第一章 杆 系 结 构

§1-1 概 述

当电子计算机问世以后，为了利用这一新的有力计算工具，首先对杆系结构采用了矩阵方法[57, 58]，接着又将杆系结构矩阵分析方法推广应用于连续介质，把连续介质离散化为有限个单元的集合进行分析，即狭义的有限单元法[31~33]。连续介质有限单元法和杆系结构矩阵分析方法的基本概念是相同的，即把一个结构看成是有限个单元的组合，这些单元在有限个结点上连接起来。其区别仅仅是，对于杆系结构，可直接把原来的杆、梁、柱等构件作为单元，而对于连续介质，不存在这样的自然单元，必须把原来的介质人为地划分为有限个块体，以这些块体作为计算的单元。在广义上说，杆系结构矩阵分析方法也可以包括在有限单元法中。基于这个原因，加上通过杆系结构可以比较形象地说明有限单元法的概念，所以我们首先说明杆系结构矩阵分析方法，以此作为连续介质有限单元分析的导引。当然杆系结构矩阵分析方法本身在实际工程中也有很大应用价值。

在求解任何超静定的力学问题时，应兼顾平衡条件、变形条件及物理条件三方面的要求。而解决问题的关键往往在于正确地分析变形条件。

如图1-1所示的桁架，在荷重P作用下，各杆轴力等于多少？这是一个超静定问题。我们可以把三根杆件14、24、34看成是组成桁架的三个“单元”，而整个桁架则是这三个单

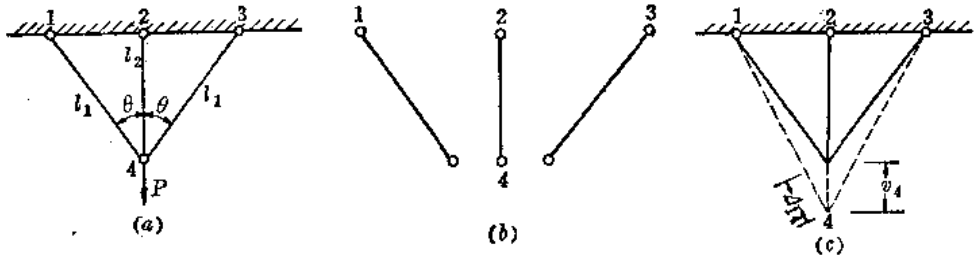


图 1-1

(a)桁架；(b)单元；(c)位移

元的“组合体”。每个单元的轴力N是待求的未知数。设各杆件的几何及物理性质如下：

长度：$l_{14}=l_{34}=l_1$，$l_{24}=l_2$；

截面积：$A_{14}=A_{34}=A_1$，$A_{24}=A_2$；

弹性模量：$E_{14}=E_{34}=E_1$，$E_{24}=E_2$。

由于有三个单元交汇于结点4，只利用平衡条件是不能求出各单元的轴力的，必须分析变形条件。

由材料力学可知，等截面杆件在轴力N作用下，杆端变位为

$$\Delta=\frac{Nl}{AE} \qquad (a)$$

由于对称，结点 4 的水平位移为零。设结点 4 的铅直位移为v_4，而结点 1 、 2 、 3 被固定，于是各单元的变位可计算如下

$$\Delta_{14}=v_4\cos\theta,\quad \Delta_{24}=v_4,\quad \Delta_{34}=v_4\cos\theta, \qquad (b)$$

现在考虑结点 4 的平衡条件，取结点 4 为脱离体（图1-2），则y方向的平衡要求

$$2N_{1y}+N_{2y}=P. \qquad (c)$$

式中N_{1y}和N_{2y}是各杆的杆端力在y轴的投影。

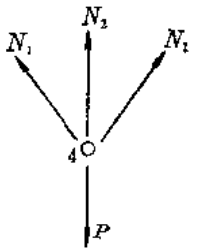


图 1-2　结点 4 的平衡

由（ a ）式和（ b ）式可知

$$\left.\begin{aligned} N_{1y}&=N_1\cos\theta=\frac{E_1A_1}{l_1}\Delta_{14}\cos\theta=\frac{E_1A_1\cos^2\theta}{l_1}v_4=k_1v_4,\\ N_{2y}&=N_2=\frac{E_2A_2}{l_2}\Delta_{24}=\frac{E_2A_2}{l_2}v_4=k_2v_4. \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

式中k_1、k_2称为单元的刚度系数，它的物理意义是当结点 4 的位移为 1 时的杆端力，其数值决定于单元的几何性质和物理性质。例如，单元14的刚度系数为

$$k_{14}=k_1=\frac{E_1A_1\cos^2\theta}{l_1}.$$

单元24的刚度系数为

$$k_{24}=k_2=\frac{E_2A_2}{l}.$$

将（ d ）式代入（ c ）式，得到

$$(2k_1+k_2)v_4=P.$$

由此可求出结点 4 的位移为

$$v_4=\frac{P}{2k_1+k_2}. \qquad (e)$$

式中的 $2k_1+k_2$ 可称为结构的整体刚度系数。利用已求出的位移，最后可求得各单元的轴力如下

$$N_{14}=N_{34}=N_1=\frac{N_{1y}}{\cos\theta}=\frac{k_1v_4}{\cos\theta}=\frac{k_1P}{(2k_1+k_2)\cos\theta},$$

$$N_{24}=N_2=k_2v_4=\frac{k_2P}{2k_1+k_2}.$$

这种以位移作为基本未知量，通过结点平衡方程求出结点位移，再由位移反推出各单元的内力的方法，称为“位移法”。

通过上述例题，可把有限单元法简述如下：把一个结构看成是由有限个单元通过结点拼合起来的整体，除去边界上被固定的结点外，对可以产生位移的各结点，利用平衡条件求出它们的位移，然后由结点位移求出各单元内力。

也可以把各单元的内力作为基本未知量加以求解，即所谓“力法”，但其矩阵运算比位移法为复杂，故实际工作中力法采用不多，而广泛地采用位移法。

§1-2 水平杆单元的刚度矩阵

上节中各杆的刚度系数是一种特例，因杆的一端是固定的。作为一般形式，如图1-3所示桁架，杆的两端都可产生位移。为了循序渐进，在这一节我们先研究水平直杆ij，如图1-4所示。

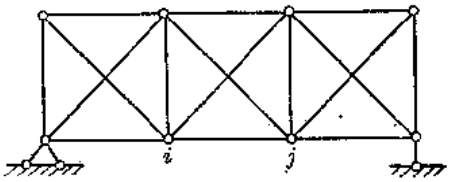


图 1-3 桁架

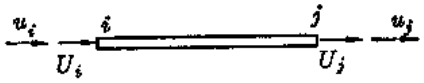


图 1-4 水平杆单元

杆单元两端各有一个水平结点位移，即u_i和u_j，它具有两个自由度，它的刚度矩阵应该是二阶的。

杆的受力情况可分解为两种状态。

状态一：$u_i=u_i$，$u_j=0$。

这时，结点j被固定，单元内的应变为

$$\varepsilon=-\frac{u_i}{l};$$

单元应力为

$$\sigma=E\varepsilon=-\frac{Eu_i}{l};$$

单元左端结点力为（在材料力学中以拉应力为正，在有限单元法中，如图1-4所示，以向右的结点力为正，所以下式中加一负号）。

$$U_i=-A\sigma=\frac{AE}{l}u_i;$$

单元右端结点力为

$$U_j=A\sigma=-\frac{AE}{l}u_i.$$

状态二：$u_i=0$，$u_j=u_j$。

这种状态与状态一正好相反：

单元应变为 $$\varepsilon=\frac{u_j}{l}.$$

单元应力为 $$\sigma=\frac{Eu_j}{l}.$$

单元左端结点力为 $$U_i=-A\sigma=-\frac{AE}{l}u_j.$$

单元右端结点力为 $$U_j=A\sigma=\frac{AE}{l}u_j.$$

把以上两种状态的结果叠加起来，得到左右两端都可变位情况下单元结点力为

$$U_i=\frac{AE}{l}u_i-\frac{AE}{l}u_j,$$

$$U_j=-\frac{AE}{l}u_i+\frac{AE}{l}u_j.$$

写成矩阵形式，得到

$$\begin{Bmatrix}U_i\\U_j\end{Bmatrix}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=[k]^e\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}. \tag{1-1}$$

式中

$$[k]^e=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix} \tag{1-2}$$

称为单元刚度矩阵。

单元轴力可写成

$$N=\frac{AE}{l}[-1\quad 1]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}=[S]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\end{Bmatrix}. \tag{1-3}$$

式中

$$[S]=\frac{AE}{l}[-1\quad 1]. \tag{1-4}$$

在杆件结构中，通常以轴力作为广义应力，因此矩阵$[S]$称为单元应力矩阵。

实际上，在结点 i 和 j，除了水平位移外，还可产生垂直位移（但在小变形条件下，垂直结点位移对铰接杆的内力无影响）。我们可以把单元刚度矩阵扩展为四阶的形式，单元结点力为

$$\begin{Bmatrix}U_i\\V_i\\U_j\\V_j\end{Bmatrix}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{Bmatrix}. \tag{1-5}$$

这里引入了垂直结点位移v_i、v_j和垂直结点力V_i、V_j，并在刚度矩阵中添上了相应的零元素。

单元轴力为

$$N=\frac{AE}{l}[-1\quad 0\quad 1\quad 0]\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{Bmatrix}=[S]\{\delta\}^e, \tag{1-6}$$

其中$\{\delta\}^e=[u_i\quad v_i\quad u_j\quad v_j]^T$。

§1-3 倾斜杆单元的刚度矩阵

在铰接桁架中，经常遇到倾斜杆单元，如图1-5所示。在结点 i，结点位移为

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}.$$

其中u_i和 v_i分别是水平和垂直结点位移分量。i 点的结点力为

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}.$$

其中U_i、V_i分别是结点力的水平和垂直分量。我们规定结点位移u_i、v_i和结点力U_i、V_i 的符号如下：与坐标轴 x、y 取相同方向者为正，反之为负。

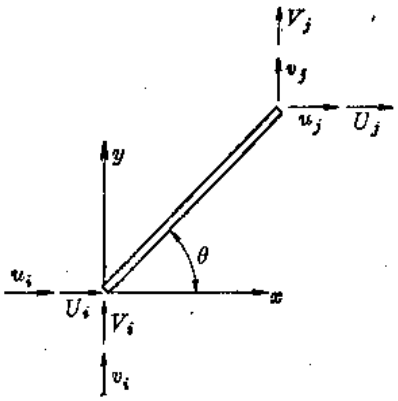


图 1-5 倾斜杆单元

首先分析斜杆的应变-位移关系。设杆单元的长度为 l，由几何关系可知

$$l^2=(x_j-x_i)^2+(y_j-y_i)^2. \qquad (a)$$

对上式两边求微分，得到

$$l\,dl=(x_j-x_i)(dx_j-dx_i)+(y_j-y_i)(dy_j-dy_i),$$

上式两边各除以 l，得

$$dl=\alpha(dx_j-dx_i)+\beta(dy_j-dy_i), \qquad (b)$$

式中

$$\alpha=\cos\theta=\frac{x_j-x_i}{l},\quad \beta=\sin\theta=\frac{y_j-y_i}{l}. \qquad (c)$$

杆件受力变形后，结点 i 的坐标将从（x_i，y_i）改变为$(x_i+u_i,\ y_i-v_i)$，即

$$dx_i=u_i,\quad dy_i=v_i.$$

同样

$$dx_j=u_j,\quad dy_j=v_j$$

代入（b）式，并除以 l 后，得到杆单元的应变如下

$$\varepsilon=\frac{dl}{l}=\frac{\alpha}{l}(-u_i+u_j)+\frac{\beta}{l}(-v_i+v_j). \qquad (d)$$

斜杆单元轴力为

$$N=AE\varepsilon=\frac{AE}{l}[\alpha(-u_i+u_j)+\beta(-v_i+v_j)]. \qquad (1\text{-}7)$$

我们规定轴力N以拉力为正。

结点力的绝对值分别等于轴力N的水平和铅直分量，即

$$\left.\begin{aligned} U_i&=-N\cos\theta,\quad V_i=-N\sin\theta,\\ U_j&=N\cos\theta,\quad\ V_j=N\sin\theta, \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

把式（1-7）代入上式，得到斜杆单元的结点力如下：

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}U_i\\V_i\\U_j\\V_j\end{Bmatrix}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2\\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta\\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_j\\v_j\end{Bmatrix}$$
$$=[k]^e\{\delta\}^e. \tag{1-8}$$

式中$[k]^e$是斜杆单元的刚度矩阵。上式也可写成分块矩阵形式如下

$$\begin{Bmatrix}F_i\\F_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_{ii} & k_{ij}\\k_{ji} & k_{jj}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_i\\\delta_j\end{Bmatrix}. \tag{1-9}$$

式中

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix}U_i\\V_i\end{Bmatrix},\{F_j\}=\begin{Bmatrix}U_j\\V_j\end{Bmatrix},\ \{\delta_i\}=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\end{Bmatrix},\ \{\delta_j\}=\begin{Bmatrix}u_j\\v_j\end{Bmatrix},$$
$$[k_{ii}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{bmatrix},\ [k_{ij}]=[k_{ji}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}-\alpha^2 & -\alpha\beta\\ -\alpha\beta & -\beta^2\end{bmatrix},$$
$$[k_{jj}]=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}\alpha^2 & \alpha\beta\\ \alpha\beta & \beta^2\end{bmatrix},\ \alpha=\cos\theta,\ \beta=\sin\theta. \tag{1-10}$$

从式（1-8）可以看出，单元刚度矩阵是对称的，这并非偶然现象，而是结构力学中功的互等定理的必然结果。

由式（1-7）可知斜杆单元应力矩阵为

$$[S]=\frac{AE}{l}[-\alpha\quad -\beta\quad \alpha\quad \beta]. \tag{1-11}$$

§1-4 坐标转换

在上一节中，斜杆单元刚度矩阵$[k]$是根据斜杆的应变-位移关系推导出来的，它也可以根据坐标转换关系从式（1-5）中水平杆单元的刚度矩阵直接计算出来。

如图1-6所示，在结构的整体坐标（x，y）之外，再取局部坐标（$\bar{x}$，$\bar{y}$），其中$\bar{x}$轴平行于杆单元ij的轴线，而$\bar{y}$轴垂直于杆单元的轴线。由水平杆单元结点力算式(1-5)，可知在局部坐标系（$\bar{x}$，$\bar{y}$）中，杆ij的结点力可由下式计算：

$$\{\bar{F}\}=\begin{Bmatrix}\bar{U}_i\\\bar{V}_i\\\bar{U}_j\\\bar{V}_j\end{Bmatrix}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar{u}_i\\\bar{v}_i\\\bar{u}_j\\\bar{v}_j\end{Bmatrix} \tag{1-12}$$

或缩写成

$$\{\bar{F}\}=[\bar{k}]^e\{\bar{\delta}\}. \tag{1-13}$$

从图1-6可知，在局部坐标和整体坐标之间，力的转换关系为

$$\left.\begin{aligned}\overline{U}_i&=U_i\cos\theta+V_i\sin\theta,\\ \overline{V}_i&=-U_i\sin\theta+V_i\cos\theta,\\ \overline{U}_j&=U_j\cos\theta+V_j\sin\theta,\\ \overline{V}_j&=-U_j\sin\theta+V_j\cos\theta.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

写成矩阵形式，则为

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_i\\ \overline{V}_i\\ \overline{U}_j\\ \overline{V}_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0&0\\ -\beta&\alpha&0&0\\ 0&0&\alpha&\beta\\ 0&0&-\beta&\alpha\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ U_j\\ V_j\end{Bmatrix}.\quad(b)$$

或缩写为 $\{\overline{F}\}=[T]\{F\}$。 (1-14)

式中

$$[T]=\begin{bmatrix}\alpha&\beta&0&0\\ -\beta&\alpha&0&0\\ 0&0&\alpha&\beta\\ 0&0&-\beta&\alpha\end{bmatrix}\quad(1\text{-}15)$$

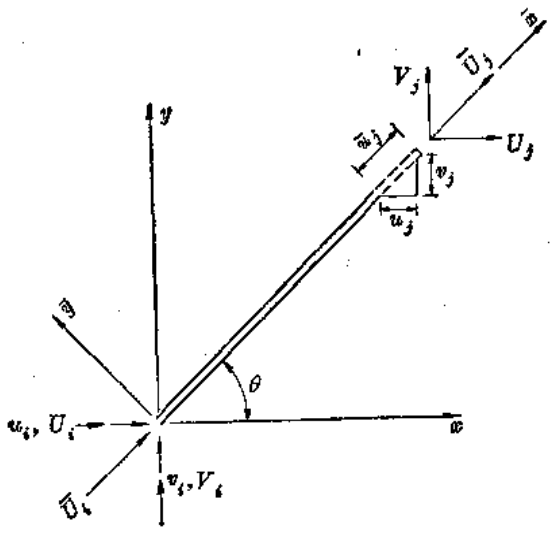


图 1-6

而 $\alpha=\cos\theta$，$\beta=\sin\theta$。矩阵$[T]$可称为转换矩阵。

对于结点位移，在局部坐标与整体坐标之间，也存在着类似的关系：

$$\{\overline{\delta}\}=[T]\{\delta\}。\quad(1\text{-}16)$$

现在我们设法把局部坐标系中的杆单元刚度矩阵，变换成整体坐标系中的刚度矩阵。将（1-14）、（1-16）二式代入（1-13）式，得到

$$[T]\{F\}=[\overline{k}]^e[T]\{\delta\}。$$

在上式两侧各左乘以$[T]^{-1}$，得到

$$\{F\}=[T]^{-1}[\overline{k}]^e[T]\{\delta\}。$$

由于$[T]$是正交矩阵，所以$[T]^{-1}=[T]^T$，由上式

$$\{F\}=[T]^T[\overline{k}]^e[T]\{\delta\}$$

或
$$\{F\}=[k]^e\{\delta\}。\quad(1\text{-}17)$$

式中
$$[k]^e=[T]^T[\overline{k}]^e[T]。\quad(1\text{-}18)$$

矩阵$[k]^e$是整体坐标系中的单元刚度矩阵。上式是把局部坐标系中的单元刚度矩阵$[\overline{k}]^e$转换为整体坐标系中单元刚度矩阵的基本公式。读者不难验证，将$[\overline{k}]^e$和$[T]$代入（1-18）式，得到的$[k]^e$与上节的（1-8）式是完全相同的。

§1-5 结点平衡方程与整体刚度矩阵

今从一个桁架中取出一个结点i来，如图1-7所示，设环绕i点共有三个杆单元，即ij、im、ip。结点i承受的水平和垂直荷载分别为X_i和Y_i。

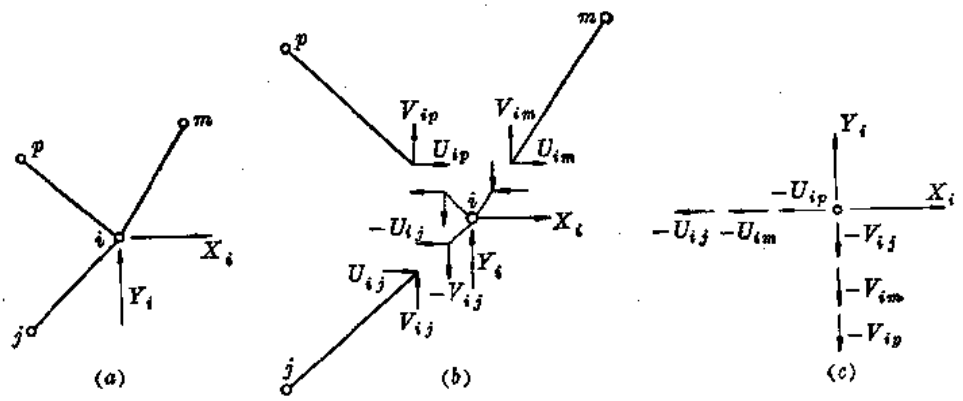


图 1-7 结点 i 的平衡

根据力的平衡，作用于杆单元的结点力与作用于结点的结点力，其大小相等而方向相反。以杆ij为例，作用于杆单元的结点力是 $[U_{ij},\ V_{ij}]^T$，而作用于结点 i 的结点力是 $[-U_{ij},\ -V_{ij}]^T$。

为了分析结点的平衡条件，把结点 i 作为脱离体取出来，如图1-7(c)。结点 i 将在结点荷载（X_i、Y_i）和各杆单元所施加的结点力之间保持平衡。结点i在水平和垂直方向的平衡方程是

$$X_i-U_{ij}-U_{im}-U_{ip}=0,$$
$$Y_i-V_{ij}-V_{im}-V_{ip}=0.$$

或改写为

$$\left.\begin{aligned}\sum_{e-j,\,m,\,p}U_{ie}&=X_i,\\ \sum_{e-j,\,m,\,p}V_{ie}&=Y_i.\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}19)$$

上式中 $\sum_e$ 表示对环绕结点 i 的单元求和。显然，与结点 i 无关的单元不进入上述求和式。

由式（1-9）可知杆单元ij施于结点i的结点力为

$$\{F_{ij}\}=\begin{Bmatrix}U_{ij}\\V_{ij}\end{Bmatrix}=[k_{ii}]\{\delta_i\}+[k_{ij}]\{\delta_j\},$$

结点荷载为

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix}X_i\\Y_i\end{Bmatrix}.$$

代入（1-19）式，得到结点 i 的平衡方程如下

$$(\sum_e[k_{ii}])\{\delta_i\}+[k_{ij}]\{\delta_j\}+[k_{im}]\{\delta_m\}+[k_{ip}]\{\delta_p\}+\cdots=\{P_i\}$$

或缩写为

$$(\sum_e[k_{ii}])\{\delta_i\}+\sum_e[k_{ij}]\{\delta_j\}=\{P_i\}.\qquad(1\text{-}20)$$

每个结点都有一对平衡方程如上，对全部结点，$i=1,\ 2,\ \cdots N$，逐个写出它们的平衡方

程，得到$2N$阶线性方程组如下（N为结构的结点数）：

$$[K]\{\delta\}=\{P\}. \qquad (1\text{-}21)$$

这就是结构的结点平衡方程组。式中$\{\delta\}=[\delta_1,\delta_2,\cdots\delta_N]^T$是全部结点位移组成的列阵，$\{P\}=[P_1,P_2,\cdots P_N]^T$是全部结点荷载组成的列阵。矩阵$[K]$称为结构的整体刚度矩阵，根据式（1-20），其元素可计算如下：

$$K_{rs}=\sum_e k_{ij}. \qquad (1\text{-}22)$$

其中$\sum_e$表示对交会于结点i的各单元求和。脚标rs表示K_{rs}位于整体刚度矩阵$[K]$的第r行第s列，而脚标ij表示k_{ij}位于单元刚度矩阵的第i行第j列。根据结点编号及自由度顺序不难确定rs和ij，详见以后各节。

整体刚度系数K_{rs}的物理意义是，结构第s个自由度的单位变形所引起的第r个结点力。

由平衡方程（1-21）解出结点位移之后，由应力矩阵可以计算各单元的内力。

§1-6 边界条件的处理

边界上的结点通常有两种情况。一种边界上的结点可自由变形，如图1-8中的结点5、6、7、8等。这时只要让这些结点上的荷载等于零就可以了。或者如结点3作用着外荷载，可令该点的结点荷载等于规定的荷载Q。这种边界条件的处理是比较简单的。另一种边界上的结点，规定了结点位移的数值，如对图1-8所示桁架，要求

$$u_1=v_1=v_4=0,\quad v_2=b. \qquad (a)$$

这时是否可以把规定的位移数值（a）直接放到平衡方程$[K]\{\delta\}=\{P\}$中去呢？当采用迭代法求解时，是可以这样做的。如果采用直接法求解时，就不能这样做了，因为直接法是以全部结点位移都是未知量为基础的。

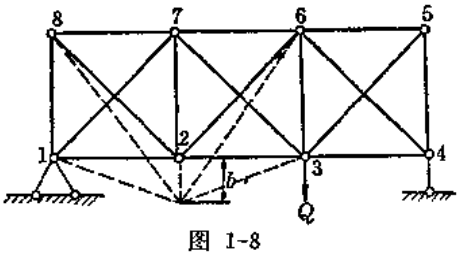


图 1-8

现在把平衡方程组（1-21）重新排列如下：

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ab}^T & K_{bb} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

其中$\{\delta_b\}$是已知的结点位移，如式（a）所表示的几个结点位移，$\{\delta_a\}$是未知的结点位移。相应地，$\{P_a\}$是已知的结点荷载，而$\{P_b\}$是未知的支点反力。根据矩阵乘法，由上式可得

$$[K_{aa}]\{\delta_a\}+[K_{ab}]\{\delta_b\}=\{P_a\}, \qquad (c)$$

$$[K_{ab}]^T\{\delta_a\}+[K_{bb}]\{\delta_b\}=\{P_b\}. \qquad (d)$$

只要已给出的位移$\{\delta_b\}$足以阻止结构的刚体移动，则子矩阵$[K_{aa}]$将是非奇异的，由式（c）可解出未知结点位移$\{\delta_a\}$如下：

$$\{\delta_a\}=[K_{aa}]^{-1}(\{P_a\}-[K_{ab}]\{\delta_b\}) \qquad (e)$$

把上式代入式（d），可求出结点反力如下：

$$\{P_b\}=([K_{bb}]-[K_{ab}]^T[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}])\{\delta_b\}+[K_{ab}]^T[K_{aa}]^{-1}\{P_a\}。\quad(f)$$

如果所有支座都是刚性的，已给出的结点位移$\{\delta_b\}=\{0\}$，则（c）、（d）二式简化为

$$[K_{aa}]\{\delta_a\}=\{P_a\};\quad(g)$$

$$[K_{ab}]^T\{\delta_a\}=\{P_b\}。\quad(h)$$

在这种情况下，由式（b）得到式（g）是比较容易的。在整体刚度矩阵$[K]$中，首先把对应于$\{P_b\}$的各行删去，在剩下的部分，再把对应于$\{\delta_b\}$的各列删去，即得到$[K_{aa}]$及（g）式。由（g）式求出$\{\delta_a\}$，再代入式（h），即得到支座反力$\{P_b\}$。

上面我们说明了求解平衡方程组的步骤，但在有限单元法中，未知量的个数通常有几百个，甚至上万个，一般都利用电子计算机求解。给定位移的结点和给定荷载的结点实际上是交错出现的，把一个大型矩阵$[K]$按式（b）方式分块，在程序上还是比较麻烦的。通常为了程序设计的方便，矩阵的阶最好保持不变，即刚度矩阵$[K]$的行数和列数都不减少。下面我们说明这种边界条件的处理方法。

设结构的平衡方程是

$$\begin{bmatrix}\boxed{k_{1,1}} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & \cdots\cdots & k_{1,16}\\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots\cdots & k_{2,16}\\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots\cdots & k_{3,16}\\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & \boxed{k_{4,4}} & \cdots\cdots & k_{4,16}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ k_{16,1} & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots\cdots & k_{16,16}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ v_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\ Y_1\\ X_2\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_8\end{Bmatrix}。\quad(i)$$

首先，研究$u_1=0$这一条件的实现。在（i）式中作如下变化：

（Ⅰ）在刚度矩阵$[K]$中，除了保留与u_1相对应的并在主对角线上的系数$k_{1,1}$外，第一行与第一列的其余各系数均改为零；

（Ⅱ）在荷载列阵中，令$X_1=0$

这样，（b）式改为如下式子：

$$\begin{bmatrix}k_{1,1} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0\\ 0 & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & \cdots\cdots & k_{2,16}\\ 0 & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & \cdots\cdots & k_{3,16}\\ 0 & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4} & \cdots\cdots & k_{4,16}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & k_{16,2} & k_{16,3} & k_{16,4} & \cdots\cdots & k_{16,16}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ \vdots\\ v_8\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ Y_1\\ X_2\\ Y_2\\ \vdots\\ Y_8\end{Bmatrix}。\quad(j)$$

按上式求解，就能实现$u_1=0$这一条件。$v_1=v_4=0$等条件可以类推。

现在再研究$v_2=b$这一条件的实现。我们设想这样一种状态：除$\bar{v}_2=-b$外，其余各结点都被固定。这时，结点位移列阵是

$$\{\overline{\delta}\}=[\,0\quad 0\quad 0\quad -b\quad 0\cdots\cdots 0\,]^T;$$

结点荷载列阵是

$$\{\bar{P}\}=[K]\{\bar{\delta}\}=[-k_{1,4}b \quad -k_{2,4}b \quad \cdots\cdots -k_{16,4}b]^T。$$

把这种状态叠加到原来的结构上去，得到新的结点平衡方程如下：

$$[K](\{\delta\}+\{\bar{\delta}\})=\{P\}+\{\bar{P}\}。$$

再使边界条件满足下式

$$v_2+\bar{v}_2=v_2-b=0。$$

参照前面$u_1=0$的处理方法，可知为了实现$v_2=b$，应作如下处理：

（Ⅰ）在刚度矩阵$[K]$中，与v_2对应的第4行和第4列的各系数均改为零，只保留对角线上的系数$k_{4,4}$；

（Ⅱ）在荷载列阵中，与v_2对应的荷载改为$Y_2=k_{4,4}b$，其余都改为$\{P\}+\{\bar{P}\}$中相应的各项：

$$X_1-k_{1,4}b,\ Y_1-k_{2,4}b,\ \cdots\cdots,$$

也就是说，为了实现$v_2=b$，应把平衡方程改成如下形式：

$$\begin{Bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & 0 & k_{1,5} & \cdots \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & 0 & k_{2,5} & \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & 0 & k_{3,5} & \\ 0 & 0 & 0 & k_{4,4} & 0 & \cdots \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & 0 & k_{5,4} & \cdots \\ \cdots\cdots & & & & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1-k_{1,4}b \\ Y_1-k_{2,4}b \\ X_2-k_{3,4}b \\ k_{4,4}b \\ X_3-k_{5,4}b \\ \vdots \end{Bmatrix}。 \qquad (k)$$

按上式求解，即自动实现$v_2=b$这一条件。

为了进一步简化计算，可采用如下近似方法：

（Ⅰ）把与v_2对应的对角线上的刚度系数$k_{4,4}$，换为一个极大的数，例如可换成$k_{4,4}\times10^8$，即

$$k_{4,4}\longrightarrow k_{4,4}\times10^8;$$

（Ⅱ）把与v_2对应的结点荷载换成 $k_{4,4}\times10^8\times b$，即

$$Y_2\longrightarrow k_{4,4}\times10^8\times b。$$

其余均保留不变，即把平衡方程（i）改为如下形式：

$$\begin{Bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} & k_{1,4} & k_{1,5} & \cdots \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} & k_{2,4} & k_{2,5} & \cdots \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} & k_{3,4} & k_{3,5} & \cdots \\ k_{4,1} & k_{4,2} & k_{4,3} & k_{4,4}\times10^8 & k_{4,5} & \cdots \\ k_{5,1} & k_{5,2} & k_{5,3} & k_{5,4} & k_{5,5} & \cdots \\ \cdots\cdots & & & & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ \vdots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ k_{4,4}\times10^8\times b \\ X_3 \\ \vdots \end{Bmatrix}。 \qquad (l)$$

如果把上述方程组的第四个方程的左右两边都除以10^8，那末左边除了$k_{4,4}v_2$外，其余各项均接近于零，右边为$k_{4,4}b$。因此按上式求解，给出的v_2将十分接近于b，即

$$v_2\simeq b。$$

以上所述两种处理方法，适用于各种矩阵求解方法。特别是第二种方法，在程序设计上十

分方便。

在不少情况下需要计算支座反力，这时只要把已经求出的结点位移代入未经修改的支点平衡方程就可计算所求的反力。例如，为了计算结点 1 的反力 R_{x1}和 R_{y1}，由（ i ）式中的第一、二两式，支点 1 的平衡条件可写出如下：

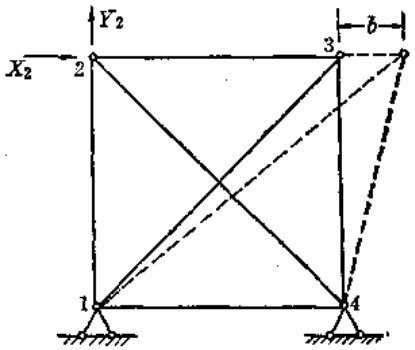


图 1-9

$$\left.\begin{aligned} R_{x1}&=X_1-k_{11}u_1-k_{12}v_1-k_{13}u_2-\cdots-k_{1,16}v_8,\\ R_{y1}&=Y_1-k_{21}u_1-k_{22}v_1-k_{23}u_2-\cdots-k_{2,16}v_8. \end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

把已经解出的结点位移代入以上二式，即可求出支点反力R_{x1}和R_{y1}。

现在以图1-9所示的桁架为例，说明计算方法。支承条件是

$$u_1=v_1=u_4=v_4=0,$$
$$u_3=b. \qquad (n)$$

该桁架共有 6 个杆单元，各单元的尺寸和倾角列于表1-1。

首先计算单元刚度矩阵，由（ 1-8 ）式可知

表 1-1

单元	i 点	j 点	面积	长度	弹性模量	倾角 θ	$\alpha=\cos\theta$	$\beta=\sin\theta$	α^2	β^2	$\alpha\beta$
1-2	1	2	A	l	E	90°	0	1	0	1	0
1-3	1	3	A	$\sqrt{2}l$	E	45°	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
1-4	1	4	A	l	E	0	1	0	1	0	0
2-3	2	3	A	l	E	0	1	0	1	0	0
2-4	2	4	A	$\sqrt{2}l$	E	315°	$1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	1/2
3-4	3	4	A	l	E	270°	0	-1	0	1	0

$$[k]^e=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix}.$$

将表1-1中数据代入上式，得到各杆单元的刚度矩阵如下：

$$[k]^e_{12}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[k]^e_{13}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix};$$

$$[k]^{e}_{14}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&0&0\\-1&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

……。

结构共有 8 个自由度，结点平衡方程组是

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}&K_{13}&K_{14}&K_{15}&K_{16}&K_{17}&K_{18}\\K_{21}&K_{22}&K_{23}&K_{24}&K_{25}&K_{26}&K_{27}&K_{28}\\K_{31}&K_{32}&K_{33}&K_{34}&K_{35}&K_{36}&K_{37}&K_{38}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\K_{81}&K_{82}&K_{83}&K_{84}&K_{85}&K_{86}&K_{87}&K_{88}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\\vdots\\v_4\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}X_1\\Y_1\\X_2\\\vdots\\Y_4\end{Bmatrix}.$$

由式（1-22），整体刚度矩阵的元素可由下式计算：

$$K_{rs}=\sum_{e}k_{ij}.$$

式中$\sum_{e}$表示对交会于 i 点的各单元求和。例如有12、13、14三个杆单元交会于结点 1，在计算结点 1 的整体刚度系数时，应将这三个单元的有关刚度系数k_{ij}代入上式求和，如

$$K_{11}=(k_{11})_{12}+(k_{11})_{13}+(k_{11})_{14}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}(0+0.5+\sqrt{2})$$

$$=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\times 1.914;$$

$$K_{12}=(k_{12})_{12}+(k_{12})_{13}+(k_{12})_{14}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}(0+0.5+0)$$

$$=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\times 0.5;$$

$$K_{13}=(k_{13})_{12}=0;$$

$$K_{14}=(k_{14})_{12}=0;$$

$$K_{15}=(k_{13})_{13}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\times(-0.5);$$

$$K_{16}=(k_{14})_{13}=\frac{AE}{\sqrt{2}l}\times(-0.5);$$

$$K_{17}=(k_{13})_{14}=\frac{AE}{l}\times(-1);$$

$$K_{18}=(k_{14})_{14}=0.$$

上述各式中$(k_{13})_{14}$表示杆 14 的单元刚度矩阵的第 1 行的第 3 个元素。以上这些就是整体刚度矩阵$[K]$中第 1 行的各元素，对这些系数的计算，下面加以说明。

K_{11}是结构第 1 个自由度u_1产生单位位移 $u_1=1$ 时所引起的第 1 个结点力 U_1，由图1-9可知$u_1=1$时，三个单元12、13、14都产生结点力U_1，所以由三个单元刚度系数k_{11}相加而得到K_{11}。

又如K_{16}是结构第 6 个自由度$v_3=1$所引起的结点力U_1，单元12、14与v_3无关，不参加计算。v_3对结构来说是第 6 个自由度，但对单元13来说是第4个自由度，故$K_{16}=(k_{14})_{13}$。

依此类推，可计算整体刚度矩阵[K]的其他各元素，从而得到结点平衡方程组如下：

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l}\begin{bmatrix} 1.914 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix}. \qquad (o)$$

今考虑（ n ）式所表示的边界条件。根据前述近似方法在整体刚度矩阵[K]中，把与u_1、v_1、u_3、u_4、v_4等对应的主对角线上的刚度系数k_{11}、k_{22}、k_{55}、k_{77}、k_{88}各乘以10^8，在荷载列阵{P}中，把对应的荷载X_1、Y_1、X_4、Y_4改为零，X_3改为$k_{55}\times 10^8\times b$，得到平衡方程如($P$)式

$$\frac{AE}{\sqrt{2}l}\times\begin{bmatrix} 1.914\times10^8 & 0.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 \\ 0.5 & 1.914\times10^8 & 0 & -1.414 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.914 & -0.5 & -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 \\ 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914 & 0 & 0 & 0.5 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.414 & 0 & 1.914\times10^8 & 0.5 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 1.914 & 0 & -1.414 \\ -1.414 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1.914\times10^8 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & -0.5 & 0 & -1.414 & -0.5 & 1.914\times10^8 \end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ X_2 \\ Y_2 \\ 1.914\times10^8\times b \\ Y_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \qquad (p)$$

由上式求解，即可得到符合边界条件（ n ）式的结点位移的解答。把求出的结点位移代入（1-7）式，可求出各单元的轴力。

由此例可见，在建立整体刚度矩阵以后，剩下的就是一些代数运算了。因此，从力学上看，问题的关键在于建立整体刚度矩阵。

§1-7 梁单元的刚度矩阵

结构力学中所遇到的杆件，大部分是受弯的，如图1-10所示的刚架，可认为是由三个单元12、23、34在结点2、3处接合而成的组合体，结点的位移为转角 ϕ 和侧移 Δ，通常可以忽略轴力的影响，以简化计算。

今考虑图1-11所示等截面梁单元 ij，它的长度为 l，惯性矩为 I。单元的结点力为弯

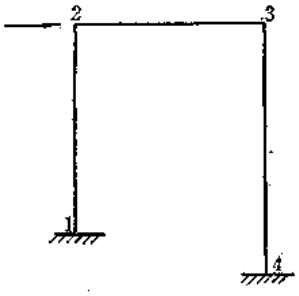


图 1-10 刚架

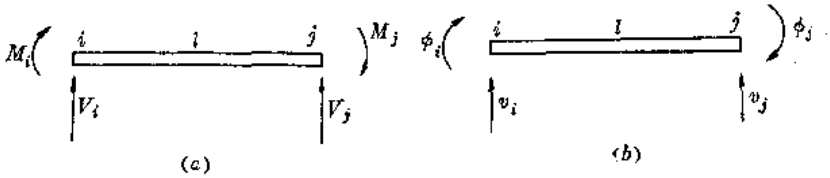


图 1-11 梁单元的结点力和结点位移
(a)结点力；(b)结点位移

矩 M 和剪力 V，如 i 点的结点力是

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \end{Bmatrix}.$$

单元的结点位移为转角 ϕ 和线位移 v，如 i 点的结点位移为

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \end{Bmatrix}.$$

单元的结点力与结点位移之间存在如下关系：

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e. \qquad (1\text{-}23)$$

式中 $[k]^e$ 为梁单元的刚度矩阵，而

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} V_i \\ M_i \\ V_j \\ M_j \end{Bmatrix},\quad \{\delta\}^e=\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} v_i \\ \phi_i \\ v_j \\ \phi_j \end{Bmatrix}.$$

由结构力学可知，当 $v_i=1$，$\phi_i=v_j=\phi_j=0$ 时，梁单元所受的结点力如图1-12(a)所示，即

$$V_i=\frac{12EI}{l^3},\ M_i=-\frac{6EI}{l^2},\ V_j=-\frac{12EI}{l^3},\ M_j=-\frac{6EI}{l^2}.$$

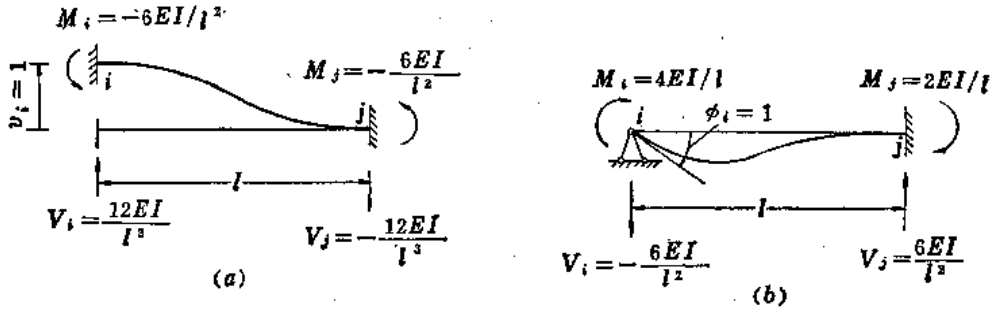


图 1-12 $v_i=1$及$\phi_i=1$时梁单元的结点力
(a)$v_i=1$; (b)$\phi_i=1$

单元刚度矩阵[k]中第一列的四个元素分别等于上述四个结点力，即分别等于

$$\frac{EI}{l^3}[12\quad -6l\quad -12\quad -6l]^T.$$

类似上述，由于$\phi_i=1$($\phi_j=v_i=v_j=0$)，梁单元所受结点力如图1-12(b)所示，即

$$V_i=-\frac{6EI}{l^2},M_i=\frac{4EI}{l},V_j=\frac{6EI}{l^2},M_j=\frac{2EI}{l}.$$

因此刚度矩阵[k]中第二列的四个元素是

$$\frac{EI}{l^3}[-6l\quad 4l^2\quad 6l\quad 2l^2]^T.$$

由于$v_j=1$及$\phi_j=1$而产生的结点力，即本梁单元 i j 的刚度矩阵[k]中第 3 列 和 第 4 列的元素，也可用上述方法求得。综合以上结果，得到水平梁单元的刚度矩阵如下：

$$[k]^e=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & -6l & -12 & -6l\\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2\\ -12 & 6l & 12 & 6l\\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{bmatrix}. \qquad (1\text{-}24)$$

因此，水平梁单元结点力与结点位移之间的关系，可写成显式如下：

$$\begin{Bmatrix}V_i\\ M_i\\ V_j\\ M_j\end{Bmatrix}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & -6l & -12 & -6l\\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2\\ -12 & 6l & 12 & 6l\\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_i\\ \phi_i\\ v_j\\ \phi_j\end{Bmatrix}. \qquad (1\text{-}25)$$

有时为了方便，也可把上式写成下面的形式

$$\begin{Bmatrix}V_i\\ \frac{M_i}{l}\\ V_j\\ \frac{M_j}{l}\end{Bmatrix}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & -6 & -12 & -6\\ -6 & 4 & 6 & 2\\ -12 & 6 & 12 & 6\\ -6 & 2 & 6 & 4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}v_i\\ l\phi_i\\ v_j\\ l\phi_j\end{Bmatrix}. \qquad (1\text{-}26)$$

在计算梁单元刚度矩阵时，也可以不用结点的绝对位移，而采用梁单元两结点的相对挠度（参阅图1-13）：

$$\Delta_{ij}=v_i-v_j.$$

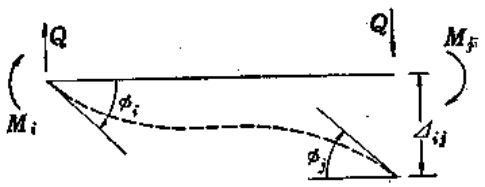


图 1-13

这时，梁单元结点位移和结点力分别为

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \Delta_{ij}\end{Bmatrix},\{F\}^e=\begin{Bmatrix}M_i\\ M_j\\ Q\end{Bmatrix}.$$

在（1-25）式中令$v_i=0$，$v_j=-\Delta_{ij}$，可求得梁单元结点力与结点位移关系如下

$$\begin{Bmatrix}M_i\\ M_j\\ Q\end{Bmatrix}=\frac{EI}{l}\begin{bmatrix}4 & 2 & -\frac{6}{l}\\ 2 & 4 & -\frac{6}{l}\\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \Delta_{ij}\end{Bmatrix}. \qquad (1\text{-}27)$$

这里，弯矩M、转角ϕ和位移Δ_{ij}都以顺时针方向为正，切力Q以其力偶为顺时针者为正。

§1-8 梁单元荷载向结点的移置

有限单元法的基本方程是结点平衡方程，因此各单元承受的荷载都应移至结点而成为结点荷载。对于梁单元来说，可固定梁单元的两端，求出固端弯矩M^F和固端切力Q^F，然后改变它们的符号，把$-M^F$和$-Q^F$作为结点荷载，以代替梁单元原来所承受的荷载。

如图1-14所示刚架，在ij单元上承受了均布荷载q。假定i、j两端固定，由结构力

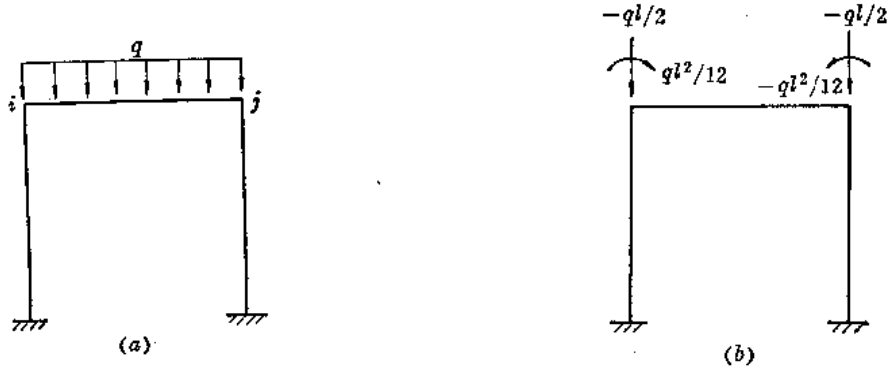


图 1-14 梁单元荷载向结点移置

（a）实际荷载；（b）等效结点荷载

学可知，作用于梁单元ij的固端弯矩和固端切力分别是

$$M_i^F=-\frac{ql^2}{12},\quad M_j^F=\frac{ql^2}{12},\quad Q_i^F=Q_j^F=\frac{ql}{2}.$$

根据平衡条件，作用于单元的结点力与作用于结点的结点力，大小相等而方向相反。把以上各量改变符号，得到作用于 i 、 j 两结点的结点荷载为

$$R_i=-M_i^F=\frac{ql^2}{12},\quad R_j=-M_j^F=-\frac{ql^2}{12};$$

$$Y_i=-Q_i^F=-\frac{ql}{2},\quad Y_j=-Q_j^F=-\frac{ql}{2}.$$

式中 R_i、R_j 表示作用于结点 i 、 j 的力矩荷载。在建立结点平衡方程时，可用这些结点荷载代替原来作用于单元的分布荷载。在解出结点位移后，在计算梁单元的应力时，除了结点位移$\{\delta\}^e$引起的应力外，还必须迭加固端梁的应力。

§1-9 由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵

第 i 个单元的结点力$\{f_i^e\}$与结点位移$\{s_i^e\}$ 之间的关系可用下式表示

$$\{f_i^e\}=[k_i^e]\{s_i^e\}. \tag{1-28}$$

其中$[k_i^e]$是单元刚度矩阵，下标 i 表示第 i 个单元。

如果整个结构共有 n 个单元，如上式所示的单元的结点力-结点位移关系共可写出 n 个式子来。把这些没有组合的 n 个单元的结点力-结点位移关系列成如下形式：

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1 & & & \\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & k_n \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{Bmatrix}. \tag{a}$$

在上式中，把各单元的刚度矩阵$[k_i^e]$作为主对角线上的子矩阵列入。上式可记为

$$\{f\}=[k_e]\{s\}. \tag{1-29}$$

设经过组合的整体刚度矩阵为$[K]$，则结构的结点平衡方程为

$$[K]\{\delta\}=\{P\}. \tag{1-30}$$

其中$\{\delta\}$是结点位移矢量，包括结构的全部自由度，$\{P\}$是结点荷载矢量。

设结构的结点位移矢量$\{\delta\}$与（1-29）式中的列阵$\{s\}$之间存在下列关系

$$\{s\}=[A]\{\delta\}. \tag{1-31}$$

式中$[A]$是变换矩阵。

假如结构发生了虚结点位移$\{\overline{\delta}\}$，由上式可知各单元将产生虚位移$\{\overline{s}\}=[A]\{\overline{\delta}\}$。结点荷载所做的虚功为$\{\overline{\delta}\}^T\{P\}$，各单元内力所做虚功为$\{\overline{s}\}^T\{f\}$，由虚功原理

$$\begin{aligned}\{\overline{\delta}\}^T\{P\}&=\{\overline{s}\}^T\{f\}\\&=\{\overline{\delta}\}^T[A]^T\{f\}.\end{aligned}$$

由于$\{\overline{\delta}\}^T$是任意的，由上式可知

$$\{P\}=[A]^T\{f\}$$
$$=[A]^T[k_s]\{s\}$$
$$=[A]^T[k_s][A]\{\delta\}.$$

把上式与（1-30）式加以比较，可见

$$[K]=[A]^T[k_s][A]. \qquad (1\text{-}32)$$

因此，把未经组合的单元刚度矩阵$[k_s]$，作变换$[A]^T[k_s][A]$，即得到结构整体刚度矩阵$[K]$。

现在以图1-15所示刚架为例，说明如何由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵。

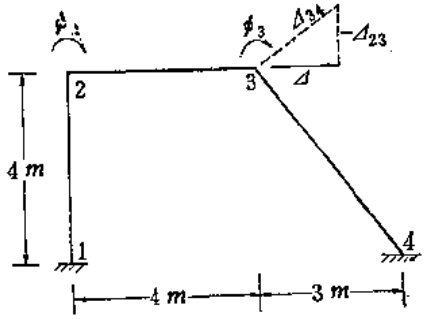


图 1-15

首先计算单元刚度矩阵，由（1-27）式，梁ij的结点力-结点位移关系是

$$\begin{Bmatrix} M_i \\ M_j \\ Q \end{Bmatrix} = \frac{EI}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{6}{l} \\ 2 & 4 & -\frac{6}{l} \\ -\frac{6}{l} & -\frac{6}{l} & \frac{12}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \Delta_{ij} \end{Bmatrix}.$$

因此，三个梁单元的刚度矩阵分别是

$$\left[k\right]^e_{12} = \frac{EI}{4} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{6}{4} \\ 2 & 4 & -\frac{6}{4} \\ -\frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & \frac{12}{4^2} \end{bmatrix} = \left[k\right]^e_{23}$$

$$\left[k\right]^e_{34} = \frac{EI}{5} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -\frac{6}{5} \\ 2 & 4 & -\frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & -\frac{6}{5} & \frac{12}{5^2} \end{bmatrix}.$$

把这些单元刚度矩阵代入（a）式，得到

$$[k_s]=EI\begin{bmatrix}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1/2 & -6/4^2\\ \hline 1/2 & 1 & -6/4^2\\ \hline -6/4^2 & -6/4^2 & 12/4^3\\ \hline\end{array} & & \\
& \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1/2 & -6/4^2\\ \hline 1/2 & 1 & -6/4^2\\ \hline -6/4^2 & -6/4^2 & 12/4^3\\ \hline\end{array} & \\
& & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 4/5 & 2/5 & -6/5^2\\ \hline 2/5 & 4/5 & -6/5^2\\ \hline -6/5^2 & -6/5^2 & 12/5^3\\ \hline\end{array}
\end{bmatrix}. \quad (b)$$

忽略轴力影响，各杆长度不变，因此结点2的竖向位移$v_2=0$；结点2和3的水平位移相等（$u_2=u_3$）；而且$u_3:v_3=4:3$。这个刚架只有三个独立的结点位移ϕ_2，ϕ_3，Δ。忽略杆的轴向应变由图1-15所示几何关系可以推知

$$\Delta_{34}=\frac{5}{4}\Delta, \quad \Delta_{23}=-v_3=-\frac{3}{4}\Delta$$

由此可得下列变换式：

$$\{s\}=\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \Delta_{12}\\ \phi_2\\ \phi_3\\ \Delta_{23}\\ \phi_3\\ \phi_4\\ \Delta_{34}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\ 1&0&0\\ 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&-\frac{3}{4}\\ 0&1&0\\ 0&0&0\\ 0&0&\frac{5}{4}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_2\\ \phi_3\\ \Delta\end{Bmatrix}=[A]\{\delta\}. \quad (c)$$

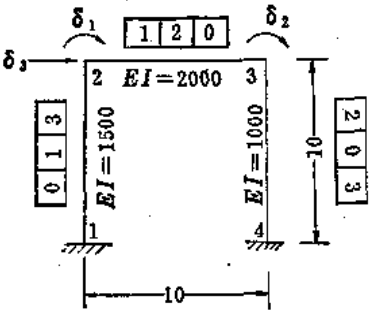
因此，整体刚度矩阵为

$$[K]=[A]^T[k_s][A]=EI\begin{bmatrix}2 & 0.5 & -0.09375\\ 0.5 & 1.8 & -0.01875\\ -0.09375 & -0.01875 & 0.4430\end{bmatrix}.$$

§1-10 编码法建立整体刚度矩阵

上节所述由位移转换矩阵建立整体刚度矩阵的方法有一个缺点：矩阵$[A]$和$[k_s]$要占去

大量计算机存储容量。§1-5所述根据直观把单元刚度矩阵组合为整体刚度矩阵的方法在程序设计上也不方便。在这一节，我们将介绍一个适用于电子计算机的建立整体刚度矩阵的方法，即编码法。



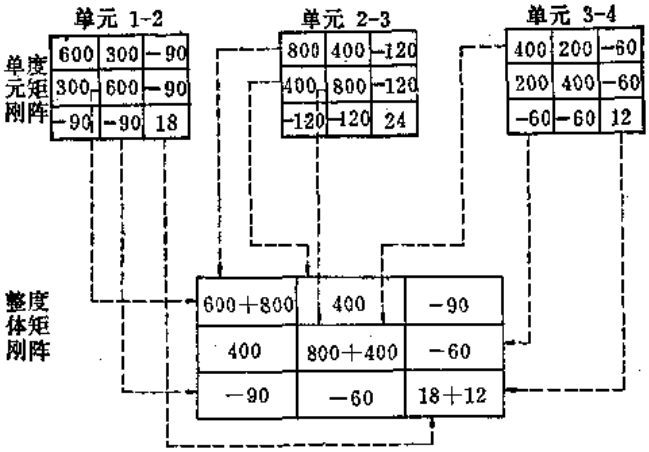


图 1-16

如图1-16所示的刚架有3个单元，图中也列出了各单元的刚度矩阵。为了建立整体刚度矩阵$[K]$，必须把3个单元刚度矩阵的各元素安放到整体刚度矩阵$[K]$中的合适的地方去。单元刚度矩阵的各元素的“号码”或位置决定于它所在的行或列的序号。同样，在整体刚度矩阵中，各元素的号码或位置，也决定于它所在的行和列的序号。因此，为了把单元刚度矩阵组合为整体刚度矩阵，就必须把单元刚度矩阵中各元素的号码与整体刚度矩阵各元素的号码联系起来。

以图1-16单元12为例，这个单元共有3个自由度，即结点1、2的转角ϕ_1和ϕ_2，以及结点2相对于结点1的水平位移Δ_{12}。单元刚度矩阵是3×3阶的，即

$$\left[k\right]^{e}_{12}=\begin{bmatrix}k_{11} & k_{12} & k_{13}\\ k_{21} & k_{22} & k_{23}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33}\end{bmatrix}_{12}=\begin{bmatrix}600 & 300 & -90\\ 300 & 600 & -90\\ -90 & -90 & 18\end{bmatrix}.$$

刚度系数k_{ij}的下标“ij”，表示它位于第i行第j列，其物理意义是，该单元第j个自由度发生单位变形时所引起的第i个结点力。

忽略杆的轴向变形，这个刚架也具有三个自由度，即结点2的转角δ_1，结点3的转角δ_2以及侧移δ_3，这些结构自由度的序号用1、2、3表示。

因此，同一结点位移，在单元自由度中的序号和结点自由度的序号可以相同，也可以不同。例如，结点2的转角，在单元自由度中的序号是2，而在结点自由度中的序号是1。结点2的水平位移，在单元自由度中的序号是3，在结构自由度中的序号也是3。为了建立单元自由度与结构自由度之间的连系，对每一单元可列出一个结点自由度编码表。例如，对单元12，可列出编码表如下：

单元中号码	1	2	3
结构中号码	0	1	3

本单元共有3个自由度，编码表共有三格即 | | | |。表格自左至右的顺序代表单元自由度的序号1、2、3，而表格内所填数字代表结点变形在结构自由度中的序号。由于结点1被固定，其转角为零，所以在本表第一格中填“0”。本表第二格代表单元第2个自由度，即结点2的转角，它在结构自由度中的序号是1，所以填“1”。本表第三格代表单元第3个自由度，即结点2的侧移，它在结构自由度中的序号是3，所以表中填“3”。

设单元刚度系数为k_{ij}，从单元编码表第i格中取出内容为“I”，从第j格中取出内容为J，那么，k_{ij}应放到整体刚度系数K_{IJ}中去，即

$$k_{ij}\longrightarrow K_{IJ}。\tag{1-33}$$

例如，对于单元12，有

$$k_{22}\longrightarrow K_{11};$$
$$k_{23}\longrightarrow K_{13}\longrightarrow K_{31}（由于对称）;$$
$$k_{33}\longrightarrow K_{33}。$$

对其他两个单元可类似地处理，然后可建立整体刚度矩阵如图1-16。

§1-11 考虑轴向力和剪切变形的梁单元刚度矩阵

对于短而粗的梁单元，轴向力和剪切变形的影响不容忽视，在计算中必须予以考虑。如图1-17(a)所示变截面拱，可划分为几个单元，每一单元取一平均厚度。当拱的厚度较大时，计算中除弯曲变形外，还必须考虑轴向变形和剪切变形，下面给出这种梁单元的刚度矩阵。

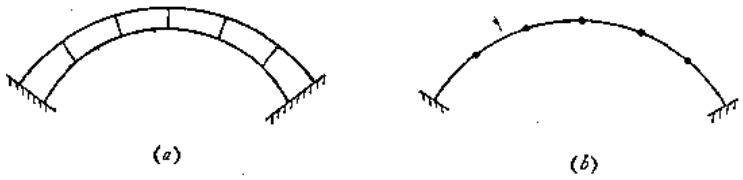


图 1-17 拱

取单元 i j 的中和轴作为 x 轴，并以结点 i 作为坐标原点（如图1-18），单元的结点力和结点位移分别为

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}U_i\\V_i\\M_i\\U_j\\V_j\\M_j\end{Bmatrix},\quad \{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\\phi_i\\u_j\\v_j\\\phi_j\end{Bmatrix}。$$

单元刚度矩阵$[k]^e$是6×6阶的。在小变形条件下，侧向位移v和转角ϕ都不影响轴向力。轴向力只取决于轴向位移u，由式（1-1）可知轴向力U_i可按下式计算：

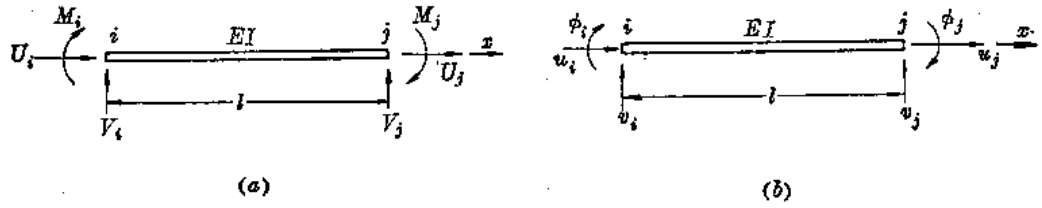


图 1-18

(a)结点力；(b)结点位移

$$U_i=\frac{AE}{l}(u_i-u_j),$$

即 $k_{11}=\frac{AE}{l}$，$k_{14}=k_{41}=-\frac{AE}{l}$，由此得到单元刚度矩阵第一列各元素为：

$$\frac{AE}{l}\quad 0\quad 0\quad -\frac{AE}{l}\quad 0\quad 0.$$

现在计算结点位移 v_i 引起的结点力，假定除 v_i 外，其余结点位移均为零，如图1-19(a)。

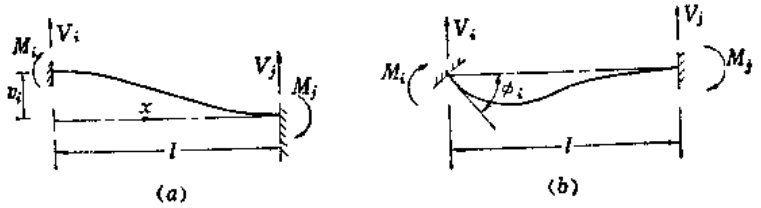


图 1-19

此时梁单元的侧向位移是

$$v=v_b+v_s \tag{1-34}$$

其中 v_b 是由弯曲应变引起的侧向位移，v_s 是剪切应变所引起的附加侧向位移。根据材料力学，有

$$\frac{dv_s}{dx}=-\frac{kV_i}{GA}. \tag{1-35}$$

其中 G 为材料的剪切模量，A 为梁单元横剖面的面积，k 为考虑剪应力不均匀分布的系数，对于矩形截面，$k=1.2$、圆形截面，$k=10/9$。由上式积分，得到

$$v_s=C_1-\frac{kV_i}{GA}x.$$

当 $x=l$ 时，$v_s=0$，故 $C_1=kV_il/GA$，代入上式，得到

$$v_s=\frac{kV_i(l-x)}{GA}. \tag{1-36}$$

单元内任一点的弯矩为 V_ix+M_i，按照材料力学，v_b 由下列微分方程所支配：

$$EI\frac{d^2v_b}{dx^2}=V_ix+M_i. \tag{a}$$

由上式积分一次、二次后，分别得到

$$EI\frac{dv_b}{dx}=\frac{1}{2}V_i x^2+M_i x+C_2; \qquad (b)$$

$$EIv_b=\frac{1}{6}V_i x^3+\frac{1}{2}M_i x^2+C_2 x+C_3. \qquad (c)$$

当$x=0$时 $\dfrac{dv_b}{dx}=0$，由（b）式 $C_2=0$；

当$x=l$时 $\dfrac{dv_b}{dx}=0$，由（b）式 $M_i=-V_i l/2$； (d)

又当$x=l$时，$v_b=0$，由此求出C_3，代入（c）式得到v_b，再代入（1-34）式，得到

$$v=v_b+v_s=\frac{V_i(x^3-l^3)}{6EI}+\frac{M_i(x^2-l^2)}{2EI}+\frac{kV_i(l-x)}{GA}.$$

把$M_i=-V_i l/2$代入，得到

$$v=\frac{V_i(x^3-l^3)}{6EI}-\frac{V_i l}{4EI}(x^2-l^2)+\frac{kV_i(l-x)}{GA}. \qquad (1\text{-}37)$$

当$x=0$时，$v=v_i$，由上式得到

$$V_i=\frac{12EI}{(1+b)l^3}v_i. \qquad (e)$$

其中

$$b=\frac{12kEI}{GAl^2}=\frac{12kE}{G}\left(\frac{r}{l}\right)^2. \qquad (1\text{-}38)$$

式中r为横剖面的回转半径（$I=Ar^2$）。由上式可知，当r/l较大时，b不能忽略，即表示剪切应变影响较大。由（d）式和（e）式，

$$M_i=-\frac{V_i l}{2}=-\frac{6EI}{(1+b)l^2}v_i. \qquad (f)$$

再由单元的平衡条件，可求得

$$V_j=-V_i=-\frac{12EI}{(1+b)l^3}v_i,$$

$$M_j=-M_i-V_i l=-\frac{6EI}{(1+b)l^2}v_i.$$

又v_i不影响轴向力，故$U_i=U_j=0$，现在可求出单元刚度矩阵中第二列的各元素如下：

$$k_{12}=\frac{U_i}{v_i}=0;$$

$$k_{22}=\frac{V_i}{v_i}=\frac{12EI}{(1+b)l^3};$$

$$k_{32}=\frac{M_i}{v_i}=-\frac{6EI}{(1+b)l^2};$$

$$k_{42}=\frac{U_j}{v_i}=0;$$

$$k_{62}=\frac{V_j}{v_i}=-\frac{12EI}{(1+b)l^3};$$

$$k_{62}=\frac{M_j}{v_i}=-\frac{6EI}{(1+b)l^2}.$$

下面再计算角位移ϕ_i引起的结点力，假定除ϕ_i外，其余结点位移均为零．如图1-19

$$[k]^e=\begin{bmatrix}
\frac{AE}{l} & 0 & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 & 0\\
0 & \frac{12EI}{(1+b)l^3} & \frac{-6EI}{(1+b)l^2} & 0 & \frac{-12EI}{(1+b)l^3} & \frac{-6EI}{(1+b)l^2}\\
0 & \frac{-6EI}{(1+b)l^2} & \frac{(4+b)EI}{(1+b)l} & 0 & \frac{6EI}{(1+b)l^2} & \frac{(2-b)EI}{(1+b)l}\\
-\frac{AE}{l} & 0 & 0 & \frac{AE}{l} & 0 & 0\\
0 & \frac{-12EI}{(1+b)l^3} & \frac{6EI}{(1+b)l^2} & 0 & \frac{12EI}{(1+b)l^3} & \frac{6EI}{(1+b)l^2}\\
0 & \frac{-6EI}{(1+b)l^2} & \frac{(2-b)EI}{(1+b)l} & 0 & \frac{6EI}{(1+b)l^2} & \frac{(4+b)EI}{(1+b)l}
\end{bmatrix}. \tag{1-39}$$

这是在局部坐标系（x，y）中计算的梁单元刚度矩阵，如果整体坐标系（$\tilde{x}$，$\tilde{y}$）与局部坐标系（x，y）的夹角为θ，参阅图1-20。整体坐标系中的单元结点力$\{\tilde{F}\}^e$和

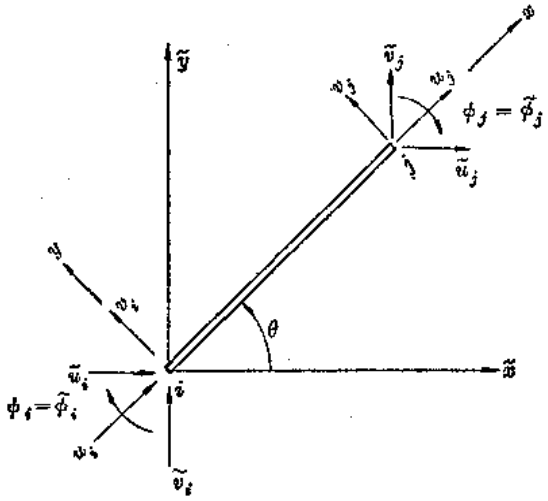


图 1-20

单元结点位移$\{\tilde{\delta}\}^e$与局部坐标系中的$\{F\}^e$和$\{\delta\}^e$存在下列转换关系：

$$\{F\}^e=[T]\{\tilde{F}\}^e; \tag{1-40}$$

$$\{\delta\}^e=[T]\{\tilde{\delta}\}^e. \tag{1-41}$$

式中

$$[T]=\begin{bmatrix}
\alpha & \beta & 0 & 0 & 0 & 0\\
-\beta & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \alpha & \beta & 0\\
0 & 0 & 0 & -\beta & \alpha & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}. \tag{1-42}$$

而$\alpha=\cos\theta$，$\beta=\sin\theta$。

根据与本章第 4 节同样的推导，可知在整体坐标系中的梁单元刚度矩阵 $[\tilde{k}]^e$ 应由下式计算：

$$[\tilde{k}]^e=[T]^T[k]^e[T]. \tag{1-43}$$

用编码法不难建立结构的整体刚度矩阵。

每个结点有 3 个自由度。相应地，在每个结点有 3 个平衡方程，即

$$\sum_e U_i=X_i,\quad \sum_e V_i=Y_i,\quad \sum_e M_i=R_i.$$

其中X_i、Y_i、R_i为作用于结点i的荷载，$\sum_e$表示对环绕结点 i 的单元求和。

§1-12 温 度 荷 载

在这里，我们将分析由于温度变形所引起的结点荷载，取坐标如图1-21所示，把 x 轴放在单元的中和轴上，把 y 轴放在横剖面的对称轴上，假设单元内的温度沿 x 方向是常量，只在 y、z 两个方向变化，而且对称于 y 轴，即 $T(y,\ z)=T(y,\ -z)$。对于杆系结构来说，应力分量$\sigma_y=\sigma_z=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$，单元内任一点的应变由下式计算：

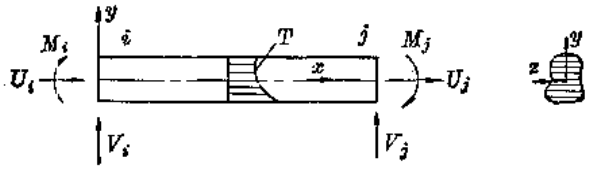


图 1-21

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}+\alpha T; \tag{a}$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}. \tag{b}$$

式（a）右端第一项为应力σ_x引起的应变，第二项为温度引起的应变，α为线胀系数。温度变化不引起剪切应变，所以在式（ b ）中没有出现温度T。

今假定结点 i 和 j 完全固定，$\{\delta\}^e=\{0\}$，即

$$u_i=v_i=\phi_i=u_j=v_j=\phi_j=0,$$

在这种条件下，单元内任一点的应变也为零，即

$$\varepsilon_x=\gamma_{xy}=0.$$

由式（ a ）和（ b ），得到单元内任一点的应力为

$$\sigma_x=-E\alpha T;\qquad \tau_{xy}=0. \tag{1-44}$$

为了维持平衡，此时在结点 i 和 j 的结点力为

$$\left.\begin{aligned} U_i &= \int (-\sigma_x)\,dA = \int E\alpha T dA; \\ V_i &= \int (-\tau_{xy})dA = 0; \\ M_i &= \int (-\sigma_x) y dA = \int E\alpha T y dA; \\ U_j &= \int \sigma_x dA = -\int E\alpha T dA; \\ V_j &= \int \tau_{xy} dA = 0; \\ M_j &= \int \sigma_x y dA = -\int E\alpha T y dA. \end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

因作用于单元的力与作用于结点的力，其大小相等而方向相反，故把以上各量改变符号，即得到施加于结点 i 和 j 的温度荷载如下：

$$\{P_T\}^e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ R_i \\ X_j \\ Y_j \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H \\ o \\ -S \\ H \\ o \\ S \end{Bmatrix}. \qquad (1\text{-}45)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} H &= \int E\alpha T\, dA, \\ S &= \int E\alpha T y dA. \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}46)$$

H代表力，S代表力矩，如果单元内的温度是均匀的，则

$$H = E\alpha T A,\quad S = 0.$$

因此，在建立结构的整体平衡方程组时，只要考虑温度荷载如（1-45）式，但在计算应力时，除了由位移$\{\delta\}$引起的应力外，对于本单元来说，还必须迭加上固端温度应力如（1-44）式。

另外，（1-45）式给出的是局部坐标系中的温度荷载，至于整体坐标系中的温度荷载$\{\bar{P}_T\}^e$可由下式计算：

$$\{\bar{P}_T\}^e = [T]^T \{P_T\}^e. \qquad (1\text{-}47)$$

其中$[T]$是坐标转换矩阵，见（1-42）式。

§1-13 空间的梁单元刚度矩阵

现在我们给出考虑轴向力和剪切变形的空间梁单元的刚度矩阵，如图1-22所示。在每一结点将有6个自由度，即3个线位移和3个角位移。作用于每个结点的有3个力和3个力矩，单元结点力是

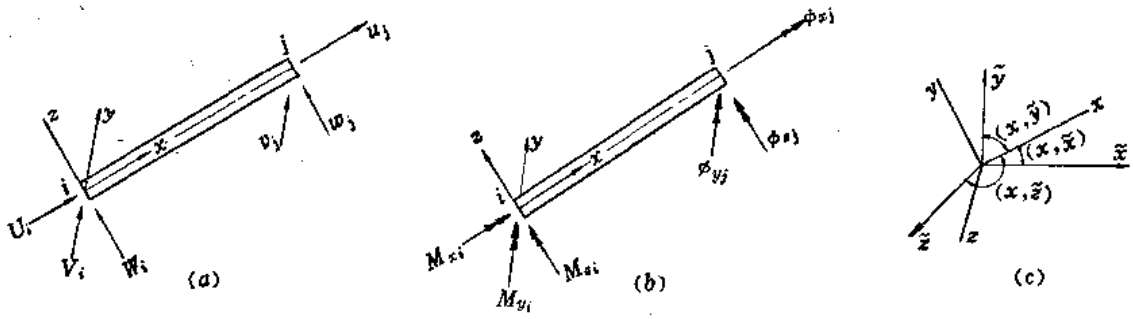


图 1-22　空间梁单元的结点力和结点位移
(a)力和线位移；(b)力矩和角位移；(c)坐标系

$$\{F\}^e=[U_i \quad V_i \quad W_i \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad U_j \quad V_j \quad W_j \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T$$

单元结点位移是

$$\{\delta\}^e=[u_i \quad v_i \quad w_i \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi} \quad \phi_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \phi_{xj} \quad \phi_{yj} \quad \phi_{zj}]^T$$

在图中用双箭头表示力矩和角位移。

梁单元刚度矩阵是12×12阶的。我们把局部坐标的原点放在结点 i，以梁单元的形心轴作为 x 轴，并使 xy 平面和 xz 平面与横剖面的主轴一致，因为只有这样，两个平面内的弯曲和剪切才是互相独立的。否则，xy 平面内的弯矩和剪力，将不仅依赖于它们的对应位移，而且还依赖于 xz 平面内力系的对应位移。

由于以梁的形心轴作为 x 轴，并使 xy 平面和 xz 平面与横剖面的主轴一致，梁单元的全部力可以分离成彼此独立的四组，即轴向力，扭矩，xy 平面内的弯曲和剪切及 xz 平面内的弯曲和剪切。下面分别分析这四组力系。

（1）轴向力

轴向力 U_i 和 U_j 只取决于轴向位移 u_i、u_j，而与其他位移无关，由式（1-1）可知 $U_i=\frac{AE}{l}(u_i-u_j)$，故 $k_{11}=\frac{AE}{l}$，$k_{17}=k_{71}=-\frac{AE}{l}$，单元刚度矩阵中第一列的其余元素均为零，由此得到单元刚度矩阵的第一列各元素为

$$\left[\frac{AE}{l} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{AE}{l} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^T.$$

（2）扭矩

作用于梁上的扭矩 M_{xi}、M_{xj} 只与扭转角 ϕ_{xi}、ϕ_{xj} 有关，而与其他位移无关。

今假定 $\phi_{xj}=0$，计算由 $\phi_{xi}\neq 0$ 所引起的扭矩。参阅图 1-22(b)，在梁单元内任一点 x 的扭矩是常量，并等于 M_{xi}，对梁单元扭转角 θ 的微分方程是

$$\frac{d\theta}{dx}=-\frac{M_{xi}}{GJ}. \tag{1-48}$$

其中 GJ 是梁的横剖面的扭转刚度。由上式积分，得到

$$\theta=-\frac{M_{xi}}{GJ}x+C_1.$$

当$x=l$时，$\theta=0$，由此得到积分常数$C_1=\frac{M_{xi}l}{GJ}$，代入上式，得到

$$\theta=\frac{M_{xi}}{GJ}(l-x)。$$

当$x=0$时，$\theta=\phi_{xi}$，由上式得到

$$M_{xi}=\frac{GJ}{l}\phi_{xi}。$$

利用扭转平衡条件，可得到

$$M_{xj}=-M_{xi}=-\frac{GJ}{l}\phi_{xi}。$$

由此得到刚度系数

$$k_{4,4}=\frac{M_{xi}}{\phi_{xi}}=\frac{GJ}{l},$$

$$k_{10,4}=\frac{M_{xj}}{\phi_{xi}}=-\frac{GJ}{l}。$$

因扭角ϕ_{xi}对其他各力均无影响，所以单元刚度矩阵第4列中其他元素都等于零，由此得到单元刚度矩阵第4列如下：

$$\left[\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 \end{array}\right]^T$$

同理，可求出第10列各元素。

（3）xz平面内的弯曲和剪切

参阅图1-23(b)，此时我们必须考虑的作用于梁单元ij的力系包括剪力W_i、W_j和弯矩M_{yi}、M_{yj}，它们取决于结点位移w_i、w_j、ϕ_{yi}、ϕ_{yj}。把图1-23(b)与图1-18对比一下，

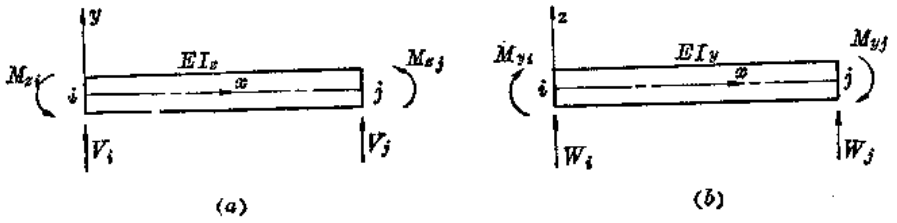


图 1-23

(a) xy平面内的弯曲和剪切；(b) xz平面内的弯曲和剪切

就会发现目前的问题与我们在§1-11中讨论的问题是类似的。有关的力和位移的对应关系如下：

$$W_i\sim V_i,\qquad w_i\sim v_i,\qquad EI_y\sim EI。$$

$$M_{yi}\sim M_i,\qquad \phi_{yi}\sim\phi_i,$$

$$W_j\sim V_j,\qquad w_j\sim v_j,$$

$$M_{yj}\sim M_j,\qquad \phi_{yj}\sim\phi_j,$$

我们把单元刚度矩阵（1-39）式中的第2、3、5、6列的元素取出来，按照上列对应关系，重新排列一下，并补充一些零元素，就可得到空间梁单元刚度矩阵的第3、5、9、11等列。

例如，把（1-39）式右端矩阵第2列的元素取出来，重新排列一下，得到空间梁单元刚度矩阵第3列元素（$w_i\neq0$所引起的结点力）：

$$\left[0\quad 0\quad \frac{12EI_y}{(1+b_y)l^3}\quad 0\quad \frac{-6EI_y}{(1+b_y)l^2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{-12EI_y}{(1+b_y)l^3}\quad 0\quad \frac{-6EI_y}{(1+b_y)l^2}\quad 0\right]^T.$$

再把（1-39）式右端矩阵第3列元素取出来，重新排列一下，得到空间梁单元刚度矩阵第5列元素（$\phi_{yi}\neq0$所引起的结点力）如下：

$$\left[0\quad 0\quad \frac{-6EI_y}{(1+b_y)l^2}\quad 0\quad \frac{(4+b_y)EI_y}{(1+b_y)l}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{6EI_y}{(1+b_y)l^2}\quad 0\quad \frac{(2-b_y)EI_y}{(1+b_y)l}\quad 0\right]^T.$$

同理，可求出刚度矩阵第9、11列的元素。

（4）xy平面内的弯曲和剪切

参阅图1-23(a)，此时我们必须考虑剪力V_i、V_j和弯矩M_{zi}、M_{zj}。把图1-23(b)与图1-18对比一下，不难发现，两个问题是类似的，有关的力和位移的对应关系如下：

$$V_i\sim V_i,\qquad v_i\sim v_i,\qquad EI_z\sim EI.$$
$$M_{zi}\sim -M_i,\qquad \phi_{zi}\sim -\phi_i,$$
$$V_j\sim V_j,\qquad v_j\sim v_j,$$
$$M_{zj}\sim -M_j,\qquad \phi_{zj}\sim \phi_j,$$

必须注意，这里的弯矩和转角与前面的相差一个符号，这对刚度系数的符号是有影响的。

把（1-39）式右端矩阵第2列元素取出来，按照上列对应关系重新排列一下，并补充一些零元素，得到空间梁单元刚度矩阵第2列如下：

$$\left[0\quad \frac{12EI_z}{(1+b_z)l^3}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2}\quad 0\quad \frac{-12EI_z}{(1+b_z)l^3}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2}\right]^T.$$

这是$v_i=1$所引起的结点力，其中弯矩的刚度系数都改变了符号。

再把（1-39）式右端矩阵第3列元素取出来，重新排列，得到空间梁单元刚度矩阵第6列元素如下：

$$\left[0\quad \frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{(4+b_z)EI_z}{(1+b_z)l}\quad 0\quad \frac{-6EI_z}{(1+b_z)l^2}\quad 0\quad 0\quad 0\quad \frac{(2-b_z)EI_z}{(1+b_z)l}\right]^T.$$

这是$\phi_z=1$所引起的结点力。由于$\phi_z=1$相当于前面的$\phi_i=-1$，因此它引起的弯矩和剪力都应乘以（-1），但弯矩已改变符号，其刚度系数就不再改变符号了，剪力的刚度系数的符号应予以改变。

同理，可求出第8、12列的各元素。

最后，我们得到了在局部坐标系中空间梁单元刚度矩阵如式（1-49）。其中

$$[k]^e=$$

$$
\begin{bmatrix}
\frac{EA}{l} & & & & & & & & & & & \\
0 & \frac{12EI_z}{(1+b_z)l^3} & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+b_y)l^3} & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & & & & & & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+b_y)l^2} & 0 & \frac{(4+b_y)EI_y}{(1+b_y)l} & & & & & & & \\
0 & \frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+b_z)EI_z}{(1+b_z)l} & & & & & & \\
-\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & & & & & \\
0 & \frac{-12EI_z}{(1+b_z)l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6EI_z}{(1+b_z)l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{(1+b_z)l^3} & & & & \\
0 & 0 & \frac{-12EI_y}{(1+b_y)l^3} & 0 & \frac{6EI_y}{(1+b_y)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{(1+b_y)l^3} & & & \\
0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l} & & \\
0 & 0 & \frac{-6EI_y}{(1+b_y)l^2} & 0 & \frac{(2-b_y)EI_y}{(1+b_y)l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{(1+b_y)l^2} & 0 & \frac{(4+b_y)EI_y}{(1+b_y)l} & \\
0 & \frac{6EI_z}{(1+b_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(2-b_z)EI_z}{(1+b_z)l} & 0 & \frac{-6EI_z}{(1+b_z)l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{(4+b_z)EI_z}{(1+b_z)l}
\end{bmatrix}
$$

对　　称

$$\left.\begin{aligned} b_y &= \frac{12kEI_y}{GA_z l^2} = \frac{24(1+\mu)A}{A_z}\left(\frac{r_y}{l}\right)^2, \\ b_z &= \frac{12kEI_z}{GA_y l^2} = \frac{24(1+\mu)A}{A_y}\left(\frac{r_z}{l}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}50)$$

$$I_y = \int z^2\, dA, \quad I_z = \int y^2 dA.$$

式中 I_y、I_z 分别是横剖面绕 y、z 轴的转动惯量，r_y、r_z 是回转半径，当 $\frac{r_y}{l}$、$\frac{r_z}{l}$ 很小时，可令 $b_y=b_z=0$，即得到忽略剪切变形的空间梁单元刚度矩阵。式中 A_y、A_z 分别是梁在 y、z 方向承受剪力的面积。

现在我们来计算空间梁单元的温度荷载，仍取局部坐标系，假设梁内温度沿 x 方向是常量，但在 y、z 两个方向是任意变化的。由于是杆件结构，应力分量 $\sigma_y=\sigma_z=0$，单元内任一点的应变由下式计算：

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E} + \alpha T, \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}, \qquad\quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

假定结点 i 和 j 完全固定，即 $\{\delta\}^e=\{0\}$，此时单元内任一点的应变也等于零，即

$$\varepsilon_x=\gamma_{xy}=\gamma_{yz}=\gamma_{zx}=0.$$

由式（a），得到单元内任一点的应力为

$$\sigma_x = -E\alpha T, \quad \tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0. \qquad (1\text{-}51)$$

按照上节同样的推理，可知在局部坐标系中，施加于结点 i 和 j 的温度荷载为

$$\{P_T\}^e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \\ R_{xi} \\ R_{yi} \\ R_{zi} \\ X_j \\ Y_j \\ Z_j \\ R_{xj} \\ R_{yj} \\ R_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_y \\ S_z \\ H \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ S_y \\ -S_z \end{Bmatrix}. \qquad (1\text{-}52)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} H &= \int E\alpha T dA \\ S_y &= \int E\alpha T z dA \\ S_z &= \int E\alpha T y dA \end{aligned}\right\}. \qquad (1\text{-}53)$$

如果梁内温度是均匀的，$T(x,y,z)=T$，则

$$H=E\alpha TA,\quad S_y=S_z=0\ .$$

在建立平衡方程组时，应计入式（1-52）所代表的温度荷载，在计算应力时，还应迭加上固端温度应力如式（1-51）。

上面我们是在局部坐标系（x，y，z）中计算单元刚度矩阵$[k]^e$和温度荷载$\{P_T\}^e$，至于在整体坐标系（$\tilde{x}$，$\tilde{y}$，$\tilde{z}$）中的单元刚度矩阵$[\tilde{k}]^e$和温度荷载$\{\tilde{P}_T\}^e$，应由（1-43）、（1-47）式换算。但其中转换矩阵$[T]$为

$$[T]=\begin{bmatrix}\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix},\qquad(1\text{-}54)$$

$$[\lambda]=\begin{bmatrix}\cos(x,\ \tilde{x}) & \cos(x,\ \tilde{y}) & \cos(x,\ \tilde{z})\\ \cos(y,\ \tilde{x}) & \cos(y,\ \tilde{y}) & \cos(y,\ \tilde{z})\\ \cos(z,\ \tilde{x}) & \cos(z,\ \tilde{y}) & \cos(z,\ \tilde{z})\end{bmatrix}.\qquad(1\text{-}55)$$

其中（x，$\tilde{x}$）、（x，$\tilde{y}$）、（x，$\tilde{z}$）等分别为x轴与$\tilde{x}$轴、$\tilde{y}$轴、$\tilde{z}$轴的夹角，故$[\lambda]$是方向余弦矩阵。由于每个结点有6个自由度，所以在建立结构的整体平衡方程组时，每个结点有6个平衡方程，即

$$\sum_e U_i=X_i,\ \sum_e V_i=Y_i,\ \sum_e W_i=Z_i,$$

$$\sum_e M_{xi}=R_{xi},\ \sum_e M_{yi}=R_{yi},\ \sum_e M_{zi}=R_{zi}.$$

第二章　弹性力学平面问题

§2-1　连续介质的离散化

在上一章，用矩阵位移法分析杆系结构时，我们把每一杆件作为一个单元，这些单元在结点上相互连结，以结点位移作为基本的未知量进行分析。由于结点的个数是有限的，所以结点平衡方程的个数也是有限的，从而可以借助线性代数（或矩阵）方程组进行分析。

在一个连续介质中，互相连结的点是无限的，具有无限个自由度，使数值解法难以进行。有限单元法把杆系结构的矩阵分析方法推广应用于连续介质：把连续介质离散化，用有限个单元的组合体代替原来的连续介质，这样一组单元只在有限个结点上相互连结，因而只包含有限个自由度，可用矩阵方法进行分析。

如图2-1(*a*)，在*A*、*B*之间，如果用一桁架承受荷重*P*，可以把每一杆件看作是一个

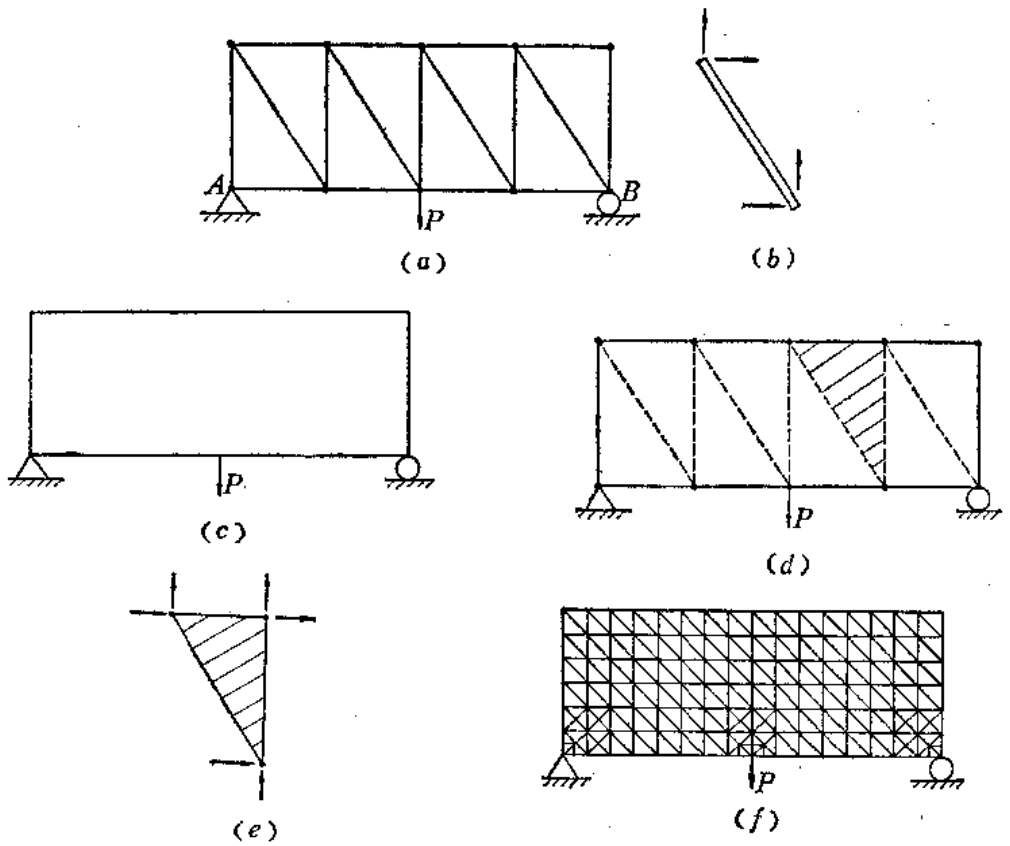


图 2-1　结构的离散化

(*a*)桁架；(*b*)杆件单元；(*c*)平板；(*d*)平板简化为几个单元的组合；(*e*)平面单元；(*f*)典型的单元划分

单元，各单元只在公共结点上互相连接，由各结点的平衡条件不难求出各杆件的内力。如果用一块平板去承受荷重P，这块平板具有无限个自由度。今仿照桁架，用一组虚线把它划分为几个三角形单元，假定各单元只在公共结点上互相连结，如图2-1(d)，以结点位移为未知量，根据结点上的平衡条件建立一个代数方程组，用以求出结点位移，然后再由结点位移求出各单元内的应力。这样，从表面上看，平板的计算与桁架的计算就差不多了，但实际上两者是有重大差别的。对于桁架来说，各单元只在结点上连接，此外各单元之间无其他联系，因此用第一章所述方法得到的将是精确解。如果把每个杆件进一步划分为几个单元，更细致地计算一次，将得到同样的结果。至于平板，在相邻单元的公共边界上，本来位移和应力都是连续的，现在假定各单元只在公共结点上互相连结起来，计算结果，在相邻单元公共边界上的位移和应力都可能是不连续的，因而会带来误差。如图2-2所示，两相邻单元只在公共结点上具有相同的位移，在公共边界上可能出现位移差如图中阴影部分所示。如果加密计算网格，把单元划分得小一些，位移差也会随之而减小。因此，为了

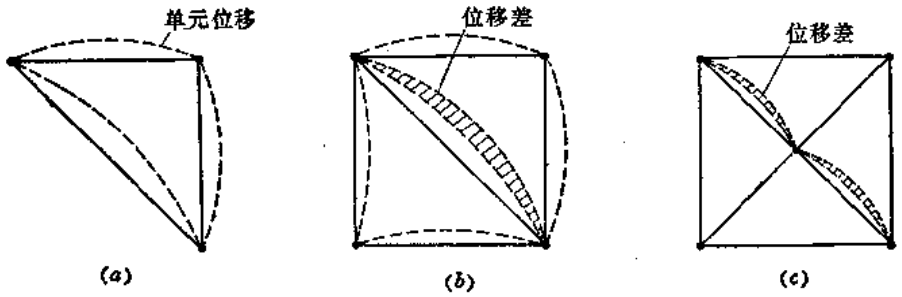


图 2-2

(a)单元位移；(b)相邻单元公共边界上的位移差；(c)加密网格(减小位移差)

保证必要的计算精度，必须采用密集的计算网格，在应力集中区域，如支点或集中力附近，还应局部加密网格，如图2-1(f)。此外有时为了提高计算精度，还可在单元设计上想一些办法。例如，按位移法求解时，对三结点三角形单元，通常把单元位移函数取为坐标的线性函数，因而在相邻单元公共边界上，位移将是连续的，但应力还是不连续的。因此，用有限单元计算连续介质，所得到的不是精确解，只是近似解。这一点是不同于杆系结构的。但是，由于高速度大容量电子计算机的应用，可使计算网格很密集，计算精度完全可以满足工程上的需要。

在有限单元法中，一个二维连续介质用有限个二维单元的组合体去代替；一个三维连续介质用有限个三维单元的组合体去代替。当然，在这些单元中应保持原介质的一切材料特性。

连续介质的有限单元分析包含三个基本方面：介质的离散化，单元特性计算以及单元组合体的结构分析。

对于二维连续介质，以图2-3所示的建筑在岩石基础上的支墩坝为例，用有限单元法进行分析的步骤如下：

（1）用虚拟的直线把原介质分割成有限个三角形单元，这些直线是单元的边界，几

条直线的交点称为结点；

（2）假定各单元在结点上互相铰接，结点位移是基本的未知量；

（3）选择一个函数，用单元的三个结点的位移唯一地表示单元内部任一点的位移，此函数称为位移函数；

（4）通过位移函数，用结点位移唯一地表示单元内任一点的应变。再利用广义虎克定律，用结点位移可唯一地表示单元内任一点的应力；

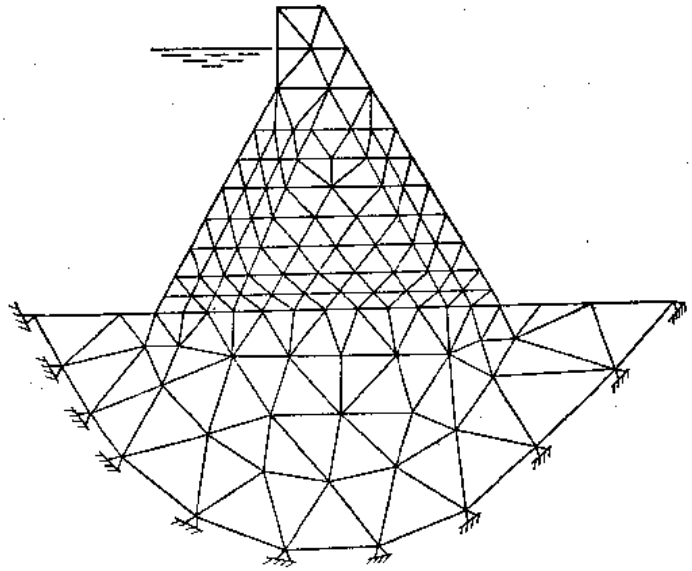


图 2-3　支墩坝的离散化

（5）利用能量原理，找到与单元内部应力状态等效的结点力。再利用单元应力与结点位移的关系，建立等效结点力与结点位移的关系。这是有限单元法求解应力问题的最重要的一步；

（6）将每一单元所承受的荷载，按静力等效原则移置到结点上；

（7）在每一结点建立用结点位移表示的静力平衡方程，得到一个线性方程组。解出这个方程组，求出结点位移。然后可求得每个单元的应力。

为了循序渐进，在这一章，我们只介绍求解平面问题的一种最简单、但也是最常用的三角形单元，单元位移是线性变化的，单元内应变和应力都是常量。在以后各章，再陆续介绍其他各种形式的平面单元。

§2-2　位　移　函　数

图 2-4 表示了一个典型的三角形单元，三个结点为 i、j、m，按逆时针方向排列。每一结点具有两个位移分量：

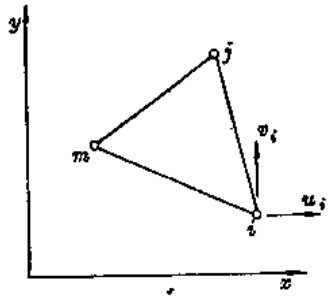


图 2-4　平面问题三角形单元

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}, \qquad (2\text{-}1)$$

每个单元的六个结点位移分量可表示为一个向量：

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \qquad (2\text{-}2)$$

如果只知道结点位移，我们并不能直接求出单元内的应变和应力。因此，为了用结点位移表示单元应变和应力，必须假定单元内任一点的位移分量为坐标的某种函数。现在，假定单元内的位移分量是坐标的线性函数，即

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y,\quad v=\beta_4+\beta_5x+\beta_6y, \tag{2-3}$$

上式中的六个系数β_i可以用结点位移表示。以i、j、m三点的坐标代入上式，应有

$$u_i=\beta_1+\beta_2x_i+\beta_3y_i,\ u_j=\beta_1+\beta_2x_j+\beta_3y_j,\ u_m=\beta_1+\beta_2x_m+\beta_3y_m, \tag{a}$$

$$v_i=\beta_4+\beta_5x_i+\beta_6y_i,\ v_j=\beta_4+\beta_5x_j+\beta_6y_j,\ v_m=\beta_4+\beta_5x_m+\beta_6y_m, \tag{b}$$

按照线性代数中的克莱姆法则，从（a）式解出系数β_1、β_2、β_3，从（b）式解出系数β_4、β_5、β_6，再代回（2-3）式，得到单元位移函数如下：

$$\begin{aligned}u&=\frac{1}{2A}\left\{(a_i+b_ix+c_iy)u_i+(a_j+b_jx+c_jy)u_j+(a_m+b_mx+c_my)u_m\right\},\\ v&=\frac{1}{2A}\left\{(a_i+b_ix+c_iy)v_i+(a_j+b_jx+c_jy)v_j+(a_m+b_mx+c_my)v_m\right\}.\end{aligned} \tag{2-4}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&a_i=x_jy_m-x_my_j,\ b_i=y_j-y_m,\ c_i=x_m-x_j,\\ &a_j=x_my_i-x_iy_m,\ b_j=y_m-y_i,\ c_j=x_i-x_m,\\ &a_m=x_iy_j-x_jy_i,\ b_m=y_i-y_j,\ c_m=x_j-x_i.\end{aligned}\right\} \tag{2-5}$$

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&x_i&y_i\\1&x_j&y_j\\1&x_m&y_m\end{vmatrix}. \tag{2-6}$$

按照解析几何，A等于三角形ijm的面积。为了得出的面积A不致成为负值，如前所述，i、j、m的次序必须是顺着逆时针方向。

为了简化位移函数的表达式，记

$$N_i=\frac{a_i+b_ix+c_iy}{2A},\quad N_j=\frac{a_j+b_jx+c_jy}{2A},\quad N_m=\frac{a_m+b_mx+c_my}{2A} \tag{2-7}$$

代入式（2-4），得到位移函数的简单表达式如下：

$$u=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m,\quad v=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m. \tag{2-8}$$

N_i、N_j、N_m是坐标的函数，它们反映了单元的位移形态，称为单元位移的形态函数，或简称为形函数。

式（2-8）所表示的单元位移，也可改写为矩阵形式如下：

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e=[IN_i\ IN_j\ IN_m]\{\delta\}^e \tag{2-9}$$

式中$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$是二阶的单位阵。

根据位移函数（2-8）式，在单元的边界上位移是线性变化的，既然两个相邻的单元在其公共结点上具有相同的结点位移，因此在它们的公共边界上，两个单元将具有相同的位移，也就是说，所选择的位移函数保证了两相邻单元之间位移的连续性。

§2-3 单元应变

作为平面问题，单元内具有三个应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}，可用矩阵表示如下：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}. \tag{2-10}$$

将位移函数（2-8）式代入上式，得到

$$\{\varepsilon\}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_m}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_m}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_m}{\partial y} & \dfrac{\partial N_m}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}.$$

$$=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\{\delta\}^e. \tag{a}$$

或简写为

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e. \tag{2-11}$$

式中矩阵$[B]$可写为分块形式

$$[B]=[B_i\ B_j\ B_m]. \tag{2-12}$$

而其子矩阵为

$$[B_i]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0\\ 0 & c_i\\ c_i & b_i\end{bmatrix},\quad (i,\ j,\ m) \tag{2-13}$$

上式后面附有记号（i，j，m），表示这个公式实际上代表三个公式，其余两个公式系由其中的角码i、j、m轮换得来。本书以后将继续采用这种记号，以节省篇幅。

由于单元面积A以及系数b_i、c_i等都是常量，所以矩阵$[B]$的元素都是常量，因此应变$\{\varepsilon\}$的元素也是常量，也就是说，在每一个单元中，应变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}都是常量。

§2-4 初　应　变

初应变系指与应力无关，由温度变化、收缩、晶体生长等因素引起的应变，

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}. \tag{2-14}$$

一般说来，单元内的初应变是不均匀的，并是坐标的函数，但是当单元充分小时，单元内的初应变可采用一个平均值，也就是采用一个常量。这一点与上节所述单元内应变为常量

是一致的。以温度变形为例，设单元内温度为$T(x, y)$，计算初应变时将采用平均温度：

$$\overline{T}=\frac{1}{A}\iint T(x, y)dxdy.$$

当$T(x, y)$为x和y的线性函数时，由上式可得

$$\overline{T}=\frac{T_i+T_j+T_m}{3}$$

式中T_i、T_j、T_m分别为结点i、j、m的温度。对于非线性温度，仍可近似地应用上式，所引起的误差与采用线性位移函数的误差属于同阶。

对于平面应力问题，温度$\overline{T}$引起的初应变为

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\alpha\overline{T}\\ \alpha\overline{T}\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{2-15}$$

式中α为线膨胀系数，由于温度变化在各向同性介质中不引起剪切变形，所以$\gamma_{xy0}=0$。

对于平面应变问题，温度$\overline{T}$引起的初应变为

$$\{\varepsilon_0\}=(1+\mu)\begin{Bmatrix}\alpha\overline{T}\\ \alpha\overline{T}\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{2-16}$$

式中μ为材料的泊松比。

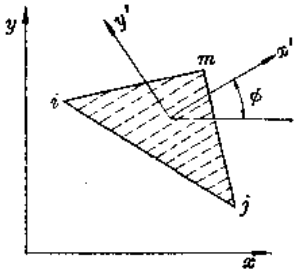


图 2-5 层状材料中的单元

对于层状各向异性材料，线膨胀系数可能随着方向而变化。如图2-5所示，设x'和y'是层状材料的主方向，在x'和y'方向的线胀系数分别是α_1和α_2，在局部坐标系$(x'、y')$中，平面应力问题的初应变为

$$\{\varepsilon_0'\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x'0}\\ \varepsilon_{y'0}\\ \gamma_{x'y'0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\alpha_1\overline{T}\\ \alpha_2\overline{T}\\ 0\end{Bmatrix}. \tag{2-17}$$

为了得到整体坐标系(x, y)中的初应变，应进行如下变换：

$$\{\varepsilon_0'\}=[\theta]^T\{\varepsilon_0\}. \tag{2-18}$$

对于如图2-5所示的角度ϕ，不难求得

$$[\theta]=\begin{bmatrix}\cos^2\phi & \sin^2\phi & -2\sin\phi\cos\phi\\ \sin^2\phi & \cos^2\phi & 2\sin\phi\cos\phi\\ \sin\phi\cos\phi & -\sin\phi\cos\phi & \cos^2\phi-\sin^2\phi\end{bmatrix}. \tag{2-19}$$

经过变换后，在整体坐标系(x, y)中，初应变的剪切分量γ_{xy0}可能不等于零。

§2-5 单 元 应 力

在求出单元应变后，利用广义虎克定律，不难求出单元应力。下面分别加以介绍。

一、各向同性体——平面应力

根据广义虎克定律，对于各向同性体的平面应力问题，应变分量决定于以下各式：

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\frac{\mu\sigma_y}{E}+\varepsilon_{x0},$$

$$\varepsilon_y=\frac{\sigma_y}{E}-\frac{\mu\sigma_x}{E}+\varepsilon_{y0},$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}+\gamma_{xy0},$$

从以上三式解出应力分量，得到

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x-\varepsilon_{x0}+\mu\varepsilon_y-\mu\varepsilon_{y0}),$$

$$\sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x-\mu\varepsilon_{x0}+\varepsilon_y-\varepsilon_{y0}),$$

$$\tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}(\gamma_{xy}-\gamma_{xy0})=\frac{E}{1-\mu^2}\cdot\frac{1-\mu}{2}(\gamma_{xy}-\gamma_{xy0}).$$

以上三式可合并起来，用矩阵方程表示为

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x-\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_y-\varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy}-\gamma_{xy0}\end{Bmatrix}.$$

或者简写成为

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}). \tag{2-20}$$

其中

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}. \tag{2-21}$$

$[D]$称为弹性矩阵，它决定于弹性常数E和μ。把式（2-11）代入式（2-20），得到

$$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e-[D]\{\varepsilon_0\}. \tag{2-22}$$

其中

$$[S]=[D][B]=[S_i \quad S_j \quad S_m]. \tag{2-23}$$

$$[S_i]=[D][B_i]=\frac{E}{2(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix}b_i & \mu c_i\\ \mu b_i & c_i\\ \dfrac{1-\mu}{2}c_i & \dfrac{1-\mu}{2}b_i\end{bmatrix}. \qquad (i,\ j,\ m)$$

$[S]$称为应力矩阵，按照（2-22）式，可由结点位移计算单元应力。

由于位移函数是线性的，在每个单元中，应变分量和应力分量都是常量。在一个变化的应力场中，相邻的单元一般具有不同的应力，因此在两单元的公共边界上，应力将有突变。但是随着单元的逐步取小，这种突变将急剧减小，并不妨碍有限单元法的解答收敛于正确解答。

二、各向同性体——平面应变

对于平面应变问题，除了应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}外，还存在着正应力σ_z。设初应变是由温度变化引起的，单元中的应变分量决定于以下各式：

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y-\mu\sigma_z)+\alpha\bar{T},\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_z-\mu\sigma_x)+\alpha\bar{T},\\ \gamma_{xy}&=\frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}.\end{aligned}\right\}\qquad(a)$$

此外还有

$$\varepsilon_z=\frac{1}{E}(\sigma_z-\mu\sigma_x-\mu\sigma_y)+\alpha\bar{T}=0,\qquad(b)$$

由（b）式求出σ_z，代入（a）式，再解出三个应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}，我们又得到矩阵方程（2-20），但此时初应变$\{\varepsilon_0\}$见（2-16）式，而弹性矩阵见下式

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & \mu/(1-\mu) & 0\\ \mu/(1-\mu) & 1 & 0\\ 0 & 0 & (1-2\mu)/2(1-\mu)\end{bmatrix}.\qquad(2\text{-}24)$$

将平面应力各公式中的E、μ、α分别换以$E/(1-\mu^2)$、$\mu/(1-\mu)$、$(1+\mu)\alpha$，即可得到平面应变的相应公式。反之，将平面应变各公式中的E、μ、α分别换以$E(1+2\mu)/(1+\mu)^2$、$\mu/(1+\mu)$、$(1+\mu)\alpha/(1+2\mu)$，即得到平面应力的相应公式。一般平面通用计算程序，可按平面应力（或平面应变）公式编制，当需要计算平面应变（或平面应力）问题时，只需将E、μ、α作上述代换。

三、各向异性体

对于没有任何弹性对称关系的最一般的各向异性体，为了描述其三维的应力-应变关系，需要21个独立的弹性常数。

为了可以作为平面问题进行分析，在弹性体内任一点都必须有一个弹性对称面，而且所有弹性对称面必须互相平行，在一般情况下，将有六个独立的弹性常数。

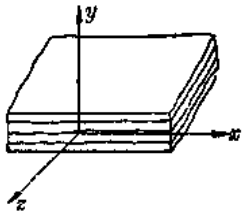


图 2-6　层状弹性体

在实际工程中特别感兴趣的是层状弹性体，即横观各向同性体。在层状平面内是弹性各向同性的。这种材料只具有五个独立的弹性常数。

如图2-6所示，设y轴垂直于层面，将具有如下应力-应变关系：

$$\varepsilon_x=\sigma_x/E_1-\mu_2\sigma_y/E_2-\mu_1\sigma_x/E_1,\quad \gamma_{xy}=\tau_{xy}/G_2;$$
$$\varepsilon_y=-\mu_2\sigma_x/E_2+\sigma_y/E_2-\mu_2\sigma_z/E_2,\quad \gamma_{yz}=\tau_{yz}/G_2;$$
$$\varepsilon_z=-\mu_1\sigma_x/E_1-\mu_2\sigma_y/E_2+\sigma_z/E_1,\quad \gamma_{zx}=2(1+\mu_1)\tau_{zx}/E_1.$$

式中E_1、μ_1是层状平面内的弹性常数，而E_2、G_2、μ_2是垂直于层面方向的弹性常数。

记

$$E_1/E_2=n,\quad G_2/E_2=m$$

层状弹性体平面应力问题的弹性矩阵为

$$[D]=\frac{E_2}{(1-n\mu_2^2)}\begin{bmatrix} n & n\mu_2 & 0 \\ n\mu_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m(1-n\mu_2^2) \end{bmatrix}. \qquad (2\text{-}25)$$

层状弹性体平面应变问题的弹性矩阵为

$$[D]=\frac{E_2}{(1+\mu_1)(1-\mu_1-2n\mu_2^2)}\begin{bmatrix} n(1-n\mu_2^2) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0 \\ n\mu_2(1+\mu_1) & (1-\mu_1^2) & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\mu_1)(1-\mu_1-2n\mu_2^2) \end{bmatrix}. \qquad (2\text{-}26)$$

如图 2-5 所示，当层面与x轴之间有一倾角时，为了得到整体坐标系（x，y）中的弹性矩阵$[D]$，必需进行变换。

设在局部坐标系（x'，y'）中的弹性矩阵为$[D']$，应力为$\{\sigma'\}$，应变为$\{\varepsilon'\}$，应力-应变关系为

$$\{\sigma'\}=[D']\{\varepsilon'\}. \qquad (c)$$

整体坐标系（x，y）中的应力为

$$\{\sigma\}=[\theta]\{\sigma'\} \qquad (d)$$

其中$[\theta]$是转换矩阵，见（2-19）式，把（c）式代入上式，得到

$$\{\sigma\}=[\theta][D']\{\varepsilon'\},$$

再把$\{\varepsilon'\}=[\theta]^T\{\varepsilon\}$代入上式，得到

$$\{\sigma\}=[\theta][D'][\theta]^T\{\varepsilon\}.$$

由此得到

$$[D]=[\theta][D'][\theta]^T. \qquad (2\text{-}27)$$

其中$[D]$为整体坐标系中的弹性矩阵。

§2-6 等效结点力与单元刚度矩阵

图 2-3 所示的平面连续结构，在外荷载作用下，每个单元都将产生位移和应力。今从中取出一个单元ijm，如图2-7所示，根据线性位移假设，单元内将有均匀的应力分量σ_x、

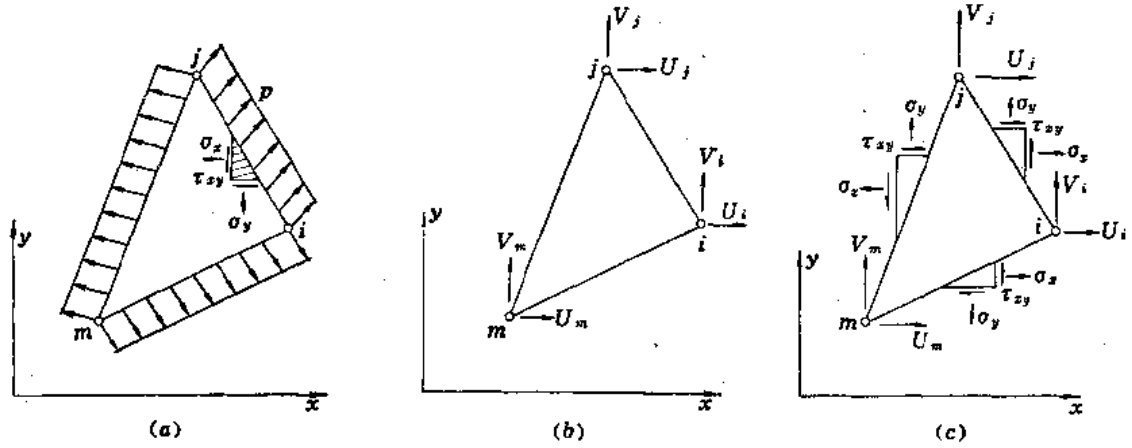


图 2-7

(a)单元边界力；(b)等效结点力；(c)等效结点力

σ_y、τ_{xy} 。在单元的三条边界上作用着分布力 p，这些分布力与单元应力维持平衡。

为了能用结构力学的概念求解弹性力学问题，我们用作用于单元结点上的等效集中力来代替这些作用于单元边界的分布力，并称为结点力，其方向应与结点位移方向一致。例如，在结点 i，结点力为

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}.$$

今根据静力等效原则，计算这些等效结点力。参阅图2-7(c)，作用于 ij 边上的水平合力为

$$X_{ij}=\sigma_x t(y_j-y_i)+\tau_{xy}t(x_i-x_j).$$

其中 t 为单元厚度。作用于 mi 边上的水平合力为

$$X_{mi}=\sigma_x t(y_i-y_m)-\tau_{xy}t(x_i-x_m).$$

把这两个水平合力平分到相邻的结点 i 上去，于是得到该水平结点力如下：

$$U_i=\frac{1}{2}(X_{ij}+X_{mi})=\frac{t}{2}\sigma_x(y_j-y_m)+\frac{t}{2}\tau_{xy}(x_m-x_j)$$

$$=\frac{t}{2}(b_i\sigma_x+c_i\tau_{xy}).$$

同理，可求得作用于 i 点的铅直结点力如下

$$V_i=\frac{t}{2}(c_i\sigma_y+b_i\tau_{xy}).$$

用类似方法可求得作用于 j 点和 m 点的结点力，合并起来，可用矩阵表示如下：

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}=\frac{t}{2}\begin{bmatrix} b_i & 0 & c_i \\ 0 & c_i & b_i \\ b_j & 0 & c_j \\ 0 & c_j & b_j \\ b_m & 0 & c_m \\ 0 & c_m & b_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}. \qquad (2\text{-}28)$$

利用矩阵[B]的表达式（2-13），上式可简写为

$$\{F\}^e=tA[B]^T\{\sigma\}. \tag{2-29}$$

在无初应变的情况下，应力可用结点位移表示如下：

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}^e.$$

上式代入式（2-29），得到

$$\{F\}^e=[B]^T[D][B]tA\{\delta\}^e.$$

命

$$[k]^e=[B]^T[D][B]tA, \tag{2-30}$$

得到

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e. \tag{2-31}$$

上式表示了单元的结点力与结点位移之间的关系。矩阵[k]^{e}称为单元刚度矩阵。

根据（2-12）式可将矩阵[B]写成分块形式：

$$[B]=[B_i,B_j,B_m].$$

代入式（2-30），则刚度矩阵也可写成分块形式：

$$[k]^e=\begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix}. \tag{2-32}$$

其中[k_{rs}]为2×2子矩阵：

$$[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_s]tA=\begin{bmatrix} k^1_{rs} & k^2_{rs} \\ k^3_{rs} & k^4_{rs} \end{bmatrix}. \tag{2-33}$$

上式是便于计算的形式。

对于各向同性平面应力问题，以弹性矩阵[D]的表达式（2-21）代入上式，得到

$$[k_{rs}]=\frac{Et}{4(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix} b_rb_s+(1-\mu)c_rc_s/2 & \mu b_rc_s+(1-\mu)c_rb_s/2 \\ \mu c_rb_s+(1-\mu)b_rc_s/2 & c_rc_s+(1-\mu)b_rb_s/2 \end{bmatrix}. \tag{2-34}$$

对于各向同性平面应变问题，上式中的E应换以$E/(1-\mu^2)$，μ应换以$\mu/(1-\mu)$，于是得到

$$[k_{rs}]=\frac{E(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)A}$$

$$\times\begin{bmatrix} b_rb_s+(1-2\mu)c_rc_s/2(1-\mu), & \mu b_rc_s/(1-\mu)+(1-2\mu)c_rb_s/2(1-\mu) \\ \mu c_rb_s/(1-\mu)+(1-2\mu)b_rc_s/2(1-\mu), & c_rc_s+(1-2\mu)b_rb_s/2(1-\mu) \end{bmatrix}. \tag{2-35}$$

各向同性体，平面应力和平面应变的单元刚度矩阵[k]见（2-36）式。

$$[k]^e=H\begin{bmatrix} b_i^2+qc_i^2 & rb_ic_i & b_ib_j+qc_ic_j & pb_ic_j+qb_jc_i & b_ib_m+qc_ic_m & pb_ic_m+qb_mc_i \\ & c_i^2+qb_i^2 & pb_jc_i+qb_ic_j & c_ic_j+qb_ib_j & pb_mc_i+qb_ic_m & c_ic_m+qb_ib_m \\ & & b_j^2+qc_j^2 & rb_jc_j & b_jb_m+qc_jc_m & pb_jc_m+qb_mc_j \\ & & & c_j^2+qb_j^2 & pb_mc_j+qb_jc_m & c_jc_m+qb_jb_m \\ & 对 & 称 & & b_m^2+qc_m^2 & rb_mc_m \\ & & & & & c_m^2+qb_m^2 \end{bmatrix}. \tag{2-36}$$

式中

平面应变：$H=\dfrac{E(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)A}$，$p=\dfrac{\mu}{1-\mu}$，$q=\dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$，$r=\dfrac{1}{2(1-\mu)}$，

平面应力：$H=\dfrac{Et}{4(1-\mu^2)A}$，$p=\mu$，$q=\dfrac{1-\mu}{2}$，$r=\dfrac{1+\mu}{2}$。

在有限单元法中，等效结点力是比较重要的概念。为了加深对它的理解，下面我们再从另一途径推导其计算公式。

取出单元ijm如图2-8，作用于单元边界的分布力已用六个结点力代替，单元内应力为σ_x、σ_y、τ_{xy}。自单元形心b至三边的中点a、c、d作三条直线，把单元三等分。取出其中



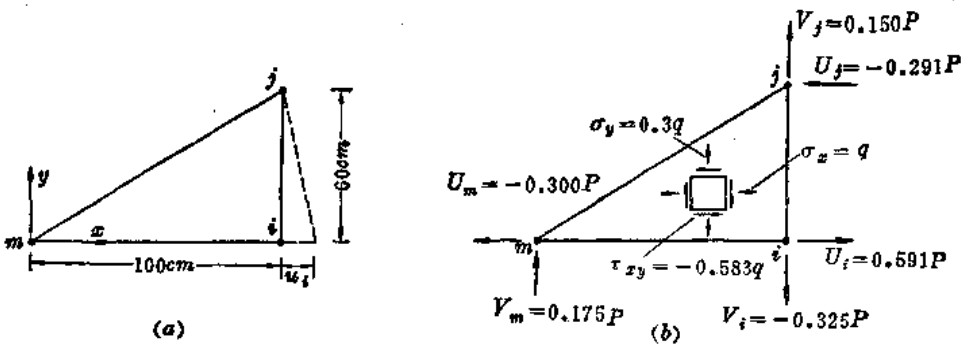


图 2-9

(a)单元尺寸；(b)u_i引起的应力与结点力

$$\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\frac{E}{2(1-\mu^2)A}\begin{bmatrix}60 & -30 & 0 & 30 & -60 & 0\\ 18 & -100 & 0 & 100 & -18 & 0\\ -35 & 21 & 35 & 0 & 0 & -21\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}. \qquad (c)$$

由（2-36）式，得到单元结点力与结点位移关系

$$\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ U_j\\ V_j\\ U_m\\ V_m\end{Bmatrix}=\frac{Et}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}0.591 & -0.325 & -0.291 & 0.150 & -0.300 & 0.175\\ -0.325 & 0.938 & 0.175 & -0.833 & 0.150 & -0.105\\ -0.291 & 0.175 & 0.291 & 0 & 0 & -0.175\\ 0.150 & -0.833 & 0 & 0.833 & -0.150 & 0\\ -0.300 & 0.150 & 0 & -0.150 & 0.300 & 0\\ 0.175 & -0.105 & -0.175 & 0 & 0 & 0.105\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}. \qquad (d)$$

今假设除了$u_i\neq 0$外，其余结点位移均为零，由式（c），可知单元内应力为

$$\sigma_x=q,\quad \sigma_y=0.30q=\mu\sigma_x,\quad \tau_{xy}=-0.583q,$$

$$q=\frac{60Eu_i}{2(1-\mu^2)A}=\frac{0.01Eu_i}{1-\mu^2}.$$

由式（d），可知单元结点力为

$$[U_i\ V_i\ U_j\ V_j\ U_m\ V_m\ ]^T=P[0.591\ -0.325\ -0.291\ 0.150\ -0.300\ 0.175]^T.$$

式中

$$P=\frac{Eu_it}{1-\mu^2}.$$

§2-7 结 点 荷 载

作用于结构上的荷载有两种，一种是集中荷载，另一种是分布荷载。对于集中荷载，在划分网格时应使集中荷载的作用点成为一个结点。至于分布荷载，应代以等效的结点荷载，以便于计算。这种荷载的代换必须按静力等效的原则进行，只有这样才能使得由于代

换而引起的应力误差是局部的，不影响整体的应力。

一、分布边界力的等效结点荷载

如图2-10(a)所示，设e是靠近边界的单元，并在ij边上作用着均匀分布水平边界力p_x，其合力为p_xtl，其中l为ij边的长度，t为单元的厚度。合力的作用点是ij边的中点，利用虚位移原理，不难证明等效结点荷载为

$$\{P\}^e=[X_i^e\ \ Y_i^e\ \ X_j^e\ \ Y_j^e\ \ X_m^e\ \ Y_m^e\ ]^T=\frac{p_xtl}{2}[1\quad 0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0]^T. \tag{2-37}$$

又如图2-10(b)所示，在ij边上作用着三角形分布水平边界力，在j点的集度为p_x，其合力将为$p_xtl/2$，合力的作用点至j点的距离为$l/3$，至i点的距离为$2l/3$，用虚位移原理不难证明，等效结点荷载为

$$\{P\}^e=\frac{P_xtl}{2}\left[\frac{1}{3}\quad 0\quad \frac{2}{3}\quad 0\quad 0\quad 0\right]^T. \tag{2-38}$$

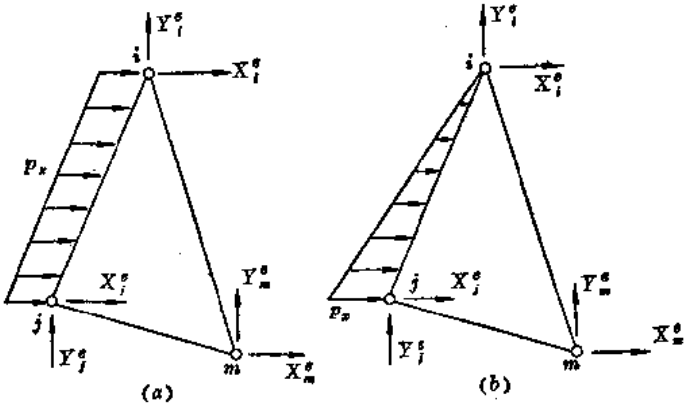


图 2-10 边界力的等效结点荷载
(a)均布边界力；(b)三角形分布边界力

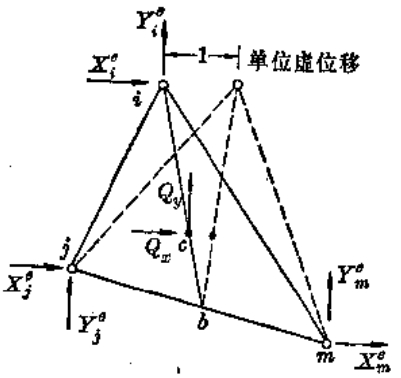


图 2-11 均布体积力的等效结点荷载

二、均布体积力的结点荷载

设均质、等厚度单元ijm，在其单位体积上作用着水平体积力q_x和铅直体积力q_y，其合力将为

$$Q_x=q_xtA,\quad Q_y=q_ytA. \tag{a}$$

式中A为单元的面积，t为厚度，合力的作用点为单元的重心C，如图2-11所示。首先求i点的水平荷载X_i^e，假想单元发生这样的虚位移：结点i沿水平方向产生单位虚位移，其他两个结点j和m不动，根据线性位移假设，b点也不移动，重心c在水平方向移动1/3单位，在铅直方向虚位移为零。按静力等效原则，荷载的虚功应等于X_i^e的虚功，即

$$X_i^e\times 1=Q_x\times\frac{1}{3}+Q_y\times 0,$$

由此可知$X_i^e=Q_x/3$，同理可求出其他结点荷载，最后得到荷载向量如下：

$$\{P\}^e=\frac{1}{3}[Q_x\quad Q_y\quad Q_x\quad Q_y\quad Q_x\quad Q_y]^T. \tag{2-39}$$

三、体积力势的结点荷载

在某些情况下，体积力可用体积力势 ϕ 表示如下：

$$q_x=-\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad q_y=-\frac{\partial\phi}{\partial y}. \tag{2-40}$$

设单元 ijm 的三个结点的体积力势是 ϕ_i、ϕ_j、ϕ_m，单元内部的体积力势可用形函数表示如下：

$$\phi=N_i\phi_i+N_j\phi_j+N_m\phi_m.$$

形函数 N_i 等见式（2-7）。由式（2-40）可求得体积力如下：

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix}=\frac{-1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix}.$$

于是由式（2-39），可求得结点荷载如下：

$$\{P\}^e=-\frac{t}{6}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \\ b_i & b_j & b_m \\ c_i & c_j & c_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \\ \phi_m \end{Bmatrix}. \tag{2-41}$$

四、初应变引起的结点荷载

设单元 e 内存在着初应变 $\{\varepsilon_0\}$，于是计算应力的公式为

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})=[D][B]\{\delta\}^e-[D]\{\varepsilon_0\}.$$

以上式代入式（2-29），得到单元结点力如下：

$$\{F\}^e=[B]^T[D][B]tA\{\delta\}^e-[B]^T[D]tA\{\varepsilon_0\}.$$

即

$$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e-[B]^T[D]tA\{\varepsilon_0\}.$$

与式（2-31）比较，可见上式右边的第二项是以前所没有的，是由于初应变而多出来的结点力，把它改变符号，即得到由于初应变而产生的结点荷载如下：

$$\{P\}^e_{\varepsilon_0}=[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}tA. \tag{2-42}$$

将矩阵[B]、[D]的表达式代入上式，得到

$$\{P\}^e_{\varepsilon_0}=A_0\begin{bmatrix} b_i & \beta b_i & \gamma c_i \\ \beta c_i & c_i & \gamma b_i \\ b_j & \beta b_j & \gamma c_j \\ \beta c_j & c_j & \gamma b_j \\ b_m & \beta b_m & \gamma c_m \\ \beta c_m & c_m & \gamma b_m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix}. \tag{2-43}$$

对于平面应变问题：

$$A_0=\frac{E(1-\mu)t}{2(1+\mu)(1-2\mu)},\qquad \beta=\frac{\mu}{1-\mu},\qquad \gamma=\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)};$$

对于平面应力问题：

$$A_0=\frac{Et}{2(1-\mu^2)},\qquad \beta=\mu,\qquad \gamma=\frac{1-\mu}{2}.$$

将式（2-15）或（2-16）代入式（2-43），得到温度变形的等效结点荷载如下：

$$\{P\}^e_{\varepsilon_0}=A_1[b_i\quad c_i\quad b_j\quad c_j\quad b_m\quad c_m]^T. \tag{2-44}$$

对于平面应变问题：$A_1=\dfrac{Et\alpha\bar{T}}{2(1-2\mu)}$，

对于平面应力问题：$A_1=\dfrac{Et\alpha\bar{T}}{2(1-\mu)}$，

以上各式适用于各向同性体，如果以各向异性体的$[D]$和$\{\varepsilon_0\}$表达式代入（2-42）式，不难求出各向异性体的等效结点荷载。

§2-8 结点平衡方程与整体刚度矩阵

每个结点，在结点力和结点荷载的作用下，必须保持平衡。例如，从我们所分析的结构中，取出结点i如图2-12（a）所示，这个结点i周围共有6个单元，从中再取出一个单元e，这个单元受到i、j、m三结点所施加的结点力是

$$\{F\}^e=[F_i\quad F_j\quad F_m]^T=[U_i\quad V_i\quad U_j\quad V_j\quad U_m\quad V_m]^T$$

反过来，结点i、j、m也受到该单元所施加的力，与上述结点力大小相等而方向相反。如图2-12（c）所示，结点i就受有单元e所施加的沿负方向的U_i和V_i。同样，环绕结点i的其他单元也对结点i施有这样的力。

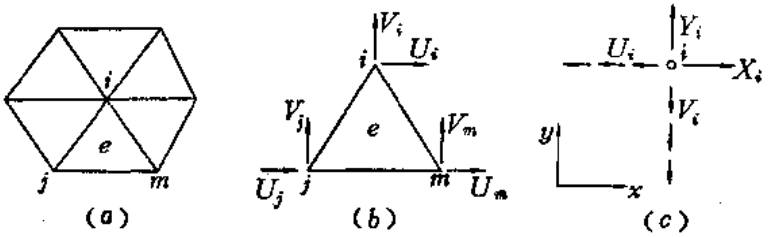


图 2-12 结点的平衡

（a）结点i；（b）单元e；（c）结点i的平衡

结点i一般还承受着从结点周围各单元移置而来的结点荷载

$$\{P_i\}=\sum_e\{P_i\}^e=\begin{Bmatrix}X_i\\Y_i\end{Bmatrix}.$$

根据结点i在水平及铅直方向的平衡条件，可建立平衡方程如下

$$\sum_e U_i=X_i,\quad \sum_e V_i=Y_i.$$

式中$\sum_e$ 表示对环绕结点 i 的所有单元求和。上述平衡方程也可用矩阵表示为

$$\sum_e \{F_i\} = \{P_i\} \tag{2-45}$$

以$\{F\}^e = [k]\{\delta\}^e$代入上式，得到用结点位移表示的结点平衡方程如下：

$$[K]\{\delta\} = \{P\}. \tag{2-46}$$

根据与第一章§1-5同样的推理，可知整体刚度矩阵$[K]$的各元素可计算如下：

$$K_{rs} = \sum_e k_{ij}. \tag{2-47}$$

其中$\sum_e$表示对围绕结点 i 的各单元求和。

如果共有 n 个结点，平衡方程组（2-46）将是 $2n$ 阶线性代数方程组，解出这个方程组，可求出结点位移，然后由（2-20）式可求出单元应力。因此，问题的关键在于建立整体刚度矩阵$[K]$。

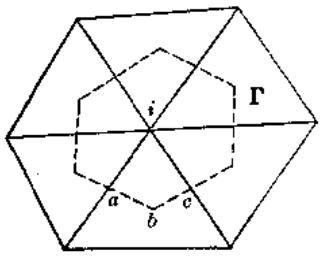


图 2-13

根据图2-8，结点平衡方程可从另一途径建立如下：如图2-13所示，将各单元形心与各边中点连线，形成环绕结点 i 的围线Γ。根据§2-6式（a），设作用于围线Γ上的边界力的水平分量为p_x，铅直分量为 p_y，于是关于结点i的平衡方程可写成

$$\left.\begin{aligned} \Sigma U_i &= \int_\Gamma t\,p_x\,ds = X_i, \\ \Sigma V_i &= \int_\Gamma t\,p_y\,ds = Y_i. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

式中的p_x、p_y可根据各单元应力算出，X_i、Y_i为结点荷载。

设围线Γ的外法线n与水平轴的夹角为ψ，根据平衡条件，有

$$p_x = \sigma_x\cos\psi + \tau_{xy}\sin\psi, \quad p_y = \sigma_y\sin\psi + \tau_{xy}\cos\psi, \tag{b}$$

把上式代入式（a），得到直接用各单元应力的围线积分表示的结点平衡方程如下：

$$\left.\begin{aligned} \int_\Gamma t(\sigma_x\cos\psi + \tau_{xy}\sin\psi)\,ds &= X_i, \\ \int_\Gamma t(\sigma_y\sin\psi + \tau_{xy}\cos\psi)\,ds &= Y_i. \end{aligned}\right\} \tag{2-48}$$

再将$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\}^e$代入上式，经过整理后，也将得到结点平衡方程组（2-46）式。

现在列举一个简例用以说明平衡方程组的建立。如图2-14（a），设有一带加劲杆的三角形板，承受着荷重P；对于板，采用三角形平面应力单元，对于加劲杆，采用承受轴力的杆单元，因此这是一种组合结构。为了较准确地计算其应力，当然需要采用比较密集的计算网格，目前作为一个简例，我们只划分为两个三角形平面应力单元。由于对称，只须取出一半来计算，如图2-14（b），共有 4 个单元，一个三角形平面应力单元和三个杆件单元，除图中所示尺寸外，其余数据为：$E = 2\times10^6$公斤/厘米^2，$\mu = 0.30$。

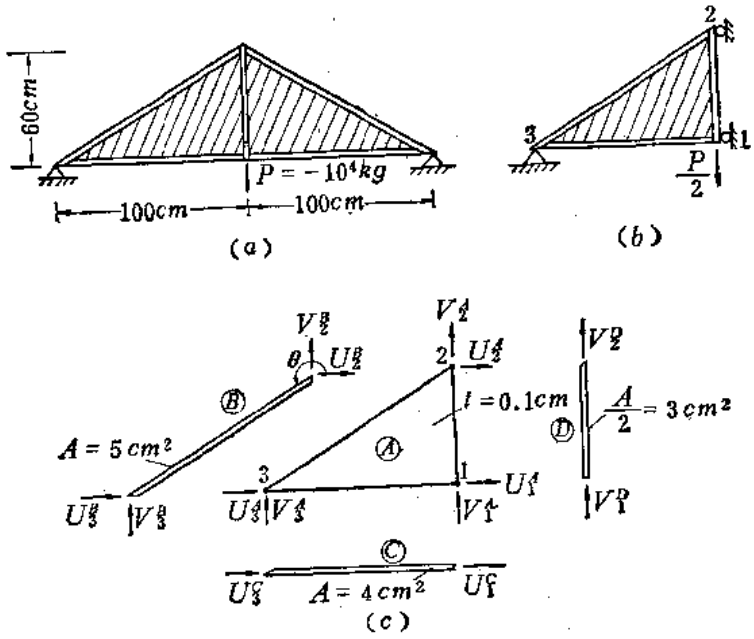


图 2-14

首先，计算各单元的刚度矩阵：

单元④：三角形板，$\frac{Et}{1-\mu^2}=2.2\times10^6$，把此值代入§2-6式（d），得到

$$\begin{Bmatrix} U_1^A \\ V_1^A \\ U_2^A \\ V_2^A \\ U_3^A \\ V_3^A \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 1.300 & -0.714 & -0.640 & 0.330 & -0.660 & 0.385 \\ -0.714 & 2.06 & 0.385 & -1.832 & 0.330 & -0.231 \\ -0.640 & 0.385 & 0.640 & 0 & 0 & -0.385 \\ 0.330 & -1.832 & 0 & 1.832 & -0.330 & 0 \\ -0.660 & 0.330 & 0 & -0.330 & 0.660 & 0 \\ 0.385 & -0.231 & -0.385 & 0 & 0 & 0.231 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

式中在单元刚度矩阵上面注明了各列所对应的位移，这是为了以后叠加刚度系数时便于找到相应的位置。

单元⑧：杆单元23

$$l=\sqrt{100^2+60^2}=116.7cm,\quad \frac{AE}{l}=\frac{5\times2\times10^6}{116.7}=0.858\times10^5,$$

$$\alpha=\cos\theta=-0.858,\quad \beta=\sin\theta=-0.515.$$

由第一章式（1-8），得到

$$\begin{Bmatrix} U_2^B \\ V_2^B \\ U_3^B \\ V_3^B \end{Bmatrix} = 10^5 \begin{bmatrix} 0.630 & 0.378 & -0.630 & -0.378 \\ 0.378 & 0.227 & -0.378 & -0.227 \\ -0.630 & -0.378 & 0.630 & 0.378 \\ -0.378 & -0.227 & 0.378 & 0.227 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}.$$

单元②：杆单元13

$$\frac{AE}{l}=0.800\times10^5,\quad \alpha=-1,\quad \beta=0.$$

$$\begin{Bmatrix} U_1^c \\ U_3^c \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} 0.800 & -0.800 \\ -0.800 & 0.800 \end{bmatrix}\begin{matrix} u_1 \\ u_3 \end{matrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{Bmatrix}.$$

单元②：杆单元12

$$\frac{AE}{l}=10^5,\quad \alpha=0,\quad \beta=1$$

$$\begin{Bmatrix} V_1^D \\ V_2^D \end{Bmatrix}=10^5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \end{matrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}.$$

现在，建立整体刚度矩阵和平衡方程组。把上列四个矩阵方程相加，得到

$$10^5\begin{bmatrix} 2.10 & -0.714 & -0.640 & 0.330 & -1.460 & 0.385 \\ -0.714 & 3.06 & 0.385 & -2.832 & 0.330 & -0.231 \\ -0.640 & 0.385 & 1.270 & 0.378 & -0.630 & -0.763 \\ 0.330 & -2.832 & 0.378 & 3.059 & -0.708 & -0.227 \\ -1.460 & 0.330 & -0.630 & -0.708 & 2.09 & 0.378 \\ 0.385 & -0.231 & -0.763 & -0.227 & 0.378 & 0.458 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{Bmatrix}.\quad (c)$$

下面按照上一章所述方法，考虑边界条件。由图2-14（ b ），可知

$$u_1=u_2=u_3=v_3=0.\quad (d)$$

在平衡方程组（ c ）中，把对应于以上各个结点位移的第一、三、五、六各方程删去，在剩下的两个方程中，再把对应于以上各量的项删去，得到以v_1和v_2为未知量的平衡方程组如下：

$$10^5\begin{bmatrix} 3.06 & -2.832 \\ -2.832 & 3.059 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} -5000 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

由上式解得

$$v_1=-0.1131cm,\quad v_2=-0.1047cm.\quad (e)$$

结点位移既已求出，由$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e$不难求出单元应力。把已知的结点位移代入平衡方程组（ c ）中第一、三、五、六各方程，可求出支座反力。

§2-9 用编码法建立整体刚度矩阵

在上一节，我们是用直观方法建立整体刚度矩阵，即选取有关的单元刚度系数k_{ij}加以

组合，从而得到整体刚度系数 K_{ij}。在第一章§1-10中，我们曾说明如何用编码法建立杆件结构的整体刚度矩阵。现在我们再说明如何用编码法在计算机上自动形成平面问题的整体刚度矩阵[K]。

目前，单元刚度矩阵是6×6阶的，即

$$[k]^e=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}.$$

刚度系数 k_{ij} 的下标 "ij" 表示它位于第 i 行第 j 列，其物理意义是单元的第 j 个自由度发生单位变形时所引起的单元第 i 个结点力。我们用1、2、3…6表示单元的6个自由度及相应的6个结点力的序号。

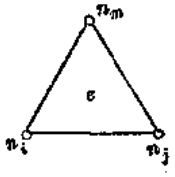


图 2-15

如果结构有 n 个结点，则共有 $2n$ 个自由度，其编号为：

$$1,2,3,4,\cdots,2n-1,2n\ 。 \qquad (a)$$

从结构中取出一个单元 e，如图2-15所示，它的三个结点的编号是 n_i、n_j、n_m，结点 n_i 的两个自由度在结构自由度的编号（a）中的号码是 $2n_i-1$ 和 $2n_i$，在单元6个自由度中的号码是1和2。因此，可列出单元 e 的结点自由度编码表如下：

结点自由度	u_i	v_i	u_j	v_j	u_m	v_m
单元中号码 $(i,\ j)$	1	2	3	4	5	6
结构中号码 $(r,\ s)$	$2n_i-1$	$2n_i$	$2n_j-1$	$2n_j$	$2n_m-1$	$2n_m$

利用上述编码表，不难确定单元刚度系数与整体刚度系数的对应关系。例如单元刚度系数 k_{25}，从编码表第2格取出 $2n_i$，从第5格取出 $2n_m-1$，则对应的整体刚度系数是 $k_{25}\rightarrow K_{2n_i,\,2n_m-1}$，即

$$k_{25}\rightarrow K_{2n_i,\,2n_m-1};$$

同理，

$$k_{11}\rightarrow K_{2n_i-1,\,2n_i-1};$$

$$k_{23}\rightarrow K_{2n_i,\,2n_j-1};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots。$$

把全部单元的刚度系数都按照编码表叠加到相应的整体刚度系数中去，就得到了整体刚度矩阵。再参照§1-6的方法，对边界条件进行处理，即可求解。

对于本书以后各章所分析的问题，都可用类似方法由单元刚度矩阵建立整体刚度矩阵，

我们在以后各章就不再重复了。

§2-10 计 算 实 例

理论和实践都已证明，当单元的尺寸逐步取小时，前述平面问题的有限单元法的解答将收敛于正确解答。关于收敛条件将留到第四章讨论。这一节将介绍一些计算实例。

一、圆孔附近的应力集中

图 2-16(*a*)表示在均匀应力 $\sigma_x=-1$ 公斤/厘米^2 作用下的圆孔附近的计算网格，由于孔口附近将出现应力集中，因此在孔口附近网格逐步加密。图2-16(*b*)、(*c*)分别表示了各向同性体和各向异性体的计算结果。图中曲线是无限域圆孔的理论解答，小圆圈是有限单元法计算结果，两者符合得很好。

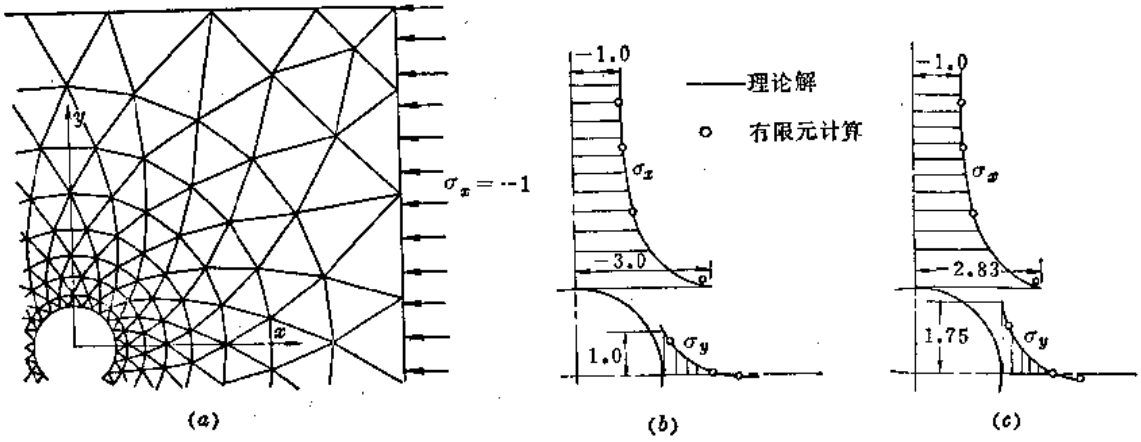


图 2-16 圆孔应力集中

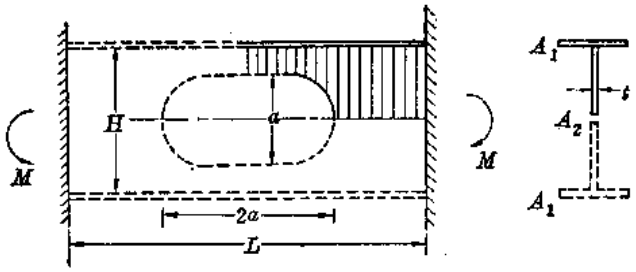
(*a*)圆孔附近计算网格；(*b*)各向同性体应力$E_x=1$，$E_y=3$，$G_{xy}=0.42$，$\mu_1=0.1$，$\mu_2=0$

二、工字梁腹板开孔应力分析

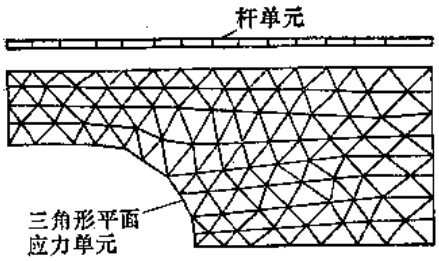
在船舶结构中，工字梁腹板往往开孔。图2-17(*a*)表示一腹板开孔的工字形深梁，(*b*)表示计算网格，由于对称，只需取出四分之一进行计算。腹板采用三角形平面应力单元，翼板采用中心受力的杆单元（如果翼板很宽，为考虑剪力滞后，翼板也可采用三角形平面应力单元），计算结果见图2-17(*c*)。图中σ_{xn}为按平截面假设计算的最大纤维应力。

三、混凝土重力坝应力分析

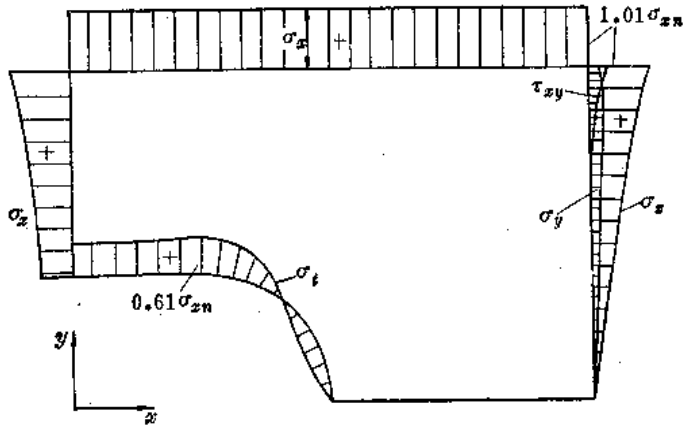
图2-18表示一座岩石基础上的混凝土重力坝在水压力及混凝土自重作用下的应力分析，该坝高度65米，底宽49米，岩基弹性模量 $E_0=30\times10^4$公斤/厘米^2，混凝土弹性模量（考虑徐变影响）为$E_1=15\times10^4$公斤/厘米^2，水容重 1 吨/米^3，混凝土容重 2.45 吨/米^3。本书作者与宋敬廷同志合作用三角形有限单元，按平面应变问题(取单位厚度）进行分析。计算网格见图2-18(*a*)，计算结果见图2-18(*c*)。



(a)



(b)



$A_1=A_2$, $L/H=1.6, t/H=1/30$, $a/H=0.40$

(c)

图 2-17 “工”字梁腹板开孔后应力分析

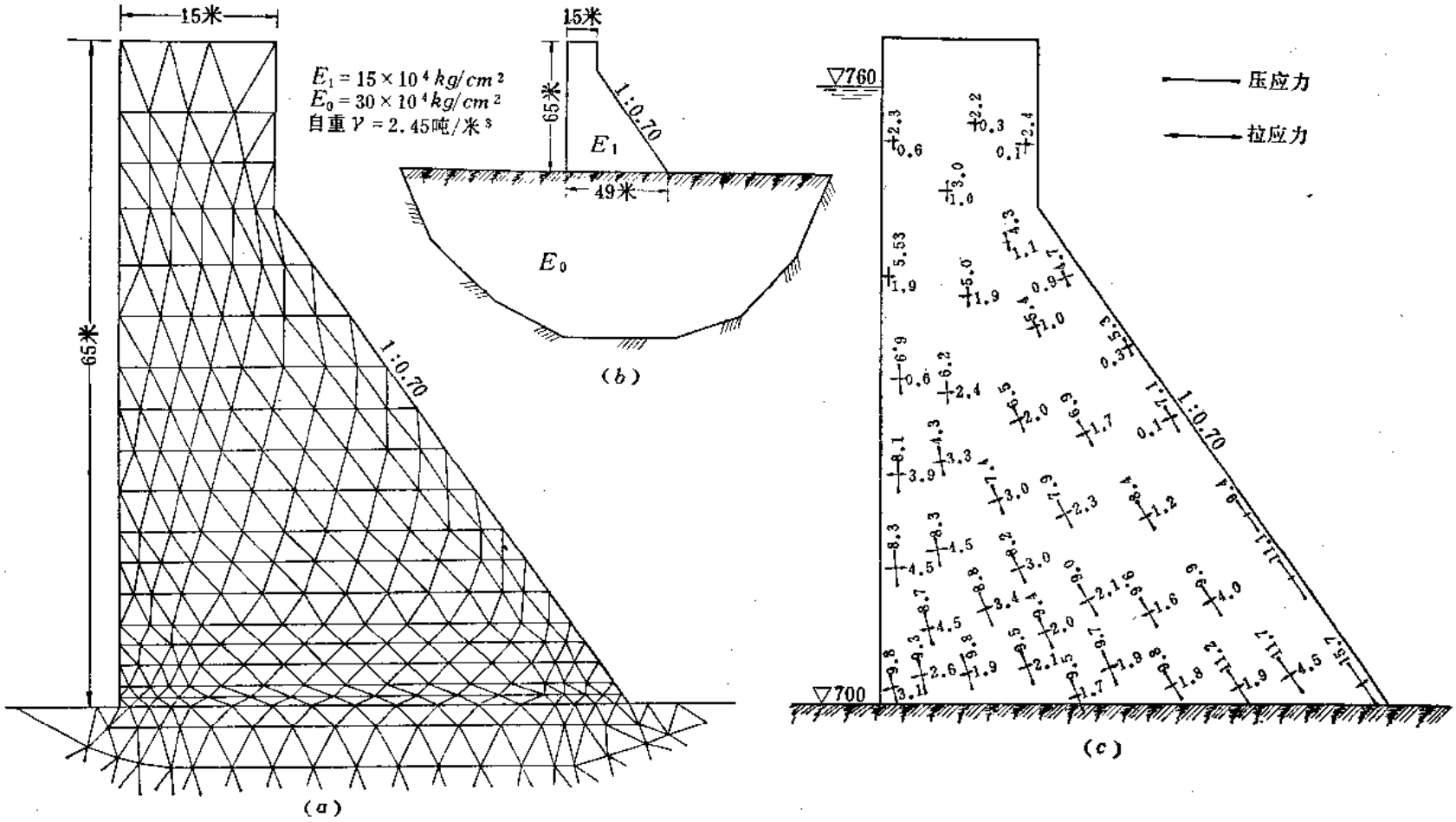


图 2-18　重力坝应力

(a)计算网格(基础只示一部分)；(b)重力坝尺寸；(c)计算应力(水压力＋自重)，kg/cm^2

第三章 单 元 分 析

从前面两章可以看出，有限单元法的核心是建立单元刚度矩阵，有了单元刚度矩阵，加以适当组合，可以得到平衡方程组，这以后剩下的就是一些代数运算了。在弹性力学平面问题计算中，我们是用直观方法建立单元刚度矩阵的，其优点是易于理解，并便于初学者建立清晰的力学概念。但这种直观方法也是有缺点的，一方面，对于比较复杂的单元，依靠它建立单元刚度矩阵是有困难的，另一方面，它也不能给出关于收敛性的证明。把能量原理应用于有限单元法，就可以克服这些缺点。能量原理为建立有限单元法基本公式提供了强有力的工具，并能给出关于收敛性的证明。在这一章，我们说明如何利用能量原理建立关于单元的基本公式，在下一章，再说明如何把能量原理应用于结构的整体分析。

我们首先介绍虚位移原理及其在单元分析中的应用。在各种能量原理中，虚位移原理应用最为方便，因而得到了广泛的采用，然后再陆续介绍最小势能原理、最小余能原理及赖斯纳能量原理在单元分析中的应用。

在本书第二十六章，还将说明如何利用加权余量法计算单元刚度矩阵和结点荷载。

§3-1 虚 位 移 原 理

所谓虚位移可以是任何无限小的位移，它在结构内部必须是连续的，在结构的边界上必须满足运动学边界条件，例如对于悬臂梁来说，在固定端处，虚位移及其斜率必须等于零。

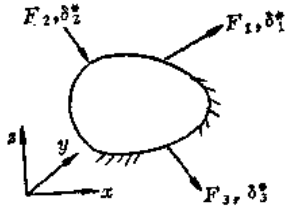


图 3-1

今考虑图3-1所示的物体，它受到外力 F_1、F_2、F_3 … 等的作用，记

$$\{F\}=[F_1 \quad F_2 \quad F_3\cdots]^T.$$

在这些外力作用下，物体的应力为

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T.$$

现在假设物体发生了虚位移，在外力作用处与各个外力相应方向的虚位移为δ_1^*、δ_2^*、δ_3^*…等等，记

$$\{\delta^*\}=[\delta_1^* \quad \delta_2^* \quad \delta_3^*\cdots]^T.$$

上述虚位移所产生的虚应变为

$$\{\varepsilon^*\}=[\varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \varepsilon_z^* \quad \gamma_{xy}^* \quad \gamma_{yz}^* \quad \gamma_{zx}^*]^T.$$

在产生虚位移时，外力已作用于物体，而且在虚位移过程中，外力保持不变。因此，外力在虚位移上所做的虚功是

$$\delta V=F_1\delta_1^*+F_2\delta_2^*+F_3\delta_3^*+\cdots=\{\delta^*\}^T\{F\}.$$

在物体的单位体积内，应力在虚应变上的虚应变能是

$$\sigma_x\varepsilon_x^*+\sigma_y\varepsilon_y^*+\sigma_z\varepsilon_z^*+\tau_{xy}\gamma_{xy}^*+\tau_{yz}\gamma_{yz}^*+\tau_{zx}\gamma_{zx}^*=\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}.$$

整个物体的虚应变能是

$$\delta U=\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz.$$

虚位移原理表明，如果在虚位移发生之前，物体处于平衡状态，那末在虚位移发生时，外力所做虚功等于物体的虚应变能，即

$$\{\delta^*\}^T\{F\}=\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz. \qquad (3\text{-}1)$$

现在，以平面应力问题为例来证明上述论断。考虑单位厚度的平板，为简化起见，假定没有体积力和初应力（推广到一般情况并无困难）。如图3-2所示，边界可分为两部分。在S_u上，位移等于零。在S_σ上，作用着边界力p，其分量为p_x和p_y。在这一部分的边界条件可写为

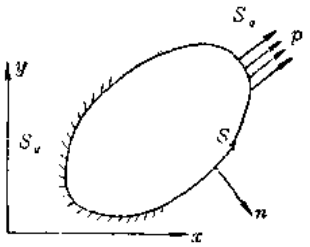


图 3-2

$$\sigma_x l_x+\tau_{xy}l_y=p_x,\quad \sigma_y l_y+\tau_{xy}l_x=p_y. \qquad (a)$$

在外力P作用下，物体内产生应力σ_x、σ_y、τ_{xy}，由弹性力学可知，这些应力分量满足下列平衡方程：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0. \qquad (b)$$

现在假设物体产生了虚位移u^*、v^*，相应的虚应变为

$$\varepsilon_x^*=\frac{\partial u^*}{\partial x},\quad \varepsilon_y^*=\frac{\partial v^*}{\partial y},\quad \gamma_{xy}^*=\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}. \qquad (c)$$

由于上述虚应变，物体内部应力所产生的虚应变能是

$$\begin{aligned}\delta U&=\iint\{\varepsilon^*\}\{\sigma\}dxdy\\&=\iint\left[\sigma_x\frac{\partial u^*}{\partial x}+\sigma_y\frac{\partial v^*}{\partial y}+\tau_{xy}\left(\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial v^*}{\partial x}\right)\right]dxdy. \qquad (d)\end{aligned}$$

由于

$$\iint\frac{\partial(\sigma_x u^*)}{\partial x}dxdy=\iint u^*\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy+\iint\sigma_x\frac{\partial u^*}{\partial x}dxdy.$$

所以（d）式右端第一项：

$$\iint\sigma_x\frac{\partial u^*}{\partial x}dxdy=\iint\frac{\partial(\sigma_x u^*)}{\partial x}dxdy-\iint u^*\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dxdy.$$

同样，对该式右端其余两项作类似的运算后，并把它代入式（d）得到：

$$\begin{aligned}\delta U=&-\iint\left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)u^*+\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\right)v^*\right]dxdy\\&+\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x u^*)+\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v^*)+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_y v^*)+\frac{\partial}{\partial y}(\tau_{xy}u^*)\right]dxdy\end{aligned}$$

由平衡方程（b）可知，上式右端第一个积分应等于零，因此虚应变能δU的表达式简化为

$$\delta U=\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x u^*+\tau_{xy}v^*\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y v^*+\tau_{xy}u^*\right)\right]dxdy. \qquad (e)$$

由格林定理可知

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int\left(Ql_x+Pl_y\right)ds \qquad (f)$$

式中l_x、l_y是边界法线的方向余弦，令

$$Q=\sigma_x u^*+\tau_{xy}v^*,\quad P=\sigma_y v^*+\tau_{xy}u^*.$$

由（e）、（f）二式，可知虚应变能δU可表示为

$$\delta U=\int\left[\left(\sigma_x u^*+\tau_{xy}v^*\right)l_x+\left(\sigma_y v^*+\tau_{xy}u^*\right)l_y\right]ds$$

整理后，得到

$$\delta U=\int\left[\left(\sigma_x l_x+\tau_{xy}l_y\right)u^*+\left(\sigma_y l_y+\tau_{xy}l_x\right)v^*\right]ds. \qquad (g)$$

根据边界条件，在边界S_u上，规定位移等于零，所以$u^*=0$，$v^*=0$，上式右端的线积分在S_u部分应等于零。在边界S_σ上，$\sigma_x l_x+\tau_{xy}l_y=p_x$，$\sigma_y l_y+\tau_{xy}l_x=p_y$，代入上式，得到

$$\delta U=\int_{S_\sigma}\left(p_x u^*+p_y v^*\right)ds. \qquad (h)$$

上式右端代表作用于物体边界的外力p_x、p_y在虚位移上所做的虚功δV，故有

$$\delta U=\delta V. \qquad (3\text{-}2)$$

从而证明了虚位移原理。

值得注意的是，在上述证明过程中并未引用材料的应力-应变关系，因此虚位移原理不但适用于线性材料，也适用于非线性材料。

§3-2 单元位移

在图3-3中表示了求解平面应力的三角形单元、求解空间应力的四面体单元及求解薄

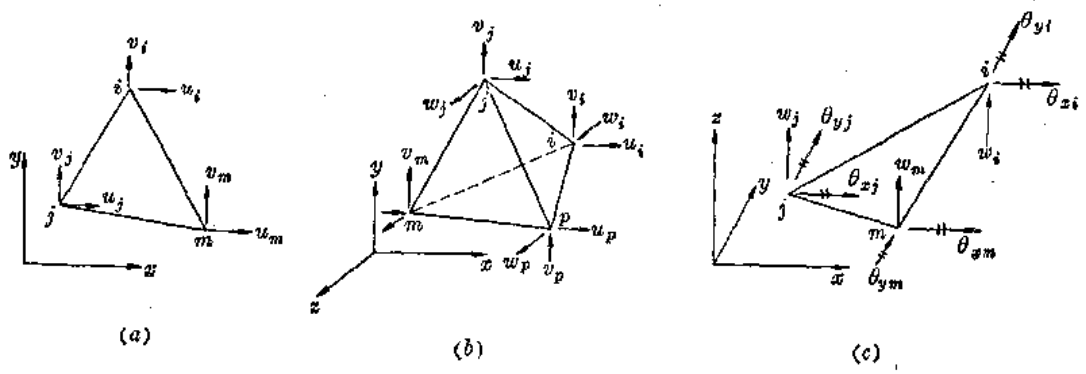


图 3-3 几种求解应力的单元

(a)平面应力单元；(b)空间应力单元；(c)薄板弯曲单元

板弯曲问题的三角形单元。用$\{\delta_i\}$表示结点 i 的位移。例如，对于平面应力问题，

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}.$$

对于空间应力问题

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

其中u_i、v_i、w_i分别是结点 i 沿x、y、z方向的位移分量。如图3-3(c)所示，对于薄板弯曲问题

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}.$$

其中w_i为结点 i 沿 z 方向的线位移，θ_{xi}和θ_{yi}分别为结点 i 绕 x 轴和绕 y 轴的角位移。用$\{\delta\}^e$表示单元 e 全部结点位移所构成的向量：

$$\{\delta\}^e=[\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_m\cdots]^T \tag{3-3}$$

单元内任一点（x，y，z）的位移可表示如下：

$$\{f\}=[N]\{\delta\}^e=[N_i \quad N_j \quad N_m\cdots]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \\ \vdots \end{Bmatrix}. \tag{3-4}$$

式中N_i等为形函数，具有如下特性：

在结点 i：　　$N_i(x_i,\ y_i,\ z_i)=\mathrm{I}$（单位阵）

在其他结点：$N_i(x_j,y_j,z_j)=N_i(x_m,y_m,z_m)=0\cdots$，$N_i$ 为坐标的函数，其具体形式将在以后各章中给出。

§3-3 单元应变与应力

当单元内任一点的位移已知时，通过适当的微分运算可求出单元内任一点的应变，一般可表示如下

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e. \tag{3-5}$$

例如对于平面应力问题，矩阵$[B]$见式（2-12）、（2-13）。

设$\{\varepsilon_0\}$为由于温度变化、收缩等因素引起的初应变，$\{\sigma_0\}$为施加荷载前已存在于单元中的初应力（例如岩体中由于造山运动而形成的初应力）。根据广义虎克定理，单元应力可表示如下

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}. \tag{3-6}$$

其中$[D]$为弹性矩阵，以式（3-5）代入上式，也可写成

$$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e-[D]\{\varepsilon_0\}+\{\sigma_0\}. \tag{3-7}$$

其中

$$[S]=[D][B]. \tag{3-8}$$

§3-4 结点力与单元刚度矩阵

为了能用结构力学方法求解连续介质的应力，以作用于单元结点上的等效集中力代替分布于单元边界上的应力，并称为结点力。用$\{F_i\}$表示i点的结点力。结点力的个数和方向必须与结点位移$\{\delta_i\}$保持一致。对于平面应力问题，

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}.$$

对于空间应力问题

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{Bmatrix}.$$

其中U_i、V_i、W_i分别是沿x、y、z方向作用于结点i的结点力。对于薄板弯曲问题

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \end{Bmatrix}.$$

其中W_i是沿z方向的集中力，$M_{\theta xi}$、$M_{\theta yi}$是绕x轴和绕y轴的集中力矩。

用$\{F\}^e$表示单元e全部结点力所组成的向量

$$\{F\}^e=[F_i\ F_j\ F_m\ \cdots]^T. \tag{3-9}$$

今用虚功原理推导结点力的表达式。假想在单元e中发生了虚位移$\{r^*\}$，相应的结点虚位移为$\{\delta^*\}^e$，根据式（3-4），有

$$\{r^*\}=[N]\{\delta^*\}^e.$$

由式（3-5），单元内发生的虚应变为

$$\{\varepsilon^*\}=[B]\{\delta^*\}^e.$$

结点力所做的虚功等于每个结点力分量与相应的结点位移分量的乘积之和

$$u_i^*U_i+v_i^*V_i+w_i^*W_i+\cdots.$$

用矩阵表示，即为

$$\delta V=(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e.$$

在整个单元内，应力在虚应变$\{\varepsilon^*\}$上的虚应变能是

$$\delta U=\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dxdydz.$$

把$\{\varepsilon^*\}=[B]\{\delta^*\}^e$代入上式，得到

$$\delta U=(\{\delta^*\}^e)^T\iiint[B]^T\{\sigma\}dxdydz.$$

由式（3-2），$\delta U=\delta V$，故

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=(\{\delta^*\}^e)^T\iiint[B]^T\{\sigma\}dxdydz.$$

上式对于任何虚位移都必须成立。由于虚位移可以是任意的，所以矩阵$(\{\delta^*\}^e)^T$也是任意的。上式两边与它相乘的矩阵应当相等，于是得到

$$\{F\}^e=\iiint[B]^T\{\sigma\}dxdydz\ . \qquad (3\text{-}10)$$

上式右边的重积分是在整个单元e的体积内进行的。对于没有初应力和初应变的情况，应力可表示如下

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}^e.$$

以上式代入式（3-10），由于$\{\delta\}^e$的元素是常量，可以放到积分号外面去，得到

$$\{F\}^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz\{\delta\}^e\ .$$

命

$$[k]^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz\ . \qquad (3\text{-}11)$$

于是

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e. \qquad (3\text{-}12)$$

上式建立了结点力与结点位移之间的关系。矩阵$[k]^e$称为单元刚度矩阵，它的元素表示当该单元e发生一定的结点位移时，所对应的结点力。单元刚度矩阵$[k]^e$决定于该单元的形状、大小、方向和弹性常数，而与单元的位置无关，即不随单元或坐标轴的平移而改变。

§3-5 结 点 荷 载

为了能用结构力学方法分析连续介质的应力，所有分布荷载都必须代换以等效的结点荷载。今用$\{P_i\}$表示结点i的等效结点荷载。例如，对于平面应力问题

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix}X_i\\Y_i\end{Bmatrix}.$$

对于空间应力问题

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix}X_i\\Y_i\\Z_i\end{Bmatrix}.$$

其中X_i、Y_i、Z_i分别是沿x、y、z方向作用于i点的集中荷载。对于薄板弯曲问题

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix}Z_i\\R_{\theta xi}\\R_{\theta yi}\end{Bmatrix}.$$

其中$R_{\theta xi}$、$R_{\theta yi}$分别是绕x轴和绕y轴的集中力矩。

用$\{P\}^e$表示单元e全部结点荷载所组成的向量

$$\{P\}^e=[P_i\quad P_j\quad P_m\quad \cdots]^T. \qquad (3\text{-}13)$$

下面用虚位移原理推导各种结点荷载算式。

（1）分布体积力

设单位体积内承受的体积力为

$$\{q\}=\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}.$$

当单元中发生虚位移$\{r^*\}$时，体积力$\{q\}$所做的功为

$$\iiint \{r^*\}^T\{q\}dxdydz=(\{\delta^*\}^e)^T\iiint[N]^T\{q\}dxdydz .$$

它应当等于等效结点荷载所做的功，即

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{P\}_q^e=(\{\delta^*\}^e)^T\iiint[N]^T\{q\}dxdydz$$

由于虚位移$\{\delta^*\}$是任意的，由上式可得体积力$\{q\}$的等效结点荷载如下：

$$\{P\}_q^e=\iiint[N]^T\{q\}dxdydz \qquad (3\text{-}14)$$

上式右边的重积分应当在单元e的整个体积内进行。

（2）分布面力

设单元e是靠近边界的单元，在其边界S上作用着分布的面力$\{p\}$

$$\{p\}=\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}.$$

当单元发生虚位移$\{r^*\}=[N]\{\delta^*\}^e$时，面力$\{p\}$所做的功为

$$\int_S\{r^*\}^T\{p\}dS=(\{\delta\}^e)^T\int_S[N]^T\{p\}dS.$$

它必须等于等效结点荷载所做的功，由此得到

$$\{P\}_p^e=\int_S[N]^T\{p\}ds. \qquad (3\text{-}15)$$

上式右边的面积分是在分布荷载所作用的表面S上进行的。

（3）初应变与初应力

设单元e中存在着初应变$\{\varepsilon_0\}$和初应力$\{\sigma_0\}$，以式（3-6）代入式（3-10），得到

$$\{F\}^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz\{\delta\}^e-\iiint[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dxdydz+\iiint[B]^T\{\sigma_0\}\times dxdydz.$$

上式右边的第二项和第三项是以前的式（3-12）中所没有的，是由于初应变和初应力而多出来的结点力，把它们改变符号，即得到由于初应变而产生的结点荷载$\{P\}_{\varepsilon_0}^e$及由于初应力而产生的结点荷载$\{P\}_{\sigma_0}^e$如下：

$$\{P\}_{\varepsilon_0}^e=\iiint[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dxdydz. \qquad (3\text{-}16)$$

$$\{P\}_{\sigma_0}^e=-\iiint[B]^T\{\sigma_0\}dxdydz. \qquad (3\text{-}17)$$

以上二式右边的体积分必须在单元 e 的整个体积内进行。必须指出，初应力和初应变是同一物理本质的两个表现方面，根据计算的方便，对于具体问题，有的（如温度变形）按初应变考虑，有的（如地应力）按初应力考虑。二者取其一。

上述各公式在本书以后各章经常要用到，在实际工作中也是常用的，为便于查阅，汇总如下：

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e=[N_i N_j N_m\cdots]\begin{Bmatrix}\delta_i\\\delta_j\\\delta_m\\\vdots\end{Bmatrix}; \tag{3-4}$$

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e; \tag{3-5}$$

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}; \tag{3-6}$$

$$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e-[D]\{\varepsilon_0\}+\{\sigma_0\}; \tag{3-7}$$

$$[S]=[D][B]; \tag{3-8}$$

$$[k]^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz; \tag{3-11}$$

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e; \tag{3-12}$$

$$\{P\}_q^e=\iiint[N]^T\{q\}dxdydz; \tag{3-14}$$

$$\{P\}_p^e=\int_S[N]^T\{p\}dS; \tag{3-15}$$

$$\{P\}_{\varepsilon 0}^e=\iiint[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dxdydz; \tag{3-16}$$

$$\{P\}_{\sigma 0}^e=-\iiint[B]^T\{\sigma_0\}dxdydz. \tag{3-17}$$

§3-6 虚位移原理应用实例 梁单元

在第一章已利用结构力学中熟知的公式给出梁单元刚度矩阵，现在我们利用虚功原理重新推导梁单元刚度矩阵，以作为例子。

如图3-4所示等截面梁单元12，忽略轴力影响，单元结点力$\{F\}^e$和结点位移$\{\delta\}^e$分别是

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}V_1\\M_1\\V_2\\M_2\end{Bmatrix},\quad \{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}v_1\\\phi_1\\v_2\\\phi_2\end{Bmatrix}.$$

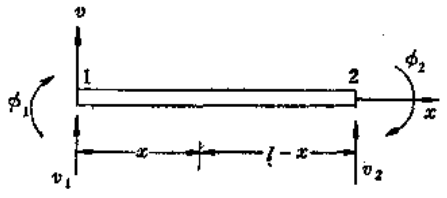


图 3-4 梁单元

令

$$L_1=1-\frac{x}{l},\qquad L_2=\frac{x}{l}. \tag{3-18}$$

显然，L_1、L_2具有下列性质：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在点 1，} & L_1=1,\ L_2=0\\ \text{在点 2，} & L_1=0,\ L_2=1\end{array}\right\} \tag{3-19}$$

设$\psi=\psi(L_1,\ L_2)$，则

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\partial L_1}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial L_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial L_2}=\frac{1}{l}\left(\frac{\partial\psi}{\partial L_2}-\frac{\partial\psi}{\partial L_1}\right). \tag{3-20}$$

由于$L_1+L_2=1$，不难验证，L_1和L_2的积分可计算如下：

$$\int_0^l L_1^a L_2^b dx=l\int_0^1(1-L_2)^a L_2^b dL_2=\frac{a!\ b!\ l}{(a+b+1)!}. \tag{3-21}$$

式中 $a!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots(a-1)a$，而$0!=1$。

L_1和L_2是用长度的比值表示的坐标，可称为长度坐标。

为了进行单元分析，首先必须把梁单元12内任一点的挠度表示为某种函数形式。现在我们用形函数和结点位移表示单元内任一点的挠度v如下：

$$\begin{aligned}v&=N_1v_1+N_2\phi_1+N_3u_2+N_4\phi_2\\&=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]\begin{Bmatrix}v_1\\ \phi_1\\ v_2\\ \phi_2\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e\end{aligned} \tag{3-22}$$

$$[N]=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4]. \tag{3-23}$$

式中N_1、N_2、N_3、N_4是梁单元的形函数，可用前述长度坐标L_1、L_2表示如下：

$$\left.\begin{array}{l}N_1=L_1^2(3-2L_1),\ N_2=-L_1^2L_2l,\\ N_3=L_2^2(3-2L_2),\ N_4=L_1L_2^2l.\end{array}\right\} \tag{3-24}$$

把形函数取为如上形式是为了在单元两端挠度v及其一阶导数$\frac{dv}{dx}$符合假定的边界条件。

对N_i求微商，由（3-20）式，可得到

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dN_1}{dx}=-\dfrac{6L_1L_2}{l};\quad \dfrac{dN_2}{dx}=-L_1(L_1-2L_2);\\ \dfrac{dN_3}{dx}=\dfrac{6L_1L_2}{l};\quad \dfrac{dN_4}{dx}=-L_2(L_2-2L_1).\end{array}\right\} \tag{3-25}$$

不难看出，在结点 1 和 2，N_i及其导数将取如下数值：

部　　位	N_1	N_2	N_3	N_4	$\frac{dN_1}{dx}$	$\frac{dN_2}{dx}$	$\frac{dN_3}{dx}$	$\frac{dN_4}{dx}$
在点1($x=0$)	1	0	0	0	0	−1	0	0
在点2($x=l$)	0	0	1	0	0	0	0	−1

由（3-22）式对x求微商，得到

$$\frac{dv}{dx}=\frac{dN_1}{dx}v_1+\frac{dN_2}{dx}\phi_1+\frac{dN_3}{dx}v_2+\frac{dN_4}{dx}\phi_2. \tag{3-26}$$

根据上表所列数值，可以看出：

在结点 1：　$v=v_1$，$\dfrac{dv}{dx}=-\phi_1$；

在结点 2：　$v=v_2$，$\dfrac{dv}{dx}=-\phi_2$。

完全符合我们对梁的挠度曲线所假定的边界条件。由（3-24）式可见，N_i是x的三次多项式，因此用形函数表示的梁的位移曲线（3-22）式与直接用三次多项式表示的梁的位移曲线实质上是相同的。但是用形函数表示位移v，使得它直接由结点位移$\{\delta\}^e$表示出来，这给下一步推导单元刚度矩阵和结点荷载都带来一些方便。

对（3-26）式再求微商，得到

$$\frac{d^2v}{dx^2}=\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e, \tag{3-27}$$

其中

$$[B]=\left[\frac{d^2N_1}{dx^2}\quad\frac{d^2N_2}{dx^2}\quad\frac{d^2N_3}{dx^2}\quad\frac{d^2N_4}{dx^2}\right]. \tag{3-28}$$

以弯矩代表梁的广义应力，有

$$\{\sigma\}=EI\frac{d^2v}{dx^2}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}^e.$$

式中$[D]=EI$。

利用虚功原理，由（3-11）式，单元刚度矩阵可由下式计算：

$$[k]^e=\int_0^l[B]^T[D][B]dx.$$

把（3-28）式代入上式，可知$[k]^e$中第r行第s列元素k_{rs}为

$$k_{rs}=EI\int_0^l\frac{d^2N_r}{dx^2}\frac{d^2N_s}{dx^2}dx,\quad r、s=1,2,3,4. \tag{3-29}$$

由此可求出梁单元刚度矩阵如下式。

$$[k]^e=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & -6l & -12 & -6l\\ -6l & 4l^2 & 6l & 2l^2\\ -12 & 6l & 12 & 6l\\ -6l & 2l^2 & 6l & 4l^2\end{bmatrix}. \tag{3-30}$$

上式与式（1-24）完全相同。由于用以代表梁挠度曲线的（3-22）式是三次多项式，与理论解一致，所以求出的单元刚度矩阵与由结构力学求出的单元刚度矩阵完全相同。如果采用的位移函数是近似的，求出的单元刚度矩阵也将是近似的。

§3-7　应变能和余应变能

在外力作用下，物体内部将产生应力$\{\sigma\}$和应变$\{\varepsilon\}$。假定外力是从零开始逐渐增加

的，应力和应变也将从零开始，逐步增加。在这个加荷过程中，单位体积内应力所做的功称为应变能密度，记为$\overline{U}$。为简化起见，在这里我们不考虑初应力和初应变（推广到包括初应力和初应变的一般情况并无困难）。由图 3-5 可知，应变能密度$\overline{U}$是$\sigma-\varepsilon$曲线右边的面积，对于一般的空间问题，可计算如下：

