接触面弹粘塑性本构关系研究

安关峰　　高大钊

（中国地质大学（武汉）工程学院）　　（同济大学）

摘　要　推导了三维接触面的弹粘塑性本构关系，并将其与普通单元耦合，研制了三维弹粘塑性有限元软件。以简单案例对有（无）接触面单元物体表面位移进行了对比。

关键词　弹粘塑性　三维接触面　有限元

中图分类号：TU433　　**文献标识码**：A

文章编号：1000-131X（2001）01-0088-04

1 引　　言

在土木工程中，常常会遇到土体与结构的相互作用问题，例如土体与基础、桩与土体、土体与挡土结构、土体与隧道、土体与防渗墙的相互作用。接触面的研究是土与结构相互作用的主要课题之一。它包括两个方面：一是接触面的本构关系，尤其是剪应力和剪切变形之间的关系；一是接触面单元，它是有限元计算中用以模拟接触面变形的一种特殊单元。接触面单元不同于普通的实体单元，它是一种能模拟接触面变形的特殊单元。目前以接触摩擦单元 、Goodman 单元、Desai 的薄层单元为代表。从实用效果看，Goodman 单元由于其概念清楚，应用简单，因而应用最广。这方面的具体理论可参阅相关文献，作者仅讨论 Goodman 单元中 16 节点的三维接触单元模型。

钱家欢教授认为接触面的相对位移与应力的关系，既非弹性、亦非塑性，而是粘弹塑性。但是在实际计算过程中采用三维粘弹塑性接触面本构关系并不多见（Desai 于 1984 年进行了三维接触面弹性本构关系的研究[1]），本文推导了三维粘弹塑性接触面本构关系，且与三维实体单元粘弹塑性本构关系耦合，研制了相应的软件。

2 接触单元刚度矩阵

考虑图 1 所示 16 节点三维接触单元，其局部坐标 $\xi\eta\zeta$ 与整体坐标的关系符合式（1·1）、（1·2），且单元厚度 $t\to 0$，也即上下层坐标完全一致。

$$x_i = \sum_{l=1}^{L} N_l(\xi,\eta)x_i^l \quad (i=1,2,3,\text{这里 } L=8) \tag{1·1}$$

其中插值函数取

$$N_i(\xi,\eta)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1) & \text{角节点}\\ \dfrac{1}{2}(1+\xi_i\xi+\eta_i\eta)(1-|\xi_i|\eta-|\eta_i|\xi)^2 & \text{边中点}\end{cases} \tag{1·2}$$

局部坐标采用 ζ、η、ξ，其 ζ 轴与接触单元上表面外法线方向一致，另两轴与弹性常数的方向性有关。以下推导中凡局部坐标 ζ、η、ξ 中的变量或矩阵均加“′”号。

令单元节点位移矢量为

$$\{\delta\} = [u_1\ v_1\ w_1\cdots u_{16}\ v_{16}\ w_{16}]^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{u}_{16}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}} \tag{1·3}$$

则有

$$u_{上} = N_1u_9 + N_2u_{10} + \cdots + N_8u_{16} \tag{1·4}$$

$$u_{下} = N_1u_1 + N_2u_2 + \cdots + N_8u_8 \tag{1·5}$$

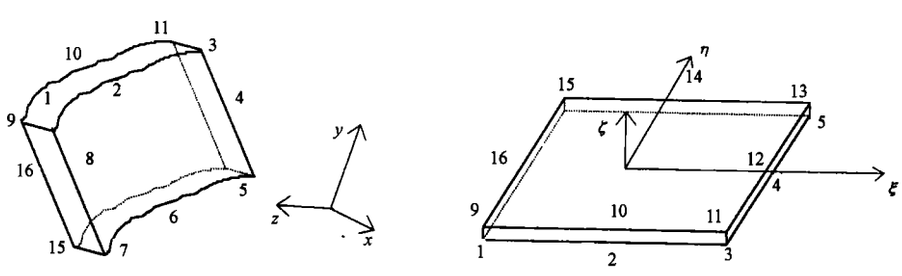


图 1　16 节点接触单元

收稿日期：1999-08-30

$v_{上}$、$v_{下}$、$w_{上}$、$w_{下}$ 类似。式中插值函数采用式（1·2）于是在局部坐标 ζ、η、ξ 中有

$$\boldsymbol{u}'_{上} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{上} \tag{1·6}$$

$$\boldsymbol{u}'_{下} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{u}_{下} \tag{1·7}$$

