



地下水数值模拟技术

朱国荣 编著

南京大学水科学系

2006 年 9 月

第一篇 有限单元法

有限单元法 (Finite Element Method — FEM) 是求解数学物理问题的一种行之有效的数值方法, 基本思想诞生于 1943 年 (Courant)。二十世纪五十年代, 有限单元法从结构分析的基础上发展起来, 六十年代在工程计算领域得到了相当的推广。

二十世纪六十年代中期, 有限单元法被用来求解地下水运动问题, 而最早将该方法引入我国地下水研究的时间是六十年代末, 其中, 肖树铁、孙纳正、谢春红、陈崇希、薛禹群等人在这方面起到了重要的作用。

二十世纪七十年代, 以南京大学、武汉水利电力学院、山东大学和中国地质科学院为首的教学研究单位, 在推广和应用有限单元法求解地下水问题上发挥了重大的作用, 形成了目前广泛使用这种方法开展地下水流模拟的局面, 也确立了有限单元法在地下水资源评价中不可动摇的地位。

应该说, 用有限单元法建立地下水数值模型是现阶段研究地下水运动规律, 地下水资源评价、地下水管理、地下水溶质运移、包气带中地下水的运动, 地面变形等方面的基础工作。显然, 掌握这种基本的地下水模拟技术的重大意义也就不言而喻了。

目前, 与有限单元法具备同等价值的常用地下水数值模拟技术还有有限差分法 (Finite Element Method — DEM)、边界单元法 (Boundary Element Method — BEM), 这些方法的数学原理不同, 离散方法各异, 但最终都将对微分方程的求解转化为求解一个水头方程组。

本篇专门讨论有限单元法的原理和应用, 通过对一组理想问题的讨论, 由浅入深地介绍给予有限元法的地下水模拟技术。

第一章 有限单元法的基本概念

1.1 有限单元法的基本分类

从本质上说,有限单元法最终把对定解问题的求解转化为对现行方程组得求解,而根据建立方程组得过程不同,有限单元法可以分为若干种,目前最普遍使用的是雷利—里茨(Rayleigh-Ritz)法、迦辽金(Galerkin)法和单元均衡法。以下用求解地下水运动问题来简单介绍这三种方法的基本思想。

1.1.1 雷利—里茨有限单元法

雷利—里茨有限单元法简称里茨法,它以变分原理和剖分插值为基础,把对描述地下水运动的定界问题的求解转化为对等价于该定解问题的泛函求极值问题,然后在各离散元确立水头插值函数以便建立水头方程组。

1.1.2 迦辽金有限单元法

迦辽金法从最小二乘法原理出发,根据剩余理论引入对应于地下水运动的定解问题的权函数,通过剖分后,确定各离散元的水头插值函数进而建立水头方程组。

1.1.3 单元均衡法

单元均衡法简称均衡法,它以质量守恒为基础,首先把研究区域 D 离散成有限多个足够小的子域 D_i (图 1-1 中的阴影处),然后建立每个子域的流量平衡关系。根据这个思想,某一个研究时段内流进和流出子域的水量差应该等于子域内的含水层在该时段内由于水头下降或上升所释放或贮存的水量,据此可利用达西定律建立一个满足于定解问题所描述的水头方程组。

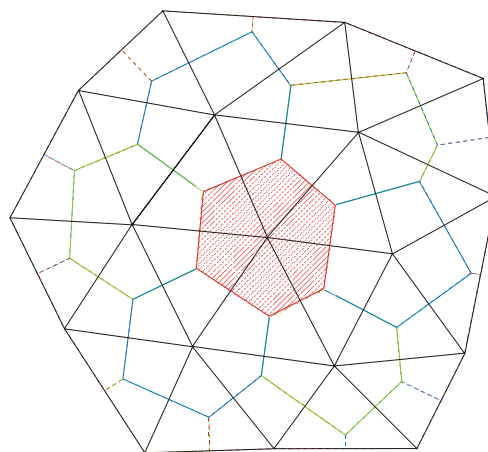


图 1-1 单元均衡法中的均衡子域

1.2 空间离散

空间离散的实质就是将一个被研究的连续空间按照某种规则离散为一系列彼此相依的子空间,这些子空间称为单元,所以又将这些单元称为离散单元,这个过程又成为单元剖分。

单元的形态根据研究区域的几何形状可以有不同的形态。对于二维问题,最常用的单

元是三角形单元，有时候也用矩形或四边形单元（图 1-2 中的 b, c）。前者可以看作是后者的特殊情况。当然，在需要的时候还可以是其它的多边形单元，例如曲边三角形、曲边四边形等。

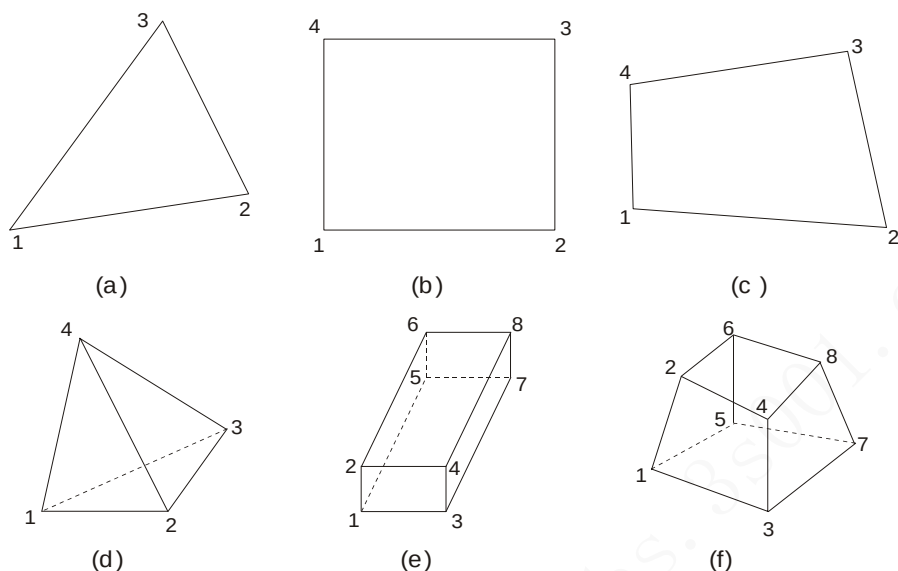


图 1-2 二维问题的离散单元

对于三维问题，最基本的是四面体单元（图 1-2d）或长方体和六面体（图 1-2e, f），必要的时候也可以使用曲面体。

在地下水模型中采用哪种形状的单元主要取决于计算区域的几何形状以及描述该问题所必须的独立空间坐标的数目。由于三角形单元比较灵活，能较好地适应复杂的边界形状，所以在研究二维问题的时候经常采用它。以下我们来重点讨论二维问题中的三角形单元剖分。

假设存在平面区域 D ，将区域 D 剖分位移系列的三角形，这种剖分要一直进行到区域 D 的边界。当边界为直线时，边界的直线就作为三角形的一边；当边界为曲线时，就用适当的折线来逼近（图 1-3）。

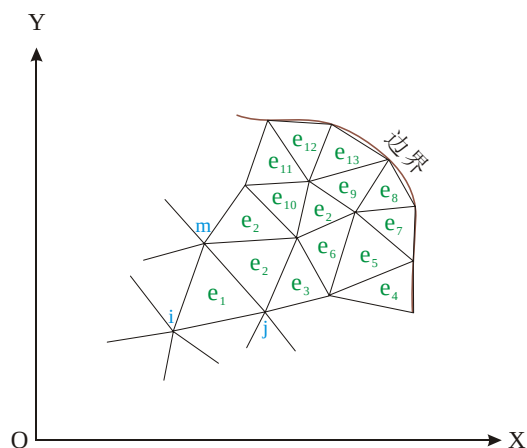


图 1-3 区域 D 几何边界附近的三角形空间离散原则

各个三角形的顶点称为结点。总的说来，三角形的划分是任意的，以下是一些基本剖分原则：

- 如果是用三角形单元，则三角形的最长边和最短边之比不能大于 3；
- 单元不能跨越非均质分区界线和内部边界界线；

c) 单元的大小可根据具体情况调整。例如，在水力坡度变化比较大的地段，必须采用比较小的单元（单元密度大），反之可以减小单元密度；

1.3 水头插值

根据资料的精度和研究需要，有限单元法中可以使用包括线形插值、二次插值、对数插值等各种插值方法。

对于二维问题中的三角形单元，若使用线性插值，其水头插值函数形式如下：

$$\tilde{H}(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (1-1)$$

对于三维问题中的四面体单元，若使用线性插值，其水头插值函数形式如下：

$$\tilde{H}(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (1-2)$$

1.4 有限单元法的解题过程

有限单元法的解题过程一般包括以下几个步骤

1、建立研究区 **D** 的地下水数学模型。

2、对研究区 **D** 进行空间离散和时间离散（对于非稳定流问题）。原则上是用有限多个足够小的单元来替代原有的研究空间。

3、确定水头插值函数；

水头插值函数直接影响计算精度。一般说来，非线性插值的精度要高于线性插值，但是这样处理势必产生较大的工作量，故此，在二维问题的三角形单元中，一般多采用如式 1-1 所示的多项式进行插值。

4、整理模型所需要的数据。这些数据包括每个单元所包含的结点信息，每个结点的坐标，各类边界条件（包括边界上的结点号或单元号，结点对应的水头或单元对应的流量，降雨强度，参数分区资料等）。

5、根据题目的性质和求解目标编制程序，求解未知水头结点的水头；

这部分内容是本文的重点，有限元模拟中，利用了集合论的基本原理将等价于区域 **D** 中地下水运动定解问题的泛函离散为一系列单元泛函，再对单元泛函进行积分线性化处理并形成单元渗透矩阵，最后将各单元渗透矩阵集成成区域 **D** 的总渗透矩阵 **A**，得到水头方程组如下：

$$[A]\{H\} = \{F\} \quad (1-14)$$

式中，**A** 为总渗透矩阵；**H** 为各离散点的待求水头；**F** 为常数列向量，其中包含第一类边界结点的已知水头，第二类边界上的已知疏量，区域 **D** 内的降雨补给量，抽水井的开采量等各种垂直方向的水量交替量。

6、利用计算得到的水头计算其它的物理量。

第二章 里茨有限单元法的基本原理

2.1 变分原理

2.1.1 泛函和极值

如图 2-1 所示, 在二维空间 X-Y 中存在点 $A(x_a, y_a)$ 和 $B(x_b, y_b)$, 求连接 A, B 的最短曲线。

从微分学角度出发, 若将 A, B 两点间的曲线 L 离散成有限个足够小的曲线段, 每段的长度为 ΔL , 则存在

$$\begin{aligned}\Delta L &\approx \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2} \\ &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \\ &= \sqrt{1 + (y')^2} dx\end{aligned}$$

上式利用了两点间的距离公式, 当 ΔL 足够小时, 所产生的误差与 ΔL 为同价无穷小, 因而我们可以进一步利用订积分概念, 获得 A, B 两点间的曲线长度为

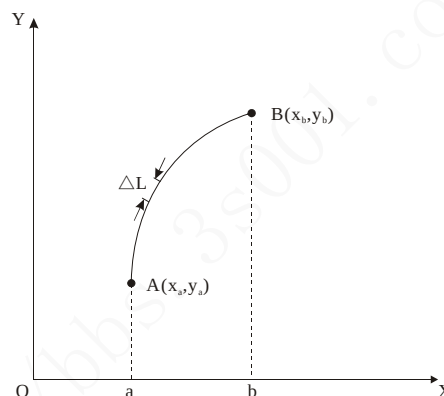


图 2-1 两点间的最短曲线

$$L = \int_a^b \Delta L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2-1)$$

显然, 在确定 A, B 两点之后, L 的大小完全取决于函数 $y(x)$, 不同的 $y(x)$ 描述不同的曲线, 因此, 通过 A, B 两点间的所有曲线就集成了一个曲线簇, 我们将这个集合记为 C_0 , 也就是说 C_0 代表了一个函数集合, 这个函数集合称为 (2-1) 式的容许函数类。

假如我们进一步取 $A(0,0)$, 和 $B(1,1)$, 则

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (2-2)$$

由于 $y = x^n$ ($n > 0$) 通过原点 $(0,0)$, $(1,1)$ 两点, 因此 $y = x^n$ 属于容许函数类 C_0 。

如果取 $n=1$, $y=x$, 则有

$$y' = 1$$

从而得到

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + (y')^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 1} dx = \sqrt{2}$$

如果取 $n=2$, 则 $y=x^2$; 又因为

$$y' = (x^2)' = 2x$$

从而得到

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1+(y')^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1+(2x)^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x\sqrt{1+4x^2} + \frac{1}{2} \ln(2x + \sqrt{4x^2+1}) \right]_0^1 \\ &\approx 1.475 \end{aligned}$$

据此而知，对于容许函数类 C_0 中的任一个函数 $y=y(x)$ ，曲线长 L 都有一个确定的值和它相对应。因此， L 是函数的函数，在数学上称函数的函数为泛函。由于 L 的自变量是函数 $y=y(x)$ ，所以记为

$$L = L[y(x)]$$

其中 $y=y(x)$ 属于容许函数类 C_0 。

综上所述，我们可以得到一个自变量的泛函的一般表达式为

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (2-3)$$

如果在容许类函数 C_0 中，存在一个 $y=y(x)$ ，对于 C_0 中邻近 $y=y(x)$ 的其他任何函数 $y=f(x)$ ，如果都有 $I[f(x)] > I[y(x)]$ 的话，则称为(2-3)的极小值曲线，或称泛函 $I[y(x)]$ 在曲线 $y=y(x)$ 上取得它的极小值。

2.1.2 欧拉方程

假如 $y=y(x)$ 是泛函 (2-3) 的极小值曲线，那 $y=y(x)$ 应该满足什么样的条件呢？我们来考虑 $y=y(x)$ 的一条邻近曲线 $f(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$ 。其中 $\eta(x)$ 为任意函数，它存在连续一阶导数。为了使 $f(x)$ 属于函数类 C_0 ，必须假设 $\eta(a)=\eta(b)=0$ ，我们将这个假定代入 (2-3) 式，于是有：

$$I[f(x)] = \int_a^b F(x, f, f') dx = \int_a^b F(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta') dx \quad (2-4)$$

显然，如果 $y=y(x)$ 给泛函 I 以极值，则泛函 (2-4) 式在 $\alpha=0$ 时也必定存在极值。根据函数的极值条件，函数的导数在 $\alpha=0$ 时应该等于零，即

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

也就是存在

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \left[\frac{d}{d\alpha} \int_a^b F(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta') dx \right]_{\alpha=0} \\
 &= \left[\int_a^b \left(Ff \frac{df}{d\alpha} + Ff' \frac{df'}{d\alpha} \right) dx \right]_{\alpha=0} \\
 &= \int_a^b (F_y \eta + F_{y'} \eta') dx
 \end{aligned} \tag{2-5}$$

对 (2-5) 式中的第二项采用分布积分公式

$$\int_a^b F_{y'} \eta' dx = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'} d\eta = \eta \frac{\partial F}{\partial y'} \Big|_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx$$

这样一来, 极值条件 (4-5) 变为

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y} \eta dx - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx \\
 &= \int_a^b \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx = 0
 \end{aligned} \tag{2-6}$$

由于 η 是满足 $\eta(a) = \eta(b) = 0$ 的任意函数, 根据变分法的基本引理¹, 可得

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{2-7}$$

此为泛函 (2-4) 的极小值曲线 $y = y(x)$ 所必须满足的条件, 也即泛函 (2-4) 在 $y = y(x)$ 取

极值的必要条件。方程 (2-7) 称为**欧拉** (Euler) 方程。

根据 (2-2) 和 (2-3) 式, 可知

$$F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$$

因为

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{1}{2} [1 + (y')^2]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y' = \frac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$$

由于 (2-2) 式中不含 y 项, 因此有

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

所以, 由 (2-7) 可得泛函 (2-2) 的欧拉方程为

¹ 变分法的基本引理一内容如下:

设 $f(x)$ 是区间 (a, b) 上的一个连续函数, 如果函数 $\eta(x)$ 本身和它的导数在区间 (a, b) 内是连续的, 且在端点等于零, 即 $\eta(a) = \eta(b) = 0$, 如果对于任何这样的函数 $\eta(x)$ 恒使

$$\int_a^b \eta(x) f(x) dx = 0$$

成立, 则 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上恒等于零, 即

$$f(x) \equiv 0$$

$$-\frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0 \quad (2-8)$$

求 (2-8) 的积分得到

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = A$$

其中 A 为积分常数, 将上式等号两端同时平方得到

$$\left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \right)^2 = A^2$$

进一步得

$$(y')^2 = A^2 \cdot [1 + (y')^2] = A^2 + A^2 \cdot (y')^2$$

最后得到

$$(y')^2 [1 - A^2] = A^2 \quad \text{或} \quad (y')^2 = \frac{A^2}{1 - A^2}$$

另外, 由于通过 $A(a, y_0)$ 、 $B(b, y_1)$ 两点之解实质上是上式在边界条件

$$\begin{cases} y(a) = y_0 \\ y(b) = y_1 \end{cases} \quad (2-9)$$

处的解

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{b - a} (x - a)$$

该式代表一条通过 A 、 B 两点的直线, 这完全吻合几何学中的定律: 过两点之间最短的曲线是直线。

尽管以上仅讨论了包含一个变量的泛函问题, 但是不难看出, 求泛函的极值曲线可以化为求微分方程 (2-7) 的解, 即解微分方程的边值问题。

2.2 极值问题

2.2.1 多个自变量的泛函问题

由于描述地下水运动的微分方程一般都含有两个或更多个变量, 因此我们必须进一步研究含有多个变量的多元函数情况。例如, 求泛函

$$I[u(x, y)] = \iint_D F[x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)] dx dy \quad (2-10)$$

在边界条件

$$u|_{\Gamma} = \varphi \quad (2-11)$$

下的极小函数。其中 Γ 为区域 D 的边界， φ 为 Γ 上的已知函数。

容许函数类 C_0 是由在区域 D 的边界 Γ 上取定值 $u|_{\Gamma} = \varphi$ 的函数所组成。

设 $u = u(x, y)$ 为 C_0 中的极小函数。令 $f(x, y) = u(x, y) + \alpha \eta(x, y)$ 为 C_0 中的一个和 $u = u(x, y)$ 邻近的函数。其中 $\eta(x, y)$ 为任意函数，它有连续二阶导数。由于 $f(x, y)$ 属于 C_0 ，因此就存在

$$\eta(x, y)|_{\Gamma} = 0 \quad (2-12)$$

将其代入泛函 (2-10)，得到

$$\begin{aligned} I[f] &= \iint_D F(x, y, f, f_x, f_y) dx dy \\ &= \iint_D F(x, y, u + \alpha \eta, u_x + \alpha \eta_x, u_y + \alpha \eta_y) dx dy \end{aligned}$$

当 $u = u(x, y)$ 给泛函 I 以极值时，则上述泛函在当 $\alpha = 0$ 的时候也应有极值。为此有

$$\left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = 0$$

即

$$\begin{aligned} \left. \frac{dI}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= \frac{d}{d\alpha} \left[\iint_D F(x, y, u + \alpha \eta, u_x + \alpha \eta_x, u_y + \alpha \eta_y) dx dy \right]_{\alpha=0} \\ &= \left[\iint_D (F_{\eta} + F_{\eta_x} \eta_x + F_{\eta_y} \eta_y) dx dy \right]_{\alpha=0} = 0 \end{aligned}$$

因此有

$$\iint_D (F_{\eta} + F_{\eta_x} \eta_x + F_{\eta_y} \eta_y) dx dy = 0$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} (F_{\eta_x} \eta) &= F_{\eta_x} \eta_x + \eta \frac{\partial}{\partial x} F_{\eta_x}; & \frac{\partial}{\partial y} (F_{\eta_y} \eta) &= F_{\eta_y} \eta_y + \eta \frac{\partial}{\partial y} F_{\eta_y} \\ F_{\eta_x} \eta_x &= \frac{\partial}{\partial x} (F_{\eta_x} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial x} F_{\eta_x}; & F_{\eta_y} \eta_y &= \frac{\partial}{\partial y} (F_{\eta_y} \eta) - \eta \frac{\partial}{\partial y} F_{\eta_y} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\iint_D (F_{\eta} + F_{\eta_x} \eta_x + F_{\eta_y} \eta_y) dx dy \\ &= \iint_D \left[F_{\eta} + \frac{\partial}{\partial x} (F_{\eta_x} \eta) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{\eta_y} \eta) - \eta \left(\frac{\partial}{\partial x} F_{\eta_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{\eta_y} \right) \right] dx dy \\ &= \iint_D \eta \left(F_{\eta} - \frac{\partial}{\partial x} F_{\eta_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{\eta_y} \right) dx dy + \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} (F_{\eta_x} \eta) + \frac{\partial}{\partial y} (F_{\eta_y} \eta) \right] dx dy \end{aligned}$$

应用格林公式

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\Gamma} [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y)] ds$$

其中 n 为 Γ 的外法线方向，据此可将上式化为

$$\begin{aligned} & \iint_D (F_u \eta + F_{u_x} \eta_x + F_{u_y} \eta_y) dx dy \\ &= \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} [F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y)] \eta ds \end{aligned}$$

即

$$\frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \oint_{\Gamma} [F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y)] \eta ds = 0 \quad (2-13)$$

因为 $\eta|_{\Gamma} = 0$ ，由 (2-13) 式得到

$$\iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy = 0$$

又因为 $\eta(x, y)$ 是在 Γ 上等于零的任意函数，根据变分法的基本引理二²，可得

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0 \quad (2-14)$$

这就是泛函 (2-10) 在 $u = u(x, y)$ 取极值的必要条件。(2-14) 为二个变量的欧拉方程，它是一个关于 u 的二阶偏微分方程。

求泛函实例

【例1】 求泛函

$$I[u(x, y)] = \iint_D \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2-15)$$

在边界条件 $u|_{\Gamma} = \varphi$ 下的极小函数。

解：由以上推理可知，极小函数 $u = u(x, y)$ 必须满足欧拉方程 (2-14)，因为

$$F = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right]$$

² 变分的基本引理二内容如下：

设 $f(x, y)$ 是区域 D 内的一个连续函数，如果函数 $\eta(x, y)$ 本身和它的一阶导数在区域 D 内都是连续的，且在区域 D 的边界 Γ 上 $\eta(x, y)$ 等于零，若对于任何这样的函数 $\eta(x, y)$ 恒使

$$\iint_D f(x, y) \eta(x, y) dx dy = 0$$

则 $f(x, y)$ 在区域 D 内恒等于零，即 $f(x, y) \equiv 0$ 。

* 基本引理二的证明方法参见《地下水文学的数值法》P199。

故

$$F_u = 0, \quad F_{u_x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad F_{u_y} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

将它们代入 (2-14) 式, 得到相应的微分方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

这是著名的拉普拉斯方程, 用于描述均质、各向同性含水层中的地下水稳定运动。

因此, 泛函 ((2-15) 在边界条件 $u|_{\Gamma} = \varphi$ 的极小函数必须满足拉普拉斯方程及边界条件

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u|_{\Gamma} = \varphi \end{cases} \quad (2-16)$$

(2-16) 为一定解问题。

解毕。

【例2】 求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - w(x, y) H \right\} dx dy \quad (2-17)$$

在边界条件

$$H|_{\Gamma} = \varphi \quad (2-18)$$

下的极小函数。

解: 此时

$$F = \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - WH$$

$$F_H = -W(x, y), \quad F_{H_x} = T \frac{\partial H}{\partial x}, \quad F_{H_y} = T \frac{\partial H}{\partial y}$$

故相应的欧拉方程为

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0$$

泛函 (2-17) 在边界条件 (2-18) 下的极小函数必须满足以下的描述

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 \\ H|_{\Gamma} = \varphi \end{cases} \quad (2-19)$$

如果把 (2-19) 式中的 H 看作水头, T 看作导水系数, W 为单位时间, 单位水平面积上从垂直方向进入含水层的水量, 则它就是非均质、各向同性承压含水层中地下水稳定运动的定

解问题。

解毕。

以上讨论的泛函极值问题最终都归结为在一定的边界条件下解微分方程的问题，即边值问题。由于事先假设的容许函数类 C_0 的函数在区域边界上取第一类边界条件（图 2-2），所以得到的往往是第一类边值问题。

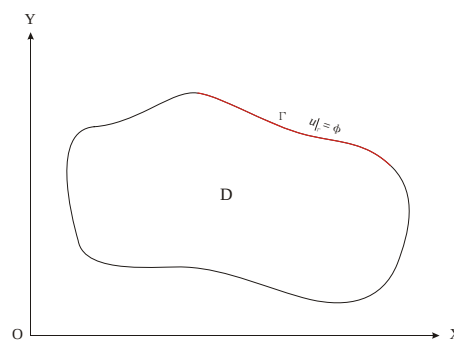


图 2-2 第一类边值问题

2.2.2 自然边界条件

在图 2-3 所示的边界上，同时存在 Γ_1 和 Γ_2 两类边界，如果容许类函数仅仅是由那些在区域 D 的一部分边界 Γ_1 上取定值

$$u|_{\Gamma_1} = \varphi \quad (2-20)$$

的函数所组成的话，这样的函数集合我们以 C_{01} 表示之。

泛函（2-10）在 C_{01} 中的极小函数必须满足那些条件呢？为此我们设 $u = u(x, y)$ 为泛函（2-10）在 C_{01} 中的极小函数。另 $f(x, y) = u(x, y) + \alpha\eta(x, y)$ 为 C_{01} 中一个和它邻近的函数，其中 $\eta(x, y)$ 为任意函数，它有连续二阶导数。由于 $u(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 都属于 C_{01} ，故

$$\eta|_{\Gamma_1} = 0$$

在这种情况下，对于泛函（2-10）在第一类边界条件下的极值问题由（2-13）式表达

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = & \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma} [F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y)] \eta ds = 0 \end{aligned} \quad (2-13)$$

当仅存在 $\eta|_{\Gamma_1} = 0$ 时，也就是说（2-13）式等号右端第二项的边界条件描述

$$\Gamma = \Gamma_1$$

时（即不存在 Γ_2 ），（2-13）将演变为（2-14）式，成为一个典型的第一类边值问题。反之，

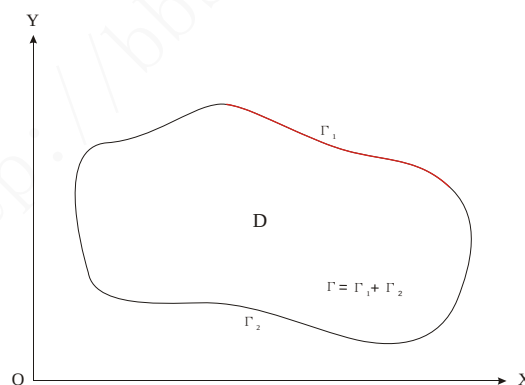


图 2-3 含有第一类边值和第二类边值问题的区域

如果考虑 Γ_2 , 则 (2-13) 式等号右端的第二项不可缺少, 应该写成

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = & \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma_2} \left[F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y) \right] \eta ds = 0 \end{aligned} \quad (2-21)$$

由于 η 是任意的, 根据 (2-21) 式可知极小值函数必须满足以下关系

$$F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0 \quad (2-22)$$

$$F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y) = 0 \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \quad (2-23)$$

【例3】 求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - w(x, y) H \right\} dx dy \quad (2-24)$$

在边界条件

$$H|_{\Gamma_1} = \varphi \quad (2-25)$$

下的极小函数。(2-25) 中的 Γ_1 为 D 的一部分边界, D 的另一部分边界为 Γ_2 。

解: 由于

$$F = \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - w(x, y) H$$

$$\text{且} \quad F_H = -W \quad F_{H_x} = T \frac{\partial H}{\partial x} \quad F_{H_y} = T \frac{\partial H}{\partial y}$$

故 (2-24) 在边界条件 (2-23) 下的极小函数根据 (2-22)、(2-23) 式必须满足

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \bigg|_{\Gamma_2} = 0 \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-26)$$

若用边界 Γ_2 的外法线方向 n 来表示, (2-26) 中的第二式可简写成

$$T \frac{\partial H}{\partial n} \bigg|_{\Gamma_2} = 0 \quad (2-27)$$

以上两式在边值问题中属于**第二类边界条件**, 在地下水渗流模型中, 它们均解释为隔水边界 (为第二类边界条件的特例)。

解毕。

从以上的分析看出, C_{01} 中的函数在一部分边界 (图 2-3 的 Γ_1) 上用**第一类边界条件**来

描述, 例如前面讨论的 $u|_{\Gamma_1} = \varphi$ 或 $H|_{\Gamma_1} = \varphi$; 而在另一部分边界 (如图 2-3 的 Γ_2) 则没有什

么限制，即不要求它满足任何条件。然而在最后的结论（式 2-26）中的极小函数在这一部分边界上依然满足某种边界条件（如式-26 种的第二式和式 2-27）。这个条件对于泛函 I 的容许类函数 C_{01} 的函数来说并不要求象第一类边界条件那样事先规定，但是在泛函 I 的极小函数 $u = u(x, y)$ 中会自动满足，因此称这类边界条件为**自然边界条件**（第三类边界条件也属于自然边界条件）。

解微分方程时，自然边界条件必须作为定界条件列出（式 2-26 种的第二式），但在解相应的变分问题时，它是被极值解自动满足的，无需作为定解条件列出。

如果定解问题中存在第一类边界条件，则在变分问题中和微分方程边值问题中必须作为定界条件专门处理，也就是极值解必须在满足这个边界条件的函数 C_{01} 或 C_0 中去寻找。

自然边界条件涉及到 u （或 H ）及其法向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$ （或 $\frac{\partial H}{\partial n}$ ），当边界形状或内部的分界线比较复杂时，用微分方程的办法来处理就很困难。由于变分原理能够自动满足，所以基于变分原理的有限元法就能使这个有利的因素得到充分的发挥。

式 2-26 和式 2-27 均是对隔水边界条件的描述，当边界上有侧向补给量 q （单宽流量）进入 D 时，为了使某种泛函的极小函数在上满足流量为 q 的边界条件，必须在泛函（2-10）中加入一个附加项 $-\int_{\Gamma_2} qu ds$ 。即考虑在 C_{01} 中求泛函

$$I[u(x, y)] = \iint_D F[x, y, u(x, y), u_x(x, y), u_y(x, y)] dx dy - \int_{\Gamma_2} qu ds \quad (2-28)$$

