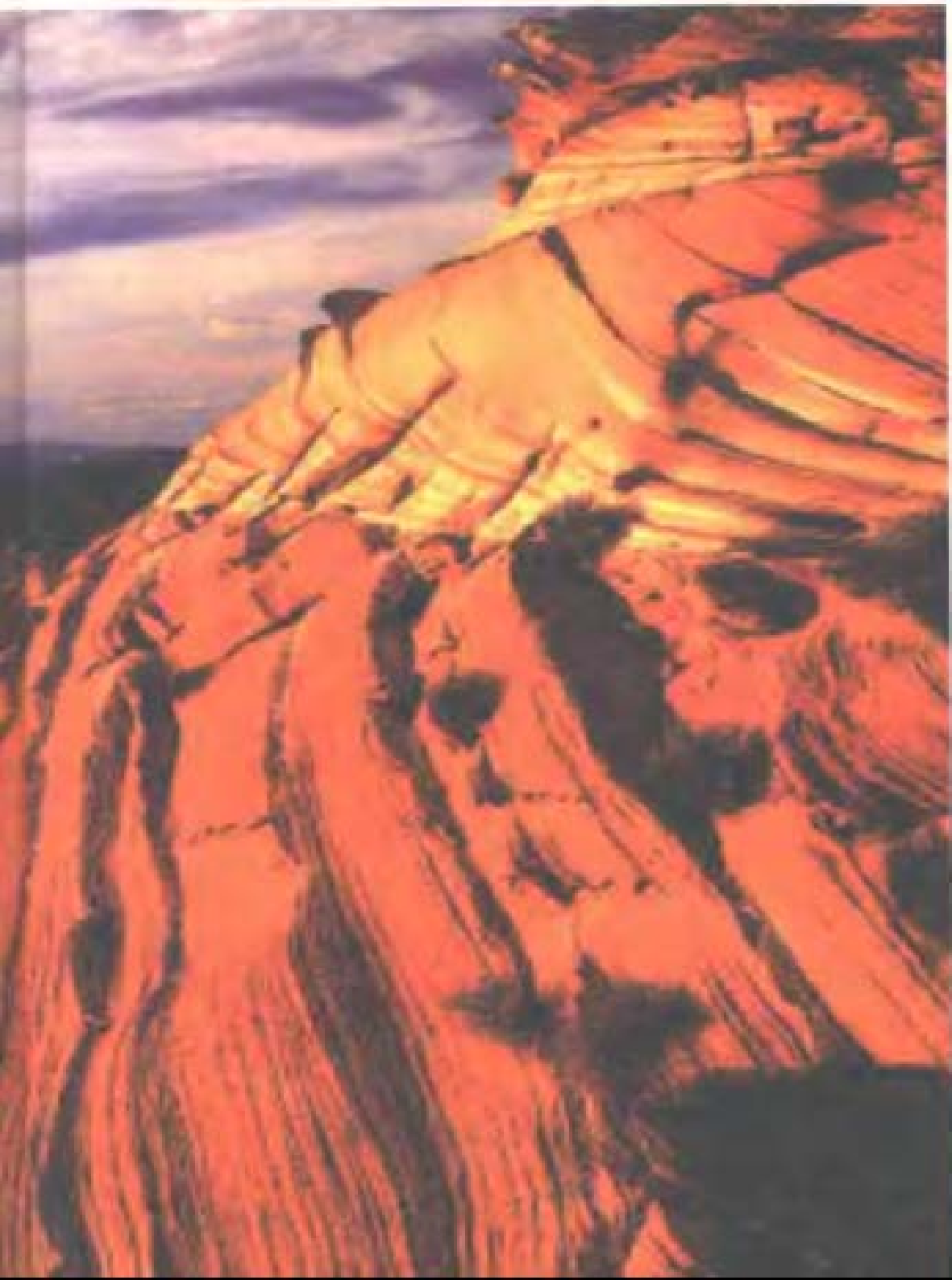
岩土工程有限元分析理论与应用



谢康和
周　健　编著

科学出版社

(TU—0175.1101)
责任编辑：杨家福
责任印制：钱玉芬
封面设计：张　放

ISBN 7-03-010152-9



ISBN 7—03—010152—9 · TU · 175
定　价：42.00 元

岩土工程有限元分析理论与应用

谢康和　周　健　编著

科学出版社

2002

内 容 简 介

有限元理论在岩土工程分析中已得到广泛应用，近年来又有新的进展。本书结合作者多年从事的有关研究，较全面、系统、详细地介绍了岩土工程静力、动力和随机有限元分析理论、方法和应用。全书共分九章，包括绪论、岩土工程问题的边界条件、有限单元法基本理论、饱和土的静力有限元分析理论、饱和土的动力有限元分析理论、土的随机有限元理论、非饱和土的基本理论与有限元分析方法、岩土工程静力有限元分析程序 PDSS、有限元理论在岩土工程中的应用。

本书可供土建、水利、交通、铁道等部门从事勘察、设计、施工和科研的科技人员参考，也可作为高等院校相关专业本科生和研究生的参考教材。

图书在版编目(CIP)数据

岩土工程有限元分析理论与应用/谢康和，周　健编著. —北京：科学出版社，2002
ISBN 7-03-010152-9

Ⅰ. 岩… Ⅱ. ①谢… ②周… Ⅲ. 岩土工程-有限元分析 Ⅳ. TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 008923 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2002 年 5 月第 一 版　开本：720×1000 B5
2002 年 5 月第一次印刷　印张：21 ¼
印数：1—2 000　字数：416 000

定价：42.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

前　言

有限单元法作为工程数值分析中最强有力的工具，已在岩土工程分析中得到广泛应用，随着计算机技术的飞速发展，近年来在岩土工程领域取得了很大进展。为了较系统、全面地介绍岩土工程有限元分析的新技术和新方法，作者基于多年的有关研究积累和国内外学者的成果撰写了本书。

全书共分九章。第一章详细地阐述了岩土工程问题控制方程的建立步骤和方法、岩土工程总应力分析法和有效应力分析法的区别和内在联系，以及岩土工程问题数值解法的验证。第二章介绍了岩土工程问题的边界条件，包括静力问题的边界条件和动力问题的边界条件。第三章通过对加权残数法和 Galerkin 法的简单介绍阐述了有限单元法基本原理，并着重讨论了岩土工程有限元分析常用等参元及其特性，以及有限元中的数值积分方法。

第四章以饱和土 Biot 三维静力固结问题的有限元分析为例，系统详尽地阐述了岩土工程静力有限元分析理论和方法，包括 Biot 三维固结方程的空间和时间有限元离散、空间八结点单元固结矩阵等的元素计算式，以及三维固结问题的有限元法求解过程。第五章以饱和土的动力问题有限元分析为例，全面阐述了岩土工程动力有限元分析理论和方法，包括 Biot 动力固结方程的求解、有效应力动力分析法及其计算步骤、弹塑性动力分析方法，以及随机地震作用下的动力分析法。第六章阐述了岩土工程中的随机有限元基本理论，介绍了诸如地下水流问题、基坑边坡稳定、土体地震反应分析等典型问题的随机有限元方法。第七章在总结了非饱和土的现有研究成果的基础上，从非饱和土体的动力控制方程出发，阐述了非饱和土的动力有限元分析方法。第八章较详细地介绍了作者基于第四章有限元理论编制的岩土工程静力有限元分析程序 PDSS，包括该程序的主要功能与结构、数据格式及使用方法，并提供了完整的算例和输入输出样本以及源程序清单。第九章通过对袋装砂井地基固结、尾矿坝地震液化、饱和软粘土振陷、厚覆盖层软土地层的动力反应、软土地层隧道抗震稳定、地铁车站抗震稳定、灰渣坝抗震稳定等七个典型问题的有限元分析实例的介绍，说明了有限元理论在岩土工程分析中的应用。

本书面向土建、水利、交通、铁道等部门从事勘察、设计、施工和科研的技术人员和高等院校有关专业师生。内容安排注意了循序渐进、理论与实践的结合，阐述力求具体和完整，同时强调实用性。

全书第一、三、四、八章和第九章 9.1 节由浙江大学岩土工程研究所谢康和撰写，其余各章节由同济大学地下建筑与工程系周健、白冰撰写。与本书配套的部分有限元分析软件光盘也在制作中。

限于我们的水平，书中定会存在欠妥乃至错误之处，恳请读者批评指正。

目　录

前言

第一章　绪论 …… 1

1.1　引言 …… 1

1.2　岩土工程问题控制方程的建立 …… 2

1.2.1　土体平衡方程 …… 2

1.2.2　土体本构方程 …… 3

1.2.3　土体几何方程 …… 6

1.2.4　土体有效应力原理 …… 6

1.2.5　孔隙流体平衡方程 …… 7

1.2.6　渗流连续方程 …… 8

1.2.7　总控制方程 …… 9

1.3　岩土工程基本分析方法 …… 11

1.3.1　总应力分析法及其控制方程 …… 11

1.3.2　有效应力分析法及其控制方程 …… 13

1.3.3　总应力分析法与有效应力分析法的关系 …… 17

1.4　岩土工程问题数值解法的验证 …… 20

参考文献 …… 23

第二章　岩土工程问题的边界条件 …… 25

2.1　概述 …… 25

2.2　静力问题的边界条件 …… 25

2.2.1　静力边界条件的概念 …… 25

2.2.2　渗流问题中的边界条件 …… 26

2.2.3　固结分析中的边界条件 …… 27

2.3　动力问题的边界条件 …… 29

2.3.1　基本类型 …… 29

2.3.2　透射边界条件 …… 33

2.3.3　其它几种典型的边界条件 …… 41

参考文献 …… 45

第三章　有限单元法基本理论 …… 47

3.1　概述 …… 47

3.2　有限单元法与加权残数法的关系 …… 47

3.2.1 加权残数法 …… 47
3.2.2 Galerkin 法 …… 49
3.2.3 有限单元法 …… 49
3.3 等参元及其特性 …… 50
3.3.1 等参元的坐标变换式 …… 50
3.3.2 平面四结点等参元 …… 51
3.3.3 平面八结点等参元 …… 54
3.3.4 空间八结点等参元 …… 56
3.3.5 空间二十结点等参元 …… 59
3.4 有限元中的数值积分方法 …… 63
3.4.1 数值积分方法的基本思想 …… 63
3.4.2 Newton-Cotes 积分法 …… 63
3.4.3 Gauss 积分法 …… 65
参考文献 …… 69
第四章 饱和土的静力有限元分析理论 …… 70
4.1 概述 …… 70
4.2 位移与孔压模式 …… 70
4.3 Biot 三维固结有限元基本方程 …… 72
4.3.1 Biot 三维固结方程的空间离散 …… 72
4.3.2 Biot 三维固结方程的时间离散 …… 76
4.3.3 Biot 三维固结有限元方程 …… 77
4.4 Biot 三维固结有限元计算公式 …… 78
4.4.1 任意空间八结点单元固结矩阵各元素计算式 …… 78
4.4.2 长方体八结点单元固结矩阵各元素计算式 …… 83
4.4.3 单元等效结点荷载和流量增量列阵各元素计算式 …… 84
4.5 三维固结问题的有限元法求解过程 …… 87
参考文献 …… 89
第五章 饱和土的动力有限元分析理论 …… 91
5.1 概述 …… 91
5.2 动力方程及其求解 …… 91
5.2.1 用张量形式表达的 Biot 动力固结方程 …… 91
5.2.2 动力方程的求解 …… 93
5.3 有效应力动力分析方法 …… 99
5.3.1 有效应力动力分析及其计算步骤 …… 100
5.3.2 饱和土体的动力控制方程及其数值解法 …… 102
5.4 弹塑性动力分析方法 …… 106

5.4.1 岩土弹塑性模型理论 …… 106
5.4.2 弹塑性动力反应有限元分析 …… 111
5.5 随机地震作用下的动力分析 …… 112
5.5.1 地震作用下的随机反应分析 …… 112
5.5.2 永久变形危险性评价 …… 116
5.5.3 随机地震作用下边坡的稳定性分析 …… 117
5.5.4 抗震稳定分析的随机可靠性 …… 118
参考文献 …… 124
第六章 土的随机有限元理论 …… 127
6.1 概述 …… 127
6.2 岩土工程可靠性理论 …… 127
6.2.1 土性参数的随机性及统计特征 …… 127
6.2.2 可靠性分析的基本方法 …… 129
6.3 岩土工程随机有限元基本理论 …… 138
6.3.1 岩土参数的随机场特征 …… 138
6.3.2 随机场的离散方法 …… 145
6.3.3 随机有限元基本方法及可靠度计算 …… 149
6.3.4 摄动随机有限元法 …… 154
6.4 典型问题的随机有限元方法 …… 156
6.4.1 地下水流问题的随机有限元 …… 156
6.4.2 基坑边坡的可靠性分析 …… 158
6.4.3 顺层岩质边坡可靠性分析 …… 162
6.5 动力随机有限元方法 …… 167
6.5.1 土体地震反应分析的随机有限元法 …… 167
6.5.2 动态随机有限元法基本原理 …… 174
参考文献 …… 179
第七章 非饱和土的基本理论与有限元分析方法 …… 181
7.1 概述 …… 181
7.2 非饱和土的有效应力原理 …… 182
7.3 非饱和土的本构关系 …… 190
7.4 非饱和土的固结理论 …… 198
7.5 非饱和土的动力分析方法 …… 214
7.5.1 非饱和土体动力控制方程 …… 214
7.5.2 动力控制方程的有限元离散 …… 216
7.5.3 耦合有限元离散方程的数值解法 …… 217
参考文献 …… 220

第八章　岩土工程静力有限元分析程序 PDSS …… 223
8.1　概述 …… 223
8.2　平面变形、空间渗流固结问题有限元分析理论 …… 224
8.3　PDSS 程序主要功能与结构 …… 224
8.3.1　主要功能与特点 …… 224
8.3.2　程序框图与结构 …… 226
8.3.3　主要变量及数组列表 …… 228
8.3.4　主程序与子程序简介 …… 230
8.4　PDSS 程序的使用与数据格式 …… 232
8.4.1　前期工作 …… 232
8.4.2　数据准备 …… 233
8.4.3　运行及结果输出 …… 235
8.5　PDSS 算例及输入输出样本 …… 235
8.5.1　计算条件及网格、时段划分 …… 236
8.5.2　输入数据文件样本 …… 238
8.5.3　结果输出文件样本 …… 238
8.5.4　结果对比分析 …… 257
8.6　PDSS 简化版源程序清单 …… 259
参考文献 …… 291
第九章　有限元理论在岩土工程中的应用 …… 293
9.1　宁波机场跑道袋装砂井地基固结有限元分析 …… 293
9.1.1　工程概况 …… 293
9.1.2　本构模型及计算参数 …… 295
9.1.3　有限元分析模式 …… 297
9.1.4　计算结果与分析 …… 297
9.2　尾矿坝地震液化计算 …… 301
9.2.1　三维两相有效应力动力方程式的建立与离散 …… 301
9.2.2　三维两相有效应力动力分析方法 …… 303
9.2.3　振动孔隙水压力增长规律 …… 304
9.2.4　南芬尾矿坝有效应力动力分析 …… 304
9.3　动力荷载作用下饱和软粘土振陷计算实例 …… 306
9.3.1　孔压和残余变形计算模式 …… 306
9.3.2　算例分析 …… 307
9.4　厚覆盖层软土地层的动力反应分析 …… 308
9.4.1　土层参数的选择及地震波输入 …… 309
9.4.2　厚覆盖水平软土地层动力反应计算结果 …… 310

9.5 软土地层隧道抗震稳定分析 …… 313
9.5.1 计算模型及参数的确定 …… 313
9.5.2 动力计算结果及分析 …… 314
9.6 地铁车站抗震稳定性计算 …… 317
9.6.1 地铁车站地基动力稳定性计算 …… 317
9.6.2 地铁车站动力可靠性分析 …… 323
9.7 灰渣坝抗震稳定性的三维有效应力动力分析 …… 326
9.7.1 工程概况及计算参数的确定 …… 326
9.7.2 动力反应计算结果及分析 …… 327
参考文献 …… 329

第一章 绪 论

1.1 引 言

在众多的工程数值计算方法中，有限单元法(Finite Element Method，缩写为FEM)很早就以其适用性强和处理非均质、非线性、复杂边界诸多问题方便等突出优点而成为工程数值分析最有效的通用工具。经过近半个世纪的发展，有限单元法已十分成熟并在各个领域的工程分析中广泛应用。本书主要介绍岩土工程中的有限单元法及其应用。

岩土工程中最基本的两种分析方法是总应力分析(Total Stress Analysis)法和有效应力分析(Effective Stress Analysis)法。与此相应，岩土工程中的有限元法也可分为总应力分析有限元法和有效应力分析有限元法。1966 年，Clough 等首先将总应力分析有限元法用于土坝的应力和变形分析。1969 年，Sandhu 和 Wilson 用有限元法分析了 Biot 二维固结问题，开创了岩土工程有效应力分析有限元法的先河。在国内，沈珠江(1977)首先将有效应力分析有限元法应用于软土地基的固结变形分析。

对于土体，总应力分析法是将其视为固体来分析的。因此岩土工程中的总应力分析有限元法与一般固体力学中的有限元法是相同的。有效应力分析法则严格区分土体中分别由土颗粒骨架、孔隙水和孔隙气传递或承受的应力，并考虑土骨架变形、孔隙水压力消散和孔隙气压力消散三者的耦合作用，因而比总应力分析法更接近实际，但远较之复杂。对于岩体，因其本身可视为固体，故与之相应的分析只能是总应力分析。从有效应力原理出发，可将总应力分析视为有效应力分析的一种特殊形式。因此，总应力有限元分析法也可视为有效应力分析有限元法的一种特殊形式。

任何工程问题的计算分析都是从控制方程的建立着手的，岩土工程分析也不例外。本章将先通过对饱和土总控制方程的详细推导，说明建立岩土工程问题控制方程的过程和方法，然后介绍总应力分析法和有效应力分析法，根据这两种分析法的特点给出相应的具有不同形式的控制方程，并阐述总应力分析法和有效应力分析法的区别与联系。

鉴于在岩土工程数值分析中对有限元等数值解法及其程序进行验证的重要性和必要性，并考虑到将数值解与解析解进行比较是最简捷有效的一种验证方法，本章还在最后一节给出了典型一维固结问题的完整解析解答。

1.2 岩土工程问题控制方程的建立

研究表明，对于大多数岩土工程问题，无论是进行总应力分析还是进行有效应力分析，均可归结为对 Biot 动力固结方程的求解。因此，可将 Biot 动力固结方程作为岩土工程问题的总控制方程。

岩土工程中的基本方程包括土体平衡(或运动)方程、物理(或本构)方程、几何方程、有效应力原理、孔隙流体(水)平衡方程、连续方程等。总控制方程(即 Biot 动力固结方程)由这些基本方程组合而成。

总控制方程的推导基于以下假定：

(1) 土体是完全饱和的横观各向同性弹性体。

(2) 土体的变形是微小的。

(3) 土颗粒和孔隙水不可压缩。

(4) 孔隙水相对于土骨架的渗流运动服从 Darcy 定律，其惯性力可不计。

(5) 应力应变的正负号法则与弹性力学相反。

1.2.1 土体平衡方程

天然饱和土体是由土颗粒(固相)和孔隙水(液相)组成的二相体。土颗粒相互接触或胶结形成土骨架，而水则存在于土骨架内(或颗粒间)的空隙中。在荷载作用下，土体中将产生应力，土骨架将发生位移或运动，而孔隙水在伴随土骨架运动的同时还作相对于土骨架的渗流运动。

现取图 1.1 所示符合右手法则的坐标系(其中水平面 xoy 为横观各向同性面)，考虑边长分别为 $\mathrm{d}x$、$\mathrm{d}y$、$\mathrm{d}z$ 的土微元体的平衡。

记 u、v、w 分别为微元体土骨架沿 x、y、z 正方向的位移分量；$\ddot{u}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$、$\ddot{v}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$、$\ddot{w}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$分别为相应的运动加速度；在微元体上作用的有总应力、体力和惯性力。总应力六个分量即 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}(图示应力分量均为正)；体力方向向下，大小为 ρg(ρ 为土体密度，g 为重力加速度)；惯性力沿 x、y、z 三方向的分量依次为 $\rho\ddot{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$\rho\ddot{v}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$、$\rho\ddot{w}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，作用方向与位移方向相反。此外尚有孔隙水相对于土骨架的渗流运动惯性力，但据假定(4)，该项作用力忽略。

由 x 方向力平衡方程 $\sum F_x=0$，有

$$\left[\sigma_x-\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\tau_{yx}-\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$+\left[\tau_{zx}-\left(\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\rho\ddot{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

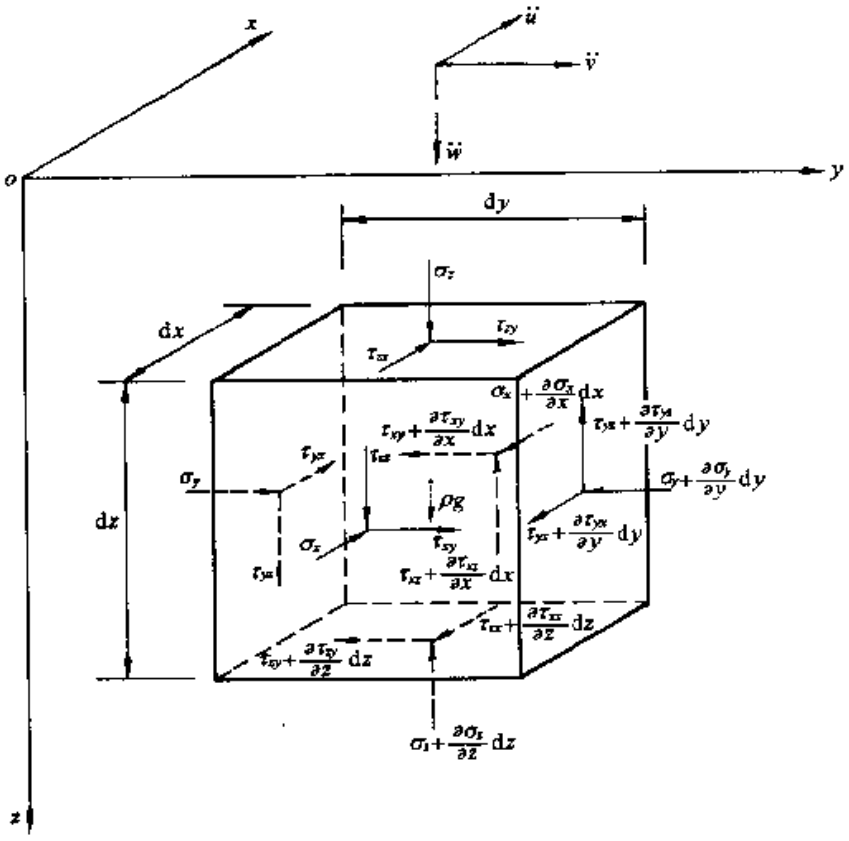


图 1.1　土体单元平衡图

整理即

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+\rho \ddot{u}=0 \tag{1.1a}$$

同理由 $\sum F_y=0$ 及 $\sum F_x=0$，可得

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}+\rho \ddot{v}=0 \tag{1.1b}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\rho \ddot{w}-\rho g=0 \tag{1.1c}$$

式(1.1)即为土体的动力平衡方程，也可称为土体的运动方程。

当惯性力为零，方程(1.1)即转化为静力平衡方程

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0 \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial x}=0 \tag{1.2b}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}-\rho g=0 \tag{1.2c}$$

1.2.2　土体本构方程

土体的本构方程(也称物理方程)描述土骨架应力(即有效应力)与应变之间的

关系，其一般式可表示为

$$\{\sigma'\} = f(\{\varepsilon\}) \tag{1.3}$$

式中：$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$，为土体有效应力矢量；$\{\varepsilon\}=[\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_z \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]^T$，为土体应变矢量。

对于横观各向同性线弹性土体[假定(1)]，由广义 Hooke 定律可得相应的物理方程

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{hh}\frac{\sigma'_y}{E_h} - \mu_{vh}\frac{\sigma'_z}{E_v}\\
\varepsilon_y &= \frac{\sigma'_y}{E_h} - \mu_{hh}\frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{vh}\frac{\sigma'_z}{E_v}\\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma'_z}{E_v} - \mu_{hv}\frac{\sigma'_x}{E_h} - \mu_{hv}\frac{\sigma'_y}{E_h}\\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_h}\\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_v}\\
\gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G_h}
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

式中：E_h、E_v 为土体的水平向、竖向弹性模量；G_h、G_v 为土体的水平向、竖向剪切模量；μ_{hh} 为水平向应力引起水平向应变的 Poisson 比；μ_{hv} 为水平向应力引起竖向应变的 Poisson 比；μ_{vh} 为竖向应力引起水平向应变的 Poisson 比。

从方程(1.4)可见，描述横观各向同性体共需七个弹性常数。但可以证明，以下关系式成立：

$$\left.\begin{aligned}
\mu_{hv} &= \frac{E_h}{E_v}\mu_{vh}\\
G_h &= \frac{E_h}{2(1+\mu_{hh})}\\
G_v &= \frac{E_h E_v}{E_h + E_v + 2E_h\mu_{vh}}
\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

因此，七个弹性常数中只有四个是独立的。通常可取 E_h、E_v、μ_{vh}、μ_{hh} 为基本的弹性常数，因为这些参数的测定相对而言较为容易，但需在排水条件下测得。

物理方程(1.4)可写成以下矩阵式，即

$$\{\sigma'\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{1.6}$$

式中[D]称为弹性矩阵，即

$$[D]=\begin{bmatrix} d_{11} & & & & & \\ d_{12} & d_{11} & & \text{对} & & \\ d_{13} & d_{13} & d_{33} & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & d_{44} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{55} \end{bmatrix} \tag{1.7a}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} d_{11} &= \frac{n-\mu_{hv}^2}{(1-\mu_{hh})^2}E_{sa} \\ d_{12} &= \frac{n\mu_{hh}+\mu_{hv}^2}{(1-\mu_{hh})^2}E_{sa} \\ d_{13} &= \frac{\mu_{hv}}{1-\mu_{hh}}E_{sa} \\ d_{33} &= E_{sa} \\ d_{44} &= \frac{d_{11}-d_{12}}{2}=G_h \\ d_{55} &= G_v \end{aligned}\right\} \tag{1.7b}$$

E_{sa}为横观各向同性土的(侧限)压缩模量,即

$$E_{sa}=\frac{E_v(1-\mu_{hh})}{1-\mu_{hh}-2n\mu_{vh}^2} \tag{1.7c}$$

$$n=\frac{E_h}{E_v} \tag{1.7d}$$

特别对于各向同性线弹性土(简称均质土),有

$$E_h=E_v=E \quad \mu_{hv}=\mu_{hh}=\mu_{vh}=\mu \quad G_h=G_v=G \quad n=1$$

则物理方程变为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x'-\mu(\sigma_y'+\sigma_z')] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y'-\mu(\sigma_z'+\sigma_x')] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z'-\mu(\sigma_x'+\sigma_y')] \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy}/G \\ \gamma_{yz} &= \tau_{yz}/G \\ \gamma_{zx} &= \tau_{zx}/G \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

相应的矩阵式仍如式(1.6)所示,其中弹性矩阵[D]转化为

$$[D]=\begin{bmatrix} d_1 & & & & & \\ d_2 & d_1 & \text{对} & & & \\ d_2 & d_2 & d_1 & & \text{称} & \\ 0 & 0 & 0 & d_3 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} \tag{1.9a}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} d_1 &= E_s \\ d_2 &= \frac{\mu}{1-\mu}E_s = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \lambda \\ d_3 &= G = \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned}\right\} \tag{1.9b}$$

$$E_s = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \lambda + 2G \tag{1.9c}$$

式中 E、μ、G、E_s、λ 分别为均质土的弹性模量、Poisson 比、剪切模量、压缩模量和 Lamé 常数。基本弹性常数 E、μ 需由排水试验得到。

1.2.3 土体几何方程

描述应变分量 ε_x、ε_y、ε_z、γ_{xy}、γ_{yz}、γ_{zx} 与位移分量 u、v、w 之间关系的数学表达式称为几何方程。根据小应变假定以及应变以压缩为正的约定[见假定(2)和(5)],可得土体的几何方程

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= -\frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= -\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_y &= -\frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= -\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \varepsilon_z &= -\frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= -\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

1.2.4 土体有效应力原理

有效应力原理描述土体中的总应力与有效应力、孔隙水压力以及孔隙气压力之间的关系。对于饱和土体[假定(1)],有效应力原理由 Terzaghi 首先提出,该原理表明饱和土中任一点的总应力为该点有效应力与孔隙水压力之和。其数学表达式为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma'_x + p \\ \sigma_y &= \sigma'_y + p \\ \sigma_z &= \sigma'_z + p \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

式中 p 为土体中的孔隙水压力,简称为孔压。

1.2.5 孔隙流体平衡方程

建立土体平衡方程(1.1)或(1.2)时是将土颗粒和孔隙水合二为一来考虑的，即将土体作为整体来研究的。建立孔隙流体平衡方程则将土体按水力学中的渗流模型来研究，即认为渗流区内全部空间场被流体所充满，不存在土骨架，仅考虑土骨架对渗流运动施加的阻力。

在渗流区取如图 1.2 所示的微元体，该微元体被流体(孔隙水)所充满。流体伴随土骨架以加速度 $\ddot{u}$、$\ddot{v}$、$\ddot{w}$ 运动，同时以流速 v_x、v_y、v_z 作相对于土骨架的渗流运动。一般情况下，渗流的流速很小，因此渗流惯性力(即 $\rho_w\dot{v}_x$、$\rho_w\dot{v}_y$、$\rho_w\dot{v}_z$，作用方向与渗流方向相反)可忽略不计[假定(4)]。故需考虑的作用于微元体上的力有：孔压 p；重力引起的体力 $\rho_w g$(ρ_w 为水的密度)；土骨架对孔隙水所施加的渗流阻力 f_x、f_y、f_z，作用方向与渗流方向相反；土骨架运动所引起的惯性力 $\rho_w\ddot{u}$、$\rho_w\ddot{v}$、$\rho_w\ddot{w}$，作用方向与加速度方向相反(未在图 1.2 中示出)。

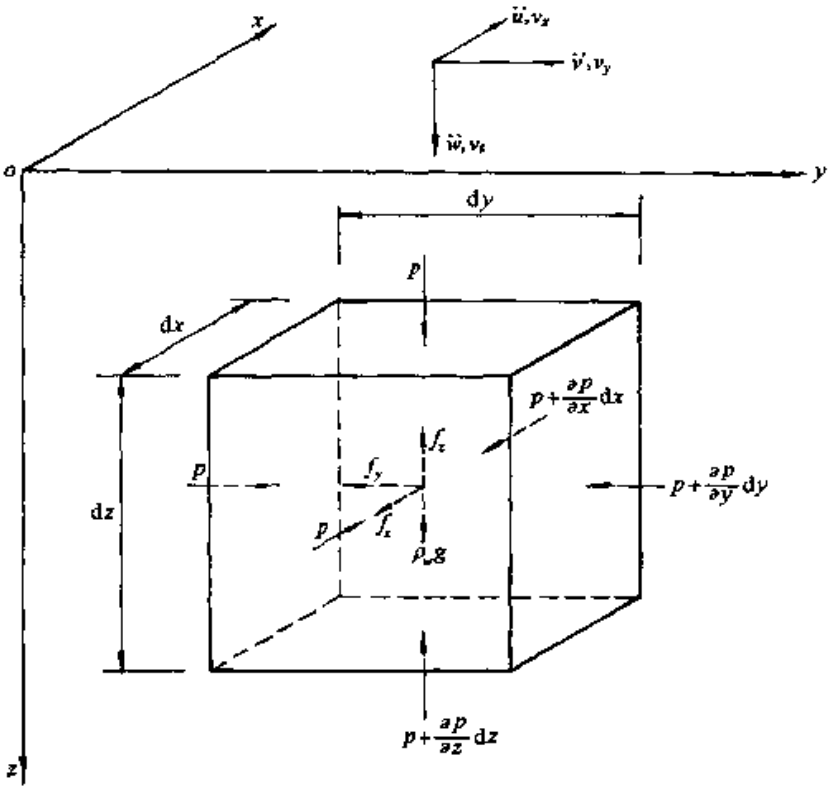


图 1.2 孔隙流体平衡图

据水力学，渗流阻力 $f=\rho_w g i$(i 为水力坡度)，故有

$$\left.\begin{aligned} f_x &= \rho_w g i_x = \rho_w g \frac{v_x}{k_h} \\ f_y &= \rho_w g i_y = \rho_w g \frac{v_y}{k_h} \\ f_z &= \rho_w g i_z = \rho_w g \frac{v_z}{k_v} \end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

式中 k_h、k_v 分别为土体的水平向和竖向渗透系数。

先考虑 x 方向力的平衡，由 $\sum F_x = 0$，有

$$\left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z - f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \rho_w\ddot{u}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

另由 $\sum F_y = 0$ 和 $\sum F_z = 0$ 可得出与此类似的两个方程。将式(1.12)代入这三个方程并化简整理，得

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_w g\frac{v_x}{k_h} + \rho_w\ddot{u} = 0\\
&\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_w g\frac{v_y}{k_h} + \rho_w\ddot{v} = 0\\
&\frac{\partial p}{\partial z} + \rho_w g\frac{v_z}{k_v} + \rho_w\ddot{w} - \rho_w g = 0
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

此即忽略渗流惯性力的孔隙流体平衡方程，或称为渗流运动方程。若进一步略去土体运动惯性力，该方程即转化为 Darcy 定律。

1.2.6 渗流连续方程

渗流连续方程是由同一时间内流出土微元的水量等于该微元体积的变化量这一连续条件来建立的。

现取图 1.3 所示土微元体。记 q_x、q_y、q_z 分别为单位时间内通过与 x、y、z 垂直的平面的渗流量，则有

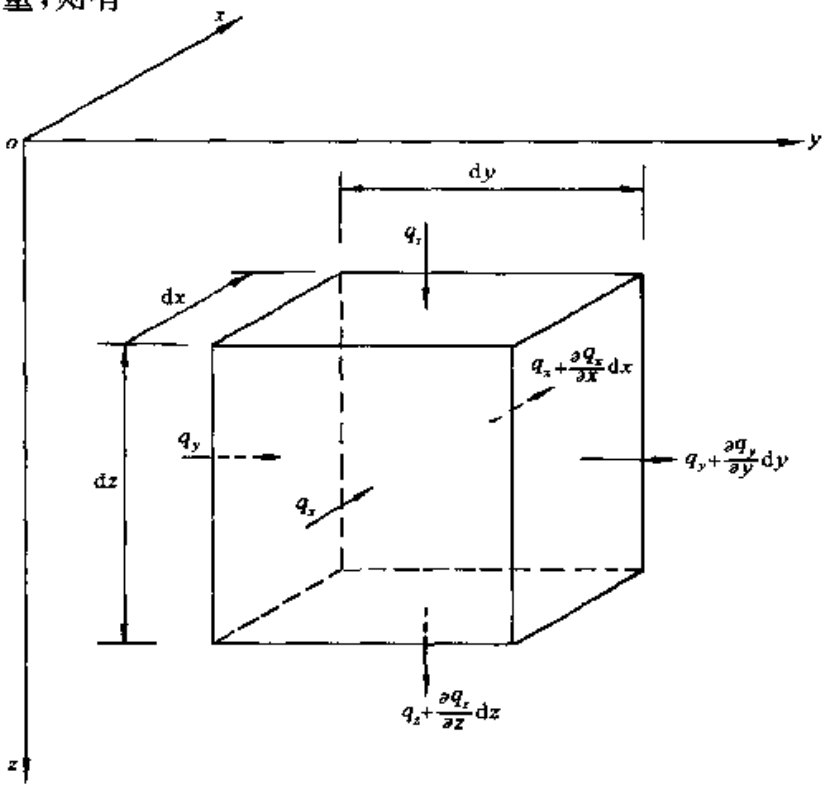


图 1.3 渗流示意图

$$\left.\begin{aligned} q_x &= v_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ q_y &= v_y \mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ q_z &= v_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

Δt 时间内从微元体流出的(净)水量 ΔQ 为

$$\begin{aligned} \Delta Q &= \left[\left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - q_x + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - q_y + \left(q_z + \frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right) - q_z\right]\Delta t \\ &= \left(\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\Delta t \end{aligned}$$

将式(1.14)代入上式,即得

$$\Delta Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \cdot \Delta t \tag{1.15}$$

Δt 时间内微元体体积的变化量 ΔV 为

$$\Delta V = \Delta\varepsilon_v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.16}$$

式中 ε_v 为土体的体应变,即

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{1.17}$$

由连续条件,$\Delta Q = \Delta V$,得

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{1.18}$$

此即渗流连续方程。

1.2.7 总控制方程

利用物理方程(1.4)、几何方程(1.10)及有效应力原理(1.11),可将平衡方程(1.1)以位移分量 u、v、w 和孔压 p 表示为

$$\left.\begin{aligned} &d_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + d_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (d_{12} + d_{44})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} \\ &\quad + (d_{13} + d_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} = \rho\ddot{u} \\ &d_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + d_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + d_{55}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (d_{12} + d_{44})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \\ &\quad + (d_{13} + d_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\ddot{v} \\ &d_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + d_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + d_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (d_{13} + d_{55})\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x} \\ &\quad + (d_{13} + d_{55})\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y} - \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = \rho\ddot{w} \end{aligned}\right\} \tag{1.19}$$

将流体平衡方程(1.13)代入方程(1.18),可得以位移分量和孔压表示的连续方程,即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_h\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_h\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[k_v\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_w g\right)\right]-\rho_w g\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$
$$+\rho_w\left[\frac{\partial}{\partial x}(k_h\ddot{u})+\frac{\partial}{\partial y}(k_h\ddot{v})+\frac{\partial}{\partial z}(k_v\ddot{w})\right]=0 \tag{1.20}$$

方程(1.19)和(1.20)即为横观各向同性饱和土的 Biot 动力固结方程，也是大多数岩土工程问题的总控制方程。

例如，当土骨架位移加速度为零，方程(1.19)和(1.20)就转化为横观各向同性饱和土的 Biot 静力固结方程，即

$$\left.\begin{aligned}
&d_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d_{44}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+d_{55}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+(d_{12}+d_{44})\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\\
&\quad+(d_{13}+d_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}-\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&d_{44}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+d_{11}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d_{55}\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(d_{12}+d_{44})\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}\\
&\quad+(d_{13}+d_{55})\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&d_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+d_{55}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+d_{33}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+(d_{13}+d_{55})\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\\
&\quad+(d_{13}+d_{55})\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g=0
\end{aligned}\right\} \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_h\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_h\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left[k_v\left(\frac{\partial p}{\partial z}-\rho_w g\right)\right]$$
$$-\rho_w g\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0 \tag{1.22}$$

当 $E_h=E_v=E$，$\mu_{hv}=\mu_{hh}=\mu_{vh}=\mu$，$G_h=G_v=G$，$k_h=k_v=k$，方程(1.19)和(1.20)即转化为均质饱和土的 Biot 动力固结方程，即

$$\left.\begin{aligned}
&d_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)\\
&\quad-\frac{\partial p}{\partial x}=\rho\ddot{u}\\
&d_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)\\
&\quad-\frac{\partial p}{\partial y}=\rho\ddot{v}\\
&d_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right)\\
&\quad-\frac{\partial p}{\partial z}+\rho g=\rho\ddot{w}
\end{aligned}\right\} \tag{1.23}$$

$$k\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)-\rho_w g\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$+\rho_w k\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{w}}{\partial z}\right)=0 \tag{1.24}$$

当土骨架变形为零，即 $u=v=w=0$，因总水头 $H=-z+\frac{p}{\rho_w g}$，故方程(1.20)就转化为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_h\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_h\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_v\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0 \tag{1.25}$$

此即稳定渗流问题的控制方程。

与岩土工程中的总应力分析法和有效应力分析法对应的控制方程同样属于总控制方程(1.19)和(1.20)的特殊形式，详见下节。

综合以上可见，总控制方程由四个微分方程组成，所含未知数也是四个，即位移分量 u、v、w 和孔压 p，故一旦根据实际问题确定了求解条件(即边界条件和初始条件)，就应能求得相应的解。但用解析法求解显然相当困难，除极少数简单问题外一般须用数值解法，例如差分法、半解析法、有限单元法，其中以有限单元法为最有效。

1.3 岩土工程基本分析方法

1.3.1 总应力分析法及其控制方程

如前所述，总应力分析法和有效应力分析法是岩土工程中最基本的两种分析方法。

在总应力分析法中，土体被视为固体，不考虑土中渗流，不区分土单元中分别由土颗粒骨架和孔隙水传递或承受的应力(即有效应力和孔隙水压力)，而仅考虑土单元整体所承受的应力(即总应力)。因此，就基本理论而言，岩土工程中的总应力分析法与一般固体力学相同，总应力分析有限元法也与一般固体力学中的有限元法无别。

从应用上来说，总应力分析法一般用于不考虑渗流固结的情况，例如饱和粗粒土地基、强透水性土料组成的土坝路堤的应力和变形分析以及饱和软粘土地基短期变形和稳定分析。

既然总应力分析法不考虑土中渗流，是将土体作为固体来分析的，因此总应力分析不必建立流体平衡方程和渗流连续方程，控制方程只需由平衡方程、物理方程和几何方程组合即得到，方程中的未知数也不含孔压 p。

现推导静荷载下(惯性力为零)的总应力分析控制方程。为简单起见，进一步假定土体为均质各向同性体，同时考虑到与体力相应的应力和变形一般均产生于分析前，故不计体力。

于是，土体的平衡方程(1.1)或(1.2)变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}=0\\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

写成矩阵式即

$$[\partial]^T\{\sigma\}=0 \tag{1.27}$$

式中$\{\sigma\}=[\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T$，为总应力矢量；

$$[\partial]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix} \tag{1.28}$$

注意到总应力分析只考虑总应力，故与式(1.4)或(1.6)所示的物理方程表达的意义不同，总应力分析中物理方程表达的是土体总应力与应变之间的关系，其形式与弹性力学的广义 Hooke 定律完全相同，即

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\frac{1}{E}[\sigma_x-\mu(\sigma_y+\sigma_z)]\\ \varepsilon_y&=\frac{1}{E}[\sigma_y-\mu(\sigma_z+\sigma_x)]\\ \varepsilon_z&=\frac{1}{E}[\sigma_z-\mu(\sigma_x+\sigma_y)]\\ \gamma_{xy}&=\tau_{xy}/G\\ \gamma_{yz}&=\tau_{yz}/G\\ \gamma_{zx}&=\tau_{zx}/G\end{aligned}\right\} \tag{1.29}$$

其矩阵式为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{1.30}$$

式中矩阵$[D]$见式(1.9)。

总应力分析中的几何方程仍如式(1.10)所示，写成矩阵形式即

$$\{\varepsilon\}=-[\partial]\{f\} \tag{1.31}$$

式中，$\{f\}=[u \quad v \quad w]^T$，为位移矢量。

将几何方程(1.10)代入物理方程(1.29),再代入平衡方程(1.26),即得以位移表示的总应力分析法典型的控制方程

$$\left.\begin{aligned} d_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)=0\\ d_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)=0\\ d_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.32}$$

其中系数 d_1、d_2、d_3 见式(1.9b)。

控制方程(1.32)也可写为

$$\left.\begin{aligned} G\nabla^2 u-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}=0\\ G\nabla^2 v-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}=0\\ G\nabla^2 w-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.33}$$

此即弹性力学中著名的拉密方程。其中

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

称为微分算子;

$$\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

称为体应变;

λ、G 为拉姆常数和剪切模量,见式(1.9b)。

利用方程式(1.27)、(1.30)和(1.31),尚可将方程(1.32)表为

$$[\partial]^T[D][\partial]\{f\}=0 \tag{1.34}$$

此即以矩阵形式表达的总应力分析法控制方程。

比较方程式(1.19)和(1.32),并注意到对于各向同性均质土,即 $d_{11}=d_{33}=d_1$,$d_{12}=d_{13}=d_2$,$d_{44}=d_{55}=d_3$,即可发现总应力分析法控制方程(1.32)就是当孔压 $p=0$且不考虑惯性力($\ddot{u}=\ddot{v}=\ddot{w}=0$)和体力时总控制方程(1.19)的特殊形式。另外可见,此时总控制方程(1.20)变为$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=0$,表明土体体积变化与时间无关,这与前述的总应力分析法不考虑土中渗流是一致的。

因此,只要在总控制方程(1.19)中令孔压 $p=0$,就可得到更复杂条件(如考虑横观各向异性、惯性力)下的总应力分析法控制方程。

1.3.2 有效应力分析法及其控制方程

与总应力分析法不同,在有效应力分析法中,土体中的有效应力和孔隙水压力

(以下简称孔压)被严格区分,并将土骨架变形与孔隙水的渗透(或孔压的消散)同步考虑。因此,有效应力分析法较总应力分析法能更真实地反映土体的自身特性,能更合理地计算土体对荷载的响应,应用范围也更广。

但在另一方面,有效应力分析较总应力分析复杂,工作量也更大。例如,就建立相应控制方程所需的基本方程而言,总应力分析法只需平衡方程、物理方程、几何方程,而有效应力分析尚需有效应力原理和连续方程;就控制方程中的未知变量及属性而言,总应力分析法控制方程中只是位移变量且仅与空间有关,而有效应力分析法控制方程中除位移变量外还有孔压变量,而且与空间和时间均有关;就计算量而言,总应力有限元分析的未知量只是结点位移,而有效应力有限元分析的未知量尚含结点孔压(或水头)。

在岩土工程分析中,基于 Biot 固结理论的静力固结分析是典型的有效应力分析,故这里将以著名的饱和土的 Biot 三维(静力)固结方程的推导为例,说明如何建立有效应力分析法控制方程。

1. Biot 三维固结方程

在前述的假定基础上,进一步作以下假定:

(1) 除渗透性外,土体是均质的各向同性体。

(2) 土体的渗透性不随空间和时间而变,渗透系数为常数。

(3) 不计惯性力和体力。

在这样的假定下,孔压 p 即为超静孔压;土体平衡方程与方程(1.26)相同;物理方程与方程(1.6)相同,其中[D]矩阵见式(1.9);几何方程和有效应力原理不变,即分别如方程(1.10)和(1.11)所示。合并此四方程即得

$$\left.\begin{aligned}
&d_1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right)-\frac{\partial p}{\partial x}=0\\
&d_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}\right)-\frac{\partial p}{\partial y}=0\\
&d_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+d_3\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+(d_2+d_3)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}\right)-\frac{\partial p}{\partial z}=0
\end{aligned}\right\}\tag{1.35}$$

另由 Darcy 定律,有

$$\left.\begin{aligned}
v_x&=-\frac{k_h}{\gamma_w}\frac{\partial p}{\partial x}\\
v_y&=-\frac{k_h}{\gamma_w}\frac{\partial p}{\partial y}\\
v_z&=-\frac{k_v}{\gamma_w}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\right\}\tag{1.36}$$

式中,$\gamma_w=\rho_w g$,为孔隙水重度。

将(1.36)式代入连续方程(1.18)并结合以上假定,即得

$$\frac{1}{\gamma_w}\left[k_h\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+k_v\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\tag{1.37}$$

方程式(1.35)和(1.37)即为著名的 Biot 三维静力固结方程，也是有效应力(静力)分析法典型的控制方程。

与总应力分析法控制方程(1.33)相对应，Biot 三维固结方程也可写成形式

$$\left.\begin{aligned} G\nabla^2 u-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}-\frac{\partial p}{\partial x}=0\\ G\nabla^2 v-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}-\frac{\partial p}{\partial y}=0\\ G\nabla^2 w-(\lambda+G)\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial z}-\frac{\partial p}{\partial z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{1.38}$$

$$\frac{1}{\gamma_w}\left[k_h\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+k_v\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right]=-\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \tag{1.39}$$

容易看出，只要在总控制方程式(1.19)和(1.20)中令 $\ddot{u}=\ddot{v}=\ddot{w}=0$(即不计惯性力)，$\rho g=0$(即不计体力)，并以式(1.9a)即各向同性体弹性矩阵$[D]$中的元素代替式(1.7a)即横观各向同性体弹性矩阵$[D]$中的各元素，就可得到 Biot 三维固结方程式(1.35)和(1.37)。因此，正如前面所述，与总应力分析法控制方程类似，有效应力分析法控制方程也是总控制方程的特殊形式。

事实上，凡考虑土骨架变形与孔压消散之间耦合作用的分析都可认为是有效应力分析。因此，总控制方程式(1.19)和(1.20)其实也就是有效应力分析法的总控制方程，各种特殊条件下的有效应力分析控制方程自然都可从中得到。

2. 用矩阵形式表达的 Biot 三维固结方程

为使 Biot 三维固结方程的表达更为整洁，可将其写成矩阵形式。前面已给出以矩阵表达的物理方程(1.6)、几何方程(1.31)和平衡方程(1.27)，现再给出有效应力原理式(1.11)的矩阵形式，即

$$\{\sigma\}=\{\sigma'\}+\{M\}p \tag{1.40}$$

其中，$\{M\}=[1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0]^T$。

将物理方程(1.6)和几何方程(1.31)代入方程式(1.40)，得

$$\{\sigma\}=-[D][\partial]\{f\}+\{M\}p \tag{1.41}$$

再将式(1.41)代入平衡方程(1.27)，即得以位移和孔压表示的平衡方程的矩阵式

$$[\partial]^T[D][\partial]\{f\}-[\partial]^T\{M\}p=0 \tag{1.42}$$

另外，可将 Darcy 定律式(1.36)以矩阵形式表达为

$$\{v\}=-[k][\partial]^T\{M\}p \tag{1.43}$$

其中，$\{v\}=[v_x\quad v_y\quad v_z]^T$，为流速矢量；

$$[k]=\frac{1}{\gamma_w}\begin{bmatrix}k_h & 0 & 0\\ 0 & k_h & 0\\ 0 & 0 & k_v\end{bmatrix} \tag{1.44}$$

而连续方程(1.18)可写为

$$\{M\}^T[\partial]\{v\} = \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\{M\}^T\{\varepsilon\}) \tag{1.45}$$

将 Darcy 定律式(1.43)及几何方程式(1.31)代入上式,就得以位移和孔压表达的连续方程的矩阵式

$$\{M\}^T[\partial][k][\partial]^T\{M\}p - \frac{\partial}{\partial t}\{M\}^T[\partial]\{f\} = 0 \tag{1.46}$$

方程式(1.42)和(1.46)即为以矩阵形式表达的 Biot 三维固结方程。

3. 三维固结问题的边界条件

鉴于固结问题的分析是岩土工程中最典型的有效应力分析,这里给出求解 Biot 三维固结方程常见的边界条件。相应于其它岩土工程问题的边界条件详见第 2 章。

(1) 位移边界条件,即某边界上位移已知。

例如对于固定边界,其上位移为零,则该边界条件可写为

$$u = 0 \quad v = 0 \quad w = 0$$

(2) 应力边界条件,即某边界上面力已知。

设作用于边界上的面力沿 x、y、z 三方向的分量(以沿坐标轴正向为正)分别为 F_x、F_y、F_z,该边界外法线与 x、y、z 轴正向的夹角分别为 α、β、γ,方向余弦分别为 l、m、n($l=\cos\alpha, m=\cos\beta, n=\cos\gamma$),则该应力边界条件可表示为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} + F_x &= 0 \\ m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} + F_y &= 0 \\ n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + F_z &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

写成矩阵形式

$$[L]^T\{\sigma\} + \{F\} = 0 \tag{1.48a}$$

其中

$$[L] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & n \\ m & l & 0 \\ 0 & n & m \\ n & 0 & l \end{bmatrix} \tag{1.48b}$$

$\{F\}$为面力矢量,即

$$\{F\} = [F_x \quad F_y \quad F_z]^T \tag{1.48c}$$

例如对于常见的地表受垂直均布荷载 q 作用下的情况,取坐标系如图 1.1 所示,则面力分量 $F_x=0, F_y=0, F_z=q, \alpha=\beta=90°, \gamma=180°, l=m=0, n=-1$,故由

式(1.47)可得该边界(地表)的应力条件为

$$\tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \sigma_z = q$$

(3) 孔压(或流势)边界条件,即某边界上孔压或水头已知。

例如对于排水边界,其上孔压为零,则该边界条件可写为

$$p = 0$$

(4) 流速(或流量)边界条件,即某边界上法向流速(或比流量)已知。

设边界上沿外法线方向的已知流速为 v_n,则流速边界条件可表示为

$$lv_x + mv_y + nv_z = v_n \tag{1.49}$$

将达 Darcy 定律式(1.36)代入即

$$-\frac{k_h}{\gamma_w}\left(l\frac{\partial p}{\partial x} + m\frac{\partial p}{\partial y}\right) - \frac{k_v}{\gamma_w}n\frac{\partial p}{\partial z} = v_n \tag{1.50}$$

对于常见的不排水边界,其上 $v_n=0$,故该边界条件为

$$lk_h\frac{\partial p}{\partial x} + mk_h\frac{\partial p}{\partial y} + nk_v\frac{\partial p}{\partial z} = 0 \tag{1.51}$$

1.3.3 总应力分析法与有效应力分析法的关系

将总应力分析法控制方程式(1.32)与有效应力分析法控制方程式(1.35)比较可见,前者是后者中当孔压 $p=0$ 的特殊形式。这是因为根据有效应力原理,当孔压为零,有效应力即等于总应力。因此,总应力分析和有效应力分析并非相互无关,而是有着一定联系的。在有效应力分析中,如果采用与总应力分析相同的土工参数并令孔压 $p=0$,所得结果即为总应力分析结果。

总应力分析一般采用土体的不排水指标,由此进行的是加荷瞬时或短期应力和变形分析。但也可采用土体的排水指标,此时进行的是最终或长期应力和变形分析。当进行线弹性分析并采用排水指标,总应力分析结果与有效应力分析结果的关系是:总应力分析得到的结果即为有效应力分析的最终(孔压消散完毕、主固结完成)结果。

由此可见,总应力分析可视为有效应力分析的一种特殊情况。对于有限元分析而言,总应力有限元分析可通过置任一结点的孔压为零的有效应力有限元分析来实现。因此,编制岩土工程有限元分析程序时,应考虑将有效应力分析程序和总应力分析程序合二为一。一个编制完备的有效应力分析有限元程序应也可用于同一岩土工程问题的总应力有限元分析。

在岩土工程分析中,有时还用总应力分析和 Terzaghi 固结理论相结合的方法来进行有效应力分析(即 Total stress analysis combined with Terzaghi's consolidation theory,以下简称 TT 法)。该法先用总应力分析法求得应力和最终变形,然后根据 Terzaghi 固结理论考虑孔压的消散以及有效应力和变形随时间的

变化。这种分析法与严格的有效应力分析法的主要区别在于，前者是将土骨架变形与孔压消散分别加以计算的，后者则考虑了土骨架变形与孔压消散之间的耦合作用。进一步的研究表明，TT 法只有对于一维问题才是精确的，而对于二维和三维问题均是近似的。究其原因，精确的有效应力分析是基于 Biot 固结理论的，而 Biot 固结理论仅对于一维问题才与 Terzaghi 固结理论一致。现对此详细说明。

先看三维问题。由广义 Hooke 定律式(1.8)可得

$$\varepsilon_v=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z)=\frac{3(1-2\mu)}{E}(\sigma_{m3}-p) \tag{1.52}$$

将其代入 Biot 三维固结方程式(1.37)或(1.39)，有

$$c_{h3}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+c_{v3}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial \sigma_{m3}}{\partial t} \tag{1.53}$$

式中

$\sigma_{m3}=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$(为三维情况下的平均总应力)

$c_{h3}=\dfrac{k_h}{\gamma_w m_{v3}}$(为水平向三维固结系数)

$c_{v3}=\dfrac{k_v}{\gamma_w m_{v3}}$(为竖向三维固结系数)

$m_{v3}=\dfrac{3(1-2\mu)}{E}$(为三维体积压缩系数)

易见，当 σ_{m3}不随时间而变，$\dfrac{\partial \sigma_{m3}}{\partial t}=0$，式(1.53)就是仅含未知数孔压 p 的 Terzaghi-Rendulic 三维固结方程，即

$$c_{h3}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)+c_{v3}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.54}$$

再看二维问题。对于常见的平面应变问题(设 x 向为荷载长度方向，即 $u=0$)，有

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=0\\ \sigma'_x&=\mu(\sigma'_y+\sigma'_z)\\ \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}&=\frac{\partial p}{\partial x}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

$$\varepsilon_v=\varepsilon_y+\varepsilon_z=\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma_z)$$

$$=\frac{2(1-2\mu)(1-\mu)}{E}(\sigma_{m2}-p) \tag{1.56}$$

则 Biot 三维固结方程式(1.35)和(1.37)即变为

$$\left.\begin{aligned}d_1\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+d_3\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 w}{\partial y\partial z}-\frac{\partial p}{\partial y}&=0\\ d_1\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+d_3\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+(d_2+d_3)\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}-\frac{\partial p}{\partial z}&=0\end{aligned}\right\} \tag{1.57}$$

$$c_{h2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+c_{v2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{1}{m_{v2}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\frac{\partial p}{\partial t}-\frac{\partial \sigma_{m2}}{\partial t} \tag{1.58}$$

方程式(1.57)和(1.58)即为 Biot 二维(平面应变)固结方程。其中：

$\sigma_{m2}=(\sigma_y+\sigma_z)/2$，为二维情况下的平均总应力；

$c_{h2}=\dfrac{k_h}{\gamma_w m_{v2}}$，为水平向二维固结系数；

$c_{v2}=\dfrac{k_v}{\gamma_w m_{v2}}$，为竖向二维固结系数；

$m_{v2}=\dfrac{2(1-2\mu)(1+\mu)}{E}$，为二维体积压缩系数。

同样可见，当 σ_{m2}不随时间而变，式(1.58)就转化为 Terzaghi-Rendulic 二维固结方程，即

$$c_{v2}\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+c_{v2}\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}=\frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.59}$$

综上所述，如果总应力在固结过程中不变，Biot 固结理论即与 Terzaghi 固结理论完全一致。但由于二、三维固结过程中土骨架变形与孔压消散的耦合效应，总应力在固结过程中是变化的，尤其在固结初期和当 Poisson 比较小时。因此，用基于 Terzaghi 固结理论的 TT 法来进行二、三维问题的有效应力分析是近似的。

总结以上固结系数的表达式，可得通式

$$\left.\begin{aligned} c_{hn}&=\frac{k_h}{\gamma_w m_{vn}}\\ c_{vn}&=\frac{k_v}{\gamma_w m_{vn}}\\ m_{vn}&=\frac{n(1-2\mu)(1+\mu)}{E[1+(n-2)\mu]}\end{aligned}\right\} \tag{1.60}$$

式中，n 为维数。

最后讨论一维问题(即 $u=v=0$)，对此有

$$\left.\begin{aligned} &\varepsilon_x=\varepsilon_y=0\\ &\sigma'_x=\sigma'_y=\frac{\mu}{1-\mu}\sigma'_z\\ &\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial x}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.61}$$

$$\varepsilon_v=\varepsilon_z=-\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma'_x+\sigma'_y+\sigma'_z)$$

$$=\frac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)}(\sigma_z-p)=\frac{\sigma_z-p}{E_s} \tag{1.62}$$

于是 Biot 三维固结方程式(1.35)和(1.37)变为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{1}{E_s}\frac{\partial p}{\partial z} \tag{1.63}$$

$$c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = E_s \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \tag{1.64}$$

此即为 Biot 一维固结方程。其中

$c_v = c_{v1} = \dfrac{k_v}{\gamma_w m_v}$，为土体(一维)固结系数；

$m_v = m_{v1} = \dfrac{(1-2\mu)(1+\mu)}{E(1-\mu)} = \dfrac{1}{E_s}$，为土体(一维)体积压缩系数。

那么，一维(垂直变形)条件下，地基中的竖向总应力 σ_z 是怎样的呢？不妨以地表($z=0$)受大面积垂直均布荷载作用的一维固结问题为例进行分析。

在大面积垂直均布荷载作用下，地基中只能产生一维竖向变形。由对称性可得，$\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$。故由平衡方程(1.26)可知，总应力 σ_z 应满足

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \tag{1.65}$$

相应的边界条件为

$$\sigma_z|_{z=0} = q \tag{1.66}$$

式中 q 为垂直均布荷载。

显然，满足方程(1.65)和边界条件(1.66)的解，即 $\sigma_z=q$。因此对于一维问题，总应力 σ_z 恒等于地表荷载 q，随 q 的变化而变化，而与土骨架变形和孔压消散的耦合效应无关。

于是，方程(1.64)可写为

$$c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\partial q}{\partial t} \tag{1.67}$$

此即逐渐加荷条件下的 Terzaghi 一维固结方程。特别当 q 不随时间变化，即转化为经典(瞬时加荷条件下)的 Terzaghi 一维固结方程，即

$$c_v \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \frac{\partial p}{\partial t} \tag{1.68}$$

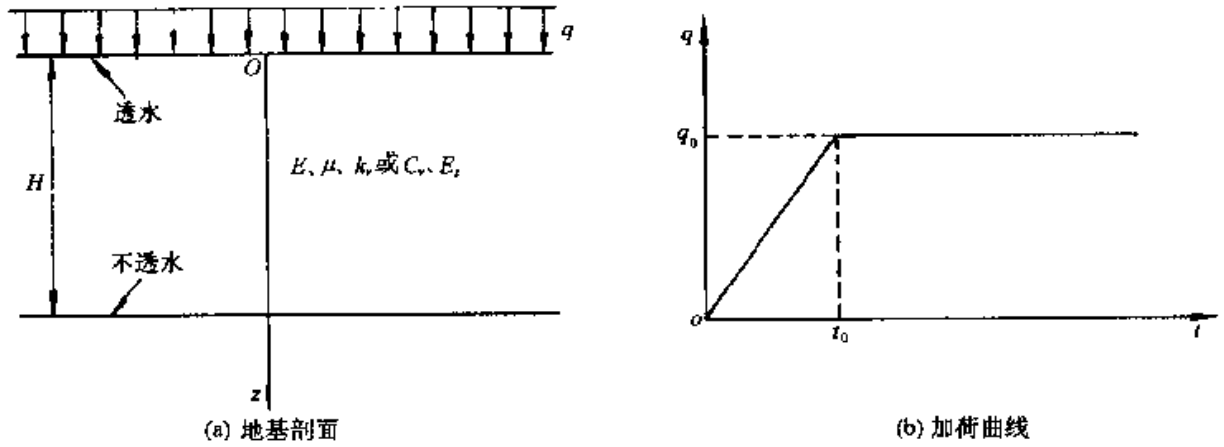
由此可见，对于一维固结问题，Terzaghi 固结方程与 Biot 固结方程完全相同，两种理论均是精确的。因此，对于一维问题，用 TT 法进行有效应力分析是精确的。

1.4 岩土工程问题数值解法的验证

如前所述，对一般岩土工程问题采用解析法求解相当困难，除极少数简单问题外一般须采用数值解法，如差分法、半解析法、有限单元法等。由于数值解法的实现往往需要编制规模较大的程序，而且其结果还受很多因素影响，因此在岩土工程分析中验证数值解法及其程序的正确与否就成为必不可少的重要环节。对于有限元分析而言，在分析实际问题前先检验有限元分析程序的正确性尤为重要。无疑，将同一问题的数值解与解析解进行比较是检验有限元等数值解法程序最简捷有效的

一种方法。

为给岩土工程问题数值解法及程序的检验提供一个较实用的考题，同时进一步说明采用总应力法和 Terzaghi 一维固结理论相结合的方法(即 TT 法)对一维问题进行有效应力分析的正确性，这里将给出用 TT 法分析图 1.4 所示典型一维固结问题即单级等速施加的大面积竖向均布荷载作用下单层均质地基压缩问题的实例及完整的解析解答。



(a) 地基剖面　　(b) 加荷曲线

图 1.4　典型的一维固结问题

图 1.4 中 H 为土层厚度；q 为地表均布荷载；t_0 为加荷历时；q_0 为最终荷载。q 的数学表达式为

$$q=\begin{cases}\dfrac{q_0}{t_0}t & t\leqslant t_0 \quad (\text{加荷期})\\ q_0 & t\geqslant t_0 \quad (\text{持荷期})\end{cases} \tag{1.69}$$

先用总应力分析法求最终(即主固结终了时，此时总应力与有效应力相等)应力和竖向位移。

注意到对于一维问题，水平向位移 u、v(或应变 ε_x，ε_y)恒为零，剪应力 τ_{zy}、τ_{yx}、τ_{xz} 恒为零，则由前述求总应力 σ_z 的类似方法，不难求得最终法向应力 $\sigma_{z\infty}$、$\sigma_{x\infty}$、$\sigma_{y\infty}$，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{z\infty}&=q_0\\ \sigma_{x\infty}&=\sigma_{y\infty}=k_0q_0\end{aligned}\right\} \tag{1.70}$$

其中，$k_0=\dfrac{\mu}{1-\mu}$，为静止土压力系数。

而由一维问题的几何方程 $\varepsilon_z=-\dfrac{\partial w}{\partial z}$，总应力分析物理方程 $\varepsilon_z=\dfrac{\sigma_z}{E_s}=\dfrac{q}{E_s}$，及位移边界条件 $w|_{z=H}=0$，可求得土层中任一点的最终竖向变形 w_∞，即

$$w_\infty=\frac{q_0}{E_s}(H-z) \tag{1.71}$$

再根据 Terzaghi 固结方程(1.67)求孔压。相应的求解条件为

$$\left.\begin{aligned} &p|_{z=0}=0 && \text{(顶面排水条件)}\\ &\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=H}=0 && \text{(底面不排水条件)}\\ &p|_{t=0}=\sigma_z|_{t=0}=q|_{t=0}=0 && \text{(初始条件)} \end{aligned}\right\} \tag{1.72}$$

由偏微分方程理论可得解为

$$p=\begin{cases} q_0\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)(1-e^{-M^2T_v}) & t\leqslant t_0 \quad (1.73a)\\ q_0\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v}(e^{M^2T_{v0}}-1) & t\geqslant t_0 \quad (1.73b) \end{cases}$$

其中：$T_v=\dfrac{c_vt}{H^2}$，为时间因子；

$$T_{v0}=\frac{c_vt_0}{H^2}\quad M=\frac{\pi}{2}(2m-1)\quad m=1,2,\cdots。$$

由孔压 p 可进一步得对最终荷载 q_0 而言的任一深度 z 处的固结度 U_z 和任一深度 z 以下土层(厚度为 $H-z$)的平均固结度 U，即

$$U_z=\frac{q-p}{q_0}=\begin{cases} \dfrac{T_v}{T_{v0}}-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)(1-e^{-M^2T_v}) & t\leqslant t_0 \quad (1.74a)\\ 1-\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v}(e^{M^2T_{v0}}-1) & t\geqslant t_0 \quad (1.74b) \end{cases}$$

$$U=\frac{1}{q_0}\left[q-\frac{1}{H-z}\int_z^H p\,\mathrm{d}z\right]$$

$$=\begin{cases} \dfrac{T_v}{T_{v0}}-\dfrac{H}{H-z}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^4T_{v0}}\cos\left(\dfrac{Mz}{H}\right)(1-e^{-M^2T_v}) & t\leqslant t_0 \quad (1.75a)\\ 1-\dfrac{H}{H-z}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^4T_{v0}}\cos\left(\dfrac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v}(e^{M^2T_{v0}}-1) & t\geqslant t_0 \quad (1.75b) \end{cases}$$

当 $t_0\to 0$(即荷载瞬时施加)，式(1.73b)就转化为经典的 Terzaghi 一维固结解[满足 Terzaghi 一维固结方程(1.68)]，即

$$p=q_0\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M}\sin\left(\frac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v} \tag{1.76}$$

类似地，在式(1.75b)中令 $t_0\to 0$，$z=0$，该式就转化为熟知的瞬时加荷条件下 Terzaghi 平均固结度计算式，即

$$U=1-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{2}{M^2}e^{-M^2T_v} \tag{1.77}$$

最后，由 $\sigma_{z\infty}$、U_z 可得任一点任一时刻的有效应力

$$\sigma'_x=\sigma'_y=k_0\sigma'_z \tag{1.78a}$$

$$\sigma'_z = \sigma_{z\infty}U_z = \begin{cases} q_0\left[\dfrac{T_v}{T_{v0}} - \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)(1-e^{-M^2T_v})\right] & t \leqslant t_0 \quad (1.78b) \\ q_0\left[1 - \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^3T_{v0}}\sin\left(\dfrac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v}(e^{M^2T_{v0}}-1)\right] & t \geqslant t_0 \quad (1.78c) \end{cases}$$

显然，有效应力也可利用有效应力原理由孔压解式(1.73)得到，即 $\sigma'_z = \sigma_z - p = q - p$。

而由 w_∞ 和 U 可得任一点任一时刻的竖向变形

$$w = w_\infty U = \begin{cases} \dfrac{q_0}{E_s}(H-z)\left[\dfrac{T_v}{T_{v0}} - \dfrac{H}{H-z}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^4T_{v0}}\right. \\ \qquad \left.\cos\left(\dfrac{Mz}{H}\right)(1-e^{-M^2T_v})\right] & t \leqslant t_0 \quad (1.79a) \\ \dfrac{q_0}{E_s}(H-z)\left[1 - \dfrac{H}{H-z}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{2}{M^4T_{v0}}\right. \\ \qquad \left.\cos\left(\dfrac{Mz}{H}\right)e^{-M^2T_v}(e^{M^2T_{v0}}-1)\right] & t \geqslant t_0 \quad (1.79b) \end{cases}$$

式(1.73)、(1.78)和(1.79)即为用 TT 法对图 1.4 所示一维问题进行有效应力分析所得的全解。

如用 Biot 固结理论分析图 1.4 所示一维固结问题，则需求解 Biot 一维固结方程式(1.63)和(1.64)。不难验证，由 TT 法所得解，即如式(1.73)和(1.79)所示的孔压 p 和位移 w 完全满足该二方程，这就再次证明用 TT 法分析一维问题是精确的。

易见，求解 Biot 一维固结方程要比求解 Terzaghi 一维固结方程难度大。因此，对于一维问题的有效应力分析，宜首选 TT 法，只有对于二、三维的有效应力分析，才有必要采用 Biot 固结理论。

上述解显然可作为验证岩土工程问题数值解法程序的基本解之一。特别是编制有效应力分析有限元程序，尤应将图 1.4 所示问题作为基本考题之一，当计算结果与式(1.73)、(1.78)和(1.79)所示的精确解一致，才能认为该程序是基本可靠的。

参 考 文 献

[1] M. A. Biot. General theory of three dimensional consolidation. J. App. Physics, Vol. 12, 1941

[2] R. W. Clough. The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proc. 2nd ASME Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., 1960

[3] Clough, Chopra. Earthquake Stress Analysis in Earth Dams. JEMD, ASCE, EM2, 1966

[4] 龚晓南. 土工计算机分析. 中国建筑工业出版社, 2000

[5] 黄文熙. 土的工程性质. 水利电力出版社, 1983

[6] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 中国水利水电出版社, 1996

[7] R. S. Sandhu & E. L. Wilson. Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media. JEMD. ASCE,

Vol. 95, No. EM3, 1969
[8] 沈珠江．用有限单元法计算软土地基的固结变形．水利水运科技情报，第1期，1977
[9] 谢康和．砂井地基：固结理论、数值分析与优化设计．浙江大学博士学位论文．1987
[10] 谢康和．双层地基一维固结理论与应用．岩土工程学报，第16卷 第5期，1994
[11] 朱百里、沈珠江等．计算土力学．上海科学技术出版社，1990
[12] O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung (张佑启). Finite Element Methods in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill Co., New York, 1967

第二章　岩土工程问题的边界条件

2.1　概　　述

在利用有限元法求解力学问题时，不可能将所讨论的问题看作是一个无限大的场，而必须设置一定的边界条件，亦即必须把实际上近于无限的计算域用某一人为边界截断，取一有限大小区域进行离散化。换言之，必须在给计算体设置一定约束的基础上，才可以对平衡方程进行求解。从数学的角度讲，边界条件可以分为齐次和非齐次两种边界条件，前者表示边界结点的某个自由度完全地受到约束，亦即沿该自由度方向的场变量为零；而非齐次边界条件表示边界结点的某个自由度的场变量为给定值而不为零。

对于静力问题而言，边界条件相对较为简单，而对于动力问题，由于土的成层性、波在界面上的反射和透射及动荷载类型等因素的影响，应力波传到边界时常发生反射，从而给计算结果带来不容忽视的误差。如果采用一般的截断边界，为了使计算不失真，就必须增大截断的范围，从而使计算工作量大大增加。为此，必须引入人工边界，通过推导合理的边界条件来反映未划入网络的土体。事实上，对地基无限边界的处理是有限元法求解动力问题的重要步骤，处理的好坏直接影响到计算的精度。一般地，除了模拟其刚度外，人工边界还必须避免任何向外传播的波的反射。这样，边界条件在概念上可以理解为通过消除网络边界以外直到无限远处土体的动力自由度而得到。人工边界的位置除了取决于所加边界条件的类型外，还受土体材料阻尼大小、频率范围、波速以及激励持续时间的影响。因而，动力何题中的边界问题是一个十分重要的问题，必须给予足够的重视。

关于岩土工程三维静力问题的边界条件，第一章曾作了介绍。本章除对静力边界问题进行一定的补充和讨论外，重点对土动力学问题中的若干典型的边界问题进行概括和总结。

2.2　静力问题的边界条件

2.2.1　静力边界条件的概念

在利用有限元法进行计算时，必须引入相应的边界条件。只有在满足所有的边界条件时，才能得以求解，否则总系数矩阵是奇异的，其逆阵不存在。边界条件可以

分为齐次边界条件和非齐次边界条件两种。齐次边界条件表示边界结点的某个自由度完全地受到约束，亦即沿该自由度方向的场变量为零。只要把与该自由度有关的行和列从总特性矩阵中划去，就表示已考虑了这一边界条件。

在总刚度矩阵中可以用分块矩阵的方式表示非齐次边界条件。假定用$\{u_1\}$表示没有受到约束而将产生位移的内部结点自由度，而$\{u_2\}$为完全受到约束的边界结点自由度。则用分块矩阵来表示的体系平衡方程为

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \\ R \end{Bmatrix} \tag{2.1}$$

或

$$\left.\begin{aligned} K_{11}u_1 + K_{12}u_2 &= P \\ K_{21}u_1 + K_{22}u_2 &= R \end{aligned}\right\}$$

由于$\{u_2\}=0$，于是有

$$\{u_1\} = [K_{11}]^{-1}\{P\} \tag{2.2}$$

$$\{R\} = [K_{21}][K_{11}]^{-1}\{P\} \tag{2.3}$$

式中，$\{u_2\}=0$为齐次边界条件，而$\{R\}$为保证边界上某些位移等于零而施加的反力。由于只需求解那些不等于零的位移量，故而有效方程组的数目可大大减小。

非齐次边界条件表示一个边界结点沿某自由度的场变量为给定值，但不等于零。处理这种边界条件在于把总特征矩阵中相应主对角元加个大数(如10^{12})，同时把相应的右端项改为场变量的已知值乘以相同的大数。

2.2.2 渗流问题中的边界条件

岩土工程中进行渗流计算的主要目的是为了求得渗流量的孔隙水头或水力坡降。自1965年Zienkiewicz[13]引入有限单元法以后，有限单元法已成为求解渗流问题的有效方法之一。

渗流边界条件可以分为两类，即已知水头边界(第一类边界)和已知流量边界(第二类边界)，分别可以表示为

$$\left.\begin{aligned} &\Gamma_1 \qquad h = \tilde{h} \\ &\Gamma_2 \qquad k\frac{\partial h}{\partial n} = -\tilde{q} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

式中：符号～代表已知值；n为法向尺度。

但在渗流计算中，对于自由面渗流问题，其边界条件需进行特殊处理。

以有压渗流问题为例说明其边界问题的考虑。如图2.1所示，边界ab和ef为第一类边界，cd和fa为第二类边界。当bc和de离所讨论的问题较远时，则既可作为第一类边界，也可作为第二类边界。设n_i为计算域内部结点数，nb_1和nb_2分别为第一类和第二类的结点数，$n_t=n_i+nb_2$，则渗流问题的有限元公式可以表示为

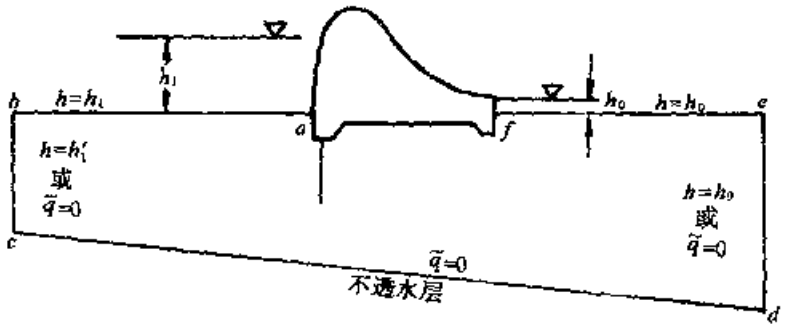


图 2.1 有压渗流条件下的边界条件

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}^{33} h_j = f_i^3 \tag{2.5}$$

考虑 $n=n_t+nb_1$，并去掉角标后，该写为

$$\sum_{j=1}^{n_t} k_{ij} h_j = f_i - \sum_{j=1}^{nb_1} k_{ij} n_j \tag{2.6}$$

式中，f_i 为 i 结点的净流出水量，对已知入渗量的边界点 f_i 是给定的，而对内部结点和不透水边界点均为零。

当求出水头以后，通过单元中某一截面的渗流量按下式计算：

$$Q = -k_x l_z \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial N_i}{\partial x} h_i - k_z l_x \sum_{i=1}^{n_p} \frac{\partial N_i}{\partial x} h_i \tag{2.7}$$

式中：n_p 为单元内结点数；l_x 和 l_z 为计算截面在 x 轴和 z 轴上的投影。

总流量一般用中间截面法进行计算，即在单元形态比较规则的地方通过各单元中间连一截面，然后把各单元算出的流量累加起来。

2.2.3 固结分析中的边界条件

在 Biot 固结分析中，结点自由度有两类：一类为结点位移自由度；另一类为结点孔隙水压力自由度。边界条件也包括两大类：一类为结点位移边界条件，另一类为结点孔隙水压力边界条件。固结分析中的位移边界条件的类型及处理方法与一般弹性力学问题的有限单元法中的边界条件完全一样，但同时还必须增加孔隙水压力边界条件。

以平面问题为例来讨论位移边界条件。这里，结点的位移自由度有两个，即水平向自由度和竖向自由度。对某一自由度，结点的位移条件(或称约束条件)有下面的几种情况：完全约束条件，即位移等于零；结点位移值等于某一已知值；没有约束，结点可以产生自由位移；介于完全约束和没有约束之间。

对比上述的位移边界条件，孔隙水压力边界条件也有四种：一种是完全透水边界条件，结点孔隙水压力为零，例如处在地表面上的结点或粘土层和砂土层上界面上的结点；第二种为结点孔隙水压力等于某一已知值，例如真空预压中部分边界结

点孔隙水压力值保持真空值不变；第三种为完全不透水边界条件，例如对称轴上的结点或粘土层与岩石地层界面上的结点；第四种为介于完全透水与完全不透水之间，或称为半透水边界条件，考虑到半透水边界条件在计算处理时比较麻烦，故一般根据具体情况，常将该类边界条件简化为完全透水或完全不透水边界条件。当边界截取范围较大时，这样处理对一些主要区域的计算结果影响不大。土层均匀向外延伸而被截取的边界上的位移边界条件也与孔隙水压力边界条件类似，常被处理成完全约束(固定铰支座)，或一个方向完全约束而另一个方向产生位移(活动铰支座)。上述四种情况的前两种均属于结点孔隙水压力为已知值的情况。

对结点位移和结点孔隙水压力为已知的情况，可以有两种处理方法：(1)仍给以自由度编号，但在求解代数方程式时把解得的位移值用已知值置换；(2)已知值对应的自由度均编为零，从而把代数方程区分为

$$\begin{bmatrix}[A_{11}] & [A_{12}]\\ [A_{21}] & [A_{22}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ \tilde{x}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}b_1\\ b_2\end{Bmatrix} \tag{2.8}$$

式中，$\tilde{x}_2$ 为已知的边界值。计算时只对 x_1 建立方程式，即

$$[A_{11}]\{x_1\}=\{b_1\}-[A_{12}]\{\tilde{x}_2\} \tag{2.9}$$

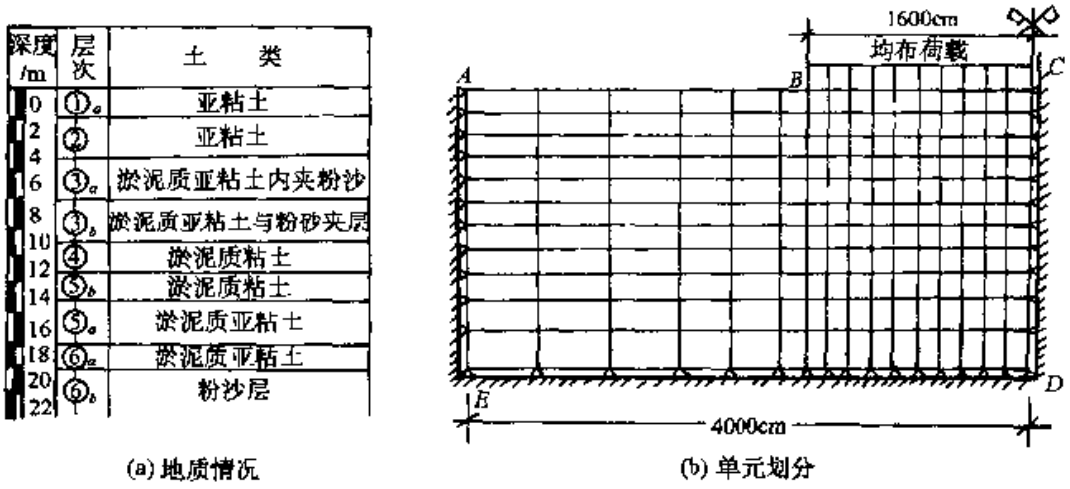
其中，$[A_{12}]\{\tilde{x}_2\}$ 项在对各单元进行计算时即可求出。在多数情况下，已知的边界值均为零，则式(2.9)可简化为

$$[A_{11}]\{x_1\}=\{b_1\} \tag{2.10}$$

地基固结分析时，边界条件的确定主要根据地基的地质构造、对称条件以及地面情况等确定。以油罐地基的固结分析为例来加以说明(如图 2.2)，油罐的半径为 R，计算土层半径为 L，计算深度为 H。对于如图 2.2 所示的问题，经初步计算，当 $L/R>4.5$ 时，计算土层范围的扩大对其沉降的影响已经很小，故可认为上述范围即为圆形荷载在半无限空间均质地基上的影响范围[9]。然而，该地基深度 20m 以下砂层的变形模量比砂层上软粘土层大得多，故计算土层取为 20m，相应计算宽度取 40m 即可满足要求。观测资料表明，图 2.2 中 A 点附近侧向位移和沉降基本上为零。所以，地质构造对土层计算范围的确定是很重要的。

对于上述问题，位移边界条件可以分为四种情况：在 AB 范围内，水平向和竖向均可产生自由位移；在 BC 范围内，考虑油罐环基的围箍作用以及土与油罐底板间的摩擦力，竖向可自由位移，而水平向为位移约束条件；在 CD 范围内，由于其处在对称轴上，故其竖向可自由位移而水平向位移为零；在 DE 和 AE 范围内，考虑土层间的粘聚力和摩擦力，简化为固定铰支座，即水平向和竖向位移均为零。

对于孔隙水压力可分为两种情况。在 AB、BC 和 DE 范围内为完全透水边界，AB 段为地表面，孔隙水压力为零。BC 段处于油罐底，铺有碎石砂垫层。DE 面为粘土层与砂层的分界面。CD 和 AE 为不透水边界。CD 为对称轴，为不透水边界。需要指出，取 AE 面为不透水边界是一种简化的处理方法。



(a) 地质情况　　(b) 单元划分

图 2.2　计算范围和边界条件的确定

对于刚性基础，一般需要考虑基础以及上部结构刚度对地基固结的影响，亦即要考虑地基、基础与上部结构的共同作用。在地基和基础接触的界面上设置界面单元。基础对地基固结的影响可按一些简化的方法来加以处理。例如，在基础中也划分单元，按模量很大的弹性材料来处理。基础与地基接触面上的结点满足位移协调条件，即认为地基与基础在变形中不分离。此外，还可以把接触面上各结点的位移自由度编成同一号，即保证计算过程中各点的位移完全一致。对于可以转动的刚性接触边界，则可以用刚度变位的自由度替换接触面上的位移自由度。设$\{x_2\}$为刚性接触面上的自由度，$\{x_1\}$为其它自由度，$\{x_3\}$为刚体变位的自由度。如果$\{x_2\}$与$\{x_3\}$之间有关系

$$\{x_2\} = [R]\{x_3\} \tag{2.11}$$

则式(2.8)可以改写为

$$\begin{bmatrix}[A_{11}] & [A_{13}]\\ [A_{31}] & [A_{33}]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x_1\\ x_3\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}b_1\\ b_3\end{Bmatrix} \tag{2.12}$$

其中，$[A_{31}]=[R]^T[A_{21}]$，$[A_{33}]=[R]^T[A_{22}][R]$，$\{b_3\}=[R]^T\{b_2\}$。

作这样的处理可以避免在两种模量相差过大的刚性构件中划分单元时而导致产生较大的计算误差。

2.3　动力问题的边界条件

2.3.1　基本类型

根据动力荷载性质，土动力学问题大致可以分为两大类：

(1) 动力荷载作用于局部土面，地基的边界无限，如机器基础、地面或地下爆炸等，如图 2.3 所示。这类问题称为源问题，这类问题的近域表面荷载$\{F\}$已知，动

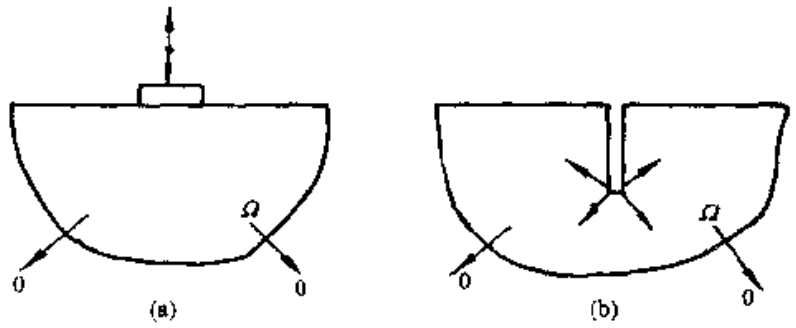


图 2.3　局部的振动或冲击荷载

力反应$\{u\}$应向远域逐步衰减。

(2) 远域传来的边界位移$\{u_0\}$或边界加速度$\{\ddot{u}_0\}$已知，而近域的表面无荷载，如地震荷载的作用情形(图 2.4)。

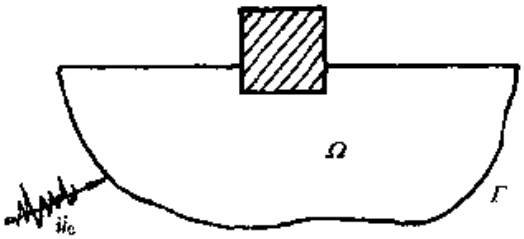


图 2.4　地震荷载作用下的边界条件

目前的抗震计算中，大多采用地震波的均匀输入法，即假定地基中截断的边界面Γ上各点的地震加速度在同一时刻是相同的，即将建筑物看作是置于很大的震动台上振动一样。此时，令$\{\bar{u}\}$为计算域各点对边界Γ的相对加速度，则$\{\ddot{u}\}+\{\ddot{u}_0\}$，$\{\dot{u}\}+\{\dot{u}_0\}$和$\{u\}+\{u_0\}$为绝对加速度、速度和位移。考虑到$\{F\}=0$和刚性位移条件下$[C]\{\dot{u}_0\}=0$，$[K]\{u_0\}=0$，则平衡方程变为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=-[M]\{\ddot{u}_0\} \tag{2.13}$$

上式表明，根据运动相对性原理，地震问题可以化为边界静止不动面在计算域各点上作用着惯性力的问题进行计算。

动力问题的边界条件可以划分为以下几类：

(1) 截断边界。

对于土性较软弱的地基，反射波能在土体中很快消散，因此可以采用同静力计算一样的方法，在离建筑物一定距离处(一般可视具体情况选择 5～10 倍建筑物直径处)将土体截断建立边界条件，并设置刚性支撑或自由变形结点等。此外还可采用在邻接边界的几个单元中人为增大阻尼系数的方法。上述这种设置边界的方法，虽然有一定的误差，但对于某些特殊情况(如软弱土层)仍有一定的使用价值。

对于远置人工边界，在处理弹性波在向无限介质的能量逸散时，通常采用固定边界取$\{u\}_b=0$，或自由边界取$\{F\}_b=0$。这里，角标b表示在人工边界上取值，$[F]_b$为边界外介质在运动过程中作用在边界节点上的力向量；这样的边界对传来的波起着完全反射的作用，既不传播能量也不吸收任何能量。在动力体系中，这些被限制的能量会导致结果的严重失真。为了使这种人为给定的边界对计算结果不产生任何影响，就要求固定边界和自由边界应取得离结构足够远，一般对时域解法要求

满足

$$D \geqslant \frac{1}{2} G_{\max} T \tag{2.14}$$

式中：D 为人工边界离开结构边缘的最近距离；$G_{\max}$ 为介质内的最大波速；T 为计算总时间长度。

而对于频域解法，Clayton[10]用二维 SH 模型证明，即使只有底面取作刚性边界且取 $h=10d$ 时，也得不到满意的结果。这里，h 为刚性边界的深度，d 为结构基础的特征长度。

(2) 粘滞边界。

设置粘滞边界可以考虑由于波能逸散而引起的能量损失对土体动力性质的影响，相对于简单的截断边界，粘滞边界可以采用较小的计算区域。其主要思路是：在人工边界上设置阻尼器，以吸收外传波的能量，即沿计算区域的边界人为施加两个方向的粘性阻尼分布力，再把这种分布力转化为等价的边界结点集中力，以分别求出各结点的法向和切向阻尼力。此法由 Lysmer 等[11]提出，他们认为边界反作用法向应力 σ 和切向应力 τ 与边界水平位移 u 及竖向位移 w 的速度有如下的关系：即对水平底部边界有

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= a_H \rho v_p \dot{w} \\ \tau &= b_H \rho v_s \dot{u} \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

对竖向侧部边界有

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= a_v \rho v_p \dot{w} \\ \tau &= b_v \rho v_s \dot{w} \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

式中：$\dot{w}$ 和 $\dot{u}$ 分别为沿边界法向和切向的速度分量；v_p 和 v_s 为入射的压缩波和剪切波波速；a_H、b_H、a_v 及 b_v 为无量纲参数。

研究表明，对辐射在边界上的 P 波、S 波和 R 波，各参数均可取 1，此时相应的粘性边界可称为标准粘性边界。由于参数等取值为 1，与频率无关，因此标准粘性边界可用于谐和振动，也可用于非谐和振动。

对于辐射在竖向边界上的 Rayleigh 波(R 波)，若是谐和振动问题，则可导得一种完全吸收能量的参数 a_v 和 b_v 的表达式，即

$$\left.\begin{aligned} a_v &= a_v\left(\frac{\omega}{v_R} z\right) \\ b_v &= b_v\left(\frac{\omega}{v_R} z\right) \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

式中：ω 为谐和振动圆频率；v_R 为 R 波波速；z 为边界点的深度。

研究表明，当 z 大于 R 波波长的一半时($\omega z/v_R > \pi$)，参数 a_v 和 b_v 将趋于一常数 1。此时，式(2.17)表示的 a_v 和 b_v 相应的粘性边界可称为 Rayleigh 波边界。

粘性边界物理概念明确，处理方法简单。但为了保证一定的精度，粘性边界与

基础之间的距离需取得足够大(如取 R 波波长的 3/4 或 1/2)。但也有学者指出,当激振频率 ω 较高时,距离可取得小一些,单元最大边尺寸一般应小于 R 波波长的 1/12。

采用粘滞边界时,当入射波与边界接近垂直时,计算精度较高;而当入射波与边界接近平行时,计算精度却很差,所以此时有限元网格也不宜取得过小。

(3) 一致边界或透射边界。

如果在动力波传播的无限区域中,切出一块有限大小的计算域来,则在截面上应存在计算域和被切除部分间的作用力,此解的基本思想就是把这一作用力首先计算出来加在计算域的边界上,从而使计算的结果与原来未切开的无限域的解答一致。

然而,在动力分析前想求出截面边界上的作用力并非易事,一般情况下只有在动力方程完全解出后才有可能。因此,实际上这种方法只能针对某些特定问题求得作用力的近似解。Lysmer 和 Waas 针对刚性基岩上成层土水平传播的 Rayleigh 波推导了侧面边界上的作用力与边界位移的关系,即相当的弹性系数矩阵。由于这一矩阵也与频率有关,故此方法一般也只能在频率域中求解。

一般而言,透射边界的物理概念明确,透射效果好,计算简单,且很容易与有限元等数值解法相结合,近年来得到较大的发展。廖振鹏[17]在上述基本概念的基础上,提出了多重透射边界的概念,是一个十分有效的计算方法。

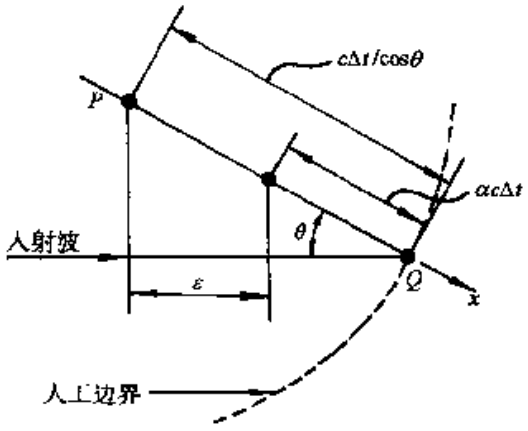


图 2.5 透射边界示意图

如图 2.5 所示,假定波位于人工边界所包围的计算域内,向边界上一点 Q 入射的波沿 x 轴的视传播可一般表示为

$$u(t,x)=\sum_{i=1}u_i(t,x) \tag{2.18}$$

其中

$$u(t,x)=u_i^*(c_it-x\cos\theta_i)$$

式中,$u(t,x)$表示波场总位移矢量的某一分量,它由一系列沿 x 轴以视速度 $c_i/\cos\theta_i$ 传播的行波 $u_i^*(c_it-x\cos\theta_i)$组成。对于平面体波 $u_i^*(*)$,在每一介质层内,c_i 为该层的压缩或剪切波波速。

每一行波 $u_i(t,x)$的透射分式为

$$u_i(t+\Delta t,x)=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+1}C_j^Nu_i[t-(j-1)\Delta t,x-j\alpha_ic_i\Delta t] \tag{2.19}$$

式中,N 为透射阶次。

引入人工透射波速,取 $c_A=\alpha_ic_i$,则可得统一的透射公式,即

$$u_i(t+\Delta t,x)=\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+1}C_j^Nu_i[t-(j-1)\Delta t,x-jc_A\Delta t] \tag{2.20}$$

(4) 有限元和无限元或边界元相结合。

有限元和无限元或边界元相结合的方法，目前已成为处理无限区域动力问题边界条件的一种重要方法。由于一般的动力问题都是近波源能量和变形较大，而离波源较远处由于能量衰减通常变形较小，所以在动力分析中，计算区域的中心必须考虑土体的非均质性、非线性及地形的不规则性，适合于有限单元法进行计算。而远域由于变形较小，可看作弹性介质，一般不会引起太大的误差，所以可用无限元或边界元进行离散以描述波向无限远处传递的辐射边界条件。一般说来，对于局部荷载的源问题用边界元较好[Brebbia(1982)]，而地震反应问题则最好用无限元法[赵崇斌(1987)]。

需要指出，上述几种方法一般只适用于在频率域中求解，而对于需要在时间域中求解的真正非线性问题，除了把边界取得尽可能远一些以外，目前还没有更合适的办法。

除了上述边界外，还有非反射边界、旁轴近似和一致传递边界等，可参阅有关文献。下面对一些典型的边界条件进行介绍，并对相关问题进行讨论。

2.3.2 透射边界条件

(1) 透射边界。

建立虚拟人工边界最好的办法是直接在边界上模拟波从有限模型的内部穿过人工边界向外透射的过程。本节将以紧凑的形式给出可以直接用于有限元计算的透射人工边界条件[20]。人工边界离散节点在下一时刻的运动，可以用邻近的内部离散点在现在时刻及较前若干时刻的运动确定。由于透射公式中涉及的计算点与离散模型的节点往往不重合，为了将透射公式直接用于有限元计算，必须用插值方法将它改写成用离散模型结点运动表示的形式。如果用二次内插方式，透射公式可以写成

$$U_J^{p+1}=\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}C_n^N\,\overline{T}\,\overline{U}_n \tag{2.21}$$

式中：正整数 N 称为透射阶数；U_J^{p+1} 表示人工边界结点 J(图 2.6)在 $t=(p+1)\Delta t$ 时刻的位移，简称结点 J 在 $p+1$ 时刻的位移，Δt 为时间步距，p 为正整数。

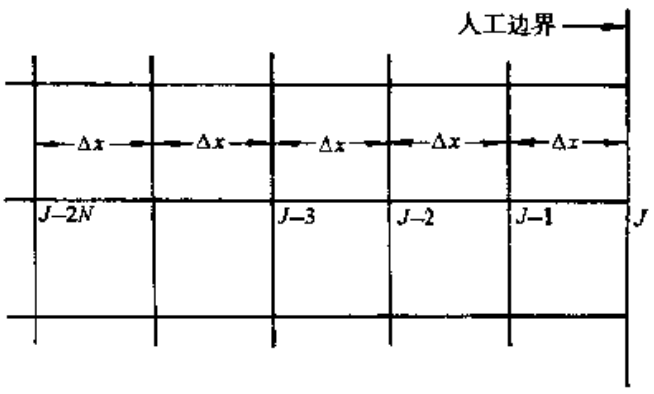


图 2.6 人工边界结点及结点编号

列向量 $\overline{U}_n$ 表示结点 J 及与结点 J 相邻的结点在 $p-n+1$ 时刻的位移，即有

$$\overline{U}_n = [U_J^{p-n+1}, U_{J-1}^{p-n+1}, \cdots, U_{J-2n}^{p-n+1}]^T \tag{2.22}$$

而行向量可以表示为

$$\overline{T}_n = [T_1, T_2, \cdots, T_{2n+1}] \tag{2.23}$$

其中，$T_1, \cdots, T_{2n+1}$ 为人工波速度 c_a 和离散参数 Δt 和 Δx 的函数。

二项式系数可以写为

$$C_n^N = N!/((N-n)!n!) \tag{2.24}$$

式(2.21)可以容易地合并到有限元计算中以模拟向量波(平面内波动或三维波动)或标量波(SH 波或声波)的传播。为此，仅需令式(2.21)中涉及的结点位于人工边界的法线上。对于向量波情形，式(2.21)中 U_J^{p+1} 应理解为位移向量的一个分量，其收敛性已得到了证明，误差的量级为 $O((\Delta x/\lambda)^N)$ 或 $O((\Delta x/T)^N)$，其中 λ 和 T 分别为简谐平面波的波长和周期。因此，透射人工边界式(2.21)的精度可以和任何有限元法的精度相匹配。

(2) 透射边界的稳定性。

现讨论振荡失稳的主要特征。设人工边界节点的坐标为 $x=J\Delta x$，则计算区为 $[0, J\Delta x]$，离散模型由结点 $O, 1, \cdots, J$ 构成。给定结点 O 的输入运动，在零初始条件下任一结点在任一时刻的运动可以通过逐步积分式(2.21)和(2.24)获得。图2.7中给出了人工边界结点运动的数值计算结果，表明失稳从人工边界开始并向计算区内传播。失稳现象的主要特征可以归结为：①震荡失稳现象是常见的，但并不是必然出现的，如图 2.7(b)；②失稳具有振荡形式，失稳振荡的频率低于但接近于截止频率；③透射阶数愈高，则失稳愈早。

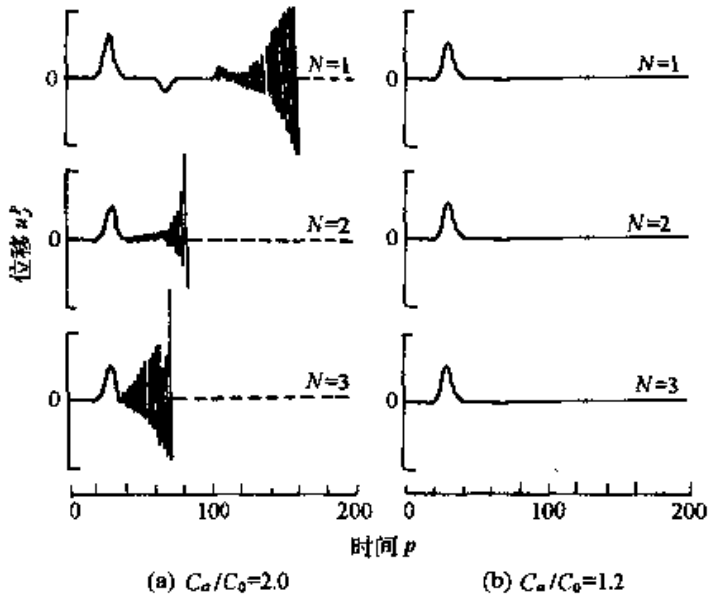


图 2.7　一维有限离散模型人工边界结点运动的数值解

($J=20, \Delta x=20\text{m}, \Delta t=0.01\text{s}, C_0=2000\text{m/s}$)

在有限离散模型中波动例如给定计算区端点 O 的运动的多次反射是不可避免的。由此产生的波动将向人工边界传播。当入射波到达结点 J 时，由于透射公式(2.21)的误差将产生一个左行的反射波，这一反射波将向结点 O 入射。由于结点 O 的运动是给定的，对于这一入射波结点 O 如同固定边界，结点 O 产生的右行反射波将再次向人工边界入射。由此造成了波在有限模型中的反复反射。由于波在离散模型中传播时满足数值积分稳定性准则，因此，振荡失稳的原因只能与波在边界上的反复反射有关。有限离散模型一般有两种边界，即物理边界和人工边界。前者不产生反射，故这里只讨论后者。

定义人工边界反射系数为

$$R_J = U_J^R / U_J^I \tag{2.25}$$

其中，U_J^I 和 U_J^R 分别为入射和反射波在人工边界结点 J 的位移幅值。

稳定性条件可以写成

$$|R_J| \leqslant 1 \tag{2.26}$$

如果上式不成立，则波动在人工边界的每次反射均将导致增大有限模型内包含的全部能量的结果。由于波的反复反射，有限模型中的总能量将迅速增大，并导致失稳。反之，则模型中总能量不可能变为无穷大，数值计算也将是稳定的。因此，如果离散模型中节点的运动完全由行进的波动产生，则式(2.26)是保证暂态波数值计算稳定性的充分和必要的物理条件。

1) 反射系数 R_J 的概念。

将波从波源节点 O 出发，经由人工边界节点 J 反射，再返回到节点 O 的过程称为一个波动循环。下面将阐明在每一循环中人工边界的反射。

在第 m 个波动循环中节点 j 的总位移幅值 $U_j(M)$ 可以表示成

$$U_j(m) = U_j^I(m) + U_j^R(m) \qquad j = 0,1,\cdots,J \tag{2.27}$$

其中，$U_j^I(m)$ 和 $U_j^R(m)$ 分别表示在第 m 个循环中入射波和反射波在节点 j 的位移幅值。

根据半无限离散模型的精确解，可得

$$U_j^I(m) = a^{J-j} U_J^I(m) \tag{2.28}$$

$$U_j^R(m) = a^{J-j} U_J^R(m) \tag{2.29}$$

和

$$a = \exp\left(i\omega \sin^{-1} \frac{((\omega/\omega_u)\sin^{-1}\Delta\tau)}{\Delta\tau}\right) = -1/\rho \qquad \begin{matrix} 0 \leqslant \omega \leqslant \omega_u \\ \omega_u \leqslant \omega \leqslant \omega_N \end{matrix} \tag{2.30}$$

根据式(2.27)～(2.29)和(2.21)可得人工边界结点 J 的反射系数

$$R_J = -f^N \tag{2.31}$$

$$f_1 = \frac{1 - d_I \exp(-i2(\omega/\omega_u)\sin^{-1}\Delta\tau)}{1 - d_R \exp(-i2(\omega/\omega_u)\sin^{-1}\Delta\tau)} \tag{2.32}$$

$$\left.\begin{aligned} d_I &= t_1 + t_2 a + t_3 a^2 \\ d_R &= t_1 + t_2 a^{-1} + t_3 a^{-2} \end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

式中，t_1、t_2 和 t_3 是 $c_a\Delta t/\Delta x$ 的函数。系数 f 是表征人工边界基本特征的重要参数，称之为反射因子。

式(2.31)明确地揭示了透射阶数 N 对 R_J 的影响。人工边界的误差通常用反射系数 R_I 来表示。应该指出，这里给出的反射系数[20]不同于以往定义的反射系数。在以往的研究中，一些重要的因素，包括时空离散化的影响、实现透射公式所需的插值方法的影响以及反射波对人工边界条件中涉及的总位移的贡献等被忽略了。由式(2.31)和(2.32)给出的反射系数考虑了所有这些因素的影响，因而真实地反映了在时域计算中人工边界的反射。

2) 有限离散模型的精确解。

为了得到有限离散模型中运动的精确解，还需考虑由物理边界节点 O 引起的反射。当波动由一个循环转为下一个循环时，节点 O 相当于固定端。根据这一边界条件，由半无限离散模型的精确解可以得到第 $m+1$ 和第 m 波动循环中节点 J 入射波位移振幅之间的如下递推关系：

$$U_J^I(m+1) = a^{-2J} f^N U_J^I(m) \tag{2.34}$$

经过 M 次循环后，节点 j 的总位移可以通过叠加前 M 次循环的全部位移得到，即可以表示为

$$U_j(M) = \frac{(1 - a^{2(j-J)} f^N)[1 - (a^{-2J} f^N)^M]}{1 - a^{-2J} f^N} U_j^I(1) \tag{2.35}$$

需要指出，以上得到的结果不但适用于波动，而且适用于寄生振荡产生的运动，因此是对有限离散模型中运动的全面描述。

3) 透射边界的稳定性。

由式(2.35)可知，当 $M\to\infty$ 时，$U_j(M)$ 为有限，得

$$|a^{-2J} f^N| < 1 \tag{2.36}$$

此即其稳定性条件。式(2.36)是频率相关的，应该分别在两个不同的频段内考虑。当 $\omega<\omega_u$ 时，离散模型中运动全部是行进的波动，根据式(2.30)和(2.36)可写为

$$|f| < 1 \qquad \omega < \omega_u \tag{2.37}$$

在频段 $\omega_u \leqslant \omega \leqslant \omega_N$ 内，行进的波动退化为寄生振荡。由式(2.30)可知，此时 $|a^{-2J}|<1$，因此在这一频段内式(2.37)是不必要的。事实上，可以证明稳定性条件式(2.36)总是满足的。因此，振荡稳定性条件可以用在 $0\leqslant\omega\leqslant\omega_u$ 频段内的式(2.37)表示。由式(2.31)可以看出，式(2.37)是式(2.26)的一个特例，但稳定性条件式(2.37)比式(2.26)要严格。这是由于式(2.37)是从一个承受简谐输入运动的弹性模型导出的，即使并不从人工边界输入额外的能量，也可能由于共振效应而使有限模型中的能量为无穷大。

上述方法也可推广用于分析局部弹塑性介质中的波动问题，例如弹性成层半空间内局部弹塑性区的波动散射问题。如果使计算区将弹塑性区包围在内，则人工边界位于弹性介质内，边界的处理可以采用上述方法。

4）一个修正透射边界的稳定性。

为了消除上述人工边界引起的振荡失稳，廖振鹏等[20]建议了以下的修正人工边界，并对其稳定性准则进行了讨论。

首先引入人工边界区。人工边界区定义为人工边界内宽度为$(2N+1)\Delta x$的边界区域。这里，N为透射阶数，Δx为空间离散步距。

在每一时刻p，人工边界区内的节点位移U_j^p用$\bar{U}_j^p$替换，$\bar{U}_j^p$用下式计算：

$$\bar{U}_j^p = \beta U_j^p + \frac{1-\beta}{2}(U_{j-1}^p + U_{j+1}^p) \quad J = J-1,\cdots,J-2N \tag{2.38}$$

式中，β为一滤波参数，可在0.5～1之间变化。

在完成上述替换后，再用式(2.21)计算人工边界结点在$p+1$时刻的位移。上述修正的实质在于对式(2.21)涉及的结点运动实行空间滤波以抑制接近截止频率ω_n的高频振动。为了度量式(2.38)的滤波效果，可定义一滤波系数为

$$B = \bar{U}_j/U_j \tag{2.39}$$

式中：U_j为单频波在结点j的幅值；$\bar{U}_j$即为用式(2.38)实施滤波后的幅值。

滤波系数β相对于频率的变化如图2.8所示。由图2.8可以看出，建议的滤波方法对低频段内的运动影响很小，但可以有效地接近截止频率ω_n的高频段内的运动，且计算十分方便。

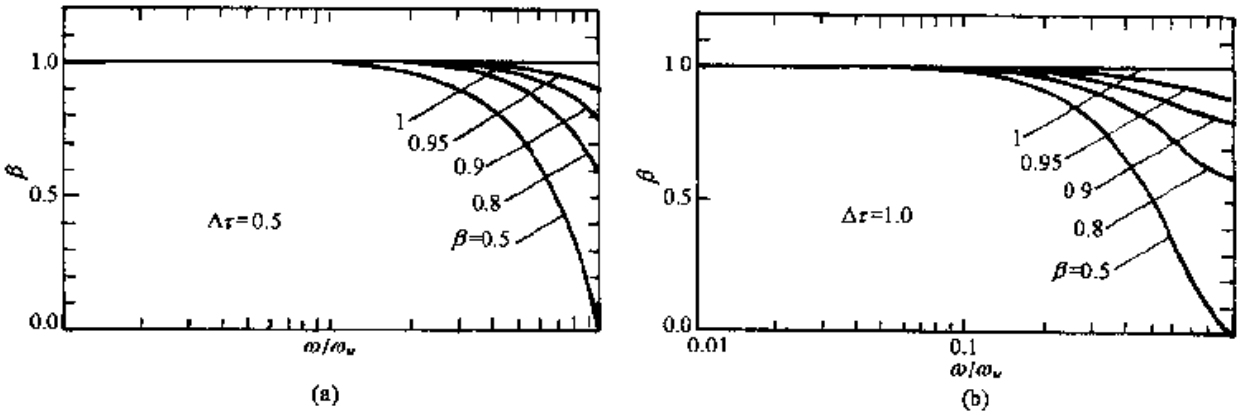


图2.8　滤波系数的变化

研究表明[20]，上述修正的透射人工边界直接用于粘弹性介质波动问题也有足够的精度，这是因为在短距离内粘性阻尼影响很小。为了进一步提高在粘性介质中人工边界的模拟精度，应考虑介质粘性对透射公式的影响。为此，在推导透射公式时可采用粘弹性平面波假设。

（3）单向高阶透射边界。

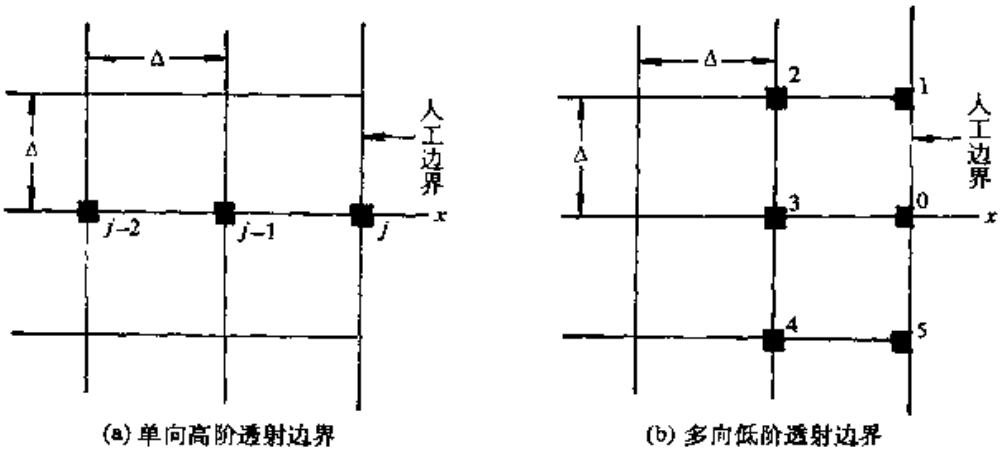
前已指出，人工边界实际上并不存在，处理这一虚拟边界的简单想法是在离散

模型上直接模拟波的向外透射过程。单向高阶透射边界[图 2.9(a)]不考虑外传波的入射角，简单地假设波动沿着与人工边界垂直的方向外传，于是可直接用与人工边界垂直方向上的内部结点的位移确定边界上结点的位移

$$U_j = \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k+1} C_k^N U_{j-k} \exp(-i\omega k\Delta/c_s) \tag{2.40}$$

其中：$C_k^N = \dfrac{N!}{(N-k)!\ k!}$；$\omega$ 为稳态波圆频率；Δ 为网格间矩；c_s 为介质的剪切波速；N 为透射阶数。

高阶 N 的产生是因为在模拟波的透射过程中发现这一透射方法产生的误差本身也是一个外传波，因而导致多次透射法的提出，而且 N 越高，透射精度越高。式(2.40)关于平面波向外传播的模拟是直接以离散形式完成的，因此可以非常方便地应用于有限元计算中去。此外，由于人工边界上结点 U_j 只与邻近结点 U_{j-k} 有关，因而上式具有解耦性质。



(a) 单向高阶透射边界　　(b) 多向低阶透射边界

图 2.9　局部透射边界

(4) 多向低阶透射边界。

单向透射边界的最大缺点是当入射角较大时误差也较大。为了减小这一误差，需提高透射阶数，但当入射角接近 90°(即掠入射)时，即使采用高阶透射也难以保证精度。产生上述问题的原因是式(2.40)采用单一透射方向的假定。为了克服这一缺点，廖振鹏[18]提出了一种新的方案。该方案仍是在离散模型上实现的，其基本思想如图 2.9(b)所示，即入工边界上结点位移 U_0 由五个不同方向上的相邻结点位移 $U_{m'}$ 来确定，即

$$U_0 = \sum_{m'=1}^{5} A_{m'} U_{m'} \tag{2.41}$$

与五个结点位移相关的透射系数 $A_{m'}$ 由下式确定：

$$A_{m'} = \sum_{m'=1}^{5} C_{m,m'} \tag{2.42}$$

$C_{m,m'}$ 为矩阵$[C_{m,m'}]$中的元素，该矩阵为

$$[C_{m,m'}] = [b_{m',m}]^{-1} \tag{2.43}$$

其中，矩阵$[b_{m',m}]$中的元素$b_{m',m}$由下式确定：

$$b_{m',m} = a^{l\cos\theta_m + j\sin\theta_m} \tag{2.44}$$

式中，$a=\exp(iK_s\Delta)$，$K_s=\omega/c_s$，$\theta_m=\pi(m-1)/5(m=1,\cdots,5)$。

可以看出，多向低阶透射边界仍然是个解耦性质良好的边界，而且其格式与有限元格式完全一致，可以方便地应用到有限元计算中去。

(5) 透射边界反射系数的进一步研究。

关于透射边界的反射系数已在前面进行了讨论，这里作进一步研究。景立平等[19]在全部入射角范围内讨论了时域局部透射边界真实反射系数的概念及其与理想暂态和理想稳态反射系数的关系，指出理想暂态的反射系数在定性上与真实反射系数相当一致；就时域逐步积分计算而言，在全部入射角范围内简便的理想暂态反射系数更适合于度量人工边界的精度，而理想稳态的反射系数仅在小角度时可以用来度量边界的精度。

以出平面波动为例讨论多次透射边界条件下的反射系数。先讨论理想情形的边界反射系数。

人工边界的反射系数通常在频域中定义为

$$R = |U_b^R/U_b^I| \tag{2.45}$$

式中，U_b^I和U_b^R分别为入射平面波和反射波在边界结点上的振幅矢量。

边界点的全位移为

$$U_b = U_b^I + U_b^R \tag{2.46}$$

将式(2.46)代入式(2.45)有

$$R = |(U_b/U_b^I - 1)| \tag{2.47}$$

理想暂态情形(情形 A)是离散区域内全部波场仅由入射波构成，理想稳态情形(情形 B)是全波场由入射波和充分发育的反射波构成。

当入射波为行进波动时，理想暂态情形和理想稳态情形的反射系数分别为

$$R_A = \left|2\sin\left(\pi\frac{\Delta t}{T}(\cos\theta - 1)\right)\right|^N \tag{2.48}$$

$$R_B = \left|\frac{\sin\left(\pi\frac{\Delta t}{T}(1-\cos\theta)\right)}{\sin\left(\pi\frac{\Delta t}{T}(1+\cos\theta)\right)}\right|^N \tag{2.49}$$

上式中：$T=2\pi/\omega$为振动周期；Δt为时间步长；θ为入射角，$0\leqslant\theta\leqslant\pi/2$；$N$为透射阶数。

选取$N=2$，给定不同$\Delta t/T$，R_A和R_B作为θ的函数分别示于图 2.10 和 2.11。图 2.10 中$\Delta t/T$分别取 1/10、1/20 和 1/40，$C_s\Delta t/\Delta=1$，Δ为空间步长。由图 2.10 和 2.11 可以看出，R_A随入射角的增大而增大，随离散参数$\Delta t/T$减小而减小。在大

角度入射时，R_A 随 $\Delta t/T$ 的变化更为明显。在全部入射角范围内，R_B 随 $\Delta t/T$ 的变化不大，当入射角小于 $\pi/6$ 时，R_A 和 R_B 数值都比较小，而当入射角大于 $\pi/6$ 时，R_A 明显小于 R_B，并且 R_B 随入射角的增大而迅速增大，特别当 $\theta=\pi/6$ 时，对所有 $\Delta t/T$ 都产生全反射，$R_B=1$。可见，上述两种情形下的反射系数存在明显的差别。

