

地下水流数值模拟中平面 三角网格自动剖分的实现

胡立堂¹, 陈崇希², 王旭升³

(1. 清华大学水利工程系, 北京 100084; 2. 中国地质大学环境地质研究所, 武汉 430074;
3. 中国地质大学水资源与环境工程学院, 北京 100083)

摘 要: 针对地下水流数值模拟中涉及平面三角网格自动生成问题, 提出了一种适合地下水流三角剖分的特定要求的算法, 并利用当前流行的面向对象设计语言 Visual C++ 实现了算法, 最后结合实例, 做了剖分工作, 结果能很好满足地下水流数值模拟的要求, 为地下水流数值模拟提供了方便快捷的服务。

关键词: 地下水流数值模拟; 三角网格; 自动生成; Visual C++

中图分类号: X82 **文献标识码:** A **文章编号:** 1671-1556(2005)02-0015-04

Realization of Automatic Triangle Mesh Generation in Plane Domain of Groundwater Flow Numerical Simulation

HU Li-tang¹, CHEN Chong-xi², WANG Xu-sheng³

(1. Department of Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. Institute of Enviro-Geology, China University of Geosciences, Wuhan 430074, China; 3. Institute of Water Resources and Environment Engineering, China University of Geosciences, Beijing 100083, China)

Abstract: Considering the problems of automatic triangle mesh generation in arbitrary plane domain of water flow numerical simulation, this article supplied one arithmetic suitable for water flow numerical simulation, and realized it with Visual C++. Finally one sample was given and the conclusions satisfied the requirement of water flow numerical simulation, so the design could supply convenient and quick services for water flow numerical simulation.

Key words: groundwater flow numerical simulation; triangulation element mesh; automatic generation; Visual C++

0 引 言

近 20 年来, 数值法已成为地下水资源和地质环境评价研究的主要方法之一, 而地下水流数值模拟三角剖分网格作为数值模拟的前处理工作内容之一, 与其他专业的剖分网格相比, 有其独特的特点, 主要如下:

(1) 研究范围大, 一般涉及数千平方公里, 因此

剖分后的总单元和结点数较多;

(2) 某些已知点处(如井孔、泉等)要设置结点;

(3) 某些已知线(如断层、河流、非均质分区界线等)要设置为单元的边线;

(4) 单元不能为钝角三角形。

同时对于单元和结点依水文地质条件和工程的要求, 合理地疏密分布, 这样既能刻画地下水流动基本规律, 满足工程精度要求, 又使模拟运行速度不致太慢。这些要求由此增加了剖分时的难点。国际上

有名的水流模拟软件 FeFlow 虽然可以对约束条件的边界方便地进行平面三角自动剖分,但其没有考虑钝角三角形的自动修改和编辑问题。常有的剖分工具不能快速达到预期的结果,如何快速、合理的设计与实现地下水流数值模拟特色的三角剖分算法对节省数值模拟时间、提高效率具有十分重要的意义,同时对于其他领域的有限元剖分设计具有积极的指导意义。

1 国内外研究现状

对于二维平面三角网格自动生成,从 20 世纪 70 年代开始,国内外学者^[1~4]对此做了大量的工作,出现了大量的网格单元自适应生成算法(Automatic mesh generation),如波前推进法(AFM, automatic front method)、正规法、向量偏移法、有限四(八)叉树法等,相对来说, Delaunay 法因为方法简便,对于带约束条件的三角剖分,更显得灵活自由,同时容易编程实现,因此适合作为地下水流三角剖分的方法,然而目前的方法仍不能较好地考虑水流模型中消除钝角三角形的问题。

Delaunay 三角剖分的基本原理是:令 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ 为平面域(R^2)上 N 个离散点的集合,尽管有多种方法实现点集 P 的三角剖分,但是俄国数学家 Delaunay 在 1934 年证明:必定存在且仅存在一种三角剖分(一般称之为 Delaunay 三角剖分)算法,使得所有三角形的最小内角之和最大。一般地,当任意多边形的边界条件复杂时, Delaunay 三角剖分所生成的网格远不能满足有限元分析的要求,大

