目　　录

第一章　绪论……（1）
第一节　地质统计学的产生……（2）
一、传统储量计算方法的评述……（2）
二、经典统计学的局限性……（4）
三、地质统计学的诞生……（5）
第二节　地质统计学的现状及优点……（5）
一、地质统计学的现状……（5）
二、地质统计学的优点……（6）
第二章　线性代数及概率统计基本知识……（8）
第一节　线性代数的基本知识……（8）
一、矩阵及其基本运算……（8）
二、行列式及其性质……（11）
三、逆矩阵与分块矩阵……（12）
四、线性方程组的解法与逆矩阵的求法……（13）
五、特征值与特征向量……（16）
第二节　概率论与数理统计初步……（19）
一、随机事件和概率……（19）
二、随机变量及其分布……（21）
三、随机变量的数字特征……（28）
第三章　区域化变量理论……（31）
第一节　随机过程与区域化变量……（31）
一、随机过程的概念……（31）
二、随机场与区域化变量……（32）
第二节　区域化变量的数字特征与变差函数……（33）
一、区域化变量的数字特征……（33）
二、变差函数……（35）
第三节　平稳性假设与本征假设……（35）
一、二阶平稳假设……（35）
二、本征假设……（36）
三、二阶平稳假设与本征假设之比较……（36）
四、准二阶平稳假设及准本征假设……（38）
第四节　实验变差函数的计算公式……（39）
第五节　估计方差……（41）
一、估计方差的定义……（42）
二、估计方差的计算……（42）
三、关于估计方差的几点说明……（47）

第六节　承载效应和离散方差 ……（47）
一、　承载效应 ……（47）
二、　离散方差 ……（48）
三、　克立格关系式 ……（50）
第七节　关于正则化 ……（52）
一、　正则化的概念 ……（52）
二、　正则化变量的性质 ……（52）
三、　正则化变差函数的计算公式 ……（54）
四、　求正则化变差函数的实例 ……（55）
第四章　变差函数及结构分析 ……（57）
第一节　变差函数理论 ……（57）
一、　关于变差函数的定义及性质 ……（57）
二、　变差函数的功能 ……（65）
三、　变差函数的理论模型 ……（66）
第二节　结构分析 ……（69）
一、　一个方向的套合结构 ……（69）
二、　不同方向上的结构套合 ……（71）
三、　变差函数的拟合 ……（80）
第三节　结构分析的实施 ……（87）
一、　选择区域化变量 ……（87）
二、　审议数据 ……（87）
三、　计算实验变差函数 ……（88）
四、　拟合变差函数图 ……（90）
第四节　理论变差函数最优性检验方法 ……（90）
一、　观察法 ……（91）
二、　交叉验证法 ……（91）
三、　估计方差检验法 ……（91）
四、　综合指标法 ……（91）
第五节　变差函数的一些应用 ……（92）
一、　构造一个反映矿体变化程度的综合指标 ……（92）
二、　变差等值线图在划分矿体空间变化类型上的应用 ……（94）
三、　在给定精度下确定最优勘探网的形状和大小 ……（95）
第五章　普通克立格法 ……（96）
第一节　克立格法及其解 ……（96）
一、　克立格法概述 ……（96）
二、　克立格方程组及其方差 ……（98）
三、　普通克立格的计算 ……（105）
第二节　普通克立格方案的拟定 ……（111）
一、　降低克立格方程组的维数 ……（111）
二、　减少克立格方程组的数目 ……（114）
三、　快速算出平均变差函数 $\bar{\gamma}$（或平均协方差函数 $\bar{C}$） ……（116）
四、　准备一份适用于普通克立格方案的数据文件 ……（116）

五、 选择一种求解克立格方程组的省时计算方法……（116）
第三节 普通克立格法应用实例……（117）
一、 普通克立格方案的实施……（117）
二、 地质统计学在优化勘探网度上的研究……（122）
第六章 辅助函数及其应用……（127）
第一节 辅助函数的定义及计算公式……（126）
一、 一维辅助函数：$X(L)$、$F(L)$……（126）
二、 二维辅助函数：$\alpha(L;l)$、$X(L;l)$、$F(L;l)$和$H(L;l)$……（128）
三、 三维辅助函数：$F(L;l^2)$……（132）
第二节 标准球状模型辅助函数及图表……（133）
一、 一维辅助函数的表达式……（133）
二、 一维辅助函数公式的证明……（133）
三、 球状模型辅助函数的列线图表……（136）
第三节 辅助函数的应用……（139）
一、 辅助函数在计算估计方差上的应用……（139）
二、 辅助函数在计算克立格方程组系数上的应用……（145）
第七章 总体估计……（149）
第一节 勘探工作中储量的总体估计……（149）
一、 已知矿体边界的总体估计……（149）
二、 矿体水平投影面积的估计……（159）
第二节 可回采储量的总体估计……（164）
一、 概述……（164）
二、 对数正态分布的均值与方差的计算……（164）
三、 可采储量总体估计方法简述……（166）
四、 可采储量及其平均值的总体估计……（168）
第八章 泛克立格法……（170）
第一节 泛克立格法概述……（170）
一、 几个基本概念……（170）
二、 漂移的形式……（171）
三、 泛克立格法的假设条件及解决的问题……（172）
四、 非平稳区域化变量的变差函数……（173）
第二节 已知协方差函数时的泛克立格法……（176）
一、 $Z(x)$的泛克立格法估值……（176）
二、 漂移$m(x)$及其系数a_l的估计……（180）
三、 拉格朗日参数矩阵$(\mu_{l\alpha})$的性质……（186）
第三节 只存在变差函数时的泛克立格法……（187）
一、 只存在变差函数时$Z(x)$的泛克立格法估值……（188）
二、 只存在变差函数时估计漂移$m(x)$的泛克立格法……（189）
三、 只存在变差函数时估计漂移系数a_l的泛克立格法……（191）
第四节 可加性定理……（193）
一、 泛克立格估计量Z_v^*的分解……（193）
二、 泛克立格方差σ_E^2的分解……（195）

第五节　泛克立格法实例……（197）
第九章　指示克立格、析取克立格、条件模拟简介……（200）
第一节　指示克立格法简介……（200）
一、　问题的提出……（200）
二、　指示函数及其二阶矩阵……（200）
三、　变差函数$\gamma_x(h)$与指示变差函数$\gamma_I(h)$……（202）
四、　指示克立格估值……（204）
五、　多种矿化类型矿床中的指示克立格法……（209）
六、　指示克立格法的计算步骤……（210）
第二节　析取克立格法简介……（211）
一、　析取克立格方程组……（211）
二、　析取克立格方差……（213）
三、　埃尔米特多项式简介……（213）
四、　在二维标准正态假设下用埃尔米特展开式求条件数学期望……（215）
五、　用埃尔米特展开式来表述一般的析取克立格方程组……（215）
六、　用埃尔米特展开式来表达析取克立格方差……（217）
第三节　条件模拟简述……（218）
一、　转向带法……（220）
二、　一维空间中的非条件模拟……（222）
第十章　地质统计学计算程序……（224）
第一节　数据处理程序……（224）
第二节　绘制直方图程序……（238）
第三节　求实验变差函数程序……（243）
第四节　理论变差函数拟合程序……（251）
第五节　交叉验证程序……（260）
第六节　二维块段克立格估值程序……（271）
主要参考文献……（282）

第一章 绪 论

地质统计学是近20多年创立并发展起来的一门新兴边缘学科。它开始主要是为解决矿床从普查勘探、矿山设计到矿山开采整个过程中各种储量计算和误差估计问题而发展起来的。地质统计学是由法国著名学者G.马特隆教授于1962年创立的。在初期主要由他所领导的法国地质统计学学派加以推广、应用并发展起来的。经过20多年的发展，已经形成一套完整的理论和方法体系，积累了大量的实际应用经验，扩大了其应用领域，并已由法国、南非及一些法语国家推广到几乎全世界。我国从1977年开始引进地质统计学，受到了广泛的重视。几年来，地质、冶金、煤炭等部门有不少单位陆续开展地质统计学的研究，并取得了初步进展。

从地质应用的角度看，地质统计学是数学地质的一个独立分支；从概率统计的角度看，它突破了经典统计学不考虑样品点空间分布的不足，因而地质统计学从某种意义上也可以说是应用统计学的一个新分支。

那么什么是地质统计学呢？地质统计学与经典统计学(数理统计)又有什么区别呢？下面我们看一个简单的例子：

若在某一勘探线上的5个钻孔中，测得其煤厚数据为 $x=(2,\ 4,\ 3,\ 1,\ 5)$（见图1-1(*a*)）；在另一勘探线上的5个钻孔中，测得煤厚数据为 $x=(1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$（见图1-1(*b*)）。由数理统计分析这两组数据的均值和方差都是相同的。即：

$$\bar{x}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}x_i=3$$

$$s=\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=1.4$$



图1-1 钻孔煤厚数据示意图

但是，这两组煤厚数据所反映的煤层厚度的变异性（变化程度）是不一样的(见图1-1)。因此经典统计学不能区分这两组数据的煤厚变化性。这是因为经典统计学只考虑数值大小，不考虑数据的空间位置关系。用地质统计学方法来研究这两组数据，借助于变差函数，就能把这两组数据的变异性区别开来。这是由于地质统计学不仅考虑了地质变量的数值大小，而且还考虑地质变量的空间位置关系，使得插值计算或储量计算更加合理。

在此，我们初步尝到了地质统计学的甜头，至于它的理论体系、计算方法，我们将在后续的章节中陆续介绍。

为了更好地理解地质统计学，首先介绍一下地质统计学的产生背景。

第一节　地质统计学的产生

一、传统储量计算方法的评述

由于地质统计学是从矿石的品位估计和储量计算开始的，因此我们首先回顾一下储量计算的传统方法。

1．传统矿石储量计算公式为：

$$Q = V \cdot d \tag{1-1}$$

其中　Q——矿块矿石的储量；

V——矿块的体积；

d——矿石的体重。

而矿块的金属含量则是矿石储量与平均品位的乘积：

$$P = Q \cdot \bar{c} = V \cdot d \cdot \bar{c} \tag{1-2}$$

其中　P——矿块的金属含量；

$\bar{c}$——矿块的平均品位。

对于公式（1-2）中的矿石平均品位 $\bar{c}$，通常有两种方法求得：一种是当矿块各部位品位相近时，可用算术平均法由各剖面平均品位求矿块的平均品位；另一种方法是按样品在空间中的位置来加权计算，即所谓加权平均法。通常用的是距离 m 次反比法（图 1-2）。块段 B 的平均品位 $\bar{c}_B$ 是：

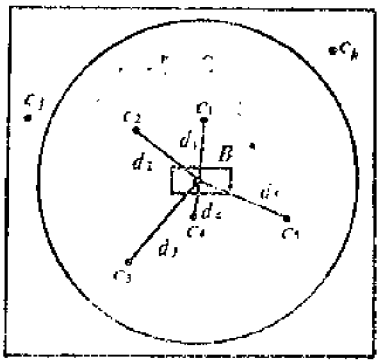


图1-2　距离（m次方）反比法示意图

$$\bar{c}_B = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{d_i^m} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i^m} \tag{1-3}$$

其中 c_i——第 i 个信息样品点的品位值；

d_i——第 i 个信息样品点到待估块段 B 之间的距离；

m——距离的方次。

当 $m=1$ 时，式（1-3）称为距离反比法。

当 $m=2$ 时，式（1-3）称为距离平方反比法。

2．传统的煤炭储量的计算通式为：

$$Q = S \cdot M \cdot d \cdot \cos\alpha \tag{1-4}$$

其中　Q——煤炭储量；

S——面积；

M——厚度；

d——容重（或称体重）；

α——煤层倾角。

由此可见，储量是由矿体（煤层）的体积和容重相乘而得到的。其中容重 d 可用各种方法测得，由于它变化不大，故不作为储量计算研究的重点。在煤炭储量计算中，关键是准确地估计出煤层的厚度，进而求出煤层的体积，常用的煤炭储量计算方法主要有：

算术平均法。将全区总面积乘以各钻孔煤厚的平均值来计算储量，其实质就是把整个复杂形状的煤层当作一个理想的，具有相同厚度的板状体（图1-3）。

地质块段法。实质上是把复杂形态的煤层当作一组密集的、大小不等的柱体（图1-4），计算各个柱体储量之和。

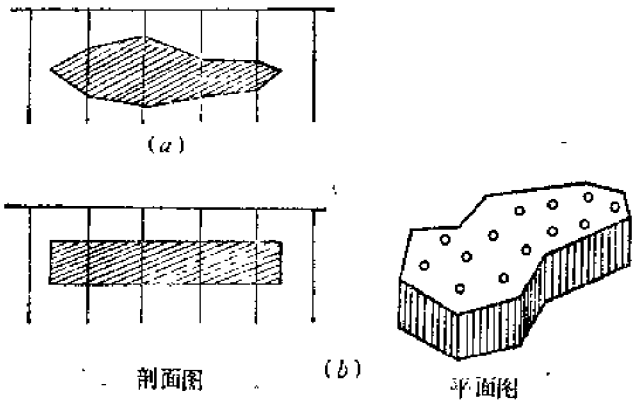


图1-3 用算术平均法计算储量示意图
a—地质剖面图上薄厚不均的煤层；
b—在储量计算时当成等厚的板状体

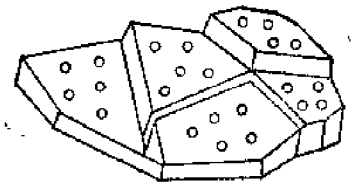


图1-4 地质块段法储量计算示意图

多角形法。在储量计算平面图上，以各个钻孔见煤点为中心，把煤层划分为若干个多角形块段，然后分别计算各块段储量。此法也称为最近地区法（图1-5）。

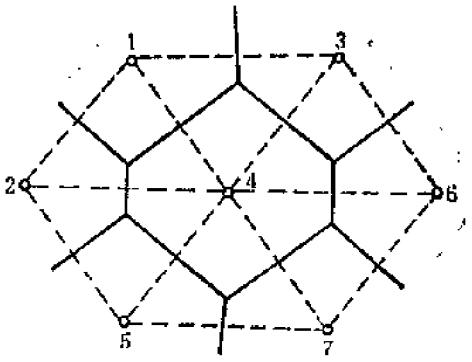


图1-6 用多角形法计算储量示意图

在回顾了传统储量计算方法以后，可以明显地看到传统储量计算方法存在不少问题：

1）简单地把某个钻孔的观测数据当作一个块段的平均数据值（例如"多角形法"）；或者是把周围样品数据的线性组合作为一个块段的值（例如"距离m次方反比法"）。这样对于复杂的矿体（或煤层）来说，一个样品的观测值不可能正好是影响范围（块段）的平均值。由于钻孔岩芯样品的承载（support，或叫"支撑"、"支集"，一般指样品或块段体积大小而言）小而块段的承载大，这二者的平均值是不能简单地加以等同看待的。表1-1引用了D.G.克立格在计算南非某金矿时，用传统多边形法估计品位与开采后的实际品位的对比情况表，从表中可以明显地看出上述算法的系统偏差。

表1-1 某金矿用传统方法估计品位和开采品位的对比

块段矿石等级 in-dwt①	矿 量 t	品位估值 in-dwt	开采后品位值 in-dwt	误 差
低级 91～149	110 000	124	150	-17%
中级 150～266	400 000	201	199	+1%
高级 267～348	180 000	296	236	+25%

（据D.G.Krige）

①注：金的衡量单位为 in-dwt = 0.165cm·g，表示垂直于矿层底面积为1平方英寸的柱内金的含量（in-dwt 是 inch-pennyweight（时-英镑）的缩写）。

2）未考虑矿体品位（煤层厚度）的空间变异性。如图1-6所示，假设方向V表示煤层的倾向方向，方向U表示煤层的走向方向。煤层厚度在U方向的变异性小于在V方向上的变异性，这时尽管样品Z_1，Z_2，Z_3，Z_4与待估块段S的距离相等，但在估计S的平均煤厚时，Z_2，Z_4的权就应比Z_1和Z_3的权大些。而传统的方法，对Z_1，Z_2，Z_3，Z_4只能赋予相同的权。

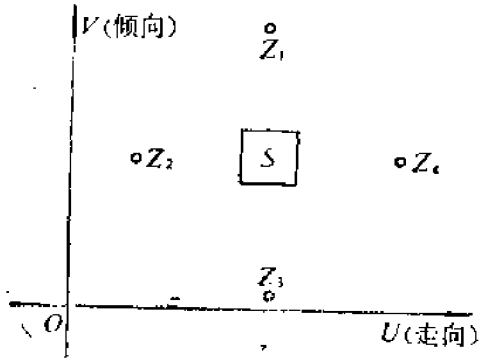


图1-6 煤厚的空间变异性对块段估值的影响

3）传统储量计算方法只能近似地给出一个矿体的平均品位（或平均厚度），而不能给出品位（或厚度）在空间的变化性（即离散程度）的大小。如图1-1(*a*)，(*b*)所示，尽管其平均值及方差均相同，但其煤厚在两条勘探线上的变化性却不大一样。然而，对于这种空间变化程度的研究，对矿井设计是非常重要的。

4）没有衡量计算精度的方法和标准。传统检验精度的方法，是选用一个矿块，对它的储量用同一种方法计算两次或多次，视其相对误差的大小来估计；或者用两种方法计算同一块段的储量，用两者之间的相对误差来估计精度。故没有一种客观定量的衡量计算精度的方法和标准。

二、经典统计学的局限性

为了反映地质变量的空间变化性，一些地质学家和采矿工程师曾经使用了某些经典的概率统计方法来研究地质变量。由于地质变量并不总是纯粹的随机变量，因此直接用简单的统计方法解决复杂的地质问题，有一定的局限性。

在西方，最先具体应用统计学方法的是南非学者 H.S. 西舍尔 (H.S.Sichel)。在H.S.西舍尔所用的估计量中存在着三个主要缺陷：

(1) 作为背景的概率分布必须是对数正态分布；

(2) 每次抽样必须是独立的，或说样本独立；

(3) 不考虑样本点空间位置的差异，所有样本点都是同等重要的。

实际上，这些缺陷是带有一般性的。经典统计学用于研究地质变量，至少有以下几方面的不足之处：

1．经典统计方法在研究地质变量时，不考虑样品的空间分布。在统计钻孔岩芯煤厚时，煤厚的空间分布，决定着煤层的稳定程度。如图1-1所示，在(*a*)、(*b*)两勘探线中，各有五个钻孔，煤厚数据均为1m，2m，3m，4m，5m。但由于样品的空间分布位置不同，尽管它们的均值、方差都是一样的，煤层的稳定性也不相同。这个例子直观地说明了经典统计方法不能反映地质变量的空间变化性。

2．经典概率统计学的研究对象必须是纯随机变量，且都要服从一定的已知概率分布。而许多地质变量并不是纯随机变量，而是既有随机性又有结构性（指空间分布上某种程度的相关性或连续性）的变量。

3．经典统计学所研究的变量原则上要求可以无限次地重复试验或大量的观测，但地质变量则不行。例如在某个勘探区，从一个钻孔取得某层煤的样品，一旦取出后，一般就不可能在同一个地方取得该层煤的样品了。

4．经典统计学一般要求每次抽样必须是独立进行的，即要求样本$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$中各个$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$都是相互独立的，但地质变量（如煤厚或矿石品位）就不一定独立，往往有某种程度的空间相关性。

为了寻求一种既能保持概率统计方法的有效性，又考虑到地质变量特点的新途径，便导致了地质统计学的产生。

三、地质统计学的诞生

南非地质学家、采矿工程师D.G.克立格，1951年根据南非金矿的具体情况，提出了计算矿产储量的方法，按照样品与待估块段的相对空间位置和相关程度来计算块段品位及储量，并使估计误差为最小。后来法国学者G．马特隆对克立格提出的方法进行了研究，认为D.G．克立格提出的方法是在考虑了矿化空间分布特征的基础上，合理地改进了统计学，是一种传统储量计算方法和统计学方法高度地结合起来的新方法。

为了解决在具有二重性（随机性和结构性）的地质变量的条件下使用统计方法的问题，1962年，G.马特隆在经过深入讨论和实践之后，提出了区域化变量(Regionalized Variable)的概念，产生了地质统计学(Geostatistics)。根据地质统计学理论，矿化特征可以用区域化变量的空间分布来表征。而研究区域化变量空间分布的主要数学工具是变差函数(Variogram；有的书上叫“半变异函数”，Semivariogram；二者只是在定义上相差常数系数$\frac{1}{2}$，并无本质区别)。

G．马特隆指出：“从历史的角度来看，地质统计学和采矿业是同时出现的。就反映矿化空间特征而论，那些传统的方法仍保持着它们的全部价值，现代的理论成就决不是要否定这些方法，而是把它们当作出发点，并将其提到更高的科学水平。”地质统计学的诞生为在地质勘探和采矿工程中应用新的统计学方法开拓了前景。

第二节　地质统计学的现状及优点

一、地质统计学的现状

经过20多年的发展，目前地质统计学已初步形成了一套完整的理论体系，提出了一些重要的方法和技巧，编制了一套有实际应用价值的程序包，并迅速传播到世界各地。不过它仍然是一门年轻的学科，还正在处于蓬勃发展阶段。下面介绍有关方面的情况。

1．初步形成了一套完整的理论体系

1）线性平稳地质统计学。这是地质统计学的基础部分，包括基本概念[区域化变量]，基本工具[变差函数]，基本假设[二阶平稳假设和本征(intrinsic或译为“内蕴”)假设]，基本公式[估计方差，离散(dispersion或译为“离差”)方差，正则化公式]和基本方法[普通克立格法]等内容；

2）线性非平稳地质统计学：包括泛克立格法和K阶本征函数法等；

3）条件模拟：包括对矿床的条件模拟和对采矿过程的条件模拟等；

4）平稳非线性地质统计学，包括析取克立格法等；

5）储量参数的确定。

2．提出了一些重要的方法和技巧：如正态变形法、旋转薄片法等。

3．编制了一整套实际有效的程序包和程序库：包括变差图拟合程序包、地质统计学程序库、正态变形程序库等。

4．扩大了地质统计学的应用领域。

1）在地质、采矿方面：已从传统的估计各种金属、非金属矿床储量，发展到估计煤田和油田（原地）储量；还发展到应用于水文地质学、海洋地形测深学，还能解决区域地质以及地质制图等问题；制定合理的勘探方案（如合理的勘探网密度的确定、合理勘探程度、合理勘探精度及最优井位的确定等）。

2）其它应用领域：由于区域化变量是广泛存在于自然现象之中的，因而地质统计学还可应用于地质和矿业以外的领域，如森林资源的估计、农作物估产、大气降雨量估计以及环境保护学科中的大气污染估计等。总之，凡是属于对空间分布的数据进行最优线性无偏内插估计同题，都可以应用地质统计学。由此可见，地质统计学的应用领域是相当广泛的。

地质统计学的研究与应用已由法语国家扩展到世界各地，目前美国、加拿大、意大利、英国、澳大利亚、苏联、西班牙以及许多拉丁美洲国家都相继开展了地质统计学的研究与应用。法国矿业界已把地质统计学作为储量计算的标准方法。我国在1974年开始见到国外这方面的论文。1977年我国冶金、地质系统的不少单位开展了这方面的工作，并取得了初步进展。在煤炭系统沈阳煤矿设计院等单位应用地质统计学较早。目前全国已有不少的高等院校在本科生和研究生中开设地质统计学课程。

现在地质统计学已经成为国际性的学科，国际上已经召开了三次地质统计学大会，它在数学地质中占有的地位日益提高。

二、地质统计学的优点

1．什么是地质统计学

1962年G.马特隆曾给地质统计学下了较广泛的定义："地质统计学就是随机函数的形式体系在勘探与估计自然现象上的应用。"随着地质统计学的发展，也有学者提出："地质统计学是区域化变量理论在那些展布于空间、并显示出一定结构性和随机性的自然现象上的应用。"如果更具体地从各个侧面来描述，我们则可以说："地质统计学是以变差函数作为基本工具，在研究区域化变量的空间分布结构特征规律性的基础上，综合考虑空间变量的随机性和结构性的一种数学地质方法。"

2．地质统计学的优点

地质统计学之所以能得到迅速发展和广泛应用，是因为它与传统的计算储量方法和经典概率统计方法在地质采矿的应用相比有一系列明显的优点。主要是：

1）地质统计学并不是将经典统计方法简单地用于地质、采矿领域，而是从地质、采矿的实际出发，对原有的数学理论与方法加以选择、创新，使之更有效地解决地质、采矿中的问题。

2）它最大限度地利用勘探工程所提供的各种信息。在使用克立格法估计矿床中某一块段变量的平均值时，充分考虑了待估块段与信息样品之间的空间位置关系、信息样品彼此之间的空间位置关系以及区域化变量空间分布的结构特征等方面的因素。

3）它不仅可以进行储量的整体估计，还可以进行储量的局部估计。在基本开采方法已确定的条件下，可以分别算出最小开采块段的品位和储量，使勘探报告提供的储量能

更好地满足矿山设计要求，有利于矿床勘探、矿山设计和矿山开采三个阶段的互相衔接。

4）估计精度高，至少可以避免系统误差。例如，美国亚利桑那州有一个矿山，应用传统方法的一个模型预测了1600万吨物料，其中82%是矿石，18%是废石；用地质统计学方法预测，则分别为60%和40%。最后开采实际比例为59.4%和40.6%。可见地质统计学的估计精度之高。

5）能具体地给出估计精度的概念。地质统计学中的克立格方差，是度量估计精度的一个很好的尺度，而传统方法则无法给出估计精度。在这方面地质统计学显示了明显的优越性。实际上，地质统计学中的克立格法给出的估计，还是一种线性无偏最佳（最小方差）的内插估计。

6）应用地质统计学方法与应用电子计算机相结合，使得储量计算实现了计算机化。这样既可节省人力和时间，又可提高储量计算的质量。

7）它可用于计算机自动成图，还可分块拼图。由于克立格法是一种线性无偏最佳的内插估计，因而可以为计算机自动成图提供很有力的工具和方法。国外这方面已取得明显效果。在地质领域中，由于很多成果都要用各种图件表示，故用地质统计学方法进行计算机自动成图的研究还是大有可为的。

8）地质统计学中的条件模拟可以很好地再现地质变量的变化性（或曲线的波动性）。它不仅可以模拟矿体、矿床，还可以模拟矿山开采过程，这就为矿山设计、开采最优化提供了定量依据和基础。

由于地质统计学是从研究矿产储量计算和误差估计问题产生、发展起来的，自然它在这些方面的研究比较成熟。但是它在地质勘探中应用的前景也是很大的。我们可以利用它来建立矿床地质特征、勘探方法和储量精度三者之间的关系，从而研究出矿床的合理勘探方案。

第二章　线性代数及概率统计基本知识

第一节　线性代数的基本知识

一、矩阵及其基本运算

1．矩阵基本概念

在地质统计学中，矩阵是一种不可缺少的工具。例如，对于 n 个样品、m 个变量的地质数据进行分析，并将每一样品的分析数据逐次记录如下：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}$$

其结果就是一个包含了 $(n\times m)$ 个数据的矩阵。

矩阵　$n\times m$ 个数 a_{ij} $(i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m)$ 所排列成的矩形数表称为一个 n 行 m 列的矩阵，或简称为 $n\times m$ 矩阵，并用 A 表示

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

a_{ij} 称为矩阵 A 的第 i 行第 j 列的“元素”。A 有时记作 $A=[a_{ij}]_{n\times m}$。i 称为行下标，j 称为列下标。如果 $m=n$ 时，则称矩阵 A 为 n 阶“方阵”（或 n 阶矩阵）。

矩阵中，行下标与列下标相等的元素 $(a_{11},a_{22},\cdots,a_{ii},\cdots,a_{nn})$ 的连线叫该矩阵的“主对角线”。除主对角线以外的元素都是 0 的矩阵称为“对角矩阵”。

2．矩阵运算

对于矩阵，可以施行下列基本代数运算：矩阵的加法、矩阵与数的乘法以及矩阵与矩阵的乘法。

1）矩阵的加法　两个 $(n\times m)$ 矩阵相加就是将其全部元素对应相加。例如 $A=[a_{ij}]_{n\times m}$，$B=[b_{ij}]_{n\times m}$ 则

$$A+B=[a_{ij}+b_{ij}]_{n\times m} \tag{2-1}$$

2）矩阵与数的乘法　数 α 与矩阵 A 的积 αA 就是用 α 遍乘 A 的全部元素所得到的 $(n\times m)$ 矩阵，即

$$\alpha A=[\alpha a_{ij}]_{n\times m} \tag{2-2}$$

例1　已知：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

则

$$A+B=\begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix},\quad 2A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -2 & 10 & 0 \end{bmatrix},\quad -B=\begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

3) 矩阵乘法　设 A 是一个 $(n\times m)$ 矩阵 $A=[a_{ik}]_{n\times m}$，B 是一个 $(m\times p)$ 矩阵 $B=[b_{kj}]_{m\times p}$，它们的乘积是一个 $(n\times p)$ 矩阵 C，其元素是

$$C_{ij}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\quad (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,p) \tag{2-3}$$

即

$$C=AB=\left(\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}\right)_{n\times p} \tag{2-4}$$

注： 只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，这两个矩阵才能相乘。

例2

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 0 \end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

则

$$C=AB=\begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 19 & 0 \end{bmatrix}$$

3. 矩阵运算定律

1) 矩阵的加法适合交换律和结合律：

$$A+B=B+A \tag{2-5}$$

$$[A+B]+C=A+[B+C] \tag{2-6}$$

2) 矩阵与数的乘法具有分配律及结合律：

$$\alpha[A+B]=\alpha A+\alpha B, \tag{2-7}$$

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A, \tag{2-8}$$

$$\alpha[\beta A]=(\alpha\beta)A, \tag{2-9}$$

$$\alpha[AB]=[\alpha A]B=A[\alpha B] \tag{2-10}$$

3) 矩阵的相乘适合结合律和对加法的分配律：

$$[AB]C=A[BC] \tag{2-11}$$

$$[A+B]C=AC+BC \tag{2-12}$$

$$A[B+C]=AB+AC \tag{2-13}$$

要注意的是，矩阵的乘法不适合交换律，即一般 $AB\neq BA$。事实上，当 AB 有意义时，BA 不一定有意义，即使两者都有意义，一般也不相等。

4. 零矩阵与单位矩阵

元素全为零的 $(n\times m)$ 矩阵简记作 0，称为“零矩阵”。

主对角线上元素全为 1 而其余的元素全为 0 的 n 阶方阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

称为 n 阶“单位阵”，记作 I_n 或 I。容易看出，对任一 $(n\times m)$ 矩阵 A，都有

$$I_nA=A=AI_m \tag{2-14}$$

5. 矩阵的转置

设 A 是一个 $(n\times m)$ 矩阵：$A=[a_{ij}]_{n\times m}$，将其行列互换所得的矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

称为 A 的“转置矩阵”，记为 A'。对于转置矩阵，有

$$[A']'=A, \tag{2-15}$$

$$[A+B]'=A'+B' \tag{2-16}$$

$$[\alpha A]'=\alpha A' \tag{2-17}$$

$$[AB]'=B'A' \tag{2-18}$$

如果矩阵 A 满足 $A'=A$，即

$$a_{ij}=a_{ji}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

这样的矩阵称为“对称矩阵”。

6. 向量与向量的线性相关

1）向量　只有一行或一列的矩阵相应地称之为 n 维“行向量”或 n 维“列向量”，记作

$$a=[a_1,a_2,\cdots,a_n]\text{ 或 }a=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

其中 a_i 叫做 a 的第 i 个分量 $(i=1,\ 2,\cdots,n)$。

2）向量的线性相关　若 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是 r 个向量，$k_1,k_2,\cdots,k_r$ 是 r 个数，则

$$b=k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ra_r$$

是一个向量，这时 b 叫做 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 的“线性组合”。

对于 r 个向量 $a_i(i=1,2,\cdots,r)$ 如果存在 r 个不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_r$，能使其线性组合成为零向量

$$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ra_r=0 \tag{2-19}$$

其中 $0=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 是零向量，则称这 r 个向量是“线性相关”的，否则称它们是“线性无关”的。

如果 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 线性相关，则其中至少有一个向量可以表示成其余向量的线性组合。事实上，若(2-19)式成立，并设 $k_i\neq 0$，则有

$$a_i=\left(-\frac{k_1}{k_i}\right)a_1+\cdots+\left(-\frac{k_{i-1}}{k_i}\right)a_{i-1}+\left(-\frac{k_{i+1}}{k_i}\right)a_{i+1}+\cdots+\left(-\frac{k_r}{k_i}\right)a_r$$

二、行列式及其性质

1. 二阶行列式

在初等数学里，我们已经学过用行列式解下列方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

它的解是：

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

其中

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{2-20}$$

等称为二阶行列式。对于任意的$(n \times n)$方阵的行列式可以用数学归纳法得到定义。

2. n阶行列式

设$n-1$阶矩阵的行列式已经定义。对于n阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的每个元素a_{ij}，对应着一个$(n-1) \times (n-1)$的矩阵，它由$\boldsymbol{A}$中除去第i行及第j列的元素剩下的其余元素所组成，这个矩阵的行列式称为a_{ij}的“余子式”，我们将它记为C_{ij}，则我们定义$\boldsymbol{A}$的行列式为下式的值，并记为$|\boldsymbol{A}|$：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} C_{ij} \tag{2-21}$$

行列式的值与i值的选择无关。或者，把a_{ij}的余子式冠以$(-1)^{i+j}$后，叫做a_{ij}的“代数余子式”，记作A_{ij}，即

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ij} \tag{2-22}$$

那么

$$|\boldsymbol{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \tag{2-23}$$

例如对于一个(3×3)的行列式，我们用其第一行的元素的余子式表示时，其结果是：

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

再利用二阶行列式的定义，可得

$$|A|=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

在上面如我们取 i 等于 2 或 3 也可得同样结果。

3. 行列式的性质

性质 1　在行列式中行列互换，行列式不变。

性质 2　行列式一行的公因子可以提出去，或者说以一个数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式。

性质 3　行列式中如果某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和。这两个行列式中这一行上的元素分别为两组数中对应的数，而这两个行列式除这一行以外全与原来行列式的对应的行一样。

性质 4　如果行列式中有两行相同，那么行列式为零。所谓两行相同就是说两行的对应元素相等。

性质 5　如果行列式中两行成比例，那么行列式为零。

性质 6　把一行的倍数加到另一行，行列式不变。

性质 7　对换行列式中两行的位置，行列式反号。

4. 矩阵的秩

在矩阵 A 中，任取 k 行 k 列，其交叉处元素构成的行列式称为 A 的 k 阶子式。若 A 中有一个 r 阶子式不等于零，而所有的 $r+1$ 阶子式都等于零，则称矩阵 A 的秩为 r。

若 n 阶方阵 A 的行列式不等于零，$|A|\neq 0$，则 A 的秩为 n，这时称 A 为满秩阵。

三、逆矩阵与分块矩阵

1. 逆矩阵

对于 n 阶矩阵 A，如果有 n 阶矩阵 B 存在，使

$$AB=BA=I \tag{2-24}$$

其中 I 是 n 阶单位阵，则称 B 为 A 的“逆矩阵”，并记作 $A^{-1}=B$，故有

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I$$

因 $|I|=1$，故 $|A|\neq 0$。即矩阵如果有逆阵，其行列式不为零，因而 A 必是满秩阵。

2. 奇异矩阵

设 A 为 n 阶矩阵，如果 $|A|=0$，则称 A 为“奇异阵”。从上面的讨论即知，奇异阵没有逆矩阵。

3. 伴随矩阵

设 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵，令矩阵

$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，我们称 A^* 为 A 的“伴随矩阵”。

可以直接验证：

$$AA^*=A^*A=|A|I \tag{2-25}$$

因而，若 $|A|\neq 0$，则 A 有逆阵，而且

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}\frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|}\\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|}\\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot\\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|}\end{pmatrix} \tag{2-26}$$

4. 逆矩阵的性质

由逆矩阵的定义可得：

$$[A^{-1}]^{-1}=A \tag{2-27}$$

$$[AB]^{-1}=B^{-1}A^{-1} \tag{2-28}$$

$$[A^{-1}]'=[A']^{-1} \tag{2-29}$$

5. 分块矩阵

有时将矩阵写成分块的形式是较为方便的。$(n\times m)$矩阵A可以写成

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}$$

其中A_{11}是$(r\times p)$阶矩阵，A_{12}是$r\times(m-p)$阶矩阵，A_{21}是$(n-r)\times p$阶矩阵，而A_{22}是$(n-r)\times(m-p)$阶矩阵。

如果$(m\times n)$矩阵B也分成小块

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$$

那么只要矩阵A的列的分法与矩阵B的行的分法一致，就可以直接验证有

$$A=\begin{bmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{bmatrix} \tag{2-30}$$

分块矩阵

$$A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}$$

的逆阵是

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}B^{-1}(I+CF^{-1}DB^{-1}) & -B^{-1}CF^{-1}\\ -F^{-1}DB^{-1} & F^{-1}\end{bmatrix}$$

其中I是单位阵而$F=E-DB^{-1}C$。这一结果可由计算矩阵AA^{-1}看其是否为单位阵而得。

四、线性方程组的解法与逆矩阵的求法

1. 消去法

消去法在线性代数中是最基本的方法。考虑方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=a_{1,n+1}\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=a_{2,n+1}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=a_{n,n+1}\end{cases} \tag{2-31}$$

矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2,n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

称为方程组(2-31)的增广矩阵。用消去法化简方程组(2-31)实际上就是对增广矩阵进行变换。若 $a_{11}\neq 0$，用 $-a_{21}/a_{11}$ 乘第一个方程，并加到第二个方程上，就可以消去第二个方程中的 x_1；同样用 $-a_{31}/a_{11}$ 乘第一个方程，并加到第三个方程上，就消去了第三个方程中的 x_1；一般地，用 $-a_{i1}/a_{11}$ 乘第一个方程并加到第 i 个方程上，最后可以把除第一个方程以外的 x_1 都消去，而使增广矩阵成为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \cdots & a_{nn}^{(1)} & a_{n,n+1}^{(1)} \end{bmatrix}$$

其中

$$a_{ij}^{(1)}=\begin{cases} a_{ij}-a_{1j}\cdot\dfrac{a_{i1}}{a_{11}} & \text{当 } i=2,3,\cdots,n,\ \ j=2,3,\cdots,n+1 \\ 0 & \text{当 } j=1,\ \ i\neq 1 \end{cases} \tag{2-32}$$

若 $a_{22}^{(1)}\neq 0$，用同样步骤可从第三个方程开始消去 x_2。照这样步骤进行 $(n-1)$ 次，最后使增广矩阵成为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1,n+1} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2n}^{(1)} & a_{2,n+1}^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}^{(n-1)} & a_{n,n+1}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

由最后一个方程，容易解得

$$x_n=\frac{a_{n,n+1}^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$$

求得 x_n 后，将它代入倒数第二个方程中可求得 x_{n-1}，再将 x_{n-1} 与 x_n 一起代入倒数第三个方程又求得 x_{n-2}，如此反复回代直至求出全部未知数。

2．主元素消去法

上述的消去法，有时会遇到困难，因为 a_{11} 可能就是 0。因此，我们将上述步骤改变如下。先选取系数矩阵中绝对值最大的元素，称为“主元素”，主元素所在的行、列称为“主行”、“主列”，然后利用主行消去主列中其余元素。这种方法称为“主元素消去法”。主元素消去法由于以绝对值最大者为除数，因而舍入误差影响要小一些，这是电子计算机上常采用的方法之一。上述计算过程因有回代过程，不大方便，可以略作修改，以避免回代过程。我们举一例子说明其计算步骤。

例3 解方程组

$$\begin{cases} 12x_1-3x_2+3x_3=15 \\ -18x_1+3x_2-x_3=-15 \\ x_1+x_2+x_3=6 \end{cases}$$

将计算过程列表如下（见表 2-1）：

表2-1 主元素消去法

行次	系数 x_1	系数 x_2	系数 x_3	右端项	说明
(1)	1	-3	3	15	第一步选取的主元素在本例即为-18
(2)	[-18]	3	-1	-15	
(3)	1	1	1	6	
(4)	0	-1.667	[2.333]	5.000	(4)=(1)-12×(5) 第二步选取的主
(5)	1	-0.167	0.056	0.833	(5)=(2)/(-18) 元素为2.333
(6)	0	1.167	0.944	5.167	(6)=(3)-(5)
(7)	0	-0.429	1	2.143	(7)=(4)/2.333
(8)	1	-0.143	0	0.714	(8)=(5)-0.056×(7)
(9)	0	[1.572]	0	3.144	(9)=(6)-0.944×(7)
(10)	0	0	1	3.000	(10)=(7)+(12)×0.429
(11)	1	0	0	1.000	(11)=(8)+(12)×0.143
(12)	0	1	0	2.000	(12)=(9)/1.572
(13)	1	0	0	1.000	(13)=(11) 重排次序
(14)	0	1	0	2.000	(14)=(12)
(15)	0	0	1	3.000	(15)=(10)

说明：第一步　选取系数矩阵中绝对值最大的元素，在本例中即为（－18）。（－18）即为主元素，第二行为主行，第一列为主列。用（－18）遍除（2）而得到（5）。利用（5）消去（1）及（3）中位于主列的元素，并将结果记于（4）及（6）中。

第二步　在第四及第六两行的系数中选取绝对值最大的元素作为第二次的主元素，在本例中即为 2.333。将 2.333 遍除（4）而得到（7）。利用（7）消去（5）、（6）中位于第三列的元素，结果记于（8）及（9）中。

第三步　由第九行得到第三次的主元素 1.572。以 1.572 遍除（9）得到（12）。利用（12）消去（7）、（8）中位于第二列的元素，结果记在（10）、（11）中。

第四步　重排次序。至此系数矩阵已化为单位矩阵，右端项即给出所求的解向量。

3．用消去法求逆矩阵

上述消去法还可以用于求逆矩阵。首先注意到，消去法对方程组的右端项的个数没有任何限制，也就是说，对于系数矩阵相同但有多个右端项的方程可以同时求解，利用这一点正好可以求逆矩阵。

设

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

求其逆矩阵A^{-1}。

令

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

其中 $x_{ij}(i,j=1,2,3)$ 是待定的未知数。因为$AA^{-1}=I$，所以有

$$A\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\quad A\begin{bmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解上面的三个（系数矩阵相同的）方程组，即可求得A^{-1}。也就是对增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

进行消去法，直到左边的矩阵A成为单位阵，这时，右边原来单位阵的位置上即为A的逆阵A^{-1}。

求解求逆并行方案　如果对增广矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & a_{1\,n+1} & a_{1\,n+2} & \cdots & a_{1\,n+p} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & a_{2\,n+1} & a_{2\,n+2} & \cdots & a_{2\,n+p} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & a_{n\,n+1} & a_{n\,n+2} & \cdots & a_{n\,n+p} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{2-33}$$

在第l步上施行消去变换：

$$\begin{cases} a_{kj}^{(l)} = a_{kj}^{(l-1)} / a_{kk}^{(l-1)} \\ a_{ij}^{(l)} = a_{ij}^{(l-1)} - a_{ik}^{(l-1)} a_{kj}^{(l-1)} / a_{kk}^{(l-1)} \end{cases} \quad \begin{pmatrix} j = 1,2,\cdots,2n+p \\ i \neq k \end{pmatrix} \tag{2-34}$$

其中$a_{ij}^{(l)}$表示第l次消去后，原来a_{ij}位置上的当前值。在n步之后，增广矩阵(2-33)中方阵A的位置上变成了单位阵，中间的$(n \times p)$矩阵给出方程组的p组解，而原来单位阵的位置上就变成了A的逆阵A^{-1}。

4. 求解与求逆的紧凑方案

仔细观察上面的增广矩阵(2-33)可以发现，在按(2-34)消去第一列后，得到

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{1n}/a_{11} & a_{1\,n+1}/a_{11} & \cdots & a_{1\,n+p}/a_{11} & 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11} & \cdots & a_{2n}-a_{21}a_{1n}/a_{11} & \cdot & \cdots & \cdot & -a_{21}/a_{11} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & a_{n2}-a_{n1}a_{12}a_{1n}/a_{11} & \cdots & a_{nn}-a_{n1}a_{1n}/a_{11} & \cdot & \cdots & \cdot & -a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵左边的第一列元素在后面的消去法中实际已不再起作用。因而从节省存贮单元考虑，右边原来的单位阵事先可以不存放，而把消去过程中得到的新元素放在矩阵左边相应的列内。这列新元素与其它元素一样参加其后的消去运算。这样第l步消去第k列的计算公式是：

$$a_{ij}^{(l)} = \begin{cases} a_{kj}^{(l-1)} / a_{kk}^{(l-1)} & (i = k,\ j \neq k) \\ a_{ij}^{(l-1)} - a_{ik}^{(l-1)}\ a_{kj}^{(l-1)} / a_{kk}^{(l-1)} & (i \neq k,\ j \neq k) \\ 1 / a_{kk}^{(l-1)} & (i = k,\ j = k) \\ -a_{ik}^{(l-1)} / a_{kk}^{(l-1)} & (i \neq k,\ j = k) \end{cases} \tag{2-35}$$

五、特征值与特征向量

我们来看方程组

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \tag{2-36}$$

它把一个 n 维向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变换为另一向量 $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，我们称之谓一个“线性变换”。矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

叫做“线性变换的矩阵”。方程组(2-36)可以写成

$$y=Ax$$

1．特征值与特征向量

对于一个线性变换(2-36)及其相应的矩阵A，若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$不是零向量，且

$$y=\lambda x$$

其中 λ 是一个数。也就是

$$Ax=\lambda x \tag{2-37}$$

则称 λ 为矩阵A 的“特征值”而称 x 是属于特征值 λ 的“特征向量”。

由(2-37)可得

$$(A-\lambda I)x=0$$

这是一组齐次线性方程组，具体写出，即是

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1+a_{12}x_2+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+(a_{22}-\lambda)x_2+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+(a_{nn}-\lambda)x_n=0 \end{cases}$$

x 的非平凡解只有当系数矩阵的行列式为零时才存在，即

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0 \tag{2-38}$$

将此行列式展开，其结果是 λ 的一个 n 次多项式，可写成

$$\lambda^n-\sigma_1\lambda^{n-1}+\sigma_2\lambda^{n-2}-\cdots+(-1)^n\sigma_n=0$$

其中

$$\sigma_1=\sum_{i=1}^{n}a_{ii},\qquad \sigma_2=\sum_{i<j}\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix},\quad \cdots,\quad \sigma_n=|A| \tag{2-39}$$

方程(2-38)称为A 的“特征方程”，左端的多项式称为矩阵A 的“特征多项式”。

例4 求矩阵$A=\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$的特征值及特征向量。

解：矩阵A 的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ -6 & -3-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda-3=0$$

即

$$(\lambda-3)(\lambda+1)=0$$

因而特征值是

$$\lambda_1 = 3 \text{ 和 } \lambda_2 = -1$$

属于特征值3的特征向量可由下面的齐次方程组求得：

$$\begin{cases} (5-3)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -6x_1 + (-3-3)x_2 = 0 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -6x_1 - 6x_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{x} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

其中 k_1 是一个任意常数。对于 $\lambda_2 = -1$ 有到

$$\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 = 0 \\ -6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

解得

$$\boldsymbol{x} = k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

其中 k_2 是任意常数。

由于任意常数的存在，特征向量并不是唯一的。如取其元素之平方和等于1，这时的特征向量称为是“单位化”了的特征向量。如上例中，单位化了的特征向量分别是

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ 和 } \begin{bmatrix} \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

可以证明，关于特征值有下列性质：

1）矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之和等于其对角元素之和；矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值之积等于 $\boldsymbol{A}$ 的行列式。

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素之和称为 $\boldsymbol{A}$ 的“迹”，并记作 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$，若以 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 记 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}), \tag{2-40}$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\boldsymbol{A}| \tag{2-41}$$

从这里也可以看出，如果 $\boldsymbol{A}$ 是非奇异阵（这时 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$，且 $\boldsymbol{A}$ 有逆阵存在），则 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都不等于零。

2）实对称阵的特征值都是实数。

2. 正定矩阵，半正定矩阵

实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值如果都大于零，则称为“正定矩阵”。实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值如果都不小于零，则称为“半正定矩阵”（或“非负定矩阵”）。若 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的，但不是正定的，则其最小的特征值是零且 $\boldsymbol{A}$ 是奇异阵。

第二节　概率论与数理统计初步

一、随机事件和概率

在一定条件下，必然发生的事件称为“必然事件”；在一定条件下，决不会发生的事件称为“不可能事件”。必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现。但是，在客观世界中，还大量地存在着随机性的现象。

1．随机事件

在一定条件下可能发生也可能不发生的事件称为“随机事件”，简称为“事件”。例如，考察某花岗岩体的黑云母中锡的含量是一个随机现象，而“锡的含量在10~20ppm范围内”就是一个随机事件。

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示事件。

2．事件的和、积、对立事件

事件 A 和事件 B 中至少有一个发生，这一事件称为“A与B之和”，记作 $A+B$。事件A、B同时发生，这一事件称为“A与B之积”，记为$A\cdot B$或AB。事件A不发生，这一事件称为“A的对立事件”，或“A的余事件”、“逆事件”，记为 $\bar{A}$（见图2-1）。

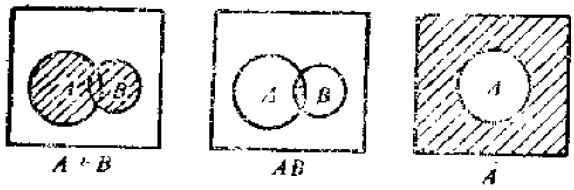


图2-1　事件的“和”、“积”与“对立事件”

随机事件虽然有其随机性或偶然性的一面，在个别的试验中，它可能发生也可能不发生。但是，在大量重复的试验中，却呈现出一定的规律性：即事件发生的频率稳定在一个常数附近。这个常数刻画了随机事件出现的可能性的大小，我们称为“概率”。

3．随机事件的概率

在一定条件下，重复作N次试验，设事件A在N次试验中发生了μ次。$\frac{\mu}{N}$称为事件A的“频率”。如果当N充分大时，事件A的频率$\frac{\mu}{N}$在某一数值p附近稳定摆动，则可以用这个数p作为衡量事件A发生可能性大小的尺度，这个数称为“事件A的概率”，记为$P(A)=p$。显然，必然事件的概率等于1，不可能事件的概率等于0。对任意随机事件A，有

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1$$

在很多次的重复试验中，随机事件A的频率$\frac{\mu}{N}$是概率$P(A)$的近似值，即

$$P(A)\approx\frac{\mu}{N}$$

如果事件A和事件B不能同时发生，则称事件A与事件B是“互不相容”的。

设互不相容的事件A与B，在N次试验中各出现了μ_a与μ_b次，由于A与B是互不相容的，故$A+B$出现的次数是$\mu=\mu_a+\mu_b$次，这样频率之间就存在着如下关系：

$$\frac{\mu}{N}=\frac{\mu_a+\mu_b}{N}=\frac{\mu_a}{N}+\frac{\mu_b}{N}$$

再由频率与概率的关系，可以得到下面的公式。

4．概率加法公式

如果事件A与事件B互不相容，则有

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \tag{2-42}$$

特别是，对立事件的和是一个必然事件，因而对立事件的概率之和等于1，即

$$P(A)+P(\bar{A})=1$$

或

$$P(\bar{A})=1-P(A) \tag{2-43}$$

5．条件概率

若A,B是两随机事件（设$P(B)\neq 0$），则

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{2-44}$$

称为“在事件B已经发生的条件下，事件A发生的条件概率”。

6．概率乘法公式

A,B为任意两个随机事件，则有

$$P(AB)=P(B)P(A/B)=P(A)P(B/A) \tag{2-45}$$

一般说来，$P(A/B)\neq P(A)$，这说明事件B的发生影响了事件A出现的概率，因为事件A与B是相互影响而不是独立的。

7．事件的独立性

如果对于事件A和事件B来说，有

$$P(A/B)=P(A)\text{和}P(B/A)=P(B)$$

那么就说“事件A和B相互独立”。这时，一事件的发生与否不影响到另一事件发生的概率。

当A,B相互独立时，乘法公式（2-45）成为

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{2-46}$$

下面再介绍两个在概率的计算中很有用的公式。

8．全概率公式

设事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$是一组互不相容的事件，而且$B_1+B_2+\cdots+B_n$是一个必然事件，这时称事件$B_1,B_2,\cdots,B_n$构成一个“互不相容的事件完备群”，则对任一事件A都有（见图2-2）：

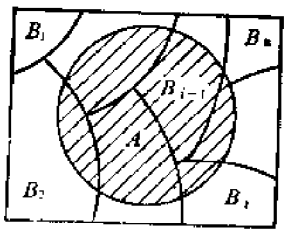


图2-2　样品空间的分割

$$A=AB_1+AB_2+\cdots+AB_n$$

由于$B_i(i=1,2,\cdots,n)$是不相容的，根据公式（2-42）有：

$$P(A)=P(AB_1)+P(AB_2)+\cdots+P(AB_n)$$

再由概率乘法公式（2-45）得到

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \cdots + P(B_n)P(A/B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i) \tag{2-47}$$

公式（2-47）称为全概率公式。

9．贝叶斯(Bayes)公式

设$B_1, B_2, \cdots, B_n$构成一个互不相容的事件完备群，对于非不可能事件 A(即 $P(A) \neq 0$)，有

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j)P(A/B_j)} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{2-48}$$

事实上，由（2-44）式我们有

$$P(B_i/A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$$

再由乘法公式及全概率公式即得（2-48）式。贝叶斯公式有时也称为“逆概率公式”。

二、随机变量及其分布

许多随机现象，每次试验的结果可以用一个数 ξ 来描述。这个数 ξ 随着试验的结果不同而变化。例如，“铁矿石样品的含铁量 ξ”，“某种产品的尺寸的误差 ξ”等等。

1．随机变量

在一定条件下，受随机因素的影响而在试验的结果中能取不同数值的量称为“随机变量”。

随机变量既然是描述随机现象的，每次试验的结果它取什么值事先不能确定，这是它偶然性的一面。但随机变量的变化是有一定规律的，它可以由随机事件的概率来刻画。

有的随机变量 ξ，它所可能取的值可以按一定次序一一列举出来，而且 ξ 以各种确定的概率取这些不同的值，这样的随机变量称为“离散型随机变量”。

2．离散型随机变量

1）离散型随机变量的概率分布　设随机变量 ξ 所可能取的值是 $x_k (k = 1,2,\cdots)$，而 $p_k (k = 1,2,\cdots)$ 是 ξ 取值 x_k 时的概率，则

$$P(\xi = x_k) = p_k \qquad (k = 1,2,\cdots) \tag{2-49}$$

称为“离散型随机变量 ξ 的概率分布”。或列成表格，称为“随机变量 ξ 的分布列”：

ξ	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
$P(\xi = x_k)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

显然 p_k 满足条件：

$$\begin{cases} p_k \geqslant 0 \\ \sum_k p_k = 1 \end{cases}$$

离散型随机变量的概率分布最常见的有二项分布和泊松(Poisson)分布。

2）二项分布　设离散型随机变量 ξ 取值 $0,1,2,\cdots,n$，而且

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n) \tag{2-50}$$

其中$0<p<1$，$p+q=1$。我们称ξ服从“二项分布”。

这里$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$是从$n$个中取$k$个的组合数。由于$C_n^k p^k q^{n-k}$正好是二项式$(p+q)^n$展开式中的第$k+1$项，因此称$\xi$是“服从二项分布的随机变量”。当$n$不大时，二项分布有专门的表可查。

服从二项分布的随机变量的例子很多。如果在相同条件下重复进行n次相互独立的试验，每次试验只有两种可能的结果，我们称之谓“成功”和“失败”，记为A和$\bar{A}$，并且已知$P(A)=p$，$P(\bar{A})=q=1-p$，那么在n次试验中，事件A出现的次数ξ是一个随机变量，这个随机变量就服从二项分布。

3）泊松分布　设离散型随机变量ξ取值0，1，2，…，而

$$P(\xi=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\qquad(k=0,1,2,\cdots)\tag{2-51}$$

其中$\lambda>0$为一常数，我们称ξ服从泊松分布。

对于泊松分布，也有专门的表可查。

泊松分布是二项分布当$p\to 0$，$n\to\infty$，$np=\lambda$时的极限分布，所以当$n\geqslant 50$，$np<5$时，二项分布可用泊松分布来近似计算：

$$C_n^k p^k q^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ \text{其中}\ \lambda=np$$

在实际观测离散型的随机变量时，在N次试验中，随机事件“$\xi=x_k$”在N次中发生了μ_k次，我们得到类似于概率分布的“频率分布”：

ξ	x_1	x_2	…	x_k	…
频率$\frac{\mu_k}{N}$	$\frac{\mu_1}{N}$	$\frac{\mu_2}{N}$	…	$\frac{\mu_k}{N}$	…

通常把频率分布称为“随机变量的统计分布或经验分布”，而把概率分布称为“随机变量的理论分布”。如果观测次数很大，则统计分布大致与理论分布相符合。

3．连续型随机变量

1）连续型随机变量的概率密度与分布函数　随机变量ξ的取值可以是任何实数或连续地充满一个区间，这样的随机变量称为“连续型随机变量”。对于连续型的随机变量，因为它有不可列无穷多个可能值，因此不可能作出其分布列。我们可以通过考察随机变量落在某一范围内的概率是多少来认识它。我们举一例来说明。

例5　从某矿中抽取250个煤的样品，确定其灰分百分比，得到下面的结果（见表2-2），可作出下面的频率分布直方图（图2-3）。

图中每个区间上的小长方形的面积等于该区间上相应的频率值。容易看出，全部长方形的总面积等于1。或者也可作成下面的累积频率多边形（图2-4）。

可以设想，如果观测数据不断增加，区间划分不断加密，则直方图上边的折线将接近一条连续的曲线$y=p(x)$（图2-5）。我们称函数$p(x)$为“随机变量ξ的概率密度”。对于任意的$a,b(a>b)$，则有

表2-2　不同灰分百分比的煤的样品分布

灰分百分比	频　数	频　率	累积频率
9.00～10.00	1	0.004	0.004
10.00～11.00	3	0.012	0.016
11.00～12.00	3	0.012	0.028
12.00～13.00	9	0.036	0.064
13.00～14.00	13	0.052	0.116
14.00～15.00	27	0.108	0.224
15.00～16.00	28	0.112	0.336
16.00～17.00	39	0.156	0.492
17.00～18.00	42	0.168	0.660
18.00～19.00	34	0.136	0.796
19.00～20.00	19	0.076	0.872
20.00～21.00	14	0.056	0.928
21.00～22.00	10	0.040	0.968
22.00～23.00	4	0.016	0.984
23.00～24.00	3	0.012	0.996
24.00～25.00	—	0.000	0.996
25.00～26.00	1	0.004	1.000
总　计	250	1.000	

