维普资讯 http://www.cqvip.com

(2) 52-58 √岩土力学，分析方法，发展

第1卷 第1期 岩 土 工 程 师 Vol. 1 № 1
1989年 7月 Geotechnical Engineer July 1989

专题综述

岩土力学分析方法的新进展

高大钊 TU452

（同济大学，上海）

提 要

在岩土力学的发展过程中，一直不断地从其他学科的新思想，新方程中吸取营养，结合岩土力学的特点形成自己独特分析方程体系。近年来，又有一些方法被引入岩土力学分析中来，其中有些方法本身是比较成熟的，如系统分析、时间序列分析，但如何用来分析岩土力学问题，尚有待在应用中加以解决，有些方法本身是比较新的，如概率数值方法，灰色系统预测，这更需要在用于解决岩土力学问题的同时，不断发展这些方法，使之更为完善。本文对最近出现的一些新进展作了非常简要的论述，以期引起大家的注意。

学科之间的相互交叉、相互渗透，在结合点上产生新的学科分支领域或边缘交叉学科，这是当代科学技术发展的特点。对于还不完全成熟的学科，这种结合趋势更为明显。岩土力学是一门非常年轻的学科，又面临许多复杂的问题有待解决。因此在岩土力学的发展过程中一直在不断吸收其它学科的新思想、新概念和新方法，用以研究岩土力学中的问题，已经取得不少进展，有的已形成了岩土力学的一些分支领域，近代土力学的发展已充分说明了这一点。

近年来，一些新的方法又相继被引入我国岩土力学的研究工作中来，如系统分析方法，时间序列分析方法，概率数值分析方法，细观量级的离散元方法等等。本文的目的是向读者展示在这些方面的研究现状，以期引起更多人的兴趣，推动这些研究工作的进展。

一、系统分析研究方法已开始在岩土力学中应用

系统论的方法将研究对象看成是一个系统。系统由许多相互关联的子系统或单元组成，系统与外部环境之间存在着有机的联系。系统分析就是从整体目标出发，着重从系统内部各子系统或单元之间、系统整体与局部之间以及系统本身与外部环境之间的相互联系、相互作用和相互制约的综合考虑，使整体效应达到最佳判断和决策。由于岩土本身的复杂性以及人类活动对岩土性状的种种影响，岩土在承受外力和环境作用下发生各种物理的、物理化学的变化过程，使岩土工程过程构成了一个大系统，只有用系统论的研究方法才能在新的水平上妥善处理各种因素对岩土工程技术经济效益的综合影响，因而系统分析方法是值得重视的。

系统分析方法可用于评价岩体工程质量[1]。首先应当确定评价岩体质量的主要因素，认为岩体强度、完整性和渗透性是影响岩体质量的主要因素，这三个因素的综合指标是对岩体质量优劣的评价准则，当然还可以提出更为全面的评价准则。其次提出了岩体质量评价的模

维普资讯 http://www.cqvip.com

糊多层次综合评判数学模型和整体效应系统数学模型。采用层次分析方法，构造了由目标层（岩体的质量）、准则层（强度、完整性和渗透性）、指标层（结构面性状、坚固度、纵波速度、抗压强度、RQD值、完整性系数、裂隙间距、裂隙连通性和裂隙张开度）和方案层四个层次组成的层次结构模型。对各层次各因素的取值，定量因素指标采用单调直线隶属函数方法来确定，例如单轴抗压强度的最大值为1520，最小值为220，则隶属函数为

$$\mu=(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant 1520\\ \dfrac{x-220}{1300} & 220<x<1520\\ 0 & x\leqslant 220\end{cases}$$

定性因素指标采用5分制评分方法构造隶属函数。将单因素指标分类界线值分别代入相应的隶属函数，形成综合评判矩阵 B，再乘以权向量 A 就得到描述岩体质量综合指标 R。最后给出了岩体工程质量评价整体结构闭合系统框图。

好果一个系统中既含有已知信息，又含有未知的信息，则该系统称为灰色系统。从一般意义上说，大多数的工程系统应当都属于灰色系统，尤其是岩土工程中，许多因素的影响是不能事前确切知道的，因此用灰色系统理论来处理岩土力学问题是一种很有前途的方法。灰色系统理论是华中理工大学邓聚龙教授于1982年提出的，引起了国内外许多领域的关注。其中灰色预测方法是灰色系统理论的主要组成部分。灰色预测方法根据关于已有现实及过去的灰色信息建立一个从过去引伸到将来的灰色预测模型。在岩土工程中，为了预估岩土性状，常常进行实测，然后根据已有的实测数据预测未来的岩土性状。当信息全部为已知时，可用确定性数学模型预测。假如含有灰色信息，可用灰色预测方法，例如地基的沉降[2]，隧洞边界的位移[3]都可应用灰色系统理论进行预测。

