

利用地球重力位模型计算重力和重力梯度*

王东明

(北京大学地球物理系, 北京 100871)

摘 要

高阶高精度地球重力场模型具有广泛的用途. 本文利用地球重力位模型计算重力和重力梯度在应用中很有实用价值, 同时也是计算重力场其它量的关键. 利用伪局部笛卡尔坐标与球坐标的关系计算了重力与重力梯度在伪局部笛卡尔坐标系下的分量; 利用张量变换的原理给出了已知重力与重力梯度在某一坐标系下的分量求它们在另一坐标系下分量的方法, 并具体给出了重力与重力梯度在局部笛卡尔坐标系下的分量计算公式, 同时还给出计算重力场五参量与垂线偏差的计算公式. 本研究推进了地球重力场的可视化进程.

关键词 地球重力位模型, 重力位的一、二阶导数, 张量变换, 重力场的可视化.

1 引 言

以一定阶数的球(椭球)谐函数展开系数表示的大地位称为地球重力场模型^[1]. 目前全球有各种地球重力场位模型约 30 种之多, 其发展趋势仍朝着更高的阶数和精度推进^[2,3]. 地球重力场模型是在一定的精度和分辨率的范围内对实际地球重力场的近似, 在一定程度上反映了实际地球重力场的特性, 为大地测量学、地球物理学、地球动力学、海洋科学、空间科学以及与重力场密切相关的工程技术提供应用. 在实际应用中经常要用地球重力场模型计算地球上某点处的重力和重力梯度^[4]. 由于现有的地球重力场模型是用球坐标表示的, 使得这样的计算非常困难. 本文着重研究计算地球重力和重力梯度即计算重力位的一阶和二阶导数问题. 最先研究此问题的是 Tschering^[5], 他给出正常位的二阶导数的计算公式, Koop 等^[6]给出了球坐标表示的引力位在伪局部笛卡尔坐标系下的一阶导数和二阶导数的理论公式, 但没有适用于计算的具体公式, 而且没有牵涉到怎样计算局部笛卡尔坐标系下的重力和重力梯度分量. 本文给出了计算重力和重力梯度在伪局部笛卡尔坐标下分量的具体计算公式, 然后给出计算它们在任意坐标系包括局部笛卡尔坐标系下分量的计算方法, 整个算法已用 C++ 语言实现. 本文的方法弥补了 Koop 等工作的不足, 对实现重力场(包括固体潮)的可视化提供了帮助.

2 伪局部笛卡尔坐标系下重力位的一阶和二阶导数的计算

计算所用的坐标系为: (1) 地心球坐标 (r, θ, λ) : 原点在地球质心, r 为径向距离, θ 为余

* 国家自然科学基金资助项目(49484002); 中国博士后科学基金资助项目.

本文 1999-05-24 收到修定稿.

纬, λ 为经度. (2) 地固坐标系 (X, Y, Z) : 原点在地球质心, Z 轴平行于地球自转轴, 朝北为正, X 轴平行于格林尼治子午面与 Z 轴垂直, Y 轴与 X, Z 轴构成右手系. (3) 伪局部笛卡尔坐标系 (x, y, z) : 原点在所考虑的计算点, z 轴沿球坐标的径向方向, x 轴与 z 轴垂直且平行于 XY 平面, 朝东方向, y 轴与 x, z 轴构成右手系. (4) 局部笛卡尔坐标系 (x^*, y^*, z^*) : 原点在所考虑的计算点, z^* 轴沿计算点的垂线方向, 朝地球外为正, x^* 轴平行于 XY 平面与 z^* 轴垂直, 朝东方向, y^* 轴与 x^*, z^* 轴构成右手系.

地球重力位 W 在球坐标下表示为

$$W = \frac{1}{2} \omega^2 (X^2 + Y^2) + V \\ = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \sin^2 \theta + \frac{GM}{r} \left(1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda] \bar{P}_n^m(\cos \theta) \right). \quad (1)$$

其中 ω 为地球自转角速度, V 为地球引力位, G 为引力常数, M 为地球质量, a 为地球平均半径, $\bar{C}_{nm}, \bar{S}_{nm}$ 是完全规格化的引力位系统, $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$ 是完全规格化的勒让德缔合函数. 以下给出用完全规格化后的引力位系数、完全规格化后的球函数表示的有关公式.