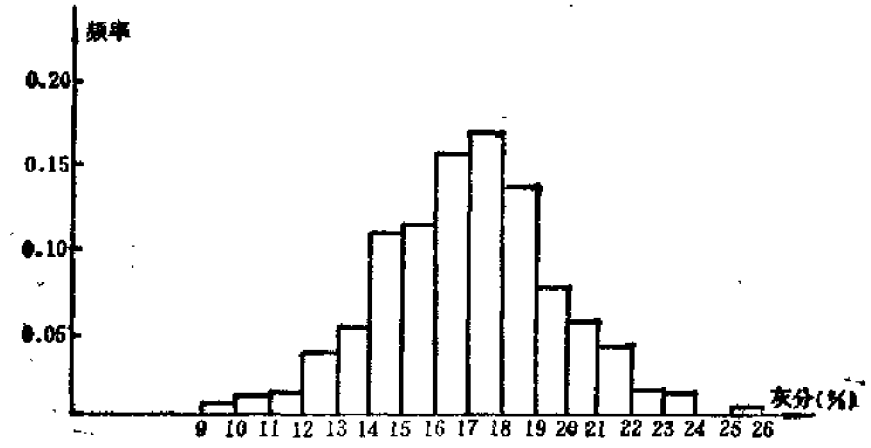


图 2－3　频率分布直方图

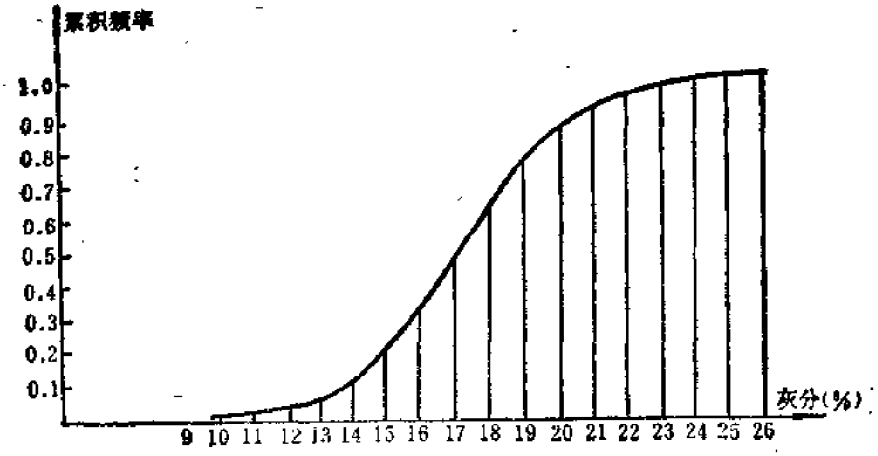


图 2－4　累积频率多边形

$$P(a\leqslant\xi<b)=\int_a^b p(x)\,dx \tag{2-52}$$

且 $p(x)$ 有下述性质：

① 概率密度是非负函数，即对一切 x 有 $p(x)\geqslant 0$；

② $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx=1$。

或者，类似地，由累积频率曲线我们得到一条位于 0 和 1 之间的非降曲线 $y=F(x)$（图 2－6）。我们称 $F(x)$ 为“随机变量 ξ 的分布函数”。对任意 x，则有

$$F(x)=P(\xi<x) \tag{2-53}$$

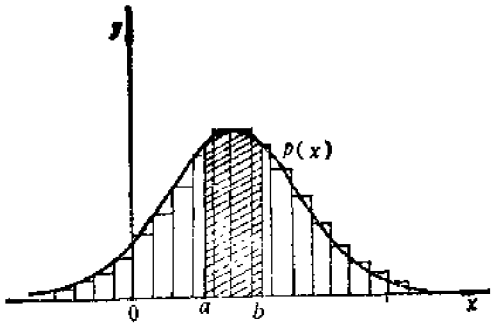


图 2－5　分布密度曲线

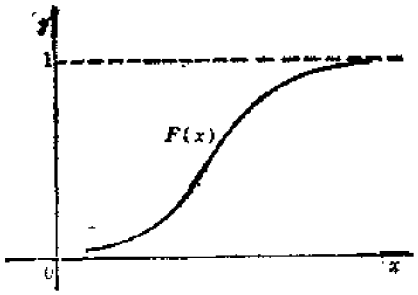


图 2－6　分布函数曲线

分布函数有下述性质：

① 对于任意的 $a<b$，有 $P(a\leqslant\xi<b)=F(b)-F(a)$；

② 当 $x_1<x_2$ 时有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

③ $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$。

连续随机变量的分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $p(x)$ 之间存在着以下的关系：

$$F(x)=P(\xi<x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx \tag{2-54}$$

而

$$F'(x)=\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} p(x)\,dx=p(x) \tag{2-55}$$

连续型的随机变量中最常见的是服从正态分布的随机变量。

2）正态分布　若连续型随机变量 ξ 的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]\qquad(-\infty<x<+\infty) \tag{2-56}$$

其中 a 及 $\sigma>0$ 都是常数，则称“ξ 服从正态分布”。并记作 $\xi\sim N(a,\sigma^2)$。

分布曲线的形状如图 2－7．它对称于直线 $x=a$，并在 $x=a$ 处达到极大值 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$，$\sigma$ 的值影响曲线的尖削或平缓（见图 2－8）

特别是当 $a=0$，$\sigma=1$ 时的正态分布称为“标准正态分布” $N(0,1)$。对于标准正态分布有详细的表格可查。

利用表格可以求得：

$P(a-2\sigma<\xi<a+2\sigma)=0.9544$

$P(a-3\sigma<\xi<a+3\sigma)=0.9973$

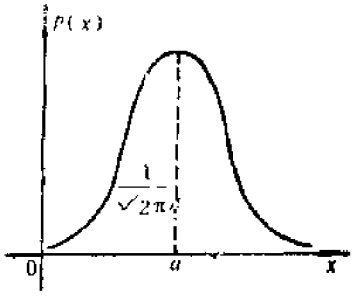


图 2-7　正态分布的分布曲线

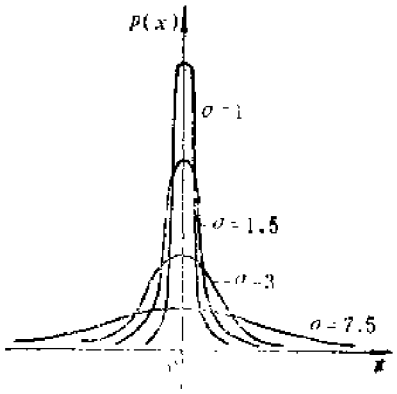


图 2-8　σ值对于正态分布曲线的影响

这表明ξ落入区间$(a-3\sigma,a+3\sigma)$几乎成为必然事件。

3）对数正态分布

所谓“对数正态分布”，也就是数据取对数后$\ln\xi$是服从正态分布的，其概率密度如下：

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\dfrac{(\ln x-a)^2}{2\sigma^2}\right] & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{2-57}$$

其中a和σ都是正的常数。分布曲线的形状如图2-9。

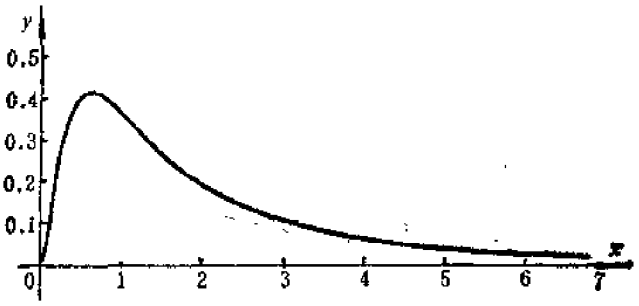


图 2-9　对数正态分布的分布曲线

4．多维随机变量

在许多实际问题中，随机现象需要同时用n个随机变量来描述。例如，研究岩石样品中多个元素的含量分布等。n个随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$的总体$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$称为“$n$维随机变量”。为了书写的简便，我们着重讨论二维随机变量，一些结果不难推广到n维随机变量的情形。

1）二维随机变量及其分布　我们称二元函数

$$F(x,y)=P(\xi<x,\ \eta<y) \tag{2-58}$$

为“二维随机变量(ξ,η)的联合分布函数”或简称为“分布函数”，而函数

$$p(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=F''_{xy}(x,y)$$

称为“二维连续型随机变量(ξ,η)的联合概率密度函数”。

显然有：

① $p(x,y)\geqslant 0$,

② 二维随机变量(ξ,η)落在平面区域D内的概率是：

$$P((\xi,\eta)\in D)=\iint_D p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{2-59}$$

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1, \tag{2-60}$$

④ $$F(x,y)=P(-\infty<\xi<x,-\infty<\eta<y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y。 \tag{2-61}$$

如果已知二维随机变量(ξ,η)的联合分布函数为$F(x,y)$，便可分别得到ξ及η的分布函数，因为

$$F_1(x)=P(\xi<x)=P(\xi<x,\eta<+\infty)=F(x,+\infty),$$

$$F_2(y)=P(\eta<y)=P(\xi<+\infty,\eta<y)=F(+\infty,y)$$

$F_1(x)$及$F_2(y)$称为“二元随机变量(ξ,η)的边际分布函数”。特别当(ξ,η)连续时，设$p(x,y)$是它的联合密度函数，我们可得ξ和η的边际概率密度分别是

$$p_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}y$$

和

$$p_2(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)\,\mathrm{d}x$$

下面我们将条件概率的概念推广到随机变量的情形。考虑当一个变量(例如ξ)已知取值x时，另一变量的统计规律。但要注意到当ξ是连续型随机变量时，ξ取一固定值的概率是零，因此我们用下面的办法来处理。考虑下面的条件概率：

$$P(y<\eta<y+\mathrm{d}y/x<\xi<x+\mathrm{d}x)=\frac{P(x<\xi<x+\mathrm{d}x,y<\eta<y+\mathrm{d}y)}{P(x<\xi<x+\mathrm{d}x)}$$

$$=\frac{p(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{p_1(x)\,\mathrm{d}x}=\frac{p(x,y)}{p_1(x)}\mathrm{d}y$$

$\frac{p(x,y)}{p_1(x)}$称为“在$\xi=x$的条件下，η的条件概率密度”，并记作$p(y/x)$，即

$$p(y/x)=\frac{p(x,y)}{p_1(x)} \tag{2-62}$$

同样，可定义在$\eta=y$的条件下，ξ的条件概率密度：

$$p(x/y)=\frac{p(x,y)}{p_2(y)} \tag{2-63}$$

若对一切x,y均有

$$p(y/x)=p_2(y)\quad\text{和}\quad p(x/y)=p_1(x)$$

则称“ξ与η相互独立”。这时有

$$p(x,y)=p_1(x)\,p_2(y) \tag{2-64}$$

2）二维正态分布　二维正态随机变量(ξ_1,ξ_2)的概率密度函数具有如下形式（见图

2-10）：

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi(\sigma_1^2\sigma_1^2-\sigma_{12}^2)^{1/2}}\cdot\exp\left\{-\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2)}\cdot\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}\cdot\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \tag{2-65}$$

其中 $\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2>0$。

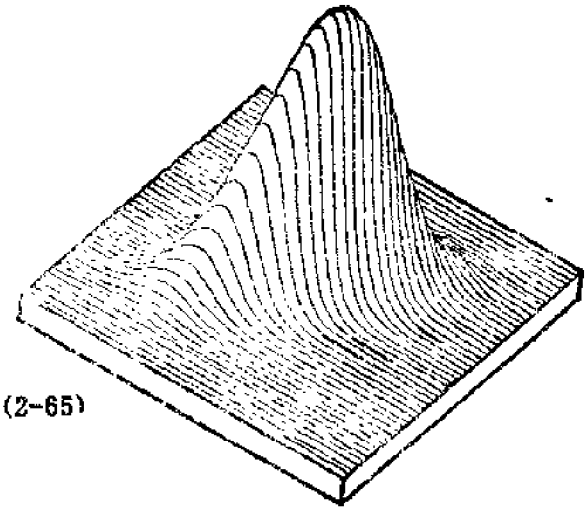


图 2-10 二维正态密度曲面

若记 $r=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$，则概率密度又可以写为：

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2-2r\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\cdot\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\} \tag{2-66}$$

如果用矩阵形式表示

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{12} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$

并注意到

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2-\sigma_{12}^2}\begin{bmatrix}\sigma_2^2 & -\sigma_{12}\\ -\sigma_{12} & \sigma_1^2\end{bmatrix}$$

则概率密度公式（2-66）也可写为

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right]$$

上面对二维随机变量的讨论直接可推广到 n 维的情形。

8）n 维正态分布　n 维正态分布的概率密度如下：

$$p(\boldsymbol{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right] \tag{2-67}$$

其中 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 是 n 维向量：

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{a}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\Sigma}$ 是一个 $n\times n$ 的正定矩阵（协方差矩阵）：

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

而$|\Sigma|$为上述矩阵的行列式。

三、随机变量的数字特征

随机变量的分布是对于随机变量的一种完全描述。但在实践中也常用到描述随机变量的某种特征的量——数字特征，其中最重要的是均值，方差和协方差。

1．均值

离散随机变量ξ可能取的值是$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，设$P(\xi = x_i) = p_i (i = 1, 2, \cdots, n, \cdots)$，则称

$$E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{2-68}$$

为ξ的“均值”。

容易看出，随机变量的均值是这个变量所可能取的值以其概率为权的加权平均。

对连续型变量ξ，设它的概率密度是$p(x)$，则称

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) \mathrm{d}x \tag{2-69}$$

为ξ的“均值”（“数学期望”）。

2．矩

我们称

$$a_k = E\xi^k \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2-70}$$

为ξ的“k阶原点矩”，称

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2-71}$$

为ξ的“k阶中心矩”。

若ξ是连续型变量，具有概率密度$p(x)$，则

$$a_k = E\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p(x) \mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2-72}$$

$$\mu_k = E(\xi - E\xi)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E\xi)^k p(x) \mathrm{d}x \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2-73}$$

均值就是一阶原点矩。二阶中心矩具有特殊的重要性，它称为随机变量ξ的“方差”。

3．方差

我们称

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 \tag{2-74}$$

为ξ的“方差”。$\sqrt{D\xi}$称为“标准差”或“均方根差”，记作σ。

若ξ是离散型的随机变量，具有概率分布$P(\xi = x_i) = p_i (i = 1, 2, \cdots)$，则

$$D\xi = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - E\xi)^2 p_i \tag{2-75}$$

若ξ是连续型随机变量，概率密度为$p(x)$，则

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)^2 p(x)\,dx \tag{2-76}$$

容易看出，方差是对随机变量的取值与其均值之间的偏差情况或分散程度的描述。方差越小，分布越集中于均值附近。

在计算中常用到下面的公式：

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \tag{2-77}$$

4．几种常见分布的均值与方差

由直接计算可得：

1）设 ξ 服从二项分布

$$P(\xi = i) = C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \quad (i = 0,1,2,\cdots,n) \quad (0 < p < 1)$$

则

$$E\xi = np, \qquad D\xi = np(1-p)$$

2）设 ξ 服从泊松分布

$$P(\xi = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \quad (i = 0,1,2,\cdots) \quad (\lambda > 0)$$

则

$$E\xi = D\xi = \lambda$$

3）设 ξ 服从正态分布

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (-\infty < x < \infty) \quad (\sigma > 0)$$

则

$$E\xi = a, \qquad D\xi = \sigma^2$$

5．均值与方差的几个性质

由均值和方差的定义不难证明下列几个常用的性质：

1）设 C 为一常数，则

$$E(C\xi) = CE\xi, \quad D(C\xi) = C^2 D\xi$$

2）设 ξ，η 是任意两个随机变量，则

$$E(\xi + \eta) = E\xi + E\eta$$

3）设 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，则

$$E(\xi \cdot \eta) = E\xi \cdot E\eta$$

4）设 ξ 与 η 是相互独立的随机变量，则

$$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$$

6．协方差和相关系数

设 ξ 与 η 是两个随机变量，

$$E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)$$

叫做 ξ、η 的“协方差”或“相关矩”，记作 $\mathrm{cov}(\xi,\eta)$ 或 $\sigma_{\xi\eta}$。即：

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \sigma_{\xi\eta} = E(\xi - E\xi)(\eta - E\eta) \tag{2-78}$$

如果 ξ,η 是连续型变量，具有概率密度 $p(x,y)$，则

$$\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E\xi)(y - E\eta)\, p(x,y)\,dx\,dy \tag{2-79}$$

在实际应用中，常常引进相关系数，其定义如下：

$$r_{\xi\eta}=\frac{\sigma_{\xi\eta}}{\sigma_\xi\sigma_\eta}=\frac{\mathrm{Cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi}\sqrt{D\eta}} \tag{2-80}$$

可以证明相关系数有下列性质：

1）任意两个随机变量的相关系数是绝对值不大于1的数，即$|r_{\xi\eta}|\leqslant 1$。

2）相互独立的随机变量的协方差等于零，因此相关系数也等于零（要注意的是，由相关系数等于零，不能推断它们是独立的）。若$\mathrm{Cov}(\xi,\eta)=0$或$r_{\xi\eta}=0$，则称随机变量ξ与η为不相关。

3）若随机变量ξ和η之间有线性关系$\eta=a\xi+b$，其中a，b为常数，则其相关系数的绝对值$|r_{\xi\eta}|=1$

7．数字特征的估计

在数理统计中称随机变量ξ取值的全体为“总体”，ξ的n次独立观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$为一个大小（或容量）为n的“样本”。现在的问题是如何根据样本来对总体的数字特征作出估计。很自然地，我们用“样本平均值”

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{2-81}$$

作为均值$E\xi$的估计值。以“样本方差”

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2 \tag{2-82}$$

作为方差σ^2的估计值。以“样本标准差”

$$s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

作为标准差σ的估计值。但是，可以证明

$$Es^2=\frac{n-1}{n}\sigma^2$$

即s^2的均值不等于总体的方差σ^2。所以若以s^2作为σ^2的估计值，就其平均意义上说，估计值偏小，所以我们改用

$$\sigma^2=\frac{n}{n-1}s^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right) \tag{2-83}$$

来作为σ^2的估计值。通常对于某个量θ的估计值$\tilde{\theta}$，如有

$$E\tilde{\theta}=\theta$$

则称$\tilde{\theta}$为θ的“无偏估计值”，因此σ^2是σ^2的无偏估计值。

对于随机变量(ξ,η)的观测值(ξ_1,η_1)，(ξ_2,η_2)，…，(ξ_n,η_n)，协方差的无偏估计值是：

$$\sigma_{\xi\eta}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}\right) \tag{2-84}$$

相关系数的估计值是：

$$r_{\xi\eta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2-n\bar{y}^2\right)}} \tag{2-85}$$

727625

第三章　区域化变量理论

区域化变量是地质统计学所研究的对象，区域化变量的理论是地质统计学的理论基础。本章首先回顾有关随机过程的基本概念，进而讨论区域化变量的理论及有关的基本公式。

第一节　随机过程与区域化变量

为了更好地理解区域化变量的概念，我们首先回顾一下有关随机过程的基本概念。

一、随机过程的概念

1．随机函数

在概率论中我们已经知道：在相同条件下进行一系列试验时，变量可以取预先不能确定的这样或那样的数值，这种的变量称之为随机变量。但是，在实际问题中，我们经常碰到试验的结果不是数字，而是函数。在相同条件下重复试验时，每次试验的结果的函数形式也不一样，这就是随机函数要研究的内容。

下面我们通过举例，引出随机函数的定义。

例1　在相同震源的条件下，地震记录的振幅值是依赖时间参数 t 的一个随机变量，记作 $A(t)$。显然，t 不同，振幅 $A(t)$ 也不同（如图3-1）。对于某一固定 t_0，其振幅 $A(t_0)$ 是一随机变量。

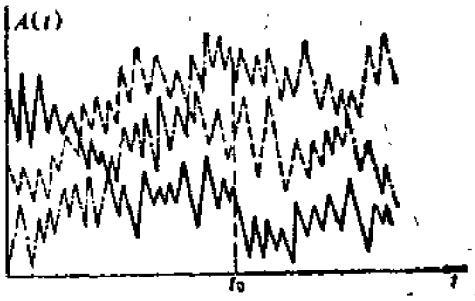


图3-1　地震振幅记录示意图

例2　在测量条件基本不变的情况下，重复进行钻孔放射性测量。由于原子核的衰变是偶然的，因此每次测得的结果不会完全相同。这种现象称为放射性涨落现象。其涨落误差（即每次计数与平均值的差）是依赖于深度参数 h 的一个随机变量，记作 $\Delta(h)$。显然，h 不同，涨落误差 $\Delta(h)$ 也不同。

例3　在稳定情况下工作的一个噪声二极管，由于存在着噪声干扰，其电压是依赖于时间参数 t 的一个随机变量，记作 $U(t)$，显然，t 不同，电压 $U(t)$ 将不同。

类似上面这样的问题，还可以举出很多。例如，在相同条件下，飞机沿固定航线多次飞行的高度变化曲线，都是依赖时间参数 t 的随机变量；在电话问题中，在 t 时刻以前接受到的呼唤次数也是依赖于 t 的随机变量；海浪起伏变化的振幅可以看成是依赖于平面坐标 (x, y) 和时间 t 的随机变量；等等。

通过以上实例，我们抽象出反映它们共同本质的数量关系，就可以得到随机函数的定义：

设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，若对每一个 $\omega\in\Omega$ 都有一个函数 $Z(x_1, x_2,$

…，$x_n;\omega$) 与之对应 ($x_i \in X_i$，$i=1$，2，…，n)，且当自变量 x_i ($i=1$，2，…，n) 取任意固定值 x_{10}，x_{20}，…，x_{n0} 时，$Z(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0};\omega)$ 为一随机变量，则称 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n;\omega)$ 为定义在 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 上的一个随机函数。

简单地说，依赖于参数的随机变量叫做随机函数。这些参数就叫做随机函数的自变量。

由于每次随机试验（或观测）的结果 ($\omega=\omega_0$) 都得到一个确定性的函数 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，叫做随机函数 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n;\omega)$ 的一个实现，故随机函数还可以定义为所有实现 $Z(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$(x_i \in X_i, i=1, 2, \cdots, n)$ 的集合。

2．随机过程

随机函数的自变量可以是一个，也可以是多个。通常把只依赖于时间参数 t ($x_1=t$) 的随机函数叫做随机过程，记为 $Z(t, \omega)$，或简记为 $Z(t)$。（见图 3－2）

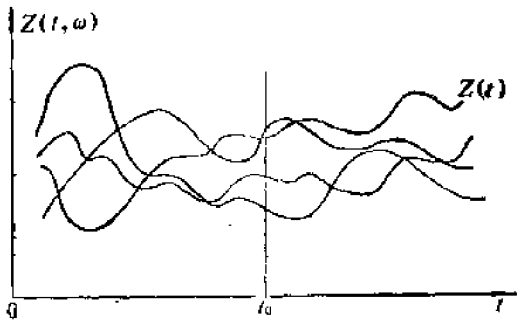


图 3－2 随机过程 $Z(t, \omega)$ 图

随机过程可以这样来理解：

一方面，当每次随机试验取得一个结果时（相当于 ω 取定值 ω_0），随机过程 $Z(t, \omega)$ 就变为一般的 t 的实值函数 $f(t)=Z(t,\omega_0)$。

另一方面，当参数 t 每取定一个固定值 t_0 时，随机过程 $Z(t, \omega)$ 就变为一个纯随机变量 $Z(\omega)=Z(t_0, \omega)$。

随机过程中参数 t 可以不是时间，而是别的含义，可以是距离或深度等，以 x 作为参数。此时，随机过程记为 $Z(x)$。

二、随机场与区域化变量

1．随机场

当随机函数 Z 依赖于多个自变量时，称为随机场。通常的是三个自变量 x_u，x_v，x_w（是空间点 x 的三个直角坐标）的随机场 $Z(x_u, x_v, x_w;\omega)$。简记为 $Z(x_u, x_v, x_w)$，或简记为 $Z(x)$。此处 x 代表空间点的位置，是三维向量 (x_u, x_v, x_w) 的简写。为了书写方便，本书其它地方也用 x 代表空间坐标向量，其维数与所研究的空间维数一致。

现实中的电场、磁场、重力场、温度场等都是空间点函数，且它们有不同程度的随机性，故也都可以看成随机场。对它们的每次观测结果，都是一个确定的空间点函数，而当我们在固定空间某点 x_0 来考察它时，则是个随机变量。

2．区域化变量

以空间点 x 的三个直角坐标 x_u，x_v，x_w 为自变量的随机场 $Z(x_u, x_v, x_w;\omega)=Z(x)$ 称为一个区域化变量。

区域化变量 $Z(x)$ 在观测前，可以看作是随机场；观测后就得到 $Z(x)$ 的一个实现（一般也记作 $Z(x)$，写法上不加区别了）。每一个实现 $Z(x)$ 就是一个普通的三元实函数（或空间点函数）。为了书写方便起见，随机场与空间点函数（即观测以前和观测后）都用 $Z(x)$ 表示。它的确切含义须视具体场合而定。

在地质、采矿领域中，许多变量可以看成是区域化变量，例如煤层的厚度、顶底板标高、地下水头高度、矿石的品位等。对于煤厚度这种地质现象，可以看成是区域化变

量的二维空间分布，而矿化现象可以看成是金属元素含量这个区域化变量在三维空间中的变化。区域化变量正是地质统计学研究的对象。

区域化变量同时反映地质变量的结构性与随机性。假设$Z(x)$表示煤层厚度的变量。一方面当空间一点x固定后，煤层厚度的取值$Z(x)$是不确定的，可以看成是一个随机变量，这就体现了其随机性；另一方面，在空间两个不同点x及$x+h$（此处h表示二维空间中的距离向量，它的模表示x点与$x+h$点的距离，为了方便起见，本书其他地方亦以h表示距离向量，其维数与所研究的空间维数一致）处的煤厚$Z(x)$与$Z(x+h)$具有某种程度的自相关性，一般而言$|h|$越小，相关性越好。这种自相关性反映了地质变量的某种连续性和关联性，体现了其结构性的一面。这正如G．马特隆在研究金属矿的品位时指出的那样："一个矿床中的矿石品位的分布具有混杂的特征，其中一部分是结构性的，而另一部分则是随机性的……。因此，对任一矿床进行科学的（至少是符合实际的）估计时，必须既要考虑到矿床固有的结构性，又要考虑到矿床固有的随机性。"

从地质学的观点来看，区域化变量可以反映地质变量的以下特征：

1）局部性　区域化变量只限于一定的空间内（例如，矿体或矿层范围内），这一空间称为区域化的几何域。而区域化变量一般是按几何承载来定义的，承载变了就会得到不同的区域化变量。

2）连续性　不同的区域化变量具有不同的连续性。有些变量的空间变化具有良好的连续性（如煤层的厚度），而有些变量则具有平均的连续性（如矿石的品位），另外一些变量则连这种平均意义下的连续性也不存在了（例如，金的品位）。

3）异向性　区域化变量在各个方向上如果性质相同，则称为各向同性；若在各个方向上性质不同，则称为各向异性。

4）可迁性　区域化变量在一定范围内具有明显的空间相关，但超过这一范围之后，相关关系变得很弱，甚至消失。这一性质称为可迁性。

由于区域化变量具有上述特殊性质，经典概率统计方法不能处理这类问题，而地质统计学中的一个基本工具——变差函数（或叫变异函数、变程方差函数），就能较好地研究区域化变量的这种特殊性质。

第二节　区域化变量的数字特征与变差函数

一、区域化变量的数字特征

在概率论中我们知道，要完整地描述随机变量的特征，必须给出它的分布函数或分布密度，对于区域化变量也是一样。但是，在许多情况下，我们并不需要知道区域化变量的全部特征，而只要知道它的某些数字特征就够了。这些特征象数字特征刻画随机变量一样是很重要的。

这里我们主要研究区域化变量的平均值、方差和相关函数。它们都是由随机变量的数字特征引伸出来的，二者很类似。不过随机变量的数字特征是数字，而区域化变量的数字特征一般都是函数。

1．区域化变量的平均值函数

设$Z(x)$为一区域化变量，当x固定（$x=x_0$）时，$Z(x_0)$就是一个随机变量，它的平

均值为 $E[Z(x_0)]$。当 x 看成变量时，$E[Z(x)]$就是 x 的一个函数，这个函数就是区域化变量 $Z(x)$ 的平均值。

定义：区域化变量 $Z(x)$ 的平均值是这样一个函数 $E[Z(x)]$，对于自变量 x 的每一个给定值 x_0，它的函数值等于区域化变量 $Z(x)$ 在 x_0 值处的平均值，即

$$E[Z(x)]_{x=x_0} = E[Z(x_0)] \tag{3-1}$$

显然，$E[Z(x)]$是区域化变量 $Z(x)$ 的所有实现的一个平均函数。

通常把区域化变量 $Z(x)$ 与其平均值 $E[Z(x)]$的差，叫做中心化的区域化变量，记做 $Z_0(x)$，即

$$Z_0(x) = Z(x) - E[Z(x)] \tag{3-2}$$

根据随机变量平均值的性质，可知

$$\begin{aligned} E[Z_0(x)] &= E[Z(x) - E(Z(x))] \\ &= E[Z(x)] - E[E(Z(x))] \\ &= E[Z(x)] - E[Z(x)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

这说明中心化的区域化变量的平均值恒等于零。

2．区域化变量的方差函数

设 $Z(x)$ 为一区域化变量，当 x 固定 $(x = x_0)$时，$Z(x_0)$就是一个随机变量，它的方差为 $D^2[Z(x_0)]$。当 x 看成变量时，$D^2[Z(x)]$就是 x 的一个函数，这个函数就是区域化变量 $Z(x)$ 的方差。

定义：区域化变量 $Z(x)$ 的方差是这样一个函数 $D^2[Z(x)]$，对于自变量 x 的每一个给定值 x_0，它的函数值等于区域化变量 $Z(x)$ 在 x_0 值处的方差，即

$$D^2\{Z(x)\}|_{x=x_0} = D^2\{Z(x_0)\} \tag{3-3}$$

根据概率论中方差的定义和性质可知：

$$\begin{aligned} D^2\{Z(x)\} &= E\{Z(x) - E[Z(x)]\}^2 \\ &= E\{[Z(x)]^2\} - \{E[Z(x)]\}^2 \end{aligned} \tag{3-4}$$

方差函数也可以记为：$\mathrm{Var}\{Z(x)\}$。

注：这里使用 $D^2\{Z(x)\}$代表方差函数，这种记号与概率论中传统的方差记号 D 不一样，这是因为 $D^2\{Z(x)\}$还依赖于空间点的位置 x，故二者是有区别的。

3．协方差函数

协方差函数是随机过程中的数字特征。它是随机过程 $Z(t)$ 在时刻 t_1，t_2 处的两个随机变量 $Z(t_1)$ 和 $Z(t_2)$ 的二阶混合中心矩，其定义为：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\{Z(t_1),\ Z(t_2)\} &= E\{[Z(t_1) - E(Z(t_1))]\cdot[Z(t_2) - E(Z(t_2))]\} \\ &= E[Z(t_1)\cdot Z(t_2)] - E[Z(t_1)]\cdot E[Z(t_2)] \end{aligned} \tag{3-5}$$

也可简记为 $C(t_1, t_2)$，它称为随机过程 $Z(t)$ 的自协方差函数，简称协方差函数。

类似地，对于区域化变量 $Z(x)$，将上式中的两时刻 (t_1, t_2) 变为空间中的两点 x 和 $x+h$ 处的两个随机变量 $Z(x)$ 和 $Z(x+h)$，仿照公式（3-5）可得到相应的二阶混合中心矩：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\{Z(x),\ Z(x+h)\} &= C(x,\ x+h) \\ &= E[Z(x)\cdot Z(x+h)] - E[Z(x)]\cdot E[Z(x+h)] \end{aligned} \tag{3-6}$$

它称为区域化变量 $Z(x)$ 的自协方差函数，简称协方差函数。

一般来说，$C(x, x+h)$ 是个依赖于空间点 x 和向量 h 的函数。

特殊地，当 $h=0$ 时，协方差函数等于（静态）方差函数，即：

$$\begin{aligned} C(x, x+0) &= E[Z(x)]^2 - \{E[Z(x)]\}^2 \\ &= D^2[Z(x)] \\ &= \mathrm{Var}[Z(x)] \end{aligned} \tag{3-7}$$

二、变差函数

变差函数既能描述区域化变量的空间结构性，也能描述其随机性，它是地质统计学所特有的基本工具。变差函数也是进行地质统计学计算的基础。

1．变差函数的定义

假设空间点 x 只在一维 x 轴上变化，我们把区域化变量 $Z(x)$ 在 x，$x+h$ 两点处的值之差的方差之半定义为 $Z(x)$ 在 x 方向上的变差函数，记为 $\gamma(x, h)$，即

$$\begin{aligned} \gamma(x,h) &= \frac{1}{2}\mathrm{Var}[Z(x) - Z(x+h)] \\ &= \frac{1}{2}E[Z(x) - Z(x+h)]^2 - \frac{1}{2}\{E[Z(x) - Z(x+h)]\}^2 \end{aligned} \tag{3-8}$$

注：有的地质统计学书中，把 $2\gamma(x, h)$ 定义为变差函数，于是 $\gamma(x, h)$ 就称为半变差函数。为了叙述和书写的方便，不要老带个“半”字，本书将（3-8）式定义为变差函数，也就相当于其他书中所说的“半变差函数”，丝毫不影响其性质。

2．关于变差函数的几点说明

1）如果 $\gamma(x, h)$ 与 x 取值无关，只依赖于 h（滞后，或称距离、间隔、步长），则可将变差函数记为 $\gamma(h)$。以 h 为横坐标，以 $\gamma(h)$ 的值为纵坐标作出的图形叫变差图。

2）如果点 x 和 h 是在二维（或三维）空间中变化时，则要考虑二维（或三维）变差函数。但它们都是以一维变差函数为基础的，只不过要考虑各向同性或各向异性，还要考虑结构的套合而已（结构套合在下一章介绍）。

第三节　平稳性假设与本征假设

由上一节对变差函数的讨论可知，公式（3-8）是一个理论数学表达式，在实际应用中，往往是通过观察值对 $\gamma(x, h)$ 作出估计。欲得到公式（3-8）的估计值，就要估计数学期望 $E[Z(x) - Z(x+h)]^2$ 以及 $E[Z(x) - Z(x+h)]$ 的值。根据数理统计知识，可以通过求 $[Z(x) - Z(x+h)]^2$ 以及 $[Z(x) - Z(x+h)]$ 的平均数来估计上述的数学期望值，因此必须要有 $Z(x)$ 和 $Z(x+h)$ 的若干实现（或观测值）。但是在地质采矿工作中在点 x 和 $x+h$ 上只能得到一对这样数据 $Z(x)$ 和 $Z(x+h)$，因为不可能在空间同一点上取得第二个样品。为了克服这个困难，就需要对区域化变量 $Z(x)$ 提出一些假设。

一、二阶平稳假设

当区域化变量 $Z(x)$ 满足下列二条件时，则称 $Z(x)$ 满足二阶平稳（或弱平稳）：

① 在整个研究区域内，区域化变量 $Z(x)$ 的数学期望存在，且等于常数，即

$$E[Z(x)] = m \text{（常数）}, \forall x \tag{3-9}$$

② 在整个研究区域内，$Z(x)$的协方差函数存在且相同（即只依赖于滞后h，而与x无关），即

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}\{Z(x),\ Z(x+h)\}\\&=E[Z(x)\cdot Z(x+h)]-E[Z(x)]\cdot E[Z(x+h)]\\&=E[Z(x)\cdot Z(x+h)]-m^2\\&\triangleq C(h),\quad \forall x,\quad \forall h\end{aligned}\tag{3-10}$$

当$h=0$时（3-10）式变为

$$\begin{aligned}C(0)&=\mathrm{Cov}\{Z(x),\ Z(x+0)\}\\&=\mathrm{Cov}\{Z(x),\ Z(x)\}\\&=\mathrm{Var}\{Z(x)\},\quad \forall x\end{aligned}\tag{3-11}$$

即方差存在且为常数。

但是，在实际工作中连二阶平稳假设也不能满足，故提出本征假设。

二、本征假设

当区域化变量$Z(x)$的增量$[Z(x)-Z(x+h)]$满足下列二条件时，则称$Z(x)$满足本征假设，或说$Z(x)$是本征的：

① 在整个研究区域内有

$$E[Z(x)-Z(x+h)]=0,\quad \forall x,\quad \forall h\tag{3-12}$$

② 增量$[Z(x)-Z(x+h)]$的方差函数存在且平稳（不依赖于x），即

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}[Z(x)-Z(x+h)]\\&=E[Z(x)-Z(x+h)]^2-\{E[Z(x)-Z(x+h)]\}^2\\&=E[Z(x)-Z(x+h)]^2,\quad \forall x,\quad \forall h\end{aligned}\tag{3-13}$$

由此可见，在地质统计学的实际研究中，区域化变量$Z(x)$通常作平稳假设(Stationarity assumption)或本征假设(intrinsic assumption)，此时有$E[Z(x)-Z(x+h)]=0$，$\forall h$，且与x无关，则变差函数公式（8-8）变为

$$\gamma(h)=\frac{1}{2}E[Z(x)-Z(x+h)]^2\tag{3-14}$$

根据式（3-14），我们对变差函数也可以这样理解：在以向量h相隔的两点x，$x+h$处区域化变量的两值$Z(x)$，$Z(x+h)$的变异程度，可以用它的增量平方的数学期望来表示。

参照公式（3-13）、（3-14），我们可以得到

$$\mathrm{Var}\{Z(x)-Z(x+h)\}=2\gamma(h)\tag{3-15}$$

这样，本征假设条件②也可以说成是区域化变量$Z(x)$的变差函数存在且平稳。

三、二阶平稳假设与本征假设之比较

简单说来，二阶平稳假设是讨论区域化变量$Z(x)$本身的特征；而本征假设是研究区域化变量增量$[Z(x)-Z(x+h)]$的特征的。总的说来，二阶平稳假设要求较强，本征假设要求较弱。即如果某个区域化变量$Z(x)$是二阶平稳的，那么它一定是本征的；反之若已知$Z(x)$是本征的，则不一定是二阶平稳的。下面几点可以说明之：

1．二阶平稳假设的第一个条件是$E[Z(x)]=m$，$\forall x$存在。显然，由它可推出本征假设的第一个条件，$E[Z(x)-Z(x+h)]=0$。但本征假设的第一个条件，只要区域

化变量的增量 $[Z(x) - Z(x+h)]$ 的数学期望存在且为零即可，它可容许 $E[Z(x)]$ 不存在，故推不出二阶平稳假设。例如，设区域化变量 $Z(x) = Z(x+h) = y$，$\forall x$，$\forall h$。y 为一服从柯西分布的随机变量，其概率密度为

$$p(y) = \frac{1}{\pi(1+y^2)} \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

则 $E[Z(x)] = E[Z(x+h)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{\pi(1+y^2)} \mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(1+y^2)}{1+y^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[\ln|1+y^2|]_{-\infty}^{+\infty}, \text{ 不存在。}$$

故 $Z(x)$ 不满足二阶平稳假设的第一个条件。而 $E[Z(x) - Z(x+h)] = E[y-y] = E[0] = 0$，即存在且为零。即 $Z(x)$ 满足本征假设的第一个条件。

2．由二阶平稳假设的条件可以推出本征假设的第二个条件。

事实上，在二阶平稳假设被满足的情况下有

$$\begin{aligned} 2\gamma(h) &= E[Z(x) - Z(x+h)]^2 \\ &= E[Z(x)]^2 + E[Z(x+h)]^2 - 2E[Z(x)Z(x+h)] \end{aligned} \tag{3-16}$$

由（3-11）式可知：

$$\begin{aligned} C(0) &= \mathrm{Var}[Z(x)] \\ &= E[Z(x)]^2 - \{E[Z(x)]\}^2 \\ &= E[Z(x)]^2 - m^2, \quad \forall x \end{aligned}$$

故有

$$E[Z(x)]^2 = C(0) + m^2 \tag{3-17}$$

由于 x 点是任意的，将 x 换成 $x+h$ 代入上式得：

$$E[Z(x+h)]^2 = C(0) + m^2 \tag{3-18}$$

又由（3-10）式有

$$E[Z(x) \cdot Z(x+h)] = C(h) + m^2 \tag{3-19}$$

将（3-17），（3-18），（3-19）代入（3-16）并整理得：

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \tag{3-20}$$

这就是在二阶平稳条件下，变差函数 $\gamma(h)$，验前方差 $C(0)$ 及协方差函数 $C(h)$ 三者之间的关系式。由此可见，只要后二者存在，变差函数 $\gamma(h)$ 一定存在。这就说明了二阶平稳假设的第二个条件要求至少不比本征假设第二个条件的要求弱。由于二阶平稳假设要求 $C(h)$ 存在，而本征假设则要求 $\gamma(h)$ 存在，确有实例证明 $C(h)$ 不存在，但 $\gamma(h)$ 存在，这就说明了二阶平稳假设的要求比本征假设的要求强。

事实上，在一维随机游中：

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{当随机数为偶数时；} \\ -1, & \text{当随机数为奇数时；} \end{cases} \qquad i = 1, 2, \cdots, n, \text{ 且 } x_i \text{ 独立。}$$

令一维区域化变量 $Z_n = Z(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$。这就是一维随机游走模型。

$$E\{Z_n\} = E\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\} = \sum_{i=1}^{n} E\{x_i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2}\right]$$
$$= 0$$

又因诸 x_i 独立，故

$$\mathrm{Var}\{Z_n\} = \mathrm{Var}\left\{\sum_{i=1}^{n} x_i\right\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\{x_i\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \{E(x_i^2) - [E(x_i)]^2\}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} E(x_i^2)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[1^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2}\right]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} 1$$
$$= n \to \infty \text{（当} n \to \infty \text{时）}$$

故 Z_n 的方差是无限的，即方差函数不存在。

但另一方面，Z_n 增量的方差存在（即变差函数存在）。现证明如下：

设 $m > n$（m，n 均为正整数），令 $h = m - n$，于是有

$$\gamma(h) = \gamma(m-n)$$
$$= \frac{1}{2}E[Z_m - Z_n]^2$$
$$= \frac{1}{2}E\left[\sum_{i=1}^{m} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i\right]^2$$
$$= \frac{1}{2}E[x_{n+1} + \cdots + x_m]^2$$
$$= \frac{1}{2}E\left[\sum_{i=n+1}^{m} x_i^2 + 2\sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j>i}^{m} x_i \cdot x_j\right]$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{m} E(x_i^2) + \sum_{i=n+1}^{m}\sum_{j>i}^{m} E(x_i) \cdot E(x_j)$$
$$= \frac{m-n}{2} = \frac{h}{2}$$

故变差函数存在且平稳。

这就说明了，本征假设的要求确实比二阶平稳假设的要求弱。

四、准二阶平稳假设及准本征假设

如果区域化变量只在有限大小的邻域（例如以 a 为半径的圆）内是二阶平稳（或本征）的，则称此区域化变量是准二阶平稳的（或准本征的）。

准二阶平稳（或准本征）假设是一种折衷方案，它既要考虑到平稳的范围大小，又要顾及到有效数据的多少。如果范围确定大了，往往不易满足二阶平稳（或本征）的条件；若范围确定太小，则区域内的数据点就太少了。故确定范围的大小应兼顾上述两个方面。

由于准平稳性在实际中能够得到满足，而且这种假设已能满足地质统计学的要求，因此后面在讨论线性地质统计学时，都假定 $Z(x)$ 满足（准）二阶平稳假设条件，或至少满足（准）本征假设条件。

第四节　实验变差函数的计算公式

实验变差函数就是根据观测数据构造变差函数 $\gamma(h)$ 的估计值 $\gamma^*(h)$。

有了二阶平稳假设或本征假设，$Z(x)$ 的增量 $[Z(x)-Z(x+h)]$ 只依赖于分隔它们的 h（模和方向），而不依赖于具体位置 x。这样，被向量 h 分割的每一对数据 $\{Z(x_i), Z(x_i+h)\}(i=1, 2, \cdots, N(h))$ 可以看成是 $\{Z(x), Z(x+h)\}$ 一次不同的实现（此处 $N(h)$ 是被向量 h 相隔的数据对的对数）。此时我们可以根据在 x 轴上相隔为 h 的点对 x_i 和 x_i+h 上的观测值 $\{Z(x_i), Z(x_i+h)\}(i=1, 2, \cdots, N(h))$，用求 $[Z(x_i)-Z(x_i+h)]^2$ 的算术平均值的方法来计算 $\gamma^*(h)$。于是得到：

$$\gamma^*(h)=\frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(x_i)-Z(x_i+h)]^2 \tag{3-21}$$

这就是实验变差函数的基本计算公式。

对不同的滞后距 h，公式（3-21）可以算出相应的 $\gamma^*(h)$ 值来。对于每一个滞后距 h_i，把诸点 $[h_i, \gamma^*(h_i)]$ 在 h—$\gamma^*(h)$ 图上标出，再将相邻的点用线段连结起来所得到的图形，称为实验变差函数图（或实验变差图）。

现在我们可以解决第一章中一开头就提出的问题：在两个煤田的两条勘探线上测得的数据，其均值、方差都相同，如何区分其煤厚变异性的问题。

例1　设 A 井田煤厚变量 $Z(x)$ 为一区域化变量，且满足本征假设的条件，在某一勘探线上，测得煤厚数据为（见图 3-3）：

$$Z(500)=2,\ Z(1000)=4,\ Z(1500)=3,\ Z(2000)=1,\ Z(2500)=5;$$

在 B 井田的某一勘探线上，以同样的间距测得煤厚数据为（见图 3-3）：

$$Z(500)=1,\ Z(1000)=2,\ Z(1500)=3,\ Z(2000)=4,\ Z(2500)=5$$

试分别求出 A, B 两井田中勘探线上的实验变差函数值 $\gamma^*(h)$, $\gamma^*(2h)$, $\gamma^*(3h)$, $\gamma^*(4h)$。取 $h=500$。

解：由于研究的是某一勘探线上的煤厚变化情况，故可将 $Z(x)$ 看成是一维区域化变量。由公式（3-21）可得：

$$A\text{井田：}\ \gamma^*(h)=\gamma^*(500)=\frac{1}{2\times 4}\times(2^2+1^2+2^2+4^2)=\frac{25}{8}=3.125$$

$$\gamma^*(2h)=\gamma^*(1000)=\frac{1}{2\times3}\times(1^2+3^2+2^2)=\frac{14}{6}=2.667$$

$$\gamma^*(3h)=\gamma^*(1500)=\frac{1}{2\times2}\times(1^2+1^2)=\frac{2}{4}=0.5$$

$$\gamma^*(4h)=\gamma^*(2000)=\frac{1}{2\times1}\times(3^2)=\frac{9}{2}=4.5$$

同理可得B井田：$\gamma^*(h)=0.5$，$\gamma^*(2h)=2$，$\gamma^*(3h)=4.5$，$\gamma^*(4h)=8$

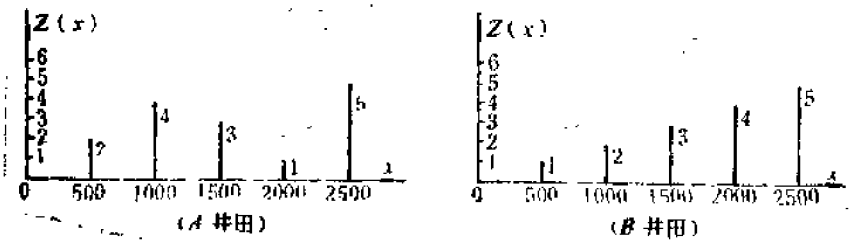


图 3-3 一维区域化变量示意图

显然这两组煤厚数据的实验变差函数值不同，其实验变差图如图 3-4 所示。这就说明了经典统计学的均值与方差不能区分的两组数据，变差函数能够区别。

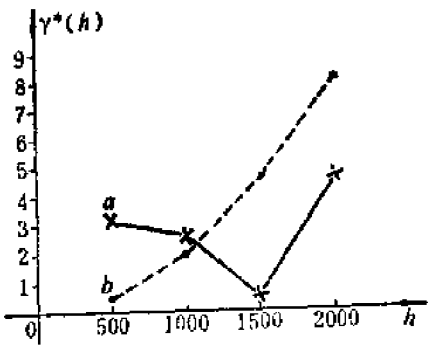


图 3-4 两条实验变差函数曲线的比较

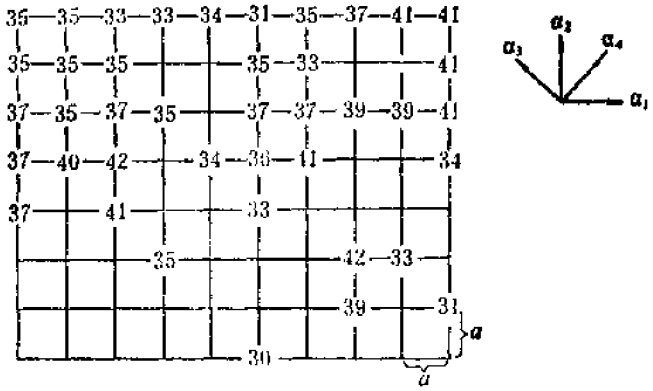


图 3-5 二维区域化变量$Z(x)$数据网图

例2 设$Z(x)$为二维区域化变量，满足本征假设。在如图 3-5 所示的正方形网格上，有若干已知数据，小正方形边长为a。试计算出α_1，α_2，α_3，α_4四个方向上的实验变差函数值，每个方向只求出三个滞后距$|h|$的变差函数值。并作出α_1和α_3方向的实验变差图。

解：由式(3-21)分别计算各个方向上的$\gamma^*(h)$，且在每个方向上取三个不同的$|h|$值计算之：

1）对方向α_1($|h|=a$)：

$$\gamma^*(a)=\frac{1}{2\times24}(197)=4.10$$

$$\gamma^*(2a)=\frac{1}{2\times19}(336)=8.84$$

$$\gamma^*(3a) = \frac{1}{2\times 18}(435) = 12.08$$

2）对方向α_2($|h| = a$)：

$$\gamma^*(a) = \frac{1}{2\times 22}(187) = 4.25$$

$$\gamma^*(2a) = \frac{1}{2\times 18}(296) = 8.22$$

$$\gamma^*(3a) = \frac{1}{2\times 15}(327) = 10.90$$

3）对方向α_3($|h| = \sqrt{2}a$)：

$$\gamma^*(\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 19}(191) = 5.03$$

$$\gamma^*(2\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 16}(381) = 11.91$$

$$\gamma^*(3\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 10}(345) = 17.25$$

4）对方向α_4($|h| = \sqrt{2}a$)：

$$\gamma^*(\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 18}(233) = 6.47$$

$$\gamma^*(2\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 14}(315) = 11.25$$

$$\gamma^*(3\sqrt{2}a) = \frac{1}{2\times 8}(247) = 15.44$$

α_1和α_3方向的实验变差函数图如图3－6所示。

以上二例都是在数据分布规则（列线或网格状）的情况下计算实验变差函数值的方法。在实际工作中，数据点的分布往往是不完全规则的，例如钻孔的分布不规则等。对于在数据点分布不规则的情况下如何计算实验变差函数值，将在下一章讨论。

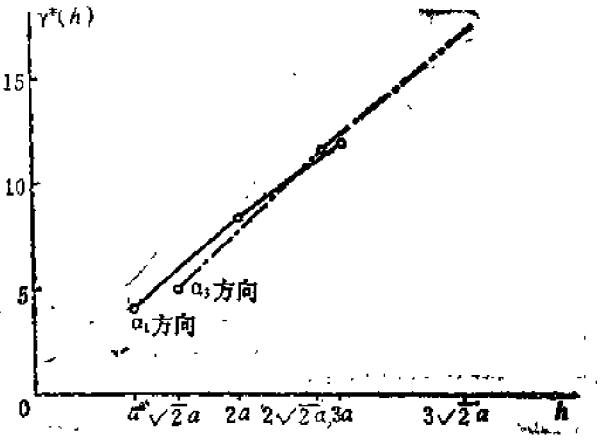


图3－6 α_1，α_3方向的实验变差图

需要指出的是，在数据点规则分布的情况下，随着点对之间距离($|h|$)的增大，参加计算的样品对数逐渐减少，这就意味着变差函数曲线接近原点处的点比远离原点处的点可靠，这一点对于变差图的解释是很重要的。

第五节 估计方差

在地质实际中，我们一般是根据区域化变量$Z(x)$位于x_i($i = 1, 2, \cdots, n$)点上的观

测值 $Z(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 来估计该区域化变量在某个待估块段 V 上的平均值 Z_v。而任何一种估计都会有误差，储量计算也不例外。以煤炭储量计算的“多边形法”为例，设一钻孔位于某个多边形块段的中心，以该钻孔的见煤厚度作为该块段的平均煤厚的估计值，这自然是有误差的。假设某个井田被分为若干个这样的块段，每个块段都有其相应的误差。当然我们总希望误差的平均值为零，即不存在系统误差。误差的大小与很多因素有关，但主要的因素是决定于估计量的构造。根据概率统计的理论，一个好估计量应是方差最小的无偏估计。我们的目的就是对于某种估计量，研究其估计误差在其均值上下的波动情况——估计方差。

一、估计方差的定义

1．估计方差的定义

设 $Z(x)$ 为二阶平稳的区域化变量，Z_v 为该区域化变量在某一待估块段 V 上的真值，Z^* 为其估计量，则估计误差为 $R(x)=Z_v-Z^*$，$E\{R(x)\}=E\{Z_v-Z^*\}=m_R$。若 $R(x)$ 是二阶平稳的，则称

$$\mathrm{Var}\{R(x)\}=E(Z_v-Z^*)^2-m_R^2 \tag{3-22}$$

为 Z^* 对 Z_v 的估计方差，记为 σ_R^2，即

$$\sigma_R^2=E(Z_v-Z^*)^2-m_R^2 \tag{3-23}$$

由此可见 m_R 表示平均估计误差的大小，而 σ_R^2 则表示估计误差对其分布中心 m_R 的离散程度的大小，这就是估计方差的实质含义。

2．线性估计量

设 $Z(x_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 为区域化变量 $Z(x)$ 在 n 个点上的取值（观测以前是随机的，观测以后则认为是随机变量的实现）。待估块段 V 的真实值为 $Z_v(x)$（或简记为 Z_v），x 为 V 的中心。一般说来，Z_v 的估计量 Z^* 是诸 $Z(x_i)$ 的函数，设为

$$Z^*=f\{Z(x_1),\ Z(x_2),\ \cdots,\ Z(x_n)\} \tag{3-24}$$

我们总希望函数 f 满足：

1）无偏：$E(Z_v-Z^*)=0$；

2）估计方差 $\sigma_R^2=E(Z_v-Z^*)^2$ 最小。

以此来确定函数 f。但实际上要求出1）、2）的数学期望，在不知道分布函数的情况下是不可能的。但我们不去讨论一般的估计量函数，而是只限定 f 为线性函数，即我们取线性估计量。

$$Z^*=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z_i \tag{3-25}$$

并使得该估计量满足1）、2）的要求，其中 λ_i 为权系数。后面我们将在无偏性和最小方差性的条件下确定权系数 λ_i。实际上，线性平稳地质统计学正是在采用线性估计量及二阶平稳（或本征）假设条件下来研究问题的。

二、估计方差的计算

设 $Z(x)$ 为二阶平稳的区域化变量，具有数学期望 m，协方差函数 $C(h)$ 及变差函数 $\gamma(h)$。假设要估计的是中心点在 x，体积为 V 的块段（或叫待估块段）上的区域化变量的平均值。下面我们分别讨论信息样品 v 为离散型（即 $v=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\}$）和信息样品 v 为连续型（即 v 为某个区域）时，用 v 的平均值来估计待估块段 V 的平均值时的

估计方差的计算公式（如图3-7所示）。

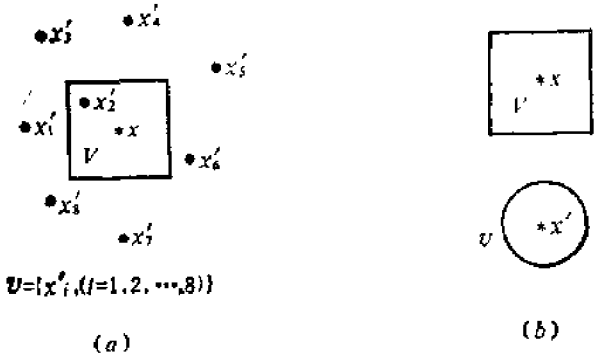


图3-7 待估块段与信息样品

1．离散型信息样品估计方差的计算

设信息样品集 v 为 n 个中心在 $x_i'(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的钻孔岩芯点集（如图3-7(a) 所示），待估块段 V 的中心为 x，其平均值为 $Z_V=\frac{1}{V}\int_V Z(y)\,dy$（此处积分的重数与 V 的空间维数相一致）。又已知区域化变量 $Z(x)$ 在点 $x_i'(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 上的取值为 $Z(x_i')$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。设 Z_V 的线性估计量为 $Z(x_i')$ 的平均值，即：

$$Z^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z(x_i') \tag{3-26}$$

首先可以证明用 Z^* 估计 Z_V 是无偏的。事实上

因 $Z(x)$ 是二阶平稳的，且 $E\{Z(x)\}=m$，则有 $E[Z(x_i')]=m(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

故：

$$\begin{aligned}E[Z^*]&=E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z(x_i')\right\}\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E[Z(x_i')]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}m\\&=m\end{aligned}$$

另一方面：

$$\begin{aligned}E[Z_V]&=\frac{1}{V}\int_V E[Z(y)]\,dy\\&=\frac{1}{V}\int_V m\,dy\\&=m\end{aligned}$$

故 $E[Z^*]=E[Z_V]=m$，是无偏估计。或写成

$$E[Z_V-Z^*]=0$$

下面进一步讨论估计方差的 σ_E^2 的计算公式。

$$\begin{aligned}\sigma_E^2&=E[Z_V-Z^*]^2\\&=E[(Z_V-m)-(Z^*-m)]^2\end{aligned}$$

$$= E(Z_v - m)^2 + E(Z^* - m)^2 - 2E[(Z_v - m)(Z^* - m)]$$

$$= E\left\{\frac{1}{V}\int_v [Z(y) - m]\mathrm{d}y\right\}\left\{\frac{1}{V}\int_v [Z(t) - m]\mathrm{d}t\right\}$$

$$+ E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Z(x_i) - m]\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[Z(x_j) - m]\right\}$$

$$- 2E\left\{\frac{1}{V}\int_v [Z(y) - m]\mathrm{d}y\right\}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Z(x_i) - m]\right\}$$

$$= \frac{1}{V^2}\int_v\int_v E\{[Z(y) - m][Z(t) - m]\}\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}E\{[Z(x_i) - m][Z(x_j) - m]\}$$

$$- 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_v\{E[Z(y) - m][Z(x_i) - m]\}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{V^2}\int_v\int_v \mathrm{Cov}[Z(y),\ Z(t)]\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}[Z(x_i),\ Z(x_j)]$$

$$- 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_v \mathrm{Cov}[Z(y),\ Z(x_i)]\mathrm{d}y$$

由于 $Z(x)$ 是二阶平稳的，故其协方差函数（存在且平稳）可表示为 $C(h)$，即与点的位置无关，只与点与点之间的距离有关。

所以 $$\mathrm{Cov}[Z(x),\ Z(y)] = C(x - y)$$

故上式可以表示为

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{V^2}\int_v\int_v C(y - t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C(x_i - x_j)$$

$$- 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_v C(y - x_i)\mathrm{d}y$$

若用 $\bar{C}(V,\ v)$ 表示距离向量的两个端点各自独立地扫描过区域 $V(x)$ 和点集 $v = \{x_i,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 时，协方差函数 $C(h)$ 的平均值，即：

$$\bar{C}(V,\ v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_v C(y - x_i)\mathrm{d}y$$

类似地，有：

$$\bar{C}(V,\ V) = \frac{1}{V^2}\int_v\int_v C(y - t)\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\bar{C}(v,\ v) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}C(x_i - x_j)$$

则得到估计方差的计算公式：

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V,\ V) + \bar{C}(v,\ v) - 2\bar{C}(V,\ v) \qquad (3\text{-}27)$$

由公式（3-20）可知 $C(h) = C(0) - \gamma(h)$，将此式代入（3-27）中可得到用变差函

数表示的估计方差公式：

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}(V,\ v) - \bar{\gamma}(V,\ V) - \bar{\gamma}(v,\ v) \tag{3-28}$$

其中

$$\bar{\gamma}(V,\ V) = \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(y-t)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t$$

$$\bar{\gamma}(V,\ v) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{V}\int_v \gamma(y-x_i)\,\mathrm{d}y$$

$$\bar{\gamma}(v,\ v) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gamma(x_i-x_j)$$

