维普资讯 http://www.cqvip.com

应用数学和力学，第13卷第12期（1992年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重庆出版社出版

⑥ 桩侧摩阻力对打入桩定向稳定性的影响*

1097-1102 TU473.1

沈锡英　高大钊

（上海 同济大学地下建筑与工程系，1991年11月9日收到）

摘　要

在本文中，把打桩时桩顶的锤击力作为一种周期荷载而导得Mathieu方程。从该方程的稳定界限，我们可求得桩的临界长度，也讨论了桩侧摩阻力对定向稳定性的影响。

关键词 桩　桩侧摩阻力　定向稳定性　Mathieu方程　临界长度

一、引　言

许多结构物需用桩来承载，因此承载桩的功能是把荷载从作用点传递到某些适当的下卧承载层。同时桩在传递荷载时必须保证不产生过大的沉降。然而较长的打入桩或压入桩在贯入时可能偏离直线路径，在本世纪30年代就已经发现桩不沿直线贯入的问题[1]。很显然弯桩的承载能力必大大降低。上述的现象类似于压杆失稳，在本质上是桩—土系统的不稳定，通常称为桩的定向不稳定。但是许多研究者只是关心弯桩的承载能力而不是桩被打弯的原因。而且以前所有研究者（例如[2]，[3]）仅研究过压入桩的定向稳定性而没有研究过打入桩的定向稳定性。

在本文中，我们讨论打入桩的定向稳定性。设桩顶的锤击力是一个周期荷载后导得了Mathieu方程，把桩的定向不稳定性归纳为参数激振。因为打桩时作用在桩上的阻力主要是桩侧摩阻力[3]，所以我们着重分析剪应力对定向稳定性的影响，临界长度可以从Mathieu方程的稳定界限来求得。对于砂土或软粘土，我们详细导得了用显式表达的这些结果，这对于工程技术人员来说是便于使用的。

二、控　制　方　程

如图1所示，把一根直桩打入地基土时，到达某一贯入深度该桩可能在一铅垂平面内弯曲。我们考虑弯桩上一个微段的平衡方程，设$y=y(x,\ t)$为桩的挠曲线，可得[4]

$$-\tilde{\sigma}-\left[P_0+Wx-\int_0^x\tilde{\tau}dx\right]y''-EIy^{(4)}=\frac{W}{g}\ddot{y} \tag{2.1}$$

* 徐次达推荐。

其中$\tilde{\sigma}$是桩的法向土反力，$\tilde{\tau}$是桩侧剪力，W是桩的单位长度的重量，EI是桩的弯曲刚度，P_0是桩顶的锤击力，“′”表示对x的导数，“·”表示对t的导数。

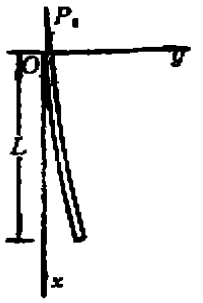


图1 分析模型

在此我们取

$$P_0=\tilde{P}(1-\cos\omega t)$$

参照[3]，$\tilde{\sigma}$和$\tilde{\tau}$分别取为

$$\tilde{\sigma}=\begin{cases}K_\sigma y & \text{(硬粘土)}\\ K_\sigma xy & \text{(砂或软粘土)}\end{cases}$$

和

$$\tilde{\tau}=\begin{cases}K_\tau & \text{(硬粘土)}\\ K_\tau x & \text{(砂或软粘土)}\end{cases}$$

本文仅讨论砂或软粘土的情况，所以方程(2.1)化为

$$-K_\sigma xy-\left[\tilde{P}(1-\cos\omega t)+Wx-\frac{1}{2}K_\tau x^2\right]y''-EIy^{(4)}=\frac{W}{g}\ddot{y} \tag{2.2}$$

边界条件为在桩顶处夹支和在桩尖处自由，故

$$y(0,t)=y'(0,t)=0,\quad y''(L,t)=y'''(L,t)=0 \tag{2.3}$$

其中L为桩长。

三、Mathieu方程

我们把未知函数$y(x,t)$展开为

$$y(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}f_m(t)\varphi_m(x) \tag{3.1}$$