多数三角形都是细长型的,而有限元分析要求单元形状趋于理想状态,即等边三角形。为此,可采用一定算法在直线型边界线段及其图形区域内部进一步布置适当数量的新结点,逐步提高 Delaunay 三角剖分的网格质量,直至满足有限元分析的要求为止,其中 Waston 提出的 Delaunay 的三角剖分方法较适用^[3]。在新结点插入过程中,依然利用了 Delaunay 三角剖分的优化性质,当插入新结点的数量远比初始边界条件的定义结点数量多,网格质量得到了很大的改善,可以满足有限元分析的要求。本文设计的算法也基于 Delaunay 剖分理论,但在生成中要以结点尺度为网格控制基础,同时考虑到单元形状的问题。

2 设计的剖分算法

本设计实现的算法是带约束的任意多边形 Delaunay 三角剖分算法^[5~7]的改进算法,该算法基于结点尺度设计,提出了一种简单的平面区域结点尺度自动确定的方法,在三角单元形成过程中,特别地考虑了三角形形状的自动修正和编辑问题,其算法如下:

(1)输入平面区域信息,包括外边界(逆时针排序)、内边界(顺时针排序)、约束点等点的坐标,以及给定边的最小剖分段数,对外边界、新结点或者内部的线信息,根据点与点之间的距离大小与尺度比较决定尺度大小,最终让每一点的尺度小于与它相距距离的最小值。由此剖分的初始边界图如图 1(a)所示。

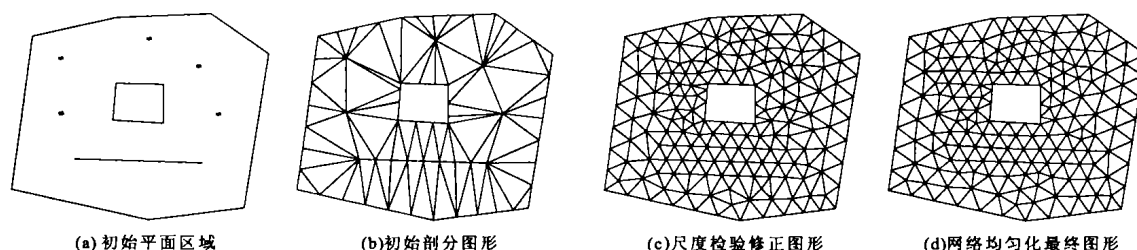


图 1 三角网络生成过程示意图

Fig. 1 Schematic figure for process of tri-mesh generation

(2)求外边界的范围,确定范围的外接圆的外切三角形^[7],然后对外边界区域的每一个点,按顺序插入外切三角形内,这样形成初始的网格剖分图,如图 1(b)所示。

(3)找寻所有网格中活动单元 R/r 最大的单元作为调节对象,按一定的方法^[5]找到新插入点的位置,其尺寸按单元面积插值确定,然后按照 Delau-

nay 性质进行判断周边三角形是否应该交换边工作,完成之后形成的网格图形如图 1(c)所示。

(4)进行网格均匀化工作,优化网格的形状,采用方法是当前流行的 Laplacian 均匀化法^[7],之后形成的网格如图 1(d)所示。

(5)网格编辑,包括钝角三角形自动检查与结点位置修正工作,使所有的三角形均为锐角三角形。

3 剖分中的几个问题和技术

3.1 单元形状的讨论

在进行地下水流三角剖分中,最理想的三角形是等边三角形,但实际网格自动剖分过程中因为区域内不同的约束条件,很难使三角形成为等边三角形,我们只能尽量使所剖分的三角形趋近等边三角形。对于一个三角形,肯定存在外接圆和内切圆,如图2所示,根据参考文献[5,6]研究分析可知,如果 R/r 非常大,则肯定这个三角形不理想。对于正三角形, $R/r=0.5$,对于等边直角三角形, $R/r \approx 0.41$,我们在程序中可找到 R/r 特别大,则此三角形肯定存在钝角,不符合水流三角网格的规定。我们需要对其进行调整与处理。如图3,在网格初始生成时,找到 R/r 最大的活动单元(可以操作的单元),可以新插入结点来改善此三角形的质量,据参考文献[5]研究,新插入的结点必定在单元外接圆与内切圆的两圆心 OO' 之间,这里可以根据点 A 、 B 的尺度及三角形的边长度来确定新生成点 P 的位置,使新三角形 BPA 形状接近理想三角形。

