

• 煤田物探 •

电偶源频率电磁测深三维地电模型有限元正演^{*}

阎 述 (西安交通大学电子与信息工程学院微波与光通信研究所 710049)

陈明生 (煤炭科学研究总院西安分院 710054)

摘要 在有源变频测深(包括可控源音频大地电磁测深 CSAMT)的三维有限元正演中,应用了吸收边界条件和边元有限元算法,计算精度为 3% 左右,基本上可满足电偶极源三维地电模型情况下频率电磁测深响应特征的分析。同时由于广义变分概念的引入,可使泛函的变分原理应用于有耗媒质电磁场问题。

关键词 三维地电模型 有限元法 广义变分原理

中国图书资料分类法分类号 P631.325

作者简介 阎述 女 45 岁 博士研究生 高级工程师 电磁场与微波技术

1 引言

地球物理电磁场的计算是一开放域问题,由于源的加入,使人工截断处边界条件的确定更加困难。与线源频率电磁测深二维有限元正演相比^[1],点源三维正演,不仅地电构造的几何结构,而且场矢量的特征都使问题变得复杂化,许多二维分析中不存在的问题在三维中出现了,需要以特别的方式加以解决。

2 三维地电模型电偶源谐变电磁场方程及定解条件

设大地仍为分区均匀、线性、各向同性、非色散的导电媒质,由含源情况下谐变电磁场(谐变因子 $e^{-i\omega t}$, ω 为圆频率)微分形式的麦克斯韦方程组^[1]出发,导出关于电场的矢量波动方程:

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = -i\omega\mu\vec{J}, \quad (1)$$

其中 $k^2 = \omega^2\mu\epsilon + i\omega\mu\sigma$;

\vec{E} ——电场强度, V/m;

\vec{J} ——源电流密度, A/m²;

μ ——磁导率, H/m;

ϵ ——介电系数, F/m;

σ ——电导率, S/m。

求解在空中及地下两个区域进行,取直角坐标系如图 1,图中 CDJI 面是空气与大地的分界面。将人工边界截成正六面体包围求解区域,且使边界远

离异常体,使在边界上由异常体引起的二次场衰减为零。这样在边界上大地仍作为水平均匀分层媒质或均匀半无限媒质考虑,边界条件由一维情况下电磁场传播规律决定。

图 2 是一放置在地表的电偶极源,它产生的电磁波按传播路径可分为天波、地面波和地层波。由于频率测深利用的电磁波频率较低(频率范围: $n \times 0.1 < f < n \times 10^3$ Hz),故不用考虑天波,只须考虑地层波(以 S_1 表示)和地面波(以 S_0 表示)的作用。

2.1 地中下边界

在相当深的地层中,可认为电磁场已衰减为零,因此在 EFLK 面上取第一类边界条件

$$\vec{E} = 0. \quad (2)$$

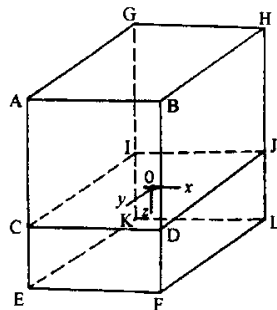


图 1 坐标系与外边界

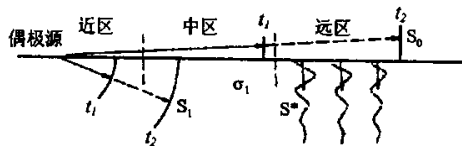


图 2 地表偶极源电磁波的传播

虽然第一类边界条件在有限元方程中不是自然满足的,还须做特别的处理,但毕竟是简单的。

2.2 地中侧边界

应选在离源足够远处。由地表偶极源电磁波传播的规律可知,地层波 S_1 离开源一段距离后会衰减殆尽,电磁波在地下的波长和速度较空气中小得多,由于某一时刻地面波 S_0 和地层波 S_1 的波程差,在地面附近形成一个近于水平的波阵面,造成一个几乎是垂直向下传播的水平极化波 S^* 。随着与场源之间距离的增加,场区从近区、中区,过渡到了远区,在地中侧边界 CDFE、DJLF、JIKL、ICEK 上,电磁场的传播方向与边界的法向垂直:

$$\vec{E} \times \vec{H} \perp \hat{n}. \quad (3)$$

由于处于远区场中的地中侧边界取在离横向不均匀体足够远的地方,使得该处电磁场沿深度的分布可看作与地下为一维介质时的分布相同。此时可以用两种方式给出地下侧边界上的边界条件:一种是采用齐次第二类边界条件;一种是采用强加的第一类边界条件的方式,通过计算出水平层状介质中的电磁场分布给出边界上的值^[2~4]。在实际的计算中,我们较多采用第一种方式。

2.3 空中边界

空中边界由 ABDC、BHJD、GHJI、AGIC 及 AGHB 组成。在空中由于场的衰减(空间衰减)很慢,要满足边界处场量为零的要求是比较困难的。因此对空中边界应特别加以考虑。在此引入吸收边界条件^[5,6]。