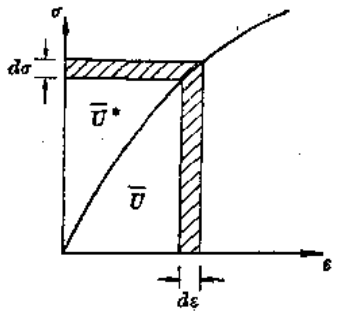


图 3-5

$$\overline{U}=\int_0^{\varepsilon_x}\sigma_x d\varepsilon_x-\int_0^{\varepsilon_y}\sigma_y d\varepsilon_y+\int_0^{\varepsilon_z}\sigma_z d\varepsilon_z+\int_0^{\gamma_{xy}}\tau_{xy}d\gamma_{xy}$$

$$+\int_0^{\gamma_{yz}}\tau_{yz}d\gamma_{yz}+\int_0^{\gamma_{zx}}\tau_{zx}d\gamma_{zx}=\int\{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}。\quad(3\text{-}31)$$

对于线性弹性体，把应力-应变关系$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$代入上式，经过积分，得到

$$\overline{U}=\int\{\varepsilon\}^T[D]d\{\varepsilon\}=\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}。\quad(3\text{-}32)$$

在物体的整个体积内积分，得到物体的应变能如下：

$$U=\frac{1}{2}\iiint\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}dxdydz。\quad(3\text{-}33)$$

在图 3-5 中，应力-应变曲线左边的面积，定义为余应变能密度，记为$\overline{U}^*$。它可以看做是矩形$\sigma\varepsilon$的余面积。余应变能密度按下式计算：

$$\overline{U}^*=\int_0^{\sigma_x}\varepsilon_x d\sigma_x+\int_0^{\sigma_y}\varepsilon_y d\sigma_y+\int_0^{\sigma_z}\varepsilon_z d\sigma_z+\cdots+\int_0^{\gamma_{zx}}\gamma_{zx}d\tau_{zx}$$

$$=\int\{\varepsilon\}^T d\{\sigma\}。\quad(3\text{-}34)$$

对于线性弹性体，把应力-应变关系$\{\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\sigma\}$代入上式，经过积分，得到

$$\overline{U}^*=\int\{\sigma\}^T[D]^{-1}d\{\sigma\}=\frac{1}{2}\{\sigma\}^T[D]^{-1}\{\sigma\}。\quad(3\text{-}35)$$

在整个体积内积分，得到物体的余应变能如下：

$$U^*=\frac{1}{2}\iiint\{\sigma\}^T[D]^{-1}\{\sigma\}dxdydz。\quad(3\text{-}36)$$

§3-8 最小势能原理

物体的势能Π_p定义为物体的应变能U与外力势V之差，即

$$\Pi_p=U-V。\quad(3\text{-}37)$$

其中应变能U可按式（3-33）计算，外力势由下式计算

$$V=\Sigma F\delta+\iiint\{r\}^T\{q\}\,dxdydz+\int_{S_\sigma}\{r_b\}^T\{\bar{p}\}ds. \qquad (3\text{-}38)$$

上式右端第一项是集中力F的势，第二项是体积力$\{q\}$的势，第三项是面力$\{\bar{p}\}$的势，S_σ是面力作用的表面，$\{r_b\}$是表面S_σ上的位移，$\{\bar{p}\}$是给定的面力。

最小势能原理可叙述如下：在所有满足边界条件的协调位移中，那些满足平衡条件的位移使物体势能取驻值，即

$$\delta\Pi_p=\delta U-\delta V=0. \qquad (3\text{-}39)$$

对于线性弹性体，势能取最小值，即

$$\delta^2\Pi_p=\delta^2U-\delta^2V\geqslant 0. \qquad (3\text{-}40)$$

最小势能原理可用虚位移加以证明。设物体产生了虚位移$\delta\{r\}=\delta[uvw]^T$，相应的虚应变为$\delta\{\varepsilon\}$，整个物体的虚应变能是

$$\iiint\{\sigma\}^T\delta\{\varepsilon\}dxdydz.$$

把$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$代入上式，得到

$$\iiint\{\varepsilon\}^T[D]\delta\{\varepsilon\}dxdydz=\delta U.$$

因为由式（3-33）可知，上式左端等于应变能的一阶变分。同理，由式（3-38）可知，外力在虚位移$\delta\{r\}$上所做虚功等于外力势的一阶变分δV，根据虚位移原理$\delta U-\delta V=0$，所以有

$$\delta\Pi_p=0.$$

利用最小势能原理，可以求出单元刚度矩阵及结点荷载。考虑图3-6所示的一个单元，在各结点上作用着结点力$\{F\}^e$，单元结点位移为$\{\delta\}^e$、单元应变为$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e$，把此式代入式（3-33），得到

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}\left(\iiint[B]^T[D][B]dxdydz\right)\{\delta\}^e.$$

即

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]^e\{\delta\}^e. \qquad (3\text{-}41)$$

其中

$$[k]^e=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz. \qquad (a)$$

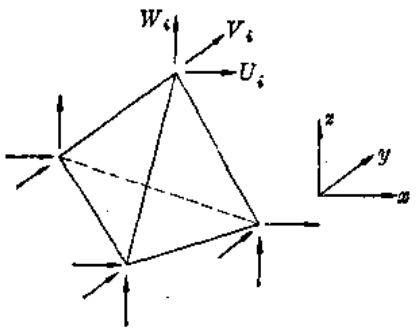


图 3-6

由式（3-38），由于单元结点力的外力势为

$$V=\{\delta\}^{eT}\{F\}^e.$$

故单元的势能为

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e-\{\delta\}^{eT}\{F\}^e. \qquad (3\text{-}42)$$

由最小势能原理，$\delta \Pi_p = 0$，所以有

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \{\delta\}^e} = 0.$$

于是得到

$$\{F\}^e = [k]\{\delta\}^e.$$

上式建立了结点力与结点位移之间的关系。

从物理上考虑，应变能必须是正量，即

$$U = \frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e \geqslant 0,$$

而结点位移$\{\delta\}^e$是任意的，所以单元刚度矩阵$[k]$是正定的。由此可以推断，势能的二阶变分是非负的。既然势能的一阶变分等于零，二阶变分又非负，从而可以断定势能取最小值。

把$\{f\} = [N]\{\delta\}^e$代入外力势的表达式（3-38），得到体力$\{q\}$和面力$\{\bar{p}\}$的势为

$$V = \{\delta\}^{eT}\iiint [N]^T\{q\}dxdydz + \{\delta\}^{eT}\int_S [N]^T\{\bar{p}\}dS$$

故单元势能为

$$\Pi_p = U - V$$

$$= \frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e - \{\delta\}^{eT}\iiint [N]^T\{q\}dxdydz - \{\delta\}^{eT}\int_S [N]^T\{\bar{p}\}dS$$

根据最小势能原理，$\partial \Pi_p / \partial \{\delta\}^e = 0$，由此得到

$$[k]\{\delta\}^e = \{P\}_q^e + \{P\}_p^e.$$

式中

$$\{P\}_q^e = \iiint [N]^T\{q\}dxdydz; \qquad (b)$$

$$\{P\}_p^e = \int_S [N]^T\{\bar{p}\}dS. \qquad (c)$$

显然，$\{P\}_q^e$是体力引起的结点荷载，$\{P\}_p^e$是面力引起的结点荷载。

从以上推导可以看出，由最小势能原理求出的单元刚度矩阵和结点荷载与由虚位移原理求出的结果完全相同。虚位移原理与最小势能原理在本质上是相同的。虚位移原理应用较方便，但由最小势能原理可以判断解的收敛性及解的下限性质。

根据虚位移原理或最小势能原理求解时，必须假定单元位移函数，沿着相邻单元的公共边界，位移应当是协调的。这种单元称为位移协调单元，或简称为协调单元。求解时的未知量是结点位移。

现在用图3-7所示的杆单元为例，说明如何由势能原理求单元刚度矩阵。单元位移用

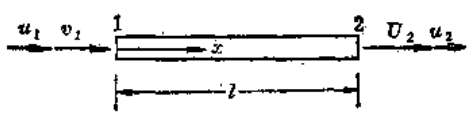


图 3-7

下式表示：

$$u=L_1u_1+L_2u_2=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_1+\frac{x}{l}u_2.$$

单元应变为

$$\varepsilon=\frac{du}{dx}=-\frac{1}{l}u_1+\frac{1}{l}u_2=[B]\{\delta\}^e.$$

式中

$$[B]=\left[-\frac{1}{l}\quad\frac{1}{l}\right].$$

单元中应力为$\sigma=E\varepsilon$，所以在目前条件下弹性矩阵为

$$[D]=E.$$

由式(a)，单元刚度矩阵为

$$[k]^e=\int_0^l[B]^T[D][B]Adx=\frac{AE}{l}\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}[-1\quad 1]$$

$$=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}.$$

应变能为

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e=\frac{AE}{2l}(u_1^2-2u_1u_2+u_2^2).$$

外力势为

$$V=U_1u_1+U_2u_2.$$

故单元势能为

$$\Pi_p=U-V=\frac{AE}{2l}(u_1^2-2u_1u_2+u_2^2)-U_1u_1-U_2u_2.$$

根据最小势能原理$\frac{\partial\Pi_p}{\partial u_1}=0,\frac{\partial\Pi_p}{\partial u_2}=0$，由此得到

$$\begin{Bmatrix}U_1\\U_2\end{Bmatrix}=\frac{AE}{l}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=[k]^e\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}.$$

上式表示了杆单元的结点力与结点位移的关系。

§3-9 最小余能原理

如果在物体的一部分边界S_u上给定了位移$\{\bar{r}_b\}=[\bar{u}_b\bar{v}_b\bar{w}_b]^T$，并设作用在$S_u$上的边界反力（包括支座反力）为$\{p\}=[p_xp_yp_z]^T$，那么边界反力的势可由下式计算

$$V^*=\int_{S_u}(p_x\bar{u}_b+p_y\bar{v}_b+p_z\bar{w}_b)dS=\int_{S_u}\{p\}^T\{\bar{r}_b\}dS. \qquad (3\text{-}43)$$

物体的余能Π_c定义为物体的余应变能U^*与给定位移的那一部分边界S_u上边界反力的

势V^*之差，即

$$\Pi_c = U^* - V^* . \tag{3-44}$$

由式（3-36），余应变能为

$$U^* = \frac{1}{2}\iiint \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} dxdydz .$$

故物体的余能可由下式计算：

$$\Pi_c = \frac{1}{2}\iiint \{\sigma\}^T [D]^{-1} \{\sigma\} dxdydz - \int_{S_u} \{p\}^T \{\overline{r_b}\} dS . \tag{3-45}$$

最小余能原理可叙述如下：在物体内部满足平衡条件并在边界上满足规定的应力条件的所有应力状态中，只有那在物体内部满足应力-应变关系并在边界上满足规定的边界位移条件的应力状态，使物体的余能取驻值，即

$$\delta \Pi_c = \delta U^* - \delta V^* = 0 . \tag{3-46}$$

对于线性弹性体，Π_c取最小值，即

$$\delta^2 \Pi_c = \delta^2 U^* - \delta^2 V^* \geqslant 0 . \tag{3-47}$$

最小余能原理可利用虚应力原理加以证明。在物体位移保持不变的条件下，假定产生了任意微小的虚应力$\delta\{\sigma\}$，它应满足规定的边界应力条件，通过与§3-8类似的步骤，可以证明余能取最小值。

最小余能原理与最小势能原理的基本区别如下：最小势能原理对应于结构的平衡条件，而最小余能原理对应于结构的变形协调条件。最小势能原理以位移为变化量，最小余能原理以力为变化量。

在单元分析中，假定单元的位移函数，由最小势能原理可求出单元刚度矩阵，如果假定单元的应力状态，由最小余能原理可求出单元柔度矩阵，下面加以说明。

单元结点力为$\{F\}^e$，设单元应力$\{\sigma\}$可用结点力$\{F\}^e$表示如下：

$$\{\sigma\} = [\rho]\{F\}^e . \tag{3-48}$$

上式在单元边界上的取值即为单元的边界力$\{p\}$，现记为

$$\{p\} = [\lambda]\{F\}^e . \tag{3-49}$$

必须指出，除了杆单元和梁单元，对于一般的连续介质，要象上式那样用结点力表示单元内部应力是很困难的，把以上两式代入式（3-45），得到

$$\Pi_c = \frac{1}{2}\{F\}^{eT}[f]\{F\}^e - \{F\}^{eT}\{\overline{\delta}\} . \tag{3-50}$$

式中

$$[f] = \iiint [\rho]^T [D]^{-1} [\rho] dxdydz ; \tag{3-51}$$

$$\{\overline{\delta}\} = \int_{S_u} [\lambda]^T \{\overline{r_b}\} dS ; \tag{3-52}$$

$[f]$是单元柔度矩阵；$\{\overline{\delta}\}$是单元结点位移。

根据最小余能原理，$\delta\Pi_c = 0$，故

$$\frac{\partial \Pi_c}{\partial \{F\}^e} = 0 ,$$

由式（3-50），有

$$[f]\{F\}^e=\{\overline{\delta}\}。\qquad(3\text{-}53)$$

上式用于结构的整体分析，即所谓矩阵力法。先选择赘余力，再根据变形协调条件建立以结点力为未知量的方程组，即可解出结点力。矩阵力法在计算机上实现远比矩阵位移法为困难，所以采用较少。按最小余能原理求解时，所假设的应力场在单元内部应满足平衡方程，在相邻单元的公共边界上应力不必连续，但应满足平衡条件，这种单元称为平衡单元，求解时的未知量是结点力。

§3-10 杂 交 单 元

由上节可以看出，如假定单元应力，由最小余能原理可推导出单元柔度矩阵，应用于整体分析，即为矩阵力法，其实际应用比较困难。另外，如假定单元位移，由最小势能原理可推导出单元刚度矩阵，应用于整体分析，即为矩阵位移法，这是目前应用最广泛的方法。但对位移函数的要求比较严格，不但在单元内部要求位移是连续的，而且在单元边界上要求相邻单元之间位移及其某些导数是协调的。在某些情况下，如在薄板、薄壳及裂缝尖端应力计算中，构造协调的位移函数是很困难的，为了克服这种困难，发展了几种杂交单元。

一种是位移杂交单元，在单元内部采用一个位移函数，在单元边界上采用另一个独立的应力或位移函数，利用最小势能原理求解。另一种是应力杂交单元，即在单元内部假定一个应力场，而在单元边界上另外采用一个协调的位移场，用最小余能原理求解。

下面我们详细介绍应力杂交单元。因为这种杂交单元具有较大的实用价值。

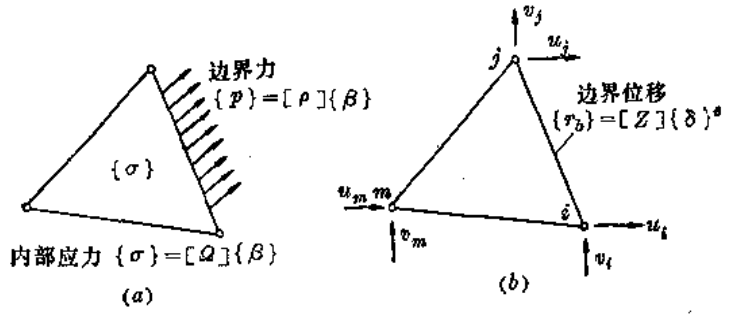


图 3-8 应力杂交单元

(a)用广义参数$\{\beta\}$表示单元内部应力$\{\sigma\}$及边界应力$\{p\}$；
(b)用结点位移$\{\delta\}^e$表示单元边界位移$\{r_b\}$

按位移法求解时，以结点位移作为参数，按力法求解时，以结点力作为参数。用上述两种方法求解时，都只采用一套参数，而在应力杂交单元中，却采用两套参数。一套参数用以表示单元应力；另一套参数用以表示单元边界位移。

在单元内部，假定一个满足平衡条件的应力场$\{\sigma\}$，并用广义参数$\{\beta\}$表示如下：

$$\{\sigma\}=[\Omega]\{\beta\}。\qquad(3\text{-}54)$$

由上式在单元边界上取值，可得到单元边界上的边界力：

$$\{p\}=[\rho]\{\beta\}. \tag{3-55}$$

其中$[\rho]=[\Omega_b]$，即由$[\Omega]$在单元边界上取值而得到。

在单元边界上的位移用结点位移$\{\delta\}^e$表示如下：

$$\{r_b\}=[Z]\{\delta\}^e. \tag{3-56}$$

这里的插值函数$[Z]$是应用于每段边界上的，不是应用于整个单元的，所以要构造保持相邻单元之间协调性的$[Z]$比较容易。在位移协调单元中，$\{r\}=[N]\{\delta\}^e$式中的$[N]$是定义于整个单元的，要构造保持相邻单元之间协调的$[N]$比较困难，这是两种单元的重大差别。

为了处理两个独立的场，对余能的表达式应作一些修改。修改后的余能是

$$\Pi_c^s=\frac{1}{2}\iiint\{\sigma\}^T[D]^{-1}\{\sigma\}dxdydz-\int_S\{p\}^T\{r_b\}dS. \tag{3-45a}$$

式中S是单元的全部边界，$\{p\}$是与内部应力场一致的边界力。上式与普通余能Π_c不同的是，$\{r_b\}$是用结点位移参数表示的，所以在Π_c^s中作为未知量的不但有结点力参数，还有结点位移参数，而通常的余能Π_c中只包含结点力参数。

把$\{\sigma\}$、$\{p\}$、$\{r_b\}$的表达式代入上式，得到

$$\Pi_c^s=\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\{\beta\}-\{\beta\}^T[Q]\{\delta\}. \tag{3-57}$$

式中

$$[H]=\iiint[\Omega]^T[D]^{-1}[\Omega]dxdydz; \tag{3-58}$$

$$[Q]=\int_S[\rho]^T[Z]dS. \tag{3-59}$$

其中$[H]$是通过单元的体积分而求得；$[Q]$是通过单元边界的面积分而求得。

由最小余能原理，$\delta\Pi_c^s=0$，所以

$$\frac{\partial\Pi_c^s}{\partial\{\beta\}}=0.$$

因此由式（3-57）得到

$$[H]\{\beta\}-[Q]\{\delta\}^e=0.$$

从而可求得广义参数$\{\beta\}$如下：

$$\{\beta\}=[H]^{-1}[Q]\{\delta\}^e. \tag{3-60}$$

把上式代入式（3-57），得到

$$\Pi_c=-\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e. \tag{3-61}$$

式中

$$[k]^e=[Q]^T[H]^{-1}[Q]. \tag{3-62}$$

$[k]^e$即是单元刚度矩阵（参阅§4-3）。

通过结构的整体分析可求出位移$\{\delta\}$，由式（3-60）可求出广义参数$\{\beta\}$，再由式

(3-54)即可求出单元应力。

由于最终的矩阵方程是以结点位移作为未知量的，所以应力杂交单元应用比较方便，而且与位移杂交单元相比，应力杂交单元能给出更精确的应力估计。

§3-11 杂交单元实例 平面矩形单元

现在以平面问题矩形单元为例，说明如何分析应力杂交单元。

如图3-9所示，矩形单元的长度为 a，高度为 b，把坐标原点放在结点 1 上，并令坐标

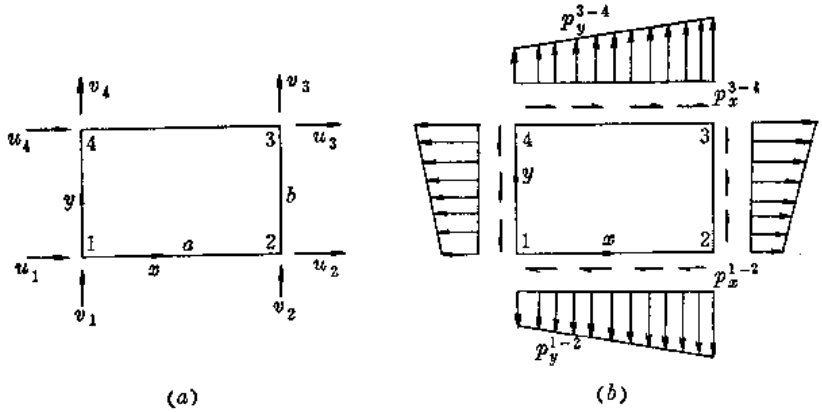


图 3-9 矩形杂交单元

(a)结点位移；(b)单元应力

轴与单元的两边重合。首先，假定单元内部应力场如下：

$$\begin{aligned}\sigma_x&=\beta_1+\beta_2 y;\\ \sigma_y&=\beta_3+\beta_4 x;\\ \tau_{xy}&=\beta_5.\end{aligned}\tag{3-63}$$

即

$$\{\sigma\}=\begin{bmatrix}1&y&0&0&0\\0&0&1&x&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\\\beta_5\end{Bmatrix}=[\Omega]\{\beta\}.\tag{3-64}$$

显然，上述应力场满足下列平面问题的平衡方程：

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=0.$$

由式（3-63）可求出作用于单元各边界上的边界力，例如，在边界1-2上：

$$p_x^{1-2}=-\beta_5,\quad p_y^{1-2}=-\beta_3-\beta_4 x.$$

在边界2-3上：

$$p_x^{2-3}=\beta_1+\beta_2 y,\quad p_y^{2-3}=\beta_5.$$

同样，可求出其他两条边界上的边界力，由此得到

$$\{p\}=\begin{Bmatrix} p_x^{1-2}\\ p_y^{1-2}\\ p_x^{2-3}\\ p_y^{2-3}\\ p_x^{3-4}\\ p_y^{3-4}\\ p_x^{4-1}\\ p_y^{4-1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -1 & -x & 0\\ 1 & y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & x & 0\\ -1 & -y & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\\ \beta_4\\ \beta_5\end{Bmatrix}=[\rho]\{\beta\}. \qquad (3\text{-}65)$$

假定沿单元边界，位移线性变化，即可用结点位移表示边界位移。例如，在边界 2-3 上，位移为

$$u_{2-3}=\left(1-\frac{y}{b}\right)u_2+\frac{y}{b}u_3,$$

$$v_{2-3}=\left(1-\frac{y}{b}\right)v_2+\frac{y}{b}v_3.$$

对其他三条边界也可写出类似的式子，由此得到单元边界位移$\{r_b\}$如下式：

$$\{r_b\}=\begin{Bmatrix} u_{1-2}\\ v_{1-2}\\ u_{2-3}\\ v_{2-3}\\ u_{3-4}\\ v_{3-4}\\ u_{4-1}\\ v_{4-1}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\frac{x}{a} & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 & \frac{y}{b} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 1-\frac{x}{a} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{a} & 0 & 1-\frac{x}{a}\\ 1-\frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{b} & 0\\ 0 & 1-\frac{y}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{b}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ v_1\\ u_2\\ v_2\\ u_3\\ v_3\\ u_4\\ v_4\end{Bmatrix}$$

$$=[Z]\{\delta\}^e. \qquad (3\text{-}66)$$

由（3-64）、（3-65）、（3-66）三式，把矩阵$[\Omega]$、$[\rho]$、$[Z]$代入（3-58）、（3-59）式，可求得$[H]$和$[Q]$，再代入式（3-62），即求得单元刚度矩阵，如式（3-67）。这是平面应力问题的刚度矩阵；对于平面应变问题，其弹性模量和泊松比应作适当代换。

$$
[k]^e=\frac{Et}{16s_1s_2ab}
\begin{array}{c}
\begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix} \\
\left[\begin{matrix}
s_1a^2+s_4b^2 & & & & & & & \\
s_2ab & s_1b^2+s_4a^2 & & & \text{对} & \text{称} & & \\
s_1a^2-s_4b^2 & s_3ab & s_1a^2+s_4b^2 & & & & & \\
-s_3ab & s_5a^2-s_1b^2 & -s_2ab & s_1b^2+s_4a^2 & & & & \\
-s_1a^2-s_5b^2 & -s_2ab & s_5b^2-s_1a^2 & s_3ab & s_1a^2+s_4b^2 & & & \\
-s_2ab & -s_1b^2-s_5a^2 & -s_3ab & s_1b^2-s_4a^2 & s_2ab & s_1b^2+s_4a^2 & & \\
s_5b^2-s_1a^2 & -s_3ab & -s_1a^2-s_5b^2 & s_2ab & s_1a^2-s_4b^2 & s_3ab & s_1a^2+s_4b^2 & \\
s_3ab & s_1b^2-s_4a^2 & s_2ab & -s_1b^2-s_5a^2 & -s_3ab & s_5a^2-s_1b^2 & -s_2ab & s_1b^2+s_4a^2
\end{matrix}\right]
\end{array}
\tag{3-67}
$$

式中 $s_1=\dfrac{1-\mu}{2}$，$s_2=\dfrac{1+\mu}{2}$，$s_3=\dfrac{1-3\mu}{2}$，$s_4=\dfrac{4-\mu^2}{3}$，$s_5=\dfrac{2+\mu^2}{3}$，t ——板厚度

§3-12 混合能量原理

最小势能原理的泛函Π_p是用位移场来表示的，最小余能原理的泛函 Π_c 是用应力场来表示的。在混合能量原理中，其泛函 Π_R 将用位移和应力两者来表示。把混合能量原理应用于有限单元法时，可对每个单元分别假定一个应力场和一个位移场。

由图3-5可知，应变能密度与余应变能密度之和等于矩形$\sigma\varepsilon$的面积，所以

$$\overline{U}+\overline{U}^*=\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}.$$

在整个体积内积分，得到

$$U+U^*=\iiint\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dxdydz.$$

即

$$U=\iiint\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dxdydz-U^*.$$

式中U为应变能，U^*为余应变能。把上式代入$\Pi_p=U-V$式中，得到

$$\Pi_R=\iiint\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}dxdydz-U^*-V.$$

再引入余应变能U^*的表达式（3-36），得到

$$\Pi_R=\iiint\left(\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}-\frac{1}{2}\{\sigma\}^T[D]^{-1}\{\sigma\}\right)dxdydz-V. \qquad (3\text{-}68)$$

Π_R称为赖斯纳（Reissner）泛函。式中的应变$\{\varepsilon\}$是位移场的导数，所以在上述泛函中既包含了应力场，又包含了位移场。在势能$\Pi_p=U-V$中，应变能U只包含应变$\{\varepsilon\}$，V只包括边界S_σ上的外力势。在余能$\Pi_c=U^*-V^*$中，余应变能U^*只包含应力$\{\sigma\}$，V^*只包含边界S_u上基础反力的势。现在赖斯纳泛函Π_R中既包含了应力$\{\sigma\}$，又包含了应变$\{\varepsilon\}$，因此式（3-68）中的V既包括边界S_σ上的外力势，又包括边界S_u上边界反力的势，可按下式计算：

$$V=\int_{S_\sigma}\{r\}^T\{\bar{p}\}dS+\int_{S_u}\{p\}^T\{r-\overline{r}\}dS. \qquad (3\text{-}69)$$

其中$\{\bar{p}\}$是在边界S_σ上规定的面力，$\{\overline{r}\}$是在边界S_u上规定的位移。

混合能量原理表明，泛函Π_R取驻值，即

$$\delta\Pi_R=0. \qquad (3\text{-}70)$$

它只取驻值，而不取极值。Π_R对应力$\{\sigma\}$或对位移$\{r\}$取变分时，既不给出极大值，也不给出极小值。

在杂交单元中，在单元内部假定一个应力（或位移）场，在单元边界上假定另一个位移（或应力）场。应用上述混合能量原理时，是在单元内部同时假定一个应力场和一个位移场。

结构离散化以后，利用式$\{\sigma\}=[\rho]\{F\}$以结点力表示单元应力，利用式$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}$以结点位移表示单元应变，由式$\{P\}=[\lambda]\{F\}$以结点力$\{F\}$表示边界$S_u$上的面力，由式$\{r\}=[Z]\{\delta\}$以结点位移表示边界$S_\sigma$上的位移，代入式（3-68）（3-69），得到

$$\Pi_R=-\frac{1}{2}\{F\}^T[\alpha_1]\{F\}+\{F\}^T[\alpha_2]\{\delta\}-\{\delta\}^T\{\overline{F}\}+\{F\}^T\{\overline{\delta}\}. \qquad (3\text{-}71)$$

式中 $[\alpha_1]=\iiint[\rho]^T[D][\rho]dxdydz;$

$$[\alpha_2]=\iiint[\rho]^T[B]dxdydz-\int_{S_u}[\lambda][Z]dS;$$

$$\{\overline{F}\}=\int_{S_\sigma}[Z]^T\{\bar{p}\}dS;$$

$$\{\overline{\delta}\}=\int_{S_u}[\lambda]\{\overline{r}\}dS.$$

由泛函 Π_R 取驻值，可知 $\frac{\partial \Pi_R}{\partial \{F\}}=0$，$\frac{\partial \Pi_R}{\partial \{\delta\}}=0$，由此得到

$$-[\alpha_1]\{F\}+\{\delta\}+\{\overline{\delta}\}=0;$$
$$[\alpha_2]^T\{F\}-\{\overline{F}\}=0. \qquad (3\text{-}72)$$

在以上二式中，未知量既有结点位移$\{\delta\}$，又有结点力$\{F\}$。

混合能量原理在板壳的有限单元分析中应用较多。实例见第十章及第二十一章。

§3-13 复 合 单 元

有时可以用几个简单的单元组成一个复合单元。如图3-10所示，用4个三角形组成一个四边形，或用更多的三角形组成一个多边形。在建立复合单元的刚度矩阵时，可以把所有内部结点消去，在结构的整体计算中只需要考虑复合单元边界上的结点，因此整体平衡方程组的阶次和带宽都减小了。从而可减少机器存储量，节省计算时间。

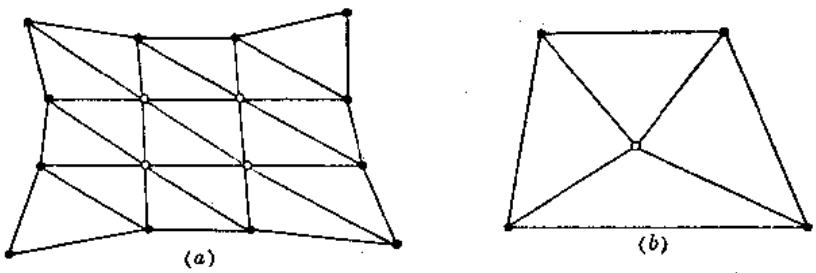


图 3-10 复合单元

复合单元的结点平衡方程可用分块矩阵写出如下：

$$\begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_a \\ \delta_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_a \\ P_b \end{Bmatrix}. \qquad (3\text{-}73)$$

其中$\{\delta_a\}$是准备消去的内部结点位移，$\{\delta_b\}$是剩下的单元边界结点位移，$\{P_a\}$是内部结点荷载，$\{P_b\}$是边界结点上的荷载。把上式展开，得到

$$[K_{aa}]\{\delta_a\}+[K_{ab}]\{\delta_b\}=\{P_a\}; \qquad (a)$$
$$[K_{ba}]\{\delta_a\}+[K_{bb}]\{\delta_b\}=\{P_b\}. \qquad (b)$$

由式（a）求解$\{\delta_a\}$，得到

$$\{\delta_a\}=\{C\}-[T]\{\delta_b\}. \qquad (3\text{-}74)$$

式中

$$\{C\}=[K_{aa}]^{-1}\{P_a\}; \qquad (3\text{-}75)$$
$$[T]=[K_{aa}]^{-1}[K_{ab}]. \qquad (3\text{-}76)$$

把式（3-74）代入式（b），得到一组关于单元边界结点的平衡方程：

$$[K^*]\{\delta_b\}=\{P^*\}. \qquad (3\text{-}77)$$

其中

$$[K^*]=[K_{bb}]-[K_{ba}][T], \qquad (3\text{-}78)$$
$$\{P^*\}=\{P_b\}-[K_{ba}]\{C\}. \qquad (3\text{-}79)$$

在物理概念上，$[K_{ba}][T]$表示由于释放内部结点而产生的对单元刚度矩阵的修正，$[K_{ba}]\{C\}$代表由内部结点传递至单元边界结点的荷载。

单元内应力为

$$\{\sigma\}=[S_a \quad S_b]\begin{Bmatrix}\delta_a\\ \delta_b\end{Bmatrix}+\{\sigma_0\}. \tag{3-80}$$

其中$\{\sigma_0\}$为初应力。把式（3-74）代入上式，消去内部自由度$\{\delta_a\}$，得到

$$\{\sigma\}=[S^*]\{\delta_b\}+\{\sigma_0^*\}. \tag{3-81}$$

式中

$$[S^*]=[S_b]-[S_a][T]; \tag{3-82}$$

$$\{\sigma_0^*\}=\{\sigma_t\}+[S_a]\{C\}. \tag{3-83}$$

由式（3-81）可见，如果在形成$[K^*]$时，同时形成$[S^*]$和$\{\sigma_0^*\}$，那么单元应力可直接由单元边界结点位移$\{\delta_b\}$计算，因此在求应力阶段也不必计算内部结点位移$\{\delta_a\}$。

上面采用矩阵符号是为了说明基本概念。但在程序中矩阵的相乘和求逆是比较费事的，实际运算时以采用高斯消去法为方便。也就是在单元平衡方程组(3-73)中，把内部自由度放在前面（或后面），用高斯消去法从中消去$\{\delta_a\}$，即得到用边界自由度$\{\delta_b\}$表示的平衡方程（3-77），从而得到缩减了的单元刚度矩阵$[K^*]$和单元结点荷载向量$\{P^*\}$。

可以看出，复合单元与普通单元的区别在于：普通单元的位移函数是定义于整个单元的光滑函数，而复合单元的位移函数是分片的光滑函数。

第四章 整 体 分 析

在前一章，我们说明了如何建立单元刚度矩阵、柔度矩阵及结点荷载。在这一章，我们将说明如何利用这些关系对整个结构进行分析。为了由浅入深，我们首先用结构力学方法建立结点平衡方程，其次用最小势能原理推导整体刚度矩阵，然后再说明解答收敛性及子结构方法。至于最小余能原理，在整体分析中应用较少，在这一章只简略叙述一下，不作详细介绍。

§4-1 结 点 平 衡 方 程

在第一、二章，用结构力学方法建立了杆件结构和弹性力学平面问题的结点平衡方程。用同样方法，也可以建立一般情况下的结点平衡方程。

连续介质用有限单元法离散以后，取出其中任意一个结点 i，从环绕 i 点各单元移置而来的结点荷载为

$$\{P_i\}=\sum_e\{P_i\}^e.$$

式中 $\sum_e$ 表示对环绕结点 i 的所有单元求和。环绕结点 i 的各单元施加于结点 i 的结点力为 $\sum_e\{F_i\}$。因此，结点 i 的平衡方程可表示为

$$\sum_e\{F_i\}=\{P_i\}. \qquad (a)$$

例如，对于弹性力学空间问题，每个结点在 x、y、z 三个方向的力均应保持平衡，上式意味着

$$\sum_e U_i=X_i,\quad \sum_e V_i=Y_i,\quad \sum_e W_i=Z_i.$$

对于壳体，在结点 i，除了在 x、y、z 三个方向的力必须保持平衡外，还有三个力矩也必须保持平衡，对每个结点 i，除了上述三个等式外，还有

$$\sum_e M_{\theta xi}=R_{\theta xi},\quad \sum_e M_{\theta yi}=R_{\theta yi},$$
$$\sum_e M_{\theta zi}=R_{\theta zi}.$$

以 $\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e$ 代入（a）式，得到以结点位移表示的结点 i 的平衡方程，对于每个结点，都可列出平衡方程，于是得到整个结构的平衡方程组如下：

$$[K]\{\delta\}=\{P\}. \qquad (4\text{-}1)$$

式中 $[K]$ 为整体刚度矩阵，$\{\delta\}$ 为全部结点位移组成的向量，$\{P\}$ 为全部结点荷载组成的向量。整体刚度矩阵 $[K]$ 的元素可计算如下

$$K_{rs}=\sum_e k_{ij}. \qquad (4\text{-}2)$$

郑海燕

利用编码法（见§1-10及§2-9），可由单元刚度矩阵建立整体刚度矩阵。由平衡方程组（4-1）解出位移$\{\delta\}$后，由$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}$可计算各单元的应变，再由$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}$可计算各单元的应力。

§4-2 最小势能原理的应用

在上一章已应用最小势能原理进行单元分析。现在进一步说明如何应用最小势能原理进行结构的整体分析。

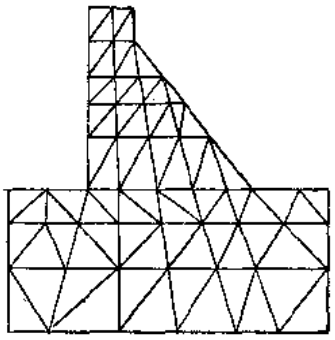


图 4-1

如图4-1所示，设结构共划分为m个单元，任取其中一个单元j，由式（3-41），该单元的应变能为

$$U_j=\frac{1}{2}\{\delta_j\}^T[k_j]\{\delta_j\},$$

其中$[k_j]$是j单元的刚度矩阵，$\{\delta_j\}$是j单元的结点位移。由于应变能是纯量，把m个单元的应变能累加起来，即得到整个结构的应变能如下

$$U=\sum_{j=1}^{m}U_j=\frac{1}{2}\Sigma\{\delta_j\}^T[k_j]\{\delta_j\}. \qquad (4\text{-}3)$$

令

$$\{s\}=\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_m\end{Bmatrix},$$

$$[k_s]=\begin{Bmatrix}k_1 & & & 0\\ & k_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_m\end{Bmatrix}.$$

$\{s\}$是把各单元的结点位移$\{\delta_1\}$、$\{\delta_2\}$…顺序排列起来，相同的项并未归并。$[k_s]$是未经集合的整体刚度矩阵，即把各单元刚度矩阵$[k_1]$、$[k_2]$…$[k_m]$作为主对角线上的子矩阵列入，其余子矩阵为零。于是，式（4-3）可重写如下：

$$U=\frac{1}{2}\{s\}^T[k_s]\{s\}. \qquad (4\text{-}4)$$

如§1-9一样，把整个结构的结点位移矢量$\{\delta\}$与列阵$\{s\}$之间的关系记为

$$\{s\}=[A]\{\delta\}.$$

其中$[A]$为变换矩阵，把上式代入式（4-4），得到

$$U=\frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]\{\delta\}. \qquad (4\text{-}5)$$

式中

$$[K]=[A]^T[k_e][A]. \tag{4-6}$$

由§1-9可知，$[K]$是结构的整体刚度矩阵。

由于荷载$\{P\}$都作用于结点上，所以荷载的势为

$$V=\{\delta\}^T\{P\}. \tag{4-7}$$

结构的势能为

$$\Pi_p=U-V.$$

把（4-5）、（4-7）二式代入上式，得到

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{\delta\}^T[K]\{\delta\}-\{\delta\}^T\{P\}. \tag{4-8}$$

由最小势能原理，势能取驻值，即

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\{\delta\}}=0. \tag{4-9}$$

故由式（4-8）得到

$$[K]\{\delta\}=\{P\}. \tag{4-10}$$

由最小势能原理得到的方程组（4-10）与由结点平衡条件得到的方程组（4-1）是相同的。但如采用高次单元，结点自由度中包括位移的高阶导数，相应的结点力并没有明确的物理意义，在这种情况下，利用结点平衡条件建立整体方程组是困难的，而利用最小势能原理建立方程组则无特殊困难。

§4-3 最小势能解答的下限性质

用有限单元法把连续介质离散化后，由最小势能原理求出的位移近似解，其值将小于精确解。这种位移解称为下限解。

上述论断并不难证明。如图4-2所示，设物体只承受一个集中力P_i的作用，而且此集中力是从零开始，逐渐增加到最终值P_i的。设物体在着力点i处、沿着力P_i方向的位移为δ_i，则在加荷过程中力所做的功是$P_i\delta_i/2$，此值即等于物体的应变能U，即

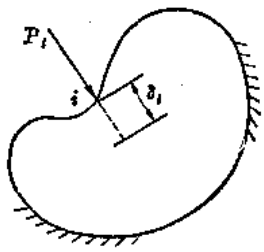


图 4-2

$$U=\frac{1}{2}P_i\delta_i.$$

外力势是

$$V=P_i\delta_i.$$

所以当物体处于平衡时，物体的势能是

$$\Pi_p=U-V=\frac{1}{2}P_i\delta_i-P_i\delta_i=-\frac{1}{2}P_i\delta_i=Min.$$

在上式中，δ_i是精确值，根据最小势能原理，Π_p取最小值。如果用有限单元法计算的近似

位移值是$\tilde{\delta}_i$，势能的近似值为

$$\tilde{\Pi}_p=-\frac{1}{2}P_i\tilde{\delta}_i.$$

既然精确的势能Π_p是最小值，其他任何近似势能$\tilde{\Pi}_p$在数值上都应不小于Π_p，即

$$\tilde{\Pi}_p\geqslant\Pi_p,$$

即

$$-\frac{1}{2}P_i\tilde{\delta}_i\geqslant-\frac{1}{2}P_i\delta_i.$$

由于上式两端有负号，简化后，得到

$$\tilde{\delta}_i\leqslant\delta_i. \tag{4-11}$$

上式表明，用有限单元法把物体离散化，并按最小势能原理求得的近似位移解，将不大于精确位移解。注意，位移δ_i和$\tilde{\delta}_i$的方向必须与外力P_i的方向一致。

为什么按最小势能原理求得的位移近似解会小于位移精确解呢？关于这个问题，可解释如下：按最小势能原理求解时，必须先假定单元位移函数。这些位移函数是连续的，但却是近似的，从物体中取出的一个单元，作为连续介质的一部分，本来具有无限个自由度，在采用位移函数以后，只有以结点位移表示的有限个自由度，位移函数对单元的变形能力有所限制，使单元的刚度增加了，物体的整体刚度也随之增加了，因此计算的位移近似解将小于精确解。

按最小余能原理求解时，在相邻单元的公共边界上，应力是平衡的，但位移是不连续的，计算模型的变形能力增加了，比真实物体更加柔软，按最小余能原理求得的位移近似解将大于或等于精确解，因而具有上限性质。

采用杂交单元求解时，不能肯定所得到的位移近似解是大于还是小于精确解。大体说来，其数值是介于按最小势能原理求解与按最小余能原理求解所得到的两种结果的中间。

§4-4 解答的收敛性

一个连续介质本来具有无限个自由度，代以有限个单元的集合以后，便只有有限个自由度了，计算结果能否收敛于真解呢？关于这个问题的回答是，如果计算方法满足了一定的条件，计算结果将收敛于真解。

当按位移求解时，为了计算结果收敛于真解，应满足下列条件：

1）单元的刚体位移不产生应变。这个条件显然是必要的，否则，坐标的平移和转动都将产生应变了。

2）位移函数应反映单元的常应变，当单元尺寸无限缩小时，单元应变将趋近于常量。因此单元位移函数中应包括常应变项。

上述第1条可以看做是第2条的特例，因为刚体位移是常应变的特例——应变等于零。

3）位移函数必须保证在相邻单元的接触面上应变是有限的。

在有限单元法中，按位移（即按最小势能原理）求解时，只计算了各单元内部的功（应变能），没有计算相邻两单元接触面上的功，由于接触面的厚度是零，当接触面上的应变是有限值时，此功等于零，反之，当接触面上的应变不是有限值时，此功就可能不等于零，忽略它会引起一定的误差。

在平面应力和空间应力问题中，应变是位移的一阶导数，接触面上应变有限即意味着位移连续。在板壳问题中，应变是位移的二阶导数，因此要求在接触面上位移及其一阶导数都连续。

下面以平面应力问题为例进行分析。由式（2-3），三角形单元的位移函数为

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y,\qquad v=\beta_4+\beta_5x+\beta_6y.$$

上式可改写如下

$$u=\left(\beta_1-\frac{\beta_5-\beta_3}{2}y\right)+\frac{\beta_5+\beta_3}{2}y+\beta_2x,$$

$$v=\left(\beta_4+\frac{\beta_5-\beta_3}{2}x\right)+\frac{\beta_5+\beta_3}{2}x+\beta_6y.$$

以上二式右边括号内的项即代表刚体位移。其中 $u=\beta_1$ 及 $v=\beta_4$ 分别代表单元沿 x 及 y 方向的刚体移动，而 $u=-\frac{(\beta_5-\beta_3)y}{2}$ 及 $v=\frac{(\beta_5-\beta_3)x}{2}$ 代表单元绕 z 轴的刚体转动。由式（2-10）可知，这些刚体位移在单元内不产生应变。

再将式（2-3）代入式（2-10），可见

$$\varepsilon_x=\beta_2,\quad \varepsilon_y=\beta_6,\quad \gamma_{xy}=\beta_3+\beta_5.$$

它们反映了常量的正应变和剪应变

另外，式（2-3）所表示的位移分量在每个单元中都是坐标的线性函数，在相邻单元的公共边界上当然也是线性变化的，由于在相邻单元的公共结点上具有相同的结点位移，所以在整个公共边界上位移都是连续的。

可见，位移函数（2-3）满足前面所述的三个条件。

§4-5 子结构分析

在分析大型复杂结构时，由于单元数量很多，方程组往往十分庞大，以至超出了计算机的存储容量。例如用有限单元法分析空间结构时，便往往会出现这种情况。这时可以把原结构分成几个区域，每一区域称为一个子结构。如在图4-3中，划分为三个子结构。这些子结构在它们的公共边界上互相连接起来，结构计算分成几步进行。先逐个分析每个子结构，然后把全部子结构组合起来，进行整体分析。在整体分析中不必考虑各子结构的内部自由度，只要考虑结构边界及相邻子结构公共边界上的自由度，问题的规模比原结构当然要小得多了。

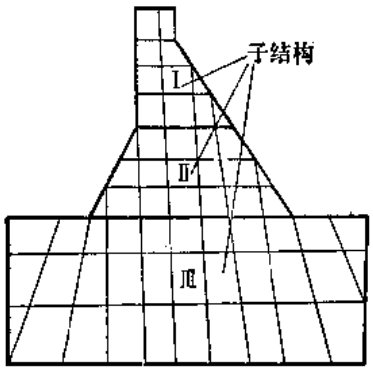


图 4-3 子结构

今取出第 i 个子结构，其内力与位移的关系可写成

$$\begin{Bmatrix} F_c^i \\ F_b^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{cc}^i & k_{cb}^i \\ k_{bc}^i & k_{bb}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_c^i \\ \delta_b^i \end{Bmatrix}. \tag{4-12}$$

脚标“b”表示子结构的边界，脚标“c”表示子结构的内部。$\{\delta_c^i\}$ 为第 i 个子结构的内部自由度，$\{\delta_b^i\}$为第 i 个子结构的边界自由度。把上式展开，得到

$$\{F_c^i\} = [k_{cc}^i]\{\delta_c^i\} + [k_{cb}^i]\{\delta_b^i\}. \tag{4-13}$$

$$\{F_b^i\} = [k_{bc}^i]\{\delta_c^i\} + [k_{bb}^i]\{\delta_b^i\}. \tag{a}$$

在式（4-13）中，以子结构内部结点荷载 $\{P_c^i\}$ 代替 $\{F_c^i\}$，得到用子结构的边界位移 $\{\delta_b^i\}$表示内部位移$\{\delta_c^i\}$的式子如下：

$$\{\delta_c^i\} = [k_{cc}^i]^{-1}\{P_c^i\} - [k_{cc}^i]^{-1}[k_{cb}^i]\{\delta_b^i\}. \tag{4-14}$$

把上式代入式（a），可求出子结构的边界力如下：

$$\{F_b^i\} = ([k_{bb}^i] - [k_{bc}^i][k_{cc}^i]^{-1}[k_{cb}^i])\{\delta_b^i\} + [k_{bc}^i][k_{cc}^i]^{-1}\{P_c^i\}.$$

记

$$\{R_b^i\} = [k_{bc}^i][k_{cc}^i]^{-1}\{P_c^i\}; \tag{4-15}$$

$$[\widetilde{\widetilde{k_{bb}^i}}] = [k_{bb}^i] - [k_{bc}^i][k_{cc}^i]^{-1}[k_{cb}^i]. \tag{4-16}$$

得到第 i 个子结构的边界力表达式如下：

$$\{F_b^i\} = [\widetilde{\widetilde{k_{bb}^i}}]\{\delta_b^i\} + \{R_b^i\}. \tag{4-17}$$

把全部子结构的边界力集合起来，必须等于原结构边界及各子结构公共边界上的结点荷载 $\{P_b\}$，设共有 p 个子结构，则

$$\sum_{i=1}^{p} \{F_b^i\} = \{P_b\}.$$

把式（4-17）代入上式，得到

$$[K_b]\{\delta_b\} = \{P_b\} - \{R_b\}. \tag{4-18}$$

式中$\{\delta_b\}$是原结构边界及各子结公共边界上的结点位移，$\{P_b\}$ 是边界结点荷载，$\{R_b\} = \Sigma\{R_b^i\}$是子结构内部荷载引起的边界反力。$[K_b]$是缩减了的整体刚度矩阵。

计算步骤如下：

1）由式（4-15）计算内部荷载引起的各子结构的边界反力$\{R_b^i\}$；

2）由式（4-16）计算各子结构的$[k_{bb}^i]$，并集合成整体刚度矩阵$[K_b]$；

3）由式（4-18）解出边界位移$\{\delta_b\}$；

4）把边界位移代入式（4-14），求出各子结构的内部位移$\{\delta_c^i\}$；

5）根据$\{\delta_b^i\}$和$\{\delta_c^i\}$计算各单元应力。

上述计算方法也可以这样来理解：先固定全部边界，即令 $\{\delta_b^i\}=0$，由式（4-14）求出各子结构的内部位移如下

$$\{\delta_c^i\} = [k_{cc}^i]^{-1}\{P_c^i\}.$$

代入（a）式，求得边界反力如式（4-15），然后放松全部边界，由式（4-18）求出边界位移$\{\delta_b\}$。

第五章　平面问题高次单元

在第二章，我们介绍了常应变三角形单元，它是在有限单元法中最早提出的单元之一，由于其简单，目前仍在应用。但由于单元中的应变和应力都是常量，而通常工程结构中的应力场都是随着坐标而急剧变化的，在应用常应变三角形单元时，必须布置大量的、密集的单元，才能得到比较好的计算精度，因而结点数量多、方程组庞大。在这一章我们将介绍矩形和三角形高次单元，单元位移函数采用二次以上多项式，单元内部应变和应力都是变化的，能较好地反映实际应力变化的情况，采用比较少的单元，就能得到较好的计算成果。

§5-1　矩　形　单　元

在第三章，我们介绍了矩形应力杂交单元，下面再介绍按位移求解的矩形单元。

边长为$2a$及$2b$的矩形单元示于图5-1。为了简便，把坐标原点取在单元形心上，并以平行于两边的两个对称轴作为x轴和y轴。单元位移函数取为[33]

$$\begin{aligned} u&=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4xy;\\ v&=\beta_5+\beta_6x+\beta_7y+\beta_8xy. \end{aligned}\qquad (a)$$

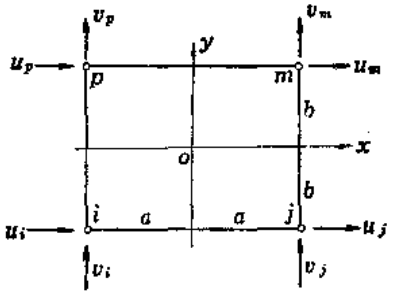


图 5-1　四结点矩形单元

单元中的应变为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_2+\beta_4y;\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}=\beta_7+\beta_8x;\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=(\beta_3+\beta_6)+\beta_4x+\beta_8y. \end{aligned}\qquad (b)$$

由此可见，正应变ε_x在x方向是常量，在y方向是线性函数；正应变ε_y在y方向是常量，在x方向是坐标线性函数；剪应变γ_{xy}在x、y两个方向都是线性函数。系数β_2、β_7、β_3、β_6代表常量应变，β_1、β_5反映了刚体位移。由式（a）可知，在单元边界$x=\pm a$及$y=\pm b$上，位移分量是按线性变化的，这就保证了任意两个相邻单元的位移在其公共边界上的连续性。可见给定的位移函数（a），满足了解答收敛性的充分条件。

现在利用结点位移表示式（a）中的系数$\beta_1\sim\beta_8$，在i、j、m、p等结点上，有

$$u_i=\beta_1-a\beta_2-b\beta_3+ab\beta_4;$$

$$u_j=\beta_1+a\beta_2-b\beta_3-ab\beta_4;$$
$$u_m=\beta_1+a\beta_2+b\beta_3+ab\beta_4;$$
$$u_p=\beta_1-a\beta_2+b\beta_3-ab\beta_4.$$

利用克莱姆法则，由上列四式可解出β_1、β_2、β_3、β_4，同理，可求出β_5、β_6、β_7、β_8，把这八个系数代回式（ a ），得到

$$\begin{aligned} u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m+N_pu_p;\\ v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m+N_pv_p. \end{aligned} \tag{5-1}$$

其中N_i等为如下形函数

$$\begin{aligned} N_i&=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta); \quad N_j=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta);\\ N_m&=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta); \quad N_p=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta); \end{aligned} \tag{5-2}$$

$$\xi=x/a;\ \eta=y/b.$$

也可用矩阵记为

$$\{r\}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e. \tag{5-3}$$

式中

$$[N]=[IN_i\ IN_j\ IN_m\ IN_p]; \tag{5-4}$$
$$\{\delta\}^e=[u_i\ v_i\ u_j\ v_j\ u_m\ v_m\ u_p\ v_p]^T. \tag{5-5}$$

其中I是二阶单位方阵，N_i、N_j、N_m、N_p等是矩形单元的形函数。

单元应变也可用结点位移表示如下：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\[2ex]\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2ex]\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial x}u_i\\[2ex]\Sigma\dfrac{\partial N_i}{\partial y}v_i\\[2ex]\Sigma\left(\dfrac{\partial N_i}{\partial y}u_i+\dfrac{\partial N_i}{\partial x}v_i\right)\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}^e. \tag{5-6}$$

式中

$$[B]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_m}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_p}{\partial x} & 0\\[2ex] 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_m}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_p}{\partial y}\\[2ex] \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_m}{\partial y} & \dfrac{\partial N_m}{\partial x} & \dfrac{\partial N_p}{\partial y} & \dfrac{\partial N_p}{\partial x}\end{bmatrix}. \tag{5-7}$$

把形函数（5-2）代入上式，可求得

$$[B]=\frac{1}{4ab}\begin{bmatrix}-(b-y) & 0 & b-y & 0 & b+y & 0 & -(b+y) & 0\\ 0 & -(a-x) & 0 & -(a+x) & 0 & a+x & 0 & a-x\\ -(a-x) & -(b-y) & -(a+x) & b-y & a+x & b+y & a-x & -(b+y)\end{bmatrix}. \tag{5-8}$$

把上式代入式（3-11），对矩阵的每一个元素进行积分，得到平面问题矩形单元的刚度矩阵如式（5-9）：

$$[k]=HEt\begin{bmatrix}
\beta+r\alpha & & & & & & & \\
m & \alpha+r\beta & & & & & & \\
-\beta+\frac{1}{2}r\alpha & s & \beta+r\alpha & & & & & \\
-s & \frac{\alpha}{2}-r\beta & -m & \alpha+r\beta & & & & \\
-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{2}r\alpha & -m & \frac{\beta}{2}-r\alpha & s & \beta+r\alpha & & & \\
-m & \frac{\alpha}{2}-\frac{r\beta}{2} & -s & -\alpha+\frac{r\beta}{2} & m & \alpha+r\beta & & \\
\frac{\beta}{2}-r\alpha & -s & -\frac{\beta}{2}-\frac{r\alpha}{2} & m & -\beta+\frac{r\alpha}{2} & s & \beta+r\alpha & \\
s & -\alpha+\frac{r\beta}{2} & m & -\frac{\alpha}{2}-\frac{r\beta}{2} & -s & \frac{\alpha}{2}-r\beta & -m & \alpha+r\beta
\end{bmatrix}. \tag{5-9}$$

平面应力：$H=\frac{1}{1-\mu^2}$，$r=\frac{1-\mu}{2}$，$s=\frac{1-3\mu}{8}$，$m=\frac{1+\mu}{8}$，$\alpha=\frac{a}{3b}$；$\beta=\frac{b}{3a}$。

平面应变：$H=\frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$，$r=\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$，$s=\frac{1-4\mu}{8(1-\mu)}$，$m=\frac{1}{8(1-\mu)}$，$\alpha=\frac{a}{3b}$，$\beta=\frac{b}{3a}$。

把$[N]$代入（3-14）、（3-15）诸式，不难求出结点荷载算式，例如对于自重，每一结点的荷载都是单元重量的四分之一。又如，当单元的一个边界承受三角形分布的面力如水压力时，可把合力的三分之一移置到水压力为零的结点上，三分之二移置到另一结点上。

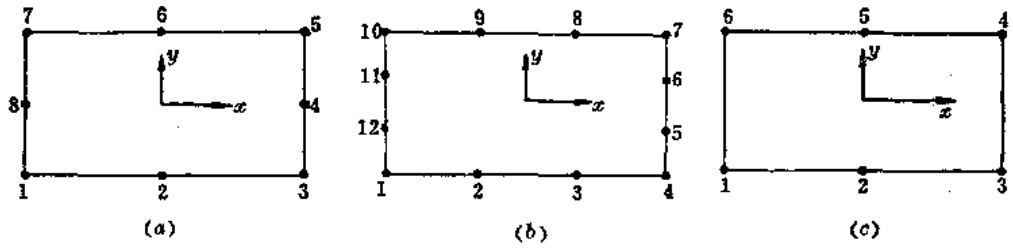


图 5-2　其他形式矩形单元

(a) 8 结点矩形单元；(b)12结点矩形单元；(c) 6 结点矩形单元

对于图5-2(a)所示 8 结点矩形单元，位移函数可取为

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4xy+\beta_5x^2+\beta_6y^2+\beta_7x^2y+\beta_8xy^2;$$

$$v=\beta_9+\beta_{10}x+\cdots\cdots+\beta_{16}xy^2.$$

沿着单元边界，位移是按抛物线变化的，每条边界有三个结点，相邻单元在公共结点上具有相同的位移分量，这就保证了在公共边界上每一点的位移都是连续的。单元内部应变是坐标的二次函数，仿照前面关于 4 结点矩形单元的推导，不难求出这种单元的刚度矩阵及结点荷载等。

对于图 5-2(b)所示12结点矩形单元，位移沿单元边界是按坐标的三次函数变化的。单元应变也是坐标的三次函数。对于图 5-2(c)所示 6 结点矩形单元，位移函数应这样选择：沿上下水平边界，位移按 x 的二次函数变化，沿左右垂直边界，位移按 y 的一次函数变化。

这几种矩形单元，由于位移函数的阶次较高，比 4 结点矩形单元更能适应结构应力场的变化，但是在采用高次单元时，一般所用单元数量较少，单元尺寸较大。这几种矩形单元的边界都是直线单元，形状又十分规则，不容易贴合实际结构的边界，目前应用不多。

4 结点矩形单元，由于计算比较简单，目前应用仍较多。为了贴合不规则边界，有时

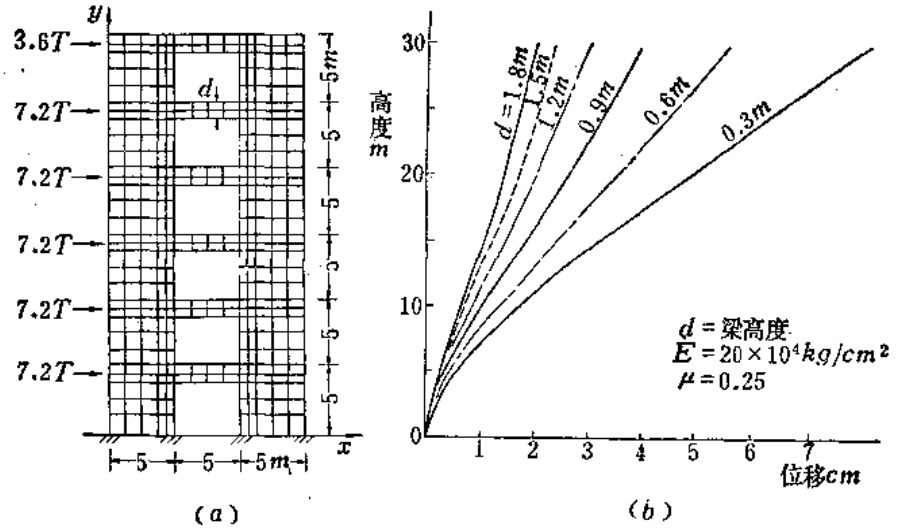


图 5-3　六层楼房剪力墙侧向位移分析

(a)荷载、尺寸及计算网格；(b)墙左边的侧向位移

把它与常应变三角形单元混合使用，在规则部分采用矩形单元，在不规则部分采用三角形单元。

图 5-3 表示了六层楼房剪力墙侧向位移分析的网格和计算成果[21]，采用四结点矩形单元。由图可见，过梁刚度对剪力墙的侧向变位具有重要影响。

§5-2 面 积 坐 标

对于高次三角形单元，如仍采用直角坐标定义形函数，关于刚度矩阵的公式将十分复杂，在改用面积坐标以后，公式可大大简化。

如图5-4所示，三角形单元123中，任意一点P的位置，可以用下列三个比值来规定：

$$L_1=\frac{A_1}{A},\quad L_2=\frac{A_2}{A},\quad L_3=\frac{A_3}{A},\qquad (5\text{-}10)$$

其中A为三角形123的面积，A_1、A_2、A_3分别为三角形$P23$、$P31$、$P12$的面积。这三个比值称为P点的面积坐标。显然，三个面积坐标并不是互相独立的，由于$A_1+A_2+A_3=A$，因此

$$L_1+L_2+L_3=1.\qquad (5\text{-}11)$$

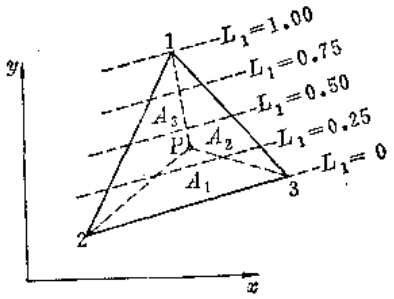


图 5-4 面积坐标

不难看出，三个结点的面积坐标是

结点 1　　$L_1=1,\ L_2=L_3=0$；

结点 2　　$L_2=1,\ L_3=L_1=0$；

结点 3　　$L_3=1,\ L_1=L_2=0$。

三角形的三边用面积坐标表示的方程是

边23　　$L_1=0$；

边31　　$L_2=0$；

边12　　$L_3=0$。

三角形的形心的面积坐标是

$$L_1=L_2=L_3=1/3.$$

在图 5-4 中易于看出，在平行于23边的一条直线上的所有各点，都有相同的面积坐标L_1，而且L_1就等于此直线至23边的距离与结点 1 至23边的距离的比值。因此图5-4中所示的一些L_1的等值线，都是一些互相平行的直线。

设P点坐标为（x，y），三角形$P23$的面积为

$$A_1=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x & y\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y\},\qquad (a)$$

和第二章一样，令

$$a_1=x_2y_3-x_3y_2,\ b_1=y_2-y_3,\ c_1=x_3-x_2.\qquad (b)$$

则式（ a ）成为

$$A_i=\frac{1}{2}(a_i+b_i x+c_i y),\ (1,2,3)$$

代入式（5-10），得到用直角坐标表示面积坐标的关系式如下

$$\begin{aligned}L_1&=\frac{(a_1+b_1x+c_1y)}{2A},\\ L_2&=\frac{(a_2+b_2x+c_2y)}{2A},\\ L_3&=\frac{(a_3+b_3x+c_3y)}{2A}.\end{aligned}\qquad(5\text{-}12)$$

将上式与式（2-7）比较，可见等应变三角形单元的形函数N_i、N_j、N_m就是面积坐标L_1、L_2、L_3。

式（5-12）也可用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\x\\y\end{Bmatrix}.\qquad(5\text{-}13)$$

将式（5-12）中的三式分别乘以x_1、x_2、x_3，然后相加，又利用式（b），可得到

$$x=x_1L_1+x_2L_2+x_3L_3.\qquad(5\text{-}14a)$$

同理可得

$$y=y_1L_1+y_2L_2+y_3L_3.\qquad(5\text{-}14b)$$

式（5-14）与（5-11）可合并，用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\1\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\\y_1&y_2&y_3\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}.\qquad(5\text{-}15)$$

上式表明，用直角坐标（x，y）表示的多项式也可以用面积坐标表示为同阶的多项式。但面积坐标具有下列优点：它们与三角形的形状和方向无关，而且积分运算十分简单。

将面积坐标的函数对直角坐标（x，y）求导数时，可利用下列公式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}&=\frac{\partial L_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_1}+\frac{\partial L_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_2}+\frac{\partial L_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_3}\\&=\frac{1}{2A}\left(b_1\frac{\partial}{\partial L_1}+b_2\frac{\partial}{\partial L_2}+b_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right);\\ \frac{\partial}{\partial y}&=\frac{\partial L_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_1}+\frac{\partial L_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_2}+\frac{\partial L_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_3}\\&=\frac{1}{2A}\left(c_1\frac{\partial}{\partial L_1}+c_2\frac{\partial}{\partial L_2}+c_3\frac{\partial}{\partial L_3}\right).\end{aligned}\qquad(5\text{-}16)$$

下面再计算面积坐标的幂函数在三角形单元上的积分：

$$I=\iint_A L_1^aL_2^bL_3^c\,dxdy.\qquad(c)$$

以L_1和L_2作为独立变量，则

$$dxdy=|J|\,dL_1dL_2=2AdL_1dL_2. \qquad (d)$$

因此积分式（ c ）可以写成

$$I=2A\int_0^1\left(\int_0^{1-L_1}L_2^bL_3^cdL_2\right)L_1^adL_1. \qquad (e)$$

上述积分的计算可利用下列积分公式

$$\int_0^p x^b(p-x)^c\,dx=\frac{b!\ c!}{(b+c+1)!}p^{b+c+1}. \qquad (f)$$

此式可由分部积分加以验证。由此可知

$$\int_0^{1-L_1}L_2^bL_3^cdL_2=\int_0^{1-L_1}L_2^b(1-L_1-L_2)^cdL_2=\frac{b!\,c!}{(b+c+1)!}(1-L_1)^{b+c+1},$$

代入式（ e ），得到

$$I=2A\frac{b!\,c!}{(b+c+1)!}\int_0^1L_1^a(1-L_1)^{b+c+1}\,dL_1=2A\,\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}.$$

即

$$\iint_A L_1^aL_2^bL_3^cdxdy=2A\frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}. \qquad (5\text{-}17)$$

例如

$$\begin{aligned}&\iint_A L_1dxdy=\frac{A}{3},\quad(1,2,3)\\&\iint_A L_1^2dxdy=\frac{A}{6},(1,2,3)\\&\iint_A L_1L_2dxdy=\frac{A}{12}.(1,2,3)\end{aligned} \qquad (5\text{-}18)$$

§5-3 高次三角形单元

在第二章中介绍的三结点三角形单元，计算比较简单，但采用的形函数是线性的，即

$$N_1=L_1,\ N_2=L_2,\ N_3=L_3.$$

因此单元内的应力和应变都是常数。现在再介绍几种改进的三角形单元。

一、六结点二次三角形单元

如图5-5所示，每个单元具有 6 个结点，即三个角点和三边中点，具有12个自由度，位移函数可取为完全二次多项式，单元中的应力是线性变化的，不再是常数。

取如下位移函数：

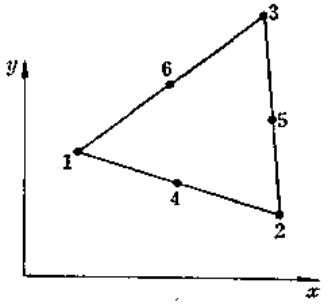


图 5-5 六结点三角形单元

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta_6y^2, \qquad (a)$$

$$v=\beta_7+\beta_8x+\beta_9y+\beta_{10}x^2+\beta_{11}xy+\beta_{12}y^2. \qquad (b)$$

利用12个结点位移分量 u_i，v_i，正好可以确定上式中的12个系数。在单元的边界上，位移分量是按抛物线变化的，每条公共边界上有三个公共结点，正好可以保证相邻两单元位移的连续性。另外，式（a）中的β_1、β_2、β_3和式（b）中的β_7、β_8、β_9反映了刚体位移和常应变。因此位移函数满足了解答的收敛条件。

采用直角坐标表示的位移函数如式（a）和（b），求解系数β_1至β_{12}，以及计算刚度矩阵、结点荷载等运算，都十分冗繁，采用面积坐标可使计算大大简化。

用面积坐标表示的二次形函数如下：

角点：$N_i=(2L_i-1)L_i$，（1，2，3）　　（5-19）

边中点：$N_4=4L_1L_2$。　　（4，5，6；1，2，3）

利用上述形函数，可将位移函数表示如下：

$$u=\sum_{i=1}^{6}N_iu_i, \qquad v=\sum_{i=1}^{6}N_iv_i. \qquad (5\text{-}20)$$

或用矩阵表示为

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e. \qquad (5\text{-}21)$$

其中

$$[N]=\begin{bmatrix}N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4&0&N_5&0&N_6&0\\0&N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4&0&N_5&0&N_6\end{bmatrix},$$

$$\{\delta\}^e=[u_1\quad v_1\quad u_2\quad v_2\quad u_3\quad v_3\quad u_4\quad v_4\quad u_5\quad v_5\quad u_6\quad v_6]^T.$$

再利用第三章的普遍公式，不难求出刚度矩阵及结点荷载等有关公式。

二、10结点三次三角形单元

单元位移函数采用完全的三次多项式：

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta_6y^2+\beta_7x^3+\beta_8x^2y+\beta_9xy^2+\beta_{10}y^3;$$

$$v=\beta_{11}+\beta_{12}x+\beta_{13}y+\beta_{14}x^2+\beta_{15}xy+\beta_{16}y^2+\beta_{17}x^3+\beta_{18}x^2y+\beta_{19}xy^2+\beta_{20}y^3.$$

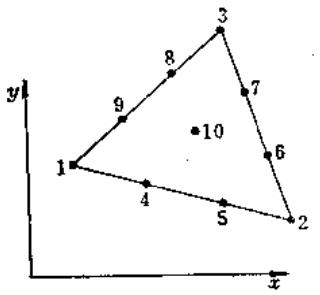


图 5-6 10结点三角形单元

位移函数中共包含 20 个系数，需要 20 个结点位移才能确定这些系数，因此需要10个结点。除了 3 个角点外，每边取 2 个三分点，另外再取一个内部结点——单元形心，如图5-6所示。在单元边界上，位移按三次曲线分布，今每边有 4 个结点，可以保证相邻单元之间位移的连续性。系数β_1、β_2、β_3及β_{11}、β_{12}、β_{13}反映了刚体位移及常应变。因此上述位移函数可以满足解答的收敛条件。

为了简化计算，采用以面积坐标表示的三次形函数如下：

$$\text{角点：}\quad N_1=\frac{1}{2}(3L_1-1)(3L_1-2)L_1\ ;\qquad (1,\ 2,\ 3)$$

$$\text{边三分点：}\quad N_4=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1);\quad (4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9)\qquad (5\text{-}22)$$

$$\text{内点：}\quad N_{10}=27L_1L_2L_3.$$

位移函数取为

$$u=\sum_{i=1}^{10}N_iu_i,\quad v=\sum_{i=1}^{10}N_iv_i.\qquad (5\text{-}23)$$

利用第三章应力分析的普遍公式，不难求出单元刚度矩阵及结点荷载的算式[5]。通过矩阵运算，也可以消去内部结点，而成为9结点18自由度单元。可参阅第三章§3-13在复合单元中消去内部自由度的方法。

三、3结点18自由度三角形单元

如图5-7所示，以三个角点作为单元的结点，在每个结点，除了位移外，还把位移的导数也作为参数，这样每个结点将有6个自由度，整个单元共有18个自由度。即

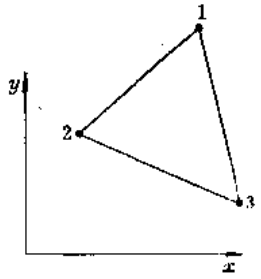


图 5-7　3结点18自由度三角形单元

$$\{\delta\}^e=[\delta_1\quad\delta_2\quad\delta_3\quad]^T;$$

$$\{\delta_i\}=\left[\ u_i\quad\frac{\partial u}{\partial x_i}\quad\frac{\partial u}{\partial y_i}\quad v_i\quad\frac{\partial v}{\partial x_i}\quad\frac{\partial v}{\partial y_i}\ \right]^T.$$

$$(1,2,3)$$

以面积坐标表示的完整三次多项式包括以下10项：

$$1,\ L_1,\ L_2,\ L_1L_2,\ L_2L_3,\ L_3L_1,\ L_1L_2^2-L_2L_1^2,$$
$$L_2L_3^2-L_3L_2^2,\ L_3L_1^2-L_1L_3^2,\ L_1L_2L_3$$

单元位移函数应包括上式所列的10项，但其中最后一项，$L_1L_2L_3$，在单元的三条边界上均取零值，所以它代表内部自由度。在产生虚位移时，边界力在内部自由度所规定的虚位移上所作的功是零，利用这一点，在推导单元刚度矩阵时可以把内部自由度通过矩阵运算而消去，最后每个单元只剩下18个自由度，详见[5]。沿着单元的边界，位移按三次曲线变化，有两个结点位移及两个位移导数共四个参数，正好可以保证相邻单元位移的连续性，在单元内部，应变按坐标的二次函数变化。在结点上，相邻单元不但具有相同的位移分量，而且具有相同的应变分量，如果是均质材料，还将具有相同的应力分量。在边界上，位移的导数通常是不连续的，因而应变和应力也是不连续的。

图5-8比较了用这种单元及常应变三角形单元的计算结果。图中所示常应变单元的应力成果是形成正方形的两单元（如图中单元1与2）的应力的平均值。虽然在梁高度方向布置了五排结点，挠度误差仍达14%。由图（c）可见，用两个18自由度三角形单元已得到了很高的计算精度、挠度误差为0.6%，正应力误差2.3%。

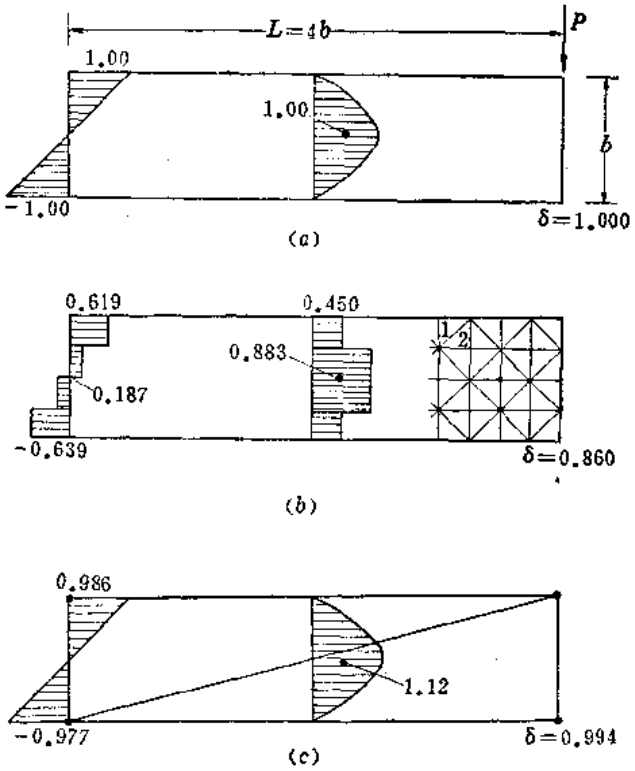


图 5-8　悬臂梁，常应变单元与高次单元比较
(a)梁理论，(b)常应变单元，128个单元　170个方程；
(c) 8 结点18自由度单元，2 个单元，24个方程

由于把18个参数集中在三个结点上，这种单元具有另一优点：结点数量少，整体刚度矩阵的带宽小（与 9 结点18自由度三角形单元比较）。

图 5-9 表示了一个单位厚度悬臂梁的计算成果。在梁的自由端，荷载按抛物线分布，并按功的等效原则移置到各结点上。图中表示了用四种不同单元计算的 A 点垂直位移。由图可见，矩形杂交单元的计算精度比较高，当自由度总数小于60时，在高度方向只取了一层单元，仍给出了较好的计算结果。

总之，高次单元由于内部应力不是常量，可以较好地适应结构的变化的应力场，用较少的单元就可以得到较好的成果。但高次单元的刚度矩阵比较复杂，形成结构刚度矩阵要花费较多的计算时间。

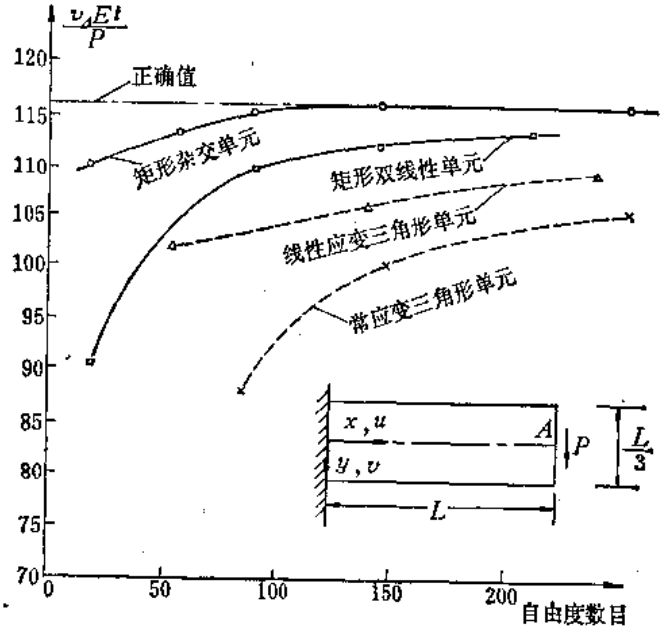


图 5-9　悬臂梁，三角形单元与矩形单元计算成果比较

第六章　弹性力学轴对称问题

如果弹性体的几何形状、约束条件及荷载都对称于某一轴，例如 z 轴，则所有的位移、应变及应力也对称于此轴。这种问题称为轴对称应力问题。在竖井、压力容器及机械制造中经常遇到轴对称应力问题。

对于轴对称问题，采用圆柱坐标（r，θ，z）较为方便。如果以弹性体的对称轴作为 z 轴，所有应力、应变和位移都与 θ 无关，只是 r 和 z 的函数。任一点只有两个位移分量，即沿 r 方向的径向位移 u，沿 z 方向的轴向位移 w，由于对称，θ 方向的环向位移等于零。

在轴对称问题中，采用的单元是一些圆环。这些圆环和 r z 平面正交的截面通常取为三角形，如图 6-1 所示的 ijm（当然，也可以取为其他形状）。各单元之间用圆环形的铰链互相连接，每一个铰与 rz 平面的交点称为结点，如 i、j、m 等等。各单元在 rz 平面上形成三角形网格，类似于在平面问题中各三角形单元在 xy 平面上所形成的网格。但是在轴对称问题中，每个单元的体积都是一个圆环的体积，这点与平面问题是不同的。

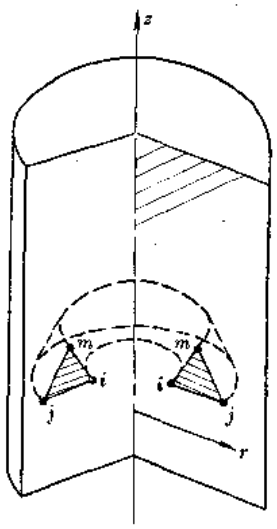


图 6-1　轴对称弹性体三角形单元

由于对称，只须取出一个截面进行分析，但在计算中应注意到所采用的单元是圆环，所有结点力和结点荷载都是施加在圆环形的铰上。

如果弹性体的几何形状是轴对称的，但荷载不是轴对称的，我们可以把荷载在 θ 方向展成富氏级数，然后分解为轴对称及反轴对称问题求解，即把一个三维问题分解为一组二维问题求解。

§6-1　轴对称荷载

假定物体的形状、约束条件及荷载都是轴对称的，这时只须分析一个截面。

一、位移函数

取出一个环形单元的截面 ijm，如图6-2所示，在结点 i 的位移为

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \end{Bmatrix}.$$

单元结点位移为

$$\{\delta\}^e=[\delta_i \quad \delta_j \quad \delta_m \quad]^T.$$

仿照平面问题，采用线性位移函数

$$u=\beta_1+\beta_2 r+\beta_3 z,\quad w=\beta_4+\beta_5 r+\beta_6 z.$$

可得到与平面问题类似的表达式，即

$$u=N_i u_i+N_j u_j+N_m u_m,\quad w=N_i w_i+N_j w_j+N_m w_m. \tag{6-1}$$

式中 $N_i=(a_i+b_i r+c_i z)/2A$，$(i,\ j,\ m)$

$$a_i=r_j z_m-r_m z_j,\quad b_i=z_j-z_m,\quad c_i=-r_j+r_m.\ (i,j,m)$$

$$2A=\begin{vmatrix}1 & r_i & z_i\\ 1 & r_j & z_j\\ 1 & r_m & z_m\end{vmatrix}.$$

式（6-1）也可用矩阵写成

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\ w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e=\begin{bmatrix}N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0\\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m\end{bmatrix}\{\delta\}^e. \tag{6-2}$$

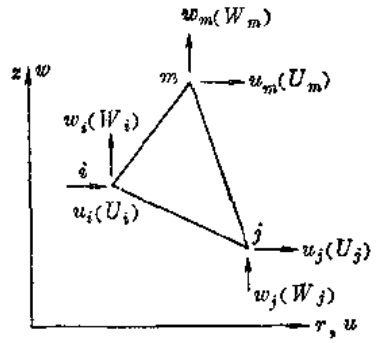


图 6-2 轴对称三角形单元的结点位移与结点力

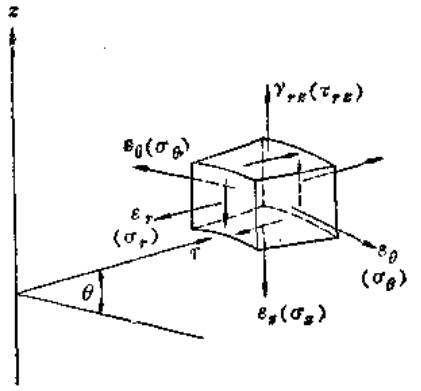


图 6-3 轴对称弹性体的应力与应变

二、单元应变

轴对称应力问题，每点具有四个应变分量，如图6-3所示，沿 r 方向的正应变ε_r，称为径向正应变；沿 θ 方向的正应变ε_θ，称为环向正应变；沿 z 方向的正应变ε_z，称为轴向正应变。在rz平面中的剪应变为γ_{rz}。由于轴对称，其余两个剪应变分量$\gamma_{r\theta}$及$\gamma_{\theta z}$都等于零。根据几何关系，可推知应变与位移之间符合下列关系

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\theta\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{rz}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{u}{r}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial r}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}. \tag{6-3}$$

将位移函数（6-2）式代入上式，得到

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e=[B_i \quad B_j \quad B_m]\{\delta\}^e. \tag{6-4}$$

式中

$$[B_i]=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial r} & 0 \\ \dfrac{N_i}{r} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial r} \end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ h_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix}, \quad (i,j,m) \tag{6-5}$$

其中 $h_i=\dfrac{a_i}{r}+b_i+c_i\dfrac{z}{r}$.

环向应变ε_θ中包含了坐标 r 和 z，不是常量，但其他应变分量都是常量。

轴对称问题可以有四个独立的初应变分量，即

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r0} \\ \varepsilon_{\theta 0} \\ \varepsilon_{z0} \\ \gamma_{rz0} \end{Bmatrix}. \tag{6-6}$$

对于各向同性体，温度变化引起的初应变是

$$\{\varepsilon_0\}=[\alpha\bar{T} \quad \alpha\bar{T} \quad \alpha\bar{T} \quad 0]^T.$$

其中$\bar{T}$为单元的平均温度，α 是线胀系数。

对于横观各向同性的层状材料，当层面与 z 轴正交时，可能有两个线胀系数：一个是轴向的α_z，另一个是层面内的α_r。此时温度变化引起的初应变是

$$\{\varepsilon_0\}=[\alpha_r\bar{T} \quad \alpha_r\bar{T} \quad \alpha_z\bar{T} \quad 0]^T.$$

三、单元应力

在轴对称问题中，任一点具有四个应力分量，即径向正应力 σ_r，环向正应力 σ_θ，轴向正应力σ_z，及剪应力τ_{rz}。

应力与应变之间的关系，可用矩阵写成

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}). \tag{6-7}$$

其中$[D]$是弹性矩阵。

对于横观各向同性的层状材料，设层面与 z 轴正交，忽略初应变，应力-应变关系可写成

$$\varepsilon_r=\frac{\sigma_r}{E_1}-\frac{\mu_1\sigma_\theta}{E_1}-\frac{\mu_2\sigma_z}{E_2};$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{\sigma_\theta}{E_1}-\frac{\mu_1\sigma_r}{E_1}-\frac{\mu_2\sigma_z}{E_2};$$

$$\varepsilon_z=\frac{\sigma_z}{E_2}-\frac{\mu_2\sigma_r}{E_2}-\frac{\mu_2\sigma_\theta}{E_2};\qquad(6\text{-}8)$$

$$\gamma_{rz}=\frac{\tau_{rz}}{G_2}.$$

由上述方程组解出应力分量，得到弹性矩阵如下

$$[D]=\frac{E_2}{(1+\mu_1)(1-\mu_1-2n\mu_2^2)}\begin{bmatrix}1-\mu_1^2 & n\mu_2(1+\mu_1) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0\\ & n(1-n\mu_2^2) & (\mu_1+n\mu_2^2)n & 0\\ & & n(1-n\mu_2^2) & 0\\ \text{对} & \text{称} & & m(1+\mu_1)(1-\mu_1-2n\mu_2^2)\end{bmatrix}.\qquad(6\text{-}9)$$

式中

$$n=\frac{E_1}{E_2},\quad m=\frac{G_2}{E_2}.\qquad(6\text{-}10)$$

对于各向同性体，命

$E_1=E_2=E$，$n=1$；

$\mu_1=\mu_2=\mu$；

$$m=\frac{G_2}{E_2}=\frac{G}{E}=\frac{1}{2}(1+\mu).$$

由（6-9）式得到

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0\\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0\\ & & 1 & 0\\ \text{对} & \text{称} & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix}.\qquad(6\text{-}11)$$

四、单元刚度矩阵

单元刚度矩阵可由普遍公式（3-10）给出。沿着整个圆环求体积分，可得

$$[k]=2\pi\iint[B]^T[D][B]r\,dr\,dz.\qquad(6\text{-}12)$$

矩阵$[B]$见式（6-5），由于被积函数中包含了坐标r和z，上式右边的积分不能简单地求出。为了避免复杂的积分运算，并消除对称轴上$r=0$所引起的麻烦，可把每个单元中的r及z近似地当做常量，取为

$$\bar{r}=\frac{(r_i+r_j+r_m)}{3},\quad \bar{z}=\frac{(z_i+z_j+z_m)}{3}。\tag{6-13}$$

只要网格不太稀，这些处理引起的误差是不大的。由于被积函数是常量，由（6-12）式可得

$$[k]=2\pi\bar{r}A[B]^T[D][B]=\begin{bmatrix}k_{ii}&k_{ij}&k_{im}\\k_{ji}&k_{jj}&k_{jm}\\k_{mi}&k_{mj}&k_{mm}\end{bmatrix}。\tag{6-14}$$

其中子矩阵$[k_{rs}]$是

$$[k_{rs}]=2\pi\bar{r}A[B_r]^T[D][B_s]。\tag{6-15}$$

式中A是三角形ijm的面积。将$[B]$及$[D]$的表达式代入，不难求出$[k_{rs}]$，例如，对于各向同性体

$$[k_{rs}]=\frac{\pi E(1-\mu)\bar{r}}{2(1+\mu)(1-2\mu)A}\begin{bmatrix}b_rb_s+h_rh_s+g_1(b_rh_s+h_rb_s)+g_2c_rc_s & & \\ g_1(c_rb_s+c_rh_s)+g_2b_rc_s & & \\ g_1(b_rc_s+h_rc_s)+g_2c_rb_s & c_rc_s+g_2b_rb_s & \end{bmatrix}。$$

$$(r,\ s=i,\ j,\ m)\tag{6-16}$$

式中 $g_1=\dfrac{\mu}{(1-\mu)}$，　$g_2=\dfrac{(1-2\mu)}{2(1-\mu)}$。

五、结点荷载

对于轴对称问题，结点荷载是作用在整圈圆环形铰上的。例如，设结点的半径为$\bar{r}$，单位长度的铰上作用的荷载为$\overline{R}$（径向）和$\overline{Z}$（轴向），计算中采用的结点荷载应为

径向 $2\pi\bar{r}\overline{R}$，轴向 $2\pi\bar{r}\overline{Z}$。

设单位体积内作用的体积力（重力、离心力等）为

$$\{q\}=\begin{Bmatrix}q_r\\q_z\end{Bmatrix}。$$

由普遍公式（3-13），可知结点荷载是

$$\begin{Bmatrix}P\end{Bmatrix}_q^e=2\pi\iint[N]^T\begin{Bmatrix}q_r\\q_z\end{Bmatrix}r\,dr\,dz。\tag{6-17}$$

当体积力是常量时，在被积函数中可近似地取r和z的平均值，于是

$$\begin{Bmatrix}P_i\end{Bmatrix}_q^e=\begin{Bmatrix}P_j\end{Bmatrix}_q^e=\begin{Bmatrix}P_m\end{Bmatrix}_q^e=2\pi\begin{Bmatrix}q_r\\q_z\end{Bmatrix}\frac{\bar{r}A}{3},\tag{6-18}$$

对于旋转着的机械，离心力为$q_r=\omega^2\rho r$，其中ω是旋转的角速度，ρ是材料密度，此时因q_r不是常量，为了保证计算精度，最好由式（6-17）进行精确积分，以求出结点荷载。

根据普遍公式（3-15），初应变$\{\varepsilon_0\}$产生的结点荷载可按下式计算

$$\begin{Bmatrix}P\end{Bmatrix}_{\varepsilon_0}^e=2\pi\iint[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}r\,dr\,dz。$$

在每个单元中初应变$\{\varepsilon_0\}$是常量，又近似地把坐标r和z当作常量，并取为平均值，可得到

$$\left\{ P_i \right\}_0^e = 2\pi r A[B_i]^T[D]\{\varepsilon_0\}。 \tag{6-19}$$

§6-2 非轴对称荷载

如果弹性体的几何形状是轴对称的，但荷载不是轴对称的，如作用在烟囱上的风荷载及水平地震荷载等等，可以把荷载在θ方向展成富氏级数，利用物体在几何上的轴对称性，把一个三维问题转化为一组二维问题求解。

把荷载分解为径向荷载R、环向荷载F及轴向荷载Q。利用常规的富氏级数方法，可把这些荷载分量展成富氏级数如下：

$$\begin{aligned} R &= \Sigma R_n^s \cos n\theta + \Sigma R_n^t \sin n\theta; \\ F &= -\Sigma F_n^s \sin n\theta + \Sigma F_n^t \cos n\theta; \\ Q &= \Sigma Q_n^s \cos n\theta + \Sigma Q_n^t \sin n\theta。 \end{aligned} \tag{6-20}$$

式中上标s表示轴对称，t表示反轴对称，弹性体的位移分量也可用富氏级数表示如下：

$$\begin{aligned} u &= \Sigma u_n^s \cos n\theta + \Sigma u_n^t \sin n\theta; \\ v &= -\Sigma v_n^t \sin n\theta + \Sigma v_n^t \cos n\theta \\ w &= \Sigma w_n^s \cos n\theta + \Sigma w_n^t \sin n\theta \end{aligned} \tag{6-21}$$

其中u_n^s、v_n^s、w_n^s是轴对称位移分量的富氏系数，而u_n^t、v_n^t、w_n^t是反轴对称位移分量的富氏系数。它们本身又是坐标r和z的函数。为了进行有限单元分析，必须把问题离散化，用结点参数表示u_n^s、…w_n^t。在rz平面上划分单元网格如图6-2，记

$$\{u_n^s\} = \begin{Bmatrix} u_{ni}^s \\ u_{nj}^s \\ u_{nm}^s \end{Bmatrix}, \quad \{u_n^t\} = \begin{Bmatrix} u_{ni}^t \\ u_{nj}^t \\ u_{nm}^t \end{Bmatrix}, \quad \cdots \tag{6-22}$$

其中u_{ni}^s、u_{nj}^s…等是结点参数。利用这些结点参数和三角形单元的形函数，把单元内任一点的u_n^s、v_n^s…等表示如下：

$$u_n^s = [N_i \quad N_j \quad N_m] \begin{Bmatrix} u_{ni}^s \\ u_{nj}^s \\ u_{nm}^s \end{Bmatrix} = [N]\{u_n^s\}; \tag{6-23}$$

$$v_n^s = [N]\{v_n^s\};$$

$$w_n^s = [N]\{w_n^s\};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

把以上式子代入式（6-21），得到位移分量表达式：

$$\begin{aligned} u &= \Sigma[N]\{u_n^s\}\cos n\theta + \Sigma[N]\{u_n^t\}\sin n\theta; \\ v &= -\Sigma[N]\{v_n^s\}\sin n\theta + \Sigma[N]\{v_n^t\}\cos n\theta; \\ w &= \Sigma[N]\{w_n^s\}\cos n\theta + \Sigma[N]\{w_n^t\}\sin n\theta。 \end{aligned} \tag{6-24}$$

在非轴对称情况下，弹性体的应变为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_z\\ \varepsilon_\theta\\ \gamma_{rz}\\ \gamma_{z\theta}\\ \gamma_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial r}\\ \dfrac{\partial w}{\partial z}\\ \dfrac{u}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}\\ \dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial \theta}\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta}+\dfrac{\partial v}{\partial r}-\dfrac{v}{r}\end{Bmatrix}. \tag{6-25}$$

把式（6-24）代入上式，得到

$$\{\varepsilon\}=\Sigma[B_n^s]\{\delta_n^s\}+\Sigma[B_n^t]\{\delta_n^t\}. \tag{6-26}$$

上式右端第一项代表轴对称应变，第二项代表反轴对称应变。

$$\begin{aligned}[B_n^s]&=[B_{ni}^s \quad B_{nj}^s \quad B_{nm}^s];\\ [B_n^t]&=[B_{ni}^t \quad B_{nj}^t \quad B_{nm}^t];\end{aligned} \tag{6-27}$$

$$\{\delta_n^s\}=\begin{Bmatrix}\delta_{ni}^s\\ \delta_{nj}^s\\ \delta_{nm}^s\end{Bmatrix},\quad \{\delta_{ni}^s\}=\begin{Bmatrix}u_{ni}^s\\ v_{ni}^s\\ w_{ni}^s\end{Bmatrix},\quad \cdots$$

$$\{\delta_n^t\}=\begin{Bmatrix}\delta_{ni}^t\\ \delta_{nj}^t\\ \delta_{nm}^t\end{Bmatrix},\quad \{\delta_{ni}^t\}=\begin{Bmatrix}u_{ni}^t\\ v_{ni}^t\\ w_{ni}^t\end{Bmatrix},\quad \cdots$$

$$[B_{ni}^s]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta\\ \dfrac{N_i}{r}\cos n\theta & -\dfrac{nN_i}{r}\cos n\theta & 0\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial r}\cos n\theta\\ 0 & -\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\theta & -\dfrac{nN_i}{r}\sin n\theta\\ -\dfrac{nN_i}{r}\sin n\theta & \left(\dfrac{\partial N_i}{\partial r}-\dfrac{N_i}{r}\right)\sin n\theta & 0\end{bmatrix}. \quad (i,j,m) \tag{6-28}$$

$$[B_{ni}^{t}]=\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial r}\sin n\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\theta \\ \frac{N_i}{r}\sin n\theta & -\frac{nN_i}{r}\sin n\theta & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\sin n\theta & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r}\sin n\theta \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\cos n\theta & \frac{nN}{r}\cos n\theta \\ \frac{nN_i}{r}\cos n\theta & \left(\frac{N_i}{r}-\frac{\partial N_i}{\partial r}\right)\cos n\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (i,j,m)$$

(6-29)

弹性体的应变能为

$$U=\frac{1}{2}\int\{\varepsilon\}^T[D]\{\varepsilon\}d(Vol).$$

把应变表达式（6-26）代入上式，对整个单元的体积进行积分，由于三角函数的正交性，当 $l\neq n$ 时，第 l 项与第 n 项之间无耦合，故可得到

$$U=\Sigma U_n; \tag{6-30}$$

$$U_n=\frac{1}{2}\{\delta_n^s\}^T[k_n^s]\{\delta_n^s\}+\frac{1}{2}\{\delta_n^t\}^T[k_n^t]\{\delta_n^t\}. \tag{6-31}$$

其中 $[k_n^s]$ 和 $[k_n^t]$ 分别是轴对称及反轴对称的第 n 项刚度系数，可计算如下

$$\begin{aligned}[k_n^s]&=\iiint[B_n^s]^T[D][B_n^s]rd\theta drdz;\\ [k_n^t]&=\iiint[B_n^t]^T[D][B_n^t]rd\theta drdz.\end{aligned} \tag{6-32}$$

其中

$$rd\theta drdz=d(Vol).$$

由式（6-24），第 n 项位移分量可表示为

$$\{r_n\}=\begin{Bmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{Bmatrix}=[N_n^s]\{\delta_n^s\}+[N_n^t]\{\delta_n^t\}. \tag{6-33}$$

式中 $[N_n^s]$ 和 $[N_n^t]$ 都是3×9形函数矩阵：

$$[N_n^s]=\begin{bmatrix}N_i\cos n\theta & 0 & 0 & N_j\cos n\theta & \cdots & 0\\ 0 & -N_i\sin n\theta & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & N_i\cos n\theta & 0 & \cdots & N_m\cos n\theta\end{bmatrix};$$

$$[N_n^t]=\begin{bmatrix}N_i\sin n\theta & 0 & 0 & N_j\sin n\theta & \cdots & 0\\ 0 & N_i\cos n\theta & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & N_i\sin n\theta & 0 & \cdots & N_m\sin n\theta\end{bmatrix}. \tag{6-34}$$

由第三章式（3-14），把式（6-20）代入后，得到第n项对称荷载$\{P_n^s\}$及反对称荷载$\{P_n^t\}$如下：

$$\{P_n^s\}=\iiint [N_n^s]^T\begin{Bmatrix} R_n^s\cos n\theta \\ -F_n^s\sin n\theta \\ Q_n^s\cos n\theta \end{Bmatrix} r\,d\theta\,dr\,dz;$$
$$\{P_n^t\}=\iiint [N_n^t]^T\begin{Bmatrix} R_n^t\sin n\theta \\ F_n^t\cos n\theta \\ Q_n^t\sin n\theta \end{Bmatrix} r\,d\theta\,dr\,dz. \qquad (6\text{-}35)$$

在上述结点荷载算式及刚度矩阵算式中都包含了一些三角函数，由于

$$\int_0^{2\pi}\sin^2 n\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos^2 n\theta\,d\theta=\pi.$$

因此积分以后，刚度矩阵及结点荷载中都没有环向坐标θ，原来的三维问题就退化为$2n$个独立的二维问题：

$$[K_n^s]\{\delta_n^s\}=\{P_n^s\};$$
$$[K_n^t]\{\delta_n^t\}=\{P_n^t\}.$$

当然，目前每个结点有三个位移参数和三个荷载参数，虽然采用二维网格，但与通常的弹性力学平面问题是不同的。

为了整体刚度矩阵非奇异，当$n=1$时，需要三个约束条件；当$n>1$时，只要约束轴向刚体位移。当$n=0$时，必须约束绕对称轴的刚体转动及沿对称轴的刚体移动。

第七章　弹性力学空间问题

在前面几章，我们说明了弹性力学平面问题和轴对称问题的解法。但在实际工程中，有些结构由于体形复杂，难以简化为平面问题或轴对称问题，必须按空间问题求解。对于实际工程中所提出的空间问题，古典弹性力学是无能为力的，过去多依靠模型试验。目前应用有限单元法，这些问题都可迎刃而解。

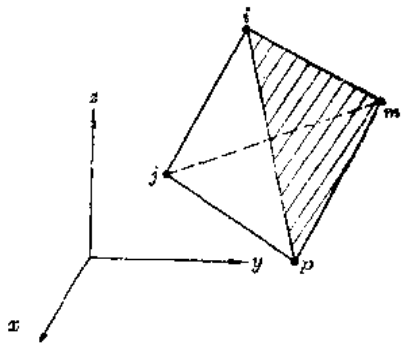


图 7-1　常应变四面体单元

在平面问题中，最简单、也比较实用的单元是三角形。在空间问题中，相应的单元是具有四个角点的四面体，如图 7-1 。在这一章，我们先介绍常应变四面体单元，然后介绍高次四面体单元及六面体单元。

§7-1　常应变四面体单元

在图7-1中表示了一个四面体单元，以四个角点 i 、 j、m、p 为结点。这是最早提出的、也是最简单的空间单元，目前仍在应用。

一、位移函数

每个结点有三个位移分量：

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}. \tag{7-1}$$

每个单元共有12个结点位移分量，可表示为一个向量：

$$\{\delta\}^e=[\delta_i\ \delta_j\ \delta_m\ \delta_p]^T. \tag{7-2}$$

假定单元内任一点的位移分量是坐标的线性函数：

$$\begin{aligned} u&=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4z;\\ v&=\beta_5+\beta_6x+\beta_7y+\beta_8z;\\ w&=\beta_9+\beta_{10}x+\beta_{11}y+\beta_{12}z. \end{aligned} \tag{a}$$

以 i 、 j 、 m 、 p 四个结点的坐标代入上式中的第一式，得到

$$\begin{aligned} u_i&=\beta_1+\beta_2x_i+\beta_3y_i+\beta_4z_i;\\ u_j&=\beta_1+\beta_2x_j+\beta_3y_j+\beta_4z_j;\\ u_m&=\beta_1+\beta_2x_m+\beta_3y_m+\beta_4z_m;\\ u_p&=\beta_1+\beta_2x_p+\beta_3y_p+\beta_4z_p. \end{aligned} \tag{b}$$

由式（ b ）求出系数β_1、β_2、β_3、β_4，再代入式（ a ），得到

$$u=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m+N_pu_p; \tag{7-3a}$$

同理

$$v=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m+N_pv_p; \tag{7-3b}$$

$$w=N_iw_i+N_jw_j+N_mw_m+N_pw_p. \tag{7-3c}$$

式中

$$\begin{aligned}
N_i&=\frac{(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)}{6V};\\
N_j&=-\frac{(a_j+b_jx+c_jy+d_jz)}{6V};\\
N_m&=\frac{(a_m+b_mx+c_my+d_mz)}{6V};\\
N_p&=-\frac{(a_p+b_px+c_py+d_pz)}{6V}.
\end{aligned} \tag{7-4}$$

其中

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&x_i&y_i&z_i\\1&x_j&y_j&z_j\\1&x_m&y_m&z_m\\1&x_p&y_p&z_p\end{vmatrix}. \tag{7-5}$$

是四面体$ijmp$的体积，而系数a_i、b_i、c_i、d_i由下式计算：

$$a_i=\begin{vmatrix}x_j&y_j&z_j\\x_m&y_m&z_m\\x_p&y_p&z_p\end{vmatrix},\quad b_i=-\begin{vmatrix}1&y_j&z_j\\1&y_m&z_m\\1&y_p&z_p\end{vmatrix},$$

$$c_i=-\begin{vmatrix}x_j&1&z_j\\x_m&1&z_m\\x_p&1&z_p\end{vmatrix},\quad d_i=-\begin{vmatrix}x_j&y_j&1\\x_m&y_m&1\\x_p&y_p&1\end{vmatrix}.\ (i,\ j,\ m,\ p) \tag{7-6}$$

为了使四面体的体积V不致成为负值，单元结点的标号 i 、 j 、m、 p必须依照一定的顺序，在右手坐标系中，当按照 $i\to j\to m$的方向转动时，右手螺旋应向 p 的方向前进，如图7-1所示。

由式（ 7-3 ），单元位移可用结点位移向量表示如下

$$\{f\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e=[IN_i,IN_j,IN_m,IN_p]\{\delta\}^e. \tag{7-7}$$

式中 I 是三阶的单位阵。

由于位移函数是线性的，在相邻单元的接触面上，位移显然是连续的。

二、单元应变

在空间应力问题中，每点具有六个应变分量。由弹性力学可知，应变矩阵可定义如下：

$$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$$
$$=\left[\frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right]^T. \tag{7-8}$$

将式（7-3）代入上式，得到

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e=[B_i \quad -B_j \quad B_m \quad -B_p]\{\delta\}^e. \tag{7-9}$$

子矩阵$[B_i]$等是如下的6×3矩阵：

$$[B_i]=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix} b_i & 0 & 0 \\ 0 & c_i & 0 \\ 0 & 0 & d_i \\ c_i & b_i & 0 \\ 0 & d_i & c_i \\ d_i & 0 & b_i \end{bmatrix}, \quad (i,j,m,p) \tag{7-10}$$

由于矩阵$[B]$中的元素都是常量，单元应变分量都是常量。

单元初应变为

$$\{\varepsilon_0\}=[\varepsilon_{x0} \quad \varepsilon_{y0} \quad \varepsilon_{z0} \quad \gamma_{xy0} \quad \gamma_{yz0} \quad \gamma_{zx0}]^T. \tag{7-11}$$

例如，温度变化T在各向同性体中引起的初应变是

$$\{\varepsilon_0\}=[\alpha T \quad \alpha T \quad \alpha T \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T. \tag{7-12}$$

式中α是线胀系数。

由式（a）和式（7-8）可知，式（a）中系数β_1、β_6、β_9代表刚体移动　系数β_2、β_7、β_{12}代表常量正应变；其余6个系数反映了常量剪应变和刚体转动。因此式（a）中12个系数充分反映了单元的刚体位移和常量应变。另外，由于位移函数是线性的，可以保证相邻单元之间位移的连续性，所以位移函数（a）满足了收敛条件。

三、单元应力

单元应力可用结点位移表示如下：

$$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$$
$$=[D][B]\{\delta\}^e-[D]\{\varepsilon_0\}+\{\sigma_0\}. \tag{7-13}$$

对于各向同性体，弹性矩阵$[D]$决定于下式：

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}. \tag{7-14}$$

（对称）

对于图7-2所示的横观各向同性材料，具有下列应力-应变关系：

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E_1}-\mu_1\frac{\sigma_y}{E_1}-\mu_2\frac{\sigma_z}{E_2};$$

$$\varepsilon_y=-\mu_1\frac{\sigma_x}{E_1}-\frac{\sigma_y}{E_1}-\mu_2\frac{\sigma_z}{E_2};$$

$$\varepsilon_z=-\mu_2\frac{\sigma_x}{E_2}-\mu_2\frac{\sigma_y}{E_2}+\frac{\sigma_z}{E_2};$$

$$\gamma_{xy}=\frac{2(1+\mu_1)}{E_1}\tau_{xy};$$

$$\gamma_{yz}=\frac{\tau_{yz}}{G_2};\quad \gamma_{zx}=\frac{\tau_{zx}}{G_2}.$$

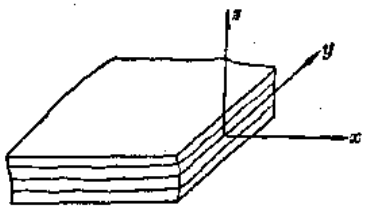


图 7-2 横观各向同性体

从上列六式中解出六个应力分量，得到这种层状材料的弹性矩阵如下：

$$[D]=\frac{E_2}{(1+\mu_1)p}\begin{bmatrix} n(1-\mu_2 n) & n(\mu_1+\mu_2 n) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0 & 0 & 0 \\ n(\mu_1+\mu_2 n) & n(1-n\mu_2^2) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0 & 0 & 0 \\ n\mu_2(1+\mu_1) & n\mu_2(1+\mu_1) & 1-\mu_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{np}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\mu_1)p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\mu_1)p \end{bmatrix}. \tag{7-15}$$

式中

$$n=\frac{E_1}{E_2},\quad m=\frac{G_2}{E_2},\quad p=1-\mu_1-2n\mu_2^2.$$

由于应变是常量，在这种单元中，应力也是常量。

四、单元刚度矩阵

将矩阵[B]的表达式（7-9）代入式（3-10），可求出单元刚度矩阵[k]。由于矩阵[B]的元素是常量，计算是简单的：

$$[k]=[B]^T[D][B]V$$

或

$$[k]=\begin{bmatrix} k_{ii} & -k_{ij} & k_{im} & -k_{ip} \\ -k_{ji} & k_{jj} & -k_{jm} & k_{jp} \\ k_{mi} & -k_{mj} & k_{mm} & -k_{mp} \\ -k_{pi} & k_{pj} & -k_{pm} & k_{pp} \end{bmatrix}. \tag{7-16}$$

式中子矩阵[k_{rs}]由下式计算

$$[k_{rs}]=[B_r]^T[D][B_s]V.$$

对于各向同性体：

$$[k_{rs}]=\frac{E(1-\mu)}{36(1+\mu)(1-2\mu)V}\begin{bmatrix} b_rb_s+g_2(c_rc_s+d_rd_s) & g_1b_rc_s+g_2c_rb_s & g_1b_rd_s+g_2d_rb_s \\ g_1c_rb_s+g_2b_rb_s & c_rc_s+g_2(b_rb_s+d_rd_s) & g_1c_rd_s+g_2d_rc_s \\ g_1d_rb_s+g_2b_rd_s & g_1d_rc_s+g_2c_rd_s & d_rd_s+g_2(b_rb_s+c_rd_s) \end{bmatrix}. \quad (7\text{-}17)$$

$$(r,s=i,\ j,\ m,\ p)$$

其中 $g_1=\mu/(1-\mu)$，$g_2=(1-2\mu)/2(1-\mu)$。

对于横观各向同性体：

$$[k_{rs}]=\frac{E_z}{36(1+\mu_1)pV}\begin{bmatrix} g_1b_rb_s+g_8c_rc_s+g_7d_rd_s & g_2b_rc_s+g_8c_rb_s & g_3b_rd_s+g_7d_rb_s \\ g_2c_rb_s+g_8b_rc_s & g_4c_rc_s+g_6b_rb_s+g_7d_rd_s & g_3c_rd_s+g_7d_rc_s \\ g_3d_rb_s+g_7c_rd_s & g_3d_rc_s+g_7c_rd_s & g_6d_rd_s+g_7(c_rc_s+b_rb_s) \end{bmatrix}. \quad (7\text{-}18)$$

其中 $g_1=n(1-\mu_2n)$，$g_2=n(\mu_1+\mu_2n)$；

$g_3=n\mu_2(1+\mu_1)$，$g_4=n(1-n\mu_2^2)$；

$g_5=1-\mu_1^2$，$g_6=\frac{np}{2}$，$g_7=m(1+\mu_1)p$。

五、结点荷载

设体积力是$\{q\}=[q_x\ q_y\ q_z]^T$，其中q_x、q_y、q_z是常量，由式（3-14）可求得i点的结点荷载如下

$$\{P_i^e\}_q=\begin{Bmatrix} X_i^e \\ Y_i^e \\ Z_i^e \end{Bmatrix}_q=\frac{V}{4}\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix}. \quad (i,j,m,p)$$

也就是说，三个方向的体积力都平均分配到单元的四个结点上。式中V是单元体积。

如果单元e是靠近边界的，设它的某一边界表面，例如ijm，承受着线性分布的面力

$$\{p\}=[p_x\quad p_y\quad p_z\quad]^T.$$

在结点i、j、m上的集度分别为$[p_x^i\ p_y^i\ p_z^i]^T$等等，由式（3-15）可求得结点荷载如下：

$$X_{ip}^e=\frac{1}{6}A_{ijm}\left(p_x^i+\frac{1}{2}p_x^j+\frac{1}{2}p_x^m\right),\quad \begin{pmatrix} i,\ j,\ m \\ x,\ y,\ z \end{pmatrix}$$

式中A_{ijm}是边界表面ijm的面积。

初应变产生的结点荷载可由下式计算

$$\{P\}_{\varepsilon_0}^e=[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}V.$$

例如，设单元的平均温度为$\overline{T}=(T_i+T_j+T_m+T_t)/4$，由上式可求得温度变形产生的结点荷载如下：

$$\{P\}_{\varepsilon_0}^e=\frac{E\alpha\overline{T}}{6(1-2\mu)}[b_i\ c_i\ d_i\ -b_j\ -c_j\ -d_j\ b_m\ c_m\ d_m\ -b_p\ -c_p\ -d_p]^T.$$

六、由四面体组成的复合单元

把一个平面划分为一系列三角形单元，在单元划分和结点编号上都不会出现什么困难。但是要把一个空间划分为一系列四面体单元，情况就不同了，当结点较多时，对各个单元不易看清楚，结点编号也易出错，因此实际计算中以采用由四面体组成的复合单元为方便。用得最多的是八结点砖形六面体。一个六面体最少要由5个四面体组成，如图7-3所示，另一种分割方式是，首先把六面体分割成两个三棱体，然后每个三棱体再分割成三个四面体，如图7-4所示。

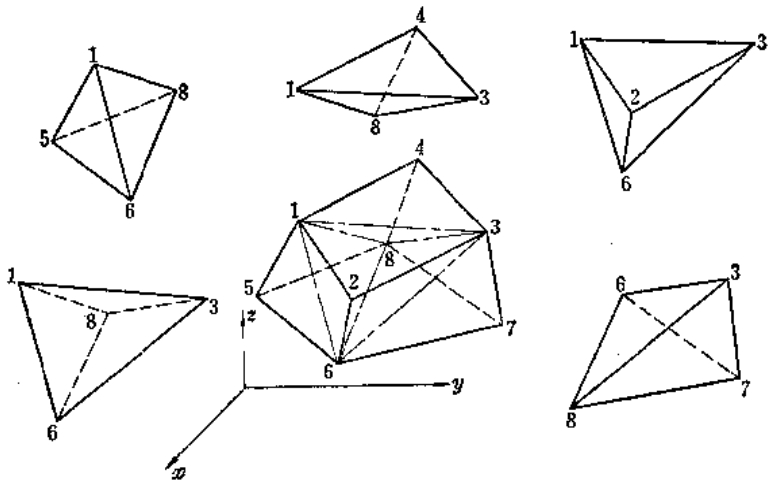


图 7-3　由5个四面体单元组成一个六面体

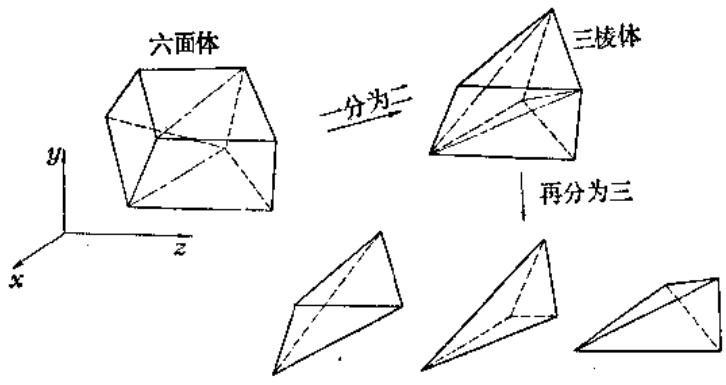


图 7-4　一个六面体分割6个四面体单元

在计算中，以四面体为单位，建立复合单元的刚度矩阵，这只要把各四面体单元的刚度相加就可得到，即

$$k_{ij}=\Sigma k^{*}_{ij}。$$

其中k_{ij}是复合单元的刚度系数，k^{*}_{ij}是相应结点的四面体单元的刚度系数。求解平衡方程得出结点位移后，先求出四面体的应力，再加以平均，求出复合单元的应力。

一个六面体可以用两种不同的方式分割为5个四面体，并可以用多种方式分割成6个

四面体。如果复合单元以不同方式加以分割，然后取不同分割方式的平均值，计算精度可略有改进。

对于体形复杂的结构，可以同时采用几种复合单元，例如在主体部分采用六面体单元，在边界部分采用三棱体单元，在局部不规则部分采用四面体单元。

§7-2 体积坐标

用于空间问题的高次四面体单元，如采用体积坐标，可简化计算公式。如图7-5所示，在四面体单元1234中，任意一点P的位置可用下列四个比值来确定：

$$L_1=\frac{V_1}{V},\quad L_2=\frac{V_2}{V},\quad L_3=\frac{V_3}{V},\quad L_4=\frac{V_4}{V}. \tag{7-19}$$

其中V为四面体1234的体积：

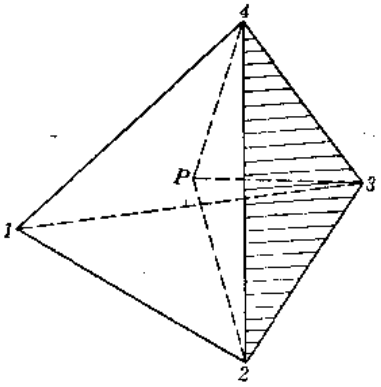


图 7-5 体积坐标

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{vmatrix}. \tag{a}$$

而V_1、V_2、V_3、V_4分别是四面体$P234$、$P341$、$P412$、$P123$的体积。这四个比值称为P点的体积坐标。由于$V_1+V_2+V_3+V_4=V$，因此

$$L_1+L_2+L_3+L_4=1. \tag{b}$$

直角坐标与体积坐标之间，符合下列关系：

$$\begin{Bmatrix}1\\x\\y\\z\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\x_1&x_2&x_3&x_4\\y_1&y_2&y_3&y_4\\z_1&z_2&z_3&z_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{Bmatrix}. \tag{7-20}$$

对上式求逆，可用直角坐标表示体积坐标如下：

$$\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\\L_4\end{Bmatrix}=\frac{1}{6V}\begin{bmatrix}V_1&a_1&b_1&c_1\\V_2&a_2&b_2&c_2\\V_3&a_3&b_3&c_3\\V_4&a_4&b_4&c_4\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\x\\y\\z\end{Bmatrix}. \tag{c}$$

式中a_i、b_i、c_i分别是表面i（角点i对面的表面）在x、y、z平面上的投影面积，实际上它们是式（7-20）中矩阵的相应于坐标x_i、y_i、z_i的余子式，例如

$$a_3=-\begin{vmatrix}1&1&1\\y_1&y_2&y_4\\z_1&z_2&z_4\end{vmatrix}.$$

求体积坐标的幂函数在四面体单元上的积分时，可应用下列公式

$$\iiint_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d dxdydz = 6V\frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!} \tag{7-21}$$

体积坐标的幂函数对直角坐标求导数时，可利用下列公式：

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} &= \sum \frac{\partial L_i}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{1}{6V}\left(a_1\frac{\partial}{\partial L_1}+a_2\frac{\partial}{\partial L_2}+a_3\frac{\partial}{\partial L_3}+a_4\frac{\partial}{\partial L_4}\right),\\
\frac{\partial}{\partial y} &= \sum \frac{\partial L_i}{\partial y}\frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{1}{6V}\left(b_1\frac{\partial}{\partial L_1}+b_2\frac{\partial}{\partial L_2}+b_3\frac{\partial}{\partial L_3}+b_4\frac{\partial}{\partial L_4}\right),\\
\frac{\partial}{\partial z} &= \sum \frac{\partial L_i}{\partial z}\frac{\partial}{\partial L_i} = \frac{1}{6V}\left(c_1\frac{\partial}{\partial L_1}+c_2\frac{\partial}{\partial L_2}+c_3\frac{\partial}{\partial L_3}+c_4\frac{\partial}{\partial L_4}\right).
\end{aligned} \tag{7-22}$$

对上节所述常应变四面体单元，所采用的形函数也可用体积坐标表示如下：

$$N_1 = L_1,\ N_2 = L_2,\ N_3 = L_3,\ N_4 = L_4.$$

§7-3 高次四面体单元

实际工程结构中的应力场，往往是随着坐标而急剧变化的，常应变四面体单元中的应力分量都是常量，难以适应急剧变化的应力场，为了保证必要的计算精度，必须采用密集的计算网格，结点数量将很多，方程组十分庞大。如果采用高次位移函数，单元中的应力是变化的，就可以用较少的单元、较少的自由度而得到必要的计算精度，从而可以降低方程组的规模。当然高次单元的刚度矩阵比较复杂，形成刚度矩阵要花费较多的计算时间。但从已有经验来看，在保持同样计算精度的条件下，采用高次单元，在总的计算时间上还是节省的。

一、10结点线性应变四面体单元

用直角坐标（x、y、z）表示的完全二次多项式共有10项，位移函数取为

$$\begin{aligned}
u &= \beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4z+\beta_5x^2+\beta_6y^2\\
&\quad +\beta_7z^2+\beta_8xy+\beta_9yz+\beta_{10}zx,\\
v &= \beta_{11}+\beta_{12}x+\beta_{13}y+\beta_{14}z+\beta_{15}x^2+\beta_{16}y^2\\
&\quad +\beta_{17}z^2+\beta_{18}xy+\beta_{19}yz+\beta_{20}zx,\\
w &= \beta_{21}+\beta_{22}x+\beta_{23}y+\beta_{24}z+\beta_{26}x^2+\beta_{26}y^2\\
&\quad +\beta_{27}z^2+\beta_{28}xy+\beta_{29}yz+\beta_{30}zx.
\end{aligned}$$

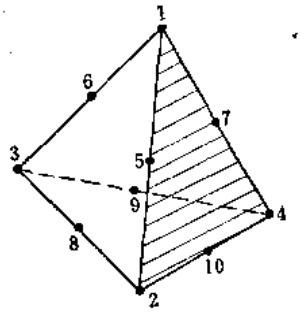


图 7-6 10结点线性应变四面体单元

由上式求导数，可得到单元中的应变分量：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \beta_2+2\beta_5x+\beta_8y+\beta_{10}z,$$

……

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} = (\beta_3+\beta_{12})+(\beta_8+2\beta_{15})x$$
$$+(2\beta_6+\beta_{18})y+(\beta_9+\beta_{20})z,$$

……

可见，单元中应变分量是坐标的线性函数。位移函数中包括30个系数，为了确定这些系数，需要30个结点参数。今取10个结点，即四个角点，加上六条棱边的中点，每个结点有3个位移分量作为参数，正好可以决定位移函数中的系数。

对于高次单元，如直接采用笛卡尔直角坐标，计算颇费事。下面改用体积坐标，单元位移函数取为

$$u=\sum_{i=1}^{10}N_iu_i,\quad v=\sum_{i=1}^{10}N_iv_i,\quad w=\sum_{i=1}^{10}N_iw_i. \tag{7-23}$$

其中u_i、v_i、w_i为结点i的位移分量，N_i为用体积坐标表示的二次形函数：

角点：
$$N_1=(2L_1-1)L_1;\quad (1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{7-24}$$

边中点：
$$N_5=4L_1L_2.\quad (5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10;\ 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

利用第三章应力分析的普遍公式，不难求出单元刚度矩阵及结点荷载的算式。

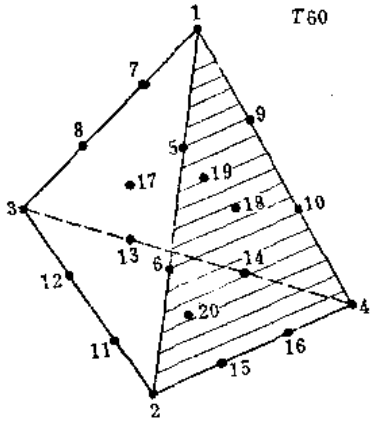


图 7-7　20结点四面体单元

二、20结点四面体单元

在直角坐标系中，完全的三次多项式共有20项，四面体单元的位移函数如取完全的三次多项式，也有20项，因此需要20个结点。今取为四个角点，六条棱边的三分点及四个表面的形心，如图7-7所示，位移函数是三次多项式，单元应变和应力将是坐标的二次函数。

用体积坐标表示的形函数为

角点：
$$N_i=\frac{1}{2}(3L_i-1)(3L_i-2)L_i;\quad (1,2,3,4)$$

边三分点：
$$N_5=\frac{9}{2}L_1L_2(3L_1-1);\quad (5,6,\cdots 16) \tag{7-25}$$

表面形心：
$$N_{18}=27L_1L_2L_3.\quad (17,18,19,20)$$

位移函数与式（7-23）类似，采用第三章应力分析普遍公式，可求出刚度矩阵、结点荷载等算式。

三、4结点48自由度四面体单元

如果除了位移分量u、v、w之外，再引进位移分量的九个一阶导数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial z},\ \frac{\partial w}{\partial x},\ \frac{\partial w}{\partial y},\ \frac{\partial w}{\partial z}$$

作为结点参数，每个结点就有12个自由度。这样一来，在不增加结点数目的条件下，也能提高位移函数的次数，改善单元特性。

图7-8(a)表示了4结点48自由度四面体单元。位移函数用体积坐标表示，它对于L_1、L_2、L_3及L_4应当是对称的，它应能保证相邻单元位移的连续性、并应包含尽可能高次的完全多项式。一个完全的二次多项式包含10项，所以还应含有六个三次项，今在位移函数中选用以下16项：

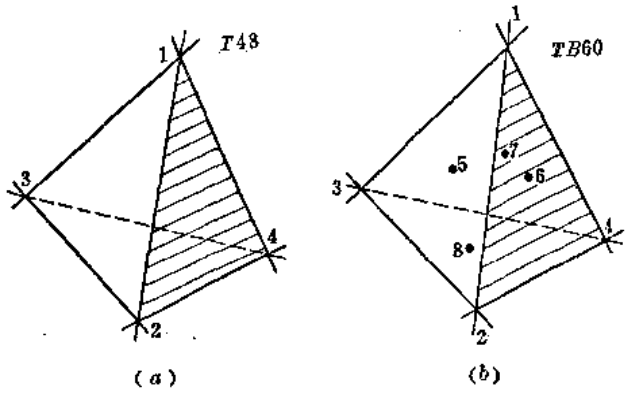


图 7-8 每结点有12个自由度的单元
(a) 4结点48自由度单元；(b) 8 结点60自由度单元

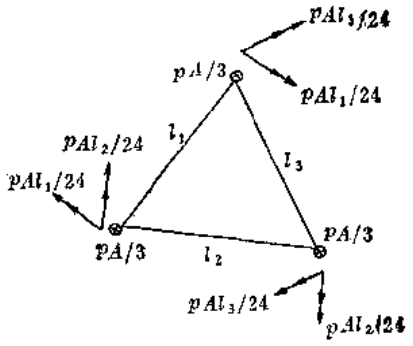


图 7-9

$$L_1, L_2, L_3, L_4, L_1L_2, L_1L_3, L_1L_4, L_2L_3, L_2L_4, L_3L_4,$$
$$(L_1^2L_2 - L_1L_2^2), (L_1^2L_3 - L_1L_3^2), (L_1^2L_2 - L_1L_4^2),$$
$$(L_2^2L_3 - L_2L_3^2), (L_2^2L_4 - L_2L_4^2), (L_3^2L_4 - L_3L_4^2).$$

采用第三章所述方法，不难求出单元刚度矩阵。应用虚功原理，也可以把外荷载移置为结点荷载。在目前情况下，结点荷载矢量包括相应于结点移动的“力”和相应于结点转动的“力矩”。例如，考虑垂直作用于四面体的面积为 A 的表面上的均布荷载 p，相应的荷载矢量包括每个结点上的一个集中力 $\frac{pA}{3}$ 和两个集中力矩 $\frac{pAl_i}{24}$。力矩作用在图 7-9 所示的方向上，l_i 是与该力矩矢量垂直的棱的长度。

如果外荷载作用在与加载面平行的方向上，那么每个结点的荷载矢量是：

（1）大小为 $\frac{pA}{3}$ 的一个集中荷载；

（2）垂直于该面的一个力矩矢量，其大小等于图 7-9 所示两个力矩矢量的合力在外荷载作用方向上的分量；

（3）两个方向相反的集中力所形成的力偶，这两个力作用在外荷载的方向上，相距单位距离。这两个力的大小等于图 7-9 所示两个力矩矢量的合力在与外荷载垂直方向上的分量。

如果位移函数采用完全的三次多项式，则一个单元总共应有60个自由度，除上面所述的48个自由度外，还可以在四个表面的形心处取结点，以结点上的 u、v、w 作为结点参数，加上角点上的结点参数，共有60个结点参数，详细推导见文献[59]。

如果弹性体是非均质的，那么单元的边界应与材料的边界一致。在与材料平行的方向上，应变是连续的；而在与边界垂直的方向上，应力和转动是连续的。例如，当边界垂直于 z 方向时，结点参数应变换为

$$\{\delta_i\} = \left[u,\ v,\ w,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial y},\ \frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial v}{\partial y},\ \sigma_z,\ \tau_{xz},\ \tau_{yz},\ \tau_{xz},\ \tau_{yz} \right]^T .$$

其中

$$r_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x},\quad r_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}.$$

是结点转动分量。

与平面问题一样，把参数集中到四个角点上，可减少结点数目，并减少整体刚度矩阵的带宽，因而可减少机器存储容量。

§7-4 六面体单元

如在平面问题中采用矩形单元一样，在空间问题中也可以采用六面体单元。图7-10（a）表示了以八个角点为结点的六面体单元，每个结点以u、v、w为参数，一个单元共有24个自由度。位移函数用多项式表示，可包含下列各项：

$1,\ x,\ y,\ z,\ xy,\ xz,\ yz,\ xyz$

除了角点之外，如再在棱的中点引入结点，就得到图7-10（b）所示的20结点六面体

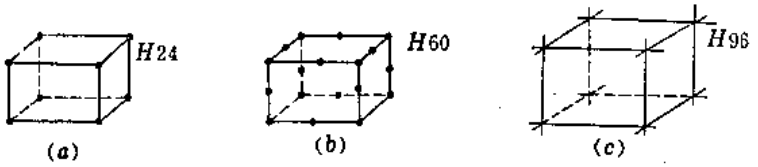


图 7-10 六面体单元

（a）8结点24自由度；（b）20结点60自由度；（c）8结点96自由度

单元，在每个结点以三个位移分量作为结点参数，一个单元共有60个自由度，位移函数采用多项式，包括下列各项：

$$1,\ x,\ y,\ z,\ x^2,\ xy,\ xz,\ y^2,\ yz,\ z^2,\ x^2y,\ x^2z,$$
$$xy^2,\ xyz,\ xz^2,\ y^2z,\ yz^2,\ x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2。$$

如果把结点参数全部集中到八个角点上，每个结点有12个自由度，就得到图7-10（c）所示8结点96自由度六面体单元，位移函数应包括下列各项，

$$1,\ x,\ y,\ z,\ x^2,\ xy,\ xz,\ y^2,\ yz,\ z^2,\ x^3,\ x^2y,\ x^2z,\ xy^2,$$
$$xyz,\ xz^2,\ y^3,\ y^2z,\ yz^2,\ z^3,\ x^2yz,\ xy^2z,\ xyz^2,\ x^3y,$$
$$x^3z,\ xy^3,\ y^3z,\ xz^3,\ yz^3,\ x^3yz,\ xy^3z,\ xyz^3。$$

在图7-11中表示了用几种不同的空间单元计算一个悬臂梁弯曲问题的结果[5]。所用的单元是$T12$、$T48$、$H24$及$H96$。该图以结构总自由度数为横坐标，以计算挠度与正确挠度的比值为纵坐标，在每个点旁边注明了所用的单元数目。由此图可见，高次单元的精度优于简单单元，而且六面体单元的精度优于四面体单元。但必须注意，在结构自由度总数相同的条件下，高次单元刚度矩阵的计算要花费较多的时间。另外，六面体单元由于体

形过于规则，不容易与实际工程结构的复杂外形相贴合，在应用上受到了限制。此图也说明，在采用简单的4结点四面体单元$T12$分析空间应力问题时，由于单元应力是常量，不易适应变化的应力场，必须采用密集的网格、大量的单元，才能得到较好的计算精度。例如，对于悬臂梁之类的以弯曲为主的结构，在厚度方向如果只布置三四排结点的话，计算误差将是很大的。

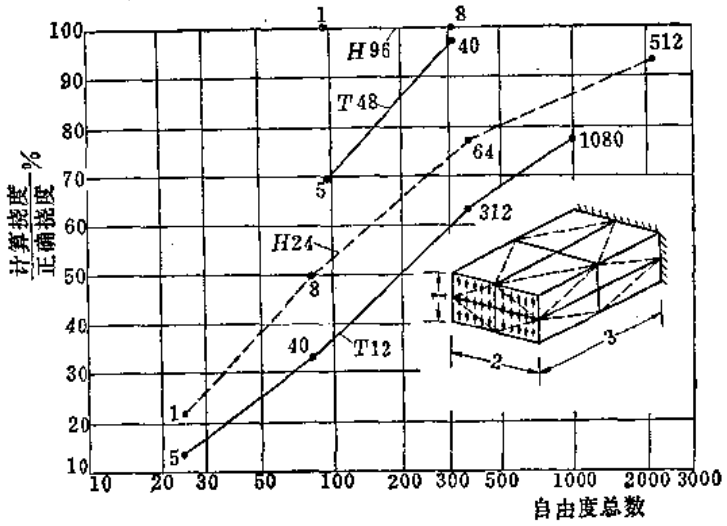


图 7-11　空间单元计算悬臂梁结果比较

第八章　形函数、坐标变换与曲边单元

前面几章所述的单元，其边界都是直线和平面，为了贴合比较复杂的结构外形，只有增加单元数量，自由度的数目随之增加，输入的数据和信息也增加了，因此计算时间比较长，事先的准备工作量也比较大。为了解决这个矛盾，可采用复杂形状的单元。本章将说明如何利用坐标变换以建立具有复杂外形的曲边单元及相应的计算方法。

§8-1　形 函 数 定 义

从以前几章可以看到，在有限单元法中，当单元形状和相应的形函数确定以后，剩下的运算可依照标准步骤和普遍公式进行，比较简单。在本章以后各节还将看到，一些复杂单元的几何形状也是利用形函数建立起来的。因此，在有限单元法中，形函数的作用十分重要。

形函数是定义于单元内部的、坐标的连续函数，它应满足下列条件：

（1）在结点 i $N_i=1$，
在其它结点 $N_i=0$。　　（8-1）

（2）能保证用它定义的未知量（u、v 或 x、y）在相邻单元之间的连续性。

（3）应包含任意线性项，以便用它定义的单元位移可满足常应变条件。

（4）应满足下列等式

$$\Sigma N_i=1. \tag{8-2}$$

以便用它定义的单元位移能反映刚体移动。

现在说明上列等式的必要性。用形函数定义单元位移如下：

$$u=\Sigma N_i u_i,\quad v=\Sigma N_i v_i,\quad w=\Sigma N_i w_i. \tag{a}$$

其中 u_i、v_i、w_i 为结点 i 的位移。设单元产生单位水平（或其他方向）刚体移动：$u=1$，则所有结点及单元内任一点都产生单位水平移动，由式（a）可得

$$u=\Sigma N_i\times 1=1.$$

即得到式（8-2）。

形函数阶次越高，单元形状就越复杂，单元适应能力也越强，求解应力问题时所需单元数量也越少，因此平衡方程组的阶较低，求解方程组的时间较少。但形函数阶次提高后，建立刚度矩阵的运算较复杂，因此对于每一特定的问题，都有一个最合适的形函数的阶次，它使得总的计算时间最经济。一般这需要根据计算经验决定。

§8-2 一维形函数

一维单元因可得到精确解，在本书第一章没有采用一般有限单元方法进行分析。在实际工程中，一维单元往往和二维或三维单元同时出现在一个连续介质中。例如，钢筋混凝土结构中的钢筋、竖井的薄衬砌、孔口的边缘加劲环、工字梁或钣梁结构的翼缘等等，都可以作为一维单元，它与其它二维或三维单元共同作用，在这种情况下，可采用统一的方法进行分析。

如图8-1所示，目前我们采用坐标 ξ，所用单元是直线：$-1\leqslant\xi\leqslant+1$。以后再通过坐标变换，得到整体坐标系（$x$、$y$、$z$）中不同长度和形状的曲线单元。目前所用坐标 ξ 为局部坐标，图 8-1 所示单元称为母单元，以后通过坐标变换在整体坐标系中所得到

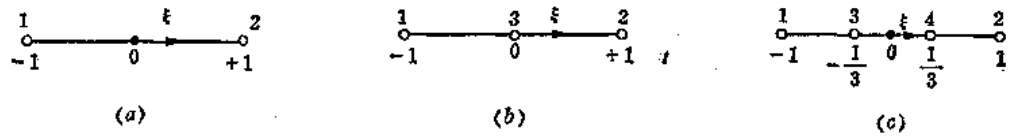


图 8-1 一维母单元
(a)线性单元，(b)二次单元，(c)三次单元

的曲线单元称为子单元。形函数是用局部坐标在母单元中定义的。具体形式如下（参阅图 8-1）：

（1）线性单元（2结点）

$$N_1=\frac{1-\xi}{2},\quad N_2=\frac{1+\xi}{2}。\tag{8-3}$$

（2）二次单元（3结点）

$$N_1=-\frac{(1-\xi)\xi}{2},\quad N_2=\frac{(1+\xi)\xi}{2},\quad N_3=1-\xi^2。\tag{8-4}$$

（3）三次单元（4结点）

$$N_1=\frac{(1-\xi)(9\xi^2-1)}{16},\quad N_2=\frac{(1+\xi)(9\xi^2-1)}{16},$$

$$N_3=\frac{9(1-\xi^2)(1-3\xi)}{16},\quad N_4=\frac{9(1-\xi^2)(1+3\xi)}{16}。\tag{8-5}$$

利用拉格朗日多项式，一维形函数可写成如下统一形式：

$$N_i^n=\frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\cdots(\xi-\xi_{i-1})(\xi-\xi_{i+1})\cdots(\xi-\xi_n)}{(\xi_i-\xi_1)(\xi_i-\xi_2)\cdots(\xi_i-\xi_{i-1})(\xi_i-\xi_{i+1})\cdots(\xi_i-\xi_n)},\tag{a}$$

不难验证，上述各形函数是满足式（8-1）和式（8-2）的。

§8-3 二维形函数

二维母单元是（ξ，η）平面中的 2×2 正方形：

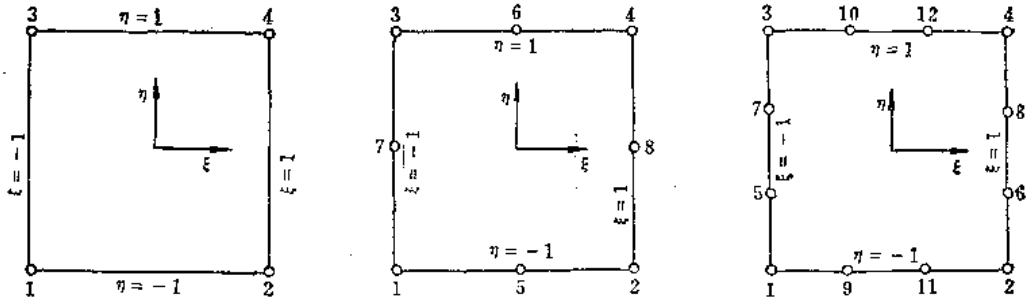


图 8-2 二维母单元

(a)线性单元；(b)二次单元；(c)三次单元

$$-1 \leqslant \xi \leqslant +1, \quad -1 \leqslant \eta \leqslant +1.$$

如图8-2所示，坐标原点放在单元形心上。单元边界是四条直线：$\xi = \pm 1$，$\eta = \pm 1$，结点数目应与形函数阶次相适应，以保证用形函数定义的未知量在相邻单元之间的连续性。因此，对于线性、二次、三次形函数，单元每边应分别有两个、三个、四个结点。除了四个角点外，其他结点放在各边的二等分或三等分点上，如图8-2所示。

二维形函数如下：

（1）线性单元（4结点）

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}, \quad N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}, \\ N_3 &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}. \end{aligned}\right\} \tag{8-6}$$

引用新变数

$$\xi_0 = \xi_i \xi, \quad \eta_0 = \eta_i \eta. \tag{8-7}$$

其中ξ_i、η_i为结点 i 的坐标，于是式（8-6）所示形函数可合并表示为

$$N_i = \frac{(1+\xi_0)(1+\eta_0)}{4}, \quad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{8-8}$$

显然，在单元的四条边界上，形函数是线性的。

（2）二次单元（8结点）

角点：

$$N_i = \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1), \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

边中点：

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0), \quad (i = 5, 6) \tag{8-9}$$

$$N_i = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0), \quad (i = 7, 8)$$

在单元的四边上，形函数是二次函数。

（3）三次单元（12结点）：

角点：

$$N_i=\frac{1}{32}(1+\xi_0)(1+\eta_0)[9(\xi^2+\eta^2)-10],\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4),$$

边三分点：

$$N_i=\frac{9}{32}(1+\xi_0)(1-\eta^2)(1+9\eta_0),\ (i=5,\ 6,\ 7,\ 8),\qquad (8\text{-}10)$$

$$N_i=\frac{9}{32}(1+\eta_0)(1-\xi^2)(1+9\xi_0).\ (i=9,\ 10,\ 11,\ 12).$$

在单元的四边上，形函数是三次形函数。

不难验证，以上各种形函数都是满足§8-1所述对形函数的四条要求的。现在以(8-9)式表示的二次形函数为例，加以说明。

在结点i，$\xi_0=\eta_0=1$，因此$N_i=1$，而在其他结点，$N_i=0$，满足条件（1）。

在单元的四边上，形函数是二次函数，而每边有三个结点，足以保证用形函数定义的未知量在相邻单元的连续性，故满足条件（2）。

把式（8-9）展开，可见N_i中包含了线性项ξ和η，这些形函数的线性组合可以充分反映用形函数定义的未知量的任意线性变化，从而满足了条件（3）。

把式（8-9）代入式（8-2），得到

$$\Sigma N_i=\frac{1}{4}\{(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)+(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)+(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)+(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)\}+\frac{1}{2}\{(1-\xi^2)(1-\eta)+(1-\xi^2)(1+\eta)+(1-\eta^2)(1-\xi)+(1-\eta^2)(1+\xi)\}=1$$

可见满足条件（4）。

§8-4 三维形函数

三维母单元是（ξ、η、ζ）坐标系中的$2\times2\times2$正六面体：

$$-1\leqslant\xi\leqslant+1,\ -1\leqslant\eta\leqslant+1,\ -1\leqslant\zeta\leqslant+1,$$

如图8-3所示，坐标原点放在单元形心上，单元边界是六个平面：$\xi=\pm1$，$\eta=\pm1$，ζ

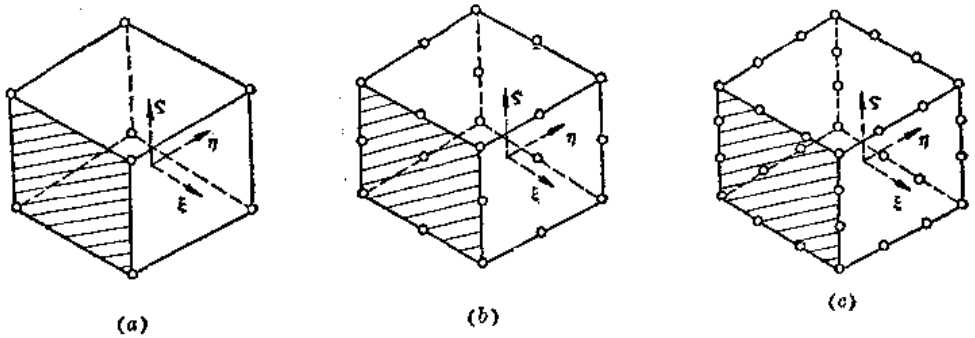


图 8-3 三维母单元

(a)线性单元(8结点)，(b)二次单元(20结点)，(c)三次单元(32结点)

$=\pm 1$。单元结点放在角点及各棱的等分点上。

三维形函数如下：

（1）线性单元（8结点）：

$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)。 \tag{8-11}$$

（2）二次单元（20结点）：

角点：
$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0+\zeta_0-2)；$$

典型边中点：
$$\xi_i=0,\ \eta_i=\pm 1,\ \zeta_i=\pm 1； \tag{8-12}$$
$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)。$$

（3）三次单元（32结点）：

角点：
$$N_i=\frac{1}{64}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)[9(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-19]；$$

典型边三分点：
$$\xi_i=\pm\frac{1}{3},\ \eta_i=\pm 1,\ \zeta_i=\pm 1； \tag{8-13}$$
$$N_i=\frac{9}{64}(1-\xi^2)(1+9\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)。$$

在以上各式中令$\zeta=1=\zeta_0$，即退化为二维形函数。

§8-5 坐 标 变 换

前面所述的几种母单元，几何形状简单而且规则，便于进行运算，但难以适应实际工程中出现的各种结构的复杂形状。为了解决这个矛盾，可进行坐标变换，使（ξ、η、ζ）坐标系中形状简单的母单元，在（x，y，z）坐标系中变换为具有曲线（面）边界的形状复杂的单元。变换后的单元称为子单元。子单元在几何上可以适应各种实际结构的复杂外形。经过这样处理，单元具有双重特性：一方面，子单元的几何特征、荷载等等，都来自实际结构，充分反映了实际情况；另一方面，大量计算工作是在母单元内进行的，由于它的形状简单而且规则，计算比较方便，并便于循环，特别有利于在电子计算机上进行计算。因此兼有两方面的优点。

为了进行坐标变换，必须在坐标系（ξ，η，ζ）和坐标系（x，y，z）之间建立一一对应关系。在有限单元法中，这种对应关系是利用形函数建立起来的。

一、平面坐标变换

在整体坐标系中，子单元内任一点的坐标用形函数表示如下：

$$\begin{aligned} x&=\Sigma N_i x_i=N_1x_1+N_2x_2+\cdots,\\ y&=\Sigma N_i y_i=N_1y_1+N_2y_2+\cdots. \end{aligned} \tag{8-14}$$

其中$N_i(\xi,\eta)$是用局部坐标表示的形函数，(x_i,y_i)是结点i的整体坐标，上式即为平面坐标变换公式。

令杉 文修杰

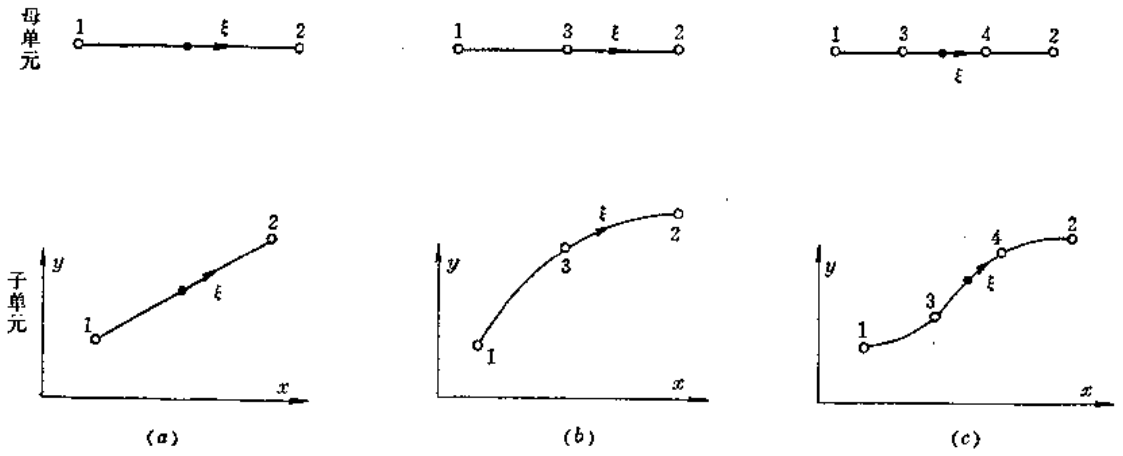


图 8-4　一维单元的平面坐标变换

(a)线性单元，(b)二次单元，(c)三次单元

图 8-4 表示了一维单元的坐标变换。原来的直线分别变换成直线、二次曲线和三次曲线，这是因为变换式（8-14）中的形函数N_i分别是ξ的一次、二次、三次函数。

图 8-5 表示了二维线性单元的平面坐标变换。母单元是正方形，子单元是任意四边形。坐标变换公式是

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{x_2}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{x_3}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ &\quad + \frac{x_4}{4}(1+\xi)(1+\eta), \\ y &= \frac{y_1}{4}(1-\xi)(1-\eta) + \frac{y_2}{4}(1+\xi)(1-\eta) + \frac{x_3}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\ &\quad + \frac{x_4}{4}(1+\xi)(1+\eta). \end{aligned} \qquad (a)$$

在上式中令$\xi=1$，得到$x=\frac{x_2}{2}(1-\eta)+\frac{x_4}{2}(1+\eta)$，$y=\frac{y_2}{2}(1-\eta)+\frac{y_4}{2}(1+\eta)$，这

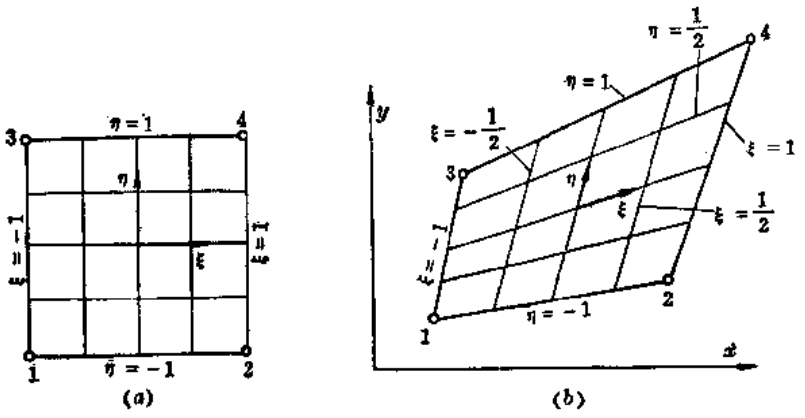


图 8-5　二维线性单元的平面坐标变换

(a)母单元，(b)子单元

是直线2-4的方程式，同样令$\xi=-1$，$\eta=1$，$\eta=-1$，将分别得到其他三边的方程式。在式（a）中令$\xi=\eta=0$，得到$x=(x_1+x_2+x_3+x_4)/4$，$y=(y_1+y_2+y_3+y_4)/4$，即四边形的形心。用等分四边的两族直线分割子单元，以子单元形心为原点（$\xi=\eta=0$），沿ξ及η增大的方向作ξ轴及η轴，将得出一个新的坐标系，即只用在一个子单元范围之内的局部坐标系（ξ，η）。而原坐标（x，y）是整体坐标系，适用于所有单元的整体。坐标变换公式（a）确定了局部坐标（ξ，η）与整体坐标（x，y）之间的一一对应关系。

图8-6表示了二维二次单元的平面坐标变换。子单元的四边都是二次曲线。这时局部坐标（ξ，η）是曲线坐标。

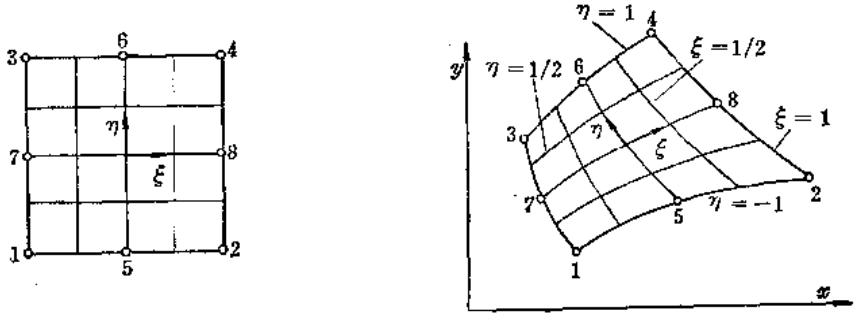


图 8-6　二维二次单元的平面坐标变换
(a)母单元；(b)子单元

现在考察相邻子单元在公共边界上坐标的连续性。以二次单元为例，两个相邻单元在公共边界上都是二次曲线，既然在三个公共结点上具有相同坐标，必然沿整个公共边界都有相同坐标，因而坐标是连续的。

二、空间坐标变换

空间坐标变换公式如下：

$$\begin{aligned} x&=\Sigma N_i x_i=N_1x_1+N_2x_2+\cdots,\\ y&=\Sigma N_i y_i=N_1y_1+N_2y_2+\cdots,\\ z&=\Sigma N_i z_i=N_1z_1+N_2z_2+\cdots. \end{aligned} \qquad (8\text{-}15)$$

其中N_i（ξ，η，ζ）为形函数，（x_i，y_i，z_i）为结点i整体坐标。

经过空间坐标变换后，原来的直线将变成空间曲线，原来的平面将变成空间曲面。母单元正六面体，将变为具有曲棱、曲面的六面体子单元，如图8-7所示。

现在以8结点线性单元为例，考察相邻子单元在公共边界上坐标的连续性。如图8-8所示，a和b是两个相邻的单元，把（8-11）式中形函数代入坐标变换公式（8-15），得到单元a和b的水平坐标如下：

$$\begin{aligned} x_a=\frac{1}{8}\{&x_1(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)+x_2(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)+x_3(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\\ &+x_4(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)+x_5(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)+x_6(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\\ &+x_7(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)+x_8(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\}; \end{aligned} \qquad (b)$$

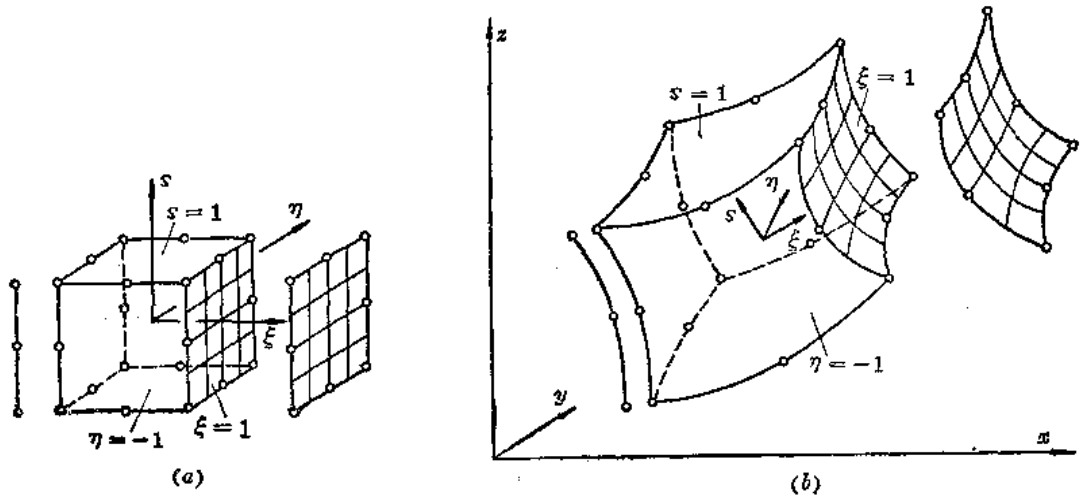


图 8-7 空间坐标变换
(a)母单元，(b)子单元

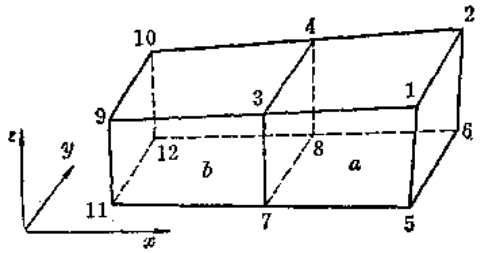


图 8-8

$$x_b=\frac{1}{8}\{x_3(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)+x_4(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)+x_9(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$$
$$+x_{10}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)+x_7(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)+x_8(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$$
$$+x_{11}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)+x_{12}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\}. \qquad (c)$$

两单元的交界面是3478，在式（ b ）中令$\xi=-1$，得到

$$x_a(\xi=-1)=\frac{1}{4}\{x_3(1-\eta)(1+\zeta)+x_4(1+\eta)(1+\zeta)+x_7(1-\eta)(1-\zeta)$$
$$+x_8(1+\eta)(1-\zeta)\}.$$

在式（ c ）中令$\xi=+1$，得到

$$x_b(\xi=+1)=\frac{1}{4}\{x_3(1-\eta)(1+\zeta)+x_4(1+\eta)(1+\zeta)+x_7(1-\eta)(1-\zeta)$$
$$+x_8(1+\eta)(1-\zeta)\}.$$

比较以上二式，可见在单元a和b的交界面上：

$$x_a(\xi=-1)\equiv x_b(\xi=+1).$$

同样可证明，在交界面上，y和z也是连续的。

§8-6 位 移 函 数

单元位移用形函数表示如下：

$$\begin{aligned} u &= \Sigma N_i u_i = N_1 u_1 + N_2 u_2 + \cdots, \\ v &= \Sigma N_i v_i = N_1 v_1 + N_2 v_2 + \cdots, \\ w &= \Sigma N_i w_i = N_1 w_1 + N_2 w_2 + \cdots, \end{aligned} \tag{8-16}$$

或用矩阵表示为

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e, \tag{8-17}$$

其中$N_i(\xi, \eta, \zeta)$为形函数，$\{\delta_i\} = [u_i, v_i, w_i]^T$是结点位移。

比较（8-15）和（8-16）两式，可见坐标变换公式和单元位移函数中都利用了形函数N_i，它们可以是局部坐标（ξ, η, ζ）的一次、二次、三次甚至更高次的函数。如果单元坐标变换和位移函数所用形函数的阶次相等，那么用以规定单元形状的结点数应等于用以规定单元位移的结点数，这种单元称为等参数单元。如果坐标变换所用形函数的阶次高于位移函数中的形函数，坐标变换的结点数应超过用以规定单元位移的结点数，这种单元称为超参数单元。反之，如果坐标变换所用形函数的阶次低于位移函数中形函数的阶次，则称于逊参数单元。

在等参数单元中，坐标变换和位移函数一般采用相同的结点。

根据§4-4，为了有限单元法计算结果收敛于正确解答，位移函数中必须包含刚体位移及常应变；对于空间问题来说，位移函数必须包含下列线性项：

$$u = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z; \tag{a}$$

$$v = \beta_5 + \beta_6 x + \beta_7 y + \beta_8 z; \tag{b}$$

$$w = \beta_9 + \beta_{10} x + \beta_{11} y + \beta_{12} z. \tag{c}$$

现在拿出式（a）来分析。在结点i，将有

$$u_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \beta_3 y_i + \beta_4 z_i, \quad i = 1, 2, 3, \cdots \tag{d}$$

把上式代入式（8-16），得

$$\begin{aligned} u = \Sigma N_i u_i &= N_1(\beta_1 + \beta_2 x_1 + \beta_3 y_1 + \beta_4 z_1) + N_2(\beta_1 + \beta_2 x_2 \\ &+ \beta_3 y_2 + \beta_4 z_2) + \cdots = \beta_1 \Sigma N_i + \beta_2 \Sigma N_i x_i + \beta_3 \Sigma N_i y_i \\ &+ \beta_4 \Sigma N_i z_i = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z. \end{aligned}$$

因此，为了式（a）对任意系数$\beta_1, \cdots \beta_4$成立，必须有

$$\Sigma N_i x_i = x,\ \Sigma N_i y_i = y,\ \Sigma N_i z_i = z; \qquad (e)$$

$$\Sigma N_i = 1. \qquad (f)$$

对于等参数单元来说，式（ e ）即坐标变换公式（8-15），式（ f ）即刚体位移条件（8-2）式。由于本章给出的形函数都满足（8-2）式，所以位移函数（8-16）满足刚体位移和常应变的条件。

仿照上节关于相邻单元之间坐标连续性的论证，不难证明本章给出的各形函数用于位移函数（8-16）式时，相邻单元之间的位移也是连续的。

因此，根据§4-4所列收敛条件，对于经过坐标变换的子单元，位移函数（8-16）所给出的解答将收敛于正确解答。

§8-7 单 元 应 变

空间问题的应变可表示如下

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \\ \dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z} \end{Bmatrix}. \qquad (8\text{-}18)$$

把位移函数（8-16）式代入上式，得到

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = [B_1\ \ B_2\ \ B_3\ \cdots]\{\delta\}^e. \qquad (8\text{-}19)$$

其中子矩阵

$$[B_i] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}. \qquad (8\text{-}20)$$

形函数 $N_i(\xi,\eta,\zeta)$是用局部坐标给出的，根据偏微分法则，可知

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}, \tag{8-21}$$

同理可写出$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$和$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$，集合起来，得到

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}. \tag{8-22}$$

由于形函数是用局部坐标给出的，上式左端可根据 $N_i(\xi,\eta,\zeta)$求出。另外，由坐标变换公式（8-15）可求出矩阵$[J]$，此矩阵称为雅可比矩阵，即

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}x_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}y_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \xi}z_i\\ \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}x_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}y_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \eta}z_i\\ \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}x_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}y_i & \Sigma\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}z_i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots\\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots\\ \frac{\partial N_1}{\partial \zeta} & \frac{\partial N_2}{\partial \zeta} & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}. \tag{8-23}$$

对矩阵$[J]$求逆后，由式（8-22）可得到形函数在整体坐标中的导数如下：

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}. \tag{8-24}$$

将上式代入式（8-20）、（8-19），即可求出单元应变。

在三角形和四面体单元中，应变的变化规律取决于位移函数的阶次。在目前情况下，由于进行了坐标变换，应变的变化规律不仅取决于形函数的阶次，还与单元形状及各边结点位置有关，下面分别加以说明。

1.形函数阶次对应变的影响

今以平面问题为例，说明曲边单元中应变的变化规律。虽然形函数是局部坐标的简单

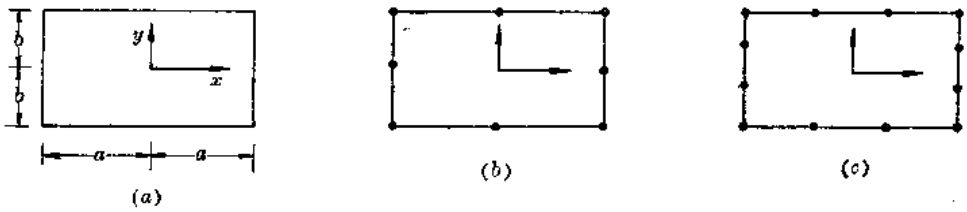


图 8-9

种子单元。整体坐标与局部坐标之间存在如下关系：

$$\xi=\frac{x}{a},\qquad \eta=\frac{y}{b}. \tag{a}$$

把上式代入 4 结点线性单元形函数（8-6）式，并与 4 结点矩形单元形函数式（5-2)比较，可见二者相同。由§5-1(*b*)式可见，在这种单元中，正应变ε_x在x方向是常量，在y方向是坐标的线性函数，ε_y在y方向是常量，在x方向是坐标的线性函数，剪应变γ_{xy}是坐标x和y的线性函数。

再把式(*a*)代入 8 结点二次单元形函数（8-9）式及位移函数（8-16）式，经过归并、整理可知这种单元的位移函数将具有如下形式：

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4xy+\beta_5x^2+\beta_6y^2+\beta_7x^2y+\beta_8xy^2,$$
$$v=\beta_9+\beta_{10}x+\beta_{11}y+\beta_{12}xy+\beta_{13}x^2+\beta_{14}y^2+\beta_{15}x^2y+\beta_{16}xy^2.$$

由上式可求得单元中的应变分量如下：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=\beta_2+\beta_4y+2\beta_5x+2\beta_7xy+\beta_8y^2,$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=\beta_{11}+\beta_{12}x+2\beta_{14}y+\beta_{15}x^2+2\beta_{16}xy,$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=(\beta_3+\beta_{10})+(\beta_4+2\beta_{13})x+(2\beta_6+\beta_{12})y+\beta_7x^2+2(\beta_8+\beta_{15})xy+\beta_{16}y^2.$$

可见对于图8-9(*b*)所示 8 结点矩形单元中，正应变ε_x在x方向是一次，在y方向是二次。正应变ε_y在y方向是一次，在x方向是二次，剪应变γ_{xy}在x和y方向都是二次。

同理，对于图8-9(*c*)所示12结点矩形单元，其位移函数为

$$u=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4xy+\beta_5x^2+\beta_6y^2+\beta_7x^2y+\beta_8xy^2+\beta_9x^3+\beta_{10}y^3+\beta_{11}x^3y+\beta_{12}xy^3$$

$$v=\beta_{13}+\beta_{14}x+\beta_{15}y+\beta_{16}xy+\beta_{17}x^2+\beta_{18}y^2+\beta_{19}x^2y+\beta_{20}xy^2+\beta_{21}x^3+\beta_{22}y^3+\beta_{23}x^3y+\beta_{24}xy^3$$

由以上二式求导数，即可得到应变分量。在这种单元中，正应变ε_x在x方向是二次，在y方向是三次；ε_y在y方向是二次，在x方向是三次；剪应变γ_{xy}在x、y两个方向都是三次。

依此类推，不难得到空间单元中应变分布规律，例如，在$2a\times2b\times2c$具有 8 结点的六面体线性单元中，正应变ε_x在x方向是常量，在y、z方向是线性变化；ε_y在y方向是常量，在x、y方向是线性变化；剪应变在三个方向都是线性变化，等等。

又如尺寸为$2a\times2b\times2c$的20结点六面体二次单元中，正应变ε_x在x方向是一次、在y、z方向是二次；正应变ε_y在y方向是一次，在x、z方向是二次；剪应变在三个方向都是二次，等等。

2.单元形状对应变的影响

对于图8-9所示的子单元，只要单元的四个顶角保持在90°附近，边长$\frac{a}{b}$值变化大一些，对计算结果影响并不大。但是如果顶角偏离90°较远，对计算结果的影响就可能比较大。例如对于图8-10所示四边形单元，结点3的雅可比矩阵的行列式为

$$|J|=a^2\cot\frac{\theta}{2}.$$

当θ趋近于180°时（图8-11），$\cot\frac{\theta}{2}\longrightarrow0$，此时雅可比矩阵无法求逆、无法求出结点3处的应变。在它附近的应变，即使可以求出，计算误差也是很大的。可见在布置曲边单元的计算网格时，各单元的顶角不能接近180°，一般应尽量保持在90°左右。图8-11所示的几种计算网格都是不好的。

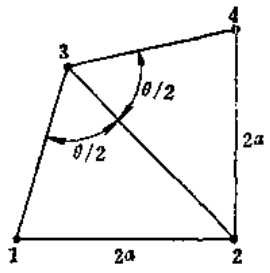


图 8-10

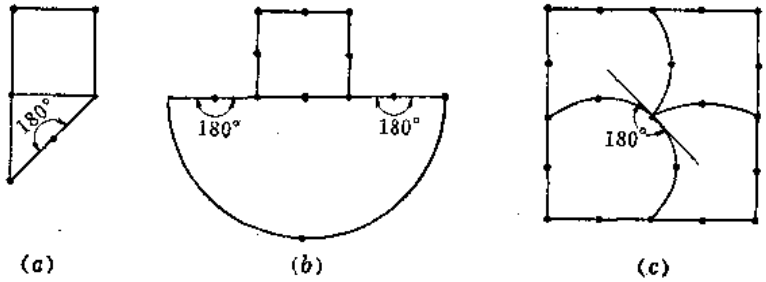


图 8-11 不宜采用的计算网格（$\theta=180°$）

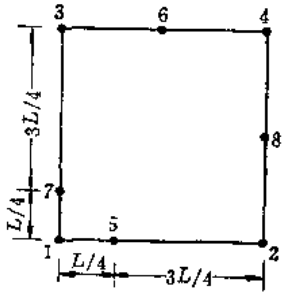


图 8-12

3.棱边结点间距对应变的影响

在母单元中，各棱边上结点是等间距分布的，在子单元中，各棱边上结点也应尽量等间距分布。如果同一条边上的结点间距相差过大，对计算结果会产生影响。例如，在第二十一章§21-5中，说明了当二次等参数单元的棱边中点从正常位置移到1/4边长处时，在角点1处的应变将趋于无穷大（参阅图8-12）。

在布置曲边单元的计算网格时，必须注意以上几点。

§8-8 刚度矩阵

根据普遍公式（3-1），单元刚度矩阵为

$$[k]=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz. \qquad (8\text{-}25)$$

矩阵分块后，子矩阵为

$$[k_{rs}]=\iiint[B_r]^T[D][B_s]dxdydz. \tag{8-26}$$

上式右端的积分是在整体坐标系（x、y、z）中进行的。由§8-13式（8-62）可知

$$dxdydz=|J|\,d\xi d\eta d\zeta\ . \tag{8-27}$$

其中$|J|$是雅可比矩阵$[J]$的行列式。把（8-20）、（8-24）、（8-27）三式代入(8-26)式，可得到

$$[k_{rs}]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}G(\xi,\ \eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta. \tag{8-28}$$

上式右边的积分是在母单元中进行的，不是在形状复杂的子单元中进行的，所以积分的上下限很简单。对一维和二维单元，将得到相应的单重和二重积分。

如果子单元是简单的几何形状，如二维的矩形或三维的正六面体，可求出式（8-28）右端的积分并得到用显式表示的刚度矩阵，在一般情况下，子单元的形状比较复杂，难以用显式表示G（ξ、η、ζ），必须依靠数值积分求出$[k_{rs}]$的数值。

§8-9 结 点 荷 载

由普遍公式（3-13），体积力$\{q\}$产生的结点荷载为

$$\{P\}_q^e=\iiint[N]^T\{q\}dxdydz. \tag{8-29}$$

将上式右端的$[N]$及$dxdydz$分别用局部坐标（ξ、η、ζ）表示，将再次得到类似式（8-28）的积分。初应变$\{\varepsilon_0\}$和初应力$\{\sigma_0\}$产生的结点荷载也将归结于类似的积分，这些积分一般应通过数值积分方法求出。

作用于单元边界Ω上的分布力$\{p\}$所产生的结点荷载应按下式计算

$$\{P\}_p^e=\iint_{\Omega}[N]^T\{p\}d\Omega. \tag{8-30}$$

例如，设$\{p\}$所作用的表面Ω是$\zeta=1$面，在坐标变换公式中令$\zeta=1$，可得到Ω的方程如下

$$x=\Sigma N_i(\zeta=1)x_i,\ \ y=\Sigma N_i(\zeta=1)y_i,\ \ z=\Sigma N_i(\zeta=1)z_i, \tag{8-31}$$

根据§8-13式（8-60）、（8-61）：

$$d\Omega=Ad\xi d\eta. \tag{8-32}$$

式中

$$A=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2}. \tag{8-33}$$

把式（8-32）代入式（8-30），得到

$$\{P\}_p^e=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}R(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \qquad (8\text{-}34)$$

在一般情况下，由于表面Ω形状较复杂，上式也应通过数值积分求出。

总之，对于曲面单元，体积力和表面力引起的结点荷载都是由计算机根据式(8-29)、(8-30)计算的，并不能简单地加以分配。只有当单元形状十分简单时，才能通过简单计算得到结点荷载。

图8-13表示了均布体积力在规则的矩形单元中产生的结点荷载。由图可见，只有线性单元，计算的结点荷载与直观分配的结果是一致的。对于二次和三次单元，在角点上都产生负的结点荷载，这与人们的直观结果是不一致的，但是它将比直观分配的结点荷载给出较精确的应力和位移。图8-14表示了均布表面力产生的结点荷载[12]。

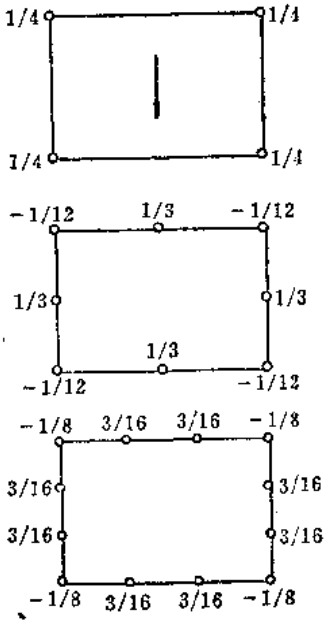


图 8-13 矩形单元由于均布体积力而产生的结点荷载

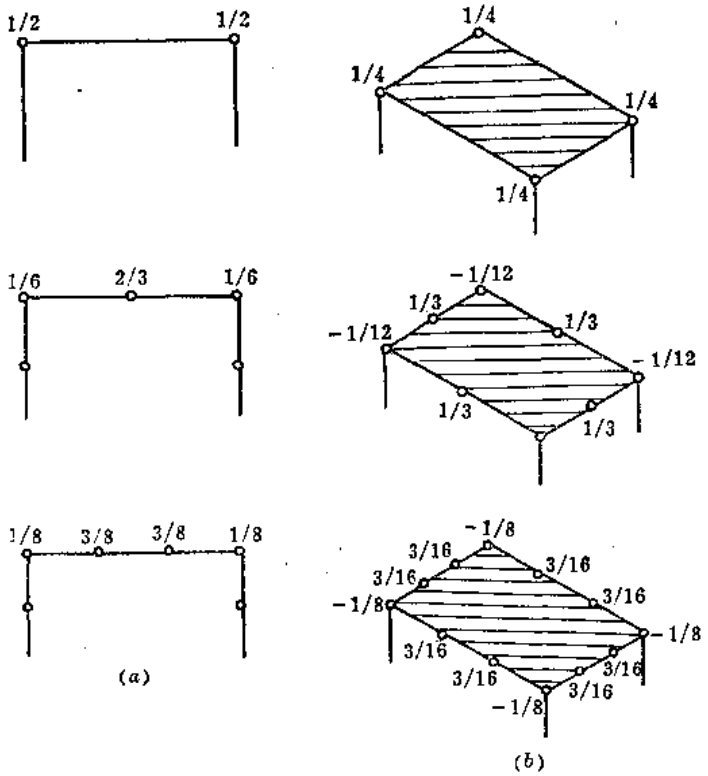


图 8-14 作用于平面单元和空间单元顶部的均布表面力产生的结点荷载
(a)平面单元，(b)空间单元

§8-10 数 值 积 分

对于曲面单元，在求刚度矩阵和结点荷载时，需要计算如式(8-28)的积分。被积函数$G(\xi、\eta、\zeta)$一般是很复杂的，通常难以用显式表示其积分，所以一般都用数值积分方法计算积分值，即在单元内选出某些点，称为积分点，求出被积函数$G(\xi、\eta、\zeta)$在

这些积分点的数值，然后根据这些数值求出积分值。

数值积分有两类方法，一类方法积分点是等间距的，例如辛浦生方法；另一类方法积分点是不等间距的，例如高斯方法。在有限单元法中，由于被积函数很复杂，一般采用高斯求积法，因为它可以用较少的积分点达到较高的精度，从而可节省机器时间。

一、一维高斯求积公式

我们要求在区间[－1，1]求下列积分值（参阅图8-15）：

$$I=\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi. \qquad (a)$$

我们选定积分点为ξ_1、ξ_2、…ξ_n，然后由下式计算积分值：

$$\begin{aligned} I=\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi &= H_1 f(\xi_1)+H_2 f(\xi_2) \\ &\quad +\cdots+H_n f(\xi_n) \\ &= \sum_{1}^{n} H_i f(\xi_i). \end{aligned} \qquad (8\text{-}35)$$

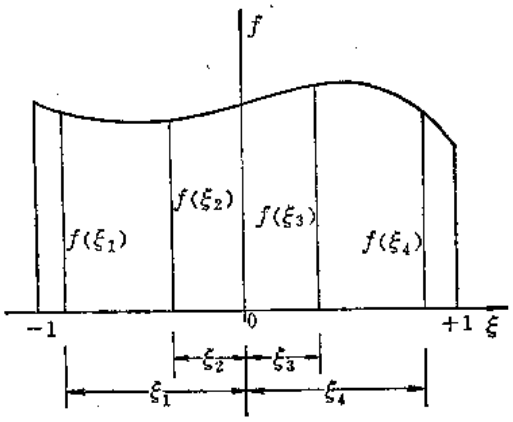


图 8-15

其中H_i是加权系数。H_i和ξ_i是根据计算精度最高而选定的。据论证，为了达到最高的计算精度，积分点ξ_i应是勒让德多项式$L_n(\xi)$的根，而且加权系数H_i应按下式计算

$$H_i=\frac{2}{(1-\xi_i^2)[L_n'(\xi_i)]^2}. \qquad (b)$$

为了便于计算，在表8-1中列出了积分点ξ_i和加权系数H_i的数值。对于n个积分点的情况，高斯求积公式（8-35）对任一不高于$2n-1$次的多项式$f(\xi)$都可给出准确的结果。

表 8-1　　高斯求积公式的积分点坐标和加权系数

$$\int_{-1}^{1} f(\xi)d\xi=\sum_{i=1}^{n} H_i f(\xi_i)$$

$\pm\xi_i$			H_i	
0.57735	02692	$n=2$	1.00000	00000
0.77459	66692	$n=3$	0.55555	55556
0.00000	00000		0.88888	88889
0.86113	63116	$n=4$	0.34785	48451
0.33998	10436		0.65214	51549
0.90617	98459	$n=5$	0.23692	68851
0.53846	93101		0.47862	86705
0.00000	00000		0.56888	88889

