

上地幔变黏度小尺度对流的数值研究

叶正仁 王 建

中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029

摘 要 基于二维模型, 利用有限元方法, 研究上地幔 - 岩石圈系统的变黏度小尺度对流. 考虑该系统的黏度随温度以指数形式变化, 数值结果表明, 当黏度随温度变化较剧烈时, 由于低温高黏度, 系统的最上部物质不参与对流, 系统发育形成一个类似于岩石圈的静止盖层. 计算表面热流、地形起伏及重力异常与对流格局有较好的相关性, 高热流、上升地形对应于对流的上升区, 反之低热流、下降地形与对流的下降区对应.

关键词 小尺度对流 有限元方法 静止盖层 热流

文章编号 0001 - 5733(2003)03 - 0335 - 05 **中图分类号** P315 **收稿日期** 2001 - 03 - 29, 2002 - 11 - 26 收修定稿

A NUMERICAL RESEARCH ON THE SMALL-SCALE CONVECTION WITH VARIABLE VISCOSITY IN THE UPPER MANTLE

YE ZHENGREN WANG JIAN

Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China

Abstract Based on a two-dimensional model, small-scale convection in the upper mantle-lithosphere system with variable viscosity is researched by using finite element method. Variation of viscosity in exponential form with temperature is considered in this paper. The results show that if viscosity is strongly temperature-dependent, the upper part of the system does not take a share in the convection and forms into a stagnant lid similar to lithosphere because of low temperature and high viscosity. The calculated surface heat flow, the topography and the gravity anomalies are associated well with the convection pattern, namely, the regions with high heat flow and uplift correspond to the upwelling flow, and vice versa.

Key words Small-scale convection, Finite element method, Stagnant lid, Heat flow.

1 引 言

在地球内部除了与板块运动相联系的全球尺度的大规模对流外, 还很可能存在小尺度的上地幔对流^[1~3]. Haxby 与 Weissel^[4]运用小尺度对流理论成功解释了观测到的太平洋和印度洋重力和大地水准面区域异常分布. 近年来, 随着对大陆地区岩石圈结构和动力学的研究, 文献[5~8]探讨了大陆地区上地幔小尺度对流存在的可能性及其产生的地球物

理效应.

高压下矿物的蠕变试验表明^[9], 地幔、特别是岩石圈的黏度强烈地依赖于温度、压力. 关于变黏度问题的对流研究, 自 20 世纪 80 年代以来已有相当多的工作^[10~14]. 由于问题的复杂性, 几乎所有的工作都是利用数值方法, 包括有限元及有限差分. Christensen 等^[10~12]就二维及三维的变黏度对流进行了系统的研究, 数值模拟结果表明, 黏度结构对对流的形态、格局及内部热状态有非常重要的影响. Tackley^[13]及 Zhong 等^[14]则分别在直角坐标和球坐标

基金项目 国家自然科学基金(49974022)及中国科学院知识创新工程项目(KZCX2-112).

作者简介 叶正仁, 男, 1944 年生, 1967 年毕业于北京大学地球物理系, 1981 年硕士研究生毕业, 研究员, 博士生导师, 主要研究地幔动力学、重力学及深源地震成因等. E-mail: zrye@mail.igcas.ac.cn

下,探讨了黏度随温度变化的本构关系对全球地幔对流的影响. 本文就二维模型,利用有限元方法,研究上地幔变黏度小尺度对流. 与前人的工作比较,其主要的区别在于所研究的区域有比较大的长宽比(本文为5),对上地幔小尺度对流而言,本文研究的水平延伸要比深度变化大得多. 除了考虑对速度场的影响外,我们还探讨黏度随温度变化对地球内部温度分布、表面热流、地形变化及重力异常等地球物理场的影响.

2 物理模型和数值方法

所研究的区域为上地幔-岩石圈系统. 上边界为地表;下边界为上、下地幔分界面. 模型的长宽比为5. 假设 Boussinesq 近似成立,并且内部没有热源,则对应的连续性方程、动量方程和能量方程分别为

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (1a)$$

$$-\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T), \quad (1c)$$

式中 \mathbf{V} 为速度, P 为动力学压力, $\boldsymbol{\sigma}$ 是偏应力张量, T 为温度, $\rho = (\rho - \rho_0)$ 为密度异常, ρ_0 为参考密度, g 是重力加速度. k 是热扩散系数,假定为常数. 在(1b)式已考虑到系统具有非常大的 Prandtl 数 Pr_0 $\left[Pr = \frac{\rho_0 c_p k}{\eta} \right]$, 式中 η 为运动黏滞系数,从而动量方程中的惯性项可忽略. 偏应力-速率的关系为

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T), \quad (2)$$

在只考虑热浮力的情况下,密度异常与温度有如下关系^[9]

$$\rho = -\alpha_0 \rho_0 (T - T_1), \quad (3)$$

式中 α_0 是热膨胀系数, μ 为黏度, T_1 为参考面(本文取为上表面)温度.