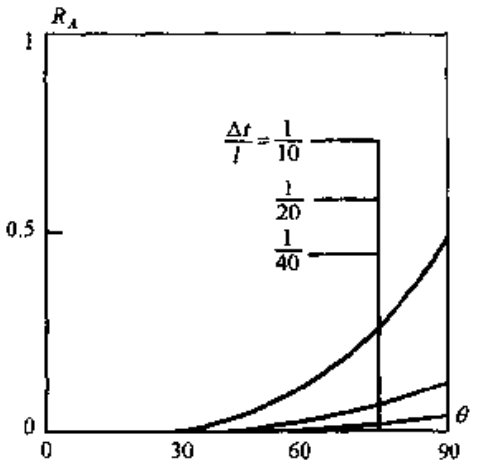


图 2.10　理想暂态情形的反射系数

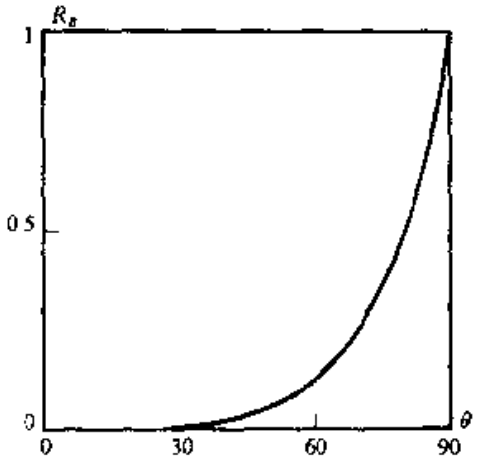


图 2.11　理想稳态情形的反射系数

事实上，两种情形的差别是不难理解的，情形 A 是假定离散区域内的波场不存在反射波，在入射波前刚到达人工边界就出现这种情形，如果此时反射很小，则在入射波到达后的一段时间内全波场主要由入射波场构成。因此，这一理想情形的反射系数在暂态入射波作用于边界初始阶段能够以一定精度描述人工边界的误差。而情形 B 全波场包含了充分发育的反射波。严格地说，情形 B 的反射系数仅适用于评定人工边界模拟稳态波动时的误差。由于这两种理想情形均与时域逐步积分过程中人工边界工作的真实情形不一致，所以引入暂态波动时人工边界真实情形的反射系数，并分析其与理想情形的关系是有意义的；廖振鹏(1996)对在大角度入射时的情况进行了讨论。

下面讨论真实情形的边界反射系数。

二维均匀弹性介质中暂态波动真实情形的边界反射系数是通过时域逐步积分方法定义的。首先给定图 2.12 所示的计算区域，入射出平面波可以写为

$$u = f[t - (x\cos\theta - y\sin\theta)/c_s - t_0] \tag{2.50}$$

式中：c_s 为剪切波速度；θ 为波行进方向与 x 轴的夹角；t_0 由初始条件确定。

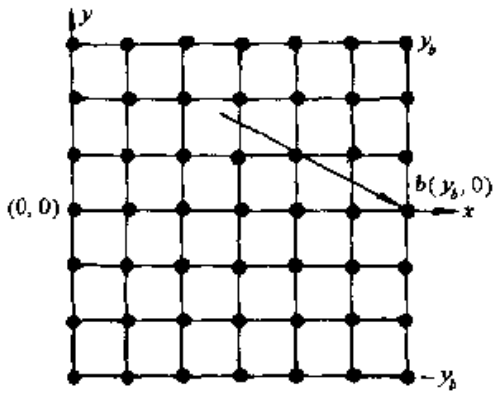


图 2.12　集中质量有限元模型

图 2.12 中，$\{x=0,|y|\leqslant y_b\}$ 和 $\{y=y_b,0\leqslant x\leqslant y_b\}$ 为输入边界。在这两个边界上位移值 $u(t,x,y)$ 由式(2.50)给定。$\{0<x<y_b,y=$

$-y_b\}$和$\{x=y_b, |y|\leqslant y_b\}$为透射边界，$y_b$为计算区域控制参数。计算区域用边长为$\Delta$的正方形有限元离散。

如图 2.12 所示，当计算初始条件为$t=0$时，入射波前刚好到达边界点$b(x,y)=b(y_b,0)$。此时，所有内部网格点的计算初值由式(2.50)确定，即

$$u(x_i,y_j)|_{t=0}=f\left(\frac{-(x_i\cos\theta-y_j\sin\theta)}{c_i}-t_0\right) \tag{2.51}$$

式中，i和j为节点号。

暂态波动的数值模拟可用集中质量显示有限元逐步积分方法结合二阶透射公式完成。设给定入射角θ，边界点b的数值解为$u_b(t,\theta)$，则边界点b总的数值计算误差为

$$e(t,\theta)=f(t)-u_b(t,\theta) \tag{2.52}$$

式中，$e(t,\theta)$由边界反射误差和数值计算过程中其它来源的误差组成，如果其它误差足够小，可以认为$e(t,\theta)$为边界真实反射误差。

可以定义边界真实反射系数如下：

$$R=\left|\frac{E(\omega,\theta)}{F(\omega,\theta)}\right| \tag{2.53}$$

或

$$R=\frac{\left|E\left(\frac{\Delta t}{T},\theta\right)\right|}{\left|F\left(\frac{\Delta T}{T},T_0\right)\right|} \tag{2.54}$$

式中，$E(\omega,\theta)$和$F(\omega,T_0)$分别为$e(t,\theta)$和$f(t)$的 Fourier 谱。

影响真实反射系数的其它误差有：①用有限元离散连续介质必然引入的截断误差；②逐步积分计算中引入的舍入误差；③由于频散效应而引入的初值误差；④计算区域的其它边界反射波对$e(t,\theta)$计算引入的误差；⑤用快速 Fourier 变换计算$E(\omega,\theta)$时可能引入的误差。为了保证R为点$b(y_b,0)$的真实反射系数，必须消除这些误差或使其影响足够小。为达到这一目的，可采取如下措施：可通过选取适当的时间和空间步长来降低误差①的影响；可采用双精度数值计算消除误差②的影响；可选取足够大的计算区域控制参数y_b(例如$y_b\geqslant C_sT_c$，T_c为计算时间)消除误差④的影响；误差⑤是在快速 Fourier 变换过程中为了保证分析对高频分量的要求，需要选取足够多的采样点，但由于计算时间有限，实际采样点不足，通常做法是不足点赋零从而引入低频误差。这一误差可通过对实际采样点进行曲线拟合，然后根据拟合曲线对不足点赋值来降低影响。

2.3.3 其它几种典型的边界条件

(1) 双渐近边界。

Philip[34](1981)在利用有限元方法进行土-结动力相互作用分析时，提出了双

渐近边界条件(Doubly asymptotic approximation)的概念。它是通过土-结相互作用面上散射波产生的力和位移、速度的近似关系来代替包围结构的无限土体对结构的作用。它在频率接近零(静力)和频率趋于无穷时是精确成立的,而对于其它频率相当于一阶精度近似。对于线性土-结构相互作用,一阶双渐近边界条件的思想如下:将与土体接触结构的每个离散表面单元作为一个平盘,它可将平面波传递到土介质中去。在固定的高频振荡情况下,当土介质波动的特征波长小于表面平盘振荡模式的特征波长时,对于第 i 个表面单元的法向和切向运动,这个模态产生的表面散射力可以写为

$$R_n^n = \rho c_p A_i \dot{u}_i^n \tag{2.55}$$

$$R_n^t = \rho c_s A_i \dot{u}_i^t \tag{2.56}$$

式中,ρ 为土介质的质量密度;A_i 是单元面积;c_p 和 c_s 分别是压缩波速和剪切波速;$\dot{u}_i^n$ 和 $\dot{u}_i^t$ 分别是单元表面的法向和切向散射速度。

将式(2.55)和(2.56)写成矩阵形式为

$$R = \rho A C \dot{u}_s^T \tag{2.57}$$

式中:A 为对角单元面积矩阵;C 为对角波速矩阵;$\dot{u}_s^T$ 为表面单元计算的散射场速度矢量。

式(2.57)是局部坐标下的表达式,通过坐标变换可以转换到整体坐标系中。由式(2.57)可以看出,在高频情况下,外部介质对结构的作用相当于沿土-结相互作用面每一离散单元上布置一系列互相独立的压缩和剪切阻尼器的作用。

在低频极限情况下(接近零频),介质对结构的作用可通过下面的拟静力表面关系得到

$$R_s = K_s u_s^T \tag{2.58}$$

式中,K_s 为无限介质与结构接触表面静力刚度矩阵,可通过边界积分方程方法或克隆(Cloning algorithm)求得。

静力刚度矩阵空间上是完全耦合的。因此,在低频极限情况下,外部介质对结构的作用相当于沿土-结相互作用面每一离散单元上布置一系列完全耦合的弹簧。

将式(2.57)和式(2.58)结合可得到一阶双渐进边界条件

$$R = K_s u_s^T + \rho A C \dot{u}_i^T \tag{2.59}$$

式中,R 可以由内部相邻结点对边界结点的动力作用求得。

式(2.59)是由土-结相互作用面上散射力和散射位移及散射速度的关系确定的。由式(2.59)可以看出,相互作用面上的双渐近近似的本质是低频情况下速度矢量相对位移矢量是小的,散射力由静力刚度关系决定;相反,高频时散射力基本上由辐射阻尼关系决定。在频率两极情况下,式(2.59)可以精确地描述无限土体介质对结构的作用。面对于中间频段,式(2.59)仅是一定精度下的近似。

(2) 多向透射边界条件。

以二维出平面弹性波动为例，说明多向透射边界条件的概念[16]。首先结出一阶精度透射边界并说明其物理意义。二维出平面弹性波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.60}$$

式中，$c_s=\sqrt{G/\rho}$，G 为剪切模量。

与边界法向成 α 角的外传平面波

$$u=f(x\cos\alpha+y\sin\alpha-c_s t) \tag{2.61}$$

满足波动方程(2.60)。设人工边界与 y 轴一致，如图2.13所示。式(2.61)也满足人工边界上外行单侧波动方程

$$\frac{c_s}{\cos\alpha}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2.62}$$

因此，式(2.62)可以作为人工边界上的求解条件。

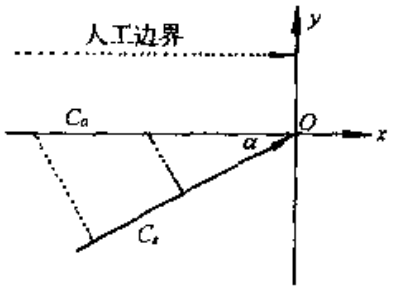


图 2.13 以入射角 α 入射到人工边界的平面波

为说明式(2.62)的物理意义，将式(2.62)乘以 ρc_s 可得

$$G\frac{\partial u}{\partial x}+\rho c_s\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2.63}$$

作用在人工边界的剪应力为

$$\tau_{xx}=G\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.64}$$

因此，人工边界条件可以写为

$$\tau_{xx}+\rho c_s\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2.65}$$

由式(2.65)可知，一阶人工边界的物理意义是在人工边界上布置一系列每单位长度阻尼系数为 $\rho c_s\cos\alpha$ 的相互独立的粘性阻尼器。因此，边界条件式(2.65)也称为粘性边界。人工边界式(2.65)可以精确地透射以入射角 α 射到边界的平面波。但是，一般情况下可能同时有许多以不同入射角度的平面波射向边界，或者根本无法知道射向边界的平面波的入射角度。为此，Higdon[15]提出了多向边界条件来近似模拟边界处的外行波动。这一条件为

$$\left[\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{c_s}{\cos\alpha_i}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]u=0 \tag{2.66}$$

当平面波以入射角 $\pm\alpha_i$ 射到边界时，式(2.66)可以完全吸收入射波而不产生反射。对于其它角度的入射波，式(2.66)随选取的参考入射角的增多可以最大程度地吸收入射波。多向透射边界条件式(2.66)在空间和时间上都是局部的，它也是从特定的标量波动方程中导出的，原则上仅适用于上述标量波动方程，但可以近似应用到矢量波情形。当取 $m=1$ 时，式(2.66)为粘性边界，而取 $m=2$ 和 $\alpha_1=\alpha_2=0$ 时，

式(2.66)为二阶 Clayton-Enguist 边界。

(3) 双渐进-多项透射边界。

Wolf 等人根据双渐进边界对零频和高频波动精确模拟的优点及多向透射边界能很好地模拟外行波动的特点，将两者结合提出了双渐进-多向透射人工边界。这一条件在人工边界面上以力、位移及速度的关系给出，具体形式为

$$R_0^p = K_s u_0^p + C\dot{u}_0^p + Q_0^p \tag{2.67}$$

式中，R_0^p 为内部单元在 p 时刻对人工边界点的作用力。式(2.67)中右端的前两项代表双渐进边界，Q_0^n 是由前一时刻及内部相邻结点利用多项透射边界计算得到的。前面给出的多项透射边界式(2.66)是位移波场，它同样可以应用于应力波场。实际数值计算时取 $m=2$，可以满足精度要求，此时有

$$\frac{c_s}{\cos\alpha_1}\frac{c_s}{\cos\alpha_2}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \left(\frac{c_s}{\cos\alpha_1} + \frac{c_s}{\cos\alpha_2}\right)\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = 0 \tag{2.68}$$

Wolf 对式(2.68)采用如下的时空离散

$$\left.\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x^2}\right)^{p-2} &= \frac{Q_0^{p-2} - 2Q_1^{p-2} + Q_2^{p-2}}{\Delta x^2} \\
\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial x \partial t}\right)^{p-2} &= \frac{Q_0^{p-1} - Q_0^{p-2} - Q_1^{p-1} + Q_1^{p-2}}{\Delta x \Delta t} \\
\left(\frac{\partial^2 Q_0}{\partial t^2}\right)^{p-2} &= \frac{Q_0^{p} - 2Q_0^{p-1} + Q_0^{p-2}}{\Delta t^2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

将式(2.69)代入式(2.68)，可得

$$\begin{aligned}
Q_0^p = {} & (2-\alpha_1)Q_0^{p-1} + (\alpha_1 - \alpha_2 - 1)Q_0^{p-2} \\
& + \alpha_1 Q_1^{p-1} + (2\alpha_2 - \alpha_1)Q_1^{p-2} - \alpha_2 Q_2^{p-2}
\end{aligned} \tag{2.70}$$

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{c_s}{\cos\alpha_1} + \frac{c_s}{\cos\alpha_2}\right) \\
\alpha_2 &= \frac{\Delta^2 t}{\Delta x^2}\frac{c_s}{\cos\alpha_1}\frac{c_s}{\cos\alpha_2}
\end{aligned}\right\} \tag{2.71}$$

式(2.70)中的 Q_j^n($j=1,2$，$n=p-2,p-1$)，可以根据式(2.67)求得，即

$$Q_j^n = R_j^n - K_s u_j^n - C\dot{u}_j^n \tag{2.72}$$

式(2.72)中的 R_j^n 为假设边界移到第 j 列时内部结点对边界点的作用力，如图2.14所示，可根据内部有限元刚度矩阵和质量矩阵计算。

(4) 多次透射-静力边界。

由静力和粘性边界组合的所谓双渐进边界，可以精确地模拟零频分量及频率趋于无限大时的波动，但对于中间频率波动的模拟仅是一阶精度。将双渐进边界和多向透射边界组合面形成的双渐进-多向透射边界，提高了对中间频率波动的模拟精度。这一组合边界在时间上是局部的，但使用的静力刚度矩阵是人工边界上节点的完全耦合形式，空间上是非局部的。

然而，波动在时空离散网络中传播时存在截止频率，即离散网格模拟的波动频率不能无限大。因而，双渐进-多向透射边界中模拟高频极限波动的粘性边界是不必要的；另外，粘性边界仅是一阶精度，它和多向透射边界（采用二阶以上精度）组合还可能降低模拟精度。因此，应用局部和全局边界的组合模拟动静荷载作用时，应将粘性边界取消。景立平等(2000)[16]考虑到多向透射边界在使用上的局限性，而多次透射边界具有更为广泛的意义，提出一种新的组合方案，即多次透射-静力边界，基本方法如下。

根据有限元离散网络中平面波的传播规律可知，离散网络中传播的平面波存在截止频率，超过截止频率的波动不能在离散网络中传播。换言之，数值方法不能真实模拟频率为无穷大时的波动。因此，双渐进边界在计算时只可能对零频（静力）情况是严格的，而对其它频率波动是近似的。为此，可将静力边界直接和已有高精度局部边界组合。此时，高阶精度局部边界以力的形式给出。多次透射公式以离散形式给出，故而其物理概念明确，便于在实际中应用。由此，可将多次透射边界与静力边界组合形成一个新的边界条件[16]，即

$$R_0^p = K_s u_0 + Q_0^p \tag{2.73}$$

其中 Q_0^p 由多次透射公式

$$Q_0^p = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} C_j^m Q_j^{p-j} \tag{2.74}$$

计算，式中系数 $C_j^m = m!\ /(m-j)!\,j$。$Q_j^n (j=1,\cdots,m, n=p-2,\cdots,p-m)$ 由下式计算：

$$Q_j^n = R_j^n - K_s u_j^n \tag{2.75}$$

计算中取 $m=2$，即可满足精度要求。

参 考 文 献

[1] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 中国水利水电出版社，1996

[2] 张克绪、谢君斐. 土动力学. 地震出版社，1989

[3] 朱百里、沈珠江. 计算土力学. 上海科学技术出版社，1990

[4] 周健、屠洪权、缪俊发. 地下水位与环境岩土工程. 同济大学出版社，1995

[5] 孙钧、汪炳槛. 地下结构有限元法解析. 同济大学出版社，1988

[6] 谢定义. 土动力学. 西安交通大学出版社，1988

[7] 陈国兴、谢君斐. 土体地震反应分析的简化有效应力法. 地震工程与工程振动，1995，15(6)

[8] 李锡夔、范益群. 非饱和土变形及渗流过程的有限元分析. 岩土工程学报，1998，20(4)

[9] 朱百里、沈珠江等. 计算土力学. 上海科学技术出版社，1990

[10] R, Clayton B. Engquist. Absorbing boundary condition for acoustic and elastic wave equation. Bull Seism. Soc. Amer. ,1977,169(6)

[11] J. Lasmer. R. L. Kuhlemeyer. Finite dynamic model for infinite media. Jr. Engrg. Mech Div, ASCE, 1969,95(EM4)

[12] 廖振鹏等. 暂态波透射边界. 中国科学,1984,4(6)
[13] O. C. Zienkiewicz. Finite element in the solution of field problem. The Engineering,1965,220(5710)
[14] U. Philip, T. L. Geers. Doubly asymptotic boundary-element analysis of dynamic soil-structure interaction Int. J. Solid Structure,1981,17,687—697
[15] R. L. Higdon. Absorbing boundary conditions approximations to the multi-dimensional wave equation. Math. Comp. ,1986,(47):437—459
[16] 景立平、廖振鹏. 局部和全局边界条件的组合. 地震工程与工程振动,2000,20(3)
[17] 杨光、廖振鹏. 局部透射边界在稳态波动有限元模拟中的应用. 地震工程与工程振动,1993,13(4)
[18] 廖振鹏. 局部透射边界的精度. 地震工程与工程振动,1993,13(3)
[19] 景立平、廖振鹏. 透射边界真实反射系数的研究. 地震工程与工程振动,1997,17(2)
[20] 廖振鹏、刘晶波. 波动有限元模拟的基本问题. 中国科学(B 辑),1992,(8)

第三章　有限单元法基本理论

3.1　概　　述

当获得研究对象的控制方程(微分方程)和相应求解条件后,寻求该定解问题的解答就成为关注的焦点。显然,能用解析方法求得精确解的毕竟是少数问题。对于大多数问题,由于其控制方程及求解条件的复杂性或求解区域的不规则等,几乎不可能得到解析解,因此只能求助于另一种求解途径和方法——数值解法以得到近似解。有限单元法就是广为采用的一种数值解法。

有限单元法基本思想的提出可追溯到 20 世纪 40 年代[R. Courant(1943)]。1956 年,M. J. Turner 和 R. W. Clough 等人用有限元法分析了飞机结构,这是有限单元法第一个成功应用的范例。1960 年,R. W. Clough 正式提出"有限单元法"(Finite Element Method)这一术语。1967 年,O. C. Zienkiewicz 和 Y. K. Cheung(张佑启)写出了第一本有限单元法专著。从此,随着计算机的迅速发展,有限单元法很快就成为求解科学研究中各类问题应用最为广泛的工具。

用有限元法分析一个系统,必须建立并求解控制该系统的线性方程组,这些方程就称为有限元方程。可以用多种不同的方式或方法来建立有限元方程,例如变分原理(能量法)和加权残数法。与变分原理相比,加权残数法的适用性更广,这是因为后者可用于已知研究对象的控制方程和边界条件但其变分的泛函尚未得到甚至不存在的情况。因此本章将对加权残数法及其与有限单元法的关系作一简要介绍。用加权残数法建立有限元方程的具体过程详见第四章。

进行有限元分析需将所分析问题的求解域离散成有限个适当的单元。等参元是有限元分析中适用性最广的单元。对于岩土工程有限元分析中常用的二维和三维等参元及其特性,本章将予以较详细的介绍。

此外,本章还将介绍数值积分法,因为有限元方程中诸多矩阵元素的计算均须借助于数值积分法。

3.2　有限单元法与加权残数法的关系

3.2.1　加权残数法

加权残数法(Method of Weighted Residuals,简称 MWR)是一种直接从微分

方程中得到其近似解的数学方法。其基本思想和解题步骤如下：

(1) 假定一个试函数(含试函数项和待定系数)作为微分方程的近似解。

(2) 将近似解代入微分方程及其边界条件，形成残数方程。

(3) 引入权函数，将其与残数相乘，并在求解域和边界上积分以消除残数，从而得到一系列含待定系数的方程组。

(4) 求解方程组，获得试函数中的待定系数，从而得到近似解。

例如某系统在 V 域上的控制微分方程及边界面 S 上的边界条件分别为

$$\mathbf{F}Q - f = 0 \quad (\text{在 } V \text{ 域上}) \tag{3.1a}$$

$$\mathbf{G}Q - g = 0 \quad (\text{在边界面 } S \text{ 上}) \tag{3.1b}$$

其中：Q 为待定函数，即方程未知变量；$\mathbf{F}$、$\mathbf{G}$ 为微分算子；f、g 为不含变量 Q 的项。

因此用加权残数法分析该系统的步骤为：先设一试函数 $\tilde{Q}$(即未知变量 Q 的近似解)

$$Q \approx \tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} C_i T_i \tag{3.2}$$

式中：C_i 为待定系数；T_i 为形式已确定的试函数项。

将式(3.2)代入微分方程(3.1a)和边界条件式(3.1b)。由于 $\hat{Q}$ 是近似解，故此二方程右边不再为零，即分别出现残数 R_I 和 R_B

$$R_I = \mathbf{F}\tilde{Q} - f \neq 0 \tag{3.3a}$$

$$R_B = \mathbf{G}\tilde{Q} - g \neq 0 \tag{3.3b}$$

R_I 和 R_B 分别称为内部残数和边界残数，式(3.3a)和(3.3b)则分别称为内部残数方程和边界残数方程。

显然，如能消除残数，则所得的近似解 $\tilde{Q}$ 即趋近于精确解。为此，引入内部权函数 W_I 及边界权函数 W_B，得到消除内部残数的方程，即

$$\int_V W_I R_I \mathrm{d}V = \int_V W_I(\mathbf{F}\tilde{Q} - f)\mathrm{d}V = 0 \tag{3.4a}$$

以及消除边界残数的方程，即

$$\int_S W_B R_B \mathrm{d}S = \int_S W_B(\mathbf{G}\tilde{Q} - g)\mathrm{d}S = 0 \tag{3.4b}$$

式(3.4a)和(3.4b)可合并写成

$$\int_V W_I R_I \mathrm{d}V + \int_S W_B R_B \mathrm{d}S = 0 \tag{3.5a}$$

将式(3.2)和(3.3)代入，得

$$\int_V W_I(\mathbf{F}\sum_{i=1}^{n} C_i T_i - f)\mathrm{d}V + \int_S W_B(\mathbf{G}\sum_{i=1}^{n} C_i T_i - g)\mathrm{d}S = 0 \tag{3.5b}$$

式(3.5)即为用加权残数法求解控制方程(3.1)近似解的基本方程(组)，选取适当的权函数并积分，由此方程(组)求解待定系数 C_i，即可得到该微分方程的近似解。

视权函数 W_I 和 W_B 选取的不同，就派生出不同的数值解法。

3.2.2 Galerkin 法

Galerkin 法是求解力学问题古老而著名的方法之一。在方程(3.5)中若取试函数中的试函数项作为权函数，就是 Galerkin 法。

例如对于上述例题，取式(3.2)所示的试函数 Q 中的试函数项 T_i 作为权函数 W_I 和 W_B，即 $W_I=W_B=T_i$，就得用 Galerkin 法求解控制方程(3.1)近似解的基本方程，即

$$\int_V T_i R_I \mathrm{d}V + \int_S T_i R_B \mathrm{d}S = 0 \tag{3.6a}$$

或即

$$\int_V T_i\Big[\mathbf{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} C_i T_i\Big) - f\Big]\mathrm{d}V + \int_S T_i\Big[\mathbf{G}\Big(\sum_{i=1}^{n} C_i T_i\Big) - g\Big]\mathrm{d}S = 0 \tag{3.6b}$$

因此，Galerkin 法属于以试函数中的试函数项作为权函数的加权残数法。

3.2.3 有限单元法

有限单元法(FEM)是将求解域 V 及其边界面 S 离散成有限个仅在结点处相联系的子域 V^e(即单元)和面域 S^e，然后用单元的形函数作为试函数项、单元的结点未知量作为待定系数，从而形成试函数的 Galerkin 法。

例如对于上述例题，用有限元法求解时所设的试函数为

$$\tilde{Q} = \sum_{i=1}^{n} Q_i N_i \tag{3.7}$$

其中：n 为单元结点数；Q_i 为单元结点未知量，也即待定系数；N_i 为单元形函数，也即试函数项。

由 Galerkin 法，取形函数 N_i 为权函数，即得与式(3.6a)相应的方程

$$\sum_{e=1}^{m}\int_{V^e} N_i R_I \mathrm{d}V + \sum_{l=1}^{k}\int_{S^e} N_i R_B \mathrm{d}S = 0 \tag{3.8a}$$

将式(3.7)代入式(3.3)，然后代入上式，即有

$$\sum_{e=1}^{m}\int_{V^e} N_i\Big[\mathbf{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} Q_i N_i\Big) - f\Big]\mathrm{d}V + \sum_{l=1}^{k}\int_{S^e} N_i\Big[\mathbf{G}\Big(\sum_{i=1}^{n} Q_i N_i\Big) - g\Big]\mathrm{d}S = 0 \tag{3.8b}$$

式中：m 为单元总数；k 为边界面域总数。

式(3.8)为仅含结点未知量 Q_i 的线性方程组，也即前述的有限元方程。从此方程组解得结点未知量 Q_i，进而就可由式(3.7)得到控制方程(3.1)的近似解。

综上所述，有限单元法可归属于 Galerkin 法，而这两种方法又可都归属于加权残数法。

3.3 等参元及其特性

3.3.1 等参元的坐标变换式

从上述有限单元法的基本原理可见，有限元分析的首要步骤是将所分析问题的求解域离散成有限个适当的单元。等参元是有限元分析中最常用的一种单元。

等参元采用等参变换来描述单元的几何特性和力学特性，即采用相同数目的结点参数和相同的插值函数来进行单元几何形状和场函数的变换。借助于等参元，不仅可以对于一般的任意几何形状的工程等问题方便地进行有限元离散，而且可采用标准化的数值积分方法计算有限元方程所含各矩阵中的元素，从而使编制各类工程实际问题的有限元分析通用化程序成为可能。

为实现等参变换，需要建立能使几何形状规则的标准单元(母单元)与几何形状不规则的真实单元(子单元)相互转换(映射)的坐标变换式。这一变换式可表为

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} N_i x_i \\ y &= \sum_{i=1}^{n} N_i y_i \\ z &= \sum_{i=1}^{n} N_i z_i \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

式中：$N_i = N_i(\xi,\eta,\zeta)$，为单元的形函数；$\xi$、$\eta$、$\zeta$ 为经过几何形状规则的标准单元(母单元)中心建立的坐标系，该坐标系通常称为局部(自然)坐标系，在该坐标系下单元内任一点的坐标称为局部坐标；x、y、z 为真实单元(子单元)所在的坐标系，通常称为整体(笛卡尔)坐标系，在该坐标系下单元内任一点的坐标称为整体坐标；x_i、y_i、z_i 为单元结点的整体坐标；n 为单元的结点数。

式(3.9)表明，子单元内任一点的整体坐标 x、y、z 与母单元内任一点的局部坐标 ξ、η、ζ 是一一对应并通过单元的形函数 N_i 来建立关系的。因此，形函数 N_i 实质上就是用局部坐标表示的插值函数，它具有这样的特点，N_i 值在单元结点 i 处为 1，在其它结点处则为 0，同时还满足以下关系式：

$$\sum_{i=1}^{n} N_i = 1 \tag{3.10}$$

形函数应是连续可微的，还必须满足协调性和完备性的要求，其构造方法可见有关专著。

利用式(3.9)所示的坐标变换式，可将任意几何形状不规则的真实单元转换(映射)为几何形状规则的标准单元，例如将真实的任意四边形单元或六面体单元(子单元)转换成边长为 2 的标准正方形单元或正方体单元(母单元)，将曲线边界

或曲面边界转换成直线边界或平面边界，从而实现对工程等问题中一般形状的求解域进行有限元离散。

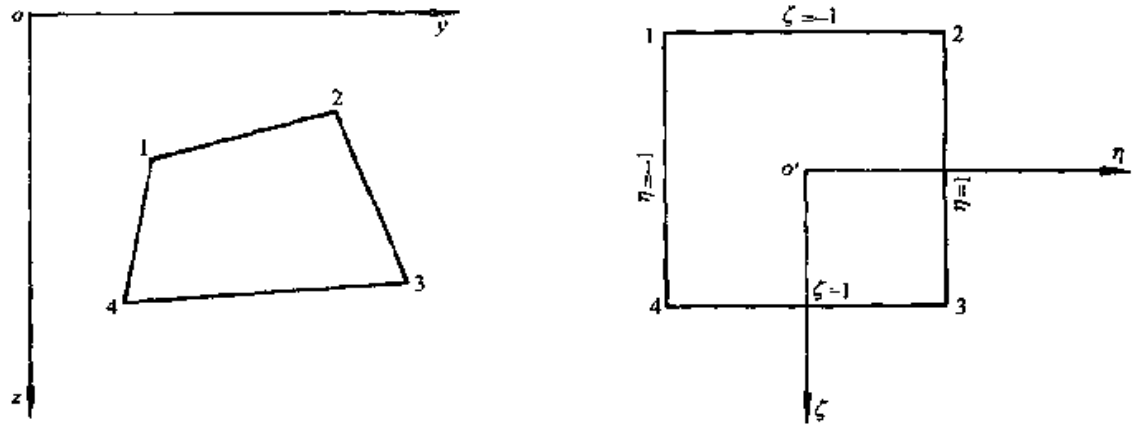
根据所分析问题属性的不同，可以选择不同的等参元。例如，对于平面（二维）问题，可选用平面四结点等参元或平面八结点等参元；对于空间（三维）问题，则常选用空间八结点等参元或空间二十结点等参元。当问题属性一定时，具体单元的选择则取决于所研究问题的复杂程度、所需的计算精度以及所愿付出的计算量。一般而言，选用的单元结点数目越多，则插值函数（即形函数）的方次越高，单元模拟复杂边界的能力越强，计算精度也往往提高，但为之付出的计算量就越大。

以下将介绍岩土工程有限元分析常用的等参元及相关特性，同时还将介绍形状较规则的矩形单元与长方体单元的相应特性，以资比较。

需要说明，除这里所述的基本单元外，尚有常在计算域边界设置的无限元，在两种材料交界面之间设置的接触面单元，以及用以改善单元数值性能的非协调元等，详见其它专著。

3.3.2 平面四结点等参元

平面四结点等参元及其结点局部坐标 η_i、ζ_i 和形函数 N_i 分别如图 3.1 和表 3.1 所示。



(a) 子单元　　(b) 母单元

图 3.1　平面四结点等参元

表 3.1　平面四结点等参元结点局部坐标和形函数

结点 i	结点局部坐标		形　函　数
	η_i	ζ_i	
1	−1	−1	$N_1=(1-\eta)(1-\zeta)/4$
2	1	−1	$N_2=(1+\eta)(1-\zeta)/4$
3	1	1	$N_3=(1+\eta)(1+\zeta)/4$
4	−1	1	$N_4=(1-\eta)(1+\zeta)/4$

表 3.1 中的形函数也可以统一式表为

$$N_i = (1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)/4 \qquad i = 1,\cdots,4 \tag{3.11}$$

从上式可见，N_i 是关于局部坐标的一次函数。因此，平面四结点等参元只能模拟直线边界。不难证明，N_i 具有前述特点，即

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{当 } \eta = \eta_i \quad \zeta = \zeta_i \qquad \text{(结点处)} \\ 0 & \text{当 } \eta = \eta_j \quad \zeta = \zeta_j, j \neq i \quad \text{(非结点处)} \end{cases} \tag{3.12a}$$

而且满足式(3.10)，即有

$$\sum_{i=1}^{4} N_i = 1 \tag{3.12b}$$

尚可证明以下关系式成立：

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=1}^{4} N_i\eta_i &= \eta \\ \sum_{i=1}^{4} N_i\zeta_i &= \zeta \end{aligned}\right\} \tag{3.12c}$$

对应于式(3.9)，平面四结点等参元整体坐标与局部坐标的变换(映射)式为

$$\left.\begin{aligned} y &= \sum_{i=1}^{4} N_i y_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_i}{4}(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \\ z &= \sum_{i=1}^{4} N_i z_i = \sum_{i=1}^{4} \frac{z_i}{4}(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i) \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

显然，利用上式应可将图 3.1(a)所示的真实的四边形单元变换为图 3.1(b)所示的边长为 2 的标准正方形单元。现不妨进一步以例说明。

设图 3.1(a)所示真实单元的四结点(整体)坐标分别为

结点 1　$y_1 = 1$　　$z_1 = \dfrac{5}{3}$

结点 2　$y_2 = 3$　　$z_2 = 1$

结点 3　$y_3 = 4$　　$z_3 = \dfrac{8}{3}$

结点 4　$y_4 = \dfrac{2}{3}$　　$z_4 = \dfrac{10}{3}$

则可得该单元四条边的直线方程：

边 1-2　$z = \dfrac{z_1 - z_2}{y_1 - y_2}(y - y_2) + z_2 = -\dfrac{1}{3}y + 2$　　(a)

边 2-3　$z = \dfrac{z_2 - z_3}{y_2 - y_3}(y - y_3) + z_3 = \dfrac{1}{3}(5y - 12)$　　(b)

边 3-4　$z = \dfrac{z_3 - z_4}{y_3 - y_4}(y - y_4) + z_4 = -\dfrac{1}{15}(3y - 52)$　　(c)

边 4-1　$z = \dfrac{z_4 - z_1}{y_4 - y_1}(y - y_1) + z_1 = -5y + \dfrac{20}{3}$　　(d)

将以上结点整体坐标 y_i、z_i 及表 3.1 中的结点局部坐标 η_i、ζ_i 代入式(3.13)，可得该坐标变换式的显式

$$\left.\begin{aligned} y&= N_1 + 3N_2 + 4N_3 + \frac{2}{3}N_4 = \frac{1}{6}(1+2\eta)(4+\zeta) + \frac{3}{2} \\ z&= \frac{5}{3}N_1 + N_2 + \frac{8}{3}N_3 + \frac{10}{3}N_4 = \frac{1}{6}(5\zeta - 2\eta + 13) \end{aligned}\right\} \quad (3.13a)$$

将式(3.13a)代入式(a)可得：$\zeta=-1$，此即边 1-2 经式(3.13a)变换后的方程。

将式(3.13a)代入式(b)可得：$\eta=1$，此即边 2-3 经式(3.13a)变换后的方程。

将式(3.13a)代入式(c)可得：$\zeta=1$，此即边 3-4 经式(3.13a)变换后的方程。

将式(3.13a)代入式(d)可得：$\eta=-1$，此即边 4-1 经式(3.13a)变换后的方程。

由此可见，图 3.1(a)所示真实的不规则四结点单元经式(3.13)变换后确已成如图 3.1(b)所示的边长为 2 的标准正方形单元。

由式(3.13)可得整体坐标 y、z 关于局部坐标 η、ζ 的导数

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{4} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_i\eta_i}{4}(1+\zeta\zeta_i) \\ \frac{\partial y}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^{4} y_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{y_i\zeta_i}{4}(1+\eta\eta_i) \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^{4} z_i \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{z_i\eta_i}{4}(1+\zeta\zeta_i) \\ \frac{\partial z}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^{4} z_i \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} = \sum_{i=1}^{4} \frac{z_i\zeta_i}{4}(1+\eta\eta_i) \end{aligned}\right\} \quad (3.14)$$

另由复合函数求导法则

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{aligned}\right\} \quad (3.15)$$

可得形函数关于整体坐标的导数

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\eta_i}{4}(1+\zeta\zeta_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{\zeta_i}{4}(1+\eta\eta_i) \end{aligned}\right\} \quad (3.17)$$

$[J]$为二阶 Jacobi 矩阵

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix} \tag{3.18}$$

矩阵中的各元素如式(3.14)所示。

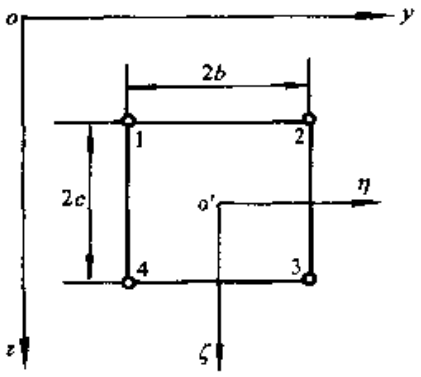


图 3.2　四结点矩形单元

特别当真实单元为四结点矩形(图 3.2)单元时,若设单元中心 o' 的整体坐标为(y_0,z_0),则由式(3.13)或直接从图 3.2 可得矩形单元整体坐标与局部坐标的变换式为

$$\begin{aligned} y &= y_0 + b\eta \\ z &= z_0 + c\zeta \end{aligned} \tag{3.19}$$

由此可得 Jacobi 矩阵

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b & 0\\ 0 & c\end{bmatrix} \tag{3.20}$$

形函数关于整体坐标的导数为

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}=\frac{1}{bc}\begin{bmatrix}c & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

将式(3.17)代入得

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\eta_i}{4b}(1+\zeta\zeta_i)\\ \dfrac{\zeta_i}{4c}(1+\eta\eta_i)\end{Bmatrix} \tag{3.22}$$

在结点处,即当 $\eta=\eta_i,\zeta=\zeta_i$ 时有

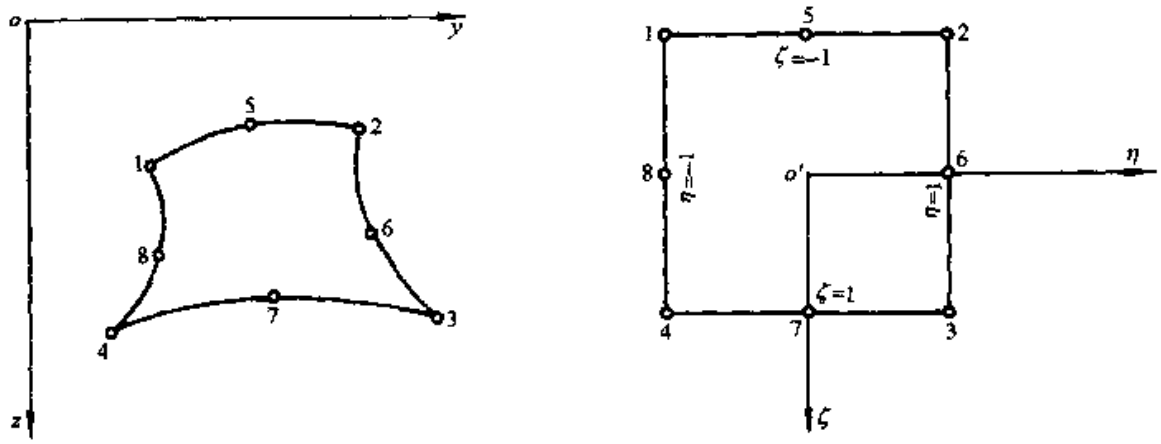
$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\eta_i}{2b}\\ \dfrac{\zeta_i}{2c}\end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

比较四结点不规则单元和四结点矩形单元的坐标变换式、Jacobi 矩阵以及形函数关于整体坐标的导数可见,前者的只能用隐式表示,而后者的则均可用显式表示。这一规律对于后述的平面或空间等参元来说也是存在的。

3.3.3　平面八结点等参元

图 3.3 为平面八结点等参元,其结点局部坐标和形函数列于表 3.2 中。

形函数的统一表达式为



(a) 子单元　　(b) 母单元

图 3.3　平面八结点等参元

表 3.2　平面八结点等参元结点局部坐标和形函数

结点 i	结点局部坐标		形函数
	η_i	ζ_i	
1	−1	−1	$N_1=(1-\eta)(1-\zeta)(-\eta-\zeta-1)/4$
2	1	−1	$N_2=(1+\eta)(1-\zeta)(\eta-\zeta-1)/4$
3	1	1	$N_3=(1+\eta)(1+\zeta)(\eta+\zeta-1)/4$
4	−1	1	$N_4=(1-\eta)(1+\zeta)(-\eta+\zeta-1)/4$
5	0	−1	$N_5=(1-\eta^2)(1-\zeta)/2$
6	1	0	$N_6=(1+\eta)(1-\zeta^2)/2$
7	0	1	$N_7=(1-\eta^2)(1+\zeta)/2$
8	−1	0	$N_8=(1-\eta)(1-\zeta^2)/2$

$$N_i=\begin{cases}\dfrac{1}{4}(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)(\eta\eta_i+\zeta\zeta_i-1) & (i=1,2,3,4)\\ \dfrac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\zeta\zeta_i) & (i=5,7)\\ \dfrac{1}{2}(1-\zeta^2)(1+\eta\eta_i) & (i=6,8)\end{cases}\tag{3.24}$$

可见，N_i 为局部坐标的二次式，故平面八结点等参元既能模拟直线边界也可模拟二次曲线边界。

同样可见形函数具有前述插值函数的特点，而且满足关系式

$$\sum_{i=1}^{8}N_i=1\qquad\sum_{i=1}^{8}N_i\eta_i=\eta\qquad\sum_{i=1}^{8}N_i\zeta_i=\zeta\tag{3.25}$$

形函数关于整体坐标的导数仍如式(3.16)所示，式中的 Jacobi 矩阵为

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum\limits_{i=1}^{8} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \sum\limits_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \sum\limits_{i=1}^{8} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{bmatrix} \tag{3.26}$$

其中

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=\begin{cases}\dfrac{\eta_i}{4}(1+\zeta\zeta_i)(2\eta\eta_i+\zeta\zeta_i) & (i=1,2,3,4)\\ -\eta(1+\zeta\zeta_i) & (i=5,7)\\ \dfrac{\eta_i}{2}(1-\zeta^2) & (i=6,8)\end{cases} \tag{3.27a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}=\begin{cases}\dfrac{\zeta_i}{4}(1+\eta\eta_i)(2\zeta\zeta_i+\eta\eta_i) & (i=1,2,3,4)\\ \dfrac{\zeta_i}{2}(1-\eta^2) & (i=5,7)\\ -\zeta(1+\eta\eta_i) & (i=6,8)\end{cases} \tag{3.27b}$$

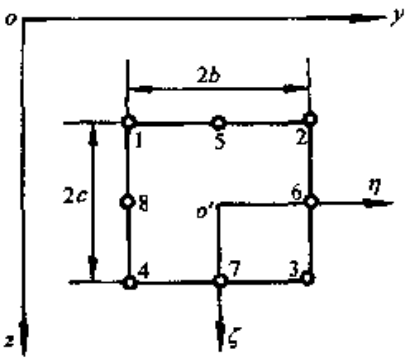


图 3.4　八结点矩形单元

对于八结点矩形单元(图 3.4),坐标变换式和 Jacobi 矩阵仍与四结点矩形单元的相似,即仍如式(3.19)和(3.20)所示。故有

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=[J]^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix} \tag{3.28}$$

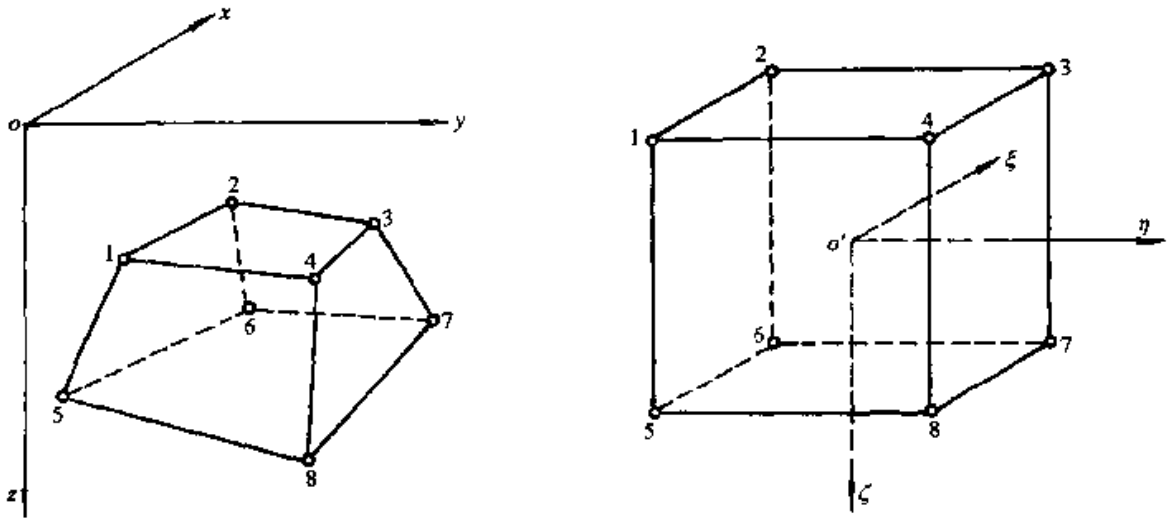
特别在结点处,即当 $\eta=\eta_i,\zeta=\zeta_i$ 时可得

$$\frac{\partial N_i}{\partial y}=\begin{cases}\dfrac{3\eta_i}{2b} & (i=1,2,3,4)\\ -\dfrac{2\eta_i}{b} & (i=5,7)\\ 0 & (i=6,8)\end{cases} \tag{3.29a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z}=\begin{cases}\dfrac{3\zeta_i}{2c} & (i=1,2,3,4)\\ 0 & (i=5,7)\\ -\dfrac{2\zeta_i}{c} & (i=6,8)\end{cases} \tag{3.29b}$$

3.3.4　空间八结点等参元

空间八结点等参元及其结点局部坐标与形函数分别如图 3.5 和表 3.3 所示。



(a) 子单元　　(b) 母单元

图 3.5　空间八结点等参元

表 3.3　空间八结点等参元结点局部坐标和形函数

结点 i	结点局部坐标			形函数
	ξ_i	η_i	ζ_i	
1	−1	−1	−1	$N_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8$
2	1	−1	−1	$N_2=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)/8$
3	1	1	−1	$N_3=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8$
4	−1	1	−1	$N_4=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)/8$
5	−1	−1	1	$N_5=(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8$
6	1	−1	1	$N_6=(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)/8$
7	1	1	1	$N_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8$
8	−1	1	1	$N_8=(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)/8$

从表 3.3 可见，形函数是局部坐标的一次式。因此空间八结点等参元仅能模拟平面边界。

空间八结点等参元的八个形函数可统一表达为

$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)\qquad i=1,2,\cdots,8 \tag{3.30}$$

可见，在自身结点处，即当 $\xi=\xi_i$、$\eta=\eta_i$、$\zeta=\zeta_i$，$N_i=1$；而在其它结点处，即当 $\xi=\xi_j$、$\eta=\eta_j$、$\zeta=\zeta_j(j\neq i)$，$N_i=0$。另可证明

$$\sum_{i=1}^{8}N_i=1\quad\sum_{i=1}^{8}N_i\xi_i=\xi\quad\sum_{i=1}^{8}N_i\eta_i=\eta\quad\sum_{i=1}^{8}N_i\zeta_i=\zeta \tag{3.31}$$

利用整体坐标与局部坐标变换式(3.9)和复合函数求导法则，可得形函数关于

整体坐标的导数

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

其中，$[J]$为三阶 Jacobi 矩阵

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum_{i=1}^{8} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^{8} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{8} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \sum_{i=1}^{8} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \sum_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \sum_{i=1}^{8} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \tag{3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{8}\xi_i(1 + \eta\eta_i + \zeta\zeta_i + \eta\zeta\eta_i\zeta_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{8}\eta_i(1 + \zeta\zeta_i + \xi\xi_i + \zeta\xi\zeta_i\xi_i) \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8}\zeta_i(1 + \xi\xi_i + \eta\eta_i + \xi\eta\xi_i\eta_i) \end{aligned}\right\} \tag{3.34}$$

对于真实的空间八结点长方体单元(图 3.6)，整体坐标与局部坐标的变换式为

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + a\xi \\ y &= y_0 + b\eta \\ z &= z_0 + c\zeta \end{aligned}\right\} \tag{3.35}$$

式中 x_0、y_0、z_0 为单元中心 o' 的整体坐标。

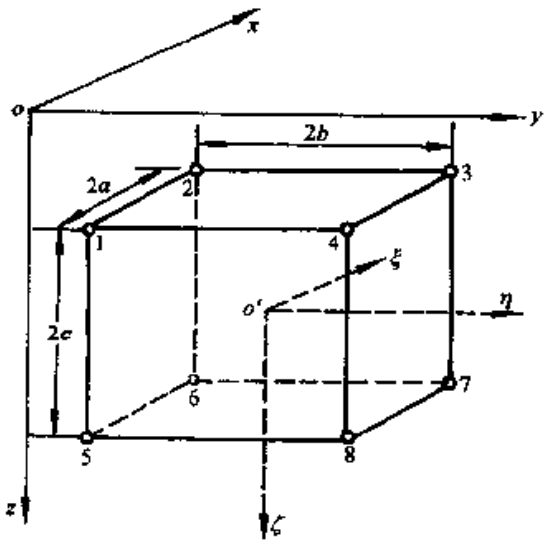


图 3.6　八结点长方体单元

Jacobi 矩阵为

$$[J] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

Jacobi 矩阵行列式为

$$|J| = abc \tag{3.37}$$

$[J]$的逆矩阵为

$$[J]^{-1}=\begin{bmatrix}1/a & 0 & 0\\ 0 & 1/b & 0\\ 0 & 0 & 1/c\end{bmatrix} \tag{3.38}$$

则由式(3.32)、(3.34)和(3.38)可将形函数关于整体坐标的导数写为显式，即

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{a}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{1}{b}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{1}{8a}\xi_i(1+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i+\eta\zeta\eta_i\zeta_i)\\ \frac{1}{8b}\eta_i(1+\zeta\zeta_i+\xi\xi_i+\zeta\xi\zeta_i\xi_i)\\ \frac{1}{8c}\zeta_i(1+\xi\xi_i+\eta\eta_i+\xi\eta\xi_i\eta_i)\end{Bmatrix} \tag{3.39}$$

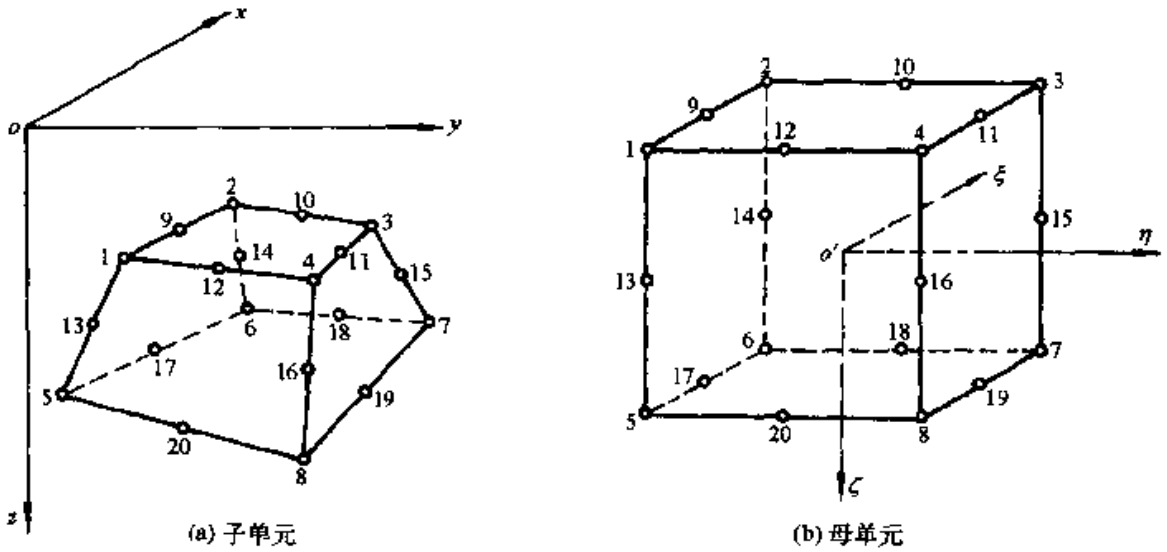
特别在结点处有

$$\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}=\left.\begin{Bmatrix}\frac{1}{a}\frac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \frac{1}{b}\frac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \frac{1}{c}\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{Bmatrix}\right|_{\substack{\xi=\xi_i\\ \eta=\eta_i\\ \zeta=\zeta_i}}=\begin{Bmatrix}\frac{\xi_i}{2a}\\ \frac{\eta_i}{2b}\\ \frac{\zeta_i}{2c}\end{Bmatrix} \tag{3.40}$$

3.3.5 空间二十结点等参元

图 3.7 为空间二十结点等参元。相应的结点局部坐标和形函数如表 3.4 所示。

形函数也可用以下统一式表示：



(a) 子单元　　(b) 母单元

图 3.7　空间二十结点等参元

表 3.4　空间二十结点等参元结点局部坐标和形函数

结点 i	结点局部坐标			形　函　数
	ξ_i	η_i	ζ_i	
1	−1	−1	−1	$N_1=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(-\xi-\eta-\zeta-2)/8$
2	1	−1	−1	$N_2=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2)/8$
3	1	1	−1	$N_3=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2)/8$
4	−1	1	−1	$N_4=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(-\xi+\eta-\zeta-2)/8$
5	−1	−1	1	$N_5=(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(-\xi-\eta+\zeta-2)/8$
6	1	−1	1	$N_6=(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2)/8$
7	1	1	1	$N_7=(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2)/8$
8	−1	1	1	$N_8=(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(-\xi+\eta+\zeta-2)/8$
9	0	−1	−1	$N_9=(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)/4$
10	1	0	−1	$N_{10}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4$
11	0	1	−1	$N_{11}=(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)/4$
12	−1	0	−1	$N_{12}=(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)/4$
13	−1	−1	0	$N_{13}=(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4$
14	1	−1	0	$N_{14}=(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)/4$
15	1	1	0	$N_{15}=(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4$
16	−1	1	0	$N_{16}=(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)/4$
17	0	−1	1	$N_{17}=(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)/4$
18	1	0	1	$N_{18}=(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4$
19	0	1	1	$N_{19}=(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)/4$
20	−1	0	1	$N_{20}=(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)/4$

$$N_i=\begin{cases}\dfrac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)\\ \quad(\xi\xi_i+\eta\eta_i+\zeta\zeta_i-2) & (i=1,2,\cdots,8)\\ \dfrac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) & (i=9,11,17,19)\\ \dfrac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2)(1+\zeta\zeta_i) & (i=10,12,18,20)\\ \dfrac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1-\zeta^2) & (i=13,14,15,16)\end{cases}\tag{3.41}$$

可见，N_i 是局部坐标的二次函数。因此，空间二十结点等参元除能模拟平面边界外，也能模拟二次曲面边界。

同样可见形函数具有前述插值函数特点并且满足类似于式(3.31)所示的关系式。

形函数关于整体坐标的导数仍如式(3.32)所示，式中的 Jacobi 矩阵为

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial y}{\partial \zeta} & \dfrac{\partial z}{\partial \zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i=1}^{20} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum\limits_{i=1}^{20} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} & \sum\limits_{i=1}^{20} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi}\\ \sum\limits_{i=1}^{20} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum\limits_{i=1}^{20} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum\limits_{i=1}^{20} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta}\\ \sum\limits_{i=1}^{20} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \sum\limits_{i=1}^{20} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} & \sum\limits_{i=1}^{20} z_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta}\end{bmatrix} \tag{3.42}$$

其中

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\xi_i(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i)\\ \quad(\eta\eta_i+\zeta\zeta_i+2\xi\xi_i-1) & (i=1,2,\cdots,8)\\ -\dfrac{1}{2}\xi(1+\eta\eta_i)(1+\zeta\zeta_i) & (i=9,11,17,19)\\ \dfrac{1}{4}\xi_i(1-\eta^2)(1+\zeta\zeta_i) & (i=10,12,18,20)\\ \dfrac{1}{4}\xi_i(1+\eta\eta_i)(1-\zeta^2) & (i=13,14,15,16)\end{cases} \tag{3.43a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\eta_i(1+\xi\xi_i)(1+\zeta\zeta_i)\\ \quad(\xi\xi_i+\zeta\zeta_i+2\eta\eta_i-1) & (i=1,2,\cdots,8)\\ \dfrac{1}{4}\eta_i(1-\xi^2)(1+\zeta\zeta_i) & (i=9,11,17,19)\\ -\dfrac{1}{2}\eta(1+\xi\xi_i)(1+\zeta\zeta_i) & (i=10,12,18,20)\\ \dfrac{1}{4}\eta_i(1+\xi\xi_i)(1-\zeta^2) & (i=13,14,15,16)\end{cases} \tag{3.43b}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}=\begin{cases}\dfrac{1}{8}\zeta_i(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)\\ \quad(\xi\xi_i+\eta\eta_i+2\zeta\zeta_i-1) & (i=1,2,\cdots,8)\\ \dfrac{1}{4}\zeta_i(1-\xi^2)(1+\eta\eta_i) & (i=9,11,17,19)\\ \dfrac{1}{4}\zeta_i(1+\xi\xi_i)(1-\eta^2) & (i=10,12,18,20)\\ -\dfrac{1}{2}\zeta(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i) & (i=13,14,15,16)\end{cases} \tag{3.43c}$$

对于真实的空间二十结点长方体单元(图 3.8)，其坐标变换式及 Jacobi 矩阵与空间八结点长方体单元(图 3.6)的相同，故形函数关于整体坐标的导数为

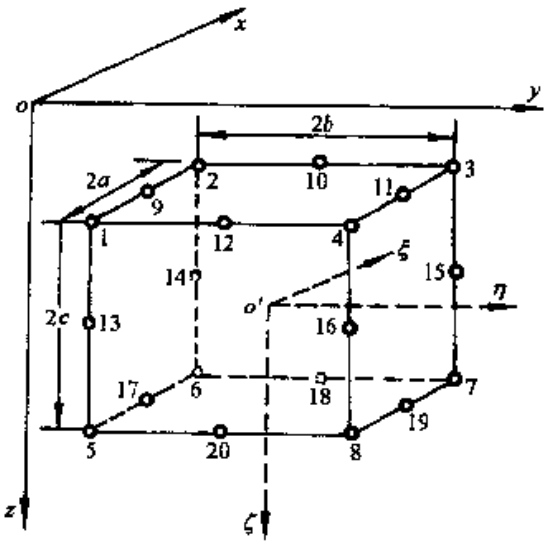


图 3.8　八结点长方体单元

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \dfrac{1}{b}\dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{Bmatrix} \tag{3.44}$$

其中形函数关于局部坐标的导数见式(3.43)。

特别在结点处，即当 $\xi=\xi_i, \eta=\eta_i, \zeta=\zeta_i$ 时可得

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{3}{2a}\xi_i & (i=1,2,\cdots,8) \\ -\dfrac{2}{a}\xi_i & (i=9,11,17,19) \\ 0 & (i=10,12,18,20) \\ 0 & (i=13,14,15,16) \end{cases} \tag{3.45a}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{3}{2b}\eta_i & (i=1,2,\cdots,8) \\ 0 & (i=9,11,17,19) \\ -\dfrac{2}{b}\eta_i & (i=10,12,18,20) \\ 0 & (i=13,14,15,16) \end{cases} \tag{3.45b}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial z} = \begin{cases} \dfrac{3}{2c}\zeta_i & (i=1,2,\cdots,8) \\ 0 & (i=9,11,17,19) \\ 0 & (i=10,12,18,20) \\ -\dfrac{2}{c}\zeta_i & (i=13,14,15,16) \end{cases} \tag{3.45c}$$

3.4 有限元中的数值积分方法

3.4.1 数值积分方法的基本思想

在有限元计算中，由于单元形状的复杂多变和不规则性，有限元方程中单元刚度矩阵元素等的积分式往往不能直接写成显式。因此，当进行单元刚度矩阵元素等的计算时，一般需要采用数值积分方法。

数值积分法将复杂函数的积分转化为简单的求和，从而完成用解析法难以完成的复杂积分。

数值积分的基本思想可用一维问题为例说明。对一维积分问题$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$进行数值积分，其基本思想是：构造一个多项式的近似函数$\phi(\lambda)$，使在点$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$处有$\phi(\lambda_i)=f(\lambda_i)$，并用该多项式近似函数$\phi(\lambda)$的积分$\int_a^b \phi(\lambda)\mathrm{d}\lambda$来近似原被积函数$f(\lambda)$的积分$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\lambda$。其中$\lambda_i$称为积分点或取样点，它的数目和位置决定了数值积分的精度。

视积分点位置选择的不同，就构成了不同的数值积分法。通常采用的两种数值积分法称为 Newton-Cotes 积分法和 Gauss 积分法。

在不增加计算工作量的前提下，Gauss 积分法较 Newton-Cotes 积分法精度高，因此在有限元计算中用的最多。

以下将对 Newton-Cotes 积分法和 Gauss 积分法，特别是有限元中最常用的 Gauss 积分法作一介绍。

3.4.2 Newton-Cotes 积分法

在 Newton-Cotes 积分法中，包括积分域端点$[a,b]$在内的积分点按等间距分布，即

$$\lambda_i = a + (i-1)h \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.46}$$

其中$n\geqslant 2$，为积分点数；$h=(b-a)/(n-1)$，积分点间距。

多项式近似函数$\phi(\lambda)$可由 Lagrange 多项式构造，即

$$\phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} L_i^{(n-1)}(\lambda) f(\lambda_i) \tag{3.47}$$

式中$L_i^{(n-1)}(\lambda)$是$n-1$阶 Lagrange 插值函数

$$L_i^{(n-1)}(\lambda) = \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_{i-1})(\lambda-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda-\lambda_n)}{(\lambda_i-\lambda_1)(\lambda_i-\lambda_2)\cdots(\lambda_i-\lambda_{i-1})(\lambda_i-\lambda_{i+1})\cdots(\lambda_i-\lambda_n)} \tag{3.48}$$

显然，当$\lambda=\lambda_i$，$L_i^{(n-1)}(\lambda)=1$；当$\lambda=\lambda_j(j\neq i)$，$L_i^{(n-1)}(\lambda)=0$。故式(3.47)所构造

的多项式近似函数 $\phi(\lambda)$，满足在点 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 处使 $\phi(\lambda_i)=f(\lambda_i)$ 的要求。

由于式(3.48)所示的 Lagrange 插值函数是 $n-1$ 次多项式，因此近似函数 $\varphi(\lambda)$ 也是 $n-1$ 次多项式。对 $\phi(\lambda)$ 积分，有

$$\int_a^b \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} L_i^{(n-1)}(\lambda) f(\lambda_i)\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b L_i^{(n-1)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right) f(\lambda_i) \tag{3.49}$$

记

$$H_i = \int_a^b L_i^{(n-1)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.50}$$

则式(3.49)可写为

$$\int_a^b \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} H_i f(\lambda_i) \tag{3.51}$$

式中 H_i 称为积分的权系数。从式(3.50)可见 H_i 仅与积分点的个数和位置有关，而与被积函数 $f(\lambda)$ 无关。

为使权系数规则化，将积分区间[a,b]变换为[0,1]，可引入

$$\lambda' = \frac{\lambda - a}{b - a} \tag{3.52}$$

在积分点处显然有

$$\lambda_i' = \frac{\lambda_i - a}{b - a} = \frac{i-1}{n-1} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.53}$$

故权系数可写作

$$H_i = (b - a)W_i \tag{3.54}$$

其中 W_i 可称为规则化积分域[0,1]上的权系数，由下式确定：

$$W_i = \int_0^1 L_i^{(n-1)}(\lambda')\mathrm{d}\lambda' \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{3.55}$$

作为算例，现求 $n=3$ 时的权系数 W_1,W_2,W_3。

当 $n=3$，由式(3.53)可得 $\lambda_1'=0,\lambda_2'=\frac{1}{2},\lambda_3'=1$，故有

$$W_1 = \int_0^1 L_1^{(2)}(\lambda')\mathrm{d}\lambda' = \int_0^1 \frac{(\lambda' - \lambda_2')(\lambda' - \lambda_3')}{(\lambda_1' - \lambda_2')(\lambda_1' - \lambda_3')}\mathrm{d}\lambda'$$

$$= \int_0^1 \frac{\left(\lambda' - \frac{1}{2}\right)(\lambda' - 1)}{\left(0 - \frac{1}{2}\right)(0 - 1)}\mathrm{d}\lambda' = \frac{1}{6}$$

同理有 $W_2=2/3,W_3=1/6$。

表 3.5 列出了积分点 $n=2\sim6$ 时的权系数 W_i 的值。

至此由式(3.51)和(3.54)可得一维问题的 Newton-Cotes 积分公式

$$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \approx \sum_{i=1}^{n} H_i f(\lambda_i) = (b - a)\sum_{i=1}^{n} W_i f(\lambda_i) \tag{3.56}$$

其中积分点坐标 λ_i 由式(3.46)给出；常用权系数 W_i 值见表 3.5。

表 3.5 Newton-Cotes 积分权系数及算例

积分点数 n	积分阶数 $n-1$	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	W_6	$\int_0^2(5x^4-1)dx$ 值
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	—	—	—	—	78.00
3	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	—	—	—	31.33
4	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	—	—	30.59
5	4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$	—	30.00
6	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	30.00

为说明Newton-Cotes积分法的精度，表3.5还给出了用该法求得的对应于不同积分点的$\int_0^2(5x^4-1)\mathrm{d}x$值。与精确值30对比可见，当积分点数$n\geqslant 5$时，数值积分值与精确值完全一致。这是因为Newton-Cotes积分法构造的n个积分点的近似函数$\phi(\lambda)$是$n-1$次多项式，n个积分点的Newton-Cotes积分可达到$n-1$阶的精度。故若被积函数$f(\lambda)$为$n-1$次多项式，则仅当积分点数等于或大于n，积分结果才是精确的。

进一步的研究表明，积分点数$n=3$和积分点数$n=4$具有同阶的精度；积分点数$n=5$则和积分点数$n=6$具有同阶的精度，因此实际计算中一般只采用$n=3,5$等奇数积分点的Newton-Cotes积分。顺便提及，积分点数$n=2$和$n=3$的Newton-Cotes积分公式其实就是著名的梯形积分公式和Simpson积分公式。

3.4.3 Gauss积分法

与Newton-Cotes积分法不同，Gauss积分法中的积分点λ_i并不按等间距分布，而是由下列积分式确定：

$$\int_a^b \lambda^{i-1}g(\lambda)\mathrm{d}\lambda=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n) \tag{3.57}$$

式中$g(\lambda)$为n次多项式

$$g(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i) \tag{3.58}$$

近似函数$\phi(\lambda)$的构造也与Newton-Cotes积分法不同，是由$n-1$阶Lagrange插值函数$L_i^{(n-1)}(\lambda)$和多项式$\lambda^{i-1}g(\lambda)$构造的，即

$$\phi(\lambda)=\sum_{i=1}^{n}L_i^{(n-1)}(\lambda)f(\lambda_i)+\sum_{i=1}^{n}\delta_i\lambda^{i-1}g(\lambda) \tag{3.59}$$

显然，$g(\lambda_i)=0$，故上式所构造的多项式近似函数$\phi(\lambda)$也满足在积分点

$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$处使 $\phi(\lambda_i)=f(\lambda_i)$的要求。

由于式(3.59)右边第二项为 $2n-1$ 次多项式，因此 Gauss 积分法中的近似函数 $\phi(\lambda)$也是 $2n-1$ 次多项式，且含有 $f(\lambda_i)$和 $\delta_i(i=1,2,\cdots,n)$共 $2n$ 个系数。

对 $\phi(\lambda)$积分，有

$$\int_a^b \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} L_i^{(n-1)}(\lambda) f(\lambda_i)\mathrm{d}\lambda + \sum_{i=1}^{n} \delta_i \int_a^b \lambda^{i-1} g(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.60}$$

利用式(3.57)并仍记

$$H_i = \int_a^b L_i^{(n-1)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.50}$$

则可得与式(3.51)在形式上相同的结果，即

$$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\lambda \approx \int_a^b \varphi(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=1}^{n} H_i f(\lambda_i) \tag{3.61}$$

但应该强调，由于 Gauss 积分法中的积分点 λ_i 不按等间距分布且近似函数 $\phi(\lambda)$是 $2n-1$ 次多项式，故式(3.61)与式(3.51)有本质上的区别。而且，正因为 Gauss 积分法构造的 n 个积分点的近似函数 $\phi(\lambda)$是 $2n-1$ 次多项式，因此 n 个积分点的 Gauss 积分的精度要比 Newton-Cotes 积分高得多，可达到 $2n-1$ 阶的精度。也即如被积函数 $f(\lambda)$为 $2n-1$ 次多项式，则只需 n 个积分点就能保证 Gauss 积分结果是精确的。

为使积分点的坐标 λ_i 和积分权系数 H_i 的计算方便且规则化，令 $a=-1$，$b=1$，并记规则化积分域$[-1,1]$上的权系数为 W_i，则计算得到的 λ_i 对于原积分域$[a,b]$，积分点的坐标为$\frac{b-a}{2}\lambda_i+\frac{b+a}{2}$，而 W_i 和 H_i 的关系为

$$W_i = \frac{2}{b-a}H_i = \frac{2}{b-a}\int_a^b L_i^{(n-1)}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \tag{3.62}$$

现求 Gauss 积分法中 $n=3$ 时规则化积分域$[-1,1]$上的积分点坐标 λ_1、λ_2、λ_3 及权系数 W_1、W_2、W_3。

与式(3.58)对应的 3 次多项式为

$$g(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)$$

则由式(3.57)可得求积分点位置的方程为

$$i=1 \quad \int_{-1}^{1} (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\mathrm{d}\lambda = 0$$

$$i=2 \quad \int_{-1}^{1} \lambda(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\mathrm{d}\lambda = 0$$

$$i=3 \quad \int_{-1}^{1} \lambda^2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)\mathrm{d}\lambda = 0$$

或

$$\begin{cases} \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \\ \dfrac{1}{3}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1) + \dfrac{1}{5} = 0 \\ \dfrac{1}{3}\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dfrac{1}{5}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = 0 \end{cases}$$

求解联立方程得

$$\lambda_1 = -\frac{\sqrt{15}}{5} = -0.77459667 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{15}}{5} = 0.77459667$$

进而由式(3.62)可得积分权系数为

$$W_1 = \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)}\mathrm{d}\lambda = \frac{5}{9} = 0.55555556$$

$$W_2 = \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_2-\lambda_3)}\mathrm{d}\lambda = \frac{8}{9} = 0.88888889$$

$$W_3 = \int_{-1}^{1} \frac{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}\mathrm{d}\lambda = \frac{5}{9} = 0.55555556$$

同理可得相应于任意积分点数的高斯积分点坐标及权系数。

至此可得一维问题的 Gauss 积分公式

$$\int_a^b f(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{b-a}{2}\sum_{P=1}^{GP} W_P f\left(\frac{b-a}{2}\lambda_P + \frac{b+a}{2}\right) \tag{3.63}$$

特别在规则化积分域[−1,1]上有

$$\int_{-1}^{1} f(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \sum_{P=1}^{GP} W_P f(\lambda_P) \tag{3.64}$$

式中:GP 为积分方向 λ 上的高斯积分点数;λ_P 和 W_P 为规则化积分域[−1,1]上的积分点坐标及相应的权系数。表 3.6 给出了 λ_P 和 W_P 的常用值。

利用表 3.6 及式(3.63) 可得对应于不同积分点数(GP = 1,2,3,4,5) 的积分 $\int_0^2 (5x^4 - 1)\mathrm{d}x$ 的 Gauss 积分值分别为:8,29.11,30,30,30。可见,当积分点数等于或大于 3,Gauss 积分结果就达到了精确值 30,而如前所述用 Newton-Cotes 积分法,积分点数必须等于或大于 5 才能达到精确值。

上述一维 Gauss 积分法也可方便地推广到二维或三维问题的数值积分。

对于二维问题

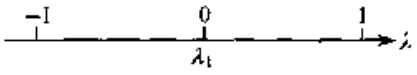
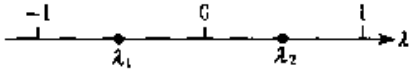
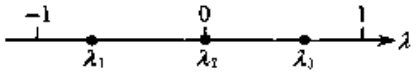
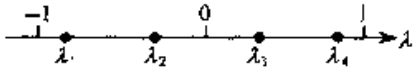
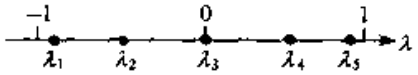
$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta = \int_{-1}^{1}\left[\sum_{i=1}^{n_\xi} W_i f(\xi_i,\eta)\right]\mathrm{d}\eta = \sum_{i=1}^{n_\xi}\sum_{j=1}^{n_\eta} W_i W_j f(\xi_i,\eta_j) \tag{3.65}$$

同理对于三维问题有

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \sum_{i=1}^{n_\xi}\sum_{j=1}^{n_\eta}\sum_{k=1}^{n_\zeta} W_i W_j W_k f(\xi_i,\eta_j,\zeta_k) \tag{3.66}$$

式中 n_i、n_j、n_k 分别为 ξ、η、ζ 三积分方向上的积分点数；ξ_i、η_j、ζ_k 和 W_i、W_j、W_k 分别为各方向上相应的积分点坐标和权系数。

表 3.6　Gauss 积分点坐标及相应权系数

Gauss 积分点数 GP	P	积分点坐标 λ_P	权系数 W_P	λ_P 在坐标轴上的位置
1	1	0.00000000	2.00000000	
2	1	−0.57735027	1.00000000	
	2	0.57735027	1.00000000	
3	1	−0.77459667	0.55555556	
	2	0.00000000	0.88888889	
	3	0.77459667	0.55555556	
4	1	−0.86113631	0.34785485	
	2	−0.33998104	0.65214515	
	3	0.33998104	0.65214515	
	4	0.86113631	0.34785485	
5	1	−0.90617985	0.23692689	
	2	−0.53846931	0.47862867	
	3	0.00000000	0.56888889	
	4	0.53846931	0.47862867	
	5	0.90617985	0.23692689	

显然，进行数值积分时，Gauss 积分点数的选择将直接影响计算精度和工作量，选择不当甚至会导致计算的失败。在保证足够精度的前提下，应尽量选取减缩积分方案(即选择较少的积分点数)以节约机时，减少计算工作量。

研究表明，由于有限元的计算模型具有较实际结构偏大的整体刚度，选取减缩积分方案将使有限元计算模型的刚度有所降低，从而可能有助于提高计算精度。因此在有限单元法中，一般可取 Gauss 积分点数 GP≤3。

特别对于空间 8 结点等参元，经验表明，取 GP=2，即在每个积分方向上取 2 个 Gauss 积分点(三个方向共 8 点)就能保证数值积分有足够精度。注意到取 GP=2 时，$W_P=1$，故从式(3.65)可得

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta = \sum_{P=1}^{8} f(\xi_P,\eta_P,\zeta_P) \tag{3.67a}$$

式中

$$\xi_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\xi_i \quad \eta_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\eta_i \quad \zeta_P = \frac{1}{\sqrt{3}}\zeta_i \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{3.67b}$$

ξ_i、η_i、ζ_i 为空间 8 结点等参元的结点局部坐标，见表 3.3。

参 考 文 献

[1] K. J. 巴斯著．付子智译．工程分析中的有限元法，机械工业出版社，1991

[2] J. R. Booker & J. C. Small. An investigation of the stability of numerical solution of Biot's equation of consolidation. Int. J. Solids & Structures, Vol. 11, 1975

[3] Y. K. Cheung(张佑启)、M. Y. Yeo 著．罗崧发等译．有限单元法实用导论，广西人民出版社，1982

[4] R. W. Clough The Finite Element Method in Plane Stress Analysis. Proc. 2nd ASME Conference on Electronic Computation. Pittsburgh, Pa., 1960

[5] R. Courant. Variational Method for Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, Bull. Am. Math. Soc., Vol. 49, 1943

[6] 龚晓南．土工计算机分析．中国建筑工业出版社，2000

[7] 钱家欢、殷宗泽．土工原理与计算．中国水利水电出版社，1996

[8] G. Gudehus. Finite elements in Geomechanics. John Wiley & Sons, 1977

[9] M. J. Turner, R. W. Clough, H. C. Martin & L. C. Topp. Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures. J. Aero. Sci., Vol. 23, 1956

[10] 王勖成、邵敏．有限单元法基本原理和数值方法．清华大学出版社，1997

[11] 谢康和．砂井地基：固结理论、数值分析与优化设计．浙江大学博士学位论文，1987

[12] 谢贻权、何福保．弹性和塑性力学中的有限单元法．机械工业出版社，1981

[13] 朱百里、沈珠江等．计算土力学．上海科学技术出版社，1990

[14] 朱伯芳．有限单元法原理与应用．水利电力出版社，1979

[15] O. C. Zienkiewicz & Y. K. Cheung (张佑启). Finite Element Methods in Structural and Continuum Mechanics. McGraw-Hill Co., New York, 1967

第四章　饱和土的静力有限元分析理论

4.1　概　　述

饱和土的静力分析是岩土工程分析的重要内容，它包括静力总应力分析和静力有效应力分析。如第一章所述，总应力分析是有效应力分析的特殊形式。因此，饱和土的静力有效应力分析控制方程，即 Biot 三维静力固结方程(1.35)和(1.37)，也就是对饱和土进行静力分析的基本方程。该方程的有限元解法是岩土工程中经典的静力分析方法之一。

用有限元法求解 Biot 三维固结方程，需要建立相应的有限元方程。该方程即为求解结点位移和孔压的线性方程组。通常根据变分原理(能量法)或加权残数法来建立有限元方程。如第三章所述，相对而言，加权残数法较变分原理适用性更广，因此，这里将采用加权残数法建立 Biot 三维固结有限元方程。

本章详细介绍用有限元法求解 Biot 三维固结方程的全过程，包括相应于任意空间八结点单元的 Biot 三维固结有限元方程、单元固结矩阵和结点荷载列阵等各元素计算公式的详细推导。此外，还给出了相应于长方体八结点单元的固结矩阵元素的计算式。由于这些元素的计算式为精确的解析显式而不必采用数值积分法计算，因此它们可用来检验基于数值积分法而得到的任意空间八结点等参元的固结矩阵元素的计算式的精度，这对于三维固结有限元分析程序的调试特别有用。

本章所有的内容即为将在第八章中介绍的岩土工程静力有限元分析程序 PDSS的理论基础。

4.2　位移与孔压模式

与建立一般力学问题的有限元方程相似，要建立固结有限元方程，首先应选取合适的位移与孔压模式(即位移与孔压的近似计算式)。按前述加权残数法，这一工作也就是选取试函数。

对于三维固结问题，应采用空间等参元对求解域进行离散。综合考虑计算精度与计算量，可选用空间八结点等参元(图 3.5)，则按空间八结点等参元的等参变换原则，可取单元内任一点沿 x、y、z 三方向的位移 u、v、w 和孔压 p 模式为

$$\left.\begin{aligned} u \approx \tilde{u} &= \sum_{i=1}^{8} N_i u_i \\ v \approx \tilde{v} &= \sum_{i=1}^{8} N_i v_i \\ w \approx \tilde{w} &= \sum_{i=1}^{8} N_i w_i \\ p \approx \tilde{p} &= \sum_{i=1}^{8} N_i p_i \end{aligned}\right\} \tag{4.1}$$

式中：$\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$、$\tilde{p}$ 为单元内任一点位移和孔压的近似解；N_i 为空间八结点单元形函数，见表 3.3 或式(3.30)；u_i、v_i、w_i、p_i 为单元结点位移和孔压。

将上式写成矩阵形式，即

$$\{f\} \approx \{\tilde{f}\} = \begin{Bmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{w} \end{Bmatrix} = [N]\{\delta\}^e \tag{4.2a}$$

$$p \approx \tilde{p} = [\overline{N}]\{p\}^e \tag{4.2b}$$

式中：$\{f\}=\{u \quad v \quad w\}^T$(单元内任一点的位移矢量，3×1 阶)；$\{\tilde{f}\}=[\tilde{u} \quad \tilde{v} \quad \tilde{w}]^T$(位移矢量$\{f\}$的近似解，3×1 阶)；$\{\delta\}^e=[\delta_1^T \quad \delta_2^T \cdots \delta_8^T]^T$(单元结点位移矢量，24×1 阶)

$$\delta_i = [u_i \quad v_i \quad w_i]^T \quad i = 1,2,\cdots,8$$

$$[N] = [N_1 I \quad N_2 I \cdots N_8 I]\text{(形函数矩阵，3 × 24 阶)}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\text{(3 × 3 阶单位方阵)}$$

$$\{p\}^e = [p_1 \quad p_2 \cdots p_8]^T\text{(单元结点孔压矢量，8 × 1 阶)}$$

$$[\overline{N}] = [N_1 \quad N_2 \cdots N_8]\text{(1 × 8 阶)}$$

式(4.1)或(4.2)即为 Biot 三维固结方程(1.35)和(1.37)或(1.42)和(1.46)选取的近似解。可见，该近似解是由单元结点位移 u_i、v_i、w_i 和结点孔压 p_i 通过形函数 N_i 的插值而得到的。

而从加权残数法的角度来看，式(4.1)或(4.2)就是前述的试函数，其中形函数即为试函数项，而结点位移和结点孔压即为待定系数。

显然，这里对位移和孔压均是取一次插值模式的。由于孔压与应力相当，也即与位移的一阶导数相当，故对位移和孔压均取同次模式似不合理。为此，有些学者曾建议对位移和孔压分别采用不同的插值模式。例如 Sandhu 和 Wilson(1969)在他们的有限元分析中对位移取二次插值模式，而对孔压则取一次插值模式。不过计

算表明，只要时段和网格划分合理，对位移和孔压均取同一插值模式仍可获得满意的精度。第八章中给出的算例也表明了这一点。因此可以认为对位移和孔压取同次插值模式是可行的。

4.3 Biot 三维固结有限元基本方程

Biot 三维固结有限元方程的推导可分为两步：先对 Biot 三维固结方程进行空间离散；然后再进行时间离散。

4.3.1 Biot 三维固结方程的空间离散

如第一章所述，Biot 三维固结方程是由平衡方程式(1.35)或(1.42)和连续方程式(1.37)或(1.46)组成的。因此，Biot 三维固结方程的空间离散又分为平衡方程的空间离散和连续方程的空间离散。

1. 平衡方程的空间离散

根据加权残数法(参见第三章)，将近似解式(4.2)代入平衡方程式(1.42)，即得平衡方程在单元内部的残数

$$R_i^e = [\partial]^T([D][\partial]\{\tilde{f}\} - \{M\}\tilde{p}) \tag{4.3}$$

以式(3.30)所示的空间八结点单元形函数 N_i 作为权函数(参见 3.2 和 3.3 节)，可得消除单元内部残数 R_i^e 的方程

$$\iiint_{V^e} N_i R_i^e \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V^e} N_i[\partial]^T \times ([D][\partial]\{\tilde{f}\} - \{M\}\tilde{p})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{4.4}$$

式中：上标 e 代表单元；V^e 表示单元体积。

由式(1.41)可得

$$\{\tilde{\sigma}\} = -[D]([\partial]\{\tilde{f}\}) + \{M\}\tilde{p} \tag{4.5}$$

故方程式(4.4)亦可表为

$$\iiint_{V^e} N_i([\partial]^T\{\tilde{\sigma}\})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{4.6}$$

其中，$\{\tilde{\sigma}\} = [\tilde{\sigma}_x \quad \tilde{\sigma}_y \quad \tilde{\sigma}_z \quad \tilde{\tau}_{xy} \quad \tilde{\tau}_{yz} \quad \tilde{\tau}_{zx}]^T$，为单元内任一点的总应力矢量的近似解。

利用方程式(1.26)和(1.27)，可将积分方程式(4.6)展开。对应于任一结点 i，式(4.6)展开后均有三个方程，其第一个方程即

$$\iiint_{V^e} N_i\left(\frac{\partial\tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{zx}}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \tag{4.7}$$

利用分部积分法，可将方程(4.7)左边第一项写为

$$\iiint_{V^e} N_i \frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial x} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} N_i \tilde{\sigma}_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iiint_{V^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \tilde{\sigma}_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= -\left(\iiint_{V^e} \frac{\partial N_i}{\partial x} \tilde{\sigma}_x \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D^e} N_i \tilde{\sigma}_x l \mathrm{d}s \right) \tag{4.8a}$$

同理，可将方程(4.7)左边的第二、第三项写为

$$\iiint_{V^e} N_i \frac{\partial \tilde{\tau}_{yx}}{\partial y} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\left(\iiint_{V^e} \frac{\partial N_i}{\partial y} \tilde{\tau}_{yx} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D^e} N_i \tilde{\tau}_{yx} m \mathrm{d}s \right) \tag{4.8b}$$

$$\iiint_{V^e} N_i \frac{\partial \tilde{\tau}_{zx}}{\partial z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\left(\iiint_{V^e} \frac{\partial N_i}{\partial z} \tilde{\tau}_{zx} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D^e} N_i \tilde{\tau}_{zx} n \mathrm{d}s \right) \tag{4.8c}$$

以上三方程中的 l、m、n 为单元边界面 D^e 上微元 $\mathrm{d}s$ 的外法线方向余弦。

于是，式(4.6)的第一个方程即方程(4.7)可表为

$$\iiint_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \tilde{\sigma}_x + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tilde{\tau}_{yx} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \tilde{\tau}_{zx} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} N_i (l\tilde{\sigma}_x + m\tilde{\tau}_{yx} + n\tilde{\tau}_{zx}) \mathrm{d}s \tag{4.9a}$$

根据类似的推导，可将式(4.6)展开后的第二、第三个方程分别表示为

$$\iiint_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \tilde{\tau}_{xy} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tilde{\sigma}_y + \frac{\partial N_i}{\partial z} \tilde{\tau}_{zy} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} N_i (l\tilde{\tau}_{xy} + m\tilde{\sigma}_y + n\tilde{\tau}_{zy}) \mathrm{d}s \tag{4.9b}$$

$$\iiint_{V^e} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \tilde{\tau}_{xz} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \tilde{\tau}_{yz} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \tilde{\sigma}_z \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} N_i (l\tilde{\tau}_{xz} + m\tilde{\tau}_{yz} + n\tilde{\sigma}_z) \mathrm{d}s \tag{4.9c}$$

将此三个方程写成矩阵形式，即

$$\iiint_{V^e} ([\partial]^T N_i)\{\tilde{\sigma}\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} N_i ([L]^T \{\tilde{\sigma}\}) \mathrm{d}s \tag{4.10}$$

其中，$[\partial]$和$[L]$均为 6×3 阶矩阵，分别如式(1.28)和(1.48b)所示。

方程(4.10)对于任一结点均成立。将其在单元的 8 个结点上全部展开，显然可得 24 个方程(对应于每个结点有三个方程)。该 24 个方程可进一步写成矩阵形式

$$\iiint_{V^e} [B]^T \{\tilde{\sigma}\} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{D^e} [N]^T ([L]^T \{\tilde{\sigma}\}) \mathrm{d}s \tag{4.11}$$

其中，$[B] = -[\partial][N] = [B_1 \quad B_2 \cdots B_8]$，为 6×24 阶矩阵，其子矩阵$[B_i]$为 6×3 阶，即

$$[B_i] = -[\partial]N_i = -\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,8) \tag{4.12}$$

另一方面，利用应力边界条件式(1.48a)，可得单元的应力边界残数，即

$$R_B^e = [L]^T\{\tilde{\sigma}\} + \{F\} \tag{4.13}$$

进一步可得消除该边界残数的方程为

$$\iint_{D^e} N_i([L]^T\{\tilde{\sigma}\} + \{F\})\mathrm{d}s = 0 \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{4.14}$$

其中，$\{F\}$为单元的边界面力矢量，见式(1.48c)。

方程式(4.14)在各结点展开后也是24个方程，该24个方程写成矩阵式

$$\iint_{D^e} [N]^T([L]^T\{\tilde{\sigma}\})\mathrm{d}s = -\iint_{D^e} [N]^T\{F\}\mathrm{d}s \tag{4.15}$$

结合方程(4.11)和(4.15)，可得

$$\iiint_{V^e} [B]^T\{\tilde{\sigma}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D^e} [N]^T\{F\}\mathrm{d}s \tag{4.16}$$

此即空间离散后的以总应力表示的平衡方程。

将式(4.2)代入式(4.5)，可得$\{\tilde{\sigma}\}$与单元结点位移和结点孔压的关系式，即

$$\{\tilde{\sigma}\} = -[D]([\partial][N])\{\delta\}^e + \{M\}[\overline{N}]\{p\}^e = [D][B]\{\delta\}^e + \{M\}[\overline{N}]\{p\}^e \tag{4.17}$$

将上式代入方程(4.16)，整理后即得

$$[K_e]\{\delta\}^e + [K_c]\{p\}^e = \{R_F\}^e \tag{4.18}$$

式中：$[K_e]$为单元刚(劲)度矩阵，24×24阶，其计算式为

$$[K_e] = \iiint_{V^e} [B]^T[D][B]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.19}$$

$[K_c]$为单元耦合矩阵，24×8阶，其计算式为

$$[K_c] = \iiint_{V^e} [B]^T[M][\overline{N}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.20}$$

$\{R_F\}^e$为单元等效结点荷载列阵，24×1阶，其计算式为

$$\{R_F\}^e = \iint_{D^e}[N]^T\{F\}\mathrm{d}s \tag{4.21}$$

方程式(4.18)即为空间离散后以单元结点位移和孔压表示的平衡方程。

2. 连续方程的空间离散

采用与平衡方程空间离散的相同的方法，可得消除连续方程(1.46)单元内部残数的方程式

$$\iiint_{V^e} N_i\left(\{M\}^T[\partial]\frac{\partial\{\tilde{f}\}}{\partial t} - \{M\}^T[\partial][k][\partial]^T\{M\}\tilde{p}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{4.22}$$

其中，$[k]$为3×3阶渗透系数矩阵，如式(1.44)所示。

将方程(4.22)左边第二项展开，并利用分部积分法，可得

$$\begin{aligned}
&-\iiint_{V^e} N_i\{M\}^T[\partial][k][\partial]^T\{M\}\tilde{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -\frac{1}{\gamma_w}\iiint_{V^e} N_i\left[k_h\left(\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial y^2}\right)+k_v\frac{\partial^2\tilde{p}}{\partial z^2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -\iint_{D^e} N_i\left[\frac{k_h}{\gamma_w}\left(l\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+m\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}\right)+\frac{k_v}{\gamma_w}n\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}\right]\mathrm{d}s \\
&\quad +\frac{1}{\gamma_w}\iiint_{V^e}\left[k_h\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}\right)+k_v\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{4.23}$$

由流速边界条件式(1.50)和加权残数法，可得消除单元流速边界残数的方程为

$$\iint_{D^e} N_i\left[\frac{k_h}{\gamma_w}\left(l\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+m\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}\right)+\frac{k_v}{\gamma_w}n\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}+v_n\right]\mathrm{d}s = 0 \quad i = 1,2,\cdots,8 \tag{4.24}$$

将其代入式(4.23)，得

$$\begin{aligned}
&-\iiint_{V^e} N_i\{M\}^T[\partial][k][\partial]^T\{M\}\tilde{p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \frac{1}{\gamma_w}\iiint_{V^e}\left[k_h\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial y}\right)+k_v\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D^e} N_i v_n\mathrm{d}s \\
&= \iiint_{V^e}\{\nabla\}^T N_i[k]\{\nabla\}[\overline{N}]\{p\}^e\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{D^e} N_i v_n\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{4.25}$$

式中，

$$\{\nabla\} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\quad\frac{\partial}{\partial y}\quad\frac{\partial}{\partial z}\right]^T$$

于是，可将方程(4.22)写为

$$\iiint_{V^e} N_i\{M\}^T[\partial][N]\{\dot{\delta}\}^e \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$+\iiint_{V^e}\{\nabla\}^T N_i[k]\cdot\nabla\}[\overline{N}]\{p\}^e \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = -\iint_{\Omega^e} N_i v_n \mathrm{d}s \tag{4.26}$$

式(4.26)在各结点展开后为8个方程，该8个方程以矩阵表示即

$$[K_c]^T\{\dot{\delta}\}^e - [K_s]\{p\}^e = \{R_q\}^e \tag{4.27}$$

式中

$$\{\dot{\delta}\}^e = \frac{\partial\{\delta\}^e}{\partial t}$$

$[K_c]$为单元耦合矩阵，如式(4.20)所示；$[K_s]$为单元渗流矩阵，8×8阶，其计算式为

$$[K_s] = \iiint_{V^e}[B_s]^T[k][B_s]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.28}$$

$$[B_s] = \{\nabla\}[N] = \begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial z}\end{Bmatrix}[N_1 \quad N_2\cdots N_8] \tag{4.29}$$

$\{R_q\}^e$为单元等效结点流量列阵，8×1阶，其计算式为

$$\{R_q\}^e = \iint_{\Omega^e}[N]^T v_n \mathrm{d}s \tag{4.30}$$

特别对于不排水边界，$v_n=0$，则$\{R_q\}^e=0$。

式(4.27)即为空间离散后以单元结点位移和孔压表示的连续方程。它与方程式(4.18)合称为空间离散后的Biot三维固结方程。

4.3.2 Biot三维固结方程的时间离散

方程式(4.27)含结点位移关于时间的一次微分项$\{\dot{\delta}\}^e$，需对其进一步在时域上离散，才能得到求解结点位移和孔压的线性方程组。

为此，设t_n和t_{n+1}为时域上的两点，时刻t_n的单元结点位移和孔压分别为$\{\delta\}_n^e$和$\{p\}_n^e$，时段$\Delta t=t_{n+1}-t_n$内的单元结点位移和孔压增量分别为$\{\Delta\delta\}^e$和$\{\Delta p\}^e$，则时段t_{n+1}的结点位移和孔压可表为

$$\{\delta\}_{n+1}^e = \{\delta\}_n^e + \{\Delta\delta\}^e \tag{4.31a}$$

$$\{p\}_{n+1}^e = \{p\}_n^e + \{\Delta p\}^e \tag{4.31b}$$

由此可将平衡方程(4.18)写成增量式

$$[K_c]\{\Delta\delta\}^e + [K_c]\{\Delta p\}^e = \{\Delta R_F\}^e \tag{4.32}$$

其中$\{\Delta R_F\}^e$为Δt时段内单元等效结点荷载增量列阵，24×1阶，计算式为

$$\{\Delta R_F\}^e = \iint_{D^e} [N]^T \{\Delta F\}^e \mathrm{d}s \tag{4.33}$$

$$\{\Delta F\}^e = \begin{Bmatrix} \Delta F_x \\ \Delta F_y \\ \Delta F_z \end{Bmatrix}$$

为 Δt 时段内单元边界面力增量矢量。

再将连续方程(4.27)两边关于 t 从 t_n 到 t_{n+1} 积分，即

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} [K_c]^T \{\dot{\delta}\}^e \mathrm{d}t - \int_{t_n}^{t_{n+1}} [K_s]\{p\}^e \mathrm{d}t = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \{R_q\}^e \mathrm{d}t \tag{4.34}$$

并利用近似式

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \{p\}^e \mathrm{d}t \approx (t_{n+1} - t_n)[\theta\{p\}_{n+1}^e + (1-\theta)\{p\}_n^e] = \Delta t(\{p\}_n^e + \theta\{\Delta p\}^e) \tag{4.35}$$

可得

$$[K_c]^T \{\Delta\delta\}^e - \theta\Delta t[K_s]\{\Delta p\}^e = \{\Delta R_p\}^e \tag{4.36}$$

式中，$\{\Delta R_p\}^e$ 为单元等效结点流量增量列阵，8×1 阶，其计算式为

$$\{\Delta R_p\}^e = \Delta t(\{R_q\}^e + [K_s]\{p\}_n^e) \tag{4.37a}$$

θ 为积分常数，其取值范围为 0.5～1，常用值 0.5 或 2/3。如取 $\theta<0.5$，计算将可能不稳定。

特别对于不排水边界，因 $\{R_q\}^e=0$，故有

$$\{\Delta R_p\}^e = \Delta t[K_s]\{p\}_n^e \tag{4.37b}$$

式(4.32)和(4.36)即为空间和时间离散后的 Biot 三维固结方程。

4.3.3 Biot 三维固结有限元方程

将方程(4.32)和(4.36)合并，即得 Biot 三维固结有限元方程

$$[K]\{\Delta U\}^e = \{\Delta R\}^e \tag{4.38}$$

式中[K]为单元固结矩阵，为 32×32 阶对称方阵，其子矩阵为

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} [K_{aij}] & [K_{cij}] \\ [K_{cji}] & -\theta\Delta t K_{sij} \end{bmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,8) \tag{4.39}$$

其中：[K_{aij}]为单元刚度矩阵[式(4.19)]的子矩阵，3×3 阶；[K_{cij}]为单元耦合矩阵[式(4.20)]的子矩阵，3×1 阶；K_{sij}为单元渗流矩阵[式(4.28)]的元素；$\{\Delta U\}^e$ 为单元结点未知量增量列阵，32×1 阶，其子列阵即

$$\{\Delta U_i\} = [\Delta u_i \quad \Delta v_i \quad \Delta w_i \quad \Delta p_i]^T \quad (i = 1,2,\cdots,8) \tag{4.40}$$

Δu_i、Δv_i、Δw_i、Δp_i 为单元结点的位移和孔压增量；$\{\Delta R\}^e$ 为单元等效结点荷载和流量增量列阵，32×1 阶，其子列阵即

$$\{\Delta R_i\} = [\Delta R_{xi} \quad \Delta R_{yi} \quad \Delta R_{zi} \quad \Delta R_{pi}]^T \quad (i = 1,2,\cdots,8) \tag{4.41}$$

ΔR_{xi}、ΔR_{yi}、ΔR_{zi}为单元结点 i 的等效荷载增量，即式(4.33)所示列阵$\{\Delta R_F\}^e$的子列阵元素；ΔR_{pi}为单元结点 i 的等效流量增量，即式(4.37)所示列阵$\{\Delta R_p\}^e$的子列阵元素。

从上述 Biot 三维固结有限元方程(4.38)的推导过程可见，该方程已考虑了应力边界条件和流速(或流量)边界条件。

4.4 Biot 三维固结有限元计算公式

现进一步给出 Biot 三维固结有限元方程(4.38)中单元固结矩阵$[K]$及单元等效结点荷载和流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$中各元素的详细计算式，因为只有得到这些计算公式，才能编制有限元程序。

4.4.1 任意空间八结点单元固结矩阵各元素计算式

任意空间八结点单元如图 3.5(a)所示。

如上节所述，Biot 三维固结有限元方程中的单元固结矩阵$[K]$为 32×32 阶对称方阵。其子矩阵$[K_{ij}]$为 4×4 阶方阵，共有 16 个元素，如式(4.39)所示，或即

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij}^1 & K_{ij}^2 & K_{ij}^3 & K_{ij}^4 \\ K_{ij}^5 & K_{ij}^6 & K_{ij}^7 & K_{ij}^8 \\ K_{ij}^9 & K_{ij}^{10} & K_{ij}^{11} & K_{ij}^{12} \\ K_{ij}^{13} & K_{ij}^{14} & K_{ij}^{15} & K_{ij}^{16} \end{bmatrix} \quad i,j = 1,2,\cdots,8 \tag{4.42}$$

其中，九个元素为式(4.19)所示的单元刚度矩阵$[K_e]$的子矩阵$[K_{ej}]$的元素，即

$$[K_{ej}] = \begin{bmatrix} K_{ij}^1 & K_{ij}^2 & K_{ij}^3 \\ K_{ij}^5 & K_{ij}^6 & K_{ij}^7 \\ K_{ij}^9 & K_{ij}^{10} & K_{ij}^{11} \end{bmatrix} \tag{4.43}$$

现先推导该九个元素的详细计算式。

由式(4.19)可得

$$[K_{ej}] = \iiint_{V^e} [B_i]^T [D][B_j] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{4.44}$$

上式积分是在任意空间八结点真实单元的空间区域V^e上进行的，由于每个真实单元的大小和形状均有可能不同，故在V^e上积分十分不便。但如第三章所述，任意真实的 8 结点 6 面体单元(子单元)均可通过变换式(3.9)变换成边长为 2 的标准立方体单元(母单元，图 3.5)。因此，利用高等数学中三重积分的变量代换公式，可将真实单元V^e上的积分变换到边长为 2 的标准立方体单元上进行，即

$$[K_{ej}] = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [B_i]^T [D][B_j] |J| \mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.45}$$

式中：$|J|$为如式(3.33)所示的 Jacobi 矩阵$[J]$的行列式值；$[D]$和$[B_i]$分别见式(1.9a)和(4.12)。

将矩阵$[D]$和$[B_i]$代入式(4.45)可得

$$[K_{ij}]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z}\\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}d_1 & d_2 & d_2 & 0 & 0 & 0\\ d_2 & d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0\\ d_2 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z}\\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y}\\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x}\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\begin{bmatrix}d_1\frac{\partial N_i}{\partial x} & d_2\frac{\partial N_i}{\partial x} & d_2\frac{\partial N_i}{\partial x} & d_3\frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\\ d_2\frac{\partial N_i}{\partial y} & d_1\frac{\partial N_i}{\partial y} & d_2\frac{\partial N_i}{\partial y} & d_3\frac{\partial N_i}{\partial x} & d_3\frac{\partial N_i}{\partial z} & 0\\ d_2\frac{\partial N_i}{\partial z} & d_2\frac{\partial N_i}{\partial z} & d_1\frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & d_3\frac{\partial N_i}{\partial y} & d_3\frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z}\\ \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0\\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial y}\\ \frac{\partial N_j}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x}\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$
=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\begin{bmatrix}
d_1\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial z} & d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial y} & d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial z}\\
d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial x} & d_1\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial z} & d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial z}\\
d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial x} & d_2\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial y} & d_1\dfrac{\partial N_i}{\partial z}\dfrac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial y}\dfrac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\dfrac{\partial N_i}{\partial x}\dfrac{\partial N_j}{\partial x}
\end{bmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.46}
$$

式中，$\frac{\partial N_i}{\partial x}$、$\frac{\partial N_i}{\partial y}$、$\frac{\partial N_i}{\partial z}$为形函数 N_i 关于整体坐标的导数，如式(3.32)所示。

不难看出，式(4.46)所示的$[K_{ij}]$中各元素的积分项均为含 ξ、η、ζ 的复杂函数，难以直接积分，为此，采用第三章所述的 Gauss 积分法进行数值积分。

利用 Gauss 积分式(3.63)对式(4.46)进行高斯积分，就可得式(4.42)所示的单元固结矩阵子矩阵$[K_{ij}]$中 9 个元素的详细计算式，即

$$
K_{ij}^{1}=\sum_{p=1}^{8}\left\{|J|\left[d_1\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47a}
$$

$$
K_{ij}^{2}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47b}
$$

$$
K_{ij}^{3}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47c}
$$

$$
K_{ij}^{5}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47d}
$$

$$
K_{ij}^{6}=\sum_{p=1}^{8}\left\{|J|\left[d_1\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47e}
$$

$$K_{ij}^{7}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\right]\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47f}$$

$$K_{ij}^{9}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right]\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47g}$$

$$K_{ij}^{10}=\sum_{p=1}^{8}\left[|J|\left(d_2\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial y}+d_3\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right]\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47h}$$

$$K_{ij}^{11}=\sum_{p=1}^{8}\left\{|J|\left[d_1\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}+d_3\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\right]\right\}\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47i}$$

再推导单元固结矩阵子矩阵$[K_{ij}]$中的元素K_{ij}^{4}、K_{ij}^{8}和K_{ij}^{12}的计算式。对比式(4.39)和(4.42)可知，该三个元素正是式(4.20)所示单元耦合矩阵$[K_c]$的子矩阵$[K_{ai}]$的元素，故有

$$[K_{aj}]=\begin{Bmatrix}K_{ij}^{4}\\K_{ij}^{8}\\K_{ij}^{12}\end{Bmatrix}=\iiint_V[B_i]^T\{M\}N_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B_i]^T\{M\}N_j|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\begin{bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}&0&0&\frac{\partial N_i}{\partial y}&0&\frac{\partial N_i}{\partial z}\\0&\frac{\partial N_i}{\partial y}&0&\frac{\partial N_i}{\partial x}&\frac{\partial N_i}{\partial z}&0\\0&0&\frac{\partial N_i}{\partial z}&0&\frac{\partial N_i}{\partial y}&\frac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{Bmatrix}N_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_i}{\partial x}\\\frac{\partial N_i}{\partial y}\\\frac{\partial N_i}{\partial z}\end{Bmatrix}N_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.48}$$

于是可得

$$K_{ij}^{4}=-\sum_{p=1}^{8}\left(|J|\frac{\partial N_i}{\partial x}N_j\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47j}$$

$$K_{ij}^{8}=-\sum_{p=1}^{8}\left(|J|\frac{\partial N_i}{\partial y}N_j\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47k}$$

$$K_{ij}^{12} = -\sum_{p=1}^{8}\left(|J|\frac{\partial N_i}{\partial z}N_j\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47l}$$

同理可得

$$[K_{ei}]^T = [K_{ij}^{13}\quad K_{ij}^{14}\quad K_{ij}^{15}] = \iiint_V N_i\{M\}^T[B_j]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} N_i\left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\ \frac{\partial N_j}{\partial y}\ \frac{\partial N_j}{\partial z}\right]|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.49}$$

故有

$$K_{ij}^{13} = -\sum_{p=1}^{8}\left(|J|N_i\frac{\partial N_j}{\partial x}\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47m}$$

$$K_{ij}^{14} = -\sum_{p=1}^{8}\left(|J|N_i\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47n}$$

$$K_{ij}^{15} = -\sum_{p=1}^{8}\left(|J|N_i\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47o}$$

单元固结子矩阵$[K_{ij}]$的最后一个元素K_{ij}^{16}可从式(4.39)和(4.42)的对比得到，即

$$K_{ij}^{16} = -\theta\cdot\Delta t\cdot K_{sij}$$

式中K_{sij}为式(4.28)所示单元渗流矩阵的元素，即

$$K_{sij} = \iiint_V [B_{si}]^T[k][B_{ij}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|J|}{\gamma_w}\left[\frac{\partial N_i}{\partial x}\ \frac{\partial N_i}{\partial y}\ \frac{\partial N_i}{\partial z}\right]\begin{bmatrix}k_h & 0 & 0\\ 0 & k_h & 0\\ 0 & 0 & k_v\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial N_j}{\partial x}\\ \frac{\partial N_j}{\partial y}\\ \frac{\partial N_j}{\partial z}\end{Bmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{|J|}{\gamma_w}\left[k_h\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)-k_v\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{4.50}$$

故可得

$$K_{ij}^{16} = -\frac{\theta\cdot\Delta t}{\gamma_w}\sum_{p=1}^{8}|J|\left[k_h\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+k_v\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.47p}$$

至此，单元固结矩阵$[K]$的子矩阵$[K_{ij}]$的16个元素计算式已全部得到。变动

下标 i、$j(i,j=1,2,\cdots,8)$，就可得到[K]的全部元素即 $32\times32=1024$ 个元素的计算式。由于单元固结矩阵[K]的对称性，实际只需计算 528 个元素。

4.4.2 长方体八结点单元固结矩阵各元素计算式

第三章中曾述及长方体八结点单元(图 3.6)的形函数关于整体坐标的导数等可写为显式。由于这一特性，长方体八结点单元固结子矩阵的 16 个元素也可直接写为显式，而不必采用数值积分法计算。推导如下。

利用式(4.46)、(3.37)和(3.39)可得

$$\begin{aligned}K_{ij}^{1}&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|\left[d_1\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+d_3\left(\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\\&=abc\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left[\frac{E_s}{a^2}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\frac{\partial N_j}{\partial\xi}+\frac{G}{b^2}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\frac{\partial N_j}{\partial\eta}+\frac{G}{c^2}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\frac{\partial N_j}{\partial\zeta}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta\end{aligned}\tag{4.51}$$

式中

$$d_1=E_s=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\qquad d_3=G=\frac{E}{2(1+\mu)}$$

将式(3.34)代入并积分得

$$K_{ij}^{1}=D_1F_{ij}^{1}+D_5F_{ij}^{2}+D_6F_{ij}^{3}\tag{4.52a}$$

同理可得

$$K_{ij}^{2}=D_7F_{ij}^{4}+D_8F_{ji}^{4}\tag{4.52b}$$

$$K_{ij}^{3}=D_9F_{ij}^{5}+D_{10}F_{ji}^{5}\tag{4.52c}$$

$$K_{ij}^{4}=D_{13}F_{ij}^{7}\tag{4.52d}$$

$$K_{ij}^{5}=D_7F_{ji}^{4}+D_8F_{ij}^{4}\tag{4.52e}$$

$$K_{ij}^{6}=D_2F_{ij}^{2}+D_6F_{ij}^{3}+D_4F_{ij}^{1}\tag{4.52f}$$

$$K_{ij}^{7}=D_{11}F_{ij}^{6}+D_{12}F_{ji}^{6}\tag{4.52g}$$

$$K_{ij}^{8}=D_{14}F_{ij}^{8}\tag{4.52h}$$

$$K_{ij}^{9}=D_9F_{ji}^{5}+D_{10}F_{ij}^{5}\tag{4.52i}$$

$$K_{ij}^{10}=D_{11}F_{ji}^{6}+D_{12}F_{ij}^{6}\tag{4.52j}$$

$$K_{ij}^{11}=D_3F_{ij}^{3}+D_4F_{ij}^{1}+D_5F_{ij}^{2}\tag{4.52k}$$

$$K_{ij}^{12}=D_{15}F_{ij}^{9}\tag{4.52l}$$

$$K_{ij}^{13}=D_{13}F_{ji}^{7}\tag{4.52m}$$

$$K_{ij}^{14}=D_{14}F_{ji}^{8}\tag{4.52n}$$

$$K_{ij}^{15}=D_{15}F_{ji}^{9}\tag{4.52o}$$

$$K_{ij}^{16}=D_{16}F_{ij}^{1}+D_{17}F_{ij}^{2}+D_{18}F_{ij}^{3}\tag{4.52p}$$

式中

$$F_{ij}^1=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\frac{\partial N_j}{\partial\xi}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\xi_i\xi_j}{72}(9+3\eta_i\eta_j+3\zeta_i\zeta_j+\eta_i\eta_j\zeta_i\zeta_j) \tag{4.53a}$$

$$F_{ij}^2=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\frac{\partial N_j}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\eta_i\eta_j}{72}(9+3\zeta_i\zeta_j+3\xi_i\xi_j+\zeta_i\zeta_j\xi_i\xi_j) \tag{4.53b}$$

$$F_{ij}^3=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}\frac{\partial N_j}{\partial\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\zeta_i\zeta_j}{72}(9+3\xi_i\xi_j+3\eta_i\eta_j+\xi_i\xi_j\eta_i\eta_j) \tag{4.53c}$$

$$F_{ij}^4=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\frac{\partial N_j}{\partial\eta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\xi_i\eta_j}{24}(3+\zeta_i\zeta_j) \tag{4.53d}$$

$$F_{ij}^5=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}\frac{\partial N_j}{\partial\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\xi_i\zeta_j}{24}(3+\eta_i\eta_j) \tag{4.53e}$$

$$F_{ij}^6=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}\frac{\partial N_j}{\partial\zeta}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\eta_i\zeta_j}{24}(3+\xi_i\xi_j) \tag{4.53f}$$

$$F_{ij}^7=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\xi}N_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\xi_i}{72}(9+3\eta_i\eta_j+3\zeta_i\zeta_j+\eta_i\eta_j\zeta_i\zeta_j) \tag{4.53g}$$

$$F_{ij}^8=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\eta}N_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\eta_i}{72}(9+3\zeta_i\zeta_j+3\xi_i\xi_j+\zeta_i\zeta_j\xi_i\xi_j) \tag{4.53h}$$

$$F_{ij}^9=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{\partial N_i}{\partial\zeta}N_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta=\frac{\zeta_i}{72}(9+3\xi_i\xi_j+3\eta_i\eta_j+\xi_i\xi_j\eta_i\eta_j) \tag{4.53i}$$

$$D_1=\frac{bcE_s}{a}\quad D_2=\frac{caE_s}{b}\quad D_3=\frac{abE_s}{c}\quad D_4=\frac{bcG}{a}\quad D_5=\frac{caG}{b} \tag{4.54a}$$

$$D_6=\frac{abG}{c}\quad D_7=\frac{c\mu}{1-\mu}E_s\quad D_8=cG\quad D_9=\frac{b\mu}{1-\mu}E_s\quad D_{10}=bG \tag{4.54b}$$

$$D_{11}=\frac{a\mu}{1-\mu}E_s\quad D_{12}=aG\quad D_{13}=-bc\quad D_{14}=-ca\quad D_{15}=-ab \tag{4.54c}$$

$$D_{16}=-\frac{bck_h\theta}{a\gamma_w}\Delta t\quad D_{17}=-\frac{ack_h\theta}{b\gamma_w}\Delta t\quad D_{18}=-\frac{abk_v\theta}{c\gamma_w}\Delta t \tag{4.54d}$$

4.4.3 单元等效结点荷载和流量增量列阵各元素计算式

单元等效结点荷载和流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$为32×1阶列阵，其子列阵$\{\Delta R_i\}$为4×1阶列阵，共有4个元素，即单元结点等效荷载增量ΔR_x、ΔR_y和ΔR_z以及单元结点等效流量增量ΔR_w，如式(4.41)所示。

先考虑单元结点等效荷载增量ΔR_x、ΔR_y和ΔR_z的计算。

从式(4.33)可得

$$\{\Delta R_{Fi}\}^e = \begin{Bmatrix}\Delta R_{xi}\\ \Delta R_{yi}\\ \Delta R_{zi}\end{Bmatrix} = \iint_{D^e} N_i I \begin{Bmatrix}\Delta F_x\\ \Delta F_y\\ \Delta F_z\end{Bmatrix} \mathrm{d}s = \iint_{D^e} N_i \begin{Bmatrix}\Delta F_x\\ \Delta F_y\\ \Delta F_z\end{Bmatrix} \mathrm{d}s \tag{4.55}$$

式中 ΔF_x、ΔF_y、ΔF_z分别为单元边界上沿 x、y、z 方向的面力增量。

上式积分是在真实单元上面力所在边界面 D^e 上进行的，为使计算规范化，同样需将其变换至边长为 2 的标准正方形边界面上进行。现以岩土工程中常见的竖向(垂直)荷载(例如堆载预压荷载)为例，说明 ΔR_{xi}、ΔR_{yi}和 ΔR_{zi}的计算方法并给出其详细计算式。

设竖向荷载增量为 Δq，则有 $\Delta F_x=\Delta F_y=0$，$\Delta F_z=\Delta q$，故

$$\Delta R_{xi} = 0 \tag{4.56a}$$

$$\Delta R_{yi} = 0 \tag{4.56b}$$

$$\Delta R_{zi} = \iint_{D^e} N_i \Delta F_z \mathrm{d}s = \iint_{D^e} \Delta q \cdot N_i \mathrm{d}s$$

由高等数学曲面积分的变量代换公式，可得

$$\Delta R_{zi} = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(\Delta q \cdot N_i \sqrt{EG-F^2}\right)\Big|_{\zeta=-1} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta = \sum_{p=1}^{4} \left(\Delta q \cdot N_i \sqrt{EG-F^2}\right)\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=-1}} \tag{4.56c}$$

式中，$\zeta=-1$ 表示积分在单元的上边界面上进行，这是因为竖向荷载一般作用在单元的上边界面上。

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 \tag{4.57a}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta} \tag{4.57b}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 \tag{4.57c}$$

当真实单元上受 Δq 作用的边界面为水平面(例如地表单元)，由于在此面上整体坐标 z 恒为常数，与 ξ、η 无关，即有$\frac{\partial z}{\partial \xi}=\frac{\partial z}{\partial \eta}=0$，则

$$\sqrt{EG-F^2} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}$$

故(4.56c)尚可写为

$$\Delta R_{zi} = \sum_{p=1}^{4} \left[\Delta q \cdot N_i \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\right]\Big|_{\substack{\xi=\xi_p\\ \eta=\eta_p\\ \zeta=-1}} \tag{4.58}$$