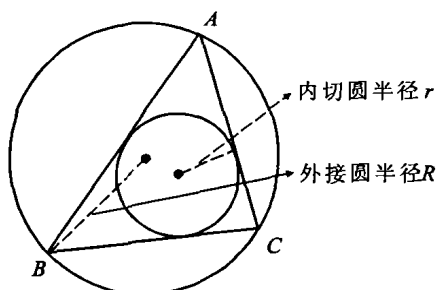


图2 三角形示意图

Fig.2 Schematic figure for one triangle

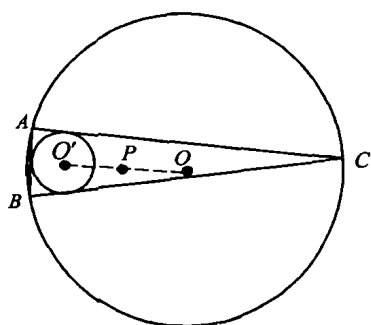


图3 R/r 比最大单元插入点示意图

Fig.3 Schematic figure for new node insertion in the element with max R/r ratio

3.2 结点尺度对剖分的影响

参考文献[5]产生了一种距离函数计算插入点的距离。笔者在网格自动剖分中,给定结点一个尺

度以决定空间的网格生成。结点的尺度将对网格的疏密产生直接影响,可以说,它对网格总的结点数与单元数息息相关。对于一条线段,假定给定线两端的结点 a 、 b 尺度分别给定为 F_a 和 F_b ,坐标分别为 (x_a, y_a) 、 (x_b, y_b) ,而线段的长度为 L_{ab} ,如图4所示,则结点的尺度会对边线有以下两种情况的影响:

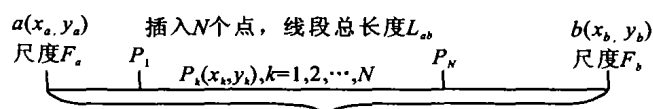


图4 边线生成新结点示意图

Fig.4 Schematic figure for new node generation sample at the boundary

(1) $(F_a + F_b)$ 大于 L_{ab} , 则两结点的尺度对线段无影响;

(2) $(F_a + F_b)$ 小于或等于 L_{ab} , 则按等差数列的方法计算新插入点。根据线段的大小我们可以计算出插入的点数 N 为: $N = (\text{int})(2 * L_{ab} / (F_a + F_b))$, 设 $P_k(k=1, 2, \dots, N)$ 为插入点, 坐标为 (x_k, y_k) , 我们按一种特殊的插点方法插入点序列。

设 $L_x = x_b - x_a$, $L_y = y_b - y_a$, 有 $L_{ab} = \sqrt{(L_x^2 + L_y^2)}$, 从 a 点开始算, 根据等差数列的性质可得出插入点序列 $P_k(x_k, y_k), k=1, 2, \dots, N$ 的坐标, 记 P_k 点的尺度为 $F_k(k=1, 2, \dots, N)$, 为方便计算, 将 a 点的尺度记为 F_0 (等于 F_a), 这里为了剖分的线段长度均一变化, 将引入一整型变量 M , 另一比例项 Δ , 引入一变量 k_a , 分析有:

$$k_a = 0$$

$$\text{For}(k=1; k < N; k++)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} k_a = k_a + [L / (N+1) - M * \Delta] \\ x_k = x_a + L_x * k_a / L_{ab} \\ y_k = y_a + L_y * k_a / L_{ab} \\ M = M - 1 \\ M = M - 2 \text{ 当 } M = 0 \text{ 且 } N+1 \text{ 为偶数时} \\ M = M + 1 \\ M = M + 2 \text{ 当 } M = 0 \text{ 且 } N+1 \text{ 为偶数时} \end{array} \right\} \begin{array}{l} F_a \leq F_b \\ F_a > F_b \end{array}$$

$$F_k = \frac{F_{k-1} + [L_{ab} / (N+1) - M * \Delta]}{2}, (F_0 = F_a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = (\text{int})(N+1)/2 \\ \Delta = [L_{ab} / (N+1) - F_a] / M \end{array} \right\} (F_a \leq F_b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} M = -(\text{int})(N+1)/2 \\ \Delta = [F_a - L_{ab} / (N+1)] / M \end{array} \right\} (F_a > F_b)$$

如 a 、 b 点坐标分别是 $(0, 0)$ 和 $(200, 0)$, 尺度分别为20、100, 则插入点数为 $N=3$, 计算得 $P_k(k=1, 2, 3)$ 的坐标如表1所示, 而剖分的四条线段长度