现在举一算例。取 $n=4$，由表8-1查得$\xi_1=-0.86113,\xi_2=-0.33998,\xi_3=0.33998$，$\xi_4=0.86113$，$H_1=0.34785$，$H_2=0.65214$，$H_3=0.65214$，$H_4=0.34785$，代入式(8-35)，可得

$$I=0.34785f(-0.86113)+0.65214f(-0.33998)+0.65214f(0.33998)$$
$$+0.34785f(0.86113).$$

二、二维及三维高斯求积公式

为了计算下列二重积分

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\ \eta)d\xi d\eta. \tag{8-36}$$

先令 η 保持常数，计算沿 ξ 方向的积分

$$\int_{-1}^{1}f(\xi,\ \eta)d\xi=\sum_{j=1}^{n}H_j f(\xi_j,\ \eta)=\phi(\eta).$$

再沿 η 方向积分，得到

$$I=\int_{-1}^{1}\phi(\eta)d\eta=\sum_{i=1}^{n}H_i\phi(\eta_i)=\sum_{i=1}^{n}H_i\sum_{j=1}^{n}H_j f(\xi_j,\ \eta_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}H_iH_j f(\xi_j,\ \eta_i). \tag{8-37}$$

类似地，对于三重积分有

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}f(\xi,\eta,\zeta)d\xi d\eta d\zeta$$
$$=\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}H_iH_jH_m f(\xi_i,\ \eta_j,\ \zeta_m). \tag{8-38}$$

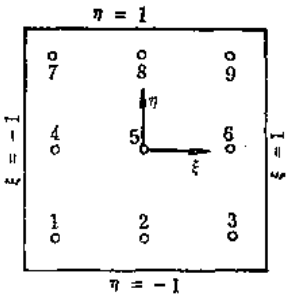


图 8-16　方形区域 $n=3$ 的积分点

在上述计算中，每个方向都采用了相同数目的积分点，这并非必要的，有时在不同方向可以采用不同个数的积分点。

图8-16表示了平面方形区域 3×3 积分点布置。因 $n=3$，每个方向都准确到 5 阶多项式。对于三维单元，将有 n^3 个积分点。

有的文献曾建议根据雅可比矩阵的行列式 $|J|$ 中局部坐标的次数来决定积分点数目。例如，当 $|J|$ 中局部坐标 ξ 的次数为 m，则在 ξ 方向积分点个数应为 $n\geqslant\dfrac{(m+1)}{2}$。

对于平面问题，计算量约正比于 n^2，对于空间问题，计算量约正比于 n^3。

根据已有经验，在保证收敛的前提下，积分点数目 n 一般以少一些为宜。

§8-11 应力修匀与降阶积分

沿着单元的边界，位移是连续的，但位移的导数往往是不连续的，因此在单元边界上应力也往往是不连续的，如图8-17所示。对于利用数值积分的曲边单元，经验表明在积分点上算得的应力具有最好的精度，而在结点上算得的应力的精度最差。这种现象是不难解释的，因为插值函数的精度在靠近插值区域的边缘时通常都是较差的。所以形函数的导数和应力在单元内部的精度将优于单元的边界。

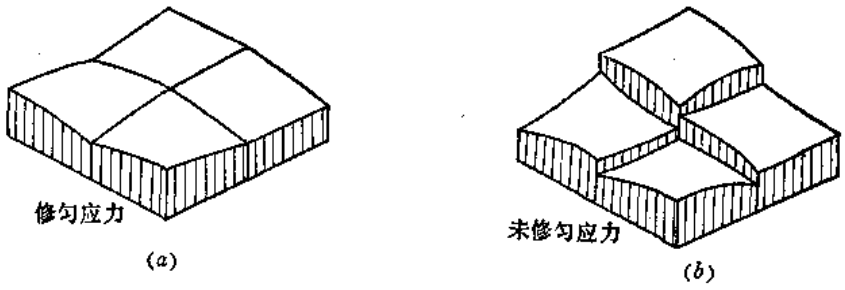


图 8-17 修匀及未修匀应力

通常工程上感兴趣的是边缘和结点上的应力，为了克服边缘和结点上应力不连续和精度较差等缺点，最好的办法是在整个区域内用最小二乘方法修匀，但这样做的工作量太大。因此比较实用的办法是在每个单元内用最小二乘方法修匀，而在结点上取有关单元应力的平均值。

（1）应力修匀

我们以修匀后的结点应力 $\tilde{\sigma}_1$，$\tilde{\sigma}_2$，$\cdots\tilde{\sigma}_p$ 作为未知数，单元内部任一点修匀后的应力用形函数表示如下

$$\tilde{\sigma}(\xi,\ \eta)=\sum_{i=1}^{p}\tilde{N}_i\tilde{\sigma}_i. \tag{8-39}$$

式中$\tilde{N}_i$是用于修匀应力的形函数，与计算单元刚度矩阵的形函数N_i可以是不同阶次的（例如，N_i是二次的，而 $\tilde{N}_i$ 可以是一次的），在单元内任一点，修匀应力与未修匀应力之间的误差是

$$e(\xi,\eta)=\sigma(\xi,\ \eta)-\tilde{\sigma}(\xi,\eta). \tag{8-40}$$

其中未修匀应力$\sigma(\xi,\ \eta)$可利用应力-位移关系计算如下

$$\sigma(\xi,\eta)=[D][B]\{\delta\}^e.$$

我们的任务是找到使泛函

$$\phi=\iint e^2(\xi,\eta)dxdy. \tag{8-41}$$

取极小值的$\tilde{\sigma}_1$，$\tilde{\sigma}_2$，$\cdots\tilde{\sigma}_p$的值。为了使泛函ϕ取极小值，必须

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{\sigma}_i}=0,\quad i=1,2,\cdots p \tag{8-42}$$

其中p为角点的数目，把（8-40）、（8-41）二式代入上式，得到方程组：

$$\frac{\partial\phi}{\partial\tilde{\sigma}_i}=\iint(\sigma-\tilde{\sigma})\tilde{N}_i dxdy=0,\ i=1,2,\cdots p \tag{8-43}$$

这个方程组共包含p个方程，由上式可解出修匀后的结点应力$\tilde{\sigma}_i$，再代入（8-39）式，可得到单元内部任一点的修匀应力。

现在以二维曲边单元为例，参阅图8-18，我们以四个角点的修匀后的应力$\tilde{\sigma}_1$、$\tilde{\sigma}_2$、$\tilde{\sigma}_3$、$\tilde{\sigma}_4$作为未知量，用下列线性形函数进行修匀：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{N}_1&=\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4},\quad \tilde{N}_2=\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4},\\ \tilde{N}_3&=\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4},\quad \tilde{N}_4=\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}.\end{aligned}\right\} \tag{a}$$

修匀应力由下式表示：

$$\tilde{\sigma}(\xi,\eta)=\tilde{N}_1\tilde{\sigma}_1+\tilde{N}_2\tilde{\sigma}_2+\tilde{N}_3\tilde{\sigma}_3+\tilde{N}_4\tilde{\sigma}_4. \tag{b}$$

代入（8-43）式，得到方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}&\iint(\sigma-\tilde{\sigma})\tilde{N}_1|J|\,d\xi d\eta=0;\\ &\iint(\sigma-\tilde{\sigma})\tilde{N}_2|J|\,d\xi d\eta=0;\\ &\iint(\sigma-\tilde{\sigma})\tilde{N}_3|J|\,d\xi d\eta=0;\\ &\iint(\sigma-\tilde{\sigma})\tilde{N}_4|J|\,d\xi d\eta=0.\end{aligned}\right\} \tag{c}$$

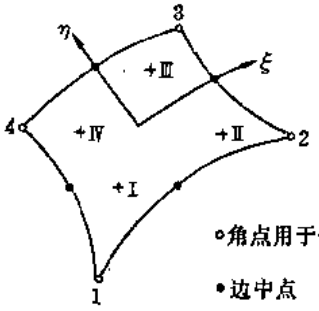


图 8-18　二维曲面单元

上式是以$\tilde{\sigma}_1$、$\tilde{\sigma}_2$、$\tilde{\sigma}_3$、$\tilde{\sigma}_4$为未知量的代数方程组，利用高斯积分求出各方程的系数后，即可解出未知量。但我们可以采用一种更为方便的解法。由于$\tilde{N}_i$是线性形函数，只要采用2×2高斯积分，共有四个积分点：

$$\text{Ⅰ}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \text{Ⅱ}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

$$\text{Ⅲ}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \text{Ⅳ}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

在这四个积分点上，让修匀应力$\tilde{\sigma}$等于未修匀应力σ，即

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sigma_{\text{Ⅰ}};\\ &\tilde{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sigma_{\text{Ⅱ}};\\ &\tilde{\sigma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sigma_{\text{Ⅲ}};\\ &\tilde{\sigma}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sigma_{\text{Ⅳ}}.\end{aligned}\right\} \tag{d}$$

因此在四个积分点上都有$\sigma-\tilde{\sigma}=0$，当我们用2×2积分求出（ c ）式中各方程的系数时，每个方程都将等于零。也就是说，（ d ）和（ c ）是等价的。由（ d ）式解得修匀后的角点应力$\tilde{\sigma}_1$、$\tilde{\sigma}_2$、$\tilde{\sigma}_3$、$\tilde{\sigma}_4$如下：

$$\begin{Bmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\\ \tilde{\sigma}_3\\ \tilde{\sigma}_4\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c & b\\ b & a & b & c\\ c & b & a & b\\ b & c & b & a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{\mathrm{I}}\\ \sigma_{\mathrm{II}}\\ \sigma_{\mathrm{III}}\\ \sigma_{\mathrm{IV}}\end{Bmatrix}. \tag{8-44}$$

式中

$$a=1+\frac{\sqrt{3}}{2},\quad b=-\frac{1}{2},\quad c=1-\frac{\sqrt{3}}{2}. \tag{8-45}$$

而σ_{I}、σ_{II}、σ_{III}、σ_{IV}是在4个高斯积分点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ上的未修匀应力。由于$\tilde{N}_i$是线性形函数，在单元边界上，$\tilde{N}_i(\xi,\eta)$是ξ或η的一次函数，所以各边中点的修匀应力可以由相邻角点的修匀应力取平均值而得到。其他各点应力可由（8-39）式计算。

因此，对于二维单元来说，我们先计算4个高斯积分点上的未修匀应力σ_{I}、σ_{II}、σ_{III}、σ_{IV}，由（8-44）式可计算4个角点上的修匀应力$\tilde{\sigma}_1$、$\tilde{\sigma}_2$、$\tilde{\sigma}_3$、$\tilde{\sigma}_4$，取相邻角点应力的平均值，即得到边中点的修匀应力。

这样算得的修匀应力，在各单元公共边界上，不同的单元可能有不同的数值，我们可取各单元应力的平均值。

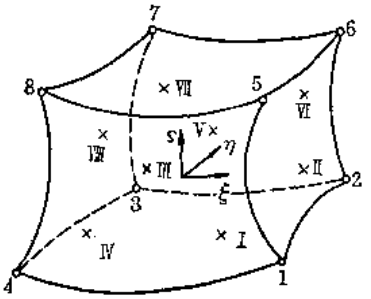


图 8-19　三维曲面单元

对于三维单元，如图8-19所示，采用三线性形函数（8-11）式按最小二乘方法修匀，可得到类似的结果。八个角点上的修匀应力$\tilde{\sigma}_i$可由下式计算：

$$\begin{Bmatrix}\tilde{\sigma}_1\\ \tilde{\sigma}_2\\ \tilde{\sigma}_3\\ \tilde{\sigma}_4\\ \tilde{\sigma}_5\\ \tilde{\sigma}_6\\ \tilde{\sigma}_7\\ \tilde{\sigma}_8\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c & b & b & c & d & c\\ b & a & b & c & c & b & c & d\\ c & b & a & b & d & c & b & c\\ b & c & b & a & c & d & c & b\\ b & c & d & c & a & b & c & b\\ c & b & c & d & b & a & b & c\\ d & c & b & c & c & b & a & b\\ c & d & c & d & b & c & b & a\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{\mathrm{I}}\\ \sigma_{\mathrm{II}}\\ \sigma_{\mathrm{III}}\\ \sigma_{\mathrm{IV}}\\ \sigma_{\mathrm{V}}\\ \sigma_{\mathrm{VI}}\\ \sigma_{\mathrm{VII}}\\ \sigma_{\mathrm{VIII}}\end{Bmatrix}. \tag{8-46}$$

式中

$$a=\frac{5+3\sqrt{3}}{4},\quad b=-\frac{\sqrt{3}+1}{4},\quad c=\frac{\sqrt{3}-1}{4},$$

$$d=\frac{5-3\sqrt{3}}{4}. \tag{8-47}$$

式中σ_{I}、σ_{II}、…σ_{VIII}是八个2×2×2高斯积分点上的未修匀应力，各边中点的修匀应力可由

相邻角点的修匀应力取平均值而得，单元内任一点的修匀应力可由下式计算：

$$\tilde{\sigma}(\xi,\ \eta,\ s)=\sum_{i=1}^{8}\tilde{N}_i\,\tilde{\sigma}_i。\qquad(e)$$

其中$\tilde{N}_i$是由（8-11）式表示的线性形函数。

（2）降阶积分

在采用曲边单元的早期，对于8结点平面曲边单元，常用3×3高斯积分，对于20结点三维曲面单元，常采用3×3×3高斯积分。近年的研究表明，对上述两种单元，分别改用2×2和2×2×2高斯积分，可以显著地改进单元的特性，又可节省计算量[60]。

关于降阶积分的作用，可作如下解释：以二维曲边单元为例。可以证明，如果在计算刚度矩阵积分$\iint[B]^T[D][B]dxdy$时就用2×2高斯积分，其结果无异于积分$\iint[\tilde{B}]^T[D][\tilde{B}]dxdy$的数值。在后面的积分中，$[\tilde{B}]$中元素是对应变矩阵$[B]$中元素进行最小二乘方修匀所得。经过这种修匀，一些虚假的应变值被过滤了，从而得到一个更柔软、更有效的单元。

现在我们把曲边单元的应力计算方法归纳如下：

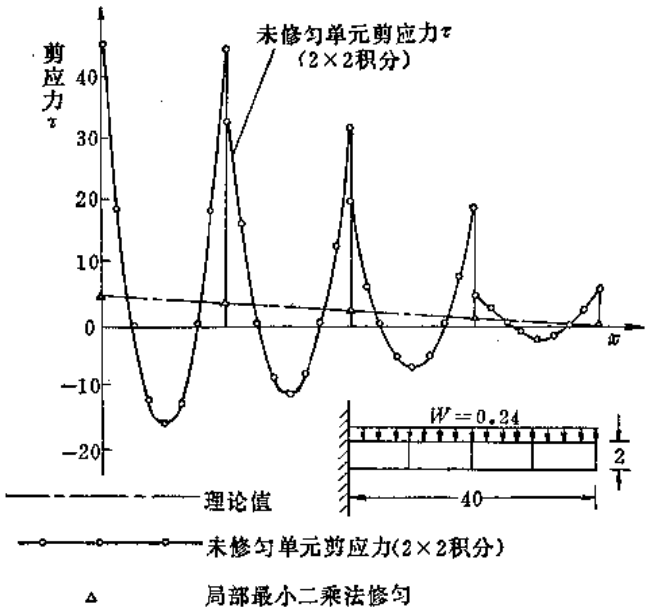


图 8-20　梁中和轴上的剪应力分布

（Ⅰ）可采用降阶积分技巧，以改善单元特性，并节省计算时间。例如，对于8结点二维单元，用2×2积分；对于20结点三维单元，用2×2×2积分。

（Ⅱ）计算各积分点上的未修匀应力σ_{I}、σ_{II}…等；

（Ⅲ）由（8-44）或(8-46)式计算各结点上的修匀应力$\tilde{\sigma}_1$、$\tilde{\sigma}_2$…等；

（Ⅳ）在几个不同单元的公共结点上，取有关单元结点应力的平均值，作为该结点应力；

（Ⅴ）各边中点的应力，取相邻结点应力的平均值。

下面举一个例子来说明修匀前后的应力状态。如图8-20所示，取一悬臂梁，其高度与长度的比例为$\frac{h}{l}=\frac{1}{20}$，承受均匀荷载，分为4个8结点矩形单元，用2×2高斯积分计算，所得水平正应力σ_x，不论是修匀前的，还是修匀后的，其数值都与理论解符合得很好，但未修匀的剪应力则与理论解相差很远，修匀后的剪应力却与理论解十分一致。

§8-12　三角形、四面体和三棱体曲边单元

三角形和四面体单元，如采用高次位移函数，单元内应力是变化的，已不再是常量，

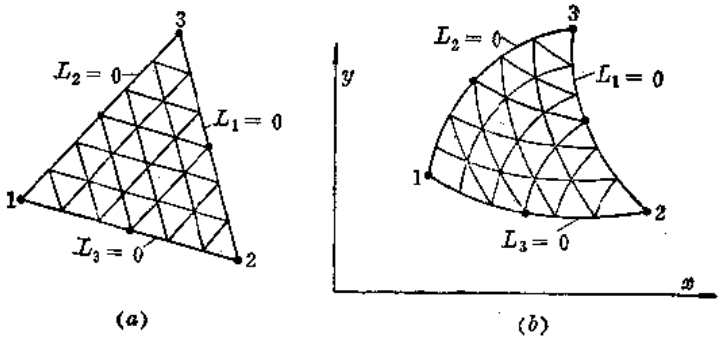


图 8-21 三角形曲边单元

(a)母单元；(b)子单元

但单元的边界都是直线或平面。为了更好地适应结构的不规则几何形状，也可以通过坐标变换，得到边界为曲线或曲面的子单元。

三角形曲边单元如图8-21所示，其坐标变换公式如下：

$$x=\Sigma N_i x_i,\quad y=\Sigma N_i y_i。\tag{8-48}$$

式中N_i为用面积坐标表示的形函数，（x_i，y_i）是结点i的整体坐标。子单元的局部坐标是面积坐标。

四面体曲面单元如图8-22所示，坐标变换公式为

$$x=\Sigma N_i x_i,\quad y=\Sigma N_i y_i,\quad z=\Sigma N_i z_i。\tag{8-49}$$

其中N_i是用体积坐标表示的形函数。

在计算雅可比矩阵$[J]$时，必须注意到面积坐标和体积坐标不是互相独立的，而应满足式（5-11）和$L_1+L_2+L_3+L_4=1$。为了解决这个问题，以体积坐标为例，可令

$$\xi=L_1,\quad \eta=L_2,\quad \zeta=L_3,\quad 1-\xi-\eta-\zeta=L_4。\tag{8-50}$$

形函数N_i是用L_1，L_2，L_3，L_4表示的，根据偏微分法则

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial \xi}+\frac{\partial N_i}{\partial L_4}\frac{\partial L_4}{\partial \xi}\tag{8-51}$$

把式（8-50）代入上式，可得

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\frac{\partial N_i}{\partial L_1}-\frac{\partial N_i}{\partial L_4}。$$

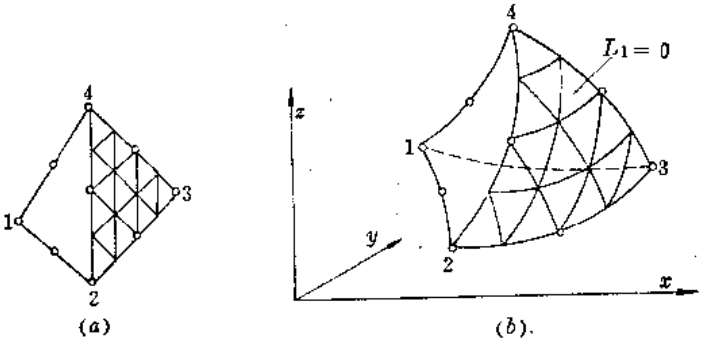


图 8-22 四面体曲面单元

(a)母单元；(b)子单元

同理可求出其他导数。于是根据坐标变换公式（8-49），可求出雅可比矩阵：

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}. \tag{8-52}$$

再由下式可求出$\dfrac{\partial N_i}{\partial x}$等：

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}. \tag{8-53}$$

对于曲边单元，刚度矩阵等难以用显式表示，需要利用数值积分。例如，对于三角形的积分，有

$$I=\int_0^1\int_0^{1-L_1} f(L_1L_2L_3)dL_1dL_2=\Sigma W_i f(L_1L_2L_3). \tag{8-54}$$

权系数W_i及积分点见表8-2。

有时还可以采用如图8-23所示的三棱体曲面单元。在三角形内采用面积坐标L_1、L_2、L_3，在高度方向采用坐标ζ。母单元是一个三棱体，其纵向三棱边的长度为 2，顶面和

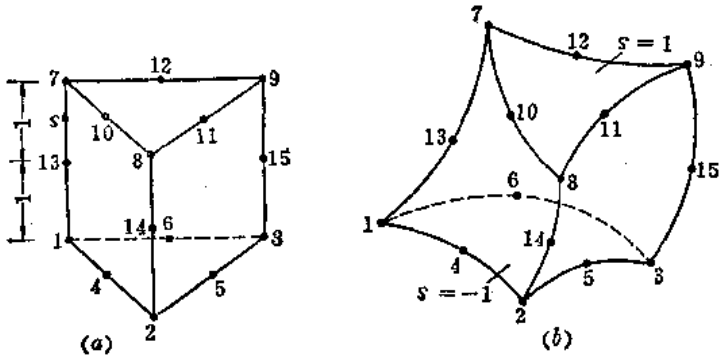


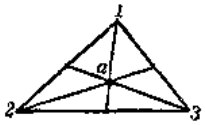
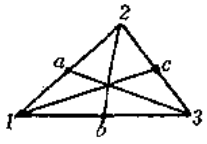
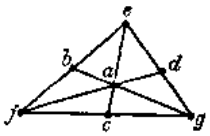
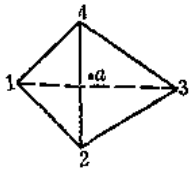
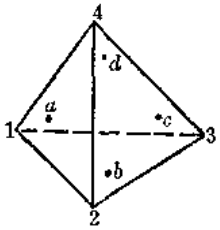
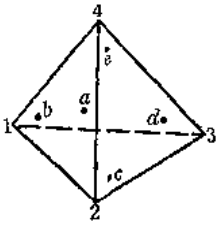
图 8-23　三棱曲面单元

(a)母单元；(b)子单元

底面是垂直于纵向三棱边的相同的两个三角形。子单元的五个表面都是曲面，坐标变换公式为

$$x=\sum_{i=1}^{15}N_ix_i,\quad y=\sum_{i=1}^{15}N_iy_i,\quad z=\sum_{i=1}^{15}N_iz_i. \tag{8-55}$$

表 8-2　　三角形和四面体数值积分参数

阶　次	示　意　图	误　差	积　分　点	面积及体积坐标 $L_1L_2L_3L_4$	权　系　数 W_i
线　性		$0(h^2)$	a	1/3, 1/3, 1/3	1/2
二　次		$0(h^3)$	a b c	1/2, 1/2, 0 0, 1/2, 1/2 1/2, 0, 1/2	1/6 1/6 1/6
三　次		$0(h^4)$	a b c d e f g	1/3, 1/3, 1/3 1/2, 1/2, 0 0, 1/2, 1/2 1/2, 0, 1/2 1, 0, 0 0, 1, 0 0, 0, 1	27/120 8/120 3/120
线　性		$0(h^2)$	a	1/4, 1/4, 1/4, 1/4	1
二　次		$0(h^3)$	a b c d	$\alpha, \beta, \beta, \beta$ $\beta, \alpha, \beta, \beta$ $\beta, \beta, \alpha, \beta$ $\beta, \beta, \beta, \alpha$ $\alpha=0.58541020$ $\beta=0.13819660$	1/4 1/4 1/4 1/4
三　次		$0(h^4)$	a b c d e	1/4, 1/4, 1/4, 1/4 1/3, 1/6, 1/6, 1/6 1/6, 1/3, 1/6, 1/6 1/6, 1/6, 1/3, 1/6 1/6, 1/6, 1/6, 1/3	4/5 9/20 9/20 9/20 9/20

位移函数是

$$u=\sum_{i=1}^{15}N_iu_i,\quad v=\sum_{i=1}^{15}N_iv_i,\quad w=\sum_{i=1}^{15}N_iw_i. \tag{8-56}$$

其中N_i是如下形函数：

下角点：
$$N_1=\frac{\zeta}{2}(1-\zeta)(2L_1-1)L_1;\qquad (1,2,3)$$

下棱中点：　$N_4=-2\zeta(1-\zeta)L_1L_2$；　（4,5,6；1,2,3）

上角点：　$N_7=\frac{\zeta}{2}(1+\zeta)(2L_1-1)L_1$；　（7,8,9；1,2,3）

上棱中点：　$N_{10}=2\zeta(1+\zeta)L_1L_2$；　（10,11,12；1,2,3）

侧棱中点：　$N_{13}=(1-\zeta^2)(2L_1-1)L_1$。　（13,14,15；1,2,3）

式中L_i是面积坐标。这种三棱体曲面单元可以与20结点等参数单元匹配，混合使用，以便更好地贴合不规则边界。

有的文献曾提出一种单元退化技巧，例如，把一个四边形单元的两个角点互相靠拢，得到一个三角形单元；把一个六面体单元的两条棱互相靠拢，得到一个三棱体单元。当然，这样做的时候应进行相应的数学处理。

§8-13　曲边单元中的向量计算

下面简述一下在曲边单元中用到的一些向量计算，说明如何计算曲面单元的面积和体积。

向量，也称为矢量，可用它在x、y、z三个方向的分量表示。例如，图8-24 中所示的向量$\vec{V}_{01}$可表示如下

$$\vec{V}_{01}=\vec{i}\,x_1+\vec{j}\,y_1+\vec{k}\,z_1. \qquad (a)$$

其中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$分别是在x、y、z方向的单位向量。这个向量也可用列阵表示如下

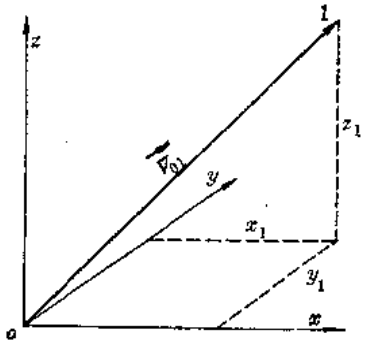


图 8-24　向量

$$\{V_{01}\}=\begin{Bmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

方向余弦　向量 $\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}\,a_z$ 的方向余弦由下式计算

$$\left.\begin{aligned}l&=\cos(\vec{a},x)=\frac{a_x}{a},\\ m&=\cos(\vec{a},y)=\frac{a_y}{a},\\ n&=\cos(\vec{a},z)=\frac{a_z}{a}.\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

式中$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$，$(\vec{a},x)$是向量$\vec{a}$与$x$轴的夹角。

标量乘积　两向量的标量乘积定义为一个向量的长度与另一向量在它上面的投影长度的乘积，可按下式计算

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\theta=\vec{b}\cdot\vec{a}. \qquad (8\text{-}57)$$

其中θ是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，a和b是$\vec{a}$和$\vec{b}$的长度。根据上述定义，有

$$\left.\begin{aligned}&\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1;\\&\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

向量乘积　两向量的向量乘积定义为另一个向量，它与这两个向量所在平面正交，它的大小等于两个向量的长度的乘积再乘以其夹角的正弦，它的指向符合右手螺旋法则。

在图8-25中表示了$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$。$|\vec{c}|=ab\sin\theta$。

根据上述定义，

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

由图8-25可见$\vec{c}$的长度等于以$\vec{a}$和$\vec{b}$为边的平行四边形的面积。

由上述定义可知

$$\left.\begin{aligned}&\because\ \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0;\\&\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.\end{aligned}\right\}\qquad(e)$$

向量$\vec{a}=\vec{i}a_x+\vec{j}a_y+\vec{k}a_z$与向量$\vec{b}=\vec{i}b_x+\vec{j}b_y+\vec{k}b_z$的向量乘积(或称为叉乘积)可用下式表示：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}=\vec{i}\,(a_yb_z-a_zb_y)+\vec{j}\,(a_zb_x-a_xb_z)+\vec{k}\,(a_xb_y-a_yb_x)$$

(8-58)

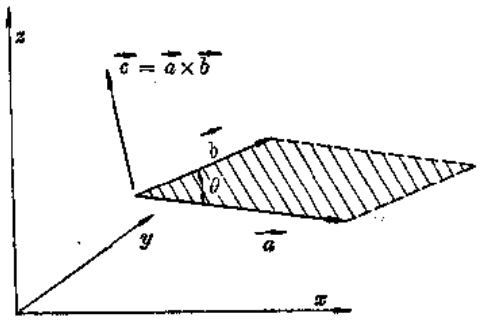


图 8-25　两向量的向量乘积

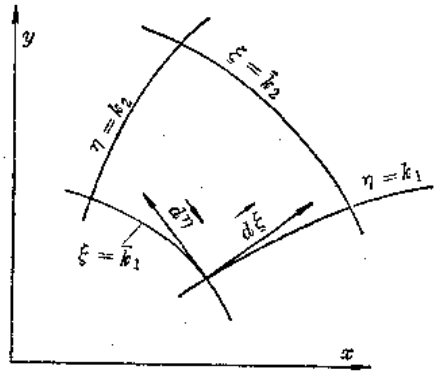


图 8-26　平面曲线坐标

曲线坐标系中的微元面积　设ξ和η是平面中的曲线坐标，$\vec{d\xi}$是与曲线$\eta=k_1$相切的矢量，$\vec{d\eta}$是与曲线$\xi=k_1$相切的矢量，参照图8-26。

$$\vec{d\xi}=\vec{i}\frac{\partial x}{\partial\xi}d\xi+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial\xi}d\xi;$$

$$\vec{d\eta}=\vec{i}\frac{\partial x}{\partial\eta}d\eta+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial\eta}d\eta.$$

令 $\vec{c}=d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}$，由式（8-58）可知

$$\vec{c}=d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi}d\xi & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta}d\eta & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\vec{i}\cdot 0+\vec{j}\cdot 0+\vec{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta.$$

以$d\vec{\xi}$和$d\vec{\eta}$为边的平行四边形的微元面积等于向量$\vec{c}$的长度，所以由上式有

$$dA=|\vec{c}|=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta=|J|\,d\xi d\eta \qquad (8\text{-}59)$$

空间曲面的微元面积　参阅图8-27，在空间曲面上有曲线坐标ξ＝常数和η＝常数，在它们的切线方向，作两个向量$d\vec{\xi}$和$d\vec{\eta}$如下

$$d\vec{\xi}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)d\xi;$$

$$d\vec{\eta}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\eta.$$

作向量$\vec{c}$与$d\vec{\xi}$和$d\vec{\eta}$正交：

$$\vec{c}=d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta.$$

以$d\vec{\xi}$和$d\vec{\eta}$为边的平行四边形的微元面积等于$\vec{c}$的长度，由此得到空间曲面的微元面积：

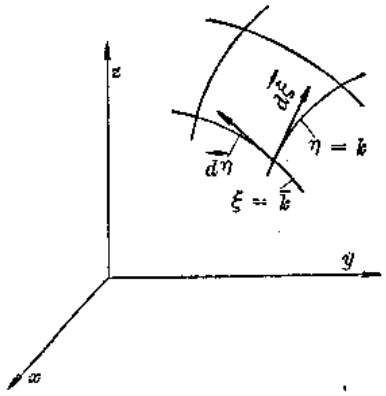


图 8-27　空间曲面

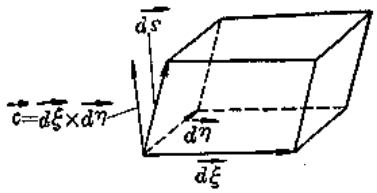


图 8-28　微元体积

$$d\Omega = |\vec{d\xi}\times\vec{d\eta}| = A d\xi d\eta. \tag{8-60}$$

式中

$$A=\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 +\left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial x}{\partial \xi}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{8-61}$$

空间微元体积　考虑空间的曲线坐标 ξ、η、ζ。ξ = 常数、η = 常数和 ζ = 常数是三个曲面，沿着 η = 常数和 ζ = 常数两曲面的交线的切线方向作向量$\vec{d\xi}$，类似地，作 $\vec{d\eta}$ 和 $\vec{d\zeta}$。如图8-28，作向量 $\vec{c}=\vec{d\xi}\times\vec{d\eta}$，$\vec{c}$ 的长度等于以$\vec{d\xi}$和$\vec{d\eta}$为边的四边形的面积，$\vec{c}$ 的方向与$\vec{d\xi}$和$\vec{d\eta}$正交。再作$\vec{c}$ 和$\vec{d\zeta}$的标量乘积，它等于 $\vec{c}$ 的长度乘$\vec{d\zeta}$的长度再乘以其夹角的余弦，显然，它就是空间中以$\vec{d\xi}$、$\vec{d\eta}$、$\vec{d\zeta}$为棱的微小六面体的体积，即

$$\begin{aligned} dV &= \vec{d\zeta}\cdot(\vec{d\xi}\times\vec{d\eta}) \\ &= \left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \zeta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \zeta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)d\zeta\cdot\left\{\vec{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\end{vmatrix}+\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi}\\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \eta}\end{vmatrix}\right. \\ &\quad \left.+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{vmatrix}\right\}d\xi d\eta. \end{aligned}$$

由上式及(*d*)式，得到微元体积如下：

$$dV = |J|\, d\xi d\eta d\zeta. \tag{8-62}$$

式中

$$|J| = \begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta}\\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{vmatrix}. \tag{8-63}$$

$|J|$ 是雅可比矩阵的行列式。

§8-14　曲边单元算例

下面列举一些等参数曲边单元算例。

图8-29中表示了作者与宋敬廷同志用 8 结点矩形曲边单元计算的圆管在内水压力及内外温差作用下的应力结果。由于对称，只须取出四分之一计算。划分为五个单元，采用二次形函数，由图可见，计算值与理论解符合得很好。

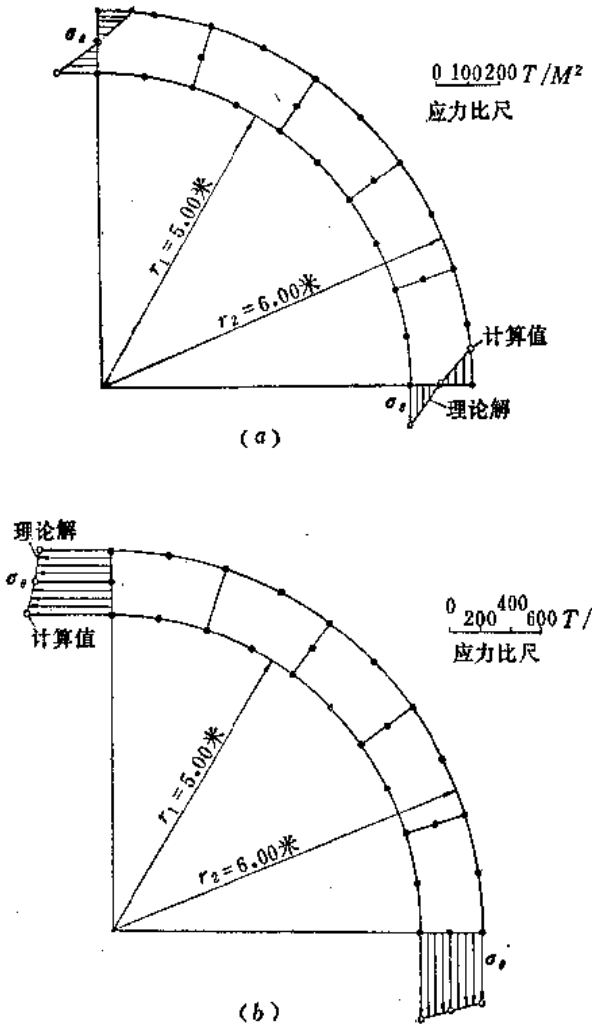


图 8-29　圆管应力计算值与理论解比较

(a)内外温差作用下的环向应力(内温 10°C，外温 0°C，$E=2\times10^6$ 吨/米^2，$\mu=0.16$，$\alpha=1\times10^{-5}1/°C$)；(b)均匀内水压力作用下的环向应力(内水压力100吨/米^2)

图8-30是用等参数空间曲面单元计算的旋转圆球在离心力作用下的应力成果[54]。由于对称，取出八分之一，只用了七个单元，计算结果与理论解符合得也是比较好的。

图8-31表示了不同长高比的悬臂梁的计算结果，采用四个 8 结点平面二次等参数单元。图中比较了降阶积分的效果。可以看出，采用降阶积分（2×2）时，不但减少了计算量，而且计算精度也提高了。由此图也可看出，当梁的长高比很大时，会出现病态方程，用三维有限单元计算薄壁结构时，也可能出现类似的病态方程。因此，对于细长的杆件结构，应采用杆件单元计算，对于薄壁结构，应采用薄板和薄壳单元计算，既可减少计算量，又可避免出现病态方程。

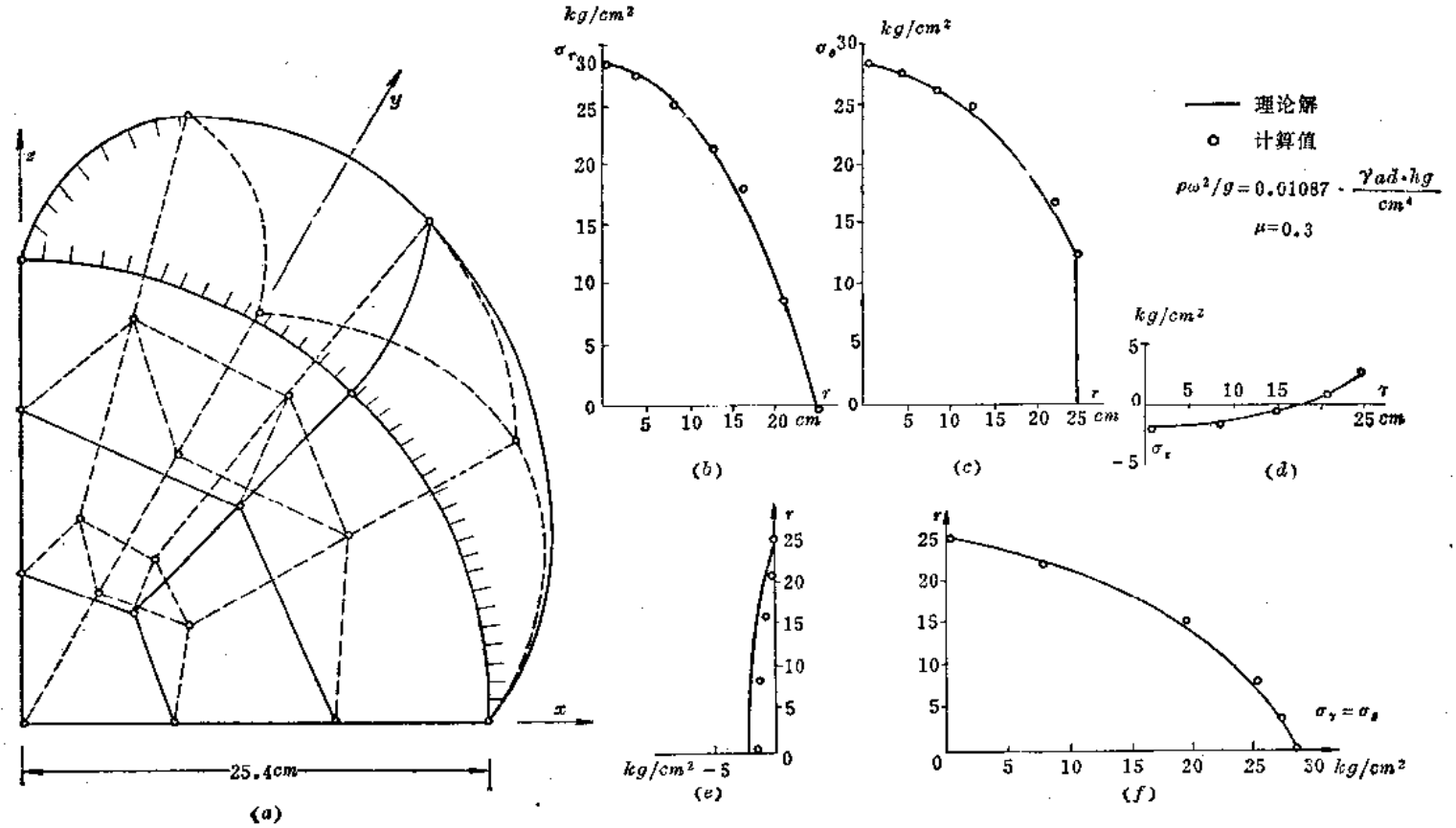


图 8-30 用七个二次等参数空间单元计算一个旋转圆球

(a)计算网格；(b)$\sigma_r(z=0)$；(c)$\sigma_\theta(z=0)$；(d)$\sigma_z(z=0)$；(e)$\sigma_z(r=0)$；(f)$\sigma_r=\sigma_\theta(r=0)$

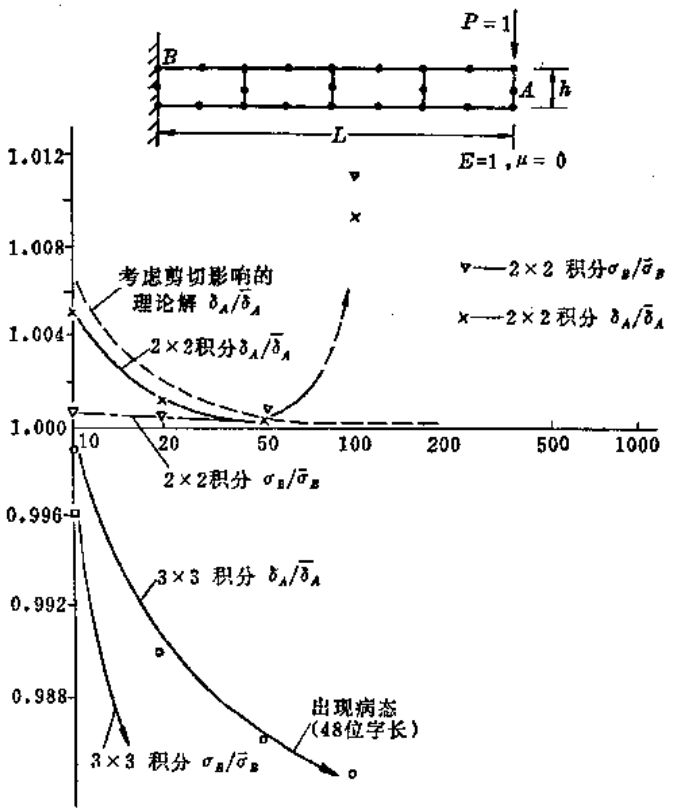


图 8-31　不同长高比的悬臂梁用二次等参数单元计算时降阶积分的效果

第九章　各种平面和空间单元的比较、应用实例

在前面几章，我们介绍了各种平面和空间单元。在实际工作中应采用什么单元呢？这个问题与计算精度、计算时间及准备工作等因素有关。在这一章，我们将对各种平面和空间单元进行比较，并说明在实际工作中如何选择单元。

有限单元法问世以来，实际工程中的许多复杂问题均迎刃而解，在这一章，我们也将介绍一些平面和空间单元的应用实例。

§9-1　各种平面单元的比较和选择

在表 9-1 中列举了各种平面单元。

在图9-1中表示了用三种不同的三角形单元计算悬臂梁在集中荷载作用下的挠度[5]。三种计算网格具有相同的结点数目。由§4-3可知按位移法计算的挠度是低于真值的，因此算出的位移越大，精度越高，由图可见，9结点三角形单元给出最好的结果，6结点三角形单元次之，而3结点等应变三角形单元给出的结果是很差的。

在图 9-2 中表示了用常应变三角形单元、矩形单元及等参数单元计算悬臂梁的结果[12]。由图可见，用一排矩形单元或两排三角形单元计算的误差还是相当大的，但用一排8结点等参数单元可得到满意的计算结果。

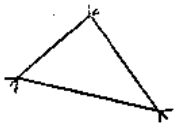
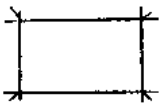
从图 5-8 可见，用四排常应变三角形单元计算集中荷载作用下的悬臂梁，误差仍然比较大。

以上计算成果表明，对于以弯曲为主的单薄结构，如土基中的混凝土防渗墙、隧洞衬砌等等，不宜采用等应变三角形单元，因为这类结构比较薄，在厚度方向要布置五排以上单元比较困难，而单元在四排以下时，计算误差比较大，最好采用8结点等参数单元或高次三角形单元。同理，对于拱坝等空间结构，不要采用常应变四面体单元，最好采用20结点等参数单元、或高次四面体单元。

在图 9-3 中表示了在抛物线分布边界力作用下的等厚度方板。在铁木辛柯著弹性力学中曾给出这个问题的最小功解答，为了对比，文献[3]用常应变三角形单元及线性应变三角形单元进行了计算。由于对称，只须取出四分之一，图中表示了两种单元的计算网格，其他网格是在此基础上加密而得到。图中表示了A点水平位移u_A。由图可见，只要用不太多的单元就可以得到相当高的计算精度。关于应力的精度也有类似的趋势，线性应变三角形单元具有更高的精度。

在图 9-4 中表示了作者与宋敬廷同志用两种不同单元计算一个厚壁圆筒的结果，由于对称，只需计算四分之一。在厚度方向布置了四层8结点等参数单元，共79个结点。等应变三角形单元在厚度方向布置了八层，共103个结点。由图可见，用等参数单元算得的应

表 9-1　　各 种 平 面 单 元

单元形状	结点参数	结点数	自由度数	位移多项式阶次	参考文献
	u, v	3	6	1	31、32
	u, v	6	12	2	63
	u, v	9	18 + 2 内部自由度	3	64
	u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$	3	18 + 2 内部自由度	3	36、5
	u, v	4	8	双线性 （部分 2 次）	31、32
	u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$	4	24	部分 4 次	5
	u, v	4	8	等参变换一次	53、54
	u, v	8	16	等参变换二次	53～56
	u, v	12	24	等参变换三次	53～56

力值完全落在理论解曲线上，具有很高的计算精度。等应变三角形单元计算的应力值则在理论解曲线附近摆动，计算精度稍差，但还是可用的。

以上种种情况表明，在大多数情况下，高次单元比等应变三角形单元具有更高的计算精度。但是，在应力集中区域，由于应力变化十分剧烈，采用密集的等应变三角形单元，反而比稀疏的高次单元可给出更好的计算结果。

为了达到同样的精度，高次单元的数目可以减少，自由度总数随之减少。因此，信息准备的工作量较少，求解方程组的机器时间也较少。除了每个结点有 6 个参数的单元外，

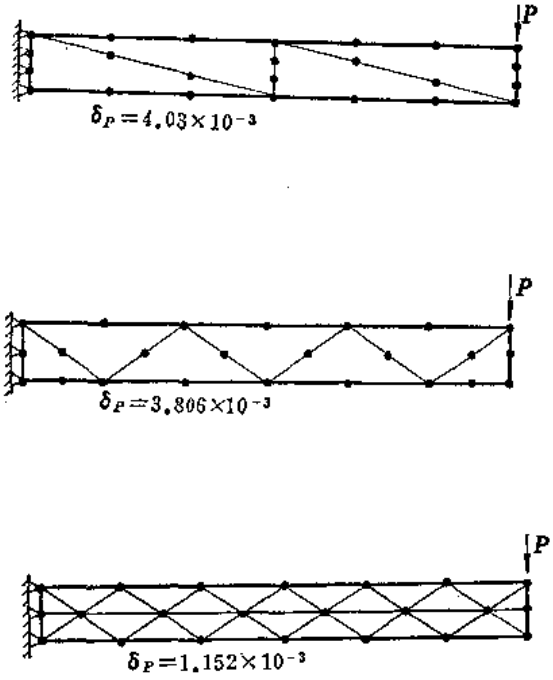
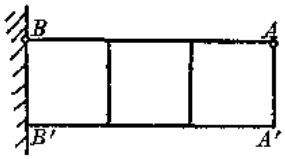


图 9-1 悬臂梁挠度计算



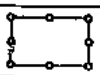
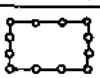
荷载 / 挠度及应力 / 单元	A点垂直力		AA'剖面力偶	
	δ_A	σ_B	δ_A	σ_B
	0.26	0.19	0.22	0.22
	0.65	0.56	0.67	0.67
	0.53	0.51	0.52	0.55
	0.99	0.99	1.00	1.00
	1.00	1.00	1.00	1.00
精确值	1.00	1.00	1.00	1.00

图 9-2 各种平面单元计算悬臂梁成果比较

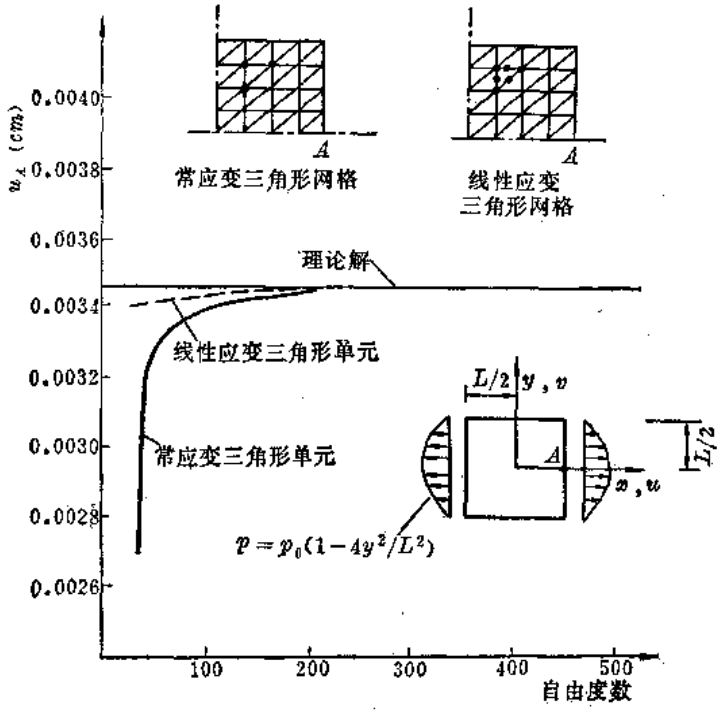


图 9-3 用两种三角形单元计算方板

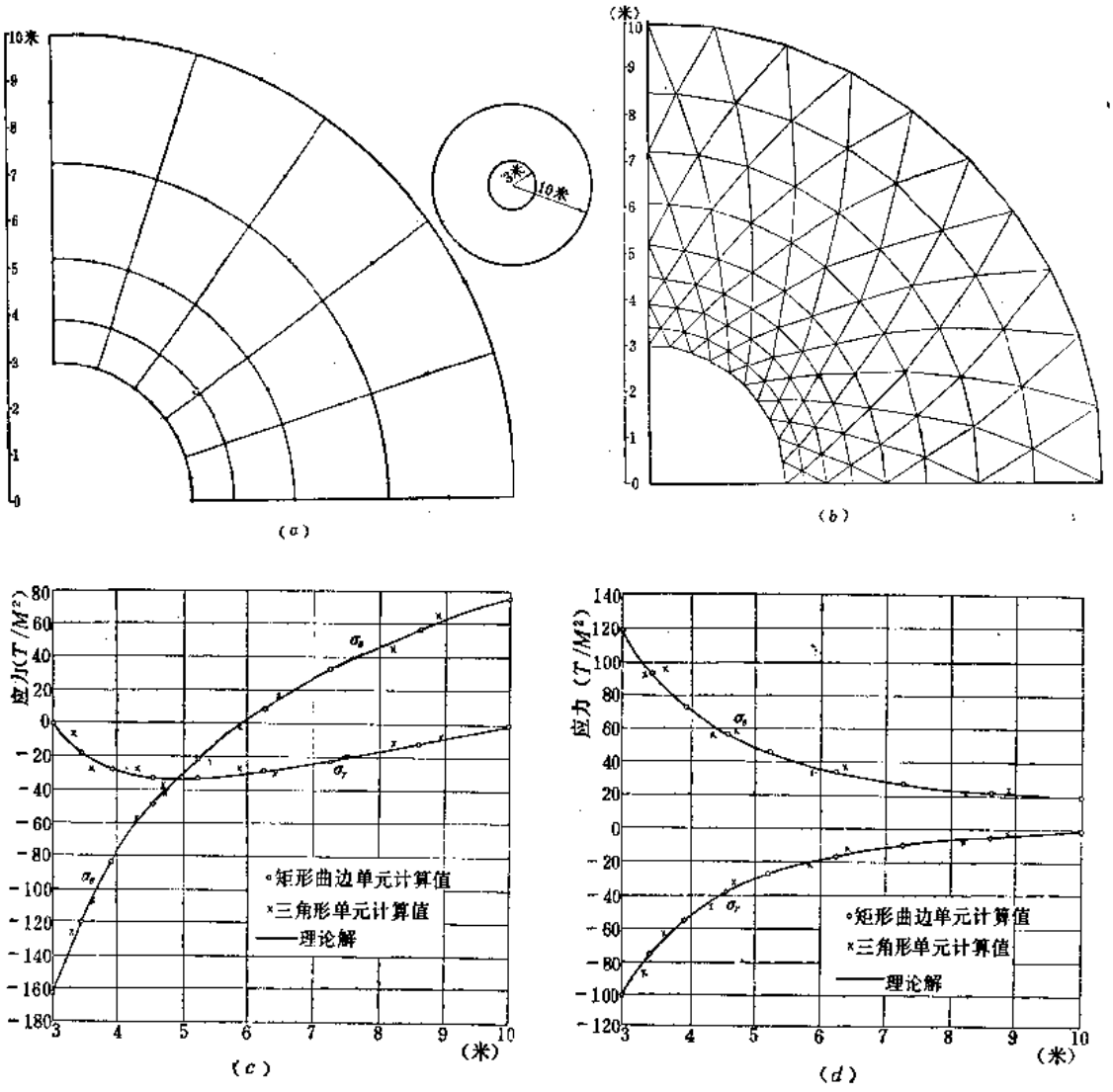


图 9-4　厚壁圆管的两种单元计算值与理论解比较

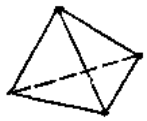
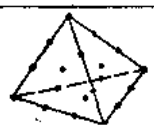
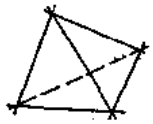
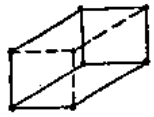
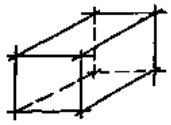
(a)等参数单元计算网格(79个结点)；(b)等应变三角形单元计算网格(103个结点)；(c)内外温差引起的应力(内表面10°C，外表面0°C)；(d)内水压力100T/M^2引起的应力

高次单元的带宽较大，对于同样的自由度，需要较大的存储容量。高次单元更重要的缺点是单元刚度矩阵比较复杂，在形成刚度矩阵时要消耗较多的机器时间，尤其是等参数单元，其刚度矩阵必须通过数值积分才能算出，形成刚度矩阵所费机器时间更多。但在多数情况下，这些缺点能为自由度的减少所弥补。

§9-2　各种空间单元的比较和选择

在表 9-2 中列举了各种空间单元，大体可分为三类，即四面体单元、六面体单元和等参数单元。

表 9-2　　各 种 空 间 单 元

单元形状	结点参数	结点数	自由度数	位移多项式阶次	参考文献
	u, v, w	4	12	1	40, 41
	u, v, w	10	30	2	65
	u, v, w	20	60	3	59
	u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$	4	48	部分 3 次	5
	u, v, w	8	24	部分 3 次（三线性）	41
	u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$, v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$, w, $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$	8	96	部分 5 次	5
	u, v, w	8	24	等参变换一次	53, 54
	u, v, w	20	60	等参变换二次	53～56
	u, v, w	32	96	等参变换三次	53～56
	u, v, w	15	45	等参变换二次	53～56

六面体单元，形状规则，难以适应工程结构的复杂外形，目前应用渐少。有人把$H24$单元和$T12$单元混合使用，几何形状规则部分采用$H24$单元，不规则部分采用$T12$单元。

在四面体单元中，$T12$是最早提出来的单元，由于其刚度矩阵比较简单，也能适应复杂的几何外形，目前还在应用，但单元内部应变是常量，必须采用大量的密集的单元，才

能取得较好的应力成果。否则，计算精度很差，可参阅第七章图7-11。在各种四面体单元中，$T48$是效果比较好的单元，单元应变是二次函数，计算精度较高，每个结点采用了12个参数，与其他四面体高次单元相比，结点数量减少了，整体刚度矩阵的带宽随之减少了。它适应复杂几何形状的能力优于六面体单元，但不如等参数曲面单元。

等参数单元既有较高的计算精度，又能适应复杂的几何形状，应用日见广泛。目前应用最多的是$I60$，其次是$I24$。三棱柱曲面单元$I45$多用来匹配$I60$，以便更好地适应不规则边界。

为了分析对比各种空间单元的计算精度和效果，文献[21]用几种不同类型的单元计算了图9-5（a）所示短悬臂梁和图9-5（b）所示简支板。采用的几种单元如下：

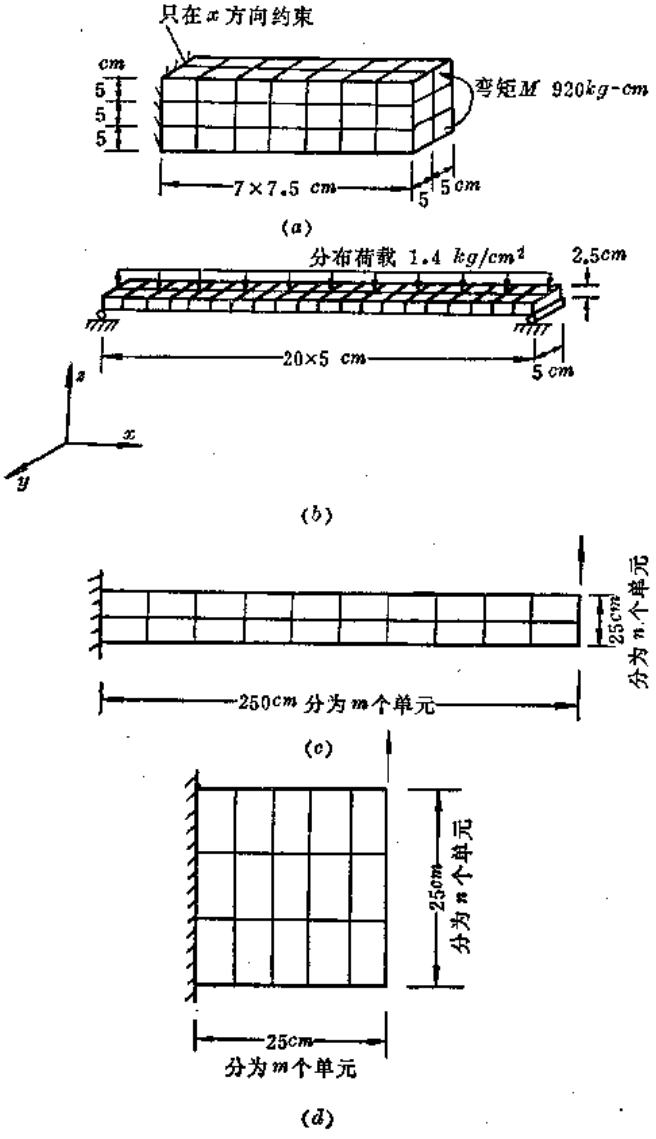


图 9-5　不同单元计算方案

(a)短悬臂梁；(b)简支板；(c)长悬臂梁(厚度2.5cm)；(d)深悬臂梁(厚度2.5cm)

$5T12$　由5个常应变单元$T12$组合成8结点砖形六面体单元；

$6T12$　先由3个常应变单元$T12$组合成一个三棱柱体，再由2个三棱柱体组合成一个8结点砖形六面体；

$I24$　8结点等参数单元；

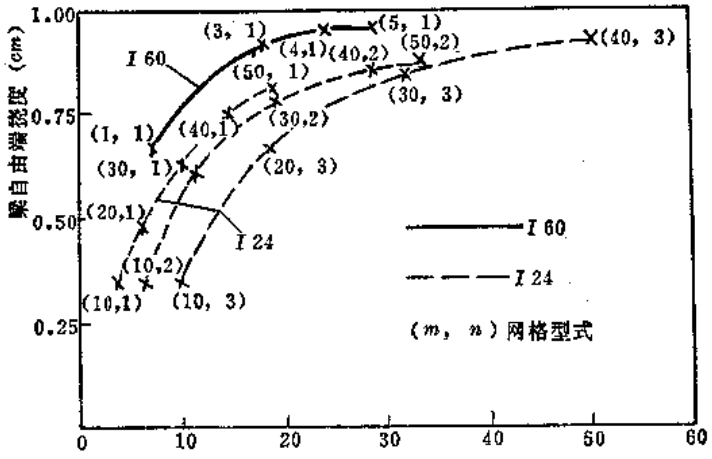
$5T30$　由5个线性应变四面体单元$T30$组合成26结点六面体单元，其中6个结点位于六个表面的中心，通过矩阵运算予以消去，剩下20个结点；

$I60$　20结点等参数单元。

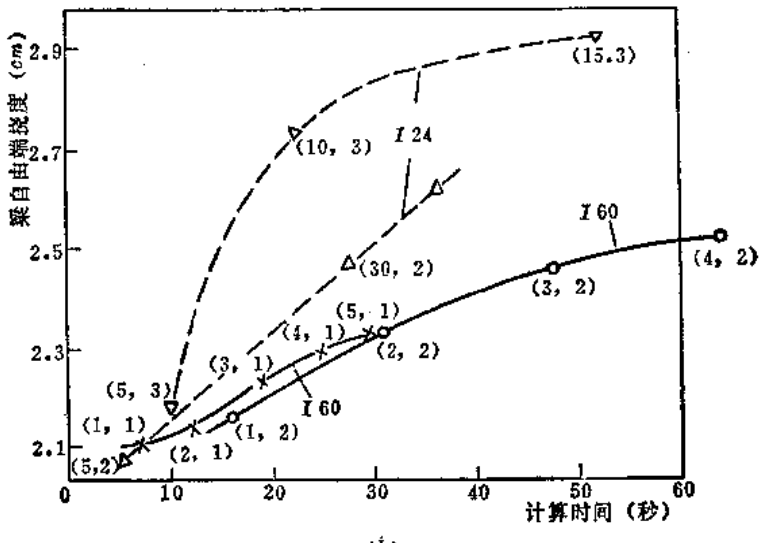
用上述五种不同的单元，按照图9-5（a）及（b）所示网格进行计算，成果列于表9-3中。由表可见，等参数单元$I60$对于两种结构的计算精度都很高。等参数单元$I24$对于悬臂梁的计算精度还算满意，对于薄板的计算精度就比较差。由5个或6个常应变单元组合的单

表 9-3　　空间单元计算成果比较

结点数	单元编号	说　　明	短悬臂梁			简支板		
			最大应力 (kg/cm^2)		最大挠度	最大应力 (kg/cm^2)		最大挠度
			σ_z	σ_x	($10^{-4}cm$)	σ_x	σ_y	(cm)
8结点	5T12	由5个常应变单元组合	(未算)	(未算)	1.54	(未算)	(未算)	0.0786
	6T12	由6个常应变单元组合	1.056	0.084	1.39	(未算)	(未算)	0.0662
	I24	等参数单元	2.22	0.099	1.86	788	−338	0.236
20结点	5T30	由5个线性应变单元组合	2.35	0	2.08	—	—	—
	I60	等参数单元	2.35	0	2.08	1690	1.74	0.616
梁　理　论			2.35	0	2.08	1690	0.70	0.616



(a)



(b)

图 9-6　不同单元计算效率比较

(a)长悬臂梁，(b)深悬臂梁

元$5T12$和$6T12$，对两种结构的计算精度都很差。由5个线性应变单元组合的单元$5T30$的计算精度是比较好的，但它的表面是平面，不如等参数单元$I60$那样可以贴合结构的复杂外形。另外，等参数单元的刚度矩阵是各向同性的，而计算表明，由5个$T30$单元组合的正六面体单元的刚度矩阵却在三个方向略有差异。

从以上计算结果看来，在两种等参数单元中，似乎$I60$较好，但表9-3是在网格相同的条件下用不同单元计算的。$I60$单元虽精度较高，但因单元复杂，消耗计算时间也较多。按工程观点，应从单位时间内所得到的计算精度来比较。显然，为了进行这种对比，对不同的单元，应采用不同的计算网格。因此，对图9-5（c）所示长悬臂梁及图9-5（d）所示深悬臂梁，用不同网格进行了计算。在长度方向划分了m个单元，在厚度方向划分了n个单元。计算结果示于图9-6。图中以计算时间（$IBM7094$机）为横坐标，以梁端挠度为纵坐标，在相同时间内获得较大挠度的单元较优越。由图可见，对于长悬臂梁，等参数单元$I60$表现最好；而对于剪力影响较大的深悬臂梁，$I24$单元较好。但上述计算在y方向（垂直于纸面），只取了一层单元，没有充分发挥$I60$单元的优点。当y方向也有多层单元时，$I60$和$I24$两种单元对深悬臂梁这类大体积结构所反映出来的差别可能要小一些。

总之，对于空间问题，20结点等参数单元$I60$可以很好地反映板弯曲作用，在厚度方向只要取一层单元就可以计算弯曲作用比较显著的结构，如拱坝、厚壁压力容器等等。但对于内部剪应力较显著的大体积结构，8结点等参数单元$I24$可能更为有效。当存在应力集中现象时，四面体单元因可采用密集的网格以适应急剧变化的应力场，仍是值得考虑的一种形式。

从第八章图8-26可知，当结构非常单薄时，如水电站的压力钢管、叉管等等，采用空间单元计算，可能出现病态方程，对这类薄壁结构，最好用薄板及薄壳单元计算，详见以后几章。

在以下几节，我们将列举一些有限单元法应用实例。

§9-3 拱坝应力分析

拱坝是建筑在岩石峡谷内的变厚度变半径双曲壳体，由于体形复杂，其应力分析是一个比较困难的课题。在工程设计中，过去多采用试载法。近年来采用有限单元法的逐渐增多，在这里，我们介绍用空间有限元分析拱坝的一些典型结果[43]，并与用传统的试载法计算的成果进行比较，在后面几章，我们还将介绍用薄壳和厚壳有限单元计算拱坝的一些成果。

峡谷是对称的，坝高120米，坝顶厚度5.35米，坝底厚度23.35米，坝顶拱圈半径170.80米，中心角106°，坝底拱圈半径73.4米，中心角80°，坝顶弦高比2.27，弧高比2.67，坝底厚高比0.1943，坝体外形见图9-7（a），只考虑齐顶水压力，坝体弹性模量$E=2\times10^5 kg/cm^2$，泊松比$\mu=0.15$。

（1）不同计算方法的比较

对该坝用下列三种不同方法进行了计算：

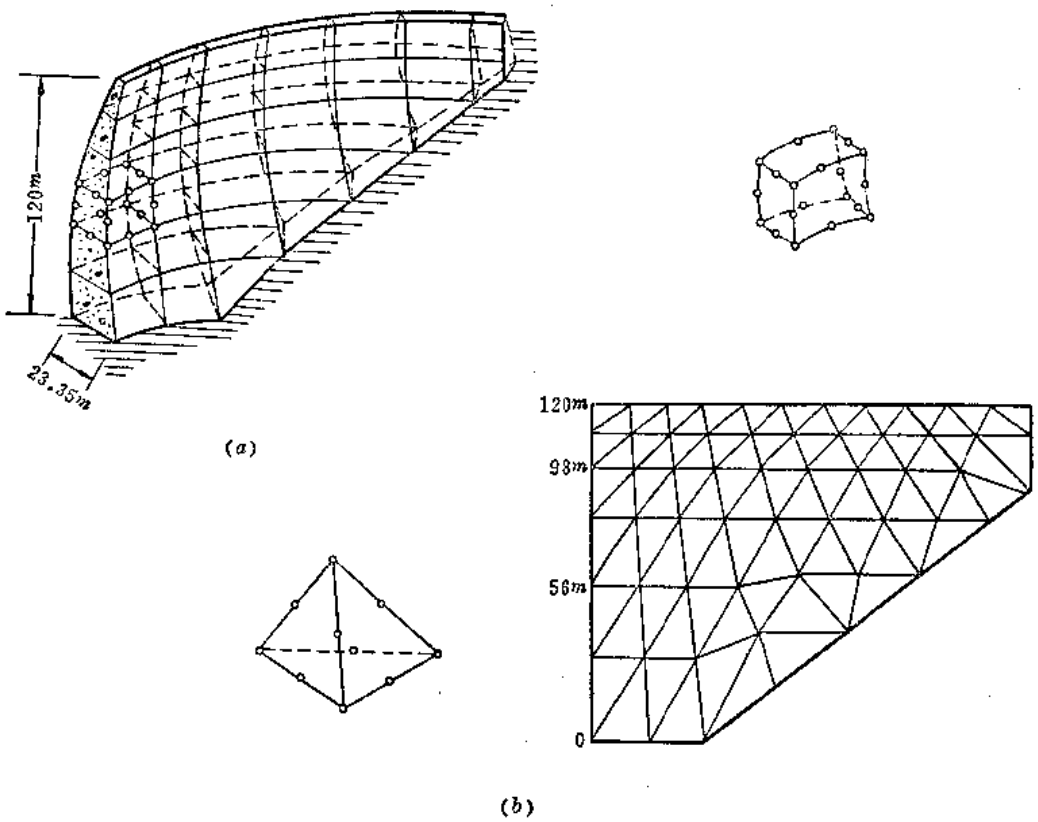


图 9-7　双曲拱坝计算网格

(a)20结点曲面单元网格；(b)10结点四面体单元网格(中面)

1 ）20结点空间曲面单元

在厚度方向用一层单元，由于河谷对称，只取出一半计算，共用32个单 元，272 个结点。

2 ）10 结 点 线 性应变四面体单元

先把三个10结点四面体单元组成一个三棱柱体，再把两个三棱柱体组合成一个砖形六面体单元，在坝体厚度方向用两层六面体组合单元，在中面上的计算网格见图9-7（b），全坝共有1015个结点，考虑基础边界及对称面上的条件后，共有2800未知量。

3 ）试载法

多拱梁，进行了径向变位、切向变位及扭转全调整。

基础变形对拱坝应力的影响是一个比较复杂的问题，为了简化，假定基础是刚性的，以便对三种不同方法计算坝体应力的结果进行比较。

在图9-8中表示了拱冠径向变位，在高程70米以下，三种方法计算的经向 变位 是很接近的，在高程70米以上，三条变位曲线逐渐分开，试载法求出的变位最小。在图 9-9 中表示了拱冠剖面的铅直应力，两种有限单元法计算的铅直应力是相当接近的，试载法计算的铅直应力相差较大。图9-10中比较了拱冠剖面上拱圈环向应力，在坝顶试载法应力较大，高程80米是环向应力最大处，在这里试载法应力反而偏小，试载法未给出坝底环向应力，图

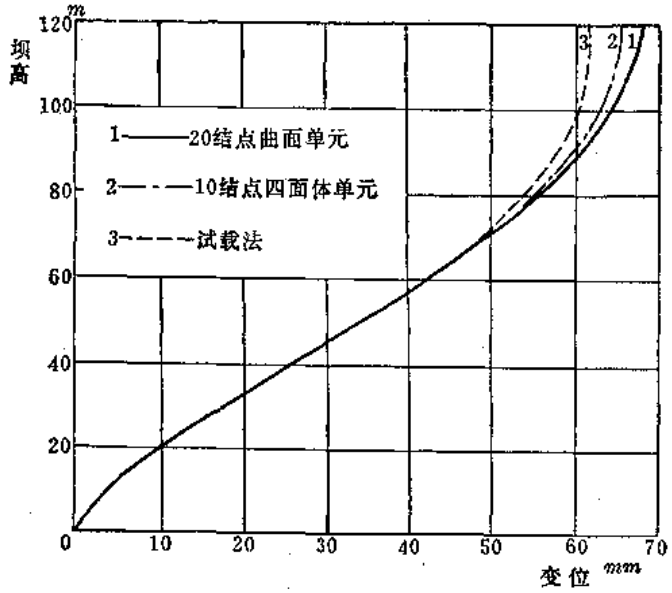


图 9-8　拱冠剖面的径向变位

9-11（a）表示了坝顶拱圈环向应力沿中心角而变化的情况，两种有限单元法应力值很接近，试载法应力相差较大，图9-11（b）比较了80米高程拱圈环向应力的变化情况。总的说来，三种方法应力值都是相当接近的，但试载法算出的最大压应力值偏小一些。

从上述变位和应力成果来看，两种有限单元的计算结果，无论变位还是应力，都十分接近，但曲面单元只用了272个结点，而线性应变四面体单元却用了1015个结点，曲面单元所用结点数和单元数都少得多，因此计算、准备及成果整理的工作量都要小得多。进一步的计算发现，即使

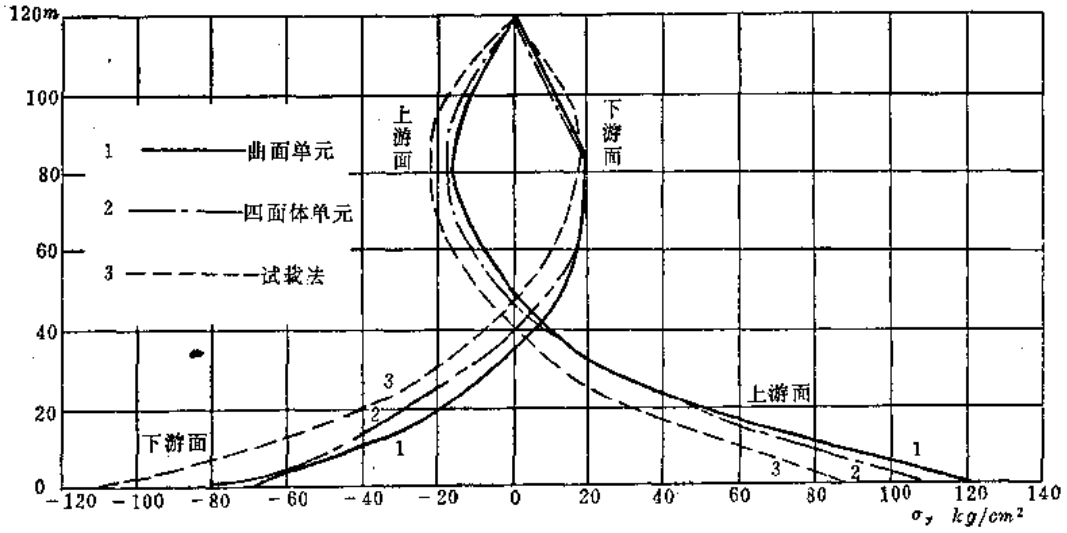


图 9-9　拱冠剖面的铅直应力

只用 9 个20结点曲面单元，计算的结果也很满意，与32个单元比较，变位的最大误差只有 2 %。由此可见，20结点曲面单元用于拱坝应力分析是很合适的。

试载法计算结果，坝顶变位和应力及坝底铅直应力与有限单元法计算结果相差较大，其余基本一致。考虑到试载法在电子计算机上实现后，计算量较有限单元法为少，在初步设计阶段，仍不失为一种可用的计算工具。

（ 2 ）基础变形对拱坝变位和应力的影响

基础变形对拱坝应力影响如何，是工程上人们所关心的一个问题，文献[43]用20结点

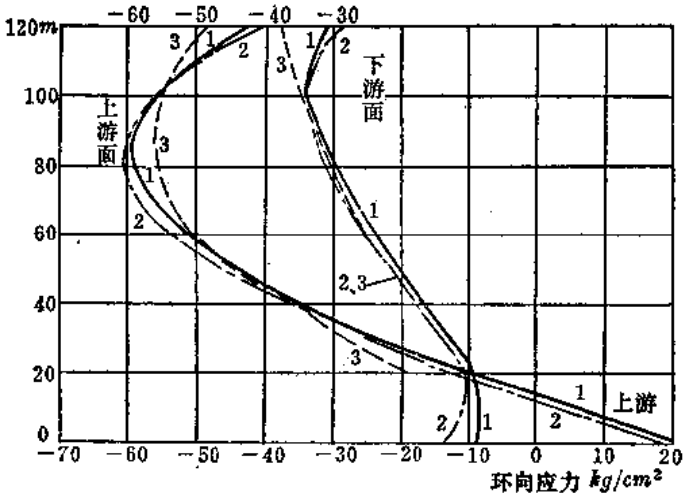


图 9-10 拱冠剖面的拱圈环向应力

1—曲面单元；2—四面体单元；3—试载法

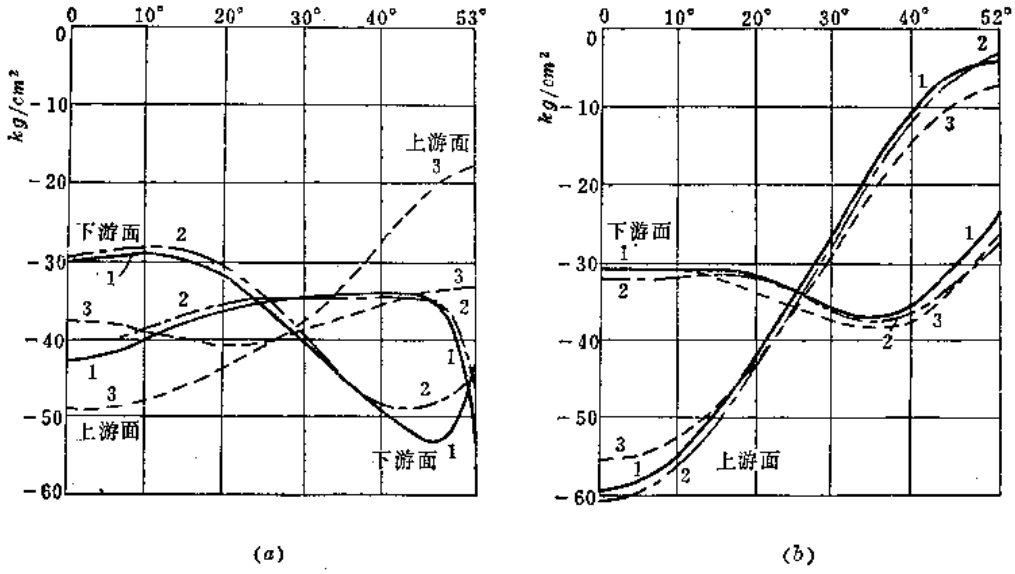


图 9-11 拱圈环向应力

(a)坝顶；(b)80米高程

1—曲面单元；2—四面体单元；3—试载法

空间曲面单元对这个问题进行了分析、计算网格，见图9-12，共计算了下列四种情况：

（ a ）基础是刚性的，$E_f=\infty$。

（ b ）基础弹性模量与坝体混凝土相同，$E_f=E_c$ 。

（ c ）基础弹性模量等于坝体混凝土弹性模量的十分之一，$E_f=\frac{1}{10}E_c$。

（ d ）基础是不均质的❶；

❶ E_f为基础弹性模量，E_c为混凝土弹性模量，计算中取$E_c=2\times10^5 kg/cm^2$，坝体和基础的泊松比均取$\mu=0.15$。

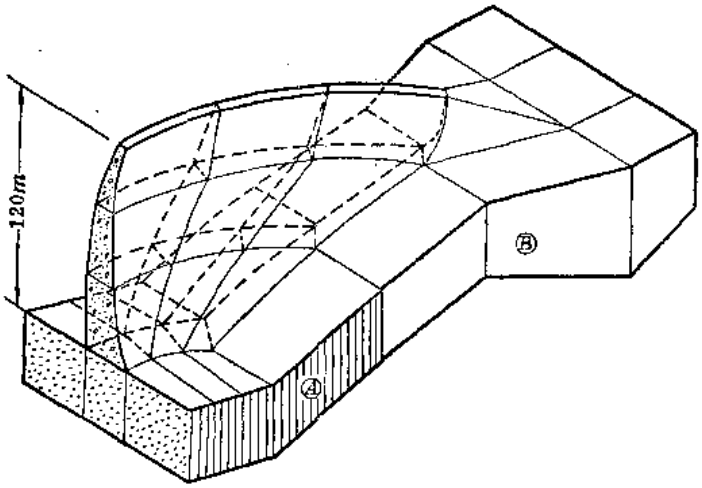


图 9-12　拱坝及基础

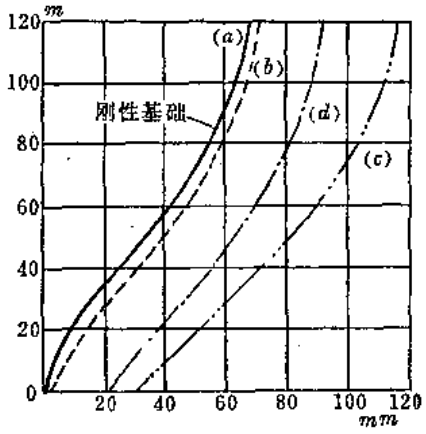


图 9-13　基础弹性模量不同时拱冠剖面下游面径向变位

河床部分　区域 A：　$E_f=\frac{1}{8}E_c$ 。

岸坡部分　区域 B：　$E_f=\frac{1}{2}E_c$。

在图9-13中表示了拱冠下游面径向变位，显然，基础弹性模量对坝体变位影响很大，在图9-14至图9-16中表示了基础变形对坝体应力的影响，可见基础弹性模量的变化对铅直

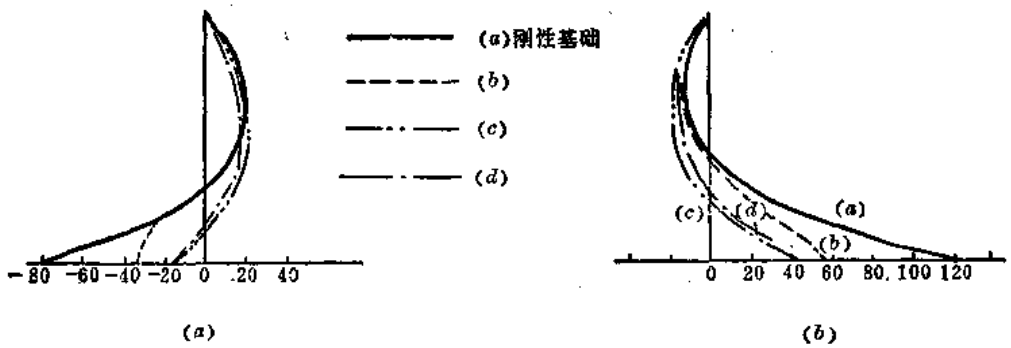


图 9-14　基础变形对拱冠剖面铅直应力的影响

（a）拱冠下游面；（b）拱冠上游面

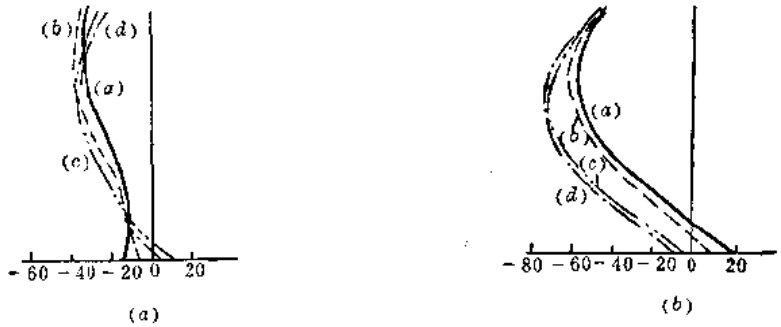
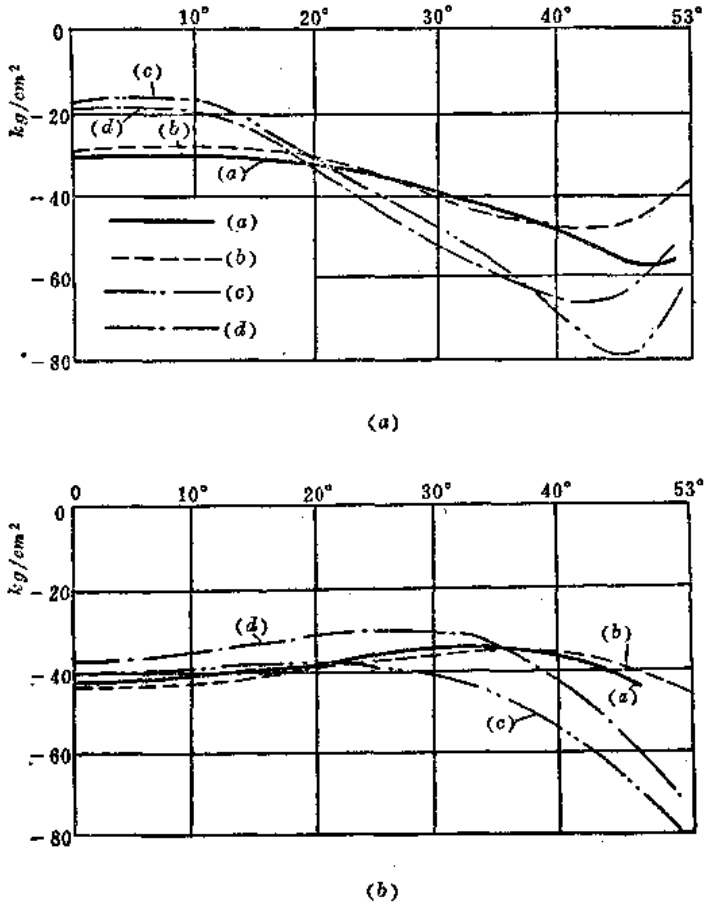


图 9-15　基础变形对拱冠剖面拱圈环向应力的影响

（a）拱冠下游面；（b）拱冠上游面

应力，即梁的应力，影响很明显，对于比较软的基础，坝底铅直应力只有刚性基础时的三分之一至四分之一。由图9-16可见，基础变形对拱座环向应力的影响也是比较大的，但对拱冠环向应力的影响是相当小的。



(a)

(b)

图 9-16 基础变形对坝顶拱圈环向应力的影响
(a)下游面环向应力；(b)上游面环向应力

§9-4 支墩坝应力分析

支墩坝的各支墩之间，通常用收缩缝分开，因此各个支墩是独立作用的。在分析支墩坝应力时，往往把支墩看成变厚度平板，用平面应力有限单元计算支墩的整体应力，然后在垂直于上游坝面方向切取单位厚度的头部薄片，用平面有限单元计算在水压力作用下头部应力。通过两次二维有限元分析，求出坝内应力状态。但支墩坝实际上也是空间结构，坝头与支墩的尺寸还是相差较大的，按平面问题分析，究竟会产生多大的误差，也是设计人员所关心的。文献[23]对这个问题进行了分析，用20结点等参数单元计算了一个支墩坝，坝高62.5米，跨度17米。由于对称，只须取出一半分析，坝体部分计算网格及主应力见图9-17。计算中包括了一部分基础（图中未画出），为了较好地反映基础变形对坝体应

顶机 刘俊杰

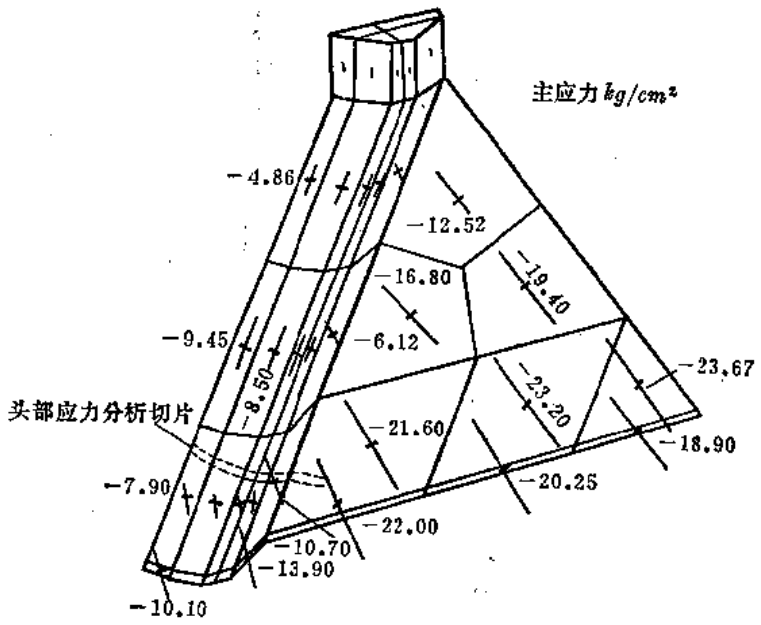


图 9-17　支墩坝三维应力分析

力的影响，在基础面以上布置了一层比较薄的单元。为了进行对比，用同样网格，进行了二维分析，在图9-18中示出了三维计算支墩中面上的主应力与二维计算的主应力，在图9-19中表示了坝基以上1米处二维与三维应力分布。在图9-20中比较了坝头水平应力的分布。由图可见以下几点：（1）把支墩看成变厚度平板，用二维有限元计算，所得应力状态，与三维分析成果比较，分布规律大体上是相近的，但在坝踵和坝趾处，应力值有一些出入。例如，由图9-19可知，二维分析得到的坝踵铅直压应力与三维应力相比，其绝对值是偏大的；（2）关于头部水平应力，二维与三维成果，应力图形相差较大（当然，荷载不尽相同），但设计上所关心的拉应力，最大值还是比较接近的。

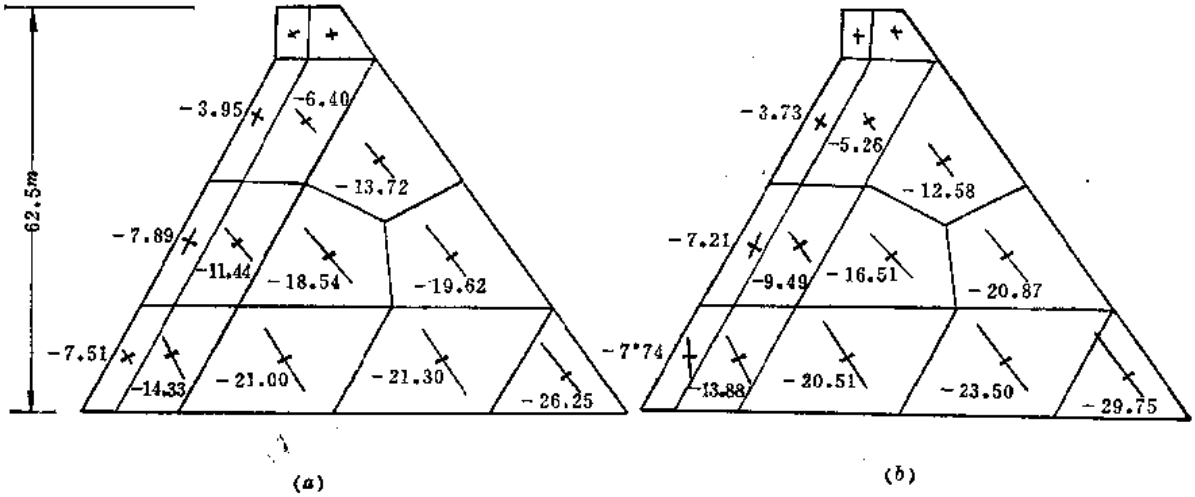


图 9-18　水压与自重作用下支墩坝主应力
（a）三维分析，中面上主应力；（b）二维分析主应力

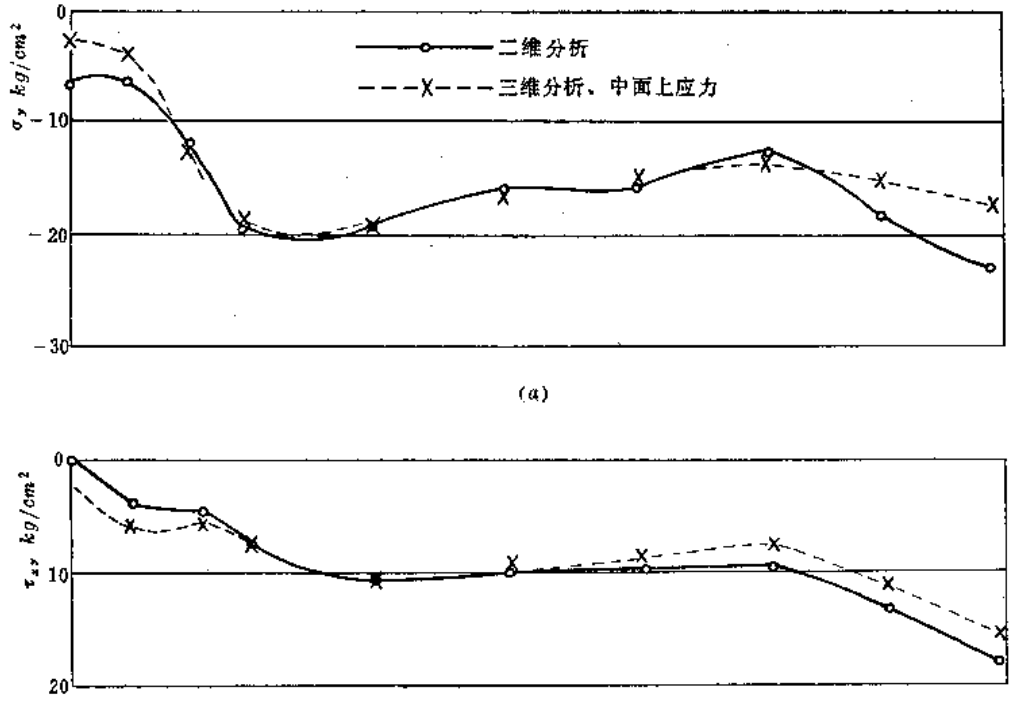


图 9-19　支墩坝在坝基以上1米处的应力分布（水压力加自重）
（a）正应力，（b）剪应力

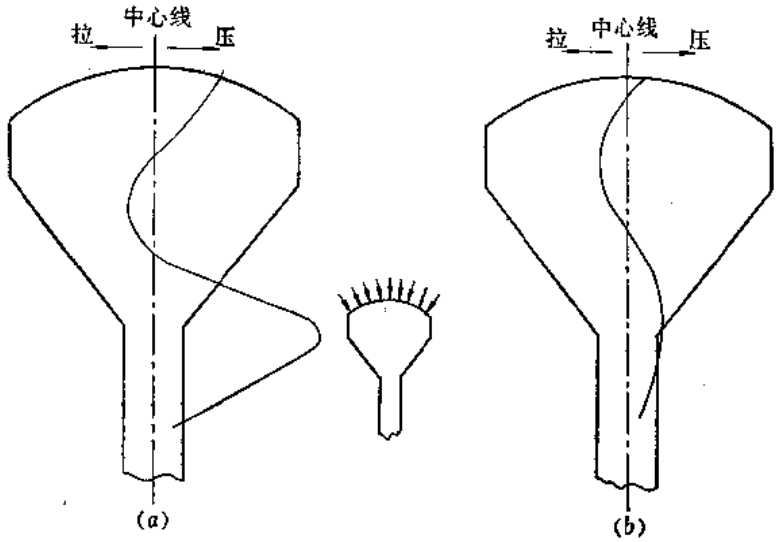


图 9-20　支墩坝头部水平应力
（a）二维分析(水压力)；（b）三维分析，离坝基17米处(水压力加自重)

§9-5 重力坝空间作用的分析

重力坝在施工时一般都设有纵横接缝，应力分析时假定坝体自重由各坝块单独承担是合理的，但如果在开始蓄水以前，纵横接缝均已进行灌浆，在水压力作用下，坝体将出现空间作用。由于一部分水荷载通过空间作用传递到两岸去了，河床部分坝体承担的水荷载将有所减小；在图9-21中表示了用20结点曲面单元计算的一些结果[23]。由图可见，重力坝空间作用的大小，与坝体长高比$\frac{B}{H}$的数值有密切关系，当$\frac{B}{H}$大于4时，空间作用已不太明显，当$\frac{B}{H}<2$时，空间作用十分显著。

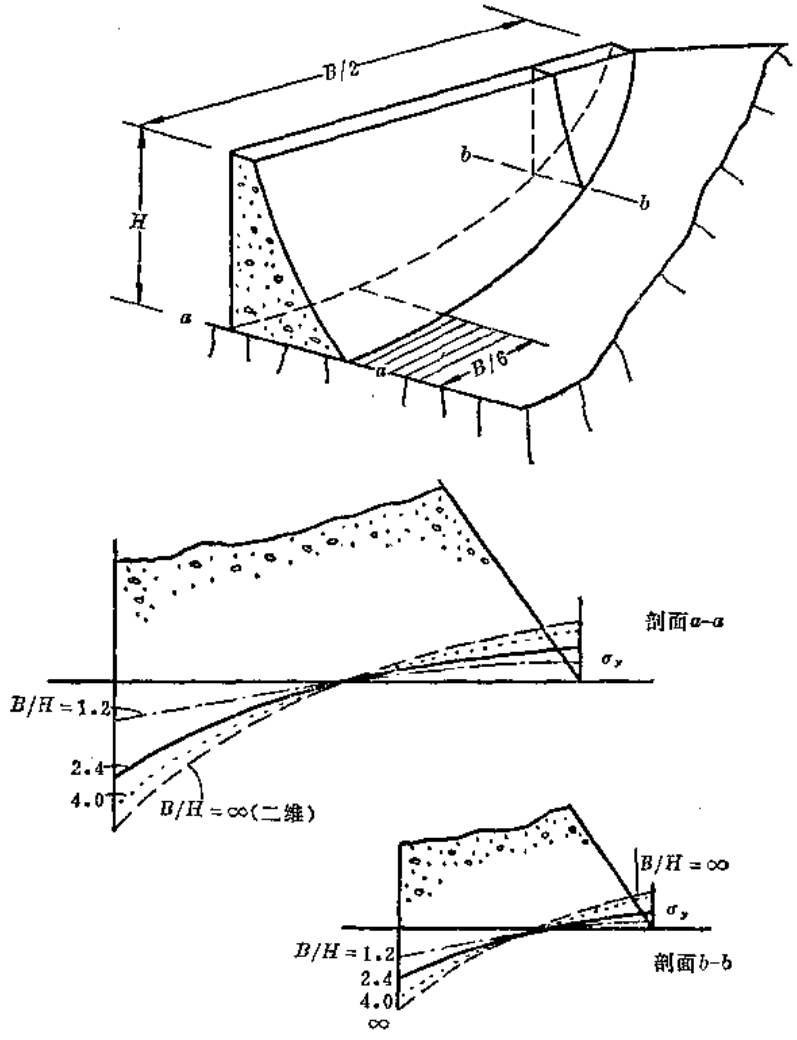


图 9-21 重力坝的空间作用（两个坝体剖面上的铅直应力σ_y）

$\frac{B}{H}=\infty$代表二维分析

§9-6 土坝空间作用的分析

土坝是建筑在峡谷内的，而且坝体内没有接缝，因而属于空间结构。但用空间有限单元计算，工作量很大，在计算误差不太大的条件下，应尽可能地按平面问题计算，现在就河谷坡度不同时土坝按平面问题与按空间问题计算的结果进行比较和分析[62]。

土坝横剖面见图9-22，上下游坝坡均为2.5:1，坝高49米，河谷两岸对称，分析了三种不同岸坡，即1:1，3:1，6:1。空间问题分析采用8结点等参数单元，但增加了内部自由度，以提高计算精度，平面问题分析，采用四边形单元，在边界处可退化为三角形单元，为了模拟土坝施工过程，分为8层，用增量法计算，土体弹性模量为$E=97.6kg/cm^2$，土体容重为$\gamma=2000kg/m^3$，泊松比$\mu=0.40$。计算成果的比较见表9-4至表9-6。

从以上计算成果，可以看出以下几点：

1）当河谷坡度比较平缓，如3:1或更平缓时，土坝横剖面按平面应变问题计算，可

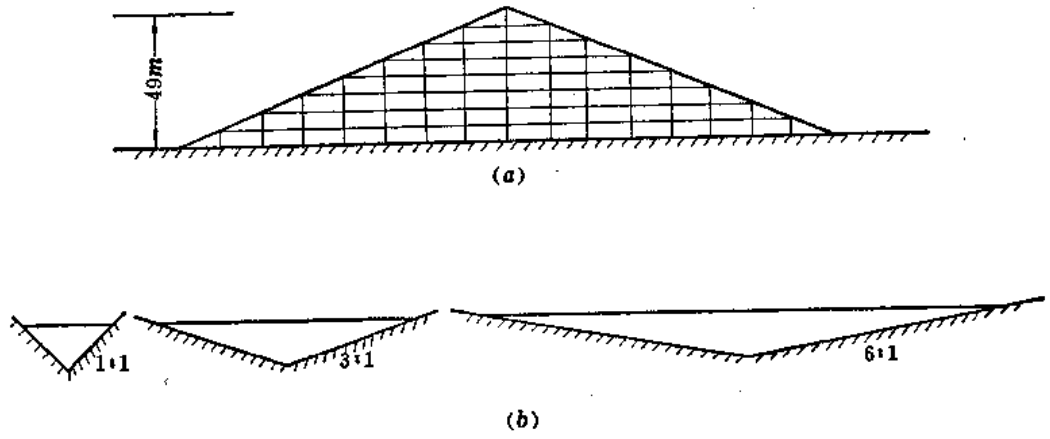


图 9-22 土坝的剖面
（a）横剖面；（b）纵剖面

表 9-4 土坝横剖面计算成果$\left(\frac{\text{平面应变}}{\text{三维计算}}\right)\times 100\%$

	1:1		3:1		6:1	
	平均	变化范围	平均	变化范围	平均	变化范围
最大主应力σ_1	113	100～129	102	100～113	101	98～109
最小主应力σ_3	98	79～125	96	81～111	97	88～100
最大剪应力τ_{max}	138	108～225	112	100～150	108	100～150
铅直变位v	136	91～156	106	85～114	100	85～105
水平变位u	268	75～435	120	80～149	105	85～120

表 9-5　　土坝纵剖面计算成果之一$\left(\frac{\text{平面应力}}{\text{三维计算}}\right)\times 100\%$

	1:1		3:1		6:1	
	平　均	变化范围	平　均	变化范围	平　均	变化范围
最大主应力σ_1	109	80～127	110	102～115	111	100～115
最小主应力σ_3	77	20～109	84	60～109	85	63～100
最大剪应力τ_{max}	149	107～185	149	111～179	149	126～181
铅直变位v	160	122～196	173	138～217	173	140～224
水平变位u	220	130～1300	228	139～400	224	139～400

表 9-6　　土坝纵剖面计算成果之二$\left(\frac{\text{平面应变}}{\text{三维计算}}\right)\times 100\%$

	1:1		3:1		6:1	
	平　均	变化范围	平　均	变化范围	平　均	变化范围
最大主应力σ_1	111	91～115	110	98～115	110	93～115
最小主应力σ_3	122	85～130	124	100～136	123	100～135
最大剪应力τ_{max}	94	70～117	91	74～105	90	83～107
铅直变位v	97	78～113	98	75～120	97	80～124
水平变位u	117	72～166	118	75～233	115	71～200

给出比较合理的结果。当河谷坡度较陡，如1:1，由于坝体空间作用显著，按平面应变计算的结果是不准确的；

2）土坝纵剖面按平面应力计算的结果是不可靠的，对于三种岸坡，所得计算结果都不好；

3）土坝纵剖面可按平面应变问题计算，对于三种不同河谷，所得计算成果都算不错，最大计算误差在σ_3，按平面应变问题算得的σ_3比三维计算值大24%。

§9-7　隧洞衬砌应力分析

埋藏在岩石中的隧洞衬砌的应力计算，是一个十分复杂的弹性力学接触问题。过去工程设计中，先假定岩石具有一定的抗力系数，然后按结构力学方法计算，这种计算方法并不能反映围岩与衬砌相互作用的真实情况。采用有限单元法，可以比较正确地求出衬砌的应力状态。由于隧洞衬砌比较单薄，在厚度方向难以布置五层以上常应变单元，如果只布置两三排常应变单元，计算误差又比较大。因此最好采用二次等参数单元，这种单元计算精度比较高，单元边界是二次曲线，可以贴合隧洞衬砌的边界。

图9-23表示了作者与宋敬廷同志合作采用 8 结点平面等参数单元计算一个马蹄形水工隧洞的网格。由于对称，只须取出一半计算，岩石弹性模量为 6.9×10^4 公斤/厘米^2，混凝

土衬砌的弹性模量为18×10^4公斤/厘米^2，计算了两种荷载。一是内部水压力，二是山岩压力和衬砌自重。应力计算结果见图9-24。

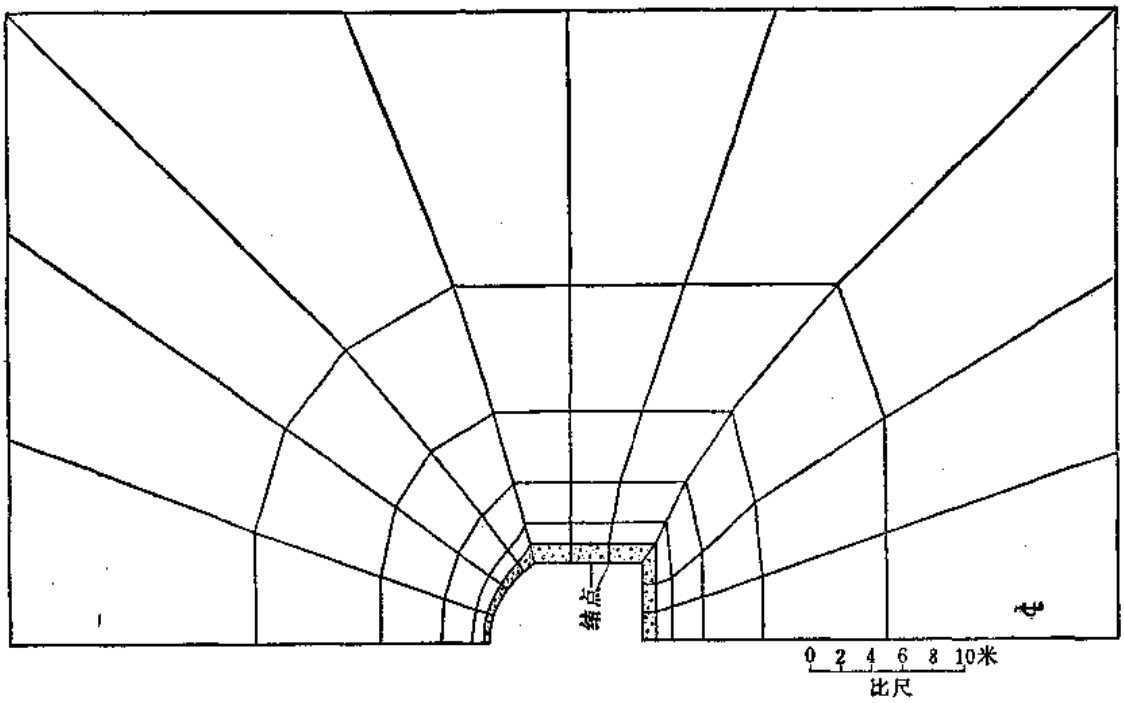


图 9-23　隧洞衬砌计算网格

岩石：$E_0=6.9\times10^4kg/cm^2$，$\mu_0=0.16$。混凝土：$E_1=18\times10^4kg/cm^2$，$\mu_1=0.16$

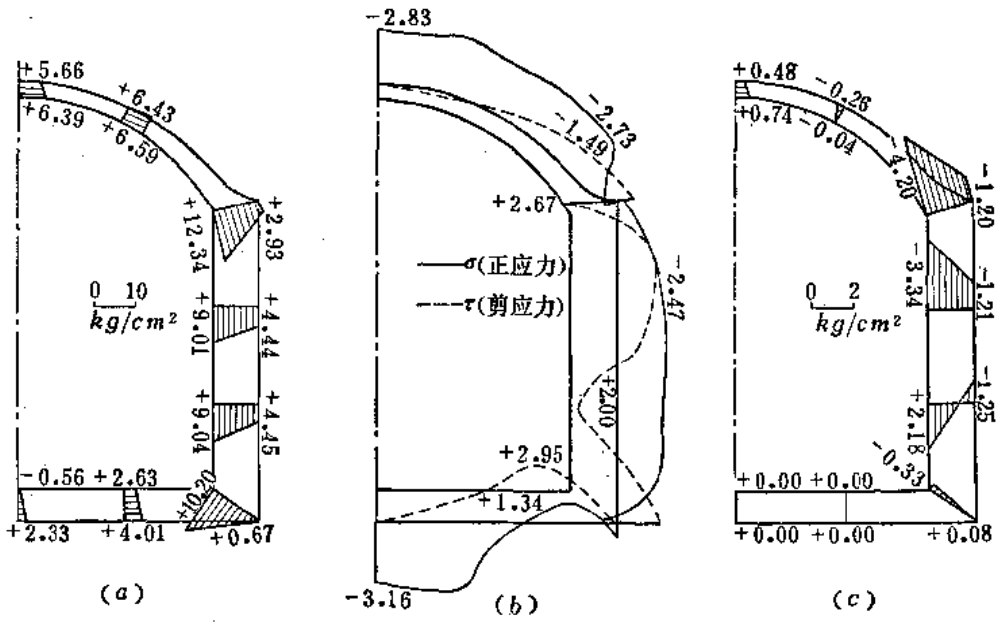


图 9-24　隧洞衬砌应力计算成果（拉应力为正）

(a)内水作用下的断面应力；(b)内水作用下的接触面应力；(c)山岩压力与衬砌自重作用下的断面应力

第十章 弹 性 薄 板

弹性薄板在工程中应用很广。对于一些比较简单的情况，如等厚、单跨、无大孔口、外形规则（矩形、圆形等）的薄板，已有一些理论解答及表格可资利用。但对于在工程中经常出现的复杂情况，如变厚度、多跨度、大孔口、外形不规则以及受到弹性梁、柱支承的薄板，理论方法是无能为力的，以往只能借助于模型试验，比较费事，现在利用有限单元法，可迅速求解。

按位移法求解薄板弯曲问题时，在相邻单元的公共边界上，不但要求挠度w连续，而且要求w的一阶导数连续。但要做到这一点是很不容易的。因此，在薄板弯曲的有限单元中，除了按位移求解的协调单元外，杂交单元和混合单元也颇受重视，为了循序渐进、由浅入深，我们先叙述协调单元，后叙述混合单元。

§10-1 弹性薄板的弯曲

在受到垂直于板面的荷载后，薄板将产生弯曲。如果板的挠度w与其厚度相比是比较小的，在分析板的弯曲问题时可采用下列假定：

1）可忽略板厚度方向的正应力，并假定薄板的厚度没有变化。

2）薄板的法线，在产生弯曲后，仍保持为薄板弹性曲面的法线。

3）薄板中面上的各点，没有平行于中面的位移。

利用上述假定，板的全部应力和应变分量都可用板的挠度w表示。取板的中面为xy面，z轴垂直于中面，如图10-1所示。由第1）个假定可知

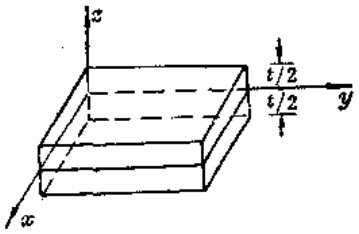


图 10-1

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}=0,$$

从而可得$w=w(x,y)$，也就是说，薄板中面每一法线上的所有各点都有相同的位移w。

由第2）假定，薄板弯曲后，板的法线与弹性曲面在x方向或y方向的切线都保持互相垂直，没有剪应变，即$\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$，也就是

$$\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

由上式可知

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial w}{\partial x}.\tag{a}$$

但由$w=w(x,y)$可知$\frac{\partial w}{\partial x}$和$\frac{\partial w}{\partial y}$都不随$z$而变，由式（$a$）对$z$积分，得

$$v=-z\frac{\partial w}{\partial y}+f_1(x,\ y),\quad u=-z\frac{\partial w}{\partial x}+f_2(x,\ y),\qquad (b)$$

式中$f_1(x,\ y)$和$f_2(x,\ y)$是任意函数。

由第3）假定，$(u)_{z=0}=(v)_{z=0}=0$，由式（b）可知，$f_1(x,\ y)=f_2(x,y)=0$，因而式（b）简化为

$$v=-z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u=-z\frac{\partial w}{\partial x}.$$

由上式可得到薄板内各点的不等于零的三个应变分量：

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\qquad (c)$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

在小变形的情况下，$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$和$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$分别代表薄板弹性曲面在$x$方向和$y$方向的曲率，而$-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$代表在$x$和$y$方向的扭率。这三者完全确定了板内各点的应变，因而可称为薄板的形变，用矩阵表示为

$$\{\Psi\}=\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]^T.\qquad (10\text{-}1)$$

由式（c），板内各点的应变$\{\varepsilon\}$可用薄板形变$\{\Psi\}$表示如下：

$$\{\varepsilon\}=z\{\Psi\}.\qquad (10\text{-}2)$$

由于薄板的法向应力σ_z可以忽略不计，对于各向同性材料板内各点的应变可用应力表示如下：

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E}-\mu\frac{\sigma_y}{E},\quad \varepsilon_y=-\mu\frac{\sigma_x}{E}+\frac{\sigma_y}{E},\quad \gamma_{xy}=\frac{2(1-\mu)}{E}\tau_{xy},$$

由以上三式解出应力，得到

$$\sigma_x=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y),\quad \sigma_y=\frac{E}{1-\mu^2}(\mu\varepsilon_x+\varepsilon_y),\quad \tau_{xy}=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy},$$

将式（c）代入，可用挠度w表示板内各点应力分量如下：

$$\sigma_x=-\frac{E}{1-\mu^2}z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),$$

$$\sigma_y=-\frac{E}{1-\mu^2}z\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\qquad (d)$$

$$\tau_{xy}=-\frac{E}{1+\mu}z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

现在计算由上述应力分量合成的薄板内力。如图10-2所示，从薄板取出一个微小六面体，它在x和y方向都有单位宽度。在垂直于x轴的横截面上，正应力是σ_x，由式（d）可知它正比于z，因此只能合成一个弯矩，把这个单位宽度上的弯矩记为M_x，可得到

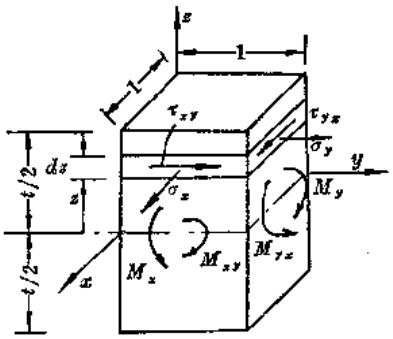


图 10-2

$$M_x=\int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_x\,dz.$$

把式（d）中σ_x的表达式代入，对z积分后，得

$$M_x=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\qquad(e)$$

同理，作用于此横截面上的剪应力τ_{xy}将合成扭矩

$$M_{xy}=\int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy}dz=-\frac{Et^3}{12(1+\mu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\qquad(f)$$

在垂直于y轴的横截面上，σ_y和τ_{yx}也分别合成弯矩和扭矩，即

$$M_y=\int_{-t/2}^{t/2} z\,\sigma_y\,dz=-\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\left(\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\qquad(g)$$

$$M_{yx}=\int_{-t/2}^{t/2} z\,\tau_{yx}\,dz=\int_{-t/2}^{t/2} z\tau_{xy}dz=M_{xy}.$$

把上述薄板内力合并起来，记为

$$\{M\}=\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}.\qquad(10\text{-}3)$$

把(e)、(f)、(g)三式代入，得到

$$\{M\}=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\-\mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\-(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}$$

$$=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\\mu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}.$$

利用式（10-1），上式可简写为

$$\{M\}=[D]\{\Psi\}.\qquad(10\text{-}4)$$

其中$[D]$是各向同性弹性薄板弯曲问题的弹性矩阵：

$$[D]=D\begin{bmatrix}1 & \mu & 0\\ \mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}. \tag{10-5}$$

式中

$$D=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}, \tag{10-6}$$

t 为板的厚度。

利用(e)(f)(g)三式，消去(d)式中的w，得到

$$\sigma_x=\frac{12M_x}{t^3}z,\quad \sigma_y=\frac{12M_y}{t^3}z,\quad \tau_{xy}=\frac{12M_{xy}}{t^3}z,$$

或简记为

$$\{\sigma\}=\frac{12}{t^3}z\{M\}. \tag{10-7}$$

上式表示了板内各点的应力与薄板内力之间的关系。

对于正交各向异性薄板，当x、y轴平行于弹性主方向时，其应力-应变关系为

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E_x}(\sigma_x-\mu_1\sigma_y),$$

$$\varepsilon_y=\frac{1}{E_y}(\sigma_y-\mu_2\sigma_x),$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\tau_{xy}.$$

弯矩-曲率关系为

$$\begin{aligned}M_x&=-D_x\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\ M_y&=-D_y\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu_1\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\ M_{xy}&=-2D_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned} \tag{10-8}$$

因此，其弹性矩阵为

$$[D]=\begin{bmatrix}D_x & D_1 & 0\\ D_1 & D_y & 0\\ 0 & 0 & D_{xy}\end{bmatrix}. \tag{10-9}$$

式中

$$D_x=\frac{E_x t^3}{12(1-\mu_1\mu_2)},\quad D_y=\frac{E_y t^3}{12(1-\mu_1\mu_2)},$$

$$D_{xy}=\frac{Gt^3}{12},\quad D_1=\mu_2 D_x. \tag{10-10}$$

如果x、y轴不平行于弹性主方向，则应进行转换，设局部坐标x'、y'平行于弹性主

方向，x'轴与x轴的夹角为ϕ，在整体坐标系（x、y）中的薄板弹性矩阵为

$$[D]=[\theta][D']{[\theta]}^{T}.$$

其中$[\theta]$是转换矩阵，见（2-19）式，$[D']$为局部坐标系中的弹性矩阵，见（10-9）式。

应用有限单元法求解薄板弯曲问题时，用一些离散的薄板单元代替原来的连续薄板，如图10-3所示。各单元只在结点互相连接，由于相邻单元之间要传递力矩，所以把结点当作刚接的。

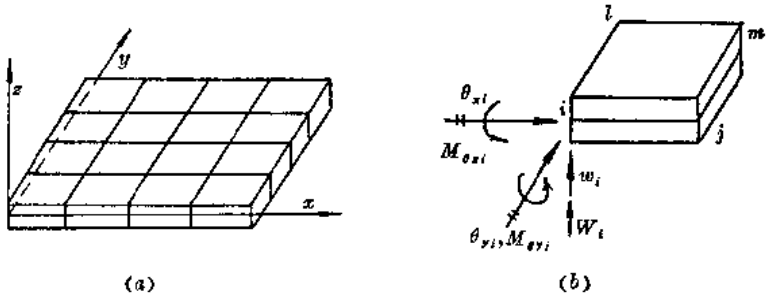


图 10-3　薄板划分为矩形单元

(a)薄板；(b)矩形单元

每一结点有三个位移分量，即挠度w，绕x轴的转角θ_x及绕y轴的转角θ_y。挠度w以沿z轴正向者为正，转角则以按右手螺旋法则标出的矢量沿坐标轴正向的为正，如图10-3（b）所示。在小变形的条件下，由几何关系有$\theta_x=\dfrac{\partial w}{\partial y}$，$\theta_y=-\dfrac{\partial w}{\partial x}$，因此结点$i$的位移可表示为

$$\{\delta_i\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)_i \\ -\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)_i \end{Bmatrix}.$$

相应的结点力为一个集中力和两个力矩：

$$\{F_i\}=\begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \end{Bmatrix}.$$

等效结点荷载也是一个集中力和两个力矩：

$$\{P_i\}=\begin{Bmatrix} Z_i \\ R_{\theta xi} \\ R_{\theta yi} \end{Bmatrix}.$$

按位移法求解时在每一结点，可建立三个平衡方程如下：

$$\sum_e W_i=Z_i,$$

$$\sum_e M_{\theta xi}=R_{\theta xi},$$

$$\sum_e M_{\theta yi}=R_{\theta yi}.$$

其中第一个式子表示沿w方向力的平衡，其余两个式子分别表示沿θ_x及θ_y方向力矩的平衡。利用虚功原理，可用结点位移表示结点力，因此上述结点平衡方程也可用结点位移表示，从而可用来求解结点位移，并进而求出各单元的内力。

必须注意，结点力矩$M_{\theta xi}$、$M_{\theta yi}$是集中力矩，其量纲为吨·米，而式（10-3）中的薄板内力M_x、M_y等是分布力矩，其量纲为吨·米/米。

§10-2 矩形薄板单元

矩形单元是薄板单元中比较简单的一种，因此首先加以介绍。如图10-4所示，单元的四边分别平行于x和y轴，平面尺寸为$2a\times 2b$。

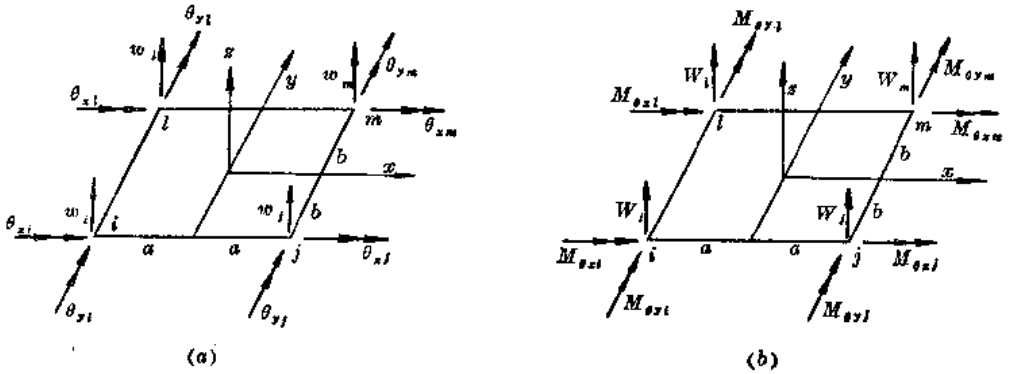


图 10-4 矩形单元的结点位移与结点力

一、位移函数

如上节所述，薄板的形变和内力完全决定于中面的挠度w。一个矩形薄板单元共有$4\times 3=12$个自由度，因此挠度w的表达式必须包含12个参数，现试取如下的四次多项式：

$$w=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta_6y^2+\beta_7x^3+\beta_8x^2y+\beta_9xy^2+\beta_{10}y^3+\beta_{11}x^3y+\beta_{12}xy^3. \qquad (a)$$

如图10-4所示，单元的结点位移为

$$\{\delta\}^e=[\delta_i\quad\delta_j\quad\delta_m\quad\delta_i]^T$$
$$=[w_i\quad\theta_{xi}\quad\theta_{yi}\quad w_j\quad\theta_{xj}\quad\theta_{yj}\quad w_m\quad\theta_{xm}\quad\theta_{ym}\quad w_i\quad\theta_{xl}\quad\theta_{yl}]^T \qquad (10-11)$$

以结点i的坐标$x=-a$，$y=-b$代入式（a）及其导数，可得

$$w_i=\beta_1-a\beta_2-b\beta_3+a^2\beta_4+ab\beta_5+b^2\beta_6-a^3\beta_7-a^2b\beta_8-ab^2\beta_9$$
$$-b^3\beta_{10}+a^3b\beta_{11}+ab^3\beta_{12},$$
$$\theta_{xi}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i=\beta_3-a\beta_6-2b\beta_6+a^2\beta_8+2ba\beta_8+3b^2\beta_{10}$$
$$-a^3\beta_{11}-3ab^2\beta_{12}, \qquad (b)$$
$$-\theta_{yi}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i=\beta_2-2a\beta_4-b\beta_5+3a^2\beta_7+2ab\beta_8+b^2\beta_9$$
$$-3a^2b\beta_{11}-b^3\beta_{12},$$

在结点 j，m，l，也各有与式（ b ）类似的三个方程。由这12个方程联立求解，得到β_1至β_{12}，再代入式（ a ），整理后得到

$$w=N_iw_i+N_{xi}\theta_{xi}+N_{yi}\theta_{yi}+N_jw_j+N_{xj}\theta_{xj}+N_{yj}\theta_{yj}$$
$$+N_mw_m+N_{xm}\theta_{xm}+N_{ym}\theta_{ym}+N_lw_l+N_{xl}\theta_{xl}+N_{yl}\theta_{yl}, \qquad (10\text{-}12)$$

其中的形函数N_i，N_{xi}，N_{yi}，$\cdots N_{yl}$等都是 x 和 y 的四次多项式：

$$[N_i,\ N_{xi},\ N_{yi}]=\frac{1}{16}X_1Y_1[X_1Y_1-X_2Y_2+2X_1X_2+2Y_1Y_2,$$
$$2bY_1Y_2,\ -2aX_1X_2],$$
$$[N_j,\ N_{xj},\ N_{yj}]=\frac{1}{16}X_2Y_1[X_2Y_1-X_1Y_2+2X_1X_2+2Y_1Y_2,$$
$$2bY_1Y_2,\ 2aX_1X_2], \qquad (10\text{-}13)$$
$$[N_m,\ N_{xm},\ N_{ym}]=\frac{1}{16}X_2Y_2[X_2Y_2-X_1Y_1+2X_1X_2+2Y_1Y_2,$$
$$-2bY_1Y_2,\ 2aX_1X_2],$$
$$[N_l,\ N_{xl},\ N_{yl}]=\frac{1}{16}X_1Y_2[X_1Y_2-X_2Y_1+2X_1X_2+2Y_1Y_2,$$
$$-2bY_1Y_2,\ -2aX_1X_2],$$

式中$X_1=1-\frac{x}{a}$，$X_2=1+\frac{x}{a}$，$Y_1=1-\frac{y}{b}$，$Y_2=1+\frac{y}{b}$，

不难验证，上述形函数具有下列特性：

在结点 i：$N_i=\frac{\partial N_{xi}}{\partial y}=-\frac{\partial N_{yi}}{\partial x}=1$，$N_{xi}=N_{yi}=\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial y}=0$，在其他各点，$N_i$，$N_{xi}$，$N_{yi}$及其一阶导数都等于零。$N_j$、$N_{xj}$…等其他形函数也具有类似性质。

位移函数（ 10-12 ）也可写成矩阵形式：

$$w=[N]\{\delta\}^e, \qquad (10\text{-}14)$$
$$[N]=[N_i\ \ N_{xi}\ \ N_{yi}\ \ N_j\ \ N_{xj}\ \ N_{yj}\ \ N_m\ \ N_{xm}\ \ N_{ym}\ \ N_l\ \ N_{xl}\ \ N_{yl}].$$

如上节所述，薄板的位移完全取决于中面的位移，而中面在 x 和 y 方向是不产生位移的，只在 z 方向产生挠度w。式（ a ）中的前三项$\beta_1+\beta_2x+\beta_3y$代表了中面即薄板的刚体位移，其中$\beta_1$代表了薄板在 z 方向的移动，$-\beta_2$及β_3分别代表薄板单元绕 y 轴及 x 轴的刚体转动。

将式（ a ）中的$\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta_6y^2$三项代入式（ 10-1 ），得到

$$-\frac{\partial^2w}{\partial x^2}=-2\beta_4,\quad -\frac{\partial^2w}{\partial y^2}=-2\beta_6,\quad -2\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}=-2\beta_5,$$

即得到薄板的三项常量形变。可见位移函数式（ a ）反映了薄板的刚体位移和常量形变。

下面再分析相邻单元之间位移的连续性。在薄板弯曲问题中，形变是挠度w的二阶导数，因此要求在相邻单元的接触面上，挠度w及其一阶导数都连续。采用位移函数（ a ）式，在相邻单元之间，挠度w是完全连续的，但它的导数不是完全连续的。以 ij 边为例，y 是常量，挠度w是 x 的三次多项式，所以w_i、w_j、$\theta_{yi}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$及$\theta_{yj}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j$

这四个结点位移完全可以确定它。由于以ij为共同边界的两个相邻单元在i、j两点具有相同的上述四个结点位移，两个单元的挠度函数在ij边上将是完全相同的一条三次曲线，从而保证了两单元之间挠度w的连续性。在ij边上，$\theta_x=\frac{\partial w}{\partial y}$也是$x$的三次式，也需要四个常数才可以完全确定它。但现在只有$\theta_{xi}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$和$\theta_{xj}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_j$两个结点位移可以部分地限制它，因此两相邻单元只是在结点i和j附近具有相同的θ_x，并不是在整个ij边上都具有相同的θ_x。不过实际计算结果表明，当单元逐步取小时，计算结果还是能够收敛于正确解答的。

二、刚度矩阵

将位移函数（10-12）式代入式（10-1），可得到薄板单元的形变如下

$$\{\Psi\}=[B]\{\delta\}^e. \tag{10-15}$$

式中$[B]$为3×12矩阵：

$$[B]=-\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x^2} & \cdots & \frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 N_i}{\partial x\partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x\partial y} & 2\frac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x\partial y} & \cdots & 2\frac{\partial^2 N_{yl}}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}. \tag{10-16}$$

再将式（10-15）代入式（10-4），得到单元内力如下：

$$\{M\}=[D][B]\{\delta\}^e. \tag{10-17}$$

现在来证明普遍公式（3-10）仍可用以计算薄板单元的刚度矩阵。设薄板单元产生了结点虚位移$\{\delta^*\}^e$，板内各点相应的虚应变是

$$\{\varepsilon^*\}=z\{\Psi^*\}=z[B]\{\delta^*\}^e. \tag{c}$$

单位体积内由应力$\{\sigma\}$所做的虚功为$\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}$，在整个单元内积分后，应等于结点力$\{F\}^e$所做的虚功，即

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iiint\{\varepsilon^*\}^T\{\sigma\}dzdxdy,$$

以式（c）及式（10-7）代入上式，得到

$$(\{\delta^*\}^e)^T\{F\}^e=\iint\left(\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}}\frac{12z^2}{t^3}dz\right)\{\Psi^*\}^T\{M\}dxdy$$

$$=\iint\{\Psi^*\}^T\{M\}dxdy.$$

再以$\{\Psi^*\}=[B]\{\delta^*\}^e$及（10-17）式代入上式，化简后得到

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e. \tag{10-18}$$

式中 $$[k]^e=\iint[B]^T[D][B]dxdy. \tag{10-19}$$

矩阵$[k]^e$是薄板单元的刚度矩阵，与普遍公式（3-10）是一致的。由式（10-13）求

出形函数的二阶导数，代入式（10-16）得到矩阵[B]，再代入式（10-19），经过积分，即可得到刚度矩阵[k]^{e}的显式。

三、结点荷载

单元各结点的等效荷载为

$$\{P\}^e=[P_i \quad P_j \quad P_m \quad P_l]^T. \tag{10-20}$$

设薄板表面受有法向分布荷载q，由虚功原理可推知，结点荷载可按下式计算

$$\{P\}^e=\iint[N]^T q\,dx\,dy. \tag{10-21}$$

式中[N]见式（10-14），当荷载均匀分布时，q为常量，由上式

$$\begin{aligned}\{P\}^e&=q\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[N]^T dx\,dy\\&=q\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}[N_i \quad N_{xi} \quad N_{yi} \quad N_j\cdots N_{yl}]^T dx\,dy.\end{aligned}$$

将式（10-13）代入上式，积分后得到

$$\{P\}^e=\begin{Bmatrix}Z_i\\R_{\theta xi}\\R_{\theta yi}\\Z_j\\R_{\theta xj}\\R_{\theta yj}\\Z_m\\R_{\theta xm}\\R_{\theta ym}\\Z_l\\R_{\theta xl}\\R_{\theta yl}\end{Bmatrix}=4qab\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{b}{12}\\-\frac{a}{12}\\\frac{1}{4}\\\frac{b}{12}\\\frac{a}{12}\\\frac{1}{4}\\-\frac{b}{12}\\\frac{a}{12}\\\frac{1}{4}\\-\frac{b}{12}\\-\frac{a}{12}\end{Bmatrix}. \tag{10-22}$$

由此可见，对于薄板单元，结点荷载除了法向荷载外，还有力矩荷载。

设薄板上、下表面的温度差为ΔT，中面的温度为零（图10-5），板内各点由于温度变化而产生的初应变为

$$\{\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x0}\\ \varepsilon_{y0}\\ \gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=z\begin{Bmatrix}\dfrac{\alpha\Delta T}{2}\\ \dfrac{\alpha\Delta T}{2}\\ 0\end{Bmatrix}.$$

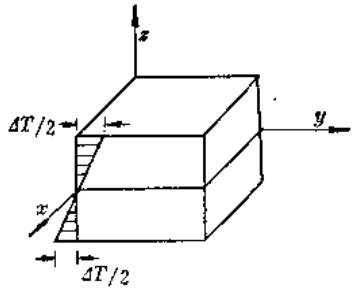


图 10-5　板内温度分布

与式（10-2）比较，可知温度变化引起的薄板初形变为

$$\{\Psi^0\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\alpha\Delta T}{2}\\ \dfrac{\alpha\Delta T}{2}\\ 0\end{Bmatrix}. \qquad (10\text{-}23)$$

此时板的内力应按下式计算：

$$\{M\}=[D](\{\Psi\}-\{\Psi^0\}). \qquad (10\text{-}24)$$

利用虚功原理，可推知温度变化产生的结点荷载应按下式计算：

$$\{P\}^e_{\Delta_0}=\iint[B]^T[D]\{\Psi^0\}dxdy. \qquad (10\text{-}25)$$

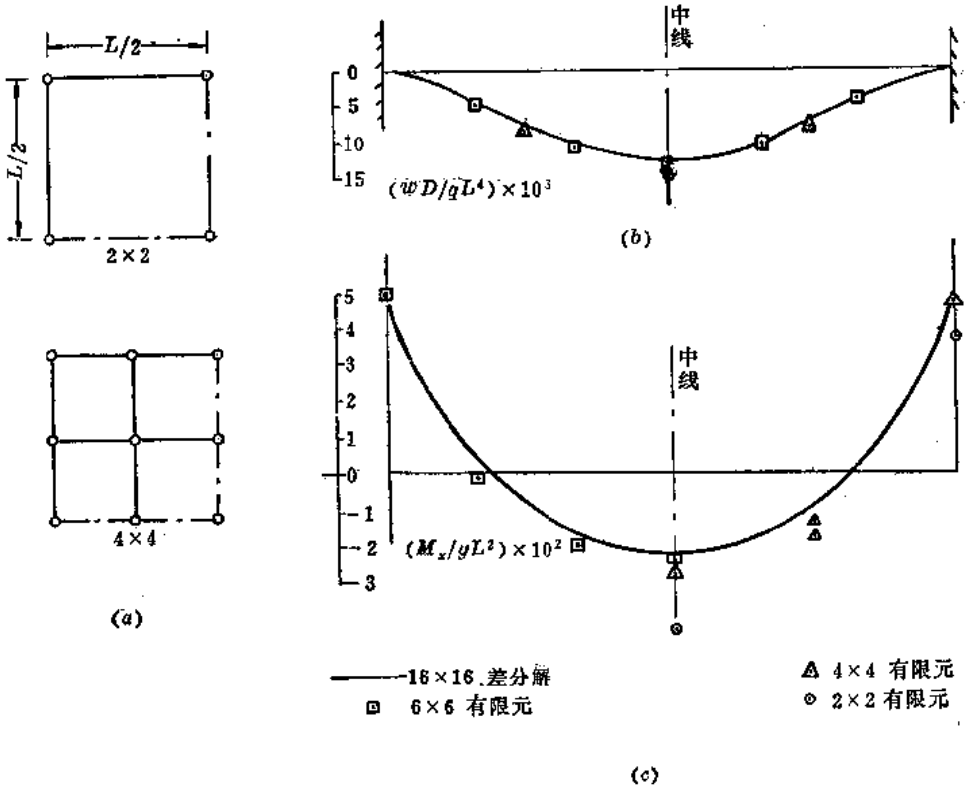


图 10-6　均布荷载 q 作用下的平夹边方板（矩形单元）

(a)计算网格；(b)挠度；(c)弯矩

四、算例

下面通过几个简单的计算实例说明用有限单元法计算薄板弯曲的收敛情况。

（1）沿四边支承的方形薄板

四边固定的方形薄板，计算网格如图10-6（a），在均布荷载作用下，沿中线的挠度w及弯矩M_x见图(b)及(c)。

承受均布荷载q或中央集中荷载P、四边平夹或四边简支的正方形薄板，用有限单元法求得的中心点挠度与精确解的比较见表10-1，其中L为板的边长，$D=\dfrac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$，计算中取$\mu=0.30$。

（2）在角点支承的方形薄板

承受均布荷载、在角点由柱子支承的正方形薄板，用有限单元法求出的挠度和弯矩与差分解的比较见表10-2。

由上述算例可见，用有限单元法计算弹性薄板，解答的收敛性是很好的。甚至在角点支承的薄板中，在角点附近存在着应力集中，计算出来的挠度和弯矩还是比较好的。

表 10-1　　**正方形薄板中点挠度**（矩形单元）

网　格	结点数	四边简支		四边平夹	
		均布荷载	集中荷载	均布荷载	集中荷载
		$w_{max}D/qL^4$	$w_{max}D/PL^2$	$w_{max}D/qL^4$	$w_{max}D/PL^2$
2×2	9	0.003446	0.013784	0.001480	0.005919
4×4	25	0.003939	0.012327	0.001403	0.006134
8×8	81	0.004033	0.011829	0.001304	0.005803
16×16	289	0.004056	0.011671	0.001275	0.005672
精确解	—	0.004062	0.01160	0.00126	0.00560

表 10-2　　**在角点支承的正方形薄板的挠度和弯矩**（矩形单元）

网　格	板中心		边中点	
	wD/qL^4	M/qL^2	wD/qL^4	M/qL^2
2×2	0.0176	0.095	0.0126	0.139
4×4	0.0232	0.108	0.0165	0.149
6×6	0.0244	0.109	0.0173	0.150
差分解	0.0265	0.109	0.0170	0.0140

§10-3　三角形薄板单元

三角形薄板单元，由于可以较好地适应复杂的边界形状，因而实用价值较大。采用较多的是三结点三角形单元，如图10-7所示。

一、位移函数

每一结点具有三个位移分量，即挠度 w，绕 x 轴的转角 θ_x 以及绕 y 轴的转角 θ_y。三个结点共有 9 个结点位移，因此所取的位移函数应包含 9 项，但一个完整的三次式包含10项如下：

$$\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta6y^2+\beta_7x^3+\beta_8x^2y+\beta_9xy^2+\beta_{10}y^3。$$

从上式必须删去一项，式中前三项代表刚体位移，其次三个二次项代表常量形变（曲率），为保证解答的收敛性都不能删去，只能从后面的四个三次项中删去一项，如从中任意删去一个，将使表达式失去对称性，如令 $\beta_8=\beta_9$，可保持式子的对称性，但在某些情况下，例如当三角形的二边平行于 x 和 y 轴时，求解式中系数将成为不可能。如采用面积坐标，可解决这个矛盾。

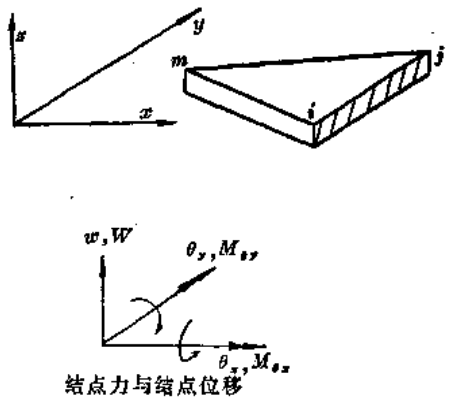


图 10-7　三角形薄板单元

面积坐标的一次、二次、三次式分别有以下各项：

一次式：L_i，L_j，L_m；　　（a）

二次式：L_iL_j，L_jL_m，L_mL_i，L_i^2，L_j^2，L_m^2；　　（b）

三次式：$L_iL_jL_m$，$L_i^2L_j$，$L_j^2L_m$，$L_m^2L_i$，

$L_iL_j^2$，$L_jL_m^2$，$L_mL_i^2$，L_i^3，L_j^3，L_m^3。　　（c）

由式（8-4）、（8-6）可知 x、y 的完整一次多项式可用面积坐标表示为

$$\beta_1L_i+\beta_2L_j+\beta_3L_m。$$

x，y 的完整二次多项式应至少包含（b）式中的三项及（a）和（b）二式中其他任取三项，共六项，例如

$$\beta_1L_i+\beta_2L_j+\beta_3L_m+\beta_4L_iL_j+\beta_5L_jL_m+\beta_6L_mL_i。$$

x，y 的完整三次多项式应至少包含式（c）中的四项和（a）（b）（c）三式中其他任取的六项，共十项。今取

$$L_i，\ L_j，\ L_m，\ L_i^2L_j，\ L_j^2L_m，\ L_m^2L_i，\ L_iL_j^2，\ L_jL_m^2，\ L_mL_i^2，\ L_iL_jL_m。\qquad（d）$$

上列十项的组合可作为位移函数。但结点位移只有 9 项，应设法减少一个独立项。式中最后一项在 i，j，m 三个结点都具有下列特性：

$$L_iL_jL_m=\frac{\partial}{\partial x}(L_iL_jL_m)=\frac{\partial}{\partial y}(L_iL_jL_m)=0，$$

今把它归并入其他三次项中，取位移函数为

$$w=\beta_1L_1+\beta_2L_2+\beta_3L_3+\beta_4(L_2^2L_1+cL_1L_2L_3)+\cdots+\beta_9(L_1^2L_2+cL_1L_2L_3)。$$

顾几　刘俊杰

经过一些代数运算后发现，为了满足薄板常形变条件，在上式中只能取 $c=1/2$，于是得到

$$w=\beta_1 L_1+\beta_2 L_2+\beta_3 L_3+\beta_4(L_2^2L_1+\frac{1}{2}L_1L_2L_3)$$

$$+\cdots+\beta_9(L_1^2L_2+\frac{1}{2}L_1L_2L_3)。\qquad(10\text{-}26)$$

在上式中代入相应的结点位移：

$$w_i,\ \theta_{xi}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i,\quad \theta_{yi}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i,\ \cdots$$

利用结点位移，求出式（10-26）中的系数β_1至β_9，再代入式（10-26），整理后得到位移函数如下：

$$\begin{aligned}w&=N_iw_i+N_{xi}\theta_{xi}+N_{yi}\theta_{yi}+N_jw_j+N_{xj}\theta_{xj}+N_{yj}\theta_{yj}\\&\quad+N_mw_m+N_{xm}\theta_{xm}+N_{ym}\theta_{ym}\\&=[N_iN_{xi}N_{yi}N_jN_{xj}N_{yj}N_mN_{xm}N_{ym}]\{\delta\}^e\\&=[N]\{\delta\}^e。\end{aligned}\qquad(10\text{-}27)$$

其中形函数为

$$\begin{aligned}N_i&=L_i+L_i^2L_j+L_i^2L_m-L_iL_j^2-L_iL_m^2,\\N_{xi}&=b_jL_i^2L_m-b_mL_i^2L_j+\frac{1}{2}(b_j-b_m)L_iL_jL_m,\\N_{yi}&=c_jL_i^2L_m-c_mL_i^2L_j+\frac{1}{2}(c_j-c_m)L_iL_jL_m。\end{aligned}\qquad(10\text{-}28)$$

$$(i,\ j,\ m)$$

利用式（8-8），可见上列形函数及其导数具有表10-3所列性质。

表 10-3

	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_i}{\partial x}$	N_{xi}	$\frac{\partial N_{xi}}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_{xi}}{\partial x}$	N_{yi}	$\frac{\partial N_{yi}}{\partial y}$	$-\frac{\partial N_{yi}}{\partial x}$
在结点 i	1	0	0	0	1	0	0	0	1
在结点 j,m	0	0	0	0	0	0	0	0	0

$$(i,\ j,\ m)$$

由上表所列性质，可知位移函数w满足下列条件：

在结点 i：$\quad w=w_i,\ \dfrac{\partial w}{\partial y}=\theta_{xi},\quad -\dfrac{\partial w}{\partial x}=\theta_{yi}。\quad(i,\ j,\ m)$

将式（10-28）代入位移函数（10-27）式，经过适当整理，可得

$$\begin{aligned}w&=w_iL_i+w_jL_j+w_mL_m+(c_m\theta_{yj}+b_m\theta_{xj})L_iL_j\\&\quad+(b_j\theta_{xi}+c_j\theta_{yi})L_iL_m+(b_i\theta_{xm}+c_i\theta_{ym})L_jL_m+\cdots。\end{aligned}$$

上式前六项是完整的二次多项式，因此位移函数可满足关于单元刚体位移和常形变的条件。另外，沿着单元的三条边界，挠度w将是边长s的三次函数，在每条边界的两个端点

（结点）上各有两个参数（w及$\partial w/\partial s$），每条边界共有四个相同参数，因此可保证相邻两单元沿着公共边界上具有相同的位移。单元边界上的法向斜率$\partial w/\partial n$也是边长的三次函数，但只在两个结点上有相同的斜率，只能部分地控制相邻单元的法向斜率，不能完全保证法向斜率的连续。

二、刚度矩阵与结点荷载

将位移函数（10-27）式代入式（10-1），也可得到单元形变$\{\Psi\}=[B]\{\delta\}^e$，式中$[B]$是3×9矩阵：

$$[B]=-\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{xi}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 N_{yi}}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{ym}}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 N_i}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{xi}}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 N_{yi}}{\partial y^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 N_{ym}}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 N_i}{\partial x\partial y} & \dfrac{2\partial^2 N_{xi}}{\partial x\partial y} & \dfrac{2\partial^2 N_{yi}}{\partial x\partial y} & \cdots & \dfrac{2\partial^2 N_{ym}}{\partial x\partial y} \end{bmatrix}. \qquad (e)$$

再由式（10-4），可得到单元内力：$\{M\}=[D][B]\{\delta\}^e$，刚度矩阵仍由式（10-19）计算。利用面积坐标的积分公式（8-9），刚度矩阵易于用显式表示。但式子较长，实际上采用数值积分也很方便，由于被积函数是二次式，采用表8-1中三点积分公式可得到精确结果。

利用面积坐标的积分公式，由式（10-21）易于求出结点荷载。当薄板单元承受均布法向荷载q时，结点荷载为

$$\{P\}^e=[P_i \quad P_j \quad P_m]^T$$
$$=qA\left[\frac{1}{3},\ \frac{b_j-b_m}{24},\ \frac{c_j-c_m}{24},\ \frac{1}{3},\ \frac{b_m-b_i}{24},\ \frac{c_m-c_i}{24},\ \frac{1}{3},\ \frac{b_i-b_j}{24},\ \frac{c_i-c_j}{24}\right]^T.$$

式中A为三角形面积。

三、曲率修匀

上述三角形薄板单元，由于计算比较简单，到目前为止，仍被广泛应用。但相邻单元的法向斜率不是完全协调的，只有计算网格比较规则时，计算结果能收敛于正确解答。对于某些不规则网格，其计算精度是很差的，为了克服这个缺点，文献[73]建议对单元曲率进行修匀。

为了对单元曲率进行修匀，只要对形函数的导数进行修匀就可以了，即用修匀过的导数去代替原来的导数，形函数N_i的二阶导数N_i''在角点上往往有奇异性，只有采用高阶数值积分才能有较好的收敛性。为了得到计算既简单，收敛性又好的单元，可用修匀后的导数$\bar{N}_i''$代替N_i''，$\bar{N}_i''$是坐标的线性函数，利用最小二乘法，可确定导数$\bar{N}_i''$的系数α_j如下：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j}\left[\int_A (N_i''-\bar{N}_i'')^2 dA\right]=0. \qquad (10\text{-}29)$$

由于$\bar{N}_i''$是线性多项式，在计算单元刚度矩阵时只要采用三个积分点，三个边中点。

四、算例

（1）集中及分布荷载作用下的方板

四边简支及四边固定的方板，承受集中荷重P或分布荷载q。由于对称，只须取出四分之一。集中荷载作用于板的中心。计算网格见图10-8。算得的板中心挠度w_0见表10-4。在均布荷载作用下板中心线上各单元的M_x分布见图10-9。由此图可见，修匀单元给出的M_x与理论解符合得比较好。

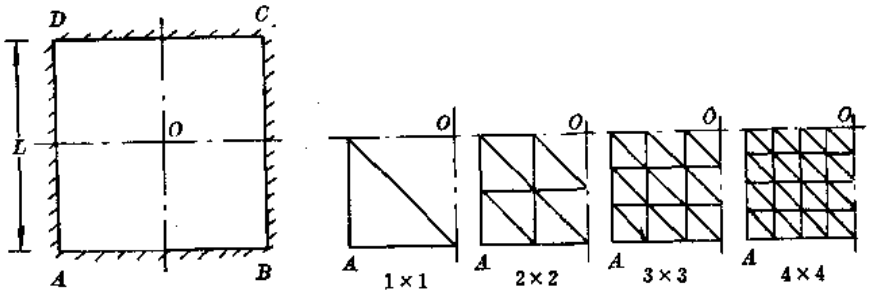


图 10-8 集中荷载及分布荷载作用下的方板

表 10-4 简支边及固定边方板的k值(三角形位移单元)

	集中荷载P作用于板中心 $k=Dw_0/PL^2$				分布荷载q $k=Dw_0/qL^4$			
	简支边		固定边		简支边		固定边	
	修匀	未修匀	修匀	未修匀	修匀	未修匀	修匀	未修匀
1×1	0.00984	0.01302	0.00261	0.00521	0.00400	—	0.000870	0.00172
2×2	0.01088	0.01176	0.00503	0.00589	0.00402	0.00413	0.001234	0.00157
3×3	0.01126	0.01211	0.00533	0.00583	0.00404	0.00413	0.001248	0.00135
4×4	0.01141	0.01165	0.00545	0.00572	0.00405	0.00405	0.001256	0.00134
准确k	0.01160		0.00560		0.00406		0.00126	

（2）方板的扭曲

如图10-10所示的方板，在ABD三个角点简支，在角点C承受集中荷载$P=5kg$。根据薄板理论的精确解，板内弯矩是

$$M_x=0,\ M_y=0,\ M_{xy}=2.5kg\text{-}cm/cm.$$

这个问题可用来检验板单元能否准确地反映板的常应力状态。计算网格见图10-10。计算结果表明，对于规则的网格，即使采用1×1粗网格，修匀和未修匀的单元都能给出准确的应力值。对于不规则的网格，未修匀的单元即使采用密集网格，也不能给出正确的应力值。对于图10-10(d)和(e)所示网格，未修匀单元给出的单元形心应力值的误差分别是12.2%和30.0%，即使采用结点平均值，也不能减小误差。值得注意的是，图10-10(e)是(c)网格的进一步加密，粗网格(c)给出了正确应力值，而加密网格(e)给出的应力误差却达到

30%这种现象当然是不正常的，对于任何实际问题，即使采用非常密集的网格，只要网格是不规则的，如不修匀，即使在应力比较均匀的区域也会给出相当大的误差。经过修匀以后，对于图10-10所示的所有网格，都得到准确的应力值。

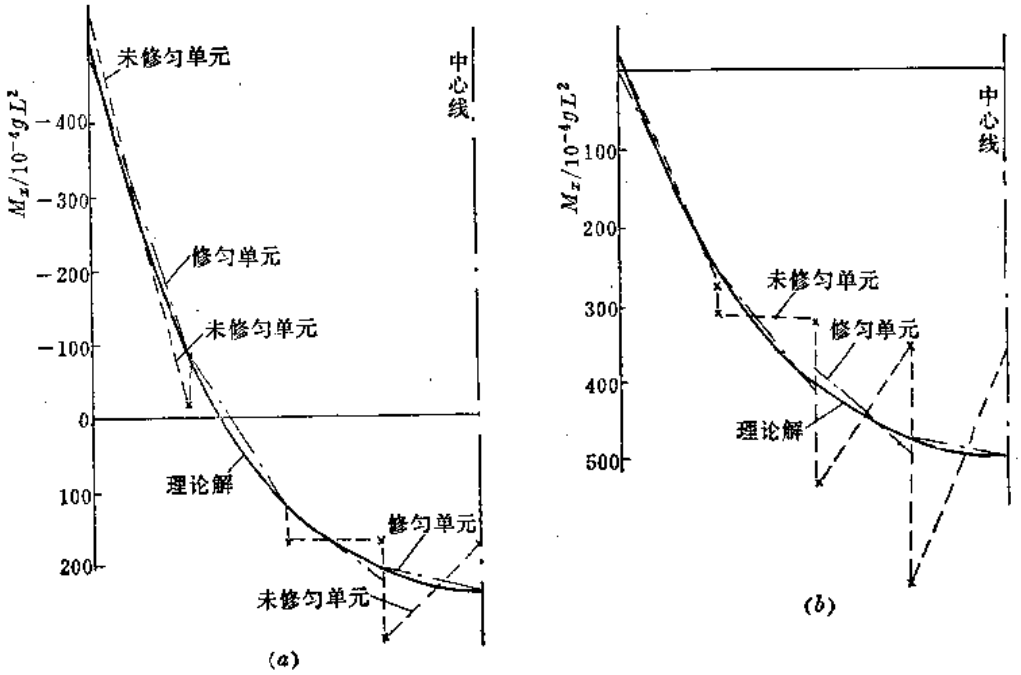


图 10-9　在分布荷载作用下方板中心线上各单元的M_x分布
(a)四边固定方板；(b)四边简支方板

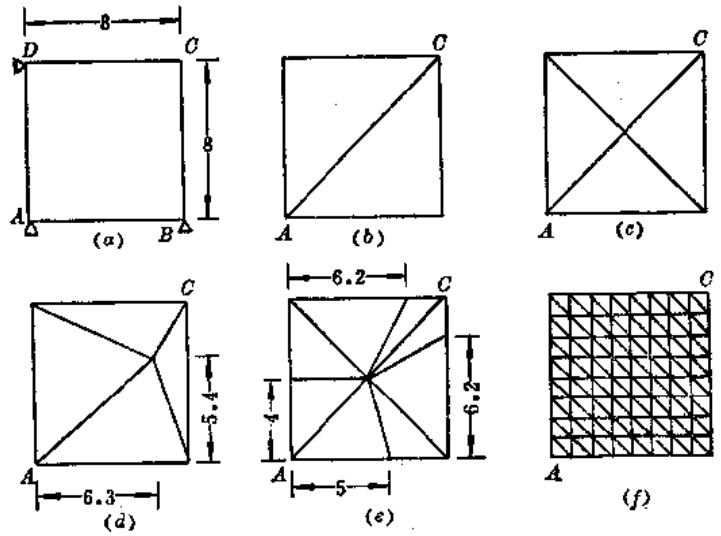


图 10-10　方板扭曲的计算网格

§10-4 薄板弯曲的能量关系

薄板弯曲问题中的曲率$\{\Psi\}$和弯矩$\{M\}$分别相当于平面应力问题中的应变$\{\varepsilon\}$和应力$\{\sigma\}$。利用这种比拟关系，可以写出薄板弯曲的能量表达式。

一、势能

与式（3-33）、（3-37）相似，薄板弯曲的势能可由下式计算

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\int_A\{\Psi\}^T[D]\{\Psi\}dA-V\ . \tag{10-30}$$

其中$\{\Psi\}$见式（10-1），$[D]$见式（10-5），V是外力势，设作用于薄板表面的法向分布荷载是q，它的势为

$$\int_A qwdA\ .$$

设在边界S_σ上给定线荷载$\bar{Q}$、法向力矩$\bar{M}_n$及扭矩$\bar{M}_s$，这些外力的势是

$$\int_{S_\sigma}(\bar{Q}w+\bar{M}_n\theta_n+\bar{M}_s\theta_s)ds.$$

其中w、θ_n、θ_s分别是边界S_σ上的挠度、转角和扭角。

在结点i，结点力的势为

$$W_iw_i+M_{xi}\theta_{xi}+M_{yi}\theta_{yi}=\{\delta_i\}^T\{F_i\}.$$

归并以上各项，得到薄板的外力势如下：

$$V=\int_A qwdA+\int_{S_\sigma}(\bar{Q}w+\bar{M}_n\vartheta_n+\bar{M}_s\theta_s)ds+\Sigma\{\delta_i\}^T\{F_i\}\ . \tag{10-31}$$

在势能表达式中包含了w的二阶导数，因此在离散化后要求在公共边界上w的一阶导数连续。但在构造位移函数时要做到这一点是很不容易的。正是由于这个原因，在薄板弯曲问题中，那些只要求w本身连续而不要求其导数连续的变分原理颇受人注意。

把 $w=[N]\{\delta\}^e$及$\{\Psi\}=[B]\{\delta\}^e$代入式（10-30），得到

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e-V\ . \tag{10-32}$$

式中

$$[k]=\int_A[B]^T[D][B]dA\ .$$

$[k]$即单元刚度矩阵。根据最小势能原理，$\dfrac{\partial\Pi_p}{\partial\{\delta\}}=0$，由此可得到结点力及结点荷载算式。

二、余能

在第三章，余能是用应力$\{\sigma\}$表示的。根据前述类比关系，可以写出薄板余能的表达式如下：

$$\Pi_c=\frac{1}{2}\int_A\{M\}^T[D]^{-1}\{M\}dA-V^* \quad (10\text{-}33)$$

对于分布荷载和边缘荷载：

$$V^*=\int_A q\bar{w}dA+\int_{S_u}(Q\bar{w}+M_n\bar{\theta}_n+M_s\bar{\theta}_s)ds \quad (10\text{-}34)$$

式中$\bar{w}$、$\bar{\theta}_n$、$\bar{\theta}_s$是在边界S_u上给定的挠度、转角和扭角（在剩下的边界S_σ上，给定荷载）。

对于各向同性数，由式（10-5）求逆，得到

$$[D]^{-1}=\frac{12}{Et^3}\begin{bmatrix}1 & -\mu & 0\\ -\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2(1+\mu)\end{bmatrix}. \quad (10\text{-}35)$$

三、混合能量

一般情况下的赖斯纳泛函已在本书第三章给出，利用类比关系，薄板弯曲问题的赖斯纳泛函可由下式给出：

$$\Pi_R=\int_A\{M\}^T\{\Psi\}dA-U^*-V-V^*. \quad (10\text{-}36)$$

其中 $U^*=\frac{1}{2}\int_A\{M\}^T[D]^{-1}\{M\}dA$是余应变能，

V由式（10-31）计算，V^*由式（10-34）计算，但由于选用的位移函数w不一定与给定的位移$\bar{w}$吻合，式中的位移项应代以$(w-\bar{w})$、$\left(\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial n}\right)$及$\left(\frac{\partial w}{\partial s}-\frac{\partial\bar{w}}{\partial s}\right)$。

由Π_R表达式（10-36）可知，对$\{M\}$不要求连续。由于式中$\{\Psi\}$包含了w的二阶导数，所以要求w及其一阶导数连续，这点与最小势能原理一样。对位移函数的要求并未降低。为了降低对位移函数的要求，赫尔曼对式（10-36）进行分部积分，得到赫尔曼（Herrmann）泛函如下：

$$\Pi_H=\int_A\{M'\}^T\{w'\}dA-U^*-\int_S\{M_s\}^T\left\{\frac{\partial w}{\partial s}\right\}ds-V-V^*. \quad (10\text{-}37)$$

其中S是整个边界，而且

$$\{M'\}^T\{w'\}=\frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}.$$

把U^*、V^*、V的表达式代入式（10-37），得到赫尔曼泛函：

$$\Pi_H=\int_A\left(\{M'\}^T\{w'\}-\frac{1}{2}\{M\}^T[D]^{-1}\{M\}-qw\right)dA$$
$$-\int_S\{M_s\}^T\left\{\frac{\partial w}{\partial s}\right\}ds-\int_{S_\sigma}\bar{Q}_n w ds-\int_{S_u}M_n\bar{\theta}_n ds. \quad (10\text{-}38)$$

上式右端的三个线积分中，第一个线积分是沿单元的整个边界进行的，第二个线积分是沿给定剪力$\bar{Q}_n$的边界S_σ进行的，第三个线积分是沿给定法向转角$\bar{\theta}_n$的边界S_u进行的。

设单元的挠度为

$$w=[N_w]\{\delta\}.$$

则单元内部的斜率为

$$\{w'\}=[N'_w]\{\delta\}.$$

在单元边界S上

$$\left\{\frac{\partial w}{\partial s}\right\}=[Z]\{\delta\}.$$

同样，用下式表示单元中的弯矩

$$\{M\}=[N_m]\{\widetilde{M}\}.$$

式中 $\{\widetilde{M}\}$表示结点弯矩。在单元内部

$$\{M'\}=[N'_m]\{\widetilde{M}\}.$$

在边界上

$$M_s=[\rho]\{\widetilde{M}\}.$$

把以上各式代入式（10-38），得到

$$\Pi_H=\{\widetilde{M}\}^T[\alpha_2]\{\delta\}-\frac{1}{2}\{\widetilde{M}\}^T[\alpha_1]\{\widetilde{M}\}-\{\delta\}^T\{\overline{M}\}-\{\widetilde{M}\}^T\{\overline{\delta}\}. \quad (10\text{-}39)$$

其中

$$[\alpha_1]=\int_A[N_m]^T[D]^{-1}[N_m]dA, \quad (10\text{-}40)$$

$$[\alpha_2]=\int_A[N'_m]^T[N'_w]dA-\int_S[\rho]^T[Z]ds. \quad (10\text{-}41)$$

$\{\overline{M}\}$和$\{\overline{\delta}\}$来自V和V^*两项，是由单元表面和边界上给定的荷载和位移而产生的。

由泛函Π_H取驻值，$\dfrac{\partial\Pi_H}{\partial\{\widetilde{M}\}}=0$，$\dfrac{\partial\Pi_H}{\partial\{\delta\}}=0$，得到

$$[\alpha_2]\{\delta\}-[\alpha_1]\{\widetilde{M}\}=\{\overline{\delta}\}, \quad (10\text{-}42a)$$

$$[\alpha_2]^T\{\widetilde{M}\}=\{\overline{M}\}. \quad (10\text{-}42b)$$

即

$$\begin{bmatrix}-\alpha_1 & \alpha_2\\ \alpha_2^T & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\widetilde{M}\\ \delta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\overline{\delta}\\ \overline{M}\end{Bmatrix}. \quad (10\text{-}43)$$

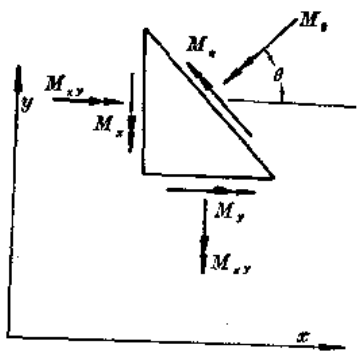


图 10-11

在目前情况下，结点位移$\{\delta\}$和结点弯矩$\{\widetilde{M}\}$都将作为未知量进入上述方程组，所以称为混合法。赫尔曼泛函Π_H只要求w和M_n在相邻单元的公共边界上连续，其中M_n是单元边界法线方向弯矩。由于不要求w的导数连续，构造这种单元位移函数比较容易。

参照图10-11，弯矩M_n和扭矩M_s可由下式计算：

$$M_n = M_x\cos^2\theta + M_y\sin^2\theta + M_{xy}\sin 2\theta, \qquad (10\text{-}44a)$$

$$M_s = (M_y - M_x)\sin\theta\cos\theta + M_{xy}\cos 2\theta. \qquad (10\text{-}44b)$$

§10-5 常弯矩三角形混合薄板单元

文献[68]曾提出一种三角形薄板混合单元（图 10-12）。单元中的弯矩是常量，单元的挠度w是坐标x、y的线性函数。每个单元有 6 个结点，三个角点和三个边中点。结点位移是三个角点的挠度：

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}.$$

结点力是三个边中点的法向弯矩：

$$\{\widetilde{M}\} = \begin{Bmatrix} M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{Bmatrix}.$$

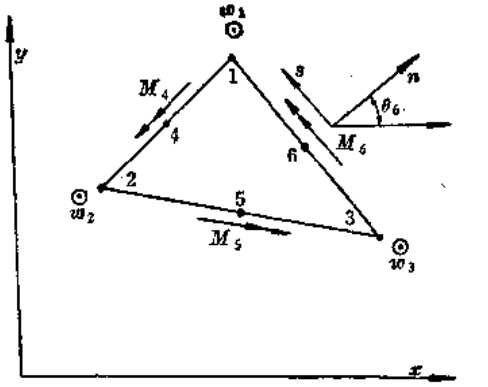


图 10-12 常弯矩混合单元的结点位移和结点力

单元内部挠度可表示如下

$$w = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]\begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = [N_w]\{\delta\}. \qquad (10\text{-}45)$$

其中L_1、L_2、L_3是三角形的面积坐标。

单元中弯矩可表示为

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{Bmatrix} = \{\beta\}. \qquad (10\text{-}46)$$

其中β_1、β_2、β_3是常数，现在我们设法用结点弯矩$\{\widetilde{M}\}$来表示这些常数。先用β_1、β_2、β_3表示各边中点法向弯矩M_4、M_5、M_6，由式（10-44a）得到

$$\{\widetilde{M}\} = [\theta]\{\beta\}. \qquad (10\text{-}47)$$

式中

$$[\theta] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_4 & \sin^2\theta_4 & \sin 2\theta_4 \\ \cos^2\theta_5 & \sin^2\theta_5 & \sin 2\theta_5 \\ \cos^2\theta_6 & \sin^2\theta_6 & \sin 2\theta_6 \end{bmatrix}.$$

由（10-47）求逆，得到

$$\{M\} = \{\beta\} = [N_m]\{\widetilde{M}\}. \qquad (10\text{-}48)$$

其中

$$[N_m] = [\theta]^{-1}.$$

由式（10-44 b）可求得边界上的扭矩如下：

$$\{M_s\}=\begin{Bmatrix} M_{s4} \\ M_{s5} \\ M_{s6} \end{Bmatrix}=[\lambda]\{\beta\}.$$

其中

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} -\sin\theta_4\cos\theta_4 & \sin\theta_4\cos\theta_4 & \cos2\theta_4 \\ -\sin\theta_5\cos\theta_5 & \sin\theta_5\cos\theta_5 & \cos2\theta_5 \\ -\sin\theta_6\cos\theta_6 & \sin\theta_6\cos\theta_6 & \cos2\theta_6 \end{bmatrix}.$$

再把$\{\beta\}=[\theta]^{-1}\{\widetilde{M}\}$代入，得到

$$\{M_s\}=[\rho]\{\widetilde{M}\}.$$

式中

$$[\rho]=[\lambda][\theta]^{-1}.$$

将 $w=[N_w]\{\delta\}$沿单元边界切线方向求导数，即可得到

$$\left\{\frac{\partial w}{\partial s}\right\}=\begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_4 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_5 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_6 \end{Bmatrix}=[Z]\{\delta\}.$$

矩阵$[N_m]$中各元素都是常量，所以$[N'_m]=[0]$，由（10-40）、（10-41）二式，可求得

$$[\alpha_1]=\int_A[N_m]^T[D]^{-1}[N_m]dA,$$

$$[\alpha_2]=-\int_A[\rho]^T[Z]dA.$$

把$[\alpha_1][\alpha_2]$代入式（10-43），再对各单元加以组合，即得到一个方程组，从而可解出各结点参数，由（10-48）式可求出单元弯矩。

§10-6 线性弯矩三角形混合薄板单元

为了提高混合单元的计算精度，可采用高阶函数代表单元的弯矩和位移场。文献[74]假定单元中的弯矩是线性变化的，挠度是二次变化的，每个单元取6个结点，三个角点和三个边中点（图10-13），单元挠度取为

$$w=[1\ x\ y\ x^2\ xy\ y^2]\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_6 \end{Bmatrix}=[l]\{a\}. \qquad (10\text{-}49)$$

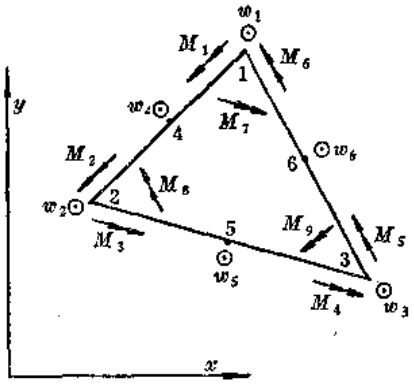


图 10-13 线性弯矩混合单元的结点位移和结点力

单元中弯矩取为

$$\{M\}=\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1&x&y&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&x&y&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&x&y\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\\vdots\\b_9\end{Bmatrix}=[d]\{b\}. \quad (10\text{-}50)$$

每个单元对泛函Π_H的贡献都可用参数$\{a\}$和$\{b\}$表示，首先，余应变能可表为

$$U^*=\frac{1}{2}\int_A\{M\}^T[D]^{-1}\{M\}dA=\frac{1}{2}\{b\}^T[f]\{b\}. \quad (10\text{-}51)$$

其中

$$[f]=\frac{12}{Et^3}\int_A[d]^T\begin{bmatrix}1&-\mu&0\\-\mu&1&0\\0&0&2(1+\mu)\end{bmatrix}[d]dA$$

$$=\frac{12}{Et^3}\begin{bmatrix}X&-\mu X&0\\-\mu X&X&0\\0&0&2(1+\mu)X\end{bmatrix}.$$

而

$$X=\int_A\begin{bmatrix}1&x&y\\x&x^2&xy\\y&xy&y^2\end{bmatrix}dA.$$

其次

$$\int_A\{M'\}^T\{w'\}dA=\{a\}^T[h]\{b\}. \quad (10\text{-}52)$$

式中$[h]$为如下6×9矩阵：

$$[h]=\int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2x \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 & x & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2y & 0 & 2y & 0 \end{bmatrix} dA.$$

弯矩参数$\{b\}$先用单元三个角点的三个弯矩M_x、M_y、M_{xy}表示。然后交换为角点的平行于三角形的三边的法向弯矩（参阅图10-13）M_1、$M_2 \cdots M_9$：

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_9 \\ M_7 & M_3 & M_4 \\ M_6 & M_8 & M_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta_4 & \sin^2\theta_4 & \sin 2\theta_4 \\ \cos^2\theta_5 & \sin^2\theta_5 & \sin 2\theta_5 \\ \cos^2\theta_6 & \sin^2\theta_6 & \sin 2\theta_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{(1)} & M_x^{(2)} & M_x^{(3)} \\ M_y^{(1)} & M_y^{(2)} & M_y^{(3)} \\ M_{xy}^{(1)} & M_{xy}^{(2)} & M_{yx}^{(3)} \end{bmatrix}. \tag{10-53}$$

式中$M_x^{(i)}$表示第i点的M_x。

挠度参数$\{a\}$可用三角形的三个角点和三个边中点的挠度w_1、$w_2 \cdots w_6$表示。

泛函Π_R中的线积分可计算如下：

$$\int_s \{M_s\}^T \left\{\frac{\partial w}{\partial s}\right\} ds = \{\delta\}^T [c] \{M_s\}. \tag{10-54}$$

式中

$$\{M_s\} = [M_{12}^{(1)} \ M_{23}^{(1)} \ M_{31}^{(1)} \ M_{12}^{(2)} \ M_{23}^{(2)} \ M_{31}^{(2)} \ M_{12}^{(3)} \ M_{23}^{(3)} \ M_{31}^{(3)}]^T,$$

$$\{\delta\} = [w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ w_5 \ w_6]^T,$$

$$[c] = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -5 & 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & -5 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

其中$M_{pq}^{(i)}$表示在结点i的沿着pq边的扭矩，在结点i的三个扭矩可用该点的M_x、M_y、M_{xy}表示如下：

$$\begin{Bmatrix} M_{12}^{(i)} \\ M_{23}^{(i)} \\ M_{31}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_4\cos\theta_4 & \sin\theta_4\cos\theta_4 & \cos 2\theta_4 \\ -\sin\theta_5\cos\theta_5 & \sin\theta_5\cos\theta_5 & \cos 2\theta_5 \\ -\sin\theta_6\cos\theta_6 & \sin\theta_6\cos\theta_6 & \cos 2\theta_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x^{(i)} \\ M_y^{(i)} \\ M_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}.$$

利用式（10-44），可用三角形的法向弯矩M_1、$M_2 \cdots M_9$表示$M_x^{(i)}$、$M_y^{(i)}$、$M_{xy}^{(i)}$。

由于法向弯矩M_7、M_8、M_6与相邻单元的未知量无关，可以在单元分析阶段通过高斯消去法把它们消去，这样，单元自由度可从15个减少到12个，即w_1，w_2，$\cdots w_6$及M_1，M_2，$\cdots M_6$。

对于图10-14所示四种情况的方板，用上述两种混合单元进行了计算[74]。由于对称，只须取出八分之一。板中心最大挠度w_1～w_4及图示弯矩M_1～M_4的计算结果见表 10-5。当误差<0.5%时，即用零表示。由此表可见，常弯矩混合单元 8 × 8 网格的计算精度与线性应变 2 × 2 网格相当。

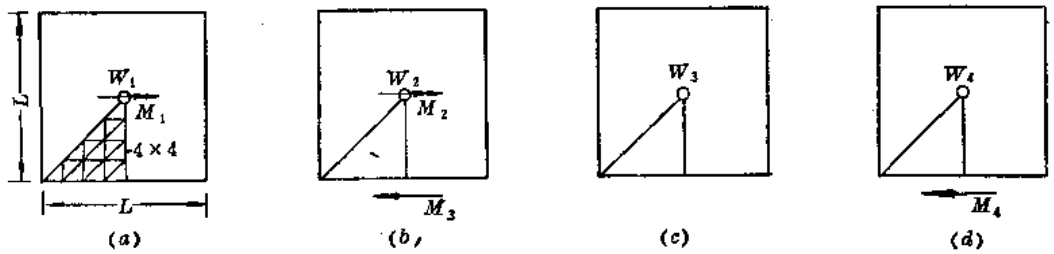


图 10-14　用三角形混合单元计算方板

(a)四边简支，均布荷载；(b)四边固定，均布荷载；(c)四边简支，集中荷载；(d)四边固定，集中荷载

表 10-5　　三角形混合单元计算成果

单元	网格	挠度计算误差(%)					弯矩计算误差(%)				
		w_1	w_2	w_3	w_4	平均	M_1	M_2	M_3	M_4	平均
常弯矩单元	4×4	+7	+27	+16	+38	+22	−2	+1	−14	−17	−8
	8×8	+2	+8	+5	+12	+7	0	0	−6	−8	−3
线性弯矩单元	2×2	0	+1	+5	+10	+4	+5	+6	+4	−1	+4
	4×4	0	0	+1	+2	+1	+1	+1	+2	+1	+1

§10-7　弹性基础上的板

弹性基础板的特点是，板的表面与基础贴合。这是一种混合结构，计算的关键在于正确地决定基础反力。

一、文克尔基础上的板

假定基础反力与板的挠度成正比，即

$$p=\beta w。\qquad (a)$$

式中p为基础反力，β为基础的抗力系数，w是基础表面的沉陷，等于板的挠度。

由式(10-14)，$w=[N]\{\delta\}^e$，代入式(a)，得到

$$p'=\beta[N]\{\delta\}^e。\qquad (b)$$

式中$\{\delta\}^e$是板单元结点位移。

现在考虑板单元的平衡。在板的上表面作用着法向荷载q，板的下表面作用着基础反力p，根据式(10-21)，单元的结点平衡条件可写成：

$$[k]\{\delta\}^e=\iint[N]^T q\,dx\,dy-\iint[N]^T p\,dx\,dy$$

$$=\iint[N]^T q\,dx\,dy-\beta\iint[N]^T[N]dx\,dy\{\delta\}^e.$$

上式右端第二项代表基础反力的影响。由于p的方向与w的方向正好相反，所以取负号。把基础反力项移至上式的左边，得到

$$([k]+[k_0])\{\delta\}^e=\{P\}^e. \qquad (c)$$

式中

$$[k_0]=\beta\iint[N]^T[N]\,dx\,dy. \qquad (10\text{-}55)$$

$\{P\}^e$是结点荷载。由式（c）可见，在计算文克尔基础上的板时，只须用$[k]+[k_0]$代替原来的单元刚度矩阵就可以了。$[k_0]$由式（10-55）计算。$[k]$仍由式（10-19）计算。文克尔假定使计算得到简化，但是它假定基础是互相独立的弹簧，与实际情况出入较大。

二、弹性半空间上的板

把基础看成是弹性半空间，如图10-15所示，薄板用矩形单元离散，板的每个结点用链杆与基础的相应的点相连接。假定每个链杆所分摊的面积（如图10-15阴影部分）上基础反力是均匀分布的，从而可计算基础的位移。