如已知由两组对应的序列组成的沉降观测数据，时间序列为 t_i，沉降序列为 s_i，依据非等步长的 $GM(1,1)$ 模型，预报公式为

$$S_{k+1}=\left(S_1-\frac{b}{a}\right)E_{k+1}+\frac{b}{a}$$

式中　　$E_{k+1}=\exp[a(t_1-t_{k+1})]$

a——发展系数；

b——灰作用量。

a 和 b 均为待辨识参数，构成列向量

$$\begin{Bmatrix}a\\ b\end{Bmatrix}=\hat{a}=[B^T\cdot B]^{-1}B^TY_N$$

$$B=\begin{bmatrix}t_2-t_1 & & & \\ & t_3-t_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n-t_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\dfrac{S_1+S_2}{2} & 1\\ -\dfrac{S_2+S_3}{2} & 1\\ \vdots & \vdots\\ -\dfrac{S_{n-1}+S_n}{2} & 1\end{bmatrix}$$

$$Y_N=\begin{bmatrix} S_2-S_1 \\ S_3-S_2 \\ \vdots \\ S_n-S_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{k+1}=(b-aS_1)E_{k+1}$$

如果这一模型可以描述沉降过程，则 S 对 t 的导数必然大于零，即

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{k+1}>0$$

$$b>aS_1$$

如 a 为正值，则当 $t_{k+1}\to\infty$ 时$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{k+1}\to 0$，即沉降趋于稳定，并有最终沉降

$$S_\infty=\frac{b}{a}$$

如 a 为负值时，沉降趋于不稳定，地基将破坏。

如 a 为零，沉降速率为常值，地基亦将破坏。

二、时间序列分析方法的应用

时间序列分析是随机过程分析的一个内容，它用概率统计方法分析随时间变化的随机数据序列，从而得到能模拟随机数据序列的数值模型，以用于预测和控制。时间序列分析的原则与方法还可用于分析随空间位置而变化的随机数据序列。

在岩土工程中，常常可以得到许多随机数据序列，它们能综合反映岩土性状的规律性，但往往是多种因素同时作用的结果，并且也反映了许多不确定性因素对岩土性状的影响。如果通过机理研究去建立数学物理模型来描述这种规律性有时比较困难，而时间序列分析可以不必知道其物理机理，能直接建立数学模型，因此具有实用价值。特别适用于我们关心的仅是其结果而不需要深究其原因的场合。

随机序列有平稳序列和非平稳序列之分。所谓平稳序列是指其均值函数是常数而其协方差函数仅与时间间隔有关。如果经过平稳性检验表明是一个非平稳序列，那么只要对原数据序列经过 d 次差分，直到得出新的序列是平稳序列为止。

用时间序列方法建立的数学模型，有线性与非线性之分，常用的为线性模型。但线性模型并不意味着数据与时间的关系就一定是线性的，我们可以用一个线性模型来拟合非线性的过程。非线性模型的识别很困难，实质上用线性模型已可以处理许多复杂的问题。

线性模型实质上是用多项式来拟合一个非线性随机序列过程。ARMA(p,q) 模型是平稳序列数学模型的一种，其数学表达式为

$$W_t-\varphi_1W_{t-1}-\cdots-\varphi_pW_{t-p}=a_t-\theta_1a_{t-1}-\cdots-\theta_qa_{t-q}$$

式中 $\{W_t\}$ 是零均值的观测序列，当实际观测序列 $\{x_t\}$ 不具零均值时，可由 $W_t=x_t-\bar{x}$ 化为零均值序列。$\bar{x}$ 是 $\{x_t\}$ 的数学期望，$\{a_t\}$ 是白噪声序列，$\varphi_1\cdots\varphi_p$ 和 $\theta_1\cdots\theta_q$ 称为模型参数，p 和 q 称为模型的阶。

维普资讯 http://www.cqvip.com

如用 B^k 表示 k 步延迟算子，即

$$B^k W_t = W_{t-k} \qquad B^k a_t = a_{t-k}$$

并令

$$\varphi(B) = 1 - \varphi_1 B - \varphi_2 B^2 - \cdots - \varphi_p B^p$$

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$$

则可缩写为

$$\varphi(B) W_t = \theta(B) a_t$$

如果特殊情况是

$$W_t - \varphi_1 W_{t-1} - \cdots - \varphi_p W_{t-p} = a_t$$

$$\varphi(B) W_t = a_t$$

且其中系数多项式 $\varphi(W) = 0$ 的根全在单位圆外，即其根的模大于1，我们就称为平稳自回归模型，其解 W_t 叫做平稳自回归序列，即为ARMA(p,0)，写作 $AR(p)$(Autoregressive)模型，P 称为自回归阶数。