的极小函数。

设 $u = u(x, y)$ 为泛函 (2-28) 在 C_{01} 的极小函数，同时令 $f(x, y) = u(x, y) + \alpha \eta(x, y)$ 为 C_{01} 中一个和它邻近的函数。其中 $\eta(x, y)$ 和以上的假设一样，为任意函数，有连续二阶导数。所以

$$\eta|_{\Gamma_1} = 0$$

泛函 $I[f(x, y)]$ 在 $\alpha = 0$ 时为极小值，即

$$\frac{dI}{d\alpha}|_{\alpha=0} = 0$$

运用前面的一些讨论，可推导得到

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha}|_{\alpha=0} = & \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma} [F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y)] \eta ds - \int_{\Gamma_2} q \eta ds \end{aligned}$$

此处的 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$ 。由于存在 $\eta|_{\Gamma_1} = 0$ ，所以得到

$$\begin{aligned} \frac{dI}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} = & \iint_D \eta \left(F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} \right) dx dy + \\ & + \oint_{\Gamma_2} \left[F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y) - q \right] \eta ds \end{aligned}$$

考虑到 η 的任意性和 $\eta|_{\Gamma_1} = 0$ ，利用 (2-24) 可知泛函 (2-28) 在 C_{01} 中的极小函数必须满足

$$\begin{cases} F_u - \frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} = 0 \\ F_{u_x} \cos(n, x) + F_{u_y} \cos(n, y) = q \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \end{cases} \quad (2-29)$$

【例4】 求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - w(x, y) H \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} q H ds \quad (2-30)$$

在边界条件

$$H|_{\Gamma_1} = \varphi \quad (2-31)$$

下的极小函数。

解：根据 (2-29)，泛函 (2-30) 的极值条件必须满足以下条件

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = q \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ \text{或} \quad T \frac{\partial H}{\partial n} = q \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-32)$$

也就是说，泛函 (2-30) 在 C_{01} 中的极小函数必须满足地下水稳定流方程，在边界 Γ_2 上则必须同时满足有测向流量流入的边界条件 (2-29) 的第二式，在 Γ_1 上取定值 φ 。

解毕。

以上的讨论解决了泛函 (2-28) 在 C_{01} 中的极小函数必须满足的微分方程和边界条件 (2-32)。反过来，在边界条件 (2-31)、(2-29) 第二式下，微分方程 (2-32) 的第一式的解是否一定是泛函 (2-28) 在 C_{01} 的极小函数呢？

2.3 地下水运动问题的变分原理

本节讨论对某个定界问题的求解等价于求某个泛函在其中的极小函数的充分必要条件，即讨论逆问题。

2.3.1 稳定流问题与变分问题的等价性

如果不考虑垂直方向的水流运动和越流补给情况，则稳定流问题可归结为以下的定界问题

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 & (T > 0 \text{ 在 } D \text{ 内}) \\ \text{边界条件} \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = q & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-33)$$

式中， $H(x, y)$ ——水头；

T ——透水系数；

W ——单位时间，单位面积上进入含水层的水量（流出为负值，为了处理方便，越流补给项在有限单元法中单独列出，不包含在 W 项内）；

D ——渗流区，即为由 Γ_1 和 Γ_2 所包围的研究区域。其中 Γ_2 为侧向流入强度 q 已给定的边界， Γ_1 为水头值已给定的边界；

q —— Γ_2 边界的单位宽度内流入 D 的流量（流出为负）；

n ——边界的外法线方向。

以下证明定界问题（2-33）等价于求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - w(x, y) H \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} q H ds \quad (2-34)$$

在 C_{01} 中的极小函数。

泛函（2-34）在 C_{01} 中的极小函数必须满足定界问题(I)的解，然而，这仅仅说明 C_{01} 中使泛函 $I(H)$ 达到极小的函数包含在定界问题(I)的解中，所以它的极小函数是定界问题(I)的解。可是这并不能说明定界问题(I)的解一定是泛函 $I(H)$ 达到极小的函数。所以我们必须同时证明定界问题(I)的解一定是泛函(2-34)在 C_{01} 中的极小函数，这就是将求解定界问题(I)等价于求泛函 $I(H)$ 极小函数的充分必要条件，只有这样，才能确认定界问题(I)与泛函 $I(H)$ 极小问题的等价性。

设 $H = H_m(x, y)$ 为定界问题(I)的解，为了证明 $H = H_m(x, y)$ 为泛函（2-34）在 C_{01} 的极小函数，我们必须从 C_{01} 中任取一个函数 ψ ，使其存在

$$I(\psi) \geq I(H_m)$$

为此令

$$\psi - H_m = \eta$$

亦即

$$\psi - H_m = \eta$$

因为 $\eta|_{\Gamma_1} = 0$ ，因此

$$\begin{aligned} I(\psi) &= I(H_m + \eta) \\ &= \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H_m}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_m}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] - W(H_m + \eta) \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} q(H_m + \eta) ds \\ &= \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H_m}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_m}{\partial y} \right)^2 \right] - WH_m \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} qH_m ds + \\ &\quad + \iint_D \left[T \frac{\partial H_m}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + T \frac{\partial H_m}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - W\eta \right] dx dy - \int_{\Gamma_2} q\eta ds + \\ &\quad + \iint_D \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} I(\psi) &= I(H_m) + \iint_D \left[T \frac{\partial H_m}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + T \frac{\partial H_m}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} - W\eta \right] dx dy - \\ &\quad - \int_{\Gamma_2} q\eta ds + \iint_D \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (2-35)$$

由于

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \eta \right) &= T \frac{\partial H_m}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \eta \right) &= T \frac{\partial H_m}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

同时应用格林公式，即

$$\begin{aligned} &\iint_D \left[T \frac{\partial H_m}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + T \frac{\partial H_m}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \right] dx dy \\ &= \iint_D \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \eta \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \eta \right) - \eta \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \right) \right] \right\} dx dy \\ &= \oint_{\Gamma_2 + \Gamma_1} \left[T \frac{\partial H_m}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H_m}{\partial y} \cos(n, y) \right] \eta ds - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \right) \right] \eta dx dy \end{aligned}$$

把以上结果代入 2-35 式，结合边界条件 $\eta|_{\Gamma_1} = 0$ ，可得

$$\begin{aligned}
 I(\psi) = & I(H_m) - \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_m}{\partial y} \right) + W \right] \eta dx dy + \\
 & + \int_{\Gamma_2} \left[T \frac{\partial H_m}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H_m}{\partial y} \cos(n, y) \right] \eta ds + \\
 & + \iint_D \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy
 \end{aligned} \quad (2-36)$$

由 $H = H_m(x, y)$ 满足 (2-33) 的第一和第二式 (基本微分方程和自然边界条件), 即

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W &= 0 \\
 T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) &= q = 0
 \end{aligned}$$

将它们代入 (2-36) 得

$$I(\psi) = I(H_m) + \iint_D \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (T > 0) \quad (2-37)$$

由此得到了前的假定, 即

$$I(\psi) \geq I(H_m)$$

由于 ψ 是任意的, 所以由上式可知 H_m 为泛函 (2-34) 在 C_{01} 中的极小函数, 亦即定界问题(I)的解一定是泛函 (2-34) 在 C_{01} 中的极小函数。这样就证明了定界问题(I)和泛函 (2-34) 的极值问题的等价性。

在地下水渗流问题中, 第三类边界条件指边界上的水头与流量组合为已知。即

$$T \frac{\partial H}{\partial n} + \alpha H = q \quad n \text{ 为 } \Gamma_3 \text{ 的外法线方向} \quad (2-38)$$

式 2-38 中的 α 和 q 为系数, 所构成的定界问题如下

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 & (T > 0 \text{ 在 } D \text{ 内}) \\ \text{边界条件} \\ T \frac{\partial H}{\partial n} + \alpha H = q & \text{在 } \Gamma_3 \text{ 上} \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-39)$$

定界问题(II)的解等价于求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} T \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - wH \right\} dx dy + \int_{\Gamma_3} \left(\frac{1}{2} \alpha H^2 - qH \right) ds \quad (2-40)$$

在 C_{01} 中的极小函数。

如果存在越流补给现象，可将定界问题(I)修改为

$$(III) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) + W = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ T \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + T \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = q & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-41)$$

式中 K_z 表示越流所通过岩层的渗透系数， d_z 表示越流所经过的垂直距离， H_z 表示补给层的水头。因此 $\frac{K_z}{d_z} (H_z - H)$ 就表示了单位时、单位面积上进入含水层的越流补给量（流进为正），。对定界问题(III)的求解可等价位求泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - WH - \frac{K_z}{d_z} H_z H + \frac{1}{2} \frac{K_z}{d_z} H^2 \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} q H ds \quad (2-42)$$

在 C_{01} 中的极小函数。

如果同时考虑各向异性现象，定解问题(III)可改为

$$(IV) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) + W = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) = q & \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上} \\ H|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (2-43)$$

式中 K_x 、 K_y 分别表示 x 方向和 y 方向（与两个渗透主轴平行）的渗透系数， M 为含水层厚度。对定界问题(IV)的求解等价于对泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{M}{2} \left[K_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + K_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - wH - \frac{K_z}{d_z} H_z H + \frac{1}{2} \frac{K_z}{d_z} H^2 \right\} dx dy + \int_{\Gamma_2} q H ds$$

在 C_{01} 中的极小函数。

2.3.2 非稳定流问题与变分问题的等价性

在定解问题(III)的基础上，我们来讨论如下的地下水非稳定流动定解问题与变分问题的等价性。问题如下

$$(V) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) + W = S \frac{\partial H}{\partial t} & t \geq 0, (x, y) \in D \\ \text{初始条件 } H(x, y, 0) = H_0(x, y) \\ \text{边界条件 } H|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, t) \quad t \geq 0 \\ T \frac{\partial H}{\partial n} = q(x, y, t) \quad \text{在 } \Gamma_2 \text{ 上, } t \geq 0 \end{cases} \quad (2-44)$$

式中 H_0 为初始水位, S 为贮水系数, t 为时间。

定解问题涉及到时间 t , 为此, 我们先考虑某一个时间段 $t_0 < t < t_0 + \Delta t$, 对于 $t = t_0$ 和 $t = t_0 + \Delta t$ 时刻的水头值我们分别用 H_- 和 H_+ 表示, 即

$$H(t_0) = H_-, \quad H(t_0 + \Delta t) = H_+$$

同时以 $\bar{H}$ 表示他们的平均值, 即 $\bar{H} = \frac{1}{2}(H_- + H_+)$

在该时段内积分定界问题(V)的基本微分方程, 因为

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} S \frac{\partial H}{\partial t} dt = SH \Big|_{t_0}^{t_0 + \Delta t} = S[H(t_0 + \Delta t) - H(t_0)] = S(H_+ - H_-)$$

将以上结果代入基本微分方程, 移项后得到

$$S(H_+ - H_-) - \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) + W \right] dt = 0 \quad (2-45)$$

为了近似地计算这个积分, 我们假设在该时间段 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ 内, H 是线性变化的, 即

$$H = H_- + \frac{t - t_0}{\Delta t} (H_+ - H_-) \quad t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$$

对等号两侧分别求 x 的偏导数

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial H_-}{\partial x} + \frac{t - t_0}{\Delta t} \left(\frac{\partial H_+}{\partial x} - \frac{\partial H_-}{\partial x} \right)$$

然后再等式两端各乘于 T , 再对 x 求一次导数, 得

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) + \frac{t - t_0}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right]$$

在 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 的范围内对它进行积分, 得



$$\begin{aligned}
 \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) dt &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) + \frac{t-t_0}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right] \right\} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) dt + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{t-t_0}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right] dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \Delta t + \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right] \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} (t-t_0) dt \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \Delta t + \frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_+}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_-}{\partial x} \right) \right] \Delta t \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right) \Delta t
 \end{aligned}$$

同理可得

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) dt = \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right) \Delta t$$

而

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} W dt \approx \frac{1}{2} [W(t_0+\Delta t) + W(t_0)] = \bar{W} \Delta t$$

同理

$$\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) dt \approx \frac{K_z}{d_z} (\bar{H}_z - \bar{H}) \Delta t$$

式中 $\bar{H}_z = \frac{H_z(t_0+\Delta t) + H_z(t_0)}{2}$, 再将 (2-45) 中的第一项改写成

$$S(H_+ - H_-) = S(H_+ + H_- - 2H_-) = 2S(\bar{H} - H_-)$$

把以上结果代入 (2-45) 式的第一项, 得到描述定界问题的基本微分方程如下

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right) + \frac{K_z}{d_z} (\bar{H}_z - \bar{H}) + \bar{W} + \frac{2S}{\Delta t} (H_- - \bar{H}) = 0 \quad (2-46)$$

(2-45) 中的边界条件也分别对 t 进行积分, 由此分别得到

$$\bar{H} \Big|_{\Gamma_1} = \bar{\varphi} \quad (2-47)$$

$$T \frac{\partial \bar{H}}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = \bar{q} \quad (2-48)$$

(2-47) 和 (2-48) 式中, $\bar{\varphi}$ 和 $\bar{q}$ 分别为 t_0 到 $t_0+\Delta t$ 时间内 φ 和 q 的平均值, 即

$$\bar{\varphi} = \frac{\varphi(t_0+\Delta t) + \varphi(t_0)}{2}$$

$$\bar{q} = \frac{q(t_0+\Delta t) + q(t_0)}{2}$$

将 (2-46)、(2-47)、(2-48) 和 (2-45) 中的初始条件统一起来考虑, 得到描述非均质

承压含水层中，考虑越流补给和垂向水量交换的地下水非稳定流定界问题。非常有趣的是，该定解问题的基本微分方程（2-46）中不包含时间项 t ，因而将一个关于 H 的抛物型方程变化为关于 $\bar{H}$ 的椭圆型方程，其中最关键的是将含水层中水头变化所释放或贮存的水量处理为 $\frac{2S}{\Delta t}(H_- - \bar{H})$ ，其结果类似于越流问题的处理。

在抛物型方程中，通常设 t_0 时刻的水头 H_- 为已知来求 $t_0 + \Delta t$ 时刻的水头 H_+ 。因此我们设方程（2-46）中的 H_- 为已知，结合定解条件（2-47）、（2-48）就可以求得平均水头 $\bar{H}$ ，然后由

$$H_+ = 2\bar{H} - H_-$$

求得 $t_0 + \Delta t$ 时刻的水头 H_+ 。重复这个过程，就可以不断利用不同的 t_0 时刻水头获得下一个 $t_0 + \Delta t$ 时刻的水头 $H(t_0 + \Delta t)$ ，用 $H(t_0 + \Delta t)$ 求 $H(t_0 + 2\Delta t)$ ，……，最后用 $H[t_0 + (n-1)\Delta t]$ 求得 $H(t_0 + n\Delta t)$ 。

以上过程的实质是将一个抛物型方程的定解问题变成了椭圆型方程的定解问题。这个方法是 A.Verruijt 在 1972 年提出的，从而将由（2-46）、（2-47）、（2-48）确定的定解问题等价于在 C_{01} 中求泛函

$$I[H(x,y)] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \bar{w}\bar{H} - \frac{K_z}{d_z} \left(\bar{H}_z \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) - \frac{2S}{\Delta t} \left(H_- \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} \bar{q} \bar{H} ds$$

的极小问题。

2.4 水井的处理

水井是一种垂向取水、排水建筑物，需要对它们作专门的处理。处理得方法有三种，第一种是把井流量化为单位时间、单位面积上的负的垂直补给量作为 w 项的一部分来处理的。这种处理办法比较简单但缺少数学上的严密性。本节讨论另外两种处理办法，得到的结果将与第一种处理方法一致。

2.4.1 把井作为第二类边界处理

根据达西定律

$$2\pi r T \frac{\partial H}{\partial r} = Q \quad \text{或} \quad T \frac{\partial H}{\partial r} = \frac{Q}{2\pi r}$$

式中 r —— 径向距离；

Q —— Q 大于 0 为抽水井流量， Q 小于 0 时为注水井流量；

如果用 n 表示外法线方向，由于井是圆型的，所以 n 的方向沿着半径方向指向井中心，因此，这个边界条件可以表示成

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = -\frac{Q}{2\pi r_w} \quad \text{在 } \Gamma_w \text{ 上} \quad (2-50)$$

(2-50) 中， r_w 为井的半径。由此可知，对于由 (2-46)、(2-47)、(2-48) 所组成的包含有一口水井的定解问题来说，泛函 I 中需要增加

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \quad (2-51)$$

式中， $\bar{Q}$ 为 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 时刻内井流量的平均值。

如果 D 中存在多口水井（假设为 V 口），设 Q_j 为第 j 口井的流量， Γ_{w_j} 为第 j 口井的边界， r_{w_j} 为第 j 口井的井径。则(2-51)式改为

$$\sum_{j=1}^V \int_{\Gamma_{w_j}} \frac{\bar{Q}_j}{2\pi r_{w_j}} \bar{H} ds \quad (2-51a)$$

对应的泛函 (2-49) 就变成

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \bar{w} \bar{H} - \frac{K_z}{d_z} \left(\bar{H}_z \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) - \frac{2S}{\Delta t} \left(H_- \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) \right\} dx dy \quad (2-52)$$

$$- \int_{\Gamma_2} \bar{q} \bar{H} ds + \sum_{j=1}^V \int_{\Gamma_{w_j}} \frac{\bar{Q}_j}{2\pi r_{w_j}} \bar{H} ds$$

相应的边界条件 (2-50) 在定界问题中必须列出，但在解等价的变分问题时，它也是被极值解自动满足的，无需作定界条件列出。

2.4.2 把井作为第一类边界条件处理

这种处理方法是把水井的水位直接作为第一类边界上的水位值，具体的方法和处理第一类边界条件一样。

第三章 三角形单元上的水头插值

本节讨论二维问题中，配合三角形单元离散而广泛采用的多项式插值方法。

三角形单元上的水头线性插值函数就是用多项式 $\tilde{H}(x, y)$ 代替实际待求水头 $H(x, y)$ 。

由于线性函数在空间上表现为一平面，而实际水头分布通常为一曲面，所以在同一单元 e 上的线性插值在集合上就是用平面代替曲面，在总体上用彼此相连的分块平面（各个单元）组成的折面去代替整个水头分布曲面。

3.1 水头插值函数的建立

取图 1-3 中的单元 e 来建立水头插值函数，我们将这个单元的三个结点按逆时针仿效依次编号为 i, j, m ，对应的结点坐标分别为 (x_i, y_i) ， (x_j, y_j) 和 (x_m, y_m) ，水头函数 $H(x, y)$ 再这三个结点上的值依次为 H_i, H_j 和 H_m ，具体参见图 3-1。

单元 e 内的水头插值采用 $\tilde{H}(x, y)$ 表示，其多项式表达式如 (1-1) 所示。其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为系数。

显然，水头插值函数 $\tilde{H}(x, y)$ 在单元 e 的三个顶点的取值必须与实际水头值 $H(x, y)$ 一致。也就是说，它们之间存在如下的关系。

$$\begin{cases} \tilde{H}_i = \tilde{H}(x_i, y_i) = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = H(x_i, y_i) = H_i \\ \tilde{H}_j = \tilde{H}(x_j, y_j) = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = H(x_j, y_j) = H_j \\ \tilde{H}_m = \tilde{H}(x_m, y_m) = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m = H(x_m, y_m) = H_m \end{cases} \quad (3-1)$$

以上三式中等号最右边为单元 e 的三个结点的实际水头值，基于以上的关系，我们将它们进一步整理为：

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i = H_i \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j = H_j \\ \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m = H_m \end{cases} \quad (3-2)$$

(3-2) 中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为待定系数，为了获得单元 e 的水头插值函数的具体表达，必须求解方程组 (3-2)。

由于三角形的单元 e 的三个结点的编号 i, j, m 是按逆时针方向排列的，所以，方程组

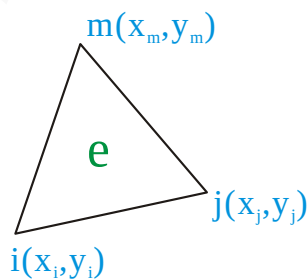


图 3-1 离散单元 e

(3-2) 的系数矩阵所构成的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (3-3)$$

(3-3) 中的 Δ 为三角形单元 e 的面积, Δ 求解过程如下。

设三角形单元 e 在直角坐标系中具有如图 3-2 的结点分布。我们过三角形单元 e 的三个顶点分别做垂直于 X 轴的辅助线 ii' , jj' , mm' , 这三条辅助线与 X 轴分别构成了梯形 $\square ii'm'm$ 和 $\square mm'j'j$, 此外, 三角形的 ij 边又和 X 轴上的 $i'j'$ 线段构成了梯形 $\square ii'j'j$ 。

显然, Δ 和三个梯形的面积之间存在如下的关系。

$$\Delta = \square ii'm'm + \square mm'j'j - \square ii'j'j \quad (3-4)$$

因为

$$\begin{aligned} \square ii'm'm &= \frac{(ii' + mm') \times i'm'}{2} \\ &= \frac{[(y_i - y_{i'}) + (y_m - y_{m'})] \times (x_m - x_i)}{2} \end{aligned} \quad (3-5)$$

$$\begin{aligned} \square mm'j'j &= \frac{(mm' + jj') \times m'j'}{2} \\ &= \frac{[(y_m - y_{m'}) + (y_j - y_{j'})] \times (x_j - x_m)}{2} \end{aligned} \quad (3-6)$$

$$\begin{aligned} \square ii'j'j &= \frac{(ii' + jj') \times i'j'}{2} \\ &= \frac{[(y_i - y_{i'}) + (y_j - y_{j'})] \times (x_j - x_i)}{2} \end{aligned} \quad (3-7)$$

从而得到

$$\begin{aligned} \Delta &= \square ii'm'm + \square mm'j'j - \square ii'j'j \\ &= \frac{1}{2}[(y_i - y_{i'}) + (y_m - y_{m'})](x_m - x_i) + \frac{1}{2}[(y_m - y_{m'}) + (y_j - y_{j'})](x_j - x_m) \\ &\quad - \frac{1}{2}[(y_i - y_{i'}) + (y_j - y_{j'})](x_j - x_i) \\ &= \frac{1}{2}[(y_i - y_{i'})(x_m - x_i) + (y_m - y_{m'})(x_m - x_i) + (y_m - y_{m'})(x_j - x_m) + (y_j - y_{j'})(x_j - x_m)] \\ &\quad - \frac{1}{2}[(y_i - y_{i'})(x_j - x_i) + (y_j - y_{j'})(x_j - x_i)] \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 2\Delta &= (y_i - y_{i'})(x_m - x_i) + (y_m - y_{m'})(x_m - x_i) \\ &\quad + (y_m - y_{m'})(x_j - x_m) + (y_j - y_{j'})(x_j - x_m) \\ &\quad - (y_i - y_{i'})(x_j - x_i) - (y_j - y_{j'})(x_j - x_i) \\ &= y_i x_m - y_{i'} x_i - y_{i'} x_m + y_{i'} x_i + y_m x_m - y_{m'} x_i - y_{m'} x_m + y_{m'} x_i \\ &\quad + y_m x_j - y_{m'} x_m - y_{m'} x_j + y_{m'} x_m + y_j x_j - y_{j'} x_m - y_{j'} x_j + y_{j'} x_m \\ &\quad - y_i x_j + y_{i'} x_i + y_{i'} x_j - y_{i'} x_i - y_j x_j + y_{j'} x_i + y_{j'} x_j - y_{j'} x_i \\ &= y_i x_m - y_{i'} x_m - y_{m'} x_i + y_{m'} x_i + y_m x_j - y_{m'} x_j - y_{j'} x_m + y_{j'} x_m - y_i x_j + y_{i'} x_j + y_j x_i - y_{j'} x_i \end{aligned}$$

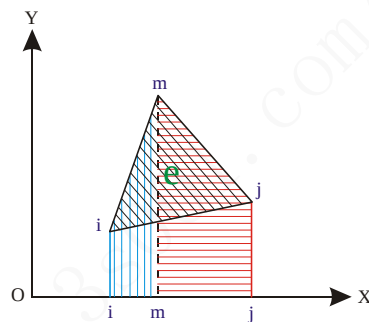


图 3-2 三角形单元面积计算图

因为 y_i' 、 y_j' 和 y_m' 均在 X 轴上，所以 y_i' 、 y_j' 和 y_m' 等于零，上式可进一步化简为

$$2\Delta = x_i y_j + x_j y_m + x_m y_i - x_m y_j - x_j y_i - x_i y_m = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}$$

为了便于讨论，引入下列符号

$$\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j & a_j &= x_m y_i - x_i y_m & a_m &= x_i y_j - x_j y_i \\ b_i &= y_j - y_m & b_j &= y_m - y_i & b_m &= y_i - y_j \\ c_i &= x_m - x_j & c_j &= x_i - x_m & c_m &= x_j - x_i \end{aligned} \quad (3-8)$$

将以上符号代入(3-2)的展开式，得到三角形单元面积的表达式为

$$\Delta = \frac{1}{2}(a_i + a_j + a_m) \quad (3-9)$$

结合 (3-8)，(3-9) 式求解三角形单元内的插值水头方程组 (3-1)，可获得方程组的系数矩阵为

$$\alpha_1 = \frac{\begin{vmatrix} H_i & x_i & y_i \\ H_j & x_j & y_j \\ H_m & x_m & y_m \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & H_i & y_i \\ 1 & H_j & y_j \\ 1 & H_m & y_m \end{vmatrix}}{2\Delta}; \quad \alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_i & H_i \\ 1 & x_j & H_j \\ 1 & x_m & H_m \end{vmatrix}}{2\Delta}$$

将以上三式展开后得到

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} [(x_j y_m - x_m y_j) H_i + (x_m y_i - x_i y_m) H_j + (x_i y_j - x_j y_i) H_m] \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} [(y_j - y_m) H_i + (y_m - y_i) H_j + (y_i - y_j) H_m] \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} [(x_m - x_j) H_i + (x_j - x_m) H_j + (x_i - x_m) H_m] \end{cases} \quad (3-10)$$

将 (3-8) 式代入 (3-10) 式，得

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta} (a_i H_i + a_j H_j + a_m H_m) \\ \alpha_2 = \frac{1}{2\Delta} (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) \\ \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta} (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \end{cases} \quad (3-11)$$

再将 (3-11) 式代入 (1-1) 式，就可得到水头在三角形单元 e 中的近似表达式

$$\begin{aligned} \tilde{H}(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i H_i + a_j H_j + a_m H_m) + (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m)x + (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m)y] \\ &= \frac{1}{2\Delta} [(a_i + b_i x + c_i y) H_i + (a_j + b_j x + c_j y) H_j + (a_m + b_m x + c_m y) H_m] \end{aligned} \quad (3-12)$$

3.2 基函数

3.2.1 基函数的建立

如果令

$$\begin{aligned} N_i(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \\ N_j(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x & y \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \\ N_m(x, y) &= \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3-13)$$

则可将以三角形顶点水头值 H_i 、 H_j 和 H_m 为基础的线性插值函数表示为

$$\tilde{H}(x, y) = N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m \quad (3-14)$$

函数 N_i 、 N_j 和 N_m 称为三角形线性插值函数的基函数，它们本身也是线性函数。

3.2.2 基函数的几何意义

设在如图 3-3 所示的三角形单元中，取任意点 $p(x, y)$ 并将该点与三角形的三个顶点分别相连，按照逆时针方向对结点号进行排列得到三个子三角形 $\Delta_i = \Delta_{pjm}$ 、 $\Delta_j = \Delta_{pmi}$ 、 $\Delta_m = \Delta_{pij}$ ，这三个子三角形分别对应于三角形的三个顶点 i 、 j 、 m 。从而得到

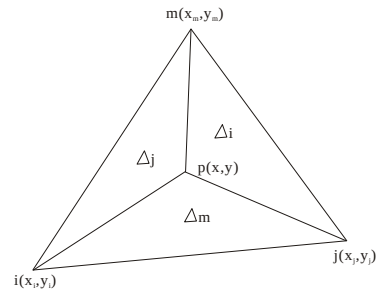


图 3-3 基函数的几何意义

$$\begin{aligned} \Delta_i &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ \Delta_j &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x & y \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ \Delta_m &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x & y \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} (a_m + b_m x + c_m y) \end{aligned} \quad (3-15)$$

从而得到

$$N_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad N_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad N_m = \frac{\Delta_m}{\Delta} \quad (3-16)$$

(3-16) 表示：即函数的几何意义就是由三角形内动点 $p(x,y)$ 所决定的三个子三角形的面积与三角形本身的面积之比。

3.2.3 基函数的性质

性质一：基函数的代数和恒等于 1。

证明：根据 (3-52) 式，直接可以得到

$$N_i + N_j + N_m = \frac{\Delta_i}{\Delta} + \frac{\Delta_j}{\Delta} + \frac{\Delta_m}{\Delta} = \frac{\Delta_i + \Delta_j + \Delta_m}{\Delta}$$

因为

$$\Delta_i, \Delta_j, \Delta_m \in \Delta \quad \text{且} \quad \Delta_i + \Delta_j + \Delta_m = \Delta$$

所以

$$N_i + N_j + N_m = \frac{\Delta_i + \Delta_j + \Delta_m}{\Delta} \equiv 1 \quad (3-17)$$

证毕。

性质二：若将动点 p 移动到三角形的任意顶点，则相应的基函数值为 1，其余的两个为零。为讨论方便，我们把动点移动时的基函数记为 N_k ，此时 N_k 为一个变化量，同时引入符号 $\delta_{k,p}$ 来表示。从而得到通式

$$N_k(x_p, y_p) = \delta_{k,p} = \begin{cases} 1 & k = p \\ 0 & k \neq p \end{cases} \quad (k, p = i, j, m) \quad (3-18)$$

结合 (3-18)，对性质一的证明如下：

假设把动点 $p(x,y)$ 向顶点 $i(x_i, y_i)$ 移动，当移动到顶点 $i(x_i, y_i)$ 时，得 $x_p = x_i, y_p = y_i$ ，

此时有

$$\Delta_k = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_p & y_p \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \bigg|_{x_p \rightarrow x_i, y_p \rightarrow y_i} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} = \Delta$$