尽管在不同的压力、温度及应变率条件下,地幔-岩石圈系统有着不同的变形机制,但其中对黏度具有最主要的影响的因素是温度^[10]. 本文假定黏度与温度为指数关系,并可以用 Frank-Kamenetskii 表达式近似表示为^[15]

$$\mu(T) = \mu_1 \exp[-\alpha(T - T_1)], \quad (4)$$

式中, μ_1 表示上边界的黏度, α 是一个常数,它的大小控制着系统内部的黏度差异.

为便于分析及数值计算,使用如下参数对原始方程组进行无量纲化(带上角“ \sim ”的量为无量纲量)

$$(x, y) = (x^*, y^*) \times d, \quad \mathbf{V} = \frac{k}{d} \times \mathbf{V}^*,$$

$$t = \frac{d^2}{k} \times t^*, \quad T = T^* \times T_1 + T_1,$$

$$\mu = \mu_0 \times \mu^*, \quad P = \frac{\mu_0 k}{d^2} \times P^*, \quad (5)$$

式中, d 为层厚, T 为上地幔底部与表面的温度差, μ_0 为上地幔底部黏度.

得到无量纲方程组为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= 0, \\ -\nabla P + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} &= -Ra \cdot \nabla T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla T &= \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mu (\nabla \mathbf{V} + \nabla \mathbf{V}^T),$$

$$\mu(T) = \frac{\mu_1}{\mu_0} \exp(-\alpha T) = \frac{\mu_1}{\mu_0} \exp(-T),$$

\mathbf{j} 为 y 方向(向上)的单位矢量. 系统的运动形态由两个无量纲数 Ra 数及 α 值表述,这与等黏度对流不同,在等黏度对流情况下,系统运动形态仅由 Ra 数确定.

$$Ra = \frac{g \alpha d^3}{\mu_0 k}, \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{\mu_0 k}{T_1 d}, \quad (8)$$

而在上下表面的黏度差异为 μ ,由式 $\mu = \exp(-T)$ 确定.

边界条件:为比较边界条件的影响,取两组不同的边界条件.

(1) 所有表面为应力自由面;上表面温度 $T_1 = 0$,下表面温度为 1700K(无量纲温度 $T_0 = 1$),侧面为绝热;

(2) 其余同(1),下表面以热流输入边条件代替等温条件,即在下表面有 20 mW/m^2 的热流输入^[21];

初始温度分布为传导温度解: $T(t=0) = 1 - y$.

我们利用有限元方法(FEPG有限元程序包)解方程组(6). 具体做法是:给定一个温度场,计算黏度分布并解动量方程得到速度场,而后利用此速度场代入能量方程解下一个时间步的温度场,依次循环. 当 $\bar{T}^{(n+1)} / \bar{T}^{(n)} = 10^{-4}$ 时可认为温度达到稳定. 这里 $\bar{T}^{(n+1)}$ 表示第 $(n+1)$ 步、 $\bar{T}^{(n)}$ 表示第 (n) 步的平均温度场. 对于本文所取的参数范围,数值计算表明温度场可达到稳态. 需要指出的是,在能量方程中由于对流传热项 $\mathbf{V} \cdot \nabla T$ 的存在,用通常的 Galerkin 有限元法将产生虚假的数值振荡,为此采用 Petrov-Galerkin 方法^[16],此法能很好地抑制解的振荡而得到平滑解. 计算中网格剖分数为 32×48 ;对速度及温度使用 9 节点四边形单元;而对压力 P ,

采用 4 节点, 双线性插值. 能量方程中的时间步长遵从 Courant 准则^[16].

3 结 果

数值计算所用的参数值列于表 1. 图 1 (见插页) 是下边界为等温边界条件时, 不同黏度差异 ($10^0 \sim 10^5$) 上地幔 - 岩石圈系统的流场图. 它们共同的特征是都有良好发育的纵横比近似为 1 的对流环 (图 1a (等黏情况) 即经典的 Rayleigh-Banard 对流), 但随着内部黏度差异的加大, 上部物质的流动速度逐渐变小, 直至当黏度差异等于大于 10^3 时, 上部物质基本上不参与对流, 系统产生一个静止的盖层. 一些作者^[2,15] 曾将其比拟为岩石圈. 相应地, 温度场随着黏度差异的变化示于图 2 (插页) 中. 该图给出对不同黏度差异 ($10^0 \sim 10^5$) 时的温度等值线. 显而易见, 当黏度差异比较小时 (图 2a ~ c), 上下边界的热边界层均发育良好, 而随着黏度差异的增大 (图 2d ~ f), 上边的热边界层厚度逐渐加大. 另一个值得注意的情况就是随着黏度差异的加大, “热柱” 与 “冷柱” 的宽度增大.