于是

$$\boldsymbol{\Delta u}' = \boldsymbol{u}'_{下} - \boldsymbol{u}'_{下} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{\Delta u} = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{u}_{上} - \boldsymbol{u}_{下}) = \boldsymbol{R}\boldsymbol{B}\{\delta^e\} \tag{1·8}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 为 3×3 的变换矩阵，而

$$B = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & \cdots & -N_8 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & \cdots & 0 & -N_8 & 0 & 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & \cdots & 0 & 0 & -N_8 & 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{1·9}$$

引入 Goodman 关于接触单元的弹性本构关系：

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{x'z'} &= k_s\Delta u' + \tau'^0_{x'z'} \\ \tau'_{x'y'} &= k_t\Delta v' + \tau'^0_{x'y'} \\ \sigma'_{z'} &= k_n\Delta w' + \sigma'^0_{z'} \end{aligned}\right\} \tag{1·10}$$

其中上标带“0”的为初始应力。上式可简写为

$$\{\sigma'\} = [\tau'_{x'z'}\ \tau'_{x'y'}\sigma'_{z'}]^T = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Delta u}' + \{\sigma'^0\} \tag{1·11}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 \\ 0 & k_t & 0 \\ 0 & 0 & k_n \end{bmatrix} \tag{1·12}$$

$$\{\sigma'^0\} = [\tau'^0_{x'z'}\ \tau'^0_{x'y'}\sigma'^0_{z'}]^T \tag{1·3}$$

记节点虚位移为 $\{\delta^{e*}\}$，则单元内点相应的虚位移为

$$\Delta\boldsymbol{u}'^* = \boldsymbol{B}\{\delta^{e*}\} \tag{1·14}$$

应用虚功原理，则有

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\int_{\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\{\varepsilon'^*\}^T\{\sigma'\}\mathrm{d}\zeta\right]|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \{\delta^{e*}\}^T\boldsymbol{F}^e = \{\delta^{e*}\}^T\boldsymbol{F}^e \tag{1·15}$$

其中

$$\boldsymbol{F}^e = [F_{1x}\quad F_{1y}\quad F_{1z}\cdots F_{16x}\quad F_{16y}\quad F_{16z}]^T \tag{1·16}$$

$$\{\varepsilon'^*\}^T = [\gamma'^*_{x'z'}\gamma'^*_{x'y'}\varepsilon'^*_{z'}] = \frac{1}{t}[\Delta\boldsymbol{u}'^*\Delta\boldsymbol{v}'^*\Delta\boldsymbol{w}'^*]$$

$$= \frac{1}{t}\boldsymbol{\Delta u}'^{*T} = \frac{1}{t}\{\delta^{e*}\}^T\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R}^T \tag{1·17}$$

将式（1·11）、（1·17）代入式（1·15）有

$$\{\delta^{e*}\}^T\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R}^T(\boldsymbol{DRB}\{\delta^e\} + \{\sigma'^0\})|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \{\delta^{e*}\}^T\boldsymbol{F}^e \tag{1·18}$$

由此即得

$$\boldsymbol{K}^e\{\delta^e\} + \boldsymbol{F}^e_0 = \boldsymbol{F}^e \tag{1·19}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^e = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{DRB}|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1·20}$$

$$\boldsymbol{F}^e_0 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{R}^T\{\sigma'^0\}|\boldsymbol{J}|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1·21}$$

3　接触面三维粘塑性本构关系

不考虑接触面初始应力 σ'_0，假定接触面的相对位移可分成弹性和粘塑性两部分：

$$\boldsymbol{\Delta u}' = \boldsymbol{\Delta u}'_e + \boldsymbol{\Delta u}'_{vp} \tag{1·22}$$

或

$$\begin{Bmatrix}\Delta u' \\ \Delta v' \\ \Delta w'\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\Delta u'_e \\ \Delta v'_e \\ \Delta w'_e\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\Delta u'_{vp} \\ \Delta v'_{vp} \\ \Delta w'_{vp}\end{Bmatrix} \tag{1·23}$$

3.1 接触面弹性位移

弹性位移可由式（1·10）得到：

$$\boldsymbol{\Delta u}'_e = [\boldsymbol{D}]^{-1}\{\boldsymbol{\sigma}\} \tag{1·24}$$

或

$$\begin{Bmatrix}\Delta u'_e \\ \Delta v'_e \\ \Delta w'_e\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}1/k_s & 0 & 0 \\ 0 & 1/k_l & 0 \\ 0 & 0 & 1/k_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_s \\ \tau_t \\ \sigma_n\end{Bmatrix} \tag{1·25}$$

