可控源音频大地电磁数据的反演方法

王 若, 王妙月
(中国科学院地质与地球物理所,北京 100029)

摘 要 从反演方程、构造目标函数和求解三方面对用于可控源音频大地电磁法(CSAMT)的实用反演方法中的四种进行了描述.水平层状地层 CSAMT 法资料的直接反演法首次尝试了一维空间的全资料 CSAMT 反演,效果较好,但该方法尚难应用于 2D、3D 复杂介质中 奥克姆反演方法既考虑了横向的光滑函数,又考虑了纵向的光滑函数,得到比较光滑的横向、纵向变化的背景电性结果,但有可能把一些小构造光滑掉.快速松驰反演算法和共轭梯度算法由于计算速度快,占内存少而被用于三维反演中,二者相比,快速松驰算法在求解雅可比矩阵时只做一次正演计算,在更新模型时解小型方程组,所以在速度上更胜一筹.在后三种算法中,由于复杂电性结构无解析解,正演计算都采用数值计算.数值计算的可靠性、速度影响着反演算法的有效性,这方面的研究也将是 2D、3D 复杂电性结构反演的研究方向之一.

关键词 反演方法,可控源音频大地电磁法,评述
中图分类号 P631 **文献标识码** A **文章编号** 1004-2903(2003)02-0197-06

Inversion method of controlled source audio-frequency magnetotelluric data

WANG Ruo, WANG Miao-yue
(*Institute of Geology and Geophysics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

Abstract This paper is a review on inversion method of controlled source audio-frequency magnetotellurics data. For a horizontally layered earth it was the first time people get the better result from the direct inversion with full wave data than with single plane wave data only. But the method is difficult to apply to 2D and 3D earth medium with complicated electric structures. For the 2D complex earth medium with lateral and vertical variation, Occam inversion method not only consider the lateral smooth function but also the vertical smooth function, the good result of smoothed lateral and vertical electric property can be obtained, but some small features may be smoothed out. Rapid relaxation and conjugate gradients inversion algorithm have advantages of calculation time and computer memory saving. they have frequently been used in 3D inversion. Rapid relaxation method is better in saving calculation time, because it need only solve small set of equations in updating model and only do one forward solution in each inverse iteration, at the same time, the Jacoby matrix is obtained. Because of no analytical solution for complex earth, the numerical calculation is needed in forward solution for the later three methods. The reliability and calculation velocity of forward modeling, affect the efficiency of inversion method, so this is one of research direction of future study in inversion method for 2D, 3D complex earth.

Keywords inversion method, CSAMT, review

0 引 言

可控源音频大地电磁法(CSAMT)是电磁法的一种,它的主要特点是用人工控制的场源做频率测深.采用人工场源可以克服天然场源信号微弱的缺点,但是波的非平面波特性决定了处理资料时的复杂性.当发射距是探测深度的 3 ~ 5 倍,高频时,非平面波可以近似为平面波,低频时出现电阻率随频率降低而呈 45°上升的近场效应,须做近场改正,校正后的数据可看做为平面波产生的结果,然后用 MT 的方法来分析,所以,MT 的反演方法都可用来做近场校正后的CSAMT反演.不做平面波校正的反

收稿日期 2002-12-10; **修回日期** 2003-02-20.
基金项目 中国科学院知识创新工程重要方向研究项目(西南水电开发重大高难地质工程信息获取与安全评价技术方法研究)资助.
作者简介 王若,1971 年 11 月生,女,河北辛集人,硕士,现为中国科学院地质与地球物理研究所助理研究员,主要从事直流电法,电磁法的正反演研究.(Email:wangruo@mail.igcas.ac.cn)

演[1,2],其有效数据只能取远场的值,而对于近场甚至过渡场的资料都要摒弃不用,造成较大的浪费. Pargha S.Routh *et. al.*[3]尝试了在一维空间用不做平面波校正的全资料来做 CSAMT 反演.全资料的 CSAMT 反演需要有源理论电磁法的正演解,当介质为水平成层介质时有积分解,这方面的反演容易实现,但当电性结构复杂时,无解析解,因此其反演问题也就更复杂,本文未评述复杂电性结构反演的研究.