2．连续型信息样品估计方差的计算

设信息样品为中心在 x' 体积为 v 的区域（见图3-7(b)）。此时，作为 Z_v 的线性估计量 Z^* 可表为如下平均值

$$Z^* = \frac{1}{v}\int_v Z(y')\,\mathrm{d}y' \tag{3-29}$$

这种估计量仍是无偏的，因为

$$\begin{aligned} E[Z^*] &= E\left[\frac{1}{v}\int_v Z(y')\,\mathrm{d}y'\right] \\ &= \frac{1}{v}\int_v E[Z(y')]\mathrm{d}y' \\ &= \frac{1}{v}\int_v m\mathrm{d}y' \\ &= m \end{aligned}$$

而

$$E[Z_v] = m$$

故估计量是无偏的。估计方差：

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= E[Z_v - Z^*]^2 \\ &= E[(Z_v - m) - (Z^* - m)]^2 \\ &= E(Z_v - m)^2 + E(Z^* - m)^2 - 2E[(Z_v - m)(Z^* - m)] \end{aligned} \tag{3-30}$$

类似于上节的讨论，只是将离散型的求和号"$\sum$"写成连续型的相应积分号"$\int_v$"，将 $\frac{1}{n}$ 写为 $\frac{1}{v}$（求其相应的平均值），可得到与公式（3-27）相同的估计方差计算表达式。事实上（仅以 $E[(Z_v - m)(Z^* - m)]$ 项说明如下）：

$$E[(Z_v - m)(Z^* - m)] = E\left\{\frac{1}{V}\int_V [Z(y) - m]\mathrm{d}y\right\}\left\{\frac{1}{v}\int_v [Z(y') - m]\mathrm{d}y'\right\}$$

$$= \frac{1}{Vv}\int_V\int_v E[Z(y) - m][Z(y') - m]\mathrm{d}y\mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1}{Vv}\int_V\int_v \mathrm{Cov}[Z(y),\ Z(y')]\mathrm{d}y\mathrm{d}y'$$

$$= \frac{1}{Vv}\int_V\int_v C(y - y')\,\mathrm{d}y\mathrm{d}y'$$

若用$\bar{C}(V, v)$表示当向量h的一端扫过区域$V(x)$，另一端独立地扫过区域$v(x')$时协方差的平均值，即：

$$\bar{C}(V, v) = \frac{1}{Vv}\int_V \int_v C(y - y')\,dy dy'$$

则上式可以表示成：

$$E[(Z_v - m)(Z^* - m)] = \bar{C}(V, v)$$

同样可以得到：

$$E(Z_v - m)^2 = \bar{C}(V, V)$$

$$E(Z^* - m)^2 = \bar{C}(v, v)$$

将以上三式代入（3-30）式就得到类似于（3-27）的估计方差计算公式

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) + \bar{C}(v, v) - 2\bar{C}(V, v)$$

借助于公式（3-20），则得到用变差函数表示的计算公式（参见（3-28）式）：

$$\sigma_E^2 = 2\bar{\gamma}(V, v) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v)$$

3．用加权平均作估计量的估计方差计算（信息样品为离散型的）

设估计量为：

$$Z^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i) \tag{3-31}$$

其中$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$为权系数。

若要使Z^*满足无偏估计的条件，即要有

$$E(Z^*) = E(Z_v) = m$$

而

$$E(Z^*) = E\left[\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z(x_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E[Z(x_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m$$

$$= m\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

欲使$E(Z^*) = m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \tag{3-32}$$

即各权系数之和为1。这就是加权平均估计量应满足的无偏性条件。

在无偏条件下，类似于以算术平均值作为估计量的推导，可得到类似于公式(3-27)用协方差函数表示的估计方差计算公式（证明略）：

$$\sigma_E^2 = \bar{C}(V, V) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) - 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{C}(V, x_i) \tag{3-33}$$

用变差函数表示的估计方差计算公式为：

$$\sigma_E^2 = 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \bar{\gamma}(V, x_i) - \bar{\gamma}(V, V) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i - x_j) \tag{3-34}$$

其中$\bar{C}(V, x_i)$，$\bar{\gamma}(V, x_i)$分别表示当向量一端固定在x_i点，另一端独立地扫过待估域V时，协方差函数$C(h)$和变差函数$\gamma(h)$的平均值。

三、关于估计方差的几点说明

1．如果$Z(x)$是二阶平稳的，则（3-33），（3-34）都成立。如果$Z(x)$只满足本征假设，协方差函数不存在，则（3-33）式不成立，但（3-34）式仍成立。

2．用域v内的信息对块段V作估计求得的估计方差σ_E^2，有时也称为v对V的外延方差(extension variance)，记作$\sigma_E^2(v, V)$。

3．不论v和V是怎样的域，公式（3-33），（3-34）都适用。例如，待估域V可能是两个不同的块段V_1，V_2，即$V=V_1+V_2$，而信息域v可能由n个样品(S_i，$i=1$，2，…，n)组成，即

$$v=\sum_{i=1}^{n}S_i$$

其中某些样品可以位于待估域V内。

4．变差函数可以看成是用$Z(x+h)$估计$Z(x)$的估计方差之半，因为：

$$\gamma(h)=\frac{1}{2}E[Z(x)-Z(x+h)]^2,\quad \forall x$$

5．σ_E^2的大小可以衡量估计量的优劣，σ_E^2越小，估计量越好。从式（3-34）可以看出，影响σ_E^2的大小因素有以下四个方面：

1）变差函数$\gamma(h)$的数学模型，它方反映了区域化变量的结构特征和空间连续性。

2）待估块段的几何特征，如大小、形状等。一般V越大，$\bar{\gamma}(V, V)$也越大，于是σ_E^2越小。

3）信息样品v的几何特征、数量和空间排布。一般v越大，样品越多，且相距越远，则$\bar{\gamma}(v, v)$也越大，于是σ_E^2就越小。

4）待估块段与信息样品间的距离。因为，这种距离越大，一般$\bar{\gamma}(V, v)$也越大，于是σ_E^2也越大。

由此可见，要计算估计方差，就要先求出变差函数，再求出变差函数的平均值。所以，如何确定好变差函数，是地质计统学中十分重要的课题。

第六节　承载效应和离散方差

在金属矿的采矿工作中，为了制定选择方案，或按选场的需要进行配矿，我们不仅要知道开采面上的平均品位，而且还应该知道开采面上品位离散情况。首先我们引入承载效应的概念。

一、承载效应

影响区域化变量离散程度的大小有两个基本因素：一个是变量的变化域V，另一个是作为统计个体的生产单元的承载v(如图3-8(a))。根据采矿的实践经验，我们知道：

1．当v一定时，生产单元的品位对其在V中平均值的离散程度随着V的增大而增大(如图3-8(b))。这是空间相关性的逻辑推理，即当域V小时，各生产单元相距较近，从而其品位数值也相接近。

2．当域V一定时，则其离散程度随生产单元承载v的增大而减小(如图3-8(c))。例如开采块段平均品位的离散程度比钻孔岩芯平均品位的离散程度小。

上述承载对离散程度的影响，叫做承载效应。考虑承载效应是地质统计学的重要特点之一。

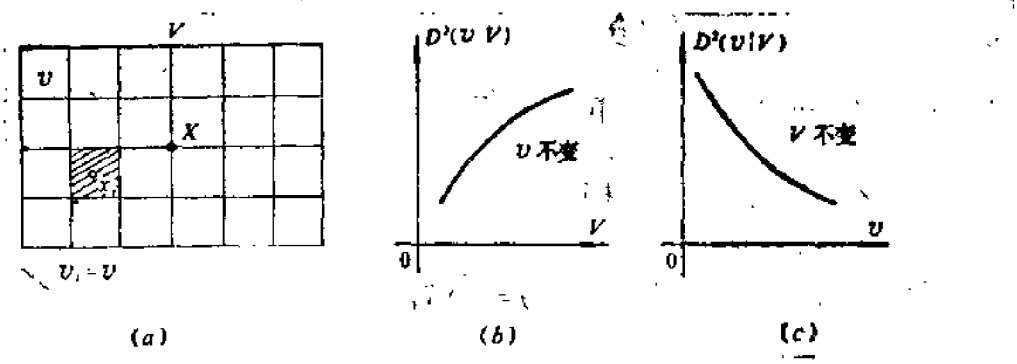


图3-8 两种离散现象

二、离散方差

1．离散方差的定义

设V表示以点x为中心的平面矩形开采面，将V分成n个大小相等，分别以$x_i(i=1, 2, \cdots, n)$为中心的生产单元$v(x_i)$(简记为v_i)，即$v_i=v(i=1, 2, \cdots, n)$，见图3-8(a)。

于是
$$V=\sum_{i=1}^{n}v_i=nv$$

设$Z(y)$是点y处的品位（实际上，品位值都是从一定大小的承载中测量出来的，而点品位可理解为当承载趋于零时平均品位的极限值），则每个生产单元$v(x_i)$的平均品位为：

$$Z_v(x_i)=\frac{1}{v}\int_{v_i}Z(y)\,dy \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

以x为中心的开采面V的平均品位为

$$\begin{aligned}Z_V(x)&=\frac{1}{V}\int_V Z(y)\,dy\\&=\frac{1}{nv}\left[\sum_{i=1}^{n}\int_{v_i}Z(y)\,dy\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{v}\int_{v_i}Z(y)\,dy\right]\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_v(x_i)\end{aligned}$$

可见，Z_V就是诸$Z_v(x_i)$的算术平均数。于是n个以v为承载的品位值$Z_v(x_i)$ $(i=1,2,\cdots, n)$对开采面V的平均值$Z_V(x)$的离散程度，也就是它对$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_v(x_i)$的离散程度。故可用其方差表示，即：

$$S^2(x)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Z_v(x_i)-Z_V(x)]^2 \tag{3-35}$$

由于在观测前 $Z_v(x_i)$ 和 $Z_V(x)$ 均是随机变量，故 $S^2(x)$ 也是个随机变量，可以讨论其数学期望，于是，在区域化变量 $Z(x)$ 满足二阶平稳假设的条件下，将随机变量 $S^2(x)$ 的数学期望定义为在开采面 V 内 n 个生产单元 v 的离散方差，记作

$$D^2(v|V)=E[S^2(x)]$$

$$=E\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[Z_v(x_i)-Z_V(x)]^2\right\} \tag{3-36}$$

简称为 v 对 V 的离散方差。

这个定义可以推广。当 $v\ll V$ 时，每一个中心位于 y 的生产单元 v，可以近似地看成 V 中的一个点，生产单元 $v(y)$ 上区域化变量的值 $Z_v(y)$ 可以看成是 y 的点函数，则：

$$S^2(x)=\frac{1}{V}\int_V[Z_v(y)-Z_V(x)]^2\mathrm{d}y \tag{3-37}$$

在平稳性假设下，V 内生产单元 v 的离差方差定义为 $S^2(x)$ 的数学期望，即：

$$D^2(v|V)=E[S^2(x)]$$

$$=E\left\{\frac{1}{V}\int_V[Z_v(y)-Z_V(x)]^2\mathrm{d}y\right\}$$

$$=\frac{1}{V}\int_V E[Z_v(y)-Z_V(x)]^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{V}\int_V\sigma_E^2[v(y),\ V(x)]\mathrm{d}y \tag{3-38}$$

此式表明，当 $v\ll V$ 时，离散方差可以看成是用 $Z_v(y)$ 来估计 $Z_V(x)$ 的估计方差在 V 上的平均值（此处积分号下的 V 表示中心在 x 点体积为 V 的区域）。

2．离散方差的计算公式

由（3-27）式，用 $Z_v(y)$ 估计 $Z_V(x)$ 的估计方差为

$$\sigma_E^2[v(y),\ V(x)]=\bar{C}[V(x),\ V(x)]+\bar{C}[v(y),\ v(y)]$$
$$-2\bar{C}[V(x),\ v(y)] \tag{3-39}$$

由于在平稳性假设下，协方差 $C(h)$ 是平稳的，上式右端前两项不依赖于点 x 和 y 的位置，只与区域 V 和单元 v 的几何结构、体积、大小有关，即：

$$\bar{C}[V(x),\ V(x)]=\bar{C}(V,\ V),\quad \forall x$$

$$\bar{C}[v(y),\ v(y)]=\bar{C}(v,\ v),\quad \forall y$$

因此将（3-39）代入（3-38）得到，当 $v\ll V$ 时

$$D^2(v|V)=\frac{1}{V}\int_V\{\bar{C}(V,\ V)+\bar{C}(v,\ v)-2\bar{C}[V(x),\ v(y)]\}\mathrm{d}y$$

$$=\bar{C}(V,\ V)+\bar{C}(v,\ v)-2\frac{1}{V}\int_V\bar{C}[V(x),\ v(y)]\mathrm{d}y$$

因为在 $v\ll V$ 的情况下，$v(y)$ 在域 V 中变动就相当于点 y 在 V 中的变动，这时，上式右端的第三项取平均后变成：

$$2\frac{1}{V}\int_v \bar{C}[V(x),\ v(y)]\mathrm{d}y = 2\bar{C}[V(x),\ V(x)] = 2\bar{C}(V,\ V)$$

所以：

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= \bar{C}(V,\ V) + \bar{C}(v,\ v) - 2\bar{C}(V,\ V) \\ &= \bar{C}(v,\ v) - \bar{C}(V,\ V) \end{aligned} \tag{3-40}$$

上式虽然是在$v \ll V$的条件下推导出来的，不难证明，当$v \ll V$不成立时，公式（3-40）仍然成立。事实上由(3-36)公式可以得到：

$$\begin{aligned} D^2(v|V) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2[v(x_i),\ V(x)] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\{\bar{C}[V(x),\ V(x)] + \bar{C}[v(x_i),\ v(x_i)] \\ &\quad - 2\bar{C}[V(x),\ v(x_i)]\} \\ &= \bar{C}(V,\ V) + \bar{C}(v,\ v) - 2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{C}[V(x),\ v(x_i)] \\ &= \bar{C}(V,\ V) + \bar{C}(v,\ v) - 2\bar{C}(V,\ V) \\ &= \bar{C}(v,\ v) - \bar{C}(V,\ V) \end{aligned}$$

上式中用到了$2\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\bar{C}[V(x),\ v(x_i)] = 2\bar{C}(V,\ V)$，是因为$V(x) = \sum_{i=1}^{n} v(x_i)$。

同样，用（3-28）式表示的σ_i^2代入（3-38）式可以得到离散方差用变差函数来表示的形式：

$$D^2(v|V) = \bar{\gamma}(V,\ V) - \bar{\gamma}(v,\ v) \tag{3-41}$$

其中：

$$\bar{\gamma}(V,\ V) = \frac{1}{V^2}\int_{x\in V}\int_{y\in V}\gamma(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

若V是二维空间，则它是四重积分，x，y都是二维向量；若V是三维空间，则它是六重积分，x，y都是三维向量。

由式（3-41）可以看出，影响离散方差的因素有三个：(1)V的大小和形状；(2)v的大小和形状；（3）变差函数$\gamma(h)$。由于$\gamma(h)$一般随h的增大而增大，故离散方差随V的增大而增大，随v的增大而减小。这与承载效应反映的现象是一致的。所以可以说式（3-41）是承载效应的一种定量描述。

三、克立格关系式

定义：若$v \subset V \subset G$，则

$$D^2(v|G) = D^2(v|V) + D^2(V|G) \tag{3-42}$$

称为克立格关系式。此式是D.G.克立格用实验方法研究了维特沃特斯兰德金矿的数据而发现的，故称为“克立格关系式”。

证：由离散方差的计算公式可以直接推导出克立格关系式：

$$\begin{aligned} D^2(v|V) + D^2(V|G) &= [\bar{\gamma}(V,\ V) - \bar{\gamma}(v,\ v)] + [\bar{\gamma}(G,\ G) - \bar{\gamma}(V,\ V)] \\ &= \bar{\gamma}(G,\ G) - \bar{\gamma}(v,\ v) \\ &= D^2(v|G) \quad \text{证毕} \end{aligned}$$

式（3-42）说明如果G表示矿床，V表示开采面，v表示生产单元，则G内生产单元v的离散方差就等于开采面V内v的离散方差与在矿床G内V的离散方差之和。

离散方差在矿产储量计算及矿山设计中都很重要，因为，可圈采矿石的品位并非勘探时的岩芯品位，岩芯品位频率分布曲线也不同于选择采矿单元品位的频率分布曲线（如图3-9）。地质学家用放大镜及显微镜从岩芯样品中发现有用矿产，而采矿工程师则应用大电铲进行开采。我们不但要研究岩芯样品品位的分布特征，还要研究应用大电铲采矿时的品位分布。

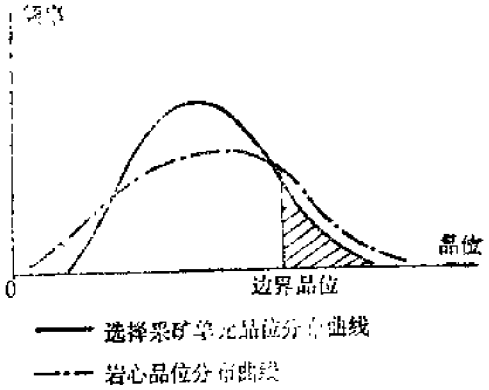


图3-9　不同采矿的品位分布曲线

下面我们举一个计算离散方差的例子。

例　设有一线段长为$L=4l$，见图3-10。在L上定义区域化变量的变差函数为$\gamma(h)=2|h|$。试计算l对L的离散方差$D^2(l|L)$。

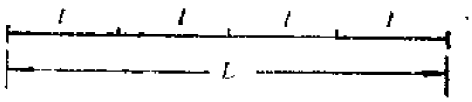


图3-10　计算离散方差$D^2(l|L)$图

解：由式（3-41）可知

$$D^2(l|L)=\bar{\gamma}(L,\ L)-\bar{\gamma}(l,\ l)$$

其中，

$$\bar{\gamma}(L,\ L)=\frac{1}{L^2}\int_{x\in L}\int_{y\in L}\gamma(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_{x\in L}\int_{y\in L}|x-y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{(4l)^2}\int_0^{4l}\left[\int_0^{y}(y-x)\,\mathrm{d}x+\int_y^{4l}(x-y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{(4l)^2}\int_0^{4l}\left[\left(xy-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{y}+\left(\frac{x^2}{2}-xy\right)\Big|_y^{4l}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{(4l)^2}\int_0^{4l}\left[y^2-4ly+8l^2\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8l^2}\left[\frac{1}{3}y^3-2ly^2+8l^2y\right]\Big|_0^{4l}$$

$$=\frac{8}{3}l$$

$$\gamma(l,\ l) = \frac{2}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^y (y-x)\,dx + \int_y^l (x-y)\,dx\right]dy$$

$$= \frac{2}{l^2}\int_0^l\left[y^2 - ly + \frac{l^2}{2}\right]dy$$

$$= \frac{2}{l^2}\left[\frac{1}{3}y^3 - \frac{l}{2}y^2 + \frac{l^2}{2}y\right]\Big|_0^l$$

$$= \frac{2}{3}l$$

也可从$\gamma(L,\ L)$式中直接求得$\gamma(l,\ l)$的值：因为$L = 4l$，则

$$\gamma(L,\ L) = \frac{8}{3}l = \frac{2}{3}(4l) = \frac{2}{3}L$$

将L写成l，得：

$$\gamma(l,\ l) = \frac{2}{3}l$$

$$\therefore\quad D^2(l|L) = \gamma(L,\ L) - \gamma(l,\ l)$$

$$= \frac{8}{3}l - \frac{2}{3}l$$

$$= 2l$$

第七节　关于正则化(Regularization)

一、正则化的概念

在实际工作中，观测数据可以认为是$Z_v(x)$，即从中心位于x处的某一承载$v(x)$（例如一段岩芯样品）上测得的，而纯粹的点数据$Z(x)$只有在理论上才存在。故观测数据$Z_v(x)$实际上是点数据$Z(y)$在$v(x)$内的平均值，即

$$Z_v(x) = \frac{1}{v}\int_{v(x)} Z(y)\,dy \qquad (3\text{-}43)$$

我们称平均值$Z_v(x)$是点变量$Z(y)$在体积$v(x)$内的正则化量。一般地说，正则化就是用承载$v(x)$内的平均值代替原始（点）数据。

$Z_v(x)$也是区域化变量，它称为原区域化变量$Z(y)$的正则化变量。

二、正则化变量的性质

1．若$Z(y)$二阶平稳　则$Z_v(x)$也二阶平稳。即若

1) $E[Z(y)] = m$(常数)，　$\forall y$；

2) $\mathrm{Cov}[Z(y),\ Z(y+h)] = E[Z(y)Z(y+h)] - m^2$

$$= C(h),\quad \forall y,\quad \forall h$$

则有　1′) $E[Z_v(x)] = m$，　$\forall x$

2′) $\mathrm{Cov}[Z_v(x),\ Z_v(x+h)] = E[Z_v(x)Z_v(x+h)] - m^2$

$$= C_v(h),\quad \forall x,\quad \forall h \qquad (3\text{-}44)$$

其中：　　$C_v(h)=\frac{1}{v^2}\int_v\left[\int_v C(t+h-u)\,dt\right]du$

证明：1′)　$E[Z_v(x)]=E\left[\frac{1}{v}\int_v Z(y)\,dy\right]$

$$=\frac{1}{v}\int_v E[Z(y)]dy$$

$$=\frac{1}{v}\int_v m\,dy$$

$$=m,\quad \forall x$$

2′)　$\mathrm{Cov}[Z_v(x),\ Z_v(x+h)]$

$$=E[Z_v(x)\cdot Z_v(x+h)]-E[Z_v(x)]\cdot E[Z_v(x+h)]$$

$$=E[Z_v(x)\cdot Z_v(x+h)]-m^2$$

$$=E\left[\frac{1}{v}\int_v Z(u)\,du\cdot\frac{1}{v}\int_v Z(t+h)\,dt\right]-m^2$$

$$=E\left[\frac{1}{v^2}\int_v\int_v[Z(u)\cdot Z(t+h)]dtdu\right]-m^2$$

$$=\frac{1}{v^2}\int_v\int_v\{E[Z(u)\cdot Z(t+h)]-m^2\}dtdu$$

$$=\frac{1}{v^2}\int_v\int_v\mathrm{Cov}[Z(u),\ Z(t+h)]dtdu$$

$$=\frac{1}{v^2}\int_v\int_v C(t+h-u)\,dtdu$$

$\triangleq C_v(h)$　　证毕

由1′)，2′)说明 $Z_v(x)$ 是二阶平稳的。

由2′)可得：

$$E[Z_v(x)Z_v(x+h)]=C_v(h)+m^2,\quad \forall x \tag{3-45}$$

当 $h=0$ 时，有

$$E[Z_v(x)]^2=C_v(0)+m^2,\quad \forall x \tag{3-46}$$

2．若 $Z(y)$ 二阶平稳，则正则化变量 $Z_v(x)$ 的变差函数

$$\gamma_v(h)=\frac{1}{2}E[Z_v(x)-Z_v(x+h)]^2 \tag{3-47}$$

存在且平稳，且有

$$\gamma_v(h)=C_v(0)-C_v(h) \tag{3-48}$$

证：由性质1可知 $Z_v(x)$ 是二阶平稳的，又根据式(3-45)和(3-46)得到：

$$\gamma_v(h)=\frac{1}{2}E[Z_v(x)-Z_v(x+h)]^2$$

$$=\frac{1}{2}E[Z_v(x)]^2+\frac{1}{2}E[Z_v(x+h)]^2$$

$$-E[Z_v(x)Z_v(x+h)]$$

$$= \frac{1}{2}[C_v(0) + m^2] + \frac{1}{2}[C_v(0) + m^2] - [C_v(h) + m^2]$$

$$= C_v(0) - C_v(h) \qquad \text{证毕}$$

由上面的两个性质，我们知道，只要$Z(y)$是二阶平稳的，其正则化变量$Z_v(x)$也是二阶平稳的，且有平稳的变差函数存在。下面我们来讨论如何用原始变量$Z(y)$的变差函数来表示其正则化变量的变差函数。

三、正则化变差函数的计算公式

由于$Z_v(x)$是二阶平稳的，则有$E[Z_v(x) - Z_v(x+h)] = 0$，再根据估计方差的定义，则式（3-47）中的$\gamma_v(h)$可以看成是用$Z_v(x+h)$估计$Z_v(x)$的估计方差之半。运用估计方差的计算公式（3-28），我们有：

$$\gamma_v(h) = \frac{1}{2}E[Z_v(x) - Z_v(x+h)]^2$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_E^2$$

$$= \frac{1}{2}\{2\bar{\gamma}[v(x),\ v(x+h)] - \bar{\gamma}[v(x),\ v(x)]$$

$$- \bar{\gamma}[v(x+h),\ v(x+h)]\}$$

由平稳假设，$\gamma(h)$不依赖于x，故

$$\bar{\gamma}[v(x),\ v(x)] = \bar{\gamma}[v(x+h),\ v(x+h)]$$

并简记为$\bar{\gamma}(v,\ v)$，再将$\bar{\gamma}[v(x),\ v(x+h)]$简记为$\bar{\gamma}(v,\ v_h)$，代入上式并整理得：

$$\gamma_v(h) = \bar{\gamma}(v,\ v_h) - \bar{\gamma}(v,\ v) \qquad (3\text{-}49)$$

其中v_h表示承载v平移了一个向量h后的另一承载（见图3-11）。$\bar{\gamma}(v,\ v_h)$表示当向量u的一端扫描了承载v，而另一端独立地扫描了v_h时点变差函数$\gamma(u)$的平均值。

当距离h相对于承载v很大时，也就是说$|h| \gg v$的直径（可定义为v中任意两点的距离最大值）时，v就可以近似地看成是一个点，于是$\gamma(v,\ v_h)$就近似地等于点变差函数，这样我们就得到实际工作中最有用的近似公式：

$$\gamma_v(h) \approx \gamma(h) - \bar{\gamma}(v,\ v), \quad |h| \gg v\text{的直径} \qquad (3\text{-}50)$$

式中$\bar{\gamma}(v,\ v)$与变差函数及正则化承载的大小和几何特征有关。

当给定v，且$\gamma(h)$也已知时，$\bar{\gamma}(v,\ v)$就是一个定数。由（3-50）式可知，在$|h|$很

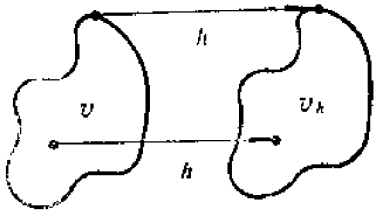


图3-11　v平移向量h后得到v_h

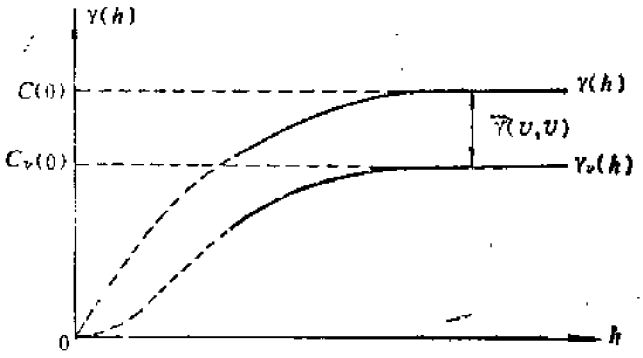


图3-12　$\gamma_v(h)$与$\gamma(h)$的比较图

大的条件下，正则化变量的变差函数$\gamma_v(h)$，总比点变差函数$\gamma(h)$小一个常数$\gamma(v, v)$，见图3-12。

公式(3-28)，(3-41)和(3-49)称为线性平稳地质统计学的三大基本公式。从这三个基本公式中可以看出，只要知道了变差函数$\gamma(h)$，它们就都可以计算了，可见变差函数确实是地质统计学的基本工具。

四、求正则化变差函数的实例

1．定长钻孔岩芯的正则化

例 设有一个钻孔，它的所有岩芯样品都具有相同的长度l和相同的横截面积S，如图3-13所示。并设变差函数$\gamma(h)=|h|=r$，求其正则化变差函数。

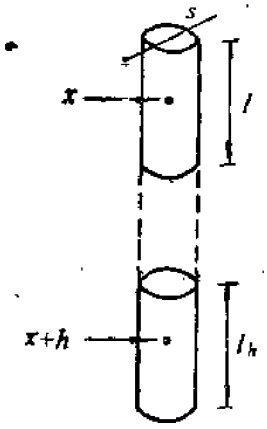


图3-13 沿一个钻孔排列的岩芯样品

解：分析，当岩芯直径与样品的长度l相比甚小时，我们可以忽略岩芯样品的横截面积S。这时我们可以把两个相距为h的岩芯样品看成是具有同样长度l，中心相距为h的两个共线的线段。根据公式(3-49)区域化变量$Z(y)$(比如煤的灰分含量)在线段l内正则化变量的变差函数可写成：

$$\gamma_l(h)=\gamma(l,\ l_h)-\gamma(l,\ l)$$

∵ $\gamma(h)=|h|=r$，下面分两种情况讨论$\gamma(l,\ l_h)$的计算(见图3-14)：

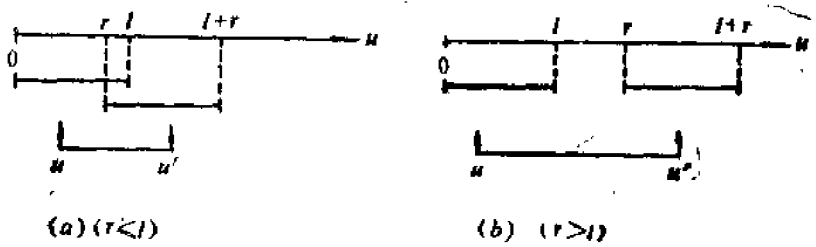


图3-14 $\gamma(l,\ l_h)$项的计算

1)$r\leqslant l$时 (如图3-14(a))：

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{1}{l}\int_r^{r+l}\gamma(u'-u)\,du'\right]du$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_r^{r+l}|u'-u|\,du'\right]du$$

$$=\frac{1}{l^2}\left\{\int_0^r\left[\int_r^{r+l}(u'-u)\,du'\right]du\right.$$

$$\left.+\int_r^l\left[\int_r^u(u-u')\,du'+\int_u^{r+l}(u'-u)\,du'\right]du\right\}$$

$$=\frac{1}{l^2}\left\{\int_0^r\left[rl+\frac{1}{2}l^2-ul\right]du+\int_r^l\left[(u-r)^2-lu\right.\right.$$

$$+\left(rl+\frac{1}{2}l^2\right)\Big]\mathrm{d}u\Big\}$$

$$=\frac{1}{l^2}\left\{-\frac{1}{2}r^2l+\frac{1}{2}l^2r+\frac{1}{3}(l-r)^3+\frac{1}{2}l^2r+\frac{1}{2}r^2l\right\}$$

$$=\frac{1}{l^2}\left\{\frac{1}{3}(l-r)^3+l^2r\right\}$$

$$=\frac{1}{3}l-\frac{r^3}{3l^2}+\frac{r^2}{l}$$

令 $r=|h|=0$ 得到 $\gamma(l,\ l)=\frac{l}{3}$

所以得到：$\gamma_1(h)=\gamma(l,\ l_h)-\gamma(l,\ l)$

$$=\frac{r^2}{l}-\frac{r^3}{3l^2}$$

$$=\frac{r^2}{3l^2}(3l-r)$$

2）当 $r>l$ 时（如图3-14(b)）：

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_r^{r+l}(u'-u)\,\mathrm{d}u'\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[rl+\frac{l^2}{2}-lu\right]\mathrm{d}u$$

$$=r$$

注：此处因 $r>l>0$，故不能令 $r=0$ 来求得 $\gamma(l,\ l)$，$\gamma(l,\ l)$ 只能从1）中求得，即 $\gamma(l,\ l)=\frac{l}{3}$。

故得到：

$$\gamma_1(h)=r-\frac{l}{3}$$

综合1），2）得：

$$\gamma_1(h)=\begin{cases}\dfrac{r^2}{3l^2}(3l-r), & 0\leqslant r\leqslant l\\ r-\dfrac{l}{3}, & r>l\end{cases}$$

将此结果用图形表示，如图3-15所示：当 $0\leqslant r\leqslant l$ 时，正则化变差函数是抛物线型的；当 $r>l$ 时，正则化变差函数仍保持原来点变差函数的线性特征，即与原来直线平行，但低 $\frac{l}{3}$。

2．以固定厚度升高（或称为“级配”）的正则化

1）以固定厚度升高正则化的概念：它相当于在水平台阶的固定厚度（梯段）l 上（或在厚度 l 几乎不变的矿层上）取平均值。

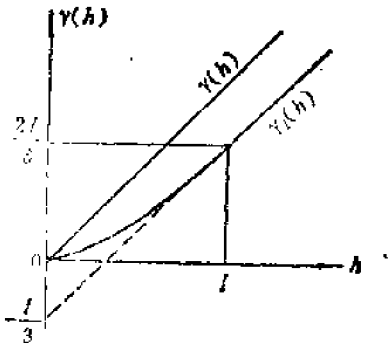


图3-15 线性变差函数及其正则化

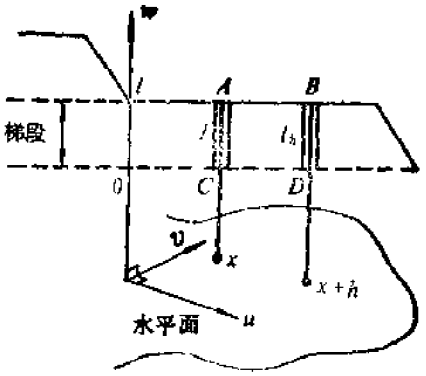


图3-16 在固定厚度l上的升高示意图

设 $Z(x)=Z(x_u,\ x_v,\ x_w)$ 是一个厚度为固定值 l 的水平煤层的区域化变量（比如煤的灰分含量），在地表平面坐标为 $(x_u,\ x_v)$ 点处打一垂直钻孔，其岩芯中的平均煤灰分含量为：

$$Z_G(x_u,\ x_v)=\frac{1}{l}\int_0^l Z(x_u,\ x_v,\ x_w)\,\mathrm{d}x_w$$

$Z_G(x_u,\ x_v)$ 就称为 $Z(x)$ 在平面坐标为 $(x_u,\ x_v)$ 处，厚度为 l 的线段上的正则化变量，也称为以固定厚度 l 升高的正则化变量。

这种正则化是把空间三维问题转化为二维问题来处理的一种常用方法，在地质和采矿中也是常见的。

2）以固定厚度升高正则化量的变差函数的计算：

我们假设有两个垂直钻孔 A 和 B，A 的平面位置为 $x(x_u,\ x_v)$，B 的平面位置为 $x+h(x_u+h_u,\ x_v+h_v)$。A，B 的距离 $|h|=\sqrt{h_u^2+h_v^2}$。分别记 A、B 处的水平厚度为 l 及 l_h，且 $l=l_h$，如图3-16。于是我们可以定义两个升高正则化量：

$$Z_G(x)=Z_G(x_u,\ x_v)$$

$$Z_G(x+h)=Z_G(x_u+h_u,\ x_v+h_v)$$

假设点变差函数是各向同性的，即

$$\gamma(h)=\gamma(|h|)=\gamma(r)=\gamma(\sqrt{h_u^2+h_v^2+h_w^2})$$

下面我们仅以这种情况讨论正则化变差函数的计算。

进一步我们假定：

$$\gamma(h)=|h| \quad \text{（线性模型）}$$

根据公式（3-49）有

$$\gamma_G(h)=\frac{1}{2}E[Z_G(x)-Z_G(x+h)]^2$$

$$=\gamma(l,\ l_h)-\gamma(l,\ l)$$

现在计算 $\gamma(l,\ l_h)$。如图3-17所示（积分域的变化范围及被积函数的表示），

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{1}{l_h}\int_0^{l_h}\gamma(r)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}Z$$

$\because\ l=l_h$

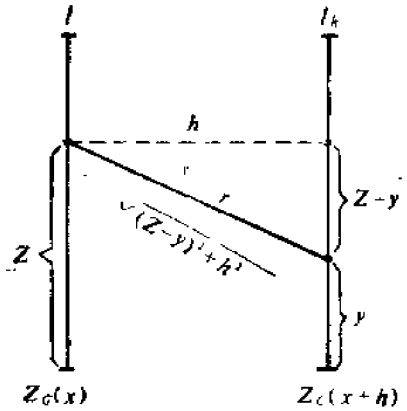


图3-17 $\gamma(l,\ l_h)$的计算

$$\gamma(r)=\sqrt{(Z-y)^2+h^2}$$

代入上式得：

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{1}{l}\int_0^l\sqrt{(Z-y)^2+h^2}\,dy\right]dZ$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^l\sqrt{(Z-y)^2+h^2}\,dy\right]dZ$$

令$t=Z-y$得：

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[-\int_z^{z-l}\sqrt{t^2+h^2}dt\right]dZ$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[-\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+h^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{h^2}{2}\ln\left(t+\sqrt{t^2+h^2}\right)\right)_z^{z-l}\right]dZ$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l\left[-\frac{Z-l}{2}\sqrt{(Z-l)^2+h^2}-\frac{h^2}{2}\ln(Z-l+\sqrt{(Z-l)^2+h^2})\right.$$

$$\left.+\frac{Z}{2}\sqrt{Z^2+h^2}+\frac{h^2}{2}\ln(Z+\sqrt{Z^2+h^2})\right]dZ$$

在被积函数的前两项中令：

$$Z-l=-t$$

再将t写成Z并整理得：

$$\gamma(l,\ l_h)=\frac{1}{l^2}\int_0^l[Z\cdot\sqrt{Z^2+h^2}+h^2\cdot\ln(Z+\sqrt{Z^2+h^2})-h^2\cdot\ln h]dZ$$

$$=\frac{1}{l^2}\left[\frac{1}{3}(Z^2+h^2)^{3/2}+h^2\cdot Z\cdot\ln(Z+\sqrt{Z^2+h^2})-h^2\cdot\sqrt{Z^2+h^2}-h^2\cdot Z\cdot\ln h\right]_0^l$$

$$=\frac{1}{l^2}\left[\frac{1}{3}\cdot(l^2+h^2)^{3/2}+\frac{2}{3}\cdot h^3-h^2\cdot\sqrt{l^2+h^2}+h^2\cdot l\cdot\ln\frac{l+\sqrt{l^2+h^2}}{h}\right]$$

$$=\frac{l^2+h^2}{3l^2}\cdot\sqrt{l^2+h^2}+\frac{2}{3l^2}\cdot h^3-\frac{h^2}{l^2}\cdot\sqrt{l^2+h^2}$$

$$+\frac{h^2}{l}\cdot\ln\frac{l+\sqrt{l^2+h^2}}{h}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{l^2+h^2}+\frac{2h^2}{3l^2}\cdot(h-\sqrt{h^2+l^2})+\frac{h^2}{l}\cdot\ln\frac{l+\sqrt{l^2+h^2}}{h}$$

令$h=|h|=0$得到：

$$\gamma(l,\ l)=\frac{l}{3}$$

∴以固定厚度l升高正则化变量的变差函数为

$$\gamma_a(h)=\frac{1}{3}\cdot\sqrt{l^2+h^2}+\frac{2h^2}{3l^2}\cdot(h-\sqrt{l^2+h^2})$$

$$+\frac{h^2}{l}\cdot\ln\frac{l+\sqrt{l^2+h^2}}{h}-\frac{l}{3}$$

第四章　变差函数及结构分析

为了表征一个矿床或矿体的地质变量的变化特征，经典统计学通常采用均值、方差等参数。但这些量只能概括地质体某一特性的全貌，却无法反映其局部变化特征。就以方差而言，它是随机变量与其均值之差的平方的数学期望。方差大，表示所研究的变量在整个矿床（矿体）上的变化大；方差小，则反映其变化小。但方差却无法回答局部范围和特定方向上地质变量的变化特征，而这种特征对于矿产的储量计算是极为重要的。

在地质统计学中引入了变差函数这一有力的工具，它能够反映地质变量的空间变化特征——相关性和随机性，弥补了经典统计学的不足。特别是透过随机性反映区域化变量的结构性。故变差函数也叫结构函数。这一章我们就讨论有关变差函数及其结构分析的知识。

第一节　变差函数理论

一、关于变差函数的定义及性质

1. 平稳区域化变量的变差函数定义

在第三章第二节中，已经讨论了变差函数的定义，在这里我们仅回忆一下平稳区域化变量的变差函数定义的表达式。

设区域化变量 $Z(x)$ 是二阶平稳(或本征)的，则其变差函数定义为：

$$\gamma(h)=\frac{1}{2}E[Z(x)-Z(x+h)]^2,\ \forall x \tag{4-1}$$

在第三章中我们也讨论了实验变差函数的制作。

设 $Z(x_i)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 是平稳区域化变量 $Z(x)$ 在 n 个点上的观测值，数据对 $\{Z(x_i),\ Z(x_i+h)\}[i=1,\ 2,\cdots,N(h)]$ 为在某一方向上相隔为 $|h|$ 的点对 $(x_i,\ x_i+h)$ 上的观测值，则定义 $Z(x)$ 的实验变差函数为：

$$\gamma^*(h)=\frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(x_i)-Z(x_i+h)]^2 \tag{4-2}$$

式中 $N(h)$ 为数据对 $\{Z(x_i),\ Z(x_i+h)\}$ 的对数。

下面我们着重介绍变差函数的性质。

根据式(3-20)我们有 $\gamma(h)=C(0)-C(h)$，要了解变差函数的性质，首先给出协方差函数 $C(h)$ 的性质(以下的讨论假定 $Z(x)$ 是二阶平稳的)。

2. 协方差函数 $C(h)$ 的性质

1) $C(0)\geqslant 0$，即验前方差不小于零。

证：因 $Z(x)$ 是二阶平稳的，则 $Z(x)$ 的数学期望存在，且为常数，设 $E[Z(x)]=m$，则

$$C(0)=E[Z(x)-m]^2=E\{Z(x)-E[Z(x)]\}^2=\mathrm{Var}[Z(x)]\geqslant 0$$

2) $C(h)=C(-h)$，即 $C(h)$ 以 $h=0$ 的直线对称。

证：$C(-h)=E\{[Z(x)-m][Z(x-h)-m]\}$

令 $x-h=y$，则 $x=y+h$，代入上式得：

$$C(-h)=E\{[Z(y+h)-m][Z(y)-m]\}=C(h)$$

3) $|C(h)|\leqslant C(0)$

证：$\because\ E\{[Z(x)-m]\pm[Z(x+h)-m]\}^2\geqslant 0$

$$\therefore\ E[Z(x)-m]^2+E[Z(x+h)-m]^2\pm 2E\{[Z(x)-m][Z(x+h)-m]\}$$
$$=C(0)+C(0)\pm 2C(h)\geqslant 0$$

即 $C(0)\geqslant\pm C(h)$

故 $|C(h)|\leqslant C(0)$

4) 当 $|h|\to\infty$ 时，$C(h)\to 0$，或写成 $C(\infty)=0$。

事实上，$C(h)$ 是反映 $Z(x)$ 与 $Z(x+h)$ 之间的相关程度，当两点 x 与 $x+h$ 之间的距离 $|h|$ 变得太大时，这种相关性就不存在了，故当 $|h|\to\infty$ 时，$C(h)\to 0$，记为 $C(\infty)=0$。

5) $C(h)$ 是非负定的函数（或者说 $C(x_i-x_j)$ 构成的协方差矩阵是非负定矩阵）。

证：设 $y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(x_i)$，其中 λ_i 为权系数，是任意的。又 $E[Z(x_i)]=m\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

$$\because\ \mathrm{Var}(y)=E[y-E(y)]^2\geqslant 0$$

$$\therefore\ E[y-E(y)]^2=E\left[\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(x_i)-m\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right]^2$$
$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i[Z(x_i)-m]\right\}^2$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j E[Z(x_i)-m][Z(x_j)-m]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\mathrm{Cov}[Z(x_i),\ Z(x_j)]$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i-x_j)\geqslant 0$$

亦即对任意的 λ_i，λ_j 总有

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i-x_j)\geqslant 0$$

故由 $C(x_i-x_j)\ (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,n)$ 组成的协方差矩阵是非负定的。

这条性质说明了并不是任何函数都可以作为一个平稳区域化变量的协方差函数，起码它必须是非负定的。

3. 变差函数 $\gamma(h)$ 的性质

1) $\gamma(0)=0$

证：由变差函数的定义(4-1)式可知：

$$\gamma(0)=\frac{1}{2}E[Z(x)-Z(x+0)]^2$$

$$=\frac{1}{2}E[0]=0$$

2) $\gamma(h)\geqslant 0$

证：根据式(4-1)：

$$\gamma(h)=\frac{1}{2}E[Z(x)-Z(x+h)]^2\geqslant 0$$

3) $\gamma(-h)=\gamma(h)$

证：由式(3-20)及 $C(h)$ 的性质(2)可得：

$$\gamma(-h)=C(0)-C(-h)$$

$$=C(0)-C(h)=\gamma(h)$$

4) $[-\gamma(h)]$ 必须是条件非负定的。具体地说，若条件 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ 成立，则由 $-\gamma(x_i-x_j)$ 构成的矩阵是非负定的。

证：类似于 $C(h)$ 性质5)的证明仍设：

$$y=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z(x_i)$$

其中权系数 λ_i 满足条件 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$

又已知 $\mathrm{Var}(y)\geqslant 0$

故：
$$\mathrm{Var}(y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i-x_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j[C(0)-\gamma(x_i-x_j)]$$

$$=C(0)\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j[-\gamma(x_i-x_j)]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j[-\gamma(x_i-x_j)]\geqslant 0$$

所以对满足条件 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=0$ 的任意 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$，由 $[-\gamma(x_i-x_j)]$ 组成的矩阵是非负定的，也就是说 $[-\gamma(x_i-x_j)]$ 是条件非负定矩阵，或说函数 $[-\gamma(h)]$ 是条件非负定函数。

由这条性质可知，只有具有条件非负定的函数才能作为变差函数 $\gamma(h)$。

5) $\gamma(\infty) = C(0)$

证：$\gamma(\infty) = C(0) - C(\infty) = C(0) - 0 = C(0)$

即当 $|h| \to \infty$ 时，变差函数 $\gamma(h) \to C(0)$（验前方差）

4. *协方差函数 $C(h)$ 与变差函数 $\gamma(h)$ 的关系图*

协方差函数 $C(h)$ 是反映区域化变量 $Z(x)$ 与 $Z(x+h)$ 相关程度的量，变差函数 $\gamma(h)$ 是反映区域化变量 $Z(x)$ 与 $Z(x+h)$ 变异程度的量，它们的关系由(3-20)式确定，它们是从两个不同的侧面对区域化变量进行研究的，我们应把它们的性质对照起来加以理解。

由于 $C(h)$ 和 $\gamma(h)$ 均对称于直线 $h=0$，所以我们只需讨论图形的右半边 ($h \geqslant 0$) 即可。

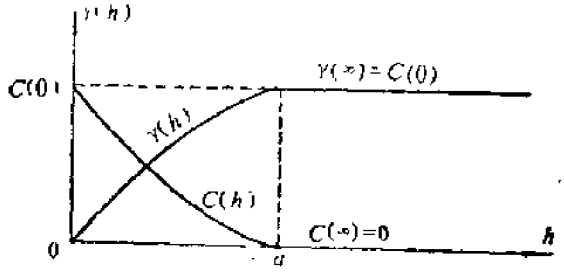


图4-1 $C(h)$与$\gamma(h)$关系图

另外，由 $C(h)$ 的性质 4) 知，当 $|h| \to \infty$ 时，$C(h) \to 0$。实际上，只要$|h|$相当大(即存在$a>0$，使 $|h| \geqslant a$)时，就可使$C(h)=0$。此处 a 称为"变程"，表示区域化变量从存在空间相关状态 ($|h|<a$) 转向不存在空间相关状态 ($|h| \geqslant a$) 的转折点。于是，$C(a)=0$。再根据关系式 $\gamma(h) = C(0) - C(h)$ 得到 $\gamma(a) = C(0)$，从而便可画出 $\gamma(h)$与$C(h)$，$C(0)$ 的关系图了，如图 4-1。

这里顺便介绍一下在实际中很有用的交叉协方差函数和交叉变差函数的性质。

5. *交叉协方差函数和交叉变差函数*

1) 协同区域化

在实际工作中，一种区域化现象常常可以用几个相关的变量来表示。例如在一个煤矿煤的比重和煤的灰分含量往往是密切相关的（一般说来煤的灰份含量越高，煤的比重越大)。同时研究比重和灰份含量是很有好处的，因为，如果某处煤的灰分含量数据有遗漏，而有煤的比重的数据，则可用煤的比重数据所提供的信息来弥补其灰分数据的不足。在一个煤层中，象这种煤灰分含量与比重是同时区域化的，就称为协同区域化。同样对于多个相关的变量也称为协同区域化。多变量的协同区域化，可用K维区域化变量的向量形式$\{Z_1(x), Z_2(x), \cdots, Z_K(x)\}$来表示。当进行观测之后，$\{Z_1(x), Z_2(x), \cdots, Z_K(x)\}$就可以看成是上述$K$维向量的一个实现。

2) 交叉协方差函数和交叉变差函数的定义

如果协同区域化变量 $Z_k(x)$ ($k=1, 2, \cdots, K$) 是二阶平稳的，即：

$$E[Z_k(x)] = m_k \text{（常数）} \quad \forall x,\ k=1, 2, \cdots, K$$

对每对区域化变量 $Z_{k'}(x)$ 和 $Z_k(x)$，我们定义交叉协方差函数为：

$$C_{k'k}(h) = E[Z_{k'}(x+h) \cdot Z_k(x)] - m_{k'}m_k, \quad \forall x; k',\ k=1, 2, \cdots, K \qquad (4\text{-}3)$$

交叉变差函数为：

$$\gamma_{k'k}(h) = \frac{1}{2}E[Z_{k'}(x+h) - Z_{k'}(x)][Z_k(x+h) - Z_k(x)], \quad \forall x;\ k',\ k=1, 2, \cdots, K \qquad (4\text{-}4)$$

3) 交叉协方差函数和交叉变差函数的性质

（1）当 $k'=k$ 时，交叉协方差函数就变为协方差函数；交叉变差函数就变为变差函数了。即

$$C_{kk}(h)=E[Z_k(x+h)Z_k(x)]-m^2k$$
$$=C_k(h),\quad \forall x;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ K$$

（2）$\gamma_{k'k}(h)$ 可以取负值。其负值意味着就平均来说，其中一个变量 $Z_{k'}(x)$ 的增加对应于另一变量 $Z_k(x)$ 的减少。反之亦然。这就相当于变量 $Z_{k'}(x)$ 与 $Z_k(x)$ 在空间上是负相关的。

（3）交叉变差函数关于 k' 和 k 对称；关于 h 和 $(-h)$ 对称，即有

$$\gamma_{k'k}(h)=\gamma_{kk'}(h) \tag{4-5}$$
$$\gamma_{k'k}(-h)=\gamma_{k'k}(h) \tag{4-6}$$

证：根据式(4-4)，前后调换两乘积项的位置，便得(4-5)式的结论。即：

$$\gamma_{k'k}(h)=\frac{1}{2}E\{[Z_{k'}(x+h)-Z_{k'}(x)]\cdot[Z_{k'}(x+h)-Z_k(x)]\}$$
$$=\frac{1}{2}E\{[Z_k(x+h)-Z_k(x)]\cdot[Z_{k'}(x+h)-Z_{k'}(x)]\}$$
$$=\gamma_{kk'}(h)$$

下面证(4-6)式：

$$\gamma_{k'k}(-h)=\frac{1}{2}E\{[Z_{k'}(x-h)-Z_{k'}(x)]\cdot[Z_k(x-h)-Z_k(x)]\}$$

令 $y=x-h$，则 $x=y+h$，代入上式得

$$\gamma_{k'k}(-h)=\frac{1}{2}E\{[Z_{k'}(y)-Z_{k'}(y+h)]\cdot[Z_k(y)-Z_k(y+h)]\}$$
$$=\frac{1}{2}E\{[Z_{k'}(y+h)-Z_k(y)]\cdot[Z_{k'}(y+h)-Z_k(y)]$$
$$=\gamma_{k'k}(h)$$

（4）交叉协方差函数有如下性质

$$C_{k'k}(-h)=C_{kk'}(h) \tag{4-7}$$

但对 h 和 $(-h)$ 没有对称性，即：

$$C_{k'k}(-h)=C_{k'k}(h)\quad \text{不成立}$$

证：$C_{k'k}(-h)=E[Z_{k'}(x-h)\cdot Z_k(x)]-m_{k'}m_k$

令：$y=x-h$，则 $x=y+h$，代入上式得：

$$C_{k'k}(-h)=E[Z_{k'}(y)\cdot Z_k(y+h)]-m_{k'}m_k$$
$$=E[Z_k(y+h)\cdot Z_{k'}(y)]-m_km_{k'}$$
$$=C_{kk'}(h)$$

故(4-7)式得证。

对于 $C_{k'k}(-h)$ 与 $C_{k'k}(h)$ 不一定相等的原因是：$E[Z_{k'}(x+h)\cdot Z_k(x)]$ 与 $E[Z_k(x+h)\cdot Z_{k'}(x)]$ 不一定相等。即 $C_{k'k}(h)$ 不一定等于 $C_{kk'}(h)$，由公式 $C_{kk'}(h)=C_{k'k}(-h)$，故 $C_{k'k}(h)$ 不一定等于 $C_{k'k}(-h)$。故交叉协方差函数 $C_{k'k}(h)$ 对 h 和 $(-h)$ 没有对称性，这是较特殊的一点。

（5）在二阶平稳假设条件下，交叉协方差函数存在，交叉变差函数也存在，且它们有如下之关系：

$$\gamma_{k'k}(h)=C_{k'k}(0)-\frac{1}{2}[C_{k'k}(h)+C_{kk'}(h)] \tag{4-8}$$

证：根据交叉变差函数的定义式(4-4)有：

$$\begin{aligned}
\gamma_{k'k}(h)&=\frac{1}{2}E\{[Z_{k'}(x+h)-Z_{k'}(x)]\cdot[Z_k(x+h)-Z_k(x)]\}\\
&=\frac{1}{2}E\{[(Z_{k'}(x+h)-m_{k'})-(Z_{k'}(x)-m_{k'})]\\
&\quad\times[(Z_k(x+h)-m_k)-(Z_k(x)-m_k)]\}\\
&=\frac{1}{2}\{E[(Z_{k'}(x+h)-m_{k'})\cdot(Z_k(x+h)-m_k)]\\
&\quad-E[(Z_{k'}(x+h)-m_{k'})(Z_k(x)-m_k)]\\
&\quad-E[(Z_{k'}(x)-m_{k'})\cdot(Z_k(x+h)-m_k)]\\
&\quad+E[(Z_{k'}(x)-m_{k'})\cdot(Z_k(x)-m_k)]\}\\
&=\frac{1}{2}\{E[Z_{k'}(x+h)\cdot Z_k(x+h)]-m_{k'}m_k\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\{E[Z_{k'}(x+h)\cdot Z_k(x)]-m_{k'}m_k\}\\
&\quad-\frac{1}{2}\{E[Z_k(x+h)\cdot Z_{k'}(x)]-m_km_{k'}\}\\
&\quad+\frac{1}{2}\{E[Z_{k'}(x)\cdot Z_k(x)]-m_{k'}m_k\}\\
&=\frac{1}{2}C_{k'k}(0)-\frac{1}{2}C_{k'k}(h)-\frac{1}{2}C_{kk'}(h)+\frac{1}{2}C_{k'k}(0)\\
&=C_{k'k}(0)-\frac{1}{2}[C_{k'k}(h)+C_{kk'}(h)]
\end{aligned}$$

证毕

（6）协同区域化变量的互相关系数可以定义如下：

在同一个点 x 处，两区域化变量 $Z_{k'}(x)$ 和 $Z_k(x)$ 之间的互相关系数为：

$$\rho_{k'k}=\frac{C_{k'k}(0)}{\sqrt{C_{k'k'}(0)\cdot C_{kk}(0)}} \tag{4-9}$$

协同区域化变量互相关系数有如下性质：

① $\rho_{k'k}=\rho_{kk'}$

证：∵ $C_{k'k}(0)=E[Z_{k'}(x)\cdot Z_k(x)]-m_{k'}m_k$

$=E[Z_k(x)\cdot Z_{k'}(x)]-m_k\cdot m_{k'}$

$=C_{kk'}(0)$

故有 $\rho_{k'k}=\dfrac{C_{k'k}(0)}{\sqrt{C_{k'k'}(0)\cdot C_{kk}(0)}}$

$$= \frac{C_{kk'}(0)}{\sqrt{C_{kk}(0)\cdot C_{k'k'}(0)}} = \rho_{kk'}$$

② $|\rho_{k'k}| = |\rho_{kk'}| \leqslant 1$

由于 $C_{kk'}(0)$ 就是数理统计中的协方差，$C_{kk}(0)$、$C_{k'k'}(0)$ 就是数理统计中的方差。根据协方差与方差之间的关系，很容易证得上述结论。

注意：$C_{k'k}(0) = 0$（即 $\rho_{k'k} = 0$）并不能推出 $C_{k'k}(h) = 0, \forall h \neq 0$。也就是说，二变量 $Z_{k'}(x)$ 和 $Z_k(x)$ 的点对点的互相关系数可以为零（或近似为零），但这二变量还是可能空间相关的。

二、变差函数的功能

变差函数在地质统计学中之所以占有非常重要的地位，不仅因为它是许多地质统计学计算（如估计方差、离散方差、正则化变量的变差函数）的基础，更重要的还是由于它能反映区域化变量的许多重要性质，也就是说它有许多功能。

1. 通过“变程”a 反映变量的影响范围

通常变差函数在 0～a（变程）范围内是从原点开始，随 $|h|$ 的增大而增加。但当 $|h| \geqslant a$ 时，变差函数 $\gamma(h)$ 就不再单调增加了，而是或多或少地稳定在一个极限值 $\gamma(\infty)$ 附近，这种现象称为“跃迁现象”（见图 4-1）。

此处 $\gamma(\infty)$ 称为“基台值”。在满足二阶平稳假设的条件下，且 $C(\infty) = 0$ 时有

$$\gamma(\infty) = C(0) = \mathrm{Var}[Z(x)] \tag{4-10}$$

这表示基台值等于 $Z(x)$ 的验前方差。当然，如果二阶平稳假设不满足或 $C(\infty) \neq 0$ 的情况下，这个关系式就不一定成立。也就是说，基台值和验前方差不一定相等。

凡具有一个“变程” a 和一个“基台值”的变差函数，都称为“可迁型”的。在这种“可迁型”的现象中，落在以 x 为中心，以 a 为半径的邻域内的任何数据都与 $Z(x)$ 空间相关。或者说在以 a 为直径的邻域内，任何两点的数据都是空间相关的，其相关程度一般随两点间的距离增大而减弱。当两点间的距离 $|h|$ 大于 a 时，$Z(x)$ 与 $Z(x+h)$ 就不存在空间相关了，或者说二者就相互没有影响了。因此，变程 a 的确很好地反映了变量的影响范围。

2. 变差函数在原点处的性状反映了变量的空间连续性

按变差函数在原点处的性状可分为以下几种主要类型。每种类型反映了变量在空间的不同连续程度，见图 4-2。

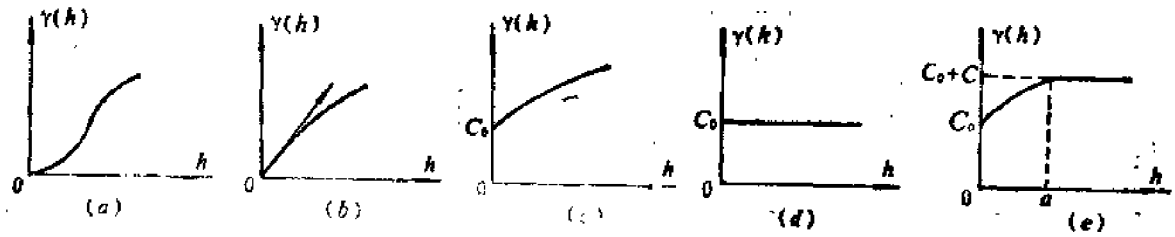


图4-2 变差函数在原点处的性状

1）抛物线型（或连续型），见图 4-2(a)。

当 $|h| \to 0$ 时，$\gamma(h) \to A|h|^2$（其中 A 为常数），即变差函数曲线在原点处趋向于一条抛物线。这反映区域化变量是有高度连续性的，如矿体厚度变量等。