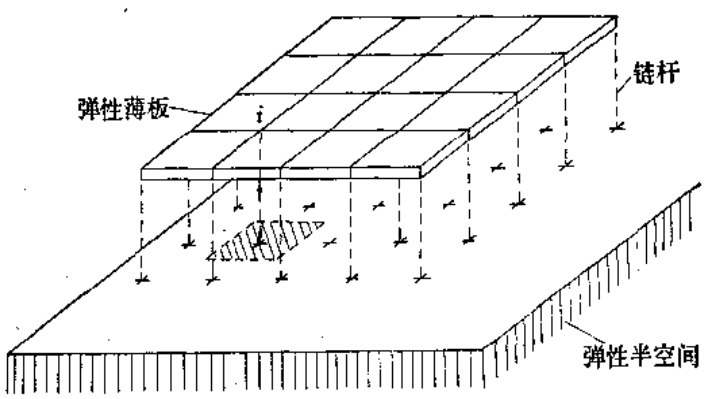


图 10-15

设在结点i，链杆所受的力为P_i，假定它均匀分布在面积$a\times b$上，因此在结点i周围，基础所受的压力为$\frac{P_i}{ab}$（图10-16）。

根据包辛涅斯克公式，作用在弹性半空间表面上 i 点的集中力F，在表面上另一点 j 所引起的垂直变位为

$$w_{ji}=\frac{F(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 r}. \qquad (10\text{-}56)$$

式中 E_0、μ_0分别是基础的弹性模量和泊松比，r是点i与点j之间的距离。

由式（10-56）在矩形区域$a\times b$内积分，可以得到在均布荷载$\frac{P_i}{ab}$作用下，矩形中心的垂直变位如下：

$$w_{ii}=2\int_{\xi=0}^{\xi=\frac{a}{2}}2\int_{\eta=0}^{\eta=\frac{b}{2}}\frac{P_i(1-\mu_0^2)d\xi d\eta}{ab\pi E_0\sqrt{\xi^2+\eta^2}}$$

$$=\frac{P_i(1-\mu_0^2)}{a\pi E_0}f_{ii}. \qquad (10\text{-}57)$$

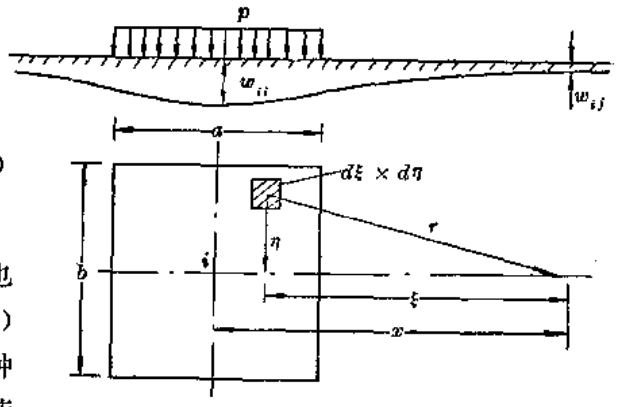


图 10-16

系数f_{ii}的数值见表10-6。

如果j点在加荷区域之外，当然也可以进行积分，但这时直接用式（10-56）计算，已可得到足够准确的变位。在这种情况下，F是作用于整个矩形区域的荷载，即P_i，而r是j点到i点的距离。在表10-7中列出了f_{ii}的准确值和近似值。由此表可见，即使对于$x=a$，近似计算的误差也只有4%，随着x的增加，误差迅速减小。

表 10-6　　系　数　f_{ii}

b/a	2/3	1	2	3	4	5
f_{ii}	4.265	3.525	2.406	1.867	1.543	1.322

表 10-7　　系　数　f_{ij}

x/a	1	2	3	4	5	6	8	10
准确值	1.038	0.505	0.333	0.251	0.200	0.167	0.125	0.100
近似值	1.000	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.125	0.100

在全部接触力$\{P\}=[P_1P_2\cdots P_n]^T$的作用下，基础表面的垂直变位可写成

$$\{w\}=\frac{(1-\mu_0^2)}{\pi E_0 a}[f]\{P\}. \qquad (10\text{-}58)$$

式中$[f]$是基础的柔度矩阵，它的对角线上的元素由式（10-57）计算，其他元素由式（10-56）计算。由上式求逆，可得到

$$\{P\}=\frac{\pi E_0 a}{(1-\mu_0^2)}[k_0]\{w\}. \qquad (10\text{-}59)$$

式中　$[k_0]=[f]^{-1}$。

在板的结点位移$\{\delta\}$中，除了垂直变位w外，还有角变位θ_x和θ_y。通常假定基础反力与基础表面的倾角无关，所以在$[k_0]$的元素之外，再填上一些零，即可得到基础反力如下：

$$\{P\}_f=[k_f]\{\delta\}.$$

设板所承受的外荷载是$\{P\}_q$，从其中减去基础反力$\{P\}_f$后，即得到板的有效荷载，即

$$\{P\}_q-\{P\}_f=[K]\{\delta\}.$$

移项后得到

$$([K]+[K_f])\{\delta\}=\{P\}_q. \qquad (10\text{-}60)$$

由上式可解出$\{\delta\}$，从而可计算板的内力。

图10-17中列出了均布荷载q作用下方板的计算结果[86]。$\gamma=180\pi(E_0/E_p)(a/t)^3$代表相对刚度，$E_0$为基础弹性模量，$E_p$为板的弹性模量，计算中假定基础和板具有相同的$1-\mu^2$值。由图可见，当板的刚度很大时，在边缘上基础反力可以达到很大的数值（理论值为无穷大），当板很柔软时，基础反力等于均布荷载。如果采用文克尔假定，不论板的刚度如何，基础反力都等于均布荷载q，从这里可以看出文克尔假定的缺陷所在。

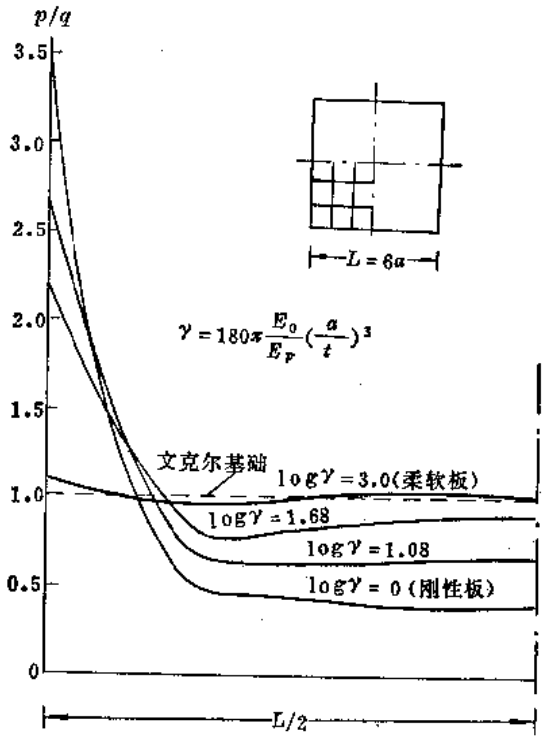


图 10-17　均布荷载q作用下板中心线上接触应力p的分布[$(1-\mu_0^2)=(1-\mu^2)$]

第十一章 弹 性 薄 壳

用有限单元法分析弹性薄壳，有两种不同的途径。一个途径是，用薄板单元组成的折板系统去代替原来的薄壳。由平面应力状态和板弯曲应力状态加以组合而得到薄壳的应力状态。另一途径是直接采用曲面单元，根据壳体理论推导单元刚度矩阵。由于每个单元的尺寸总是比较小的，因而有可能采用扁壳理论以简化单元刚度矩阵的计算。

下面我们将先介绍用折板代替薄壳的计算方法，如图11-1所示，通常用三角形或矩形薄板单元的组合去代替壳体，其中以三角形单元应用较广、实用价值较大，因为它可以适应壳体的复杂外形。最后介绍曲面薄壳单元。

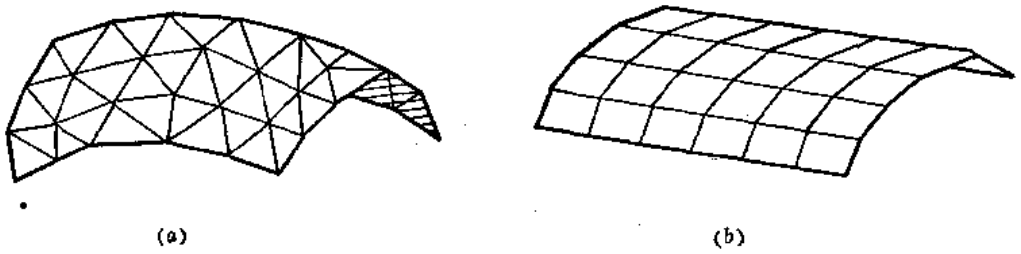


图 11-1 用折板代替薄壳

(a)由三角形单元组成的任意薄壳；(b)由矩形单元组成的棱柱面薄壳

§11-1 局部坐标系中的单元刚度矩阵

弹性薄壳的应力状态可以认为是平面应力状态和弯曲应力状态的组合。因此，薄壳单元的刚度矩阵也可以由这两种应力状态的刚度矩阵加以组合而得到。参阅图11-2，把局部坐标系的 x 轴和 y 轴取在单元所在平面内。

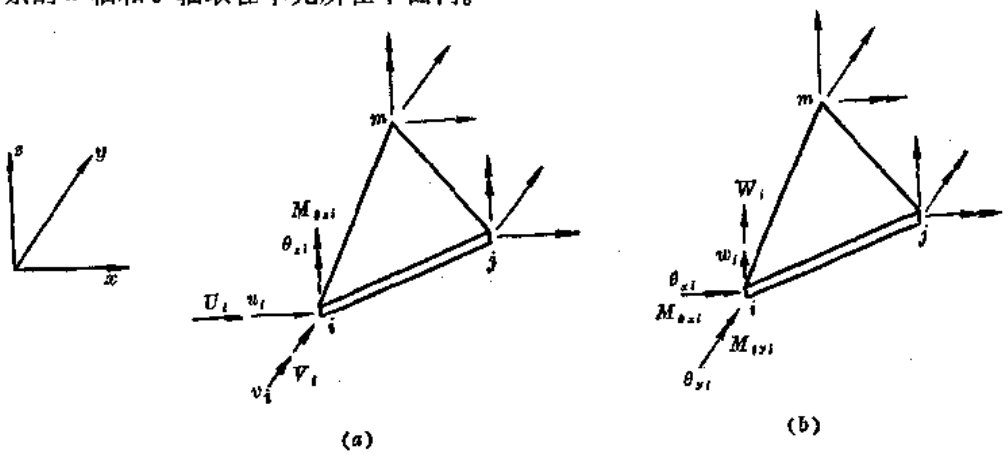


图 11-2 薄壳单元的结点力和结点位移

(a)平面应力状态；(b)弯曲应力状态

对于平面应力状态，由第二章可知，单元的应变状态完全取决于各结点的位移u和v，以三角形单元为例，单元的结点力与结点位移的关系是

$$\begin{Bmatrix} F_i^p \\ F_j^p \\ F_m^p \end{Bmatrix} = [k^p] \begin{Bmatrix} \delta_i^p \\ \delta_j^p \\ \delta_m^p \end{Bmatrix}. \tag{11-1}$$

式中

$$\{\delta_i^p\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (i,j,m)$$

$$\{F_i^p\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \end{Bmatrix}. \quad (i,j,m)$$

结点转角θ_{zi}，θ_{zj}，θ_{zm}不影响结点力，可以不考虑，相应的结点力$M_{\theta zi}$，$M_{\theta zj}$，$M_{\theta zm}$也不存在。

对于弯曲应力状态，单元应变状态取决于结点在z方向的线位移w，绕x轴转角θ_x及绕y轴转角θ_y，结点力和结点位移的关系是

$$\begin{Bmatrix} F_i^b \\ F_j^b \\ F_m^b \end{Bmatrix} = [k^b] \begin{Bmatrix} \delta_i^b \\ \delta_j^b \\ \delta_m^b \end{Bmatrix}. \tag{11-2}$$

其中

$$\{\delta_i^b\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}. \quad (i,j,m)$$

$$\{F_i^b\} = \begin{Bmatrix} W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \end{Bmatrix}. \quad (i,j,m)$$

把平面应力与弯曲应力加以组合后，单元的结点位移和结点力是

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}, \quad \{F_i\} = \begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \\ M_{\theta zi} \end{Bmatrix}. \tag{11-3}$$

虽然转角θ_{zi}不影响单元的应力状态，为了便于以后把局部坐标系的刚度矩阵转化为整体坐标系的刚度矩阵并集合成整体刚度矩阵，我们特地把θ_{zi}也包括在结点位移中，并在结点力中相应地包括一个虚拟弯矩$M_{\theta zi}$。

单元的结点力与结点位移的关系可写成

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \\ F_m \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \\ \delta_m \end{Bmatrix}. \tag{11-4}$$

或简记为

$$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e. \tag{11-5}$$

式中$[k]$是在组合应力状态下的单元刚度矩阵。由于平面应力状态下的结点力$\{F_i^p\}$与弯曲应力状态下的结点位移$\{\delta_i^b\}$互不影响；弯曲应力状态下的结点力$\{F_i^b\}$与平面应力状态下的结点位移$\{\delta_i^p\}$也互不影响；所以组合应力状态下的单元刚度矩阵$[k]$的子矩阵可以写成如下形式：

$$[k_{rs}]=\left[\begin{array}{cc|ccc|c} [k^p_{rs}] & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & & & 0 \\ 0 & 0 & & [k^b_{rs}] & & 0 \\ 0 & 0 & & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{11-6}$$

式中的子矩阵$[k^p_{rs}]$和$[k^b_{rs}]$分别是平面应力问题和薄板弯曲问题的相应子矩阵。因此，把平面应力问题和薄板弯曲问题中三角形单元刚度矩阵结合起来，即可得到组合应力状态下三角形单元的刚度矩阵，如图11-3所示。对于矩形薄壳单元，这种组合方法也是适用的，只是刚度矩阵是24×24阶的。

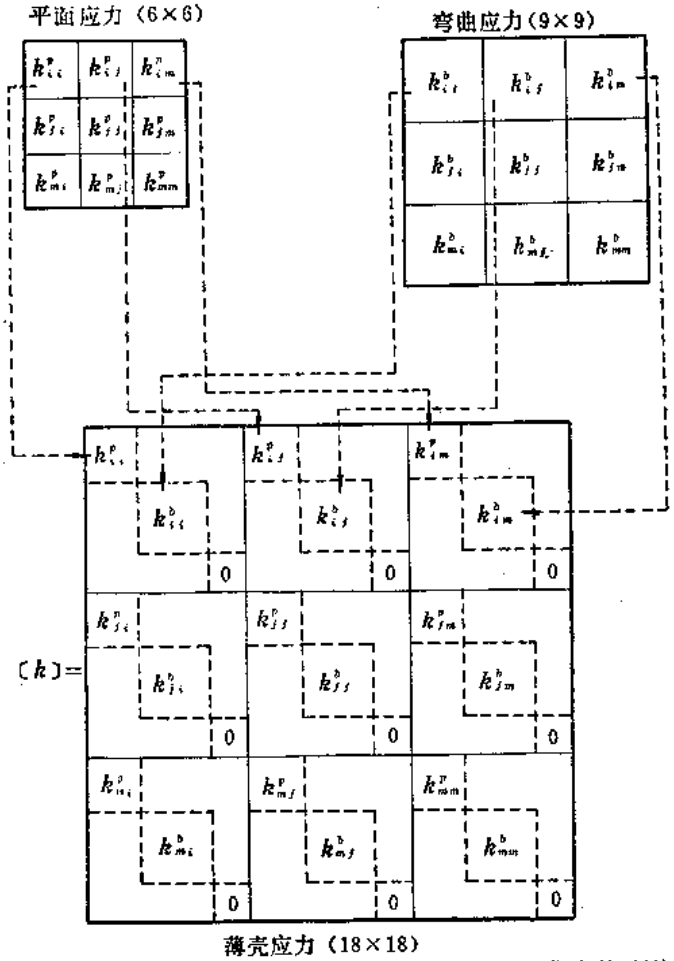


图 11-3　由平面应力和薄板弯曲的刚度矩阵组合成薄壳单元刚度矩阵

§11-2 坐标转换、整体刚度矩阵

在上节，我们是在单元的局部坐标系中推导单元的刚度矩阵的，即以单元的中面为xy面，z轴垂直于单元的中面。为了建立薄壳的整体刚度矩阵，必须把不同平面内的单元刚度系数在结点处加以集合，因此需要另外确定一个统一的整体坐标系，并把各单元在局部坐标系中的刚度矩阵转换到整体坐标系中去。

现在用x'、y'、z'表示整体坐标，局部坐标仍用x、y、z表示。在局部坐标系中，结点i的位移和结点力仍用$\{\delta_i\}$和$\{F_i\}$表示，如（11-3）式。在整体坐标系中，结点i处的位移和结点力用$\{\delta'_i\}$及$\{F'_i\}$表示，即

$$\{\delta'_i\}=[u'_i \quad v'_i \quad w'_i \quad \theta'_{xi} \quad \theta'_{yi} \quad \theta'_{zi}]^T,$$
$$\{F'_i\}=[U'_i \quad V'_i \quad W'_i \quad M'_{\theta xi} \quad M'_{\theta yi} \quad M'_{\theta zi}]^T. \tag{11-7}$$

结点位移和结点力在两个坐标系中（图11-4）的变换可按下式进行

$$\{\delta_i\}=[\lambda]\{\delta'_i\}, \quad \{F_i\}=[\lambda]\{F'_i\}. \tag{11-8}$$

式中

$$[\lambda]=\begin{bmatrix} \cos(x,x') & \cos(x,y') & \cos(x,z') & 0 & 0 & 0 \\ \cos(y,x') & \cos(y,y') & \cos(y,z') & 0 & 0 & 0 \\ \cos(z,x') & \cos(z,y') & \cos(z,z') & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(x,x') & \cos(x,y') & \cos(x,z') \\ 0 & 0 & 0 & \cos(y,x') & \cos(y,y') & \cos(y,z') \\ 0 & 0 & 0 & \cos(z,x') & \cos(z,y') & \cos(z,z') \end{bmatrix}. \tag{11-9}$$

而(x,x')为x轴与x'轴的夹角，等等。

把整个单元在整体坐标中的结点位移和结点力分别用$\{\delta'\}^e$及$\{F'\}^e$表示，由变换式（11-8）可得到

$$\{\delta\}^e=[L]\{\delta'\}^e, \quad \{F\}^e=[L]\{F'\}^e. \tag{11-10}$$

式中

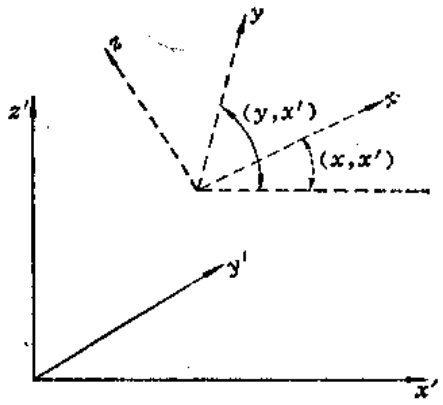


图 11-4 局部坐标系（x，y，z）与整体坐标系（x'，y'，z'）

$$[L]=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}. \tag{11-11}$$

由（11-10）式的后一式子可知

$$\{F'\}^e=[L]^{-1}\{F\}^e$$

把局部坐标中单元结点力与结点位移的关系式$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e$代入上式，得到

$$\{F'\}^e=[L]^{-1}[k]\{\delta\}^e$$
$$=[L]^{-1}[k][L]\{\delta'\}^e.$$

可见$[L]^{-1}[k][L]$就是此单元在整体坐标系中的刚度矩阵，即

$$[k']=[L]^{-1}[k][L].$$

因$[L]$是正交矩阵，故$[L]^{-1}=[L]^T$，由上式可得

$$[k']=[L]^T[k][L]. \qquad (11\text{-}12)$$

这就是刚度矩阵的变换公式。利用这个公式，可以由局部坐标中的单元刚度矩阵$[k]$计算整体坐标中的单元刚度矩阵$[k']$。

把刚度矩阵写成分块形式，$[k']$的子矩阵可按下式计算：

$$[k'_{rs}]=[\lambda]^T[k_{rs}][\lambda]. \qquad (11\text{-}13)$$

式中$[k_{rs}]$是按（11-6）式在局部坐标中计算的。

当整体坐标系中的单元刚度矩阵计算出来以后，按照以前所述统一步骤，加以集合，不难得到壳体的整体刚度矩阵$[K]$。

为了建立结点平衡方程，还须计算结点荷载。令单元荷载所做的功等于结点荷载所做的功，不难求出单元结点荷载。一般情况下，在分布荷载作用下，单元结点荷载包括力和力矩分量。实际上，当单元比较小时，常可采用比较简单的方法计算单元结点荷载，即忽略力矩分量，并把单元承受的外荷载的合力平均分摊到单元的各结点上去。例如，当壳面承受着法向分布荷载p，在三角形单元三个结点上的荷载强度分别是p_i、p_j、p_m，那么作用于单元上的荷载的合力是

$$R=\frac{A}{3}(p_i+p_j+p_m).$$

其中A是单元面积，假定荷载方向与局部坐标z轴相同时为正。把这个合力平均分摊到三个结点上，并转换到整体坐标中去，得到在整体坐标中的结点荷载如下：

$$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \cos(x',z) \\ \cos(y',z) \\ \cos(z',z) \end{Bmatrix}\frac{R}{3}. \qquad (11\text{-}14)$$

其中$x'y'z'$是整体坐标系。把各单元的结点荷载加以集合，即可得到壳体的荷载列阵$\{P'\}$。壳体的结点平衡方程是

$$[K]\{\delta'\}=\{P'\}. \qquad (11\text{-}15)$$

从上式可解得各结点在整体坐标系中的位移。利用变换式$\{\delta\}^e=[L]\{\delta'\}^e$求出各结点在局部坐标系中的位移，再利用局部坐标系中的应力矩阵，即可求得各单元的应力。

有一个特殊情况必须注意。如果交会于一个结点的各单元都在一个平面内，由于在（11-6）式中已令θ_{zi}方向的刚度系数等于零，在局部坐标系中，这个结点的第六个平衡方程（相当于θ_z方向）将是

$$0=0 \qquad (11\text{-}16)$$

如果整体坐标与这一局部坐标一致，显然，整体刚度矩阵的行列式$|K|=0$，因而（11-15）式不满足有唯一解的条件。如果整体坐标与局部坐标不一致，经过变换后，在这个结点得到了表面上正确的六个平衡方程，但是由于（11-16）式，行列式$|K|$的行向量是线性相关的，从而$|K|=0$，所以平衡方程（11-15）仍然不满足有唯一解的条件。

为了排除这一困难，对于这种各有关单元位于同一平面内的结点，可以在局部坐标系

内建立结点平衡方程，并删去θ_z方向的平衡方程0=0，于是剩下的方程组满足有唯一解的条件。这个方法在程序设计上比较麻烦。

另一个办法是，在这些特殊结点上，给以任意的刚度系数$k_{\theta z}$，因此在局部坐标系中，这个结点在θ_z方向的平衡方程是

$$k_{\theta z}\theta_{zi}=0. \tag{11-17}$$

经过坐标变换，在整体坐标中的结点平衡方程将满足有唯一解的条件。在解出的结点位移中包括θ_{zi}。由于θ_{zi}不影响单元应力，并与其他结点平衡方程无关，所以实际上可以给定任意的$k_{\theta z}$值而不会影响计算结果。

§11-3 局部坐标的方向余弦

如上节所述，为了建立结点平衡方程，需要用到各单元局部坐标的方向余弦矩阵[λ]，如（11-9）式。

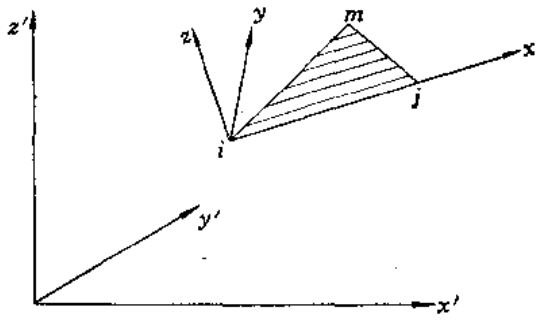


图 11-5 三角形单元的局部坐标

如图11-5所示的三角形单元ijm，三个结点的整体坐标为x'_i，y'_i，z'_i，x'_j，…，z'_m。今取结点i为局部坐标的原点，ij边为x轴，y轴在单元平面内并垂直于ij边，z轴垂直于单元平面。如果把ij边作为一个矢量V_{ij}，可用该矢量在整体坐标系中的三个分量表示为

$$V_{ij}=\begin{Bmatrix} x'_{ji} \\ y'_{ji} \\ z'_{ji} \end{Bmatrix}. \tag{11-18}$$

式中 $x'_{ji}=x'_j-x'_i$，（x，y，z）

用该矢量的长度除它的三个分量，即得到该矢量的方向余弦，也就是局部坐标x轴在整体坐标系中的方向余弦，从而得到一个单位矢量

$$v_x=\begin{Bmatrix} \cos(x,\ x') \\ \cos(x,\ y') \\ \cos(x,\ z') \end{Bmatrix}=\frac{1}{l_{ij}}\begin{Bmatrix} x'_{ji} \\ y'_{ji} \\ z'_{ji} \end{Bmatrix}. \tag{11-19}$$

式中

$$l_{ij}=[x'^{2}_{ji}+y'^{2}_{ji}+z'^{2}_{ji}]^{\frac{1}{2}}.$$

z轴是垂直于三角形平面的，利用两个矢量的矢积垂直于两个矢量所在平面的性质，可得到垂直于三角形平面的矢量V_z如下

$$V_z=V_{ij}\times V_{im}=\begin{Bmatrix} y'_{ji}\ z'_{mi}-z'_{ji}\ y'_{mi} \\ z'_{ji}\ x'_{mi}-x'_{ji}\ z'_{mi} \\ x'_{ji}\ y'_{mi}-y'_{ji}\ x'_{mi} \end{Bmatrix}.$$

由于矢量V_z的长度等于三角形ijm面积的两倍，即

$$l_z=[(y'_{ji}z'_{mi}-z'_{ji}y'_{mi})^2+(z'_{ji}x'_{mi}-x'_{ji}z'_{mi})^2+(x'_{ji}y'_{mi}-y'_{ji}x'_{mi})^2]^{\frac{1}{2}}$$
$$=2A.$$

故 z 轴的方向余弦是

$$v_z=\begin{Bmatrix}\cos(z,x')\\ \cos(z,y')\\ \cos(z,z')\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{Bmatrix}y'_{ji}z'_{mi}-z'_{ji}y'_{mi}\\ z'_{ji}x'_{mi}-x'_{ji}z'_{mi}\\ x'_{ji}y'_{mi}-y'_{ji}x'_{mi}\end{Bmatrix}. \qquad (11\text{-}20)$$

同理可求得 y 轴的方向余弦，由于 y 轴垂直于xz平面，因此单位矢量v_x和v_z 的矢积等于 y 轴方向的单位矢量，即

$$v_y=\begin{Bmatrix}\cos(y,x')\\ \cos(y,y')\\ \cos(y,z')\end{Bmatrix}=v_z\times v_x$$
$$=\begin{Bmatrix}\cos(z,y')\cos(x,z')-\cos(x,y')\cos(z,z')\\ \cos(z,z')\cos(x,x')-\cos(x,z')\cos(z,x')\\ \cos(z,x')\cos(x,y')-\cos(x,x')\cos(z,y')\end{Bmatrix}. \qquad (11\text{-}21)$$

由于v_y的长度等于 1，所以不必再除以它的长度了。至此，局部坐标的方向余弦矩阵[λ]的全部元素都求出来了。

在上面的计算中，我们规定局部坐标的 x 轴沿着单元的 ij 边，当然这并非唯一的办法。也可采用其他办法来规定局部坐标系。例如，在拱坝、冷却塔、油库等壳体计算中，为了便于整理成果，最好把整体坐标系的$x'y'$面放在水平面内，并使局部坐标系的 x 轴平行于$x'y'$面。局部坐标的 z 轴仍垂直于三角形平面，故首先可用（11-20）式 计算 z 轴的方向余弦。其次，由于局部坐标的 x 轴垂直于z'轴，所以 x 轴的方向余弦是

$$v_x=\begin{Bmatrix}\cos(x,x')\\ \cos(x,y')\\ 0\end{Bmatrix}. \qquad (11\text{-}22)$$

由于各个方向余弦的平方之和等于 1，故

$$\cos^2(x,x')+\cos^2(x,y')=1. \qquad (11\text{-}23)$$

另外，v_x与v_z的标乘积应等于零，即

$$\cos(x,x')\cos(z,x')+\cos(x,y')\cos(z,y')=0. \qquad (11\text{-}24)$$

由以上两个方程，可解出$\cos(x,x')$和$\cos(x,y')$从而可得到v_x。求得v_x和 v_z 后，再由式（11-21）可求出v_y。

至于矩形单元，其应用范围只限于柱面或箱形薄壳，而且壳的边界必须平行或垂直于柱面的母线方向，因此可以把整体坐标系的x'轴放在柱面的母线方向，并使各个单元局部坐标系的 x 轴平行于x'轴，如图11-6。

显然，x 轴的方向余弦是

$$\cos(x,x')=1,\ \cos(x,y')=0,\ \cos(x,z')=0. \qquad (11\text{-}25)$$

由于 y 轴平行于pi边，由结点p和i在整体坐标系中的坐标，可计算 y 轴的方向 余 弦 如下

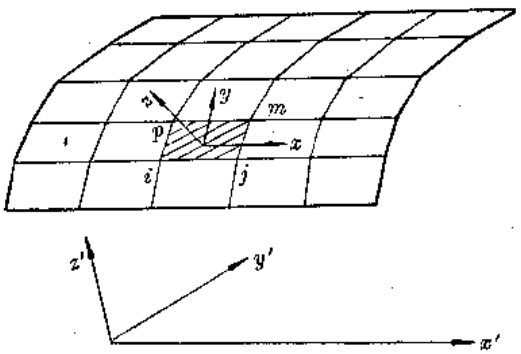


图 11-6　矩形单元的局部坐标

$$\cos(y,x')=0,$$

$$\cos(y,y')=\frac{y'_p-y'_i}{l_{pi}},\qquad(11\text{-}26)$$

$$\cos(y,z')=\frac{z'_p-z'_i}{l_{pi}}.$$

其中l_{pi}是pi边的长度，即

$$l_{pi}=[(z'_p-z'_i)^2+(y'_p-y'_i)^2]^{1/2}.$$

同样，可求得 z 轴的方向余弦如下：

$$\cos(z,x')=0,$$

$$\cos(z,y')=-\frac{z'_p-z'_i}{l_{pi}},\qquad(11\text{-}27)$$

$$\cos(z,z')=\frac{y'_p-y'_i}{l_{pi}}.$$

§11-4　曲梁支承或加强的薄壳

在实际工程中，有时会采用由曲梁支承或加强的薄壳，梁与壳之间一般是刚性连接的。在荷载的作用下，梁与壳将同时发生变形。对于这种混合结构，用解析方法求解是十分困难的。有限单元法是求解这种结构问题的有效工具。

图11-7(*a*)示一用曲梁支承的薄壳，壳与梁系刚性连接。薄壳划分为三角形单元，把

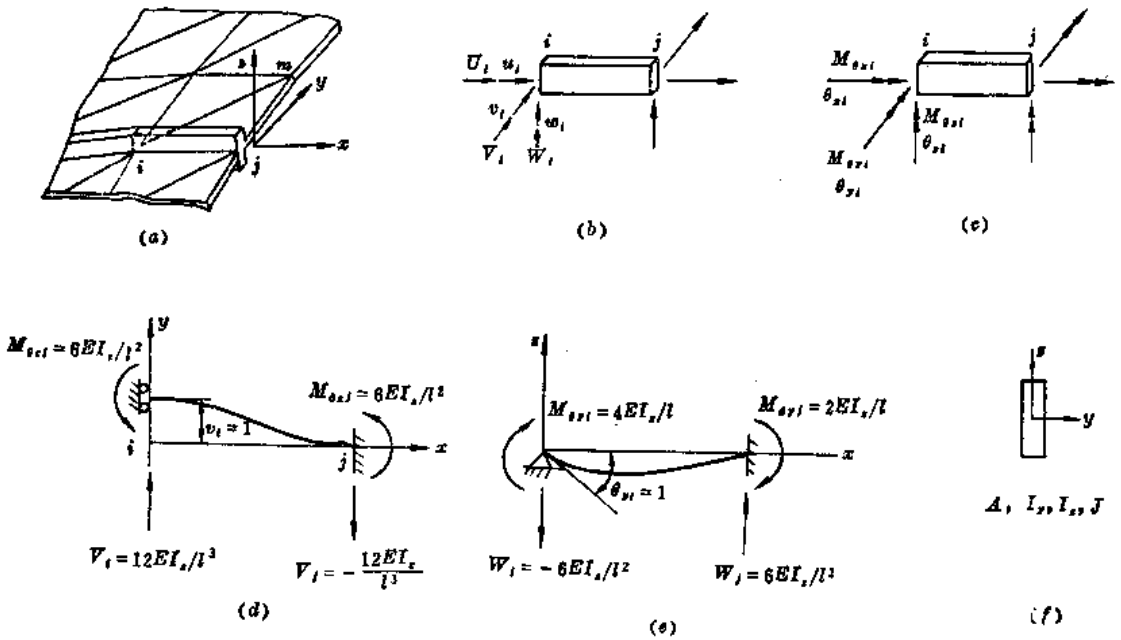


图 11-7　曲梁支承的薄壳

单元 ijm 所邻接的一段支承梁 ij 也作为一个单元，一个梁单元。在建立结点 i 和 j 的平衡方程时，除了薄壳单元的结点力以外，还必须计及这种梁单元的结点力。因此，必须建立梁单元 ij 的结点力 $\{F\}^e$ 与结点位移 $\{\delta\}^e$ 之间的关系式：

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e. \tag{11-28}$$

其中

$$\{\delta\}^e=[u_i\quad v_i\quad w_i\quad \theta_{xi}\quad \theta_{yi}\quad \theta_{zi}\quad u_j\quad v_j\quad w_j\quad \theta_{xj}\quad \theta_{yj}\quad \theta_{zj}]^T,$$

$$\{F\}^e=[U_i\quad V_i\quad W_i\quad M_{\theta xi}\quad M_{\theta yi}\quad M_{\theta zi}\quad U_j\quad V_j\quad W_j\quad M_{\theta xj}\quad M_{\theta yj}\quad M_{\theta zj}]^T.$$

梁单元共有12个自由度，单元刚度矩阵 $[k]^e$ 是12×12阶的。今忽略剪切变形的影响，令 $b_y=b_z=0$，由本书第一章（1-49）式得到局部坐标系中的单元刚度矩阵如(11-29)式，当局部坐标系与整体坐标系不一致时，应由变换式 $[k']^e=[L]^T[k]^e[L]$ 计算整体坐标系中的单元刚度矩阵 $[k']^e$。

$$[k]^e=\frac{EI_y}{l^3}\left[\begin{array}{cccccc|cccccc}
al^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -al^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 12b & 0 & 0 & 0 & 6bl & 0 & -12b & 0 & 0 & 0 & 6bl\\
0 & 0 & 12 & 0 & -6l & 0 & 0 & 0 & -12l & 0 & -6l & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & cl^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -cl^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & -6l & 0 & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 6l & 0 & 2l^2 & 0\\
0 & 6bl & 0 & 0 & 0 & 4bl^2 & 0 & -6bl & 0 & 0 & 0 & 2bl^2\\
\hline
-al^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & al^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & -12b & 0 & 0 & 0 & -6bl & 0 & 12b & 0 & 0 & 0 & -6bl\\
0 & 0 & -12 & 0 & 6l & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 & 6l & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -cl^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & cl^2 & 0 & 0\\
0 & 0 & -6l & 0 & 2l^2 & 0 & 0 & 0 & 6l & 0 & 4l^2 & 0\\
0 & 6bl & 0 & 0 & 0 & 2bl^2 & 0 & -6bl & 0 & 0 & 0 & 4bl^2
\end{array}\right]. \tag{11-29}$$

式中 $\quad a=\dfrac{A}{I_y},\quad b=\dfrac{I_z}{I_y},\quad c=\dfrac{GJ}{EI_y}.$

在以上计算中，梁单元的中和轴位于壳体的中面上。实际工程结构中，梁单元的中和轴往往不在薄壳中面上，如图11-8（a）所示，设梁单元中和轴与壳体中面之间的垂直距离为 h。梁单元局部坐标系为 xyz，其中 x 轴是梁的中和轴。为了便于建立结点平衡方程，我们再取坐标系 $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$，其中 $\bar{x}$、$\bar{y}$ 轴分别平行 x、y 轴，而且 $\bar{x}$ 轴位于壳体中面内，$\bar{z}$ 轴与 z 轴重合。假定平截面的假设仍然适用于这个梁单元，在局部坐标系 xyz 中的单元刚度矩阵 $[k]$ 仍可用前面的公式（11-29）计算。

两个局部坐标系中的结点力和结点位移示于图11-8（b）、（c）中，根据平截面假设，两个局部坐标系中的结点位移 $\{\delta\}^e$ 和 $\{\bar{\delta}\}^e$ 之间符合下列关系：

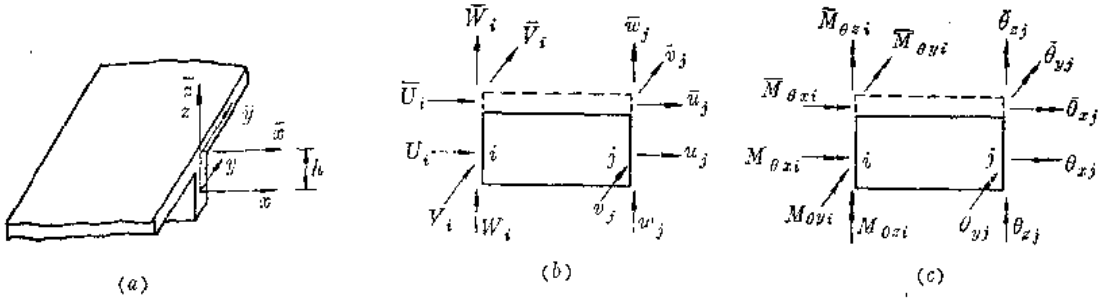


图 11-8

$$\{\delta\}^e=[C]\{\overline{\delta}\}^e, \tag{11-30}$$

其中

$$[C]=\begin{bmatrix}\beta & 0\\ 0 & \beta\end{bmatrix},$$

$$[\beta]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&-h&0\\0&1&0&h&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

根据力的平衡条件，两个局部坐标系中的结点力$\{F\}^e$和$\{\overline{F}\}^e$之间符合下列关系：

$$\{\overline{F}\}^e=[C]^T\{F\}^e .$$

把（11-28）、（11-30）二式代入上式，得到

$$\{\overline{F}\}^e=[C]^T\{F\}^e=[C]^T[k]\{\delta\}^e=[C]^T[k][C]\{\overline{\delta}\}^e .$$

即

$$\{\overline{F}\}^e=[\bar{k}]\{\overline{\delta}\}^e . \tag{11-31}$$

其中

$$[\bar{k}]=[C]^T[k][C] . \tag{11-32}$$

由上式可计算局部坐标系$\bar{x}\bar{y}\bar{z}$中的单元刚度矩阵$[\bar{k}]$。再由变换式$[k']=[L]^T[\bar{k}][L]$，可求出整体坐标系中的单元刚度矩阵$[k']$，从而可以建立壳体的结点平衡方程。

§11-5 边界由弹性基础支承的薄壳

在实际工程中，有时会采用由弹性基础支承的薄壳，例如修建在岩石基础上的双曲薄拱坝。壳体的部分边界是与弹性基础刚性连接的。在计算壳体应力时，必须考虑基础的弹性变形。严格说来，必须把基础当成三维弹性体，用空间有限单元进行计算。但这种算法，计算量十分庞大。只要基础比较完整，采用文克勒假设以简化计算，也可以得到一些有用的成果，满足设计上的需要。

设i是基础边界上的结点，如图11-9所示。t_i为壳体厚度，b_i为分配给结点i的壳体边界长度，一般可取为单元边长的一半。在结点i取基础边界的局部坐标系如图11-10，其

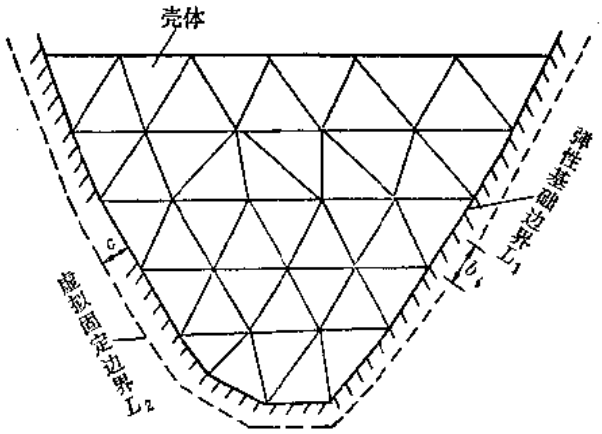


图 11-9

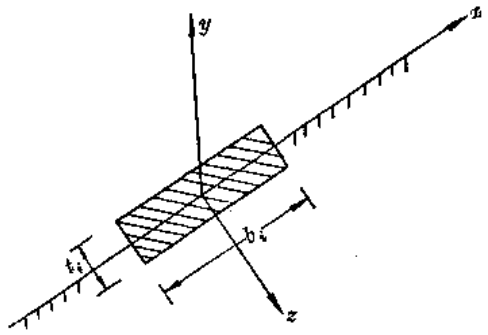


图 11-10

中 x 轴平行于基础边界的切线方向，y 轴垂直于基础表面，z 轴与 x 轴和 y 轴正交。把基础看成半无限弹性体，根据伏格特公式，在结点力的作用下，基础表面变位可计算如下：

切向位移 $$u_i=\frac{\beta_1 U_i}{E_f b_i},$$

法向位移 $$v_i=\frac{\beta_2 V_i}{E_f b_i},$$

径向位移 $$w_i=\frac{\beta_3 W_i}{E_f b_i}+\frac{\beta_6 M_{yxi}}{E_f b_i t_i},$$ （11-33）

弯曲角变位 $$\theta_{xi}=\frac{\beta_4 M_{\theta xi}}{E_f b_i t_i^2}+\frac{\beta_6 W_i}{E_f b_i t_i},$$

扭转角变位 $$\theta_{yi}=\frac{\beta_5 M_{\theta yi}}{E_f b_i t_i^2}.$$

其中 E_f 是基础的弹性模量，$\beta_1\sim\beta_6$ 是基础变形系数，可从图11-11查得。采用矩阵符号，式（11-33）可表示为

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}=[\rho]\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \end{Bmatrix}.\qquad (11\text{-}34)$$

式中

$$[\rho]=\frac{1}{E_f b_i}\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \frac{\beta_6}{t_i} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta_6}{t_i} & \frac{\beta_4}{t_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\beta_5}{t_i^2} \end{bmatrix}.\qquad (11\text{-}35)$$

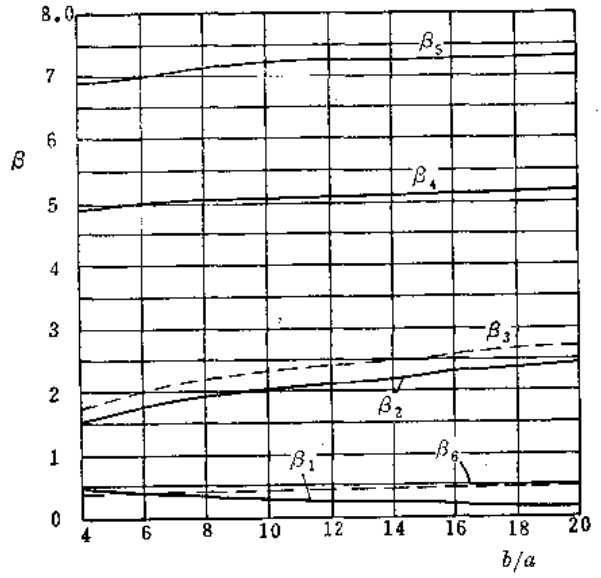


图 11-11 基础变位系数（$\mu_f=0.30$）
（壳体与基础的接触面展开后的等效矩形长度为 b，宽度为 a）

[ρ]实际上是弹性基础的柔度矩阵。由（11-34）式求逆，得到

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \end{Bmatrix} = [\rho]^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix}. \tag{11-36}$$

加上 $M_{\theta zi}$ 和 θ_{zi} 后，基础边界结点力与结点位移之间的关系可写成

$$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \\ M_{\theta xi} \\ M_{\theta yi} \\ M_{\theta zi} \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \\ \theta_{zi} \end{Bmatrix}. \tag{11-37}$$

式中

$$[k] = \left[\begin{array}{ccccc|c} & & [\rho]^{-1} & & & \begin{matrix}0\\0\\0\\0\\0\end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \tag{11-38}$$

[k]是局部坐标系中的弹性基础刚度矩阵，再由下列变换式可求得整体坐标系中的弹性基础刚度矩阵：

$$[k'] = [\lambda]^T [k] [\lambda]. \tag{11-39}$$

[λ]是局部坐标的方向余弦矩阵，见（11-9）式。在（11-33）式中，与 β_3 和 β_4 比较起来，β_6的影响是比较次要的，如果忽略β_6，可以简单地写出[ρ]的逆矩阵如下：

$$[\rho]^{-1} = E_f b_i \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\beta_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{t_i^2}{\beta_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{t_i^2}{\beta_5} \end{bmatrix}. \tag{11-40}$$

在建立结点 i 的平衡方程时，应计入弹性基础刚度矩阵，如上。

如果计算程序中没有包括弹性基础刚度矩阵，为了利用这种程序计算拱坝等壳体，可采用如下近似方法：把壳体向外延拓一距离 c，得到虚拟边界，假定这条虚拟边界是完全固定的，用弹性基础边界与虚拟固定边界之间的延拓的壳体的变形代替弹性基础的变形，如图11-9所示。设延拓壳体的宽度为 c，厚度为 $\overline{t}$，弹性模量为 E，这里共有三个参数可供选择。在弹性基础位移中，对壳体应力影响最大的是弯曲角变位 θ_x，其次是法向位移 v，再次是径向位移 w，取 $b_i=1$，并忽略影响较小的变形系数 β_6，由（11-33）式可知

$$\theta_x=\frac{\beta_4 M_{\theta x}}{E_f t_i^2},$$

$$v=\frac{\beta_2 V}{E_f},$$

$$w=\frac{\beta_3 W}{E_f}. \qquad (a)$$

其中 t_i 是原壳体的厚度，E_f 是基础的弹性模量。向外延拓的壳体的断面尺寸如图 11-12 所示，在它的顶部分别施加力矩 $M_{\theta x}$、轴向力 V 和侧向力 W 时，在其顶部产生的变形如下：

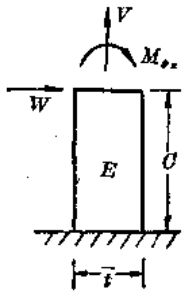


图 11-12

$$\theta_x=\frac{12M_{\theta x}c}{E\overline{t}^3}, \qquad v=\frac{Vc}{E\overline{t}}, \qquad w=\frac{4Wc^3}{E\overline{t}^3}. \qquad (b)$$

令上式中的三个位移分别等于（a）式中的三个基础位移，得到三个方程如下：

$$\frac{12c}{E\overline{t}^3}=\frac{\beta_4}{E_f t^2}, \qquad (c)$$

$$\frac{c}{E\overline{t}}=\frac{\beta_2}{E_f}, \qquad (d)$$

$$\frac{4c^3}{E\overline{t}^3}=\frac{\beta_3}{E_f}. \qquad (e)$$

联立求解以上三式，得到

$$\left.\begin{aligned} c&=\sqrt{\frac{3\beta_3}{\beta_4}}\,t,\\ \overline{t}&=\sqrt{\frac{12\beta_2}{\beta_4}}\,t,\\ E&=\frac{\beta_3^{\frac{1}{2}}}{2\beta_2^{\frac{3}{2}}}E_f. \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}41)$$

由上式求得延拓壳体的宽度 c、厚度 $\overline{t}$ 和弹性模量 E 后，假定虚拟边界是固定的，即可用一般的壳体计算程序分析弹性基础支承的壳体。

例如，设 $\frac{b}{a}=10$，由图11-11查得基础变形系数 $\beta_2=2.03$，$\beta_3=2.32$，$\beta_4=5.07$，由上式算得

$c=1.17\,t$，$\bar{t}=2.19\,t$，$E=0.263E_f$。

如果忽略位移w的影响，即忽略（e）式，由（c）、（d）二式可得

$$\left.\begin{aligned}\bar{t}&=\sqrt{\frac{12\beta_2}{\beta_4}}\,t,\\ \frac{c}{\bar{t}}&=\frac{\beta_3 E}{E_f}.\end{aligned}\right\}\qquad(11\text{-}42)$$

在这种情况下，只要给定不同的弹性模量E，就可以得到不同的延拓宽度c。

一般情况下，应按（11-41）式确定延拓壳体的各参数。如壳体较厚，求得的延拓宽度c较大时，也可以改用（11-42）式，给以较低的弹性模量E，从而得到较小的c值。

§11-6 算　　例

下面列举几个用有限单元法计算的弹性薄壳的算例。

算例1。圆柱壳屋盖，尺寸如图11-13所示，用矩形单元计算了在呆荷重作用下的应力。由于双对称，只须取出四分之一计算，采用12×18网格，计算中取$\mu=0$，以便与理论解比较，计算结果见图11-14。

算例2。双曲拱坝，几何形状及计算网格见图11-15，荷载是齐顶水压力。这是一个变厚度、变半径、形状很不规则的双曲壳体，古典方法对这种壳体是无法求解的，采用三角形有限单元，在电子计算上计算的成果见图11-16，由图可见，考虑基础变形的有限单元计算结果与模型试验结果基本一致[5]。

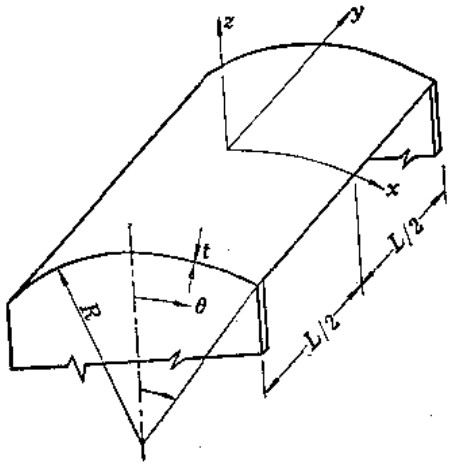


图 11-13　圆柱壳屋盖

（$L=15.2$米，$R=7.6$米；$t=7.6$厘米，呆荷重440公斤/米^2）

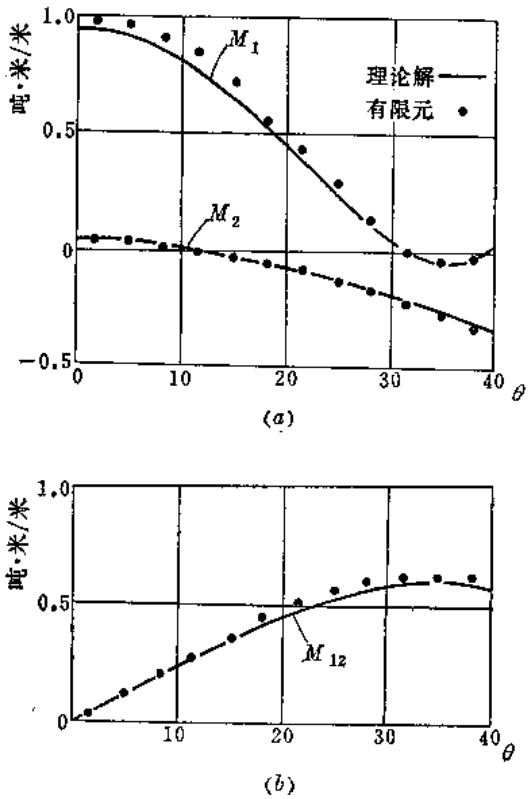


图 11-14　圆柱屋盖计算结果

（a）中央断面的横向弯矩M_1及纵向弯矩M_2；（b）支承边的扭矩M_{12}

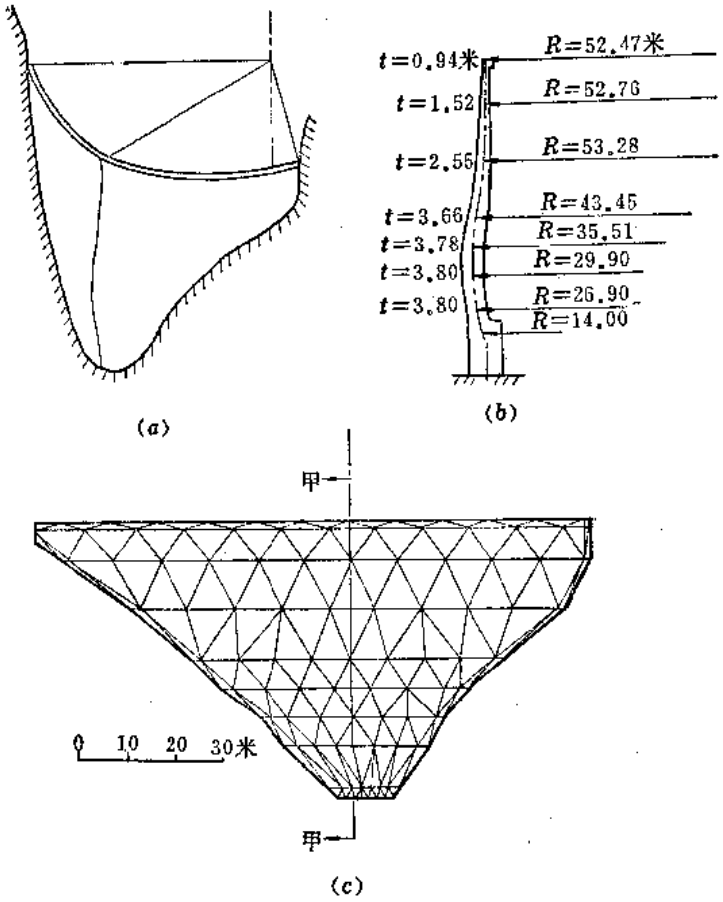


图 11-15 双曲薄拱坝

(a)拱坝上游面透视图；(b)剖面甲—甲；(c)计算网格

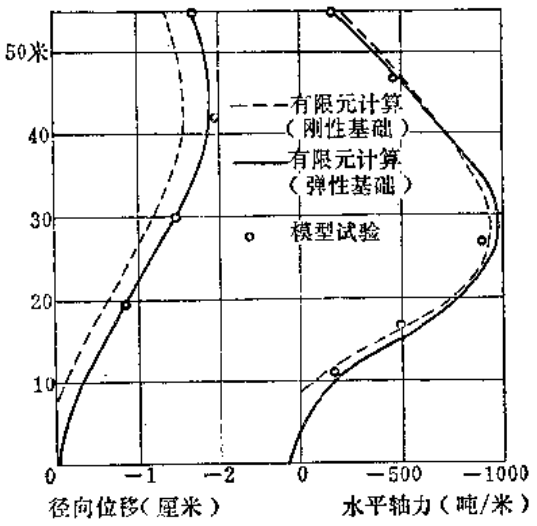


图 11-16 双曲薄拱坝剖面甲—甲的径向位移和水平轴力

§11-7 曲面薄壳单元

在上面几节，用折板结构代替实际壳体，从已有经验看来，只要计算网格比较密集，计算精度是可以满足工程上的要求的。但如果采用曲面单元，因能够反映壳体的真实几何形状，在单元尺寸和形状相同时，可以得到更好的计算结果。

在笛卡尔坐标系中，壳体中面的方程可表示为

$$z=z(x,y).$$

以单元形心为原点，取局部坐标系（ξ，η，ζ），其中ξ、η是切于壳体中面的，ζ是垂直于壳体中面的。参阅图11-17，由几何关系可知，在ξ、η方向的线素ds_1和ds_2的

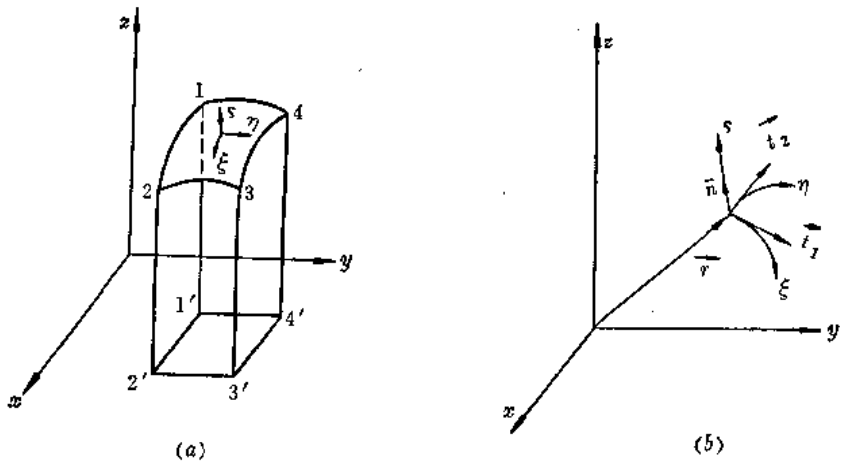


图 11-17

长度由下列式子计算：

$$ds_1=\overline{A}\,d\xi,\quad ds_2=\overline{B}\,d\eta.$$

式中

$$\overline{A}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi}\right|,\quad \overline{B}=\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta}\right|.$$

设$\vec{t}_1$、$\vec{t}_2$、$\vec{n}$分别是ξ、η、n方向的单位矢量，它们可由下式计算：

$$\vec{t}_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\xi},\quad \vec{t}_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\eta},\quad \vec{n}=\vec{t}_1\times\vec{t}_2.$$

面素

$$dA=ds_1\,ds_2.$$

曲面的曲率半径由下列式子给出：

$$\frac{1}{R_1}=-\frac{1}{\overline{A}^2}\vec{n}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\xi^2},$$

$$\frac{1}{R_2}=-\frac{1}{\overline{B}^2}\vec{n}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{1}{R_{12}}=-\frac{1}{\overline{A}\,\overline{B}}\vec{n}\cdot\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial\xi\partial\eta}.$$

当

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\ll 1,\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\ll 1$$

时，曲面 $z=z(x,y)$叫做扁曲面。在工程上，当壳体的矢高小于平面最小尺寸的 1/5 时即按扁壳计算。即使不满足这个条件，只要用有限单元法计算，由于每个单元的尺寸是比较小的，总可以对每个单元分别选择坐标系（x、y、z）使上式成立。当然，在这种情况下，回到整体坐标系时应进行变换。

对于扁壳来说，可取

$$\overline{A}\approx\overline{B}\approx 1,$$

$$\vec{t}_1=\vec{i}_x+\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}_z,$$

$$\vec{t}_2=\vec{i}_y+\frac{\partial z}{\partial y}\vec{i}_z,$$

$$\vec{n}=-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}_x-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{i}_y+\vec{i}_z.$$

其中$\vec{i}_x$、$\vec{i}_y$、$\vec{i}_z$分别是 x、y、z 方向的单位矢量。曲面的曲率半径由下列公式给出：

$$\frac{1}{R_x}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad\frac{1}{R_y}=-\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\quad\frac{1}{R_{xy}}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}.$$

在扁壳中，中面上的点与其在xy平面上的投影点之间有着一一对应的关系。假如在xy平面上的投影点的坐标（x，y）已经给定，则中面上相应点的位置也即完全确定。因此，（x，y）既可看作投影点的直角坐标，也可取作中面上各点的曲线坐标。平行于坐标面oxz及oyz的两组竖直面与中面相交，其交线称为坐标曲线，其中 y = 常数的坐标线，称作 x 坐标线；x = 常数的坐标线，称作 y 坐标线。坐标线在中面上形成的网格，一般说来，并非矩形。但在扁壳中，由于坐标线的斜率$\frac{\partial z}{\partial x}$及$\frac{\partial z}{\partial y}$较小，相对于 1 而言，斜率的二次项可以忽略不计，因此仍可近似地把它看做是矩形网格。由两坐标线的切线$o'x'$，$o'y'$及曲面法线$o'z'$所组成的流动坐标系仍可看作是正交坐标系。设$o'x'$和$o'y'$的夹角为β，其余弦为

$$\cos\beta=\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

郑海荣

当$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$，$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$，$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\ll 1$时，便有$\cos\beta\approx 0$，$\beta\approx\frac{\pi}{2}$。

以u、v、w表示中面任一点的位移沿流动坐标轴x'、y'、z'方向的分量，$\bar{\varepsilon}_x$、$\bar{\varepsilon}_y$、$\bar{\varepsilon}_s$表示中面沿坐标线的应变分量。中面上各点的应变与位移的关系为

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_x},\\ \bar{\varepsilon}_y&=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{w}{R_y},\\ \bar{\gamma}_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2w}{R_{xy}}.\end{aligned}\tag{11-43}$$

至中面距离为z的点，其位移分量用u_z、v_z、w_z表示，应变分量用ε_x、ε_y、γ_{xy}表示。假定位移u_z、v_z沿厚度方向线性变化，而法向位移w_z沿厚度不变，即

$u_z=u-z\frac{\partial w}{\partial x}$，$v_z=v-z\frac{\partial w}{\partial y}$，$w_z=w$，与式（11-43）类似，$z$点的应变分量为

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u_z}{\partial x}+\frac{w_z}{R_x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{w}{R_x}\right)-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{w_z}{R_y}=\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{w}{R_y}\right)-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u_z}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{2w_z}{R_{xy}}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{2w}{R_{xy}}\right)-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.\end{aligned}$$

上式可记为

$$\{\varepsilon\}=\{\varepsilon_p\}+z\{\Psi\}.\tag{11-44}$$

式中

$$\{\varepsilon_p\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{w}{R_x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{w}{R_y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{2w}{R_{xy}}\end{Bmatrix},\tag{11-45}$$

$$\{\Psi\}=\begin{Bmatrix}-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{Bmatrix}.\tag{11-46}$$

显然，$\{\varepsilon_p\}$代表壳体中面应变，而$z\{\Psi\}$代表壳体的弯曲变形。

壳体的应变能为

$$U=U_p+U_b.$$

其中U_p代表中面的应变能，U_b代表弯曲应变能。这样分开之所以可能，是由于：在弯曲

变形时中面内力不作功（因为弯曲变形时中面保持原中性轴不变）；而在中面变形时，弯曲内力不作功。由第三章和第十章可知

$$U_p=\frac{t}{2}\int_A\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\,dA,$$

$$U_b=\frac{1}{2}\int_A\{M\}^T\{\Psi\}\,dA.$$

其中$\{\sigma\}$为壳体中面应力，$\{M\}$为壳体弯矩。结点力$\{F\}$和法向荷载$\{q\}$的势为

$$V=\{\delta\}^T\{F\}+\int_A wqdA.$$

所以壳体的势能为

$$\Pi_p=U-V=\frac{1}{2}\int_A t\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}\,dA+\frac{1}{2}\int_A\{M\}^T\{\Psi\}dA$$

$$-\{\delta\}^T\{F\}-\int_A wqdA. \tag{11-47}$$

壳体位移$\{r\}$用结点位移$\{\delta\}$表示如下：

$$\{r\}=\begin{Bmatrix}u\\v\\w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}. \tag{11-48}$$

代入式（11-45），得到中面应变

$$\{\varepsilon_p\}=[B_p]\{\delta\}. \tag{11-49}$$

由式（11-46），得到

$$\{\Psi\}=[B_b]\{\delta\}. \tag{11-50}$$

中面应力可表示为

$$\{\sigma\}=[D_p]\{\varepsilon\}. \tag{11-51}$$

式中

$$[D_p]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\\mu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}.$$

壳体弯矩可表示为

$$\{M\}=[D_b]\{\Psi\}. \tag{11-52}$$

式中

$$[D_b]=\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\begin{bmatrix}1&\mu&0\\\mu&1&0\\0&0&\dfrac{1-\mu}{2}\end{bmatrix}.$$

再令

$$w=[N_w]\{\delta\}. \tag{11-53}$$

把（11-49）～（11-53）式代入（11-47）式，得到势能

$$\Pi_p=\frac{1}{2}\{\delta\}^T[k]\{\delta\}-\{\delta\}^T\{F\}-\{\delta\}^T\int_A[N_w]^T q dA. \tag{11-54}$$

式中

$$[k]=t\int_A[B_p]^T[D_p][B_p]\,dA+\int_A[B_b]^T[D_b][B_b]dA. \tag{11-55}$$

$[k]$是壳体曲面单元的刚度矩阵。

根据最小势能原理

$$\frac{\partial\Pi_p}{\partial\{\delta\}}=0,$$

由此可得到结点力

$$\{F\}=[k]\{\delta\} \tag{11-56}$$

及结点荷载

$$\{P\}=\int_A[N_w]^T q dA. \tag{11-57}$$

对于矩形单元，可取四个角点为结点，结点位移取为

$$\{\delta_i\}=[u_i\ v_i\ w_i\ \theta_{xi}\ \theta_{yi}]^T.$$

每个单元共有20个自由度，位移函数可取为如下多项式：

$$\begin{aligned}
u&=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4xy,\\
v&=\beta_5+\beta_6x+\beta_7y+\beta_8xy,\\
w&=\beta_9+\beta_{10}x+\beta_{11}y+\beta_{12}x^2+\beta_{13}xy+\beta_{14}y^2+\beta_{15}x^3\\
&\quad+\beta_{16}x^2y+\beta_{17}xy^2+\beta_{18}y^3+\beta_{19}x^3y+\beta_{20}xy^3.
\end{aligned} \tag{11-58}$$

仿照矩形平面单元（第五章）及矩形薄板单元（第十章），u、v、w可用结点参数表示如下：

$$\begin{aligned}
u&=N_iu_i+N_ju_j+N_mu_m+N_pu_p,\\
v&=N_iv_i+N_jv_j+N_mv_m+N_pv_p,\\
w&=N_iw_i+N_{xi}\theta_{xi}+N_{yi}\theta_{yi}+N_jw_j+N_{xj}\theta_{xj}+N_{yj}\theta_{yj}+N_mw_m+N_{xm}\theta_{xm}\\
&\quad+N_{ym}\theta_{ym}+N_lw_l+N_{xl}\theta_{xl}+N_{yl}\theta_{yl}.
\end{aligned} \tag{11-59}$$

式中 $\theta_{xi}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_i$，$\theta_{yi}=-\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_i$，形函数$N_i$见式（5-2），$N_{xi}$、$N_{yi}$见式（10-13），局部坐标的原点放在单元形心上，四个结点是角点i、j、m、p。由式（11-48）

$$[N]=[[N_i][N_j][N_m][N_p]].$$

式中子矩阵

$$[N_i]=\begin{matrix} \\ \end{matrix}\begin{matrix} u_i & v_i & w_i & \theta_{xi} & \theta_{yi} \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & N_{xi} & N_{yi} \end{bmatrix}.$$

由式（11-53）：

$$[N_w]=[[N_{wi}][N_{wj}][N_{wm}][N_{wp}]].$$

式中子矩

$$[N_{wi}]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i & N_{xi} & N_{yi} \end{bmatrix}.$$

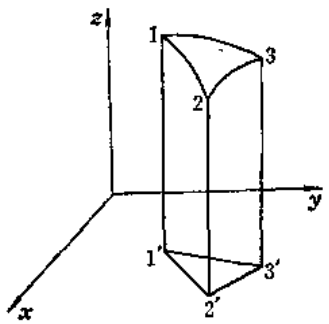


图11-18　三角形壳体曲面单元

在建立图11-18所示的三角形壳体曲面单元时，可利用三角形的面积坐标。

必须指出，在曲面壳体单元中，往往很难满足关于刚体位移和斜率连续性的要求。为了克服后面这个困难，象在薄板弯曲问题中一样，也可以采用混合单元或杂交单元。

在图11-19中，对于承受均布法向荷载 q 的固支双曲抛物面壳，表示了用几种不同的曲面单元的计算结果及有限差分解和康脱洛维奇-伽辽金变分解。图中表示了壳体中心挠度 w_c 随整个壳体的方程总数的变化。由图可见，不同的曲面单元都有收敛于同一解的趋势。

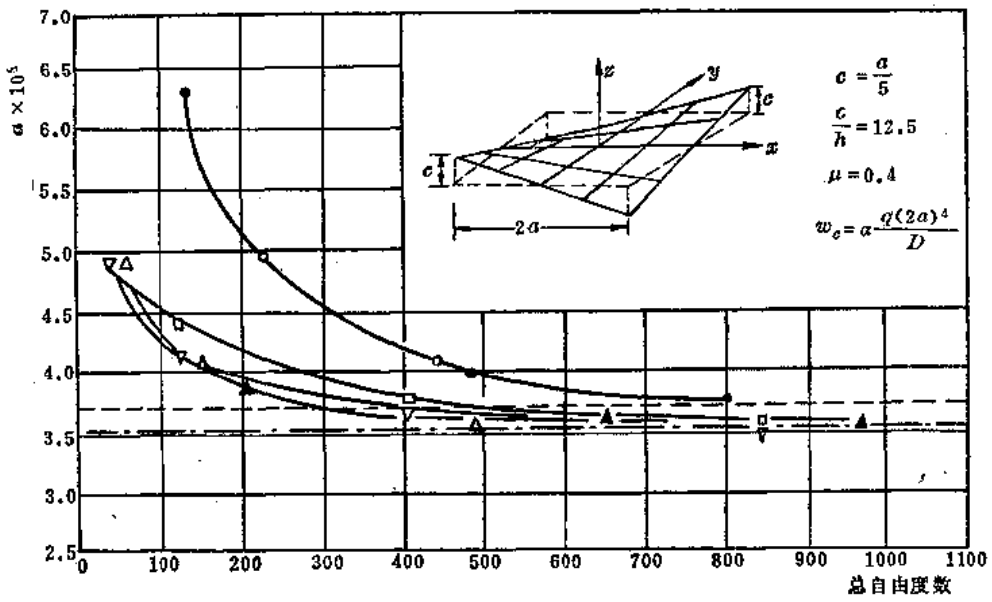


图 11-19　固支双曲抛物面壳中点挠度 w_c 的比较

▽　u、v 线性，w 三次，矩形单元，20个自由度；

·　u、v、w 三次，三角形单元，36个自由度；

○　u、v、w 三次，三角形单元，27个自由度；

△　u、v 线性，w 三次，矩形单元，24个自由度；

▲　u、v 线性，w 五次，三角形单元，24个自由度；

□　u、v 线性，w 三次，三角形单元，15个自由度；

——　康脱洛维奇-伽辽金变分解；

------　有限差分解，8×8网格

第十二章　弹性厚板和厚壳

众所周知，即使对于厚板和厚壳，中面法线在变形后仍基本保持为直线。利用这一事实，文献[79]提出了分析厚壳的一个方法，即假定中面法线在变形后保持为直线，并忽略垂直于中面的正应力所引起的应变能，每一结点共有五个自由度，利用形函数作坐标变换，壳体中面可以是任意曲面。计算中考虑了横向剪应力影响，因此比薄壳理论为准确。这种壳体单元不但可以分析厚壳，也可分析薄壳。实际计算经验表明，它具有计算精度高、适用范围大等优点，是到目前为止最好的壳体单元之一。作者与宋敬廷同志合作将这种壳体单元用于双曲拱坝应力分析，也得到了满意的结果。

为了循序渐进，本章首先说明厚板单元，然后再分析厚壳单元。

§12-1　厚板曲边单元

考虑图12-1所示弹性厚板曲边单元。单元中面是平面 $z=0$。ξ、η是单元中面内的曲线坐标，而ζ是在厚度方向的直线坐标。$\zeta=+1$及$\zeta=-1$代表单元的上、下表面。单元中面内任一点的直角坐标可用曲线坐标表示如下：

$$x=\Sigma N_i(\xi,\ \eta)x_i,\quad y=\Sigma N_i(\xi,\ \eta)y_i. \tag{12-1}$$

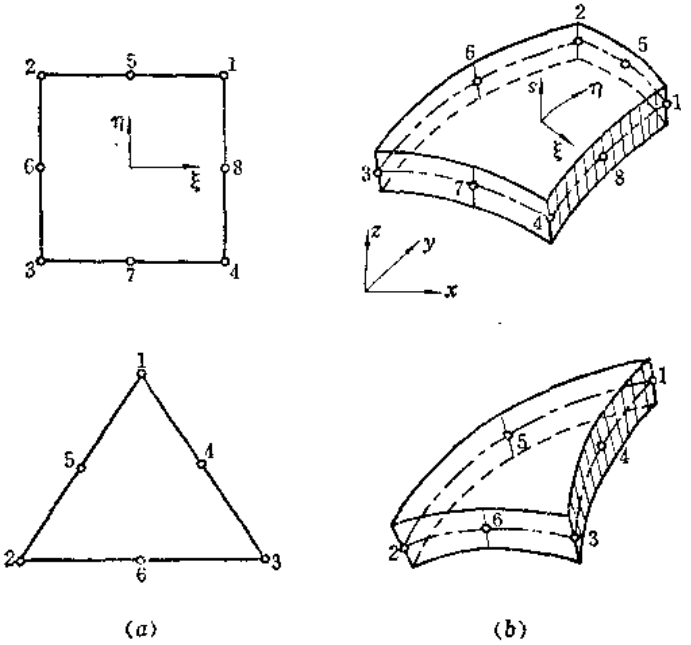


图 12-1　弹性厚板曲边单元

(a)母单元(中面)；(b)子单元

式中（x_i，y_i）为结点 i 的坐标，$N_i(\xi,\eta)$ 为形函数。例如，对于图中所示 8 结点矩形曲边单元，形函数如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{对于角点：}\quad N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1),\\&\text{对于边中点：}\quad \xi_i=0,\ N_i=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta),\\&\qquad\qquad\quad \eta_i=0,\ N_i=\frac{1}{2}(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2).\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}2)$$

式中（ξ_i、η_i）为结点 i 的曲线坐标。如为三角形单元，应采用面积坐标。设在结点 i，板的厚度为 t_i，单元内任一点（ξ，η，ζ）的坐标 z 为

$$z=\Sigma\frac{N_i(\xi,\ \eta)\zeta t_i}{2}.\qquad(12\text{-}3)$$

形函数$N_i(\xi,\eta)$在结点 i 取值 1，在其他结点取值 0，并可保证在单元边界上坐标连续。采用二次或三次形函数，可使单元边界适应任意二次或三次曲线。实际上，在第八章所述任一种平面形函数均可用于此处。

下面规定单元的位移场。假定垂直于单元中面方向的应变 ε_z 可以忽略，由于我们是分析厚板弯曲问题，在中面内的线位移也予以忽略，因此对于每个中面上的结点 i，我们只须规定 z 方向的线位移 w_i 和中面法线绕 y 轴的转角 θ_{yi} 及绕 x 轴的转角 θ_{xi}，如图 12-2 所示。即

$$\{\delta_i\}^T=[w_i,\ \theta_{yi},\ \theta_{xi}].\qquad(a)$$

在结点 i，由于θ_{yi}，离中面距离为 ζ 的一点在 x 方向的线位移为 $\zeta t_i\theta_{yi}/2$；由于转角 θ_{xi}，ζ 点在 y 方向的线位移为 $-\zeta t_i\theta_{xi}/2$。因此，单元内任一点（ξ，η，ζ）的三个位移分量分别为

$$u=\Sigma\frac{N_i\zeta t_i\theta_{yi}}{2},\quad v=-\Sigma\frac{N_i\zeta t_i\theta_{xi}}{2},\quad w=\Sigma N_i w_i.\qquad(12\text{-}4)$$

将上式中的 u、v、w 分别对 x、y、z 求微商，得到

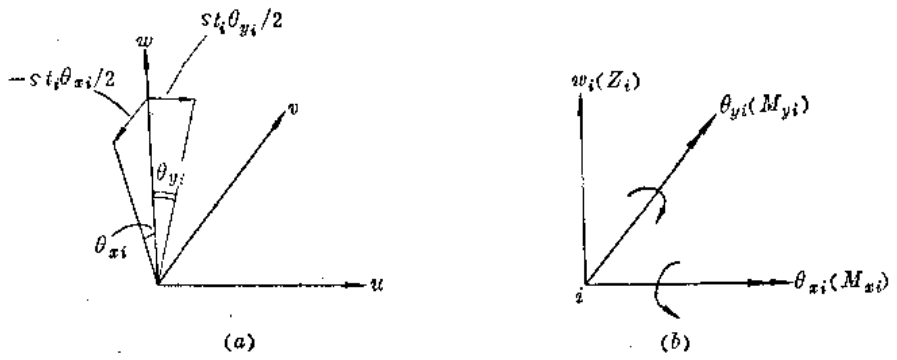


图 12-2　厚板单元结点位移（w_i，θ_{xi}，θ_{yi}）及结点力（Z_i，M_{xi}，M_{yi}）

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\Sigma\frac{1}{2}\frac{\partial M_i}{\partial x}t_i\theta_{yi},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\Sigma\frac{1}{2}\frac{\partial M_i}{\partial y}t_i\theta_{yi},\\
\frac{\partial u}{\partial z}&=\Sigma\frac{1}{2}\frac{\partial M_i}{\partial z}t_i\theta_{yi},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\}\qquad (b)$$

式中
$$M_i=N_i\zeta_i \qquad (c)$$

由式（ b ）可得到应变如下：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\\ \dfrac{\partial w}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\end{Bmatrix}=[B_1,B_2,\cdots B_i,\cdots]\begin{Bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\\ \vdots\\ \delta_i\\ \vdots\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}\,. \qquad (12\text{-}5)$$

其中$[B_i]$为5×3矩阵，$\{\delta_i\}$见式（ a ）。

$$[B_i]=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial x}t_i & 0\\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial y}t_i\\ 0 & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial y}t_i & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial x}t_i\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial z}t_i\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial M_i}{\partial z}t_i & 0\end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}6)$$

在应变中，忽略了厚度方向的正应变ε_z，同理，忽略厚度方向的正应力σ_z，应力决定于下式：

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\})+\{\sigma_0\}\,. \qquad (12\text{-}7)$$

其中$\{\varepsilon_0\}$和$\{\sigma_0\}$是初应变和初应力。

在应力-应变关系式中令$\sigma_z=0$，可推得各向同性弹性固体的5×5弹性矩阵如下：

$$[D]=\frac{E}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1-\mu}{2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-\mu}{2k} & 0 \\ & & & & \frac{1-\mu}{2k} \end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}8)$$

其中E和μ分别是弹性模量和泊松比，最后两个剪应力项中所包含的系数k可取为1.20。引入系数k是为了考虑剪应力分布不均匀的影响。根据前面所述位移函数，剪应力沿厚度方向接近均匀分布，实际上是抛物线分布，$k=1.20$的数值就是两种应变能的比值。

如图12-2所示，在结点i的结点力为

$$\{F_i\}^T=[Z_i,\ M_{yi},\ M_{xi}]. \qquad (12\text{-}9)$$

由虚功原理可知，结点力与结点位移之间存在下列关系：

$$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e. \qquad (12\text{-}10)$$

式中刚度矩阵$[k]$由下式决定：

$$[k]=\iiint[B]^T[D][B]dxdydz. \qquad (12\text{-}11)$$

将（12-6）（12-8）二式代入上式，通过数值积分，可求出刚度矩阵。设板面分布荷载在结点i的强度为p_i^z，板面上任一点分布荷载强度可表示为

$$p_z=\Sigma N_i p_i^z.$$

由虚功原理可求得结点i的结点荷载如下：

$$Z_r^p=\iint N_r(\Sigma N_i p_i^z)dxdy,$$

$$M_{yi}^p=M_{xi}^p=0.$$

§12-2 厚壳曲面单元

下面将上述分析厚板的基本概念推广应用于厚壳的分析。

一、曲面单元与映射

采用厚壳曲面单元如图12-3所示。单元的局部坐标为（ξ,η,ζ），$\zeta=0$为单元的中面，$\zeta=\pm1$为单元的上、下表面，均为曲面。$\xi=\pm1$和$\eta=\pm1$是由直线产生的四个截面。单元结点取在中面上。例如，对于图12-3所示单元，在中面上取八个结点，即四个角点和四个边中点。

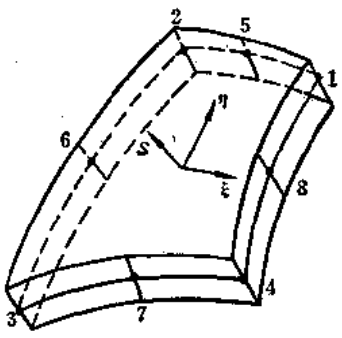


图 12-3 厚壳曲面单元

厚板单元的中面是平面，而厚壳单元的中面是曲面，其坐标变换（映射）如图12-4所

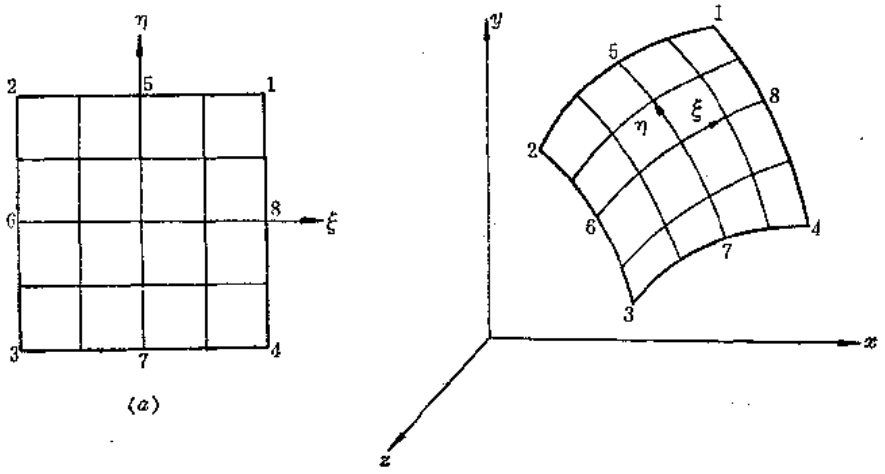


图 12-4 壳体中面

(a)母单元；(b)子单元

示。设结点 i 的直角坐标为（x_i，y_i，z_i），则中面（$\zeta=0$）上任一点（ξ，η）的整体坐标可表示如下：

$$x=\Sigma N_i x_i,\quad y=\Sigma N_i y_i,\quad z=\Sigma N_i z_i。\tag{12-12}$$

式中N_i（ξ，η）为单元的形函数。例如，对于图12-3所示八结点单元，形函数如式（12-2）所示。也可采用其他形函数。

设$\zeta=+1$代表单元的下表面，$\zeta=-1$代表单元的上表面，单元内任一点的整体坐标（x，y，z）可用局部坐标（ξ，η，ζ）表示如下：

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\Sigma N_i(\xi,\ \eta)\frac{(1+\zeta)}{2}\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{Bmatrix}_{\text{下表面}}$$

$$+\Sigma N_i(\xi,\ \eta)\frac{(1-\zeta)}{2}\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{Bmatrix}_{\text{上表面}}。\tag{a}$$

令Δx_i、Δy_i、Δz_i为结点 i 在厚度方向的坐标差值：

$$\begin{Bmatrix}\Delta x_i\\\Delta y_i\\\Delta z_i\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{Bmatrix}_{\text{下表面}}-\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{Bmatrix}_{\text{上表面}}。\tag{b}$$

代入式（a），得到单元内任一点的整体坐标如下：

$$\begin{Bmatrix}x\\y\\z\end{Bmatrix}=\Sigma N_i\begin{Bmatrix}x_i\\y_i\\z_i\end{Bmatrix}_{\text{中面}}+\Sigma N_i\frac{\zeta}{2}\begin{Bmatrix}\Delta x_i\\\Delta y_i\\\Delta z_i\end{Bmatrix}。\tag{12-13}$$

如此定义的局部坐标只是近似地垂直于中面。

二、位移函数

在每一结点 i 有三个线位移和两个角位移。为了定义角位移，如图12-5所示，作三个

正交向量H_{1i}、H_{2i}和H_{3i}。首先，作垂直于中面的正交向量H_{3i}：

$$H_{3i}=\begin{Bmatrix}\Delta x_i\\ \Delta y_i\\ \Delta z_i\end{Bmatrix}。\quad (12\text{-}14)$$

H_{3i}的方向余弦为

$$l_{3i}=\frac{\Delta x_i}{t_i},$$

$$m_{3i}=\frac{\Delta y_i}{t_i},$$

$$n_{3i}=\frac{\Delta z_i}{t_i}。$$

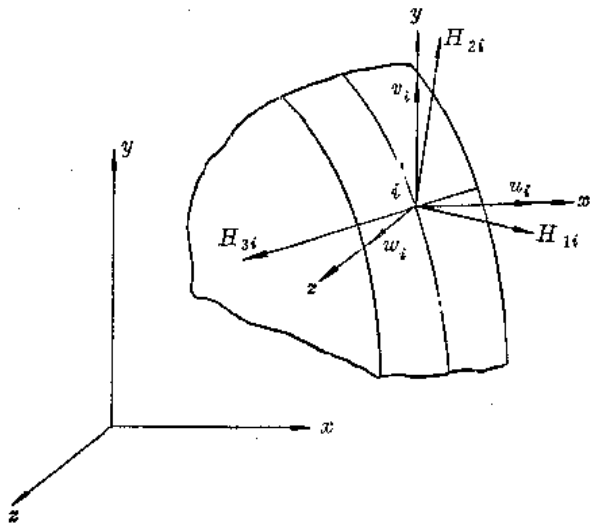


图 12-5　结点 i 线位移（u_i，v_i，w_i）

其中$t_i=(\Delta x_i^2+\Delta y_i^2+\Delta z_i^2)^{1/2}$为结点$i$的壳体厚度。今在结点$i$再作两个向量$H_{1i}$和$H_{2i}$，它们均切于中面，并正交于$H_{3i}$。为了使$H_{1i}$、$H_{2i}$、$H_{3i}$与$x$、$y$、$z$方向大体一致（这对成果整理及边界条件处理将带来一些方便），采用如下做法，令

$$H_{2i}=H_{3i}\times\vec{i},\quad H_{1i}=H_{2i}\times H_{3i},\qquad (12\text{-}15)$$

即H_{2i}正交于H_{3i}和x轴，H_{1i}正交于H_{2i}和H_{3i}，根据向量运算法则不难由上式求出H_{1i}的方向余弦l_{1i}，m_{1i}、n_{1i}和H_{2i}的方向余弦l_{2i}，m_{2i}，n_{2i}。

如图12-5所示，结点i在x，y，z方向的线位移分量分别为u_i、v_i、w_i。角位移如图12-6所示，ϕ_i为壳体中面法线向量H_{3i}绕向量H_{2i}的转角，ψ_i为H_{3i}绕向量H_{1i}的转角。

由于转角ϕ_i，在H_{1i}方向产生的线位移为$\frac{\zeta t_i\phi_i}{2}$，它在$x$，$y$，$z$方向的位移分量为

$$\frac{\zeta t_i\phi_i}{2}l_{1i},\ \frac{\zeta t_i\phi_i}{2}m_{1i},\ \frac{\zeta t_i\phi_i}{2}n_{1i}。$$

由于转角ψ_i，在H_{2i}方向产生的线位移为$\frac{\zeta t_i\psi_i}{2}$，它在$x$，$y$，$z$方向的分量为

$$\frac{\zeta t_i\psi_i}{2}l_{2i},\ \frac{\zeta t_i\psi_i}{2}m_{2i},\ \frac{\zeta t_i\psi_i}{2}n_{2i}。$$

利用形函数$N_i(\xi,\eta)$，单元内任一点的位移可用中面结点位移$\{\delta_i\}^T=[u_i,\ v_i,w_i,\ \phi_i,\ \psi_i]$表示如下：

$$\begin{Bmatrix}u\\ v\\ w\end{Bmatrix}=\Sigma N_i\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ w_i\end{Bmatrix}+\Sigma\frac{N_i\zeta t_i}{2}\begin{bmatrix}l_{1i} & l_{2i}\\ m_{1i} & m_{2i}\\ n_{1i} & n_{2i}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \psi_i\end{Bmatrix}。\qquad (12\text{-}16)$$

比较（12-13）（12-16）两式可见，定义单元几何尺寸的式（12-13）比定义单元位移的式（12-16）具有较多的自由度，因此这种单元属于超参数单元，不会自动满足常应变条件。但从后面对应变的定义中可看出，关于刚体位移和常应变的条件都是满足了的。

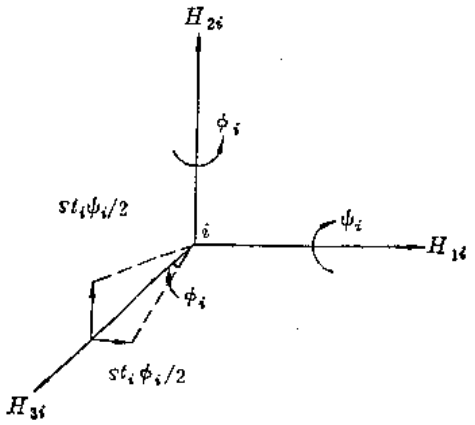


图 12-6　结点 i 角位移（ϕ_i，ψ_i）

在每个中面结点 i，共有五个自由度。

三、整体坐标中的应变

整体坐标（x，y，z）中的应变决定于下列矩阵：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{12-17}$$

由位移函数（12-16）式分别对 x，y，z 求微商，可得到上述矩阵中的各元素，例如

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial M_i}{\partial x} t_i (l_{1i}\phi_i + l_{2i}\psi_i),$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i + \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial M_i}{\partial x} t_i (m_{1i}\phi_i + m_{2i}\psi_i),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i + \frac{1}{2} \Sigma \frac{\partial M_i}{\partial x} t_i (n_{1i}\phi_i + n_{2i}\psi_i),$$

……

式中 $M_i = N_i\zeta$，由偏微分法则可知

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{12-18}$$

其中 $[J]$ 为雅可比矩阵：

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}, & \frac{\partial y}{\partial \xi}, & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}, & \frac{\partial y}{\partial \eta}, & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta}, & \frac{\partial y}{\partial \zeta}, & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix}.$$

同理，可求得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x} \\ \frac{\partial M_i}{\partial y} \\ \frac{\partial M_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \zeta \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ N_i \end{Bmatrix}. \tag{12-19}$$

四、局部坐标中的应变与应力

在前述厚板分析中，应力和应变是在整体坐标系中计算的。在厚壳的分析中，情况有所不同。由于壳体中面的法线方向与整体坐标的 z 轴并不一致，而且法线方向随着点的位置不同而变化，既然我们假定垂直于壳体中面的正应力等于零，就必须求出局部坐标系中的应力与应变。今假定局部坐标系为（x'，y'，z'），其中z'轴正交于壳体中面。

前面已求出了结点 i 的局部正交坐标H_{1i}，H_{2i}、H_{3i}。现在建立单元内任一点的局部正交坐标（x'，y'，z'）。如图12-7所示，在（ξ_0、η_0、ζ_0）点作曲面 $\zeta=\zeta_0$，在此曲面上有两条空间曲线，一条是$\eta=\eta_0$，另一条是$\xi=\xi_0$。再作曲面 $\zeta=\zeta_0$ 的两个切向量 $d\vec{\xi}$ 和 $d\vec{\eta}$，其中 $d\vec{\xi}$ 切于曲线$\eta=\eta_0$，$d\vec{\eta}$ 切于曲线$\xi=\xi_0$，由此可知

$$d\vec{\xi}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)d\xi,$$

$$d\vec{\eta}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\eta.$$

式中$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$为 x、y、z 方向的单位向量。今作z'垂直于 $d\vec{\xi}$和 $d\vec{\eta}$，即正交于 $\zeta=\zeta_0$曲面：

$$z'=d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{vmatrix}. \tag{12-20}$$

由此可求出 z' 的方向余弦 l_3，m_3，n_3。为使局部坐标（x'，y'，z'）与整体坐标（x，y，z）大体一致，以利于成果的整理和边界条件的处理，对于其他两个局部坐标x'和y'用如下方法选取。令

$$y'=z'\times x=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_3 & m_3 & n_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

由此可求出 y'的方向余弦 l_2、m_2、n_2。如果z'与x轴平行，可改用 $y'=z'\times y$，应写一程序校核z'是否平行于 x 轴（在拱坝和屋盖设计中，一般不至于出现这种情况）。

最后，作x'正交于y'和z'，即

$$x'=y'\times z'.$$

由此可求出x'的方向余弦l_1，m_1，n_1。

现在得到局部坐标系（x'，y'，z'）的方向余弦矩阵如下：

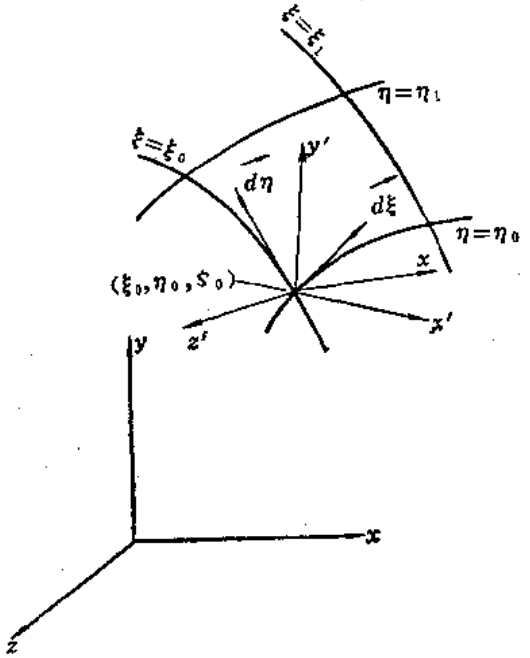


图 12-7　任意点局部正交坐标系（x'，y'，z'）

$$[\theta]=\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}. \tag{12-21}$$

利用矩阵$[\theta]$可将整体坐标系中的矩阵（12-17）转换到局部坐标系中去：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix}=[\theta]^T \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}[\theta]. \tag{12-22}$$

由此得到局部坐标中的应变如下：

$$\{\varepsilon'\}=\begin{Bmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \gamma'_{x'y'} \\ \gamma'_{y'z'} \\ \gamma'_{z'x'} \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial w'}{\partial y'}+\frac{\partial v'}{\partial z'} \\ \frac{\partial w'}{\partial x'}+\frac{\partial u'}{\partial z'} \end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}. \tag{12-23}$$

将矩阵$[B]$分块，得到

$$\{\varepsilon'\}=[B_1,B_2,\cdots B_i,\ \cdots]\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_i \\ \vdots \end{Bmatrix}=\Sigma[B_i]\{\delta_i\}. \tag{12-24}$$

式中$\{\delta_i\}^T=[u_i,v_i,w_i,\phi_i,\psi_i]$。$[B_i]$为如下 5 × 5 矩阵：

$$[B_i]=\begin{bmatrix} b^i_{11} & b^i_{12} & b^i_{13} & b^i_{14} & b^i_{15} \\ b^i_{21} & b^i_{22} & b^i_{23} & b^i_{24} & b^i_{25} \\ b^i_{31} & b^i_{32} & b^i_{33} & b^i_{34} & b^i_{35} \\ b^i_{41} & b^i_{42} & b^i_{43} & b^i_{44} & b^i_{46} \\ b^i_{51} & b^i_{52} & b^i_{53} & b^i_{54} & b^i_{55} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} l_1\alpha_1, & m_1\alpha_1, & n_1\alpha_1, & \beta_1\gamma_1, & \beta_1\lambda_1 \\ l_2\alpha_2, & m_2\alpha_2, & n_2\alpha_2, & \beta_2\gamma_2, & \beta_2\lambda_2 \\ l_1\alpha_2+l_2\alpha_1, & m_1\alpha_2+m_2\alpha_1, & n_1\alpha_2+n_2\alpha_1, & \beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1, & \beta_1\lambda_2+\beta_2\lambda_1 \\ l_2\alpha_3+l_3\alpha_2, & m_2\alpha_3+m_3\alpha_2, & n_2\alpha_3+n_3\alpha_2, & \beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2, & \beta_2\lambda_3+\beta_3\lambda_2 \\ l_3\alpha_1+l_1\alpha_3, & m_3\alpha_1+m_1\alpha_3, & n_3\alpha_1+n_1\alpha_3, & \beta_3\gamma_1+\beta_1\gamma_3, & \beta_3\lambda_1+\beta_1\lambda_3 \end{bmatrix}. \tag{12-25}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}\alpha_s&=l_s\frac{\partial N_i}{\partial x}+m_s\frac{\partial N_i}{\partial y}+n_s\frac{\partial N_i}{\partial z},\\ \beta_s&=\left(l_s\frac{\partial M_i}{\partial x}+m_s\frac{\partial M_i}{\partial y}+n_s\frac{\partial M_i}{\partial z}\right)\frac{t_i}{2},\\ \gamma_s&=l_sl_{1i}+m_sm_{1i}+n_sn_{1i},\\ \lambda_s&=l_sl_{2i}+m_sm_{2i}+n_sn_{2i}.\end{aligned}\right\}\qquad(12\text{-}26)$$

由广义虎克定理，局部坐标中的单元应力为

$$\{\sigma'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\\ \tau_{y'z'}\\ \tau_{z'x'}\end{Bmatrix}=[D](\{\varepsilon'\}-\{\varepsilon'_0\})+\{\sigma'_0\}.\qquad(12\text{-}27)$$

式中$\{\varepsilon'_0\}$为初应变，$\{\sigma'_0\}$为初应力，$[D]$为弹性矩阵，如式（12-8）。在刚度系数计算中，直接利用局部坐标中的应力$\{\sigma'\}$，在输出计算成果时，除$\{\sigma'\}$外，还输出整体坐标中的应力。

$$\begin{bmatrix}\sigma_x&\tau_{xy}&\tau_{xz}\\ \tau_{xy}&\sigma_y&\tau_{yz}\\ \tau_{xz}&\tau_{yz}&\sigma_z\end{bmatrix}=[\theta]\begin{bmatrix}\sigma_{x'}&\tau_{x'y'}&\tau_{x'z'}\\ \tau_{x'y'}&\sigma_{y'}&\tau_{y'z'}\\ \tau_{x'z'}&\tau_{y'z'}&0\end{bmatrix}[\theta]^T.\qquad(12\text{-}28)$$

必须指出，由式（12-27)直接算出的应力$\{\sigma'\}$中，剪应力$\tau_{x'z'}$和$\tau_{y'z'}$是壳体断面上的平均剪应力，而实际上剪应力是抛物线分布的，在壳体表面$\tau_{x'z'}=\tau_{y'z'}=0$，在中和轴上其值为平均剪应力的1.5倍。在由式（12-27）计算$\{\sigma'\}$后，应进行这些修正，然后计算主应力并输出整体坐标中的应力矩阵$\{\sigma\}$。

五、刚度矩阵与结点荷载

单元刚度矩阵直接在局部坐标系中用下式计算：

$$[k_{rs}]=\iiint[B_r]^T[D][B_s]\,|J|\,d\xi d\eta d\zeta=\begin{Bmatrix}k_{rs}^{11}&k_{rs}^{12}&\cdots&k_{rs}^{15}\\ k_{rs}^{21}&k_{rs}^{22}&\cdots&k_{rs}^{25}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ k_{rs}^{51}&k_{rs}^{52}&\cdots&k_{rs}^{55}\end{Bmatrix}.\qquad(12\text{-}29)$$

式中元素k_{rs}^{ij}决定于下式：

$$k_{rs}^{ij}=\iiint g_{rs}^{ij}\,|J|\,d\xi d\eta d\zeta,\qquad(12\text{-}30)$$

$$g_{rs}^{ij}=\frac{E}{1-\mu^2}\Big[b_{1i}^rb_{1j}^s+b_{2i}^rb_{2j}^s+\mu(b_{1i}^rb_{2j}^s+b_{2i}^rb_{1j}^s)+\frac{1-\mu}{2}b_{3i}^rb_{3j}^s+\frac{1-\mu}{2k}(b_{4i}^rb_{4j}^s+b_{5i}^rb_{5j}^s)\Big].\qquad(12\text{-}31)$$

b_{ij}^r见式（12-25）。利用以上三式，通过数值积分可求出刚度矩阵。

结点力与结点位移之间存在如下关系：

$$\{F_r\}=\begin{Bmatrix}U_r\\V_r\\W_r\\M_r^{\varphi}\\M_r^{\psi}\end{Bmatrix}=\sum_{s=1}^{m}\begin{bmatrix}k_{rs}^{11} & k_{rs}^{12}\cdots & k_{rs}^{15}\\ k_{rs}^{21} & k_{rs}^{22}\cdots & k_{rs}^{25}\\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\ k_{rs}^{51} & k_{rs}^{52}\cdots & k_{rs}^{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_s\\v_s\\w_s\\\phi_s\\\psi_s\end{Bmatrix}. \qquad (12\text{-}32)$$

其中m为一个单元的结点个数。如利用马氏互逆定理，可使刚度系数减少约一半。

设壳体中面承受了分布荷载p，在结点i分布荷载在x，y，z方向的分量分别为p_i^x，p_i^y，p_i^z。中面上任一点的分布荷载可表示为

$$p_x=\Sigma N_i p_i^x,\quad p_y=\Sigma N_i p_i^y,\quad p_z=\Sigma N_i p_i^z.$$

参阅图12-7，在曲面$\zeta=0$上取向量$d\vec{\xi}$和$d\vec{\eta}$所构成的微小面积$d\Omega$，由向量运算法则可知

$$d\Omega=|d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}|=|A|\,d\xi d\eta,$$

$$|A|=\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

由虚功原理，得到分布荷载p产生的结点荷载如下：

$$\left.\begin{aligned}X_r^P&=\iint N_r(\Sigma N_i P_i^x)\,|A|\,d\xi d\eta,\\ Y_r^P&=\iint N_r(\Sigma N_i P_i^y)\,|A|\,d\xi d\eta,\\ Z_r^P&=\iint N_r(\Sigma N_i P_i^z)\,|A|\,d\xi d\eta,\\ M_r^{\varphi P}&=0,\quad M_r^{\psi P}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (12\text{-}33)$$

六、弹性基础支承的边界

据我们的经验，厚壳曲面单元应用于双曲拱坝可取得较好的成果。由于基础变形对拱坝应力有显著影响，计算中最好按弹性基础考虑。

设i是基础边界上的一个结点，如图12-8，壳体厚度为t_i，分配给结点i的壳体边界长度为b_i。在i点沿壳体边界的切线方向取$\bar{x}$轴，沿基础表面的法线方向取$\bar{y}$轴，沿壳体半径方向取$\bar{z}$轴。这三个正交向量可表示如下：

$$\bar{z}=\vec{i}\,\Delta x_{3i}+\vec{j}\,\Delta y_{3i}+\vec{k}\,\Delta z_{3i},\quad (\text{径向})$$

$$\bar{x}=\vec{i}\,\Delta x_{1i}+\vec{j}\,\Delta y_{1i}+\vec{k}\,\Delta z_{1i},\quad (\text{切向})$$

$$\bar{y}=\bar{z}\times\bar{x}.\quad (\text{法向})$$

式中Δx_{3i}、Δy_{3i}、Δz_{3i}是壳体下表面与上表面在结点i的坐标差值（沿半径方向），Δx_{1i}、Δy_{1i}、Δz_{1i}是壳体中面沿切线方向的坐标差值，由此可得到局部坐标（$\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$）的方向余弦矩阵如下：

$$[\overline{\theta}]=\begin{bmatrix}\overline{l_1} & \overline{m_1} & \overline{n_1}\\ \overline{l_2} & \overline{m_2} & \overline{n_2}\\ \overline{l_3} & \overline{m_3} & \overline{n_3}\end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}34)$$

在局部坐标系($\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$)中，基础刚度矩阵是

$$[\overline{k}]=[\rho]^{-1}. \qquad (12\text{-}35)$$

式中$[\rho]$是弹性基础的柔度矩阵，见(11-35)式。为了计算在整体坐标系中的基础刚度矩阵，必须进行坐标转换。在整体坐标系中的结点力及结点力矩见图12-9，在局部坐标系($\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$)中的结点力为

$$\begin{Bmatrix}\overline{U}_i\\ \overline{V}_i\\ \overline{W}_i\end{Bmatrix}=[\overline{\theta}]\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ W_i\end{Bmatrix}. \qquad (a)$$

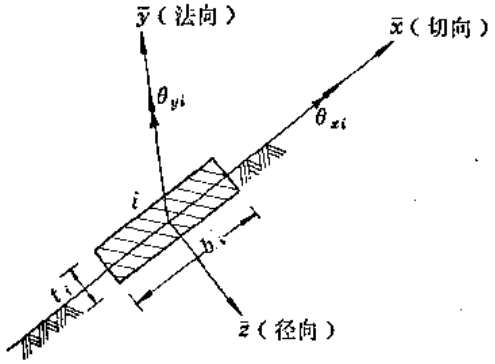
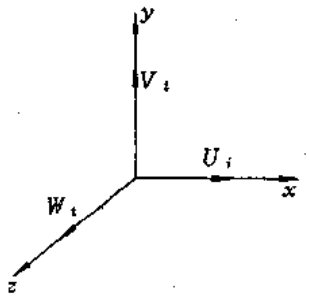
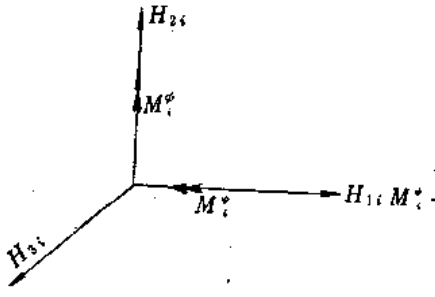


图 12-8 基础边界

下面再计算局部坐标系中的结点弯矩$\overline{M}_x$和$\overline{M}_y$，参阅图12-10，由于$\overline{z}$轴与H_{3i}向量重合，因此$\bar{x}$、$\bar{y}$两轴与向量H_{1i}、H_{2i}共在一个平面内，设H_{1i}与$\bar{x}$轴的夹角为β，则由立体



(a)



(b)

图 12-9 整体坐标系中的结点力及结点力矩
(a)结点力U_i、V_i、W_i；(b)结点力矩M_i^x、M_i^{φ}

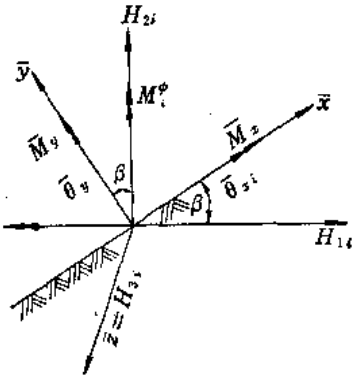


图 12-10

解析几何可知

$$\cos\beta=l_{1i}\overline{l_1}+m_{1i}\overline{m_1}+n_{1i}\overline{n_1}. \qquad (12\text{-}36)$$

其中l_{1i}、m_{1i}、n_{1i}是H_{1i}的方向余弦，而$\overline{l_1}$、$\overline{m_1}$、$\overline{n_1}$是$\bar{x}$轴的方向余弦，由图12-10可知局部坐标系中的结点力矩是

$$\begin{Bmatrix}\overline{M}_x\\ \overline{M}_y\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\beta & -\cos\beta\\ \cos\beta & \sin\beta\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_i^x\\ M_i^{\varphi}\end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

综合(a)(b)二式，得到局部坐标系中的广义结点力如下：

$$\{\overline{F}_i\}=[L]\{F_i\}. \qquad (12\text{-}37)$$

其中

$$[L]=\begin{bmatrix} \overline{l_1} & \overline{m}_1 & \overline{n_1} & 0 & 0 \\ \overline{l_2} & \overline{m}_2 & \overline{n_2} & 0 & 0 \\ \overline{l_3} & \overline{m}_3 & \overline{n_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\beta & -\cos\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix}. \qquad (12\text{-}38)$$

因此，整体坐标系中弹性基础的刚度矩阵可由下式求得

$$[k]=[L]^T[\overline{k}][L]. \qquad (12\text{-}39)$$

其中$[\overline{k}]$见（12-35）式。在计算边界结点 i 的刚度矩阵时，应将上述基础刚度矩阵迭加到壳体本身的刚度矩阵上去。

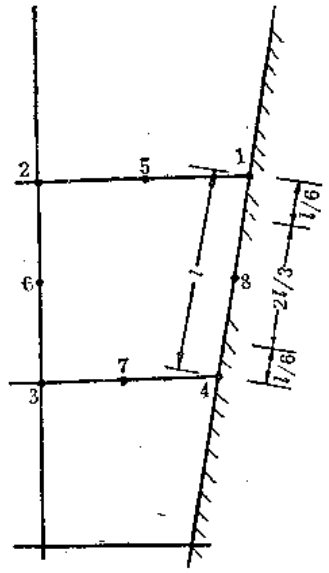


图 12-11　基础边界长度b_i

如图 12-11 所示，取出一个靠近基础边界的壳体单元，设1-8-4是基础边界，其长度为 l，根据虚功原理，推知分配给各边界结点的基础边界长度 b_i 应按下式计算：

角点 1 和 4：
$$b_1=b_4=\frac{l}{6},$$

边中点 8：
$$b_8=\frac{2l}{3}. \qquad (12\text{-}40)$$

§12-3 数 值 积 分

由式（12-11）和（12-31）求刚度矩阵时要采用数值积分。一般采用高斯求积公式。在ζ方向用 2 个高斯点，至于ξ、η方向，在厚板厚壳单元应用初期对于二次形函数，用3×3高斯积分点，对于三次形函数，用4×4高斯积分点，应用于厚板和厚壳得到了比较好的计算结果[79]，但后来发现，这种积分方法应用于薄板薄壳情况，得到的计算结果是不好的[78, 80]，经分析，其所以出现这种结果，是由于前面采用的位移函数，在纯弯曲的条件下也产生了虚假剪切变形，如图12-12所示，这种虚假剪切变形本来是不存在的。对于厚板和厚壳，其影响不明显。对于薄板与薄壳，其影响就比较显著，使单元刚度不适当地

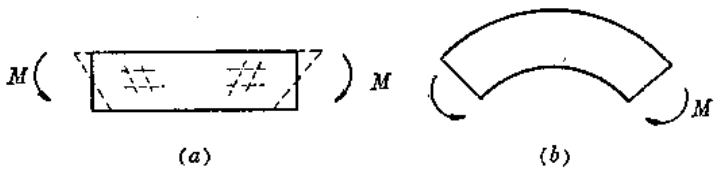


图 12-12
（a）假定位移图形，产生了虚假剪切变形；（b）纯弯曲真实位移

增高了。经文献[78，80]研究，发现采用降阶积分方法可以克服这个缺点，使前述厚板和厚壳单元不但可用于厚板与厚壳，也适用于薄板与薄壳。具体做法是，对于二次形函数，将高斯积分点由3×3减为2×2点，对于三次形函数，由4×4减为3×3点，经这样处理后，虚假剪切变形的影响可以消除，而且可以节省计算时间。

§12-4 算　　例

下面列举一些厚板和厚壳的算例：

【示例1】 简支方板，如图12-13所示，一简支方板承受均布荷载，由于对称，取出四分之一用二次单元进行分析，对于不同的厚度跨度比值图中列出了用3×3及2×2高斯积分点的计算结果，当板较厚时，两种积分方法给出的计算结果比较接近，并反映了薄板计算中没有考虑的剪切变形的影响，但当板比较薄时，3×3高斯积分由于带来了虚假剪应力，使计算位移偏小。但2×2降阶积分，由于消除了虚假剪应力，给出的计算结果与理论解符合得很好[12]。

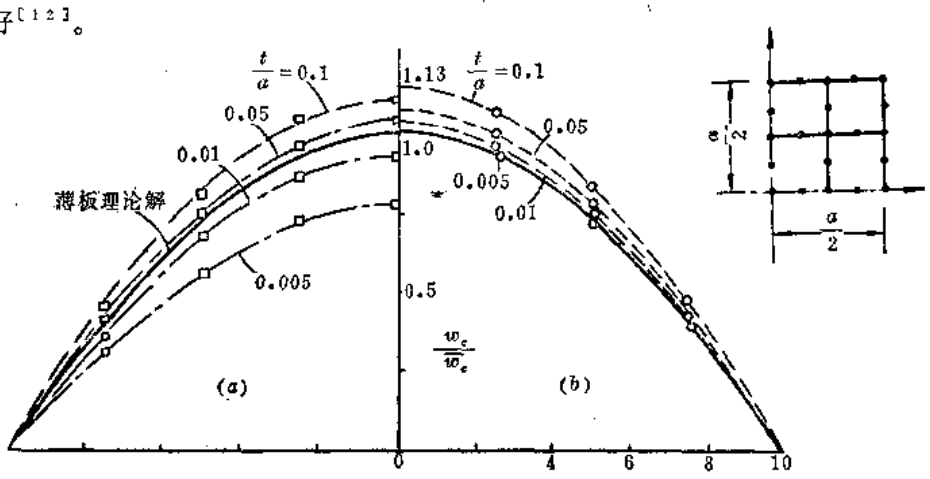


图 12-13　例1　简支方板在均布荷载作用下中央断面挠度
(a)一般高斯积分；(b)降阶积分

【示例2】 圆柱壳，壳体尺寸及计算网格见图12-14采用二次有限单元分析，图12-15表示了壳体在自重作用下的位移的两种计算结果，左边是用3×3高斯积分计算成果，与精确值相差较多，右边是用2×2降阶积分计算成果，由于消除了虚假剪应力，有限单元计算结果与精确值十分接近，甚至只用一个单元也得到了很好的结果。这个算例说明本章所述方法对于弹性薄壳也能给出很好的计算结果[12]。

【示例3】 双曲拱坝水压应力计算，双曲拱坝在水利水电工程中得到了广泛的应用，它的外形比较复杂，壳体厚度和曲率半径都是变化的。过去工程上采用试载法计算，计算精度较低，又比较费事。图12-16表示了作者与宋敬廷同志合作采用本章所述厚壳曲面单元计算的结果，由图可见，厚壳曲面单元计算结果与用三维有限元计算结果很接近，但厚壳单元的自由度要少得多，计算机存储量及计算时间都比较节省。计算中采用了降阶积分。

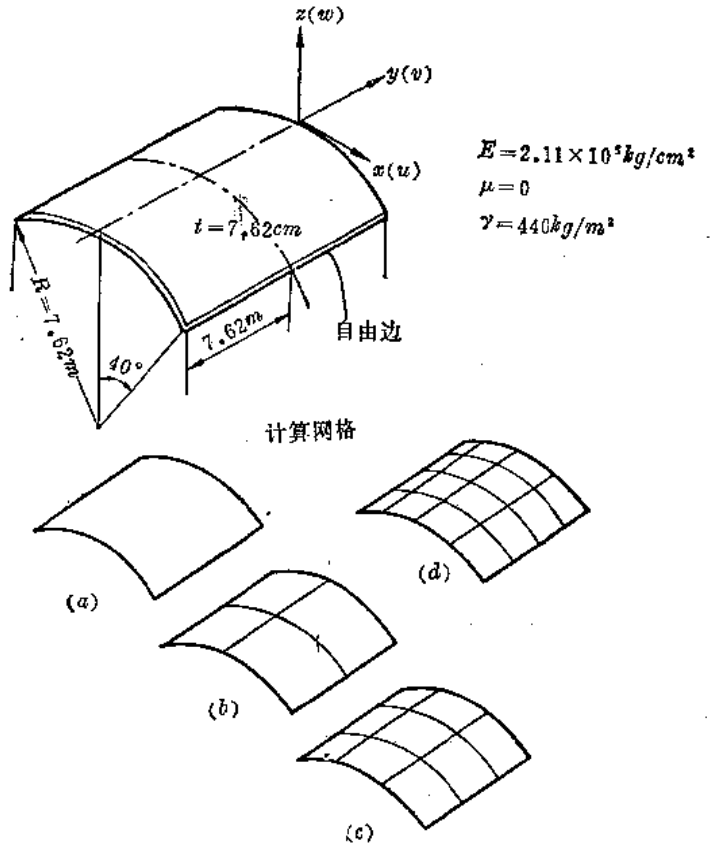


图 12-14　例 2　圆柱壳屋盖

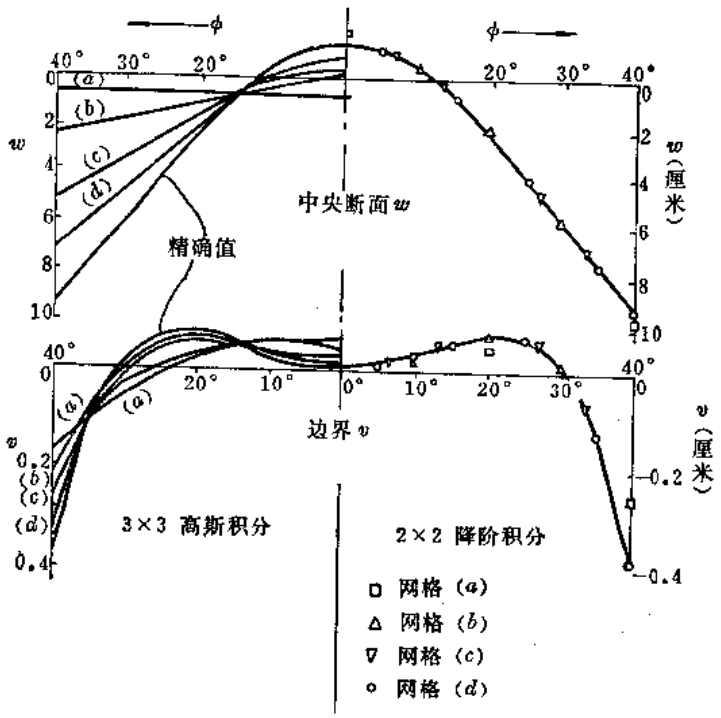
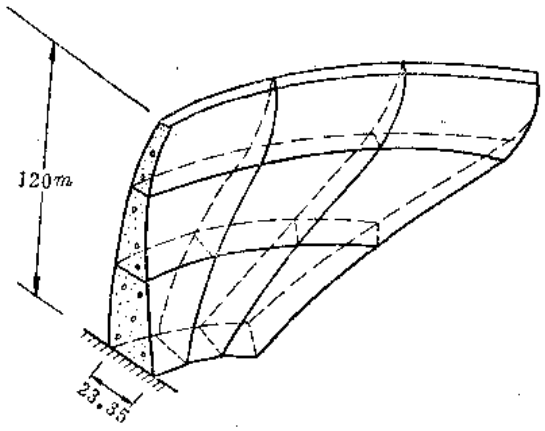
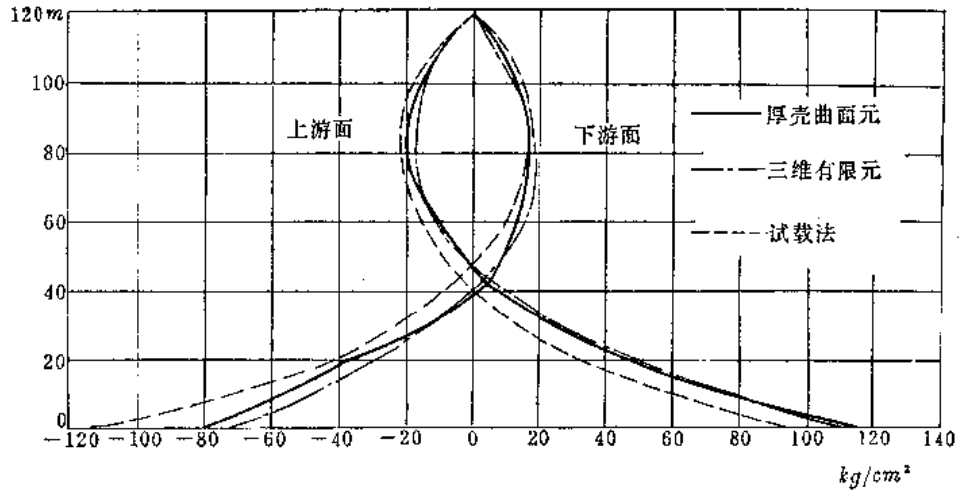


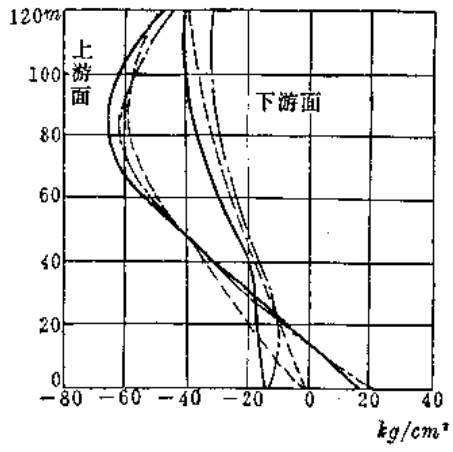
图 12-15　圆柱壳屋盖在自重作用下的位移



(a)



(b)



(c)

图 12-16　双曲率拱坝水压应力计算

(a)计算网格；(b)拱冠断面铅直应力σ_y；(c)拱冠断面环向应力σ_θ

第十三章　流体力学问题

在实际工程中，经常要求解流体力学问题，如地基及土坝的渗流、地震时的动水压力、水工建筑物的势流等，由于工程结构外形不规则，边界条件又比较复杂，这些实际问题用古典方法是很难求解的。但采用有限单元法，可以得到很好的计算结果。在这一章，我们将说明如何用有限单元法求解这些流体力学问题。

从本章开始，将广泛应用变分方法。读者如不熟悉变分法，请先参阅第二十五章。

§13-1　稳定渗流基本方程及其离散化

所谓稳定渗流，系指水头和流速均不随时间而变化。这个问题在工程上具有广泛用途。本节将介绍如何用有限单元法求解这个问题。

一、基本方程

设水头函数为

$$\phi = y + \frac{p}{\gamma}. \tag{13-1}$$

其中γ为流体容重，p为流体压力，y为自某基准面算起的高度，y轴是铅直向上的。假定流体服从达西定律，在x、y、z三个方向的流速分别为

$$v_x = -k_x\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v_y = -k_y\frac{\partial \phi}{\partial y},\quad v_z = -k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{13-2}$$

其中k_x、k_y、k_z分别为x、y、z三个方向的渗透系数。对于不可压缩的流体，连续方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}-Q=0. \tag{13-3}$$

其中Q为内源，将式（13-2）代入上式，得到水头函数ϕ在求解区域R内所必须满足的基本方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+Q=0. \tag{13-4}$$

水头ϕ还必须满足一定的边界条件。工程上经常出现以下两种边界条件：

（1）在边界B上水头已知：

$$\phi = \phi_B. \tag{13-5}$$

（2）在边界C上渗流量q已知：

$$k_x\frac{\partial \phi}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial \phi}{\partial y}l_y+k_z\frac{\partial \phi}{\partial z}l_z=-q. \tag{13-6}$$

其中l_x、l_y、l_z是边界表面向外法线在x、y、z方向的方向余弦。

如果$k_x=k_y=k_z=k$，而且$q=0$，上式即成为

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}=0. \tag{13-7}$$

由基本方程（13-4）及边界条件（13-5）（13-6）可确定渗流场的水头函数ϕ。根据变分原理，这个问题等价于下述泛函的极值问题：

若函数$\phi(x,y,z)$在边界B上满足$\phi=\phi_B$，并使下列泛函实现极值：

$$I(\phi)=\iiint_R\left\{\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]-Q\phi\right\}dxdydz$$
$$+\iint_C q\phi\,ds=min. \tag{13-8}$$

由欧拉方程可知，$\phi(x,y,z)$必然在区域R内满足连续方程（13-4）式，并在边界C上满足（13-6）式，故$\phi(x,y,z)$为所求的水头函数。在求解过程中在边界B上应令$\phi=\phi_B$，即满足（13-5）式。

二、问题的离散化

把求解区域R划分为有限个单元，设单元的结点为i、j、$m\cdots$，结点水头为ϕ_i、ϕ_j、$\phi_m\cdots$，单元形函数为N_i、N_j、$N_m\cdots$，单元内任一点的水头ϕ可用形函数表示如下：

$$\phi^e(x,y,z)=[N_i,\ N_j,\ N_m,\ \cdots]\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \phi_m\\ \vdots\end{Bmatrix}=[N]\{\phi\}^e. \tag{13-9}$$

把单元e作为求解区域R的一个子域ΔR，在这个子域上的泛函为

$$I^e(\phi)=\iiint_{\Delta R}\left\{\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]-Q\phi\right\}dxdydz$$
$$+\iint_{\Delta C}q\phi ds. \tag{13-10}$$

上式右端第二项是沿着边界C的面积分，只有那些靠近边界C的单元才会出现这一项。

由上式，在积分号内求微分，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial\phi_i}=\iiint_{\Delta R}\left\{k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right.$$
$$\left.-Q\frac{\partial\phi}{\partial\phi_i}\right\}dxdydz+\iint_{\Delta C}q\frac{\partial\phi}{\partial\phi_i}ds. \tag{13-11}$$

由（13-9）式可知，在单元e内：

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial x}\phi_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}\phi_j+\frac{\partial N_m}{\partial x}\phi_m+\cdots,$$
$$\frac{\partial}{\partial\phi_i}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial x},$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial\phi_i}=N_i,\ \cdots.$$

把这些式子代入（13-11）式，得到

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial I^e}{\partial \phi_i} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial \phi_j} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial \phi_m} \\ \cdots \end{Bmatrix} = \frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e} = [h]^e\{\phi\}^e + \{f\}^e. \tag{13-12}$$

$[h]^e$相当于结构计算中的刚度矩阵，由（13-11）式，元素$h^e_{i,j}$可计算如下：

$$h^e_{i,j} = \iiint_{\Delta R} \left\{ k_x \frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} + k_z \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z} \right\} dxdydz. \tag{13-13}$$

列阵$\{f\}^e$的元素由下式计算：

$$f^e_i = -\iiint_{\Delta R} QN_i dxdydz + \iint_{\Delta \Omega} qN_i ds. \tag{13-14}$$

与结构计算比较，上式右端第一项相当于体积力引起的结点荷载，第二项相当于边界上表面力引起的结点荷载。

将各个单元的$\frac{\partial I^e}{\partial \{\phi\}^e}$加以集合，对于求解区域的全部结点，得到方程组

$$\frac{\partial I}{\partial \{\phi\}} = [H]\{\phi\} + \{F\} = 0. \tag{13-15}$$

式中 $$H_{i,j} = \Sigma h^e_{i,j}, \qquad F_i = \Sigma f^e_i.$$

由（13-15）式可解出各结点ϕ值。各单元内的流速可由下式计算：

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -k_x \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ -k_y \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\ -k_z \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = [S]^e\{\phi\}^e. \tag{13-16}$$

式中

$$[S]^e = -\begin{bmatrix} k_x \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & k_x \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & k_x \dfrac{\partial N_m}{\partial x} & \cdots \\ k_y \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & k_y \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & k_y \dfrac{\partial N_m}{\partial y} & \cdots \\ k_z \dfrac{\partial N_i}{\partial z} & k_z \dfrac{\partial N_j}{\partial z} & k_z \dfrac{\partial N_m}{\partial z} & \cdots \end{bmatrix}. \tag{13-17}$$

在边界上，单位面积上的流量由下式计算

$$q_n = -k_x l_x \frac{\partial \phi}{\partial x} - k_y l_y \frac{\partial \phi}{\partial y} - k_z l_z \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{13-18}$$

由（13-8）式可知，泛函$I(\phi)$中没有渗透系数k_x、k_y、k_z的导数，因此上述解

法对于常系数和变系数问题都适用。各单元可以具有不同的渗透系数，甚至在一个单元内，渗透系数也可以是变化的，当然在这种情况下在求积分值时应考虑到系数的变化。

对于各向异性材料，只有坐标轴 x，y，z 与各向异性的主轴重合时，微分方程（13-4）才能成立。对于图13-1所示各向异性材料，在计算单元各有关系数 h_{ij}^e、f_i^e 时，必须采用与各向异性主轴相一致的局部坐标 x'、y'、z'。

各向异性渗流与各向异性结构问题有所不同。由于式（13-11）所表示的单元矩阵 $[h^e]$ 是确定纯量 ϕ 之间的关系，不论局部坐标的方向如何，均可适用。因此，必要时各单元可采用不同的局部坐标，在集合成整体刚度矩阵 $[H]$ 时毋需进行矩阵变换。

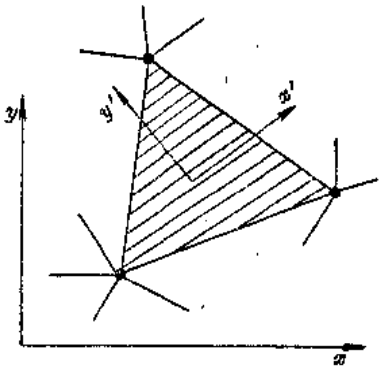


图 13-1　各向异性材料

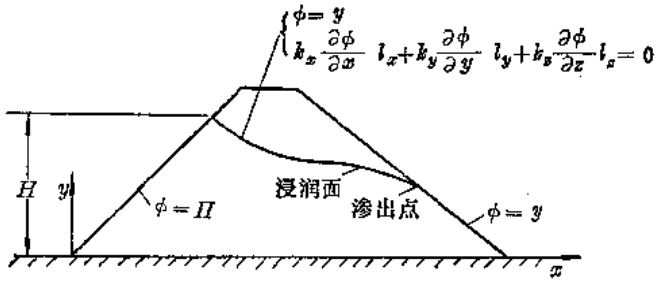


图 13-2　具有浸润面的土坝

三、具有浸润面的稳定渗流

如图13-2所示土坝，在坝体上游面，边界条件为 $\phi=H$（常数）。在坝体下游面，因压力 $p=0$，边界条件为 $\phi=y$。在不透水基础表面，边界条件为 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$。这三处的边界条件都属于前述（13-5）（13-6）式类型，可按前述方法处理。在浸润面上，不但压力 $p=0$，而且无渗流通过浸润面。因此必须同时满足以下两个条件：

（1）
$$\phi=y; \tag{13-19}$$

（2）
$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}l_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}l_z=0. \tag{13-20}$$

浸润面和下游坝面渗出点的位置事先也是未知的。这个问题的求解可采用迭代法。首先假定渗出点和浸润面的位置，按条件（2）求解，得出各点 ϕ 值后再校核条件（1）是否已满足，如不满足，调整渗出点和浸润面的位置，一般可令浸润面的新坐标 y 等于刚才求出的水头 ϕ，然后再求解，通常重复计算五、六次即可得到满意的结果。

对于这种问题，采用等参数曲边单元求解较为有利，因为单元个数少，尺寸大，较易实现浸润面位置的调整。如果采用三角形单元，因单元尺寸较小，浸润面位置的调整量可能超过单元本身的尺寸，计算较费事。最好在程序设计中让计算机自动填写结点坐标。

§13-2　稳定渗流平面问题

在这一节，给出平面稳定渗流的具体算式。如果函数 ϕ 在 z 方向无变化，即 $\frac{\partial\phi}{\partial z}=0$，

则基本方程简化为：

在区域R内
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q=0, \tag{13-21}$$

在边界B上
$$\phi=\phi_B, \tag{13-22}$$

在边界C上
$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial y}l_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}l_y=-q. \tag{13-23}$$

相应的变分问题是，函数$\phi(x,y)$在边界B上取已知值$\phi=\phi_B$，并使下列泛函实现极小值：

$$I(\phi)=\iint_R\left\{\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]-Q\phi\right\}dxdy+\int_C q\phi ds. \tag{13-24}$$

用有限单元法进行离散化后，单元“刚度矩阵”$[h]^e$的元素可按下式计算：

$$h_{ij}^e=\iint_{\Delta R}\left[k_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+k_y\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right]dxdy. \tag{13-25}$$

对于常用的三角形单元，采用形函数

$$N_i=\frac{(a_i+b_ix+c_iy)}{2A}.$$

系数a_i、b_i、c_i见第二章（2-5）式。不难求出单元“刚度矩阵”如下：

$$[h]^e=\frac{k_x}{4A}\begin{bmatrix}b_i^2 & b_ib_j & b_ib_m\\ b_jb_i & b_j^2 & b_jb_m\\ b_mb_i & b_mb_j & b_m^2\end{bmatrix}+\frac{k_y}{4A}\begin{bmatrix}c_i^2 & c_ic_j & c_ic_m\\ c_jc_i & c_j^2 & c_jc_m\\ c_mc_i & c_mc_j & c_m^2\end{bmatrix}. \tag{13-26}$$

“荷载”列阵$\{f\}^e$的元素由下式计算：

$$f_i^e=-\iint_{\Delta R}QN_idxdy+\int_{\Delta C}qN_ids. \tag{13-27}$$

由于

$$\iint_{\Delta R}N_idxdy=\frac{A}{3},\quad\int_{\Delta C}N_ids=\frac{\Delta c}{2}.$$

其中A为三角形的面积，Δc为该单元沿边界c的长度，代入（13-27）式，得到

$$f_i^e=-\frac{QA}{3}+\frac{q\Delta c}{2}. \tag{13-28}$$

对于轴对称渗流，如采用圆柱坐标（r，z），基本方程为

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(k_rr\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_zr\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+Q=0. \tag{13-29}$$

将上式与（13-21）式加以对比，易见我们可以把乘积（k_rr）和（k_zr）看做是修正渗透系数，然后用平面问题程序进行计算。

§13-3 稳定渗流空间问题

在本章第1节已给出稳定渗流空间问题的一般公式。在这一节，我们再给出常用的四

面体单元的具体算式。

设四面体单元的四个结点是 i、j、m、p，采用形函数如下：

$$N_i=\frac{(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)}{6V},$$

$$N_j=-\frac{(a_j+b_jx+c_jy+d_jz)}{6V},\qquad(13\text{-}30)$$

$$N_m=\frac{(a_m+b_mx+c_my+d_mz)}{6V},$$

$$N_p=-\frac{(a_p+b_px+c_py+d_pz)}{6V}.$$

其中 V 是单元的体积，系数 a_i、b_i、c_i、d_i 等见（7-6）式。

把（13-30）式代入（13-13）式，求得单元“刚度”矩阵如下：

$$[h]^e=\frac{k_x}{36V}\begin{bmatrix} b_i^2 & -b_ib_j & b_ib_m & -b_ib_p\\ & b_j^2 & -b_jb_m & b_jb_p\\ & & b_m^2 & -b_mb_p\\ \text{对} & \text{称} & & b_p^2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{k_y}{36V}\begin{bmatrix} c_i^2 & -c_ic_j & c_ic_m & -c_ic_p\\ & c_j^2 & -c_jc_m & c_jc_p\\ & & c_m^2 & -c_mc_p\\ \text{对} & \text{称} & & c_p^2\end{bmatrix}$$

$$+\frac{k_z}{36V}\begin{bmatrix} d_i^2 & -d_id_j & d_id_m & -d_id_p\\ & d_j^2 & -d_jd_m & d_jd_p\\ & & d_m^2 & -d_md_p\\ \text{对} & \text{称} & & d_p^2\end{bmatrix}.\qquad(13\text{-}31)$$

结点“荷载”是

$$f_i^e=-\frac{QV}{4}+\frac{q\Delta c}{3}.\qquad(13\text{-}32)$$

式中 Δc 是该单元靠近边界表面 c 的面积。对于不靠近边界 c 的单元，可取 $\Delta c=0$。

§13-4 非稳定渗流

对于图13-2所示具有浸润面的土坝，当上游水位保持不变时，坝内渗流是稳定的。如果水位发生变化，坝内渗流即是不稳定的，水头、流速及浸润面位置都随着时间而变化。

假定流体是不可压缩的，无内源，基本方程仍然是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)=0.\qquad(13\text{-}4)$$

但浸润面不再是流线，不满足式（13-20），只满足压力为零条件，即 $\phi=y$。浸润面位置

随着时间而不断变化。假定在初始瞬时浸润面位置已知，根据在浸润面上 $\phi=y$ 的边界条件及式（13-15），可求出 ϕ。设浸润面在法线方向的移动速度为 V_n，根据浸润面上流量边界条件，可写出下式

$$sV_n=k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}l_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}l_z. \qquad (13\text{-}33)$$

式中 s 为考虑土壤孔隙的系数，当浸润面上升时为饱和差，下降时为给水度，如果忽略毛细作用所吸附的水分，即为土壤孔隙率。l_x、l_y、l_z 为浸润面法线的方向余弦。由上式可计算浸润面移动速度。当浸润面移动时，浸润面上的结点应跟着移动。设浸润面上结点坐标为 $\bar{x}$、$\bar{y}$、$\bar{z}$，它们都是时间的函数，浸润面法向移动速度可用下式表示：

$$V_n=l_x\frac{d\bar{x}}{dt}+l_y\frac{d\bar{y}}{dt}+l_z\frac{d\bar{z}}{dt}.$$

为了计算方便，可以规定网格结点只沿着某一固定方向移动。例如，只沿着 y 方向移动，有

$$\frac{d\bar{y}}{dt}=\frac{V_n}{l_y}.$$

然后可计算浸润面结点坐标增量如下

$$\Delta\bar{y}=\frac{d\bar{y}}{dt}\Delta t.$$

对于图 13-3(b)所示平面问题，如规定浸润面结点沿直线 PB 移动，PB 与 x 轴的夹角为 α，在法线方向浸润面移动距离为

$$u_n=V_n\Delta t.$$

在 PB 线上移动距离为

$$u_r=\frac{u_n}{\cos\beta}.$$

式中 $\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha+\theta$，在 Δt 时间内结点坐标增量为

$$\Delta\bar{x}=u_r\cos\alpha,\quad \Delta\bar{y}=u_r\sin\alpha.$$

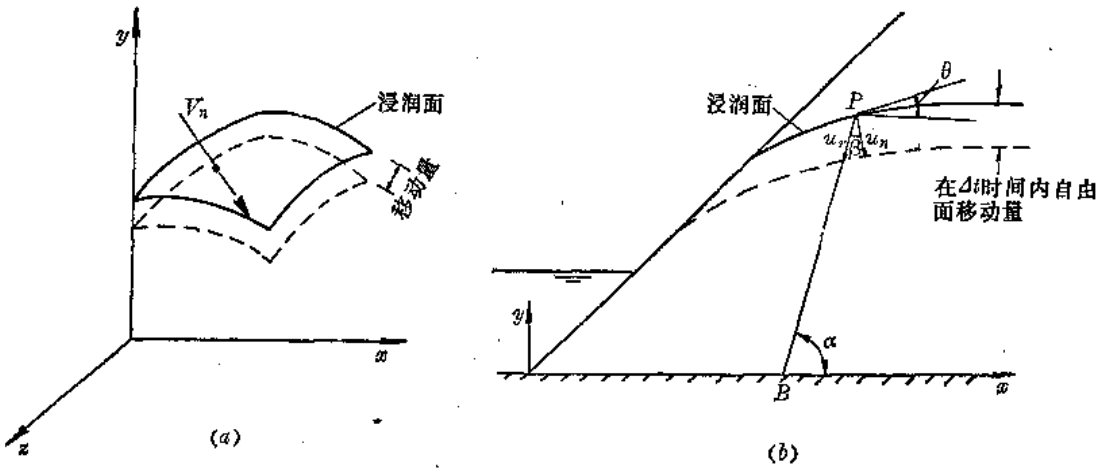


图 13-3　土坝浸润面的移动

(a)空间问题；(b)平面问题

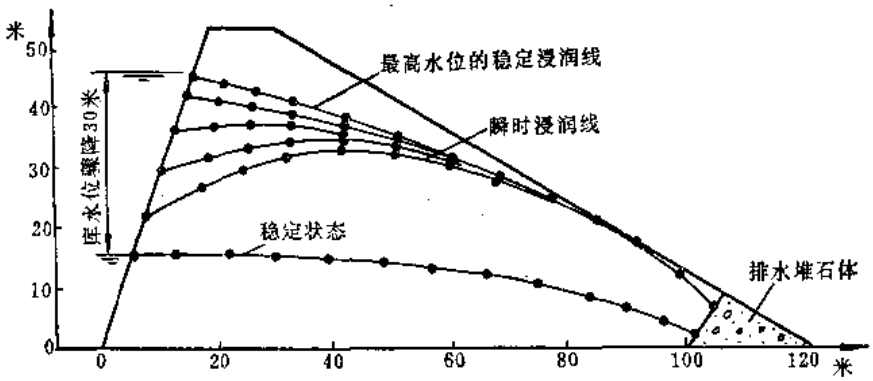


图 13-4 水库水位骤降后土坝的非稳定渗流

如此即可求得浸润面的新位置。逐步计算下去，可不断求出浸润面的位置及水头函数 ϕ。显然，每次求出浸润面新位置后，计算网格应相应地调整一次。

图13-4是一个土坝，水库水位从最高水位骤降30米，用等参数单元计算的不同时间浸润面的位置[23]。用上述方法计算的结果，与实验结果符合得比较好[90]。

§13-5 地震时动水压力

本节分析地震时挡水结构所受到的动水压力。当流体作小振幅运动时，忽略流体的粘滞性及对流影响，根据微元体积的平衡条件，附加压力 P 满足下列运动方程：

$$\frac{\partial p}{\partial x}=-\rho\frac{\partial v_x}{\partial t},\quad \frac{\partial p}{\partial y}=-\rho\frac{\partial v_y}{\partial t},\quad \frac{\partial p}{\partial z}=-\rho\frac{\partial v_z}{\partial t}. \tag{a}$$

其中 ρ 为密度，v_x、v_y、v_z 为流体质点在 x、y、z 三个方向的运动速度。连续方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{K}\frac{\partial p}{\partial t}. \tag{b}$$

其中 K 为体积变形模量，由上式对时间 t 求微商，再将式（a）代入，得到基本方程如下

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\rho}{K}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \tag{13-34}$$

如果忽略水的压缩性，得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=0. \tag{13-35}$$

上式与式（13-4）是相似的。在自由表面、边界条件

$$p=0. \tag{13-36}$$

在流体与固体的接触面上，因假定液体无摩阻力，在切线方向不能对流体与固体的相对速度加以任何限制，但因不允许分离，在边界法线方向，流体与固体应具有相同的加速度，参照式（a），可知此时边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho\frac{\partial^2 \delta_n}{\partial t^2}. \tag{13-37}$$

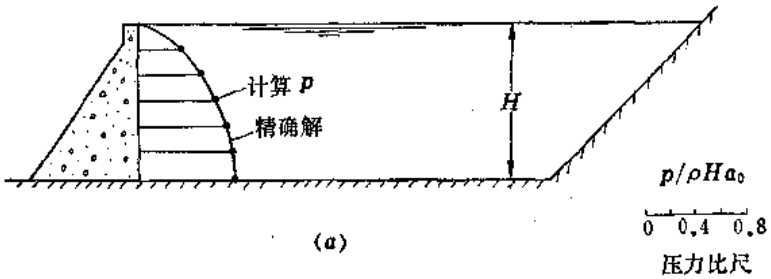
其中n是接触面法线，其正方向指向流体外部；δ_n是边界位移的法向分量。上式与式（13-6）是相似的。

由于式（13-35）、（13-36）、（13-37）与式（13-4）、（13-5）（13-6）相似，因此动水压力问题的求解，归结于求解如下方程：

$$[H]\{p\}+\{F\}=0. \tag{13-38}$$

其中$\{p\}$是结点压力，$[H]$和$\{F\}$可参照式（13-13）、（13-14）计算。

图13-5是一个动水压力算例。假定坝体是刚性的，地震时坝体随着地面作水平运动，加速度为a_0，采用四边形单元，计算网格见图13-5(b)，计算结果见图13-5(a)。



(a)



(b)

图 13-5　坝面动水压力计算
(a)动水压力计算结果，(b)计算网格

§13-6　用势函数ϕ表示的势流

对于不可压缩的、非粘性流体，如果其流动是无旋的，那么任一点的流速都可以用势函数ϕ表示，因而这种流动称为势流。势流在工程上具有广泛的用途，如水坝的溢流、泄水孔的出流以及低于音速的绕飞行器流动等等。

一、基本方程

对于不可压缩的流体，任一点的流速必须满足下列连续性方程：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \tag{13-39}$$

其中v_x、v_y、v_z分别是流体在x、y、z方向的流速分量。

流体绕x、y、z轴的旋转分别为

$$\omega_x=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right),$$

$$\omega_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right),$$

$$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

如果流动是无旋的，那么$\omega_x=\omega_y=\omega_z=0$，即

$$\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \tag{13-40}$$

因此，不可压缩的无旋流动必须同时满足（13-39）和（13-40）二式。对于这种流动，可用势函数ϕ表示流速分量如下：

$$v_x=\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial \phi}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{13-41}$$

显然，这样定义的势函数ϕ是满足无旋条件（13-40）式的。再由式（13-39），可知ϕ必须满足下列连续性方程：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0. \tag{13-42}$$

沿着边界，法向流速v_n和切向流速v_t分别为

$$v_n=\frac{\partial \phi}{\partial n},\quad v_s=\frac{\partial \phi}{\partial s}. \tag{13-43}$$

式中n为边界的法线，s为边界的切线。

当流动平行于x轴，而且具有均匀流速U时，势函数可表示为

$$\phi=Ux+\text{常数}. \tag{13-44}$$

有时可利用上式写出无穷远处的边界条件（当然实际上是在足够远处取一个截面以代表无穷远）。

因此，用势函数ϕ表示的势流问题，可陈述如下：

给定区域R，其边界为$C=C_1+C_2$，在区域R中，势函数ϕ满足拉普拉斯方程：

$$\nabla^2\phi=\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}=0. \tag{13-42}$$

在边界C_1上，ϕ取已知值：$\phi=g$. (13-45)

在边界C_2上，法向流速取已知值：$\frac{\partial \phi}{\partial n}=\beta$. (13-46)

与前述稳定渗流问题类似，这个问题等价于下列泛函的极值问题：

函数ϕ在边界C_1上取已知值，$\phi=g$，并使下列泛函取极值

$$I(\phi)=\iiint_R \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz$$

$$+\iint_{c_1}\beta\phi\, ds=min. \qquad (13\text{-}47)$$

上式与（13-8）式是相似的，用有限单元离散化后，计算公式也是相似的，在这里就不再重复了。

从流体力学可知，只要流动是无旋的，在流场空间的任何一点（不管是否在同一流线上）的能量都是一个常量。例如，在重力场中，有

$$\frac{V^2}{2g}+\frac{p}{\gamma}+z=常量=H. \qquad (13\text{-}48)$$

这就是伯努利方程。式中 p 为压强，H 为总能头，γ 为流体的容重，V 为流速

$$V^2=v_x^2+v_y^2+v_z^2. \qquad (13\text{-}49)$$

在算出流速后，由伯努利方程可计算任一点的压强 p。

根据求解区域和边界条件的不同，势流问题可分为以下三类：

1）单连通问题，求解区域是单连通的；

2）复连通问题，求解区域是复连通的；

3）自由面流动，部分边界是自由面。

单连通问题的求解比较简单，无需什么特殊技巧。其他两类问题的求解，都需要一些特殊的处理。关于自由面流动问题，后面将列专节讨论。下面我们着重讨论复连通问题的计算方法。

二、绕无升力物体的流动

如图13-6所示，要求分析绕无升力物体的流动，已知在无穷远处流体具有均匀流速 U。当然实际计算时总是采用一个有限的求解区域 R。通常可在平行于流动方向取一个矩形区域，其边界离开物体已足够远，假定边界上的流动未受干扰，因而 $\frac{\partial\phi}{\partial n}$ 是已知的，如图所示。沿着物体的边界，法向流速必须等于零，所以 $\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$。在目前情况下，因为全

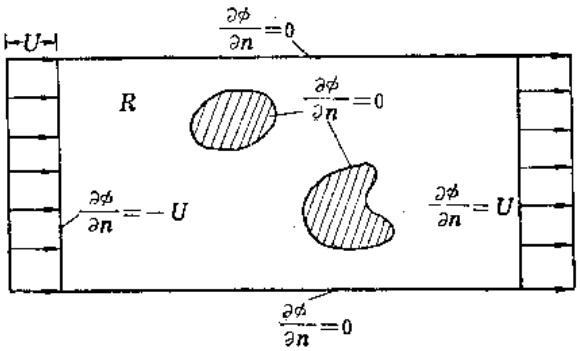


图 13-6 绕无升力物体的流动

部边界条件都是由$\frac{\partial \phi}{\partial n}$给出的，问题的解答将不是唯一的，采用有限单元法求解时，整体刚度矩阵[K]是奇异的。为了克服这个困难，可以在求解区域中任取一个结点，并在此结点上令ϕ取任一已知值，例如可令边界上某一结点上$\phi=0$。

三、绕有升力物体的流动

现在考虑绕有升力物体的二维势流。设来流速度为U，根据著名的库达-茹可夫斯基升力定律，物体所受的升力为

$$L=-\rho U\Gamma.$$

式中L为升力，ρ为密度，Γ为环流。根据环流的定义

$$\Gamma=\int_{C_1} v_s ds.$$

式中C_1为物体的边界，v_s为在物体边界上的切向流速。在物体表面任取一对无限靠近的点子A和B，以$v_s=\frac{\partial \phi}{\partial s}$代入上式，可知

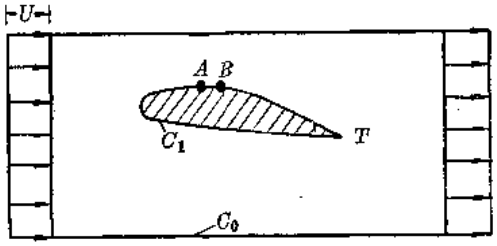


图 13-7 绕有升力物体的流动

$$\Gamma=\int_A^B \frac{\partial \phi}{\partial s} ds=\phi_B-\phi_A=\Delta\phi. \qquad (13\text{-}50)$$

可见对于象机翼这样的有升力物体，在物体表面的一点，如A，势函数存在着跳跃$\Delta\phi$。在其余各处，势函数是连续的。在A点

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|_A=\left.\frac{\partial \phi}{\partial s}\right|_B.$$

所以速度是连续的。

对于机翼这样的物体，计算时还必须满足库达条件，即在尖锐的尾边T有一静止点。利用库达条件可以决定$\Delta\phi$。

令 $$\Gamma=\Delta\phi=\phi_B-\phi_A=a, \qquad (13\text{-}51)$$

定解问题可陈述如下：

在区域R内 $$\nabla^2\phi=0, \qquad (13\text{-}52)$$

在C_0上 $$\frac{\partial \phi}{\partial n}=Un_x, \qquad (13\text{-}53)$$

在C_1上，除A、B两点外 $$\frac{\partial \phi}{\partial n}=0. \qquad (13\text{-}54)$$

在A、B两点 $$\phi_A=0,\ \phi_B=a. \qquad (13\text{-}55)$$

在尾边T $$v_x=v_y=0. \qquad (13\text{-}56)$$

其中n_x是边界法线的方向余弦。

文献[7]建议用叠加方法求解上述问题。

命 $$\phi=a\phi_1+\phi_2. \qquad (13\text{-}57)$$

其中ϕ_1和ϕ_2分别满足下列条件：

郑海荣

（1）在R内　　$\nabla^2\phi_1=0$。　　（a）

在C_0上　　$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial n}=0$。　　（$b$）

在C_1上，除A、B外　　$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial n}=0$。　　（$c$）

在A、B两点　　$\phi_A=0,\ \phi_B=1$。　　（d）

（2）在R内　　$\nabla^2\phi_2=0$。　　（e）

在C_0上　　$\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}=Un_x$。　　（$f$）

在C_1上，除A、B外　　$\dfrac{\partial\phi_2}{\partial n}=0$。　　（$g$）

在A、B两点　　$\phi_A=0,\ \phi_B=0$。　　（h）

用有限单元法可分别求出ϕ_1和ϕ_2，再利用库达条件可求出常数a。

由(b)、(f)二式可知在尾边T：

$$v_{nT}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_T=0。\qquad(13\text{-}58)$$

在任一点，如果在互不平行的两个方向上的速度分量为零，则该点速度等于零。在T点，如果在不平行于法线n的方向的速度分量也等于零，则T点的速度即等于零。不妨取x方向为这个方向。由（13-57）式：

$$v_{xT}=\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_T=a\left.\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right|_T+\left.\frac{\partial\phi_2}{\partial x}\right|_T=0\qquad(13\text{-}59)$$

当（13-58）（13-59）二式同时成立时，库达条件即被满足，由式（13-59）可求出常数a。

在机翼尾边T，边界曲线的导数如果是不连续的，可用一对点子T_1和T_2代替T，其中T_1属于上表面，T_2属于下表面，式（13-59）可应用于T_1或T_2中的任一个。

如果流场中有多个有升力物体，也可用类似方法求解。例如，设共有n个物体，其边界分别为C_1、C_2、…C_n，外边界为C_0，可令

$$\phi=\phi_0+a_1\phi_1+a_2\phi_2+\cdots+a_n\phi_n。\qquad(13\text{-}60)$$

对于ϕ_0，令$\Delta\phi_0=0$。对于ϕ_1，令在C_1上取$\Delta\phi_1=1$，对于ϕ_2，令在C_2上取$\Delta\phi_2=1$，等等。对每个物体应用库达条件，可得到n个方程，正好可用来确定n个常数a_1、a_2、…a_n。

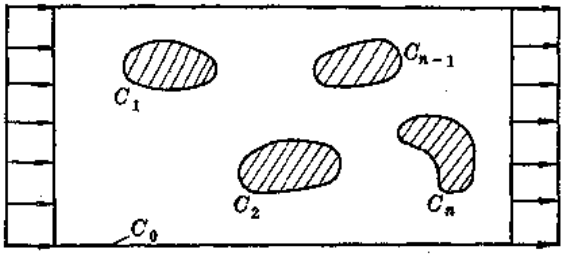


图 13-8　绕多个有升力物体的流动

§13-7 用流函数ψ表示的势流

平面势流，也可用流函数ψ表示

一、基本方程

平面势流的连续性方程为

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}=0. \tag{13-61}$$

绕z轴的旋转为$\omega_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$，因此流体的无旋条件为

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}=0. \tag{13-62}$$

今用流函数ψ表示速度分量v_x和v_y如下

$$v_x=\frac{\partial \psi}{\partial y},\quad v_y=-\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{13-63}$$

显然，流函数ψ满足连续性方程（13-61），再把上式代入无旋条件（13-62）式，得到

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0. \tag{13-64}$$

可见流函数也必须满足拉普拉斯方程。

沿着边界，法向流速v_n和切向流速v_s分别为（图13-9）：

$$v_n=\frac{\partial \psi}{\partial s},\quad v_s=-\frac{\partial \psi}{\partial n}. \tag{13-65}$$

沿着边界积分，有

$$\psi=\int\frac{\partial \psi}{\partial s}ds=\int v_n ds. \tag{13-66}$$

如果法线方向流速v_n已知，由上式可求出边界上的ψ值。如果已知切线方向流速为α，边界条件可由下式给出：

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}=-\alpha. \tag{13-67}$$

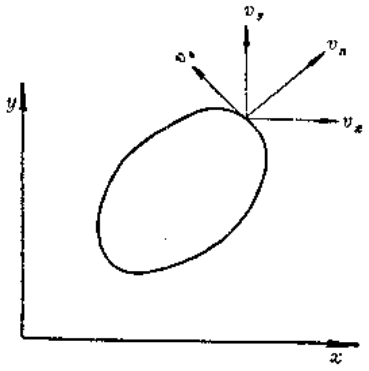


图 13-9

当流动平行于x轴，而且具有均匀流速U时，流函数可表示为

$$\psi=Uy+\text{常数}. \tag{13-68}$$

按流函数求解势流问题时，边界条件多半由（13-66）或（13-68）式给出。

二、绕无升力物体的流动

假定在远离物体处，流体具有均匀流速U，根据式（13-68），可给出外边界C_0上的ψ值，如图13-10所示。沿着物体边界C_1，$\frac{\partial \psi}{\partial s}=0$，因此$\psi=$常数。但此常数是未知的，这就造成了求解的困难。为了克服这一困难，文献[7]建议采用如下叠加方法。

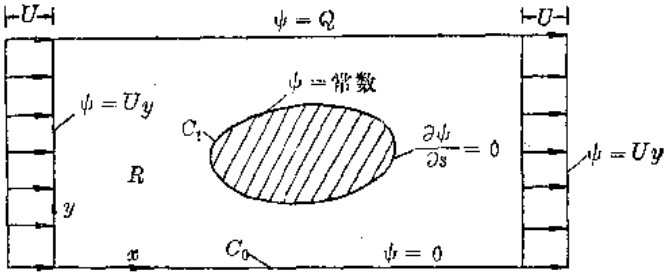


图 13-10 绕无升力物体的流动

令 $$\psi(x,y)=\psi_0(x,y)+b\psi_1(x,y)。 \tag{13-69}$$

式中 b 是待定系数，ψ_0和ψ_1分别满足下列条件：

（1）在R中 $\nabla^2\psi_0=0$，

在C_0上 $\psi_0=g(x,y)$， (13-70)

在C_1上 $\psi_0=0$，

（2）在R中 $\nabla^2\psi_1=0$，

在C_0上 $\psi_1=0$， (13-71)

在C_1上 $\psi_1=1$。

采用有限单元法，可以分别求出ψ_0和ψ_1。再回到式（13-69），在区域R中靠近边界C_0的一个已知ψ值的点上，计算ψ_0和ψ_1值，然后代入（13-69）式，即可计算常数b值。

如果在流场中共有n个物体，也可采用类似方法求解。

令 $$\psi=\psi_0+b_1\psi_1+b_2\psi_2+\cdots+b_n\psi_n \tag{13-72}$$

其中b_1、b_2、$\cdots b_n$是n个待定常数，ψ_0、ψ_1、$\cdots\psi_n$等分别满足下列条件：

（1）在区域R中 $\nabla^2\psi_0=0$，

在C_0上 $\psi_0=g(x,y)$， (13-73)

在C_1、C_2、$\cdots C_n$上 $\psi_0=0$。

（2）在区域R中 $\nabla^2\psi_1=0$，

在C_1上 $\psi_1=1$， (13-74)

在C_0、C_2、C_3、$\cdots C_n$上 $\psi_1=0$。

（3）在区域R中 $\nabla^2\psi_2=0$，

在C_2上 $\psi_2=1$， (13-75)

在C_0、C_1、C_3、$\cdots C_n$上 $\psi_2=0$，

……。

（4）在区域R中 $\nabla^2\psi_n=0$，

在C_n上 $\psi_n=1$， (13-76)

在C_0、C_1、$\cdots C_{n-1}$上 $\psi_n=0$。

采用有限单元法，不难求出ψ_0、ψ_1、$\cdots\psi_n$值。把它们代入式（13-72），再在靠近C_0的n个点上计算ψ值，可得到n个线性方程，从而可求出n个常数b_1、b_2、$\cdots b_n$。

三、绕有升力物体的流动

当流场中有机翼之类的有升力物体时，计算中必须考虑库达条件。参照图13-7，设来流速度为U，机翼边界为C_1，远离机翼、流动未受干扰的边界为C_0，定解问题为

在区域R中　　$\nabla^2\psi=0$,

在边界C_0上　　$\psi=Uy$,

在边界C_1上　　$\psi=$常数,

库达条件，在尾边T　　$v_x=v_y=0$.

对于这个问题，也可用叠加法求解。

令
$$\psi=\psi_0+b\psi_1 \tag{13-77}$$

其中b是待定系数，ψ_0和ψ_1分别满足（13-70）（13-71）二式。系数b可由库达条件决定。在机翼边缘C_1上，$\psi_0=0$，$\psi_1=1$，$\psi=b=$常数，因此沿C_1有

$$v_n=\frac{\partial\psi}{\partial s}=0$$

在尾边T，法向流速当然也等于零．如果在异于法线n的方向再有一个速度分量等于零，则T点的速度等于零。今取此方向为x方向，则

$$v_{xT}=\left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_T=\left.\frac{\partial\psi_0}{\partial y}\right|_T+b\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right|_T=0. \tag{13-78}$$

当上式成立时，库达条件即被满足。由上式可求出系数b。

图13-11表示了用叠加法求得的绕机翼的流线分布图，其中P_1和P_2是静止点[7]。

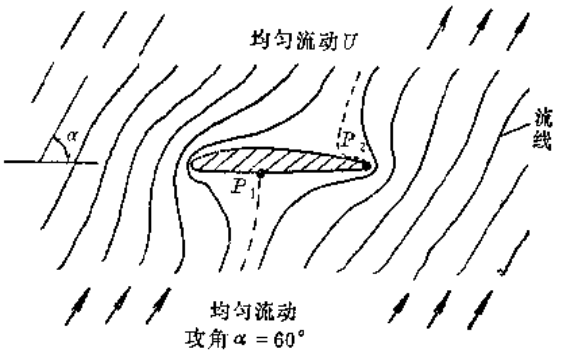


图 13-11　绕机翼的流动

§13-8 自由面流动

在实际工程中经常遇到自由面流动问题，如坝面溢流、孔口出流等。这类问题的难点在于，自由面的确切位置事先并不知道。自由面是一条流线，沿自由面的法向流速等于零，压强也等于零。与前述土坝浸润面问题相似，这个问题也可用迭代方法求解，即预先假定一个自由面，求解一个拉氏方程，然后再校核自由面上的条件是否得到满足，如果不满足，修改自由面的位置，重新求解。通常要重复计算五六次才能得到满意的结果。

自由面流动问题是一个具有可动边界的变分问题。我国许协庆同志根据这一原理给出

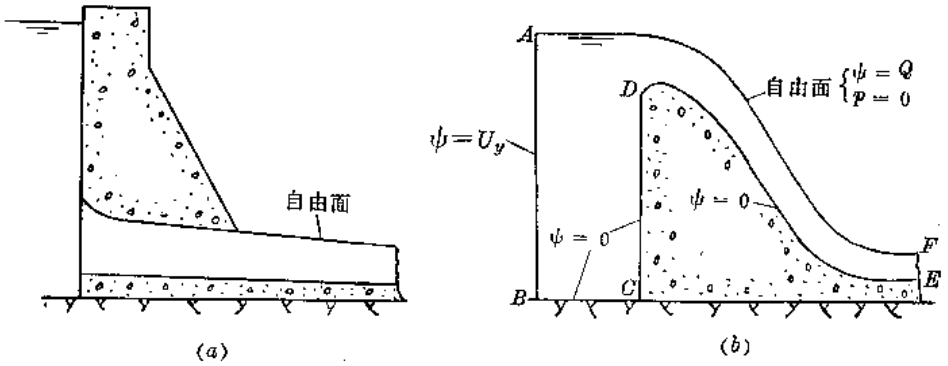


图 13-12　有自由面的水流

了图13-12（ a ）所示平坡上水流自由面的边界条件[173]，收敛较快，计算二三次即可得到较满意的成果。在许氏工作的基础上，下面用比较简单和直观的方法，给出图13-12(b)所示斜坡上水流自由面的边界条件，用流函数ψ求解。

参阅图13-12（ b ），设AB剖面具有均匀流速U，那么沿着AB，$\psi=Uy$；沿着边界$BCDE$，由于$\frac{\partial\psi}{\partial s}=0$，有$\psi=0$；沿着$EF$，假定流速是均匀的，也可给出$\psi$值。因此，沿着边界$ABCDEF$，$\psi$都是已知的。在自由表面$AF$上，由于是流线，$v_n=\frac{\partial\psi}{\partial s}=0$，所以有$\psi=Q$（流量），此外，还有压强$p=0$。也就是说，自由面必须同时满足两个条件。

我们求解的问题是：

在区域R中　　$\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0.$

在边界$ABCDEF$上，　　$\psi=g(x,\ y)$，

在自由表面AF上，　　$\psi=Q.$

$p=0$.

