率，也就是k中之r模型所要讨论的问题。

公式（9-7）中的$\frac{k!}{r!(k-r)!}$称为二项系数，用$\binom{k}{r}$来表示，则公式（9-7）就是二项分布

$$b(r;\ k,\ P)=\binom{n}{r}(1-P)^rP^{k-r} \qquad (9\text{-}8)$$

$$r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots k$$

在k中之r的模型中，至少要有r个分量起作用，即意味着包括$r+1$，$r+2$，…直到k个分量全部起作用在内，因此整个系统

的可靠性用下式表示

$$R=\sum_{i=r}^{k}b(i;\ k,\ P)$$

整个系统的失效概率

$$P_f=1-\sum_{i=r}^{k}b(i;\ k,\ P)=1-\sum_{i=r}^{k}\binom{k}{i}(1-P)^r P^{k-r} \qquad (9\text{-}9)$$

k中之r模型从输入到输出之间有$\binom{k}{r}$条路径，每条路径包含有r个不同的单元，这是从k个分量中任意抽取的。

【例】

k中之r模型中每一分量的失效概率

$P=0.01$，$k=5$，$r=4$，试画出逻辑图并计算整个系统的失效概率。

【解】

$$\binom{k}{r}=\binom{5}{4}=\frac{5!}{4!}=5$$

如图9-5所示共有五个路径，每条路径都有4个分量。

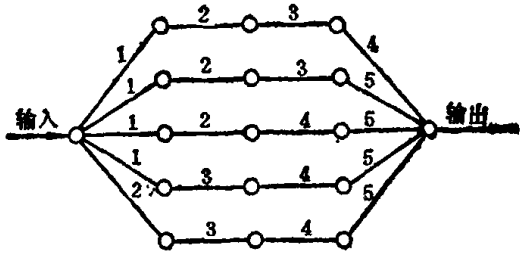


图 9-5　五中之四模型

用公式（9-9）计算整个系统的失效概率

$$P_f=1-\sum_{i=4}^{5}\binom{5}{i}(1-P)^i P^{5-i}=1-\binom{5}{4}(1-P)^4P$$

$$-\binom{5}{5}(1-P)^5P^0=0.001$$

【例】

假设最小柱荷载为500kN，最大的柱荷载为1000kN，平均

柱荷载为700kN。柱基础支承在桩基上，有三种桩的组合方案：一根容许承载力为1000kN的桩；二根500kN的桩；三根 350kN 的桩。分析每一种组合方案的可靠性。

运用上述方法画出每一种组合的逻辑图，如图9-6所示，每一种组合的失效概率计算公式也在图中标出。

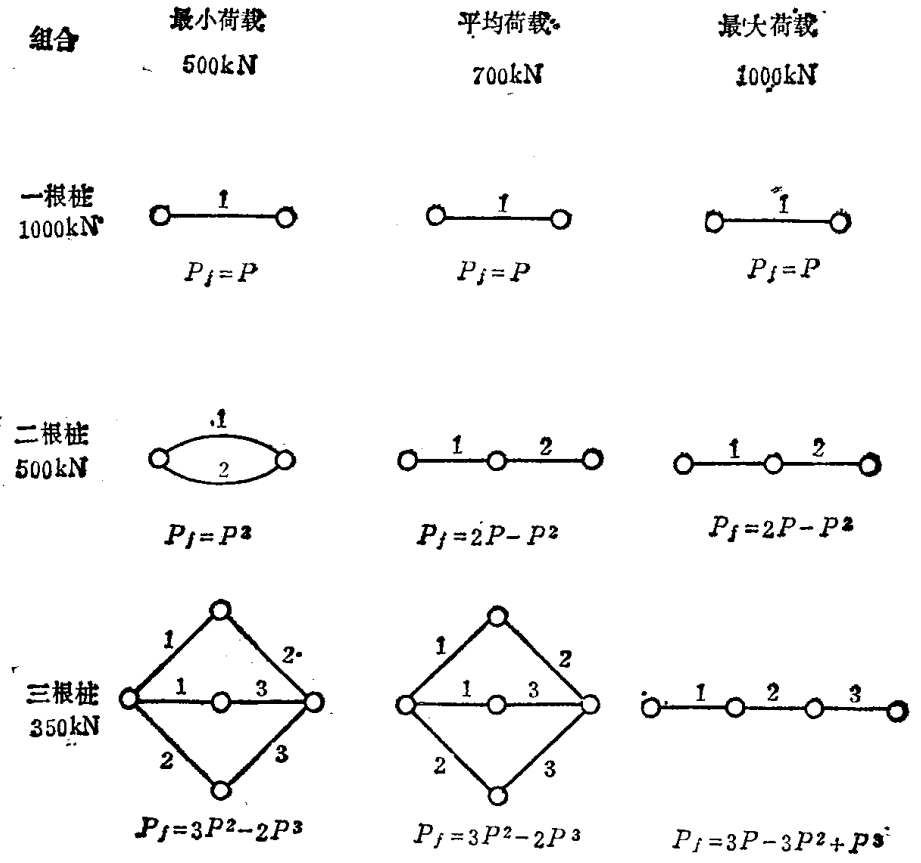


图 9-6　桩基组合逻辑图

在图9-7中给出了各种组合方案系统的失效概率与分量失效概率的关系曲线。

从图9-7中可以看出，串联组合方案具有较高的失效概率(如350/1000，500/700，500/1000)。并联单元具有最低的失效概率。当分量失效概率较小时，有冗余分量的组合(350/500,350/

700）比单桩1000kN方案相比较，具有较低的失效概率。

二、相关的多重破坏模式

考虑一个具有k个潜在破坏模式的系统，不同的模式有不同的状态函数

$$g_j(X)=g_j(X_1,\ X_2,\cdots,\ X_n)$$
$$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k \qquad (9\text{-}10)$$

单个失效事件E_j

$$E_j=[g_j(X)\leqslant 0] \qquad (9\text{-}11)$$

E_j的互补事件E_j'是安全事件

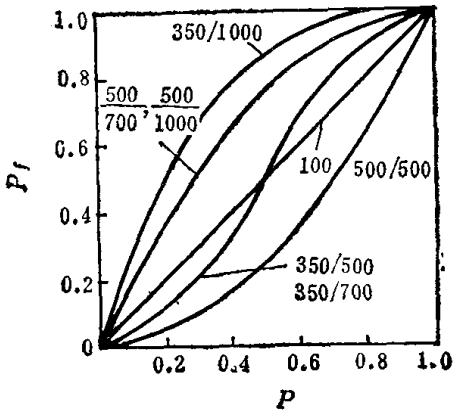


图 9-7　P_f与P关系曲线

$$E_j'=[g_j(X)>0] \qquad (9\text{-}12)$$

对于两个变量的情况，上述事件可以画在如图9-8所示的座标中，图中表示三个极限状态方程。

系统的安全事件定义为所有潜在的破坏模式中没有一个失效的

$$E'=E_1'\cap E_2'\cap\cdots\cap E_k' \qquad (9\text{-}13)$$

与此相反，失效事件将是

$$E=E_1\cap E_2\cap\cdots\cap E_k \qquad (9\text{-}14)$$

这就意味着只要一个或更多的分量失效，整个系统就会失效。

从理论上说可用下列积分来表示系统的安全与失效。

系统安全概率

$$P_s=\int\cdots\int_{(E_1'\cap\cdots\cap E_k')} f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n)\,dx_1\cdots dx_n$$

$$(9\text{-}15)$$

系统失效概率

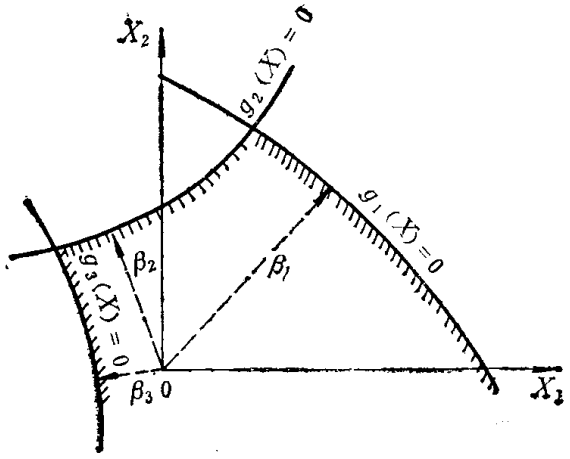


图 9-8　三个极限状态方程

$$P_f=\int_{(E_1\cup\cdots\cup E_k)}\cdots\int f_{X_1,X_2,\cdots X_n}(x_1,\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n \quad (9\text{-}16)$$