大多数的电磁反演都为线性反演,最小二乘解法[1]是最传统的,也是行之有效的方法.1D CSAMT 反演[1,4]可以精确地模拟电磁场,但它只限于简单的水平层状模型,如果发射机和接收机间的导电构造较复杂,即 2D 甚至 3D 情况下,这种方法就会给出错误解.为了处理有限源效应和地电高维构造, Wannamaker[2]在解释野外资料时把 1D CSAMT 反演和 2D MT 反演结合起来.若给最小二乘法加一光滑限制,就可得到模型的正则化解,奥克姆反演、最小构造反演和 RRI 算法都属于这一类型,这些方法在二维资料反演中取得了较好的结果.但在三维反演中,一般方法的应用遇到了困难.我们知道,正演是反演的基础,在电磁法二维和三维正演方法中,最常用的方法是有限差分和有限元方法,模型被剖分成的网格越多,雅可比矩阵(或灵敏度矩阵)就越大,占用的内存也就越多,反演时需要解的方程组也就越多,现在计算机的内存和计算速度提高了很多,为电磁法三维资料的处理解释在微机上实现展现了前景,但现有台式计算机的内存和速度仍还存在不足,所以就要寻找捷径来提高算法的速度和尽量减少所占用的内存,Newman&Alumbagh[5]用集成并行机来处理 3D EM 源和 3D 电导率结构问题,在单台微机上一般在优化算法上做努力,快速度松驰反演(RRI)在计算速度上的优势和共轭梯度反演在占用内存上的优势使得这两种算法在电磁反演特别在三维计算中倍受瞩目.下面分别对四种较为常用的方法给予评述.

1 水平层状地层 CSAMT 法资料的直接反演[3]

本方法在频率域用谢昆诺夫势得到电磁场正演公式,用联合格林函数法得到灵敏度矩阵,构造目标函数时既考虑了最小构造又考虑了光滑度,这里的最小构造是使所求的模型与一个参考模型的接近程度最大,在合适的拟合差限制条件下,通过求与一个参考模型接近的目标函数的最小值来得到反演模型,或得到一个光滑模型.反演结果与做过近场校正后的结果相比,未做校正的数据结果更好.

将观测数据和模型之间的关系写成泛函形式,

$$\boldsymbol{d} = F(\boldsymbol{m}),$$

其中,d 为观测数据向量,$F(\boldsymbol{m})$为正演函数,$\boldsymbol{m}$ 为模型向量.将 $F(\boldsymbol{m})$用泰勒公式展开为

$$F(\boldsymbol{m}^{(n)} + \delta\boldsymbol{m}) = F(\boldsymbol{m}^{(n)}) + J\delta\boldsymbol{m} + O\,\|(\delta\boldsymbol{m})^2\|\,.$$

其中,$\boldsymbol{m}^{(n)}$为模型的第 n 次迭代值,只取前两项,并令 $\boldsymbol{d}^n = F(\boldsymbol{m}^{(n)})$,$\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} = F(\boldsymbol{m}^{(n)} + \delta\boldsymbol{m})$,

则上式写为

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} = \boldsymbol{d}^{\mathrm{n}} + \boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{m}\ , \tag{1}$$

构造目标函数时既考虑了最小构造又考虑了光滑度,相应的目标函数为

$$\phi_m = \alpha_s \| \boldsymbol{w}_s(\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_{\mathrm{ref}}) \|^2 + \alpha_z \| \boldsymbol{w}_z \boldsymbol{m} \|^2. \tag{2}$$

限制条件为

$$\phi_d = \| \boldsymbol{w}_d(\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} - \boldsymbol{d}^n - \boldsymbol{J}\delta\boldsymbol{m}) \|^2 = \phi_{\mathrm{d}}^{*}\,.$$