为方便起见,将空中边界用 Γ_0 表示。设想将空中边界处的电场 \vec{E} 加一算子 B 后使其为 0,即

$$B\vec{E}|_{\Gamma_0} = 0. \quad (4)$$

在空中区域内电场所满足的矢量波动方程为

$$\nabla^2 \vec{E} + k_0^2 \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{J}, \quad (5)$$

式中 $k_0^2 = \omega^2 \epsilon_0 \mu_0$ 。

在空中边界处 \vec{E} 由源电流的辐射场和大地的反射场(散射场)组成。在边界处这两个场都是向外传播的,总场 \vec{E} 是待求量,且满足辐射条件。故满足(5)式且向外传播的场以球坐标可以表示成

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = e^{ik_0 r} \sum_{n=0}^{\infty} \vec{E}_n(\theta, \varphi) / r^{(n+1)}. \quad (6)$$

类似于 N 阶标量算子的特性,定义算子 B_N 消除(6)式中的前 N 项,由此可得矢量吸收边界条件。其过程如下:

定义微分算子 L^N 为

$$L^N(\vec{E}) = \nabla \times \nabla \times \vec{E} - (ik + \frac{N}{r})\vec{E}, \quad (7)$$

式中 $N=0,1,2,\dots$; \hat{r} 是辐射方向的单位矢量。

将(6)式代入(7)式,当 $N \geq 0, n \geq 0$ 时,得到

$$L^N(e^{ik_0 r} \vec{E}_{nt}(\theta, \varphi) / r^{n+1}) = (n-N)e^{ik_0 r} (\vec{E}_n(\theta, \varphi) / r^{n+1}), \quad (8)$$

下标 t 表示的是 \vec{E} 的 θ, φ 分量。同样对于 $N \geq 0, n \geq 0$ 还可得到

$$L^N \nabla_t (e^{ik_0 r} \vec{E}_{nr}(\theta, \varphi) / r^{n+1}) = (n+1-N) \nabla_t (e^{-ik_0 r} (\vec{E}_{nt}(\theta, \varphi) / r^{n+2})), \quad (9)$$

下标 r 表示 \vec{E} 的辐射方向。

算子 B_N 定义为

$$B_N(\vec{E}) = (L^{N-1})^N(\vec{E}_t) + Q(L^N)^{N-1}(\nabla_t \vec{E}_r), \quad (10)$$

其中, $N=1,2,3,\dots$, Q 为任意常数,算子 L^{N-1}, L^N 的上标 $N, N-1$ 的意义是将相应算子应用 N 及 $N-1$ 次。将 L^N, L^{N-1} 反复作用于(8)、(9)得到

$$B_N(e^{-ik_0 r} \vec{E}(\theta, \varphi) / r^{n+1}) = (n+1-N)(n+2-N)\cdots n \times (e^{-ik_0 r} \vec{E}_{nt}(\theta, \varphi) / r^{n+1+N}) + Q(n+1-N)(n+2-N)\cdots(n-1) \times \nabla_t e^{-ik_0 r} (\vec{E}_{nr}(\theta, \varphi) / r^{n+N}). \quad (11)$$

根据文献[9], $\vec{E}_{nr}=0$, 从(11)式可见,当 $n=1, 2, \dots, N-1$ 时,它的右端项为零,也就是说算子 B_N 消除了式(6)中的前 N 项。因为球面坐标中算子 B_N 本身包含了因子 $1/r$, 所以当 $n > N-1$ 时, (11)式中右端的每一项都正比于 $1/r^{n+N+1}$ 。

$B_N(\vec{E})=0$ 就是空中边界 Γ_0 上的近似吸收边界条件。随着 r 的增加,这种近似的精度提高。

为了使算子 B_N 的形式更通用,下面对一阶算子 B_1 , 二阶算子 B_2 做如下变换:

根据式(10)对 B_N 的定义,可写出 B_1, B_2 的另一种表示式:

$$B_1(\vec{E}) = (L_0)^1(\vec{E}_t) + Q(L_1)^0(\nabla_t \vec{E}_r), \quad (12)$$

$$B_2(\vec{E}) = (L_1)^2(\vec{E}_t) + Q(L_2)^1(\nabla_t \vec{E}_r). \quad (13)$$

由(8)式得到

$$\begin{aligned} L_0(\vec{E}_t) &= \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t, \\ \text{所以 } B_1(\vec{E}) &= \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t - ik_0 \vec{E}_t + Q \nabla_t \vec{E}_r \\ &= \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t - \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_r \\ &\quad - ik_0 \vec{E}_t + Q \nabla_t \vec{E}_r. \end{aligned} \quad (14)$$