但是这两个公式计算一般是很困难的，通常需用近似的方法来估计系统失效概率的上、下限。

单一模式的界限

如果模式之间是正相关的，$r_{ij}>0$，对于两个事件E_i和E_j存在着如下的关系

$$P(E_j\mid E_i)\geqslant P(E_j)$$

$$P(E_j'\mid E_i')\geqslant P(E_j')$$

因此，　　$P(E_j'E_i')\geqslant P(E_i')P(E_j')$

对于k个事件

$$P(E')=P(E_1'E_2'\cdots E_k')\geqslant\prod_{i=0}^{k}P(E_i') \quad (9\text{-}17)$$

对于任何j　$E_1'E_2'\cdots E_i'\cdots\subseteq E_j'$都成立对于特定的模式$E_1'E_2'\cdots E_k'\subseteq\min_j E_j'$　$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$

因此

$$P(E')\leqslant\min_j P(E_j') \quad (9\text{-}18)$$

对于第i个模式

$$P_{s_i}=P(E_i')$$

对于整个系统

$$P_s = P(E')$$

因此

$$\prod_{i=1}^{k} P_{s_i} \leqslant P_s \leqslant \min_j P_{s_j} \qquad (9\text{-}19)$$

$$\max_i P_{f_i} \leqslant P_f \leqslant 1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - P_{f_i}) \qquad (9\text{-}20)$$

对于较小的P_{f_i}值，忽略交叉积，

$$1 - \prod_{i=1}^{k}(1 - P_{f_i}) \approx \sum_{i=1}^{k} P_{f_i} \qquad (9\text{-}21)$$

如果模式之间是负相关的，$r_{ij} < 0$，对于两个事件E_i和E_j存在着如下的关系

$$P(E_j \mid E_i) \leqslant P(E_j) \qquad (9\text{-}22)$$

$$P(E_j' \mid E_i') \leqslant P(E_j') \qquad (9\text{-}23)$$

如E_i和E_j完全负相关　$r_{ij} = -1.0$

$$P(E_j' \mid E_i') = P(E_j \mid E_i) = 6$$

因此　$P(E_i'E_j') \leqslant P(E_i')P(E_j')$

$$P(E') = P(E_1'E_2' \cdots E_k') \leqslant \prod_{i=1}^{k} P(E_i')$$

$$P_s \leqslant \prod_{i=1}^{k} P_{s_i} \qquad (9\text{-}24)$$

$$P_f \geqslant 1 - \prod_{i=1}^{k} P(E_i') \qquad (9\text{-}25)$$

二阶模式的界限

二阶模式是指多重模式系统的失效概率与其中两个分量同时失效事件的概率之间的关系，从理论上说

$$P_{f_1} + \max\left[\sum_{i=2}^{k}\left\{P_{f_i} - \sum_{j=1}^{i-1} P(E_iE_j)\right\},\ 0\right] \leqslant P_f$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} P_{s_i} - \sum_{i=2}^{k} \max_{j<i} P(E_iE_j) \qquad (9\text{-}26)$$

但此式计算困难，可用近似方法来估计上、下限。

考虑两个潜在的破坏模式E_i和E_j分别由极限状态方程$g_1(X) = 0$和$g_2(X) = 0$来定义，并具有正相关系数$r_{ij} \geqslant 0$，在多个标准化变量X_u空间里，这两个极限状态方程表示两个相交的超几何面，近似地可用其在验算点处的切平面来表示，相应的

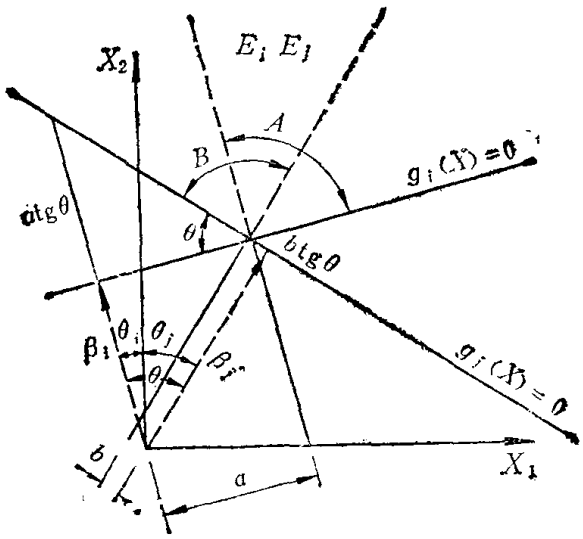


图 9-9　两个相交的切平面

可靠性指标为β_i和β_j，两个变量的情况如图9-9所示。

在图9-9中，两个极限状态方程的夹角的余弦就是相关系数

$$\cos\theta = r_{ij}$$

这两个极限状态方程为

$$\left.\begin{aligned} g_i(X) &= a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 \\ g_j(X) &= b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}27)$$

X_1与X_2是不相关的，故$COV(X_1, X_2) = 0$

$$\begin{aligned} COV(g_1, g_2) &= E[(a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2)(b_0 + b_1 X_1 \\ &\quad + b_2 X_2)] - (a_0 + a_1 \overline{X}_1 + a_2 \overline{X}_2) - (b_0 \\ &\quad + b_1 \overline{X}_1 + b_2 \overline{X}_2) = a_1 b_1 \hat{\sigma}^2_{X_1} + a_2 b_2 \hat{\sigma}^2_{X_2} \end{aligned} \qquad (9\text{-}28)$$

相关系数

$$r_{ij} = \frac{COV(g_i, g_j)}{\hat{\sigma}_{g_i} \hat{\sigma}_{g_j}}$$

$$= \frac{a_1 b_1 \hat{\sigma}^2_{X_1} + a_2 b_2 \hat{\sigma}^2_{X_2}}{\sqrt{(a_1^2 \hat{\sigma}^2_{X_1} + a_2^2 \hat{\sigma}^2_{X_2})(b_1^2 \hat{\sigma}^2_{X_1} + b_2^2 \hat{\sigma}^2_{X_2})}} \qquad (9\text{-}29)$$

相应于两个极限状态方程的方向余弦为

$$\left.\begin{aligned}\cos\theta_i &= \frac{a_2\hat{\sigma}_{X_2}}{\sqrt{a_1^2\hat{\sigma}_{X_1}^2 + a_2^2\hat{\sigma}_{X_2}^2}}\\ \cos\theta_j &= \frac{b_2\hat{\sigma}_{X_2}}{\sqrt{b_1^2\hat{\sigma}_{X_1}^2 + b_2^2\hat{\sigma}_{X_2}^2}}\end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}30)$$

根据图9-9，

$$\cos\theta = \cos(\theta_j - \theta_i) = \cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j$$

$$= \frac{a_1b_1\hat{\sigma}_{X_1}^2 + a_2b_2\hat{\sigma}_{X_2}^2}{\sqrt{(a_1^2\hat{\sigma}_{X_1}^2 + a_2^2\hat{\sigma}_{X_2}^2)(b_1^2\hat{\sigma}_{X_1}^2 + b_2^2\hat{\sigma}_{X_2}^2)}} \qquad (9\text{-}31)$$

图9-9中阴影部分为联合失效事件E_iE_j

$$E_iE_j \supseteq A$$

$$E_iE_j \supseteq B$$

A与B的定义见图9-9

因此，我们得到

$$\max[P(A)P(B)] \leqslant P(E_iE_j) \leqslant P(A) + P(B) \qquad (9\text{-}32)$$

根据正交的理由

$$P(A) = \left[\frac{1}{2} - \psi(-\beta_i)\right]\left[\frac{1}{2} - \psi(-a)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \psi(-\beta_i)\right]\left[\frac{1}{2} - \psi\left(-\frac{\beta_j - r\beta_i}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right] \qquad (9\text{-}33)$$

$$P(B) = \left[\frac{1}{2} - \psi(-\beta_j)\right]\left[\frac{1}{2} - \psi(-b)\right]$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \psi(-\beta_j)\right]\left[\frac{1}{2} - \psi\left(-\frac{\beta_i - r\beta_j}{\sqrt{1-r^2}}\right)\right] \qquad (9\text{-}34)$$

对于负相关的破坏模式

$$P(E_iE_j) \leqslant \min[P(A),\ P(B)] \qquad (9\text{-}35)$$

其下限为零。

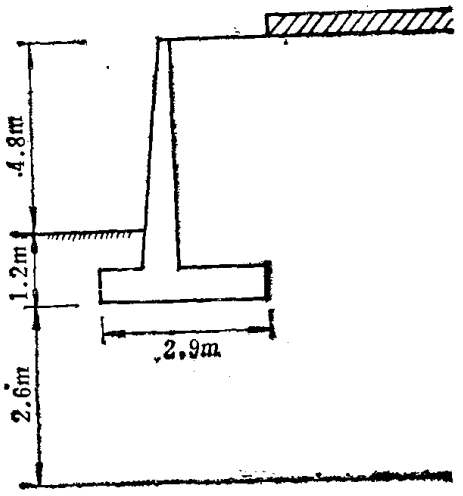


图 9-10　L型挡墙

【例】

一个L型挡土墙如图9-10所示，填土容重$\gamma=17.4\mathrm{kN/m^3}$，内摩擦角的平均值$\overline{\phi}=34°$，变异系数$V_\phi=0.10$；基底与土的摩擦角平均值$\overline{\delta}=30°$，变异系数$V_\delta=0.10$；墙后填土高度和超载折算高度之和为6.7m。假设承载力失效可以忽略，并忽略挡土墙前被动土压力对倾覆稳定和滑移稳定的影响，试估计挡土墙整体的失效概率。