分别是 20、35、65、80, 长度的大小是渐变的, 设计是合理的。

表 1 边线新结点生成示例计算结果

Tabel 1 Calculated results for new node generation sample at the boundary

项目	a	P_1	P_2	P_3	B
坐标(x, y)	(0,0)	(20,0)	(55,0)	(120,0)	(200,0)
尺度	20	27.5	46.25	63.125	100

3.3 交换边操作

交换边指如图 5 所示的情况, 如果像图 5 所显示的两个三角形 $P_1P_2P_3$ 与 $P_2P_4P_3$ 的情况, 则存在角度 $\angle P_2P_4P_3$ 为钝角, 不符合地下水剖分的条件, 这样的三角形不符合构成 Delaunay 三角剖分的条件。因此, 我们要求进行将四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 内边 P_2P_3 改为 P_1P_4 , 由参考文献[4]研究可知, 设三角形 $P_2P_4P_3$ 的外接圆圆心为 O , 如有另一个与其相邻的三角形 $P_1P_2P_3$, 设 $P_1P_2P_3$ 的外接圆半径为 R , 而圆心 O 与 P_4 的距离为 d , 如下关系: $d < R$ 则需要交换边, 即连 P_1P_4 , 形成三角形 $P_1P_2P_4$ 与 $P_1P_4P_3$ 。

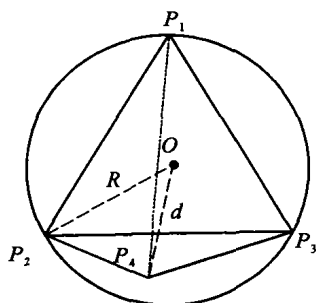


图 5 交换边示意图

Fig. 5 Schematic figure for swaping sides

3.4 给定平面区域结点的尺度如何自动确定

边界新结点形成有很多方法, 但是本设计的方法是基于结点的尺度, 由尺度决定边界的疏密, 由笔者应用的结果看, 此方法很简单, 而且可以控制边界形成的点数, 效果也不错, 其核心算法对外边界、新结点或者内部的线信息, 给一个最小剖分段数 NP , 根据点与点之间的距离大小与尺度比较决定尺度大小, 最终让每一点的尺度小于与它相距距离的最小值。对结点尺度自动形成时, 记边界处最短边长度, 即 L_{\min} , 先初始给每一结点尺度为最短边的长度, 即 L_{\min}/NP , 对每一点均找与它的最短距离 r_{\min} , 设待求结点为 P_0 , 设其尺度为 F_{p0} , 则当 $F_{p0} \leq r_{\min}$ 时此结点尺度合理; 如 $F_{p0} > r_{\min}$ 则此结点需要改变, $F_{p0} = F_{p0} * 0.75$, 直到 $F_{p0} \leq r_{\min}$ 。

4 算法的实现

根据以上提出的算法和技术, 笔者利用面向对象设计语言 Visual C++ 6.0 实现了三角网络的自动生成, 编程中利用了 VC 中的模板类 (CArray 类), 设计了几大主要的数据存储结构: 结点 (坐标、尺度、属性)、线段 (结点号、相邻单元号、属性)、单元 (结点号、外接圆半径、内切圆半径、属性), 将剖分类封装成 CMakeNet 类, 我们只要给定一最小分段数及剖分的初始结点信息, 利用 CMakeNet 中的函数即方便地完成剖分, 其主要成员变量和与设计算法对应的主要函数如下:

Class CMakeNet

```
{
    CObArray m_thePoints; // 结点类
    TriNet m_net; // 单元类
    CObArray m_Bound; // 剖分边界信息
    BOOL MakeAutoSize(int minSection); // 自动剖分尺度
    void DivideBound(void); // 初始剖分边界
    int FindUglyE(void); // 找活动单元, 当返回 -1 时剖分结束
    BOOL SwapSide(int E1, int E2); // 交换边操作
    BOOL AddNewNode(int E1); // 在单元 E1 中新增点
    void MeshSmooth(void); // 网格结点位置平滑
    void MeshAutoModify(void); // 单元形状自动修改
}
```

对于甘肃省黑河干流中游盆地地下水三维流模型, 区域共 8 000 km², 利用本程序生成的网格共 1 973 个结点, 3 755 个单元, 模型边界如图 6(a) 所示, 而剖分的结果如图 6(b) 所示。