另一种特殊情况是

$$W_t = a_t - \theta a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$W_t = \theta(B) a_t$$

且其中系数多项式 $\theta(W) = 0$ 的根全在单位圆外，我们就称之为可逆滑动平均模型，即为ARMA(0,q)，写作MA(q)(Moving Average)模型，q 称为滑动平均阶数。可见，AR模型和MA模型都是ARMA模型的特殊情况。

进行时间序列分析时，第一步是模型识别，第二步是参数估计，第三步是检验估计模型能否被接受。首先要判断 p、q 中是否有一个为零，若都不为零，则要确定它们的值。识别 p、q 的方法可以从低价到高价，(1,1)(1,2)(2,1)…逐个进行参数估计和检验，若不接受就调整 (p,q) 组合，直到被接受为止。可见在确定 p、q 值的过程中，实质上已在进行参数估计和统计检验了。

时间序列分析可用于围岩位移预报，如与反分析联合应用可用以估计地下结构荷载，还可用于围岩分类[4]。

三、概率数值方法的应用

岩土力学中的数值方法得到很大的发展，用于解决复杂的实际问题取得了不同程度的成功。但同时也带来了相当精确的计算方法与带有相当误差的输入数据之间的协调问题，如解决得不好，数值方法的重要作用就得不到充分的发挥。因此，概率数值方法的发展得到了人们的重视。概率数值方法有两方面的含义，一种含义是用概率方法来估计数值分析计算结果的统计特征，如蒙特卡洛有限元方法和有限元方法的概率解；另一种含义是用数值方法来求解概率计算问题。例如，用条分法分析土坡稳定时，在第 i 条失稳的条件下第 $i+1$ 条失稳的概率可由下式求得

$$P_{i,i+1} = \frac{\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f_{\xi_i \xi_{i+1}} d\xi_i d\xi_{i+1}}{\int_{-\infty}^{0} f_{\xi_i} d\xi_i}$$

维普资讯 http://www.cqvip.com

但式中的二重积分为广义积分，且被积函数不能以初等函数的有限形式表示，故不可能求出其解析解，只能设法寻求数值解，可利用 Gauss 数值求积公式来求解上式中的二重积分[5]。

在有限元计算中如引进计算参数的随机性，按随机变量的函数的矩的近似计算方法可求出岩土体的位移和应力的期望值与方差。

对于线性静力分析，其平稳方程为

$$[K]\{u\}=\{Q\}$$

其中 $[K]$ 是总刚度矩阵，为岩土参数和几何参数等基本变量的函数，一般可表示为

$$[K]=[K(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$$

$\{u\}$ 是节点位移列阵，其中每一个节点位移分量都是随机变量；$\{Q\}$ 是节点荷载列阵。若将方程中的物理量分成由随机变量均值和变量变异而引起的偏差两部分，展开以后略去二阶微量，则可将平衡方程分为两个方程

$$[\mu_k]\{\mu_u\}=\{\mu_Q\}$$

$$[\mu_k]\{\Delta u\}=\{\Delta Q\}-[\Delta K]\{\mu_u\}$$

由偏差构成的方程可改写为

$$\{\Delta u\}=[\mu_k]^{-1}\{\Delta q\}$$

$$\{\Delta q\}=\{\Delta Q\}-[\Delta K]\{\mu_u\}$$

$\{\Delta q\}$ 是系统对每一随机变量偏离值的敏感性，如将 $\{\Delta q\}$ 分别对各随机变量取偏导数，并略去高阶项，可表示为

$$\{\Delta q\}=\left[\frac{\partial q}{\partial x_i}\right]\{\delta x_i\}$$

位移相关矩阵由下式求得

$$[\rho_{uu}]=[T][\rho_{xx}][T]^T$$

式中 $[\rho_{xx}]$ 为随机变量的相关矩阵；

$[T]$ 为转换矩阵；

$[T]=\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}\right]_{\mu_x}$ 可通对平衡方程两边求导求得。

位移相关矩阵 $[\rho_{uu}]$ 的主对角元素表示了岩土体中各节点位移分量的方差，而非对角元素表示各节点位移间的相关矩，当它们为零时，表示各节点位移相互独立。