图 3 和图 4 (见插页) 分别为下边界为热流边界

条件的情况下, 对应不同黏度差异所得到的流场和温度分布. 与图 1 及图 2 对比, 可以发现在热流边界条件情况下, 随着内部黏度差异的增大, 也会产生如下的情况: 一个静止的盖层、热边界层的增厚、热柱的扩张. 当然, 细节有所不同. 这表明, 相对于边界条件而言, 系统内部的物性 (主要是黏度随温度的变化) 对对流形态和对流格局和温度分布起着控制作用.

地幔内部的对流将在地表产生一系列的地球物理效应, 其中主要的有地表热流、表面地形及重力异常. 图 5a 为依据内部温度分布计算的表面热流空间变化 (实线为下表面等温边界条件, 虚线为下表面常热流边界条件情况, 以黏度差异 10^4 为例), 高热流值的地方对应于对流运动的上升翼, 反之, 低热流值的地方对应于对流下降区, 表明在传热机制中, 相比之下, 对流热输运较之热传导起主要作用.

流体的对流运动将产生应力作用于表面而使其变形^[17,18]. 在一级近似下, 上表面形变 D 可表示为^[11,6,19]

$$D = - \frac{\gamma\gamma}{g}, \tag{9}$$

式中, $\gamma\gamma$ 为上表面的法向压力 (包括动力学压力及

表 1 数值计算所用的上地幔 - 岩石圈系统的参数值
Table 1 The parameters' values used in numelical calculation for Upper mantle-lithosphere system

参 数	物 理 含 义	本文计算所用的值
d	层厚	670 km
k	热扩散系数	$10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$
	热膨胀系数	2×10^{-5}
T	上下界面温度差	1700 K
q	进入下表面的热流	$20 \text{ mW}/\text{m}^2$
g	重力加速度	$9.8 \text{ m}/\text{s}^2$
Ra	Rayleigh 数	3×10^5
μ	上下边界的黏度差异	$0 \sim 10^5$

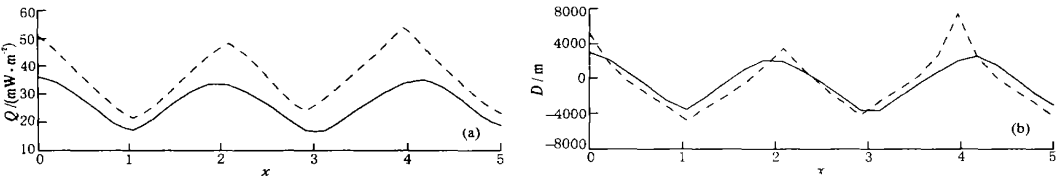


图 5 上表面热流 (a) 与地形起伏 (b) 的空间变化
实线为下边界等温边界条件, 虚线为常热流边界条件.

Fig. 5 The spatial variance of surface heat flow (a) the hypsography (b) in the upper surface

黏滞正应力), 为地壳平均密度. 图 5b 给出计算的上表面形变随无量纲距离的变化 (黏度差异为 10^4). 由图可见, 表面地形的起伏与对流的上升和下降运动同样有很好的相关 (对照图 1、图 3).

重力异常有 3 个来源: 内部密度变化、上表面及下表面形变. 在波数域中, 重力异常可表示为^[20]

$$\bar{g} = 2 \bar{G} \exp[-k(Z_{\text{obs}} - Z_{\text{sou}})], \quad (10)$$

式中, \bar{g} 是波数为 k 的重力异常谱, G 是万有引力常数, Z_{obs} 及 Z_{sou} 分别为观测及异常源的高度, \bar{g} 则是密度异常的傅氏谱. 对于上下表面形变, 其对应的密度异常分别为 D_{top} 及 D_{bot} , 其中, D_{top} 是上表面的垂向位移, D_{top} 是密度跳跃; D_{bot} 及 D_{bot} 则对应于下表面. 对于内部密度异常, 它是由温度异常引起的, 故可用 (3) 式表示. 利用 FFT 求得内部密度异常, 上下表面形变的傅氏谱, 根据 (10) 式计算对应的重力异常谱, 再利用逆变换得到空间域重力异常, 示于图 6 中. 由图可见, 内部密度异常与边界形变引起的重力效应有相反的符号. 在对流运动的上

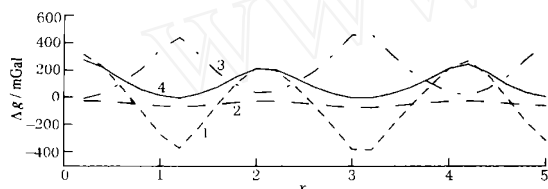


图 6 表面重力异常

- 1 由上表面形变的重力异常; 2 由下表面形变引起的重力异常; 3 由内部密度异常引起的重力异常;
4 总的重力异常; 黏度差异是 10^4 .