也就是说在这种情况下存在 $\Delta_k = \Delta_i$ ，从而有

$$N_i(x_p \rightarrow x_i, y_p \rightarrow y_i) = \delta_{ii} = 1 \quad (3-19)$$

因此得到

$$N_j(x_p \rightarrow x_i, y_p \rightarrow y_i) = \delta_{ji} = 0 \quad \text{和} \quad N_m(x_p \rightarrow x_i, y_p \rightarrow y_i) = \delta_{mi} = 0 \quad (3-20)$$

证毕。

根据同样的道理，当把单元中的动点分别移到 j 点和 m 点时，我们分别可以得到

$$N_j(x_p \rightarrow x_j, y_p \rightarrow y_j) = \delta_{j,j} = 1 \quad (3-21)$$

$$\text{和 } N_m(x_p \rightarrow x_m, y_p \rightarrow y_m) = \delta_{m,m} = 1 \quad (3-22)$$

因此也就分别有

$$N_i(x_p \rightarrow x_j, y_p \rightarrow y_j) = \delta_{ij} = 0 \quad \text{和} \quad N_m(x_p \rightarrow x_j, y_p \rightarrow y_j) = \delta_{jm} = 0 \quad (3-23)$$

$$N_i(x_p \rightarrow x_m, y_p \rightarrow y_m) = \delta_{im} = 0 \quad \text{和} \quad N_j(x_p \rightarrow x_m, y_p \rightarrow y_m) = \delta_{jm} = 0 \quad (3-24)$$

3.2.3 推论

推论一：基函数的定义域为[0, 1]。

根据基函数的性质一和性质二，可得基函数 N_i 、 N_j 和 N_m 的取值在动点 $p(x, y)$ 移到相应的三角形顶点时，才会使相应下标的基函数值为 1（此时其他的两个基函数值为 0）。此外，各基函数的取值均在 0 和 1 之间。由此得出推论一。

推论二：三角形顶点处的插值水头与实际水头一致。

根据水头插值函数的讨论，可知当把动点 $p(x, y)$ 移向三角形顶点 i 时，式（3-14）可写成

$$\tilde{H}_i(x_i, y_i) = N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m \quad (3-25)$$

根据基函数的性质二（3-18），可知此时 $N_i = 1, N_j = N_m = 0$ ，所以，（3-25）变成

$$\tilde{H}_p(x_p, y_p) \Big|_{p \rightarrow i} = \tilde{H}_i(x_i, y_i) = H_i \quad (3-26)$$

结果与本节开始对水头插值函数的讨论一致。即水头插值函数 $\tilde{H}(x, y)$ 在单元 e 的三个顶点的取值必须与实际水头值 $H(x, y)$ 一致。

同样的现象也会出现在把动点分别移动到三角形的顶点 j 和 m 的情况下。即

$$\tilde{H}_p(x_p, y_p) \Big|_{p \rightarrow j} = \tilde{H}_j(x_j, y_j) = H_j \quad (3-27)$$

$$\text{和 } \tilde{H}_p(x_p, y_p) \Big|_{p \rightarrow m} = \tilde{H}_m(x_m, y_m) = H_m \quad (3-28)$$

实质上，尽管我们引入了线形水头函数来描述实际水头面，也就是说在单元 e 内用插值函数 $\tilde{H}(x, y)$ 来代替实际水头分布 $H(x, y)$ 时，因插值面通过三角形的三个顶点，所以在这三个点上能够保证插值水头与实际水头相符。

当然，如果实际水头面 $H(x, y)$ 自身也是线性展布时，我们可以选择一些简单的数学表

达来描述这些线性展布，例如设 $H(x, y)$ 的函数关系为

$$H(x, y) = 1$$

$$H(x, y) = x$$

$$H(x, y) = y$$

将以上的结果代入 (3-14) 式，就可得到

$$\begin{cases} 1 = N_i + N_j + N_m \\ x = x_i N_i + x_j N_j + x_m N_m \\ y = y_i N_i + y_j N_j + y_m N_m \end{cases} \quad (3-29)$$

显然，当单元划分得足够小时，单元内的实际水面与线性插值面之间的差别也会很小，此时完全可以用类似于 (3-29) 所描述的插值面来代替实际水头面。

3.3 坐标变换

3.3.1 坐标变换公式

形如 (2-49)、(2-52) 所示的泛函中都存在着计算二重积分问题，为了简化求解过程，这里引入一个新的坐标系—— $\xi-\eta$ 坐标系，用来求解泛函积分。为此我们假设

$$\begin{cases} \xi = N_i \\ \eta = N_j \end{cases} \quad (3-30)$$

根据基函数的性质一，因为 N_i, N_j, N_m 之间存在如 (3-17) 的关系，因而可得

$$N_m = 1 - \xi - \eta \quad (3-31)$$

将 (3-30) 和 (3-31) 代入 (3-29)，可进一步得到

$$\begin{cases} x = x_i \xi + x_j \eta + x_m (1 - \xi - \eta) \\ y = y_i \xi + y_j \eta + y_m (1 - \xi - \eta) \end{cases} \quad (3-32)$$

(3-32) 式隐藏着 $x-y$ 坐标系中的三角形 e 和这个三角形在 $\xi-\eta$ 坐标系中（记为 e' ）的坐标变换规则。

3.3.2 $x-y$ 坐标系中的三角形单元在 $\xi-\eta$ 坐标系中的表现

下面，我们利用 (3-32) 描述的坐标变换关系，讨论如何在 $\xi-\eta$ 坐标系中描述 $x-y$ 坐标系中的三角形 e 。

①首先讨论 $x-y$ 平面上的点 $i(x_i, y_i)$ 在 $\xi-\eta$ 坐标系中的位置。

根据基函数的性质二 3-18 式，因为存在

$$N_i(x_i, y_i) = \delta_{i,i} = 1 \quad (3-33)$$

$$\text{且 } N_j(x_i, y_i) = \delta_{j,i} = 0 \quad (3-34)$$

由此可知, $x-y$ 坐标系中的点 $i(x_i, y_i)$ 在 $\xi-\eta$ 坐标系中将对应于 $[N_i(x_i, y_i), N_j(x_i, y_i)]$, 进一步结合 (3-30), 不难得到 $x-y$ 坐标系中的点 $i(x_i, y_i)$ 在 $\xi-\eta$ 坐标系中的坐标为 $(1, 0)$

② 根据同样的道理, $x-y$ 坐标系上的点 $j(x_j, y_j)$ 对应于 $\xi-\eta$ 坐标系中的点 $[N_i(x_j, y_j), N_j(x_j, y_j)]$, 故点 $j(x_j, y_j)$ 在 $\xi-\eta$ 坐标系中的坐标为 $(0, 1)$

③ 通过以上的讨论可得, $x-y$ 坐标系中的点 $m(x_m, y_m)$ 与 $\xi-\eta$ 坐标系中的点 $[N_i(x_m, y_m), N_j(x_m, y_m)]$ 对应, 所以点 $m(x_m, y_m)$ 在 $\xi-\eta$ 坐标系中为 $(0, 0)$ 。

图 3-4a 和图 3-4b 是根据以上讨论的结果而建立的, 根据讨论, $x-y$ 坐标系中任何形状的三角形单元, 均可转化为 $\xi-\eta$ 坐标系中的直角三角形, 三角形的两个直角边分别落在 ξ 轴和 η 轴上。图 3-4a 表现的是在 $x-y$ 坐标系中的三角形 e , 图 3-4b 中的三角形 e' 是转换到 $\xi-\eta$ 坐标系中后的形状。

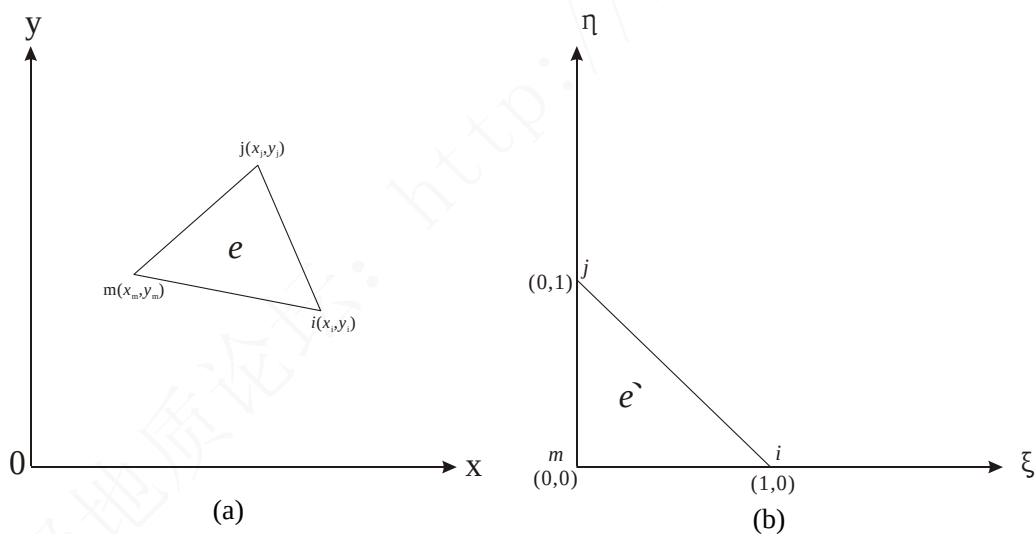


图 3-4 $x-y$ 坐标系和 $\xi-\eta$ 坐标系中三角形单元

从以上的讨论中发现, 由于 N_i, N_j, N_m 的定义域为 $[0, 1]$, 因此在 $\xi-\eta$ 坐标系统中存在

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1 - \xi \quad (3-35)$$

3.3.3 面积坐标 $\xi-\eta$ 在求解泛函中的应用

通过以上的讨论, 我们已经可以把 $x-y$ 坐标系上的单元 e 转化为 $\xi-\eta$ 坐标系统上的单元 e' 。可以看出, 由于 e' 在 $\xi-\eta$ 坐标系中均表现为直角三角形, 故此在 e' 的积分要比在 e 上的积分简单得多, 因为它可以借助变量替换公式

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f[x(u, v), y(u, v)] du dv \quad (3-36)$$

进行求积。例如

$$\iint_e N_i N_j dx dy = \iint_{e'} \xi \eta \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \quad (3-37)$$

其中, $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right|$ 称为雅可比行列式, 简写为 $|J|$, 它是 $x-y$ 坐标系的面积元素 $dx dy$ 和 $\xi-\eta$ 坐

标系的面积元素 $d\xi d\eta$ 之间的一个比值, 它的具体表达为

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i - x_m & x_j - x_m \\ y_i - y_m & y_j - y_m \end{vmatrix} = 2\Delta \quad (3-38)$$

将 (3-38) 所得的结果代入 (3-37), 便得到

$$\begin{aligned} \iint_e N_i N_j dx dy &= \iint_{e'} \xi \eta |J| d\xi d\eta = 2\Delta \iint_{e'} \xi \eta d\xi d\eta = 2\Delta \int_0^1 \xi \int_0^{1-\xi} \eta d\eta d\xi \\ &= 2\Delta \int_0^1 \xi \cdot \frac{1}{2} \eta^2 \Big|_0^{1-\xi} d\xi = \Delta \int_0^1 \xi (1 - 2\xi + \xi^2) d\xi \\ &= \Delta \cdot \left[\int_0^1 \xi d\xi - 2 \int_0^1 \xi^2 d\xi + \int_0^1 \xi^3 d\xi \right] = \Delta \cdot \left[\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{2}{3} \xi^3 + \frac{1}{4} \xi^4 \right]_0^1 \\ &= \Delta \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta}{12} \end{aligned} \quad (3-39)$$

同理可得

$$\begin{aligned} \iint_e N_i N_m dx dy &= \iint_{e'} \xi (1 - \xi - \eta) |J| d\xi d\eta = 2\Delta \iint_{e'} (\xi - \xi^2 - \xi \eta) d\xi d\eta \\ &= 2\Delta \cdot \left[\iint_{e'} \xi d\xi d\eta - \iint_{e'} \xi^2 d\xi d\eta - \iint_{e'} \xi \eta d\xi d\eta \right] \\ &= 2\Delta \cdot \left[\int_0^1 \xi \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi - \int_0^1 \xi^2 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi - \frac{1}{24} \right] \\ &= 2\Delta \cdot \left[\int_0^1 \xi \cdot (1 - \xi) d\xi - \int_0^1 \xi^2 \cdot (1 - \xi) d\xi - \frac{1}{24} \right] \\ &= 2\Delta \cdot \left[\int_0^1 \xi d\xi - \int_0^1 \xi^2 d\xi - \int_0^1 \xi^2 d\xi + \int_0^1 \xi^3 d\xi - \frac{1}{24} \right] \\ &= 2\Delta \cdot \left[\frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{3} \xi^3 - \frac{1}{3} \xi^3 + \frac{1}{4} \xi^4 - \frac{1}{24} \right]_0^1 = \frac{\Delta}{12} \end{aligned} \quad (3-40)$$



$$\begin{aligned}
 \iint_e N_j N_m dx dy &= \iint_{e'} \eta(1-\xi-\eta) |J| d\xi d\eta = 2\Delta \cdot \iint_{e'} \eta d\xi d\eta - \iint_{e'} \eta \xi d\xi d\eta - \iint_{e'} \eta^2 d\xi d\eta \\
 &= 2\Delta \cdot \left[\int_0^1 \int_0^{1-\xi} \eta d\eta d\xi - \frac{1}{24} \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \eta^2 d\eta d\xi \right] \\
 &= 2\Delta \cdot \left[\int_0^1 \frac{1}{2} (1-\xi)^2 d\xi - \frac{1}{24} \int_0^1 \frac{1}{3} (1-\xi)^3 d\xi \right] \\
 &= \frac{\Delta}{12}
 \end{aligned} \tag{3-41}$$

此外，还可求得

$$\iint_e N_i^2 dx dy = \iint_{e'} \xi^2 |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{6} \tag{3-42}$$

$$\iint_e N_j^2 dx dy = \iint_{e'} \eta^2 |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{6} \tag{3-43}$$

$$\iint_e N_m^2 dx dy = \iint_{e'} (1-\xi-\eta)^2 |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{6} \tag{3-44}$$

还有

$$\iint_e N_i dx dy = \iint_{e'} \xi |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{3} \tag{3-45}$$

$$\iint_e N_j dx dy = \iint_{e'} \eta |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{3} \tag{3-46}$$

$$\iint_e N_m dx dy = \iint_{e'} (1-\xi-\eta) |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{3} \tag{3-47}$$

3.4 三角形边（线元）上的线性插值

任取如图 3-5 所示三角形单元 e 的任意边，例如 ij ，我们用 s 表示自顶点 i 至 j 的弦长变量。 e 上的水头函数为 $H(x,y)$ ，水头插值函数为 $\tilde{H}(x,y)$ 。

对于基函数 $N_m(x,y)$ 来说，若动点 $p(x,y)$ 落在边 ij 上，根据基函数的性质二，此时有 $\Delta_m = 0$ ，可知 $N_m(x,y) = 0$ 。因为在边 ij 上有

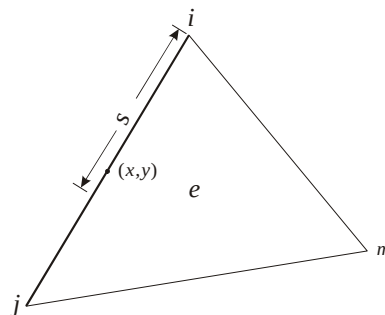


图 3-5 三角形单元上的线元

$$\tilde{H}(x,y) = \tilde{H}[x(s), y(s)] = H_i N_i + H_j N_j \tag{3-48}$$

根据 s 的定义，所以在 i 点存在

$$s = 0$$

而在 j 点则存在

$$s = L_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

式中 L_{ij} 为线元 ij 的长度。又因为 N_j 在 i 点的值为零。在 j 点的值等于 1，且 N_j 是线性的，所以 N_j 和 s 之间只差一个比例因子，即

$$N_j = \frac{s}{L_{ij}}$$

结合基函数的性质一盒前面得出的在 ij 上 $N_m = 0$ 的结论，可进一步得到

$$N_i = 1 - \frac{s}{L_{ij}}$$

因此 (3-48) 可用弦长作参变量表示为

$$\tilde{H}[x(s), y(s)] = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}}\right) H_i + \frac{s}{L_{ij}} H_j \quad (3-49)$$

在 (3-49) 式中，当弦长变量 s 等于零时，等号右边的结果为 H_i ，这正好是 i 点的实际水头值；而当弦长 s 等于边长 ij 时，等号右边的结果为 H_j ，这正是点 j 的实际水头值。

综上所述，(1-1) 或 (3-14) 描述的水头插值函数 $\tilde{H}(x, y)$ 在三角形单元的顶点上所得的值就等于实际水头函数 $H(x, y)$ 在三个顶点的值 H_i 、 H_j 、 H_m 。在单元内部由于是线性的，因此也是连续的。在单元的每条边上，(3-49) 表明了插值函数 $\tilde{H}$ 的值就等于根据它在两个端点所确定的线性插值结果。也就是说沿单元边界的水头只和这个边界上各结点的水头有关。据此不难得出这样的结论，即当对区域 D 内的所有单元的每条边都采用如 (3-49) 式所示的水头插值函数进行插值的话，则不仅能保证三角形单元的公共结点上的水头相同，同时也能保证两个相邻单元的公共边上同一点的水头相同，达到在单元的公共边保持连续水头的目的。

由于 e 或者 e' 是任意的，所以我们可以进一步得出结论， D 中各单元拼接起来所得到的分片线性插值函数 $\tilde{H}(x, y)$ 就整体而言，也是连续函数，总体形状由 $H(x, y)$ 在各结点的值 H_1 、 H_2 、……、 H_n 所决定。

第四章 含水层中地下水稳定运动的有限元法

4.1 二维承压水稳定流的有限元模拟

4.1.1 非均质各向同性的承压水稳定流模型及等价泛函

这里首先考虑一个非均质各向同性的承压水流问题，模型中仅包含第一类边界条件，不存在抽水井。其定解问题如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y)|_{\Gamma_1} = \varphi \end{cases} \quad (4-1)$$

根据第二章的讨论，对（4-1）所描述的定解问题的求解可转化为对泛函

$$I[H(x, y)] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - WH \right\} dx dy \quad (4-2)$$

在函数类 C_0 中求极值问题。

4.1.2 定解问题的离散

正如我们在第一章中讨论过的那样，我们必须首先把区域 D 离散为由有限多个（假设为 m 个）足够小的三角形组成的离散空间，各三角形单元的编号分别为 1, 2, 3, ..., m 。

离散空间中一共包含有 n 个除落在第一类边界上的结点之外的结点，结点的编号依次为 1, 2, 3, ..., n 。这些结点对应的函数值分别为 $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ 。函数值为待求水头。

落在如（4-1）所描述的第一类边界上的结点编号依次为 $n+1, n+2, n+3, \dots, nk$ ，它们的函数值分别对应为 $H_{n+1}, H_{n+2}, H_{n+3}, \dots, H_{nk}$ ，它们的具体数值已经在式 4-1 的第一类边界条件中给出，因此是已知的。

据此，离散空间中的 n 个待求水头结点所对应的水头函数将组成一个具有 n 个未知数（各待求水头结点的水头值）的 n 元线性方程组。而（4-2）所示的泛函被分解为

$$I[H] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_i} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - WH \right\} dx dy \quad (4-3)$$

将水头插值函数（3-14）代入（4-3）式，于是有

$$I[H(x, y)] \approx I[\tilde{H}(x, y)] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_i} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - W\tilde{H} \right\} dx dy \quad (4-4)$$

在第三章中我们已经讨论过， $\tilde{H}(x, y)$ 是由 $H(x, y)$ 在各顶点的值 $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ 所决

定, 是 $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ 的函数, 所以泛函 $I(\tilde{H})$ 也应该是 $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n$ 的函数。

4.1.3 泛函的分解

以下先来研究单元 e 上的泛函, 为方便讨论, 再此引入符号 I_1^e 表示它。即

$$I_1^e = \iint_e \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - W\tilde{H} \right\} dx dy \quad (4-5)$$

假若 (4-4) 中包含有第二类边界条件, 即存在泛函

$$I[\tilde{H}(x, y)] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_i} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - W\tilde{H} \right\} dx dy - \sum \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds \quad (4-6)$$

则可进一步引入符号 I_2^e 来表示 (4-6) 中与第二类边界条件有关的描述, 即

$$I_2^e = - \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds \quad (4-7)$$

因而 (4-6) 被表示为

$$I^e = I_1^e + I_2^e \quad (4-8)$$

(4-6) 和 (4-7) 中的 $\Gamma_2 \cap C_e$ 表示三角形单元 e 的边界 C_e 和边界 Γ_2 的公共部分 (交集³)。

意为仅当 e 的边界 C_e 与边界 Γ_2 相交时有公共边界, 即 e 的一边位于边界 Γ_2 上时才计

算这一部分线积分; 否则就用不着计算。因此, (4-8) 中的 I_1^e 表示三角形单元 e 上的积分, I_2^e

则指线积分。

4.1.4 单元渗透矩阵

以下我们先求解 I_1^e 。

由于我们所求的函数 $\tilde{H}(x, y)$ 应该是泛函 (4-6) 的极小函数, 所以必须满足

$$\frac{\partial I(\tilde{H})}{\partial H_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4-9)$$

由于剖分以后, 泛函 $I(\tilde{H})$ 分解为各单元泛函之和。导数 $\frac{\partial I(\tilde{H})}{\partial H_i}$ 似乎应该对所有单元逐个计

算, 然后累加起来。但是由于 D 中很多单元与结点 i 的水头不存在直接关系, 因此实际计算的时候, 只是计算结点 i 附近的几个单元。

³ 如果 A、B 为两个集, 那么属于 A 同时又属于 B 的所有元素就组成集 P, P 就是 A 与 B 的交集, 用记号 $P = A \cap B$ 表示之。

如图 4-1 所示，如果我们把共有结点 i 的所有单元组成的集合记为 D_i 。设 D_i 内的单元有 m' 个，则有

$$\frac{\partial I(\tilde{H})}{\partial H_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ e_j \in D_i}}^{m'} \frac{\partial I_1^{e_j}(\tilde{H})}{\partial H_i} = 0 \quad (i=1,2,\dots,m) \quad (4-10)$$

(4-10) 中， m 为不包括边界上的结点在内的结点总数（即未知水头结点总数）。为此需要研究在任意结点 i 处泛函 $I(\tilde{H})$ 对 H_i 的导数。

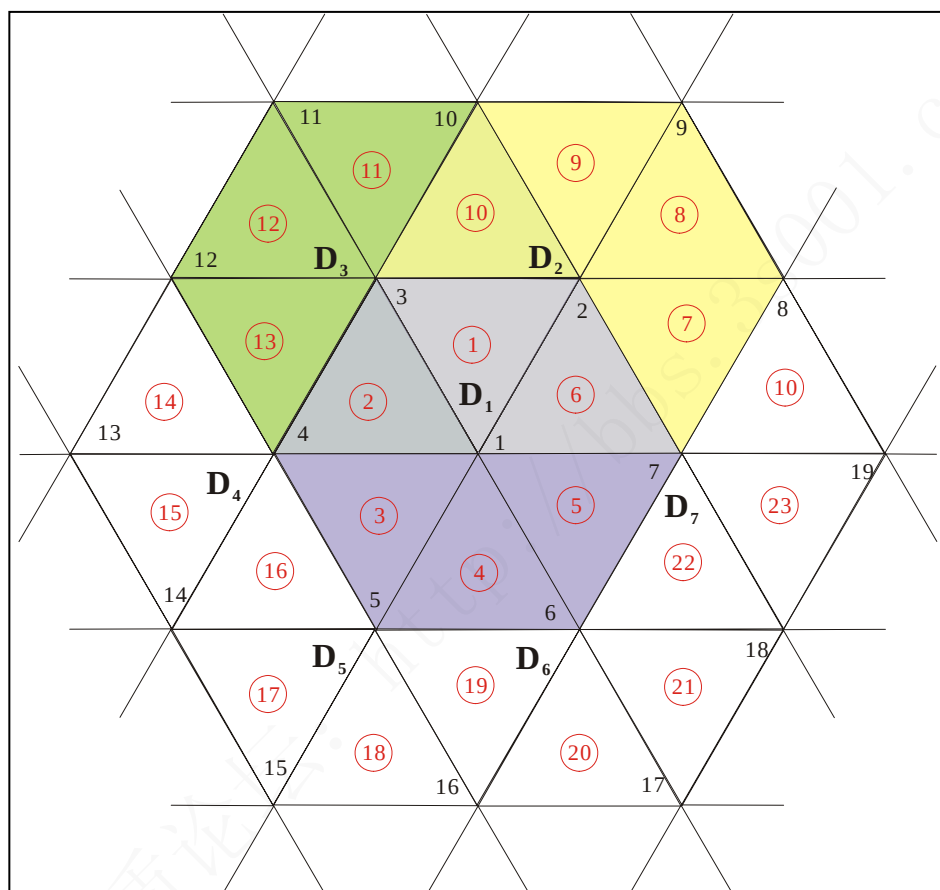


图 4-1 亚区域 D_i 所包含的结点和单元

显然，区域 D 中包含了 n 个亚区域 D_i ($i=1,2,\dots,n$)，每个亚区域决定了一个水头方程。从图 4-1 还发现，在建立结点 i 的水头方程的时候，亚区域 D_i 所包含的结点和单元非常有限，只有在结点 i 周围的结点和单元才参与自身的水头方程组建立。表 4-1 列出了图 4-1 中 D_1 到 D_7 这 7 个亚区域的相关资料。

表 4-1

亚区域		
D_1	相关结点	2, 3, 4, 5, 6, 7
	相关单元	1, 2, 3, 4, 5, 6
D_2	相关结点	1, 3, 7, 8, 9, 10

	相关单元	1, 6, 7, 8, 9, 10
D_3	相关结点	1, 2, 4, 10, 11, 12
	相关单元	1, 2, 10, 11, 12, 13
D_4	相关结点	1, 3, 5, 12, 13, 14
	相关单元	2, 3, 13, 14, 15, 16
D_5	相关结点	1, 4, 6, 14, 15, 16
	相关单元	3, 4, 16, 17, 18, 19
D_6	相关结点	1, 5, 7, 16, 17, 18
	相关单元	4, 5, 19, 20, 21, 22
D_7	相关结点	1, 2, 6, 8, 18, 19
	相关单元	5, 6, 7, 10, 22, 23

表 4-1 和图 4-1 的资料表明，以下将要讨论的水头方程中由于每个方程式所涉及到的结点非常有限，一般情况下不超过 10 个，对于拥有数千上万个结点组成的研究区域 D 来说，
 大连立所得的水头方程组得系数矩阵必定具有高度稀疏的特点，即非零元素非常少。

由于存在水头插值函数

$$H \approx \tilde{H} = N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m \quad (3-14)$$

故有

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) \\ &= H_i \frac{\partial N_i}{\partial x} + H_j \frac{\partial N_j}{\partial x} + H_m \frac{\partial N_m}{\partial x} \end{aligned} \quad (4-11)$$

对 (4-11) 中等号右端各项的计算如下

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \right) = \frac{b_i}{2\Delta} \quad (4-12)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_j + b_j x + c_j y}{2\Delta} \right) = \frac{b_j}{2\Delta} \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial N_m}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a_m + b_m x + c_m y}{2\Delta} \right) = \frac{b_m}{2\Delta} \quad (4-14)$$

将以上结果代入 (4-11) 得

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) \quad (4-15)$$

同理可得

$$\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \quad (4-15)$$

因此，(4-5) 对 H_i 求导数的过程如下

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e}{\partial H_i} &= \frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - W\tilde{H} \right\} dx dy \\ &= \frac{T}{2} \left[\iint_e \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 dx dy + \iint_e \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 dx dy - \iint_e \frac{\partial}{\partial H_i} (W\tilde{H}) dx dy \right]\end{aligned}\quad (4-16)$$

(4-16) 中

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 &= \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m}{2\Delta} \right)^2 \\ &= \frac{b_i}{2\Delta^2} (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m)\end{aligned}\quad (4-17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 &= \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m}{2\Delta} \right)^2 \\ &= \frac{c_i}{2\Delta^2} (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m)\end{aligned}\quad (4-18)$$

$$\frac{\partial}{\partial H_i} \tilde{H} = \frac{\partial}{\partial H_i} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) = N_i \quad (4-19)$$

我们进一步假设参数 T, W 在每个单元内都拥有相同的数值，由此可进一步引入符号

T^e, W^e 来表示 (4-16) 中的导水系数和垂直方向的水量交替量。再将以上结果代入 (4-16)

中，便可得到

$$\frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_i} = \frac{T^e}{4\Delta^2} \left[b_i (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) + c_i (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \right] \iint_e dx dy - W^e \iint_e N_i dx dy$$

再利用 3-38 式和定积分公式可得

$$\begin{aligned}\iint_e dx dy &= \iint_{e'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \\ &= 2\Delta \iint_{e'} d\xi d\eta \quad \text{3-38式的结果, } \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = 2\Delta \\ &= 2\Delta \int_0^1 \int_0^{1-\xi} d\eta d\xi = 2\Delta \int_0^1 (1-\xi) d\xi = 2\Delta \cdot \frac{1}{2} = \Delta\end{aligned}$$

(3-45) 式已告诉我们 $\iint_e N_i dx dy = \frac{\Delta}{3}$ ，所以有

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_i} &= \frac{T^e}{4\Delta} \left[b_i (b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m) + c_i (c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m) \right] - \frac{\Delta}{3} W^e \\ &= \frac{T^e}{4\Delta} \left[(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m \right] - \frac{\Delta}{3} W^e\end{aligned}\quad (4-20)$$

同理可得

$$\frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_j} = \frac{T^e}{4\Delta} \left[(b_j b_i + c_j c_i) H_i + (b_j b_j + c_j c_j) H_j + (b_j b_m + c_j c_m) H_m \right] - \frac{\Delta}{3} W^e$$

$$\frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_m} = \frac{T^e}{4\Delta} \left[(b_m b_i + c_m c_i) H_i + (b_m b_j + c_m c_j) H_j + (b_m b_m + c_m c_m) H_m \right] - \frac{\Delta}{3} W^e$$

即有

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial I_1^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I_1^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I_1^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} = \frac{T^e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} - \frac{\Delta}{3} W^e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (4-21)$$

若设

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \frac{T^e}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \\ f_m &= \frac{\Delta}{3} W^e \end{aligned} \quad (4-22)$$