特别当 Δq 均布且真实单元为长方体(图 4.1)，整体坐标和局部坐标之间的关系可直接写为

$$x = x_0 + a\xi \qquad y = y_0 + b\eta \qquad z = z_0 + c\zeta$$

其中 x_0、y_0、z_0 为真实单元中心(或即局部坐标原点)的整体坐标，$2a$、$2b$、$2c$ 为真实单元边长，如图 4.1 所示。

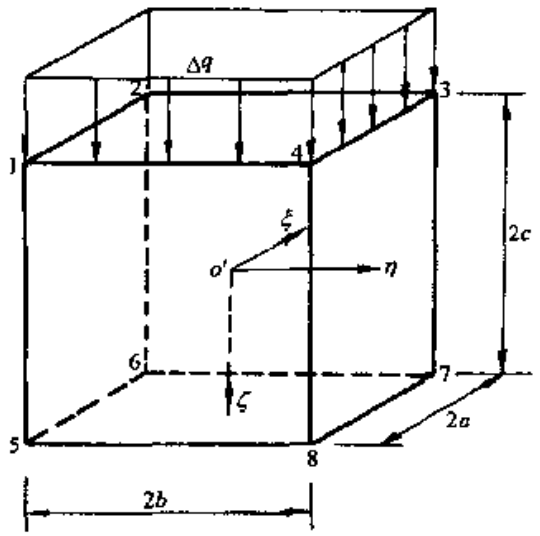


图 4.1　受竖向均布荷载作用的长方体单元

故有

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}=ab$$

于是

$$\Delta R_{xi}=\Delta q\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}abN_i\Big|_{\zeta=-1}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=ab\Delta q\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{1}{8}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(1-\zeta_i)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

$$=\frac{1}{2}ab\Delta q(1-\zeta_i) \tag{4.59}$$

据(4.59)式可进一步写出 ΔR_{xi}在单元各结点的详细计算式。注意到在 8 个结点上，$\zeta_1=\zeta_2=\zeta_3=\zeta_4=-1$；$\zeta_5=\zeta_6=\zeta_7=\zeta_8=1$，故可得：

$$\left.\begin{aligned}\Delta R_{x1}&=\Delta R_{x2}=\Delta R_{x3}=\Delta R_{x4}=ab\Delta q\\ \Delta R_{x5}&=\Delta R_{x6}=\Delta R_{x7}=\Delta R_{x8}=0\end{aligned}\right\} \tag{4.60}$$

可见，Δq 作用面(即 $\zeta=-1$ 面)的 4 结点是平均分担荷载 Δq 的，而相对面(即 $\zeta=1$ 面)上 4 结点并不分担荷载。

综上所述，式(4.55)为单元结点等效荷载增量 ΔR_{xi}、ΔR_{yi}和 ΔR_{zi}的一般计算式；式(4.56)是面力为竖向荷载时相应的计算式；当竖向荷载作用面呈水平，式(4.56c)就转化为式(4.58)；进一步当竖向荷载均布且真实单元为长方体，式(4.58)就简化为式(4.59)。

再考虑单元结点等效流量增量 ΔR_{pi}的计算。

显然 ΔR_{pi}可以从式(4.37)导得。特别对于不排水边界，有

$$\{\Delta R_p\}^e = \Delta t[K_s]\{p\}_n^e = \Delta t\begin{bmatrix} K_{s11} & K_{s12} & \cdots & K_{s18} \\ K_{s21} & K_{s22} & \cdots & K_{s28} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{s81} & K_{s82} & \cdots & K_{s88} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_8 \end{Bmatrix}\Bigg|_{t=t_n} \tag{4.61}$$

故由上式并利用式(4.50),即得

$$\Delta R_{pi} = \sum_{j=1}^{8}\Delta t \cdot K_{sij} \cdot p_j\big|_{t=t_n}$$

$$= \sum_{j=1}^{8}\frac{\Delta t \cdot p_j\big|_{t=t_n}}{\gamma_w}\sum_{p=1}^{8}\left\{|J|\left[k_h\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)+k_v\frac{\partial N_i}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right]\right\}\Bigg|_{\substack{\xi=\xi_p \\ \eta=\eta_p \\ \zeta=\zeta_p}} \tag{4.56d}$$

式中 $p_j|_{t=t_n}$ 为前一计算时刻 $t=t_n$ 对应的结点 $j(j=1,2,\cdots,8)$处的孔压。

至此,Biot 三维固结有限元方程(4.38)右边列阵各元素详细计算式也已全部给出。

4.5 三维固结问题的有限元法求解过程

前已得到由有限单元法(采用空间 8 结点等参元)求解三维固结问题的基本方程和计算公式,即 Biot 三维固结有限元方程(4.38)以及该方程所含的单元固结矩阵$[K]$和单元等效结点荷载及流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$各元素的详细计算式(4.47)和(4.56)。现进一步对用有限元法求解三维固结问题的整个过程作一简单描述。更详细的介绍将结合具体的有限元程序进行,详见第八章。

1. 空间和时间离散

对具体的三维固结问题的求解域用 8 结点等参元进行空间离散(又称单元划分),并对计算起始($t=0$)到计算终了的时间段进行离散(又称时段划分)。由于土工问题中荷载一般随时间而变,故与时段划分相对应,荷载也被同时离散(或称分级),如图 4.2 所示。

2. 固结有限元方程的整体组装

将 Biot 三维固结有限元方程(4.38)用于求解域中的每个单元,据式(4.47)和(4.56)计算各单元的固结矩阵和等效结点荷载及流量增量列阵中的全部元素,并进行整体组装,即得含所有结点未知量(结点位移和孔压)的线性方程组。

3. 引入边界条件

从 4.3 节可见,应力边界条件和流速(或流量)边界条件已在 Biot 三维固结有限元方程(4.38)的推导过程中予以考虑,故这里只需引入位移边界条件和孔压(或流势)边界条件。对于齐次边界,例如固定边界(结点位移为零)和透水边界(结点孔压为零),该条件的引入将使前述线性方程组的维数减少。

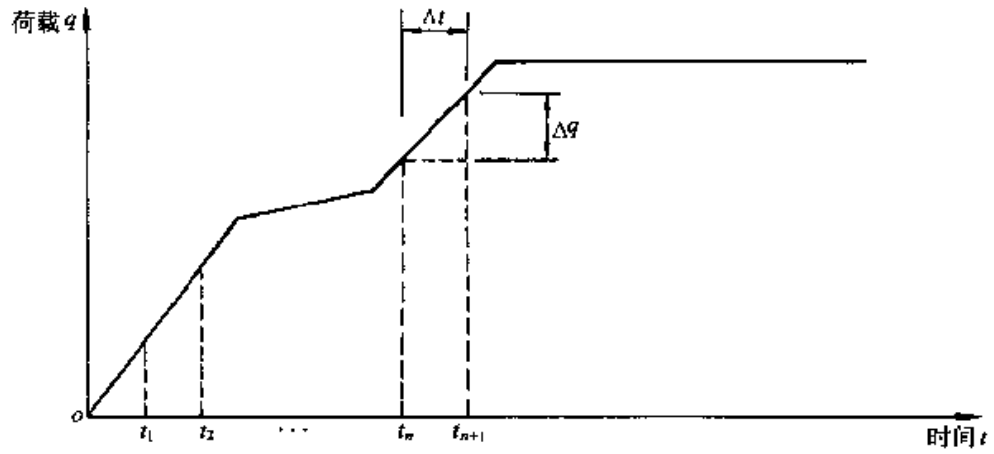


图 4.2　时间与荷载的离散示意图

4. 求解线性方程组

采用半带宽存贮解法或波阵解法等求解以上得到的线性方程组，即可得相应于本时段 Δt（荷载增量为 Δq）的结点位移增量$\{\Delta\delta\}$和孔压增量$\{\Delta p\}$。

5. 计算当前结点位移和孔压

设已求得前一时刻 t_n 的结点位移和孔压分别为$\{\delta\}_n$ 和$\{p\}_n$，则当前（即现时刻 t_{n+1}）结点位移$\{\delta\}_{n+1}$和孔压$\{p\}_{n+1}$即为

$$\{\delta\}_{n+1} = \{\delta\}_n + \{\Delta\delta\} \tag{4.62a}$$

$$\{p\}_{n+1} = \{p\}_n + \{\Delta p\} \tag{4.62b}$$

6. 计算结点应力

(1)本时段有效应力增量$\{\Delta\sigma'\}$。

由方程式(1.6)、(1.31)及(4.2a)可得单元内任一点在本时段由本级荷载增量 Δq 引起的有效应力增量

$$\{\Delta\sigma'\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} = [D][B]\{\Delta\delta\}^e \tag{4.63}$$

式中：$[D]$为式(1.9)所示的弹性矩阵；$[B]$为 6×24 阶矩阵，其子矩阵计算式如式(4.12)所示。根据计算$[B]$时所采用的局部坐标，可得单元边界或内部任一点的应力；当采用结点局部坐标时，求得的即为结点处应力。

从式(4.63)可见，单元内任一点的应力增量$\{\Delta\sigma'\}$是通过该单元的 8 个结点处 24 个位移增量$\{\Delta\delta\}^e$ 计算得到的。由于各单元的结点位移不尽相同，故对同时为不同相邻单元所共有的结点（即公共结点）而言，通过各相邻单元的结点位移求得的该结点处的应力增量是不同的。鉴于此，通常取这些应力增量的平均值作为该公共结点的应力增量，这就是所谓的“绕结点法”。

(2)当前有效应力$\{\sigma'\}_{n+1}$。

设$\{\sigma'\}_n$ 为前一时刻 t_n 的应力，则当前应力$\{\sigma'\}_{n+1}$为

$$\{\sigma'\}_{n+1} = \{\sigma'\}_n + \{\Delta\sigma'\} \tag{4.64}$$

(3)当前总应力$\{\sigma\}_{n+1}$。

一旦求得当前结点孔压 p_{n+1}和有效应力$\{\sigma'\}_{n+1}$，如有必要，即可根据有效应力原理式(1.40)求得当前结点总应力$\{\sigma\}_{n+1}$，即

$$\{\sigma\}_{n+1} = \{\sigma'\}_{n+1} + \{M\}p_{n+1} \tag{4.65}$$

7. 时段循环

一般，计算开始($t=0$)时各结点的位移、孔压和应力均已知。例如，通常情况下 $t=0$ 时各点的位移和孔压均为零，而应力等于自重应力，即有

$$\begin{cases} \{\delta\}_0 = [u \quad v \quad w]^T|_{t=0} = 0 \\ p_0 = p|_{t=0} = 0 \\ \{\sigma'\}_0 = [\sigma'_x \quad \sigma'_y \quad \sigma'_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]^T|_{t=0} = [k_0\sigma_{z0} \quad k_0\sigma_{z0} \quad \sigma_{z0} \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \end{cases} \tag{4.66}$$

式中：k_0 为静止土压力系数；σ_{z0}为竖向自重应力。

因此，计算可从 $t=0$ 开始，每次增加 Δt 及与此相应的荷载 Δq，重复 1～6 步，直至任意所需时刻。

以上为三维线弹性固结问题的有限元法求解过程。

对于非线性弹性固结等问题，上述求解方法原则上仍适用，但用于本级计算的弹性参数(E，μ)须据前一级应力从本构方程中求得，此即增量法。对于岩土工程中其它更复杂问题的有限元求解方法，可见此后各章和参阅有关论著。

参 考 文 献

[1] M. A. Biot. General theory of three dimensional consolidation. J. App. Physics, Vol. 12, 1941

[2] J. R. Booker & J. C. Small. An investigation of the stability of numerical solution of Biot's equation of consolidation. Int. J. Solids & Structures, Vol. 11, 1975

[3] Y. K. Cheung(张佑启), M. Y. Yeo 著，罗崧发等译. 有限单元法实用导论。广西人民出版社，1982

[4] 龚晓南. 软土地基固结有限元分析. 浙江大学硕士学位论文，1981

[5] 龚晓南. 油罐软粘土地基性状. 浙江大学博士学位论文，1984

[6] 龚晓南. 高等土力学. 浙江大学出版社，1996

[7] 龚晓南. 土工计算机分析. 中国建筑工业出版社，2000

[8] Gudehus, G. Finite elements in Geomechanics. John Wiley & Sons, 1977

[9] 黄文熙. 土的工程性质，水利电力出版社，1983

[10] R. T. Murry. Development in two-and three-dimensional consolidation theory. Development in Soil Mechanics, 1978

[11] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 中国水利水电出版社，1996

[12] R. S. Sandhu & E. L. Wilson Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media. JEMD, ASCE, Vol. 95, No. EM3, 1969

[13] 沈珠江. 用有限单元法计算软土地基的固结变形. 水利水运科技情报，第 1 期，1977

[14] J. C. Small, J. R. Booker & E. H. Davis. Elasto-plastic consolidation of soil. Int. J. Solids Structures, Vol. 12, 1976

[15] I. M. Smith & R. Hobbs. Biot analysis of consolidation beneath embankments. Geotechnique, Vol. 26, No. 1, 1976

[16] 谢康和. 砂井地基:固结理论、数值分析与优化设计. 浙江大学博士学位论文, 1987

[17] G. X. Zeng, K. H. Xie & Z. Y. Shi. Consolidation analysis of sand-drained ground by F. E. M. Proc. 8th ARCSMFE, Vol. 1, Kyoto, 1987

[18] 朱百里、沈珠江等. 计算土力学. 上海科学技术出版社. 1990

[19] 朱伯芳. 有限单元法原理与应用. 水利电力出版社, 1979

[20] O. C. Zienkiewicz, The coupled problems of soil pore fluid-external fluid interaction. 5th Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Vol. 4, 1985

第五章　饱和土的动力有限元分析理论

5.1　概　　述

近20年来，随着土动力学理论和计算技术的迅速发展，动力分析方法发展很快，已从最早的线性总应力法，逐步发展为基于非线性有限单元法基础上的有效应力动力分析方法和采用复杂弹塑性模型并考虑水土耦合作用的动力分析方法，从只能分析一维问题发展到能够分析二维、三维问题，从只能分析饱和土体发展到能够分析多相非饱和土体。本构模型也从早期的线弹性模型发展为粘弹性模型、弹塑性模型、边界面模型、内时模型和结构性模型等。动力方程的计算方法也发展很快，出现了逐步积分法、振型叠加法、复反应分析法、有限差分法、子结构法等。

土体动力分析有限单元法的总体思路和静力情况基本一样，即首先将计算域划分为有限大小的单元，单元之间在结点处互相连结，各个单元的质量平均分配在该单元的结点上，然后分别求出各个单元结点的力与位移的关系，最后根据各单元结点的力的平衡条件求出所有结点的力与位移的关系，进而形成整个振动体系的动力方程。不过由于动荷载与时间有关，相应的位移、应变和应力都是时间的函数，因此在建立单元体的力学特性时，除静力作用外还需考虑动荷载以及惯性力和阻尼力的作用。目前对计算区域的离散，通常是在空间上将土体离散成等参单元，而在时间域离散上采用差分格式。在引入这些量的影响之后，就可以建立单元体和连续体的动力方程，然后采用适当的动力计算方法进行求解。

由于有限单元法不但可以用于总应力法，而且还是有效应力分析法的基础，它可以考虑复杂的地形情况、土的非线性、非均质性以及土中孔隙水等因素的影响，可以深入分析土体的自振特性及土体各部分的动力反应，因此有限单元法已日益成为土体动力分析中最重要的分析方法之一。

5.2　动力方程及其求解

5.2.1　用张量形式表达的 Biot 动力固结方程

Biot 动力固结方程是从严格的固结机理出发推导的能精确反映孔隙水压力消散与土骨架变形相互关系的三维动力固结方程，也是进行动力分析的控制方程，一

般称之为“真三维动力固结理论”。第一章已详细推求了 Biot 动力固结方程，这里进一步给出用张量形式表达的 Biot 动力固结方程。

在应用 Biot 动力固结理论推导动力分析的基本方程的过程中，为了便于分析和求解，特地提出如下的假定：

(1)土体变形是微小的。

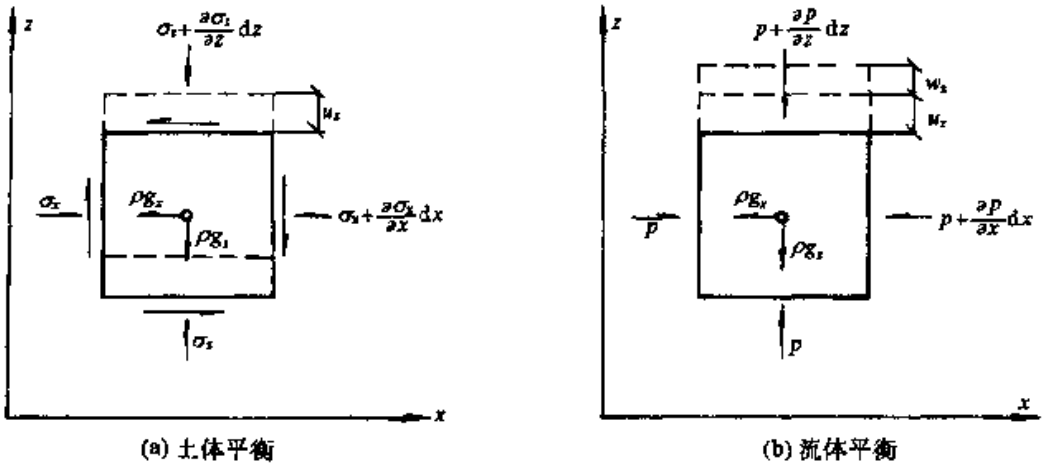
(2)土体的固体颗粒不可压缩。

(3)土体饱和或接近饱和或土体虽非饱和但孔隙气压力可以忽略。

(4)孔隙水流为层流，符合 Darcy 定律，且渗透系数为常数。

(5)孔隙中的流体的渗流速度很小，不计其相对于土体骨架运动的惯性力。

在下面推导 Biot 动力固结方程的过程中，假设应力和应变以压为正，拉为负。在动力荷载作用下微分体积土体和流体平衡时的受力和变形情况如图 5.1 所示



(a) 土体平衡　　(b) 流体平衡

图 5.1　土体和流体平衡时受力和变形示意图

(图中仅给出了 x 和 z 方向的分量)，由此可得：土体动力平衡方程为

$$\sigma_{ij,i}+\rho g_j=\rho\ddot{u}_j \tag{5.1}$$

渗流连续性方程为

$$-\dot{\varepsilon}_{ii}+\dot{w}_{i,i}+\dot{p}/\Gamma=0 \tag{5.2}$$

Terzaghi 有效应力原理为

$$\sigma_{ij}=\sigma'_{ij}+p\delta_{ij} \tag{5.3}$$

变形几何关系为

$$\varepsilon_{ij}=-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{5.4}$$

土孔隙中流体的动力平衡方程为

$$\dot{w}_j=-k_{ij}^*(p_{,i}-\rho_f g_i+\rho_f\ddot{u}_i) \tag{5.5}$$

由方程(5.1)～(5.5)可得它们的增量形式为

$$\Delta\sigma_{ij,i}+\rho\Delta g_j=\rho\Delta\ddot{u}_j \tag{5.6}$$

$$-\Delta\dot{\varepsilon}_{ii}+\Delta\dot{w}_{i,i}+\Delta\dot{p}/\Gamma=0 \tag{5.7}$$

$$\Delta\sigma_{ij}=\Delta\sigma'_{ij}+\Delta p\delta_{ij} \tag{5.8}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}=-\frac{1}{2}(\Delta u_{i,j}+\Delta u_{j,i}) \tag{5.9}$$

$$\Delta\dot{w}_j=-k^*_{ij}(\Delta p_i-\rho_f\Delta g_i+\rho_f\Delta\ddot{u}_i) \tag{5.10}$$

将方程(5.8)代入方程(5.6)得

$$\Delta\sigma'_{ij,i}+\Delta p_i\delta_{ij}+\rho\Delta g_j=\rho\Delta\ddot{u}_j \tag{5.11}$$

将方程(5.10)代入方程(5.7)有

$$\Delta\dot{u}_{i,i}-k^*_{ij}\Delta p_{ij}+k^*_{ij}\rho_f\Delta g_{i,j}-k^*_{ij}\rho_f\Delta\ddot{u}_{i,j}+\Delta\dot{p}/\Gamma=0 \tag{5.12}$$

土体应力应变关系的增量形式

$$\Delta\sigma'_{ij}=D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} \tag{5.13}$$

由式(5.11)、(5.12)、(5.13)构成了三维条件下土体动力分析的基本方程，即Biot 动力固结方程。在上述公式中，σ_{ij}为总应力张量，σ'_{ij}为有效应力张量，ε_{ij}为应变张量，w_i 为土中液体相对于土骨架的位移分量，g_i 为单位质量土体的体力加速度分量，k^*_{ij}为有效渗透系数张量，p 为孔隙水压力，ρ 为土体密度，可取为$[(1-n)\rho_s+n\rho_f]$，ρ_s 为土体固相密度，ρ_f 为液相密度，n 为孔隙率，$\dot{u}_i$ 为土骨架的速度分量即$\frac{\partial u_i}{\partial t}$，$\ddot{u}_i$ 为土骨架的加速度分量即$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$(本章中其它符号上的点也表示对时间求导)，$n_i$ 为边界面法线的方向余弦，Γ 为不排水体积模量，δ_{ij}为 Kronecker 记号，即

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1(i=j)\\0(i\neq j)\end{cases}$$

5.2.2 动力方程的求解

Biot 动力固结方程的求解通常是以有限元法为基础的，它的求解过程一般分两步进行：首先在空间上把计算域进行有限元离散，建立有限元方程；然后再在时间域或频率域上采用适当的方法求解有限元方程。

(1)边界条件和初始条件。

求解动力固结方程，首先要定义方程的边界条件和初始条件，通常情况下边界条件和初始条件可作如下假定：土层内自由水面或结构体表面无孔隙水压力

$$p(x_1,x_2,x_3,t)=0 \tag{5.14}$$

结构体表面无应力作用

$$\Delta\sigma_{ij}=0 \tag{5.15}$$

土层底面边界不透水

$$-k_n\frac{\partial p}{\partial n}=0 \tag{5.16}$$

初始条件为

$$\left.\begin{aligned} u_i(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \\ \dot{u}_i(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \\ \ddot{u}_i(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \\ p(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \\ \dot{p}(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \\ \ddot{p}(x_1,x_2,x_3,t_0) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

(2)空间上有限单元的建立。

对 Biot 动力固结方程(5.18)和(5.19)在空间上把其计算域用有限单元离散，设 $\Delta\tilde{u}_i$ 和 $\Delta\tilde{p}$ 分别为 Δu_i 和 Δp 的近似解，且满足

$$\Delta\tilde{u}_i = N_I u_{Ii} \tag{5.18}$$

$$\Delta\tilde{p} = \overline{N}_J p_J \tag{5.19}$$

式中：N_I 和 $\overline{N}_J$ 分别为位移 $\Delta\tilde{u}_i$ 和孔压 $\Delta\tilde{p}$ 的形函数；u_{Ii}和 p_J 分别为结点 i 的待定位移和待定孔压值。

如果取 N_I 和 $\overline{N}_J$ 分别为方程(5.18)和(5.19)的权函数，考虑上述的边界条件和初始条件式(5.14)～(5.17)，用 Galerkin 加权残数法并使残数的加权积分为零，则方程(5.18)、(5.19)可写为加权积分的形式

$$\iiint_{\Omega_m} N_I\Big[\sum_{m=1}^{NE}(\Delta\sigma'_{ij,i} + \overline{N}_{J,i}\Delta p_J\Delta\delta_{ij} + \rho\Delta g_j - \rho N_L\Delta\ddot{u}_{Lj})\Big]\mathrm{d}\Omega$$

$$- \iint_{\Phi_m} N_I\Big[\sum_{m=1}^{NE}\rho_f v_{rmi}\delta_{ij}(\Delta\dot{u}_{rm} - N_L\Delta\dot{u}_{Ln})\Big]\mathrm{d}\Phi = 0 \tag{5.20}$$

$$\iiint_{\Omega_m}\overline{N}_J\Big[\sum_{m=1}^{NE}\Big(N_{L,i}\Delta\dot{u}_{Li} - k_{ij}^*\overline{N}_{K,ij}\Delta p_K + k_{ij}^*\rho_f\Delta g_{i,j}$$

$$- k_{ij}^*\rho_f N_{L,j}\Delta\dot{u}_L + \frac{1}{\Gamma}\overline{N}_K\Delta\dot{p}_K\Big)\Big]\mathrm{d}\Omega - \iint_{\Phi_m}\overline{N}_J\sum_{m=1}^{NE}q_n\mathrm{d}\Phi = 0 \tag{5.21}$$

上述式中，NE 为单元的结点数。

为避开上述方程要求的在所有交界面区域处一阶导数连续的限制条件，利用分部积分法将方程(5.20)进行变换，同时重写式(5.21)为

$$\sum_{m=1}^{NE}\Big[\iiint_{\Omega_m}(N_{I,i}\Delta\sigma'_{ij} + N_I\overline{N}_{J,i}\Delta p_J\delta_{ij} + N_I\rho\Delta g_j - N_I\rho N_L\Delta\ddot{u}_{Lj})\mathrm{d}\Omega\Big]$$

$$- \sum_{m=1}^{NE}\Big[\iint_{\Phi_m}(N_I\rho_f v_{rmi}\delta_{ij}\Delta\dot{u}_{rm} - N_I N_L\rho_f v_{rmi}\delta_{ij}\Delta\dot{u}_{Ln})\mathrm{d}\Phi\Big] - \sum_{m=1}^{NE}\iint_{\Phi_m}N_I\sigma'_{ij}n_i\mathrm{d}\Phi = 0 \tag{5.22}$$

$$\sum_{m=1}^{NE}\Big[\iiint_{\Omega_m}\overline{N}_J\Big(N_{L,i}\Delta\dot{u}_{Li} - k_{ij}^*\overline{N}_{K,ij}\Delta P_K + K_{ij}^*\rho_f\Delta g_{i,j}$$

$$-k_{ij}^{*}\rho_f N_{L,j}\Delta\ddot{u}_{iL}+\frac{1}{\Gamma}\overline{N}_K\Delta\dot{P}_K\Big)\mathrm{d}\Omega\Big]-\iint_{\Phi_m}\overline{N}_J\sum_{m=1}^{NE}q_m\mathrm{d}\Phi=0 \tag{5.23}$$

岩土介质的阻尼作用能使波的能量逸散而损耗，工程上一般将这种阻尼效应分为粘滞阻尼和内摩阻尼。前者依从于应变或运动的速率，其效应随运动的频率而变化；后者同岩土介质中的能量内部散逸有关而与频率无关，只依从于位移或应变的大小，其效应可以通过在本构模型中考虑岩土介质的塑性来进行考虑。由于能量的耗散主要取决于所考虑的波传播的区域，而波的传播所引起的能量耗散都与波的频率有关，因此为便于处理和计算，在动力分析中考虑阻尼时常以考虑粘滞阻尼作用为主。在前面推导方程的过程中为了考虑岩土介质中粘滞阻尼的作用，引入与应变速率有关的项，并定义 $\Delta A_j=\{\Delta u_{1j},\Delta u_{2j},\Delta u_{3j},\Delta p_j\}^T$（其中 j 从 1 到 NE），再将岩土介质的本构模型代入方程(5.22)，则可将方程(5.22)、(5.23)写成矩阵形式

$$[\bar{M}]\{\Delta\dot{A}\}+[\bar{C}]\{\Delta\dot{A}\}+[\bar{K}]\{\Delta A\}=\{\Delta\bar{F}(t)\} \tag{5.24}$$

方程(5.24)即为动力方程的增量型有限元形式。若不考虑孔隙水的作用，则其全量型有限元形式可以简化为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F(t)\} \tag{5.25}$$

(3)动力方程的计算方法。

1) 振型叠加法。振型叠加法是将土体看成多自由度系统，其动力反应是由土体在一系列不同自振频率振动下所产生振型的叠加，然后通过适当的坐标变换，将联立方程组转换为一组彼此独立的方程组进行求解，以简化计算。

用振型叠加法求解方程时，需要先求出体系的自振频率及相应的振型振幅。由于结构阻尼对其频率和振型影响很小，所以求频率和振型时可以忽略阻尼的影响，从而可将式(5.25)简化为

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=0 \tag{5.26}$$

假设土体作简谐振动，取

$$\{u\}=\{u_0\}e^{i\tilde{\omega}t} \tag{5.27}$$

将式(5.27)代入式(5.26)并利用其有非零解的充要条件，就可以求出体系的自振频率 ω_i 及相应的振型振幅 $\{u_0\}_i(i=1,2,3,\cdots,n)$。

在考虑阻尼影响时，取方程(5.18)的解为各振型的组合，即

$$\{u\}=\{u_0\}\{Y\} \tag{5.28}$$

式中，$\{Y\}$为振型位移，是时间 t 的函数。

$$[u_0]=[\{u_0\}_1\{u_0\}_2\cdots\{u_0\}_n] \tag{5.29}$$

将式(5.28)代入式(5.25)后，再在方程两边左乘$\{u_0\}_i^T$，利用自由振动振型的正交性即

$$\left.\begin{aligned}\{u_0\}_i^T[M]\{u_0\}_j=0\\ \{u_0\}_i^T[K]\{u_0\}_j=0\end{aligned}\right\}\quad(\text{当 } i\neq j \text{ 时}) \tag{5.30}$$

假设阻尼矩阵[C]也满足正交条件

$$\{u_0\}_i^T[C]\{u_0\}_j = 0 \qquad (\text{当 } i \neq j \text{ 时}) \tag{5.31}$$

则有

$$\ddot{Y}_i + 2\lambda_i\omega_i\dot{Y}_i + \omega_i^2 Y_i = \frac{F_i^*(t)}{M_i^*} \tag{5.32}$$

式中

$$M_i^* = \{u_0\}_i^T[M]\{u_0\}_i \tag{5.33}$$

$$\omega_i^2 M_i^* = \{u_0\}_i^T[K]\{u_0\}_i \tag{5.34}$$

$$2\lambda_i\omega_i M_i^* = \{u_0\}_i^T[C]\{u_0\}_i \tag{5.35}$$

$$F_i^*(t) = \{u_0\}_i^T\{F(t)\} \tag{5.36}$$

这样就把多自由度体系的动力方程(5.25)按振型分解为各个独立的常微分方程式，从而就可以利用一般的求解常微分方程的方法进行求解。在由方程(5.32)求出 Y_i 后将其代入方程(5.28)计算出各结点的总位移，然后再进一步求出各时刻结点的动应变和动应力。

振型叠加法的优点是理论简明，可显著降低要求解的方程数目，缺点是求解自振频率和振型很费时间，对计算误差比较敏感，且振型数目很多时累积误差比较大，因此对振型较多的动力问题不宜选用振型叠加法进行求解。另外在用振型叠加法求解地震问题时，由于高阶振型对动力反应影响不大，所以一般只考虑少数几个低阶振型就够了。此外它目前还只限于解线性动力问题。

2) 复反应分析法。复反应分析法多用于总应力分析法中，它一般假定动力荷载和土体的反应过程都是稳态的，因此可将输入运动通过快速 Fourier 变换从时间域转换到频率域并将其表示为一系列简谐运动之和，然后对动力方程进行求解，最后再将求得的稳态解用快速 Fourier 变换从频率域转回时间域，即得到土体的动力反应过程。

当土体本构关系采用等价线性粘弹性模型时，在循环荷载作用下其应力应变关系表现为椭圆。因此可以定义复模量

$$G^* = Ge^{i\delta} \approx Ge^{i2\lambda} \approx G(1 - 2\lambda^2 + i2\lambda\sqrt{1-\lambda^2}) \tag{5.37}$$

使动应力、动应变满足

$$\tau(t) = G^*\gamma(t) \tag{5.38}$$

式中：δ 为动应力和动应变的相位差；λ 为阻尼比；G 为剪切模量。

假定 Poisson 比不变，$[K^*]$为由复模量 G^* 组成的刚度矩阵(此时阻尼项包含在$[K^*]$内，这样可以防止对高频成分产生过大的阻尼)，则动力方程(5.25)可以转换为

$$[M]\{\ddot{u}\} + [K^*]\{u\} = \{F(t)\} \tag{5.39}$$

用 Fourier 级数表示式(5.39)的解和应力荷载，有

$$\{u\} = \mathrm{Re}\sum_{s=0}^{N/2}\{u_s\}e^{i\omega_s t} \tag{5.40}$$

$$\{F(t)\} = \mathrm{Re}\sum_{s=0}^{N/2}\{F_s\}e^{i\omega_s t} \tag{5.41}$$

式中：Re 表示取实数部分；N 为输入动力荷载的离散化点数；ω_s 是圆频率，其值取为 $2\pi s/N\Delta t$；Δt 为时间步长；$\{F_s\}$ 为复数幅值向量，它的取值可以通过快速 Foruier 变换求得；$\{u_s\}$ 为待定的位移向量。

在方程(5.39)两边分别乘以 $e^{i\omega_r t}(r=0,1,\cdots,N/2)$ 后将式(5.40)、(5.41)代入，并对 t 积分，再利用 Fourier 级数的正交性，方程(5.39)可化为

$$([K^*] - \omega_s^2[M])\{u_s\} = \{F_s\} \tag{5.42}$$

在线性假定下解此方程可得 $\{u_s\}$，然后用快速 Fourier 逆变换即可求得总位移 $\{u\}$，最后再进一步求出各时刻的动应变、动应力。

需要注意一点的是复反应法在引入剪切模量 G^* 时也带来了相位差，同时对时间域的离散还产生了“滤频”作用而将高频部分滤掉；不过由于这些因素的影响在工程实用上并不太重要，因此一般可以忽略不计。另外在求解方程(5.42)时为减小计算量，可以只采用适当的有限个数量的 ω 进行计算，然后对解出的结果再进行内插，以获得计算逆变换时所需数量的点数。

上述计算方法在频率域内求解，原则上仅适用于线性问题，对非线性问题只能通过等价线性迭代的方法来加以逼近，因此不能应用于“真非线性”分析。此外用此法进行地震反应分析时，所考虑问题的尺度不可以小于波长，否则会产生不能允许的误差。

3) 逐步积分法。前面介绍的两种计算方法，虽然都有其明显的优点，但一般只能用于求解线性问题；对土体的非线性性质只能以等效线性迭代的方法来加以逼近，在有些情况下这样会引起较大的误差。逐步积分法不仅可以用来求解线性问题，而且还可以有效地应用于非线性系统，它可以不必求体系的自振频率和振型而直接解出各时刻的位移和应力。虽然计算由于受到稳定性和计算精度的限制，时间步长不能过大，但这可以通过选择适当的差分格式和参数来加以改进。此外它还可以用于有效应力分析中。因此目前逐步积分法已成为求解动力问题特别是短暂动力荷载问题的一种极为重要的计算方法。

逐步积分法根据在时间域上所选用差分格式的不同，有多种不同的方法，如 Houbolt 方法、Wilson-θ 法和 Newmark-β 法等等。下面以用于求解非线性动力问题的用 Hilber-α 修正的 Newmaik-β 法为例，介绍逐步积分法的原理和计算步骤。

首先将方程(5.24)在时间域上进行离散，取时间步长为 Δt，设 $t_1, t_2, \cdots, t_n, t_{n+1}$ 时刻的结点向量分别为 $\{A\}_1, \{A\}_2, \cdots, \{A\}_n, \{A\}_{n+1}$，根据 Newmark-$\beta$ 法，则结点向量 $\{\dot{A}\}_n$ 和 $\{A\}_{n+1}$ 为

$$\{\dot{A}\}_{n+1} = \{\dot{A}\}_n + \{\Delta\dot{A}\}_n = \{\dot{A}\}_n + \{\ddot{A}\}_n\Delta t + \gamma\{\Delta\ddot{A}\}_n\Delta t \tag{5.43}$$

$$\{A\}_{n+1} = \{A\}_n + \{\Delta A\}_n = \{A\}_n + \{\dot{A}\}_n\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\{\ddot{A}\}_n + \beta\{\Delta\ddot{A}\}_n\Delta t^2 \tag{5.44}$$

式中，β 和 γ 为 Newmark 积分参数，β 控制一个时间步长的加速度变化，γ 控制一个时间步长内的阻尼值变化。

由式(5.44)有

$$\{\Delta\ddot{A}\}_n = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta A\}_n - \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{A}\}_n - \frac{1}{2\beta}\{\ddot{A}\}_n \tag{5.45}$$

将式(5.45)代入式(5.43)有

$$\{\Delta\dot{A}\}_n = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta A\}_n - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{A}\}_n - \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{A}\}_n\Delta t \tag{5.46}$$

为方便计，可定义

$$\{Q\}_n = \frac{1}{\beta\Delta t}\{\dot{A}\}_n + \frac{1}{2\beta}\{\ddot{A}\}_n \tag{5.47}$$

$$\{R\}_n = \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{A}\}_n + \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{A}\}_n\Delta t \tag{5.48}$$

将式(5.47)、(5.48)代入式(5.45)和(5.46)有

$$\{\Delta\ddot{A}\}_n = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta A\}_n - \{Q\}_n \tag{5.49}$$

$$\{\Delta\dot{A}\}_n = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta A\}_n - \{R\}_n \tag{5.50}$$

为了加强对阻尼的控制，Hilber 等人在动力方程(5.24)中引起了一个参数 α。根据 Hilber 的建议，动力控制方程(5.24)改写为

$$[\bar{M}]_n\{\Delta\ddot{A}\}_n + [\bar{C}]_n\{\Delta\dot{A}\}_n + (1+\alpha)[\bar{K}]_n\{\Delta A\}_n - \alpha[\bar{K}]_{n-1}\{\Delta A\}_{n-1} = \{\Delta\bar{F}\}_n \tag{5.51}$$

将式(5.49)和(5.50)代入式(5.51)有

$$[\bar{K}_\alpha]_n\{\Delta A\}_n = \{\Delta\bar{F}_\alpha\}_n \tag{5.52}$$

式中

$$[\bar{K}_\alpha]_n = \frac{1}{\beta\Delta t^2}[\bar{M}]_n + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}[\bar{C}]_n + [1+\alpha][\bar{K}]_n \tag{5.53}$$

$$[\Delta\bar{F}_\alpha]_n = \{\Delta\bar{F}\}_n + [\bar{M}]_n\{Q\}_n + [\bar{C}]_n\{R\}_n + \alpha[\bar{K}]_{n-1}\{\Delta A\}_{n-1} \tag{5.54}$$

式中：$[\bar{K}_\alpha]_n$ 为等效刚度矩阵，它可以通过按每一时间步长开始时刻条件确定的质量、阻尼和刚度的性质来计算；$[\Delta\bar{F}_\alpha]_n$ 为等效荷载增量矩阵，可以由该时间步长开始时刻的速度和加速度矢量及在该步长区间内的荷载增量来计算。

根据以上的分析可见，非线性反应可以通过逐个对各个小的时间间隔内的线性反应进行综合后求得。在求解动力方程时，对每个时间间隔重复采用下列计算过程：

1) 根据在该时间间隔之初的位移、速度、加速度及荷载条件，由方程(5.47)、(5.48)计算向量 $\{Q\}_n$ 和 $\{R\}_n$。

2) 由方程(5.53)、(5.54)求出 $[\bar{K}_\alpha]_n$ 和 $[\Delta\bar{F}_\alpha]_n$。

3) 从方程(5.52)中解得向量增量$\{\Delta A\}_n$，然后再分别代入方程(5.50)和(5.49)中求出$\{\Delta \dot{A}\}_n$，$\{\Delta \ddot{A}\}_n$。

4) 将$\{\Delta A\}_n$和$\{\Delta \dot{A}\}_n$分别加到总量$\{A\}_n$和$\{\dot{A}\}_n$中得到$\{A\}_{n+1}$，$\{\dot{A}\}_{n+1}$。

5) 为减小在逐步计算中积累起来的误差，对$\{\ddot{A}\}_{n+1}$用该时间步长开始时的总的平衡方程来求解，即

$$\{\ddot{A}\}_{n+1}=[\overline{M}]_n^{-1}[\{\overline{F}\}_{n+1}-[\overline{C}]_{n+1}\{\dot{A}\}_{n+1} - (1+\alpha)[\overline{K}]_{n+1}\{A\}_{n+1}+\alpha[\overline{K}]_n\{A\}_n] \tag{5.55}$$

然后再以$\{A\}_{n+1}$，$\{\dot{A}\}_{n+1}$，$\{\ddot{A}\}_{n+1}$作为进行下一时间步长分析时的初始条件。

6) 考虑材料的非线性性质，计算该时刻的动应变和动应力。

由于岩土介质具有明显的非线性性质，它的动力问题分析方法一般是在对动力方程作逐步积分的基础上采用等效线性迭代法或增量迭代混合法即仿真非线性法求解。前者是通过等效剪切模量和等效阻尼比随剪应变幅值的变化来近似考虑岩土的非线性和能耗性。后者是遵循实际加载路径将荷载划分为许多增量，每次施加一个增量，然后根据计算时刻各单元的应变水平来选用合适的刚度和阻尼矩阵，并在每一时步的增量区间上，再用常刚度迭代作补充，以充分地反映每一时刻土体响应的非线性滞回效应。

5.3 有效应力动力分析方法

在总应力动力分析法中，岩土介质的应力-应变关系和强度参数都是根据总应力确定的，其剪切模量G和阻尼比λ只取决于震前的静力有效应力，不考虑动力荷载作用过程中孔隙水压力变化对土的性质的影响。有效应力动力分析法与一般总应力动力分析法的不同之处就是该法在分析中考虑了振动孔隙水压力变化过程对土体动力特性的影响。

早期的有效应力动力分析法是在总应力法的基础上发展起来的。它以总应力法为基础，本构模型仍采用等价粘弹性体，但是在每一时段末增加了残余孔隙水压力或残余变形的计算。Finn 等(1976)最先提出用有效应力原理计算动荷载作用时水平地面下饱和砂层中孔隙水压力的一维有效应力分析方法。后来徐志英和沈珠江(1981)又提出地震液化的二维有效应力动力分析法。这种方法是在有限单元法的基础上，分时段将以 Boit 固结理论为基础的静力计算和以等效线性理论为基础的动力计算结合起来进行分析，其中考虑到了振动引起的孔隙应力的增长、扩散和消散作用。徐志英和周健(1985)又将上述方法发展为三维有效应力动力分析。Lee 和 Finn(1978)针对土的非线性滞回特性并利用 Masing 准则来模拟卸载和再加载过程，且考虑动荷作用时瞬时和残余孔隙水压力的影响，提出增量弹性动力分析模型。同时，Mroz(1977)、Dafalias(1979)、Paster(1990)等学者从本构模型入手，又由

弹塑性分析的途径进一步发展了有效应力法。它是采用复杂弹塑性计算模型的有效应力动力分析方法。这种方法在理论上更合理，在实际上也更好地反映了土的真实性能。但计算工作量也更大，目前尚未在实践中得到广泛应用。

与总应力法相比，有效应力动力分析法不但提高了计算精度，更加合理地考虑了动力作用过程中土动力性质的变化，而且还可以预测动力作用过程中孔隙水压力的变化过程、土体液化及震陷的可能性和土层软化对地基自振周期及地面振动反应的影响等。但是由于目前对动力荷载作用时孔隙水压力的产生、扩散和消散机理及其预测方法还尚未达到可以完全信赖的程度，有效应力分析中所需计算参数的确定还不十分合理，其计算工作量又相当大。因此为将有效应力法更加广泛地应用于实践工作中，还需对其做进一步的探索和完善。

5.3.1 有效应力动力分析及其计算步骤

在用有效应力法进行动力分析之前，要先判断所分析问题是否需要进行动力分析和在动力作用过程中孔隙水压力是否有扩散与消散。对均质土层来说，一般周期荷载的快慢程度可用下列两个无因次数判断：

$$\Pi_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\rho k}{\rho_w g}\frac{T}{T_0^2} \tag{5.56}$$

$$\Pi_2 = \pi^2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \tag{5.57}$$

式中：T_0 为土层自振周期；T 为动力荷载的作用周期；k 为土的渗透系数。式(5.56)用于判断土骨架与孔隙水相对运动快慢，当 $\Pi_1<10^{-2}$ 时加荷较快，孔隙水来不及排出，可按不排水情况考虑，$\Pi_1>10^2$ 加荷较慢，可按完全排水情况计算。式(5.57)用于判断土体整体运动的快慢，一般 $\Pi_2<10^{-3}$ 时，可不进行动力分析。

(1)不排水有效应力动力分析。

不排水有效应力分析法假定计算区域是一个封闭系统，在动力荷载作用过程中孔隙水不向外排出，并在分析过程中不考虑孔压的消散与扩散作用，只考虑孔压不断增长、有效应力逐渐降低对土的剪切模量和阻尼比的影响，近来也开始考虑其对土的抗剪强度的影响。下面列出有效应力动力分析法的具体思路和步骤(为简单计，暂不考虑动力作用过程中抗剪强度的变化)。

1) 静力计算。运用静力有限单元法，采用 Duncan-chang 非线性本构模型，求出每一单元的有效静应力及初始孔隙水压力。

2) 进行动力分析之前，先将整个动力作用过程划分为若干时段，分时段进行计算。为了考虑土的动力非线性，首先根据 G 与 γ 关系曲线和 λ 与 γ 关系曲线，求出 $\gamma=10^{-4}$ 时相对应的 G_{i-1} 与 λ_{i-1}，并求出土体在第一时段的基频 ω_1，以它们作为动力计算的初值对每一时段用逐步积分法求解动力方程式，计算出该时段的剪应变时程线，并求出相应的平均动剪应变 γ_{av}，然后计算新的 G_i 和 λ_i。若新的 G_i 和 λ_i

与前一次迭代用的 G_{i-1} 和 λ_{i-1} 之间的差别满足迭代精度，则这一时段的迭代结束，否则用新的 G_i 和 λ_i 重新计算，直至达到迭代精度为止。

3）对每一单元计算该时段的平均动剪应力 $\tau_{av}=0.65\tau_{max}$，其中 τ_{max} 为该时段的最大剪应力，再求相应的液化周数 N_l。

4）用适当的方法求该时段的等效振动次数 ΔN 及累积等效振动次数 N_{eq}。

5）用适当的方法计算该时段的振动孔压增量 Δp_g。求出 Δp_g 后，计算该时段结束时每一单元的累积孔压值 $p_i=p_{i-1}+\Delta p_g$，p_{i-1} 为到前一时段为止的累积孔压。

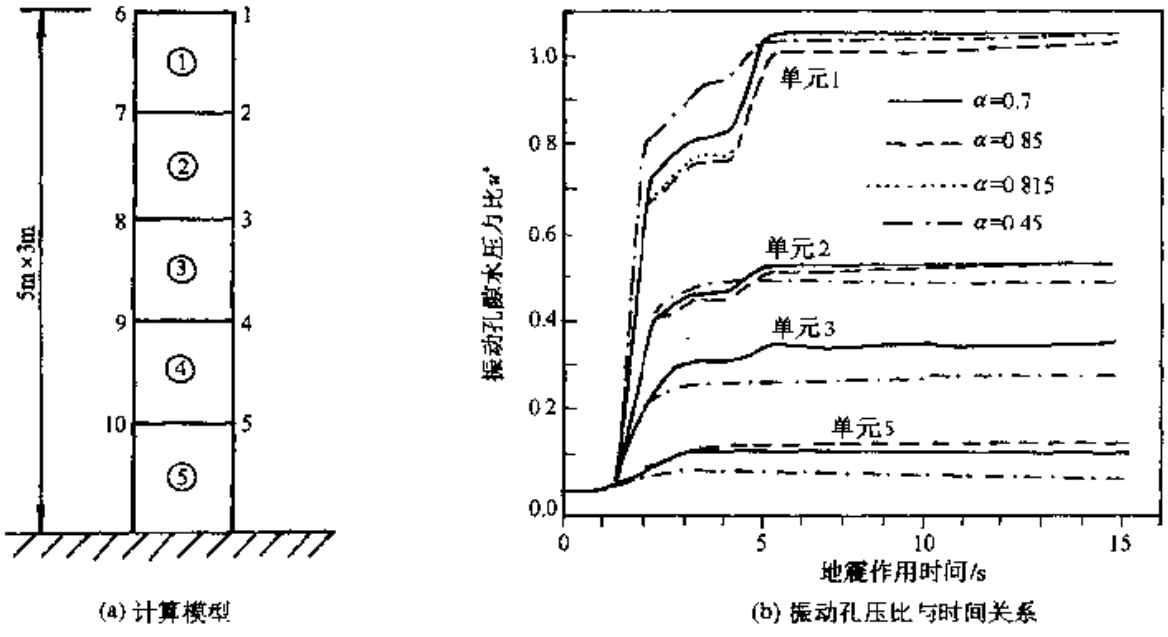
6）计算此时段的平均有效应力 $\sigma'_m=\sigma'_{01}-p_i$，这里 σ'_{01} 为初始有效应力，然后判断此时是否有单元发生液化，并记下液化的单元号。

7）对尚没液化的单元，分别求出新的 G_i 和 λ_i 作为下一时段开始迭代用的 G_{i-1} 和 λ_{i-1}。

8）若有单元发生液化，由于有应力转移，在该时段结束时需要重新进行静力计算。

9）对下一时段重复 2)～8)，直到动力作用结束。

陈国兴等(1995)对一厚 15m 的均质、饱和砂土水平场地进行了不排水有效应力动力分析(考虑动力作用过程中抗剪强度的变化)，并研究振动孔压系数 α 对振动孔压计算的影响，其计算结果见图 5.2。计算输入地震为 El Centro 地震记录，加速度峰值调整为 1.32m/s²，地震持续时间为 14s。



(a) 计算模型　　(b) 振动孔压比与时间关系

图 5.2　有效应力计算模型

(2) 排水有效应力分析。

在排水条件下，饱和土体在动力荷载作用过程中，由于孔隙水的渗流，不仅土体中所含的孔隙水量要发生变化，而且土中的孔隙水应力还要发生消散和扩散，因

此在用有效应力法进行动力分析时，仅考虑孔隙水压力的增大是不够的，还应考虑孔隙水应力的消散与扩散。考虑孔压消散与扩散作用的残余孔隙水压力的计算方法，目前主要是基于两种理论：一种是基于 Terzaghi 理论，但由于 Terzaghi 理论假定在固结过程中法向总应力不随时间变化，因此仅对一维情况下是精确的，对二维和三维问题无法精确反映孔隙水应力的扩散与消散；另一种是基于 Biot 固结理论，该理论是从较严格的固结机理的出发的，能够精确反映三维情况下孔隙水应力变化和土骨架变形的关系。因此用排水有效应力法进行动力分析时，常采用 Biot 固结理论求解残余孔隙水应力。

用排水有效应力法进行动力分析时，动力方程及其非线性解法、振动孔隙水应力的产生都与前面不排水有效应力法基本相同，在此不再重复。只是为了考虑孔压扩散与消散作用，在对一时段计算出各个单元的振动孔隙水应力增量 Δp_g 后，还需将其转化为等效的结点荷载，移至动力方程右边重新求解动力方程，计算出此时段各单元结点的位移增量 Δu_i（i 取 1～3）及残余孔隙水应力增量 Δp，然后再求出到该时段为止的各单元结点位移 u_i（i 取 1～3）及残余孔隙水压力 p，进而求出此时各单元的动应变 ε_{ij} 及动应力 σ_{ij}。在求出有效应力 σ'_m 后，计算新的 G 和 λ 作为下一时段开始迭代的初始值，然后对下一时段重复有关的步骤，直至动力作用结束。动力荷载停止作用后尚需继续分时段进行孔压消散计算，直到超静孔隙水应力完全消散或甚小、残余应变不再增长或增长甚小时为止。

图 5.3 为铜陵狮子山铜矿尾矿副坝的单元剖分图[周健(1991)]。图 5.4 和 5.5 示有该坝的三维二相有效应力动力分析的计算结果，计算时地震输入采用唐山地震曲线，最大加速度调整为 0.2g，卓越周期为 0.24s，振动持续时间取为 10s。

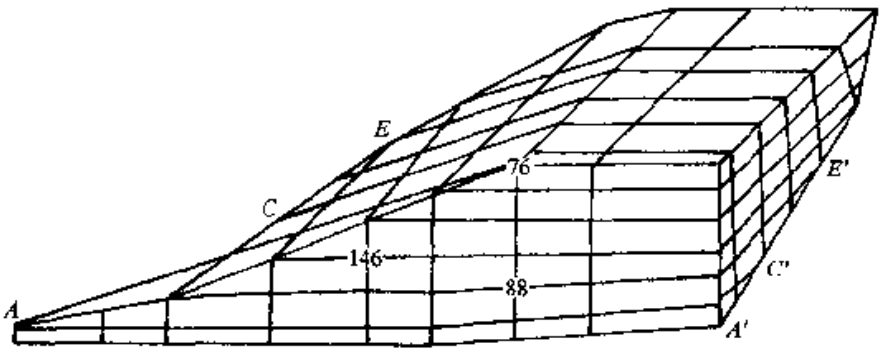


图 5.3 铜陵狮子山铜矿尾矿副坝的单元剖分图

5.3.2 饱和土体的动力控制方程及其数值解法

(1)动力控制方程。

前面所述的 u-p 型的动力控制方程，在进行有限元离散时会产生耦合的质量矩阵，这就增加了在时域上进行数值积分求解的难度。为了解决这个问题。

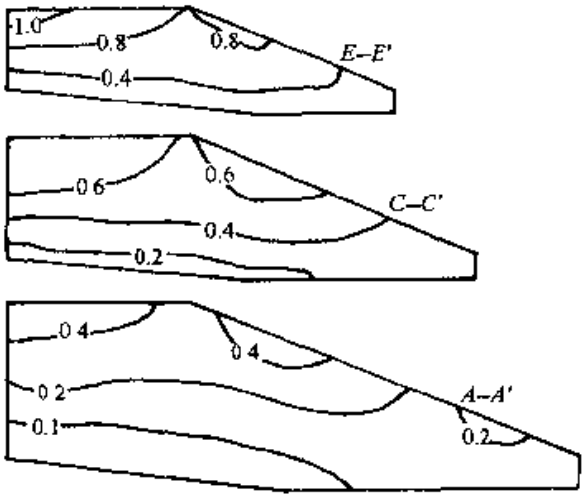


图 5.4　地震结束时孔压比等值线图

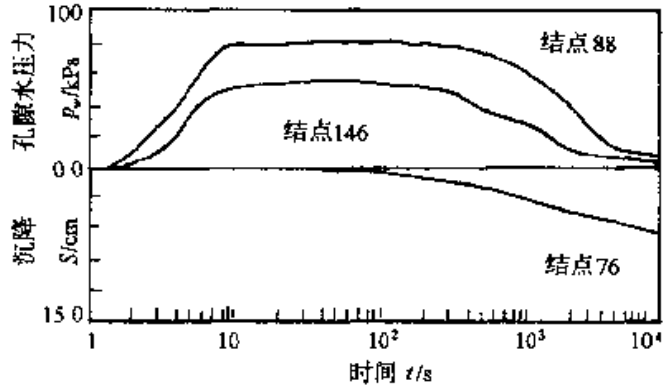


图 5.5　孔隙水压力消长和坝顶沉降曲线

Zienkiewcz 和 Shiomic(1984)用流体的总位移 U_i(和 u_i 具有相同的参照系)来代替流体的 Darcy 位移 $\tilde{\omega}_i$,然后以其为变量基于 Biot 动力固结理论建立了一种 u-U 型的动力控制方程。他们假定应力和应变以拉为正,孔压以压为正,并取

$$U_i = u_i + \frac{\omega_i}{n} \tag{5.58}$$

将 U_i 代入土体的动力控制方程,若考虑到孔隙流体相对于土骨架运动的加速度,则可得下列形式的动力控制方程:

$$\begin{aligned}&(1-n)\rho_s\ddot{u}_j - n^2K_{ij}^{*-1}(\dot{U}_i - \dot{u}_i) - \Gamma n(1-n)U_{s,ij}\\&- \Gamma(1-n)^2u_{i,ij} - (1-n)\rho_s g_j - \dot{\sigma}'_{ij,i} = 0\end{aligned} \tag{5.59}$$

$$n\rho_f\ddot{U}_j - n^2K_{ij}^{*-1}(\dot{U}_i - \dot{u}_i) - \Gamma n^2U_{i,ij} - \Gamma n(1-n)u_{i,ij} - n\rho_f g_j = 0 \tag{5.60}$$

$$\dot{\sigma}'_{ij} = D_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{\sigma}'_{ij0} \tag{5.61}$$

式中:不排水体积模量 Γ 取为 $1/(n/K_f+(1-n)/K_s)$,K_f 和 K_s 分别为土体中液体和固体颗粒的不排水体积模量;$\dot{\sigma}'_{ij0}$是由粘塑效应和热变化引起的应力,它的大

小与土体应变 ε_{ij} 无关；其余符号同前。

对方程(5.59)～(5.61)在空间上进行离散，取

$$u_i = N_p^u u_{pi} \tag{5.62}$$

$$U_i = N_p^U U_{pi} \tag{5.63}$$

采用 Galerkin 加权残数法，则得离散形式有限元动力控制方程的矩阵形式为

$$[M]\{a\} + [C]\{v\} + [K_p]\{d\} + \{P\} = \{F\} \tag{5.64}$$

式中：$\{a\}$ 为节点加速度矢量

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} \ddot{u}_{pj} \\ \ddot{U}_{pj} \end{Bmatrix} \tag{5.65}$$

$\{v\}$ 为节点速度矢量

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_{pi} \\ \dot{U}_{pi} \end{Bmatrix} \tag{5.66}$$

$\{d\}$ 为节点位移矩阵

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u_{pi} \\ U_{pi} \end{Bmatrix} \tag{5.67}$$

$[M]$ 为质量矩阵

$$[M] = \begin{bmatrix} \sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^u (1-n)\rho_s N_p^u \mathrm{d}\Omega & 0 \\ 0 & \sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^U \rho_s N_p^U \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix} \tag{5.68}$$

$[C]$ 为阻尼矩阵

$$[C] = \begin{bmatrix} \sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^u (n^2 k_{ij}^{*-1}) N_p^u \mathrm{d}\Omega & -\sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^u (n^2 k_{ij}^{*-1}) N_p^U \mathrm{d}\Omega \\ -\left(\sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^u (n^2 k_{ij}^{*-1}) N_p^U \mathrm{d}\Omega \right)^T & \sum_{M=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_q^U (n^2 k_{ij}^{*-1}) N_p^U \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix} \tag{5.69}$$

$[K_p]$ 为孔隙流体刚度矩阵

$$[K_p] = \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_{q,j}^u \Gamma (1-n)^2 N_{p,i}^u \mathrm{d}\Omega & \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_{q,j}^u \Gamma n (1-n) N_{p,i}^U \mathrm{d}\Omega \\ \left(\sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_{q,j}^u \Gamma n (1-n) N_{p,i}^U \mathrm{d}\Omega \right)^T & \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega m} N_{q,j}^U \Gamma n^2 N_{p,i}^U \mathrm{d}\Omega \end{bmatrix} \tag{5.70}$$

$\{P\}$ 为内力矢量

$$\{P\}=\begin{Bmatrix}\sum_{m=1}^{NE}\int_{\Omega m}N_{q,i}^{u}\sigma_{ij}'\mathrm{d}\Omega\\0\end{Bmatrix}\tag{5.71}$$

$\{F\}$为外荷载矢量

$$\{F\}=\begin{Bmatrix}\sum_{m=1}^{NE}\int_{\Omega m}N_q^u(1-n)\rho_s g_j\mathrm{d}\Omega+\sum_{n=1}^{NL}\int_{\phi n}N_q^u(T_j+nhn_j)\mathrm{d}\phi\\\sum_{m=1}^{NE}\int_{\Omega m}N_q^U n\rho_f g_j\mathrm{d}\Omega-\sum_{n=1}^{NE}\int_{\phi n}N_q^U nhn_j\mathrm{d}\phi\end{Bmatrix}\tag{5.72}$$

(2)求解 u-U 型动力方程的 Hilber-Hughes-Taylor-α 法。

在求解方程(5.64)时,常用的是 Newmark-β 法。但由于 Newmark-β 法无法同时达到对高频成分的最优能量耗散和对方程解的最优精确值(二阶精度),Hilber 等人(1977)提出了 Hilber-Hughes-Taylor-α 法,以解决这个问题。该法采用 α、β、γ 三个参数,在取$-\frac{1}{3}\leqslant\alpha\leqslant 0$,$\gamma=\frac{1}{2}(1-2\alpha)$和 $\beta=\frac{1}{4}(1-\alpha)^2$ 时,此解法对线性问题不但无条件稳定,而且具有对高频成分较好的阻尼性能和二阶精度,对低频成分的畸变效应与其他解法相比也比较小。下面介绍此解法的一般思路。

根据 Hilber-Hughes-Taylor-α 法,改写方程(5.9)为

$$[M]\{a\}_{n+1}+(1+\alpha)[C]\{v\}_{n+1}-\alpha[C]\{v\}_n+(1+\alpha)[K_\rho]\{d\}_{n+1}-\alpha[K_\rho]\{d\}_n+(1+\alpha)\{p\}_{n+1}-\alpha\{P\}_n=(1+\alpha)\{f\}_{n+1}-\alpha\{F\}_n\tag{5.73}$$

式中,变量$\{d\}$和$\{v\}$在时间域上的递推关系沿用 Newmark-β 法中的规定.取

$$\{d\}_{n+1}=\{d\}_n+\{v\}_n\Delta t+\left(\beta\{a\}_{n+1}+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{a\}_n\right)\Delta t^2\tag{5.74}$$

$$\{v\}_{n+1}=\{v\}_n+(\gamma\{a\}_{n+1}+(1-\gamma)\{a\}_n)\Delta t\tag{5.75}$$

然后根据式(5.73)~(5.75),在每一个时步上运用下列步骤求解动力问题。

1) 在迭代开始即迭代次数 i 为 0 时取

$$\{d\}_{n+1}^{(i)}=\{\bar{d}\}_{n+1}=\{d\}_n+\{v\}_n\Delta t+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{a\}_n\Delta t^2\tag{5.76}$$

$$\{v\}_{n+1}^{(i)}=\{\bar{v}\}_{n+1}=\{v\}_n+(1-\gamma)\{a\}_n\Delta t\tag{5.77}$$

$$\{a\}_{n+1}^{(i)}=0\tag{5.78}$$

2) 令

$$\psi^{(i)}=(1+\alpha)\{F\}_{n+1}-\alpha\{F\}_n-[M]\{a\}_{n+1}^{(i)}-(1+\alpha)[C]\{v\}_{n+1}^{(i)}+\alpha[C]\{v\}_n-(1+\alpha)[K_\rho]\{d\}_{n+1}^{(i)}+\alpha[K_\rho]\{d\}_n-(1+\alpha)\{P\}_{n+1}^{(i)}+\alpha\{P\}_n\tag{5.79}$$

3) 计算

$$[M]_f^{(i)}=[M]+(1+\alpha)\gamma\Delta t[C]+(1+\alpha)\beta\Delta t^2[K_\rho]+(1+\alpha)\beta\Delta t^2[K_T]^{(i)}\tag{5.80}$$

其中，$[K_T]$为整体切线刚度矩阵，等于$\partial\{P\}_{n+1}/\partial\{d\}_{n+1}$。

4）由下式求出加速度增量$\{\Delta a\}^{(i+1)}$：

$$[M]_{ff}^{(i)}\{\Delta a\}^{(i+1)} = \psi^{(i)} \tag{5.81}$$

5）对变量$\{a\}^{(i)}$，$\{v\}^{(i)}$和$\{d\}^{(i)}$进行修正，即

$$\{a\}_{n+1}^{(i+1)} = \{a\}_{n+1}^{(i)} + \Delta\{a\}^{(i+1)} \tag{5.82}$$

$$\{v\}_{n+1}^{(i+1)} = \{\bar{v}\}_{n+1} + \gamma\{a\}_{n+1}^{(i+1)}\Delta t \tag{5.83}$$

$$\{d\}_{n+1}^{(i+1)} = \{\bar{d}\}_{n+1} + \beta\{a\}_{n+1}^{(i+1)}\Delta t^2 \tag{5.84}$$

6）计算

$$\begin{aligned}\psi^{(i+1)} = {} & (1+\alpha)\{F\}_{n+1} - \alpha\{F\}_n - [M]\{a\}_{n-1}^{(i+1)} - (1+\alpha)[C]\{v\}_{n+1}^{(i+1)} + \alpha[C]\{v\}_n \\ & - (1+\alpha)[K_p]\{d\}_{n+1}^{(i+1)} + \alpha[K_p]\{d\}_n - (1+\alpha)\{P\}_{n+1}^{(i+1)} + \alpha\{P\}_n\end{aligned} \tag{5.85}$$

7）根据下面两式检查上述计算结果是否满足要求的收敛条件，若已满足则转向下一时步，否则令$i=i+1$重复步骤2～6直至满足收敛要求：

$$\frac{\|\psi^{(i+1)}\|}{\|\psi^{(0)}\|} \leqslant \varepsilon_1 \tag{5.86}$$

$$\frac{\|\Delta\{a\}^{(i+1)}\|}{\|\{a\}_{n+1}^{(i+1)}\|} \leqslant \varepsilon_2 \tag{5.87}$$

5.4 弹塑性动力分析方法

塑性理论是连续介质力学的一个重要分支，在20世纪50年代以后得到较快的发展，特别是电子计算技术的出现为塑性力学的研究、发展和利用开拓了广阔的前景，有限单元法成为求解弹塑性问题的有效方法。岩土弹塑性力学在20世纪60年代以后才开始形成的，相对于以金属材料为主要研究对象的传统塑性力学，岩土类材料的塑性力学性质有很多不同：①岩土类介质不仅在静水压力下可产生塑性体积应变，偏应力也可能引起塑性体积应变(即剪胀)；②岩土屈服准则既要考虑剪切屈服，又要考虑体积应变屈服，其屈服面为封闭的；③岩土类介质在变形过程中会出现应变软化，这时岩土介质为不稳定材料，而且还有明显的Bauschinger效应；④岩土弹塑性本构模型往往要考虑非联合流动法则，即塑性势函数和屈服函数不一致，塑性应变增量方向与塑性势面正交，而与屈服面不正交；⑤岩土类材料的弹性系数会随塑性变形的发展而变化，要考虑其弹塑性耦合现象。

5.4.1 岩土弹塑性模型理论

弹塑性应力应变关系理论包括屈服面、流动法则、硬化规律和试验参数确定等方面。现在已有的模型大致可分为多屈服面模型(Mroz，Iwan)、边界面模型(Krieg，Dafalias)、点屈服面模型(Dafalias)、分屈服面模型(西女子一，佐藤忠信)、

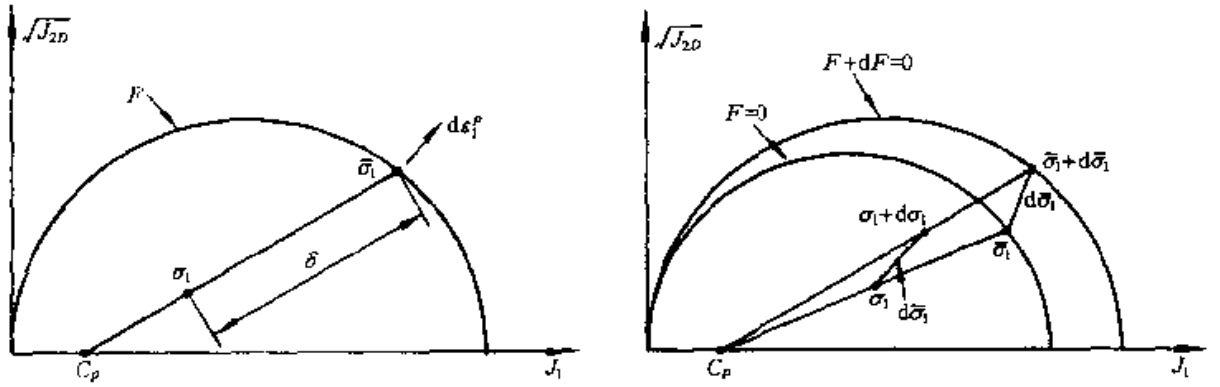
岩土弹塑性临界状态模型(Drucker,Roesce 等)。

边界面理论是由 Dafalias 提出的,应用到岩土力学性质的研究中比较晚。边界面理论主要特点是:①取消了屈服面的概念,其应力应变关系即使在很大的超固结情况下也是平滑曲线,更合理地反映了超固结粘土的特性;②适用于周期荷载;③不需要大量的嵌套面来表示土的塑性力学性质。20 世纪 80 年代美国加州大学戴维斯校区的学者在 Dafalias 和 Herrmann 的边界面粘土模型的基础上对软土的本构关系做了大量研究工作,提出了 Davis 边界面模型。目前世界各国研究人员提出的土弹塑性模型有很大部分是以边界面理论为基本框架,是未来研究发展的一个重要方向。

经典弹塑性理论认为,只有应力接触屈服面时才突然产生塑性变形,在 Davis 边界面模型中允许塑性变形以及与之相关的材料硬化在一个边界面内逐步形成,其边界面用一个单值函数表示

$$F = F(\bar{\sigma}_{ij}, q_n) = 0 \tag{5.88}$$

式中,$\bar{\sigma}_{ij}$是一个虚应力(image stress),它为真实应力 σ_{ij}的函数,q_n 是一组内部状态变量。$\bar{\sigma}_{ij}$可由投影规则得到。图 5.6 显示的是径向投影规则,图中 J_1 是第一应力不变量,J_{2D}是偏应力第二不变量,$\bar{\sigma}_{ij}$是由一个投影中心 C_p 出发经过 σ_{ij}而投影到边界面上得到的。投影中心可以是固定的,也可以是移动的。若是固定的,C_p 是一个材料常数,如果是移动的,它就是一个状态变量。



(a) 虚应力与真实应力　　(b) 虚应力增量与真实应力增量

图 5.6　虚应力与真实应力间的关系

塑性流动法则为

$$d\varepsilon_{ij}^p = \langle L \rangle \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \tag{5.89}$$

式中:L 是荷载指数;〈 〉表示一种运算。若 $L>0$,$\langle L\rangle = L$;若 $L \leqslant 0$,$\langle L\rangle = 0$。式(5.89)表示塑性应变增量的方向垂直于虚应力处的边界面。

根据一致性条件,可有

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} d\bar{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial q_n} dq_n = 0 \tag{5.90}$$

其中状态变量的增量可假设为应力增量的线性函数，即

$$\mathrm{d}q_n = \langle L\rangle r_n \tag{5.91}$$

式(5.91)中，$r_n=r_n(\sigma_{ij},q_n)$，即是当前应力及状态变量的函数。

将式(5.91)代入式(5.90)可得

$$\mathrm{d}F = \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\mathrm{d}\bar{\sigma}_{ij} - \bar{K}_p\langle L\rangle = 0 \tag{5.92}$$

其中

$$\bar{K}_p = -\frac{\partial \bar{F}}{\partial q_n} r_n$$

将塑性应变增量分别用真实应力和虚应力表示，可以得到虚应力增量和真实应力增量的关系[图 5.6(b)]

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{ij}}\mathrm{d}\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\bar{K}_p}{K_p}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} \tag{5.93}$$

式中：K_p 是塑性模量；$\bar{K}_p$ 是在边界面上求得的塑性模量值。当 $\sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}$ 时，即真实应力在边界上时，$\mathrm{d}\sigma_{ij}=\mathrm{d}\bar{\sigma}_{ij}$，$K_p=\bar{K}_p$。当在边界面以内时，$K_p$ 和 $\bar{K}_p$ 间的关系是 σ_{ij} 和 $\bar{\sigma}_{ij}$ 之间距离[图 5.6(a)中的 δ]的函数，表达为

$$K_p = \bar{K}_p + H(\delta) \tag{5.94}$$

$H(\delta)$ 须满足三个条件，即

$$H(\delta) \geqslant 0 \tag{5.95}$$

$$H(0) = 0 \tag{5.96}$$

$$H(\delta_{in}) = \infty \tag{5.97}$$

式中，δ_{in} 指的是材料刚开始产生塑性变形时的 δ 值。

在这种情况下，塑性应变刚从零开始变化，塑性模量无穷大。式(5.95)说明在任何情况下，塑性模量值都不小于其在边界面上的值。式(5.96)满足当 $\sigma_{ij}=\bar{\sigma}_{ij}$ 时 $K_p=\bar{K}_p$ 的条件。将式(5.93)代入式(5.91)中可得

$$\frac{\bar{K}_p}{K_p}\frac{\partial \bar{F}}{\partial \sigma_{ij}}\mathrm{d}\sigma_{ij} - \langle L\rangle \bar{K}_p = 0 \tag{5.98}$$

根据弹性理论

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = E_{ijkl}(\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - \mathrm{d}\varepsilon^p_{kl}) = E_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - E_{ijkl}\langle L\rangle\frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \tag{5.99}$$

根据式(5.98)、(5.99)两式可得出最终的应力应变增量关系

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = E_{ijkl}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} - h(L)\frac{\left(E_{ijmn}\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{mn}}\right)\left(\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}}E_{pqkl}\right)}{\left(\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{ab}}E_{abcd}\dfrac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\sigma}_{cd}}\right) + K_p}\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{5.100}$$

其中，$h(L)$ 是 Heavyside 函数，如果 $L>0$，$h(L)=1$，否则 $h(L)=0$。其刚度矩阵和一般的弹塑性刚度张量相比形式上是一样的。但在边界面理论中，边界面取代了屈

服面，边界面上的虚应力扮演了经典塑性理论中屈服面上真实应力的角色。

加州大学的学者用三轴仪和离心机模型实验来验证该边界面粘土模型的可靠性，结果表明该模型能有效地模拟粘土在不同荷载情况下应力-应变关系及有效应力路径，实验结果与数学计算所得结果相当吻合，证明边界面粘土模型的广泛适用性。Wang 在边界面模型的基础上建立了边界面次塑性模型，它可以描述颗粒土在较广泛荷载条件下的性质，尤其是砂土在旋转剪应力作用下的性质。这些荷载条件包括膨胀-压缩应力条件、极限破坏循环不排水加载时有效应力减小和极松砂的软化等。该模型内容很多，这里不再展开。

Drucker-Prager 模型(1952)是在考虑静水压力影响的广义 Mises 屈服准则基础上建立的，屈服准则采用

$$f\left(p,\sqrt{J_2}\right)=3\sqrt{J_2}\alpha p-k=0 \tag{5.101}$$

按照相关流动法则有

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{p}=\mathrm{d}\lambda\frac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}} \tag{5.102}$$

式中

$$\mathrm{d}\lambda=\frac{H_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij}}{\bar{H}} \tag{5.103}$$

式中，H 为硬化参量

$$H_{ij}=-3\alpha K\delta_{ij}+G\frac{1}{\sqrt{J_2}}s_{ij} \tag{5.104}$$

$$\bar{H}=9\alpha^2K \tag{5.105}$$

D-P 模型的本构关系可表达为

$$\mathrm{d}\sigma_{ij}=D_{ijkl}^{ep}\mathrm{d}\varepsilon_{kl}=[D_{ijkl}-D_{ijkl}^{p}]\mathrm{d}\varepsilon_{kl} \tag{5.106}$$

其中，弹塑性矩阵为

$$D_{ijkl}^{ep}=\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{ij}\delta_{kl}+2G\delta_{ik}\delta_{jl}-\frac{H_{ij}H_{kl}}{\bar{H}+G} \tag{5.107}$$

D-P 模型的优点是采用简单的方法考虑了静水压力对屈服和强度的影响，参数少，计算简单，同时也考虑了岩土类材料的剪胀性；缺点是没有反映材料三轴拉压强度的不同、纯静水压力可引起岩土类材料的屈服和破坏及应力 Lode 角对塑性流动的影响。

Cambridge 模型(Roscoe，1958～1963)属于等向硬化的弹塑性模型，最初的屈服面是弹头型，后被修正为椭圆形，称为修正的剑桥模型。

Cambridge 模型在 p-q 平面的屈服曲线方程为

$$f(p,q,H_a)=p^2-p_cp+\left(\frac{q}{M}\right)^2=0 \tag{5.108}$$

式中：p_c 为固结压力；M 为破坏线的斜率。Cambridge 模型的屈服曲线在 p-q 平面

上是一个以$(0,p_c/2)$为圆心、$p_c/2$为长半轴、$q=Mp_c/2$为短半轴的椭圆。

模型服从相关流动法则，即塑性势函数与屈服函数一致

$$Q = f \tag{5.109}$$

硬化函数

$$H = p_c = H(\varepsilon_v^p) \tag{5.110}$$

我国学者魏汝龙同样利用能量原理和正交法则，得出比Cambridge模型更普遍的正常固结土的屈服面方程

$$f(p,q) = \left(\frac{p-\gamma p_c}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{q}{\beta}\right)^2 - p_c^2 = 0 \tag{5.111}$$

上式也是一个椭圆方程，式中的α、β、γ为决定屈服面椭圆形状的形状参数。Cambridge模型只是魏汝龙模型的一种特殊情况。

Cambridge模型是将应变硬化理论应用于正常固结粘土，建立的较早也较为完善的一个模型，其基本假设有试验依据，考虑了岩土材料的静水压力屈服特性、压硬性、剪缩性和剪胀性，应用较广。但由于采用了Mohr-Coulomb破坏准则，没能考虑中主应力对强度的影响，也没有反映高压力作用下强度随平均应力非线性变化的性质，而且破坏面有尖角，使该点塑性应变增量方向不易确定。模型为了简化计算假定了弹性墙，实际上在弹性墙内加载仍会出现塑性变形，特别是剪切变形。

P. V. Lade在Lade-Duncan模型的基础上提出了Lade双曲面模型，为了反映比例加载产生的屈服现象并克服直线锥面屈服面产生过大的剪胀；将L-D模型的屈服面改为曲面锥形屈服面，简称剪胀屈服面。在剪胀屈服面上塑性流动服从非联合流动法则。在L-D模型的锥形开口端增加了一个球形的帽子屈服面，以考虑岩土材料在单纯的静水压力作用下的屈服特性及一些材料的剪缩性。

模型中应变增量分为三部分

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^e + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{cp} + \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{sp} \tag{5.112}$$

式中：$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^e$为弹性应变增量；$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{cp}$为与塑性剪胀屈服面有关的塑性应变增量；$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{sp}$为与塑性压缩屈服面有关的塑性应变增量。剪胀屈服与破坏条件为

$$f_p = \left(\frac{I_1^3}{I_3} - 27\right)\left(\frac{I_1}{p_a}\right)^m - \eta_1 = 0 \tag{5.113}$$

式中：m为幂次，反映锥体母线曲率的大小；η_1为硬化参数。

塑性剪胀应变增量用非关联流动法则确定，塑性势函数为

$$Q_p = I_1^3 - \left[27 + \eta\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m\right] I_3 \tag{5.114}$$

塑性压缩屈服条件为

$$f_c = I_1^2 + 2I_2 - 3\sigma^2 = 0 \tag{5.115}$$

流动法则为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{sp} = \mathrm{d}\lambda \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \tag{5.116}$$

硬化规律采用塑性功硬化规律为

$$W_w^p = \int \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{wp} \tag{5.117}$$

$$W_c^p = \int \sigma_{ij} \mathrm{d}\varepsilon_{ij}^{cp} = \int 3\sigma_3 \mathrm{d}\varepsilon_v \tag{5.118}$$

三部分应变分量相加，即可得 Lade 模型的弹塑性本构关系为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{ij} = [D_{ijkl}^e]^{-1}\mathrm{d}\sigma_{kl} + \frac{\sigma_{ij}}{f_c} c p p_a \left(\frac{p_a^2}{f_c}\right)^{(1-p)} \mathrm{d}\left(\frac{f^c}{p_a^2}\right) + \frac{W_w^p \mathrm{d}f_p}{f_p(1-bpW_w^p)\left(3Q_p + m\eta_2\left(\frac{p_2}{I_1}\right)^m I_3\right)} \frac{\partial Q_p}{\partial \sigma_{ij}} \tag{5.119}$$

Ladc 模型考虑中主应力的影响且屈服曲面光滑，适用于粘土、砂土、岩石和混凝土等各种岩土类材料。

5.4.2 弹塑性动力反应有限元分析

以水平地层的地震动力反应分析为例，结合渗流耦合进行有限元方程的建立和分析。

假定水平方向的应力、应变和位移均为零。将三维动力比奥固结方程可简化为一维。为得到在地震作用下孔隙水压力的形成和消散方程，必须建立孔隙水压力、土骨架总体积应变、压缩变形导致的孔隙水的体积应变以及土中渗漏的水的质量之间的关系。根据渗流边界条件、渗流连续方程和 Darcy 定律即可获得。方程以增量形式表达为

$$p \cdot \partial^2(\Delta u_1)/\partial t^2 + \Delta\sigma'_{13,3} = 0 \tag{5.120}$$

$$p \cdot \partial^2(\Delta u_2)/\partial t^2 + \Delta\sigma'_{23,3} = 0 \tag{5.121}$$

$$p \cdot \partial^2(\Delta u_3)/\partial t^2 + \rho_w d^2[\Delta u_3\langle L\rangle]/\mathrm{d}t^2 + \Delta\sigma'_{33,3} + \Delta p_{,3} - \Delta\gamma = 0 \tag{5.122}$$

$$-k'\Delta p_{33} + \Gamma^{-1} \cdot \partial(\Delta p)/\partial t + \partial(\Delta u_{3,3})/\partial t + k' \cdot \frac{\rho_w}{e} \cdot \frac{\partial^2(\Delta u_{3,3})}{\partial t^2} + k' \cdot (1+e)/e \cdot \rho_w \cdot \Gamma^{-1} \cdot \partial^2(\Delta p)/\partial t^2 = 0 \tag{5.123}$$

为简单起见，在考虑粘滞阻尼对能量耗散的作用时，假设粘滞阻尼矩阵是对角阵，则

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma'_{13} \\ \Delta\sigma'_{23} \\ \Delta\sigma'_{33} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -\Delta u_{1,3} \\ -\Delta u_{2,3} \\ \Delta u_{3,3} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\eta_s \cdot \partial(\Delta u_{1,3})/\partial t \\ -\eta_s \cdot \partial(\Delta u_{2,3})/\partial t \\ -\eta_s \cdot \partial(\Delta u_{3,3})/\partial t \end{Bmatrix} \tag{5.124}$$

将式(5.33)代入式(5.32)可得

$$\rho \cdot \partial^2(\Delta u_1)/\partial t^2 - \eta_s \cdot \partial(\Delta u_{1,33})/\partial t - d_{11} \cdot \Delta u_{1,33} - d_{12} \cdot \Delta u_{2,33} - d_{13} \cdot \Delta u_{3,33} = 0 \tag{5.125}$$

$$\rho \cdot \partial^2(\Delta u_2)/\partial t^2 - \eta_s \cdot \partial(\Delta u_{2,33})/\partial t - d_{21} \cdot \Delta u_{1,33} - d_{22} \cdot \Delta u_{2,33} - d_{23} \cdot \Delta u_{3,33} = 0 \tag{5.126}$$

$$\rho \cdot \partial^2(\Delta u_3)/\partial t^2 + \rho_w d^2[\Delta u_3(L)]/\mathrm{d}t^2 + \Delta p_3 - \Delta\gamma - \eta_s \cdot \partial(\Delta u_{3,33})/\partial t - d_{31} \cdot \Delta u_{1,33} - d_{32} \cdot \Delta u_{2,33} - d_{33} \cdot \Delta u_{3,33} = 0 \tag{5.127}$$

$$-k'\Delta p_{33} + \Gamma^{-1} \cdot \partial(\Delta p)/\partial t + \partial(\Delta u_{3,3})/\partial t + k' \cdot \rho_w/e \cdot \partial^2(\Delta u_{3,3})/\partial t^2 + k' \cdot \frac{1+e}{e} \cdot \rho_w \cdot \Gamma^{-1} \cdot \frac{\partial^2(\Delta p)}{\partial t^2} = 0 \tag{5.128}$$

以上四式就是基本方程组，位移 u_1、u_2、u_3 和孔隙水压力 p 为基本未知量。边界条件和初始条件的建立和处理方法前边已有论述，由此即可建立最终的有限元方程。在此基础上，按照有限元方法的求解步骤进行数值求解。

5.5 随机地震作用下的动力分析

5.5.1 地震作用下的随机反应分析

1. 土体的随机地震反应过程

对于高阻尼的土工建筑物，一般可假设随机地震输入为平稳过程，土体的随机反应也近似为平稳过程。因此，在确定基岩地震输入时，可假定为平稳高斯过滤白噪声过程，其谱密度用金井清谱表示，即

$$S(\omega) = \frac{1 + 4\lambda_g^2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2\right]^2 + 4\lambda_g^2\left(\frac{\omega}{\omega_g}\right)^2} S_0 \tag{5.129}$$

式中：ω_g 和 λ_g 分别为土层过滤器的圆频率和阻尼比，由地震烈度和场地条件确定；S_0 为白噪声功率谱强度，与峰值地震加速度 a_m 有关，即

$$S_0 = \frac{4\lambda_g^2 a_m^2}{\pi\gamma_p^2\omega_g(1 + 4\lambda_g^2)} \tag{5.130}$$

式中，γ_p 为峰值因子，通常取 $\gamma_p = 3$。

根据场地地震危险性分析，确定土-结构物体系输入地震动过程中若干模型参数，并从土体动力试验和现场波速测试中确定各类土的等价线性动应力和应变模型参数，然后按平稳随机地震反应分析方法，可以方便地求出单元的随机地震响应及统计特性。对于随机永久变形分析来说，最关心的是动剪应力响应的功率谱密度。因此，随机地震分析结束后，对某一频率离散点 ω_j，根据输出动剪应力响应的幅值 H_{τ_j}，可求得动剪应力响应的功率谱密度。计算公式为

$$G_\tau(\omega_j) = H_{\tau_j}^2 \tag{5.131}$$

对所有地震谱频率离散点进行计算，便可得到动剪应力响应的功率谱密度曲线，由此可进一步求出过程的各阶谱矩，平均穿零率和峰值概率密度等。

在随机荷载作用下，决定土层反应的二维等价线性方程为

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C_{eq}]\{\dot{X}\} + [K_{eq}]\{X\} = -[M]\{J_X\}\ddot{x}_g(t) - [M]\{J_Y\}\ddot{y}_g(t) \tag{5.132}$$

式中：$\{J_X\}$和$\{J_Y\}$分别为水平与竖向荷载指示向量；$\ddot{x}_g(t)$和$\ddot{y}_g(t)$分别为水平与竖向地震加速度输入过程；$[C_{eq}]$为阻尼阵，按单元变阻尼法形成。在频域上求解时，需在各个频率离散点上分别进行，求解上式时可将输入加速度功率谱$[G_{\ddot{x}_g}](\omega)$和$[G_{\ddot{y}_g}](\omega)$在一系列ω_j处离散。对第j个离散点，假定系统受幅值为$\sqrt{G_{\ddot{x}_g}(\omega_j)}$及$\sqrt{G_{\ddot{y}_g}(\omega_j)}$的虚拟简谐运动激励。此时，式(5.133)变为下述确定性线性方程

$$[M]\{\ddot{X}\}+[C_{eq}]\{\dot{X}\}+[K_{eq}]\{X\}$$
$$=-[M]\{J_X\}\sqrt{G_{\ddot{x}_g}(\omega_j)}\cdot e^{i\omega_j t}-[M]\{J_Y\}\sqrt{G_{\ddot{y}_g}(\omega_j)}\cdot e^{i\omega_j t} \tag{5.133}$$

然后用振型分解法降阶可迅速求解其位移反应幅值，此即平稳随机响应的确定性算法。该法计算简便且有较高的精度。将稳态反应的位移幅值作为结构的静变位，即可计算出各单元的正应变与剪应变幅值。

平面应变状态下的应力应变关系为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y]\\ \sigma_y&=\frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x]\\ \tau_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy}\end{aligned}\right\} \tag{5.134}$$

利用式(5.134)，即可求得每一单元的动应力幅值，幅值的平方即为功率值。对每一频率离散点进行上述计算，即可得位移和应力反应的功率谱。然后，通过积分即可得到反应量的方差。应用直接插值等价线性化法，可得到等价的动应力评价幅值，同时可求得最大动应力反应的中值。需要指出，按上面计算的稳态反应功率谱已计入了各阶振型互相耦合的影响，其结果比较可靠。

2. 永久变形随机反应分析

关于随机地震作用下的永久变形研究目前尚处于起步阶段。吴再光等(1992)基于软化模量模型建立了一种随机地震作用下平均永久变形的计算方法，刘汉龙等(1996)基于等价结点力模型也建立了一种随机地震永久变形平均算法。但是，土体随机地震反应分析的目的是为了评价或判断系统的安全程度，从统计概率的角度对土体的安全度进行定量评价。因此，仅仅计算平均永久变形还不能达到进行动力危险性分析的目的。

刘汉龙等[52]在确定性分析方法基础上，通过随机地震反应分析，建立了随机地震作用下地基及土石坝永久变形分析方法和永久变形危险性分析方法。事实上，由于未来地震发生的随机性，亦即地震波形的不可预测性，故而也不可能准确预测未来地震发生所产生的地震永久变形的大小，即永久变形也是一个随机变量。随机地震永久变形是由于随机的等价结点力作用下产生的。根据随机地震反应分析可

知，当基岩地震输入是随机过程时，其各种变量的响应也是随机过程，所以坝体内任意一点的动剪应力是一个随机变量。根据等价结点力的概念，可求得相应于随机动剪应力的随机等价结点力为

$$\{F\} = [L]\{\tau\} \tag{5.135}$$

式中，$[L]$为与坐标位置有关的矩阵。

由于功率谱密度的运动可以看作是由无穷多个不同频率的简谐振动组成的，而每一个简谐振动(圆频率为 ω)振幅的平方与功率谱 $G_\tau(\omega)$成正比，因此可将输入功率谱在频域上进行离散，形成一系列离散点 ω_j 处的离散值 $G_\tau(\omega_j)$。对第 j 个频率离散点，假定输入量是以 ω_j 为频率，$\sqrt{G_\tau(\omega_j)}$为幅值的谐振运动，即

$$\tau = \sqrt{G_\tau(\omega_j)}\exp(i\omega_j t) = H_{\tau_j}\exp(i\omega_j t) \tag{5.136}$$

在计算等价结点力谱密度时，先由 $H_{\tau_j}\exp(i\omega_j t)$，通过式(5.135)的线性变换便可求出等价结点力响应 $H_{F_j}\exp(i\omega_j t)$。事实上，只需将剪应力的幅值 H_{τ_j}代入式(5.136)，按常规方法求出等价结点力响应的幅值 H_{F_j}，即可求得等价结点力的功率谱密度。同样，将等价结点力幅值加于坝体各单元结点上，亦可分别求出位移响应的幅值、应变响应的幅值和应力响应的幅值。位移平衡方程、几何方程和本构方程分别为

$$\left.\begin{aligned}\{F\} &= [K]\{\delta\}\\ \{\varepsilon\} &= [B]\{\delta\}\\ \{\sigma\} &= [D]\{\varepsilon\}\end{aligned}\right\} \tag{5.137}$$

由于坝料的剪切模量依赖于所施加的剪应变幅值的大小，因此必须确定与剪应变过程 $\gamma(t)$相协调的剪切模量。根据式(5.137)计算的剪应变功率谱密度曲线可求出剪应变的零阶谱矩、二阶谱矩和四阶谱矩分别为

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\gamma^2 &= \int_0^\infty G_\gamma(\omega)d\omega\\ \sigma_{\dot\gamma}^2 &= \int_0^\infty \omega^2 G_\gamma(\omega)d\omega\\ \sigma_{\ddot\gamma}^2 &= \int_0^\infty \omega^4 G_\gamma(\omega)d\omega\end{aligned}\right\} \tag{5.138}$$

由剪应变峰值分布推求出剪应变峰值概率密度函数为

$$\begin{aligned}p(\gamma_p) = &\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{2\pi\sigma_\gamma^2}}\exp\left[-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2(1-\alpha^2)}\right]\\ &+\frac{\alpha\gamma_p}{2\sigma_\gamma^2}\left[1+\operatorname{erf}\left(\frac{\gamma_p}{\sigma_\gamma\sqrt{2\alpha^{-2}-2}}\right)\right]\exp\left(-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2}\right)\end{aligned} \tag{5.139}$$

式中，$\alpha=\dfrac{\sigma_{\dot\gamma}^2}{\sigma_\gamma\sigma_{\ddot\gamma}}$为带宽参数。由式(5.139)可见，该分布受带宽参数 α 控制，当 $\alpha\to 1$ 时，$p(\gamma_p)$退化为瑞利分布，即

$$p(\gamma_p)=\frac{\gamma_p}{\sigma_\gamma^2}\exp\left(-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2}\right) \tag{5.140}$$

其均值为

$$E[\gamma_p]_2=\int_0^\infty \gamma_p\frac{\gamma_p}{\sigma_\gamma^2}\exp\left[-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2}\right]\mathrm{d}\gamma_p=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma_\gamma \tag{5.141}$$

当 $\alpha\to 0$ 时，$p(\gamma_p)$退化为高斯分布，即

$$p(\gamma_p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma}\exp\left(-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2}\right) \tag{5.142}$$

其均值为

$$E[\gamma_p]_1=\int_{-\infty}^\infty |\gamma_p|\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\gamma}\exp\left[-\frac{\gamma_p^2}{2\sigma_\gamma^2}\right]\mathrm{d}\gamma_p=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma_\gamma \tag{5.143}$$

需要指出，实际土体反应介于以上两种分布之间，即带宽参数 α 介于 0 和 1 之间，因此可按下式确定土体的等价剪应变：

$$\gamma_{eq}=E[\gamma_p]_1+a(E[\gamma_p]_2-E[\gamma_p]_1) \tag{5.144}$$

式(5.144)反应了剪应变过程响应的平均振动幅值。由 γ_{eq}再根据动应力与残余应变关系求出新的剪切模量。考虑到材料的非线性特性，求出新的剪切模量后，应与前一次模量进行比较，如不满足迭代控制条件，则继续迭代。迭代控制条件相对误差可不超过 5%。

迭代结束后，输出永久变形响应的幅值 H_{δ_j}，即可得到永久变形响应的功率谱密度 $G_\delta(\omega_j)$。对每个离散的频率点计算，可求出永久变形功率谱密度曲线，由此可求得永久变形的零阶谱矩、二阶谱矩和四阶谱矩，即

$$\left.\begin{aligned}\sigma_\delta^2&=\int_0^\infty G_\delta(\omega)d\omega\\ \sigma_{\dot\delta}^2&=\int_0^\infty \omega^2 G_\delta(\omega)d\omega\\ \sigma_{\ddot\delta}^2&=\int_0^\infty \omega^4 G_\delta(\omega)d\omega\end{aligned}\right\} \tag{5.145}$$

此外，t 时刻永久变形响应过程 $\delta(t)$的平均穿零率为

$$V_0^+(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sigma_{\dot\delta}}{\sigma_\delta} \tag{5.146}$$

穿越某界限值的单位时间次数为

$$V_b^+(t)=V_0^+(t)\exp\left(-\frac{b^2}{2\sigma_\delta^2}\right) \tag{5.147}$$

当界限值 b 较高时，$\delta(t)$穿越 b 的次数近似服从 Poisson 分布，因此可以推出在$[0,T]$时段内不超过界限 b 的概率，即 δ_m 的概率分布函数为

$$F_{\delta_m}(b)=P(\delta_m\leqslant b)=1-\exp\left[-2\int_0^T V_b^+(t)\mathrm{d}t\right] \tag{5.148}$$

另外，在[0,T]时段内首次超越 b 的概率，即首次破坏概率为

$$P(\delta_m \geqslant b) = 1 - F_{\delta_m}(b) \tag{5.149}$$

由式(5.148)可得出永久变形响应最大值 δ_m 的均值和标准差分别为

$$E[\delta_m] = \left[\sqrt{2\ln(V_0^+ T)} + \frac{0.5772}{\sqrt{2\ln(V_0^+ T)}}\right]\sigma_\delta \tag{5.150}$$

$$\sigma[\delta_m] = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{1}{\sqrt{2\ln(V_0^+ T)}}\sigma_\delta \tag{5.151}$$

可见，由式(5.150)可得到在整个地震时段内可能出现的最大反应值的平均值。由式(5.151)可知最大反应的离散程度，进一步可以确定具有任何累积概率的最大反应。显然，这种给出反应量的大小及其相应的概率，比单独给出某一条确定的地震波作用下的单值反应更为合理。

5.5.2 永久变形危险性评价

上述永久变形随机反应分析方法是针对某一确定的地震强度 $A=a$ 时由于地震波细节的随机性而引起的永久变形条件概率分布，即 $F_\delta(b|A=a)$，而实际上地震强度本身也是不可预见的随机变量。通过场地危险性分析可得出 A 的概率分布为 $F_A(a)$。因此，要完整地计算永久变形 δ 超过某一值 b_0 的概率，必须进行全概率分析。

假定已从地震危险分析中确定出今后数年内场地地震加速度 A 的超越概率 $P(A>a)=1-F_A(a)$和概率密度 $f_A(a)$，而任一地震强度 $A=a$ 作用下土体永久变形的概率分布由 $P(\delta>b_0|a)=1-F_\delta(b_0|a)$也可以按前述的方法求出，则按全概率法则，永久变形 $\delta>b_0$ 的危险性为

$$P(\delta > b_0) = \int_0^{a_m} P(\delta > b_0|a) f_A(a)\mathrm{d}a = \int_0^{a_m} [1 - F_\delta(b_0|a)] f_A(a)\mathrm{d}a \tag{5.152}$$

式中，a_m 为今后数年内地面最大加速度的上限值。

如果地震危险性分析只给出离散化的地面加速度超越概率数值 $P(A>a_i)$，则式(5.152)的积分可简化为

$$P(\delta > b_0) = \sum_{i=1}^{n} \left[1 - F_\delta\left(b_0 \left| \frac{a_i + a_{i+1}}{2} \right.\right)\right][P(A > a_i) - P(A > a_{i+1})] \tag{5.153}$$

式中，n 为离散点总数。

通过式(5.153)即可确定土工建筑物在今后若干年内永久变形 δ 超越任何界限值 b_0 的概率。

5.5.3 随机地震作用下边坡的稳定性分析

利用有限元进行边坡稳定分析时，土体的抗剪强度采用 Mohr-Coulomb 强度准则。此时，曲面上任一点土体的抗剪强度为

$$\tau_f = \sigma_n \mathrm{tg}\varphi + c \tag{5.154}$$

式中：σ_n 为法向应力；φ 和 c 分别是土体的内摩擦角和粘聚力。

边坡稳定分析的目的是要在计算区域内找到抗滑稳定安全系数为最小的曲面（三维问题）或一条曲线（平面问题）。用有限元方法计算出区域的应力场，并将平面问题的曲线离散后，则问题的求解可以表示为

$$\min R = \frac{\sum_{i=1}^{m-1}\int_e (\sigma_n \mathrm{tg}\varphi + c)\mathrm{d}l}{\sum_{i=1}^{m-1}\int_e \tau \mathrm{d}l} \tag{5.155}$$

式中，e 为离散后曲线上的一个单元。式(5.155)可进一步写成

$$\min R = \frac{\sum_{i=1}^{m-1}\int_{-1}^{+1} (\sigma_n \mathrm{tg}\varphi + c)|J|\mathrm{d}\xi}{\sum_{i=1}^{m-1}\int_{-1}^{+1} \tau |J| \mathrm{d}\xi} \tag{5.156}$$

式中，$|J|$ 为雅可比行列式。式(5.156)可以用 Gauss 数值积分进行计算。

在静力条件下，一点沿曲线方向的法向应力和切向应力用下式计算：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau &= \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5.157a}$$

其中

$$\sin 2\alpha = 2y_n/(1 + y_n^2) \qquad \cos 2\alpha = (1 - y_n^2)/(1 + y_n^2) \tag{5.157b}$$

式中，y_n 是沿曲线方向的法线斜率。

在随机地震荷载作用下，式(5.157)中的各应力分量应为静应力与随机动应力分量之和。由于动应力是由随机动力反应分析得到的，只能得到动应力的平均幅值与平均最大值的大小，而方向是不确定的，所以不能简单地叠加上随机动应力后进行最危险滑动面的搜索。

邵龙潭等(1999)采用 Hooke-Jeeves 方法逐点、逐步搜索求解的数学规划方法。为了叠加上随机动应力又不至于增加太多的计算量，在每一计算点考虑 3 个动应力(σ_{dx}、σ_{dy}、σ_{dxy})的随机组合，则法向应力和切向应力可分别表示为

$$\left.\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{1}{2}[(\sigma_x + m\sigma_{dx}) + (\sigma_y + n\sigma_{dy})] + \frac{1}{2}[(\sigma_x + m\sigma_{dx}) \\ &\quad - (\sigma_y + n\sigma_{dy})]\cos 2\alpha + (\tau_{xy} + l\tau_{dxy})\sin 2\alpha \\ \tau &= \frac{1}{2}[(\sigma_x + m\sigma_{dx}) - (\sigma_y + n\sigma_{dy})]\sin 2\alpha - (\tau_{xy} + l\tau_{dxy})\cos 2\alpha \end{aligned}\right\} \tag{5.158}$$

式中，$m=\pm1$，$n=\pm1$，$l=\pm1$。它们的取值实际上代表了动应力的方向。当 m、n、l 分别取值时，在每一个 Gauss 点形成 8 种不同的应力组合。由每组算得的 σ_n、τ 代入目标函数，取其中对目标函数值贡献最小的应力组合作为此点的计算应力。

从数学角度讲，用上述方法最终都能搜索到最危险滑裂面并求得最小安全系数。用于最后计算对目标函数值贡献的是其中不利组合的一种，那么，此时的动应力方向能否代表实际边坡在地震作用下破坏时真实的动应力方向是一个要考虑的问题。因为这里所考虑的地震作用是随机的，对某一点来说出现这样那样的应力方向是可能的，但以往大量的确定性地震反应分析表明，边坡破坏时沿破坏面的应力分布具有一定规律性，这里考虑地震的随机性来分析边坡的稳定性也符合这种规律。

为了分析随机地震作用下土石坝边坡的稳定性，需进行如下计算：①用随机地震反应分析方法计算坝体的随机动力反应，求出动应力场的平均幅值及平均最大值；②分别考虑随机动应力的平均幅值及平均最大值进行搜索求解，分别得到两种情况下的最小安全系数及最危险滑裂面；③为了用数学规划法(Hook-Jeeves 搜索法)搜索得到最危险滑裂面，先给定多条初始滑裂面进行搜索，找到各自的最小安全系数及其对应的滑裂面，将各安全系数进行比较，取其中最小的安全系数及其对应的滑裂面为问题的解。

5.5.4 抗震稳定分析的随机可靠性

(1)动力可靠性分析方法。

对系统状态更为一般的描述是通过某种算子建立系统品质与系统状态间的关系

$$M\mathbf{Z}=\mathbf{Y} \tag{5.159}$$

式中：$\mathbf{Z}$ 是系统品质矢量(如，某点的响应)；$\mathbf{Y}$ 为系统状态矢量(如某点的激励)；M 为某种算子。

所有允许的品质矢量集合形成品质空间的安全区 Ω，Ω 的边界 Γ 就是通常意义上的极限状态曲面，矢量 $\mathbf{Z}$ 在 Γ 的外法线方向穿越极限状态曲面，即意味着系统或构件的破坏。振动系统在时间区间$(0,t]$内能够无损运行的概率，即系统的可靠度为

$$R(t)=P\{Z(\tau)\in\Omega|\tau\in(0,t]\} \tag{5.160}$$

设损坏率为 $h(t)$，$h(t)\Delta t$ 就是系统在$(0,t]$内无损坏，面在$(t,t+\Delta t]$范围内损坏的概率可写为

$$R(t)=R(t_0)\exp\left(-\int_{t_0}^{t}h(t)dt\right) \tag{5.161}$$

式中，$R(t_0)$为可靠度的初值。

(2)随机动荷载作用下的破坏机制。

设 $y(t)$是系统的随机动力响应，它可以是应力、应变、速度、加速度等。一个系统的破坏机制有两类，即首次穿越破坏机制和累积损伤破坏机制，现分别介绍如下。

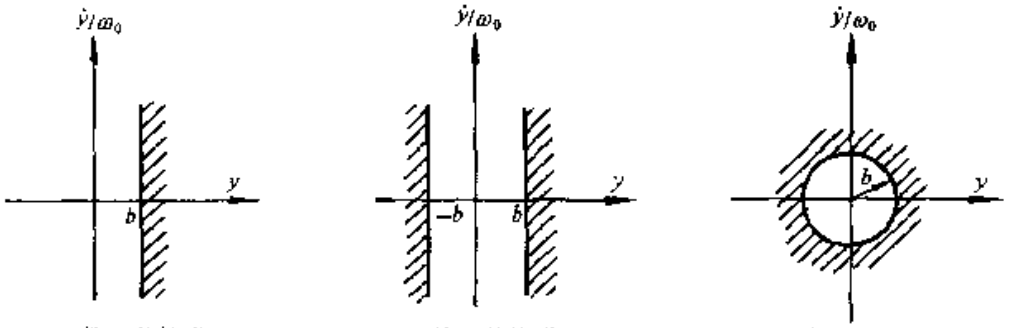
1) 首次穿越破坏机制。

当响应 $y(t)$首次超过上限值 U 或下限值 L，就认为系统或构件破坏。例如初始条件 $y(0)=\dot{y}(0)=0$，随机动力响应第一次达到上限 U 或下限 $L(U,L>0)$的时间为 T，T 为随机变量其概率分布函数为 $F_T(t)$，于是(5.161)式可写为

$$R(t)=P\{\max y(\tau)\leqslant U\cap \min y(\tau)\geqslant -L|\tau\in(0,t]\}=1-F_T(t) \tag{5.162}$$

此时，求解可靠度与求解首次穿越时间 T 的概率分布函数是等价的。

首次穿越界限的情形有三种，如图 5.7 所示。第一种情形认为破坏是由于响应值 y 首次超过某一界限 b 而发生的，安全域为 $y<b$，边界 $y=b$ 被称为单壁或 B 型壁；第二种情形与第一种情形相似，其安全域为 $y<|b|$，边界 $y=\pm b$ 被称为双壁或 D 型壁；第三种情形认为破坏是由于响应包络线 $A=\sqrt{y^2+\dot{y}^2/\omega_0^2}$之值首次超过界限 b 而发生的，安全域是 $A<b$ 的圆域，半径为 b 的边界圆周称为圆壁或 E 型壁。



(a) 第一种情形　(b) 第二种情形　(c) 第三种情形

图 5.7　首次穿越破坏的相平面图

2) 累积损伤破坏机制。

系统在动力荷载长时间作用下，响应最大值(或极值)在低于首次穿越破坏界限值的范围内多次重复，最终由于损伤累积达到某一疲劳界限而致使系统破坏，这种破坏形式称为累积损伤破坏。累积损伤模型多是根据循环实验(疲劳实验)数据估计随机荷载作用下系统的可靠性，在随机振动理论中通常是根据中心极值定量与 Miner 损伤累积规律来推导随机动荷载作用下系统或构件疲劳损伤或疲劳寿命的统计量，显然这种推导假设是渐近正确的。该破坏模型适用于高度疲劳破坏的各种金属及非金属材料，至于能否推广于地基土体，目前国内外尚未有这方面的研究；通过实例计算认为，该模型可以应用于评判地基土地震液化的可靠性。

土体的疲劳数据是从等应力幅疲劳试验(等应力幅循环三轴试验)获取，在其它条件相同的情况下，以不同的应力幅值对同一组试样进行多次重复试验，由此建

立应力幅-周数 N(液化周数或应变达到某一规定值的周数)关系。S-N 关系的经典模型为

$$N_S = \begin{cases} N_{S_e}(S_e/S)^{\beta} & S \geqslant S_e \\ \infty & S < S_e \end{cases} \tag{5.163}$$

式中:N_S 为应力幅 S 所对应的疲劳寿命;S_e 为疲劳极限(应力幅小于该值时即便循环周数无穷,亦不发生液化破坏);N_{S_e} 为疲劳极限应力幅 S_e 所对应的疲劳寿命;β 为 S-N 曲线的斜率。

按 Palmgren-Miner 的假设,认为疲劳损伤是线性累积的,由此疲劳损伤函数 $D(t)$ 的增长率为

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n_S} = \frac{1}{N_S} \tag{5.164}$$

式中:n_S 为应力幅为 S 时的应力循环周数,当应力过程为随机过程时 n_S 代表幅值为 S 的应力峰数,若单位时间应力峰数的期望为 $q^{+}_{-\infty}(t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = q^{+}_{-\infty}(t)\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}n_S} = \frac{q^{+}_{-\infty}(t)}{N_S} \tag{5.165}$$

在整个激励作用时间域$(0,t]$内,积分上式就可求得累积损伤 $D(t)$,$D(t)$越接近 1,系统可靠度愈小。

(3)峰值分布及其拟合优度检验。

1) 峰值分布规律。

在动力可靠性分析中,要涉及到系统响应的峰值分布。随机过程 $x(t)$ 的峰值定义为:当 $\dot{x}(t_0)=0$,$\ddot{x}(t_0)<0$(或 $\ddot{x}(t_0)>0$)时,随机过程 $x(t)$ 在 t_0 时刻达到极大值(或极小值)。峰值分布特征可以通过 $x(t)$、$\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$ 的联合概率密度函数来得到。Middleton 等人研究得出,当随机过程 $x(t)$ 二次可微时,在时间区间$(0,T]$内,$x(t)$ 的峰值超过给定的界限 $x=b$ 的总数 $m_b(T)$,为

$$m_b(T) = \int_0^T \ddot{x}(t)\delta\{\dot{x}(t)\}U\{x(t)-b\}\mathrm{d}t \tag{5.166}$$

式中,$U\{x(t)-b\}$ 为 Heaviside 阶函数,即

$$U\{x(t)-b\} = \int \dot{x}(t)\delta\{x(t)-b\}\mathrm{d}t = \begin{cases} 1 & x(t) > b \\ 0.5 & x(t) = b \\ 0 & x(t) < b \end{cases} \tag{5.167}$$

计数过程 $m_b(T)$ 实际上就是在 $x(t)>b$ 的条件下,$\dot{x}(t)$ 与零线交叉的个数。记 $\mu_b(t)$ 为计数过程 $m_b(T)$ 在单位时间内的期望,$f_{x\dot{x}\ddot{x}}(x,\dot{x},\ddot{x},t)$ 为 t 时刻 $x(t)$、$\dot{x}(t)$、$\ddot{x}(t)$ 的联合概率密度函数,则有

$$E[m_b(T)] = \int_0^T \mu_b(t)\mathrm{d}t = -\int_0^T \mathrm{d}t\int_0^{\infty}\mathrm{d}\ddot{x}\int_0^{\infty}\ddot{x}f_{x\dot{x}\ddot{x}}(x,0,\ddot{x},t)\mathrm{d}x \tag{5.168}$$

出现小于界限 $x=b$ 的峰值的概率以分布函数表示为

$$F(b,t) = P\{\max\{x(t)\} < b\} = 1 - E\left[\frac{\mu_b(t)}{\mu_\infty(t)}\right] \tag{5.169}$$

式中，$\mu_{-\infty}(t)$为单元时间内峰值总个数的期望。

根据 Huston、Skopinski 的研究，上式可近似表示为

$$F(b,t) = 1 - \frac{\mu_b(t)}{\mu_\infty(t)} \tag{5.170}$$

上式对 b 求偏导，得峰值分别的概率密度函数

$$f(b,t) = -\frac{1}{\mu_\infty(t)}\int_{-\infty}^{0} \ddot{x} f_{x\dot{x}\ddot{x}}(b,0,\ddot{x},t)\mathrm{d}\ddot{x} \tag{5.171}$$

式(5.171)是精确表达式。实际应用中由于联合概率密度难以确定，往往先假设出某种分布，而后再根据实测值进行置信检验。常用的峰值分布假设有基于平稳高斯过程假设的峰值分布、基于随机过程是独立增量过程的极值 I 型分布。

近似认为，主震阶段系统的响应为三维平稳高斯随机过程，则将式(5.171)简化为

$$f(b) = \frac{1-q^2}{\sqrt{2\pi}\lambda_0}\exp\left(-\frac{b^2}{2\lambda_0(1-q^2)}\right) + \frac{q\lambda_0 b}{\pi\sigma_x^2}\left\{1 + \mathrm{erf}\left[\frac{qb}{\sqrt{2(1-q^2)}}\right]\right\}\exp(-b^2) \tag{5.172}$$

式中，λ_0、q 为谱矩函数。

当 $q\to 1$ 时随机过程 $x(t)$为窄带过程，峰值分布为 Rayleigh distrbution 分布，即

$$f(b) = \frac{b}{\sigma_x^2}\exp\left(-\frac{b}{2\sigma_x^2}\right) \tag{5.173}$$

当 $q\to 0$ 时随机过程为白噪声过程，峰值分布为 Gauss 分布，即

$$f(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x}\exp\left(-\frac{b}{2\sigma_x^2}\right) \tag{5.174}$$

实际的随机过程介于窄带过程与白噪声过程之间，故峰值分布介于 Rayleigh 分布与 Gauss 分布之间。

极值 I 型分布的概率分布函数为

$$F(b) = \exp\left\{-\exp\left[-\frac{(b-\beta)}{\alpha}\right]\right\} \tag{5.175}$$

式中：β、α 为试验参数，记 μ_b 为期望；σ_b 为方差，则

$$\begin{cases}\beta = \mu_b - 0.45005\sigma_b \\ \alpha = \sqrt{6}\,\sigma_b/\pi\end{cases} \tag{5.176}$$

2) 拟合优度检验。

以上将响应的峰值作为随机变量处理，但对其分布函数使用的是某种假设的分布。为检验各种假设分布的合理性，尚需根据观测样本来检验关于分布的假设，即对关于总体分布的假设 H_0：总体 X 的分布函数为 $F(X)$，进行拟合优度检验。

常用的检验方法有 χ^2 检验法、K-S 检验法。

χ^2 检验法的原理是：将可能结果的全体，即总体样本空间 Ω 分为互不相容的 k 个事件 $A_1,\cdots,A_k$，在假设事件 H_0 下，计算事件 A_i 的频率 $p_i=P(A_i)$；当观测样本数充分大时，若 H_0 为真，观测的频数 f_i/n 应当与 p_i 相差不大。

K. Pearson 取检验统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(f_i-np_i)^2}{np_i} \tag{5.177}$$

可以证明，当 $n\to\infty$ 时，检验统计量 χ^2 的分布函数的极限为自由度是 K-r-1 的 χ^2 分布，其中 r 为被估计参数个数。

在假设 H_0 下，由式(5.177)计算 χ^2，当

$$\chi^2\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(K\text{-}r\text{-}1) \tag{5.178}$$

就在显著性水平 α 下拒绝 H_0，否则认为 H_0 为真。

χ^2 拟合度检验，需要有足够的样本数(通常 $n>50$)，且事件 A_i 的划分具有随意性。Колмогоров 无需将总样本空间划分为 k 个子样本空间后，再检验经验分布函数 $F_n(X)$ 与 H_0 的分布函数 $F(X)$ 之间的偏差，该方法直接检验由每一个观测值得到的经验分布函数 $F_n(X)$ 与假设的理论分布函数 $F(X)$ 之间的偏差。取检验统计量为

$$\begin{aligned}D_n&=\max_{-\infty<X<\infty}|F_n(X)-F(X)|\\&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|F_n(x_i)-F(x_i)|,|F_n(x_{i-1})-F(x_i)|\}\end{aligned} \tag{5.179}$$

式中：n 为观测样本数；$(x_1,\cdots,x_n)$ 是次序统计量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的观测值；$F_n(x_0)=0$，$F_n(x_i)=i/n$。当 H_0 为真时，由观测值计算得到的 D_n 值应较小；反之，则较大。若对于显著性水平 α，临界值为 $D_{n,\alpha}$。当 $D_n\geqslant D_{n,\alpha}$，拒绝 H_0；$D_n<D_{n,\alpha}$ 不能拒绝 H_0。

(4) 地震作用的动力可靠性分析。

场地的地震破坏主要指软土的软化、液化、震陷等。地震液化是一种典型的地震地基破坏，有关液化的随机性分析的研究，始于 20 世纪 70 年代。Donovan、Haldar、Shinozuka 等在液化的随机分析方法方面作出了一些研究，他们通过考虑某些影响因素的不确定性，如地震震级、震中距、易液化土层的标贯数、土层剪切波速等，提出了相应的分析方法。现基于随机性的地震响应分析，针对自由场地的地震液化，提出了两种可靠性分析方法，一种是基于 Seed 剪应力对比法的可靠度，另一种是基于累积损伤的动力可靠度。

1) 剪应力对比法的可靠度。

剪应力对比法是一种确定性的液化判定方法，对比土层的抗液化强度 τ_d 与地震产生的等效剪应力 τ_{eq}，即

$$\tau_d<\tau_{eq}(\text{液化}),\qquad \tau_d>\tau_{eq}(\text{不液化}) \tag{5.180}$$

动荷载及土性的不确定性，决定了 τ_d 和 τ_{eq} 都是随机变量，若已知这两个随机

变量的概率分布函数，就可以判定场地内一点(层)的液化概率。

若用统计方法求得的抗液化强度 τ_d 离散性极小时，可近似认为 τ_d 是确定的；设 τ_{eq}的概率密度函数为 $f_{\tau_{eq}}(\tau_{eq})$，则液化发生的概率为

$$P_f = P(\tau_d < \tau_{eq}) = 1 - \int_0^{\tau_d} f_{\tau_{eq}}(x)\mathrm{d}x \tag{5.181}$$

若 τ_d 的试验数据离散性较大时，则不能再认为它是确定性的，此时应根据试验数据对某种假定的分布进行检验；设 τ_d 与 τ_{eq}的联合概率密度为 $g(\tau_d,\tau_{eq})$，则液化的概率为

$$P_f = P(\tau_d < \tau_{eq}) = 1 - \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\tau_d} g(\tau_d,\tau_{eq})\mathrm{d}\tau_{eq}\right)\mathrm{d}(\tau_d) \tag{5.182}$$

假定 τ_d 与 τ_{eq}相互独立，概率密度函数分别为 $f_{\tau_d}(\tau_d)$、$f_{\tau_{eq}}(\tau_{eq})$，则液化概率可简化为

$$P_f = P(\tau_d < \tau_{eq}) = 1 - \int_0^{\infty}\left(\int_0^{\tau_d} f_{\tau_{eq}}(\tau_{eq})\mathrm{d}\tau_{eq}\right) f_{\tau_d}(\tau_d)\mathrm{d}(\tau_d) \tag{5.183}$$

若假定 τ_d 与 τ_{eq}服从正态分布，其期望及方差为 m_{τ_d}和 σ_{τ_d}、$m_{\tau_{eq}}$和 $\sigma_{\tau_{eq}}$。令 $Z=\tau_d-\tau_{eq}$，则 Z 亦为正态分布，期望 m_Z 及方差 σ_Z^2 为

$$\begin{cases} m_Z = m_{\tau_d} - m_{\tau_{eq}} \\ \sigma_Z^2 = \sigma_{\tau_d}^2 - \sigma_{\tau_{eq}}^2 \end{cases} \tag{5.184}$$