这里 $\boldsymbol{m}_{\mathrm{ref}}$为参考模型,$\boldsymbol{m}$ 为模型,α_s 和 α_z 为控制参数,它们的作用是决定结果趋近于参数模型还是趋近于光滑模型,$w_s(z)$和 $w_z(z)$是用来控制模型构造信息的加权函数,$\boldsymbol{w}_d$ 是由数据标准偏差的倒数组成的对角矩阵.

$$\boldsymbol{w}_s = \mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{h_1}{z_0}}, \sqrt{\frac{h_2}{z_1}}, \cdots, \sqrt{\frac{h_{m-1}}{z_{m-2}}}, \sqrt{\frac{h_{m-1}}{z_{m-1}}}\right)_{m\times m},$$

$$\boldsymbol{w}_z = \begin{pmatrix} -\gamma_1 & \gamma_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -\gamma_{m-1} & \gamma_{m-1} \end{pmatrix}_{(m-1)\times m}.$$

其中,

$$\gamma_i = \sqrt{(z_i + z_{i-1})/(h_i + h_{i+1})},$$

z_i 是第 i 个界面的深度,h_i 是第 i 层的厚度.

$$z_0 = \xi * h_1,\ 0 < \xi \leqslant 1\ .$$

写成无条件极值目标函数形式

$$\phi(\boldsymbol{m}) = \phi_m + \beta^{-1}(\phi_{\mathrm{d}} - \phi_{\mathrm{d}}^{*})\ . \tag{3}$$

其中,β 是拉格朗日因子.

对(3)式求关于 $\delta\boldsymbol{m}$ 的偏导,并使其等于零(求极小值),整理得到关于 $\delta\boldsymbol{m}$ 的线性方程

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{J}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_d\boldsymbol{J} + \beta\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_m)\delta\boldsymbol{m} \\ &= \boldsymbol{J}\boldsymbol{w}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_d\delta\boldsymbol{d} - \beta\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_m\boldsymbol{m}^{(n)} + \beta\alpha_s\boldsymbol{w}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_s\boldsymbol{m}_{\mathrm{ref}}. \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{w}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_m = \alpha_s\boldsymbol{w}_s^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_s + \alpha_z\boldsymbol{w}_z^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w}_z.$$

用该方程可以解出 $\delta\boldsymbol{m}$,新模型按

$$\boldsymbol{m}^{(n+1)} = \boldsymbol{m}^{(n)} + \delta\boldsymbol{m}$$

给出,新的拟合差由

$$\phi_d^{NL} = \| w_d(d^{(obs)} - d(m^{(n+1)})) \|^2$$

来计算.

为了解方程(4),必须先求出灵敏度矩阵

$$J_{ij} = \partial d_i / \partial m_j,$$

可以用联合格林函数法来求 J_{ij}.

该方法中,当正演函数 $F(m)$ 只包含远场平面波部分时,相当于 1DMT 资料反演,方法的实施比较简单.当 $F(m)$ 包含全波场时,正演过程比较复杂,但对于一维水平层状地层,有积分解析解,可以通过数值积分获得数值解.CSAMT 资料为全波场资料既包含远场平面波资料,又包含近场资料和过渡场资料.当对资料进行近场和过渡场校正后,只存在平面波资料,此时反演公式中的正演函数 $F(m)$ 可用只包含平面波的简单形式,否则就需要采用包含全波场的有源积分解析形式,此时增加了反演过程的复杂性,不过实践表时,后者效果更好[3].此外同时采用最小构造和光滑模型能改进反演的效果.对一维模型来说,能够给出主要的构造.最小构造反演的多余结构少,相对于最光滑模型,一些小的构造能展示出来;用最光滑模型给出了真模型的光滑解,当先验参考模型未知时,光滑模型便成了最有效的模型.