则可将 (4-21) 简写为

$$\left\{ \frac{\partial I}{\partial H} \right\}^e = [d]^e \{H\}^e - \{f\}^e = [B]^e \{H\}^e - \{f\}^e \quad (4-23)$$

上式中, $[d]^e$ 称为**单元渗透矩阵**, 矩阵 $[B]^e$ 在后续的越流问题和非稳定流为题中将用来合成水头方程组的系数矩阵。

4.1.5 总渗透矩阵及水头方程组

以上仅讨论了某一任意单元的泛函在组成这个单元的三个结点处对水头 H 的导数, 然而根据 (4-10), 我们还必须对与结点 i 相关的所有单元组成的集合 D_i 内的每一个单元逐个建立如 (4-20) 所示的方程, 然后按结点编号进行累加。就可得到形如式 4-10 所示的结点 i 的水头方程

$$\frac{\partial I(\tilde{H})}{\partial H_i} = \sum_{j=1}^{m'} \frac{\partial I^{e_j}(\tilde{H})}{\partial H_i} = 0 \quad e_j \in D_i, m' \text{ 为 } D_i \text{ 内的单元总数} \quad (4-24)$$

对区域 D 内的 n 个未知水头结点都用类似的方法进行计算后, 就可得到 n 个形如(4-24)的水头方程式, 进而得到水头方程组

$$[A']\{H'\} - \{f\} = 0 \quad (4-25)$$

其中

$$\{H'\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \\ H_{n+1} \\ \vdots \\ H_{nk} \end{Bmatrix}$$

(4-25) 中矩阵 $[A']$ 中的元素 a_{ij} 与 (4-23) 的矩阵 $[B]$ 中的元素 b_{ij} 存在如下的关系

$$a_{ij} = \sum b_{ij} \quad (4-26)$$

由于在第一类边界 Γ_1 上的水头 H_{n+1} 、 H_{n+2} 、 $\dots$ 、 H_{nk} 是已知的, 因此在 $[A']\{H'\}$ 中有一部分是已知数, 在此把它们和 $\{f\}$ 合并起来并移到等号右端, 用 $\{F\}$ 表示之, 等号左端的方程组系数用矩阵 $[A]$ 表示, 则得到

$$[A]\{H\} = \{F\} \quad (4-27)$$

式中 $\{H\}$ 为由未知水头结点的水头值构成的列向量, 即

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{Bmatrix} \quad (4-28)$$

$[A]$ 为由 H_1 、 H_2 、 $\dots$ 、 H_n 前的系数构成的系数矩阵, 它一般是一个 n 阶的正定方阵, 称为**总渗透矩阵**, $\{F\}$ 是 n 个元素组成的列向量, 代表已知项, 即

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (4-29)$$

所以 (4-27) 是关于 H_1 、 H_2 、 $\dots$ 、 H_n 的线性代数方程组。求解此方程组就可以得到原问题的近似解, 即各未知水头结点上的水头近似值 $\tilde{H}_1$ 、 $\tilde{H}_2$ 、 $\dots$ 、 $\tilde{H}_n$ 。

分析 (4-21) 所示的单元渗透矩阵不难发现它具有对称的特点, 这一特点在总渗透矩阵 $[A]$ 中也同样存在, 此外, 总渗透矩阵还具有前述的正定特征和高度系数的特点, 这些特点在求解大型地下水模型时是非常有用的。

4.1.6 水头方程组的建立

结合式 4-24、图 4-1 和表 4-1，我们来讨论如何建立图 4-1 中的结点 7 的水头方程。

结点 7 所处的亚区域为 D_7 ，其相关的单元和结点分别为 5、6、7、10，22、23 和 1、2、6、8、18、19，即存在

$$\frac{\partial I_1(\tilde{H})}{\partial H_7} = \frac{\partial I_1^5(\tilde{H})}{\partial H_7} + \frac{\partial I_1^6(\tilde{H})}{\partial H_7} + \frac{\partial I_1^7(\tilde{H})}{\partial H_7} + \frac{\partial I_1^{10}(\tilde{H})}{\partial H_7} + \frac{\partial I_1^{22}(\tilde{H})}{\partial H_7} + \frac{\partial I_1^{23}(\tilde{H})}{\partial H_7} \quad (4-30)$$

具体求解时只需分别计算出上式等号右端的各 $\frac{\partial I_1^{e_j}(\tilde{H})}{\partial H_7}$ ，整理后便可得到

$$\frac{\partial I_1(\tilde{H})}{\partial H_7} = \{d_1 \ d_2 \ d_6 \ d_7 \ d_8 \ d_{18} \ d_{19}\} \{H_1 \ H_2 \ H_6 \ H_7 \ H_8 \ H_{18} \ H_{19}\}^T \quad (4-31)$$

利用同样的办法，可以分别建立各未知水头结点的水头方程，最后联立组成水头方程组。

4.1.7 建立水头方程组的程序代码

在目前常用的计算程序中，建立水头方程组的方法并不是根据以上的思路进行的，而是首先计算单元渗透矩阵，然后根据结点号码（未知水头结点编号）进行累加，当对所有单元都完成单元渗透矩阵建立后，水头方程组的基本建立了。

在通常离散形成的所有结点中，可能存在着已知水头结点和未知水头结点混合编号的情况⁴，在这种情况下，我们必须首先将两种不同类型的结点进行分别并重新编号，建立未知水头结点的新（结点号）——老（结点号）对应关系，程序 4-1 为结点重新编号的 FORTRAN 代码。

程序 4-1 未知水头结点重新编号

```

do i=1,nl1
  r1(i)=1000.000      r1 为工作单元，初始化为 1000.0
enddo
do i=1,nb1
  k=b1node(i)
  r1(k)=hb1(i)
enddo                凡是已知水头结点，r1 的值再不是 1000.0 了
nl3=0
do i=1,nl1
  if (r1(i).ne.1000.0) then
    nr(i)=2000        若为已知水头结点，则命结点号为 2000
  else
    nl3=nl3+1
    nr(i)=nl3         剩下的未知水头结点从 1 开始重新编号
  endif
enddo

```

⁴ 混合编号方法有利于在计算中修改模型的离散空间，因此经常被用在实际解题中。

程序 4-2 形成水头方程组的代码

```

do i=1,nb1
    k=b1node(i)
    r1(k)=hb1(i)
    h(k)=r1(k)
enddo
do i=1,mr
    g(i)=0.0
enddo
do i=1,nl3
    f(i)=0.0
enddo
do i=1,nl2
    do j=1,3
        cn(j)=ce(i,j)
        nj=cn(j)
        x(j)=coor(nj,1)
        y(j)=coor(nj,2)
        ln(j)=nr(nj)
    enddo
    b(1)=y(2)-y(3)
    b(2)=y(3)-y(1)
    b(3)=y(1)-y(2)
    c(1)=x(3)-x(2)
    c(2)=x(1)-x(3)
    c(3)=x(2)-x(1)
    area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
    ar=1/(4.0*area(i))
    do l=1,3
        do j=1,3
            tp=b(l)*b(j)+c(l)*c(j)
            d(l,j)=tp*ar
        enddo
    enddo
    do l=1,3
        nu=ln(l)
        if (nu.ne.2000) then
            do kq=1,3
                nt=cn(kq)
                jo=m(nu)-nu+ln(kq)
                if (ln(l).ge.ln(kq)) then
                    g(jo)=g(jo)+d(l,kq)
                endif
            enddo
            if (ln(kq).eq.2000) then

```

```

f(nu)=f(nu)-d(l,kq)*r1(nt)
endif
enddo
endif
enddo
enddo

```

例 4.1 均质各向同性承压水稳定流数值模型——程序包 fem401

模型 1、理想算例 1 为一均质、各向同性的承压含水层，不考虑源汇项、仅包含第一类边界和隔水边界，研究区域面积为 $1000\text{m} \times 1000\text{m}$ ，含水层顶、底板均水平展布，含水层导水系数 $T=100.0\text{m}^2/\text{d}$ 。定解问题描述如下：

$$\begin{cases} T\left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y)|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \\ H(x, y)|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \\ T\frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma_{AC}} = T\frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \end{cases} \quad (4-32)$$

对该定解问题的求解可邓加为求泛函

$$I[H] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_j} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy$$

在函数类 C_0 中的极值问题。

解题步骤如下：

首先将模型区域空间离散为如图 4-2 所示的形式。离散模型共包含 32 个三角形单元和 25 个结点。其中已知水头结点 10 个，分别为 1、10、11、20、21、5、6、15、16、25，前 5 个结点的水头值为 75.00m ，后 5 个结点的水头值为 0.0m 。

对于这个椭圆形问题的求解，我们只须提供如下的资料。

A、模型中所有结点的坐标值；

B、模型中各三角形单元的三个顶点的编号（按逆时针方向排列统计）；

C、第一类边界结点及对应的水头值。

计算资料整理如下。

a、第一类边界结点资料

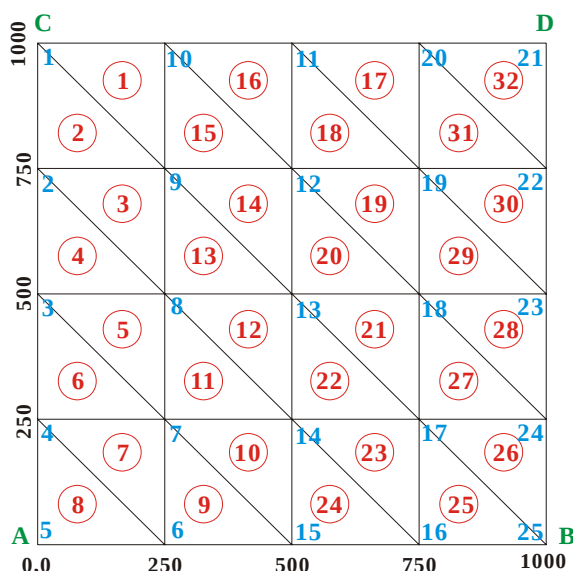


图 4-2 理想模型的离散单元图

文件名: bound1.txt

内容如下:

5	0.0	6	0.0	15	0.0	16	0.0	25	0.0
1	75.0	10	75.0	11	75.0	20	75.0	21	75.0

b、结点坐标资料

文件名: coord.txt

内容如下:

0.0	1000.0	0.0	750.0	0.0	500.0	0.0	250.0	0.0	0.0
250.0	0.0	250.0	250.0	250.0	500.0	250.0	750.0	250.0	1000.0
500.0	1000.0	500.0	750.0	500.0	500.0	500.0	250.0	500.0	0.0
750.0	0.0	750.0	250.0	750.0	500.0	750.0	750.0	750.0	1000.0
1000.0	1000.0	1000.0	750.0	1000.0	500.0	1000.0	250.0	1000.0	0.0

c、单元结点资料

文件名: element.txt

1	9	10	1	2	9	2	8	9	2	3	8
3	7	8	3	4	7	4	6	7	4	5	6
7	6	15	7	15	14	8	7	14	8	14	13
9	8	13	9	13	12	10	9	12	10	12	11
11	19	20	11	12	19	12	18	19	12	13	18
13	17	18	13	14	17	14	16	17	14	15	16
17	16	25	17	25	24	18	17	24	18	24	23
19	18	23	19	23	22	20	19	22	20	22	21

本例中的总渗透矩阵采用变带宽一维存储技术保存在一位数组 g 中, 目的是为了求解大型问题, 因此求解水头方程组必须采用专门的方法进行, 这里使用的是直接三角形解法, 有称改进平方根法(RTDR)。有关变带宽一维存储技术和 RTDR 法的详细介绍请参见附录 1 和附录 2。

程序 4-3 用来读入数据文件。

c 读入单元结点号资料

```
open (4,file='element.txt')
  read (4,*) ((ce(i,j),j=1,3),i=1,nl2)
close (4)
```

c 读入结点坐标

```
open (4,file='coord.txt')
  read (4,*) ((coor(i,j),j=1,2),i=1,nl1)
close (4)
```

c 读入第一类边界资料

```
open (4,file='bound1.txt')
  read (4,*) (b1node(i),hb1(i),i=1,nb1)
close (4)
```

程序 4-4 用来输出计算结果 (每个结点的坐标和对应的计算水头)。

```
open(14,file='result.dat',status='unknown')
do i=1,nl1
  write (14,*) coor(i,1),coor(i,2),h(i)
enddo
close (14)
```

输出文件 result.dat 按照 golden software 公司的 Surfer 软件要求输出数据，供绘制等水位线图。输出文件如下：

结 点 坐 标		计算水头
0.00	1000.00	75.00
0.00	750.00	56.25
0.00	500.00	37.50
0.00	250.00	18.75
0.00	0.00	0.00
250.00	0.00	0.00
250.00	250.00	18.75
250.00	500.00	37.50
250.00	750.00	56.25
250.00	1000.00	75.00
500.00	1000.00	75.00
500.00	750.00	56.25
500.00	500.00	37.50
500.00	250.00	18.75
500.00	0.00	0.00
750.00	0.00	0.00
750.00	250.00	18.75
750.00	500.00	37.50
750.00	750.00	56.25
750.00	1000.00	75.00
1000.00	1000.00	75.00
1000.00	750.00	56.25
1000.00	500.00	37.50
1000.00	250.00	18.75
1000.00	0.00	0.00

下图为计算所得的地下水等水位线图。

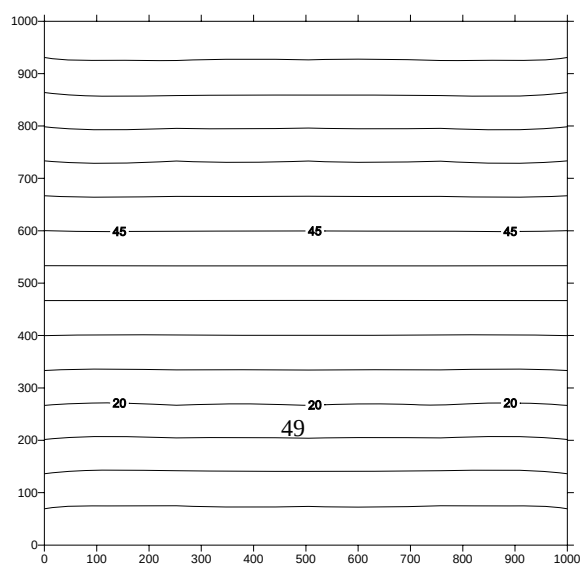


图 4-3 均质、各向同性承压水稳定流模型计算结果

程序 1: 均质、各向同性的承压水稳定流计算程序——fem01

c 均质各向同性承压水稳定流问题(无抽水井、等厚, 水平、无第二类边界)

```
module initial_parame
    integer, parameter :: n11=25, n12=32, nb1=10
end module initial_parame
module comm_total
    real, dimension (1:25) :: h, r1, f, nr, m
    integer, dimension (1:32, 1:3) :: ce
    real, dimension (1:32) :: area
    real, dimension (1:25, 1:2) :: coor
    integer, dimension (1:10) :: b1node
    real, dimension (1:10) :: hb1
    real, dimension (1:1000) :: g
    integer :: mr, n13
    real tk
end module comm_total
```

c

```
program water_resource_calculate
```

c

```
use initial_parame
use comm_total
integer, dimension (1:3) :: ln, cn
tk=100.0
open (4, file='element.txt')
    read (4, *) ((ce(i, j), j=1, 3), i=1, n12)
close (4)
open (4, file='coord.txt')
    read (4, *) ((coor(i, j), j=1, 2), i=1, n11)
close (4)
open (4, file='bound1.txt')
    read (4, *) (b1node(i), hb1(i), i=1, nb1)
close (4)
```

c

```
do i=1, n11
    r1(i)=1000.000          对工作单元 r1 初始化
enddo
do i=1, nb1
    k=b1node(i)
    r1(k)=hb1(i)           对于第一类边界结点, r1 的值被水头代替
enddo
```

```
n13=0
```

c

```
----- 未知水头结点重新编号 -----
do i=1, n11
```




```

if (r1(i).ne. 1000. 0) then  r1 若不为初始值，则其结点为已知水头结点
    nr(i)=2000              相应的结点做上已知水头标记
else
    n13=n13+1              计算未知水头结点编号
    nr(i)=n13              保存结点新编号
endif
enddo

```

c ----- 计算带宽 -----

```

do i=1, n13
    m(i)=0
enddo
do i=1, n12
    do j=1, 3
        cn(j)=ce(i, j)
        nj=cn(j)
        ln(j)=nr(nj)
    enddo
    do j=1, 3
        ir=ln(j)
        if (ir.eq. 2000) exit
        do l=1, 3
            ip=ln(l)
            if (ir.lt. ip) cycle
            mr=ir-ip+1
            k=ir
            if (mr.gt. m(k)) m(k)=mr
        enddo
    enddo
enddo
do i=2, n13
    m(i)=m(i)+m(i-1)
enddo
mr=m(n13)  mr 为总带宽

```

```
call matrix
```

```
end program water_resource_calculate
```

c ----- 追赶法求解水头方程组 -----

```

subroutine rtdr
use initial_parame
use comm_total
n=n13
do 1 i=1, n
    ii=i-1
    id=m(i)
    if (i .le. 1) go to 1

```



```

mi=i-m(i)+m(ii)+1
do 2 j=mi, i
    igp=m(i)+j-i
    jd=m(j)
    jl=j-1
    if (jl .le. 0) go to 3
    mj=j-m(j)+m(jl)+1
    ij=mj
    if (mi. gt. mj) then
        ij=mi
    endif
    if (ij .gt. jl) go to 3
    do 4 k=ij, jl
        k1=m(i)+k-i
        k2=m(j)+k-j
        kd=m(k)
4      g(igp)=g(igp)-g(k1)*g(k2)*g(kd)
3      if (j .eq. i) go to 1
        g(igp)=g(igp)/g(jd)
2      f(i)=f(i)-g(igp)*g(jd)*f(j)
1 f(i)=f(i)/g(id)
nx=n-1
do 6 i=1, nx
    nxr=n-i
    nxd=nxr+1
    do 5 j=nxd, n
        lr=j+1-m(j)+m(j-1)
        if (lr .gt. nxr) goto 5
        lk=m(j)-j+nxr
        f(nxr)=f(nxr)-g(lk)*f(j)
5      continue
6      continue
return
end subroutine rtdr

```

c

-----形成总渗透矩阵-----

```

subroutine matrix
use initial_parame
use comm_total
real,dimension (1:3) :: a,b,c,x,y,hq
real,dimension (1:3,1:3) :: d
integer,dimension (1:3) :: ln,cn
do i=1,nb1
    k=b1node(i)
    r1(k)=hb1(i)

```



```
h(k)=r1(k)
enddo
do i=1, mr
    g(i)=0.0
enddo
do i=1, n13
    f(i)=0.0
enddo
do i=1, n12
    do j=1, 3
        cn(j)=ce(i, j)
        nj=cn(j)
        x(j)=coor(nj, 1)
        y(j)=coor(nj, 2)
        ln(j)=nr(nj)
    enddo
    b(1)=y(2)-y(3)
    b(2)=y(3)-y(1)
    b(3)=y(1)-y(2)
    c(1)=x(3)-x(2)
    c(2)=x(1)-x(3)
    c(3)=x(2)-x(1)
    area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
    ar=tk/(4.0*area(i))
    do l=1, 3
        do j=1, 3
            tp=b(1)*b(j)+c(1)*c(j)
            d(1, j)=tp*ar
        enddo
    enddo
    do l=1, 3
        nu=ln(l)
        if (nu.ne.2000) then
            do kq=1, 3
                nt=cn(kq)
                jo=m(nu)-nu+ln(kq)
                if (ln(l).ge.ln(kq)) then
                    g(jo)=g(jo)+d(1, kq)
                endif
            enddo
            if (ln(kq).eq.2000) then
                f(nu)=f(nu)-d(1, kq)*r1(nt)
            endif
        enddo
    endif
endif
```



```

        enddo
    enddo
    call rtdr                      调用 dtdr 解方程组
    do i=1,nl1
        kk=nr(i)
        if (kk. ne. 2000) then
            r1(i)=f(kk)
        endif
    enddo
    do i=1,nl1
        h(i)=r1(i)
    enddo
    open (14,file='result.dat',status='unknown')
    do i=1,nl1
        write (14,' (3f10.2)' ) coor(i,1),coor(i,2),h(i)
    enddo
    close(14)
end subroutine matrix

```

4.2 存在抽水井的二维承压水稳定流的数值模拟

例 4.2 包含水井的均质各向同性承压水稳定流动数值模型——程序包 fem402

在 4.2.1 问题的基础上，我们来考虑井流问题。首先假设模型中的 13 号结点处存在一口抽水强度为 12000m^3 的水井，此时定解问题写成：

$$\begin{cases}
 T \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\
 H(x, y)|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \\
 H(x, y)|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \\
 T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \\
 T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_w} = -\frac{Q}{2\pi r_w}
 \end{cases} \quad (4-33)$$

由于抽水井落在结点上，所以我们直接利用 2.4.1 的讨论，将抽水造成的影响直接在对应的 13 号结点上进行处理。此时对应的泛函中增加了 (2-51) 表示的内容。

$$\int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \quad (2-51)$$

也就是要计算导数

$$\frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \quad (4-34)$$

由于井的直径 r 通常比较小，所以 $\tilde{H}$ 在 Γ_w 的值可以近似视为 H 在结点 i 上的水头 H ，这样将得到

$$\frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \approx \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} H_i ds = \int_0^{2\pi r_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} ds = \bar{Q} \quad (4-35)$$

其中 $\bar{Q}$ 表示结点 i 上的井的流量（如果位于其它的结点上也同样处理），不存在井的结点，这一项等于零。由于 $\bar{Q}$ 是已知的，所以这一项最终归入常数项向量 $\{f\}$ 中。因而在形成整个渗流区域 D 的水头方程组时，凡是有抽水井的结点都必须在 $\{F\}$ 中应该从相应的 F_i 中减去一个 Q_i 值（ i 为存在水井的结点号）。如果为注水井，则从相应的 F_i 中加上一个 Q_i 值。因此，对定解问题（4-33）的求解等价于对泛函

$$I[H] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_j} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds$$

在 C_0 中求极值问题。

求解以上问题的时候，必须提供抽水井的总数及其所在的结点号和抽水强度。此时，在程序中用如下的语句读入相应的数据。

```
open (4,file='well.txt')
read (4,*) (wellnode(i),wellchar(i),i=1,nw)
close (4)
```

程序中的 `wellnode` 和 `wellrech` 分别表示抽水井所在的结点号机相应的抽水强度, `nw` 为抽水井总数。数据文件 `well.txt` 的内容如下：

结点号	抽水强度
13	12000.0

处理抽水影响的程序段如下：

```
do i=1,nw
  kk=wellnode(i)
  nj=nr(kk)
  if (nj.ne. 2000) then
    f(nj)=f(nj)-wellchar(i)
  endif
enddo
```

以上代码段直接插入在 `call rtdr` 语句之前。该问题的求解要求对程序包中的程序代码 `sample01.f` 进行如下的修改。

1、参数说明中增加了对抽水井数量的定义

```
module initial_parame
```

```
integer, parameter :: nl1=25, nl2=32, nb1=10, nw=1
end module initial_parame
```

2、增加以上讨论的输入抽水井所在结点号和抽水强度的输入语句

```
open (4,file='well.txt')
read (4,*) (wellnode(i),wellchar(i),i=1,nw)
close (4)
```

3、增加处理抽水井抽水影响的程序段

```
do i=1,nw
  kk=wellnode(i)
  nj=nr(kk)
  if (nj.ne. 2000) then
    f(nj)=f(nj)-wellchar(i)
  endif
enddo
```

其它的程序代码维持不变，完整的代码参见 sample02.f。计算所的地下水等水位线图如下图所示。

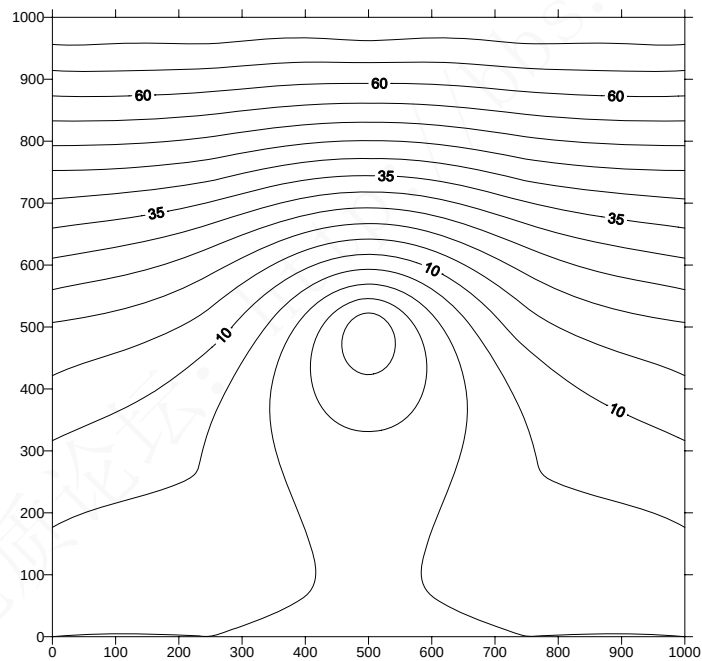


图 4-4 包含一眼抽水井的均质、各向同性承压水模型

例 4.3 包含多口水井的均质各向同性承压水稳定流数值模型——程序包 fem403

假设同时在结点 7、17、9 和 19 存在抽水井，对应的定解问题在例 4.2 的基础上，将描述抽水井的边界条件修改为：

$$T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{w_j}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{w_j}} \quad j=1,2,3,4 \text{ (井数)} \quad (4-36)$$

(4-36) 中 Q_j 为各抽水井的开采量，此时数据文件 well.txt 的内容如下：

结点号	抽水量	结点号	抽水量	结点号	抽水量	结点号	抽水量
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

7	3590.0	17	1500.0	9	5000.0	19	7500.0
---	--------	----	--------	---	--------	----	--------

结合例 4.2，我们只需在 **sample02.f** 程序的参数语句中修改 **nw** 的说明，将其赋值为 4，而其它代码无需修改（假如井数超过数据块的定义的话，则必须修改 **wellnode** 和 **wellrech** 的数足上限）。修改后的程序为 **sample03.f**，修改后的参数模块如下：

module initial_parame

integer, parameter :: nl1=25,nl2=32,nb1=10,nw=4

end module initial_parame

就可以进行计算，计算获得的地下水流场如下

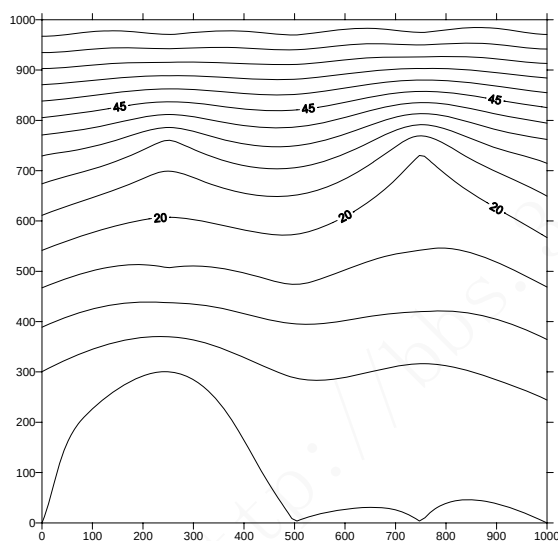


图 4-5 包含四眼抽水井的均质、各向同性承压水模型

例 4.4 包含面状井的均质各向同性承压水稳定流数值模型——程序包 **fem404**

面状井是指抽水井不在单元的结点上，但其定解问题的描述与（4-36）一样。由于此时抽水井部集中在某个结点伤，根据 2.4.1 的讨论，我们必须同时求解

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \\ \frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \\ \frac{\partial}{\partial H_m} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds \end{cases} \quad (4-37)$$

也就是说这里不能用各结点的 H 来简单地代替 $\bar{H}$ 。

对（4-37）的各式求解结果如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds &= \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) ds \\ &= \frac{N_i \bar{Q}}{2\pi r_w} \int_0^{2\pi r_w} ds \\ &= N_i \bar{Q} \end{aligned} \quad (4-38)$$

同理，可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds &= \frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) ds \\ &= N_j \bar{Q}\end{aligned}\quad (4-39)$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_m} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} \bar{H} ds &= \frac{\partial}{\partial H_m} \int_{\Gamma_w} \frac{\bar{Q}}{2\pi r_w} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) ds \\ &= N_m \bar{Q}\end{aligned}\quad (4-40)$$

由于抽水井的抽水强度不是对单一个结点造成影响，而与抽水井在单元中的位置有关，根据基函数的几何意义，抽水井越靠近哪个结点，对这个结点的影响也就越大，当抽水井落在结点上的时候，问题回到例 4.3。

极端情况下，如果抽水井位于三角形形心的时候，该抽水井对单元的三个结点的影响各占 $\frac{\bar{Q}}{3}$ ，也就是说每个结点上各有一口抽水强度为 $\frac{\bar{Q}}{3}$ 的水井在工作，所造成的结果与垂直含水层方向的水量交替项完全相同。

对于面状井，计算所需的资料包括水井的坐标和所在的单元⁵，例如，如果我们分别假设在图 4-2 种的 14、22 单元中各存在一口抽水强度 60m^3 的抽水井。抽水井的坐标分别为 (420.0, 670.0) 和 (580.0, 300.0)，此时 well.txt 文件内容如下：

单元号	坐标		抽水量	单元号	坐标		抽水量
14	420.0	670.0	36000.0	22	580.0	300.0	9600

计算程序在程序包 fem03 中的程序代码 sample03.f 的基础上进行修改，其中数据输入程序修改为

```
open (4,file='well.txt')
read (4,*) (wellelem(i),(wellxy(i,j),j=1,2),wellchar(i),i=1,nw)
close (4)
```

处理面状井的程序如下：

```
do i=1,nw
  k=wellelem(i)
  rech=wellchar(i)
  xx=wellxy(i,1)
  yy=wellxy(i,2)
  do j=1,3
    nj=ce(k,j)
    x(j)=coor(nj,1)
    y(j)=coor(nj,2)
    ln(j)=nr(nj)
```