将矢量运算性质 $\hat{r} \times \nabla \times \nabla \times \vec{E}_r$ 代入上式得

$$B_1(\vec{E}) = \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t - ik_0 \vec{E}_r + Q(-1) \nabla_t \vec{E}_r. \quad (15)$$

类似地,得出

$$\begin{aligned} B_2(\vec{E}) &= -(2ik_0 + \frac{2}{r}) \hat{r} \times \nabla \times \vec{E}_t - \frac{ik_0}{2ik_0 + 2/r} \vec{E}_t + \\ &\quad \nabla \times (\hat{r} \times \nabla \times \vec{E}) + (Q-1) \nabla_t (\nabla \cdot \vec{E}_t) + \\ &\quad ik_0(2-Q) \nabla_t \vec{E}_r. \end{aligned} \quad (16)$$

吸收边界条件的物理解释是,在人工截断的边界处,使尽可能少的功率从边界处被反射回来。至于上述吸收边界条件表达式中的任意常数 Q , 当令 Q

=1 时,则(15)式退化为三维场的索末菲(Sommerfeld)辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r[\nabla \times \vec{E} + jk_0 \hat{r} \times \vec{E}] = 0.$$

在有限元中,较好的选择是令 $Q=2$ 。

3 三维电磁场边值问题的等价变分问题

3.1 广义变分原理

有限元以变分原理为基础。例如对于矢量偏微分方程的边值问题

$$L\vec{E} = f, \quad (17)$$

如果算符 L 是自伴的,即

$$\langle L\vec{E}, \vec{F} \rangle = \langle \vec{E}, L\vec{F} \rangle, \quad (18)$$

并且是正定的

$$\langle L\vec{E}, \vec{E} \rangle \begin{cases} > 0 & \vec{E} \neq 0, \\ = 0 & \vec{E} = 0 \end{cases}, \quad (19)$$

那么通过求泛函 $I(\vec{E})$ 的极小值,即令

$$\delta I(\vec{E}) = 0, \quad (20)$$

可求出原边值问题的解。

在上面的式子中, \vec{F} 表示与 \vec{E} 满足相同边界条件的任意函数,尖括号表示如下定义的内积

$$\langle \vec{E}, \vec{F} \rangle = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{F}^* d\Omega. \quad (21)$$

Ω 表示问题的区域,星号表示复共轭。

但是,对于一般来讲是有耗媒质的地球物理问题,我们将其矢量波动方程(1)式重写为

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = -i\omega\mu \vec{J}. \quad (22)$$

式中算符 $L = (\nabla^2 + k^2)$ 是复数或复函数,因此是非自伴的,而且也无所谓是正定的。这意味着(22)式的解可能并不对应着泛函的极小值。仔细考察泛函极值问题的证明过程,可以发现^[8,9],虽然算符的自伴性质是必要的,但其正定性则是不必要的。我们的最终目的是求解(22)式,因此如果这种变分原理存在某种不足,则是由自伴条件引起的。对此,引入广义变分的概念。

在广义变分中,将内积重新定义为

$$\langle \vec{E}, \vec{F} \rangle = \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{F} d\Omega. \quad (23)$$

这样定义的内积通常叫做对称积,而式(21)定义的内积通常称为希尔伯特(Hilbert)空间中的内积。定义(22)式的直接结果是:对于复数问题,用广义原理推导出的泛函是复数量。显然对于复泛函,其极小值、极大值及拐点都是没有意义的。因此可用“驻定的”或“驻定性”来描述条件 $\delta I(\vec{E}) = 0$ 。

3.2 三维矢量波动方程的等价变分

根据广义变分原理

$$I[\vec{E}] = \langle L\vec{E}, \vec{E} \rangle - 2\langle \vec{E}, f \rangle, \quad (24)$$

依照与文献[1]中类似的步骤,对于公式(22)可构造如下的泛函:

$$\begin{aligned} I[\vec{E}] &= -\frac{1}{\mu} \int_V (\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E}) \cdot \vec{E} dV - 2 \int_V \vec{E} \cdot i\omega \vec{J} dV \\ &= -\frac{1}{\mu} \int_V (\vec{E} \cdot \nabla^2 \vec{E} dV - \frac{1}{\mu} \int_V k^2 E^2 dV \\ &\quad - 2i\omega \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV). \end{aligned} \quad (25)$$

对于恒等式

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] \\ = \frac{1}{\mu} [(\nabla \times \vec{E})^2 - \vec{E} \cdot (\nabla \times \nabla \times \vec{E})], \end{aligned}$$

考虑到 $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, 故有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \nabla \cdot [\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] \\ = \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{E})^2 - \frac{1}{\mu} \vec{E} \cdot \nabla^2 \vec{E}. \end{aligned} \quad (26)$$

对(26)式两边进行体积分,并应用高斯散度定理,有

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} \int_V \vec{E} \cdot \nabla^2 \vec{E} dV \\ = \frac{1}{\mu} \int_V (\nabla \times \vec{E})^2 dV - \oint_S \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (27)$$