伪局部笛卡尔坐标与球坐标的一阶和二阶导数关系为^[6]

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{\cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \lambda}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \lambda} - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}, \quad (10)$$

利用下式^[7]

$$\frac{d\bar{P}_n^m(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{-1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)(n+m)}{2n-1}} \bar{P}_{n-1}^m(\cos \theta) + n \cot \theta \bar{P}_n^m(\cos \theta). \quad (11)$$

可求得伪局部笛卡尔坐标系下的重力分量 g_x, g_y, g_z 和重力梯度分量 $W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xy}, W_{yz}$.

为方便, 简写 $\bar{P}_n^m(\cos \theta)$ 为 $\bar{P}_n^m$.

$$g_x = \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{GM}{r^2 \sin \theta} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_n^m, \quad (12)$$

$$g_y = \frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{1}{2} \omega^2 r \sin 2\theta + \frac{GM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \left\{ \left[(\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \times \right. \right. \\ \left. \left. \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)(n+m)}{2n-1}} \csc \theta \bar{P}_{n-1}^m - n \tan \theta \bar{P}_n^m \right] \right] \right\}, \quad (13)$$

$$g_z = \frac{\partial W}{\partial z} = \omega^2 r \sin^2 \theta - \frac{GM}{r^2} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{a}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_n^m \right], \quad (14)$$

$$W_{xx} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \omega^2 - \frac{GM}{r^3} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \sum_{m=0}^n \left\{ (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left[(-n \tan^2 \theta + m^2 \csc^2 \theta + n+1) \bar{P}_n^m + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sqrt{\frac{(2n+1)(n-m)(n+m)}{(2n-1)}} \cot \theta \csc \theta \bar{P}_{n-1}^m \right] \right\} \right\}, \quad (15)$$

$$W_{yy} = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = \omega^2 \cos^2 \theta - \frac{GM}{r^3} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \sum_{m=0}^n \left\{ (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left[(-n^2 \tan^2 \theta + n \csc^2 \theta + n+1) \bar{P}_n^m + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. 2(n-1) \sqrt{\frac{(2n+1)(n+m)(n-m)}{(2n-1)}} \times \cot \theta \csc \theta \bar{P}_{n-1}^m - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \sqrt{\frac{(2n+1)(n^2-m^2)(n-1+m)(n-1-m)}{(2n-3)}} \csc^2 \theta \bar{P}_{n-2}^m \right] \right\} \right\}, \quad (16)$$

$$W_{zz} = \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \omega^2 \sin^2 \theta + \frac{GM}{r^3} \left\{ 2 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2) \left(\frac{a}{r} \right)^n \times \right. \\ \left. \sum_{m=0}^n [(\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \bar{P}_n^m] \right\}, \quad (17)$$

$$W_{xy} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (-\bar{C}_{nm} \sin m\lambda + \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \times \\ \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m)(n-m)}{2n-1}} \csc^2 \theta \bar{P}_{n-1}^m - (n-1) \cot \theta \csc \theta \bar{P}_n^m \right], \quad (18)$$

$$W_{xz} = \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = \frac{GM}{r^3} \csc \theta \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \left(\frac{a}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n [m (\bar{C}_{nm} \sin m\lambda - \bar{S}_{nm} \cos m\lambda) \bar{P}_n^m], \quad (19)$$

$$W_{yz} = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{2} \omega^2 \sin 2\theta + \frac{GM}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} (n+2) \left(\frac{a}{r} \right)^n \times \\ \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \left[\sqrt{\frac{(2n+1)(n+m)(n-m)}{2n-1}} \times \right. \\ \left. \csc \theta \bar{P}_{n-1}^m - n \cot \theta \bar{P}_n^m \right], \quad (20)$$

计算点的重力值 g , 天文纬度 Φ , 天文经度 Λ 为

$$g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2}, \quad (21)$$

$$\Phi = \arctan \frac{-g_z}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \quad (22)$$

$$\Lambda = \arctan \frac{g_y}{g_x}. \quad (23)$$

3 各种坐标系下重力位的一阶和二阶导数的计算

张量在各种坐标系下具有不变性^[8]. 以 n 维矢量空间 S 中的二阶张量 T 为例, 任选矢量空间 S 中两组相互独立的基矢量 $\{e_i, 1 \leq i \leq n\}, \{i_i, 1 \leq i \leq n\}$, 则 T 在这两组基下可分别表示为 $T_{ij}e_i \otimes e_j, T_{ij}^* i_i \otimes i_j$. 其中 $e_i \otimes e_j, i_i \otimes i_j$ 为矢量空间 S 中两组相互独立的二阶基矢量, T_{ij}, T_{ij}^* 为 T 在此两组二阶基矢量下的分量, j 以及下面的 k, i 都在 1 到 n 中变化. 由张量不变性有 $T_{ij}e_i \otimes e_j = T_{ij}^* i_i \otimes i_j$. 设 e_i 到 i_i 的转换矩阵为 $A = (a_i^j)$, 即 $i_i = a_i^j e_j$, 则有 T_{ij}, T_{ij}^* 的转换关系