3.2　接触面粘塑性位移

根据 Perzyna 的粘塑性理论假定接触面粘塑性位移速率可用下式表达：

$$\Delta\dot{u}'_{vp} = \begin{Bmatrix}\dot{u}'_{vp} \\ \dot{v}'_{vp} \\ \dot{w}'_{vp}\end{Bmatrix} = \gamma\langle\Phi(F/F_0)\rangle\frac{\partial Q}{\partial\sigma} \tag{1·26}$$

式中 $\langle\Phi(F/F_0)\rangle = \begin{cases}\Phi(F/F_0), F/F_0 > 0 \\ 0 \qquad\quad , F/F_0 \leqslant 0\end{cases}$ （1·27）

γ：流动参数可通过文献[2]中结构物与软土接触面流变试验得到

F：材料屈服函数

F_0：F 的参考值对 Mohr-Coulomb 屈服准则可取 $F_0 = c\cdot\cos\phi$[3]

Φ：定义粘塑性位移速率的函数

Q：塑性势函数采用相关联的塑性流动法则 $Q = F$，本文考虑到接触面的滑移屈服，故屈服函数采用 Mohr-Coulomb 屈服准则：

$$F = |\tau_s| - |c - \sigma_n\tan\phi| \tag{1·28}$$

定义粘塑性位移速率的函数 $\Phi(F/F_0)$ 取以下两种形式为：

1. $\Phi(F) = \exp(M\cdot(F - F_0)/F_0) - 1$ （1·29）

2. $\Phi(F) = ((F - F_0)/F_0)^N$ （1·30）

式中，M、N 为给定的常数，文献［3］研究了 1～3 范围的 M 和 N 对岩土材料的变形影响，结果表明 M、N 值对变形影响不大。故对岩土材料可取为 1.0。c：接触面内聚力，ϕ：接触面内摩擦角。

4 时间步长的选取

4.1 理论方法

Stolle 和 Higgins[4] 提出了下述时间步长确定准则

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{max} = 1/[\lambda'(H_E + H_P)] \quad (1\cdot31)$$

式中 $\lambda' = \dfrac{\partial(\gamma\langle\Phi(F/F_0)\rangle)}{\partial F} = \dfrac{\gamma\partial(\Phi(F/F_0))}{F_0\partial(F/F_0)}$ (1·32)

$$H_e = \left[\frac{\partial F}{\partial\sigma}\right][D]\left[\frac{\partial Q}{\partial\sigma}\right] \quad (1\cdot33)$$

H_P：粘塑性硬化系数

取粘塑性位移速率的函数类型 2，代入（1·32），求得 $\lambda' = \gamma/F_0$ (1·34)

考虑 s 切向并将式（1·34）和 $H_P = 0$ 代入（1·31）约简得到非硬化接触单元稳定条件

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{max} = F_0/(\gamma \cdot k_s) \quad (1\cdot35)$$

同理 t 方向有

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{max} = F_0/(\gamma \cdot k_t) \quad (1\cdot36)$$

亦同理法向有

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{max} = F_0/(\gamma \cdot k_n) \quad (1\cdot37)$$

综合法向和切向取最小值

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{max} = \min\left(\frac{F_0}{\gamma k_s}, \frac{F_0}{\gamma k_t}, \frac{F_0}{\gamma k_n}\right) \quad (1\cdot38)$$

4.2 物理方法

1 切向

考虑若粘塑性位移增量大于粘塑性阶段总的塑性位移，计算稳定会受到破坏，则为保持计算稳定，s 方向塑性位移增量应满足关系式

$$\Delta w_s^{vp} = \dot{w}_s^{vp} \cdot \Delta t < (|\tau_s| - |c - \sigma_n\tan\phi|)/K_s^{vp} \quad (1\cdot39)$$

式中：

$$\dot{w}_s^{vp} = \gamma(|\tau_s| - |c - \sigma_n\tan\phi|)/F_0 \quad (1\cdot40)$$

$$K_s^{vp} = p \cdot K_s \quad (1\cdot41)$$

所以为保持计算稳定有

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{min} = F_0/(\gamma \cdot p \cdot k_s) \quad (1\cdot42)$$

同理 t 方向也应满足

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{min} = F_0/(\gamma \cdot p \cdot k_t) \quad (1\cdot43)$$

2 法向

位移类似亦须满足

$$\Delta w_n^{vp} = \dot{w}_n^{vp} \cdot \Delta t < \sigma_n/K_n^{vp} \quad (1\cdot44)$$