将(27)式代入上面泛函(25)式中有

$$\begin{aligned} I[\vec{E}] &= \frac{1}{\mu} \int_V [(\nabla \times \vec{E})^2 dV - k^2 E^2] dV - \\ &\quad 2i\omega \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV - \oint_S \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S}. \end{aligned} \quad (28)$$

这里导出的变分问题连同上节给出的边界条件,便是有限元法解三维电磁场问题的出发点。

对于三维地电结构来讲,存在多种媒质。可将方程(28)分别应用于各分区均匀媒质中,而在媒质的分界面上通过衔接条件相联系。

设有相邻的两种媒质,区域 V_1 为媒质 1,区域 V_2 为媒质 2, S_1 、 S_2 分别为 V_1 、 V_2 的外边界面, S_0 为两种媒质的分界面。又设 S_0^- 表示位于 V_1 中无限接近 S_0 的分界面, S_0^+ 表示位于 V_2 中无限接近 S_0 的分界面, S_0^- 和 S_0^+ 的法线方向相反。在 V_1 中使用(26)式及高斯散度定理,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_1} \int_{V_1} \nabla \cdot [\vec{E}_1 \times (\nabla \times \vec{E}_1)] dV \\ = \frac{1}{\mu_1} \oint_{S_1+S_0^-} \vec{E}_1 \times (\nabla \times \vec{E}_1) \cdot d\vec{S} \\ = \frac{1}{\mu_1} \int_{V_1} [(\nabla \times \vec{E}_1)^2 + \vec{E}_1 \cdot \nabla^2 \vec{E}_1] dV. \end{aligned} \quad (29)$$

同样,在 V_2 中有

$$\frac{1}{\mu_2} \int_{V_2} \nabla \cdot [\vec{E}_2 \times (\nabla \times \vec{E}_2)] dV$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\mu_2} \oint_{S_2+S_0^-} \vec{E}_2 \times (\nabla \times \vec{E}_2) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{\mu_2} \int_{V_2} [(\nabla \times \vec{E}_2)^2 + \vec{E}_2 \cdot \nabla^2 \vec{E}_2] dV. \quad (30) \end{aligned}$$

将(29)、(30)两式中的面积分相加,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu_1} \oint_{S_1+S_0^-} \vec{E}_1 \times (\nabla \times \vec{E}_1) \cdot d\vec{S} + \\ &\frac{1}{\mu_2} \oint_{S_2+S_0^+} \vec{E}_2 \times (\nabla \times \vec{E}_2) \cdot d\vec{S} \\ &= \frac{1}{\mu_1} \oint_{S_1} \vec{E}_1 \times (\nabla \times \vec{E}_1) \cdot d\vec{S} + \\ &\frac{1}{\mu_2} \oint_{S_2} \vec{E}_2 \times (\nabla \times \vec{E}_2) \cdot d\vec{S} + \\ &\oint_{S_0} (\vec{E}_1 \times \frac{\nabla \times \vec{E}_1}{\mu_1} - \vec{E}_2 \frac{\nabla \times \vec{E}_2}{\mu_2}) \cdot d\vec{S}. \quad (31) \end{aligned}$$

根据矢量混合积的性质

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}),$$

以及电场与磁场间的关系

$$\nabla \times \vec{E}_1 = i\omega\mu_1 \vec{H}_1; \quad \nabla \times \vec{E}_2 = i\omega\mu_2 \vec{H}_2;$$

则(31)式右边第三项

$$\begin{aligned} &\oint_{S_0} (\vec{E}_1 \times \frac{\nabla \times \vec{E}_1}{\mu_1} - \vec{E}_2 \frac{\nabla \times \vec{E}_2}{\mu_2}) \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{S_0} [(\hat{n} \times \vec{E}_1 \times \frac{\nabla \times \vec{E}_1}{\mu_1} - (\hat{n} \times \vec{E}_2 \frac{\nabla \times \vec{E}_2}{\mu_2}) \cdot d\vec{S} \\ &= i\omega \oint_{S_0} [(\hat{n} \times \vec{E}_1 \cdot \vec{H}_1 - (\hat{n} \times \vec{E}_2 \cdot \vec{H}_2)] dS. \end{aligned}$$

在媒质的分界面上电场的切向分量连续,如果磁场的切向分量也连续的话,则上式为零。这样(29)、(30)两式合写成

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\mu} \oint_{V_1+V_2} \nabla \cdot [\vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})] dV \\ &= \oint_{V_1+V_2} \nabla \cdot [\vec{E} \times \frac{\nabla \times \vec{E}}{\mu}] dV \\ &= \oint_{S_1+S_2} [\vec{E} \times \frac{\nabla \times \vec{E}}{\mu}] d\vec{S} \\ &= \int_{V_1+V_2} \frac{(\nabla \times \vec{E})^2 + \vec{E} \nabla^2 \vec{E}}{\mu} dV. \end{aligned}$$