其中$\varphi_m(x)$是本征函数，满足

$$d^4\varphi_m/dx^4=\lambda_m^4\varphi_m \tag{3.2}$$

和

$$\varphi_m(0)=\varphi_m'(0)=0,\quad \varphi_m''(L)=\varphi_m'''(L)=0 \tag{3.3}$$

于是由(3.2)和(3.3)，λ_m必须满足

$$\cos\lambda_m L\cdot\cosh\lambda_m L=-1 \tag{3.4}$$

而$\varphi_m(x)$为

$$\begin{aligned}\varphi_m(x)=&(\cos\lambda_m L+\cosh\lambda_m L)(\cos\lambda_m x-\cosh\lambda_m x)\\&+(\sin\lambda_m L-\sinh\lambda_m L)(\sin\lambda_m x-\sinh\lambda_m x)\end{aligned} \tag{3.5}$$

用$\varphi_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$乘方程(2.2)的两边，再关于x从0到L积分，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\Big\{&\frac{W}{g}\ddot{f}_m\int_0^L\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx+K_\sigma f_m\int_0^L x\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx\\&+\tilde{P}(1-\cos\omega t)f_m\int_0^L\varphi_n(x)\varphi_m''(x)dx+Wf_m\int_0^L x\varphi_n(x)\varphi_m''(x)dx\\&-\frac{1}{2}K_\tau f_m\int_0^L x^2\varphi_n(x)\varphi_m''(x)dx+EIf_m\lambda_m^4\int_0^L\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx\Big\}=0\end{aligned}$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{3.6}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

按Blevent的做法[5]，为简单起见我们仅取(3.1)中的第一项．与Omar的方法相比，我们的方法有一个好处，即不必使用数值方法求解常微分方程的本征值问题，但能求得临界贯入长度的显式表达式．这样，(3.6)可简化为

$$\frac{W}{g}f_1\int_0^L\varphi_1^2(x)dx+K_\sigma f_1\int_0^L x\varphi_1^2(x)dx+\tilde{P}(1-\cos\omega t)f_1\int_0^L\varphi_1(x)\varphi_1''(x)dx$$
$$+Wf_1\int_0^L x\varphi_1(x)\varphi_1''(x)dx-\frac{1}{2}K_\tau f_1\int_0^L x^2\varphi_1(x)\varphi_1''(x)dx+EIf_1\lambda_1^4\int_0^L\varphi_1^2(x\ dx=0 \tag{3.7}$$

分别用$I_i(i=1,2,3,4,5)$来记(3.7 中的前五个积分．方程(3.5)化为

$$\varphi_1(x)=A(\cos\lambda_1x-\cosh\lambda_1x)+B(\sin\lambda_1x-\sinh\lambda_1x)$$

其中 $A=\cos d+\cosh d,\qquad B=\sin d-\sinh d$

而 $d=\lambda_1L$

在积分后，可有

$$I_1=\frac{1}{4\lambda_1}A^2[4d+\sin2d+\sinh2d-4(\cos d\sinh d+\sin d\cosh d)]$$
$$+\frac{1}{2\lambda_1}AB[\cos2d+\cosh2d-4d-4\sin d\sinh d]$$
$$+\frac{1}{4\lambda_1}B^2[\sinh2d-\sin2d+4(\cos d\sinh d-\sin d\cosh d)]$$

$$I_2=\frac{1}{8\lambda_1^2}A^2[4d^2+2d\sin2d+\cos2d+2d\sinh2d-\cosh2d$$
$$-8(d\cos d\sinh d+d\sin d\cosh d-\sin d\sinh d)]$$
$$+\frac{1}{4\lambda_1^2}AB[-2d\cos2d+\sin2d+2d\cosh2d-\sinh2d$$
$$-4(2d\sin d\sinh d+\cos d\sinh d-\sin d\cosh d)]$$
$$+\frac{1}{8\lambda_1^2}B^2[2d\sinh2d-\cosh2d-2d\sin2d-\cos2d$$
$$-8(d\sin d\cosh d-d\cos d\sinh d+\cos d\cosh d)]$$