2　奥克姆反演[6,7]

在第 1 节中,考虑了模型垂直方向的光滑问题,但对二维问题来说,水平方向仍是粗糙的,所以不期望的结构仍会出现在结果中,于是 Constable 把最大光滑模型的思想应用于二维反演中,它不仅考虑了模型的垂向光滑问题,而且考虑了横向光滑问题.

在离散情况下,观测数据与模型之间的关系可写成泛函形式,

$$d = F(m) + e,$$

其中,d 为观测数据向量,$F(m)$ 为正演函数,m 为模型向量,e 为观测数据与理论计算值间的误差,对于简单的电性结构 $F(m)$ 可用解析式表示,否则 $F(m)$ 可用有限元等数值方法获得.

为了同时考虑垂向和横向光滑情况,定义粗度矩阵为

$$R_1 = \| \partial_y m \|^2 + \| \partial_z m \|^2. \tag{5}$$

这里 x 方向为走向方向,y 为垂直走向方向,z 为垂直向下方向,定义 ∂_y, ∂_z 为

$$\partial_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & -1 & \cdots & & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & & \ddots & & & \cdots & \\ & & & & & & & -1 & & 1 \end{bmatrix}_{N\times N},$$

同理:

$$\partial_y = \begin{bmatrix} \partial y_1 & & & 0 \\ & \partial y_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \partial y_l \end{bmatrix}_{l\times l}.$$

其中:

$$\partial y_i = \begin{bmatrix} -V_i/h & V_i/h & & & 0 \\ & -V_i/h & V_i/h & & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & -\frac{V_i}{h} & \frac{V_i}{h} \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{p\times p}.$$

这里 p 是横向网格数,l 是个纵向网格数,总的网格数是 $p \times l = N$ 个,横向网格长度是 h,纵向网格长度是 $V_i (i = 1,2,\cdots,l)$.

给定约束条件

$$x^2 = \| Wd - WF[m] \|^2. \tag{6}$$

其中:W 是加权对角矩阵,

$$W = \mathrm{diag}\left[\frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \cdots, \frac{1}{\sigma_M}\right],$$

σ_j 是已知的观测值 $d_j (j = 1,\cdots,M)$ 的方差,M 是观测值的个数.

若假设噪声是不相关的,且服从零均值高斯分布,$X^2 = X_*^2 = M$ 即不相关数.

引入拉格朗日乘子,将条件约束变为无条件约束,目标函数 $U[m]$ 为

$$U[m] = \| \partial_y m \|^2 + \| \partial_z m \|^2 + \mu^{-1} \{ \| Wd - WF(m) \|^2 - X_*^2 \}. \tag{7}$$

对(7)求关于 m 的极小,相应的 $i+1$ 次迭代解为

$$m_{i+1} = [\mu(\partial_y^T \partial_y + \partial_z^T \partial_z) + (WJ_i)^T (WJ_i)]^{-1} (WJ_i)^T W\hat{d}_i.$$

其中,

$$\hat{d}_i = d - F(m_i) + J_i m_i.$$

J_i 为雅可比矩阵的元素,当存在电磁场的解析解时,可由解析解获得,否则可用数值方法或近似方法获得.相对于上一种方法中的光滑方法,二者原理上可类比,然而在二维构造情况下,本方法不仅在垂直方向光滑,而且在水平方向也光滑,因此更加有效.

3　快速松驰反演(RRI)算法[8]

前面提到,当电性结构复杂时,波场没有解析解,需要用数值方法获取正演解.在获取正演解的过程中,RRI 中的雅可比矩阵可通过近似法同时获得.