由主动土压力形成的倾覆力矩

$$M_0=\frac{1}{2}\gamma\mathrm{tg}^2\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)H^2d$$

式中d为倾覆力臂，$d=2.23\mathrm{m}$，假设γ，H和d都是确定性的参数，只有内摩擦角ϕ是随机变量。

抵抗力矩已知为510kN-m/m

因此，第一模式即倾覆模式的极限状态方程为

$$g_1(X)=510-873\mathrm{tg}^2\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)$$

驱使挡土墙发生滑动的水平力

$$F=\frac{1}{2}\gamma\mathrm{tg}^2\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)H^2=391.5\mathrm{tg}^2\left(45°-\frac{\phi}{2}\right)$$

基底摩阻力

$$R = W\mathrm{tg}\delta$$

式中W为基底总压力$W = 296\mathrm{kN/m}$。

第二模式即滑移模式的极限状态方程为

$$g_2(X) = 296\mathrm{tg}\delta - 391.5\mathrm{tg}^2\left(45° - \frac{\phi}{2}\right)$$

对于第一模式的方向余弦

$$\cos\theta_\phi = 1.0$$

验算座标

$$\phi^* = \overline{\phi} - \mathrm{cns}\theta_\phi\beta_1\hat{\sigma}_\phi = 34 - 3.4\beta_1$$

代入极限状态方程

$$g_1(X^*) = 510 - 873\mathrm{tg}^2\left[45° - \frac{1}{2}(34-3.4\beta_1)°\right] = 0$$

得 $\beta_1 = 5.42$

$$P_{f_1} = \frac{1}{2} - \psi(5.42) = 0.30\times10^{-7}$$

对于第二模式

第一次迭代

$$\phi^* = 34°,\ \delta^* = 30°$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial\varphi_u}\right|_{,*} = -391.5\times2\mathrm{tg}\left(45° - \frac{34°}{2}\right)\sec^2\left(45° - \frac{34°}{2}\right)$$

$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3.4\pi}{180}\right) = 1.078$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial\delta_u}\right|_{,*} = 296(\sec^2 30°)\left(\frac{3.0\pi}{180}\right) = 1.406$$

方向余弦

$$\cos\theta_\phi = 0.608$$

$$\cos\theta_\delta = 0.794$$

因此

$$\phi^* = \overline{\phi} - \cos\theta_\phi\beta_2\hat{\sigma}_\phi = 34° - 2.067\beta_2$$

$$\delta^* = \overline{\delta} - \cos\theta_\delta\beta_2\hat{\sigma}_\delta = 30° - 2.382\beta_2$$

代入极限状态方程

$$g_2(X^*)=296\mathrm{tg}(30^\circ-2.382\beta_2)-391.5\mathrm{tg}^2\left[45^\circ-\frac{1}{2}\times(34^\circ-2.067\beta_2)\right]=0$$

得$\beta_2=2.32$

对第二次迭代

$$\varphi^*=29.205,\quad \delta^*=24.474$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial \varphi_u}\right|_{,*}=1.246$$

$$\left.\frac{\partial g_2}{\partial \delta_u}\right|_{,*}=1.273$$

方向余弦

$$\cos\theta_\varphi=0.699$$

$$\cos\theta_\delta=0.715$$

验算点座标

$$\varphi^*=34^\circ-2.377\beta_2$$

$$\delta^*=30^\circ-2.145\beta_2$$

代入极限状态方程

$$g_2(X^*)=296\mathrm{tg}(30^\circ-2.145\beta_2)-391.5\mathrm{tg}^2\left[45^\circ-\frac{1}{2}\times(34-2.377\beta_2)\right]=0$$

得$\beta_2=2.31$

$$P_{f_2}=\frac{1}{2}-\psi(-2.31)=0.01044$$

由于这两个极限状态方程中都有ϕ，可以预料是相关的，按单一模式界限

$$0.01044\leqslant P_f\leqslant 0.01044+0.3\times10^{-7}$$

从这个例子中可以看出，起控制作用的是挡土墙的滑移，系统的失效概率接近于这个控制模式的失效概率。

【例】

打入砂土中的桩如图9-11所示。

桩的承载力有两种破坏模式。一种是土对于桩的支承，桩的

承载力的失效取决于土体的支承能力的失效；另一种是桩本身的结构强度，它取决于混凝土的强度。

桩的半径 $R=0.15\mathrm{m}$

桩的长度 $L=12\mathrm{m}$

土的容重 $\gamma=17.4\mathrm{kN/m^3}$

地面超载 $q=14.4\mathrm{kPa}$

侧向土压力系数平均值 $\overline{K}=1.5$

变异系数 $V_K=0.10$

土的内摩擦角平均值 $\overline{\phi}=30°$

变异系数 $V_\phi=0.04$

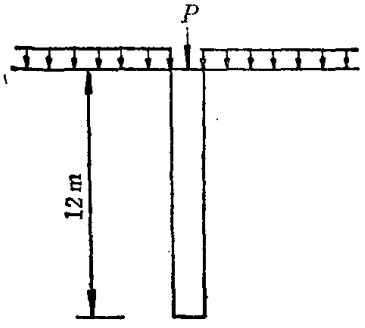


图 9-11　砂土中的桩

桩头荷载平均值 $\overline{P}=890\mathrm{kN}$

变异系数 $V_P=0.10$

混凝土抗压强度平均值 $\overline{f}_c=20900\mathrm{kPa}$

变异系数 $V_f=0.10$

强度修正系数平均值 $\overline{N}=1.0$

变异系数 $V_N=0.10$

对于由土支承的承载力极限状态方程为

$$g_1(X)=2\pi RL(\gamma L/2+q)K\mathrm{tg}\phi-P$$

$$g_1(X)=1343.6K\mathrm{tg}\varphi-890$$

对于由桩身强度构成的承载力极限状态方程为

$$g_2(X)=0.0706Nf_c-890$$

用迭代法分别计算这两种失效的模式，求得的失效概率与可靠性指标分别为

$$P_{f_1}=0.0212\qquad\beta_1=2.03$$

$$P_{f_2}=0.00186\qquad\beta_2=2.90$$

由于这两个极限状态方程中都有 P 变量，因此可以预料这两种模式是相关的，按单一模式界限

$$0.0212\leqslant P_f\leqslant 0.0212+0.00186$$

$$0.0212\leqslant P_f\leqslant 0.0231$$

从计算结果可以看出，两种模式的失效概率相差一个数量

级，控制因素是土对桩的支承作用。但对足够长的长桩来说，桩身强度因素不容忽视，对超长桩的承载力，控制因素将会是桩身强度。

如果考虑这两种模式的失效同时出现的概率，要用二阶模式界限。

两个极限状态方程之间的相关系数

$$r_{g_1g_2} = -0.575 \times 0.458 = 0.263$$

$$P(A) = 1.53 \times 10^{-4}$$

$$P(B) = 1.77 \times 10^{-4}$$

$$0.000177 \leqslant P(E_1E_2) \leqslant 0.000330$$

可见两种模式失效同时出现的概率比桩身强度失效概率又小一个数量极。

第二节 优　　化

研究一个系统的优化，首先要建立它的模型，包括目标函数和约束条件。然后进一步寻求适合的方法去求得最优解答。

近代解决优化问题的方法大致分为两类：一类是间接最优化（或称解析最优化）方法；另一类是直接最优化（或称试验最优化）方法。间接最优化方法是把所研究的对象（如物理、化学过程）用数学方法描写出来，然后在用数学解析方法求出最优解；但在许多情况下，当研究对象的机理不十分清楚或者无法直接用数学方程描述时，可以通过试验（包括数值模拟）来构造一类函数以逼近数据，然后再求最优化的解，并通过试验来验证。然而，也有许多问题可以不经过构造函数这一步，直接从试验结果求得最优解。

系统分析的目的在于找出方案间的优劣比较，要比较就必须有共同的评价指标。系统分析最重要的逻辑推理程序是由系统概念形成问题，由问题产生目标，然后依目标去寻找最佳方案。

评价方案优劣时，如果只涉及一个因素的优选，就称为单因

素优化，这比较简单。如果是多因素问题，可以分为主要因素和次要因素，用控制主要因素来评价优劣，或化多因素为单因素的简化办法。

在具体进行系统分析时有两种情况，第一是用等量的耗费取得最佳的效果。亦即在一定的人力、物力和财力条件下，充分合理地加以利用，使它们发挥最大的作用；第二是用最少的耗费来取得一定的效果，也就是在既定目标和任务的条件下，用最少的人力、物力和财力来完成系统的功能。因此，优化总是和造价联系在一起的。