$$I_3=-\frac{\lambda_1}{4}A^2(\sin2d-\sinh2d)-\frac{\lambda_1}{2}AB(2-\cos2d-\cosh2d)$$
$$-\frac{\lambda_1}{4}B^2(4d-\sin2d-\sinh2d)$$

$$I_4=-\frac{1}{8}A^2(2d\sin2d+\cos2d-2d\sinh2d-\cosh2d-2)$$
$$-\frac{1}{4}AB(-2d\cos2d+\sin2d-2d\cosh2d+\sinh2d)$$
$$+\frac{1}{8}B^2(2d\sin2d+\cos2d+2d\sinh2d-\cosh2d)-\frac{1}{2}B^2d^2$$

$$I_5=-\frac{1}{8\lambda_1}A^2[2d^2(\sin2d-\sinh2d)+2d(\cos2d+\cosh2d)-\sin2d-\sinh2d]$$

$$-\frac{1}{4\lambda_1}AB[-2d^2(\cos 2d+\cosh 2d)+2d(\sin 2d+\sinh 2d)+\cos 2d-\cosh 2d]$$

$$-\frac{1}{3\lambda_1}B^2d^3+\frac{1}{8\lambda_1}B^2[2d^2(\sin 2d+\sinh 2d)+2d(\cos 2d-\cosh 2d)-\sin 2d+\sinh 2d]$$

引进无量纲参数

$$\bar{I}_1=\frac{I_1}{L},\quad \bar{I}_2=\frac{I_2}{L^2},\quad \bar{I}_3=I_3L,\quad \bar{I}_4=I_4,\quad \bar{I}_5=\frac{I_5}{L}$$

后，方程(3.7)化为

$$f_1^{**}+(\lambda-\epsilon\cos 2\tau)f_1=0 \tag{3.8}$$

在此“ * ”表示对τ的导数，而$\tau=\omega t/2$。此外

$$\epsilon=4\tilde{P}\bar{I}_3g/\omega^2L^2\bar{I}_1W \tag{3.9}$$

$$\lambda=\frac{4g}{\omega^2W}\left(\frac{EId^4}{L^4}+\frac{K_\sigma L\bar{I}_2}{\bar{I}_1}+\frac{\tilde{P}\bar{I}_3}{L^2\bar{I}_1}+\frac{W\bar{I}_4}{L\bar{I}_1}-\frac{K_\tau\bar{I}_5}{2L\bar{I}_1}\right) \tag{3.10}$$

方程(3.8)为标准的Mathieu方程，可用来讨论打入桩的参数激振。

四、临 界 长 度

当$\epsilon\ll 1$时，很容易使用摄动方法求得(3.8)的稳定界限[8]。例如，如只保留ϵ项而忽略$O(\epsilon^2)$项，则在$\lambda=1$附近的稳定界限为

$$\lambda=1\pm\epsilon/2$$

参照图2，$\lambda>1+\epsilon/2$是$\lambda\epsilon$平面上的稳定区域。把(3.9)和(3.10)两式代入上述的不等式，则稳定条件可记为

$$\frac{4g}{\omega^2W}\left(\frac{EId^4}{L^4}+\frac{K_\sigma L\bar{I}_2}{\bar{I}_1}+\frac{\tilde{P}\bar{I}_3}{2L^2\bar{I}_1}+\frac{W\bar{I}_4}{L\bar{I}_1}-\frac{K_\tau\bar{I}_5}{2L\bar{I}_1}\right)-1>0 \tag{4.1}$$

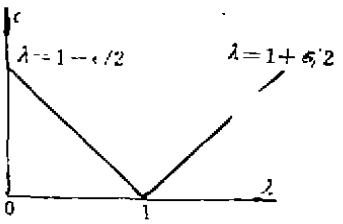


图2 稳定界限

现在我们讨论桩侧摩阻力对定向稳定性的影响，即只保留不等式(4.1)的括号中的第一项和第五项，可有

$$\frac{4gEId^4}{\omega^2WL^4}-\frac{2gK_\tau\bar{I}_5}{\omega^2WL\bar{I}_1}-1>0 \tag{4.2}$$