2) 线性型(平均的连续型)，见图 4-2(b)。

当 $|h|\to 0$ 时，$\gamma(h)\to A|h|$(其中 A 为常数)，即变差函数在原点处趋向于一条直线，或说在原点处有斜向切线存在。它反映区域化变量有平均的连续性，如金属矿床的各种金属品位多属于这种类型。

3) 间断型(或“有块金效应型”)，见图 4-2(c)。

$\gamma(h)$ 在原点处间断，即虽有 $\gamma(0)=0$，但是其极限值不为 0，即 $\lim\limits_{h\to 0}\gamma(h)=C_0>0$。这里 C_0 称“块金常数”，变差函数在原点处的间断性叫做“块金效应”。它反映了变量的连续性很差，甚至平均的连续性也没有了。即使在很短的距离内，变量的差异也可能很大。金的品位就属于这种类型。“块金效应”这个名词正是由于金的颗粒分布不均匀而造成在很短距离内样品品位差异很大而得名的。当 $|h|$ 变大时，$\gamma(h)$ 慢慢变得比较连续了。顺便指出变量的连续性可以用 C_0/C 来衡量。C_0/C 们种越小，连续性越好。

4) 随机型(或“纯块金效应型”)，见图 4-2(d)。

这种类型的数学模型为：

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & |h|=0\\ C_0(>0) & |h|>0\end{cases}$$

这种变差函数可以看成是具有基台值 C_0 和无穷小变程 a 的可迁型变差函数。无论 $|h|$ 多么小，$Z(x)$ 与 $Z(x+h)$ 总是互不相关。它反映变量完全不存在空间相关的情况，或说变量是纯随机变量。在地质领域内除了某些杂质和稀散元素外，这种类型的变量极少。

5) 有拱型，见图 4-2(e)。

变差函数既有块金常数 C_0，又有基台值 C_0+C(C 称为“拱高”，当 $C_0=0$ 时，基台值就等于拱高 C)和变程 a。地质统计学所研究的大部分区域化变量是这种类型。

3. 变差函数如果是跃迁型的，其基台值的大小可以反映区域化变量在该方向上变化幅度的大小。

4. 不同方向上的变差图可反映区域化变量的各向异性

通过作出不同方向上的变差图 $\gamma(h)$，可以确定区域化变量的各向异性(包括有无各向异性以及各向异性的类型等)。例如，煤层的厚度沿走向方向的变差函数 $\gamma_1(h)$ 有较大变程 a_1，而在倾向方向上的变差函数 $\gamma_2(h)$ 的变程 a_2 较小。作出不同方向上的变差图，对于掌握区域化变量的空间结构特征，反映其各向异性是很有必要的。

如果 $Z(x)$ 在各个方向上的变差图 $\gamma(h)$ 基本相同，则可以认为 $Z(x)$ 是各向同性的。在三维空间中，我们可以用一个统一的变差函数 $\gamma(r)=\gamma(|h|)=\gamma(\sqrt{h_x^2+h_y^2+h_w^2})$ 来表示各个不同方向上的各向同性的变差函数。这个变差函数 $\gamma(r)$ 是个一维变差函数。这样研究起来就方便多了。

三、变差函数的理论模型

下面讨论变差函数 $\gamma(h)$ 的理论模型，这里都假设它是各向同性的或者认为它是一维区域化变量的变差函数，即 $\gamma(h)=\gamma(|h|)=\gamma(r)$。

第三章我们讨论了根据观测值，计算实验变差函数的方法，为了对区域化变量的未知值作出估计，还需要将实验变差函数拟合成相应的理论变差函数模型，这些模型将直接参与克立格法的储量估算以及其它估值。

变差函数的理论模型可分为有基台值和无基台值模型两大类，下面分别叙述之：

1．有基台值的模型

1）球状模型（亦称马特隆模型，在原点处为线性型）

它的一般公式为：

$$\gamma(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ C_0+C\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^3}{a^3}\right) & 0<r\leqslant a\\ C_0+C & r>a\end{cases}\qquad(4\text{-}11)$$

其中，C_0为块金常数，C_0+C为基台值，C为拱高，a为变程。当$C_0=0$，$C=1$时，称为标准球状模型（见图 4-4）。

$$\gamma(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^3}{a^3} & 0<r\leqslant a\\ 1 & r>a\end{cases}$$

球状模型的几何解释：球状模型之所以叫“球状”，是因为它起源于两个半径为a且球心距为$2h$的球体重叠部分体积的计算公式。设这两个球体重叠部分体积为$C(h)$（表示协方差函数）。显然，当$h=0$时，$C(0)=V=\dfrac{4}{3}\pi a^3$；当$h>a$时，$C(h)=0$（因此时两球不相交）。当$0<h\leqslant a$时（见图 4-3）有

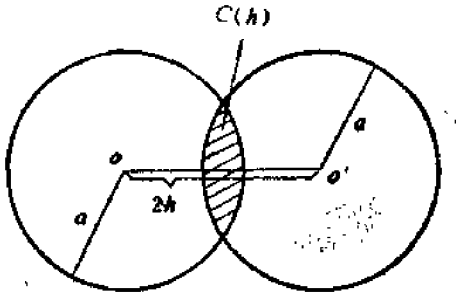


图4-3 球状模型的几何解释

$$C(h)=2\int_h^a\pi(a^2-x^2)\,dx$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a}+\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a^3}+1\right)$$

由于在二阶平稳假设条件下有$C(h)=C(0)-\gamma(h)$，故$\gamma(h)=\dfrac{4\pi a^3}{3}\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{a}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3}{a^3}\right)$。

这就是块金常数$C_0=0$，拱高$C=C(0)=\dfrac{4\pi a^3}{3}$，变程为$a$的球状模型变差函数公式。

2）指数函数模型（在原点处为线性型）

它的一般公式为

$$\gamma(r)=C_0+C(1-e^{-\frac{r}{a}})\qquad(4\text{-}12)$$

注：此处a不是变程。因为当$r=3a$时，有$1-e^{-\frac{3a}{a}}=1-e^{-3}\approx0.95\approx1$，所以得到当$r=3a$时，$\gamma(r)\approx C_0+C$，故其变程为$3a$。当$C_0=0$，$C=1$时称为标准指数函数模型，其图形见图 4-4。

3）高斯模型（在原点处为抛物线型）

它的一般公式为

$$\gamma(r)=C_0+C(1-e^{-\frac{r^2}{a^2}})\qquad(4\text{-}13)$$

此处a亦不是变程。因为当$r=\sqrt{3}a$时，有$1-e^{-\frac{r^2}{a^2}}=1-e^{-\frac{3a^2}{a^2}}=1-e^{-3}\approx0.95\approx$

1，$\gamma(r)\approx C_0+C$，故高斯模型的变程约为$\sqrt{3}a$。当 $C_0=0$，$C=1$ 时，称为标准高斯模型，见图 4-4。

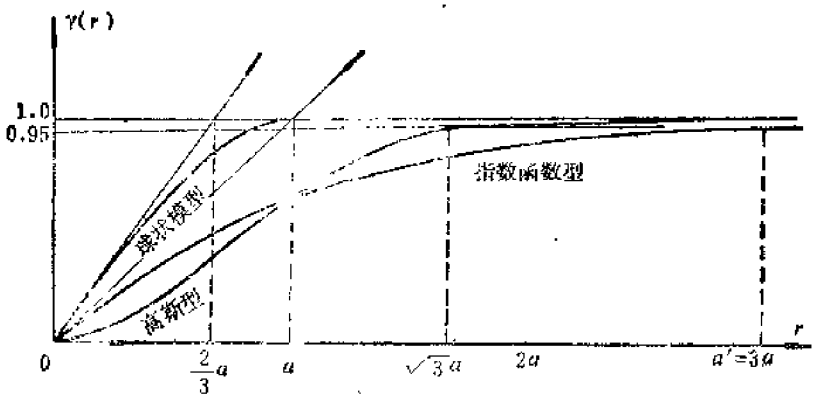


图4-4　三种有基台值的变差函数模型比较图

图 4-4 还说明了这三种有基台的模型，通过原点的切线与基台值线相交点的横坐标各不相同。球状模型为$\frac{2}{3}a$，指数模型为a，高斯模型无交点。显然，高斯模型在原点处的连续性最好。

2．无基台值的模型

如果区域化变量 $Z(x)$ 只满足本征假设，而不满足二阶平稳假设，则 $Z(x)$ 的变差函数就是无基台值的模型。因为，此时 $Z(x)$ 既无协方差函数，又无验前方差，只有变差函数存在。

1）幂函数模型(见图 4-5)

它的一般公式为

$$\gamma(r)=r^{\theta}\quad 0<\theta<2 \tag{4-14}$$

实际上常用的是 ($\theta=1$) 线性模型：

$$\gamma(r)=\omega r$$

其中 ω 为常数，表示直线的斜率。对于很小的 $|h|$ 值，可以用线性模型拟合在原点处具有线性状的任一模型(如球状模型或指数模型)。

2）对数函数模型(见图 4-6)

它的公式为

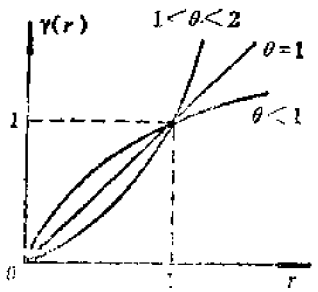


图4-5　幂函数模型

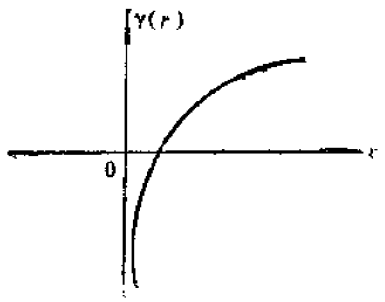


图4-6　对数函数模型

$$\gamma(r) = \log(r) \tag{4-15}$$

在六十年代应用较多的是戴维斯模型，其公式为

$$\gamma(r) = 3D\ln(r)$$

其中 0 为一常数.

由于当 $r\to 0$ 时，$\log(r)\to -\infty$，这与变差函数的性质不合，因此对数函数模型不能用来描述点承载的区域化变量。但可以用来作为正则化变量的变差函数 $\gamma_v(r)$ 的模型。例如，对钻孔岩心样品以样长 $l=1$ 进行正则化后，点对数函数模型 $\gamma(r)=\ln(r)$ 就变为正则化对数函数模型(根据式(3-50))。

$$\gamma_l(r) \approx \gamma(r) - \gamma(l,\ l) = \ln(r) + \frac{3}{2},\ \forall r \geqslant l = 1$$

3) 纯块金效应模型

它的公式为：

$$\gamma(r) = \begin{cases} 0 & r = 0 \\ C_0(>0) & r > 0 \end{cases} \tag{4-16}$$

它可以看成是变程 a 为无穷小量，拱高 $C=0$，对任何 $r>0$，$\gamma(r)$ 就能达到基台值 C_0(块金值)。这种模型只对纯随机变量才适用。

4) 空穴效应模型(见图 4-7)

当变差函数 $\gamma(h)$ 并非单调递增，而显示出有一定周期的波动时，就叫有空穴效应(或叫孔穴效应)。

常用的一维空穴效应模型的公式为：

$$\gamma(r) = C_0 + C\left[1 - e^{-\frac{r}{a}} \cdot \cos\left(2\pi\frac{r}{b}\right)\right] \tag{4-17}$$

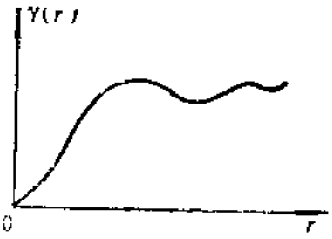


图4-7 空穴效应模型($C_0=0$)

一个区域化变量的拟周期变化成分，可以作为一种空穴效应出现在实验变差函数上。在地质、采矿中，常见有富矿层和非矿层交互出现的情况，这时，沿垂直方向就会显示出一种空穴效应。又如，当矿脉与废矿石在某一方向上，以一定周期相间出现时，沿这个方向的变差函数也会显示出一种空穴效应。

最后说明一点：上述七种模型的变差函数的负值函数都是非负定的，符合变差函数(性质 4)的要求。欲使某个函数能作为变差函数，必须是这个函数的负值函数符合非负定的要求。而这种检验是非常困难的。事实上，在实际工作中所用到的区域化变量的变差函数，从已有的理论模型中进行选择已经足够了。

第二节 结 构 分 析

一、一个方向的套合结构

1. 套合结构的概念

上一节我们讲到，一个矿体的变异性可以用变差函数来描述，而这种变异性往往是由多种原因引起的，往往包含着各种尺度上的多层次的变化性。例如：(1)由岩心的采取、样品的制备以及分析等过程产生的误差；(2)矿物成分的变化(这在金矿、铀矿等品位变化剧烈的矿床上尤为明显)；(3)矿层与夹层的交替变化；(4)由区域构造运动、

岩浆活动造成矿床分布的差异；等等。

由不同原因引起的变异性，其变化尺度的大小亦不相同。第一种变异($r\approx0$)，是点承载一级的结构；第二种变异，r 在 1～几个厘米范围之内；第三种变异，通常发生在米至百米的尺度间；第四种变异，则是以公里计算，即为若干公里一级的结构。

不难看出，大尺度的变异总是包含着小尺度的变异。但我们却不能从大尺度的变化性中区分出小尺度的变化性来。例如，在米或百米的尺度上可以把矿层与夹层交替一级的变异分开，却无法把测量误差、矿物成分的变化所引起的第(1)、(2)级变化性区分出来(即无法找出更细微的结构来)。而这种第(1)、(2)级结构只能作为“块金效应”出现。同样，在大尺度的第(4)种变异的变差图上，不能将前三种变化性区分开。

实际上，所有这些结构都是同时起作用的，只是出现在不同的距离上而已。我们把这种多层结构叠加在一起的变化结构称为“套合结构”。

2. 套合结构的表示法

我们可以用反映各种不同尺度的变化性的多个变差函数之和来表示一个套合结构。即套合结构 $\gamma(r)$ 为

$$\gamma(r)=\gamma_0(r)+\gamma_1(r)+\gamma_2(r)+\cdots+\gamma_i(r)+\cdots \tag{4-18}$$

其中每个成分 $\gamma_i(r)$ 可以是不同模型的变差函数。例如，$\gamma_0(r)$ 可以是代表微观变化结构(如测量误差和矿物成分的变化)的球状模型。由于它的尺度极小，可以看成是“纯块金效应”。而 $\gamma_1(r)$ 是另一个球状模型，块金常数为零，基台值为 C_1，变程为 a_1(=10m)，它反映透镜状矿体和非矿围岩的交替。$\gamma_2(r)$ 又是另一个球状模型，也没有块金常数，基台值为 C_2，变程 a_2(=200m)，它反映了矿层的交替或均匀矿化带范围的变化。具体写出表达式，则有

$$\gamma_0(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ C_0 & r>0\end{cases}$$

$$\gamma_1(r)=\begin{cases}C_1\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a_1}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^3}{a_1^3}\right) & 0\leqslant r\leqslant a_1\\ C_1 & r>a_1\end{cases}$$

$$\gamma_2(r)=\begin{cases}C_2\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a_2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^3}{a_2^3}\right) & 0\leqslant r\leqslant a_2\\ C_2 & r>a_2\end{cases}$$

其中 $a_1<a_2$，则此套合结构的表达式为：

$$\gamma(r)=\gamma_0(r)+\gamma_1(r)+\gamma_2(r)$$

$$=\begin{cases}0 & r=0\\ C_0+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{C_1}{a_1}+\dfrac{C_2}{a_2}\right)r-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C_1}{a_1^3}+\dfrac{C_2}{a_2^3}\right)r^3 & 0<r\leqslant a_1\\ C_0+C_1+C_2\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a_2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{r^3}{a_2^3}\right) & a_1<r\leqslant a_2\\ C_0+C_1+C_2 & r>a_2\end{cases}$$

其图形见图 4-8。

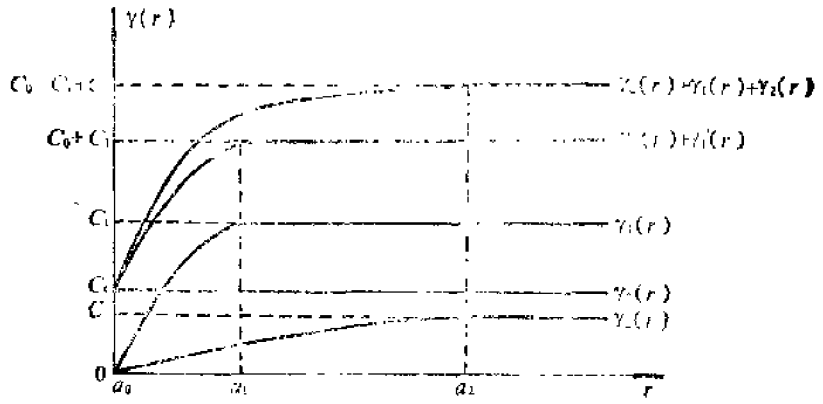


图4-8 套合结构图

3. 块金效应的尺度问题

"块金效应"是用来表征当观测点的间距 r 远大于微观结构的变程 a_0 时不能区分出的那些变化性的总和。例如，在上例中，虽然 $\gamma_0(r)$ 也是球状模型，但它所研究的对象的尺度相对于 $\gamma_1(r)$ 和 $\gamma_2(r)$ 是太小了，故其变程 a_0 相对于 a_1 和 a_2 也是太小了。这三个模型 $\gamma_0(r)$，$\gamma_1(r)$ 和 $\gamma_2(r)$ 套合在一起，a_0 就显不出来了，故成了"纯块金效应"。由此可见，在地质、采矿中"块金效应"的含义与观测网度的大小有密切关系。这种与观测网度有关的块金效应，就称为块金效应的尺度效应。

因此，要想了解微观变化性的结构特征，只靠大尺度的观测数据是办不到的。这就象要求在中小比例尺区域填图的结果上给出某一矿区、某一矿段的大比例尺构造特征一样，是不可能的。故欲了解小尺度上的变化性，应尽可能采取适当小一些间距的样品。

另外指出一点，如果区域化变量是典型的随机变量，则不论观测尺度的大小，所得的实验变差函数曲线，总是接近于纯金效应模型的。矿化的极端均匀性，也表现为"纯块金效应"。

以上介绍的是在一个方向上（或各向同性时任一方向上）各种结构的套合问题，这是比较简单的，也是套合的基础。但在实际问题中，矿化现象是各向异性的，如某个矿体在走向、倾向和垂向上的变化是不同的。反映在变差函数上，就是各个方向的变差函数不一样。因此需要研究不同方向上的结构套合问题。

二、不同方向上的结构套合

首先介绍各向异性的概念及种类，然后讨论结构套合问题。

1. 各向异性的概念与种类

1）概念：若 $Z(x)$ 为三维区域化变量，其三维变差函数能表示为 $\gamma(h)=\gamma(h_u,\ h_v,\ h_w)=\sqrt{\gamma(h_u^2+h_v^2+h_w^2)}=\gamma(r)$，则称区域化变量 $Z(x)=Z(x_u,\ x_v,\ x_w)$ 为各向同性的区域化变量。反之，若 $\gamma(h_u,\ h_v,\ h_w)$ 不能表为 $\gamma(r)$ 的形式，则称区域化变量 $Z(x_u,\ x_v,\ x_w)$ 为各向异性的。

各向异性是绝对的，各向同性则是相对的。在地质、采矿中，各向同性往往只是在平均意义上讲的。各向异性的产生，往往是与所研究对象在生成的同时，存在一些优先方向有关的。如三角洲沉积形成的矿床中的垂直方向；冲积矿床中沉积趋势的水平方向；熔岩互层中火山管周围的辐射方向等。

2) 各向异性的类型。各向异性按其性质可分为两类：

(1) 几何各向异性。当两个方向的变差函数具有相同的基台值 C（设块金常数 $C_0=0$）和不同的变程 a_1 和 a_2 时，则称这种各向异性为几何各向异性（见图 4-9）。

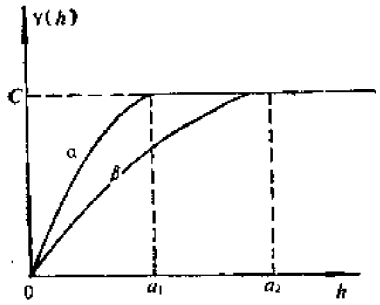


图4-9 几何各向异性变差图

为什么叫几何各向异性呢？这是因为这种各向异性可以通过简单的几何图形变换（或说线性变换）化为各向同性的缘故。

几何各向异性，具有同一基台值，不同的变程。设 α，β 是两个互相垂直的方向，其变差图如图4-9所示。它们有相同的基台值 C，不同的变程 a_1，a_2（$a_1<a_2$）。此时，我们将大变程与小变程的比 $\frac{a_2}{a_1}=K(>1$，且为常数）称为各向异性比。

对几何各向异性的物理意义，可以这样来认识：在 α 方向上距离为 h 的两点间的平均变异程度与在 β 方向上距离为 Kh 的两点间的平均变异程度相同，即 $\gamma_\alpha(h)=\gamma_\beta(Kh)$。

例如，某煤田煤层厚度在走向和倾向方向上的变差函数有相同的基台值，其倾向上的变程为 $a_1=1000$m，走向上的变程 $a_2=2000$m，于是各向异性比为

$$K=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2000}{1000}=2$$

这就意味着倾向上 lm 煤厚变异程度，在走向上间距为 $2l$m 就可以达到。显然倾向上的煤厚变化程度比走向上的大。

上述我们仅考虑了两个方向的情况。以二维平面为例，我们要考虑各个方向的变差函数。假设均为球状模型，且块金为零，只是变程不同，则我们可以作出其方向——变程图。若这个方向——变程图为一椭圆（如图4-10），则称所讨论的区域化变量为几何各向异性。

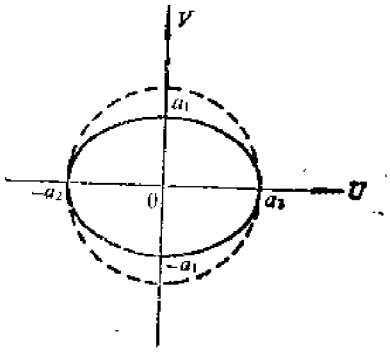
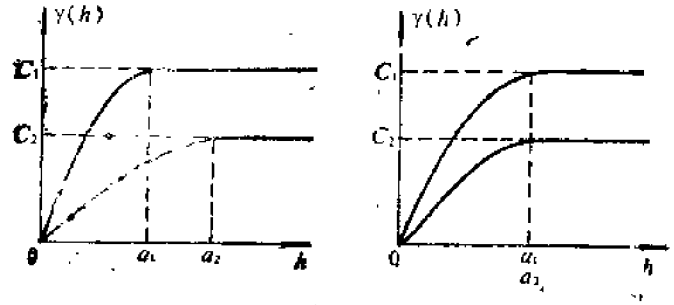


图4-10 二维几何各向异性的方向——变程图

(2) 带状各向异性。凡不能通过坐标的线性变换化为各向同性的各向异性，均称为带状各向异性。换句话说，当区域化变量在不同方向上的变化性不能用简单的几何变换而变成各向同性，就称为带状各向异性。



(a) 不同变程不同基台值　　(b) 相同变程不同基台值

图4-11 二个方向带状各向异性变差图

具备带状各向异性的区域化变量$Z(x)$，在不同方向上的变差函数$\gamma(h)$都具有不同的基台值，而变程可以相同，也可以不同。图4-11表示二个方向的带状各向异性（假定块金常数均为零）。

“带状各向异性”这个名词的由来，是由于矿化分带性而引起各向异性的缘故。

带状各向异性常常出现在多层状矿床中。由于地质体(矿层、夹层)组成变化显著，其区域化变量在垂直矿层面方向的变化性比沿矿层面方向的变化性大，因此，其变差函数的基台值不同，呈带状各向异性。

2. 各向异性结构的套合

对各向异性结构，我们总是想先把它转化成各向同性的结构，然后才好进行套合，最后形成一个统一的结构。

1) 几何各向异性结构的套合

(1) 变换矩阵。前面我们已经说过，凡是几何各向异性的模型都可以通过对距离坐标$h=(h_u,\ h_v,\ h_w)^T$的适当线性变换化为距离坐标$h'=(h'_u,\ h'_v,\ h'_w)^T$的各向同性模型（$T$为坐标向量的转置符号）。这个线性变换为$h'=A\cdot h$。其中$A$为线性变换矩阵。即：

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{4-19}$$

不同的矩阵A，代表着不同的线性变换。故关键在于选择A。

若在一个几何各向异性的模型中，只有水平方向的各向同性变异，没有垂直方向上的变异，则可选择

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时，交换后的距离坐标为：

$$h'=\begin{bmatrix} h'_u \\ h'_v \\ h'_w \end{bmatrix}=A\cdot h=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} h_u \\ h_v \\ h_w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_u \\ h_v \\ 0 \end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases} h'_u=h_u \\ h'_v=h_v \\ h'_w=0 \end{cases}$$

这样一来，对距离坐标h'而言，就变成了各向同性的模型了。因为

$$\gamma(h')=\gamma(h'_u,\ h'_v,\ h'_w)=\gamma(h_u,\ h_v,\ 0)$$

由已知条件$\gamma(h)$在水平方向上是各向同性的，则

$$\gamma(h_u,h_v,0)=\gamma(\sqrt{h_u^2+h_v^2})=\gamma(\sqrt{h_u'^2+h_v'^2+h_w'^2})$$
$$=\gamma(|h'|)$$

即：$\gamma(h')=\gamma(|h'|)$

又若在一种几何各向异性模型中，只有垂直方向的变异，而没有水平方向的变异，则可选择变换矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

变换后的距离坐标为：

$$h'=\begin{bmatrix}h'_u\\h'_v\\h'_w\end{bmatrix}=A\cdot h=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_u\\h_v\\h_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\h_w\end{bmatrix}$$

即
$$\begin{cases}h'_u=0\\h'_v=0\\h'_w=h_w\end{cases}$$

同理，对于距离坐标 h' 而言，就变成各向同性的了。因为

$$\begin{aligned}\gamma(h')&=\gamma(h'_u,\ h'_v,\ h'_w)=\gamma(0,\ 0,\ h'_w)\\&=\gamma(\sqrt{h'^2_w})\\&=\gamma(\sqrt{h'^2_u+h'^2_v+h'^2_w})\\&=\gamma(|h'|)\end{aligned}$$

(2) 方向——变程图的应用。在进行不同方向的结构套合之前，首先应当依据地质资料找出区域化变量变化的特征方向，也就是找出走向、倾向或受构造等因素控制的特殊方向，然后对这些方向构制变差函数。图 4-12 是平面上四个方向 a_1，a_2，a_3 和 a_4 的四条变差函数曲线。设它们均为球状模型，块金常数均为零，且具有同一基台值 C，其四个变程分别为 a_1，a_2，a_3 和 a_4。

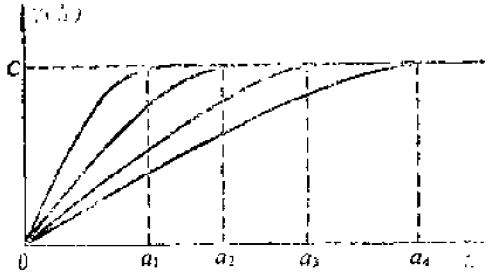


图4-12 四个方向上几何各向异性的变差曲线图

我们可以再作出其方向——变程图（图 4-13）来。根据方向——变程图的不同情况，我们可以确定各向异性的不同类型：

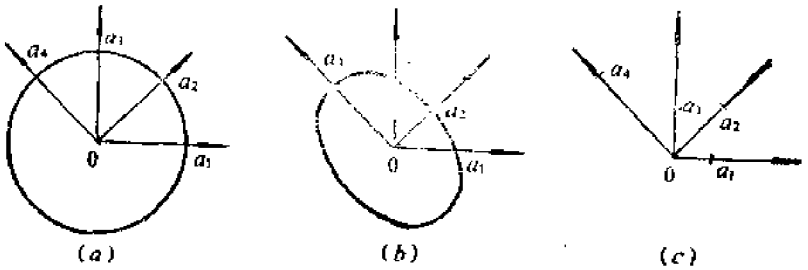


图4-13 方向——变程图

① 若方向——变程图近似于一个以 a 为半径的圆（见图4-13(a)），即 a_1，a_2，a_3 和 a_4 近似相等，均等于 a，则认为是各向同性结构，可用变程为 a 的一个球状模型来拟合；

② 若方向——变程图近似于一个椭圆（见图4-13(b)），则认为是几何各向异性，可用

下面介绍的一种线性变换使之变为各向同性结构；

② 若方向——变程图并不呈现椭圆的形状(见图 4-13(c))，也就是说图形不能用一种二次曲线来拟合，则认为是一种带状各向异性。

(3) 几何各向异性的套合。现在我们再回到图 4-12 的例子上来。若四个方向的方向——变程图为一椭圆，且a垂直于的a_4，我们以a_4方向的变程a_4为基础(因为a_4最大)，求出其它几个方向的异向性比值：

$$a_1:\ K_1=\frac{a_4}{a_1}$$

$$a_2:\ K_2=\frac{a_4}{a_2}$$

$$a_3:\ K_3=\frac{a_4}{a_3}$$

这些异向性比值$K_i(i=1,\ 2,\ 3)$，就表示向量h各分量的差异。

由于四个方向的方向——变程图为一椭圆，故只需考虑长、短两个方向之间的关系，即a_4与a_1方向的差异。令a_4为u方向，a_1为v方向，且u和v是互相垂直的。这时选择变换矩阵为：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K_1\end{bmatrix}$$

则变换后的距离坐标为：

$$h'=\begin{bmatrix}h'_u\\ h'_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K_1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_u\\ h_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}h_u\\ K_1h_v\end{bmatrix}$$

即：

$$\begin{cases}h'_u=h_u\\ h'_v=K_1h_v\end{cases}$$

这样就把方向——变程图变为圆形了，也就是把几何各向异性变为各向同性了。于是在新坐标系h'_u，h'_v下便可以用一个统一的球状模型来拟合这四个方向的几何各向异性的模型了。即：

$$\gamma(h')=\begin{cases}0 & |h'|=0\\ C\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{|h'|}{a_4}-\dfrac{1}{2}\dfrac{|h'|^3}{a_4^3}\right) & 0<|h'|\leqslant a_4\\ C & |h'|>a_4\end{cases}$$

式中：

$$|h'|=\sqrt{h'^2_u+h'^2_v}=\sqrt{h_u^2+(K_1h_v)^2}$$

可以证明，上述各向同性模型，在a_1方向上的变差函数的变程对原坐标系仍是a_1，因为此时$h_u=0$，则$h'_u=0$，$|h'|=h'_v$。故当$0<|h'|\leqslant a_4$时，有$0\leqslant h'_v\leqslant a_4$。又$\because h'_v=K_1h_v$，$a_4=K_1a_1$，$\therefore 0<K_1h_v\leqslant K_1a_1$即：$0<h_v\leqslant a_1$

$$\gamma(h')=C\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{|h'|}{a_4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{|h'|^3}{a_4^3}\right]$$

$$=C\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{h'_v}{a_4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h'^3_v}{a_4^3}\right]$$

$$=C\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{K_1h_v}{K_1a_1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{(K_1h_v)^3}{(K_1a_1)^3}\right]$$

$$= C\left[\frac{8}{2}\cdot\frac{h_v}{a_1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h_v^3}{a_1^3}\right]$$

这就是 a_1 方向的变差函数。

当所选择的坐标轴与几何异向性的椭圆主轴不一致时，如图 4-14 所示，在作上述线性变换之前还需增加一次坐标旋转变换。其步骤为：

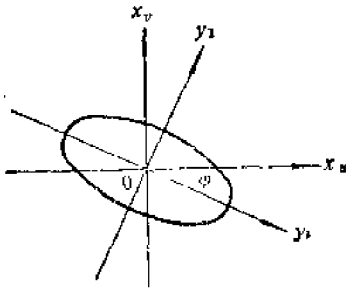


图4-14 坐标旋转变换

① 设椭圆主轴 y_1oy_2 与所选的坐标轴 x_uox_v 顺时针错过的角度为 φ，将坐标轴 (x_u, x_v) 旋转 φ 角，使它们与椭圆主轴 y_1，y_2 重合。旋转变换的矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_\varphi=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{4-20}$$

$$\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}_\varphi\cdot\begin{bmatrix}x_u\\ x_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_u\\ x_v\end{bmatrix}$$

② 将椭圆变为半径等于椭圆半长轴的圆。设 y_1 方向上的变程为 a_1，y_2 的变程为 a_2，且 $a_1>a_2$。则各向异性比为 $K=\frac{a_1}{a_2}(>1)$，故变换矩阵为：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}$$

变换后的新坐标为：

$$\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}$$

③ 再旋转 $-\varphi$ 角，恢复原来坐标方向。其旋转变换矩阵为：

$$\boldsymbol{R}_{-\varphi}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix} \tag{4-21}$$

于是经过三次坐标变换，最后的坐标为：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}x_u'\\ x_v'\end{bmatrix}&=\boldsymbol{R}_{-\varphi}\cdot\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}y_1'\\ y_2'\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_u\\ x_v\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi+K\cdot\sin^2\varphi & (1-K)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\\ (1-K)\sin\varphi\cdot\cos\varphi & \sin^2\varphi+K\cdot\cos^2\varphi\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_u\\ x_v\end{bmatrix}\\ &=\boldsymbol{A}'\cdot\begin{bmatrix}x_u\\ x_v\end{bmatrix}\end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{A}'=\begin{bmatrix}\cos^2\varphi+K\cdot\sin^2\varphi & (1-K)\sin\varphi\cdot\cos\varphi\\ (1-K)\sin\varphi\cdot\cos\varphi & \sin^2\varphi+K\cdot\cos^2\varphi\end{bmatrix} \tag{4-22}$$

也就是说，通过线性变换矩阵 $\boldsymbol{A}'$，就可以把原距离坐标 $\begin{bmatrix}h_u\\ h_v\end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix}h_u'\\ h_v'\end{bmatrix}$，则 $\gamma(h')$ 即为各向同性了。

对于三维几何各向异性，亦可确定其线性变换矩阵 $\boldsymbol{A}$，把它转化为各向同性。但是

实际中极少符合三维几何各向异性椭球面的特殊情况，常用的还是带状各向异性模型。

2）带状各向异性结构的套合

带状各向异性的变差函数可以定义为一种不同方向的套合结构，即

$$\gamma(h)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i(h)$$

其中每一个组成结构 $\gamma_i(h)$ 可以具有各自不同的各向异性；但都可以通过线性变换化为各向同性。例如 $\gamma_i(h)$ 可以是几何各向异性；有的组成结构又可以仅仅是竖坐标h_w的函数，即$\gamma_j(h)=\gamma_j(h_w)$；有的又可以是三维各向同性$\gamma_K(h)=\gamma_K(\sqrt{h_u^2+h_v^2+h_w^2})=\gamma_K(|h|)=\gamma_K(r)$；等等。然后将它们分别转化成各向同性，最后把这些各向同性的结构叠加起来，构成一个统一的变差函数。

由于 $\gamma_i(h)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的情况是多种多样的，下面仅就地质采矿中常见的情况加以分析。

设有一层状矿床，区域化变量在垂向上的变异比矿层面水平方向上的变异大。而在水平方向上的变异是各向同性的。这是带状各向异性中最常见的一种情况。对这种情况有两种方法进行结构套合。

(1) 将垂直方向的变异和水平方向的变异看成是各自独立的成份进行套合。

为了将这种各向异性结构转变成各向同性的形式，在套合结构式中，我们用不同的变换矩阵把不同方向上的变异性区分开来。

对于垂直方向，我们用 $\gamma_1(h_w)$ 代入 $\gamma(h)$ 中，可对其距离坐标(以下简称坐标)

$$\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}h_u\\h_v\\h_w\end{bmatrix}$$

选用线性变换矩阵

$$\boldsymbol{A}_{垂}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

于是，变换后的坐标为

$$\boldsymbol{h}'=\begin{bmatrix}h'_u\\h'_v\\h'_w\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{垂}\cdot\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}0\\0\\h_w\end{bmatrix}$$

这样 $\gamma_1(h')=\gamma_1(h_w)$，显然它是个各向同性结构。

若水平方向是各向同性结构$\gamma_2(\sqrt{h_u^2+h_v^2})$，可用对其坐标 $\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}h_u\\h_v\\h_w\end{bmatrix}$ 选用线性变换矩阵$\boldsymbol{A}_{水平}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$，变换后的坐标为：

$$\boldsymbol{h}''=\begin{bmatrix}h''_u\\h''_v\\h''_w\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_{水平}\cdot\boldsymbol{h}=\begin{bmatrix}h_u\\h_v\\0\end{bmatrix},$$

这样，便得到 $\gamma_2(h'')=\gamma_2(h_u,\ h_v,\ 0)=\gamma_2(\sqrt{h_u^2+h_v^2})$，亦是各向同性的。最后套合成

一个统一的结构：

$$\gamma(h) = \gamma_1(h_w) + \gamma_2(\sqrt{h_u^2 + h_v^2})$$

(2) 将三维空间看成是与水平方向各向同性 $\gamma(\sqrt{h_u^2 + h_v^2})$ 一样的各向同性结构 γ_1 $(\sqrt{h_u^2 + h_v^2 + h_w^2} = \gamma_1(|h|)$，而把总的套合结构 $\gamma(h)$ 看成是在 $\gamma_1(|h|)$ 的基础上叠加了一个垂向上多出来的附加结构$\gamma_2(h_w)$，即

$$\gamma(h) = \gamma_1(|h|) + \gamma_2(h_w) \quad (4\text{-}23)$$

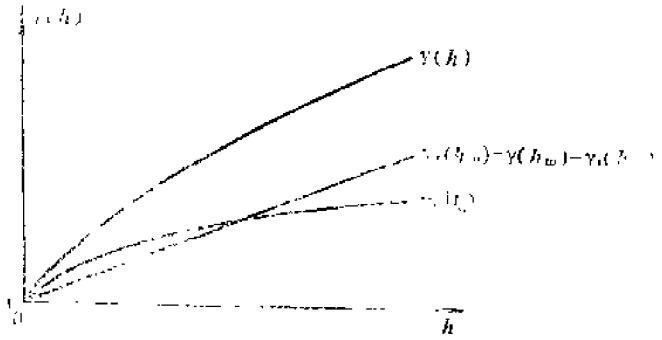


图4-15 带状各向异性的套合结构

若以 $\gamma(h_w)$ 表示原来垂直方向上的结构，以$\gamma_1(h_w)$ 表示三维各向同性结构当 $h_u = h_v = 0$ 时的结构，则有

$$\gamma_2(h_w) = \gamma(h_w) - \gamma_1(h_w) \quad (4\text{-}24)$$

于是，总的结构为：（见图 4-15）

$$\gamma(h) = \gamma_1(|h|) + \gamma(h_w) - \gamma_1(h_w) \quad (4\text{-}25)$$

3．一般结构模型

根据上述各向异性模型，可以总结出结构模型的一般表达式，即 $\gamma(h)$ 是由N个各向同性的结构 $\gamma_i(|h_i|)$，$(i = 1, 2, \cdots, N)$ 套合而成：

$$\gamma(h) = \sum_{i=1}^{N} \gamma_i(|h_i|) \quad (4\text{-}26)$$

其中每个组成结构 $\gamma_i(|h_i|)$ 是经过相应的线性变换矩阵 A_i 对原来的坐标进行线性变换而得到的。其中 h_i 表示将原来坐标 $h = \begin{bmatrix} h_u \\ h_v \\ h_w \end{bmatrix}$ 经 A_i 变换后得到的新坐标，即：

$$h_i = A_i \cdot h = A_i \cdot \begin{bmatrix} h_u \\ h_v \\ h_w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{ui} \\ h_{vi} \\ h_{wi} \end{bmatrix} \quad (4\text{-}27)$$

正因为每个结构有所不同，故每个结构用不同的下标表示，记为 γ_i。

应用(4-26)式的一般结构模型特别方便，因为它是由N个各向同性结构$\gamma_i(|h_i|)$之和组成的，而不少地质统计学的运算，具有线性特征，故可对各组成结构分别加以处理，然后再加起来，得到最后结果。

4．比例效应

在地质统计学的研究中，常常是准二阶平稳假设能够得到满足，而不是二阶平稳（或本征）假设。为了讨论在准二阶平稳假设下结构的套合问题，就得研究比例效应的问题。

1）比例效应的概念

现在，我们假定有两个准平稳域 $V(x_0)$ 和 $V(x_0')$，各自的中心为 x_0 和 x_0'。我们又假设 $\gamma(h, x_0)$ 和 $\gamma(h, x_0')$ 是这两个域上所定义的变差函数（例如，我们可视 $V(x_0)$ 位于富矿带，而 $V(x_0')$ 位于贫矿带）。

在实际地质、采矿中，这两个变差函数往往是成比例的。或者更具体地说，若$m^*(x_0)$

和$m^*(x_0')$分别为域$V(x_0)$和$V(x_0')$内所有数据的平均数，则变差函数$\gamma(h, x_0)$和$\gamma(h, x_0')$与$m^*(x_0)$和$m^*(x_0')$的函数$f[m^*(x_0)]$和$f[m^*(x_0')]$成比例，其比值为$\gamma_0(h)$，即

$$\frac{\gamma(h, x_0)}{f[m^*(x_0)]} = \frac{\gamma(h, x_0')}{f[m^*(x_0')]} = \gamma_0(h) \tag{4-28}$$

这种现象就称为结构的比例效应。或说两个准平稳结构$\gamma(h, x_0)$，$\gamma(h, x_0')$相差一个比例效应。

由式(4-28)可知，存在比例效应，就等于说存在一个不依赖空间位置x_0及其邻域的平稳结构$\gamma_0(h)$使得下式成立：

$$\gamma(h, x_0) = f[m^*(x_0)] \cdot \gamma_0(h) \quad \forall x_0 \tag{4-29}$$

又由于$Z(x)$是准平稳的，即在域$V(x_0)$内是平稳的，故在$V(x_0)$内有

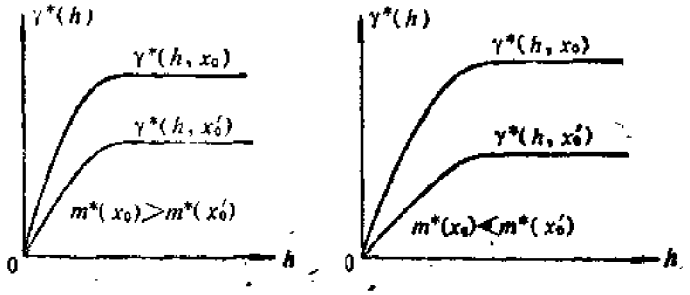
$$m^*(x_0) \approx E[Z(x)] = 常数 \quad \forall x \in V(x_0)$$

从而$f[m^*(x_0)]$也近似于常数。因此，(4-29)式表明，当有比例效应存在时，就存在一个不依赖于x_0的平稳结构$\gamma_0(h)$，在任何x_0点准平稳邻域$V(x_0)$内的变差函数都与$\gamma_0(h)$相差一个依赖于x_0的常数因子$f[m^*(x_0)]$。

2) 比例效应的类型

(1) 正比例效应和反比例效应。若实验变差函数曲线$\gamma^*(h, x_0)$随实验平均值$m^*(x_0)$的上升而上升(或说$f[m^*(x_0)]$为增函数)，这种比例效应称为正比例效应(如图4-16(a))。当区域化变量$Z(x)$具有对数正态型的直方图时，就有可能存在正比例效应。

若实验变差函数$\gamma^*(h, x_0)$随$m^*(x_0)$的增大而减小时(或说$f[m^*(x_0)]$为降函数)，这种比例效应称为反比例效应(见图4-16(b))。当区域化变量$Z(x)$具有反对数正态型的直方图时，就可能存在反比例效应。



(a) 正比例效应　　(b) 反比例效应

图4-16 比例效应

(2) 以$[m^*(x_0)]^2$表示的比例效应。在地质、采矿实践中观测到的比例效应往往是$[m^*(x_0)]^2$的函数，对于正比例效应有：

$$f[m^*(x_0)] = [m^*(x_0)]^2 \tag{4-30}$$

对于反比例效应有：

$$f[m^*(x_0)] = [A - m^*(x_0)]^2 \tag{4-31}$$

式中A为$m^*(x)$可能取的最大值。

3) 比例效应的消除。消除比例效应，即可得到一平稳的结构。当存在以$[m^*(x_0)]^2$表示的正比例效应(即$Z(x)$具有对数正态型的直方图)时，消除比例效应有两种方法：一种方法是将原始数据取对数，然后再求其变差函数，也就是作对数变差函数；另一种办法是作相对变差函数，即以某邻域内的变差函数除以该邻域内观测数据平均值的平方，从而得到与位置x_0无关的相对变差函数$\gamma_0(h)$，即

$$\gamma_0(h) = \frac{\gamma(h,\ x_0)}{[m^*(x_0)]^2} = \frac{\gamma(h,\ x_0')}{[m^*(x_0')]^2} \quad \forall x_0,\ x_0' \tag{4-32}$$

对于反比例效应，则可将公式（4-32）中的分母换成 $[A - m^*(x_0)]$，从而得到消除反比例效应的相对变差函数。

在实际工作中常用相对变差函数来消除比例效应。

5. 套合结构中的比例效应

在准平稳性假设下，套合结构 $\gamma(h) = \sum_{i=1}^{N}\gamma_i(|h_i|)$ 的每一个组成结构的比例效应可以是不同的，即对每一个模型 $\gamma_i(|h_i|)$ 可能有不同的 $f_i[m^*(x)]$。作为一个特例，当正比例效应仅对块金常数 C_0 起作用时，套合结构为

$$\gamma(h,\ x) = [m^*(x)]^2 \cdot C_0 + \gamma_1(h) \quad \forall x$$

式中 $\gamma_1(h)$ 是平稳的，与位置 x 无关，见图 4-17。

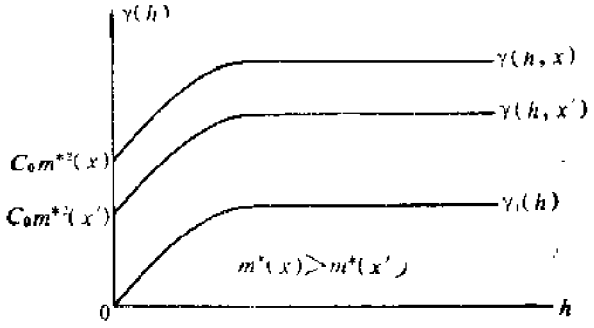


图4-17 只对块金常数起作用的正比例效应

在实际工作中，要想知道有无比例效应，是正比例效应还是反比例效应，以及这种比例效应是属哪一结构，是否既作用于微观结构（纯块金效应）又作用于宏观结构，实用的方法就是在透明纸上绘制出一系列（对不同 x_0 点及其域 $V(x_0)$）相对变差函数曲线，把它们套在一起进行直观比较，得出结论。

三、变差函数的拟合

不管是要了解区域化变量 $Z(x)$ 的变异特征，还是要进一步进行地质统计学的计算，都必须知道变差函数的理论模型 $\gamma(h)$ 以及模型中的参数（如变程 a，基台值 $C+C_0$ 和块金常数 C_0 等）。首先我们根据区域化变量的观测值 $Z(x_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，可以按照公式：

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}[Z(x_i) - Z(x_i+h)]^2$$

求出实验变差函数。再根据实验变差函数选择适当的理论变差函数进行拟合，从而确定出各个参数。

在实际地质工作中，绝大部分的变差函数模型都是球状模型。下面我们都假定在选择了球状模型的基础上来讨论理论变差函数的拟合问题。

1. 直接法拟合球状模型

在选定了变差函数的理论模型以后，拟合工作的任务就是确定变差函数中的参数。下面介绍直接法确定球状模型变差函数参数的方

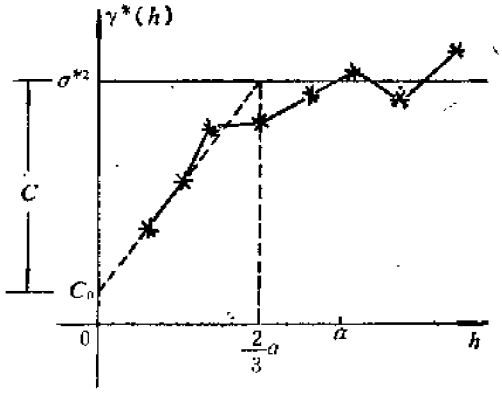


图4-18 在变差图上求 $a, C_0, C+C_0$

法：

1）求变程 a（见图 4-18）。

(1) 计算所用数据（用于计算 $\gamma^*(h)$）的实验方差 σ^{*2}；

$$\bar{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i(x)$$

$$\sigma^{*2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Z_i(x)-\bar{Z})^2$$

(2) 在实验变差函数图的纵坐标轴上过 σ^{*2} 点作一条平行于横坐标轴的直线；

(3) 以直线连接实验变差函数 $\gamma^*(h)$ 的头两至三个点，此直线与过 σ^{*2} 的直线相交，交点的横坐标等于$\frac{2}{3}a$，即假定其值为h_0，则$a=\frac{3}{2}h_0$。

2）求块金值 C_0。连接 $\gamma^*(h)$ 的头两三个点的直线与纵坐标轴的交点的纵坐标为 C_0（见图 4-18）。若 $C_0<0$，则取 $C_0=0$。

3）求拱高 C（见图 4-18），$C=\sigma^{*2}-C_0$，即当 $C_0=0$ 时，拱高值就等于基台值 σ^{*2}；当 $C_0\neq 0$ 时，拱高值比基台值小一个块金常数 C_0。

2. 用加权多项式回归法拟合球状模型

设对不同的 h 已经算出相应的实验变差函数值 $\gamma^*(h_i)$，且对每一个 h_i 参加计算的数据对的数目为 $N_i(i=1, 2, \cdots, n)$。如表 4-1 所示。

表 4-1 实 验 变 差 函 数 值 表

i	h_i	N_i	$\gamma^*(h_i)$
1	h_1	N_1	$\gamma^*(h_1)$
2	h_2	N_2	$\gamma^*(h_2)$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	h_n	N_n	$\gamma^*(h_n)$

现在要对它拟合一个球状模型函数

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ C_0+C\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a^3}\right) & 0<h\leqslant a\\ C_0+C & h>a\end{cases}$$

因为当 $h=0$ 时，$\gamma(h)=0$；当 $h>a$ 时，$\gamma(h)=C+C_0$ 为常数，比较简单，故我们只讨论 $0<h\leqslant a$ 的拟合问题。此时有

$$\gamma(h)=C_0+\left(\frac{3C}{2a}\right)h+\left(\frac{-C}{2a^3}\right)h^3 \qquad (0<h\leqslant a)$$

令 $y=\gamma(h)$，$x_1=h$，$x_2=h^3$，$b_0=C_0$，$b_1=\frac{3C}{2a}$，$b_2=\frac{-C}{2a^3}$

则上式变为：

$$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2 \qquad (4\text{-}33)$$

这样对球状模型变差函数的拟合问题就转化为对(4-33)式的多元线性回归问题。

亦即已知一组观测数据 $(h_i,\ \gamma^*(h_i))i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$ 用最小二乘法来确定(4-33)式的系数 $b_0,\ b_1,\ b_2$。

为了充分考虑到实验变差函数 $\gamma^*(h)$ 头三、四点的重要性大于尾部点的重要性这一因素，不犯平均主义的毛病，可以采用加权二元回归对(4-33)式进行拟合。其具体方法是用参加计算数据的数目 N_i 乘以相应的 $x_{1i}(=h_i)$ 和 $x_{2i}(=h_i^2)$。如果前三四个点的 N_i 相对太小（这可能是由于在较小的距离 h 上打的钻孔太少，或是由于在下面所讲的非列线又不等间隔的数据的角度误差限和距离误差限所引起的），这时可人为地适当提高它们的权系数。

按最小二乘法的原理和方法，可得 $b_1,\ b_2,\ b_0$ 的解为：

$$\begin{cases} b_1=\dfrac{l_{1y}\cdot l_{22}-l_{2y}\cdot l_{12}}{l_{11}\cdot l_{22}-l_{12}^2} \\ b_2=\dfrac{l_{11}\cdot l_{2y}-l_{1y}\cdot l_{12}}{l_{11}\cdot l_{22}-l_{12}^2} \\ b_0=\bar{y}-b_1\bar{x}_1-b_2\bar{x}_2 \end{cases} \tag{4-34}$$

其中：$l_{jk}=\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ji}\cdot x_{ki}-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ji}\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ki}\right)\quad j,\ k=1,\ 2$

$$l_{jy}=\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ji}\cdot y_i-\frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ji}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot y_i\right)\qquad j=1,\ 2$$

$$\bar{x}_j=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot x_{ji}\qquad j=1,\ 2$$

$$\bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}N_i\cdot y_i$$

$$N=\sum_{i=1}^{n}N_i$$

$$y_i=\gamma^*(h_i),\ \ x_{1i}=h_i,\ \ x_{2i}=h_i^2\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

算出 $b_1,\ b_2,\ b_0$ 之后还要根据三种情况分别加以讨论：

1) $b_0\geqslant 0,\ b_1>0,\ b_2<0$；

根据关系式 $C_0=b_0,\ \dfrac{3C}{2a}=b_1,\ \dfrac{-C}{2a^3}=b_2$ 可以直接解出 $C_0,\ a$ 和 C 来，其公式为：

$$\begin{cases} C_0=b_0 \\ a=\sqrt{\dfrac{-b_1}{3b_2}} \\ C=\dfrac{2b_1}{3}\sqrt{\dfrac{-b_1}{3b_2}} \end{cases} \tag{4-35}$$

2) 若 $b_0<0$；

此时人为规定 $b_0=0$，于是(4-33)式变为：

$$y=b_1x_1+b_2x_2$$

用最小二乘法可以求得 $b_1,\ b_2$ 如下：

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{f_{1y} \cdot f_{22} - f_{2y} \cdot f_{12}}{f_{11} \cdot f_{22} - f_{12}^2} \\ b_2 = \dfrac{f_{11} \cdot f_{2y} - f_{1y} \cdot f_{12}}{f_{11} \cdot f_{22} - f_{12}^2} \end{cases} \tag{4-36}$$

其中

$$f_{jk} = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot x_{ji} \cdot x_{ki} \quad j,k = 1,\ 2$$

$$f_{jy} = \sum_{i=1}^{n} N_i \cdot x_{ji} \cdot y_i \quad j = 1,2$$

再将 $b_0 = 0$，b_1，b_2 代入公式(4-35)便得到 C_0，a，C。

3）若 $b_0 \geqslant 0$，$b_1 > 0$ 但 $b_2 \geqslant 0$（当 $b_2 = 0$ 时为线性模型）时，则需调整原始数据。一般是增选或删掉一些实验变差函数值点的数据，使整体实验变差函数值点呈凸形曲线，再算之，直到 $b_2 < 0$ 时为止。这时就得到1）的形式。

在实际地质工作中，用上述两种方法求得的变差函数参数作出的理论变差函数曲线，有时是不太合适的。如果实验变差函数点的变化不规则，甚至用加权多项式回归法不能求得变差函数的参数。在这种情况下，可用人工拟合法进行补偿，即在充分考虑地质因素的基础上，根据实验变差函数点的变化特征，用肉眼观察，确定其参数（a，C_0，C）。为了得到理想的理论变差函数参数，通常需要经过多次拟合试验，反复修改参数，直至获得较好的变差函数参数。

例1 某煤矿露天矿区第14层煤北东30°方向上煤厚的实验变差函数值如表4-2所示

表4-2 14煤北东30°方向煤厚实验变差函数值表

h_i	0.9	1.9	3.1	4.0	4.8	6.2	7.9	9.4
$\gamma^*(h_i)$	1.3	2.2	3.0	4.5	5.8	4.7	6.1	5.9

此处取 $N_i = 1$，$(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 8)$，数据单位没有给出。一般选取数据单位时，应使得 h_i 和 $\gamma(h_i)$ 的数量级相同为宜。

选择球状模型，根据表4-2，分别用公式(4-34)、(4-35)计算，得到如下三个参数：$C_0 = 0.273$，$a = 7.383$，$C = 5.473$，于是得到拟合理论变差函数为：

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ 0.273 + 5.473 \cdot \left(\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{h}{7.383} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{h^3}{(7.383)^3} \right) & 0 < h \leqslant 7.383 \\ 5.746 & h > 7.383 \end{cases}$$

其图形见图4-19。

3．用加权多项式回归法拟合二级套合球状模型

有些实验变差函数曲线的前段很徒，后段较缓，此时可用二级套合的球状模型进行拟合。

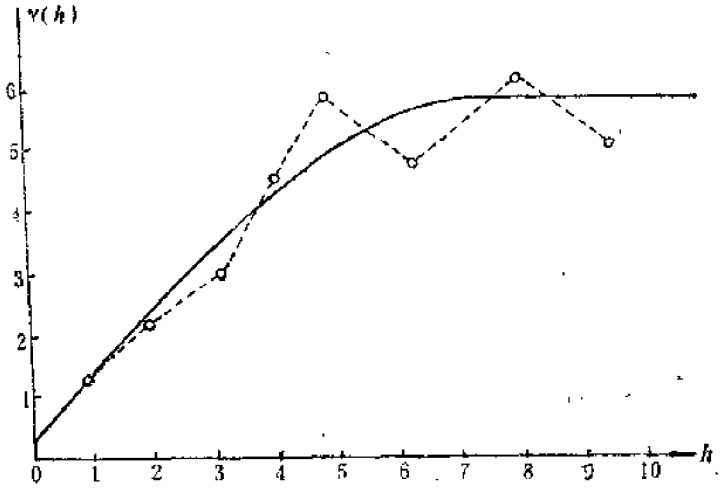


图4-19 14煤北东30° 方向煤厚的球状模型拟合图

二级套合球状模型的数学表达式为：

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ C_0+C_1\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_1^3}\right)+C_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_2^3}\right) & 0<h\leqslant a_1\\ C_0+C_1+C_2\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{h}{a_2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{h^3}{a_2^3}\right) & a_1<h\leqslant a_2\\ C_0+C_1+C_2 & h>a_2\end{cases}$$

其中 $a_1<a_2$。我们主要考虑 $0<h\leqslant a_2$ 的情况下，参数 C_0，C_1，C_2，a_1，a_2 的确定。

收集原始数据的方法与前述相同。假定数据已取好，现分两步来进行二级套合的拟合。

1) 先观察实验变差函数曲线的特征，如果曲线前段很陡，后段较缓，则先把全部数据点分为前、后两部分，其分界点选在曲线由陡变缓的转折点处。分界点既作为前区最后一个数据点，也作为后区第一个点。前区的数据点用来拟合第一段球状模型，后区点用来拟合第二段球状模型。作为第一步，我们先用前区数据点在 $0<h\leqslant a_1$ 内拟合第一段球状模型，其公式为：

$$\gamma(h)=C_0+\left[\frac{3}{2}\left(\frac{C_1}{a_1}+\frac{C_2}{a_2}\right)\right]h+\left[\frac{-1}{2}\left(\frac{C_1}{a_1^3}+\frac{C_2}{a_2^3}\right)\right]h^3$$

设 $y=\gamma(h)$，$x_1=h$，$x_2=h^3$，$b_0=C_0$，$b_1=\frac{3}{2}\left(\frac{C_1}{a_1}+\frac{C_2}{a_2}\right)$，$b_2=-\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{a_1^3}+\frac{C_2}{a_2^3}\right)$