下面讨论岩土工程的优化基本概念和方法。

岩土工程的造价E由几个部分构成

1.基本造价I；

2.正比例于平均能力的造价$\lambda\overline{C}$；

3.系统失效时需要付出的代价E_f；

在上述三项中，最难估计的是失效时需要付出的代价E_f，因为估计E_f时必须考虑有形与无形这两种损失，经济指标要包括直接损失，间接损失、公用事业的损失，个人生命财产的损失以至威信的损失。最难以估计的经济损失数字是由于失效所带来的社会威信的损失。第三项的难于估计还在于它是一种风险性估计，要反映可能失效的概率。有两种估计办法，一种是以年失效概率为基础，另一种是以设计基准期计算失效概率为基础。

前一种方法的计算公式为

$$E_f = f \cdot n \cdot P_a \cdot k \cdot E_c \qquad (9\text{-}36)$$

式中 P_a——年失效概率，根据事故调查得出；

n——工程使用年限；

f——与贴现率有关的系数，$f=1$表示不贴现；

k——潜在危险系数；

E_c——施工造价，$E_c = I + \lambda\overline{C}$

后一种方法的计算公式为

$$E_f = \eta P_f E_c \qquad (9\text{-}37)$$

式中 P_f——设计基准期计算失效概率；

η——综合系数。

优化的目标用目标函数来表示，目标函数的一般形式为

$$S=\varphi(X_i,\ Y_i) \qquad (9\text{-}38)$$

约束条件 $a\leqslant X_i\leqslant b$

式中 X_i——可控因素；

Y_i——不可控因素。

以最少耗费为优化目标时，其目标函数由造价构成。以总期望造价为目标函数，总期望造价是前述三部分造价之和

$$E=I+\lambda\overline{C}+E_f=(I+\lambda\overline{C})(1+\eta P_f)=E_c(1+\eta P_f) \qquad (9\text{-}39)$$

在$\overline{C}$和P_f中都包括了可控因素和不可控因素，具体的函数形式由研究对象的功能函数决定。

下面以基坑开挖边坡稳定为例来说明单因素优化问题的概念。

基坑开挖施工造价为土方单价E'（元/方）与基坑开挖方量V之积，基坑开挖方量取决于基坑底面的尺寸，开挖深度（坡高）和坡角，由下式求得

$$E_c=E'V=E'f(A\cdot B\cdot H\cdot \mathrm{tg}\alpha) \qquad (9\text{-}40)$$

式中 A——基坑底面长度；

B——基坑底面宽度；

H——基坑开挖深度；

α——边坡坡角；

$f(\ )$——由基坑几何关系导得的关系式。

将公式（9-40）代入公式（9-39），得到以造价表示的目标函数（总期望造价）为

$$E=E'f(A\cdot B\cdot H\cdot \mathrm{tg}\alpha)(1+\eta P_f) \qquad (9\text{-}41)$$

在公式（9-41）中，可控因素为坡角α，不可控因素为土体的抗剪强度指标c和φ。坡角α取得愈小，土坡愈加安全，失效概率P_f愈小，但土方量愈大因而施工造价愈大，但因失效而造成的损

失愈小；如坡角α取得很大，土方量固然很少，因而降低了施工造价，但是土坡失效概率会很大，而要支付较大的失效代价。这是两个相反的变化趋势，因而可以断言必然存在一个最佳的α值，使总期望造价最小。

为了表示的方便，我们取坡角45°的条件为额定条件，额定条件的施工造价为E_0，则取相对造价（无价格单位）

$$E_c^* = \frac{E_c}{E_0}$$

$$E^* = \frac{E}{E_0}$$

相对的总造价E^*由下式表示

$$E^* = E_c^*(1 + \eta P_f) \qquad (9\text{-}42)$$

在（9-42）式中，相对的期望总造价与基坑断面几何尺寸有关，并是可控因素α的函数，η是个常数，失效概率P_f则是可控因素α和不可控因素c与φ的函数。

约束条件可取为

$$30° \leqslant \alpha \leqslant 70°$$

如假定土的抗剪强度指标服从正态分布，抵抗力矩M_c（能力）也服从正态分布。容重γ可以作为确定性变量来处理，则驱动力矩M_D（需求）也为确定性数值。可靠性指标β由下式求得

$$\beta = \frac{CFS - 1}{CFSV_{M_c}} \qquad (9\text{-}43)$$

失效概率为

$$P_f = \frac{1}{2} - \psi\left[\frac{CFS - 1}{CFSV_{M_c}}\right] \qquad (9\text{-}44)$$

如抗滑力矩M_c的变异系数V_{M_c}等于0.10，中心安全系数取不同数值时的可靠性指标及失效概率的计算值如表9-1所示。

中心安全系数与失效概率　　表 9-1

CFS	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5
β	0	0.91	1.67	2.31	2.86	2.33
P_f	0.500	0.181	0.047	0.010	2.1×10^{-3}	4.3×10^{-4}

如取$\eta=10$，按公式(9-42)计算所得的优化曲线见图9-12。从图可以看出，最优坡角在50°左右，最优中心安全系数为1.28。优化曲线还表明，盲目减小中心安全系数并不会带来经济的后果。因为减小中心安全系数固然可以降低施工费用，但土坡的失效概率很快增长，使总期望造价反而上升。

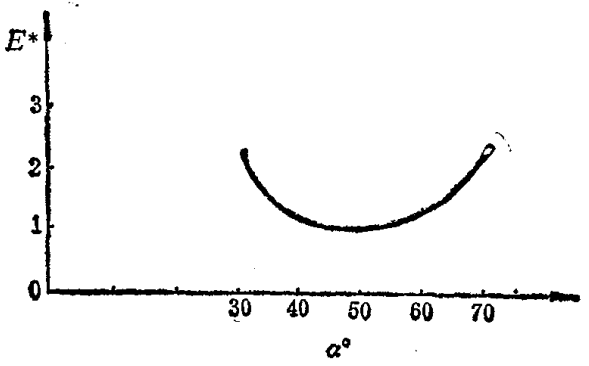


图 9-12 单因素优化

下面讨论两因素优化的问题。典型的例子是一个内部支撑的开挖系统，它只有两个分量A和B，而且A和B必须同时有效，整个系统才有效。

对于A和B两个分量都分别满足下式

$$E_c = I + \lambda \bar{C}$$

令 $\overline{C} = \overline{D}CFS$

则

$$\left.\begin{aligned} E_{c_A} &= I_A + \lambda_A \bar{C}_A = I_A + \lambda_A \overline{D}_A CFS_A \\ E_{c_B} &= I_B + \lambda_B \bar{C}_B = I_B + \lambda_B \overline{D}_B CFS_B \end{aligned}\right\} \quad (9\text{-}45)$$

失效时要付出的代价

$$E_f = \eta(E_{c_A} + E_{c_B}) \quad (9\text{-}46)$$

在优化设计中，总期望造价由下式计算

$$E = E_{c_A} + E_{c_B} + P_f \eta(E_{c_A} + E_{c_B}) = (E_{c_A} + E_{c_B})(1 + \\ + \eta P_f) = I_A + I_B + \lambda_A CFS_A \bar{D}_A + \lambda_B CFS_B \bar{D}_B) \\ \times (1 - \eta P_f) \quad (9\text{-}47)$$

式中，P_f为系统的失效概率，由两个分量失效的和事件的概率来表示

$$P_f = P_{f_A} + P_{f_B} - P_{f_A} P_{f_B} \qquad (9\text{-}48)$$

根据（9-21）式，对于较小的失效概率，忽略积事件的概率，

$$P_f = P_{f_A} + P_{f_B} \qquad (9\text{-}49)$$

如假定能力A和B都是正态分布，且已知A和B的变异系数，则失效概率P_f由下式求得

$$\left.\begin{aligned} P_{f_A} &= \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{CFS_A - 1}{CFS_A V_A}\right) \\ P_{f_B} &= \frac{1}{2} - \psi\left(\frac{CFS_B - 1}{CFS_B V_B}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{-}50)$$

将公式（9-49）代入公式（9-47）就得到了两个因素优化设计的目标函数。公式（9-47）表示一个空间的曲面，曲面的最下端就是最优点，如图9-13所示。对于给定的条件，可以有许多个CFS_A和CFS_B的组合来得到近似于相等的总期望造价。如果增大失效所需的代价，亦即增大η值，此时为了要减小失效概率，就需要加大安全系数。对于假定为正态分布的两因素优化设计可以用试算法来求得安全系数的最佳组合。

在多因素的优化设计中，如果有k个互相独立的破坏，则公式（9-47）可以写成如下的形式

$$E = (I + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overline{D}_i CFS_i)(1 + \sum_{i=1}^{k} \eta_i P_i) \qquad (9\text{-}51)$$