⁵ 也可以利用基函数的性质一，根据抽水井的坐标，编制程序自动寻找抽水井所在的单元。


```

enddo
a(1)=x(2)*y(3)-x(3)*y(2)
a(2)=x(3)*y(1)-x(1)*y(3)
a(3)=x(1)*y(2)-x(2)*y(1)
b(1)=y(2)-y(3)
b(2)=y(3)-y(1)
b(3)=y(1)-y(2)
c(1)=x(3)-x(2)
c(2)=x(1)-x(3)
c(3)=x(2)-x(1)
do j=1,3
  wnx=(a(j)+b(j)*xx+c(j)*yy)/(2.0*area(k))
  nj=ln(j)
  if (nj.ne. 2000) then
    f(nj)=f(nj)-wnx*rech
  endif
enddo
enddo

```

修改后的程序在程序包 **fem04** 中的 **sample04.f** 中列出，计算流场如下：

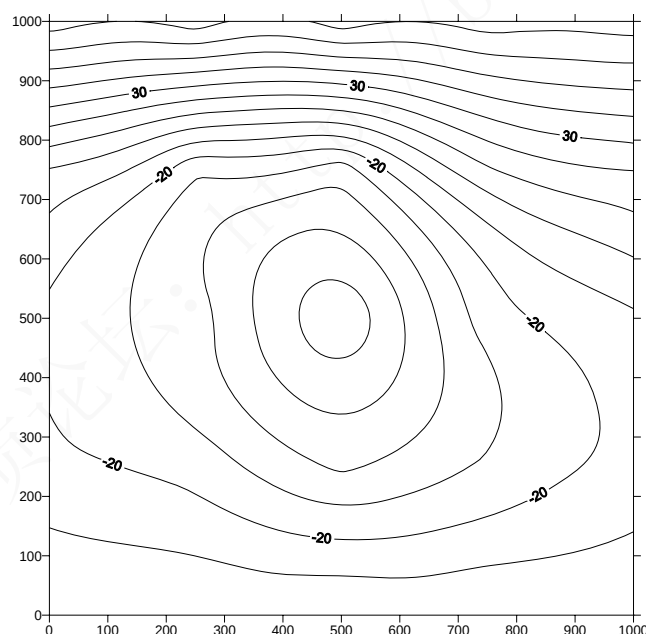


图 4-6 包含 2 眼面状抽水井的均质、各向同性承压水模型

4.3 二维非均质承压水流的有限元数值模拟

例 4.5 非均质各向同性承压水稳定流数值模型——程序包 fem405

为简单起见，我们以计算区域的 $(500, 0) - (500, 1000)$ 为界，将区域分成左右两部分，并假设左边部分的导水系数为 $100.0 \text{ m}^2/\text{d}$ ，右边部分为 $50.0 \text{ m}^2/\text{d}$ 。其形状如图 4-7。定

解问题如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2 \end{cases} \quad (3-41)$$

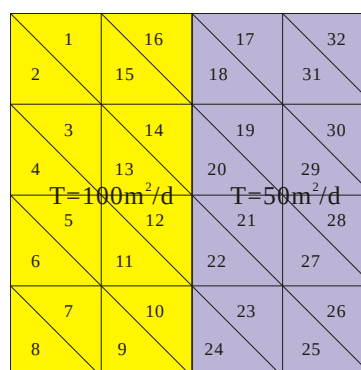


图 4-7 非均质分区图

为了在模型中表现非均质特征，我们必须建立程序所需的非均质分区资料。实现非均质分区的常用方法有两种。

1、在程序中将每个单元的非均质分区情况写入，对于本例，可用如下的语句实现：

```
do i=1,16
  tk(i)=100.0
  tk(i+16)=50.0
enddo
```

2、建立非均质分区文件。对于本例，可建立一个名为 corf.txt 的文件，其中包括各分区的导水系数和各单元的分区号（我们假定左边为第一个参数区，右边为第二个参数区），具体内容如下：

100.0					50.0				
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2	2								

两种处理办法各有长处，第一种方法简单，但失灵活，如果计算中需要改变非均质状况，必须重新修改程序，另外如果非均质分区规律性不强，程序实现也就不简单了，而且给后期的变化带来很大的麻烦；第二种方法在早期需要投入较大的工作量，但在后期修改的时候却比较便利。

在例 4.4 程序包 fem04 基础上，采用第二种处理办法进行。

相比程序 sample04.f，本例的程序代码有比较大的改动，包括如下：

1、在参数说明模块中增加了对非均质分区个数的说明 ntk=2；

```
module initial_parame
  integer, parameter :: nl1=25,nl2=32,nb1=10,nw=2,ntk=2
end module initial_parame
```

2、在数据模块中删除了原来对单一导水系数 tk 的定义，增加定义了保存导水系数的数组 tk(2) 和保存个单元非均质分区编号的数组 nkk(32)；

```

module comm_total
  real, dimension (1:25) :: h, r1, f, nr, m
  integer, dimension (1:32, 1:3) :: ce
  real, dimension (1:32) :: area
  real, dimension (1:25, 1:2) :: coor
  integer, dimension (1:10) :: b1node
  real, dimension (1:10) :: hb1
  real, dimension (1:2) :: tk
  integer, dimension (1:32) :: nkk
  real, dimension (1:1000) :: g
  integer :: mr, nl3
real tk
end module comm_total

```

保存两个分区的导水系数
保存每个单元的非均质分区编号
删除

3、在主程序开头删除了对原来单一导水系数的赋值语句；

```
tk=100.0
```

删除

4、增加了输入导水系数和非均质分区的模块；

```

open (4,file='coef.txt')
  read (4,*) (tk(i),i=1,ntk)
  read (4,*) (nkk(i),i=1,nl2)
close (4)

```

读入两个分区的导水系数
读入每个单元的非均质分区号

5、在建立总渗透矩阵模块中计算单元面积之后处理了非均质问题。

```

area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
ik=nkk(i)
ar=tk(ik)/(4.0*area(i))

```

维持不变
增加：获取该单元的非均质分区号
修改：按单元分区号引用对应的导水系数

修改后的程序存在程序包 fem05 中的代码文件 sample05.f 内，计算所得的结果如下。

图 4-8 为计算所得的流场图。

对比图 4-6 和图 4-8 发现，由于区域左边导水系数从原来的 $100.0 \text{ m}^2/\text{d}$ 变化成 $50.0 \text{ m}^2/\text{d}$ ，造成了在相同的抽水条件下，漏斗中心水位从原来的 -60.0 m 下降到 -100.0 m 。

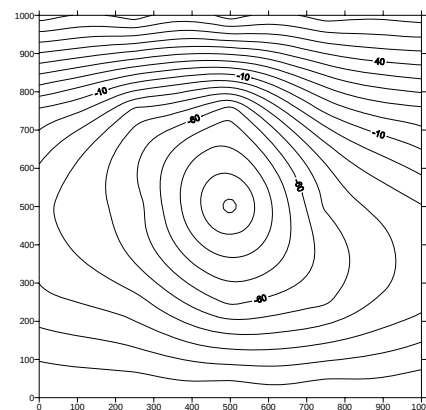


图 4-8

例 4.6 含水层厚度变化的非均质承压水稳定流数值模型——程序包 fem406

在承压含水层中，含水层厚度的变化直接影响着含水层的富水性能。如果出现这种情况，模型必须做如下的修改。

1、因为含水层的导水系数等于含水层渗透系数与含水层厚度之积，由于此时含水层厚

度 M 已因地而异，所以提供给模型的应该为含水层渗透系数 K 而不能为导水系数 T ，描述这类问题的定解问题表达如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(KM \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2, 3, 4 \end{cases} \quad (4-42)$$

2、式（4-42）中涉及的含水层的厚度 M 由含水层的顶、底板高程所控制，所以必须提供每个结点的顶底板高程资料或者直接提供每个结点的含水层厚度资料，在可能的条件下，应尽量提供前者。

对（4-42）得求解可等价于对

$$I[H] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_j} \left\{ \frac{KM}{2} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy - \int_{\Gamma_{wj}} \frac{\bar{Q}_j}{2\pi r_{wj}} \bar{H} ds \quad (4-43)$$

在函数类 C_0 中求极值问题。

一般来说含水层顶、底板高程资料都为离散点资料，比如钻孔揭露的资料，这些有限的离散点资料必须采用插值的方法来处理，以便获得结点所需的资料。

本文推荐采用 **surfer** 软件中的剩余误差功能（**Residuals**）来实现结点插值，具体的操作步骤如下：

- 1、利用原始的离散点数据，参照计算区域的范围形成格网化数据；
- 2、按照 **surfer** 的数据格式，建立结点坐标文件，其中第三列必须填入数字“0”；
- 3、利用 **surfer** 的 **grid** 菜单中的 **Residuals** 工具，分别输入格网化文件和实现准备好的结点坐标文件，完成剩余误差计算（计算结果将被自动保存在第四列）；
- 4、利用 **surfer** 的 **worksheet**，打开计算所得的文件，再利用其中的 **data** 菜单内的 **Transform** 工具，设定 **c=c-d** 完成最后计算，然后删除第四列资料，保存所得的计算结果，由此获得结点所需的资料。

本例采用如上的方法获得结点的顶、底板高程资料，并将这两个数据与结点坐标一起保存成 **coord.txt** 文件，其中第一、第二列分别为结点的 x 坐标和 y 坐标，第三列为结点的底板高程，第四列为结点的顶板高程。具体数值如下：

根据以上的讨论，这里根据下表列出的位于区域 D 内的五个已知钻孔揭露的含水层顶、底板资料来插值获得 D 中 25 个结点的顶、底板高程。

孔号	Sk1		Sk2		Sk3		Sk4		Sk5	
坐标	0.0	500.0	500.0	250.0	250.0	750.0	750.0	0.0	750.0	500.0

顶板	-2.61	-12.30	0.72	7.69	5.21
底板	-51.95	-47.05	-43.02	-58.91	-36.15

处理后得到各结点的顶、底板高程如下：

结点号	结点坐标		底板高程	顶板高程
1	0.00	1000.00	-44.80	1.56
2	0.00	750.00	-47.45	-0.24
3	0.00	500.00	-51.95	-2.62
4	0.00	250.00	-53.35	-6.64
5	0.00	0.00	-55.58	-8.94
6	250.00	0.00	-54.84	-10.60
7	250.00	250.00	-50.49	-8.87
8	250.00	500.00	-46.58	-3.72
9	250.00	750.00	-43.02	0.69
10	250.00	1000.00	-41.74	2.73
11	500.00	1000.00	-38.97	4.18
12	500.00	750.00	-39.23	2.52
13	500.00	500.00	-41.45	-2.17
14	500.00	250.00	-47.05	-12.12
15	500.00	0.00	-55.27	-10.92
16	750.00	0.00	-58.91	-7.70
17	750.00	250.00	-47.03	-4.02
18	750.00	500.00	-36.15	5.05
19	750.00	750.00	-36.75	5.25
20	750.00	1000.00	-37.37	5.58
21	1000.00	1000.00	-37.41	6.13
22	1000.00	750.00	-37.68	5.70
23	1000.00	500.00	-40.14	3.88
24	1000.00	250.00	-47.03	-0.56
25	1000.00	0.00	-54.30	-4.28

在 **fem405** 的基础上，将非均质分区文件 **coef.txt** 文件中的导水系数更改为渗透系数，两个分区的渗透系数分别为

分区号	1 区	2 区
渗透系数(m/d)	4.6	3.9

两眼面状井的抽水强度维持不变，根据以上的讨论，模型 **fem06** 种必需做一下的一些修改。

1、**module comm_total** 数据模块中的第一行同时完成对含水层底板和顶板数组的定义，将其改为：

real, dimension (1:25) :: h,r1,f,nr,m,sole,apical

其中，**sole** 为保存底板高程的数组，**apical** 为保存顶板高程的数组。

2、因为结点的顶、底板高程资料和结点坐标一起保存在文件 `coord.txt` 中，所以读入结点坐标的时候可以同时读入结点的顶、底板高程，相应的程序改为：

```
open (4,file='coord.txt')
read (4,*) ((coord(i,j),j=1,2),sole(i),apical(i),i=1,nl1)    同时读入底、顶板高程
close (4)
```

3、重点修改建立水头方程组模块的计算单元面积之后的代码，修改后的代码如下：

```
area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0    维持原样
avbed=(sole(cn(1))+sole(cn(2))+sole(cn(3)))/3.0    计算单元平均底板高程
avtop=(apical(cn(1))+apical(cn(2))+apical(cn(3)))/3.0    计算单元平均顶板高程
thickness=avtop-avbed    计算单元的含水层厚度
ik=nkk(i)
avtk=tk(ik)*thickness    计算单元的导水系数
ar=avtk/(4.0*area(i))
```

其他的代码维持不变，修改结果参见程序包 `fem06` 中的 `sample06.f`，计算得到的等水位线如图 4-9 所示。

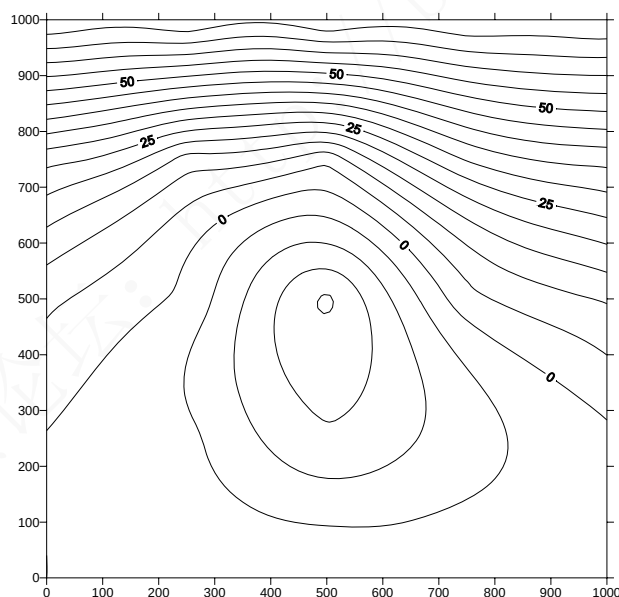


图 4-9 包含 2 眼面状井的非均质、各向同性、含水层厚度不等的承压水模型

`fem06` 计算得到的水头已经有一部分低于含水层顶板，在局部地段出现了无压水状态，因而必须利用潜水含水层中地下水运动的模拟技术来处理这个问题。

4.4 存在第二类补给条件的二维承压水流有限元数值模拟

这类问题中存在一个第二类补给边界的线积分问题，对于那些位于第二类补给边界上的单元，建立水头方程式的时候必须加入这部分内容。

4.3.1 线积分的近似求解

已知定解问题如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(KM \frac{\partial H}{\partial y} \right) + W = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y)|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y) \\ KM \frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma_{21}} = q(x, y) \quad \text{和} \quad KM \frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma_{22}} = 0.0 \\ KM \frac{\partial H}{\partial n}|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2, \dots, v \end{cases} \quad (4-44)$$

前已谈及，对 4-44 式所示的定解问题的求解，可转化为对泛函

$$I[\tilde{H}] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_j} \left\{ \frac{KM}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - W\tilde{H} \right\} dx dy - \sum \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds + \sum_{j=1}^v \int_{\Gamma_{wj}} \frac{\bar{Q}_j}{2\pi r_{wj}} \tilde{H} ds$$

在函数类 C_0 中求极值问题。根据 4.1.2 的讨论，当单元位于第二类流量补给边界上的时候（指单元有一条边落在第二类边界上），可得到如示 4-8 的表示。

$$I^e = I_1^e + I_2^e \quad (4-45)$$

式 4-45 等号右端的 I_1^e 我们已经在 4.1 中做了全面的论述，本节专门讨论线积分的求解，

由于

$$I_2^e = - \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds \quad (4-7)$$

可根据对泛函求极值的思想，直接求解

$$\frac{\partial I_2^e}{\partial H_i} = - \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds \quad (4-46)$$

以下结合图 4-10 讨论 (4-46) 的求解。

图 4-10 中，**ab** 为第二类流量边界，三角形单元 **e** 落在第二类边界上，其 **ij** 边自动构成了边界 **ab** 的在单元内的曲线段。**ij** 边的长度用 L_{ij} 表示，**s** 为 **ij** 内的一个动点，若参照 3.4 节对三角形边（线元）上的现行插值的讨论，则水头插值函数在 **ij** 上存在 (3-49) 式。

$$\tilde{H} = \left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) H_i + \frac{s}{L_{ij}} H_j \quad (3-49)$$

因此有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q\tilde{H} ds &= \int_{ij} \frac{\partial}{\partial H_i} \left\{ q_{ij} \left[\left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) H_i + \frac{s}{L_{ij}} H_j \right] \right\} ds \\ &= \int_0^{L_{ij}} q_{ij} \left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) ds = \frac{1}{2} q_{ij} L_{ij} \end{aligned} \quad (4-47)$$

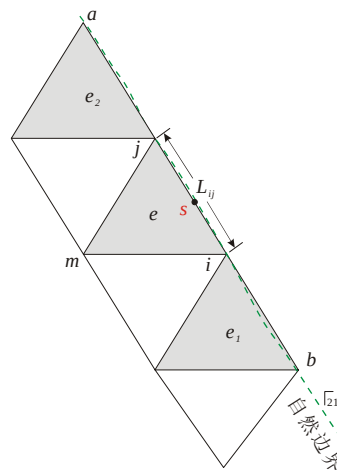


图 4-10 第二类边界上的单元

q_{ij} 为通过 ij 边的单宽流量。同理可得

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q \tilde{H} ds &= \int_{ij} \frac{\partial}{\partial H_j} \left\{ q_{ij} \left[\left(1 - \frac{s}{L_{ij}} \right) H_i + \frac{s}{L_{ij}} H_j \right] \right\} ds \\ &= \int_0^{L_{ij}} q_{ij} \frac{s}{L_{ij}} ds = \frac{1}{2} q_{ij} L_{ij}\end{aligned}\quad (4-48)$$

单元 e 的结点 i 和 j 同时分别也是单元 e_1 和 e_2 的结点，因此对于这两个单元来讲，同样可以得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_{e_1}} q \tilde{H} ds &= \int_{bi} \frac{\partial}{\partial H_i} \left\{ q_{bi} \left[\left(1 - \frac{s}{L_{bi}} \right) H_i + \frac{s}{L_{bi}} H_j \right] \right\} ds \\ &= \int_0^{L_{bi}} q_{bi} \left(1 - \frac{s}{L_{bi}} \right) ds = \frac{1}{2} q_{bi} L_{bi}\end{aligned}\quad (4-49)$$

和

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_2 \cap C_{e_2}} q \tilde{H} ds &= \int_{ja} \frac{\partial}{\partial H_j} \left\{ q_{ja} \left[\left(1 - \frac{s}{L_{ja}} \right) H_i + \frac{s}{L_{ja}} H_j \right] \right\} ds \\ &= \int_0^{L_{ja}} q_{ja} \frac{s}{L_{ja}} ds = \frac{1}{2} q_{ja} L_{ja}\end{aligned}\quad (4-50)$$

4-49 式中的 L_{bi} 和 q_{bi} 分别表示单元 e_1 的 bi 边和通过该边的单宽流量，4-50 式中的 L_{ja} 和 q_{ja} 则分别表示单元 e_2 的 ja 边和通过该边的单宽流量。所以对于单元 e 的 i 点来说，第二类流量补给边界对它造成的影响由

$$\frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q \tilde{H} ds + \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_{e_1}} q \tilde{H} ds = \frac{1}{2} q_{ij} L_{ij} + \frac{1}{2} q_{bi} L_{bi} = \frac{q_{ij} L_{ij} + q_{bi} L_{bi}}{2}\quad (4-51)$$

决定。而第二类流量补给边界对单元 e 的 j 点造成的影响则由

$$\frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q \tilde{H} ds + \frac{\partial}{\partial H_j} \int_{\Gamma_2 \cap C_{e_2}} q \tilde{H} ds = \frac{1}{2} q_{ij} L_{ij} + \frac{1}{2} q_{ja} L_{ja} = \frac{q_{ij} L_{ij} + q_{ja} L_{ja}}{2}\quad (4-52)$$

决定。假如单元 e 位于 D 的内部，由于它与第二类流量补给边界不存在公共边，因此 $I_2^e = 0$ ，

这就回到 4.1 和 4.2 的讨论。因此对位于第二类流量补给边界上的单元 e 而言，存在

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^e(\tilde{H})}{\partial H_i} &= \frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_i} + \frac{\partial I_2^e(\tilde{H})}{\partial H_i} \\ &= \frac{T^e}{4\Delta} \left[(b_i b_i + c_i c_i) H_i + (b_i b_j + c_i c_j) H_j + (b_i b_m + c_i c_m) H_m \right] - \frac{\Delta}{3} W^e - \frac{L_{ij} q_{ij} + L_{bi} q_{bi}}{2}\end{aligned}$$

值得一提的是，对第二类流量补给边界上的单元进行结点登记的时候，切记将结点 i 和结点 j 安排在边界上，以便程序统一处理。如此一来，上式的最后一项显然只在单元渗透矩阵中对应于结点 i 和结点 j 的行中才存在。不过，在形成总渗透矩阵时，它们都会被归并到常熟列向量中，构成了 F_i 。

以上讨论用到了 3.4 节的讨论，请自行参考。

4.3.2 例 4.7： 非均质承压水稳定流数值模型——程序包 fem407

设有如 (4-54) 所示的承压水模型。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \text{m} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \text{m} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y) \quad \text{第二类流量补给边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \quad \text{隔水边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2 \end{array} \right. \quad (4-53)$$

模型 (4-54) 实质上在例 4.6 的基础上将 AC 边界修改为第二类流量补给边界 (参见图 4-11)，按照 4.3.1 的讨论，这一改变通过叠加相应结点的 **F** 值来实现。故此，我们可以在模块 fem06 的 sample06.f 代码的求解水头方程组之前进行与第二类流量不及边界有关的计算。

在建立模型的时候必须注意，便借 AC 的两个端结点我 1 和 5 同时也是第一类边界结点，由于第一类边界结点不是未知水头结点，所以不应该将其同时作为第二类流量边界结点，也就是不要对这两个结点施加流量影响。

该模型需要同时提供第二类流量补给边界的单元号，并且提供相应单元的单宽流量，对于本例，数据准备如下：

数据文件名：bound2.txt

单元号	2	4	6	8
各单元单宽流量	240.0	160.0	200.0	180.0

注意 bound2.txt 文件中不要输入第一列的信息，也不必输入流量单位。

以下利用 sample06.f 进行修改，修改的内容包括以下几个方面。

- 1、参数模块中增加对第二类边界信息的说明，包括结点个数和单元个数；

module initial_parame

integer, parameter :: nl1=25, nl2=32, nb1=10, nw=2, ntk=2, nb2e=4

end module initial_parame

以上代码中 nb2 表示结点总数，nbe 表示单元总数。

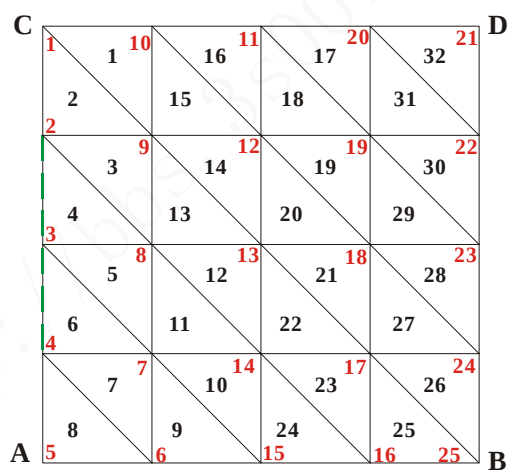


图 4-11 包含流量边界的模型

2、数据模块中增加对第二类流量补给边界单元（beelem）和单宽流量（b2char）的数组说明；

```
module comm_total
.....
integer, dimension (1:4) :: b2elem
real, dimension (1:4) :: b2eq
.....
end module comm_total
```

3、增加读入第二类流量补给边界资料的代码；

```
open (4,file='bound2.txt')
read (4,*) (b2elem(i),i=1,nbe)      读入单元号
read (4,*) (b2eq(i),i=1,nbe)      读入单宽流量
close (4)
```

4、处理第二类流量补给的代码（安排在 call rtdr 语句之前）

```
do i=1,nb2e
k=b2elem(i)
do j=1,2
nj=ce(k,j)
x(j)=ce(nj,1)
y(j)=ce(nj,2)
ln(j)=nr(nj)
enddo
dd=sqrt((x(1)-x(2))**2+(y(1)-y(2))**2)    计算两个结点间的距离
bound2q=b2eq(i)/2.0*dd
do j=1,2
nj=ln(j)
if (nj .ne. 2000) then      跳过第一类边界结点
f(nj)=f(nj)+bound2q      常数值累加
endif
enddo
enddo
```

完整的程序代码参考 fem07 程序包中的 sample07.f。计算流场图如下：

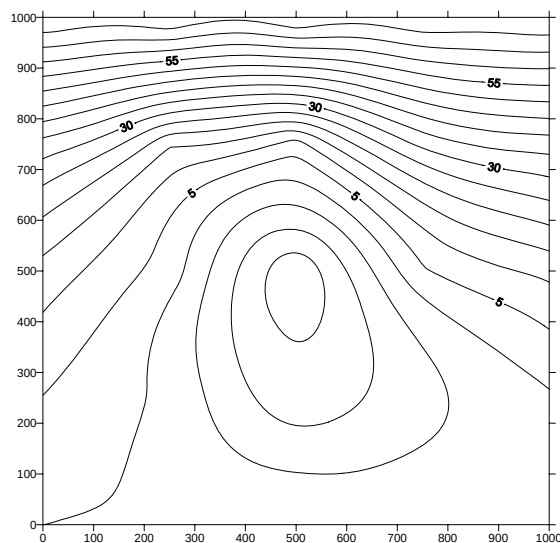


图 4-12 包含第二类流量补给边界的计算流场

4.5 二维非均质各向异性承压水稳定流的数值模拟

4.5.1 定解问题及其泛函的极值

各向异性⁶现象几乎存在于自然界中所有的地下水系统中，在基岩山区、特别是断裂发育的地区和岩溶地下水系统中尤其如此。想必他们而言，第四系松散含水层中的地下水系统则因其含水介质排列相对有规律而往往被人们近似作为各向同性处理。

本节，我们以二维承压水稳定流模型为例，研究当其中存在各向异性时的数值模拟方法。描述此类问题的定阶问题如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y) \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y) \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial n} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2, \dots, v \end{cases} \quad (4-54)$$

⁶ 在各向同性介质中，渗透系数 K 是个标量。但在各向异性介质中，渗透系数 $\underline{K}$ 则是个二秩张量，它不能简单地用坐标轴上的三个分量来定义空间一个点上的渗透系数，而必须像表示空间中一个点的应力那样采用双下标表示，用它的九个分量来表示。（参见多孔介质流体动力学 5.6），即

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \underline{K} = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \quad (\text{二维空间})$$

渗透系数张量是个对称张量，在二维情况下只有三个不同的分量。有尽管在各向异性介质中的水力坡度和渗流速度的方向是不一致的，但在两个方向上两者是平行的，而且这两个方向是相互正交的。这两个方向称为渗透主方向，沿着两个方向测得的渗透系数称为主渗透系数或渗透主值。如果所采用的笛卡尔坐标系的两个坐标轴分别与渗透系数张量的主方向平行，则可分别用 K_x 和 K_y 分别表示两个方向的渗透系数。

对该问题的求解可转换为求泛函

$$I[\tilde{H}] = \sum_{i=1}^m \iint_{e_j} \left[\frac{K_x M}{2} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \frac{K_y M}{2} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \sum \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q \tilde{H} ds + \sum_{j=1}^v \int_{\Gamma_{wj}} \frac{\bar{Q}_j}{2\pi r_{wj}} \tilde{H} ds \quad (4-55)$$

在函数类 C_0 种求极值问题。

(4-55) 的求近似积分问题在前面的讨论中已经论述，这里不再赘述，结果如下：

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e(\tilde{H})}{\partial H_i} &= \frac{\partial I_1^e(\tilde{H})}{\partial H_i} + \frac{\partial I_2^e(\tilde{H})}{\partial H_i} \\ &= \frac{\partial}{\partial H_i} \iint_{e_j} \left[\frac{K_x M}{2} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \frac{K_y M}{2} \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \frac{\partial}{\partial H_i} \int_{\Gamma_2 \cap C_e} q \tilde{H} ds + \frac{\partial}{\partial H_i} \sum_{k=1}^v \int_{\Gamma_{wk}} \frac{\bar{Q}_k}{2\pi r_{wk}} \tilde{H} ds \\ &= \frac{K_x M}{4\Delta} (b_i b_i H_i + b_i b_j H_j + b_i b_m H_m) + \frac{K_y M}{4\Delta} (c_i c_i H_i + c_i c_j H_j + c_i c_m H_m) - \frac{L_{ij} q_{ij} + L_{bi} q_{bi}}{2} + \sum_{k=1}^v N_{ki} \bar{Q}_k \end{aligned}$$

用同样的方法可分别求出

$$\begin{aligned} \frac{\partial I^e(\tilde{H})}{\partial H_j} &= \frac{K_x M}{4\Delta} (b_j b_i H_i + b_j b_j H_j + b_j b_m H_m) + \frac{K_y M}{4\Delta} (c_j c_i H_i + c_j c_j H_j + c_j c_m H_m) - \frac{L_{ij} q_{ij} + L_{bi} q_{bi}}{2} + \sum_{k=1}^v N_{kj} \bar{Q}_k \end{aligned}$$

$$\frac{\partial I^e(\tilde{H})}{\partial H_m} = \frac{K_x M}{4\Delta} (b_m b_i H_i + b_m b_j H_j + b_m b_m H_m) + \frac{K_y M}{4\Delta} (c_m c_i H_i + c_m c_j H_j + c_m c_m H_m) + \sum_{k=1}^v N_{km} \bar{Q}_k$$

最后得单元渗透矩阵如下：

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} &= \frac{K_x^e M}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_m \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_m \\ b_m b_i & b_m b_j & b_m b_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} + \frac{K_y^e M}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_m \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_m \\ c_m c_i & c_m c_j & c_m c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} \\ &\quad - \frac{L_{ij} q_{ij} + L_{bi} q_{bi}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \bar{Q} \begin{Bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_m \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4-55)$$

式 (5-55) 中的最后一项代表作用在该单元各结点的所有抽水井的流量所造成的影响，具体的计算参见本章第 2 节的例 4.3 和例 4.4。总渗透矩阵的形式与前面的讨论一样。