式中：

$$\dot{w}_n^{vp} = \gamma \cdot \sigma_n/F_0 \quad (1\cdot45)$$

$$K_n^{vp} = p \cdot K_n \quad (1\cdot46)$$

故 $\Delta t \leqslant \Delta t_{min} = F_0/(\gamma \cdot p \cdot K_n)$ (1·47)

综合切向和法向时间步长限定，为保持计算整体稳定，取三者最小值

$$\Delta t \leqslant \Delta t_{min} = \min\left(\frac{F_0}{\gamma pK_s}, \frac{F_0}{\gamma PK_t}, \frac{F_0}{\gamma PK_n}\right) \quad (1\cdot48)$$

式（1·39）～（1·48）中参数的意义为：

F_0：F 的参数值，

γ：流动参数 $(\text{kPa}\cdot\text{dy})^{-1}$，其值常取自接触面流变实验；

P：刚度折减系数（$0 < P \leqslant 1$）；实际情况是 P 值不能确定，为安全起见 P 常取 1

K_s^{vp}：弹塑性状态切向刚度；K_n^{vp}：弹塑性状态法向刚度；

K_s，Kt：弹性状态接触面切向刚度（kN/m^3）；

K_n：弹性状态接触面法向刚度（kN/m^3）；

5 算 例

本文数值试验采用两个 20 节点实体单元和 1 个 16 节点的接触单元，单元编号和节点编号见图 2（边中点编号省略）为确保接触面的滑移，在接触面两侧施加不通荷载，左侧顶面施加的荷载 P = 10 kPa，右侧施加顶面荷载为左侧荷载的两倍。实体单元①③和接触面单元②的物理参数如下：

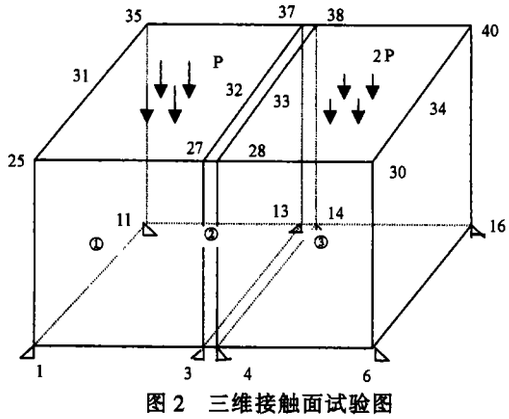


图 2 三维接触面试验图

实体单元①③参数：

$E = 3600$ kPa，$\mu = 0.25$，$\rho = 1.8$ kg/m³，$c = 15.2$ kPa，

$\Phi = 17.7°$，$\gamma = 0.00000001$ $(\text{kPa}\cdot\text{day})^{-1}$

接触面单元②参数：

$K_s = 700$ kN/m³，$K_t = 700$ kN/m³，$K_n = 5 \times 10^5$ kPa，

$\gamma = 0.000001\ (\mathrm{kPa\cdot d})^{-1}$，$c = 16\ \mathrm{kPa}$，$\Phi = 10^{\circ}$

通过计算得到有接触面单元顶面垂向位移曲面（图 3）。另外不计接触面单元得到单元顶面垂向位移曲面（图 4）。由两图对比可知，接触面单元的存在显著影响了顶面垂向位移面。

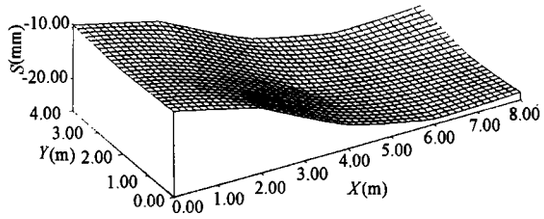


图 3　有接触面单元顶面瞬时垂向位移曲面

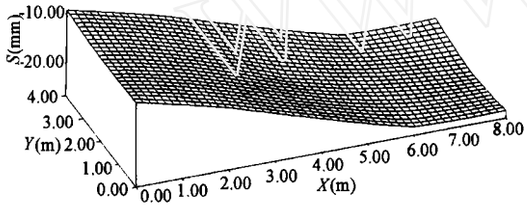


图 4　无接触面单元顶面瞬时垂向位移曲面

在有(无)接触面单元情况下，将顶面中点(点号 31,32,33,34)垂向位移沿 X 轴做成曲线进行对比(图 5)。由图 5 可见接触面沿垂向位移存在阶跃，而无接触面时垂向位移是连续的。这一结果与文献[1]计算结果基本一致，证明本文所提出接触面粘弹塑性本构关系是合理、有效的。图 6 是有接触面单元顶面中心线顶面垂向位移曲线随时间变化情况。图 6 显示随时间的增长接触面垂向位移逐渐增大，最终趋于稳定。