挡土墙设计时一般要分别验算地基承载力、倾覆稳定和抗滑移稳定，有三个破坏模式，三个不同的安全系数和失效概率，是一个典型的三因素优化设计。我们可以利用前面几章讨论过的计算失效概率的方法来分别计算三个模式的失效概率[68]。

假定挡土墙高 6 m，填土表面水平，填土内摩擦角平均值$\overline{\phi} = 35°$，标准差$\hat{\sigma}_\phi = 3°$；地基土内摩擦角平均值$\overline{\phi}_F = 37°$，标准差$\hat{\sigma}_{\phi_F} = 2°$；挡土墙和地基土之间的摩擦角平均值$\overline{\delta} = 30°$，标准差$\hat{\sigma}_\delta = 3°$，填土和地基土的容重相等，$\gamma = 17\text{kN/m}^3$。

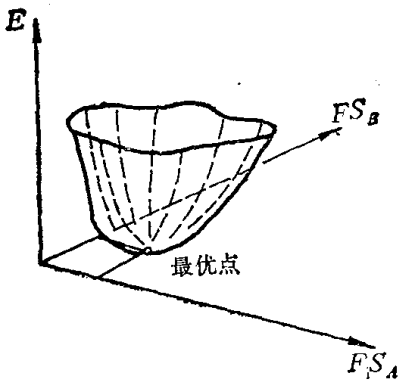


图 9-13　多因素优化

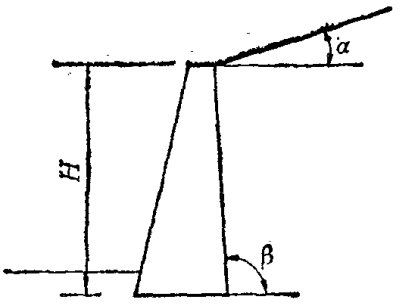


图 9-14　挡土墙优化设计

改变图9-14所示挡土墙的顶宽、底宽及墙背倾角这三个可控因素，进行不同组合的计算。用公式（9-51）计算不同组合的总期望造价时，分别假定三种破坏模式的综合系数如下：

倾覆稳定　$\eta_1 = 5$

承载力　$\eta_2 = 3$

滑移　$\eta_3 = 1$

并假定最少配筋的混凝土单价为填土单价的 6 倍。

按上述假定计算的结果示于表9-2中。

在分析表9-2的计算结果之前，先讨论均衡设计的概念。在多因素优化中，破坏时所要付出的代价可能主要取决于其中的某一个模式，按最小总期望造价优化所得的组合中可能包含着一个很高的失效概率，而其它模式的失效概率可能非常小。为了使各个模式的失效概率不致相差过分悬殊，设计者宁可不用图9-13中的最优点，而用移动某一距离的非最优点，尽管总期望造价并不是最小，但各个模式的失效概率比较均衡，经济上比较合理，这就是均衡设计的思想。

在表9-2中给出了十八种不同的组合，它是根据每一种组合的三个破坏模式分别计算失效概率P_i后按公式（9-51）求得的。

挡土墙优化设计结果　　表 9-2

情况 / 方案号	墙顶宽 (m)	墙底宽 (m)	倾角 (°)	中心安全系数			施工造价	$\eta P_i E_c$			总期望造价 E
				倾覆	承载力	滑移		倾覆	承载力	滑移	
1	0.3	1.5	90	1.2	1.9	1.4	64.8	56.1	20.8	1.0	142.7
2	0.3	1.8	90	1.9	3.7	1.6	69.8	0.1	2.7	0.2	72.8
3	0.3	2.1	90	2.9	5.7	1.8	74.5	≈0	1.4	0.1	76.0
4	0.3	2.4	90	4.3	8.0	2.0	79.7	≈0	1.2	≈0	80.9
5	0.6	1.8	90	2.1	3.9	1.8	74.8	≈0	2.1	0.1	77.0
6	0.6	2.1	90	3.2	5.8	2.0	79.7	≈0	1.3	≈0	81.0
7	0.6	2.4	90	4.7	8.0	2.2	84.9	≈0	1.2	≈0	86.1
8	0.9	2.1	90	3.4	5.7	2.2	84.4	≈0	1.3	≈0	85.7
9	0.9	2.4	90	5.0	7.9	2.3	89.7	≈0	1.2	≈0	90.9
10	0.3	1.8	93	1.7	2.8	1.6	70.8	0.7	4.5	0.2	76.2
11	0.3	2.1	93	2.7	4.6	1.8	75.3	≈0	1.6	0.1	77.0
12	0.3	2.4	93	4.2	6.7	1.9	80.6	≈0	1.3	0.1	82.0
13	0.3	1.5	84	1.6	3.6	1.5	63.3	1.3	4.0	0.8	69.4
14	0.6	1.5	84	1.8	4.2	1.7	68.1	0.1	2.7	0.1	71.0
15	0.3	1.5	87	1.4	2.7	1.4	63.7	12.1	7.8	0.9	84.5
16	0.3	1.8	87	2.1	4.7	1.6	68.9	≈0	0.4	0.2	69.5
17	0.6	1.5	87	1.6	3.0	1.6	69.2	1.4	4.6	0.1	75.3
18	0.6	1.8	87	2.3	5.0	1.8	73.9	≈0	1.8	0.1	75.8

以方案 2 为例，计算的数值示于表9-3中。

方案2的三个破坏模式　　表 9-3

破坏模式	平均安全储备 $\overline{SM}$	安全储备标准差 $\hat{\sigma}_{SM}$	$\frac{\overline{SM}}{\hat{\sigma}_{SM}}$	破坏概率 P_f	中心安全系数
倾　覆	8.85t·m/m	2.32t·m/m	3.81	0.7×10^{-4}	1.9
承载力	52.1t/m	23.2t/m	2.24	126×10^{-4}	3.7
滑　移	4.2t/m	1.5t/m	2.80	26×10^{-4}	1.6

在表列十八个方案中，最优点是方案13的组合，总期望造价最小，但三个破坏模式的失效概率都是比较高的，特别是承载力模式的$\eta p_f E_c$值在十八个方案中是比较大的。显然，这并不是一个理想的方案，并不可取。第16号方案的总期望造价虽比第13号方案稍大一些，但三个失效概率都比较小，而且比较均衡，是一个理想的方案。虽然16号方案的施工造价比13号方案高，但可预料工程质量会较好，处理费用较低。我们再来分析施工造价，13号方案和15号方案的施工费用都是比较低的，刚才已经分析了第13号方案的缺点，但如采用第15号方案，如不考虑风险优化，只从施工造价来看不失为一个很好的方案。可是由于安全系数过小，失效概率很大，使得总期望造价很大，从工程可靠性来看，15号方案并不是一个经济的方案。

第三节　决　策　分　析

每个工程师都面临决策问题，也都自觉或不自觉地进行决策。但如果工程师碰到的问题中带有不确定性，在这样条件下的决策又不可避免地要冒一定的风险，尽管这些不确定性可以用概率方法来分析，它们对决策的影响还是应当考虑的。在决策中除了考虑技术因素外，还必须考虑非技术的因素，例如社会的心理因素，对环境的影响以及有时还要考虑政政的意义，这就不能单

纯由技术因素来选择方案。

在任何一个决策问题中，首先必须区分和定义决策变量。例如在前一节讨论的基坑开挖的边坡坡角优化设计中，首先定义的是目标函数中的可控因素与不可控因素，这实际上就是一种简单的决策问题。但对于比较复杂的问题就需要用本节中讨论的决策方法。决策问题一般应当包括下列几个部份：

1.列出所有可行的方案，包括新增加的信息；

2.列出对应于每一个方案的所有可能输出，或天然状态；

3.对应于每一个可能输出的概率估计；

4.估计每一方案与输出的组合结果；

5.决策准则；

6.系统评价所有的方案。

在对复杂问题进行决策时需要用到决策树的系统分析方法。决策树是树图的一种。

树图是一种有用的表示方法，它能使复杂的关系逻辑化和条理化。

图9-15是树图的一个例子，从原点开始有二个分叉表示两种状态θ，每一种状态又有两个输出z，θ的概率分别为0.4和0.6，图上注的$P[z|\theta]$称为条件概率，表示在θ出现的条件下z的概率。根据树图所表示的相互关系我们可以分别计算z_1和z_2的全概率：

$$P[z_1]=P[z_1|\theta_1]P[\theta_1]+P[z_1|\theta_2]P[\theta_2] \qquad (9\text{-}52)$$

$$P[z_2]=P[z_2|\theta_1]P[\theta_1]+P[z_2|\theta_2]P[\theta_2] \qquad (9\text{-}53)$$

【例】

根据经验得知在砂层下面可能是粘土也可能是粉土，机会各占一半；如果找到粘土或粉土后，则有一半的可能是变层，其中出现砂的可能性又是一半，问在第三层找到砂的概率是多少？