Fig. 6 Gravity perturbations at the surface

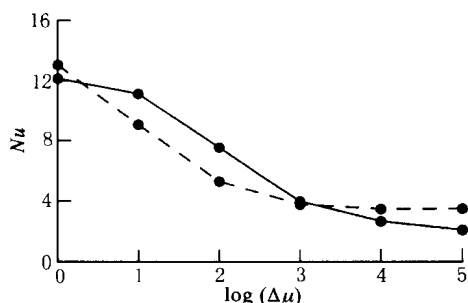


图 7 Nu 数随黏度差异的变化

实线为下边界等温边界条件, 虚线为常热流边界条件.

Fig. 7 The variance of the value of Nu with the viscosity contrasts

升区域, 边界形变引起的重力效应为正异常, 而内部密度异常引起的重力效应为负异常, 在运动的下降区情况正好相反. 因而总的重力异常较为平滑.

Nu 数是衡量热输运活跃程度的一个重要物理量, 其定义为通过表面的平均热流与仅有传导传热时的热流之比. 图 7 给出 Nu 数随着黏度差异 μ 的变化情况, 由图可见, 无论是对等温边界条件 (实线), 还是热流边界条件 (虚线), 随着黏度差异的增大, Nu 数减少. 这是由于当黏度随温度变化比较剧烈时, 上部物质黏度增加很快, 不再参与对流导致热输运效率降低.

4 结论与讨论

4.1 黏度随温度的变化无论对对流形态、流场, 还是对内部温度场的分布均有着重要影响, 相比之下, 边界条件的影响相对较小.

4.2 黏度随温度变化剧烈时, 即上下表面黏度差异大于 10^3 时, 最上部物质不参与对流, 系统发育一个类似于岩石圈的静止的盖层.

4.3 表面热流和上表面地形的起伏与对流格局有着较好的相关性: 高热流、上升地形、高重力异常对应于对流的上升区; 反之, 低热流、下降地形、低重力异常与对流的下降区对应.

地幔对流的多尺度性近年来受到很大关注^[21]. 最近, King 与 Ritsema^[22] 利用上地幔小尺度对流成功地解释了非洲大陆火山的分布与形成机制. 他们的工作表明, 在南部非洲的克拉通及热点火山区域, 可能存在着小尺度上地幔对流. 数值结果与地震层析资料有很好的对应, 在中国大陆是否有类似的情况, 值得进一步研究.

本文没有考虑压力变化对黏度的影响, 仅把黏度作为温度的函数. 其主要原因之一是简化计算, 其二是相对于温度而言, 压力对黏度影响较小. 无疑, 全面考虑温度与压力二者对黏度影响, 进而对对流形态、流场和热状态的变化做进一步工作是值得的. 另一方面, 岩石圈特别是大陆岩石圈内部热源的影响也是个不可忽视的因素.

参考文献

- [1] Schmeling H, Margant G. Mantle flow and evolution of the lithosphere. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1993, **79**: 241 ~ 267
- [2] Schmeling H, Margant G. The influence of second-scale convection on the thickness of continental lithosphere and crust. *Tectonophysics*, 1991, **189**: 281 ~ 306
- [3] Richter F H, Person B. On the interaction of two scales of convection in the mantle. *J. Geophys. Res.*, 1975, **80**: 2529 ~ 2541
- [4] Haxby W F, Weissel J K. Evidence for small-scale mantle convection