用电导率的对数为模型参数,可得到模型扰动

量与资料扰动量间的关系式.

$$\delta d_{xy} = \int \frac{2\sigma_0(z)E_0^2(y_i,z)}{E_0(y_i,0)H_0(y_i,0)}\delta(\ln\sigma)\mathrm{d}z\ ,$$

(TE 模式) (8)

$$\delta d_{yx} = \int \frac{-2\sigma_0(z)E_0^2(y_i,z)}{E_0(y_i,0)H_0(y_i,0)}\delta(\ln\sigma)\mathrm{d}z\ .$$

(TM 模式) (9)

其中 δd_{xy} 为观测数据与理论数据的差值,它的实部加上负号为视电阻率的对数,$\sigma_0(z)$ 为模型改变前的电导率值,$E_0(y_i,0)$ 为模型改变前第 i 个测点下地表电场值,$H_0(y_i,0)$ 为模型改变前第 i 个测点下地表磁场值. $E_0(y_i,z)$, $H_0(y_i,z)$ 为初始模型或本次迭代前模型的理论波场,以上场值可用有限差分或有限元方法获得[8,9]. 有了各量的值,雅可比矩阵也就随之得到.

在公式 1,2 中考虑的光滑度,只是简单地认为相邻网格的模型参数的差最小,这对于简单模型是合适的,而对于横向变化复杂的模型,需给出一种更为合理的均衡纵向模型参数变化与横向模型参数变化的目标函数,在这种情况下,构造目标函数为

$$W = Q + \beta e^{\mathrm{T}} e\ . \tag{9}$$

其中

$$Q = \int (z+z_0)^3\left[\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + g(z)\frac{\partial^2 m}{\partial y^2}\right]^2 \mathrm{d}z,$$

β 为拉格朗日因子. e 为拟合差,其值为给定期望的拟合差,且满足

$$(d - e) - d_0 = Fm - Fm_0. \tag{10}$$

d 为观测数据,d_0 为理论计算结果,F 为雅可比矩阵,m 为所求模型,m_0 为加扰动前的模型.

将 Q 用离散的数值积分代替,写成矩阵形式为

$$Q = (Rm - C)^{\mathrm{T}}(Rm - C)\ . \tag{11}$$

其中,

$$R_{jj-1} = q_j^{1/2}(z_j+z_0)^{3/2}\frac{2}{(z_j - z_{j-1})(z_{j+1}-z_{j-1})}\ ,$$

$$R_{jj+1} = q_j^{1/2}(z_j+z_0)^{3/2}\frac{2}{(z_{j+1} - z_j)(z_{j+1}-z_{j-1})}\ .$$

$$a_j = g(y_i,z_j)q_j^{1/2}(z_j+z_0)^{3/2}\times \frac{2}{(y_i - y_{i-1})(y_{i+1}-y_{i-1})},$$

$$b_j = g(y_i,z_j)q_j^{1/2}(z_j+z_0)^{3/2}\times \frac{2}{(y_{i+1} - y_i)(y_{i+1}-y_{i-1})},$$

$$R_{jj} = -R_{jj-1} - R_{jj+1} - a_j - b_j,$$

$$c_j = -a_j m_j(y_{i-1}) - b_j m_j(y_{i+1}),$$

$$g(y_i,z_j) = \alpha\left[\frac{\Delta_i}{z_j+z_0}\right]^{\eta}.$$

Δ_i 为测点间隔,$\alpha=4$,$\eta=3/2$,q_j 为与数值积分有关的系数,y_i 为第 i 个测点横坐标,z_j 为第 j 个深度.

把(10)式写为

$$\tilde{d} = F\tilde{R}^{-1}\tilde{R}m + e\ .$$

其中,

$$\tilde{d} = d - d_0 + Fm_0,$$

$\tilde{R}$ 为 R 的变形非奇异矩阵. 将 $F\tilde{R}^{-1}$ 和 $\tilde{R}m$ 做如下分解:

$$F\tilde{R}^{-1} = [g_1 \quad H \quad g_{n_z}],$$

$$\tilde{R}m = \begin{bmatrix} p_1 \\ \tilde{m} \\ p_{n_z} \end{bmatrix},$$

$$c = [c_1 \quad \tilde{c} \quad c_{n_z}]\ .$$

这里,g_1 和 g_{n_z} 是 $F\tilde{R}^{-1}$ 的右列和左列,p_1 和 p_{n_z} 是 $\tilde{R}m$ 的第一个元素和最后一个元素,c_1 和 c_{n_z} 是 c 的第一个和最后一个元素. 定义 $G=[g_1 \quad g_{n_z}]$ 和 $P=[p_1 \quad p_{n_z}]$,可将 $\tilde{d}$ 重写为

$$\tilde{d} = H\tilde{m} + Gp + e\ . \tag{12}$$

对(12)式求关于 $\tilde{m}$ 的最小值并经过一系列的代数运算得到

$$\tilde{m} = \tilde{c} + \beta H^{\mathrm{T}} Sa\ .$$

其中

$$S = (\beta H^{\mathrm{T}} + I)^{-1},$$

$$a = \tilde{d} - H\tilde{c} - Gp,$$

$$p = \gamma^{\mathrm{T}}(\tilde{d} - H\tilde{c}),$$

$$\gamma^{\mathrm{T}} = (G^{\mathrm{T}}SG)^{-1}G^{\mathrm{T}}S\ .$$

求出 $\tilde{m}$ 后,模型参数可通过下式得到

$$m = \tilde{R}^{-1}\begin{bmatrix} p_1 \\ \tilde{m} \\ p_{n_z} \end{bmatrix}.$$

RRI 算法不仅在目标函数的构造以及雅可比矩阵的求取上有改进,而且还有如下一些优点,①每次迭代反演只需一次正演. ②因为用前一次的场来近似这一次的电磁场的横向梯度,使得场方程变为只对 z 的偏导数,所以可以象做一维反演那样来做二维乃至三维的反演. ③不用存贮雅可比矩阵 F,节省了存贮空间. ④数据量越大其优势越明显. 由于这些优点,Xinyou Lu,Martyn Unsworth, *et al*[10] 又将这种方法用于 2.5D CSAMT 资料的反演中, 谭捍东[11] 将它用于三维电磁反演中,均取得了较好的效果,使之成为受人注意的方法之一.

4　共轭梯度法[12]

共轭梯度松驰法不用直接求解大型线性方程组,而只解方程中的一部分,因此避免了存贮与构造完整的灵敏度矩阵,只用它的某些行向量或列向量乘以一个矢量即可.与常规的反演方法比,既节省了内存,又缩短了计算时间,因此受到了广泛注意,被用于地球物理的方方面面,除了电磁法外,还用于跨孔走时成像,跨孔波形成像和直流电阻率[13]中.

采用文献[12]的构造方法来构造目标函数.假定资料余差和模型余差不相关,把它们的联合概率函数作为目标函数

$$\Phi = \exp - [\boldsymbol{d} - g(\boldsymbol{m})]^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_{dd}^{-1} (\boldsymbol{d} - g(\boldsymbol{m})) + (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0) \boldsymbol{R}_{mm}^{-1} (\boldsymbol{m} - \boldsymbol{m}_0)] \, . \tag{13}$$

其中,$\boldsymbol{d}$ 为观测资料,$g(\boldsymbol{m})$为模型空间到资料空间的响应函数,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{dd}}$为资料协方差矩阵,$\boldsymbol{R}_{\mathrm{mm}}$为模型协方差矩阵,$\boldsymbol{m}$ 为模型矢量,$\boldsymbol{m}_0$ 为初始模型矢量,H 为共轭转置.从目标函数的构制看,该方法中也采用了平滑思想.