得到：$y=b_0+b_1x_1+b_2x_2$

类似于上一段讨论的方法，由公式(4-34)得到 b_1，b_2 和 b_0。然后再分三种情况讨论之：

(1) 若 $b_0\geqslant 0$，$b_1>0$，$b_2<0$ 则有

$$\begin{cases}C_0=b_0\\ \frac{3}{2}\left(\frac{C_1}{a_1}+\frac{C_2}{a_2}\right)=b_1\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{C_1}{a_1^3}+\frac{C_2}{a_2^3}\right)=b_2\end{cases}\qquad(4\text{-}37)$$

(2) 若 $b_0<0$ 则规定 $b_0=0$，由公式(4-36)可求得 b_1，b_2，这样也可得到公式(4-37)的后两个等式。

(3) 若$b_2 \geqslant 0$($b_2=0$为线性模型)，则调整前后区的分界点，或增减若干数据，重新试算，直到$b_2<0$为止，亦可得到(4-37)式。

至此为止，(4-37)式只确定了第一段套合球状模型的一个参数C_0，至于a_1、C_1的确定，还有待于a_2和C_2的确定，即进行第二段球状模型的拟合。

2) 用后区的数据点在$a_1<h\leqslant a_2$内拟合第二段球状模型。即：

$$\gamma(h)=(C_0+C_1)+\frac{3C_2}{2a_2}h+\frac{-C_2}{2a_2^3}h^3$$

令$y=\gamma(h)$，$x_1=h$，$x_2=h^3$，$d_0=C_0+C_1$，$d_1=\frac{3C_2}{2a_2}$，$d_2=\frac{-C_2}{2a_2^3}$。于是上式变为：

$$y=d_0+d_1x_1+d_2x_2$$

根据(4-34)式(只要把其中的b_0，b_1，b_2换为d_0，d_1，d_2即可)得到d_0，d_1，d_2。然后再分三种情况讨论如下：

(1) 若$d_0\geqslant 0$，$d_1>0$，$d_2<0$，则有

$$\begin{cases} C_0+C_1=d_0 \quad \therefore C_1=d_0-C_0=d_0-b_0 \\ a_2=\sqrt{\dfrac{-d_1}{3d_2}} \\ C_2=\dfrac{2}{3}\cdot d_1\sqrt{\dfrac{-d_1}{3d_2}} \end{cases} \tag{4-38}$$

再将a_2，C_2值代入公式(4-37)的后两式中得到：

$$a_1=\sqrt{\frac{d_1-b_1}{3(b_2-d_2)}} \tag{4-39}$$

最后由(4-37)的第一式，(4-39)式和(4-38)式即可求得所求参数C_0，C_1，C_2，a_1，a_2。将它们代入二级套合结构，便得到所求的球状模型。

(2) 若$d_0<0$，处理办法同于上一段的讨论(略)。

(3) 若$d_2\geqslant 0$，处理办法同于上一段的讨论(略)。

例2 已知某矿钻孔中V_2O_5品位的实验变差函数$\gamma^*(h_i)$及相应的数据对数目N_i如表4-3所示：

表4-3 V_2O_5品位实验变差函数值表

h_i	N_i	$\gamma^*(h_i)\times10^{-3}$	h_i	N_i	$\gamma^*(h_i)\times10^{-3}$	h_i	N_i	$\gamma^*(h_i)\times10^{-3}$
0.5	19	0.73	3.0	16	2.00	5.5	13	2.44
1.0	18	1.16	3.5	15	2.07	6.0	13	2.53
1.5	18	1.44	4.0	15	2.18	6.5	12	2.51
2.0	17	1.65	4.5	14	2.25	7.0	12	2.59
2.5	17	1.79	5.0	14	2.30	7.5	11	2.64

(h_i的单位为：10m)

表中对h_i和$\gamma^*(h_i)$取适当单位(h_i取10m为单位)，$\gamma^*(h_i)$取10^{-3}为单位)，为的是保持二者有相同的数量级。

若用球状模型进行拟合，其结果如图4-20。虽然总的说来结果也不错，但前三、四个点的拟合并不理想，而这对变差图的拟合来讲又是很重要的。

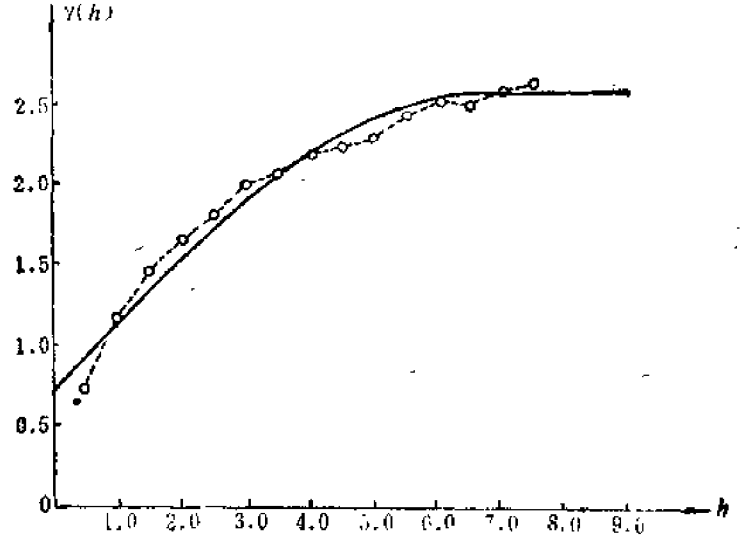


图4-20 V_2O_5品位变差图的球状模型拟合图

下面我们试用二级套合球状模型进行拟合。

解：由公式(4-37)第一式，(4-38)式及(4-39)式可得：

$$C_0=0.34,\quad C_1=0.87,\quad C_2=1.43,\quad a_1=2.20,\quad a_2=8.19$$

代入二级套合球状模型公式得：

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ 0.34+0.87\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{2.2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3}{(2.2)^3}\right)+1.43\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{8.19}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3}{(8.19)^3}\right) & 0<h\leqslant 2.2\\ 0.34+0.87+1.43\left(\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{8.19}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{h^3}{(8.19)^3}\right) & 2.2<h\leqslant 8.19\\ 2.64 & h>8.19\end{cases}$$

其图形见图4-21。

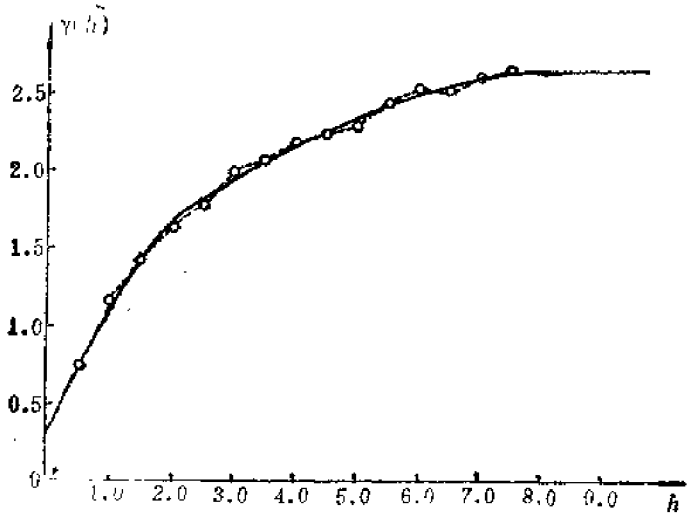


图4-21 V_2O_5品位的二级套合球状模型拟合图

把图 4-20 与图 4-21 比较一下，可以看出这组数据用二级球状模型套合效果较好。对用三级球状模型套合结构拟合变差函数的公式，也不难类似地推出。

第三节　结构分析的实施

区域化变量的结构分析是地质统计学研究问题的第一步，其目的就是要构造一个合适的变差函数的理论模型，以对全部有效结构信息作定量的概括，从而表征该变量的主要结构特征。结构分析是一个要求数学与地质、采矿紧密结合的领域。既要求对所研究的对象有足够的地质、采矿知识，又要求在选用各种地质统计学工具方面有一定的技巧。实施结构分析的一般步骤如下：

一、选择区域化变量

1. 区域化变量的选择

区域化变量的选择应根据所研究的目的而定。对煤的储量进行计算时，无疑煤厚可以用来作为区域化变量。在对煤岩的研究中，煤的各种岩石特征、煤的成份可作为区域化变量。在金属矿中，对矿产进行储量计算时，矿石品位亦可作区域化变量。若用地质统计学研究其他地质问题，根据研究的目的，区域化变量可选为地球化学变量、地球物理变量、构造变量、地层变量等等。

2. 样品的承载

选取区域化变量时，必须同时说明样品承载的大小、形状，取样、测试的方式及变量空间的分布域。不同承载的样品数据(如岩心样品和坑道样品数据)不能简单地合在一起计算变差函数。承载大的样品数据的光滑效应比承载小的大得多。取样的时间和方法不同(如先用老设备，后用新设备来取样)会导致变差函数的系统偏差。

3. 区域化变量应具有可加性

选取区域化变量应具有可加性，适当性。可加性是指数值的各种线性组合都必须保持相同的意义；适当性是指要能概括所研究问题的主要特征。区域化变量在其变化域内应具有均一性，这样才能使 $Z(x)$ 和 $Z(x+h)$ 的实测变异性归结为 $Z(x)$ 的单一区域化。例如在某个煤矿床中，在对煤质的研究时，氧化带中的煤样不能与非氧化带中的样品混在一起，而应看成是两个变量空间的分布域。注意：均一性的概念及其在概率论上对应的平稳性的概念都是相对于观测尺度而言的。

二、审议数据

在进行结构分析之前，应对有效数据进行认真的审议。这一方面可以校正各种错误，另一方面还可以对有些点奇异的结果作出解释。

1. 数据审议的内容

1) 勘探方案是否合理？取样的目的、设备、网格、方式等是否合适？取样方案在实施中有无遇到问题？

2) 数据是否有代表性，采样是否均匀、充分，数据在时间和空间上是否一致？岩心采取率是多少，变化的大小，数据是否有系统误差，原因何在及处理的方法，数据编录中有无问题等。

2. 定长岩心样品的改组(数据的正则化)

在一个均匀带上，地质统计学要求数据必须固定在相同大小的承载上。如果岩心样品的切割和分析不均一，则必须进行岩心样品的改组，将数据确定在定长的岩心段上。下面就来分析这种情况。

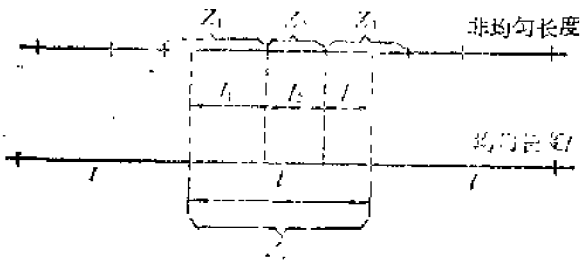


图4-22 用定长l对岩心样品进行改组

设样品不定长，但全部进行了分析。此时，可将岩心样品的数值进行加权平均来算出定长 l 上的岩心样品数值 Z_l，如图 4-22 所示。

Z_l 的计算公式为：

$$Z_l=\frac{l_1Z_1+l_2Z_2+l_3Z_3}{l_1+l_2+l_3} \quad (4\text{-}40)$$

其中 $l_1+l_2+l_3=l$。即定长 l 的样品数值 Z_l，是对原来不定长样品数值 $Z_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ K)$，用原来样品同改组后的定长 l 重叠线段对应的长度 $l_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ K)$ 为权进行加权平均而得到。

显然，改组后的数值 Z_l，对所研究的现象实际变异性有一种修匀效应(或叫平滑效应，即方差变小)。一般定长 l 的选取应不小于原来样品的平均长度。在采矿工作中，l 可选为开采单元的台阶高度。因为在开采台阶高度以内的微小变化，对于采矿是不加考虑的。但若有更小厚度的开采时(例如，可以剔除的夹石)，则可以把 l 取得更小，以便把更小范围内的变异显示出来。

3. 数据的统计

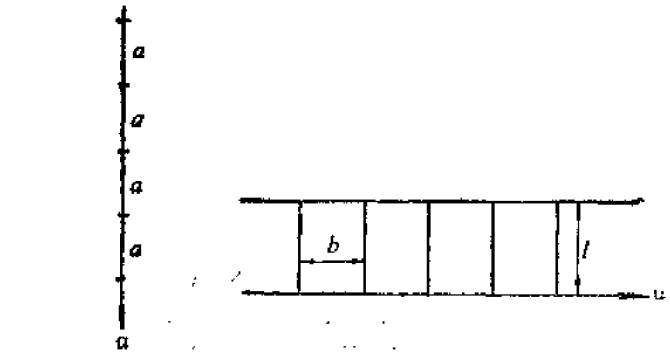
在计算变差函数之前，需要对数据作初步的统计分析，包括算术平均数、方差、相关系数矩阵以及作直方图，相关散点图等。并可通过直方图所反映的概率分布来检查数据的分布规律。也可确定哪些是特异值(极端值)，并加以处理。还可以根据直方图反映出不同区域的变量变异程度的差别，从而确定对研究区域是否要划分成几个不同的域作为变量空间分布域，分别计算变差函数，等等。

三、计算实验变差函数

实验变差函数的计算依赖于有效数据的空间构形。在第三章我们已给出了规则网格的实验变差函数的计算公式。下面我们按照数据是否列线以及它们在列线上的间隔是否规则分别讨论实验变差函数的计算方法。

1. 列线等间隔数据构形

1) 一维情况：顾名思义，列线等间隔是指沿直线进行采样，且样品间隔相等，如将钻孔岩心切成等长度为 a 的岩心样品(图4-23(a)，或沿坑道按固定间距 b 采取同样高度 l 的垂向刻槽样品(图4-23(b))等。设区域化变量 $Z(x)$ 在 x_i 点上的取值为 $Z(x_i)$，在等长度 a 的钻孔岩心情况下，a 为基本滞后距，k 为其倍数 ($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)，a 为



(a) 钻孔岩心样　　(b) 刻槽样品

图4-23 一维列线等间隔数据构形

列线的方向。在α方向上的实验变差函数为$\gamma_\alpha^*(k\alpha)$，则

$$\gamma_\alpha^*(k\alpha)=\frac{1}{N(k\alpha)}\sum_{i=1}^{N(k\alpha)}[Z(x_i)-Z(x_i+k\alpha)]^2\quad(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{4-41}$$

其中：$N(k\alpha)$为间隔等于$k\alpha$时数据对的数目。

在沿坑道等间距等高度取刻槽样品的情况下，沿α方向的基本滞后距为b，k为其倍数($k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$)。于是沿α方向高为l的刻槽样品的实验变差函数为$\gamma_\alpha^*(kb,\ l)$，则

$$\gamma_\alpha^*(kb,\ l)=\frac{1}{N(kb)}\sum_{i=1}^{N(kb)}[Z(x_i)-Z(x_i+kb)]^2(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{4-42}$$

其中：$N(kb)$为间隔等于kb时刻槽样品对数目。

2）二维情况：设在平面上沿相互垂直的两个方向α、β等间距地布置了钻孔，便形成了平面列线等间距的数据构形(见图4-24)。

设α、β方向的基本滞后距(或叫步长)分别为a、$b(a\neq b)$，则其实验变差函数分别为$\gamma_\alpha^*(ka)$和$\gamma_\beta^*(k'b)$，其中k、k'分别为基本滞后距a、b的倍数。实验变差函数是否要正则化，视具体情况而定。如果样品承载比采样间距小得多，就可以直接用点实验变差函数，否则就要正则化。

在计算某一方向上的实验变差函数值时，随着$k(k')$的增加，所用来计算的数据对数目将逐渐减少。如在图4-24中，沿α方向计算$\gamma_\alpha^*(ka)$时，若$k=1$时，则可利用30对数据来计算；若$k=4$，则只有15对了。可利用的数据对越多，变差函数值的代表性就越强，可靠性也就越大。这就是在变差函数的拟合时为何以它为权的理由。如果可利用数据对太少，则变差函数值不大可靠，也就没有什么实际意义。因此，一般规定沿一个方向α的ka长度最大不得超过列线长度的一半。在图4-24中，α方向k不得超过3，β方向k'不得超过2。

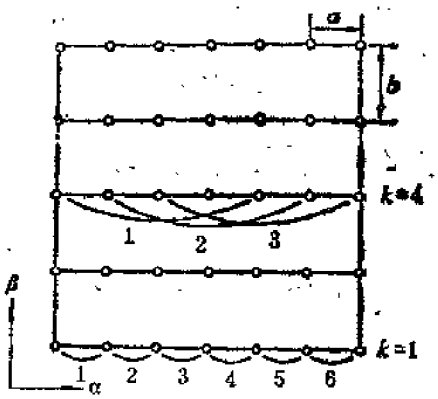


图4-24 平面列线等间距数据构形

2. 列线不等间隔的数据构形

此时，可将不规则间隔的数据点按区间$[kh-\varepsilon(h),\ kh+\varepsilon(h)]$组合成距离组，用距离在$[kh\pm\varepsilon(h)]$内的所有数据对来计算$\gamma^*(kh)$。比如说，对$x_i$而言，与$x_i$的距离在$[kh-\varepsilon(h),\ kh+\varepsilon(h)]$范围内的那些钻孔点，都被看成是与$x_i$的距离为$kh$。其中$\varepsilon(h)$称为距离误差限。

h和$\varepsilon(h)$如何确定，在实际工作中一般是这样做的：

假如有一批数据点是列线而不等间距的，经统计，多数样品的间距在50m左右，则可以确定$h=50$m，而一般选择距离误差限$\varepsilon(h)\leqslant\frac{h}{2}$。

在计算$\gamma^*(kh)$时，为了使得两钻孔点的距离接近于kh，其作用越大，我们选用

$$d_{ij}^{(k)}=1-\left(\frac{h_{ij}-k\cdot h}{\varepsilon(h)}\right)^2\qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ K\tag{4-43}$$

作为权系数。

其中 h_j 为某钻孔点距 x_i 点的实际距离，且 $kh-\varepsilon(h)<h_j\leqslant kh+\varepsilon(h)$。

实验变差函数为：

$$\gamma^*(kh)=\frac{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M_i}d_{ij}^{(k)}[Z(x_i)-Z(x_i+h_j)]^2}{\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{M_i}d_{ij}^{(k)}} \qquad k=1,\ 2,\ \cdots,\ K \qquad (4\text{-}44)$$

此处 M_i 表示与 x_i 点的距离在 $[kh-\varepsilon(h),\ kh+\varepsilon(h)]$ 内的点数。L 表示滞后距为 kh 时有效数据点数。

3. 非列线又不等间隔的数据构形

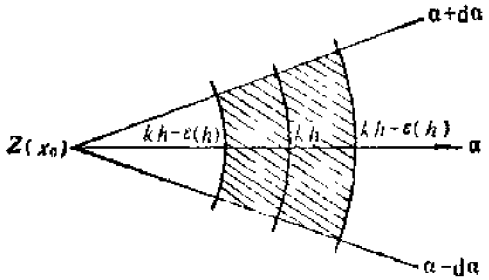


图4-25 非列线不等间隔数据的组合

这种情况，可以分两步进行。

1）先将数据组合成角度组，如图 4-25 所示。设 α 方向的角度允许误差限是 $d\alpha$。也就是说在 $\alpha\pm d\alpha$ 内的数据都可以看成是沿 α 方向的数据。一般取 $d\alpha$ 为二相邻方向的夹角的 $\frac{1}{4}$。最大不能超过二相邻方向夹角之半。

2）再将数据点按距离组 $[kh\pm\varepsilon(h)]$ 组合起来。这样，凡是落在角度范围 $(\alpha\pm d\alpha)$ 及距离范围 $[kh\pm\varepsilon(h)]$ 内（图 4-25 的扇形阴影部分）的数据点都可认为是 x_0 点在 α 方向上相距为 kh 的数据点。其实验变差函数的计算公式也选用公式 (4-44)。

作出各方向的变差图后，如果这些变差图很不相同，则认为该区域化变量在平面上是各向异性的。此时，为要更精确地估计各个不同方向上的变差图，可以适当缩小角度允许误差 $d\alpha$，再次计算实验变差函数，并进行适当套合，将其套合成各向同性结构。如果是各向同性的，则可以把全部数据点混合在一起，不论方向，只论间距 r 来计算 $\gamma^*(r)$。如果各方向所选择的基本滞后距 r 均相等，则可利用原来已算出的第 i 个方向实验变差函数值 $\gamma_i^*(r)$，以相应数据对数目 N_i 加权平均的方法来求得各向同性的变差函数 $\gamma^*(r)$。

$$\gamma^*(r)=\frac{\sum_{i=1}^{n}N_i\gamma_i^*(r)}{\sum_{i=1}^{n}N_i} \qquad (4\text{-}45)$$

四、拟合变差函数图

根据实验变差函数图的特征，对每一个方向上的实验变差函数图，选择合适的理论模型（最常见的是球状模型）。用上一节介绍的变差函数拟合方法进行拟合，确定变差函数中的参数。再考虑不同方向上的结构套合问题（参见本章第二节结构分析）。

第四节 理论变差函数最优性检验方法

我们构制理论变差函数的目的最终往往是提供克立格估值、储量计算之用，为了使储量计算结果更为可靠，当找到了合适的变差函数的理论模型以后，还需要对理论变差

函数模型的最优性进行检验。一方面是检验理论变差函数曲线与实验变差函数离散点的拟合情况，另一方面是分析其在克立格估值计算中的应用效果。下面介绍几种常用的检验方法。

一、观察法

所谓观察法就是将变差函数的理论模型 $\gamma(h)$ 的图形直接与实验变差函数 $\gamma^*(h)$ 的图形进行比较，这两个图形越接近，拟合度越高。如果发现拟合得不够理想，则需重新选择理论变差函数模型，或者是修改变差函数中的参数。修改参数这一步可以在计算机上进行，用人机对话的方式将每次修改的参数，在荧光屏(或绘图仪)上绘出理论变差函数曲线，肉眼观察其拟合曲线与实验变差函数离散点的拟合程度，直至得到理想的参数。

二、交叉验证法

当我们在应用变差函数进行克立格估值(具体方法下一章介绍)时，如果变差函数确定得好，较符合实际，克立格估值与真实值就更加接近。用统计的术语就是估计值与真实值的误差平方和最小。其具体作法是：在每个实测点上，用其周围点上的值对该点进行克立格估值。这样，若有N个实测点，就有N个实测值Z和N个克立格估计值Z^*(详见第五章)，再求其误差平方的均值$\overline{(Z^*-Z)^2}$，以此均值的大小作为衡量变差函数拟合优劣的准则。$\overline{(Z^*-Z)^2}$的值越小越好。

三、估计方差检验法

用每一个实测点上克立格估计值 Z^* 来估计实测值 Z，可以算出克立格估计标准差 S^*(是估计方差 σ_E^2 的方根，此处记为S^*，其计算公式见(3-28))。如果变差函数确定得好，则估计误差平方平均值$\overline{(Z^*-Z)^2}$与 $(S^*)^2$ 的比值应接近于 1 。

四、综合指标法

综合二、三两种检验准则，可以得到一个统一的检验指标。设 Z_i、Z_i^*($i=1, 2, \cdots, n$) 分别为第 i 个点上的观测值和克立格估值，S_i^* 为第 i 个点上克立格估值的估计标准差，则综合指标检验法的计算公式为：

$$I = K_1 \cdot [P \cdot \left| 1 - \frac{1}{K_2} \right| + (1-P)] \tag{4-46}$$

其中：

$$K_1 = \overline{(Z^*-Z)^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Z_i^*-Z_i)^2$$

$$K_2 = \overline{[(Z^*-Z)/S^*]^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(Z_i^*-Z_i)^2}{(S_i^*)^2}$$

$$P = \begin{cases} 0.1 & \text{当} 0 \leqslant K_1 < 100 \text{时} \\ 0.2 & \text{当} K_1 \geqslant 100 \text{时} \end{cases}$$

P 为经验性参数。I 值越小，表明变差函数参数确定得越好。

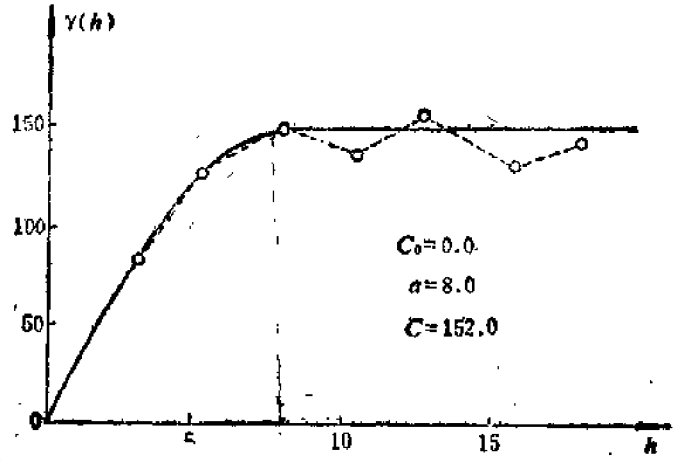
下面我们看一个例子：

例 根据我国北部某煤矿的一个露天矿区的84个钻孔中第 14 层和第17层(分别记为 H_{14} 和 H_{17})煤厚数据计算了平面上各向同性的平均实验变差函数，并对它们用球状模型进行拟合。对这两个变差函数分别选四组参数 (C_0, a, C)，然后用计算机按公式 (4-46) 算出对应的 I 值，见表 4-4。

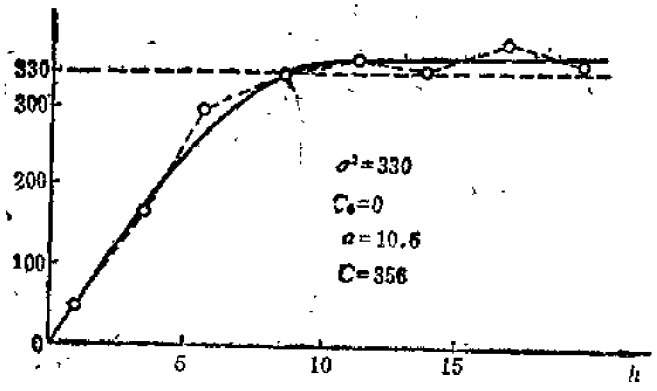
表 4-4　H_{14}和H_{17}的 I 值计算表

煤层	C_0	a	C	K_1	K_2	P	I
H_{14}	0.0	7.5	152.0	82.28	1.0414	0.1	74.37
	0.0	8.0	152.0	81.61	1.1098	0.1	74.26
	0.0	8.5	152.0	81.20	1.1815	0.1	74.32
	0.0	9.8	152.0	80.42	1.3678	0.1	74.54
H_{17}	0.0	10.0	356.0	117.27	0.8763	0.2	97.13
	0.0	10.4	356.0	116.97	0.9120	0.2	95.83
	0.0	10.6	356.0	116.83	0.9299	0.2	95.23
	0.0	13.0	356.0	115.81	1.1473	0.2	95.62

从表 4-4 中对 H_{14} 和 H_{17} 计算出的 I 值中分别选出最小的 I 值(74.26, 95.23)，它所对应的参数即被看作是经检验后认为最优的。根据这组参数作出的变差图见图 4-26 (*a*)、(*b*)。从图中可以看出，拟合效果很好。



(*a*)　*H*14的最优变差图



(*b*)　*H*17的最优变差图

图4-26　H_{14}、H_{17}变差图

第五节　变差函数的一些应用

变差函数在地质统计学中占有特别重要的地位。它除了主要用来进行克立格估值之外，在实际工作中，变差函数本身还有一些直接的应用。

一、构造一个反映矿体变化程度的综合指标

我们希望构造一个无量纲的指标，它综合考虑矿体变化的各种特点，既能反映出矿体沿某一方向变化的速度(或梯度)，又能反映矿体沿该方向的变化幅度，还能反映矿体变化的空间异向性。对于有基台型变差函数的区域化变量(即可确定出变程 a 和基台值 $B=C_0+C$ 的区域化变量)，我们可以用下式确定一个矿体变化性的综合指标 H：

$$H=\frac{B^2L^2}{a^2m^{*4}+B^2L^2} \tag{4-47}$$

其中：B 为变差函数基台值(是块金常数 C_0 与拱高 C 之和)；

L 为矿体长度之半；

a 是变程；

m^* 是数据平均值。

由于 $a^2m^{*4}\geqslant 0$，故分母≥分子，且分子、分母均≥0，所以有 $0\leqslant H\leqslant 1$。且 H 是一个无量纲的量。因为如果区域化变量 $Z(x)$ 的量纲是"m"，则 B^2 的量纲是"m^4"，m^{*4} 的量纲也是"m^4"，又 a^2 和 L^2 的量纲均为"m^2"。故(4-47)式的分子、分母有相同的量纲，即得 H 是一个无量纲的量。

为什么这样定义的综合指标 H 能够综合地反映矿体变化性呢？这要从其来历讲起。首先，基台值 $B(=C+C_0)$ 是反映矿体在该方向变化幅度的。由于实际工作中矿体各处的数据平均值 m^* 不同(比如贫矿带和富矿带就不同)的影响，故考虑矿体相对变化幅度，并采用指标 B/m^{*2} 就更便于对比，且无量纲。另一方面变程 a 越大，则矿体沿该方向的变化速度就越小。但在实际工作中，a 的大小不能绝对地来讲，只能相对该方向上的矿体长度来讲。又由于 a 的最大值不能超过矿体长度之半 L，故用 L/a 来反映矿体变化速度的大小，且无量纲。将上述两因子相乘得到 $\frac{BL}{am^{*2}}$。它既考虑了矿体的变化幅度，又考虑了其变化速度，且无量纲。但它的取值范围在〔0，∞〕之内，故用起来很不方便。若设

$$a=\operatorname{arctg}\left(\frac{BL}{am^{*2}}\right)$$

则有 $\operatorname{tg}a=\frac{BL}{am^{*2}}$，其中 a 的取值在 $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 之内。为了构造一个既无量纲，其变化又在区间〔0，1〕之内的指标，只需设 $H=\sin^2a$ 即可。由于

$$H=\sin^2a=\frac{\operatorname{tg}^2a}{\sec^2a}=\frac{\operatorname{tg}^2a}{1+\operatorname{tg}^2a}=\frac{B^2L^2/a^2m^{*4}}{1+B^2L^2/a^2m^{*4}}=\frac{B^2L^2}{a^2m^{*4}+B^2L^2}$$

即得(4-47)式。

这个综合指标，与过去常用的变异系数 $C_v=\frac{s}{\bar{x}}$ 相比，有如下几方面的优点：

1) H 是在充分考虑矿体在空间不同方向上的变化幅度和变化速度的基础上构造出来的，从而反映矿体空间变化的异向性。而 C_v 则没有任何空间的意义。

2) H 值严格在〔0，1〕之内变化，因而可用百分数表示，便于对比、分类。而 C_v 则不行，它既可以大于1，也可以小于1。

如果变差函数接近于纯块金效应型，则 a 近于0，H 趋近于1＝100%，即认为变化

性最大，这与客观实际是相符合的。

二、变差等值线图在划分矿体空间变化类型上的应用

用变差等值线图能反映不同范围(尺度)的矿体变化性，并可用来划分矿体空间变化类型。

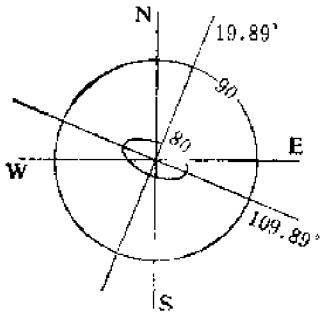


图4-27 某矿体水平方向变差等值线图

利用二维(或三维)变差等值线图可以较为直观地显示出在不同尺度下矿体变化特征。例如某铁矿水平方向（二维）铁品位变差等值线图(图4-27)显示出两种不同尺度的矿体变化性。外面是个圆，里面有个较小的椭圆。它反映出在大范围内矿体的变化是各向同性的，而在小范围内矿体是各向异性变化的。这是与该矿体在平面上的变化特征相一致的。事实上，该矿体平面呈近等轴的椭圆形（接近圆形），而矿体内部富矿体的分布是沿19.89°方向（富矿体的短轴方向）排列的。

利用变差函数等值线图还可以划分矿体空间的变化类型(见图4-28)，若只考虑大范围结构变化，则分为三种类型，即各向同性(圆)，几何各向异性(椭圆)，带状异向性

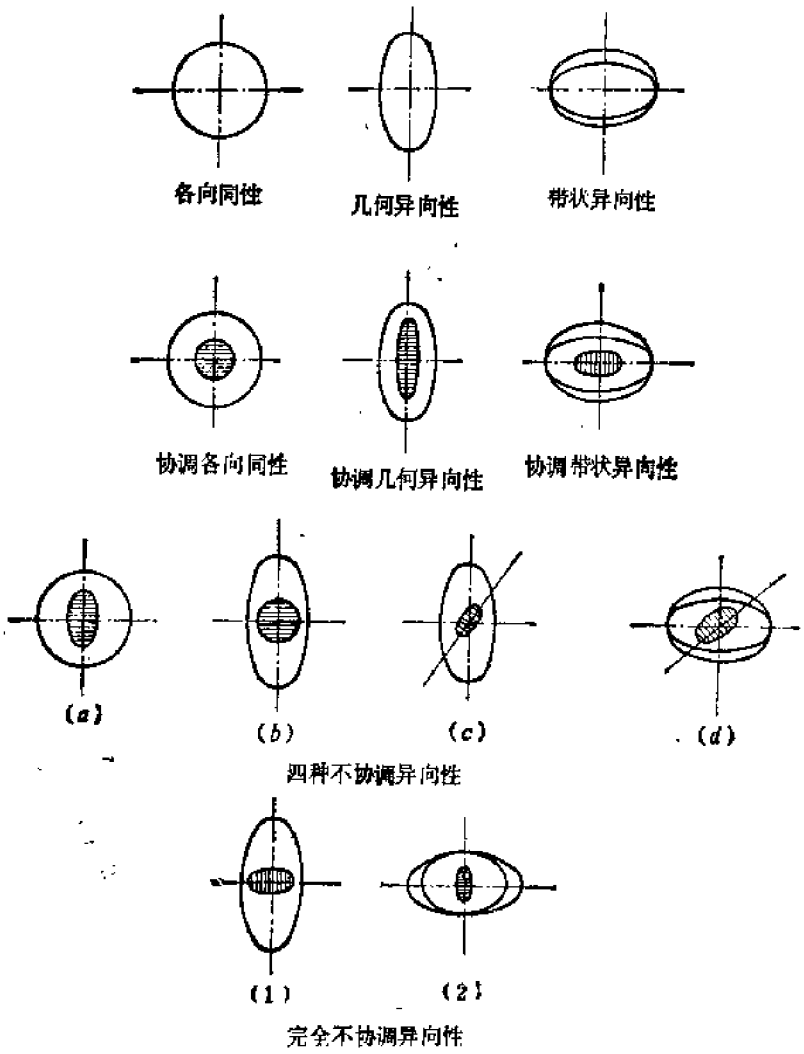


图4-28 用变差等值线图划分矿体空间变化类型

(在一个轴的方向上重迭的椭圆)。若同时考虑大小范围内的结构变化，依据大小范围两椭圆长轴夹角的大小，则可进一步分为协调变化(两长轴方向一致)，不协调变化（两长轴斜交）和完全不协调变化（两长轴互相垂直）三种(见图4-28)。

三、在给定精度下确定最优勘探网的形状和大小。

利用变差函数还可以在初步勘探阶段确定在估计精度下的最优勘探网的形状及大小。若变差函数是各向同性的，则显然宜选择方格网。若变差函数是各向异性的则宜选择矩形网。一般，在矿体变化性较大的方向上，勘探网距应较小；在矿体变化性较小的方向上，勘探网距应较大。

又网距只有小于变程时，才能控制住矿体的变化，通常把网距选为变程的一半。

至于如何确定矩形网两边长度的比例，这又要借助于变差图。下面我们举例说明：例如，某矿体的品位变差图为带状异向性模型(见图4-29)。矿体走向方向变化幅度小，变程a_2为300m左右；倾向方向变化幅度较大，带状异向性显著，变程a_1为 150m 左右。因此采用矩形网。若只考虑变程的大小来确定矩形网格的边长，则矩形网应为 75×150 m^2(即 $a_1/2\times a_2/2$)。但是我们注意到，在这种网距下勘探矿床，在其走向和倾向上的精度是不一样的，因为它们所对应的基台值不同。为使二者精度一致，可取走向方向变差图的基台(较小的基台)横线与倾向方向变差图的曲线交点 A(见图 4-29)，其横坐标 a_1' 约为100m，其一半为50m。故选择$50\times150m^2$的矩形网为宜。如果改变对估计精度的要求，则可用抬高或降低的水平线与两条变差图交点，并用其横坐标之半作为勘探网度的两个边长。

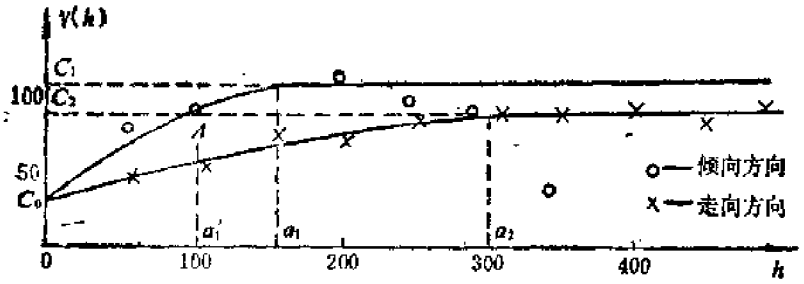


图4-29 某矿体两个方向品位变差图

在地质勘探阶段地质统计学方法的应用还很不成熟，还不象它用于储量计算中那样具有一整套较为完整的理论和程序系统。但从以上的一些应用已可看出，地质统计学方法在地质勘探中有着广阔的应用前景，尤其是在拟定动态的勘探方案时，由于地质统计学方法能不断地计算出估计精度，因此很有用处。

第五章　普通克立格法

用于矿产资源储量计算的方法种类繁多，常用的有多角形法、剖面法、算术平均值法以及距离平方反比法等。这些方法的主要特点在绪论中已作过简单叙述。正如大家所知，多角形法主要依据一个钻孔的数据来估计多边形块段内的储量，“一孔之见”对于该法是再明显不过了。而算术平均值法所利用的每一个钻孔数据在储量计算中的贡献（权系数）是相同的，实际上这正是这些方法的不足之处。为了进一步反映样品的空间位置对估值的影响，人们提出了距离平方反比法。这种方法并没有切实考虑样品的空间变异特性，而只是一种纯几何的加权法。因此，用这些方法计算储量，在采矿实际应用中尚有一定的局限性。

地质统计学与上述常规方法有着明显的不同。它基于这样一种概念，即用于推断地质现象的样品相互间不是独立的，它们之间存在着一定的相关关系。这种相关性除了随样品距离变化外，还随样品间的相对方向的变化而变化。这种“区域化变量”的空间结构性是以变差函数来表征的。

一个好的估算方法不只是简单地给出一个块段的估计值，而且还应给出一个确定估计值可靠性的数量指标，即估计精度。传统的储量计算方法，为了衡量估值的可靠性，有时不得不对一个块段的储量计算多次，看其相对误差的大小，或用不同方法对同一个块段的储量计算多次，看其相对误差的大小。地质统计学与此迥然不同，它能提供必需的估计精度。因此用地质统计学方法计算储量，比传统的储量计算方法有更多的优越性。克立格法是地质统计学的核心，下面我们就来介绍一种常用的、最基本的普通克立格法。

第一节　克立格法及其解

一、克立格法概述

1．什么是克立格法？

克立格法也称为克立金（Kriging），用矿业上的述语来说，就是根据一个块段（或盘区）内外的若干信息样品的某种特征数据，对该块段（盘区）的同类特征的未知数据作一种线性无偏、最小方差估计的方法；从数学角度抽象地说，它是一种求最优、线性、无偏内插估计量(Best Linear Unbiased Estimator 简写为 BLUE)的方法。如果更具体些说，克立格法是在考虑了信息样品的形状、大小及其与待估块段相互之间的空间分布位置等几何特征，以及变量（如矿石品位、煤层厚度）的空间结构信息后，为了达到线性、无偏和最小估计方差的估计，而对每个样品值分别赋予一定的权系数，最后用加权平均法来对待估块段（或盘区）的未知量进行估计的方法。也可以说，克立格法是一种特定的滑动加权平均法。

2．克立格法的种类

克立格法本身是在不断发展、完善的，对各种不同的情况及目的，可采用各种不同的克立格法。目前所采用的克立格法大致有如下几种：

在满足二阶平稳（或本征）假设时可用普通克立格法；

在非平稳（或说有漂移存在）现象中可用泛克立格法；

在计算可采储量时，要用非线性估计量，就可用析取克立格法；

当区域化变量服从对数正态分布时，可用对数克立格法；

当数据较少，分布不大规则，对估计精度要求不太高时，可用随机克立格法等。

近年来，还有新发展起来的因子克立格法，指示克立格法等等。

由于地质统计学主要是在结构分析的基础上采用各种克立格法来估值和解决实际问题的，因而通常人们也把地质统计学说成是克立格法。实际上，地质统计学还包含许多其他重要内容（如条件模拟等）。这就反映了克立格法在地质统计学中占有重要的地位。

8．克立格法的产生

在五十年代初至六十年代末，在南非金矿工作的南非学者 D.G.克立格根据大量的金品位的取样值来估计整个块段金品位的实际值。在实践中，他们发现：在富矿盘区往往过高地估计了金的品位，在贫矿盘区又低估了金的品位，这就需要用经验校正系数加以校正。为了寻求校正系数，D.G. 克立格采用了回归分析的方法。他假设已经很好地进行了抽样，即认为从盘区抽得样品品位平均数的数学期望就等于整个该盘区的实际平均品位。若品位是服从正态分布的（如果金品位服从对数正态分布，则取品位的对数值就服从正态分布了），则样品（平均）品位 Z_s（记为 x）对盘区（平均）品位 Z_v（记为 y）的回归直线就应当是 x 轴与 y 轴夹角的平分线 $x=y$，因为有 $E(Z_s|Z_v)=Z_v$，或写为 $E(x|y)=y$。反过来，盘区（平均）品位 y 对样品（平均）品位 x 的回归直线，则不是 $y=x$，而是一条斜率为 $\beta(<1)$，且过 (m, m) 点的直线。这里，m 是 x 的均值，也是 y 的均值。根据直线的点斜式知此回归直线方程为（见图 5-1）

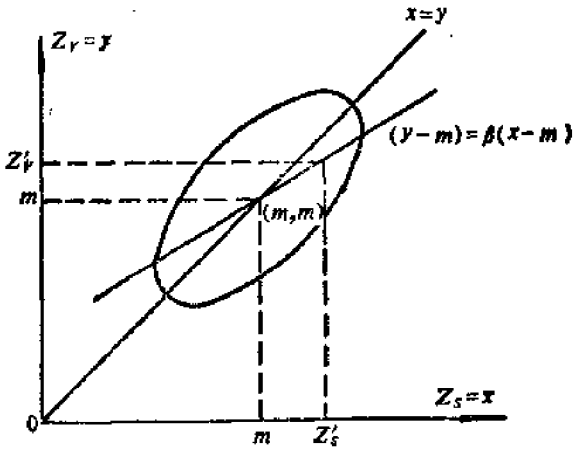


图 5-1　两条回归直线

$$(y-m)=\beta(x-m),$$

或即

$$y=m+\beta(x-m), \tag{5-1}$$

根据这个公式可知，当 $x=Z_s'>m$ 时，对应的 $Z_v'=y=m+\beta(x-m)<m+x-m=x=Z_s'$，即 $y<x$；同样地，当 $x<m$ 时，有 $y>x$。可见，如果我们用公式（5-1）的 y 来估计盘区品位 y 时，就可以校正常见的那种估计中的系统误差了。

由于 m 一般是未知的，只好用样品品位平均数 $m^*=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ 来代替。于是（5-1）式变为

$$\hat{y} = \beta x + (1-\beta)m = \beta x + (1-\beta) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

在特殊情况下，设 x 为诸 x_i 中的某个点（不妨设 $x = x_1$），则可得到盘区品位的估计值为

$$\hat{y} = \left(\beta + \frac{1-\beta}{n}\right) x_1 + \frac{1-\beta}{n} \sum_{i=2}^{n} x_i$$

若记为 $\lambda_1 = \beta + \frac{1-\beta}{n}$，$\lambda_i = \frac{1-\beta}{n}$，$i = 2, 3, \cdots, n$，则上式可写为

$$\hat{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{5-2}$$

且其中 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \beta + \frac{1-\beta}{n} + (n-1) \cdot \frac{1-\beta}{n} = \beta + (1-\beta) = 1$。

公式（5-2）就是用盘区中样品的加权平均值来估计盘区品位的公式，且其权系数之和为 1。这就是克立格法的雏型。后来，人们就对每个样品品位 x_i 赋予一定的最优权系数 λ_i，构成一个加权平均的线性估计量来进行估计，便逐渐形成了克立格法。

二、克立格方程组及其方差

设 $Z(x)$ 是点承载的区域化变量，且是二阶平稳（或本征）的。今要对以 x_0 为中心的盘区 $V(x_0)$ 的平均值 $Z_V(x_0) = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx$（简记为 Z_V）进行估计。

$Z_i(i = 1, 2, \cdots, n)$ 是一组离散的信息样品数据，它们是定义在点承载 x_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）上的；或是确定在以 x_i 点为中心的承载 v_i 上的平均值 $Z_{v_i}(x_i)$（简记为 Z_i）。且这 n 个承载 v_i（$i = 1, 2, \cdots, n$）既不同于 V，又各不相同（见图 5-2）。

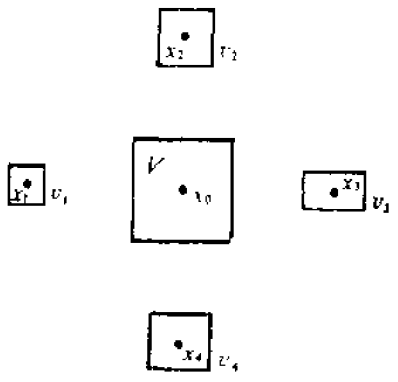


图 5-2 信息样品和待估块段承载图

所用线性估计量为：

$$Z_V^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Z_i \tag{5-3}$$

它是 n 个数值的线性组合。

克立格估值的原则，就是在保证这个估计量 Z_V^* 是无偏的，且估计方差最小的前提下，求出 n 个权系数 λ_i。在这样的条件下求得的 λ_i 所构成的估计量 Z_V^* 称为 Z_V 的克立格估计量，记为 Z_K^*。这时的估计方差称为克立格方差，记为 σ_K^2。

由于在 $Z(x)$ 的数学期望已知或未知的情况下克立格估值的计算公式稍有不同，又分别称为简单克立格法和普通克立格法两种。现分别介绍如下：

1．简单克立格方程组和简单克立格方差（$E[Z(x)] = m$（已知））：

由于已知 $E[Z(x)] = m$（常数），令：

$$Y(x) = Z(x) - m,$$

则：
$$E[Y(x)] = E[Z(x) - m] = E[Z(x)] - m = 0 \tag{5-4}$$

其协方差函数为：
$$E[Y(x) \cdot Y(y)] = C(x, y)。 \tag{5-5}$$

欲求对 Z_V 的估计现已转化为对 Y_V 的估计。且有

$$Y_V = \frac{1}{V}\int_V Y(x)\,dx = \frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx - m = Z_V - m \tag{5-6}$$

所用的估计量为：

$$Y_V^* = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i, \text{ 其中 } Y_i = Z_i - m \ (i = 1, 2, \cdots, n)。$$

故只要求得 Y_V 的估计值 Y_V^*，就能得到 Z_V 的估计值 Z_V^*。

容易看出，Y_V^* 是 Y_V 的无偏估计量，且不需要任何条件。这是因为：

$$E(Y_V^*) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(Y_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i E(Z_i - m) = 0$$

根据 (5-4) 及 (5-6) 式又可以得到：

$$E(Y_V) = E\left[\frac{1}{V}\int_V Y(x)\,dx\right] = \frac{1}{V}\int_V E[Y(x)]dx = 0$$

故有　　$E(Y_V^*) = E(Y_V)$，即 Y_V^* 是 Y_V 的无偏估计量。

为了求出使估计方差 $\sigma_E^2 = E[Y_V - Y_V^*]^2$ 为最小时的诸权系数 $\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$，首先要求出估计方差的表达式：

$$\begin{aligned}
\sigma_E^2 &= E[Y_V - Y_V^*]^2 \\
&= E[Y_V^2] - 2E[Y_V \cdot Y_V^*] + E[Y_V^{*2}] \\
&= \frac{1}{V^2}\int_V\int_V E[Y(x)\cdot Y(y)]dxdy - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \cdot \frac{1}{V}\int_V E[Y(x_i)\cdot Y(x)]dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j E[Y(x_i)\cdot Y(x_j)] \\
&= \frac{1}{V^2}\int_V\int_V C(x,y)\,dx\,dy - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\frac{1}{V}\int_V C(x_i,x)\,dx \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i,x_j)
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sigma_E^2 = \bar{C}(V,V) - 2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i,V) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i,x_j) \tag{5-7}$$

其中 $\bar{C}(V,V)$ 表示协方差函数在待估域 V 上的平均值。

为了使 σ_E^2 达到最小，按照求极值原理，将 (5-7) 式对诸 λ_i 求偏导数，并令其为 0，则有：

$$\frac{\partial\sigma_E^2}{\partial\lambda_i} = -2\bar{C}(x_i,V) + 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(x_i,x_j) = 0 \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

于是得到简单克立格方程组：

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(x_i,x_j) = \bar{C}(x_i,V) \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{5-8}$$

从这个方程组中解出 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,n)$，即为所求的简单克立格权系数，它必定满足最小方差无偏估计的要求。

将式（5-8）两端均乘以 λ_i，并对 i 从 1 到 n 求和，则有：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i,x_j)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i,V) \tag{5-9}$$

将公式（5-9）代入式（5-7），则得到简单克立格方差的计算公式：

$$\sigma_K^2=\bar{C}(V,V)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i,V) \tag{5-10}$$

注：在公式（5-7）与公式（5-10）中，所用的估计方差记号不一样；公式（5-7）表示无偏估计量的估计方差，不能保证估计方差最小，故用记号 σ_K^2。公式（5-10）是在确保估计方差最小的前提下推导出来的，它是克立格方差，故用记号 σ_K^2。读者也可以看到关键的区别在于公式（5-7）与（5-10）中的 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的意义不一样。

从式（5-8）中解出 λ_i 后，即得到 Y_V 的简单克立格估计量：$Y_K^*=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j$。此时 Z_V 的简单克立格估计量为：

$$Z_K^*=m+Y_K^*=m+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Y_j=m+\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(Z_j-m)$$

$$\text{或}\qquad Z_K^*=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j Z_j+m\left(1-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\right) \tag{5-11}$$

2．普通克立格方程组和普通克立格方差

普通克立格方程就是在区域化变量 $Z(x)$ 的数学期望为未知的情况下，建立的克立格方程。故此时 $E[Z(x)]=m$ 为未知常数，若要求估计量（5-3）式是无偏估计，就必须有条件限制了。

1）无偏性条件

若要使 Z_V^* 为 Z_V 的无偏估计量，即要求

$$E[Z_V^*-Z_V]=0$$

$$\because\quad E(Z_V)=\frac{1}{V}\int_V E[Z(x)]\mathrm{d}x=m$$

$$\text{又}\because\quad E(Z_V^*)=E\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i Z_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i E(Z_i)=m\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$$

故得无偏性条件：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1 \tag{5-12}$$

这是普通克立格区别于简单克立格之处。

2）普通克立格方程组

在区域化变量 $Z(x)$ 满足二阶平稳的条件下类似于公式（5-7）的推导，同样可以得到估计方差的计算公式：

$$\sigma_K^2=\bar{C}(V,V)-2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i,V)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i,x_j) \tag{5-13}$$

在无偏性条件 (5-12) 下，要使得估计方差 σ_k^2 为最小，从而求得诸权系数 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$，这是个求条件极值的问题，要用拉格朗日乘数法。

令
$$F = \sigma_k^2 - 2\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1\right)$$

这里 F 是 n 个权系数 λ_i 和 μ 的 $(n+1)$ 元函数，-2μ 是拉格朗日乘数。求出 F 对 $\lambda_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 以及 F 对 μ 的偏导数，并令其为零，便得到下列普通克立格方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = -2\bar{C}(x_i, V) + 2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(x_i, x_j) - 2\mu = 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)\\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu} = -2\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i - 1\right) = 0\end{cases}$$

整理得：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(x_i, x_j) - \mu = \bar{C}(x_i, V) \quad (i=1, 2, \cdots, n)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\end{cases} \tag{5-14}$$

这 $(n+1)$ 个方程的方程组，称为普通克立格方程组。

8）普通克立格方差

将 (5-14) 的第一式（或说前 n 个方程）两边同乘以 λ_i，再对 i 从 1 到 n 求和得：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j C(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i, V) + \mu$$

将此式代入 (5-13)，即得普通克立格方差计算公式：

$$\sigma_k^2 = \bar{C}(V, V) - \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(x_i, V) + \mu \tag{5-15}$$

4）用变差函数表示的普通克立格方程组与普通克立格方差

若 $Z(x)$ 只满足本征假设，而不满足二阶平稳假设时，则利用协方差函数与变差函数的关系：$C(h) = C(0) - \gamma(h)$ 可得用变差函数 $\gamma(h)$ 表示的普通克立格方程组和普通克立格方差：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \quad (i=1, 2, \cdots, n)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1\end{cases} \tag{5-16}$$

$$\sigma_k^2 = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{\gamma}(x_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu \tag{5-17}$$

5）信息样品点为非点承载时的普通克立格方程与普通克立格方差

若样品的承载不能看作是点承载，而是以 x_i 为中心其体积为 v_i 的承载时，上述公式 (5-14) 中样点之间协方差 $C(x_i, x_j)$，就变为样品域之间的平均协方差 $\bar{C}(v_i, v_j)$，相应的普通克立格方程组和普通克立格方差分别写成：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j C(v_i,v_j)-\mu=\bar{C}(v_i,V) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\end{cases} \tag{5-18}$$

$$\sigma_K^2=\bar{C}(V,V)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{C}(v_i,V)+\mu \tag{5-19}$$

对于只满足本征假设，而不满足二阶平稳假设的区域化变量$Z(x)$，也可得非点承载v_i的对应于公式(5-16)、(5-17)的普通克立格方程组和普通克立格方差计算公式：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\gamma(v_i,v_j)+\mu=\bar{\gamma}(v_i,V) \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\end{cases} \tag{5-20}$$

$$\sigma_K^2=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\bar{\gamma}(v_i,V)-\bar{\gamma}(V,V)+\mu \tag{5-21}$$

8．普通克立格方程组及方差的矩阵表示法

为了简单起见，我们仅给出样品点为非点承载下的普通克立格方程和克立格方差的表示形式，至于点承载的情况，读者亦可类似地写出。(5-18)式的矩阵表示形式为：

$$[\boldsymbol{K}]\cdot[\boldsymbol{\lambda}]=[\boldsymbol{M}] \tag{5-22}$$

其中

$$[\boldsymbol{\lambda}]=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\\ -\mu\end{bmatrix},\quad [\boldsymbol{M}]=\begin{bmatrix}\bar{C}(v_1,V)\\ \bar{C}(v_2,V)\\ \vdots\\ \bar{C}(v_n,V)\\ 1\end{bmatrix}$$

$$[\boldsymbol{K}]=\begin{bmatrix}\bar{C}(v_1,v_1) & \bar{C}(v_1,v_2) & \cdots\cdots & \bar{C}(v_1,v_n) & 1\\ \bar{C}(v_2,v_1) & \bar{C}(v_2,v_2) & \cdots\cdots & \bar{C}(v_2,v_n) & 1\\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots\\ \bar{C}(v_n,v_1) & \bar{C}(v_n,v_2) & \cdots\cdots & \bar{C}(v_n,v_n) & 1\\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$[\boldsymbol{K}]$称为普通克立格矩阵，它是个对称矩阵，因为有：

$$C(v_i,v_j)=\bar{C}(v_j,v_i),\quad \forall i,\ \forall j$$

(5-19)式的矩阵表示式为：

$$\sigma_K^2=\bar{C}(V,V)-[\boldsymbol{\lambda}]^T\cdot[\boldsymbol{M}] \tag{5-23}$$

其中$[\boldsymbol{\lambda}]^T$表示矩阵$[\boldsymbol{\lambda}]$的转置。

(5-20)的矩阵表示式为：

$$[\boldsymbol{K}']\cdot[\boldsymbol{\lambda}']=[\boldsymbol{M}'] \tag{5-24}$$

其中：

$$[\lambda'] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ \mu \end{bmatrix}, \qquad [M] = \begin{bmatrix} \gamma(v_1, V) \\ \gamma(v_2, V) \\ \vdots \\ \gamma(v_n, V) \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$[K'] = \begin{bmatrix} \gamma(v_1,v_1) & \gamma(v_1,v_2) & \cdots\cdots & \gamma(v_1,v_n) & 1 \\ \gamma(v_2,v_1) & \gamma(v_2,v_2) & \cdots\cdots & \gamma(v_2,v_n) & 1 \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & \vdots \\ \gamma(v_n,v_1) & \gamma(v_n,v_2) & \cdots\cdots & \gamma(v_n,v_n) & 1 \\ 1 & 1 & \cdots\cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

类似地可以写出（5-21）的矩阵形式：

$$\sigma_K^2 = [\lambda']^T \cdot [M'] - \gamma(V,V) \tag{5-25}$$

其中$[\lambda']^T$为$[\lambda']$的转置。

4．几点说明

1）只有当协方差矩阵$[\bar{C}(v_i,v_j)]_{n\times n}$（即矩阵$[K]$的左上角$n\times n$阶方阵）是严格正定的，克立格方程组(5-18)才有唯一解。因为此时其系数矩阵的行列式严格大于零。因此，要求所用的点协方差函数$C(h)$是正定的（若用变差函数$\gamma(h)$，则要求$-\gamma(h)$是条件正定的），且数据承载无一重合。因为若有$v_k = v_j$，则$\bar{C}(v_i,v_k) = \bar{C}(v_i, v_j)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$，从而矩阵$[\bar{C}(v_i,v_j)]_{n\times n}$中有两列(行)完全相等，故其行列式的值为零。

2）克立格估值是一种无偏的内插估值。即若待估块段（承载）V与有效数据的任一承载v_i重合，则由克立格方程组给出$Z_K^* = Z(v_i)$及$\sigma_K^2 = 0$。这在制图学中称之为“克立格估值曲面通过实测点”。传统的估计方法并没有这种性质。这也说明了克立格估值精度高于其他估值方法。

3）对于式（5-18）和（5-20）所用到的协方差函数$C(h)$和变差函数$\gamma(h)$的模型，不论它们所表征的基本结构如何均可，它们可以是各向同性，也可以是各向异性；既可以是单一结构，也可以是套合结构。

4）普通克立格方程组和普通克立格方差只取决于结构模型$C(h)$（或$\gamma(h)$），以及各承载的相对几何特征（或说相对空间位置），而不依赖于数据Z_i的具体数值。因此，只要知道结构函数$C(h)$或$\gamma(h)$以及样品的空间位置（数据构形），在开钻之前就可得普通克立格方程组和普通克立格方差。这样，就可以根据钻孔的空间位置不同，得出不同的克立格方差，从而选择较小的克立格方差所对应的钻孔位置构形，在已知结构函数前提下确定最优布孔方案。

5）普通克立格矩阵$[K]$，只取决样品承载$v_i(i = 1, 2, \cdots, n)$的几何特征（空间位置），而完全不依赖于待估块段的承载V。因此，只要所用的信息样品相同，即使对不同的待估块进行估值，克立格方程组的系数矩阵$[K]$也相同。从而只需求一次逆矩阵$[K]^{-1}$。若估计构形(待估承载与全体样品承载的构形)也相同，则矩阵$[M]$也不变。即只需解一次克立格方程组，就可得到线性估计量（5-3）式的权系数$\lambda_i(i = 1, 2, \cdots, n)$，