$$T_{ij} = a_i^k a_j^l T_{kl}^*, \quad (24)$$

此原理可用在重力和重力梯度上. 其物理意义在于: 在某一坐标系下求得重力和重力梯度的分量, 则其它坐标系下的重力和重力梯度的分量就可以由张量变换求得. 在实际应用中, 关注能求得重力和重力梯度在局部笛卡尔坐标下的分量, 因为该坐标系下的分量用物理仪器可直接观察到. 公式(12)–(20)已经求得重力和重力梯度在伪局部笛卡尔坐标下的分量, 下面以求它们在局部笛卡尔坐标系下的分量为例, 具体给出方法.

关于 X, Y, Z 轴的旋转矩阵分别记为 $R_1(\theta), R_2(\theta), R_3(\theta)$, 其中 θ 为旋转角. 它们的具体形式为

$$R_1(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \quad R_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$$R_3(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (25)$$

地固坐标系 (X, Y, Z) 到伪局部笛卡尔坐标系 (x, y, z) 的转换矩阵 T 为

$$T = R_1(\theta)R_3(90^\circ - \lambda). \quad (26)$$

地固坐标系 (X, Y, Z) 到局部笛卡尔坐标系 (x^*, y^*, z^*) 的转换矩阵 T^* 为

$$T^* = R_1(90^\circ - \Phi)R_3(90^\circ + \Lambda). \quad (27)$$

伪局部笛卡尔坐标系到局部笛卡尔坐标系的转换矩阵为 T^*T^T , 设重力在局部笛卡尔坐标系下的分量为 g_E, g_N, g_Z , 它们的值为

$$(g_E \ g_N \ g_Z)^T = T^*T^T(g_x \ g_y \ g_z)^T. \quad (28)$$

设重力梯度张量在伪局部笛卡尔坐标下的分量矩阵 $\bar{W}$ 为

$$\begin{pmatrix} W_{xx} & W_{xy} & W_{xz} \\ W_{yx} & W_{yy} & W_{yz} \\ W_{zx} & W_{zy} & W_{zz} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

在局部笛卡尔坐标系下的分量矩阵 $\bar{W}^*$ 为

$$\begin{pmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

则可求得它们的转换关系为

$$\bar{W}^* = (T \cdot T^T) \bar{W} (T \cdot T^T)^T. \quad (31)$$

利用式(21)和上式可求得重力场的五参量 $\chi_1, \chi_2, \tau, \gamma_1, \gamma_2$ 为^[9]

$$\chi_1 = \frac{W_{11}}{g}, \quad \chi_2 = \frac{W_{22}}{g}, \quad \tau = \frac{W_{12}}{g}, \quad \gamma_1 = \frac{W_{13}}{g}, \quad \gamma_2 = \frac{W_{23}}{g}. \quad (32)$$

至此可以求得重力场的内蕴量,如等位面的高斯曲率 K ,它可用来检验大地奇异性问题^[4].

通常,地球上的点用大地坐标 (B, L, H) 给出,这里 B 为大地纬度, L 为大地经度, H 为大地高. 现在的问题是已知某点的大地坐标 (B, L, H) , 要求此点处的相关量如重力、重力梯度、垂线偏差等. 椭球大地测量学给出公式

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N' + H) \cos B \cos L \\ (N' + H) \cos B \sin L \\ [N'(1 - e^2) + H] \sin B \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中 $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ 为参考椭球体的第一偏心率, b 为参考椭球体的短半轴, N' 为参考椭球体的卯酉圈曲率半径, 计算公式如下

$$N' = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}}. \quad (34)$$

由此可以算得地心球坐标为

$$r = \sqrt{[(N' + H) \cos B]^2 + [N'(1 - e^2) + H]^2 \sin^2 B}, \quad (35)$$

$$\theta = \arctan \left[\frac{N' + H}{N'(1 - e^2) + H} \tan B \right], \quad (36)$$