移项后

$$\begin{aligned} &- \oint_{V_1+V_2} \frac{\vec{E} \nabla^2 \vec{E}}{\mu} dV \\ &= \int_{V_1+V_2} \frac{(\nabla \times \vec{E})^2}{\mu} dV \\ &= \oint_{S_1+S_2} \vec{E} \times \frac{\nabla \times \vec{E}}{\mu} d\vec{S}. \quad (32) \end{aligned}$$

由此可知,对于频率电磁测深及可控源音频大地电磁测深(CSAMT),在求电场时,虽然在不同媒质分界面上电场的切向分量总是连续的,但是由于电场与磁场之间的相互作用,还要求磁场的切向分量也连续,这样在用有限元方法求解时才能不必考

虑内边界。在地球物理问题中,这个条件在大多数情况下是满足的。式(32)与式(27)完全相似,所以在单一媒质中导出的有关结论完全适合于多种媒质的情况。

当边界条件为非齐次时,可依文献[10]中的方法处理,在文献[8]中这种处理方式称为修正的变分原理。

4 三维电磁场问题中的边元有限元

频率电磁测深三维正演与其二维正演^[3,1]相比,又出现了自身的问题。在求解三维电磁场时,经典的有限元法(点元有限元)存在某些缺陷^[6,8],因为点元法不能保证代表电磁场的矢量所满足的连续性条件。传统的处理方法大致有两种:一种是先求中间位函数,如磁矢量位或电矢量位,再由中间位函数求电场或磁场,这样做损失了计算精度。另一种方法是罚函数的方法,通过加罚解决这个问题,但是得到的结果也往往不能完全令人满意。而边元有限元法可以有效地解决这个问题。

边元有限元是一种矢量有限元,与点元有限元不同的是,其矢量基函数与剖分单元的边相关,它有三个特点:

- a. 边元有限元以待求矢量 \vec{E} 在单元每条边上的分量的平均值为插值离散值;
- b. 边元有限元的插值函数是单元关于每条边的矢量形状函数;
- c. 边元有限元规定相邻单元交界处两侧的待求矢量按其切向分量连续,这就满足了电磁场的本性边界条件,即在不同媒质的交界面上,电场的切向分量连续;当不存在面电流时,磁场的切向分量连续。

4.1 边元有限元法的矢量形状函数的构成

在三维边元有限元中,矩形块单元和四面体单元是最简单的两种基本单元,现以这两种单元为例说明其矢量形状函数的构成。

图 3a 是矩形块单元,它在 x 、 y 和 z 方向的边长分别记为 l_x^e 、 l_y^e 和 l_z^e ,其中心位于 (x_c^e, y_c^e, z_c^e) 。如果每条边被赋予一个常切向分量,那么该单元中的各场分量可展开为

$$\begin{aligned} E_x^e &= \sum_{i=1}^4 N_{xi}^e E_{xi}^e, \\ E_y^e &= \sum_{i=1}^4 N_{yi}^e E_{yi}^e, \\ E_z^e &= \sum_{i=1}^4 N_{zi}^e E_{zi}^e. \quad (33) \end{aligned}$$

其中

$$N_{x1}^e = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z),$$
$$N_{x2}^e = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z),$$
$$N_{x3}^e = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}),$$
$$N_{x4}^e = \frac{1}{l_y^e l_z^e} (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}) (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}),$$
$$N_{y1}^e = \frac{1}{l_z^e l_x^e} (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x),$$
$$N_{y2}^e = \frac{1}{l_z^e l_x^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x),$$
$$N_{y3}^e = \frac{1}{l_z^e l_x^e} (z_c^e + \frac{l_z^e}{2} - z) (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}),$$
$$N_{y4}^e = \frac{1}{l_z^e l_x^e} (z - z_c^e + \frac{l_z^e}{2}) (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}),$$
$$N_{z1}^e = \frac{1}{l_x^e l_y^e} (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y),$$
$$N_{z2}^e = \frac{1}{l_x^e l_y^e} (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) (y_c^e + \frac{l_y^e}{2} - y),$$
$$N_{z3}^e = \frac{1}{l_x^e l_y^e} (x_c^e + \frac{l_x^e}{2} - x) (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}),$$
$$N_{z4}^e = \frac{1}{l_x^e l_y^e} (x - x_c^e + \frac{l_x^e}{2}) (y - y_c^e + \frac{l_y^e}{2}).$$

如用表 1 定义各棱边,则展开式(33)或用矢量表示为

$$\vec{E}^e = \sum_{i=1}^{12} \vec{N}_i^e \vec{E}_i^e. \tag{34}$$

表 1 矩形块单元各边与端点的编码

棱边 i	结点 i_1	结点 i_2
1	1	2
2	4	3
3	5	6
4	8	7
5	1	4
6	5	8
7	2	3
8	6	7
9	1	5
10	2	6
11	4	8
12	3	7