- from SEASET altimeter data. *J. Geophys. Res.*, 1978, **91**: 3507 ~ 3520
- [5] Schott B, Yuen D A, Schmeling H. The diversity of tectonics from fluid-dynamical modeling of the lithosphere-mantle system. *Tectonophysics*, 2000, **322**: 35 ~ 51
- [6] Margant G, Schmeling H. Tomography and Geoid undulations caused by small-scale convection Beneath continental lithosphere of variable elastic thickness. *Geophysical Jour. Inter.*, 1989, **97**: 511 ~ 527
- [7] Cloetingh S, Burov E B. Thermomechanical Structure of European continental lithosphere for various rheological profiles and EET estimates. *Geophys. J. Int.*, 1996, **124**: 695 ~ 723
- [8] 傅容珊, 黄建华, 徐耀民等. 青藏高原-天山地区岩石层构造运动的地幔动力学机制. 地球物理学报, 1998, **41**: 658 ~ 668
FU Rongshan, HUANG Jianhua, XU Yaomin, et al. Study of the mantle dynamics of the lithosphere movements in the region from Tibet Qingzang Plateau to Tianshan Mountain. *Chinese J. Geophys. (Acta Geophysica Sinica)*, 1998, **41**: 658 ~ 668
- [9] Karato S, Wu P. Rheology of the upper mantle: a synthesis. *Science*, 1993, **260**: 771 ~ 778
- [10] Christensen U. Convection with pressure- and temperature-dependent non-Newtonian rheology. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1984, **77**: 342 ~ 384
- [11] Christensen U. Heat transfer by variable viscosity convection and implications for the Earth's thermal evolution. *Phys. Earth Planet. Inter.*, 1984, **35**: 264 ~ 282
- [12] Christensen U, Hager H. 3-D convection with variable viscosity. *Geophys. J. Int.*, 1991, **104**: 213 ~ 226
- [13] Tackley P J. Effect of strongly temperature-dependant viscosity on time-dependent, 3-dimensional model of mantle convection. *J. Geophys. Res.*, 2000, **105**: 11063 ~ 11082
- [14] Zhong S, Zuber M T. Role of temperature-dependant viscosity and surface plates in spherical shell models of mantle convection. *J. Geophys. Res.*, 2000, **105**: 11063 ~ 11082
- [15] Moresi L, Solomatov V. Mantle convection with a brittle lithosphere: thoughts on the global tectonic styles of the Earth and Venus. *Geophys. J. Int.*, 1998, **133**: 669 ~ 682
- [16] Huang H C, Vismari A S. Finite Element Analysis for Heat Transfer. *Springer-Verlag*, 1994
- [17] Mekenzie D. Surface deformation, gravity anomalies and convection. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1977, **48**: 211 ~ 238
- [18] Rarsons B, Daly S. The relationship between surface tomography, gravity anomalies, and temperature structure of convection. *J. Geophys. Res.*, 1983, **88**: 1129 ~ 1144
- [19] Keefner W S, Hager B H. Geoid anomalies and dynamic tomography from convection in cylindrical geometry: application to mantle plumes on Earth and Venus. *Geophys. J. Int.*, 1992, **108**: 198 ~ 214
- [20] Davies G F. Mantle convection under simulated plates: effects of heating modes and ridge and trench migration, and implication for the core-mantle boundary, bathymetry, the geoid and Benioff zones. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1986, **84**: 153 ~ 183
- [21] Dubuffet F, Rabinowicz M, Monnezeau M. Multiple scale in mantle convection. *Earth Planet. Sci. Lett.*, 2000, **178**: 351 ~ 366
- [22] King S D, Ritsema J. African hot spot volcanism: small-scale convection in the upper mantle beneath Cratons. *Science*, 2000, **290**: 1137 ~ 1140

