维普资讯 http://www.cqvip.com

第 24 卷第 3 期　　岩　土　力　学　　Vol.24　No.3
2003 年 6 月　　Rock and Soil Mechanics　　Jun.　2003

文章编号：1000－7598－(2003) 03－0455－04

土性平稳随机场的空间统计特性分析

朱登峰，高大钊
（同济大学 地下建筑与工程系，　上海　200092）

摘　要： 阐明了平稳随机场的空间统计特性，根据平稳随机场各态历经性概念，讨论了土层满足各态历经性的条件，以及计算空间平均方差和相关距离的公式。并结合工程实例，分析了空间平均方差计算的影响因素。

关　键　词： 随机过程；各态历经性；自相关函数；相关距离；空间平均方差
中图分类号： TU 412　　**文献标识码：** A

Space statistical characteristics analysis of smooth stochastic field of soil characteristics

ZHU Deng-feng，GAO Da-zhao
（Department of Geotechnical Engineering, Tongji University,　Shanghai　200092,　China）

Abstract: The space statistical characteristics of a smooth stochastic field are elaborated. On the basis of concept of smooth stochastic field ergodicity, conditions that soil strata are satisfied with ergodicity are discussed; and equations of calculating space mean variance and correlative distance are deduced. Finally, the influential factors of calculating space mean variance are analyzed combined with a static cone penetration data.

Key words: stochastic process; ergodicity; correlative function; correlative distance; space mean variance

1　前　言

关于土体性质空间统计特性的分析，一般都先根据试验资料推求相关距离，再计算随机场空间均值的方差，其中推求相关距离的方法各异，计算结果相差也很大，难以做出比较。本文根据具有平稳性和各态历经性随机场的特征，来直接计算空间平均方差和相关距离，并对影响计算结果的因素做了初步分析。结合静探实测资料进行计算，相关距离的结果类似于相关距离法，而与递推空间平均法的计算结果比较，两者相差较大，这里可能有相关距离概念上的差异。

2　平稳随机场理论

2.1　平稳随机场的数字特征

随机场的数字特征主要有均值和自相关函数。对于任意位置 z，随机变量 $X(z)$ 的均值为

$$\mu(z)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(z)=E[X(z)] \qquad (1)$$

式中　$E[X(z)]$ 是随机场 $X(z)$ 的所有样本函数在 z 位置的平均，通常称为集平均。

自相关函数描绘了不同位置 z_1 和 $z_2=z_1+\tau$ 的随机场状态之间的联系，定义为这两个位置随机变量乘积的均值：

$$R(t_1,t_2)=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t_1)x_i(t_2)=E[X(t_1)X(t_2)] \qquad (2)$$

所谓平稳随机场是指它的统计特性不随空间位置的推移而变化，即它的均值 $\mu(z)$ 为常数，自相关函数仅是 $\tau=z_2-z_1$ 的函数。

设 $x(z)$ 是均方连续平稳随机过程，定义空间均值为

$$<x(z)>=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h E\{x(z)\}\mathrm{d}z \qquad (3)$$

若对于固定的 τ，$z_2=z_1+\tau$，$x(z_1)x(z_2)$ 也是连续平稳随机过程，定义 $x(\tau)$ 的空间相关函数为

$$<x(z_1)x(z_2)>=\lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_0^h x(z_1)x(z_1+\tau)\mathrm{d}z \qquad (4)$$

对于任一平稳随机过程，空间均值的方差为

收稿日期：2002-03-18
作者简介：朱登峰，男，1974 年生，硕士，主要从事软土工程理论研究。

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$D\{< x(z) >\} = E\{|< x(z) > -\mu|^2\}$$

$$= \lim_{h\to\infty}\frac{2}{h}\int_0^h (1-\frac{\tau}{h})[R(\tau)-\mu^2]\mathrm{d}\tau \quad (5)$$

式中 $R(\tau)=E\{x(z_1)x(z_2)\}$； $\tau = z_2 - z_1$。

2.2 各态历经性

若随机过程 $x(z)$ 的空间平均依概率 1 等于该过程的集平均，则称该过程的均值具有各态历经性。若 $x(\tau)$ 的空间相关函数依概率 1 等于该过程的自相关函数，则称该过程的均值具有各态历经性。

平稳随机场 $x(z)$ 具有各态历经性的充要条件是：

$$D\{< x(z) >\} = \lim_{h\to\infty}\frac{2}{h}\int_0^h (1-\frac{\tau}{h})[R(\tau)-\mu^2]\mathrm{d}\tau = 0 \quad (6)$$

$$D\{< x(z)x(z+\tau) >\} =$$

$$\lim_{h\to\infty}\frac{2}{h}\int_0^h (1-\frac{u}{h})[B(u)-R^2(\tau)]\mathrm{d}u = 0 \quad (7)$$