$$\lambda = L \quad (37)$$

然后用此坐标按公式(12)~(23), (25)~(28), (31), (32) 计算该点的重力、重力梯度、 Φ, Λ 和重力场的五参量 $\chi_1, \chi_2, \tau, \gamma_1, \gamma_2$, 用下式计算垂线偏差 ξ, ζ

$$\xi = \Phi - B, \quad \zeta = (\Lambda - L) \cos B. \quad (38)$$

4 结 语

重力位的一、二阶导数计算是计算重力场其它量的基础. 当求重力和重力梯度后, 就容易求得重力场的内蕴量、大地水准面的差距、垂线偏差、等位面的变形张量等等. 目前计算机的计算速度很快, 地球重力位模型的分辨率和精度也比较高, 如果再把地球的固体潮模型也

考虑进来,则可以编制绘制重力场和计算重力场有关量的图形化软件,实现实际重力场在某种分辨率和精度下的可视化。

对张赤军研究员的多次鼓励和讨论表示衷心的感谢,同时感谢审稿人对本文的修改和提出的建议。

参 考 文 献

- 1 宁津生,邱卫根,陶本藻. 地球重力场模型理论. 武汉:武汉测绘科技大学出版社,1990. 1—119
NING Jin-Sheng, QIU Wei-Gen, TAO Ben-Zao. Theory of Earth's Gravity Field Model. Wuhan: Wuhan Technical University of Surveying and Mapping Press, 1990. 1—119
- 2 大地测量学科发展战略研究组. 大地测量. 北京:科学出版社,1994. 78—87
Strategy Research Group for Developing Geodesy Science. Geodesy. Beijing: Science Press, 1994. 78—87
- 3 夏哲仁,林 丽,石 磐. 360 阶地球重力场模型 DQM94A 及其精度分析. 地球物理学报,1995,38(6):788—795
XIA Zhe-Ren, LIN Li, SHI Pan. A new Earth's gravity field model DQM94A and its precision estimation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1995, 38(6): 788—795
- 4 王东明. 重力场中的完整坐标与非完整坐标. 地球物理学报,1997,40(1):96—104
WANG Dong-Ming. Holonomic and anholonomic coordinates in gravity field. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1997, 40(1): 96—104
- 5 Tschering C C. Computation of second-order derivatives of the normal potential based on the representation by a Legendre series. *Manuscripta Geodaetica*, 1976, 1: 71—92
- 6 Koop R, Stelpstra D. On the computation of the gravitational potential and its first and second order derivatives. *Manuscripta Geodaetica*, 1989, 14: 337—382
- 7 管泽霖,宁津生. 地球形状及外部重力场(下册). 北京:测绘出版社,1981. 351
GUAN Ze-Lin, NING Jin-Sheng. Earth's Shape and Exterior Gravity Field (Second Volume). Beijing: Surveying and Mapping Press, 1981. 351
- 8 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义. 北京:北京大学出版社,1983. 46—52
CHEN Xing-Shen, CHEN Wei-Heng. Teaching Materials of Differential Geometry. Beijing: Peking University Press, 1983. 46—52
- 9 Hotine M. Differential Geodesy. Berlin: Springer, 1991. 36—38

COMPUTING EARTH'S GRAVITY AND GRAVITY GRADIENT USING GEOPOTENTIAL MODEL

WANG DONG-MING

(Department of Geophysics, Peking University, Beijing 100871, China)

Abstract

High order, high precision geopotential models have broad application. Computing gravity and gravity gradient using geopotential models has very practical value in application, and is al-

so a key to computing other quantities of gravity field. Utilizing the relation between pseudo local Cartesian coordinates and spherical coordinates, the components of gravity and gravity gradient in pseudo local Cartesian coordinate system are calculated. Using the principle of tensor transform, the method of computing the components of gravity and gravity gradient in another coordinate system by the known components of gravity and gravity gradient in certain coordinate system is presented, and the detailed formulas computing the components of gravity and gravity gradient in local Cartesian coordinate system are given. Simultaneously, the formulas computing five parameter and vertical deflection are provided. This research promotes the progress of visualization of the earth's gravity field.

Key words Geopotential model, First and second derivative of geopotential, Tensor transform, Visualization of earth's gravity field.

作者简介 王东明,男,1968年9月生,1990年同济大学测量系毕业,1993年获复旦大学硕士学位,1996年获中国科学院测量与地球物理研究所固体地球物理学博士学位.现在北京大学地球物理系博士后研究,主要从事地球重力学研究.