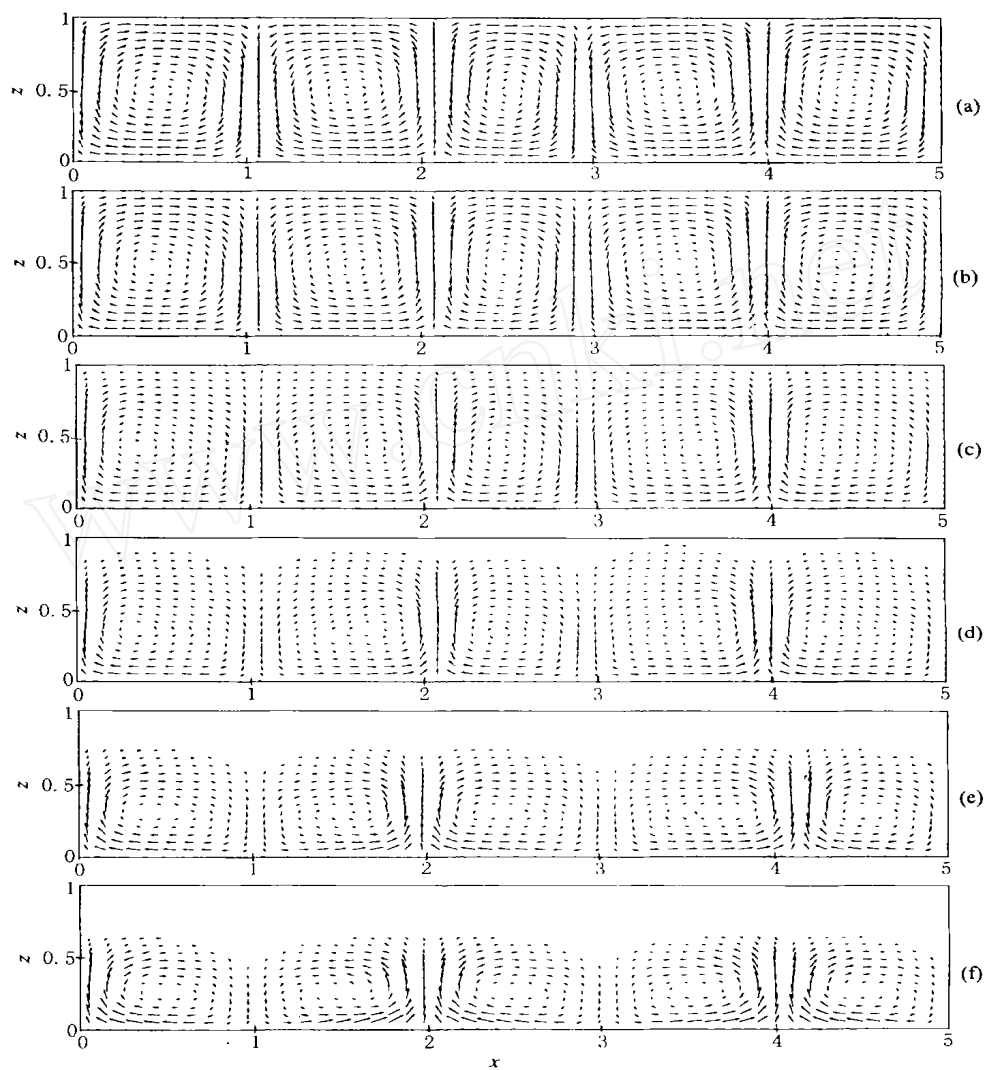


图 1 下边界为等温边界条件时的流场图

(a) ~ (f): 上、下表面的黏度差异依次是 $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

Fig.1 The calculated non-dimensional velocity field with isothermal lower boundary condition