首先对(13)式线性化,令

$$g(\boldsymbol{m}) = g(\boldsymbol{m}_{\mathrm{prior}}) + A\Delta\boldsymbol{m} \, ,$$

$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_{\mathrm{prior}} + \Delta\boldsymbol{m} \, ,$$

其中

$$A_{ij} = \partial d_i / \partial m_j \, ,$$

代入(13)式,然后求关于 $\Delta\boldsymbol{m}$ 的偏导,令导数为零,解得

$$(\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{dd}}^{-1} + \boldsymbol{R}_{\mathrm{mm}}^{-1})^{-1} \Delta\boldsymbol{m}_k = \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{dd}}^{-1} [\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)] + \boldsymbol{R}_{\mathrm{mm}}^{-1} (\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{m}_k) \, . \tag{14}$$

共轭梯度算法在于由(14)式获得解的迭代循环方式不同,可表述如下:

非线性反演循环: (从 1 到最后一次反演迭代步骤)

$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)$,　当前模型响应,第一次正演.

$\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)$,　数据余差.

$\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{m}_k$,　模型余差.

$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}_k^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{dd}}^{-1} [\boldsymbol{d} - \boldsymbol{g}(\boldsymbol{m}_k)] + \boldsymbol{R}_{\mathrm{mm}}^{-1} (\boldsymbol{m}_0 - \boldsymbol{m}_k)$,　只要用 $\boldsymbol{A}$ 的某个列向量去乘一个向量,相当于进行第二次正演.

$\Delta\sigma_0 = 0$, $\boldsymbol{r}_0 = \boldsymbol{b}$,　共轭梯度解方程组前进行初始化,$\boldsymbol{r}_0$ 为初始搜索方向.

共轭梯度循环算法: (从 1 到最大迭代次数)

$\beta_i = \boldsymbol{r}_{i-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{i-1} / \boldsymbol{r}_{i-2}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{i-2}$,　$\boldsymbol{r}_i$ 为负梯度方向唱会 β_i 为步长因子.

$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{r}_{i-1} + \beta_i \boldsymbol{p}_{i-1}$,　$\boldsymbol{p}_i$ 为搜索方向.

$\boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i = [\boldsymbol{A}^{\mathrm{H}} \boldsymbol{R}_{\mathrm{dd}}^{-1} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{R}_{\mathrm{mm}}^{-1}] \boldsymbol{p}_i$,相当于进行和三次正演计算且为偏导数矩阵的某个行或列向量与一个向量的乘积.

$\alpha_i = \boldsymbol{r}_{i-1}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{r}_{i-1} / \boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i$,　α_i 为一系数.

$\Delta\sigma_i = \Delta\sigma_{i-1} + \alpha_i \boldsymbol{p}_i$,　更新模型扰动量.

$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i-1} - \alpha_i \boldsymbol{B}\boldsymbol{p}_i$.　更新搜索方向.

共轭梯度循环结束.

$\sigma_{k+1} = \sigma_k + \Delta\sigma$,　更新模型参量,回到第一步直到 $\Delta\sigma$ 足够小为止.

非线性反演循环结束.

上述求解方法表明,共轭梯度法做反演时,直接从目标函数出发,无须形成 $Ax = b$ 的方程组,因而避免了存贮偏导数矩阵时占用大量内存.在计算时,每一次反演只做了三次正演计算,且在用到偏导数矩阵的地方都只用到它对某一特殊向量起作用的部分,从而避免了解大型线性方程组.针对电磁法中物性参数数量级可能相差较大,使偏导数矩阵的条件数较大,从而导致共轭梯度方法的迭代缓慢的缺点,可对上述方法进行改进,即在做共轭梯度前对方程组进行预条件化[13,14]以改善偏导数矩阵的条件数.预条件化后的共轭梯度方法在计算时间及内存要求上都远远优于直接解方程组的方法,吴小平[13]给出了一些具体的数据来说明这个个问题,在 P133 微机上用 NDP-Fortran 编译,对于 25 × 25 × 10 的三维模型来说,直接法每次迭代用了 205 s,占用了 5 M 内存,而预条件化后的共轭梯度方法用了 2.5 s,占用了 250 K 内存,网格数越多,两者的差距越大,且经过预条件化后,解的效果明显得到改进[13,14].