这就大大的节省了计算时间。考虑到这一点，在实际工作中应尽量使每次估计的数据构形和估计构形均保持一致，这样就可以利用同一克立格方案进行整个矿区或整个井田的估值，从而节省计算时间。这也就是为什么地质统计学特别需要有规则勘探网格的理由。

6）普通克立格方程组和普通克立格方差考虑了以下四方面的因素（参见式(5-20)和（5-21））：

（1）待估承载V的几何特征($\bar{\gamma}(V,V)$)；

（2）数据构形的几何特征($\bar{\gamma}(v_i,v_j)$)；

（3）信息样品承载v_i与待估承载V之间的距离($\bar{\gamma}(v_i,V)$)；

（4）反应区域化变量$Z(x)$空间结构特征的变差函数模型$\gamma(h)$。

7）纯块金效应对普通克立格方程组和克立格方差的影响

如果原来变差函数为$\gamma_1(h)$，后来增加了一个块金常数C_0成为：

$$\gamma(h)=\gamma_1(h)+\begin{cases}0 & h=0\\ C_0 & h>0\end{cases} \tag{5-26}$$

则当所有信息样品承载$v_i(i=1,2,\cdots,n)$大小相等，和待估块段V彼此都不相交，且V比v_i大很多（这些条件在实际中常能被满足）时，块金效应（即增加了一个块金常数）对普通克立格方程组的影响只是在原普通克立格矩阵的主对角线上前n个元素中减去块金常数。这时方程组（5-20）变为：

$$\begin{cases}\lambda_1[-C_0+\bar{\gamma}_1(v_1,v_1)]+\lambda_2\bar{\gamma}_1(v_1,v_2)+\cdots+\lambda_n\bar{\gamma}_1(v_1,v_n)+\mu=\bar{\gamma}_1(v_1,V)\\ \lambda_1\bar{\gamma}_1(v_2,v_1)+\lambda_2[-C_0+\bar{\gamma}_1(v_2,v_2)]+\cdots+\lambda_n\bar{\gamma}_1(v_2,v_n)+\mu=\bar{\gamma}_1(v_2,V)\\ \cdots\cdots\\ \lambda_1\bar{\gamma}_1(v_n,v_1)+\lambda_2\bar{\gamma}_1(v_n,v_2)+\cdots+\lambda_n[-C_0+\bar{\gamma}_1(v_n,v_n)]+\mu=\bar{\gamma}_1(v_n,V)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\end{cases}$$

而对普通克立格方差则几乎不发生影响。上述方程组的证明留给读者（提示：①应用公式(5-26)用$\bar{\gamma}_1(v_i,v_j)$代替方程组(5-20)中的$\bar{\gamma}(v_i,v_j)$；②注意到$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$的条件）。

若变差函数表现为纯块金效应型时，即

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ C_0 & h>0\end{cases}\qquad(\text{亦即}\ \gamma_1(h)=0)$$

这时方程组（5-20）中的

$$\bar{\gamma}(v_i,v_j)\approx\begin{cases}0 & i=j\\ C_0 & i\neq j\end{cases}$$

$$\bar{\gamma}(v_i,V)\approx C_0\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则方程组（5-20）变为：

$$\begin{cases}-\lambda_iC_0+\mu=0 & (i=1,2,\cdots,n)\\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1\end{cases}$$

从这个方程组的前n个方程得到：

$$\lambda_i = \frac{\mu}{C_0} \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

再根据最后一个方程（无偏条件）有：

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1} \frac{\mu}{C_0} = n \cdot \frac{\mu}{C_0}$$

故

$$\lambda_i = \frac{\mu}{C_0} = \frac{1}{n} \qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{5-27}$$

此式说明，普通克立格的权系数均相等，均为$\frac{1}{n}$。

此时普通克立格方差σ_K^2也就和数理统计中大小为n的样本平均数的方差一样，为原来数据母体方差的$\frac{1}{n}$。

∵ 由（5-21）式有

$$\sigma_K^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \gamma(v_i, V) - \gamma(V, V) + \mu \approx C_0 - C_0 + \mu = \mu$$

又由（5-27）知：

$\mu = \frac{C_0}{n}$，故$\sigma_K^2 = \frac{C_0}{n}$。而$C_0$是纯块金效应模型的基台值，也就是原始数据的验前方差，故σ_K^2是原来数据母体方差的$\frac{1}{n}$，与数理统计中的结论一样。

三、普通克立格的计算

普通克立格的计算通常分两种情况：一种是样品承载相对很小，可以看成是点承载样品，若用这些样品对某一点x_0处进行克立格估值时，就叫点克立格法；第二种情况，若用这些点承载的样品，对以x_0为中心的某一块段V进行克立格估值时，就叫块段克立格法。下面分别介绍其计算方法。

1．点克立格法

现在我们以某一煤层为例说明点克立格法的计算过程，对该煤层厚度进行克立格估值。

例1 设区域化变量（煤厚）$Z(x)$是二阶平稳的，且其变差函数为一各向同性的球状模型，其参数$C_0 = 2$，$a = 200$（单位10m），$C = 20$。即：

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & h = 0 \\ 2 + 20\left[\frac{3}{2} \cdot \frac{h}{200} - \frac{1}{2}\left(\frac{h}{200}\right)^3\right] & 0 < h \leqslant 200 \\ 22 & h > 200 \end{cases}$$

假设在平面上x_1、x_2、x_3和x_4处取了4个样品，其煤层厚度分别为Z_1、Z_2、Z_3和Z_4。现在要根据这些数据来估计x_0点处的厚度Z_0（见图5-3）。

解：设Z_0的估计量为$Z_0^* = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i Z_i$，则根据式（5-22）得到普通克立格方程组的矩阵形式：

$$[K][\lambda] = [M]$$

其中：

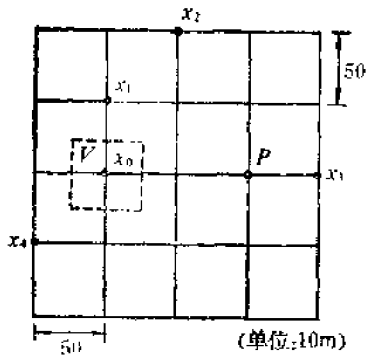


图 5-3　克立格估值数据构形

$$[\lambda]=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ -\mu\end{bmatrix}\quad [K]=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 1\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 1\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & 1\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$[M]=\begin{bmatrix}C_{01}\\ C_{02}\\ C_{03}\\ C_{04}\\ 1\end{bmatrix}$$

又矩阵$[K]$和列向量$[M]$中的元素为$C_{ij}=C(|x_i-x_j|)$，$\begin{cases}i=0,1,2,3,4\\ j=1,2,3,4\end{cases}$

当$i=j$时（即矩阵$[K]$主对角线元素）为点方差σ^2，即

$$C(0)=C_{11}=C_{22}=C_{33}=C_{44}=\sigma^2=C_0+C=22。$$

又由于$C(h)=C(0)-\gamma(h)=C_0+C-\gamma(h)=22-\gamma(h)$

∴ 当$i\neq j$时：$C_{ij}=C(|x_i-x_j|)=22-\gamma(|x_i-x_j|)$。

根据图 5-3 的位置关系得到：

$$C_{12}=C_{21}=C_{04}=22-\gamma(50\sqrt{2})=9.84$$
$$C_{13}=C_{31}=22-\gamma(\sqrt{150^2+50^2})=1.22$$
$$C_{14}=C_{41}=C_{02}=22-\gamma(\sqrt{100^2+50^2})\approx 4.98$$
$$C_{23}=C_{32}=22-\gamma(\sqrt{100^2+100^2})=2.32$$
$$C_{24}=C_{42}=22-\gamma(\sqrt{150^2+100^2})=0.28$$
$$C_{34}=C_{43}=22-\gamma(\sqrt{200^2+50^2})=0$$
$$C_{01}=22-\gamma(50)=12.66$$
$$C_{03}=22-\gamma(150)=1.72$$

将以上数值代入方程组的矩阵形式中，得

$$\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ -\mu\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}22 & 9.84 & 1.22 & 4.98 & 1\\ 9.84 & 22 & 2.32 & 0.28 & 1\\ 1.22 & 2.32 & 22 & 0 & 1\\ 4.98 & 0.28 & 0 & 22 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}12.66\\ 4.98\\ 1.72\\ 9.84\\ 1\end{bmatrix}$$

故解得：

$$\lambda_1=0.518,\ \lambda_2=0.025,\ \lambda_3=0.084,\ \lambda_4=0.373,\ \mu=0.969$$

因而x_0点的克立格估计量为：

$$Z_0^*=0.518Z_1+0.025Z_2+0.084Z_3+0.373Z_4$$

从以上结果看出Z_1权最大，Z_4次之，这是很自然的。因为x_1距x_0最近，x_4次之。但x_2到x_0的距离比x_3到x_0的距离近，而却有$\lambda_2<\lambda_3$，这是由于Z_2受Z_1的屏蔽

作用，而 Z_3 没有受到屏蔽的影响。

例 2 已知条件与例 1 相同，且仍以图 5-3 中 x_1、x_2、x_3 和 x_4 点上的煤厚数据来估计另一点 P 处的煤厚。

解：由于数据构形不变，则普通克立格矩阵 $[K]$ 不变，则其逆矩阵 $[K]^{-1}$ 也不需再计算，仍可用上面计算之结果，只需重新计算矩阵 $[M]$ 即可，这就节省了计算时间。

$$C_{P1} = C_{P2} = 22 - \gamma(\sqrt{100^2 + 50^2}) = 4.98$$
$$C_{P3} = 22 - \gamma(50) = 12.66$$
$$C_{P4} = 22 - \gamma(\sqrt{150^2 + 50^2}) = 1.22$$

所以

$$[M] = \begin{bmatrix} 4.98 \\ 4.98 \\ 12.66 \\ 1.22 \\ 1 \end{bmatrix}$$

故有：

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 9.84 & 1.22 & 4.98 & 1 \\ 9.84 & 22 & 2.32 & 0.28 & 1 \\ 1.22 & 2.32 & 22 & 0 & 1 \\ 4.98 & 0.28 & 0 & 22 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4.98 \\ 4.98 \\ 12.66 \\ 1.22 \\ 1 \end{bmatrix}$$

经计算得，$\lambda_1 = 0.171$，$\lambda_2 = 0.147$，$\lambda_3 = 0.605$，$\lambda_4 = 0.077$，$\mu = 1.364$。故 P 点的克立格估值为：

$$Z_P^* = 0.171Z_1 + 0.147Z_2 + 0.605Z_3 + 0.077Z_4$$

2．块段克立格法

仍用上例图 5-3 中的信息样品，现要估计以 x_0 为中心 500m 见方的区域 V（见图 5-3 中的虚线所示）的平均厚度，这时要用到块段克立格法。由于数据构形不变，故矩阵 $[K]$ 仍不变，只需重新计算矩阵 $[M]$，即：

$$[M] = \begin{bmatrix} \bar{C}(x_1, V) \\ \bar{C}(x_2, V) \\ \bar{C}(x_3, V) \\ \bar{C}(x_4, V) \\ 1 \end{bmatrix}$$

此时关键是把 $\bar{C}(x_i, V)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ 求出来。根据公式：

$$\bar{C}(x_i, V) = C(0) - \bar{\gamma}(x_i, V) = (C_0 + C) - \bar{\gamma}(x_i, V)$$

在已知变差函数的情况下，问题就转化为求变差函数的平均值 $\bar{\gamma}(x_i, V)$。对于求 $\bar{\gamma}(x_i, V)$，通常有下列两种方法：

1）积分法。由于

$$\bar{\gamma}(x_i, V) = \frac{1}{V}\int_V \gamma(|x_i - x|)\,\mathrm{d}x$$

若 V 为二维区域，则上式为二重积分；若 V 为三维体域，则上式就是三重积分了。再

者，若 x_i 不是一个点，而是一个域 v_i 时，上述平均变差函数就会是四重或六重积分了。多重积分计算起来很不方便，故对块段克立格法的计算，通常不采用这种直接积分的方法，而是用离散化近似算法。

2）离散化法。就是先将待估块段 V 离散化为若干个点，再求每一个离散化的点与信息样品点 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 之间变差函数值，计算其算术平均值，即得 $\gamma(x_i, V)$，见图 5-4。

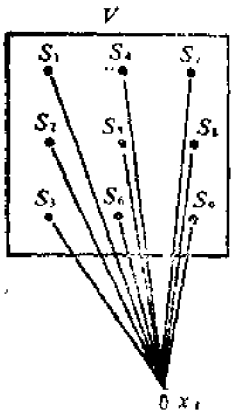


图 5-4 离散化求 $\gamma(x_i, V)$

设将待估块段 V 离散成 m 个点分别为 $s_j\ (j=1, 2, \cdots, m)$，信息样品点为 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\gamma(x_i, V)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma(s_j, x_i)=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}\gamma(|s_j-x_i|)\quad i=1, 2, \cdots, n \tag{5-28}$$

也可以将待估块段 V 离散成若干个点，先用周围的信息样品数据估计出每个离散点处的煤厚值（用点克立格法）。然后再把这些点上的值加以平均，作为该块段 V 的煤厚估计值。

在计算克立格估计方差公式中的 $\bar{C}(V, V)$（或 $\bar{\gamma}(V, V)$）时，同样是用 V 中离散点之间的协方差的平均值来代替。

下面我们来看一个一维克立格估值的例子，并给出一些在特殊情况下的解题技巧。

例 3 设在某一勘探线上在四个等距离的点 x_1，x_2，x_3，x_4 处的钻孔岩心上测得区域化变量 $Z(x)$（如煤层厚度）的值 Z_1，Z_2，Z_3，Z_4，钻孔间的距离为 l，如图 5-5 所示。假定区域化变量 $Z(x)$ 满足本征假设的条件，且其变差函数为标准球状模型，其参数分别为：$C_0=0$，$a=4l$，$C=1$，即：

$$\gamma(h)=\begin{cases}0 & h=0\\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{a}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{a}\right)^3 & 0<h\leqslant a\\ 1 & a<h\end{cases}$$

试根据这四个钻孔点的数据，用普通克立格法来估计长为 l 的线段 $\overline{x_2x_3}$ 上的平均值 Z_l。

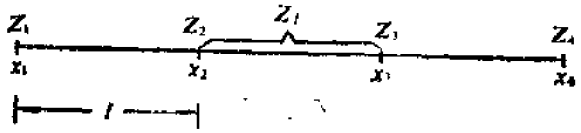


图 5-5 估计 Z_l 的数据构形

解：设 Z_l 的估计量为

$$Z_l^*=\sum_{i=1}^{4}\lambda_iZ_i$$

由于样品的位置对被估区域（此处为线段）有对称性，为简化起见，先把样品组合成两组（通常用这种技巧来降低方程组的维数）：$s_1=\{x_1\cup x_4\}$，且规定 $Z(s_1)=\dfrac{Z_1+Z_4}{2}$，对应权为 λ_1；$s_2=\{x_2\cup x_3\}$，且规定 $Z(s_2)=\dfrac{Z_2+Z_3}{2}$，对应权为 λ_2。于是 $Z_l^*=\sum_{i=1}^{2}\lambda_iZ(s_i)$。

根据式（5-20）列出普通克立格方程组.

$$\begin{cases}\lambda_1\bar{\gamma}(s_1,s_1)+\lambda_2\bar{\gamma}(s_1,s_2)+\mu=\bar{\gamma}(s_1,l)\\ \lambda_1\bar{\gamma}(s_2,s_1)+\lambda_2\bar{\gamma}(s_2,s_2)+\mu=\bar{\gamma}(s_2,l)\\ \lambda_1+\lambda_2=1\end{cases}$$

现只有两个权系数（若不经过对称性分析组合，就得有四个权系数），如令 $\lambda_1=\lambda$，由方程组第三式有 $\lambda_2=1-\lambda$，代入前两式得到：

$$\begin{cases}\lambda\bar{\gamma}(s_1,s_1)+(1-\lambda)\bar{\gamma}(s_1,s_2)+\mu=\bar{\gamma}(s_1,l)\\ \lambda\bar{\gamma}(s_2,s_1)+(1-\lambda)\bar{\gamma}(s_2,s_2)+\mu=\bar{\gamma}(s_2,l)\end{cases}$$

下面求方程组中的各系数；由对称性知

$$\bar{\gamma}(s_1,s_1)=\frac{1}{2}[\gamma(x_1,x_1)+\gamma(x_1,x_4)]$$

$$=\frac{1}{2}\gamma(3l)=0.4571$$

$$\bar{\gamma}(s_2,s_2)=\frac{1}{2}[\gamma(x_2,x_2)+\gamma(x_2,x_3)]$$

$$=\frac{1}{2}\gamma(l)=0.1836$$

$$\bar{\gamma}(s_1,s_2)=\bar{\gamma}(s_2,s_1)=\bar{\gamma}(x_1,s_2)$$

$$=\frac{1}{2}[\gamma(x_1,x_2)+\gamma(x_1,x_3)]$$

$$=\frac{1}{2}[\gamma(l)+\gamma(2l)]$$

$$=0.5274$$

$$\bar{\gamma}(s_2,l)=\bar{\gamma}(x_2,l)=\frac{1}{l}\int_0^l\gamma(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{l}{4l}-\frac{1}{8}\left(\frac{l}{4l}\right)^3$$

$$=\frac{3}{16}-\frac{1}{64\times3}$$

$$=0.1855$$

$$\bar{\gamma}(s_1,l)=\bar{\gamma}(x_1,l)=\frac{1}{l}\int_l^{3l}\gamma(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{3l}\gamma(x)\,dx-\frac{1}{l}\int_0^l\gamma(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{2l}{4l}-\frac{1}{8}\left(\frac{2l}{4l}\right)^3-0.1855$$

$$=0.7188-0.1855$$

$$=0.5333$$

将上述求得的系数代入方程组得：

$$\begin{cases} 0.1570\lambda + (1-\lambda) \times 0.5274 + \mu = 0.5333 \\ 0.5274\lambda + (1-\lambda) \times 0.1836 + \mu = 0.1855 \end{cases}$$

解得 $\lambda = -0.0098$，$\mu = 0.00526$

于是 $$1 - \lambda = 1.0098$$

故 Z_1 和 Z_4 的权系数为 $-\frac{0.0098}{2} = -0.0049$

Z_2 和 Z_3 的权系数为 $\frac{1.0098}{2} = 0.5049$

由此可见，克立格权系数从本质上讲是可正可负的，这就不同于一般概率系数（$\lambda_i \geqslant 0, (i=1,2,\cdots,n)$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$）。这样就使得克立格估值的取值范围很广，可以超出信息样品取值的最大、最小范围，以达到最优估计之目的（这点用概率权系数是无法达到的）。

但是，另一方面，由于克立格权系数可能取负值，那么克立格估值也可能出现负值。这样，对于煤层的厚度，矿石品位等一些只能取正值的数据，是不能容许的。处理的办法一般有两种：一种是人为改变权系数，就是将负权系数规定为零，其他权系数按比例调整，使其总和为1；另一种是人为改变其估值，权系数不变，当估值出现是负值时，就规定为零。

3．克立格权系数的特点

克立格法的关键在于合理地给出了参与计算的每个信息样品的权系数。从权系数的定义和求法中，我们知道它的显著特点是它具有无偏性和最优性（即估计方差最小）。除此以外，还有以下三方面的特点：

1）对称性：设有一待估块段为 V，周围有8个信息样品 $s_i (i=1, 2, \cdots, 8)$ 定义在相同大小的承载上。设每个样品 $s_i (i=1, 2, \cdots, 8)$ 对待估块段 V 的估值权系数分别为 $\lambda_i (i=1,2, \cdots, 8)$，如图5-6所示。在图5-6中分别按其权系数大小的不同，用不同大小的圆来表示。若区域化变量 $Z(x)$ 是各向同性的，则按其信息样品对待估块段的对称性，一般来说其权系数也有对称性（权系数相同），即 $\lambda_2 = \lambda_3$，$\lambda_5 = \lambda_6$。如果其结构函数是各向异性的，则克立格权系数不具有对称性。

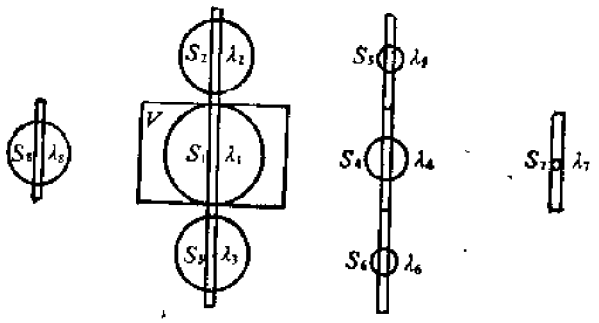


图 5-6 待估块段 V 与信息样品的数据构形及克立格权系数

2）减弱丛聚效应（declustering effect）：即使结构是各向同性的，某两个信息样品的位置相对于待估块段 V 也是对称的，由于受其他信息样品的影响，这两个对称信息样品的克立格权系数也不一定具有对称性了。例如图5-6中的 S_8 和 S_4，这是因为有三个样品 S_5、S_6、S_7 和 S_4 丛聚在一起，而 S_8 则独立起着一方面的作用，故克立格权系数 $\lambda_8 > \lambda_4$。因此，用克立格法进行估值时，不会因某个区域的样品丛聚而过份地增大某个区域的权系数，这就是所谓减弱丛聚效应。而一般按距离反比或距离平方反比加权的方法则

没有这种优点。

3）屏蔽效应：块金效应代表微观结构，表征变差函数曲线近原点处的不连续性。若块金常数为零或很小时，则在待估块段内部的样品权系数最大，距块段较近的第一圈样品的权系数也较大，而第二圈样品虽然距块段也不算远，但权系数显著减少。这就是克立格权系数的屏蔽效应，即由于第一圈屏蔽了第二圈的缘故。但是这种屏蔽效应随着块金常数的增大（即块金效应的增强）而逐渐减弱。当达到纯块金效应时，各样品间完全相互独立。这时，不论样品与待估块段间的距离如何，各样品都有相同的权系数，屏蔽效应消失了。因此在纯块金效应的情况下，未知样品（或待估块段）的最佳估计值，就是所有观测数据的算术平均值。

第二节　普通克立格方案的拟定

在应用克立格法进行估值时，制定一个适用的克立格方案是相当重要的。因此，在制定方案时，必须对每一步骤进行严格审查，以便找到一种既使计算时间缩短至最低限度，又能使计算结果在可以接受的近似限之内。普通克立格法有如下要点，在制定克立格方案时应予注意。

1．减低克立格方程组的维数；

2．减少克立格方程组的数目；

3．快速计算出各个平均变差函数 $\gamma(h)$（或 $\bar{\gamma}(h)$）；

4．准备一份适用于普通克立格方案的数据文件；

5．选择一种求解克立格方程组的省时算法。

下面我们对上述几点逐一进行讨论：

一、降低克立格方程组的维数

克立格方程组的维数与信息样品数据个数有直接关系（若信息样品数据个数为 n，则方程组的维数为 $n+1$），故缩小估计邻域或将数据分组合并，都能减少信息数据的个数，从而降低克立格方程组的维数。

1．限制估计邻域

限制估计邻域的原则是：在保证有一定数目的信息样品点参加计算的前提下，尽可能地缩小估计邻域。首先是将邻域限制在由结构分析所确定的准平稳域内，即变差函数的变程 a 的范围内。若估计的是二维以 x_0 为中心的块段 $V(x_0)$，且变差函数是各向同性的，则需研究以 x_0 为中心，以 a 为半径的邻域 $a(x_0)$ 之内的数据（见图 5-7(a)）。当邻域 $a(x_0)$ 内的数据太多，而较小邻域 $b(x_0)$ 内的数据又足以屏蔽其外的数据影响时，则可将估计邻域缩小到以 b 为半径的较小邻域 $b(x_0)$。若变差函数是各向异性的，则可把估计邻域确定为长方形，以两个不同的变程作为长方形的两边（见图 5-7(b)）。同理，三维空间中的各向异性，其邻域便取为长方体。

此外，估计邻域的大小还与块金值的大小有关。当块金效应小时屏蔽效应就大，这时估计邻域还可以适当缩小。如图 5-8 所示，信息样品点 x_1、x_2、x_3、x_4、x_5、x_6、x_7、x_8 都有钻孔资料，待估块段 V 可以利用这些信息。而正方形 $ABCD$ 以外的钻孔资料（如 x_9、x_{10}、x_{11}、x_{12}）虽然也在待估块段 V 的变程 a 范围之内，对待估块段 V 也有影响，但由于

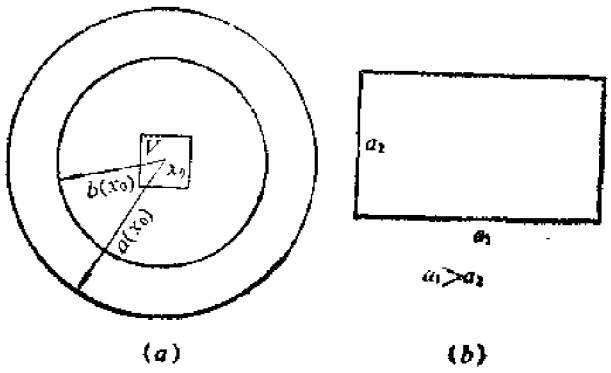


图 5-7　估计邻域的确定

钻孔数据 x_2、x_4、x_5、x_7 的屏蔽作用，使其影响很小。因此，如果待估块段的周围第一圈内已有相当数量的资料，那么，不管变程 a 值多大，估计邻域可缩小到第一圈的范围内。相反，若块金效应较大，屏蔽作用小，信息点比较疏稀，则估计领域就可相应增大。

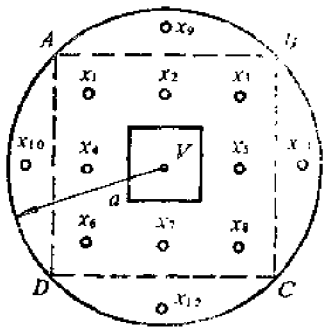


图 5-8　屏蔽作用下估计邻域的确定

如果在待估盘区的某一方向上数据偏少，且该方向变化的连续性又较好时，则可适当扩大估计邻域在该方向上的范围，以免由于数据构形不理想而使估计发生偏奇。

当要估计位于矿床边缘的盘区时，会遇到大部分数据落在待估块段一侧的情形，这时可以在待估块段数据集中的一侧限制邻域的范围，以免较集中的数据影响过大。当数据构形极不均匀，待估块段的一侧又无法取得附加数据时，对边缘部位的估值应慎重。

2．数据的重新组合

降低克立格方程组维数的另一种办法就是将数据进行重新组合。这又分为两种情况：一种是利用结构对称性，将具有相同权系数的样品组合在一起。这种方法不会改变克立格的估值，精度也不会损失。另一种重新组合是把距离较近（权系数不同）的样品组合到一起。这样做是节省了计算时间，但精度受到了影响，因此要对这二者进行权衡，并设计多种样品合并方案，进行实验，从中选出最优者。下面分别讨论这两种数据重新组合的方法。

第一种重新组合法，当且仅当结构函数 $\gamma(h)$ 是各向同性，且样品数据对待估块段有几何对称性时才适用。因为只有这样，具有几何对称性的样品才有相同的权系数。

先看一维的例子，设有一个穿过盘区 V 中心的垂直钻孔，其中 $2N$ 个样品是等长的，要估计盘区 V 的平均值（见图 5-9）。这是一维估计问题，显然是各向同性的，这时结构对称性就等于是几何对称性。因此对盘区 V 上下对称位置处的岩心样品值 Z_i，Z_j（见图 5-9）就应有相同的权。若其对应的承载为 $v_i=v_j=v$，且将 v_i，v_j 合并的承载记为 v_k，即 $v_k=v_i\cup v_j$，则新承载 v_k 的样品值为 $Z_k=\frac{1}{2}(Z_i+Z_j)$，对应的权系数为 λ_k。变差函数的平均值为 $\bar{\gamma}(v_k,V)=\frac{1}{2}[\bar{\gamma}(v_i,V)+\bar{\gamma}(v_j,V)]=\bar{\gamma}(v,V)$。如果待估块段 V 的上

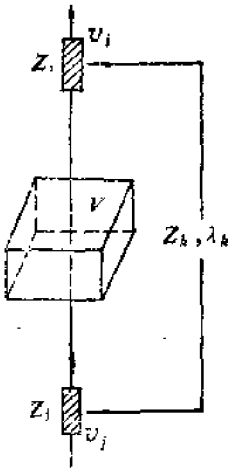


图 5-9　一维对称样品组合

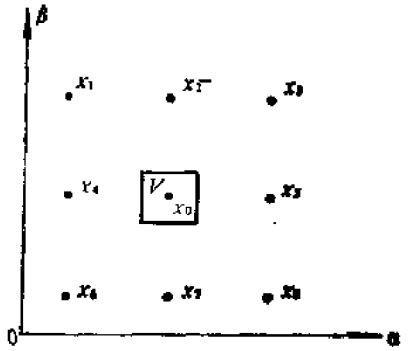


图 5-10　二维对称结构的样品组合

下分别有N个样品，且都是两两对称的，则经这样组合后，原来$(2N+1)$维的克立格方程组，就降到$(N+1)$维了。

对于二维的情况，如图 5-10 所示，用平面上 9 个具有几何对称构形的煤厚值Z_0、Z_1、Z_2、…、Z_8，来估计待估块段V的煤厚。如果结构模型是各向同性的，则x_2、x_4、x_6、x_7处四个样品具有相同的权系数，可合并为一组，即$s_1=\{x_2 \cup x_4 \cup x_6 \cup x_7\}$；$x_1$、$x_3$、$x_6$、$x_8$四个样品具有相同的权系数，可合并为另一组，$s_2=\{x_1 \cup x_3 \cup x_6 \cup x_8\}$；$x_0$单独成一组，设$s_0=x_0$。这样原来 9 个样品就分为 3 组$s_0$、$s_1$、$s_2$。于是，$Z_V$的线性估计量为$Z_V^*=\lambda_0 Z(s_0)+\lambda_1 Z(s_1)+\lambda_2 Z(s_2)$。

其中　$Z(s_0)=Z(x_0)$

$$Z(s_1)=\frac{1}{4}[Z(x_2)+Z(x_4)+Z(x_6)+Z(x_7)]$$

$$Z(s_2)=\frac{1}{4}[Z(x_1)+Z(x_3)+Z(x_6)+Z(x_8)]$$

如果结构模型是各向异性的，例如沿着煤层的走向α方向和倾向β方向煤厚的变化速度不相同，则可沿着α和β两垂直的方向分别将数据进行组合，即$s_0=x_0$、$s_1=\{x_4 \cup x_5\}$、$s_2=\{x_2 \cup x_7\}$、$s_3=\{x_1 \cup x_3 \cup x_6 \cup x_8\}$。于是，原来的 9 个数据，就合并成四组样品了。

另一种数据的重新组合，往往是数据太密集时采用的。其作用除了降低克立格方程组的维数外，还保持普通克立格矩阵$[K]$（见公式（5-22））的稳定性。前面已介绍过诸样品承载不能有相重合的，否则克立格矩阵的行列式$|K|=0$，即$[K]$的逆不存在，则克立格方程组的解不唯一。当然样品的重合，实际上是不大可能的。但若两个样品的承载相等，彼此非常靠近，则在求逆矩阵$[K]^{-1}$时可能出现病态方程组的现象。为了避免这种现象，我们可以把非常靠近的样品承载（比如说v_{i_1}和v_{i_2}）合并成一个承载（见图 5-11），即$v_k=v_{i_1}+v_{i_2}$，对应数据为：$Z_k=\frac{1}{2}(Z_{i_1}+Z_{i_2})$（$Z_{i_1}$和$Z_{i_2}$分别为承载$v_{i_1}$和$v_{i_2}$上的数据）。基于这

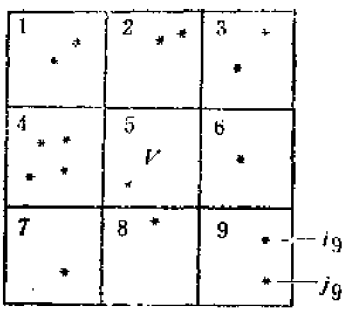


图5-11　信息样品密集情况下的数据组合

种考虑，当数据很多，且又很密集时，如图5-11所示，可把平面上16个样品（以"*"表示）分为9组，每个正方形中的样品可用其平均数来代替。例如$Z_9=(Z_4+Z_7)/2$。这样可使原来的普通克立格方程组的17维，降低为10维。

但是，这种降低方程组维数的结果，会改变普通克立格的估值，因为把不同权的样品合并了，从而降低了估计精度。这就需要对节省计算时间和损失精度进行权衡利弊。一般经验是节省计算时间为原来的$\frac{1}{2}\sim\frac{1}{3}$，而损失精度约为1%左右。因此合并样品的方法是值得采用的。

二、减少克立格方程组的数目

减少克立格方程组的数目，有如下几种方法可供选择。

1．选择规则数据网格

克立格法是对块段逐个进行估计的一种滑动平均法。根据上一节的讨论（见公式(5-22)），只要信息样品的数据构形相同，普通克立格矩阵$[K]$也相同，故只需求一次逆矩阵$[K]^{-1}$即可。如果每次估值计算时，待估块段的大小也相等，几何特征也相同，则矩阵$[M]$也相同。这时，只要对克立格方程组求一次解，所得到的权系数$[\lambda]=[K]^{-1}\cdot[M]$，就可用于所有的待估块段。因此，规则网格取样，不仅对结构分析有利，而且适合准确、快速地进行计算。

2．待估块段的几何形状应简单，大小要固定

在实际工作中，待估块段的几何形状应当尽量简单。如二维可取矩形，三维可取平行六面体，以便简化$\gamma(v_i,V)$的计算。同时，待估块段位置的安排也应与规则数据构形相协调，尽量使待估块段的中心或角顶有信息样品。实际上，二维时待估块段的大小多取样品网格的大小或其简单的约量（$\frac{1}{2}$或$\frac{1}{4}$等），如图5-12所示。

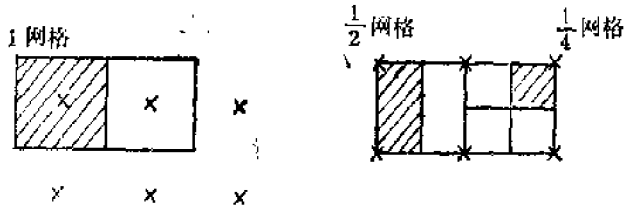


图5-12　取样网格和待估块段的相对大小

3．弥补数据网的空缺

在实际工作中，完全规则，完整的数据网格是不易得到的，常存在数据的空缺。如果在规则网格情况下有空缺存在，就会破坏数据构形的完整统一，增加待解方程组的数目。当空缺不多，又可证实它们不是零值时，可采用点克立格法，利用周围的数据，求出空缺点的克立格估值。或者简单地用附近点上数据的算术平均数代替。

4．随机克立格法

在某些情况下（如数据构形很不规则，块金效应较大，精度要求也不很高等），可采用随机克立格法来减少计算时间。如图5-13所示，假设$Z(x_i)$和$Z(x_i')$分别是待估块段V和V'要用到的数据，待估块段V与x_i和V'与x_i'的相对位置是不同的，但它却始终落在与待估块段相对固定的β_i域中（见图5-13）。类似地，取样点x_j,x_j'相对V和V'的位置也不同，但它所在的域β_j相对于待估块段的位置却是固定的。如果我们假定x_i,x_i'和x_j,x_j'分别在域β_i和β_j中都是随机均匀分布的，于是便可用$\gamma(\beta_i,\beta_j)$

近似地代替特定的数值 $\gamma(x_i,x_j)$ 和 $\gamma(x'_i,x'_j)$ $(i\neq j)$，并用 $\gamma(\beta_i,V)$ 近似代替 $\gamma(x_i,V)$ 和 $\gamma(x'_i,V')$。也就是将特定的信息样品的点的平均变差函数值 $\gamma(x_i,x_j)$、$\gamma(x_i,V)$ 用相应的信息域的平均值 $\gamma(\beta_i,\beta_j)$、$\gamma(\beta_i,V)$ 来代替。这样，在随机克立格法中，就不需要考虑信息块段内的样品具体位置，从而大大地减少了克立格方程组的数目。这样在时间上有所得，在精度上有所失。不过当结构模型中块金效应越大(屏蔽效应就越小)，就表示随机性越强，这时我们所作的随机均匀分布的假设就越容易得到满足，从而使用随机克立格法就愈加合理。

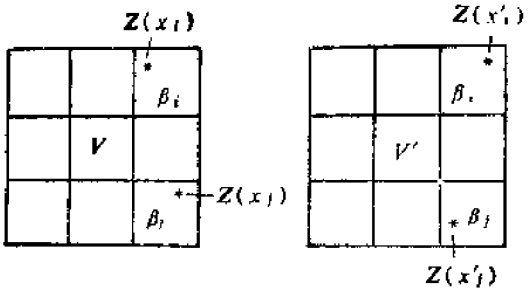


图 5-13　数据随机定位

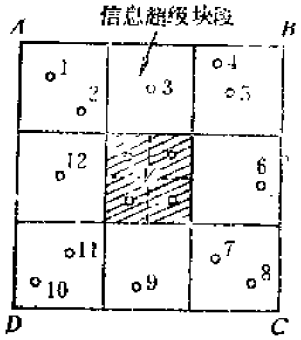


图 5-14　超级块段构形

5．超级块段法(Superblock)

在实际工作中很难得到规整的数据，因而，近年来，应用超级块段的思想来减少普通克立格方程组数目的做法相当普遍。

所谓超级块段，就是将几个块段组合成一个较大的块段，如图 5-14 就是一个二维超级块段的构形。图形中央 V 为待估超级块段。由于普通克立格矩阵 $[K]$ 只与信息数据构形有关，故若把 V 分成 4 个小块段，对其中每一个待估小块段而言，信息数据构形皆相同，因而在克立格方程组中有共同的系数矩阵 $[K]$，只是矩阵 $[M]$ 不同而已，这样便可大量减少求 $[K]$ 和 $[K]^{-1}$ 的计算时间。

利用超级块段进行估计，有时要对样品进行组合，而样品的组合可以采用各种不同的方法：有的以信息超级块段为单位进行组合，如图 5-15 (*a*)；有的把待估超级块段的邻域划分为中心区和外围区如图5-15 (*b*) 所示，以虚线圆来划分。将外围区的样品按信息超级块为单位进行组合，每一块组合成一个样品，放在该超级块段的中心（以“*”表示）。而中心区的样品(以“·”表示）则不进行组合。有时还把几个超级块段中的样品组合成一个样品。

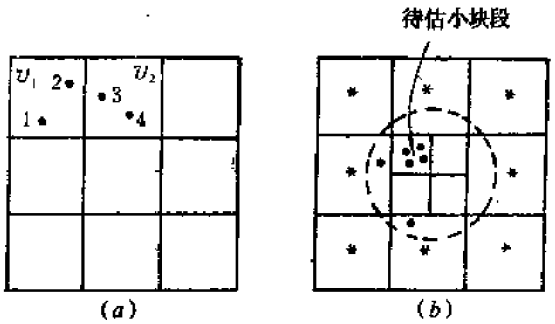


图 5-15　超级块段样品的组合

样品按超级块段组合后，计算两个信息超级块 v_1、v_2 间的平均协方差时，可以有两种方法：一种是先组合，再以组合样品的中心作为样品点，求出这些中心点之间的协方差，即得组合样品的平均协方差。另一种是直接计算组合样品所在域 v_1、v_2 中原始样品间的平均协方差。例如，在图 5-15(*a*) 中，信息超级块段 v_1、v_2 各有两个样品 1 、2 ，及

3、4。一种方法是把1、2号样和3、4号样分别组合起来，将组合样分别放在1、2号样和3、4号样的中点处，然后再求这两个组合样之间的协方差，以此作为v_1、v_2间的平均协方差$\bar{C}(v_1, v_2)$；第二种方法是直接计算1、2和3、4四个样品之间的点协方差，再求平均而得v_1、v_2间的平均协方差，即：

$$\bar{C}(v_1,v_2)=\frac{1}{4}[C(1,3)+C(1,4)+C(2,3)+C(2,4)]$$

由于后一种方法是在考虑了每个数据的精确位置后实现的，其结果也更精确。

关于超级块段及其待估子块段的大小如何确定，一般原则是：待估子块段的边长一般不小于勘探网度的$\frac{1}{2}$。当然，为了算得更精确，超级块段也可适当变小，相应的待估子块段也得划小。但也不是块段划分得越小越好。超级块段可包含4、8或16个子块段。因为当采样网度很稀时，有效信息数据较少，这时，即使将待估块段划分得再小，也仍然不能提高估计精度。相反，增加了计算时间。此外，在划分块段时，其大小也要和各个方向的变程大小成正比。变程大的方向，块段尺寸可大些；变程小的方向，块段尺寸可小些。在三维空间中还应考虑开采台阶的高度，一般待估子块段的高度可与开采台阶的高度一致，以便计算结果的直接利用。

三、快速算出平均变差函数γ（或平均协方差函数$\bar{C}$）

常用方法有两种：

1．把承载v_i、v_j和V离散化，用一组离散点来近似代替，以算出各$\gamma(v_i,v_j)$及$\gamma(v_i, V)$的近似值。在二维时，每个承载可以离散化为$4\times4=16$个点；在三维时，每个立方体承载可以离散化为$4\times4\times4=64$个点，对长方体承载可以离散化为$4\times2\times2=16$个点。

2．如果直接通过积分求得γ或$\bar{C}$，将重积分$\gamma(v_i, v_j)$和$\gamma(v_i, V)$的计算分解成若干步，并通过查辅助函数图表求出其值（辅助函数见第六章）。但由于它的局限性太大，在实际中还是多用离散化方法。

四、准备一份适用于普通克立格方案的数据文件

应用普通克立格法时，相当大的成本是花在确定估计邻域和搜集这些邻域中的数据方面。为了得到一个较好的数据文件，一般至少需做如下几项工作：

1．输入原始数据。

2．对数据进行检查。

3．准备组合样品的数据文件。

4．确定超级块段。

先确定超级块段的大小，定下计算邻域范围，给每个超级块段编上号码，然后给每个块段内的样品也给以适当的编号，并以数据矩阵的形式存入计算机。

5．准备一些绘图程序。绘出孔位图，等值线图等。

五、选择一种求解克立格方程组的省时计算方法

解方程组常常需要花费不少时间。对于每一个待估块段一般要解一个由5至12个方程组成的方程组，其费用也是可观的。因此，选择一种既适用于克立格法，又能节省计算时间的方法是很重要的。

主元消去法是一种比较适合的方法，它尤其适用于以协方差函数表示的方程组（见

公式（5-22））。这时系数矩阵[K]主对角线上的元素就是各方程的主元素。即使克立格方程组是以变差函数表示的（见公式（5-24）），但只要变差函数是有基台的模型，则可以根据关系式 $C(h)=C(0)-\gamma(h)$ 而把方程组写成用协方差函数表示的形式。根据实践经验，在地质、采矿活动中90%以上的变差函数都可用有基台的模型拟合。因此，利用协方差函数表示方程组是可行的。

第三节　普通克立格法应用实例

一、普通克立格方案的实施

我们选用我国西部某煤田详查地质勘探中地质统计学的应用作为实例，详细说明在煤田地质勘探中应用克立格法的方法和步骤。

1．*矿区概况*

该矿区位于陕西省渭北黄陇侏罗纪煤田中部，东西长34km，南北宽31km。矿区大地构造位置处在陕甘宁盆地（鄂尔多斯盆地）南部，受北东东向铜川凸起形态控制。矿区构造简单。侏罗系延安组是该区的含煤地层，属于河流相沉积环境。发育八层煤，从上往下编号。底部的八煤全区广泛分布，厚度大（最大厚度达39.8m），结构简单、煤质好，是全区的主要可采煤层，储量占矿区煤层总储量的90%以上。

勘探工程的布置，一千平方公里的勘探面积已投入近200个钻孔(已完成183个)。B级和C级范围内，基本线距分别为1500m和3000m。

2．*数据的分析和选择*

因为8号煤层是该区主要可采煤层，故仅以8号煤层的研究为例。以地质界限和勘探线为界，将8煤层分为5个区(即中区、南区、西区、北区和东区)，用8煤全部煤厚数据作直方图（见图5-16）；8煤层中区煤厚作直方图（见图5-17），在8煤层的全区数据中去掉部分边缘区的钻孔数据得到煤厚直方图(见图5-18)。

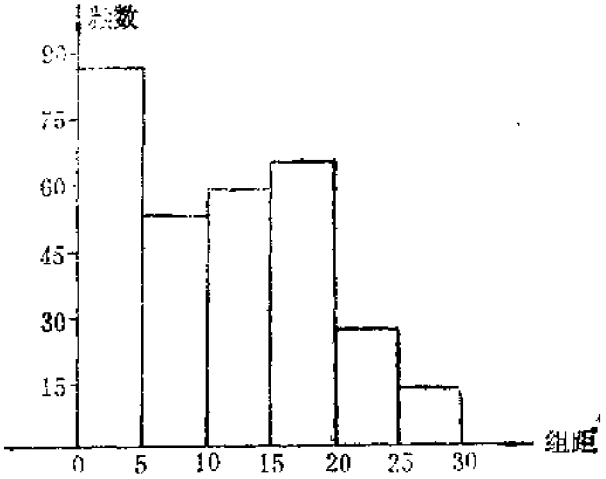


图5-16　8煤层厚度全部数据直方图

从这三张直方图上可以明显地看出图5-17和图5-18的直方图的频率分布基本一致，而图5-16差异较大。这一现象说明，所去掉的部分边缘数据，受成煤古地理影响，煤层分叉变薄，与矿区绝大部分煤厚相比变异较大，不宜参加全矿区实验变差函数的计算。通过分析，在计算变差函数时，去掉上述的奇异数据点，最后有143个煤厚数据参加实验变差函数的计算。

3．*结构分析与变差函数的计算*

根据矿区现勘探阶段孔距大，又不能取得小滞后样品数据以及钻孔分布不均匀等特点，同时考虑到矿区大面积黄土覆盖，主要变异方向尚不十分清楚等因素，采用以下实验变差函数的计算方案：

1）分别计算EW、NE、SN、NW四个方向的变差函数，最后找出两个特征方向

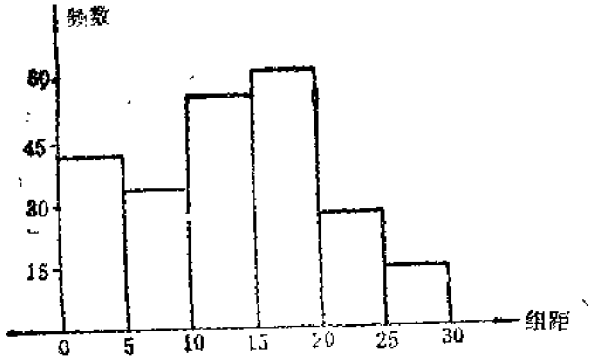


图 5-17　8 煤层中区煤厚直方图

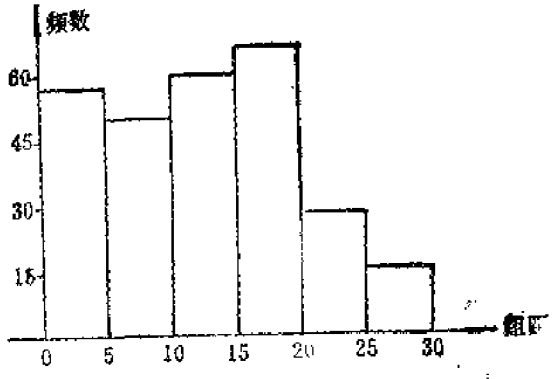


图 5-18　8 煤层全区去掉部分变化较大数据的煤厚直方图

（变异最大方向和变异最小方向）来概括全区煤厚变异特征。

各方向的最小滞后距均取 1000m，距离允许误差 500m，角度允许误差为 25°。

实验变差函数的计算结果如图 5-19 至图 5-22 所示。

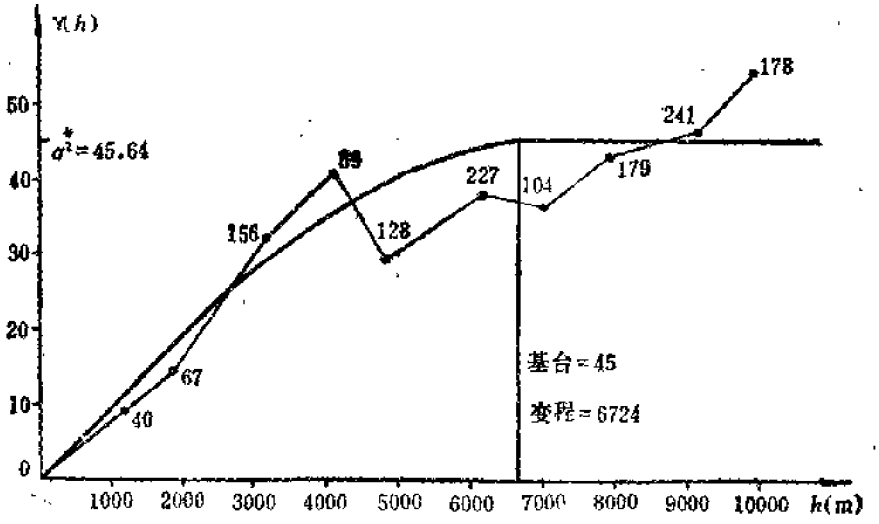


图 5-19　8 煤 EW 向变差图

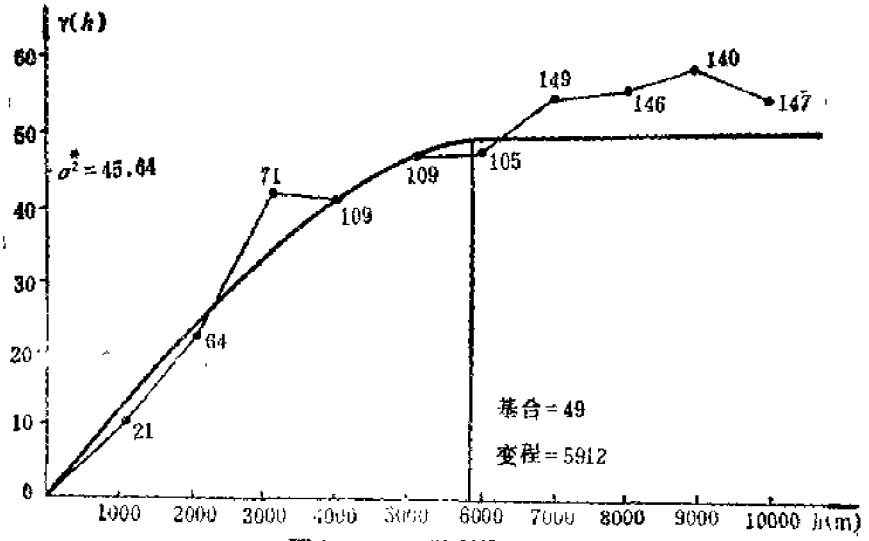


图 5-20　8 煤 NE 向变差图

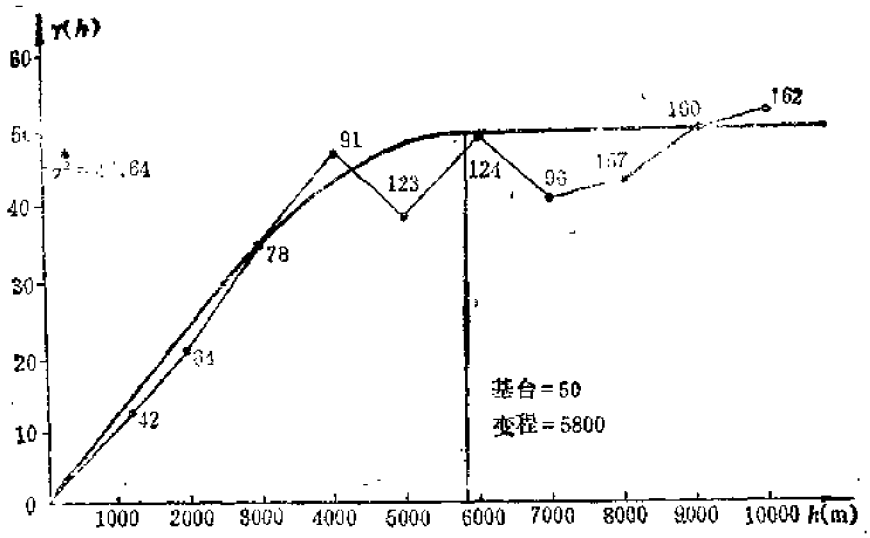


图 5-21　8 煤 SN 向变差图

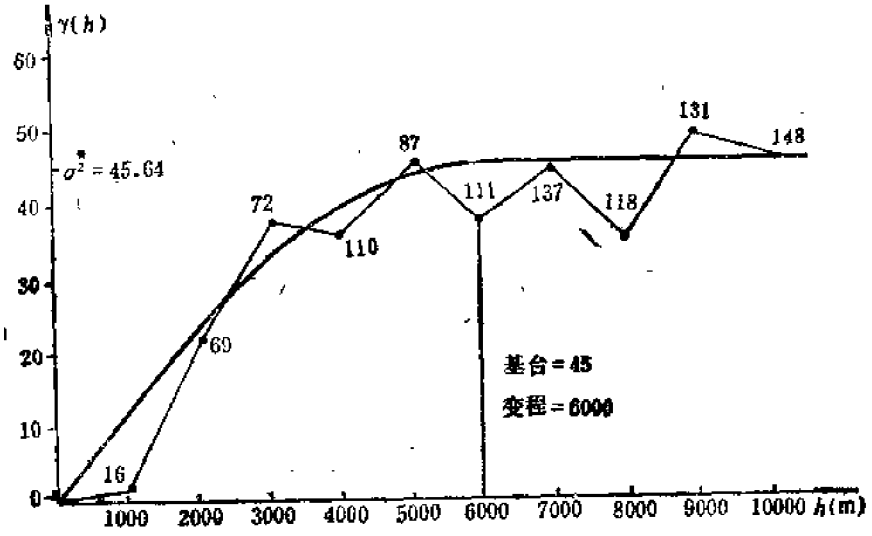


图5-22　8 煤 NW 向变差图

从实验变差函数图形可以看出，计算结果较好。图中标出的各点数据为参与计算的数据对数目，除了 NW 向和 NE 向头一个点的数据对小于 30 以外，其余各点的数据对均大于 30。这说明各点的变差函数值较可靠。四个方向的变差函数曲线均较正常。可以用球状模型进行拟合。本例采用了手工拟合的方法，通过人机对话的方式，不断修改其参数。同时，运用交叉验证法检验其拟合质量。最后确定四个方向变差函数球状模型的参数，见表 5-1。

表 5-1　8 煤层四个方向变差函数的参数

方　向	块金值C_0	基台值(C_0+C)	变程 a
EW	0	45	6724
NE	0	49	5912
SN	0	50	5800
NW	0	45	6000

根据表 5-1 可知，该矿区 8 煤层厚度的空间变异特征具带状各向异性。EW 向变异最小，SN 向变异最大。故选择 EW 向和 SN 向为两个特征方向。

下面是把 EW 向和 SN 向的带状各向异性套合成各向同性结构。

2）结构套合

南北方向的变差函数为：

$$\gamma_{SN}(h)=\begin{cases}50\left[\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{5800}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{5800}\right)^3\right] & 0\leqslant h\leqslant 5800\\ 50 & h>5800\end{cases}$$

东西方向的变差函数为：

$$\gamma_{EW}(h)=\begin{cases}45\left[\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{h}{6724}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{h}{6724}\right)^3\right] & 0\leqslant h\leqslant 6724\\ 45 & h>6724\end{cases}$$

用带状各向异性与几何各向异性相结合的套合方法对 $\gamma_{SN}(h)$ 与 $\gamma_{EW}(h)$ 进行套合。

令：$\gamma_1(h)=\gamma_{EW}(|h|)$

$\gamma_2(h)=\gamma_{SN}(|h|)-\gamma_{EW}(|h|)$

$K=6724/5800$

又假定 EW 方向为 u 方向，SN 方向为 v 方向，则平面上任一向量 h 可表为：

$$h=\begin{bmatrix}h_u\\ h_v\end{bmatrix}$$

对向量 h 作变换，令：

$$h'=\begin{bmatrix}h'_u\\ h'_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_u\\ h_v\end{bmatrix}$$

$$h''=\begin{bmatrix}h''_u\\ h''_v\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}h_u\\ h_v\end{bmatrix}$$

则得到套合结构：

$$\gamma(h)=\gamma_1(h')+\gamma_2(h'')=\gamma_{EW}(\sqrt{h_u^2+(Kh_v)^2})+\gamma_{SN}(h_v)-\gamma_{EW}(h_v)$$

这样就将各向异性的模型，化为各向同性模型 $\gamma(h)$ 了。

这里 $\gamma_1(h')$ 为平面内各向同性结构，$\gamma_2(h'')$ 为 SN 方向在 $\gamma_1(h')$ 的基础上多出来的结构。

4．克立格法估值

用克立格法进行储量计算，第一步是建立煤层空间分布结构模型，第二步是根据需要拟定可行的克立格方案，即如何利用已知信息点和确定待估块段，使计算结果既保证质量，又提高经济效益。

根据该矿区计算面积大，孔距大，D 级储量信息点少等特点，同时考虑计算机的内存量与计算时间等因素，采取以下措施：

1）全信息、分块段

将全矿区分为 25 个地质块段分别计算储量。为了便于生产设计部门的应用，块段划分的原则与现行煤田储量计算规范规定一致。把矿区所有信息点组成一个数据文件，每计算一个块段，都在这个数据文件中搜索信息点。

2）离散化待估域算法

用不经过任何加工的观测值为信息，估算待估块段的值。待估块段的大小为300×300(m²)。在计算$\bar{C}(v_i,V)$和$\bar{C}(V,V)$时，将待估块段离散成4×4个小方块（参见图5-23）。信息域为以变程a为半径的圆。

采用可选性搜索信息的方案。可用四方搜索（见图5-23），搜索结果以3、4、5、7四个点为信息点；六方搜索（见图4-24），搜索结果以1、3、4、5、6、7六个点为信息样品；八方搜索（见图5-25），结果以1、2、3、4、5、6、7七个点为信息样品。

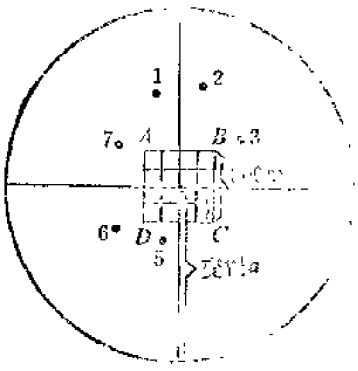


图5-23 待估块段的离散化及四方搜索方案

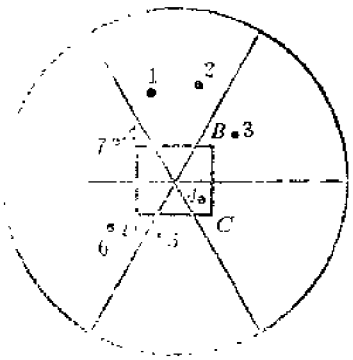


图5-24 六方搜索信息

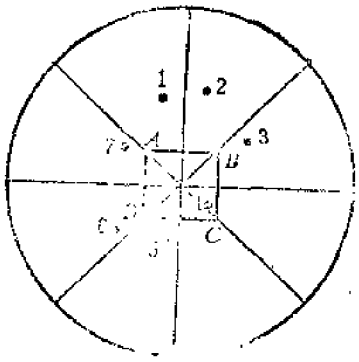


图5-25 八方搜索信息

四方搜索技术是把平面分成四个象限，每个象限只取与待估块段最近的一个信息样品。满信息时为四个信息点（见图5-23），故方程组的维数最多为5。六方搜索与八方搜索则是把平面分成六个或八个象限，取点方法与四方搜索相同，克立格方程组的维数最高分别为7和9（见图5-24和图5-25）。