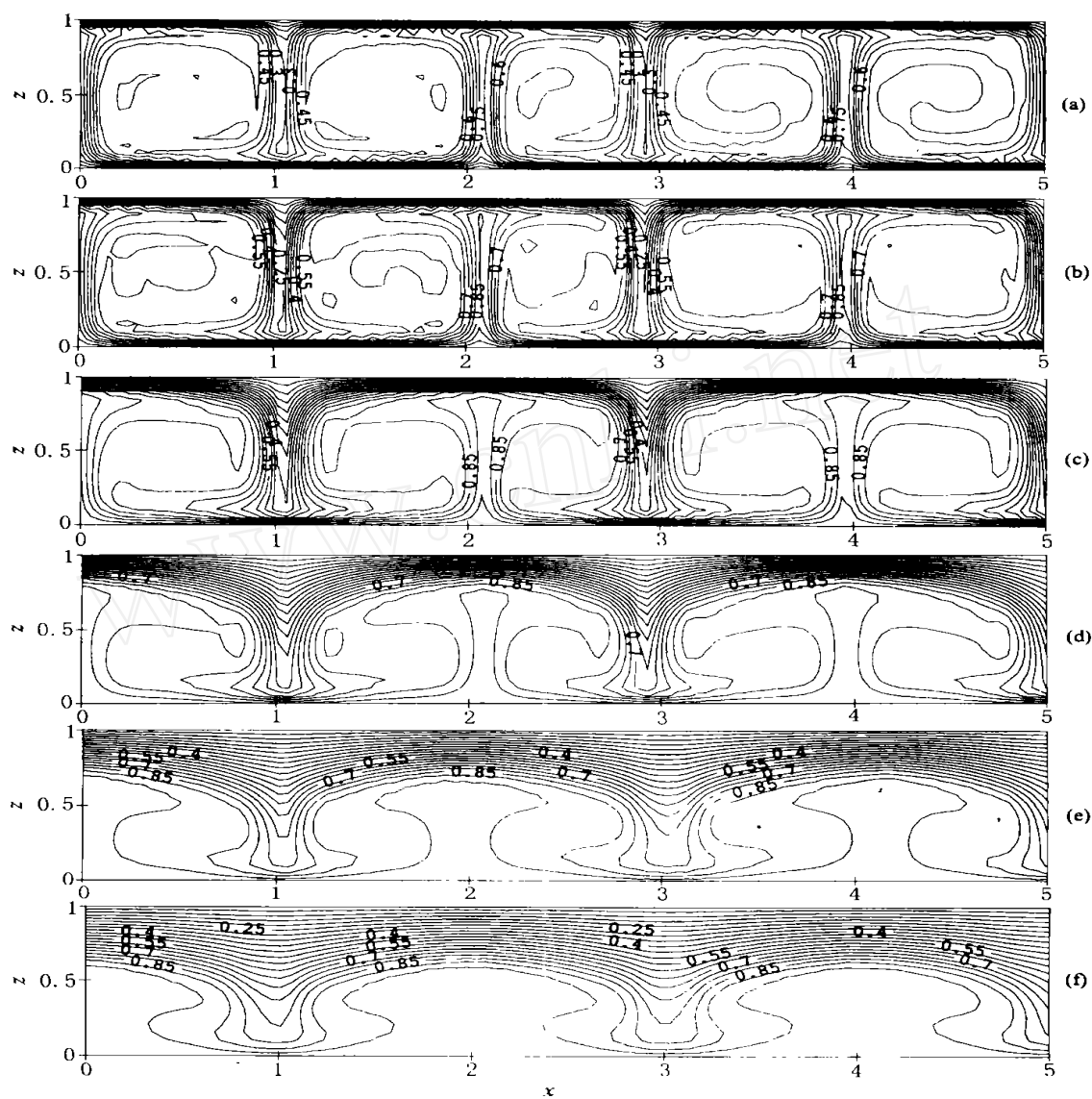


图 2 下边界为等温边界条件时的温度分布

(a) ~ (f): 上、下表面的黏度差异依次是 $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

Fig.2 The calculated non-dimensional temperature distribution with isothermal lower boundary condition

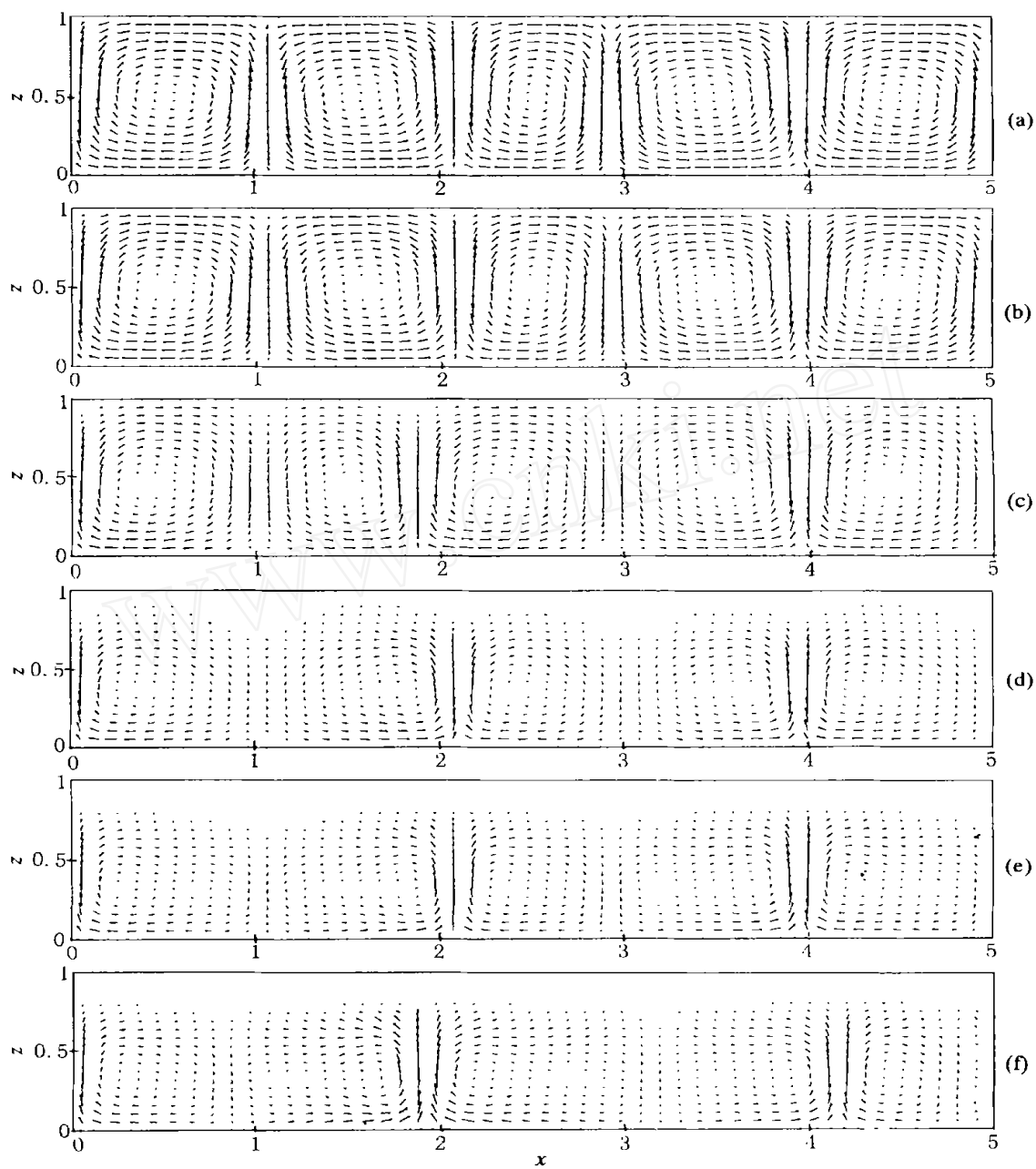


图 3 下边界为常热流边界条件时的流场图

(a) ~ (f): 上、下表面的黏度差异依次是 $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

Fig.3 The calculated non-dimensional velocity field with constant heat flow at the bottom