5　结语

在这四种方法中,直接用 CSAMT 资料,不作近场校正的只有第一种方法作过尝试,初步说明直接用 CSAMT 全资料的反演结果,实际上比先做近场校正化为 MT 资料,再作反演的效果要好.奥克姆方法,RRI 方法和共轭梯度法在用线性化方法解非线性方程的解法上都有各自的长处,都是考虑到电性结构的复杂性,采用 2D,3D 资料,在使用 CSAMT 资料的实例研究中,尚未直接采用 CSAMT 全场资料,而是采用作近场校正后变成 MT 资料来做反演.其

中 RRI 在计算速度上占有绝对的优势,这主要是因为它用了近似方法来得到灵敏度矩阵,在完成正演的同时也求得了灵敏度矩阵,且经过一系列的矩阵变换,使最后求解时的方程组变为了小型方程组,这也是加快速度的一方面.共轭梯度的优势是不用存贮大型的灵敏度矩阵,节省了大量内存,但反演时要进行三次正演计算,所以在速度上虽然比别的方法快,但却比不过 RRI 算法.

这四种方法都有可以采用 CSAMT 资料来进行反演,只不过奥克姆方法,RRI 方法中的场 E,H,共轭梯度法中的响应函数 $g(m)$要用数值方法求得,适应于 2D、3D 复杂电性结构情况的研究是今后可控源音频大地电磁数据反演方法的一个研究方向.

参 考 文 献(References):

[1] Yutaka Sasaki, Yoshihiro Yoneda, and Koichi Matsuo. Resistivity imaging of controlled-source audio-frequency magnetotelluric data[J]. Geophysics, 1992, 57(7):952~955.

[2] Wannamaker P. Tensor CSAMT survey over the Sulphur Springs thermal area, Valles Caldera, New Mexico, U.S.A., Part 1: implications for structure of the western caldera[J]. Geophysics, 1997, 62(2): 451~465.

[3] Pargha Routh S and Douglas Oldenburg W. Inversion of controlled source audio-frequency magnetotellurics data for a horizontally layered earth[J]. Geophysics, 1999, 64(6): 1689~1697.

[4] Boerner D E, Wright J A, Thurlow J G &Reed L E. Tensor CSAMT studies at the Buchans Mine in central Newfoundland[J]. Geophysics, 1993, 58(1):12~19.

[5] Newman G A &Alumbaugh D L,. Three-dimensional massively parallel electromagnetic inversion-I[J]. Theory, Geophys. J. Int.. 1997, 128: 345~354.

[6] deGroot-Hedlin C and Constable S. Occam's inversion to generate smooth, two-dimensional models from magnetotelluric data[J]. Geophysics, 1990, 55(12):1613~1624.

[7] Constable S C, Parker R L, and Constable C G. Occam's inversion: a practical algrithm for generating smooth models from EM sounding data[J]. Geophysics, 1987, 52(3):289~300.

[8] Torquil Smtth J and John Booker R. Rapid inversion of two- and three-dimensional magnetotelluric data[J]. J.G.R, 1991, 96(B3):3905~3922.

[9] 王若,王妙月,底青云.二维大地电磁数据的整体反演[J].地球物理学进展,2001,16(4):53~60.

[10] LU Xin-you, Martyn Unsworth and John Booker. Rapid relaxation inversion of CSAMT data[J]. Geophys. J. Int., 1999, 138:381~392.

[11] 谭捍东.大地电磁法三维正反演问题研究[D],北京:中国地质大学,2000.

[12] Randall L Mackie, Theodore R Madden. Three-dimensional magnetotelluric inversion using conjugate gradients[J]. Geophys. J. Int., 1993, 115:215~229.

[13] 吴小平.利用共轭梯度方法的电阻率三维正反演研究[D].北京:国科学技术大学,1998.

[14] William Rodi, Randall L Mackie. Nonlinear conjugate gradients algorithm for 2-D magnetotelluric inversion[J]. Geophysics, 2001, 66(1):174~187.