这样多层次的概率计算可用图9-16所示的树图来表示。

原点为砂，有两个分叉各为粘土和粉土，其概率均为0.50，粘土和粉土又各分为三个分叉，不变层的概率是0.50，变为其余两类土的概率各为0.25。根据题意，顺着砂—粘土—砂和砂—粉

土—砂两条路线计算全概率。

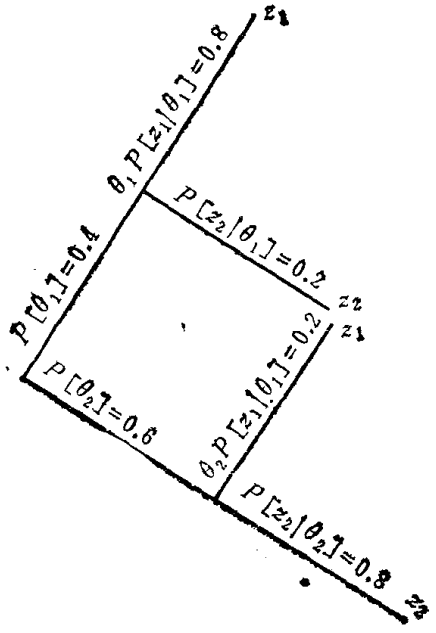


图 9-15 树图

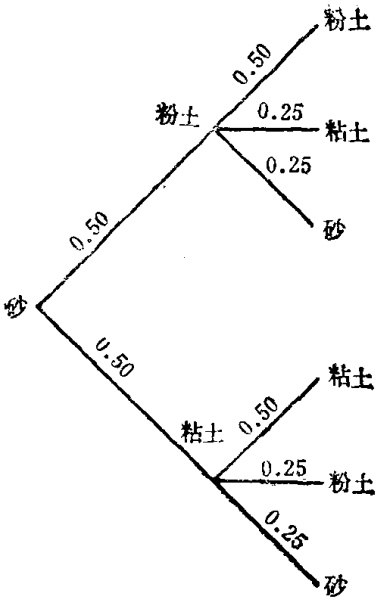


图 9-16 树图的应用

$$P[S]=0.25\times0.50+0.25\times0.50=0.25$$

决策树将决策问题中的各个部分集中在树图上表示出来，并进行概率运算，从中找出最佳方案。图9-17给出了决策树的一般形式。图中有三个可供选择的方案，其中有的方案还要进行试验以便在最终决策之前得到新的信息。这里所用试验一词是广义的，包括了取得信息的任何一种方法。

图中 a_i——第i个方案；

θ_j——天然状态，亦称输出；

e_k——第k个试验；

z_l——第l个试验输出；

$u(a_i,\theta_j)$——相应于方案a_i和输出θ_j的效益值，如效益取决于试验e_k和相应的试验输出Z_l，记作$u(e_k,\ z_l,a_i,\theta_j)$。

图9-17决策树从一个方点开始，称为决策节点，在这个节点

上有三个方案a_1，a_2和a_3。对每一种方案可能有几个输出，以图中圆点表示的分叉，称为机会节点。在每一个机会节点上都有两个天然状态θ_1和θ_2，它发生的概率是以方案为条件的，例如$P(\theta_j|a_i)$。方案3有试验输出，它的输出取决于试验结果，因此z的概率是以e_k为条件的，即$P(z_l|e_k)$。对应于每一个试验输出，又有一个决策节点，在得到新的试验信息后在这个决策节点上仍需要在两个方案a_1与a_2之间作出决策，在分叉上θ_j的概率要用特定的试验输出来修正。因此θ的概率表示为$P(\theta_j|z_l, e_k, a_i)$。

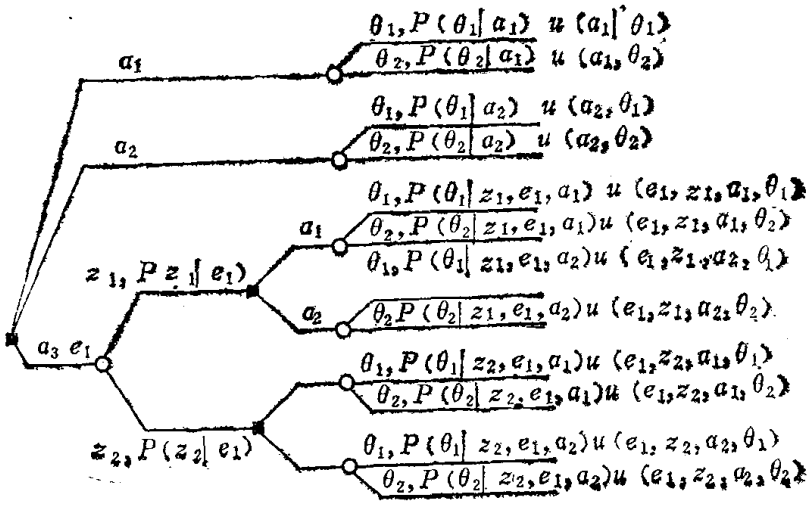


图 9-17　一般的决策树

每一个决策节点上的输出是互斥和穷举的，也就是每一个决策节点上分叉的概率之和恒为1。每一条路径的结果，用效益值来量度，记为$u(a_i, \theta_j)$或$u(e_k, z_l, a_i, \theta_j)$。

【例】

为了防止原子能电站冷却池的水通过坝基渗漏掉，可以有二种方案，一种是在坝的下游设置水泵系统，及时将渗漏出来的水送回冷却池；一种是在上游坝趾设置截水墙，设置截水墙的费用为41个单位，不需考虑运行和维修费用。水泵系统又可有两种方

案。渗流量的估计值为$Q_1 = 50m^3/min$，可能性是90%，还有10%的可能性是$Q_2 = 60m^3/min$。如设置$60m^3/min$的B水泵系统可完全满足需要，但需20单位的费用；如设置$50m^3/min$的A水泵系统，需17个单位的费用，但如考虑有可能出现流量为$60m^3/min$的情况，需增设一个能力为$10m^3/min$的补充水泵C，增加费用为8个单位。水泵系统的运行和维修费用(贴现到现在的费用)分别为$60m^3/min$能力的水泵为22个单位，$50m^3/min$能力的水泵为21个单位；$10m^3/min$能力的水泵为5个单位。如果采用$60m^3/min$能力的水泵而出现流量为$50m^3/min$的情况，则运行与维修费用减少2个单位。

这个渗流问题的决策树如图9-18所示。

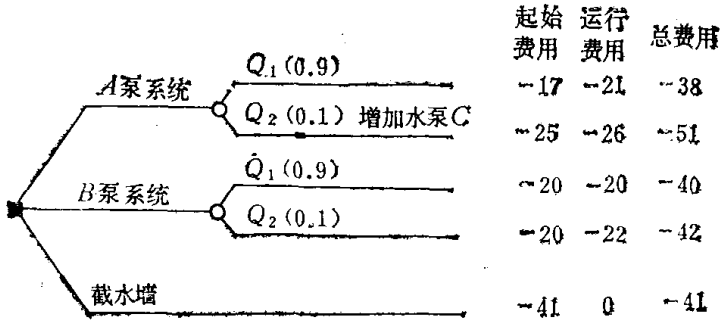


图 9-18 关于渗流问题的决策树

决策分析的目标是得到最佳的决策方案。在确定性条件下，决策是很容易抉择的，然而大多数是在不确定性条件下进行决策，每一种可能的效益值都与相应的概率有关。决策的成败取决于决策者的科学素养包括直观判断、逻辑推理和经验分析能力，同时亦依赖于所遵循的决策准则。所谓最佳决策对于不同的决策者和不同的时间可能是不一样的。

决策者面临各种可能发生的天然状态，对天然状态可能产生的概率可以作出各种估计，然后决策者可以采取一些决策(方案)来对付可能发生的情况。每一种天然状态和方案的组合有一定的

效益值$u(\theta_j,a_i)$，这样就可以构成一个支付矩阵，如表9-4所示。表中的效益值都是相对值，是相对于组合(θ_1,a_i)的效益，正值表示得利，负值表示损失。

支付矩阵　　表 9-4

a_i \ θ_j	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	0	600	1000
a_2	200	400	200
a_3	-400	400	1000
a_4	1000	-1000	1400

根据决策树或支付矩阵的数据，选择不同的决策准则，就可以得出最佳的决策方案。

概括起来有五种不同的决策准则。

1.最大最大准则，又称为大中取大准则或乐观准则。这是赫维兹（Hurwicz）提倡的，他基于对自然状态作最乐观的估计，认为应当选取最大得利的方案。这当然要冒很大的风险，如果事与愿违，就可能损失惨重。

如对于表9-4所示的三种可能的状态和四种可能方案的支付矩阵。根据乐观准则来决策时，选择每一个方案中得到最大的值，a_1方案的最大得利为1,000，a_2方案为400，a_3方案为1000，a_4方案为1,400，然后从这四个最大值中选取最大值为1,400的方案a_4。如果是θ_3状态发生，a_4方案当然可以得利1,400，但如发生的状态是θ_2而不是θ_3，将会1,000。所以说，这种准则是一种冒险的方针。

