$$Z_k=AW^{-k}, \qquad (k=0,1,2,\ldots,M-1) \tag{2.17}$$

式（2.17）中，M 为采样点的总数，A 为起始点位置，这个位置可以进一步用它的半径 A_c 及相角 θ_o 来表示 $A=A_0e^{j\theta_o}$；参数 W 可表示为 $W=W_0e^{-j\phi_0}$.

假定 x(n)是长度为 N 的有限长信号序列，则其 Chirp-z 变换在采样点 Z_k 上的值为：

$$X(z_k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)z_k^{-n}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)A^{-n}W^{nk} \qquad (k=0,1,2,\ldots,M-1) \tag{2.18}$$

考虑到 nk 可以用以下表达式来替换：

$$nk=(k^2+n^2-(k-n)^2)/2 \tag{2.19}$$

则式（2.19）可写成：

$$X(z_k)=W^{kk/2}\sum_{n=0}x(n)A^{-n}W^{n^2/2}W^{(k-n)(k-n)/2} \tag{2.20}$$

式（2.20）说明，如果我们对信号 x(n)先进行一次加权处理，加权系数为 $A^{-n}W^{nn/2}$，然后通过一个单位冲激响应 h(n)为 $W^{n^2/2}$ 的线性系统，最后，对该系统的前 M 点输出再作一次 $W^{-nn/2}$ 的加权，这样就得到全部 M 点螺旋线采样值。

Chirp-z 变换通过它特别的信号处理方式可以获得我们感兴趣范围内螺旋线上的采样值。

2.3.3 数字滤波器综合

数字滤波器，顾名思意，其作用是对输入信号起到滤波的作用，并产生输出信号。它可以在频率域或时间域进行。数字滤波器的种类很多，分类方法也不同。但总的来说，数字滤波器可分为两大类，即经典数字滤波器和现代滤波器。本文主要介绍经典数字滤波器，经典数字滤波器是假定输入信号 x(n)中的有用成分和希望去除的成分各自占有不同的频带。经典滤波器从功能上总的可分为四种，即低通（LP）、高通（HP）、带通（BP）、带租（BS）滤波器。在实际工作中，我们设计出的滤波器都是在某些标准下对理想数字滤波器的近似，但这保证了滤波器是物理可实现的，且是稳定的。

对数字滤波器，从实现方法上，有无限冲激响应（IIR）滤波器和有限冲激响应（FIR）滤波器之分，IIR 滤波器的优点是可用较低的阶数获的好的频率响应，FIR 滤波器的优点是严格的线性相位特征。本文主要介绍有限冲激响应（FIR）滤波器

无限冲激响应滤波器及设计

L 阶无限冲激响应滤波器的转移函数为：

$$H(z)=\frac{A(z)}{B(z)}=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\cdots+b_lz^{-l}}{a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_lz^{-l}} \tag{2.21}$$

它对应的差分方程为：

$$y(k)=\sum_{n=0}^{l}b(n)x(k-n)-\sum_{n=1}^{l}a(n)y(k-n) \tag{2.22}$$

对于 IIR 滤波器的设计，目前大致为成从模拟滤波器设计和用最优化设计。

有限冲激响应滤波器及设计

L 阶有限冲激响应滤波器的转移函数为：

$$H(z)=B(z)=b_0+b_1z^{-1}+\cdots b_lz^{-l} \tag{2.23}$$

它对应的差分方程为：

$$y(k)=\sum_{n=0}^{l}b(n)x(k-n) \tag{2.24}$$

FIR 滤波器的设计方法主要有窗口法和等纹波逼近法。为了使设计的 FIR 滤波器满足线性相位的条件，滤波器的系数必须是对称的，也就是说：

$$b(n)=b(L-n),0\leqslant n\leqslant\frac{l}{2} \tag{2.25}$$

理想低通滤波器的傅立叶变换为：

$$H_d(e^{j\omega})=\begin{cases}e^{-j\omega L/2} & 0\leqslant|\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & \omega_c<|\omega|\leqslant\pi\end{cases} \tag{2.26}$$

这里的 ω_c 定义为归一化的数字滤波器的截止频率，单位为弧度。L/2 的延

迟是为了满足因果性。对式（4）取逆傅立叶变换，可得滤波器的理想冲激响应 $h_d(n)$

$$h_d(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{\pi}H_d(e^{j\omega})e^{j\omega}d_{\omega} \tag{2.27}$$

进一步计算得：

$$h_d(n)=\frac{\sin[\omega_c(n-L/2)]}{\pi(n-L/2)} \tag{2.28}$$

在式（2.28）中的冲激响应为无限长序列，我们对该响应进行截断得：

$$h(n)=\begin{cases} h_d(n) & 0\leqslant n\leqslant L \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{2.29}$$

式 7 也可以看成是两个序列的乘积，即

$$h(n)=h_d(n)w_R(n) \tag{2.30}$$

$w_R(n)$为矩形窗函数

$$w_R(n)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant n\leqslant L \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{2.31}$$

进一步我们可得包含窗函数的低通有限冲激响应滤波器的设计方法

$$b_{(n)}=h(n)=h_d(n)w(n), \qquad 0\leqslant n\leqslant L \tag{2.32}$$

用类似的方法可得到其它类型滤波器的设计方法。