一般B级储量区信息点较多，点距较小，可选用四方搜索技术。C级和D级储量区，信息点较少，点距大，宜用六方搜索或八方搜索技术来克服信息量较少的问题。

5．点信息超级待估块段的研究

在煤田地质勘探的应用中，几乎没有应用“超级信息块和超级待估块”的方案。原因一方面是煤田地质勘探的线距、孔距较大，信息点不多，没有必要组成超级信息块。另一方面，煤田地质区域化变量的结构函数中的块金效应很小，信息点间的相互屏蔽作用大，采用超级信息块段反而效果不好。不过在实际工作中，有人提出一种“点信息—超级待估块段”的计算方法。其具体做法是，以超级待估块段为单位搜索信息点，信息区域为以超级待估块段的中心为圆心，以变程a减去待估子块段对角线长$\overline{OA}$为半径（如图5-26所示）。每个超级待估块段又分为四个待估子块段。由于四个待估块段用相同的信息，具有相同的数据构形，因此，克立格矩阵$[K]$只求一次，从而节省了求三次克立格矩阵$[K]$和逆矩阵$[K]^{-1}$的时间。在信息点足够多的情况下，这种方法与信息点待估域的方案计算结果基

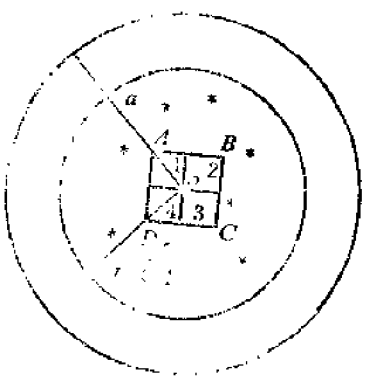


图5-26 信息点超级待估块段方案

本一致。

为了说明该方案的实际意义，对某一块段用此法作了储量计算，并与非超级待估块段法进行了比较（见表 5-2）。

表 5-2　待估块段与超级待估块段算法比较

算　法	估值平均值	平均估计误差 $\bar{\sigma}$	储量(t)	储量相对误差(与(1)相比)
非超级待估块段(1)	3.10	3.29	1323.95	6.9%
超级待估块段(2)	3.32	3.05	1415.55	

从表中可看出该方案的平均估计误差较小，两种不同方案的储量误差为（相对非超级待估块段）6.9%。实践证明点信息—超级待估块段方案在煤田地质勘探中具有实际使用价值。

二、地质统计学在优化勘探网度上的研究

1．原理

影响勘探网度的主要因素有两个：一是构造复杂程度；二是煤层的稳定性。本例选用某矿区 A 井田的 16、24、30 号煤层作为研究对象。该井田的勘探类型为二类二型，两个因素都属中等复杂程度。而且本区经过详细的地震勘探，构造问题基本解决。钻探的主要目的是为了解决煤层形态、煤质变化及验证地震勘探结果。为此，把煤层稳定性作为主要矛盾来确定最佳勘探网度。

由估计误差公式

$$\sigma_k^2 = 2\bar{\gamma}(V,X) - \bar{\gamma}(V,V) - \bar{\gamma}(X,X)$$

可以看出，σ_k^2 主要取决于：（1）变差函数模型 $\gamma(h)$；（2）待估块段 V 的大小和形状；（3）信息数量及空间排布；（4）待估块 V 与信息点间的距离。现在 $\gamma(h)$ 已经求出，不再变化；再将待估块段大小、形状固定，则估计方差就取决于信息样品的排布与数量及信息点到待估块的距离。若使待估块段的位置与勘探网格保持一种固定的排列方式，则估计方差就主要取决于钻孔的数量及排列方式，也就是所谓网度和网形了。

勘探工程布置成什么形状好，一般认为基本网形应布置成规则网形，如矩形、菱形等。这样有四个好处：（1）消除主观性；（2）容易发现空间的相关性和更准确地对它进行估值；（3）钻孔分布均匀；（4）便于作图，尤其是剖面图。

在待估块段大小和形状确定之后，在不同的网度下（以钻孔数表示）算出不同的估计方差 σ_k^2 的值，这样便得到一组数据。钻孔个数与估计方差的关系曲线如图 5-27 所示。一般认为曲线由陡变缓的部位所对应的横坐标即为最佳勘探网度（见图 5-27 中 B 点的位置）。在 B 点左边的曲线，当勘探网度加密（增加钻孔）时，方差迅速下降（精度提高很快）。B 点右边的曲线，勘探网度加密，克立格方差减低很慢，精度提高甚少，经济上不合理。所以 B 所对应的横坐标 N_n 即为勘探所需

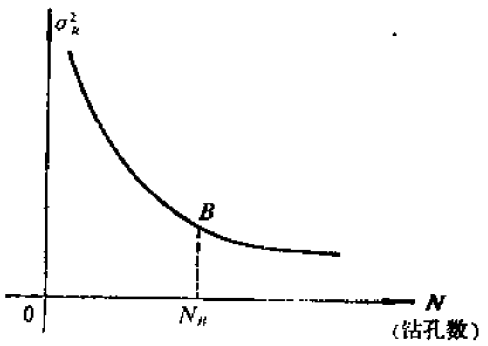


图 5-27　钻孔数与估计方差关系曲线

要的钻孔数。这个B点的求得是用样条函数拟合由陡变缓这一曲线，然后求“拐点”，并适当地考虑了先验方差和煤层平均厚度而确定的。在求得B点所对应的钻孔数N_B后，再根据井田面积s求一个方格的面积$A=s/N_B$。煤层若为各向同性，把A开平方即得正方形网距；若为各向异性，线距（走向方向）L、孔距（倾向方向）G应与对应方向的变程成比例。一般走向方向的变程a_x较倾向方向的变程a_y大，即走向方向的变化较倾向慢，所以走向方向的线距应比倾向方向的孔距大，其关系式应为：

$$\frac{L}{G}=\frac{a_x}{a_y} \tag{5-29}$$

故有 $A=L\times G=L^2\times\frac{a_y}{a_x}$。于是便可求得：

$$\begin{cases}L=\sqrt{A\times a_x/a_y}\\G=L\times a_y/a_x\end{cases} \tag{5-30}$$

在（5-30）式所确定的网度下，我们可以直接求出其对应的待估块的σ_K^2和相对误差。如已满足要求，则可选择其作为最佳勘探网度；若精度偏高，则可适当放疏；若精度偏低，可在第一水平加少量钻孔。表5-3和表5-4，是某矿区A井田16、24、30煤层的计算结果。

表5-3　矩形网与菱形网克立格方差比较

煤层	网形 \ 方差 \ 线距	1750	1500	1250	1000	750	500	250
16	矩　形	0.177	0.155	0.125	0.090	0.057	0.031	0.0063
	菱　形	0.174	0.153	0.123	0.088	0.056	0.030	0.0062
24	矩　形	0.067	0.052	0.040	0.0285	0.0187	0.0101	0.0021
	菱　形		0.051	0.039	0.0278	0.0184	0.010	0.0021
30	矩　形	1.635	1.453	1.195	0.8780	0.5530	0.2953	0.0611
	菱　形		1.439	1.187	0.8643	0.5399	0.2894	0.0603

表5-4　最佳基本网度的计算结果

煤层	线距	孔距	对应的σ_K^2	σ_K	相对误差 %	均值 $\overline{Z^*}$
16	634	507	0.04486	0.2118	0.1208	2.245
	634	507	0.04378	0.2092	0.1192	
24	638	532	0.01487	0.1219	0.1951	0.80
	645	538	0.01486	0.1219	0.1950	
30	533	457	0.3259	0.5709	0.3050	2.39
	534	458	0.3245	0.5687	0.3050	

注：各煤层对应的上边数字为矩形网，下边数字为菱形网。

2．最佳勘探网度的计算和效益

1）矩形网和菱形网的比较。通过编制计算机程序，可对矩形网与菱形网两种布孔方式（见图5-28）计算出两种平均估计方差（见表5-3）。表5-3很有规律地显示出在不同的网度下，菱形网比矩形网方差小1～2.5%。最佳勘探网度计算结果表明，菱形网比矩形网少用1～3个钻孔。

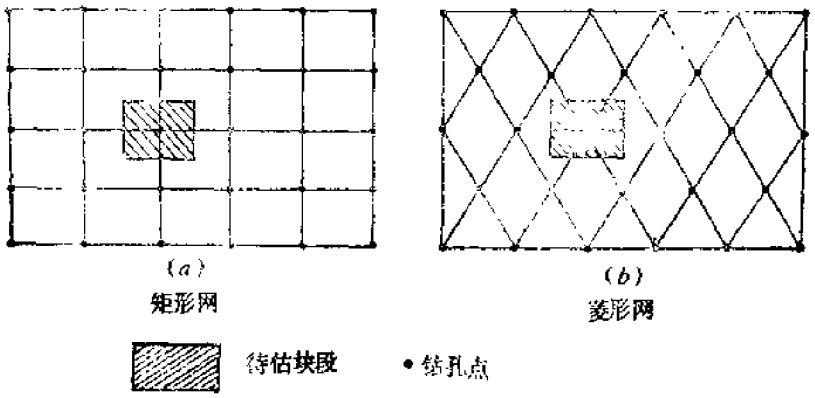


图5-28 两种勘探网形

2）最佳勘探网度的选定与效益。图5-29显示了30号煤层厚度的估计方差与钻孔个数的关系（其他各煤层类似）。勘探工程呈菱形网格排列时的最佳勘探网度为534×458(m²)。图中拐点B由计算机自动选定。

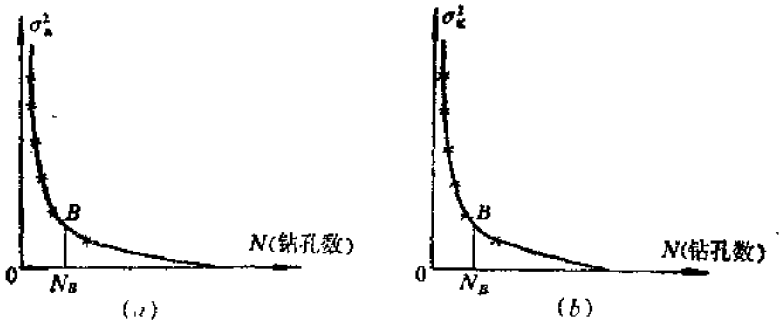


图5-29 30号煤厚的估计方差与钻孔数关系曲线

(a)-矩形网 (b)-菱形网

根据煤田勘探规范规定，当一个井田有两种或两种以上的煤层稳定类型时，应按厚度和储量占优势的那一部分煤层类型选择基本勘探网度。该矿区A井田以16号、30号煤层为主要可采煤层，且30号煤层变化较大，故我们以30号煤层的最佳勘探网度534×458(m²)求A级和B级储量。按30号煤层算得的C级储量界线（即平均相对误差小于50%）的网度为882×756(m²)。但考虑到基本钻孔应布置在勘探线上，故在534m线距上可布置成900m的孔距求C级储量。

原设计按500m线距布置22条勘探线，若改为534m线距，则可少布置一条勘探线，约可省8个钻孔。原设计400m孔距求A级储量，若改为458m，两条勘探线可节省1个钻孔。18条较长的勘探线共可省9个钻孔。共计可省17个孔。如孔深按550m计（30号煤层底板标高平均为－537m），则节省钻探工程量9350m，可缩短勘探周期

和节省大量的资金。

3）储量计算的验证。按原设计的 59 余孔未施工（包括露头孔，水文孔，构造孔等）的情况下，用克立格法算得三个煤层高级储量的比例（见表 5-5）都很高。16 号、24 号煤层大于 60%；30 号煤层 A＋B 级储量占总储量的 37.33%，尽管还差一些，但按最佳网度计算还需施工 30 余个钻孔。勘探结束时，其高级储量也会接近 50%。另外从图 5-29 的关系曲线可以看到，再加密钻孔，其估计方差下降很少，经济效益也不高，因而选取 534×453m 的勘探网度较为合理。

表 5-5　三个煤层高级储量比例

煤　层　号	$\frac{A级}{总储量}$（%）	$\frac{(A+B)级}{总储量}$（%）
16	36.24	65.63
24	1.,15	3.,03
30	12.50	37.33

综上所述，地质统计学不仅可以对区域化变量进行无偏“最优”估计，而且在勘探网度的研究方面也有着广阔的应用前景。

第六章　辅助函数及其应用

在地质统计学的计算中，常常要计算各种平均变差函数值，例如 $\bar{\gamma}(V,V)$，$\bar{\gamma}(v,v)$，$\bar{\gamma}(V,v)$，$\bar{\gamma}(v,v_\alpha)$等。当信息数据的承载和待估块段的几何构形比较规则时，我们可以事先求出这些平均变差函数值$\bar{\gamma}$，并把它们作成列线图表以供查用，这就是本章所介绍的各种辅助函数图表。它给地质统计学的近似计算带来很大方便。

第一节　辅助函数的定义及计算公式

这里我们分不同维数介绍四种常用的辅助函数 χ、F、α、H，并假定变差函数是各向同性的，即 $\gamma(h)=\gamma(|h|)=\gamma(r)$。

一、一维辅助函数：$\chi(L)$、$F(L)$

1. *辅助函数的定义：*

设 AB 是长为 L 的一条线段，见图 6-1。

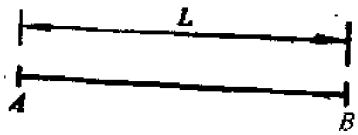


图 6-1　长为 L 的线段 AB

1）辅助函数 $\chi(L)$ 的定义：当矢量 h 的一端固定在 A 点，另一端扫过长为 L 的线段 AB 时 $\gamma(h)$ 的平均值，记为 $\chi(L)$。且有：

$$\chi(L)=\bar{\gamma}(A,AB)=\frac{1}{L}\int_0^L\gamma(u)\,\mathrm{d}u \tag{6-1}$$

2）辅助函数 $F(L)$ 的定义：当矢量 h 的两个端点，互相独立地扫过长为 L 的线段 AB 时，$\gamma(h)$ 的平均值，记为 $F(L)$。且有：

$$\begin{aligned}F(L)&=\bar{\gamma}(AB,AB)\\&=\frac{1}{L^2}\int_0^L\mathrm{d}u\int_0^L\gamma(u-u')\,\mathrm{d}u'\end{aligned} \tag{6-2}$$

2. *$F(L)$ 函数与 $\chi(L)$ 函数的关系*

将函数 $F(L)$ 化为一重积分的形式，可得到辅助函数 $F(L)$ 与 $\chi(L)$ 的关系，即：

$$\begin{aligned}F(L)&=\frac{2}{L^2}\int_0^L(L-u)\gamma(u)\,\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{6-3}$$

证明：

① 先证：$\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\cdot du=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\gamma(u)\,du$

由公式（6-1）知 $\chi(u)=\frac{1}{u}\int_0^u \gamma(t)\,dt$

$$\therefore\quad \frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\,du=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u \gamma(t)\,dt\right]du$$

（积分换限）$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left(\int_t^L du\right)\gamma(t)\,dt$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-t)\gamma(t)\,dt$$

（将 t 改写为 u）$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\gamma(u)\,du$$

② 再证：$F(L)=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\,du$

$$\because\quad F(L)=\frac{1}{L^2}\int_0^L du\int_0^L \gamma(u-u')\,du'$$

$$=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u \gamma(u-u')\,du'\right]du$$

$$+\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_u^L \gamma(u-u')\,du'\right]du$$

令

$$\mathrm{I}=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u \gamma(u-u')\,du'\right]du$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_u^L \gamma(u-u')\,du'\right]du$$

对Ⅰ式，令 $t=u-u'$，则 $u'=u-t$，$du'=-dt$，当 u' 从 $0\to u$ 时，则 t 从 $u\to 0$，因此

$$\mathrm{I}=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[-\int_u^0 \gamma(t)\,dt\right]du$$

$$=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u \gamma(t)\,dt\right]du$$

对Ⅱ式，首先进行积分换限，于是

$$\mathrm{II}=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^{u'} \gamma(u-u')\,du\right]du'$$

由于 $\gamma(h)$ 有对称性，即 $\gamma(u-u')=\gamma(u'-u)$，故

$$\text{II}=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^{u'}\gamma(u'-u)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u'$$

（记号 u 与 u' 互换）$$=\frac{1}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^{u}\gamma(u-u')\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u$$

$$=\text{I}$$

$$\therefore\quad F(L)=\text{I}+\text{II}=2\text{I}=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\,\mathrm{d}u$$

证毕

二、二维辅助函数：$\alpha(L,l)$，$\chi(L,l)$，$F(L,l)$ 和 $H(L,l)$

令 ABCD 是边长分别为 L 和 l 的长方形，如图 6-2 所示。

1. 辅助函数 $\alpha(L,l)$ 的定义：当矢量 $\boldsymbol{h}$ 的一端扫过长为 l 的一边，而另一端独立地扫过与此边相距为 L 的对边时 $\gamma(h)$ 的平均值，记作 $\alpha(L,l)$。且有：

$$\alpha(L,l)=\bar{\gamma}(AD,\ BC)=\frac{2}{l^2}\int_0^l(l-u)\,\gamma(\sqrt{L^2+u^2})\,\mathrm{d}u \tag{6-4}$$

证：根据 $\alpha(L,l)$ 的定义，积分限如图 6-3 所示：

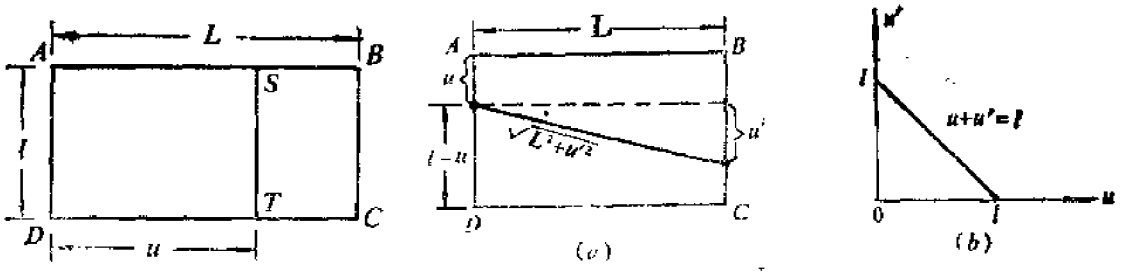


图 6-2　边长分别为 L，l 的长方形　　图 6-3　$\alpha(L,l)$ 积分限的确定

$$\alpha(L,l)=\frac{2}{l^2}\int_0^l\left[\int_0^{l-u'}\gamma(\sqrt{L^2+u'^2})\,\mathrm{d}u'\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{l^2}\int_0^l\left[\gamma(\sqrt{L^2+u'^2})\int_0^{l-u'}\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}u'$$

$$=\frac{2}{l^2}\int_0^l(l-u')\,\gamma(\sqrt{L^2+u'^2})\,\mathrm{d}u'$$

（将 u' 写为 u）$$=\frac{2}{l^2}\int_0^l(l-u)\,\gamma(\sqrt{L^2+u^2})\,\mathrm{d}u$$

证毕

注：$\alpha(L,l)$ 关于变量 L，l 没有对称关系，即当 $L\neq l$ 时，$\alpha(L,l)\neq\alpha(l,L)$（见图 6-2）。

2. 辅助函数 $\chi(L,l)$ 的定义：当矢量 $\boldsymbol{h}$ 的一端扫过长为 l 的一边，而另一端独立地扫过整个长方形 ABCD 时 $\gamma(h)$ 的平均值，记为 $\chi(L,l)$。即（见图 6-2）：

$$\chi(L;l)=\gamma(AD,ABCD)=\gamma(BC,ABCD) \tag{6-5}$$

公式（6-5）是一个三重积分，它可以表示为下列一重积分：

$$\chi(L;l)=\frac{1}{L}\int_0^L \alpha(u;l)\,\mathrm{d}u \tag{6-6}$$

证：根据辅助函数 $\alpha(u,\ l)$ 的定义可知，当 $\alpha(u,\ l)$ 中的 u 由 $0\to L$，并求其平均值时，就相当于矢量 h 一端扫过长为 l 的一边，另一端独立地扫过整个正方形时变差函数 $\gamma(h)$ 的平均值，参见图 6-2，故直接可得出：

$$\chi(L;l)=\frac{1}{L}\int_0^L \alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

证毕

注：$\chi(L;l)$ 关于 L、l 不对称，即若 $L\neq l$，则 $\chi(L;l)\neq\chi(l;L)$（见图 6-2）。

3. 辅助函数 $F(L;l)$ 的定义：当矢量 h 的两个端点独立地扫过整个矩形 ABCD 时 $\gamma(h)$ 的平均值，记为 $(L;l)$。即：

$$F(L;l)=\gamma(ABCD,\ ABCD) \tag{6-7}$$

显然 $F(L;\ l)$ 是关于 L、l 对称的，即有 $F(L;\ l)=F(l;\ L)$，对于任意的 $L>0$，$l>0$ 成立。

式（6-7）是一个四重积分，它可以化为下列简单积分：

$$F(L;l)=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u;l)\,\mathrm{d}u \tag{6-8}$$

证：（证明分两步）

① 先证 $$F(L;l)=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

由公式（6-3）可知，对一维辅助函数 $F(L)$ 有：

$$F(L)=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\gamma(u)\,\mathrm{d}u$$

根据二维辅助函数 $\alpha(u;l)$ 的定义可知，若令 l 的长度趋于零，变为一个点，则 $\alpha(u;l)$ 就变成了 $\gamma(u)$。因此在二维空间中，辅助函数 $\alpha(u;\ l)$ 就相当于一维空间中的 $\gamma(u)$。同理二维空间中的 $F(L;l)$，当 $l=0$ 时，就相当于一维空间中的 $F(L)$。用 $F(L;l)$ 取代上式中的 $F(L)$，并将 $\alpha(u;l)$ 替换上式中的 $\gamma(u)$ 便有：

$$F(L;l)=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

② 再证：

$$\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u;l)\,\mathrm{d}u=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

$$\therefore\quad \chi(L;l)=\frac{1}{L}\int_0^L \alpha(u;l)\,\mathrm{d}u$$

将 L 写成 u，u 写成 u' 得：

$$\chi(u;l)=\frac{1}{u}\int_0^u \alpha(u';l)\,du'$$

$$\therefore\quad \frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u;l)\,du=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^u \alpha(u';l)\,du'\right]du$$

（积分换限）
$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left[\left(\int_{u'}^L du\right)\alpha(u';l)\,du'\right.$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L (l-u')\,\alpha(u';l)\,du'$$

（将 u' 写成 u）
$$=\frac{2}{L^2}\int_0^L (L-u)\,\alpha(u;l)\,du$$

证毕

4. 辅助函数$H(L;l)$的定义：当矢量 h 的一端固定在矩形的任一顶角上，而另一端独立地扫过整个矩形 $ABCD$ 时 $\gamma(h)$ 的平均值，记为 $H(L;l)$。即（见图 6-4）：

$$H(L;l)=\bar{\gamma}(A,\ ABCD) \tag{6-9}$$

可以证明：$H(L;l)$ 也等于当矢量 h 的一端扫过矩形的长为 l 的一边，而另一端独立地扫过长为 L 的邻边时 $\gamma(h)$ 的平均值，即（见图 6-4）：

$$H(L;l)=\bar{\gamma}(A,\ ABCD)=\bar{\gamma}(AD,\ AB) \tag{6-10}$$

由于 $\bar{\gamma}(AD,\ AB)=\bar{\gamma}(AB,\ AD)$，故 $H(L;l)$ 关于 L，l 对称，即有 $H(L;l)=H(l;L)$。此外，$H(L;l)$ 还可以通过 $\chi(L;l)$ 和 $F(L;l)$ 的一阶和二阶偏导数来求出，公式为：

$$H(L;l)=\frac{1}{2l}\cdot\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l) \tag{6-11}$$

$$H(L;l)=\frac{1}{4lL}\frac{\partial^2}{\partial l\partial L}l^2L^2F(L;l) \tag{6-12}$$

证：

1）公式（6-10）的证明：

如图 6-4，设 P 为矩形 $ABCD$ 内的任一点，其坐标为 $(x,\ y)$。作 $PM\perp AD$，作 $PN\perp AB$，则有 $AP=MN$（矩形对角线）。于是有

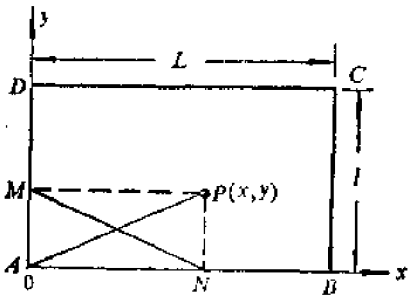


图 6-4　辅助函数 $H(L;\ l)$的定义

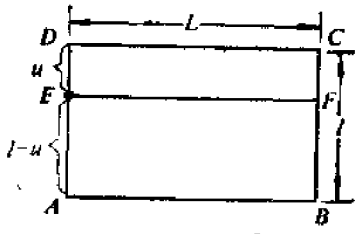


图 6-5　公式 $H(L;\ l)$的证明

$$\bar{\gamma}(A,ABCD)=\frac{1}{Ll}\int_0^l dy\int_0^L \gamma(A,P)\,dx$$

由于 $\gamma(h)$ 是各向同性的（本节开始的假设），又线段 $AP=MN$，$\therefore \gamma(A,P)=\gamma(M,N)$，故

$$\bar{\gamma}(A,ABCD)=\frac{1}{Ll}\int_0^l \mathrm{d}y\int_0^L \gamma(M,N)\,\mathrm{d}x$$

$$=\bar{\gamma}(AD,AB)$$

证毕

2）公式（6-11）的证明

①先证 $$\chi(L;l)=\frac{2}{l^2}\int_0^l uH(L;u)\,\mathrm{d}u。$$

由图 6-5 知：

$$\chi(L;l)=\bar{\gamma}(AD,ABCD)=\frac{1}{l}\int_0^l \bar{\gamma}(E,ABCD)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{u}{l}\bar{\gamma}(E;EFCD)+\frac{l-u}{l}\bar{\gamma}(E,EABF)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l\left[\frac{u}{l}H(L;u)+\frac{l-u}{l}H(L;l-u)\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l uH(L;u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{l^2}\int_0^l (l-u)\,H(L;l-u)\,\mathrm{d}u$$

令

$$\mathrm{I}=\frac{1}{l^2}\int_0^l uH(L;u)\,\mathrm{d}u$$

$$\mathrm{II}=\frac{1}{l^2}\int_0^l (l-u)\,H(L;l-u)\,\mathrm{d}u$$

在Ⅱ式中令 $l-u=t$，则 $u=l-t$，$\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$，当 u 从 0 变到 l 时，t 从 l 变到 0，代到Ⅱ式中：

$$\mathrm{II}=\frac{1}{l^2}\int_0^l (l-u)\,H(L;l-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=-\frac{1}{l^2}\int_l^0 tH(L;t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l tH(L;t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{I}\quad（此处将\ t\ 再写成\ u）$$

$$\therefore\quad \chi(L;l)=\mathrm{I}+\mathrm{II}=2\mathrm{I}=\frac{2}{l^2}\int_0^l uH(L;u)\,\mathrm{d}u$$

②再证 $H(L;l)=\frac{1}{2l}\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l)$

由①所证得的结果有：

$$\frac{1}{2}l^2\chi(L;l)=\int_0^l uH(L;u)\,\mathrm{d}u$$

等式两边对 l 求偏导数，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l)=lH(L;l)$$

$$\therefore\quad H(L;l)=\frac{1}{2l}\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l)$$

证毕

3） 公式（6-12）的证明

由公式（6-8）可知：

$$F(L;l)=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u;l)\,\mathrm{d}u$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}L^2F(L;l)=\int_0^L u\chi(u;l)\,\mathrm{d}u$$

等式两边对 L 求偏导数，得

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial L}L^2F(L;l)=L\chi(L;l)$$

$$\therefore\quad \chi(L;l)=\frac{1}{2L}\frac{\partial}{\partial L}L^2F(L;l)$$

等式两边同乘以 l^2 得：

$$l^2\chi(L;l)=\frac{1}{2L}\frac{\partial}{\partial L}L^2l^2F(L,l)$$

两边对 l 求偏导数，得

$$\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l)=\frac{1}{2L}\frac{\partial^2}{\partial l\partial L}L^2l^2F(L,l)$$

由（6-11）式有：

$$H(L;l)=\frac{1}{2l}\frac{\partial}{\partial l}l^2\chi(L;l)$$

$$=\frac{1}{4lL}\frac{\partial^2}{\partial l\partial L}L^2l^2F(L;l)$$

证毕

三、三维辅助函数 $F(L,l^2)$

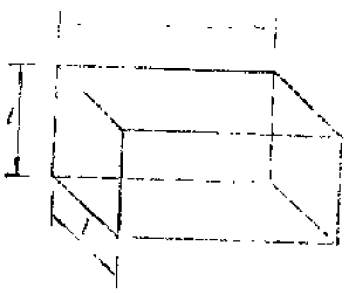


图 6-6 三棱长为 L、l、l 的长方体

在三维空间中，可把三维辅助函数 α、χ、F 和 H 确定在一个长方体 $(l_1,\ l_2,\ l_3)$ 上。但实际上三元函数太难使用，故限定长方体为 $(L\times l^2)$（见图 6-6）。我们只介绍一种常用的三维辅助函数 $F(L,l^2)$，它表示当矢量 $\mathbf{h}$ 的两个端点独立地扫过整个长方体 $(L\times l^2)$ 时 $\gamma(h)$ 的平均值。

由于 $F(L,l^2)$ 的表达式较复杂，欲求 $F(L,l^2)$ 的值时通常是查辅助函数图表（见图 6-10），故此处我们没有给出 $F(L,l^2)$ 的具体表达式。

第二节　标准球状模型辅助函数及图表

对于不同模型的变差函数，均有其相应的辅助函数表达式。在实际应用中，球状模型用途最广，这里只介绍标准球状模型（$C_0=0$，$C=1$）变差函数的辅助函数表达式和列线图表。

一、一维辅助函数的表达式

标准球状模型的变差函数公式为：

$$\gamma(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & 0<r\leqslant a\\ 1 & r>a\end{cases}$$

则其一维辅助函数的表达式：

$$\chi(L)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{L}{a}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{L^3}{a^3} & 0\leqslant L\leqslant a\\ 1-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{a}{L} & L>a\end{cases}\tag{6-13}$$

$$F(L)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{L}{a}-\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{L^3}{a^3} & 0\leqslant L\leqslant a\\ 1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{a}{L}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a^2}{L^2} & L<a\end{cases}\tag{6-14}$$

二、一维辅助函数公式的证明

1. 公式（6-13）的证明

1）当 $0<L\leqslant a$ 时：

$$\chi(L)=\frac{1}{L}\int_0^L\gamma(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{L}\int_0^L\left(\frac{3}{2}\frac{u}{a}-\frac{1}{2}\frac{u^3}{a^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\left(\frac{3}{2a}\cdot\frac{u^2}{2}-\frac{1}{2a^3}\cdot\frac{u^4}{4}\right)\Bigg|_0^L=\frac{1}{L}\left(\frac{3L^2}{4a}-\frac{L^4}{8a^3}\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{a}-\frac{L^3}{8a^3}$$

当 $L=0$ 时：$\chi(0)=0$ 成立

∴ 当 $0\leqslant L\leqslant a$ 时：$\chi(L)=\dfrac{3}{4}\dfrac{L}{a}-\dfrac{L^3}{8a^3}$。

2）当 $L>a$ 时：

$$\chi(L)=\frac{1}{L}\int_0^L\gamma(u)\,\mathrm{d}u=\frac{1}{L}\int_0^a\gamma(u)\,\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_a^L\gamma(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\int_0^a\left(\frac{3}{2}\frac{u}{a}-\frac{1}{2}\frac{u^3}{a^3}\right)\mathrm{d}u+\frac{1}{L}\int_a^L\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{L}\left[\frac{3}{2a}\cdot\frac{u^3}{2}-\frac{1}{2a^3}\cdot\frac{u^4}{4}\right]_0^a+\frac{1}{L}(L-a)$$

$$=\frac{1}{L}\left(\frac{3a}{4}-\frac{a}{8}\right)+1-\frac{a}{L}$$

$$=1-\frac{3}{8}\cdot\frac{a}{L}$$

$$\therefore\quad \chi(L)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\dfrac{L}{a}-\dfrac{L^3}{8a^3} & 0\leqslant L\leqslant a\\[2ex] 1-\dfrac{3a}{8L} & L>a\end{cases}$$

证毕

2. 公式（6-14）的证明

1）当 $0<L\leqslant a$ 时：

$$F(L)=\frac{2}{L^2}\int_0^L(L-u)\gamma(u)\,du$$

$$=\frac{2}{L}\int_0^L\gamma(u)\,du-\frac{2}{L^2}\int_0^L u\gamma(u)\,du$$

令

$$\text{Ⅰ}=\frac{2}{L}\int_0^L\gamma(u)\,du$$

$$\text{Ⅱ}=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\gamma(u)\,du$$

由公式（6-13）的证明 1）知：

$$\text{Ⅰ}=\frac{2}{L}\int_0^L\gamma(u)\,du=2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{L}{a}-\frac{L^3}{8a^3}\right)$$

$$=\frac{3L}{2a}-\frac{L^3}{4a^3}$$

又

$$\text{Ⅱ}=\frac{2}{L^2}\int_0^L\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{a^3}\right)du$$

$$=\frac{2}{L^2}\left[\frac{3}{2a}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{1}{2a^3}\cdot\frac{u^5}{5}\right]_0^L$$

$$=\frac{2}{L^2}\left[\frac{L^3}{2a}-\frac{L^5}{10a^3}\right]$$

$$=\frac{L}{a}-\frac{L^3}{5a^3}$$

$$\therefore\quad F(L)=\text{Ⅰ}-\text{Ⅱ}=\frac{3L}{2a}-\frac{L^3}{4a^3}-\left(\frac{L}{a}-\frac{L^3}{5a^3}\right)$$

$$=\frac{L}{2a}-\frac{L^3}{20a^3}$$

显然当 $L=0$ 时有 $F(0)=0$ 成立

∴ 当 $0\leqslant L\leqslant a$ 时有 $F(L)=\dfrac{L}{2a}-\dfrac{L^3}{20a}$

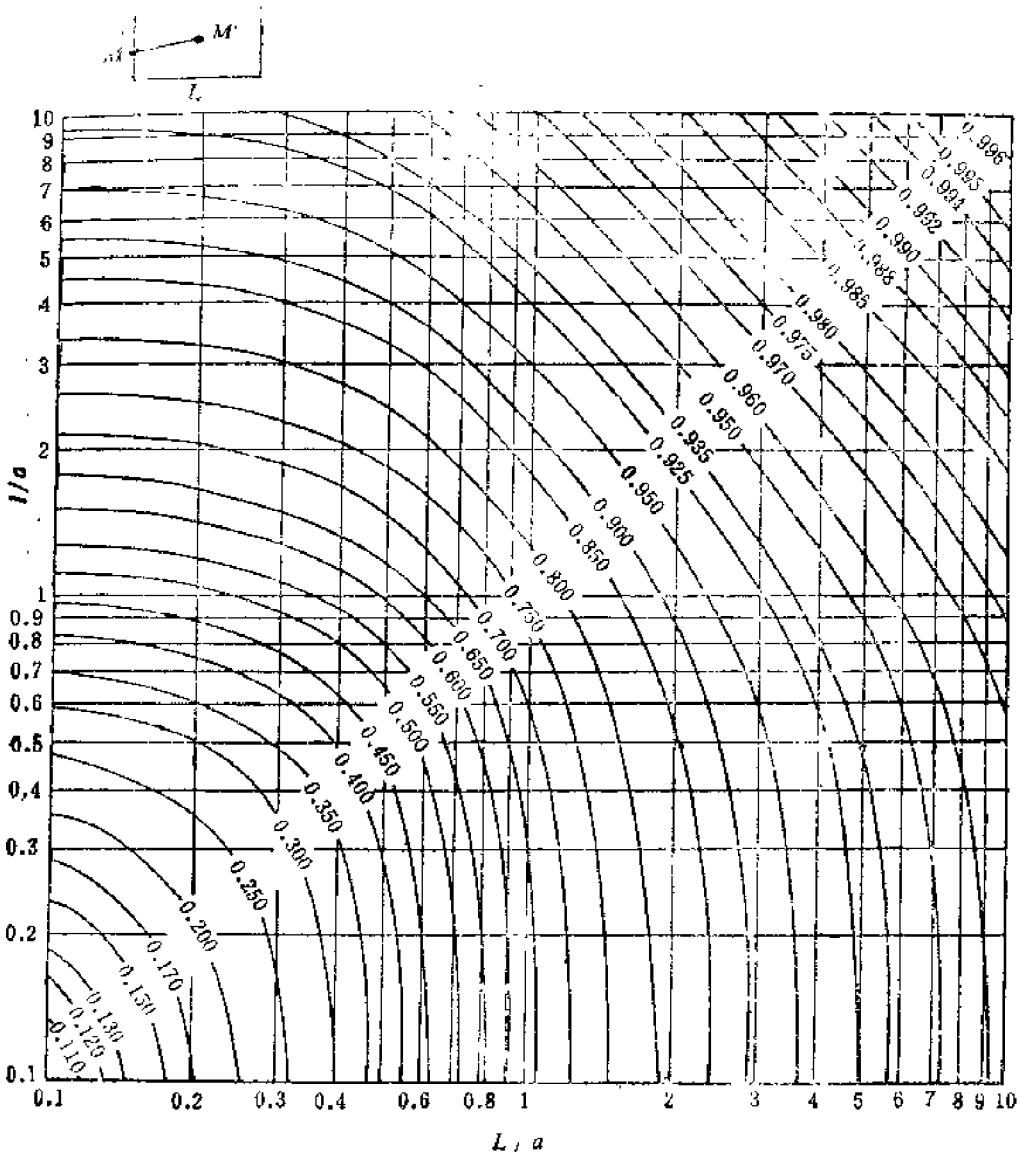


图 6-7　标准球状模型的 $\chi(L;\ l)$ 函数列线图

2）当 $L>a$ 时

$$F(L)=\frac{2}{L^2}\int_0^a (L-u)\,\gamma(u)\,\mathrm{d}u+\frac{2}{L^2}\int_a^L (L-u)\,\gamma(u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{L^2}\int_0^a (L-u)\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{u}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{a^3}\right)\mathrm{d}u+\frac{2}{L^2}\int_a^L (L-u)\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{L}\int_0^a\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{u}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^3}{a^3}\right)\mathrm{d}u-\frac{2}{L^2}\int_0^a\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{u^2}{a}-\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{a^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$+\frac{2}{L^2}\left[Lu-\frac{u^2}{2}\right]_a^L$$

$$= 2\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{L}-\frac{1}{8}\cdot\frac{a}{L}\right)-\frac{2}{L^2}\left[\frac{3}{2a}\cdot\frac{u^3}{3}-\frac{1}{2a^3}\cdot\frac{u^5}{5}\right]_0^a$$

$$+\frac{2}{L^2}\left(\frac{L^2}{2}-La+\frac{a^2}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{L}-\frac{1}{4}\cdot\frac{a}{L}-\frac{a^2}{L^2}+\frac{a^2}{5L^2}+1-\frac{2a}{L}+\frac{a^2}{L^2}$$

$$= 1-\frac{3}{4}\cdot\frac{a}{L}+\frac{1}{5}\cdot\frac{a^2}{L^2}$$

证毕

标准球状模型的二维、三维辅助函数表达式太复杂了，下面我们给出其常用列线图表。

三、球状模型辅助函数的列线图表

1. 辅助函数 $\chi(L;l)$ 的列线图（见图 6-7）
2. 辅助函数 $H(L;l)$ 的列线图（见图 6-8）

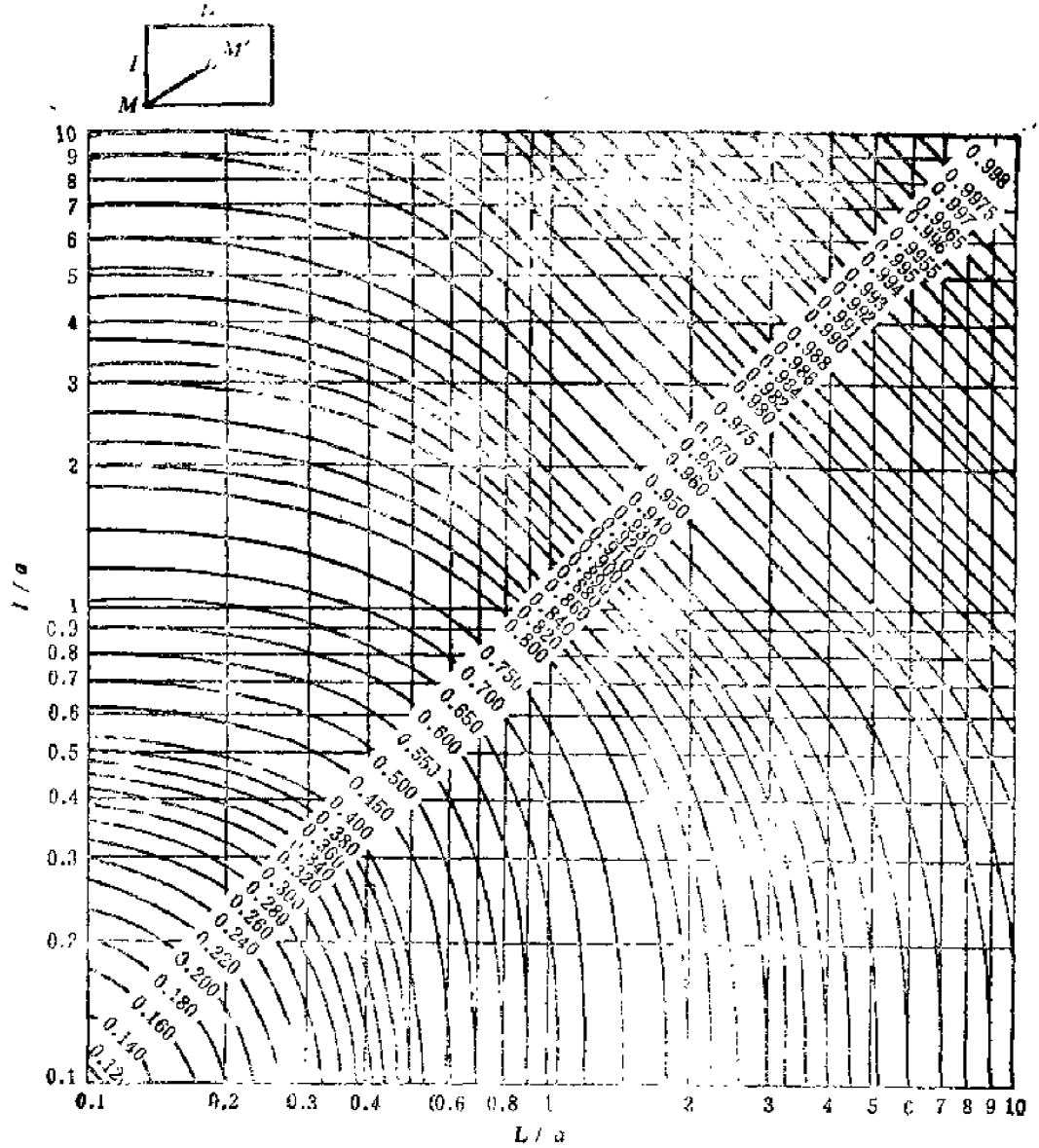


图 6-8　标准球状模型的 $H(L;\ l)$ 函数列线图

3. 辅助函数 $F(L;l)$ 的列线图（见图 6-9）

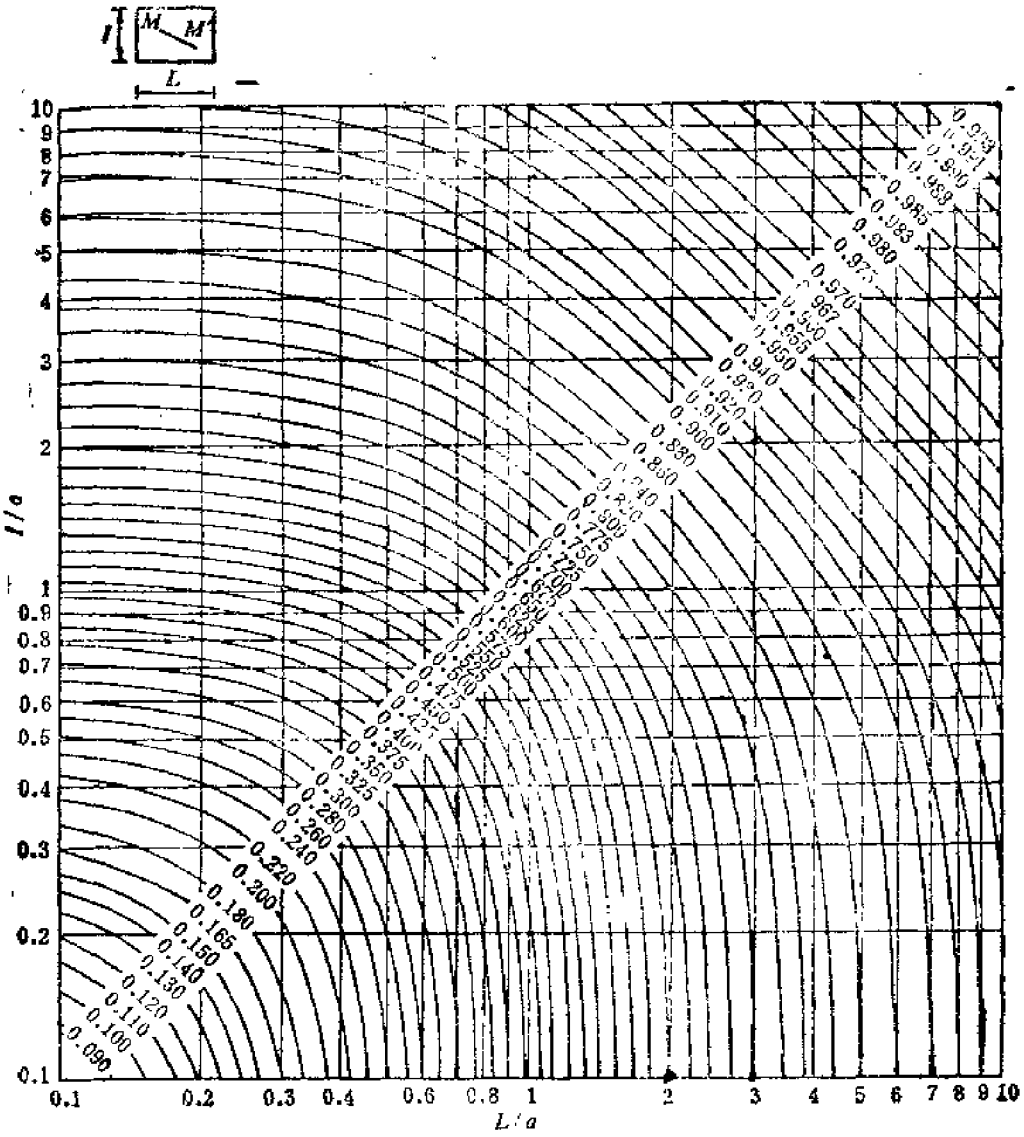


图 6-9　标准球状模型的 $F(L;\ l^2)$ 函数列线图

4. 辅助函数 $F(L;l^2)$ 的列线图（见图 6-10）

根据以上这些图表，只要知道了标准球状模型的变程 a 及辅助函数中的变量 l、L，就可以查出这些辅助函数的值。例如，当 $a=10$，$l=20$，$L=30$，有 $l/a=2$，$L/a=3$。在上述图表的左边找 2，底边找 3，其交点对应的曲线上的值就是相应的辅助函数值。从图（6-7）中可查得：$\chi(L;\ l)=\chi(30;\ 20)=0.953$，从图（6-8）中可查得 $H(L;\ l)=H(30;20)=0.974$；从图（6-9）中可查得 $F(L;l)=F(30;20)=0.916$，从图(6-10)中可查得 $F(L;l^2)=F(30;400)=0.969$。

以上四张图表对 L/a 和 l/a 在 0.1 到 10 之间值可查出相应的辅助函数值。但是，当 $L/a>10$ 或 $l/a>10$ 时，就不能从图中查得，可采用下面的近似计算公式：

$$\chi(L,l)=1-\frac{\pi a^2}{10Ll}+\frac{a^3}{12l^2L} \tag{6-15}$$

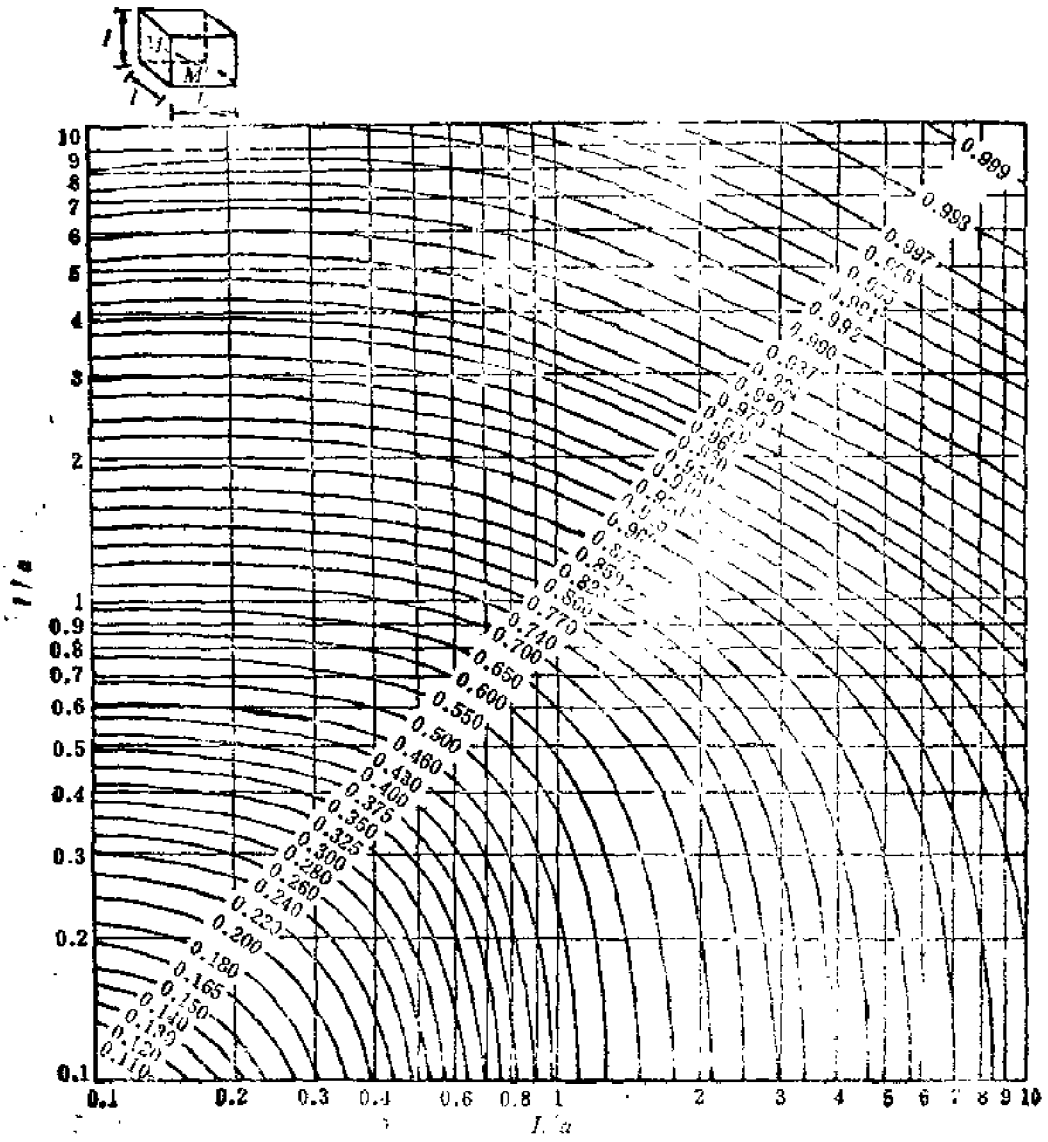


图 6-10　标准球状模型的 $F(L;\ l^2)$ 函数列线图

$$H(L,l) \doteq 1 - \frac{\pi a^2}{20lL} \tag{6-16}$$

$$F(L,l) = 1 - \frac{\pi}{5} \cdot \frac{a^2}{lL} + \frac{a^3}{6L}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{l}\right) - \frac{3a^4}{70L^2l^2} \tag{6-17}$$

$$F(L,l^2) = 1 - \frac{\pi}{6} \cdot \frac{a^3}{Ll^2} + \frac{3\pi}{70} \cdot \frac{a^4}{Ll^2}\left(\frac{1}{L} + \frac{2}{l}\right) - \frac{a^5(L+2l)}{30L^2l^4} + \frac{a^6}{126L^2l^4} \tag{6-18}$$

辅助函数 $a(L,l)$ 没有图表可查，但可按式（6-4）直接计算。

注：所有这些辅助函数列线图，都是在标准球状模型（$C=1$，$C_0=0$）情况下制作出来的。对于非标准球状模型的变差函数，欲求其相应的辅助函数值，则根据辅助函数的定义（实质上是变差函数在不同空间不同域上的平均值），首先从图上查出该变差函数

相应的标准球状模型（$C=1$，$C_0=0$）的辅助函数值，再乘以C加上C_0即得到非标准球状模型变差函数的平均值（或叫辅助函数值）。因此对一般球状模型的辅助函数值可以用下面的一般公式表示：

$$f^*(L,\ l)=C\cdot f(L,\ l)+C_0 \tag{6-19}$$

其中 $f(L,\ l)$表示标准球状模型辅助函数。

第三节 辅助函数的应用

在实际应用中，一维辅助函数可以直接计算，求得其值。在二维情况下，当变差函数是球状模型时，则应首先分析信息样品和待估块段的空间位置关系，根据不同的几何构形，选用相应的辅助函数，再通过查图表来求得其值，从而得到相应的变差函数的平均值。本节我们介绍辅助函数在估计方差和克立格估值方面的一些应用。

一、辅助函数在计算估计方差上的应用

1. 一维辅助函数的应用

例1 设变差函数是线性模型$\gamma(r)=Pr$，若用位于下列四种不同的位置（见图6-11）的信息样品来估计整个线段L上的平均值，试计算其估计方差$\sigma^2_{E_1}$，$\sigma^2_{E_2}$，$\sigma^2_{E_3}$，$\sigma^2_{E_4}$：

1）一个信息样品位于L的中心（见图6-11(a)）；

2）一个信息样品位于L的端点（见图6-11(b)）；

3）两个信息样品位于L的两端（见图6-11(c)）；

4）一个信息样品位于$L/4$处（见图6-11(d)）。

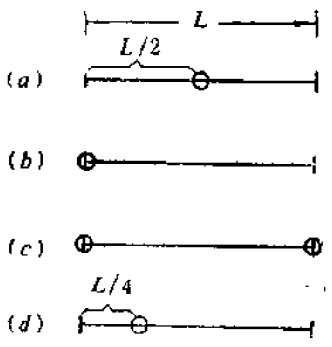


图6-11 用点信息样品估计线段上的平均值图

解：由于估计方差的计算公式为：$\sigma^2_E=2\bar{\gamma}(v,\ V)-\bar{\gamma}(v,\ v)-\bar{\gamma}(V,\ V)$，故在计算上式的估计方差时，要用到一维辅助函数$\chi(L)$和$F(L)$，我们先求出变差函数为线性模型$\gamma(r)=Pr$时这两个函数的表达式。根据这两个函数的定义，我们有：

$$\chi(L)=\frac{1}{L}\int_0^L\gamma(u)\,du=\frac{1}{L}\int_0^L Pu\,du$$

$$=\frac{P}{L}\cdot\frac{u^2}{2}\Big|_0^L=\frac{PL}{2}$$

$$F(L)=\frac{2}{L^2}\int_0^L u\chi(u)\,du=\frac{2}{L^2}\int_0^L\frac{Pu^2}{2}du$$

$$=\frac{P}{L^2}\cdot\frac{u^3}{3}\Big|_0^L=\frac{PL}{3}$$

1′) $\bar{\gamma}(v,\ V)=\frac{1}{L}\left[\frac{L}{2}\cdot\gamma\left(\frac{L}{2}\right)+\frac{L}{2}\cdot\chi\left(\frac{L}{2}\right)\right]=\chi\left(\frac{L}{2}\right)$

$\bar{\gamma}(V,\ V)=F(L)$

$\bar{\gamma}(v,\ v)=0$

$$\therefore \quad \sigma^2_{\hat{x}_1} = 2 \cdot \chi\left(\frac{L}{2}\right) - F(L)$$

$$= 2 \cdot \frac{P}{2} \cdot \frac{L}{2} - \frac{PL}{3} = \frac{1}{6}PL$$

2′) $\gamma(v, V) = \chi(L)$

$\gamma(V, V) = F(L)$

$\gamma(v, v) = 0$

$$\therefore \quad \sigma^2_{\hat{x}_2} = 2\chi(L) - F(L) = 2 \cdot \frac{PL}{2} - \frac{PL}{3} = \frac{2}{3}PL$$

3′) $\gamma(v, V) = \frac{1}{2}[\chi(L) + \chi(L)] = \chi(L)$

$\gamma(V, V) = F(L)$

$\gamma(v, v) = \gamma(L)$

$$\therefore \quad \sigma^2_{\hat{x}_3} = 2\chi(L) - \frac{1}{2}\gamma(L) - F(L)$$

$$= 2 \cdot \frac{PL}{2} - \frac{1}{2}PL - \frac{PL}{3} = \frac{1}{6}PL$$

4′) $\gamma(v, V) = \frac{1}{L}\left[\frac{L}{4} \cdot \chi\left(\frac{L}{4}\right) + \left(\frac{3L}{4}\right) \cdot \chi\left(\frac{3L}{4}\right)\right]$

$$= \frac{1}{4} \cdot \chi\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{3L}{4} \cdot \chi\left(\frac{3L}{4}\right)$$

$\gamma(V, V) = F(L)$

$\gamma(v, v) = 0$

$$\therefore \quad \sigma^2_{\hat{x}_4} = 2\left[\frac{1}{4} \cdot \chi\left(\frac{L}{4}\right) + \frac{3}{4}\chi\left(\frac{3L}{4}\right)\right] - F(L)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{L}{4} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot P \cdot \frac{3L}{4} - \frac{1}{3}PL$$

$$= \frac{14}{48}PL$$

$$= \frac{7}{24}PL\left(< \frac{1}{3}PL\right)$$

从计算的结果可以看出，$\sigma^2_{\hat{x}_3}$ 和 $\sigma^2_{\hat{x}_4}$ 最小，但 $\sigma^2_{\hat{x}_3}$ 是只用了一个信息样品的估计方差，而 $\sigma^2_{\hat{x}_4}$ 是用了两个信息样品的估计方差，故第 1）种方案是最好的。

又从 $\sigma^2_{\hat{x}_1} = \frac{1}{6}PL = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}PL\right) = \frac{1}{4}\sigma^2_{\hat{x}_2}$ 可知第 1）种方案的估计方差是第 2）种方案的 $\frac{1}{4}$。可见，信息样品的位置对估计方差的影响很大。

例 2 设变差函数是标准球状模型

$$\gamma(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{r}{a}-\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{r}{a}\right)^3 & 0<r\leqslant a\\ 1 & r>a\end{cases}$$

对 $L/a=0.2$、0.8、1.4、2.0、10.0 的几种情况，试计算如图 6-11 四种情况的估计方差。

解：由式（6-13）和（6-14）可知，对于标准球状模型的一维辅助函数为：

$$\chi(L)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{L}{a}-\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{L^3}{a^3} & 0\leqslant L\leqslant a\\ 1-\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{a}{L} & L>a\end{cases}$$

$$F(L)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{L}{a}-\dfrac{1}{20}\cdot\dfrac{L^3}{a^3} & 0\leqslant L\leqslant a\\ 1-\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{a}{L}+\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{a^3}{L^3} & L>a\end{cases}$$