2.最大最小准则，又称小中取大准则或悲观准则。这是悲观主义者沃尔德（Wald）提出的。他对大自然的估计总是最悲观的，凡事作最保守的估计，因此对每一种方案只敢取最小的得利。当然，人们总是在不利的条件下去寻找最好的结果，也就是

努力从最坏中去追求较好的后果。按这个准则，先选择每个方案的最小得利，a_1方案为零，a_2方案为200，a_3方案为－400，a_4方案为－1000，在这四个最小得利中200为最大值，因此取a_2方案。这是一种稳妥的，冒险性最小的方针。

3.最小最大准则，又称为大中取小准则或后悔准则。这是萨维奇（Savage）提出的。他认为处事以憾事最小为原则，因为在作出决策后总会与实际情况有一些出入，问题在于出入有多大。如果出入很小，当然感到高兴；如出入很大，遭到损失就会感到后悔。将这种后悔的程度定量化就是由后悔指数构成的后悔矩阵。我们仍以表9-4为例，在θ_1列中，最大得利是a_4方案的1000，如果选择a_4而碰上θ_1当然一点不后悔，就取后悔指数1000－1000＝0；如果不幸选择了a_1方案而碰上θ_1，这时得利为零，其后悔指数为1000－0＝1000；更为糟糕的是选择a_3方案而碰上θ_1，此时非但不能得利反而要损失400，故其后悔指数为1000－(－400)＝1400。由此可见，所谓后悔指数是按列计算的，每一组合的后悔指数等于支付矩阵中本列的最大效益值减去这一组合的效益值。设后悔指数为$R_e(\theta_j, a_i)$，则$j=j_0$列的后悔指数

$$R_e(\theta_{j_0}, a_i) = \mathrm{Max}u(\theta_{j_0}, a_i) - u(\theta_{j_0}, a_i) \qquad (9\text{-}54)$$

对于其它列，也可以用同样方法计算每个组合的后悔指数，列在如表9-5所示的后悔矩阵中。根据后悔矩阵决策时，写出每一方案的最大后悔指数之后，从中选取最小值的方案。由于最小后悔指数是1000，选取相应的方案a_1。

后悔矩阵　　表9-5

a_i \ θ_j	θ_1	θ_2	θ_3	最大后悔
a_1	1000	0	400	1000←最小值
a_2	800	200	1200	1200
a_3	1400	200	400	1400
a_4	0	1600	0	1600

4.期望值准则。由于乐观准则过分地估计了自然状态，有时会出现事与愿违的情况。为了减少盲目性，提出了乐观系数的概念，在岩土工程中，对状态估计的乐观系数是根据野外勘探、原位试验及室内试验的数据及其可靠性来选择的。例如，对于软弱透镜这种自然状态的概率估计，如在许多钻孔中都没有发现，就可给以较小的乐观系数；如在较多的钻孔中发现了，就应当给以较高的乐观系数。总之，乐观系数是工程师根据他自己的经验和勘探资料，给各种状态出现的概率作一经验估计。假如给每个状态的乐观系数为p_j，每个状态的效益值为$u(\theta_j, a_i)$，则对方案a_i的效益期望值

$$E(a_i)=\sum_{j=1}^{n} p_j u(\theta_j, a_i)$$

对表9-4各个状态的乐观系数如取为

$p_1=0.60$，$p_2=0.10$，$p_3=0.30$

乐观系数构成了一个概率向量。各个方案的效益期望值分别为

$E(a_1)=0\times 0.60+600\times 0.10+1000\times 0.30=360$

$E(a_2)=220$

$E(a_3)=100$

$E(a_4)=920$

然后按最大的效益期望值920取方案a_4。

5.状态等概准则。当决策者没有理由相信某种状态比另一种状态更有希望出现时，一般的信念和惯例是假设各种状态具有同等的可能性，这相当于对每一种状态都取乐观系数为$\frac{1}{n}$，n为状态数目。对于表9-4的支付矩阵，按等概准则求得的效益期望值为

$$E(a_1)=0\times\frac{1}{3}+600\times\frac{1}{3}+1000\times\frac{1}{3}=533$$

$E(a_2)=267$

$E(a_3)=333$

$E(a_4)=467$

因而选择最大效益期望值的方案a_1。

【例】

一个结构物拟建在粘性土层上，粘性土层下面有一层在地震时可能发生液化的饱和砂层。在砂层内的临界点上，设计基准期内的最大地震荷载$S=N$（100，40）。R为砂土抗液化能力$R=(1+0.34d)X$

式中X为砂土抗液化参数N（150，50）；

d为地下水位。

如果$S>R$就发生液化。

为了增加砂土抗液化能力，降低地下水位是一种方案，降水费用与地下水位d的平方成正比，降水费用为

$C_1=0.1076d^2$　　（以百万元计）

如果发生了液化，液化所造成的损失为5百万元。

a.如采用降低地下水位方案，降到多少深度最为适宜

水位降得越低，土层抗液化能力越强，从而降低了地震时液化的风险，但相应的降水费用很快地增长。取降水费用和液化时期望损失之和最小为条件来选择最适宜的降水深度。

对于给定的d值，R的平均值和标准差由下式求得：

$\overline{R}=(1+0.34d)\overline{X}=150(1+0.34d)$

$\hat{\sigma}_R=(1+0.34d)\ \hat{\sigma}_X=50(1+0.34d)$

假定R和S在统计上是独立的，则发生液化的概率为

$$P(S>R)=P(R-S<)=\frac{1}{2}-\psi\left[\frac{\overline{R}-\overline{S}}{\sqrt{\hat{\sigma}_R^2+\hat{\sigma}_S^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}-\psi\left[\frac{100-150(1+0.34d)}{\sqrt{1600+2500(1+0.34d)}}\right]$$

代入总期望造价公式

$$C_T=0.1076d^2+5\left\{\frac{1}{2}-\psi\left[\frac{100-150(1+0.34d)}{\sqrt{1600+2500(1+0.34d)}}\right]\right\}$$

计算结果示于表9-6

从表9-6 可见，当$d=1.20$m时，总期望造价C_T值最小。因

此，1.20m将是最适宜的深度。

地下水位与总期望造价的关系　　表 9-6

d	C_1	液化期望损失	C_T
0	0	1.09	1.09
0.60	0.04	0.67	0.71
0.90	0.09	0.54	0.63
1.20	0.15	0.44	0.59
1.50	0.24	0.36	0.60
1.80	0.35	0.29	0.64

b.如周围环境不容许降低地下水位，则可选用置换粗粒料的办法来提高抗液化能力，置换费用为0.8百万元，问置换方案是否可取。

如不置换，$d = 0$，发生液化的概率为

$$P(S>R) = \frac{1}{2} - \psi\left[\frac{100-150}{\sqrt{1600+1500}}\right] = 0.218$$

在图9-19中给出判断置换方案是否可取的决策树

如选用不置换的方案，在发生液化的概率为 0.218 条件下，液化的期望效益为

$$0.218\times(-5) = -1.09$$

负值表示支出，即损失。此损失大于采用置换方案的费用 -0.8，因此可以认为置换方案是可取的，期望效益为0.29百万元

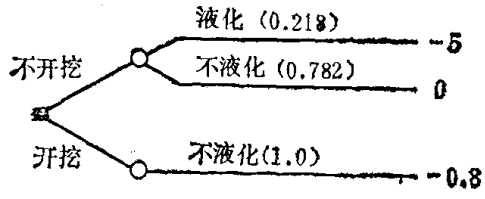


图 9-19　关于开挖问题的决策树

参 考 文 献

[1] Ржаницын, А. Р., Строительная Промышле-нность, Ио. 8, 1947.

[2] Freudenthal, A.M., "Safety and Probability of Structural Failure", Proc., ASCE, V.80, No.408, 563, 1954; V.81, No.664,765, 1955.

[3] Cornell, C.A., "A Normative Second-Moment Reliability Theory for Structural Design", Solid Mechanics Division, Univ.of Waterloo, Waterloo, Outario, Canada, 1969.

[4] Ang, A.H-S., Tang, W.T., "Probability Concepts in Engineering Planning and Design", Tohn Wiley & Sons, Inc, New York, V.1, 1975; V.2, 1984.

[5] 建筑结构安全性研究组，"建筑结构安全性理论的发展与应用"，《建筑结构学报》，1980年第1期。

[6] 中国建筑科学研究院建筑结构研究所规范研究室，"以概率论为基础的极限状态设计方法——我国《建筑结构设计统一标准》(初稿中若干概念问题"，《建筑结构学报》，1981年第4期。

[7] Casagrande, A. "Role of The Calculated Risk in Earthwork and Foundtation Engineering (The Terzaghi Lecture)", ASCE, Vol.91, SM4, 1956.