其中： $B(u)=E\{x(z+\tau+u)x(z+u)x(z+\tau)x(z)\}$

对于正态平稳过程，且均值为零，自相关函数连续，各态历经过程的一个充分条件是

$$\int_0^\infty |R(\tau)|\mathrm{d}\tau < \infty \quad (8)$$

2.3 土性统计指标各态历经性分析

关于土性指标随机过程平稳性和各态历经性的验证，通常需要大量样本函数的实测数据，根据各态历经性的定义进行，其方法在文献[1]中已有详细论述。

一般说来，由于随机过程 $x(z)$ 的表达式难以给出，所以，不能用各态历经性充要条件来检验。如果根据实测资料，能模拟出 $R(\tau)-\mu^2$ 与 $B(u)-R^2(\tau)$ 的拟合曲线，也可用其充要条件来检验各态历经性。但是，对于模拟出 $R(\tau)$ 和 $B(u)$ 曲线是否符合同一平稳随机过程，还要验证，这一般比较困难，所以，一般只用式（6）验证均值的各态历经性。

对于工程中碰到的平稳过程，均值各态历经的条件是比较宽的，许多土层平稳随机场是能满足它的条件的。文献[2]曾对一百余条静探曲线进行拟合计算，自协方差函数的拟合曲线均为指数余弦型，即

$$C(\tau)=R(\tau)-\mu^2 = Ae^{-B\tau}\cos(\omega\tau) \quad (9)$$

式中 A，B，ω 均为待定的参数（$A>0$，$B>0$，$\omega>0$）。

因此，有

$$\lim_{h\to\infty} D\{< x(z) >\} = \lim_{h\to\infty}\frac{2}{h}\int_0^h (1-\frac{\tau}{h})C(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$= \lim_{h\to\infty}\frac{2AB}{B^2+\omega^2}\frac{1}{h} = 0 \quad (10)$$

即随机场的均值具有各态历经性。

文献[3]曾对土的各项物理和力学性质指标进行了统计分析，得到各项指标都近似服从正态分布，因此，土性平稳随机场是正态随机过程。一般情况，土性指标的均值不等于零，所以，要对实测数据进行标准化处理[4]，使数据“统计上均匀”，然后，用处理后的数据拟合出自相关函数 $R(\tau)$ 沿深度的变化曲线，利用各态历经的充分条件式（8）进行检验。例如，文献[2]中认为静探曲线的自相关函数 $R(\tau)$ 的拟合曲线为指数余弦型，根据式（8）有

$$\int_0^\infty |R(\tau)|\mathrm{d}\tau = \int_0^\infty Ae^{-B\tau}\cos(\omega\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{AB}{B^2+\omega^2} < \infty \quad (11)$$

即该正态平稳随机场具有各态历经性。

3 土层空间统计特性的计算讨论

3.1 计算公式

如果平稳随机过程能满足各态历经性条件，就可从一次试验所得到的样本函数 $x(z)$ 确定出该过程的均值和自相关函数，如果试验记录在空间 $[0, h]$ 给出了 $x(z)$ 的一个样本函数，则空间均值和自相关函数有以下的估计式[5]：

$$\mu \approx \frac{1}{h}\int_0^h x(z)\mathrm{d}z \quad (12)$$

$$R(\tau) \approx \frac{1}{h-\tau}\int_0^{h-\tau} x(z)x(z+\tau)\mathrm{d}z \quad (13)$$

在工程实际中，通常不可能给出 $x(z)$ 的表达式，因而，对以上两式常用离散法求得。把同层土试验记录沿深度 $[0, h]$ 等分为 N 个长为 $\Delta z = \frac{h}{N}$ 的小区间，然后，在深度 $z_k = k\Delta z$，（$k = 1,2,\cdots,N$）。对 $x(z)$ 取样得 N 个样本函数值，$x_k = x(z_k), k = 1,2,\cdots,N$，于是，可写出试验记录空间平均（集平均）和深度为 $z_r = r\Delta z$ 时相关函数的估计式：

$$\mu \approx \hat{\mu} = \frac{1}{h}\sum_{k=1}^{N} x_k\Delta z = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \quad (14)$$

$$R(z_r) \approx \hat{R}(z_r) = \frac{1}{h-z_r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r}\Delta z = \frac{1}{N-r}\sum_{k=1}^{N-r} x_k x_{k+r} \quad (15)$$

根据式（14）可算出 $r=0$，1，…，N-1 时自相关函数的一系列近似值，从而可作出自相关函数的近似曲线。

从而，空间平均方差的估计值为

维普资讯 http://www.cqvip.com

$$D\{<x(z)>\} \approx \hat{D}\{<x(z)>\} = \frac{2}{h}\sum_{i=0}^{N-1}(1-\frac{i}{N})\hat{R}(z_i)\Delta z - \mu^2 =$$

$$= \frac{2}{N^2}\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N-i} x_k x_{k+i} - (\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k)^2 \qquad (16)$$