式中：m_{τ_d}和 σ_{τ_d}应根据实验数据的统计结果确定，$m_{\tau_{eq}}$和 $\sigma_{\tau_{eq}}$应根据地震激励的统计特征及地基系统的振动特性，按随机振动理论确定。

作变换 $X=(Z-m_Z)/\sigma_Z^2$，把正态分布 $N(m_Z,\sigma_Z)$转化为 $N(0,1)$分布，液化概率就可表示为

$$P_f = P(X < \beta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta} e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \Phi(\beta) \tag{5.185}$$

式中，$\beta=-m_Z/\sigma_Z$，为可靠度指标。

2）累积损伤模型的动力可靠度。

根据 Palmgren-miner 假设，每一个应力循环都会对材料造成破坏作用，这种破坏作用与该循环所消耗的能量的大小成正比，与实际施加的次序无关；材料破坏是由于各应力循环造成的损伤累积达到了极限所造成的。设剪应力时程曲线中某一峰值所对应的动应力比为 $\gamma_i=\tau_i/\sigma_0'$，土单元对应于 γ_i 的破坏周数为 N_{if}，整个样本曲线中动应力比为 γ_i 的波峰数为 N_i，则这 N_i 个动应力比为 γ_i 的动荷载对土单元的相对破坏程度 D_i 为

$$D_i = \frac{N_i}{N_{if}} \tag{5.186}$$

在具有 n 个不同动应力比的动荷载作用下，土单元的累积损伤为

$$D = \sum_{i=1}^{n} D_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i}{N_{if}} \tag{5.187}$$

当 $D\geqslant 1$ 时，表明地基已振动破坏；当 $0<D<1$ 时，D 值越大，则破坏程度愈大。

实际计算中，对于计算每个 γ_i 所对应波峰个数 N_i，一种方法是引进各态历经性假设，取一个剪应力响应样本(一条剪应力时程曲线)，数一数其中的个数。另一种方法是按随机振动理论解得剪应力响应的统计特征量(期望、方差)后，根据极值分布规律计算 N_i 个数。本计算采取的是后一种方法。

3) 场地的振动破坏概率。

与估计某一单元(层)的破坏概率相比，人们更关心对整个场地破坏概率的评估，本节根据和事件概率计算方法，给出一种场地液化概率评估方法。

假设场地内各土体单元发生振动破坏是相互统计独立的，整个场地破坏是各土体单元破坏事件的事件。若计算得一点(层)的破坏概率为 P_{fi}，定义运算式(5.188)，则场地液化概率 P_f 为式(5.189)，即

$$a\oplus b=a+b-ab \tag{5.188}$$

$$P_f=P_{f1}\oplus P_{f2}\cdots\oplus P_{fn} \tag{5.189}$$

展开此式得

$$P_f=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\sum_{1\leqslant i_1\cdots\leqslant i_n}P_{fi_1}P_{fi_2}\cdots P_{fi_n} \tag{5.190}$$

由 $\min(a,b)\leqslant a\oplus b\leqslant\max(a,b)$ 可知：场地液化概率不小于任一单元的液化概率；若某单元已液化，则该场地液化的概率为 1；液化概率为 0 的单元对场地液化概率无影响。

参 考 文 献

[1] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 中国水利水电出版社，1996

[2] 张克绪、谢君斐. 土动力学. 地震出版社，1989

[3] 朱百里、沈珠江. 计算土力学. 上海科学技术出版社，1990

[4] 周健、屠洪权、缪俊发. 地下水位与环境岩土工程. 同济大学出版社，1995

[5] 孙钧、汪炳槛. 地下结构有限元法解析. 同济大学出版社，1988

[6] 谢定义. 土动力学. 西安交通大学出版社，1988

[7] 刘惠珊、张在明. 地震区的场地与地基基础. 中国建筑工业出版社，1994

[8] 周健、白冰、徐建平. 土动力学理论与计算. 中国建筑工业出版社，2001

[9] 全国土工建筑物及地基抗震学术讨论会论文汇编. 内部发行，1986

[10] 第二届全国岩石动力学学术会议论文选集. 武汉测绘科技大学出版社，1990

[11] 周健、杜坚. 粘性土振陷分析研究. 海峡两岸土力学及基础工程学术讨论会论文集(西安)，1994

[12] 陈国兴、谢君斐. 土体地震反应分析的简化有效应力法. 地震工程与工程振动，1995，15(6)

[13] 李锡夔、范益群. 非饱和土变形及渗流过程的有限元分析. 岩土工程学报，1998，20(4)

[14] 刘汉龙、陈生水. 土体动力本构模型及动力分析研究进展. 岩土工程青年专家学术论坛文集，中国建筑工业出版社，1998

[15] 吴世明、徐攸在. 土动力学现状与发展. 岩土工程学报，1998，20(3)

[16] 谢君斐、石兆吉. 液化危害性分析. 地震工程与工程振动，1988，8(1)
[17] 郁寿松、石兆吉. 土壤震陷试验研究. 岩土工程学报，1989，11(4)
[18] 孔宪京、韩国成. 土石坝与地基地震反应分析的波动-剪切梁法. 大连理工大学学报，1994，34(2)
[19] 蔡宏英. 上海地区水平地层地震作用下弹塑性动力反应分析. 同济大学学位论文，1994
[20] 徐日庆. 边界元本构模型及其应用. 同济大学学位论文，1994
[21] Arulanandan，Scott. Verification of numerical procedures for the analysis of soil liquefaction problems，1994，(2)
[22] Li Xikui，O. C. Zienkiewicz. Multiphase flow in deforming porous media and finite element solutions，Computers and Structures，1992，45(2)
[23] K. K. Muraleetharan，K. D. Mish. A fully coupled non-linear dynamic analysis procedure and its verification using centrifuge test results. Int. Jr. Numer. Analytical Methods Geotech.，1994，18
[24] Elgamal，Abdel-Ghaffar. Elasto-plastic earthquake shear-response of one-dimensional earth dam models，Earthquake Engrg. and Str. Dyn. 1985，13
[25] Makdisi，Seed. Simplified procedure for evaluating embankment response，JGED，ASCE，1979，105
[26] Clough，Chopra. Earthquake stress analysis in earth dams. JEMD，ASCE，1966，(EM2)
[27] Kenji Ishihara. Soil response in cyclic loading induced by earthquakes. Traffic and Waves，Proc. 7th Asian Regional Conference on Soil Mechanic and Foundation Engineering，Haifa，(2)
[28] N. Ambraseys，M. Srbulov. Earthquake induced displacements of slopes. Soil Dynamic and Earthquake Engineering，1995，(4)
[29] X. S. Li. Rotational shear effects on ground earthquake response. Soil Dynamic and Earthquake Engineering，1997，16
[30] J. Zhou，W. Lee. K. Zhou. Dynamic properties and liquefaction potential of silts. Earthquake Geotechnical Engineering，Ishihara(ed.)Balkema，Rotterdam，1995
[31] J. P. Barde，H. Sayed. Velocity and attenuation of compressional waves in nearly saturated soils. Soil Dynamic and Earthquake Engineering 1993，12
[32] Report of the NZNSEE Reconnaissance Team. The Hyogo-ken Nanbú Earthquake(The Great Hanshin Earthquake) of 17 January 1995，Bulletin of the New Zealand National Society for Earthquake Engineering，1995，28(1)
[33] N. P. Theodulidis. Horizontal to vertica. spectral ratio and geological condition：an analysis of strong motion data from Greece and Taiwan (SMART-1). Soil Dynamic and Earthquake Engineering，1995，14
[34] Jian Zhou，XiaoYan Hu，K. Yasuhara. Analysis of seismic settlement of soft clay considering rising of underground water table. Geotechnical Engineering in Recovery from Urban Earthquake Disaster，KIG-Forum'97
[35] Zhou Jian，Zeng Guoxi. Comparision of 2-D and 3-D dynamic analysis on effective stress of earth dams. Second International Conference on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics，1991，St. Louis. Missouri
[36] J. Zhou. K. Yasuhara. Settlements of breakwater on soft seabed ground under ocean waves. Third International Conference on recent A dvances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics，April 2—7，1995，1，St. Louis，Missouri
[37] 徐志英、周健. 本钢南芬尾矿坝三维有效应力分析. 勘察科学技术，1990，(1)
[38] Zhou Jian. Comparison of 2-D and 3-D dynamic analysis of effective stress of earth dam. 2nd Int. Conf. on Recent Advance in Geotech. Eng.，1997. 7
[39] 周健、徐志英. 土(尾矿)坝的三维有效应力动力反应分析. 地震工程与工程振动，1984，(3)

[40] 徐志英、周健. 土坝地震孔隙水压力产生、扩散和消散的三维动力分析. 地震工程与工程振动,1985(4)
[41] 蔡宏英、周健. 上海厚覆盖软土地层动力反应分析. 土动力学理论与实践. 第5届全国土动力学学术会议论文集,大连理工大学出版社,1998.6(17)
[42] 周健、胡晓燕. 上海软土地下建筑物抗震稳定分析. 同济大学学报,1998,10
[43] 戚佩江、周健. 高灰坝三维抗震动力反应分析. 岩土力学数值分析与解析方法. 第六届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集,广东科技出版社,1998,8
[44] 周健,屠洪权. 动力荷载作用下软粘土的残余变形计算模式. 岩土力学,1996,(1)
[45] Zhou Jian. Settlements analysis of saturated clay under long-term dynamic loading. Second International Conference on Soft Soil Engineering,1996. 5
[46] Zhou Jian. Prediction of settlements of soft clay caused by earthquakes. 3th International Conf. on Recent Advance in Geotech. Earthquake Eng. and Soil Dynamics. Missouri,USA,1995,4
[47] 周健. 尾矿坝在地震荷载作用下三维二相有效应力动力分析. 工程抗震,1995,(1)
[48] Zhou Jian. Analysis of foundation settlement due to earthquake. ASCE, Geotechnical Eng., Division Specialty Conf., Proceedings of settlements,1994,6
[49] Zhou Jian. Prediction of earthquake-induced settlement. International Conf. on computational methods in structure and Geotech., Eng., Hong Kong,1994,10
[50] 周健、吴世明、曾国熙. 土石坝三维二相动力分析. 岩土工程学报,1991,(5)
[51] 徐志英、周健. 奥罗维尔土坝三维排水有效应力动力分析. 水利学报,1991,(1)
[52] 刘汉龙、钱家欢. 随机地震作用下土石坝永久变形预估. 河海大学学报,1996,24(2)
[53] 吴再光、韩国城、林皋. 随机土动力学概论. 大连理工大学出版社,1992
[54] 邵龙潭等. 随机地震作用下土石坝边坡的稳定性分析. 水利学报,1999,(11)

第六章　土的随机有限元理论

6.1　概　　述

在岩土工程设计计算中，由于其参数存在很大的不确定性而导致计算结果的不确定性。过去，一般用安全系数的概念来反映其不确定性因素，然而安全系数的取值主要凭借经验来确定。20 世纪 60 年代以来，概率统计方法开始引入岩土工程领域，从而开辟了一条处理岩土工程不确定性的新方法。这种方法正逐步被工程界所接受，并部分地被引入基于一次二阶矩可靠度分析的设计规范中。然而，岩土工程可靠度理论的研究目前还没有达到实用化的程度，还有很大的发展余地。

另一方面，在利用常规有限元法对土体或土-结构物体系进行分析计算时，一般难以得到土体的应力场、位移场的随机分布。将蒙特卡罗方法和有限元方法加以耦合是一个十分有效的方法，以此可以获得位移场及应力场统计特征的计算模拟，故而蒙特卡罗有限元法得到一定程度的发展。该法在数学上较为简单，但由于在应用时必须对随机变量的特征作充分的了解，且计算量巨大，耗时耗力，故在应用上受到了很大的限制。目前，以摄动随机有限元为代表的统计有限元方法在对随机影响因素的了解并不充分的情况下，可以通过解析或数值分析工具，也可获得一定精确程度的解，故而得到很大的重视。目前，随机有限元已在混凝土结构的响应分析、基础承载力和稳定的可靠性分析、边坡和围岩稳定的可靠度分析等方面得到广泛的应用。与常规有限元方法相比，随机有限元方法考虑到了系统内部和外部因素的随机变化的影响，可以直接求解随机结构体系的随机反应的变异性（各阶矩）及其可靠度，因而具有理论上的优势，且有很高的计算效率，因而近年来日益受到人们的重视，得到较为广泛的研究。其主要内容包括随机场的离散和分离以及随机算子和矩阵的求逆等方面。

本章对近年来的研究成果进行概括和总结，首先介绍土性参数的随机性及随机场特征，其次介绍随机有限元的有关理论及其应用，并对动力随机有限元法作一定的介绍。

6.2　岩土工程可靠性理论

6.2.1　土性参数的随机性及统计特征

岩土体内部物质成分、结构构造、强度特征、物理力学状态以及环境荷载条件

在水平和垂直方向上都有明显的变化，这是引起土性参数的不确定性和随机性的客观原因。同时，由于难以对地基土体及其环境的特征进行全面地评价和对土性参数作出正确的判断，也造成了土性参数的随机性。这是造成土性参数具有不确定性和随机性的主观原因。因而，在此条件下所进行的岩土工程勘察、设计、施工过程就必然受到主客观的不确定因素的影响。土性参数就不能被视为常数，而应该是一组随机变量。因此，在实际土工计算时必须首先对试验观测到的土性参数数据进行尽可能详细的统计分析，以充分利用有限的资料来得到更多规律性的认识，便于对土性参数给出可靠的估计。

造成土性参数试验结果产生离散或产生误差的原因通常可归纳为：①土体性质。在宏观上被视为均匀的土层，其物理力学性质却随位置上的不同而不是均匀的。此外，由于雨水、地下水位和气候的变化等环境因素也造成其性质的不均匀性。②技术原因。由于取样仪器的型式、取样技术、试验设备的精度以及试验者的技术和试验方法等造成土工参数的离散性。

这些主客观因素都是难以避免的，因此必须把土性参数的试验数据作为随机变量进行误差处理，其基本理论是应用概率理论、数理统计方法和误差理论等。

松尾稔[8]曾对各主要土性参数的统计特征进行过详细研究，其结果可归纳为表 6.1。

表 6.1　各主要土性参数的统计特征

土性参数	分布特征	变异系数/%	研究土性
粒度	正态分布		粉砂或粘土
孔隙比	正态分布		饱和粘土
含水量	正态分布	9.4～20.5	不饱和粘土和粉土
容重	正态分布	2.5～4.1	不饱和粘土和粉土、填土
稠度	正态分布		粘土
无侧限抗压强度	正态分布(深度方向)	18～40.9	饱和粘土
不排水剪强度	正态分布(深度方向)	16～35	饱和粘土
抗剪强度	正态分布	5.3～15.3	不饱和砂质粘土、粉砂
内聚力	正态分布	19.3～48.7	不饱和土
摩擦系数	正态分布	5.75～46	不饱和土
压缩指数	正态分布	9～52.6	正常固结粘土
压缩比	正态分布	9.6～38.4	正常固结粘土
固结前的孔隙比	正态分布	5.5～28.3	正常固结粘土
体积压缩系数	对数正态分布	2.7～27.5	海底粘土
固结系数	对数正态分布	6～57.5	海底粘土

从概率统计的角度将各土性参数应用于可靠性设计时，还必须研究各土性参

数之间的相关关系。因为当在某一设计公式中含有两个以上的土性参数情况下，即使知道它们都是随机变量，但如果它们之间具有很强的相关性，也不能将它们作为独立变量来处理。这一点在进行可靠性设计时极为重要。表 6.2 给出一些具有代表性的土性参数之间的相关程度。

表 6.2　土性参数之间的相关性

土性参数	相关性
土粒比重和液限	不相关
孔隙比和含水量	密切相关
容重和含水量	密切相关
含水量和液限	强线性相关
液限和塑性指数	强线性相关
压缩指数和液限、塑性指数、孔隙比	线性相关
不排水剪强度与固结压力及塑性指数	线性相关
砂的标准贯入试验锤击数与摩擦系数	平稳的线性相关
内摩擦角和容重	弱正相关
内聚力和含水量	弱负相关
压缩比和预固结荷载	不相关
内聚力和内摩擦角	强负相关

6.2.2　可靠性分析的基本方法

(1)统计矩法。

Rosenblueth 于 1975 年提出了统计矩点估计方法，简称统计矩法或 Rosenblueth 法，并于 20 世纪 80 年代初被引入边坡可靠性分析。

现定义一函数关系

$$Z = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{6.1}$$

式中：$Z=g(\cdot)$表示边坡的安全系数 F_s 或安全储备 M_s，称为状态函数；$X_i(i=1, 2, \cdots, n)$表示边坡稳定性的影响因素，如滑动面的抗剪强度参数 C、ϕ 等，称为状态变量。状态函数 Z 实质上成为了一个受状态变量影响的随机变量。

当各状态变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$的概率分布未知时，只要利用各状态变量的统计均值和方差，就可以求得状态函数 Z 分布的均值(一阶矩)μ_Z、方差(二阶矩)σ_Z^2、偏度系数 g_1 和峰度系数 g_2 等反映其分布的统计特征量，从而可以得到土-结构体系的可靠指标 β，并且在假定状态函数 Z 值服从正态分布或对数正态分布的条件下求得其破坏概率 P_f。

由于统计矩法在数学上较为简单，应用起来较为方便，目前在岩土工程领域的有关可靠性分析中得到广泛应用，如可用于工程的风险评价中。实践表明，该方法一般可以满足工程精度的要求。

1）统计矩法的基本原理。

当各状态变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的分布函数未知时，以第 i 个状态变量 X_i 为例，不必考察 X_i 的分布形态，只需在其取值区间 $(x_{i\min},x_{i\max})$ 上分别对称地选取两个取值点，如可以选择 $\mu_{xi}\pm\sigma_{xi}$，其中 μ_{xi}、σ_{xi} 为第 i 个状态变量 X_i 的均值和标准差，即

$$x_{i1}=\mu_{xi}+\sigma_{xi} \tag{6.2}$$

$$x_{i2}=\mu_{xi}-\sigma_{xi} \tag{6.3}$$

于是，对于 n 个状态变量，可以取得 $2n$ 个取值点，则取值点的所有可能的组合有 2^n 个。在 2^n 个取值点组合下，可以根据状态方程计算得到 2^n 个状态函数值 $Z_j(j=1,2,\cdots,2^n)$，即可以得到 2^n 个安全系数值 F_{sj} 或安全储备值 M_{sj}。

2）状态函数 Z 值统计特征量的计算方法。

状态函数 Z 值的主要统计特征量都可以由上述之 2^n 个状态函数值 $Z_j(j=1,2,\cdots,2^n)$ 通过点估计的方法统计得到，各主要统计特征量可以按照表 6.3 所示的点估计公式计算得到。其中，$p_j(j=1,2,\cdots,2^n)$ 为每一种组合出现的概率。

若这 n 个状态变量 X_i 之间统计独立，即每一种组合出现的概率相同，则

$$p_j=1/2^n(j=1,2,\cdots,2^n) \tag{6.4}$$

若这 n 个状态变量 X_i 之间统计相关，即每一种组合出现的概率不相等，则

$$p_j=(1+e_1e_2\gamma_{1,2}+e_2e_3\gamma_{2,3}+\cdots+e_{n-1}e_n\gamma_{n-1,n})/2^n \qquad (j=1,2,\cdots,2^n) \tag{6.5}$$

式中，$e_i=1$（当 x_i 取 x_{i1} 时），$e_i=-1$（当 x_i 取 x_{i2} 时）$(i=1,2,\cdots,n)$。$\gamma_{i-1,i}$ 为状态变量 X_{i-1} 与 X_i 之间的相关系数$(i=2,\cdots,n)$。

表 6.3　状态函数 Z 值主要的统计特征量的点估计公式

状态函数 Z 值的统计特征量	点估计计算公式
一阶矩（统计均值）	$M_1=E(Z)=\mu_Z\approx\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j$
二阶矩（统计方差）	$M_2=E[(Z-\mu_Z)^2]=\sigma_Z^2\approx\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j^2-\mu_Z^2$
三阶矩	$M_3\approx\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j^3-3\mu_Z\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j^2+2\mu_Z^3$
四阶矩	$M_4\approx\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j^4-4\mu_ZM_3-6\mu_Z^2M_2-\mu_Z^4$
统计变异系数	$V=M_2^{1/2}/M_1=\sigma_Z/\mu_Z$
分布曲线的偏度系数	$\theta_1=M_3/M_2^{3/2}=M_3/\sigma_Z^3$
分布曲线的峰度系数	$\theta_2=M_4/M_2^2=M_4/\sigma_Z^4$

3) 可靠性的计算方法。

边坡的可靠性指标可以通过下式计算：

$$\beta = M_1/M_2^{1/2} = \mu_Z/\sigma_Z \tag{6.6}$$

假定状态函数 Z 值服从正态分布 $N(\mu_Z,\sigma_Z^2)$，则其标准化变量 $S=(Z-\mu_Z)/\sigma_Z$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$。设 a、b 分别为状态函数 Z 值的下界和上界，概率表达式为

$$P(a<Z\leqslant b)=\Phi\{(b-\mu_Z)/\sigma_Z\}-\Phi\{(a-\mu_Z)/\sigma_Z\} \tag{6.7}$$

式中，$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数，且 $\Phi(-Z)=1-\Phi(Z)$，$\Phi(-\infty)=0$，$\Phi(+\infty)=1$。

若状态函数 Z 所表征的是边坡的安全系数 F_s，则边坡的破坏概率为

$$P_f=P(Z\leqslant 1)=\Phi\{(1-\mu_Z)/\sigma_Z\} \tag{6.8}$$

或

$$P_f=P(Z\leqslant F_{s0})=\Phi\{(F_{s0}-\mu_Z)/\sigma_Z\} \tag{6.9}$$

工程上，一般限定可接受的最小安全系数 F_{s0}为 1.15～1.20。

若状态函数 Z 值所表征的是边坡的安全储备 M_s，则边坡的破坏概率为

$$P_f=P(Z\leqslant 0)=\Phi\{(0-\mu_Z)/\sigma_Z\}=1-\Phi(\beta) \tag{6.10}$$

假定状态函数 Z 值服从对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$，则 $\ln Z$ 值服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$\ln Z$ 的标准化变量 $S=(\ln Z-\mu)/\sigma$ 服从标准正态分布 $N(0,1)$。其对数正态分布参数为

$$\mu_Z=\exp(\mu+\sigma^2/2) \tag{6.11}$$

$$\sigma_Z^2=\mu_Z^2(\exp\sigma^2-1) \tag{6.12}$$

可以通过式(6.11)和(6.12)求出其对应的正态分布参数 μ 和 σ^2。

若状态函数 Z 所表征的是边坡的安全系数 F_s，则边坡的破坏概率为

$$P_f=P(0<Z\leqslant 1)=\Phi\{(\ln 1-\mu)/\sigma\}=1-\Phi(\mu/\sigma) \tag{6.13}$$

或

$$P_f=P(0<Z\leqslant F_{s0})=\Phi\{(\ln F_{s0}-\mu)/\sigma\} \tag{6.14}$$

(2) 中心点法。

假定状态函数 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是基本变量 $X_I(i=1,2,\cdots,n)$的线性函数，基本变量均服从正态分布或对数正态分布，而且各基本变量之间相互统计独立，则可以由状态函数 Z 值的统计均值 μ_Z 和标准差 σ_Z 确定状态函数 Z 值的可靠指标 β，即

$$\beta=\mu_Z/\sigma_Z \tag{6.15}$$

则其破坏概率 P_f 为

$$P_f=1-\Phi(\beta) \tag{6.16}$$

式中，$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

这就是中心点法的基本原理。对于状态函数是基本变量的非线性函数的情况，

可以通过对状态函数进行一阶 Taylor 展开的方法，把非线性的状态函数进行线性化处理，从而使得中心点法得到应用。

假设状态函数 Z 是 n 个相互独立的随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的非线性函数，即 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，则 Z 在随机变量的均值 $\mu_X=(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn})$ 处的一阶 Taylor 展式为

$$Z \approx g(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} (X_i - \mu_{Xi}) \tag{6.17}$$

式中，$\partial g/X_i|_{\mu_X}$ 为 $g(\cdot)$ 在 $\mu_X=(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn})$ 处对各随机变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的偏导数。

因此状态函数 Z 的均值 μ_Z 和方差 σ_Z^2 可以近似为

$$\mu_Z = E[Z] \approx g(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) \tag{6.18}$$

$$\sigma_Z^2 = E[(Z-\mu_Z)^2] \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\right)^2 \sigma_{Xi}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq i}^{n} \left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} \left.\frac{\partial g}{\partial X_j}\right|_{\mu_X} \mathrm{Cov}(X_i,X_j) \tag{6.19}$$

式中：μ_{Xi}、σ_{Xi} 分别为各基本变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的统计均值和标准差；而 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$ 则为基本变量 X_i 和 $X_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的协方差。

显然，如果各基本变量之间统计独立，则其 $\mathrm{Cov}(X_i,X_j)=0(i\neq j)$，式(6.19)可写为

$$\sigma_Z^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\right)^2 \sigma_{Xi}^2 \tag{6.20}$$

将近似值 μ_Z 和 σ_Z 带入式(6.15)和(6.16)即可求得 Z 的可靠指标 β 和破坏概率 P_f 值。

如果非线性的状态函数 Z 可以由非线性的抗滑力(矩)函数 R 和滑动力(矩)函数 S 的线性组合来表达，即

$$Z = R - S \tag{6.21}$$

$$R = f_R(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{6.22}$$

$$S = f_S(X_1,X_2,\cdots,X_n) \tag{6.23}$$

则有

$$\mu_Z = \mu_R - \mu_S \tag{6.24}$$

$$\sigma_Z^2 = \sigma_R^2 + \sigma_S^2 - 2\mathrm{Cov}(R,S) \tag{6.25}$$

若按照前述方法对 R 和 S 进行一阶 Taylor 展开，并作为它们的近似值，则

$$R \approx f_R(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_R}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} (X_i - \mu_{Xi}) \tag{6.26}$$

$$S \approx f_S(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) + \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f_S}{\partial X_i}\right|_{\mu_X} (X_i - \mu_{Xi}) \tag{6.27}$$

函数 R 和 S 值的统计特征可以由下述公式近似计算：

$$\mu_R \approx f_R(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) \tag{6.28}$$

$$\mu_S \approx f_S(\mu_{X1},\mu_{X2},\cdots,\mu_{Xn}) \tag{6.29}$$

$$\sigma_R^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f_R}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\right)^2\sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\left.\frac{\partial f_R}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\left.\frac{\partial f_R}{\partial X_j}\right|_{\mu_X}\mathrm{Cov}(X_i,X_j) \tag{6.30}$$

$$\sigma_S^2 \approx \sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial f_S}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\right)^2\sigma_{X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,j\neq 1}^{n}\left.\frac{\partial f_S}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\left.\frac{\partial f_S}{\partial X_j}\right|_{\mu_X}\mathrm{Cov}(X_i,X_j) \tag{6.31}$$

函数 R 和 S 值之间的协方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(R,S) &= E[(R-\mu_R)(S-\mu_S)]\\ &\approx \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left.\frac{\partial f_R}{\partial X_i}\right|_{\mu_X}\left.\frac{\partial f_S}{\partial X_j}\right|_{\mu_X}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)\end{aligned} \tag{6.32}$$

用 γ_{X_i,X_j} 表示基本变量 X_i 和 $X_j(i,j=1,2,\cdots,n)$ 之间的相关系数，当 $i=j$ 时，$\gamma_{X_i,X_j}=1$，当 $i\neq j$ 且 X_i 和 X_j 之间统计独立时，$\gamma_{X_i,X_j}=0$，则

$$\mathrm{Cov}(X_i,X_j) = \gamma_{X_i,X_j}\sigma_{X_i}\sigma_{X_j} \tag{6.33}$$

由式(6.26)和(6.27)可知，非线性函数 R 和 S 均可转化为基本变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性函数，考虑到式(6.21)，则非线性的状态函数 Z 亦成为基本变量的线性函数。若各基本变量服从正态分布或对数正态分布，则线性化的函数 Z、R 和 S 都服从正态分布或对数正态分布，因此可以由式(6.15)和(6.16)求得可靠指标 β 和破坏概率 P_f。

(3) JC 法。

JC 法也称验算点法，是国际结构安全度联合委员会(JCSS)所推荐的一种结构可靠性分析理论，可以求解基本变量为非正态分布、多变量的、极限状态函数非线性的可靠性问题。

按照极限状态方法进行结构可靠性分析时，针对所要求的各种性能(如强度、刚度等)，通常可以建立包括各有关随机变化的基本变量在内的极限状态方程。如在土坡可靠性分析中，土坡极限状态通常可由抗剪强度、土体容重、动静水压力、地震震动等多个具有随机性的基本变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，记为 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$ 所确定，其极限状态方程可以被表达为

$$Z = g(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0 \tag{6.34}$$

式中，$Z=g(\cdot)$ 称为土坡的功能函数。

极限状态方程 $Z=0$ 表示的是 $o\text{-}x_1,x_2,\cdots,x_n$ 坐标系中的一个曲面(亦称为极限状态面)，它把 n 维空间分割成了安全区($Z>0$)和破坏区($Z<0$)两个部分。如果基本变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都服从正态分布且统计独立，则极限状态函数代表的是以 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为坐标的 n 维正态空间上的一个曲面，则破坏概率为

$$P_f = P\{(Z=g(x)<0\} = 1-\Phi(\mu_Z/\sigma_Z) = 1-\Phi(\beta) \tag{6.35}$$

式中，$\Phi(\cdot)$ 为标准正态 $N(0,1)$ 分布函数，即

$$\Phi(\beta)=\int_{-\infty}^{\beta}\varphi(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\beta}e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \tag{6.36}$$

式中，$\varphi(\cdot)$为标准正态 $N(0,1)$分布的密度函数 $\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$。其中 β 为可靠指标，$\beta=\mu_Z/\sigma_Z$。

显而易见，β 大则 P_f 小，反之亦然。为求解 β，首先引入标准化正态变量

$$\hat{x}_i=(x_i-\mu_{x_i})/\sigma_{x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.37}$$

式中，μ_{x_i}和 σ_{x_i}为正态分布的基本变量 x_i 的均值和标准差。

式(6.34)可表示为

$$Z=g(\mu_{x_1}+\hat{x}_1\sigma_{x_1},\mu_{x_2}+\hat{x}_2\sigma_{x_2},\cdots,\mu_{x_n}+\hat{x}_n\sigma_{x_n})=0 \tag{6.38}$$

如果将功能函数 $Z=g(\cdot)$在设计验算点 p^* 进行 Taylor 展开，取到线性项为止，代入式(6.37)可知，可靠度指标 β 所代表的就是标准正态空间坐标系 $o\text{-}\hat{x}_1\hat{x}_2\cdots\hat{x}_n$ 中原点 $\hat{o}$ 到极限状态曲面的最短距离。

极限状态曲面在 p^* 点的法线 $\hat{o}p^*$ 对坐标向量的方向余弦为

$$\cos\theta_{\hat{x}_i}=\cos\theta_{x_i}=\frac{-\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{p^*}\sigma_{x_i}}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{p^*}\sigma_{x_i}\right)^2\right]^{1/2}}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.39}$$

式中，$\left.\frac{\partial g}{\partial x_i}\right|_{p^*}$为功能函数 $g(\cdot)$在 p^* 点对变量 x_i 的偏导数。

由方向余弦的定义可知

$$\hat{x}_i^*=\hat{o}p^*\cos\theta_{\hat{x}_i}=\beta\cos\theta_{x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.40}$$

代入式(6.37)，可得设计验算点 p^* 在坐标系 $o\text{-}x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的坐标为

$$x_i^*=\mu_{x_i}+\beta\sigma_{x_i}\cos\theta_{x_i}\qquad(i=1,2,\cdots,n) \tag{6.41}$$

因为设计验算点 p^* 是极限状态曲面上的一点，自然满足方程(6.34)，即

$$g(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)=0 \tag{6.42}$$

用式(6.39)～(6.42)共 $n+1$ 个方程可以迭代解出可靠指标 β 和设计验算点 p^* 的坐标$(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)$。

验算点法的实质是，在标准正态空间中的极限状态曲面被一个到原点最小距离点处的切平面所代替，亦即按照一阶 Taylor 展式把功能函数在设计点处展开，使之线性化。

上述计算只适用于随机变量服从正态分布且各自统计独立的情况，面在可靠性分析中，很多控制变量可能并不服从正态分布而且各变量之间可能在统计上具有相关性。因此，在实施验算点法之前，需将非正态分布的随机变量进行当量正态化或者采用其它方法对其进行正态化变换；还要将相关的随机变量进行正交化变换，以获得各自统计独立的随机变量的均值和标准差。

在把非正态分布随机变量 x 当量正态化为正态分布随机变量 x' 的过程中，关于验算点 x^* 的选取，可以直接取随机变量 x 的均值 μ_x 代替；也可先假定随机变量 x 服从正态分布，然后按验算点法求得设计验算点 x^* 的值。将验算点 x^* 当量正态化为随机变量 x' 并可求得其均值和标准差 $\mu_{x'}$、$\sigma_{x'}$[5]。如果随机变量之间同时还具有相关性，可再采用 Jacobi 法将相关的当量正态化随机变量 x' 的协方差矩阵进行正交化交换，得到与相关随机变量 x' 相应的不相关随机变量 y' 的均值和标准差 μ_y、σ_y。最后，应以随机变量 y' 的统计参数 μ_y、σ_y 作为实施验算点法分析时的原始参数，这样才能符合各基本变量服从正态分布且统计独立的前提条件。

总之，$n+1$ 个方程的迭代计算，计算量很大，尤其在用式(6.42)求解可靠指标 β 时，由于 $g(\cdot)$ 的显式一般较复杂，应采取逐步逼近的方法解之，即将 x_i^* 值代入功能函数计算 $g(x^*)$ 值；若式(6.42)的条件不能满足，则可通过计算前后两次的 β 和 $g(\cdot)$ 值的差值之比 $\Delta\beta/\Delta g$，来估计一个新的 β 值 $\beta_{j+1}=\beta_j-g_j\times(\Delta\beta/\Delta g)$，重新代入式(6.41)，直到满足式(6.42)为止。可以编制计算机程序来完成验算点法分析过程，该程序应包含原始输入数据的处理部分和验算点法求解可靠指标部分，其计算程序流程简单归纳为图 6.1 所示。

(4)Monte-Carlo 模拟法。

Monte-Carlo 模拟法是一种依据统计抽样理论，利用计算机研究随机变量的数值计算方法。理论上，模拟方法可以应用于大型的复杂系统，通常是当得不到解析解或解析解无效时采用 Monte-Carlo 模拟方法，Monte-Carlo 模拟方法通常又是惟一的检验或评价近似解的方法。Monte-Carlo 模拟的主要任务之一是根据确定的概率分布产生随机数。对于给定的一个集合而产生的随机数，模拟的过程则是确定的。因此，在目前土坡和地基系统可靠性分析中，Monte-Carlo 模拟是相对精确的分析方法。

在岩土工程中，应用 Monte-Carlo 模拟可以研究土或土-结构物体系的特性或响应[16]。根据系统参数或随机变量(如物理力学参数、外荷载参数等)值的集合的描述，结合相应的力学模型加以模拟。通过反复模拟，可以检查或评价系统特性对其参数变化的灵敏度或者求得其稳定安全系数或安全储备的概率分布及分布的特征值如均值、标准差、可靠指标和破坏概率等。将 Monte-Carlo 方法与有限元方法加以耦合也可以获得土体变形或应力变化的概率分布[11]。

1) Monte-Carlo 法基本原理。

Monte-Carlo 法的基本原理是：在各状态变量 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的概率分布已知且各自统计独立的条件下，根据系统的极限状态条件 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0$，利用 Monte-Carlo 方法对每个状态变量 X_i 产生一个符合其概率分布的随机数 $x_i^{(1)}$。由此可以得到一组随机数 $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}$ 的组合，然后以之代入系统的状态函数 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，就可以得到状态函数的一个随机数 $z^{(1)}$。如此采用同样的方法，就可以产生 N 组随机数的组合 $x_1^{(j)},x_2^{(j)},\cdots,x_n^{(j)}(j=1,2,\cdots,N)$，从而可

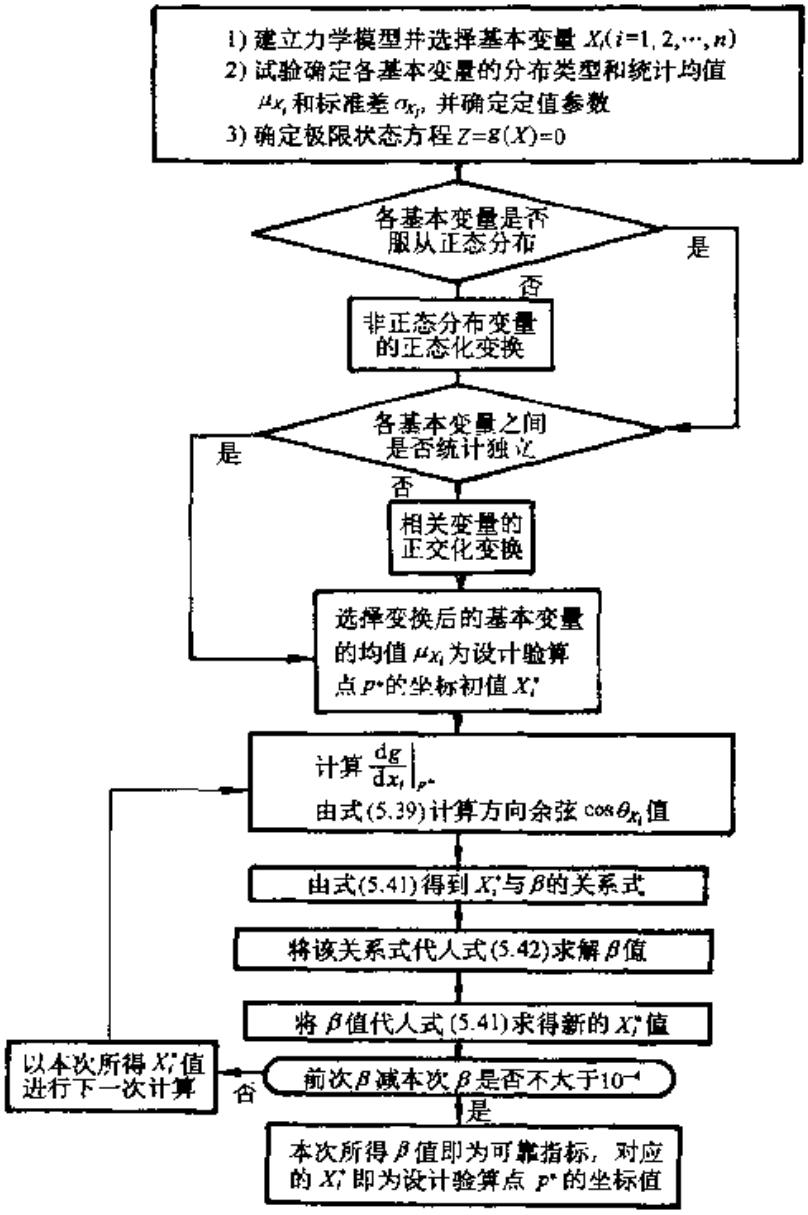


图 6.1　JC 法计算程序流程图

以得到 N 个相互独立的状态函数的随机数 $z^{(j)}(j=1,2,\cdots,N)$。如果在这 N 个状态函数的随机数中有 M 个不大于 1(当以安全系数为状态函数时)或不大于 0(当以安全储备为状态函数时)，则当模拟次数足够多时，即 N 足够大时，由大数定律可知，频率 M/N 近似于概率，因此系统的破坏概率 P_f 可以表示为

$$P_f = P\{Z = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leqslant 0\} = M/N \tag{6.43}$$

当 N 足够大时，由状态函数 $Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的统计样本 $z^{(j)}(j=1,2,\cdots,N)$ 还可以精确地拟合出 Z 值的概率分布密度函数 $G(z)$，并计算出其均值 μ_Z 和标准差 σ_Z。

因此，此时破坏概率 P_f 亦可由积分方法求得，即当以安全系数为状态函数时，$P_f=\int_{-\infty}^{1} G(z)\mathrm{d}z$；而当以安全储备为状态函数时，$P_f=\int_{-\infty}^{1} G(z)\mathrm{d}z$。

若状态函数 Z 值的概率分布密度函数 $G(z)$可以拟合为正态分布，则破坏概率 $P_f=1-\Phi(\beta)$，其中可靠指标 $\beta=(\mu_Z-1)/\sigma_Z$（当以安全系数为状态函数时）或 $\beta=\mu_Z/\sigma_Z$（当以安全储备为状态函数时），$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

2）减小 Monte-Carlo 模拟结果方差的方法。

为提高 Monte-Carlo 模拟效率，减少模拟次数或用相同模拟次数得到更精确的参数估值，必须减小模拟结果的方差。减小方差的方法很多，最常用的有两种方法，即对偶变量法和相关抽样法。

先介绍对偶变量法。

设 Z' 和 Z''是参数 Z_e 的两个无偏估计量，现构造第 3 个估计量，即 $Z=(Z'+Z'')/2$。

显然，Z 的期望值和方差为

$$E[Z]=(E[Z']+E[Z''])/2=(Z'+Z'')/2=Z_e$$

$$\mathrm{Var}(Z)=\mathrm{Var}(Z')/4+\mathrm{Var}(Z'')/4+\mathrm{Cov}(Z',Z'')/2$$

若 Z' 和 Z''具有负相关性，即 $\mathrm{Cov}(Z',Z'')<0$，则有 $\mathrm{Var}(Z)<\mathrm{Var}(Z')$和 $\mathrm{Var}(Z)<\mathrm{Var}(Z'')$。

将 Z''称为 Z'的对偶变量，用来补偿估计中的变化，这正是负相关的概念。例如，若函数 $g(x)$是单调的，则函数 $\varphi(x)=[g(x)+g(1-x)]/2$ 的变化更小，且具有较小的方差。

为了用对偶变量法进行随机抽样，即产生对偶随机数 x_i 与 x_i'，可以取(0,1)区间的均匀随机数 r_i 和 $(1-r_i)$，则有 $x_i=F^{-1}(r_i)$和 $x_i'=F^{-1}(1-r_i)$（这里，$F(\cdot)$为概率分布函数）。

若模拟试验次数为 N，则对偶变量法的估值为

$$\hat{Z}=\frac{1}{2N}\sum_{i=1}^{N}[g(x_i)+g(x_i')] \tag{6.44}$$

模拟方差 $\mathrm{Var}(Z)$及其对应的估值 $\mathrm{Var}(\hat{Z})$为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z)&=\left\{\int_a^b[g(x)+g(1-x)]^2\mathrm{d}x-(E[Z])^2\right\}/(4N)\\ \mathrm{Var}(\hat{Z})&=\frac{1}{N-1}\left\{\frac{1}{4N}\sum_{i=1}^{N}[g(x_i)+g(x_i')]^2-Z^2\right\}\end{aligned}\right\} \tag{6.45}$$

这样，对偶变量法就可以提高 Monte-Carlo 模拟结果的精度。

再介绍相关抽样法。

相关抽样法对于研究同一问题两种不同设计的均值的差异特别有效。假设设计方案 A 和 B 的状态函数为 $Z_A=g(A,X)$和 $Z_B=g(B,X)$，其中 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$为设计方案 A 的一组设计参数，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$为设计方案 B 的一组设计参数，$X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$是一组随机变量，则两个模拟试验方案的性能随机变量之差为 $Z=Z_A-Z_B$。

若两次模拟试验中采用同样的随机数，则其中模拟结果 Z_A 和 Z_B 是高度相关的，从而可以减少两次模拟试验结果之差的试验方差。这时，Z 的均值 $\bar{Z}$ 的方差为

$$\mathrm{Var}(\bar{Z}) = \mathrm{Var}(\bar{Z}_A) + \mathrm{Var}(\bar{Z}_B) - 2\mathrm{Cov}(\bar{Z}_A, \bar{Z}_B) \tag{6.46}$$

若 Z_A 和 Z_B 是相互独立的，即 $\mathrm{Cov}(Z_A, Z_B)=0$，则显然 $\mathrm{Var}(\bar{Z})=\mathrm{Var}(\bar{Z}_A)+\mathrm{Var}(\bar{Z}_B)$；但是，由于 Z_A 和 Z_B 是正相关的，即 $\mathrm{Cov}(Z_A, Z_B)\geqslant 0$，因此 $\mathrm{Var}(\bar{Z})\leqslant \mathrm{Var}(Z_A)+\mathrm{Var}(\bar{Z}_B)$。

用下面两式产生的 Z_{Aj} 和 Z_{Bj} 将是正相关的：

$$Z_{Aj} = g[A, F_{X_1}^{-1}(r_1), F_{X_2}^{-1}(r_2), \cdots, F_{XN}^{-1}(r_N)]$$

$$Z_{Bj} = g[B, F_{X_1}^{-1}(r_1), F_{X_2}^{-1}(r_2), \cdots, F_{XN}^{-1}(r_N)]$$

式中：$F_{x_i}(x)$ 为随机变量 x_i 的分布函数；r_i 为(0,1)区间均匀分布的一组随机数。

为便于计算模拟试验方差估值 $\mathrm{Var}(\hat{Z})$，两次模拟试验取相同模拟次数 N，即有

$$\left.\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(Z_{A_j} - Z_{B_j}) \\ \mathrm{Var}(\hat{Z}) &= \frac{1}{N-1}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}(Z_{A_j} - Z_{B_j})^2 - Z^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{6.47}$$

6.3 岩土工程随机有限元基本理论

6.3.1 岩土参数的随机场特征

(1)土工参数的随机场特征。

将土工参数视为随机变量的处理方法，在工程上虽然取得了不少成功的应用，但随之而来的一些工程失效的实例表明，这种处理方法不能合理地描述土层中土工参数的分布，使得用于设计的土工参数和实际值有不小的偏差，这是造成失效的主要原因[12]。另一方面，将土工参数视为简单的随机变量，破坏概率的计算值往往相当大，可靠度指标 β 要比建议值低许多。其原因是，既没有考虑土性的空间自相关性，也没有考虑岩土工程性状取决于土工参数的空间平均特性而非点特性[13]。

在大致均匀的土层中，土性指标与其所处的空间位置有关，并且具有空间相关性。主要表现为土层中的任意两点的土特性存在着自相关性，随着两点距离的增加，这种相关性减小，反之自相关性增加。当其距离趋于零时，这时两点的土性完全一致。描述这种土性空间自相关性比较合理的方法是 Vanmarcke 提出的随机场模型[14]。该方法将土层视为统计均匀，土性的空间分布视为随机场；描述变异性的参数有方差、方差折减系数、相关函数或变异函数、相关范围或相关距离。

1) 土性剖面的随机场模型。

土性指标与试样在土层中所处的位置有关，为得到某位置处土性指标的统计

特征，惟一可行的方法只能是在该位置的同一水平面上取大量土样进行试验，对试验结果进行统计处理，以其平均值作为该位置的土性指标值。由中心极限定理，当试样容量较大时，平均值服从正态分布；当土层中不同位置处的土性指标均为正态分布随机变量时，则构成空间正态随机场。通过对大致均匀土层的静力触探侧阻和端阻的统计分析，其满足平稳随机场的平稳性和各态历经性的条件，即用平稳正态随机场模拟土性剖面是可行的[15]。

设 $P(x,y,z)$ 为土层中的任一点，$X(P)$ 代表该点的土性指标，为正态分布的随机变量。显然 $\{X(P),P\in R^3\}$ 构成一个随机场。若满足以下条件：①均值函数与 P 点无关，且为常数，即 $E[X(P)]=\mu_x=\text{const}$；②自协方差函数与点的位置无关，仅为点 P_1、P_2 的距离 $\tau=P_1-P_2$ 的函数，即

$$C_x(P_1,P_2)=E[X(P_1)-\mu_x][X(P_2)-\mu_x]=C_x(\tau)$$

则称此随机场为平稳的各向同性的高斯随机场。对于高斯随机场，独立性与互不相关性等效，宽平稳与严平稳等效。

不失一般性，总是假定 $E[X(P)]=0$，对于 $E[X(P)]\neq 0$，总可以令 $X'(P)=X(P)-\mu_x$，则

$$E[X'(P)]=0$$

$$\mathrm{Var}(X'(P))=\mathrm{Var}(X(P))$$

若研究的是诸如土工参数沿深度 Z 的变化时，则 $\{X(Z),Z\in R\}$ 为一维随机场，此时和随机过程的概念一致。

2）自协方差函数和变异函数。

对于均值函数为零的平稳随机场 $X(Z)$，土性指标在不同深度 Z 的相关性，可由自协方差函数 $C_X(\tau)$、自相关函数 $\rho(\tau)$ 或变异函数 $\gamma(\tau)$ 来描述，即

$$\left.\begin{aligned}
&C_X(\tau)=E[X(Z_i)X(Z_j)]\sigma_X^2\rho(\tau)\\
&\rho(\tau)=\frac{C_X(\tau)}{\sigma_x^2}=\frac{1}{\sigma_x^2}E[X(Z_i)X(Z_j)]\\
&2\gamma(\tau)=\mathrm{Var}[X(Z_i)-X(Z_j)]=E[(X(Z_i)-X(Z_j))^2]
\end{aligned}\right\}\qquad(6.48)$$

式中：τ 为相关步距，$\tau=|Z_i-Z_j|$；σ_x 为均方差，反映土工参数 $X(Z_i)$ 在均值 μ_X 处的离散程度。自协方差函数 $C_x(\tau)$ 与变异函数 $\gamma(\tau)$ 的关系为 $\gamma(\tau)=C_x(0)-C_x(\tau)$。

对于平稳随机过程，$C_X(\tau)$ 或 $\rho(\tau)$ 随相关步距 τ 的增大而减小，$\gamma(\tau)$ 随相关步距 τ 的增大而增大达到极值，如图 6.2 所示[15]。

对于岩土工程中自协方差函数 $C_x(\tau)$、自相关函数 $\rho(\tau)$ 或变异函数 $\gamma(\tau)$，随相关步距的变化的不同，可用指数型、指数平方型等函数来模拟[13]。显然，对于土性相差不大的土层或难以明确区分的土层，它们之间应具有相同或相近的自相关特性，即 $C_x(\tau)$ 或 $\gamma(\tau)$ 具有相同的函数型式和相同的参数，在统计时可按来自同一母体的样本对待，共同参与统计。

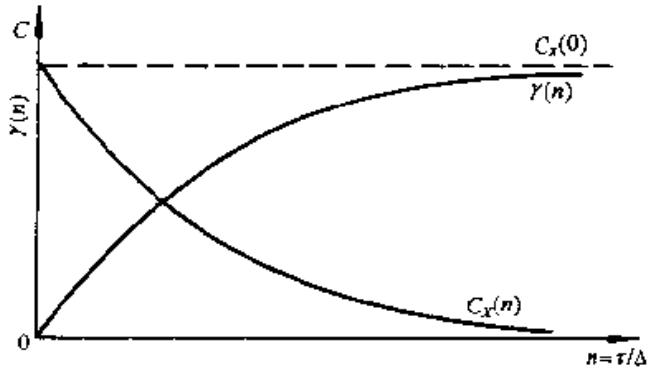


图 6.2　$C_x(\tau)$、$\gamma(\tau)$随相关步距 τ 的变化曲线

3) 方差折减系数及相关范围。

岩土工程的性状绝大多数取决于相应范围(长度、面积、体积)内的土性空间平均值,如土坡的稳定性取决于滑动面上的平均抗剪强度而不是某点的极限抗剪强度,摩擦桩的极限承载力取决于桩侧平均摩阻力;即使是渐近性的破坏,同样是取决于小范围内土性指标的平均值。因此,在可靠性分析中需计算土工参数空间平均值的变异性(方差)。

考虑一维随机场$\{X(Z),Z\in R\}$,土性指标 $X(Z)$在长度 h 上的局部平均(线性平均)可表示为

$$Y(h)=X_t(t)=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}X(S)\mathrm{d}S \tag{6.49}$$

$$E[Y(h)]=\frac{1}{h}\int_t^{t+h}E[X(S)]\mathrm{d}S=E[X(t)]=\mu_X \tag{6.50}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[Y(h)]&=\frac{1}{h^2}\int_t^{t+h}\int_t^{t+h}E[X(t_1)X(t_2)]\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\\&=\frac{2}{h}\int_0^h\left(1-\frac{\tau}{h}\right)C_X(\tau)\mathrm{d}\tau=\frac{2}{h}\int_0^h\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\sigma_x^2\rho(\tau)\mathrm{d}\tau\\&=\left[\frac{2}{h}\int_0^h\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\rho(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\times\sigma_x^2=\Gamma^2(h)\times\sigma_x^2\end{aligned} \tag{6.51}$$

由方差函数的表达可知,$\sigma_Y^2(h)$依赖于 h 的大小。当 h 较小时 $\sigma_Y^2(h)$较大;当 h 较大时 $\sigma_Y^2(h)$较小;尤其当 $h\to\infty$时,由 Gauss 平稳过程 $X(t)$的各态历经性定理知:$\sigma_Y^2(h)\to 0$。式中,σ_x^2 为 $X(t)$的方差(点方差);称 $\Gamma^2(h)$为方差折减系数,它有以下性质:①$\Gamma^2(0)=1$,$\Gamma^2(\infty)\to 0$;②$0\leqslant\Gamma^2(h)\leqslant 1$,对于一切的 $h\geqslant 0$。

可见,土性指标平均后的离散程度要比点指标的离散程度小。若存在[14]

$$\delta=\lim_{h\to\infty}h\Gamma^2(h)=\lim_{h\to\infty}2\int_0^h\left(1-\frac{\tau}{h}\right)\rho(\tau)\mathrm{d}\tau=2\int_0^\infty\rho(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{6.52}$$

则称 δ 为相关范围或波动范围。考虑到 $h\geqslant\delta$ 和 $h<\delta$ 的情况,$\Gamma^2(h)$可近似表示为[14]

$$\Gamma^2(h)=\begin{cases}1 & 0<h<\delta\\ \delta/h & h\geqslant\delta\end{cases} \tag{6.53}$$

相关范围 δ 的含义是，在 δ 内只能有一个独立的测点。$n_e=h/\delta$ 就表示在 h 范围内独立测点的个数。因此方差折减系数又可表达为 $\Gamma^2(h)=1/n_e$；随机场的相关距离 θ 为 $\theta=\delta/2$，相关距离 θ 的含义是，相距超过 θ 的两点的土性指标相互独立，在 θ 范围内，土性指标完全相关。

由于相关范围与自协方差函数及自相关性函数、变异函数有关，因此也是反映土性指标在空间变异性的重要参数。相距 $r<\delta$ 的两点的土性强烈相关，在均值同一侧波动；δ 越小，则土性的波动越显著。土性指标在空间上的变异性是土性的固有变异性。

4) 土工参数相关范围 δ 的计算方法。

天然土层中，土性指标在确定的点上是确定的，不存在随机性问题；而无法确定的是土工参数在土层中各点的取值情况。随机场模型正反映了这种资料的缺乏，并且总是在总体上描述它们。由于相关范围 δ 和相关距离 θ 是反映土工参数空间自相关特性的指标，同时又可以借助于 $\Gamma^2(h)$，把土的“点”特性的变异性与其空间变异性联系起来，因此是随机场理论应用于实际工程的一个非常重要的参数。目前大多的工作集中在寻求 δ 的计算方法上。

土工参数 $X(Z)$ 的空间变异由三部分组成，即 $X(Z)=E[X(Z)]+X'(Z)+\varepsilon(Z)$。其中 $E[X(Z)]$ 为土工参数的趋势分量，是非随机的变量，可由最小二乘法回归。$X'(Z)$ 为零均值、方差为 σ^2 的正态分布随机变量，$\{X'(Z)\}$ 为一平稳随机场，代表土性固有的变异性。$\varepsilon(Z)$ 为测量误差，为零均值的正态白噪声。

对于平稳随机场，其统计特征不随位置的不同而不同，其均值、方差以及自相关函数（集平均）都可以通过样本相应的平均（随机过程的时间平均）得到。对于有连续变化的 $X'(z)$，从理论上来说，取样间距离越小，采样点越多越好；但取样间距太小，又将增加点均值的统计误差，低估点的变异性。当取样间距小于相关范围时，由于土性自相关性的影响，用传统的独立、同分布序列统计方法计算“点”均值、“点”方差以及自协方差函数的无偏估计时，要加以修正[15]。方法有递推法、平均零跨法和 $AR(p)$ 自回归模拟法等。

递推法：由 $\Gamma^2(h)$ 的近似表达式知，当 h 充分大时，$\delta=h\times\Gamma^2(h)$。

根据随机场 $\{X'(t)\}$ 遍历性的性质，首先求 $X'(Z)$ 的方差 σ^2（点方差），然后依次求出土性指标在不同的平均范围 $h=k\times\Delta Z$（ΔZ 为取样间距，$k=1,2,3,\cdots$）上均值的方差 σ_h^2，得到不同大小空间 h 上方差折减系数 $\Gamma^2(h)$；绘制 $h\Gamma^2(h)\sim h$ 曲线，当 h 充分大时（$=h^*$），$h\Gamma^2(h)$ 逐渐增大并达到平稳，这时相关范围 $\delta=h^*\Gamma^2(h^*)$。

值得注意的是，理论上 $X_h(t_1)$ 和 $X_h(t_2)$ 呈正相关性，因此在计算平均值的方差时，按传统的概率统计方法（独立同分布序列）求得的 σ_h^2 要比实际的小，从而求得

的相关范围 δ 和相关距离 θ 偏小。

平均零跨法：对于相关函数为指数平方型，有

$$\left.\begin{aligned}&\rho(\tau)=\exp(-b^2\tau^2)\qquad \delta=\sqrt{\pi}/b\\&\delta=\sqrt{2/\pi}\times\bar{d}\end{aligned}\right\}\tag{6.54}$$

式中，$\bar{d}$ 为平稳正态的样本曲线与 $x=\mu$ 交点的平均长度，$\bar{d}=\sqrt{-\pi^2C_X(0)C_X''(0)}$。对于有完整连续土性变化曲线的情况，可以量得其曲线与其均值点的平均长度 $\bar{d}$，从而可得 δ。

AR(p)自回归模拟法：从提取趋势分量后的样本曲线按 ΔZ 取样，得到的实际上是一平稳的正态序列，其自相关函数随相关步距的增大而趋于零，而偏相关函数则具有截尾性，因此，可用自回归模型 AR(p)来模拟[15]。设平稳序列 X' 满足模型

$$X_t'=\varphi_1\times X_{t-1}'+\cdots+\varphi_p\times X_{t-p}'+\varepsilon_t\tag{6.55}$$

式中：φ_1、$\cdots$、φ_p 为自回归系数；ε_t 为零均值、方差为 σ_ε^2 的正态白噪声。

该模型把土性指标 $X'(t)$ 分解为两部分：前一部分 $\varphi_1\times X_{t-1}'+\cdots+\varphi_p\times X_{t-p}'$ 取决于 $X_{t-1}',\cdots,X_{t-p}'$，代表土层在自然沉积过程中具有的内部规律，从而引起土性的空间变化；后一部分为白噪声 ε_t，代表了不可预测的外部因素，如测量误差、土性在很小范围内的局部变异（如夹层）等。

自回归模型的阶可由其偏相关函数确定，对于平稳序列的偏相关函数 $\Phi(k,k)$，当 $k>P$ 时，$\Phi(k,k)=0$。但实际计算中，$\Phi(k,k)$是一随机变量，并不会真正等于零，这时可考察其偏相关函数图；若在 p 步之后 $\Phi(k,k)$在零值附近摆动，则其阶为 p。绝大多数土层土性变化曲线，在提取趋势分量（包括线性和非线性趋势分量）后，得到的平稳序列的偏相关函数具有一步截尾性，即 $\Phi(2,2)\approx0$，$p=1$，因此可用 AR(1)模型来模拟。自回归模型参数可由最小二乘法得到，其基本思想是，选择 $\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_p$ 使目标函数 $S(\hat{\varphi}_1,\cdots,\hat{\varphi}_p)=\sum_{t=p+1}^{N}\varepsilon_t^2=\min$。因此，对于 AR(1)模型，就有

$$\varphi_1=\frac{\sum_{t=2}^{N}X_t\times X_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N}X_{t-1}^2}\tag{6.56}$$

因此，对于 AR(1)模型，$\rho(\tau)=\hat{\varphi}_1^{(\tau/\Delta\tau)}$，则有

$$\delta=2\int_0^\infty\rho(\tau)\mathrm{d}\tau=-\frac{2}{\ln\varphi_1}\Delta Z\tag{6.57}$$

以上是一维随机场的分析结果，对于二维，三维随机场，上述的结论可以很容易推广。

取样间距 ΔZ 对 δ 的计算有一定的影响，可采用递推空间法来确定相关距离，并使得取样间距 $\Delta Z\to\delta$。

5）土工参数相关距离 θ 的经验值。

在岩土工程中，统计不确定性、试验误差都比土性的固有变异性引起的不确定性要小；而计算模式不精确性引起的不确定性，也远比土的固有变异性引起的不确定性要小。因此，确定土工参数的变异系数及相关距离的经验值是岩土工程可靠性分析的一项重要工作。

表 6.4 为一些地区土类的土性指标的相关距离 θ 的经验值[18]。可以看出，对于同一土层，不同指标之间具有相近的相关距离值。

表 6.4 不同地区、不同土类的相关距离θ值

地区	土层	C_u	q_u	c	ϕ	e	w	P_S	S_u	N
上海	粘质粉土 2～9m			0.40	0.32	0.43	0.39	0.47	0.45	0.48
	淤泥质粘土 9～15m			0.31	0.39	0.32	0.30	0.68	0.61	0.66
	粉质粘土 15～21m			0.42	0.47	0.45	0.45	0.49	0.45	0.51
	粉质粘土 21～27m			0.32	0.32	0.41	0.41	0.41		0.39
新沙港	淤泥质粘土							0.43	0.45	
大港	淤泥质亚粘土	0.56	0.54	0.49	0.55			0.46	0.81	

(2) 非平稳随机场的空间变异性分析。

事实上，岩土参数随机场并不一定是平稳弱变异 Gauss 随机场，因此对岩土参数随机场进行空间变异分析并据此获得随机场的空间变异特征是随机场离散的重要前提。

从地质统计学的观点来看，具有空间变异二重性特征的岩土参数随机场可以看成是一个区域化变量。假定所研究的工程岩土空间几何域为 V（$V\in R^2$ 或 R^3），岩土参数随机场为 $Z(X)$（X 为位置坐标，$X\in V$），$Z(X)$为一个非平稳随机场，则 $Z(X)$可表达为

$$Z(X) = m(X) + R(X) \tag{6.58}$$

式中：$m(X)$为 $Z(X)$在 V 内的漂移，表征了 $Z(X)$在较大尺度上的变化；而 $R(X)$为 $Z(X)$在 V 内的涨落，表征了 $Z(X)$在较小尺度上的变化，且有 $E[R(X)]=0$。这里，$m(X)$可采用下面的多项式表达：

$$m(X) = \sum_{l=0}^{K} a_l f_l(X) \tag{6.59}$$

式中：a_l 为漂移多项式系数；$f_l(X)$为漂移多项式，且 $f_l(X)=X^l$；K 为漂移阶数，一般不超过 2。

由式(6.59)可知，若 $m(X)$为一常数，则 $Z(X)$为一平稳随机场。一般地，随机场 $Z(X)$在 V 内两点 X_1 和 X_2 处的随机变量 $Z(X_1)$和 $Z(X_2)$有以下性质：

均值：

$$E[Z(X_1)] = m(X_1), E[Z(X_2)] = m(X_2)$$

协方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[Z(X_1),Z(X_2)]&=E\{[Z(X_1)-m(X_1)][Z(X_2)-m(X_2)]\}\\&=C(X_1,X_2)=C(X_1-X_2)=C(\mathbf{h})\end{aligned}$$

变异函数：

$$2\gamma(X_1,X_2)=\mathrm{Var}[Z(X_1)-Z(X_2)]=2\gamma(X_1-X_2)=2\gamma(\mathbf{h})$$

方差：

$$\mathrm{Var}[Z(X_1)]=\mathrm{Var}[Z(X_2)]=C(0)$$

此外有

$$\gamma(\mathbf{h})=C(0)-C(\mathbf{h}),C(\mathbf{h})=C(0)-\gamma(\mathbf{h}),C(\mathbf{h})=C(-\mathbf{h}),\gamma(\mathbf{h})=\gamma(-\mathbf{h})$$

因此，$Z(X)$的空间变异特征可用空间变异函数$\gamma(\mathbf{h})$和均值函数$m(X)$来定量表示。若在所研究的岩土域V内取有r个支撑为v、中心点位置分别为X_a的岩样并测出其岩土参数值$Z(X_a)(a=1,2,\cdots,r)$，则可通过下面的步骤求出变异函数$\gamma(\mathbf{h})$。

1) 根据试样的力学参数值求出$\gamma(\mathbf{h})$的估计量$\gamma^*(\mathbf{h})$

$$\gamma^*(\mathbf{h})=\frac{1}{2N(\mathbf{h})}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(X_i)-Z(X_i+\mathbf{h})]^2 \tag{6.60}$$

式中，$N(\mathbf{h})$为被向量$\mathbf{h}$分隔的数据对数。

如果不同$\mathbf{h}$方向求出的$\gamma^*(\mathbf{h})$有较大差异，则说明$Z(X)$的空间变异具有方向性，称为各向异性，否则为各向同性。各向同性时可以采用下式求变异函数$\gamma(h)$的估计量$\gamma^*(h)$：

$$\gamma^*(h)=\frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(X_i)-Z(X_i+h)]^2 \tag{6.61}$$

式中，$h=|\mathbf{h}|$。

2) 用理论变异函数模型或其套合结构对$\gamma^*(\mathbf{h})$或$\gamma^*(h)$进行拟合。常用的模型为有基台的球状的模型。其表达式为[53]

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ C_0+C\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{a}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3}{a^3}\right) & 0<h\leqslant a\\ C_0+C & h>a\end{cases} \tag{6.62}$$

式中：C_0为块金效应；C_0+C为基台值；a为变程。

3) 各向异性套合。如果$Z(X)$的空间变异性呈各向异性，还需要对各向异性进行套合，最后得到对各方向均适用的理论变异函数表达式$\gamma(h)$。

变异函数可以定量表示随机场$Z(X)$的许多空间变异特征(如连续性、各向异性、是否存在块金效应以及变程等)。当变异函数求出后，即可根据下式求出协方差函数$C(h)$和方差$\mathrm{Var}[Z(X)]$：

$$C(0)=\gamma(h>a) \tag{6.63}$$

$$C(h)=C(0)-\gamma(h) \tag{6.64}$$

$$\mathrm{Var}[Z(X)] = C(0) \tag{6.65}$$

随机场 $Z(X)$的均值函数 $E[Z(X)]=m(X)$可以采用 V-Kriging 估值法求出。漂移系数 $a_l(l=0,1,\cdots,K)$的 U-Kriging 估值为[54]

$$a_l^* = \sum_{\alpha=1}^{r}\rho_{\alpha l}Z(X_\alpha) \qquad (l=0,1,\cdots,K) \tag{6.66}$$

式中，$\rho_{\alpha l}$为权系数，可通过求解下列方程组得到：

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_{\alpha l}\gamma(X_\beta,X_\alpha)+\sum_{g=0}^{K}\mu_{gl}f_g(X_\beta)=0\\&\sum_{\alpha=1}^{r}\rho_{\alpha l}f_g(X_\alpha)=\delta_{gl}\end{aligned}\right\}$$

$$(\beta=1,2,\cdots,r;l=0,1,\cdots,K;g=0,1,\cdots,K) \tag{6.67}$$

式中，$\delta_{gl}=\begin{cases}1 & g=l\\0 & g\neq l\end{cases}$。式(6.67)也可写成矩阵形式

$$\mathbf{AL}_l=\mathbf{D}_l \qquad (l=0,1,\cdots,K) \tag{6.68}$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}\gamma(X_1,X_1) & \cdots & \gamma(X_1,X_r) & f_0(X_1) & \cdots & f_K(X_1)\\ & \cdots & & & & \\ \gamma(X_r,X_1) & \cdots & \gamma(X_r,X_r) & f_0(X_r) & \cdots & f_K(X_r)\\ f_0(X_1) & \cdots & f_0(X_r) & 0 & & 0\\ & \cdots & & & & \\ f_K(X_1) & \cdots & f_K(X_1) & 0 & & 0\end{bmatrix}$$

$$L_l=(\rho_{1l},\rho_{2l},\cdots,\rho_{rl},\mu_{0l},\mu_{1l},\cdots,\mu_{Kl})^T$$

$$D_l=(0,0,\cdots,0,\delta_{0l},\delta_{1l},\cdots,\delta_{Kl})^T$$

令 $H=[Z(X_1),Z(X_2),Z(X_r),0,0,\cdots,0]^T$，则式(6.66)可写成

$$a_l^* = H^TL_l = H^TA^{-1}D_l \qquad (l=0,1,\cdots,K) \tag{6.69}$$

因此，均值函数 $m(X)$为

$$m(X)=\sum_{l=0}^{K}a_l^*f_l(X)=\sum_{l=0}^{K}H^TA^{-1}D_lf_l(X)=H^TA^{-1}F(X) \tag{6.70}$$

其中

$$F(X)=[0,0,\cdots,0,f_0(X),f_1(X),\cdots,f_K(X)]^T$$

6.3.2 随机场的离散方法

(1)离散的基本方法。

当土-结构体系中材料的性质及荷载作用具有随机性时，则它及空间中的随机场问题。为了将随机场反映到有限元计算中去，必须将随机场加以离散，这时必须考虑随机场的两个重要特征，即强度和频率组成。前者反应材料中随机变异分量相

对于确定分量的大小，而后者则反应随机波动在空间中的变异速度。Vanmarcke[14](1986)提出了波动比和方差函数的概念。在随机有限元的离散方法中，一般有两大类方法[50]：一是在空间进行离散，即将随机场也划分成网格；另一个是抽象离散，即将随机场展成级数，也称为谱分解方法。

空间离散法的基本思想是：在结构域 Ω 中划分出一组确定的网格，每格包含一个子域 Ω_e，随机场则为 $\mathbf{V}(\mathbf{x})$（$\mathbf{x}$ 为空间坐标）。该方法又可分为下面的基本方法：

1) 中心点法。Liu[44](1989)用 Ω_e 的中点 $\mathbf{x}$ 处的 V 值表示 Ω_e 内各点的值。如果随机场网格包含 n 个 Ω_e，则连续随机场 $\mathbf{V}$ 转变为 n 个随机向量 $\mathbf{V}_i$。这样的随机场的每次实现都是阶梯形的，在网格线上不连续。该法适用于各种分布的随机场，缺点是所得的解方差大，收敛慢。

2) 局部平均法。对 Gauss 随机场，Vanmarcke(1983)较早用 Ω_e 内的平均值作为 Ω_e 内各点的值。即

$$\mathbf{V}_i = \int_{\Omega_e} \mathbf{V}(\mathbf{x}) \mathrm{d}\Omega_e \Big/ \int_{\Omega_e} \mathrm{d}\Omega_e \tag{6.71}$$

与中点法相同，随机场的每次实现也在网格线上不连续，但当网格加密时，它比中点法收敛快。一些研究表明，局部平均方法在随机有限元计算中是十分有效的，它对原始数据的要求低、收敛快、精度高，是一种最常用的方法。

3) 形函数法（插值法）。对 Gauss 随机场，Liu[45](1986)使用 Ω_e 内的一组形函数 $\varphi_i(\mathbf{x})(i=1,2,\cdots,m)$ 将网格节点值与 φ_i 之积的和来表示 Ω_e 内的值，即

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i(\mathbf{x}) \mathbf{V}_i \tag{6.72}$$

式中：m 为一个网格的节点数，$\varphi_i(\mathbf{x})$ 常取为多项式或 Kroneckerδ 函数，也可取为 Ω_e 内 $\mathbf{V}$ 的前几个特征向量。

在该法中，随机场的实现都是连续的，因而有较高的精度。但与随机场的局部平均法相比，该法需预知相关函数，并且要求随机场对空间参数具有较高的连续性，以保证插值的顺利进行。

4) 最优线性估值法。对 Gauss 随机场的整个域 Ω，Li(1991)将其离散为

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{N} b_i^T(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x}_i) \tag{6.73}$$

其中，$a(\mathbf{x})$ 和 $b(\mathbf{x})$ 分别由以下的条件确定：

$$\left.\begin{aligned} &E[\mathbf{W}(\mathbf{x})] = E[\mathbf{V}(\mathbf{x})] \\ &\mathrm{Min}(E[\mathbf{W}((\mathbf{x}) - \mathbf{V}(\mathbf{x}))^2]) \end{aligned}\right\} \tag{6.74}$$

该法的方差比前面的几个方法一般要小。

5) 局部积分法。对 Gauss 随机场，Takada[46](1989)提出如下的方法：

$$\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) = \int_{\Omega_e} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \mathbf{V}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0) \mathrm{d}\Omega_e \tag{6.75}$$

式中：$g(x)$为具有 $x^t y$ 形式的确定性函数；x_0 为 Ω 内的某个定点。显然局部平均法是此方法的特例，但它比局部平均法要收敛得快。

需要指出，由于结构性质（如尺寸、强度等）的随机场一般为非负，不能用 Gauss 分布来准确地表示，所以在使用前需先将随机场变换为等效正态分布。此外，上述各方法计算的精度与随机场网格的划分有密切的关系。如果随机场波动快，网格应取得密一些。可见，随机场网格的划分不同于常规有限元的划分。Der Kiureghian[47](1991)建议先划分有限单元，然后再根据随机场的性质调整随机场网格，使得一个随机场网格包含一至几个有限单元。但如果随机场网格划分的过密，会导致相邻单元高度的相关性，从而会引起数值计算的不稳定。为此，一些学者提出了根据状态函数的梯度选择或改进随机场网格的方法。

谱分解法的基本思想是：在随机过程理论中常使用谱的概念。下面介绍两种适合于数值解的谱分解法。

1) Karhunen-Loeve 级数展开法。对任意分布的随机场，Spanos[48](1989)建议使用 Karhunen-Loeve 展开表示随机场，即

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \xi_i \varphi_i(\mathbf{x}) \tag{6.76}$$

式中，λ_i 和 φ_i 分别为以 V 的协方差矩阵为核的积分方程

$$\int_{\Omega} \mathrm{Cov}_{vv}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\varphi_i(\mathbf{x}_1)\mathrm{d}\mathbf{x}_i = \lambda_i \varphi_i(\mathbf{x}_2) \tag{6.77}$$

的特征根及特征向量，且为确定性的量。而 ξ_i 则为一组 0 均值正交随机变量

$$\xi_i = \int_{\Omega} \frac{1}{\lambda_i}[V(\mathbf{x}) - E[V(\mathbf{x})]]\varphi_i(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega \tag{6.78}$$

实际上可按随机场的相关长度的大小取前几项，相关长度越小，随机波动越快，取的项应多些。这种离散化不需网格，如果 V 是 Gauss 场，则 ξ_i 也是 Gauss 场的。Karhunen-Love 级数的优点是对相同的项数其均方差比其它级数小。但缺点是必须解积分方程(6.77)，如果用数值解，则又引起额外的误差。

2) 混沌多项式展开法。为避免 Karhunen-Loeve 级数解积分方程的困难，Ghanem(1991)[49]建议对任意二阶随机场用混沌多项式 Γ_p 展开，即

$$V = \sum_{p=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{i_1} \cdots \sum_{i_p=1}^{i_{p-1}} \alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p} \Gamma_p(\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_p}) \right\} \tag{6.79}$$

式中：$\alpha_{i_1 i_2 \cdots i_p}$ 为确定的量，与空间坐标有关；ξ_i 为 0 均值正交的 Gauss 随机变量；Γ_p 则为 n 维 ξ 空间中 ξ_i 的 p 阶齐次多项式。所有 $\Gamma_p, p>1$ 的均值皆为 0，且 Γ_p 彼此正交，可由厄密特多项式求得，即

$$\Gamma_p = (\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \cdots, \xi_{i_p}) = (-1)^p \frac{\partial^p}{\partial \xi_{i_1} \cdots \partial \xi_{i_p}} e^{-\frac{1}{2}\xi^T \xi} \tag{6.80}$$

(2)局部平均理论原理。

Vanmarcke[14]提出的随机场局部平均理论是目前岩土工程领域应用较为广泛的一种离散方法。它是用随机场函数在每一个离散单元上的局部平均的随机变量来代表该单元中各点的统计量的近似理论。由于随机场函数经过局部平均而形成的随机向量的各分量具有对原随机场函数的相关性不敏感的特点，因此基于局部平均理论的随机有限元法只要求给定原随机场的均值、方差和相关偏度便可以得到解函数的二阶统计量，从而降低了对输入随机信息的要求。

陈虬、刘先斌[19]将线性坐标变换引入局部平均模型，于是一个均值为 m、方差为 σ^2 的二维连续平稳随机场 $\alpha(x,y;\omega_x,\omega_y)$ 就可以被离散成了一个随机向量 $\boldsymbol{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}^T$，其中 ω_x、ω_y 为样本点，n 为单元总数。则单元 e 的局部平均为

$$a_e=\frac{1}{A_e}\int_{\Omega_e}\alpha(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (x,y\in\Omega_e) \tag{6.81}$$

其中：A_e 为单元 e 的面积；Ω_e 为单元 e 所占有的区域，是任意直边四边形。因此，局部平均随机场的均值为

$$E[a_e]=E\left[\frac{1}{A_e}\int_{\Omega_e}\alpha(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=m \qquad (x,y\in\Omega_e) \tag{6.82}$$

任意两个局部平均随机场单元 e,e' 的互协方差为

$$\mathrm{Cov}(a_e,a_e)=\frac{\sigma^2}{A_eA_e}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho(r,s)|J||J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6.83}$$

式中：$\rho(r,s)$ 为标准互相关系数；$r=\sum_{i=1}^{4}(N_ix_i-N_ix_i)$；$s=\sum_{i=1}^{4}(N_iy_i-N_iy_i)$，$x_i$ 和 y_i 为离散单元 e 的结点坐标，$N_i=(1/4)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$ 是单元 e 的形函数；$|J|$ 为坐标变换的 Jacobi 行列式。

整体坐标系下的任意四边形都可以变换为局部坐标系下的正方形，如图 6.3 所示。式(6.109)可由 Gauss 数值积分公式求解。

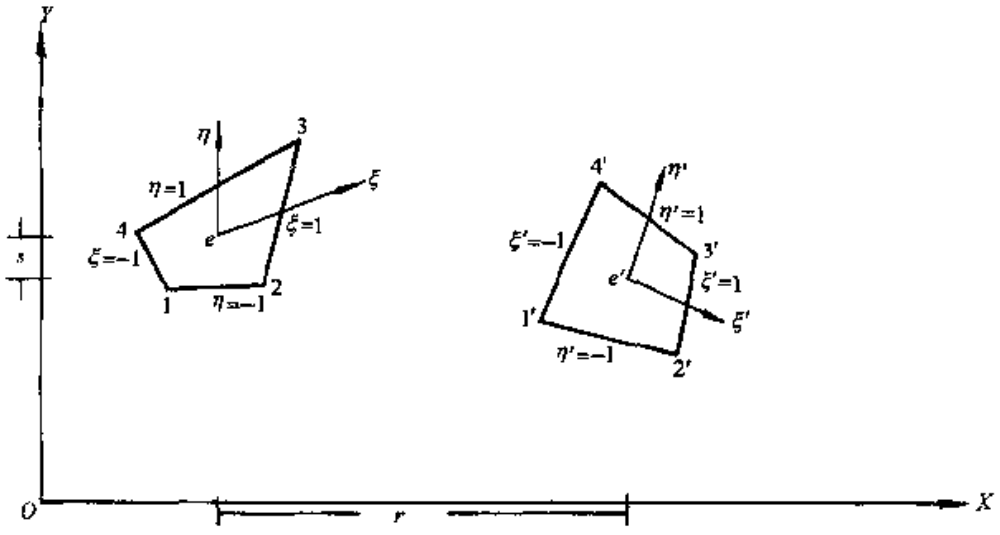


图 6.3　二维局部平均的任意四边形离散单元

A. Der Kiureghian 和 J. B. Ke[20]指出，随机向量 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}^T$ 服从多维正态分布。陈虬、李贤兴[21]将特征正交化技术引入随机场的离散模型，可将各分量统计相关的随机向量转化为各分量统计独立的随机向量，通过这样的转化，计算量将大为减少。

由于有限元网格的疏密是由应力梯度决定，而与随机场无关，因此随机场应采用另一套网格，网格的疏密可由相关距离 θ 决定。与应力场网格一样，随机场网格越密精度越高，因而同样存在着如何协调精度和效率的问题。

随机场的局部平均理论[1]是用随机场函数在每个离散单元上的局部平均的随机变量来代表该单元中各点的统计量的近似理论。在此基础上，只要给定原随机场的均值、方差和相关偏度，即可得到解函数的二阶统计量，从而降低了对输入信息的要求。线性坐标变换被引入到局部平均模型中，于是一个均值为 m、方差为 σ^2 的二维连续平稳随机场 $\alpha(x,y;\omega_x,\omega_y)$ 就可被离散为随机变量 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}^T$，其中 ω_x、ω_y 为样本值，n 为单元总数。因此，单元 e 的局部平均为 $\alpha_e=(1/A_e)\left(\int_{\Omega_e}\alpha(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)(x,y\in\Omega_e)$，其中 A_e 为单元 e 的面积，Ω_e 为其所占的区域，是任意直边四边形。这样，局部平均随机场单元 e 的均值及单元 e 和 e' 的互协方差为

$$E[\alpha_e]=E\left[\frac{1}{A_e}\int_{\Omega_e}\alpha(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]=m \tag{6.84}$$

$$\mathrm{Cov}(\alpha_e,\alpha_{e'})=\frac{\sigma^2}{A_eA_{e'}}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\rho(r,s)|J||J'|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\xi'\mathrm{d}\eta' \tag{6.85}$$

式中，$\rho(r,s)$ 为标准互相关系数，且有

$$r=\sum_{i=1}^{4}(N_ix_i-N_{i'}x_{i'})$$

$$s=\sum_{i=1}^{4}(N_iy_i-N_{i'}y_{i'})$$

式中，x_i 和 y_i 为离散单元 e 的结点坐标。单元 e 的形函数 $N_i=(1/4)(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)$。$|J|$ 为 Jacobi 行列式。

如果对离散模型进行特征正交化[2]，可将随机向量统计相关的各分量转化为统计独立，从而减小计算量。由于有限元网格的疏密决定于应力梯度而与随机场无关，随机场应采用另一套网格，其疏密决定于相关距离。

6.3.3 随机有限元基本方法及可靠度计算

有限元法需要选择一组分段多项式的基来展开未知的反应，再使用变分原理或 Galerkin 加权残量定理将微分方程转换为代数方程组。由于变分原理使用泛函极值的概念，所以要求微分算子自伴。但对于随机场，自伴的要求可能会限制其通用性，而且对应的二次式也没有明确的物理概念。Galerkin 方法则要求近似解引起

的平衡方程的误差与近似解所在的空间正交，因此既不要求算子自伴，也不用联系到某个二次形，所以 Galerkin 加权残量定理就成为随机有限元法的基础[50]。另一方面，有限元还使用了 h 法和 p 法，前者通过在空间划分有限元网格，以加密网格来提高有限元的精度，而后者则是在保持网络不变的前提下通过提高基的阶次来减小误差。

随机有限元法可以以计算结构体系反应过程的不确定性（主要是各阶矩）为目的，也可以以计算结构可靠度为目的。随计算内容的不同，随机有限元的基本方程也不相同。这里先介绍计算反应矩的随机有限元基本方程的建立方法（即摄动法、Neumann 展开法和混沌多项式展开法等），然后，给出随机有限元可靠度计算的基本思路。

(1)摄动法。

摄动法是建立随机有限元方程最简单也是最常见的方法，其基本概念如下。

设随机的结构参数 $Z=\mu(1+\alpha)$（这里 μ 为均值，α 为波动系数）。当波动强度很小（$|\alpha|\ll 1$）时，它可作为实际随机场的良好近似。现考虑静力问题，则基本方程为

$$KU = F \tag{6.86}$$

式中，K 为刚度。

将 K 和 U 在 Z 的均值 $\overline{\mu_Z}$ 处对 α 展开成 Taylor 级数（取至二次项），则可得

$$K = \overline{K} + \sum_{i=1}^{n} K_i^{\mathrm{I}}\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{\mathrm{II}}\alpha_i\alpha_j \tag{6.87}$$

式中，K_i^{I} 和 K_{ij}^{II} 为 K 对 α 的一阶和二阶导数矩阵。假定 α 是 n 维的，若结构参数中只有一个是随机的，则用中点法离散此随机场时，n 就是该随机场网格的单元数。将式(6.87)代入式(6.86)，则可得

$$\left.\begin{aligned} &\overline{K}\overline{U} = F \\ &\overline{K}U_i^{\mathrm{I}} = -K_i^{\mathrm{I}}\overline{U} \\ &\overline{K}U_{ij}^{\mathrm{II}} = -K_i^{\mathrm{I}}U_j^{\mathrm{I}} - K_j^{\mathrm{I}}U_i^{\mathrm{I}} - K_{ij}^{\mathrm{II}}\overline{U} \end{aligned}\right\} \tag{6.88}$$

于是位移的均值 $\overline{U}$ 可由逆矩阵 $\overline{K^{-1}}$ 乘以 F 得到。由 $\overline{K}^{-1}$ 还可以得到 U 的一阶及二阶导数。这样只需对确定的矩阵 $\overline{K}$ 求逆，即可得到近似解 U。该方法称为以均值为中心的二阶摄动法。

当随机场变异强度较小，波动频率不很高时（一般应小于均值的 20%或 30%），用不大的维数 n，摄动法就能给出满意的结果。而当变异强度增大，Z 的一阶展开式和 K、U 的二阶展开式精度不够时，则需要更高阶的项，其计算量迅速增加。对于非线性结构，必须考虑高阶项，这时摄动法就难以保证其精度。分析表明，长期项存在于高阶项中，且阶次越高，长期项比重越大，所以用增加高阶项的办法来提高摄动法的精度在理论上是不可行的。

(2)Neumann 展开法。

Shinozuka(1981)首先在结构工程领域使用了这个方法。其特点是逐层计算各阶矩,用低阶矩来表示高阶矩。记位移微分方程为

$$LU(x) = f(x) \tag{6.89}$$

式中,L 为微分算子。假定其含结构随机性质的部分可以分离出来,即

$$(L_0 + \Pi_a)U(x) = f(x) \tag{6.90}$$

式中:L_0 为确定的微分算子;Π_a 为含随机性的微分算子。先用有限元网格离散随机场 Ω,并选择确定性 Ω 域的基 $\varphi_i(x)(i=1,2,\cdots,l)$,将随机反应 u 用基展开为

$$u(x) = \sum_{i=1}^{l} u_{ia}\varphi_i(x) \tag{6.91}$$

式中,u_{ia}为含随机性的常数。将式(6.91)代入式(6.90),利用 Galerkin 原理可得

$$(L' + \Pi'_a)U = F \tag{6.92}$$

式中:L' 和 Π'_a 为 $n\times n$ 维矩阵;U,F 为 n 维向量。各矩阵的系数为

$$\left.\begin{aligned} L'_{ij} &= \int_\Omega (L_a\varphi_i(x))\varphi_i(x)\mathrm{d}\Omega \\ \Pi'_{ij} &= \int_\Omega (\Pi_a\varphi_i(x))\varphi_i(x)\mathrm{d}\Omega \\ F_i &= \int_\Omega f(x)\varphi_i(x)\mathrm{d}\Omega \end{aligned}\right\} \tag{6.93}$$

式(6.92)可改写为

$$L'U = F - \Pi'_aU$$

对确定性的矩阵 L' 求逆

$$U = L'^{-1}F - L'^{-1}\Pi'_aU \tag{6.94}$$

式(6.94)两端乘 Π'_a,再代入式(6.94)得

$$U = (1 - L'^{-1}\Pi'_a)L'^{-1}F - (L'^{-1}\Pi'_a)^2U$$

重复进行 m 次,得

$$U = \sum_{i=0}^{m}(-L'^{-1}\Pi'_a)^iL'^{-1}F \tag{6.95}$$

略去$(L'^{-1}\Pi'_a)^{m+1}F$,则当 $m\to\infty$时可得其精确解。式(6.95)存在的条件是

$$\| L'^{-1}\Pi'_a \| < 1 \tag{6.96}$$

事实上,用式(6.95)求各阶矩并不方便。Spanos(1989)用 Karhonen-Loeve 级数改进了上述方法。考虑较简单的情况,将式(6.90)中的 Π_a 表示为 αR,则

$$(L + \alpha R)U(x) = f(x) \tag{6.97}$$

式中:R 为确定的微分算子;α 为随机场。利用 Galerkin 原理,随机算子 Π_a 转化为矩阵 Π'_a,其系数为

$$\Pi'_{ij} = \int_\Omega \alpha(R\varphi_i(x))\varphi_j(x)\mathrm{d}\Omega$$

用 Karhunen-Loeve 级数表示 α

$$\alpha = \sum_{k=1}^{L} \lambda_k \xi_k g_k(x)$$

式中：λ_k 和 g_k 分别为 α 的协方差矩阵的特征根及特征向量，两者都是确定的；$\xi_k(k=1,\cdots,L)$为一组正交随机变量。

将式(6.96)和(6.97)代入式(6.92)得

$$\left[L^{\cdot} + \sum_{k=1}^{L} \xi_k K^{(k)}\right] U = F \tag{6.98}$$

式中，$K^{(k)}$为确定的矩阵，其元素为

$$K_{ij}^{(k)} = \int_{\Omega} g_k(x)(R\varphi_i(x))\varphi_j(x)\mathrm{d}\Omega \tag{6.99}$$

式(6.98)两端乘以 $L^{\cdot -1}$得

$$\left[I + \sum_{k=1}^{L} \xi_k L^{\cdot -1} K^{(k)}\right] \Pi = P$$

与式(6.95)类似，其解为

$$U = \sum_{i=1}^{\infty} \left(- \sum_{k=1}^{L} \xi_k L^{\cdot -1} K^{(k)} \right)^{i} L^{\cdot -1} F \tag{6.100}$$

其中随机变量以系数形式存在，可方便地计算各阶矩，其存在的条件见式(6.96)。

(3)混沌多项式展开。

Ghanem(1991)提出了一种不受式(6.96)限制的展开方法。考虑式(6.97)，先用 Karhonen-Loeve 级数展开随机场，再考虑 Karhonen-Loeve 级数形式的解

$$U(x) = \sum_{i=1}^{L} e_i \gamma_i b_i(x) \tag{6.101}$$

式中：e_i 和 b_i 分别为 $\mathrm{Cov}_{uu}(x_1,x_2)$的特征根及特征向量；$\gamma_i$ 为随机变量。将 γ_i 用标准正交随机变量 ξ_i 的混沌多项式展开，则有

$$\gamma_i = \sum_{j=1}^{M} r_{ij} \Gamma_j(\xi) \tag{6.102}$$

将式(6.102)代入式(6.101)可得

$$u(x) = \sum_{j=1}^{M} \Gamma_j(\xi) d_j(x) \tag{6.103}$$

其中

$$d_j(x) = \sum_{i=1}^{L} r_{ij} e_i b_i(x) \tag{6.104}$$

选择 L 域与 R 域交上的基 $\varphi_k(x)(k=1,\cdots,N)$来展开 $d_j(x)$，则

$$d_j(x) = \sum_{k=1}^{N} u_{jk} \varphi_k(x) \tag{6.105}$$

先用 φ_k 对式(6.97)使用一次 Galerkin 原理，再用 Γ_j 对该式使用 Galerkin 原理，则得到随机有限元方程

$$[L+G]U=P \tag{6.106}$$

式中，$N\times M$ 维矩阵 L 的元素同式(6.93)，$N\times M$ 维块矩阵 G 的第 m_j 块为 $N\times M$ 维方阵

$$G_{mj}=\sum_{i=1}^{m}G_{ijm}R_i \tag{6.107}$$

其中

$$C_{ijm}=E[\xi_i\Gamma_j(\xi)\Gamma_m(\xi)]$$

$$R_i=[R_{ild}]$$

$$R_{ild}=\int_{\Omega}g_i(x)(R\varphi_k(x))\varphi_l(x)\mathrm{d}\Omega$$

M 个 N 维向量

$$P_m=E[f(x)\Gamma_m(\xi)] \tag{6.108}$$

求解式(6.106)而得到 U 的 $N\times M$ 个元素 u_{ij}，再由式(6.105)及(6.103)得到解

$$u(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\Gamma(\xi)u_{ik}\varphi_k(x) \tag{6.109}$$

由于 Γ_i 的正交性，用上式求各阶矩十分方便。

(4)基于随机有限元的可靠度计算。

随机有限元分析结构位移、应变和应力统计特性的目的之一是估算结构的可靠度。基于随机有限元可靠度计算方法中最具代表性的如 Kiureghian 等的方法[52]，该法将 Rackwitz 等(1978)的可靠度指标算法与随机有限元方法相结合，并有效地用于计算框架结构的可靠度。吴世伟等[51]将该法推广到二维及三维情形，并用于计算重力坝和拱坝等大型复杂块体结构的可靠度。

基于随机有限元可靠度计算的关键在于如何与可靠度指标的计算方法加以结合，而可靠度指标往往是通过迭代方法计算的。吴世伟等[51]采用如下的迭代格式以求出极限状态面上距原点最近的点 Y^*：

$$Y_{i+1}=\left(Y_i^Ta_i+\frac{C(Y_i)}{\|\nabla G(Y_i)\|}\right)a_i \tag{6.110}$$

其中

$$\nabla G(Y_i)=\left\{\frac{\partial G}{\partial Y_1},\frac{\partial G}{\partial Y_2},\cdots,\frac{\partial G}{\partial Y_n}\right\}^T_{Y=Y_i}$$

$$a_i=-\frac{\nabla G(Y_i)}{\|\nabla G(Y_i)\|}$$

式中，$\|\cdot\|$ 表示二阶范数。求出 Y^* 后，即可由下式计算可靠度指标：

$$\beta=\pm\sqrt{Y^{*T}Y^*} \tag{6.111}$$

需要指出，可靠度指标的迭代计算与极限状态方程的形式有很大关系。对于二维和三维问题，单元极限状态方程要比一维问题复杂得多，故按式(6.110)进行迭代求解并不方便。

6.3.4 摄动随机有限元法

摄动法随机有限元中的矩阵都是确定的，其刚度矩阵的建立、装配及求逆均可直接使用常规有限元技术，其余的导数矩阵也不难计算；因此摄动地简单易行，应用也最广。

(1)应力场与位移场的二阶统计分析。

在确定性的有限元基础上，引入表征不定参数的随机变量，利用摄动方法显式处理这些参数，并定量描述其对所求物理场的影响的方法就是摄动随机有限元方法。该方法先用 Taylor 级数对有限元控制方程进行展开，将随机函数表示成定性部分(均值部分)和随机部分之和。然后对随机参数空间离散化，随机场转化为随机向量。在假定参数扰动是微小的情况下，利用以均值为中心的二阶摄动法(中心二阶摄动法)将有限元控制方程转化为一组递归方程。依次求解此递归方程，可以确定随机参数对待求随机场的影响，得到位移场的均值和方差。进而通过应力和位移之间的关系，可以确定随机参数对应力场的影响。

有限元位移解的控制方程为

$$\underline{K}\,\underline{V} = \underline{F} \tag{6.112}$$

因刚度矩阵 $\underline{K}$ 依赖于随机变化的土的力学特性和结点坐标，而外荷载列阵 $\underline{F}$ 也是随机的，则结点位移列阵 $\underline{V}$ 必然具有随机性。假定材料力学性能 m 和外荷载 g 的随机性可分别由随机变量 α 和 β 表示，即 $m=\overline{m}(1+\alpha)$ 和 $g=\overline{g}(1+\beta)$，其中 $\overline{m}$ 和 $\overline{g}$ 为其均值，即确定性部分。而随机部分 α 和 β 均可模型化为零均值的连续平稳随机场。分别对 α 和 β 进行局部平均离散和特征正交化，可得随机向量 $\underline{\alpha}=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_1}\}^T$ 和 $\underline{\beta}=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n_2}\}^T$，且其各分量之间互不相关。因此，随机向量 $\underline{\alpha}$ 和 $\underline{\beta}$ 的各分量的互相关函数的性质可表示为

$$\begin{aligned} E[\alpha_i\alpha_j] &= \mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j) = \begin{cases} \mathrm{Var}(\alpha_i) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \\ E[\beta_i\beta_j] &= \mathrm{Cov}(\beta_i,\beta_j) = \begin{cases} \mathrm{Var}(\beta_i) & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases} \end{aligned} \tag{6.113}$$

可合成随机向量 $\underline{\xi}=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}^T=\{\underline{\alpha}^T,\underline{\beta}^T\}^T$，其中 $n=n_1+n_2$。$\underline{\xi}$ 仍为零均值的随机向量，即 $E[\underline{\xi}]=\underline{0}$。

若随机场 α 和 β 相互独立，则可设随机向量 $\underline{\xi}$ 的性质为

$$\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = \begin{cases} \mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j) & 0<i\leqslant n_1 \text{ 且 } 0<j\leqslant n_1 \\ \mathrm{Cov}(\beta_{(i-n_1)},\beta_{(j-n_1)}) & n_1<i\leqslant n \text{ 且 } n_1<j\leqslant n \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \tag{6.114}$$

当有限元网格确定后，刚度矩阵 $\underline{K}$、外荷载列阵 $\underline{F}$ 和结点位移列阵 $\underline{V}$ 在 $\underline{\xi}$ 的

均值(0)处按照 Taylor 级数展开并略去二阶以上的项，代入相应的控制方程并运用中心二阶摄动方法可得如下递归方程组：

$$\begin{cases} \underline{K}_0\ \underline{V}_0 = \underline{F}_0 \\ \underline{K}_0\ \underline{V}_1 = \underline{F}_1 - \underline{K}_1\ \underline{V}_0 \\ \underline{K}_0\ \underline{V}_2 = \underline{F}_2 \end{cases} \tag{6.115}$$

其中

$$\underline{V}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{V}_{ij}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)$$

$$\underline{F}_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{F}_{ij} - 2\,\underline{K}_i\ \underline{V}_j - \underline{K}_{ij}\ \underline{V}_0)\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)$$

式(6.115)中，$\underline{K}_0$、$\underline{F}_0$和$\underline{V}_0$代表均值矩阵。而 $\underline{K}$、$\underline{F}$ 和 $\underline{V}$ 的下标 i 和 j 表示对 ξ_i 和 ξ_j 在零均值处求偏导数，是确定性的矩阵，而与 ξ_i 和 ξ_j 无关。

逐一求解上述递归方程组，可得到矩阵$\underline{V}_0$、$\underline{V}_1$和$\underline{V}_2$。由此得到位移场的二阶统计均值矩阵

$$E[\underline{V}] = \underline{V}_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{V}_{ij}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) = \underline{V}_0 + \underline{V}_2 \tag{6.116}$$

结点 e 和 f 的位移的互协方差为

$$\mathrm{Cov}(\underline{V}^e,(\underline{V}^f)^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{V}_i^e(\underline{V}_j^f)^T\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \tag{6.117}$$

单元 e 的应力-位移的矩阵关系为$\underline{\sigma}^e = \underline{D}^e\ \underline{B}^e\ \underline{V}^e$，其中$\underline{\sigma}^e$、$\underline{D}^e$、$\underline{B}^e$和$\underline{V}^e$为单元 e 的应力列阵、弹性矩阵、应变矩阵和结点位移列阵，$\underline{B}^e$与 ξ 无关。对$\underline{D}^e$和$\underline{V}^e$进行线性 Taylor 级数展开后代入矩阵关系式，可求得单元 e 的应力场的二阶统计均值及单元 e 和 f 的互协方差

$$\begin{aligned} E[\underline{\sigma}^e] = {} & \underline{D}_0^e\ \underline{B}_0^e\ \underline{V}_0^e + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{D}_{ij}^e\ \underline{B}_0^e\ \underline{V}_0^e\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \\ & + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{D}_i^e\ \underline{B}_0^e\ \underline{V}_j^e\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \\ & + \frac{1}{2}\underline{D}_0^e\ \underline{B}_0^e\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underline{V}_{ij}^e\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \end{aligned} \tag{6.118}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\underline{\sigma}^e,(\underline{\sigma}^f)^T) = {} & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\underline{D}_i^e\ \underline{B}_0^e\ \underline{V}_0^e + \underline{D}_0^e\ \underline{B}_0^e\ \underline{V}_i^e) \\ & \cdot(\underline{D}_j^f\ \underline{B}_0^f\ \underline{V}_0^f + \underline{D}_0^f\ \underline{B}_0^f\ \underline{V}_j^f)^T \times \mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \end{aligned} \tag{6.119}$$

式中，$\underline{D}_0^e$、$\underline{B}_0^e$和$\underline{V}_0^e$表示均值矩阵，而下标 i 和 j 则表示对 ξ_i 和 ξ_j 在零均值处的偏导矩阵是确定性矩阵，与 ξ_i、ξ_j 无关。

(2) 主应力场的二阶统计特征。

按平面问题，对单元主应力 $\sigma_1^e,\sigma_3^e = (\sigma_x^e+\sigma_y^e)/2 \pm \tau_{\max}^e$和最大剪应力 $\tau_{\max}^e =$

$,(\sigma_x^e-\sigma_y^e)^2/4+\tau_{xy}^{e2}\}^{1/2}$在随机变量 ξ_i 的均值处求偏导数为

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{1,i}^e\\ \sigma_{3,i}^e\end{matrix}\right\}=\frac{\sigma_{x,i}^e+\sigma_{y,i}^e}{2}\pm\tau_{\max,i}^e \tag{6.120}$$

$$\tau_{\max,i}^e=\frac{(\overline{\sigma_x^e}-\overline{\sigma_y^e})(\sigma_{x,i}^e-\sigma_{y,i}^e)/2+2\,\overline{\tau_{xy}^e}\tau_{xy,i}^e}{2\{(\overline{\sigma_x^e}-\overline{\sigma_y^e})^2/4+\overline{\tau_{xy}^{e2}}\}^{1/2}} \tag{6.121}$$

式中，$\sigma_{1,i}^e$、$\sigma_{3,i}^e$、$\tau_{\max,i}^e$、$\underline{\sigma_{x,i}^e}$、$\underline{\sigma_{y,i}^e}$和$\underline{\tau_{xy,i}^e}$表示在随机变量 ξ_i 的均值处对 σ_1、σ_3、$\tau_{\max}$，σ_x^e、σ_y^e和 τ_{xy}^e的偏导数，而 σ_x^e、σ_y^e 和 τ_{xy}^e则表示单元 e 的应力分量 σ_x^e、σ_y^e、τ_{xy}^e的均值。应力列阵 $\underline{\sigma^e}=\{\sigma_x^e,\sigma_y^e,\tau_{xy}^e\}^T$，其均值矩阵为

$$E[\underline{\sigma^e}]=\{\overline{\sigma_x^e},\overline{\sigma_y^e},\overline{\tau_{xy}^e}\}^T \tag{6.122}$$

将单元 e 的主应力 σ_1^e 和 σ_3^e 及最大剪应力 $\tau_{\max}^e$对 ξ_i 进行线性 Taylor 级数展开后，可得均值

$$\left.\begin{matrix}E[\sigma_1^e]=\overline{\sigma_1^e}\\ E[\sigma_3^e]=\overline{\sigma_3^e}\end{matrix}\right\}=\frac{\overline{\sigma_x^e}+\overline{\sigma_y^e}}{2}\pm\overline{\tau_{\max}^e} \tag{6.123}$$

$$E[\tau_{\max}^e]=\overline{\tau_{\max}^e}=\{(\overline{\sigma_x^e}-\overline{\sigma_y^e})^2/4+\overline{\tau_{xy}^{e2}}\}^{1/2} \tag{6.124}$$

单元 e、f 的大小主应力及最大剪应力的互协方差为

$$\mathrm{Cov}(\sigma_1^e,\sigma_1^f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{1,i}^e\sigma_{1,j}^f\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \tag{6.125}$$

$$\mathrm{Cov}(\sigma_3^e,\sigma_3^f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sigma_{3,i}^e\sigma_{3,j}^f\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \tag{6.126}$$

$$\mathrm{Cov}(\tau_{\max}^e,\tau_{\max}^f)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\tau_{\max,i}^e\tau_{\max,j}^e\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) \tag{6.127}$$

单元 e 的应力列阵$\underline{\sigma^e}$对 ξ_i 在其零均值处的偏导为 $\underline{\sigma_{,i}^e}=\{\sigma_{x,i}^e,\sigma_{y,i}^e,\tau_{xy,i}^e\}^T$。应力列阵可通过$\underline{\sigma^e}=\underline{D^eB^eV^e}$得到；另一方面，通过线性 Taylor 展开和中心二阶摄动法可得 $\underline{\sigma_{,i}^e}=\underline{D_0^e}\ \underline{B_0^e}\ \underline{V_i^e}+\underline{D_0^e}\ \underline{B_i^e}\ \underline{V_0^e}+\underline{D_i^e}\ \underline{B_0^e}\ \underline{V_0^e}$。因此可相应地得到 $\sigma_{x,i}^e$，$\sigma_{y,i}^e$和 $\tau_{xy,i}^e$的值，将其分别代入式(6.120)和(6.121)，并考虑到式(6.122)，则可求得 $\sigma_{1,i}^e$，$\sigma_{3,i}^e$和 $\tau_{\max,i}^e$的值。最后由式(6.125)～(6.127)可求得单元 e、f 的主应力及最大剪应力的互协方差[3]。若令 $e=f$，即为方差值。

6.4 典型问题的随机有限元方法

6.4.1 地下水流问题的随机有限元

地下水水流模型包含着许多随机因素，并受这些随机因素的制约和影响，从而具有一定程度的不确定性。所以，模型的解(如水头)也应当看作具有一定概率分布的随机函数。影响地下水数学模型不确定性的因素主要包括模型中出现的各种参数的不确定性、在模型定解条件(初始条件和边界条件)中包含的不确定性(有时边界条件本身就是一随机过程)、方程的源汇项的随机变化等。

结合摄动技术、待定系数法和有限元方法的摄动待定系数随机有限元法[23]已被应用于地下水的非稳定流分析。该方法可以避免求解地下水水头的一阶导数和二阶导数，提高了计算精度，对于一般的随机地下水问题均能给出地下水水头的随机特征，特别对随机变量数较少的随机问题特别有效。

如图 6.4 所示，假设承压含水层区域是一个边长为 a 米的正方形，左右边界为定水头边界，水头为 H_1(m)，上下边界为隔水边界，区域中心(x_0,y_0)有一个抽水井以流量 Q(m³/天)抽水，并假设承压含水层的导水系数为 T(m²/天)。

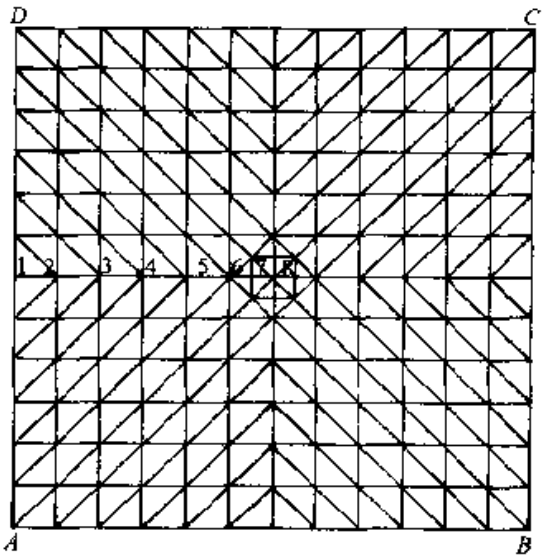


图 6.4　地下水水流有限元剖分图[23]

非稳定流定解问题[24]可归纳为

$$T\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+T\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}-Q\delta(x-x_0,y-y_0)=S\frac{\partial H}{\partial t}\quad (x,y)\in G,t>0 \tag{6.128}$$

$$H(x,y,0)=H_1 \tag{6.129}$$

$$H(x,y,t)\big|_{\overline{AD}}=H(x,y,t)\big|_{\overline{BC}}=H_1 \tag{6.130}$$

$$\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\overline{DC}}=\frac{\partial H}{\partial n}\bigg|_{\overline{AB}}=0 \tag{6.131}$$

式中，S 为无量纲变量。

在求解水头 H 时，设边界水头 H_1、导水系数 T、流量 Q、无量纲变量 S 为其基本随机变量，即 $H=f(H_1,T,Q,S)$，且变量之间相互独立。随机变量 H_1、T、Q、S 可分别表示为如下摄动格式：

$$H_1=\overline{H_1}+\varepsilon_1,T=\overline{T}+\varepsilon_2,Q=\overline{Q}+\varepsilon_3,S=\overline{S}+\varepsilon_4 \tag{6.132}$$

式中：$\overline{H_1}$、$\overline{T}$、$\overline{Q}$、$\overline{S}$ 分别为 H_1、T、Q、S 的均值；$\varepsilon_i(i=1,2,3,4)$为摄动量，可描述为均值为 0、方差分别为 $\sigma_{H_1}^2$、σ_T^2、σ_Q^2、σ_S^2 的随机场。

因此，地下水水头 H 在$\overline{H_1}$、$\overline{T}$、$\overline{Q}$、$\overline{S}$ 处的一阶 Taylor 展开式为

$$H=\overline{H}+\frac{\partial H}{\partial H_1}\bigg|_{(\overline{H_1},\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}\varepsilon_1+\frac{\partial H}{\partial T}\bigg|_{(\overline{H_1},\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}\varepsilon_2+\frac{\partial H}{\partial Q}\bigg|_{(\overline{H_1},\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}\varepsilon_3+\frac{\partial H}{\partial S}\bigg|_{(\overline{H_1},\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}\varepsilon_4 \tag{6.133}$$

令

$$\frac{\partial H}{\partial H_1}\bigg|_{(\overline{H_1},\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}=\varphi_1$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial T}\right|_{(\overline{H}_1,\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}=\varphi_2$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial Q}\right|_{(\overline{H}_1,\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}=\varphi_3$$

$$\left.\frac{\partial H}{\partial S}\right|_{(\overline{H}_1,\overline{T},\overline{Q},\overline{S})}=\varphi_4$$

则 H 的一阶 Taylor 展开式又可以表示为

$$H=\overline{H}+\varphi_1\varepsilon_1+\varphi_2\varepsilon_2+\varphi_3\varepsilon_3+\varphi_4\varepsilon_4 \tag{6.134}$$

因此，水头 H 的均值 $E[H]$ 为

$$E[H]=\overline{H}=f(\overline{H}_1,\overline{T},\overline{Q},\overline{S}) \tag{6.135}$$

若各基本变量之间统计独立，则水头 H 的方差 $\mathrm{Var}(H)$ 可以近似为

$$\mathrm{Var}(H)=\varphi_1^2\sigma_{H_1}^2+\varphi_2^2\sigma_T^2+\varphi_3^2\sigma_Q^2+\varphi_4^2\sigma_S^2 \tag{6.136}$$

将式(6.134)代入非稳定流定解方程，并比较每组随机变量的系数，可得方程组

$$\overline{T}\left(\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial y^2}\right)-\overline{Q}\delta(x-x_0,y-y_0)=\overline{S}\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} \tag{6.137}$$

$$\overline{T}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)=\overline{S}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} \tag{6.138}$$

$$\overline{T}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\overline{H}}{\partial y^2}\right)=\overline{T}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t} \tag{6.139}$$

$$\overline{T}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}\right)-\overline{Q}\delta(x-x_0,y-y_0)=\overline{S}\frac{\partial\varphi_3}{\partial t} \tag{6.140}$$

$$\overline{T}\left(\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial y^2}\right)=\overline{S}\frac{\partial\varphi_4}{\partial t}+\frac{\partial\overline{H}}{\partial t} \tag{6.141}$$

将式(6.134)代入初始条件式(6.129)，并对比随机变量的系数可得

$$\overline{H}|_{t=0}=\overline{H}_1 \qquad \varphi_1|_{t=0}=1 \qquad \varphi_i|_{t=0}=0 \qquad (i=2,3,4) \tag{6.142}$$

将式(6.134)代入边界条件式(6.130)和(6.131)，并对比随机变量的系数可得

$$\overline{H}|_{\Gamma=\overline{AD}+\overline{BC}}=\overline{H}_1 \qquad \varphi_1|_{\Gamma=\overline{AD}+\overline{BC}}=1 \qquad \varphi_i|_{\Gamma=\overline{AD}+\overline{BC}}=0 \qquad (i=2,3,4) \tag{6.143}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{H}}{\partial n}\right|_{\Gamma=\overline{DC}+\overline{AB}}=0 \qquad \left.\frac{\partial\varphi_i}{\partial n}\right|_{\Gamma=\overline{DC}+\overline{AB}}=0 \qquad (i=2,3,4) \tag{6.144}$$

如果用有限元法联合求解上述方程(6.137)～(6.144)，可以得到某一时刻某一节点的 $\overline{H}$、$\varphi_i(i=1,2,3,4)$。根据式(6.135)和(6.136)可以很容易地计算出地下水水头的均值和方差。计算过程用一般的地下水水流有限元模拟程序即可实现。

6.4.2 基坑边坡的可靠性分析

(1)各向同性体的局部破坏概率分析。

假设土体的破坏服从 Mohr-Coulomb 准则，内聚力 C 和内摩擦角 ϕ 应视为随

机场，可分别表示为 $C=\overline{C}(1+\varepsilon)$ 和 $\varphi=\overline{\phi}(1+\psi)$，其中 $\overline{C}$ 和 $\overline{\phi}$ 分别代表 C 和 ϕ 的均值。而随机部分 ε 和 ψ 均可模型化为零均值的连续平稳随机场。对 ε 和 ψ 进行局部平均离散和特征正交化后可得到随机向量 $\underline{\varepsilon}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n_3}\}^T$ 和 $\underline{\psi}=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n_3}\}^T$，其各分量互不相关。

可将随机向量 $\underline{\varepsilon}$、$\underline{\psi}$ 和 $\underline{\xi}$（可由 PSFEM 求得）合成为一个随机向量 $\underline{\eta}=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N\}^T=\{\underline{\xi}^T,\underline{\varepsilon}^T,\underline{\psi}^T\}^T$，其中 $N=n+n_3+n_4$。则 $\underline{\eta}$ 仍为零均值随机向量。若随机场 ε 和 ψ 统计独立，则可设随机向量 $\underline{\eta}$ 的各分量的互协方差矩阵中的元素为

$$\mathrm{Cov}(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) & \begin{cases}0<i\leqslant n\&0<j\leqslant n\\ n<i\leqslant n+n_3\&n<j\leqslant n+n_3\\ n+n_3<i\leqslant N\&n+n_3<j\leqslant N\\ \text{其它}\end{cases}\\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_{(i-n)},\varepsilon_{(j-n)})\\ \mathrm{Cov}(\psi_{(i-n-n_3)},\psi_{(j-n-n_3)})\\ 0\end{cases} \tag{6.145}$$

若忽略各向同性系统中单元的破坏方向，则可根据单元的应力圆与强度曲线的接近程度来计算该单元的破坏概率。若以 τ_f^e 来代表应力圆心距强度曲线的垂直距离，而以 $\tau_{\max}^e$（单元最大剪应力）来代表应力圆的半径，则单元的抗剪安全储备为 $Q_s^e=\tau_f^e-\tau_{\max}^e$。由单元主应力与强度特征之间的几何关系，可将其写为

$$Q_s^e=C\cos\phi+(\sigma_1^e+\sigma_3^e)\sin\phi/2-(\sigma_1^e-\sigma_3^e)/2 \tag{6.146}$$

显然，若 $Q_s^e\leqslant 0$，则表明单元 e 产生剪切破坏。因 C 和 φ 为随机变量，则 Q_s^e 应为随机变量。

按照 Taylor 级数形式将 Q_s^e 对随机向量 $\underline{\eta}$ 进行线性展开得 $Q_s^e=\overline{Q_s^e}+\sum_{i=1}^{N}Q_{s,i}^e\eta_i$，其中 $Q_{s,i}^e$ 为 Q_s^e 对 η_i 在 $\underline{\eta}$ 的零均值处的偏导数，而 $\overline{Q_s^e}$ 为均值部分。因此，可得期望值

$$E[Q_s^e]=\overline{Q_s^e}=\overline{C}\cos\overline{\phi}+(\overline{\sigma_1^e}+\overline{\sigma_3^e})\sin\overline{\phi}/2-(\overline{\sigma_1^e}-\overline{\sigma_3^e})/2 \tag{6.147}$$

因 $\underline{\xi}$、$\underline{\varepsilon}$ 和 $\underline{\psi}$ 统计独立，故 Q_s^e 和 Q_s^f 的互协方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Q_s^e,Q_s^f)&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}Q_{s,i}^eQ_{s,j}^f\mathrm{Cov}(\eta_i,\eta_j)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q_{s,\xi_i}^eQ_{s,\xi_j}^f\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)+\sum_{i=1}^{n_4}Q_{s,\varepsilon_i}^eQ_{s,\varepsilon_i}^f\mathrm{Var}(\varepsilon_i)\\&\quad+\sum_{i=1}^{n_3}Q_{s,\psi_i}^eQ_{s,\psi_i}^f\mathrm{Var}(\psi_i)\end{aligned} \tag{6.148}$$

式(6.146)对 $\underline{\xi}$、$\underline{\varepsilon}$ 和 $\underline{\psi}$ 在其零均值处的偏导分别为

$$Q_{s,\xi_i}^e=\{(\sigma_{1,i}^e+\sigma_{3,i}^e)\sin\overline{\phi}-(\sigma_{1,i}^e-\sigma_{3,i}^e)\}/2 \tag{6.149}$$

$$Q_{s,\varepsilon_i}^e=\cos\overline{\phi} \tag{6.150}$$

$$Q_{s,\psi_i}^e=-\overline{C}\sin\overline{\phi}+(\overline{\sigma_1^e}+\overline{\sigma_3^e})\cos\overline{\phi}/2 \tag{6.151}$$

式(6.148)中,若令 $e=f$,则为单元抗剪安全储备的方差值。

根据极限平衡观点,单元的安全系数可定义为

$$F_s^e = \frac{E[\tau_f^e]}{E[\tau_{\max}^e]} = \frac{\overline{C}\cos\overline{\phi} - (\overline{\sigma_1^e} + \overline{\sigma_3^e})\sin\overline{\phi}/2}{(\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})/2} \tag{6.152}$$