上述问题等价于下列变分问题：

函数$\psi(x,\ y)$在全部边界上取已知值，并使泛函

$$I(\psi)=\iint_R\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy,\qquad(13\text{-}79)$$

取极小值。在自由表面上除了事先给出ψ值外，还要求$p=0$。

划分单元时，在自由面附近，采用一层梯形表面单元，其余部分采用三角形单元。三角形单元的结点坐标是给定的，而梯形表面单元的厚度d_i是作为浮动的未知量与结点参数ψ_i同时算出的。

参阅图13-13，考虑自由面上的结点b，及与之对应的在Γ上的结点i。在结点i，由泛函$I(\psi)$取极小值可知

$$\sum_e\frac{\partial I^e}{\partial\psi_i}=0.\qquad(13\text{-}80)$$

上式是对 i 点周围的各单元求和。在结点 b，流函数取已知值，$\psi=Q$，而且由于是自由面必须满足

$$p=0\,. \qquad (13\text{-}81)$$

由上式可决定表面单元厚度 d_i。

在xy平面内，二维水流的伯努利方程为

$$\frac{V^2}{2g}+y+\frac{p}{\gamma}=\text{常数}=H\,. \qquad (13\text{-}82)$$

其中H为总能头，γ为容重，V为流速：

$$V^2=v_x^2+v_y^2=\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\,. \qquad (13\text{-}83)$$

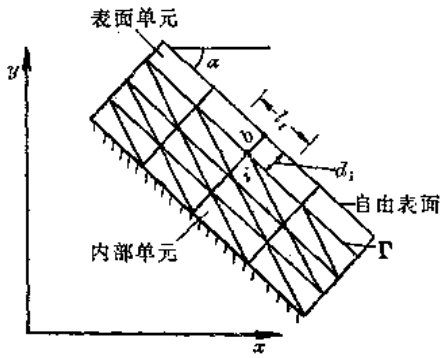


图 13-13

在自由面上，因 $p=0$，由伯努利方程（13-82）可知

$$V=-\sqrt{2g(H-y)}\,. \qquad (13\text{-}84)$$

由图13-13，b 点的纵坐标为

$$y_b=y_i+d_i\cos\alpha_i\,.$$

代入（13-84）式，得到

$$V=-\sqrt{2g(H-y_i)}\left(1-\frac{d_i\cos\alpha_i}{H-y_i}\right)^{\frac{1}{2}}\,.$$

把上式右端用二项式定理展开，考虑到d_i与$H-y_i$相比是小量，略去$\frac{d_i}{(H-y_i)}$的高次项，得到

$$V=-\sqrt{2g(H-y_i)}\left[1-\frac{d_i\cos\alpha_i}{2(H-y_i)}\right]. \qquad (13\text{-}85)$$

上式代表了自由表面上的伯努利方程。

现在再回到泛函 $I(\psi)$ 取极小值的条件。式（13-80）是对结点 i 周围各单元求和的。结点 i 周围有两种单元，三角形单元和梯形表面单元。三角形单元的$\frac{\partial I^e}{\partial\psi_i}$值计算公式在本章§13-2已经给出，此处不再重复。下面给出梯形表面单元$\frac{\partial I^e}{\partial\psi_i}$的计算公式。

在自由面上，法向流速$v_n=0$，所以

$$V=v_s=-\frac{\partial\psi}{\partial n}=-\frac{\psi_b-\psi_i}{d_i}\,. \qquad (13\text{-}86)$$

由此可知

$$\frac{\partial V}{\partial\psi_i}=\frac{1}{d_i}\,. \qquad (13\text{-}87)$$

我们假定 b 点附近 l_i 范围内表面单元具有均匀流速 V。以式（13-83）代入式（13-79），得到

$$I^e=\iint_{\Delta R}\frac{1}{2}V^2\,dx\,dy\,.$$

由上式对ψ_i求偏导数，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial \psi_i}=\frac{\partial I^e}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial \psi_i}=\frac{\partial}{\partial V}\left[\iint_{\Delta R}\frac{1}{2}V^2dxdy\right]\frac{\partial V}{\partial \psi_i}.$$

再把（13-87）式代入上式，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial \psi_i}=Vl_i. \tag{13-88}$$

式中 $l_i=\frac{(l_1+l_2)}{2}$，l_1和l_2是 b 点左右两个表面单元的长度。

把式（13-85）代入上式，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial \psi_i}=-\sqrt{2g(H-y_i)}\left[1-\frac{d_i\cos\alpha_i}{2(H-y_i)}\right]l_i. \tag{13-89}$$

把（13-86）式代入式（13-85），并略去$\frac{d_i}{(H-y_i)}$的高次方，得到

$$\psi_i-\psi_b=-\sqrt{2g(H-y_i)}\,d_i. \tag{13-90}$$

上式代表了自由表面上的伯努利方程。在结点 b，流函数取已知值 $\psi=Q$，未知量是d_i，控制方程是自由面上 $p=0$，即式（13-90）。在结点 i，未知量是 ψ_i，控制方程是（13-86）式。

实际计算过程是，先假定Γ曲线，通过计算求出各结点ψ值及自由边界上的 d_i 值，如果d_i与水深相比，超过了予先规定的数值，比如0.03%，则令$y_i=y_i+d_i\cos\alpha_i$，重新计算，直至d_i与水深相比，满足规定的要求为止。

在式（13-89）中令 $\alpha_i=0$，即得到许氏公式。许氏曾计算一个例子，第一次计算结果，d_i为水深的0.0996倍，第二次计算结果，d_i为水深的0.00164倍，即满足了预先规定的精度0.03。

我们不妨把上述计算方法与本章第一节所述具有浸润面的土坝稳定渗流计算方法进行一下对比。在土坝浸润面计算中，浸润面的位置是固定的，算出ϕ场后，令$y=\phi$，得到修改的新的浸润面位置。在本节所述自由面计算中，自由面是浮动的，在计算ψ场的同时，根据自由面条件计算自由面的位置。因此，一次计算所得到的自由面位置，比土坝问题两次计算所得到的浸润面位置的精度还要高一些，所以计算收敛速度要快得多。显然，把这个方法推广到土坝渗流计算中去是不困难的。

为了在第一次计算中给出Γ曲线的初步位置，可假定流速沿深度均匀分布。设y为渠底高程（图13-14），渠底与水平线的夹角为α，垂直于渠底的水深为S，流量为Q，总能头为H，由伯努利公式有

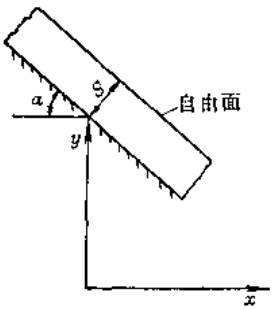


图 13-14

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{Q}{S}\right)^2+y+S\cos\alpha=H.$$

化简后得

$$S^3\cos\alpha-(H-y)S^2+\frac{Q^2}{2g}=0 \tag{13-91}$$

由上式求出S后，即可得到近似的水面线。

第十四章　热传导问题

§14-1　热传导问题及其离散化

在固体的热传导问题中，通常可假定热流密度与温度梯度成正比，即

$$q_x=-\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x},\quad q_y=-\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y},\quad q_z=-\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}. \tag{14-1}$$

式中q_x、q_y、q_z依次是x、y、z方向的热流密度，即在x、y、z方向，单位时间内通过单位面积所流过的热量。λ_x、λ_y、λ_z分别是x、y、z方向的导热系数。$\frac{\partial T}{\partial x}$、$\frac{\partial T}{\partial y}$、$\frac{\partial T}{\partial z}$分别是三个方向的温度梯度。由于热量是从高温处向低温处流动，故上式右端采取负号。经验表明，按照上述基本假定所计算的温度与实际观测到的温度是很接近的。

从固体中取出一个无限小的六面体$dxdydz$，如图 14-1 所示。在单位时间内从左界面$dydz$流入的热量为

$$q_xdydz.$$

经右界面流出的热量为

$$(q_x+dq_x)dydz.$$

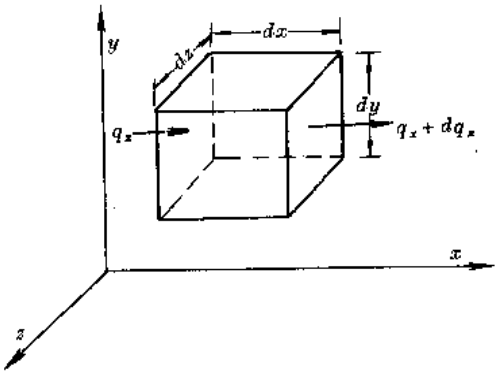


图 14-1

出入相抵后，在单位时间内流入的净热量为

$$q_xdydz-(q_x+dq_x)dydz=-dq_xdydz=-\frac{\partial q_x}{\partial x}dxdydz.$$

把（14-1）式代入上式，得到在单位时间内沿着x方向流入的净热量为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)dxdydz. \tag{a}$$

同理，沿着y、z方向流入的净热量为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdydz,\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{b}$$

设由于内部热源，在单位时间内单位体积放出的热量为w，则在体积$dxdydz$内单位时间放出的热量为

$$wdxdydz. \tag{c}$$

在单位时间内固体温度升高为$\frac{\partial T}{\partial \tau}$，所吸收热量为

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}dxdydz. \qquad (d)$$

式中 c ——比热，大卡/公斤·度，

τ ——时间，小时，

ρ ——容重，公斤/米^3。

由热量平衡：$(a)+(b)+(c)=(d)$，即

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial\tau}\ dxdydz=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]dxdydz+wdxdydz.$$

上式两端各除以 $c\rho dxdydz$，得到固体热传导方程如下：

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{w}{c\rho}. \qquad (14\text{-}2)$$

式中

$$a_x=\frac{\lambda_x}{c\rho},\quad a_y=\frac{\lambda_y}{c\rho},\quad a_z=\frac{\lambda_z}{c\rho}. \qquad (14\text{-}3)$$

a_x、a_y、a_z称为导温系数，单位为米^2/小时。

如果固体处于绝热状态，则

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0.$$

这种状态下的固体温度称为绝热温升，记为θ，由（14-2）式可知

$$\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=\frac{w}{c\rho}. \qquad (14\text{-}4)$$

利用上式，热传导方程可写成

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial T}{\partial\tau}=0. \qquad (14\text{-}5)$$

如果在 z 方向温度无变化，即$\frac{\partial T}{\partial z}=0$，则温度场是两向的（平面问题），热传导方程简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial T}{\partial\tau}=0. \qquad (14\text{-}6)$$

如果经过长期的热交换后，温度不再随时间而变化，即

$$\frac{\partial T}{\partial\tau}=\frac{\partial\theta}{\partial\tau}=0.$$

由（14-5）式，热传导方程简化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_x\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(a_y\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(a_z\frac{\partial T}{\partial z}\right)=0. \qquad (14\text{-}7)$$

这种不随时间而变化的温度场称为稳定温度场。上式与稳定渗流的基本方程是一样的。其求解方法也相同，在这里不再重复。因此，本章只限于讨论不稳定温度场的求解。

热传导方程建立了温度与时间、空间的关系，但满足热传导方程的解有无限个。为了确定我们所需要的温度场，还必须知道初始条件和边界条件。

初始条件即在初始瞬时固体内部的温度分布规律，用下式表示：

$$当\tau=0,\qquad T=\psi(x,\ y,\ z).\tag{14-8}$$

边界条件是固体表面与周围介质相互作用的规律，可用以下两种方式给出：

（1）第一类边界条件

固体表面温度是时间τ的已知函数，即（在边界B上）：

$$T=\phi(\tau).\tag{14-9}$$

（2）第二类边界条件

固体表面与流体（如空气）接触时，通过固体表面的热流密度，与固体表面温度T与流体温度T_c之差成正比，即（在边界C上）：

$$\lambda_x\frac{\partial T}{\partial x}l_x+\lambda_y\frac{\partial T}{\partial y}l_y+\lambda_z\frac{\partial T}{\partial z}l_z=-\beta(T-T_c).\tag{14-10}$$

式中β为表面放热系数，单位为大卡/米·时·度，l_x、l_y、l_z为边界表面向外法线的方向余弦。

当$\beta\to\infty$时，由上式$T-T_c=0$，即$T=T_c$，此时即退化为第一类边界条件。

因此，对于不稳定热传导问题，温度场T除了满足热传导方程（14-5）式外，还必须满足初始条件（14-8）式和边界条件（14-9）、（14-10）式。

根据变分原理，这个问题可化为泛函的极值问题。取泛函

$$I(T)=\iiint_R\left\{\frac{1}{2}\left[a_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+a_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+a_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)T\right\}dxdydz+\iint_C\frac{\beta}{c\rho}\left(\frac{1}{2}T^2-T_cT\right)ds.\tag{14-11}$$

式中T满足初始条件（14-8）式和边界条件（14-9）式，即当$\tau=0$时，$T=\psi(x,y,z)$；在边界B上，$T=\phi(\tau)$。设泛函$I(T)$在$T=T(x,y,z,\tau)$上实现极小值，根据欧拉方程，可知$T(x,y,z,\tau)$必然在区域R内满足热传导方程（14-5）式，并在边界C上满足条件（14-10）式，因而是我们所求的解答。

我们的任务是寻找使泛函$I(T)$实现极小值的解答，即寻找温度场T，使

$$\delta I=0.\tag{14-12}$$

为了求解这个问题，我们在空间上用有限单元法离散化，而在时间上，采用差分法。温度T在时间上的差分，有向前差分、向后差分、中间差分等不同方式，从而导致不同的计算公式，即显式和隐式。这两种计算公式都可给出很好的计算结果，但在计算速度及对计算机存储容量的要求方面，各有特点，下面几节将分别予以阐述。

把求解区域R划分成有限个单元后，泛函$I(T)$变成在各单元内的积分：

$$I=\Sigma I^e.\tag{14-13}$$

其中I^e是在单元e内的积分值：

$$I^e(T)=\iiint_{\Delta R}\left\{\frac{1}{2}\left[a_x\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+a_y\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2+a_z\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial T}{\partial\tau}-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\right)T\right\}dxdydz+\iint_{\Delta C}\beta\left(\frac{1}{2}T^2-T_cT\right)ds.\tag{14-14}$$

式中ΔR是单元e所包含的子域，ΔC是在表面C上的面积，显然只有靠近边界C的单元才会出现这一项，而式中的$\bar{\beta}$为

$$\bar{\beta}=\frac{\beta}{c\rho}. \tag{14-15}$$

由（14-14）式在积分号内求微分，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^e}{\partial T_i}=&\int\int_{\Delta R}\int\left\{a_x\frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)+a_y\frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\right.\\&\left.+a_z\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)\frac{\partial T}{\partial T_i}\right\}dxdydz\\&+\int\int_{\Delta C}\bar{\beta}\left(T\frac{\partial T}{\partial T_i}-T_0\frac{\partial T}{\partial T_i}\right)ds.\end{aligned} \tag{14-16}$$

根据泛函实现极值的条件，$\Sigma\frac{\partial I^e}{\partial T_i}=0$，由此即可确定结点温度$T_i$，$T_j$，…等。

§14-2 显 式 计 算

把求解区域划分为有限个单元，取出其中一个单元e，设它的结点是i、j、m、…，单元e的结点温度是

$$\{T\}^e=\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_m\\\cdots\end{Bmatrix}.$$

把单元内任一点的温度用形函数N_i插值表示如下：

$$\begin{aligned}T^e(x,y,z,\tau)&=[N_i\quad N_j\quad N_m\quad\cdots]\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_m\\\cdots\end{Bmatrix}\\&=[N]\{T\}^e.\end{aligned} \tag{14-17}$$

由上式可知

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{\partial N_i}{\partial x}T_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}T_j+\frac{\partial N_m}{\partial x}T_m+\cdots,\\&\frac{\partial}{\partial T_i}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)=\frac{\partial N_i}{\partial x},\\&\frac{\partial T}{\partial T_i}=N_i,\quad\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{14-18}$$

对于靠近放热边界C的单元，将边界C上的面积等分给有关结点，可得到ΔC。如图14-2，对于平面问题三角形单元，设im边是在边界C上，其长度为L，可取

$$\Delta C=\frac{L}{2}.$$

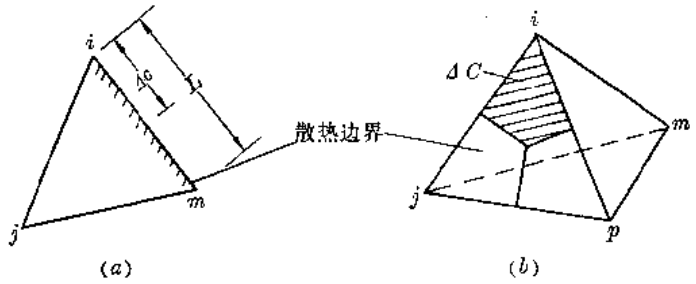


图 14-2 放热边界 C

对于空间问题的四面体单元，设ijp是在边界C上，其面积为A，可取

$$\Delta C=\frac{A}{3}.$$

假定在ΔC上，$T=T_i$，于是

$$\frac{\partial T}{\partial T_i}=1. \qquad (a)$$

把上式和（14-18）式代入（14-16）式，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial T_i}=h_{ii}^eT_i+h_{ij}^eT_j+h_{im}^eT_m+\cdots+f_i^e\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)+g_i^e(T_i-T_0). \qquad (14\text{-}19)$$

式中：

$$h_{ij}^e=\iiint_{\Delta R}\left(a_x\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+a_y\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+a_z\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)dxdydz, \qquad (14\text{-}20)$$

$$f_i^e=\iiint_{\Delta R}N_i dxdydz, \qquad (14\text{-}21)$$

$$g_i^e=\bar{\beta}\Delta C. \qquad (14\text{-}22)$$

由泛函$I(T)$实现极小值的必要条件

$$\frac{\partial I}{\partial T_i}=\Sigma\frac{\partial I^e}{\partial T_i}=0.$$

得到

$$\Sigma(h_{ii}^eT_i+h_{ij}^eT_j+h_{im}^eT_m+\cdots)+\Sigma f_i^e\left(\frac{\partial T}{\partial \tau}-\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)+\Sigma g_i^e(T_i-T_0)=0. \qquad (b)$$

在时间上采用向前差分，取时间步长为$\Delta\tau$，并令

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=\frac{T_{i,\tau+\Delta\tau}-T_{i,\tau}}{\Delta\tau},\quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau}=\frac{\Delta\theta}{\Delta\tau}. \qquad (14\text{-}23)$$

再把式（b）中的最后一项取为❶

$$\Sigma g_i^e(T_{i,\tau+\Delta\tau}-T_{0,\tau+\Delta\tau})$$

把上式及式（14-23）代入式（b），整理后得到

---

❶ 此项如取为$\Sigma g_i^e(T_{i,\tau}-T_{0,\tau})$，将导致错误的结果。

$$T_{i,\tau+\Delta\tau}=\frac{1}{\Omega}\Sigma f_i^e\Delta\theta+\frac{1}{\Omega}(\Sigma f_i^e-\Delta\tau\Sigma h_{ii}^e)T_{i,\tau}$$
$$-\frac{\Delta\tau}{\Omega}\Sigma(h_{ij}^eT_{j,\tau}+h_{im}^eT_{m,\tau}+h_{ip}^eT_{p,\tau})$$
$$+\frac{\Delta\tau}{\Omega}\Sigma g_i^eT_{c,\tau+\Delta\tau}. \qquad (14\text{-}24)$$

式中
$$\Omega=\Sigma f_i^e+\Delta\tau\Sigma g_i^e. \qquad (14\text{-}25)$$

在式（14-24）的右端，$T_{i,\tau}$、$T_{j,\tau}$… 等是上一时段的温度，$T_{c,\tau+\Delta\tau}$ 是周围介质的温度（当结点 i 在放热边界C上时才会出现$T_{c,\tau+\Delta\tau}$），这些量都是已知的，因此由这一公式可直接算出下一时段的温度 $T_{i,\tau+\Delta\tau}$ 来，不必求解联立方程组，所以称为显式。

公式（14-24）可改写成如下形式：
$$T_{i,\tau+\Delta\tau}=F_iT_{i,\tau}+\sum_{i\neq j}H_{ij}T_{j,\tau}+B_iT_{c,\tau+\Delta\tau}+\Delta\bar{\theta}. \qquad (14\text{-}26)$$

式中
$$\left.\begin{aligned}F_i&=\frac{1}{\Omega}\Big(\sum_e f_i^e-\Delta\tau\sum_e h_{ii}^e\Big),\\H_{ij}&=-\frac{\Delta\tau}{\Omega}\sum_e h_{ij}^e,\\B_i&=\frac{\Delta\tau}{\Omega}\sum_e g_i^e,\\\Delta\bar{\theta}&=\frac{1}{\Omega}\sum_e f_i^e\Delta\theta.\end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}27)$$

求和号 $\sum_{i\neq j}$ 表示除点 i 外对周围各点求和。$\sum_e$ 表示对有关单元求和。以平面问题为例，如图14-3(a)所示内点，在 i 点周围共有 6 个单元，结点 1 对单元 I 来说是 j 点，对单元Ⅵ来说是m点，故有
$$H_{i1}=-\frac{\Delta\tau}{\Omega}(h_{ij}^{\mathrm{I}}+h_{im}^{\mathrm{VI}}),$$
同样，结点 2 对单元Ⅱ来说是 j 点，对单元 I 来说是m点，故有
$$H_{i2}=-\frac{\Delta\tau}{\Omega}(h_{ij}^{\mathrm{II}}+h_{im}^{\mathrm{I}}).$$
依此类推，不难求得其他系数。i 点既然是内点，不在边界C上，故$B_i=0$。

如图14-3(b)所示边界C上的结点 i，$i1$边和$i4$边在边界C上，其长度分别为L_1和L_3，由（14-22）式及（14-15）式，可知

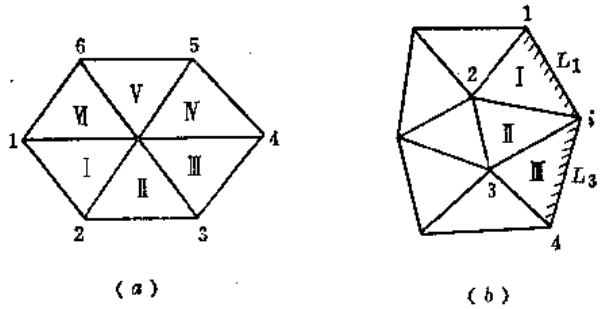


图 14-3

$$\sum_e g_i^e = g_i^{\mathrm{I}} + g_i^{\mathrm{II}} = \bar{\beta}_{\mathrm{I}} \Delta C_{\mathrm{I}} + \bar{\beta}_{\mathrm{II}} \Delta C_{\mathrm{II}}$$

$$= \frac{\beta_1}{c_1\rho_1} \times \frac{L_1}{2} + \frac{\beta_3}{c_3\rho_3} \times \frac{L_3}{2}. \qquad (c)$$

同理，可求得空间问题的有关系数。

当表面热交换系数$\beta \to \infty$时，$g_i^e \to \infty$，$\Omega \to \infty$，由（14-24）（14-26）式可得到$T_{i,\tau+\Delta\tau} = T_{e,\tau+\Delta\tau}$，满足给定的边界条件。

在（14-24）或（14-26）式中，必须有

$$\sum f_i^e - \Delta\tau \sum h_{ii}^e \geqslant 0. \qquad (d)$$

否则，上一时段 i 点温度$T_{i,\tau}$越高，反而使下一时段 i 点温度 $T_{i,\tau+\Delta\tau}$越低，这显然是不合理的。因此，显式计算中，必须限制时间步长$\Delta\tau$，使符合下式

$$\Delta\tau \leqslant \frac{\sum f_i^e}{\sum h_{ii}^e}. \qquad (14\text{-}28)$$

当这个条件得到满足时，计算结果将是稳定的。否则，计算结果可能不稳定。因此，上式称为显式计算的稳定条件。

式（14-24）和（14-26）是同一个公式的两种形式。当计算机的存储容量比较小时，可按（14-24）式计算，系数h_{ij}^e，f_i^e，g_i^e等都是临时计算，不必存储，据我们经验，计算速度还是相当快的，所以利用（14-24）式，用中小型计算机即可计算大型热传导问题。如果计算机具有一定存储容量，可先由（14-27）式算好系数F_i、H_{ij}和B_i，并把这些系数存储起来，然后利用（14-26）式重复计算各时段温度，这样可进一步加快计算速度。

对于平面热传导问题，在（14-11）式中令$\partial T/\partial z = 0$，就可得到相应的泛函。如采用常用的三角形单元，形函数为

$$N_i = \frac{1}{2A}(a_i + b_i x + c_i y), \cdots$$

由（14-20）、（14-21）式，得到

$$\begin{Bmatrix} h_{ii}^e \\ h_{ij}^e \\ h_{im}^e \end{Bmatrix} = \frac{a_x}{4A} \begin{Bmatrix} b_i^2 \\ b_i b_j \\ b_i b_m \end{Bmatrix} + \frac{a_y}{4A} \begin{Bmatrix} c_i^2 \\ c_i c_j \\ c_i c_m \end{Bmatrix}. \qquad (14\text{-}29)$$

$$f_i^e = \frac{A}{3}, \quad g_i^e = \frac{\beta}{c\rho} \times \frac{L}{2}. \qquad (14\text{-}30)$$

把上述系数代入（14-24）或（14-26）式，即可得到温度算式，代入（14-28）式，可得到稳定条件。

对于轴对称热传导问题，采用圆柱坐标（r，z），与轴对称渗流问题一样，可以把乘积（ra_r）和（ra_z）看做是修正的导温系数，然后用平面问题程序进行计算。

对于空间热传导问题，如采用常用的四面体单元及如下形函数：

$$\left.\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)/6V, \\ N_j &= -(a_j + b_j x + c_j y + d_j z)/6V, \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y + d_m z)/6V, \\ N_p &= -(a_p + b_p x + c_p y + d_p z)/6V. \end{aligned}\right\} \qquad (14\text{-}31)$$

其中V是单元体积，系数a_i、b_i、c_i、d_i等见（6-6）式。

把（14-31）式代入（14-20）（14-21）式，得到有关系数如下：

$$\begin{Bmatrix} h^e_{ii} \\ h^e_{ij} \\ h^e_{im} \\ h^e_{ip} \end{Bmatrix} = \frac{a_x}{36V}\begin{Bmatrix} b_i^2 \\ -b_ib_j \\ b_ib_m \\ -b_ib_p \end{Bmatrix} + \frac{a_y}{36V}\begin{Bmatrix} c_i^2 \\ -c_ic_j \\ c_ic_m \\ -c_ic_p \end{Bmatrix} + \frac{a_z}{36V}\begin{Bmatrix} d_i^2 \\ -d_id_j \\ d_id_m \\ -d_id_p \end{Bmatrix}. \qquad (14\text{-}32)$$

$$f^e_i = \frac{V}{4}, \quad g^e_i = \frac{\beta}{c\rho} \times \frac{A}{3}. \qquad (14\text{-}33)$$

其中A是单元e在边界C上的三角形面积。

把上述系数代入（14-24）、（14-26）、（14-28）等式，即可得到温度算式及稳定条件。

如采用等参数单元，计算中用到的系数，可通过数值积分求得。

最后必须指出，如把式(b)中的最后一项取为

$$\Sigma g^e_i(T_{i,\tau} - T_{C,\tau}).$$

将得出错误的结果，把上式及式（14-23）代入式（b），整理后得到温度算式如下：

$$T_{i,\tau+\Delta\tau} = \frac{1}{\Omega_1}\Sigma f^e_i \Delta\theta + \frac{1}{\Omega_1}(\Sigma f^e_i - \Delta\tau\Sigma h^e_{ii})T_{i,\tau} - \frac{\Delta\tau}{\Omega_1}\Sigma g^e_i(T_{i,\tau} - T_{C,\tau})$$

$$-\frac{1}{\Omega_1}(h^e_{ij}\ T_{j,\tau} + h^e_{im}\ T_{m,\tau} + h^e_{ip}\ T_{p,\tau} + \cdots). \qquad (e)$$

式中 $\Omega_1 = \Sigma f^e_i$

由式（e）得到的稳定条件为

$$\Delta\tau \leqslant \frac{\Sigma f^e_i}{\Sigma h^e_{ii} + \Sigma g^e_i} = \frac{\Sigma f^e_i}{\Sigma h^e_{ii} + \Sigma \dfrac{\beta\Delta C}{c\rho}} \qquad (f)$$

现在我们来看看，当边界放热系数$\beta \to \infty$时，会出现什么结果。

本来，当表面放热系数$\beta \to \infty$时，表面结点的温度将等于已知的介质温度，即

$$T_{i,\tau+\Delta\tau} = T_{C,\tau+\Delta\tau}.$$

在这种条件下，结点i的温度计算是无条件稳定的，但由（14-22）（14-15）二式，当$\beta \to \infty$时

$$g^e_i = \frac{\beta\Delta C}{c\rho} \to \infty.$$

再由式（f），稳定条件为

$$\Delta\tau = 0.$$

这显然是不合理的。

假定物体的初始温度等于零，由式（e）第一时段的温度为

$$T_{i,\Delta\tau} = \frac{\Delta\tau}{\Omega_1}\Sigma g^e_i T_{C,0} + \frac{1}{\Omega_1}\Sigma f^e_i \Delta\theta.$$

通常介质初始温度是异于零的，即$T_{C,0} \neq 0$；当放热系数$\beta \to \infty$时，$g^e_i \to \infty$，由上式

$$T_{i,\Delta\tau} \to \infty.$$

这也是不合理的。

§14-3 隐 式 计 算

单元内温度用$T^e=[N]\{T\}^e$表示，如（14-17）式，此外，单元内温度变化率也用形函数插值表示如下：

$$\frac{\partial T}{\partial \tau}=[N_i\ N_j\ N_m\cdots]\begin{Bmatrix}\partial T_i/\partial\tau\\ \partial T_j/\partial\tau\\ \partial T_m/\partial\tau\\ \cdots\end{Bmatrix}=[N]\frac{\partial\{T\}^e}{\partial\tau}. \tag{14-34}$$

把上式和（14-17）、（14-18）式代入（14-16）式，得到

$$\frac{\partial I^e}{\partial\{T\}^e}=\begin{Bmatrix}\partial I^e/\partial T_i\\ \partial I^e/\partial T_j\\ \partial I^e/\partial T_m\\ \cdots\end{Bmatrix}=[h]^e\{T\}^e+[p]^e\frac{\partial\{T\}^e}{\partial\tau}+\{q\}^e. \tag{14-35}$$

式中

$$p_{ij}^e=\iiint_{\Delta R}N_i\ N_j\ dxdydz. \tag{14-36}$$

$$q_i^e=-\iiint_{\Delta R}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}N_i dx\,dy\,dz-\iint_{\Delta Q}\overline{\beta}T_\infty N_i ds$$

$$+\left(\iint_{\Delta Q}\overline{\beta}N_i[N_iN_jN_m\cdots]ds\right)\begin{Bmatrix}T_i\\ T_j\\ T_m\\ \cdots\end{Bmatrix}. \tag{14-37}$$

矩阵$[h]^e$的元素h_{ij}^e已见（14-20）式。（14-36）式右端第二、三项只有那些靠近边界Q的单元才会出现。

由泛函实现极值的条件，$\Sigma\frac{\partial I^e}{\partial T_i}=0$，可得到方程组如下：

$$[H]\{T\}+[P]\frac{\partial\{T\}}{\partial\tau}+\{Q\}=0. \tag{14-38}$$

式中

$$H_{ij}=\sum_e h_{ij}^e,\quad P_{ij}=\sum_e p_{ij}^e,\quad Q_i=\sum_e q_i^e, \tag{14-39}$$

取时间步长为$\Delta\tau$，假定$\frac{\partial T}{\partial\tau}$随时间$\tau$线性变化，则（参阅§19-7）

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}_\tau=-\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}_{\tau-\Delta\tau}+\frac{2}{\Delta\tau}(\{T\}_\tau-\{T\}_{\tau-\Delta\tau}). \tag{14-40}$$

代入（14-38）式，得到

$$\left[H+\frac{2}{\Delta\tau}P\right]\{T\}_\tau-[P]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}_{\tau-\Delta\tau}-\frac{2}{\Delta\tau}[P]\{T\}_{\tau-\Delta\tau}+\{Q\}_\tau=0.$$

但由（14-38）式可知

$$-[P]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}_{\tau-\Delta\tau}=[H]\{T\}_{\tau-\Delta\tau}+\{Q\}_{\tau-\Delta\tau}\ .$$

代入前式，最后得到

$$\left[H+\frac{2}{\Delta\tau}P\right]\{T\}_{\tau}+\left[H-\frac{2}{\Delta\tau}P\right]\{T\}_{\tau-\Delta\tau}+\{Q\}_{\tau-\Delta\tau}+\{Q\}_{\tau}=0\text{。}\quad(14\text{-}41)$$

在初始瞬时，$\tau=0$，$\{T\}$是已知的初始温度，把它作为$\{T\}_{\tau-\Delta\tau}$代入上式可求出第一时段的温度$\{T\}_{\tau}$。再逐步算下去，可算出任意时刻的温度。但在每一步的计算中，都必须求解方程组，因此这是隐式计算方法。通常采用直接法求解方程组（14-40），在第一步计算中把方程组分解后，在以后各步的计算中只需进行简单的回代，由于时间步长$\Delta\tau$不受稳定条件的限制，计算是比较快的，缺点是要求较大的计算机存储量，计算程序也比显式计算略为复杂。

以平面热传导问题为例，采用三角形单元及形函数$N_i=\dfrac{(a_i+b_ix+c_iy)}{2A}$等，由（14-20）式，可知

$$[h]^e=\frac{a_x}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2 & b_ib_j & b_ib_m \\ & b_j^2 & b_jb_m \\ \text{对} & \text{称} & b_m^2 \end{bmatrix}+\frac{a_y}{4A}\begin{bmatrix} c_i^2 & c_ic_j & c_ic_m \\ & c_j^2 & c_jc_m \\ \text{对} & \text{称} & c_m^2 \end{bmatrix}\text{。}\quad(14\text{-}42)$$

式中A为三角形面积。由于

$$\iint_{\Delta R}N_iN_j\,dxdy=\begin{cases}\dfrac{A}{6}\text{，（当 }i=j\text{）}\\[2ex] \dfrac{A}{12}\text{。（当 }i\neq j\text{）}\end{cases}$$

由（14-36）式可知

$$[p]^e=\frac{A}{12}\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix}\text{。}\quad(14\text{-}43)$$

由（14-37）式，得到

$$\{q\}^e=\{\alpha_1\}^e\frac{\Delta\theta}{\Delta\tau}+\{\alpha_2\}^e\bar{\beta}T_0+\bar{\beta}[\alpha_3]^e\{T\}^e\text{。}\quad(14\text{-}44)$$

式中

$$\{\alpha_1\}^e=-\frac{A}{3}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\end{Bmatrix}\text{。}\quad(14\text{-}45)$$

当i不在边界C上时，$\{\alpha_2\}^e=\{0\}$，$[\alpha_3]^e=[0]$。

当i在边界C上，如图14-4所示，则

$$\{\alpha_2\}^e=-\frac{L}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix},\quad(14\text{-}46)$$

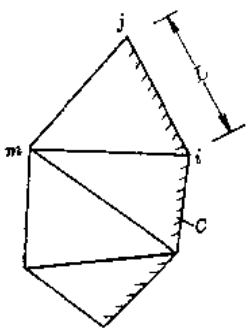


图 14-4

$$[\alpha_3]^e=\frac{L}{6}\begin{bmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&0\end{bmatrix}. \qquad (14\text{-}47)$$

在边界B上，必须取已给的温度，这可用乘大数方法实现，参见第一章§1-6节。用加权余量法也可以推导不稳定温度场的计算公式，请参阅本书第二十六章。

§14-4 算　　例

下面我们给出用有限单元计算温度场的几个算例。

【例1】 如图14-5所示方形网格，水平和铅直格距均为h。对于这种正方形网格，用差分法计算非稳定温度场的公式是人们所熟悉的。现在加上斜线，划分为规则的三角形网格，假定介质是均匀的，用有限单元法显式推导温度场计算公式。

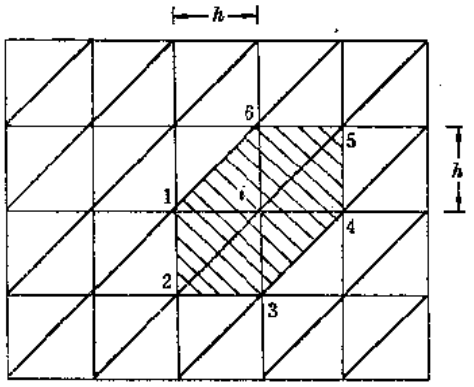


图 14-5

取出结点i周围的六个三角形单元，根据结点坐标计算各单元的系数h^e_{ii}、h^e_{ij}、h^e_{im}及f^e_i，加以集合，由（14-26）式，得到有限单元法中温度场显式计算公式如下：

$$T_{i,\tau+\Delta\tau}=\Delta\theta+\left(1-\frac{4a\Delta\tau}{h^2}\right)T_{i,\tau}+\frac{a\Delta\tau}{h^2}(T_{1,\tau}+T_{3,\tau}+T_{4,\tau}+T_{6,\tau}).$$

由（14-28）式，稳定条件为

$$\frac{4a\Delta\tau}{h^2}\leqslant 1.$$

若取$\frac{4a\Delta\tau}{h^2}=1$，则温度算式为

$$T_{i,\tau+\Delta\tau}=\Delta\theta+\frac{1}{4}(T_{1,\tau}+T_{3,\tau}+T_{4,\tau}+T_{6,\tau}).$$

以上各式与差分法公式完全相同，由此可见，对于规则网格，有限单元法与差分法是一致的。但有限单元法较之差分法具有下列优点：（1）容易适应不规则边界；（2）在重要部位，可局部加密网格，以提高精度；（3）容易与计算应力的有限单元程序配套，以便计算温度应力。因此，近年来有限单元法在热传导问题中得到了广泛应用。

【例2】 如图14-6所示无限长混凝土棱柱体，断面尺寸为10米×4米，初始温度为$T_0=20℃$，AB、DC两面为绝热边界，满足条件$\frac{\partial T}{\partial y}=0$。$AD$、$BC$两面给定边界温度

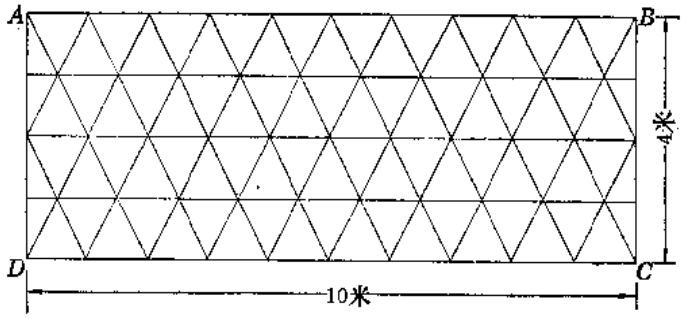


图 14-6

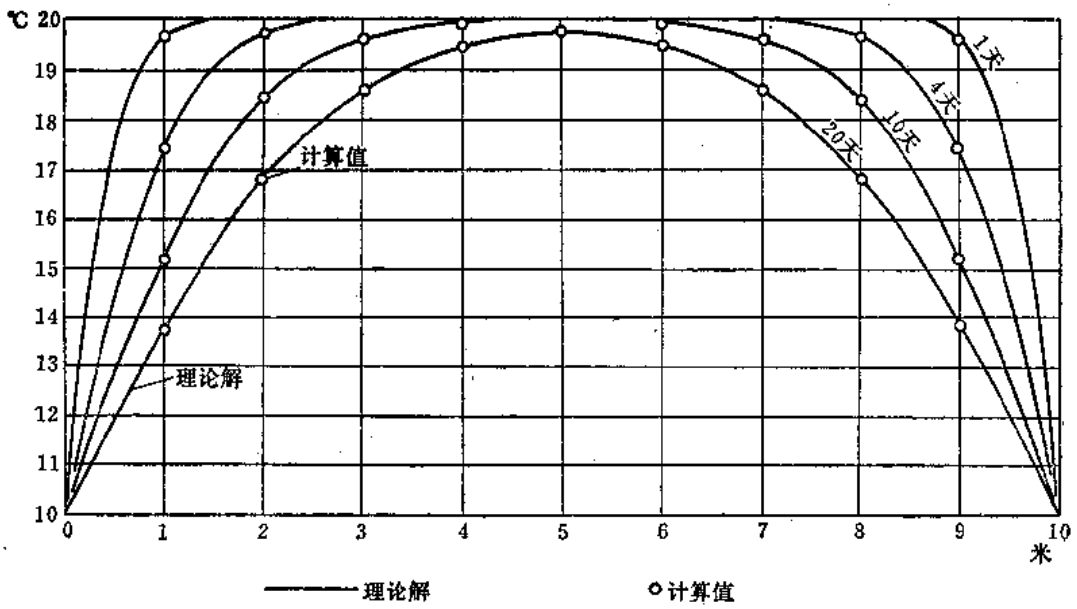


图 14-7

$T_0=10$℃，混凝土的导温系数为 $a=0.10$米^2/天，按照图14-6所示网格，在DJS-6电子计算机上用有限单元法显式计算不同时间的温度分布，计算结果见图14-7，图中曲线为理论解，点子为有限单元法计算值。由图可见，计算点子全部落在理论解曲线上。

【例 3】 图14-8是一座混凝土重力坝，高度65米，底宽49米，坝体初始温度20℃，基础初始温度0℃。作者与宋敬廷同志用有限单元法显式在DJS-6电子计算机上计算天然冷却过程。边界温度为0℃，计算网格及结果见图14-8。

【例 4】 图14-9示一椭球体的三维热传导，由于对称只取出1/8计算，采用三个20结点等参数单元，中心点的计算温度与理论解的比较示于图中。由图可见，虽然只用了很少的单元，计算温度与理论解已符合得很好[12]。

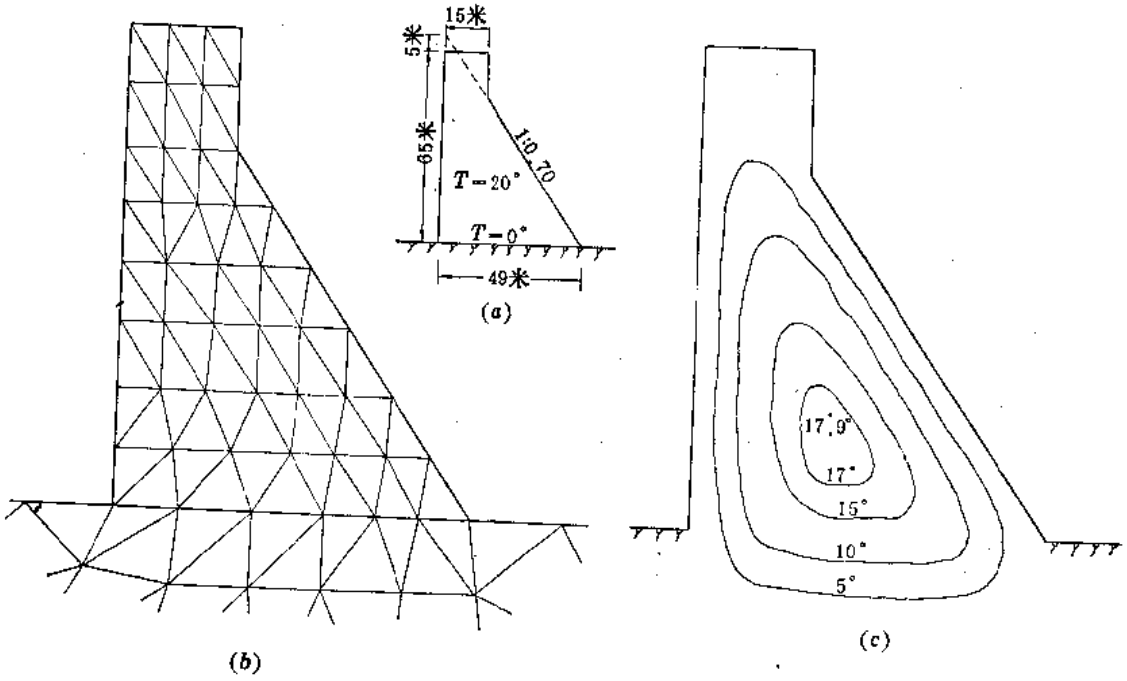


图 14-8

(a)坝体尺寸及初始温度T_0；(b)计算网格(基础只示一部分)；(c)冷却一年后的温度分布

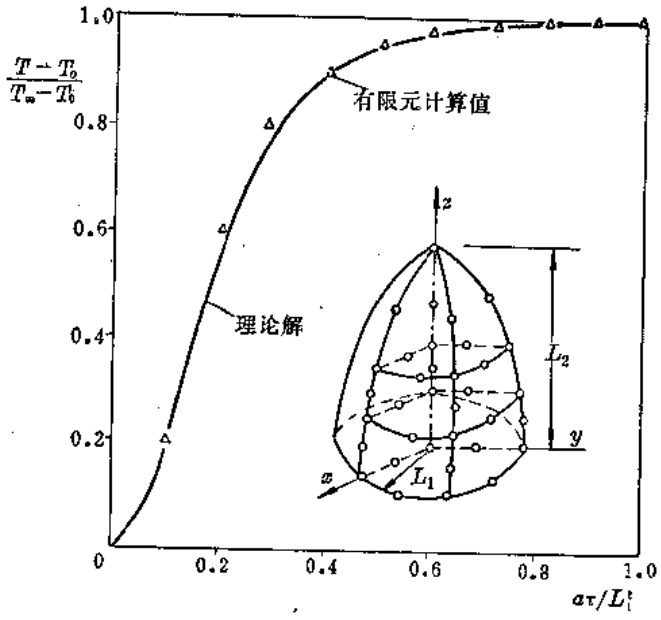


图 14-9 旋转椭圆球体中心（$x=y=z=0$）的温度变化

第十五章　非线性分析及塑性力学问题

到目前为止，我们讨论的都是线性问题，但实际工程中有大量非线性问题。以固体力学为例，在线性弹性力学中，采用了下列两个基本假定：

1）材料的应力-应变关系是线性的，见式（3-6），即假定材料符合虎克定律；

2）应变-位移关系是线性的，见式（3-5），实际上，即采用了小位移假定。

有大量问题是符合这些假定的，所以线性问题得到了广泛的应用。但也有不少问题不符合上述假定。例如当钢材的应力超过其比例极限后，应力-应变关系便是非线性的。又如土壤和岩石的应力-应变关系也是非线性的。这些称为材料非线性问题。又如梁、板及薄壳等结构失稳后，由于产生了大位移，其应变-位移关系是非线性的，这些称为几何非线性问题。

在热传导问题中，某些情况下材料的导温系数及内部热源与温度有关。在流体力学中，粘滞系数与流速有关，或者由于出现紊动，达西定律不再适用。这些问题都是非线性的。

本章将说明非线性问题的计算方法。虽然非线性问题是多种多样的，但其计算方法却是大同小异，因此本章以非线性应力-应变关系问题为例，说明在有限单元法中如何分析非线性问题。

如图15-1所示，材料的应力-应变关系是非线性的，因此刚度矩阵不是常数，而与应变值有关，一般可记为$[K(\{\varepsilon\})]$。在这种情况下，荷载-位移关系也是非线性的。

求解非线性问题的方法可分为三类，即增量法、迭代法和混合法。增量法是将荷载划分为许多增量，每次施加一个荷载增量。在一个荷载增量中，假定刚度矩阵是常数；在不同的荷载增量中，刚度矩阵可以有不同的数值，并与应力-应变关系相对应。迭代法在每次迭代过程中都施加全部荷载，但逐步修改位移和应变，使之满足非线性的应力-应变关

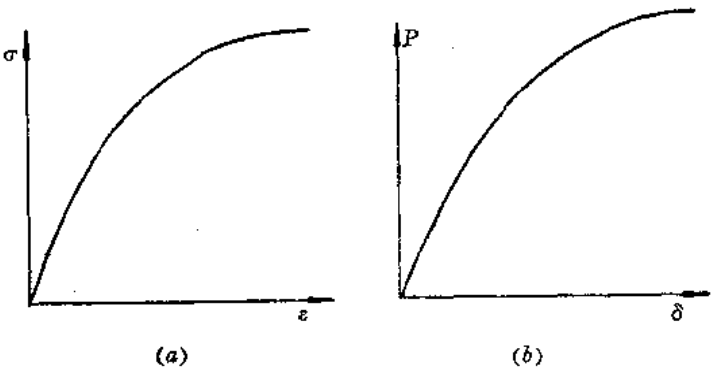


图 15-1　材料非线性特性

(a)应力-应变关系；(b)荷载-位移关系

系。混合法同时采用了增量法和迭代法，即荷载也划分为荷载增量，但增量的个数较少；而对每一个荷载增量，进行迭代计算。

§15-1 增 量 法

采用增量法分析非线性问题时，把荷载划分为许多荷载增量，这些增量可以相等，也可以不等。每次施加一个荷载增量。在每一步计算中，假定方程是线性的，刚度矩阵$[K]$是常数，在不同的荷载增量中，刚度矩阵可以具有不同的数值。每步施加一个荷载增量$\{\Delta P\}$，得到一个位移增量$\{\Delta\delta\}$，累积后即得到位移$\{\delta\}$。

增量法是用一系列线性问题去近似非线性问题，实质上是用分段线性的折线去代替非线性曲线。

把荷载分为m个增量，所以总荷载为

$$\{P\}=\sum_{j=1}^{m}\{\Delta P_j\}.$$

在施加第i个荷载增量后，荷载为

$$\{P_i\}=\sum_{j=1}^{i}\{\Delta P_j\}. \qquad (15\text{-}1)$$

每一个荷载增量产生一个位移增量$\{\Delta\delta_j\}$和应力增量$\{\Delta\sigma_j\}$，因此在施加第i个荷载增量后，位移和应力分别为

$$\{\delta_i\}=\sum_{j=1}^{i}\{\Delta\delta_j\}, \qquad (15\text{-}2)$$

$$\{\sigma_i\}=\sum_{j=1}^{i}\{\Delta\sigma_j\}. \qquad (15\text{-}3)$$

至于如何由荷载增量$\{\Delta P_i\}$计算位移增量$\{\Delta\delta_i\}$和应力增量$\{\Delta\sigma_i\}$，有下列几种不同方法。

一、始点刚度法

参阅图15-2（为了清楚起见，在本章各附图中都省去矩阵符号），设第$i-1$步末的应力$\{\sigma_{i-1}\}$已求出，根据$\{\sigma_{i-1}\}$及应力-应变关系（图15-1(a)）可以确定第$i-1$步末的弹性矩阵$[D_{i-1}]$，从而可以计算第$i-1$步末的刚度矩阵$[K_{i-1}]$。然后假定在第i步内刚度矩阵保持不变并近似地等于$[K_{i-1}]$，于是由下列方程可计算第i步的位移增量$\{\Delta\delta_i\}$：

$$[K_{i-1}]\{\Delta\delta_i\}=\{\Delta P_i\}.$$

$$(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots m) \qquad (15\text{-}4)$$

式中 $[K_{i-1}]=[K_{i-1}(\{\delta_{i-1}\})]$。

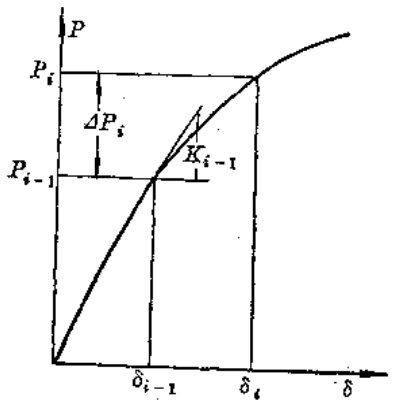


图 15-2 始点刚度法

初始刚度矩阵$[K_0]$是根据应力-应变关系

曲线在开始加荷时计算的，式（15-1）至（15-4）是增量法的基本公式。

二、中点刚度法

上述始点刚度法相当于微分方程数值积分的欧拉法，计算是简单的，但比较粗糙，计算精度较低。为了提高精度，一个自然的想法是在每步计算中采用平均刚度，即先用$[K_{i-1}]$根据式（15-4）计算初步的$\{\Delta\delta_i^*\}$和$\{\delta_i^*\}$，再根据这个初步的位移$\{\delta_i^*\}$和应力-应变关系计算第i步末的刚度矩阵$[K_i]$，由此可计算第i步的平均刚度矩阵如下：

$$[\bar{K}_i]=\frac{1}{2}([K_{i-1}]+[K_i]), \qquad (a)$$

然后由下式可算出第i步的位移增量：

$$[\bar{K}_i]\{\Delta\delta_i\}=\{\Delta P_i\}. \qquad (b)$$

这样计算，精度是提高了，但从（a）式可知要增加机器的存储量。因此采用下述中点刚度法更为合适。参阅图15-3，首先施加荷载增量的一半即$\frac{1}{2}\{\Delta P_i\}$，用第$i-1$步末的刚度矩阵$[K_{i-1}]$，由下式计算临时的位移增量$\{\Delta\delta^*_{i-\frac{1}{2}}\}$：

$$[K_{i-1}]\{\Delta\delta^*_{i-\frac{1}{2}}\}=\frac{1}{2}\{\Delta P_i\} \qquad (c)$$

式中星号$*$表示是临时用的量。由此得到中点位移：

$$\{\delta^*_{i-\frac{1}{2}}\}=\{\delta_{i-1}\}+\{\Delta\delta^*_{i-\frac{1}{2}}\}. \qquad (d)$$

根据$\{\delta^*_{i-\frac{1}{2}}\}$及应力-应变关系求得中点刚度矩阵$[K_{i-\frac{1}{2}}]$，再由下式计算第$i$步的位移增量$\{\Delta\delta_i\}$：

$$[K_{i-\frac{1}{2}}]\{\Delta\delta_i\}=\{\Delta P_i\}. \qquad (15\text{-}5)$$

由图15-3可以看出中点刚度法和始点刚度法的区别。图中δ_i是由中点刚度法算得的位移，δ_i'是由始点刚度法算出的位移。δ_i''是分两步由始点刚度法得到的位移。δ_i和δ_i''的计算量基本相同，但δ_i的精度较高。中点刚度法相当于求微分方程数值解的龙格-库塔法。

增量法计算框图见图15-4。

现在用一个简例来说明上述近似方法的精度。设有一非线性弹簧，其刚度$K(\delta)$不是常数，而是由下式给出

$$K(\delta)=K_0\left(1-\frac{\delta}{a}\right).$$

随着变位δ的增加，刚度$K(\delta)$逐渐减小，当变位$\delta=a$时，刚度趋于零，意味着此时弹簧已不再能承受荷载。设弹簧承受的荷载为P，则平衡方程为

$$K(\delta)\delta=K_0\left(1-\frac{\delta}{a}\right)\delta=P. \qquad (e)$$

由上式解出$\delta(P)$，并注意到$\delta(0)=0$，

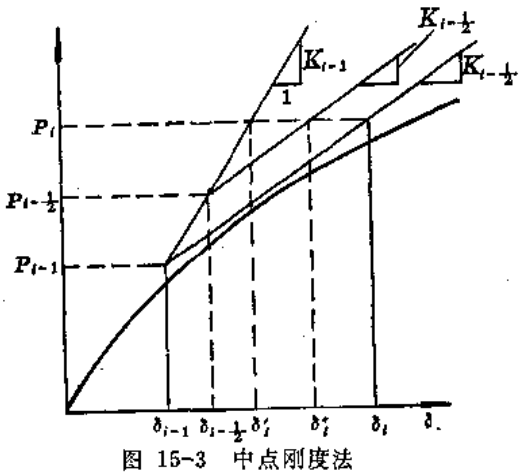


图 15-3 中点刚度法

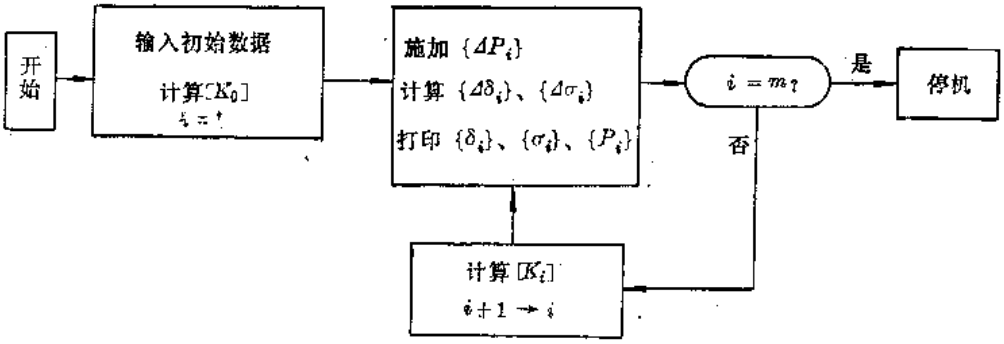


图 15-4 增量法计算框图

得到变位的精确解为

$$\delta(P)=\frac{1}{2}\left(a-\sqrt{a^2-\frac{4aP}{K_0}}\right). \qquad (f)$$

由（ e ）式求微分，得到下列微分方程

$$\frac{d\delta}{dP}=\frac{1}{K'(\delta)\delta+K(\delta)}=\frac{1}{K_0(1-2\delta/a)}. \qquad (g)$$

这是关于 δ 的一阶非线性常微分方程，对上式积分，也可得到精确解如（ f ）式。下面用数值方法求解，把上式写成差分方程，得到

$$\frac{\delta(P+\Delta P)-\delta(P)}{\Delta P}=\frac{1}{K_0(1-2\delta/a)}.$$

或

$$\delta(P+\Delta P)=\delta(P)+\frac{\Delta P}{K_0(1-2\delta/a)}. \qquad (h)$$

记 $\delta_i=\delta(P_i)$，$\Delta P=\Delta P_i$，由上式

$$\delta_{i+1}=\delta_i+\frac{\Delta P_i}{K_0(1-2\delta_i/a)}. \qquad (i)$$

这就相当于始点刚度法的计算公式。

由（ g ）式，在 $\delta(P_i)=\delta_i$ 处，变位曲线的坡度为

$$\delta_i'=\frac{1}{K_0(1-2\delta_i/a)}. \qquad (j)$$

根据上述坡度求得的 $\delta_{i+\frac{1}{2}}$ 为

$$\delta_{i+\frac{1}{2}}=\delta_i+\frac{0.5\Delta P_i}{K_0(1-2\delta_i/a)}. \qquad (k)$$

在 $\delta_{i+\frac{1}{2}}$ 处，变位曲线的坡度为

$$\delta'_{i+\frac{1}{2}}=\frac{1}{K_0\left(1-\frac{2\delta_{i+\frac{1}{2}}}{a}\right)}. \qquad (l)$$

表 15-1 非线性弹簧变位 δ 计算结果

($a=4, K_0=20$)

荷 载 P	精 确 值	始点刚度法	中点刚度法
2	0.103	0.100	0.103
4	0.211	0.205	0.211
6	0.327	0.317	0.326
8	0.451	0.435	0.450
10	0.586	0.563	0.585
12	0.735	0.702	0.734
14	0.905	0.856	0.902
16	1.106	1.031	1.097

由此求得δ_{i+1}如下：

$$\delta_{i+1}=\delta_i+\frac{\Delta P_i}{K_0\left(1-\frac{2\delta_{i+\frac{1}{2}}}{a}\right)}. \qquad (m)$$

上式相当于中点刚度法的计算公式。

用三种不同方法计算的结果见表15-1。由此表可大致看出近似计算的精度。当然，计算精度不但与计算方法有关，还与问题的非线性程度及计算步长等因素有关。在这个算例中，如果减小步长，始点刚度法的计算精度还可以提高。

§15-2 迭 代 法

用迭代法求解非线性问题时，一次施加全部荷载，然后逐步调整位移，使基本方程得到满足，具体的计算方法有三种，即变刚度法、初应力法和初应变法，下面分别加以说明。

一、变刚度法

对于图15-1所示非线性应力-应变关系，也可写成如下函数关系

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}. \qquad (15\text{-}6)$$

但式中的弹性矩阵$[D]$不是常数，而是应变$\{\varepsilon\}$的函数，从而也是位移$\{\delta\}$的函数：

$$[D]=[D(\{\varepsilon\})]=[D(\{\delta\})]. \qquad (15\text{-}7)$$

因此刚度矩阵也是位移$\{\delta\}$的函数$[K(\{\delta\})]$，对于非线性问题，我们要求解下列非线性方程组：

$$[K(\{\delta\})]\{\delta\}-\{P\}=0. \qquad (15\text{-}8)$$

求解上述非线性方程的一个比较简单的迭代方法是首先令位移$\{\delta_0\}=0$，由应力-应变关系求出$[K(\{\delta_0\})]=[K_0]$，由$\{\delta_1\}=[K_0]^{-1}\{P\}$求出位移第一次近似值。然后由$\{\delta_1\}$求割线刚度矩阵$[K(\{\delta_1\})]=[K_1]$，由$\{\delta_2\}=[K_1]^{-1}\{P\}$求位移第二近似值。参阅图15-5，重复上述步骤，每次由下式求位移近似值：

$$\{\delta_n\}=[K_{n-1}]^{-1}\{P\}, \qquad (15\text{-}9)$$

直到$\{\delta_n\}$和$\{\delta_{n-1}\}$充分接近时为止。这种计算方法有两个特点：第一，每次迭代都施加全部荷载$\{P\}$；第二，$[K_1]$，$[K_2]$，…$[K_{n-1}]$都是割线刚度矩阵。

变刚度法的重大缺点是，在每一步计算中都要重新计算刚度矩阵并建立新的方程组，如果用直接法求解，这当然是很不经济的。因此更有效的迭代法是在每一步计算中都用相同的刚度矩阵，但不断调整失衡力，以逐步求得较精确的位移解。这便是我们将在下面说明的初应力法和初应变法。

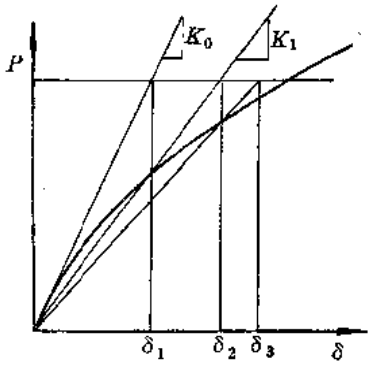


图 15-5 割线刚度迭代法

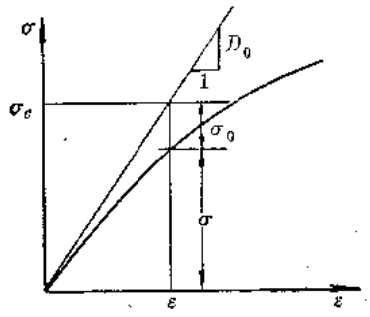


图 15-6 初应力

二、初应力法

设固体的非线性应力-应变关系可表示如下

$$\{\sigma\}=f(\{\varepsilon\}). \tag{15-10}$$

固体的切线弹性矩阵为$[D_0]$，如果按照线性应力-应变关系计算，弹性应力为

$$\{\sigma_e\}=[D_0]\{\varepsilon\}. \tag{15-11}$$

今在应力-应变关系中引进初应力$\{\sigma_0\}$，如图15-6所示，使按线性关系计算的应力与按式（a）计算的非线性应力相等：

$$\{\sigma\}=[D_0]\{\varepsilon\}+\{\sigma_0\}. \tag{15-12}$$

由以上三式可知，初应力$\{\sigma_0\}$应由下式计算：

$$\{\sigma_0\}=f(\{\varepsilon\})-[D_0]\{\varepsilon\}=\{\sigma\}-\{\sigma_e\}. \tag{15-13}$$

由第三章式（3-16），初应力所产生的单元结点荷载为

$$\left\{P\right\}^e_{\sigma_0}=-\int_V[B]^T\{\sigma_0\}dV. \tag{15-14}$$

将结点周围有关单元加以集合，得到初应力产生的结点荷载为

$$\{P\}_{\sigma_0}=\sum_e\left\{P\right\}^e_{\sigma_0}=-\sum_e\int_V[B]^T\{\sigma_0\}dV. \tag{15-15}$$

用初应力法分析非线性问题的计算步骤如下：首先由原始荷载$\{P_0\}$及刚度矩阵$[K_0]$，计算第一次近似位移$\{\delta_1\}$如下：

$$\{\delta_1\}=[K_0]^{-1}\{P_0\}.$$

由$\{\delta_1\}$求出应变$\{\varepsilon_1\}$，由（15-13）式计算初应力

$$\{\sigma_0\}_1=f(\{\varepsilon_1\})-[D_0]\{\varepsilon_1\}.$$

由（15-15）式求出初应力产生的结点荷载

$$\{P_{\sigma_0}\}_1=-\sum_e\int[B]^T\{\sigma_0\}_1dV.$$

于是可对位移进行一次调整，由下式计算第一次位移增量$\{\Delta\delta_1\}$：

$$\{\Delta\delta_1\}=[K_0]^{-1}\{P_{\sigma_0}\}_1.$$

位移的第二次近似值为

$$\{\delta_2\}=\{\delta_1\}+\{\Delta\delta_1\}.$$

由$\{\delta_2\}$求出应变$\{\varepsilon_2\}$及应力$\{\sigma_2\}=f(\{\varepsilon_2\})$，由（15-13）式计算第二次初应力$\{\sigma_0\}_2$，由（15-15）式计算第二次初应力产生的结点荷载，然后计算第二次位移增量$\{\Delta\delta_2\}$。重复上述步骤，直至$\{\Delta\delta_n\}$充分小时为止。

第n步计算中各有关公式如下：

$$\{\sigma_0\}_n=f(\{\varepsilon_n\})-[D_0]\{\varepsilon_n\},$$

$$\{P_{\sigma_0}\}_n=-\sum\int_V[B]^T\{\sigma_0\}_n dV,$$

$$\{\Delta\delta_n\}=[K_0]^{-1}\{P_{\sigma_0}\}_n,$$

$$\{\delta_{n+1}\}=\{\delta_n\}+\{\Delta\delta_n\},$$

$$\{\varepsilon_{n+1}\}=[B]\{\delta_{n+1}\},$$

$$\{\sigma_{n+1}\}=f(\{\varepsilon_{n+1}\}).$$

由此可见，在初应力法迭代计算时，每一步都是根据真实应力$\{\sigma_n\}$与弹性应力$[D_0]\{\varepsilon_n\}$之差来决定初应力$\{\sigma_0\}_n$，然后进行一次调整，使位移进一步逼近真值。迭代过程如图15-7所示。$\{P_{\sigma_0}\}_n$是结点失衡力，可用来估计计算过程中的误差。由于在每一步计算中都采用相同的刚度矩阵，因此在用直接法求解时，刚度矩阵只要分解一次，以后各步计算中只需进行简单的回代，计算是方便的。如果应力-应变关系的非线性比较明显，在第一步计算后，可改换刚度矩阵，以后各步计算中用$[K_1]$代替$[K_0]$，也许可以加快计算的收敛速度。

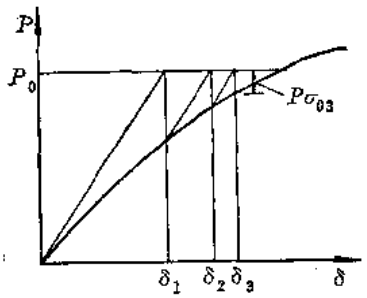


图 15-7　初应力法迭代计算

初应力迭代法计算框图见图15-8。

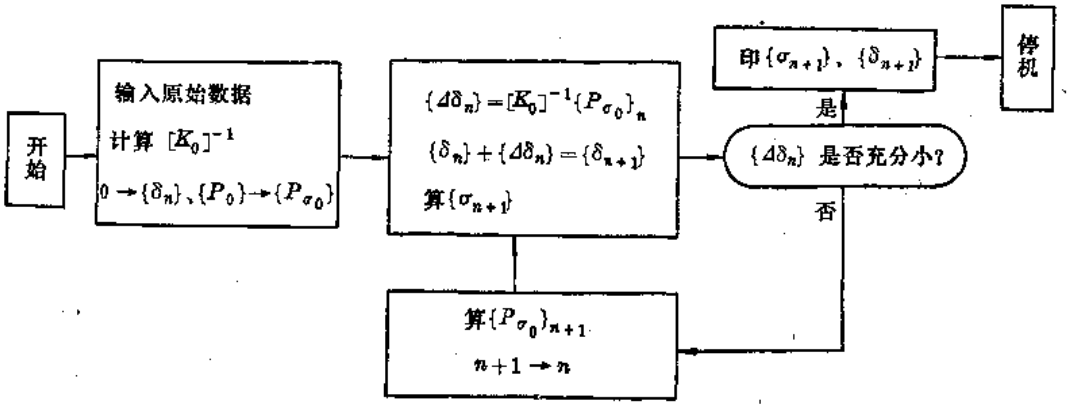


图 15-8　初应力迭代法计算框图

三、初应变法

在某些问题中，难以象（ a ）式那样用应变明显地表示应力，例如徐变问题即是如此。相反，在这些问题中可以用应力明显地表示应变或应变增量如下：

$$\{\varepsilon\}=f(\{\sigma\}). \tag{15-16}$$

弹性应力－应变关系为

$$\{\varepsilon_e\}=[D]^{-1}\{\sigma\}. \tag{15-17}$$

我们可以在应力-应变关系中引进初应变 $\{\varepsilon_0\}$，如图 15-9所示，使按线性关系计算的应变等于按（ d ）式计算的非线性应变：

$$\{\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\sigma\}+\{\varepsilon_0\}. \tag{15-18}$$

由以上三式可知初应变$\{\varepsilon_0\}$应由下式计算：

$$\{\varepsilon_0\}=\{\varepsilon\}-[D]^{-1}\{\sigma\}=f(\{\sigma\})-[D]^{-1}\{\sigma\}. \tag{15-19}$$

由第三章式（3-15），初应变产生的结点荷载为

$$\{P\}_{\varepsilon_0}=\int_V[B]^T[D]\{\varepsilon_0\}dV. \tag{15-20}$$

用初应变法分析非线性问题的计算步骤与初应力法是类似的。首先由原始荷载 $\{P_0\}$ 及刚度矩阵$[K_0]$计算第一次近似位移：

$$\{\delta_1\}=[K_0]^{-1}\{P_0\}.$$

由$\{\delta_1\}$计算应力$\{\sigma_1\}$，由（15-19）计算初应变 $\{\varepsilon_0\}$，由（15-20）式计算初应变产生的结点荷载 $\{P_{\varepsilon_0}\}_1$，然后对位移进行一次调整，计算第一次位移增量如下：

$$\{\Delta\delta_1\}=[K_0]^{-1}\{P_{\varepsilon_0}\}_1.$$

重复以上计算，直至$\{\Delta\delta_n\}$充分小为止。

还有一种计算方法称为混合法。如图 15-10 所示，混合法，同时利用了增量法和迭代法。荷载分为较少的几个增量，对每一荷载增量进行迭代计算。显然，混合法计算精度较高，但计算量较大。

下面对几种计算方法进行比较。

增量法的一个优点是适用范围广泛，即其通用性强；另一个优点是它可提供荷载-位

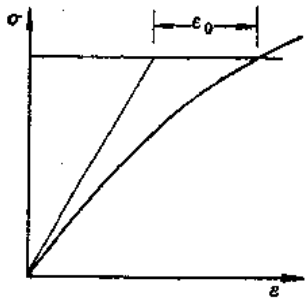


图 15-9 初应变

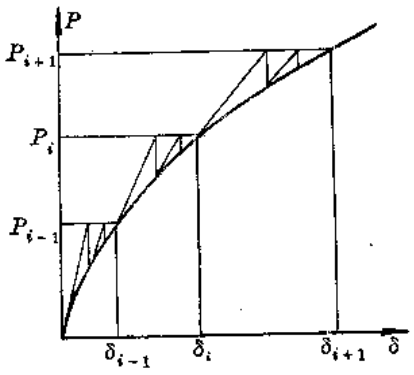


图 15-10 混合法

移过程线。增量法也有两个缺点，一是它比迭代法通常要消耗更多的计算时间；二是不知道近似解与真解相差多少。

迭代法的计算量比增量法小一些，对计算精度也能加以控制。但迭代法不能给出荷载-位移过程线，适用范围也小一些，例如当材料变形特性与加荷过程有关时（加荷与卸荷异性），以及动力问题等，迭代法均不能使用。

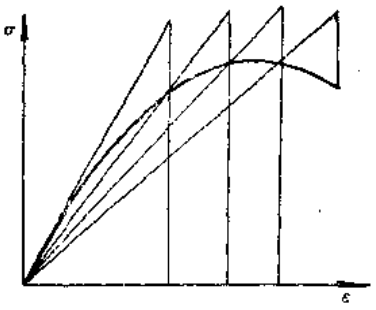


图 15-11 应变软化材料

混合法在一定程度上包含了增量法和迭代法的优点，并减少了两者的缺点、对每一荷载增量的计算，由于进行了迭代，可以估计近似程度，但计算量较大。

对于图 15-11 所示应变软化材料，不能采用切线模量方法，否则，在计算中将出现负的切线模量和负的刚度系数。对于这种应变软化材料，只能采用割线模量进行迭代计算。具体说来，也有两种做法。一种做法是，一次加上全部最终荷载，计算并校核每个单元内的应力和应变，如不符合给定的应力-应变关系，则计算新的割线模量，重新进行计算。计算结束时，得到的是最终的应力和应变。

另一种做法是，把最终荷载P_n分成n个梯级：

$$P_1<P_2<P_3\cdots\cdots<P_{n-1}<P_n\ ,$$

从P_1开始计算，对于每一个荷载梯级P_i，都要进行几次迭代计算，并得出相应的应力和应变。这种方法相当于上节所述混合法，所不同的是，所加荷载不是增量荷载ΔP_i，而是累积荷载P_i。

采用割线模量进行迭代计算时，计算工作量很大，而且难以考虑非零的初始应力。因为一般情况下，只已知初始应力，并不知道相应的初始应变，无法计算割线模量。

§15-3 塑性力学问题

对于大多数工程材料来说，当应力较大时，往往会产生塑性变形，在这种情况下，应当用塑性力学方法进行分析。传统的塑性力学包括弹塑性变形理论和塑性流动理论。弹塑性变形理论在理论上具有较多缺点，但由于比较简单，过去应用相当广泛。塑性流动理论与实验资料符合较好，但比较复杂，过去应用较少。在采用有限单元法以后，计算上的困难可以克服，所以采用塑性流动理论较为合适。

塑性流动理论的基本假定如下：

（1）物体是各向同性的；

（2）体积的相对变化与平均压应力成正比，即

$$\varepsilon=3K\sigma$$

或

$$d\varepsilon=3K\,d\sigma,$$

其中$K=\dfrac{(1-2\mu)}{E}$为常数；

（3）应变分量的总增量$d\{\varepsilon\}$由弹性应变增量$d\{\varepsilon\}_e$和塑性应变增量$d\{\varepsilon\}_p$两部分组成：

$$d\{\varepsilon\}=d\{\varepsilon\}_e+d\{\varepsilon\}_p\ . \tag{15-21}$$

式中 脚标e表示弹性，脚标p表示塑性。

（4）应力偏量与塑性应变增量的偏量相似且同轴线，即应力状态确定塑性应变分量的瞬时增量。

根据试验资料可假定，只有应力$\{\sigma\}$满足屈服条件

$$F(\{\sigma\},\ \beta)=0 \tag{15-22}$$

时，材料才产生屈服，式中β是硬化参数。这个屈服条件可看成是以应力分量为坐标的n维空间的曲面。

可以证明，屈服面$F(\{\sigma\},\ \beta)=0$上任一点$\{\sigma\}$的塑性应变增量$d\{\varepsilon\}_p$与该面正交，并且有

$$d\{\varepsilon\}_p=\lambda\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}. \tag{15-23}$$

其中λ为一待定参数。对于任一应力分量有

$$d\varepsilon_{n,p}=\lambda\frac{\partial F}{\partial\sigma_n}.$$

对于空间问题来说，脚标$n=1$、2、3代表正应力，$n=4$、5、6代表剪应力。

由广义虎克定理，弹性应变增量可表示为

$$d\{\varepsilon\}_e=[D]^{-1}d\{\sigma\}.$$

因此，式（15-21）可改写为

$$d\{\varepsilon\}=[D]^{-1}d\{\sigma\}+\lambda\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}. \tag{15-24}$$

取$F=0$的全微分，得

$$\frac{\partial F}{\partial\sigma_1}d\sigma_1+\frac{\partial F}{\partial\sigma_2}d\sigma_2+\cdots+\frac{\partial F}{\partial\beta}d\beta=0\ .$$

写成矩阵形式，得

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T d\{\sigma\}+A\lambda=0\ . \tag{15-25}$$

其中

$$A=\frac{\partial F}{\partial\beta}\ d\beta\ \frac{1}{\lambda}. \tag{15-26}$$

以$\left\{\dfrac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]$前乘（15-24）式，并利用（15-25）式消去$d\{\sigma\}$，得到

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]d\{\varepsilon\}=-A\lambda+\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}\lambda.$$

由上式求出λ，再代入前乘[D]以后的（15-24）式，可求得应力增量与应变增量的关系式如下：

$$d\{\sigma\}=[D]_{ep}d\{\varepsilon\}. \tag{15-27}$$

其中

$$[D]_{ep}=[D]+[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^{T}[D]\left(A-\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}^{T}[D]\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}\right)^{-1}. \tag{15-28}$$

[D]$_{ep}$为弹塑性矩阵，它是对称、正定矩阵。对于硬化材料，β等于产生塑性变形过程中所作的塑性功：

$$d\beta=\sigma_1 d\varepsilon_1^p+\sigma_2 d\varepsilon_2^p+\sigma_3 d\varepsilon_3^p+\cdots=\{\sigma\}^T d\{\varepsilon\}_p.$$

把式（15-23）代入上式，得到

$$d\beta=\lambda\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\},$$

再代入（15-26）式，得到

$$A=\frac{\partial F}{\partial\beta}\{\sigma\}^T\left\{\frac{\partial F}{\partial\{\sigma\}}\right\}. \tag{15-29}$$

对于联系流动法则，若屈服面是用单轴试验求出，则A等于单轴应力与塑性应变曲线的坡度的负值。

在塑性力学问题中应用有限单元法时，采用初应力方法是方便的，由于塑性应变而产生的初应力为

$$\{\sigma_0\}=[D]_{ep}d\{\varepsilon\}-[D]d\{\varepsilon\}. \tag{15-30}$$

把上式代入式（3-17），即可得到塑性变形引起的结点荷载如下：

$$\{P\}_p=-\int_V[B]^T([D]_{ep}-[D])d\{\varepsilon\}dV. \tag{15-31}$$

计算中必须注意，只有当应力达到屈服条件$F=0$以后，应力和应变的增量关系式（15-27）才能成立，如果$F<0$，必须按弹性关系计算。另外，式（15-27）只对于无限小的增量才成立，对于有限步长，应力可能超出屈服面，因此每次迭代后，必须把应力减小到屈服值。

具体计算步骤如下：

（1）施加荷载增量$\{\Delta P\}$，计算弹性应力增量$d\{\sigma\}$和应变增量$d\{\varepsilon\}$；

（2）对于已经达到的总应力$\{\sigma\}$，计算$F(\{\sigma\},\beta)$，如果$F<0$，表示还处于弹性阶段，不必迭代。如果$F>0$，计算本阶段开始时的F值，由内插法计算屈服点以上的弹性应力和应变增量，并由（15-27)式计算相应的弹塑性应变增量；

（3）由（15-30）式计算初应力，由（15-31）式计算塑性应变产生的结点荷载，并叠加到总荷载中去。解方程组

$$[K]\{\delta_n\}=\{P_{n-1}\}+\{P_n\}_p,$$

得到一组新的应力值。

如果结点失衡力小于允许值，停止迭代。否则，重复第（ 2 ）至第（ 3 ）步。

据文献介绍，按上述方法计算，一般经过5～15次循环即可结束，如果收敛特别慢，或根本不收敛，往往预示着结构的破坏。

§15-4 高次单元在非线性分析中的应用

在非线性有限单元计算中，早期多采用最简单的常应力单元。由于每个单元中的应力是常量，在用变刚度法求解时，每个单元可以采用与其应力相应的材料模量。在塑性力学问题中，由弹性区到塑性区的过渡，也是以单元为单位实现的。在塑性区内，所有单元都处于塑性状态，在弹性区内，所有单元都处于弹性状态。

近年的研究表明[95]，高次单元也可以用于非线性分析，高次单元一般比较大，内部应力又不是常量，在一个单元内，可能有的区域已进入塑性状态，而另外的区域还处于弹性状态。因此由弹性区到塑性区的过渡不能以单元为单位实现，但可以在单元内布置一些代表性的点子，例如等参数单元的高斯积分点，逐点验算，当该点应力达到屈服值时，即认为其附近的子空间已进入塑性状态，由（15-30)式可计算子空间的初应力，由(15-31）式可计算初应力产生的结点荷载，注意此时积分范围是有关的子空间。

图15-12表示了一个有切口的平面试件的塑性计算结果，由于双向对称，只取出四分之一计算，用 8 个三次等参数单元，共59个结点，屈服应力 $\sigma_y=2430\,kg/cm^2$，$E=700000\,kg/cm^2$，$\mu=0.2$。按理想塑性体计算。图中表示了在不同加荷条件下，塑性区沿 4 ×4高斯积分点扩展的情况。

目前在平面非线性计算中，常应力单元仍然用得很多，但在空间非线性计算中，高次单元，特别是等参数单元，由于可以大大压缩自由度数量，将具有明显的优点。

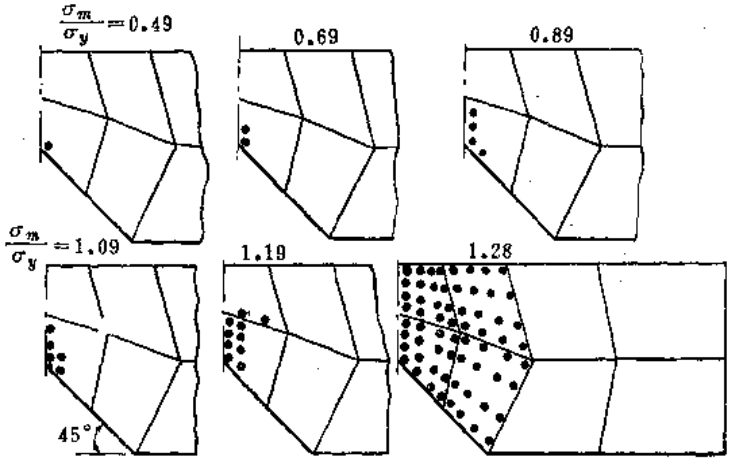


图 15-12 在不同荷载作用下，有切口的平面试件中，塑性区经积分点扩展

σ_m—切口处平均应力；σ_y—屈服应力

第十六章　岩石力学问题

岩石力学是一门重要而又年青的学科。由于岩石的特性十分复杂，在岩石力学中理论方法往往无能为力，而有限单元法却具有广泛的用途。应用有限单元法可以计算岩坡、坝基、隧洞、巷道、矿井的应力、变形和稳定，而且可以分析断层、节理、褶绉等地质构造的成因。

对岩体产生影响的有以下几方面的因素：应力-应变关系的非线性和各向异性，应力历史和蠕变效应、渗流、断层和节理等地质构造。关于非线性和各向异性已在本书第二及十五章讨论，蠕变将在第十八章讨论。渗流已在第十三章讨论。因此本章将着重介绍应用有限单元法解决岩石力学问题时如何考虑岩体中的节理、成层和断裂等因素。这些因素对岩石力学来说也是更加重要的因素。

§16-1　岩体节理单元

对于岩体来说，本书以前各章所述的各种单元都可采用，但由于岩体的变形具有强烈的非线性，变形模量随应力而变化，因此目前多采用等应变三角形单元。对于同样的机器存储量来说，单元的个数可以多一些，可以随着应力的变化而急剧地改变各单元的弹性模量。

在岩体中往往存在着断层和节理，它们对岩体的应力、变形和稳定具有极大的影响。可以说，对于修建在岩体内部或上面的建筑物来说，断层和节理对其安全具有决定性的作用。对于断层的计算，可采用三角形单元。至于岩体中的节理，由于其宽度很小，一般只有几毫米至几厘米，不能采用三角形单元。在这里，我们介绍一种节理单元。

一、单元刚度矩阵

图16-1表示一节理单元。单元长度为 l，宽度为 e，厚度（垂直于 x、y 平面）为 t，单元有四个结点 i，j，m，r。把坐标原点放在单元形心上。

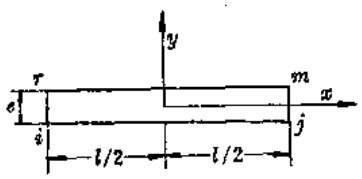


图 16-1　岩体节理单元

单元结点力是

$$\{F\}^e=[U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m \quad U_r \quad V_r]^T. \tag{16-1}$$

单元结点位移是

$$\{\delta\}^e=[u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m \quad u_r \quad v_r]^T. \tag{16-2}$$

假设单元上缘 rm 和下缘 ij 上的位移是线性分布的，即

$$u_{上}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)u_r+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)u_m,$$

$$u_{下}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)u_i+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)u_j.$$

由此可知单元上缘与下缘的水平位移差为

$$\Delta u=u_{上}-u_{下}=\frac{1}{2}\left[(u_r-u_i)\left(1-\frac{2x}{l}\right)+(u_m-u_j)\left(1+\frac{2x}{l}\right)\right]. \qquad (a)$$

同理，单元上缘与下缘的垂直位移差是

$$\Delta v=v_{上}-v_{下}=\frac{1}{2}\left[(v_r-v_i)\left(1-\frac{2x}{l}\right)+(v_m-v_j)\left(1+\frac{2x}{l}\right)\right]. \qquad (b)$$

假设单元内剪应力与水平位移差成正比，即

$$\tau_s=\lambda_s\Delta u+\tau_{s0}. \qquad (16\text{-}3)$$

单元内正应力与垂直位移差成正比，即

$$\sigma_n=\lambda_n\Delta v+\sigma_{n0}. \qquad (16\text{-}4)$$

其中λ_s、λ_n分别是节理的切向和法向劲度系数，τ_{s0}、σ_{n0}是单元内的初始剪应力和正应力。

令

$$\{w\}=\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix},\ [\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda_s & 0\\ 0 & \lambda_n\end{bmatrix},$$

$$\{\sigma_0\}=\begin{Bmatrix}\tau_{s0}\\ \sigma_{n0}\end{Bmatrix}. \qquad (16\text{-}5)$$

则由（16-3）、（16-4）二式可知

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=[\lambda]\{w\}+\{\sigma_0\}. \qquad (16\text{-}6)$$

由（a）、（b）二式可得

$$\{w\}=\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=[M]\{\delta\}^e. \qquad (16\text{-}7)$$

式中

$$[M]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_2 & 0 & z_1 & 0\\ 0 & -z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_2 & 0 & z_1\end{bmatrix}. \qquad (16\text{-}8)$$

其中 $$z_1=1-\frac{2x}{l},\ z_2=1+\frac{2x}{l}. \qquad (c)$$

假若单元各结点产生虚位移$\{\delta^*\}^e$，那么单元内的虚位移差为

$$\{w^*\}=[M]\{\delta^*\}^e.$$

在单位长度上，单元应力所作虚功是

$$t\{w^*\}^T\{\sigma\}=\{\delta^{*e}\}^Tt[M]^T([\lambda]\{w\}+\{\sigma_0\}).$$

沿单元长度积分后，即得到单元应力所做虚功，它必须等于单元结点力所做虚功，由此得

$$\{F\}^e=\left(t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[M]^T[\lambda][M]dx\right)\{\delta\}^e+\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[M]^T\{\sigma_0\}dx. \qquad (d)$$

上式右端第二项是由于初应力而多出来的结点力，把它改变符号，即得到由于初应力而产

生的结点荷载。上式右端第一项是结点位移引起的结点力、故由（d）式可知单元结点力为

$$\{F\}^e=[k]^e\{\delta\}^e, \tag{16-9}$$

$$[k]^e=t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[M]^T[\lambda][M]dx. \tag{16-10}$$

初应力引起荷载：

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=-t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[M]^T\{\sigma_0\}dx. \tag{16-11}$$

把$[M]$的表达式（16-8）代入（16-10）式，并注意到

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}z_1^2dx=\frac{4l}{3},\quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}z_1z_2=\frac{2l}{3},\quad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}z_2^2dx=\frac{4l}{3}.$$

得到单元刚度矩阵如下[102]：

$$[k]^e=\frac{lt}{6}\begin{bmatrix}
2\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0\\
0 & 2\lambda_n & 0 & \lambda_n & 0 & -\lambda_n & 0 & -2\lambda_n\\
\lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0\\
0 & \lambda_n & 0 & 2\lambda_n & 0 & -2\lambda_n & 0 & -\lambda_n\\
-\lambda_s & 0 & -2\lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0\\
0 & -\lambda_n & 0 & -2\lambda_n & 0 & 2\lambda_n & 0 & \lambda_n\\
-2\lambda_s & 0 & -\lambda_s & 0 & \lambda_s & 0 & 2\lambda_s & 0\\
0 & -2\lambda_n & 0 & -\lambda_n & 0 & \lambda_n & 0 & 2\lambda_n
\end{bmatrix}. \tag{16-12}$$

二、初应力引起的结点荷载

按照公式（16-6），单元内的应力沿厚度方向（y方向）是均匀的，而沿长度（x）方向是线性分布的，与此相适应，设单元内初应力也是沿x方向线性分布的，即

$$\tau_{s0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\tau_{si0}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\tau_{sj0},$$

$$\sigma_{n0}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\sigma_{ni0}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\sigma_{nj0}.$$

其中 τ_{si0}，σ_{ni0}和τ_{sj0}，σ_{nj0}是i和j点的初应力。由（16-11）式可得初应力产生的结点荷载如下：

$$[p]^e_{\sigma_0}=-\frac{tl}{6}\begin{bmatrix}
-2 & 0 & -1 & 0\\
0 & -2 & 0 & -1\\
-1 & 0 & -2 & 0\\
0 & -1 & 0 & -2\\
1 & 0 & 2 & 0\\
0 & 1 & 0 & 2\\
2 & 0 & 1 & 0\\
0 & 2 & 0 & 1
\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_{si0}\\ \sigma_{ni0}\\ \tau_{sj0}\\ \sigma_{nj0}\end{Bmatrix}. \tag{16-13}$$

如果单元内初应力是均匀的，即 τ_{s0} 和 σ_{n0}，由（16-11）式，可知初应力引起的结点荷载是

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=-\frac{tl}{2}\begin{Bmatrix}\tau_{s0}\\ \sigma_{n0}\\ \tau_{s0}\\ \sigma_{n0}\\ -\tau_{s0}\\ -\sigma_{n0}\\ -\tau_{s0}\\ -\sigma_{n0}\end{Bmatrix}. \tag{16-14}$$

三、坐标转换

设单元局部坐标系是（x',y'），而整体坐标系是（x，y），如图16-2，两种坐标系符合下列变换式：

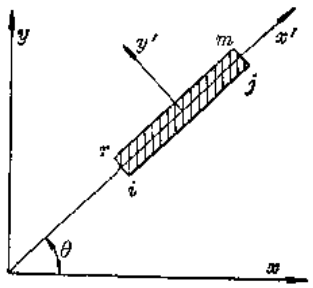


图 16-2

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=[L]\begin{Bmatrix}x'\\ y'\end{Bmatrix}.$$

式中 $$[L]=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}. \tag{e}$$

设局部坐标中的单元结点力为 $\{F'\}^e$，则整体坐标中的单元结点力为

$$\{F\}^e=[T]\{F'\}^e. \tag{f}$$

式中

$$[T]=\begin{bmatrix}L & 0 & 0 & 0\\ 0 & L & 0 & 0\\ 0 & 0 & L & 0\\ 0 & 0 & 0 & L\end{bmatrix}. \tag{g}$$

同理，整体坐标中由初应力引起的结点荷载是

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=[T]\{P'\}^e_{\sigma_0}. \tag{h}$$

整体坐标系中的单元刚度矩阵是

$$[k]^e=[T][k']^e[T]^T. \tag{i}$$

其中$[k']^e$是局部坐标系中的单元刚度矩阵。

四、有限宽度的节理单元

上述单元不但适用于宽度接近于零的节理，也可用于有限宽度的节理以及常见的岩体软弱夹层，其宽度一般为几个厘米。现在我们来说明这一点。

设节理的宽度为 e，节理内的应变为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta u/e\\ \Delta v/e\end{Bmatrix}=\frac{1}{e}\{w\}. \tag{16-15}$$

由（16-7）式，$\{w\}=[M]\{\delta\}^e$，代入上式得到

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e.$$

式中

$$[B]=\frac{1}{e}[M]. \tag{16-16}$$

单元内应力为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}=[D]\{\varepsilon\}. \tag{16-17}$$

式中

$$[D]=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}. \tag{16-18}$$

由应力分析的普遍公式（3-11）可知，节理单元的刚度矩阵可由下式计算：

$$[k]^e=\int[B]^T[D][B]d(Vol). \tag{16-19}$$

由于 $d(Vol)=tedx$，$[B]=\frac{1}{e}[M]$，故

$$[k]^e=\frac{t}{e}\int_{-l/2}^{l/2}[M]^T[D][M]dx. \tag{j}$$

令

$$\lambda_s=\frac{G}{e},\ \lambda_n=\frac{E}{e}, \tag{16-20}$$

则

$$[D]=e[\lambda],$$

代入（16-19）式，得到

$$[k]^e=t\int_{-l/2}^{l/2}[M]^T[\lambda][M]dx.$$

上式与（16-10）式完全一致。

由此可见，只要按照（16-20）式定义节理劲度系数 λ_s 和 λ_n，前述节理单元也可用于有限宽度的节理和岩体软弱夹层。

§16-2 岩体节理的劲度系数

在岩体节理单元的计算中，要用到节理劲度系数λ_n和λ_s。显然，这些系数要根据实测资料加以整理而得到。根据现场试验的荷载-位移曲线，节理劲度系数可计算如下：

$$\lambda_n=\frac{\partial\sigma}{\partial v},\ \lambda_s=\frac{\partial\tau}{\partial u}. \tag{16-21}$$

其中 u 和 v 分别是节理上、下缘之间的水平和垂直位移差。

岩体节理一般是不能承受法向拉力的，所以有

$$\text{当}\sigma>0\text{时},\ \lambda_n=\lambda_s=0. \tag{16-22}$$

实际计算中，应采用接近于零的数值，不宜直接用零，以免计算过程中“溢出”。

当$\sigma<0$时，λ_n和λ_s都是异于零的。实测资料表明，多数情况下，法向劲度系数λ_n可近似地用一常量表示，而切向劲度系数λ_s则具有强烈的非线性，不但与切向位移差u有关，而且随着正应力σ而变化。下面我们着重分析切向劲度系数（如果法向劲度系数不是常量，也可参照这些方法进行计算）。

根据实测资料，我们发现岩体节理切应力与切向位移差之间的关系可用双曲线表示如下：

$$\tau=\frac{u}{a+bu}. \tag{16-23}$$

式中τ是节理所受切应力，u是节理上下表面的切向位移差。a和b是由实测资料决定的常数。a和b具有明显的物理意义，如图16-3（a）所示，a是初始劲度系数λ_0的倒数，

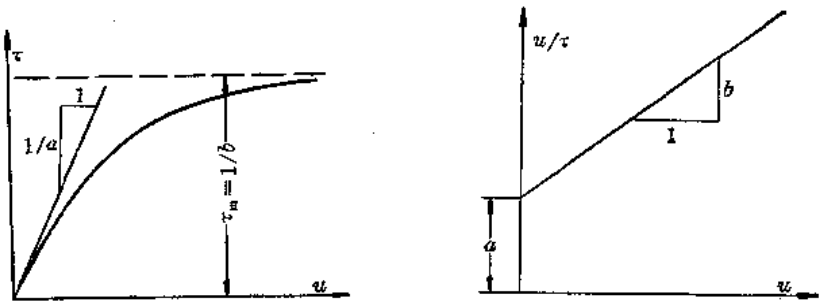


图 16-3 岩石节理$\tau\sim u$关系

而b是最大剪应力（抗剪强度）τ_m的倒数，即

$$\frac{1}{a}=\lambda_0,\quad \frac{1}{b}=\tau_m. \tag{16-24}$$

如果把坐标加以变换，纵坐标表示u/τ，如图16-3（b）所示，（16-23）式改写为

$$\frac{u}{\tau}=a+b\,u. \tag{16-25}$$

可见$u/\tau\sim u$是一条直线，a和b分别是直线的截距和斜率。在不同的正应力下加荷，就可以得到一组这样的直线。图16-4是我们根据（16-25）式整理的某水电站岩体节理现场试验资料，由图可见实测点子基本上都落在直线上，表明公式（16-23）可以很好地描述岩体节理的应力-位移关系。

由（16-21）（16-23）二式，得到

$$\lambda_s=\frac{\partial\tau}{\partial u}=\frac{a}{(a+bu)^2}. \tag{a}$$

由（16-23）式可知 $u=a\tau/(1-b\tau)$，代入上式得到

$$\lambda_s=(1-b\tau)^2/a. \tag{16-26}$$

再把$1/a=\lambda_0$，$1/b=\tau_m$代入上式，得到

$$\lambda_s=\lambda_0\left(1-\frac{\tau}{\tau_m}\right)^2. \tag{16-27}$$

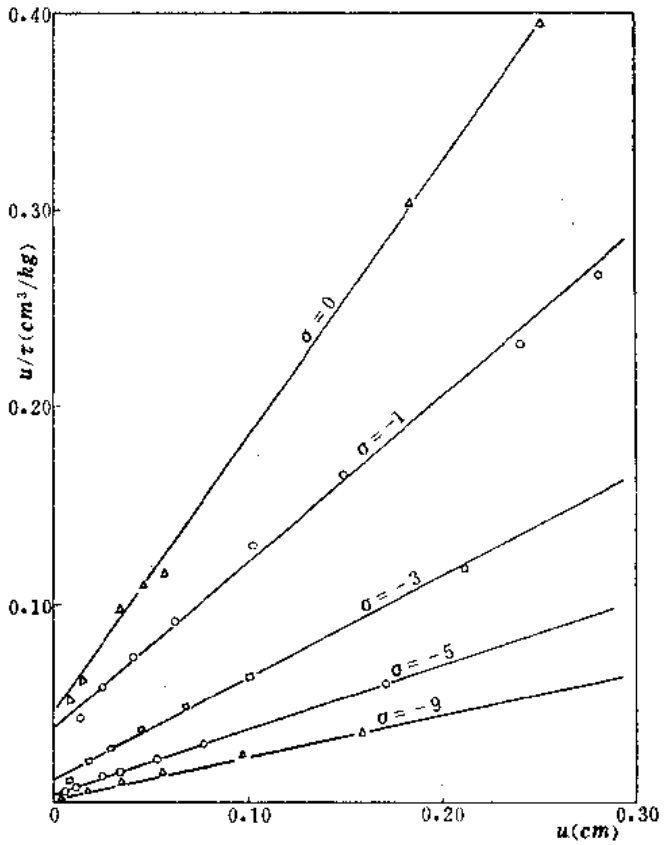


图 16-4 某水电站岩体节理现场试验资料

抗剪强度τ_m与正应力的关系可用库仑公式表示如下：

$$\tau_m=\frac{1}{b}=c-f\sigma\ . \tag{16-28}$$

把由图16-4求出的不同正应力作用下的τ_m值表示在图16-5中，由图可见σ与τ_m基本上满足（16-28）式。对于这组资料，$c=0.76kg/cm^2$，$f=0.477$，c相当于粘着力，f相当于摩擦系数。必须说明，在这里由于采用弹性力学符号，σ以拉应力为正，压应力为负，所以在（16-28）中σ前采用负号。

把岩体节理的初始切向劲度系数λ_0与相应的正应力σ画在双对数纸上，如图16-6，适当选取常数s，也可使全部点子基本上落在一线直线上，由此可知

$$\lambda_0=\frac{1}{a}=F(s-\sigma)^n。 \tag{16-29}$$

F和n都是常数，对于图16-6所示资料，$F=4.95$，$n=1.758$，$s=2.00kg/cm^2$。

把（16-28）、（16-29）二式代入（16-27）式，并结合（16-22）式，得到岩体节理切向劲度系数表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}\quad \sigma>0\ ,\ \lambda_s=0\ ,\\&\text{当}\quad \sigma\leqslant 0\ ,\ \lambda_s=F\,(s-\sigma)^n\left(1-\frac{\tau}{c-f\sigma}\right)^2.\end{aligned}\right\} \tag{16-30}$$

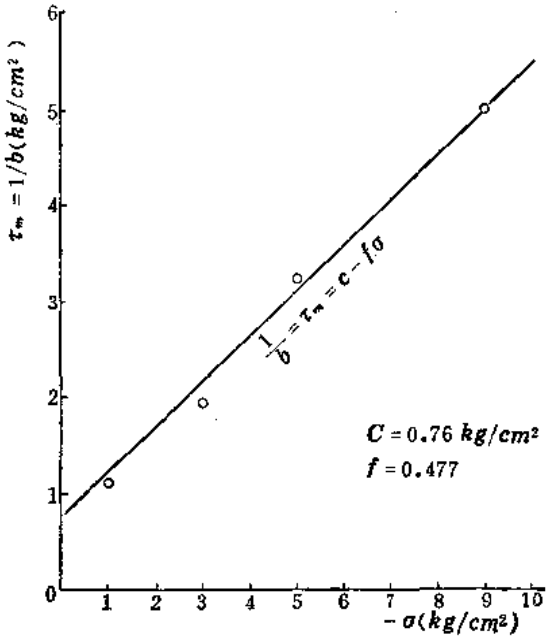


图 16-5　岩体节理τ_m与σ关系

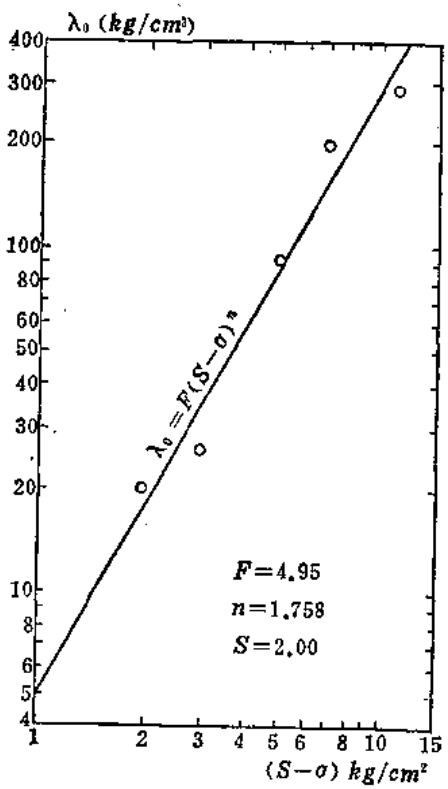


图 16-6　岩体节理λ_0与σ关系

式中F、s、n、c、f等是由实测资料确定的常数。从物理意义上来说，s实际上相当于节理的抗拉强度，为了考虑这一点，并引入大气压力p_a和水的容重γ_w，使参数F化成无量网数，上式也可改写如下：

$$\left.\begin{aligned} &\text{当}\quad \sigma \geqslant s\ \text{时},\ \lambda_s = 0\,,\\ &\text{当}\quad \sigma < s\ \text{时},\ \lambda_s = F\gamma_w\left(\frac{s-\sigma}{p_a}\right)^n\left(1-\frac{\tau}{c-f\sigma}\right)^2. \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}30a)$$

当岩体节理的$\tau - u$关系比较复杂时，也可用样条函数表示，请参阅第十七章。对于有限宽度的节理和夹层，可用类似方法表示剪切模量G和弹性模量E。

§16-3　岩体节理和软弱夹层中的渗流

在岩体中往往存在着地下水，它对修建在岩体中的建筑物的应力特别是稳定性具有重要影响。节理和软弱夹层对岩体中的渗流当然是有影响的。如果节理和夹层中的填充材料是透水性强的，或是未很好填充的，那么节理和夹层将形成集中的渗水通道。反之，如果节理或夹层中的填充材料已高度泥化，透水性很小，那么节理和夹层将形成隔水层。

在计算地下渗流时，对于一般的岩体可采用三角形网格，计算方法已见第十三章，对于岩体中的节理和夹层，则宜采用节理单元。

取水头函数为

$$\phi = y + \frac{p}{\gamma}. \tag{16-31}$$

式中y为铅直坐标，向上为正。p为水压力，γ为水容重。由变分原理可知，函数ϕ应使下列泛函$I(\phi)$达到极小值：

$$I(\phi)=t\iint\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=min. \tag{16-32}$$

其中 k_x、k_y分别是x和y方向的渗透系数。

采用节理单元如图16-1，在单元内取水头函数为

$$\phi=N_i\phi_i+N_j\phi_j+N_m\phi_m+N_r\phi_r. \tag{16-33}$$

式中

$$N_i=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(1-\frac{2y}{l}\right),$$

$$N_j=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\left(1-\frac{2y}{l}\right),$$

$$N_m=\frac{1}{4}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\left(1+\frac{2y}{l}\right),$$

$$N_r=\frac{1}{4}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\left(1+\frac{2y}{l}\right).$$

由公式（16-32），以I^e表示单元内泛函值，有

$$\frac{\partial I^e}{\partial\{\phi\}^e}=[h]\{\phi\}^e. \tag{16-34}$$

其中

$$\frac{\partial I^e}{\partial\{\phi\}^e}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial I^e}{\partial\phi_i}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial\phi_j}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial\phi_m}\\ \dfrac{\partial I^e}{\partial\phi_r}\end{Bmatrix},\qquad \{\phi\}^e=\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \phi_m\\ \phi_r\end{Bmatrix},$$

$$[h]=\frac{k_x t_e}{6l}\begin{bmatrix}2&-2&-1&1\\-2&2&1&-1\\-1&1&2&-2\\1&-1&-2&2\end{bmatrix}+\frac{k_y t l}{6e}\begin{bmatrix}2&1&-1&-2\\1&2&-2&-1\\-1&-2&2&1\\-2&-1&1&2\end{bmatrix}. \tag{16-35}$$

由于$\dfrac{\partial I^e}{\partial\phi_i}$等是纯量，所以上列矩阵不必进行坐标变换，对于倾斜的节理和夹层，上式仍然适用，只须把k_x、k_y取为沿节理长度和厚度方向的渗透系数就可以了。

§16-4 用初应力法分析岩体的应力、变形和稳定

对于岩体，给定初始弹性模量E_0，得到初始弹性矩阵$[D_0]$，按照线性问题求解，得到线性应力如下：

$$\{\sigma_e\}=[D_0]\{\varepsilon\}. \tag{16-36}$$

假若岩体的应力-应变关系所规定的允许应力为$\{\sigma_b\}$，由于岩体的应力-应变关系是非线性的，允许应力$\{\sigma_b\}$将不同于线性应力$\{\sigma_e\}$，引进初应力$\{\sigma_0\}$如下：

$$\{\sigma_b\}=[D_0]\{\varepsilon\}+\{\sigma_0\}=\{\sigma_e\}+\{\sigma_0\}. \tag{16-37}$$

由此可知初应力为

$$\{\sigma_0\}=\{\sigma_b\}-\{\sigma_e\}. \tag{16-38}$$

对于三角形单元，初应力引起的结点荷载是

$$\{P\}_{\sigma_0}=-t\iint[B]^T\{\sigma_0\}dxdy. \tag{16-39}$$

$[B]$见（4-11）式。

对于节理单元，初应力引起的结点荷载是

$$\{P\}_{\sigma_0}=-t\int_{-l/2}^{l/2}[M]^T\{\sigma_0\}dx. \tag{16-40}$$

式中$[M]$见（16-8）式。

求得初应力引起的荷载后，即可进行一次调整。经过逐次调整，可得到所求的结果。

由上述分析可知，只要根据岩体的应力-应变关系给出允许应力$\{\sigma_b\}$，就不难用初应力方法求解。

一、层状岩石的破裂和滑动

当岩体中存在着大量方向一致的节理时，可近似地看成层状材料，假定在垂直于层理的方向不能受拉，在平行于层理的方向可以承受剪应力，但不能超过摩擦力。

如图16-7所示，设局部坐标的x'轴平行于层理方向，在局部坐标系中的应力应满足下列条件：

$$\sigma_{y'}\leqslant 0,\ |\tau_{x'y'}|\leqslant c-f\sigma_{y'}. \tag{16-41}$$

式中c为层面上的粘着力，f为摩擦系数。

计算步骤如下：

（1）求解弹性位移

$$\{\delta\}=[K]^{-1}\{P\}$$

计算弹性应力$\{\sigma\}$。

（2）计算局部坐标系中的线性应力：

$$\{\sigma'\}=[\theta]^{-1}\{\sigma\}.$$

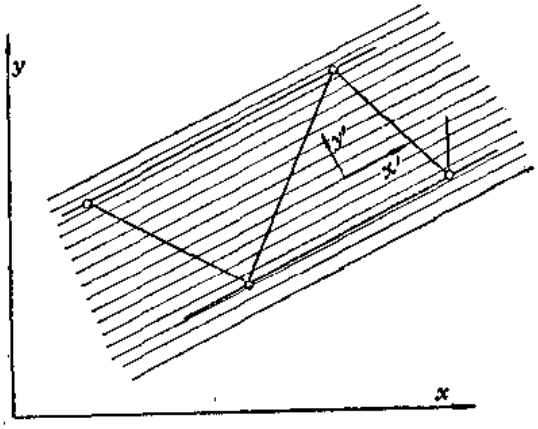


图 16-7 层状岩石

其中[θ]为应力转换矩阵，见（2-19）式。

（3）判断单元应力状态是否符合式（16-41），并计算允许应力$\{\sigma_b\}$。

（a）若$\sigma_{y'}>0$，层面将被拉开，正应力$\sigma_{y'}$和剪应力$\tau_{x'y'}$应为零，取允许应力为

$$\{\sigma_b'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{x'}\\0\\0\end{Bmatrix}. \tag{16-42}$$

（b）若$\sigma_{y'}\leqslant 0$，且$|\tau_{x'y'}|>c-f\sigma_{y'}$，层面产生滑动，取允许应力为

$$\{\sigma_b'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{x'}\\\sigma_{y'}\\\eta\,|f\sigma_{y'}|\end{Bmatrix}. \tag{16-43}$$

当$\tau_{x'y'}$为正时，$\eta=+1$，当$\tau_{x'y'}$为负时，$\eta=-1$，上式表示正应力$\sigma_{x'}$、$\sigma_{y'}$不调整，而剪应力的大小等于磨擦力$|f\sigma_{y'}|$，其方向与$\tau_{x'y'}$相同。

（c）若$\sigma_{y'}\leqslant 0$，且$|\tau_{x'y'}|\leqslant f-c\sigma_{y'}$，则既不拉开，也不滑动，允许应力等于原来的线性应力，即

$$\{\sigma_b'\}=\{\sigma'\}.$$

（4）计算局部坐标中的初应力

$$\{\sigma_0'\}=\{\sigma_b'\}-\{\sigma'\}.$$

再转换到整体坐标中去，并计算初应力产生的结点荷载。

（5）计算初应力引起的位移增量：

$$\{\Delta\delta\}=[K]^{-1}\{P\}_{\sigma_0},$$

并计算应力增量$\{\Delta\sigma\}$。单元应力为

$$\{\sigma\}+\{\sigma_0\}+\{\Delta\sigma\}.$$

重复上述步骤，直至$\{\Delta\delta\}$充分小时为止。

二、节理和软弱夹层的破裂和滑动

岩石节理和软弱夹层一般是不能承受拉应力的，其剪应力也应符合（16-23）式，因此在局部坐标系中的应力应符合下列条件：

$$\sigma_n'\leqslant 0, \tag{16-44}$$

$$\tau_s'=\frac{\Delta u'}{a+b\Delta u'}, \tag{16-45}$$

计算过程中，判别条件如下：

（1）若$\sigma_n'>0$，则节理面或夹层被拉开，允许应力为零，初应力为

$$\{\sigma_0'\}=-\{\sigma'\}=-\begin{Bmatrix}\tau_s'\\\sigma_n'\end{Bmatrix}. \tag{16-46}$$

（2）若$\sigma_n'\leqslant 0$，节理面或夹层不被拉开，正应力不必调整，允许剪应力如（16-45）式，因此初应力为

$$\{\sigma_0'\}=\begin{Bmatrix}\Delta\tau'\\0\end{Bmatrix}. \tag{16-47}$$

式中 $\Delta\tau'=\dfrac{\Delta u'}{a+b\Delta u'}-\tau_s'$。

（16-48）

如果现场实测资料不充分，难以整理出公式（16-45），也可用摩擦系数公式进行近似计算。此时（16-47）式中的 $\Delta\tau'$ 可改用下式计算：

$$\Delta\tau'=\eta\,|f\sigma_n'|-\tau_s'。$$

（16-49）

当τ_s'为正时时，$\eta=+1$，当τ_s'为负时，$\eta=-1$。

图16-8是用初应力法计算的一个例子[104]。这是一座建筑在岩石基础上的重力坝。线性计算结果见图16-8（a），在坝踵存在着很大的拉力区。图16-8（b）是非线性计算结果，假定岩石是非受拉材料，即主拉应力不能大于零，在坝踵出现了一个开裂区。

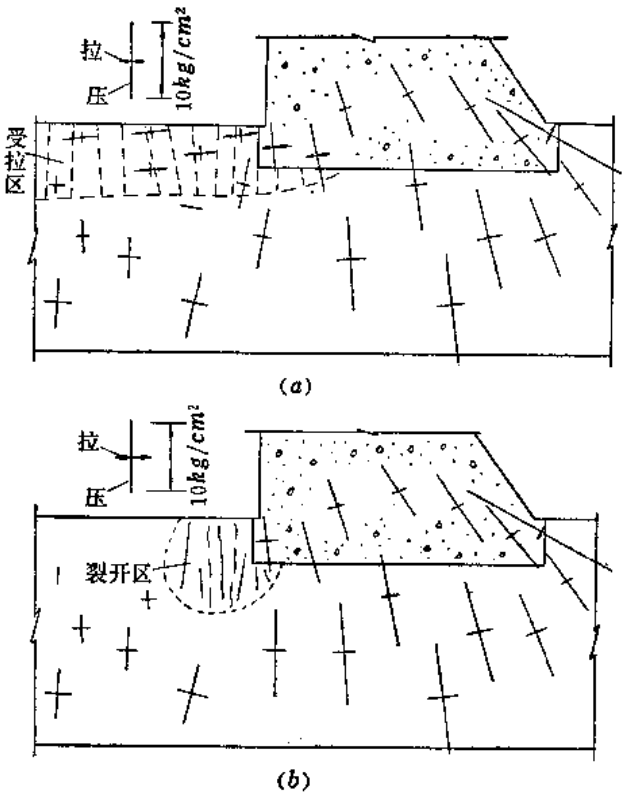


图 16-8 岩基上的重力坝

(a)弹性应力；(b)岩石为非受拉材料时应力

§16-5 用变模量法分析岩体的应力、变形和稳定

如果已经取得岩体应力-应变关系的完整资料，利用双曲线或样条函数进行整理（见第十七章）后，采用增量荷载法即可进行应力、变形和稳定的计算，详见第十五章。

实践经验表明，在试验室内用岩石试样所获得的应力－应变关系并不能代表野外岩体的真实性状，且相差很远，岩体的应力－应变关系必须通过野外大型试验才能测定。而且岩石变形特性变化很快，即使是同一个工程，稍隔一定距离往往即相差很大，野外大型试验在技术上是比较复杂的，因此，要依靠野外大型试验取得岩体应力-应变关系的系统、完整的资料是颇不容易的。由于节理和软弱夹层对岩体的变形和稳定具有决定性的影响，从实用角度看，对节理和软弱夹层应尽量采用较精确的应力-应变关系，而对于一般岩体，不妨采用工程上常用的简化的破坏准则，以简化野外试验工作。即使这样，由于问题是非线性的，传统的分析方法是无能为力的，而采用有限单元法却可以迅速获得计算结果。

现在，我们将阐明分析岩体的变形和稳定的一个简便而有效的方法。

如图16-9所示，把岩体看成是层状的各向异性材料，在局部坐标系中，在x'方向的弹性模量是E_1，在y'方向的弹性模量是E_2，剪切模量是G_2，应力-应变关系如下：

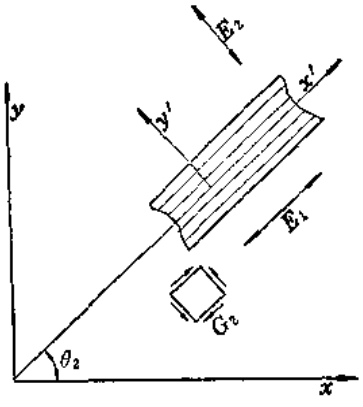


图 16-9

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\sigma_{x'}}{E_1}-\frac{\mu_2\sigma_{y'}}{E_2}-\frac{\mu_1\sigma_{z'}}{E_1},$$

$$\varepsilon_{y'}=\frac{\sigma_{y'}}{E_2}-\frac{\mu_2\sigma_{x'}}{E_2}-\frac{\mu_2\sigma_{z'}}{E_2},$$

$$\varepsilon_{z'}=\frac{\sigma_{z'}}{E_1}-\frac{\mu_1\sigma_{x'}}{E_1}-\frac{\mu_2\sigma_{y'}}{E_2},$$

$$\gamma_{x'y'}=\frac{\tau_{x'y'}}{G_2}.$$

相应的弹性矩阵见（2-25）与（2-26）式。

利用各向异性弹性矩阵，可以考虑岩体的破裂和滑动。例如，当$\sigma_{y'}$超过了抗拉强度而开裂时，可令$E_2=G_2=0$（实际计算时应给以一个接近于零的数值，以免刚度矩阵求逆时溢出），如果正应力为压应力，但剪应力$\tau_{x'y'}$超过了抗剪强度，则产生滑动，可令$G_2=0$。

计算中宜采用增量荷载，逐步计算。达到设计荷载后，还可继续加荷，直至完全破坏，从而可求得结构的安全系数。

一、层状岩石的破裂和滑动

令局部坐标的x'轴平行于层面方向。在局部坐标系中的应力应满足下列条件

$$\sigma_{y'}\leqslant 0,\quad |\tau_{x'y'}|\leqslant c-f\sigma_{y'}. \qquad (a)$$

对每个单元进行检查，判别条件如下：

（1）若$\sigma_{y'}>0$，则层面被拉开，在下步计算中应令$E_2=G_2=0$，并应消除层面上的$\sigma_{y'}$和$\tau_{x'y'}$，即取

$$\{\sigma_0'\}=\begin{Bmatrix}0\\-\sigma_{y'}\\-\tau_{x'y'}\end{Bmatrix}.$$

（2）若$\sigma_{y'}<0$，$|\tau_{x'y'}|>c-f\sigma_{y'}$，则层面产生滑动，应令$G_2=0$，并取

$$\{\sigma_0'\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\eta f\,|\sigma_{y'}|-\tau_{x'y'}\end{Bmatrix}.$$

当$\tau_{x'y'}$为正时，取$\eta=+1$，当$\tau_{x'y'}$为负时，取$\eta=-1$。

（3）若$\sigma_{y'}<0$，$|\tau_{x'y'}|<c-f\sigma_{y'}$，则层面不破裂也不滑动，不必调整。

虽然计算过程中也出现了初应力，但因相应的模量已取为零，只经一步计算即可消除，不必像上节初应力方法那样反复计算。

二、节理和软弱夹层的破裂和滑动

如果节理的切向劲度系数用双曲线公式表示，计算中的判别条件如下：

（1）若$\sigma_n'>0$，则节理面被拉开，应令$\lambda_n=\lambda_s=0$，并取

$$\{\sigma_0'\}=-\begin{Bmatrix}\tau_s'\\\sigma_n'\end{Bmatrix}.$$

（2）若$\sigma_n'\leqslant 0$，节理面不被拉开，此时λ_n可用规定的常数，而λ_s按（16-30）式计算。

如果缺乏足够试验资料，λ_s不能用双曲线公式表示，当$|\tau_s'|>-f\sigma_n'$时，可令$\lambda_s=0$。

作者和宋敬廷、陈辉成同志合作曾把以上几节所述方法应用于双牌坝等工程的计算中，取得了比较满意的成果[179]。

§16-6 二维高次节理单元

节理对于岩体的应力、变形和稳定具有决定性的影响。对于岩石力学来说，节理单元具有重要作用，我们在本章第1节，介绍了常用的4结点节理单元，在下面两节，我们再叙述几种其他形式的节理单元。在这一节，叙述几种二维高次节理单元。

一、六结点二次节理单元

如果在完整岩体部分采用六结点三角形单元，相应地，在节理部分可采用六结点节理单元，如图16-10所示。节理单元的长度取为l，宽度取为e，厚度（垂直纸面方向）取

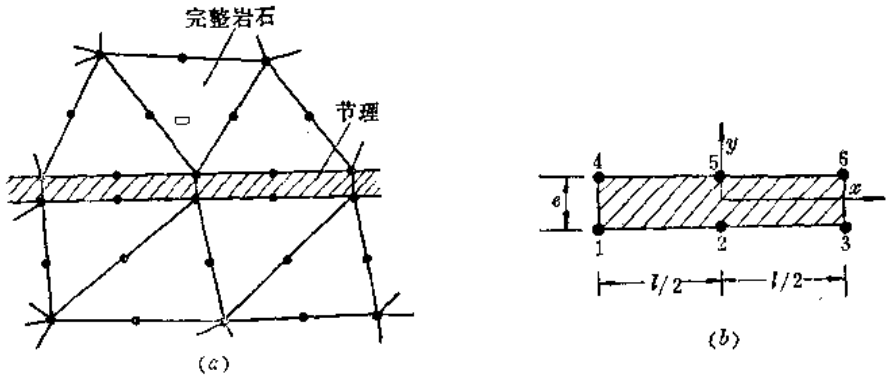


图 16-10 六结点二次节理单元

为t。把局部坐标系(x,y)的原点放在单元形心上。单元结点力$\{F\}^e$和结点位移$\{\delta\}^e$分别为

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}U_1\\V_1\\\vdots\\U_6\\V_6\end{Bmatrix},\qquad \{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\\vdots\\u_6\\v_6\end{Bmatrix}。\tag{16-50}$$

设沿单元下边界123的水平位移为

$$u_{下}=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3。$$

沿单元上边界456的水平位移为

$$u_{上}=N_1u_4+N_2u_5+N_3u_6。$$

其中N_1、N_2、N_3为形函数：

$$N_1=-\frac{x}{l}\left(1-\frac{2x}{l}\right),\qquad N_2=1-\left(\frac{2x}{l}\right)^2,$$

$$N_3=\frac{x}{l}\left(1+\frac{2x}{l}\right).\tag{16-51}$$

因此单元上、下边界的水平位移差为

$$\Delta u=u_{上}-u_{下}=N_1(u_4-u_1)+N_2(u_5-u_2)+N_3(u_6-u_3).$$

同理，单元上、下边界的垂直位移差为

$$\Delta v=v_{上}-v_{下}=N_1(v_4-v_1)+N_2(v_5-v_2)+N_3(v_6-v_3).$$

单元内任一点的应变为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\Delta u}{e}\\ \dfrac{\Delta v}{e}\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}^e,\tag{16-52}$$

$$[B]=\frac{1}{e}[N].\tag{16-53}$$

其中

$$[N]=\begin{bmatrix}-N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}.\tag{16-54}$$

单元内任一点应力为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\tau_{s0}\\ \sigma_{n0}\end{Bmatrix}=[D]\{\varepsilon\}+\{\sigma_0\}.\tag{16-55}$$

其中$\{\sigma_0\}$为初应力，而

$$[D]=\begin{bmatrix}G & 0\\ 0 & E\end{bmatrix}.\tag{16-56}$$

根据应力分析的普遍公式，单元刚度矩阵应按下式计算：

$$[k]^e=\int[B]^T[D][B]d(Vol).$$

令　$d(Vol)=tedx$，而$[B]=\frac{1}{e}[N]$，故

$$[k]^e=\frac{t}{e}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[N]^T[D][N]dx.\tag{16-57}$$

当节理宽度$e\to 0$时，以$[D]=e[\lambda]$代入上式，可知单元刚度矩阵可按下式计算：

$$[k]^e=t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[N]^T[\lambda][N]dx.$$

其中 $$[\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda_s & 0\\ 0 & \lambda_n\end{bmatrix}.$$

λ_s，λ_n为节理的劲度系数。

由于初应力$\{\sigma_0\}$而产生的结点荷载，可按下式计算：

$$\left\{P\right\}^e_{\sigma_0}=-t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}[N]^T\{\sigma_0\}dx. \tag{16-58}$$

上述计算是在局部坐标系中进行的，为了求出整体坐标系中的单元刚度矩阵和结点荷载，尚须进行一次坐标变换，其计算步骤与本章第 1 节类似，此处从略。

二、六结点曲边节理单元

如果在完整岩体部分采用八结点曲边单元，相应地，在节理部分可采用六结点曲线单元，如图 16-11 所示。假定节理单元的宽度是常量 e，节理的上、下边界都是曲线，因而

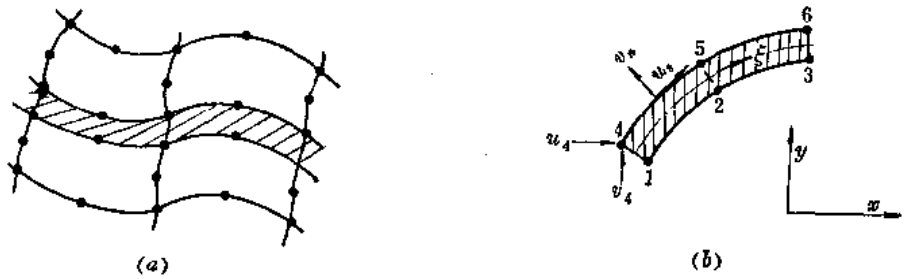


图 16-11 六结点曲边节理单元

须要进行坐标变换。例如，节理下边界的坐标为：

$$x=N_1x_1+N_2x_2+N_3x_3,$$
$$y=N_1y_1+N_2y_2+N_3y_3.$$

其中（x_i，y_i）是结点 i 的坐标，$i=1$，2，3。

节理中心线的坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=N_1\bar{x}_1+N_2\bar{x}_2+N_3\bar{x}_3,\\ y&=N_1\bar{y}_1+N_2\bar{y}_2+N_3\bar{y}_3.\end{aligned}\right\} \tag{16-59}$$

其中 $$\bar{x}_1=\frac{1}{2}(x_1+x_4),\quad \bar{x}_2=\frac{1}{2}(x_2+x_5),\quad \bar{x}_3=\frac{1}{2}(x_3+x_6).$$

等等。形函数N_i为

$$N_1=-\xi\frac{(1-\xi)}{2},\quad N_2=1-\xi^2,\quad N_3=\xi\frac{(1+\xi)}{2}. \tag{16-60}$$

沿节理单元下边的水平位移为

$$u_{\text{下}}=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3.$$

沿节理单元上边的水平位移为

$$u_{\text{上}}=N_1u_4+N_2u_5+N_3u_6.$$

节理单元上、下边界的水平位移差为

$$\Delta u=N_1(u_4-u_1)+N_2(u_5-u_2)+N_3(u_6-u_3).$$

同样，节理单元上、下边界的铅直位移差为

$$\Delta v=N_1(v_4-v_1)+N_2(v_5-v_2)+N_3(v_6-v_3).$$

所以

$$\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e. \tag{16-61}$$

其中 $[N]=\begin{bmatrix}-N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}$.

设沿单元上、下边界切线方向的位移差为 Δu_s，沿单元上、下边界法线方向的位移差为 Δv_n，则 Δu_s、Δv_n 可由 Δu 和 Δv 经坐标转换而求得如下：

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_s\\ \Delta v_n\end{Bmatrix}=[L]\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=[L][N]\{\delta\}^e. \tag{16-62}$$

式中 $[L]=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$,

$$\alpha=\frac{\frac{\partial x}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}},\quad \beta=\frac{\frac{\partial y}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}}.$$

因此，单元内任一点的应变可表示如下：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\Delta u_s/e\\ \Delta v_n/e\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}^e. \tag{16-63}$$

而

$$[B]=\frac{1}{e}[L][N]. \tag{16-64}$$

单元内任一点的应力可表示为

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_s & 0\\ 0 & E_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}+\{\sigma_0\}=[D]\{\varepsilon\}+\{\sigma_0\}. \tag{16-65}$$

式中 G_s、E_n 分别为节理单元在切线方向的剪切模量和法向方向的弹性模量。

根据应力分析普遍公式，单元刚度矩阵可由下式计算：

$$[k]^e=\frac{t}{e}\int_{-1}^{1}[N]^T[L]^T[D][L][N]Sd\xi. \tag{16-66}$$

其中

$$S=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}.$$

$\frac{\partial x}{\partial\xi}$ 和 $\frac{\partial y}{\partial\xi}$ 应根据（16-59）式计算。

由初应力产生的结点荷载由下式计算：

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=-t\int_{-1}^{1}[N]^T[L]^T\{\sigma_0\}Sd\xi. \tag{16-67}$$

（16-66）（16-67）二式可用数值积分法算出，必须指出，由此二式计算的是整体坐标系（x，y）中的单元刚度矩阵和结点荷载，不必再进行坐标转换。

三、六结点曲边夹层单元

在以上两种节理单元计算中，我们只考虑了法向正应力σ_n和剪应力τ_s，而忽略了切向正应力σ_s。通常节理宽度e是很小的，这样处理所带来的误差是极小的，至于岩体中的软弱夹层，如果其宽度很小，例如只有几厘米，也可以采用上述计算模型。如果其宽度较大，在计算中就必须把切向正应力σ_s的影响也考虑在内。现在我们来说明这种单元的计算方法。

如图16-12所示，我们用六结点曲边单元来代表一个夹层单元，沿夹层长度方向每边用三个结点，在夹层厚度方向每边用两个结点，夹层的宽度不必是常量，可以是任意的。我们将通过坐标变换由母单元得到任意形状的子单元，所用形函数在夹层长度方向（ξ方向）是二次的，在夹层厚度方向（η方向）是一次的。

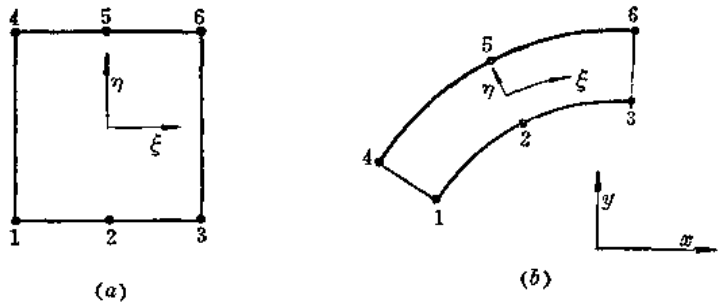


图 16-12 二维夹层单元
(a)母单元，(b)子单元

子单元内任一点的坐标由下式计算：

$$\left.\begin{aligned} x &= N_1x_1+N_2x_2+\cdots+N_6x_6=\sum_1^6 N_ix_i,\\ y &= N_1y_1+N_2y_2+\cdots+N_6y_6=\sum_1^6 N_iy_i. \end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}68)$$

其中x_i，y_i为结点坐标，N_i为如下形函数：

$$N_1=-\frac{\xi(1-\xi)(1-\eta)}{4},\quad N_2=\frac{(1-\xi^2)(1-\eta)}{2},\quad N_3=\frac{\xi(1+\xi)(1-\eta)}{4},$$

$$N_4=-\frac{\xi(1-\xi)(1+\eta)}{4},\quad N_5=\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)}{2},\quad N_6=\frac{\xi(1+\xi)(1+\eta)}{4}. \qquad (16\text{-}69)$$

子单元内任一点的位移由下式计算：

$$u=\sum_1^6 N_iu_i,\quad v=\sum_1^6 N_iv_i. \qquad (16\text{-}70)$$

其中u_i v_i为结点i位移。

子单元内任一点在整体坐标系（x，y）中的应变为

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}^e. \tag{16-71}$$

其中 $[B]=[B_1\ B_2\ \cdots\ B_6]$,

$$[B_i]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}, i=1,2,\cdots 6.$$

如果材料是各向同性的，可直接用上述矩阵$[B]$计算单元刚度矩阵，但岩体中的软弱夹层通常是各向异性的，各向异性的主轴一般是软弱夹层的切线和法线，今以软弱夹层中心线（$\eta=0$）的切线和法线分别作为局部坐标系的x'轴和y'轴，在局部坐标系(x',y')中的应变$\{\varepsilon'\}$可由整体坐标系中的应变$\{\varepsilon\}$经坐标转换而得到如下：

$$\{\varepsilon'\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x'}\\ \varepsilon_{y'}\\ \gamma_{x'y'}\end{Bmatrix}=[L]\{\varepsilon\}=[L][B]\{\delta\}^e=[B']\{\delta\}^e. \tag{16-72}$$

其中
$$[B']=[L][B], \tag{16-73}$$

$$[L]=\begin{bmatrix}\alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta\\ \beta^2 & \alpha^2 & -\alpha\beta\\ -2\alpha\beta & 2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2\end{bmatrix},$$

$$\alpha=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}},\quad \beta=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial\xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}}.$$

在计算α、β时，取$\eta=0$。

在局部坐标系（x',y'）中的应力由下式计算：

$$\{\sigma'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{x'}\\ \sigma_{y'}\\ \tau_{x'y'}\end{Bmatrix}=[D']\{\varepsilon'\}+\{\sigma_0'\}. \tag{16-74}$$

其中$[D']$为局部坐标系中的弹性矩阵，见（2-25）、（2-26）式，工程上感兴趣的是夹层的法线和切线方向的应力，即局部坐标系的应力$\{\sigma'\}$，所以输出成果时也打印$\{\sigma'\}$。

根据虚功原理，单元刚度矩阵可按下式计算：

$$[k]^e=t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B']^T[D'][B']|J|\,d\xi\,d\eta. \tag{16-75}$$

其中
$$|J|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial x}{\partial\eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{vmatrix}.$$

注意 $|J|$ 是行列式，不是矩阵。

初应力$\{\sigma_0'\}$产生的结点荷载由下式计算：

$$\{P\}^e_{\sigma_0'}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B']^T\{\sigma_0'\}\,|J|\,d\xi d\eta. \qquad (16\text{-}76)$$

由上述公式计算的单元刚度矩阵和结点荷载都属于整体坐标系（x,y），在建立平衡方程组时不必再进行坐标转换。

§16-7 三维节理单元

在这一节，我们给出几种用于岩石力学空间问题的三维节理单元。

一、六结点三维节理单元

如果在完整岩石部分采用四面体单元，在节理部分可采用六结点三维节理单元，如图16-13所示。每个单元共有六个结点，单元厚度为 e。单元结点力$\{F\}^e$和结点位移$\{\delta\}^e$分别为

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}U_1\\V_1\\W_1\\\vdots\\U_6\\V_6\\W_6\end{Bmatrix},\quad \{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}u_1\\v_1\\w_1\\\vdots\\u_6\\v_6\\w_6\end{Bmatrix}.$$

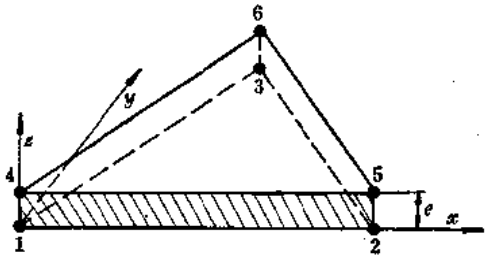


图 16-13 六结点三维节理单元

单元下表面 123 上任一点的水平位移可表示为

$$u_{\text{下}}=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3;$$

单元上表面 456 上任一点的水平位移可表示为

$$u_{\text{上}}=N_1u_4+N_2u_5+N_3u_6.$$

因此，在任一点（x，y）单元上下表面在 x 方向的水平位移差为

$$\Delta u=N_1(u_4-u_1)+N_2(u_5-u_2)+N_3(u_6-u_3).$$

其中N_1、N_2、N_3是如下形函数：

$$N_1=\frac{a_1+b_1x+c_1y}{2A},\quad N_2=\frac{a_2+b_2x+c_2y}{2A},\quad N_3=\frac{a_3+b_3x+c_3y}{2A}. \qquad (16\text{-}77)$$

式中A是三角形 123 的面积，系数a_i、b_i、c_i，$i=1$，2，3可按（2-5）式计算。

同理，单元上下表面任一点在 y 方向的水平位移差为

$$\Delta v=N_1(v_4-v_1)+N_2(v_5-v_2)+N_3(v_6-v_3).$$

单元上下表面在 z 方向的垂直位移差为

$$\Delta w=N_1(w_4-w_1)+N_2(w_5-w_2)+N_3(w_6-w_3).$$

由于单元厚度 e 是很小的，单元内任一点的应变可由上下表面位移差计算如下：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\gamma_{xz}\\ \gamma_{yz}\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}=\frac{1}{e}\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{Bmatrix}=[B]\{\delta\}^e. \tag{16-78}$$

其中 $[B]=\frac{1}{e}[N]$，

$$[N]=\begin{bmatrix}-N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0\\ 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & -N_3 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3\end{bmatrix}. \tag{16-79}$$

单元内任一点（ x， y ）的应力可表示为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}+\{\sigma_0\}. \tag{16-80}$$

式中

$$[D]=\begin{bmatrix}G & 0 & 0\\ 0 & G & 0\\ 0 & 0 & E\end{bmatrix}. \tag{16-81}$$

其中 G为剪切模量，E为弹性模量，$\{\sigma_0\}$为初应力。

根据虚功原理，单元刚度矩阵可计算如下：

$$[k]^e=\frac{1}{e}\iint[N]^T[D][N]dxdy. \tag{16-82}$$

初应力$\{\sigma_0\}$所产生的单元结点荷载由下式计算：

$$\left\{P\right\}^e_{\sigma_0}=-\iint[N]^T\{\sigma_0\}dxdy. \tag{16-83}$$

根据形函数N_i的特点，存在下列关系：

$$\iint N_i dxdy=\frac{A}{3},$$

$$\iint N_iN_j dxdy=\begin{cases}\dfrac{A}{6}, & \text{当 } i=j,\\ \dfrac{A}{12}, & \text{当 } i\neq j.\end{cases}$$

A为三角形 123 的面积，利用上述关系，不难求出$[k]^e$和$\left\{P\right\}^e_{\sigma_0}$中的各元素。

如果节理厚度 $e\to 0$，可假定单元内应力分量与位移差成正比，即

$$\tau_{xz}=\lambda_s\Delta v+\tau_{xz0},$$
$$\tau_{yz}=\lambda_s\Delta v+\tau_{yz0},$$
$$\sigma_n=\lambda_n\Delta w+\sigma_{n0}.$$

即

$$\{\sigma\}=[\lambda]\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{Bmatrix}+\{\sigma_0\}. \tag{16-84}$$

其中
$$[\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda_s & 0 & 0\\ 0 & \lambda_s & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{bmatrix}. \tag{16-85}$$

在（16-92）式中，把$[D]$换成$e[\lambda]$，即可得到当节理厚度 $e\to 0$ 时的有关公式如下：

$$[k]^e=\iint[N]^T[\lambda][N]dxdy. \tag{16-86}$$

上述计算是在局部坐标系中进行的，在建立结点平衡方程组时，尚须进行一次坐标转换。

二、三维曲面节理单元

如在完整岩石部分采用20结点等参数曲面单元，在节理部分，可相应地采用16结点曲面节理单元，如图16-14所示。假定节理单元厚度 e 是常量，节理的上、下表面都是曲面，要进行坐标变换，例如下表面的坐标为

$$x=N_1x_1+N_2x_2+\cdots+N_8x_8;$$
$$y=N_1y_1+N_2y_2+\cdots+N_8y_8;$$
$$z=N_1z_1+N_2z_2+\cdots+N_8z_8.$$

其中（x_i，y_i，z_i）为结点 i 的坐标，N_i 为如下形函数：

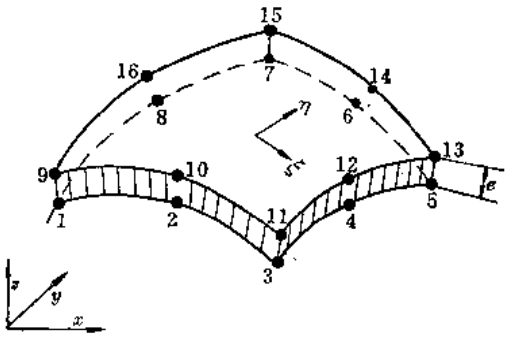


图 16-14　三维曲面节理单元

角点：
$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1),\quad i=1,\ 3,\ 5,\ 7.$$

中点：
$$N_i=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0),\quad i=2,\ 6.$$
$$N_i=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0),\quad i=4,\ 8.$$
$$\xi_0=\xi_i\xi,\quad \eta_0=\eta_i\eta.$$

节理单元的中面也是一个曲面，其坐标由下式计算：

$$x=\sum_1^8 N_i\bar{x}_i,\quad y=\sum_1^8 N_i\bar{y}_i,\quad z=\sum_1^8 N_i\bar{z}_i. \tag{16-87}$$

其中 $\bar{x}_i=\frac{1}{2}(x_i+x_{i+8})$，$\bar{y}_i=\frac{1}{2}(y_i+y_{i+8})$，$\bar{z}_i=\frac{1}{2}(z_i+z_{i+8})$。

节理单元上、下表面在 x、y、z 三个方向的位移差可表为

$$\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{Bmatrix}=[N]\{\delta\}^e, \tag{16-88}$$

$$[N]=\begin{bmatrix}-N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_8 & 0 & 0\\ 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0\\ 0 & 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_8\end{bmatrix}.$$

现在，我们在单元内任一点(ξ_0，η_0)建立一个局部坐标系(x'，y'，z')，并要求z'轴垂直于单元中面。在(ξ_0，η_0)点单元中面上有两条曲线，一条是$\xi=\xi_0$，另一条是$\eta=\eta_0$。作单元中面的两个切向量$\vec{d\xi}$和$\vec{d\eta}$，其中$\vec{d\xi}$切于曲线$\eta=\eta_0$，$\vec{d\eta}$切于曲线$\xi=\xi_0$。由此可知

$$\vec{d\xi}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)d\xi,$$

$$\vec{d\eta}=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)d\eta.$$

式中$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$为x、y、z方向的单位向量，今作z'垂直于$\vec{d\xi}$和$\vec{d\eta}$，即正交于单元中面。由矢量代数可知

$$z'=\vec{d\xi}\times\vec{d\eta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{vmatrix}.$$

由此可求出z'的方向余弦l_3，m_3，n_3。其他两个坐标轴y'和x'是切于单元中面的，用如下方法选取，令

$$y'=z'\times x=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_3 & m_3 & n_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

由此可求出y'轴的方向余弦l_2，m_2，n_2。如z'轴与x轴平行，可改用$y'=z'\times y$，应写一子程序校核z'是否平行于x轴。最后，作x'正交于y'和z'，即

$$x'=y'\times z'.$$

由此可求出x'轴的方向余弦l_1、m_1、n_1。于是得到局部坐标系(x'、y'、z')的方向余弦矩阵如下：

$$[L]=\begin{bmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{bmatrix}. \qquad (16\text{-}89)$$

节理单元中任一点(ξ，η)，单元上下表面在x'、y'、z'方向的位移差可由(16-88)式经坐标转换而得到：

$$\begin{Bmatrix}\Delta u'\\ \Delta v'\\ \Delta w'\end{Bmatrix}=[L]\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\\ \Delta w\end{Bmatrix}=[L][N]\{\delta\}^e. \qquad (16\text{-}90)$$

由于节理单元的厚度e很小，在局部坐标系中任一点的应变可表示如下：

$$\{\varepsilon'\}=\begin{Bmatrix}\gamma_{x'z'}\\ \gamma_{y'z'}\\ \varepsilon_{z'}\end{Bmatrix}=\frac{1}{e}\begin{Bmatrix}\Delta u'\\ \Delta v'\\ \Delta w'\end{Bmatrix}=[B']\{\delta\}^e, \qquad (16\text{-}91)$$

$$[B']=\frac{1}{e}[L][N]. \tag{16-92}$$

在局部坐标系中，任一点的应力为

$$\{\sigma'\}=\begin{Bmatrix}\tau_{x'y'}\\ \tau_{y'z'}\\ \sigma_{z'}\end{Bmatrix}=[D']\{\varepsilon'\}+\{\sigma_0'\}, \tag{16-93}$$

其中

$$[D']=\begin{bmatrix}G_s & 0 & 0\\ 0 & G_s & 0\\ 0 & 0 & E_n\end{bmatrix}. \tag{16-94}$$

G_s、E_n分别为节理单元在切线方向的剪切模量和法线方向的弹性模量。

单元刚度矩阵可由下式计算：

$$[k]^e=\frac{1}{e}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T[L]^T[D'][L][N]|J|d\xi d\eta. \tag{16-95}$$

其中

$$|J|=\left\{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

初应力产生的结点荷载为

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T[L]^T\{\sigma_0'\}|J|d\xi d\eta. \tag{16-96}$$

这样求出的单元刚度矩阵和结点荷载属于整体坐标系统。

三、三维曲面夹层单元

当岩体软弱夹层厚度 e 很小时，仍可用上述两种单元计算。如软弱夹层厚度较大，就必须考虑夹层中面切线方向的两个正应力。下面给出这种单元的计算方法。

如图16-15所示，用16结点曲边单元代表一个夹层单元，在夹层平面内，每边用三个

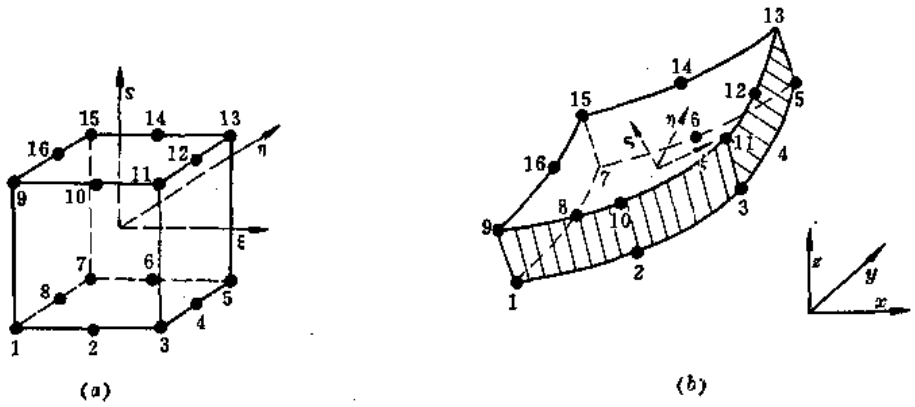


图 16-15 三维曲面夹层单元

（a）母单元，（b）子单元

结点，用二次形函数，在夹层厚度方向，每边用两个结点，用一次形函数。夹层的厚度可以是任意的。通过坐标变换，由母单元得到任意形状的夹层单元。

夹层单元内任一点的坐标由下式计算：

$$x=\sum_{i}^{16}N_ix_i,\quad y=\sum_{i}^{16}N_iy_i,\quad z=\sum_{i}^{16}N_iZ_i. \tag{16-97}$$

其中（x_i、y_i、z_i）为结点 i 坐标，N_i为如下形函数：

角点：
$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0-1),$$

中点：
$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0),\quad i=2,6,10,14.$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_0)(1+\zeta_0),\quad i=4,8,12,16.$$

$$\xi_0=\xi_i\xi,\quad \eta_0=\eta_i\eta,\quad \zeta_0=\zeta_i\zeta.$$

单元内任一点位移由下式给出：

$$u=\sum_{i}^{16}N_iu_i,\quad v=\sum_{i}^{16}N_iv_i,\quad w=\sum_{i}^{16}N_iw_i. \tag{16-98}$$

其中 u_i，v_i，w_i为结点 i 在整体坐标系中的位移，由上式分别对 x、y、z 求微商，可得到下列矩阵：

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}=[J]^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi}\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta}\\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta}\end{bmatrix}. \tag{16-99}$$

式中[J]为由（16-97）式求出的雅可比矩阵：

$$[J]=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}.$$

由于岩体中软弱夹层是各向异性的，各向异性主轴一般与软弱夹层的法线和切线相符。今在（16-97）式中令$\zeta=0$得到夹层中面，以夹层中面的法线作为局部坐标的z'轴，并把局部坐标的x'轴和y'轴放在夹层中面的切平面内，采用推导（16-89）式相同方法，求得局部坐标系（x'，y'，z'）的方向余弦矩阵[L]，然后对（16-99）式进行变换，得到

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'}\\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'}\\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'}\end{bmatrix}=[L]^T\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}[L]. \tag{16-100}$$

由此可得到局部坐标系（x'，y'，z'）中的应变：

$$\{\varepsilon'\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_{x'}\\ \varepsilon_{y'}\\ \varepsilon_{z'}\\ \gamma_{x'y'}\\ \gamma_{y'z'}\\ \gamma_{z'x'}\end{Bmatrix}=[B']\{\delta\}^e。 \tag{16-101}$$

注意在上式中，$\{\varepsilon'\}$是局部坐标系中的应变，而$\{\delta\}^e$是整体坐标系中的结点位移。所以通过上式，我们用整体坐标系中的结点位移表示了局部坐标系中的应变。

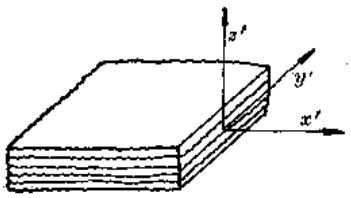


图 16-16　夹层局部坐标系

假定夹层材料是横观各向同性的，在局部坐标系中的应变由下式计算（参阅图 16-16）：

$$\varepsilon_{x'}=\frac{\sigma_{x'}}{E_1}-\mu_1\frac{\sigma_{y'}}{E_1}-\mu_2\frac{\sigma_{z'}}{E_2},$$

$$\varepsilon_{y'}=-\mu_1\frac{\sigma_{x'}}{E_1}+\frac{\sigma_{y'}}{E_1}-\mu_2\frac{\sigma_{z'}}{E_2},$$

$$\varepsilon_{z'}=-\mu_2\frac{\sigma_{x'}}{E_2}-\mu_2\frac{\sigma_{y'}}{E_2}+\frac{\sigma_{z'}}{E_2},$$

$$\gamma_{x'y'}=\frac{2(1+\mu_1)}{E_1}\tau_{x'y'},$$

$$\gamma_{y'z'}=\frac{\tau_{y'z'}}{G_2},$$

$$\gamma_{z'x'}=\frac{\tau_{z'x'}}{G_2}。$$

于是在局部坐标系中的应力-应变关系可表示为：

$$\{\sigma'\}=[D']\{\varepsilon'\}+\{\sigma'_0\}。$$

其中

$$[D']=\frac{E_2}{(1+\mu_1)p}\times\begin{vmatrix} n(1-\mu_2 n) & n(\mu_1+\mu_2 n) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0 & 0 & 0\\ n(\mu_1+\mu_2 n) & n(1-n\mu_2^2) & n\mu_2(1+\mu_1) & 0 & 0 & 0\\ n\mu_2(1+\mu_1) & n\mu_2(1+\mu_1) & 1-\mu_1^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{np}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\mu_1)p & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\mu_1)p \end{vmatrix} \tag{16-102}$$

$$n=\frac{E_1}{E_2},\quad m=\frac{G_2}{E_2},\quad p=1-\mu_1-2n\mu_2^2.$$

单元刚度矩阵由下式计算

$$[k]^e=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B']^T[D'][B]|J|d\xi d\eta d\zeta. \tag{16-103}$$

初应力产生的结点荷载由下式计算：

$$\{P\}^e_{\sigma_0}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B']^T\{\sigma_0'\}|J|d\xi d\eta d\zeta. \tag{16-104}$$

其中$|J|$是雅可比矩阵$[J]$的行列式，而$[J]$是由（16-97）式计算的。上述单元刚度矩阵和结点荷载都属于整体坐标系。

最后，必须指出，本章所述各种节理单元，不但可用以代表岩体节理，也可用以代表混凝土坝的接缝及坝体与基础的接触面。

第十七章　土壤力学问题

影响土体应力和变形的因素是很多的，例如土体结构、孔隙、密度、应力历史、荷载特征、孔隙水及时间效应等等都有影响。这些因素使得土体在受力后的行为非常复杂，而且往往是非线性的。在这方面，理论方法是无能为力的。但采用有限单元法以后，许多实际问题均迎刃而解。

应用有限单元法，在土壤力学方面可以解决下列问题：

1）土坡、挖方、土坝、土堤及河岸的变形和稳定分析；

2）基础承载能力与沉降计算；

3）土体与结构的相互作用。

在求解土力学问题时，采用的单元还是通常的平面和空间单元，关键在于正确地描述土体的应力-应变关系。它既要符合实验和观测成果，又要适合用于有限单元计算。

§17-1　用主应力表示的土体应力-应变关系

土体的应力-应变关系非常复杂，它具有非线性、非弹性、压硬性、剪胀性等等特性，并受到孔隙水及时间效应的影响。在这一章，将考虑非线性、非弹性、压硬性及孔隙水的影响，描述土体的应力-应变关系。至于时间效应，将留到第十八章去分析。

对于通常的砂土和粘土，其应力-应变关系可用双曲线表示如下[106]：

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon}{a+b\varepsilon}=\frac{1}{\frac{a}{\varepsilon}+b}. \tag{17-1}$$

式中　σ_1为大主应力，σ_3为小主应力，ε为轴向应变，a和b是常数。

在上式右端令$\varepsilon\to\infty$，得到

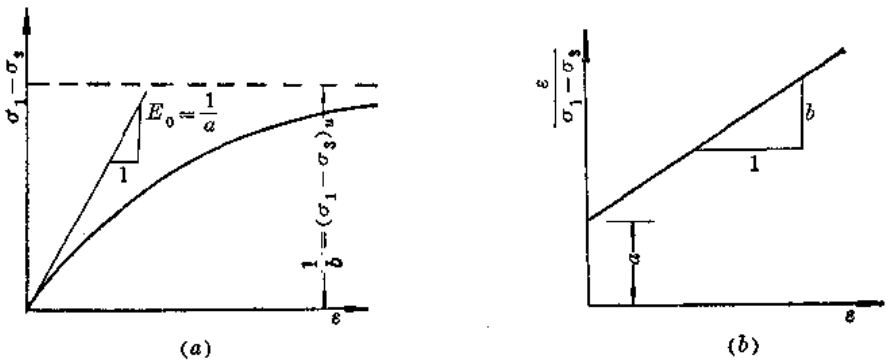


图 17-1　用大小主应力表示的土体应力-应变关系

$$\frac{1}{b}=(\sigma_1-\sigma_3)_u. \tag{17-2}$$

其中$(\sigma_1-\sigma_3)_u$为应力差的渐近值，此值往往略大于土的抗压强度。这是可以理解的，因为当应变是有限值时，双曲线总是位于渐近线的下面。令抗压强度与应力差渐近值的比值为R，则

$$(\sigma_1-\sigma_3)_f=R(\sigma_1-\sigma_3)_u. \tag{17-3}$$

式中$(\sigma_1-\sigma_3)_f$为土体抗压强度，R称为破坏比，其数值常小于1。通常破坏比R的数值在0.75到1.00之间，并且实际上与侧限压力无关。由（17-2）、（17-3）二式，得到常数b如下：

$$b=\frac{R}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}. \tag{17-4}$$

由式(17-1)求导数，得到土体的切线模量：

$$E_t=\frac{d(\sigma_1-\sigma_3)}{d\varepsilon}=\frac{a}{(a+b\varepsilon)^2}. \tag{17-5}$$

在上式中令$\varepsilon=0$，得到

$$E_0=\frac{1}{a}. \tag{17-6}$$

E_0为初始切线模量。可见常数a等于初始切线模量的倒数。

对式（17-1）进行变换，得到

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_1-\sigma_3}=a+b\varepsilon. \tag{17-7}$$

如图17-1(b)所示，以$\frac{\varepsilon}{(\sigma_1-\sigma_3)}$为纵坐标，$\varepsilon$为横坐标，上式将是一条直线，$a$和$b$分别是这条直线的截距和斜率。用这种方式整理试验资料，可以较好地确定参数a和b。

试验资料表明，土体的切线模量随着侧限压力而改变。文献[107]建议用下式表示初始切线模量与侧限压力之间的关系：

$$E_0=K p_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^n. \tag{17-8}$$

式中E_0为初始切线模量，σ_3为小主应力，K和n是参数，p_a是大气压力，引入p_a是为了使$\frac{\sigma_3}{p_a}$成为无量网数。水电部第五工程局设计队同志建议用下式计算初始切线模量：

$$E_0=K p_a\left(\frac{\sigma_3-\sigma_t}{p_a}\right)^n. \tag{17-9}$$

式中σ_t为土体抗拉强度，可用下式计算

$$\sigma_t=-2c\tan\left(45^\circ-\frac{\phi}{2}\right). \tag{17-10}$$

其中c为土体凝聚力，ϕ为内摩擦角。对式（17-9）两边取对数，可知此式在双对数纸上是一条直线，利用这个关系，可以根据试验资料决定参数K和n。

根据摩尔-库仑破坏准则，抗压强度可由下式表示：

$$(\sigma_1-\sigma_3)_f=\frac{2c\cos\phi+2\sigma_3\sin\phi}{1-\sin\phi}. \tag{17-11}$$

把 a 和 b 的表达式代入式（17-5），得到切线模量E_t如下：

$$E_t=\frac{\dfrac{1}{E_0}}{\left[\dfrac{1}{E_0}+\dfrac{Re}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]^2}. \tag{17-12}$$

虽然由上式可以计算切线模量，但式中既包含了应力差，又包含了应变。从式中消去应变，应用于有限单元计算时更为方便。

把式（17-1）改写为

$$\varepsilon=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)a}{1-b(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{E_0\left[1-\dfrac{R(\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{E_0(1-Rs)}. \tag{a}$$

式中

$$s=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}. \tag{17-13}$$

s 称为应力度，把式（a）代入式（17-12），就可消去式中的应变 ε，得到

$$E_t=(1-Rs)^2E_0. \tag{17-14}$$

如果把E_0、s、$(\sigma_1-\sigma_3)_f$的表达式代入上式，则得到切线模量表达式如下：

$$E_t=\left[1-\frac{R(1-\sin\phi)(\sigma_1-\sigma_3)}{2c\cos\phi+2\sigma_3\sin\phi}\right]^2 K p_a\left(\frac{\sigma_3-\sigma_t}{p_a}\right)^n. \tag{17-15}$$

这个式子可以很方便地用于土体的有限单元分析。式中共包含了五个参数，即 c，ϕ，R，K，n。这些参数应通过试验求得。

在图17-2中表示了石英砂在侧限压力 $\sigma_3=5kg/cm^2$ 时的应力-应变关系，由图可见试验资料与双曲线关系式(17-7)符合得相当好。由这组资料可求出对应于 $\sigma_3=5kg/cm^2$ 的参数 a 和 b，从而可算出E_0和$(\sigma_1-\sigma_3)_u$。对于每种侧限压力的试验资料，都可求出相应的一组参数。图17-3中表示了在不同侧限压力作用

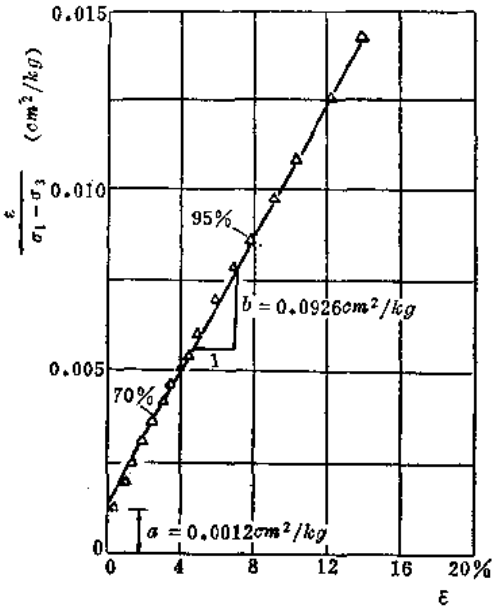


图 17-2　石英砂应力-应变关系
（$\sigma_3=5kg/cm^2$）

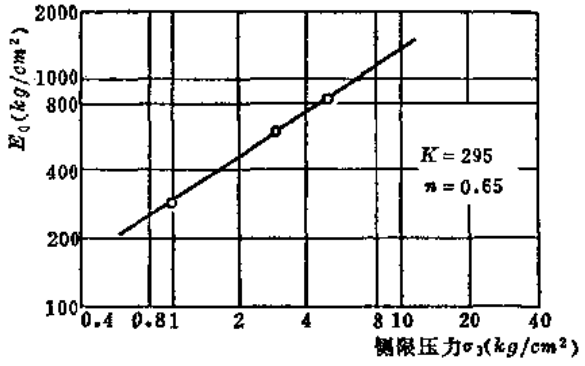


图 17-3　石英砂的初始切线模量
E_0与侧限压力σ_3的关系

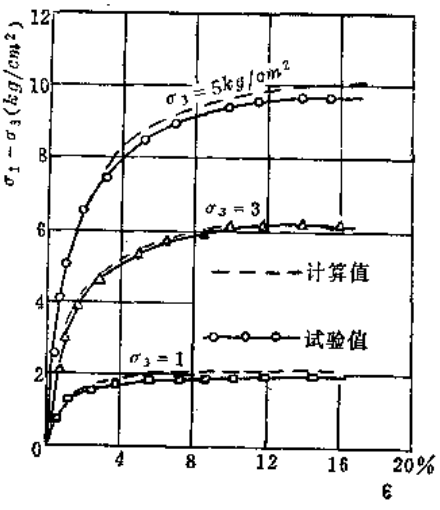


图 17-4　石英砂计算的和实验的应力-应变关系

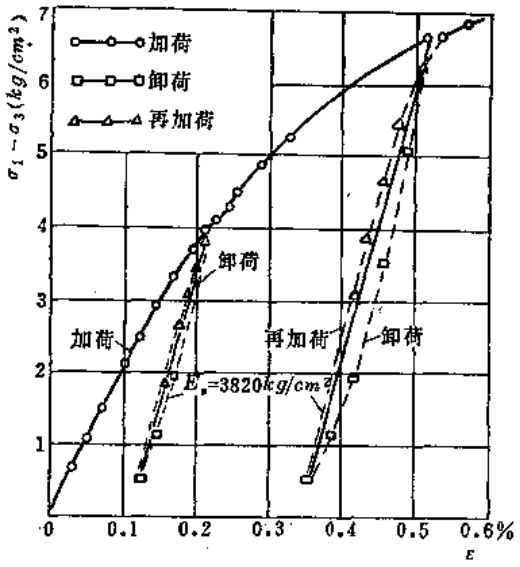


图 17-5　砂子卸荷与再加荷应力-应变关系
（$\sigma_3=3kg/cm^2$）

时石英砂的初始切线模量E_0，由此图可求出参数K和n。在图17-4中对比了试验求出的应力-应变关系和把有关参数代入式（17-1）计算的应力-应变关系，由图可见计算曲线与试验曲线符合得相当好。为了整体符合得好，文献[107]建议，在取a、b值时，使直线通过$s=70\%$和$s=95\%$的点子，如图17-2。

在上面，给出了加荷时土体的应力-应变关系。实际工程中还可能发生卸荷以及卸荷后再加荷的情况。试验资料表明，卸荷后土体不可能完全恢复到加荷前的应变状态，只能部分地恢复原来加荷时所产生的应变。土体在卸荷-再加荷的循环中，略有回滞环，但很接近于线性和弹性，而且如图17-5所示，两次卸荷-再加荷循环中的切线模量是很接近的，尽管两次循环的应力水平是不同的。可以认为，土体在卸荷-再加荷过程中，其应力-应变关系可足够准确地用一个统一的切线模量E_u表示。根据试验资料，卸荷-再加荷的切线模量与应力水平关系不大，而只与侧限压力有关，可表示为

$$E_u=K_u p_a\left(\frac{\sigma_3-\sigma_t}{p_a}\right)^n。\qquad(17\text{-}16)$$

式中　E_u——卸荷及再加荷的切线模量，K_u和n为参数。实际上，此处的n值可采用初始切线模量算式（17-8）中的n值。但此处的参数K_u一般比初始切线模量E_0的参数k为大。例如对于前述石英砂，$K=295$，$K_u=1090$，$n=0.65$。

在计算土体的应力和变形时，除了切线模量E外，还要用到泊松比。根据试验资料，土体的侧向变形和纵向变形之间的关系也可用双曲线表示如下[108]：

$$\varepsilon_a=\frac{\varepsilon_r}{\mu_0+m\varepsilon_r},\qquad(17\text{-}17)$$

或

$$\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_a}=\mu_0+m\varepsilon_r。\qquad(17\text{-}18)$$

式中 ε_a——轴向应变，

ε_r——径向应变（三轴试验），

μ_0——相应于零应变时的初始泊松比，

m——参数。

由（17-18）式，可得

$$\varepsilon_r=\frac{\mu_0\varepsilon_a}{1-m\varepsilon_a}。\tag{17-19}$$

根据定义，泊松比可由下式求出

$$\mu_t=\frac{d\varepsilon_r}{d\varepsilon_a}。\tag{17-20}$$

把式（17-19）代入上式，得到

$$\mu_t=\frac{\mu_0}{(1-m\varepsilon_a)^2}。\tag{17-21}$$

试验资料表明，初始泊松比μ_0随侧限压力σ_3的增加而减小，并可用下式表示：

$$\mu_0=g-h\log\left(\frac{\sigma_3-\sigma_t}{p_a}\right)。\tag{17-22}$$

式中g、h是取决于试验资料的参数，σ_3是侧限压力，σ_t是抗拉强度。把上式代入式（17-21），得到泊松比如下：

$$\mu_t=\frac{g-h\log\left(\frac{\sigma_3-\sigma_t}{p_a}\right)}{(1-m\varepsilon_a)^2}。\tag{17-23}$$

式中ε_a、σ_t分别按式（a）和（17-10）计算。为了计算泊松比，需要三个参数g，h，m，这些应由试验资料确定。

§17-2 用八面体应力表示的土体应力-应变关系

在上节中，只考虑了大小主应力σ_1和σ_3对应力-应变关系的影响，实际上，中主应力σ_2对土体的应力-应变关系也是有影响的。为了考虑这个因素，南京水利科学研究所沈珠江同志等曾用八面体应力表示土体的应力-应变关系。

八面体压应力为

$$\sigma=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)。\tag{17-24}$$

八面体剪应力为

$$\tau=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\tau_{xy}^2+6\tau_{yz}^2+6\tau_{zx}^2}。\tag{17-25}$$

八面体正应变为

$$\varepsilon=\frac{1}{3}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)。\tag{17-26}$$

八面体剪应变为

$$\gamma=\frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+6\gamma_{xy}^2+6\gamma_{yz}^2+6\gamma_{zx}^2}\,. \qquad (17\text{-}27)$$

对于理想弹性体，体积变形正比于八面体压应力：

$$3\varepsilon=\frac{\sigma}{K}. \qquad (a)$$

式中K为体变模量。剪切变形正比于八面体剪应力：

$$\gamma=\frac{\tau}{G}. \qquad (b)$$

式中G为剪切模量。K和G可用弹性模量E和泊松比μ表示如下：

$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)},\quad G=\frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (c)$$

在有孔隙水时，式（a）中的八面体压应力σ应代以有效应力$\sigma-p$，即

$$3\varepsilon=\frac{\sigma-p}{K}. \qquad (d)$$

式中p为孔隙水压力。如果在计算土体应力时，已把$-\frac{\partial p}{\partial x}$，$-\frac{\partial p}{\partial y}$，$-\frac{\partial p}{\partial z}$作为体积力列入平衡方程，则算得的应力已是有效应力，不必再减去p。

如前所述，实际土体远非理想弹性体，其应力-应变关系十分复杂。试验资料表明，土体剪切变形的非线性程度远较体积变形为强烈，因此两者有必要分开计算。

参照上节，土体的剪应力-剪应变关系可用双曲线表示如下

$$\tau=\frac{\gamma}{a+b\gamma}. \qquad (17\text{-}28)$$

其中τ为八面体剪应力，γ为八面体剪应变。a和b是由试验资料决定的参数。在物理意义上，a是初始剪切模量G_0的倒数，b是八面体剪应力渐近值τ_u的倒数，即

$$a=1/G_0,\quad b=1/\tau_u. \qquad (17\text{-}29)$$

式（17-28）可改写成如下形式

$$\frac{\gamma}{\tau}=a+b\gamma. \qquad (17\text{-}30)$$

以γ/τ为纵坐标，γ为横坐标，上式将是一条直线，a和b分别是此直线的截距和斜率。

八面体剪应力的渐近值τ_u往往略大于抗剪强度τ_f，二者关系可用下式表示

$$\tau_f=R\tau_u. \qquad (17\text{-}31)$$

式中R称为破坏比，其值多在0.75～1.00之间。将式(17-29)、(17-31)代入式(17-28)，得到

$$\tau=\frac{\gamma}{\frac{1}{G_0}+\frac{R\gamma}{\tau_f}}. \qquad (17\text{-}32)$$

初始剪切模量G_0与八面体压应力有关，可用下式表示：

$$G_0=K\,p_a\left(\frac{\sigma-p}{p_a}\right)^n. \qquad (17\text{-}33)$$

式中K和n都是系数，由试验资料决定。根据库仑定理，抗剪强度τ_f可表示如下：

$$\tau_f=c_0+c_1(\sigma-p)。 \tag{17-34}$$

式中c_0和c_1是由材料试验决定的参数。

对式（17-32）求微商，得到切线剪切模量的表达式：

$$G_t=\frac{d\tau}{d\gamma}=\frac{\dfrac{1}{G_0}}{\left[\dfrac{1}{G_0}+\dfrac{R\gamma}{\tau_f}\right]^2}。 \tag{17-35}$$

从上式中消去剪应变γ，在实用上更为方便。把式（17-32）改写为

$$\gamma=\frac{\tau}{G_0(1-R\tau/\tau_f)}。$$

代入式（17-35），即消去剪应变γ，得到

$$G_t=(1-Rs)^2G_0。 \tag{17-36}$$

其中

$$s=\tau/\tau_f。 \tag{17-37}$$

s可称为应力度，它是八面体剪应力与抗剪强度的比值，代表抗剪强度发挥的程度。由式（17-36）可知，若$R=1$，当应力度s达0.90时，剪切模量即降低为初始值G_0的1％。

把$G_t=\cdots$的表达式代入式（17-36），得到在任何应力情况下切线剪切模量表达

由此求得

$$E=\frac{9MG_t}{3M+G_t},\quad \mu=\frac{3M-2G_t}{2(3M+G_t)}. \tag{17-42}$$

在计算弹性矩阵时，应按上式计算E、μ。例如，平面应变问题的弹性矩阵（2-22）式，根据上式，应改写为

$$[D]=\begin{bmatrix} d_1 & d_2 & 0 \\ d_2 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}.$$

其中 $d_1=M+\frac{4G_t}{3}$，$d_2=M-\frac{2}{3}G_t$，$d_3=G_t$。

一般的土体应力-应变关系是由三轴试验求得的。在三轴试验中，因$\sigma_2=\sigma_3$，八面体剪应力τ和剪应变γ可由下式求得：

$$\tau=\frac{\sqrt{2}}{3}(\sigma_1-\sigma_3),\quad \gamma=\frac{2\sqrt{2}}{3}(\varepsilon_1-\varepsilon_3).$$

式中σ_1、σ_3分别是大、小主应力，ε_1、ε_3分别是大小主应变。图17-6是南京水利科学研究所测定的某海堤淤泥三轴试验结果。由图可见，除了开始几点有些不规则跳动外，$\frac{\gamma}{\tau}$与γ基本上是一条直线。

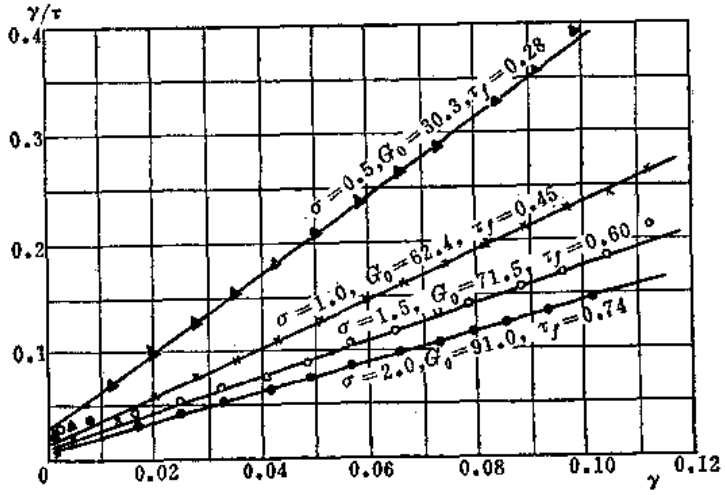


图 17-6 淤泥三轴试验结果

§17-3 用样条函数表示的应力-应变关系

在较多的情况下，用双曲线函数表示土壤八面体剪应力和剪应变关系可获得满意的结果。但对于某些土料，如图17-7所示致密石英砂，其$\tau-\gamma$曲线在越过一个峰值后，即趋下降，显然这种剪应力-剪应变关系是不能用双曲线表示的。对于比较复杂的$\tau-\gamma$关系，可以用样条函数表示。

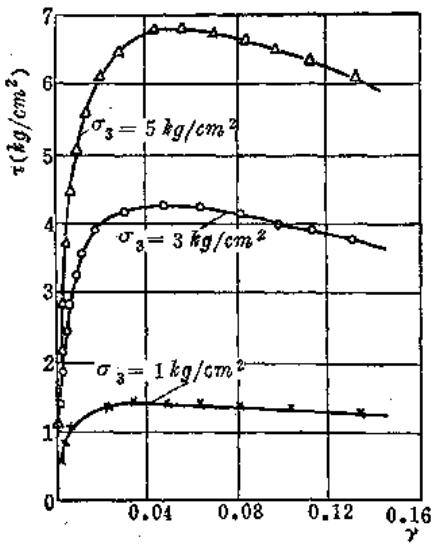


图 17-7 致密石英砂三轴试验结果

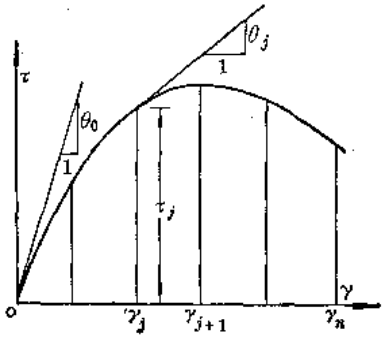


图 17-8

如图17-8所示，将区间[o，γ_n]划分为 n 个子区间，在每个子区间 $[\gamma_j, \gamma_{j+1}]$ 上构造三次样条函数如下，当 $\gamma_j \leqslant \gamma \leqslant \gamma_{j+1}$ 时：

$$\tau(\gamma)=\theta_j\frac{(\gamma_{j+1}-\gamma)^2(\gamma-\gamma_j)}{h_j^2}-\theta_{j+1}\frac{(\gamma-\gamma_j)^2(\gamma_{j+1}-\gamma)}{h_j^2}$$
$$+\tau_j\frac{(\gamma_{j+1}-\gamma)^2[2(\gamma-\gamma_j)+h_j]}{h_j^3}+\tau_{j+1}\frac{(\gamma-\gamma_j)^2[2(\gamma_{j+1}-\gamma)+h_j]}{h_j^3}. \qquad (17\text{-}43)$$

式中 $h_j=\gamma_{j+1}-\gamma_j$，$\theta_j$是$\tau(\gamma)$在$\gamma_j$处的一阶导数。上式显然满足下列条件：

$$\tau(\gamma_j)=\tau_j,\ \tau(\gamma_{j+1})=\tau_{j+1},\ \tau'(\gamma_j)=\theta_j,\ \tau'(\gamma_{j+1})=\theta_{j+1}. \qquad (a)$$

根据试验资料，我们事先已知τ_j的数值（$j=1, 2, \cdots n$），但并不知道导数θ_j的数值。因此必须求出各结点上的一阶导数θ_j，才能由（17-21）式得到样条函数$\tau(\gamma)$。为了求出θ_j，可利用函数$\tau(\gamma)$在结点γ_j上具有连续二阶导数的条件。由（17-21）式对$\tau(\gamma)$求二阶导数，得

$$\tau''(\gamma)=h_j\left[\frac{2}{h_j^2}-\frac{6}{h_j^3}(\gamma_{j+1}-\gamma)\right]\theta_j-h_j\left[\frac{2}{h_j^2}-\frac{6}{h_j^3}(\gamma-\gamma_j)\right]\theta_{j+1}$$
$$+\left[\frac{6}{h_j^2}-\frac{12}{h_j^3}(\gamma_{j+1}-\gamma)\right]\tau_j+\left[\frac{6}{h_j^2}-\frac{12}{h_j^3}(\gamma-\gamma_j)\right]\tau_{j+1}. \qquad (b)$$

在结点 j 和 $j+1$ 上

$$\left.\begin{aligned}\tau''(\gamma_j)&=-\frac{6}{h_j^2}\tau_j+\frac{6}{h_j^2}\tau_{j+1}-\frac{4}{h_j}\theta_j-\frac{2}{h_j}\theta_{j+1},\\ \tau''(\gamma_{j+1})&=\frac{6}{h_j^2}\tau_j-\frac{6}{h_j^2}\tau_{j+1}+\frac{2}{h_j}\theta_j+\frac{4}{h_j}\theta_{j+1}.\end{aligned}\right\} \qquad (c)$$

现在考虑 γ_j点左右两个相邻的子区间$[\gamma_{j-1}, \gamma_j]$和$[\gamma_j, \gamma_{j+1}]$。函数 $\tau(\gamma)$在子区间$[\gamma_{j-1}, \gamma_j]$的右端点 γ_j的二阶导数为 $\tau''(\gamma_j)$。$\tau(\gamma)$在子区间$[\gamma_j, \gamma_{j+1}]$左端点的二阶导

数为 $\tau''(\gamma_j^+)$。由于结点γ_j上$\tau(\gamma)$的二阶导数连续，故有

$$\tau''(\gamma_j^-)=\tau''(\gamma_j^+)。 \qquad (d)$$

将（ c ）式代入上式，整理后得到

$$(1-\alpha_j)\theta_{j-1}+2\theta_j+\alpha_j\theta_{j+1}=\beta_j。 \qquad (e)$$

式中 $\alpha_j=\dfrac{h_{j-1}}{(h_{j-1}+h_j)}$，$\beta_j=\dfrac{3(1-\alpha_j)}{h_{j-1}}(\tau_j-\tau_{j-1})+\dfrac{3\alpha_j}{h_j}(\tau_{j+1}-\tau_j)$。

式（ e ）对每个结点γ_1，γ_2，$\cdots\gamma_{n-1}$ 都 成立，即对于 $j=1$，2，$\cdots n-1$成立，把 它们 逐个写出来，就得到方程组

$$\left.\begin{aligned}(1-\alpha_1)\theta_0+2\theta_1+\alpha_1\theta_2 &=\beta_1,\\ (1-\alpha_2)\theta_1+2\theta_2+\alpha_2\theta_3 &=\beta_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &,\\ (1-\alpha_{n-1})\theta_{n-2}+2\theta_{n-1}+\alpha_{n-1}\theta_n &=\beta_{n-1}。\end{aligned}\right\} \qquad (f)$$

这是关于$n+1$个未知量θ_0、θ_1、θ_2、$\cdots\theta_n$的$n-1$个线性方程组，为了求出确定的解，还要补充两个附加条件，即边界条件。对于我们的问题，可取两端点 $\gamma=0$ 及γ_n处的二阶导数为零，即

$$\tau''(\gamma_0)=\tau''(\gamma_n)=0。 \qquad (g)$$

将（ c ）式代入上式，得到

$$\left.\begin{aligned}2\theta_0+\theta_1&=\frac{3}{h_0}(\gamma_1-\gamma_0),\\ \theta_{n-1}+2\theta_n&=\frac{3}{h_{n-1}}(\gamma_n-\gamma_{n-1})。\end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

把这两个方程与（ f ）式合在一起，可以求出 θ_0，θ_1，θ_2，$\cdots\theta_n$。由于（ f ）式 的 特 殊性，求解过程十分简单。为了使符号统一，将（ h ）式写成

$$\left.\begin{aligned}2\theta_0+\alpha_0\theta_1&=\beta_0,\\ (1-\alpha_n)\theta_{n-1}+2\theta_n&=\beta_n。\end{aligned}\right\} \qquad (i)$$

这里$\alpha_0=1$，$\alpha_n=0$，$\beta_0=\dfrac{3(\gamma_1-\gamma_0)}{h_0}$，$\beta_n=\dfrac{3(\gamma_n-\gamma_{n-1})}{h_{n-1}}$。由上式的第一式可解出

$$\theta_0=-\frac{\alpha_0}{2}\theta_1+\frac{\beta_0}{2}。$$

记为

$$\theta_0=a_0m_1+b_0。$$

式中$a_0=-\dfrac{\alpha_0}{2}$，$b_0=\dfrac{\beta_0}{2}$。代入（ f ）的第一式，解出

$$\theta_1=-\frac{\alpha_1}{2+(1-\alpha_1)a_0}\theta_2+\frac{\beta_1-(1-\alpha_1)b_0}{2+(1-\alpha_1)a_0}\xrightarrow{\text{记为}}a_1\theta_2+b_1,$$

依此类推，可求出

$$\theta_j=a_j\theta_{j+1}+b_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1。 \qquad (j)$$

其中

$$a_j=\frac{-\alpha_j}{2+(1-\alpha_j)a_{j-1}},\quad b_j=\frac{\beta_j-(1-\alpha_j)b_{j-1}}{2+(1-\alpha_j)a_{j-1}}。\qquad (k)$$

将（ j ）式中 $j=n-1$ 的公式代入式（ i ）第二式，得到

$$\theta_n=\frac{\beta_n-(1-\alpha_n)b_{n-1}}{2+(1-\alpha_n)a_{n-1}}=b_n。\qquad (l)$$

将上式与（ j ）式比较，易知可取 $\theta_{n+1}=0$ 。

综合以上结果，求解（ f ）式在边界条件（ i ）时的计算公式可分为两步：第一步由 $a_0=-\frac{\alpha_0}{2}$，$b_0=\frac{\beta_0}{2}$ 出发，利用（ k ）式算出 a_j、b_j，$j=1$，2，$\cdots n$。第二步，令 $\theta_{n+1}=0$，由（ j ）式计算 θ_j，$j=n$，$n-1$，$\cdots 2$，1，0 。

把 θ_j，$j=0$，1，$\cdots n$ 代入（17-21）式，可以得到任意点的 $\tau(\gamma)$ 值。将（17-21）对 γ 微分一次，得到任一点的剪切模量如下：

$$\begin{aligned}G_t=\tau'(\gamma)=&\frac{6(\tau_{j+1}-\tau_j)(\gamma_{j+1}-\gamma)(\gamma-\gamma_j)}{h_j^3}\\&+\frac{\theta_j(\gamma_{j+1}-\gamma)}{h_j}-\frac{\theta_{j+1}(\gamma-\gamma_j)}{h_j}\\&-\frac{3(\theta_j+\theta_{j+1})(\gamma_{j+1}-\gamma)(\gamma-\gamma_j)}{h_j^2}\end{aligned}\qquad (17\text{-}44)$$

剪切模量 G_t 与土体所受八面体压应力 σ 有关。如对于几种特定的八面体压应力 σ_i，由样条函数求出了剪切模量 G_t 曲线，如图 17-9 所示，再利用插值法，可求出对应于任意 σ 的剪切模量。设对应于 σ_i 和 σ_{i+1} 的剪切模量分别为 $G_t(\gamma,\ \sigma_i)$ 和 $G_t(\gamma,\ \sigma_{i+1})$，那么对应于任意 σ 的剪切模量可由下式计算

$$\begin{aligned}G_t(\gamma,\sigma)=&G_t(\gamma,\sigma_i)\\&+\frac{G_t(\gamma,\sigma_{i+1})-G_t(\gamma,\sigma_i)}{\sigma_{i+1}-\sigma_i}(\sigma-\sigma_i)。\end{aligned}\qquad (17\text{-}45)$$

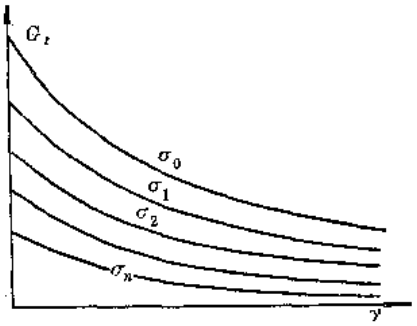


图 17-9

必须注意，如果出现了负的切线剪切模量，则应改用割线模量，计算方法也应相应地改变。

§17-4　土体应力与变形计算

在土力学中应用有限单元法后，在计算中可以考虑土体的非线性应力-应变关系及复杂的加荷过程，有力地推动土工技术向前发展。由于可以比较精确地计算土体的变形和变形速率，从而可以更加合理地确定建筑物的安全度。在采用有限单元法后，人们较多地强

调变形和变形速率的计算，而较少强调从极限平衡理论计算安全系数。

将土体划分为许多单元，对每一单元采用不同的变形模量，以模拟应力-应变关系的非线性和随应力而变。由于变形模量决定于应力，而应力又决定于变形模量，因此需要采用非线性分析技巧。一般采用增量法和迭代法。

增量法是用分段线性曲线去代替非线性的应力-应变关系。增量法的优点是容易考虑初始应力和施工过程，并可以算出荷载-变形曲线。增量法的缺点是不能用于如图 17-5 所示的应力-应变关系，因为越过峰值以后应力反而减小，意味着这时切线剪切模量为负值，而在有限单元法中不能采用负的模量。另外，增量法的计算量一般较大。

迭代法的重要优点是可以分析应变软化材料，因为它采用割线模量或初始模量，不会出现负值。另外计算量一般也较增量法为小。迭代法的缺点是难以考虑初始应力不等于零的情况。

土体所受荷载包括重力、人工结构、渗透力及温度变化等。对于挖方，还需要考虑卸荷。如图17-10所示，重力引起的应力为

$$\sigma_y = wy,\quad \sigma_x = \sigma_z = kwy.$$

其中w为土体容重，k为侧压力系数，其数值与土壤固结程度有关，对于正常固结土壤，$k<1$，对于过固结土壤，k值可能大于 1 。

采用增量法计算时，容易考虑施工过程。如图17-11所示。根据实际施工程序，划分阶段，逐步计算。每步算得应力增量$\{\Delta\sigma\}$，总应力为

$$\{\sigma\} = \{\sigma_0\} + \Sigma\{\Delta\sigma\}.$$

其中$\{\sigma_0\}$为加荷前的初始应力。

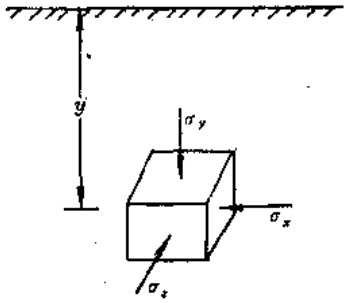


图 17-10　自重应力

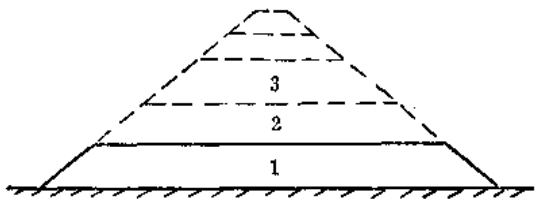


图 17-11　模拟施工过程

§17-5　土体与结构的相互作用、接触单元

工程结构大多建筑在土基上，土体与结构的相互作用直接影响到结构的应力和位移。过去限于计算方法，结构设计中对于土体与结构的相互作用只能作一些粗糙的假定，使得计算结果与实际情况相差很远。采用有限单元法后，可以考虑非线性应力-应变关系及分期施工过程，实际情况在计算中得到较好的反映，因此计算精度大大提高，计算成果与实测结果很接近（图17-12）。

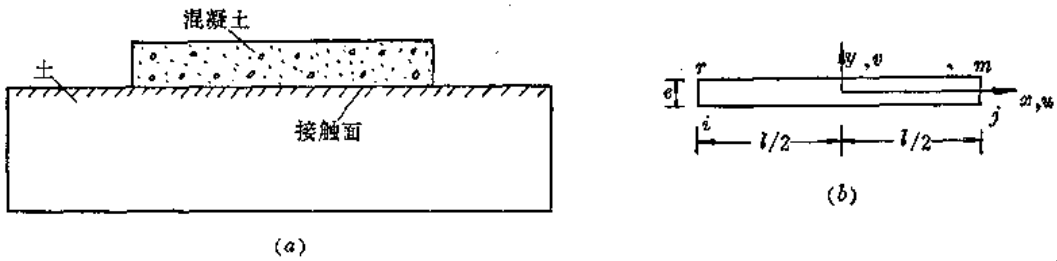


图 17-12 基础梁及接触单元
(a)基础梁；(b)接触单元

用有限单元法分析土体与结构的相互作用时，除了根据土体及结构的特性，分别采用非线性应力-应变关系外，对于土体与结构的接触面，必须给以特殊的注意。过去分析土体与结构相互作用时，往往采用下列两种极端简化的假定之一：（1）接触面十分粗糙，土与结构之间无滑动可能；或（2）接触面十分光滑，不可能产生剪应力，以阻止土体与结构之间的相对移动。当然，实际情况远非这样简单。为了充分反映接触面的受力特性，应采用特殊的接触单元。