4.5.2 例 4.8：非均质、各向异性的二维承压水流数值模型——fem408

例 4.8 的定解问题描述如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 \text{ 内} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{AB}} = 0.0 \text{m} \\ H(x, y) \Big|_{\Gamma_{CD}} = 75.0 \text{m} \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y) \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \\ K_x M \frac{\partial H}{\partial x} \cos(n, x) + K_y M \frac{\partial H}{\partial y} \cos(n, y) \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2 \end{array} \right. \quad (4-56)$$

本例在例 4.7 的基础上，将原模型中的渗透系数修改为

分区号	1 区		2 区	
	K_x	K_y	K_x	K_y
渗透系数(m/d)	4.6	1.5	3.9	0.3

将 fem07 模块中的 fem407.f 程序代码略作修改，就可得到求解一个非均质、各向异性、含水层顶、底板不水平且包含第二类布吉边界和两个面状抽水孔的有限元数值模型。修改部分如下：

- 1、在数组定义模块中修改定义两个保存两个方向渗透系数的数组。

real,dimension (1:2) :: tk1,tk2 !每个分区两个渗透系数

其中 **tk1** 保存两个分区的 X 方向的渗透系数，**tk2** 保存两个分区 Y 方向的渗透系数。

- 2、增加读入各向异性渗透系数的代码，可直接修改原来的参数分区数据文件。

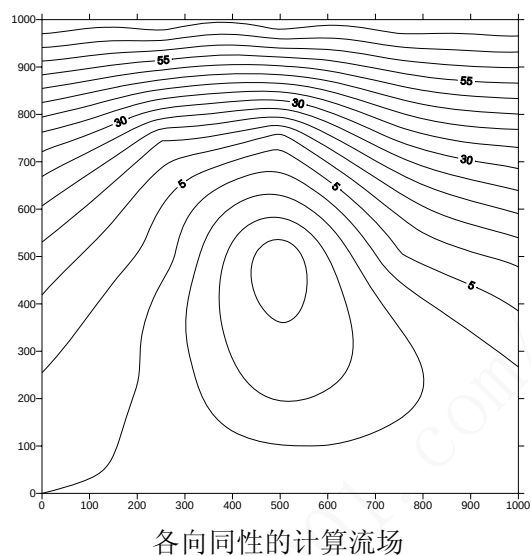
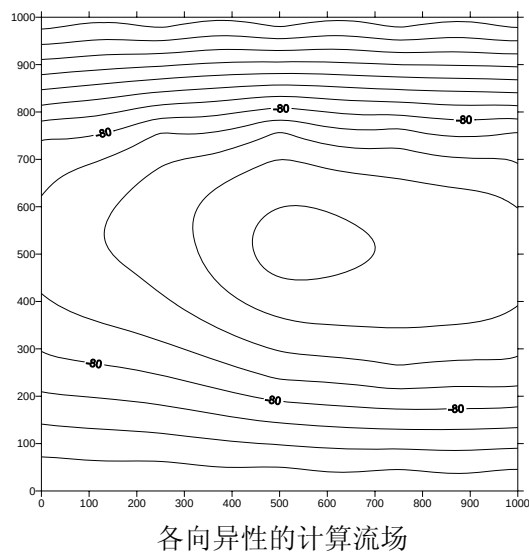
```
open (4,file='coef.txt')
read (4,*) (tk1(i),tk2(i),i=1,ntk)
read (4,*) (nkk(i),i=1,nl2)
close (4)
```

- 3、处理各向异性（4-55）的代码。

```
ik=nkk(i)
avtk1=tk1(ik)*thickness
ar1=avtk1/(4.0*area(i))
avtk2=tk2(ik)*thickness
ar2=avtk2/(4.0*area(i))
do l=1,3
do j=1,3
tp=ar1*b(l)*b(j)+ar2*c(l)*c(j) !处理各向异性
d(l,j)=tp
enddo
enddo
```

图 4-13 同时给出各向异性和各向同性的两个模型所得到的计算流场，由于在本例中我们认为设定的 K_{xx} 远小于 K_{yy} ，所以可以看到降落漏斗的形状沿 Y 方向发生了压缩，明显

表现了各向异性与各向同性的巨大差异。



4-13 各向异性与各向同性的计算流场对比

4.6 二维无压水稳定流的数值模拟

4.6.1 无压含水层中地下水运动的非线性问题

潜水（又称为无压水）是自然界中广泛存在的重要地下水类型，例如长江三角洲地区和黄淮平原、华北平原的上部含水层⁷都是潜水含水层系统。前面讨论的承压水运动方程是线性的，但是潜水运动的微分方程却是非线性的。

对于承压含水层来说，当含水层的排泄量大于所得到的补给量的时候，在漏斗中心地带或者主要排泄区地段的地下水流动状态可能转变成潜水流，此事地下水的运动方程也变为非线性方程。

在地下水非线性运动方程中，除了水头 H 为未知外，无压含水层的厚度 h 也是未知数。实际上，由于 h 的值与 H 直接相关，再非稳定流问题中， H 又是随时间变化的，所以 h 也是个与时间有关的函数。即存在

$$h = h(t) = H(t) - z$$

式中： z 为含水层底板高程。由此看出，地下水非线性运动问题是由无压含水层的厚度 $h(t)$ 引起的。在求解此类问题的时候，必须采用专门的方法确定其值。

5.3.2 非线性问题的求解方法

下式为描述包含有垂直方向水量交替（如降雨入渗或蒸发、河道入渗、灌溉回归入渗）、第一类和第二类补给边界及抽水井的潜水运动的定解问题。

⁷ 这些地方的上部含水层系统由两个含水层组成，上部为典型的潜水、其下分布着具有潜水特征的弱承压含水层，两个含水层之间仅存在透镜状隔水层。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y)|_{\Gamma_1} = \varphi_1(x, y) \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = q(x, y) \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j(x, y, t)}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2, \dots, v \end{cases} \quad (4-57)$$

式中, w 为单位时间、单位面积含水层上的入渗量, v 为井数。

对定解问题 4-57, 我们采用迭代法来求解其中的 $h(t)$ 。迭代过程如下:

第一步, 假设含水层的厚度 $h = h^{(1)}(x, y)$ 为已知。此时可视定解问题 (4-57) 中的基本微分方程变为线性方程, 定解问题 (4-57) 化为在函数类 C_0 中求

$$I(H) = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[Kh^{(1)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + Kh^{(1)} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - \varepsilon H \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} q H ds + \sum_{j=1}^v \int_{\Gamma_{wj}} \frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} H ds \quad (4-58)$$

的极小函数。这样就可以利用前面对承压水问题的模拟方法, 通过剖分插值, 把二次泛函的极值问题离散化为普通多元函数的极值问题进行求解。从而得到基于 $h^{(1)}$ 的第一次近似水头 $H^{(1)}(x, y)$ 。由于初值 $h^{(1)}$ 是假设的, 所以得到的解 $H^{(1)}(x, y)$ 不是真解。

第二步, 由计算所得的计算

$$h^{(2)}(x, y) = H^{(1)}(x, y) - z(x, y) \quad (4-59)$$

计算出新的含水层厚度 $h^{(2)}(x, y)$ 。然后用它替换 (5-44) 中的 $H^{(1)}(x, y)$, 求解 $H^{(2)}(x, y)$ 。

第三步, 重复以上过程, 将基于第 $k-1$ 次获得的水头 $H^{(k-1)}(x, y)$ 计算第 k 次的含水层厚度 $h^{(k)}$ 。

$$h^{(k)}(x, y) = H^{(k-1)}(x, y) - z(x, y) \quad (4-60)$$

并用之替换 4-60 式中的含水层厚度, 求解水头方程组得到 $H^{(k)}(x, y)$ 。

从第二次迭代计算开始, 每次计算后必须比较前后两次计算获得的水头, 当比较结果满足

$$|H^{(k)} - H^{(k-1)}| \leq esp \quad (4-61)$$

时, 可将 $H^{(k)}(x, y)$ 视为原问题的解。上式中的 esp 为事先约定的允许迭代误差。

对于以上所说的承压水转无压水问题, 可利用下式

$$H^{(1)}(x, y) - z(x, y) \geq M \quad (4-62)$$

来判断水流状态是否转化，当满足（5-48）时，可视含水层中的地下水还处在承压流动状态，此时，（4-58）中的 $h^{(1)}$ 可以用含水层的厚度替换；反之，当不满足（4-62）的关系时，则表示含水层处在无压流动状态，在这种情况下，直接将计算所得的水头作为 $H^{(1)}(x,y)$ ，代入（4-59）式计算水流厚度 $h^{(2)}$ ，然后按照以上讨论的步骤进行非线性迭代。

4.6.2 应用举例

例 4.9 二维无压水稳定流动的数值模拟——fem409

本例直接在 fem407 的基础上将其修改为无压水模型修改，其定解问题描述如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) = 0 \quad \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x,y) \Big|_{\Gamma_{AB}} = 0.0\text{m} \\ H(x,y) \Big|_{\Gamma_{CD}} = 75.0\text{m} \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x,y) \quad \text{第二类流量补给边界} \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \quad \text{隔水边界} \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} \quad j=1,2 \end{array} \right. \quad (4-63)$$

由于无压含水层不存在顶板，故对原来的程序必须做相应的修改。

1、不需要定义保存含水层顶板高程的数组 apical 饼载入文件 coord.txt 中删除描述含水层顶板的数据，相应的数组也从 read 语句中删除；

2、为无压含水层的厚度迭代设定初值；

含水层初始厚度是个估计值，任何不小于零的正数都可以作为初值选择。不过最后选择一个比较接近的数字，以减少迭代次数，提高解题速度，本例选择各结点第一类边界的平均水头作为含水层厚度的初始值。代码如下：

c 为无压含水层确定含水层初始厚度值 hm

hm=0.0

nh=0

do i=1,nb1 !这里引用第一类边界结点的平均水头作为含水层厚度迭代初值

nh=nh+1

hm=hm+hb1(i)

enddo

hm=hm/float(nh)

do i=1,nl1

aquihead(i)=hm

enddo

3、在形成总渗透矩阵的模块中，再计算含水层平均底板高程之后接着计算用来计算含水层厚度用的单元平均水头（尽管该水头一开始是架设的，后来是迭代得来的），接着将计

算含水层厚度，修改后的程序代码如下：

```
area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
avbed=(sole(cn(1))+sole(cn(2))+sole(cn(3)))/3.0
avhead=(aquihead(cn(1))+aquihead(cn(2))+aquihead(cn(3)))/3.0
thickness=avhead-avbed
ik=nkk(i)
avtk=tk(ik)*thickness
ar=avtk/(4.0*area(i))
```

4、无压水问题的非线性迭代程序代码如下：

```
if (kj .eq. 1) then      !kj 为事先设定 (kj=1)，用来控制是否进行迭代
  do i=1,n11
    hk_1(i)=h(i)        !hk_1 为  $h^{(k-1)}$ 
    aquihead(i)=h(i)
  enddo
  kj=kj+1
  goto 105              ! kj=1 的时候不迭代
else
  do i=1,n11
    epsd=abs(h(i)-hk_1(i)) !比较前后两次计算水头的差是否小于给定的误差
    if (epsd .gt. esp) then
      do j=1,n11
        hk_1(i)=h(i)
        aquihead(i)=h(i)
      enddo
      kj=kj+1
      goto 105          !如果不满足误差允许值，继续迭代
    endif
  enddo
endif
```

这段代码放在求得各结点的水头之后，按照一个事先给定的允许迭代误差 esp 决定程序流程。代码中的 105 为建立水头方程组之前，对稀疏矩阵数组和常数列向量数组进行初始化的位置，每次迭代计算，除了要引用得到的新水头之外，还得根据新的引用重新获得方程组的系数矩阵和常数列向量。

图 4-14 为例 9 得到的计算流场，在流场中，因为两眼水井抽水产生的降落漏斗（例 4.7 的图 4-12）不存在了，这是由于本例为无压含水层，根据我们给定的数据，该例的含水层有效厚度远大于例 4.7 中的承压含水层厚度，含水层的供水能力更强所致。

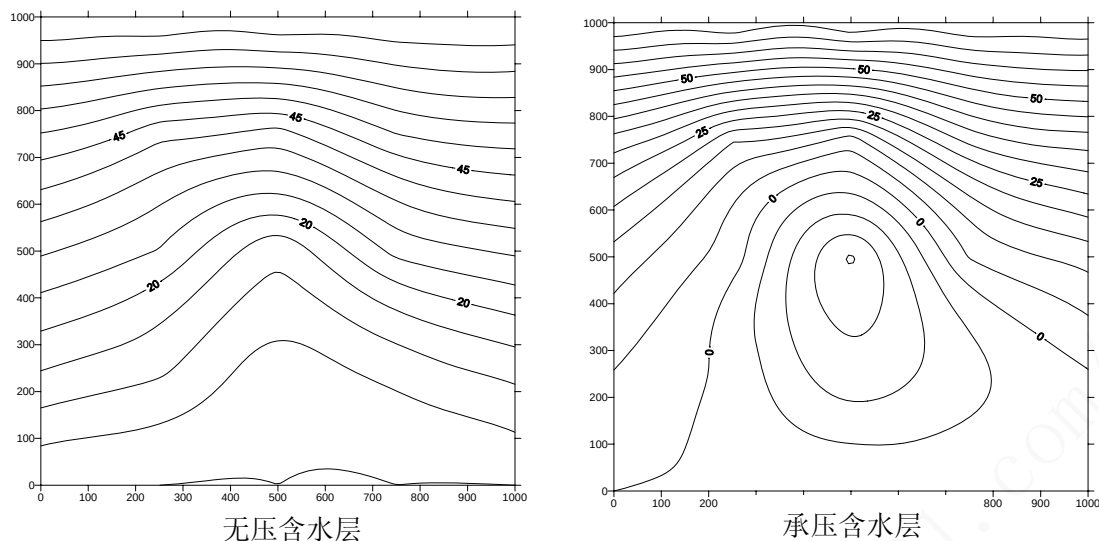


图 4-14 无压与承压含水层的计算水头对比

正如上面所讨论的，对于承压含水层来说，如果抽水井的开采强度过大以至于超过了含水层的补给强度，开采中心将可能出现承压转无压得状态。下例在例 4.7 的基础上，处理了承压转无压问题。

例 4.10 二维地下水承压流动转无压稳定流动计算实例—fem410

例 4.10 在例 4.7 的基础上进行修改，后者描述了一个非均质、各向异性的、含水层顶板和底板都不水平的、包含有第一和第二类补给边界且存在两眼水井的承压水稳定流问题。

由于所研究的模型中可能存在着承压水运动转无压水运动的现象，因而对定解问题描述需要做相应的修改，修改后的模型如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM^* \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(KM^* \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y)|_{\Gamma_{AB}} = 0.0\text{m} \\ H(x, y)|_{\Gamma_{CD}} = 75.0\text{m} \\ KM^* \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y) & \text{第二类流量补给边界} \\ KM^* \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 & \text{隔水边界} \\ KM^* \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} & j=1, 2 \end{cases}$$

上式中的 M^* 定义为

$$M^* = \begin{cases} M & \text{承压含水层的厚度} \\ h & \text{无压含水层的厚度} \end{cases}$$

也就是说在含水层处于承压状态时（图 4-15 中的

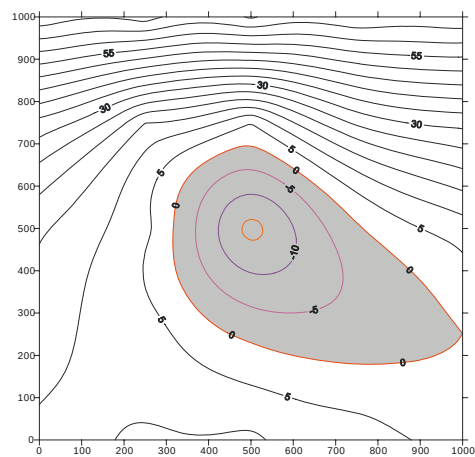


图 4-15 承压转无压区

非阴影区)，引用含水层厚度计算含水层的导水系数，如果转为无压流动状态（图 4-15 中的阴影区）则必须引入含水层厚度 h ，通过对初始值的迭代获得含水层的实际饱和厚度。

实际上，fem407 计算得到的水头已经有一部分低于含水层顶板高程，图 4-15 就是将例 4.7 计算的水头与含水层顶板高程相减得到的高程差等值线图，从图中看出，阴影地段的水头已经低于含水层顶板，极端部位相差 15 米以上。显然，对这部分地段应该考虑无压流动问题。

利用 fem07 的程序代码直接修改后得到 fem409，程序代码为 fem40910.f，其中只在计算单元平均顶、底板高程处添加了计算单元平均水头，并将单元平均水头值和单元平均顶板高程值按 4-61 式进行了判别，并依据判别结果决定引用含水层厚度（选取 M 还是选取 h ）。这段程序代码如下（代码中的 `aquihead` 为计算含水层厚度用的水头）：

```
avbed=(sole(cn(1))+sole(cn(2))+sole(cn(3)))/3.0
avtop=(apical(cn(1))+apical(cn(2))+apical(cn(3)))/3.0
avhead=(aquihead(cn(1))+aquihead(cn(2))+aquihead(cn(3)))/3.0
if (avhead .ge. avtop) then
    thickness=avtop-avbed
else
    thickness=avhead-avbed
endif
ik=nkk(i)
avtk=tk(ik)*thickness
ar=avtk/(4.0*area(i))
```

有关

图 4-16 分别给出了考虑无压流动技术计算的流场和 fem407 的计算流场，后者是使用单一的承压水方法计算的。

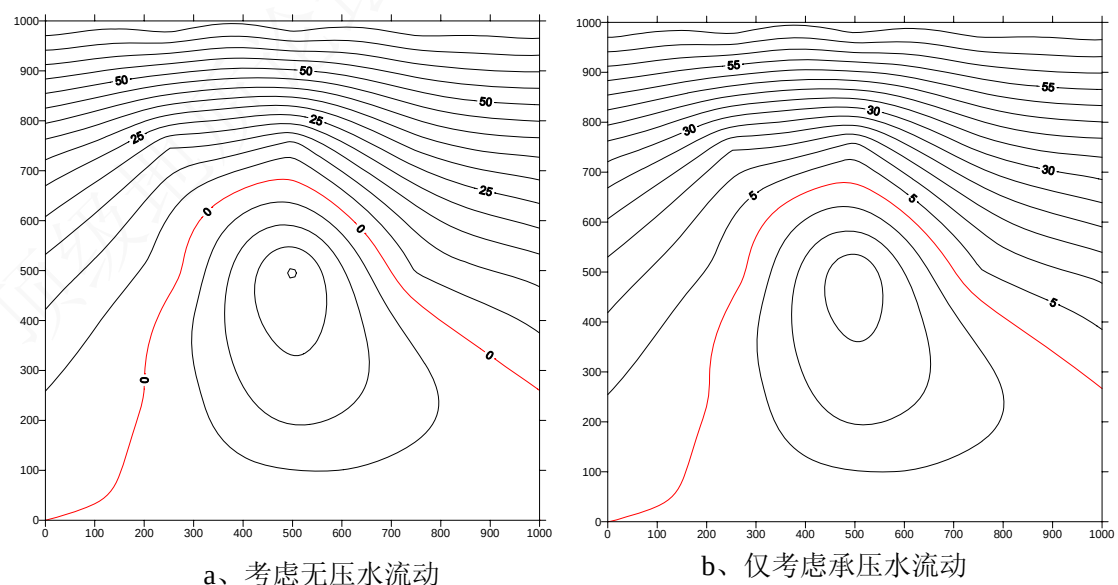


图 4-16 两种处理方法的流场差别

从图 4-16 中看出,两个流场的区别表现在图 4-15 中指出的无压水地段,也就是图 4-16 中的红线(水头值为 0.0 米)以南地区,在所形成的漏斗中心,考虑无压水非线性问题的模型(a)刻画了模型中存在一个高程-25.0 米降落漏斗中心,而用单一的承压水方法求解的模型(b)中水头均高于-25.0 米。计算无压含水层厚度所需的初始水头和非线性迭代程序代码与例 4.9 相同。

第五章 含水层中地下水非稳定运动的有限元法

本章重点讨论二维空间中的地下水运动模拟技术，包括二维线性椭圆型问题、线性抛物型问题、非线性椭圆型和非线性抛物型问题的求解，同时也讨论了非均质、各项异性条件下的地下水流有限元模拟技术。结合本为讨论的一些完整的范例分别收录在书后的光盘中。

5.1 二维承压含水层中地下水非稳定流的数值模拟

二维承压水流模型属于线性抛物型定解问题，(5-1)就是二维承压含水层中地下水非稳定运动的定阶问题。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, t)|_{t=0} = H_0(x, y) \\ H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, t) \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{21}} = q(x, y, t) \quad \text{或} \quad T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{22}} = 0 \end{cases} \quad (5-1)$$

根据第二章地讨论，对该定解问题的求解等价于求泛函

$$I[\bar{H}] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2S}{\Delta t} \left(H_- \bar{H} - \frac{1}{2} \bar{H}^2 \right) \right\} dx dy - \int_{\Gamma_{21}} q \bar{H} ds \quad (5-2)$$

在边界条件

$$\bar{H} \Big|_{\Gamma_1} = \bar{\varphi}^*$$

下求极值问题。(5-2)式中的 H_- 为初始时刻水头。

5.1.1 泛函的近似积分

对(5-2)的求解可参照 4.1 节的讨论方法和结果，其中需要增加求解的仅为二重积分号内的第二项，也就是贮水系数项，即对应于 $S \frac{\partial H}{\partial t}$ 那部分。

对于某一个特定的 $t = t_0$ 时刻的区域 D ，空间离散方法与稳定流问题并无差别，各单元的水头插值函数则利用同一时刻单元的三个顶点上的水头值完成的，即借助 $H_1(t)$ 、 $H_2(t)$ 、...、 $H_n(t)$ 按单元进行插值。

对于式 5-2，我们若设其中的 $H_- = H(t_0)$ 在以 j, j, m 为顶点的单元 e 上的值可用线性插值函数

$$\tilde{H}_- = N_i(x, y) H_i(t_0) + N_j(x, y) H_j(t_0) + N_m(x, y) H_m(t_0) \quad (5-3)$$

表示, 这样, $H_+ = H(t + \Delta t)$ 在 e 上则可表示为

$$\tilde{H}_+ = N_i(x, y)H_i(t_0 + \Delta t) + N_j(x, y)H_j(t_0 + \Delta t) + N_m(x, y)H_m(t_0 + \Delta t) \quad (5-4)$$

若进一步设在 Δt 时段内的水头平均值 $\bar{H} = \frac{1}{2}[H(t_0) + H(t_0 + \Delta t)]$, 则可将其近似将其表达为

$$\begin{aligned} \hat{H}(x, y) &= N_i(x, y)\frac{H_i(t_0) + H_i(t_0 + \Delta t)}{2} + N_j(x, y)\frac{H_j(t_0) + H_j(t_0 + \Delta t)}{2} \\ &\quad + N_m(x, y)\frac{H_m(t_0) + H_m(t_0 + \Delta t)}{2} \\ &= N_i(x, y)\bar{H}_i + N_j(x, y)\bar{H}_j + N_m(x, y)\bar{H}_m \end{aligned} \quad (5-5)$$

从而可得到各时刻在中层区域 D 的总体插值函数 $\tilde{H}_-$ 、 $\tilde{H}_+$ 和 $\hat{H}$ 。

假设 $H_1(t_0)$ 、 $H_2(t_0)$ 、...、 $H_n(t_0)$ 都是已知的, 我们把所得的 $\tilde{H}_-$ 、 $\bar{H}$ 的总体插值函数代入 5-2 式, 所得的泛函显然是 $\bar{H}_1$ 、 $\bar{H}_2$ 、...、 $\bar{H}_n$ 的函数, 由于所要求的函数 $\bar{H}(x, y)$ 是泛函 5-2 的极小函数, 因此必须满足

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{H}_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

剖分插值后, 泛函 $I(\tilde{H})$ 也相应地分解为有关单元泛函之和, 因此有

$$\begin{aligned} I(\bar{H}) &\approx I(\hat{H}) \\ &= \sum_{j=1}^m \iint_{e_j} \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2S}{\Delta t} \left[N_i H_i(t_0) + N_j H_j(t_0) + N_m H_m(t_0) \right] \hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{H})^2 \right\} dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_{21}} q \hat{H} ds \end{aligned} \quad (5-6)$$

如果用 I^e 表示单元上的泛函, 则

$$\begin{aligned} I^e &= \iint_e \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{2S}{\Delta t} \left[N_i H_i(t_0) + N_j H_j(t_0) + N_m H_m(t_0) \right] \hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{H})^2 \right\} dx dy \\ &\quad - \int_{\Gamma_{21} \cap C_e} q \hat{H} ds \\ &= I_1^e + I_2^e \end{aligned} \quad (5-7)$$

式中 C_e 为单元 e 的边界, $\Gamma_{21} \cap C_e$ 表示 e 边界与 Γ_{21} 的公共部分。

在任意单元 e 上, 由于有 (5-5) 所表示的插值函数, 和稳定流问题的处理方法相似, 我们可以得到

$$\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} (b_i \bar{H}_i + b_j \bar{H}_j + b_m \bar{H}_m); \quad \frac{\partial \hat{H}}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} (c_i \bar{H}_i + c_j \bar{H}_j + c_m \bar{H}_m)$$

从而得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \right)^2 &= \frac{1}{2\Delta^2} (b_i \bar{H}_i + b_j \bar{H}_j + b_m \bar{H}_m) b_i \\
 \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial y} \right)^2 &= \frac{1}{2\Delta^2} (c_i \bar{H}_i + c_j \bar{H}_j + c_m \bar{H}_m) c_i \\
 \frac{\partial}{\partial H_i} \hat{H} &= N_i \\
 \frac{\partial}{\partial H_i} (\hat{H})^2 &= 2N_i (N_i \bar{H}_i + N_j \bar{H}_j + N_m \bar{H}_m)
 \end{aligned} \tag{5-8}$$

我们同样假定每个单元内的所有水文地质参数均为常数，并用 T^e 、 S^e 代替原有的 T 和 S ，就可得到

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e \frac{2S^e}{\Delta t} \left\{ [N_i H_i(t_0) + N_j H_j(t_0) + N_m H_m(t_0)] \hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{H})^2 \right\} dx dy \\
 &= -\frac{2S^e}{\Delta t} \left[H_i(t_0) \iint_e N_i N_i dx dy + H_j(t_0) \iint_e N_i N_j dx dy + H_m(t_0) \iint_e N_i N_m dx dy \right] \\
 &+ \frac{2S^e}{\Delta t} \left[\bar{H}_i \iint_e N_i N_i dx dy + \bar{H}_j \iint_e N_i N_j dx dy + \bar{H}_m \iint_e N_i N_m dx dy \right] \\
 &= -\frac{2S}{\Delta t} \left\{ [H_i(t_0) - \bar{H}_i] \frac{\Delta}{6} + [H_j(t_0) - \bar{H}_j] \frac{\Delta}{12} + [H_m(t_0) - \bar{H}_m] \frac{\Delta}{12} \right\}
 \end{aligned} \tag{5-9}$$

根据同样的道理，可以求得贮水系数项 $S \frac{\partial H}{\partial t}$ 对 $\bar{H}_j$ 和 $\bar{H}_m$ 的偏导数，结果如下：

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial H_j} \iint_e \frac{2S^e}{\Delta t} \left\{ [N_i H_i(t_0) + N_j H_j(t_0) + N_m H_m(t_0)] \hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{H})^2 \right\} dx dy \\
 &= -\frac{2S}{\Delta t} \left\{ [H_i(t_0) - \bar{H}_i] \frac{\Delta}{12} + [H_j(t_0) - \bar{H}_j] \frac{\Delta}{6} + [H_m(t_0) - \bar{H}_m] \frac{\Delta}{12} \right\} \\
 & -\frac{\partial}{\partial H_m} \iint_e \frac{2S^e}{\Delta t} \left\{ [N_i H_i(t_0) + N_j H_j(t_0) + N_m H_m(t_0)] \hat{H} - \frac{1}{2} (\hat{H})^2 \right\} dx dy \\
 &= -\frac{2S}{\Delta t} \left\{ [H_i(t_0) - \bar{H}_i] \frac{\Delta}{12} + [H_j(t_0) - \bar{H}_j] \frac{\Delta}{12} + [H_m(t_0) - \bar{H}_m] \frac{\Delta}{6} \right\}
 \end{aligned} \tag{5-10}$$

5.1.2 单元渗透矩阵

结合式 4-21，最后得到单元渗透矩阵如下：

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial I^e}{\partial \bar{H}_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial \bar{H}_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial \bar{H}_m} \end{array} \right\} = \frac{T^e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{H}_i \\ \bar{H}_j \\ \bar{H}_m \end{array} \right\} + \frac{S^e \Delta}{6(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{H}_i \\ \bar{H}_j \\ \bar{H}_m \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{S^e \Delta}{6(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0) \\ H_j(t_0) \\ H_m(t_0) \end{Bmatrix} - \frac{q}{2} L_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 & = \begin{bmatrix} d_{ii} & d_{ij} & d_{im} \\ d_{ji} & d_{jj} & d_{jm} \\ d_{mi} & d_{mj} & d_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{H}_j \\ \bar{H}_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} mp_{ii} & mp_{ij} & mp_{im} \\ mp_{ji} & mp_{jj} & mp_{jm} \\ mp_{mi} & mp_{mj} & mp_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{H}_i \\ \bar{H}_j \\ \bar{H}_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_m \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \quad (5-11)$$

其中

$$d_{ij} = \frac{T}{4\Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (5-12)$$

$$mp_{ij} = \begin{cases} \frac{\Delta}{12} \frac{2S^e}{(dt)} & i \neq j \\ \frac{\Delta}{6} \frac{2S^e}{(dt)} & i = j \end{cases} \quad (5-13)$$

$$\begin{aligned}
 f_i &= \frac{2S^e}{\Delta t} \left[\frac{\Delta}{6} H_i(t_0) + \frac{\Delta}{12} H_j(t_0) + \frac{\Delta}{12} H_m(t_0) \right] + \frac{q}{2} L_{ij} \\
 f_j &= \frac{2S^e}{\Delta t} \left[\frac{\Delta}{12} H_i(t_0) + \frac{\Delta}{6} H_j(t_0) + \frac{\Delta}{12} H_m(t_0) \right] + \frac{q}{2} L_{ij} \\
 f_m &= \frac{2S^e}{\Delta t} \left[\frac{\Delta}{12} H_i(t_0) + \frac{\Delta}{12} H_j(t_0) + \frac{\Delta}{6} H_m(t_0) \right]
 \end{aligned} \quad (5-14)$$