空间变异系数为

$$C = \sqrt{D\{<x(z)>\}}/\mu \qquad (17)$$

根据土层相关距离 δ 的定义，有

$$\delta = \lim_{h\to\infty}\frac{D\{<x(z)>\}}{\sigma^2}h \approx \frac{D\{<x(z)>\}}{\sigma^2}h \qquad (18)$$

式中 $\sigma^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N-1}$ 为点方差；h 为层厚。

3.2 影响因素分析

由式（16）可以看出，影响空间平均方差计算结果的因素主要是样本容量 N，而样本容量又决定于层厚和取样间距。如果取样间距确定，根据式(6)可知，随着层厚 h 逐渐增大，空间平均方差逐步趋近于零，也就是数据在空间平均上愈均匀。或者，如果层厚 h 不变，随取样间距的减小，样本容量 N 越大，根据数学上的极限概念，N 趋向无穷大时，式（16）趋近于式（6）。因此，取样间距越小，空间平均方差越接近于零。所以，h 或者 N 趋向于无穷大时，就可根据式(18)来计算土层的相关距离 δ。文献[2]也指出：取样间距越小，资料越充分，由此求得的相关距离越接近于真实值。但是，如果取样间距小于实际探头的采样间距，就可能造成样本数据失真，因此，采用静探资料计算空间平均方差和相关距离，取样间距宜采用实际探头的采样间距，即 $\Delta z = 0.1$ m。

3.3 实例计算

本文选取上海某工程同一层土的 2 个静探孔的静探实测资料，拟合自协方差函数曲线为指数余弦型，计算结果见表 1 和图 1。

3.4 计算结果讨论

由表 1 可以看出，随取样间距的变化，空间均值基本不变，空间标准差和相关距离逐渐增大，且由图 1 可以看出，曲线前半段稳定，后半段离散，这也验证了取样间距越小时，相关距离越接近真值。因此，该土层的空间变异系数和相关距离可取两孔的平均值，分别为 0.095 m 和 1.9 m。

为了便于比较，笔者还用递推空间法对 C1 孔作了计算，见表 2 和图 2，$\Delta z = 0.1$ m 时，相关距离为 0.95 m，为式（18）计算结果的 1/2，这与文献[2]的计算结果类似。由图 2 看,递推空间法 δ 随 Δz 有一峰值，其值等于式（16）计算结果，两者之间似乎有某种联系，这还需大量计算验证。

表 1　上海地区某土层参数空间统计特性计算结果
Table 1　Space statistic characteristics calculation for soil stratum parameters in Shanghai area

孔号	取样间距/ m	均值	空间标准差	空间变异系数	相关距离/m
孔 1	0.1	232.8	21.8	0.0938	1.86
	0.2	232.9	30.9	0.1328	3.58
	0.3	230.0	37.4	0.1627	5.28
	0.4	231.9	43.3	0.1867	8.77
孔 2	0.1	244.4	23.5	0.0961	1.95
	0.2	245.2	33.4	0.1360	3.79
	0.3	239.8	39.6	0.1649	9.03
	0.4	244.0	46.3	0.1896	9.28

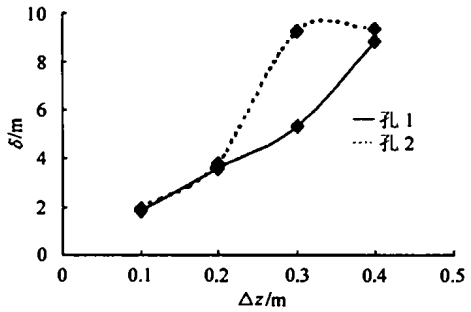


图 1　$\delta-\Delta z$ 关系曲线
Fig.1　Curve of δ vs Δz

表 2　递推空间法计算 C1 孔相关距离结果
Table 2　Correlative distance calculation for C1 bore with recursive deduction space method

Δz/m	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
δ/m	0.95	0.94	1.56	1.68	1.89	1.65	1.30	1.30	1.41	1.4

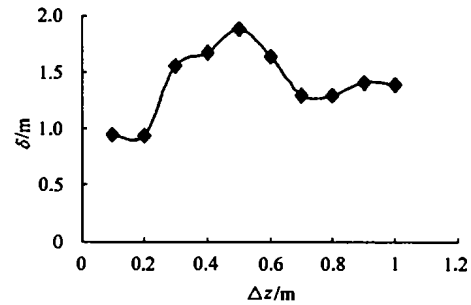


图 2　$\delta-\Delta z$ 关系曲线
Fig.2　Curve of δ vs Δz

4　结　语

土性指标平稳随机场的各态历经性验证，一般参数指标服从正态分布，即为正态随机过程时，条

下转第 462 页

维普资讯 http://www.cqvip.com

感谢中南大学铁道校区华祖焜教授和刘宝琛院士的指导！

参 考 文 献

[1] 张达德，谢坤宏，丁元皓. 地工格纲砂土围压下拉出互制行为之探讨[A]. 全国第五届土工合成材料学术会议论文集[C]. 宜昌：现代知识出版社，2000，11：29-36.