表 2 四面体单元各边与端点的编码

棱边 i	结点 i_1	结点 i_2
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	2	3
5 万方数据	4	2
6	3	4

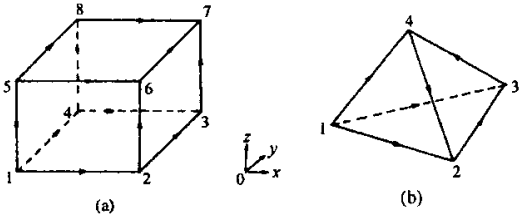


图 3 计算单元

(a)矩形块单元;(b)四面体单元

其中,当 $i=1,2,3,4$ 时,

$$\vec{N}_i^e = N_{xi}^e \hat{x}, \vec{N}_{i+4}^e = N_{yi}^e \hat{y}, \vec{N}_{i+8}^e = N_{zi}^e \hat{z}. \tag{35}$$

由此可见,矢量基函数具有零散度和非零旋度,而且保证待求场量在穿越棱边与穿越单元面时的切向连续性。

矩形块单元的缺点是只适用于有限类的几何结构。当处理不规则几何形状的问题时,四面体单元有较强的适应性。与矩形块单元不同,四面体单元的棱边不必平行于 x 、 y 或 z 轴,因此它的矢量形状函数的展开式也较难想像。图 3b 是四面体单元,用表 2 定义各棱边,利用一般四面体单元的线性插值函数,在此记为 $(L_1^e, L_2^e, L_3^e, L_4^e)$,考察矢量函数

$$\vec{W}_{12} = L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e. \tag{36}$$

首先,有 $\nabla \cdot \vec{W}_{12} = 0, \nabla \cdot \vec{W}_{12} = 2 \nabla L_1^e \times \nabla L_2^e$,其次设 \hat{e}_1 表示从结点 1 指向结点 2 的单位矢量。由于 L_1^e 是从点 1 处的 1 变化到点 2 处的 0 的线性函数,所以

$$\hat{e}_1 \cdot \nabla L_1^e = -1/l_1^e, \quad \hat{e}_1 \cdot \nabla L_2^e = 1/l_1^e.$$

l_1^e 表示连接点 1 和 2 的边长。因此

$$\hat{e}_1 \cdot \vec{W}_{12} = \frac{L_1^e + L_2^e}{l_1^e} = \frac{1}{l_1^e}.$$

这表示 \vec{W}_{12} 沿边(1,2)有一个常切向分量,而沿其它五个边上没有切向分量。并且只有在包含棱边(1,2)的单元及水平面上有切向分量,而在其它单元小平面上没有切向分量。由此可见, \vec{W}_{12} 具有作为与棱边(1,2)相关的场的矢量基函数所需要的特性。如果定义该棱边为 1,则有

$$\vec{N}_1^e = \vec{W}_{12} l_1^e = (L_1^e \nabla L_2^e - L_2^e \nabla L_1^e) l_1^e.$$

类似地,可有棱边 1 的矢量基函数

$$\vec{N}_i^e = \vec{W}_{i1i2} l_i^e = (L_{i1}^e \nabla L_{i2}^e - L_{i2}^e \nabla L_{i1}^e) l_i^e. \tag{37}$$

4.2 单元矩阵的计算

当将边元有限元的矢量基函数用于一个矢量波动方程的三维有限元离散时,所得的单元矩阵包含下面两个积分:

$$\vec{E}_{ij} = \int_{V^e} (\nabla \times \vec{N}_i^e) \cdot (\nabla \times \vec{N}_j^e) \cdot dV, \tag{38}$$

$$\vec{F}_{ij} = \int_{V^e} \vec{N}_i^e \cdot \vec{N}_j^e \cdot dV. \tag{39}$$

对矩形块单元和四面体单元,可解析计算这两个积分。

矩形块单元:将式(35)代入式(38),可得到

$$[E^e]=\begin{bmatrix} E_{xx}^e & E_{xy}^e & E_{xz}^e \\ E_{yx}^e & E_{yy}^e & E_{yz}^e \\ E_{zx}^e & E_{zy}^e & E_{zz}^e \end{bmatrix}。$$