[8] Wu, T.H. & Kraft, L.M., "The Probability of Foundation Safety", ASCE, V.93, SM5, 1967.

[9] Wu, T.H., Kraft, L.M., "Safety Analysis of Slope", ASCE, V.96, SM2, 1970.

[10] Wu, T.H., "Uncertainty, Safety and Decision in Soil Engineering", ASCE, V.100, GT3, 1974,

[11] Wu, T.H., Thayer, W.B., Lin, S.S., "Stability of Embankment on Clay", ASCE, V.101, GT9, 1975.

[12] Lumb, P., "Application of Statistics in Soil Mechani-

cs", Soil Mechanics:New Horizons.I.K.Lee ed, Newnes-Butterworth,1974.

[13] Lumb, P., "Variability of Natural Soil",Canadian Geotechnical Journal, V.3, No.2, 1966.

[14] Lumb, P., "Safety Factors and The probability Distribution of Soil Strength", Ganadian Geotechnical Journal, V.7 No.3, 1970.

[15] Vanmarcke, E.E., "Probabilistic Modeling of Soil Profiles", ASCE, V.103, GT11, 1977.

[16] Vanmarcke, E.E., "Reliability of Earth Slopes", ASCE, V.103, GT11, 1977

[17] Vanmarcke, E.E., "Probabilistic Stability Analysis of Earth Slopes" Engineering Geology,V.16, 1980.

[18] Ingles, O.G., "Statistics, Probability and Trends", Myers Medal Lecture in Design and Construction of Flexible Paremements", Unisearch, 2, AI-30, 1978.

[19] Ingles, O.G., "Human Factors and Error in Civil Engineering", Pro.3rd Int, Conf. Applications of Stats.and Prob. in Soil and Struct.Engg.V.3.

[20] Harr, M.E., "Mechanics of Particulate Media:A Probabilistic Approach", McGraw Hill New York, 1977.

[21] 刘宏梅，"关于可靠性方法的现状及其可行性"，《概率论与统计学在岩土工程中的应用》专题学术座谈会专辑，1983年。

[22] 高大钊、魏道垛，"试论概率方法在岩土工程中的作用与地位"，《概率论与统计学在岩土工程中的应用》专题学术座谈会专辑，1983年。

[23] 高大钊，"岩土工程的可靠性分析"，《岩土工程学报》，1983年第3期、第4期，1984年第1期。

[24] 包承纲，"土工中的可靠性设计问题"，《人民长江》1984年第1期。

[25] 盛崇文，"用概率方法预报砂性土地基的沉降"，《岩土工程学报》1982年第1期。

[26] 包承纲，"多层地基沉降的概率分析"，《第四届土力学及基础工程学术会议论文选集》，1986年，中国建筑工业出版社。

[27] 熊兴邦、高大钊，"关于低塑性土地基承载力表的修订"，建筑科学研究报告，1985,No2-1。

[28] 高大钊，"地基土力学性质指标的可靠性分析与取值"，《同济大学学报》，1985年，第4期。

[29] 高大钊，“岩土参数的变异性及分布拟合”，《岩土力学参数的分析与解释讨论会文集》，1986年。

[30] 何信芳、熊兴邦、陈林，“运用统计数学研究膨胀土含水量的最小值”，《岩土力学参数的分析与解释讨论会文集》，1986年。

[31] 林秉俊，“散粒体中颗粒移动概率及渗透破坏概率分析”，《概率论与统计学在岩土工程中的应用》专题学术座谈会专辑，1983年。

[32] 高大钊，“静力触探试验结果的可靠性分析”，《工程勘察》，1981年第2期。

[33] 熊兴邦，“摩尔圆包线参数的计算与其误差分析”，《工程勘察》，1981年第6期。

[34] 高大钊，“岩土测试中经验公式的误差估计”，《工程勘察》，1982年第3期。

[35] Gao Dazhao, wei Daoduo, Hu Zhongxiong, “Geotechnical Properties of Shanghai Soil,” Proceedings of Shanghai Symposium on Marine Geotechnology and Nearshore/ offshore Structures, Nov., 1-4 1983.

[36] 包承纲，“贝叶斯定理及其在三峡工程中的应用”，《人民长江》，1985年第1期。

[37] 高大钊、魏道垛，“上海软土工程性质的概率统计特征”，《第四届土力学及基础工程学术会议论文选集》，1986年，中国建筑工业出版社。

[38] 高大钊，“土的抗剪强度指标的统计方法”，《工程勘察》，1986年第4期。

[39] 陈忠汉、高大钊，“用多参数最优解法求桩侧分层土极限摩阻力”，《工程勘察》1988年第5期。

[40] 俞调梅、高大钊、曹名葆，“关于岩土工程及其专业人材培养的几个问题”，《石油建筑设计》，1982年第2期。

[41] Hynes, M.E., Vanmarcke, E.H., “Subjective Reliability Assessment in Geotechnical Engineering”,1-95 Embankment Case Study, MIT Department of Civil Engineering Research Report R75-42, 1975.

[42] Peck, R.B., “Advantages and Limitations of Observational Method in Applied Soil Mechanics” Geotechniqu, Vol.19, No.2, 1969.

[43] 俞调梅，“国际土协土力学讨论会及执行委员会(1979年)情况介绍”，《软土地基学术讨论会论文选集》，1980年。

[44] Hachich, W., Vanmarcke, E.H., “probabilistic Upda-

ting of Pore Pressure Fields", ASCE, V.109, GT3, 1983.

[45] Matsuo, M., Kawamuka, K., A Design Method of Deep Excavation in Cohesive Soil Based on the Reliability Theory", Soil and Foundations, V.21, No.1, 1980.

[46] Lee I.K., White W., Ingles O.G., Geotechnical Engineering, 1983.

[47] Athanasiou-Grivas, D., "Joint Distribution of the Components of Soil Strength", Proceedings 3rd International Conference of Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1979.

[48] Tang, W. H. "Probabilistic Evaluation of Loads", ASCE Vol.107 GT3, 1981.

[49] Lumb.R., "Statistics of Natural Disasters in Hong Kong, 1884-1976, " Proceedings 3rd International Conference of Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1979.

[50] Miura, Y., Fujita, A., "Natural Enviroment and Bearing Capacity of Subgrade Soil Correlation Analysis of Factors, Underground Factors and Bearing Capacity", Proceedings 3rd International Conference of Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1979.

[51] 何信芳、陈林，"膨胀土湿度系数及其在工程中的应用"，《第四届土力学及基础工程学术会议论文选集》，1986年，中国建筑工业出版社。

[52] Meyerhof, G.G., "Limit State Design in Gectechnical Engineering" Structure Safety, Vol.1, No.1, 1982.

[53] Meyerhof, G.G., "Partial and Total Safety Factors", Proceedings 9th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Vol.3, 1977.

[54] Bowles, J.E., "Foundation Analysis and Design", Second Edition, McGraw Hill Book Company, 1977.

[55] Smith, G.N., "Probability Theory in Geotechnics-An Introduction", Ground Engineering, October, 1981.

[56] Athanaiou-Grivas, D., "Reliability Analysis of Retaining Structures", Proceedings 3rd International Conference of Applications of Probability in Soil ang Stru-

ctural Engineering", 1979.

[57] Gussmann, P., "Probabilistic Theory and Kinematical Element Method", Proceedings 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Vol.2, 1985.

[58] Wong, F.S., "Slope Reliability and Response Surface Method ", ASCE, Vol.111, GT1, 1985.

[59] Chowdhury, R.N., "Successive Failures-A Probabilistic Approach", Proceedings 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Vol.2, 1985.

[60] Chowdhury, R.N., "Probabilistic Model of Progressive Failure of Slope", ASCE, Vol.108, GT6, 1982.

[61] Calle, E.O.F., Probabilistic Analysis of Stability of Earth Slope", Proceedings 11th International Conference on Soil Mechanics and Foundations Engineering, Vol.2, 1985.

[62] D' Andrea, R.A., "Safety Factors for Probabilistic Slope Design", ASCE, Vol.108, GT9, 1982.

[63] Lumb, P., "Natural Disasters Involving Slope Failure", 1979.

[64] Simpson, B., Pappin, J.W., Croft, D.D., "An Approach to Limit State Calculations in Geotechnics", Ground Engineering, September, 1981.

[65] 阎澍旺、陈环，"倾斜荷载作用下地基承载力的可靠性分析"，《水利学报》1988年第4期。

[66] Chang, C.S., "A Probabilistic Approach to Consolidation Analysis", Proceedings of 3rd Interational Conference of Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, 1979.

[67] Chang, C.S., "Uncertainty of One-Dimensional Consolidation Analysis", ASCE, Vol.111, GT12, 1985.

[68] Hoeg, K.and Murarka, R.P., "Probabilistic Analysis and Desige of a Retaining Wall", ASCE, Vol, 100, GT. 3, 1974.

[69] 工业与民用建筑地基基础设计规范，TJ7-74，1974，北京，中国建筑工业出版社。