若 Q_s^e 服从正态分布,则单元 e 的可靠指标 β^e 和剪切破坏概率 P_f^e 可分别由下两式求得:

$$\beta^e = E[Q_s^e]/\{\mathrm{Var}(Q_s^e)\}^{1/2} \tag{6.153}$$

$$P_f^e = 1 - \Phi(\beta^e) \tag{6.154}$$

式中,$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

(2) 具确定性圆弧滑动面的各向同性体的总体破坏概率。

假设半径为 r 的最危险圆弧滑动面切穿了 n_e 个单元(如图 6.5 所示),则滑动面所切穿的单元 e 的抗剪强度可写为 $\tau_{\beta f}^e = C + \sigma^e\tan\phi$,其中 σ^e 为法向应力。若以 τ^e 来代表切向应力,则滑动面切穿的单元 e 的抗剪安全储备可定义为 $Q_s^e = \tau_{\beta f}^e - \tau^e$。单元 e 的法向应力、切向应力和主应力之间的几何关系如图 6.6 所示,故 $\sigma^e = (\sigma_1^e + \sigma_3^e)/2 + (\sigma_1^e - \sigma_3^e)\cos(2\theta^e)/2$,$\tau^e = (\sigma_1^e - \sigma_3^e)\sin(2\theta^e)/2$,其中 $\theta^e = \beta^e + \alpha^e$ 且 $\alpha^e = \tan^{-1}\{2\tau_{xy}^e/(\sigma_x^e - \sigma_y^e)\}/2$,而 β^e 为圆弧滑动面在单元 e 处的切线平均倾角。因而,Q_s^e 可化为

$$Q_s^e = C + \{(\sigma_1^e + \sigma_3^e) + (\sigma_1^e - \sigma_3^e)\cos(2\theta^e)\} \times \tan\phi/2 - (\sigma_1^e - \sigma_3^e)\sin(2\theta^e)/2 \tag{6.155}$$

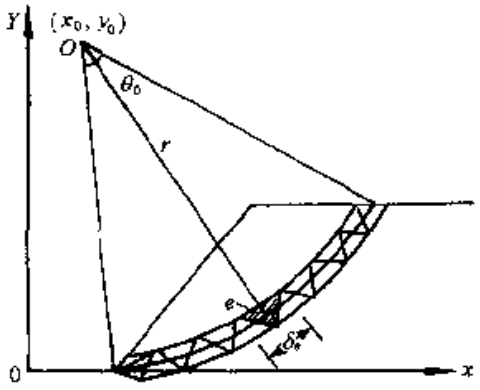


图 6.5 圆弧滑动面及其切穿的单元

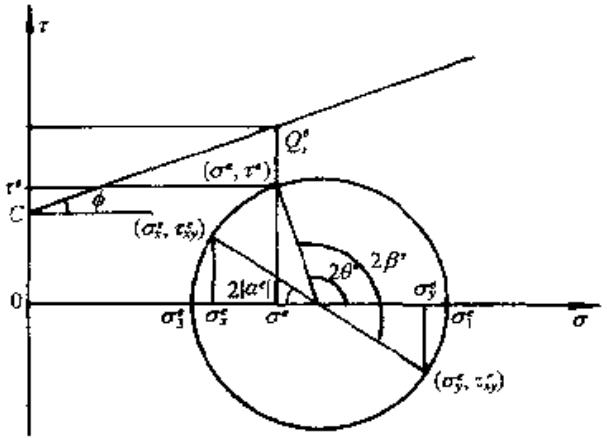


图 6.6 单元 e 的应力与安全储备

式中,θ^e 仅与随机向量 ξ 有关;因 θ^e 取决于单元 e 的应力场,Q_s^e 亦为随机变量。

将 Q_s^e 对随机向量 η 进行线性 Tylor 级数展开后,可求得 Q_s^e 的均值表达式

$$E[Q_s^e] = \overline{C_\beta} + \{(\overline{\sigma_1^e} + \overline{\sigma_3^e}) + (\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})\cos(2\,\overline{\theta^e})\} \times \tan\overline{\phi_\beta}/2 - (\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})\sin(2\,\overline{\theta^e})/2 \tag{6.156}$$

Q_s^e 和 Q_s^f 的互协方差可如式(6.148)进行计算,但此时 Q_s^e 的偏导数应为形式

$$Q^e_{s,\xi_i} = \{(\sigma^e_{1,i} + \sigma^e_{3,i})\tan\overline{\phi_\beta} + (\sigma^e_{1,i} - \sigma^e_{3,i}) \times (\tan\overline{\phi_\beta}\cos(2\overline{\theta^e}) - \sin(2\overline{\theta^e}))\}/2 - (\overline{\sigma^e_1} - \overline{\sigma^e_3})(\tan\overline{\phi_\beta}\sin(2\overline{\theta^e}) + \cos(2\overline{\theta^e}))\theta^e_i \tag{6.157}$$

$$Q^e_{s,c_e} = 1 \tag{6.158}$$

$$Q^e_{s,\phi_i} = \{(\overline{\sigma^e_1} + \overline{\sigma^e_3}) + (\overline{\sigma^e_1} - \overline{\sigma^e_3})\cos(2\overline{\theta^e})\}/(2\cos^2\overline{\phi}) \tag{6.159}$$

其中，θ^e 的均值及其对 ξ_i 的偏导数为

$$\overline{\theta^e} = \beta + \overline{\alpha^e} = \beta + \tan^{-1}\{2\overline{\tau^e_{xy}}/(\overline{\sigma^e_x} - \overline{\sigma^e_y})\}/2 \tag{6.160}$$

$$\theta^e_{,i} = \alpha^e_{,i} = \frac{(\overline{\sigma^e_x} - \overline{\sigma^e_y})\tau^e_{xy,i} - (\sigma^e_{x,i} - \sigma^e_{y,i})\overline{\tau^e_{xy}}}{(\overline{\sigma^e_x} - \overline{\sigma^e_y})^2 + 4\overline{\tau^e_{xy}}^2} \tag{6.161}$$

滑动面上的总体抗剪力矩 M_R、总体抗滑力矩 M_S 及总体抗剪安全储备 $Q_{s,\mathrm{Tol}}$ 可分别定义为

$$M_R = \sum_{e=1}^{n_e}\tau^e_{\beta f}r^2\delta_e \qquad M_S = \sum_{e=1}^{n_e}\tau^e r^2\delta_e \tag{6.162}$$

$$Q_{s,\mathrm{Tol}} = M_R - M_S = \sum_{e=1}^{n_e}(\tau^e_{\beta f} - \tau^e)r^2\delta_e \tag{6.163}$$

式中，δ_e 为滑动面切割单元 e 的长度。

$Q_{s,\mathrm{Tol}}$ 的均值与方差为

$$E[Q_{s,\mathrm{Tol}}] = \sum_{e=1}^{n_e}E[Q^e_s]r^2\delta_e \tag{6.164}$$

$$\mathrm{Var}(Q_{s,\mathrm{Tol}}) = \sum_{e=1}^{n_e}\sum_{f=1}^{n_e}\delta_e\delta_f r^4\mathrm{Cov}(Q^e_s, Q^f_s) \tag{6.165}$$

式中，$\mathrm{Cov}(Q^e_s, Q^f_s)$ 为被切穿的单元 e 和 f 的抗剪安全储备的互协方差。

以某边坡稳定分析为例说明其计算过程[34]。土坡的尺寸如图 6.7 所示，其地层主要为粘土层。该土坡的土体物理力学参数的统计特征如表 6.5 所示，其中主要将弹性模量 E、Poisson 比 υ、容重 γ、内聚力 C 和内摩擦角 ϕ 考虑为随机场。

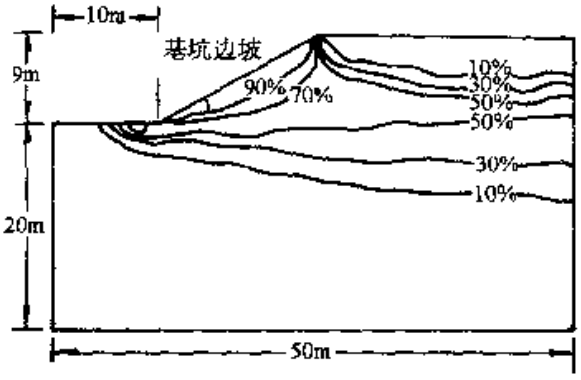


图 6.7　某土坡破坏概率等值线图

表 6.5　土体物理力学参数的统计特征

参数	分布	均值	方差	偏度
E	正态	208kPa	1520kPa^2	0.31m
υ	正态	0.5	0	0.34m
C	正态	25.5kPa	6.2kPa^2	0.32m
ϕ	正态	18.6°	4.5°	0.38m
γ	正态	1.78g/m^3	0	0.30m

土坡的可靠性可由 PSFEM 计算得到，其原理如前所述。有限元网格由三角形离散单元组成，而随机场网格则由四边形离散单元组成。每一个随机场单元包含着 2～3 个有限元单元。计算了各单元的局部破坏概率，其结果以等值线方式示于图 6.7。

图 6.7 表明坡脚与坡顶间近坡面的土体单元的破坏概率远大于其它位置上的单元。而基坑深部单元的破坏概率近于 0。由图 6.7 还可清晰地判断出该基坑边坡的最危险圆弧滑动面的位置。

6.4.3　顺层岩质边坡可靠性分析

本节研究用摄动随机有限元分析顺层岩质边坡的稳定性及可靠性的方法。

(1)基于摄动方法及 Mohr-Coulum 破坏准则的顺层岩质边坡可靠性分析。

前述可知，可以通过摄动随机有限元方法分析得到边坡主应力场的二阶统计特征(均值，方差或协方差)，再结合边坡岩体的强度特征即可分析边坡的可靠性。而具有顺层滑动可能性的边坡的稳定性主要受到层间滑动带的性质控制，就边坡整体而言它具备了半面剪切破坏条件。设层间剪切带与水平面的夹角为 β，其强度参数为粘聚力 C_β、内摩擦角 ϕ_β。假设层间剪切带服从 Mohr-Coulomb 破坏准则且材料完全不能承受拉伸，把 C_β 和 ϕ_β 视为具有随机扰动性的随机变量，可分别表示为 $C_\beta=\overline{C_\beta}(1+\varepsilon)$、$\phi_\beta=\overline{\phi_\beta}(1+\psi)$，其中$\overline{C_\beta}$、$\overline{\phi_\beta}$分别为 C_β、ϕ_β 的均值，即确定性部分，而随机部分 ε、ψ 均可以模型化为零均值的连续平稳随机场。分别对随机场 ε、ψ 进行局部平均离散和特征正交化，可得到各分量互不相关的随机向量 $\underset{\sim}{\varepsilon}=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n4}\}^T$，$\underset{\sim}{\psi}=\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_{n5}\}^T$。则随机向量 $\underset{\sim}{\varepsilon}$或 $\underset{\sim}{\psi}$各分量的互相关函数为

$$E[\varepsilon_i\varepsilon_j]=\mathrm{Cov}(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=\begin{cases}\mathrm{Var}(\varepsilon_i) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{6.166}$$

$$E[\psi_i\psi_j]=\mathrm{Cov}(\psi_i,\psi_j)=\begin{cases}\mathrm{Var}(\psi_i) & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \tag{6.167}$$

将随机向量 $\underset{\sim}{\varepsilon}$，$\underset{\sim}{\psi}$及前述影响随机有限元计算输出(系统响应)的合成随机向量 $\underset{\sim}{\xi}$合为一个随机向量 $\underset{\sim}{\eta}=\{\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_N\}^T=\{\underset{\sim}{\xi}^T,\underset{\sim}{\varepsilon}^T,\underset{\sim}{\psi}^T\}^T$，其中 $N=n+n4+n5$。显然 $\underset{\sim}{\eta}$仍是零均值的随机向量。若随机场 ε，ψ 是相互独立的，即 $\underset{\sim}{\varepsilon}$，$\underset{\sim}{\psi}$的互相关函数为零，

则可以设随机向量 $\underset{\sim}{\eta}$ 的分量的互协方差矩阵中的元素为

$$\mathrm{Cov}(\eta_i,\eta_j)=\begin{cases}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j) & i\leqslant n \text{ 且 } j\leqslant n\\ \mathrm{Cov}(\varepsilon_{(i-n)},\varepsilon_{(j-n)}) & n<i\leqslant n+n_4 \text{ 且 } n<j\leqslant n+n_4\\ \mathrm{Cov}(\psi_{(i-n-n_4)},\psi_{(j-n-n_4)}) & i>n+n_4 \text{ 且 } j>n+n_4\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{6.168}$$

根据 Coulomb 定律，可知剪切带上单元 e 的剪切强度为 $\tau^e_{\beta f}=C_\beta+\sigma^e\mathrm{tg}\phi_\beta$，其中 σ^e 为剪切带上单元 e 的法向应力，则沿剪切带上单元 e 的抗剪安全储备可定义为

$$Q^e_s=\tau^e_{\beta f}-\tau^e \tag{6.169}$$

式中，τ^e 为剪切带上单元 e 的切向应力。

由于单元主应力方向沿边坡层间剪切带是变化的，尽管剪切带产状在边坡岩体一定范围内可认为是稳定的，层间剪切带与沿该带上单元主应力之夹角仍是在不同部位上有很大变化的。层间剪切带上单元 e 的正应力和剪应力大小可根据其主应力公式表示成 $\sigma^e=(\sigma^e_1+\sigma^e_3)/2+(\sigma^e_1-\sigma^e_3)\cos(2\theta^e)/2$ 和 $\tau^e=(\sigma^e_1-\sigma^e_3)\sin(2\theta^e)/2$，其中 $\theta^e=\beta+\alpha^e$ 且 $\alpha^e=\mathrm{tg}^{-1}\{2\tau^e_{xy}/(\sigma^e_x-\sigma^e_y)\}/2$。因此，可得剪切带单元 e 的抗剪安全储备

$$Q^e_s=C_\beta+\frac{1}{2}\{(\sigma^e_1+\sigma^e_3)+(\sigma^e_1-\sigma^e_3)\cos(2\theta^e)\}\times\mathrm{tg}\phi_\beta-\sigma^e_1-\sigma^e_3\sin(2\theta^e) \tag{6.170}$$

式中，θ^e 是只与随机向量 $\underset{\sim}{\xi}$ 有关的随机向量，因为它只与单元 e 的应力场有关。

由式(6.169)可知若 $Q^e_s\leqslant 0$ 就意味着该单元应力状态超过了破坏标准，则岩体发生剪切破坏。因为剪切单元主应力和剪切单元强度特性 C_β、ϕ_β 都是随机变量，故单元的安全储备 Q^e_s 亦为随机变量。将 Q^e_s 对随机向量 $\underset{\sim}{\eta}$ 进行 Taylor 展开，取到线性项为止，对其两边求均值可得层间剪切带上单元 e 抗剪安全储备的均值为

$$E[Q^e_s]=\overline{C_\beta}+\frac{1}{2}\{(\overline{\sigma^e_1}+\overline{\sigma^e_3})+(\overline{\sigma^e_1}-\overline{\sigma^e_3})\cos(2\overline{\theta^e})\}\times\mathrm{tg}\,\overline{\phi_\beta}$$
$$-\frac{1}{2}(\overline{\sigma^e_1}-\overline{\sigma^e_3})\sin(2\overline{\theta^e}) \tag{6.171}$$

式中，$\overline{\sigma^e_1}$、$\overline{\sigma^e_3}$ 为 σ^e_1、σ^e_3 的均值，由式(6.171)确定。考虑到随机向量 $\underset{\sim}{\xi}$、$\underset{\sim}{\varepsilon}$、$\underset{\sim}{\psi}$ 的互不相关性，单元 e、f 抗剪安全储备的互协方差为

$$\mathrm{Cov}(Q^e_s,Q^f_s)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}Q^e_{s,i}Q^f_{s,j}\mathrm{Cov}(\eta_i,\eta_j)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}Q^e_{s,\xi_i}Q^f_{s,\xi_j}\mathrm{Cov}(\xi_i,\xi_j)+\sum_{i=1}^{n_4}Q^e_{s,\varepsilon_i}Q^f_{s,\varepsilon_i}\mathrm{Var}(\varepsilon_i)$$
$$+\sum_{i=1}^{n_5}Q^e_{s,\psi_i}Q^f_{s,\psi_i}\mathrm{Var}(\psi_i) \tag{6.172}$$

式中，Q_s^e 对 η 在均值处偏导数分别为

$$Q_{s,\xi_i}^e = \frac{1}{2}(\sigma_{1,i}^e + \sigma_{3,i}^e)\mathrm{tg}\,\overline{\phi_\beta} + \frac{1}{2}(\sigma_{1,i}^e - \sigma_{3,i}^e)$$
$$\times (\mathrm{tg}\,\overline{\phi_\beta}\cos(2\,\overline{\theta^e}) - \sin(2\,\overline{\theta^e})) - (\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})$$
$$\times (\mathrm{tg}\,\overline{\phi_\beta}\sin(2\,\overline{\theta^e}) + \cos(2\,\overline{\theta^e}))\theta_i^e \tag{6.173}$$

$$Q_{s,c_i}^e = 1 \tag{6.174}$$

$$Q_{s,\phi_i}^e = \frac{1}{2\cos^2\overline{\phi_\beta}}\{(\overline{\sigma_1^e} + \overline{\sigma_3^e}) + (\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})\cos(2\,\overline{\theta^e})\} \tag{6.175}$$

式中，θ^e 的均值为

$$\overline{\theta^e} = \beta + \overline{\alpha^e} = \beta + \frac{1}{2}\mathrm{tg}^{-1}\{2\,\overline{\tau_{xy}^e}/(\overline{\sigma_x^e} - \overline{\sigma_y^e})\}$$

θ^e 对 ξ_i 在均值处偏导数为

$$\theta_i^e = \alpha_i^e = \frac{(\overline{\sigma_x^e} - \overline{\sigma_y^e})\tau_{xy,i}^e - (\sigma_{x,i}^e - \sigma_{y,i}^e)\,\overline{\tau_{xy}^e}}{(\overline{\sigma_x^e} - \overline{\sigma_y^e})^2 + 4\,\overline{\tau_{xy}^e}^2}$$

而 $\sigma_{1,i}^e$ 和 $\sigma_{3,i}^e$ 的意义及算法可通过摄动随机有限元计算给出。在式(6.172)中若令单元号 $e=f$，则可得到单元安全储备的方差值。

根据极限平衡的观点，求得层间剪切带内单元 e 的安全系数为

$$F_s^e = \frac{E[\tau_{\beta f}^e]}{E[\tau^e]} = \frac{\overline{C_\beta} + \{(\overline{\sigma_1^e} + \overline{\sigma_3^e}) + (\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})\cos(2\,\overline{\theta^e})\}\mathrm{tg}\,\overline{\phi_\beta}/2}{(\overline{\sigma_1^e} - \overline{\sigma_3^e})\sin(2\,\overline{\theta^e})/2} \tag{6.176}$$

上述各公式中单元应力的均值均由摄动随机有限元计算给出。

假若层间剪切带内单元 e 的安全储备 Q_s^e 服从正态分布，可按下式求得单元可靠指标 β^e 和剪切破坏概率 P_f^e（$\Phi(\cdot)$标准正态分布函数）即

$$R^{eee1/2} \text{ 且 } P_f^e = 1 - \Phi(\beta^e) \tag{6.177}$$

就边坡整体而言，上部岩体和下部岩体通过层间剪切带而连接在一起，假定层间剪切带穿过 n_e 个单元，则作用在该带上的总体抗滑力为 $R_{抗} = \sum_{e=1}^{n_e}\tau_{\beta f}^e\delta_e$，而总体下滑力为 $R_{下} = \sum_{e=1}^{n_e}\tau^e\delta_e$。因此，层间剪切带的总体抗滑安全储备可定义为

$$Q_{s总} = R_{抗} - R_{下} = \sum_{e=1}^{n_e}(\tau_{\beta f}^e - \tau^e)\delta_e = \sum_{e=1}^{n_e}Q_s^e\delta_e \tag{6.178}$$

式中：Q_s^e 即为剪切带内单元 e 的抗剪安全储备；δ_e 为滑动带中心线切割单元 e 的长度。因此，$Q_{s总}^e$ 的均值和方差为

$$E[Q_{s总}] = \sum_{e=1}^{n_e}E[Q_s^e]\delta_e \tag{6.179}$$

$$\mathrm{Var}(Q_{s总}) = \sum_{e=1}^{n_e}\sum_{f=1}^{n_e}\delta_e\delta_f\mathrm{Cov}(Q_s^e, Q_s^f) \tag{6.180}$$

若 $Q'_{s总}$ 服从正态分布，同样可按照式(6.177)计算总体可靠度指标 $\beta_{总}$ 和总体破坏概率 $P_{f总}$。

(2)实例分析。

峨眉河对门山西南坡的顺层滑坡发生于1996年农历6月13日。该滑坡坡角约为30°，后缘高程573.3m前缘高程484.9m，剪出口高程486.5m，滑坡主轴长124m，滑体宽125m、厚2.2m，滑坡体积约为 $2.7\times10^4m^3$。对门山的岩性为白垩系上统灌口组紫红、砖红色粉砂岩，层厚2～4m，岩层产状约为231°∠27°；每隔1～2层夹一层厚约0.4～0.7m的泥质软弱层。受区域地质构造影响，发育有两组主要节理，产状分别为81.5°∠56.2°和22.5°∠56°。滑坡体上窄下宽，呈舌形。由于沿软弱面下滑时受阻而在滑体中下部形成翘曲。该滑坡产生的主要原因是当地农民在坡体下部的不断采石，使得坡体的下部支撑力不断降低而破坏了沿软弱夹层的抗滑力和下滑力之间的平衡，而滑动之前当地又连降暴雨，雨水通过岩体发育的节理网络渗入泥质软弱层，降低了其强度，从而沿着泥质软弱层发展成为顺层岩质滑坡。对该滑坡岩样的部分物理力学参数做了试验，统计结果表6.6所示。

徐建平等[35]利用弹塑性摄动随机有限元分析程序PSFE2DE_QS，并考虑两种岩石材料弹性模量、Poisson比、容重、内聚力和内摩擦角都具有空间随机变化的特征即随机场的特征，对该边坡进行了可靠性分析。

图6.8和6.9分别为有限元网格单元和随机场网格单元的划分方案。有限元网格单元采用三角形离散单元，共划分成93个节点、153个单元，其中粉砂岩和泥质软弱层为133个和20个单元；同时，随机场网格单元采用四边形离散单元，每个四边形的随机场单元包含有2～3个三角形的有限元单元，共划分出71个随机场单元，其中粉砂岩和泥质软弱层为61个和10个单元。泥质软弱层厚度取为0.3m。

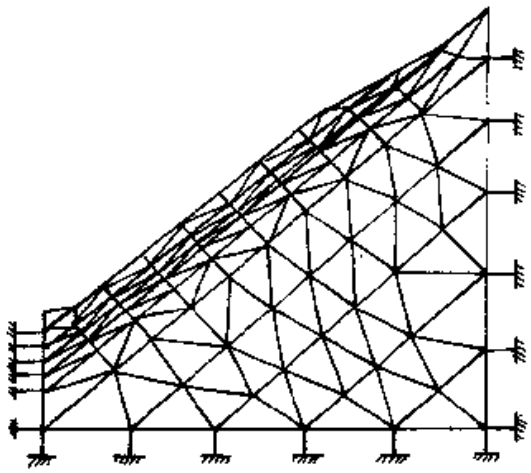


图6.8 有限元网格单元划分

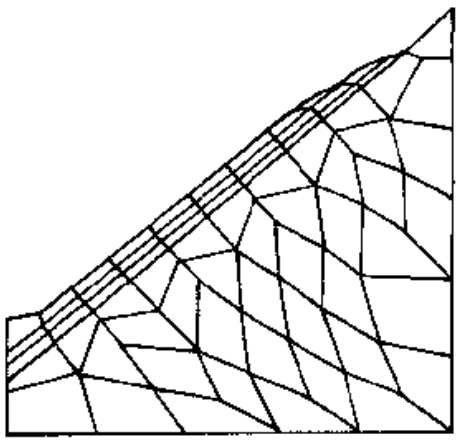


图6.9 随机场网格单元划分

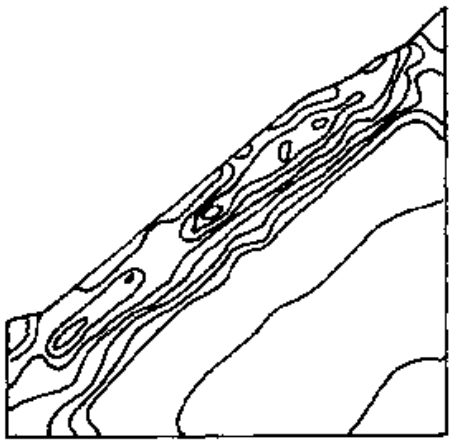


图 6.10　边坡破坏概率等值线

最后，边坡各单元破坏概率的结果以等值线的形式绘于图 6.10。表 6.7 给出了该顺层岩质边坡的整体可靠性分析结果。

表 6.6　对门山顺层滑坡岩体物理力学参数统计试验结果

粉砂岩	E	μ	C	ϕ	r	泥质软弱层	E	μ	C	ϕ	r
分布	近似正态	正态	正态	正态	正态	分布	近似正态	正态	正态	正态	正态
均值	7.75×10^3	0.20	1.50	32.0	0.0235	均值	1.2×10^3	0.25	0.02	12.0	0.0255
方差	0.17×10^3	0.019	0.063	1.31	0.0004	方差	0.26×10^3	0.022	0.007	0.92	0.00082
偏度	3.0	1.0	2.0	2.0	0.2	偏度	3.0	1.0	2.0	2.0	0.2

注：E、C 的单位为 MPa，ϕ 的单位为度，r 的单位为 MPa/m。

表 6.7　摄动随机有限元法的边坡可靠性分析结果

软弱层滑动带	整体安全系数	整体安全储备均值	整体安全储备方差	整体破坏概率
	1.44	3.60MPa	50.35MPa^2	30.6%

分析表明，该顺层滑坡的整体安全系数虽然达到 1.44，但是其整体破坏概率高达 30.6%，因此该边坡是不稳定的。同时，还采用 Monte-Carlo 模拟与常规有限元相结合的分析方法（即模拟有限元法，Monte-Carlo FEM）对该边坡可靠性进行了分析，结果如表 6.8 所示。

表 6.8　Monte-Carlo 有限元法的边坡可靠性分析结果

模拟次数	10	20	50	100
泥质软弱层的安全系数	1.56	1.51	1.47	1.47
边坡整体破坏概率	41.7%	35.2%	32.9%	32.9%

对比表明，用摄动随机有限元法进行顺层边坡可靠性分析的方法是可行的。事实上，模拟次数越大，结果就越逼近真值，但同时数据处理量也将显著加大。而只需

做一次摄动随机有限元运算就能够得到较为可靠的结果，这是模拟有限元法所不能比拟的。

6.5 动力随机有限元方法

6.5.1 土体地震反应分析的随机有限元法

(1)水平土层地震反应分析方法。

1) 随机有限元计算模式。

先给出水平土层地震反应分析的随机有限元计算模式。

考虑图 6.11 所示的水平成层地基。取单位面积土柱作一维问题进行处理。假定有地震作用垂直向上传播的水平剪切波，土层发生水平剪切振动，则时域内运动方程可表示为

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = -[M]\{J_X\}\ddot{x}_g(t) \tag{6.181}$$

式中：$[M]$、$[C]$和$[K]$分别为对角质量阵、对角阻尼阵和对角刚度阵；$\{J_X\}$为水平荷载指示向量；$\ddot{x}_g(t)$为水平地震加速度输入。

为问题分析的简化起见，现将 $\ddot{x}_g(t)$看作确定性的地震历时曲线。利用 Fourier 变换，可将式(6.181)转化为频域内方程，即

$$[H]\{Y\} = -[M]\{J_X\}\ddot{y}_g(\omega) \tag{6.182}$$

式中：频响函数$[H]=[K]-\omega^2[M]+i\omega[C]$，$i=\sqrt{-1}$；$\{Y\}$是$\{X\}$的 Fourier 变换；$\ddot{y}_g(\omega)$是 $\ddot{x}_g(t)$的 Fourier 变换。

假定土的质量密度、动剪切模量或阻尼随深度呈随机状态而变化，亦即有随机场 $m(z)$、$G(z)$、$c(z)$。通过局部平均处理可获得每一分层局部区域内平均的统计量，则对第 i 层土，可设其动力参数的随机变量为

$$\left.\begin{aligned} m_i &= m_{0i}(1 + \Omega_{m_i}\alpha_i) \\ G_i &= G_{0i}(1 + \Omega_{G_i}\alpha_i) \\ c_i &= c_{0i}(1 + \Omega_{c_i}\alpha_i) \end{aligned}\right\} \tag{6.183}$$

式中：m_{0i}、G_{0i}和 C_{0i}分别为第 i 层土的质量、动剪切模量和阻尼的平均值；Ω_{mi}、Ω_{Gi}和 Ω_{ci}为相应的变异系数；α_i 为服从标准正态分布 $N(0,1)$的随机变量，其均值为零，方差为 1。

将式(6.183)代入式(6.181)，这时$[M]$、$[K]$和$[C]$矩阵均为随机矩阵。式(6.182)中的$[H]$阵也是随机矩阵。可见，尽管输入 $\ddot{x}_g(t)$是一确定性历时曲线，但反应过程$\{X\}$则是不确

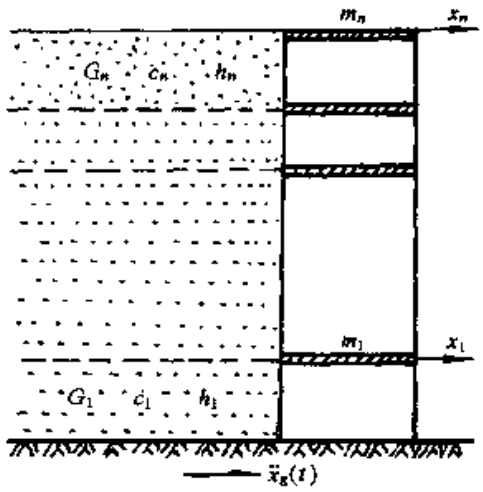


图 6.11 土层计算模型

定的。

按 Taylor 级数将式(6.181)中的随机矩阵在各随机变量的均值处展开到二阶为止，则

$$\left.\begin{aligned}
[M] &= [M]_0 + \sum_{i=1}^{n}[M]_i'\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[M]_{ij}''\alpha_i\alpha_j \\
[K] &= [K]_0 + \sum_{i=1}^{n}[K]_i'\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[K]_{ij}''\alpha_i\alpha_j \\
[C] &= [C]_0 + \sum_{i=1}^{n}[C]_i'\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[C]_{ij}''\alpha_i\alpha_j \\
[Y] &= [Y]_0 + \sum_{i=1}^{n}[Y]_i'\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}[Y]_{ij}''\alpha_i\alpha_j
\end{aligned}\right\} \tag{6.184}$$

以上各式中$[M]$、$[K]$和$[C]$的一阶导数可以容易求得，而其二阶导数全为零，故而其计算过程大大简化。

将式(6.184)代入式(6.182)，按等式两边的同阶量排列，到二阶为止，可得到如下的递推方程：

$$[H]_0\{Y\}_0 = -[M]_0\{J_X\}\ddot{y}_g(\omega) \tag{6.185}$$

$$[H]_0\{Y\}_i' + [H]_i'\{Y\}_0 = -[M]_i'\{J_X\}\ddot{y}_g(\omega) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{6.186}$$

$$[H]_0\{Y_{ij}''\} + 2[H]_i'\{Y_j'\} + 2[H]_j'\{Y\}_i'(1 - \delta_{ij}) = \{0\} \quad (i,j = 1,2,\cdots,n) \tag{6.187}$$

式中，δ_{ij}为 Krnecker-δ 算子。显然，以上各式求解时只需一次性对$[H]_0$求逆，而其它只是矩阵相乘的问题。

2) 随机有限元的求解。

首先用快速 Fourier 变换将 $\ddot{x}_g(t)$变换为离散的 $\ddot{y}_g(\omega)$，在任意第 s 个离散点 ω_s 处，求解式(6.185)得到$\{Y(\omega_s)\}$。代入式(6.186)求解 n 次得到$\{Y(\omega_s)\}_i'$，$(i=1,2,\cdots,n)$。再代入式(6.187)求解 n^2，得到$\{Y(\omega_s)\}_{ij}''$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$。这样，在 ω_s 处各土层相对位移响应的 Fourier 变换为

$$\{Y(\omega_s)\} = \{Y(\omega_s)\}_0 + \sum_{i=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_i'\alpha_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_{ij}''\alpha_i\alpha_j \tag{6.188}$$

同样，绝对加速度响应的 Fourier 变换为

$$\{A(\omega_s)\} = \{J_X\}\ddot{y}_g(\omega_s) - \omega_s^2\{Y(\omega_s)\} \tag{6.189}$$

土层剪应变的 Fourier 变换为

$$\{\Gamma(\omega_s)\} = [T]\{Y(\omega_s)\} \tag{6.190}$$

其中，$[T]$为位移-应变转换矩阵。其它反应统计量也可类似地得出。

对式(6.188)取数学期望得到相对位移响应的均值为

$$E[\{Y(\omega_s)\}] = \{Y(\omega_s)\}_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_{ij}''E[\alpha_i\alpha_j] \tag{6.191}$$

当只计入随机变量的二阶矩时，相对位移响应的方差为

$$V[Y(\omega_s)]=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_i\{Y(\omega_s)\}_j^T E[\alpha_i\alpha_j] \tag{6.192}$$

如果进行单元划分时，土层的层厚比较大，而不同土层间参数的相关性可忽略时，则有 $E[\alpha_i\alpha_j]=0$。而当 $i\neq j$ 时，上式两式可简化为

$$E[\{Y(\omega_s)\}]=\{Y(\omega_s)\}_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_n^* \tag{6.193}$$

$$V[\{Y(\omega_s)\}]=\sum_{i=1}^{n}\{Y(\omega_s)\}_i\{Y(\omega_s)\}_i^T \tag{6.194}$$

同样地，由式(6.189)和(6.190)也可求得绝对加速度和土层剪应变的均值和方差。

对 $\ddot{y}_g(\omega)$的每一离散点重复进行上述计算，动力响应的均值和方差频响曲线(或称谱曲线)也可直接由式(6.183)和(6.184)得出。通过上述两条谱曲线可以了解到动力响应在各频率分量上的平均幅值和离散程度。另外，通过快速 Fourier 逆变换，也可得到时域内的响应均值和方差曲线。

为了从整体上对响应的变异程度有所判断，应用 Parsevel 恒等式计算第 i 层土的相对位移 $x_i(t)$的均方响应 $\sigma_{x_i}^2$的均值，即

$$E[\sigma_{x_i}^2]=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}|E[y_i(\omega_s)]|^2 \tag{6.195}$$

式中，p 为频率离散点总数。而均方响应 $\sigma_{x_i}^2$的方差为

$$S_{x_i}^2=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{p}|V[y_i(\omega_s)]| \tag{6.196}$$

此时，均方响应的变异系数为

$$\Omega_{x_i}=\sqrt{S_{x_i}^2/E[\sigma_{x_i}^2]} \tag{6.197}$$

均方响应的变异系数对每一层土是不变的，而由标准差谱曲线与均值谱曲线之比得到的变异系数谱曲线在不同频率点上则有不同的值，故而很难从整体上判断动力响应的变异程度。对某一层土，如果 Ω_{x_i}愈大，则动力响应 $x_i(t)$的变异性也愈大，而其离散程度比较高。

3) 等价线性化迭代模式。

以上是针对线性系统计算的。事实上，土的动剪切模量 G 和阻尼比 ξ 与施加的动剪应变幅 γ_p 存在明显的非线性关系。一般可用 Hardin-Drnevich 双曲线模型来描述这一非线性关系。假定各层土动剪切模量均值、阻尼比均值与循环剪应变均值满足某一函数关系，再进一步考虑变异系数 Ω_G 和 Ω_ξ 随剪应变幅 γ_p的变化来模拟 G-γ_p 和 ξ-γ_p 曲线在不同区间具有不同的离散程度。图 6.12 给出所采用的均值曲线，图 6.13 是其变异系数曲线。需要指出，变异曲线可根据现有的试验点离散情况假定为分段直线来模拟，当然也可假定为其它曲线。

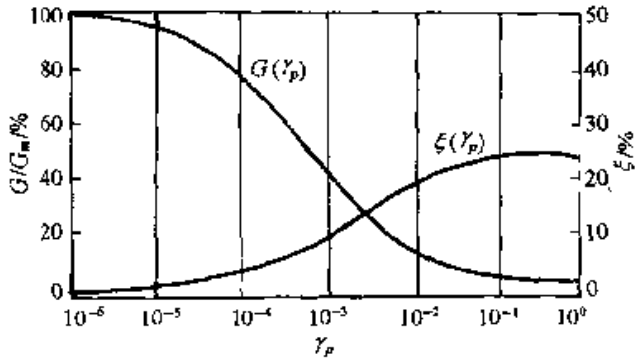


图 6.12 动剪切模量和
阻尼比均值曲线

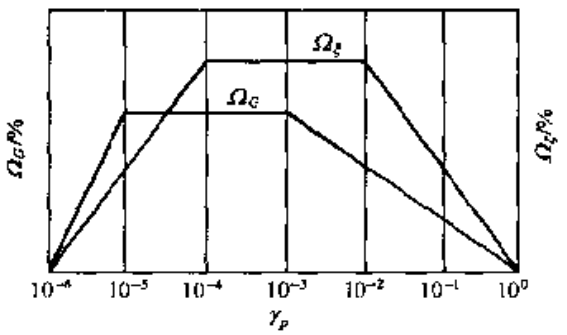


图 6.13 动剪切模量和阻尼比
变异系数曲线

在进行迭代计算时，首先对各层土大致估计一组均值剪切模量、阻尼比和各自的变异系数，进行线性系统随机有限元分析。与式(6.195)相同，计算每层土动剪应变的均方响应均值 $E(\sigma_\gamma^2)$。由于土层强烈的滤波作用，故可假定剪应变响应为一窄带过程。

等价均匀循环剪应变幅值为

$$\gamma_p = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{E[\sigma_\gamma^2]} \tag{6.198}$$

利用图 6.13 可以确定新的平均值和变异系数，重复进行线性系统随机有限元计算。经过多次循环迭代，直到平均剪切模量和阻尼比前后两次迭代误差小于规定精度为止。最后计算收敛的等价线性系统的各种均值和方差反应。

吴再光等[38,40]用以上提出的土参数随机有限元的随机等价线性化法对一实例进行了计算。考虑一水平成层地基，共 28m 深，计算时将其分成 7 层，每层土厚度为 4m，超过一般要求的相关距离 $\delta=3$m。土的密度为 $2t/m^3$。各层土的最大阻尼比均为 $\xi=28\%$，参考剪应变取 $\gamma_R=2.5\times10^{-4}$，最大剪切模量系数 K_m 取 65。图 6.13 中剪切模量最大变异系数取 $\Omega_G=15\%$，阻尼比最大变异系数取 $\Omega_\xi=20\%$，质量变异系数取 $\Omega_m=5\%$。

确定性地震输入如图 6.14 所示，为美国 El Centro 地震波前 10s，时间间隔 $\Delta t=0.02$s，最大加速度调整到 $1.25m/s^2$，其它保持不变。

取各层土的阻尼系数 $c_i=\xi_i m_i\omega_1+\xi_i k_i/\omega_1$，$k_i=G_i/h_i$，而 ω_1 为土层振动频率基频。质量、刚度阵的形成同一般土动力学计算方法。

下面给出随机有限元法的计算结果及其分析。图 6.15 为表层土(第 7 层)输出相对位移的均值和标准差幅值谱曲线。可以看出，该土层振动分量以 ω 在 8～10 rad/s的范围内的分量为主。当均值较大时，其方差也较大，也就是其离散性较大。图 6.16 为表层土输出绝对加速度 $a_7(t)$的均值历时曲线和标准差历时曲线。可以看出，顶层加速度比输入加速度放大 3 倍左右。由标准差曲线可知，当均值响应

较大时，标准差也大，最大处标准差与均值之比可达 16%。而在输入参数中，剪切模量最大变异系数为 15%，阻尼比最大变异系数为 20%。可见，动力响应的变异性与输入参数的变异性具有同一数量级。图 6.17 为均值加减 3 倍标准差作出的历时曲线。图 6.17 为在图 6.16 中截取了 $t=4.8\sim6.8$s 的一段，可以看出，动力响应的离散带是相当宽的。

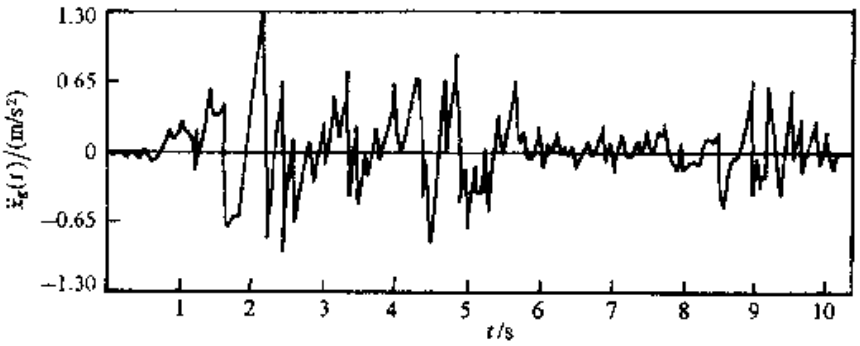


图 6.14　输入地震加速度历时曲线

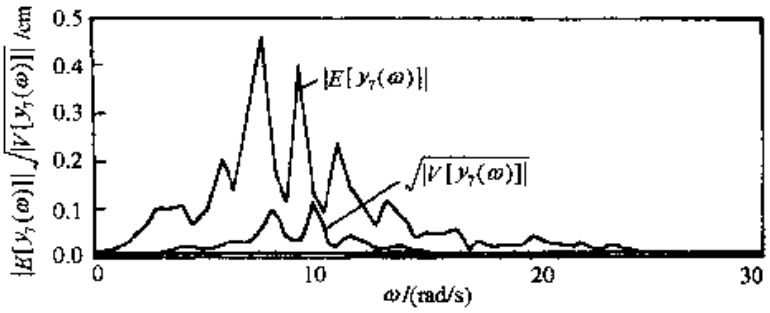


图 6.15　表层相对位移响应谱曲线

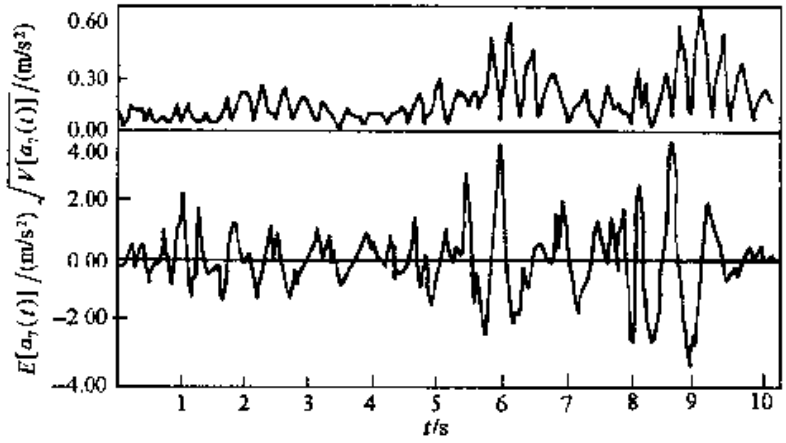


图 6.16　表层绝对加速度响应历时曲线

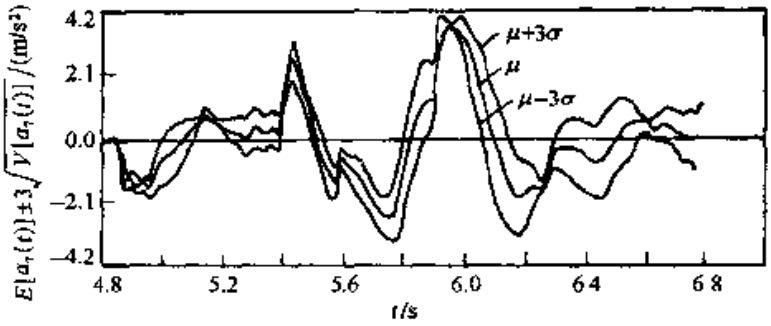


图 6.17　绝对加速度标准差历时曲线

表 6.9 是按式(6.195)和(6.197)计算的各土层绝对加速度、相对位移的均方响应均值和变异系数。显然，土层动力响应变异系数沿深度分布变化不大，相对位移变异性比绝对加速度变异性略大。

表 6.9　绝对加速度均值及变异系数

分层	1	2	3	4	5	6	7
深度/m	−24.0	−20.0	−16.0	−12.0	−8.0	−4.0	0.0
$E[\sigma_a]/(m/s^2)$	0.394	0.574	0.753	0.918	1.060	1.150	1.190
$\Omega_a/\%$	13.8	16.3	18.1	18.8	18.9	19.1	19.1
$E(\sigma_x)/cm$	0.23	0.47	0.70	0.90	1.05	1.14	1.18
$\Omega_x/\%$	21.5	21.3	21.3	21.3	21.2	21.2	21.1

由上面的分析可知，由土的动力参数的变异性引起的土层地震反应的变异性可能超过土参数本身的变异性，并且动力响应的变异性在整个土层中都是比较大的。

(2)永久位移的随机有限元分析方法。

现以土石坝地震的永久变形为例对地震的随机性引起永久位移的变异性进行分析。

如图 6.18 所示，将实际的土石坝简化为水平剪切振动的一维集中质量模型(水平剪切框架)，每层质量对应于土石坝中相应的梯形断面总质量，层间刚度为土石坝相应高层的剪切刚度[38]。假定已经拟静力稳定分析确定出土石坝的最危险滑动面和相应的临界地震加速度 A_c，这时在集中质量框架模型的第 j 层和 $j+1$ 层之间增加一塑性滑动单元。

按照解耦近似的原则，在地震反应分析中认为剪切框架是保持连续的 n 层弹性振动，得出滑动单元以上的各层绝对加速度平均时程曲线。在永久滑移计算时，假定一旦滑动单元以上各层平均加速度超过 A_c，则以上的部分将产生有限的滑移。将平均加速度时程曲线中超过 A_c 的各部分引起的永久滑移叠加，并考虑滑动的单方向性，则可得出土石坝沿滑动面滑动的总位移。

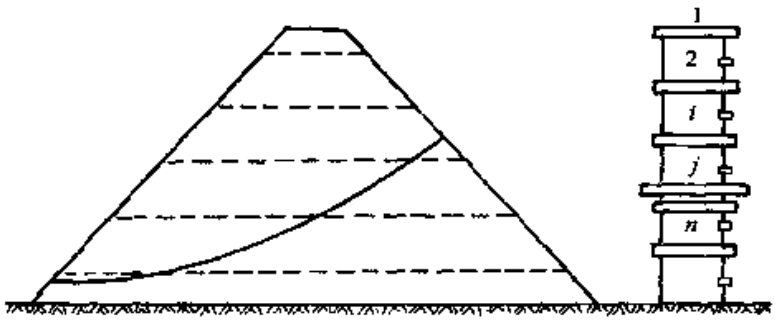


图 6.18　土石坝永久位移简化计算模型

在进行了上述的简化分析以后，则前述水平成层地基一维随机有限元分析理论完全可以用于土石坝永久位移的分析。而土石坝地震反应分析的随机有限元模式和等价线性迭代模式也与前述相同。于是，通过多次循环迭代计算，即可求得每层节点的绝对加速度 $a_i(t)$ 的均值历时曲线 $E[a_i(t)]$ 和方差历时曲线 $V[a_i(t)]$。

在此基础上可以求得滑动单元以上各层平均加速度历时曲线。根据解耦模型假定，对可求得滑动单元以上的各层的平均绝对加速度时程按下式计算：

$$\bar{a}(t) = \left(\sum_{r=1}^{j} m_r a_r(t) / \sum_{r=1}^{j} m_r \right) \tag{6.199}$$

式中，上标 j 表示滑动单元以上的各单元总数。

平均绝对加速度的均值曲线为

$$E[\bar{a}(t)] = \left(\sum_{r=1}^{j} m_{0r} E[a_r(t)] / \sum_{r=1}^{j} m_{0r} \right) \tag{6.200}$$

由于质量密度的变异性相对于动剪切模量和阻尼比的变异性要小得多，故这里只考虑质量的均值，同时忽略各土层参数之间的相关性，则平均绝对加速度的方差历时曲线为

$$V[\bar{a}(t)] = \left(\sum_{r=1}^{j} m_{0r}^2 V[a_r(t)] / \sum_{r=1}^{j} m_{0r} \right)^2 \tag{6.201}$$

显然，式(6.200)和式(6.201)的计算只需将随机有限元求得的 $E[a_r(t)]$ 和 $V[a_r(t)]$ 代入即可。

吴再光等[38,41]对一 40m 高的土石坝进行了计算。计算时将该坝分为 8 层。每层厚 5m，土料密度为 $2t/m^3$，参考剪应变为 2.5×10^{-4}，最大阻尼比取 28%，最大剪切模量系数为 80，最大剪切模量变异系数为 25%，阻尼比最大变异系数为 30%，不考虑质量的变异性。输入地震波见图 6.14。假定该坝在第 4 层发生滑移，临界地震加速度从 $0.5m/s^2$ 变化到 $2.5m/s^2$。

图 6.19 是该坝永久位移 D 与滑动体临界加速度 A_c 之关系。显然，由土料参数的变异性引起的永久变形是比较离散的。如果不考虑土参数的变异性，永久位移在 $A_c=1.0m/s^2$ 时只有 22cm，而考虑参数的变异性以后，动力响应在均值响应上增加 1 倍标准差，永久滑移增加到 32cm；增加 2 倍标准差，永久滑移增加到 45cm；

如果增加 3 倍标准差，永久位移达到 64cm。近似平均取永久滑动标准差 12cm，则变异系数为 55%。可见，土参数的变异性引起的土石坝永久位移变异性可能会大于地震动随机性的影响。如果临界加速度减少，则变异性会增大。可以看出，土石坝地震永久变形的变异性远大于土参数本身的变异性，值得重视。

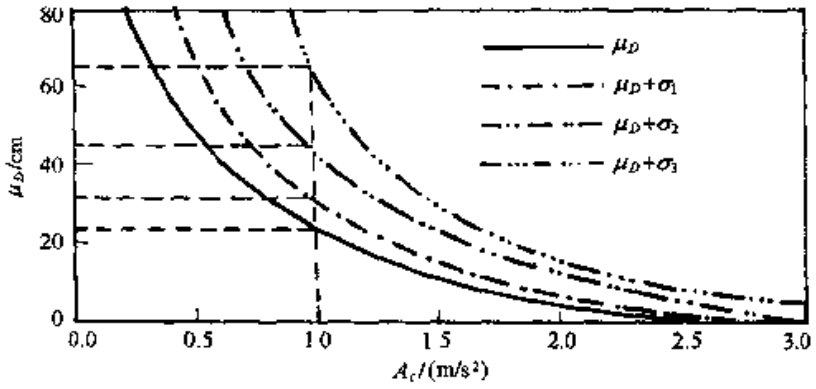


图 6.19　永久滑动移量曲线

6.5.2　动态随机有限元法基本原理

由上节可知，随机有限元法已用于随机地震动力问题，并且能够解决多自由度结构体系的随机动力响应。然而，用 SFEM 求解动力问题时，仍利用静态位移场的形函数建立相应的随机刚度矩阵、随机质量矩阵和随机阻尼矩阵。这种位移场是静态的，其位移插值形函数只与单元的几何形函数及所选用的坐标有关。但是结构振动时，其位移场是动态的，应当与结构振动特性有关，即单元形函数不仅与单元形状和选取的坐标有关，还与结构的各阶主振动有关，与静态位移场有本质的区别。可见，在随机结构的动力分析中，采用静态形函数来描述动态位移场是有缺陷的，会导致分析结果的较大误差。

为此，一些学者[36,37]提出一种分析不确定性结构随机动力响应的一种新的计算方法，即动态随机有限元法(D-SFEM)。该法在随机结构系统的动态位移场离散时，采用含有结构振动特性的动态形函数来描述其空间位移，以体现结构振动对位移场的影响，提高随机结构动力分析的精度和效率。现给出它的基本原理。

(1)动态随机有限元基本原理。

用动态随机有限元法对连续弹性体进行随机结构的动力分析时，单元内任意点的位移 $\underline{V}$ 不仅与空间坐标位置有关，也与时间变量 t 有关，还与结构随机场变量 ξ 有关。它与离散化的单元结点位移 $\underline{\delta}^e$ 可表示为变量分离形式，即

$$\underline{V}(\underline{x},\xi,t) = \underline{N}_D(\underline{x},\omega)\cdot\underline{\delta}^e(t,\xi) \tag{6.202}$$

式中：$\underline{N}_D(\underline{x},\omega)$ 为单元的动态形函数矩阵；$\underline{x}$ 为所采用的空间坐标；ω 为结构固有频率；其中符号(·)表示列向量或矩阵。

为便于分析，式(6.202)中的动态形函数矩阵 $\underline{N}_D$ 可按 ω^2 的升幂形式展开为

$$\underline{N}_D(\underline{x},\omega) = \underline{N}_{D0} + \omega^2\underline{N}_{D2} + \omega^4\underline{N}_{D4} + \cdots \tag{6.203}$$

式中，$\underline{N}_{D0}$、$\underline{N}_{D2}$、$\underline{N}_{D4}$、…只与单元形状及选用坐标系有关，是确定性函数。其中，$\underline{N}_{D0}$即静态的确定性有限元分析的形函数，$\underline{N}_{D2}$、$\underline{N}_{D4}$等则是表示结构振动对位移场影响的动态修正项。

根据有限元的基本思想，建立随机结构分析中的三个主要单元矩阵，即单元的随机质量矩阵$\underline{M}^e$、随机刚度矩阵$\underline{K}^e$和随机阻尼矩阵$\underline{C}^e$分别为

$$\left.\begin{aligned}\underline{M}^e(\xi) &= \int_V \rho(\xi)\underline{N}_D^T\underline{N}_D\mathrm{d}V\\ \underline{K}^e(\xi) &= \int_V \underline{B}_D^T\underline{D}(\xi)\underline{B}_D\mathrm{d}V\\ \underline{C}^e(\xi) &= \int_V \eta(\xi)\underline{N}_D^T\underline{N}_D\mathrm{d}V\end{aligned}\right\} \tag{6.204}$$

式中：$\rho(\xi)$、$\eta(\xi)$分别为质量密度和阻尼系数，$D(\xi)$为弹性矩阵，它们均是结构随机场变量ξ的函数；$\underline{B}_D$为由动态形函数矩阵$\underline{N}_D$所决定的动态几何关系矩阵。

将式(6.203)代入式(6.204)，则得单元的三个主要随机矩阵按ω^2的升幂形式可展开为

$$\left.\begin{aligned}\underline{M}^e &= \underline{M}_0^e + \omega^2\underline{M}_2^e + \omega^4\underline{M}_4^e + \cdots\\ \underline{K}^e &= \underline{K}_0^e + \omega^2\underline{K}_2^e + \omega^4\underline{K}_4^e + \cdots\\ \underline{C}^e &= \underline{C}_0^e + \omega^2\underline{C}_2^e + \omega^4\underline{C}_4^e + \cdots\end{aligned}\right\} \tag{6.205}$$

式中，等式右端第一项对应于静态位移场的单元质量矩阵、刚度矩阵和阻尼矩阵，第二项及以后各项表示相应的动态修正项，其中$\underline{K}_2^e$恒为零。

在考虑计算效率与数值精度协调的情况下，通常只在等号右端保留一项非零的动态修正项，即

$$\left.\begin{aligned}\underline{M}^e(\omega,\xi) &\doteq \underline{M}_0^e(\xi) + \omega^2\underline{M}_2^e(\xi)\\ \underline{K}^e(\omega,\xi) &\doteq \underline{K}_0^e(\xi) + \omega^4\underline{K}_4^e(\xi)\\ \underline{C}^e(\omega,\xi) &\doteq \underline{C}_0^e(\xi) + \omega^2\underline{C}_2^e(\xi)\end{aligned}\right\} \tag{6.206}$$

将各单元的$\underline{M}^e$、$\underline{K}^e$和$\underline{C}^e$进行组合，形成结构的质量矩阵$\underline{M}$、刚度矩阵$\underline{K}$和阻尼矩阵$\underline{C}$。它们均是结构频率ω、随机场变量ξ的函数矩阵。自由度数为m的结构随机动力方程可以写为

$$\underline{M}(\omega,\xi)\ddot{\underline{u}} + \underline{C}(\omega,\xi)\dot{\underline{u}} + \underline{K}(\omega,\xi)\underline{u} = \underline{F}(t) \tag{6.207}$$

式中：$\ddot{\underline{u}}$、$\dot{\underline{u}}$和$\underline{u}$分别是随机结构系统的加速度、速度和位移响应；$\underline{F}(t)$是结构受到的外激励列阵。

可以看出，式(6.207)中出现了关于ω的动态部分，这是一般的SFEM的动力方程所不具有的，亦即动态随机有限元的动力方程可以体现结构动态特性对动力方程的影响。

(2)动态随机有限元随机场的离散。

求解 D-SFEM 得到的随机动力方程式(6.207)的关键在于随机场的处理和确定 ω 的取值。下面先给出随机场的离散化方法。

随机结构分析中的不确定参数 ξ 可以模型化为随机场 $\alpha(\tau)$。一个中心化的均匀、稳态连续随机场 $\alpha(\tau)$可按局部平均理论离散化为一个 $q\times 1$ 的随机向量 $\underline{\alpha}$。

为了提高随机场的计算效率,采用特征正交化技术,通过特征问题

$$\underline{G}\,\underline{\psi}=\underline{\psi}\,\underline{\Lambda} \tag{6.208}$$

把相关随机变量 $\underline{\alpha}$ 转换为独立随机变量 $\underline{\gamma}$。式中 $\underline{G}=[\mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j)]$是 $\underline{\alpha}$ 的协方差矩阵,当 $i=j$ 时,$\mathrm{Cov}(\alpha_i,\alpha_j)\neq 0$;$\underline{\Lambda}=[\mathrm{Var}(\gamma_i)]$是一个对角阵,它的对角线是 $\underline{\gamma}$ 的方差,当 $i\neq j$ 时,$\mathrm{Cov}(\gamma_i,\gamma_j)=0$;$\underline{\psi}$ 是协方差矩阵 $\underline{G}$ 的特征向量矩阵,它是一个正交矩阵。因此式(6.208)的解为

$$\underline{\Lambda}=\underline{\psi}^T\underline{G}\,\underline{\psi} \tag{6.209}$$

于是,另一个 $q\times 1$ 的独立随机变量 $\underline{\gamma}$ 可写为

$$\underline{\gamma}=\underline{\psi}\,\underline{\alpha} \tag{6.210}$$

一般情况下,对应于 $\underline{\Lambda}$ 中的主元数值较大的前 n 个 γ_i 足以表征随机场 $\alpha(\tau)$的分布特征,即用

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}\psi_{ji}\alpha_j \qquad (i=1,2,\cdots,n<q) \tag{6.211}$$

构成另一个低阶的并且相互无关的 $n\times 1$ 的随机变量 $\underline{\beta}$,以描述原随机场 $\alpha(\tau)$。

(3)动态特性 ω 的计算方法。

在随机结构的动力分析中,各响应量都是随机变量,对应于自由振动的固有频率 ω 也不例外。但在动态随机有限元中,必须注意其结构动力特性之一(固有频率 ω)对动态位移场形态的影响,它出现在对动态位移场插值形函数 $\underline{N}_D(\underline{x},\omega)$的确定性分析中。因此,应当将 ω 考虑为确定性量,即取为随机动力方程相应自由振动的均值问题的频率。由式(6.207)对于的自由振动的均值问题的频率方程

$$(\overline{\underline{K}}_0-\omega^2\overline{\underline{M}}_0-\omega^4(\overline{\underline{M}}_2-\overline{\underline{K}}_4))\underline{\Phi}=\underline{0} \tag{6.212}$$

中解出固有频率 ω。符号$(\overline{\cdot})$表示$(\cdot)$在 $\underline{\beta}$ 均值点$\overline{\underline{\beta}}$处的相应值,即$(\overline{\cdot})=(\cdot)|_{\underline{\beta}=\overline{\underline{\beta}}}$。设

$$\underline{A}=\overline{\underline{K}}_0 \qquad \underline{P}=\overline{\underline{M}}_0 \qquad \underline{Q}=\overline{\underline{M}}_2-\overline{\underline{K}}_4 \qquad \lambda=\omega^2 \tag{6.213}$$

则式(6.212)可转化为一个关于 λ 的二次特征值问题

$$(\underline{A}-\lambda\underline{P}-\lambda^2\underline{Q})\underline{\Phi}=\underline{0} \tag{6.214}$$

采用降阶方法,并运用 Sturm 迭代法可求出特征值 $\bar{\lambda}$,即按下式确定特征值 λ:

$$(\underline{E}-\lambda\underline{H})\underline{z}=\underline{0} \tag{6.215}$$

式中

$$\underline{z}=\begin{bmatrix}\underline{\Phi}\\ \underline{\dot{\Phi}}\end{bmatrix}\qquad \underline{\dot{\Phi}}=\lambda\underline{\Phi}\qquad \underline{E}=\begin{bmatrix}\underline{Q} & 0\\ 0 & \underline{A}\end{bmatrix}\qquad \underline{H}=\begin{bmatrix}\underline{0} & \underline{Q}\\ \underline{Q} & \underline{P}\end{bmatrix}$$

标准特征值问题式(6.215)中的 $\underline{E}$、$\underline{H}$ 仍然保持了矩阵的对称性特点。

当确定了式(6.215)中的各阶特征值 λ_r 后，相应的特征频率 ω_r 可由下式给出：

$$\omega_r^2=\lambda_r\qquad (r=1,2,\cdots,m) \tag{6.216}$$

于是，方程式(6.207)就成为关于待求响应 $\ddot{\underline{u}}$、$\dot{\underline{u}}$ 和 $\underline{u}$ 的随机动力方程，这与一般的SFEM的动力方程在形式上是相同的。

(4)动态随机有限元的基本列式。

对于线弹性随机结构的动力方程(6.207)，当按均值条件求得相应的二次特征值问题式(6.214)的特征对$(\lambda_r,\underline{\Phi}_r)(r=1,2,\cdots,m)$后，用结构的第 r 阶频率 $\omega_r^2=\lambda_r$ 描述的第 r 阶随机动力方程为

$$\underline{M}_r\ddot{\underline{u}}_r+\underline{C}_r\dot{\underline{u}}_r+\underline{K}_r\underline{u}_r=\underline{F} \tag{6.217}$$

式中

$$\underline{M}_r=\underline{M}_0(\beta)+\omega_r^2\underline{M}_2(\beta)$$
$$\underline{C}_r=\underline{C}_0(\beta)+\omega_r^2\underline{C}_2(\beta)$$
$$\underline{K}_r=\underline{K}_0(\beta)+\omega_r^4\underline{K}_4(\beta)$$

此时，系数矩阵仅是离散化随机变量 $\underline{\beta}$ 的函数。

采用摄动方法，在随机变量 $\underline{\beta}=\overline{\underline{\beta}}$ 处得到确定性的第 r 阶频率条件下的零阶方程

$$\overline{\underline{M}}_r\,\overline{\ddot{\underline{u}}}_r+\overline{\underline{C}}_r\,\overline{\dot{\underline{u}}}_r+\overline{\underline{K}}_r\,\overline{\underline{u}}_r=\overline{\underline{F}} \tag{6.218}$$

和一阶方程

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\underline{M}}_r\,\overline{\ddot{\underline{u}}}_n^{(1)}+\overline{\underline{C}}_r\,\overline{\dot{\underline{u}}}_n^{(1)}+\overline{\underline{K}}_r\,\overline{\underline{u}}_n^{(1)}=\overline{\underline{F}}_r^{(1)}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\\ &\underline{F}_n^{(1)}=\underline{F}_i^{(1)}-\underline{M}_n^{(1)}\,\overline{\ddot{\underline{u}}}_r-\underline{C}_n^{(1)}\,\overline{\dot{\underline{u}}}_r-\underline{K}_n^{(1)}\,\overline{\underline{u}}_r\end{aligned}\right\} \tag{6.219}$$

式中，符号$(\cdot)_i^{(1)}=\dfrac{\partial}{\partial\beta_i}(\cdot)\Big|_{\underline{\beta}=\overline{\underline{\beta}}}$。

二阶方程为

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\underline{M}}_r\,\overline{\ddot{\underline{u}}}_n^{(2)}+\overline{\underline{C}}_r\,\overline{\dot{\underline{u}}}_n^{(2)}+\overline{\underline{K}}_r\,\overline{\underline{u}}_n^{(2)}=\overline{\underline{F}}_n^{(2)}\qquad (i=1,2,\cdots,n)\\ &\underline{F}_n^{(2)}=\underline{F}_j^{(2)}-\underline{M}_n^{(2)}\,\overline{\ddot{\underline{u}}}_r-\underline{C}_n^{(2)}\,\overline{\dot{\underline{u}}}_r-\underline{K}_n^{(2)}\,\overline{\underline{u}}_r\\ &\qquad\qquad -2(\underline{M}_n^{(1)}\,\ddot{\underline{u}}_n^{(1)}+\underline{C}_n^{(1)}\,\dot{\underline{u}}_n^{(1)}+\underline{K}_n^{(1)}\,\underline{u}_n^{(1)})\end{aligned}\right\} \tag{6.220}$$

式中，符号$(\cdot)_i^{(2)}=\dfrac{\partial^2}{\partial\beta_i^2}(\cdot)\Big|_{\underline{\beta}=\overline{\underline{\beta}}}$。

利用振型叠加法，对式(6.218)～(6.220)作第 r 阶振型 $\underline{\Phi}_r$ 的坐标变换。令第 r 阶振型坐标为 q_r，则

$$\overline{\underline{u}}_r=\underline{\Phi}_r\overline{q}_r \tag{6.221}$$

因此

$$\bar{\underline{u}}_n^{(1)} = \underline{\Phi}\bar{\underline{q}}_n^{(1)} \qquad \bar{\underline{u}}_n^{(2)} = \underline{\Phi}_r\bar{\underline{q}}_n^{(2)} \tag{6.222}$$

将振型坐标代入式(6.218)～(6.220)，按振型正交性得到关于第 r 阶振型坐标 q_r 的等效系数

$$\bar{m}_r = \underline{\Phi}_r^T \bar{\underline{M}}_r\underline{\Phi}_r \qquad \bar{c}_r = \underline{\Phi}_r^T \bar{\underline{C}}_r\underline{\Phi}_r \qquad \bar{k}_r = \underline{\Phi}_r^T \bar{\underline{K}}_r\underline{\Phi}_r \tag{6.223}$$

则第 r 阶主振动的零阶变异方程为

$$\bar{m}_r\bar{\ddot{q}}_r + \bar{c}_r\bar{\dot{q}}_r + \bar{k}_r\bar{q}_r = \underline{\Phi}_r^T\bar{\underline{F}} \tag{6.224}$$

一阶变异方程为

$$\left.\begin{aligned} &\bar{m}_r\ddot{q}_n^{(1)} + \bar{c}_r\dot{q}_n^{(1)} + \bar{k}_r q_n^{(1)} = f_n^{(1)} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)\\ &f_n^{(1)} = \underline{\Phi}_i^T(\underline{F}_i^{(1)} - \underline{M}_n^{(1)}\underline{\Phi}_r\bar{\ddot{q}}_r - c_n^{(1)}\underline{\Phi}_r\bar{\dot{q}}_r - \underline{k}_n^{(1)}\underline{\Phi}_r\bar{q}_r \end{aligned}\right\} \tag{6.225}$$

二阶变异方程为

$$\left.\begin{aligned} &\bar{m}_r\ddot{q}_n^{(2)} + \bar{c}_r\dot{q}_n^{(2)} + \bar{k}_r q_n^{(2)} = f_n^{(2)} \qquad (i = 1,2,\cdots,n)\\ &f_n^{(2)} = \underline{\Phi}_r^T(\underline{F}_i^{(2)} - \underline{M}_n^{(2)}\underline{\Phi}_r\bar{\ddot{q}}_r - \underline{c}_n^{(2)}\underline{\Phi}\bar{\dot{q}}_n - \underline{k}_n^{(2)}\underline{\Phi}_r\bar{q}_r\\ &\qquad - 2(\underline{M}_n^{(1)}\underline{\Phi}_r\bar{\dot{q}}_r + \underline{c}_n^{(1)}\underline{\Phi}\bar{\dot{q}}_n^{(1)} + \underline{k}_n^{(1)}\underline{\Phi}_r\bar{q}_n^{(1)})) \end{aligned}\right\} \tag{6.226}$$

式(6.224)～(6.226)表示了(2n+1)个关于 q_r 的单自由度系统在 $\underline{\beta}$ 均值点的确定性方程，按递推方程可以方便地求出 $\ddot{q}_r$、$\dot{q}_r$ 和 q_r 在 $\underline{\beta}=\bar{\underline{\beta}}$ 处的均值、一阶变异量和二阶变异量。

如果只考虑前 k 阶主振型($k<m$)，则上述关于 $\ddot{q}_r$、$\dot{q}_r$ 和 q_r($r=1,2,\cdots,k<m$)在 $\bar{\underline{\beta}}$ 处的均值、一阶变异量和二阶变异量的运算重复进行 k 次。按振型叠加原理，结构响应统计量可以由振型坐标 $\bar{\underline{q}}$、$\bar{\dot{\underline{q}}}$ 和 $\underline{q}$ 方便得到。在 $\underline{\beta}=\bar{\underline{\beta}}$ 处，响应的零阶变异量为

$$\bar{\underline{u}} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{u}}_r = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\bar{q}_r \qquad \bar{\dot{\underline{u}}} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\dot{\underline{u}}}_r = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\bar{\dot{q}}_r \qquad \bar{\ddot{\underline{u}}} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\ddot{\underline{u}}}_r = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\bar{\ddot{q}}_r \tag{6.227}$$

同理，结构响应的一阶应异量为

$$\underline{u}_i^{(1)} = \sum_{r=1}^{k}\underline{\Phi}_r\bar{q}_n^{(1)} \qquad \dot{\underline{u}}_i^{(1)} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\dot{q}_n^{(1)} \qquad \ddot{\underline{u}}_i^{(1)} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\ddot{q}_n^{(1)} \tag{6.228}$$

二阶变异量为

$$\underline{u}_i^{(2)} = \sum_{r=1}^{k}\underline{\Phi}_r\bar{q}_n^{(2)} \qquad \dot{\underline{u}}_i^{(2)} = \sum_{r=1}^{k}\bar{\underline{\Phi}}_r\dot{q}_n^{(2)} \qquad \ddot{\underline{u}}_i^{(2)} = \sum_{r=1}^{k}\underline{\Phi}_r\ddot{q}_n^{(2)} \tag{6.229}$$

于是，具有二阶精度的结构响应均值为

$$\left.\begin{aligned} E[\underline{u}] &\doteq \bar{\underline{u}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\underline{u}_i^{(2)}\mathrm{Var}(\beta_i)\\ E[\dot{\underline{u}}] &\doteq \bar{\dot{\underline{u}}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\dot{\underline{u}}_i^{(2)}\mathrm{Var}(\beta_i)\\ E[\ddot{\underline{u}}] &\doteq \bar{\ddot{\underline{u}}} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ddot{\underline{u}}_i^{(2)}\mathrm{Var}(\beta_i) \end{aligned}\right\} \tag{6.230}$$

具有一阶精度的结构响应方差为

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Var}(\underline{u}) &\doteq \sum_{i=1}^{n}(\underline{u}_i^{(1)})^2\mathrm{Var}(\beta_i)\\ \mathrm{Var}(\dot{\underline{u}}) &\doteq \sum_{i=1}^{n}(\dot{\underline{u}}_i^{(1)})^2\mathrm{Var}(\beta_i)\\ \mathrm{Var}(\ddot{\underline{u}}) &\doteq \sum_{i=1}^{n}(\ddot{\underline{u}}_i^{(1)})^2\mathrm{Var}(\beta_i)\end{aligned}\right\} \tag{6.231}$$

参 考 文 献

[1] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算(第二版). 中国水利电力出版社,1996

[2] H. S. Yu, R. Salgado, S. W. Sloan, J. M. Kim. Limit analysis versus limit equilibrium for slope stability. ASCE J Geotechnical and Geoenviromental Engrg, 1998. 124(1), 1—11

[3] J. M. Duncan, S. G. Wright. The accuracy of equilibrium methods of slope stability analysis. Engrg Geology, 1980, 16, 5—7

[4] 侯景儒、郭光裕. 矿床统计预测与地质统计学的理论与应用. 冶金工业出版社,1993

[5] B. K. Low, R. B. Gilbert, S. G. Wright. Slope reliability analysis using generalized method of slices. ASCE J Geotechnical and Geoenviromental Engrg, 1998, 124(4), 350—362

[6] 徐建平. 可靠性分析方法在顺层岩质边坡中的应用研究,博士学位论文. 西南交通大学,1998

[7] 孙洪泉. 地质统计学及应用. 中国矿业大学出版社,1986

[8] 松尾稔. 地基工程学可靠性设计的理论和实际. 人民交通出版社,1990. 39—84

[9] 徐建平、胡厚田. 土质边坡稳定性的概率分析. 铁道工程学报,1998,(1),120—125

[10] 熊启东. 地基稳定的可靠性研究. 同济大学学报,1998,25(3)

[11] 白冰、李建林、李遇春. 土体变形分析的蒙特卡洛有限元法. 第 6 届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会论文集. 广东科技出版社,1998,107—110

[12] R. Chapuis, New stability method for embankments on clay foundations. Can. Geotech. J., 1982, (19), 44—48

[13] 高大钊. 地基基础工程标准化与概率极限状态设计原则. 岩土工程学报,1993.(4),8—14

[14] E. Vanmarcke, M. Shinozuka, S. Nakagiri, G. J. Schueller, M. Geigoriu, Random fields and stochastic finite element. Structural Safety, 1986.(3), 143—166

[15] Bai Bing. Preliminary study on nonlinear stochastic finite element method for soil mass. Proc. 9th IACMAG. Balkema Publishers(Netherlands), 1997. 11

[16] 白冰. 岩土参数的蒙特卡洛模拟. 武汉交通科技大学学报,1996,20(5),632—636

[17] 周小文、包承纲. 土性相关距离和相关范围的概念及其计算方法的研究. 第 5 届全国岩土力学数值分析与解析方法讨论会文集,1994,62—69

[18] Kiureghian Der, J. Ke. Stochastic finite element method in structural reliability. Probabistic Engrg. Mech., 1988, 3(2), 83— 91

[19] 陈虬、刘先斌. 随机有限元法及其工程应用. 西南交通大学出版社,1993

[20] A. Der Kiureghian, J. B. Ke, The stochastic Finite Element Method in structural reliability. Probabilistic Engineering Mechanics, 1988, 3(2), 84—109

[21] 戴志敏. 随机有限元法及其在结构可靠性分析中的应用,硕士论文. 西南交通大学,1990

[22] 徐建平、胡厚田. 摄动随机有限元法在顺层岩质边坡可靠性分析中的应用. 岩土工程学报,1999,(1),71—76
[23] 姚磊华. 地下水水流模型的摄动待定系数随机有限元法. 水利学报,1999,(7),60—64
[24] Y. K. Chen, N. Mullineux, J. R. Reed. Analytic solutions for drawdowns in rectangular artesian aquifers. J. Hydro. ,1976,(31),151 160
[25] 刘寒冰、陈塑寰、韩万芝. 形状不确定性结构特性分析的随机边界元法. 固体力学学报,1993,14(3),21—25
[26] 刘寒冰、陈塑寰、初日德. 考虑材料特性 E、v 不确定性的随机边界元法. 水利学报,1994,(9),61—66
[27] 肖专文、张奇志、梁力等. 遗传进化算法在边坡稳定性分析中的应用. 岩土工程学报,1998,20(1),44—46
[28] J. H. Holland, Adaptation in natural and artificial system Ann Arbor. The University of Michigan Press, 1975
[29] 卢才金、胡厚田、徐建平等. 改进的 BP 网络在岩质边坡稳定性评判中的应用. 岩石力学与工程学报,1999,18(2),22—27
[30] 吴中如、潘卫平. 分形几何理论在岩土边坡稳定性分析中的应用. 水利学报,1996,(4),79—82
[31] 刘维倩、黄光远、穆永科等. 岩土工程中的位移反分析法. 计算结构力学及其应用,1995,12(1),93—100
[32] 李文秀. 岩土边坡稳定性的模糊测度分析. 岩土工程学报,1996,18(3),10—16
[33] 沈珠江. 结构性粘土的弹塑性损伤模型. 岩土工程学报,1993,15(3),21—28
[34] 徐建平、白冰、周健. 摄动随机有限元法在土坡可靠性分析中的应用. 武汉交通科技大学学报,2000,(2)
[35] 徐建平,胡厚田. 摄动随机有限元法在顺层岩质边坡可靠性分析中的应用. 岩土工程学报,1999,(1)
[36] 赵雷等. 动态随机有限元法. 地震工程与工程振动,1998,18(1)
[37] M. Kleiber, T. D. Hien. The stochastic finite element method: basic perturbation technique and computer implementation. John Wiley & Sons Ltd, England, 1992
[38] 吴再光等. 随机土动力学概论. 大连理工大学出版社,1992
[39] 汪闻韶等. 不同地震输入对土石坝动力反应的影响. 全国土工建筑及地基抗震会议论文集. 西安,1986
[40] 吴再光. 考虑土料参数变异性的土层地震反应分析. 水利学报,1991,(10)
[41] 吴再光、韩国城. 面板堆石坝地震塑性滑移的概率分析. 第 6 届全国土力学与基础工程会议论文集. 同济大学出版社,1991
[42] 张征等. 岩土参数空间变异性分析原理与最优估计模型. 岩土工程学报,1995,(3),1—9
[43] 付旭东. 钻孔灌注桩可靠理论研究和工程应用,博士学位论文. 西南交通大学,1997
[44] P. L. Liu, et al., F. E. Reliability of geometrically non-linear uncertain structure. Juurnal of Enginerring Mechanics, 1993, 119(4)
[45] P. L. Liu, et al., Multivariate distribution models with prescribed marginal and covariance. Probabilistic Engineering Mechanics, 1986, 1(2)
[46] T. Takada. Local integration method in stochastic F. E. analysis. Proc. of ICOSSAR89
[47] Der Kiureghian A. Recent developments in stochastic F. E. Proc. of reliability and optimanation of structural system, 1991
[48] P. D. Spanos, F. E. Stochastic, expansion for random media. Journal of Engineering Mechanics, 1989, 115(5)
[49] R. G. Ghanem, P. D. Spanos, F. E. Stochastic. A spectral approach, Springer-Verlag, 1991
[50] 秦权. 随机有限元及其进展. 工程力学,1994,11(4)
[51] 刘宁、吕泰仁. 随机有限元及其工程应用. 力学进展,1995,25(1)

第七章　非饱和土的基本理论与有限元分析方法

7.1　概　　述

传统土力学理论和试验方法一般是解决饱和土问题的，所得出的规律也主要适用于饱和土。然而，非饱和土的分布范围是十分广泛的，是工程实践中经常遇到的土。事实上，饱和土是非饱和土的特例。例如，在干旱与半干旱地区，由于蒸发量大于降水量，地下水位较深，这些地区的表层土是严格意义上的非饱和土；土坝、铁路和公路路基填土、机场跑道的压实填土都处于非饱和土状态；即使是港口平台、管道等离岸工程中所遇到的土也常常处于非饱和状态，这是由于含生物气的海相沉积土，其孔隙中含有生物气，而生物气以大气泡(气泡直径远大于土粒直径)形式存在于孔隙中。另外，在地下水面附近的高饱和土体，其孔隙水中溶解了部分气体，气体以小气泡(气泡直径与土粒粒径相当)形式存在于孔隙水中，土体卸荷以后(取样或开挖等)，溶解于孔隙水的气体逸出，以气泡形式存于孔隙水中，这两种含气泡的土也应属于非饱和土。

20 世纪 60 年代以前，非饱和土力学研究的主要特点是以毛细作用为主要研究内容。早在第一届国际土力学与基础工程会议(1936)上，Ostachev 指出土中存在毛细作月，Boulichev 介绍了毛细水压力和毛细水高度的方法。20 世纪 60 年代至 80 年代末，以 Bishop 和 Fredlund 为代表的许多学者将饱和土力学的有关理论借用到非饱和土力学研究中，获得了许多研究成果。Black 和 Crony(1957)、Bishop 等(1960)和 Aitchison(1967)提出非饱和土的有效应力理论。20 世纪 80 年代以来，对非饱和土变形进行了较为有效的研究。Alonso(1990)和 Toll(1990)分别提出了土的弹塑性本构模型，陈正汉(1998)和杨代泉(1992)提出了非饱和土的非线性弹性模型。关于非饱和土的固结理论方面，Kohgo 等(1993)、Wheeler(1995，1996)和 Frelund(1979)研究了非饱和土的一维固结理论，陈正汉(1989、1992)用混合物理论研究了非饱和土的固结理论，杨代泉(1992)用非饱和土的非线性弹性理论研究了非饱和土的固结变形，而殷宗泽(1998)将三维固结理论简化为二维，研究了非饱和土的二维固结理论。然而，非饱和土固结问题的研究虽已有不少成果，但还不太成熟，目前还没有形成公认的非饱和土固结理论，是一个值得深入研究的课题。

7.2 非饱和土的有效应力原理

土的有效应力原理是现代土力学的核心，Terzaghi 于 1923 年首次提出饱和土的有效应力原理。1936 年，在第一届国际土力学会议和基础工程大会上，Terzaghi 把有效应力原理解释为：土体中任何剖面上的任意一点的应力(σ_1，σ_2，σ_3)都有两部分构成：①孔隙水压力(u)，孔隙水压力作用在水或土粒上，孔隙水压力在各个方向上都相等，可以称之为中性压力，中性压力的变化对土体的变形和强度没有影响；②总应力与中性应力之差($\sigma-u$)，这部分应力作用于固相土粒的外部，是土粒相对位移的动力，对土体变形是有效的应力，常称之为有效应力。有效应力原理包括两方面的含义：①土体变形和强度的变化都是由有效应力变化所引起的；②有效应力σ'等于作用于土体上的总应力与中性应力之差，即

$$\sigma' = \sigma - u \tag{7.1}$$

式(7.2)只适于饱和土，不适于饱和岩石[Skempton(1960)]。

Terzaghi 有效应力原理描述饱和土的变形和强度必需同时满足下列两条件：

(1)土粒不可压缩。

(2)控制土粒间接触面积和土粒间摩阻力的屈服应力与围压无关[Terzaghi(1925)；Bowden 和 Tabor(1942)]。实际上，土体并不完全满足上面条件，有效应力公式[式(7.1)]需要经过修正，才能较准确地描述土体和多孔材料的力学行为。有效应力的修正形式可以表示为

$$\sigma' = \sigma - ku_w \tag{7.2}$$

式中：σ 是总应力；u_w 是孔隙水压力；k 是试验常数。对于土体强度问题，k 可以用以下函数表示：

$$k = 1 - \frac{a\tan\psi}{\tan\varphi} \tag{7.3}$$

式中：a 是单位剪切面上土粒间接触点的面积；ψ 是土粒间的摩擦角；φ 是粒状材料的内摩擦角。对于体变问题，k 的表达式为[Skempton(1960)]，

$$k = 1 - \frac{c_s}{c} \tag{7.4}$$

式中：c_s 是粒状材料固相颗粒(土粒)的压缩系数；c 是粒状材料的压缩系数。

有效应力是总应力和孔隙应力的函数，有效应力原理成立的前提条件是孔隙压力的变化与总应力的变化具有相同的应力路径和相同的变化速率。土体并不是理想的弹性材料，孔隙压力和总应力变化并不一定具有相同的应力路径和相同的速率，用有效应力描述土体的变形行为就不合适；如果总应力和孔隙应力沿不同的应力路径变化，或采用不同的变化速率，有效应力公式[式(7.2)]不符合 Hooke 定律。

1. Bishop 有效应力公式

Bishop 较早提出了非饱和土的有效应力公式。假定作用于非饱和土的外应力是由非饱和土骨架、孔隙气和孔隙水共同分担(图 7.1),土骨架上的应力直接影响了土体的变形和强度,即土体的有效应力是一种平均应力,而不是土体中某一点的实际应力。

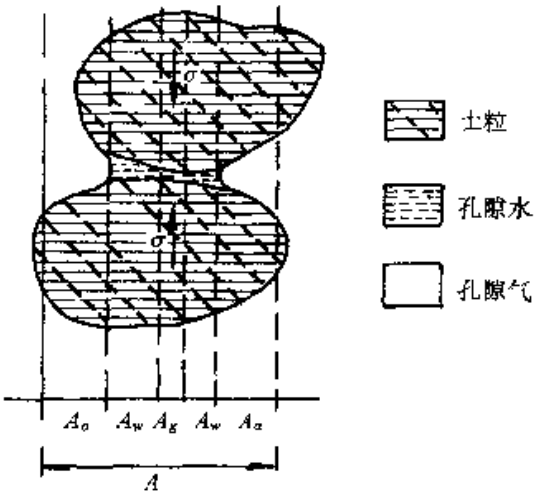


图 7.1 非饱和土的组成图

在外应力 σ 作用下,土粒间的作用力为 P_g,孔隙气压为 u_a,根据土粒上静力平衡原理得到

$$\sigma \cdot A = P_g + A_w \cdot u_w - A_a \cdot u_a \tag{7.5}$$

令 $\sigma' = \frac{P_g}{A}$,上式改写为

$$\sigma' = \sigma - \frac{A_w}{A}u_w - \frac{A_a}{A}u_a \tag{7.6}$$

式中:A 是剪切面面积;A_w 是孔隙水面积;A_a 是孔隙气面积。

如果把 σ' 视为土体的有效应力,式(7.6)即为非饱和土的有效应力公式。同时,还可以看出,有效应力是一种平均应力。土体剪切面的面积 A 还可以表示为

$$A = A_g + A_w + A_a \tag{7.7}$$

式中,A_g 土粒接触点面积。A_g 一般很小,$A_g/A \cong 0.02$,故 A_g 可以忽略不计。剪切面积可以表示为

$$A = A_a + A_w \tag{7.8}$$

将式(7.8)代入(7.6)得到

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w) \tag{7.9}$$

式中,χ 为有效应力参数,$\chi = A_w/A$。有效应力参数是投影面上孔隙水面积所占的百分比。

Bishop 公式成立是有条件的[Jening(1962)]:①吸力变化引起土体变形和强度变化的效果与外应力引起土体变形和强度变化的效果相同,即总应力与等效孔压力($\chi u_w + (1-\chi)u_a$)同步变化;②压缩试验中,非饱和土的有效应力与孔隙比之间存在单一函数关系。非饱和土的有效应力与孔隙比之间是否存在单一函数关系,取决于饱和度的大小,当饱和度小于某一极限饱和度时,有效应力与饱和度之间不存在单一函数关系。不同类型的土体,极限饱和度不同,粗粒土的极限饱和度小于 20%,淤泥的极限饱和度为 40%～50%,粘性土的极限饱和度高达 85%。

有效应力参数 χ 与非饱和土的结构、应力历史、饱和度和问题性质(变形问题

或强度问题)等因素有关,其值介于 0～1.0 之间。Aitchison(1960)给出了计算有效应力参数的公式为

$$\chi = \frac{\sigma'}{u_s} = S + \frac{1}{u_s}\sum_{0}^{u_s} 0.3u_s\Delta S \tag{7.10}$$

式中:S 是饱和度;u_s 是吸力。

Donald(1960)通过假定压力差(u_s)与饱和度之间的相关关系,利用式(7.10)算出了有效应力参数与饱和度的相关关系(图 7.2)。Bishop(1960)认为有效应力参数与饱和度之间不存在单一函数关系,因为非饱和土孔隙中同时含有孔隙水和孔隙气,孔隙水分别随着土体干、湿循环路径不同而不同(图 7.3),对水分分布的这种迟滞现象有多种不同解释[Deniel 和 Hillel(1982);Taylor 和 Ashcroft(1972)],其中"瓶颈理论"被普遍认同。"瓶颈理论"认为孔隙有大有小,大的孔隙视为瓶腔,小的孔隙视为瓶颈:设瓶颈半径为 r,瓶腔半径为 R,瓶腔和瓶颈中孔隙水的吸力分别为

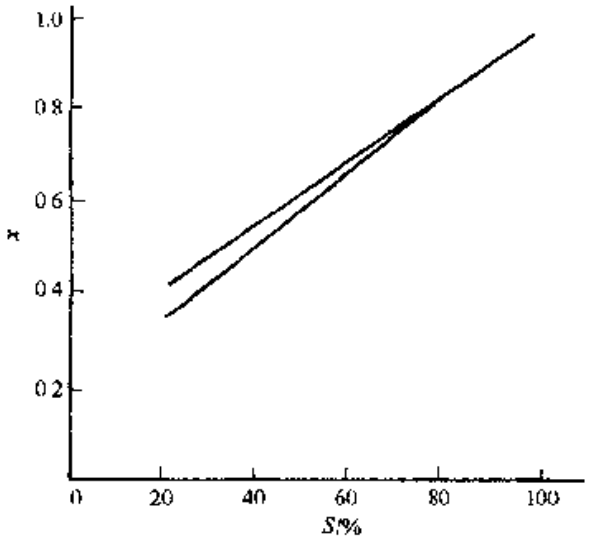


图 7.2　x 与 S 的理论关系[Donald(1960)]

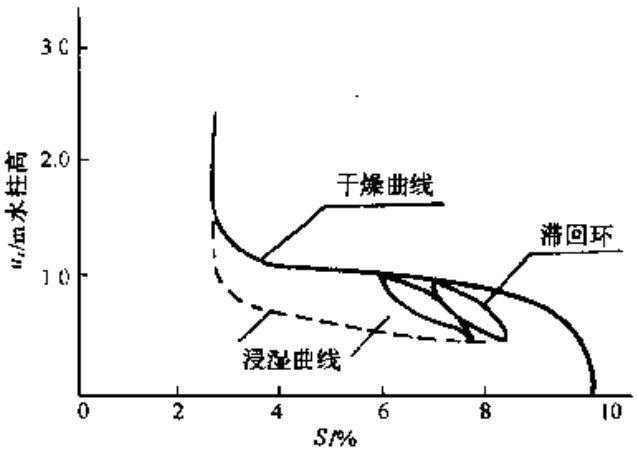


图 7.3　水分特征曲线的滞回环

$$u_{sR}=\frac{2T}{R}$$

$$u_{sr}=\frac{2T}{r} \tag{7.11}$$

式中 T 是表面张力。通常认为 $r<R$，同时 $u_{sR}<u_{sr}$。

在脱水过程中，瓶腔中的水要排出，瓶颈必需畅通无阻，即瓶颈中的水先排出。瓶颈中的水排出取决于其中的吸力 u_{sr}，当吸力达到 u_{sr} 时，瓶颈中的水才能排出。因此，在干燥过程，尽管吸力达到了瓶腔排水所需的吸力 u_{sR}，但由于 $u_{sR}<u_{sr}$，瓶颈中水不能排出，瓶颈不畅通，瓶腔中的水无法排出，孔隙水排出滞后；在吸水过程中，瓶腔充水不受瓶颈的阻碍，当吸力降到 u_{sr} 时瓶颈中先充水，吸力降到 u_{sR} 时瓶腔开始充水。由此可见，脱水和充水过程中，在吸力为 u_{sR} 时，瓶腔中的水分状态不同，非饱和土的饱和度与吸力之间存在“迟滞环”。

有效应力参数可以简化为饱和度(S)的函数，即

$$\chi=f(S) \tag{7.12}$$

也可以用孔隙水面积表示，即

$$\chi=\frac{A_w}{A} \tag{7.13}$$

如果把土粒视为理想的球体，由此可以算出有效应力参数与饱和度之间的关系。Donad (1960)把砂粒视为球体，用式(7.14)算出有效应力参数与饱和度的关系(图 7.4)。

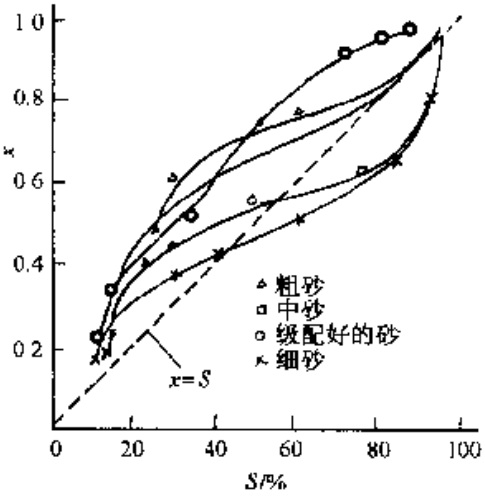


图 7.4 砂的 x 与 S 的理论关系 (Donald,1960)

2. 陈正汉有效应力公式

陈正汉(1994)把土体视为理想弹性材料，导出非饱和土变形问题的有效应力公式。

设非饱和土的孔隙率为 n，饱和度为 S，非饱和土的孔隙水和孔隙气是各自连通的，孔隙水压力为 u_w，孔隙气压为 u_a，且 $u_w>0$。非饱和土在总应力 σ_{ij} 作用下的变形由以下三部分组成：

(1)对孔隙水施加 u_w 所产生的变形，土体受到的外应力为 $u_w\delta_{ij}$ 将土体视为一个均匀的弹性体，且设土体的变形柔度张量为 C^0_{ijkl}，此时非饱和土的变形为

$$\varepsilon^{\mathrm{I}}_{ij}=C^0_{ijkl}\cdot u_w\cdot\delta_{kl} \tag{7.14}$$

(2)对孔隙气施加应力所引起土体的变形，土样外围施加应力 $\sigma^{\mathrm{II}}_{ij}=u^{\mathrm{II}}_a\cdot\delta_{ij}$，将孔隙气可视为非饱和土颗粒，此时整个土样的孔隙率为 Sn，土体的变形为

$$\varepsilon^{\mathrm{II}}_{ij}=C^{Sn}_{ijkl}(u_a-u_w)\cdot\delta_{kl} \tag{7.15}$$

(3)对土体施加总应力 σ-u_a 所产生的变形，此时土体视为孔隙率为 n 的弹性体，土体变形为

$$\varepsilon_{ij}^{\mathrm{III}} = C_{ijkl}^{n}(\sigma_{kl} - u_a\delta_{kl}) \tag{7.16}$$

土体总应力由以下三部分组成，即

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\mathrm{I}} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{II}} + \varepsilon_{ij}^{\mathrm{III}} \tag{7.17}$$

根据有效应力的定义，$\sigma'_{ij} = M_{ijkl}^{n} \cdot \varepsilon_{kl}$，这里 σ'_{ij} 是有效应力张量，M_{ijkl}^{n} 是土体的弹性模量张量。将式(7.14)～(7.16)代入有效应力公式中得到

$$\sigma'_{ijkl} = M_{ijkl}^{n}[C_{klmn}^{0}u_w\delta_{mn} + C_{klmn}^{Sn}(u_a - u_w)\delta_{mn} + C_{klmn}^{n}(\sigma - u_a)\delta_{mn}] \tag{7.18}$$

考虑到恒等式 $M_{ijkl}^{n}C_{ijkl}^{n} = \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{ij} + \delta_{in}\delta_{jm})$，式(7.18)可化为

$$\sigma'_{ijkl} = \sigma_{ij} - u_wM_{ijkl}^{n}(C_{klmn}^{Sn} - C_{klmn}^{0}) - u_a(\delta_{ij} - M_{ijkl}^{n}C_{klmn}^{Sn}) \tag{7.19}$$

式(7.19)即为各向同性弹性多孔介质的有效应力公式。

对于各向同性材料有

$$M_{ijkl}^{n} = \lambda^{n}\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu^{n}(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{kj})$$

$$C_{klmn}^{0} = \frac{1}{3K^{0}}\delta_{kl} \qquad C_{klmn}^{Sn} = \frac{1}{3K^{Sn}}\delta_{kl} \tag{7.20}$$

将式(7.20)代入式(7.19)得到

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{K^{n}}{K^{Sn}} - \frac{K^{n}}{K^{0}}\right)u_w\delta_{ij} - \left(1 - \frac{K^{n}}{K^{Sn}}\right)u_a\delta_{ij} \tag{7.21}$$

式(7.20)和(7.21)中：K^{0} 是非饱和土颗粒骨架的体变模量；K^{n} 是孔隙率为 n 的非饱和土的体变模量；K^{Sn} 是孔隙率为 Sn 非饱和土的体变模量；λ^{n} 和 μ^{n} 是孔隙率为 n 的非饱和土的 Lambe 常数。

当孔隙水压力 $u_w<0$，非饱和土的有效应力公式为

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \left(\frac{K^{n}}{K^{Sn}} - \frac{K^{n}}{{}^{0}K}\right)u_w\delta_{ij} - \left(1 - \frac{K^{n}}{K^{Sn}}\right)u_a\delta_{ij} \tag{7.22}$$

式中，${}^{0}K$ 是非饱和土土粒的膨胀模量。在小变形条件下，${}^{0}K = K^{0}$，即式(7.21)和(7.22)相同。如果土粒是不可压缩的，即 ${}^{0}K \to \infty$，式(7.22)变为

$$\sigma' = \sigma - \left[\frac{K^{n}}{K^{Sn}}u_w + \left(1 - \frac{K^{n}}{K^{Sn}}\right) \cdot u_a\right] \tag{7.23}$$

与 Bishop 公式相比，得到有效应力参数

$$\chi = \frac{K^{n}}{K^{Sn}} \tag{7.24}$$

3. 基于分形模型的有效应力公式

徐永福(1997，1999)根据非饱和土微孔隙分布的分形模型，得到了非饱和土的有效应力公式。

非饱和土有两类孔隙：一类是土粒集合体内的孔隙，另一类是土粒集合体间的孔隙(图 7.5)。第一类孔隙的孔径较小，第二类孔隙的孔径较大。根据孔径的相对大小，将第一类孔隙称为微观孔隙，第二类孔隙称为宏观孔隙，两类孔隙的孔径界限一般为 10μm。宏观孔隙与微观孔隙界限与土体的固结程度、干密度和应力历史

有关。

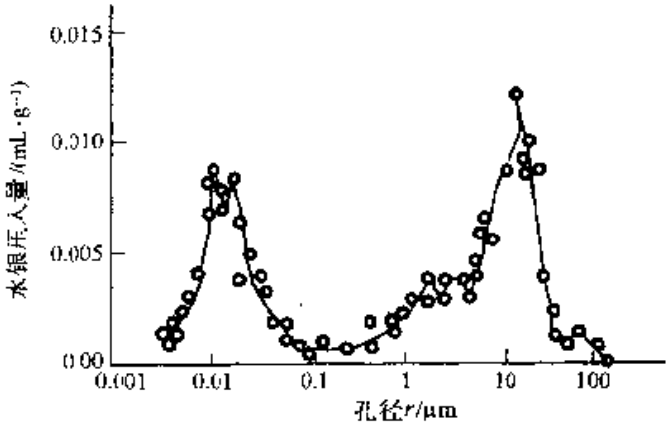


图 7.5　土孔隙分布特征

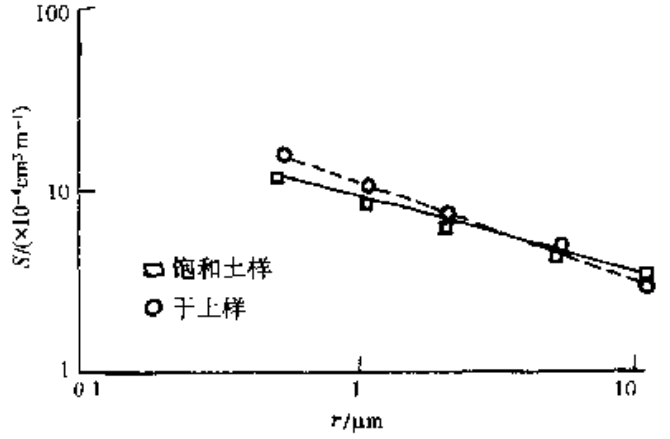


图 7.6　宁夏膨胀土孔隙分布的分维

非饱和土孔隙水分布不均匀，由于微观孔隙内的吸力较大，微观孔隙内的含量较高，甚至有时被水充满；宏观孔隙内的水分分布较少，通常不被水充满，甚至有时不含水分。徐永福(1996)建立了非饱和土微观孔隙分布的模型，并用水银压入法测定了宁夏非饱和膨胀土微观孔隙分布的分维(图 7.6)。非饱和土微观孔隙分布函数可以表示为

$$f(r) = A \cdot r^{-D_p} \tag{7.25}$$

式中：r 是微观孔隙的半径；D_p 是分维。

假设非饱和土微观孔隙内充满了水(即非饱和土的含水量不能太小)，非饱和土的饱和度等于微观孔隙内所含水分的体积除以孔隙的总体积。设孔隙是由孔径为 r 的球体串联而成，则孔隙的总体积为

$$V_v = \int_0^R f(r) 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{4\pi A}{3 - D_p} R^{3-D_p} \tag{7.26}$$

式中，R 是孔隙的最大半径。

设微观孔隙内充满水的最大半径为 r，微观孔隙内含有的水分体积为

$$V_w = \int_0^r f(r)4\pi r^2 dr = \frac{4\pi A}{3-D_p} r^{3-D_p} \tag{7.27}$$

根据式(7.26)和(7.27)可以得到非饱和土的饱和度 S 为

$$S = \frac{V_w}{V_v} = \left(\frac{r}{R}\right)^{3-D_p} \tag{7.28}$$

根据渗透原理，基质吸力为接触面曲率半径 r 的关系为

$$u_s = \frac{2T\cos\alpha}{r} \tag{7.29}$$

式中：T 是接触面表面张力；α 是接触角。

由式(7.28)和(7.29)得到

$$S = K^m u_s^{-m} \tag{7.30}$$

式中，$K = \frac{2T\cos\alpha}{R}$，$m = 3 - D_p$。

式(7.30)为反映非饱和土结构特性的水分特性曲线方程。

非饱和土的有效应力公式为

$$\sigma' = \sigma - u_a + \frac{A_w}{A}(u_a - u_w) \tag{7.31}$$

假定孔隙分布各相同性，且是均匀的，在各个方向平面内孔隙分布分维相同，设剪切面上孔隙分布分维为 D_s，D_s 与孔隙分布分维 D_p 的关系为

$$D_s = \frac{2}{3}D_p \tag{7.32}$$

剪切面上孔隙分布的函数可以写为 $g(r) = Br^{-D_s}$。剪切面上孔隙面积(A)和孔隙水面积(A_w)可以表示为

$$A_w = \int_0^r 2\pi g(r) r dr = \frac{2\pi B}{2-D_s} r^{2-D_s} \tag{7.33}$$

$$A = \int_0^R 2\pi g(r) r dr = \frac{2\pi B}{2-D_s} R^{2-D_s} \tag{7.34}$$

由式(7.33)和(7.34)得

$$f = \frac{A_w}{A} = \left(\frac{r}{R}\right)^{2-D_s} \tag{7.35}$$

由式(7.28)和(7.35)得

$$f = S^{\frac{2-D_s}{3-D_p}} \tag{7.36}$$

将式(7.36)代入式(7.31)得

$$\sigma' = \sigma - u_a + K^{2-D_s}(u_a - u_w)^{D_s-2} \tag{7.37}$$

$$\sigma' = \sigma - u_a + K^{2-\frac{2}{3}D_p}(u_a - u_w)^{\frac{2}{3}D_p-2} \tag{7.38}$$

式(7.37)和(7.38)即为反映非饱和土结构特性的有效应力公式。

4. 其它类型有效应力公式

各类非饱和土的有效应力公式列于表 7.1 中。

表 7.1　非饱和土的有效应力公式

公　式	说　明	资料来源
$\sigma'=\sigma-u_a+\chi(u_a-u_w)$	u_a：孔隙气压；u_w：孔隙水压 χ：有效应力参数	Bishop(1959)
$\sigma'=\sigma-\beta' u_w$	σ：剪切面上的法向应力 β'：系数	Croney，Coleman 和 Black (1958)
$\sigma'=\sigma+\psi p^*$	p^*：压力差 ψ：系数	Aitchison(1961)
$\sigma'=\sigma+\chi_m p_m^*+\chi_s p_s^*$	p_m^*：基质吸力；p_s^*：溶质吸力 χ_m 和 χ_s 与应力路径有关的常数，介于 0～1.0	Aitchison(1965,1973)
$\sigma'=\sigma+\beta p''$	β：系数	Jennings(1961)
$\sigma'=\left(1-\frac{K}{K_s}\right)[\chi u_w-(1-\chi)u_a]$	K_s：土粒的压缩模量 K：土体的压缩模量	Skempton(1961)
$\sigma'=\sigma-u_a+\chi_m(h_m+u_a)+\chi_s(h_s+u_s)$	χ_m：基质吸力系数；h_m：基质吸力 χ_s：溶质吸力系数；h_s：溶质吸力	Richards(1966)
$\sigma'=\sigma-u_a+(1-\chi)u_W-(R-A)$	R：土粒间的吸力； A：土粒间的排斥力	Lambe(1980)
$\sigma'=(1-n)\sigma_s+nSu_W+n(1-S)u_a$	σ_s：土粒间的应力； n：孔隙率；S：饱和度	Carroll(1980)
$\sigma=\sigma_s+Su_W+(1-S)u_a$ $\sigma'=\sigma-vuw$	v：试验参数；σ_s：土粒间的应力	Prevost(1980)
$\sigma'=\sigma+[Su_W+(1-S)u_a]$		Metigue，Wilson 和 Nunziamo (1983)；Nikolavsky(1985)
$\sigma'=\sigma-u_a+\chi(u_a-u_W)-R'+vT_s$	R'：渗透吸力；vT_s：水气界面应力； T_s 表面张力	Allan 和 Sridharand(1987)
$\sigma'=\sigma-[u_W-(R-A)]$		Barbour 和 Fredlund(1989)
$T'_{ij}=\bar{T}'_{ij}+(1-n)pS$	T'_{ij}：土骨架应力，即有效应力 $\bar{T}'_{ij}$：土粒间接触应力 p：土骨架上的静水压力	Boer 和 Eher(1988)
$\sigma'=\sigma-u_a+\int_0^{h_s}\left(\frac{S-S_r}{1-S_r}\right)p\mathrm{d}u_s$	p：常数；S 和 S_r 是饱和度和残余饱和度	Fred.und(1995)
$\sigma'=\sigma-u_a+\frac{B_a-1+\tan\phi_a/\tan\phi}{B_a-B_W}\cdot(u_a-u_W)$	ϕ：饱和度的有效摩擦角 ϕ_a：非饱和土的有效内摩擦角 $B_a=\Delta\sigma/\Delta u_a$：孔隙气压系数 $B_W=\Delta\sigma/\Delta u_W$：孔隙水压系数	沈珠江(1963)
$T_{ij}^{(\xi)}=T_{sij}-p\delta_{ij}$	$T_{ij}^{(\xi)}$：有效应力；T_{sij}：固体应力 p：某种流体压力	李希，离尚平(1985)
$\sigma'=\sigma-u_a+\frac{K^n}{K^{Sn}}\cdot(u_a-u_W)$	K^n，K^{Sn}：孔隙为 n，Sn 的土骨架的压缩模量	陈正汉(1994)
$\sigma'=\sigma-u_a+\frac{u_s}{1+du_s}$	d：常数；$u_s=u_a-u_W$：基质吸力	沈珠江(1995)，Rohm 和 Vilar (1995)
$\sigma'=\sigma-u_a+C_1u_s^m$	C_1、m：常数	徐永福(1997)

从表 7.1 可以看到，非饱和土有效应力公式有以下几类：①从非饱和土强度问题提出的，如徐永福有效应力公式，即有效应力参数 χ 是反映非饱和土的强度特性；②根据非饱和土变形特性出发，提出的非饱和土有效应力公式，如陈正汉公式；③既适用于非饱和土强度问题，同时又适用于非饱和土的变形问题的有效应力公式，如 Bishop 有效应力公式，但是对于强度问题和变形问题有效应力参数 χ 不同；④经验公式，即根据非饱和土试验资料归纳得到的经验公式，但只能适用于某些具体问题。

7.3 非饱和土的本构关系

1. 弹性理论

Fredlund(1976，1979)假定土是各向同性的线弹性体，用应力状态参量 σ、u_a 和 u_s 给出了非饱和土的弹性本构关系为

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - u_a}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z - 2u_a) + \frac{u_s}{H}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - u_a}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_z - 2u_a) + \frac{u_s}{H}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - u_a}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y - 2u_a) + \frac{u_s}{H}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \tag{7.39}$$

式中：H 是与基质吸力 u_s 变化有关的土结构弹性模量；E 和 μ 是弹性模量和 Poisson 比。

非饱和土压缩形式的本构关系为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\varepsilon_v &= m_1^s \mathrm{d}(\sigma_m - u_a) + m_2^s \mathrm{d}u_s \\ \mathrm{d}\varepsilon_w &= m_1^w \mathrm{d}(\sigma_m - u_a) + m_2^w \mathrm{d}u_s \\ \mathrm{d}\varepsilon_a &= \mathrm{d}\varepsilon_v - \mathrm{d}\varepsilon_w \end{aligned} \tag{7.40}$$

式中：$\mathrm{d}\varepsilon_v$ 是土体结构体变，$\mathrm{d}\varepsilon_w$ 和 $\mathrm{d}\varepsilon_a$ 分别是孔隙水和孔隙气体变，m_1^s 和 m_1^w 分别是与基质吸力有关的土结构和孔隙水的体变系数。

对于各种不同的加荷条件，压缩本构关系具有相同的形式，只是体变系数不同，如表 7.2 所示。

陈正汉(1998)认为非饱和土的变形与含水量的变化是由净应力和基质吸力引起的，并提出了与 Duncan-Chang 类似的非线性弹性模型，用增量形式表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_1 = \frac{1}{E_t}\mathrm{d}(\sigma_1 - u_a) - \frac{2\mu_t}{E_t}\mathrm{d}(\sigma_3 - u_a) + \frac{1}{H_{st}}\mathrm{d}u_s$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_3 = -\frac{\mu}{E_t}\mathrm{d}(\sigma_1 - u_a) + \frac{1 - 2\mu_t}{E_t}\mathrm{d}(\sigma_3 - u_a) + \frac{1}{H_{st}}\mathrm{d}u_s$$

$$d\varepsilon_w = \frac{dp}{K_w} + \frac{du_s}{H_{ws}} \tag{7.41}$$

表 7.2　不同加荷条件的体变系数[Fredlund(1993)]

加荷条件	变形状态变量	m_1^i m_1^w	第一应力状态变量 $d(\sigma-u_a)$	m_2^i m_2^w	第一应力状态变量 $d(u_a-u_w)$
三维(一般形式)	$d\varepsilon_v$	$3\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$	$d(\sigma_{mean}-u_a)$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{3}{E_w}$	$d(\sigma_{mean}-u_a)$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)$
各向等压	$d\varepsilon_v$	$3\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$	$d(\sigma_3-u_a)$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{3}{E_w}$	$d(\sigma_3-u_a)$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)$
单轴	$d\varepsilon_v$	$3\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$	$d\left(\oint\sigma_y-u_a\right)$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{3}{E_w}$	$d\left(\oint\sigma_y-u_a\right)$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)$
三轴(一般情况)	$d\varepsilon_v$	$3\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$	$d(\sigma_3-u_a)+d\left\{\oint(\sigma_1-\sigma_3)\right\}$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{3}{E_w}$	$d(\sigma_3-u_a)+d\left\{\oint(\sigma_1-\sigma_3)\right\}$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)$
三轴(各向等压和单轴压缩分量)	$d\varepsilon_v$	$3\left(\frac{1-2\mu}{E}\right)$	$d(\sigma_3-u_a)+d\left\{\oint(\sigma_1-\sigma_3)-u_{aw}\right\}$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)_I$ $+d(u_a-u_w)_m$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{3}{E_w}$	$d(\sigma_3-u_a)+d\left\{\oint(\sigma_1-\sigma_3)-u_{aw}\right\}$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)_I$ $+d(u_a-u_w)_m$
K_0 加荷(一维)	$d\varepsilon_v$	$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E(1-\mu)}$	$d(\sigma_x-u_a)$	$\frac{(1+\mu)}{H(1-\mu)}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{E_w(1-\mu)}$	$d(\sigma_y-u_a)$	$\frac{1}{H_w}-\frac{2(E/H)}{E_w(1-\mu)}$	$d(u_a-u_w)$
平面应变(二维)	$d\varepsilon_v$	$\frac{2(1+\mu)(1-2\mu)}{E}$	$d(\sigma_{ave}-u_a)$	$2\frac{(1+\mu)}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$2\frac{(1+\mu)}{E_w}$	$d(\sigma_{ave}-u_a)$	$\frac{1}{H_w}-\frac{(E/H)}{E_w}$	$d(u_a-u_w)$
平面应力(二维)	$d\varepsilon_v$	$\frac{2(1-2\mu)}{E}$	$d\left(\sigma_{ave}-\oint u_a\right)$	$\frac{3}{H}$	$d(u_a-u_w)$
	$\frac{dV_w}{V_0}$	$\frac{2}{E_w}$	$d\left(\sigma_{ave}-\oint u_a\right)$	$\frac{1}{H_w}$	$d(u_a-u_w)$

注：$\sigma_{mean}=(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)/3$；$\sigma_{ave}=(\sigma_x+\sigma_y)/2$。

式中：$p=\sigma_m-u_a$；H，和 H_w 是与吸力相关的土和水的体积模量；K_w 是与净平均应力相关的水体积模量。

式(7.41)与式(7.39)的增量形式相同。非线性本构关系的参数可以由三轴试

验得到，即

$$E_t = \frac{\mathrm{d}(\sigma_1 - u_a)}{\mathrm{d}\varepsilon_1} = \frac{\mathrm{d}(\sigma_1 - \sigma_3)}{\mathrm{d}\varepsilon_1}$$

$$\mu_t = -\frac{\mathrm{d}\varepsilon_3}{\mathrm{d}\varepsilon_1}$$

$$K_t = \frac{E_t}{3(1-2\mu_t)} = \frac{\mathrm{d}(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\mathrm{d}\varepsilon_v}$$

$$K_{ww} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\varepsilon_w} = \frac{\mathrm{d}(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\mathrm{d}\varepsilon_w} \tag{7.42}$$

式中，$\varepsilon_v = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_i$，即为体应变。

在控制净主平均应力试验中得到

$$H_{st} = 3\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}\varepsilon_v} \qquad H_{wt} = \frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}\varepsilon_w} \tag{7.43}$$

杨代泉(1992)认为土体变形由以下几部分组成：①净应力引起的应变，满足广义 Hooke 定律；②由广义切应力引起的应变；③由吸力变化引起的体变；④由吸力变化(增量)引起的剪切应变。将非饱和土的本构关系表示为

$$\{\Delta\varepsilon\} = [C]\{\Delta\bar{\sigma}\} + c_d\sigma_s\{I\} + c_b\Delta u_s\{I\} + c_s\Delta u_s\frac{\{\bar{s}\}}{\sigma_3} \tag{7.44}$$

式中：$[C]$是弹性矩阵，其中有两个弹性参数；c_d 为剪(胀)系数；c_b 为湿陷(胀)系数；c_s 为湿剪系数；$\{\bar{s}\}$是偏应力；u_s 是基质吸力($=u_a-u_w$)；σ_s 是广义切应力，$\Delta\sigma$ 是净应力增量；$\{I\}=\{1,1,1,0,0,0\}^T$。

吸力变化(增量)引起的剪切应变用 Plandtl-Reuess 流动法则计算各分量，因此这个模型并非单纯的非线性弹性本构关系，这个本构模型考虑的因素比较全面，具有较强的适应能力，但式中的五个参数($[C]$中两个，c_d，c_b，c_s)都是 σ_3、$\sigma_1-\sigma_3$ 和 u_s 的函数，不容易确定，难以推广，因此只具有理论意义。

2. 弹塑性理论

Alonso(1990)根据压缩试验和三轴试验结果提出了非饱和土的弹塑性本构关系。

在压缩试验中，非饱和土的比体积 $v(=1+e$，e 是孔隙比)与净压应力 p 的关系为(图 7.7)，即

$$v = N - \lambda\ln\left(\frac{p}{p^c}\right) \tag{7.45}$$

式中：$p=\sigma_m-u_a$ 为平均净压力；λ 是非饱和土相对于压应力 p 的压缩系数，随基质吸力增加而减小；p^c 是参考应力，是 $v=N$ 时的平均净应力；N 是与基质吸力 u_s 有关的初值。

由图 7.7 可以看出

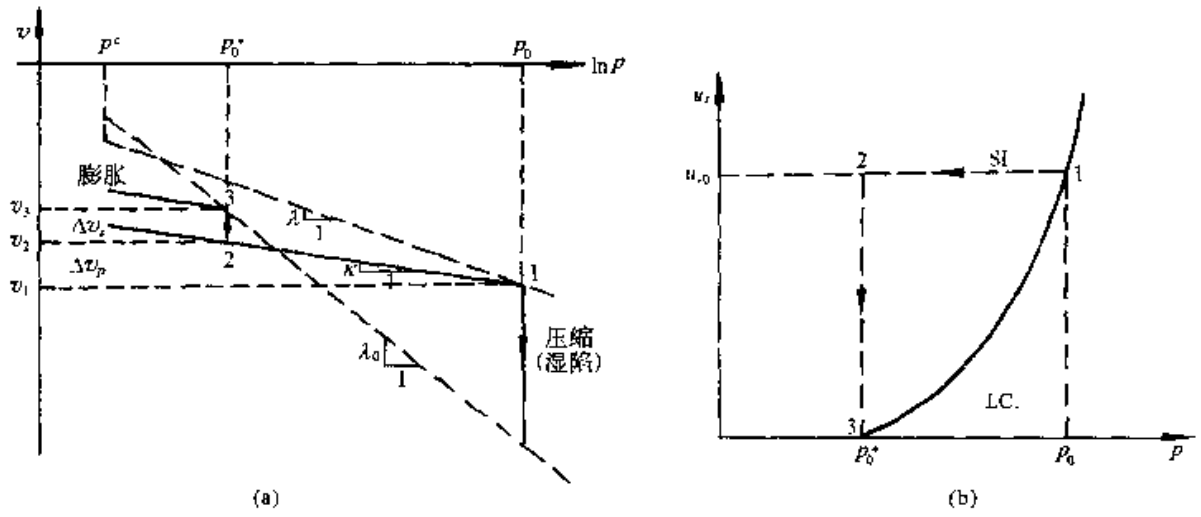


图 7.7　压缩试验曲线

$$v_1 + \Delta v_s + \Delta v_p = v_3 \tag{7.46}$$

由点 1 到点 2，比体积的增量形式为

$$\mathrm{d}v = -\kappa \frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{7.47}$$