参照上一章岩体节理单元，取接触单元如图17-12（b）所示，单元长度为 l，宽度为 $e=0$，厚度（垂直于xy平面）为t，单元有四个结点i、j、m、r。坐标原点放在单元形心上。单元的一边是土，另一边是结构材料，如混凝土。

假设单元内剪应力τ_s与单元两边的水平位移差成正比，正应力σ_n与单元两边的垂直位移差成正比，即

$$\tau_s=\lambda_s\Delta u,\quad \sigma_n=\lambda_n\Delta v。\tag{a}$$

式中 λ_s、λ_n分别是接触单元的切向和法向劲度系数，Δu、Δv 分别是单元两边的切向和法向位移差。

为了测定劲度系数，应进行专门试验。采用一半为土，一半为结构材料的复合试样在直剪仪上进行试验。例如，当结构材料是混凝土时，剪切盒的下半部分应装以混凝土，上半部分装以土体，并模拟施工过程进行夯实。剪切盒上半部分与混凝土之间的间隙保持愈小愈好，从而假定剪切盒上下两部分的相对位移完全是由于接触面之间的移动。

接触单元的剪应力-切向位移差曲线可用双曲线表示：

$$\tau_s=\frac{\Delta u}{a+b\Delta u}。\tag{b}$$

式中 τ_s——接触面剪应力，Δu——接触面上切向位移差，a和b 为由实验决定的参 数。上式经过变换，成为

$$\frac{\Delta u}{\tau_s}=a+b\Delta u。\tag{c}$$

系数a的倒数是剪应力-位移差曲线的初始斜率，可称为初始切向劲度系数 λ_{s0}，其值与接触面上的正应力σ_n有关，根据试验资料，可表示如下：

$$\lambda_{s0}=\frac{1}{a}=k_s\gamma_w\left(\frac{\sigma_n}{p_a}\right)^n。\tag{d}$$

式中 λ_{s0}——初始切向劲度系数，σ_n——正应力，γ_w——水容重，p_a——大气压力，k_s和n是由试验资料决定的参数，引入γ_w和p_a是为了使参数k和n与量纲无关（λ_s的单位是kg/cm^3，与γ_w相同）。

系数b的倒数是τ_s-Δu曲线的渐近值，以τ_{su}表示之。设接触面的抗剪强度为τ_f，有

$$\tau_f = R\tau_{su}. \qquad (e)$$

式中 R——破坏比。接触面的抗剪强度τ_f与正应力成正比，并可用下式表示

$$\tau_f = \sigma_n \tan\delta. \qquad (f)$$

式中δ为土体与结构接触面上的摩擦角，通常小于土体的内摩擦角ϕ，一般约为$\delta = 0.8\phi$。根据式（e）、（f），可得

$$b = \frac{1}{\tau_{su}} = \frac{R}{\tau_f} = \frac{R}{\sigma_n \tan\delta}. \qquad (g)$$

从式（b）求导数，并消去Δu，得到切线劲度系数如下

$$\lambda_s = k_s \gamma_w \left(\frac{\sigma_n}{p_a}\right)^n \left(1 - \frac{R\tau_s}{\sigma_n \tan\delta}\right)^2. \qquad (17\text{-}46)$$

当正应力σ_n是拉应力时，接触面被拉开，应取$\lambda_n = \lambda_s = 0$。当$\sigma_n$是压应力时，$\lambda_s$按上式计算，而$\lambda_n$应取一个很大的数，因为接触单元$e$等于零，由上一章可知，$\lambda_n = \frac{E}{e}$，只要$E$取有限值，当宽度$e \to 0$时，有$\lambda_n \to \infty$，实际计算时可取$\lambda_n = 1 \times 10^5 kg/cm^3$左右。

在图17-13中列出了接触面$\tau_s - \Delta u$试验资料，可见试验点子与双曲线公式符合得相当好[110]。

图17-14表示了一个船闸的有限单元分析结果[109]，此船闸是钢筋混凝土结构，建筑

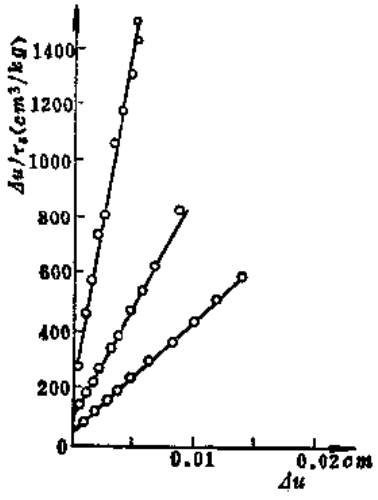


图 17-13 土与混凝土接触面试验曲线

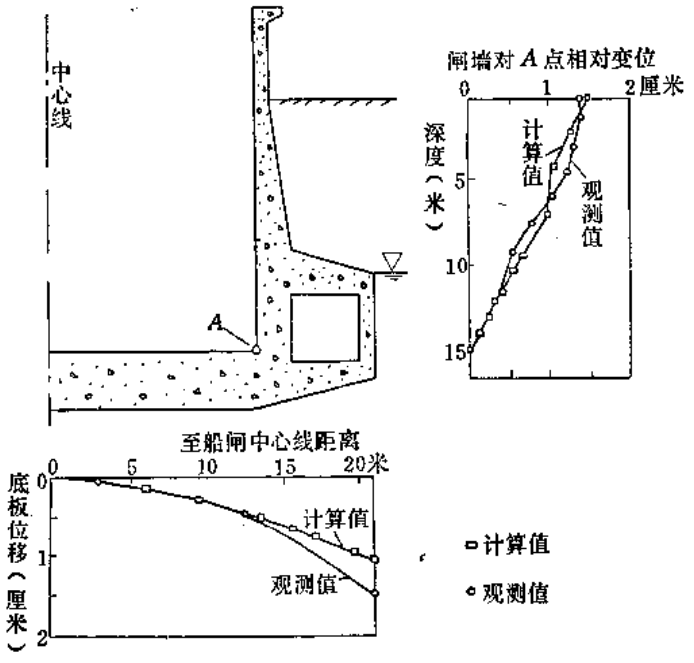


图 17-14 船闸有限单元计算结果与实测结果比较

在土基上，用线性应变四边形单元进行分析。起初假设土体为线性弹性体，不考虑施工过程，荷载是瞬时加上的，计算结果与实际资料不符。于是改用增量法分析，分为十个阶段，逐步计算，模拟施工过程，计算中考虑了基础开挖、排水、分期浇筑混凝土和回填土、地下水位的变化、季节性气温变化及船闸充水等因素。混凝土采用长期弹性模量以考虑徐变。土体应力-应变关系用双曲线表示。在混凝土与土体接触面上采用接触单元以考虑相对位移，进行了专门试验测定单元的劲度系数。计算的基础沉降，土压力及结构挠度均与实测值符合得很好。有些观测结果以前认为是反常的，但有限单元分析成果表明观测值是合理的。例如，计算与实测均表明，当船闸充水时，闸墙向闸室中心线移动，而作用在闸墙上部的有效土压力反而增加了。这个意外的结果如果仅仅是实测出的而未计算出，或者只是计算出而未实测出，那么就可能被认为是某种误差所引起的。但是由于实测和计算结果很一致，所以必须认为是正常现象。船闸竣工时挠度的计算和实测成果的比较如图17-10所示。

§17-6 土体固结

土体固结关系到基础沉降、土坝及土堤稳定。以往因限于计算方法，只能采用太沙基近似理论计算。应用有限单元法后，可采用毕欧（Biot）的精确理论进行计算。

由于孔隙水压力而作用于土壤固体骨架上的体积力为

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix}. \qquad (a)$$

在每个单元内将孔隙水压力p及土体位移u、v、w用形函数表示如下：

$$p=[N]\{p\}^e, \quad \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [\overline{N}]\{\delta\}^e. \qquad (b)$$

其中$\{p\}^e$为单元结点压力，$\{\delta\}^e$为单元结点位移。由虚功原理可知孔隙水压力在土体骨架中产生的结点荷载为

$$\{F\}_p = \left(\int [\overline{N}]^T \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} [N] dV \right) \{p\}^e = [L]\{p\}^e. \qquad (c)$$

于是得到土壤固体骨架的结点平衡方程：

$$[K]\{\delta\}+[L]\{p\}+\{P\}=0. \qquad (17-47)$$

其中$[K]$为刚度矩阵，$\{P\}$为除孔隙压力外其他荷载引起的结点力。

孔隙水必须满足连续方程，即第十三章的式（13-4），其中Q代表在单位体积内流体流入的速率。在目前的情况下，Q由两部分组成：

$$Q=Q_1+Q_2. \qquad (d)$$

其中Q_1是固体骨架的变位所产生的体积变形：

$$Q_1=-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial}{\partial\tau}\begin{Bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\\ \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}^T[\overline{N}]\{\delta\}^e. \qquad (e)$$

Q_2是土壤所包含气泡的体积变化：

$$Q_2=-c\frac{\partial p}{\partial\tau}=-c[N]\left\{\frac{\partial p}{\partial\tau}\right\}. \qquad (f)$$

式中c为与饱和度有关的系数[28]。

将（d）、（e）、（f）三式代入式（13-4），加以离散化，得到

$$[H]\{p\}+[R]\left\{\frac{\partial p}{\partial\tau}\right\}+[S]\left\{\frac{\partial\delta}{\partial\tau}\right\}=0. \qquad (17\text{-}48)$$

式中第二项是Q_1引起的，第三项是Q_2引起的。

$$[R]=\int cN_i[N]dV,$$

$$[S]=\int N_i\left[\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}\right][\overline{N}]dV.$$

联立求解（17-47）（17-48）二式，即可求出土体位移u，v，w和孔隙水压力p。对于饱和土壤，因不包含空气，$c=0$。

式（17-48）中包含了压力和位移对时间τ的导数，为了求解，令

$$\left\{\frac{\partial p}{\partial\tau}\right\}_\tau=-\left\{\frac{\partial p}{\partial\tau}\right\}_{\tau-\Delta\tau}+\frac{2}{\Delta\tau}(\{p\}_\tau-\{p\}_{\tau-\Delta\tau}),$$

$$\left\{\frac{\partial\delta}{\partial\tau}\right\}_\tau=-\left\{\frac{\partial\delta}{\partial\tau}\right\}_{\tau-\Delta\tau}+\frac{2}{\Delta\tau}(\{\delta\}_\tau-\{\delta\}_{\tau-\Delta\tau}),$$

代入式（17-48），简化后得到

$$\left[H+\frac{2}{\Delta\tau}R\right]\{p\}_\tau+\frac{2}{\Delta\tau}[S]\{\delta\}_\tau+\{F\}_\tau=0. \qquad (17\text{-}49)$$

其中

$$\{F\}_\tau=\left[H-\frac{2}{\Delta\tau}R\right]\{p\}_{\tau-\Delta\tau}-\frac{2}{\Delta\tau}[S]\{\delta\}_{\tau-\Delta\tau}. \qquad (17\text{-}50)$$

式（17-49）须与式（17-47）联立求解。

以平面问题为例，采用三角形单元，其结点为 i、j、m。令

$$p=\Sigma N_i p_i,\quad u=\Sigma N_i u_i,\quad v=\Sigma N_i v_i。$$

其中

$$N_i=\frac{1}{2\Delta}(a_i+b_i x+c_i y)。$$

由式（17-47），在结点 i 的两个弹性平衡方程为

$$\Sigma ku+\frac{1}{6}(b_i p_i+b_j p_j+b_m p_m)+p_{xi}=0,\qquad (g)$$

$$\Sigma ku+\frac{1}{6}(c_i p_i+c_j p_j+c_m p_m)+p_{yi}=0。\qquad (h)$$

又式（17-48）中的$[R]$和$[S]$分别为

$$[R]=c\left[\frac{\Delta}{6},\ \frac{\Delta}{12},\ \frac{\Delta}{12}\right],$$

$$[S]=\frac{1}{6}[b_i,c_i,b_j,c_j,b_m,c_m]。$$

由（17-26）式，连续方程为

$$[H]\{p\}+c\left[\frac{\Delta}{6},\ \frac{\Delta}{12},\ \frac{\Delta}{12}\right]\left\{\frac{\partial p}{\partial \tau}\right\}+\frac{1}{6}[b_i,c_i,b_j,c_j,b_m,c_m]\left\{\frac{\partial \delta}{\partial \tau}\right\}=0。\qquad (l)$$

联立求解（g）、（h）、（l）三式，可同时得到位移u、v和孔隙水压力 p，当然，其中（l）式还须象（17-49）式那样在时 间域内 进行离散化。

在图 17-15 中表示了弹性土体固结的有限单元计算成果与理论解的比较，理论解是半空间表面在宽度L范围内受均布荷载时的表面沉陷。有限单元 计算 中 用 宽 $2.5L$、深$1.25L$的块体代替半空间带来了一定的误差。孔隙水压力用线性函数、三结点三角形单元。弹性位移用二次函数，六结点三角形单元。图中 $\xi=\sqrt{et}/L$，e 为固结系数，t 为时间，L为加荷宽度。图中 d 是当 $\xi=1/8$，$L=(-\infty,\ \infty)$ 时表面的沉陷。由图可见，有限单元计算结果与理论解符合得很好。

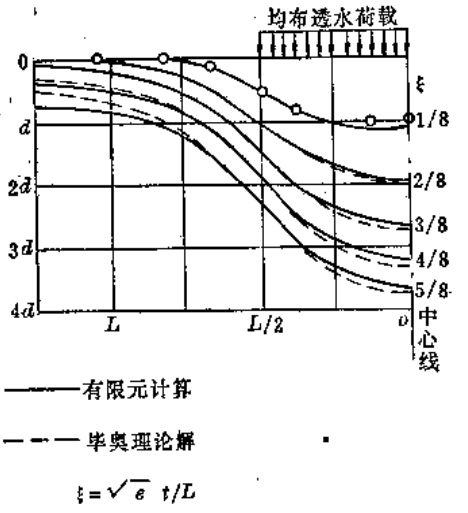
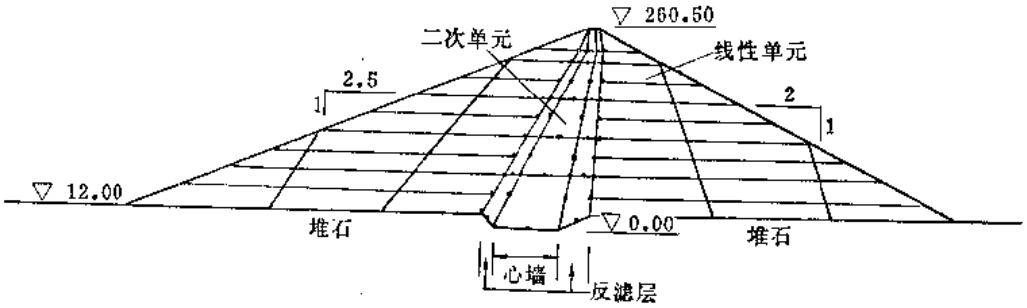


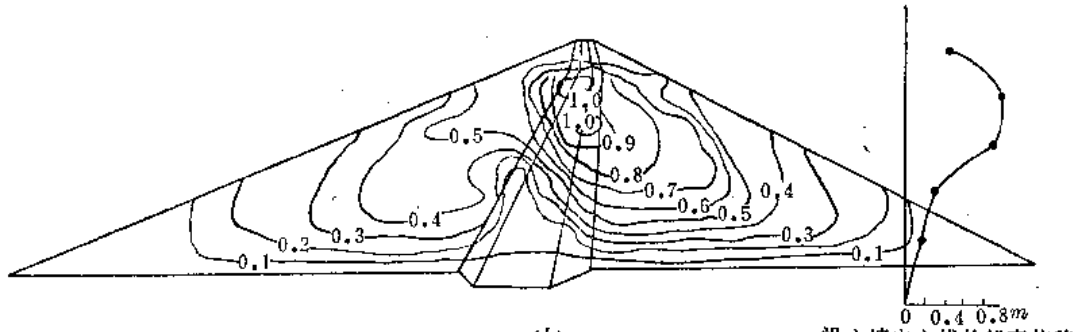
图 17-15　弹性土体固结过程中表面沉陷

§17-7　土坝的应力、变形和稳定

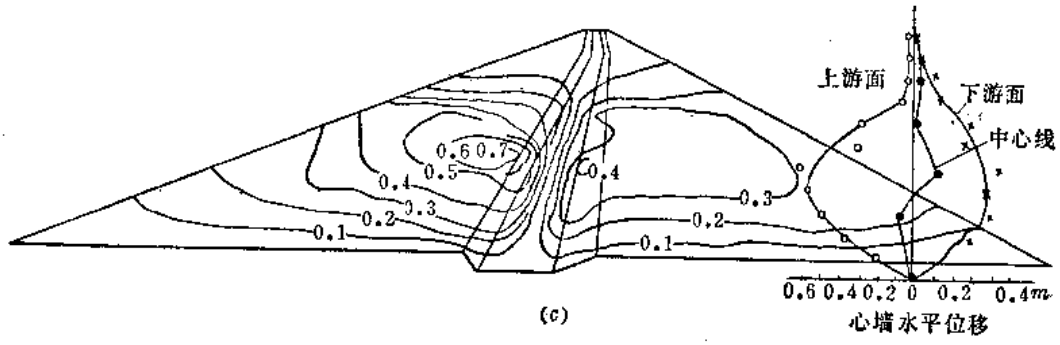
如前所述，土体的应力-应变关系是高度非线性的，用古典方法是无法计算土 坝 的应力和变形的，近年来由于土坝的高度日益增大，人们对土坝应力和变形更为关心，采用有



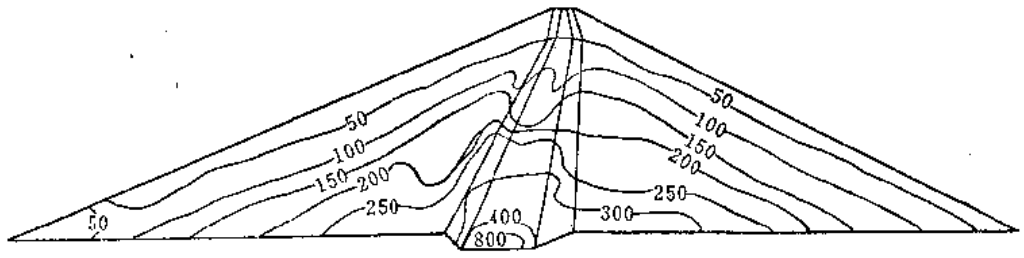
(a)



(b)



(c)



(d)

图 17-16 土坝的应力和变形

(a)计算网格(坝高260米)；(b)铅直位移等值线(米)；(c)水平位移等值线(米)；(d)铅直应力 σ_y 等值线(吨/米^2)

限单元法，可以考虑土体的非线性应力-应变关系及分期施工等复杂因素，比较准确地计算土坝的应力和变形。

图17-16中表示了一个260米高的土坝的计算成果[23]。该坝心墙部分用粘土，坝壳土料取出河滩台地，其组成包括粉土、砂、卵石和孤石。图17-16(a)中表示了计算网格，在上下游坝壳部分采用4结点四边形线性单元，在心墙部分因应力梯度大，采用8结点四边形抛物线单元，分为10层，用增量法计算，应力-应变关系用双曲线表示。侧压力系数，在坝壳和反滤层取 $k=0.5\sim0.7$，在心墙部分取 $k=0.8\sim0.9$。计算所得变形和应力见图17-16(b)、(c)及(d)。

根据有限单元法计算的应力，假定滑动面，可以计算滑动稳定系数 k，计算结果如下表：

计算方法	滑动稳定系数	
	垂直心墙	倾斜心墙
Fellenius法	2.50	2.38
Bishop法	2.89	2.85
有限单元法	2.84	2.83

由上表可见，用毕肖普法计算结果与有限单元法结果比较接近。

第十八章 徐 变 问 题

徐变是不仅与应力水平有关，而且与时间有关的变形。混凝土、塑料、木材、粘土以及在高温下工作的金属，都具有明显的徐变特性。测定材料徐变特性的试验方法有两种，即徐变试验和松弛试验。徐变试验是在固定的应力水平下，测量随着时间的推移而不断增长的变形。松弛试验是固定应变为常数，测量应力逐步变化的过程。

一般说来，物体的徐变不但与当时的应力有关，而且与整个应力历史有关，因此为了分析物体徐变，必须采用增量法，以合适的时间步长进行计算。如果材料特性是由徐变试验给出的，可采用初应变法，在每一步中，根据当时的应力、历史的应力以及徐变规律，计算应变增量。相反，如果材料特性是由松弛试验给出的，可采用初应力法，在每一步中，根据当时应变、历史应变以及松弛系数，计算应力增量。由于徐变试验远比松弛试验为方便，材料的徐变特性通常是由徐变试验给出的，所以物体徐变的分析多采用初应变法。

对于线性徐变体，如果剪切变形和体积变形具有相同的徐变规律，那末可以利用几个简单的定理来推断应力和变形的变化[113、114]，如果剪切变形和体积变形的徐变规律不同，在理论上可以通过拉普拉斯变换求解，但除了一些比较简单的问题外，由于反演的困难，实际的工程结构问题，多数是难以得到计算结果的[112,116,118]。至于非线性徐变体，除了一些极简单的问题外，当然更难以用解析方法求解。因此，对于实际工程中所提出的徐变问题，有限单元法将是比较有效的求解方法。

§18-1 初 应 变 法

物体的变形包括两部分，即弹性变形$\{\varepsilon_e\}$和徐变变形$\{\varepsilon_c\}$。弹性变形可表示为

$$\{\varepsilon_e\}=[D]^{-1}\{\sigma\}.$$

式中$[D]$为弹性矩阵。如果把徐变变形看成初应变$\{\varepsilon_0\}$，那么总变形$\{\varepsilon\}$将是两者之和，即

$$\{\varepsilon\}=[D]^{-1}\{\sigma\}+\{\varepsilon_0\}.$$

由上式求逆，应力-应变关系可记为

$$\{\sigma\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon_0\}). \tag{18-1}$$

用初应变法分析徐变问题的步骤如下：

1）把时间τ划分为一系列时段$\Delta\tau_1$，$\Delta\tau_2$，…。假定全部荷载（包括温度）和材料常数的变化都发生在各时段$\Delta\tau$的开始，而在时段中间保持不变；

2）根据$\tau=0$时施加的荷载和温度，计算弹性应力$\Delta\{\sigma\}_1$，假定应力在第一时段$\Delta\tau_1$内不变，算出第一时段末的徐变$\Delta\{\varepsilon_c\}_1$；

3）在第二时段开始时，把$\Delta\{\varepsilon_c\}_1$看成初应变，加上当时的荷载增量，再解弹性问

题，得应力增量$\Delta\{\sigma\}_2$。假定在第二时段$\Delta\tau_2$内，应力和材料特性都不变，算出第二时段末尾的徐变增量$\Delta\{\varepsilon_c\}_2$；

4）重复第（3）步的计算，求出第三时段$\Delta\tau_3$初的应力增量$\Delta\{\sigma\}_3$和$\Delta\tau_3$末尾的徐变增量$\Delta\{\varepsilon_c\}_3$。

如此一步一步地算下去，可算出不同时间的应力增量，加以累积，即可得到不同时间的应力如下：

$$\{\sigma\}=\sum_i \Delta\{\sigma\}_i. \tag{18-2}$$

显然，若$\Delta\tau$取为无限小，计算将是准确的。实际计算经验表明，可以用相当大的时间步长而得到合用的计算精度。

下面以平面问题为例，说明如何由徐变变形$\{\varepsilon_c\}$计算初应变$\{\varepsilon_0\}$。对于平面应力问题，只有三个应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}，初应变增量可按下式计算：

$$\{\Delta\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_{x0}\\ \Delta\varepsilon_{y0}\\ \Delta\gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_x^c\\ \Delta\varepsilon_y^c\\ \Delta\gamma_{xy}^c\end{Bmatrix}. \tag{18-3}$$

对于平面应变问题，由于$\sigma_z\neq 0$，根据平面应变条件，线性徐变体的初应变增量应按下式计算：

$$\{\Delta\varepsilon_0\}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_{x0}\\ \Delta\varepsilon_{y0}\\ \Delta\gamma_{xy0}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_x^c+\mu\Delta\varepsilon_z^c\\ \Delta\varepsilon_y^c+\mu\Delta\varepsilon_z^c\\ \Delta\gamma_{xy}^c\end{Bmatrix}. \tag{18-4}$$

由于徐变不但与当时的应力有关，而且与历史的应力有关，因此计算过程中必须记录应力历史。这在理论上虽无困难，但却要占用计算机的大量存储器。即使是大型计算机，利用内存储器也难以记录整个应力历史；如利用外存储器，则会因为反复取数而影响运算速度。因此在计算徐变变形时，如何压缩存储量是关键所在。在下面几节将给出一些比较有效的计算方法。

§18-2 粘滞弹性体的徐变问题

不少工程材料，如塑料、岩石、土壤，都可以看做是粘滞弹性体。本节将说明其应力分析方法。

一、单向应力

如图18-1所示的开尔文体，应力-应变关系为

$$\sigma=E_i\varepsilon_c+\eta_i\dot{\varepsilon}_c \tag{18-5}$$

或改写为

$$\dot{\varepsilon}_c=\frac{d\varepsilon_c}{d\tau}=\frac{\sigma}{\eta_i}-\frac{E_i}{\eta_i}\varepsilon_c=a_i\sigma-b_i\varepsilon_c. \tag{18-6}$$

上式表明，开尔文体的变形速率决定于当时应力σ和当时的累积徐变变形ε_c。这点特别重要，因为只要贮存当时的σ和ε_c，就可以代表应力的历史过程。

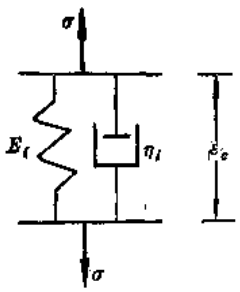


图 18-1

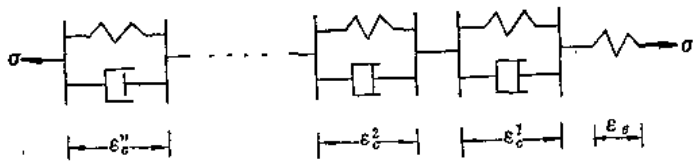


图 18-2

为了更好地反映物体的应力-应变关系，可以用几个开尔文体和弹性体的串联模型，如图18-2，总应变 ε 包括弹性应变ε_e和徐变ε_c，而徐变又分解成 n 个开尔文体的串联，即

$$\varepsilon=\varepsilon_e+\varepsilon_c=\varepsilon_e+\varepsilon_c^1+\varepsilon_c^2+\cdots+\varepsilon_c^n。\qquad(18\text{-}7)$$

由（18-6）式可知，上式中的徐变变形ε_c可由下式计算：

$$\dot{\varepsilon}_c=\sum_{r=1}^{n}\dot{\varepsilon}_c^r=\Big(\sum_{r=1}^{n}a_r\Big)\sigma-\sum_{r=1}^{n}b_r\varepsilon_c^r。\qquad(18\text{-}8)$$

其中第一项可用一个总括起来的已知量去代替求和，第二项给出各个开尔文体徐变变形乘以相应系数后的累积值。如果在计算过程中，各开尔文体的徐变变形ε_c^r记录下来了，则可由（18-8）式计算总徐变的变化速率 $\dot{\varepsilon}_c$。在实际问题中，采用两个开尔文体已可很好地反映物体的徐变规律了，很少用到两个以上开尔文体，因此只要存贮两个徐变量就足以代表历史效果。

若时段$\Delta\tau$取得比较小，可写出

$$\Delta\varepsilon_c=\sum_{r=1}^{n}\Delta\varepsilon_c^r=\left[\Big(\sum_{r=1}^{n}a_r\Big)\sigma-\sum_{r=1}^{n}b_r\varepsilon_c^r\right]\Delta\tau。\qquad(18\text{-}9)$$

在每一时段内，σ 和ε_c^r是该时段开始时刻的数值。

为了提高计算精度，也可以假定在$\Delta\tau$内，σ、a_r和b_r保持常量，而ε_c为变量，由(18-6)式积分，以$(\varepsilon_c^r)_{\tau+\Delta\tau}$表示时段末尾的徐变值，$(\varepsilon_c^r)_\tau$表示时段开始的徐变值，于是

$$(\varepsilon_c^r)_{\tau+\Delta\tau}=(e^{-b_r\Delta\tau})(\varepsilon_c^r)_\tau+\frac{a_r\sigma}{b_r}(1-e^{-b_r\Delta\tau})。\qquad(18\text{-}10)$$

当材料性质与温度有关时，式（18-9）和（18-10)仍可采用，只要假定这些数值都在时段开始时突然变化，而在时段中间保持为常量。

在粘弹性文献中，总应力σ和总应变ε的关系常写成如下形式

$$\varepsilon=\left(\frac{\alpha_nD^n+\alpha_{n-1}D^{n-1}+\cdots}{\beta_mD^m+\beta_{m-1}D^{m-1}+\cdots}\right)\sigma。$$

其中$D=\dfrac{\partial}{\partial\tau}$，$\alpha$、$\beta$是已知系数，对上式进行部分分式的分解，得到

$$\varepsilon=\left(\frac{1}{E}+\frac{a_1}{D+b_1}+\frac{a_2}{D+b_2}+\cdots+\frac{a_n}{D+b_n}\right)\sigma。$$

上式第一项代表瞬时弹性变形，其余各项代表徐变变形，可由（18-8）式计算。

二、复杂应力

上述计算方法易于推广到复杂应力状态。有的工程材料（主要是多孔材料），其徐变变形的泊松比不随时间而改变，并等于瞬时弹性变形的泊松比。我们把代表应力-应变关系的（18-6）式改写为

$$\varepsilon_c=\left(\frac{a}{\frac{d}{d\tau}+b}\right)\sigma. \tag{18-11}$$

可见算子$\dfrac{a}{\left(\dfrac{d}{d\tau}+b\right)}$取代了$\dfrac{1}{E}$的地位，上式代表单向应力状态，对于复杂应力状态，瞬时弹性变形与应力的关系可写成

$$\{\varepsilon_e\}=\frac{1}{E}[A]\{\sigma\}. \tag{18-12}$$

式中$[A]$是与泊松比μ有关的矩阵。把上式右端的$\dfrac{1}{E}$换成算子$\dfrac{a}{\left(\dfrac{d}{d\tau}+b\right)}$，可得到复杂应力状态下徐变与应力的关系如下

$$\{\varepsilon_c^r\}=\left(\frac{a_r}{\frac{d}{d\tau}+b_r}\right)[A]\{\sigma\}. \tag{18-13}$$

因此，计算徐变变形的（18-9）、（18-10）二式，可改写如下

$$\Delta\{\varepsilon_c\}=\left[\left(\sum_{r=1}^{n}a_r[A]\right)\{\sigma\}-\sum_{r=1}^{n}b_r\{\varepsilon_c^r\}\right]\Delta\tau, \tag{18-14}$$

$$\{\varepsilon_c^r\}_{\tau+\Delta\tau}=e^{-b_r\Delta\tau}\{\varepsilon_c^r\}_{\tau}+a_r\frac{[A]\{\sigma\}}{b_r}(1-e^{-b_r\Delta\tau}). \tag{18-15}$$

有些工程材料，如塑料，徐变只发生于应力偏量，而体积变形是弹性的，在这种情况下，可令矩阵$[A]$中泊松比$\mu=0.50$。

如果体积变形也有徐变，并与应力偏量产生的徐变不同，则可用两组算子分别代替$\dfrac{1}{G}$和$\dfrac{1}{k}$，其中G是剪切模量，k是体变模量。当然，这时计算机的存储量将增加一倍。

§18-3 混凝土的徐变问题

混凝土徐变与龄期有密切关系，早龄期混凝土的徐变远较晚龄期为大。在计算混凝土的徐变时，必须考虑这一特点。

如图18-3所示，设在混凝土龄期为τ_i，即$\tau=\tau_i$时，受到应力增量$\Delta\sigma(\tau_i)$的作用，当时将产生瞬时弹性变形

$$\Delta\varepsilon_e=\frac{\Delta\sigma(\tau_i)}{E(\tau_i)}.$$

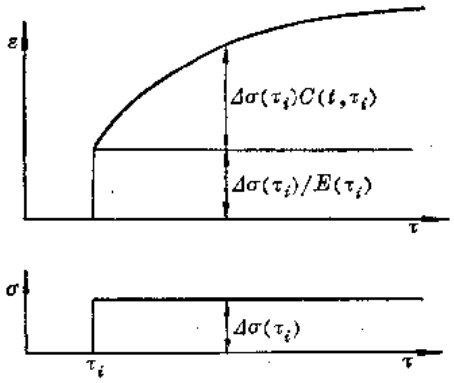


图 18-3 混凝土徐变

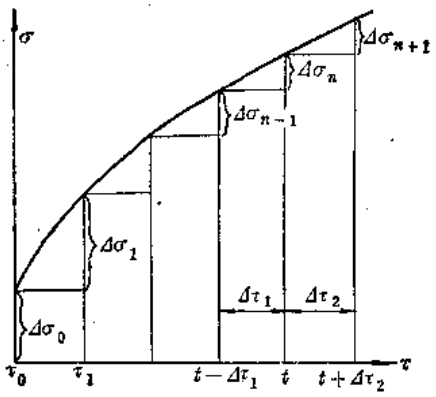


图 18-4

以后将随着时间的增加而产生徐变变形

$$\Delta\varepsilon^c = \Delta\sigma(\tau_i)C(t,\tau_i)。$$

其中 $C(t,\tau_i)$为混凝土的徐变度，即在单位应力作用下的徐变变形。根据实验资料，混凝土徐变度 $C(t,\tau)$是加荷龄期 τ 及荷载持续时间$t-\tau$的函数，一般可用指数函数表示如下

$$C(t,\tau)=C(\tau)[1-e^{-p(t-\tau)}], \qquad (18\text{-}16)$$

其中 p 是常数。

文献[117]曾建议采用等步长 $\Delta\tau$，利用指数函数的特点，压缩计算机存储量，徐变参数可随龄期而变化。作者改进了这个方法，使之适用于变步长的情况，可大大加快计算速度。

在（18-16）式中记

$$C_i=C(\tau_i), \qquad (18\text{-}17)$$

并令

$$\eta=t-\tau。 \qquad (18\text{-}18)$$

如图18-4所示，考虑三个相邻时间：

$$t-\Delta\tau_1,\ t,\ t+\Delta\tau_2。$$

根据线性徐变理论，三个相邻时间的徐变变形分别为

$$\varepsilon^c_{t-\Delta\tau_1}=\Delta\sigma_0C_0[1-e^{-p(\eta_0-\Delta\tau_1)}]+\Delta\sigma_1C_1[1-e^{-p(\eta_1-\Delta\tau_1)}]+\cdots+\Delta\sigma_{n-2}C_{n-2}[1-e^{-p(\eta_{n-2}-\Delta\tau_1)}], \qquad (a)$$

$$\varepsilon^c_t=\Delta\sigma_0C_0[1-e^{-p\eta_0}]+\Delta\sigma_1C_1[1-e^{-p\eta_1}]+\cdots+\Delta\sigma_{n-2}C_{n-2}[1-e^{-p\eta_{n-2}}]+\Delta\sigma_{n-1}C_{n-1}[1-e^{-p\Delta\tau_1}], \qquad (b)$$

$$\varepsilon^c_{t+\Delta\tau_2}=\Delta\sigma_0C_0[1-e^{-p(\eta_0+\Delta\tau_2)}]+\Delta\sigma_1C_1[1-e^{-p(\eta+\Delta\tau_2)}]+\cdots+\Delta\sigma_{n-2}C_{n-2}[1-e^{-p(\eta_{n-2}+\Delta\tau_2)}]+\Delta\sigma_{n-1}C_{n-1}[1-e^{-p(\Delta\tau_1+\Delta\tau_2)}]+\Delta\sigma_nC_n[1-e^{-p\Delta\tau_2}]。 \qquad (c)$$

由（ c ）式减去（ b ）式，整理后得到

$$\Delta\varepsilon^c_{n+1}=\varepsilon^c_{t+\Delta\tau_2}-\varepsilon^c_t=\omega_{n+1}(1-e^{-p\Delta\tau_2})。 \qquad (18\text{-}19)$$

式中

$$\omega_{n+1}=\Delta\sigma_0C_0e^{-p\eta_0}+\Delta\sigma_1C_1e^{-p\eta_1}+\cdots+\Delta\sigma_{n-2}C_{n-2}e^{-p\eta_{n-2}}+\Delta\sigma_{n-1}C_{n-1}e^{-p\Delta\tau_1}+\Delta\sigma_nC_n. \tag{18-20}$$

再由（ b ）式减去（ a ）式，得到

$$\Delta\varepsilon_n^c=\varepsilon_t^c-\varepsilon_{t-\Delta\tau_1}^c=\omega_n[1-e^{-p\Delta\tau_1}]. \tag{18-21}$$

式中

$$\omega_n=\Delta\sigma_0C_0e^{-p(\eta_0-\Delta\tau_1)}+\Delta\sigma_1C_1e^{-p(\eta_1-\Delta\tau_1)}+\cdots+\Delta\sigma_{n-2}C_{n-2}e^{-p(\eta_{n-2}-\Delta\tau_1)}+\Delta\sigma_{n-1}C_{n-1} \tag{18-22}$$

比较（18-20）和（18-22）两式，可知

$$\omega_{n+1}=\omega_ne^{-p\Delta\tau_1}+\Delta\sigma_nC_n. \tag{18-23}$$

由递推关系，得到

$$\omega_1=\Delta\sigma_0C_0. \tag{18-24}$$

由此可知，在计算混凝土徐变时，不必记录整个应力历史，只要记录ω_n。根据递推公式（18-23），可由ω_n计算ω_{n+1}，从而可节省大量计算机存储量。

为了更好地符合试验曲线，徐变度$C(t,\tau)$的表达式可采用组合的指数函数，一般采用两项已够了，即令

$$C(t,\tau)=C(\tau)\left[1-e^{-p(t-\tau)}\right]+D(\tau)\left[1-e^{-q(t-\tau)}\right]. \tag{18-25}$$

式中p、q是材料常数。记

$$C_i=C(\tau_i),\quad D_i=D(\tau_i). \tag{18-26}$$

于是徐变变形可计算如下

$$\Delta\varepsilon_{n+1}^c=\omega_{n+1}(1-e^{-p\Delta\tau_{n+1}})+\rho_{n+1}(1-e^{-q\Delta\tau_{n+1}}), \tag{18-27}$$

$$\omega_{n+1}=\omega_ne^{-p\Delta\tau_n}+\Delta\sigma_nC_n, \tag{18-28}$$

$$\rho_{n+1}=\rho_ne^{-q\Delta\tau_n}+\Delta\sigma_nD_n, \tag{18-29}$$

$$\omega_1=\Delta\sigma_0C_0,\quad \rho_1=\Delta\sigma_0D_0. \tag{18-30}$$

以上讨论的是简单应力状态。根据实验资料，混凝土徐变的泊松比可以认为是常量，并等于弹性变形的泊松比[94]；因此，由（18-12）式对上述计算方法不难扩广到复杂应力状态。

以平面应力问题为例，如果在龄期$\tau=\tau_i$时，受到应力增量

$$\{\Delta\sigma_i\}=[\Delta\sigma_x(\tau_i),\ \Delta\sigma_y(\tau_i),\ \Delta\tau_{xy}(i)]^T$$

的作用，根据线性徐变理论，混凝土产生的徐变变形为

$$\{\Delta\varepsilon^c\}=\begin{Bmatrix}\Delta\varepsilon_x^c\\ \Delta\varepsilon_y^c\\ \Delta\gamma_{xy}^c\end{Bmatrix}=\{\Delta\bar{\sigma}_i\}C(t,\tau_i). \tag{18-31}$$

式中

$$\{\Delta\bar{\sigma}_i\}=\begin{Bmatrix}\Delta\bar{\sigma}_x(\tau_i)\\ \Delta\bar{\sigma}_y(\tau_i)\\ \Delta\bar{\tau}_{xy}(\tau_i)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\mu & 0\\ -\mu & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\sigma_x(\tau_i)\\ \Delta\sigma_y(\tau_i)\\ \Delta\tau_{xy}(\tau_i)\end{Bmatrix}. \tag{18-32}$$

如用（18-25）式表示徐变度，在随着时间而变化的应力场中，混凝土的徐变增量可计算如下：

$$\{\Delta\varepsilon^c_{n+1}\}=\{\omega_{n+1}\}(1-e^{-p\Delta\tau_{n+1}})+\{\rho_{n+1}\}(1-e^{-q\Delta\tau_{n+1}}). \tag{18-33}$$

上式与（18-27）式的区别在于，$\{\omega_{n+1}\}=[\omega^x_{n+1},\ \omega^y_{n+1},\ \omega^{xy}_{n+1}]^T$ 已是向量了，$\{\omega_{n+1}\}$ 和 $\{\rho_{n+1}\}$ 可用下列递推公式计算：

$$\{\omega_{n+1}\}=\{\omega_n\}e^{-p\Delta\tau_n}+\{\Delta\bar{\sigma}_n\}C_n, \tag{18-34}$$

$$\{\rho_{n+1}\}=\{\rho_n\}e^{-q\Delta\tau_n}+\{\Delta\bar{\sigma}_n\}D_n, \tag{18-35}$$

$$\{\omega_1\}=\{\Delta\bar{\sigma}_0\}C_0,\ \{\rho_1\}=\{\Delta\bar{\sigma}_0\}D_0. \tag{18-36}$$

§18-4 金属的徐变问题

在高温下工作的金属也会产生明显的徐变。尽管金属徐变也与整个应力历史有关，但由于金属徐变对应力来说是高度非线性的，实际计算时往往作一些简化，假定应变速率只与当时的应力、应变、温度及时间有关，即

$$\{\dot{\varepsilon}_c\}=F_1(\bar{\sigma})F_2(\bar{\varepsilon}_c)F_3(T)F_4(\tau)[D_0]^{-1}\{\sigma\}/E. \tag{18-37}$$

式中$\bar{\sigma}$、$\bar{\varepsilon}_c$是应力和徐变的第二不变量，T是温度，τ是时间，$[D_0]^{-1}$相当于泊松比$\mu=0.50$时的弹性矩阵。如果进一步忽略时间、温度和总变形对应变速率的影响，则徐变速率可写成

$$\{\dot{\varepsilon}_c\}=\frac{F(\bar{\sigma})[D_0]^{-1}\{\sigma\}}{E}. \tag{18-38}$$

有时可把式中$F(\bar{\sigma})$写成指数形式，如$F(\bar{\sigma})=C\bar{\sigma}^m$。由（18-37）（18-38）二式，不难计算当时的徐变速率$\{\dot{\varepsilon}_c\}$，再由下式可计算徐变增量

$$\{\Delta\varepsilon_c\}=\{\dot{\varepsilon}_c\}\Delta\tau. \tag{18-39}$$

因此不难逐步进行计算。

如果徐变变形很大，以致与徐变比较起来，弹性变形可以忽略，而且徐变速率只与应力有关，可按（18-38）式计算，那么，分析可进一步简化。把位移-应变关系式对时间求导数，所得到的问题与一般的非线性弹性问题在形式上是相似的，只要用$\dot{u}$和$\dot{\varepsilon}_c$分别代替u和ε。在这种情况下，问题的解与时间无关，不必采用增量法，可一次求解。结构的应力状态和应变速率与时间无关，但变形则随时间而不断增加。

第十九章　结构动力学问题

动力分析，特别是在地震和冲击波作用下的动力分析是工程设计中的一个重要问题。复杂结构的动力分析在过去是很困难的。现在应用有限单元法和高速电子计算机，已经可以比较正确地进行各种复杂结构的动力计算，本章阐明如何应用有限单元法进行动力分析。

§19-1　运　动　方　程

结构离散化以后，在运动状态中各结点的动力平衡方程如下

$$\{F_i\}+\{F_d\}+\{F_e\}=\{P(t)\}. \qquad (a)$$

上式左端各项依次代表惯性力、阻尼力和弹性力，均为向量；右端是动力荷载向量。

弹性力向量可用结点位移$\{\delta\}$和刚度矩阵$[K]$表示如下

$$\{F_e\}=[K]\{\delta\} \qquad (b)$$

式中刚度矩阵$[K]$的元素K_{ij}是结点j的单位位移在结点i引起的弹性力。根据达朗贝原理，可利用质量矩阵$[M]$和结点加速度$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}$表示惯性力如下

$$\{F_i\}=[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}. \qquad (c)$$

式中质量矩阵的元素M_{ij}是结点j的单位加速度在结点i引起的惯性力。设结构具有粘滞阻尼，可用阻尼矩阵$[C]$和结点速度$\frac{\partial\{\delta\}}{\partial t}$表示阻尼力如下

$$\{F_d\}=[C]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\}. \qquad (d)$$

式中阻尼矩阵的元素C_{ij}定义为结点j的单位速度在结点i引起的阻尼力。将（b）、（c）、（d）三式代入（a）式，得到运动方程：

$$[M]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}+[c]\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\}+[K]\{\delta\}=\{P(t)\}. \qquad (19\text{-}1)$$

记

$$\{\dot{\delta}\}=\frac{\partial}{\partial t}\{\delta\},\quad \{\ddot{\delta}\}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}$$

则运动方程可写成

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P(t)\}. \qquad (19\text{-}2)$$

在地震时，设地面加速度为a，结构相对于地面的加速度为$\ddot{\delta}$，结构各结点的实际加速度等于$a+\ddot{\delta}$，在计算惯性力时须用它代替（19-2）式中的$\ddot{\delta}$。至于弹性力和阻尼力，则分别取决于结构的应变和应变速率，即取决于位移δ和速度$\dot{\delta}$，与地面加速度无关。

如果没有其他动力荷载，在（19-2）式左边第一项中以$a+\delta$代替δ，移项后得到地震时的动力荷载$\{P(t)\}=-[M]\{a\}$，所以地震时结构运动方程为

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=-[M]\{a\}. \qquad (19\text{-}3)$$

用有限单元法进行动力分析的有利之处是，各单元的材料特性常数可以任意变化，在求出各单元的刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵以后，只要进行简单的叠加即可得到整体的刚度矩阵、阻尼矩阵和质量矩阵。另一个重要优点是，如此获得的刚度矩阵、质量矩阵和阻尼矩阵是高度稀疏的，并易于排列成带状矩阵，故便于计算。

从（19-2）、（19-3）两式可以看出，用有限单元法进行结构动力计算，必须解决以下两个问题：

第一，建立结构的质量矩阵$[M]$、阻尼矩阵$[C]$和刚度矩阵$[K]$。

第二，运动方程（19-2）或（19-3）是二阶微分方程组，其中出现了位移对时间的二次微商，必须找到求解这种大型二阶微分方程组的有效方法。

在本章以下几节中我们将逐步解决上面两个问题。动力问题的刚度矩阵$[K]$与静力问题相同，前面已详细介绍，这里就不再重复了。

§19-2 质 量 矩 阵

下面用$[m]$表示单元质量矩阵，$[M]$表示整体质量矩阵。求出单元质量矩阵后，进行适当的组合即可得到整体质量矩阵。组合方法与由单元刚度矩阵求整体刚度矩阵时相似。

在动力计算中可采用两种质量矩阵，即协调质量矩阵和集中质量矩阵。下面分别加以介绍。

一、协调质量矩阵

从运动的结构中取出一个微小部分，根据达朗贝原理，在它的单位体积上作用的惯性力为

$$\{p_i\}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{r\}. \qquad (a)$$

式中ρ是材料的密度。在对结构进行离散化以后，取出一个单元，并采用如下形式的位移函数

$$\{r\}=[N]\{\delta\}^e. \qquad (b)$$

将上式代入式（a），得到

$$\{p_i\}=\rho[N]\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}^e. \qquad (c)$$

再利用荷载移置的一般公式（3-14），求得作用于单元e的结点上的惯性力如下

$$\{F_i\}^e=\int[N]^T\{p_i\}\,dV=\int[N]^T\rho[N]dV\cdot\frac{\partial^2}{\partial t^2}\{\delta\}^e,$$

即

$$\{F_i\}^e=[m]\{\ddot{\delta}\}^e. \qquad (d)$$

刘企洲

可见单元质量矩阵为

$$[m]=\int[N]^T\rho[N]dV. \qquad (19\text{-}4)$$

如此计算单元质量矩阵，单元的动能和位能是互相协调的，因此叫做协调质量矩阵。

二、集中质量矩阵

假定单元的质量集中在它的结点上，质量的平移和转动可同样处理。这样得到的质量矩阵是对角线矩阵。

单元集中质量矩阵定义如下

$$[m]=\int\rho[\psi]^T[\psi]dV. \qquad (19\text{-}5)$$

式中$[\psi]$是函数ψ_i的矩阵，ψ_i在分配给结点i的区域内取1，在域外取0。由于分配给各结点的区域不能交错，所以由上式计算的质量矩阵是对角线的。

三、几种典型单元的质量矩阵

下面给出几种典型单元的质量矩阵。

（1）梁单元

（a）集中质量矩阵　每个结点分配$l/2$，并略去转动项，得到

$$[m]=\frac{W}{2g}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

W为梁单元的重量。

（b）协调质量矩阵　采用三次插值函数（图19-1）：

$$w=[L_1^2(3-2L_1),L_1^2L_2l,L_2^2(3-2L_2),-L_1L_2^2l]\{\delta\}^e,$$

$$\{\delta\}^e=[w_1,\theta_1,w_2,\theta_2]^T,$$

$$L_1=1-x/l,\quad L_2=x/l.$$

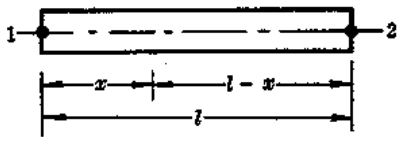


图 19-1

由（19-4）式求得单元质量矩阵如下：

$$[m]=\frac{W}{420g}\begin{bmatrix}156&-22l&54&13l\\ \text{对}&4l^2&-13l&-3l^2\\&&156&22l\\&\text{称}&&4l^2\end{bmatrix}.$$

（2）平面等应变三角形单元

（a）集中质量矩阵　设单元重量为W，将它三等分，分配给每一结点，得到单元质量矩阵如下：

$$[m]=\frac{W}{3g}\left[\begin{array}{cc|cc|cc}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\hline 0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{array}\right].$$

（ b ）协调质量矩阵　采用位移函数如（ b ）式，形函数 $[N]$ 可用面积坐标表示为

$$[N]=[IL_i,\ IL_j,\ IL_m].$$

其中 $I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$，$L_i=(a_i+b_ix+c_iy)/2A$，…。

设单元厚度为 t，由（19-4）式，得

$$\begin{aligned}[m]&=\rho t\iint[N]^T[N]dxdy\\&=\rho t\iint\begin{bmatrix}IL_i\\IL_j\\IL_m\end{bmatrix}[IL_i,\ IL_j,\ IL_m]dxdy\\&=\rho tI\iint\begin{bmatrix}L_iL_i,&L_iL_j,&L_iL_m\\L_jL_i,&L_jL_j,&L_jL_m\\L_mL_i,&L_mL_j,&L_mL_m\end{bmatrix}dxdy.\end{aligned}$$

由于

$$\iint L_rL_s dxdy=\begin{cases}\dfrac{A}{12}, & \text{当}r\neq s,\\[2mm]\dfrac{A}{6}, & \text{当}r=s.\end{cases}$$

令单元的重量为W，即 $\rho tA=W/g$，得到单元质量矩阵如下：

$$[m]=\frac{W}{3g}\left[\begin{array}{cc|cc|cc}\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}\\\hline\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}&0\\0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{4}\\\hline\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\end{array}\right].$$

（ 3 ）矩形薄板单元

（ a ）集中质量矩阵　设单元重量为W，将它四等分，分配给每个结点，并略去转动项，得到集中质量矩阵如下：

$$[m]=\frac{W}{4g}\begin{bmatrix}1&&&&&&&&\\&0&&&&&&&\\&&0&&&&&&\\&&&1&&&&0&\\&&&&0&&&&\\&&&&&0&&&\\&&&&&&1&&\\&&0&&&&&0&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&0\\&&&&&&&&&0\end{bmatrix}.$$

（ b ）协调质量矩阵　采用第十章所介绍的矩形薄板单元的形函数（10-13）式，代入（19-4）式，可导得矩形薄板单元的协调质量矩阵如下。

$$[m]=\frac{W}{25200g}\begin{bmatrix}
3454 & & & & & & & & & & & \\
922b & 320b^2 & & & & & & & & & & \\
-922a & -252ab & 320a^2 & & & & & & & & & \\
1226 & 398b & -548a & 3454 & & & & & & & & \\
398b & 160b^2 & -168ab & 922b & 320b^2 & & & & & & & \\
548a & 168ab & -240a^2 & 922a & 252ab & 320a^2 & & & & & & \\
394 & 232b & -232a & 122b & 548b & 398a & 3454 & & & & & \\
-232b & -120b^2 & 112ab & -548b & -240b^2 & -168ab & -922b & 320b^2 & & & & \\
232a & 112ab & -120a^2 & 398a & 168ab & 160a^2 & 922a & -252ab & 320a^2 & & & \\
1226 & 548b & -398a & 394 & 232b & 232a & 1226 & -398b & 548a & 3454 & & \\
-548b & -240b^2 & 168ab & -232b & -120b^2 & -112ab & -398b & 160b^2 & -168ab & -922b & 320b^2 & \\
-398a & -168ab & 160a^2 & -232a & -112ab & -120a^2 & -548a & 168ab & -240a^2 & -922a & 252ab & 320a^2
\end{bmatrix}.$$

对　　称

结点编号及 a、b 意义见图10-4。

四、两种质量矩阵的比较

计算经验表明，在单元数目相同的条件下，两种质量矩阵给出的计算精度是相差不多的。集中质量矩阵不但本身易于计算，而且由于它是对角线矩阵，可使动力计算简化很多。对于某些问题，如梁、板、壳等。由于可省去转动惯性项，运动方程的自由度数量可显著减少。在波的传播问题中，必须采用集中质量矩阵才能求得可信的结果。在实际计算中，大多采用集中质量矩阵。

图19-2示简支方板的计算网格，由于两个方向都对称，计算时只须取出四分之一。计算刚度矩阵时用四个三角形单元组合成一个四边形单元。用两种质量矩阵进行了对比计算。计算结果见表19-1。由此表可见，在网格大小相同的条件下，两种质量矩阵给出的计算结果很接近，但用集中质量矩阵求解时，自由度数目远较协调质量矩阵为少。

必须指出，当采用高次单元时，推导集中质量矩阵是困难的。另外，只要离散化时保持了单元之间的连续性，由协调质量矩阵算得的频率代表结构真实自振频率的上限。

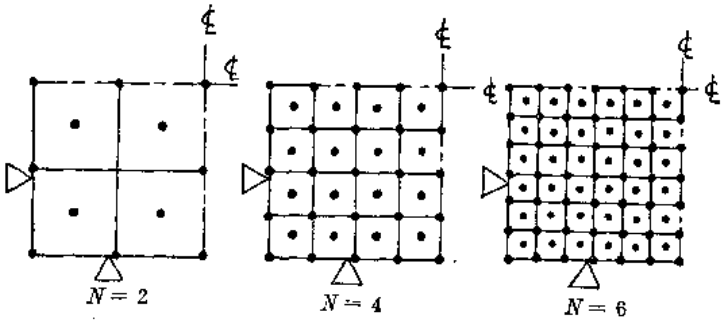


图 19-2 简支方板（四分之一）

表 19-1　　简支方板自振频率（两种质量矩阵）计算值

λ_{mn}	振动型式	理论值	$N=2$		$N=4$		$N=6$	
		m^2+n^2	集中质量	协调质量	集中质量	协调质量	集中质量	协调质量
λ_{11}	对称—对称	2.000	2.034	2.031	2.007	2.007	2.001	2.001
λ_{12}	反对称—对称	5.000	5.142	5.135	5.032	5.031	5.013	5.012
λ_{13}	对称—对称	10.000	10.185	10.390	10.076	10.078	10.032	10.032
λ_{23}	反对称—对称	13.000	13.499	14.028	13.317	13.289	13.131	13.125
λ_{14}	反对称—对称	17.000	—	19.014	17.136	17.176	17.059	17.065
λ_{33}	对称—对称	18.000	17.117	19.747	18.733	18.647	18.305	18.283
λ_{34}	反对称—对称	25.000	23.672	29.880	26.283	26.153	25.557	25.509
λ_{15}	对称—对称	26.000	30.267	28.954	26.186	26.390	26.095	26.127

注　方板自振频率的理论值为

$$f=\frac{\pi}{2l^2}\sqrt{\frac{D}{\rho}}\lambda_{mn},\quad \lambda_{mn}=m^2+n^2,$$

其中 l 为板的边长，$D=Eh^3/12(1-\mu^2)$ 为板的抗弯刚度，表中所列为 λ_{mn} 值。

§19-3 阻 尼 矩 阵

如果假定阻尼力正比于质点运动速度，从运动的结构中取出一微小部分，在它的单位体积上作用的阻尼力为

$$\{p_d\}=\alpha\rho\frac{\partial}{\partial t}\{r\}=\alpha\rho[N]\{\dot{\delta}\}^e.$$

式中α是比例常数，ρ是材料密度，N是形函数。利用荷载移置的一般公式（3-14），求得作用于单元e的结点上的阻尼力如下：

$$\{F_d\}^e=\int[N]^T\{p_d\}dV=\alpha\int[N]^T\rho[N]dV\{\dot{\delta}\}^e.$$

即

$$\{F_d\}^e=[c]\{\dot{\delta}\}^e.$$

而

$$[c]=\alpha\int[N]^T\rho[N]dV=\alpha[m].$$

可见此时单元阻尼矩阵正比于单元质量矩阵。如果假定阻尼力正比于应变速度，则阻尼应力可表为

$$\{\sigma_d\}=\beta[D]\frac{\partial\{\varepsilon\}}{\partial t}=\beta[D][B]\{\dot{\delta}\}^e.$$

根据（3-16）式，可知作用于单元e的结点上的阻尼力为

$$\{F_d\}^e=\int[B]^T\{\sigma_d\}dV=\beta\int[B]^T[D][B]dV\{\dot{\delta}\}^e=[c]\{\dot{\delta}\}^e.$$

式中

$$[c]=\beta\int[B]^T[D][B]dV=\beta[k].$$

可见此时单元阻尼矩阵正比于单元刚度矩阵$[k]$。有的文献建议把单元阻尼矩阵取为

$$[c]=[m]\sum_{s=0}^{n-1}\alpha_s([m]^{-1}[k])^s. \qquad (19\text{-}6)$$

式中α_s是常系数。实际计算中，大多在上式中只取前面两项，即$s=0$，1。于是得到用整体质量矩阵$[M]$和整体刚度矩阵$[K]$的线性组合来表示整体阻尼矩阵$[C]$的公式，如下：

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]. \qquad (19\text{-}7)$$

上式中的系数α和β可用下式确定：

$$\left.\begin{aligned}\alpha&=\frac{2(\lambda_i\omega_j-\lambda_j\omega_i)}{(\omega_j+\omega_i)(\omega_j-\omega_i)}\omega_i\omega_j,\\ \beta&=\frac{2(\lambda_j\omega_j-\lambda_i\omega_i)}{(\omega_j+\omega_i)(\omega_j-\omega_i)}.\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}8)$$

式中ω_i和ω_j分别为第i和j个固有频率，λ_i和λ_j分别为第i和第j个振型的阻尼比，即实际阻尼与该振型的临界阻尼的比值。

当$\lambda_i=\lambda_j$时，有

$$\alpha=\frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i+\omega_j}\lambda,\quad \beta=\frac{2\lambda}{\omega_i+\omega_j}. \qquad (19\text{-}9)$$

采用(19-7)式，用质量矩阵$[M]$和刚度矩阵$[K]$表示阻尼矩阵，可节省机器的存储，因为已不必专门存储阻尼矩阵$[C]$了。

有的文献建议了另外一个计算阻尼矩阵的方法如下。设结构的第i个振型向量为$\{\delta_0\}_i$，$i=1,2,\cdots n$；利用这些向量组成振型矩阵如下：

$$[\Delta_0]=[\{\delta_0\}_1,\ \{\delta_0\}_2,\ \cdots\{\delta_0\}_n].$$

假定振型向量已正则化，从后面的§19-4可知，根据振型正交性质，存在下列关系：

$$[\Delta_0]^T[C][\Delta_0]=[C^*]=\begin{bmatrix} 2\omega_1\lambda_1, & 0, & \cdots, & 0 \\ 0, & 2\omega_2\lambda_2, & \cdots, & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0, & 0, & \cdots, & 2\omega_n\lambda_n \end{bmatrix}. \qquad (a)$$

$$[\Delta_0]^T[M][\Delta_0]=I\ (\text{单位矩阵}). \qquad (b)$$

对（a）式两端前乘以$[\Delta_0^{-1}]^T$，再后乘以$[\Delta_0]^{-1}$，得到阻尼矩阵：

$$[C]=[\Delta_0^{-1}]^T[C^*][\Delta_0^{-1}]. \qquad (c)$$

利用振型的正交性质，可以避免上式右端矩阵$[\Delta_0]$的求逆。对(b)式两端分别前乘$[\Delta_0^{-1}]^T$和后乘$[\Delta_0]^{-1}$，得到

$$\left.\begin{aligned}[\Delta_0]^{-1}&=[\Delta_0]^T[M],\\ [\Delta_0^{-1}]^T&=[M]^T[\Delta_0].\end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

将上式代入（c）式，并注意质量矩阵$[M]$是对称的，得到

$$[C]=[M][\Delta_0][C^*][\Delta_0]^T[M].$$

再将(a)式代入上式，最后得到

$$[C]=2\,[M]\left[\sum_{i=1}^{N}\omega_i\lambda_i\{\delta_0\}_i\{\delta_0\}_i^T\right][M]. \qquad (19\text{-}10)$$

式中 $\{\delta_0\}_i\{\delta_0\}_i^T$为$n\times n$矩阵。

希望采用几项阻尼比，就可在上式中包括几项，未用到的振型阻尼比可令其为零。如此求出的阻尼矩阵显然满足振型正交条件。

阻尼比λ_i的数值与结构类型、材料性质和振型有关，约在0.02～0.20范围内变化。一般通过对已成建筑物的测验而求得。如我国新丰江大头坝实测第一振型（周期0.19秒）的阻尼比为0.05，又如殿山拱坝在库满情况下实测，对称振动时阻尼比为0.03～0.04，反对称振动时阻尼比为0.06～0.07。

在下面的分析中将会看到，如用振型组合法进行动力计算，可直接引用振型阻尼比，不必建立阻尼矩阵。但如用数值积分法进行动力计算，则必须事先求出阻尼矩阵。如前所述，建立阻尼矩阵时要用到频率数值，如果采用第二种方法还要用到振型向量值，好在实际结构中，阻尼值略有变化对结构的动力反应影响并不太大，因此可以用简略方法决定频率和振型，然后用以计算阻尼矩阵。又因为高次振型对结构的动力影响很小，通常只要考虑少数几个基本振型，就可满足实用上的需要。

§19-4 结构自振频率与振型

在式（19-2）中令$P(t)=0$，得到自由振动方程。在实际工程中，阻尼对结构自振频率和振型的影响不大，因此可进一步忽略阻尼力，得到无阻尼自由振动的运动方程如下：

$$[K]\{\delta\}+[M]\{\ddot{\delta}\}=0\,. \tag{19-11}$$

设结构作下述简谐运动：

$$\{\delta\}=\{\delta_0\}\cos\omega t.$$

把上式代入（19-11）式，可得到齐次方程

$$([K]-\omega^2[M])\{\delta_0\}=0\,. \tag{19-12}$$

在自由振动时结构中各结点的振幅$\{\delta_0\}$不全为零，所以上式中括号内矩阵的行列式之值必须等于零，由此得到结构自振频率方程：

$$|[K]-\omega^2[M]|=0. \tag{19-13}$$

结构的刚度矩阵$[K]$和质量矩阵$[M]$都是n阶方阵，其中n是结点自由度的数目，所以上式是关于ω^2的n次代数方程，由此可求出结构的n个自振频率。

对于每个自振频率，由（19-12）式可确定一组各结点的振幅值$\{\delta_0\}_i$，它们互相之间应保持固定的比值，但绝对值可任意变化，它们构成一个向量，称为特征向量，在工程上通常称为结构的振型。

因为在每个振型中，各结点的振幅是相对的，其绝对值可取任意数值。在实际工作中常这样选取特征向量$\{\delta_0\}_i$的数值，使

$$\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_i=1. \tag{19-14}$$

这样的特征向量称为结构的正则化振型。

如果在结构的各结点上施加一组荷载如下

$$\{P_i\}=\omega_i^2[M]\{\delta_0\}_i.$$

$\{P_i\}$称为第i振型的特征荷载，它所引起的结构位移$\{\delta\}$决定于下式

$$[K]\{\delta\}=\{P_i\}=\omega_i^2[M]\{\delta_0\}_i.$$

将上式与（19-12）式比较，可知$\{\delta\}=\{\delta_0\}_i$，因此在特征荷载作用下，结构产生的位移等于该振型的特征向量$\{\delta_0\}_i$。

今假设第i振型的特征荷载作用于结构上，并设结构产生相应于第j振型$\{\delta_0\}_j$的虚位移，所做虚功为

$$W_1=\{\delta_0\}_j^T\omega_i^2[M]\{\delta_0\}_i.$$

如果第j振型的特征荷载作用于结构上，并设结构产生相应于第i振型$\{\delta_0\}_i$的虚位移，所做虚功为

$$W_2=\{\delta_0\}_i^T\omega_j^2[M]\{\delta_0\}_j.$$

根据互逆定理，$W_1=W_2$，由此得到

$$(\omega_i^2-\omega_j^2)\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_j=0\,.$$

当 $i\neq j$时，$\omega_i^2-\omega_j^2\neq 0$，由上式推知

$$\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_j=0,\quad 当i\neq j \tag{19-15}$$

上述性质称为振型的正交性。

今由各振型的特征向量$\{\delta_0\}_i$组成矩阵$[\Delta_0]$如下：

$$[\Delta_0]=[\{\delta_0\}_1,\ \{\delta_0\}_2,\ \cdots\{\delta_0\}_n]。 \tag{19-16}$$

由（19-14）（19-15）二式可知$[\Delta_0]$具有下述性质：

$$[\Delta_0]^T[M][\Delta_0]=I（单位矩阵）。 \tag{19-17}$$

由（19-12）式，$[K]\{\delta_0\}_i=\omega_i^2[M]\{\delta_0\}_i$，因此

$$\{\delta_0\}_i^T[K]\{\delta_0\}_j=\omega_i^2\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_j=\begin{cases}0，& 当i\neq j,\\ \omega_i^2，& 当i=j.\end{cases}$$

由此可知

$$[\Delta_0]^T[K][\Delta_0]=\begin{bmatrix}\omega_1^2,0,&\cdots,0\\ 0,\omega_2^2,&\cdots,0\\ \cdots\cdots\\ 0,\ 0,&\cdots,\omega_n^2\end{bmatrix}。 \tag{19-18}$$

§19-5 特征值问题解法

现在，简单讨论求式（19-12）的特征值和特征向量的方法。

一、变换为典型方程

许多求解矩阵特征值的方法都是从下列典型方程出发的：

$$[H]\{x\}=\bar{\lambda}\{x\}。 \tag{19-19}$$

式中$[H]$是一个对称正定的方阵，$\bar{\lambda}$是待求的特征值。下面设法把式（19-12）变换为式（19-19）。

（1）集中质量矩阵

如果质量矩阵是完整的对角方阵，由（19-12）式变为（19-19）式是很容易的。作变换

$$\{\delta_0\}=[M]^{-\frac{1}{2}}\{x\}。 \tag{a}$$

代入（19-12）式，得到

$$[K][M]^{-\frac{1}{2}}\{x\}=\omega^2[M]^{\frac{1}{2}}\{x\}。$$

在上式两端各前乘$[M]^{-\frac{1}{2}}$，得到

$$[M]^{-\frac{1}{2}}[K][M]^{-\frac{1}{2}}\{x\}=\omega^2\{x\}。 \tag{b}$$

再令

$$\left.\begin{aligned}[H]&=[M]^{-\frac{1}{2}}[K][M]^{-\frac{1}{2}},\\ \bar{\lambda}&=\omega^2。\end{aligned}\right\} \tag{19-20}$$

即得到式（19-19）形式的方程。

（2）协调质量矩阵

因为质量矩阵不是对角线的，变换稍为复杂。比较方便的方法是对$[M]$进行乔列斯基分解（因M是对称方阵）：

$$[M]=[L][L]^T.$$

式中$[L]$为三角阵，作变换

$$\{\delta_0\}=[L^{-1}]^T\{x\}. \qquad (c)$$

代入（19-12）式，再在两端前乘$[L]^{-1}$，得到

$$[L]^{-1}[K][L^{-1}]^T\{x\}=\omega^2\{x\}.$$

上式属于（19-19）形式，式中

$$\left.\begin{aligned}&[H]=[L^{-1}][K][L^{-1}]^T,\\&\bar{\lambda}=\omega^2,\ \{x\}=[L]^T\{\delta_0\}.\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}21)$$

二、减少自由度

一般用有限单元法进行结构计算时，计算网格的疏密一般决定于应力计算精度的需要，所以刚度矩阵的阶次也决定于应力计算的需要。在多数情况下，决定结构变形所需的自由度少得多。质量分布只与变形有关，因此在振型分析中，质量矩阵的自由度可比刚度矩阵小得多。在复杂结构动力计算中，最好先根据应力分析的需要划分网格，然后减小到一个较少自由度的动力问题。

比较简单的降阶办法是假定质量集中在少数选定的结点上。设整个结构非零质量的自由度为δ_1，零质量自由度为δ_2，（19-12）式可分块如下：

$$\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix}=\omega^2\begin{bmatrix}M_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\delta_1\\\delta_2\end{Bmatrix}. \qquad (d)$$

从上式的下部，可用$\{\delta_1\}$表示$\{\delta_2\}$如下：

$$\{\delta_2\}=-[K_{22}]^{-1}[K_{21}]\{\delta_1\}.$$

再代回（d）式的上部，得到

$$[K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21}]\{\delta_1\}=\omega^2[M_{11}]\{\delta_1\}.$$

将括号内的值用$[\overline{K}_{11}]$表示，得到

$$[\overline{K}_{11}]\{\delta_1\}=\omega^2[M_{11}]\{\delta_1\}. \qquad (19\text{-}22)$$

实际上，可用乔列斯基方法来降阶，即令

$$[K_{22}]=[L][L]^T.$$

然后由下式求$\{z\}$：

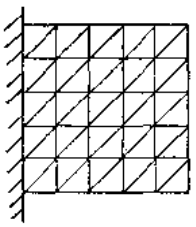
$$[L]\{z\}=[K_{21}].$$

于是

$$[\overline{K}_{11}]=[K_{11}]-\{z\}^T\{z\}.$$

图19-3表示一悬臂方形板的振动，未降阶前板具有90个自由度，以后逐步减少到6个自由度，由图可见，前四个自振频率改变不大[126]。

必须指出，结构自由振动方程（19-12）变成（19-22）式后，自由度虽然减少了，但

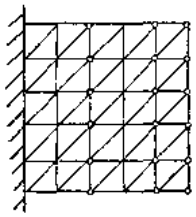


未降阶的板

自由度数目

$N=90$

振型	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.469
2	8.535
3	21.450
4	27.059

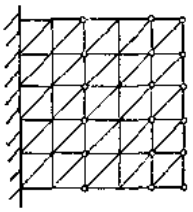


消去未加圈的结点

自由度数目

$N=54$

振型	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.470
2	8.540
3	21.559
4	27.215

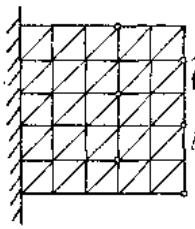


只保留加圈结点的

侧向位移作为自由度

$N=18$

振型	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.470
2	8.543
3	21.645
4	27.296



只保留加圈结点的

侧向位移作为自由度

$N=6$

振型	$\omega\sqrt{D/\rho t a^4}$
1	3.473
2	8.604
3	22.690
4	29.490

图 19-3　在悬臂方形板的振动中减少自由度

刚度矩阵的带宽却增加了，因此只有当自由度减少比较多时，在计算上才能带来较明显的好处。

三、特征方程的解法

特征方程的解法很多。一个比较简便的方法是斯托多拉迭代法。

求解的方程为

$$[K]\{\delta_0\}=\omega^2[M]\{\delta_0\}。\qquad(19\text{-}12)$$

在上式两边前乘$[K]^{-1}$，并令

$$\lambda=\frac{1}{\omega^2},$$

可得到

$$\lambda\{\delta_0\}=[K]^{-1}[M]\{\delta_0\}。\qquad(a)$$

式中λ称为特征值，$\{\delta_0\}$是特征向量。（a）式可用迭代方法求解。特征值和特征向量事先都不知道，开始迭代时，可任选一组合适的初始$\{\delta_0\}$值。例如，对于重力坝的平面振动，可假定垂直位移为零，而水平位移在坝顶为1，在基础为零，中间线性变化，即

$$\{\delta_0\}^{(0)}=[u_1^{(0)}\ v_1^{(0)}\ u_2^{(0)}\ v_2^{(0)}\ u_3^{(0)}\ v_3^{(0)}\cdots]^T$$

$$=\frac{1}{H}[y_1\ \ 0\ \ y_2\ \ 0\ \ y_3\ \ 0\cdots]^T.$$

式中H为坝的高度，坝顶结点编号为1。为了简化，初始向量也可取为单位列阵$\{I\}$。把初始特征向量$\{\delta_0\}^{(0)}$代入（ a ）式右边，可由此式求得$\{\lambda\delta_0\}$的第一次近似值

$$\{\lambda\delta_0\}^{(1)}=[u_1^{(1)}\ v_1^{(1)}\ u_2^{(1)}\ v_2^{(1)}\cdots]^T$$

为了从上式分离出特征值和特征向量，可规定某自由度的振幅为1，对于重力坝可取坝顶水平位移的振幅为1，把该振幅括出，由上式得到

$$\lambda_1\{\delta_0\}^{(1)}=u_1^{(1)}\left[1\quad\frac{v_1^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\frac{v_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\cdots\right]^T.$$

由此得到特征值和特征向量的第一近似值如下

$$\lambda_1=u_1^{(1)}$$

$$\{\delta_0\}^{(1)}=\left[1\quad\frac{v_1^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\frac{u_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\frac{v_2^{(1)}}{u_1^{(1)}}\quad\cdots\right]^T.$$

以$\{\delta_0\}^{(k-1)}$表示经过k-1步迭代后的特征向量，第k步的迭代公式为

$$\{\lambda\delta_0\}^{(k)}=[K]^{-1}[M]\{\delta_0\}^{(k-1)}.$$

事先应将$[K]$分解，因此每次迭代只要回代一次。当前后两次迭代得到的特征向量的差值小于允许误差时，结束迭代，由此求得特征值和特征向量。

用上述迭代方法求解，得到的是（19-12）式的最大特征值λ_{max}，从而求得最低频率ω_{min}。因此在求出第一振型后，必须利用振型正交条件从式（ a ）中清除第一振型的影响，再用迭代方法求解，才向第二振型收敛。在求出第二振型以后，必须再次利用振型正交条件从式（ a ）中清除第一及第二振型的影响，继续用迭代方法求解，才能向第三振型收敛。

一般说来，如果已经求出前面r个特征值：

$$\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3\cdots>\lambda_r$$

及相应的特征向量

$$\{\delta_0\}_1,\ \{\delta_0\}_2,\ \{\delta_0\}_3,\ \cdots\{\delta_0\}_r,$$

利用振型正交条件（19-15）式，从式（ a ）中清除前面r个振型影响后，得到的方程为

$$\{\lambda\delta_0\}=\left([K]^{-1}[M]-\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\{\delta_0\}_i\{\delta_0\}_i^T[M]}{\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_i}\right)\{\delta_0\}. \qquad (19\text{-}23)$$

不难证明，上式的前r个特征向量与（ a ）式相同，但相应的特征值为零。从$r+1$起，上式与式（ a ）具有相同的特征值和特征向量。下面分两步证明上述论断。

首先，设λ_j和$\{\delta_0\}_j$($j\leqslant r$)是式（ a ）的特征值和特征向量。以$\{\delta_0\}_j$代入式(19-23)，得到

$$\lambda\{\delta_0\}_j=\left([K]^{-1}[M]-\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\{\delta_0\}_i\{\delta_0\}_i^T[M]}{\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_i}\right)\{\delta_0\}_j. \qquad (b)$$

由振型正交条件（19-15）式，即

$$\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_j=0,\ \text{当}i\neq j$$

式（ b ）可简化为

$$\lambda\{\delta_0\}_j=[K]^{-1}[M]\{\delta_0\}_j-\lambda_j\{\delta_0\}_j$$
$$=\lambda_j\{\delta_0\}_j-\lambda_j\{\delta_0\}_j=0\cdot\{\delta_0\}_j.$$

从而

$$\lambda=0$$

可见$\{\delta_0\}_j$是式（19-23）的特征向量，而对应的特征值为零。

下面再设λ_s和$\{\delta_0\}_s$（$s>r$）是式（ a ）的特征值和特征向量。把 $\{\delta_0\}_s$代入式（19-23），得到

$$\lambda\{\delta_0\}_s=\left([K]^{-1}[M]-\sum_{i=1}^{r}\frac{\lambda_i\{\delta_0\}_i\{\delta_0\}_i^T[M]}{\{\delta_0\}_i^T[M]\{\delta_0\}_i}\right)\{\delta_0\}_s.$$

由振型正交条件（19-15）式，上式成为

$$\lambda\{\delta_0\}_s=[K]^{-1}[M]\{\delta_0\}_s=\lambda_s\{\delta_0\}_s$$

由此可知

$$\lambda=\lambda_s$$

所以λ_s和$\{\delta_0\}_s$也是式（19-23）的特征值和特征向量。总之，由（19-23）式迭代，将得到λ_{r+1}和$\{\delta_0\}_{r+1}$。斯托多拉迭代法在捍系结构动力计算中虽已应用多年，但直到最近才由华东水利学院引入有限单元动力计算中并给出滤频公式（19-23），见[175]。此方法所需存储量少，收敛也快。此外子空间迭代法也是一个比较有效的解法，见[121，122]。

§19-6 用振型组合法求解运动方程

在求出结构无阻尼自由振动的频率和振型以后，可用振型组合法求解运动方程。

现在考虑下述运动方程的求解：

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}=\{P(t)\}.\qquad(19\text{-}2)$$

我们用振型$\{\delta_0\}_i$的线性组合来表示处于运动状态中的结构的位移如下：

$$\{\delta\}=\{\delta_0\}_1z_1(t)+\{\delta_0\}_2z_2(t)+\cdots+\{\delta_0\}_nz_n(t)$$
$$=[\{\delta_0\}_1,\ \{\delta_0\}_2,\ \cdots\{\delta_0\}_n]\{z\}=[\Delta_0]\{z\}.\qquad(19\text{-}24)$$

其中$z_i(t)$是时间 t 的函数，由上式可知

$$\{\dot{\delta}\}=[\Delta_0]\{\dot{z}\},\ \{\ddot{\delta}\}=[\Delta_0]\{\ddot{z}\},$$

代入（19-2）式，得到

$$[M][\Delta_0]\{\ddot{z}\}+[C][\Delta_0]\{\dot{z}\}+[K][\Delta_0]\{z\}=P(t).\qquad(a)$$

对上式各项都前乘$[\Delta_0]^T$，得

$$[\Delta_0]^T[M][\Delta_0]\{\ddot{z}\}+[\Delta_0]^T[C][\Delta_0]\{\dot{z}\}+[\Delta_0]^T[K][\Delta_0]\{z\}=[\Delta_0]^T\{P\}.\qquad(b)$$

我们假定振型已正则化，根据前面所述振型正交性质，即式（19-17）和（19-18），可知

$$[\Delta_0]^T[M][\Delta_0]=I\text{（单位矩阵）},\qquad(c)$$

$$[\Delta_0]^T[K][\Delta_0]=\begin{bmatrix}\omega_1^2, & 0 & \cdots & 0\\ 0, & \omega_2^2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0, & 0, & \cdots & \omega_n^2\end{bmatrix}. \qquad (d)$$

设阻尼矩阵为质量矩阵与刚度矩阵的线性组合，即

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

由振型正交条件可知，当 $i\neq j$ 时

$$\left\{\delta_0\right\}_i^T[C]\{\delta_0\}_j=0,$$

由（19-8）式可知，当 $i=j$ 时

$$\left\{\delta_0\right\}_i^T[C]\{\delta_0\}_j=\alpha+\beta\omega_i^2=2\omega_i\lambda_i$$

从而得到

$$[\Delta_0]^T[C][\Delta_0]=\begin{bmatrix}2\omega_1\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2\omega_2\lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2\omega_n\lambda_n\end{bmatrix}. \qquad (e)$$

至于阻尼矩阵的第二种表达式（19-10），如前所述，也是满足上式的。把（c）、（d）、（e）三式代入（b）式，可知（b）式左端除了对角线上的项外，其余均为零，因此我们得到一组互相独立的微分方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2z_1}{dt^2}+2\omega_1\lambda_1\frac{dz_1}{dt}+\omega_1^2z_1=\left\{\delta_0\right\}_1^T\{P\},\\ &\frac{d^2z_2}{dt^2}+2\omega_2\lambda_2\frac{dz_2}{dt}+\omega_2^2z_2=\left\{\delta_0\right\}_2^T\{P\},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\frac{d^2z_n}{dt^2}+2\omega_n\lambda_n\frac{dz_n}{dt}+\omega_n^2z_n=\left\{\delta_0\right\}_n^T\{P\}.\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}25)$$

用常微分方程的数值解法，例如龙格-库塔方法，易于求出上述微分方程的解 $z_1(t)$，$z_2(t)$，……$z_n(t)$。代入（19-24）式，即得到所求运动方程的解。由于高次振型对结构动力反应的影响一般都很小，通常只计算最低的 3～5 个振型就够了。

在地震情况下，设在 x、y、z 三个方向的地面加速度为 $\ddot{x}_0$、$\ddot{y}_0$、$\ddot{z}_0$，动力荷载为

$$\{P\}=-[M]\{a\}=-[M](\{A_x\}\ddot{x}_0+\{A_y\}\ddot{y}_0+\{Az\}\ddot{z}_0).$$

其中 $\{A_x\}=\begin{Bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\1\\0\\0\end{Bmatrix}$，$\{A_y\}=\begin{Bmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\\1\\0\end{Bmatrix}$，$\{A_z\}=\begin{Bmatrix}0\\0\\1\\\vdots\\0\\0\\1\end{Bmatrix}$。

因此，在地震情况下，方程（19-25）成为

$$\ddot{z}_i+2\omega_i\lambda_i\dot{z}_i+\omega_i^2 z_i=-\eta_{ix}\ddot{x}_0-\eta_{iy}\ddot{y}_0-\eta_{iz}\ddot{z}_0.$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots n) \qquad (19\text{-}26)$$

式中 $\eta_{ix}=\left\{\delta_0\right\}_i^T[M]\{A_x\}$，$\eta_{iy}=\left\{\delta_0\right\}_i^T[M]\{A_y\}$，

$\eta_{iz}=\left\{\delta_0\right\}_i^T[M]\{A_z\}$.

η_{ix}，η_{iy}，η_{iz}称为振型系数，地震时地面加速度的三个分量$\ddot{x}_0$、$\ddot{y}_0$、$\ddot{z}_0$往往是不同的，因此一般是对三个加速度分量分别进行计算，然后迭加。例如令

$$z_i(t)=\eta_{ix}z_i'(t).$$

得到下述方程：

$$\ddot{z}_i'+2\omega_i\lambda_i\dot{z}_i'+\omega_i^2 z_i'=-\ddot{x}_0. \qquad (19\text{-}27)$$

对于$\ddot{y}_0$和$\ddot{z}_0$，可得到类似的方程。上式实际上是频率为ω_i的单自由度结构的运动方程，其解为

$$z_i'(t)=-\int_0^t \ddot{x}_0(\tau)e^{-\lambda_i\omega_i(t-\tau)}\sin\omega_i(t-\tau)d\tau. \qquad (19\text{-}28)$$

根据地面加速度资料，用数值积分方法由上式可求出$z_i'(t)$。但在电子计算机上，用龙格-库塔方法直接由（19-27）式求解更为有效。对于重要的地震，（19-27）式所表示的单自由度结构的反应谱大多已有现成的计算成果。因此在求出结构的自振频率、振型和振型系数后，利用已有的反应谱进行组合，就可得到地震时结构的动力反应。

振型组合法由于能给出结构的自振频率和振型特性，加之，重要地震的反应谱大多已有现成的计算成果，因此振型组合法在工程上是常被采用的。振型组合法的缺点是必须求解特征问题。当自由度数目较多时，求解特征问题是不容易的。另外，振型组合法只适用于线性问题。因此，振型组合法的适用范围不如下节所述数值积分法广泛。数值积分法可用于求解非线性问题。

§19-7 用数值积分法求解运动方程

运动方程（19-2）是二阶常微分方程组，可用数值积分方法直接求解。应用于动力问题的数值积分方法很多，下面我们介绍用有限单元法进行大型结构动力计算时比较有效的几种数值积分法。

一、线性加速度方法

如图19-4（a）所示，假定在微小时段Δt内各结点的加速度分量都随着时间t呈线性变化：

$$\ddot{\delta}(t)=\ddot{\delta}(t_1)+\frac{\ddot{\delta}(t_2)-\ddot{\delta}(t_1)}{t_2-t_1}(t-t_1). \qquad (a)$$

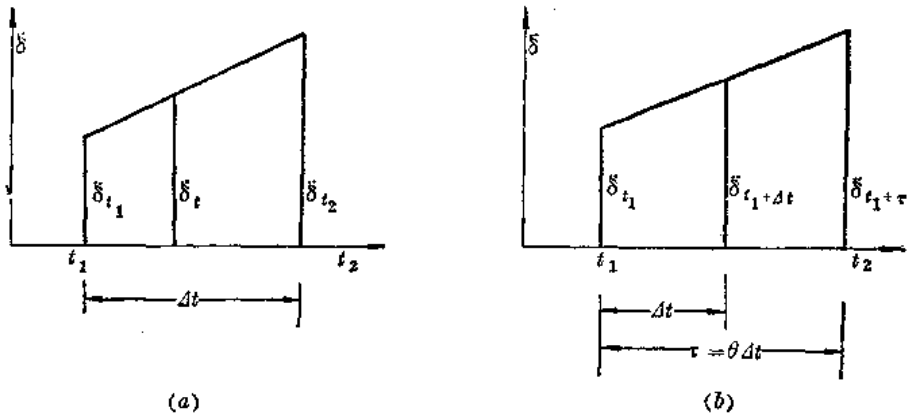


图 19-4 线性加速度

于是时刻 t 的结点速度和位移可通过两次积分求得如下：

$$\dot{\delta}(t)=\dot{\delta}(t_1)+\int_{t_1}^{t}\ddot{\delta}(t)dt, \qquad (b)$$

$$\delta(t)=\delta(t_1)+\int_{t_1}^{t}\dot{\delta}(t)dt. \qquad (c)$$

将（a）式代入以上二式，并令$t=t_2$，得到

$$\dot{\delta}(t)=\dot{\delta}(t_1)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\delta}(t_1)+\frac{\Delta t}{2}\ddot{\delta}(t), \qquad (d)$$

$$\delta(t)=\delta(t_1)+\Delta t\dot{\delta}(t_1)+\frac{\Delta t^2}{3}\ddot{\delta}(t_1)+\frac{\Delta t^2}{6}\ddot{\delta}(t). \qquad (e)$$

由（e）式得到

$$\ddot{\delta}(t)=\frac{6}{\Delta t^2}\delta(t)-\frac{6}{\Delta t^2}\delta(t_1)-\frac{6}{\Delta t}\dot{\delta}(t_1)-2\ddot{\delta}(t_1). \qquad (f)$$

将（f）式代入（d）式，得到

$$\dot{\delta}(t)=\frac{3}{\Delta t}\delta(t)-\frac{3}{\Delta t}\delta(t_1)-2\dot{\delta}(t_1)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{\delta}(t_1). \qquad (g)$$

将（f）、（g）二式代入运动方程（19-2），并将$\delta(t)$和$\delta(t_1)$等简记为δ_t和δ_{t_1}，得到

$$[M]\left\{\frac{6}{\Delta t^2}\delta_t-\frac{6}{\Delta t^2}\delta_{t_1}-\frac{6}{\Delta t}\dot{\delta}_{t_1}-2\ddot{\delta}_{t_1}\right\}+(\alpha[M]+\beta[K])\left\{\frac{3}{\Delta t}\delta_t-\frac{3}{\Delta t}\delta_{t_1}-2\dot{\delta}_{t_1}-\frac{\Delta t}{2}\ddot{\delta}_{t_1}\right\}+[K]\{\delta_t\}=\{P_t\}.$$

经过进一步简化后，得到动力计算的基本方程：

$$[K_t]\{\delta_t\}=\{\bar{P}_t\}. \qquad (19\text{-}29)$$

式中

$$[K_t]=[K]+a_0[M], \tag{19-30}$$

$$\{\bar{P}_t\}=\{P_t\}+[M]\{a_1\delta_{t_1}+a_2\dot{\delta}_{t_1}+a_3\ddot{\delta}_{t_1}\}, \tag{19-31}$$

$$\bar{\delta}_t=\left(\frac{3\beta}{\Delta t}+1\right)\delta_t-\frac{3\beta}{\Delta t}\delta_{t_1}-2\beta\dot{\delta}_{t_1}-\frac{\Delta t}{2}\beta\ddot{\delta}_{t_1}, \tag{19-32}$$

或

$$\delta_t=\frac{\Delta t}{3\beta+\Delta t}\bar{\delta}_t+\frac{3\beta}{3\beta+\Delta t}\delta_{t_1}+\frac{2\beta\Delta t}{3\beta+\Delta t}\dot{\delta}_{t_1}+\frac{\beta\Delta t^2}{6\beta+2\Delta t}\ddot{\delta}_{t_1}. \tag{19-33}$$

将上式代入（ f ）（ g ）二式，得到

$$\ddot{\delta}_t=a_4\bar{\delta}_t+a_5\delta_{t_1}+a_6\dot{\delta}_{t_1}+a_7\ddot{\delta}_{t_1}, \tag{19-34}$$

$$\dot{\delta}_t=\dot{\delta}_{t_1}+\frac{\Delta t}{2}(a_4\bar{\delta}_t+a_5\delta_{t_1}+a_6\dot{\delta}_{t_1}+(1+a_7)\ddot{\delta}_{t_1}). \tag{19-35}$$

系数a_0，a_1…等由下式计算：

$$\left.\begin{aligned}
&a_0=\frac{6+3\alpha\Delta t}{\Delta t^2+3\beta\Delta t}, \quad a_1=\frac{6}{\Delta t^2}+\frac{3}{\Delta t}(\alpha-\beta a_0),\\
&a_2=\frac{6}{\Delta t}+2(\alpha-\beta a_0), \quad a_3=2+\frac{\Delta t}{2}(\alpha-\beta a_0),\\
&a_4=\frac{6}{3\beta\Delta t+\Delta t^2}, \quad a_5=\frac{3\beta}{\Delta t}a_4-\frac{6}{\Delta t^2},\\
&a_6=2\beta a_4-\frac{6}{\Delta t}, \quad a_7=\frac{\beta\Delta t}{2}a_4-2.
\end{aligned}\right\} \tag{19-36}$$

上述各式表明，基本方程（19-29）式中右端$\bar{P}_t$是已知的，解此式得到

$$\{\bar{\delta}_t\}=[K_t]^{-1}\{\bar{P}_t\}. \tag{19-37}$$

代入（19-33）、（19-34）、（19-35）三式，可求出$t=t_2$时的δ_t、$\dot{\delta}_t$和$\ddot{\delta}_t$。把这些数值代入（19-31）式，可以求出下一时段的$\bar{P}_t$，代入（19-37）式，可以求出下一时段的位移。如此逐步计算，不难求出动力反应的全过程。

从(19-36)式可见，如果整个计算过程中采用定步长Δt，那么a_0是一常数，从而$[K_t]$也是常量。只要求逆一次，以后每步的计算只是简单的回代，计算是方便的。

利用台劳公式可以证明上述求解方法的位移截断误差是四阶的。这个计算方法在时间步长比离散后结构的最小自振周期为小的情况下是稳定的，如果时间步长比结构最小周期要长，计算将是不稳定的。最小周期的量级是应力波通过两结点所需的时间，是极短的。例如，对于常应变平面三角形网格，忽略阻尼影响，时间步长的上界可由下式估算：

$$(\Delta t)^2\leqslant\frac{\rho(1+\mu)}{E}\Delta x\Delta y.$$

式中E为弹性模量，μ为泊桑比，ρ为密度，Δx和Δy为最小网格间距。例如，对于混凝土结构来说，若取$\Delta x=\Delta y=1$米，由上式得到时间步长的上界为0.0003秒。

根据计算经验，当时间步长超过上述界限时，计算是不稳定的。此时虽然输入的动力

荷载的高频分量很小，但结构动力反应的高频部分将无限增长，使整个计算结果失去意义。为了消除这种不稳定性，可采用下述θ方法。

假定在时间间隔$\tau=\theta\Delta t$内加速度是线性的，根据前面同样的推理，可知

$$\dot{\delta}_{t_1+\tau}=\dot{\delta}_{t_1}+\frac{\tau}{2}[\ddot{\delta}_{t_1}+\ddot{\delta}_{t_1+\tau}],$$

$$\delta_{t_1+\tau}=\delta_{t_1}+\tau\dot{\delta}_{t_1}+\frac{\tau^2}{6}[2\ddot{\delta}_{t_1}+\ddot{\delta}_{t_1+\tau}].$$

联立求解以上二式，得到在时间$t_1+\tau$时的加速度和速度如下：

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\delta}_{t_1+\tau}&=\frac{6}{\tau^2}[\delta_{t_1+\tau}-\delta_{t_1}]-\frac{6}{\tau}\dot{\delta}_{t_1}-2\ddot{\delta}_{t_1},\\ \dot{\delta}_{t_1+\tau}&=\frac{3}{\tau}[\delta_{t_1+\tau}-\delta_{t_1}]-2\dot{\delta}_{t_1}-\frac{\tau}{2}\ddot{\delta}_{t_1}.\end{aligned}\right\}\qquad(h)$$

把以上二式代入下列在时刻$t_1+\tau$的运动方程：

$$[M]\{\ddot{\delta}_{t_1+\tau}\}+[C]\{\dot{\delta}_{t_1+\tau}\}+[K]\{\delta_{t_1+\tau}\}=\{P_{t_1+\tau}\}.$$

在上式中把不包含$\delta_{t_1+\tau}$的量移到右端去，得到运动方程：

$$[\overline{K}]\{\delta_{t_1+\tau}\}=\{\overline{P}_{t_1+\tau}\}.\qquad(19\text{-}38)$$

式中

$$[\overline{K}]=[K]+\frac{3}{\tau}[C]+\frac{6}{\tau^2}[M],$$

$$\{\overline{P}_{t_1+\tau}\}=\{P_{t_1+\tau}\}+[M]\left(2\{\ddot{\delta}_{t_1}\}+\frac{6}{\tau}\{\dot{\delta}_{t_1}\}+\frac{6}{\tau^2}\{\delta_{t_1}\}\right)+[C]\left(\frac{\tau}{2}\{\ddot{\delta}_{t_1}\}+2\{\dot{\delta}_{t_1}\}+\frac{3}{\tau}\{\delta_{t_1}\}\right).$$

由（19-38）式解出位移向量$\delta_{t_1+\tau}$，由（h）式计算$\ddot{\delta}_{t_1+\tau}$。最后由下式可计算我们所希望求得的在时刻$t_1+\Delta t$的加速度：

$$\ddot{\delta}_{t_1+\Delta t}=\left(1-\frac{1}{\theta}\right)\ddot{\delta}_{t_1}+\frac{1}{\theta}\ddot{\delta}_{t_1+\tau}.\qquad(19\text{-}39)$$

把上述加速度值代入（d）、（e）二式，可求得在时刻$t_1+\Delta t$的速度和位移。计算步骤见表19-2。

如取$\theta=1$，即得到前述普通逐步积分法，前面已指出，那是有条件稳定的。如取$\theta\geqslant 1.37$，则计算是无条件稳定的。对于逐步积分法来说，在选择时间步长Δt时，必须考虑两个因素，即计算稳定性和计算精度。如果计算方法是有条件稳定的，为了满足稳定条件，时间步长必须小于结构最小自振周期，在有限单元法中，那是非常小的时间间隔，要消耗大量机器时间。如果计算方法是无条件稳定的，时间步长不受稳定条件的限制。在选择时间步长时，只要考虑计算精度问题。在结构动力反应中，高频分量的贡献是很小的，因此在分析Δt对计算精度的影响时，只要考虑结构的低频部分，从而可采用较大的时间步长。

表 19-2　　用 θ 方法计算线性结构

原始计算

1.计算下列常数

$$\tau=\theta\Delta t,\quad \theta\geqslant 1.37$$

$$b_0=\frac{6}{\tau^2},\quad b_1=\frac{3}{\tau},\quad b_2=2b_1,\quad b_3=\frac{\tau}{2},\quad b_4=\frac{b_0}{\theta},$$

$$b_5=-\frac{b_2}{\theta},\quad b_6=1-\frac{3}{\theta},\quad b_7=\frac{\Delta t}{2},\quad b_8=\frac{\Delta t^2}{6}$$

2.建立有效刚度矩阵

$$[\overline{K}]=[K]+b_1[C]+b_0[M]$$

3.分解$[\overline{K}]$

每步计算

1.计算有效荷载列阵$\{\overline{P}_{t_1+\tau}\}$

$$\{\overline{P}_{t_1+\tau}\}=\{P_{t_1+\tau}\}+[M](b_0\{\delta_{t_1}\}+b_2\{\dot{\delta}_{t_1}\}+2\{\ddot{\delta}_{t_1}\})+[C](b_1\{\delta_{t_1}\}+2\{\dot{\delta}_{t_1}\}+b_3\{\ddot{\delta}_{t_1}\})$$

2.由运动方程求解$\{\delta_{t_1+\tau}\}$

$$\{\delta_{t_1+\tau}\}=[\overline{K}]^{-1}\{\overline{P}_{t_1+\tau}\}$$

3.计算时刻$t_1+\Delta t$的加速度、速度和位移

$$\ddot{\delta}_{t_1+\Delta t}=b_4(\delta_{t_1+\tau}-\delta_{t_1})+b_5\dot{\delta}_{t_1}+b_6\ddot{\delta}_{t_1}$$

$$\dot{\delta}_{t_1+\Delta t}=\dot{\delta}_{t_1}+b_7(\ddot{\delta}_{t_1+\Delta t}+\ddot{\delta}_{t_1})$$

$$\delta_{t_1+\Delta t}=\delta_{t_1}+\Delta t\dot{\delta}_{t_1}+b_8(\ddot{\delta}_{t_1+\Delta t}+2\ddot{\delta}_{t_1})$$

4.计算应力(必要时)

在分析逐步积分法的精度和稳定性时，必须指出，运动方程（19-2）的逐步积分实际上等价于用一个统一的时间步长 Δt 去积分方程组（19-25），其中每个方程都代表一个振型的振动。由于各振型的运动是相互独立的，所以只须从（19-25）式中取出一个振型的运动方程来分析就可以了。设自振周期为$T=\frac{2\pi}{\omega}$，阻尼比为 λ，广义动荷载为 $P^*=\{\delta_0\}^T\{P\}$，则运动方程为

$$\ddot{z}+2\lambda\omega\dot{z}+\omega^2 z=P^*.$$

其中 z 是广义坐标。

前已指出，当$\theta\geqslant 1.37$时，θ 方法是无条件稳定的，至于计算精度，则与时间步长 Δt 有关。为了分析θ 方法的计算精度，我们只要用它来计算一个无阻尼单自由度结构的自由振动就可以了。在这种情况下，计算误差可用以下两个因素表示：自振周期的延长$\frac{\Delta T}{T}$和振幅的减小$\frac{\Delta A}{A}$，均用百分比表示，其中T和A分别表示自振周期和振幅。用不同的时间步长Δt，对一个单自由度结构由于单位初始位移引起的无阻尼自由振动计算的结果示于图19-5。由图可见，对于同样的时间步长，$\theta=1.4$给出的计算成果的精度比$\theta=2.0$为好。另

外，当$\frac{\Delta t}{T}<0.02$时，计算误差甚小，可忽略不计；而当$\frac{\Delta t}{T}>0.1$时，计算误差比较显著。

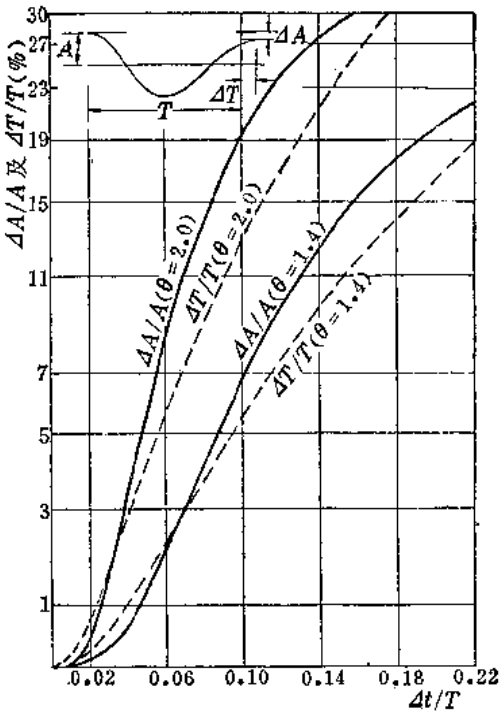


图 19-5　θ 方法的误差

二、龙格-库塔方法

对运动方程（19-2）前乘以$[M]^{-1}$，得到

$$\{\ddot{\delta}\}=G(t,\delta,\dot{\delta}). \qquad (i)$$

式中已采用记号

$$G(t,\delta,\dot{\delta})=[M]^{-1}\{P(t)\}-[M]^{-1}[K]\{\delta\}-[M^{-1}][C]\{\dot{\delta}\}. \qquad (j)$$

又令

$$h=\Delta t. \qquad (k)$$

按照求解二阶微分方程的龙格-库塔方法，在已知时刻t_1的δ_{t_1}、$\dot{\delta}_{t_1}$、$\ddot{\delta}_{t_1}$后，为了求下一步的位移、速度、加速度，可先依次计算下列数值：

$$\left.\begin{aligned}
k_1&=hG(t_1,\ \delta_{t_1},\ \dot{\delta}_{t_1}),\\
k_2&=hG\left(t_1+\frac{h}{2},\delta_{t_1}+\frac{h}{2}\dot{\delta}_{t_1}+\frac{h}{8}k_1,\dot{\delta}_{t_1}+\frac{k_1}{2}\right),\\
k_3&=hG\left(t_1+\frac{h}{2},\delta_{t_1}+\frac{h}{2}\dot{\delta}_{t_1}+\frac{h}{8}k_1,\dot{\delta}_{t_1}+\frac{k_2}{2}\right),\\
k_4&=hG(t_1+h,\ \delta_{t_1}+h\dot{\delta}_{t_1}+\frac{h}{2}k_3,\ \dot{\delta}_{t_1}+k_3).
\end{aligned}\right\} \qquad (l)$$

然后由下列二式计算δ_{t_2}、$\dot{\delta}_{t_2}$（$t_2=t_1+\Delta t$）。

$$\left.\begin{aligned}
\delta_{t_1+\Delta t}&=\delta_{t_1}+h\left(\dot{\delta}_{t_1}+\frac{1}{6}(k_1+k_2+k_3)\right),\\
\dot{\delta}_{t_1+\Delta t}&=\dot{\delta}_{t_1}+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (m)$$

重复上述步骤，可以算出各时间的位移、速度和加速度。

按龙格-库塔方法求解，位移的截断误差是五阶的，因此计算精度较高。计算过程中时间步长h可以随意变化。在采用集中质量矩阵的情况下，$[M]$是对角方阵，求逆阵$[M]^{-1}$十分简单，避免了刚度矩阵的求逆，因此刚度矩阵$[K]$中只需存储非零元素，全部零元素都不必存储，龙格-库塔方法的另一重要优点是可以自动开始计算。这个方法的缺点是计算速度较慢，因为每一步都要计算4个中间数值k_1，k_2，k_3，k_4。目前龙格-库塔方法是配合其他方法，用来计算开头几个时段的数值。

三、傅氏法

傅氏对运动方程提出了一个数值积分方法，其精度是四阶的，但计算速度和存储量都优于同阶的龙格-库塔方法，它积分一步只要计算两个函数值，而不是四个[177，178]。

对运动方程（19-2）前乘以$[M]^{-1}$，得到

$$\{\ddot{\delta}\}=[M]^{-1}(\{P\}-[K]\{\delta\}-[C]\{\dot{\delta}\}). \tag{19-40}$$

下面推导积分一步的公式。设积分步长为h，令

$$t_k=kh, \quad k=0, 1, 2, \cdots$$

$$t_{k+\frac{1}{2}}=t_k+\frac{h}{2},$$

又

$$y_k-y_{k-\frac{1}{2}}=\frac{h}{2}\dot{y}_k+0(h^2). \tag{o}$$

由台劳公式，可得

$$\begin{aligned}\delta_{k+\frac{1}{2}}&=\delta_k+\left(\frac{h}{2}\right)\dot{\delta}_k+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\ddot{\delta}_k+0(h^3)\\&=\delta_k+\left(\frac{h}{2}\right)\dot{\delta}_k+\frac{h}{4}\cdot\frac{h}{2}\ddot{\delta}_k+0(h^3)\\&=\delta_k+\left(\frac{h}{2}\right)\dot{\delta}_k+\frac{h}{4}(\dot{\delta}_k-\dot{\delta}_{k-\frac{1}{2}})+0(h^3).\end{aligned}$$

整理之，得到

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}=\delta_k+\frac{3}{4}h\dot{\delta}_k-\frac{h}{4}\dot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}+0(h^3). \tag{19-41}$$

又由台劳公式

$$\begin{aligned}\delta_{k+\frac{1}{2}}&=\delta_k+\frac{h}{2}\dot{\delta}_k+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\ddot{\delta}_k+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3\dddot{\delta}_k+0(h^4)\\&=\delta_k+\frac{h}{2}\dot{\delta}_k+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\ddot{\delta}_k+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^2\left(\ddot{\delta}_k-\ddot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}\right)+0(h^4).\end{aligned}$$

整理后得到

$$\delta_{k+\frac{1}{2}}=\delta_k+\frac{h}{2}\dot{\delta}_k+\frac{h^2}{6}\ddot{\delta}_k-\frac{h^2}{24}\ddot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}+0(h^4). \tag{19-42}$$

又由台劳公式：

$$\dot{\delta}_{k+1}=\dot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+\frac{h}{2}\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\dddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3\ddddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+0(h^4),$$

$$\dot{\delta}_k=\dot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}-\frac{h}{2}\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\dddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}-\frac{1}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^3\ddddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+0(h^4).$$

二式相减，得到

$$\dot{\delta}_{k+1}=\dot{\delta}_k+h\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+\frac{h}{6}\left(\frac{h}{2}\right)^2\dddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}+0(h^4). \tag{p}$$

但

$$\left(\frac{h}{2}\right)^2\dddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}=\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}-2\ddot{\delta}_k+\ddot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}+0(h^3),$$

代入(p)式，整理后得到

$$\dot{\delta}_{k+1}=\dot{\delta}_k+\frac{h}{6}\left(7\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}}-2\ddot{\delta}_k+\ddot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}\right)+0(h^4). \tag{19-43}$$

再由台劳公式：

$$\begin{aligned}\delta_{k+1}&=\delta_k+h\dot{\delta}_k+\frac{h^2}{2}\ddot{\delta}_k+\frac{h^3}{6}\dddot{\delta}_k+\frac{h^4}{24}\ddddot{\delta}_k+0(h^5)\\&=\delta_k+h\dot{\delta}_k+\frac{h^2}{6}\left\{3\ddot{\delta}_k+h\dddot{\delta}_k+\frac{h^2}{4}\ddddot{\delta}_k\right\}+0(h^5)\\&=\delta_k+h\dot{\delta}_k+\frac{h^2}{6}\left\{\ddot{\delta}_k+2\left[\ddot{\delta}_k+\frac{h}{2}\dddot{\delta}_k+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2\ddddot{\delta}_k\right]\right\}+0(h^5).\end{aligned}$$

整理之，得到

$$\delta_{k+1}=\delta_k+h\dot{\delta}_k+\frac{h^2}{6}(\ddot{\delta}_k+2\ddot{\delta}_{k+\frac{1}{2}})+0(h^5). \tag{19-44}$$

在式(19-41)至(19-44)中略去余项，就是一套数值积分公式。根据δ_k、$\dot{\delta}_k$，由(19-40)计算$\ddot{\delta}_k$，再由(19-41)至(19-44)式可计算δ_{k+1}、$\dot{\delta}_{k+1}$。如此一步一步算下去，可以算出任意时刻的位移、速度和加速度。此法是有条件稳定的。由于计算过程中要用到$\delta_{k-\frac{1}{2}}$和$\ddot{\delta}_{k-\frac{1}{2}}$，因此最初两组数要用别的方法计算，例如可用龙格-库塔方法计算。

最后可以指出，如果阻尼系数采用比实际情况大得多的、接近于临界阻尼的数值，计算出来的位移不再具有振荡特性，而是趋近于静力解，利用这一特性可以使动力计算程序用于静力计算。这便是所谓动力松弛法。傅氏曾取阻尼系数为临界阻尼的一半，由动力程序计算出静力解。采用动力松弛法，可使动力程序兼具静力计算的功效。

§19-8 固体与流体的耦合运动

当固体与流体接触时，在动荷载作用下，固体与流体将相互影响。本节将说明固体与流体相互影响时动力反应的计算方法。

可压缩流体产生小幅度运动时，压力p决定于下列微分方程：

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{\bar{C}^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0. \tag{19-45}$$

式中$\bar{C}$为声波速度，在推导上述方程时已忽略阻尼（粘滞）作用。

在流体的自由边界上，$p=0$，在流体与固体的接触面上，边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(U_n). \tag{19-46}$$

式中U_n是固体边界在法线方向的位移分量。用有限单元法离散化后，可得到下列方程

$$[H]\{p\}+[G]\{\ddot{p}\}+\{F\}=0. \tag{19-47}$$

式中$[H]$和$[G]$是用一般方法得到的矩阵，矩阵$\{F\}$不是由体积分得来的，它是由边界上的面积分得来的。边界运动决定于固体的移动。对于固体也用有限单元法离散化。固体边界在法线方向的位移分量可用适当的形函数$[\overline{N}]$以及结点位移$\{\delta\}$表示如下（图19-6）：

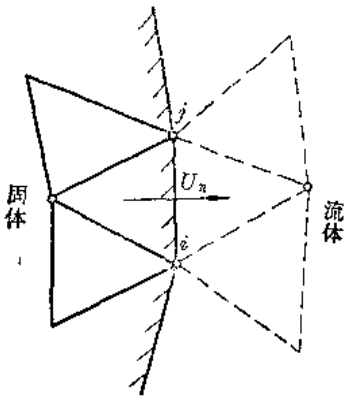


图 19-6 固体与流体的接触面

$$U_n=[\overline{N}]\{\delta\}. \qquad (a)$$

由(13-14)式可知

$$\{F\}=[S]\{\delta\}. \qquad (19\text{-}48)$$

其中

$$[S]=\int_s[N]^T\rho[\overline{N}]ds. \qquad (b)$$

式中$[N]$是规定压力P的形函数，s是固体与流体的接触面。

对于固体，用有限单元法离散化后，得到下述方程：

$$[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}+\{\overline{F}\}+\{P\}=0. \qquad (19\text{-}49)$$

式中$\{P\}$是作用于固体的已知动力荷载，而$\{\overline{F}\}$是流体压力所产生的结点荷载。设$p=[N]\{p\}$，由虚功原理可知

$$\{\overline{F}\}=\int_s[\overline{N}]^Tpds=\frac{1}{\rho}[S]^T\{p\}. \qquad (19\text{-}50)$$

由(19-47)、(19-48)、(19-49)、(19-50)四式，可得固体与流体耦合运动的矩阵微分方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}&[H]\{p\}+[G]\{\ddot{p}\}-[S]\{\ddot{\delta}\}=0,\\&[M]\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}+\frac{1}{\rho}[S]^T\{p\}+\{P\}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (19\text{-}51)$$

由上式可解出流体的压力p和固体的位移δ，速度$\dot{\delta}$、加速度$\ddot{\delta}$。

如果流体是不可压缩的，声速$\overline{C}=\infty$，从而

$$[G]=0.$$

于是(19-51)式中的第一式可直接解出，并得到

$$\{p\}=[H]^{-1}[S]\{\ddot{\delta}\}. \qquad (19\text{-}52)$$

以上式代入式(19-51)的第二式，整理后得到

$$([M]+[M_p])\{\ddot{\delta}\}+[C]\{\dot{\delta}\}+[K]\{\delta\}+\{P\}=0. \qquad (19\text{-}53)$$

式中

$$[M_p]=\frac{1}{\rho}[S]^T[H]^{-1}[S]. \qquad (19\text{-}54)$$

由此可见，如果流体是不可压缩的，固体的运动方程式(19-53)与一般弹性结构的运动方程(19-2)的形式是一致的，只是在质量矩阵$[M]$上增加了一个附加矩阵$[M_p]$。由于$[M_p]$反映了流体质量对固体运动的影响，因此可称为附加质量矩阵。

§19-9 重力坝的地震应力

在以前各节，我们详细说明了用有限单元法进行结构动力计算的原理和方法，在下面几节我们将列举一些应用实例，从这些实例可以看出，有限单元法在解决工程结构动力问题上具有强大的威力。在这一节，我们将说明用有限单元法计算重力坝地震应力所得到的一些重要成果。

按照传统的坝工设计规范，在地震区修建重力坝时，一般以水平加速度$0.1g$或$0.05g$（g为重力加速度）作为地震荷载，按静力法计算坝体应力，所得的应力值往往很小，在设计中不起任何控制作用。但重力坝遭受震害的实例表明，这种计算方法是完全脱离实际的，只有采用有限单元法进行动力计算，才能比较切合实际地反映重力坝的地震应力。

如1967年12月11日在柯印纳发生地震后，柯印纳重力坝因受震而发生了严重裂缝。该坝建于1954～1963年，由蛮石混凝土建造，坝长853米，坝高103米，底宽70.2米，按静力法设计，在地震荷载$0.05g$作用下，坝内没有出现拉应力。在地震时实测地面最大加速度，顺坝轴方向为$0.63g$，顺水流方向为$0.49g$，垂直方向为$0.34g$。地震以后，在一些坝体的上游表面和下游表面都产生了裂缝，主要水平裂缝是在坝体坡面改变处（629高程），坝体虽未溃决，但损害是相当严重的，事后决定在下游面建造支墩以加固坝体。这一事例说明过去水坝抗震设计计算方法是脱离实际的，引起了不良后果。

用二维有限单元法对柯印纳重力坝的地震应力进行了计算[23]，计算中忽略了水体的动力作用。假定坝体是均质的，弹性模量$E=31.7\times10^4 kg/cm^2$，容重 $\gamma=2.64$吨/米^3，泊松比$\mu=0.20$，阻尼比0.05。用有限单元法计算的前四个自振周期为0.326，0.122，0.093，0.063秒，动力计算即考虑这4个周期，最大拉应力见图19-7，其中已包括自重和静水压力，坝体出现的最大拉应力在上游面达$40kg/cm^2$，在下游面达$70kg/cm^2$。在坝坡改变处有明显的应力集中现象，在这个高程处的最大压应力是$88kg/cm^2$（图中未表示）。

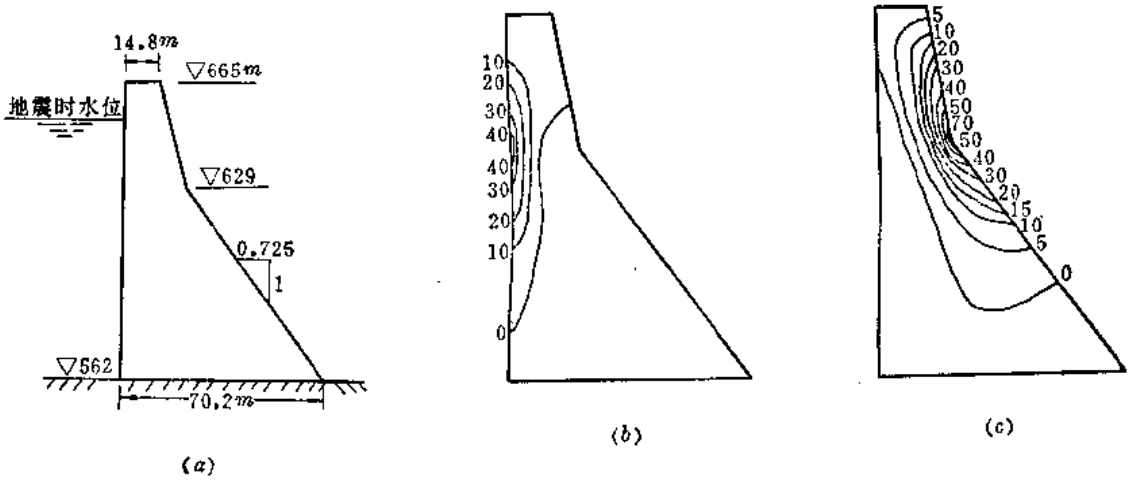


图 19-7 柯印纳重力坝由于水平及竖向地震而产生的应力（kg/cm^2）
(a)坝体剖面；(b)$t=4.425$秒时主拉应力；(c)$t=4.250$秒时主拉应力

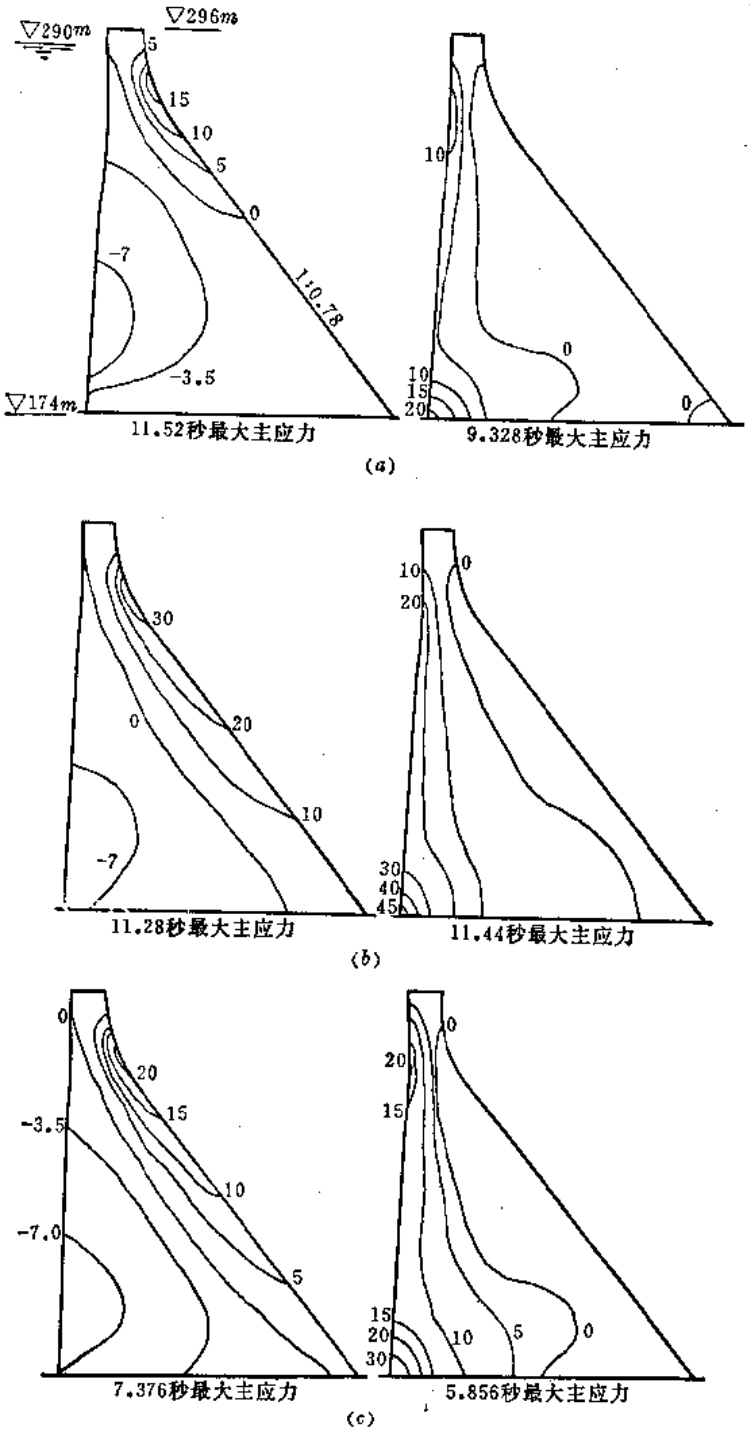


图 19-8　松原重力坝地震应力（kg/cm^2）

(a)水平和竖向地震，不包括动水压力；(b)水平和竖向地震，包括动水压力；(c)水平地震，包括动水压力

该处（变坡处）混凝土抗压强度为247kg/cm^2，按10%估计，其抗拉强度为24.7kg/cm^2，所以发生地震时，上游面的拉应力为抗拉强度的1.5倍，下游面的拉应力为抗拉强度的3倍。计算的动应力过程线表明，地震过程中，先后有好几次拉应力超过了混凝土的抗拉强度。实际裂缝正好出现在应力集中处。

柯印纳坝设计时，按水平加速度0.05g，沿坝高均匀分布，用材料力学公式计算，结果坝内无任何拉应力，与真实情况相去太远。产生错误的原因有三个方面，第一，地面加速度太小；第二，假定加速度沿坝高均匀分布，没有反映坝体动力特性；第三，计算方法不能反映应力集中。

由图19-7可以看出，柯印纳坝的剖面形状有点特殊，坝的顶部较一般重力坝为肥大，但进一步的有限单元计算表明，标准形状的重力坝，地震时上部也有很大拉应力。

在图19-8中表示了松原重力坝承受1952年塔夫脱地震时的应力情况。混凝土弹性模量$E=35.1\times10^4 kg/cm^2$，容重$\gamma=2.48$吨/米^3，泊松比$\mu=0.20$，阻尼比0.05，为了探讨动水压力和竖向加速度的影响，根据不同的情况进行了二维有限单元动力计算。从计算结果可引出以下结论：

1）库空时，竖向地震对最大应力的影响不大。但库满时，其影响十分明显，比较图19-8（b）和（c）可见，考虑竖向地震以后，坝内拉应力增加了40～70%，其原因是，竖向地震引起的动水压力是垂直于坝面的，即是水平的。对于低坝，竖向地震的影响更为显著。

2）按照过去的计算方法，动水压力对坝体应力影响不大（因地面加速度小，又假定坝体是刚性的），根据有限单元计算结果，考虑动水压力后，坝内拉应力增加幅度很大，比较图19-8（a）和（b）可知，应力增加达一倍。

从以上两个重力坝动应力计算结果来看，由于结构动力作用和应力集中，在重力坝的顶部产生较大拉应力，柯印纳坝震后实际上也产生了严重裂缝。因此在地震区修建重力坝时，坝体顶部的混凝土标号应适当提高，并应设法尽量减小坝顶厚度。曾经计算过一个松原坝的理想断面，即坝顶厚度为零的理想三角形剖面，计算结果，拉应力减小了一倍。

§19-10 支墩坝的地震应力

在图19-9中表示了我国新丰江大头坝的地震应力[123]。该坝最大坝高105米，建成挡水后，库区频繁产生地震，最大的一次坝址烈度达8度强，震后在靠近坝体顶部断面变化处出现了连续的水平贯穿性裂缝，事后作了补强加固。为了分析在地震作用下坝体的动应力，水利水电科学研究院和中国科学院计算技术研究所等单位用二维有限单元法进行了动应力计算，把坝体分割为260个厚度不等的三角形单元，共计160个结点，采用集中质量矩阵和线性加速度数值积分法（即θ方法），按照图19-10所示当地实际测量的地面水平加速度计算坝体应力。坝体上游和下游表面最大动应力见图19-9。计算结果与实验结果比较吻合。计算中阻尼矩阵按（19-7）式计算，该式中的系数α、β由式（19-9）确定。根据实测资料，采用阻尼比$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0.05$，为了分析$\alpha$、$\beta$的影响，进行了三组对比计算

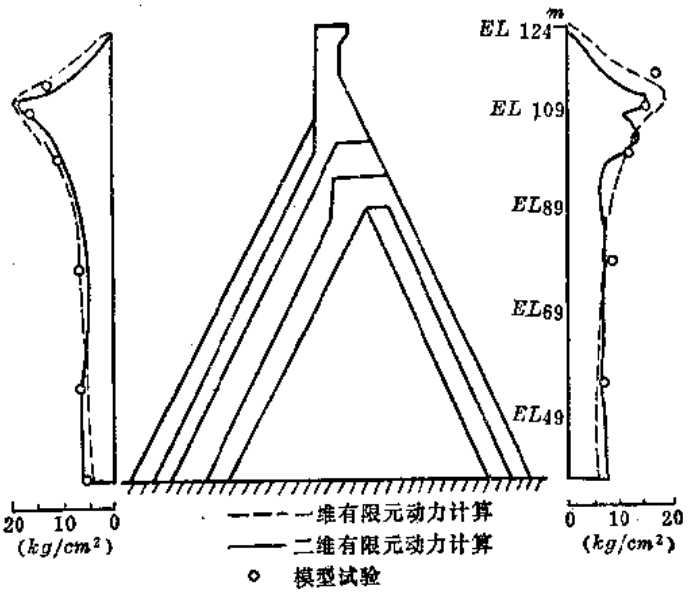


图 19-9　在地震作用下大头坝上游及下游表面最大动应力

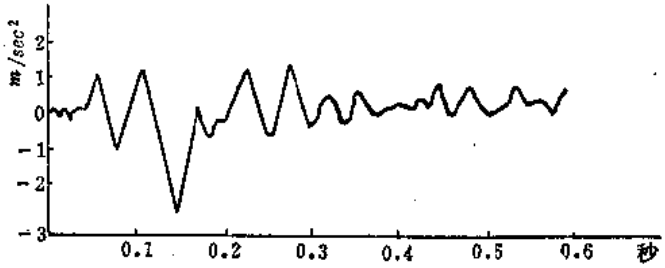


图 19-10　坝址区实测地面水平加速度

如下：

（Ⅰ）根据第一、第二自振频率ω_1、ω_2，计算相应数值：

$$\alpha = 2.601,\quad \beta = 0.000847.$$

（Ⅱ）根据第一及第三自振频率ω_1、ω_3，计算相应数值：

$$\alpha = 2.987,\quad \beta = 0.000595.$$

（Ⅲ）忽略阻尼影响，即令$\alpha = \beta = 0$。

在表19-3中列出了应力最大的两个单元的计算结果。数值结果表明，α和β在一定范围内变化对计算值的影响并不显著。在$\alpha = \beta = 0$的极限情况，坝面最大动应力也只增加30%左右。

表 19-3　　不同α、β对动应力（公斤/厘米²）的影响（t =0.215秒）

部　　位	α =2.601 β =0.000847	α =2.987 β =0.000595	α = 0 β = 0
上游面(37单元)应力	13.55	14.28	19.09
下游面(25单元)应力	-12.14	-12.75	—16.81

曾用三种不同的时间步长$\Delta t=0.001$，0.002，0.005秒进行计算，结果都是稳定的。计算中假定基础是刚性的。

由图19-9可见，最大应力发生在顶部坝体断面突变处，这与产生水平裂缝的部位是吻合的。

§19-11 拱坝的振动

拱坝是一种复杂的空间壳体结构，用古典方法进行动应力分析是十分困难的。但应用有限单元法，这个问题可迎刃而解。在图19-11中表示了用有限单元法计算一个拱坝振动的结果[18]。河谷是对称的，只须取出一半计算，假定基础是刚性的，用壳体单元计算，离散化情况见图19-11（i）。图中画出了前面六阶振型及相应的自振频率。用振型叠加法不难求出地震时坝体动应力。

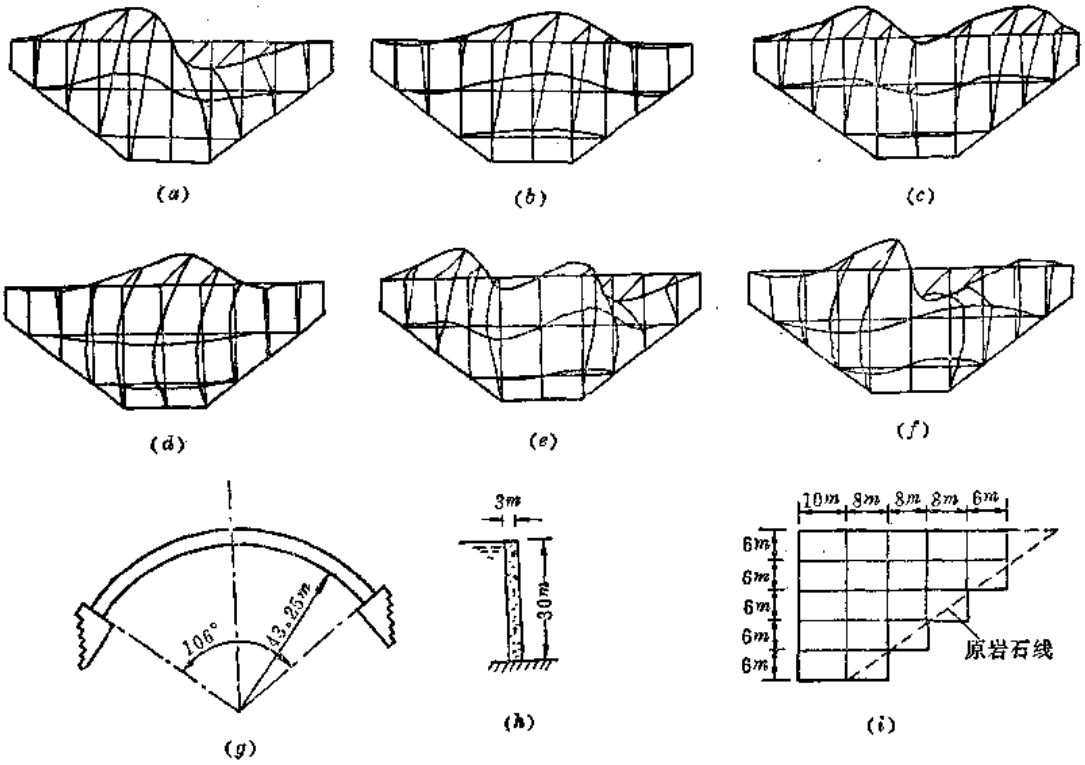


图 19-11 拱坝的径向自由振动（库空）

（a）一阶振型：8.50次/秒；（b）二阶振型：8.77次/秒；（c）三阶振型：12.36次/秒；（d）四阶振型：15.75次/秒；（e）五阶振型：16.18次/秒；（f）六阶振型：20.33次/秒；（g）平面图；（h）拱冠剖面；（i）计算网格

§19-12 土坝地震应力

过去工程上是按照楔形剪切梁计算土坝地震应力的，即假定土坝是一维的楔形悬臂

梁，只产生水平剪切变形。显然，这是一种相当粗略的计算模型。实际上土坝是由各向异性的、不均质的、非弹性材料所组成的三维连续体，而且在土体孔隙中还存在着承压水。土坝地震应力问题是非常复杂的，但应用有限单元法和大型快速电子计算机，这个问题目前是可以解决的。

对于宽广河谷中的土坝，顺水流方向的地震应力不妨按平面应变问题计算。在图19-12中表示了一个土坝地震应力分析的简例[120]。坝体剖面是三角形、材料是均质、线性弹性体。弹性模量$E=5720kg/cm^2$，泊松比$\mu=0.45$，容重$\gamma=2.08$吨/米^3，阻尼假定为每一振型的临界阻尼的20%。坝体剖面离散后，具有100个单元，66个结点，其中底部11个结点假定是固定的，还剩下55个结点、共110个自由度。首先求出前15个振型和频率，在图19-12中表示了第1～6振型。由图可见，只有第一个振型类似于按楔形剪切梁理论求

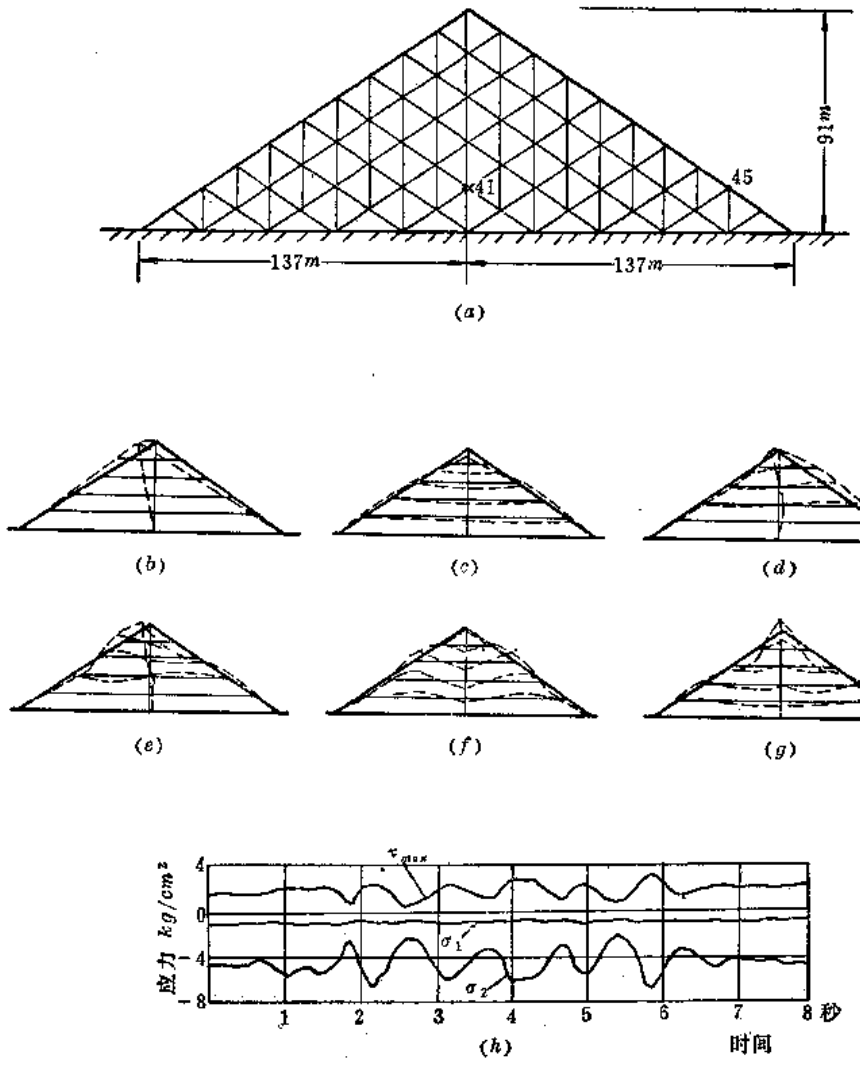


图 19-12 土坝地震应力分析

(a)坝体尺寸及计算网格；(b)振型1，$\omega=7.71$弧度/秒；(c)振型2，$\omega=12.52$弧度/秒；(d)振型3，$\omega=14.60$弧度/秒；(e)振型4，$\omega=19.31$弧度/秒；(f)振型5，$\omega=20.12$弧度/秒；(g)振型6，$\omega=23.10$弧度/秒；(h)应力与时间关系(结点45)

出的纯剪切变形。在所有其他振型中都具有明显的垂直运动、摆动等等。在求出各振型后，用振型叠加方法计算地震应力。假定坝体同时受到地面加速度的两个分量，一个水平分量、一个垂直分量。这两个分量都是1940年5月18日埃尔森特罗地震时的实际记录。在图19-12（h）中表示了坝坡上45号结点的应力-时间关系。在$t=0$时的起始应力是用有限单元法求出的静应力。

地震时土坝的坝坡容易产生滑动，只有用有限单元法算出坝面附近的全部应力状态，才能较准确地估计坝坡的抗滑稳定性。另外，当坝的尺寸比较大时，由于相位差，地震时地面运动是不均匀的，这种影响用有限单元法也可以考虑。当坝底宽度超过了地震波的波长时，这种影响是不容忽视的。

§19-13 圆柱形薄壳的地震反应

圆柱形薄壳在实际工程中得到了广泛采用。现在我们介绍一个用有限单元法计算的圆柱形薄壳屋盖的动力反应的结果。在图19-13（a）中表示了薄壳的几何形状和尺寸，在

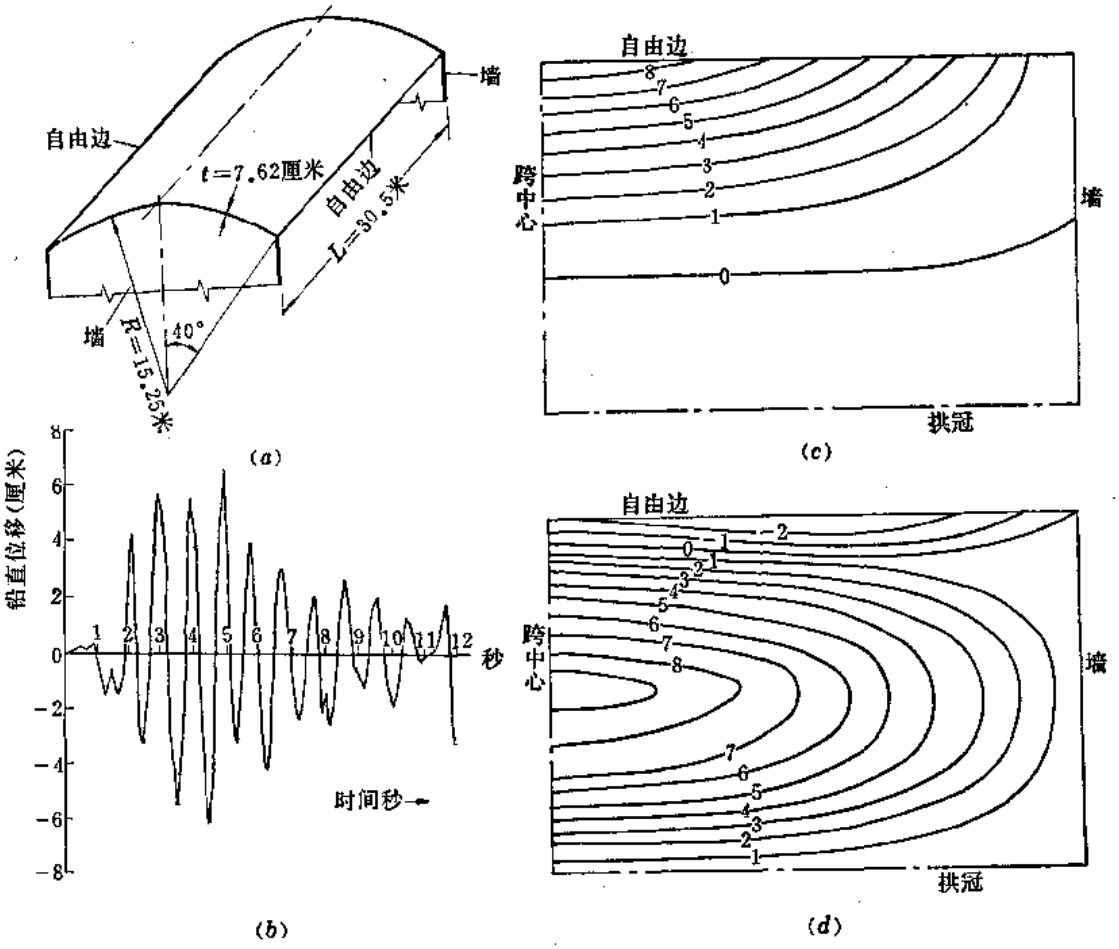


图 19-13 圆柱形薄壳的动力反应

（a）圆柱壳屋盖尺寸；（b）在1940年厄森杜罗地震作用下自由边界中点的铅直位移；（c）自由振动第一振型（铅直分量）；（d）自由振动第二振型（铅直分量）

图（ b ）中表示了在一个实际地震作用下，计算的壳体自由边中点的铅直位移变化过程，图（ c ）和（ d ）表示壳体第一及第二振型的铅直分量。由于双向对称，只需取出四分之一计算。用三角形平板单元组合为壳体，壳体膜应力为三角形单元的平面应力，壳体弯曲应力为三角形板单元的弯曲应力[18]。

§19-14 地下结构的非线性动力反应

计算地下结构的动力反应时，必须考虑结构与周围介质的相互作用。周围介质一般是土壤或岩石，其应力-应变关系通常是非线性的，而且加荷与卸荷的变形规律是不一致的，如图19-14所示。这些应力-应变关系应从现场或实验室的动力试验求得。计算地下结构非线性动力反应宜采用荷载增量法和运动方程的数值积分法。土壤和岩石的应力-应变关系通常用八面体应力和应变表示。例如，八面体正应力增量为 $\Delta\sigma_{oct}$，八面体正应变增量为 $\Delta\varepsilon_{oct}$，于是体积变形模量为

$$K\cong\frac{\Delta\sigma_{oct}}{\Delta\varepsilon_{oct}}.$$

又设八面体剪应力增量为 $\Delta\tau_{oct}$，八面体剪应变增量为 $\Delta\gamma_{oct}$，则剪切变形模量为

$$G\cong\frac{\Delta\tau_{oct}}{\Delta\gamma_{oct}}.$$

荷载增量法每步计算中所需的变形模量均可根据上述二式计算。通常加荷阶段与卸荷阶段的变形模量是不同的。图19-15表示一轴对称地下结构的计算网格。采用等参数轴对称有限单元，周围土壤划分为47个四边形单元，结构本身划分为三个薄板单元，共计63个结点。采用线性加速度法计算，非线性应力-应变关系是由单轴动力试验求得。对同一结构曾进行了实验，爆炸压力如图19-16（ a ）所示。试验和计算结果见图19-16（ b ）。由图可见，非线性计算结果与试验资料符合较好，存在着残余变形。线性计算结果与试验资料符合较差，它的一个重要缺点是没有残余变形。

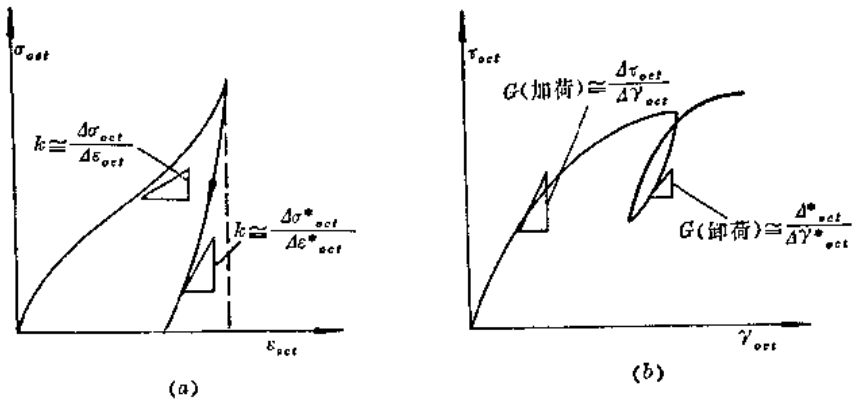


图 19-14 动荷载作用下应力-应变关系（星号 * 表示卸荷）
（a）体积应力-体积应变关系；（b）剪应力-剪应变关系

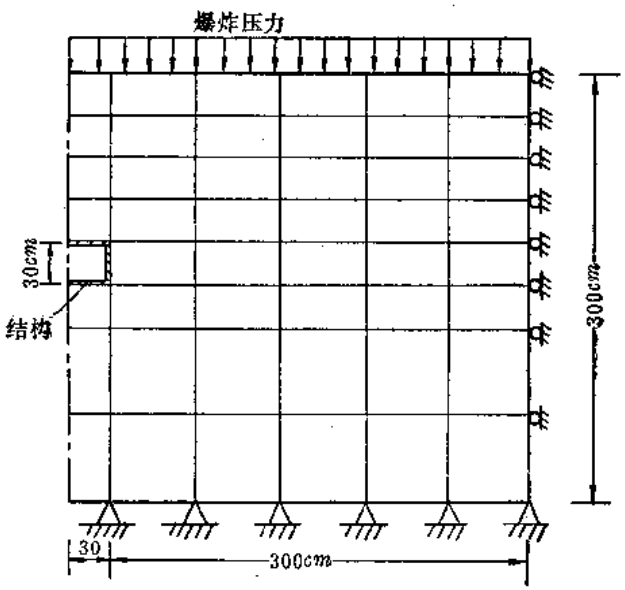
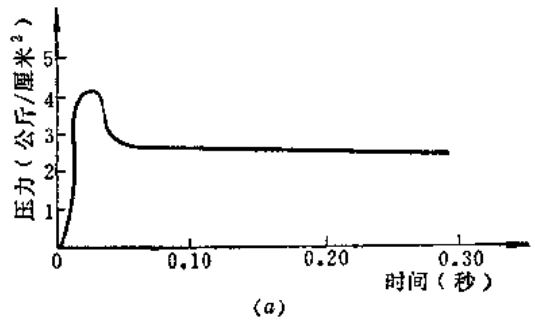
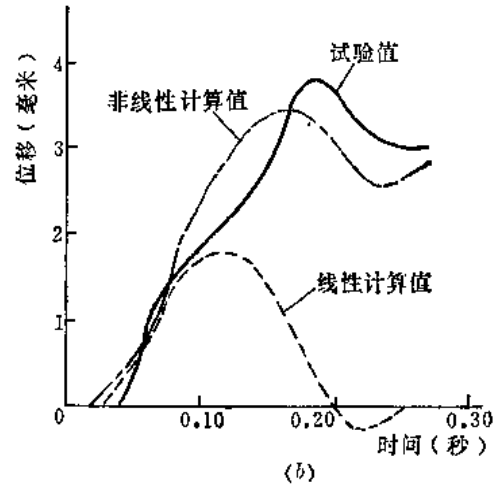


图 19-15　轴对称地下结构计算网格



(a)



(b)

图 19-16　爆炸压力及固体介质的动力反应

(a)随时间变化的爆炸压力；(b)固体介质中一点的位移

第二十章　弹性稳定问题

在薄壁结构设计中，必须计算结构的弹性稳定性。有限单元法在这方面也具有广泛的用途。结构的弹性稳定分析通常分为两步，第一步用线性分析方法求出结构的内力分布；第二步计算结构失稳的临界荷载。第一步所用计算方法已在以前各章叙述。本章将阐明在已知内力分布规律的条件下，如何用有限单元法计算结构失稳的临界荷载，在推导有关公式时，将利用最小势能原理。

§20-1　梁单元的几何刚度矩阵

考虑等截面梁单元 ij 如图20-1所示，在此单元上作用着轴向力 F_x，并假定轴向力的大小不受侧向挠度 w 的影响。

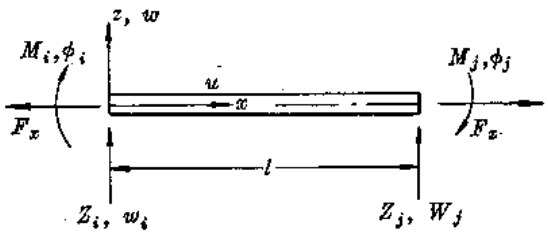


图 20-1　梁单元

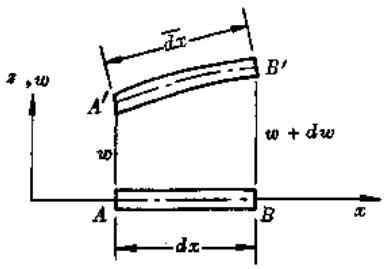


图 20-2　梁的变位

挠度 w 在梁的中和轴上将引起附加应变。如图20-2所示，从梁单元中取出一微段 AB，长度为 dx，在产生挠度 w 后，其长度将改变为

$$\overline{dx}=\sqrt{(dx)^2+\left(\frac{dw}{dx}dx\right)^2}=dx\sqrt{1+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2}.$$

利用二项式定理，将上式右端展开，得到

$$\overline{dx}=dx\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\cdots\right].$$

在上式右端，略去第三项以后的高次项，得到挠度 w 在梁中和轴上引起的附加应变如下：

$$\varepsilon_x^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2.$$

由于侧向挠度 w，梁中和轴的曲率为 $\frac{d^2w}{dx^2}$，因此梁的弯曲应变为

$$\varepsilon_x^{\mathrm{II}}=-z\frac{d^2w}{dx^2}.$$

由于轴向变位 u 而在梁内产生的应变为

$$\varepsilon_x^{\text{Ⅲ}}=\frac{du}{dx}.$$

把以上三项迭加起来，得到梁单元内的应变如下

$$\varepsilon_x=\frac{du}{dx}-z\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2. \tag{20-1}$$

梁单元的应变能由下式计算

$$U^e=\frac{1}{2}\int E\varepsilon_x^2 d(V0l). \tag{20-2}$$

其中 $V01$ 代表体积。把式（20-1）代入上式，并令 $d(V0l)=dAdx$，得到

$$U^e=\frac{1}{2}\int_L\int_A E\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+z^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^4 -2z\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)-z\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\right\}dAdx. \tag{20-3}$$

今在梁的厚度方向积分，把坐标原点放在梁截面的形心上，有

$$\int_A dA=A,\quad \int_A zdA=0,\quad \int_A z^2dA=I.$$

故由式（20-3）有

$$U^e=\frac{1}{2}\int_L E\left\{A\left(\frac{du}{dx}\right)^2+I\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+A\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{A}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^4\right\}dx. \tag{20-4}$$

轴向力 F_x 与轴向位移 u 之间存在关系式

$$F_x=A\frac{du}{dx}. \tag{20-5}$$

F_x 以拉力为正，压力为负。在（20-4）式中略去高阶项 $\frac{A}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^4$，并把（20-5)式代入，得到

$$U^e=\frac{1}{2}\int_L\left\{EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2+EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+F_x\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}dx. \tag{20-6}$$

由上式可知，梁单元应变能可分为轴向应变能 U_a^e 和弯曲应变能 U_b^e 两部分，即

$$U^e=U_a^e+U_b^e. \tag{20-7}$$

式中

$$U_a^e=\frac{1}{2}\int_L EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx, \tag{20-8}$$

$$U_b^e=\frac{1}{2}\int_L\left\{EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+F_x\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}dx. \tag{20-9}$$

如前所述，弹性稳定分析分为两步计算，第一步用线性方法计算结构内力分布，这一

步所考虑的就是轴向应变能U_a^e；第二步计算结构失稳临界荷载时，须要考虑的是弯曲应变能U_b^e，如式（20-9）。

梁单元的结点位移也可分为两部分，即轴向位移$\{\delta_a^e\}$和弯曲位移$\{\delta_b^e\}$：

$$\{\delta_a^e\}=\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix},\quad \{\delta_b^e\}=\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}.$$

梁单元的挠度w可用结点弯曲位移$\{\delta_b^e\}$表示如下：

$$w=[N_1\ \ N_2\ \ N_3\ \ N_4]\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}=[N]\{\delta_b^e\}. \tag{20-10}$$

由上式求出w对x的一阶及二阶导数：

$$\frac{dw}{dx}=[g]\{\delta_b^e\}, \tag{20-11}$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}=[B]\{\delta_b^e\}. \tag{20-12}$$

式中

$$[g]=\left[\frac{dN}{dx}\right]=\left[\frac{dN_1}{dx}\cdots\frac{dN_4}{dx}\right], \tag{20-13}$$

$$[B]=\left[\frac{d^2N}{dx^2}\right]=\left[\frac{d^2N_1}{dx^2}\cdots\frac{d^2N_4}{dx^2}\right]. \tag{20-14}$$

由矩阵代数可知

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)^2=\{\delta_b^e\}^T[g]^T[g]\{\delta_b^e\},$$

$$\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2=\{\delta_b^e\}^T[B]^T[B]\{\delta_b^e\}.$$

所以把（20-11）、（20-12）二式代入式（20-9），得到梁单元弯曲应变能如下：

$$U_b^e=\frac{1}{2}\{\delta_b^e\}^T[k_b]\{\delta_b^e\}+\frac{1}{2}\{\delta_b^e\}[k_g]\{\delta_b^e\}. \tag{20-15}$$

式中

$$[k_b]=\int_L[B]^TEI[B]dx, \tag{20-16}$$

$$[k_g]=\int_L[g]^TF_x[g]dx. \tag{20-17}$$

矩阵$[k_b]$是通常的梁单元弯曲刚度矩阵，矩阵$[k_g]$是由于轴向力F_x的影响而增加的刚度矩阵。换句话说，在考虑轴向力F_x的影响后，梁单元的刚度矩阵为

$$[k]=[k_b]+[k_g]. \tag{20-18}$$

当轴向力F_x为拉力时，$[k_\sigma]$为正值，梁单元刚度矩阵增加了。反之，当F_x为压力时，$[k_\sigma]$为负值，梁单元刚度矩阵将减小。由（20-17）式可知，矩阵$[k_\sigma]$与材料物理常数E等无关，只与单元的几何尺寸有关，因此称为几何刚度矩阵。$[k_\sigma]$也与初始内力F_x有关，因此有的文献也称为初应力刚度矩阵。

§20-2 板单元的几何刚度矩阵

根据与上节类似的分析，在薄板中，挠度w在板中面内引起的附加应变为(图20-3)：

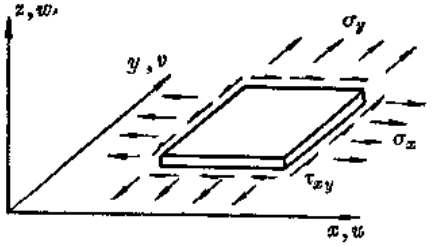


图 20-3 板单元

$$\varepsilon_x^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_y^{\mathrm{I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad \gamma_{xy}^{\mathrm{I}}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

由于板的弯曲而产生的应变为

$$\varepsilon_x^{\mathrm{II}}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \varepsilon_y^{\mathrm{II}}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \gamma_{xy}^{\mathrm{II}}=-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}.$$

由于板中面内的位移u、v而产生的应变为

$$\varepsilon_x^{\mathrm{III}}=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y^{\mathrm{III}}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xy}^{\mathrm{III}}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}.$$

把以上各项叠加起来，得到薄板的应变-位移关系如下：

$$\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{\partial u}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\\ \varepsilon_y&=\frac{\partial v}{\partial y}-z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\\ \gamma_{xy}&=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}-2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\qquad (20\text{-}19)$$

按照类似于上节的推导，可得到各向同性薄板的弯曲应变能如下：

$$\begin{aligned}U_b^e=\frac{D}{2}\iint_A\Bigg\{&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ &+2(1-\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg\}dA+\frac{1}{2}\iint_A\Bigg\{\sigma_x t\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ &+\sigma_y t\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+2\tau_{xy}t\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Bigg\}dA.\end{aligned}\qquad (20\text{-}20)$$

其中$D=\dfrac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$，$t$是板的厚度。$\sigma_x t$、$\sigma_y t$、$\tau_{xy}t$是板中面内力。上式右端第二大

项代表由于板中面内初始应力σ_x、σ_y、τ_{xy}而产生的应变能，可用矩阵表示如下

$$\frac{1}{2}\int_A \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} t dA。$$

其中

$$[k_{gx}]=t\int_A\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]^T\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]dA,$$

$$[k_{gy}]=t\int_A\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]^T\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]dA, \qquad (20\text{-}29)$$

$$[k_{gxy}]=2t\int_A\left[\frac{\partial N}{\partial x}\right]^T\left[\frac{\partial N}{\partial y}\right]dA.$$

由（20-27）式可见，板单元的几何刚度矩阵与材料物理常数无关，它不但适用于各向同性板，也适用于各向异性板。另外，如果事先不知道板平面内应力σ_x、σ_y、τ_{xy}，可以用同样网格由平面有限单元方法求出这些应力值。

§20-3 整 体 分 析

假定结构承受着两组荷载，如图20-4所示。一组是作用在板中面内的纵向荷载$\{F_0\}$，它在板内引起应力$\{\sigma\}=[\sigma_x\ \sigma_y\ \tau_{xy}]^T$，另一组是横向荷载$\{P\}$，它引起板的弯曲。

我们假定已预先求出纵向荷载作用下板中面内的应力$\{\sigma\}$。下面只分析在横向荷载作用下板的弯曲。

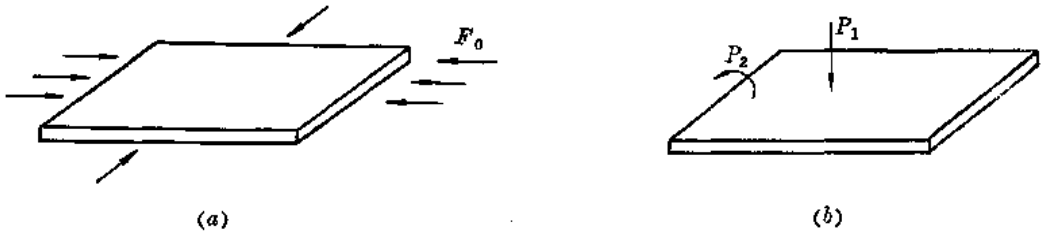


图 20-4 作用于板的荷载
(a)纵向荷载；(b)横向荷载

由于应变能是纯量，整个结构的应变能等于各单元应变能之和，因此在横向荷载作用下，板弯曲应变能为

$$U=\Sigma U^e=\frac{1}{2}\{\delta_b\}^T[K_b]\{\delta_b\}+\frac{1}{2}\{\delta_b\}^T[K_g]\{\delta_b\}. \qquad (20\text{-}30)$$

其中

$$[K_b]=[\Sigma k_b], \qquad (20\text{-}31)$$

$$[K_g]=[\Sigma k_g]. \qquad (20\text{-}32)$$

设由于横向荷载$\{P\}$，板的外力势为

$$V=\{\delta_b\}^T\{P\}.$$

整个结构的势能是

$$\Pi_p=U-V=\frac{1}{2}\{\delta_b\}^T[K_b]\{\delta_b\}+\frac{1}{2}\{\delta_b\}^T[K_g]\{\delta_b\}-\{\delta_b\}^T\{P\}.$$

由最小势能原理可知势能的一阶变分等于零，于是得到下式

$$([K_b]+[K_g])\{\delta_b\}=\{P\}. \qquad (20\text{-}33)$$

当已知纵向荷载，而且横向荷载不为零时，由上式可求出结构的位移$\{\delta_b\}$。在这里，几何刚度矩阵$[K_g]$反映了纵向荷载对横向刚度的影响。

从以上两节的分析可知，几何刚度矩阵正比于纵向荷载，如果纵向荷载按比例因子λ增加，即

$$\{F\}=\lambda\{F_0\}.$$

则几何刚度矩阵也相应地增加为$\lambda[K_g]$，因此式（20-33）变成

$$([K_b]+\lambda[K_g])\{\delta_b\}=\{P\}.$$

当纵向荷载比较小时，$\{\delta_b\}$正比于$\{P\}$，特别是，当$\{P\}=0$时，$\{\delta_b\}=0$。当纵向荷载达到临界荷载

$$\{F_{cr}\}=\lambda_{cr}\{F_0\} \qquad (20\text{-}34)$$

时，结构失去弹性稳定，此时即使横向荷载$\{P\}=0$，结构仍能维持一定的变位，即

$$([K_b]+\lambda[K_g])\{\delta_b\}=0. \qquad (20\text{-}35)$$

上式是齐次方程组，为了它能有异于零的解，系数矩阵的行列式必须等于零（参阅§24-10），即

$$|[K_b]+\lambda[K_g]|=0. \qquad (20\text{-}36)$$

由上式求出最小特征值λ_{cr}，代入式（20-34）即可求出结构失稳的临界荷载。

对于大型问题，直接由式（20-36）求特征值是颇不容易的。通常采用迭代方法求解，把式（20-35）改写为

$$\frac{1}{\lambda}\{\delta_b\}=-[K_b]^{-1}[K_g]\{\delta_b\}. \qquad (20\text{-}37)$$

经过迭代计算，由上式可求出最小特征值λ_{cr}及相应的特征向量。工程上所感兴趣的只是一个最小特征值，与动力问题比较起来，计算工作量总要小一些。

结点变位$\{\delta_b\}$中，既包含了线变位w，又包含了角变位ϕ，通常只要利用线变位，就可以足够精确地计算结构的临界荷载。因此可以象计算结构自振频率时一样，减少结点自由度，请参阅§19-5。

§20-4 杆件结构算例

对于图20-1所示的梁单元，取位移函数如下

$$w=[L_1^2(3-2L_1)\quad -L_1^2L_2l\quad L_2^2(3-2L_2)\quad L_1L_2^2l]\begin{Bmatrix} w_i \\ \varphi_i \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}. \qquad (20\text{-}38)$$

其中 $L_1=1-\frac{x}{l}$，$L_2=\frac{x}{l}$.