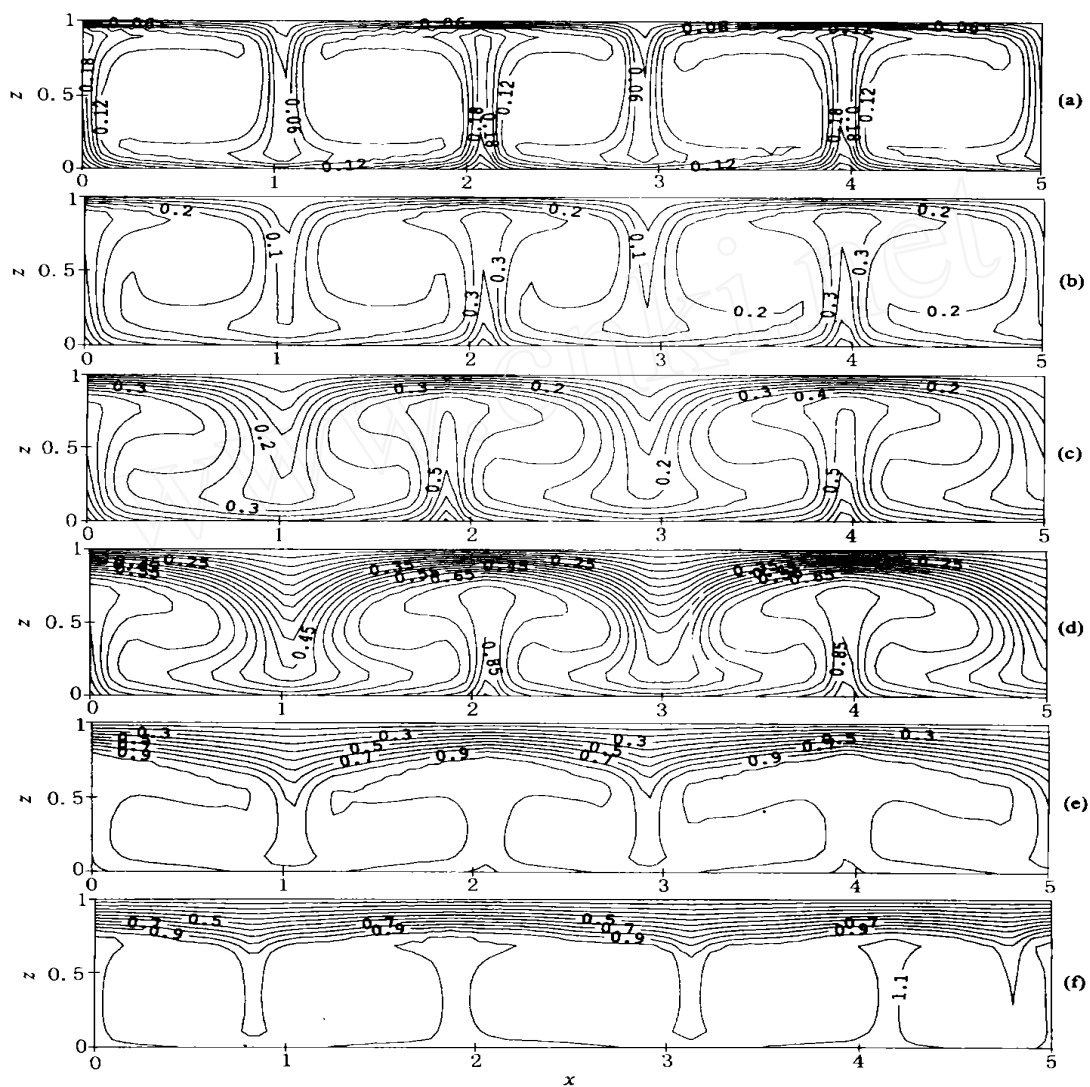


图 4 下边界为常热流边界条件时的温度分布

(a) ~ (f): 上、下表面的黏度差异依次是 $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5$.

Fig.4 The calculated non-dimensional temperature distribution with constant heat flow at the bottom