或

$$\frac{4gEId^4}{L^4W}-\frac{2gK_\tau\bar{I}_5}{L\bar{I}_1}-\omega^2W>0 \tag{4.3}$$

令

$$\frac{4gEId^4}{\omega^2WL^4}=\frac{1}{x^4}$$

或

$$L=L_0x \tag{4.4}$$

其中

$$L_0=\left(\frac{4gEId^4}{\omega^2W}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{4.5}$$

于是不等式(4.2)化为

$$F(x)=1/x^4-D/x-1>0$$

其中

$$D=\frac{2gK_\tau\bar{I}_5}{\omega^2W\bar{I}_1}\Big/L_0 \tag{4.6}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

对于给定的D，设x_D为$F(x)=0$的根，故

$$1/x_D^4-D/x_D-1=0 \tag{4.7}$$

当$x<x_D$时，$F(x)$是一个减函数，即

$$F(x)>F(x_D)=0 \qquad (x<x_D)$$

从(4.4)，可知临界长度L_c可取为

$$L_c=L_0\cdot x_D \tag{4.8}$$

我们用

$$x_D=1-0.177D^{\frac{1}{2}} \qquad (0<D<8)$$

来拟合$x_D\sim D$的关系式(4.7)。故(4.8)化为

$$L_c=L_0(1-0.177D^{\frac{1}{2}}) \tag{4.9}$$

利用(4.5)和(4.6)，(4.9)是临界长度L_c的显式表达式。当桩长L小于临界长度L_c时，桩尖不会偏离，即桩—土系统是稳定的。

现举一例，其中桩截面是正方形(0.45m×0.45m)。此外

$$E=1.95\times10^4\text{MPa}, \qquad W=5.06\text{kN/m}$$

$$\omega=1\text{Hz}, \qquad K_\tau=25\text{kPa}$$

计算得

$$\bar{I}_1=25.747, \qquad \bar{I}_5=66.235$$

这里$D=4.958$，故由(4.9)得

$$L_c=30.5\text{m}$$

五、结　论

利用本文的分析方法，对于砂土或软粘土可得结论如下：

(1) 桩侧摩阻力对定向稳定性的影响可用临界长度L_c的公式(4.9)来表示；

(2) 当弯曲刚度EI增加时，因为L_0增加和D减少故由(4.9)知L_c也增加；

(3) 当桩侧摩阻力系数K_τ增加时，由于D增加而使L_c减少。

所有上述结论都能得到合理的解释。

参 考 文 献

[1] Bjerrum, L., Norwegian experience with steel piles to rock, *Geotechnique*, 7 (1957), 73—96.

[2] Burgess, I.W., A note on the directional stability of driven piles, *Geotechnique*, 25 (1975), 413—416.

[3] Omar, R.M., Discussion: The stability of slender piles during driving(Burgess, I.W.), *Geotechnique*, 28, (1978), 234—239.

[4] Omar, R.M. and T.J. Poskitt, Directional stability of piles during driving, *Numerical Methods in Offshore Piling*, ICE, London (1980), 19—28.

[5] Blevent, R.D., *Flow-Induced Vibration*, New York, Reinhold, (1977), 291-297.

[6] Nayfeh, A.H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons (1981), 60—61.

维普资讯 http://www.cqvip.com

Effect of Skin Friction on the Directional Stability of Driven Piles during Driving

Shen Xi-ying Gao Da-zhao

(Geotechnical Engineering Department of Tongji University, Shanghai)

Abstract

In this paper, the driving forces at a pile top are considered as a periodic load during driving and the Mathieu equation is derived. From the stability charts of this equation, we can obtain the critical length of the pile, and the effect of skin friction upon the critical length is discussed.

Key words pile, skin friction, directional stability, Mathieu equation, critical length