梁单元弯曲刚度矩阵已见第一章式（1-24），由式（20-38）可求得

$$[g]=\left[\frac{dN}{dx}\right]=\left[-\frac{6L_1L_2}{l}\quad -L_1(L_1-2L_2)\quad \frac{6L_1L_2}{l}\quad -L_1(L_2-2L_1)\right].$$

由式（20-17），得到梁单元几何刚度矩阵如下：

$$[k_g]=\frac{F_x}{30l}\begin{array}{c}\begin{matrix} w_i & \varphi_i & w_j & \varphi_j \end{matrix}\\ \begin{bmatrix} 36 & -3l & -36 & -3l \\ -3l & 4l^2 & 3l & -l^2 \\ -36 & 3l & 36 & 3l \\ -3l & -l^2 & 3l & 4l^2 \end{bmatrix}\end{array}. \qquad (20\text{-}39)$$

利用上述几何刚度矩阵，可以计算杆件结构的临界荷载。例如，对于图20-5所示的柱子，长度为L，承受荷重P，即

$$F_x=-P.$$

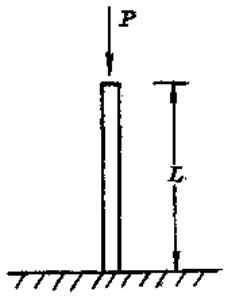


图 20-5 柱

作为一个简例，只取一个单元，由边界条件可知

$$w_j=\varphi_j=0,$$

只有两个自由度，即w_i和φ_i，由式（1-24）及式（20-39），刚度矩阵为

$$[k]=[k_b]+[k_g]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & -6l \\ -6l & 4l^2 \end{bmatrix}-\frac{P}{30l}\begin{bmatrix} 36 & -3l \\ -3l & 4l^2 \end{bmatrix}. \qquad (a)$$

令

$$\omega=\frac{Pl^2}{30EI}. \qquad (b)$$

则

$$[k]=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12-36\omega & -6l-3\omega l \\ -6l-3\omega l & 4l-4\omega l^2 \end{bmatrix}.$$

由上述刚度矩阵的行列式等于零的条件，得到

$$\begin{vmatrix} 12(1-3\omega) & -3l(2+\omega) \\ -3l(2+\omega) & 4l(1-\omega l) \end{vmatrix}=0.$$

上式的两个根是$\omega_1=0.0829$，$\omega_2=1.072$。取其中较小的根ω_1代入式（b），得到柱的临界荷载如下

$$P_{cr}=0.251\frac{\pi^2EI}{l^2}.$$

与理论解$P_{cr}=0.250\frac{\pi^2EI}{l^2}$相比，误差为0.4%。如果增加单元数目，计算精度还可以进一步提高。

§20-5 弹性薄板算例

在选定薄板单元的挠度函数$w=[N]\{\delta_i^e\}$以后，由式（20-27）可以求出几何刚度矩阵。（矩形单元的几何刚度矩阵见文献[127]，三角形单元的几何刚度矩阵见文献[5]）。利用这些单元几何刚度矩阵，不难求出各种弹性薄板纵向屈曲的临界荷载，下面给出一些算例。

一、矩形薄板单元

对于图20-6所示矩形薄板，平面尺寸为$2a\times 2b$，厚度为t，文献[127]用矩形单元计算了屈曲临界荷载，在各种不同单元划分下的计算结果列于表20-1。临界荷载用下式表示：

$$\sigma_{cr}=\frac{k\pi^2 D}{4b^2 t}.$$

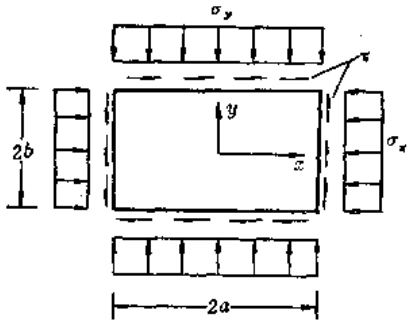


图 20-6 矩形薄板

单向受压时，式中σ_{cr}表示σ_x的临界值。四边受纯剪时，σ_{cr}代表剪应力τ的临界值。表中最后一个例子是带有纵向加强肋的方板，加强肋的截面积为A_r，转动惯量为I，并且

$$\frac{A_r}{2bt}=0.20,\quad \frac{EI}{2bD}=5.$$

由表20-1可见，随着计算网格的加密，计算误差迅速减小。

文献[127]还计算了一个正交异性矩形薄板（$a/b=2$）的纵向屈曲问题。在x方向受压，材料常数及板的尺寸如下：

$$E_x=2.11\times 10^6 kg/cm^2,\quad E_y=0.351\times 10^6 kg/cm^2,$$
$$G=0.702\times 10^6 kg/cm^2,\quad \mu_{xy}=0.3,\quad \mu_{yx}=0.05,$$
$$2a=61cm,\quad t=0.254cm.$$

表 20-1 矩形薄板（尺寸$2a\times 2b$）在不同单元划分下的纵向屈曲荷载参数$k\left(\sigma_{cr}=\frac{k\pi^2 D}{4b^2 t}\right)$

板边长比 a/b	荷载	边界支持条件	准确 k	4×4 k	4×4 误差	6×6 k	6×6 误差	8×8 k	8×8 误差	10×10 k	10×10 误差
1	单向压缩σ_x	四边简支	4	3.77	−5.75%	3.887	−2.80%	3.933	−1.68%	3.96	−1.00%
1	单向压缩σ_x	四边固定	10.07	9.284	−7.80%	9.610	−4.56%	9.782	−2.86%	9.889	−1.79%
1	双向压缩 $\sigma_x=\sigma_y$	四边固定	5.315	4.975	−6.38%	5.078	−4.46%	5.160	−2.92%	5.217	−1.84%
1.25	四边受剪切 τ	四边简支	7.71	6.945	−9.92%	7.247	−6.00%	7.45	−3.37%	—	—
1	单向压缩σ_x	四边简支纵向加强肋 A_r, EI $\frac{A_r}{2bt}=0.20,\ \frac{EI}{2bD}=5$	9.72	9.461	−2.66%	9.576	−1.48%	9.625	0.98%	9.651	0.71%

此时在$\{M\}=[D]\{\psi\}$式中的薄板弯曲弹性矩阵为

$$[D]=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix},$$

$$D_{11}=\frac{E_x t^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})}, \qquad D_{22}=\frac{E_y t^3}{12(1-\mu_{xy}\mu_{yx})},$$

$$D_{33}=\frac{Gt^3}{12}, \qquad D_{12}=\mu_{yx}D_{11}.$$

用10×10网格，有限单元法求得的临界荷载为183.0公斤，准确值为184.1公斤，误差为−0.6%。

二、三角形薄板单元

三角形板单元因可适应不规则几何形状，实用价值更大。文献[5]按照图20-7所示网格，用两种三角形单元计算了受单向压缩的方形薄板的屈曲荷载，计算值与准确值之比见表20-2，其中$T9$是9自由度三角形板单元，$T18$是18自由度三角形板单元（每结点6自由度），$R12$是12自由度矩形板单元。由于对称，只须取出四分之一计算，其中矩形单元计算值取自文献[127]，由表可见，$T18$具有较高的精度，当然这种单元的刚度矩阵也比较复杂。

对于图20-8所示等腰三角形板、各边简支、在均匀压应力σ作用下的纵向屈曲问题，用$T18$三角形单元按所示网格计算，得到的临界荷载参数$k=4.648$[6]，准确值为$k=4.50$。相差3.3%，临界荷载为

$$\sigma_{cr}=k\frac{\pi^2 D}{a^2 t}.$$

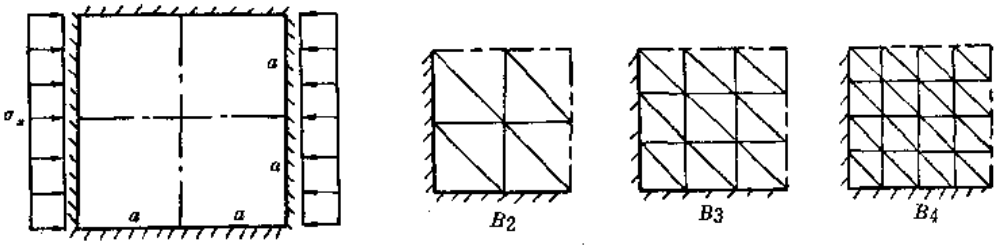


图 20-7　方形薄板屈曲荷载计算网格

表 20-2　　单向压缩方形薄板屈曲荷载计算值与准确值之比

网格 \ 单元 \ 边界	四边简支			四边固定		
	$R12$	$T9$	$T18$	$R12$	$T9$	$T18$
B_2	0.943	0.934	1.001	0.923	0.914	1.001
B_3	0.972	—	1.001	0.956	—	—
B_4	0.983	0.968	—	0.972	—	—

在上述各种板单元中，位移协调单元$T18$给出临界荷载的上界，位移非协调单元$T9$和$R12$给出临界荷载的下界。

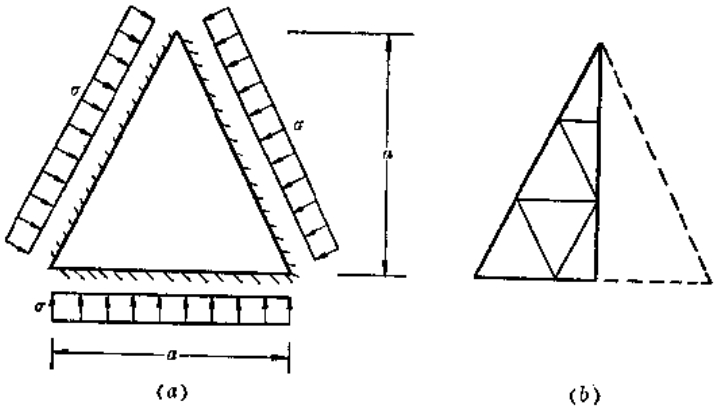


图 20-8　三角形薄板弹性稳定计算
(a)荷载；(b)网格

第二十一章 断裂力学问题

§21-1 绪 言

断裂力学是最近一、二十年才发展起来的新兴学科，由于生产的推动，短短时间里，在实验和理论方面均有迅速发展。

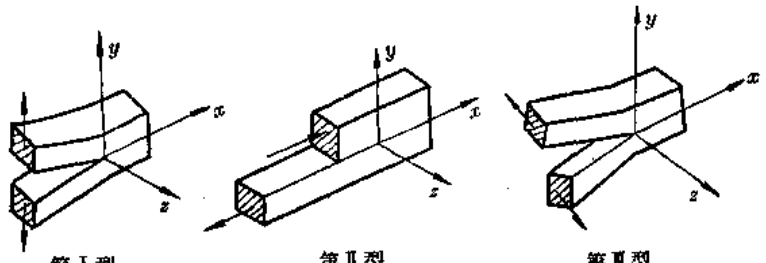
早在1920年，格里菲斯用材料内部有缺陷（裂纹）的观点解释了材料实际强度仅为理论强度的千分之一的现象，同时认为，裂纹体受载时，如果裂纹扩展所需的表面能小于弹性能的释放值，则裂纹就扩展并将最后导致破断。这一理论在玻璃中得到了证实。但因它只适用于完全弹性体，即完全脆性材料，所以没有得到发展。

第二次世界大战期间，美国近2000艘全焊接油轮在使用中发生了一千多次脆性破坏事故，其中238艘完全报废。1950年美国北极星导弹固体燃料发动机机壳在实验发射时爆炸，该壳体用高强度钢制造，屈服强度14000公斤/厘米^2，经过传统的韧性试验被认为合格，破坏应力据估计不到屈服强度的一半。事后进行了大量壳体水压实验，发现脆性破坏总是由宏观裂纹（0.1毫米至1厘米）引起的。这种裂纹可以是冶金缺陷，可以在加工过程中产生，也可以在使用过程中形成。对许多构件来说，这种宏观裂纹的存在常常是不可避免的。断裂力学就是研究裂纹顶端附近的应力、应变和裂纹扩展规律的新兴学科。

在混凝土结构中也存在着裂纹扩展问题，例如，混凝土坝在施工过程中由于气温剧烈变化往往出现一些表面裂缝，其深度一般只有几厘米，在这些深度不大的表面裂缝中，有一些后来却进一步发展为深层裂缝，甚至贯穿整个坝块，造成严重后果。

在一般的应力场中，按裂缝的位置与应力的方向间的关系，裂缝扩展共有三种类型。第Ⅰ型称为张开型，第Ⅱ型称为剪切型，第Ⅲ型称为扭转型，如图21-1所示。根据弹性力学分析，裂纹顶端附近的应力和位移均可用下述形式表示：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{ij}&=\frac{K}{\sqrt{r}}f_{ij}(\theta),\\ u_i&=K\sqrt{r}\,f_i(\theta).\end{aligned}\right\} \tag{21-1}$$



第Ⅰ型（张开型）　第Ⅱ型（剪切型）　第Ⅲ型（扭转型）

图 21-1 裂纹扩展类型

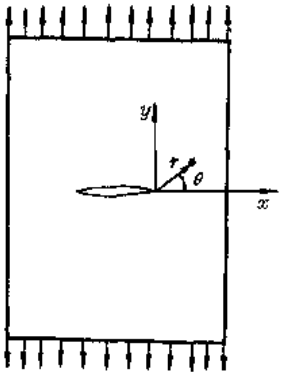


图 21-2

其中（r，θ）为以裂纹顶点为原点的极坐标，$f_{ij}(\theta)$和$f_i(\theta)$对每种裂纹来说是一确定的函数。参阅图21-2。

以工程上最常见的、也是最危险的张开型裂纹为例，在裂纹顶点附近的应力分量和位移分量可表示为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],\\ \sigma_y&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],\\ \tau_{xy}&=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{21-2}$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{(1+\mu)K_{\mathrm{I}}}{2E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2s-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right],\\ v&=\frac{(1+\mu)K_{\mathrm{I}}}{2E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2s+1)\sin\frac{\theta}{2}-\sin\frac{3\theta}{2}\right].\end{aligned}\right\}\tag{21-3}$$

对于剪切型即Ⅱ型裂缝来说，裂缝尖端附近的应力分量和位移分量为

$$\sigma_x=\frac{-K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left[2+\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$\sigma_y=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2},$$

$$\tau_{xy}=\frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left[1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$u=\frac{(1+\mu)K_{\mathrm{II}}}{2E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2s+3)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right],$$

$$v=\frac{-(1+\mu)K_{\mathrm{II}}}{2E}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\left[(2s-2)\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}\right].$$

在平面应力条件下

$$s=\frac{3-\mu}{1+\mu},$$

$$w=-\frac{\mu}{E}\int(\sigma_x+\sigma_y)dz,$$

$$\sigma_z=0.$$

在平面应变条件下

$$s=3-4\mu,$$

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y),$$

$$w=0.$$

其中E、μ分别为材料的弹性模量和泊松比。因此，对于Ⅰ型裂纹来说，裂纹前缘的应力场（和位移场）就决定于因子K_{I}，它取决于外力的大小和分布、物体的几何条件以及裂

纹的形状和位置。同样，对于Ⅱ型和Ⅲ型裂纹来说，裂纹前缘的应力场则取决于相应的因子$K_{\text{Ⅱ}}$和$K_{\text{Ⅲ}}$、$K_{\text{Ⅰ}}$、$K_{\text{Ⅱ}}$、$K_{\text{Ⅲ}}$称为应力强度因子。

实验表明，当$K_{\text{Ⅰ}}$、$K_{\text{Ⅱ}}$、或$K_{\text{Ⅲ}}$达到临界值$K_{\text{Ⅰ}O}$、$K_{\text{Ⅱ}O}$、$K_{\text{Ⅲ}O}$时，裂纹就失稳扩展。$K_{\text{Ⅰ}O}$、$K_{\text{Ⅱ}O}$、$K_{\text{Ⅲ}O}$均取决于材料的性能，相应于不同的材料及不同的组织状态就有不同的数值。它们表征材料对裂纹扩展的抗力，是从断裂力学引出的衡量材料韧性的新指标。

在三种裂纹扩展型式中，张开型最常见，也最危险，研究得也比较多。$K_{\text{Ⅰ}O}$称为张开型扩展的平面应变断裂韧度，裂纹扩展的临界条件可写为

$$K_{\text{Ⅰ}}=K_{\text{Ⅰ}O}. \tag{21-4}$$

就是说，当应力强度因子$K_{\text{Ⅰ}}$达到断裂韧度$K_{\text{Ⅰ}O}$时，裂纹将扩展，导致结构破断。$K_{\text{Ⅰ}O}$是通过材料试验测定的，而应力强度因子$K_{\text{Ⅰ}}$则是通过结构分析求出的，断裂力学的一个重要内容就是根据特定的结构形式、荷载大小和分布及裂纹情况计算应力强度因子。常用的方法有复变函数法、积分变换法、边界配位法和有限单元法。但是前面几种方法只有当条件比较简单时才能给出计算结果来，对于实际工程中经常出现的比较复杂的情况，只有有限单元法能够计算出来。因此有限单元法在断裂力学的分析计算中得到了广泛的应用。

§21-2 直 接 法

在线弹性断裂力学中，用有限单元法计算裂缝尖端的应力强度因子，最简单的方法是直接法，即先用有限单元法求得裂缝尖端附近的应力分量或位移分量的数值解，再利用裂缝尖端应力场的表达式（21-2）或（21-3），直接推算裂纹尖端的应力强度因子[184]。

推算应力强度因子，可以利用裂缝尖端的位移值，也可以利用应力值，现分别说明。

（1）位移法

把坐标原点放在裂纹尖端，如图21-2所示，令$\theta=\pi$，对于平面应变问题，由（21-3）式可得到裂缝尖端附近的垂直位移为

$$v=\frac{4(1-\mu^2)}{\sqrt{2\pi}E}K_{\text{Ⅰ}}\sqrt{r}.$$

在上式中我们忽略了r的高次项，如果把高次项也包括进去，将具有如下形式：

$$v=\frac{4(1-\mu^2)}{\sqrt{2\pi}E}K_{\text{Ⅰ}}\sqrt{r}\left(1+a_1\frac{r}{l}+\cdots\right).$$

把上式整理一下，得到

$$\frac{\sqrt{2\pi}Ev}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}}=K_{\text{Ⅰ}}\left(1+a_1\frac{r}{l}+\cdots\right). \tag{21-5}$$

由上式取极限$r\to 0$，可得到应力强度因子如下：

$$K_{\text{Ⅰ}}=\lim_{r\to 0}\left(\frac{\sqrt{2\pi}Ev}{4(1-\mu^2)\sqrt{r}}\right). \tag{21-6}$$

有限单元法只能给出各结点上的近似位移v^*，而且在靠近裂缝尖端$r=0$处，有限单元法的

误差较大，不能直接采用上述极限过程，为了克服这个困难，可采用如下方法。设v^*是裂缝尖端附近用有限单元法求出的位移值，令

$$K_{\mathrm{I}}^{*}=\frac{\sqrt{2\pi}\,Ev^{*}}{4(1-\mu^{2})\sqrt{r}}. \tag{21-7}$$

由（21-5）式可知，当$\frac{r}{l}$较小时，K_{I}^{*}可近似地看做是r的线性函数，以K_{I}^{*}为纵坐标，以r为横坐标，将有关点子绘出，用最小二乘法的方法处理，通过这些点绘出一条最佳符合直线，此直线与纵坐标轴的交点即为应力强度因子K_{I}的估算值。

由于有限单元法所给出的只是近似的数值解，按上述方法外推而得到的K_{I}估算值显然是与网格的粗细有关的，网格愈细，位移值愈准确，从而估算的K_{I}值也愈准确。

图21-3（a），表示了一个紧凑拉伸试件，对这一试件用五种不同的网格进行了有限单元法计算，根据算出的位移，用上述方法整理，得到一组曲线如图21-3（b），图中纵横坐标分别是无量纲量$\frac{K_{\mathrm{I}}^{*}BW^{\frac{1}{2}}}{P}$和$\frac{r}{W}$，其中$B$是试件的厚度。图中最上面的一条直线

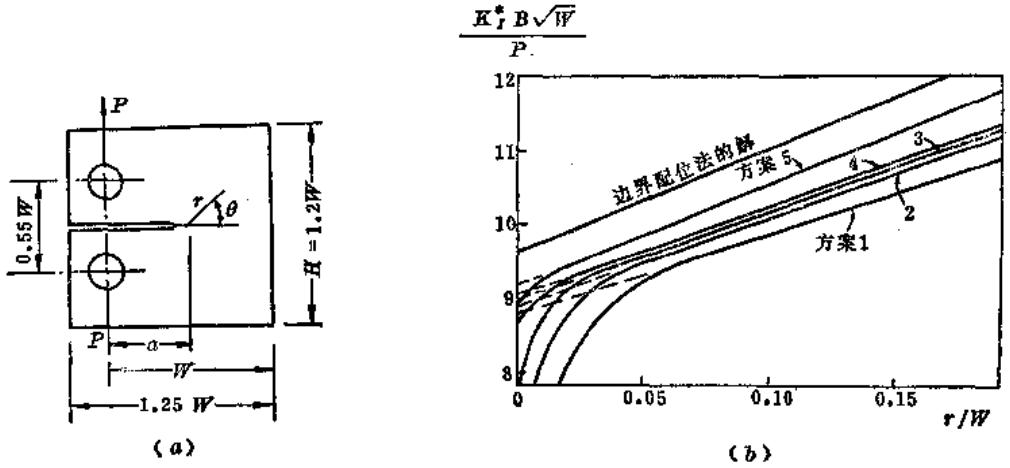


图 21-3　用有限单元法计算紧凑拉伸试件的K_{I}
（a）紧凑拉伸试件；（b）有限单元计算结果

表 21-1

方　　案	裂缝尖端附近 $(A/a^2)\times10^5$	试件外周边处 $(A/a^2)\times10^2$
1	312	2
2	78	2
3	20	2
4	1.2	2
5	1.2	1

注　表中A代表有限单元网格面积（mm^2），a为试件裂缝长度（mm）。

是用边界配位法得到的比较精确的解，其余五条直线分别代表按五种不同粗细网格用有限单元法得到的近似解，五种方案所用网格的粗细度可参看表21-1。由此可见，采用最细网格的第5方案，按有限单元法求解所得直线最靠近较精确的那条直线。由表21-1及图21-3（b）的方案4、5两直线可见，试件外周边处有限元网格的大小对于所求得的K_{I}值的精确度也有影响。

（2）应力法

取坐标如图21-2所示，把原点放在裂

纹尖端，令$\theta=0$，对于平面应变问题，由（21-2）式可得到裂纹尖端附近的垂直应力为

$$\sigma_y=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}.$$

在上式中也忽略了r的高次项，如果把高次项包括进来，将具有如下形式：

$$\sigma_y=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\left(1+b_1\frac{r}{l}+\cdots\right).$$

把上式整理一下，得到

$$\sqrt{2\pi r}\ \sigma_y=K_{\mathrm{I}}\left(1+b_1\frac{r}{l}+\cdots\right). \tag{21-8}$$

由上式取极限$r\to 0$，可得到应力强度因子如下：

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to 0}\left(\sqrt{2\pi r}\ \sigma_y\right). \tag{21-9}$$

如前所述，由于有限单元法只能给出各单元的近似应力σ_y^*，而且在靠近裂缝尖端处，误差较大，所以也不能采用极限过程，可令

$$K_{\mathrm{I}}^*=\sqrt{2\pi r}\ \sigma_y^*. \tag{21-10}$$

由（21-8）式可知，当$\frac{r}{l}$很小时，K_{I}^*可以看做是r的近似的线性函数，如位移法一样，以K_{I}^*为纵坐标，以r为横坐标，把有关点子绘出，作一直线通过多数点子，并外推至$r=0$处，该直线与纵坐标轴的交点即是所求的应力强度因子K_{I}的估算值。

应力法与位移法并没有实质上的区别，目前有限单元法多先求出位移，而应力是位移的一阶导数，故位移的精度较高，所以在以上两个方法中以位移法为较优。

总之，用直接法来计算裂纹尖端的应力强度因子，其手续虽较简单，也可利用有限单元法的通用程序，但其精确度却受到有限单元网格尺寸的影响，要保证计算结果具有足够的精度，往往要在裂缝尖端附近采用非常细的网格，所以是不够理想的计算方法。

§21-3 J-积　分　法

在连续介质力学中，为了分析切口或裂纹附近的应力场，常利用一些具有守恒性质的积分。对于平面裂纹问题，由赖斯（J.R.Rice）提出的所谓J-积分是与积分线路无关的线积分，也就是具有这种守恒性质的能量线积分之一，其定义如下[135]：

$$J=\int_{\Gamma}\left[W\,dy-\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds\right]. \tag{21-11}$$

其中W是单位体积内的应变能，对于线弹性体而言，$W=\frac{1}{2}\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}=\frac{1}{2}(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\tau_{xy}\gamma_{xy})$，$\vec{T}$是按积分曲线$\Gamma$的外法线方向来定义的张力矢量，$\vec{u}$是相应的位移矢量，在$\vec{T}$和$\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}$两矢量之间的“$\cdot$”号表示此两矢量的“点乘积”，$ds$则是沿积分曲线$\Gamma$所

取的一段微分弧长，Γ 是始于裂纹下边、终于裂纹上边的一条围线（参阅图 21-4）。赖斯利用格林公式和平衡方程证明，在小规模屈服条件下，在围绕裂纹尖端附近区域内，J-积分与积分线路无关，沿任一积分曲线 Γ 其数值恒为一常量。并证明在线弹性情况下，J-积分的数值就等于裂纹尖端附近区域内的应变能释放率g_{I}。因此，J 与应力强度因子 K_{I}之间存在如下关系：

$$K_{\mathrm{I}}=\sqrt{\frac{JE}{1-\mu^2}}\ （平面应变），\qquad （21-12）$$

$$K_{\mathrm{I}}=\sqrt{JE}\ （平面应力）。\qquad （21-13）$$

为了计算 J-积分的值，可用有限单元法求出裂缝尖端附近区域的应力、应变和位移分量，然后任选一个便于计算线积分的积分线路Γ，按J-积分的定义（21-11）式计算其数值。再由以上二式之一即可算出K_{I}。由于 J-积分的数值与积分线路无关，可以避开裂缝尖端应力剧烈变化的微小区域，因此具有较好的计算精度。并且可以选择不同的积分线路，以互相校核。J 积分反映了裂纹体的整体能量关系，并不要求在裂纹尖端附近具有特别高的局部精度，因此不要求单元分得很细很细。

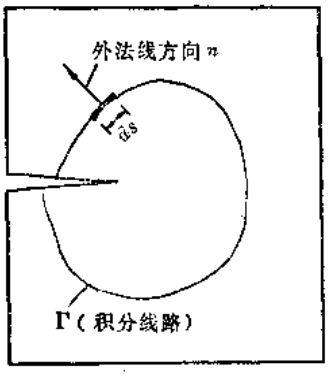


图 21-4

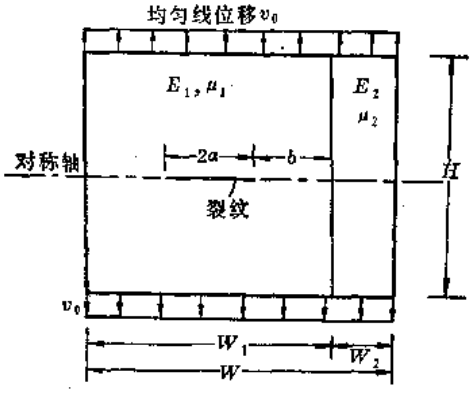


图 21-5 算例

如图21-5表示一平板，由两种不同弹性模量的材料所组成，在板的左部有一条长度为$2a$的贯穿性裂缝，整个平板的上、下两边有均匀的纵向位移v_0，要求计算裂缝尖端处的应力强度因子K_{I}。为了说明J-积分方法的应用，下面以裂纹的右尖端为例，按同样原理也可以计算裂纹左尖端的应力强度因子。

由于上下对称，只须取出上面一半来分析。根据对称关系，在切开面上的纵向位移 $v=0$。按应力梯度的不同而采用疏密不同的三角形网格，如图21-6（a）。用有限单元法求出各应力分量、应变分量和位移分量，沿围绕裂缝右尖端的任一积分线路都可以算出J-积分的数值。对于目前所用计算网格来说，以选用与网格边缘重合的矩形积分线路最为简单。

现将J-积分分解为J_W和J_T两部分，即

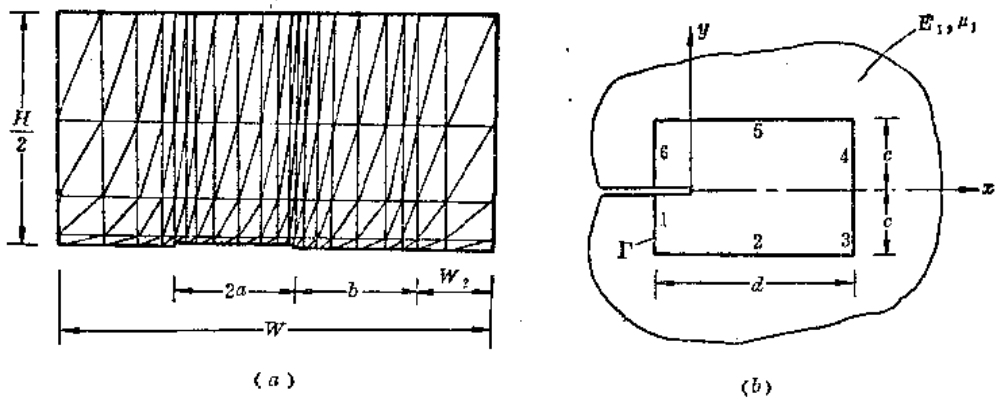
$$J=J_W-J_T。\qquad （a）$$

其中

$$J_W=\int_\Gamma W\,dy, \tag{b}$$

$$J_T=\int_\Gamma \vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds. \tag{c}$$

由图21-6（ b ）可见，积分线路Γ可分为1、2、3、4、5、6六段直线。现将（b）、（ c ）两式中的线积分从线段1开始，沿逆时针方向积分到线段6，于是



（a）　　（b）

图 21-6　算例

（a）计算网格；（b）积分线路Γ

$$J_W=\int_0^{-c}W_1dy+\int_{-c}^{-c}W_2dy+\int_{-c}^{0}W_3dy+\int_0^{c}W_4dy+\int_c^{c}W_5dy+\int_c^{0}W_6dy. \tag{d}$$

其中W_i代表在第i段内的W值。由对称关系可知，$W_1=W_6$，$W_3=W_4$，此外

$$\int_{-c}^{-c}W_2dy=0,\quad \int_c^{c}W_5dy=0.$$

（因沿此二线段$dy=0$ ）。故（d）式可简化为

$$J_W=2\left[\int_0^{c}W_4dy+\int_c^{0}W_6dy\right]. \tag{e}$$

下面按同样的积分线路来计算积分J_T：

$$J_T=\int_0^{c}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds+\int_c^{c+d}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds+\int_{c+d}^{2c+d}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds+\int_{2c+d}^{3c+d}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds$$
$$+\int_{3c+d}^{3c+2d}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds+\int_{3c+2d}^{4c+2d}\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}ds. \tag{f}$$

利用对称关系，上式可简化为

$$J_T=2\left[\int_0^{c}\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(4)}ds+\int_0^{d}\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(5)}ds+\int_0^{c}\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(6)}ds\right]. \tag{g}$$

在线段 4 上，$\vec{T}$可分解为σ_x和τ_{xy}，相应的位移矢量$\vec{u}$为u和v，因此

$$\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(4)}=\sigma_x^{(4)}\frac{\partial u^{(4)}}{\partial x}+\tau_{xy}^{(4)}\frac{\partial v^{(4)}}{\partial x}=\sigma_x^{(4)}\varepsilon_x^{(4)}+\tau_{xy}^{(4)}\frac{\partial v^{(4)}}{\partial x}.$$

在线段 5 上，$\vec{T}$可分解为σ_y和τ_{xy}，相应的$\vec{u}$为v和u，故

$$\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(5)}=\sigma_y^{(5)}\frac{\partial v^{(5)}}{\partial x}+\tau_{xy}^{(5)}\frac{\partial u^{(5)}}{\partial x}=\sigma_y^{(5)}\frac{\partial v^{(5)}}{\partial x}+\tau_{xy}^{(5)}\varepsilon_x^{(5)}.$$

在线段 6 上，$\vec{T}$可分解为σ_x和τ_{xy}，相应的位移矢量$\vec{u}$是$-u$和$-v$，故

$$\left(\vec{T}\cdot\frac{\partial\vec{u}}{\partial x}\right)^{(6)}=-\sigma_x^{(6)}\frac{\partial u^{(6)}}{\partial x}-\tau_{xy}^{(6)}\frac{\partial v^{(6)}}{\partial x}=-\sigma_x^{(6)}\varepsilon_x^{(6)}-\tau_{xy}^{(6)}\frac{\partial v^{(6)}}{\partial x}.$$

把以上三式代入（ g ）式，得到

$$J_T=2\left[\int_0^c\left(\sigma_x^{(4)}\varepsilon_x^{(4)}+\tau_{xy}^{(4)}\frac{\partial v^{(4)}}{\partial x}\right)ds+\int_0^d\left(\tau_{xy}^{(5)}\varepsilon_x^{(5)}+\sigma_y^{(5)}\frac{\partial v^{(5)}}{\partial x}\right)ds\right.$$
$$\left.+\int_0^c\left(-\sigma_x^{(6)}\varepsilon_x^{(6)}-\tau_{xy}^{(6)}\frac{\partial v^{(6)}}{\partial x}\right)ds\right].\qquad(h)$$

把有限单元法求得的沿积分线路的应力、应变和位移值代入（ e ）、（ h ）二式，可求出J_W和J_T，由（ a ）式求出J-积分，再由（ 21-12 ）或（ 21-13 ）式可求出应力强度因子K_I。由于裂缝处在第1种材料中，应采用E_1和μ_1。

上述公式可以计算精度较高，而且裂纹尖端处的网格不必细分，因此得到了较广

$$g=\frac{1}{2}P^2\frac{\partial\lambda}{\partial A}. \qquad (21\text{-}14)$$

其中 A 为裂缝面积。而 g 与应力强度因子 K_{I} 之间又有如下关系：

$$\left.\begin{aligned} K_{\mathrm{I}}&=\sqrt{Eg}\ (\text{平面应力}),\\ K_{\mathrm{I}}&=\sqrt{\frac{Eg}{1-\mu^2}}\ (\text{平面应变}).\end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}15)$$

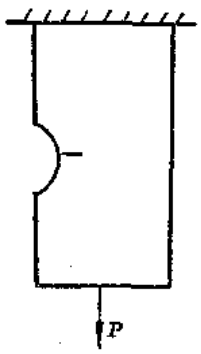


图 21-7

如果我们用有限单元法由（21-14）式求出 g，再由上式就可以求出 K_{I} 了。为了求 g，对于给定的裂纹，可用有限单元法求出 Δ 及相应的 λ，然后让裂纹扩展一点，使裂纹面积 A 有一个增量 δA，再用有限单元法可求出 Δ、λ 及柔度的增量 $\delta\lambda$，于是由（21-14）式可算出 g。因只要计算一个结点的一个位移分量，所以计算是很方便的。

如果荷载不是一个集中力，则利用下列公式：

$$g=\frac{\partial U}{\partial A}. \qquad (21\text{-}16)$$

其中

$$U=\int W\,d(Vol).$$

是结构的应变能。在有限单元法中，它就等于各结点外力 F_i 和相应的位移 δ_i 的乘积之和的一半，即

$$U=\frac{1}{2}\Sigma F_i\,\delta_i. \qquad (21\text{-}17)$$

柔度法不同于位移法，它是从整体的能量关系出发，不必在裂缝尖端取过细的单元，而且可应用于空间问题。

贝克纳（Bueckner）曾经提出一个计算应变能耗散率的公式[152]，应用很方便。考虑一个三维物体如图21-8(a)所示，其体积为 V，体积力为 X_i，在边界 S_σ 上作用着外力 T_i，在边界 S_u 上给定位移。在此物体中原有一条裂缝，其上表面为 C_1，下表面为 C_2。图 21-8(b)表示了该物体产生虚拟裂缝开展以后的情况，荷载和边界条件与以前相同，但增加了新的裂缝表面 C_1' 和 C_2'。把以上两种情况相加，得到和状态，如图21-8(c)。它相当于图21-8(b)所示裂缝体承受体积力 $2X_i$、在边界 S_σ 上承受表面力 $2T_i$，在 C_1 和 C_2 上无表面力，在 C_1' 和 C_2' 上承受表面力 T_i^*，在边界 S_u 上给定位移。表面力 T_i^* 是使虚拟裂缝表面 C_1' 和 C_2' 密合所需的力。再把状态(a)和(b)相减，得到差状态，如图21-8（d）所示。差状态是同一物体发生了虚拟裂缝开展，但无体积力，在 S_σ、C_1 和 C_2 上无表面力，在 S_u 上给定位移为零，而在 C_1' 和 C_2' 上作用着表面力 $-T_i^*$，贝克纳证明了下述论断：由于虚拟裂缝开展而引起的物体弹性势能的改变只与差状态的应变能有关，并可由下式计算

$$U=-\frac{1}{2}\int_{C_1'+C_2'}T_i^*v_i\,ds. \qquad (21\text{-}18)$$

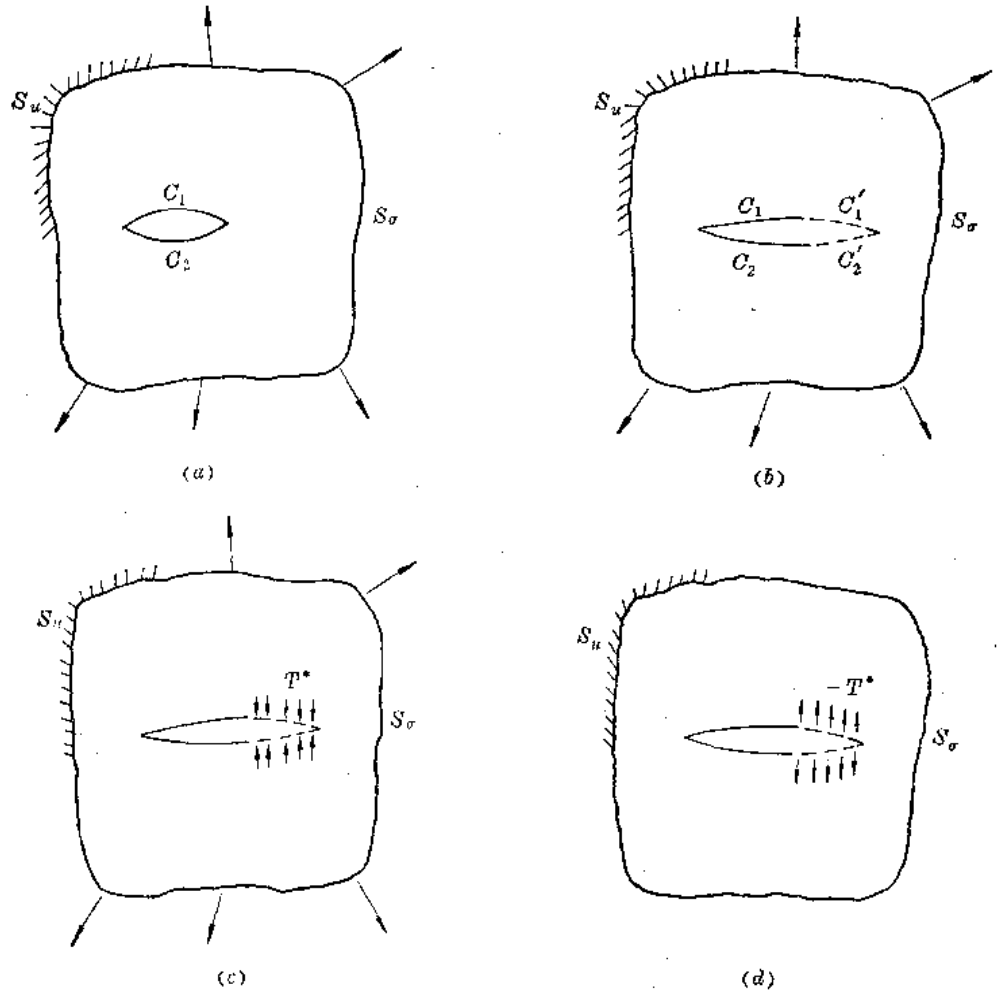


图 21-8 任意裂缝体的几种受力状态

(a)虚拟裂缝扩展前；(b)虚拟裂缝扩展后；(c)和状态；(d)差状态

式中v_i是差状态中裂缝表面的位移，上述积分沿着虚拟裂缝的表面进行。

在推导公式（21-18）时，所考虑的虚拟裂缝不必是无限小的。因此，可以认为虚拟裂缝开展以前，物体是没有裂缝的。在这种情况下，T_i^*相当于该物体无裂缝时在给定荷载作用下在与裂缝面C_1和C_2相应地点的应力，并可用T_i^0表示。于是，差状态相当于该物体在无体积力、S_σ上无表面力、S_u上给定零位移、裂缝表面上作用着表面力$-T_i^0$时的应力状态。图21-8(a)所示裂缝体的应变能耗散率可用下式计算：

$$g=\frac{\partial U}{\partial A}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial A}\int_{C_1+C_2}T_i^0\,v_i\,ds. \qquad (21\text{-}19)$$

式中A为裂缝面积，对于平面问题，即为裂缝长度。T_i^0是无裂缝时物体在给定荷载和边界位移作用下的应力，v_i是有缝物体当外荷载为零、裂缝表面作用着表面力$-T_i^0$时裂缝表面的位移。给以不同的裂缝尺寸，由上式可求出g。再由式(21-15)可计算应力强度因子。

在应用公式（21-19）时，把正应力和剪应力分开考虑，可分别计算K_{I}和K_{II}。

文献[136]给出了几个算例。对于平面问题，用500个左右结点的网格，应力强度因子的计算精度为3～5%。

§21-5 畸形等参数单元

在裂纹尖端附近的应力场具有奇异性，如（21-1）式所表明，靠近裂纹尖端的各应力分量均与$Kr^{-1/2}$成正比，当$r\to 0$时，应力急剧增长。在有限单元法中，通常是在有限尺寸的单元中用多项式表示位移，因此在奇异点附近不能很好地反映应力的变化。为了克服这个困难，过去采用过两种办法，一种办法是在裂纹尖端附近把网格分得非常细，这样做的结果，结点很多，计算时间很长，事先的准备工作量也很大。另一种办法是在裂缝尖端处采用特殊的奇异单元，用复变函数方法，取自然满足裂缝表面为自由面的两个特殊的解析函数，由此求此该单元的刚度矩阵。

文献[140]提出了一个新的简便的反映裂缝尖端应力奇异性的方法。把8结点等参数单元的边中点从正常的位置移至四分之一边长处，在角点附近即出现$r^{-1/2}$级的应力奇异性。如图21-9所示，在裂纹尖端处，把有关的四个边中点向裂纹尖端靠拢，都移至四分之一边长处，即能较好地反映裂缝尖端附近的应力场。这个办法的优点是，可以采用通常的有限单元程序，而且分的单元较少，计算时间和准备工作都较少。

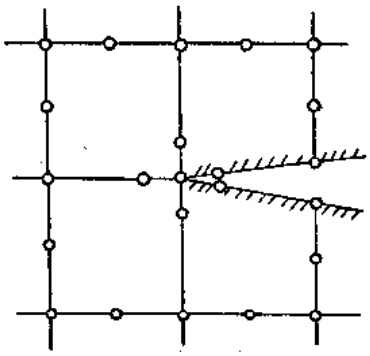


图 21-9

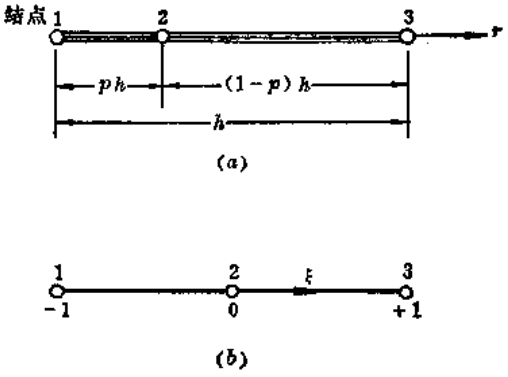


图 21-10 一维畸形单元
(a)子单元；(b)母单元

我们把图21-9所示的单元称为畸形等参数单元。这种单元与正常等参数单元的区别就在于有两个边中点从正常位置移到了1/4边长处。下面我们来分析当边中点从正常位置向角点移动时，单元应力场的变化规律。为了简化数学运算，我们只考虑一条边，并当作一维问题来分析。参阅图21-10，子单元长度为h，三个结点1、2、3的坐标为

$$r_1=0,\quad r_2=ph,\quad r_3=h. \tag{a}$$

当$p=\frac{1}{2}$时即为正常单元，母单元的三个结点坐标为$\xi_1=-1$，$\xi_2=0$，$\xi_3=1$，取形函数如下：

$$N_1=-\frac{(1-\xi)\xi}{2},\quad N_2=1-\xi^2,\quad N_3=\frac{(1+\xi)\xi}{2}. \tag{b}$$

单元坐标变换公式为

$$r=N_1r_1+N_2r_2+N_3r_3=ph(1-\xi^2)+h\frac{(1+\xi)\xi}{2}. \tag{c}$$

由上式解出ξ，得到

$$\xi=\frac{-1\pm\sqrt{1-8(1-2p)\left(p-\frac{r}{h}\right)}}{2(1-2p)}.$$

经检验，上式中应取＋号，如令$p=\frac{1}{4}$，则

$$\xi=-1+2\sqrt{\frac{r}{h}}. \tag{d}$$

单元位移函数取为

$$u=N_1u_1+N_2u_2+N_3u_3. \tag{e}$$

我们感兴趣的是单元应力，而应力又正比于应变，对于一维单元来说，其应变为

$$\frac{du}{dr}=u_1\frac{dN_1}{dr}+u_2\frac{dN_2}{dr}+u_3\frac{dN_3}{dr}. \tag{f}$$

其中u_1、u_2、u_3为结点位移。由于

$$\frac{dN_i}{d\xi}=\frac{dN_i}{dr}\frac{dr}{d\xi}.$$

可知

$$\frac{dN_i}{dr}=\left(\frac{dr}{d\xi}\right)^{-1}\frac{dN_i}{d\xi},\quad i=1,2,3. \tag{g}$$

由（ b ）式求出$\frac{dN_i}{d\xi}$，并由（ c ）式求出$\frac{dr}{d\xi}$，代入上式即得到$\frac{dN_i}{d\xi}$，再代入（ f ）式，得到单元应变（ $p=\frac{1}{4}$ ）如下：

$$\frac{du}{dr}=\frac{1}{h}\left[u_1\left(2-\frac{3\sqrt{h}}{2\sqrt{r}}\right)+u_2\left(-4+\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{r}}\right)\right.$$
$$\left.+u_3\left(2-\frac{\sqrt{h}}{2\sqrt{r}}\right)\right]. \tag{21-20}$$

上式表明，当$r\to0$时，单元应变具有$r^{-\frac{1}{2}}$的奇异性。这就告诉我们，当二次等参数单元的边中点从正常位置$p=\frac{1}{2}$移到$\frac{1}{4}$边长处时，在角点附近的应力将与$r^{-\frac{1}{2}}$成正比，可以较好地反映裂纹尖端处的应力场。除了边中点的位置有所改变外，在其他方向这种畸形单元与正常等参数单元是完全相同的。因此我们可以用8结点等参数单元的常用程序来分析裂纹尖端的应力强度因子。只要把裂纹尖端附近的几个边中结点移至$\frac{1}{4}$边长处，如图21-9所示，在用有限单元法求出位移场以后，再用位移法计算应力强度因子。对 8 结点畸形等参

数单元的进一步分析表明，这种单元用于裂缝尖端可以给出较合理的单元刚度，但在缝尖附近算出的局部应力和位移还不够理想，因此在计算裂缝强度因子时，应忽略紧靠缝尖端的结点的位移，而由其余结点的位移连结直线进行外推。

现在列举几个算例。

【例 1】 图 21-11 表示了长条中央裂缝K_{I}的计算结果，计算网格见（a），计算结果见（b），图中表示了当$\theta=0$时，K_{I}^{*}随r而变化的情况，由图可见畸形单元计算结果比正常单元计算结果要好，更接近于精确值。图中用 4 个方点表示了以下几种情况的计算结果：

（ 1 ）414个等应变三角形单元，240个结点；

（ 2 ）同上，并在裂缝尖端用特殊单元；

（ 3 ）414个线性应变三角形单元，893个结点；

（ 4 ）同上，并在裂缝尖端用特殊单元。

由此可见，畸形等参数单元虽然只用了147个结点和274个自由度，但计算精度比上述四种方案都要好，而其中第 4 方案却用了893个结点和近乎1700个自由度。

【例 2】 侧边裂缝K_{I}计算，见图21-12。在反对称切力作用下将出现Ⅱ型裂缝扩展，为保持力矩平衡，除切力V_0外，还须施加力矩$M_0=V_0L_1$。计算网格见图 21-12(a)，计

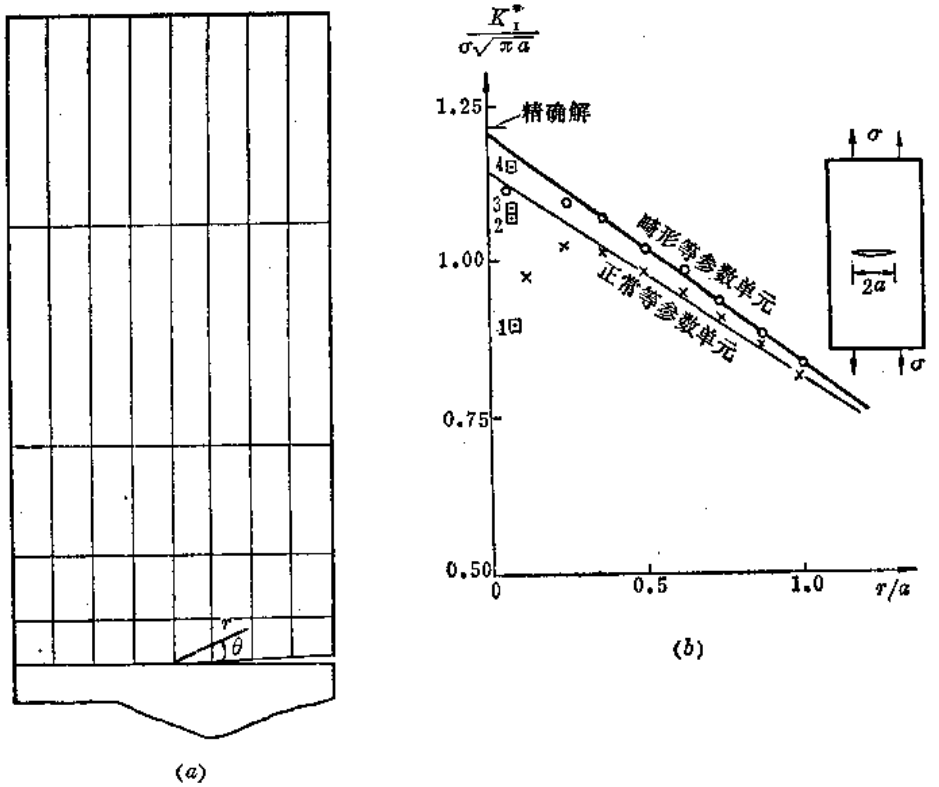


图 21-11　长条中央裂缝K_{I}计算

(a)计算网格(147个结点)；(b) K_{I}^{*}计算结果

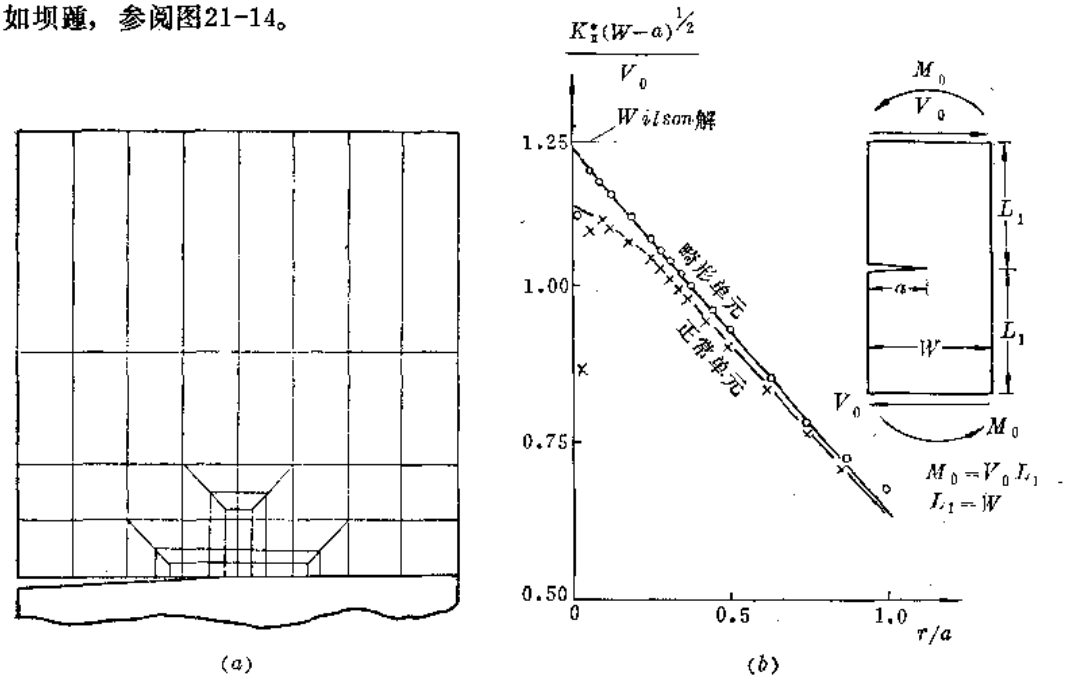
1⊡—414个等应变三角形单元，240个结点；2⊡—同上，并在缝尖用特殊单元；

3⊡—414个线性应变三角形单元，893个结点；4⊡—同上，并在缝尖用特殊单元

算结果见图21-12(b)，畸形单元计算的K_{I}值与Wilson解很接近。

【例 3】 Ⅰ型与Ⅱ型裂缝的综合，一块受拉平板，当它内部裂缝方向与拉力方向不垂直时，将出现Ⅰ型与Ⅱ型综合的裂缝扩展。在这种条件下，K_{I}和K_{II}的数值将取决于裂缝与拉力之间的夹角ϕ，图21-13表示了计算结果。图中的精确值是由三种简单情况的解叠加而得。此图再次表明，畸形等参数单元的计算结果优于正常等参数单元的计算结果。

必须指出，畸形等参数单元不但可用于裂缝端部，也可以用于其他尖锐的应力集中区域，如坝踵，参阅图21-14。



(a)　　(b)

图 21-12　侧边裂缝K_{I}计算
(a)计算网格；(b)计算结果

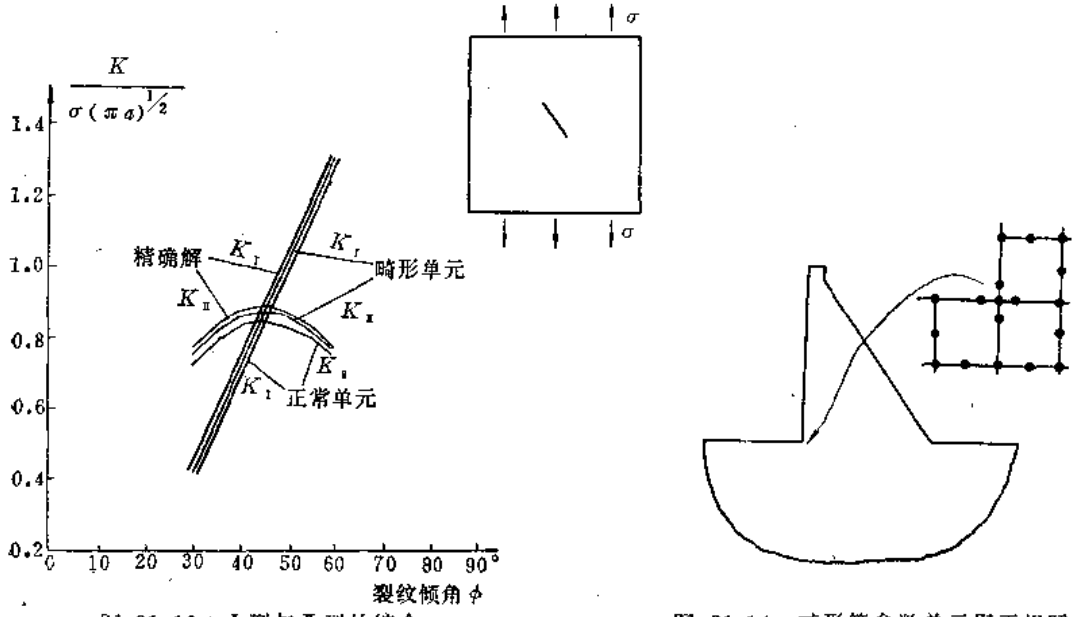


图 21-13　Ⅰ型与Ⅱ型的综合

图 21-14　畸形等参数单元用于坝踵等应力集中区

§ 21-6 缝端奇异单元

裂缝尖端是一个奇点，采用通常的高次单元（高次位移插值函数）并不能收到提高计算精度的效果。为了改善计算精度，可以在裂缝端部采用奇异单元[138]，用复变函数方法考虑裂缝尖端的应力奇异性。其余部分采用通常的位移协调单元（图21-15）。

一、基本解法

今考虑平面缝端奇异单元，如图 21-15 所示，根据第三章式（3-68），定义泛函如下：

$$\Pi=\iint\left(\{\sigma\}^T\{\varepsilon\}-\frac{1}{2}\{\sigma\}^T[D]^{-1}\{\sigma\}\right)dxdy$$
$$-\int_{s_\sigma}\{r\}^T\{\bar{p}\}ds-\int_{s_u}\{\bar{p}\}^T\{r-\bar{r}\}ds\,. \qquad (a)$$

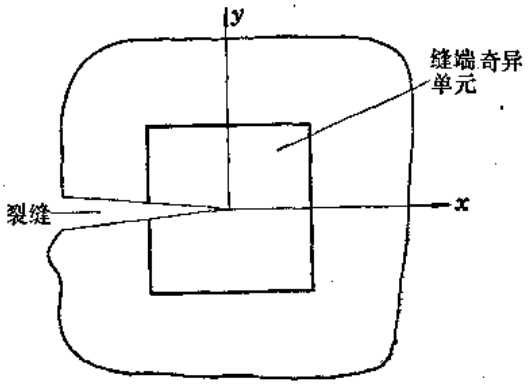


图 21-15 缝端奇异单元

式中$\{\bar{p}\}$是在边界s_σ上给定的表面力，$\{\bar{r}\}$是在另一部分边界s_u上给定的位移，$\{\sigma\}$和$\{\varepsilon\}$分别是单元内部的应力和应变。

由式（a）取驻值，可知在单元内部满足平衡条件，在单元边界上满足给定的应力和位移条件。

今用复变函数表示单元内部的应力。令

$$z=x+iy.$$

式中$i=\sqrt{-1}$，x、y是直角坐标。平面内任一点的应力和位移可表示如下[133]

$$\sigma_y+\sigma_x=2[\Phi'(z)+\overline{\Phi'(z)}], \qquad (b)$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\Phi''(z)+\psi'(z)], \qquad (c)$$
$$2G(u+iv)=\eta\Phi(z)-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\psi(z)}. \qquad (d)$$

其中G是剪切模量，平面应变问题$\eta=3-4\mu$，平面应力问题$\eta=(3-\mu)/(1+\mu)$。μ为泊松比。$(\ )'$表示微分，$\overline{(\ )}$表示共轭。Φ和ψ都是解析函数

作映射

$$z=w(\zeta)=\zeta^2, \qquad (e)$$

或

$$\zeta=z^{\frac{1}{2}}. \qquad (f)$$

取$-\pi/2\leqslant arg\zeta\leqslant\pi/2$，$-\pi\leqslant argz\leqslant\pi$。在$\zeta$平面，单元内部区域是右半平面，而裂缝在虚轴上。应力函数Φ和ψ是ζ的解析函数。因此可用ζ的简单多项式表示。采用上述映射后，式（b）～（d）变成

$$\sigma_y+\sigma_x=4R_e[\Phi'(\zeta)/w'(\zeta)], \qquad (g)$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\{\overline{w(\zeta)}[\Phi'(\zeta)/w'(\zeta)]'+\psi'(\zeta)\}/w'(\zeta), \qquad (h)$$
$$2G(u+iv)=\eta\Phi(\zeta)-w(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)/w'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}\,. \qquad (i)$$

我们只考虑裂缝表面应力为零的情况（裂缝表面应力不为零的情况见[138]）。由文献[133]可知，表面应力等于零相当于下列条件

$$\Phi(\zeta)+w(\zeta)\overline{\Phi'(\zeta)/w'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=0. \qquad (j)$$

裂缝表面位于ζ平面的虚轴上，有$\zeta=-\zeta$，只要选择

$$\psi(\zeta)=-\overline{\Phi(-\zeta)}-\overline{w(-\zeta)}\Phi'(\zeta)/w'(\zeta). \qquad (k)$$

则（j）式成立，即裂缝表面应力为零。采用以上各式，可满足单元内部平衡条件及裂缝表面应力为零条件，在单元其余边界上

$$\{p\}=\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \sigma_x l_x+\tau_{xy}l_y \\ \tau_{xy}l_x+\sigma_y l_y \end{Bmatrix}. \qquad (l)$$

其中l_x、l_y是外法线的方向余弦。边界上的位移当然不等于规定位移$\{\bar{r}\}$。把式(g)～(i)代入式（a），得到

$$\Pi=\int_s\{p\}^T\{\bar{r}\}\,ds-\int_s\{p\}^T\{r\}ds, \qquad (m)$$

其中

$$\{\bar{r}\}=\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix},\quad \{r\}=\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}.$$

现在用ζ的多项式表示函数Φ如下：

$$\Phi(\zeta)=\sum_{j=1}^{N}b_j\zeta^j. \qquad (21\text{-}21)$$

由式（k），可得

$$\psi(\zeta)=-\sum_{j=1}^{N}\left\{b_j(-1)^j+\frac{j}{2}b_j\right\}\zeta^j. \qquad (21\text{-}22)$$

其中N是整数，而

$$b_j=\beta_j+i\beta_{N+j}.$$

β_j是实常数，而且$\beta_{N+2}=0$，这是因为$\Phi=i\zeta^2$和$\psi=0$对应力无贡献。根据（21-21）、（21-22）式，边界力$\{p\}$和边界位移$\{r\}$可表示如下：

$$\{p\}=[\rho]\{\beta\}, \qquad (21\text{-}23)$$

$$\{r\}=[R]\{\beta\}. \qquad (21\text{-}24)$$

式中 $\{\beta\}=[\beta_1\beta_2\cdots\cdots\beta_{N+1}\beta_{N+3}\cdots\cdots\beta_{2N}]^T$。

注意上式右端不包括β_{N+2}。边界上给定的位移$\{\bar{r}\}$用单元结点位移$\{\delta\}^e$表示如下：

$$\{\bar{r}\}=[Z]\{\delta\}^e. \qquad (21\text{-}25)$$

式中矩阵$[Z]$的元素是边界位移$\{\bar{r}\}$的插值函数，定义于单元边界上。把(21-23)～(21-25)三式代入式（m），得到

$$\Pi=\{\beta\}^T[Q]\{\delta\}^e-\frac{1}{2}\{\beta\}^T[H]\{\beta\}. \qquad (21\text{-}26)$$

式中

$$[Q]=\int_s[\rho]^T[Z]ds, \qquad (21\text{-}27)$$

$$[H]=\frac{1}{2}\int_s([\rho]^T[R]+[R]^T[\rho])ds. \qquad (21\text{-}28)$$

我们可以把广义参数$\{\beta\}$作为未知量与结点位移联立求解，但更方便的方法是在单元分析阶段即消去$\{\beta\}$。由泛函Π取驻值，有

$$\frac{\partial \Pi}{\partial\{\beta\}}=0.$$

由式（21-26），可得

$$[H]\{\beta\}=[Q]\{\delta\}^e,$$

从而

$$\{\beta\}=[H]^{-1}[Q]\{\delta\}^e. \qquad (21\text{-}29)$$

把上式代入式（21-26），得到

$$\Pi=\frac{1}{2}\{\delta\}^{eT}[k]\{\delta\}^e. \qquad (21\text{-}30)$$

式中 $$[k]=[Q]^{-1}[H]^{-1}[Q]. \qquad (21\text{-}31)$$

$[k]$即为奇异单元的刚度矩阵。

二、矩阵$[Q]$和$[H]$的积分

在裂缝端部采用奇异单元，在其余部分采用通常的位移协调单元，例如三角形或矩形单元，在这些单元的边界上，位移通常是边界长度的一次或二次函数。因此，在构造式（21-25)的矩阵$[Z]$时，也必须使边界位移是边长长度的一次或二次函数。

（1）边界位移线性变化

对于图21-16所示的9结点和17结点奇异单元，都可假定边界位移在两结点之间线性变化。这种奇异单元可与常应变三角形单元或双线性矩形单元匹配。

在裂缝表面，因应力为零，不必假定边界位移。在边界的其余部分，可假定在相邻两结点之间，边界位移为

$$\{\bar{\tau}\}=\begin{Bmatrix}\bar{u}\\ \bar{v}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{s}{l} & 0 & \frac{s}{l} & 0\\ 0 & 1-\frac{s}{l} & 0 & \frac{s}{l}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_{i+1}\\ v_{i+1}\end{Bmatrix}=[Z_i]\{\delta_i\}. \qquad (21\text{-}32)$$

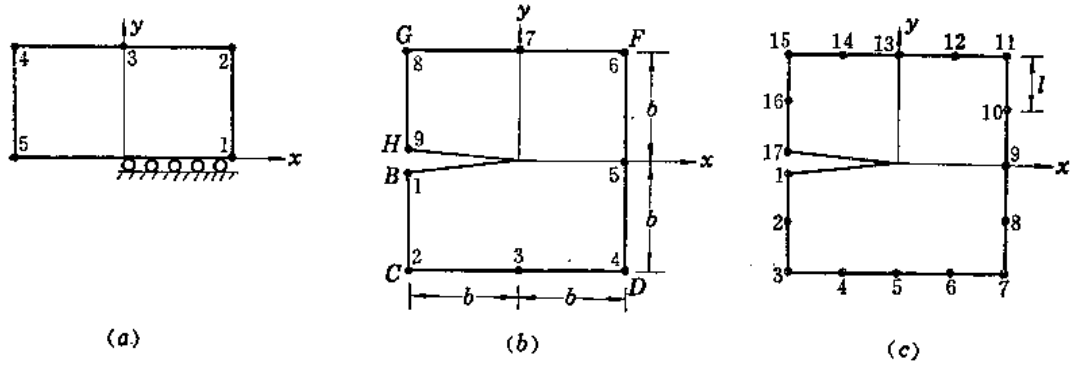


图 21-16 缝端奇异单元

(a) 5 结点对称单元；(b) 9 结点缝端奇异单元；(c)17结点缝端奇异单元

式中 l 是结点i和结点$i+1$中间的距离， s 是从结点i量起的距离，u_i、 v_i是结点i的位移。

（ 2 ）边界位移抛物线变化

对于图21-16（ c ）所示17结点奇异单元， 可假定在相邻三结点之间， 边界位移抛物线变化，即在结点 1～3， 3～5， 5～7， …15～17之间，边界位移为

$$\{\overline{T}\}=\begin{bmatrix}\left(1-\frac{s}{l}\right)\left(1-\frac{2s}{l}\right) & 0 & 4\frac{s}{l}\left(1-\frac{s}{l}\right) & 0 & \frac{s}{l}\left(2\frac{s}{l}-1\right) & 0\\ 0 & \left(1-\frac{s}{l}\right)\left(1-\frac{2s}{l}\right) & 0 & 4\frac{s}{l}\left(1-\frac{s}{l}\right) & 0 & \frac{s}{l}\left(2\frac{s}{l}-1\right)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i\\v_i\\u_{i+1}\\v_{i+1}\\u_{i+2}\\v_{i+2}\end{Bmatrix}=[Z_i]\{\delta_i\}。$$

（ 21-33 ）

式中 l 是相邻两结点之间的距离， s 是自 i 点起的距离。 $i=1$， 3， 5， 7， …15。

这种奇异单元可与 6 结点三角形单元或 8 结点四边形单元匹配。

为了计算[H]和[Q]，可把应力和位移表示如下：

$$\begin{aligned}\sigma_y+\sigma_x&=\sum_{j=1}^{2N}2A_j(\zeta,\ \bar{\zeta})\beta_j,\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}&=\sum_{j=1}^{2N}2B_j(\zeta,\ \bar{\zeta})\beta_j,\\ u+iv&=\sum_{j=1}^{2N}f_j(\zeta,\ \bar{\zeta})\beta_j=f(\zeta,\bar{\zeta},\ \beta_j)。\end{aligned}\qquad(21\text{-}34)$$

式中 $A_j=R_e(j\zeta^{j-2})$，

$$A_{N+j}=-I_m(j\zeta^{j-2}),$$

$$B_j=\left[\frac{j-2}{4}\cdot\frac{\bar{\zeta}^2}{\zeta^2}-\frac{j}{4}-\frac{(-1)^j}{2}\right]j\zeta^{j-2},$$

$$B_{N+j}=i\left[\frac{j-2}{4}\cdot\frac{\bar{\zeta}^2}{\zeta^2}-\frac{j}{4}+\frac{(-1)^j}{2}\right]j\zeta^{j-2},\qquad(21\text{-}35)$$

$$f_j=\frac{1}{2G}\{[\eta+(-1)^j]\zeta^j-j\bar{\zeta}^{j-2}I_m(\zeta^2)\},$$

$$f_{N+j}=\frac{1}{2G}\{[\eta-(-1)^j]\zeta^j-j\bar{\zeta}^{j-2}R_e(\zeta^2)\}。$$

式中 $j=1$， 2， …N，注意A_{N+2}和B_{N+2}等于零。由式（ 21-34 ），可进一步把应力分量表示如下

$$\begin{aligned}\sigma_x-i\tau_{xy}&=\sum_{j=1}^{2N}g_j(\zeta,\ \bar{\zeta})\beta_j=g(\zeta,\ \bar{\zeta};\ \beta_j),\\ \sigma_y+i\tau_{xy}&=\sum_{j=1}^{2N}h_j(\zeta,\ \bar{\zeta})\beta_j=h(\zeta,\ \bar{\zeta};\ \beta_j)。\end{aligned}$$

（ 21-36 ）

式中 $g_j=A_j(\zeta,\ \bar{\zeta})-B_j(\zeta,\ \bar{\zeta})$，

$$h_j=A_j(\zeta,\ \bar{\zeta})+B_j(\zeta,\ \bar{\zeta}). \tag{21-37}$$

利用以上各式，可通过数值积分求出矩阵[H]和[Q]。首先，把$\{p\}^T\{r\}$和$\{p\}^T\{\overline{r}\}$表示为

$$\{p\}^T\{r\}=I_m[(igl_x+hl_y)f],$$

$$\{p\}^T\{\overline{r}\}=I_m[(igl_x+hl_y)(\bar{u}+i\bar{v})]. \tag{21-38}$$

式中 l_x、l_y是外法线的方向余弦。f、g、h是x和y的函数，如式（21-34)(21-37)。$\bar{u}$和$\bar{v}$由式（21-32）或(21-33)表示。

对于图21-16（b）所示7结点奇异单元，在垂直边界上$l_y=0$，在水平边界上$l_x=0$，因此矩阵[H]和[Q]的积分变成

$$\{\beta\}^T[H]\{\beta\}=\int_S\{p\}^T\{r\}ds$$

$$=R_e\left(\int_B^C+\int_D^F+\int_O^H l_xgf\,ds\right)+I_m\left(\int_O^D+\int_F^G l_yhf\,ds\right),$$

$$\{\beta\}^T[Q]\{\delta\}^e=\int_S\{p\}^T\{\bar{r}\}ds$$

$$=R_e\left[\int_B^C+\int_D^F+\int_O^H l_xg(\bar{u}+i\bar{v})ds\right]+I_m\left[\int_O^D+\int_F^G l_yh(\bar{u}+i\bar{v})ds\right].$$

而gf和hf可写成如下形式

$$gf=\sum_{j,\,k=1}^{2N}\beta_j\beta_k(g_jf_k+g_kf_j)/2,$$

$$hf=\sum_{j,\,k=1}^{2N}\beta_j\beta_k(h_jf_k+h_kf_j)/2.$$

由于单元对称于x轴，函数f、g、h的前面N项对应于对称解答，后面N项对应于反对称解答。因此，只须要在区域$y\geqslant 0$内积分。

如果问题是对称于x轴的，即裂缝位于x轴上，而且几何形状和荷载也对称于x轴，我们只须要考虑半个单元，如图21-16（a）所示。对于平面应力单元，$\mu=0.3$，单元刚度矩阵见式（21-39）。必须指出，[k]与单元尺寸b无关。在这种情况下，至少要采用8个系数β，否则[k]的秩将少于自由度数减去刚体位移的差。计算式（21-39）时采用了9个β。

$$[k]=\frac{Et}{10}\begin{bmatrix}
3.3424 & & & & & & & & & \\
-1.0221 & 1.1903 & & & & & & & & \\
0.2349 & 1.0909 & 3.1226 & & & & & & & \\
-0.5313 & 0.7923 & 0.9932 & 4.0338 & & & & & & \\
-1.6870 & -0.1558 & -1.8593 & 0.5978 & 5.7584 & & & & & \\
1.4594 & -0.9537 & -0.0866 & 1.1371 & -0.3201 & 6.9045 & & & & \\
-0.9502 & 0.0665 & -1.0610 & -0.4408 & -1.0757 & 0.4306 & 2.9899 & & & \\
0.6302 & 0.1008 & 0.2787 & -0.0989 & -1.3924 & 0.0431 & -0.3169 & 1.4739 & & \\
-0.9400 & 0.0205 & -0.9371 & -0.6190 & -1.6364 & -1.4833 & 0.0970 & 0.8004 & 3.4165 & \\
-0.0530 & 0.1472 & -0.0307 & 0.0898 & -0.3234 & -1.4181 & -0.7122 & -0.3075 & 1.1193 & 1.5582
\end{bmatrix}. \qquad (21\text{-}39)$$

三、应力强度因子

由式（21-34）可知，应力强度因子K_{I}和K_{II}取决于系数β_1和β_{N+1}，并可由下式计算

$$\left.\begin{aligned}K_{\mathrm{I}}&=\sqrt{2}\beta_1\ ,\\ K_{\mathrm{II}}&=\sqrt{2}\beta_{N+1}\ .\end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}40)$$

把式（21-29）代入上式，得到

$$\left.\begin{aligned}K_{\mathrm{I}}&=[B_{\mathrm{I}}]\{\delta\}^e,\\ K_{\mathrm{II}}&=[B_{\mathrm{II}}]\{\delta\}^e.\end{aligned}\right\} \qquad (21\text{-}41)$$

对于平面应力对称半单元，如图21-16（a）所示，当$\mu=0.3$时，$[B_1]$见下式：

$$[B_1]=\sqrt{\frac{1}{50b}}\begin{bmatrix}0.1609 & 0.4150 & 0.3353 & 0.3735 & 0.2239 & 2.6821 & -0.6514 & 0.9985 & -0.0686 & 0.1644\end{bmatrix}. \qquad (21\text{-}42)$$

下面给出一个算例。

如图21-17（a）所示，考虑一方板，承受均匀拉力，两边有对称裂缝，由于对称，只须取出四分之一计算，在缝端采用奇异单元，其余部分采用常用矩形单元。图21-17（b）所示网格，只用了5个单元，共15个无约束自由度。图21-17（c）所示网格，用了19个单元，共50个无约束自由度。用两种计算网格求出的应力强度因子都是$K_{\mathrm{I}}=0.793$，与理论解完全吻合。

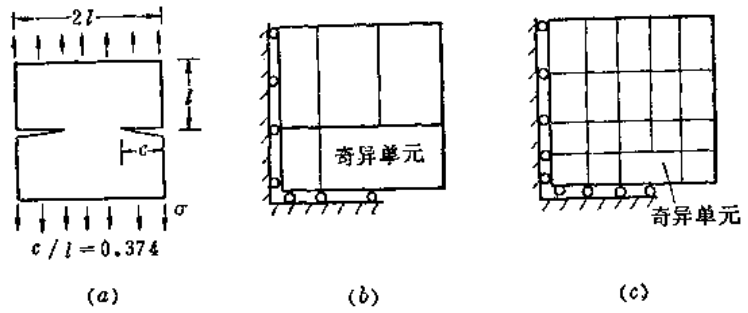


图 21-17　奇异单元算例

(a)均匀拉力作用下的方板；(b) 5 个单元，15个无约束自由度；(c)19个单元，50个无约束自由度

用直接法（ §21-2 ）计算时，自由度总数在1500左右时，K_I的计算误差约为3～5%。用柔度法计算时，自由度总数在500个左右时，K_I的误差也在3～5%左右，文献[139]采用杂交单元，当自由度总数184时，K_I计算误差为 0.5%。而本节所述奇异单元，当自由度总数为15时，已求得了无异于精确解结果。可见其计算精度是非常高的，超过了其他各种方法。

我国应隆安提出了另一种计算方法[137]，在裂缝尖端处划分出无限多个相似的单元，这无限多个单元集合成一个复合单元。计算效果也是比较好的。

第二十二章　结构最优设计

在本书以前各章中，我们说明了如何利用有限单元法来分析各种结构的应力和位移，可以说，利用有限单元法和电子计算机，实际工程中出现的各种复杂结构的应力分析问题都可迎刃而解。这是过去二十年中间所取得的一项重要科技成就。但是应力分析只是设计过程中的一个中间环节，结构设计的最终目的是要给出合理的设计方案，即在给定的荷载条件下，得到最经济最有效的设计（最优设计）。为了达到这个目的，在传统的结构设计中是采用重复设计法。首先，根据同类型结构的已有经验，给出初步设计方案，然后进行应力计算，设计人员在分析计算成果后修改设计方案。对修改后的结构重新进行应力计算，分析研究计算结果，再修改结构设计，如此等等，直到得出满意的设计。

重复设计方法存在着两方面的缺陷，其一，这种设计过程很繁琐，效率很低。其二，最初假定的方案要影响到最终方案的经济性和合理性。对于多数设计单位来说，往往没有充分的人力和时间去进行多方案的比较，因而实际采用的方案往往并非最好的方案，设计方案的好坏，在很大程度上取决于设计者的经验。

由于传统的结构设计方法存在着上述问题，最近十几年发展了一种新的结构设计方法，即结构最优设计，除了电子计算机和有限单元法外，还引入新的数学方法，主要是数学规划方法，使结构设计趋于自动化。在给出荷载及有关参数后，可以自动地高速度地求出最优设计方案，从而使结构设计的质量和速度达到一个新的水平。这是结构设计现代化的一个方向。

本章将说明结构最优设计的基本概念、计算方法以及在杆件结构和水坝工程中的应用。

§22-1　结构最优设计的基本概念

结构最优设计是一种新的设计方法，在结构设计中引进了许多新的概念。在这一节，我们通过两个简单例子来说明它的基本概念，以作为一个导引，在以后几节中，再说明具体的计算方法。

首先考虑图22-1所示的管柱，柱的底部固定，顶端自由。承受荷载$P=2000$公斤，柱的长度$l=200$厘米，弹性模量$E=2\times10^6$公斤/厘米^2，容重$\rho=0.0078$公斤/厘米^3。柱的横剖面是均匀的，其平均直径为

$$D=\frac{1}{2}(D_0+D_i),$$

其中D_0为外径，D_i为内径，柱的厚度为t。根据使用条件，要求柱直径$D\leqslant10$厘米，根据制造工艺，要求柱的厚度$t\geqslant0.15$厘米。在力学上，在荷载作用下，要求柱内压应力σ不超过1000公斤/厘米^2，不发生纵向屈曲，也不发生管壁的局部屈曲。

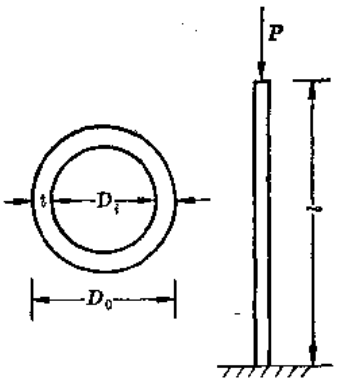


图 22-1 管柱

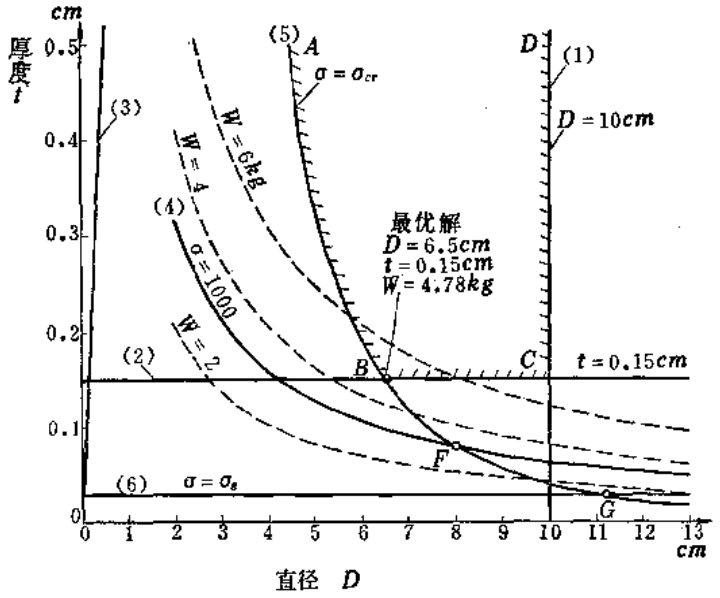


图 22-2

在满足上述各项要求的条件下，试求出使柱的重量为最轻的直径D和厚度t，在目前情况下，共有两个变量，即D和t，其余参数都是固定的。柱的重量为

$$W=\rho l\pi Dt.$$

把ρ、l的具体数字代入上式，得到

$$W\approx 4.9Dt. \qquad (a)$$

当柱子取不同的直径D和厚度t时，由上式即可得到不同的重量W。但是D和t并不能任意取值，而必须满足前面提到的各项要求。现在我们来分析这些要求对作为变量的D和t所施加的限制。在图22-2中，以直径D为横坐标，以厚度t为纵坐标，首先考虑几何上的限制，由于要求

$$D\leqslant 10\text{厘米}.$$

因此，在图22-2中，作直线$D=10$厘米如（1），D的取值必须在直线（1）以左，此直线以右必须排除。由于要求

$$t\geqslant 0.15\text{厘米}.$$

在图中作水平直线$t=0.15$厘米如（2），厚度t的取值必须在此直线以上，此直线以下的区域必须排除。

管的内径 $D_i=D-t$，在几何上，$D_i\geqslant 0$，由此可知

$$D\geqslant t.$$

因此$D<t$的区域也应排除，即排除图中直线（3）以左的区域。

现在再考虑力学条件，柱内应力为

$$\sigma=-\frac{P}{\pi Dt},$$

由压应力不超过1000公斤/厘米^2，得到

$$\frac{P}{\pi Dt}-1000\leqslant 0. \qquad (b)$$

即

$$Dt\geqslant\frac{P}{\pi\times 1000}=\frac{2}{\pi}.$$

在上式中取等号，得到图中曲线（4），在此曲线以下的区域必须排除。

根据欧拉公式，发生纵向弯曲时，柱的临界荷重为

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}.$$

式中J为惯性矩，以$J=\frac{\pi D^3 t}{8}$代入上式，可知发生纵向屈曲时柱的临界应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{P_{cr}}{\pi Dt}=\frac{\pi^2 ED^2}{32l^2}.$$

柱的实际应力不能超过上述临界应力，即

$$\sigma-\sigma_{cr}=\frac{P}{\pi Dt}-\frac{\pi^2 ED^2}{32l^2}\leqslant 0. \qquad (c)$$

以P、E、l的具体数字代入上式，并取等号，得到图中曲线（5），根据不发生纵向屈曲的条件，应排除曲线（5）以下的区域。

管柱不发生管壁局部屈曲的条件是

$$\sigma-\sigma_s\leqslant 0,$$

式中σ_s是局部屈曲应力，可由下式计算

$$\sigma_s=\frac{0.4Et}{D},$$

所以不发生局部屈曲的条件可表示为

$$\frac{P}{\pi Dt}-\frac{0.4Et}{D}\leqslant 0,$$

由于D和t均应大于零，由上式得到

$$t-0.0282\geqslant 0.$$

在上式中取等号，得到图中直线（6）。因此为了不发生局部屈曲，应排除图中此直线以下的区域，在目前具体条件（$D\leqslant 10$）下，此要求低于应力不超过1000公斤/厘米^{2}的要求，因而实际上不起作用。

综合以上各点，可知满足上述各项几何和力学条件的点落在区域$ABCD$之内，如图中阴影所示。现在，我们再在这个区域内，找出使重量W最小的点子。

在（a）式中分别令$W=6$、4、2公斤，得到重量等值线如图中虚线所示。分析此图，不难发现，在阴影所示的允许区域$ABCD$内，每一个点子（D，t），都代表一个满足全部几何和力学条件的可行的设计方案，但对应于不同的点子，将有不同的重量，而当点子朝左下方向移动时，重量W将趋于减小。在点B，W取极小值，因而是最优解，即

$$D=6.5\text{厘米}，\ t=0.15\text{厘米}，\ W=4.78\text{公斤}.$$

点B是曲线（5）与直线（2）的交点，这意味着，在此处纵向屈曲条件和最小厚度

条件同时发挥了作用。如果把最小厚度条件放宽一些，例如，改为

$$t \geqslant 0.05\text{厘米}.$$

那末最优解将是F点，此时$D=8.05$厘米，$t=0.079$厘米，$W=3.12$公斤。此处起控制作用的约束条件是$\sigma \leqslant 1000$公斤/厘米^{2}和不发生纵向屈曲。$t \geqslant 0.05$厘米在这里不起作用。在本例中，最优解B和F都是极点。



杆断面

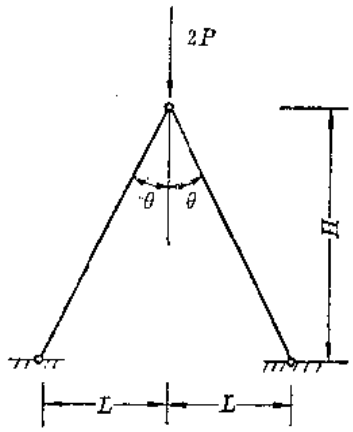


图 22-3 桁架

下面我们再分析一个例子，如图22-3所示的由两个杆件组成的对称桁架，承受的荷载为$2P=30000$公斤，两杆件是具有相同剖面的圆管，其厚度为$t=0.25$厘米，平均直径D是变量，两支点间的距离为$2L=150$厘米。杆的弹性模量为$E=2\times10^6$公斤/厘米^2，容重$\rho=0.0080$公斤/厘米^3，屈服强度$\sigma_y=4000$公斤/厘米^2。桁架高度H是变量，在杆内应力不超过屈服应力σ_y和不产生纵向屈曲的条件下，要求找到使桁架取最小重量的管径D和桁架高度H。

在本例中，管厚t、支点间距L、及所有材料特性均已预先给出，设计过程中只有两个变量，即管径D和桁架高度H。

设杆内轴向力为N，由平衡条件可知

$$N\cos\theta=P.$$

而$\cos\theta=\dfrac{H}{\sqrt{H^2+L^2}}$，所以杆内应力为

$$\sigma=\frac{N}{\pi Dt}=\frac{P\sqrt{H^2+L^2}}{\pi DHt}.$$

杆内应力不超过屈服强度这一条件可表示为

$$\frac{P\sqrt{H^2+L^2}}{\pi DHt}-\sigma_y\leqslant 0. \qquad (d)$$

纵向屈曲的临界荷载为$P_{cr}=\dfrac{\pi^2EJ}{H^2+L^2}$，以$J$代入并除以面积后，临界应力为

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2ED^2}{8(H^2+L^2)}.$$

因此，杆内应力不超过纵向屈曲临界应力的条件是

$$\frac{P\sqrt{H^2+L^2}}{\pi DHt}-\frac{\pi^2ED^2}{8(H^2+L^2)}\leqslant 0. \qquad (e)$$

桁架的重量为

$$W=2\rho\pi Dt\sqrt{H^2+L^2}. \qquad (f)$$

把已知数据（$t=0.25$厘米，$L=75$厘米，$E=2\times10^6$公斤/厘米^2，$\rho=0.0080$公斤/厘

米³，$\sigma_y=4000$公斤/厘米²）代入（d）、（e）、（f）三式，得到桁架重量为

$$W=0.01257D\sqrt{H^2+75^2}. \qquad (g)$$

杆件不屈服的条件是

$$D\geqslant\frac{4.77\sqrt{H^2+75^2}}{H}. \qquad (h)$$

杆件不发生纵向屈曲的条件是

$$D\geqslant\frac{0.198\sqrt{H^2+75^2}}{H^{\frac{1}{2}}}. \qquad (i)$$

在图22-4中，以管径D作为横坐标，以桁架高度H作为纵坐标。在式（h）中取等号，得到曲线（1），它代表$\sigma-\sigma_y=0$的各点的轨迹，为了杆件不屈服，在曲线（1）以下的区域必须排除，在式（i）中取等号，得到曲线（2），它代表$\sigma-\sigma_{cr}=0$的各点的轨迹。为了杆件不发生纵向屈曲，曲线（2）以左的区域必须排除。为了同时满足不发生屈服和纵向屈曲的条件，设计方案只能落在ABC以右的区域内，如图22-4中阴影所示。

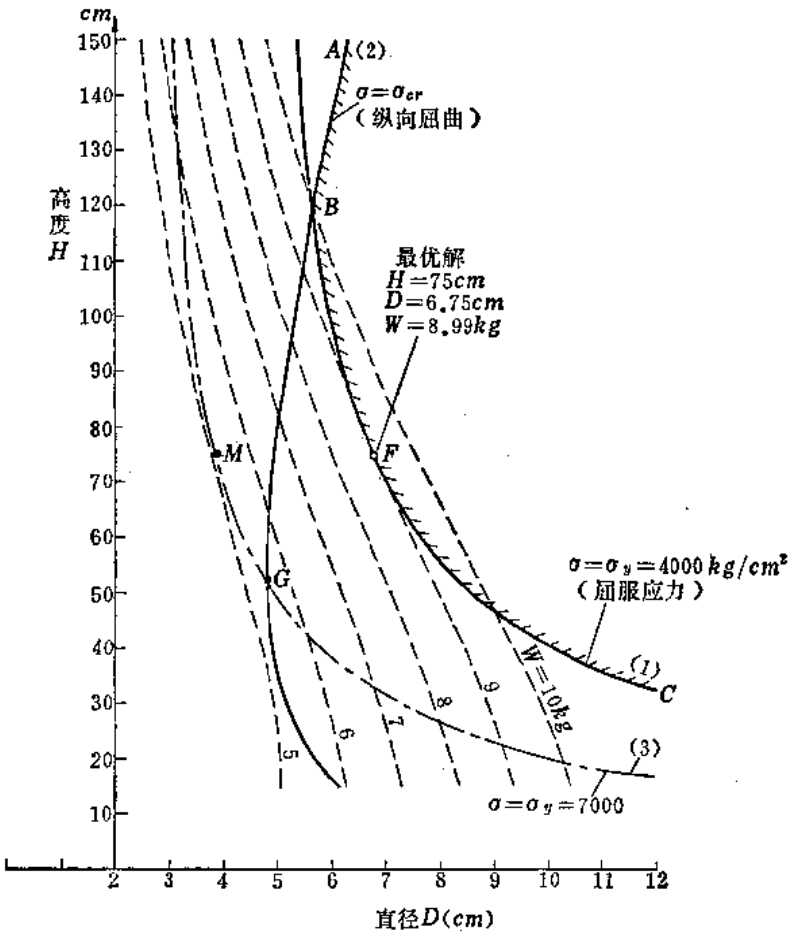


图 22-4

ABC以右部分是本例的允许区域。下一步，我们的任务是在允许区域内求出使桁架重量取最小值的设计方案。

在（ g ）式中令$W=5$，6，…9，10等，得到一组重量等值线，如图22-4中虚线所示。在本例中，最优设计方案是F点，即

$H=75$厘米，$D=6.75$厘米，$W=8.99$公斤。

F点是结构重量等值线$W=8.99$公斤与曲线$\sigma-\sigma_y=0$的切点。而不是曲线（ 1 ）与（ 2 ）的交点B。

值得注意的是，如果屈服应力提高到$\sigma_y=7000$公斤/厘米^2，则最优解将是G点（$H=52.3$厘米，$D=4.82$厘米，$W=5.52$公斤）。这时$\sigma-7000=0$曲线与W等值的切点M，因不满足纵向屈曲条件而被排除。

从以上两个例子可以看出，在容许区域内的任何一点，都代表满足全部给定条件的可行设计方案，但其中只有一点使结构重量取极小值，此点即代表最优设计方案。在这两个简例中，因设计中的变量只有两个，用图解方法即可求出最优解，实际工程中，设计中的变量很多，不能用图解方法求出最优解，而必须采用一套特殊的方法。在本章以后各节中，我们将详细介绍求最优解的计算方法。

§22-2 结构最优设计的数学表现

首先，我们定义一些名词。

（ 1 ）给定参数 指那些在一开始就给出的描述结构特性的参数，在设计过程中，其数值是固定的。如图22-1所示上节第一例中，荷载P、柱的长度l、弹性模量E及材料容重ρ等都是给定参数。

（ 2 ）设计变量 指在设计过程中其数值可以改变的那些描述结构特性的量。在上节第一例中，柱子的直径D和厚度t都是设计变量。

设计变量通常用x_1，x_2，…x_n表示，并构成一个向量：

$$x=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

以设计变量为坐标轴，所形成的空间称为设计空间。上节所述两个例子中，各有2个设计变量，因此各有一个二维设计空间。设计变量的个数n通常都超过3，因而难以用图表示，这种n维设计空间称为超空间。

（ 3 ）目标函数 它是设计变量的函数，在设计过程中要求找出使它取极小值的设计方案，目标函数是设计过程中比较和选择各种不同设计方案的指标。

通常以结构的造价、重量或体积作为目标函数，可记为$W(x)$。

（ 4 ）约束条件 为了设计方案能满足使用上的各项要求，而对结构所施加的种种限制。

根据对设计变量施加限制的方式，分为显式约束和隐式约束。显式约束是直接施加于一个或几个设计变量的限制，如上节第一例中的$D\leqslant 10$厘米，$t\geqslant 0.15$厘米。隐式约束是间接施加于设计变量的限制，如对结构应力所施加的限制。应力取决于设计变量，但在复杂结构中，并不能简单地用设计变量来表示应力，而必须通过应力分析求出。

约束条件可以是等式，也可以是不等式。等式约束可表示为

$$g_i(x)=0\,,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots s.$$

式中$x=[x_1\ x_2\ x_3\cdots x_n]^T$。上式表示共有$s$个等式约束。从理论上讲，利用一个等式约束，可以消去一个设计变量，从而降低问题的阶次，但这往往使计算过于复杂化，实际上很少这样做。在结构最优设计中，等式约束采用较少。

不等式约束可表示为

$$g_i(x)\leqslant 0,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots m.$$

共有m个不等式约束条件。$x=(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)^T$。对于结构最优设计来说，不等式约束是一个重要概念，例如，结构中任一点应力σ不得超过允许应力σ_p，即

$$\sigma-\sigma_p\leqslant 0.$$

这是不等式约束，如果改为等式约束，将成为

$$\sigma-\sigma_p-0.$$

上式表示结构内任一点的应力都必须等于允许应力。在连续结构中，这实际上是不可能实现的。

约束条件在设计空间中构成一个曲面，它代表以等式满足约束条件的设计点的轨迹。对于连续的设计变量，约束条件构成的曲面通常也是连续的。

在设计空间中，满足全部约束条件的那一部分，称为容许区域。容许区域中的任一点都代表一个满足全部约束条件的可行的设计方案。当然对应于不同的点的设计方案，将具有不同的造价、重量或体积，即具有不同的目标函数值。在设计过程中，我们的目的是，在容许区域中找出造价（或重量、体积）最低的那一点。

现在我们定义结构最优设计如下：

结构最优设计是，对于已知的给定参数，求出满足全部约束条件并使目标函数取极小值的设计变量。

用数学方式表示，就是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{极小化目标函数} & W(x)\\ \text{满足于约束条件} & g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,2,\cdots m.\\ & x_1,x_2,\cdots x_n\geqslant 0.\end{array}\right\}\qquad (22\text{-}1)$$

这是一个数学规划问题。在结构最优设计中，关于应力和位移的约束条件，通常都是设计变量的非线性函数，目标函数有时也是设计变量的非线性函数，因此它是一个非线性规划问题。

上节第一例（图22-1），就是要找出满足全部约束条件并使柱的重量取极小值的设计变量D和t，即

极小化目标函数　　$W=4.9Dt$。

满足于约束条件　　$D-10\leqslant 0$,

$0.15-t\leqslant 0$,

$t-D\leqslant 0$,

$\sigma-1000\leqslant 0$,

$\sigma-\sigma_{cr}\leqslant 0$,

$\sigma-\sigma_s\leqslant 0$。

§22-3　逐步线性化方法

对于线性规划问题，目前已有了比较成熟的计算方法，即单纯形法，在变量较多的情况下，也能以很高的速度求出最优解来，因此对于式（22-1）所表示的非线性规划问题，把它转化成一系列线性规划问题来求解，是很自然的了。这就是本节将要说明的逐步线性化方法。

按照泰勒公式，在点$x^0=[x_1^0,\ x_2^0,\ \cdots x_n^0]^T$附近，把函数$f(x)$展开，得到

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=f(x_1^0,x_2^0,\cdots x_n^0)+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)$$
$$+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2}(x_2-x_2^0)+\cdots+\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)+\cdots\cdots,$$

舍去二次以上的高阶项，在上式右端就得到变量x_1、x_2、$\cdots x_n$的线性方程。

在设计空间的容许区域中，任取一点x^0，将（22-1）式中的目标函数和约束条件都在此点附近按泰勒公式展开，并舍去二次以上的高阶项，得到

极小化

$$W(x)-W(x^0)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W(x^0)}{\partial x_j}(x_j-x_j^0),$$

满足约束条件

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_j}(x_j-x_j^0)+g_i(x^0)\leqslant 0,$$

$$x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\geqslant 0.$$

这是一个线性规划问题，用单纯形法可以求出它的最优解，例如x'点，这虽然还不是非线性规划问题（22-1）的解，但已向它接近了一步。然后再在x'点附近，把目标函数和约束条件按泰勒公式展开，得到新的线性规划问题。再用单纯形法求出其最优解x^2，如此重复进行下去，其中第$k+1$步的线性规划问题具有如下形式：

极小化

$$\left.\begin{aligned} &W(x)-W(x^k)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial W(x^k)}{\partial x_j}(x_j-x_j^k),\\ &\text{满足约束条件}\\ &\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(x^k)}{\partial x_j}(x-x_j^k)+g_i(x^k)\leqslant 0,\\ &\qquad\qquad i=1,2,\cdots m.\\ &x_1,x_2,\cdots x_n\geqslant 0. \end{aligned}\right\}\qquad (22\text{-}2)$$

式中 $x^k=[x_1^k,\ x_2^k,\ \cdots x_n^k]^T$表示第 k 次近似最优解。

在图22-5（ a ）中表示了非线性规划问题，约束条件是$g_1(x)\leqslant 0$，$g_2(x)\leqslant 0$，$g_3(x)\leqslant 0$及$g_4(x)\leqslant 0$。图22-5（ b ）中表示了在x^k点线性化以后所得到的线性规划问题，约束条件是$\overline{g}_i(x)\leqslant 0$，$i=1,2,3,4$；$\overline{g}_i(x)$是由$g_i(x)$线性化而得到的。

由于线性化所带来的误差，如图22-5所示，线性化最优解可能落在原问题的容许区域以外，有时甚至可能比真的最优解相去很远，在这种情况下，逐步线性化方法的收敛速度可能很慢。

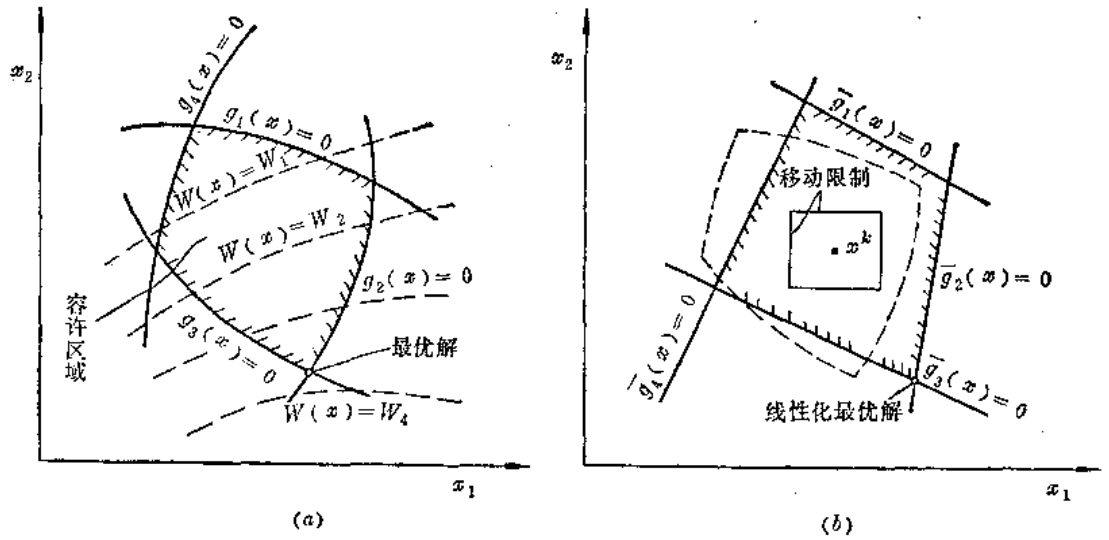


图 22-5 非线性规划问题的线性化

（a）非线性规划问题；（b）在x^k点线性化

当起始点x^0离开真正的最优解很远时，计算甚至可能不收敛。

线性规划的最优解一定在极点上实现，但非线性规划的最优解却不一定在极点上实现，有时可能在约束曲面中间的某一点上实现，如图22-4中的最优解F点就是在约束曲面（ 1 ）的中间。在这种情况下，逐步线性化的计算结果将在很大范围内来回振荡。

为了克服上述种种现象，人们曾经提出过一些办法，其中比较有效的一种办法就是对线性化最优解每次的移动范围施加一定的限制，如图22-5（ b ）所示。使得每次计算，都向有利方向前进一步，但步子比较小，不至于走过了头。实际经验表明，只要每次计算所得到的线性化最优解都在原来非线性规划的容许区域以内，总的收敛速度就是比较快的。

具体做法是，在第 k 次计算中，令

$$-l_i^k \leqslant x_i^k - x_i^{k-1} \leqslant l_i^k, \tag{22-3}$$

而

$$l_i^k = b_i l_i^{k-1}. \tag{22-4}$$

把（22-3）式作为增加的约束条件引入线性规划（22-2）。显然，l_i 选择得合适与否，对总的收敛速度是有较大影响的。

随着迭代次数的增加，x^k越来越接近真的最优解，因而越来越接近容许区域的边界，移动的步长应随之越来越小，故正常情况下宜取

$$b_i = 0.8 \sim 1.0.$$

若计算过程中，线性化最优解产生振荡现象，即Δx_i^k 与 Δx_i^{k-1}的符号相反，表示移动步长过大，应取

$$b_i^{k+1} = 0.5.$$

第一步计算中的l_i^1可取为x_i^0的10%左右。

逐步线性化方法既然是一种迭代方法，那么计算到什么时候为止呢？这就需要一个收敛准则。通常可在以下三种准则中选用一种。

1）以目标函数的增量为指标：

$$\frac{\Delta W^k}{W^k} \leqslant \varepsilon_1, \tag{22-5}$$

ε_1是一个比较小的数，例如$\varepsilon_1 = 0.01$。

2）以设计变量增量的最大值为指标：

$$max| x_i^k - x_i^{k-1} | \leqslant \varepsilon_2, \quad j = 1, 2, \cdots n. \tag{22-6}$$

3）以设计变量增量的几何平均值为指标：

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^k - x_i^{k-1})^2} \leqslant \varepsilon_3. \tag{22-7}$$

此外，当然还应满足非线性约束条件：

$$g_i(x) \leqslant 0.$$

个别情况下，也可把上述条件略微放宽一些：

$$g_i(x) \leqslant \varepsilon_i.$$

ε_i是一微小量。例如，允许应力误差可取为1%。

图22-6是逐步线性化方法的计算框图。

【简例】 今用下述简例来说明逐步线性化方法。

极小化目标函数：

$$W(x) = x_1^2 + x_2^2 - 22x_1 - 12x_2. \tag{a}$$

满足约束条件：

$$\left.\begin{aligned} g_1(x) &= x_1^2 - 6x_1 + 4x_2 - 11 \leqslant 0, \\ g_2(x) &= \frac{1}{2}x_1 x_2 - 3x_2 + 1 \leqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{b}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{c}$$

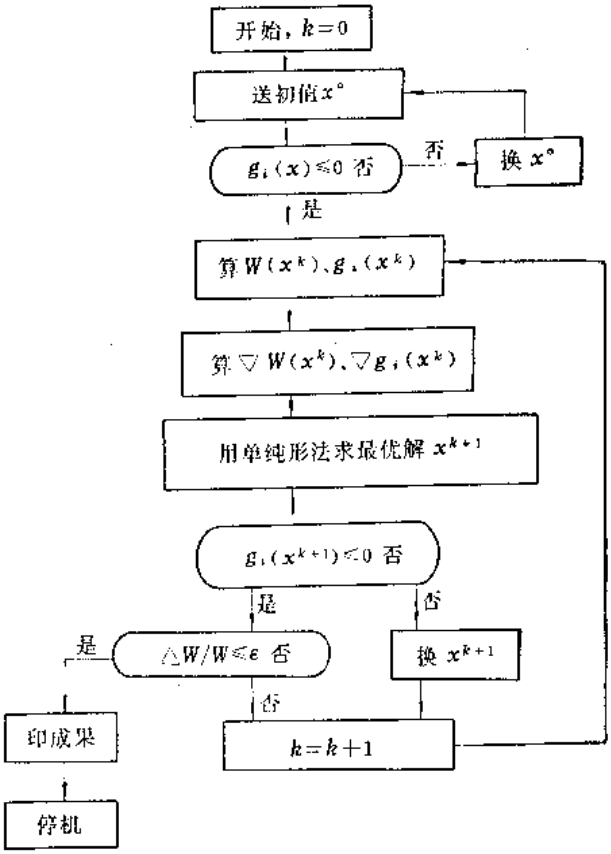


图 22-6　逐步线性化方法计算框图

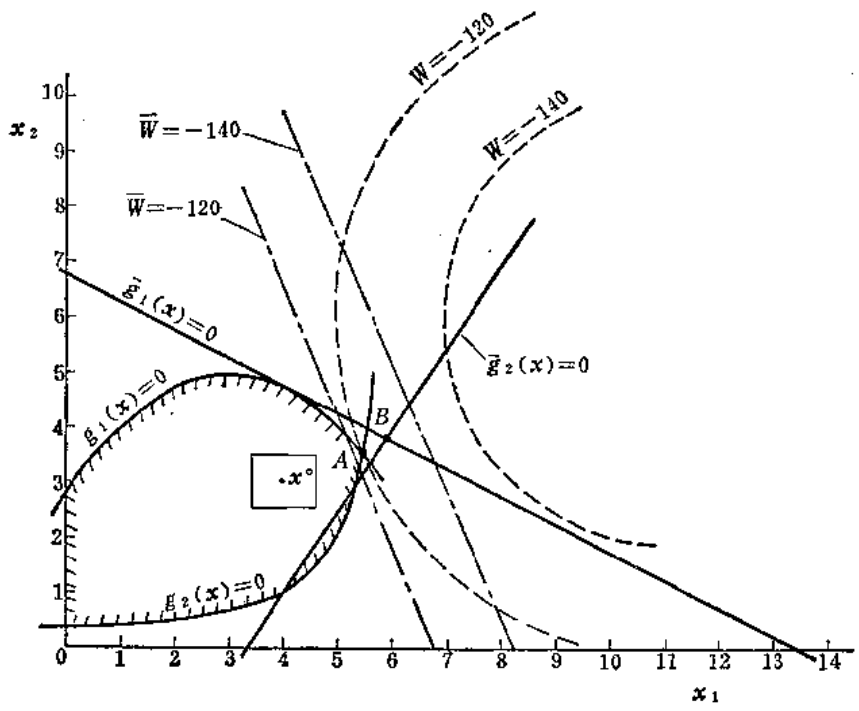


图 22-7　逐步线性化算例

在图22-7中表示了上述非线性规划问题的图象。用虚线表示了$W(x)=-120$及$W(x)=-140$的目标函数的等值线，用实线表示了$g_1(x)=0$及$g_2(x)=0$，阴影部分即是容许区域。此问题的最优解是$x=[5.43,\ 3.52]^T$，在那里$W(x)=-119.6$。

现在用逐步线性化方法求解。

在容许区域内取$x^0=[4.0,\ 3.0]^T$，在此点附近将$W(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$等作泰勒展开，得到线性规划问题如下：

极小化目标函数：
$$\bar{W}(x)=-14x_1-6x_2-25.$$

满足约束条件：
$$\bar{g}_1(x)=2x_1+4x_2-27\leqslant 0,$$
$$\bar{g}_2(x)=1.5x_1-x_2-5\leqslant 0,$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0.$$

在函数$W(x)$、$g_1(x)$、$g_2(x)$上面加上一横，表示它们是线性化以后的近似函数，在图22-7中也表示了上述线性规划问题的图象，$\bar{g}_1(x)=0$及$\bar{g}_2(x)=0$都用实线表示，$\bar{W}(x)=-120$及$\bar{W}(x)=-140$的等值线用长短线表示，由图可见，对变量x_1、x_2如不加以移动限制，则这个线性规划的最优解将是B点，它已落在原问题的容许区域以外了。

为了防止x落到原问题的容许区域以外去，施加移动限制如下：
$$-0.6\leqslant x_1-x_1^0\leqslant 0.6,$$
$$-0.5\leqslant x_2-x_2^0\leqslant 0.5.$$
经过一步计算，得$x'=[4.6,\ 3.5]^T$，在那里原目标函数$W(x')=-109.8$，与$W(x^0)=-99$比较，已有所降低。

下一步再在$x'=[4.6,\ 3.5]^T$点附近线性化，并取移动限制为$b^2=0.8b^1=0.8[0.6,\ 0.5]^T=[0.48,\ 0.40]^T$，如此一步一步计算下去，即可越来越接近最优解$A$点。

§22-4 位移灵敏度

在结构最优设计中，一般在约束条件中都包括最大应力不得过允许应力等条件，即
$$\sigma(x)-\sigma_p\leqslant 0. \qquad (a)$$
式中σ_p为允许应力。应力$\sigma(x)$通常是设计变量$x=[x_1,\ x_2,\ \cdots x_n]^T$的非线性函数，把上式在$x^0$点线性化，得到
$$\sigma(x^0)+\frac{\partial\sigma(x^0)}{\partial x_1}(x_1-x_1^0)+\cdots+\frac{\partial\sigma(x^0)}{\partial x_n}(x_n-x_n^0)-\sigma_p\leqslant 0. \qquad (b)$$
记
$$\nabla\sigma=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial\sigma}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x_n}\end{Bmatrix}. \qquad (c)$$
$\nabla\sigma$称为应力灵敏度，它是应力σ随着设计变量而改变的梯度。

在复杂结构中，应力σ很难用设计变量以显式表示出来，因此如何计算应力灵敏度就是一个问题。一个办法是用差分公式计算如下：

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_1}=\frac{\sigma(x_1+\Delta x_1,x_2,\cdots x_n)-\sigma(x_1,x_2,\cdots x_n)}{\Delta x_1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x_n}=\frac{\sigma(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n+\Delta x_n)-\sigma(x_1,\ x_2,\ \cdots x_n)}{\Delta x_n}.$$

可见为了计算一次应力灵敏度$\nabla\sigma$，需要进行$n+1$次结构应力分析，在设计变量较多的情况下，计算工作量很大，因此有必要研究更方便的计算应力灵敏度的方法。

从第三章可知，结构应力状态取决于结构位移状态，即

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}=[S]\{\delta\}.$$

对上式两端进行微分，可得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{\sigma\}=[S]\frac{\partial}{\partial x_i}\{\delta\}.$$

因此，为了计算应力灵敏度，只须求出位移灵敏度就可以了。设位移的第j个分量为δ_j，则其灵敏度可记为

$$\nabla\delta_j=\begin{Bmatrix}\frac{\partial\delta_j}{\partial x_1}\\ \frac{\partial\delta_j}{\partial x_2}\\ \cdots\cdots\\ \frac{\partial\delta_j}{\partial x_n}\end{Bmatrix}.$$

弹性结构的应力分析，归结于求解如下的平衡方程：

$$[K]\{\delta\}=\{P\}.$$

式中$[K]$是结构的整体刚度矩阵，$\{\delta\}$是位移向量，$\{P\}$是荷载向量。今把上述平衡方程对x_i求微商，得到

$$[K]\frac{\partial}{\partial x_i}\{\delta\}+\frac{\partial}{\partial x_i}[K]\{\delta\}=\frac{\partial}{\partial x_i}\{P\}.$$

由此可得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{\delta\}=[K]^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\{P\}-\frac{\partial}{\partial x_i}[K]\{\delta\}\right)$$

$$=\frac{[K]^{-1}(\Delta\{P\}-\Delta[K]\{\delta\})}{\Delta x_i}.$$

令

$$\{\overline{P}_i\}=\frac{\Delta\{P\}-\Delta[K]\{\delta\}}{\Delta x_i}. \qquad (22\text{-}8)$$

则

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\{\delta\}=[K]^{-1}\{\overline{P}_i\}. \qquad (22\text{-}9)$$

由以上二式可知，只要把$\{\overline{P}_i\}$作为一种荷载代入（22-9）式，就可直接求得位移灵敏度。

在典型的结构计算中，大部分机器时间都是耗费在刚度矩阵$[K]$的求逆上。按照以上二式计算位移灵敏度，可以重复利用已经算好了的刚度矩阵的逆阵$[K]^{-1}$，因而可以节省大量计算时间。

下面我们说明等效荷载$\{\overline{P}_i\}$的算法。

（1）第一种算法

最明显的办法是，对设计变量x_i给以微小增量Δx_i，对于每一个有关的单元，计算相应的增量$\Delta\{P^1\}$和$\Delta[K^1]$，再利用当时已经算好的位移$\{\delta\}$，求出乘积$\Delta[K^1]\{\delta^1\}$，按照通常的刚度系数的集合法则（参考第一章），不难求出等效荷载的第j个分量如下：

$$\overline{P}_{ij}=\frac{\sum_{i=1}^{s}\Delta\{P_j^i\}-\Sigma\Delta[K^1]\{\delta^1\}}{\Delta x_i}。\tag{22-10}$$

如果单元刚度矩阵和结点荷载是用数值积分方法求出的，利用上式计算时，单元形状每改变一次，就要计算两次刚度矩阵，然后才能求出其增量。

由第三章可知，根据虚功原理，单元刚度矩阵可由下式计算

$$[K]=\int_{\Omega}[B]^T[D][B]d\Omega。\tag{22-11}$$

其中Ω是积分区域，对于平面问题，$d\Omega=dxdy$，对于空间问题，$d\Omega=dxdydz$。

结点荷载可由下式计算

$$\{P\}=\int_{\Omega}[N]^T\{q\}d\Omega。\tag{22-12}$$

如果设计变量x_i改变前后的积分区域分别是Ω_1和Ω_2，则$\Delta[K]$和$\Delta\{P\}$可由下列公式计算：

$$\Delta[K]=\int_{\Omega_1}[B]^T[D][B]d\Omega-\int_{\Omega_2}[B]^T[D][B]d\Omega,\tag{22-13}$$

$$\Delta\{P\}=\int_{\Omega_1}[N]^T\{q\}d\Omega-\int_{\Omega_2}[N]^T\{q\}d\Omega。\tag{22-14}$$

在图22-8中表示了当设计变量x_i（此处是结点i的水平坐标）改变时，单元边界的改变。

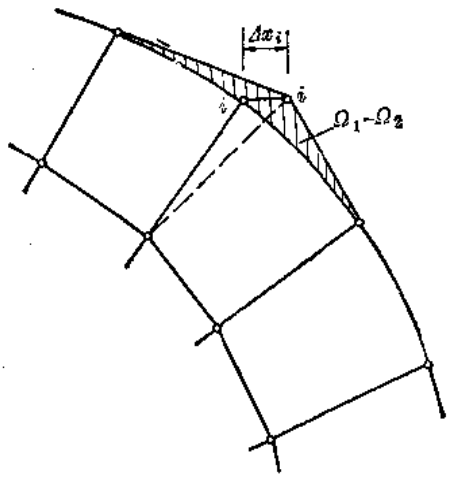


图 22-8 设计变量x_i改变时单元边界的改变

（2）第二种算法

按照（22-13）、（22-14）两式可以算出$\Delta[K]$和$\Delta\{P\}$的精确数值，但计算量较大，下面我们考虑一种简化的计算方法。在以上二式中，尽管被积函数也与设计变量x_i有关，但$\Delta[K]$和$\Delta\{P\}$的数值主要来源于积分区域Ω的改变。因此我们不妨近似地假定二式中的被积函数不因x_i的改变而改变，于是

$$\Delta\{P\}=\int_{\Omega_1-\Omega_2}[N]^T\{q\}d\Omega. \tag{22-15}$$

$\Omega_1-\Omega_2$代表积分区域的改变，如图22-8中的阴影部分。

由第三章可知

$$\{F\}=[K]\{\delta\}=\int_{\Omega}[B]^T\{\sigma\}d\Omega.$$

因此，当设计变量改变时

$$\Delta[K]\{\delta\}=\int_{\Omega_1}[B]^T\{\sigma\}d\Omega-\int_{\Omega_2}[B]^T\{\sigma\}d\Omega$$

$$=\int_{\Omega_1-\Omega_2}[B]^T\{\sigma\}d\Omega. \tag{22-16}$$

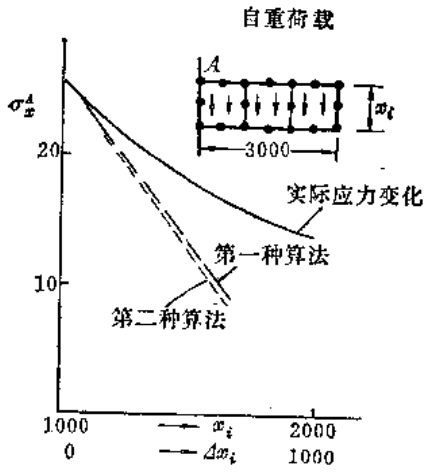


图 22-9 用两种算法计算的悬臂梁A点应力灵敏度

由上式可直接求出乘积$\Delta[K]\{\delta\}$来，避免了$\Delta[K]$与$\{\delta\}$的乘法运算。

在采用（22-15）、（22-16）二式时，可以利用设计变量x_i改变前已经求出的$[N]$、$[B]$、$\{\sigma\}$等数值。采用这种办法，不但计算简化了，而且等效荷载$\{\bar{P}_i\}$还赋有物理意义。它们实际上就是当结构增加（或减少）了阴影部分时，为了恢复平衡所需要的结点力。

在图22-9中表示了一个悬臂梁，在自重作用下，当梁的高度x_i改变时，A点水平应力σ_x^A的变化[141]。由图可见，由以上两种算法求出的应力变化率与实际应力变化率是很接近的。

§22-5 罚函数方法

利用罚函数方法，可以把一个有约束的优化问题转化为一个无约束的优化问题，从而可以简化计算。这也是在结构最优设计中应用较多的一个方法。

一、罚函数

设我们求解的约束优化问题是

$$\left.\begin{array}{ll}\text{极小化} & W(x)\\ \text{满足于约束条件} & g_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots m.\end{array}\right\} \tag{22-17}$$

我们构造一个罚函数如下

$$\phi(x,r_k)=W(x)+r_k\sum_{i=1}^{m}G[g_i(x)]. \tag{22-18}$$

上式右端第二项是惩罚项，用以考虑约束条件。r_k称为罚因子，实际上是惩罚项的加权因子。我们这样选择函数G，使得对一系列r_k极小化$\phi(x, r_k)$，所得到的最优解$\{x\}$，收敛于非线性规划问题(22-17)的最优解。在极小化$\phi(x, r_k)$时，可采用无约束优化方法。

1.内点罚函数

罚函数取为

$$\phi(x, r_k)=W(x)+r_k\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{g_i(x)}. \qquad (22\text{-}19)$$

其中r_k是如下数列

$$r_1>r_2>\cdots>r_k.$$

当k增加时，$r_k\to 0$。

先从$\{x_0\}$开始，找到使$\phi(x, r_1)$取极小值的解$\{x_1\}$。再从$\{x_1\}$开始，找到使$\phi(x, r_2)$取极小值的解$\{x_2\}$。重复上述步骤，最后一步，从$\{x_{k-1}\}$开始，找到使$\phi(x, r_k)$取极小值的解$\{x_k\}$。当$r_k\to 0$时，$\{x_k\}$收敛于规划问题（22-17）的解。显然，当约束条件$g_i(x)$中有一个趋于零时，式（22-19）中的惩罚项即迅速增大。正是利用这一特点，使设计变量$\{x\}$处于容许区域内。采用这种罚函数，搜索的起点必须位于容许区域的内部，所以称为内点罚函数。

有的文献建议把内点罚函数取为

$$\phi(x, r_k)=W(x)-r_k\sum_{i=1}^{m}\ln\{-g_i(x)\}. \qquad (22\text{-}20)$$

下面通过一个简例来说明罚函数的概念。

设求解的规划问题是

极小化　　$W(x)=bx,$

满足于约束条件　　$g_1(x)=c-x\leqslant 0.$　　（a）

取罚函数如下

$$\phi(x, r_k)=bx-\frac{r_k}{c-x}. \qquad (b)$$

由上式求导数，得到

$$\phi'(x, r_k)=b-\frac{r_k}{(c-x)^2}.$$

由$\phi'=0$，得到极小点

$$x^*=x_{极小}=c+\sqrt{\frac{r_k}{b}},$$

$$\phi(x^*, r_k)=bc+2\sqrt{br_k}.$$

当$r_k\to 0$时的极限值为

$$x^*=c,\quad \phi(c)=W(c)=bc.$$

可见，当$r_k\to 0$时，无约束优化问题（b）的极小解趋于约束优化问题（a）的解。

$\phi(x, r_k)$的图象及其极小解趋于规划问题（a）的极小解的情况见图22-10（a）。

2.外点罚函数

罚函数取为

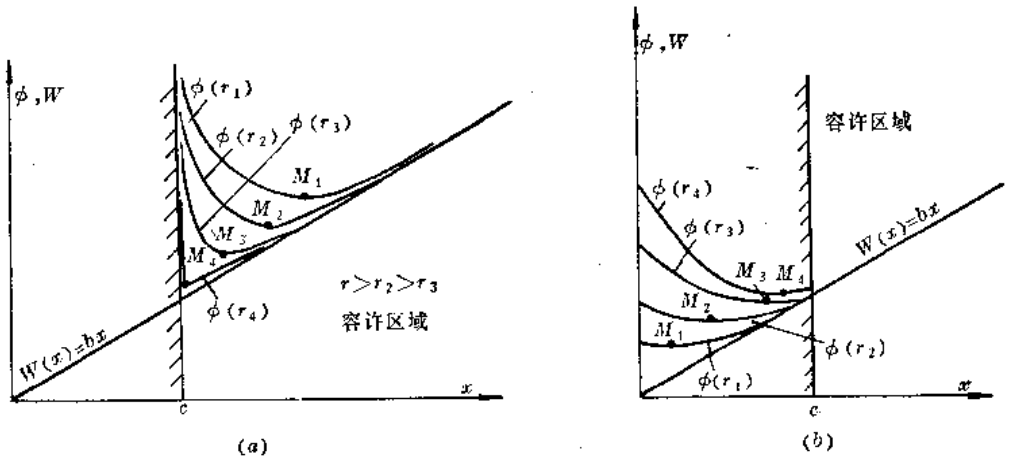


图 22-10 罚函数简例

(a)内点罚函数；(b)外点罚函数

$$\phi(x,\ r_k)=W(x)+\frac{1}{r_k}\sum_{i=1}^{m}[min.\{0,\ -g_i(x)\}]^2. \qquad (22\text{-}21)$$

式中 $r_1>r_2>\cdots>r_k$。

我们来看看上式右端第二项是如何取值的。

当 $g_i(x)\leqslant 0$时，$min\{0,\ -g_i(x)\}=0$，

当 $g_i(x)>0$时，$min\{0,\ -g_i(x)\}=-g_i(x)$。

也就是说，当设计变量$\{x\}$位于容许区域内部时，惩罚项为零，当设计变量$\{x\}$位于容许区域以外时，惩罚项取非零值，它构成了对于不满足约束条件的惩罚。当$r_k\to 0$时，$\phi(x,\ r_k)$的极小解趋于规划问题（22-17）的极小解。

应用罚函数（22-21）时，搜索的起点$\{x_0\}$可以位于容许区域的外部，所以称为外点罚函数。

对于前述问题(a)，外点罚函数为

$$\phi(x,\ r_k)=bx+\frac{1}{r_k}[min\{0,\ x-c\}]^2.$$

当x位于容许区域内部时，$\phi(x,\ r_k)=bx=W(x)$，ϕ的极小点显然就是W的极小点。当x位于外部时，即$x-c<0$，此时

$$\phi(x,\ r_k)=bx+\frac{(x-c)^2}{r_k}.$$

由$\phi'=b+\frac{2(x-c)}{r_k}=0$，得到极小点为

$$x^*=c-\frac{r_k b}{2}.$$

极值为

$$\phi(x^*,\ r_k)=bc-\frac{r_k b^2}{4}.$$

若令$r_k \to 0$，则得到

$$x^* = c, \quad \phi(x^*) = bc。$$

显然，这就是$W(x)$的极小点和极值。

上述罚函数的图象见图22-10（ b ）。由此图也可看出，当$r_k \to 0$时，$\phi(x, r_k)$的极小解趋于规划问题（ a ）的极小解。

外点法与内点法的比较。外点法对于初始点及每一步的迭代点都不要求是容许点，迭代过程中得到的极小点也不一定是容许点，但随着r_k的减小，迭代中所得到的极小点会逐步向容许区域靠近，一般可使迭代点一步步进入容许区域。内点法要求给出的初始点是容许点，而且每步的迭代点都必须是容许点。内点法只能处理不等式约束，不能处理等式约束。外点法对于等式约束和不等式约束都适用。外点法对某一r_k如求出的$\phi(x, r_k)$的极小点满足所有的约束条件，便得到了非线性规划问题的解。内点法则要求r_k是一串趋于零的数。外点法有一个严重缺点，当$r_k \to 0$时，$\frac{1}{r_k} \to \infty$，因此可能产生机器容纳不了罚函数值的溢出问题。

此外，也可以采用混合罚函数，即把内点罚函数和外点罚函数混合起来使用。例如，对于等式约束条件，采用外点法，对于不等式约束条件，采用内点法。

罚函数方法求出的是局部最优点。为求出全局最优点，可从不同的初始点开始。

二、罚因子r_k的选择

罚因子r_k的大小代表了惩罚项在函数$\phi(x, r_k)$中所占的比重。r_k的数值选择是否得当，对计算的收敛速度影响颇大。

r_1的选择：如r_1取值太大，惩罚项所占比重过大，第一次迭代得到的极小点将离开约束边界很远，甚至可能比初始点离开真正的最优解还要更远。如r_1取值太小，迭代结果可能落在一个局部极小点上，而不是整体极小点。一个比较简便的方法是按下式选择r_1：

$$r_1 = \frac{pW(x^0)}{100 \sum_{i=1}^{m} G[g_i(x^0)]}。 \qquad (22\text{-}22)$$

式中$\{x^0\}$是初始点，p是惩罚项占目标函数的百分比，$p=1 \sim 50$，通常可取$p=10$。如果初始点靠近某一约束边界，p应取得大一些，以免落在局部极小点上。

r_k的选择：以后各次罚因子r_k可按下式计算：

$$r_k = \frac{r_{k-1}}{B_k}, \quad k = 2, 3, \cdots K。 \qquad (22\text{-}23)$$

其中$B_k > 1$。

通常认为B_k的选择对计算结果的影响不大。如果B_k取得大一些，迭代次数少一些，但每次迭代的计算步数可能多一些。反之，如B_k取得小一些，迭代次数多一些，而每次迭代的计算步数可能少一些。总的计算量可能相差不大。一般取$B_k = 10 \sim 50$，$K = 6 \sim 3$。

三、设计变量的插值

对于每一个r_k，找到的极小点是$\{x(r_k)\}$。从已有计算经验来看，可以认为设计变量x是r的光滑函数，如图22-11所示。

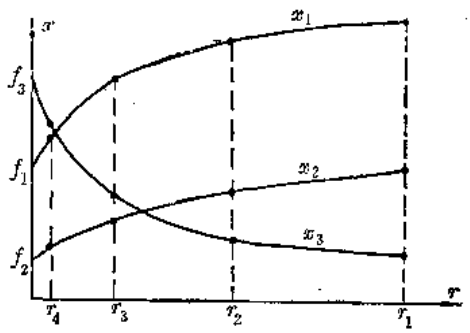


图 22-11 变量x_i的插值

有的文献建议把设计变量x_n与r的关系取为

$$x_n(r)=f_n+g_n r^{\beta}。\qquad (22\text{-}24)$$

式中f_n、g_n是待求的系数，x_n是第n个设计变量，β是事先选定的常数，$0<\beta<1$。

例如，对于r_1和r_2，如已求得极小点为x_{n1}和x_{n2}，代入式（22-24），得到

$$x_{n1}=f_n+g_n r_1^{\beta},$$
$$x_{n2}=f_n+g_n r_2^{\beta}。$$

由以上二式联立求解，得到

$$f_n=\frac{x_{n2}r_1^{\beta}-x_{n1}r_2^{\beta}}{r_1^{\beta}-r_2^{\beta}}。\qquad (22\text{-}25)$$

令$r\to 0$，由（22-24）式得到

$$x_n(0)=f_n。$$

下一次迭代，可以把$\{x\}=\{f\}=[f_1、f_2、\cdots f_n]^T$作为起点。

计算步骤为：

1）先迭代两次，求得两个极小点。

2）取β值为β_1，$0<\beta_1<1$，由式（22-25）计算f_n。

3）检查$\{x\}=\{f\}=[f_1 f_2\cdots f_n]^T$是否可行，如可行，以它作为下次迭代的起点。

4）如$\{x\}=\{f\}$不可行，以$\beta_1+\Delta\beta$代替β_1，如果$\beta_1+\Delta\beta<1$，从第2）步开始重复计算。如果对于$\beta<1$，没有可行点，则按通常办法进行第三次迭代，找到极小点后，再按上述方法外插设计变量。

通常可取$\beta_1=0.4$，$\Delta\beta=0.1$，采用上述外插法，可使总的计算量减少约30%。

§22-6 无约束优化

利用罚函数方法，可以把一个有约束优化问题转化为无约束优化问题，现在我们来说明如何求解一个无约束优化问题。

我们的任务是寻找使函数$f(x)$取极小值的点$\{x\}$。由于实际工程中自变量$\{x\}$的个数比较多，函数$f(x)$也比较复杂，很难用解析方法找到极小点。通常都是用数值方法求解，即从初始点$\{x^{(0)}\}$开始，找到点$\{x^{(1)}\}$，使$f(x^{(1)})<f(x^{(0)})$，然后再找到点$\{x^{(2)}\}$，使$f(x^{(2)})<f(x^{(1)})$，这样一步一步走下去，直到求得$f(x)$的极小值为止。

一般说来，在第k步计算中，从$\{x^{(k)}\}$出发，找到$\{x^{(k+1)}\}$点，使函数$f(x^{(k+1)})$尽可

能比$f(x^{(k)})$下降得多一些，而$\{x^{(k+1)}\}$可表示为

$$\{x^{(k+1)}\}=\{x^{(k)}\}+\{\Delta x^{(k)}\}=\{x^{(k)}\}+\alpha^{(k)}\{s^{(k)}\}. \qquad (22\text{-}26)$$

式中$\alpha^{(k)}$是纯量，代表$\{\Delta x^{(k)}\}$的长度，$\{s^{(k)}\}$是向量，代表第k步前进的方向。$\alpha^{(k)}$和$\{s^{(k)}\}$由下列二式计算：

$$\alpha=\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2},$$

$$\{s\}=[s_1 s_2\cdots s_n]^T.$$

式中 $s_i=\Delta x_i/\alpha$.

在选定方向$\{s\}$后，各设计变量的增量只与α有关，即

$$\Delta x_i=\alpha s_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots n.$$

在每一步计算中，我们要设法找到一个最好的方向$\{s^{(k)}\}$和最好的步长$\alpha^{(k)}$，使$f(x^{(k+1)})$下降得最多；也就是说，使$\{x^{(k+1)}\}$点最大限度地靠近极小点，以便最终以最少的步数到达极小点。

下面说明几个求无约束极小值的方法。

一、梯度法（最速下降法）

函数$f(x_1x_2\cdots x_n)$的梯度是

$$\nabla f(x)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1},\ \frac{\partial f}{\partial x_2},\ \cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right]^T, \qquad (22\text{-}27)$$

沿着梯度的方向是

$$\{s\}=\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

式中 $$\|\nabla f(x)\|=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

梯度是与函数$f(x)$的等值线正交的，沿着梯度方向，函数$f(x)$的值增加最快。相反，沿着梯度的反方向，函数值下降最快。因此，在$\{x^{(k)}\}$点，最速下降方向是

$$\{s^{(k)}\}=-\frac{\nabla f(x^{(k)})}{\|f(x^{(k)})\|}.$$

我们沿着这个方向去寻找$\{x^{(k+1)}\}$，由式（22-26）可知

$$\{x^{(k+1)}\}=\{x^{(k)}\}-\frac{\alpha^{(k)}\nabla f(x^{(k)})}{\|\nabla f(x^{(k)})\|}. \qquad (22\text{-}28)$$

不断改变α的数值，使$f(x)$取最小值从而得到$\{x^{(k+1)}\}$，这时$\{\Delta x^{(k)}\}$只与一个变量α有关，所以这种沿固定方向寻找极小点称为一维搜索。一维搜索的方法将留到后面说明。

下一步再从$\{x^{(k+1)}\}$点开始，沿此点负梯度方向进行一维搜索，找到$\{x^{(k+2)}\}$，如此逐步计算下去，直至找到极小点为止。

可以证明，用梯度法求极小点，相邻两次搜索的方向是互相正交的，因此在求解过程中，走的是锯齿形路线。

梯度法是一个最简单的方法，但收敛速度比较慢，梯度是函数在$\{x^{(k)}\}$点的局部性

质，虽然从局部看在这一点下降得最快，但从总体看却要走许多弯路，因此总的效果并不是最好的。

下面列举一个梯度法算例。

极小化　　$f(x)=x_1^2+25x_2^2$。

函数$f(x)$的梯度为

$$\nabla f(x)=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2x_1\\ 50x_2\end{Bmatrix},$$

$$\|\nabla f(x)\|=\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{(2x_1)^2+(50x_2)^2}.$$

以$\{x^{(0)}\}=[2,\ 2]^T$作为初始点，在此点：

$$f(x^{(0)})=2^2+25\times 2^2=104,$$

$$\nabla f(x^{(0)})=\begin{Bmatrix}4\\ 100\end{Bmatrix},\quad \|\nabla f(x^{(0)})\|=\sqrt{4^2+100^2}\approx 100.$$

由式（22-28）：

$$\{x^{(1)}\}=\begin{Bmatrix}x_1^{(1)}\\ x_2^{(1)}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\end{Bmatrix}-\frac{\alpha^{(0)}}{100}\begin{Bmatrix}4\\ 100\end{Bmatrix}.$$

沿负梯度方向进行一维搜索，得到使函数取最小值的步长$\alpha^{(0)}=2.003$，代入上式得到（图22-12）：

$$\{x^{(1)}\}=\begin{Bmatrix}2\\ 2\end{Bmatrix}-\frac{2.003}{100}\begin{Bmatrix}4\\ 100\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1.92\\ -0.003\end{Bmatrix},$$

$$f(x^{(1)})=3.19.$$

经过这一步计算，函数值从104下降到3.19，再从$\{x^{(1)}\}$开始，沿这一点的负梯度方向进行一维搜索，得到

$$\{x^{(2)}\}=\begin{Bmatrix}0.070\\ 0.070\end{Bmatrix},\quad f(x^{(2)})=0.13.$$

函数的极小点是

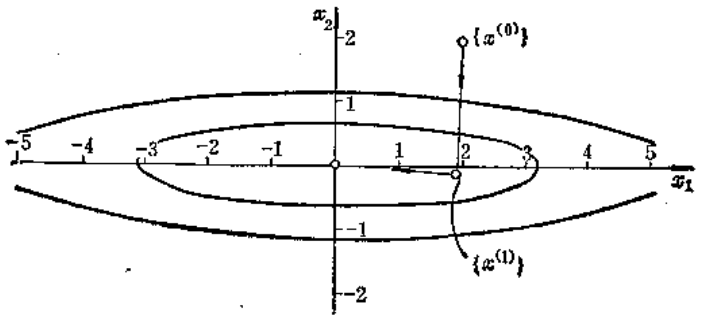


图 22-12　算例

$$\{x^*\}=[0,\ 0]^T,\quad f(x^*)=0.$$

二、牛顿法

在梯度法中，决定搜索方向时利用了函数的一阶导数。在牛顿法中，为了加快收敛速度，决定搜索方向时，除了一阶导数外，还利用函数的二阶导数。

先以二维问题为例。我们的课题是，从$\{x\}=[x_1\ x_2]^T$点开始，寻找$\{\Delta x\}=[\Delta x_1\ \Delta x_2]^T$，使函数$f(x+\Delta x)$的数值最大限度地下降。把函数$f(x)$在$\{x\}$点附近作泰乐展开，只保留二阶项，得到

$$f(x+\Delta x)=f(x_1,x_2)+\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta x_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\Delta x_1\Delta x_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta x_2^2\right).\qquad(a)$$

我们这样选择Δx_1和Δx_2，使$f(x+\Delta x)$取极小值，从数学分析可知必须

$$\frac{\partial f(x+\Delta x)}{\partial \Delta x_1}=0,\quad \frac{\partial f(x+\Delta x)}{\partial \Delta x_2}=0.\qquad(b)$$

由（a）式分别对Δx_1和Δx_2求偏导数，并代入上式，得到

$$\frac{\partial f(x+\Delta x)}{\partial \Delta x_1}=\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\Delta x_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\Delta x_2=0,$$

$$\frac{\partial f(x+\Delta x)}{\partial \Delta x_2}=\frac{\partial f}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\Delta x_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\Delta x_2=0.$$

即

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{Bmatrix}=-\begin{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\end{Bmatrix}.$$

由此式求逆得到

$$\begin{Bmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}\end{Bmatrix}.$$

对于一般情况，设 $\{x\}=[x_1x_2\cdots x_n]^T$，$\{\Delta x^{(k)}\}=[\Delta x_1{}^{(k)}\Delta x_2{}^{(k)}\cdots\Delta x_n^{(k)}]^T=\{x^{(k+1)}\}-\{x^{(k)}\}$，在$\{x^{(k)}\}$点附近，把函数$f(x)$作泰乐展开，只保留二阶项，得到

$$f(x^{(k+1)})=f(x^{(k)})+\nabla^T f(x^{(k)})\{\Delta x^{(k)}\}+\frac{1}{2}\{\Delta x^{(k)}\}^T\nabla^2 f(x^{(k)})\{\Delta x^{(k)}\}.$$

式中

$$\nabla^2 f(x)=H(x)=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}.\qquad(22\text{-}29)$$

$H(x)$是由$f(x)$的二阶偏导数组成的方阵，称为海色(Hessian)矩阵。它是对称方阵。和前面一样，我们这样选择Δx_1、$\Delta x_2 \cdots \Delta x_n$，使函数$f(x+\Delta x)$的数值最大限度地下降，即使$f(x+\Delta x)$取极小值，为此必须

$$\frac{\partial f}{\partial \Delta x_1}=\frac{\partial f}{\partial \Delta x_2}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial \Delta x_n}=0.$$

由此得到

$$H(x^{(k)})\{\Delta x^{(k)}\}=-\nabla f(x^{(k)}).$$

由上式求逆，得到

$$\{\Delta x^{(k)}\}=-H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)}).$$

从而

$$\{x^{(k+1)}\}=\{x^{(k)}\}+\{\Delta x^{(k)}\}=\{x^{(k)}\}-H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)}). \qquad (22\text{-}30)$$

这就是牛顿公式。此式同时给出了方向和步长。如果$f(x)$是二次函数，只要计算一步，就可得到函数的极小点。

下面列举一个牛顿法算例。

极小化 $$f(x)=x_1^2+25x_2^2.$$

取初始点$\{x^{(0)}\}=[2\ \ 2]^T$，在这一点有

$$\nabla f(x^{(0)})=\begin{Bmatrix} 4 \\ 100 \end{Bmatrix},$$

$$\nabla^2 f(x^{(0)})=H(x^{(0)})=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 50 \end{bmatrix}.$$

由式（22-30），得到

$$\{x^{(1)}\}=\{x^{(0)}\}-H^{-1}(x^{(0)})\nabla f(x^{(0)}),$$

$$=\begin{Bmatrix} 2 \\ 2 \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{50} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 4 \\ 100 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

$\{x^{(1)}\}$即是极小点。

一般情况下，$f(x)$不会是二次函数，所以计算一步不能得到极小点。计算方法通常也作一些修改。每一步迭代沿牛顿公式（22-30）给出的方向

$$\{s^{(k)}\}=-H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)})$$

进行一维搜索，找到在这个方向使函数取极小值的点：

$$\{x^{(k+1)}\}=\{x^{(k)}\}-\alpha^{(k)}H^{-1}(x^{(k)})\nabla f(x^{(k)}). \qquad (22\text{-}31)$$

在这里，$\alpha^{(k)}$代表$\{\Delta x^{(k)}\}$的长度与牛顿公式（22-30）给出的步长的比值。

即使目标函数不是二次函数，它在极小点附近往往与二次函数很接近，所以牛顿法的收敛速度是很快的。它的缺点是每一步都要计算海色矩阵并求逆，计算工作量很大。

三、变尺度法（DFP法）

由Davidon提出，并经Fletcher和Powell修正和发展的变尺度法，简称DFP法，到

目前为止被认为是最有效的一个算法[147]。

梯度法计算简单，但收敛太慢。牛顿法收敛很快，但每一步都要计算二阶偏导数矩阵并求逆矩阵，计算量很大。为了充分利用牛顿法收敛快这一优点，而克服H^{-1}计算量大这一缺点，不妨仍利用牛顿公式（22-31）迭代，但采用简便的方法去计算近似的H^{-1}，以减少每一步的计算量。基于这个想法，DFP法就是以（22-31）式作为迭代公式，但矩阵H^{-1}是在迭代过程中逐步产生的，并希望它能较好地逼近$[D^2f]^{-1}$。

令
$$\eta^{(k)}\approx H^{-1}(x^{(k)}).$$

代入式（22-31），迭代公式为

$$\{x^{(k+1)}\}=\{x^{(k)}\}-\alpha^{(k)}\eta^{(k)}\nabla f(x^{(k)}). \tag{22-32}$$

其中$\alpha^{(k)}$为由一维搜索决定的步长，$\nabla f(x^{(k)})$为函数在$\{x^{(k)}\}$点的梯度。

第一步计算中，令$\eta^{(0)}=[I]$（单位阵），即第一步是按梯度法计算，以后各步，由下式计算$\eta^{(k+1)}$：

$$\eta^{(k+1)}=\eta^{(k)}+\frac{\{\Delta x^{(k)}\}\{\Delta x^{(k)}\}^T}{\{\Delta x^{(k)}\}^T\{q^{(k)}\}}-\frac{(\{\eta^{(k)}\}\{q^{(k)}\})(\{\eta^{(k)}\}\{q^{(k)}\})^T}{\{q^{(k)}\}^T\{\eta^{(k)}\}\{q^{(k)}\}}. \tag{22-33}$$

式中
$$\{\Delta x^{(k)}\}=\{x^{(k+1)}\}-\{x^{(k)}\},$$
$$\{q^{(k)}\}=\{\nabla f(x^{(k+1)})\}-\{\nabla f(x^{(k)})\}.$$

可以证明，对于二次函数，采用DFP法至多n次即可达到极小点。对于非二次函数，当然可能要超过n次。一般在迭代n次以后，即重新令$\eta^{(k)}=[I]$。

对于许多实际问题，目标函数的一阶偏导数虽然存在，但往往不能用公式直接给出。有时虽能用公式给出，但过于繁杂，不便应用。对于这类题目，仍可用变尺度法，但需用差商代替偏导数。此时应注意选择差商公式及差商步长。尤其在极小点附近，由于函数的梯度为零，差商公式的误差可能很大，必须审慎处理，处置不当可能导致方法失败。一般说来，开始阶段可用简单差商公式，以简化差商的计算，至较后阶段，应改用中心差商公式。关于这个问题的详细讨论，见[148]及[171]。

四、近似曲面法

为了计算牛顿公式中的H^{-1}矩阵，也可采用近似曲面法。

把目标函数$W(x)$、约束函数$g_i(x)$或应力$\sigma(x)$的曲面，在$\{x^{(0)}\}$点附近用一个近似曲面代替，然后用近似曲面的海色矩阵代替原来真实曲面的海色矩阵。为了简化计算，近似曲面当然越简单越好。通常可用无交叉项的二次曲面，即

$$F(x)=a_0+\sum_{i=1}^{n}[a_{1i}(x_i-x_i^{(0)})+a_{2i}(x_i-x_i^{(0)})^2]. \tag{22-34}$$

n是设计变量的个数。上式共包含$2n+1$个系数a_0、a_{1i}、a_{2i}。在$\{x^{(0)}\}$附近的$2n+1$个点上计算函数$F(x)$的值后，即可计算这些系数。例如，对于二维问题，系数可计算如下：

$$a_0=F(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)}),$$
$$a_{11}=[F(x_1^{(0)}+\delta,\ x_2^{(0)})-F(x_1^{(0)}-\delta,\ x_2^{0})]/2\delta,$$
$$a_{21}=[F(x_1^{(0)}+\delta,\ x_2^{(0)})+F(x_1^{(0)}-\delta,x_2^{(0)})-2F(x_1^{0},x_2^{0})]/2\delta^2.$$

利用上述近似曲面，求出罚函数的近似海色矩阵H，由此可确定搜索方向如下

$$\{S\}=-H^{-1}\nabla f.$$

再沿这个方向进行一维搜索。据文献介绍，采用这个方法，只要迭代很少几次，即可得到目标函数的极小点。

五、一维搜索

在特定方向$\{s\}=[s_1\ s_2\cdots s_n]^T$上，$\Delta x_i=\alpha s_i$，设计变量$x_i$的增量取决于步长$\alpha$，所以只有一个变量$\alpha$。在固定方向上，$\phi$、$W$、$g$等都是一个变量$\alpha$的函数。如果当$\alpha=\alpha_l$时，第$k$个约束条件等于零，$g_k(\alpha_l)=0$，则当$\alpha\to\alpha_l$时，$\phi(\alpha)\to\infty$。

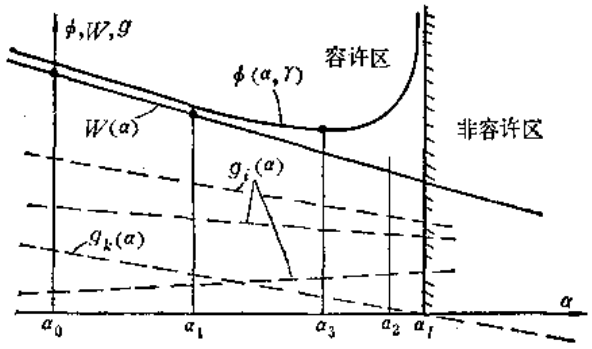


图 22-13 一维搜索

一维搜索方法很多，黄金分割（0.618）法就是其中一种。用黄金分割法通常要试算6～12次才能找到极小点。下面介绍一种效果较好的方法，通常只要试算3～4次即可找到极小点（图22-13）。

搜索过程中如直接用多项式去近似ϕ函数，效果是不好的，因在极值点附近其导数改变很快。较好的办法是对目标函数$W(\alpha)$和约束函数$g_i(\alpha)$分别用多项式近似。

一维搜索步骤如下：

1）对α_0和α_1，计算$W(\alpha_0)$、$W(\alpha_1)$、$g_i(\alpha_0)$、$g_i(\alpha_1)$；

2）用线性函数近似$W(\alpha)$和$g_i(\alpha)$，即

令
$$W_1(\alpha)=a+b\alpha,$$
$$g_{i1}(\alpha)=d_i+e_i\alpha.$$

由此得到$\phi(\alpha,\ \gamma)$函数的近似式：

$$\phi_1(\alpha,\gamma)=a+b\alpha+\gamma\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i+e_i\alpha}. \qquad (22\text{-}35)$$

$\phi(\alpha,\ \gamma)$的导数为

$$\phi_1'(\alpha,\ \gamma)=b-\gamma\sum_{i=1}^{m}\frac{e_i}{(d_i+e_i-\alpha)^2}.$$

3）由$\phi'(\alpha,\ \gamma)=0$，确定α_2，并计算$W(\alpha_2)$和$g_i(\alpha_2)$；

4）利用α_0、α_1、α_2三处的函数值，以二次函数近似$W(\alpha)$和$g_i(\alpha)$如下：

$$W_2(\alpha)=a+b\alpha+c\alpha^2,$$
$$g_i(\alpha)=d_i+e_i\alpha+f_i\alpha^2.$$

由此得到ϕ函数及其导数如下：

$$\phi_2(\alpha,\gamma)=a+b\alpha+c\alpha^2+\gamma\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d_i+e_i\alpha+f_i\alpha^2},\qquad(22\text{-}36)$$

$$\phi_2'(\alpha,\gamma)=b+2c\alpha-\gamma\sum_{i=1}^{m}\frac{e_i+2f_i\alpha}{(d_i+e_i\alpha+f_i\alpha^2)^2}.$$

5）由$\phi'(\alpha,\ \gamma)=0$，得到α_3。多数情况下，可以α_3作为近似的极小点。必要时，可在α_0、α_1、α_2三点中舍去ϕ值较大的一点，然后重复第4）步。

六、比例因子

为了加快无约束优化的过程，最好对各设计变量引进比例因子如下：

$$x_i'=c_ix_i.$$

式中c_i，$i=1$，2，…n是比例因子。以二维问题为例，如果目标函数的等值线是圆周的话，则梯度的负方向直接指向圆心，即极值点。所以我们应该这样选择比例因子，尽量使x_i'在数值上彼此接近。一个比较简单的方法是取

$$c_i=\frac{1}{x_i^{(0)}}.$$

式中$x_i^{(0)}$是变量x_i的初始值。

约束条件也应作相应的变换，例如应力约束条件

$$\sigma-\sigma_p\leqslant 0.$$

可改为

$$\frac{\sigma}{\sigma_p}-1\leqslant 0.$$

其中σ_p为允许应力。引进比例因子后，可加快收敛速度。

§22-7 杆件结构最优设计

利用最优设计方法，可以求出杆件结构最好的几何形状，可以选择各杆件的尺寸使结构的造价最低。如果每个杆件本身的形状允许改变的话，也可以选择杆件的最好形状。

目标函数可以是结构的造价、重量或体积。对于桁架来说，如果第i个杆件的长度为l_i，断面积为A_i，则这一杆件的体积为A_il_i。结构的总体积是

$$V=\sum_{i=1}^{N}L_iA_i.\qquad(22\text{-}37)$$

其中N是杆件总数。结构的总重量是

$$W=\sum_{i=1}^{N}\gamma_iL_iA_i.\qquad(22\text{-}38)$$

式中γ_i是第i杆的容重。如果杆件i的单位重量的造价是c_i，则结构总造价是

$$C=\sum_{i=1}^{N}c_i\gamma_iL_iA_i.\qquad(22\text{-}39)$$

对于刚架结构来说，弯曲应力是主要的，以各杆件的惯性矩作为设计变量较为方便，因此目标函数最好也用惯性矩表示，惯性矩J和断面积A之间并不存在直接的线性关系，但

对于常用的断面来说，$\log A$和$\log J$之间往往存在着线性关系，有人曾建议用下式表示A与J的关系：

$$A=\beta J^{\frac{1}{2}}.$$

其中β是一常数，对于钢材来说，$\beta=0.559$。利用上式，可把刚架结构的体积、重量和造价表示如下：

$$\left.\begin{aligned} V&=\beta\sum_{i=1}^{N}L_iJ_i^{\frac{1}{2}},\\ W&=\beta\sum_{i=1}^{N}\gamma_iL_iJ_i^{\frac{1}{2}},\\ C&=\beta\sum_{i=1}^{N}c_i\gamma_iL_iJ_i^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\}\qquad(22\text{-}40)$$

对于刚架结构来说，也可用各杆件的断面模数Z_i作为设计变量。断面模数Z与面积A之间存在如下关系：

$$A=\beta' Z^{\frac{2}{3}}.$$

其中β'是常数，对于钢材来说，$\beta'=0.78$。利用上式，不难用Z_i表示结构的体积、重量或造价。

约束条件通常包括几何约束（如最小尺寸）、允许应力及允许最大位移等。

下面我们通过一个简例来说明杆件结构的最优设计。当然，实际工程中的结构要复杂一些，但那只是设计变量多一些，计算方法还是一样的。

图 22-14 所示三杆件桁架，给定参数为$H=254$厘米，$P_1=13600$公斤，$P_2=9100$公斤。有两个设计变量，其一是结点B的水平坐标x_1，其二是三个杆件的断面积$x_2=A_1=A_2=A_3$。约束条件是当荷载P_1和P_2分别作用于结构时，各杆中的最大拉应力不得超过1400公斤/厘米^2，最大压应力不得超过1050公斤/厘米^2，即

$$-1050\leqslant\sigma_{kj}\leqslant1400,\quad k=1,2;\quad j=1,2,3.$$

其中$k=1$、2，代表加荷情况，$j=1$、2、3，代表杆件1、2、3。

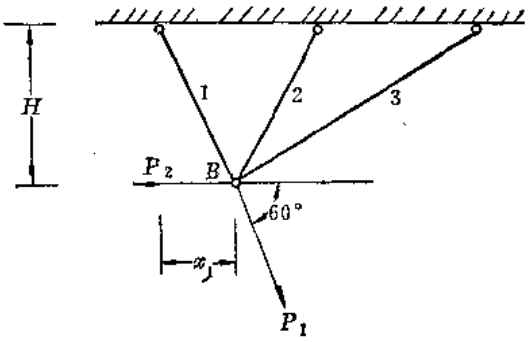


图 22-14　桁架最优设计

在图22-14中以B点坐标x_1作为设计变量，表示不但要选择杆件断面，而且要选择结构的形状。目标函数是结构的体积V。

初始设计方案取为$x_1^0=254$厘米，$x_2^0=6.45$厘米^2，结构体积为$V^0=6280$厘米^3。

用逐步线性化方法求解，经4次迭代，得到 $x_1^4=306$厘米，$x_2^4=5.56$厘米^2。在两种荷载作用下各杆内应力为

$$\{\sigma_{kj}\}=\begin{Bmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{21}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{23}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}1202\\ 1397\\ 25\\ -1050\\ -286\\ 1223\end{Bmatrix}.$$

满足应力约束条件，结构体积为 $V=5460$ 厘米^3，比初始设计方案减少了13.1%。

§22-8 支墩坝最优设计

本节将说明支墩坝的最优设计。通过支墩坝的例子可以看到对于连续结构如何进行最优设计。

对于混凝土坝来说，其造价主要取决于混凝土体积，因此以坝的体积作为目标函数。水坝是按允许应力设计的，可以选定N个应力大的结点，规定其应力不得超过允许应力，即

$$\sigma_i(x)-\sigma_p\leqslant 0,\quad i=1,2,\cdots N. \tag{22-41}$$

σ_p是允许应力。允许压应力取决于混凝土标号和安全系数。至于允许拉应力的取值，还应考虑到应力分析的方法。过去按材料力学公式计算时，坝内拉应力很小，甚至为零，所以允许拉应力也采用很小的数值，甚至取为零。采用有限单元法计算坝体应力，由于可以比较准确地反映应力集中现象，在坝踵往往出现较高的拉应力，如何规定允许拉应力就是一个问题。通常坝踵出现拉应力的范围是不大的，由边缘向内部，很快就转变为压应力，即使出现裂缝，应力重分布后，结构仍然是安全的。作为一个设计上的技巧，我们可以在应力集中点附近的结点上加以拉应力约束，使裂缝发展的深度得到限制。

除应力状态外，还必须对坝的抗滑稳定性加以约束，有两种形式：

（Ⅰ）只考虑接触面上的摩擦力

$$\frac{fV}{P}\leqslant K_1. \tag{22-42}$$

式中 f——摩擦系数，V——垂直力，P——水平力，K_1——安全系数。

（Ⅱ）同时考虑摩擦力和粘着力

$$\frac{fV+cA}{P}\leqslant K_2. \tag{22-43}$$

式中 c——粘着力，A——接触面的面积，K_2——安全系数。

图22-15表示了支墩坝的剖面。坝高$H=62.5$米，跨度$2L=17.00$米，大头上游面半径$R=13.30$米，大头最小厚度$t=3.64$米，混凝土弹性模量$E_c=2.00\times10^5 kg/cm^2$，基础岩石的弹性模量$E_r=\frac{1}{2}E_c$，混凝土和岩石的泊松比均为$\mu=0.15$，以上这些是给定参数。

采用的5个设计变量如图22-15所示。上下游坝坡可以变化，但保持为直线。为了施工方便，x_2-x_1和x_4从顶到底为常数。

允许压应力为30.6kg/cm^2，控制结点是27，49，33，170。允许主拉应力为2.04kg/cm^2，

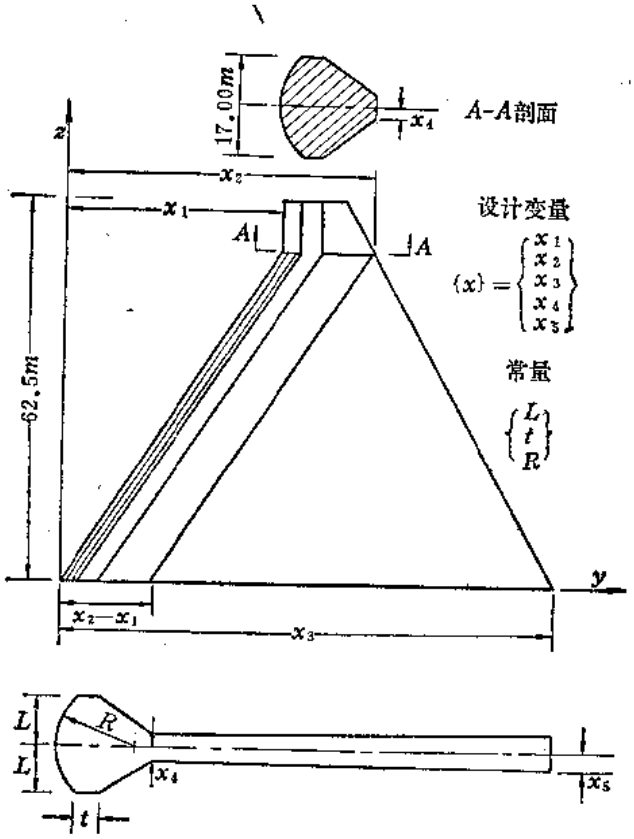


图 22-15　支墩坝的设计变量

控制结点是161，35，40。假定坝踵发生了2米深的裂缝，缝内已进水，裂缝表面作用了全水头。在裂缝附近的23和24结点限制拉应力为 $3.06kg/cm^2$，抗滑稳定要求 $\frac{P}{V}\leqslant 0.70$。

几何约束条件为：

$$0\leqslant x_1\leqslant 60,$$
$$0\leqslant x_2\leqslant 100,$$
$$0\leqslant x_3\leqslant 120,$$
$$1.3\leqslant x_4\leqslant 5,$$
$$1.3\leqslant x_5\leqslant 5,$$
$$9.5\leqslant x_2-x_1\leqslant 30.$$

用20点等参数三维有限单元进行应力分析，单元划分见图22-16及图22-17，由于对称，只须取出半个支墩进行计算，基础部分用粗网格基础接触面以上加了一层薄的单元，以改善坝踵和坝趾应力，并便于在应力集中区施加应力约束，设计荷载为全水头加支墩自重。

采用的初始设计剖面为

$$\{x^0\}=\begin{Bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \\ x_5^0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 35 \\ 50 \\ 85 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{Bmatrix}.$$

体积 $V_0=21800$ 米^3，用逐步线性化方法进行优化，得到最优设计剖面为

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} 29.4 \\ 44.4 \\ 84.6 \\ 1.65 \\ 1.70 \end{Bmatrix}.$$

体积 $V=17650$ 米^3，比 V_0 减少了19%。最优设计剖面在水压力和自重作用下的主应力见图22-18。

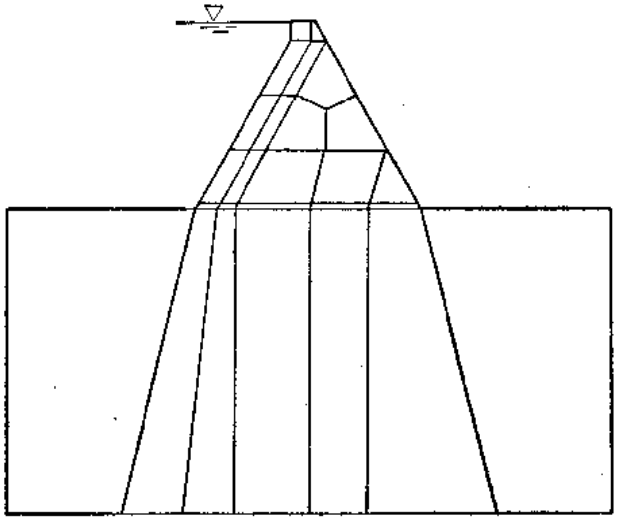


图 22-16　支墩坝应力分析网格

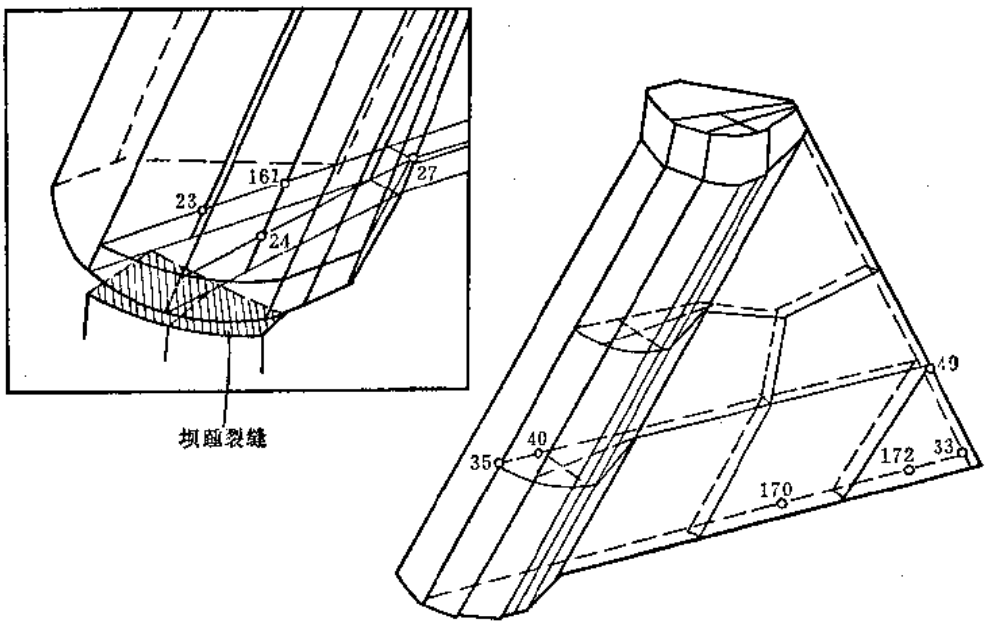


图 22-17　应力约束的结点

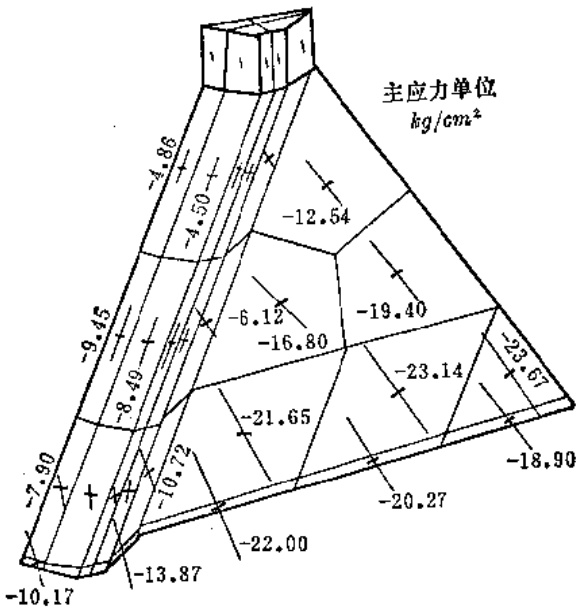


图 22-18　在水压力和自重作用下最优断面的主应力

如果把约束条件放宽一些，混凝土体积可进一步减少。例如，把23、24结点的拉应力约束改为7.14kg/cm^2，并把压应力约束的结点从坝趾改为172点，则最优设计剖面为

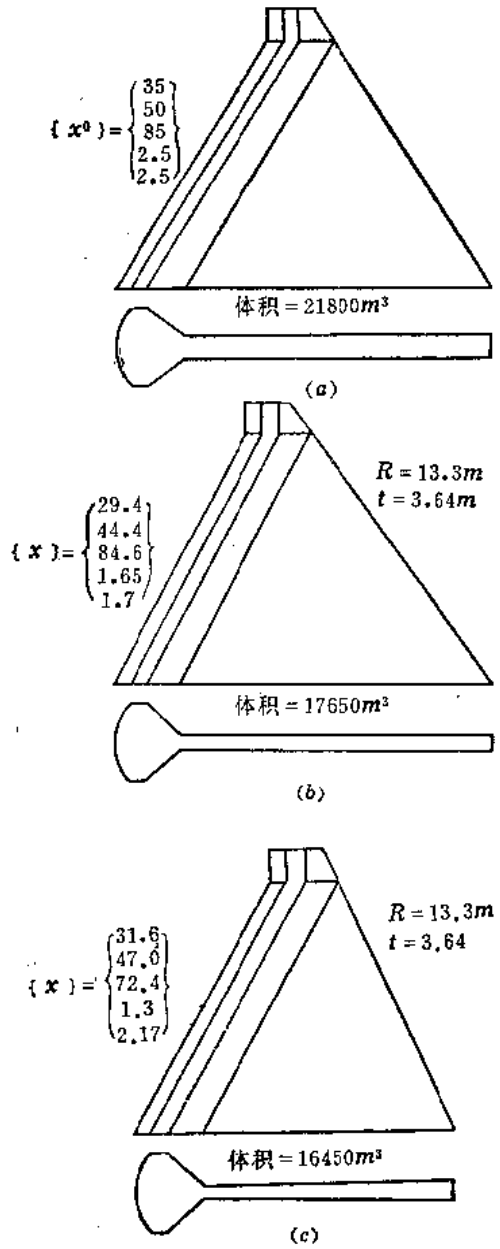


图 22-19 支墩坝初始设计剖面与最优设计剖面
(a)初始设计剖面；(b)最优设计剖面；(c)约束条件放宽后的最优设计剖面

$$\{x\}=\begin{Bmatrix}31.6\\47.0\\72.4\\1.30\\2.17\end{Bmatrix}.$$

混凝土体积为$V=16450$米^3，比初始剖面减少了24.5%。见图22-19。

逐步线性化方法的收敛情况 见图 22-20。

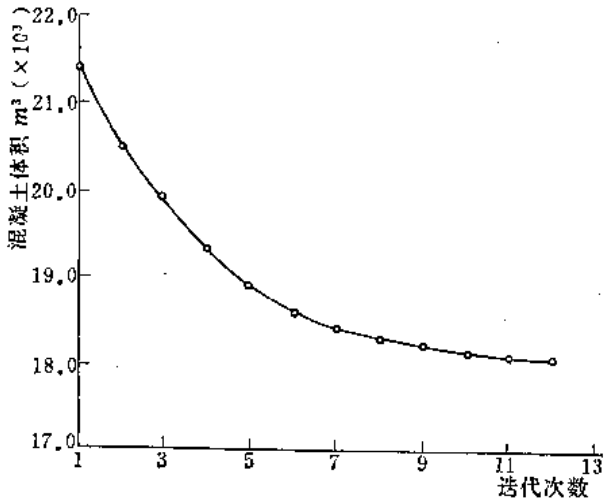


图 22-20 支墩坝最优设计收敛情况

§22-9 拱 坝 最 优 设 计

拱坝是由岩石基础支承的、变曲率、变厚度的双曲壳体，不但外形复杂，边界条件也很复杂。拱坝的形状不但与坝高、允许应力等有关，而且与河谷形状有密切关系，而河谷形状又是千变万化的，因此实际工程中拱坝的形状也是变化多端的。这就使得拱坝的设计

成为一个比较复杂的课题。目前拱坝设计也是采用传统的重复设计方法。我们前面提到过的重复设计方法的缺点在拱坝设计中表现尤为明显。设计过程很繁琐，效率很低，而且最初假定方案要影响到最终采用方案的经济性和合理性，对于多数设计单位来说，往往又没有充分的时间和人力去进行多方案的比较，以致造成投资上的浪费。拱坝最优设计可以克服以上缺陷，大大提高了拱坝设计的效率和质量，目前正在蓬勃发展中。本节将说明拱坝最优设计的方法和实例。

在图22-21、22-22中表示了拱冠剖面及三维有限单元网格，为了节省计算量，基础部分用粗网格，只能模拟基础变形特征，沿着基础表面有一层薄单元。

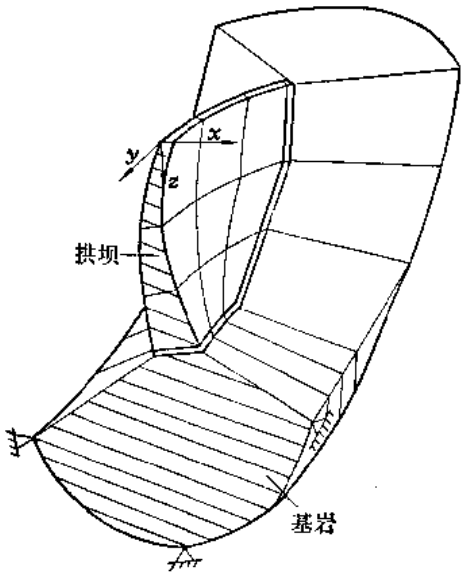


图 22-21　拱冠剖面

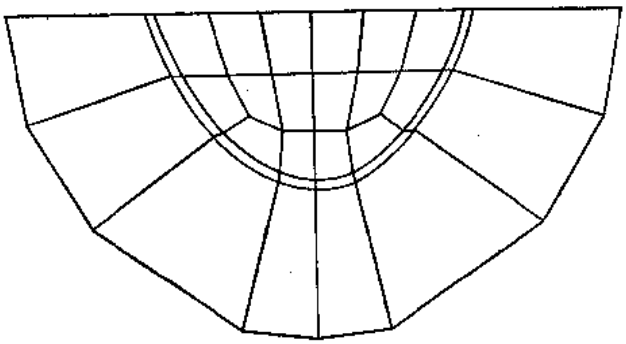


图 22-22　拱坝计算的三维有限单元网格

可用两个多项式描述拱坝的形状，一个描述拱坝的中面，另一个描述厚度的变化，原点可放在坝顶，多项式的系数是设计变量。

下面用两个例子来说明拱坝的最优设计。

一个例子是对称河谷；另一个是不对称河谷，左岸坝肩部分无岩石支撑，两例坝高均为120米，见图22-23。

描述拱坝形状的多项式：

【例 1】 对称河谷

坝体中面：
$$x_{中面}=a_1y^2+a_2y^2z-a_3z+a_4z^2,$$
坝体厚度：
$$t=a_5+a_6y^2z+a_7z。$$
(22-44)

共有 7 个设计变量：a_1，a_2，$\cdots a_7$。

【例 2】 非对称河谷

坝体中面：
$$x_{中面}=b_1y+b_2y^2+b_3y^2z-b_4z+b_5z^2,$$
坝体厚度：
$$t=b_6+b_7y^2z+b_8z。$$
(22-45)

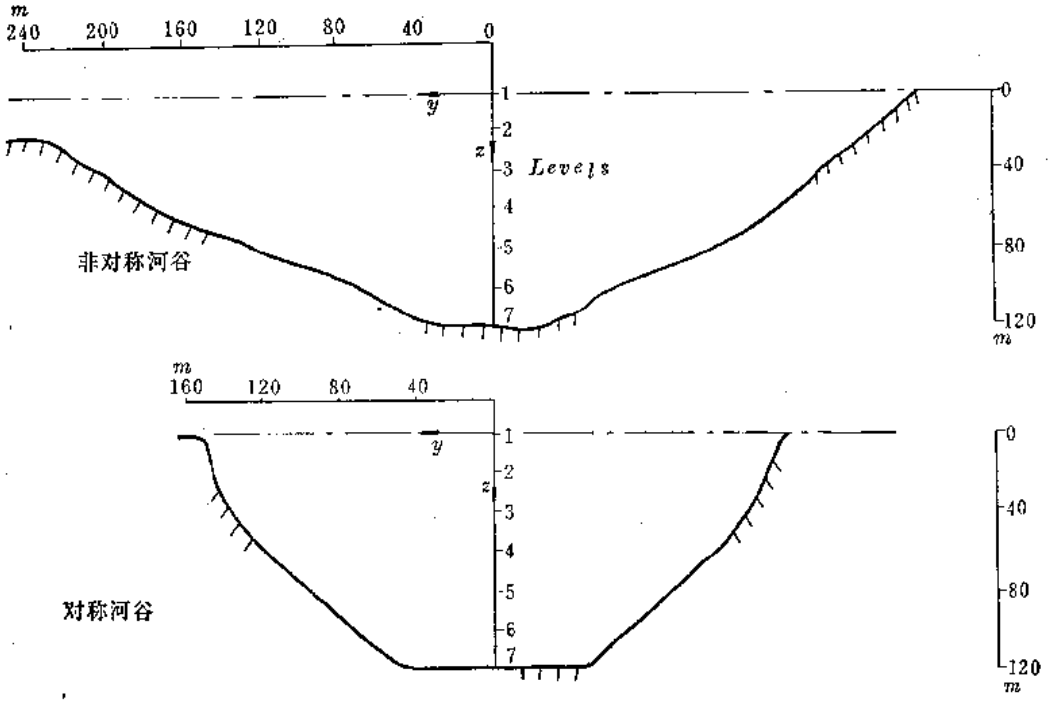


图 22-23　河谷形状上游立视

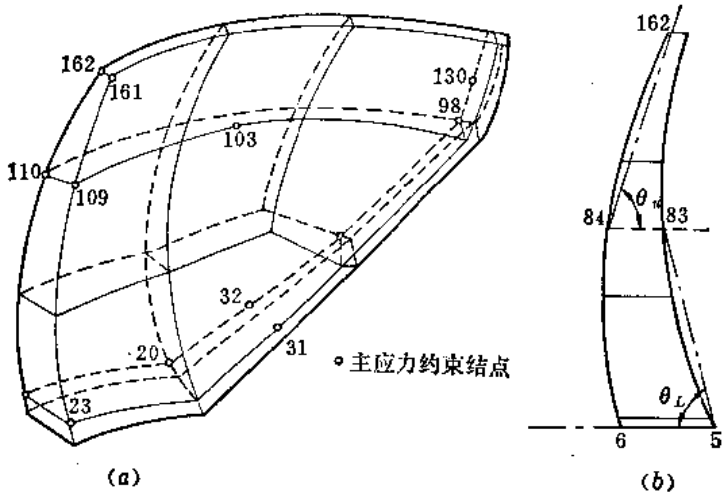


图 22-24　施加约束条件的部位

(a)应力约束结点；(b)在拱冠断面约束倒悬

共有 8 个设计变量：b_1，b_2，$\cdots b_8$。

设计荷载为齐顶水压力加自重。混凝土和基岩的弹性模量均为$E=2\times10^6 kg/cm^2$，泊松比均为$\mu=0.15$。

目标函数是混凝土体积。

约束条件如下：

（Ⅰ）主应力

压应力≤71.4kg/cm^2；

控制结点为拱冠断面的161，162，110，23及拱座的31（不对称断面加39），

拉应力≤14.28kg/cm^2；

控制结点为拱冠的24、109及拱座的130、46、98、32、103（不对称断面加1、2、74、122、40、115）。

控制应力的结点见图22-24。

（Ⅱ）倒悬

为了方便施工，对拱坝倒悬应加以限制，在这两例中是限制角度（参考图22-24）：

$$\theta_U \geqslant 65^\circ,\quad \theta_L \geqslant 80^\circ.$$

（Ⅲ）坝体形状

对各多项式系数，作如下限制：

【例 1】

$$0.002 \leqslant a_1 \leqslant 0.004,\qquad 2.0 \leqslant a_5 \leqslant 15.00,$$
$$0 \leqslant a_2 \leqslant 0.001,\qquad 0 \leqslant a_6 \leqslant 0.20,$$
$$0 \leqslant a_3 \leqslant 1.00,\qquad 0 \leqslant a_7 \leqslant 0.20.$$
$$0 \leqslant a_4 \leqslant 0.009,$$

【例 2】

$$0 \leqslant b_1 \leqslant 1.00,\qquad 0 \leqslant b_5 \leqslant 0.009,$$
$$0.002 \leqslant b_2 \leqslant 0.004,\qquad 2.0 \leqslant b_6 \leqslant 15.00,$$
$$0 \leqslant b_3 \leqslant 0.001,\qquad 0 \leqslant b_7 \leqslant 0.50.$$
$$0 \leqslant b_4 \leqslant 1.00,$$

用逐步线性化方法求解。图22-25表示对称拱坝拱冠剖面形状和应力的变化，（a）为初始设计方案，体积为52.2×10^4米^3；（b）为求得的最优设计方案，体积减为43×10^4米^3。图22-26表示非对称拱坝拱冠剖面形状与应力，（a）为初始设计方案，体积为96×10^4米^3，（b）为求得的最优设计方案，体积减为71.3×10^4米^3。在这两例中，倒悬约束都是起作用的。

在表22-1中列出了两例中初始和最终设计变量。可供参考。

用（22-44）、（22-45）式表示拱坝几何形状，水平截面已不是圆拱，这与当前工程传统相去较远，应力分析也比较复杂。作者建议，水平截面采用圆拱，铅直截面采用抛物线，河谷是任意形状。这样有利于最优设计在实际工程中的推广应用，也可以利用圆拱特点以简化计算。参阅图22-27，将拱坝几何形状描述如下：

（1）拱冠剖面上游面曲线

用二次曲线表示：

$$z = -a_1 y + a_2 y^2.$$

如拱坝上游面采用简单的圆柱形，则取$a_1 = 0$，$a_2 = 0$。

（2）坝体厚度

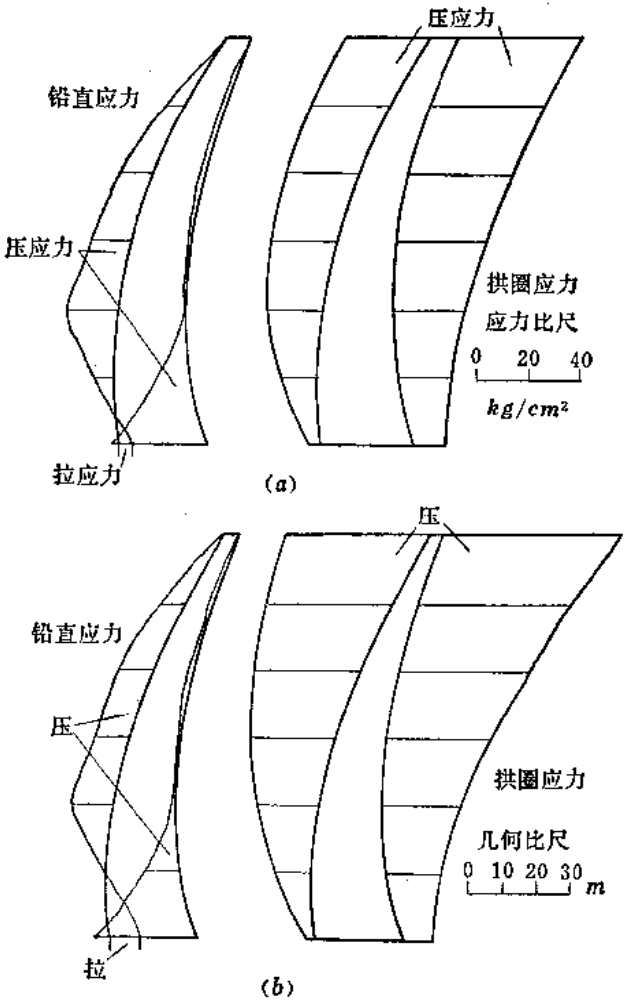


图 22-25 对称拱坝拱冠剖面形状与应力

(a)初始方案：体积$52.2\times10^4m^3$，(b)最优方案：体积$43.0\times10^4m^3$

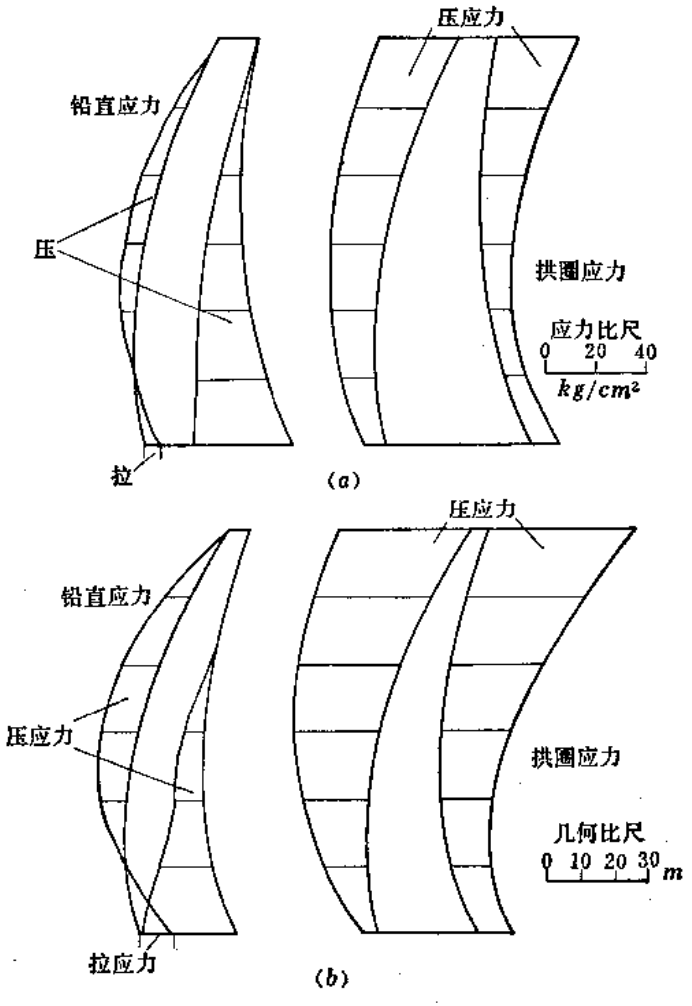


图 22-26 非对称拱坝拱冠剖面形状与应力

(a)初始方案：体积$96\times10^4m^3$，(b)最优方案：体积$71.3\times10^4m^3$。

表 22-1　　拱坝的初始和最优设计变量

设计变量		1	2	3	4	5	6	7	8
对称拱坝	初始值	0.00300	$0.0^{3}100$	0.5928	0.00380	8.07	0	0.1521	
(例1)	最优值	0.00258	$0.0^{4}618$	0.5515	0.00303	3.36	0	0.1930	
非对称拱坝	初始值	0	0.00280	0	0.411	0.0030	12.00	0	0.2677
(例2)	最优值	0.01304	0.00263	$0.0^{4}354$	0.610	0.00394	6.15	$0.0^{5}325$	0.1920

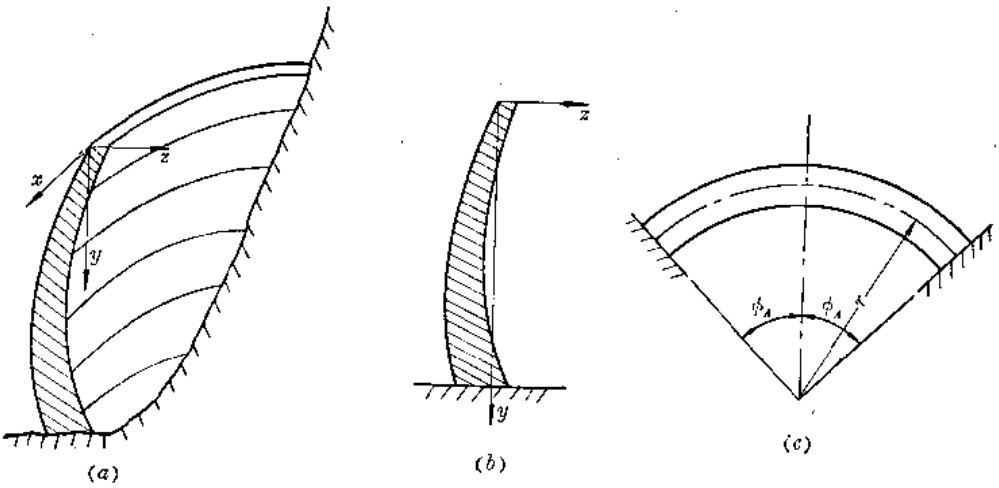


图 22-27　建议的拱坝优化模型
(a)坐标系，(b)拱冠剖面，(c)水平拱圈

表示为

$$t=a_3+a_4y+a_5y^2。$$

其中a_3为坝顶厚度。

（3）水平拱圈中心角

将拱坝沿高度方向等分为 s 层，共有 s 个中心角：

$$\varphi_{A1},\ \varphi_{A2},\ \cdots\varphi_{As}。$$

为了减少设计变量，也可以用坝顶、坝底、中部的三个中心角作为设计变量，在它们中间则线性插值：

目标函数是混凝土体积；

约束条件包括下列各项。

1）坝顶厚度　$a_3\geqslant t_1$。t_1为坝顶最小厚度，决定于过坝公路等使用条件；

2）中心角　$0\leqslant\varphi_{Ai}\leqslant\overline{\varphi}_{Ai}$。

其中$\bar{\varphi}_{A_i}$为最大半中心角，一般可取$2\bar{\varphi}_{A_i}=135°$，在特殊情况下，如坝座基岩不好，山头单薄，要求采用扁拱，则可取较小的中心角。

3）倒悬　为便于施工，应限制倒悬、主要限制两个指标，一个是坝顶拱冠下游表面的坡度，另一个是坝底拱座上游面的坡度。

4）梁应力　应控制基础表面，上游面的拉应力和下游面的压应力。

坝体上部下游面也可能出现拉应力，应加以约束。

5）拱应力　各层拱圈应力均应校核，加以约束。

应力计算可采用一维有限单元方法，即切取拱冠悬臂梁，把拱圈的结构作用比拟为径向和扭转弹性支承，见[176]。

为了求最优解，可采用逐步线性化方法或罚函数法。

作者与宋敬廷同志合作，按上述方法进行了拱坝的最优设计，取得了较好的效果，在电子计算机上用十分钟即可选定拱坝的设计剖面，见下例。

【例 3】 对称河谷，坝高120米，坝顶河谷宽度285米，坝底河谷宽度94.4米。坝体和基础的弹性模量均为2×10^5公斤/厘米^2，坝顶和坝底允许最大倒悬坡度为0.30。允许拉应力为15公斤/厘米^2，允许压应力为50公斤/厘米^2。设计荷载包括水压力、自重和温度。初始设计方案最大压应力为 46 公斤/厘米^2，混凝土体积为626500米^3。经过优化后，最优设计方案最大压应力为 49.99 公斤/厘米^2，混凝土体积为 519400 米^3，比初始方案减少了20.6%。计算成果见表22-2。

表 22-2　　拱坝最优设计成果（例 3）

高程（米）	初始设计方案（体积626500米^3）					最优设计方案（体积519400米^3）				
	半中心角 ϕ_i（度）	拱冠上游面坐标 z_i（米）	坝体厚度 t_i（米）	拱冠剖面竖向应力（公斤/厘米^2）		半中心角 ϕ_i（度）	拱冠上游面坐标 z_i（米）	坝体厚度 t_i（米）	拱冠剖面竖向应力（公斤/厘米^2）	
				上游面	下游面				上游面	下游面
120	62.5	0.00	9.18	0.00	0.00	60.5	0.00	7.23	0.00	0.00
100	62.2	−9.14	13.36	−7.17	−0.89	60.2	−4.89	10.48	−14.53	0.62
80	61.9	−15.85	17.55	−7.34	−7.48	59.9	−8.44	14.09	−18.12	3.89
60	61.6	−20.14	21.73	−1.70	−19.81	59.6	−10.67	18.09	−9.67	−10.58
40	61.3	−22.00	25.92	3.71	−32.33	59.3	−11.55	22.36	0.47	−27.05
20	60.9	−21.43	30.10	5.14	−41.92	58.9	−11.11	27.01	6.82	−40.76
0	45.0	−18.43	34.29	1.02	−46.00	43.0	−9.32	32.02	8.28	−49.99

第二十三章　矩　　阵

在有限单元法中广泛地采用了矩阵，以便许多复杂的计算公式可用十分紧凑的方式表示出来。本章说明矩阵定义及矩阵代数运算的基本规则。一般不进行严格的推导和证明。

§23-1　矩　阵　定　义

把$m\times n$个量a_{ij}（$i=1,\ 2,\ \cdots m;\ j=1,2,\ \cdots n$）排成$m$横行、$n$竖列的表

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{23-1}$$

此表称为$m\times n$阶矩阵。

a_{ij}称为矩阵$[A]$的元素，它可以是实数、复数或变量的函数。一般以元素a_{ij}的第一个足码i表示它所在行的序号，而以第二个足码j表示它所在列的序号。

例如，线性方程组

$$\begin{aligned} 3x_1-2x_2+2x_3&=7,\\ x_1+2x_2&=-1,\\ x_2-2x_3&=-3. \end{aligned}$$

的系数，可用矩阵记为

$$[A]=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

这是一个3×3阶矩阵。

必须注意，虽然矩阵$[A]$与行列式$|A|$的记法很相近，但其意义却完全不同。行列式$|A|$代表一个数，可以求值。而矩阵$[A]$是由$m\times n$个数排成的一个表格，根本不代表一个数，也不能象行列式那样求值。