类似于例 1 的计算，可得：

1）当 $L=0.2a$ 时：

$$\sigma_{E_1}^2=2\chi\left(\frac{L}{2}\right)-F(L)=2\chi(0.1\times a)-F(0.2\times a)$$

$$=2\times 0.071875-0.0996$$

$$=0.05015$$

$$\sigma_{E_2}^2=2\chi(L)-F(L)=2\times 0.149-0.0996=0.1984$$

$$\sigma_{E_3}^2=2\chi(L)-\frac{1}{2}\gamma(L)-F(L)=0.298-\frac{1}{2}\times 0.296-0.0996$$

$$=0.0504$$

$$\sigma_{E_4}^2=\frac{1}{2}\chi\left(\frac{L}{4}\right)+\frac{3}{2}\chi\left(\frac{3L}{4}\right)-F(L)=\frac{1}{2}\times 0.03748$$

$$+\frac{3}{2}\times 0.1121-0.0996=0.0873$$

为了书写简洁，以下计算只写结果（具体表达式参照例 1 对应的表达式）：

2）当 $L=0.8a$ 时：

$\sigma_{E_1}^2=0.2096$，$\sigma_{E_2}^2=0.6976$，$\sigma_{E_3}^2=0.2256$，$\sigma_{E_4}^2=0.3346$

3）当 $L=1.4a$ 时：

$\sigma_{E_1}^2=0.3979$　　$\sigma_{E_2}^2=0.8979$

$\sigma_{E_3}^2=0.3979$　　$\sigma_{E_4}^2=0.5266$

4）当 $L=2a$ 时：

$\sigma_{E_1}^2=0.3750$　　$\sigma_{E_2}^2=0.9509$

$\sigma_{E_3}^2=0.4500$　　$\sigma_{E_4}^2=0.6297$

5）当 $L=10a$ 时：

$\sigma^2_{E_1}=0.9230$　　$\sigma^2_{E_2}=0.9980$

$\sigma^2_{E_1}=0.4980$　　$\sigma^2_{E_4}=0.9230$

为了便于比较，我们可以把上述结果列入表 6-1。

表 6-1　对不同的 L/a 值四种估计方差的比较

$\frac{L}{a}$	$\sigma^2_{E_1}$	$\sigma^2_{E_3}$	$\frac{\sigma^2_{E_3}-\sigma^2_{E_1}}{\sigma^2_{E_3}}$	$\sigma^2_{E_2}$	$\frac{\sigma^2_{E_3}}{\sigma^2_{E_1}}$	$\sigma^2_{E_4}$
0.2	0.0502	0.0504	0.4%	0.1984	3.95	0.0873
0.8	0.2096	0.2256	7%	0.6976	3.33	0.3346
1.4	0.3979	0.3979	0%	0.8979	2.26	0.5266
2.0	0.5750	0.4500	−28%	0.9500	1.65	0.6297
10.0	0.9230	0.4980	−85%	0.9980	1.08	0.9230

从表 6-1 可以看出，当 $L/a<1.4$ 时，第 1）种方案比第 3）种方案好（估计方差小）；当 $L/a>1.4$ 时，第 1）种方案比第 3）种方案差。

当 L/a 较小时 $\sigma^2_{E_2}/\sigma^2_{E_1}$ 较大，当 L/a 较大时 $\sigma^2_{E_4}/\sigma^2_{E_1}$ 较小，但均大于 1，即第 1）种方案总比第 2）种方案好，只是好的程度随 L/a 的增大而减小。

2. 二维辅助函数的应用

例 3　设变差函数是标准球状模型，试对 $L/a=0.1$、0.5、1.0、5.0、10.5 计算下列五种方案对正方形块段 V 的煤厚进行估计时的估计方差（见图 6-12）$\sigma^2_{E_1}$、$\sigma^2_{E_2}$、$\sigma^2_{E_3}$、$\sigma^2_{E_4}$、$\sigma^2_{E_5}$。正方形块段 V 的边长为 L。

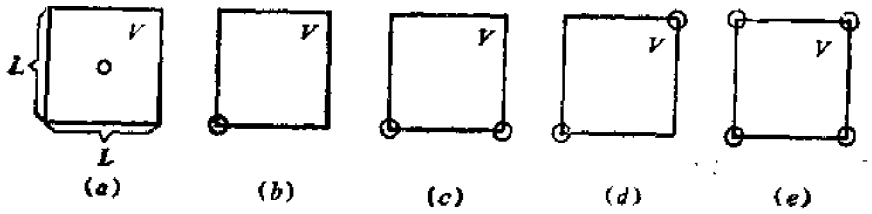


图 6-12　五种不同的孔位布置方案

1）一个钻孔样品位于 V 的中心（见图 6-12(a)），求 $\sigma^2_{E_1}$。

2）一个钻孔样品位于 V 的一个顶角（见图 6-12(b)），求 $\sigma^2_{E_2}$。

3）两个钻孔样品位于 V 的相邻两顶角（见图 6-12(c)），求 $\sigma^2_{E_3}$。

4）两个钻孔样品位于 V 的对角的顶角（见图 6-12(d)），求 $\sigma^2_{E_4}$。

5）四个钻孔样品位于 V 的四个顶角（见图 6-12(e)），求 $\sigma^2_{E_5}$。

解：$\because \sigma^2_E=2\bar{\gamma}(v,V)-\bar{\gamma}(v,v)-\bar{\gamma}(V,V)$

根据二维辅助函数 $H(L;l)$、$F(L;l)$ 的定义及对称性可知：

$$\sigma^2_{E_1}=2H\left(\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right)-F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_2}=2H(L;L)-F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_3}=2H(L;L)-\frac{1}{2}\gamma(L)-F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_3} = 2H(L;L) - \frac{1}{2}\gamma(\sqrt{2}L) - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_4} = 2H(L;L) - \frac{1}{4}[2\gamma(L) + \gamma(\sqrt{2}L)] - F(L;L)$$

当$\frac{L}{a}=1$时，即$L=a$，可通过图表（6-8）和（6-9）可查得：

$$\sigma^2_{E_1} = 2H\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right) - F(a;a) = 2\times 0.53 - 0.65 = 0.41$$

$$\sigma^2_{E_2} = 2H(a;a) - F(a;a) = 2\times 0.82 - 0.65 = 0.99$$

$$\sigma^2_{E_3} = 2H(a;a) - \frac{1}{2}\gamma(a) - F(a;a) = 2\times 0.82 - 0.5 - 0.65 = 0.49$$

$$\sigma^2_{E_4} = 2H(a;a) - \frac{1}{2}\gamma(\sqrt{2}a) - F(a;a) = 2\times 0.82 - 0.5 - 0.65 = 0.49$$

$$\sigma^2_{E_5} = 2H(a;a) - \frac{1}{4}[2\gamma(a) + \gamma(\sqrt{2}a)] - F(a;a)$$

$$= 2\times 0.82 - \frac{1}{4}\times 3 - 0.65 = 0.24$$

同样，当$L/a=0.1$、0.5、5.0、10.0时，亦可以查辅助函数图表并算出相应的$\sigma^2_{E_1}$、$\sigma^2_{E_2}$、$\sigma^2_{E_3}$、$\sigma^2_{E_4}$、$\sigma^2_{E_5}$，见表6-2：

表6-2　对不同的L/a值五种估计方差的比较

L/a	$\sigma^2_{E_1}$	$\sigma^2_{E_2}$	$\sigma^2_{E_3}$	$\sigma^2_{E_4}$	$\sigma^2_{E_5}$
0.1	0.039	0.130	0.060	0.030	0.025
0.5	0.190	0.699	0.359	0.264	0.140
1.0	0.410	0.990	0.490	0.490	0.240
5.0	0.980	1.000	0.500	0.500	0.260
10.0	1.000	1.000	0.500	0.500	0.250

从表6-2中可以看出，当L/a值较小（如0.1、或0.5）时，$\sigma^2_{E_1}$和$\sigma^2_{E_5}$均较小，但第1）种方案只用一个钻孔，而第5）种方案用了四个钻孔，故方案1）较好。但第1）种方案的优越性随L/a值的增加而减小，当L/a为5或10时，其优越性几乎显示不出来了。

另外还可以看出，当L/a较小时，第4）种方案比第8）种方案好，但随着L/a的增大，二者的差别就逐渐消失了。

第2）种方案始终最差。第5）种方案估计方差最小，但用钻孔较多。不过随着L/a的增加，其值稳定在0.25左右，其优越性也就逐渐明显了。

例4　设变差函数仍是标准球状模型，现要根据几个巷道的煤厚值来估计正方形待估块段V的平均煤厚值。信息巷道位置分布有如下六种不同方案，见图6-13。试对$L/a=0.1$、0.5、1.0、5.0、10.0计算下列六种情况的估计方差$\sigma^2_{E_1}$、$\sigma^2_{E_2}$、$\sigma^2_{E_3}$、$\sigma^2_{E_4}$、$\sigma^2_{E_5}$、$\sigma^2_{E_6}$。

1）一条信息巷道位于正方形的一条边上（见图6-13(a)），求$\sigma^2_{E_1}$。

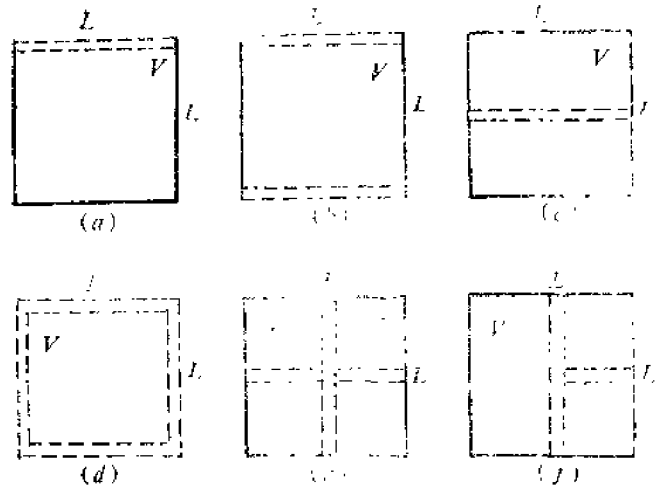


图 6-13　六种不同巷道位置方案

2）两条信息巷道位于正方形的某一组对边上(见图 6-13(*b*))，求 $\sigma^2_{E_2}$。

3）一条信息巷道连接正方形某一组对边的中点（见图 6-13(*c*))，求 $\sigma^2_{E_3}$。

4）四条信息巷道位于正方形的四边上（见图 6-13(*d*)），求 $\sigma^2_{E_4}$。

5）两条信息巷道连接正方形两组对边的中点（见图 6-13(*e*))，求 $\sigma^2_{E_5}$。

6）对（5）中两条信息巷道中的一条信息巷道取一半，其余不变（见图 6-13(*f*))，求 $\sigma^2_{E_6}$。

解：　　$\because \quad \sigma^2_E = 2\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(v, v) - \bar{\gamma}(V, V)$

根据一维辅助函数 $F(L)$ 及二维辅助函数 $\alpha(L;l)$、$\chi(L;l)$、$F(L;l)$ 的定义及对称性可知：

$$\sigma^2_{E_1} = 2\chi(L;L) - F(L) - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_2} = 2\chi(L;L) - \frac{1}{4}[2F(L) + 2\alpha(L;L)] - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_3} = 2\chi\left(\frac{L}{2};L\right) - F(L) - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_4} = 2\chi(L;L) - \frac{1}{4}[F(L) + \alpha(L;L) + 2H(L;L)] - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_5} = 2\chi\left(\frac{L}{2};L\right) - \frac{1}{2}\left[F(L) + H\left(\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right)\right] - F(L;L)$$

$$\sigma^2_{E_6} = 2 \cdot \frac{1}{L+\frac{L}{2}}\left[L \cdot \chi\left(\frac{L}{2};L\right) + \frac{L}{2}\chi\left(\frac{L}{2};L\right)\right] - \frac{1}{9}\left[4F(L)\right.$$

$$\left. + 4H\left(\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right) + F\left(\frac{L}{2}\right)\right] - F(L;L)$$

$$= 2\chi\left(\frac{L}{2};L\right) - \frac{1}{9}\left[4F(L) + 4H\left(\frac{L}{2};\frac{L}{2}\right) + F\left(\frac{L}{2}\right)\right] - F(L;L)$$

经查表可得 $\frac{L}{a}$ = 0.1、0.5、1.0、5.0、10.0 时的各估计方差列于表 6-3 中(见下页)。

从表 6-3 中可看出，当 $\frac{L}{a}$ 较小（<1）时，巷道的位置分布对估计方差的影响很大。如虽然第 2）方案的信息样品数量比第 3）方案大一倍，但当 $\frac{L}{a}$ 为 0.5 和 1.0 时，$\sigma^2_{E_2}$ 反

表 6-3　对不同 L/a 值的六种估计方差的比较

$\frac{L}{a}$	$\sigma^2_{E_1}$	$\sigma^2_{E_2}$	$\sigma^2_{E_3}$	$\sigma^2_{E_4}$	$\sigma^2_{E_5}$	$\sigma^2_{E_6}$
0.1	0.066	0.0062	0.009	0.0035	0.00283	0.0060
0.5	0.301	0.059	0.042	0.0269	0.0226	0.0362
1.0	0.420	0.145	0.098	0.0875	0.0530	0.0803
5.0	0.142	0.071	0.120	0.0395	0.0575	0.078
10.0	0.073	0.0365	0.070	0.0190	0.0345	0.0458

而大于 $\sigma^2_{E_1}$；又如第 4）方案信息样品数量比第 5）方案大一倍，但当 $\frac{L}{a}$ 为 0.1、0.5、1.0 时，$\sigma^2_{E_4}$ 反而大于 $\sigma^2_{E_5}$。但是，当 $\frac{L}{a}$ 较大（>1）时，巷道的数量多少就逐渐起主要作用了。如当 $\frac{L}{a}$ 为 5.0、10.0 时，$\sigma^2_{E_4}<\sigma^2_{E_5}$，$\sigma^2_{E_4}<\sigma^2_{E_6}$。另外，第 6）方案信息样品数量比第 2）方案少了 $\frac{1}{4}$，但在 $\frac{L}{a}$ 较小时，$\sigma^2_{E_6}<\sigma^2_{E_2}$，即使 $\frac{L}{a}$ 较大时，$\sigma^2_{E_6}$ 也不比 $\sigma^2_{E_2}$ 大很多。可见，在取信息样品时，不但要注意样品的数量，同时还要考虑样品的位置分布及 $\frac{L}{a}$ 的大小，这样才可达到用最少的样品获取最大信息量的目的。

二、辅助函数在计算克立格方程组系数上的应用

例 5　设区域化变量 $Z(x)$ 满足本征假设的条件（例如 $Z(x)$ 可以是平面上 x 点处煤层的厚度）。设在平面上 5 个点 $S_0(0,\ 0)$、$S_1(0,\ l)$、$S_2(0,\ -l)$、$S_3(-l,\ 0)$、$S_4(l,\ 0)$ 处取了 5 个样品（见图 6-14）。这 5 个点处的煤层厚度分别为：$Z(S_0)=Z_0$、$Z(S_1)=Z_1$、$Z(S_2)=Z_2$、$Z(S_3)=Z_3$、$Z(S_4)=Z_4$。且已知 $Z(x)$ 的变差函数为各向同性的球状模型，其参数为：$c_0=0$、$a=3l$、$C=2$，即

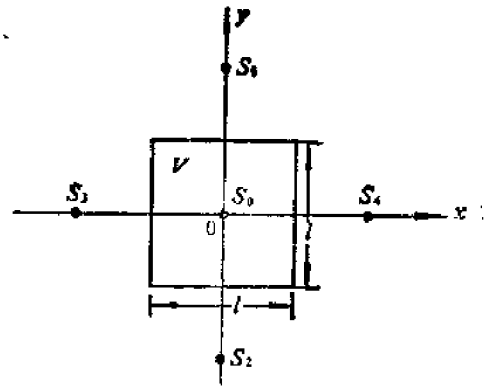


图 6-14　五个信息样品点与待估块段

$$\gamma(r)=\begin{cases}0 & r=0\\ 2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{r}{3l}-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{3l}\right)^3\right] & 0<r\leqslant 3l\\ 2 & r>3l\end{cases}$$

试根据这 5 个点的煤厚数据，用普通克立格法估计一个中心在 O 点，边长为 l 的正方形的待估块段 V 的平均煤厚值 Z_V（见图 6-14）。

解：设 Z_V 的估计量为：$Z_V^*=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i Z_i$

由于 $\gamma(r)$ 是各向同性的，同时信息样品又具有对称性，故为了简化起见，先把样品组合成两组：

一组为：S_0；

另一组为：$S=\{S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4\}$。则：

$$Z_s=\frac{1}{4}(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)。$$

又设 Z_0 的权为 λ，则 Z_s 的权为 $(1-\lambda)$。显然 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4 的权系数均为 $\frac{1-\lambda}{4}$。于是，Z_V 的线性估计量为：

$$Z_V^*=\lambda Z_0+(1-\lambda)Z_s$$

根据公式（5-20），可列出普通克立格方程组如下：

$$\begin{cases}\lambda\gamma(S_0,\ S_0)+(1-\lambda)\gamma(S_0,\ S)=\gamma(S_0,\ V)\\ \lambda\gamma(S,\ S_0)+(1-\lambda)\gamma(S,\ S)=\gamma(S,\ V)\end{cases}$$

其中：$\gamma(S_0,\ S_0)=\gamma(0)=0$

$$\gamma(S_0,\ S)=\gamma(S,\ S_0)=\frac{1}{4}[\gamma(S_0,\ S_1)+\gamma(S_0,\ S_2)+\gamma(S_0,\ S_3)+\gamma(S_0,\ S_4)]$$

$$=\frac{1}{4}[4\cdot\gamma(S_0,\ S_1)]$$

$$=\gamma(S_0,\ S_1)=\gamma(l)$$

$$\gamma(S,\ S)=\gamma(S_1,\ S)=\frac{1}{4}[\gamma(S_1,\ S_1)+\gamma(S_1,\ S_2)$$

$$+\gamma(S_1,\ S_3)+\gamma(S_1,\ S_4)]$$

$$=\frac{1}{4}[0+\gamma(2l)+2\gamma(\sqrt{2}l)]$$

$$=\frac{1}{4}\gamma(2l)+\frac{1}{2}\gamma(\sqrt{2}l)$$

$$\gamma(S_0,\ V)=\frac{1}{4}\left[4\gamma\left(S_0,\ \frac{V}{4}\right)\right]=\gamma\left(S_0,\ \frac{V}{4}\right)$$

$$=H\left(\frac{l}{2};\frac{l}{2}\right)$$

由于 S_1、S_2、S_3、S_4 对待估块段 V 具有对称性，则：

$$\gamma(S,\ V)=\gamma(S_1,\ V)$$

求 $\gamma(S_1,\ V)$ 参见图 6-15：

$$\therefore\quad \gamma(S,\ V)=\gamma(S_1,\ V)=\gamma(S_1,\ ABEF)$$

$$=\frac{1}{\frac{V}{2}}\left[\iint_{ABEF}\gamma(|x-S_1|)\,dx\right.$$

$$=\frac{2}{V}\left[\iint_{GBES_1}\gamma(|x-S_1|)\,dx-\iint_{GAFS_1}\gamma(|x-S_1|)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{V}\left[\frac{3V}{4}\cdot\frac{1}{\frac{3V}{4}}\int_{GBES_1}\int\gamma(|x-S_1|)\,dx - \frac{V}{4}\cdot\frac{1}{\frac{V}{4}}\int_{GAFS_1}\int\gamma(|x-S_2|)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{V}\left[\frac{3V}{4}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right) - \frac{V}{4}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)$$

代入普通克立格方程组得：

$$\begin{cases} (1-\lambda)\gamma(l) + \mu = H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) \\ \lambda\gamma(l) + (1-\lambda)\left[\frac{1}{4}\gamma(2l) + \frac{1}{2}\gamma(\sqrt{2}l)\right] + \mu \\ \quad = \frac{3}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) \end{cases}$$

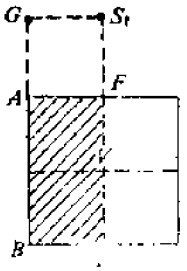


图 6-15 $\gamma(S_1, V)$ 的计算

根据 (5-21)式，得普通克立格方差为：

$$\sigma_E^2 = \lambda\gamma(S_0, V) + (1-\lambda)\gamma(S, V) - \gamma(V, V) + \mu$$

用辅助函数表示即得：

$$\sigma_E^2 = \lambda H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) + (1-\lambda)\left[\frac{3}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{3l}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right)\right] - F(l,l) + \mu$$

下面具体计算变差函数及辅助函数的值：

$$\gamma(l) = 2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{l}{3l} - \frac{1}{2}\left(\frac{l}{3l}\right)^3\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{27} = 0.9630$$

$$\gamma(2l) = 2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{2l}{3l} - \frac{1}{2}\left(\frac{2l}{3l}\right)^3\right]$$

$$= 2 - \frac{8}{27} = 1.7037$$

$$\gamma(\sqrt{2}l) = 2\left[\frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}l}{3l} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}l}{3l}\right)^3\right]$$

$$= \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{27} = 1.3095$$

再对标准球状模型($a = 3l$)查表后乘 2($= C$)得（参见公式（6-19））：

$$H\left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) = 2 \times 0.18 = 0.36$$

$$H\left(\frac{l}{2};\frac{3l}{2}\right)=2\times0.39=0.78$$

$$F(l;l)=2\times0.26=0.52$$

代入普通克立格方程组得：

$$\begin{cases}0.963(1-\lambda)+\mu=0.36 & \cdots\cdots(1)\\ 0.963\lambda+1.0807(1-\lambda)+\mu=0.99\cdots\cdots & (2)\end{cases}$$

（2）－（1）得 $0.3453\lambda+0.1177=0.63$

∴ $\lambda=0.6061$，$(1-\lambda)=0.3939$

$\mu=-0.0193$

于是得到克立格估计方差为：

$$\sigma_k^2=0.6061\times0.36+0.3939\times0.99-0.52-0.0193=0.0689$$

Z_0的权系数为 $\lambda=0.6061$；

Z_v 的权系数为 $1-\lambda=0.3939$；

故 Z_1、Z_2、Z_3、Z_4的权系数均为：

$$\frac{1-\lambda}{4}=\frac{0.3939}{4}=0.098475$$

∴ Z_V 的估计量为：

$$Z_V^*=0.6061Z_0+0.098475(Z_1+Z_2+Z_3+Z_4)$$

第七章 总 体 估 计

第一节 勘探工作中储量的总体估计

在地质勘探工作中，往往要遇到对整个矿床或矿区的储量作出估计，或对整个矿体的边界范围作出估计，这都是总（整）体估计问题。总体估计所估计的范围较大，所涉及的距离往往大于由结构分析所确定的准平稳性的范围，常包括几种不均匀的矿化。同时由于矿体是唯一的，因而只有一个总体估计误差，欲把它看作一个随机变量来研究，就需要借助于数据构形总体在矿床中分布位置的随机性，或说数据网格原点位置的随机性。

总的来说，总体估计中存在两类误差：

（1）由矿体边界的不确定性引起的几何误差；

（2）在边界范围确定的域内，由于对矿体的某种特征估计的不确定性所引起的质量误差。

本节，我们先介绍在待估矿床的边界（或体积）为已知的条件下，对矿（煤）层厚度进行估计引起的质量误差；然后，再介绍有关矿体水平投影面积估计问题。

一、已知矿体边界的总体估计

设 $Z(x)$ 是在已知矿体边界内的一个二阶平稳（或本征）的区域化变量（比如，矿层厚度）。设在此范围内按方格网打了一系列钻孔，每个钻孔位于一个小正方形的中心（如图 7-1）。现在来讨论如何总体估计 V 上的平均厚度 $Z(V)$，以及如何计算总体估计方差。

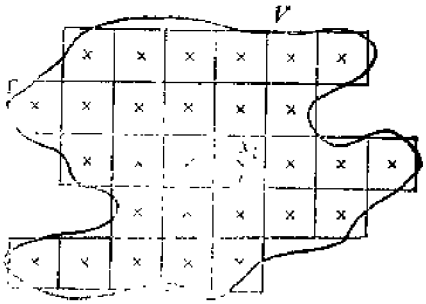


图 7-1 矿体 V 的边界及正方形网格

1. *对矿体的平均厚度 $Z(V)$ 的总体估计*

设 $V=\sum_{i=1}^{N} v_i$，各钻孔的位置 x_i 位于 v_i 的中心。

又
$$Z(V)=\frac{1}{V}\int_V Z(x)\,\mathrm{d}x$$

1）若各 v_i 均相等，则 $Z(x)$ 的一个无偏估计量为：

$$Z^*(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z(x_i) \tag{7-1}$$

$$\because\quad E[Z^*(V)]=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z(x_i)\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E[Z(x_i)]$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m = m$$

而
$$E[Z(V)] = E\left[\frac{1}{V}\int_V Z(x)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{V}\int_V E[Z(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{V}\int_V m\mathrm{d}x = m$$

$$\therefore \quad E[Z^*(V)] = E[Z(V)]$$

即 $Z^*(V)$ 是 $Z(V)$ 的无偏估计量。

2）若各 v_i 不相等时，则 $Z(V)$ 的无偏估计量为

$$Z^*(V) = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i Z(x_i), \tag{7-2}$$

其中
$$\sum_{i=1}^{N} v_i = V$$

$$E[Z^*(V)] = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i E[Z(x_i)]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i m$$

$$= \frac{m}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i = m_0$$

2. 总体估计方差

根据估计方差的基本公式（3-28），则有总体估计方差公式为：

$$\sigma_g^2 = E[Z(V) - Z^*(V)]^2$$

$$= 2\bar{\gamma}(v,V) - \bar{\gamma}(v,v) - \bar{\gamma}(V,V)$$

其中 v 表示全体信息样品承载的集合。于是：

$$\sigma_g^2 = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{V}\int_V \gamma(x_i - x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma(x_i - x_j)$$

$$- \frac{1}{V^2}\int_V\int_V \gamma(x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

但是，要实际计算出 σ_g^2 来，还需要根据信息样品承载的大小，形状及空间分布位置的不同情况分别加以讨论。常用有两种法则：

1）法则 1：由基本估计方差组成总体估计方差。

（1）网格取样的情况：

仍以图 7-1 为例，基本估计方差是指用 $Z(x_i)$ 估计 $Z(v_i)$ 时的估计方差，记为 $\sigma_g^2=(\sigma_g^2(0,v))$。其中 x_i 为 v_i 的中心。$Z(v_i)$ 为 v_i 内的平均厚度。当 $Z(x_i)$ 和 $Z(x_j)$ $(i\neq j)$ 相互独立时，我们可以用这种基本估计方差组成总体估计方差。

① 规则网格取样。即各个 v_i 均相等，设都等于 v，则：

$$Z(V)=\frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx=\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\int_{v_i}Z(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{v_i}\int_{v_i}Z(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(v_i)$$

由公式（7-1）知：

$$Z^*(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(x_i),$$

故

$$\sigma_g^2=E[Z(V)-Z^*(V)]^2$$

$$=E\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(v_i)-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(x_i)\right]^2$$

$$=\frac{1}{N^2}E\left\{\sum_{i=1}^{N}[Z(v_i)-Z(x_i)]\right\}^2$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E[Z(v_i)-Z(x_i)]^2$$

$$+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}E[Z(v_i)-Z(x_i)]\cdot[Z(v_j)-Z(x_j)]$$

由于我们假定了当 $i\neq j$ 时 $Z(x_i)$ 和 $Z(x_j)$ 是独立的，故上式第二项为零。由于有

$$\sigma_e^2=E[Z(v_i)-Z(x_i)]^2,$$

于是有

$$\sigma_g^2=\frac{1}{N^2}\cdot N\sigma_e^2=\frac{1}{N}\sigma_e^2$$

$$=\frac{1}{N}\sigma_e^2(0,v)=\frac{1}{N}[2\gamma(x_i,v)-\gamma(v,v)] \qquad (7-3)$$

此处 x_i 是 v 的中心。

这当然是一个近似公式，当 N 较大时近似程度较好。

② 不规则网格取样，即诸 v_i 不相等，但仍有 $\sum_{i=1}^{N}v_i=V$，则有：

$$Z(V)=\frac{1}{V}\int_V Z(x)\,dx=\frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N}\int_{v_i}Z(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i\left[\frac{1}{v_i}\int_{v_i} Z(x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i Z(v_i)$$

而 $$Z^*(V) = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{N} v_i Z(x_i)$$

于是，$\sigma_g^2 = E[Z(V) - Z^*(V)]^2$

$$= \frac{1}{V^2}E\left\{\sum_{i=1}^{N} v_i[Z(v_i) - Z(x_i)]\right\}^2$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 E[Z(v_i) - Z(x_i)]^2$$

$$+ \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} v_i v_j E[Z(v_i) - Z(x_i)]\cdot[Z(v_j) - Z(x_j)]$$

同理，由于 $i\neq j$ 时 $Z(x_i)$ 和 $Z(x_j)$ 相互独立，故上式第二项为零。于是有

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2 E[Z(v_i) - Z(x_i)]^2$$

$$= \frac{1}{V^2}\sum_{i=1}^{N} v_i^2\sigma_{*i}^2 \qquad (7-4)$$

其中 $\sigma_{*i}^2 = E[Z(x_i) - Z(v_i)]^2$ 是以 $Z(x_i)$ 估计 $Z(v_i)$ 的基本估计方差。由于诸 v_i 不都相等，则诸 σ_{*i}^2 也不都相同。公式（7－4）是一般公式。若 $v_i = v(i = 1, 2, \cdots, N)$，即每个 v_i 都相等，则 $V = Nv$，于是（7－4）式就变为公式（7－3），即：

$$\sigma_g^2 = \frac{1}{N^2v^2}\sum_{i=1}^{N} v^2\sigma_*^2 = \frac{1}{N}\sigma_*^2$$

就从公式（7－3）的形式上看，很象是数理统计中大小为 N 的样本平均数的方差等于样本方差的 $\frac{1}{N}$，但其内容是不一样的。因为此处所求的是总体估计方差，且等于基本估计方差的 $\frac{1}{N}$。而在数理统计中，样本方差是只依赖于样本数值的量，而此处 σ_*^2 则只依赖于小正方形面积 v 的大小，而不依赖于样本数值的量。因此二者的实际含义是不相同的。

（2）随机分层取样的情况

网格仍是方格网，但 x_i 在 v_i 中的位置是随机分布的，不总是在 v_i 的中心。此处仍假定 $Z(x_i)$ 和 $Z(x_j)$ $(i\neq j)$ 是独立的。

此时有：

$$Z(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(v_i),$$

$$Z^*(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(x_i),$$

于是

$$\begin{aligned}\sigma_E^2&=E[Z(V)-Z^*(V)]^2\\&=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Z(v_i)-Z(x_i)]\right\}^2\\&=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E[Z(v_i)-Z(x_i)]^2\text{〔此处运用了当 }i\neq j\text{ 时 }Z(x_i)\\&\qquad\text{与 }Z(x_j)\text{ 独立的条件〕}\\&=\frac{1}{N}E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Z(v_i)-Z(x_i)]^2\right\}\end{aligned}$$

由公式（3-36）和公式（8-41）可得

$$\sigma_E^2=\frac{1}{N}\bar{D}^2(0|v)=\frac{1}{N}\bar{\gamma}(v,v)\tag{7-5}$$

（3）纯随机取样情况：

此处不再是规则网格了，且每个 x_i 在全区 V 内随机均匀地分布，此时：

$$Z(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(V_i)$$

$$Z^*(V)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}Z(x_i)$$

此时仍假定当 $i\neq j$ 时 $Z(x_i)$ 与 $Z(x_j)$ 独立。

则总体估计方差为：

$$\begin{aligned}\sigma_E^2&=E[Z(V)-Z^*(V)]^2\\&=E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Z(V)-Z(x_i)]\right\}^2\\&=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}E[Z(V)-Z(x_i)]^2\\&=\frac{1}{N}E\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}[Z(V)-Z(x_i)]^2\right\}\\&=\frac{1}{N}\bar{D}^2(0|V)\end{aligned}$$

又由公式（3-42）克立格关系式可得：

$$\sigma_E^2 = \frac{1}{N} D^2(0|V) = \frac{1}{N}[D^2(0|v) + D^2(v|V)]$$

$$= \frac{1}{N} D^2(0|v) + \frac{1}{N} D^2(v|V) \tag{7-6}$$

由于 $D^2(v|V)$ 是非负的，故纯随机取样的总体估计方差总是大于或等于随机分层取样的总体估计方差。也可证明随机分层取样的总体估计方差大于或等于规则网格中心取样的总体估计方差。事实上：

设规则网格中心取样的总体估计方差为 $\sigma_{E_1}^2$，随机分层取样的总体估计方差为 $\sigma_{E_2}^2$，则根据公式（7-3）和（7-4）知：

$$\sigma_{E_1}^2 = \frac{1}{N}\sigma_v^2, \quad \sigma_{E_2}^2 = \frac{1}{N} D^2(0|v),$$

根据 σ_v^2 的定义及公式（3-28）有：

$$\sigma_v^2 = 2\gamma(v,x_i) - \gamma(v,v) - \gamma(x_i,x_i)$$
$$= 2\gamma(v,x_i) - \gamma(v,v)$$

此处 x_i 是 v 的中心

又根据公式（3-41）知：

$$D^2(0|v) = \gamma(v,v) - \gamma(0,0) = \gamma(v,v)$$

$$\therefore \quad \sigma_{E_2}^2 - \sigma_{E_1}^2 = \frac{1}{N}[D^2(0|v) - \sigma_v^2]$$

$$= \frac{2}{N}[\gamma(v,v) - \gamma(v,x_i)]$$

由于 x_i 是 v 的中心，$\therefore \gamma(v,v) \geqslant \gamma(v,x_i)$

即 $$\gamma(v,v) - \gamma(v,x_i) \geqslant 0$$

故 $$\sigma_{E_2}^2 \geqslant \sigma_{E_1}^2$$

例 1 设 $Z(x)$ 是定义在一直线上的本征区域化变量（可为煤层厚度）。若将该直线上长为 L 的线段分为 N 等份，每小段长为 l，即 $L = N \cdot l$。（若取 $N=10$，如图 7-2）。在直线 L 上布置了 10 个钻孔，分别测得煤层厚度数据为 $Z(x_i)\, i=1, 2, \cdots, 10$。又已知 $Z(x)$ 的变差函数为 $\gamma(h) = P|h|$。试求下列三种情况的总体估计方差 $\sigma_{E_1}^2$，$\sigma_{E_2}^2$，$\sigma_{E_3}^2$：

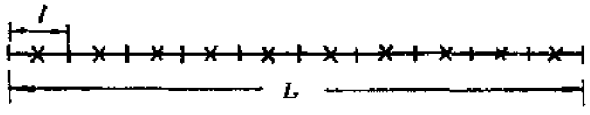


图 7-2 线段 L(10 等份)

①x_i 位于每个小段 l 的中点，即规则网格中心取样的 $\sigma_{E_1}^2$；

②x_i 在每小段 l 中的位置是随机均匀分布，随机分层取样的 $\sigma_{E_2}^2$；

③所有 x_i 在直线 L 上是随机均匀分布的纯随机取样的 $\sigma_{E_3}^2$。

解：设总体估计量为：

$$Z^*(L)=\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}Z(x_i)$$

而且此处L相当于公式中的V，l相当于v

由公式（7-8）有：

$$\sigma_{E_1}^2=\frac{1}{N}[2\gamma(x_i,l/2)-\gamma(l,l)]$$

根据公式（7-5）有：

$$\sigma_{E_2}^2=\frac{1}{N}\gamma(l,l)$$

根据公式（7-6）有：

$$\sigma_{E_3}^2=\frac{1}{N}\gamma(L,L)$$

$$\gamma(L,L)=\frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L\gamma(x-y)\,dxdy$$

$$=\frac{P}{L^2}\int_0^L\int_0^L|x-y|\,dxdy$$

$$=\frac{P}{L^2}\int_0^L\left[\int_0^y(y-x)\,dx+\int_y^L(x-y)\,dx\right]dy$$

$$=\frac{Pl}{3}$$

同理：

$$\gamma(l,l)=\frac{Pl}{3}$$

$$\gamma(x_i,L)=\frac{1}{L}\int_0^L\gamma(x)\,dx=\frac{P}{L}\int_0^L|x|\,dx$$

$$=\frac{P}{L}\int_0^L x\,dx=\frac{PL}{2}$$

同理：

$$\gamma\left(x_i,\frac{l}{2}\right)=\frac{Pl}{4}$$

于是：

$$\sigma_{E_1}^2=\frac{1}{N}\left[2\cdot\frac{Pl}{4}-\frac{Pl}{3}\right]=\frac{Pl}{6N}$$

$$\sigma_{E_2}^2=\frac{1}{N}\gamma(l,l)=\frac{Pl}{3N}$$

$$\sigma_{E_3}^2=\frac{1}{N}\gamma(L,L)=\frac{Pl}{3N}=\frac{P\cdot Nl}{3N}=\frac{Pl}{3}$$

显然有$\sigma_{E_1}^2<\sigma_{E_2}^2<\sigma_{E_3}^2$。且有$\sigma_{E_3}^2=2\sigma_{E_2}^2$，$\sigma_{E_3}^2=N\sigma_{E_1}^2$，因此，在这三种取样方法中，以规则网中心取样为最好，其估计方差最小。这也是地质统计学家偏爱规则网中心取样的重要原因之一。

2）法则2：由各项估计方差组成总体估计方差

设$Z(x)$是定义在纵剖面V上的本征区域化变量（例如可以是矿石的品位）。V由

m 个等高度为 g 的长方形片 V_i 组成（见图 7-3）。在每片长方形中点处均打有一条平巷，分别称之为 d_1，d_2，…，d_m。把 d_i 又等分成 n_i 段（$i=1$，2，…，m），每段长为 l。在每段 l 的中点 x_{ik}（$i=1$，2，…，m；$k=1$，2，…，n_i）处都取了刻槽样，测了矿石品位值 $Z(x_{ik})$。这样，我们有 $d_i=n_il$。

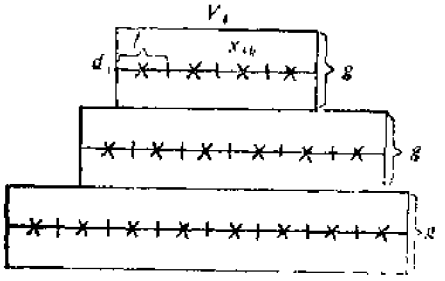


图 7-3　含有m条平巷的纵剖面

设 $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$，则有 $\sum_{i=1}^{m} d_i = l\sum_{i=1}^{m} n_i = Nl$。

设每条平巷的矿石品位平均值为 $Z(d_i)$，估计值为 $Z^*(d_i)$，且：

$$Z^*(d_i)=\frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} Z(x_{ik})\,;(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$$

同时以 $d_i\Big/\sum_{i=1}^{m} d_i$ 为权对上式进行加权平均值

$$Z^*(V)=\frac{\sum_{i=1}^{m} d_iZ^*(d_i)}{\sum_{i=1}^{m} d_i}$$

作为 $$Z(V)=\frac{\sum_{i=1}^{m} d_iZ(V_i)}{\sum_{i=1}^{m} d_i}$$ 的估计值。

于是总体估计方差为：

（为了书写简便起见，下面仅以 Σ 表示 $\sum_{i=1}^{m}$）

$$\begin{aligned}\sigma_E^2&=E[Z^*(V)-Z(V)]^2\\&=E\left\{\frac{\Sigma d_i[Z^*(d_i)-Z(V_i)]}{\Sigma d_i}\right\}^2\\&=E\left\{\frac{\Sigma d_i[Z^*(d_i)-Z(d_i)]}{\Sigma d_i}+\frac{\Sigma d_i[Z(d_i)-Z(V_i)]}{\Sigma d_i}\right\}^2\\&=\frac{\Sigma d_i^2\cdot E[Z^*(d_i)-Z(d_i)]^2}{(\Sigma d_i)^2}+\frac{\Sigma d_i^2\cdot E[Z(d_i)-Z(V_i)]^2}{(\Sigma d_i)^2}\end{aligned}$$

其中各交叉项乘积的数学期望，是假定 $[Z^*(d_i)-Z(d_i)]$ 与 $[Z(d_i)-Z(V_i)]$ 有独立性而认为是零。

设：

$$\sigma_L^2 = \frac{\sum d_i^2 \cdot E[Z^*(d_i) - Z(d_i)]^2}{(\sum d_i)^2}$$

$$= \frac{\sum d_i^2 \cdot \frac{1}{n_i} \cdot \sigma_e^2(0,l)}{(\sum d_i)^2}$$

$$= \frac{l \cdot (\sum d_i) \cdot \sigma_e^2(0,l)}{(\sum d_i)^2}$$

$$= \frac{l \cdot \sigma_e^2(0,l)}{\sum d_i}$$

$$= \frac{l \cdot \sigma_e^2(0,l)}{Nl}$$

$$= \frac{\sigma_e^2(0,l)}{N}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum d_i^2 \cdot E[Z(d_i) - Z(V_i)]^2}{(\sum d_i)^2}$$

$$= \frac{\sum d_i^2 \cdot \sigma_{Bi}^2}{(\sum d_i)^2}$$

$$= \frac{\sum d_i^2 \cdot \sigma_{Bi}^2}{N^2 l^2}$$

则整体估计方差可表示为：

$$\sigma_B^2 = \sigma_L^2 + \sigma_T^2$$

$$= \frac{\sigma_e^2(0,l)}{N} + \frac{\sum d_i^2 \cdot \sigma_{Bi}^2}{N^2 l^2} \tag{7-7}$$

其中 σ_L^2 表示线上的估计方差，σ_T^2 表示面上的估计方差，σ_{Bi}^2 表示用第 i 条平巷的矿体品位估计第 i 个长方形片矿体品位的估计方差，通过积分或查辅助函数表求得。

若长方形片的高度不相等，分别为 g_1，g_2，…，g_n 时，则 σ_L^2、σ_T^2 相应的公式变为：

$$\sigma_L^2 = \frac{\sum n_i g_i^2}{(\sum n_i g_i)^2} \sigma_e^2(0,l)$$

$$\sigma_T^2 = \frac{\sum n_i^2 g_i^2 \cdot \sigma_{Bi}^2}{(\sum n_i g_i)^2}$$

故，

$$\sigma_B^2 = \sigma_L^2 + \sigma_T^2 = \frac{\sum n_i g_i^2}{(\sum n_i g_i)^2} \sigma_e^2(0,l) + \frac{\sum n_i^2 g_i^2 \cdot \sigma_{Bi}^2}{(\sum n_i g_i)^2} \tag{7-8}$$

以上是对一个纵剖面（二维空间）来说的总体估计方差 σ_B^2 由分项估计方差组成。如果对一个矿体（三维空间）来说，其总体估计方差 σ_B^2 就由三项估计方差组成，即：

$$\sigma_B^2 = \sigma_L^2 + \sigma_T^2 + \sigma_S^2 \tag{7-9}$$

其中 σ_S^2 表示体上的估计方差。

3. 积和商的估计方差

本节讨论在已知两个估计量总体估计方差的情况下，怎样求这两个估计量的积或商

的估计方差。

1）乘积的估计方差

设 $P=A\times B$，$P^*=A^*\times B^*$。其中 A^* 为 A 的估计量，B^* 为 B 的估计量，P^* 为 P 的估计量。

记

$$A^*=+\varepsilon_A,\quad B^*=B+\varepsilon_B$$

$$\sigma_{\varepsilon A}^2=E(A^*-A)^2=E(\varepsilon_A^2),$$

$$\sigma_{\varepsilon B}^2=E(B^*-B)^2=E(\varepsilon_B^2)$$

则 P 的估计方差 $\sigma_{\varepsilon P}^2$ 为：

$$\sigma_{\varepsilon P}^2=E[P^*-P]^2=E[(A+\varepsilon_A)(B+\varepsilon_B)-AB]^2$$

$$=E(A\varepsilon_B+B\varepsilon_A+\varepsilon_A\varepsilon_B]^2$$

$$=E[A^2\varepsilon_B^2+B^2\varepsilon_A^2+\varepsilon_A^2\varepsilon_B^2+2AB\varepsilon_A\varepsilon_B+2A\varepsilon_A\varepsilon_B^2+2B\varepsilon_B\varepsilon_A^2]$$

把三阶、四阶误差忽略不计，则

$$\sigma_{\varepsilon P}^2=E[A^2\varepsilon_B^2+B^2\varepsilon_A^2+2AB\varepsilon_A\varepsilon_B]$$

$$=A^2E(\varepsilon_B^2)+B^2E(\varepsilon_A^2)+2ABE(\varepsilon_A\varepsilon_B)$$

$$=A^2E(B^*-B)^2+B^2E(A^*-A)^2+2ABE[(A^*-A)(B^*-B)]$$

$$=A^2\sigma_{\varepsilon B}^2+B^2\sigma_{\varepsilon A}^2+2ABE[(A^*-A)(B^*-B)]$$

两边同除以 $P^2(=A^2B^2)$，得：

$$\frac{\sigma_{\varepsilon P}^2}{P^2}=\frac{\sigma_{\varepsilon B}^2}{B^2}+\frac{\sigma_{\varepsilon A}^2}{A^2}+2\frac{\sigma_{\varepsilon A}}{A}\cdot\frac{\sigma_{\varepsilon B}}{B}\cdot\frac{E[(A^*-A)(B^*-B)]}{\sigma_{\varepsilon A}\cdot\sigma_{\varepsilon B}}$$

令，$\rho_{AB}=\dfrac{E[(A^*-A)(B^*-B)]}{\sigma_{\varepsilon A}\cdot\sigma_{\varepsilon B}}$，表示估计误差的相关系数

则：

$$\frac{\sigma_{\varepsilon P}^2}{P^2}=\frac{\sigma_{\varepsilon B}^2}{B^2}+\frac{\sigma_{\varepsilon A}^2}{A^2}+2\rho_{AB}\frac{\sigma_{\varepsilon A}}{A}\cdot\frac{\sigma_{\varepsilon B}}{B}\qquad(7\text{-}10)$$

2）商的估计方差：

设

$$Q=\frac{A}{B},\quad Q^*=\frac{A^*}{B^*},\quad A^*=A+\varepsilon_A,\quad B^*=B+\varepsilon_B$$

则：

$$Q^*=\frac{A^*}{B^*}=\frac{A+\varepsilon_A}{B+\varepsilon_B}=\frac{A+\varepsilon_A}{B\left(1+\dfrac{\varepsilon_B}{B}\right)}$$

$$=\frac{A+\varepsilon_A}{B}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon_B}{B}}$$

$$=\left(Q+\frac{\varepsilon_A}{B}\right)\left(\frac{1}{1+\dfrac{\varepsilon_B}{B}}\right)$$

一般的 $\dfrac{\varepsilon_B}{B}$ 与 1 相比是很小的数，即 $\dfrac{\varepsilon_B}{B}\ll 1$，故有（由幂级数展开知识得）：

$$Q^*=\left(Q+\frac{\varepsilon_A}{B}\right)\left(1-\frac{\varepsilon_B}{B}+\frac{\varepsilon_B^2}{B^2}-\frac{\varepsilon_B^3}{B^3}+\cdots\right)$$

$$= Q - \frac{A\varepsilon_B}{B^2} + \frac{\varepsilon_A}{B} - \frac{\varepsilon_A\varepsilon_B}{B^2} + \cdots$$

把二阶及二阶以上的误差忽略不计，则：

$$Q^* = Q - \frac{A\varepsilon_B}{B^2} + \frac{\varepsilon_A}{B}$$

$$\therefore \quad Q^* - Q = \frac{\varepsilon_A}{B} - \frac{A\varepsilon_B}{B^2}$$

于是Q的估计方差为：

$$\sigma_{EQ}^2 = E(Q^* - Q)^2 = E\left[\frac{\varepsilon_A}{B} - \frac{A\varepsilon_B}{B^2}\right]^2$$

$$= E\left[\frac{\varepsilon_A^2}{B^2} + \frac{A^2\varepsilon_B^2}{B^4} - 2\frac{A\varepsilon_A\varepsilon_B}{B^3}\right]$$

$$= \frac{\sigma_{EA}^2}{B^2} + \frac{A^2\sigma_{EB}^2}{B^4} - 2\frac{E(\varepsilon_A\cdot\varepsilon_B)}{\sigma_{EA}\cdot\sigma_{EB}}\cdot\frac{A\cdot\sigma_{EA}\cdot\sigma_{EB}}{B^3}$$

$$= \frac{\sigma_{EA}^2}{B^2} + \frac{A^2\sigma_{EB}^2}{B^4} - 2\rho_{AB}\frac{A\cdot\sigma_{EA}\cdot\sigma_{EB}}{B^3}$$

将上式两边同除以$Q^2\left(=\frac{A^2}{B^2}\right)$，得：

$$\therefore \quad \frac{\sigma_{EQ}^2}{Q^2} = \frac{\sigma_{EA}^2}{A^2} + \frac{\sigma_{EB}^2}{B^2} - 2\rho_{AB}\frac{\sigma_{EA}\cdot\sigma_{EB}}{AB} \tag{7-11}$$

其中：

$$\rho_{AB} = \frac{E(\varepsilon_A\cdot\varepsilon_B)}{\sigma_{EA}\cdot\sigma_{EB}}$$

于是，在知道了两个变量的整体估计方差以后，就可以根据公式（7-10）和（7-11），近似地求得其积和商的估计方差了。

二、矿体水平投影面积的估计

上面我们介绍了在边界范围确定的域内，由于对矿体某种特征估计的不确定性引起的质量误差如何估计的问题。现在我们介绍对矿体准确边界不确定性的几何误差如何估计的问题。在实际工作中应把几何误差和质量误差结合起来考虑。

1. 矿体面积S的总体估计

现在我简单介绍一下用传递理论对矿体面积S进行整体估计的方法：

令$k(x)$为待估面积S的指示函数，

$$k(x) = \begin{cases} 1, & x \in s \\ 0, & x \notin s \end{cases}$$

这里x为二维空间中的点(x_u, x_v)．于是，矿体面积s便是这个指示函数在二维空间内的二重积分了：

$$S = \int_R [k(x)]^2]\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x_u\int_{-\infty}^{+\infty}[k(x_u, x_v)]^2\mathrm{d}x_v \tag{7-12}$$

其中 R_2 表示二维空间。

在传递理论中，在二维时，把矿体面积 S 的结构函数也称“几何协变差函数”(geometric covariogram)定义为：

$$K_g(h)=\int_{R_2} k(x)\,k(x+h)\,\mathrm{d}x \tag{7-13}$$

其中，x 为二维空间中的点，h 为二维空间中的向量。

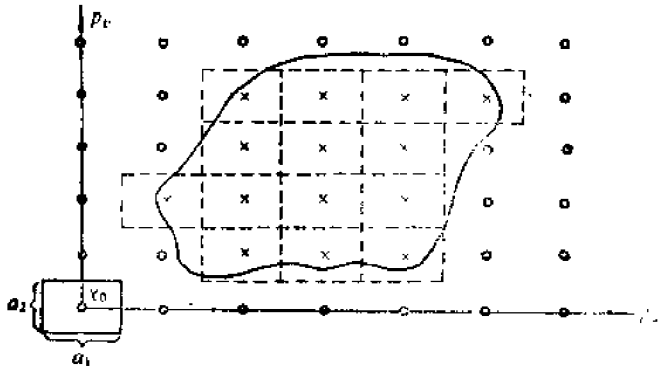


图 7-4 规则网格面积估计

于是，待估的真实未知面积就是几何协变差函数在原点处的值，即：

$$S=K_g(0)=\int_{R_2}[k(x)]^2\mathrm{d}x$$

设待估面积 S 是由图 7-4 中的曲线围成的。如果我们用长为 a_1，宽为 a_2 ($a_1\geqslant a_2$) 的规则网格面积来对 S 进行总体估计，且设网格的原点（图 7-4 中左下角的网格中心）位于坐标为 $x_0(x_{0u},\ x_{0v})$ 点处（见图 7-4），则面积 S 的估计量可写成：

$$S^*(x_0)=S^*(x_{0u},x_{0v})$$

$$=a_1\cdot a_2\sum_{p_u=-\infty}^{+\infty}\sum_{p_v=-\infty}^{+\infty}k(x_{0u}+p_u\cdot a_1,x_{0v}+p_v\cdot a_2)$$

其中 p_u，p_v 分别是 P_u 方向和 P_v 方向的网格序数（见图 7-4）。

图中矿体内的钻孔为正值钻孔（即见矿钻孔），以“×”表示．矿体外的钻孔，即未见矿钻孔，以“。”表示。若以 $n(x_0)$ 表示正值钻孔的数目，则其面积 S 的估计量为：

$$S^*(x_0)=a_1\cdot a_2\cdot n(x_0) \tag{7-14}$$

公式（7-14）就是在规则网格时，对矿体面积 S 的总体估计公式。

2. *S 的总体估计方差*

由（7-14）式可以看出，S 的估计量 $S^*(x_0)$ 是依赖于 x_0 的位置的。对于每一个新的网格原点 x_0，都有一个相应的 S 估计量 $S^*(x_0')$，因而也就有面积估计误差的一个新实现$[S-S^*(x_0')]$。这样，确定估计量好坏的一个可能途径就是算出当网格原点 x_0 在基本网格面积 $a_1\cdot a_2$ 中取各种可能位置时，$[S-S^*(x_0)]^2$ 的平均值，这个值越小估计量 $S^*(x_0)$ 就越好。这个误差平方的平均值可记为：

$$E^2(a_1,a_2)=\frac{1}{a_1\cdot a_2}\int_0^{a_1}\mathrm{d}x_{0u}\int_0^{a_2}[S-S^*(x_{0u},x_{0v})]^2\mathrm{d}x_{0v}$$

由于这个表达式与估计方差 $E[S-S^*]^2$ 的表达式相似，因而虽然传递理论的定义中不包含任何概率解释，也可以借用估计方差的符号 σ_E^2，将上式简写为：

$$\sigma_E^2(a)=\frac{1}{a}\int_{(a)}[S-S^*(x_0)]^2\mathrm{d}x_0 \tag{7-15}$$

这个平均误差方差叫做“几何误差方差”。其中 $a = a_1 \cdot a_2$，$x_0 = (x_{0u}, x_{0v})$。若 $S^*(x_0)$ 也用其一维简写形式表示，则有：

$$S^*(x_0) = a \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a) \tag{7-16}$$

其中 $a = a_1 \cdot a_2$，

$$\sum_{p=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a) = \sum_{p_u=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_v=-\infty}^{+\infty} k(x_{0u} + p_u \cdot a_1,\ x_{0v} + p_v \cdot a_2)$$

可以证明 $S^*(x_0)$ 的数学期望就是 S（此处只是借用数学期望的符号）。

事实上，由式（7-16）可得：

$$E[S^*(x_0)] = \frac{1}{a}\int_{(a)} S^*(x_0)\,dx_0$$

$$= \frac{1}{a}\int_{(a)} a \cdot \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a)\,dx_0$$

$$= \int_{(a)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a)\,dx_0$$

令 $y = x_0 + p \cdot a$，则 $dy = dx_0$，当 p 取整数从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 求和时，y 则取实数从 $-\infty$ 变到 $+\infty$注意：此处y为二维坐标。于是：

$$E[S^*(x_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} k(y)\,dy = S.$$

这样，估计方差（7-15）式便可写成：

$$\sigma_E^2(a) = \frac{1}{a}\int_{(a)} [S^2 - 2 \cdot S \cdot S^*(x_0) + (S^*(x_0))^2]\,dx_0$$

$$= S^2 - 2S \cdot E[S^*(x_0)] + \frac{1}{a}\int_{(a)} [S^*(x_0)]^2\,dx_0$$

$$= S^2 - 2S^2 + \frac{1}{a}\int_{(a)} [S^*(x_0)]^2\,dx_0$$

$$= \frac{1}{a}\int_{(a)} [S^*(x_0)]^2\,dx_0 - S^2$$

运用公式（7-16）得到：

$$\frac{1}{a}\int_{(a)} [S^*(x_0)]^2\,dx_0 = \frac{1}{a} \cdot a^2 \cdot \int_{(a)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a) \cdot k(x_0 + q \cdot a)\,dx_0$$

（令 $q = p + r$）

$$= a\int_{(a)} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{r=-\infty}^{+\infty} k(x_0 + p \cdot a) \cdot k(x_0 + p \cdot a + r \cdot a)\,dx_0$$

（再令 $y = x_0 + p \cdot a$，$dy = dx_0$，且当 p 取整数从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化，y 取实数从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 变化，y为二维空间中的坐标）

故上式，

$$= a \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} k(y) \cdot k(y + r \cdot a)\,dy$$

（由公式（7-13））$=a\sum_{r=-\infty}^{+\infty}K_s(r\cdot a)$

又知：$S^2=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}k(y)\,dy\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}k(x)\cdot k(y)\,dx dy$

（令 $y=x+h$，则 $dy=dh$）$=\int_{-\infty}^{+\infty}dh\int_{-\infty}^{+\infty}k(x)\cdot k(x+h)\,dx$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}K_s(h)\,dh$$

将以上二式的结果代回原式，得：

$$\sigma_s^2(a)=a\sum_{r=-\infty}^{+\infty}K_s(r\cdot a)-\int_{-\infty}^{+\infty}K_s(h)\,dh \tag{7-17}$$

从这个式子可以看出，与网格面积 a 有关的几何误差方差 $\sigma_s^2(a)$ 可以用待估面积 S 的几何协变差函数 $K(h)$ 来表示，但是 $K(h)$ 是未知的，我们只有根据它的性质，得到其近似值。

$K(h)$ 的性质是：无论待估域 S 的几何特征和范围如何，其几何协变差函数 $K(h)$ 在原点处始终具有线性状，即

$$\text{当}|h|\to 0\text{时，}\ K(h)=K(0)-\omega_\alpha|h|+\cdots\cdots, \tag{7-18}$$

其中 α 表示方向，即这种线性性状不一定是各向同性的。

利用这一性质，当 a 趋于零时，我们就可以对 $\sigma_s^2(a)$ 的表达式的有限展开式的首项进行计算，而这个首项就足以给出几何误差方差的数量级。

对于根据直角规则网格 (a_1, a_2) 的二维面积估计问题，当 $\omega_\alpha=\omega$ 时（即各向同性），马特隆证明了面积 S 的估计方差为：

$$\sigma_s^2=\omega\left(\frac{1}{6}a_1\cdot a_2^2+0.0609a_1^3\right),\quad (a_1>a_2) \tag{7-19}$$

但是，实际上，我们不知道真实径向变化性 ω 的大小。那么，为了估计它，我们用所有正值点的影响域（小矩形 $a_1\cdot a_2$）的集合代替未知的域 S，并统计这样得到的边界中分别含有线元 a_1 和 a_2 的个数 $2N_1$ 和 $2N_2$。于是对应的径向变化性为 $\omega_1=N_1\cdot a_1$，$\omega_2=N_2\cdot a_2$.

由于我们假定径向变化是各向同性的，故有：

$$\omega=N_1\cdot a_1=N_2\cdot a_2 \tag{7-20}$$

由于 $a_1\geqslant a_2$，所以有 $N_1\leqslant N_2$

将（7-19）两边被 $S^2(=(n\cdot a_1\cdot a_2)^2)$ 除，并用 $\omega(=N_1\cdot a_1)$ 代入：

$$\frac{\sigma_s^2}{S^2}=\frac{N_1\cdot a_1}{n^2\cdot a_1^2\cdot a_2^2}\left(\frac{1}{6}a_1\cdot a_2^2+0.0609a_1^3\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{N_1}{6}+0.0609N_1\cdot\frac{a_1^2}{a_2^2}\right),$$

又由（7-20）知 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{N_2}{N_1}$，代入上式得：