据此可进一步将上式表示为

$$\left\{ \frac{\partial I}{\partial \bar{H}} \right\}^e = [d]^e \{ \bar{H} \}^e + [mp]^e \{ \bar{H} \}^e - \{ f \}^e = [R]^e \{ \bar{H} \}^e - \{ f \}^e \quad (5-15)$$

其中

$$[R]^e = [d]^e + [mp]^e \quad (5-16)$$

相应的元素

$$r_{ij} = d_{ij} + mp_{ij}$$

上式中的 i, j 相当于以后形成的总渗透矩阵 $[A]$ 中的行号和列号

5.1.3 总渗透矩阵

按照稳定流问题的求解思路，由于

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{H}_i} = \sum_{\substack{i=1 \\ e_j \in D_i}}^{m'} \frac{\partial I^{e_j}}{\partial \bar{H}_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5-17)$$

将 (5-17) 代入 (5-11) 式，同时把所有的已知项都移到等号右端，并把它们合并起来，则得

$$[A]\{\bar{H}\} = \{F\} \quad (5-18)$$

(5-18) 中的总渗透矩阵 $[A]$ 是个 n 阶堆成方阵，它的元素

$$a_{ij} = \sum r_{ij}$$

而

$$\{\bar{H}\} = \begin{Bmatrix} \bar{H}_1 \\ \bar{H}_2 \\ \vdots \\ \bar{H}_n \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

所以 (5-18) 是关于 $\bar{H}_1, \bar{H}_2, \dots, \bar{H}_n$ 的线性方程组。求解此方程组就可以得到它的解 $\{\bar{H}\}$ ，该解为 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 之间的平均水头。进一步利用

$$H(t_0 + \Delta t) = 2\bar{H} - H(t_0) \quad (5-19)$$

就可以得到该时段终了时刻的水头 $H(t_0 + \Delta t)$ 。

以上的求解过程是利用第二章关于地下水二维非稳定流动问题的有限单元法，求解过程首先借助 (5-2) 所示的泛函，求出 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 的中间水头 $\left\{\bar{H}\left(\frac{\Delta t}{2}\right)\right\}$ ，再通过 (5-19) 式求出时段终了时刻的水头 $H(t_0 + \Delta t)$ 。

5.1.4 线性抛物型问题的另一种解法

以上的讨论基于将抛物型方程的定解问题转换成椭圆型方程的定解问题，然后按椭圆型方程的变分原理，通过相应的泛函的极值函数来求得它的解。其实，我们还可以将 (5-1) 式中的 $S \frac{\partial H}{\partial t}$ 视为单位水平面积内由于水头降落（或上升） $\frac{\partial H}{\partial t}$ 所释放（或贮存）的流量，这样就可以把它按照垂直方向进入含水层的水量来处理。据此，这里先将定解问题改写为：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - S \frac{\partial H}{\partial t} = 0 & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, t) \Big|_{t=0} = H_0(x, y) \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, t) \\ T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{21}} = q(x, y, t) \quad \text{或} \quad T \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{22}} = 0 \end{cases} \quad (5-20)$$

则可仿照含水层垂直方向的水量交替项 W 得到另一种等价于该定解问题的泛函表达式

$$I[\tilde{H}] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] + S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \tilde{H} \right\} dx dy - \int_{\Gamma_{21}} q \tilde{H} ds \quad (5-21)$$

对 (5-21) 式引入如 (5-4) 所示的 Δt 终了时刻的水头插值函数

$$\tilde{H} = N_i(x, y) H_i(t_0 + \Delta t) + N_j(x, y) H_j(t_0 + \Delta t) + N_m(x, y) H_m(t_0 + \Delta t) \quad (5-4)$$

再根据泛函的极值理论和上述的泛函求解思路, 然后对式中

$$\iint_e S^e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \tilde{H} dx dy$$

此时, 由于水头 H_i 、 H_j 和 H_m 均为时间的函数, 因此对上式的求解过程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e S^e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \tilde{H} dx dy \\ &= \frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e S^e \left(N_i \frac{\partial H_i}{\partial t} + N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) \cdot (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) dx dy \\ &= S^e \iint_e \frac{\partial}{\partial H_i} \left(N_i \frac{\partial H_i}{\partial t} + N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) \cdot (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) dx dy \\ &= S^e \iint_e \left(N_i \frac{\partial H_i}{\partial t} + N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial H_i} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) dx dy \end{aligned}$$

由于 N_i 、 N_j 和 N_m 仅与坐标有关, 而 $\frac{\partial H_i}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial H_j}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial H_m}{\partial t}$ 分别表示水头在结点 i 、 j 、 m 处随时间 t 的变化, 因为结点已经确定, 所以它们仅与时间有关。这样一来, 上式可进一步处理为

$$\begin{aligned} & S^e \iint_e \left(N_i \frac{\partial H_i}{\partial t} + N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial H_i} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) dx dy \\ &= S^e \iint_e \left(N_i \frac{\partial H_i}{\partial t} + N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} + N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} \right) \cdot N_i dx dy \\ &= S^e \iint_e N_i^2 \frac{\partial H_i}{\partial t} dx dy + S^e \iint_e N_i N_j \frac{\partial H_j}{\partial t} dx dy + S^e \iint_e N_i N_m \frac{\partial H_m}{\partial t} dx dy \\ &= S^e \frac{\partial H_i}{\partial t} \iint_e N_i^2 dx dy + S^e \frac{\partial H_j}{\partial t} \iint_e N_i N_j dx dy + S^e \frac{\partial H_m}{\partial t} \iint_e N_i N_m dx dy \end{aligned}$$

利用 (3-42)、(3-39) 和 (3-40) 的讨论结果

$$\iint_e N_i^2 dx dy = \iint_e \xi^2 |J| d\xi d\eta = \frac{\Delta}{6} \quad (3-42)$$

$$\iint_e N_i N_j dx dy = \frac{\Delta}{12} \quad (3-40)$$

$$\iint_e N_i N_m dx dy = \frac{\Delta}{12} \quad (3-41)$$

可进一步得到

$$\begin{aligned}
 & S^e \frac{\partial H_i}{\partial t} \iint_e N_i^2 dx dy + S^e \frac{\partial H_j}{\partial t} \iint_e N_i N_j dx dy + S^e \frac{\partial H_m}{\partial t} \iint_e N_i N_m dx dy \\
 &= S^e \frac{\Delta}{6} \frac{\partial H_i}{\partial t} + S^e \frac{\Delta}{12} \frac{\partial H_j}{\partial t} + S^e \frac{\Delta}{12} \frac{\partial H_m}{\partial t}
 \end{aligned} \quad (5-22)$$

前已述及, (5-22) 中的 $\frac{\partial H_i}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial H_j}{\partial t}$ 、 $\frac{\partial H_m}{\partial t}$ 仅与时间 t 有关, 因而我们可用 $\frac{dH_i}{dt}$ 、 $\frac{dH_j}{dt}$ 、 $\frac{dH_m}{dt}$,

我们以 $\frac{dH_i}{dt}$ 为例来求解它们。讨论如下:

如果将函数 $H_i(t)$ 在 t_0 处用泰勒级数展开, 可得

$$H_i(t_0 + \Delta t) = H_i(t_0) + H_i'(t_0)\Delta t + \frac{H_i''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \dots + \frac{H_i^n(t_0)}{n!}(\Delta t)^n \quad (5-23)$$

当 Δt 取得足够小的时候, (5-23) 中等号右端第三项以后的各项均非常小, 可令

$$\frac{H_i''(t_0)}{2!}(\Delta t)^2 + \dots + \frac{H_i^n(t_0)}{n!}(\Delta t)^n = O[\Delta t] \quad (5-24)$$

由于 $O[\Delta t]$ 是个与 Δt 同阶的无穷小量, 若将其舍去则得

$$H_i(t_0 + \Delta t) \approx H_i(t_0) + H_i'(t_0)\Delta t$$

整理后得

$$\frac{dH_i}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H_i(t_0 + \Delta t) - H_i(t_0)}{\Delta t} \approx \frac{H_i(t_0 + \Delta t) - H_i(t_0)}{\Delta t} \quad (5-25)$$

因为式 (4-78) 是在把自变量 t 沿 t 正向展开后得到的, 因此称其为向前差分。这个讨论告诉我们, 当 Δt 趋于无穷小时, 可用 H_i 的差分代替微分。因此, (5-22) 可进一步分解为, 同理可得

$$\frac{dH_j}{dt} \approx \frac{H_j(t_0 + \Delta t) - H_j(t_0)}{\Delta t} \quad (5-26)$$

$$\frac{dH_m}{dt} \approx \frac{H_m(t_0 + \Delta t) - H_m(t_0)}{\Delta t} \quad (5-27)$$

综合 (5-22)、(5-25)、(5-26) 和 (5-27) 可得到

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e S^e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \tilde{H} dx dy &= S^e \frac{\Delta}{6} \frac{\partial H_i}{\partial t} + S^e \frac{\Delta}{12} \frac{\partial H_j}{\partial t} + S^e \frac{\Delta}{12} \frac{\partial H_m}{\partial t} \\
 &= \frac{S^e \Delta}{12} \left[2 \cdot \frac{H_i(t_0 + \Delta t) - H_i(t_0)}{\Delta t} + \frac{H_j(t_0 + \Delta t) - H_j(t_0)}{\Delta t} + \frac{H_m(t_0 + \Delta t) - H_m(t_0)}{\Delta t} \right]
 \end{aligned} \quad (5-28)$$

再分别求泛函 (5-21) 对 H_j 和 H_m 的偏导数, 最终可得单元渗透矩阵为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} &= \frac{T^e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0 + \Delta t) \\ H_j(t_0 + \Delta t) \\ H_m(t_0 + \Delta t) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0 + \Delta t) \\ H_j(t_0 + \Delta t) \\ H_m(t_0 + \Delta t) \end{Bmatrix} - \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0) \\ H_j(t_0) \\ H_m(t_0) \end{Bmatrix} - \frac{q}{2} L_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-29)$$

该式和利用 (5-19) 式修正 (5-11) 式后得到的结果完全一致。

5.1.5 程序举例

例 5.1 非均质承压水非稳定流动模型——程序包 fem501

设有如 (4-73) 所示的定解问题，与上地下水稳定流模型相比，该式中的定解条件增加了与时间有关的描述，假如我们将计算时段 t 分解成若干个 Δt_i ，则可将问题仿照稳定流的基本求解过程分解成若干个阶段来进行。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) = S \frac{\partial H}{\partial t} & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, 0) = H_0(x, y) & \text{初始条件} \\ H(x, y, t) \big|_{\Gamma_{AB}} = \varphi_1(x, y, t) \\ H(x, y, t) \big|_{\Gamma_{CD}} = \varphi_2(x, y, t) \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y, t) & \text{第二类流量补给边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 & \text{隔水边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j(x, y, t)}{2\pi r_{wj}} & j=1, 2 \end{cases}$$

为求解(5-30)，我们必须首先将所获得的定解条件描述分解为对应于 Δt_i 的阶段描述。

对于定解问题中的定解条件处理如下：

a、假设计算时间总长度为 18 天，各时段长度不一。这里选择第一天的开始作为整个计算过程的初始时刻 t_0 ，时间离散文件 timestep.txt 的内容如下表：

单位：day

时段号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
时段长	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.5	2.5	3.0

读入 timestep.txt 数据的代码如下：

```
open (4,file='timestep.txt')
read (4,*) (dt(i),i=1,ndt)
close (4)
```

b、初始条件根据区域 D 中对有限多个地下水动态观测孔的观测值插值得到每个结点的初始时刻水头 $H_0(x, y)$ ，为便于管理，将各结点的初始水头一起放入结点坐标文件中，具体描述如下：

结点信息

单位：m

结点坐标		初始水头 h(i)	顶板高程 apical(i)	底板高程 sole(i)
Coord(i,1)	Coord(i,2)			
0.00	1000.00	37.12	1.56	-44.80
0.00	750.00	35.06	-0.24	-47.45
0.00	500.00	32.44	-2.62	-51.95
0.00	250.00	29.60	-6.64	-53.35
0.00	0.00	27.10	-8.94	-55.58
250.00	0.00	27.10	-10.60	-54.84
250.00	250.00	29.39	-8.87	-50.49
250.00	500.00	32.75	-3.72	-46.58
250.00	750.00	35.67	0.69	-43.02
250.00	1000.00	37.12	2.73	-41.74
500.00	1000.00	37.12	4.18	-38.97
500.00	750.00	35.72	2.52	-39.23
500.00	500.00	33.22	-2.17	-41.45
500.00	250.00	29.57	-12.12	-47.05
500.00	0.00	27.10	-10.92	-55.27
750.00	0.00	27.10	-7.70	-58.91
750.00	250.00	29.04	-4.02	-47.03
750.00	500.00	32.74	5.05	-36.15
750.00	750.00	36.00	5.25	-36.75
750.00	1000.00	37.12	5.58	-37.37
1000.00	1000.00	37.12	6.13	-37.41
1000.00	750.00	35.16	5.70	-37.68
1000.00	500.00	32.43	3.88	-40.14
1000.00	250.00	29.49	-0.56	-47.03
1000.00	0.00	27.10	-4.28	-54.30

以上信息保存在文件 coord.txt 中，读取文件的代码如下：

```
open (4,file='coord.txt')
read (4,*) ((coord(i,j),j=1,2),h(i),apical(i),sole(i),i=1,nl1)
close (4)
```

c、上、下游的条件 $\varphi_2(x, y, t)$ 和 $\varphi_1(x, y, t)$ 分别如下：

单位：m

时段号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
-----	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

$\varphi_1(x, y, t)$	27.60	25.38	24.19	23.87	23.54	23.92	25.77	27.13	26.24	27.44
$\varphi_2(x, y, t)$	37.12	36.87	36.45	36.04	35.88	36.29	36.72	38.01	37.75	38.14

以上信息保存在文件 bound1.txt 中，读取文件的代码如下：

```
open (4,file='bound1.txt')
read (4,*) ((b1node(i),(hb1(i,j),j=1,ndt),i=1,nb1)
close (4)
```

e、第二类边界单元的各时刻单宽流量如下：

单位：m²/d

时段号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
单元 2	240.0	235.7	239.1	241.2	224.6	237.7	240.2	244.3	235.8	233.2
单元 4	160.0	162.2	163.4	165.5	172.1	173.5	170.5	171.6	172.2	177.4
单元 6	200.0	204.5	200.0	205.3	206.2	205.3	201.3	200.5	208.5	206.4
单元 8	180.0	188.6	178.9	181.9	184.3	185.5	182.2	183.4	180.1	182.5

第二类边界条件的相关信息保存在文件 bound2.txt 中，读取文件的代码如下：

```
open (4,file='bound2.txt')
read (4,*) (b2elem(i),(b2eq(i,j),j=1,ndt),i=1,nb2e)
close (4)
```

f、各抽水井各时段的开采强度如下：

井所在单元号	井坐标		各时段开采强度 (m ³ /d)									
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
14	420.0	670.0	6000	5400	4310	5780	5600	5540	5720	6200	6400	5940
22	580.0	300.0	3200	3120	3240	3250	3300	3280	3140	3180	3260	2940

与抽水井相关的信息保存在文件 well.txt 中，读取文件的代码如下：

```
open (4,file='well.txt')
read (4,*) (wellelem(i),(wellxy(i,j),j=1,2),(wellchar(i,j),
& j=1,ndt),i=1,nw)
close (4)
```

g、模型参数增加了贮水系数 S，因为模型中包含了两个非均质分区，所以必须同时提供两个参数区的渗透系数 K 和贮水系数 S 值。下表给出了两个分区的参数值。

1 区		2 区	
渗透系数 K ₁ (m/d)	贮水系数 S ₁	渗透系数 K ₂ (m/d)	贮水系数 S ₂
4.6	0.00012	3.9	0.00003

以上资料保存在文件 coef.txt 中，读取文件的代码如下：

```
open (4,file='coef.txt')
read (4,*) (tk(i),ss(i),i=1,ntk)
read (4,*) (nkk(i),i=1,nl2)
close (4)
```

在求解该问题之前，我们设置一个记录 5 个结点的所有计算时段的数组 obsnode，用来保存计算中获得的 7、9、13、17、19 号结点的各计算时段水头，相应的程序代码如下：

```
do i=1,nobs          nobs 为结点数
  k=obsnode(i)
  obsh(i,nc)=h(k)    obsh 为结点水头值
enddo
,,,,,
open (14,file='obshead.dat',status='unknown')
write (14,*) 'The groundwater head of observation'
write (14,*)
do i=1,nobs
  write (14,*) 'Observation Node ',obsnode(i)
  write (14,'(i3,f10.2)') (j,obsh(i,j),j=1,ndt)
  write (14,*)
enddo
close (14)
```

文件 result.dat 用来保存各计算时段的所有结点的计算水头，文件打开语句放在计算时段控制语句 do nc=1,ndt 之前，文件关闭语句放在对应的 enddo 语句之后。记录各时段水头的代码如下：

```
open(13,file='result.dat',status='unknown')
write (13,*) 'The Groundwater Head of all Node'
do nc=1,ndt
  关于各计算时段结点水头的循环体
  write (13,*) 'Time Step: ',nc
  do i=1,nl1
    write(13,'(3f10.2)') coor(i,1),coor(i,2),h(i)
  enddo
  write (13,*)
enddo
enddo
close (13)
```

总渗透矩阵的计算流程图如下：

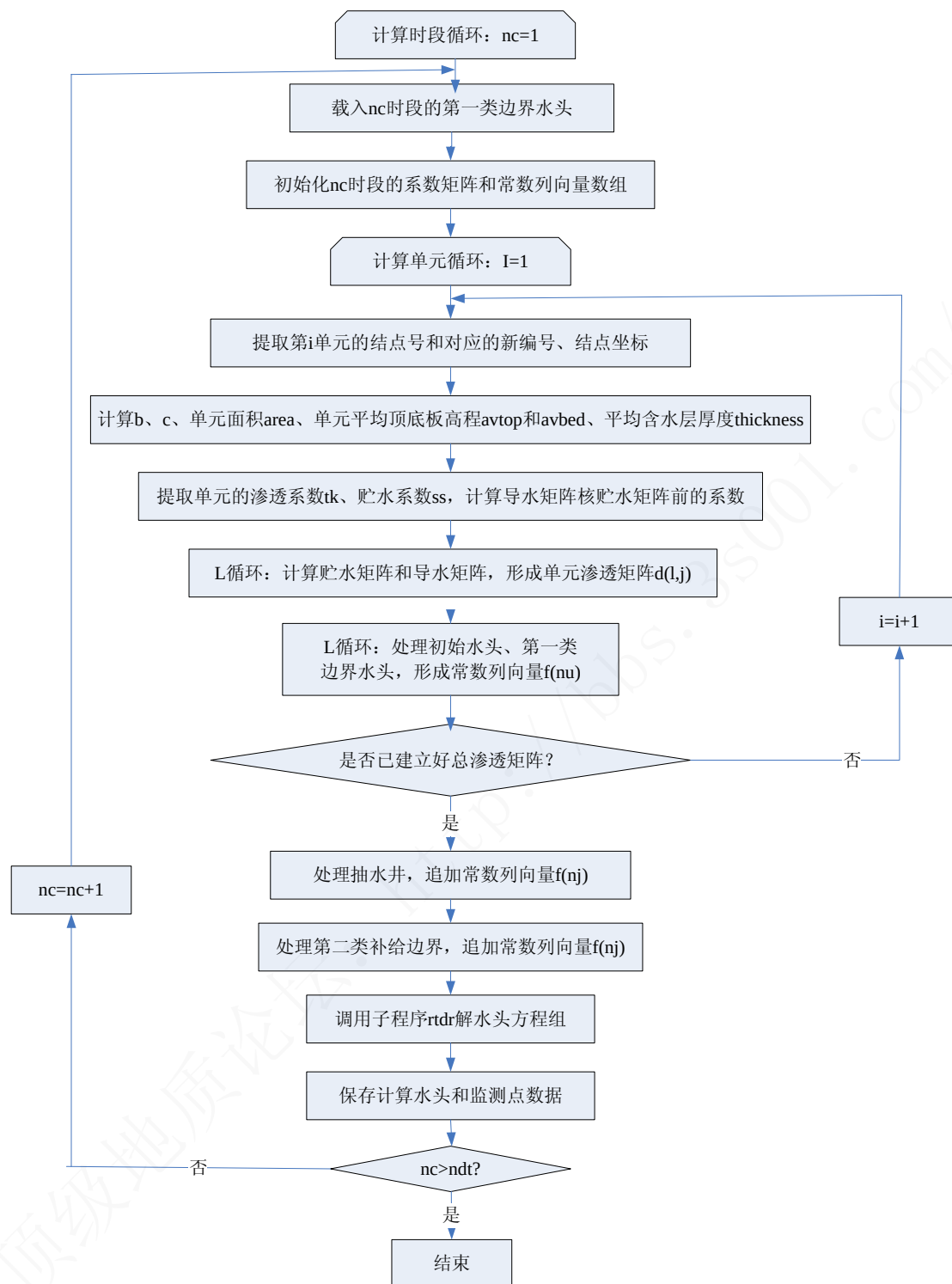


图 5-1 总渗透矩阵计算流程图

子程序 matrix 代码如下:

```

subroutine matrix
use initial_parame      嵌入主程序的参数模块
use comm_total         嵌入主程序的公共数据模块
real, dimension (1:3) :: a,b,c,x,y,hq  定义模块级变量
real, dimension (1:3,1:3) :: d,np
integer, dimension (1:3) :: ln,cn
  
```




```

real, dimension (1:2) :: dist
open (13,file='result.dat',status='unknown')  打开保存计算流场的文件
write (13,*) 'The Groundwater Head of all Node'
do nc=1,ndt                                     计算时段循环控制
  do i=1,nb1                                     载入第一类边界水头
    k=b1node(i)
    r1(k)=hb1(i,nc)
    h(k)=r1(k)
  enddo
  do i=1,mr                                     初始化保存总渗透矩阵的数组
    g(i)=0.0
  enddo
  do i=1,nl3                                     初始化保存常数列向量的数组
    f(i)=0.0
  enddo
  do i=1,nl2                                     开始建立 nc 时段的总渗透矩阵
    do j=1,3                                     调用各单元的结点信息
      cn(j)=ce(i,j)
      nj=cn(j)
      x(j)=coor(nj,1)
      y(j)=coor(nj,2)
      ln(j)=nr(nj)
    enddo
    b(1)=y(2)-y(3)
    b(2)=y(3)-y(1)
    b(3)=y(1)-y(2)
    c(1)=x(3)-x(2)
    c(2)=x(1)-x(3)
    c(3)=x(2)-x(1)
    avbed=(sole(cn(1))+sole(cn(2))+sole(cn(3)))/3.0
    avtop=(apical(cn(1))+apical(cn(2))+apical(cn(3)))/3.0
    if (nc .eq. 1) then
      area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
    endif
    thickness=avtop-avbed
    ik=nkk(i)                                     计算到水矩阵和贮水矩阵前的系数
    avtk=tk(ik)*thickness
    ar=avtk/(4.0*area(i))
    a1=ss(ik)*area(i)/12.0/dt(nc)
    do l=1,3                                     建立单元渗透矩阵
      do j=1,3
        if (l .eq. j) then
          np(l,j)=2.0*a1
        else

```

```

        np(l,j)=a1
    endif
    tp=b(l)*b(j)+c(l)*c(j)
    d(l,j)=tp*ar+np(l,j)
enddo
enddo
do l=1,3
    nu=ln(l)
    if (nu.ne.2000) then
        do kq=1,3
            nt=cn(kq)
            f(nu)=f(nu)+np(l,kq)*h(nt)
            jo=m(nu)-nu+ln(kq)
            if (ln(l).ge.ln(kq)) then
                g(jo)=g(jo)+d(l,kq)
            endif
            if (ln(kq).eq.2000) then
                f(nu)=f(nu)-d(l,kq)*r1(nt)
            endif
        enddo
    endif
enddo
enddo
c 处理抽水井
do i=1,nw
    k=wellelem(i)
    rech=wellchar(i,nc)
    xx=wellxy(i,1)
    yy=wellxy(i,2)
    do j=1,3
        nj=ce(k,j)
        x(j)=coor(nj,1)
        y(j)=coor(nj,2)
        ln(j)=nr(nj)
    enddo
    a(1)=x(2)*y(3)-x(3)*y(2)
    a(2)=x(3)*y(1)-x(1)*y(3)
    a(3)=x(1)*y(2)-x(2)*y(1)
    b(1)=y(2)-y(3)
    b(2)=y(3)-y(1)
    b(3)=y(1)-y(2)
    c(1)=x(3)-x(2)
    c(2)=x(1)-x(3)
    c(3)=x(2)-x(1)

```

处理初始水头、第一类边界水头
形成常数列向量

总渗透矩阵控制语句

处理抽水井开采量

```

do j=1,3
    wxn=(a(j)+b(j)*xx+c(j)*yy)/(2.0*area(k))
    nj=ln(j)
    if (nj .ne. 2000) then
        f(nj)=f(nj)-wxn*rech*dt(nc)    追加常数列向量
    endif
enddo
enddo
c 处理第二类补给边界
do i=1,nb2e    处理第二类边界补给量
    k=b2elem(i)
    do j=1,2
        nj=ce(k,j)
        x(j)=ce(nj,1)
        y(j)=ce(nj,2)
        ln(j)=nr(nj)
    enddo
    dd=sqrt((x(1)-x(2))**2+(y(1)-y(2))**2)
    bound2q=b2eq(i,nc)/2.0*dd
    do j=1,2
        nj=ln(j)
        if (nj .ne. 2000) then
            f(nj)=f(nj)+bound2q*dt(nc)    追加常数列向量
        endif
    enddo
enddo
c 调用子程序 rtdr 解水头方程组
call rtdr
do i=1,nl1    回写计算所的未知水头结点水头
    kk=nr(i)
    if (kk. ne. 2000) then
        r1(i)=f(kk)
    endif
enddo
do i=1,nl1    为下一个计算时可准备初始流场
    h(i)=r1(i)
enddo
do i=1,nobs    填充控制点的计算水头
    k=obsnode(i)
    obsh(i,nc)=h(k)
enddo
write (13,*) 'Time Step: ',nc    保存 nc 时段的计算结果
do i=1,nl1
    write(13,'(3f10.2)') coor(i,1),coor(i,2),h(i)

```

```

enddo
write (13,*)
enddo
close(13)
open (14,file='obshead.dat',status='unknown')
write (14,*) 'The groundwater head of observation'
write (14,*)
do i=1,nobs
    write (14,*) 'Observation Node ',obsnode(i)
    write (14,'(i3,f10.2)') (j,obsh(i,j),j=1,ndt)
    write (14,*)
enddo
close (14)
end subroutine matrix

```

保存控制点的计算水头

子模块结束

图 5-2 分别给出了时段 2、5、8、10 的计算流场。

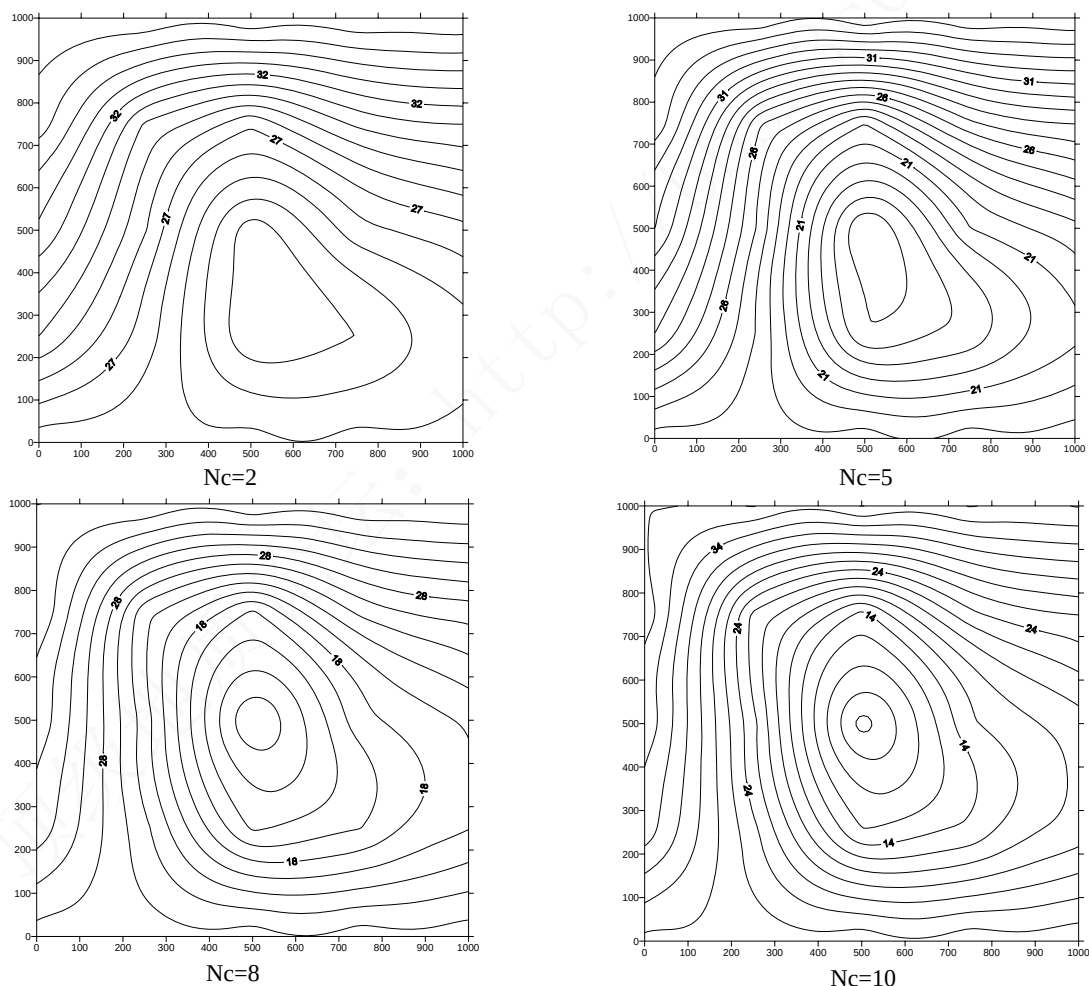


图 5-2 计算流场

计算结果表明,在前述的定界条件下,研究区 D 中的地下水位经过了为时 18 天的开采,中心地区降落漏不断扩大,总体表现了一个供大于补的趋势。图 5-3 描绘了所设定的 5 个监测点的水头变化。