§23-2　矩阵的主要类型

1.方阵

当矩阵的行数和列数相等（即$m=n$）时，称为n阶方阵。

例如，

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}.$$

是一个 2 阶方阵

2.行阵

由一个单独的行组成的矩阵（即$m=1$），称为行阵，例如

$$[A]=[a_{11}\ a_{12}\cdots a_{1n}],$$

行阵$[A]$由n个元素组成，它代表一个n维向量。

3.列阵

由一个单独的列组成的矩阵（即$n=1$），称为列阵，列阵通常用花括号表示，例如

$$\{A\}=\begin{Bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{Bmatrix}.$$

列阵$\{A\}$由m个元素组成，它代表一个m维向量。

平面应力场中的三个应力分量，通常用列阵表示如下：

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}.$$

其中σ_x为x方向的正应力，σ_y为y方向的正应力，τ_{xy}为剪应力。

4.纯量

一个1×1阶矩阵，只包括一个单独的元素。在矩阵代数中，把一个单独的数称为纯量，以区别于按行、列排成的矩阵。

5.三角矩阵

从n阶方阵$[A]$的左上角——贯穿a_{11}、$a_{22}\cdots a_{nn}$——直到右下角的线叫做$[A]$的主对角线。一个方阵，如在其主对角线以上或以下的全部元素都是零，称为三角矩阵。例如

$$[A_1]=\begin{bmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},$$

$$[A_2]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

$[A_1]$称为下三角矩阵，$[A_2]$称为上三角矩阵。

6.对角矩阵

一个方阵，如果除了主对角上的元素外，其余元素全为零，则称为对角矩阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{12} & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

在对角矩阵和三角矩阵中，可用一个粗零代表主对角线以上或以下的全部零元素。

7.单位矩阵

一个n阶方阵，如主对角线上的元素都等于1，而其余元素都是零，则称为n阶单位矩阵，或简称么阵、通常用$[I]$表示。例如

$$[I]=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

是一个3阶单位矩阵。

8.零矩阵

一个$m\times n$阶矩阵，如果它的元素全部为零，则称为$m\times n$阶零矩阵，用$[0]$表示。例如

$$[0]=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

是一个2×3阶零矩阵。

9.转置矩阵

把$m\times n$阶矩阵$[A]$的行与列依次互换，得到一个新的$n\times m$阶矩阵，称为$[A]$的转置矩阵，记为$[A]^T$.例如，设

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad 则\quad [A]^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \vdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \vdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \vdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}2)$$

又如，$[A]=[2\quad 1\quad 3]$，

则
$$[A]^T=\begin{Bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

再如
$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},$$

则 $$\{x\}^T=[\ x_1\quad x_2\quad x_3\ ].$$

如果一个矩阵被转置两次，则它又回到原来的形式，即

$$([A]^T)^T=[A]. \tag{23-3}$$

例如

$$[A]=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&4\end{bmatrix},$$

$$[A]^T=\begin{bmatrix}2&3\\0&1\\1&4\end{bmatrix},$$

$$([A]^T)^T=\begin{bmatrix}2&0&1\\3&1&4\end{bmatrix}=[A].$$

10.对称矩阵、反对称矩阵和斜对称矩阵

一个方阵$[A]$，如果它的元素对称于主对角线，即$a_{ij}=a_{ji}$，则称为对称矩阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix}2&0&3\\0&1&4\\3&4&5\end{bmatrix},$$

是一个3阶对称矩阵。

显然，对称矩阵等于它的转置矩阵，即

$$[A]=[A]^T.$$

一个方阵$[A]$，如果主对角线上的元素全为零，而且其余元素均反对称于主对角线，即

$$a_{ii}=0,\ a_{ij}=-a_{ji},$$

则称为反对称矩阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix}0&2&1\\-2&0&-3\\-1&3&0\end{bmatrix}.$$

是一个3阶反对称矩阵。

反对称矩阵等于它的负转置矩阵，即

$$[A]=-[A]^T.$$

一个方阵，如果主对角线的元素不全为零，而其余元素都反对称于主对角线，即$a_{ij}=-a_{ji}$，则称为斜对称矩阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix}2&3&-4\\-3&1&5\\4&-5&0\end{bmatrix}.$$

11.带状矩阵

一个方阵$[A]$，如果它的非零元素都集结在主对角线附近，沿着主对角线形成一条非零元素带，则此方阵称为带状矩阵。例如

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

§23-3 矩阵的相等、加法和减法

矩阵代数的基本规则是这样规定的，使得线性变换能以极其简便的方式进行。

1.矩阵的相等

两个同阶的矩阵$[A]$和$[B]$：

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

如果它们的每一对应元素都相等，即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

则说这两个矩阵相等，即

$$[A]=[B].$$

例如

$$[A]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ [B]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix},\ [C]=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$[A]=[B]$，但$[A]\neq[C]$，因为$a_{21}=-1\neq c_{21}$。

2.矩阵的加法和减法

若矩阵$[A]$和$[B]$同阶，把$[A]$和$[B]$的对应元素相加或相减，作成一个新的同阶矩阵$[C]$，矩阵$[C]$就称为矩阵$[A]$与$[B]$的和或差。即

$$[C]=[A]\pm[B].$$

若

$$c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij},\quad 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n.$$

【例 1】

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}.$$

【例 2】

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{bmatrix}.$$

【例 3】

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

【例 4】

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

显然，矩阵的加法和减法是满足交换律和结合律的，即

$$[A]\pm[B]=\pm[B]+[A] \quad \text{（交换律），}$$

及
$$([A]\pm[B])\pm[C]=[A]+(\pm[B]\pm[C]) \quad \text{（结合律）。}$$

§23-4 数 乘 矩 阵

一个数 s 乘矩阵$[A]$，等于把数 s 遍乘$[A]$中所有元素。即

$$s[A]=\begin{bmatrix} sa_{11} & sa_{12} & \cdots & sa_{1n} \\ sa_{21} & sa_{22} & \cdots & sa_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ sa_{m1} & sa_{m2} & \cdots & sa_{mn} \end{bmatrix}.$$

显然，对于同阶矩阵$[A]$和$[B]$，下列等式成立：

$$s([A]\pm[B])=s[A]\pm s[B].$$

【例 1】

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

【例 2】

$$3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}+2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 4 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 6 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

§23-5 矩 阵 乘 法

1.相容矩阵

当矩阵[A]的列数等于矩阵[B]的行数时，称为相容矩阵。只有相容矩阵才能相乘。

例如

$$\underset{m\times p}{[A]}\ \underset{q\times n}{[B]}=\underset{m\times n}{[C]}.$$

只有$p=q$时，才能相乘，其乘积[C]是$m\times n$阶矩阵。

2.矩阵乘法规则

相容矩阵[A]和[B]的乘积是矩阵[C]，其元素C_{ij}等于[A]的第i行各元素与[B]的第j列相应各元素的乘积之和，即

如

$$\underset{m\times n}{[C]}=\underset{m\times p}{[A]}\ \underset{p\times n}{[B]}.$$

则

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}$$

$$=\sum_{r=1}^{p}a_{ir}b_{rj}. \tag{23-4}$$

为了便于记忆，可把矩阵相乘列成如下算式：

$$\underset{p\times n}{[B]}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ & & \cdots\cdots & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{m\times p}{[A]}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \\ \cdots\cdots c_{ij} \\ \\ \\ \end{bmatrix}=\underset{m\times n}{[C]}.$$

可见，[C]的行数等于[A]的行数，[C]的列数等于[B]的列数。

【例 1】

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22} \end{bmatrix}.$$

【例 2】

若

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix},\quad \{y\}=\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}.$$

则

$$\{x\}^T\{y\}=[x_1x_2x_3]\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{Bmatrix}=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\,.$$

而

$$\{x\}\{y\}^T=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}[y_1y_2y_3]=\begin{bmatrix}x_1y_1 & x_1y_2 & x_1y_3\\x_2y_1 & x_2y_2 & x_2y_3\\x_3y_1 & x_3y_2 & x_3y_3\end{bmatrix}\,.$$

【例 8】

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\-2 & 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -2\\0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+3\times1+2(0) & 1\times1+3(-2)+2(-1)\\-2\times2+0\times1+4(0) & -2\times1+0\times(-2)+4(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -7\\-4 & -6\end{bmatrix}\,.$$

3.矩阵乘法的一些性质

不难证明，矩阵乘法具有下列性质：

1）$s([A][B])=(s[A])[B]=[A](s[B])$，其中 s 是一纯量；

2）$([A][B])[C]=[A]([B][C])$，这表示矩阵乘法符合结合律；

3）$([A]+[B])[C]=[A][C]+[B][C]$，$[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C]$；这表示矩阵乘法符合分配律。

4）$([A][B])^T=[B]^T[A]^T$；　　(23-5)

上式表明，二矩阵的乘积的转置矩阵，等于二矩阵分别转置以后的乘积，但须逆其次序。

5）矩阵乘法一般不满足交换律，即$[A][B]\neq[B][A]$。

当然特殊情况例外。

【例 1】

$$[A]=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 3\end{bmatrix},[B]=\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},$$

$$[A][B]=\begin{bmatrix}1 & -1\\3 & 5\end{bmatrix},[B][A]=\begin{bmatrix}2 & 0 & -2\\0 & -1 & 4\\2 & 2 & 2\end{bmatrix}\,.$$

【例 2】

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{bmatrix}\,.$$

6）由等式$[A][B]=[0]$，一般不能断言$[A]=[0]$或者$[B]=[0]$。例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

此例中，虽然乘积是零矩阵，但相乘的两个矩阵都不是零矩阵。

7）由等式$[A][B]=[A][C]$，一般不能断言$[B]=[C]$。例如

$$[A]=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ [B]=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ [C]=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$[A][B]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad [A][C]=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

虽然$[A][B]=[A][C]$，但$[B]\neq[C]$。

必须注意，上述（5）、（6）、（7）三个性质是矩阵运算不同于数的运算之处。

8）如果矩阵$[A]$的元素a_{ij}取任意数值时，等式

$$[A][B]=[A][C] \qquad (a)$$

都成立，则可断言$[B]=[C]$。

这一论断是不难证明的。设$[A]$是$m\times p$阶矩阵，$[B]$和$[C]$是$p\times n$阶矩阵，令

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix},\ [B]=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix},$$

$$[C]=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \cdots & c_{pn} \end{bmatrix}.$$

既然矩阵$[A]$可取任意值，我们可取$a_{11}=1$，其余元素均为零，由（a）式可得

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \qquad (b)$$

从而可知

$$b_{11}=c_{11},\ b_{12}=c_{12},\ \cdots,\ b_{1n}=c_{1n}.$$

由此可见$[B]$中第一行各元素与$[C]$中第一行各元素两两相等。其次，在矩阵$[A]$中取$a_{12}=1$，其余元素为零，同理，可知$[B]$中第二行各元素与$[C]$中第二行各元素两两相等。依此类推，可知$[B]$中各行元素与$[C]$中相应行的元素都两两相等。因此矩阵$[B]$与$[C]$相等。

在有限单元法中，由虚功原理推导刚度矩阵时，经常要利用这一性质。显然，在这里，$[B]$与$[C]$的相等，是基于$[A]$的任意性。如果$[A]$的元素并不能任意取值，就不能断定$[B]=[C]$，如前所述。

4.方阵的正次幂

一方阵$[A]$，若自身连乘n次，其乘积定义为方阵的正n次幂$[A]^n$，即

$$[A]^n=\underbrace{[A][A]\cdots\cdots[A]}_{n\text{次}}.$$

§23-6 行 列 式

1.行列式定义

所谓一个n阶行列式，是由排成n横行、n竖列的n^2个数a_{ij}（$i,j=1,2\cdots n$），按一定规则运算所得到的一个数，记为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (23\text{-}6)$$

这n^2个数a_{ij}，称为行列式$|A|$的元素。

一阶行列式$|A|$是由一个元素组成的，它等于组成它的那个元素，即

$$|A|=|a_{11}|=a_{11}.$$

一个2阶行列式，定义为

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \qquad (23\text{-}7)$$

即该行列式左上角元素与右下角元素的乘积，减去其余两元素的乘积。

至于三阶及更高阶的行列式，留待以后定义。

2.子式、代数余子式

n阶行列式$|A|$，元素a_{ij}的子式是把$|A|$舍去第i行和第j列以后所剩余的$n-1$阶行列式，记为M_{ij}。把M_{ij}乘以$(-1)^{i+j}$，称为元素a_{ij}的代数余子式，记为A_{ij}。

例如，三阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

元素a_{11}的子式和代数余子式分别是

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

而元素a_{12}的子式和代数余子式分别是

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3.主子式

由行列式 $|A|$ 中第一列到第 k 列，第一行到第 k 行相交处的元素所组成的子式，即位于 $|A|$ 的左上角的 k 阶子式，称为 $|A|$ 的 k 阶主子式。记为 D_k。

【例 1】 已给四阶行列式

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

顺序各阶主子式是

$$D_1=a_{11},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_4=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

4.行列式按一行（列）元素展开

设有 3 阶行列式 $|A|$，其第一行三个元素是 a_{11}、a_{12}、a_{13}，并设相应的代数余子式是 A_{11}、A_{12}、A_{13}，则定义该 3 阶行列式为

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\sum_{j=1}^{3}a_{1j}A_{1j}.$$

这样，就用 2 阶行列式定义了 3 阶行列式。依此类推，可以定义一个 n 阶行列式为

$$|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

上式不但给出了 n 阶行列式的定义，同时也提供了计算 n 阶行列式的方法，即把 n 阶行列式用 $n-1$ 阶行列式表示，然后再用 $n-2$ 阶行列式表示，依此类推，最后可用 2 阶行列式表示，再进行直接计算。

事实上，行列式的任一行中各元素与对应的代数余子式乘积之和，等于该行列式，而且行列式的任一列中各元素与对应的代数余子式乘积之和，也等于行列式，即

$$|A|=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad (i=1,2,\cdots n).\qquad (23\text{-}8a)$$

$$|A|=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij},\quad (j=1,2,\cdots n).\qquad (23\text{-}8b)$$

其中前一式表示行列式按行展开，后一式表示行列式按列展开。因此，一个 n 阶行列式，

有$2n$个展开方法。当然，无论如何展开，所得到的行列式的数值都是一样的。

此外，行列式还具有这样的性质：行列式的任一行（或列）中的各元素与另一行（或列）中各元素的代数余子式对应乘积之和为零，即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0,\quad (i=1,2,\cdots n;\ k=1,2,\cdots n;\ \text{但}i\neq k)。\qquad (23\text{-}9a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{kj}=0,\quad (j=1,2,\cdots n;\ k=1,2,\cdots n,\ \text{但}j\neq k)。\qquad (23\text{-}9b)$$

【例 2】 按第一行元素展开 3 阶行列式：

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$$

$$+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})。$$

【例 3】 计算下列 3 阶行列式，（按第 1 列展开）：

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}-0\times\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 0 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}$$

$$=2(1\times1-2\times2)-0+(0\times2-1\times3)=-9。$$

5.行列式的性质

由行列式的定义（23-8）式，可知行列式具有下列基本性质。

1）若行列式有一行（或一列）的所有元素为零，则该行列式等于零。事实上，只要按此行（或列）展开，行列式必等于零；

2）把行列式的行与列互换，得到转置行列式行列式与转置行列式的数值相等；

3）若行列式的任意两行（或两列）互换，则行列式改变符号；

4）若行列式的两行（或两列）相同，则行列式等于零；

5）把行列式中任一行（或列）的所有元素都乘以一个相同的常数，等于行列式乘以此常数；

6）把行列式的某一行（或列）的各元素乘以同一数后，加到另一行（或列）的对应元素上去，行列式的值不变。

§23-7 逆 矩 阵

在普通代数中，如果 a 和 b 满足下式

$$ab=1。\qquad (a)$$

则把 b 叫做 a 的逆，并记为

$$b=\frac{1}{a}=a^{-1}。\qquad (b)$$

在矩阵代数中，单位矩阵[I]的作用与在普通代数中1的作用相似。设[A]是一n阶方阵，而[I]是n阶单位矩阵，则有

$$[A][I]=[I][A]=[A]. \qquad (c)$$

上式相当于普通代数中的等式$a\cdot 1=1\cdot a=a$。

1.逆矩阵定义

设矩阵[A]是一个n阶方阵，如果存在另一个方阵[B]，使得

$$[A][B]=[B][A]=[I]. \qquad (23\text{-}10)$$

式中[I]是n阶单位矩阵，则称[B]是[A]的逆矩阵，记为

$$[B]=[A]^{-1}.$$

可以看出，矩阵代数中的以上二式与普通代数中的（a）、（b）二式是相似的。由（23-10）式可知

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[I]. \qquad (23\text{-}11)$$

2.伴随矩阵

设矩阵[A]是一个n阶方阵，对应于元素a_{ij}的代数余子式是A_{ij}。我们作出一个新的方阵[$\hat{A}$]，它的第i行第j列元素是A_{ij}，即

$$[\hat{A}]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

矩阵[$\hat{A}$]称为矩阵[A]的余子式矩阵。

我们把余子式矩阵[$\hat{A}$]的转置矩阵称为矩阵[A]的伴随矩阵，记为[$\overset{*}{A}$]，即

$$[\overset{*}{A}]=[\hat{A}]^T=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}12)$$

由矩阵乘法及行列式性质可知

$$[A][\overset{*}{A}]=[\overset{*}{A}][A]=\begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}=|A|[I]. \qquad (23\text{-}13)$$

上式是不难证明的。令[C]=[A][$\overset{*}{A}$]，则

$$[C]=[A][\overset{*}{A}]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

主对角线元素，由矩阵乘法及（23-8）式：

$$c_{ii}=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}=|A|.$$

非对角线元素，由矩阵乘法及（23-9）式：

$$c_{ij}=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

可见矩阵$[C]$的主对角线元素都是行列式$|A|$，而非对角线元素都是零，即（23-13)式成立。

3.逆矩阵算式

在（23-13）式两端除以行列式$|A|$，得到

$$[A]\frac{[\overset{*}{A}]}{|A|}=\frac{[\overset{*}{A}]}{|A|}[A]=[I].$$

由逆矩阵定义（23-11）式，可知

$$[A]^{-1}=\frac{[\overset{*}{A}]}{|A|}. \qquad (23\text{-}14)$$

由上式可计算逆矩阵$[A]^{-1}$。如果行列式$|A|=0$，则不存在逆矩阵$[A]^{-1}$，$[A]$称为奇异矩阵。如果行列式$|A|\neq 0$，由上式可求出唯一的逆矩阵，而$[A]$称为非奇异矩阵。

【例 1】 给出矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&2\end{bmatrix}.$$

行列式$|A|$的代数余子式为

$A_{11}=2$，$A_{12}=1$，$A_{13}=-1$，$A_{21}=-4$，$A_{22}=2$，$A_{23}=2$，$A_{31}=2$，

$A_{32}=-1$，$A_{33}=1$。

把这些代数余子式作为元素，得到余子式矩阵：

$$[\hat{A}]=\begin{bmatrix}2&1&-1\\-4&2&2\\2&-1&1\end{bmatrix}.$$

由（23-12）式，伴随矩阵为

$$[\overset{*}{A}]=[\hat{A}]^{T}=\begin{bmatrix}2&-4&2\\1&2&-1\\-1&2&1\end{bmatrix}.$$

行列式$|A|=4$，把$|A|$除伴随矩阵各元素后，得到逆矩阵如下：

$$[A]^{-1}=\begin{bmatrix}0.5&-1&0.5\\0.25&0.5&-0.25\\-0.25&0.5&0.25\end{bmatrix}.$$

读者可以验算：$[A][A]^{-1}=[I]$。

4.对角矩阵的逆矩阵

对角矩阵的逆矩阵仍是一对角矩阵，它在主对角线上的非零元素是原矩阵相应元素的倒数。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{nn}} \end{bmatrix}.$$

5.逆矩阵的一些性质

逆矩阵具有如下性质：

1) $([A]^{-1})^T=([A]^T)^{-1}$；

2) $([A]^{-1})^{-1}=[A]$；

3) $([A][B])^{-1}=[B]^{-1}[A]^{-1}$；

4) 若$[A]$是对称矩阵，则$[A]^{-1}$也是对称矩阵；

5) 三角矩阵的逆矩阵，仍是一个同类型的三角矩阵；

6) 一个矩阵的逆矩阵是唯一的。

6.方阵的负次幂

设$[A]$是非奇异方阵，则存在逆矩阵$[A]^{-1}$，于是$[A]$的负次幂可定义如下：

$$[A]^{-n}=([A]^{-1})^n=\underbrace{[A]^{-1}[A]^{-1}\cdots[A]^{-1}}_{n\text{次}}.$$

§23-8 分 块 矩 阵

1.分块矩阵定义

为了运算上的需要或表达上的方便，对任何一个矩阵$[A]$，都可用一些纵线和横线把它划分成小块。这样划分成小块的矩阵称为分块矩阵，那些小块矩阵称为$[A]$的子矩阵或子块。同一个矩阵可以用不同的纵横线划分为不同的分块矩阵，例如

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hdashline -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:cc:c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ \hdashline 3 & 0 & 1 & 2 \\ \hdashline -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] = \cdots.$$

分块矩阵一般可以表示为

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}15)$$

显然，同一行的子矩阵，如$[A_{11}]$，$[A_{12}]$，…$[A_{1n}]$，将具有相同的行数；而同一列的子矩阵，如$[A_{11}]$，$[A_{21}]$，…$[A_{m1}]$将具有相同的列数。

对分块矩阵$[A]$进行运算时，首先把子矩阵当作$[A]$的“元素”，对$[A]$进行运算；然后再对子矩阵进行运算。

2.分块矩阵的加法和减法

设有两个分块矩阵如下：

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}16)$$

如果对应的子矩阵$[A_{ij}]$与$[B_{ij}]$都具有相同的行数与列数，则$[A]\pm[B]$等于把各个对应的子矩阵相加、相减而得到的矩阵，即

$$[A]\pm[B]=\begin{bmatrix} A_{11}\pm B_{11} & A_{12}\pm B_{12} & \cdots & A_{1n}\pm B_{1n} \\ A_{21}\pm B_{21} & A_{22}\pm B_{22} & \cdots & A_{2n}\pm B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1}\pm B_{m1} & A_{m2}\pm B_{m2} & \cdots & A_{mn}\pm B_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}17)$$

显然，在矩阵分块时，如果对应的子矩阵不具有相同的行数和列数，则不能进行加减运算。

3.分块矩阵的乘法

设有两个分块矩阵如下：

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1p} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mp} \end{bmatrix},\quad [B]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{q1} & B_{q2} & \cdots & B_{qn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}18)$$

如果$p=q$，而且子矩阵$[A_{ij}]$的列数等于子矩阵$[B_{jk}]$的行数，则

$$[A][B]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \cdots & C_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (23\text{-}19)$$

式中 $$[C_{ik}]=\sum_{j=1}^{p}[A_{ij}]\,[B_{jk}].$$

【例 1】

$$[A]=\left[\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$[B]=\left[\begin{array}{cc|cc} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ \hline b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{array}\right]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

$$[A][B]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22} \end{bmatrix}.$$

【例 2】 在矩阵分块时，不但分块矩阵必须相容（$p=q$），而且子矩阵的阶数也必须符合乘法规则，否则即不能相乘。如下述两个矩阵相乘，（a）的分块是正确的，但（b）的分块是错误的，因为在（b）中，相乘的子矩阵不相容。

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right] \qquad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{array}\right]$$

（a）正确分块　　（b）错误分块

4.分块矩阵求逆

利用分块方法，可把一个高阶矩阵的求逆化为较低阶分块矩阵的求逆。

给定矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

令

$$[A]^{-1}=[B]=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}.$$

根据逆矩阵定义，$[A][B]=[I]$，即

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

由此得到

$$[A_{11}][B_{11}]+[A_{12}][B_{21}]=[I], \qquad (a)$$

$$[A_{21}][B_{11}]+[A_{22}][B_{21}]=[0], \qquad (b)$$

$$[A_{11}][B_{12}]+[A_{12}][B_{22}]=[0], \qquad (c)$$

$$[A_{21}][B_{12}]+[A_{22}][B_{22}]=[I]. \qquad (d)$$

由（ c ）式可知

$$[B_{12}]=-[A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{22}]. \qquad (e)$$

代入（ d ）式，得

$$([A_{22}]-[A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])[B_{22}]=[I].$$

由此得

$$[B_{22}]=([A_{22}]-[A_{21}][A_{11}]^{-1}[A_{12}])^{-1}. \qquad (f)$$

又由$[B][A]=[I]$可知

$$[B_{21}][A_{11}]+[B_{22}][A_{21}]=0,$$

故

$$[B_{21}]=-[B_{22}][A_{21}][A_{11}]^{-1}. \qquad (g)$$

最后，由（ a ）式得

$$[B_{11}]=[A_{11}]^{-1}-[A_{11}]^{-1}[A_{12}][B_{21}]. \qquad (h)$$

由（ e ）、（ f ）、（ g ）、（ h ）四式可求得逆矩阵$[B]$的全部子矩阵。考查这四个式子，可以看出分块矩阵求逆计算，仅包括阶数与矩阵$[A]$的子矩阵同阶的矩阵求逆。虽然这些式子是比较长的，但由于矩阵的乘法、加法和减法，比矩阵求逆算得更快，所以分块矩阵求逆比原矩阵的求逆可以节省计算时间。

从给定矩阵的左上角首项开始，求出其逆，再增加一行和一列，得到高一阶的矩阵，反复按上述步骤运算，便可逐步求得任意阶矩阵的逆矩阵。例如，给出 4 阶方阵

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

首先，取a_{11}作为一阶矩阵：

$$[A_1]=[a_{11}].$$

其逆矩阵为

$$[A_1]^{-1}=\left[\frac{1}{a_{11}}\right].$$

增加一行和一列，取

$$[A_2]=\left[\begin{array}{c|c} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{array}\right].$$

由（ e ）、（ f ）、（ g ）、（ h ）四式，可计算其逆矩阵$[A_2]^{-1}$。再增加一行和一列，取

$$[A_3]=\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right].$$

根据已经求出的子矩阵的逆阵$[A_2]^{-1}$及（ e ）～（ h ）四式，又可求出$[A_3]^{-1}$。最后，取分块矩阵

$$[A]=\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{array}\right].$$

由已算出的$[A_3]^{-1}$及（ e ）～（ h ）四式，即可求出其逆矩阵$[A]^{-1}$。

§23-9 正 交 矩 阵

一个方阵$[A]$，若与其转置矩阵$[A]^T$的乘积是一个单位矩阵，即

$$[A][A]^T=[A]^T[A]=[I] \qquad (23\text{-}20)$$

则称为正交矩阵。

根据逆矩阵定义（1-10）式，由上式可知正交矩阵的转置矩阵，等于其逆矩阵，即

$$[A]^T=[A]^{-1}. \qquad (23\text{-}21)$$

由（23-20）式可知

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

根据矩阵乘法，得到

$$a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=1,\ i=1,\ 2,\ \cdots n. \qquad (23\text{-}22a)$$

$$a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}=0,\ \text{当}i\neq j,\ i,j=1,\ 2,\ \cdots n. \qquad (23\text{-}22b)$$

因此，如果$[A]$是正交矩阵，则每一行（或列）的各元素平方之和等于1，而所有的两个不同行（或列）的对应元素乘积之和均等于零。反之，如果$[A]$的元素满足（23-22）式，则它是正交矩阵。

【例 1】 平面直角坐标系中的任一点$P(x,\ y)$，当坐标轴绕原点转动ϕ角后，新坐标为x'，y'，由图23-1可知

$$x'=x\cos\phi+y\sin\phi,$$

$$y'=-x\sin\phi+y\cos\phi.$$

或用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix} x' \\ y' \end{Bmatrix}=[L]\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}.$$

其中

$$[L]=\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}.$$

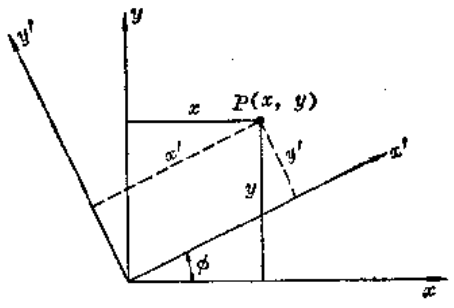


图 23-1

由于

$$\cos^2\phi+\sin^2\phi=1,$$

$$(-\sin\phi)^2+\cos^2\phi=1,$$

$$\cos\phi(-\sin\phi)+\sin\phi\cos\phi=0.$$

$[L]$的元素满足（23-22）式，所以$[L]$是正交矩阵，即

$$[L]^{-1}=[L]^T=\begin{bmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{bmatrix}.$$

因此有

$$\begin{Bmatrix}x\\ y\end{Bmatrix}=[L]^{-1}\begin{Bmatrix}x'\\ y'\end{Bmatrix}=[L]^T\begin{Bmatrix}x'\\ y'\end{Bmatrix}.$$

§23-10 正 定 矩 阵

对于实矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

如果以$[A]$的元素为系数，作成的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=&a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\&+\cdots\\&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2,\end{aligned}$$

对于任何一组不全为零的数x_1、x_2、$\cdots x_n$，恒有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j>0. \qquad (23\text{-}23)$$

那么就说，矩阵$[A]$是正定的。

矩阵$[A]$为正定的充分必要条件是，它的行列式$|A|$的顺序主子式全部大于零，即

$$a_{11}>0,\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}>0,\ \cdots\ \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}>0. \qquad (23\text{-}24)$$

由此可见，正定矩阵必然是非奇异的。

例如，矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

它的顺序主子式是

$$4>0,\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=8>0,\ \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=13>0.$$

所以矩阵[A]是正定的。

§23-11 矩阵的微分

如果矩阵[A]的元素a_{ij}是参数 t 的函数，我们定义矩阵对 t 的导数为

$$\frac{d}{dt}[A]=[\dot{A}]=\begin{bmatrix} \frac{da_{11}}{dt} & \frac{da_{12}}{dt} & \cdots & \frac{da_{1n}}{dt} \\ \frac{da_{21}}{dt} & \frac{da_{22}}{dt} & \cdots & \frac{da_{2n}}{dt} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{da_{m1}}{dt} & \frac{da_{m2}}{dt} & \cdots & \frac{da_{mn}}{dt} \end{bmatrix}. \tag{23-25}$$

就是说，用常规方法求出每个元素的导数，即得到矩阵[A]的导数。用同样方法定义矩阵较高阶的导数。例如，如果对每个元素微分两次，即得到矩阵的二阶导数。

【例 1】 设

$$[A]=\begin{bmatrix} t^2+1 & 2t \\ 4 & t^3+t \end{bmatrix}.$$

则[A]的一阶导数为

$$\frac{d}{dt}[A]=[\dot{A}]=\begin{bmatrix} 2t & 2 \\ 0 & 3t^2+1 \end{bmatrix}.$$

[A]的二阶导数为

$$\frac{d^2}{dt^2}[A]=[\ddot{A}]=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6t \end{bmatrix}.$$

【例 2】 如图23-2所示，设有一弹性梁，支承着两个集中质量m_1和m_2，有强迫力$f_1(t)$和$f_2(t)$分别作用在m_1和m_2上，在图23-2(b)中表示了质量m_1的平衡。如果与集中质量比较起来，梁本身的惯性力可以忽略，根据平衡条件，可写出这个弹性系统的运动方程如下

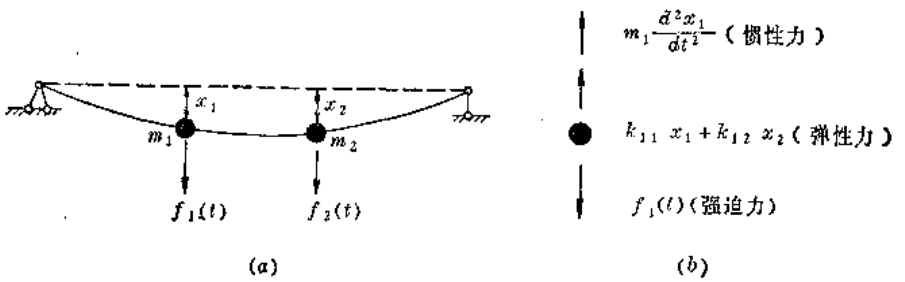


图 23-2

(a)弹性梁的振动；(b)质量m_1的平衡

$$\left.\begin{aligned} m_1\frac{d^2x_1}{dt^2}+k_{11}x_1+k_{12}x_2=f_1(t),\\ m_2\frac{d^2x_2}{dt^2}+k_{21}x_1+k_{22}x_2=f_2(t). \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

其中k_{11}，k_{12}等是刚度系数，上式的矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}. \qquad (b)$$

令

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix},$$

则

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{d^2x_1}{dt^2} \\ \dfrac{d^2x_2}{dt^2} \end{Bmatrix}=\frac{d^2}{dt^2}\{x\}=\{\ddot{x}\}.$$

因此（ b ）式可记为

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}. \qquad (c)$$

式中

$$[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix},\quad [K]=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix},\quad \{f\}=\begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}.$$

$[M]$称为质量矩阵，$[K]$称为刚度矩阵。

一个纯量I，对列阵$\{x\}$的每一个元素x_i的导数$\dfrac{\partial I}{\partial x_i}$，也组成一个列阵，可记为

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial I}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial I}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial I}{\partial x_n} \end{Bmatrix}=\frac{\partial I}{\partial\{x\}}.$$

式中

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

在有限单元法中经常用到这些记号。

设 $[A]=[B][C]$，

则
$$\frac{d[A]}{dt}=\frac{d}{dt}([B][C]),$$

但
$$\frac{d[A]}{dt}\neq\left(\frac{d[B]}{dt}\right)\left(\frac{d[C]}{dt}\right).$$

§23-12 矩 阵 的 积 分

若矩阵$[A]$的元素a_{ij}是参数 t 的函数，矩阵的积分定义为

$$\int[A]dt=\begin{bmatrix}\int a_{11}dt & \int a_{12}dt & \cdots & \int a_{1n}dt\\ \int a_{21}dt & \int a_{22}dt & \cdots & \int a_{2n}dt\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \int a_{m1}dt & \int a_{m2}dt & \cdots & \int a_{mn}dt\end{bmatrix}. \tag{23-26}$$

矩阵的多重积分可用类似方法定义。

【例 1】 设矩阵

$$[A]=\begin{bmatrix}x & 2x^2\\ 3x^3 & 1\end{bmatrix},$$

则
$$\int[A]dx=\begin{bmatrix}\frac{x^2}{2} & \frac{2x^3}{3}\\ \frac{3x^4}{4} & x\end{bmatrix}.$$

设$[A]=[B][C]$，则

$$\int[A]dt=\int([B][C])dt,$$

$$\int[A]dt\neq\int[B]dt\int[C]dt.$$

在有限单元法中，经常要计算如下的矩阵乘积的积分：

$$[K]=\iiint[B]^T[D][B]dx\,dy\,dz.$$

式中矩阵$[B]$的元素是 x、y、z 的函数。为了计算上述积分，必须首先完成矩阵乘法$[B]^T[D][B]=[C]$，然后对矩阵$[C]$的每个元素进行三重积分。

第二十四章　线性代数方程组

应用有限单元法求解工程问题，最后总要归结到一个线性代数方程组。

在这一章，我们将介绍几种在电子计算机上比较常用的线性代数方程组的解法，即超松弛迭代法，分块超松弛迭代法，修正乔列斯基法和共轭斜量法。为了循序渐进，对简单迭代法和赛德尔迭代法也加以简略介绍。至于一些只适用于手算的方法，则一概从略。

§24-1　线性代数方程组

线性代数方程组的一般形式是

$$\left.\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{aligned}\right\}. \tag{24-1}$$

其矩阵形式是

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{Bmatrix}. \tag{24-1a}$$

上式可简记为

$$[A]\{x\}=\{b\}. \tag{24-2}$$

其中

$$[A]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{24-3}$$

是方程组的系数矩阵。

$$\{x\}=\begin{Bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n \end{Bmatrix},\quad \{b\}=\begin{Bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n \end{Bmatrix},$$

分别是未知量列阵和自由项列阵。

方程组（24-2）有唯一解的充分必要条件是系数矩阵$[A]$为非奇异的，即它的行列式$|A|$不等于零。

显然，若$|A|\neq 0$，则存在逆矩阵$[A]^{-1}$，以$[A]^{-1}$左乘（24-2）式的两端，得到

$$\{x\}=[A]^{-1}\{b\}. \tag{24-4}$$

由于$[A]^{-1}$是由$[A]$唯一确定的，所以由上式求得的解$\{x\}$是唯一的。

§24-2 简单迭代法

我们以三阶线性方程组为例，来说明简单迭代解法。已给方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3&=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3&=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3&=b_3 \end{aligned}\right\}, \tag{24-5}$$

假定系数矩阵$[A]$的主对角线上的元素a_{11}，a_{22}和a_{33}比其余各元素要大得多（按绝对值来说）。由第一式解x_1，由第二式解x_2，由第三式解x_3，得到

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2-a_{13}x_3)\\ x_2&=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1-a_{23}x_3)\\ x_3&=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1-a_{32}x_2) \end{aligned}\right\}. \tag{24-6}$$

我们取初始值为

$$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0, \tag{24-7}$$

代入（24-6）式右端，得到第一近似值

$$x_1^{(1)}=\frac{b_1}{a_{11}},\ x_2^{(1)}=\frac{b_2}{a_{22}},\ x_3^{(1)}=\frac{b_3}{a_{33}}. \tag{24-8}$$

把这组近似值再代入（24-6）式右端，可以求得第二近似值：

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)}&=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(1)}-a_{13}x_3^{(1)})\\ x_2^{(2)}&=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(1)}-a_{23}x_3^{(1)})\\ x_3^{(2)}&=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1^{(1)}-a_{32}x_2^{(1)}) \end{aligned}\right\}. \tag{24-9}$$

重复上述计算如迭代收敛，就可以得到更精确的近似值。迭代计算到什么时候结束呢？这取决于我们事先对计算结果规定的精确度。令

$$\Delta x_i^{(r)}=x_i^{(r)}-x_i^{(r-1)},\quad i=1,2,3. \tag{24-10}$$

用$max|\Delta x_i^{(r)}|$表示Δx_i中绝对值最大者，显然，$max|\Delta x_i^{(r)}|$越小，我们所得到的计算结果的精度越高，因此它可以用作计算误差的尺度。如果我们事先规定计算结果的允许误差为ε，则当

$$max|\Delta x_i^{(r)}|<\varepsilon \tag{24-11}$$

时，我们就终止计算，把$x_i^{(r)}$作为方程组的近似解。

对于n阶方程组（24-1），迭代计算的一般公式是

$$x_i^{(r)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(r-1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right),i=1,2,3,\cdots n. \qquad (24\text{-}12)$$

把第$r-1$次近似值代入上式右端，可以算得第r次近似值$x_i^{(r)}$，$i=1,2,\cdots n$。

根据（24-10）式的函义，两次近似值的差是

$$\Delta x_i^{(r)}=x_i^{(r)}-x_i^{(r-1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right). \qquad (24\text{-}13)$$

再由（24-11）式即可判断计算结果是否满足要求。

简单迭代法的计算步骤如下：

1）任意选定初始值$x_i^{(0)}$，$i=1,2,\cdots n$，一般取为0；

2）把$x_i^{(0)}$代入（24-12）式右端，计算第一次近似值$x_i^{(1)}$，$i=1,2,\cdots n$；

3）由(24-11)式判别计算精度是否满足规定的要求，若不满足，则把$x_i^{(1)}$代入(24-12)式，计算第二次近似值$x_i^{(2)}$，$i=1,2,\cdots n$。

重复上述步骤，直至（24-11）式成立时为止。

按上述简单迭代法计算，迭代收敛的充分条件是，方程组（24-1）系数矩阵[A]在主对角线上的元素的绝对值分别大于所在行其余各元素绝对值之和，即

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1}^{i-1}|a_{ij}|+\sum_{j=i+1}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,2,\cdots n. \qquad (24\text{-}14)$$

这是简单迭代法收敛的充分条件，满足这个条件，计算一定收敛，但不满足这个条件，未必不收敛。

§24-3 赛德尔迭代法

我们仍以三阶方程组（24-5）为例，来说明赛德尔（Seidel）迭代法。把初始值$x_1^{(0)}=x_2^{(0)}=x_3^{(0)}=0$代入(24-6）式第一个方程的右端，求得第一近似值$x_1^{(1)}$，但在计算x_2的第一近似值时，不用$x_1^{(0)}$，而用已经算出的更好的近似值$x_1^{(1)}$。同样，在计算x_3的第一近似值时，用已经算出的$x_1^{(1)}$和$x_2^{(1)}$，如此得到

$$x_1^{(1)}=\frac{b_1}{a_{11}},$$

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(1)}),$$

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1^{(1)}-a_{32}x_2^{(1)}).$$

下一步再用$x_1^{(1)}$、$x_2^{(1)}$、$x_3^{(1)}$计算$x_1^{(2)}$，用$x_1^{(2)}$、$x_2^{(1)}$、$x_3^{(1)}$计算$x_2^{(2)}$，用$x_1^{(2)}$、$x_2^{(2)}$、$x_3^{(1)}$计算$x_3^{(2)}$。得到第二次近似值如下：

$$\left.\begin{aligned}x_1^{(2)}&=\frac{1}{a_{11}}(b_1-a_{12}x_2^{(1)}-a_{13}x_3^{(1)})\\x_2^{(2)}&=\frac{1}{a_{22}}(b_2-a_{21}x_1^{(2)}-a_{23}x_3^{(1)})\\x_3^{(2)}&=\frac{1}{a_{33}}(b_3-a_{31}x_1^{(2)}-a_{32}x_2^{(2)})\end{aligned}\right\}. \qquad (24\text{-}15)$$

重复上述计算，直至计算精度满足要求时为止。

把（24-15）式与（24-9）式加以比较，可以看出简单迭代法和赛德尔迭代法的区别。在计算第 r 次近似值时，简单迭代法在等式右端一律采用第 $r-1$ 次近似值。而赛德尔迭代法在计算第 r 次近似值时，在等式右端尽量采用那些已经求出了的第 r 次近似值，只有那些还没有求出第 r 次近似值的未知量才采用第 $r-1$ 次近似值。正因为如此，赛德尔迭代法比简单迭代法具有较快的收敛速度。

对于 n 阶方程组（24-1），赛德尔迭代法的计算公式是

$$x_i^{(r)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(r)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right),i=1,2,3,\cdots n。\qquad(24\text{-}16)$$

两次近似值之差是

$$\Delta x_i^{(r)}=x_i^{(r)}-x_i^{(r-1)}=\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(r)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right)。\qquad(24\text{-}17)$$

设规定的允许误差是 ε，当

$$max|\Delta x_i^{(r)}|<\varepsilon$$

时结束计算，以第 r 次近似值 $x_i^{(r)}$ 作为方程组的近似解。

赛德尔迭代法收敛性的充分条件。如系数矩阵[A]是对称正定的，则赛德尔迭代法对任意选定的初始值 $x_i^{(0)}$ 均收敛。

§24-4 超松弛迭代法

采用赛德尔迭代法求解方程组（24-1）时，由（24-17）式，第 r 次近似值是

$$x_i^{(r)}=x_i^{(r-1)}+\Delta x_i^{(r)}=x_i^{(r-1)}+\frac{1}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(r)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right)。$$

为了加快收敛速度，我们把 $\Delta x_i^{(r)}$ 乘以因子 ω 后再加上 $x_i^{(r-1)}$，以计算第 r 次近似值，即令

$$x_i^{(r)}=x_i^{(r-1)}+\omega\Delta x_i^{(r)}=x_i^{(r-1)}+\frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(r)}-\sum_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(r-1)}\right)。\qquad(24\text{-}18)$$

其中 ω 是一常数。可以证明，若方程组的系数矩阵[A]对称正定，则当且只有当

$$0<\omega<2$$

时，迭代公式（24-18）对任意初始值 $\{x^{(0)}\}$ 收敛。

当 $\omega=1$ 时，即为赛德尔迭代法。$\omega<1$ 时为亚松弛迭代法，$\omega>1$ 时为超松弛迭代法。常用的是超松弛迭代法，$1<\omega<2$，ω 称为超松弛因子。

超松弛因子的取值对迭代计算的收敛速度有比较大的影响。最优松弛因子随着结构形式和荷载条件而变化，从已有的经验来看，对于弹性力学平面问题，取 $\omega=1.8\sim1.9$ 能得到较好的结果，而对于弹性薄板和薄壳问题，似宜采用较小的 ω 值。

§24-5 分块超松弛迭代法

为了进一步加快计算速度，可以采用分块超松弛迭代法。以n阶方程组（24-1）为例，可以把系数矩阵$[A]$划分成$m\times m$个子矩阵，未知量列阵$\{x\}$和自由项列阵$\{b\}$也相应地划分成m个子列阵，即

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c} a_{11}\ a_{12}\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots\ a_{2n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\ \cdots\ a_{nn} \end{array}\right]\left\{\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ x_n \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ \cdots \\ \hline \cdots \\ b_n \end{array}\right\}.$$

用$[A_{ij}]$表示系数子矩阵，$\{X_i\}$表示未知量子列阵，$\{B_i\}$表示自由项子列阵，上式可记为

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots\cdots \\ X_m \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \cdots\cdots \\ B_m \end{Bmatrix}. \tag{24-19}$$

由上式可得到m个矩阵方程如下：

$$[A_{i1}]\{X_1\}+[A_{i2}]\{X_2\}\cdots+[A_{im}]\{X_m\}=\{B_i\},\quad i=1,2,3,\cdots m.$$

今在上式左端只保留第i项，其余各项均移至右端，得到

$$[A_{ii}]\{X_i\}=\{B_i\}-\sum_{j=1}^{i-1}[A_{ij}]\{X_j\}-\sum_{j=i+1}^{m}[A_{ij}]\{X_j\}.$$

再在上式两边各左乘以$[A_{ii}]^{-1}$，得到

$$\{X_i\}=[A_{ii}]^{-1}\left(\{B_i\}-\sum_{j=1}^{i-1}[A_{ij}]\{X_j\}-\sum_{j=i+1}^{m}[A_{ij}]\{X_j\}\right).$$

把已知的初始值代入上式右端，就可以求出$\{X_i\}$。今再引进松弛因子ω，采取上节推导（24-18）式的类似步骤，可得到分块超松弛迭代法计算公式如下：

$$\begin{aligned}\{X_i^{(r)}\}&=\{X_i^{(r-1)}\}+\omega\{\Delta X_i^{(r)}\}\\&=\{X_i^{(r-1)}\}+\omega[A_{ii}]^{-1}\left(\{B_i\}-\sum_{j=1}^{i-1}[A_{ij}]\{X_j^{(r)}\}\right.\\&\quad\left.-\sum_{j=i}^{m}[A_{ij}]\{X_j^{(r-1)}\}\right),\quad 1\leqslant i\leqslant m.\end{aligned}\tag{24-20}$$

把已知的近似值代入上式右端，可计算第r次近似值$\{X_i^{(r)}\}$，$i=1,2,\cdots m$。

如果不能写出逆矩阵$[A_{ii}]^{-1}$的显式，也可把（24-20）式改写如下：

$$[A_{ii}]\{X^{(r)}\}=[A_{ii}]\{X_i^{(r-1)}\}+\omega\Big(\{B_i\}-\sum_{j=1}^{i-1}[A_{ij}]\{X_j^{(r)}\}$$
$$-\sum_{j=i}^{m}[A_{ij}]\{X_j^{(r-1)}\}\Big),\quad 1\leqslant i\leqslant m。\qquad (24\text{-}21)$$

上式可用直接法求解。

分块超松弛迭代法的收敛条件。若方程组的系数矩阵[A]对称正定，并且矩阵

$$\begin{bmatrix} A_{11} & & & 0 \\ & A_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_{mm} \end{bmatrix}$$

正定，则当且只有当$0<\omega<2$时，分块超松弛迭代法对任意初始值$\{x^{(0)}\}$收敛。

§24-6 直 接 解 法

线性方程组的直接解法有消去法、主元素消去法及分解系数矩阵的方法等等。在这里我们只介绍常用的分解系数矩阵的方法。

已给方程组

$$[A]\{x\}=\{b\}。\qquad (24\text{-}2)$$

我们按系数矩阵[A]对称及不对称两种情况，分别说明如何用分解系数矩阵[A]的方法求解这个方程组。

一、系数矩阵不对称

今将系数矩阵[A]作如下分解

$$[A]=[L][M]\qquad (24\text{-}22)$$

其中[L]是下三角矩阵，[M]是上三角矩阵：

$$[L]=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix},\quad [M]=\begin{bmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ 0 & 1 & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & m_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}。\qquad (24\text{-}23)$$

矩阵[M]主对角线上的元素全为1。

现在以四阶矩阵为例，说明如何计算[L]和[M]两矩阵中的元素。由（24-22）式

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & 1 & m_{23} & m_{24} \\ 0 & 0 & 1 & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。\qquad (a)$$

根据矩阵乘法规则，可一行一行地求出[L]和[M]两矩阵中的元素如下：

第1行：由矩阵乘法规则：

$$a_{11}=l_{11},\ a_{12}=l_{11}m_{12},\ a_{13}=l_{11}m_{13},\ a_{14}=l_{11}m_{14}.$$

从而得到

$$l_{11}=a_{11},m_{12}=\frac{a_{12}}{l_{11}},\ m_{13}=\frac{a_{13}}{l_{11}},\ m_{14}=\frac{a_{14}}{l_{11}}.$$

第 2 行：由矩阵乘法规则：

$$a_{21}=l_{21},a_{22}=l_{21}m_{12}+l_{22},a_{23}=l_{21}m_{13}+l_{22}m_{23},a_{24}=l_{21}m_{14}+l_{22}m_{24}.$$

从而得到

$$l_{21}=a_{21},l_{22}=a_{22}-l_{21}m_{12},m_{23}=(a_{23}-l_{21}m_{13})/l_{22},$$
$$m_{24}=(a_{24}-l_{21}m_{14})/l_{22}.$$

第 3 行：由矩阵乘法规则：

$$a_{31}=l_{31},\ a_{32}=l_{31}m_{12}+l_{32},\ a_{33}=l_{31}m_{13}+l_{32}m_{23}+l_{33},$$
$$a_{34}=l_{31}m_{14}+l_{32}m_{24}+l_{33}m_{34}.$$

从而得到

$$l_{31}=a_{31},\ l_{32}=a_{32}-l_{31}m_{12},\ l_{33}=a_{33}-l_{31}m_{13}-l_{32}m_{23},$$
$$m_{34}=(a_{34}-l_{31}m_{14}-l_{32}m_{24})/l_{33}.$$

第 4 行：由矩阵乘法规则：

$$a_{41}=l_{41},\ a_{42}=l_{41}m_{12}+l_{42},\ a_{43}=l_{41}m_{13}+l_{42}m_{23}+l_{43},$$
$$a_{44}=l_{41}m_{14}+l_{42}m_{24}+l_{43}m_{34}+l_{44}.$$

从而得到

$$l_{41}=a_{41},\ l_{42}=a_{42}-l_{41}m_{12},\ l_{43}=a_{43}-l_{41}m_{13}-l_{42}m_{23},$$
$$l_{44}=a_{44}-l_{41}m_{14}-l_{42}m_{24}-l_{43}m_{34}.$$

把上面计算l_{ij}和m_{ij}的式子加以归纳，不难得到计算l_{ij}和m_{ij}的一般公式如下：

$$\begin{aligned}l_{ij}&=a_{ij}-l_{i1}m_{1j}-l_{i2}m_{2j}-\cdots-l_{i,j-1}m_{j-1,j}\\&=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}m_{kj},\qquad i\geqslant j.\end{aligned}\tag{24-24}$$

$$\begin{aligned}m_{ij}&=(a_{ij}-l_{i1}m_{1j}-l_{i2}m_{2j}-\cdots-l_{i,i-1}m_{i-1,j})/l_{ii}\\&=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}m_{kj})/l_{ii}.\qquad i<j.\end{aligned}\tag{24-25}$$

系数矩阵分解为两个三角方阵后，方程组的求解就很容易了。事实上，方程组$[A]\{x\}=\{b\}$已变换为

$$[L][M]\{x\}=\{b\}.\tag{24-26}$$

令

$$[M]\{x\}=\{y\}.\tag{24-27}$$

代入（24-26）式，得到

$$[L]\{y\}=\{b\}.\tag{24-28}$$

先从上式解出$\{y\}$，再把$\{y\}$作为自由项，代入（24-27）式，解出$\{x\}$，即为方程组$[A]\{x\}=\{b\}$的解。

把方程组（24-28）和（24-27）写成显式，就是

$$\left.\begin{aligned}
&l_{11}y_1=b_1\\
&l_{21}y_1+l_{22}y_2=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&l_{i1}y_1+l_{i2}y_2+\cdots+l_{ii}y_i=b_i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&l_{n1}y_1+l_{n2}y_2+\cdots\qquad\cdots+l_{nn}y_n=b_n
\end{aligned}\right\}\cdot\qquad(24\text{-}28a)$$

$$\left.\begin{aligned}
&x_1+m_{12}x_2+m_{13}x_3+\cdots\cdots+m_{1n}x_n=y_1\\
&\qquad x_2+m_{23}x_3+\cdots\cdots+m_{2n}x_n=y_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad x_i+\cdots\cdots+m_{in}x_n=y_i\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad\qquad x_n=y_n
\end{aligned}\right\}\cdot\qquad(24\text{-}27a)$$

由（24-28a）式可以自上而下地逐个求出y_1、y_2、…y_n。再把y_1、y_2、…y_n作为自由项代入（24-27a）式，就可以自下而上地逐个求出x_n、x_{n-1}、…x_2、x_1。

按（24-22）式作分解$[A]=[L][M]$，其充分条件是$|A|$的各阶主子式全不为零。

在工程问题计算中，方程组的系数矩阵$[A]$一般都是带状的，这一性质大大有利于压缩计算机的存储容量，因为带外的零元素是不必存储的。人们不禁要问，作分解$[A]=[L][M]$后，$[L]$和$[M]$是否仍为带状矩阵？带的边缘在什么地方？现以下述矩阵为例加以说明：

$$[A]=\begin{array}{c}\text{（上带缘）}\\ \downarrow\\ \left[\begin{array}{cccccccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{26} & 0 & 0 & 0\\
0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{48} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} & 0 & 0 & a_{58}\\
0 & 0 & a_{63} & a_{64} & 0 & a_{66} & a_{67} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & a_{75} & a_{76} & a_{77} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{86} & a_{87} & a_{88}
\end{array}\right]\\ \uparrow\\ \text{（下带缘）}\end{array}\cdot\qquad(b)$$

从上述矩阵中取出第5行，左边三个元素都是零，即

$$a_{51}=a_{52}=a_{53}=0,\quad a_{54}\neq 0.$$

由（24-24）式，可知

$$l_{51}=l_{52}=l_{53}=0,\quad l_{54}=a_{54}\neq 0.$$

这就是说，从$[A]$变换到$[L][M]$后，$[A]$中各行左起第一个非零元素的位置保持不变。

如果把矩阵各行左起第一个非零元素的位置的连线称为下带缘，则下三角方阵[L]与矩阵[A]具有相同的下带缘。

再取出矩阵第6列，上面三个元素都是零，即

$$a_{16}=a_{26}=a_{36}=0,\ a_{46}\neq 0.$$

由（24-25）式可知

$$m_{16}=m_{26}=m_{36}=0,\ m_{46}=\frac{a_{46}}{l_{11}}\neq 0.$$

因此，如果把矩阵各列自上而下第一个非零元素位置的连线称为上带缘，则作变换[A]=[L][M]后，上三角方阵[M]的上带缘与矩阵[A]相同。必须指出，如果我们把各行左起最末一个非零元素所在位置的连线称为“上带缘”，如式（b）中虚线所示，那末这条“上带缘”在变换后是可能要变化的。

二、系数矩阵对称

如系数矩阵[A]是对称方阵，由定义，

$$a_{ij}=a_{ji},\ (i\neq j).$$

由（24-24）、（24-25）式，可知

$$l_{i1}=a_{i1},\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

$$m_{1i}=\frac{a_{1i}}{l_{11}}=\frac{l_{i1}}{l_{11}},$$

$$l_{i2}=a_{i2}-l_{i1}m_{12}=a_{i2}-\frac{l_{i1}l_{21}}{l_{11}},$$

$$m_{2i}=\left(\frac{a_{2i}-l_{21}m_{1i}}{l_{22}}\right)$$

$$=\frac{a_{i2}-\dfrac{l_{21}l_{i1}}{l_{11}}}{l_{22}}$$

$$=\frac{l_{i2}}{l_{22}}.\qquad 1\leqslant i\leqslant n$$

余类推，由此可得

$$\left.\begin{aligned} l_{ij}&=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}\frac{l_{ik}l_{jk}}{l_{kk}},\\ m_{ji}&=\frac{l_{ij}}{l_{jj}},\ i\geqslant j,\ 1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n. \end{aligned}\right\}\qquad (24\text{-}29)$$

从而

$$[M]=[L_0][L]^T.\qquad (24\text{-}30)$$

其中

$$[L_0]=\begin{bmatrix} \frac{1}{l_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_{22}} & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \diagdown & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{l_{nn}} \end{bmatrix}. \tag{24-31}$$

因此方程组$[A]\{x\}=\{b\}$变换为

$$[L][L_0][L]^T\{x\}=\{b\}. \tag{24-32}$$

令

$$[L_0][L]^T\{x\}=\{y\}, \tag{24-33}$$

则

$$[L]\{y\}=\{b\}. \tag{24-34}$$

由（24-34）式解出$\{y\}$：

$$y_i=(b_i-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}y_k)/l_{ii},\quad i=1,\ 2,\ \cdots n. \tag{24-35}$$

再把$\{y\}$代入（24-33）作为自由项，可解出$\{x\}$：

$$x_i=y_i-\Big(\sum_{k=i+1}^{n}l_{ki}x_k\Big)/l_{ii},\quad i=n,\ n-1,\ \cdots 1. \tag{24-36}$$

§24-7 共轭斜量法

考虑线性方程组

$$[A]\{x\}=\{b\}.$$

其中$[A]$是对称正定矩阵。这个方程组的求解问题等价于寻找某一$\{x\}$值，它使二次泛函

$$H(\{x\})=([A]\{x\},\ \{x\})-2(\{x\},\ \{b\}) \tag{24-37}$$

取极小值。其中$(\{x\},\ \{b\})$表示向量$\{x\}$与$\{b\}$的内积。设$\{x\}=[x_1,\ x_2,\ \cdots x_n]^T$，$\{b\}=[b_1,\ b_2,\ \cdots b_n]^T$，则内积

$$(\{x\},\ \{b\})=b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n.$$

前述等价关系是可以证明的[157]。在这里我们只举一个例子加以说明。

考虑方程组

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2&=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2&=b_2. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

泛函

$$H(\{x\})=(a_{11}x_1+a_{12}x_2)x_1+(a_{21}x_1+a_{22}x_2)x_2-2(b_1x_1+b_2x_2).$$

如果$\{x\}$使泛函$H(\{x\})$取极小值，必然有

$$\frac{\partial H}{\partial x_1}=2(a_{11}x_1+a_{12}x_2-b_1)=0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x_2}=2(a_{21}x_1+a_{22}x_2-b_2)=0.$$

可见$\{x\}$满足方程组（ a ）。

共轭斜量法是采用逐步逼近的方法寻找使泛函$H(\{x\})$取极小值的向量$\{x\}$。如果在计算过程中完全没有舍入误差，对于一个n阶方程组，用共轭斜量法求解，不超过n步就可以得到精确解。

取$\{x^{(0)}\}$作为初始近似值。一般说，此值当然不会满足方程组（24-2）。然后按下列算式可逐步算出一次、二次近似值$\{x^{(1)}\}$、$\{x^{(2)}\}$…等等。

$$\{q^{(0)}\}=\{r^{(0)}\}=\{b\}-[A]\{x^{(0)}\}, \tag{24-38}$$

$$\{p^{(i)}\}=[A]\{q^{(i)}\}, \tag{24-39}$$

$$\alpha^{(i)}=\frac{(\{q^{(i)}\},\{r^{(i)}\})}{(\{q^{(i)}\},\{p^{(i)}\})}, \tag{24-40}$$

$$\{x^{(i+1)}\}=\{x^{(i)}\}+\alpha^{(i)}\{q^{(i)}\}. \tag{24-41}$$

$$\{r^{(i+1)}\}=\{r^{(i)}\}-\alpha^{(i)}\{p^{(i)}\}, \tag{24-42}$$

$$\beta^{(i)}=-\frac{(\{r^{(i+1)}\},\{p^{(i)}\})}{(\{q^{(i)}\},\{p^{(i)}\})}, \tag{24-43}$$

$$\{q^{(i+1)}\}=\{r^{(i+1)}\}+\beta^{(i)}\{q^{(i)}\}. \tag{24-44}$$

如果矩阵$[A]$不是对称正定的，只要矩阵$[A]$是非奇异的，则矩阵$[A]^T[A]$是对称正定的。因此在方程组$[A]\{x\}=\{b\}$的两端各左乘以$[A]^T$，得到

$$[A]^T[A]\{x\}=[A]^T\{b\}. \tag{24-45}$$

上述方程组就可以用共轭斜量法求解了。

共轭斜量法与直接法比较起来，它们的共同点是：如果没有舍入误差，只要计算有限步即可求得方程组的精确解。不同之处在于，共轭斜量法是迭代计算，而直接法不是迭代计算，因此在电子计算机上计算时，共轭斜量法的程序设计比较简单，而且矩阵$[A]$中的零元素不必存储，比直接法可节省大量计算机存储量。

【例 1】 用共轭斜量法求解方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

系数矩阵是对称正定的，所以可用共轭斜量法求解。取初始值

$$\{x^{(0)}\}=[0,\ 0]^T,$$

$$\{q^{(0)}\}=\{r^{(0)}\}=\{b\}-[A]\{x^{(0)}\}=[0,\ 1]^T,$$

$$\{p^{(0)}\}=[A]\{q^{(0)}\}=[-1,\ 1]^T,$$

$$\alpha^{(0)}=\frac{(\{q^{(0)}\},\{r^{(0)}\})}{(\{q^{(0)}\},\{p^{(0)}\})}=1,$$

$$\{x^{(1)}\}=\{x^{(0)}\}+\alpha^{(0)}\{q^{(0)}\}=[0,\ 1]^T.$$

检查第一次近似值$\{x^{(1)}\}$是否在允许误差范围内满足方程组，今$\{x^{(1)}\}$不满足方程组，所以接着计算$\{x^{(2)}\}$。

$$\{r^{(1)}\}=\{r^{(0)}\}-\alpha^{(0)}\{p^{(0)}\}=[1,0]^T,$$

$$\beta^{(0)}=-\frac{(\{r^{(1)}\},\{p^{(0)}\})}{(\{q^{(0)}\},\{p^{(0)}\})}=1,$$

$$\{q^{(1)}\}=\{r^{(1)}\}+\beta^{(0)}\{q^{(0)}\}=\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix},$$

$$\{p^{(1)}\}=[A]\{q^{(1)}\}=[1,\ 0]^T,$$

$$\alpha^{(1)}=\frac{(\{q^{(1)}\},\{r^{(1)}\})}{(\{q^{(1)}\},\{p^{(1)}\})}=1,$$

$$\{x^{(2)}\}=\{x^{(1)}\}+\alpha^{(1)}\{q^{(1)}\}=[1,\ 2]^T.$$

$\{x^{(2)}\}$满足方程组，故计算完毕。在以上计算中没有舍入误差，因此得到的是精确解。

§24-8 几种常用解法的比较

在工程问题的计算中，求解的代数方程组常常是非常庞大的。当然，方程组的阶数n与问题的性质、单元数量及单元形式有关。大致说来，对于平面流体力学和热传导问题，$n=300\sim600$，对于平面应力及板壳问题，$n=600\sim2000$，而对于空间应力问题，$n=5000\sim15000$。事实上，应用有限单元法分析工程问题时，计算量的大部分是花费在方程组的求解上。因此，选择一个合适的方程组解法是十分重要的。

在选择方程组解法时，必须考虑的两个主要因素是计算机的储存量和计算时间。

方程组系数矩阵$[A]$共有n^2个元素，带宽以外的零元素不必存储，但如用分解系数矩阵方法，带宽以内的全部元素都要存储。如用迭代方法，则只要存储非零元素，带内的零元素是不必存储的。设带宽为b，带内平均非零元素的个数为c，则所需存储量如下：

方法	直接法	迭代法	共轭斜量法
存储量	nb	nc	$nc+3n$

如利用矩阵对称性，存储量可减半。由于$b>c$，在存储量方面，迭代法是最节省的。以平面应力问题为例，迭代法的存储量只需直接法的四分之一左右。

在计算速度方面，如超松弛因子选择得好，迭代法与直接法可能差不多。但多数情况下，迭代法要花费较多的计算时间，在某些情况下，迭代法的收敛可能是很慢的。在计算机存储量够用的条件下，一般以采用直接法为宜，因为计算时间较节省，而且计算时间是固定的，不象迭代法那样随着荷载和结构形式的不同而有很大的变化。在计算机存储量不够用时，则可采用超松弛迭代法或共轭斜量法。

应用有限单元法计算空间应力问题时，由于方程组异常庞大，采用直接解法，计算机存储容量往往是不够用的，如采用普通超松弛迭代解法，计算时间又很长，因此目前多采用分块超松弛迭代解法。根据计算机容量，可以100～200结点作为一块，分块进行迭代。

§24-9 齐次线性方程组

如果方程组（24-2）的自由项$\{b\}$为零，则得到齐次方程组

$$[A]\{x\}=\{0\}. \tag{24-46}$$

若矩阵$[A]$是非奇异的，即$|A|\neq 0$，则存在逆矩阵$[A]^{-1}$，上式的唯一解是

$$\{x\}=[A]^{-1}\{0\}=\{0\}, \tag{24-47}$$

也就是说，此时只有无意义的解$x_1=x_2=\cdots x_n=0$。

当且只有当

$$|A|=0. \tag{24-48}$$

时，齐次方程组（24-46）才有非零解。

给定方程组

$$[A]\{x\}=\lambda\{x\}.$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = 0. \tag{24-49}$$

这个方程组有非零解的条件是行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{24-50}$$

上式展开后是关于λ的一个n次方程，称为特征方程。它具有n个根λ_1，λ_2，$\cdots\lambda_n$，称为特征值。对应于每个特征值λ_i，方程组（24-49）都存在一组非零解$\{x\}$，称为特征向量。求特征值和特征向量的方法，见第十九章。

【例 1】 给出齐次方程组：

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = 0.$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2-7\lambda+10=0.$$

上式的两个根是$\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$。

以$\lambda_1=2$代入原方程，并令$x_1=1$，得到$x_2=\frac{1}{2}$。故第一特征向量为$x_1=1$，$x_2=\frac{1}{2}$。

再以$\lambda_2=5$代入原方程，并令$x_1=1$，得$x_2=-1$，故第二特征向量为$x_1=1$，$x_2=-1$。

第二十五章 变 分 法

变分法是研究泛函的极大值和极小值的方法。在有限单元法中，变分法得到了广泛应用。在这一章，我们将说明变分法的基本原理及应用于有限单元法的一些技巧。

§25-1 函 数 的 极 值

变分法是研究泛函的极值的，由于泛函的极值与函数的极值有许多联系和类似之处，所以在这里我们先简述一下函数的极值。

一、一元函数的极值

函数的极大值和极小值统称为极值。使函数取得极值的点称为极值点。

从数学分析可知，设$f=f(x)$是一连续可微函数，定义域为$a\leqslant x\leqslant b$，若$f(x)$在内点$x=x_0$有极值，则在该点的导数必然为零：

$$\frac{df(x)}{dx}=0.$$

既然在极值点$x=x_0$，函数$f(x)$的一阶导数等于零，那么函数的微分df也必然等于零，即

$$df=\frac{df(x)}{dx}dx=0.$$

我们把一阶导数为零的点称为函数$f(x)$的驻点。以上二式表明，函数的极值点必然是驻点，但驻点并不一定是极值点。为了确定函数在驻点是否有极值，应利用二阶导数判别如下：

若 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}>0$，则有极小值，

若 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}<0$，则有极大值，

若 $\frac{d^2f(x)}{dx^2}=0$，则不一定。

对于上述第三种情况，$f''(x)=0$，可能有极值，也可能无极值，可利用下述定理进行判别。

设连续可微函数$f(x)$在点$x=x_0$的一阶、二阶、直至$k-1$阶导数都等于零，但k阶导数不等于零，即

$$f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(k-1)}(x)=0.$$

但

$$f^{(k)}(x)\neq 0.$$

若k是奇数，则$f(x)$在该点无极值，若k是偶数，则$f(x)$在该点有极值；并且当$f^{(k)}(x)>0$时，有极小值；当$f^{(k)}(x)<0$时，有极大值。

二、多元函数的极值

现在考虑多元函数有极值的必要条件。

设$f=f(x_1, x_2, \cdots x_n)$是一连续可微函数，若函数$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$有极值，则在该点全微分$df$必须等于零，即

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i=0.$$

在上式中，增量dx_i是任意的。如果在n个自变量的增量中，我们只保留$dx_k\neq 0$，而让其余$n-1$个dx_i都等于零，则由上式可得

$$df=\frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k=0.$$

既然$dx_k\neq 0$，由上式推知

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=0.$$

因为dx_k是任意选定的，我们可依次令$k=1, 2, \cdots n$。所以上式对任一x_k都必须成立。就是说，若函数$f(x_1, x_2, \cdots x_n)$在点$(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$有极值，则在该点的全部一阶偏导数都必须等于零，即

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=0, \quad i=1, 2, \cdots n.$$

与一元函数一样，多元函数的极值点也必须是驻点。

§25-2 泛函的极值

所谓泛函是指这样一种变量，它的值是由一个函数$y=y(x)$,或几个函数$y_1(x), y_2(x)$…所确定的。

例如，在图（25-1）中,给定两点1和2,连结这两点的曲线的长度L，与曲线$y=y(x)$的形状有关，曲线形状不同，长度L就不同，所以长度L是由曲线的方程$y=y(x)$所确定的。只要给出曲线方程，就可由下式计算长度L：

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$

因此，曲线长度L就是一个泛函，记为$L[y(x)]$。

又如图25-2所示，在空间给出了一个曲面$z=z(x,y)$,曲面的表面积S应按下式计算：

$$S[z(x, y)]=\iint_{D}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

显然，表面积S依赖于曲面形状，曲面形状一改变，表面积S即随之改变，所以曲面的表面积S也是一个泛函，记为$S[z(x, y)]$。

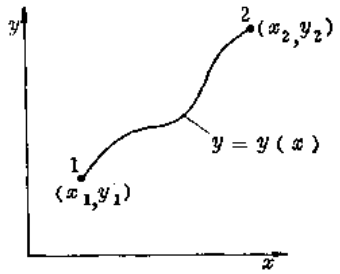


图 25-1

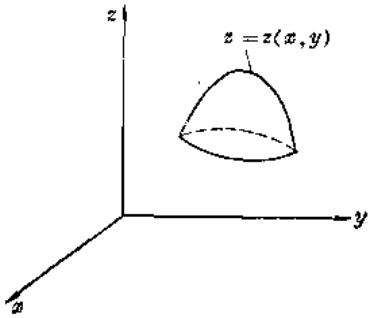


图 25-2

泛函与函数之间具有一些相似之处，下面把函数与泛函中的一些互相对应的量加以排列，以便于对比：

函数	$f(x)$	泛函	$I[y(x)]$
变量	f	变量	I
自变量	x	函数	$y(x)$
x 的增量	Δx	$y(x)$的变分	δy
函数的微分	df	泛函的变分	δI

变分问题是研究泛函的极大值和极小值问题。这个问题的解法非常类似于函数极值的求法。现在略去数学上的证明，简述其结果，并和求函数极值方法进行对比。

函数$f=f(x)$

1.如果对于变量x的某一域中的每一个x，f都有一值与之对应，则变量f叫做变量x的函数，记为$f(x)$

2.如果对于x的微小改变，有函数$f(x)$的微小改变与之对应，则函数$f(x)$是连续的

3.如果可微函数$f(x)$在内点$x=x_0$处达到极大或极小值，则在这点有

$$df=0$$

泛函$I=I[y(x)]$

1.如果对于某一类函数$y(x)$中的每一个函数$y(x)$，I都有一值与之对应，则变量I叫做依赖于函数$y(x)$的泛函，记为$I[y(x)]$

2.如果对于$y(x)$的微小改变，有泛函$I[y(x)]$的微小改变与之对应，则泛函$I[y(x)]$是连续的

3.如果具有变分的泛函$I[y(x)]$在$y=y_0(x)$上达到极大或极小值，则在$y=y_0(x)$上有

$$\delta I=0$$

函数$y(x)$的变分δy是指两个函数$y(x)$和$y_1(x)$之差，即

$$\delta y=y(x)-y_1(x),$$

如图 25-3，此处$y(x)$和$y_1(x)$是非常接近的。而泛函$I[y(x)]$的变分是

$$\delta I=\frac{\partial}{\partial\alpha}I[y(x)+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}. \quad (25\text{-}1)$$

这相当于函数$f(x)$的微分：

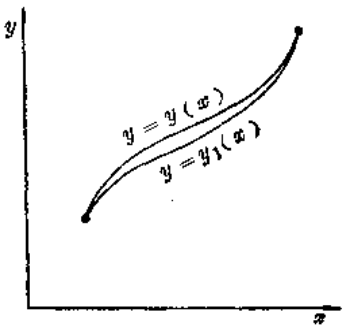


图 25-3

$$df=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\Big|_{\alpha=0}. \qquad (25\text{-}2)$$

在函数中，如果$f(x)$在$x=x_0$点有极大或极小值，可根据$df=0$这个条件去寻找x_0。同样，在泛函中，如果$I[f(x)]$在$y=y_0(x)$上有极大或极小值，可根据$\delta I=0$这个条件去寻找$y_0(x)$。

§25-3 预 备 定 理

为了以后几节推导欧拉方程时的需要，在这里我们先叙述一个预备定理。

设$\Phi(x)$是区间$[a, b]$上的连续函数，如果对于任何满足$\eta(a)=\eta(b)=0$的连续函数$\eta(x)$，恒有

$$\int_a^b\eta(x)\Phi(x)=0.$$

则在区间$[a, b]$上有

$$\Phi(x)\equiv 0.$$

这个定理是不难证明的。假定在区间$[a, b]$上一点$x=x_1$处，$\Phi(x_1)\neq 0$，我们可以引出矛盾的结果来。事实上，因函数$\Phi(x)$是连续的，它在点x_1的邻域（$x_0\leqslant x_1\leqslant x_2$）内不变号；既然函数$\eta(x)$是任意的，我们可以这样选取函数$\eta(x)$，它在点$x_1$的邻域（$x_0\leqslant x_1\leqslant x_2$）内不变号并且大于零，而在邻域外恒等于零，如图25-4所示，于是得到

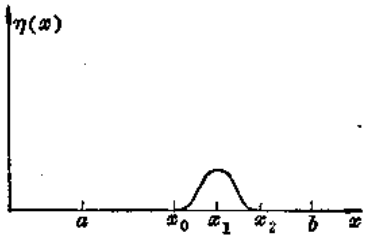


图 25-4

$$\int_a^b\eta(x)\Phi(x)dx=\int_{x_0}^{x_2}\eta(x)\Phi(x)dx\neq 0.$$

这是因为乘积$\eta(x)\Phi(x)$在区间$[x_0, x_2]$内不变号，而在区间外等于零的缘故。这样就引出了矛盾，从而可知$\Phi(x)\equiv 0$。

对于空间问题，可得到类似的结论。

设$\Phi(x, y, z)$是空间(x, y, z)上区域D内的连续函数，而$\eta(x, y, z)$是在D的边界上为零的任意连续函数，如果

$$\iiint_D\eta(x, y, z)\Phi(x, y, z)=0$$

成立，则在区域D上$\Phi(x, y, z)\equiv 0$。

§25-4 一维问题的欧拉方程

现在我们考察一个最简单泛函实现极值的必要条件，只有一个独立变量x。

设泛函

$$I[y(x)]=\int_a^b F[x,\ y(x),\ y'(x)]dx. \qquad (25\text{-}3)$$

式中F是x,$y(x)$和$y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$的函数。

假定泛函I有极值，并在

$$y=y(x)$$

上实现其极值，边界条件为

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}x=a,\ y=c,\\ \text{当}x=b,\ y=d.\end{array}\right\} \qquad (a)$$

取任意连续函数$\eta(x)$，当参数ε相当小时，

$$\bar{y}(x)=y(x)+\varepsilon\eta(x) \qquad (b)$$

将是在$y(x)$邻域的连续函数。为了使$\bar{y}(x)$满足边界条件（a），函数$\eta(x)$必须满足下列边界条件：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当 } x=a,\ \eta=0,\\ \text{当 } x=b,\ \eta=0.\end{array}\right\} \qquad (c)$$

把$\bar{y}(x)$代入泛函（25-3）式，得到

$$I[y(x)+\varepsilon\eta(x)]=I(\varepsilon)=\int_a^b F[x,y+\varepsilon\eta,\ y'+\varepsilon\eta']dx. \qquad (d)$$

上式是参数ε的一元函数，并且当$\varepsilon=0$时，泛函I取得极值，根据函数实现极值的必要条件，有

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0. \qquad (e)$$

根据积分号下求微分方法，可知

$$\frac{dI}{d\varepsilon}=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial\bar{y}}\ \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial\bar{y}'}\ \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon}\right]dx. \qquad (f)$$

其中

$$\frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{\partial F}{\partial(dy/dx)}.$$

由（b）式，

$$\frac{d\bar{y}}{d\varepsilon}=\eta(x),\ \frac{d\bar{y}'}{d\varepsilon}=\eta'(x).$$

代入（f）式，并令$\varepsilon=0$，得到

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right]dx, \qquad (g)$$

对上式右端第二项进行分部积分：

$$\int_a^b\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'dx=\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right]_a^b-\int_a^b\eta\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx.$$

根据边界条件（ c ）式，$\eta(a)=\eta(b)=0$，由上式可得到

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y'}\eta' dx=-\int_a^b \eta\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx.$$

代入（ g ）式，又由（ e ）式知，泛函实现极值时，

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=0，\text{故}$$

$$\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\int_a^b \eta\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dx=0.$$

由于上式右端方括号内的量是连续的，而$\eta(x)$是任意的，根据预备定理，由上式可推知，泛函$I[y(x)]$在$y(x)$上达到极值的必要条件是

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0. \qquad (25\text{-}4)$$

上式称为欧拉方程

记

$$F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y'}$$

将全导数展开（记住$F=F(x,y,y')$是x,y,y'的函数）

$$\frac{d}{dx}F_{y'}=\frac{\partial F_{y'}}{\partial x}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F_{y'}}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$=F_{xy'}+y'F_{yy'}+y''F_{y'y'}.$$

代入（25-4）式，得到欧拉方程的展开式

$$F_y-F_{xy'}-y'F_{yy'}-y''F_{y'y'}=0. \qquad (25\text{-}4a)$$

泛函$I[y(x)]$在$y(x)$上实现极值的必要条件是，$y(x)$满足欧拉方程（25-4）式。欧拉方程的积分曲线称为极值曲线。显然，只有在极值曲线上泛函才能达到极值。

【例 1】 泛函

$$I[y(x)]=\int_0^{\pi/2}[(y')^2-y^2]\,dx,$$

边界条件

$$y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

试问，在怎样的曲线上，上述泛函达到极值？在这里，

$$F=(y')^2-y^2,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial F}{\partial y'}=2y',\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y'',$$

代入（25-4）式，欧拉方程为

$$y''+y=0.$$

其通解是$y=c_1\cos x+c_2\sin x$，由边界条件求得：$c_1=0$，$c_2=1$.故 $y=\sin x$ 是极值曲线。

也就是说，泛函只能在曲线$y=\sin x$上达到极值。

【例 2】 泛函

$$I[y(x)]=\int_0^1[(y')^2+2xy]\,dx.$$

边界条件 $$y(0)=0,\ y(1)=1.$$

试问泛函在什么曲线上达到极值？

在这里

$$F=(y')^2+2xy,\ \frac{\partial F}{\partial y}=2x,\ \frac{\partial F}{\partial y'}=2y',\ \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=2y''.$$

欧拉方程为 $$y''-x=0.$$

其通解为 $$y=\frac{x^3}{6}+c_1x+c_2.$$

由边界条件求得$c_1=5/6$，$c_2=0$，所以泛函只能在曲线$y=\frac{5}{6}x+\frac{x^3}{6}$上达到极值。

【例 3】 泛函

$$L[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(y')^2}\,dx,$$

代表平面上曲线$y=y(x)$的长度，在这里，

$$F=\sqrt{1+(y')^2}.$$

欧拉方程是 $$y''=0.$$

其通解是$y=c_1x+c_2$，这是直线的方程。可见，在平面上，泛函$L[y(x)]$在直线上取极值。换句话说，当$y=y(x)$是直线时，曲线长度取极值。

§25-5 平面问题的欧拉方程

设函数

$$\phi=\phi(x,y).$$

在区域R内是连续的、二阶可微的函数。区域R的边界分为B和C两部分，在边界B上，函数ϕ的值已给定，即

在边界B上

$$\phi=\phi_B. \qquad (25\text{-}5)$$

而在边界C上，函数ϕ的数值事先并未给定。

考虑泛函

$$I(\phi)=\iint_R F(\phi,\phi_x,\phi_y)dxdy+\int_C G(\phi)\,ds. \qquad (25\text{-}6)$$

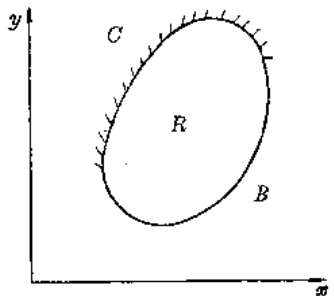


图 25-5

式中 $\phi_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$，$\phi_y=\frac{\partial\phi}{\partial y}$。在这里，函数$G(\phi)$是沿着边界$C$取值的，在边界$C$上事先未给定$\phi$的数值。

假定泛函I有极值，并在$\phi=\phi(x,y)$上实现其极值，在极值曲面$\phi(x,y)$的邻域，函数可写成

$$\overline{\phi}(x,y)=\phi(x,y)+\varepsilon\eta(x,y)。\qquad(a)$$

式中ε是任意微小的纯量，$\eta(x,y)$是域R内任意的允许函数。在边界B上，因函数$\overline{\phi}=\phi_B$，因而η应满足边界条件：

在边界B上

$$\eta=0。\qquad(b)$$

把式（a）代入（25-6）式，得到

$$I(\phi+\varepsilon\eta)=I(\varepsilon)=\iint_R F(\phi+\varepsilon\eta,\phi_x+\varepsilon\eta_x,\phi_y+\varepsilon\eta_y)dxdy$$

$$+\int_C G(\phi+\varepsilon\eta)ds。\qquad(c)$$

上式是参数ε的函数，并且当$\varepsilon=0$时，泛函I取得极值，根据函数取得极值的必要条件，有

$$\left.\frac{dI}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=0。\qquad(d)$$

根据积分号下求微分方法，可得

$$\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}=\iint_R\left[\frac{\partial F}{\partial\phi}\frac{d\phi}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\frac{d\phi_x}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\frac{d\phi_y}{d\varepsilon}\right]dxdy$$

$$+\int_C\frac{\partial G}{\partial\phi}\frac{d\phi}{d\varepsilon}ds。\qquad(e)$$

但由（a）式，

$$\frac{d\phi}{d\varepsilon}=\eta,\qquad\frac{d\phi_x}{d\varepsilon}=\eta_x,\qquad\frac{d\phi_y}{d\varepsilon}=\eta_y。$$

把上式代入（e）式，又当$\varepsilon=0$时，$\phi=\phi$，$\phi_x=\phi_x$，$\phi_y=\phi_y$，因此，当泛函I实现极值时，有

$$\delta I=\left.\frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\iint_R\left[\frac{\partial F}{\partial\phi}\eta+\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\eta_x+\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\eta_y\right]dxdy$$

$$+\int_C\frac{\partial G}{\partial\phi}\eta ds=0。\qquad(f)$$

记

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}=F_\phi,\quad\frac{\partial F}{\partial\phi_x}=F_{\phi_x},\quad\frac{\partial F}{\partial\phi_y}=F_{\phi_y}。\qquad(g)$$

由分部积分可知

$$\left.\begin{aligned} F_{\phi_x}\eta_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(F_{\phi_x}\eta\right)-\frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial x}\eta, \\ F_{\phi_y}\eta_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(F_{\phi_y}\eta\right)-\frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial y}\eta. \end{aligned}\right\} \qquad (h)$$

把（ g ）（ h ）二式代入（ f ）式，得到

$$\begin{aligned} \delta I = &\iint_R \eta\left[\frac{\partial F}{\partial \phi}-\frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial y}\right]dxdy \\ &+\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\phi_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{\phi_y}\eta)\right]dxdy \\ &+\int_C \frac{\partial G}{\partial \phi}\eta ds=0. \end{aligned} \qquad (i)$$

根据格林定理：

$$\iint\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\int(Qdy-Pdx).$$

令 $Q=F_{\phi_x}\eta$，$P=F_{\phi_y}\eta$，式（ i ）右端第二项可变换如下

$$\begin{aligned} &\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\phi_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{\phi_y}\eta)\right]dxdy \\ &=\int_{B+C}\eta(F_{\phi_x}dy-F_{\phi_y}dx). \end{aligned}$$

但由（ b ）式，在边界 B 上 $\eta=0$，上式右端只剩下沿边界 C 的线积分。又 $dy=l_x ds$，$dx=-l_y ds$，其中 l_x 和 l_y 是边界向外法线的方向余弦，故

$$\begin{aligned} &\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\phi_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{\phi_y}\eta)\right]dxdy \\ &=\int_C \eta(F_{\phi_x}l_x+F_{\phi_y}l_y)ds. \end{aligned}$$

把上式代入（ i ）式，得到

$$\begin{aligned} \delta I = &\iint_R \eta\left[\frac{\partial F}{\partial \phi}-\frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial y}\right]dxdy \\ &+\int_C \eta\left[\frac{\partial G}{\partial \phi}+F_{\phi_x}l_x+F_{\phi_y}l_y\right]ds=0. \end{aligned} \qquad (j)$$

在域 R 内和边界 C 上，上式中的函数 η 都是任意的，根据预备定理，在上式右端，无论是二重积分或线积分中，η 后面的方括号内的因子都必须等于零，否则我们总可以选择 η 使 $\delta I\neq 0$，因此由 $\delta I=0$ 推知

$$\left.\begin{aligned} &\text{在区域 } R \text{ 内：} && \frac{\partial F}{\partial \phi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial \phi_y}\right)=0, \\ &\text{在边界 } C \text{ 上：} && \frac{\partial G}{\partial \phi}+l_x\frac{\partial F}{\partial \phi_x}+l_y\frac{\partial F}{\partial \phi_y}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (25\text{-}7)$$

这是平面问题的欧拉方程。

总之，在平面问题中，由（25-6）式表示的泛函$I(\phi)$，如果在$\phi=\phi(x,y)$上取得其极值，其中ϕ是满足边界条件（25-5）式的，那么函数$\phi(x,y)$必须满足欧拉方程（25-7）式。

【例 1】 泛函

$$I[\phi(x,y)]=\iint_R \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy+\int_C \beta\phi\left(\frac{1}{2}\phi-t\right)ds, \qquad (k)$$

参阅图25-5，其中ϕ的边界条件是：在边界B上

$$\phi=\phi_B \qquad (l)$$

试问在什么情况下，上述泛函达到极值？

在这里

$$F=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$G=\beta\phi\left(\frac{1}{2}\phi-t\right).$$

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}=0,\quad \frac{\partial F}{\partial\phi_x}=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial F}{\partial\phi_y}=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2},\quad \frac{\partial G}{\partial\phi}=\beta(\phi-t).$$

由欧拉方程（25-7）式，可知当泛函实现极值时，函数ϕ必须满足下列方程：

在区域R内：
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \qquad (m)$$

在边界C上：
$$l_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+l_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\beta(\phi-t)=0. \qquad (n)$$

就是说，当泛函$I(\phi)$实现极值时，函数$\phi(x,y)$在区域R内满足拉普拉斯方程，而在边界C上满足（n）式。

【例 2】 泛函

$$I[\phi(x,y)]=\iint_R\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+2\phi f(x,y)\right]dxdy.$$

在区域R的边界上ϕ为已知，即$\phi=\phi_B$。试问，在什么情况下，泛函I实现极值？

在这里

$$F=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+2\phi f,\quad G=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}=2f,\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\right)=2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\right)=2\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}.$$

欧拉方程为，在区域R内

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=f(x,\ y).$$

这是一个泊松方程。因此，当泛函实现极值时，函数ϕ（x，y）应满足泊松方程。

§25-6 空间问题的欧拉方程

如图25-6所示，R是（x，y，z）空间中的一个区域。设函数ϕ（x，y，z）是区域R内的连续、二阶可微函数，在边界B上，已给定ϕ值：

$$\phi=\phi_B$$

而在边界C上，未给定ϕ值。

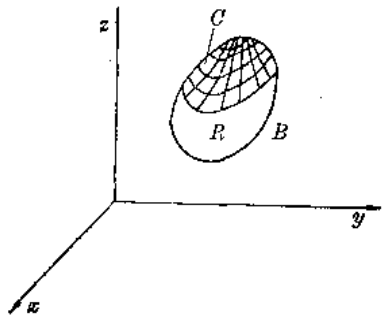


图 25-6

考虑泛函

$$I(\phi)=\iiint_R F(\phi,\ \phi_x,\ \phi_y,\ \phi_z)dxdydz+\iint_C G(\phi)dS. \qquad (25\text{-}8)$$

其中$G(\phi)$是沿着事先未给定ϕ值的边界C取值的。

假定泛函$I(\phi)$在$\phi=\phi(x,y,z)$上实现极值，在$\phi(x,y,z)$的邻域，函数可写成

$$\overline{\phi}(x,\ y,\ z)=\phi(x,\ y,\ z)+\varepsilon\eta(x,\ y,\ z). \qquad (a)$$

式中ε是任意微小参数，$\eta(x,y,z)$是任意的允许函数。在边界B上，因$\phi=\phi_B$，有

$$\eta=0. \qquad (b)$$

把（a）式代入（25-8）式中，得到

$$I(\phi+\varepsilon\eta)=I(\varepsilon)=\iiint_R F(\phi+\varepsilon\eta,\ \phi_x+\varepsilon\eta_x,\ \phi_y+\varepsilon\eta_y,\ \phi_z+\varepsilon\eta_z)dxdydz+\iint_C G(\phi+\varepsilon\eta)dS. \qquad (c)$$

上式是ε的函数，当$\varepsilon=0$时，泛函I取得极值，根据函数取得极值的必要条件，有

$$\delta I=\frac{dI}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}=\iiint_R\left[\frac{\partial F}{\partial\phi}\eta+\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\eta_x+\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\eta_y+\frac{\partial F}{\partial\phi_z}\eta_z\right]dxdydz+\iint_C\frac{\partial G}{\partial\phi}\eta dS=0. \qquad (d)$$

利用分部积分，上式可变换为

$$\delta I=\iiint_R\eta\left[\frac{\partial F}{\partial\phi}-\frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial y}-\frac{\partial F_{\phi_z}}{\partial z}\right]dxdydz+\iiint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\phi_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{\phi_y}\eta)+\frac{\partial}{\partial z}(F_{\phi_z}\eta)\right]dxdydz+\iint_C\frac{\partial G}{\partial\phi}dS=0 \qquad (e)$$

利用空间问题的格林定理，上式右端第二项可变换如下：

$$\iiint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{\phi_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{\phi_y}\eta)+\frac{\partial}{\partial z}(F_{\phi_z}\eta)\right]dxdydz$$

$$=\iint_{R+C}\eta\,(F_{\phi_x}l_x+F_{\phi_y}l_y+F_{\phi_z}l_z)dS. \qquad (f)$$

把上式代入（ e ）式，并注意到在边界B上，$\eta=0$，得到

$$\delta I=\iiint_R \eta\left[\frac{\partial F}{\partial\phi}-\frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial x}-\frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial y}-\frac{\partial F_{\phi_z}}{\partial z}\right]dxdydz$$

$$+\iint_C \eta\left[\frac{\partial G}{\partial\phi}+l_xF_{\phi_x}+l_yF_{\phi_y}+l_zF_{\phi_z}\right]dS=0. \qquad (g)$$

由于η的任意性，根据预备定理，由上式可知，当泛函$I(\phi)$实现极值时，必须有

$$\left.\begin{aligned}&\text{在区域}R\text{内：}\ \frac{\partial F}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_z}\right)=0,\\&\text{在边界}C\text{上：}\ \frac{\partial G}{\partial\phi}+l_x\frac{\partial F}{\partial\phi_x}+l_y\frac{\partial F}{\partial\phi_y}+l_z\frac{\partial F}{\partial\phi_z}=0.\end{aligned}\right\} \qquad (25\text{-}9)$$

这就是空间问题的欧拉方程。式中l_x、l_y、l_z是边界表面向外法线的方向余弦。

在空间问题中，由（ 25-8 ）式表示的泛函I（ ϕ ），如果在$\phi=\phi(x,\ y,\ z)$上取得极值，那么函数$\phi(x,\ y,\ z)$必须满足欧拉方程（ 25-9 ）式。

在（ 25-8 ）式中，泛函I只与ϕ的一阶偏导数ϕ_x、ϕ_y、ϕ_z有关，如果除了这些一阶偏导数外，泛函I还与ϕ的更高阶偏导数有关，采用类似方法，不难推导出相应的欧拉方程。另外，在（ 25-8 ）式中只有一个独立函数ϕ及其偏数，如果泛函中包含了几个独立函数ϕ、ψ、…等及其偏导数，采用类似步骤，推导出的欧拉方程将是一个偏微分方程组。

【例 1】 参阅图25-6，泛函

$$I(\phi)=\iiint_R\left\{\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]-Q\phi\right\}dxdydz$$

$$+\iint_C\left(q\phi+\frac{1}{2}\alpha\phi^2\right)dS.$$

ϕ的边界条件是，在边界B上，$\phi=\phi_B$，而在边界C上，未规定ϕ值，试问在什么条件下，上述泛函达到极值？

令

$$F=\frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]-Q\phi,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\phi}=-Q,\quad \frac{\partial F}{\partial\phi_x}=k_x\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial\phi_x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right),\ \cdots$$

$$G=q\phi+\frac{1}{2}\alpha\phi^2,\quad \frac{\partial G}{\partial\phi}=q+\alpha\phi.$$

由（ 25-9 ）式可知，当泛函$I(\phi)$取得极值时，ϕ必须满足下列条件：

在区域R内

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+Q=0,$$

在边界C上

$$k_x\frac{\partial\phi}{\partial x}l_x+k_y\frac{\partial\phi}{\partial y}l_y+k_z\frac{\partial\phi}{\partial z}l_z+q+\alpha\phi=0.$$

§25-7 求解变分问题的里兹法

实际工程中往往要求解微分方程的边界问题。由于使泛函实现其极值的函数$\phi(x, y, z)$必然满足相应的欧拉方程，因此我们可以构造一个泛函，使它的欧拉方程是我们需要求解的微分方程，这样就把求解微分方程的问题化为求泛函极值的变分问题。当我们

解上述方程组，求得系数α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$，代入（25-10）式，即得到所求的解$\phi(x,y)$。

因此，用里兹法求解一个工程问题时，其计算步骤如下：

1）把实际工程所提出的微分方程作为欧拉方程，找出其相应的泛函$I(\phi)$；

2）假设一组满足边界条件的坐标函数序列$w_1(x,y)$，$w_2(x,y)$，$\cdots w_n(x,y)$，并令$\phi=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i w_i$，将此式代入泛函，使泛函变成以系数$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots\alpha_n$为变量的函数$I(\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$；

3）由方程组（25-11）求出系数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n$；

4）把求得的系数α_i代回（25-10）式，就得到使泛函实现极值的解，也就是所求的微分方程的近似解。

【例 1】 考虑一等截面弹性柱体的扭转问题，截面为$2a\times 2b$矩形，如图25-7所示，在分析扭矩引起的应力时，需求解下面微分方程

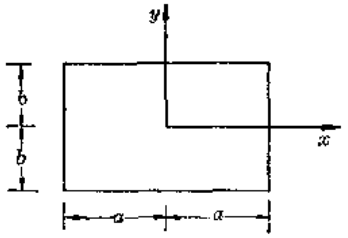


图 25-7

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=-2. \qquad (d)$$

这里$\phi=\phi(x,y)$是应力函数，在边界上

$$\phi(x,y)=0. \qquad (e)$$

方程（d）是泊松方程在$f(x,y)=-2$的特殊情况，把它作为欧拉方程，相应的泛函是

$$I(\phi)=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2-4\phi\right]dxdy. \qquad (f)$$

取解的近似式为

$$\phi=(x^2-a^2)(y^2-b^2)\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\alpha_{ij}x^iy^j. \qquad (g)$$

显然上式是满足边界条件（e）式的。由于截面对x轴和y轴是对称的，所以在上式中只出现偶次项。

若在（g）式中取一项，即

$$\phi_1=\alpha_1(x^2-a^2)(y^2-b^2),$$

$$\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2-4\phi_1=4\alpha_1^2[x^2(y^2-b^2)^2+y^2(x^2-a^2)^2]$$
$$-4\alpha_1(x^2-a^2)(y^2-b^2),$$

$$I_1=\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial y}\right)^2-4\phi_1\right]dxdy$$

$$=4\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\{\alpha_1^2[x^2(y^2-b^2)^2+y^2(x^2-a^2)^2]$$
$$-\alpha_1(x^2-a^2)(y^2-b^2)\}dxdy,$$

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1}=4\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\{2\alpha_1[x^2(y^2-b^2)^2+y^2(x^2-a^2)^2]$$
$$-(x^2-a^2)(y^2-b^2)\}dxdy.$$

求出上式中的积分后，由$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha_1}=0$得

$$\frac{128}{45}a^3b^3(a^2+b^2)\alpha_1-\frac{32}{9}a^3b^3=0,$$

由此得

$$\alpha_1=\frac{5}{4}\frac{1}{a^2+b^2}.$$

故应力函数的近似解为

$$\phi_1=\frac{5}{4}\frac{1}{a^2+b^2}(x^2-a^2)(y^2-b^2).$$

若在（ g ）式中取三项，即取

$$\phi_3=(x^2-a^2)(y^2-b^2)(\alpha_1+\alpha_2x^2+\alpha_3y^2)$$

代入泛函表达式（ f ），由泛函实现极值的必要条件$\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_1}=0,\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_2}=0$及$\frac{\partial I_3}{\partial \alpha_3}=0$并进行计算后可得方程组

$$\frac{128}{45}a^3b^3(a^2+b^2)\alpha_1+\frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right)\alpha_2$$
$$+\frac{128}{45}a^3b^5\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{7}\right)\alpha_3=\frac{16a^3b^3}{9},$$

$$\frac{128}{45}a^5b^3\left(\frac{a^2}{7}+\frac{b^2}{5}\right)\alpha_1+\frac{128}{45\times7}a^5b^5\left(\frac{11}{5}b^2+\frac{1}{3}a^2\right)\alpha_2$$
$$+\frac{128}{45\times35}a^5b^5(a^2+b^2)\alpha_3=\frac{16a^5b^3}{45},$$

$$\frac{128}{45}a^3b^3\left(\frac{a^2}{5}+\frac{b^2}{7}\right)\alpha_1+\frac{128}{45\times35}a^5b^5(a^2+b^2)\alpha_2$$
$$+\frac{128}{45\times7}\left(\frac{11}{5}a^2+\frac{1}{3}b^2\right)\alpha_3=\frac{16a^3b^5}{45}.$$

解之，得到

$$\alpha_1=\frac{35(9a^4+130a^2b^2+9b^4)}{16(45a^8+509a^6b^2+509a^2b^6+45b^8)},$$

$$\alpha_2=\frac{105(9a^2+b^2)}{16(45a^8+509a^6b^2+509a^2b^6+45b^8)},$$

$$\alpha_3=\frac{105(a^2+9b^2)}{16(45a^8+509a^6b^2+509a^2b^6+45b^8)}.$$

§25-8 求解变分问题的有限单元法

用里兹法求解变分问题时，坐标函数w_i必须在原求解区域上满足边界条件。显然，只有求解区域比较规则（如圆形、矩形、椭圆形等）而且边界条件比较简单时，才能找到这样的坐标函数。在实际工程中，求解区域往往是不规则的，边界条件也往往比较复杂，很难找到满足边界条件的坐标函数w_i，因而不能用里兹法求解。

在用有限单元法求解时，将求解区域划分成有限多个三角形（或其他形状）的单元，由这些单元组成区域R，按变分思路求解，寻找使泛函实现极值的函数$\phi(x, y)$。由于求解区域被划分成有限多个单元，可以适应不规则外形和复杂边界条件，因而在方法上就得到了很大的改进，可以求解实际工程中提出的种种复杂问题。

以二维拉普拉斯方程为例，求解问题为

在区域R内
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0, \tag{a}$$

在边界B上
$$\phi=\phi_B, \tag{b}$$

在边界C上
$$l_x\frac{\partial\phi}{\partial x}+l_y\frac{\partial\phi}{\partial y}+\beta(\phi-t)=0. \tag{c}$$

由§25-5例1可知，相应的泛函为

$$I[\phi(x, y)]=\iint_R\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$
$$+\int_C\beta\left(\frac{1}{2}\phi^2-t\phi\right)ds. \tag{d}$$

如图25-8所示，把求解区域R划分成m个单元，每个单元构成一个子域ΔR，由这些子域组成原求解区域R：

$$R=\Sigma\Delta R. \tag{e}$$

相应地，泛函$I(\phi)$变成在这些子域上的积分

$$I(\phi)=\Sigma I^e. \tag{25-12}$$

其中I^e是在作为单元e的子域ΔR上的积分：

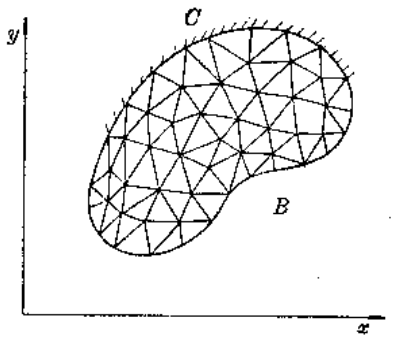


图 25-8

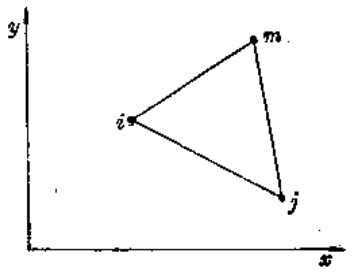


图 25-9

$$I^e=\iint_{\Delta R}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$+\int_{\Delta C}\beta\left(\frac{1}{2}\phi^2-t\phi\right)ds. \qquad (25\text{-}13)$$

上式中右端第二项是沿着边界C的线积分，只有那些靠近边界C的单元才会出现这一项。

取出一个单元e如图25-9，设三个结点是i、j、m，在单元e内，函数$\phi(x,y)$可近似地表示如下：

$$\phi^e(x,y)=N_i\phi_i+N_j\phi_j+N_m\phi_m=[N]\{\phi\}^e, \qquad (25\text{-}14)$$

式中ϕ_i、ϕ_j、ϕ_m是在结点i、j、m上的ϕ值，而N_i、N_j、N_m是形函数，$[N]=[N_i$、N_j、$N_m]$。

把（25-14）式代入（25-13）式，I^e就可用单元e的三个结点函数值ϕ_i、ϕ_j、ϕ_m表示。由（25-12）式，把各个单元的I^e累积起来，就得到全区域的泛函$I(\phi)$。显然，泛函$I(\phi)$已成为结点函数值ϕ_1，$\phi_2\cdots\phi_n$（设共有n个结点）的函数了：

$$I[\phi(x,\ y)]=I(\phi_1,\ \phi_2,\ \cdots\phi_n).$$

由泛函达到极值的必要条件，得到方程组

$$\frac{\partial I}{\partial\phi_1}=0,\quad \frac{\partial I}{\partial\phi_2}=0,\quad \cdots\frac{\partial I}{\partial\phi_n}=0.$$

由于$I=\Sigma I^e$，上式可化为

$$\Sigma\frac{\partial I^e}{\partial\phi_1}=0,\quad \Sigma\frac{\partial I^e}{\partial\phi_2}=0,\quad \cdots\Sigma\frac{\partial I^e}{\partial\phi_n}=0, \qquad (25\text{-}15)$$

这个方程组共包括n个方程，解之，可求出n个结点函数值ϕ_1、ϕ_2、$\cdots\phi_n$。由（25-14）式可得到各单元内的ϕ值。具体式子见第十三章，这里就不再列出了。

现在我们考虑用有限单元法求解变分问题的收敛条件。对于目前所讨论的问题，由于（d）式中只包含了ϕ的一阶导数，在选择形函数时只要能保证ϕ的连续性就可以了。另外，当单元尺寸无限缩小时，一阶导数$\frac{\partial\phi}{\partial x}$、$\frac{\partial\phi}{\partial y}$等必须趋近于常量。如果满足这些条件，有限单元法的解答将收敛于真解。

我们再考察一下问题的边界条件。共有两种边界条件，即强加边界条件和自然边界条件。在边界B上，给定的ϕ值必须事先满足（b）式，即$\phi=\phi_B$，这称为强加边界条件。在边界C上，不要求试函数事先满足（c）式，而是在泛函极小化过程中促使它被满足（参阅欧拉方程（25-7）式），这称为自然边界条件。

第二十六章　加权余量法

用变分方法求近似解时，首先要找到相应的泛函。对于某些问题，相应的泛函尚未找到，或者根本不存在相应的泛函，在这种情况下就无法应用变分方法求解了，但可以应用加权余量法求解。在这一章，我们先阐明加权余量法的基本概念，然后说明在有限单元法中如何应用加权余量法。

§26-1　加权余量法概述

加权余量法是求微分方程近似解的一种有效方法。设在区域D中u必须满足微分方程

$$L(u)=p, \tag{26-1}$$

在边界C上必须满足边界条件。

$$B(u)=0, \tag{26-2}$$

$L(\ \ )$和$B(\ \ )$是微分算子。

精确解u必须在区域D中任一点都满足上述微分方程，并在边界C上任一点都满足上述边界条件。对于复杂的工程问题来说，这样的精确解往往是很难找到的，因此人们设法找到具有一定精度的近似解。

用下式表示上述问题的近似解

$$u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots+\beta_n u_n=\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i. \tag{26-3}$$

其中β_i是待定系数，u_i满足边界条件，但不满足微分方程。u_i应是线性独立的，并应取自完备函数集合。所谓完备函数集合指的是，任一函数都可用此集合表示。

由于u_i不满足微分方程，把上述近似解代入微分方程（26-1），将得到余量

$$R=L(u)-p. \tag{26-4}$$

对于精确解来说，在区域D的任一点，余量R都等于零。对于近似解来说，我们可以选择系数β_i，使得在某种平均意义上余量R等于零。今令余量的加权积分值等于零，即

$$\int W_i R dV=0. \tag{26-5}$$

其中W_i是权函数。取n个权函数，由上式得到n个方程，正好可用来求解式（26-3）中的n个待定系数β_i。采用不同的权函数，就得到不同的计算方法。下面分别加以说明。

1.配点法

这样选择权函数：

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在}n\text{个分散的点上} & W_i=1,\\ \text{在区域}D\text{的其余部分} & W_i=0.\end{array}\right\} \tag{26-6}$$

实际上，这就是要求近似解在n个分散的点上满足微分方程。换句话说，在这n个点上余量应等于零：

$$R_i=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots n. \tag{26-7}$$

由上述n个方程，可求解n个待定系数β_i，从而得到近似解如（26-3）式。

【例 1】 求解下列二阶常微分方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0;\ 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{a}$$

边界条件

$$\left.\begin{aligned}&\text{当 } x=0 \text{ 时},\ u=0,\\&\text{当 } x=1 \text{ 时},\ u=0.\end{aligned}\right\} \tag{b}$$

取近似解为

$$u=x(1-x)(\beta_1+\beta_2x+\cdots). \tag{c}$$

显然，上式满足边界条件（b），但不满足微分方程（a）。

如在式（c）中只取一项，得到第一近似解

$$u=\beta_1x(1-x).$$

代入式（a），余量为

$$R(x)=x+\beta_1(-2+x-x^2).$$

取$x=\frac{1}{2}$作为配点：

$$R\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}\beta_1=0.$$

由此得到$\beta_1=\frac{2}{7}$，所以第一近似解为$u=\frac{2}{7}x(1-x)$。

如在式（c）中取两项，得到第二近似解

$$u=x(1-x)(\beta_1+\beta_2x).$$

余量为

$$R(x)=x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)$$

把区间 0～1 三等分，取$x=\frac{1}{3}$及$x=\frac{2}{3}$作为配点，得到

$$R\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{16}{9}\beta_1+\frac{2}{27}\beta_2=0,$$

$$R\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}-\frac{16}{9}\beta_1-\frac{50}{27}\beta_2=0.$$

由此解得$\beta_1=0.1948$，$\beta_2=0.1731$。所以第二近似解为$u=x(1-x)(0.1948+0.1731x)$。

这个问题的精确解为

$$u=\frac{\sin x}{\sin 1}-x.$$

用配点法求得的近似解与精确解的比较见表26-1。可见对于本问题来说，第二近似解与精确解已相当接近，最大误差只有 3 %。如取更多的项，计算精度还可以进一步提高。

2.最小二乘法

对于微分方程$L(u)=p$及边界条件$B(u)=0$，取近似解$u=\Sigma\beta_i u_i$，其中u_i满足边界条件但不满足微分方程，余量为$R=L(u)-p$，将余量的二次方R^2在区域D中积分，得到

$$I=\int R^2 dV. \tag{26-8}$$

这样选择系数β_i，使积分I的值为极小，因此要求

$$\frac{\partial I}{\partial \beta_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots n.$$

由（26-8）式对β_i求导数，得到

$$\int R\frac{\partial R}{\partial \beta_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots n. \tag{26-9}$$

由此得到n个方程，正好可用以求n个待定系数β_i。比较（26-5）、（26-9）两式，可见目前的权函数为

$$W_i=\frac{\partial R}{\partial \beta_i}. \tag{26-10}$$

表 26-1　　配点法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0536	0.0446	0.0440
0.50	0.0715	0.0704	0.0697
0.75	0.0536	0.0619	0.0601

表 26-2　　最小二乘法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0506	0.0434	0.0440
0.50	0.0681	0.0683	0.0697
0.75	0.0506	0.0592	0.0601

【例 2】 用最小二乘法求解例 1 所述问题。第一近似解取为$u=\beta_1 x(1-x)$，

$$R=x+\beta_1(-2+x-x^2),$$

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1}=-2+x-x^2.$$

由（26-9）式

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_1}\,dx=\int_0^1[x+\beta_1(-2+x-x^2)](-2+x-x^2)dx=0.$$

积分后，得到

$$\frac{101}{5}\beta_1-\frac{11}{2}=0.$$

由此求得$\beta_1=\frac{55}{202}=0.272$，故$u=0.272x(1-x)$。

第二近似解取为　$u=x(1-x)(\beta_1+\beta_2 x)$，

$$R=x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3).$$

由（26-9）式

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_1}dx=\int_0^1[x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)](-2+x-x^2)dx=0,$$

$$\int_0^1 R\frac{\partial R}{\partial \beta_2}dx=\int_0^1[x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)](2-6x+x^2-x^3)dx=0.$$

经过积分，得到

$$202\beta_1+101\beta_2=55,$$
$$101\beta_1+1532\beta_2=393.$$

解之，得到$\beta_1=0.192$，$\beta_2=0.165$，第二近似解为$u=x(1-x)(0.192+0.165x)$。近似解与精确解的比较见表26-2。

3.矩法

对于微分方程$L(u)-p=0$及边界条件$B(u)=0$，取近似解 $u=\Sigma\beta_i u_i$，u_i满足边界条件，但不满足微分方程，以近似解代入微分方程，余量为$R=L(u)-p$，待定系数β_i决定于$\int W_i R dV=0$。对于一维问题，取权函数如下：

$$W_1=1,\ W_2=x,\ W_3=x^2,\ \cdots W_n=x^{n-1}$$

把这些权函数代入式（26-5），得到

$$\left.\begin{aligned}&\int 1\cdot RdV=0,\\&\int x\cdot RdV=0,\\&\int x^2\cdot RdV=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&\int x^{n-1}RdV=0.\end{aligned}\right\}\qquad(26\text{-}11)$$

由上述方程组可解出待定系数β_i。以上各式左端分别代表余量R的零次矩、一次矩、二次矩、…。所以这个方法称为矩法。

【例 3】 用矩法求解例1所述问题。取第一近似解为 $u=\beta_1 x(1-x)$，取权函数$W_1=1$，由（26-11）式，得到

$$\int_0^1 1\cdot Rdx=\int_0^1[x+\beta_1(-2+x-x^2)]dx=0,$$

即
$$1-\frac{11}{3}\beta_1=0.$$

从而求得$\beta_1=\frac{3}{11}=0.273$，$u=0.273x(1-x)$。

取第二近似解为$u=x(1-x)(\beta_1+\beta_2 x)$，余量为$R=x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)$，取权函数$W_1=1$，$W_2=x$，由式（26-11）得到

$$\int_0^1 1\cdot R\,dx=0,\quad \int_0^1 xR\,dx=0.$$

积分后，得

$$\frac{11}{6}\beta_1+\frac{11}{12}\beta_2=\frac{1}{2},$$

$$\frac{11}{12}\beta_1+\frac{19}{12}\beta_2=\frac{1}{3}.$$

解之，$\beta_1=0.1878$，$\beta_2=0.1693$，故$u=x(1-x)(0.1878+0.1693x)$。近似解与精确解的比较见表26-3。

4.加列金方法

对于微分方程 $L(u)-p=0$及边界条件$B(u)=0$，取近似解为

$$u=\sum_{i=1}^{n}\beta_i u_i. \tag{26-3}$$

其中u_i满足边界条件，但不满足微分方程。系数β_i决定于下列条件

$$\int W_i R\,dV=0. \tag{26-5}$$

其中R是余量，W_i是权函数。今取权函数

$$W_i=u_i. \tag{26-12}$$

代入式（26-5），得到

$$\left.\begin{aligned}&\int u_1 R\,dV=0,\\&\int u_2 R\,dV=0,\\&\cdots\cdots\cdots\cdots,\\&\int u_n R\,dV=0.\end{aligned}\right\} \tag{26-13}$$

式中$R=L(u)-p$为余量。由此得到n个方程，正好用以求解n个待定系数β_i。

加列金法的计算精度较高。当存在相应的泛函时，加列金法与变分法往往导致同样的结果。因此，加列金法应用较广。

表 26-3　矩法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0512	0.0432	0.0440
0.50	0.0682	0.0682	0.0697
0.75	0.0512	0.0591	0.0601

表 26-4　加列金法计算结果

x	第一近似解	第二近似解	精确解
0.25	0.0521	0.0440	0.0440
0.50	0.0695	0.0698	0.0697
0.75	0.0521	0.0600	0.0601

【例 4】 用加列金方法求解例 1 所述问题。近似解取为

$$u=\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots=\beta_1 x(1-x)+\beta_2 x^2(1-x)+\cdots$$

如只取一项，得第一近似解 $u=\beta_1 u_1=\beta_1 x(1-x)$，取权函数 $W_1=u_1=x(1-x)$，由（26-13）式，

$$\int_0^1 u_1 R dx=\int_0^1 x(1-x)[x+\beta_1(-2+x-x^2)]dx=0,$$

即
$$\frac{1}{12}-\frac{3}{10}\beta_1=0.$$

由此得到
$$\beta_1=5/18=0.278,\quad u=0.278x(1-x).$$

第二近似解取为 $u=\beta_1 x(1-x)+\beta_2 x^2(1-x)$，取权函数 $W_1=x(1-x)$，$W_2=x^2(1-x)$，代入式（26-13），得到

$$\int_0^1 x(1-x)[x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)]dx=0,$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)[x+\beta_1(-2+x-x^2)+\beta_2(2-6x+x^2-x^3)]dx=0.$$

即
$$\frac{3}{10}\beta_1+\frac{3}{20}\beta_2=\frac{1}{12},$$

$$\frac{3}{20}\beta_1+\frac{13}{105}\beta_2=\frac{1}{20}.$$

解之，得$\beta_1=0.1924$，$\beta_2=0.1707$，因此 $u=x(1-x)(0.1924+0.1707x)$。近似解与精确解的比较见表26-4。

在前面，我们要求试函数（26-3）事先满足边界条件。这项要求是可以放宽的。在变分法中，边界条件分为自然条件和强加条件两种。试函数只要满足强加边界条件，不必满足自然边界条件，而在泛函极小化过程中迫使自然边界条件得到满足。这种处理方法也可以应用于加权余量法中，在不满足边界条件的那一部分边界上引入边界余量，在计算过程中，要求边界余量以某种积分方式等于零。

§26-2　用加权余量法建立有限单元基本方程

设求解的问题是，在区域D中，满足微分方程

$$L(u)=p. \tag{26-14}$$

在边界C上，满足边界条件

$$B(u)=0. \tag{26-15}$$

$L(\quad)$和$B(\quad)$是微分算子。

把区域D划分为M个单元，如图26-1所示，从中任取一个单元e，其结点为ijm。单元结点上的未知量为

$$\{u\}^e=\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_m \end{Bmatrix}. \tag{26-16}$$

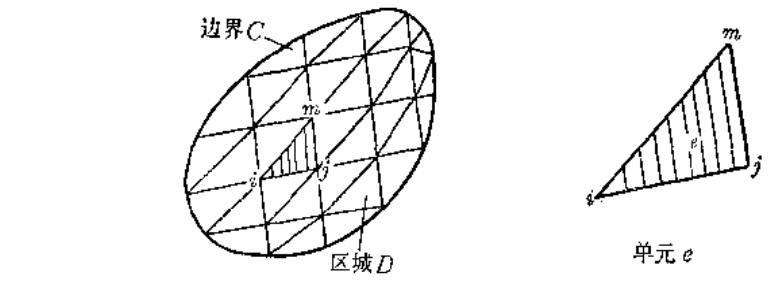


图 26-1

单元内部任一点的 u 用结点值插补如下

$$u=[N_i\ N_j\ N_m]\begin{Bmatrix}u_i\\u_j\\u_m\end{Bmatrix}. \tag{26-17}$$

式中N_i、N_j、N_m是形函数。在整个区域D中，u值可表示为

$$u=[N]\{u\}. \tag{26-18}$$

式中$[N]$是形函数矩阵，$\{u\}$是结点 u 列阵。事先要求$\{u\}$满足边界条件。由于上式是近似解，不满足微分方程，代入（26-14）式，得到余量

$$R=L(u)-p. \tag{26-19}$$

今要求在区域D中余量R的加权积分等于零

$$\int_D W_i R\,dV=\int_D W_i\,(L([N]\{u\}-p)\ dV=\sum_e\int_{\Delta D} W_i(L([N]\{u\}-p)dV=0. \tag{26-20}$$

式中$\sum_e$表示对单元求和，ΔD为单元e对应的子域。上式表示，对每个单元计算余量R的加权积分，累积后，其总和应等于零。设共有n个待求的结点未知量，假定n个权函数W_i，$i=1,2,\cdots n$，由上式可得到n个方程，联立解之，即可求得n个未知量$\{u\}$。

在（26-20）式中采用不同的权函数W_i，即得到不同的计算方法。例如，在区域D的n个分散的点上取权函数$W_i=1$，在D的其余部分取$W_i=0$，即得到配点法。如取权函数$W_i=\partial R/\partial u_i$，即得到最小二乘法。如取权函数

$$W_i=N_i. \tag{26-21}$$

其中N_i为形函数，即得到加列金法。把上式代入（26-20）式，得到

$$\int_D W_i R dV=\int_D N_i(L([N]\{u\}-p)dV=0. \tag{26-22}$$

加列金法具有较高的计算精度。如果存在相应的泛函，加列金法与变分法往往导致同样的结果。因此，加列金法应用较广泛。

直接按上述方法求解，存在着一个明显的缺点。微分算子$L(\ )$出现在（26-22）式的积分号中，与变分法的泛函相比，具有更高阶次的微分，为了避免相邻单元公共边界上

的贡献，形函数应具有较高阶次的连续性，这往往给形函数的构造带来很大的困难。为了避免上述困难，可以对（26-22）式进行分部积分（或应用格林公式），以降低积分号内微分项的阶次。

下面以一维拉杆作为简例，说明如何用加权余量法建立有限单元的基本方程如图26-2

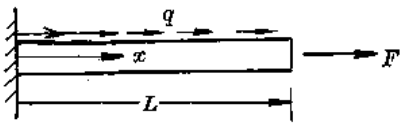


图 26-2

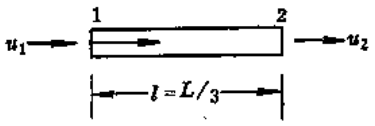


图 26-3 单元1-2

所示。杆的长度为L，截面积为A，水平位移为u，水平应变为$\varepsilon_x=\frac{du}{dx}$，应力为$\sigma_x=E\frac{du}{dx}$，平衡条件为$A\frac{d\sigma_x}{dx}+q=0$，把应力表达式代入后，得到用位移表示的平衡方程

$$EA\frac{d^2u}{dx^2}+q=0\,. \tag{26-23}$$

其中q为作用于杆上的水平分布荷载。假定杆的左端固定，右端作用着水平力F，于是边界条件为

当 $x=0$时，$u=0$， (26-24)

当 $x=L$时，$AE\frac{du}{dx}=F$. (26-25)

现在用加权余量法求解这个问题，近似位移应满足下列方程

$$\int_0^L W_i\left(EA\frac{d^2u}{dx^2}+q\right)dx=0. \tag{26-26}$$

式中W_i是权函数。对上式积分号中的二阶微分项进行分部积分：

$$\int_0^L EAW_i\frac{d^2u}{dx^2}\,dx=\left[EAW_i\frac{du}{dx}\right]_0^L-\int_0^L EA\frac{dW_i}{dx}\,\frac{du}{dx}dx$$

代入（26-26）式，得到

$$\int_0^L EA\frac{dW_i}{dx}\,\frac{du}{dx}\,dx=\int_0^L W_iq\,dx+\left(EAW_i\frac{du}{dx}\right)_{x=L}$$

$$-\left(EAW_i\frac{du}{dx}\right)_{x=0}. \tag{a}$$

现在把此杆划分为三个单元，每个单元的长度为$l=\frac{L}{3}$，取出单元1-2如图26-3，把局部坐标的原点放在结点1上，单元内任一点位移用下式表示

$$u=[N_1\ \ N_2]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}. \tag{b}$$

其中形函数 $N_1=1-\frac{x}{l}, N_2=\frac{x}{l}$。

由式（ b ）求导数，得到应变如下

$$\frac{du}{dx}=\left[\frac{dN_1}{dx}\ \frac{dN_2}{dx}\right]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\left[-\frac{1}{l}\ \frac{1}{l}\right]\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}. \qquad (c)$$

采用加列金方法，取权函数

$$W_i=N_i.$$

也就是说，对于单元1-2来说

$$W_1=N_1=1-\frac{x}{l},\quad W_2=N_2=\frac{x}{l}.$$

对于整个结构来说，权函数如图26-4所示。在结点0，已知位移 $u_0=0$。由于u_0不是未知量，所以权函数W_0是用不着的，只用到W_1、W_2和W_3，把这三个权函数分别代入（a）式，得到三个方程，正好用来求解未知量u_1、u_2和u_3。

由图26-4可见，对于权函数W_1、W_2、W_3来说，在结点0，其数值都等于零，即

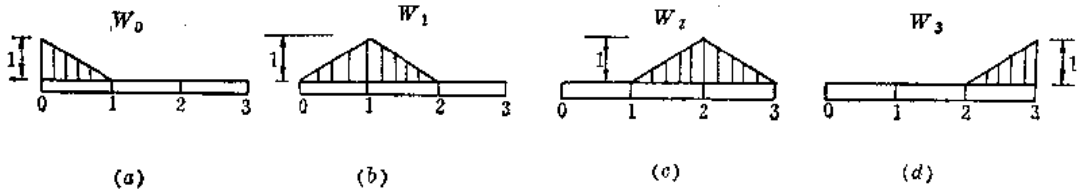


图 26-4 单元划分与权函数W_i

$W_{x=0}=0$，因此（ a ）式右端最后一项等于零，（ a ）式简化为

$$\int_0^L EA\frac{dW_i}{dx}\ \frac{du}{dx}\ dx=\int_0^L W_i q dx+\left(EAW_i\frac{du}{dx}\right)_{x=L}. \qquad (d)$$

再把（ b ）式代入上式，得到

$$\sum_e\int_0^l EA\frac{dW_i}{dx}\left(\frac{dN_i}{dx}u_i+\frac{dN_j}{dx}u_j\right)dx=\sum_e\int_0^l W_i q dx$$
$$+\left(EAW_i\frac{du}{dx}\right)_{x=L}. \qquad (26\text{-}27)$$

把图26-4所示权函数W_1、W_2、W_3代入上式，得到方程组

$$[K]\{u\}=\{P\}. \qquad (26\text{-}28)$$

式中$\{u\}=[u_1\ u_2\ u_3]^T$，矩阵$[K]$和$\{P\}$的元素为

$$K_{ij}=\sum_e k_{ij}^e,\quad P_i=\sum_e p_i. \qquad (e)$$

对单元ij来说，$W_i=N_i=1-\frac{x}{l}$，$W_j=N_j=\frac{x}{l}$，由（26-27）式可知

$$k_{ij}^{e}=\int_0^l EA\frac{dN_i}{dx}\frac{dN_j}{dx}dx=\begin{cases}\dfrac{EA}{l}, & \text{当 } i=j,\\ -\dfrac{EA}{l}, & \text{当 } i\neq j.\end{cases} \qquad (f)$$

$$p_i^e=\int_0^l N_i q\,dx=\frac{ql}{2}. \qquad (g)$$

由（26-27）式可知，在结点3，还要加上由于$\left(EAW_i\frac{du}{dx}\right)_{x=L}$而产生的贡献，由于在$x=L$处$W_3=1$及边界条件（26-25）式，可知

$$\left(EAW_3\frac{du}{dx}\right)_{x=L}=EA\frac{du}{dx}\Big|_{x=L}=F.$$

因此

$$p_3^e=\frac{ql}{2}+F. \qquad (h)$$

把（e）、（f）、（g）、（h）四式及$l=\frac{L}{3}$代入（26-28）式，得到矩阵方程如下：

$$\frac{3EA}{L}\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{qL}{3}\\ \dfrac{qL}{3}\\ \dfrac{qL}{6}+F\end{Bmatrix}. \qquad (i)$$

由上式求逆，可求出结点位移u_1、u_2、u_3。上式与用能量方法求得的结果相同。

以上是一个简单的例子，在以下几节，再用弹性柱体的扭转、不稳定温度场及结构动力学等问题为例，进一步说明如何用加权余量法建立有限单元的基本方程。

§26-3 弹性柱体的扭转

如图26-5所示，具有任意横剖面的弹性柱体，两端受到扭矩M_t的作用。在这种情况下，正应力σ_x、σ_y、σ_z及剪应力τ_{xy}都等于零，只有剪应力τ_{zx}和τ_{yz}不为零。定义应力函数ϕ如下：

$$\tau_{zx}=\frac{\partial\phi}{\partial y},\quad \tau_{yz}=-\frac{\partial\phi}{\partial x}. \qquad (26\text{-}29)$$

应力函数ϕ必须满足下列微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+2\theta=0. \qquad (26\text{-}30)$$

式中G是剪切模量，θ是沿轴向单位长度内的扭转角。柱体边界是自由的，由此推知在边界上

$$\frac{d\phi}{ds}=0,\ \text{即}\ \phi=\text{常数}. \qquad (26\text{-}31)$$

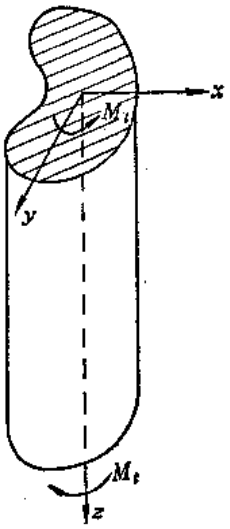


图 26-5

由应力函数的定义可知，剪应力与 ϕ 的梯度成比例，而与 ϕ 的绝对值无关，所以可取上式中的常数为零，即

在边界 C 上　　$\phi = 0$。　　（26-32）

根据平衡条件，可推得

$$M_t = 2\iint \phi \, dxdy. \qquad (26\text{-}33)$$

关于以上各式的详细推导，可参阅铁木辛柯著“弹性理论”。

如果剖面几何形状比较复杂，用解析方法求解扭转问题是相当困难的，但用有限单元法求解却很方便。下面说明如何用加权余量法建立有限单元的基本方程。

用加权余量法求解时，ϕ 的近似解必须满足下列方程

$$\iint_D W_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+2\theta\right]dxdy=0. \qquad (26\text{-}34)$$

式中 W_i 是权函数。对上式积分号中的第一项进行分部积分：

$$\iint_D W_i \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dxdy$$

$$=\int_C \left| W_i \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right|_1^2 dy - \iint_D \frac{1}{G}\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy$$

$$=\int_C \frac{1}{G} W_i \frac{\partial \phi}{\partial x} l_x ds - \iint_D \frac{1}{G}\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy.$$

上式中 l_x 是边界外法线的方向余弦（图26-6），线积分是沿着整个边界 C 进行的。

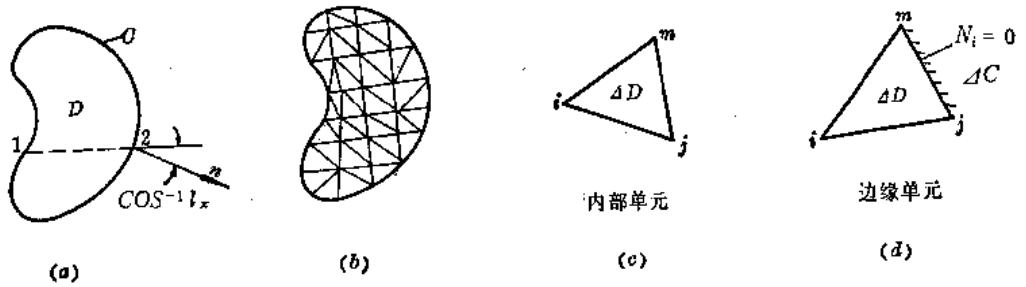


图 26-6

(a)柱体横剖面；(b)单元划分；(c)内部单元；(d)边缘单元

对式（26-34）积分号中第二项也进行分部积分，得到

$$\iint_D W_i\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_C \frac{1}{G} W_i\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} l_x+\frac{\partial \phi}{\partial y} l_y\right)ds-\iint_D \frac{1}{G}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\int_C \frac{1}{G} W_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds - \iint_D \frac{1}{G}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy.$$

把此式代入式（26-34），得到

$$\iint_D \frac{1}{G}\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D 2W_i\theta dxdy + \int_C \frac{1}{G} W_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds. \tag{26-35}$$

现在，只要ϕ是连续的，在相邻单元边界上就不会出现贡献。在目前情况下，由于出现了权函数的微商$\frac{\partial W_i}{\partial x}$、$\frac{\partial W_i}{\partial y}$，在区域$D$内，$W_i$必须是连续的。配点法由于权函数不连续，就不能应用了。加列金法和最小二乘法的权函数都是连续的，都可以应用。

用有限单元法进行离散化，如图26-6c，任意取出一个单元e，单元内部的应力函数ϕ用形函数表示如下

$$\phi = [N_i \ N_j \ N_m]\begin{Bmatrix}\phi_i\\ \phi_j\\ \phi_m\end{Bmatrix}. \tag{26-36}$$

其中N_i是形函数。下面应用加列金方法，取权函数

$$W_i = N_i.$$

把以上二式代入式（26-35），得到

$$\sum_e \iint_{\Delta D}\frac{1}{G}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\phi_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}\phi_j+\frac{\partial N_m}{\partial x}\phi_m\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\phi_i+\frac{\partial N_j}{\partial y}\phi_j + \frac{\partial N_m}{\partial y}\phi_m\right)\right]dxdy = \sum_e \iint_{\Delta D} 2N_i\theta dxdy + \sum_e \int_{\Delta C}\frac{1}{G} N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds. \tag{26-37}$$

式中ΔD是属于单元e的子域，ΔC是单元e落在边界C上的边界，$\sum_e$表示对单元求和。在边界C上已知$\phi=0$。设共有n个内部结点，由上式可建立n个方程，正好用来求解n个未知量。由于已知在边界上$\phi=0$，所以不必对边界结点建立方程了。当计算边界附近内部结点ϕ_i值时，在边界C上形函数$N_i=0$，从而上式右端的最后一项等于零。例如，设单元$i\ j\ m$的jm边落在边界C上，如图26-6（d）所示，已知ϕ_j、ϕ_m都等于零，不必把ϕ_j、ϕ_m作为未知量，在内部结点i，ϕ_i是未知量，但在$j\ m$边上形函数$N_i=0$，因此

$$\int_{\Delta C}\frac{1}{G} N_i \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = 0.$$

所以由（26-37）式得到矩阵方程如下：

$$[H]\{\phi\} = \{P\}. \tag{26-38}$$

矩阵$[H]$和列阵$\{P\}$的元素如下：

$$H_{ij}=\sum_e h_{ij}^e,\quad P_i=\sum_e p_i^e. \tag{26-39}$$

而由式（26-37）可知

$$\left.\begin{aligned} h_{ij}^e&=\iint_{\Delta D}\frac{1}{G}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\ \frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\ \frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy,\\ p_i^e&=\iint_{\Delta D}2N_i\theta dxdy. \end{aligned}\right\} \tag{26-40}$$

把形函数代入，即可得到具体算式。以上公式与由变分方法求得的公式完全相同。

可以看出，上式中包含了θ，而θ又决定于（26-33）式，在求出ϕ之前，θ是未知的。为了解决这个矛盾，可以先假定$\theta=1$，求出$\theta=1$时的ϕ，再由（26-33）式求出实际的θ。具体说来，可令

$$\phi=\theta\Phi$$

代入（26-30）式，得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{G}\ \frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{G}\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)+2=0.$$

由（26-33）式，可求得θ如下：

$$\theta=\frac{M_t}{2\iint\Phi dxdy}.$$

因此，可先令$\theta=1$，由（26-38）～（26-40）式求出Φ，再由上式求出θ。

§26-4 不稳定温度场

对于平面不稳定温度场，温度T必须满足热传导方程及初始条件和边界条件如下：

在区域D内
$$\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial T}{\partial\tau}\right)=0, \tag{26-41}$$

初始条件　当$\tau=0$时，$T=T_0$ （26-42）

边界条件
$$\left.\begin{aligned} &\text{在边界}C_1\text{上}\quad T=T_a\\ &\text{在边界}C_2\text{上}\quad \lambda\frac{\partial T}{\partial n}+\beta(T-T_a)=0 \end{aligned}\right\}, \tag{26-43}$$

其中a为导温系数，θ为内部热源引起的绝热温升，τ为时间，λ为导热系数，β为表面放热系数。

下面分两步走，先在空间域离散化，然后在时间域离散化。首先考虑空间域的离散化，温度场的近似解必须满足下式：

$$\iint_D W_i\left[\frac{\partial^2T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2T}{\partial y^2}+\frac{1}{a}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\tau}-\frac{\partial T}{\partial\tau}\right)\right]dxdy=0. \tag{26-44}$$

式中W_i是空间域的权函数。对上式积分号中的二阶微分项进行分部积分，得到

$$\iint_D W_i\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=-\iint_D\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}\right)dxdy+\int_{C_1+C_2} W_i\frac{\partial T}{\partial n}ds\,.$$

把上式代入（26-44）式，得到

$$\iint_D\left[\frac{\partial W_i}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial W_i}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}-\frac{W_i}{a}\left(\frac{\partial \theta}{\partial \tau}-\frac{\partial T}{\partial \tau}\right)\right]dxdy$$

$$=\int_{C_1+C_2} W_i\frac{\partial T}{\partial n}ds\,. \qquad (26\text{-}45)$$

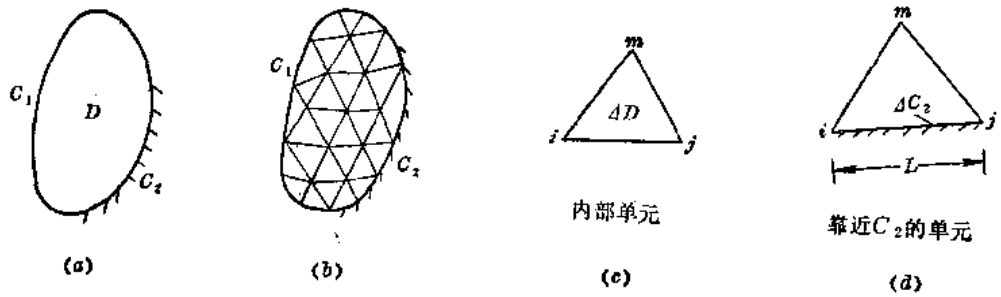


图 26-7

(a)求解区域；(b)单元划分；(c)内部单元；(d)靠近C_2的单元

把区域D划分为一组单元如图26-7所示，在每个单元内，温度场表示如下

$$T(x,\ y,\ \tau)=N_i(x,\ y)T_i(\tau)+N_j(x,\ y)T_j(\tau)+N_m(x,\ y)T_m(\tau)\,. \qquad (26\text{-}46)$$

其中$N_i(x,\ y)$等是空间域的形函数，$T_i(\tau)$是结点i的温度，为时间τ的函数。采用加列金方法，在空间域取权函数

$$W_i=N_i(x,\ y)\,.$$

代入（26-45）式，得到

$$\sum_e\iint_{\Delta D}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}T_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}T_j+\frac{\partial N_m}{\partial x}T_m\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}T_i+\frac{\partial N_j}{\partial y}T_j\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial N_m}{\partial y}T_m\right)-\frac{N_i}{a}\left(N_i\frac{\partial T_i}{\partial \tau}+N_j\frac{\partial T_j}{\partial \tau}+N_m\frac{\partial T_m}{\partial \tau}-\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)\right]dxdy$$

$$=\sum_e\int_{\Delta C_1} N_i\frac{\partial T}{\partial n}ds+\sum_e\int_{\Delta C_2} N_i\frac{\partial T}{\partial n}ds\,. \qquad (26\text{-}47)$$

式中ΔD是属于单元e的子域。上式右端是出现在边界上的线积分，在边界C_1上$T=T_b$，结点温度是已知量，在计算C_1附近结点温度时，C_1边界上的形函数等于零。例如，设单元e的jm边是C_1边界，在计算i点温度时，在jm边上形函数$N_i=0$，所以上式右端第一项等于零。在边界C_2上，由边界条件（26-43）式可知$\frac{\partial T}{\partial n}=-\frac{\beta}{\lambda}(T-T_a)$，代入上式，得到

$$\sum_e \iint_{\Delta D}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}T_i+\frac{\partial N_j}{\partial x}T_j+\frac{\partial N_m}{\partial x}T_m\right)+\frac{\partial N_i}{\partial y}\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}T_i+\frac{\partial N_j}{\partial y}T_j\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial N_m}{\partial y}T_m\right)+\frac{N_i}{a}\left(N_i\frac{\partial T_i}{\partial \tau}+N_j\frac{\partial T_j}{\partial \tau}+N_m\frac{\partial T_m}{\partial \tau}-\frac{\partial \theta}{\partial \tau}\right)\right]dxdy$$
$$=-\sum_e \int_{\Delta C_2}\frac{\beta}{\lambda}N_i(N_iT_i+N_jT_j-T_a)ds\ . \qquad (26\text{-}48)$$

上式右端只在边界C_2上才出现。由此得到方程组如下：

$$[H]\{T\}+[C]\frac{\partial}{\partial \tau}\{T\}=\{P\}. \qquad (26\text{-}49)$$

矩阵$[H]$、$[C]$、$\{P\}$的元素计算如下：

$$H_{ij}=\sum_e h^e_{ij},\quad C_{ij}=\sum_e c^e_{ij},\quad P_i=\sum_e p^e_i. \qquad (26\text{-}50)$$

对于单元e来说，由式（26-48）可知

$$\left.\begin{aligned}
h^e_{ij}&=\iint_{\Delta D}\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)dxdy+\int_{\Delta C_2}\frac{\beta}{\lambda}N_iN_jds\\
c^e_{ij}&=\iint_{\Delta D}\frac{1}{a}N_iN_jdxdy,\\
p^e_i&=\iint_{\Delta D}\frac{1}{a}N_i\frac{\partial \theta}{\partial \tau}dxdy+\int_{\Delta D_2}\frac{\beta}{\lambda}N_iT_ads\ .
\end{aligned}\right\}(26\text{-}51)$$

如采用曲边单元，上述元素可用数值积分法计算。如采用简单的单元，这些系数可直接积分出来。例如对于三角形单元，形函数为

$$N_i=\frac{1}{2A}(a_i+b_ix+c_iy).\quad (i,\ j,\ m)$$

由于

$$\frac{\partial N_i}{\partial x}=\frac{b_i}{2A},\qquad \frac{\partial N_i}{\partial y}=\frac{c_i}{2A},$$

$$\iint_{\Delta D}N_iN_jdxdy=\begin{cases}\dfrac{A}{6}, & 当i=j,\\ \dfrac{A}{12}, & 当i\neq j.\end{cases}$$

$$\iint_{\Delta D}N_idxdy=\frac{A}{3},$$

$$\int_{\Delta C_2}N_iN_jds=\begin{cases}\dfrac{L}{3}, & 当i=j,\\ \dfrac{L}{6}, & 当i\neq j.\end{cases}$$

$$\int_{\Delta C_2}N_ids=\frac{L}{2}.$$

其中A为三角形的面积，L为边界ij（在C_2上）的长度。因此由（26-51）式，对于每个单元e来说，可得到（26-49）式中的n个矩阵如下：

$$[h]^e=\frac{1}{4A}\begin{bmatrix} b_i^2+c_i^2 & b_ib_j+c_ic_j & b_ib_m+c_ic_m \\ b_jb_i+c_jc_i & b_j^2+c_j^2 & b_jb_m+c_jc_m \\ b_mb_i+c_mc_i & b_mb_j+c_mc_j & b_m^2+c_m^2 \end{bmatrix} + \frac{\beta L}{6\lambda}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{26-52}$$

$$[c]^e=\frac{A}{12a}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \tag{26-53}$$

$$\{p\}^e=\frac{1}{3a}\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}+\frac{\beta L}{2\lambda}\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}. \tag{26-54}$$

（26-52）、（26-54）二式右端第二项，只有当单元e的ij边落在边界C_2上时才会出现。

现在我们回到（26-49）式，考虑如何在时间域进行离散化。假定在$\tau=0$，τ_1，τ_2，$\cdots\tau_n$时刻的结点温度分别为$\{T\}_0$、$\{T\}_1$、$\cdots\{T\}_n$。在时间域进行插补，任意时间τ的结点温度可表示如下：

$$\{T\}=N_0(\tau)\{T\}_0+N_1(\tau)\{T\}_1+\cdots+N_n(\tau)\{T\}_n.$$

式中$N_i(\tau)$是在时间域的插补函数。$\{T\}_0$是已知的初始结点温度，$\{T\}_1$、$\cdots\{T\}_n$是待求的结点温度。根据加列金方法，取时间域的权函数为

$$W_1(\tau)=N_1(\tau),\quad W_2(\tau)=N_2(\tau),\quad \cdots W_n(\tau)=N_n(\tau),$$

由（26-49）式，可知

$$\left.\begin{aligned} &\int N_1(\tau)([H]\{T\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}-\{P\})d\tau=0, \\ &\int N_2(\tau)([H]\{T\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}-\{P\})d\tau=0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\int N_n(\tau)([H]\{T\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}-\{P\})d\tau=0. \end{aligned}\right\} \tag{26-55}$$

把$N_i(\tau)$代入上式，经过对时间τ的积分，可得到一个方程组，解之，即可求出$\{T\}_1$、$\{T\}_2\cdots\{T\}_n$。

例如，采用线性插补函数，在时间域$0\leqslant\tau\leqslant\Delta\tau$内，结点温度$\{T\}$表示为

$$\{T\}=[N_0(\tau)\quad N_1(\tau)]\begin{Bmatrix} \{T\}_0 \\ \{T\}_1 \end{Bmatrix}. \tag{26-56}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} N_0(\tau)&=\frac{1-\tau}{\Delta\tau}, \\ N_1(\tau)&=\frac{\tau}{\Delta\tau}. \end{aligned}\right\} \tag{26-57}$$

由于$\frac{\partial N_0}{\partial \tau}=-\frac{1}{\Delta\tau}$，$\frac{\partial N_1}{\partial \tau}=\frac{1}{\Delta\tau}$，所以结点温度的时间导数为

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\{T\}=\left[\frac{\partial N_0}{\partial \tau}\ \frac{\partial N_1}{\partial \tau}\right]\begin{Bmatrix}\{T\}_0\\ \{T\}_1\end{Bmatrix}=\left[-\frac{1}{\Delta\tau}\quad\frac{1}{\Delta\tau}\right]\begin{Bmatrix}\{T\}_0\\ \{T\}_1\end{Bmatrix}. \tag{26-58}$$

初始结点温度$\{T\}_0$是已知的，待求的是$\tau=\Delta\tau$时的结点温度$\{T\}_1$，根据加列金方法，取时间域权函数

$$W_1(\tau)=N_1(\tau).$$

由（26-49）式，得到

$$\int_0^{\Delta\tau}N_1(\tau)\left([H]\{T\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{T\}-\{P\}\right)d\tau=0. \tag{26-59}$$

以（26-56）、（26-58）二式代入上式，得到

$$\int_0^{\Delta\tau}\frac{\tau}{\Delta\tau}\left([H][N_0N_1]\begin{Bmatrix}\{T\}_0\\ \{T\}_1\end{Bmatrix}+[C]\left[\frac{\partial N_0}{\partial\tau}\ \frac{\partial N_1}{\partial\tau}\right]\begin{Bmatrix}\{T\}_0\\ \{T\}_1\end{Bmatrix}-\{P\}\right)d\tau=0$$

经过对时间τ积分，简化后得到

$$\left(\frac{2}{3}[H]+\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)\{T\}_1+\left(\frac{1}{3}[H]-\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)\{T\}_0=\frac{2}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\frac{\tau}{\Delta\tau}\{P\}d\tau. \tag{26-60}$$

为了求出上式右端的积分，可以把$\{P\}$表示如下：

$$\{P\}=[N_0\ N_1]\begin{Bmatrix}\{P\}_0\\ \{P\}_1\end{Bmatrix}. \tag{26-61}$$

其中$\{P\}_0$和$\{P\}_1$分别是$\tau=0$和$\tau=\Delta\tau$时刻的$\{P\}$值，于是可求得

$$\frac{2}{\Delta\tau}\int_0^{\Delta\tau}\frac{\tau}{\Delta\tau}\{P\}d\tau=\frac{1}{3}\{P\}_0+\frac{2}{3}\{P\}_1.$$

把上式代入（26-61）式，得到

$$\left(\frac{2}{3}[H]+\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)\{T\}_1+\left(\frac{1}{3}[H]-\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)\{T\}_0=\frac{1}{3}\{P\}_0+\frac{2}{3}\{P\}_1. \tag{26-62}$$

由上式求逆，得到$\tau=\Delta\tau$时刻的结点温度$\{T\}_1$如下：

$$\{T\}_1=\left(\frac{2}{3}[H]+\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)^{-1}\left(\frac{1}{3}\{P\}_0+\frac{2}{3}\{P\}_1-\left(\frac{1}{3}[H]-\frac{1}{\Delta\tau}[C]\right)\{T\}_0\right). \tag{26-63}$$

重复利用上式，可计算任一时刻的温度场。如采用更高阶的插补函数，可进一步提高计算精度。从已有经验来看，取线性插补函数如式（26-57），已可得到满意的计算精度。

§26-5 结构动力反应

结构动力反应问题，在空间域用有限单元法离散化以后，将归结于如下矩阵方程：

$$[K]\{\delta\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{\delta\}+[M]\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\{\delta\}=\{P\}。\qquad(26\text{-}64)$$

式中 $\{\delta\}$——结点位移列阵；

$[K]$——刚度矩阵；

$[C]$——阻尼矩阵；

$[M]$——质量矩阵；

$\{P\}$——动力荷载列阵。

在$\tau=0$时应该给出两个初始条件，即初始位移$\{\delta\}_0$和初始速度$\{\dot{\delta}\}_0=\frac{\partial}{\partial\tau}\{\delta\}_0$。

现在考虑，如何用加列金方法在时间域离散化。

假定在$\tau=\tau_1=\Delta\tau$时刻的结点位移和速度分别为$\{\delta\}_1$和$\{\dot{\delta}\}_1=\frac{\partial}{\partial\tau}\{\delta\}_1$，在$\tau=0$到$\tau=\Delta\tau$之间的结点位移，用厄米特多项式插值如下：

$$\{\delta\}=[N_{00}(\tau)\quad N_{01}(\tau)\quad N_{10}(\tau)\quad N_{11}(\tau)]\begin{Bmatrix}\delta_0\\ \dot{\delta}_0\\ \delta_1\\ \dot{\delta}_1\end{Bmatrix}。\qquad(26\text{-}65)$$

上式：

$$\left.\begin{aligned}N_{00}(\tau)&=1-3s^2+2s^3\\ N_{01}(\tau)&=(s-2s^2+s^3)\Delta\tau\\ N_{10}(\tau)&=3s^2-2s^3\\ N_{11}(\tau)&=(-s^2+s^3)\Delta\tau\\ s&=\frac{\tau}{\Delta\tau}\end{aligned}\right\}\qquad(26\text{-}66)$$

上述厄米特多项式具有下列性质：

当$s=0$时，$N_{00}=\frac{\partial}{\partial\tau}N_{01}=1$，其余全为零，当$s=1$时，$N_{10}=\frac{\partial}{\partial\tau}N_{11}=1$，其余全为零。

因此，由式(26-65)，在时段初$\tau=0$时的结点位移和速度分别等于$\{\delta\}_0$和$\{\dot{\delta}\}_0$，在时段末$\tau=\Delta\tau$时的结点位移和速度分别等于$\{\delta\}_1$和$\{\dot{\delta}\}_1$。由于未知量是$\{\delta\}_1$和$\{\dot{\delta}\}_1$，按照加列金方法，取权函数为N_{10}和N_{11}，可写出加权余量公式如下：

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\Delta\tau}N_{10}\left([K]\{\delta\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{\delta\}+[M]\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\{\delta\}-\{P\}\right)d\tau=0,\\ \int_0^{\Delta\tau}N_{11}\left([K]\{\delta\}+[C]\frac{\partial}{\partial\tau}\{\delta\}+[M]\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}\{\delta\}-\{P\}\right)d\tau=0。\end{aligned}\right\}\qquad(26\text{-}67)$$

把（26-66）、（26-65）二式代入上式，经过对时间 τ 积分，即可得到求解$\{\delta\}_1$和$\{\dot{\delta}\}_1$的方程组如下：

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_1 \\ \dot{\delta}_1 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \delta_0 \\ \dot{\delta}_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix}. \tag{26-68}$$

其中$[\alpha_{ij}]$、$[\beta_{ij}]$、$\{\gamma_i\}$等系数矩阵可由（26-67）式经过积分求得如下：

$$[\alpha_{11}]=\int_0^{\Delta\tau} N_{10}\left([K]N_{10}+[C]\frac{\partial N_{10}}{\partial\tau}+[M]\frac{\partial^2 N_{10}}{\partial\tau^2}\right)d\tau,$$

$$[\alpha_{12}]=\int_0^{\Delta\tau} N_{10}\left([K]N_{11}+[C]\frac{\partial N_{11}}{\partial\tau}+[M]\frac{\partial^2 N_{11}}{\partial\tau^2}\right)d\tau,$$

$$[\beta_{11}]=\int_0^{\Delta\tau} N_{10}\left([K]N_{00}+[C]\frac{\partial N_{00}}{\partial\tau}+[M]\frac{\partial^2 N_{00}}{\partial\tau^2}\right)d\tau,$$

$$[\beta_{12}]=\int_0^{\Delta\tau} N_{10}\left([K]N_{01}+[C]\frac{\partial N_{01}}{\partial\tau}+[M]\frac{\partial^2 N_{01}}{\partial\tau^2}\right)d\tau,$$

$$\{\gamma_1\}=\int_0^{\Delta\tau} N_{10}\{P\}d\tau,$$

$$[\alpha_{21}]=\int_0^{\Delta\tau} N_{11}\left([K]N_{10}+[C]\frac{\partial N_{10}}{\partial\tau}+[M]\frac{\partial^2 N_{10}}{\partial\tau^2}\right)d\tau,$$

……

$$\{\gamma_2\}=\int_0^{\Delta\tau} N_{11}\{P\}d\tau.$$

式（26-68）是一套循环公式，重复利用此式，可由每个时段初的结点位移和速度计算该时段末的结点位移和速度。

参 考 文 献

[1] 华东水利学院，弹性力学问题的有限单元法，水利电力出版社，1974年；

[2] C.S.Desai, J.F.Abel, Introduction to the Finite Element Method, 1972;

[3] R.H.Gallagher, Finite Element Analysis Fundamentals, 1975;

[4] K.H.Huebner, The Finite Element Method for Engineers, 1975;

[5] I.Holland, K.Bell, Finite Element Methods in Stress Analysis, 1972;

[6] H.C. Martin, G.F. Carey, Introduction to Finite Element Analysis, 1973;

[7] D.H. Norrie, G. de Vries, The Finite Element Method, Fundamentals and Applications, 1973;

[8] J.T. Oden, E.R. de Arantes e Oliveira, Lectures on Finite Element Methods in Continuum Mechanics, 1973;

[9] J.T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continua, 1971;

[10] J.Robinson, Integrated Theory of Finite Element Methods, 1973;

[11] G.Strang, G.Fix, An Analysis of the Finite Element Method, 1973;

[12] O.C. Zienkiewicz, The Finite Element Method in Engineering Science, 1971;

[13] 固体力学中的有限元素法译文集（上、下集），科学出版社，1975;

[14] Proc.Conf. Matrix Methods in Struct.Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965;

[15] Proc. 2nd Conf.Matrix Methods in Struct. Mechanics,Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1968;

[16] Proc.3rd Conf.Matrix Methods in Struct.Mechanics,Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1973;

[17] R.H. Gallagher, Y. Yamada, J.T. Oden, Recent Advances in Matrix Methods of Struct.Analysis and Design, 1971;

[18] J.T. Oden, R.W. Clough, Y. Yamamoto, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 1972,

[19] S.J.Fenves, N.Perrone, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, 1973;

[20] B.F. de Veubeke, High Speed Computing of Elastic Structures, T. 1, 2, 1971;

[21] ASCE, Proc. Symp.on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, 1969;

[22] J.R. Whiteman, The Mathematics of Finite Elements and Applications, 1973;

[23] D.J. Naylor, K. G. Stagg, O. C. Zienkiewicz, Numerical Analysis of Dams, 1975;

[24] J.T.Oden O.C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher, C.Taylor, Finite Element Methods in Flow Problems, 1974;

[25] H.C.Martin, Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, Mc Graw-Hill, 1965;

[26] J.S. 普齐米尼斯基著，王德荣等译，矩阵结构分析理论，国防工业出版社，1974;

[27] 北方交通大学铁道建筑系，结构矩阵分析，中国建筑工业出版社，1974;

[28] W.M.Jenkins, Matrix and Digital Computer Methods in Structural Analysis, 1969;

[29] A.Ghali, A.M.Neville, Structural Analysis, 1972;

[30] 钱令希，超静定结构学，上海科学技术出版社，1958；
[31] M.J.Turner, R.W.Clough, H.C.Martin, L.J.Topp,Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures, J.Aero.Sci., V.23, 805-23, 1956;
[32] R.W.Clough, The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc.2nd A.S.C.E. Conf. on Electronic Computation, 1960;
[33] J.H.Argyris, Energy Theorems and Structural Analysis, Aircraft Eng., V.26, 347-356, 383-387, 394, 1954; V.27, 42～58, 80～94, 125～134, 145～158, 1955;
[34] 冯康，基于变分原理的差分格式，应用数学与计算数学，2卷4期，1965；
[35] O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung, Buttress Dams on Complex Rock Foundations, Water Power, V.16, 193, 1964;
[36] Tocher, J.L. and B.J. Hartz, Higher-Order Finite Element for Plane Stress, Proc.ASCE, EM 4, 1967;
[37] R.F.Hooley, P.D.Hibbert, Bounding Plane Stress Solutions by Finite Elements, Proc.ASCE, ST 1, 1966;
[38] E.L.Wilson, Structural Analysis of Axisymmetric Solids, J. AIAA, V. 3, 2269～74, 1965;
[39] R.W.Clough, Y.Rashid, Finite Element Analysis of Axisymmetric Solids, Proc. ASCE, V.91, EM1, P.71, 1965;
[40] R.H.Gallagher, J.Padlog, P.P.Biglaard, Stress Analysis of Heated Complex Shapes, J.Am.Rocket Soc., V.32, 700-707, 1962;
[41] R.J.Melosh, Structural Analysis of Solids, Proc.ASCE, ST4, 205-23, 1963;
[42] J.H.Argyris, Matrix Analysis of Three-dimensional Elastic Media, Small and Large Displacements, J.AIAA, V.3, 45-51, 1965;
[43] Inst.Civ.Eng., Proc.Symp.on Arch Dams, 1968;
[44] T.H.H. Pian, Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distribution, J.AIAA; V.2, 1333-1335, 1964;
[45] T.H.H.Pian, P.Tong, Basis of Finite Element Methods for Solid Continua, Int. J.Num.Meth.Eng., V.1, N.1, 1969;
[46] P.Tong, New Displacement Hybrid Finite Element Model for Solid Continua, Int. J.Num.Meth.Eng., V.2, 73-83, 1970;
[47] E.Reisner, On a Variational Theorem in Elasticity, J.Math.Phys., V.29, p. 90, 1950;
[48] K.Washizu, Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 1968;
[49] R.E.Groene, R.E.Jones, Generalized Variational Principles in the Finite Element Method, AIAA J., V.7, N.7, 1969;
[50] F.Kikuchi, Y.Ando, New Variational Functional for the Finite Element Method and Its Application to Plate and Shell Problems, Nuc. Eng. Design, V.21, 1972, 95-113;
[51] Mc Lay, R.W., A Special Variational Principle for the Finite Element Method, AIAA J., V.7, N.3, 1969, 533-534;
[52] R.Courant, Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibration, Bull.Am.Math.Soc., V.49, 1-43, 1943;
[53] B.M.Irons,Engineering Application of Numerical Integration in Stiffness Method, J.AIAA, V.4, 2035-7, 1966.
[54] B.M.Irons, O.C.Zienkiewicz, The Isoparametric Finite Element System—a New Concept in Finite Element Analysis, Proc.Conf.Recent Advances in Stress Analysis, Royal Aero.Soc., 1968;

[55] B.M.Irons, Quadrature Rules for Brick Based Finite Elements, Int.J.Num.Meth. Eng., V.3, 1971;

[56] J.G.Ergatoudis, B.M.Irons, O.C.Zienkiewicz, Curved, Issoparametric, Quadrilateral Elements for Finite Element Analysis, Int.J.Solids Struct., V.4, 31-42, 1968;

[57] B.Langefors, Analysis of Elastic Structures by Matrix Transformation, with Special Regard to Semi-monocogue Structures, J.Aero.Sci., V.19, N.7, 1952;

[58] P.H.Denke, A Matrix Method of Structural Analysis, Proc.2nd U.S.Natl.Congr. Appl.Meh., ASME, 445~457, 1954;

[59] J.H.Argyris, I.Fried, D.W.Sharpf, The TET20 and the TEA8 Elements for the Matrix Displacement Method, The Aeron.J.Royal Aeron.Soc., p.618, 1968;

[60] E.Hinton, J.S.Campbell, Local and Global Smoothing of Discontinuous Finite Element Functions Using a Least Squares Method, Int.J.Num.Meth.Eng., V.8, 461~480, 1974;

[61] E.Hinton, F.C.Scott, R.E.Rickotts, Local Least Squares Stress Smoothing for Parabolic Isoparametric Elements, Int.J.Num.Meth.Eng., V.9, 235~256, 1975;

[62] G.Lefebvre, J.M.Duncan, E.L.Wilson, Three Dimensional Finite Element Analysis of Dams, Proc.ASCE, SM7, 495~507, 1973;

[63] J.H.Argyris, Triangular Elements With Linearly Varying Strain for the Matrix Displacement Method, J.Royal Aeron.Soc., V.69, Oct.1965;

[64] O.E.Hansteen, Analysis of Stress Distribution in Shear Walls by the Finite Element Displacement Method, Internationaler Kongress über Anwendunger der Mathematik in den Ingenieurwissenschaften, 1967;

[65] J.H.Argyris, Continua and Discontinua, Proc.Conf. Matrix Methods in Struct. Mech., 1965;

[66] O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung, The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc.Int.Civ.Eng., V.28, 471-88, 1964;

[67] R.T.Severn,P.R.Taylor, The Finite Element Method for Flexure of Slabs Where Stress Distribution Are Assumed, Proc.Inst. Civil Eng., V.34, P.153-70, 1966;

[68] L.R.Herrmann, Finite Element Bending Analysis of Plates, Proc. ASCE, 93, EM5, 1967;

[69] B.F.de Veubeke, An Equilibrium Model for Plate Bending, Int.J. Solids Struct., V.4, 447-68, 1968;

[70] R.D.Cook, Two Hybrid Elements for the Analysis of Thick, Thin, and Sandwich Plates, Int.J.Num.Meth.Eng., V.5, N.2, 277~288, 1972;

[71] J.Bron, G.Dhatt, Mixed Quadrilateral Elements for Bending, J.AIAA, V.10, N.10, 1359~1361; 1972;

[72] J.Abel, C.Desai, Comparison of Finite Elements for Plate Bending, Proc.ASCE, V.98, ST9, 1972;

[73] A.Q.Razzaque, Program for Triangular Elements with Derivative Smoothing, Int. J.Num.Meth.Eng., V.6, N.3, 1973;

[74] W.Visser, A Refined Mixed-Type Plate Bending Element, J.AIAA, V.7, N.9, 1969;

[75] R.D.Cook, Some Elements for Analysis of Plate Bending, Proc.ASCE,EM6, 1972;

[76] E.Reissner, The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, J.Appl.Mech.V.12, p59~77, 1945;

[77] I.Fried,Shear in C^0 and C^1 Plate Bending Elements, Int.J.Solids Struct., V.9,

N.4, 449～460, 1973;
[78] S.F.Pawsey, R.W.Clough, Improved Numerical Integration of Thick Shell Finite Elements, Int.J.Num.Meth.Eng., V.3, N.4, 1971;
[79] S.Ahmad,B.M.Irons,O.C.Zienkiewicz, Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Elements, Int.J.Num.Meth.Eng., V.2, 419～51, 1970;
[80] O.C.Zienkiewicz, J.Too, R.L.Taylor, Reduced Integration Technique in General Analysis of Plates and Shells, Int.J.Num.Meth.Eng., V.3, 1971;
[81] J.H.Argyris, Matrix Displacement Analysis of Anisotropic Shells by Triangular Elements, J.Roy.Aero.Soc., V.69, 801～5, 1965, Nov.;
[82] W.E.Heister, J.A.Stricklin, Rigid Body Displacements of Curved Elements in the Analysis of Shells by the Matrix Displacement Method, AIAAJ, V.5, 1525-7,1967;
[83] J.Connor,C.Brebbia,Stiffness Matrix for Shallow Rectangular Shell Elements,Proc. ASCE, V.93, EM, 1967;
[84] G.R.Cowper, G.M.Lindberg, M.D.Olson, A Shallow Shell Finite Element of Triangular Shape, Int.J.Solids Struct., V.6, 1970;
[85] Y.K.Cheung, O.C.Zienkiewicz,Plates and Tanks on Elastic Foundations, an Application of Finite Element Method, Int.J.Solids Structures, 1965, V.1, 451-61;
[86] O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung, Finite Elements in the Solution of Field Problems, The Engineer, 507～10, Sept., 1965;
[87] O.C.Zienkiewicz, P.Mayer, Y.K.Cheung, Solution of Anisotropic Seepage Problems by Finite Elements, Proc.ASCE, V.92, EM1, 1966;
[88] R.L.Taylor, C.B.Brown, Darcy Flow Solutions With a Free Surface,Proc.ASCE, V.93, HY2, 1967;
[89] J.F.Ely, O.C.Zienkiewicz, Torsion of Compound Bars——a Relaxation Solution, Int. J.Mech.Sci., V.1, 356～65, 1960;
[90] C.S.Desai, Seepage Analysis of Earth Banks under Drawdown, Proc.ASCE,SM11, 1972;
[91] O.C.Zienkiewicz, C.J.Parekh, Transient Field Problems——Two and Three Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements, Int.J.Num. Meth.Eng., V.2, 61～71, 1970;
[92] E.L.Wilson, R.E.Nickell, Application of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, Nucl.Eng.and Design, V.4, 1-11, 1966;
[93] H.S.Carslaw, J.C.Jaeger, Conduction of Heat in Solids, Oxford, 1959;
[94] 朱伯芳，王同生，丁宝瑛，郭之章，水工混凝土结构的温度应力与温度控制，水利电力出版社，1976;
[95] O.C.Zienkiewicz, G.C.Nayak, A General Approach to Problems of Plasticity and Large Deformation Using Isoparametric Elements Proc.3rd Conf.Matrix Meth. Struct.Mech., 881-928, 1973;
[96] J.T.Oden, Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problems, Proc. ASCE, V.93, ST3, 235-55, 1967;
[97] Y.Yamada, N.Yoshimura,T.Sakurai, Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method, Int.J.Mech.Sci., V.10, 343-54, 1968;
[98] O.C.Zienkiewicz, S.Valliappan, I.P.King, Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems, Initial Stress, Finite Element Approach, Int.J.Num.Meth.Eng., V.1, 75-100, 1969;
[99] R.W.Volker, Nonlinear Flow in Porous Media by Finite Elements, proc.ASCE,

V.95, HY, 2093~114, 1969;
[100] N.Ahmed, D.K.Suneda, Non-linear Flow in Porous Media, Proc.ASCE, V.95, HY6, 1847~59, 1969;
[101] J.J.Connor, C.A.Brebbia, Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths, 1976;
[102] R.E.Goodman,R.L.Taylor,T.Brekke,A Model for the Mechanics of Jointed Rock, Proc.ASCE, V.94, SM3, 1968;
[103] O.C.Zienkiewicz, B.Best, C.Dullage, K.G.Stagg, Analysis of Non-linear Problems in Rock Mechanics with Particular Reference to Jointed Rock Systems, Proc. 2nd Int.Cong.Rock Mech., 1970;
[104] K.G.Stagg, O.C.Zienkiewicz, Rock Mechanics in Engineering Practice, 1969;
[105] O.C.Zienkiewicz, S.Valliappian, I. P.King,Stress Analysis of Rock as a "No-Tension" Material, Geotechnique, V.18, 56~66, 1968;
[106] R.L.Kondner,Hyperbolic Stress-Strain Response Cohesive Soils, Proc.ASCE, V.89, SM1, 1963;
[107] J.M.Duncan, C.Y.Chang, Nonlinear Analysis of Stress and Strain in Soils, Proc. ASCE, V.96, SM5, 1970;
[108] F.H.Kulhavy,J.M.Duncan, Stresses and Movements in Oroville Dam, Proc.ASCE, SM7, 1972;
[109] J.M.Duncan, G.W.Clough, Finite Element Analysis of Port Allen Lock, Proc. ASCE, SM8, 1971;
[110] G.W.Clough, J.M.Duncan, Finite Element Analysis of Retaining Wall Behavior, Proc.ASCE, SM, 1971;
[111] O.C.Zienkiewicz, M.Watson, I.P.King, A Numerical Method of Visco-Elastic Stress Analysis, Int.J.Mech.Scie., 1968;
[112] E.H.Lee, Stress Analysis in Visco-Elastic Bodies,Quart.Appl.Math., V.13, July, 1955;
[113] T.Alfrey, Non-homogeneous Stresses in Visco-Elastic Bodies, Quart.Appl.Math., 1944;
[114] 朱伯芳，在混合边界条件下非均质粘弹性体的应力与位移，力学学报，1964年第2期;
[115] 朱伯芳，蠕变引起的拱坝应力重新分布，力学学报，1962年第1期;
[116] 朱伯芳，粘弹性基础梁（非文克尔假定），土木工程学报，1964，N.4;
[117] O.C.Zienkiewicz, M.Watson, Some Creep Effects in Stress Analysis with Particular Reference to Concrete Pressure Vessels, Nuc.Eng.and Design, V.4, 1966;
[118] I.Finnie, W.R.Heller, Creep of Engineering Materials, Mc Graw-Hill, 1959;
[119] E.L.Wilson and R.W.Clough, Dynamic Response by a Step-by-Step Analysis, Symp.Use of Compt.in Civ.Eng., 1962;
[120] R.W.Clough, A.K.Chopra, Earthquake Stress Analysis in Earth Dams, Proc. ASCE, V.92, EM2, 1966;
[121] H.Rutishauser, Simultaneous Iteration Method for Symmetric Matrices, Numer. Math., V.16, 205-223, 1970;
[122] A.R.Gourlay, G.A. Watson, Computational Methods for Matrix Eigenproblems, John Wiley &Sons, 1973;
[123] 沈崇刚，陈厚群，杨真荣等，新丰江水库地震及其对大坝的影响，中国科学，1974年第2期;
[124] R.J.Guyan, Reduction of Stiffness and Mass Matrices, AIAAJ., V.3, 380, 1965;
[125] R.G.Anderson, B.M. Irons, O.C.Zienkiewicz, Vibration and Stability of Plates Using Finite Elements, Int.J.Solids Struct., V.4, 1031-55, 1968;

[126] O.Halldorsson, C.K.Wang, Stability Analysis of Frameworks by Matrix Methods, Proc.ASCE, V.94 ST7, 1968;
[127] K.K.Kapur,B.J.Hartz,Stabibity of Thin Plates Using the Finite Element Method, Proc.ASCE, EM2, 1966;
[128] R.H.Gallagher, J.Padlog, Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis, J.AIAA, V.1, N.6, 1437-39, 1963;
[129] C.Brebbia, J.Connor, Geometrically Non-Linear Finite Element Analysis, Proc. ASCE, V.95, EM2, 463-83, 1969;
[130] R.Barsoum, R.H.Gallagher, Finite Element Analysis of Torsional and Lateral Stability Problems, Int.J.Num.Meth.Eng., V.2, N.3, 335-352, 1972;
[131] G.R.Irwin, Fracture Mechanics, in "Structural Mechanics", ed.by J.N.Goodier and N.J.Hoff, 1960;
[132] H.F.Bueckner, The Propagation of Cracks and the Energy of Elastic Deformation, Trans.ASME, V.80, N.6, 1225-30, 1958;
[133] Н.Н.Мусхелишвили著，数学弹性力学的几个基本问题，赵惠元译，科学出版社，1958;
[134] S.K.Chan, I.S.Tuba, W.K.Wilson, On the Finite Element Method in Linear Fracture Mechanics, Eng.Fract.Mech., V.2, 1-17, 1970;
[135] J.R.Rice, A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks, J.Appl.Mech., V.35, 1968, 379-386;
[136] D.J.Hayes,A Practical Application of Bueckner's Formulation for Determing Stress Intensity Factors for Cracked Bodies, Int.J.Fract.Mech., V.8, N.2, 1972;
[137] 应隆安，计算应力强度因子的无限相似单元法，中国科学，1977年第6期;
[138] P.Tong, T.H.H.Pian, S.J.Lasry, A Hybrid-Element Approach to Crack Problems in Plane Elasticity, Int.J.Num.Meth.Eng., V.7, 297-308, 1973;
[139] T.H.H.Pian, P.Tong, C.H.Luk, Elastic Crack Analysis by a Finite Element Hybrid Method, 3rd.Conf.Matrix Meth.Struct.Mech., 1971;
[140] R.Sharpe, The Optimum Design of Arch Dams, Proc.Inst.Civ.Eng., 1969;
[141] R.H.Gallagher, O.C.Zienkiewicz, Optimum Structural Design, John Wiley, 1973;
[142] F.Moses, Optimum Structural Design Using Linear Programming,Proc.ASCE,ST6, 1964;
[143] K.Reinschmidt, C.A.Cornell, J.F.Brotchie, Iterative Design and Structural Optimization, Proc.ASCE, V.92, ST6; 1966;
[144] D.M.Himmelblau, Applied Nonlinear Programming, 1972;
[145] M.Aoki, Introduction to Optimization Techniques, 1971;
[146] M.J.D.Powell, An Efficient Method of Finding the Minimum of a Function of Several Variables Without Calculating Derivatives, Computer Jour., V.7, 155, 1964;
[147] R.Fletcher, M.J.D.Powell, A Rapidly Convergent Descent Method for Minimization, Computer.J., V.6, 163, 1963;
[148] G.W.Stewart, A Modification of Davidon's Minimization Method to Accept Difference Approximations to Derivatives, J.Assoc.Computer Machinery, V.14, 72, 1967;
[149] K.I.Majid, Optimum Design of Structures, 1974;
[150] F.L.Bauer, Linear Algebra, in "Handbook for Automatic Computation, V.Ⅱ, 1971;
[151] 北京大学，吉林大学，南京大学，计算方法，人民教育出版社，1961;
[152] 清华大学，北京大学，计算方法，上册，科学出版社，1974;

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。

[153] L.A.Pipes, Matrix Methods for Engineering, 1963;
[154] 张远达，熊全淹，线性代数，人民教育出版社，1964；
[155] 中国科学院沈阳计算技术研究所等，电子计算机常用算法，科学出版社，1976；
[156] R.柯朗，D.希伯尔特著，钱敏，郭敦仁译，数学物理方法，卷Ⅰ，科学出版社，1958；
[157] 斯米尔诺夫著，孙念增等译，高等数学教程，一至五卷，高等教育出版社，1956；
[158] S.Timoshenko, J.N.Goodier, Theory of Elasticity, 1951；
[159] S.Timoshenko, S.Woinowsky-Krieger, Theory of Plates and Shells, 1959；
[160] 诺沃日洛夫著，白鹏飞等译，薄壳理论，科学出版社，1959；
[161] 科尔库诺夫著，张维岳译，弹性壳体计算的基本理论，高教出版社，1966；
[162] 列赫尼茨基著，胡海昌译，各向异性板，科学出版社，1955；
[163] 卡恰诺夫著，周承倜等译，塑性理论基础，高教出版社，1959；
[164] R.F.Scott, Principles of Soil Mechanics 1963；
[165] 陶振宇，水工建设中的岩石力学问题，水利电力出版社，1976；
[166] 艾利斯哥尔兹著，李世晋译，变分法，商务印书馆，1956；
[167] Н.Е.Кочин, И.А.Кибель, Н.В.Розе, Теоретическая Гидромеханика, 1963；
[168] N.M.Newmark, E.Rosenblueth, Fundamentals of Earthquake Engineering, 1971；
[169] 雷柯夫著，裘烈钧等译，热传导理论，高教出版社，1955；
[170] S.Timoshenko, J.Gere, Theory of Elastic Stability, 1961；
[171] S.A.Lill, A Modified Davidon Method for Finding the Minimum of a Function, Using Difference Aproximation for Derivatives, Comput.J., V.13, 111-113, 1970；
[172] B.A.Finlayson, The Method of Weighted Residuals and Variational Principles, Academic Press, 1972；
[173] 许协庆，计算有自由面水力学问题的有限单元法，水利水运科技情报，1978，N.2。
[174] 大连工学院数理力学系，关于连续体结构数值计算的微分算子离散化方法，大连工学院学报，1973年，1期。
[175] 华东水利学院工程力学教研组，重力坝的抗震计算，华东水利学院学报，1978年，第2期。
[176] 朱伯芳，宋敬廷，计算拱坝应力的一维有限单元法，水利水运科学研究，1979年。
[177] 北京大学数学系，关于结构动力反应的几个计算方法，1974年。
[178] C.C.Fu, A Method for the Numerical Integration of the Equations of Motion Arising from a Finite Element Analysis, J.Appl.Mech., V.37, N.3, P.599-605, 1970.
[179] 朱伯芳，宋敬廷，复杂基础上混凝土坝的非线性有限单元分析，大坝研究论文集，1979。