同样，2→3 比体积的增量形式也可以写为

$$\mathrm{d}v = -\kappa_s \frac{\mathrm{d}u_s}{(u_s + p_{at})} \tag{7.48}$$

式中 p_{at}是大气压值，引进 p_{at}是避免 $u_s=0$ 的情况。将式(7.45)、(7.47)和(7.48)代入式(7.46)得到

$$N - \lambda \ln \frac{p_0}{p^c} + \kappa \ln \frac{p_0}{p_0^*} + \kappa_s \ln \frac{u_s + p_{at}}{p_{at}} = N(0) - \lambda(0) \ln \frac{p_0^*}{p_{at}} \tag{7.49}$$

可以通过选取适当 p^c 使

$$\Delta v(p^c)\big|_{u_s}^{0} = N(0) - N(s) = \kappa_s \ln \frac{u_s + p_{at}}{p_{at}} \tag{7.50}$$

将式(7.50)代入式(7.49)得

$$\frac{p_0}{p^c} = \left(\frac{p_c^*}{p^c} \right)^{\frac{\lambda(0)-\kappa}{\lambda-\kappa_s}} \tag{7.51}$$

式(7.51)即为 LC(Loading Collapse)屈服曲线。p_0^* 为饱和土的先期固结压力，λ 为饱和土对于应力的压缩指数，λ 随基质吸力变化的经验公式为

$$\lambda = \lambda(0)[(1-\gamma)\exp(-\beta u_s) + \gamma] \tag{7.52}$$

式中：γ 为一个常数，$\gamma = \dfrac{\lambda(u_s \to \infty)}{\lambda(0)}$；$\beta$ 为控制 λ 随 u_s 增长速率的参数。

同样地，吸力增加也会引起非饱和土产生塑性变形，图 7.8(b)中 u_{s0}将土体变形分为两个区域：当 $u_s < u_{s0}$，土体处于弹性区域；$u_s > u_{s0}$，土体处于塑性区。可见，吸力 u_{s0}相当于屈服应力，因此，在没有更多的试验资料的情况下，可以合理地假设吸

力屈服函数为

$$u_s = u_{s0} = 常数 \tag{7.53}$$

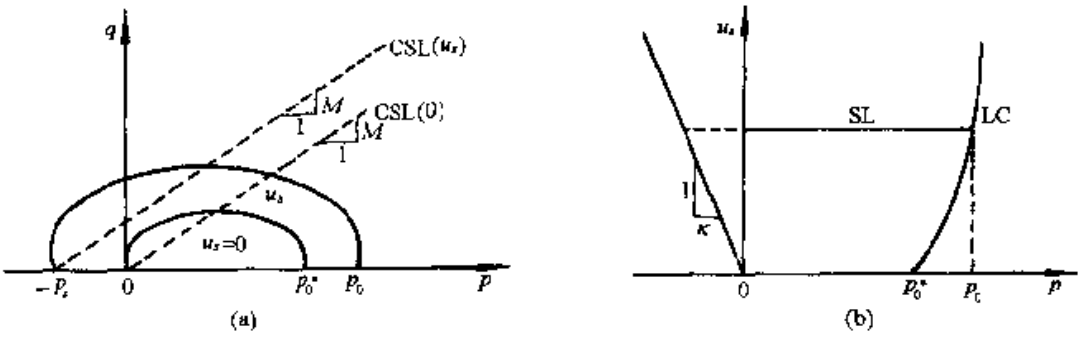


图 7.8　非饱和土的屈服面

式中，u_{s0}是土体曾达到的最大吸力。

式(7.53)称为 SI(Suction Increase)屈服函数。假设 v 与 u_s+p_{at}在弹性区和弹塑性区内呈线性关系，即

$$\mathrm{d}v = \lambda_s \frac{\mathrm{d}u_s}{u_s + p_{at}} \tag{7.54}$$

三轴应力状态下，非饱和土的本构关系以饱和土的剑桥模型为边界条件，即吸力固定时非饱和土的屈服面是椭圆，饱和土的极限线的斜率 M 不变(图 7.8)，椭圆屈服面的方程式为

$$f_1 = q^2 - M^2(p + p_s)(p_0 - p) = 0 \tag{7.55}$$

式中：$p=\sigma_m-u_a$；$q=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\sqrt{s_{ij}s_{ij}}=\dfrac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{3}(\sigma_i^2-\sigma_j^2)^{\frac{1}{2}}$；$p_s$ 为临界状态线与 p 轴的交点到原点的距离，随吸力增加而增大，类似于凝聚力随基质吸力的变化规律，p_s 的表达式为

$$p_s = \kappa u_s \tag{7.56}$$

将(p，u_s)平面内 SI 屈服线延伸到(q，p，u_s)空间，即得到第二个屈服面

$$f_2 = u_s - u_{s0} = 0 \tag{7.57}$$

在弹性区内，由应力 p 引起的弹性体应变可以表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vp}^e = -\frac{\mathrm{d}v}{v} = \frac{\kappa}{v}\frac{\mathrm{d}p}{p} \tag{7.58}$$

当 p 达到屈服应力 p_0，土体总的体积应变为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vp} = \frac{\lambda}{v}\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} \tag{7.59}$$

由应力 p 引起的塑性体应变为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vp}^p = \frac{\lambda-\kappa}{v}\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} \tag{7.60}$$

将式(7.61)代入式(7.60)得到

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vp}^{e}=\frac{\lambda(0)-\kappa}{v}\frac{\mathrm{d}p_0}{p_0} \tag{7.61}$$

同样地，由吸力引起的弹性体应变为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vp}^{e}=\frac{\kappa_s}{v}\frac{\mathrm{d}u_s}{u_s+p_{at}} \tag{7.62}$$

当 $u_s=u_{s0}$，土体的总体应变和塑性体应变分别为

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vs}=\frac{\lambda_s}{v}\frac{\mathrm{d}u_{s0}}{u_{s0}+p_{at}} \tag{7.63}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{vs}^{e}=\frac{\lambda_s-\kappa_s}{v}\frac{\mathrm{d}u_{s0}}{u_{s0}-p_{at}} \tag{7.64}$$

由式(7.61)和(7.64)得到非饱和土的硬化规律为

$$\frac{\mathrm{d}p_0^*}{p_0^*}=\frac{v}{\lambda(0)-\kappa_s}\mathrm{d}\varepsilon_v^p \tag{7.65}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_{s0}}{u_{s0}+p_{at}}=\frac{v}{\lambda_s-\kappa_s}\mathrm{d}\varepsilon_v^p \tag{7.66}$$

若采用相关联流动法则，相应于 f_1 和 f_2 屈服面的塑生势函数分别为

$$g_1=f_1 \tag{7.67}$$

$$g_2=f_2 \tag{7.68}$$

可以导出体应变 ε_v 和广义切应变 ε_s 的增量公式分别为

$$\mathrm{d}\varepsilon_v=\frac{\kappa}{v}\frac{\mathrm{d}p}{p}+\frac{\kappa_s}{v}\frac{\mathrm{d}u_s}{u_s+p_{at}}+\mu_1+\mu_2 \tag{7.69}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_s=\frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}q}{G}+\mu_1\frac{2q\alpha}{M^2(2p+p_s-p_0)} \tag{7.70}$$

式中，G 为弹性剪切模量；

$$\mu_1=\frac{\dfrac{\partial f_1}{\partial p}+\dfrac{\partial f_1}{\partial q}\mathrm{d}q+\dfrac{\partial f_1}{\partial u_s}\mathrm{d}u_s}{\dfrac{\partial f_1}{\partial p_0^*}\dfrac{\partial p_0^*}{\partial \varepsilon_v^p}} \tag{7.71}$$

$$\mu_2=-\frac{\dfrac{\partial f_2}{\partial u_s}\mathrm{d}u_s}{\dfrac{\partial f_2}{\partial u_{s0}}\dfrac{\partial u_{s0}}{\partial \varepsilon_v^p}} \tag{7.72}$$

这里，α 为保证土体在 Jaly K_0 状态下无侧向变形侧修正系数，即

$$\alpha=\frac{M(M-q)(M-3)}{9(6-M)}\frac{1}{1-\dfrac{\kappa}{\lambda(0)}} \tag{7.73}$$

陈正汉(1999)根据国外试验资料，对 SI 屈服面提出了修正，即

$$u_s-u_{sy} \tag{7.74}$$

式中，u_{sy} 为屈服吸力，$u_{sy}\geqslant u_{s0}$。

Karube(1989)用三轴压缩仪研究了非饱和高岭石土的弹塑性本构关系，运用临界力学(CSSM)概念，建立了非饱和土的弹塑性本构关系，破坏线方程为

$$q = M(p + p_m) - p\frac{\mathrm{d}\varepsilon_v^p}{\mathrm{d}\varepsilon_s} \tag{7.75}$$

式中：$p_m = p_s - p_b$，$p_s = \dfrac{S - S_0}{1 - S_0}u_s$，$p_s = \dfrac{S - S_d}{1 - S_d}u_s$；$p = \sigma_m - u_a$，$\varepsilon_m = \dfrac{2}{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)$；$\varepsilon_v^p$ 为压缩试验中的塑性体应变；S 为土体饱和度。

$$\varepsilon_v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_i}\log\frac{p + p_m}{p_{y0} + (a+1)p_m} - \frac{\lambda - \kappa}{1 + e_i}\left\{\log\frac{p + p_m}{p_{y0} + (a+1)p_m} + \frac{\dfrac{2q}{M}p\left(\dfrac{q}{M} + 2p + p_m\right)}{(2p + p_m)\left[\dfrac{q}{M}(p - p_m) + 2(p + p_m)^2\right]}\right\} \tag{7.76}$$

Toll(1990)通过试验发现关系

$$q = M_a(p - u_a) + M_s u_s \tag{7.77}$$

$$v = \Gamma_w - \lambda_a \ln(p - u_0) + \lambda_s \ln u_s \tag{7.78}$$

式中：v 为比体积($v = 1 + e$)，e 为孔隙比；M_a、M_s、Γ_w、λ_a 和 λ_s 为土体饱和度和结构的函数。

3. 其它形式的本构模型

损伤力学的本构模型很好地描述了高孔隙比的结构性粘土和黄土的剪缩软化特性[沈珠江(1994)]。损伤力学本构模型假定原状土是线弹性体，完全损伤后的土即为扰动土，扰动土可以用饱和土的非线性本构模型和弹塑性体本构模型描述。土体变形过程就是原状土向扰动土转化的过程，这个过程中任一时刻的应力应变可表示为

$$\{\sigma\} = (1 - \omega)[D]_r\{\varepsilon\} + \omega[D]_s\{\varepsilon\} \tag{7.79}$$

式中：$[D]_r$ 为原状土的刚度矩阵；$[D]_s$ 为扰动土的割线刚度矩阵；ω 为损伤比，即扰动土所占的比重，表示为

$$\omega = 1 - \exp\left[-a\varepsilon - \frac{b(w - w_0)}{w_s - w_0}\right] \tag{7.80}$$

式中：a 和 b 为经验系数；w、w_0 和 w_s 分别为土体含水量、原状土含水量和扰动土含水量。

沈珠江(1996)后来又提出了非饱和土的统一变形理论，认为广义吸力是一切有效地增加颗粒间抗滑阻力的因素总和，不管这个因素是来源于基质吸力，还是颗粒间的胶结力和咬合力。根据 Mohr-Coulomb 定律，将广义吸力 u_s' 表示为

$$u_s' = c_s\cot\varphi_s \tag{7.81}$$

式中，c_s 和 φ_s 是粒间抗滑指标，与宏观强度指标 c 和 φ 不一定相同。

广义有效应力可以写为

$$\sigma = \sigma' + u_s' \tag{7.82}$$

广义吸力由两部分组成，即折减吸力和胶结吸力。折减吸力实质是毛细管作用的反映，可以称为毛细管吸力；胶结吸力是结构强度的反映，可以称为结构吸力。折减吸力 u_{se} 和结构吸力 u_{sb} 可以表示为

$$u_{se} = u_{se0}\left[\frac{w_s - w}{w_s - w_0}\right]^n \tag{7.83}$$

$$u_{sb} = u_{sb0}\left[1 + \cos\left(\pi \frac{q - q_0}{q_{\max} - q_0}\right)\right] \tag{7.84}$$

非饱和土的变形分为两部分：与饱和扰动土变形类似的变形；由吸力丧失引起的变形。大量试验结果表明，饱和扰动粘土的孔隙比与有效应力状态之间存在惟一关系[Henkel (1960)]，孔隙比的具体表达式为(图 7.9)

$$e_s = e_0 - c_c\log\left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'}\right) - \frac{c_d}{\log 2}\left[1 + \left(\frac{\eta}{\eta_f}\right)^2\right] \tag{7.85}$$

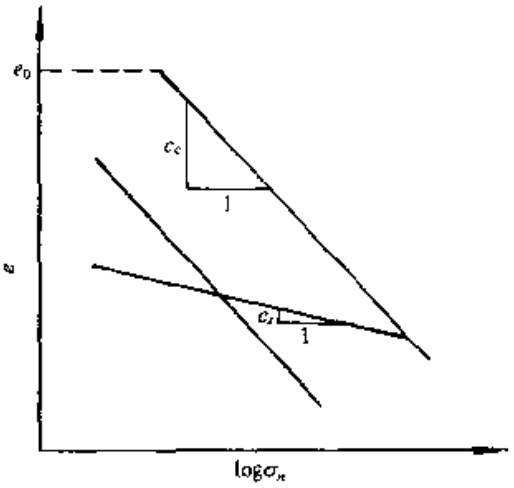


图 7.9 压缩试验曲线

式中：e_s 为扰动土的孔隙比；$\sigma_m' = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_i'$，$\sigma_s' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i^2 - \sigma_j^2)^{\frac{1}{2}}$；$\eta = \frac{\sigma_s}{\sigma_m'}$，为剪切比；$c_c$ 为压缩系数；c_d 为剪缩系数，为由等向压缩状态($\eta=0$)到破坏状态($\eta=\eta_f$)所引起的孔隙比减小量。当采用椭圆屈服面模型时，$c_d = (c_c - c_s)\log 2$。

平均净压力变化引起的孔隙比变化为

$$\Delta e_1 = -\frac{c_s}{\sigma_m'}\Delta\sigma_m' - \frac{c_c - c_s}{\sigma_m'}\Delta\sigma_m' - \frac{c_d}{\log 2}\frac{\frac{2\eta}{\eta_f^2}}{1 + \left(\frac{\eta}{\eta_f}\right)^2}\Delta\eta \tag{7.86}$$

建议广义吸力与孔隙比的关系为

$$u_s' = u_{s0}'\left(\frac{e - e_s}{e_0 - e_s}\right)^m \tag{7.87}$$

式中：u_{s0}' 为初始广义吸力；e_0 为初始孔隙比；e_s 为变化后扰动土的孔隙比。由吸力变化引起的变形为

$$\Delta e_2 = \frac{e - e_s}{mu_s'}\Delta u_s' \tag{7.88}$$

非饱和土的体应变为

$$\Delta\varepsilon_v = -\frac{\Delta e_1 + \Delta e_2}{1 + e_0}$$

$$=c_s'\frac{\Delta\sigma_m'}{\sigma_m'}+\frac{\Delta\sigma_m'}{\sigma_m}(c_c'-c_s')+c_d'\frac{\frac{2\eta}{\eta_f^2}}{1+\left(\frac{\eta}{\eta_f}\right)^2}\Delta\eta+c_b'\frac{e_s-e}{u_s'}\Delta u_s' \tag{7.89}$$

式中

$$c_s'=\frac{c_s}{1+e_0}\qquad c_c'=\frac{c_c}{1+e_0}\qquad c_d'=\frac{c_d}{(1+e_0)\log 2}\qquad c_b'=\frac{1}{m(1+e_0)}$$

剪应变 ε_s 的增量表示为

$$\Delta\varepsilon_s=c_q\frac{c_s'}{\sigma_m'}\Delta\sigma_s+c_q\left[\frac{c_c'-c_s'}{\sigma_m'}\Delta\sigma_m+c_d'\frac{\frac{2\eta}{\eta_f^2}}{1+\left(\frac{\eta}{\eta_f}\right)^2}\Delta\eta+c_b'\frac{e_s-e}{u_s'}\Delta u_s'\right] \tag{7.90}$$

式中

$$\varepsilon_s'=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}(\sigma_i^2-\sigma_j^2)^{\frac{1}{2}}\qquad c_g=\frac{2(1+\mu)}{3(1-2\mu)}\qquad c_q=\frac{\frac{\partial Q}{\partial\sigma_s}}{\frac{\partial Q}{\partial\sigma_m}}$$

Q 是某一塑性势。当 Q 为椭圆函数时

$$c_q=\{(3\eta/\eta_f^2)/[1-(\eta/\eta_f)^2]\}$$

如果把吸力变化引起的变形视为初始应变，即

$$\Delta\varepsilon_v^0=c_b'\frac{e_s-e}{u_s'}\Delta u_s'$$

$$\Delta\varepsilon_s^0=c_q\Delta\varepsilon_v^0 \tag{7.91}$$

式(7.91)和(7.90)联合求逆得到

$$\{\Delta\sigma\}=[D(\sigma')]_{ep}(\{\Delta\varepsilon\}-\{\Delta\varepsilon^0\}) \tag{7.92}$$

式(7.92)即为非饱和土的统一变形模型。

7.4 非饱和土的固结理论

非饱和土在土骨架形成的孔隙中同时含有气体和水，气体在压缩时会有部分溶解于水中。非饱和土的压缩性和渗透性比饱和土复杂得多，因此，迄今为止还没有公认为成熟的非饱和土固结理论。建立非饱和土固结理论的困难主要在于以下几个方面：

(1)饱和粘土固结理论是以土体变化是连续的作为基本假设。对于非饱和土而言，土体中气体具有很高的压缩性，同时部分气体溶解于水中，很难满足严格的连续条件。

(2)非饱和土的渗透性包括透气性和透水性，渗透性与非饱和土的基质吸力和含水量密切相关，且在由干到湿和由湿到干的干湿循环过程中，同样含水量的土体

渗透性也不一样，即渗透性与含水量不是单值函数，因此测量渗透系数不容易。

(3)非饱和土的有效应力参量和有效应力原理的适用性较窄，有效应力公式中含有与基质吸力有关的参量，不易确定。

(4)非饱和土的水气接触是一个复杂的物理-化学界面，Fredlund(1993)称之为第四相，第四相对非饱和土的行为有何影响仍不得而知。

(5)非饱和土本构模型还没有公认的理论，建立成熟的非饱和土固结理论还需要时间。

1. Scott 固结理论

Scott(1963)给出接近饱和状态($S>90\%$)非饱和土的固结方程。接近饱和状态非饱和土的有效应力公式可以为

$$\sigma' = \sigma - u \tag{7.93}$$

式中，u 是孔隙压力。从土体单元中挤出的水体积为

$$\Delta Q_w = -\frac{k}{\gamma_w}(\nabla^2 u)V\mathrm{d}t \tag{7.94}$$

式中：k 是渗透系数；γ_w 是水的溶重；V 是土体单元的体积。在近饱和状态时，非饱和土固结排出的含少量气泡的孔隙水，渗透系数可视为常数，孔隙水体积可以写为

$$V_w = V_s eS \tag{7.95}$$

式中：V_s 是土颗粒的体积；e 是孔隙比；S 是饱和度。如果不考虑土颗粒体积变化得到

$$\Delta V_w = V_s\left(S\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial S}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \tag{7.96}$$

因土粒与孔隙水均不可压缩，故有 $\Delta Q_w=\Delta V_w$，即

$$\frac{k}{\gamma_w}(\nabla^2 u)V = V_s\left(S\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial S}{\partial t}\right)\mathrm{d}t \tag{7.97}$$

将 $V=(1+e)V_s$ 代入上式得到

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u = S\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial S}{\partial t} \tag{7.98}$$

式中，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。将压密定律

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -a_v\left(\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right)\text{和}\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{p_{at}(1-S+HS)}{(u_a+p_{at})^2}\frac{\partial u}{\partial t}$$

代入式(7.98)得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda\frac{\partial \sigma}{\partial t} = \lambda\frac{c_v}{S}\nabla^2 u \tag{7.99}$$

式中

$$\lambda = \left[1 + \frac{M}{S}\frac{Np_{at}}{(u_a+p_{at})^2}\right]^{-1}$$

$$c_v = \frac{(1+e)k}{a_v \gamma_w} \qquad M = \frac{1+e}{a_v} \qquad N = \frac{e}{1+e}(1-S+HS)$$

其中：p_{at}是初始孔隙气压(绝对值)，即为大气压力；u_a是孔隙气压；S是饱和度；H是亨利溶解系数；e是孔隙比。式(7.99)即为Scott非饱和土固结方程，仅适用于$S>90\%$的情况。

2. Barden固结理论

Barden(1965)将击实土按饱和度大小分为五类，并研究了各类土体的固结特性。由孔隙气和孔隙水质量变化连续性条件得到

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a v_a + m v_w) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_a n_a + m n_w) \tag{7.100}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(v_w \rho_w) = \frac{\partial}{\partial t}(n_w \rho_w) \tag{7.101}$$

式中：ρ是孔隙流体的密度；v是孔隙流体的速度；下标a表示空气，w表示水；$m=H(p_{at}+u_a)$，即亨利定律中单位体积水中溶解的空气质量，H是亨利常数，p_{at}是初始孔隙气压力，即大气压力，u_a是超孔隙气压力，n_a和n_w分别为气和水所占的孔隙率，分别称之为气隙率和液隙率。

如果只考虑流体的压力势作用，并假设孔隙水和孔隙气的渗流服从Darcy定律，即

$$v_a = k_a \frac{\partial u_a}{\partial z} \tag{7.102}$$

$$v_w = k_w \frac{\partial u_w}{\partial z} \tag{7.103}$$

式中，k_a和k_w分别为孔隙气和孔隙水的渗透系数，是孔隙比、结构参数和饱和度的函数。

将气体密度状态方程$\rho_a=c(u_{a0}+u_a)$和式(7.103)代入式(7.101)得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[C(p_{at}+u_a)k_a \frac{\partial u_a}{\partial z} + H(p_{at}+u_a)k_w \frac{\partial u_w}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}[C(p_{at}+u_a)n_a + H(p_{at}+u_a)n_w] \tag{7.104}$$

$$\frac{\partial}{\partial l}\left(k_w \frac{\partial u_w}{\partial z}\right) = \frac{\partial n_w}{\partial t} \tag{7.105}$$

式中，C是常数。

非饱和土的基质吸力u_s是孔隙比n、结构参数λ和饱和度S的函数，即

$$u_s = f_s(n,\lambda,S) \qquad n = f_n(\sigma') \tag{7.106}$$

式中，σ'是有效应力，可以用Bishop有效应力公式，且有效应力参数$\chi=f_\chi(n,\lambda,S)$。

联立式(7.104)、(7.105)和(7.106)即可得到u_a、u_w、n和S。实际上，f_s、f_n和f_r，以及k_a、k_w都是基质吸力u_s(或饱和度S)、结构参数λ和孔隙比n的函数，没有

一个统一形式，只能根据不同饱和度的具体情况，进行适当的简化，才能求解。

Barden(1965)按饱和度大小将非饱和土分为五类：$S<50\%$；$50\%\leqslant S<90\%$，$w<w_{op}$；$S=90\%$，$w=w_{op}$；$90\%\leqslant S<95\%$，$w>w_{op}$；$S>95\%$。下面分别讨论五类非饱和土的固结理论及其解。

(1)土类 1，$S<50\%$。土类 1 是很干或稍湿土，x 很小，有效应力 $\sigma'=\sigma-u_a$，只有孔隙气流动，$m=0$。孔隙气质量连续条件为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a v_a)=\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a n_a) \tag{7.107}$$

在等温条件下

$$\left.\begin{aligned}\rho_a&=\rho_{a0}(1+cu_a)\\ k_a&=k_{af}(1+bu_a)\\ n_a&=n_{af}(1+au_a)\end{aligned}\right\} \tag{7.108}$$

式中，a、b、c、n_{af}和 k_{af}是常数，$c=1/p_{at}$。将式(7.108)代入式(7.107)得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_{a0}(1+cu_a)k_{af}(1+bu_a)\frac{\partial u_a}{\partial z}\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_{a0}(1+cu_a)n_{af}(1+au_a)\right] \tag{7.109}$$

令 $Z=z/H$，$u=u_c/p_{at}$，$\alpha=ap_{at}$，$\beta=bp_{at}$，$\delta=cp_{at}$，其中 p_{at}是大气压力，H 是垂直排水路径的长度。式(7.109)化为无纲量方程

$$(\beta+\delta+2\delta\beta)\frac{\partial^2(u^2)}{\partial Z^2}+2(1-\delta\beta u^2)\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2}=2\left(1+\frac{\delta}{\alpha}+2\delta u\right)\frac{\partial u}{\partial T} \tag{7.110}$$

式中，时间因数 $T=\dfrac{Mk_{af}t}{H^2}$，$M=\dfrac{1}{n_{af}a}$。

(2)土类 2，$50\%\leqslant S<90\%$，$w<w_{op}$。土类 2 是湿土和很湿土，有效应力采用 Bishop 非饱和土有效应力公式。因此土类 2 的方程比土类 1 方程更为复杂。

(3)土类 3，$S=90\%$，$w=w_{op}$。S 增加，使 k_a 值降低，k_w 值上升。假设 ρ_w 是常量，不计孔隙气溶于孔隙水，即 $m=0$，则质量连续方程[式(7.104)]变为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a v_a)&=\frac{\partial}{\partial t}(\rho_a n_a)\\ \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w v_w)&=\frac{\partial}{\partial t}(\rho_w n_w)\end{aligned}\right. \tag{7.111}$$

将

$$\rho_a=\rho_{a0}(1+cu_a)$$

$$v_a=k_a\frac{\partial u_a}{\partial z}$$

$$k_a=k_{af}(1+b_a u_a)$$

$$v_w=k_w\frac{\partial u_w}{\partial z}$$

$$n_a = n_{af}(1 + au_a)$$
$$n_w = n_{wf}(1 + bu_w)$$
$$n_{af} = (1 - S_{wf})n_f$$
$$n_{wf} = S_{wf}n_f$$

代入式(7.111)得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[(1 + cu_a)k_{af}(1 + b_a u_a)\frac{\partial u_a}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[(1 - cu_a)(1 - S_{wf})n_f(1 + au_w)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[k_{wf}(1 + b_w u_w)\frac{\partial u_w}{\partial z}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[S_{wf}n_f(1 + au_w)\right] \tag{7.112}$$

(4)土类 4,$S>90\%$,$w>w_{op}$。土类 4 很湿土或近饱和土,孔隙气成为封闭气泡,有效应力为 $\sigma' = \sigma - u_w$。与水的质量相比,孔隙气质量可忽略不计。若不计孔隙气在孔隙水中的溶解,孔隙水质量连续方程为

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho_e v_e) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_e n_e) \tag{7.113}$$

式中,下标 e 表示为可移动的流体,包括部分移动的气泡。

将 $\rho_e = \rho_{e0}(1 + cu_w)$,$v_e = k_e\frac{\partial u_w}{\partial z}$,$k_e = k_{ef}(1 + bu_w)$,$n_e = n_{ef}(1 + au_w)$代入式(7.113)得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\rho_{e0}(1 + cu_w)k_{ef}(1 + bu_w)\frac{\partial u_w}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\rho_{e0}(1 + cu_w)n_{ef}(1 + au_w)\right] \tag{7.114}$$

令 $Z = z/H$,$u = au_{w0}$,$\beta = bu_{w0}$,$\delta = cu_{w0}$,式(7.114)变为

$$(\beta + \delta + 2\delta\beta u)\frac{\partial^2(u^2)}{\partial z^2} + 2(1 - \delta\beta u^2)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2\left(1 + \frac{\delta}{\alpha} + 2\delta u\right)\frac{\partial u}{\partial T} \tag{7.115}$$

式中,时间因数 $T = \frac{Mk_{ef}t}{H^2}$,$M = \frac{1}{n_{ef}a}$。

土类 1 和土类 4 的固结方程形式相同,计算结果差别在于 α、β 和 δ 大小的差别。

(5)土类 5,$S>95\%$。很湿土和饱和土,绝大部分封闭气泡束缚在骨架上,只有极少数封闭气泡随孔隙水流动,此时流体密度 ρ_e 为常量,c 值很小。

将 $k_e = k_{ef}(1 + bu_w^n)(n>0)$,$v_e = k_e\frac{\partial u_w}{\partial z}$,$n_e = n_{ef}(1 + au_w)$代入水相质量连续方程得到

$$(1 + hu^n)\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} + nhu^{n-1}\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right) = \frac{\partial u}{\partial T} \tag{7.116}$$

式中,$h = bu_{w0}^n$,$T = \frac{Mk_{ef}t}{H^2}$,$M = \frac{1}{n_{ef}a}$,$Z = z/H$,$u_w = u_{w0}u$。

Barden 固结理论计算结果表明,非饱和土固结曲线绘在平方根坐标中开始段

不像饱和土固结理论曲线那样呈直线，具有明显的曲率(图 7.10)，孔隙压力消散曲线比相应的 Terzaghi 理论曲线平缓。

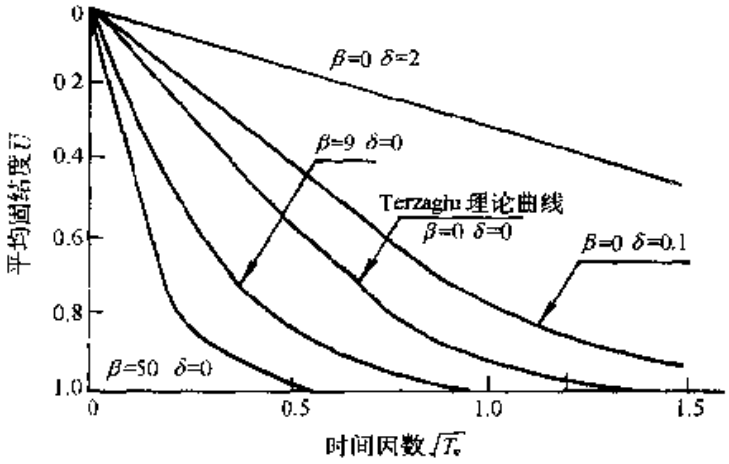


图 7.10　在时间平方根坐标中的固结曲线

3. Fredlund 固结理论

Fredlund(1979)用两个独立的应力状态变量，即净应力 $\sigma-u_a$ 和基质吸力 u_s 代替有效应力，建立非饱和土各相体变的关系，同时考虑孔隙气和孔隙水流动，建立了孔隙水压力消散和孔隙气压力消散的偏微分方程组。

Fredlund 在建立非饱和土的固结理论时，除了 Terzaghi 假设外，还做了以下假设：①气相是连续的；②土的体积变化系数(即 m_1^a、m_2^a、m_1^w 和 m_2^w)在固结过程中保持常数；③气相和液相的渗透系数是应力状态或土的体积-质量特性的函数；④不考虑空气通过水的扩散、空气在水中的溶解，以及水蒸汽移动等方面的影响；⑤土粒和孔隙水是不可压缩的；⑥固结过程中发生的是小应变。

(1)基本方程。

1)连续条件。

设土粒不可压缩，土的体变满足方程

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta V_w}{V}+\frac{\Delta V_a}{V} \tag{7.117}$$

式中：V 是土体的总体积；ΔV_w 和 ΔV_a 分别是孔隙水和孔隙气的体积变化。对于土体体积变化有

$$\frac{\Delta V}{V}=m_1^s\mathrm{d}(\sigma-u_a)+m_2^s\mathrm{d}(u_a-u_w) \tag{7.118}$$

孔隙水的体积变化可以写为

$$\frac{\Delta V_w}{V}=m_1^w\mathrm{d}(\sigma-u_a)+m_2^w\mathrm{d}(u_a-u_w) \tag{7.119}$$

式中：m_1 是 $\mathrm{d}(u_0-u_w)=0$ 时曲线的斜率；m_2 是 $\mathrm{d}(\sigma-u_a)=0$ 时的曲线的斜率。孔隙气的体变可以写为

$$\frac{\Delta V_a}{V} = m_1^a \mathrm{d}(\sigma - u_a) + m_2^a \mathrm{d}(u_a - u_w) \tag{7.120}$$

2)渗透规律。

孔隙水渗透满足 Darcy 定律,即

$$v_w = -\frac{k_w}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{7.121}$$

孔隙气渗透符合 Fick 定律,即

$$v_a = -D\frac{\partial p}{\partial z} \tag{7.122}$$

式中:p 是绝对压力,$p = u_a + p_{at}$,p_{at}是大气压力,D 是传递系数。

3) 物理方程。

在恒温压缩时,孔隙气的压缩方程为

$$\beta_a = \frac{1}{u_a + p_{at}} \tag{7.123}$$

对于水、气混合体有

$$\beta_m = S\beta_w + \frac{B_{aw}(1 - S)}{u_a + p_{at}} \tag{7.124}$$

式中:S 是饱和度;B_{aw}是孔隙压力,$B_{au} = \dfrac{\Delta u_a}{\Delta u_w}$。

(2)固结方程。

为了导出非饱和土的固结方程,在 Terzaghi 固结理论的假设基础上,补充以下几个假设:

1) 气相相通。

2) 固结过程中,孔隙水和孔隙气的渗透系数及体变模量均保持常量。

3) 不考虑气体溶解和水汽蒸发。

由于水是不可压缩的,根据连续条件$\dfrac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = \dfrac{-k_w}{\gamma_w}\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$得到

$$\frac{\partial\left(\dfrac{\Delta V_w}{V}\right)}{\partial t} = -\frac{k_w}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{7.125}$$

将式(7.119)代入式(7.125)得到

$$m_1^w \frac{\partial(\sigma - u_a)}{\partial t} + m_2^w \frac{\partial(u_a - u_w)}{\partial t} = -\frac{k_w}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} \tag{7.126}$$

假设固结过程中总应力 σ 为常量,则式(7.126)简化为

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w\left(\frac{\partial u_a}{\partial t}\right) + C_v^w\left(\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}\right) \tag{7.127}$$

式中,C_w 是液相方程的相互作用常数,其表达式为

$$C_w = \frac{1 - m_2^w/m_1^w}{m_2^w/m_1^w} \qquad C_v^w = \frac{1}{R_w}\frac{k_w}{\gamma_w m_1^w} \tag{7.128}$$

式中：$R_w=m_2^w/m_1^w$，当 $S=100\%$，$R_w=1$；C_v^w 称为液相的固结系数。

当土体处于饱和状态时，$C_w=0$，式(7.127)即为 Terzaghi 固结方程。

对于气相，由连续条件和式(7.122)得到

$$\frac{\partial m}{\partial t}=-D\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \tag{7.129}$$

式中，m 是土体气相质量。气相体积变化率为

$$\frac{\partial\left(\frac{m}{\gamma_a}\right)}{\partial t}=\frac{\partial\left(\frac{V_a}{V}\right)}{\partial t} \tag{7.130}$$

恒温条件下，气相密度 γ_a 为

$$\gamma_a=\left(\frac{W}{R\Theta}\right)p \tag{7.131}$$

式中：W 是气体分子量；R 是气体常数；Θ 是绝对温度。单位土体中的气体质量为

$$m=(1-S)n\gamma_a \tag{7.132}$$

将式(7.129)、(7.131)和(7.132)代入式(7.130)得到

$$\frac{\partial(V_a/V)}{\partial t}=-\frac{DR\Theta}{Wp}\frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2}-\frac{(1-S)}{p}\frac{\partial u_a}{\partial t} \tag{7.133}$$

将式(7.120)代入式(7.133)得到

$$m_1^a\frac{\partial(\sigma-u_a)}{\partial t}+m_2^a\frac{\partial(u_a-u_w)}{\partial t}=-\frac{DR\Theta}{Wp}\frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2}-\frac{(1-S)}{p}\frac{\partial u_a}{\partial t} \tag{7.134}$$

注意到固结过程中总应力是常量，式(7.134)化为

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=-C_a\frac{\partial u_w}{\partial t}+C_v^a\frac{\partial^2 u_a}{\partial z^2} \tag{7.135}$$

式中，C_a 是气相方程的相互作用常数，表示为

$$C_a=\frac{m_2^a/m_1^a}{(1-m_2^a/m_1^a)+\dfrac{(1-S)n}{(u_a+p_{at})m_1^a}} \tag{7.136}$$

C_v^a 是气相的固结系数

$$C_a^v=\frac{DR\Theta}{W}\frac{1}{(1-R_a)(u_a+p_{at})m_1^a+(1-S)n}$$

当土全干时，$C_v=0$，式(7.135)变为 Blight 方程。

外荷作用下土体的孔隙水压和孔隙气压由式(7.118)和(7.124)计算得到

$$\Delta u_w=R_1\Delta u_a+R_2\Delta\sigma \tag{7.137}$$

式中

$$R_1=\frac{R_s-1-\dfrac{(1-S)n}{(u_a+p_{at})m_1^s}}{R_s+Sn\beta_w/m_1^s}\qquad R_2=\frac{1}{R_s+Sn\beta_w/m_1^s}\qquad R_s=\frac{m_2^s}{m_1^s}$$

由式(7.120)和(7.93)得到

$$\Delta u_a = R_3 \Delta u_w + R_4 \Delta \sigma \tag{7.138}$$

$$R_3 = \frac{R_4}{R_a - 1 - \dfrac{(1-S)n}{(u_a + p_{at})m_1^a}}$$

$$R_4 = \frac{1}{R_a - 1 - \dfrac{(1-S)n}{(u_a + p_{at})m_1^a}}$$

$$R_a = \frac{m_2^a}{m_1^a}$$

根据 R_1、R_2、R_3 和 R_4 还可以求出孔隙压力系数为

$$B_w = \frac{\Delta u_w}{\Delta \sigma} = \frac{R_4 - R_1 R_4}{1 - R_1 R_2}$$

$$B_a = \frac{\Delta u_a}{\Delta \sigma} = \frac{R_2 R_3 - R_4}{1 - R_1 R_3} \tag{7.139}$$

孔隙水和孔隙气的固结度与时间因素的关系曲线如图 7.11 所示。固结度 U 定义为

$$U_X = 1 - \frac{\int_0^{2H} u_x \mathrm{d}z}{\int_0^{2H} u_{xi} \mathrm{d}z} \qquad T_V = \frac{C_V t}{H^2} \tag{7.140}$$

式中，x 可以是 a(表示孔隙气)或 w(表示孔隙水)。

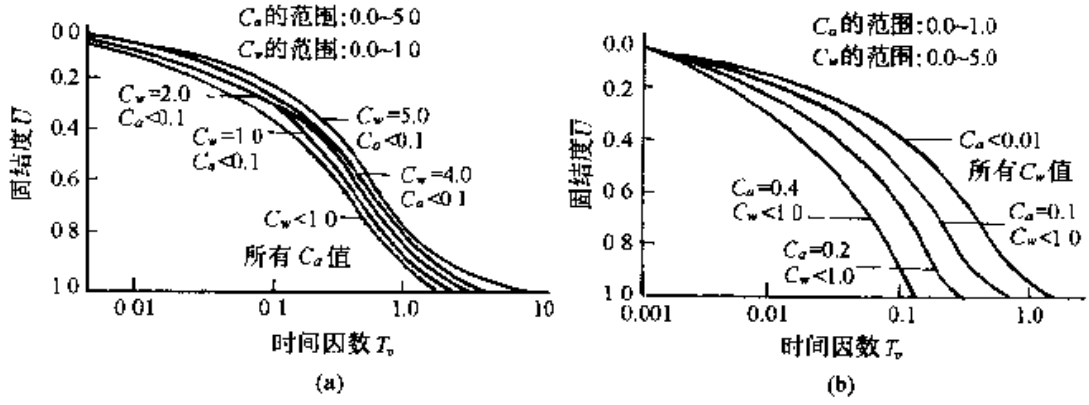


图 7.11　由气相算出的固结曲线

国内学者陈正汉(1989，1991)、杨代泉(1992)和殷宗泽(1998)曾先后研究过非饱和土的固结理论。陈正汉用混合物理论研究了非饱和土的固结理论，陈正汉提出的非饱和土固结理论是一个完整的理论体系，是对土力学理论的创新；杨代泉根据非饱和土的非线性本构模型建立了非饱和土的广义固结理论；殷宗泽对非饱和土三维固结理论进行了简化，提出了非饱和土的两维固结理论。另外，包承纲(1998)研究了非饱和土固结过程中孔压消散系数和饱和度之间的关系。

4. 殷宗泽固结理论

在二维情况下，土体单元的平衡方程为

$$[\partial]^T\{\sigma'\} + [\partial]^T\{u_m\} = \{f\} \tag{7.141}$$

式中

$$u_m = u_a - \chi(u_a - u_w) \qquad \{u_m\} = \{M\} \cdot u_m \qquad \{M\} = [1 \quad 1 \quad 0]^T$$

$$[\partial]^T = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

应力应变关系为

$$\{\sigma'\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{7.142}$$

$$\{\varepsilon\} = -[\partial]\{w\} \tag{7.143}$$

将式(7.142)和(7.143)代入式(7.141)得到

$$-[\partial]^T[D][\partial]\{w\} + [\partial]\{M\}u_m = \{f\} \tag{7.144}$$

式中，$\{w\}$是位移矢量。

非饱和土的连续方程为

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = -\frac{k_m}{\gamma_m}\nabla^2 u_m + \frac{\partial \varepsilon_{ul}}{\partial t} \tag{7.145}$$

式中：ε_v是土体体变；ε_{ul}是流体体变；γ_m是流体容重，$\gamma_m = S\gamma_w$；k_w是流体压缩系数，k_m是饱和土的渗透系数，$k_m = k_w\left(\dfrac{1+e_0}{1+e}\right)\left(\dfrac{S_r}{e_0}\right)$。土体体变可以表示为

$$\varepsilon_v = \{M\}^T\{\varepsilon\} = -\{M\}^T[\partial]\{w\} \tag{7.146}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ul}}{\partial t} = \frac{1}{B_m}\frac{\partial u_m}{\partial t} \tag{7.147}$$

式中，B_m是流体的体积压缩模量

$$B_m = \frac{\mathrm{d}u_m}{\mathrm{d}\varepsilon_{ul}} \tag{7.148}$$

根据 Boyle 定律，有 $e_a(u_a + p_{at}) = e_{a0}(u_{a0} + p_{at})$，得到

$$\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}e_a} = -\frac{e_{a0}}{e_a^2}(u_{a0} + p_{at}) \tag{7.149}$$

将 $e_a = 1 - S$ 代入式(7.148)得到

$$\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}e_a} = -\frac{(1 - S_0)}{(1 - S)^2 e^2}(u_{a0} + p_{at}) \tag{7.150}$$

将 $\mathrm{d}\varepsilon_{ul} = \dfrac{\mathrm{d}e_a}{1+e_0}$代入式(7.148)得到

$$B_m = -(1 + e_0)\left(\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}e_a} + \chi\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}e_a}\right) \tag{7.151}$$

假设水分特征曲线方程为

$$S = S_0 - D\lg\frac{u_s}{u_{s0}} \tag{7.152}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}S} = \frac{1}{u_{s0}}\frac{u_s}{D} \tag{7.153}$$

根据饱和度定义 $S=\frac{e_w}{e_w+e_a}$ 得到

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}e_a} = -\frac{S}{e} \tag{7.154}$$

将式(7.150)和(7.153)代入式(7.151)得到

$$B_m = \frac{1+e_0}{e}\left[\frac{(1-S_0)e_0}{(1-S)^2 e}(p_{at}+u_{ao}) + \frac{1}{u_{s0}}\frac{\chi S u_s}{D}\right] \tag{7.155}$$

将式(7.146)和(7.147)代入式(7.145)得到

$$[M]^T\frac{\partial}{\partial t}[\partial]\{w\} - \frac{k_m}{\gamma_m}\nabla^2 u_m + \frac{1}{B_m}\frac{\partial u_m}{\partial t} = 0 \tag{7.156}$$

孔隙水的连续性方程为

$$-\frac{k_w}{\gamma_w}\nabla u_m = \frac{1}{1+e_0}\left(S\frac{\partial e}{\partial t} + e\frac{\partial S}{\partial t}\right) \tag{7.157}$$

将式(7.152)和 $u_s=\frac{u_m-u_a}{1-\chi}$ 代入式(7.157)得到

$$\frac{k_w}{\gamma_w}\nabla^2 u_w + \alpha\frac{\partial u_w}{\partial t} = \alpha\frac{\partial u_m}{\partial t} + S\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \tag{7.158}$$

式中

$$\alpha = \frac{eD}{(1+e_0)(1-\chi)u_s}$$

5. 杨代泉固结理论

这里仅介绍一维固结方程组和简化解析解。

假设非饱和土孔隙气和孔隙水渗流都服从 Darcy 定律，且略去重力项对孔隙气渗流的影响，则有

$$q_a = -\frac{k_a}{\gamma_w}\frac{\partial u_a}{\partial z} \tag{7.159}$$

$$q_w = -\frac{k_w}{\gamma_w}\left(\frac{\partial u_w}{\partial z} + \gamma_w\right) \tag{7.160}$$

式中：$k_w=k_{ws}k_{rw}$，$k_a=k_{as}k_{ra}$，k_{ws} 和 k_{as} 分别是饱和土的渗水系数和干土的渗气系数；k_{rw} 和 k_{ra} 分别是孔隙水和孔隙气的相对渗透系数。

设孔隙水不可压缩，孔隙水的质量连续性方程为

$$\frac{\partial}{\partial t}(Sn\rho_w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_w q_w) = 0 \tag{7.161}$$

将式(7.160)代入式(7.161)，同时考虑到 ρ_w 为常数得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(Sn)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{k_w}{\gamma_w}\frac{\partial u_w}{\partial z}\right)+\frac{\partial k_w}{\partial z} \tag{7.162}$$

单位土体中含气总质量 m_a 为

$$m_a=(1-S)n\rho_a+HnS\rho_a^i \tag{7.163}$$

式中：H 是亨利系数；ρ_a 是孔隙气密度；ρ_a^i 是溶于水中气体密度。m_a 变化由两部分组成，即气压力梯度作用下渗出孔隙气质量和水压力梯度作用下溶于渗出孔隙水中气体质量，即

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-S)n\rho_a-HnS\rho_a^i]+\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a q_a)+H\frac{\partial}{\partial z}(\rho_a q_a)=0 \tag{7.164}$$

为了简单起见，另 $\rho_a=\rho_a^i$，将式(7.159)和(7.160)代入(7.164)得到

$$\frac{\partial}{\partial t}[(1-S+HS)n\rho_a]=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_a k_a}{\gamma_w}\frac{\partial u_a}{\partial z}\right)+H\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho_a k_w}{\gamma_w}\frac{\partial u_w}{\partial z}+\rho_a k_w\right)=0 \tag{7.165}$$

恒温条件下，气体密度为

$$\rho_a=\rho_{a0}\left(1+\frac{u_a}{p_{at}}\right) \tag{7.166}$$

式中：p_{at} 是大气压力；ρ_{at} 是大气压下气体密度。

为了求解 u_a、u_w、S 和 n 还需要补充两个状态方程，即

$$n=f_n(\sigma-u_a,u_a-u_w,S_0,n_0) \tag{7.167}$$

$$u_s=u_a-u_w=f_s(S,n,S_0,n_0) \tag{7.168}$$

式中：S_0 和 n_0 分别为初始饱和度和初始孔隙率；f_n 和 f_s 为经验函数。

由于基本方程组求解很复杂，需数值求解。

假设：①孔隙气没有完全封闭之前($S<90\%$)，固结过程主要是孔隙气排出，瞬时外加压力作用后的饱和度变化量与固结过程中饱和度变化量相比可忽略不计；②固结过程中饱和度和吸力变化对固结的影响不计；③孔隙水和孔隙气渗透系数均为常量。在饱和度不太高的情况下，由式(7.195)和(7.196)得到

$$n\frac{\partial u_a}{\partial t}+(u_a+p_{at})\frac{\partial n}{\partial t}=\frac{(k_a+Hk_w)}{\gamma_w(1-S-HS)}\frac{\partial}{\partial z}\left[(u_a+p_{at})\frac{\partial u_a}{\partial z}\right] \tag{7.169}$$

孔隙率 n 可以表示为

$$n=n_0-m_1^s(\Delta\sigma-\Delta u_a)+R_s(\Delta u_a-\Delta u_w) \tag{7.170}$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=m_1^s\frac{\partial u_a}{\partial t} \tag{7.171}$$

将式(7.171)代入式(7.169)，同时令 $u=u_a+p_{at}$ 得到

$$\frac{\partial u^2}{\partial t}=J_v\frac{\partial^2 u^2}{\partial z^2} \tag{7.172}$$

式中

$$J_v=\frac{u(k_a+Hk_w)}{(1-S+HS)\gamma_w(n+m_1^s u)}$$

初始条件为

$$u_a(z,0)=u_{at}\quad(0<z<H)\tag{7.173}$$

边界条件为

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial z}u_a(0,t)=0\quad(t>0)\\ u_a(H,t)=0\quad(t>0)\end{gathered}\tag{7.174}$$

式中，H 为非饱和土层厚度。再令 $p=u^2-p_{at}^2$，式(7.172)、(7.173)和(7.174)变为

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial t}=L_v\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\\ p(z,0)=u_{at}(u_{at}+2p_{at})\quad(0<z<H)\\ \frac{\partial}{\partial t}p(H,t)=0\\ p(0,t)=0\end{gathered}\qquad(t>0)\tag{7.175}$$

式中

$$\begin{gathered}L_v=\frac{(k_a+Hk_w)(R_aR_{at}+1)p_{at}}{(1-S+HS)\gamma_w\{n_i+m_1^2[(2R_a-1)R_{at}+1]p_{at}\}}\\ R_a=u_a/u_{at}\\ R_{at}=u_{at}/p_{at}\end{gathered}$$

显然 $R_a>0$，$0\leqslant R_a<1$。在不考虑 R_a 变化的情况下，即 L_v 为常数时的解析解为

$$p=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{2u_{at}(u_{at}+2p_{at})}{M}\sin\frac{MZ}{H}\exp(-ML_vt)\tag{7.176}$$

式中，$M=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$。

由 p 求得

$$u_a=\sqrt{p^2+p_{at}^2}-p_{at}\tag{7.177}$$

反映了孔隙气压 u_a 消散程度得固结度 U_a 为

$$U_a=1-\frac{\int_0^H u_a\mathrm{d}z}{\int_0^H u_{at}\mathrm{d}z}\tag{7.178}$$

6. 陈正汉固理论

陈正汉固结理论较为成熟，其结果与工程实践较为一致，以下作重点介绍。

陈正汉(1989,1991)用混合物理论研究了非饱和土的固结问题。为了简化问题，作以下的基本假设：①不考虑相变和气再水中的溶解；②组分应力是对称的；③土是均质各向同性、小变形，准静态；④土中水与气各自连通，水与气不承受剪应力；⑤土粒和水不可压缩；⑥温度保持不变，不计热效应，气体服从理想气体的状态方程。

设 ϕ、ρ 和 γ 分别表示各组分的体积分数、体密度和真密度，用 s、f 和 g 分别代表固相、液相和气相。对于饱和土则有

$$\phi_s = 1 - n \qquad \rho_s = (1-n)\gamma_s \qquad \phi_f = nS \qquad \rho_f = nS\gamma_f$$

$$\phi_g = n(1-S) \qquad \rho_g = n(1-S)\gamma_g \qquad \gamma_g = \frac{\Omega}{R\Theta}p_g \tag{7.179}$$

式中：n 是土的孔隙率；S 是水的饱和度；Ω 是气体的分子量；R 是气体普适常数；Θ 是绝对温度；$p = p_{at} + u_a$ 为绝对气压，p_{at} 是大气压，u_a 是超孔隙气压。

非饱和土三相连续方程表示为：1)固相连续性方程为

$$\frac{\partial(1-n)}{\partial t} + \nabla \cdot [(1-n)\dot{X}_s] = 0 \tag{7.180}$$

2)水的连续性方程为

$$\frac{\partial(nS)}{\partial t} + \nabla \cdot [nS\dot{X}_f] = 0 \tag{7.181}$$

3)气的连续性方程为

$$\frac{\partial[n(1-S)\rho_g]}{\partial t} + \nabla \cdot [n(1-S)\rho_g\dot{X}_g] = 0 \tag{7.182}$$

式中：X 表示三相位移，$\dot{X}$ 表示对组分运动的物质导数；$\nabla \cdot$ 是散度算子。

非饱和土各组分的运动用动量守恒方程表示。如果不考虑体力和惯性力，运动方程为

$$\begin{gathered}\nabla(nSp_f) = \hat{p}_f \\ \nabla[n(1-S)p_g] = \hat{p}_f \\ \nabla T = 0\end{gathered} \tag{7.183}$$

式中：p_f 是孔隙水压力；T 是总应力张量；$\hat{p}_f$ 和 $\hat{p}_g$ 分别表示水和气所受到的扩散阻力；∇ 是梯度算子。渗透阻力与渗流方向相反，则有

$$\begin{aligned}\hat{p}_f &= -\xi_{11}(\dot{X}_f - \dot{X}_S) - \xi_{12}(\dot{X}_g - \dot{X}_s) \\ \hat{p}_g &= -\xi_{21}(\dot{X}_f - \dot{X}_S) - \xi_{22}(\dot{X}_g - \dot{X}_s)\end{aligned} \tag{7.184}$$

式中，ξ_{11}、ξ_{12}、ξ_{21} 和 ξ_{22} 是材料参数。

式(7.184)表明，水和气渗流不仅会受到因本身对土骨架作相对运动而产生的阻力，且两种流体间也存在着阻力。

非饱和土的本构关系可以用有效应力表示，根据有效应力的概念，可设

$$\sigma = f_1(\varepsilon) \tag{7.185}$$

此外，客观性原理要求

$$Q\sigma Q^T = f_1(Q\varepsilon Q^T) \tag{7.186}$$

满足式(7.186)的函数 f_1 称为各向同性张量函数。由于 σ 和 ε 都是实二阶对称张量，故有

$$\sigma = \lambda_0 I + \lambda_1\varepsilon + \lambda_2\varepsilon^2 \tag{7.187}$$

其中 λ_0、λ_1 和 λ_2 都是 ε 的三个不变量的函数。

根据小变形假设，略去二阶以上的量，式(7.187)就会简化为广义 Hooke 定律

$$\sigma = \lambda\theta I + 2\mu\varepsilon \tag{7.188}$$

式中：θ 是体应变；I 是单位张量；λ 和 μ 是 Lame 常数。

非饱和土的几何关系可以表示为

$$\varepsilon = -\frac{\nabla X_s + (\nabla X_s)^T}{2} \tag{7.189}$$

在式(7.184)中略去水与气之间的阻力，代入运动方程(7.186)得到

$$nS(\dot{X}_f - \dot{X}_s) = -\frac{K_f}{\gamma_f}\nabla p_f$$

$$n(1-S)(\dot{X}_g - \dot{X}_s) = -\frac{K_g}{\gamma_f}\nabla p_g \tag{7.190}$$

式中：$\frac{K_f}{\gamma_f}=\frac{(nS)^2}{\xi_{11}}$；$\frac{K_g}{\gamma_f}=\frac{[n(1-S)]^2}{\xi_{22}}$，$K_f$ 和 K_g 分别是渗水系数和渗气系数。

非饱和土的饱和度可以表示为

$$S = f_2(\theta, p_f, p_g) \tag{7.191}$$

根据土壤物理学实验结果，得到非饱和土的饱和度的表达式为

$$S = a(n) - b(n)\lg\left(\frac{p_g - p_f}{p_{at}}\right) \tag{7.192}$$

土的总的平衡方程为

$$\nabla\cdot\sigma + \chi\nabla p_f + (1-\chi)\nabla p_g = 0 \tag{7.193}$$

非饱和土固结方程的全量形式由三相连续方程、水气运动方程、总体平衡方程、几何方程、土骨架本构关系和饱和度本构关系组成，共计 25 个方程，包含 25 个未知数(n、S、p_f、p_g、X_s、X_f、$\dot{X}_g$、σ 和 ε 等)，其中有 7 个材料参数(K_f、K_g、χ、λ、μ、a 和 b)，材料参数都可以用试验确定。

为了能模拟施工过程和采用复杂的本构关系，将非饱和土固结理论的全量形式改写为增量形式，即

$$\mu\nabla^2(\delta X_s) + (\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot(\delta X_s) - \chi\Delta(\delta p_f) - (1-\chi)\nabla(\delta p_g) = 0$$

$$(S - an)\nabla\cdot(\delta X_s) + bn(\delta p_f - \delta p_g) = \frac{K_f}{\gamma_f}\nabla^2(\delta p_f)$$

$$(1 - S - an)\nabla\cdot(\delta X_s) - bn(\delta p_f) + \left(\frac{1-S}{p_g} + b\right)n\delta p_g = \frac{K_g}{\gamma_f}\nabla^2(\delta p_g) \tag{7.194}$$

式中，a 和 b 是饱和度增量表达式中的参数，即 $\delta S = a\delta\theta + bp_f - b\delta p_g$，$\theta = tr\varepsilon$。式(7.194)中有五个参数，$\delta p_f$、$\delta p_g$ 和 δX_s。

陈正汉(1993)给出了一维固结问题的解析解，即

$$\Delta u_w = \frac{4}{\pi}q\sum_{m=1}^{\infty}\frac{F_1(m,t)}{2m+1}\exp(-\beta^2 Ct)\sin\beta z$$

$$\Delta u_a = \frac{4}{\pi} q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_2(m,t)}{2m+1} \exp(-\beta^2 C t) \sin \beta z$$

$$W(t) = a_s q h \left\{ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} [\chi F_1(m,t) + (1-\chi) F_2(m,t)] \exp(-\beta^2 C t) \right\} \tag{7.195}$$

式中

$$\beta = \frac{(2m+1)\pi}{2h} \qquad C = \frac{\Delta_{11} + \Delta_{22}}{\Delta}$$

$$F_1(m,t) = \frac{\Delta_{10}}{\Delta} \mathrm{ch}\omega t + \frac{\Delta_{10}/\Delta(\Delta_{22} - \Delta_{11}) + 2\Delta_{12}(\Delta_{20}/\Delta)}{\sqrt{(\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}} \mathrm{sh}\omega t$$

$$F_2(m,t) = \frac{\Delta_{20}}{\Delta} \mathrm{ch}\omega t + \frac{2(\Delta_{10}/\Delta)\Delta_{21} + (\Delta_{11} - \Delta_{22})(\Delta_{20}/\Delta)}{\sqrt{(\Delta_{11} - \Delta_{22})^2 + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}} \mathrm{sh}\omega t$$

$$\omega = \frac{m^2 \sqrt{(\Delta_{11} - \Delta_{22}) + 4\Delta_{12}\Delta_{21}}}{2\Delta}$$

$$\Delta_{10} = a_s(a_1 b_3 + a_2 b_1)$$

$$\Delta_{20} = a_s a_2$$

$$\Delta_{11} = K_1[a_s b_1(1-\chi) + b_3]$$

$$\Delta_{12} = K_2[a_s a_1(1-\chi) + a_3]$$

$$\Delta_{22} = (a_s a_1 \chi + a_2) K_2$$

$$\Delta = \chi\Delta_{10} + (1-\chi)\Delta_{20} + a_2(a_3 + b_3)$$

$$a_s = \frac{1}{\lambda + 2\mu}$$

$$a_1 = S - an \qquad a_2 = bn \qquad a_2 = -bn$$

$$b_1 = 1 - a_1 \qquad b_2 = \frac{n(1-S)}{p_g} + bn$$

$$K_1 = \frac{K_f}{\gamma_f} \quad K_2 = \frac{K_s}{\gamma_f}$$

$$\Delta u_w = \delta p_f \quad \Delta u_w = \delta p_f \quad W = \delta X$$

C 是一个反映非饱和土地基的压缩性、饱和度、密度、渗水性、渗气性和吸力的综合指标，可称为非饱和土的一维固结系数，h 是压力 q 作用下地基沉降的影响深度，即 $W(h,t)=0$。

非饱和土地基沉降的固结度 $U(t)$ 定义为

$$U(t) = \frac{W(t) - W(0)}{W(\infty) - W(0)} = 1 - \frac{1}{\chi \dfrac{\Delta_{10}}{\Delta} + (1-\chi)\dfrac{\Delta_{20}}{\Delta}} \frac{8}{\pi^2}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2m+1)^2} [\chi F_1 + (1-\chi) F_2] \exp(-\beta^2 C t) \right\} \tag{7.196}$$

陈正汉(1998)提出了非饱和土的非线性本构关系，根据非饱和土的非线性本构关系得固结方程，即

$$\mu_t \nabla^2 W + (\lambda_t + \mu_t) \nabla \nabla \cdot W - \chi \Delta p_f - (1-\chi) p_g - f_i = 0$$

$$a_1 \nabla \cdot W + a_2 \frac{\partial p_f}{\partial t} + a_3 \frac{\partial p_g}{\partial t} = \nabla [K_1 \nabla (p_f + \gamma_w z)]$$

$$b_1 \nabla \cdot W + b_2 \frac{\partial p_f}{\partial t} + b_3 \frac{\partial p_g}{\partial t} = \nabla (K_2 \nabla p_g) \tag{7.197}$$

式中：∇是梯度算子；$\nabla \cdot$是散度算子；f_i是体力分量的增量；z是竖向坐标；μ_t和λ_t是切线 Lame 参数

$$W = \Delta X_i \qquad p_f = \Delta u_w \qquad p_g = \Delta u_a$$

$$\chi = \frac{3K_t}{H_t} \qquad K_1 = \frac{k_w}{\gamma_w} \qquad K_2 = \frac{k_a}{\gamma_w}$$

$$a_1 = \frac{K_1}{K_{wt}} + nS \qquad a_2 = \frac{1}{H_{ua}} - \frac{\chi}{K_{wt}} \qquad a_3 = -a_2$$

$$b_1 = 1 - a_1 \qquad b_2 = -a_2 \qquad b_3 = \frac{n(1-S)}{u_a + p_{at}} - a_2$$

需要指出，非饱和土理论(包括非饱和土的有效应力原理、应力和应变状态变量理论、强度理论、固结理论和本构模型)已有许多成果，但还没有一种公认的成熟和完善的理论。所以，关于非饱和土理论的研究仍是今后相当长时间内值得深入探讨的问题。

7.5 非饱和土的动力分析方法

7.5.1 非饱和土体动力控制方程

许多学者基于有效应力原理建立了非饱和土的若干单变量理论，其中最著名的为 Bishop 公式

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p \tag{7.198}$$

$$p = X(S_w) p_w + (1 - X(S_w)) p_g \tag{7.199}$$

式中，$X(S_w)$为依赖于土体饱和度 S_w 的参数。

由于 Bishop 公式中 $X(S_w)$参数没有确切的物理意义，且缺乏一个理论的表达式，因此其在数值计算中的应用受到一定程度的限制。Fredland 等(1977)基于多相连续力学原理，提出了非饱和土的双应力变量理论，即非饱和土中任意一个局部点的应力状态可以由该点两个独立的应变量，即净应力 σ^* 和基质吸力 p_c 来描述

$$\sigma^*_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} p_g \tag{7.200}$$

$$p_c(S_w, e) = p_g - p_w \tag{7.201}$$

当材料为非线性时，净应力率 $\dot{\sigma}^*_{ij}$ 可表示为

$$\dot{\sigma}^{*\prime}_{ij} = D^{ep}_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} + \delta_{ij} H_c^{-1} \dot{p}_c) = D^{ep}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \delta_{ij} H_c^{-1} D^{ep}_{ijkl} \dot{p}_c = \dot{\sigma}'_{ij} + \delta_{ij} H_c^{-1} D^{ep}_{ijkl} \dot{p}_c \tag{7.202}$$

李锡夔等(1992)基于双应力变量理论，定义了非饱和土广义有效应力的概念，提出了一个关于非饱和土体动力反应分析的耦合有限元分析模型。为方便计，假定孔隙气压 p_g 和孔隙水压 p_w 以压为正，而应力及应变均以拉为正。定义 $\dot{\sigma}_{ij}$ 为非饱和土广义有效应力率。D^{ep}_{ijkl} 为材料弹性模量张量，H_c 表达了吸力变化率与弹性体积变化率之间的关系，D^{ep}_{ijkl} 为切线弹塑性模量张量。

将式(7.200)和(7.201)代入式(7.202)并经过整理有

$$\dot{\sigma}''_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \delta_{ij}\dot{p} \tag{7.203}$$

$$\dot{p} = X_s\dot{p}_w + (1 - X_s)\dot{p}_g \tag{7.204}$$

式中

$$X_s = 3K_sH_c^{-1} \tag{7.205}$$

$$K_s = \frac{E}{3(1 - 2\mu)} \tag{7.206}$$

式中：p 可视为孔隙流体混合物作用于土体骨架的等效孔隙压力；K_s 为土体的体积弹性模量。

考虑到孔隙压力作用而产生的土颗粒压缩应变，则由式(7.203)可定义修正广义有效应力率为

$$\dot{\sigma}''_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + \alpha\delta_{ij}\dot{p} \tag{7.207}$$

式中，Biot 参数 α 为

$$\alpha \approx 1 - \frac{K_s}{K_s} \leqslant 1 \tag{7.208}$$

因此，对于一般的非饱和土的非线性动力分析，修正有效应力应变本构关系的速率形式可写为

$$\dot{\sigma}''_{ij} = D^{ep}_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^0_{kl}) - \dot{\sigma}''_{ip}\omega_{pj} - \dot{\sigma}''_{jp}\omega_{pi} \tag{7.209}$$

式中，$\dot{\omega}_{ij}$ 为旋率张量。

因而，可得非饱和土体中孔隙流体质量守恒方程及土体动力平衡方程为

$$(C_{ww} + C_{wg})\dot{p}_w + C_{wg}\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w}\dot{S}_w + \alpha S_w\dot{u}_{i,i} - \beta_{sw}\dot{T} + \dot{w}_{wi,i} + nS_w - C_{wg}\frac{p_c}{S_g}\dot{S}_w + \frac{\dot{w}_{wi}}{\rho_w}\frac{\partial\rho_w}{\partial X_i} = 0 \tag{7.210}$$

$$(C_{gw} + C_{gg})\dot{p}_w + C_{gg}\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w}\dot{S}_w + \alpha S_g\dot{u}_{i,i} - \beta_{sg}\dot{T} + \dot{w}_{gi,i} + nS_g - C_{wg}\frac{p_c}{S_w}\dot{S}_w + \frac{\dot{w}_{gi}}{\rho_g}\frac{\partial\rho_g}{\partial X_i} = 0 \tag{7.211}$$

$$\dot{\sigma}''_{ij,j} - \alpha(\dot{p}_w + \dot{p}_cS_g)_{,i} + \rho\dot{b}_i - \rho\ddot{u}_i = 0 \tag{7.212}$$

式中：β_{sw}、β_{sg} 为热膨胀系数张量；T 为温度；S_g 为气相的饱和度；b_i 为非饱和土体单位质量的体力分量。

$$C_{ww} = \frac{S_w^2(\alpha - n)}{K_s} + \frac{S_w n}{K_w} \tag{7.213}$$

$$C_{gg} = \frac{S_g^2(\alpha - n)}{K_s} + \frac{S_g n}{K_g} \tag{7.214}$$

$$C_{wg} = C_{gw} \frac{S_g S_w(\alpha - n)}{K_s} \tag{7.215}$$

由孔隙流体的动量平衡方程可得其速度为

$$w_{wi} = (K_w)_{ij}(-p_{w,j} + \rho_w(b_j - \ddot{u}_j)) \tag{7.216}$$

$$w_{gi} = (K_g)_{ij}(-p_{g,j} + \rho_g(b_j - \ddot{u}_j)) \tag{7.217}$$

因此，方程(7.210)、(7.211)、(7.212)、(7.216)、(7.217)即构成非饱和土的动力控制方程。

7.5.2 动力控制方程的有限元离散

将方程(7.216)、(7.217)代入方程(7.210)、(7.211)，并对方程(7.210)～(7.212)在空间区域进行有限元离散化，根据 Galerkin 加权残数法，取

$$u_i = N_k^u u_{ik} \tag{7.218}$$

$$p_w = N_k^p p_{wk} \tag{7.219}$$

$$S_w = N_k^s S_{wk} \tag{7.220}$$

$$T = N_k^t T_k \tag{7.221}$$

可得动力控制方程的有限元离散形式为

$$\int_\Omega N_{k,i}^u \sigma_{ij}' \mathrm{d}\Omega - Q_p^T p_w + Q_s^{*T} S_w + M_u \ddot{u} = F_u \tag{7.222}$$

$$M_p \ddot{u} + Q_p \ddot{u} + C_{pp}\dot{p}_w + C_{ps}\dot{S}_w + H_{pp}p_w + H_{ps}S_w = F_p \tag{7.223}$$

$$M_s \ddot{u} + Q_s \dot{u} + C_{sp}\dot{p}_w + C_{ss}\dot{S}_w + H_{sp}p_w + H_{ss}S_w = F_s \tag{7.224}$$

其中

$$H_{pp} = \int_\Omega N_{k,i}^p (k_{wj} + k_{gj}) N_{L,j}^p \mathrm{d}\Omega \tag{7.225}$$

$$H_{ss} = \int_\Omega N_{k,i}^s k_{gj} \left(\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w}\right)\left(\frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w}\right) N_{L,j}^s \mathrm{d}\Omega \tag{7.226}$$

$$H_{ps} = H_{sp}^T = \int_\Omega N_{k,i}^p k_{gj} \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} N_{L,j}^s \mathrm{d}\Omega \tag{7.227}$$

$$M_u = \int_\Omega N_k^u \rho \delta_{ij} N_L^u \mathrm{d}\Omega \tag{7.228}$$

$$M_p = \int_\Omega N_{k,i}^p (k_{wj}\rho_w + k_{gj}\rho_g) N_L^u \mathrm{d}\Omega \tag{7.229}$$

$$M_s = \int_\Omega N_{k,i}^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} k_{gj}\rho_g N_L^u \mathrm{d}\Omega \tag{7.230}$$

$$Q_p = \int_\Omega N_k^p \alpha \delta_{jl} N_{L,l}^u \mathrm{d}\Omega \tag{7.231}$$

$$Q_s = \int_\Omega N_k^s \alpha S_g \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} \delta_{jl} N_{L,l}^u \mathrm{d}\Omega \tag{7.232}$$

$$Q_s^{*T} = \int_\Omega N_k^u \alpha \left(S_g \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} - p_c \right) \delta_{jl} N_{L,l}^s \mathrm{d}\Omega \tag{7.233}$$

$$C_{pp} = \int_\Omega N_k^p \left(\frac{\alpha - n}{K_s} + \frac{nS_w}{K_w} + \frac{nS_g}{K_g} \right) N_l^p \mathrm{d}\Omega \tag{7.234}$$

$$C_{sp} = \int_\Omega N_k^s \left(\frac{\alpha - n}{K} + \frac{n}{K} \right) S_g \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} N_l^p \mathrm{d}\Omega \tag{7.235}$$

$$C_{ss} = \int_\Omega N_k^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} \left(\frac{nS_g}{k_g} \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} - n + \frac{(\alpha - n)S_g}{k_s} \left(S_g \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} - p_c \right) \right) N_l^s \mathrm{d}\Omega \tag{7.236}$$

$$C_{ps} = \int_\Omega N_k^p \left(\left(\frac{(\alpha - n)S_g}{K_s} + \frac{nS_g}{K_g} \right) \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} - \frac{(\alpha - n)p_c}{K_s} \right) N_l^s \mathrm{d}\Omega \tag{7.237}$$

$$\begin{aligned} F_p = & \int_\Omega N_{k,i}^p (k_{wij}\rho_w b_j + k_{gij}\rho_g b_j)\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{qw}} N_k^p \bar{w}_w n \mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_{qg}} N_k^p \bar{w}_g n \mathrm{d}\Gamma \\ & - \int_\Omega N_k^p (k_{wij}(-p_{w,j} + \rho_w b_j - \rho_w \ddot{u}_j)\rho_{w,i}/\rho_w + k_{gij}(-p_{w,j} - p_{c,j} \\ & + \rho_g b_j - \rho_g \ddot{u}_j)\rho_{g,i}/\rho_g)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega N_k^p (\beta_{sw} + \beta_{sg}) N_l^s \mathrm{d}\Omega \cdot \dot{T} \end{aligned} \tag{7.238}$$

$$\begin{aligned} F_s = & \int_\Omega N_{k,i}^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} k_{gij}\rho_g b_j \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{qg}} N_k^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} \bar{w}_g n \mathrm{d}\Gamma - \int_\Omega N_k^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} k_{gij}(-p_{w,j} \\ & - \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} S_{w,j} + \rho_g b_j - \rho_g \ddot{u}_j)(\rho_{g,i}/\rho_g)\mathrm{d}\Omega + \int_\Omega N_k^s \frac{\mathrm{d}p_c}{\mathrm{d}S_w} \rho_{sg} N_l^s \mathrm{d}\Omega \cdot \dot{T} \end{aligned} \tag{7.239}$$

$$F_u = \int_\Omega N_k^u \rho b_i \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_t} N_k^u \bar{t}_i \mathrm{d}\Gamma \tag{7.240}$$

$$\rho = \rho_s(1 - n) + n(S_w\rho_w + S_g\rho_g) \tag{7.241}$$

7.5.3 耦合有限元离散方程的数值解法

(1) 交替解法。

交替解法的基本思路是，首先将动力问题在时域上进行离散，近似地估计 t_n 时刻的 $p_{w,n}$ 和 $S_{w,n}$ 的值，然后代入方程(7.222)求出 u_n，再将求得的 u_n 代入式(7.223)、(7.224)，求出 $p_{w,n}$ 和 $S_{w,n}$。若两次求得的 $p_{w,n}$ 和 $S_{w,n}$ 相差较大，不能满足误差要求，则重复以上步骤，直到满足为止。然后才能按上述思路继续求解下一时步。

由于通常的交替解法在求解动力控制方程(7.222)～(7.224)时仅是条件稳定的，为了使交替解法无条件稳定，我们引进一个修正刚度矩阵来替代式(7.222)中的刚度矩阵。在不排水时，方程(7.223)、(7.224)中运动矩阵 H_{pp}、H_{ps}(H_{sp})及 H_{ss} 为零，取 $F_p = F_s = 0$ 且不计 $M_p\ddot{u}$ 和 $M_s\ddot{u}$ 项，则由方程(7.223)和(7.224)有

$$\begin{Bmatrix} p_w \\ S_w \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} C_{pp} & C_{ps} \\ C_{sp} & C_{ss} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} Q_p \\ Q_s \end{bmatrix}u = -\begin{bmatrix} A_{pp} & A_{ps} \\ A_{sp} & A_{ss} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q_p \\ Q_s \end{bmatrix}u \tag{7.242}$$

再把方程(7.222)变形为

$$M_u\ddot{u}_{n+1} + C\dot{u}_{n+1} + (K + Q_p^TA_{pp}Q_p + Q_p^TA_{ps}Q_s)u_{n+1}$$
$$= F_{u,n+1} + Q_p^Tp_{w,n+1}^p + (Q_p^TA_{pp}Q_p + Q_p^TA_{ps}Q_s)u_{n+1}^p \tag{7.243}$$

式中：K 为土体的切线刚度矩阵；$u_{w,n+1}^p$为 $u_{w,n+1}$的预估值。

然后根据已知的 t_n 时刻的 u_n、$\dot{u}_n$、$\ddot{u}_n$ 和 p_n、$\dot{p}_n$ 及 t_{n+1}时刻由外插法得出的预估值 $p_{w,n+1}^p$和 $S_{w,n+1}^p$，由方程(7.243)求出 t_{n+1}时刻的 u_{n+1}、$\dot{u}_{n+1}$和 $\ddot{u}_{n+1}$。

再将求出的 u_{n+1}、$\dot{u}_{n+1}$和 $\ddot{u}_{n+1}$代入方程(7.242)得出 t_{n+1}时刻的值 $p_{w,n+1}$、$\dot{p}_{w,n+1}$、$S_{w,n+1}$及 $\dot{S}_{w,n+1}$。

重复以上步骤直到所得方程的解满足所要求的收敛误差为止。

上述隐-隐格式的交替解法，对于适当的预估值 u_{n+1}^p、$p_{w,n+1}^p$和 $S_{w,n+1}^p$是无条件稳定的。但由于修正刚度矩阵中 $Q_p^TA_{pp}Q_s+Q_p^TA_{ps}Q_p$ 无法直接求出，必须采取适当的措施对其进行简化，以便计算其近似值。不过根据有关专家的计算，在动力分析中 $Q_p^TA_{ps}Q_s$ 项的影响可忽略不计，因此为方便计，可不考虑 $Q_p^TA_{ps}Q_s$ 项的影响。对于修正刚度矩阵采用下式近似表示：

$$K_u \approx K + Q_p^TA_{pp}Q_p \approx \int_\Omega B^T(D + Q_b a^2 mm^T)B\mathrm{d}\Omega \tag{7.244}$$

式中：$m^T=[1\quad 1\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0]$；$D$ 为排水模量矩阵；B 为几何矩阵。不过修正刚度矩阵经此近似后，隐-隐格式的交替解法仅适用于具有线性内插形函数的单元如四结点单元等的计算。

(2)直接解法。

对于前述非饱和土体 u-p-S 形耦合动力方程的数值计算，除上面介绍的交替解法外，若方程(7.223)和(7.224)的离散形式对称，也可由饱和土体 u-p 形耦合动力方程的直接解法[Zienkiewicz(1985)]推广而得的求解方法进行计算。

在离散的时间域上，采用 Newmark-β 法中的假定，可取

$$u_{n+1} = u_n + \dot{u}_n\Delta t + \ddot{u}_n\Delta t^2/2 + \Delta\ddot{u}_{n+1}\beta\Delta t^2 = u_{n+1}^p + \Delta\ddot{u}_{n+1}\beta\Delta t^2 \tag{7.245}$$

$$\dot{u}_{n+1} = \dot{u}_n + \ddot{u}_n\Delta t + \Delta\ddot{u}_{n-1}\gamma\Delta t = \dot{u}_{n+1}^p + \Delta\ddot{u}_{n+1}\gamma\Delta t \tag{7.246}$$

$$p_{w,n+1} = p_{w,n} + \dot{p}_{w,n}t + \ddot{p}_{w,n}\Delta t^2/2 + \Delta\ddot{p}_{w,n-1}\beta\Delta t^2 = p_{w,n+1}^p + \Delta\ddot{p}_{u,n+1}\beta\Delta t^2 \tag{7.247}$$

$$S_{w,n+1} = S_{w,n} + \dot{S}_{w,n}t + \ddot{S}_{w,n}\Delta t^2/2 + \Delta\ddot{S}_{w,n+1}\beta\Delta t^2 = S_{w,n+1}^p + \Delta\ddot{S}_{w,n+1}\beta\Delta t^2 \tag{7.248}$$

将式(7.245)～(7.248)代入方程(7.222)～(7.224)，并经过适当的变换，则可得对称形式的动力方程

$$\begin{bmatrix} M+C\gamma\Delta t+K\beta\Delta t^2 & -Q_p^T\beta\Delta t^2 & 0 \\ -Q^p\beta\Delta t^2 & -(C_{pp}+H_{pp}\beta\Delta t/\gamma)\beta\Delta t^2 & -(C_{ps}+H_{ps}\beta\Delta t/\gamma)\beta\Delta t^2 \\ 0 & -(C_{pp}^T+H_{ps}^T\beta\Delta t/\gamma)\beta\Delta t^2 & -(C_{ss}+H_{ss}\beta\Delta t/\gamma)\beta\Delta t^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\ddot{u}_{n+1} \\ \Delta\ddot{P}_{w,n+1} \\ \Delta\ddot{S}_{w,n+1} \end{bmatrix} = [F_{u,n+1}^{*T} \quad F_{p,n+1}^{*T} \quad F_{s,n+1}^{*T}]^T \tag{7.249}$$

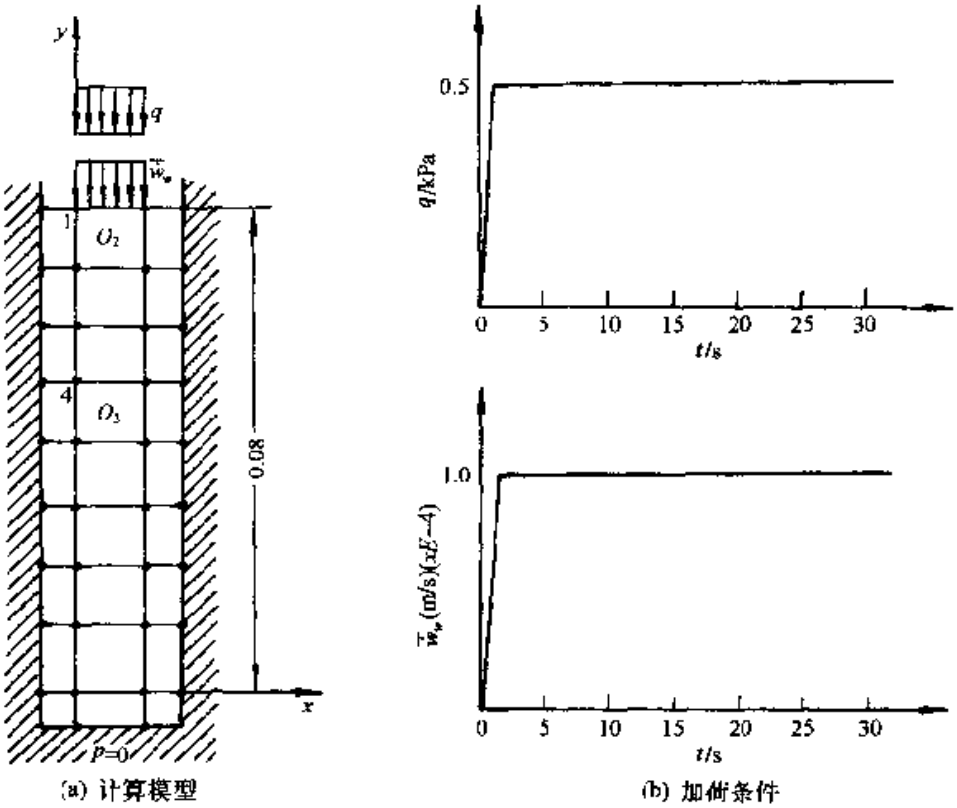
其中

$$F_{u,n+1}^* = F_{u,n+1} - Ku_{n+1}^p + Q_p p_{w,n+1}^p - C\dot{u}_{n+1}^p - M\ddot{u}_{n+1}^p \tag{7.250}$$

$$\begin{aligned} F_{p,n+1}^* = &-\beta\Delta t/\gamma(F_{p,n+1} - C_{pp}\dot{p}_{w,n+1}^p - C_{ss}\dot{S}_{w,n+1}^p - H_{sp}\dot{p}_{w,n+1}^p \\ &- C_{ps}\dot{S}_{w,n+1}^p - H_{pp}p_{w,n+1}^p - H_{ps}S_{w,n+1}^p) \end{aligned} \tag{7.251}$$

$$\begin{aligned} F_{s,n+1}^* = &-\beta\Delta t/\gamma(F_{s,n+1} - C_{sp}\dot{P}_{w,n+1}^p - C_{ss}\dot{S}_{w,n+1}^p - H_{sp}P_{w,n+1}^p \\ &- H_{ss}S_{w,n+1}^p - M_s\ddot{u}_{n+1}^p - Q_s\dot{u}_{n+1}^p) \end{aligned} \tag{7.252}$$

因此利用方程组(7.249)和式(7.250)～(7.252)即可求解出 t_{n+1}时刻的变量增量 $\Delta\ddot{u}_{n+1}$、$\Delta\ddot{p}_{w,n+1}$和 $\Delta\ddot{S}_{n+1}$，然后将计算的增量值代入式(7.245)～(7.248)求出 u_{n+1}、$p_{w,n+1}$和 S_{n+1}。最后通过适当的迭代使最终求得的结果满足误差要求后即可转向下一时步。



(a) 计算模型　　(b) 加荷条件

图 7.12　土柱的计算模型及加荷条件

由于方程组(7.249)形式对称，便于利用计算机编程计算，在动荷载作用较慢时，$M_p\ddot{u}_{n+1}$，$M_s\ddot{u}_{n+1}$和 $Q_s\dot{u}_{n+1}$项的数值较小，有时可忽略不计，而且这个推广的直接

解法又是无条件稳定的，因此它在求解耦合动力方程时具有较为广阔的应用前景。

李锡夔等人(1998)为了验证上述非饱和土体的非线性动力分析方法及其两种解法，采用图 7.12 所示的土柱及其边界和加载条件进行分析，其计算结果见图 7.13、图 7.14。计算中假设孔隙气压力 p_g 为常数，整个土柱具有相同的初始应力状态，取 σ_x 和 σ_z 为 −0.25kPa，σ_s 为 −1kPa。

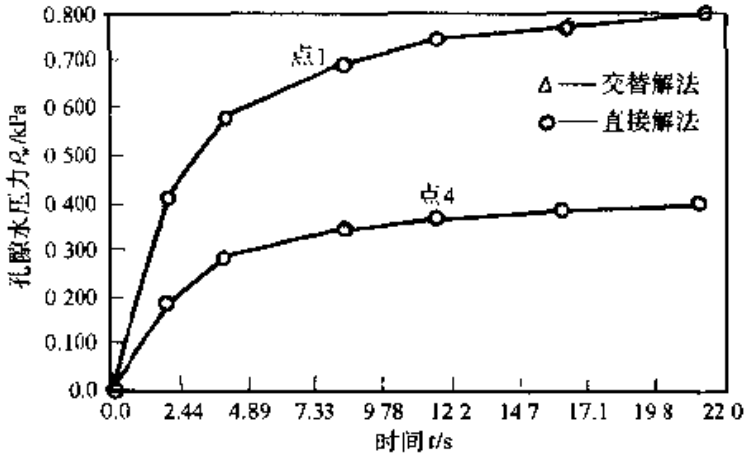


图 7.13　振动孔压时程曲线

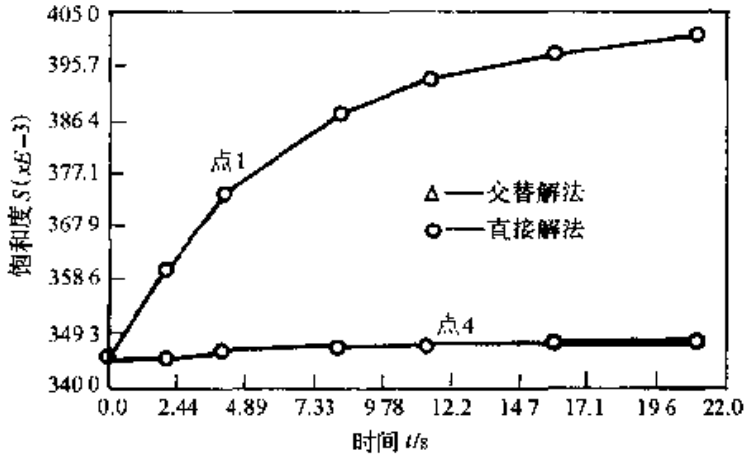


图 7.14　饱和度时程曲线

参 考 文 献

[1] G. D. Aitchison. Separate rote of site investigation quantification of soil properties and selection of operational environment in the determination of foundation design of expansive soils. Proc, 3rd Asian Regional Conf. Soil Mech. and Found. Engrg. (Haifa Israel), 1967,3, 72—77

[2] E. E. Alonso, A. Gens, A. Josa. A constitutive model for partially saturated soils. Geotechnique, 1990, 40(3),42—51

[3] L. Barden. Consolidation of compacted and unsaturated clays. Geotechnique, 1965, 15(3), 257—286

[4] Bao Chenggang. Properties of unsaturated soils and slope stability of expansive soil, Proc. 2nd Int. Conf. Unsat, Beijing, 1998 (2)

[5] A. W. Bishop, N. R. Morgenstern. Stability coefficients for earth slopes. Geotechnique, 1960, 10(4), 129—147

[6] D. K. Black, D. Croney. Pore water pressure and moisture content studies under experimental pavements. Proc. 4th Int. Conf. Soil Mech. & Found. Engrg, 1957 (2),94—103

[7] V. Boulichev. Apparatus for testing compressibility and capillary properties of soils. Proc. 1st. Int. Conf on Soil Mech & Found Engrg, 1936 (2) 37—38

[8] Chen Zhanhan, D. Y. Xie. Consolidation of unsaturated soils. Proc. 7th IACMG, Austrialia, 1991

[9] Chen Zhenghan, Zhaou Haiqing. A non-linear model for unsaturated soils. Proc. 2nd Int. Conf. Unsat, Beijing, 1998

[10] J. D. Coleman. Stress-strain relations for partly saturated soils. Geotechnique, 1962, 12(4), 348—350

[11] D. F. Faizullaev. Laminar Motion of Multiphase Media in Conduits. Special Res. Report, New York, 1969

[12] D. G. Fredlund, N. R. Morgenstern. Stress state variables for unsaturated soils. ASCE J Geotech. Engrg. Div, 1977, 103 (GT5),447—446

[13] D. G. Fredlund, J. U. Hasan. One dimensional consolidation theory: Unsaturated Soils. Can Geotech J, 1979, 16(3), 521—531

[14] D. G. Fredlund, H. Rahardjo. Soil Mechanics for Unsaturated soils. John Wiley Sons, Inc, New York, 1993

[15] A. Gens, E. E. Alonso. A framework for the behavior of unsaturated expansive soil. Can Geotech. J, 1992, 29, 1013—1032

[16] A. E. Green, P. M. Naghdi. A dynamical theory of interacting continua. Int J Engrg Sci (Pergamon London), 1965 (1), 231—241

[17] J. W. Hilf. An investigation of pore-water pressure in compacted cohesive soils. Ph. D Dissertation, 1956

[18] A. Hogentogler, E. S. Barber. Discussion in Soil Water phenomena. Proc Hwy Res Board, 1941 (21), 452—465

[19] J. E. Jennings, J. B. Burland. Limitations to the use of effective stresses in partly saturated soils. Geotechnique, 1962, 12(2), 125—144

[20] D. Karabe. Yield function of unsaturated soils. 12nd Int Conf Soil Mech and Found Engrg, 1989, 615—618

[21] Y. Kohgo, M. Nakano. Theoretical aspects of constitutive modeling for unsaturated soils. Soils and Foundation. 1993, 33(4),49—63

[22] J. T. K. Lau. Desiccation cracking of soils. M Sc thesis, Dep of Civi. Engrg, Uni of Saskatchewan, Saskaton, Canada, 1987

[23] B. B. Mandelbrot. The fractal geometry of nature. W. H. Freeman, San Franciso, 1982

[24] E. L. Matysa, H. S. Radhakrishna. Volume change characteristics of partially saturated soils. Geotechnique, 1968, (4), 432—448

[25] Ohmaki. Stress-strain behavior of aniso-tropically normally consolidated cohesive soil. Pro. 1st Int Symp Num Met Geotech, Zurich, 1982, 250—269

[26] N. A. Ostashev. The law of distribution of moisture in soils and methods for the study of same. Proc

1st Int Conf Soil Mech Found Engrg, 1936 (11),182

[27] R. F. Scott. Principles of soil mechanics. Mass:Addison-Wesly Pub Company, Inc, 1963, 62－78, 177－184

[28] A. W. Skempton. Effective stress in soils, concrete and rocks. Proc Conf on Pore Pressure and Suction in Soils, Butterworths, 1960, 4－16

[29] A. Tayor, G. L. Ashcroft. Physicy Edaphology. San Francisco CA, 1972

[30] K. Terzaghi. Theoretical Soil Mechanics. New York, Wiley, 1932, 510

[31] D. G. Toll. A framework for unsaturated soil behavior. Geotechnique, 1990, 40(1), 31－44

[32] C. Truesdell. The Elements of Continum Mechanics. New York, Springer-Verlag, 1966

[33] H. W. Westergaard. Theory of Elasticity and Plasticity. New York: Dover, 1952,176

[34] S. J. Wheeler U. Sivakumar. An elasto-plastic critical state framework for unsaturated soils. Geotechnique, 1995, 45(1) ,35－53

[35] S. J. Wheeler. Inclusion of specific water volume within elasto-plastic model for unsaturated soils. Can Geotech J, 1996, 33(1),42－57

[36] A. B. Willians. Studies of shear strength and bearing capacity of some partially saturated sands. Proc 4 th Int. Conf Soil Mech & Found Engrg, 1957,(2),453－456

[37] Xu Yongfu. Fractal structure of soils-A Case Study, 2nd Int Conf on Soft Soil Engrg, Nanjing, Hohai University Press, 1996, (1), 72－77

[38] Xu Yongfu, Liu Songyu. Fractal character of grain-size distribution of expansive soils. Fractals, 1999, 7(4),459－466

[39] D. Yang, Z. J. Shen. Study of generalized consolidation theory of unsaturated soils. 7th Int Conf on Expansive Soils, Dallas, 1992, 158－162

[40] Yin Zongze, Sun Changlong. Consolidation of unsaturated expansive soils, 98 Unsat, Soils, International Academic Publishers, Beijing, 1998 (1), 533－537

[41] 俞培基、陈愈炯. 非饱和土的水气形态及其与力学性质的关系. 水利学报,1965,1,16－23

[42] 包承刚. 非饱和压实土的多向形态及孔压消散问题. 第 3 届全国土力学及基础工程会议论文集,1979

[43] 沈珠江. 当前非饱和土力学研究中的若干问题. 区域性岩土工程问题学术研讨会. 魏道垛主编,原子能工业出版社,南京,1996

[44] 陈正汉 . 非饱和土固结理论. 岩土力学新分析方法研讨会,同济大学出版社,1989

[45] 陈正汉、王永胜、谢定义. 非饱和土的有效应力探讨,岩土工程学报,1994,16(3),63－69

[46] 陈正汉、谢定义. 非饱和土固结的混合理论,应用数学与力学,1993(2),127－136

[47] 徐永福、刘松玉. 非饱和土强度理论及其工程应用,东南大学出版社,1999. 11

[48] 徐永福. 非饱和膨胀土结构强度研究. 工程力学,1999(2)

[49] 徐永福. 我国膨胀土分形结构的研究. 河海大学学报,1997,25(1),18－23

[50] 徐永福. 含水量变化引起地表位移的估算方法. 河海大学学报,1998,(4)

[51] 李锡夔、范益群. 非饱和土变形及渗流过程的有限元分析. 岩土工程学报,1998,20(4)

第八章　岩土工程静力有限元分析程序 PDSS

8.1　概　　述

本章着重介绍岩土工程静力有限元分析程序 PDSS，该程序主要用于对岩土工程中典型的静力问题——饱和软粘土地基的静力固结等问题进行有限元分析。

要进行固结分析，首先需明确固结问题的属性。一般固体力学问题的属性通常仅指应变或应力属性，而固结问题的属性则包括变形（或应变）属性和渗流属性。例如，在固体力学中，平面问题是指应变或应力是二维的问题；而对岩土工程中的固结而言，当变形和渗流均为二维时才属于平面问题。

在一般的实际荷载作用下，天然软粘土地基和经人工处理后的地基（如砂井地基、砂桩或碎石桩复合地基等）固结问题通常属于变形和渗流均为三维的空间问题。但在长条形荷载（如条形、梯形荷载等）作用下，如在堤坝、路基、机场跑道下，天然软粘土地基的固结问题属于平面变形、平面渗流固结问题（即平面问题），而经人工处理后的地基固结则往往属于平面变形、空间渗流固结问题。

平面变形、空间渗流固结问题最早是针对砂井地基的固结而提出的。

在软粘土地基处理砂井堆载预压法中，荷载一般可视为长条形，因面地基的变形是平面（二维）的，即沿荷载长度方向位移为零。但由于砂井的存在，地基中的渗流却是空间的，这即为平面变形、空间渗流（Plane Deformation，Spatial Seepage，缩写为 PDSS）固结问题。

事实上，受长条形荷载作用且加固体呈规则柱状形的复合地基，例如砂桩复合地基、碎石桩复合地基、搅拌桩复合地基等均可视为 PDSS 问题。

为了编程和计算上的方便，过去常将 PDSS 问题作为一般的平面问题（即平面变形、平面渗流固结问题）分析。例如在砂井地基固结的有限元分析中，常将砂井简化为沿荷载长度方向上连续的砂墙，并通过改变砂井和地基土体的渗透系数等来使原砂井地基与简化后的砂墙地基等效。而实际上，由于砂井地基与砂墙地基的渗流属性完全不同，这两种地基的固结性状在任一时刻均等效是不可能的，所谓等效只能就某一时刻而言。因此这种分析方法只是一种近似法。

此外，任何其它二维固结问题（如长条形荷载下的天然地基固结）和一维固结问题（如大面积均布荷载下的天然地基固结）显然均是 PDSS 问题的特例。一个能考虑平面变形、空间渗流的有限元分析程序自然也能分析任何二维和一维固结问题。因此，编制能进行平面变形、空间渗流分析的有限元程序的意义是显而易见的。

本章先给出平面变形、空间渗流固结问题的有限元分析(简称 PDSS 分析)理论,然后详细地介绍作者据此编制的有限元程序 PDSS,包括程序的结构、模块、数据格式以及考题等,同时列出该程序简化版源程序清单。

8.2 平面变形、空间渗流固结问题有限元分析理论

在图 1.1 所示的三维空间坐标中,取荷载长度方向为 x 方向,则对 PDSS 问题,x 向位移 $u=0$。故在 PDSS 有限元分析中,每个结点只有 3 个未知量,即沿 y 向和 z 向的位移 v 和 w 以及孔压 p。因此,PDSS 固结问题可视为第四章所述三维固结问题中当 $u=0$ 时的特例。

于是,PDSS 分析的有限元方程仍可写为

$$[K]\{\Delta U\}^e = \{\Delta R\}^e \tag{8.1}$$

但其中单元固结矩阵$[K]$中与 x 向位移 u 对应的行和列应删去,即$[K]$的阶数从 32×32 降为 24×24。其子矩阵为 3×3 阶,即

$$[K_{ij}] = \begin{bmatrix} K_{ij}^{6} & K_{ij}^{7} & K_{ij}^{8} \\ K_{ij}^{10} & K_{ij}^{11} & K_{ij}^{12} \\ K_{ij}^{14} & K_{ij}^{15} & K_{ij}^{16} \end{bmatrix} \quad (i,j=1,2,\cdots,8) \tag{8.2}$$

单元结点未知量增量列阵$\{\Delta U\}^e$和单元结点荷载和流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$的阶数均相应降为 24×1,其子列阵分别为

$$\{\Delta U_i\} = [\Delta v_i \quad \Delta w_i \quad \Delta p_i]^T \quad (i=1,2,\cdots,8) \tag{8.3}$$

$$\{\Delta R_i\} = [\Delta R_{yi} \quad \Delta R_{zi} \quad \Delta R_{pi}]^T \quad (i=1,2,\cdots,8) \tag{8.4}$$

$[K_{ij}]$和$\{\Delta R_i\}$中各元素的计算仍如式(4.47)和(4.56)所示。

以上即为 PDSS 分析有限元理论。

8.3 PDSS 程序主要功能与结构

作者基于上述有限元理论和计算公式,采用 Fortran 语言编制了有限元程序 PDSS。

这里介绍该程序的主要功能、特点与结构(包括主要的子程序)。

8.3.1 主要功能与特点

(1)能进行受均布或长条形荷载(包括条形荷载、梯形荷载、三角形荷载等)作用的天然地基、砂井地基以及砂桩等复合地基有效应力分析。

图 8.1 为对砂井地基或砂桩等复合地基进行 PDSS 分析的示意图。图中,B_L 为荷载区宽度,B_1 为处理或加固区宽度,q 为梯形荷载,S 为砂井(或桩体)间距,H 为软土或地基压缩层厚度,L 为计算域宽度。

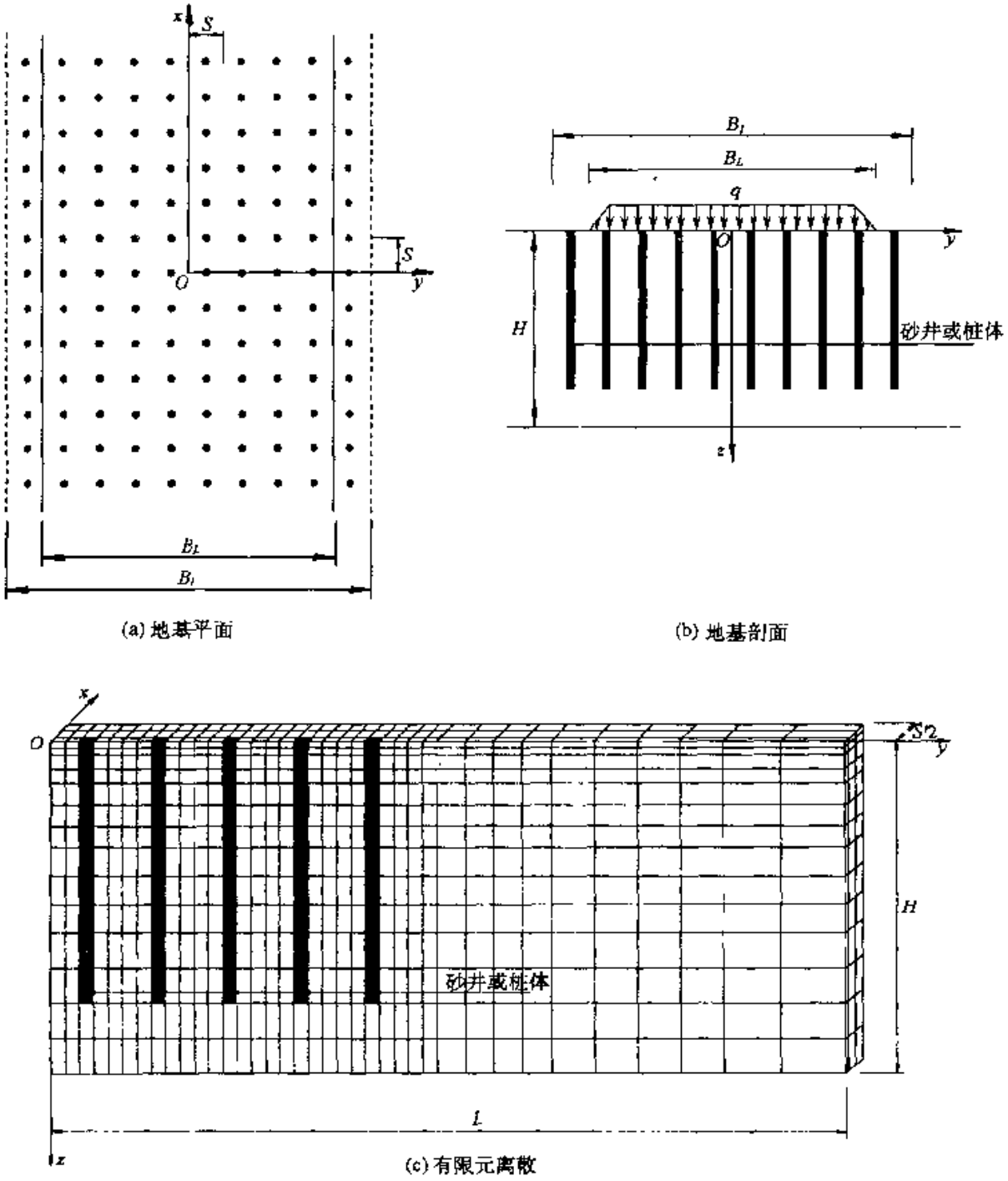


图 8.1　砂井地基或复合地基 PDSS 分析示意图

(2)能进行线性或非线性弹性分析。

(3)能考虑荷载(堆体等)的刚度。

(4)能进行总应力分析。

(5)采用波阵解法(Front Solution)求解有限元方程(组),能在普通微机上分析具有上万个自由度的 PDSS 固结问题。

为了叙述的方便,以下针对 PDSS 程序的简化版进行介绍。该简化版除不能考

虑土的非线性和荷载的刚度外，其它功能与完整版相同，其源程序见 8.6 节。

8.3.2 程序框图与结构

图 8.2 为 PDSS 程序框图。

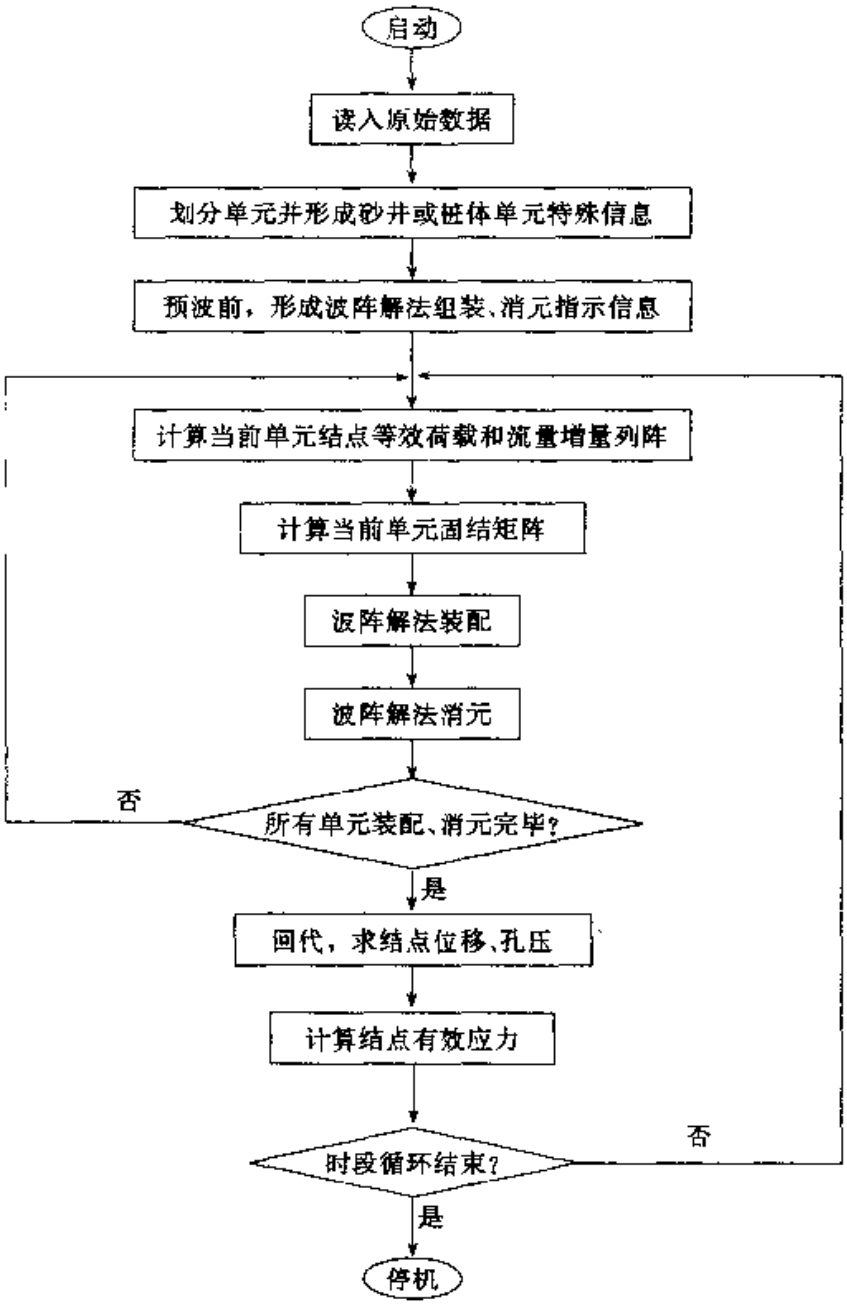


图8.2 PDSS程序框图

PDSS 程序为模块式结构，共分三层，即Ⅰ层、Ⅱ层、Ⅲ层。Ⅰ层为主层，仅含主程序；Ⅱ层和Ⅲ层分别包含 7 个和 8 个子程序，如图 8.3 所示。

图 8.4 为 PDSS 程序的主要模块 CS8，即波阵法求解线性方程组模块。

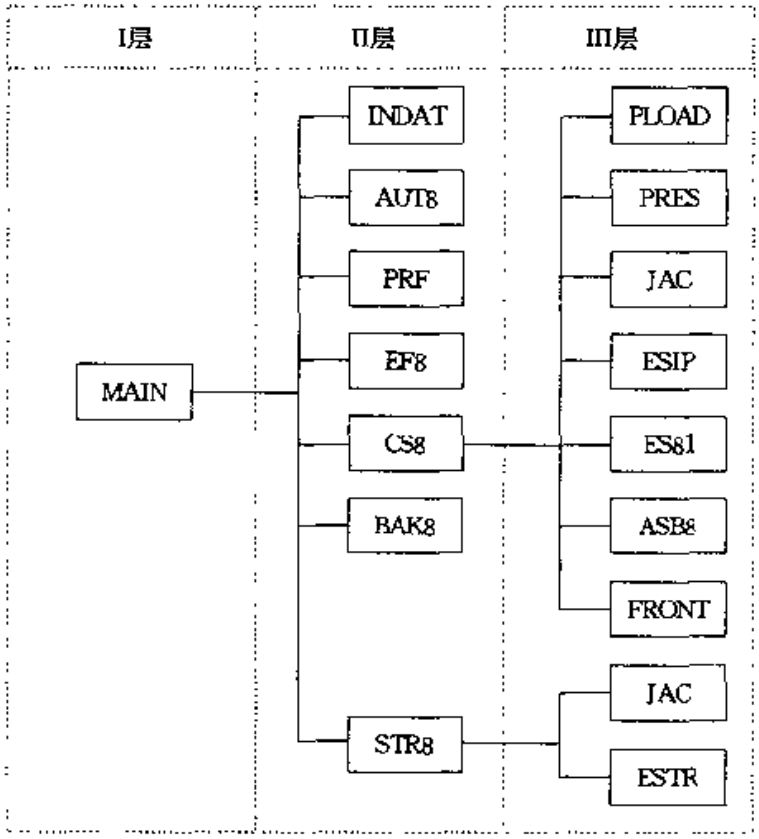


图8.3 PDSS程序层次与结构图

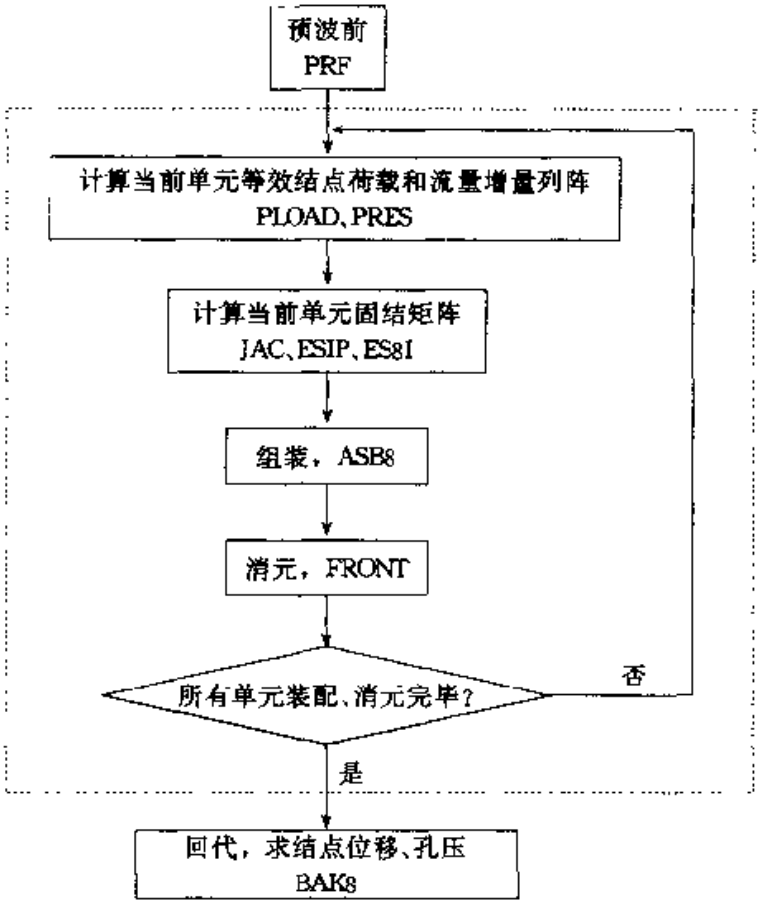


图8.4 PDSS程序主要模块(CS8)：波阵法求解线性方程组

8.3.3 主要变量及数组列表

PDSS 程序主要变量(含数据变量)和数组及其所表达的意义如下：

JBNAME	计算任务名(简称)
KKK	当前计算级数
KPT	总计算级数(即时段数)
NCOM	有效应力或总应力分析控制参数
L	x 向单元数
M	y 向单元数
N	z 向单元数
L1=L+1	x 向结点数
M1=M+1	y 向结点数
N1=N+1	z 向结点数
ME=L×M×N	单元总数
MN=L1×M1×N1	结点总数
NSP	结果打印控制参数
NP	打印点数
MFW	最大波阵宽
MFS=MFW/2×(MFW+1)	用于波阵解法组装单元固结矩阵的一维数组长度
LR	波阵解法存放整型数据的缓冲区长度
MREQ	波阵解法存放实型数据的缓冲区长度
NXSD	砂井或桩体分布形式控制参数
NSD	砂井或桩体根数
NSY	砂井或桩体 y 向单元数
NSZ	砂井或桩体 z 向单元数
BT	总荷载(全部堆体)顶宽之半
BL	总荷载(全部堆体)底宽之半
B1	本级荷载(当前堆体)顶宽之半
B2	本级荷载(当前堆体)底宽之半
PH	水平向渗透系数
PV	竖向渗透系数
PR	Poisson 比
E	弹性模量
ALF	积分常数 θ
DET	Jacobi 比矩阵行列式值 $\|J\|$

NB(12)	存放边界条件信息的一维数组
X(8)	存放单元结点局部坐标 ξ_i
Y(8)	存放单元结点局部坐标 η_i
Z(8)	存放单元结点局部坐标 ζ_i
XC(8)	存放单元结点整体坐标 x_i
YC(8)	存放单元结点整体坐标 y_i
ZC(8)	存放单元结点整体坐标 z_i
FN(8,8)	存放形函数在单元结点或 Gauss 点处值
FX(8,8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$在单元结点或 Gauss 点处值
FY(8,8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$在单元结点或 Gauss 点处值
FZ(8,8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$在单元结点或 Gauss 点处值
DX(8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial x}$在单元结点或 Gauss 点处值
DY(8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial y}$在单元结点或 Gauss 点处值
DZ(8)	存放$\frac{\partial N_i}{\partial z}$在单元结点或 Gauss 点处值
C(9)	存放 Jacobi 矩阵$[J]$中各元素在结点或 Gauss 点处值
AW(9)	存放逆矩阵$[J]^{-1}$中的各元素
XX(L1)	存放 x 向结点整体坐标
YY(M1)	存放 y 向结点整体坐标
ZZ(N1)	存放 z 向结点整体坐标
COR(MN,3)	存放所有结点整体坐标
NLDE(8)	存放单元结点号
LDE(ME,8)	存放所有单元及相应的结点号
LREQ(LR)	存放波阵解法消元过程中整型数据的缓冲区
REQ(MREQ)	存放波阵解法消元过程中实型数据的缓冲区
LDS(MN)	存放波阵解法中所有结点的目标矢量
NLDS(8)	存放单元结点目标矢量
SS(MFS)	波阵解法组装单元固结矩阵$[K]$的一维工作数组
SRS(MFW)	波阵解法组装单元等效结点荷载和流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$的一维工作数组
S(300)	存放单元固结矩阵$[K]$上三角元素

RS(24)	存放单元等效结点荷载和流量增量列阵$\{\Delta R\}^e$各元素
SQ(8,8)	存放$-\theta\cdot\Delta t[K_e]$各元素的二维数组
DISP(MN,2)	存放本级计算所得的结点位移增量
V(MN)	存放所有结点 y 向位移 v
W(MN)	存放所有结点 z 向位移 w
P(MN)	存放所有结点孔压 p
SR(MN,4)	存放所有结点的有效应力：σ_x'、σ_y'、σ_z'、τ_{yx}
NSDY(NSY)	存放砂井或桩体 y 向单元号
LSE(NSD,NSZ)	存放所有砂井或桩体单元号
PKH(N1)	存放各计算分层土体及砂井或桩体水平向渗透系数
PKV(N1)	存放各计算分层土体及砂井或桩体竖向渗透系数
PIR(N1)	存放各计算分层土体及砂井或桩体 Poisson 比
YM(N1)	存放各计算分层土体及砂井或桩体弹性模量
DKT(KPT)	存放各计算时段的时间增量
DQT(KPT)	存放各计算时段的荷载增量

8.3.4 主程序与子程序简介

如图 8.3 所示，PDSS 程序由主程序 MAIN 和 15 个子程序组成。

1. MAIN

主程序。打开输入数据文件读入控制参数等；分配和确定可变场(可调数组)大小；驱动各子程序完成相应工作。

2. INDAT

从输入数据文件中读入结点整体坐标、计算参数及时段等信息并存入相应数组。

3. AUT8

划分单元并自动为单元和结点编号；自动形成砂井或桩体特殊单元标志信息；单元编号以使分析对象的波阵宽最小为原则，即按 $x\rightarrow z\rightarrow y$(先 x 向，后 z 向，再 y 向)的顺序进行；结点编号顺序为 $x\rightarrow y\rightarrow z$，如图 8.5 所示。