[2] Rowe R K. Chairman report Testing methods[A]. **Proc. of the Int. Symposium on Earth Reinforcement**[C]. Rotterdam: Balkema A A, 1996：1 055-1 065.

[3] Zehong Yuan. Evaluation of wide-width tensile properties of geosynthetic reinforcement: a state-of-the practice[A]. **Proc. of the 5th Conf. on Geosynthetis of China**[C]. Yichang： Model Knowledge Publiching Campang 2000：2-11.

[4] JTJ/T 060－98. 公路土工合成材料试验规程[S].

[5] SL/T 235－1999. 土工合成材料测试规程[S].

[6] Chandan Ghosh, Amit Bhasin. Displacement controlled pull-out test of geotextile in granular soil[A]. **Proc. of the Int. Symposium on Earth Reinforcement**[C]. Rotterdam: Balkema A A, 1996：35-38.

[7] Ochiai H, Jun Otani, Shigenori Hayashic, et. al. The pull-out resistance of geogrids in reinforced soil[J]. **Geotextiles and Geomembranes**, 1996，14：19-42.

[8] Ochtai H, Yasufuku N, Kawamura T, et al. Effect of end-restraint in geogrid-soil structure[A]. **The 6th International Conf. on Geosynthetics**[C]. Atlanta: Georgia USA 1998，545-550.

[9] 徐林荣. 筋土界面相互作用参数和加筋垫层处理软基的性状研究[博士学位论文 D]. 长沙：中南大学，2001.

[10] 郑玉琨. 土工合成材料工程特性及试验[A]. 土工合成材料工程应用手册[M]. 北京：中国建筑出版社，2000. 81-117.

[11] Jewell R A. Some factors which influence the shear strength of reinforced sand [A]. **Symposium on computer Application to Geotech. Problem in Highway Eng. CUED/D/Soils/TR85**[C]. [s. l.]: [s. n.], 1980.

[12] Bauer G E, Zhao Y. Evaluation of shear strength and dilatancy behavior of reinforced soil from direct shear tests[J]. **Geosynthetics soil testing procedure**. 1993，2：138-151.

[13] Bjerrum L. Embankments on soft ground. In performance of earth and earth supported structures[A]. **Proc. ASCE Special Conference**[C]. [s. l.]: [s. n.] 1972，2：1-54.

[14] Kinner E B, Ladd C C. Undrained bearing capacity of footings on clay[A]. **Proc. 8th ICSMFE**[C]. Moscow：[s. n.]1973，1：209-215.

[15] Ohta H, Nishihara A, Morita A. Undrained stability of K_0 Consolidated clays[A]. **Proc. 11th ICSMFE**[C]. San Francisco：[s. n.] 1985，2：613-617.

[16] Sharma J S, Bolton M D. Finite element analysis of centrifuge tests on reinforced embankments on soft clay[J]. **Computers and Geotechnics**[J]. 1996，19（1）： 1-22.

上接第 457 页

件易于满足。采用静力触探曲线的资料，土层一般满足平稳随机场的各态历经性条件，可用单孔资料推断整个土层空间统计特性。关于空间平均方差和相关距离的计算，取样间距越小，计算结果越接近真值，实际计算间距应取探头的采样距离，即 $\Delta z =$ 0.1 m 较为合适。

参 考 文 献

[1] 闫澍旺. 土性剖面随机场模型的平稳性和各态历经性验证[J]. 岩土工程学报，1995，17（4）：1-9.

[2] 熊启东. 上海地区抗剪强度指标的概率统计[博士学位论文 D]. 上海：同济大学，1998.

[3] 徐斌. 用相关函数法求静探曲线相关距离的讨论[J]. 岩土力学，1998，19（1）：56-58.

[4] 包承纲，高大钊，张庆华等. 地基工程可靠度分析方法研究[M]. 武汉：武汉测绘科技大学出版社，1997.

[5] 鞠正卫，陈文苗. 概率与数理统计[M]. 哈尔滨:黑龙江科学技术出版社，1984：129-138.

[6] 松尾 稔[日]. 万国朝，李杨海译. 地基工程学可靠性设计的理论和实际[M]. 北京：人民交通出版社，1990. 40-55.