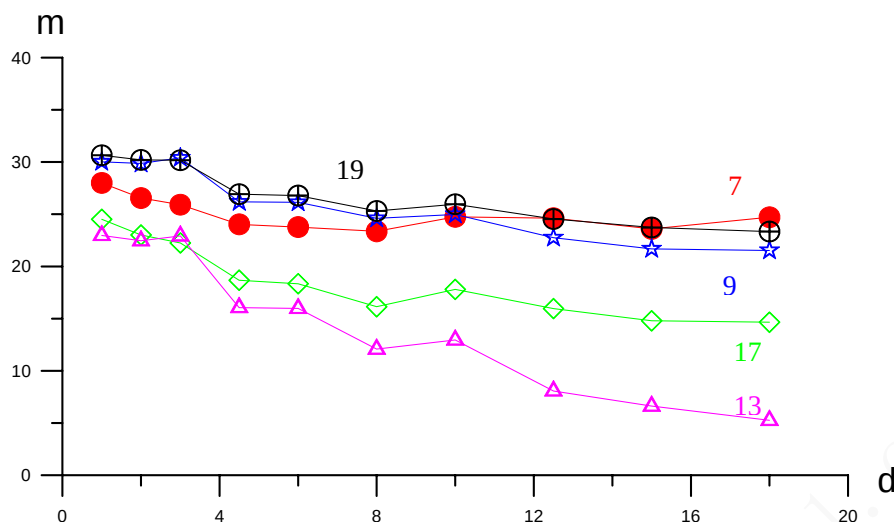


图 5-3 各监测点计算水头动态曲线

从图中看出，远离抽水井的 7 号监测点的水头在整个抽水期间水位将深最小，说明它受抽水井的开采影响小，北部地区的两个监测点因为补给边界近、且北部开采较南部小，所以从总的说来，北部的两个监测点（9 和 19）的水头下降较南部的 17 号点小。位于两眼抽水井中心的 13 号监测点水位下降最快，从最初的 33.22 米下降到 5.26 米。

本例中第 13 结点的顶板高程为-2.17 米。由于抽水井的开采，图 4-15 中显示的该结点在最终时刻的水头已经下降到 5.26 米，可以想象，当抽水井的开采强度加大或者抽水时间增加时，13 号结点附近的区域势必出现含水层水位低于含水层顶板高程的情况，也就是说，这些地段的地下水运动将变成无压流动状态。在这种情况下，必须考虑新的算法应对这种状况。

5.2 考虑越流问题的二维承压水非稳定流的数值模拟

5.2.1 泛函的近似积分

对于如下的地下水定界问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) = S \frac{\partial H}{\partial t} & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, t)|_{t=0} = H_0(x, y) \\ H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, t) \\ T \frac{\partial H}{\partial n} |_{\Gamma_{21}} = q(x, y, t) \quad \text{或} \quad T \frac{\partial H}{\partial n} |_{\Gamma_{22}} = 0 \end{cases} \quad (5-30)$$

我们先将基本未分方程改写成

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) - S \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (5-31)$$

然后将对该定解问题的求解转化成求泛函

$$I[\tilde{H}] = \iint_D \left\{ \frac{T}{2} \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{K_z}{d_z} \left(H_z \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) + S \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} \tilde{H} \right\} dxdy - \int_{\Gamma_{21}} q \tilde{H} ds \quad (5-32)$$

在边界条件

$$H(x, y, t)|_{\Gamma_1} = \varphi(x, y, t)$$

下的极小函数。

(5-30) 和 (5-20) 之间仅相差关于越流补给的描述项, 按照等价性求解思路, 我们只需直接求解

$$-\frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} \left(H_z^e \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) dxdy$$

引入视同一个单元内参数为常数的概念之后, 就可以获得关于越流补给部分的近似积分, 求解过程如下:

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} \left(H_z^e \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) dxdy \\ &= -\iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} H_z^e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial H_i} dxdy + \iint_e \frac{K_z^e}{2d_z^e} \frac{\partial (\tilde{H}^2)}{\partial H_i} dxdy \\ &= -\frac{K_z^e}{d_z^e} H_z^e \iint_e N_i dxdy + \frac{K_z^e}{2d_z^e} \iint_e 2(N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) \cdot N_i dxdy \\ &= -\frac{K_z^e}{d_z^e} H_z^e \iint_e N_i dxdy + \frac{K_z^e}{d_z^e} H_i \iint_e N_i^2 dxdy + \frac{K_z^e}{d_z^e} H_j \iint_e N_i N_j dxdy + \frac{K_z^e}{d_z^e} H_m \iint_e N_i N_m dxdy \end{aligned}$$

直接引用 (3-420)、(3-45)、(3-39) 和 (3-40) 对基函数的积分结果并将它们带入上式, 最后得到

$$-\frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} \left(H_z^e \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) dxdy = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} H_z^e + \frac{K_z^e \Delta}{12d_z^e} (2H_i + H_j + H_m) \quad (5-33)$$

同理, 我们继续对越流项分别求 H_j 和 H_m 的偏导数, 就可以分别得到

$$-\frac{\partial}{\partial H_j} \iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} \left(H_z^e \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) dxdy = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} H_z^e + \frac{K_z^e \Delta}{12d_z^e} (H_i + 2H_j + H_m) \quad (5-34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial H_m} \iint_e \frac{K_z^e}{d_z^e} \left(H_z^e \tilde{H} - \frac{1}{2} \tilde{H}^2 \right) dxdy = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} H_z^e + \frac{K_z^e \Delta}{12d_z^e} (H_i + H_j + 2H_m) \quad (5-35)$$

5.2.2 单元渗透矩阵

结合 (5-29)、(5-33)、(5-34) 和 (5-35) 式, 最后我们得到考虑越流补给问题的单元渗透矩阵如下:



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} &= \frac{T^e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} + \frac{K_z^e \Delta}{12d_z^e} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} - \frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} H_z^e \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0) \\ H_j(t_0) \\ H_m(t_0) \end{Bmatrix} - \frac{q}{2} L_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-36)$$

仿照 (4-46) 的思路, 分别令

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{K_z^e \Delta}{12d_z^e} & i \neq j \\ \frac{K_z^e \Delta}{6d_z^e} & i = j \end{cases}; \quad mp_{ij} = \begin{cases} \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} & i \neq j \\ \frac{S^e \Delta}{6(\Delta t)} & i = j \end{cases}$$

$$f_i = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} - \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} [2H_i(t_0) + H_j(t_0) + H_m(t_0)] - \frac{q}{2} L_{ij}$$

$$f_j = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} - \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} [H_i(t_0) + 2H_j(t_0) + H_m(t_0)] - \frac{q}{2} L_{ij}$$

$$f_m = -\frac{K_z^e \Delta}{3d_z^e} - \frac{S^e \Delta}{12(\Delta t)} [H_i(t_0) + H_j(t_0) + 2H_m(t_0)]$$

最终得到

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} d_{ii} & d_{ij} & d_{im} \\ d_{ji} & d_{jj} & d_{jm} \\ d_{mi} & d_{mj} & d_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{ii} & p_{ij} & p_{im} \\ p_{ji} & p_{jj} & p_{jm} \\ p_{mi} & p_{mj} & p_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} mp_{ii} & mp_{ij} & mp_{im} \\ mp_{ji} & mp_{jj} & mp_{jm} \\ mp_{mi} & mp_{mj} & mp_{mm} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_i \\ f_j \\ f_m \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-37)$$

进一步写成

$$\left\{ \frac{\partial I}{\partial H} \right\}^e = [d]^e \{H(t_0 + \Delta t)\}^e + [p]^e \{H(t_0 + \Delta t)\}^e + [mp]^e \{H(t_0 + \Delta t)\}^e - \{f\}^e \quad (5-38)$$

若设

$$[R]^e = [d]^e + [p]^e + [mp]^e \quad (r_{ij} = d_{ij} + p_{ij} + mp_{ij}) \quad (5-39)$$

则可将 (5-38) 写成

$$\left\{ \frac{\partial I}{\partial H} \right\}^e = [R]^e \{H\}^e - \{f\}^e$$

(5-39)中的 i, j 相当于总渗透矩阵 $[A]$ 中的行号和列号。

5.2.3 总渗透矩阵

由于

$$\frac{\partial I}{\partial H_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ e_j \in D_i}}^{m'} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5-40)$$

结合(5-40)将(5-37)代入(5-40)中，同时把所有的已知项移到等号右端合并起来，得到水头方程组如下：

$$[A]\{H\} = \{F\} \quad (5-41)$$

其中 $[A]$ 为总渗透矩阵，它是一个对称的 n 阶方阵，其元素

$$a_{ij} = \sum r_{ij}$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{Bmatrix}; \quad \{F\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

5.2.4 程序实例(例 5.2——fem502)

这里在例 5.1(fem501)的基础上，考虑一个具有水平水头分布的非抽水含水层中的地下水越过这个含水层与其下伏的抽水含水层之间的相互补给关系。定解问题描述如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(KM \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{K_z}{d_z} (H_z - H) = S \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, 0) = H_0(x, y) \quad \text{初始条件} \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_{AB}} = \varphi_1(x, y, t) \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_{CD}} = \varphi_2(x, y, t) \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y, t) \quad \text{第二类流量补给边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \quad \text{隔水边界} \\ KM \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j(x, y, t)}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2 \\ H_z(x, y, t) = \psi(x, y, t) \end{array} \right. \quad (5-42)$$

为方便求解，这里假设 $\psi(x, y, t)$ 为常数，令其值为 36.0 米且不随时间变化（尽管自

自然界中存在这种情况的可能性不大），此外同时就设弱透水层的渗透系数 $K_z = 0.005 \text{ m/d}$ ；弱

透水层顶板高程为 17.3m，其厚度为 $d_z(x,y)$ ，可以根据自身的顶板高程和下伏含水层顶板高程计算得到。

获得各单元弱透水层实际厚度的计算程序如下：

1、程序首先初始化非抽水含水层及弱透水层。

```
kz=0.005           设置弱透水层的渗透系数
dzu=17.3           初始化弱透水层的顶板高程
do i=1,nl1         初始化非抽水含水层的水头
    hz(i)=36.0
enddo
```

2、计算单元的弱透水层平均厚度和非抽水含水层的平均水头

```
avbed=(sole(cn(1))+sole(cn(2))+sole(cn(3)))/3.0
avtop=(apical(cn(1))+apical(cn(2))+apical(cn(3)))/3.0
avhz=(hz(cn(1))+hz(cn(2))+hz(cn(3)))/3.0  当水头不水平时必须
if (nc.eq. 1) then
    area(i)=abs(b(1)*x(1)+b(2)*x(2)+b(3)*x(3))/2.0
    dz(i)=dzu-avtop  第一个计算时段进行即可
endif
```

3、在处理贮水矩阵时添加越流处理

```
a2=kz*area(i)/12.0/dz(i)  越流项之前的系数
do l=1,3
    do j=1,3
        if (l.eq. j) then
            np(l,j)=2.0*a1
            anp(l,j)=2.0*a2  住对角线上的元素
        else
            np(l,j)=a1
            anp(l,j)=a2  非住对角线上的元素
        endif
        tp=b(l)*b(j)+c(l)*c(j)
        d(l,j)=tp*ar+np(l,j)+anp(l,j)  归并到单元渗透矩阵中
    enddo
enddo
```

4、常数列向量部分

```
do l=1,3
    nu=ln(l)
    if (nu.ne.2000) then
        f(nu)=f(nu)+area(i)*kz/3.0/dz(i)*avhz
        do kq=1,3
            nt=cn(kq)
            f(nu)=f(nu)+np(l,kq)*h(nt)
            jo=m(nu)-nu+ln(kq)
            if (ln(l).ge.ln(kq)) then
```

```

g(jo)=g(jo)+d(l,kq)
endif
if (ln(kq).eq.2000) then
f(nu)=f(nu)-d(l,kq)*r1(nt)
endif
enddo
endif
enddo

```

以上代码包含在程序包 fem502 中，图 5-4 展示了存在越流补给和不存在越流补给两种条件下，第 13 号监测点的水头变化对比情况。

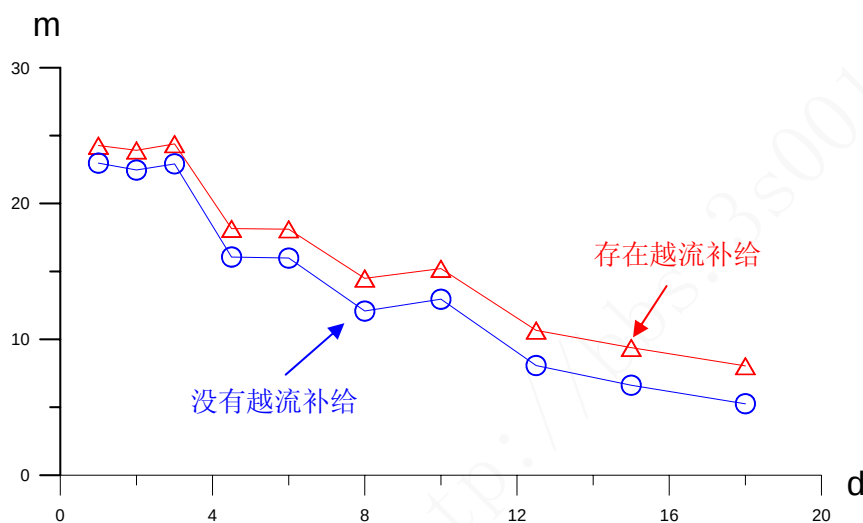


图 5-4 13 号监测点计算水头动态对比曲线

从图 5-4 中发现，由于存在越流补给，第 13 号监测点的各计算时段的水头有了明显的回升，其中第 10 个时段末的水头由不存在越流补给的 5.26 米上升到 8.04 米。同样的现象也在其它各监测点存在。

以上讨论了不考虑非抽水含水层中地下水运动的情况，如果需要同时考虑的话，只需为另外那个含水层建立一个重叠的数值模型，然后联立求解这两个模型就可以了。

5.3 二维无压含水层中地下水非稳定流的数值模拟

5.3.1 二维非线性抛物型问题的有限元解

与二维无压含水层中地下水的非稳定运动与前述的稳定流动不一样之处在于，后者为一非线性的椭圆形方程，而前者为一非线性的抛物线方程。实质上，两者对非线性问题的处理并无根本的区别，同样采用本章第七节的迭代方法获取无压含水层的厚度，差别之处在于必须对每个计算时断进行非线性迭代。

以下借用例 4.9 所涉及的模型，将其修改为非线性抛物线问题，然后再此基础上讨论求解非线性抛物线问题的有限元方法。修改后的定解问题如下：

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(Kh \frac{\partial H}{\partial x} \right) + w = \mu \frac{\partial H}{\partial t} & \text{在 } D \text{ 内} \\ H(x, y, 0) = H_0(x, y) \\ H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_{AB}} = \varphi_1(x, y, t); \quad H(x, y, t) \Big|_{\Gamma_{CD}} = \varphi_2(x, y, t) \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{AC}} = q(x, y, t); \quad Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{BD}} = 0.0 \\ Kh \frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\Gamma_{wj}} = -\frac{Q_j(x, y, t)}{2\pi r_{wj}} \quad j=1, 2 \end{cases} \quad (5-43)$$

将定解问题 (5-43) 的基本微分方程化为非线性椭圆型形式, 就可将其进一步化为在函数类 C_0 中求

$$I(H) = \iint_D \left\{ \frac{1}{2} \left[Kh^{(1)} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + Kh^{(1)} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] - wH + S \frac{\partial H}{\partial t} \right\} dx dy - \int_{\Gamma_2} qH ds + \sum_{j=1}^v \int_{\Gamma_{wj}} \frac{Q_j}{2\pi r_{wj}} H ds \quad (5-44)$$

的极小函数。这就同样可以利用前面对非线性椭圆型问题的求解方法, 通过剖分插值, 把二次泛函的极值问题离散化为普通多元函数的极值问题进行求解。

对含水层厚度的迭代方法参考前面对非线性椭圆型问题的处理技巧。

需要着重说明的是, 由于无压含水层不存在顶板, 因此当一个地下水系统中同时存在线性问题和非线性问题的时候, 对非线性部分的含水层顶板可以给它赋予一个远大于研究区 D 内水头的值。

5.3.2 算例 (例 5.3) ——fem503

为了获得此类问题的解, 我们假设定解问题 (5-43) 中的中心线以北为承压含水层, 以南为无压含水层, 具体形状参见图 5-5。

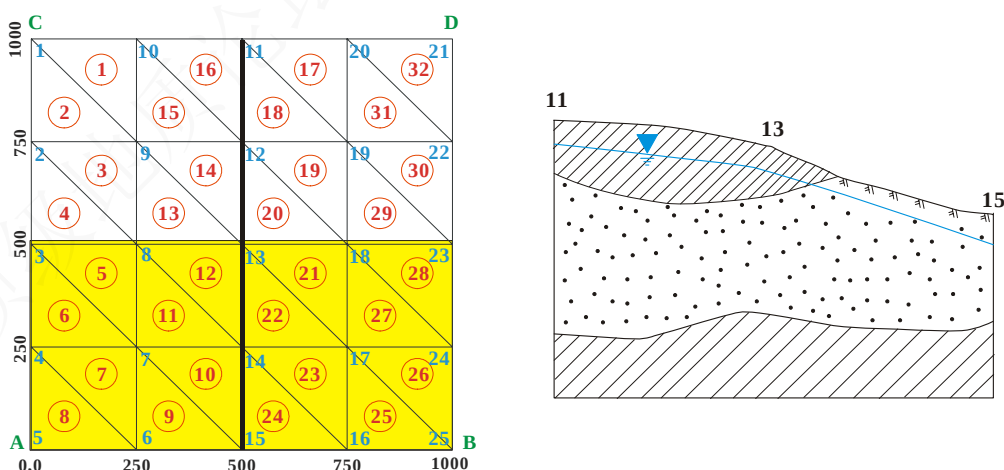


图 5-5 承压-无压水混合模型

根据图 5-5, 结点 4、5、6、7、14、15、16、17、24、25 处在无压水区, 再据以上的讨论, 必须首先修改与结点的含水层顶板标高有关的文件 coord.txt, 我们将这些结点的顶板标高设置为 100.0 米, 具体形式参见 fem503 模块中的 coord 文件的第四列

修改后的模型为 fem503, 程序文件 fem503.f 的修改内容和 fem409 种的 fem409.f 相同, 只需修改与时间有关的部分即可。此外, 由于南部地区为无压含水层, 必须同时为其提供含水层的给水度 S_y , 此时, 参数文件 coef.txt 的内容如下:

一区			二区		
渗透系数 K	贮水系数 S	给水度 S_y	渗透系数 K	贮水系数 S	给水度 S_y
4.6	0.0002	0.00012	3.9	0.00003	0.00013

根据地下水运动理论, 对于非线性抛物型问题, 引用重力给水度 S_y 建立水流模型; 对于线性抛物型方程, 则用弹性贮水系数 S 建立水流模型。因而在计算贮水矩阵时, 必须同时做如下的判断

```

if (avhead .ge. avtop) then
    al=ss(ik)*area(i)/12.0/dt(nc)
else
    al=sy(ik)*area(i)/12.0/dt(nc)
endif

```

图 5-6 同时展示了这个同时包含有承压和无压含水层的模型第十个计算时段的计算流场。对比图 5-2 的第 4 个流场图(承压水非稳定流模型的第十个计算时段的计算流场), 两者的形态基本一致, 差别在于承压水模型的降落漏斗面积比无压水模型的大, 漏斗中心的水头也较后者低(前者为 5.26, 后者为 10.51)。造成着这种现象的根源在于后者的模型中所包含的无压含水层地段的含水层厚度较前者大。

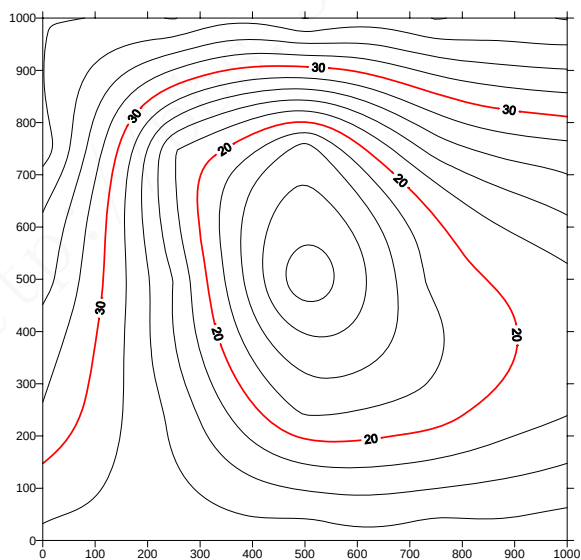


图 5-6 包含无压和承压含水层的模型(第 10 个计算时段)计算水头

图 5-7 给出了两个模型中同处在降落漏斗中心处的第 13 号结点的计算水头随时间的变化曲线。两条曲线充分反映了以上阐述的含水层性质所造成的现象。

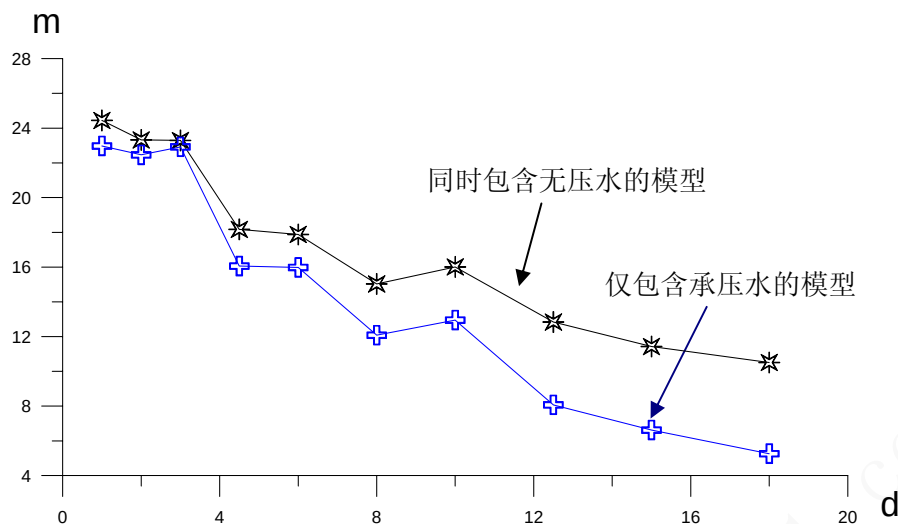


图 5-9 第 13 号结点的计算水头曲线

5.3.3 存在垂向水量交替的非线性抛物型问题的求解

式 5-43 描述了存在诸如降雨入渗等垂向水量交替时候的非线性抛物型定解问题。对该定解问题的求解可化为在函数类 C_0 中求 (5-44) 的极小函数。

根据以上的讨论对 (5-44) 所示的二次泛函的求极值问题可离散化为普通多元函数的极值问题进行求解，对比以前的讨论，差别在于增加对泛函 5-44 中 $-wH$ 项的近似积分。求解过程如下：

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial H_i} \iint_e w^e \tilde{H} dx dy &= -w^e \iint_e \frac{\partial \tilde{H}}{\partial H_i} dx dy \\
 &= -w^e \iint_e \frac{\partial}{\partial H_i} (N_i H_i + N_j H_j + N_m H_m) dx dy \\
 &= -w^e \iint_e N_i dx dy \\
 &= -w^e \frac{\Delta}{3}
 \end{aligned} \tag{5-45}$$

同理可求得

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial H_j} \iint_e w^e \tilde{H} dx dy &= -w^e \iint_e N_j dx dy = -w^e \frac{\Delta}{3} \\
 -\frac{\partial}{\partial H_m} \iint_e w^e \tilde{H} dx dy &= -w^e \iint_e N_m dx dy = -w^e \frac{\Delta}{3}
 \end{aligned} \tag{5-46}$$

因而，单元渗透矩阵的形式变为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \frac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \frac{\partial I^e}{\partial H_m} \end{Bmatrix} &= \frac{T^e}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i b_i + c_i c_i & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_m + c_i c_m \\ b_j b_i + c_j c_i & b_j b_j + c_j c_j & b_j b_m + c_j c_m \\ b_m b_i + c_m c_i & b_m b_j + c_m c_j & b_m b_m + c_m c_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} + \frac{\mu^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \end{Bmatrix} \\ &- \frac{\mu^e \Delta}{12(\Delta t)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_i(t_0) \\ H_j(t_0) \\ H_m(t_0) \end{Bmatrix} - \frac{w^e \Delta}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q}{2} L_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5-47)$$

我们在例 5.3 的基础上，考虑模型的无压含水层分布地段存在降雨入渗，形成例 5.4 (fem504)。

假设模型中的降雨入渗系数 $\alpha = 0.21$ ，各计算时段的降雨量如下表。

单位：mm

时段	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
降雨量 p	12.4	33.1	2.6	7.7	0.0	16.8	5.0	9.2	0.0	4.5

例 5.4 (fem504) 中 fem504.f 相对于 fem11 中的 fem503.f 修改的部分如下：

1、在参数说明模块中增加说明降雨入渗分区的分区个数 nfk，因为模型中同时存在承压含水层和无压含水层，为简便计算，这里将承压含水层所在区划分为一个分区，并设定该分区的降雨入渗系数为 0.0，这样处理相当于不给该分区降雨入渗补给。修改后的代码如下：

```
module initial_parame
  integer, parameter :: nl1=25, nl2=32, nb1=10, nw=2, ntk=2, nb2e=4,
&                                ndt=10, nobs=5, nfk=2
end module initial_parame
```

2、在数组定义模块中增加定义保存个时刻降雨量的数组 pm，此外还须增加定义存放各单元入渗分区的数组 nak 和各分区入渗系数的数组 afa。这些定义语句分别如下：

```
module comm_total
  real, dimension (1:25) :: h, r1, f, nr, m, sole, apical, aquihead, hk_1
  integer, dimension (1:32, 1:3) :: ce
  real, dimension (1:10) :: dt, pm
  real, dimension (1:5, 1:10) :: obsh
  integer, dimension (1:5) :: obsnode
  real, dimension (1:32) :: area
  real, dimension (1:25, 1:2) :: coor
  integer, dimension (1:10) :: blnode
  real, dimension (1:10, 1:10) :: hb1
  real, dimension (1:2, 1:10) :: wellchar
  real, dimension (1:10, 1:2) :: wellxy
  integer, dimension (1:10) :: wellelem
```

```

real,dimension (1:2) :: tk
integer, dimension (1:32) :: nkk,nak
integer, dimension (1:4) :: b2elem
real, dimension (1:4,1:10) :: b2eq
real, dimension (1:1000) :: g
real, dimension (1:2) :: ss,sy,afa
integer :: mr,nl3
end module comm_total

```

3、增加读入降雨入渗系数、各单元降雨入渗分区号及各式可降雨量的数据输入

```

open (4,file='pwm.txt')
read (4,*) (afa(i),i=1,nfk)
read (4,*) (nak(i),i=1,nl2)
read (4,*) (pm(i),i=1,ndt)
close (4)

```

4、程序中处理降雨入渗的代码安排在形成常熟列向量的部位，这部分代码如下：

```

      ia=nak(i)                                !获得单元的入渗分区号
      do l=1,3
        nu=ln(l)
        if (nu.ne.2000) then
c  -----  此处可添加处理各种垂向水量交替的代码 -----
          www=afa(ia)*pm(nc)/1000.0           !计算单位面积上的降雨入渗量
          f(nu)=f(nu)+area(i)*dt(nc)*www/3.0  !按照 4-106 将入渗影响加入 f
          do kq=1,3
            nt=cn(kq)
            f(nu)=f(nu)+np(1,kq)*horg(nt)
            jo=m(nu)-nu+ln(kq)
            if (ln(l).ge.ln(kq)) then
              g(jo)=g(jo)+d(1,kq)
            endif
            if (ln(kq).eq.2000) then
              f(nu)=f(nu)-d(1,kq)*r1(nt)
            endif
          enddo
        endif
      enddo

```

图 5-8 给出了该问题与例 5.3 在第 13 号结点处的两条计算水头曲线。明显看出在降雨入渗补给条件下，13 号结点的水头下降较小。

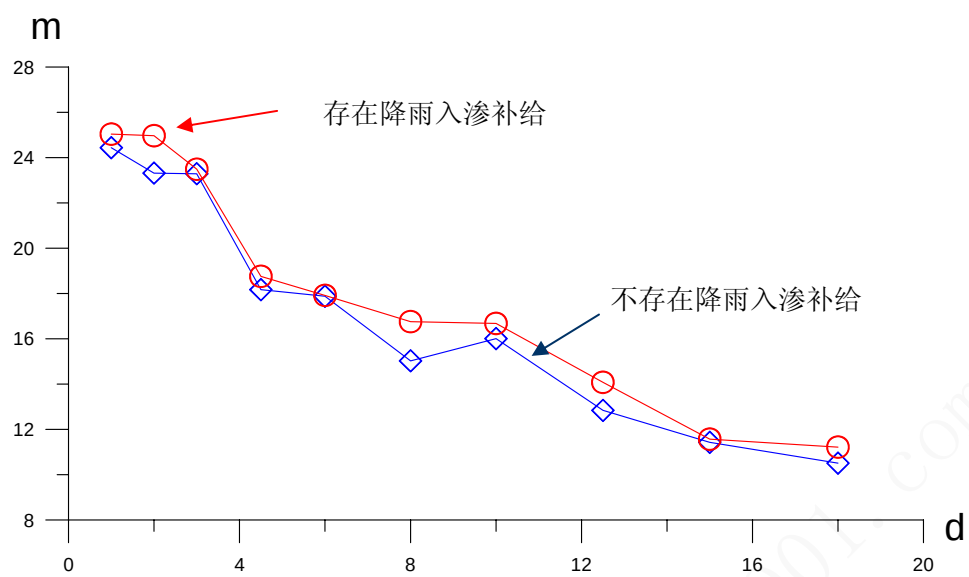


图 5-8 存在降雨入渗补给和不存在降雨入渗补给的模型对比