4. PRF

预波前，即形成波阵法组装和消元顺序指示信息。

5. EF8

按式(3.30)和(3.34)计算单元形函数及其关于局部坐标导数在单元结点或 Gauss 点处值。

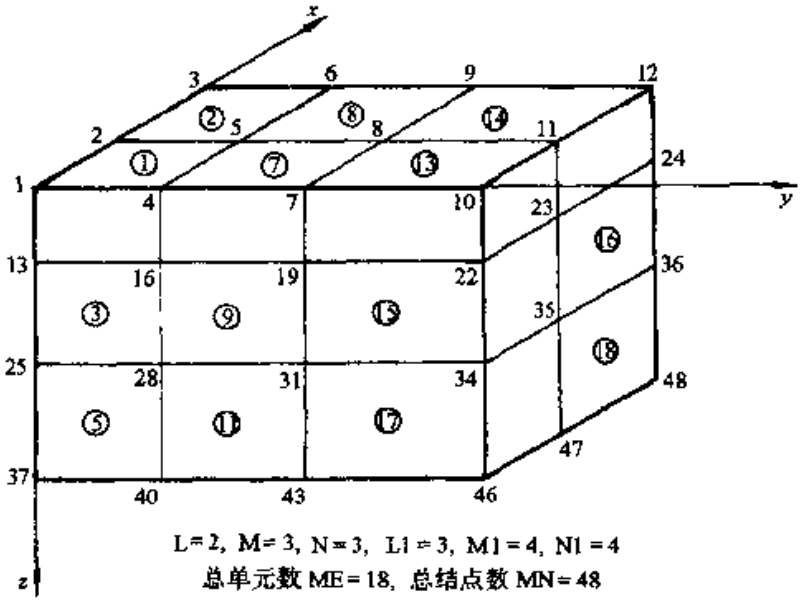


图 8.5 PDSS 程序单元与结点编号示意图

6. CS8

波阵解法模块主程序，驱动子程序 PLOAD、PRES、JAC、ESIP、ES8I、ASB8 和 FRONT 完成从单元固结矩阵元素等的计算到组装、消元等各项工作(图 8.4)。

7. PLOAD

确定每级荷载的几何参数，例如荷载所覆盖的 y 向单元数等。

8. PRES

计算单元等效结点荷载增量。

9. JAC

按式(3.33)计算 Jacobi 矩阵$[J]$中各元素在结点或 Gauss 点处的值及其行列式值，并计算逆矩阵$[J]^{-1}$的各元素。

10. ESIP

计算式(4.47)中各单项(例如$|J|N_i\dfrac{\partial N_i}{\partial y}$等)值，为单元固结矩阵元素的计算做准备。

11. ES8I

按式(4.47)计算 PDSS 分析中的单元固结矩阵[式(8.2)]的上三角元素。

12. ASB8

按 PRF 子程序确定的顺序对单元固结矩阵和等效结点荷载及流量增量列阵进行组装。

13. FRONT

引入边界条件并进行波阵法消元。消元信息先存放在缓冲区 LREQ(LR)和 REQ(MREQ)中，一旦满后就向硬盘写入二进制文件 B.DAT 中。

14. BAK8

从 B. DAT 中取出消元信息并回代，求出本级荷载引起的结点位移和孔压增量及当前结点位移和孔压并输出。

15. STR8

驱动子程序 JAC、ESTR 完成求单元结点有效应力增量、当前结点有效应力(用“绕结点法”)并输出等工作。

16. ESTR

按式(4.63)计算单元结点有效应力增量。

8.4 PDSS 程序的使用与数据格式

8.4.1 前期工作

与一般的有限元分析类似，运行 PDSS 程序前需准备好输入数据文件，而进行数据准备前则需先确定分析对象的计算域、边界条件以及划分单元和时段等。

(1)计算域的确定。

PDSS 分析的计算域为立方体，共有 6 个边界面。为方便计，称与 x 轴垂直的二边界面为前、后面；与 y 轴垂直的二边界面为左、右面；与 z 轴垂直的二边界面为上、下面。

对于砂井地基或砂桩复合地基等 PDSS 问题，当砂井(或桩体)呈正方形分布时计算域的确定可参见图 8.1(c)。如该图所示，计算域高度(上、下面之距)取软土或地基压缩层厚度 H。计算域厚度(前、后面之距)取砂井(或桩体)间距的一半，即 $S/2$。这是因为，由对称性可知，以荷载长度方向(即 x 向)为法线且通过砂井(或桩体)中心或间距中心的任一平面均为对称面，在这些对称面上，x 向位移为零且不发生渗流。故计算域只需取任意二相邻对称面间的隔离体，该隔离体厚度为 $S/2$。当砂井(或桩体)呈正三角形分布时计算域厚度应取 S。计算域宽度(左、右面之距) L 一般可取 H 的 3～4 倍，或取荷载平均宽度之半的 2～2.5 倍，以两种取法中的大者为准。若有荷载区外土体侧向变形资料，亦可根据侧向变形选取计算域宽度，即将侧向变形近乎为零处作为右边界面。

对于二维问题，计算域高度和宽度的确定方法不变，而计算域厚度的大小不影响计算结果，通常取 1m。

对于一维问题，计算域厚度和宽度的大小均对计算结果无影响，一般均取 1m。

(2)边界条件的确定。

对于 PDSS 问题和一般的二维问题，边界条件可确定如下：

1)前、后面。

据上述分析可知，前、后面均不透水，且 x 向固定，y 向和 z 向自由。

2)左面。

左面一般通过荷载中心，为对称面，故 y 向固定，z 向自由，且不透水。

3)右面。

显然，该边界面 y 向固定。

计算表明，如计算域宽度 L 足够(例如 L 按上述方法确定)，则右面的排水条件和其它方向的约束条件对计算结果几乎无影响，即该边界面 z 向可取自由也可取固定，排水条件可为透水或不透水。但从提高计算效率的角度出发，在 L 足够大的前提下，宜取右面为 z 向固定且排水。

4)上面。

一般为自由面，且透水。

5)下面。

显然，该边界面 z 向须固定，y 向可取固定或自由，一般取固定较接近实际。排水条件则按实际情况定，例如若该边界以下为砂、卵石层，则应取透水。

对于一维问题，除右面须取 z 向自由且不透水外，其它与上无殊。

显然，前、后面的边界条件已在方程式(8.1)～(8.4)的推导时加以考虑，故实际上只需准备上、下、左、右 4 个面的边界信息。

(3)单元划分。

单元划分的一般原则是：孔压和变形(或应力)变化(梯度)大的区域(如砂井区、荷载区及靠近透水面处)宜密，其它部位可疏。

对于砂井地基等 PDSS 问题，单元划分时尚需将砂井(或桩体)横截面按面积等效原则由直径为 d 的圆形简化成边长为 $\sqrt{\pi}\,d/2\approx 0.8862d$ 的正方形，如图 8.1 所示。

单元划分时还应考虑与实测资料等对比的方便，以及计算机内存和机时。

(4)时段划分。

时段的大小与单元或网格的尺寸等密切相关。根据沈珠江(1990)，为保证计算精度，时段 Δt 宜满足条件

$$\Delta t = \left(\frac{1}{4}\sim 1\right)\frac{\Delta H^2}{c_v} \tag{8.5}$$

式中，ΔH 为透水面附近渗流方向上的单元尺寸。

计算对比表明(基于线弹性分析)，在加荷曲线[图 1.4(b)]转折点前后(即荷载变化较剧烈时期)的若干时段，Δt 应尽量满足上式的要求，而在其它时期，特别当加荷曲线很平缓，例如在持荷阶段(即 $t>t_0$)的后期，Δt 可适当放大。

与单元划分类似，时段划分还应兼顾与实测数据比较的方便及机时。

8.4.2 数据准备

PDSS 程序数据输入文件的文件名可任取，所包含的数据具体输入格式和说

明如下：

数据变量	数据类型及个数	所占行数	单位
JBNAME,REMARK	字符型,共2个	1行	—
NSP,NP	整型,共2个	1行	—
XP(NP)	实型,共NP个	至少1行	cm
YP(NP)	实型,共NP个	至少1行	cm
ZP(NP)	实型,共NP个	至少1行	cm
NCOM,LR,ALF	整型,共3个	1行	—
NB(12)	实型,共12个	1行	—
L,M,N,KPT	实型,共4个	1行	—
NSD,NSY,NSZ,NXSD	实型,共4个	1行	—
BT,BL	实型,共2个	1行	cm
NSDY(NSY)	整型,共NSY个	至少1行	—
XX(L1)	实型,共L1个	1行	cm
YY(M1)	实型,共M1个	至少1行	cm
ZZ(N1)	实型,共N1个	至少1行	cm
PIR(N1)	实型,共N1个	至少1行	—
YM(N1)	实型,共N1个	至少1行	MPa
PKH(N1)	实型,共N1个	至少1行	cm/s
PKV(N1)	实型,共N1个	至少1行	cm/s
DKT(KPT)	实型,共KPT个	至少1行	d
DQT(KPT)	实型,共KPT个	至少1行	kPa

对以上输入数据尚有如下约定：

(1)第1行按字符格式输入,其中计算任务名JBNAME占2个字符(即A2)；REMARK为该计算任务的进一步说明,所占字符不能超过60个(即A60)。其余各行均按自由格式输入。

(2)结果打印控制参数NSP为0时,只打印结点位移和孔压；为1时,仅打印结点有效应力；为2时则结点位移、孔压、有效应力均打印。NP为打印点数,≤100,若所有结点的计算结果均打印,则填－1。

(3)XP、YP、ZP为打印点坐标。若某方向上所有结点的计算结果均打印,则该方向的坐标填－1,而打印点数仍算1。以图8.5为例,若要打印原点下所有结点(即结点1、13、25、37)的计算结果,则打印点数NP仍填1,而打印点坐标XP、YP、ZP则分别填0.0、0.0、－1.0。

(4)NCOM填1,则进行有效应力分析；NCOM填0,则进行总应力分析。

(5)缓冲区长度LR必须≥80。若运行后出现错误信息"LR is too small",则应加大LR,然后再重新运行。

(6)积分常数 ALF(即 θ 值)缺省值为 $\frac{2}{3}\approx 0.6667$。

(7)NB(12)对应的 12 个数据分别为上 y、上 z、上 p、下 y、下 z、下 p、左 y、左 z、左 p、右 y、右 z、右 p,分别代表上、下、左、右四个边界面 y 向、z 向的约束条件和排水条件。相应值为 1,表示该边界透水或在该方向固定;为 0 则表示该边界不透水或自由。例如,若左边界面 y 向固定,z 向自由,不透水,则左 y 填 1,左 z 填 0,左 p 填 0。

(8)总计算级数 KPT 不能超过 100。

(9)当砂井或桩体根数 NSD 填 0,则为天然地基,否则为砂井或砂桩等复合地基。NSY 不能大于 M,NSZ 不能大于 N;NXSD 填 0,表示砂井或砂桩呈正三角形(梅花形)分布;填 1,则表示呈正方形分布。

(10)PIR(N1)、YM(N1)、PKH(N1)、PKV(N1)中的最后一个(第 N1 个)数据应分别填砂井或桩体的 Poisson 比、弹性模量、水平向渗透系数、竖向渗透系数。

8.4.3 运行及结果输出

启动 PDSS 程序后屏幕即提示请输入数据文件名,键入上述已准备好的数据文件名后,程序即进行计算,同时输出计算结果,直至所有级数均算完。

结果输出文件分二类。

一类为二进制文件。每计算一级,程序就自动生成 2 个二进制文件。其一存放当前结点位移和孔压,此文件被自动命名,命名规则为:①对有效应力分析,文件名=JBNAME+EFVP+(当前计算级数-1);②对总应力分析,文件名=JBNAME+TTVP+(当前计算级数-1)。其二存放当前结点有效应力,文件名命名规则为:①对有效应力分析,文件名=JBNAME+EFSR+(当前计算级数-1);②对总应力分析,文件名=JBNAME+TTSR+(当前计算级数-1)。例如,若计算任务名 JBNAME 为 BJ,且进行有效应力分析,则第 5 级计算将生成 BJEFVP04 和 BJEFSR04 两个二进制文件。这些二进制文件包含了所有计算结果,可用于后处理。

另一类为文本文件。整个计算只生成一个文本文件,命名规则为:①对有效应力分析,文件名=JBNAME+EF.TXT;②对总应力分析,文件名=JBNAME+TT.TXT。例如若 JBNAME 为 BJ,且进行总应力分析,该文件名即 BJTT.TXT。此文本文件包含所分析问题的一切计算参数和单元、时段划分等信息以及前述输入数据文件中指定的打印点处的计算结果等。若计算中出错,可查看该文件以检查输入数据是否正确读入;计算结束后则可作为计算书在打印机上输出。

8.5 PDSS 算例及输入输出样本

作为算例,现用 PDSS 程序分析图 1.4 所示的典型一维固结问题。

8.5.1 计算条件及网格、时段划分

计算条件为：$\mu=0.301$，$E=3\text{MPa}$，$k_v=10^{-6}\text{cm/s}$，$H=10\text{m}$，$q_0=100\text{kPa}$，$t_0=$70 天。土层顶面透水，底面不透水。

据此，可算得

$$E_s=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}=\frac{3\times(1-0.301)}{(1+0.301)(1-2\times0.301)}=4.05\text{MPa}$$

$$c_v=\frac{k_vE_s}{\gamma_w}=\frac{10^{-6}\times(4.05\times1000)}{9.81\times10^{-2}}=4.13\times10^{-2}\text{cm}^2/\text{s}$$

$$T_\infty=\frac{c_vt_0}{H^2}=\frac{4.13\times10^{-2}\times(70\times86400)}{1000^2}=0.25$$

按 8.4 节所述原则取计算域并划分单元。计算域为 1m×1m×10m 的立方体，x 向和 y 向各一个单元，z 向划分 7 个单元，如图 8.6 所示。故 $L=M=1$，$N=7$，总单元数为 7，总结点数为 32，总未知数为 32×3=96。

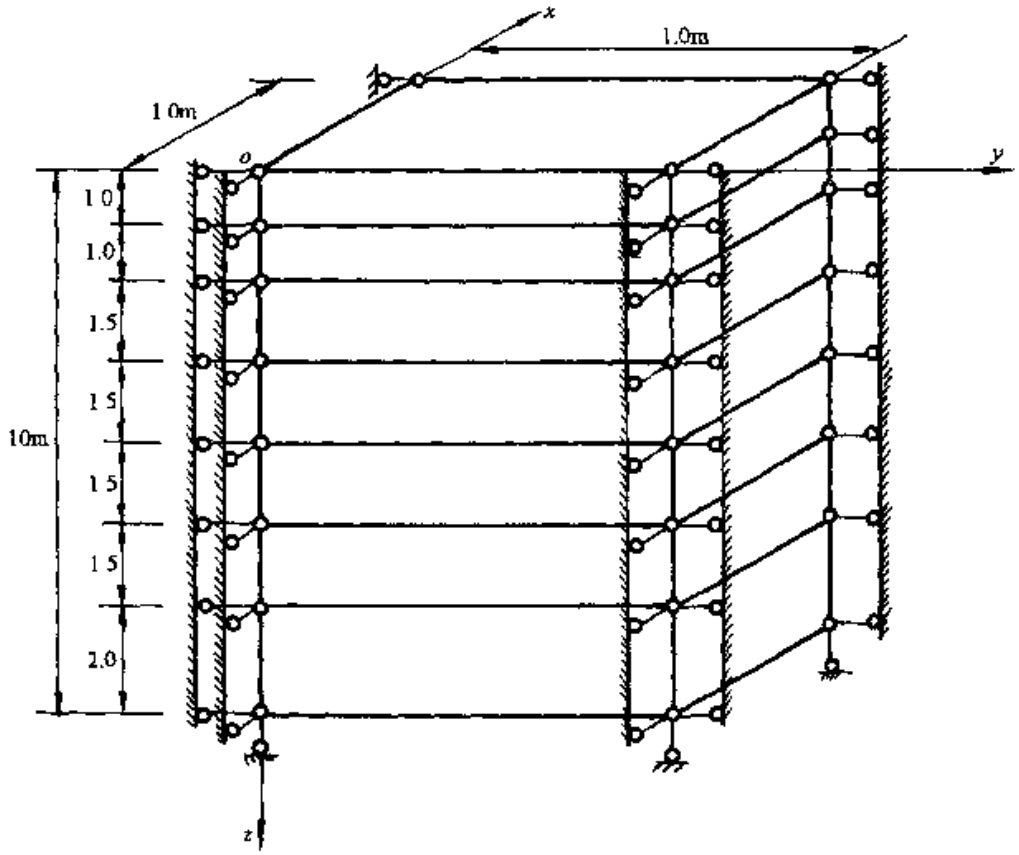


图 8.6　典型一维固结问题有限元网格划分图

边界条件为：左、右面 y 向固定，z 向自由，不透水；上面 y 向固定，z 向自由，透水；下面 y 向和 z 向均固定且不透水。

时段划分如下：从图 8.6 可知，透水面附近渗流方向（即 z 方向）上的单元尺寸（平均值）$\Delta H\approx1.25\text{m}$，则由式(8.5)有

$$\Delta t = \left(\frac{1}{4} \sim 1\right)\frac{\Delta H^2}{c_v} = (0.25 \sim 1) \times \frac{125^2}{0.0413} \times \frac{1}{86400} = 1.10\text{天} \sim 4.38\text{天}$$

故据前述时段划分规则并考虑加荷历时 $t_0=70$ 天以及计算至少应至平均固结度达 90%以上，共划分 29 个时段，即将计算分为 29 级。表 8.1 列出了各时段时间增量、相应的荷载增量以及各级计算终了对应的荷载、时间和相应的时间因子 T_v 值。

表 8.1　计算级数及时段、荷载划分情况一览表

计算级数或时段数	时间增量/天	荷载增量/kPa	总荷载(累计)/kPa	时间 t(累计)/天	T_v $\left(\frac{c_v t}{H^2}\right)$
1	3.5	5.0	5.0	3.5	0.0125
2	3.5	5.0	10.0	7.0	0.0250
3	3.5	5.0	15.0	10.5	0.0375
4	3.5	5.0	20.0	14	0.0500
5	7.0	10.0	30.0	21	0.0750
6	7.0	10.0	40.0	28	0.1000
7	7.0	10.0	50.0	35	0.1250
8	7.0	10.0	60.0	42	0.1500
9	7.0	10.0	70.0	49	0.1750
10	7.0	10.0	80.0	56	0.2000
11	7.0	10.0	90.0	63	0.2250
12	3.5	5.0	95.0	66.5	0.2375
13	3.5	5.0	100.0	70	0.2500
14	3.5	0	100.0	73.5	0.2625
15	3.5	0	100.0	77	0.2750
16	7.0	0	100.0	84	0.3000
17	7.0	0	100.0	91	0.3250
18	7.0	0	100.0	98	0.3500
19	7.0	0	100.0	105	0.3750
20	7.0	0	100.0	112	0.4000
21	14	0	100.0	126	0.4500
22	14	0	100.0	140	0.5000
23	14	0	100.0	154	0.5500
24	14	0	100.0	168	0.6000
25	14	0	100.0	182	0.6500
26	28	0	100.0	210	0.7500
27	28	0	100.0	238	0.8500
28	28	0	100.0	266	0.9500
29	28	0	100.0	294	1.0500

从表中可见，第 13 级计算完毕即为加荷完毕(即 $t=t_0=70$ 天)时，相应的 $T_v=T_{v0}=0.25$；全部计算完毕时 $t=294$ 天，相应的 $T_v=1.05$，由式(1.75b)可算得此时地基平均固结度 $U=91.6\%$。

8.5.2 输入数据文件样本

基于以上工作及前述输入数据文件格式，建立有效应力分析数据文件如下：

TGEF.DAT(文件名)

TG One Dimensional Consolidation under Time-dependent Loading

0,1

.0

.0

-1.0

1,680,0.6667

1,0,1,1,1,0,1,0,0,1,0,0

1,1,7,29

0,0,0,0

100.,100.

0

0.00,100

0.00,100

0.00,100.,200.,350.,500.,650.,800.,1000.

0.301,0.301,0.301,0.301,0.301,0.301,0.301,0.301

3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00,3.00

1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6

1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6,1.00E-6

3.5,3.5,3.5,3.5,7.0,7.0,7.0,7.0,7.0,7.0,7.0,3.5,3.5,3.5,3.5

7.0,7.0,7.0,7.0,7.0,14.0,14.0,14.0,14.0,14.0,28.0,28.0,28.0,28.0

5.0,5.0,5.0,5.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,10.0,5.0,5.0,0.0,0.0

0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0,0.0

从中可以看出，该算例任务名称为TG；结果输出时仅打印坐标原点下所有结点(共8点)的位移与孔压(同一水平面上任一结点处的位移与孔压均相等)。

将数据文件TGEF.DAT中的控制参数NCOM(第6行)由1改为0，并另取名(例如TGTT.DAT)保存，即得总应力分析数据文件。

8.5.3 结果输出文件样本

以TGEF.DAT和TGTT.DAT为输入数据文件分别运行PDSS程序，即可得有效应力分析结果输出文件TGEF.TXT和总应力分析结果输出文件TGTT.

TXT，如下所示。为节省篇幅，TGTT.TXT 中凡与 TGEF.TXT 重复的内容已全部删去，同时考虑到 $t>t_0$ 后任一时刻的总应力分析结果均与 $t=t_0$ 时相同，只给出第 1～13 级的总应力分析结果。

1. 有效应力分析结果输出文件 TGEF.TXT

```
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
        RESULTS PRESENTATION OF PDSS ANALYSIS
              (Effective Stress Analysis)
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
   One Dimensional consolidation under Time-dependent Loading
              (Data File:TGEF.DAT)
```

THE ELEMENT NUMBERS IN X-DIRECTION:L=1
THE ELEMENT NUMBERS IN Y-DIRECTION:M=1
THE ELEMENT NUMBERS IN Z-DIRECTION:N=7
LOAD STEP NUMBERS:KPT=29

[XX]--NODE CO-ORDINATES ALONG X-AXIS(cm)

.00000E+00 .10000E+03

[YY]--NODE CO-ORDINATES ALONG Y-AXIS(cm)

.00000E+00 .10000E+03

[ZZ]--NODE CO-ORDINATES ALONG Z-AXIS(cm)

.00000E+00	.10000E+03	.20000E+03	.35000E+03
.50000E+03	.65000E+03	.80000E+03	.10000E+04

[PIR]--THE VECTOR OF POISSON"S RATIO

[E]--THE VECTORS OF YOUNG"S MODULUS (MPa)

[PKH],[PKV]--THE VECTORS OF HORIZONTAL AND VERTICAL COEFFICIENT OF PERMEABILITY (cm/sec.)

LAYER	[PIR]	[E]	[PKH]	[PKV]
1	.301	3.000	.100E−05	.100E−05

2	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
3	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
4	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
5	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
6	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
7	.301	3.000	.100E−05	.100E−05
8	.301	3.000	.100E−05	.100E−05

[DKT]--THE VECTOR OF TIME INCREMENTS (days)

[DQT]--THE VECTOR OF LOAD INCREMENTS (kPa)

STEP	[DKT]	[DQT]	TIME(days)	LOAD(kPa)
1	3.500	5.000	3.500	5.000
2	3.500	5.000	7.000	10.000
3	3.500	5.000	10.500	15.000
4	3.500	5.000	14.000	20.000
5	7.000	10.000	21.000	30.000
6	7.000	10.000	28.000	40.000
7	7.000	10.000	35.000	50.000
8	7.000	10.000	42.000	60.000
9	7.000	10.000	49.000	70.000
10	7.000	10.000	56.000	80.000
11	7.000	10.000	63.000	90.000
12	3.500	5.000	66.500	95.000
13	3.500	5.000	70.000	100.000
14	3.500	.000	73.500	100.000
15	3.500	.000	77.000	100.000
16	7.000	.000	84.000	100.000
17	7.000	.000	91.000	100.000
18	7.000	.000	98.000	100.000
19	7.000	.000	105.000	100.000
20	7.000	.000	112.000	100.000
21	14.000	.000	126.000	100.000
22	14.000	.000	140.000	100.000
23	14.000	.000	154.000	100.000

24	14.000	.000	168.000	100.000
25	14.000	.000	182.000	100.000
26	28.000	.000	210.000	100.000
27	28.000	.000	238.000	100.000
28	28.000	.000	266.000	100.000
29	28.000	.000	294.000	100.000

* NODES SUM TOTAL:MN=32
* ELEMENT SUM TOTAL:ME=7
* UNKNOWN NUMBER SUM TOTAL IS:96

* SAND DRAINS SUM TOTAL:NSD=0
* SAND DRAIN ELEMENTS SUM TOTAL:0

ELEMENT NODE NUMBERS

1	1	2	4	3	5	6	8	7
2	5	6	8	7	9	10	12	11
3	9	10	12	11	13	14	16	15
4	13	14	16	15	17	18	20	19
5	17	18	20	19	21	22	24	23
6	21	22	24	23	25	26	28	27
7	25	26	28	27	29	30	32	31

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 1 (T=3.5days)

L=1 M=1 N=7 (TGEFVP00)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.112635E−00	.000000E+00
5	.000000E+00	.328825E−01	.354031E+01
9	.000000E+00	.959968E−02	.457386E+01
13	.000000E+00	.937333E−03	.495839E+01
17	.000000E+00	.915475E−04	.499594E+01
21	.000000E+00	.895776E−05	.499960E+01
25	.000000E+00	.873249E−06	.499996E+01
29	.000000E+00	.000000E+00	.500000E+01

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 2 (T= 7.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP01)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.309742E+00	.000000E+00
5	.000000E+00	.129062E+00	.536551E+01
9	.000000E+00	.489575E−01	.814631E+01
13	.000000E+00	.834555E−02	.966074E+01
17	.000000E+00	.116302E−02	.995142E+01
21	.000000E+00	.147550E−03	.999375E+01
25	.000000E+00	.176981E−04	.999924E+01
29	.000000E+00	.000000E+00	.100000E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 3 (T= 10.5days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP02)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.559645E+00	.000000E+00
5	.000000E+00	.275061E+00	.694962E+01
9	.000000E+00	.126157E+00	.109897E+02
13	.000000E+00	.312620E−01	.138862E+02
17	.000000E+00	.622634E−02	.147619E+02
21	.000000E+00	.104715E−02	.149584E+02
25	.000000E+00	.157874E−03	.149936E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.150000E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 4 (T= 14.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP03)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.854424E+00	.000000E+00
5	.000000E+00	.462541E+00	.825868E+01
9	.000000E+00	.237417E+00	.135070E+02
13	.000000E+00	.745814E−01	.177002E+02
17	.000000E+00	.196194E−01	.193320E+02
21	.000000E+00	.432681E−02	.198422E+02

25	.000000E+00	.824932E−03	.199687E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.199979E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 5 (T= 21.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGEFVP04)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.156466E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.953281E+00	.104806E+02
9	.000000E+00	.561245E+00	.177657E+02
13	.000000E+00	.231856E+00	.244481E+02
17	.000000E+00	.870426E−01	.277323E+02
21	.000000E+00	.296759E−01	.291700E+02
25	.000000E+00	.913993E−02	.297211E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.299088E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 6 (T= 28.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGEFVP05)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.240003E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.156498E+01	.123635E+02
9	.000000E+00	.994552E+00	.214336E+02
13	.000000E+00	.472885E+00	.303975E+02
17	.000000E+00	.209716E+00	.353920E+02
21	.000000E+00	.863305E−01	.379454E+02
25	.000000E+00	.320001E−01	.391209E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.395832E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 7 (T= 35.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGEFVP06)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.334402E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.228265E+01	.140325E+02
9	.000000E+00	.152617E+01	.246953E+02

13	.000000E+00	.794134E+00	.357762E+02
17	.000000E+00	.390821E+00	.424457E+02
21	.000000E+00	.180352E+00	.461894E+02
25	.000000E+00	.744437E−01	.480918E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.488933E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 8 (T= 42.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP07)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.438535E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.309570E+01	.155425E+02
9	.000000E+00	.214756E+01	.276612E+02
13	.000000E+00	.119141E+01	.407089E+02
17	.000000E+00	.630331E+00	.489940E+02
21	.000000E+00	.314183E+00	.539347E+02
25	.000000E+00	.138937E+00	.566024E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.577708E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 9 (T= 49.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP08)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.551549E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.399605E+01	.169301E+02
9	.000000E+00	.285182E+01	.303911E+02
13	.000000E+00	.166045E+01	.452775E+02
17	.000000E+00	.926716E+00	.551022E+02
21	.000000E+00	.488110E+00	.612140E+02
25	.000000E+00	.226278E+00	.646477E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.661885E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 10 (T= 56.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP09)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)

1	.000000E+00	.672763E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.497714E+01	.182159E+02
9	.000000E+00	.363315E+01	.329254E+02
13	.000000E+00	.219714E+01	.495330E+02
17	.000000E+00	.127768E+01	.608183E+02
21	.000000E+00	.701264E+00	.680563E+02
25	.000000E+00	.336306E+00	.722368E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.741434E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 11 (T= 63.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP10)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.801599E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.603338E+01	.194144E+02
9	.000000E+00	.448645E+01	.352894E+02
13	.000000E+00	.279752E+01	.535119E+02
17	.000000E+00	.168060E+01	.661771E+02
21	.000000E+00	.952165E+00	.744888E+02
25	.000000E+00	.468354E+00	.793865E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.816460E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 12 (T= 66.5days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP11)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.868442E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.658541E+01	.199870E+02
9	.000000E+00	.493604E+01	.364192E+02
13	.000000E+00	.311809E+01	.554153E+02
17	.000000E+00	.189877E+01	.687441E+02
21	.000000E+00	.108982E+01	.775741E+02
25	.000000E+00	.541522E+00	.828193E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.852500E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 13 (T=

70.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP12)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.937022E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.715459E+01	.205409E+02
9	.000000E+00	.540209E+01	.375125E+02
13	.000000E+00	.345333E+01	.572582E+02
17	.000000E+00	.212901E+01	.712312E+02
21	.000000E+00	.123631E+01	.805652E+02
25	.000000E+00	.619884E+00	.861490E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.887467E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 14 (T=73.5days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP13)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.996021E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.770749E+01	.175367E+02
9	.000000E+00	.587450E+01	.339970E+02
13	.000000E+00	.380186E+01	.540847E+02
17	.000000E+00	.237088E+01	.686452E+02
21	.000000E+00	.139141E+01	.784655E+02
25	.000000E+00	.703305E+00	.843784E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.871389E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 15 (T=77.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP14)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.104820E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.821317E+01	.162306E+02
9	.000000E+00	.633260E+01	.314495E+02
13	.000000E+00	.415772E+01	.511114E+02
17	.000000E+00	.262315E+01	.660252E+02
21	.000000E+00	.155474E+01	.762829E+02
25	.000000E+00	.791635E+00	.825111E+02

29	.000000E+00	.000000E+00	.854290E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 16 (T= 84.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP15)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.114163E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.912400E+01	.143310E+02
9	.000000E+00	.717854E+01	.280931E+02
13	.000000E+00	.485450E+01	.464135E+02
17	.000000E+00	.314267E+01	.611514E+02
21	.000000E+00	.190157E+01	.718316E+02
25	.000000E+00	.982176E+00	.785233E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.817002E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 17 (T= 91.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP16)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.122551E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.994697E+01	.130500E+02
9	.000000E+00	.795528E+01	.256296E+02
13	.000000E+00	.551766E+01	.427444E+02
17	.000000E+00	.365919E+01	.569020E+02
21	.000000E+00	.225952E+01	.675191E+02
25	.000000E+00	.118353E+01	.743793E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.776898E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 18 (T= 98.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP17)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.130238E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.107030E+02	.120231E+02
9	.000000E+00	.867453E+01	.236802E+02
13	.000000E+00	.614402E+01	.396773E+02

17	.000000E+00	.415936E+01	.531551E+02
21	.000000E+00	.261520E+01	.634638E+02
25	.000000E+00	.138759E+01	.702477E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.735573E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 19 (T= 108.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP18)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.137353E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.114040E+02	.111722E+02
9	.000000E+00	.934458E+01	.220228E+02
13	.000000E+00	.673416E+01	.370198E+02
17	.000000E+00	.463777E+01	.497796E+02
21	.000000E+00	.296063E+01	.596585E+02
25	.000000E+00	.158813E+01	.662294E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.694539E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 20 (T= 112.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP19)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.143980E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.120575E+02	.104268E+02
9	.000000E+00	.997101E+01	.205727E+02
13	.000000E+00	.728973E+01	.346432E+02
17	.000000E+00	.509216E+01	.466929E+02
21	.000000E+00	.329171E+01	.560866E+02
25	.000000E+00	.178167E+01	.623743E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.654710E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 21 (T= 126.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP20)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.155877E+02	.000000E+00

5	.000000E+00	.132316E+02	.916426E+01
9	.000000E+00	.110989E+02	.180931E+02
13	.000000E+00	.829539E+01	.305241E+02
17	.000000E+00	.592041E+01	.412318E+02
21	.000000E+00	.389937E+01	.496360E+02
25	.000000E+00	.213875E+01	.552943E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.580899E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 22 (T= 140.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP21)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.166360E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.142666E+02	.808971E+01
9	.000000E+00	.120945E+02	.159768E+02
13	.000000E+00	.918602E+01	.269712E+02
17	.000000E+00	.665693E+01	.364632E+02
21	.000000E+00	.444192E+01	.439313E+02
25	.000000E+00	.245854E+01	.489702E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.514628E-02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 23 (T= 154.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP22)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.175623E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.151813E+02	.715337E+01
9	.000000E+00	.129749E+02	.141286E+02
13	.000000E+00	.997449E-01	.238576E+02
17	.000000E+00	.730996E+01	.322637E+02
21	.000000E+00	.492371E+01	.388836E+02
25	.000000E+00	.274283E-01	.433538E+02
29	.000000E+00	.000000E-00	.455660E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 24 (T= 168.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP23)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.183816E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.159905E+02	.632919E+01
9	.000000E+00	.137538E+02	.125015E+02
13	.000000E+00	.106724E+02	.211118E+02
17	.000000E+00	.788834E+01	.285538E+02
21	.000000E−00	.535065E+01	.344164E+02
25	.000000E−00	.299487E+01	.383763E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.403363E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 25 (T= 182.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP24)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.191067E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.167066E+02	.560134E+01
9	.000000E+00	.144431E+02	.110639E+02
13	.000000E+00	.112902E+02	.186848E+02
17	.000000E+00	.840040E+01	.252723E+02
21	.000000E+00	.572872E+01	.304625E+02
25	.000000E+00	.321809E+01	.339686E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.357041E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 26 (T= 210.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP25)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.202988E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.178840E+02	.440558E+01
9	.000000E+00	.155765E+02	.870209E+01
13	.000000E+00	.123060E+02	.146964E+02
17	.000000E+00	.924247E+01	.198783E+02
21	.000000E+00	.635050E+01	.239612E+02
25	.000000E+00	.358522E+01	.267196E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.280849E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 27 (T= 238.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP26)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.212365E+02	.000000E-00
5	.000000E+00	.188100E+02	.346534E-01
9	.000000E+00	.164681E+02	.684487E+01
13	.000000E+00	.131051E+02	.115599E+02
17	.000000E+00	.990485E+01	.156359E+02
21	.000000E+00	.683961E+01	.188475E+02
25	.000000E+00	.387402E+01	.210172E+02
29	.000000E+00	.000000E-00	.220912E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 28 (T= 266.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP27)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.219740E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.195384E+02	.272577E+01
9	.000000E+00	.171693E+02	.538406E+01
13	.000000E+00	.137336E+02	.909283E+01
17	.000000E+00	.104259E+02	.122989E+02
21	.000000E+00	.722434E+01	.148251E+02
25	.000000E+00	.410119E+01	.165318E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.173766E+02

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 29 (T= 294.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGEFVP28)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.225541E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.201114E+02	.214405E+01
9	.000000E+00	.177209E+02	.423501E+01
13	.000000E+00	.142279E+02	.715227E+01
17	.000000E+00	.108357E+02	.967414E+01

21	.000000E+00	.752696E+01	.116612E+02
25	.000000E+00	.427988E+01	.130036E+02
29	.000000E+00	.000000E+00	.136681E+02

* *

2. 总应力分析结果输出文件 TGTT.TXT

* *

RESULTS PRESENTATION OF PDSS ANALYSIS

(Total Stress Analysis)

* *

One Dimensional Consolidation under Time-dependent Loading

(Data File:TGTT.DAT)

---

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 1 (T= 3.5days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP00)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.123462E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.111116E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.987694E+00	.000000E+00
13	.000000E+00	.802501E+00	.000000E+00
17	.000000E+00	.617309E+00	.000000E+00
21	.000000E+00	.432116E+00	.000000E+00
25	.000000E+00	.246924E+00	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 2 (T= 7.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP01)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.246923E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.222231E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.197539E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.160500E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.123462E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.864232E+00	.000000E+00
25	.000000E+00	.493847E+00	.000000E+00

29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 3 (T= 10.5days)

L=1 M=1 N=7 (TGTTVP02)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.370385E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.333347E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.296308E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.240750E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.185193E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.129635E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.740771E+00	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 4 (T= 14.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGTTVP03)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.493847E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.444462E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.395078E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.321001E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.246924E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.172846E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.987694E+00	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 5 (T= 21.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGTTVP04)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.740770E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.666693E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.592616E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.481501E+01	.000000E+00

17	.000000E+00	.370385E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.259270E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.148154E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 6 (T= 28.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP05)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.987694E+01	.000000E+00
5	.000000E+00	.888925E+01	.000000E+00
9	.000000E+00	.790155E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.642001E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.493847E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.345693E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.197539E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 7 (T= 35.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP06)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.123462E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.111116E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.987694E+01	.000000E+00
13	.000000E+00	.802501E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.617309E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.432116E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.246924E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 8 (T= 42.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP07)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.148154E+02	.000000E+00

5	.000000E+00	.133339E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.118523E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.963002E+01	.000000E+00
17	.000000E+00	.740771E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.518539E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.296308E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 9 (T= 49.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGTTVP08)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.172846E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.155562E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.138277E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.112350E+02	.000000E+00
17	.000000E+00	.864232E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.604963E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.345693E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 10 (T= 56.0days)

L=1 M=1 N=7 (TGTTVP09)

NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES.(kPa)
1	.000000E+00	.197539E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.177785E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.158031E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.128400E+02	.000000E+00
17	.000000E+00	.987694E+01	.000000E+00
21	.000000E+00	.691386E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.395078E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 11 (T= 63.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP10)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.222231E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.200008E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.177785E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.144450E+02	.000000E+00
17	.000000E+00	.111116E+02	.000000E+00
21	.000000E+00	.777809E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.444462E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 12 (T= 66.5days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP11)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.234577E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.211120E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.187662E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.152475E+02	.000000E+00
17	.000000E+00	.117289E+02	.000000E+00
21	.000000E+00	.821021E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.469155E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRESSURE AT STEP 13 (T= 70.0days)

L=1	M=1	N=7	(TGTTVP12)
NODE	V(cm)	W(cm)	POREPRES. (kPa)
1	.000000E+00	.246923E+02	.000000E+00
5	.000000E+00	.222231E+02	.000000E+00
9	.000000E+00	.197539E+02	.000000E+00
13	.000000E+00	.160500E+02	.000000E+00
17	.000000E+00	.123462E+02	.000000E+00
21	.000000E+00	.864233E+01	.000000E+00
25	.000000E+00	.493847E+01	.000000E+00
29	.000000E+00	.000000E+00	.000000E+00

* *

8.5.4 结果对比分析

1. 孔压

表 8.2 和图 8.7 为 $t=14$ 天、42 天、70 天、140 天(相应于 $T_v=0.05$、0.15、0.25、0.5)时 PDSS 程序计算所得的孔压与由解析式(1.73)计算所得的孔压之比较,从中可见,两者十分吻合。

表 8.2 PDSS 程序和解析解孔压计算结果比较一览表

结点	z/H	孔压 p/kPa							
		$t=14$ 天		$t=42$ 天		$t=70$ 天		$t=140$ 天	
		$T_v=0.05$		$T_v=0.15$		$T_v=0.25$		$T_v=0.50$	
		PDSS	解析解	PDSS	解析解	PDSS	解析解	PDSS	解析解
1	0.00	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
5	0.10	8.3	8.3	15.5	15.6	20.5	20.6	8.1	8.0
9	0.20	13.5	13.5	27.7	27.7	37.5	37.6	16.0	18.9
13	0.35	17.7	17.6	40.7	40.7	57.3	57.3	27.0	26.8
17	0.50	19.3	19.3	49.0	49.0	71.2	71.2	36.5	36.3
21	0.65	19.8	19.8	53.9	53.9	80.6	80.5	43.9	43.7
25	0.80	20.0	20.0	56.6	56.6	86.1	86.1	49.0	48.8
29	1.00	20.0	20.0	57.8	57.7	88.7	88.6	51.5	51.3

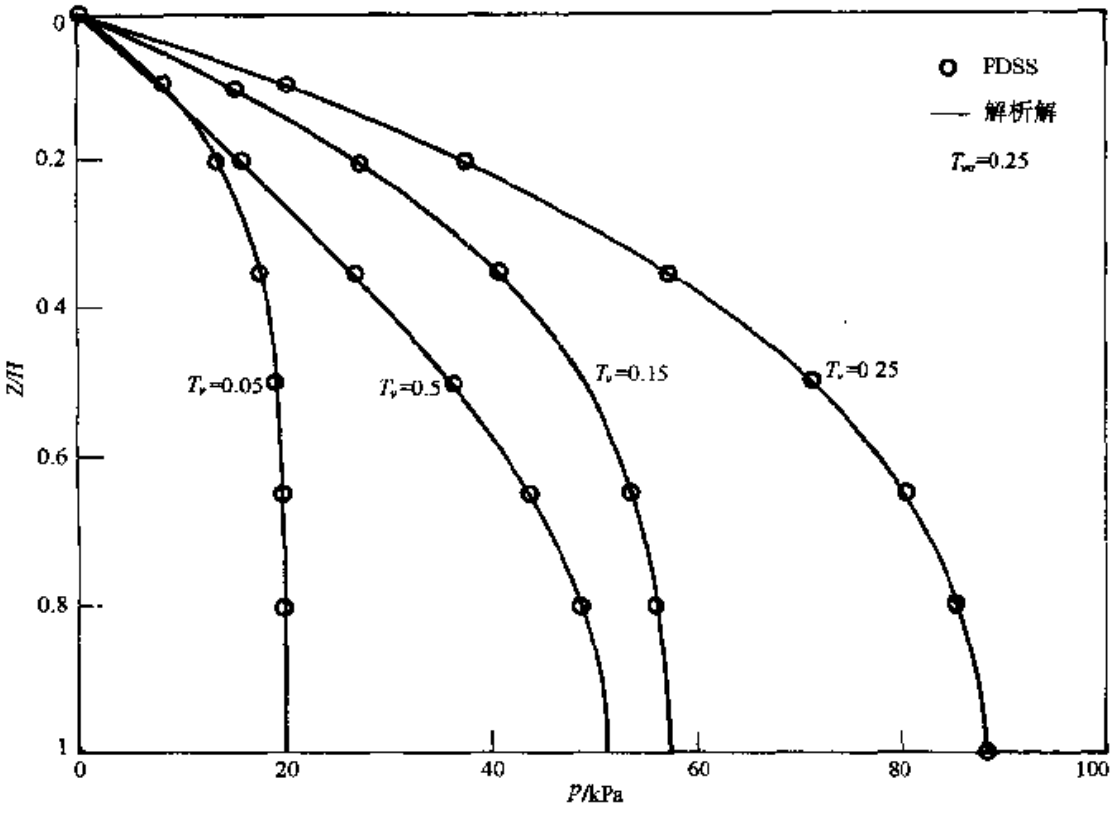


图 8.7 PDSS 程序和解析解孔压计算结果比较

2. 沉降与平均固结度

与孔压类似，由 PDSS 程序和解析解计算所得的沉降(S_a)及平均固结度(U)也很接近，如表 8.3 和图 8.8 所示。其中，PDSS 程序沉降计算值即坐标原点(结点 1)处的 z 向位移，解析解沉降按式(1.79)计算，即 $S_a=w|_{z=0}$。对于平均固结度，解析解结果由式(1.75)计算(计算时取 $z=0$)，PDSS 结果按 $U=S_a/S_\infty$ 计算，而最终(主固结)沉降 S_∞ 为 $t=t_0$ 时(即第 13 级计算终了、荷载达到最大值 100kPa 时)结点 1 处的 z 向位移(总应力分析)，即 $S_\infty=24.69$cm(参见结果输出文件 TGTT.TXT)。显然，最终主固结沉降也可按弹性公式(1.71)计算，即

表 8.3 PDSS 程序和解析解沉降与固结度计算结果比较一览表

时间 t/天	沉降 S_a/cm		T_v	平均固结度 U/%	
	PDSS	解析解		PDSS	解析解
3.5	0.113	0.104	0.0125	0.46	0.42
7.0	0.310	0.294	0.0250	1.26	1.19
10.5	0.560	0.540	0.0375	2.27	2.19
14	0.854	0.831	0.0500	3.46	3.36
21	1.565	1.526	0.0750	6.34	6.18
28	2.400	2.350	0.1000	9.72	9.52
35	3.344	3.284	0.1250	13.54	13.30
42	4.385	4.316	0.1500	17.76	17.48
49	5.515	5.439	0.1750	22.34	22.03
56	6.728	6.644	0.2000	27.25	26.91
63	8.016	7.926	0.2250	32.47	32.10
66.5	8.684	8.595	0.2375	35.17	34.81
70	9.370	9.280	0.2500	37.95	37.58
73.5	9.960	9.876	0.2625	40.34	40.00
77	10.482	10.405	0.2750	42.45	42.14
84	11.416	11.352	0.3000	46.24	45.97
91	12.255	12.203	0.3250	49.63	49.42
98	13.024	12.978	0.3500	52.75	52.56
105	13.735	13.694	0.3750	55.63	55.46
112	14.398	14.361	0.4000	58.31	58.16
126	15.588	15.568	0.4500	63.13	63.05
140	16.636	16.630	0.5000	67.38	67.35
154	17.562	17.566	0.5500	71.13	71.14
168	18.382	18.394	0.6000	74.45	74.49
182	19.107	19.125	0.6500	77.38	77.45
210	20.299	20.342	0.7500	82.21	82.38
238	21.237	21.293	0.8500	86.01	86.24
266	21.974	22.036	0.9500	89.00	89.25
294	22.554	22.617	1.0500	91.35	91.60

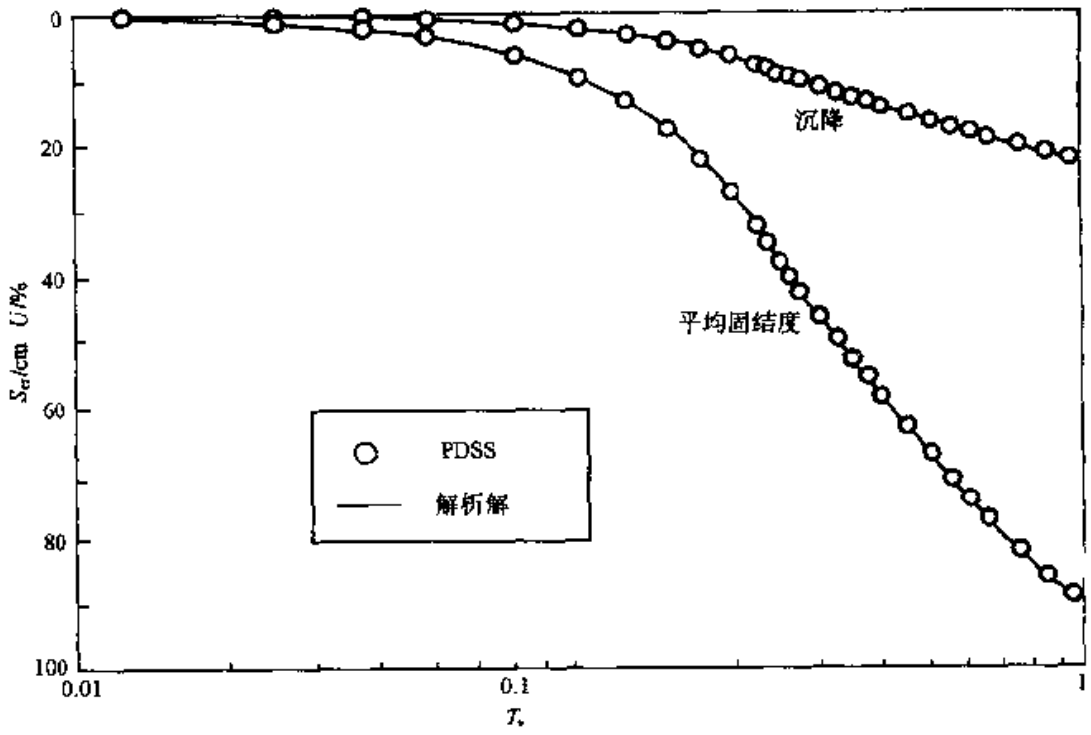


图 8.8 PDSS 程序和解析解沉降与固结度计算结果比较

$$S_{c\infty} = w_{\infty}|_{z=0} = \frac{q_0 H}{E_s} = \frac{100 \times 1000}{4.05 \times 1000} = 24.69\text{cm}$$

这与总应力分析结果相同。

综上所述,PDSS 程序计算结果与解析解计算结果完全一致。

8.6 PDSS 简化版源程序清单

```
C*********************************************************
C                          PDSS
C                     (Simplified Version)
C                        by K. H. Xie
C                      Zhejiang University
C*********************************************************
C                          MAIN
C=========================================================
 $STORAGE:2
      COMMON/AA/I(24000)/AX/NB(12),REQ(8180)/BB/R(16380)
      COMMON/CC/R1(16380)/DD/R2(16380)/EE/R3(16380)
      DIMENSION X(8), Y(8), Z(8), XP(100), YP(100), ZP(100),
      T(100)
```

```
      COMMON/D3/L,M,N,ME,MN,B1,B2,CTAN
      COMMON/CD/IRL,NZM,NZN,MZM,NCHK
      COMMON/APR/NSP,NP,LPR(100),MPR(100),NPR(100)
      CHARACTER*1 CHRN(10)
      CHARACTER*2 JBNAME, CHR(100)
      CHARACTER METHOD*27, GCNAME*4, FILENAME*12,
     REMARK*60
      DATA X(3), X(2), X(6), X(7), Y(3), Y(4), Y(7), Y(8), Z(5),
     Z(6), Z(7),
     1 Z(8),X(1), X(4), X(5), X(8), Y(1), Y(2), Y(5), Y(6), Z(1), Z
     (2), Z(3),
     2 Z(4)/12*1.,12*-1./
      DATA CHRN/1H0,1H1,1H2,1H3,1H4,1H5,1H6,1H7,1H8,1H9/
      II=0
      DO 1 K=1,10
      DO 1 J=1,10
      II=II+1
    1 CHR(II)=CHRN(K)//CHRN(J)
      II=24000
      IR=16380
      WRITE(*,50)
      WRITE (*,*) 'Please input data file name:'
      READ (*,2) FILENAME
    2 FORMAT (A12)
    3 FORMAT (A2,A60)
      OPEN(3,FILE=FILENAME)
      READ(3,3) JBNAME,REMARK
      READ(3,*) NSP,NP
      NP=IABS(NP)
      READ(3,*) (XP(L),L=1,NP)
      READ(3,*) (YP(L),L=1,NP)
      READ(3,*) (ZP(L),L=1,NP)
      READ(3,*) NCOM,LR,ALF
      READ(3,*) NB
      READ(3,*) L,M,N,KPT
      READ(3,*) NSD,NSY,NSZ,NXSD
```

```
      READ(3,*) BT,BL
      METHOD=' (Effective Stress Analysis)'
      GCNAME=JBNAME//'EF'
      IF(NCOM.EQ.1)  GOTO 4
      METHOD='     (Total Stress Analysis)       '
      GCNAME=JBNAME//'TT'
4     OPEN(1,FILE=GCNAME//'.TXT')
      WRITE(1,80) METHOD
      WRITE(1,85) REMARK, FILENAME
      MREQ=8180-LR/2
      IRL=(MREQ*2+LR+2)*2
      L1=L+1
      M1=M+1
      N1=N+1
      ME=L*M*N
      MN=L1*M1*N1
      KNM=IR-4*MN
      IF(KNM.LT.O)  STOP'Too many nodes'
      J2=1+NSY
      J3=NSD*NSZ+J2
      J4=J3+MN
      J5=J4+ME*8
      J6=J5+LR
      K1A=L1+1
      K1B=K1A+64
      K1C=K1B+64
      K1D=K1C+64
      KPY=K1D+64
      K2=KPY+M1
      K3=K2+M1
      K4=K3+N1
      K5=K4+N1
      K6=K5+N1
      K7=K6+N1
      KC=K7+N1
      KD=KC+KPT
```

```
      KCD=KD+KPT
      KJ=KCD+MN*3
      KK=1+MN
      KL=KK+MN
      KM=KL+MN
      IIR=IR-KJ+1
      IF(IIR.GE.0) GOTO 10
      WRITE(*,5) IIR
    5 FORMAT (1X,I10)
      STOP 'NO ROOM FOR REAL'
   10 MF=L1*N1+L1+2
      MFW=MF*3
      NM=MF*5
      MFS=MFW/2*(MFW+1)
      IF(MFS.GT.32760) STOP 'MFS is too large'
      MF1=MFS
      IF(MF1.GT.16380) MF1=16380
      KDP=NM+1
      J7=J6+MFW
      J8=J7+MFW
      IIR=II-J8+1
      IF(IIR.GE.0) GOTO 18
      WRITE(*,5) IIR
      STOP 'NO ROOM FOR INTEGER'
   18 WRITE(1,32) L,M,N,KPT
      CALL INDAT (I(1), R(1), R(K2), R(K3), R(K4), R(K7), R
      (K5), R(K6), R(KC),
     1 R(KD),XP,YP,ZP,T,KPT,L1,M1,N1,NSY)
      CLOSE(3)
      CALL AUT8(I(1), I(J2), I(J4), L1, M1, N1, ME, MN, NSD,
      NSY, NSZ, NXSD
     1 ,R(1), R(K2), R(K3), R(KCD), KPT, BT, BL, R(KD), L, M,
      N, B2, CTAN)
      CALL PRF(MF,I(J4),I(J3),I(J6),ME,MN)
      CALL EF8(1,X,Y,Z,R(K1A),R(K1B),R(K1C),R(K1D))
      OPEN(2, FILE= 'B.DAT', FORM= 'BINARY', ACCESS =
```

```
     'DIRECT', RECL=IRL)
     DO 100 KKK=1,KPT
 20  WRITE(*,45)
     CALL CS8 (KKK, R(K4), R(K7), R(K5), R(K6), I(J2), NSD, I
     (J3), R3(1), KPT
    1 ,L1, M1, N1, ME, MN, ALF, R1(1), R3(KM), I(J6), I(J7), I
     (J5), REQ, R(1)
    2 ,NB, R(K2), MFW, MF1, LR, MREQ, R(KC), R(KD), Y, R
     (K1A), R(K1B), R(K1C)
    3 ,R(K1D), I(J4), NSZ, R(KCD), R2(1), R(KPY), NCOM)
     WRITE(*, 38)  8, KKK
     CALL BAK8(KKK,R3(KM),I(J5), REQ, R2(KDP), R3(KK),
     R3(KL), I(J4),
    1 R3(1), T, ME, MN, MFW, LR, L, M, N, L1, M1, N1, MREQ,
     GCNAME, CHR)
     CALL STR8(KKK, NM, I(J4), R2(KDP), R1(1), R(K7), R2
     (1), R(K4), R(KCD),
    1 L1, M1, N1, ME, MN, I(J3), R(K1A), R(K1B), R(K1C), T,
     GCNAME, CHR)
     WRITE(*, 38) 10, KKK
100  CONTINUE
     WRITE(1,88)
     CLOSE(1)
     CLOSE(2)
 32  FORMAT(/10X, 'THE ELEMENT NUMBERS IN X-DIRECTION:
     L=', I3
    1 /10X, 'THE ELEMENT NUMBERS IN Y-DIRECTION:M=', I3
    2 /10X, 'THE ELEMENT NUMBERS IN Z-DIRECTION:N=', I3
    3 /10X, 'LOAD STEP NUMBERS:  KPT=', I3)
 38   FORMAT(10X,'SUB XKH-', I2,' IS FINISHED UP NOW AT
     STEP  ', I2)
 45  FORMAT(//10X,60('-')/33X,'FRONT SOLUTION'/10X,60('-'))
 50   FORMAT(/10X,60(' * ')/33X,'PDSS ANALYSIS'/10X,60(' *
     ')/)
 80   FORMAT(/10X,60(' * ')/23X,'RESULTS PRESENTATION OF
     PDSS ANALYSIS'
```

```
     &  /28X,A27/10X,60('*'))
  85    FORMAT(10X,A60/30X,'(Data File:  ',A8,')'/10X,60('='))
  88    FORMAT(/9X,65('*'))
        STOP
        END
C -------------------------------------------------------------------------
C       Sub for Reading Data
C -------------------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE INDAT(NSDY,XX,YY,ZZ,PIR,YM,PKH,PKV,
        DKT,DQT,XP,YP,ZP
     1  ,T,KPT,L1,M1,N1,NSY)
        DIMENSION XX(L1),YY(M1),ZZ(N1),PIR(N1),YM(N1),PKH
        (N1),PKV(N1)
     1  ,NSDY(NSY),DKT(KPT),DQT(KPT),XP(100),YP(100),ZP
        (100),T(100)
        COMMON/APR/NSP,NP,LPR(100),MPR(100),NPR(100)
        READ(3,*) (NSDY(I),I=1,NSY)
        READ(3,*) (XX(I),I=1,L1)
        READ(3,*) (YY(I),I=1,M1)
        READ(3,*) (ZZ(I),I=1,N1)
        READ(3,*) (PIR(I).I=1,N1)
        READ(3,*) (YM(I),I=1,N1)
        READ(3,*) (PKH(I),I=1,N1)
        READ(3,*) (PKV(I),I=1,N1)
        READ(3,*) (DKT(I),I=1,KPT)
        READ(3,*) (DQT(I),I=1.KPT)
        IF (NP.LT.0) GOTO 28
        DO 33 I=1,NP
        DO 23 II=1,L1
        IF(XP(I).EQ.XX(II)) LPR(I)=II
  23    IF(XP(I).LT.O.) LPR(I)=0
        DO 25 II=1,M1
        IF(YP(I).EQ.YY(II)) MPR(I)=II
  25    IF(YP(I).LT.O.)  MPR(I)=0
        DO 27 II=1,N1
        IF(ZP(I).EQ.ZZ(II)) NPR(I)=II
```

```
27    IF(ZP(I).LT.O.) NPR(I)=0
33    CONTINUE
28    WRITE(1,10)
      WRITE(1,6) (XX(I),I=1,L1)
      WRITE(1,11)
      WRITE(1,6) (YY(I),I=1,M1)
      WRITE(1,12)
      WRITE(1,6) (ZZ(I),I=1,N1)
      WRITE(1,13)
      WRITE(1,14)
      WRITE(1,15)
      WRITE(1,7)
      WRITE(1,8) (I,PIR(I), YM(I), PKH(I), PKV(I), I=1,N1)
      WRITE(1,16)
      WRITE(1,18)
      WRITE(1,19)
      DT=0.
      DQ=0.
      DO 38 I=1, KPT
      DT=DT+DKT(I)
      DQ=DQ+DQT(I)
      T(I)=DT
38    WRITE(1,9) I, DKT(I), DQT(I), T(I),DQ
6     FORMAT((8X,4E15.5))
7     FORMAT(/10X,'LAYER',4X,'[PIR]  ',3X,'[E]', 5X, '[PKH]',
      6X, '[PKV]')
8     FORMAT(11X,I2,2F10.3, 2E11.3)
9     FORMAT(10X,I2,2F11.3,F10.3,F14.3)
10    FORMAT(/10X,'[XX]--NODE CO-ORDINATES ALONG X-AXIS
      (cm)')
11    FORMAT(/10X,'[YY]--NODE CO-ORDINATES ALONG Y-AXIS
      (cm)')
12    FORMAT(/10X,'[ZZ]--NODE CO-ORDINATES ALONG Z-AXIS
      (cm)')
13    FORMAT(/10X,'[PIR]--THE VECTOR OF POISSON"S RATIO')
14    FORMAT(/10X,'[E]--THE VECTORS OF YOUNG"S MODULUS
```

```
      (MPa)')
15    FORMAT(/10X,'[PKH],[PKV]--THE VECTORS OF HORIZON-
      TAL AND'
     1 ,' VERTICAL '/23X, 'COEFFICIENT OF PERMEABILITY (cm/
      sec. )')
16    FORMAT (/10X,' [DKT]--THE VECTOR OF TIME INCRE-
      MENTS (days)')
18    FORMAT (/10X,' [DQT]--THE VECTOR OF LOAD INCRE-
      MENTS (kPa)')
19    FORMAT(/10X,'STEP', 4X,'[DKT]  ', 4X, '[DQT]' ,5X,
      'TIME(days)',
     & 4X,'LOAD(kPa)')
      RETURN
      END
C -----------------------------------------------------------------------
C     Sub for Elements Meshing
C -----------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE AUT8 (NSDY, LSE, LDE, L1, M1, N1, ME,
      MN, NSD, NSY, NSZ, NXSD
     1 ,XX, YY, ZZ, COR, KPT, BT, BL, DQT, L, M, N, B2, CTAN)
      DIMENSION LDE(ME, 8), LSE(NSD, NSZ), NSDY(NSY), XX
      (L1)
     1 ,YY(M1), COR(MN,3), ZZ(N1), DQT(KPT)
      NN=MN * 3
      WRITE(1,11), MN, ME, NN
11    FORMAT(/9X, ' * NODES SUM TOTAL:MN=', I4/9X, ' * EL-
      EMENT SUM TOTAL:'
     1 ,'ME=', I4/9X, ' * UNKNOWN NUMBER SUM TOTAL IS:', I4)
      KK=0
      MM=0
      DO 28 I=1,M
      NN1=(I-1) * L1+1
      NN2=NN1+L1
      DO 28 J=1,N
      II=L1 * M1 * (J-1)
      JJ=L1 * M1+II
```

```
18      DO 20 K=1,L
        MM=MM+1
        LDE(MM,1)=NN1+K+II-1
        LDE(MM,2)=NN1+K+II
        LDE(MM,4)=NN2+K+II-1
        LDE(MM,3)=NN2+K+II
        LDE(MM,5)=NN1+K+JJ-1
        LDE(MM,6)=NN1+K+JJ
        LDE(MM,8)=NN2+K+JJ-1
        LDE(MM,7)=NN2+K+JJ
        IF(NSD.EQ.0) GOTO 20
        IF(J.LT.0.OR.J.GT.NSZ) GOTO 20
        IF(K.GT.1.AND.K.LT.L) GOTO 20
        DO 25 IJ=1,NSY
        IK=NSDY(IJ)
        IF(I.EQ.IK.AND.K.EQ.1) GOTO 22
        IF(NXSD.EQ.1) GOTO 25
        IF(I.NE.(IK+2).OR.K.NE.L) GOTO 25
        KK=IJ*2
        GOTO 24
22      KK=IJ
        IF(NXSD.NE.1) KK=IJ*2-1
24      LSE(KK,J)=MM
        GOTO 20
25      CONTINUE
20      CONTINUE
28      CONTINUE
        NN=NSD*NSZ
30      WRITE(1,31) NSD,NN
31      FORMAT(/9X,' *SAND DRAINS SUM TOTAL : NSD=', I4/
        9X,
     1  ' *SAND DRAIN ELEMENTS SUM TOTAL : ', I4)
38      FORMAT(/5X,'SAND DRAIN ELEMENTS LIST : [NSZ=', I2,
        1H])
        IF(NSD.EQ.0) GOTO 50
        WRITE(1,38) NSZ
```

```
      WRITE(1,40) (I,(LSE(I,J),J=1,NSZ),I=1,NSD)
40    FORMAT(2X,7I10)
50    KK=0
      DO 70 J=1,N1
      DO 70 I=1,M1
      DO 70 K=1,L1
      KK=KK+1
      COR(KK,1)=XX(K)
      COR(KK,2)=YY(I)
70    COR(KK,3)=ZZ(J)
      QL=0
      B2=BL
      DO 1 I=1,KPT
1     QL=QL+DQT(I)
      CTAN=(BL-BT)/QL
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating Element Properties
C -------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE EF8 (I1,X,Y,Z,FX,FY,FZ,FN)
      DIMENSION X(8),Y(8),Z(8)
      DIMENSION FX(8,8),FY(8,8),FZ(8,8),FN(8,8)
      C=.57735027
      IF(I1,EQ.0) C=1.
      DO 10 I=1,8
      DO 10 J=1,8
      D1=X(I)*X(J)*C
      D2=Y(I)*Y(J)*C
      D3=Z(I)*Z(J)*C
      D4=D1*D2
      D5=D3*D2
      D6=D3*D1
      FX(I,J)=X(J)*(D2+D3+D5+1.)/8.
      FY(I,J)=Y(J)*(D3+D1+D6+1.)/8.
      FZ(I,J)=Z(J)*(D2+D1+D4+1.)/8.
```

```
      FN(I,J)=(1.+D1)*(1.+D2)*(1.+D3)/8.
10    CONTINUE
      RETURN
      END
C ------- ------ ----------------------------------------------------------
C     Sub for Pre-fronting in FRONT Solution
C ------------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE PRF(MF,LDE,LDS,NW,ME,MN)
      DIMENSION LDE(ME,8),LDS(MN),NW(MF)
      DO 1 I=1,MF
1     NW(I)=0
      DO 5 MM=1,ME
      DO 5 I=1,8
      NI=LDE(MM,I)
5     LDS(NI)=MM
      DO 20 NI=1,MN
      MM=LDS(NI)
      DO 15 I=1,8
      IF(LDE(MM,I).NE.NI) GOTO 15
      LDE(MM,I)=-NI
      LDS(NI)=0
      GOTO 20
15    CONTINUE
20    CONTINUE
      WRITE(1,*)
      WRITE(1,*)'              ELEMENT NODE NUMBERS'
      WRITE(1,25) (I,(IABS(LDE(I,J)),J=1,8),I=1,ME)
25    FORMAT(7X,I7,2X,8I6)
      DO 100 MM=1,ME
      DO 50 I=1,8
      NI=IABS(LDE(MM,I))
      IF(LDS(NI).NE.0) GOTO 50
      DO 30 J=1,MF
      IF(NW(J).NE.0) GOTO 30
      LDS(NI)=J
      NW(J)=NI
```

```
      GOTO 50
30    CONTINUE
50    CONTINUE
      DO 70 I=1,8
      NI=LDE(MM,I)
      IF(NI.GT.0) GOTO 70
      N1=LDS(-NI)
      NW(N1)=0
70    CONTINUE
100   CONTINUE
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------------
C     Sub for FRONT Solution (Main program)
C -------------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE CS8 (KKK, PIR, YM, PKH, PKV, LSE, NSD,
     LDS, P, KPT, L1, M1, N1,
     1 ME, MN, ALF, SS, SRS, NW, JW, LREQ, REQ, XX, NB, YY,
     MFW, MF1, LR, MREQ, DKT,
     2 DQT, Y, FX, FY, FZ, FN, LDE, NSZ, COR, SS2, PY, NCOM)
      DIMENSION LDS (MN), P(MN), XX(L1), YY(M1), Y(8), PY
     (M1),
     1 PIR(N1), YM(N1), PKH(N1), PKV(N1), LDE(ME,8), NB(12),
     DKT(KPT),
     2 DQT(KPT), SRS(MFW), NW(MFW), JW(MFW), LREQ(LR),
     REQ(MREQ), FX(8,8),
     3 FY(8,8), FZ(8,8), FN(8,8), LSE(NSD, NSZ),COR(MN,3),SS
     (MF1),SS2(MF1)
      COMMON/C3/S(300),SQ(8,8),RS(24),E,PR,PH,PV,DT
      COMMON/C5/NN(3),NLDE(8),NLDS(8)
      COMMON/D3/L,M,N,MEE,MNN,B1,B2,CTAN
      COMMON/CD/IRL,NZM,NZN,MZM,NCHK
      COMMON/CI1/XC(8),YC(8),ZC(8),DX(8),DY(8),DZ(8),AW
     (9),C(9)
      WRITE( * ,33) KKK,NSD,MFW,ME,MN,MF1,LR,MREQ
33    FORMAT (10X, 'KKK   NSD   MFW   ME   MN   MF1   LR
```

```
      MREQ'/8X,9I5)
      DT=DKT(KKK)*86400.
      B1=B2-CTAN*DQT(KKK)
      DP2=0.0
      DP1=DQT(KKK)
      IF(DP1.EQ.0.) GOTO 3
       CALL PLOAD(YY,PY,M1,B1,B2,LY,IPY1,IPY2,DP1, DP2,
      YP1,YP2)
      WRITE(*,32)
      WRITE(*,31) DT,DP1,DP2,YP1,YP2.B1,B2,(PY(I),I=1,LY)
32    FORMAT(10X,'DT,DP1,DP2,YP1,YP2,B1,B2,(PY(I), I=1,
      LY)')
31    FORMAT(10X,4F15.6)
3     WRITE(*,34)  ME,MN,LY,IPY1,IPY2
34    FORMAT(10X,'  ME    MN    LY   IPY1  IPY2'/8X,5I5)
      B2=B1
      MM=0
      NCHK=0
      DO 4 I=1,MF1
      SS2(I)=0.
4     SS(I)=0.
      DO 1 I=1,MFW
      SRS(I)=0.
1     NW(I)=0
      JW(1)=1
      DO 5 I=2,MFW
5     JW(I)=JW(I-1)+MFW-I+2
      DO 10 I=1,3
10    NN(I)=0
      NZN=0
      MZM=0
      NZM=0
      DO 101 I=1,M
      DO 101 J=1,N
      DO 100 K=1,L
      MM=MM+1
```

```
      DO 11 II=1,8
      NI=IABS(LDE(MM,II))
      NLDE(II)=LDE(MM,II)
      NLDS(II)=LDS(NI)
      XC(II)=COR(NI,1)
      YC(II)=COR(NI,2)
      ZC(II)=COR(NI,3)
11    CONTINUE
      DO 45 II=1,24
45    RS(II)=0.
      DO 46 II=1,300
46    S(II)=0.
12    PH=PKH(J)
      PV=PKV(J)
      IF(NSD.EQ.0) GOTO 9
      IF(J.GT.NSZ) GOTO 9
      DO 6 II=1,NSD
      DO 6 IK=1,NSZ
      IF(MM.EQ.LSE(II,IK)) GOTO 8
6     CONTINUE
      GOTO 9
8     PH=PKH(N1)
      PV=PKV(N1)
9     PR=PIR(J)
      E=YM(J)*1000
      IF(DP1.EQ.0.) GOTO 19
17    IF(J.NE.1) GOTO 19
      IF(I.GT.IPY2) GOTO 19
18    MI=I
      KI=K
      CALL PRES (PY,LY,KI,MI,MM,L,N,Y,XX,YY,L1,M1
     1          ,IPY1,IPY2,DP1,YP1,YP2)
19    DO 50 II=1,8
      CALL JAC(0,II,DET,FX,FY,FZ)
50    CALL ESIP(II,DET,FN)
55    CALL ES8I(ALF)
```

```
      IF(KKK.EQ.1) GOTO 40
65    DO 20 JI=1,8
      II=3*JI
      DO 20 JJ=1,8
      NI=IABS(NLDE(JJ))
20    RS(II)=RS(II)-SQ(JI,JJ)*P(NI)/ALF
40    CALL ASB8(SS,SS2,SRS,NW,JW,MFW,MF1)
60    CALL FRONT(SS,SRS,NW,JW,LREQ,REQ,MFW,MF1,LR,
     1 MREQ,MM,L1,M1,N1,SS2,NB,NCOM)
100   CONTINUE
101   CONTINUE
      RETURN
      END
C ------------------------------------------------------------------------
C     Sub for Determining Geometric Properties of Load
C ------------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE PLOAD(YY,PY,M1,B1,B2,LY,IPY1,IPY2,DP1,
      DP2,YP1,YP2)
      DIMENSION YY(M1),PY(M1)
      IF(B1.NE.YY(M1)) GOTO 8
      IPY1=M1-1
      IPY2=M1-1
      YP1=0.
      YP2=0.
      GOTO 22
8     DO 20 I=1,M1
      YP=YY(I)
      IF(YP.LE.B1) GOTO 20
      YP1=B1-YY(I-1)
      IPY1=I-2
      GOTO 21
20    CONTINUE
21    DO 15 I=1,M1
      YP=YY(I)
      IF(YP.LT.B2) GOTO 15
      YP2=YP-B2
```

```
      IPY2=I-1
      GOTO 22
15    CONTINUE
22    LY=IPY2-IPY1+1
      IF(LY.LE.2) GOTO 25
      IJ=IPY1+1
      IP=IPY2+1
      JJ=IJ+1
      KJ=2
      YL=YY(IP)-YY(IJ)-YP1-YP2
      X1=(DP2-DP1)/YL
58    DO 2 J=JJ,IPY2
      BJ=YY(J)-YY(IJ)-YP1
      PY(KJ)=DP1+X1*BJ
2     KJ=KJ+1
25    PY(1)=DP1
      PY(LY)=DP2
30    RETURN
      END
C ------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating Element's Nodal Load Vector
C ------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE PRES (PY,LY,K,I,MM,L,N,Y,XX,YY,L1,M1,
     1                 IPY1,IPY2,DP1,YP1,YP2)
      DIMENSION PY(LY),Y(8),XX(L1),YY(M1)
      COMMON/C3/S(300),SQ(8,8),RS(24),E,PR,PH,PV,DT
      A=(XX(K+1)-XX(K))*.5
      B=(YY(I+1)-YY(I))*.5
      IF(I.LE.IPY1) GOTO 30
      JJ=IPY1+1
      DO 24 IL=JJ,IPY2
      KJ=L*N*(IL-1)
      DO 24 II=1,L
      KI=KJ+II
      IF(MM.NE.KI) GOTO 24
      IJ=IL-IPY1
```

```
      G1=-1.
      G2=1.
      IF(LY.NE.2) GOTO 10
      G1=YP1/B-1.
      G2=1.-YP2/B
      GOTO 15
10    IF(IL.EQ.JJ) G1=YP1/B-1.
      IF(IL.EQ.IPY2) G2=1.-YP2/B
15    DO 23 IK=1,4
      KK=3*IK-1
20    RS(KK)=A*B/12*(((G2*G2+G2*G1+G1*G1-3)*Y(IK)
      +6+3*(G1+G2))*PY(IJ)
     1      +((2*G2*G2-G1*G2-G1*G1)*Y(IK)+3*(G2-G1))
      *PY(IJ+1))
23    CONTINUE
      RETURN
24    CONTINUE
30    DO 31 IK=1,4
      KK=3*IK-1
31    RS(KK)=A*B*DP1
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating JACOB Matrix and Determinantal Value
C -------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE JAC(I1,I,DET,FX,FY,FZ)
      DIMENSION FX(8,8),FY(8,8),FZ(8,8)
      COMMON/CI1/XC(8),YC(8),ZC(8),DX(8),DY(8),DZ(8),AW
      (9),C(9)
      DO 5 J=1,9
5     C(J)=0.
      DO 10 J=1,8
      XCJ=XC(J)
      YCJ=YC(J)
      ZCJ=ZC(J)
      FXJ=FX(I,J)
```

```
      FYJ=FY(I,J)
      FZJ=FZ(I,J)
      C(1)=C(1)+FXJ*XCJ
      C(2)=C(2)+FXJ*YCJ
      C(3)=C(3)+FXJ*ZCJ
      C(4)=C(4)+FYJ*XCJ
      C(5)=C(5)+FYJ*YCJ
      C(6)=C(6)+FYJ*ZCJ
      C(7)=C(7)+FZJ*XCJ
      C(8)=C(8)+FZJ*YCJ
10    C(9)=C(9)+FZJ*ZCJ
      DET=C(1)*C5*C(9)+C(4)*C(8)*C(3)+C(2)*C(6)*C(7)
     1   -C(3)*C(5)*C(7)-C(2)*C(4)*C(9)-C(6)*C(8)*C(1)
      IF(DET.LE.0.)  STOP  'DET IS OR BELOW ZERO!'
      AW(1)=C(5)*C(9)-C(6)*C(8)
      AW(4)=C(6)*C(7)-C(4)*C(9)
      AW(7)=C(4)*C(8)-C(5)*C(7)
      AW(2)=C(3)*C(8)-C(2)*C(9)
      AW(5)=C(1)*C(9)-C(3)*C(7)
      AW(8)=C(2)*C(7)-C(1)*C(8)
      AW(3)=C(2)*C(6)-C(3)*C(5)
      AW(6)=C(3)*C(4)-C(1)*C(6)
      AW(9)=C(1)*C(5)-C(2)*C(4)
      IF(I1.EQ.1) RETURN
      DO 20 J=1,9
20    AW(J)=AW(J)/DET
      DO 30 J=1,8
      FXJ=FX(I,J)
      FYJ=FY(I,J)
      FZJ=FZ(I,J)
      DX(J)=AW(1)*FXJ+AW(2)*FYJ+AW(3)*FZJ
      DY(J)=AW(4)*FXJ+AW(5)*FYJ+AW(6)*FZJ
30    DZ(J)=AW(7)*FXJ+AW(8)*FYJ+AW(9)*FZJ
      RETURN
      END
```

```
C ------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating the Items in the Elements of
C                  Consolidation Matrix
C ------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ESIP (II,DET,FN)
      DIMENSION FN(8,8)
      COMMON/C3/S(300),SQ(8,8),RS(24),E,PR,PH,PV,DT
      COMMON/CI1/XC(8),YC(8),ZC(8),DX(8),DY(8),DZ(8),AW
      (9),C(9)
      N=0
      DO 10 I=1,8
      IK=3*I-1
      FNI=FN(II,I)*DET
      FXI=DX(I)*DET
      FYI=DY(I)*DET
      FZI=DZ(I)*DET
8     DO 10 J=I,8
      FNJ=FN(II,J)
      FXJ=DX(J)
      FYJ=DY(J)
      FZJ=DZ(J)
      S(N+1)=S(N+1)+FXI*FXJ
      S(N+2)=S(N+2)+FYI*FYJ
      S(N+3)=S(N+3)+FZI*FZJ
      S(N+4)=S(N+4)+FYI*FZJ
      S(N+5)=S(N+5)+FYI*FNJ
      S(N+6)=S(N+6)+FZI*FNJ
      N=N+6
      IF(I.EQ.J) GOTO 10
      S(N+1)=S(N+1)+FYJ*FZI
      S(N+2)=S(N+2)+FYJ*FNI
      S(N+3)=S(N+3)+FZJ*FNI
      N=N+3
10    CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
C ------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating Element's 3D-Consolidation Matrix
C ------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ES8I(ALF)
      COMMON/C3/S(300),SQ(8,8),RS(24),E,PR,PH,PV,DT
      R=(1.-PR)*(1.-2.*PR)
      A3=E*(1.-PR)/R
      A4=E*PR/R
      A5=E/(1.+PR)*.5
      A6=-ALF*DT*100/9.81
      N=0
      DO 40 I=1,8
      DO 40 J=1,8
      R1=S(N+1)
      R5=S(N+2)
      R6=S(N+4)
      R9=S(N+3)
      R11=S(N+5)
      R12=S(N+6)
      IF(I.EQ.J) GOTO 30
      R8=S(N+7)
      R14=S(N+8)
      R15=S(N+9)
      S(N+1)=A3*R5+A5*(R9+R1)
      S(N+2)=A4*R6+A5*R8
      S(N+3)=-R11
      S(N+4)=A4*R8+A5*R6
      S(N+5)=A3*R9+A5*(R1+R5)
      S(N+6)=-R12
      S(N+7)=-R14
      S(N+8)=-R15
      S(N+9)=A6*(PH*(R1+R5)+PV*R9)
      SQ(I,J)=S(N+9)
      N=N+9
      GOTO 40
   30 S(N+1)=A3*R5+A5*(R9+R1)
```

```
      S(N+2)=(A4+A5)*R6
      S(N+3)=-R11
      S(N+4)=A3*R9+A5*(R1+R5)
      S(N+5)=-R12
      S(N+6)=A6*(PH*(R1+R5)+PV*R9)
      SQ(I,J)=S(N+6)
      N=N+6
40    CONTINUE
      DO 20 I=1,8
      DO 20 J=1,8
20    SQ(J,I)=SQ(I,J)
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------
C     Sub for Assembling Consolidation Matrixes & Load Vectors
C                    in FRONT Solution
C -------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ASB8(SS,SS2,SRS,NW,JW,MFW,MF1)
      DIMENSION SS(MF1),SRS(MFW),NW(MFW),JW(MFW),SS2
     (MF1)
      COMMON/C3/S(300),SQ(8,8),RS(24),E,PR,PH,PV,DT
      COMMON/C5/NN(3),NLDE(8),NLDS(8)
      NL=0
      DO 22 IN=1,8
      ID=NLDS(IN)
      I1=(ID-1)*3
      I2=(IN-1)*3
      DO 10 I=1,3
10    SRS(I1+I)=SRS(I1+I)+RS(I2+I)
      DO 22 JN=IN,8
      JD=NLDS(JN)
      I3=(JD-1)*3
      I4=(JN-1)*3
      DO 21 I=1,3
      ISS=I1+I
      NW(ISS)=1
```

```
      IS=I2+I
      DO 20 J=1,3
      JSS=I3+J
      IF(ID.GT.JD) GOTO 19
      JS=I4+J
      IF(IS.GT.JS) GOTO 20
      NL=NL+1
      LOC=JW(ISS)+JSS-ISS
      IF(LOC.GT.MF1) GOTO 30
      SS(LOC)=SS(LOC)+S(NL)
      GOTO 20
19    NL=NL+1
      LOC=JW(JSS)+ISS-JSS
      IF(LOC.GT.MF1) GOTO 30
      SS(LOC)=SS(LOC)+S(NL)
      GOTO 20
30    LOC=LOC-MF1
      SS2(LOC)=SS2(LOC)+S(NL)
20    CONTINUE
21    CONTINUE
22    CONTINUE
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------------
C     Sub for Solving Linear Equation Group with FRONT Elimination
C -------------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE FRONT (SS, SRS, NW, JW, LREQ, REQ, MFW,
     MF1,LR,
     1 MREQ,MM,L1,M1,N1,SS2,NB,NCOM)
      DIMENSION SS (MF1), SRS (MFW), NW (MFW), JW (MFW),
     LREQ(LR),REQ(MREQ)
     1 ,SS2(MF1),NB(12)
      COMMON/C5/NN(3),NLDE(8),NLDS(8)
      COMMON/CD/IRL,NZM,NZN,MZM,NCHK
      NBW=1
      NFW=MFW
```

```
      DO 39 IN=1,8
      NI=-NLDE(IN)
      IF(NI.LE.0) GOTO 39
      LIN=NLDS(IN)
24    JJ=0
      DO 25 J=1,N1
      DO 25 I=1,M1
      DO 25 K=1,L1
      JJ=JJ+1
      IF(NI.NE.JJ) GOTO 25
      IF(I.EQ.M1) NN(3)=NB(12)
      IF(I.EQ.M1) NN(2)=NB(11)
      IF(I.EQ.1) NN(3)=NB(9)
      IF(I.EQ.1) NN(2)=NB(8)
      IF(J.EQ.N1) NN(3)=NB(6)
      IF(J.EQ.N1) NN(1)=NB(4)
      IF(J.EQ.1) NN(2)=NB(2)
      IF(J.EQ.1) NN(1)=NB(1)
      IF(I.EQ.M1) NN(1)=NB(10)
      IF(I.EQ.1) NN(1)=NB(7)
      IF(J.EQ.N1) NN(2)=NB(5)
      IF(J.EQ.1) NN(3)=NB(3)
      IF(NCOM.EQ.0) NN(3)=1
      GOTO 26
25    CONTINUE
26    DO 38 NV=1,3
27    IF(NW(NBW).NE.0) GOTO 28
      NBW=NBW+1
      GOTO 27
28    IF(NW(NFW).NE.0) GOTO 29
      NFW=NFW-1
      GOTO 28
29    IF((NZN-NBW+NFW+1).LT.MREQ) GOTO 30
      NCHK=NCHK+1
      WRITE(2,REC=NCHK) MZM,NZN,(REQ(IE),IE=1,NZN),
     1 (LREQ(IE),IE=1,MZM)
```

```
      WRITE( * ,106) MM,MZM,NZN,NCHK,IN,NV
15    MZM=0
      NZN=0
      NZM=0
30    LIV=(LIN-1) * 3+NV
      IF(NN(NV). EQ. 1) GOTO 50
      NL=JW(LIV)
      IF(NL. GT. MF1) GOTO 60
      PIV=SS(NL)
      GOTO 62
60    NL=NL-MF1
      PIV=SS2(NL)
62    IF(ABS(PIV). LE. 1. E-8) STOP 'ZERO PIV'
      N5=NZN
      DO 31 I=NBW,LIV
      NZN=NZN+1
      N3=JW(I)+LIV-I
      IF(N3. GT. MF1) GOTO 64
      REQ(NZN)=SS(N3)
      SS(N3)=0.
      GOTO 31
64    N3=N3-MF1
      REQ(NZN)=SS2(N3)
      SS2(N3)=0.
31    CONTINUE
      N7=NZN
      REQ(NZN)=0.
      IF(LIV. EQ. NFW) GOTO 33
      N3=JW(LIV)+1
      N4=JW(LIV)+NFW-LIV
      DO 32 I=N3,N4
      NZN=NZN+1
      IF(I. GT. MF1) GOTO 66
      REQ(NZN)=SS(I)
      SS(I)=0.
      GOTO 32
```

```
66      J=I-MF1
        REQ(NZN)=SS2(J)
        SS2(J)=0.
32      CONTINUE
33      NZN=NZN+1
        REQ(NZN)=SRS(LIV)
        SRS(LIV)=0.
        LREQ(MZM+1)=NBW
        LREQ(MZM+2)=NFW
        LREQ(MZM+3)=LIV
        MZM=MZM+3
        IF(MZM.GT.LR)  STOP '*LR*  is too small'
        NW(LIV)=0
        DO 35 J=NBW,NFW
        N5=N5+1
        IF(NW(J).EQ.0) GOTO 35
        FACT=REQ(N5)/PIV
55      N6=N5-1
        LOC=JW(J)-1
        DO 34 I=J,NFW
        N6=N6+1
        LOC=LOC+1
        IF(LOC.GT.MF1) GOTO 68
        SS(LOC)=SS(LOC)-FACT*REQ(N6)
        GOTO 34
68      LC=LOC-MF1
        SS2(LC)=SS2(LC)-FACT*REQ(N6)
34      CONTINUE
        SRS(J)=SRS(J)-FACT*REQ(NZN)
35      CONTINUE
        REQ(N7)=PIV
        GOTO 38
50      DO 131 I=NBW,LIV
        N3=JW(I)+LIV-I
        IF(N3.GT.MF1) GOTO 164
        SS(N3)=0.
```

```
      GOTO 131
164   N3=N3-MF1
      SS2(N3)=0.
131   CONTINUE
      IF(LIV.EQ.NFW) GOTO 133
      N3=JW(LIV)+1
      N4=JW(LIV)+NFW-LIV
      DO 132 I=N3,N4
      IF(I.GT.MF1) GOTO 166
      SS(I)=0.
      GOTO 132
166   J=I-MF1
      SS2(J)=0.
132   CONTINUE
133   NZN=NZN+2
      SRS(LIV)=0.
      REQ(NZN-1)=1
      REQ(NZN)=0.
      LREQ(MZM+1)=LIV
      LREQ(MZM+2)=LIV
      LREQ(MZM+3)=LIV
      MZM=MZM+3
      IF(MZM.GT.LR)  STOP '*LR* is too small'
      NW(LIV)=0
      NN(NV)=0
38    CONTINUE
39    CONTINUE
106   FORMAT(10X,'*MM=',I5,2X,'*MZM=',I5,2X,'*NZN=
      ',I6,2X,'*NCHK=',I3
     1 ,2X,'*IN=',I2,2X,'*NV=',I2)
      RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating & Outputing Nodal Displacements and
C                  Excess Pore Water Pressures
C -------------------------------------------------------------------
```

```
      SUBROUTINE BAK8(KKK,SRS,LREQ,REQ,DISP,V,W,LDE,
     P,T,ME,MN,MFW,LR,
     1 L,M,N,L1,M1,N1,MREQ,GCNAME,CHR)
      DIMENSION SRS(MFW),LREQ(LR),REQ(MREQ),LDE(ME,8)
     1 ,DISP(MN,2),P(MN),V(MN),W(MN),T(100)
      COMMON/CD/IRL,NZM,NZN,MZM,NCHK
      COMMON/APR/NSP,NP,LPR(100),MPR(100),NPR(100)
      CHARACTER GCNAME*4,CHR(100)*2
      CHARACTER*8 FVN
      FVN=GCNAME//'VP'//CHR(KKK)
      WRITE(*,106) ME, MZM, NZN, NCHK
      IF(KKK.NE.1) GOTO 4
      DO 1 I=1,MN
      V(I)=0.
      W(I)=0.
1     P(I)=0.
4     DO 50 MM=1,ME
      MEL=ME+1-MM
      DO 50 I=1,8
      ND=9-I
      NI=-LDE(MEL,ND)
      IF(NI.LE.0) GOTO 50
      DO 30 NV=1,3
      IF(NZN.NE.0) GOTO 20
15    READ(2,REC=NCHK)  MZM,NZN,(REQ(IE),IE=1,NZN),
     (LREQ(IE),IE=1,MZM)
      WRITE(*,106)  MM,MZM,NZN,NCHK
      NCHK=NCHK-1
20    MZM=MZM-3
      NBW=LREQ(MZM+1)
      NFW=LREQ(MZM+2)
      LIV=LREQ(MZM+3)
      GASH=REQ(NZN)
5     II=NZN-NFW-1+LIV
      PIV=REQ(II)
      REQ(II)=0
```

```
      N2=NZN-NFW-2+NBW
      NZN=N2
      DO 10 J=NBW,NFW
      N2=N2+1
10    GASH=GASH-SRS(J)*REQ(N2)
      SRS(LIV)=GASH/PIV
      N3=4-NV
      IF(NV.EQ.1) GOTO 25
      DISP(NI,N3)=SRS(LIV)
      GOTO 30
25    P(NI)=SRS(LIV)+P(NI)
30    CONTINUE
50    CONTINUE
60    DO 51 I=1,MN
      V(I)=V(I)+DISP(I,1)
      W(I)=W(I)+DISP(I,2)
51    CONTINUE
      OPEN(3,FILE=FVN,FORM='BINARY')
      WRITE(3) KKK,MN,(P(I),I=1,MN),(V(I),I=1,MN),(W(I),
      I=1,MN)
      CLOSE(3)
      IF(NSP.EQ.1.OR.NP.EQ.0) GOTO 110
      WRITE(1,90) KKK, T(KKK),L,M,N,FVN
      IF(NP.LT.0) GOTO 88
      DO 85 I=1,NP
      KL=LPR(I)
      KM=MPR(I)
      KN=NPR(I)
      IF(KL.NE.0) GOTO 72
      DO 74 J=1,L1
      K=(KN-1)*L1*M1+(KM-1)*L1+J
74    WRITE(1,100)  K,V(K),W(K),P(K)
      GOTO 85
72    IF(KM.NE.0) GOTO 92
      DO 94 J=1,M1
      K=(KN-1)*L1*M1+L1*(J-1)+KL
```

```
94      WRITE(1,100)  K,V(K),W(K),P(K)
        GOTO 85
92      IF(KN.NE.0) GOTO 96
        DO 95 J=1,N1
        K=(J-1)*L1*M1+L1*(KM-1)+KL
95      WRITE(1,100) K,V(K),W(K),P(K)
        GOTO 85
96      K=(KN-1)*L1*M1+L1*(KM-1)+KL
        WRITE(1,100) K,V(K),W(K),P(K)
85      CONTINUE
        GOTO 110
88      WRITE(1,100) (I,V(I),W(I),P(I),I=1,MN)
90      FORMAT(/9X,'*NODAL DISPLACEMENTS AND POREPRES-
        SURE AT STEP',I2
     &  ,' (T=', F6.1,' days)'/13X,'L=',I2,8X,'M=',I2,8X,'N=',I2,
        7X,'(',
     &  A8,')'/10X,'NODE',4X,'V(cm)',10X,'W(cm)',10X,
        'POREPRES.(kPa)')
100     FORMAT(9X,I5,3E15.6)
105     FORMAT(10X,'*MM=',I5,5X,'*MZM=',I5,5X,'*NZN=',
        I6,5X,'*NK=',I6)
110     RETURN
        END
C -------------------------------------------------------------------------
C       Sub for Calculating and Outputing Stresses
C -------------------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE STR8(KKK,NM,LDE,DISP,SR,YM,SS,PIR,
        COR,L1,M1,N1,
     1  ME,MN,LDS,FX,FY,FZ,T,GCNAME,CHR)
        DIMENSION SS(NM),SR(MN,4),LDE(ME,8),DISP(MN,2),
        COR(MN,3),YM(N1)
     1  ,PIR(N1),LDS(MN),FY(8,8),FZ(8,8),FX(8,8),T(100)
        COMMON/C5/NN(3),NLDE(8),NLDS(8)//V(8),W(8)
        COMMON/D3/L,M,N,MEE,MNN,B1,B2,CTAN
        COMMON/CI1/XC(8),YC(8),ZC(8),DX(8),DY(8),DZ(8),AW
        (9),C(9)
```

```
      COMMON/APR/NSP,NP,LPR(100),MPR(100),NPR(100)
      CHARACTER GCNAME*4,CHR(100)*2
      CHARACTER*8 FSN
      IF(KKK.NE.1) GOTO 2
      DO 11 I=1,MN
      DO 11 J=1,4
11    SR(I,J)=0.
2     IF(KKK.LT.2) GOTO 3
      FSN=GCNAME//'SR'//CHR(KKK-1)
      OPEN(3,FILE=FSN,FORM='BINARY')
      READ(3) KK,MS,((SR(I,J),J=1,4),I=1,MN)
      CLOSE(3)
3     DO 4 I=1,NM
4     SS(I)=0
5     MM=0
      DO 51 JI=1,M
      DO 51 JJ=1,N
      DO 50 K=1,L
      MM=MM+1
      E=YM(JJ)*1000
      PR=PIR(JJ)
16    DO 30 I=1,8
      N2=LDE(MM,I)
      N3=IABS(N2)
      NLDE(I)=N2
      NLDS(I)=LDS(N3)
      XC(I)=COR(N3,1)
      YC(I)=COR(N3,2)
      ZC(I)=COR(N3,3)
      V(I)=DISP(N3,1)
      W(I)=DISP(N3,2)
30    CONTINUE
      DO 40 II=1,8
      CALL JAC(0,II,DET,FX,FY,FZ)
40    CALL ESTR(II,E,PR,NM,SS)
52    DO 60 II=1,8
```

```
      N2=-NLDE(II)
      IF(N2.LT.0) GOTO 60
      N5=NLDS(II)
      DIV=SS(N5*5)
      ND=(N5-1)*5
      DO 55 I=1,4
      SR(N2,I)=SS(ND+I)/DIV+SR(N2,I)
55    SS(ND+I)=0
      SS(ND+5)=0
60    CONTINUE
50    CONTINUE
51    CONTINUE
      CLOSE(4)
20    FORMAT(5X,I5,4E15.6)
      FSN=GCNAME//'SR'//CHR(KKK)
      OPEN(3,FILE=FSN,FORM='BINARY')
      WRITE(3) KKK,MN,((SR(I,J),J=1,4),I=1,MN)
      CLOSE(3)
      IF(NSP.EQ.0.OR.NP.EQ.0) GOTO 118
      WRITE(1,90) KKK, T(KKK), L,M,N,FSN
      IF(NP.LT.0) GOTO 88
      DO 85 I=1,NP
      KL=LPR(I)
      KM=MPR(I)
      KN=NPR(I)
      IF(KL.NE.0) GOTO 72
      DO 74 J=1,L1
      K=(KN-1)*L1*M1+(KM-1)*L1+J
74    WRITE(1,100)  K,(SR(K,IH),IH=1,4)
      GOTO 85
72    IF(KM.NE.0) GOTO 92
      DO 94 J=1,M1
      K=(KN-1)*L1*M1+L1*(J-1)+KL
94    WRITE(1,100)  K,(SR(K,IH),IH=1,4)
      GOTO 85
92    IF(KN.NE.0) GOTO 96
```

```
      DO 95 J=1,N1
      K=(J-1)*L1*M1+L1*(KM-1)+KL
95    WRITE(1,100)  K,(SR(K,IH),IH=1,4)
      GOTO 85
96    K=(KN-1)*L1*M1+L1*(KM-1)+KL
      WRITE(1,100)  K,(SR(K,IH),IH=1,4)
85    CONTINUE
      GOTO 118
88    WRITE(1,100) (I,(SR(I,J),J=1,4),I=1,MN)
90     FORMAT(/9X,'*NODAL STRESSES AT STEP', I2,' (T=',
      F6.1,' days)'
     &  /13X,'L=',I2,8X,'M=',I2,8X,'N=',I2,7X,'(',A8,')'/10X,
      'NODE',
     &  3X,'Sxx(kPa)',6X,'Syy(kPa)',6X,'Szz(kPa)',6X,'Syz(kPa)')
100   FORMAT(9X,I5,4E14.6)
118   RETURN
      END
C -------------------------------------------------------------------
C     Sub for Calculating Stress Increaments
C -------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE ESTR(J,E,PR,NM,SS)
      DIMENSION SS(NM)
      COMMON/C5/NN(3),NLDE(8),NLDS(8)//V(8),W(8)
      COMMON/CI1/XC(8), YC(8), ZC(8), DX(8), DY(8), DZ(8),
      SIGMA(9), CW(9)
      R=(1.+PR)*(1.-2.*PR)
      A1=E*(1.-PR)/R
      A2=E*PR/R
      A3=E/(1+PR)*.5
      NI=NLDS(J)
      ND=IABS(NLDE(J))
      DO 2 II=1,4
2     CW(II)=0.
      DO 3 I=1,8
      CW(1)=CW(1)+DY(I)*V(I)
      CW(2)=CW(2)+DY(I)*W(I)
```

```
      CW(3)=CW(3)+DZ(I)*V(I)
      CW(4)=CW(4)+DZ(I)*W(I)
3     CONTINUE
      SIGMA(1)=-A1*CW(1)-A2*CW(4)
      SIGMA(2)=-A2*CW(1)-A1*CW(4)
      SIGMA(3)=-A3*(CW(3)+CW(2))
10    N4=(NI-1)*5
      DO 40 KI=1,3
      KJ=KI+1
40    SS(N4+KJ)=SS(N4+KJ)+SIGMA(KI)
      SS(N4+5)=SS(N4+5)+1.
      SS(N4+1)=SS(N4+1)+PR*(SIGMA(1)+SIGMA(2))
35    RETURN
      END
```

参 考 文 献

[1] M. A. Biot. General theory of three dimensional consolidation. J. App. Physics, Vol. 12, 1941

[2] J. R. Booker & J. C. Small, Finite element analysis of primary and secondary consolidation. Int. J. Solids & Structures, Vol. 13,No. 2, 1977

[3] J. T. Christian, J. W. Boehmer & P. P. Martin, Consolidation of a layer under a strip load. JSMFD, ASCE, No. SM7,1972

[4] Y. K. Cheung, P. K. K. Lee & K. H. Xie, Some remarks on two and three dimensional consolidation analysis of sand-drained ground. Computers and Geotechnics 12, 1991

[5] E. H. Davis & H. G. Polus. Rate of settlement under two-and three-dimensional conditions. Geotechnique, Vol. 22, No. 1, 1972

[6] 龚晓南. 软土地基圆形贮罐上部结构与地基共同作用. 浙江大学学报,第 20 卷第 1 期,1986

[7] 龚晓南. 软土地基固结有限元分析. 浙江大学硕士学位论文,1981

[8] 龚晓南. 油罐软粘土地基性状. 浙江大学博士学位论文,1984

[9] 龚晓南. 土工计算机分析. 中国建筑工业出版社,2000

[10] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 中国水利水电出版社,1996

[11] 沈珠江. 用有限单元法计算软土地基的固结变形. 水利水运科技情报,第 1 期,1977

[12] R. S. Sandhu & E. L. Wilson. Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media. JEMD, ASCE, Vol. 95,No. EM3,1969

[13] H. Shinsha, et al., Consolidation settlement and lateral displacement of soft ground improved by sand drain. Soils & Foundations (in Japanese),1982

[14] M. Shoji & T. Matsumoto, Consolidation of embankment foundation. Soils and Foundations, Vol. 16, No. 1, 1976

[15] J. C. Small, J. R. Booker & E. H. Davis. Elasto-plastic consolidation of soil. Int. J. Solids Struc-

tures, Vol. 12, 1976

[16] I. M. Smith & R. Hobbs. Biot analysis of consolidation beneath embankments. Geotechnique, Vol. 26, No. 1, 1976

[17] 谢康和. 砂井地基:固结理论、数值分析与优化设计. 浙江大学博士学位论文,1987

[18] K. H. Xie, Q. Y. Pan, G. X. Zeng, & X. R. Zhu, Prediction versus performance on the behavior of soft clay ground improved by vertical drains. Proc. of symposium on Prediction versus Performance in Geotechnical Engrg., Bangkok, 1993

[19] G. X. Zeng, K. H. Xie & Z. Y. Shi. Consolidation analysis of sand drained ground by F. E. M. Proc. 8th ARCSMFE, Vol. 1, Kyoto, 1987

[20] 朱百里、沈珠江等. 计算土力学. 上海科学技术出版社,1990

第九章　有限元理论在岩土工程中的应用

9.1　宁波机场跑道袋装砂井地基固结有限元分析

宁波机场是我国在软土地基上建造的第一个大型民用机场。本节介绍用第八章所述的 PDSS 程序分析该机场跑道袋装砂井地基固结的实例。

9.1.1　工程概况

宁波机场位于宁波市西南的宁奉平原上，机场跑道宽 45m，长 2500m。道面设计标高比原地面抬高约 1.70m。由于使用上的原因，场道对地基的变形和回弹模量都有严格的要求。

机场场区地形平坦，场区主要压缩土层系全新世海相沉积层。图 9.1 为跑道纵向地质剖面。纵观全场道，地基主要是深厚的、含水量大、压缩性高、抗剪强度低的淤泥质土层，且分布极不均匀，厚度最大相差 20 余米。在这样软弱土层深厚、分布极不均匀的软土地基上修建大型民用机场，如地基不经处理，在场区大面积填土荷载作用下，地基的变形显然不能满足使用要求，因此本工程拟采用袋装砂井超载预压法处理。为寻求最佳的设计方案，在场道范围内土层分布相对较为均匀的区段进行了袋装砂井地基超载预压试验。

试验区(图 9.1)地面以下主要土层分布为：硬壳层(I_1)平均厚 0.65m；下卧淤泥、淤泥质土(I_3)，平均厚 2.8m，该土层工程性质差，且夹有厚 0.1～0.6m 的泥炭层，其含水量高达 101.3%，孔隙比 2.9，有机质含量 30%；在 I_3 层以下为深厚的淤泥质土层(II_3、III_1)。试验区主要土层的物理力学性质见表 9.1。

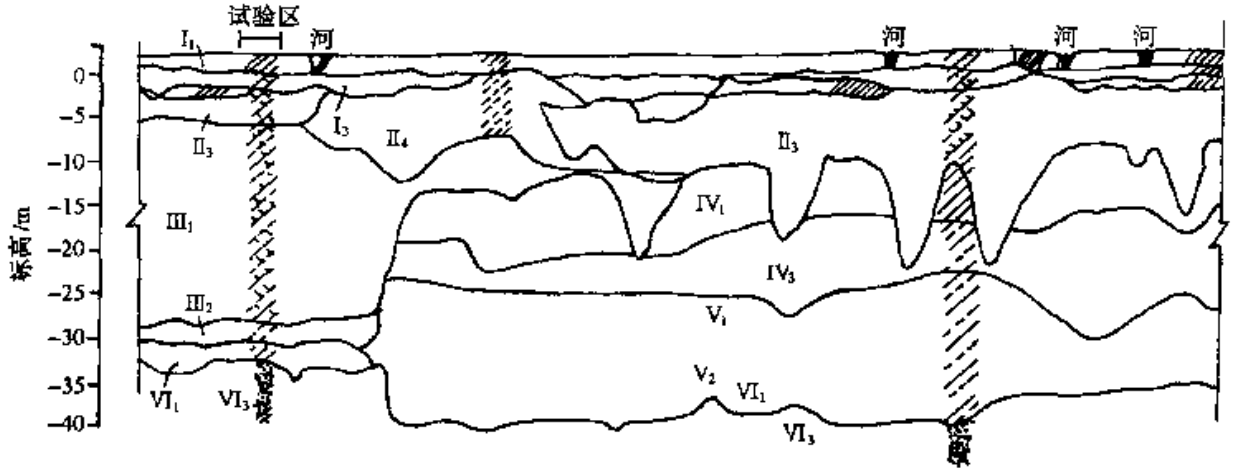


图 9.1　宁波机场场道工程地址纵剖面图

表 9.1　宁波机场试验区主要土层的物理力学性质指标

工程地址亚层	土层名称	天然含水量 w /%	天然重度 γ /(kN/m³)	孔隙比 e_0 (—)	塑性指数 I_p (—)	渗透系数 水平方向 k_h/(×10⁻⁸ cm/s)	渗透系数 垂直方向 k_v/(×10⁻⁸ cm/s)	十字板剪切强度 c_u/kPa
I_{1a}	粘土、亚粘土	34.65	18.9	0.955	18.4	2.97	1.74	
I_{1b}	亚粘土、粘土	32.05	19.1	0.882	16.3	3.10	2.42	0.50
I_3	淤泥、淤泥质土	52.80	17.2	1.447	17.5	10.3	7.52	0.24
I_3	淤泥质土	49.00	17.5	1.341	15.5	8.61	5.09	0.22
I_1	淤泥质土	48.95	17.4	1.351	16.9	9.88	7.18	0.30
I_2	轻亚粘土、亚粘土	35.75	18.9	1.022	11.5			
M_1	亚粘土、粘土	35.75	18.9	0.942	15.8			

试验区袋装砂井直径为 7cm，呈梅花型(等边三角形)分布，砂井中心间距为 1.4m。砂井长度为 20m。地基表面铺设 0.35m 厚的排水砂层以连通砂井。图 9.2 为试验区超载预压袋装砂井地基横断面图。堆体系矿渣，厚 3.65m，由碾压和非碾压两层组成。碾压层厚 1.3m，非碾压层厚 2.35m，重度分别为 17.7kN/m³、15.7kN/m³。试验从 1986.11.1 开始到 1987.7.19 结束，图 9.3 为相应的加荷曲线。

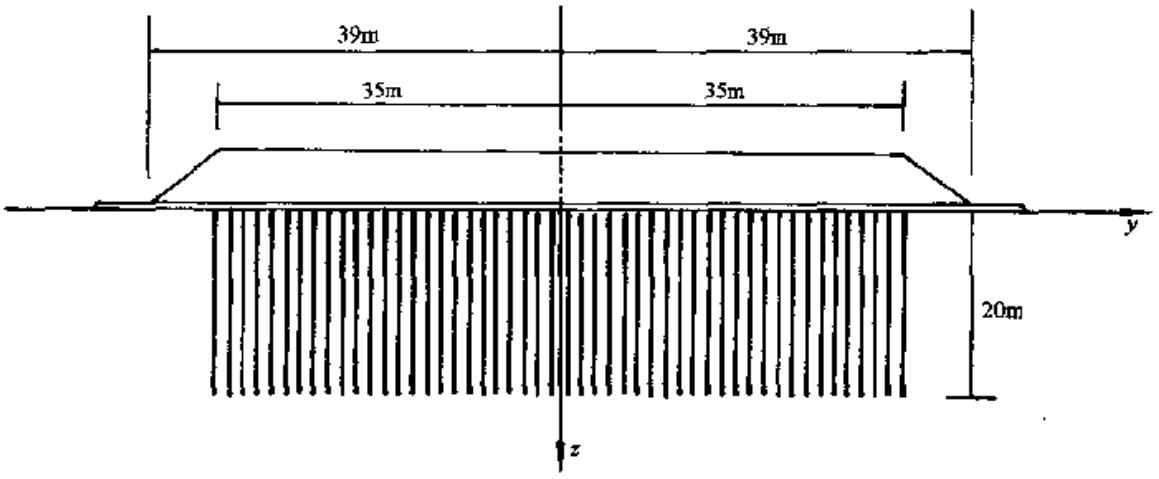


图 9.2　宁波机场试验区超载预压袋装砂井地基横断面图

预压堆体的顶面和底面宽分别为 70m、78m，这样可以保证在跑道宽度 45m 的范围内不出现差异沉降。试验区地基中埋设了深层沉降计和孔压计等测试元件，并在整个加荷和预压期内进行了连续观测，以便及时掌握地基中变形和孔压等的实际数据，检验超载预压方案的实际效果并用于和计算值的对比分析。

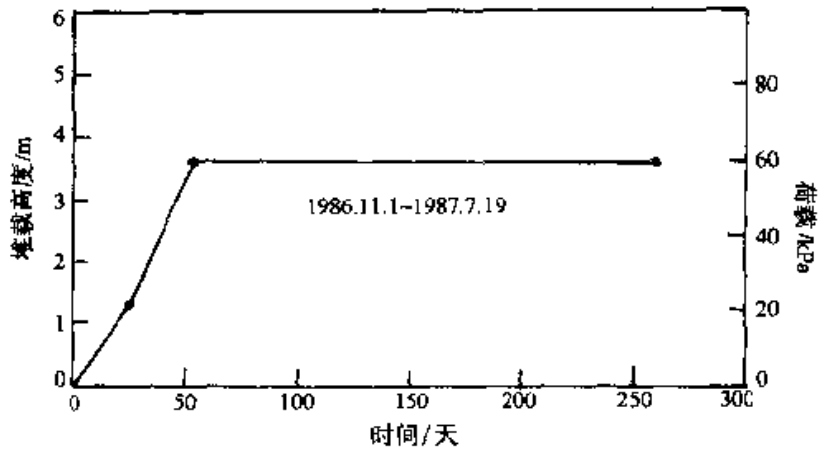


图 9.3　宁波机场试验区加荷曲线

9.1.2　本构模型及计算参数

1. 宁波粘土的非线性拟弹性模型

软粘土变形特性错综复杂，非线性、剪胀性、各向异性、流变性等无所不包。砂井地基除软粘土外还有井料，因此其变形性状更加复杂。通过含砂芯的宁波粘土试样和原状土试样的室内对比试验研究表明，当砂井井径比 $n>7$ 时井料的影响可以忽略不计，因而对砂井地基的应力-应变关系研究等同于对天然地基饱和粘土应力-应变关系的研究。根据对宁波粘土的三轴压缩试验结果，可提出对宁波粘土较适合的非线性拟弹性模型，该模型能考虑粘土的非线性、剪缩性等主要变形特性，并能方便地用于有限元分析中。

在非线性拟弹性模型中，拟切线体积模量和拟切线剪切模量可分别表为

$$K_t=\frac{P}{[C_c+b(3-M_s)]} \tag{9.1}$$

$$G_t=\frac{3P[1-d(M_s-M_c)]^2}{[1-d(M_s-M_c)]^2[(3-M_s)\ln P/P_c+M_s]C_b+(3-M_s)c} \tag{9.2}$$

式中：$M=q/P$，q、P 分别为八面体剪应力和平均有效应力，即 $q=\sqrt{(\sigma_1'-\sigma_2')^2+(\sigma_2'-\sigma_3')^2+(\sigma_3'-\sigma_1')^2}/\sqrt{2}$，$P=(\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3')/3$；$C_b=2C_c/(3M_0)$；带下标 o、c、s 的 M、q、P 分别代表原位、室内固结终了和剪切过程中的 M、q、P 值；$M_0=3(1-k_0)/(1+2k_0)$；$k_0=1-\sin\phi'$，为静止土压力系数，ϕ' 为有效内摩擦角；C_c 为压缩指数；b、c、d 为宁波粘土的三轴排水试验参数，分别称为剪缩指数、剪切模量系数和极限应力比系数。

2. 加载准则及计算参数

地基表层为硬壳层，应力-应变关系按线弹性处理。

其它土层均作为非线性体，计算中参数的选取按下述加载准则确定：

$P=P_{max}$ 且 $P>0$ 时　　加载　　$K_t=K_{ld}$

$P \leqslant P_{max}$且 $\dot{P}<0$ 时　　卸载　　$K_t=K_{un}$

$P<P_{max}$且 $\dot{P}>0$ 时　　重加载　　$K_t=K_{rl}$

和

$q=q_{max}$且 $\dot{q}>0$ 时　　加载　　$G_t=G_{ld}$

$q \leqslant q_{max}$且 $\dot{q}<0$ 时　　卸载　　$G_t=G_{un}$

$q<q_{max}$且 $\dot{q}>0$ 时　　重加载　　$G_t=G_{rl}$

式中：P_{max}、q_{max}＝历史上最大的 P、q 值；K_{ld}、G_{ld}＝加荷体积模量和剪切模量，分别按式(9.1)、(9.2)计算；K_{un}、G_{un}＝卸荷体积模量和剪切模量；K_{rl}、G_{rl}＝重加荷体积模量和剪切模量。

分析中取 $K_{rl}=K_{un}$，$G_{rl}=G_{un}$。

K_{un}、G_{un}按以下两式计算：

$$K_{un}=P/C_e \tag{9.3}$$

$$G_{un}=C_sP \tag{9.4}$$

其中：C_e 为回弹指数；C_s 为剪切回弹指数，$C_s=1.1/C_e$。

求得相应于不同加载情况的体积模量和剪切模量 K_t、G_t 后，再用以下二式转化为 E、μ，即可用于计算第八章所述的 PDSS 固结矩阵各元素，即

$$E=\frac{9K_tG_t}{3K_t+G_t} \tag{9.5}$$

$$\mu=\frac{(3K_t-2G_t)}{2(3K_t+G_t)} \tag{9.6}$$

对于砂井单元，由于不考虑井料刚度，故除渗透系数(取 $k_w=0.005$cm/s)外，其它参数均与其所在土层相同。

表 9.2 列出了宁波机场试验区用于有限元分析的各土层计算参数。

表 9.2　宁波机场试验区各土层计算参数

土层	C_c	C_e	b	c	d	ϕ/°	k_h /($\times10^{-7}$cm/s)	k_v /($\times10^{-7}$cm/s)
I_1	—	—	—	—	—	30.0	3.04	2.08
I_3	0.068	0.0068	0.095	0.075	1.53	28.5	8.24	6.12
I_3	0.070	0.0071	0.098	0.080	1.45	29.5	1.72	1.02
II_1	0.065	0.0067	0.091	0.041	1.48	29.0	9.88	7.18
II_2	0.055	0.0055	0.085	0.036	1.40	31.0	1.00	1.00
IV_1	0.055	0.0055	0.085	0.036	1.40	31.0	1.00	1.00

比较表 9.1 和 9.2 可发现，有限元计算所用的各土层渗透系数比室内试验值放大了 1－10 倍。这是因为根据国外大量的报导，土层现场的渗透系数要比室内试验值大得多，这一现象也已被国内很多实例分析所证实。

9.1.3 有限元分析模式

如第八章所述，对于受一般荷载作用的砂井地基固结问题，显然用“空间变形，空间渗流”有限元法进行分析在理论上是最合适的，然而相应的计算工作量庞大，前后处理也很烦杂。但对于诸如高速公路、机场跑道路基下的砂井地基固结等问题，可简化为“平面变形，空间渗流”问题，并采用有限元程序 PDSS 进行分析。这样根据对称性只需要分析较小的区域(图 8.1)，从而大大地减少了计算工作量。

在 PDSS 分析中，为尽可能真实地模拟砂井地基，砂井是单独划分单元的；为保证一定的计算精度，在两根砂井间应至少设置两列土单元；为使网格易于划分，需将砂井的圆形截面简化为等面积的正方形，其边长

$$D_s = \sqrt{\pi}\, d_w/2 \approx 0.8862 d_w \tag{9.7}$$

式中：D_s 为砂井等效截面边长；d_w 为砂井直径。

这样，分析时可用井料的自身参数(例如渗透系数)参加计算，故考虑井阻作用等十分方便。如要考虑涂抹作用，则可通过在井周布置涂抹区单元并采用该区内土体的实际参数参加计算的方法来实现。

进行 PDSS 分析需先根据对称性选取计算区域。显然，砂井按正方形布置相应的计算域厚度(即计算域沿荷载长度方向的尺寸)要比按正三角形布置相应的计算域厚度小，前者为 $S/2$(S 为砂井间距)，如图 8.1 所示，而后者则为 $\sqrt{3}\,S/2$。由于砂井单独划分单元，因此砂井按正方形布置时相应的单元总数目也必然较按正三角形布置相应地要少，从而计算工作量也小。砂井地基固结解析理论早已表明，只要砂井影响区直径 d_e(d_e 与砂井间距 S 的关系为：砂井以正三角形布置时 $d_e = 1.05S$，以正方形布置时 $d_e = 1.128S$)相同，砂井按正三角形或正方形布置对加速地基的固结效果是相同的；用有限元分析也可得此结论。因此，通常把按三角形布置的砂井地基按影响区面积等效的原则转化为按正方形布置的砂井地基，以简化计算。

根据上述原则，采用 PDSS 程序对宁波机场跑道袋装砂井地基固结进行了有限元分析。鉴于堆载高度相对于压缩层厚度来说很小，且碾压部分仅厚 1.3m，故计算中不考虑堆体刚度。具体的有限元网格图与图 8.1(c)相似。

9.1.4 计算结果与分析

1. 沉降

图 9.4、9.5 分别为跑道中心和跑道边缘计算、实测沉降-时间的比较曲线，可见无论是沉降的大小还是发展趋势，计算值和实测值均十分接近，但后者的吻合度不如前者，可能是计算模型中未考虑跑道中心和边缘地基中应力路径不同等的结果。