其中

$$[E_{xx}^e]=\int_{V^e}\left[\frac{\partial\{N_x^e\}}{\partial y}\frac{\partial\{N_x^e\}^T}{\partial y}+\frac{\partial\{N_x^e\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_x^e\}^T}{\partial z}\right]dV\\=\frac{l_x^e l_z^e}{6l_y^e}[K_1]+\frac{l_x^e l_y^e}{6l_z^e}[K_2],$$

$$[E_{yy}^e]=\int_{V^e}\left[\frac{\partial\{N_y^e\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_y^e\}^T}{\partial z}+\frac{\partial\{N_y^e\}}{\partial x}\frac{\partial\{N_y^e\}^T}{\partial x}\right]dV\\=\frac{l_x^e l_z^e}{6l_y^e}[K_1]+\frac{l_y^e l_z^e}{6l_x^e}[K_2],$$

$$[E_{zz}^e]=\int_{V^e}\left[\frac{\partial\{N_z^e\}}{\partial x}\frac{\partial\{N_z^e\}^T}{\partial x}+\frac{\partial\{N_z^e\}}{\partial y}\frac{\partial\{N_z^e\}^T}{\partial y}\right]dV\\=\frac{l_x^e l_y^e}{6l_z^e}[K_1]+\frac{l_x^e l_z^e}{6l_y^e}[K_2],$$

$$[E_{xy}^e]=[E_{yx}^e]^T=-\int_{V^e}\frac{\partial\{N_x^e\}}{\partial y}\frac{\partial\{N_y^e\}^T}{\partial x}dV\\=\frac{l_z^e}{6}[K_3],$$

$$[E_{zx}^e]=[E_{xz}^e]^T=-\int_{V^e}\frac{\partial\{N_x^e\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_z^e\}^T}{\partial x}dV\\=\frac{l_y^e}{6}[K_3],$$

$$[E_{yz}^e]=[E_{zy}^e]^T=-\int_{V^e}\frac{\partial\{N_y^e\}}{\partial z}\frac{\partial\{N_z^e\}^T}{\partial y}dV\\=\frac{l_x^e}{6}[K_3]。$$

且有

$$[K_1]=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[K_2]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$[K_3]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}。$$

对于(39)式中的积分,有

$$[F^e]=\begin{bmatrix} F_{xx}^e & 0 & 0 \\ 0 & F_{yy}^e & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz}^e \end{bmatrix}。$$

其中, $F_{pp}^e=\int_{V^e}\{N_p^e\}\{N_p^e\}^T dV$

$$=\frac{l_x^e l_y^e l_z^e}{36}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}。$$

式中 $p=x,y,z。$

四面体单元:对式(37)取旋度

$$\nabla\times\vec{N}_i^e=2l_i^e\nabla L_{i1}^e\times\nabla L_{i2}^e\\=\frac{l_i^e}{(6V^e)^2}[(c_{i1}^e d_{i2}^e-d_{i1}^e c_{i2}^e)\hat{x}+\\(d_{i1}^e b_{i2}^e-b_{i1}^e d_{i2}^e)\hat{y}+(b_{i1}^e c_{i2}^e-c_{i1}^e b_{i2}^e)\hat{z}]。(40)$$

其中, $b_i^e、c_i^e$ 和 d_i^e 的定义与一般线性四面体单元中的定义相同。将(40)式代入(38)式,得到

$$E_{ij}^e=\frac{l_i^e l_j^e V^e}{(6V^e)^4}[(c_{i1}^e d_{i2}^e-d_{i1}^e c_{i2}^e)(c_{j1}^e d_{j2}^e-d_{j1}^e c_{j2}^e)+\\(d_{i1}^e b_{i2}^e-b_{i1}^e d_{i2}^e)(d_{j1}^e c_{j2}^e-d_{j1}^e c_{j2}^e)+\\(b_{i1}^e c_{i2}^e-c_{i1}^e b_{i2}^e)(b_{j1}^e c_{j2}^e-c_{j1}^e b_{j2}^e)]。$$

对(39)式中的积分,应用(40)式给出的表达式,可得

$$\vec{N}_i^e\cdot\vec{N}_j^e=\frac{l_i^e l_j^e}{(6V^e)^2}[L_{i1}^2 L_{j1}^2 f_{i_2 j_2}-L_{i1}^e L_{j2}^e f_{i_2 j_1}+\\L_{i2}^e L_{j1}^e f_{i_1 j_2}+L_{i2}^e L_{j2}^e f_{i_1 j_1}]。$$

其中, $f_{ij}=b_i^e b_j^e+c_i^e c_j^e+d_i^e d_j^e$ 。将上式代入(39)式,并利用通用积分公式^[11]

$$\int_{V^e}(N_1^e)^k(N_2^e)^l(N_3^e)^m(N_4^e)^n dV\\=\frac{k!l!m!n!}{(k+l+m+n)!}6V^e,$$

便可得到各 F_{ij}^e 的表达式。

5 计算精度

采用如前所述的空中吸收边界条件及三维边元有限元算法,为验证计算精度,我们计算了均匀半空间和水平三层大地两个模型,对这两个模型均进行了 29 个点的计算。与数字滤波算法相比,两个模型 29 个计算点结果的相对偏差的均方根值分别为 2.6%及 3.0%,其结果分别示于图 4、图 5。

6 结束语

地球物理电磁场的计算是一开放域问题。由于源的加入,使人工截断边界处边界条件的确定更加困难。本文用满足三维电磁场辐射条件的吸收边界条件处理了空中的边界。边元有限元在三维场的计算方面是一个尝试,它使其矢量基函数与剖分单元的边相关,从而保证待求矢量在单元边界上满足电磁场的本性边界条件。在应用了空中吸收边界条件和边元有限元后,计算精度为 3%左右,基本上可以满足电偶极源三维地电模型情况下频率电磁测深需