如果失效模式是建立在应力比较的基础上，常常以应力或内力作为极限状态方程中的基本变量，因此只求得节点位移的分布特征是不够的，还必须作应力和内力的计算，这个过程虽更为复杂，但已经给出了随机弹塑性有限元基本公式，可以求出应力的数学期望和方差的近似值[6]，将随机应力代入 Mohr-Coulomb 屈服函数，就可以求得屈服函数的数学期望和方差，从而可以计算每个高斯点的局部失效概率及其分布。

四、细观量级上的离散元分析方法的应用

土的物理力学性状很大程度上取决于它的组构。对土的组构的细观量级的研究，除了用电子显微镜观察分析土的颗粒的形状排列和接触特征外，还可用数值方法在计算机上进行试验，对不同组构特征的土，重现宏观力学响应。

维普资讯 http://www.cqvip.com

离散元是用以解决非连续介质的一种计算方法，可用来对每一颗粒作一系列的运算而得出颗粒介质中的接触力和每一颗粒的位移。颗粒形状可假定为圆形的，力与位移之间的关系可采用非线性模型，如

$$\Delta F_n = K_n \delta_n^{3/2}$$
$$\Delta F_s = K_s \delta_s^{3/2}$$

式中 $K_n = \frac{2E}{3(1-\mu^2)} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}$；

$K_s = \lambda K_n$；

λ 为刚度折减系数，取值范围为 0.1～1.0；

ΔF_n 和 ΔF_s 分别为接触点法向力增量和切向力增量，δ_n 和 δ_s 分别为两个接触颗粒在接触点的法向和切向位移。

计算出作用在颗粒上的所有接触力，就可以求出合力 F 和合力矩 M，再考虑粘性阻尼可得到颗粒的运动方程

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + F = 0$$
$$I\ddot{\varphi} + \eta r^2 \dot{\varphi} + M = 0$$

式中，u 和 φ 分别为颗粒的位移及转角，m 和 I 分别为颗粒的质量及转动惯量，η 为粘性阻尼系数，r 为颗粒半径。

实际上土颗粒不可能是圆形的，可以用椭圆来表示，则长短轴比是椭圆度的一种特征指标，长短轴比越大，颗粒越扁平，用颗粒长轴在空间的定向和颗粒中心的分布密度来描述颗粒。表示颗粒间相互作用的指标有配位数，接触法线，枝向量和颗粒间接触应力。配位数表示与某颗粒相接触的颗粒数目，它与孔隙比有良好的相关关系；接触法线用球座标 α、β 分布密度函数来反映它在空间的定向；枝向量是相接触颗粒中心的连线，用其长度、定向分布和枝在空间的密度分布来反映其综合效应；颗粒间接触力的统计描述是比较困难的，应当给出接触力大小及方向的分布密度函数。这些组构指标之间并非是完全独立的，有时存在着一定的相关性。最理想的办法是用试验来测定这些指标，但目前还不能完全做到。

在细观量级上用离散元方法可以研究圆形颗粒和椭圆形颗粒介质的常规剪切试验，椭圆形颗粒介质的等向压缩和 K_0 压缩，起始各向异性等宏观力学响应[7]。也可用于研究桩和颗粒介质之间的相互作用、铲斗与颗粒介质之间的相互作用[8]。

参　考　文　献

[1] 周志芳，“岩体（工程）质量的系统分析研究”，第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 2，1988。

[2] 郑耀，“地基沉降的灰色预报方法”第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 2，1988。

[3] 吴凯华，“岩土隧洞量测位移的灰色预测反分析”第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 2，1988。

[4] 陈子荫，“地下岩石工程中位移观测数据的处理及利用”第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 3，1988。

维普资讯 http://www.cqvip.com

[5] 李文秀，“岩土边坡变形破坏概率及其数值方法”，第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 3，1988。

[6] 邹进彰，熊文林，“有限元在随机破坏及可靠性分析中的应用”，第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 2，1988。

[7] 吴为义，“颗粒材料组构的 DEM 模拟”，第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 1，1988。

[8] 邢纪波、王泳嘉，“颗粒介质变形及其力学过程的离散元法计算与分析”，第三届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集，No 2，1988。

Recent Progress of Analytical Method in Geomechanics

Gao Dazhao

Abstract

In the development of rock and soil mechanics, new ideas and new methods which come from other subjects have been used to form the special analysis system of geomchanics. Recently, a lot of analysis approaches have ceen introduced into the field, some of them, such as, the system analysis, time series analysis, are matured themself, while, probabilistic numerical and grey system prediction methods are not matured yet. It is neccssary to develop these methods to analyse geomechanics.

Some comments have been made here on the recent progress of the area in order to lead the popular attention.