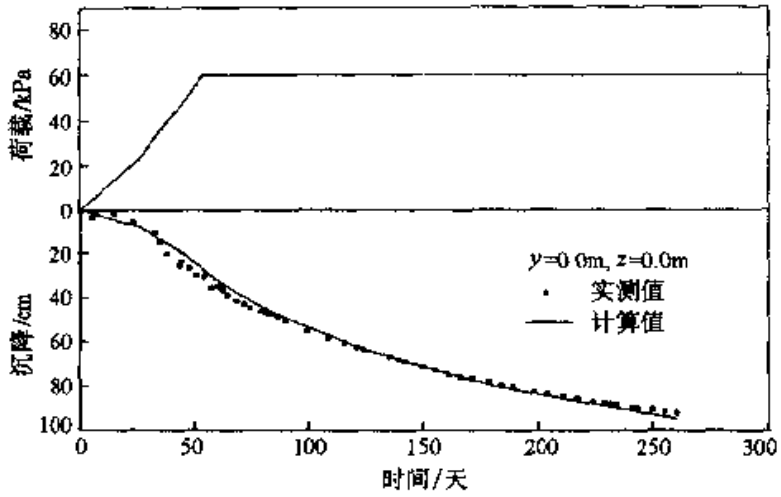


图 9.4　跑道中心沉降-时间曲线图

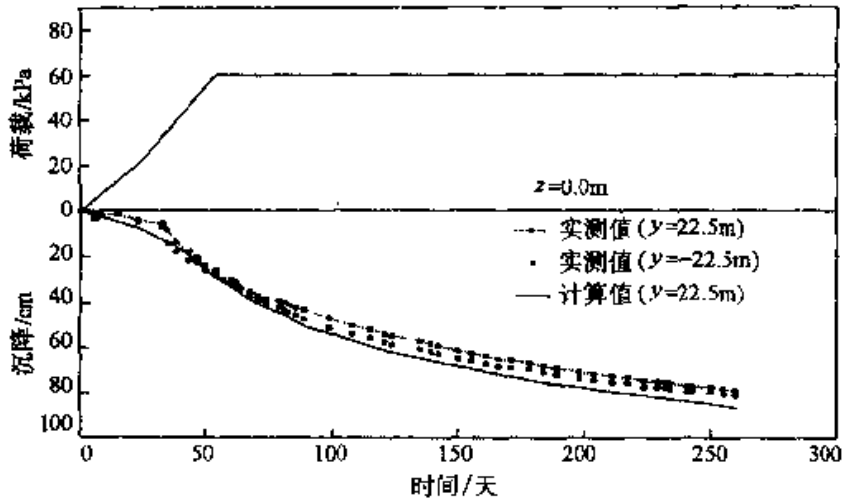


图 9.5　跑道边缘沉降-时间曲线图

图 9.6、9.7 为不同时间不同深度的计算沉降沿跑道宽度方向(即 Y 方向)分布曲线。堆载区内的沉降曲线十分平缓,说明堆载宽度的选取是合适的,基本保证了在跑道宽度 45m 的范围内不出现差异沉降。

2. 孔压

图 9.8 为堆载中心深度 2.1m、16.7m 处的计算孔压与实测孔压-时间对比曲线。从图中可见计算值和实测值基本接近,相对而言表层实测孔压与计算值差别稍大。

图 9.9、9.10 为砂井地基内不同时间、不同深度的超静孔压沿跑道宽度方向的分布曲线。从图中可见在砂井区内由于砂井的存在孔压呈波浪形分布,即由于井料渗透性远高于粘土,砂井内的孔压明显比其周围土中的小,形成波谷,而土中孔压以井距中心附近为最大,形成波峰。但由于井阻作用的存在,砂井内的孔压并不为零,在砂井底面处井内的孔压甚至与土中孔压大小基本相同(见图 9.10 对应于 $z=20$m处的孔压分布曲线),因此井阻对于固结的影响在实际工程中应予以重视。

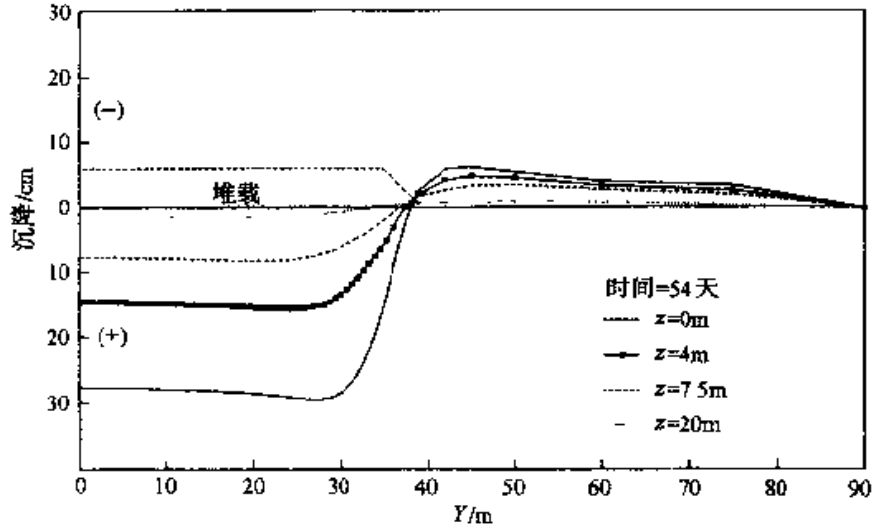


图 9.6　沿跑道宽度方向的沉降分布曲线图(t=54 天)

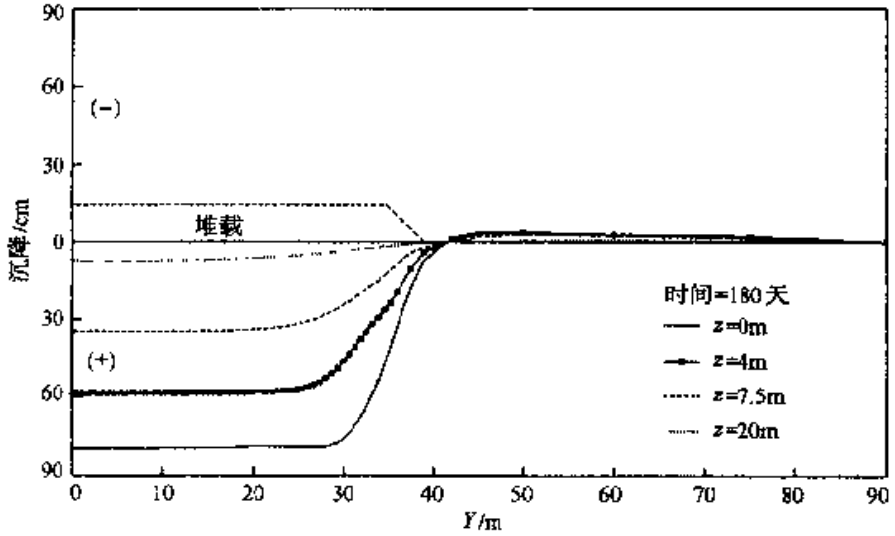


图 9.7　沿跑道宽度方向的沉降分布曲线图(t=180 天)

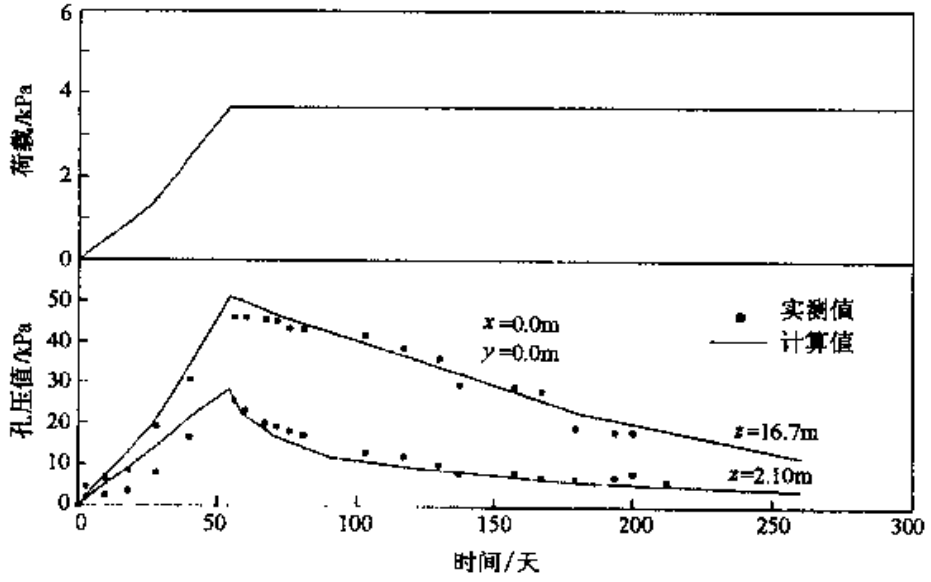


图 9.8　孔压随时间变化曲线

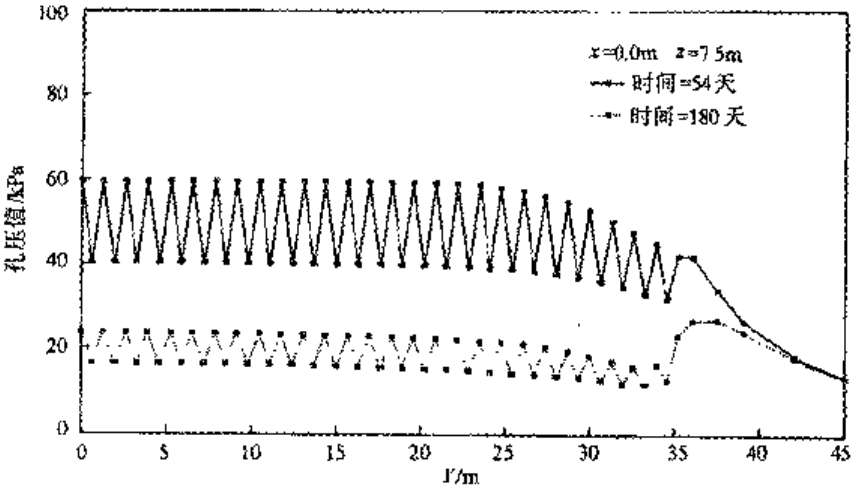


图 9.9 砂井地基内不同时刻的超静孔压沿跑道宽度方向的分布曲线图

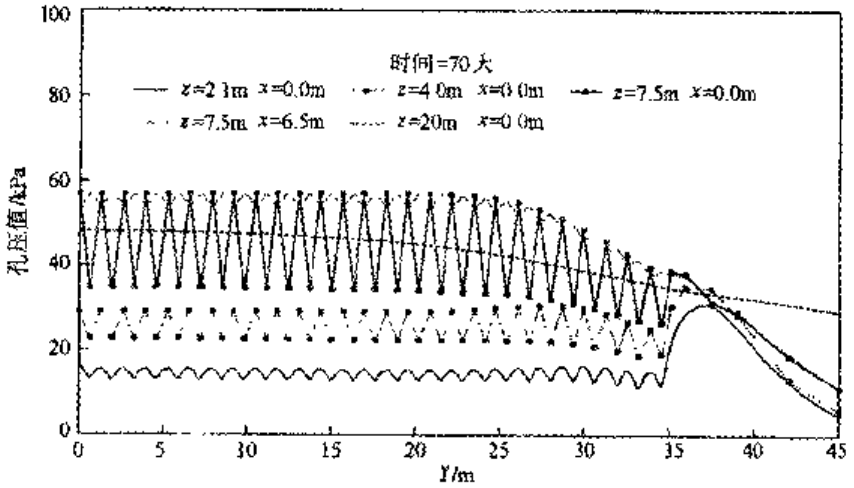


图 9.10 砂井地基内不同深度的超静孔压沿跑道宽度方向的分布曲线图(t=70 天)

此外,从图 9.9 可见,在加荷初期(例如 t=54 天),荷载作用范围内孔压值远大于作用范围以外的孔压值,但随着时间的增长,荷载作用区内孔压快速消散并很快就小于荷载区外的孔压,说明砂井可以有效地加速地基固结。从图 9.10 可见,由于地表砂垫层的排水作用,越接近地基表面孔压消散越快,砂井内孔压和井周土中的孔压差值也越小。

还可从图 9.10 中 z=7.5m 处的两条孔压分布曲线看到,沿跑道纵向砂井地基内的孔压分布也是不同的。例如,x=0.0m(即经过砂井中心)断面上的孔压和 x=0.65m(土中)断面上的孔压虽然均呈波浪形分布,但前者变化更为剧烈,而且两者的波谷和波峰位置相反。砂井地基中孔压分布的这些规律用普通的平面固结有限元法是不可能发现的。

9.2 尾矿坝地震液化计算

尾矿坝用以拦挡选矿厂排放的尾矿泥，一般建于山沟出口处，沟内形成尾矿库。尾矿坝的失事会掩埋下游居民点和农田，并造成严重的环境污染。由于尾矿坝用水力冲填，比碾压堆筑的土石坝疏松，因此也更易发生液化。地震液化和排水不良是尾矿坝失事的主要原因，对于尾矿坝的地震反应分析和液化计算，已有二维和三维有效应力动力分析方法。本节在此基础上进一步讨论三维两相有效应力分析方法，对尾矿坝在地震荷载作用下的动力反应问题进行研究。本研究以 Biot 波动方程为基础，考虑水土动力耦合作用和土体的非线性性质，用三维等参有限元法和波前法求解变形和残余孔隙水压力。计算过程中，对 Seed 的孔隙水压力公式作了改进，提出考虑剪应力影响的孔隙水压力增长公式。另外，还提出了一种新的非线性应力-应变计算模式。最后，将计算结果与用二维有效应力动力分析得到的结果进行比较。

9.2.1 三维两相有效应力动力方程式的建立与离散

(1)运动平衡方程式。

根据 Biot 建立的弹性波在饱和多孔连续介质中传播的基本运动方程，忽略孔隙水的加速度，并考虑土的非线性性质，可分别得到土体和流体的运动平衡方程式

$$\left.\begin{aligned} [L]^T(\{\sigma'\}+\{m\}p)-\rho\{g\} &= -\rho(\{\ddot{u}\}+\{\ddot{u}_g\}) \\ \{\nabla\}p-\rho g &= -[\bar{k}]^{-1}\{\dot{\omega}\} \end{aligned}\right\} \tag{9.8}$$

式中：$\{\dot{\omega}\}=[\dot{\omega}_1,\dot{\omega}_2,\dot{\omega}_3]^T$，为孔隙水平均相对速度；$\{\sigma'\}=[\sigma'_{11},\sigma'_{22},\sigma'_{33},\sigma'_{12},\sigma'_{23},\sigma'_{31}]^T$ 为应力列阵；$[L]$为应变矩阵微分算子；p 为孔隙水压力；$\{g\}$为重力加速度列阵；$\{m\}=[1,1,1,0,0,0]^T$；$\{\ddot{u}_g\}$为基岩地震加速度列阵；$\rho=(1-n)\rho_s+n\rho_w$(n 为孔隙率，ρ_s、ρ_w 分别为土颗粒和水的密度；$[\bar{k}]=[k]/(\rho g)$，为渗透系数矩阵；$\{\ddot{u}\}$为相对加速度列阵；$\{\nabla\}$为 Laplace 算子列阵。

(2)连续方程的建立。

不考虑土颗粒和水的压缩性，则连续方程可写成

$$\{\nabla\}^T\{\omega\}=-\{m\}^T\{\delta\} \tag{9.9}$$

(3)运动平衡方程的建立。

将总应变$\{\varepsilon\}$分为两部分，一部分为非线性弹性模式计算的有效应力引起的正常应变$[\varepsilon'_e]$，另一部分是由振动引起的应变，可表达为

$$\{\varepsilon^*\}=[D]^{-1}(p_g,p_g,p_g,0,0,0) \tag{9.10}$$

式中：$[D]$为弹性矩阵；p_g 为振动孔隙水压力。

将式(9.10)和几何方程式$\{\varepsilon\}=-[L]\{u\}$代入

$$\{\sigma'\}=[D](\{\varepsilon\}-\{\varepsilon^*\})=[D]\{\varepsilon\}-p_g\{m\} \tag{9.11}$$

结合以上各式，即可得到用位移和孔隙水压力表达的运动平衡方程式

$$[L]^T[D][L]\{u\} - [L]^T\{m\}p = -[L]^T p_g\{m\} - \rho\{g\} + \rho(\{\ddot{u}\} + \{\ddot{u}_g\}) \tag{9.12}$$

$$\{\nabla\}^T[\bar{k}]\{\nabla\}p - \{m\}^T[L][u] = \{\bar{f}\} \tag{9.13}$$

式中，$\{\bar{f}\}$为静水压力荷载。

(4)方程组的离散。

采用 Galerkin 加权剩余数法对动力微分方程组(9.12)、(9.13)进行离散，得到离散形式的方程组

$$[K]\{\delta\} + [Q]\{p\} + [M]\{\ddot{\delta}\} = \{F\} \tag{9.14}$$

$$[Q]^T\{\dot{\delta}\} + [H]\{p\} = \{\overline{F}\} \tag{9.15}$$

式中

$$[K_{ij}] = \iiint_\Omega [B_i]^T[D][B_j]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$[Q_{ij}] = -\iiint_\Omega [B_i]^T\{m\}N_j\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$[M_{ij}] = \iiint_\Omega [N_i]^T\rho\{N_j\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$[H_{ij}] = \iiint_\Omega (\{\nabla\}^T[N_i])[k_{ij}]\{\nabla\}[N_j]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$[F_i] = \iiint_\Omega (N_i\rho\{g\} - [B]^T p_g\{M\} - N_i\rho\{\ddot{u}_g\})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_\Sigma N_i\{x\}\mathrm{d}Q$$

$$\overline{F}_i = \iint_\Sigma N_i q_n\mathrm{d}Q$$

而$[B]=[L][N]$，为应变矩阵，$\{X\}$为已知边界荷载，且有

$$X_x = \sigma_x I_x + \tau_{xy}I_y + \tau_{xz}I_z + pI_x$$

$$X_y = \sigma_y I_y + \tau_{xy}I_x + \tau_{yz}I_z + pI_y$$

$$X_z = \sigma_z I_z + \tau_{xz}I_x + \tau_{xz}I_y + pI_z$$

$q_n = q_x I_x + q_y I_y + q_z I_z$，为已知边界渗入量，$I$ 为 333 阶单位矩阵。

将式(9.14)对时间求导，并令 Δt 时段内 i 结点的位移量$\{u\}$和孔隙水压力 p 的增量分别为$\{\Delta u\}$和 Δp，该时段内的平均孔隙水压力数值为 $p+\Delta p/2$，则式(9.14)和(9.15)可用下列差分方程式表示：

$$\begin{cases} [K]\{\Delta\delta\} + [Q]\{\Delta p\} + [M]\{\Delta\dot{\delta}\} = \{\Delta F\} \\ [Q]^T\{\Delta\delta\} + [H]\Delta t\{\Delta p\} = \{\Delta\overline{F}\} \end{cases} \tag{9.16}$$

式中

$$[\Delta F_i] = \iiint_\Omega (-[B]^T\{M\}\Delta p_g - N_i\rho\{\Delta\ddot{u}_g\})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_\Sigma N_i\{\Delta x\}\mathrm{d}Q$$

$$\Delta\overline{F}_i = \iint_{\Sigma} N_i \Delta q_n \mathrm{d}Q - 2\Delta t[H]\{\dot{p}\}$$

式中：ΔX 为边界荷载增量；Δq_n 为边界渗流增量；Δp_g 为振动孔隙水压力增量；$\Delta\ddot{u}_g$ 为输入加速度增量。

9.2.2 三维两相有效应力动力分析方法

(1)计算模式。

1)静应力应变关系。

尾矿坝的振动孔隙水压力、残余变形及液化性状等都与坝体内的静应力水平有关，特别是与初始剪应力有关。为此，在动力分析之前，应首先进行静力分析。静力计算采用 Duncan-Chang 非线性模式，其切线模量表达式为

$$E_t = KP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n\left(1 - \frac{R_f(1-\sin\phi)(\sigma_1-\sigma_3)}{2c\cos\phi + 2\sigma_3\sin\phi}\right)^2 \tag{9.17}$$

式中：E_t 为切线模量；R_f 为破坏比；σ_1、σ_3 为大小主应力；c、φ 为土的内聚力、摩擦角；K、n 为土的模量参数；P_a 为大气压力。

2)动应力-应变关系。

目前，对于三维空间问题，一般以 Seed 等提出的最大剪应变 γ_{max} 来表示一点的动应变水平。动应力-应变关系采用非线性模式。当应力点超过历史上最大应力点时，利用 Hardin 和 Drnevich 的双曲线模式计算切线剪切模量。当应力点转向后，不超过最大应力点及自最大应力点出发沿 Masing 曲线的加卸分支时，按下式计算切线剪切模量：

$$G = G_{ms} + K(\gamma_m)\left[\frac{G_{max}}{(H(\gamma-\gamma_a)/2\gamma_r)^2} - G_{ms}\right] \tag{9.18}$$

式中：G_{ms} 为当前骨架曲线上与当前时刻以前最大剪应力比相对应的割线模量；$K(\gamma_m)$ 为与当前时刻以前最大剪应力比相对应的阻尼比修正系数；γ_a 为应力转向点对应的剪应变；γ_r 为参考剪应变；G_{max} 为当前骨架曲线上最大剪切模量。

(2)有效应力动力分析方法。

计算采用三维等参数有限元法，基本单元采用六面体八结点单元，对于边界上不规则的单元采用退化单元。坐标形函数取与位移函数相同的形函数。动力方程的求解采用线性加速度法，动力方程组的求解采用波阵法。

本算例采用有效应力动力分析法，同时考虑振动孔隙水压力的逐渐上升对土体软化的影响。另外，该法将土体看作两相体系，分析其耦合作用。而且，在地震过程中既考虑孔隙水压力的增长，又考虑其消散和扩散。具体步骤如下：

1)首先进行静力计算，求出每一单元的静应力，作为动力计算的初始应力。

2)动力计算开始时，用 Hardin 模式计算初始动剪切模量。

3)求解动力固结方程，计算每一时刻末的位移、速度、加速度及孔隙水压力。计

算中，根据修正后的 Masing 准则确定切线剪切模量计算公式，并由孔隙水压力值修正最大剪切模量，使应力、应变点沿着修正后的 Masing 滞回圈曲线前进。

4)计算该时段每一单元的振动孔隙水压力和残余剪应变增量，并将它们转化为结点荷载。

5)对于下一时段，重复第 3)～4)步骤，直至地震结束。

6)计算至地震结束后，继续分时段进行消散计算，直至超孔隙水压力完全消散、残余位移不再增长或增长很小为止。

9.2.3 振动孔隙水压力增长规律

根据铜矿尾矿砂振动三轴试验结果，对 Seed 的孔隙水压力公式进行修正，提出如下考虑静、动剪应力耦合的振动孔隙水压力计算公式：

$$u_g/\sigma_m = 1/2 + \arcsin[\beta(N/N_m)^{1/\alpha} - 1]/\pi \tag{9.19}$$

式中

$$\alpha = (\alpha_1 K_0 + \alpha_2)\left(\alpha_3 \frac{\eta_a}{1 + c\eta_c} + \alpha_4\right)$$

$$\beta = \beta_1 + \beta_2 K_0$$

$$N_m = 10^{\frac{b - \eta_a(1 + c\eta_c)}{\alpha}}$$

其中：σ_m 为平均总应力；η_c 为动剪应力比；α_1、α_2、α_3、α_4、β_1、β_2 均为试验常数。

对地震等非均匀荷载的振动问题，与修正的 Masing 准则相对应，按每半个应力循环计算每半周的孔隙水压力增量为

$$\Delta u_g = \frac{\sigma_m}{\pi}\left\{\arcsin\left[\beta\left(\frac{N + 0.5}{N_m}\right)^{1/\alpha} - 1\right] - \arcsin\left[\beta\left(\frac{N}{N_m}\right)^{1/\alpha} - 1\right]\right\} \tag{9.20}$$

9.2.4 南芬尾矿坝有效应力动力分析

为研究尾矿坝在三维应力状态下的动力特性和液化现象，利用前述方法和计算程序，对本钢南芬铜矿尾矿坝作了三维动力分析。另外，还对该坝主断面 A-A' 和靠近坝肩的断面 D-D' 作了二维有效动力分析，并与三维计算结果作了比较。

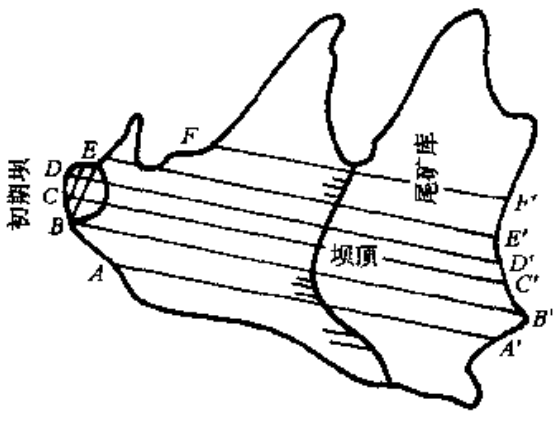


图 9.11 南芬尾矿坝平面图

本钢南芬铜矿尾矿坝设计标高为 120m，坝顶长为 520m，坝顶高比 4.3，是国内屈指可数百米以上的尾矿高坝之一。该坝尾矿库址系鸡爪形沟谷，属山谷型尾矿库，尾矿坝平面布置见图 9.11。初期坝为 20m 高的堆石透水坝，内外坡均为 1∶2。该坝采用上游法筑坝，尾矿堆积

坝坡为1∶5,包括设置的马道及平台的平均坝坡约为1∶5.7。

为便于计算和偏于安全考虑,坝体内出现粗、中、细尾矿砂交替混合时,把坝体作为均质坝计算。尾矿的渗透系数取平均值,即 $k=1.23\times10^{-5}$m/s。其它主要物理力学参数按细尾矿砂取值,浮容重 $\gamma'=9.42$kN/m^3,密度 $G_s=3.27$,孔隙比 $e=0.89$,内摩擦角 $\phi=33°$,模量系数 $K-840$,模量指数 $n=0.82$,破坏比 $R_f=0.8$,Poisson 比 $\mu=0.32$,最大剪切模量系数 $K_{max}=30$。

选取1976年8月31日唐山地震时于迁安记录到的一个强余震地震曲线,作为地震输入曲线,并作适当调整。将周期从0.14s调整到0.28s,将最大加速度调整到0.2g,见图9.12。

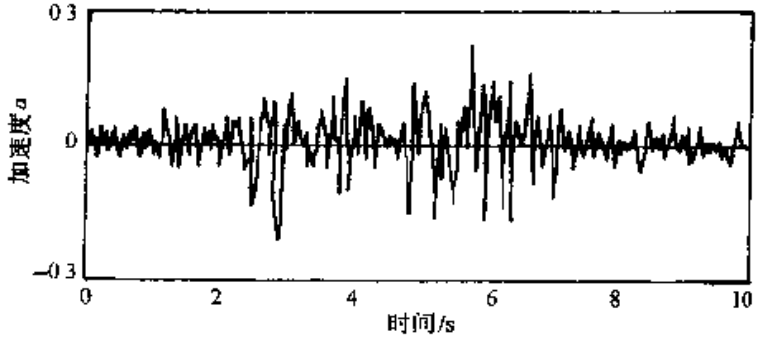


图9.12 地震输入曲线(唐山地震曲线)

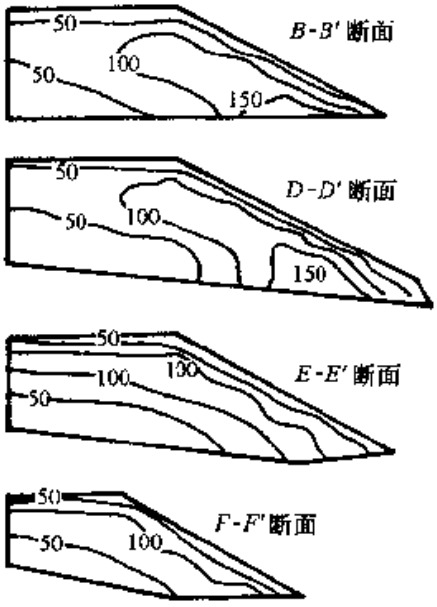


图9.13 地震结束时孔隙水压力等值线图

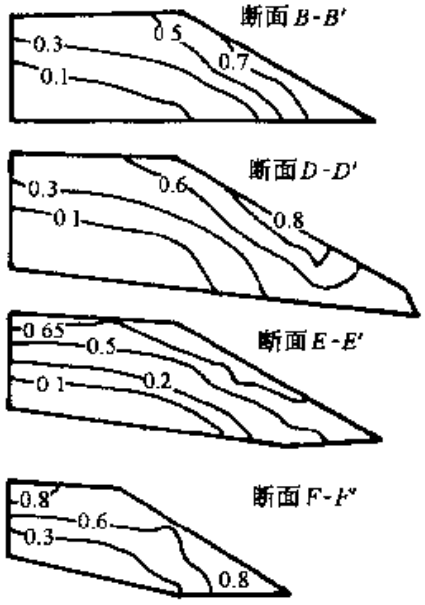


图9.14 地震结束时孔隙水压力比等值线图

图9.13示出坝体部分断面在地震结束时的孔隙水压力分布图。可以看出,坝体中上部和坝坡角附近的孔隙水压力值比较大。图9.14示出坝体部分断面在地震结束时的孔隙水压力比等值线图。可见,主断面 D-D' 的坝坡表层和靠近坝肩断面

F-F'顶部和坝脚表面区域的孔隙水压力比数值较大，最大值为 0.84，已接近液化。

图 9.15 示出按二维问题计算得到的孔隙水压力值与按三维问题计算得到的孔隙水压力值之比的等值线图。可以看出，在主断面 D-D'的坝顶和坝坡表面区域按二维问题计算得到的孔隙水压力值为按三维问题计算得到的孔隙水压力值的 1.2～1.4 倍，而这一区域特别容易液化。所以，对主断面来说，二维分析比三维分析要偏于安全。

图 9.16 示出按二维问题计算得到的动剪应力 τ_{xy}与按三维问题计算得到的动剪应力 τ_{xy}之比的等值线图。可以看出，在主断面 D-D'的坝顶和坝坡表面区域，按二维问题计算得到的动剪应力值为按三维问题计算得到的动剪应力值的 1.2～1.4 倍。

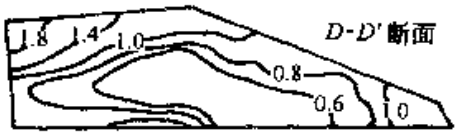


图 9.15 二维和三维分析孔隙水压力比值分布

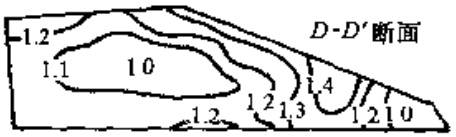


图 9.16 二维和三维分析动剪应力比值分布

以上分析表明，将尾矿坝看作是三维两相体系，不仅可以真实反映尾矿坝的形状和边界条件，而且可以考虑土骨架与水之间的耦合作用，从而可以计算地震期间和地震后孔隙水压力的消散和扩散规律，使动力分析结果更为合理。

9.3 动力荷载作用下饱和软粘土振陷计算实例

鉴于实际存在着孔压消散所引起的体积变化和剪切变形所引起的体积变化两种情况，周健等利用 Biot 渗透固结方程，在不排水动三轴试验基础上建立相应的分析模型，来预测动荷载作用下泥炭中超孔隙水压力的消散，并用有限元方法分别考虑孔压消散引起的体积变化和不排水动剪切变形引起的体积变化。动力分析方法可参见本章 9.2 节。

9.3.1 孔压和残余变形计算模式

(1)循环荷载作用下泥炭的孔隙水压力。

泥炭在不排水动三轴试验下建立的孔隙水压力计算模型如图 9.17 所示，并可表达为

$$u/u_f = a + b\ln N \tag{9.21}$$

$$u_f = p - \frac{(q_s + q_d)}{2\sin\phi'} + c'/\tan\phi' \tag{9.22}$$

式中：u 为循环荷载作用下的孔隙水压力；u_f 为当双峰值剪应变达 50%时的残余孔隙水压力；N 为加载循环次数；p 为静总平均应力；q_s 为静主应力差；q_d 为动主应力差；c' 为有效粘聚力；ϕ' 为有效内摩擦角；a 和 b 为试验参数，可由图 9.18 和 9.19 确定。

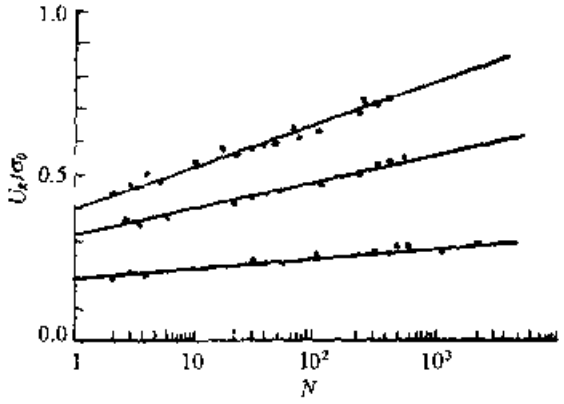


图 9.17　超孔隙水压力与循环次数之关系

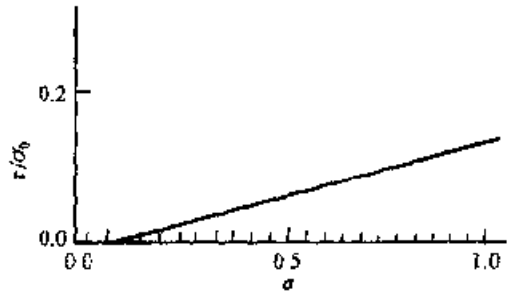


图 9.18　参数 a-τ/σ_0 关系曲线

(2)循环荷载作用下不排水残余应变公式。

循环荷载作用下不排水残余应变计算公式为

$$\varepsilon_p = \frac{u/u_f}{C_3 + (20 - C_3)u/u_f} \quad (9.23)$$

式中：$C_3 = 60$，为试验参数；u_f 为当 ε_p 达到 5%时的剩余孔隙水压力。

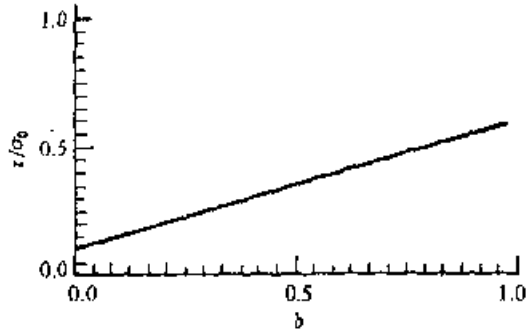


图 9.19　参数 b-τ/σ_0 关系曲线

9.3.2　算例分析

日本 Sendai 地区地表 0.8m 以下有 2～3m 深的泥炭。1987 年 Miyagioki 地震 3 个月以后，在 Sendai 的 Nigatake 中心测到的最大沉降为 80mm，4 年以后测得的最大沉降为 120mm。利用以上提出的方法和计算程序，对 Sendai 的 Nigatake 中心土层和－2 层建筑物进行地震沉降分析。

采用 Miyagioki 地震中在 Sendai 岩石上记录的地震曲线作为输入地震曲线，并将其峰值加速度修正为 0.2g，震动持续时间调整到 20s(图 9.20)。

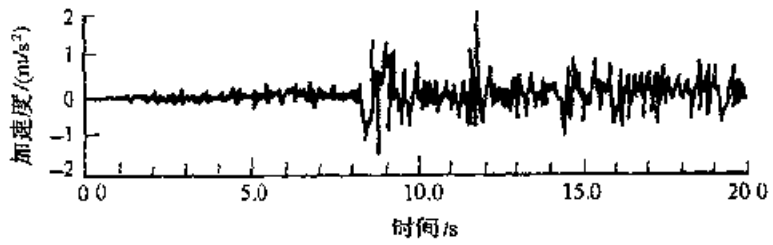


图 9.20　计算输入地震曲线

图 9.21 为二层筏基建筑地基的有限元计算单元划分图，建筑物高度为 6.0m，计算土层厚度为 23.5m，共分为 6 层，总宽度为 70m。地基土的物理力学指标及计算参数列于表 9.3。

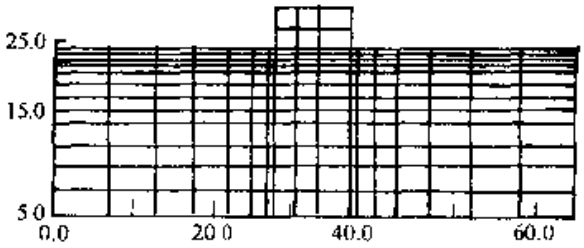


图 9.21 有限元计算单元划分

表 9.3 地基土物理力学指标及计算参数

层厚/m	土的分类	重度/(kN/m³)	剪切波速度/(m/s)	剪切模量/kPa
0.8	表层土	16.0	124	25000
2.4	有机土	13.5	95	11000
5.8	粉质细砂	17.0	142	35000
1.5	砂质粉土	16.5	154	4000
3.5	粘土	16.0	247	100000
21.5	砾砂	20.0	443	400000

图 9.22 示出地震期间以及震后地基土的计算沉降过程曲线(无荷载作用)。图 9.23 示出地震刚结束和 4 年后两层建筑地基的计算沉降值。地震结束时计算的最大沉降量为 72mm，4 年后计算的最大沉降量为 107mm，可见，计算值与观测值相当吻合。

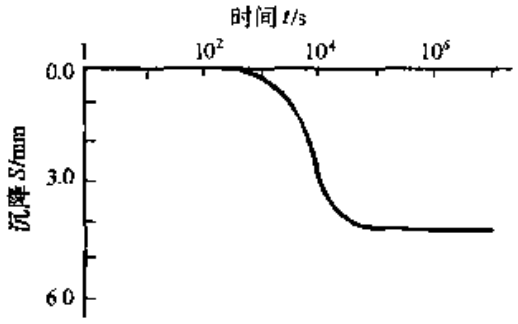


图 9.22 地基土计算沉降过程曲线

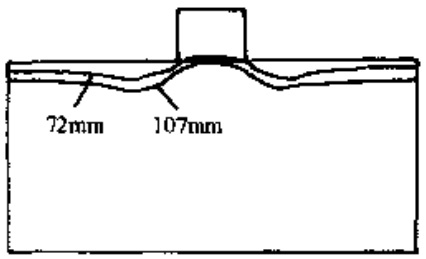


图 9.23 建筑物地基计算沉降值

9.4 厚覆盖层软土地层的动力反应分析

具有深厚覆盖土层的场地在地震作用下的地面运动问题越来越引起人们的重视。深厚覆盖土层往往会导致大的震害。1985 年 9 月发生在墨西哥城的震害情况

是一典型的例证。墨西哥城位于深厚松软的湖相沉积土层上，震中距 300km 以上 8.1 级地震导致该城建筑物的重大破坏。

上海地处环太平洋地震带上，位于长江三角洲，厚覆盖软土深度可达 300m。有些地区还存在埋藏浅、厚度较大的流塑状或淤泥质状的饱和粉质粘土和粉砂。周健等[24]在室内试验研究基础上，通过有限元计算研究了上海厚覆盖土层的地震场反应。

9.4.1 土层参数的选择及地震波输入

在计算地震场地反应时，首先要确定需进行计算的地层情况，先对上海地区水平地层选取具有一定代表性的断面，并取得相应的静力和动力参数。其次将选择相应的地震输入曲线，并分析其在强度、卓越周期等方面的特性。

(1)土层剖面。

本算例地震反应的计算深度达到 280m，在 50m 以下的土层资料比较少见。考虑到计算的需要和实际的资料，对较深部分的土层作一些相应的近似处理，即 50m 以上尽量采用实际的土层资料和试验结果，50m 以下则以人民广场的土层代替。表 9.4 为人民广场地震地质钻孔地质剖面。50m 以下各土层的主要静力参数采用通常的建议值。

表 9.4 人民广场地震地质钻孔地质剖面

层底埋深/m	土　名	层底埋深/m	土　名	层底埋深/m	土　名
1.0	人工填土	112.50	砂砾石	193.99	细砂
4.3	褐黄色粉质粘土	112.85	灰绿色粘土	194.90	中砂含砾
6.4	淤泥质粉质粘土	118.90	粉质粘土底部砂砾	196.34	中粗砂含砾
14.0	灰色粘土	119.80	黄绿色粘土	172.29	细砂
48.0	粉质粘土	122.07	粉质粘土	198.18	粉质粘土
48.7	粉细砂	122.62	细砂	209.80	中细砂、含砂砾
51.0	泥炭质土	124.90	粉质粘土	218.32	细砂
59.51	灰绿色粉细砂	136.70	粉质粘土夹细砂层	216.10	粉质粘土
66.0	粉质粘土	143.46	灰绿色粉质粘土	218.32	细砂
69.6	粘土	147.19	粘土含砾	220.55	粉质粘土
78.67	粘性土粉细砂互层	148.85	粉质粘土含砾	221.65	砂质粉土
82.45	含砾中粗砂	150.30	黄绿色粘土	223.45	中细砂
85.44	细砂	160.40	土黄色粘土	227.60	粘土
92.09	含砾粗砂	164.07	粘土	230.33	硬塑粘土
96.45	细砂	167.30	粉砂	281.11	安山质浅灰熔岩
103.10	粉细砂互层	176.61	粉细砂		

(2)土的动力参数。

对于地震场地反应分析而言，从地表到地下 20m 的土性是非常重要的，这个深度的土样也比较容易获得。由试验数据来确定模型参数主要通过相应的调参程序来实现。调参程序与动力分析程序不同，它模拟的是真实的试验条件，主要是固结压力、应力和应变条件，在简谐激振下，计算有效应力的发展情况，调节参数使程序的计算结果与试验结果吻合，则可确定出各参数。上海地区典型淤泥质粘土和粉质粘土的参数见表 9.5，有关参数含义的说明详见文献[24]。

表 9.5　土性参数

土性参数	取样深度/m	φ	G_0	λ	k	h_t	d	R_p/R_t	k_s	b	h_p
淤泥质粘土	13.0	39.0	241.2	0.0037	0.00075	0.354	1.2	0.75	0.5	2.0	35.0
粉质粘土	10.0	26.0	399.2	0.0032	0.0006	0.247	4.0	0.90	1.00	2.0	35.0

(3)输入地震波。

采用苏南核电站人工地震输入曲线及唐山地震基岩地震波输入曲线。上海为 7 度设防地区，按照 Seed 的建议，可等效为地表反应 0.1g(g 为重力加速度，取 $g=0.98m/s^2$)，振动周数为 10。因此，本算例在计算时把地震曲线作相应的放大或缩小，以符合 7 度地震的要求。

1)苏南核电站人工地震曲线。苏南核电站地震曲线为人工模拟地震曲线，其持续时间为 10s，峰值 $1.679m/s^2$，卓越周期为 0.15s，从地震曲线上看，振次较多且振动幅值较均一，应属于振动型地震，见图 9.24。

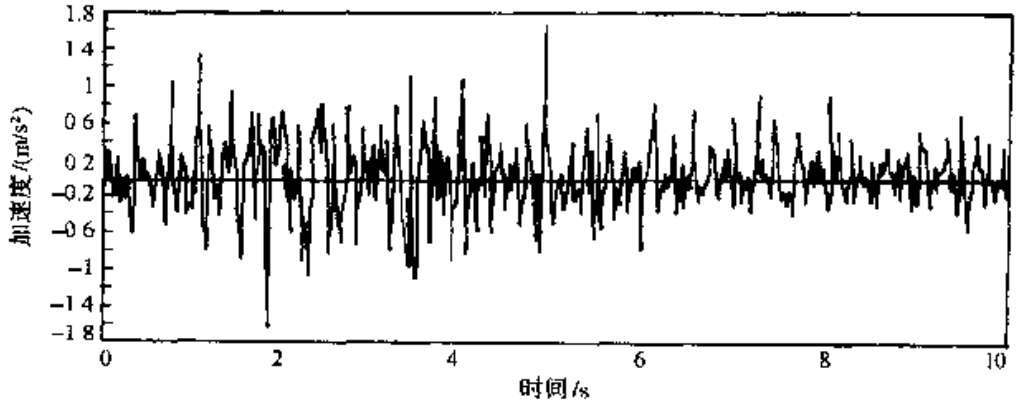


图 9.24　苏南人工地震输入曲线

2)唐山地震曲线。该地震曲线 1976 年 8 月 31 日唐山地震时于迁安收到的一个强余震地震曲线，属于冲击型强地震。地震历时 10s，卓越周期从 0.14s 调整为 0.28s，见本章第 9.2 节图 9.12。

9.4.2　厚覆盖水平软土地层动力反应计算结果

(1)加速度放大特性。

以苏南地震输入曲线，虹口区曲阳小区地质剖面计算的地表加速度时程曲线如图 9.25 所示。从图 9.25 中可以看出，最大加速度被放大了约 1.3 倍左右。反应频率明显降低，高频部分被过滤。

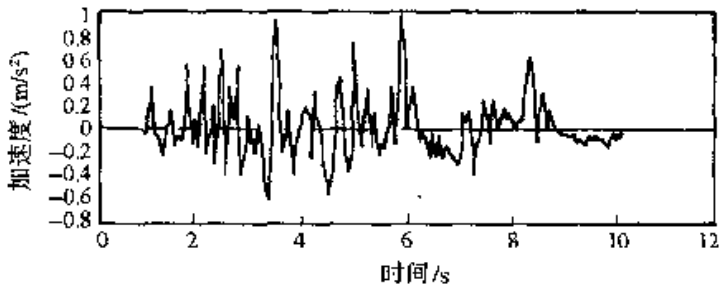


图 9.25　地表加速度时程曲线

(2)孔压特性。

地震动荷载作用下，饱和土层中孔隙水压力的发生、发展及其消散是评估地基抗液化能力及其强度和变形的一个重要指标，也是进行动力有限元计算的一项重要内容。虹口区曲阳小区的最大孔压比随深度分布情况如图 9.26 所示。土层中最大孔压比发生在深度 10m 处，其值为 0.30，该土层为粘质粉土层。该土层为地表土层孔压易上升的土层。

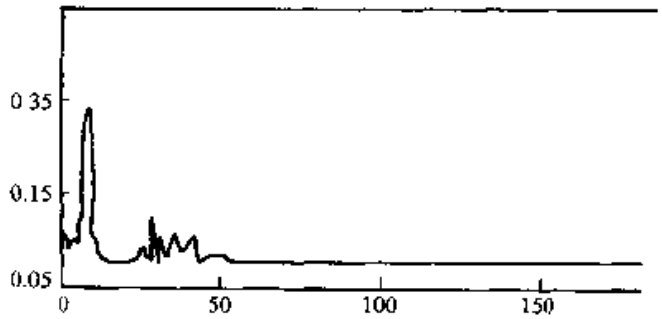


图 9.26　最大孔压比随深度分布曲线

(3)动应力特性。

图 9.27 为虹口区曲阳小区土层最大孔压比处的动应力比时程曲线。由图 9.27 中可知，动应力比最大为 0.085。

(4)动力可靠性分析。

从不同深度输入唐山地震曲线，对于新客站附近地层的动力可靠性计算结果列于图 9.28～9.30。以 Rayleigh 分布、Gauss 分布、极值分布三种峰值概率分布函数的计算。计算结果表明：50m 处输入地震波，地面最大加速度 $a_{max}=0.1g$ 时($g=9.8m/s^2$)，埋深 17～19m 的砂质粉土液化概率最大，如图 9.28(a)所示。以 Rayleigh 分布较其它两种分布的计算结果为大，按概率和事件计算的场地液化概率均为 5%左右；当 $a_{max}=0.15g$ 时，液化概率的最大点向深处发展，场地液化概率达 99%，发生液化现象，如图 9.28(b)所示；当 280m 处输入地震波，$a_{max}=0.1g$ 和

$a_{max}=0.15g$ 时，整个场地的液化概率几乎为零，而当 $a_{max}=0.2g$ 时，最大液化概率点发生在埋深 10m 左右处，场地液化概率为 30%(图 9.29)。

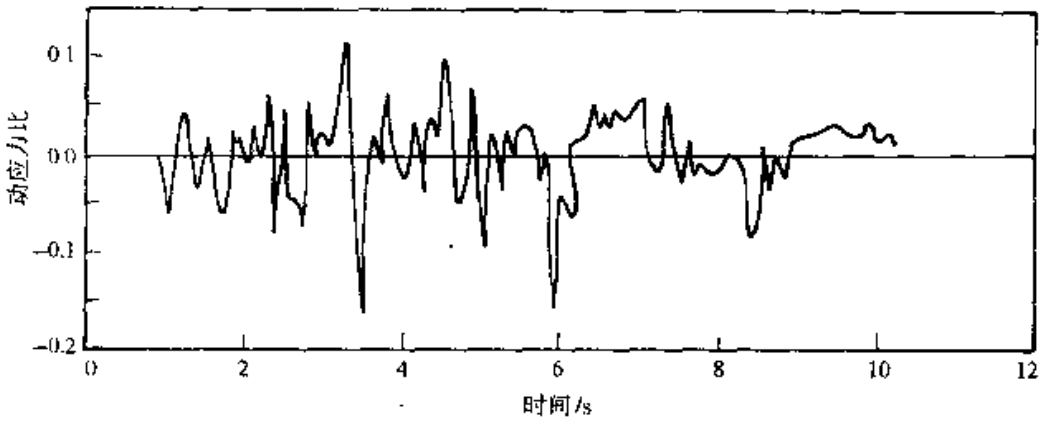


图 9.27　动应力比时程曲线

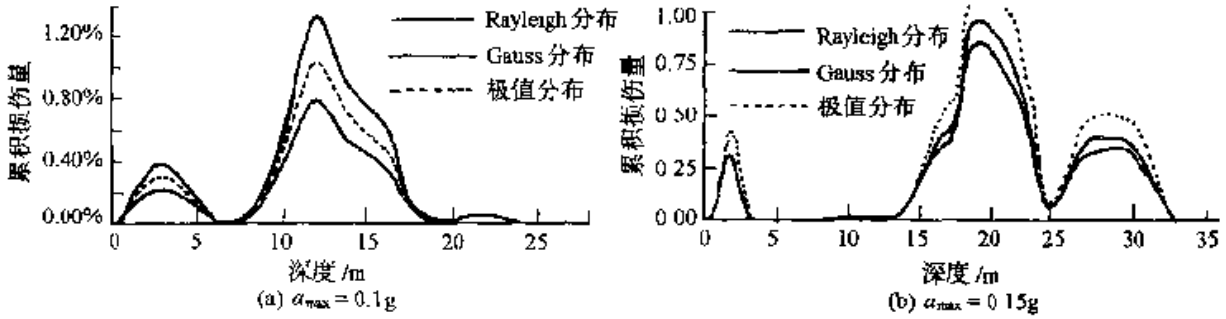


图 9.28　地震输入深度为 50m 时累积损伤概率与深度关系曲线

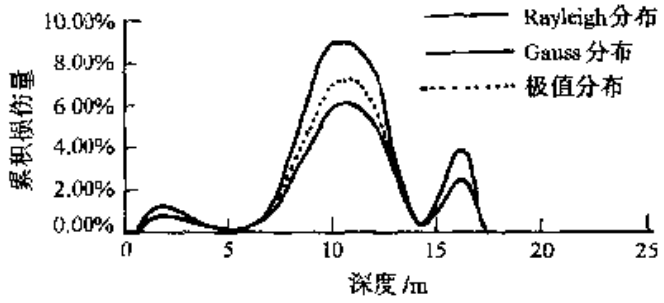


图 9.29　地震输入深度为 280m 时累积损伤概率与深度关系($a_{max}=0.2g$)

在本算例中，当在地层 50m 深度处输入地震波时的孔隙水压力计算结果如图 9.30 所示。可见，当 $a_{max}=0.1g$、0.15g、0.2g 时，20m 范围内的平均 u/σ_0' 分别为 0.1、0.6、0.9。最大孔隙水压力比随地震烈度的增加而有增加的趋势，但一般不超过 20m。

计算表明，当 280m 处输入地震波 $a_{max}=0.15g$ 时，地震所引起的孔压上升值是 $a_{max}=0.1g$ 的 2 倍；当 $a_{max}=0.2g$ 时，近地表 50m 范围内的地层均产生明显的孔压，u/σ_0' 最大值为 0.58。

(5)覆盖土层厚度对动力反应的影响。

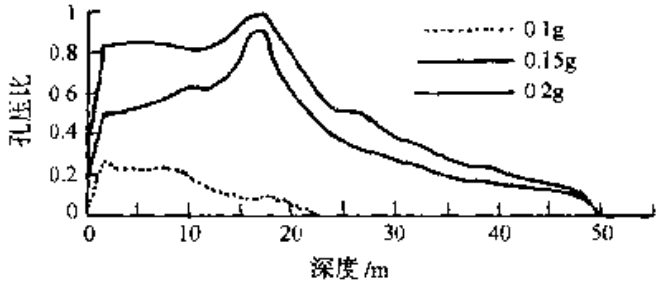


图 9.30　地震输入深度为 50m 时孔隙水压力比与深度关系曲线

计算结果表明，厚覆盖土层对地震动力反应的影响主要表现在以下方面：随着覆盖土层的增厚，地表反应的卓越周期增大，即厚覆盖土层的自振频率比薄土层小，对地震波的高频部分隔震作用增强；地表反应的加速度最大值放大系数在1.2～2.0之间，但土层越厚，放大系数会随之相应减小。土层厚度对孔压峰值及其出现土层基本上没有影响。因此，在进行简化计算时，若取地震输入深度为50m，则需考虑上述因素的影响。

9.5　软土地层隧道抗震稳定分析

9.5.1　计算模型及参数的确定

(1)基本情况及地震波输入。

计算所采用的隧道资料取自上海市地铁1号线，在汉中路至新客站区间(隧道处于砂性土层)和上海体育馆至徐家汇站区间(隧道处于粘性土层)。隧道管片混凝土壁厚0.35m，外径6.2m，内径5.5m，隧道外径上部加0.05m厚注浆，隧道顶距地表10m左右。计算范围50m范围内的砂性土和粘性土层的地质资料可参见本章9.6节。

上海地区历史上没有发生过强度较大的有记载的地震，因此本算例采用我国唐山、苏南核电站、日本宫城冲和我国台湾省花莲等几种典型的地震曲线对隧道进行动力稳定分析。计算时，地震波分别从50m和280m深处输入，并计算横、纵2种断面情况。在动力计算时，为了避免反射波的干扰，假定垂直边界为自由边界。

(2)动力计算参数的确定。

通过对上海隧道附近软土进行动三轴和多用三轴试验，可得到如下计算隧道附近淤泥质粉质粘土和粉质砂土的孔隙水压力增长模式和残余应变模式。

1)动抗剪强度公式及参数。

将循环动应力 q_{cyc} 用平均正应力 p_c($p_c=(\sigma_a+2\sigma_r)/3$)进行归一，则不论对等压固结还是偏压固结情况，动强度 R_f 与加荷周数 N 之间的关系均可由下式来表示：

$$R_f=(q_{cyc}/p_c)_f=aN_f^b \tag{9.24}$$

式中：N_f 为在等压固结条件下取双幅应变达到 5%时的振动周数，相应地在偏压固结条件下取最大剪应变幅达到 5%时的振动周数；a 和 b 分别为试验常数，对隧道附近淤泥质粉质粘土分别可取 0.553 和－0.580，对粉质砂土分别可取 0.71 和－0.059。

2)超孔压计算公式及参数。

对于等压固结和偏压固结 2 种情况，超孔压 U 和相对循环动应力比 η^* 之间有如下的单一关系，即

$$U/U_f = \eta^*/[C_3 - (C_3 - 1)\eta^*] \tag{9.25}$$

相对循环动应力比 η^* 可表达为

$$\eta^* = (\eta_{p,c} - \eta_s)/(\eta_f - \eta_s) \tag{9.26}$$

式中：$\eta_{p,c}$ 为当前有效动应力比；η_s 为初始有效应力比；η_f 为破坏时的有效应力比；U_f 为对应于等压固结，取双幅应变 5%时的最大残余孔压，对于偏压固结取最大剪应变为 5%时的最大残余孔压；C_3 是试验常数，对隧道附近淤泥质粉质粘土取其值为 0.5，粉质砂土取其值为 0.4。

3)轴向残余应变及参数

对于偏压固结情况，轴向残余应变与相对循环动应力比之间有如下的关系：

$$\varepsilon^p = \eta^*/[d - (d - 20)\eta^*] \tag{9.27}$$

式中，d 为试验参数，对隧道附近淤泥质粉质粘土，取 $d=3$；对粉质砂土，取 $d=8$。

(3)动力分析方法。

在软土地下建筑物抗震稳定分析中采用有效应力动力分析方法，在土-结构动力相互作用中，考虑了软土的液化和震陷对地下建筑物抗震稳定的影响。

将振动产生的孔隙水压力和残余应变引入 Biot 动力固结基本方程，并忽略孔隙水的加速度，可得到动力微分方程，并利用伽辽金加权残数法对动力微分方程进行离散，取形函数为权函数，则可得相应的离散形式的方程组。详细分析方法见本章第 2 节。

9.5.2 动力计算结果及分析

从有效应力动力反应分析计算结果可以看出，动剪应力比由下而上递增，最大值出现在隧道顶部附近和地表附近。与此相对应，孔隙水压力比最大值也出现在隧道顶部附近和地表附近，同一层面沉降量与孔隙水压力大小基本成正比关系，由上而下，沉降量递减。图 9.31～9.36 分别为隧道处于砂性土层、粘性土层的孔隙水压力比、沉降等值线分布情况。

表 9.6 和 9.7 分别为隧道处于砂性土层、粘性土层中，输入曲线分别为我国唐山、苏南核电站、日本宫城冲和我国台湾省花莲地震波时各种工况土体、注浆材料和隧道管片动力反应最大值计算结果。

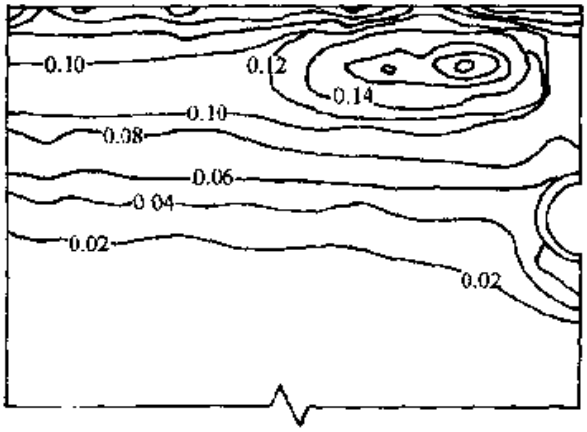


图 9.31　隧道横断面孔隙水压力等值线图(砂性土)

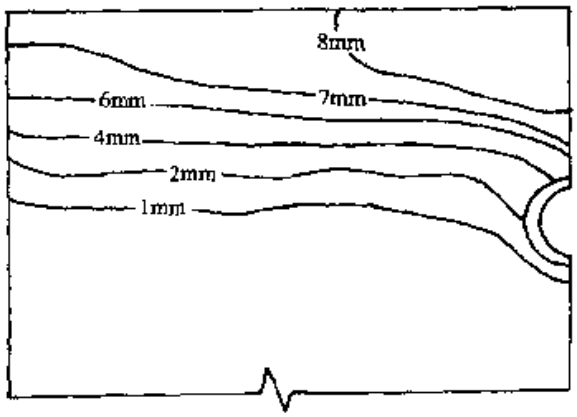


图 9.32　隧道横断面沉降等值线图(砂性土)

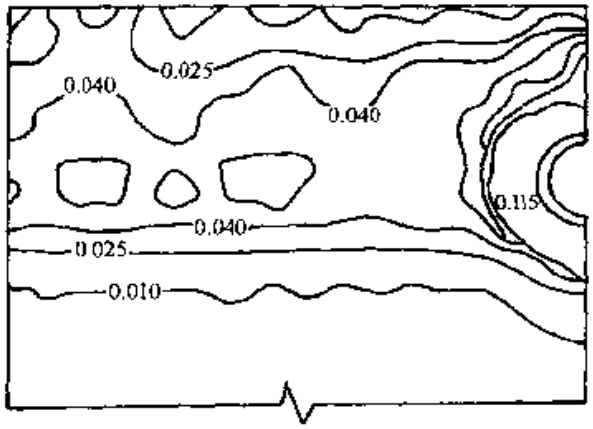


图 9.33　隧道横断面孔隙水压力等值线图(粘性土)

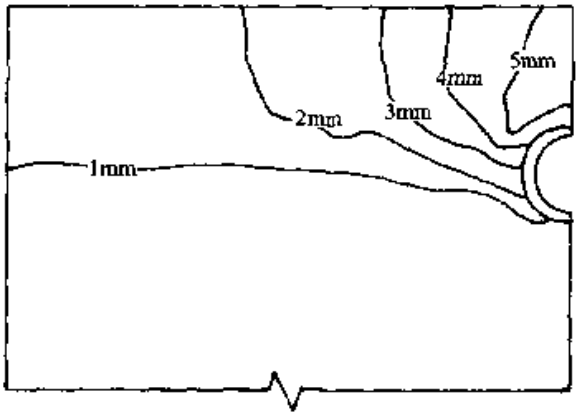


图 9.34　隧道横断面沉降等值线图(粘性土)

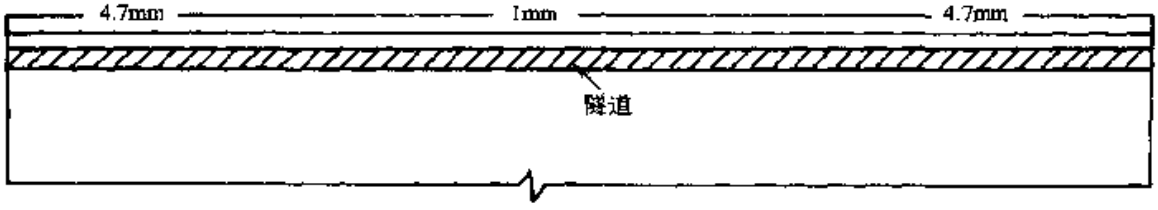


图 9.35　隧道纵断面沉降等值线图(粘性土)

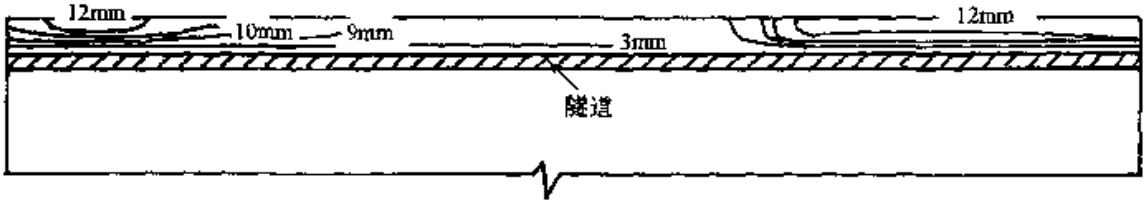


图 9.36　隧道纵断面沉降等值线图(砂性土)

表 9.6 砂性土层中隧道动力反应最大值计算结果

输入曲线	部位	土层 50cm 厚横断面			土层 50cm 厚纵断面			土层 280m 厚横断面			土层 280m 厚纵断面		
		动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm
唐山地震	土体	0.16	0.25	−8.4	0.16	0.38	−14.8	0.18	0.27	−14.9	0.16	0.33	−15.4
	注浆材料	0.10	0.09	−2.2	0.10	0.15	−0.4	0.11	0.07	−3.4	0.11	0.14	−5.6
	隧道管片	69.27*		−2.1	60.90*		−0.1	84.95		−3.2	94.12*		−4.0
苏南地震卓越周期 0.15	土体	0.15	0.14	−10.6	0.07	0.00	0.0	0.15	0.07	−12.2	0.12	0.06	−1.2
	注浆材料	0.11	0.12	−4.8	0.07	0.00	0.0	0.13	0.03	−5.9	0.06	0.03	−0.3
	隧道管片	32.12*		−4.6	18.32		0.0	137.11*		−5.7	44.14*		−0.3
苏南地震卓越周期 0.30	土体	0.55	0.16	−15.7	0.16	0.37	−12.7	0.10	0.07	−19.2	0.13	0.34	−20.1
	注浆材料	0.12	0.13	−4.9	0.10	0.15	−0.4	0.10	0.04	−9.3	0.11	0.19	−11.3
	隧道管片	58.57*		−4.5	58.13		−0.1	51.35*		−8.9	101.94*		−10.1
日本地震	土体	0.12	0.08	−1.9	0.14	0.23	−4.6	0.09	0.14	−10.6	0.12	0.24	−12.0
	注浆材料	0.10	0.06	−2.0	0.12	0.09	−0.2	0.07	0.05	−3.6	0.10	0.19	−15.8
	隧道管片	96.69*		−2.0	103.93*		−0.1	95.60*		−3.4	108.61*		−5.5
我国台湾省地震	土体	0.14	0.09	−5.6	0.16	0.29	−0.75	0.13	0.08	18.5	0.15	0.34	−28.7
	注浆材料	0.08	0.09	−2.4	0.10	0.12	−0.1	0.11	0.03	−8.9	0.16	0.19	−15.8
	隧道管片	40.82*		−2.3	44.23*		−0.0	89.89*		−8.6	109.24*		−13.4

软土隧道地震反应分析得到主要结论：

(1)对于隧道处于砂性土层情况，土体中最大孔隙水压力比为 0.377，最大沉降为 0.0287m，各工况最大孔隙水压力比平均值为 0.201，最大沉降平均值为 0.0117m；对于隧道处于软粘土层的情况，土体中的最大孔隙水压力比为 0.361m，最大沉降为 0.0242m。以上所有工况中，土体孔隙水压力比最大值出现在隧道顶部附近和地表面附近，对隧道影响不大。

(2)对于隧道处于砂性土层的情况，注浆材料中最大孔隙水压力比为 0.186。对于隧道处于软粘土层的情况，注浆材料中最大孔隙水压力比为 0.341。注浆材料孔隙水压力比最大值出现在隧道顶部附近，由于注浆材料厚度较薄，对隧道影响不大。

(3)对于隧道处于砂性土层的情况，隧道管片中最大动应力为 137.1kPa，最大沉降为 0.0134m，各工况最大动应力平均值为 74.8kPa，最大沉降平均值为 0.0039m，对于隧道处于软粘土层的情况，隧道管片中最大动应力为 102.4kPa，最大沉降为 0.0139m，各工况最大动应力反应平均值为 51.7kPa，最大沉降平均值为 0.0051m。

表 9.7 软粘土土层中隧道动力反应最大值计算结果

输入曲线	部位	土层 50cm 厚横断面			土层 50cm 厚纵断面			土层 280m 厚横断面			土层 280m 厚纵断面		
		动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm	动应力/kPa 或动力比	孔压比	沉降/mm
唐山地震	土体	0.19	0.23	−12.6	0.17	0.21	−9.4	0.19	0.32	−12.4	0.16	0.36	−0.020
	注浆材料	0.13	0.23	−7.1	0.13	0.14	−0.6	0.12	0.23	−7.3	0.14	0.34	−0.011
	隧道管片	62.85*		−6.8	76.81*		−0.5	54.32		−7.0	102.40*		−0.011
苏南地震卓越周期 0.15	土体	0.10	0.01	−0.5	0.11	0.17	−4.2	0.13	0.09	−1.3	0.12	0.19	−0.005
	注浆材料	0.07	0.11	−0.2	0.09	0.12	−0.2	0.09	0.06	−0.4	0.15	0.16	−0.001
	隧道管片	30.90*		−0.2	38.04		−0.1	38.12*		−0.4	39.70*		−0.001
苏南地震卓越周期 0.30	土体	0.15	0.16	−11.2	0.16	0.27	11.8	0.12	0.21	−11.2	0.14	0.30	−0.012
	注浆材料	0.11	0.18	−4.5	0.12	0.20	−0.6	0.12	0.14	−4.9	0.13	0.29	−0.013
	隧道管片	63.35*		−4.0	46.99*		−0.3	75.54*		−4.7	87.33*		−0.013
日本地震	土体	0.16	0.13	−7.4	0.13	0.17	−4.7	0.13	0.25	−10.9	0.09	0.28	−0.023
	注浆材料	0.10	0.15	−3.0	0.08	0.12	−0.4	0.08	0.16	−4.1	0.08	0.26	−0.008
	隧道管片	90.97*		−2.7	73.05*		−0.3	79.31*		−3.9	75.13*		−0.008
我国台湾省花莲地震	土体	0.18	0.16	−9.9	0.15	0.17	−4.5	0.13	0.26	−10.2	0.13	0.25	−0.017
	注浆材料	0.12	0.18	−6.7	0.09	0.12	−0.7	0.12	0.18	−6.4	0.10	0.23	−0.014
	隧道管片	30.07*		−6.5	22.81*		−0.7	66.49*		−6.1	56.84*		−0.024

(4)不同计算土层厚度将影响隧道动力反应的计算结果，选取 280m 厚计算土层得到的结果要比 50m 厚土层的计算为大。

(5)不同输入加速度，对动应力和孔隙水压力有一定的影响，选用唐山地震曲线和我国台湾省花莲地震曲线计算得到的反应较大，而选用卓越周期为 0.15s 的苏南核电站地震曲线进行计算时动应力反应较小。

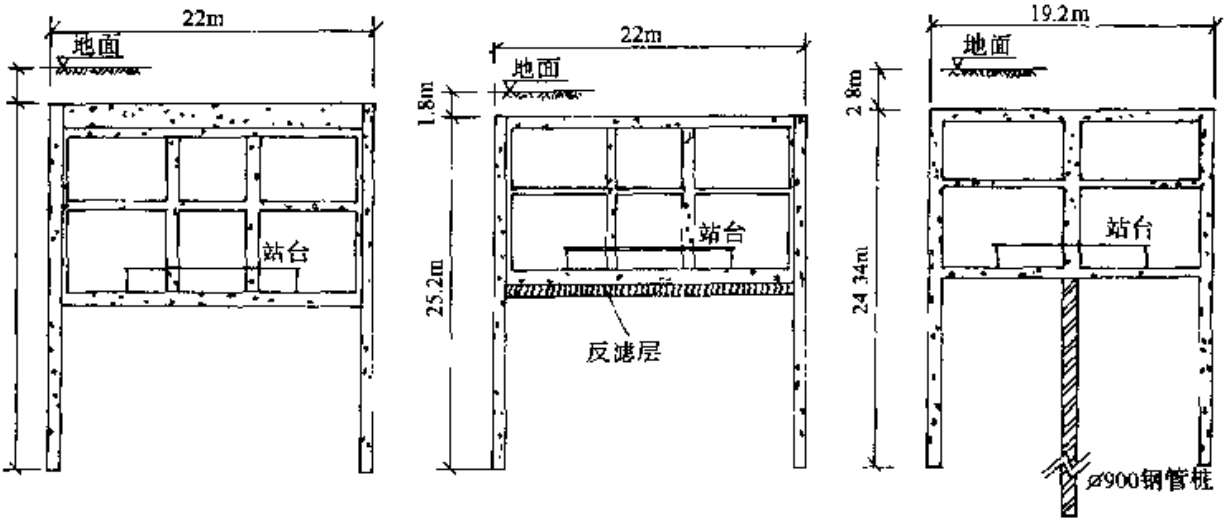
9.6 地铁车站抗震稳定性计算

9.6.1 地铁车站地基动力稳定性计算

本节以上海体育馆、上海火车站、常熟路地铁站三个车站结构的动力稳定性分析为例，研究地铁车站在地震作用下车站与土体共同作用的动力稳定性及安全可靠度。三个车站分别位于软粘土或砂性土等软土地层中，车站结构及埋深位置见图 9.37。

三个地铁车站所在地层的静力计算参数分别取自上海体育馆站、上海火车站、

常熟路站所在地区的地质勘察报告。上海地区深层地质资料较少，故距地表 60m 以下的地质资料和动力参数资料分别取自杜坚“上海市地基震陷分析”和王天龙“上海覆盖土层反应分析”等文献。



(a) 上海体育馆结构图　　(b) 上海火车站结构图　　(c) 常熟路结构图

图 9.37　车站结构及埋深位置图

在进行地震荷载作用下地铁车站的动力稳定分析时，分别从地面以下 280m 处输入我国苏南核电站人工地震、唐山地震、海城地震、美国 Elcentro 地震，日本仙台县宫城冲地震，我国台湾省花莲地震等六条基岩加速度时程曲线。

上海为 7 度地震设防地区，考虑到重要建筑物应以 8 度地震作为校核，故还作了 8 度地震(等效为地表最大反应 0.2g)下的地铁车站抗震稳定性分析。另外，根据上海场地条件和设计烈度，从偏于安全的角度着眼，将一些地震输入曲线的卓越周期作了适当调整。

(1)苏南核电站人工地震曲线，见第 9.4 节图 9.24。

(2)唐山地震曲线，见第 9.2 节图 9.12。

(3)海城地震曲线，见图 9.38(a)。

(4)美国 El centro 地震曲线，见图 9.38(b)。

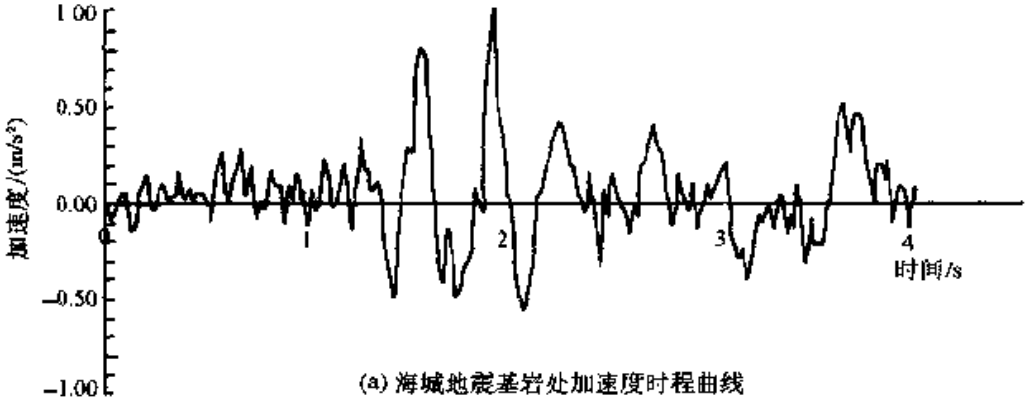
(5)日本仙台县宫城冲地震曲线，持续时间为 10s，峰值 1.679m/s^2，卓越周期为 0.15s，见图 9.38(c)。

(6)我国台湾省花莲地震曲线，地震曲线记录较为完整，其南北方向的加速度峰值为 0.87m/s^2，卓越周期为 0.3s，见图 9.38(d)。

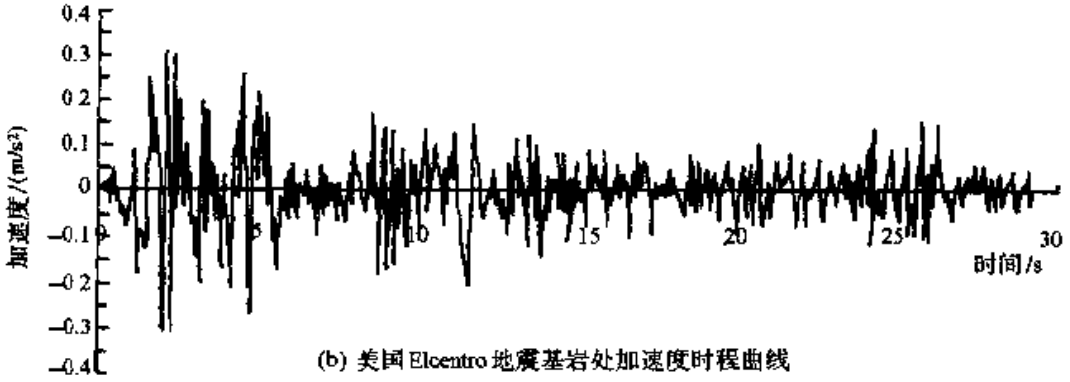
(1)算例 1：上海体育馆地铁车站。

1)计算参数。

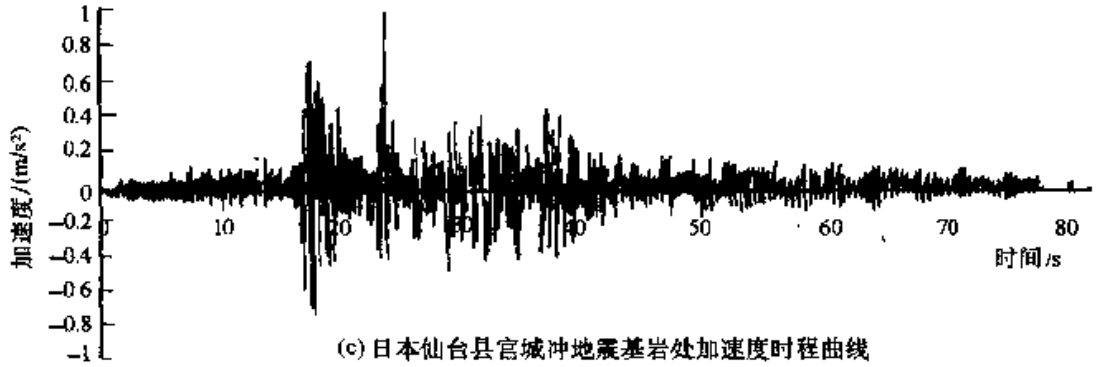
该地铁车站处于粘性土层中，采用上海体育馆地铁车站地层资料，静、动力计算参数见表 9.8。



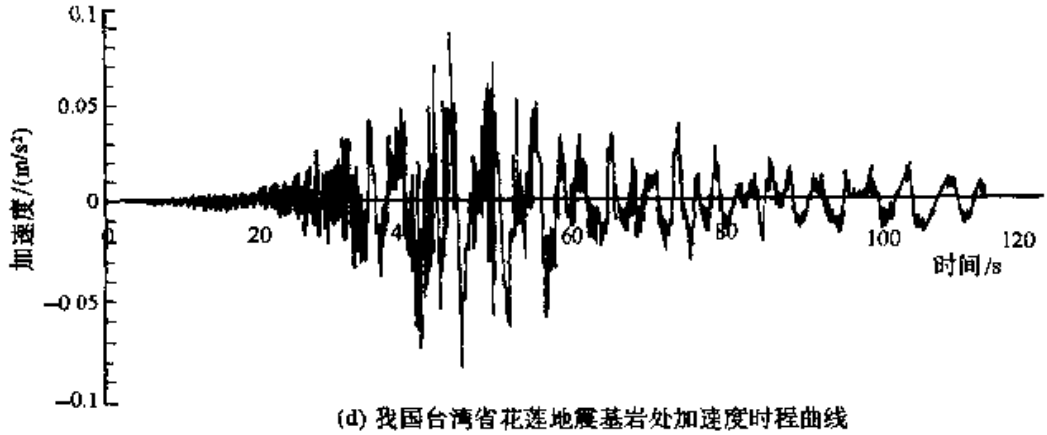
(a) 海城地震基岩处加速度时程曲线



(b) 美国 Elcentro 地震基岩处加速度时程曲线



(c) 日本仙台县宫城冲地震基岩处加速度时程曲线



(d) 我国台湾省花莲地震基岩处加速度时程曲线

图 9.38

表 9.8　上海体育馆站地层资料及静动力计算参数

编号	土层名称	层底标高/m	D_{max}	有效重度/(kN/m³)	c'/kPa	$\sin\varphi'$	Duncan-Chang模型计算参数			$K_{0,max}$/$\sqrt{kPa}$	Poisson	渗透系数/(m/s)
							R_f	n	k			
1	水上填土	0.65	0.33	19.00	22.30	0.38	0.80	0.53	3360	8900	0.29	1.5E-08
2	水下填土	2.80	0.33	9.00	22.30	0.38	0.80	0.53	3360	8900	0.29	1.5E-08
3	淤泥质粘土	6.80	0.30	7.50	10.00	0.21	0.68	0.47	1237	2470	0.41	1.6E-07
4	粉质粘土	17.50	0.31	8.20	9.15	0.40	0.65	0.40	2840	3450	0.37	7.1E-07
5	粉质粘土	28.50	0.31	8.60	9.21	0.41	0.65	0.40	3000	4313.4	0.37	7.7E-07
6	砂质粉土	38.00	0.30	9.10	9.00	0.31	0.80	0.50	3200	8300	0.27	5.6E-06
7	粉细砂	64.60	0.28	9.70	0.00	0.56	0.82	0.50	3500	10304	0.28	1.1E-05
8	砂质粉土	71.00	0.32	9.30	3.70	0.39	0.80	0.50	3400	10200	0.26	8.6E-06
9	粉砂质粘土	75.40	0.25	9.50	9.06	0.42	0.55	0.40	3800	9086.7	0.33	1.1E-06
10	含砾中细砂	89.80	0.30	10.90	0.00	0.53	0.84	0.50	4800	12060	0.28	6.0E-04
11	粉细砂	148.80	0.30	10.00	0.00	0.53	0.84	0.50	4500	12000	0.28	1.1E-05
12	粉质粘土	167.30	0.25	9.80	22.96	0.47	0.66	0.50	3500	12599	0.33	7.0E-05
13	粉细砂	210.90	0.30	9.90	0.00	0.57	0.84	0.50	4800	13838	0.28	1.1E-05
14	粘土夹粉砂	251.30	0.25	10.30	22.96	0.47	0.66	0.50	4000	14065	0.32	5.8E-07
15	中细砂	277.00	0.50	10.10	0.00	0.55	0.84	0.50	9200	16363	0.28	2.3E-04
16	混凝土		0.17	14.5	1000	0.643	0.64	0.17	200000	600000	0.16	3.0E-09

2)有限元剖分。

车站横剖面工况和计算范围：深 280m，宽 200m，车站位于对称轴线上，共剖分 1406 个结点，1332 个单元。车站纵剖面工况和计算范围：深 280m、宽 500m，其中车站结构长 233m，位于对称轴线上，车站两端各取隧道计算长度 133.5m，隧道直径 6m，置于地面以下 11～17m。整个计算工况为共剖分 1566 个结点，1482 个单元。

3)计算结果。

综合六种地震输入曲线图，7 度地震时，土层的动剪应力比等值线图、孔隙水压力比等值线图、震陷等值线图分别如图 9.39～9.41。图 9.42 为上海体育馆地铁车站在 7 度地震烈度时 6 种不同地震输入曲线得到的结构横剖面动剪应力均值图。

(2)算例 2：上海火车站地铁车站。

1)计算参数。

该地铁车站处于砂性土层中，采用上海火车站新客站地层资料，静、动力计算参数见表 9.9。

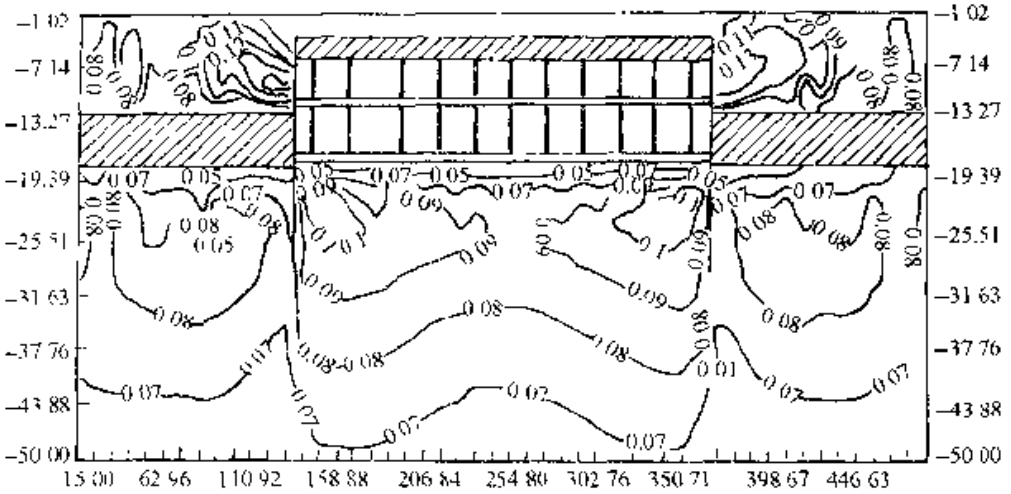


图 9.39　动剪应力比等值线图

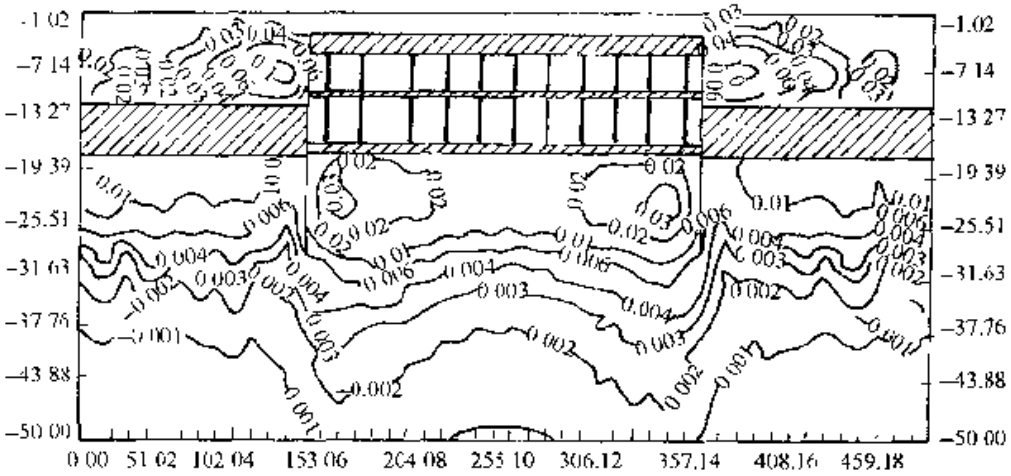


图 9.40　孔隙水压力比等值线图

表 9.9　上海火车站新客站地层资料及静动力计算参数

编号	土层名称	层底标高/m	D_{max}	有效重度/(kN/m³)	c'/kPa	$\sin\varphi'$	Duncan-Chang 模型计算参数			$K_{2,max}$ /$\sqrt{kPa}$	Poisson 比	渗透系数/(m/s)
							R_f	n	k			
1	水上填土	0.7	0.325	19.0	22.3	0.375	0.80	0.53	3360	8900	0.29	1.5E-08
2	水下填土	2.1	0.325	9.0	22.3	0.375	0.80	0.53	3250	8900	0.29	1.5E-08
3	褐黄色粉质砂土	5.6	0.32	9.0	6.0	0.370	0.78	0.43	3420	10200	0.29	7.0E-07
4	灰色粉质砂土	9.2	0.32	8.6	4.6	0.415	0.78	0.43	2720	3020	0.26	9.0E-07
5	灰色粉砂及淤泥质粉质粘土	17.3	0.3	8.0	3.2	0.440	0.80	0.43	2200	9087	0.30	3.0E-07
6	灰色粉质粘土	25.2	0.32	8.2	13.9	0.120	0.55	0.40	3000	4313	0.37	7.1E-08
7	暗绿色粉质粘土	31.3	0.32	9.8	29.7	0.292	0.55	0.40	3000	4313	0.37	1.5E-08
8	粉细砂	45.2	0.28	9.7	0.0	0.559	0.82	0.50	3500	10304	0.28	1.1E-05
9	砂质粉土	68.3	0.32	9.3	3.7	0.391	0.80	0.50	4000	8020	0.26	8.6E-06

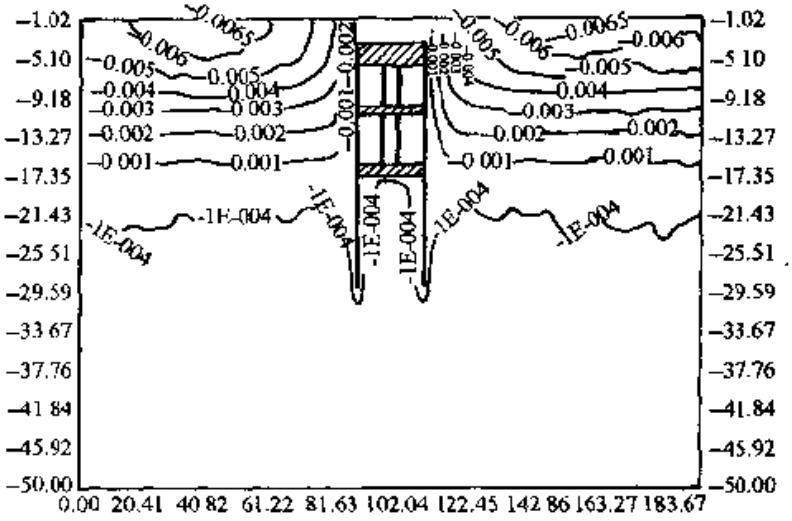


图 9.41　土层震陷等值线图(单位:m)

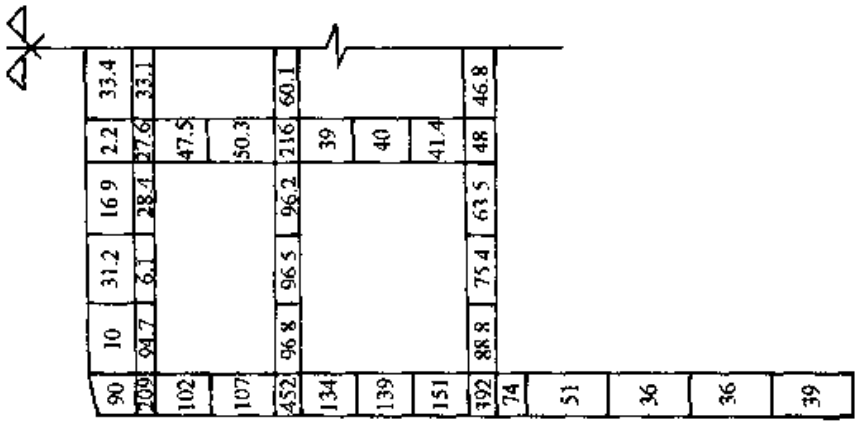


图 9.42　结构横剖面动剪应力均值(单位:kPa)

2)有限元剖分。

计算范围:深 280m、宽 200m,车站位于对称轴线上,共剖分 1435 个结点,1360 个单元。

3)计算结果。

计算结果简单说明如下:在地铁车站附近土体的动剪应力比由下而上递增,在地表附近达到最大值。不同地震输入情况下的结果离散性较大,但孔隙水压力比最大值出现在地表附近粉质砂土地层,孔隙水压力比较大时离地铁车站亦较近,对地铁车站稳定性有一定影响。7 度地震时 6 种不同地震输入曲线得到的横剖面土层的震陷均值等值线表明,自下而上,震陷量逐渐增加,同一土层沿水平方向震陷量与该土层的孔隙水压力比大小相关,这一结果与理论和实验规律相符。

(3)算例 3:常熟路地铁车站。

1)计算参数。

该地铁车站处于粘性土层中,采用常熟路站地层资料,静、动力计算参数见

表 9.10。

表 9.10 常熟路站地层资料及静动力计算参数

编号	土层名称	层底标高/m	D_{max}	有效重度/(kN/m³)	c'/kPa	$\sin\varphi'$	邓肯张模型计算参数			$K_{2,max}$/$\sqrt{kPa}$	Poisson比	渗透系数/(m/s)
							R_f	n	k			
1	水上填土	1.5	0.325	19.0	22.3	0.375	0.800	0.50	3360	8900	0.29	1.5E-08
2	水下填土	2.0	0.325	9.0	22.3	0.375	0.800	0.50	3300	8900	0.29	1.5E-08
3	褐黄色粉质粘土	3.0	0.325	9.1	14.2	0.208	0.800	0.50	2800	3200	0.29	1.5E-06
4	淤泥质粉质粘土	6.0	0.320	8.5	9.7	0.225	0.690	0.39	2300	2140	0.26	3.0E-07
5	灰色淤泥质粘土	15.0	0.300	7.5	10.0	0.210	0.687	0.39	1930	2470	0.41	1.6E-08
6	灰色粘土	24.4	0.320	8.0	9.8	0.208	0.700	0.50	2500	3500	0.29	6.5E-08
7	灰色粉质粘土	32.5	3.100	8.6	9.2	0.406	0.550	0.40	3000	4313	0.37	7.7E-07
8	暗绿色粉质粘土	35.4	3.100	8.6	9.2	0.406	0.550	0.40	3000	4313	0.37	7.7E-07
9	灰绿色粉砂	44.2	3.100	8.6	9.2	0.406	0.550	0.40	3000	6310	0.37	7.7E-06
10	褐黄色粉细砂	52.0	0.280	9.7	0.0	0.559	0.820	0.50	3500	10304	0.28	1.1E-05
11	灰色粉质粘土	67.0	0.320	8.2	11.5	0.292	0.700	0.50	200	5200	0.26	9.0E-06

2)有限元剖分。

计算范围:深 280m、宽 200m,车站位于对称轴线上,共剖分 1320 个结点,1248 个单元。

3)计算结果。

同样计算了横纵剖面动剪应力比等值线、孔隙水压力比等值线、土层震陷等值线等,得出与上海体育馆地铁车站、上海火车站类似的规律。

9.6.2 地铁车站动力可靠性分析

(1)上海体育馆地铁车站计算结果。

对上海体育馆地铁车站的计算表明,7 度地震时横剖面土层动剪应力比最大值为 0.16,均值为 0.14,变异系数为 0.16;8 度地震时横剖面土层动剪应力比最大值为 0.34,均值为 0.28,变异系数为 0.18;7 度地震时横剖面土层孔隙水压力比最大值为 0.26,均值为 0.12,变异系数为 0.89;8 度地震时横剖面土层孔隙水压力比最大值为 0.60,均值为 0.43,变异系数为 0.47;7 度地震时横剖面土层震陷最大值为 17mm,均值为 6.7mm,变异系数为 1.04;8 度地震时横剖面土层震陷最大值大于 30mm,均值为 21.5mm,变异系数为 0.59;7 度地震时结构横剖面最危险点处动剪应力最大值为 733.98kPa,均值为 534.67kPa,变异系数为 0.26;8 度地震时结构横剖面最危险点处动剪应力最大值为 1036.9kPa,均值为 936.47kPa,变异系数为 0.27;各地震烈度情况下,楼板与立柱的连接处及结构拐角处动剪应力较大。

7 度地震时纵剖面土层动剪应力比最大值为 0.17,均值为 0.14,变异系数为

0.18;8 度地震时纵剖面土层动剪应力比最大值为 0.35,均值为 0.27,变异系数为 0.26;7 度地震时纵剖面土层孔隙水压力比最大值为 0.27,均值为 0.14,变异系数为 0.65;8 度地震时纵剖面土层孔隙水压力比最大值为 0.58,均值为 0.42,变异系数为 0.51;7 度地震时纵剖面土层震陷最大值为 3mm,均值为 0.86mm,变异系数 1.27;8 度地震时纵剖面土层震陷最大值大于 30mm,均值为 16.8mm,变异系数为 0.39;7 度地震时结构纵剖面最危险点处动剪应力最大值为 1683.0kPa,均值为 1169.5kPa,变异系数为 0.26;8 度地震时结构纵剖面最危险点处动剪应力最大值为 2321.0kPa,均值为 1173.0kPa,变异系数为 0.36;各地震烈度情况下,楼板与立柱的连接处、结构拐角部位、车站结构与隧道接头部位的动剪应力较大。

接头顶部将承受最大压应力,底部将承受最大拉应力。7 度地震时,接头顶部压应力最大值为 1218.84kPa,平均值为 1429.27kPa;7 度地震时,接头底部拉应力最大值为 1096.07kPa,平均值为 759.85kPa;8 度地震时,接头顶部压应力最大值为 3522.86kPa,平均值为 2282.32kPa;8 度地震时,接头底部拉应力最大值为 1981.81kPa,平均值为 1215.58kPa。

(2)常熟路地铁车站计算结果。

对常熟路地铁车站的计算表明,7 度地震时,在地铁车站附近土层的动剪应力比由下而上递增,在地表附近达到最大值,动剪应力比最大值为 0.15,均值为 0.13,变异系数为 0.11;8 度地震时土层动剪应力比变化规律与 7 度时相近,但其值要大约 1 倍,8 度地震时土层的动剪应力比最大值为 0.29,均值为 0.23,变异系数为 0.20。

7 度地震时,土层孔隙水压力比最大值出现在地表附近的粉质粘土地层,最大值为 0.18,均值为 0.09,变异系数为 0.93;8 度地震时土层孔隙水压力比分布规律与 7 度地震是基本一致,最大值为 0.50,均值为 0.37,变异系数为 0.33。

7 度地震时,土层震陷量自下而上逐渐增加,同一土层沿水平方向震陷量与该土层的孔隙水压力比大小相关,震陷量最大值为 4.6mm,均值为 2.02mm,变异系数为 0.99;8 度地震时土层震陷分布规律与 7 度地震时基本一致,其最大值为 21mm,均值为 14.75mm,变异系数为 0.40。

7 度地震时楼板与立柱的连接处及结构拐角处动剪应力较大,结构横剖面最危险点处动剪应力最大值为 824.45kPa,均值为 597.82kPa,变异系数为 0.30;8 度地震时结构横剖面动剪应力分布规律与 7 度时基本一致,最危险点处动剪应力最大值为 1293.8kPa,均值为 1062.1kPa,变异系数为 0.24。

(3)累积损伤模型的动力可靠性分析结果。

利用累积损伤模型对土层进行了动力可靠性分析,分析中采用了 6 种不同地震输入情况下土层动剪应力响应结果。为了简化计算,分别用 Rayleigh 分布、Gauss 分布(正态分布)和极值分布代替土层动剪应力响应的峰值分布计算累积损伤量,计算结果列于表 9.11。

表 9.11　土层最大累积损伤量计算结果统计表

	上海体育馆车站地层		上海火车站地层		常熟路地铁车站地层	
	7 度烈度	8 度烈度	7 度烈度	8 度烈度	7 度烈度	8 度烈度
Rayleigh 分布	0.01	0.3	0.08	0.64	0.03	0.4
Gauss 分布	0.014	0.33	0.09	0.68	0.028	0.55
极值分布	0.015	0.35	0.10	0.75	0.04	0.6
均值	0.013	0.34	0.09	0.68	0.033	0.52

图 9.43 为 7 度地震烈度时综合 6 种地震输入曲线用累积损伤模型分析得到的上海体育馆地铁车站处粘性土土层累积损伤等值线图(极值分布)。由图 9.23 可知,在车站结构埋深范围内,土层累积损伤量由下而上递减至地表附近达最大值,破坏程度(累积损伤量)最大值距离车站结构有一定距离,对车站稳定影响不大.7 度烈度时的最大值为 0.013。进一步的计算表明,8 度时的最大值为 0.34。对于 Rayleigh 分布和 Gauss 分布也得出类似的结果。

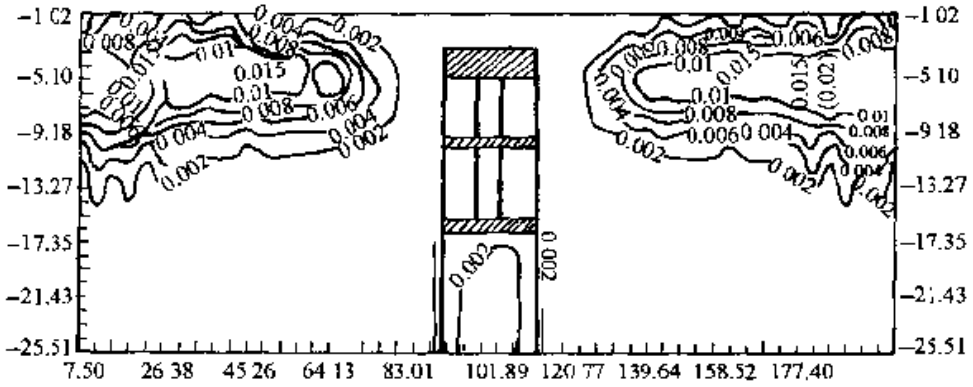


图 9.43　上海体育馆地铁车站粘性土土层累积损伤等值线图

此外,还计算了综合 6 种地震输入曲线用累积损伤模型分析得到的上海火车站地铁车站处砂性土土层累积损伤等值线。计算表明,在车站结构埋深范围内,土层累积损伤量由下而上递减至地表附近达最大值。7 度烈度时的最大值为 0.09,8 度时的最大值为 0.68,累积损伤量最大值距离车站结构较近,对车站稳定有一定影响。

对常熟路地铁车站处土层累积损伤的计算表明,在车站结构埋深范围内,土层累积损伤量由下而上递减至地表附近达最大值,7 度烈度时的最大值为 0.033,8 度时的最大值为 0.52。

(4)车站结构可靠性分析结果。

采用可靠度指标 β 评判车站结构的动力可靠性。首先对车站结构最危险单元处在 6 种地震输入情况下的动剪应力响应过程最大值的概率分布规律进行拟合优度检验,表 9.12 列出拟合正态分布、对数正态分布、指数分布三种情况下的

Колмогоров 检验统计量 D_n。由表 9.10 中数据可知，拟合对数正态的 D_n 较小，在显著性水平 $\alpha=0.01$ 时 D_n 的临界值 $D_{6,0.01}=0.364$，故而可近似认为结构最大动剪应力分布服从对数正态分布。

表 9.12　动剪应力分布规律之拟合优度检验结果汇总表

	上海体育馆车站横剖面		上海体育馆车站纵剖面		上海火车站地铁车站		常熟路地铁车站	
	7 度	8 度	7 度	8 度	7 度	8 度	7 度	8 度
正态分布检验	0.2450	0.2175	0.2790	0.2823	0.3182	0.6896	0.4205	0.7730
对数正态分布检验	0.2446	0.2987	0.3308	0.3229	0.2535	0.5413	0.1955	0.1891
指数分布检验	0.5027	0.4343	0.4546	0.4024	0.4692	0.4065	0.3725	0.4493

9.7　灰渣坝抗震稳定性的三维有效应力动力分析

对坝体进行抗震稳定性分析时，若坝的轴向尺寸相对坝宽较长（一般为 5～10 倍），可以按二维问题进行简化处理。当坝的轴向尺寸相对坝宽并不足够长时，如建于狭窄山谷中的一些土石坝，若仍按二维问题进行动力反应分析，则不仅难以找到坝体最危险断面，而且计算结果与实际情况相差很大，这种情况须按三维进行动力反应分析。周健等(2000)采用三维有效应力动力反应分析有限元程序，对灰渣坝抗震稳定性进行分析，得到一些有意义的结论。

9.7.1　工程概况及计算参数的确定

(1)工程概况。

选取位于 8 度地震区的某灰渣坝进行分析。该坝建于山谷之间，坝顶为 L 形，且长度很短，是典型的三维问题。坝基天然地面标高 855m，初期坝为土石混合坝，下游坡马道间的坡度为 1∶2.1，坝高 57m。在初期土石坝上共堆积六级灰渣至 950.5m，灰渣坝高 38.5m，下游坡马道间的坡度为 1∶4.26，滩面设计坡度为 3‰。设计总坝高 95.5m，按一级灰渣坝标准设计。坝体单元剖分的平面图如图 9.44 所示。灰渣坝堆至设计坝高工况为，共分 642 个结点，409 个单元。地震输入采用海城地震时程曲线，卓越周期为 0.55s，最大加速度为 19.6m/s^2。

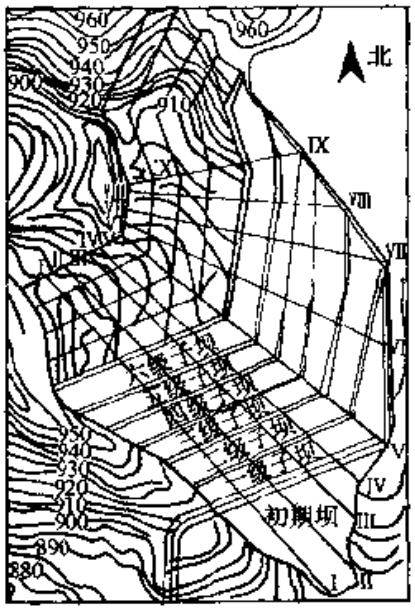


图 9.44　灰渣坝单元剖分平面图

(2)材料的本构关系。

土、灰渣等坝体材料的应力-应变关系为弹塑性的。根据弹塑性全量理论，静态应力应变关系采

用 Duncan-Chang 双曲线型本构关系。动态应力-应变关系采用 Hardin-Drnevich 双曲线型本构关系，坝体材料参数如表 9.13 所列。

表 9.13 坝体材料参数

材　料	c'/kPa	φ/°	K	n	R_f	K_{max}	D_{max}
初期坝填土(水上)	23.2	23	150	0.7	0.75	10	0.35
初期坝填土(水下)	23.2	23	150	0.7	0.75	10	0.35
初期坝填石(水上)	0	35	1000	0.4	0.80	45	0.33
初期坝填石(水下)	0	35	800	0.5	0.80	40	0.28
灰渣(水上)	0	29	68	0.37	0.6	4.1	0.285
灰渣(水下)	0	29	68	0.37	0.6	4.1	0.285

室内动三轴试验结果表明，灰渣材料的振动孔隙水压力上升规律可以表示为

$$p_g/\sigma_0 = (2/\pi)\arcsin(N/N_L)^{\theta} \tag{9.28}$$

式中：σ_0 为初始平均有效应力；N 为动剪应力比为 $\sigma_d/2\sigma_0$ 的动荷载的循环次数；N_L 为动荷载 $\sigma_d/2\sigma_0$ 作用下达到液化破坏时的循环次数；θ 为土性参数。

式(9.28)中的 N 与 N_L 对应同一动剪应力比。地震作用是个随机性荷载，动剪应力比是有一定概率分布范围的随机量。基于对地震荷载随机性的分析，N 采用根据地震强度及持续时间简化得到的等效循环周数，N_L 根据室内动三轴试验曲线确定。

为考虑地震引起的永久变形，需确定坝体材料在动荷载作用下的不排水残余应变。不排水残余应变 e_p 可表达为

$$e_p = \eta^*/[d + (20 - d)\eta^*] \tag{9.29}$$

$$\eta^* = (\eta_{p,c} - \eta_s)/(\eta_f - \eta_s) \tag{9.30}$$

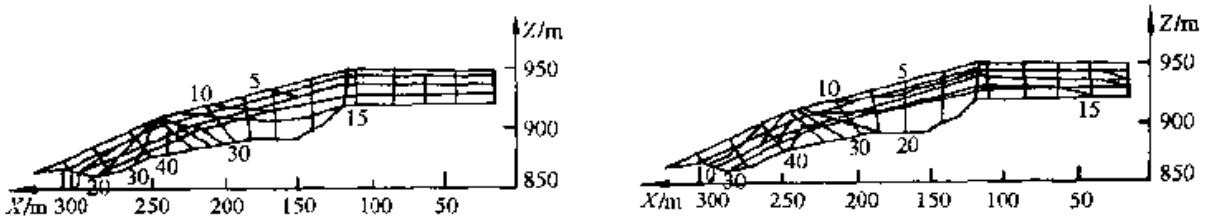
式中：d 为实验参数；$\eta_{p,c}$、η_s 分别为当前及初始有效应力比；η_f 为破坏时有效应力比。

9.7.2 动力反应计算结果及分析

根据动力反应分析，可以得到灰渣坝堆至设计标高时的最大动剪应力等值线图及振动孔隙水压力比等值线图。图 9.45 为在不同浸润线高度下，计算所得Ⅱ号剖面上最大动剪应力 τ_{xy} 的等值线图；由剪应力等值线可知，坝坡附近最大动剪应力明显增大。图 9.46 和 9.47 分别为低浸润线和高浸润线高度下Ⅱ、Ⅳ、Ⅵ、Ⅷ剖面的孔压比等值线图。可知看出，浸润线升至最高位置时，坝顶和坝坡表面附近发生严重液化，浸润线降至最低位置时，孔压明显降低，液化范围也大为减小。

通过对不同浸润线高度情况下初期坝的动力稳定分析，得出若要将灰渣堆至三级子坝坝高以上必须降低浸润线位置，并对灰渣进行加固处理，才能保证初期坝坝体的稳定。浸润线最低时，六级子坝的加固区范围以及加固后初期坝坝体动力稳

定分析结果见图 9.48(a)(斜线表示加固区范围),加固后的灰渣强度指标不小于 $c'=10.5\text{kPa}$,$\varphi'=29°$,灰渣堆至设计标高时,加固区范围以及加固后初期坝坝体动力稳定分析结果见图 9.48(b),加固后的灰渣强度指标不小于 $c'=12.5\text{kPa}$,$\varphi'=29°$。



(a) 高浸润线　　(b) 低浸润线

图 9.45　Ⅱ号剖面动剪应力等值线图

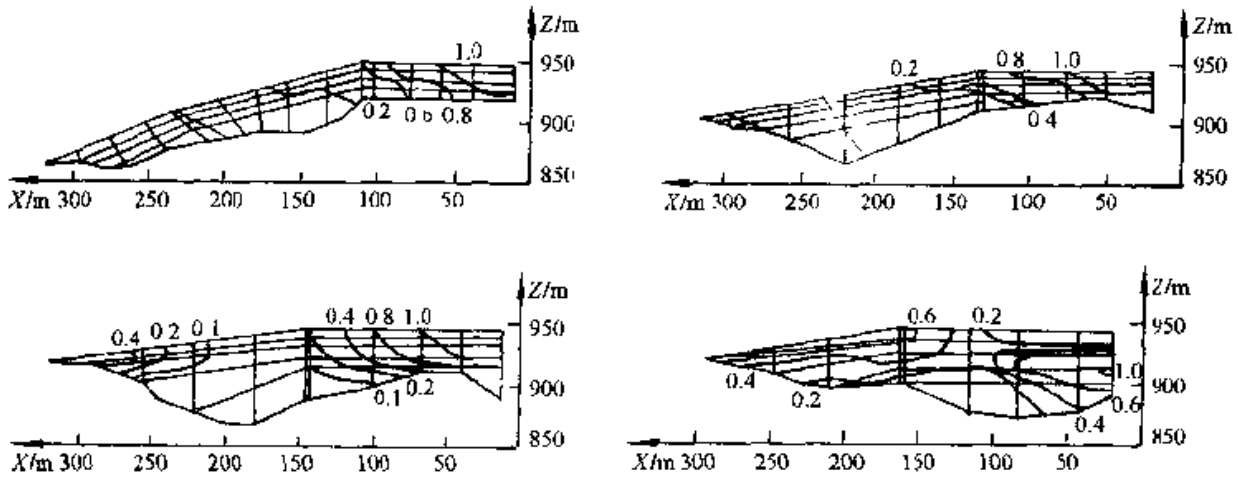


图 9.46　灰渣堆至设计坝高地震结束时孔压比等值线(低浸润线)

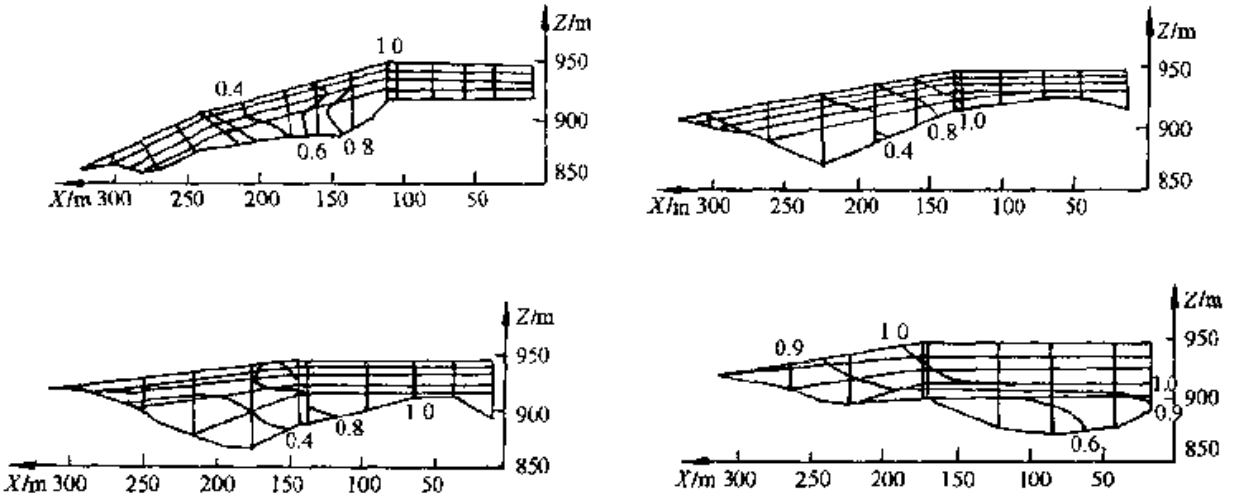
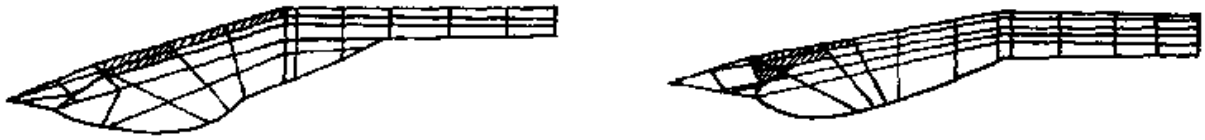


图 9.47　灰渣堆至设计坝高地震结束时孔压比等值线(高浸润线)

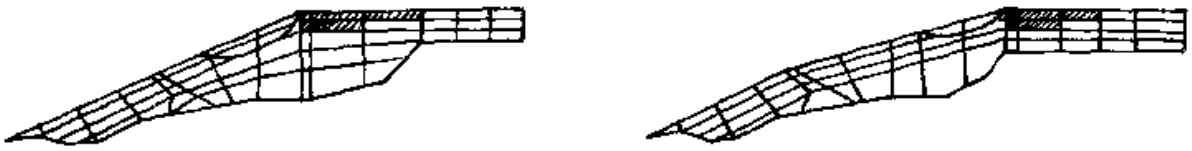
在最低浸润线情况下,孔压明显降低,液化范围大为减小,但仍必须对灰渣进

行加固处理才能保证多级子坝坝体的动力稳定。对于六级子坝，加固后灰渣强度指标至少达到 $c'=6.5\text{kPa}$，$\varphi=29°$，此时的稳定性分析结果如图 9.49(a)所示。灰渣堆至设计标高情况，若能对六级子坝按上面范围进行加固处理，且强度指标达到 $c'=7.5\text{kPa}$，$\varphi=29°$，子坝坝体将是稳定的，此时的稳定性分析结果如图 9.49(b)所示。



(a) 堆至六级子坝坝高　　(b) 堆至设计坝坝高

图 9.48　加固后动力稳定安全系数及最危险滑弧位置



(a) 六级子坝坝高时　　(b) 设计坝坝高时

图 9.49　子坝动力稳定安全系数及最危险滑弧位置

由此可以得出下列结论：①动力稳定分析结果表明，灰渣堆至初期坝坝高、六级子坝坝高和设计坝高时，最大孔隙水压力比都出现在坝坡表面附近；浸润线位置最高时，坝顶和坝坡表面附近发生严重液化；浸润线位置最低时，孔压明显降低，且液化范围大为减小。因此，降低浸润线位置是提高坝体抗液化强度的有效措施。②灰渣堆至二级坝坝高时，初期坝坝体在最高浸润线情况下将发生失稳，在最低浸润线情况下基本稳定。因此，若保证浸润线处于最低，则可将灰渣堆及二级坝坝高。③灰渣堆至二级坝坝高以上时，坝体都将发生失稳。若将灰渣堆至二级坝坝高以上时，必须采取降低浸润位置，并对灰渣进行加固处理。

参 考 文 献

[1] 谢康和. 砂井地基：固结理论、数值分析与优化设计. 浙江大学博士学位论文，1987

[2] 潘秋元、朱向荣、谢康和. 关于砂井地基超载预压的若干问题. 岩土工程学报，1991，(2)

[3] K. H. Xie, Q. Y. Pan, G. X. Zeng & X. R. Zhu. Prediction versus performance on the behavior of soft clay ground improved by vertical drains. Proc. of Symposium on Prediction Versus Performance in Geotechnical Engrg., Bangkok, 1993

[4] 周健、徐建平、许朝阳. 群桩挤土效应的数值模拟. 同济大学学报，2001，(1)

[5] M. Hyodo, K. Yasuhara, K. Hirao. Prediction of clay behavior in undrained and partially drained cyclic triaxial tests. Soils and Foundations, 1992, 32(4)

[6] H. B. Seed, I. M. Idriss. Simplified procedure for evaluating soil liquefaction potential. ASCE, 1971, 97 (SM9)

[7] 徐志英、沈珠江. 尾矿高堆坝地震反映的综合分析与液化计算. 水利学报，1983，(5)
[8] 周健、徐志英. 土(尾矿)坝三维有效应力动力分析. 地震工程与工程振动，1984，4(3)
[9] K. Yasuhara, M. Hyodo. Earthquake induced settlement in soft grounds. 2th Int. Conf. on Recent Advance in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St Louis, Missouri USA, 1991
[10] ZhouJian, Yasuhara, K. Hirai. A model for predicting the cyclic-induced behavior of clay with initial static shear stress. Proc of 47th annual meeting of Japanese society of Civil Eng., 1992
[11] 周健、白冰、徐建平. 土动力学理论与计算. 中国建筑工业出版社，2001
[12] 周健. 土石坝三维两相动力分析. 岩土工程学报，1991，13(5)
[13] 徐志英、沈珠江. 尾矿高堆坝地震反映的综合分析与液化计算. 水利学报，1983，(5)
[14] M. A. Biot. Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous medial. Jr. of Application physics, 1962, (9)
[15] B. O. Harding, V. P. Droaiich. Shear modulus and damping in soils. Jr. Soil Mechanics Found. Div., ASCE, 1972, 98(SM7)
[16] H. B. Seed, P. P. Martin, J. Lysmer. Pore water pressure changes during soil liquefaction. Proc. ASCE, 1976, (GT4)
[17] M. Hyodo, K. Yasuhara, H. Murata. Earthquake induced settlements in clays. Proc. 9th World Conf. on Earthquake Engineering, 1988, (1)
[18] 钱家欢、殷宗泽. 土工原理与计算. 水利电力出版社，1995
[19] Finn. W. D. Liam. Dynamic Effective Stress Response of Soil Strictures: Theory and Centrifugal Model Studies. Proc. 5th Int.. Conf. on Num Methods in Geomechanics, Japan, 1995, 1
[20] 周健. 尾矿坝在地震作用下的三维两相有效应力动力分析. 工程抗震. 1995，(3)
[21] 周健、胡晓燕. 上海软土地下建筑物抗震稳定分析. 同济大学学报，1998，(5)
[22] 周健、董鹏、戚佩江. 灰渣坝抗震稳定性的三维有效应力动力分析. 水利学报，2000，(7)
[23] 夏明耀. 软土隧道的抗震设计计算. 隧道工程，1984，(1)
[24] 蔡宏英、周健、李相菘. 上海厚覆盖软土地层动力反应分析. 第5届全国土动力学学术会议论文集. 大连理工大学出版社，1998. 6