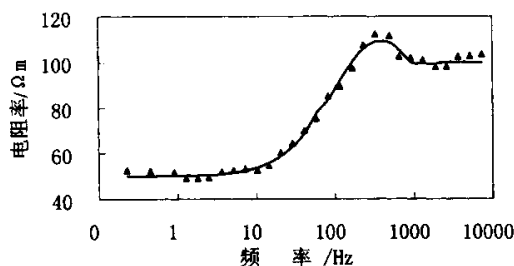


图 4 均匀半空间模型有限元结果与数字滤波结果的比较

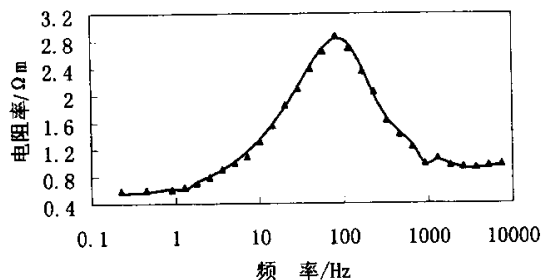
地电模型: $\rho=100 \Omega \text{m}$ 极距 $r=800 \text{m}$ —— 数字滤波正演/ Ωm ; ▲ 有限元正演/ Ωm 

图 5 水平三层大地模型有限元结果与数字滤波结果的比较

地电模型: $\rho_1=1 \Omega \text{m}$ $\rho_2=4 \Omega \text{m}$ $\rho_3=0.5 \Omega \text{m}$ $h_1=10 \text{m}$; $h_2=80 \text{m}$; 极距 $r=360 \text{m}$ —— 数字滤波正演/ Ωm ; ▲ 有限元正演/ Ωm

应特征的分析。

此外,由于广义变分概念的引入,使泛函的变分原理在有耗媒质电磁场问题中得以应用。

参考文献

- 1 阎述,陈明生. 线源频率电磁测深二维正演. 煤田地质与勘探, 1999;27(5):60~62
- 2 陈乐寿,王光镔. 大地电磁测深法. 北京:地质出版社,1990:142~143,176~177
- 3 陈明生,严又生. 二维水平电偶极变频测深阻抗视电阻率的有限元正演计算. 地球物理学报,1987;30(2):201~207
- 4 徐世浙. 地球物理中的有限单元法. 北京:科学出版社,1994:248
- 5 Webb J P, Kanellopoulos V N. Absorbing boundary conditions for the finite element solution of the vector wave equation. Microwave opt. Tech. Lett., 1989;2:370~372
- 6 方静. 电磁散射问题中点元、边元有限元法的研究. 西安交通大学硕士学位论文,1983;17~20,8~9
- 7 Peterson A F. Absorbing boundary conditions for the vector wave equation. Microwave Opt. Tech. Lett., 1988;1:62~64

- 8 [美]金建铭. 电磁场有限元方法. 西安:西安电子科技大学出版社,1998;125~136,164~200
- 9 Chen C H, Lien C D. The variational principle for non-self-adjoint electromagnetic problems. IEEE Trans. Microwave Theory Tech., 1980;28:878~886
- 10 盛剑霓. 电磁场数值分析. 西安:西安交通大学出版社,1991:33~36,50~53
- 11 Whitney H. Geometric integration theory. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957
- 12 Mur G, Hoop de A T. A finite-element method for computing three-dimensional electromagnetic fields in inhomogeneous media. IEEE Trans. Magnetics, 1985;2188~2191
- 13 Barton M L, Cendes Z J. New vector finite elements for three-dimensional magnetic field computation. J. Appl. Phys., 1987;61(8):3919~3921
- 14 Cendes Z J. Vector finite elements for the electromagnetic field. IEEE Trans. Magnetics, 1991;27:3958~3966

(收稿日期 1999—12—23)

FINITE ELEMENT SOLUTION OF THREE-DIMENSIONAL GEOELECTRIC MODELS IN FREQUENCY ELECTROMAGNETIC SOUNDING EXCITED BY A HORIZONTAL ELECTRIC DIPOLE

Yan Shu (Xi'an Jiaotong University)

Chen Mingsheng (Xi'an Branch, CCRI)

Abstract Absorbing boundary conditions and edge-element finite element method are used in 3-D active frequency electromagnetic sounding (including CSAMT) modeling. Benchmark calculation shows that the accuracy of the method is about 3%, which is acceptable for the purpose of analyzing response characteristics of frequency sounding with an electric dipole source for 3-D modeling. Besides, the general variation principle was introduced to solve electromagnetic problem in lossy media.

Keywords 3-D geoelectric models; finite element method; general variation principle