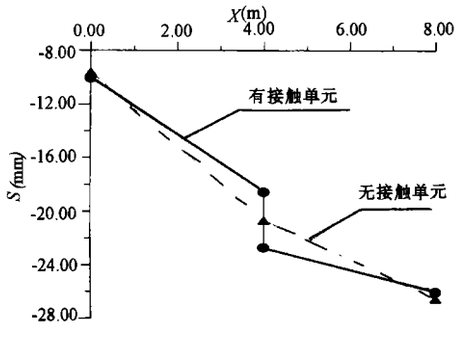


图 5　有（无）接触面单元顶面
中心线瞬时垂向位移曲线

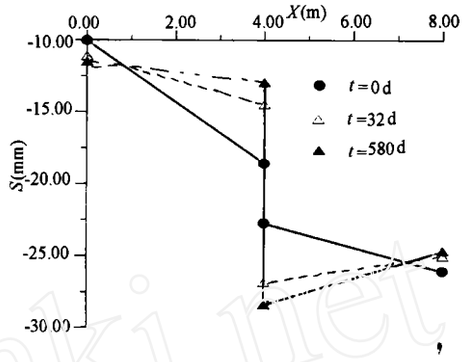


图 6　有接触面单元顶面中心线
垂向位移曲线随时间变化

5　结　论

在对软土与结构物的相互作用进行有限元分析时，采用粘弹塑性接触面本构关系是非常合适的。本文仅从数值计算的角度对接触面粘弹塑性本构关系进行了探讨，所以进一步将数值计算结果用实验结果来验证是必要的。

参 考 文 献

1　DESAI C. S.. et al. Thin-layer element for interfaces and joints International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechancis, 1984, 8: 19～43

2　易晓英．地下连续墙粘弹性有限元分析——考虑地基接触面之间的剪切流变效应：［学位论文］．上海：同济大学，1984

3　SWOBODA G., MERTZ W. Rheological analysis of tunnel excavations by means of coupled finite element (FEM) -boundary element (BEM) analysis. International Journal for Numerical Methods in eomechanics. 1987, 11: 115～129

4　Viscoplasticity and plasticity-numerical stability revised, numercial model in geomechancis NUMOG 3, edited by S. Pietruszczak and G. N Pande Elsevier Applied Science. 1989: 431～438

5　Koji Sekiguchi, et al. Time step selection for 6-node non-linear joint element in elasto-viscoplasticty analyses. Computers and Geotechnics. 1990, 10: 33～58

RESEARCH ON ELASTIC-VISCO-PLASTIC CONSTITUTION OF INTERFACES

An Guanfeng　　*Gao Dazhao*
(Tongji University)

Abstract

The research on the interface consists of two aspects: one is the interface constitution; the other is the interface element. A Goodman interface element is adopted in this study. More attention is paid to the interface constitution. According to the

（下转 105 页）

Key words: seabed, long-distance, curve pipe-jacking

毛柏清 高级工程师，副总工程师（分院），长期从事水工结构及地下工程设计研究，获得多次省部级科技进步奖。通讯地址：200063 上海市武宁路 303 号

中国土木工程学会
2000 年度高校土木工程优秀毕业生奖获奖名单

郑睿祺	男	清华大学	韦珊珊	女	广西大学
汤昱川	男	清华大学	丁志坤	男	山东科技大学
陈衡治	男	浙江大学	杨永波	男	北方交通大学
袁　芳	女	东南大学	贺喜霞	女	西安建筑科技大学
曲　冰	男	同济大学	闫治国	男	西南交通大学
朱　波	男	同济大学	刘展科	男	华中科技大学
张海燕	女	湖南大学	张红艳	女	石家庄铁道学院
张　凯	男	郑州工业大学	毋建平	女	太原理工大学
石光磊	女	沈阳建筑工程学院	周　斌	女	上海交通大学
黄尚荣	男	北京建筑工程学院	王　冬	男	天津大学

（上接 91 页）

rheologic property of an interface, a elastic-visco-plastic constitutive model is proposed in the paper. It is coupled with the general soil element. A 3D finite element program is developed. Some numerical examples are conducted for checking the constitutive model. It is shown that the calculated displacements of the surface jump at the interface line and vary with time.

Key words: elastic-visco-plastic, 3D-interface, IEM

安关峰 博士后，主要从事桩基础与隧道长期稳定研究工作。通讯地址：430074　中国地质大学（武汉）工程学院
高大钊 同济大学教授，博士生导师。