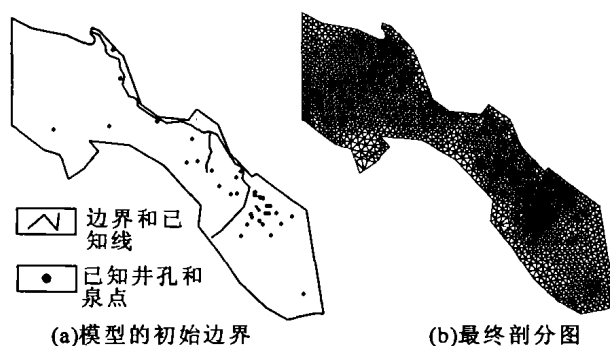


图 6 三角剖分实例图

Fig. 6 Example for triangle mesh generation

(下转第 22 页)

样本的识别与排序:取置信度 λ 为0.65,则根据(4)式判断各层分别属于 C_4 、 C_3 、 C_2 。底泥从上至下显示出,表层污染程度明显高于基底层;虽然浮泥层与淤泥层同属于 C_3 ,但是淤泥层的污染程度要略大于浮泥层,这是由于重金属累积的作用,使得淤泥层的污染程度稍高。这主要是由于浮泥层是最近时期的沉积,而淤泥层则是较长时间段内的累积结果。至于基底层,由于其深度较大,重金属和有机质很难沉积于此,这和重金属、有机质在沉积物垂直方向上的分布是一致的^[6]。

3 结 语

通过对运河杭州段沉积物中有机物和重金属的评价,发现运河杭州段沉积物中的主要污染物质是Zn和Cd,OP、Cu、Pb对污染的贡献大大小于Zn和

Cd,而As、Hg、Cr几乎没有对沉积物污染作出贡献;通过分层对沉积物评价发现,表层沉积物污染较严重,而基底层几乎没有被污染。

参考文献:

- [1] 吴虹,王方华,王健. 小清河底泥污染物释放对西水东调水质的影响研究[J]. 重庆环境科学,2003,25(2):59-62.
- [2] 吴开亚,李如忠,孙世群,等. 区域生态环境的未确知测度评价模型及应用[J]. 环境科学研究,2004,17(2):22-25.
- [3] 周根娣,吴静波. 运河杭州段底泥污染物含量分布调查[J]. 环境污染与控制,2001,23(1):36-40.
- [4] 程乾生. 属性识别理论模型及应用[J]. 北京大学学报,1997,33(1):12-20.
- [5] 刘洪,肖清芳. 苏南运河底泥污染现状评价[J]. 环境监测管理与技术,1995,7(5):18-22.
- [6] 朱广伟,陈英旭,周根娣,等. 运河(杭州段)沉积物中重金属分布特征及变化[J]. 中国环境科学,2001,21(1):65-69.

(上接第18页)

5 结 语

对于地下水流存在的特色网格剖分问题,笔者做了一个详细的讨论与分析,对于当前的Delaunay剖分算法,对平面区域结点尺度自动确定提出了改进,特别地考虑了三角形形状的自动修正和编辑问题,设计的剖分算法能较好地满足地下水流数值模拟的要求,然而该法在局部模型边界区域(如细尖部分等)会显得密,在网格修正中可删除部分三角形从而稀疏三角网格,最终得到满意的三角网格。

参考文献:

- [1] 孙文理,杨文硕. 自动剖分生成有限元网格的算法研究[J]. 哈

尔滨理工大学学报,2000,5(3):4-7.

- [2] 程世才,林国成,王永洁. 二维有限元网格全自动生成方法——AFM法[J]. 哈尔滨工业大学学报,1995,27(4):103-108.
- [3] 李水乡,袁明武. 平面有限元网格生成的自适应技术[J]. 计算机工程与设计,1998,28(4):51-55.
- [4] 丁永祥. 约束Delaunay三角剖分与有限元网格自动生成[J]. 华中理工大学学报,1995,23(6):39-43.
- [5] Frey, W. H. Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1987, 24, 2 183-2 200.
- [6] 闵卫东,唐泽圣. 二维Delaunay三角划分的平均形态比最大性质[J]. 计算机学报,1994,17(1):20-25.
- [7] 成基华,范玉青. 二维有限元网格全自动生成[J]. 北京航空航天大学学报,1995,21(3):51-55.