序　言

本书介绍地震波的动力学。所谓地震波的动力学特点，是区别于它的运动学特点来说的。在波的运动学中，我们研究的是它的传播规律，例如它的反射、透射、传播速度、旅行时间等等，而在波的动力学中则主要从能量的角度来研究它的特征，例如它的能流密度(即强度)、振幅、真实波形、反射系数等等。

在一般情况下，可以把岩层看成弹性体，把地震波看成岩层中的弹性波。要弄清弹性波的问题，事实上要涉及弹性力学的相当大的部分，而且要用到相当多的数学物理方法。

本书主要从“普及”着眼，是一本略示门径、提供线索的书。考虑到广大地震勘探工作者的目前情况，我们在头三章中安排了一些预备性的内容，概略地介绍了古典力学、物质弹性和数学场论方面最必需的知识。

从第四章开始，分析了弹性介质中的胁强和胁变，建立了波动方程，简单介绍了波动方程的求解，讨论了弹性波动力学的一些基本问题。我们愿意指出，这些内容都是很初步、很浅近的，但是要真正掌握它们也还是需要适当的准备。也许可以说，普通物理课程中关于振动和波动的那些论述，以及在本册头三章中介绍的那些材料，就是这种最起码的必要基础吧？因此我们建议，在阅读本书正题的过程中，随时翻阅和温习上面那些东西。

在编写这本书时，我们没打算追求数学化的严密形式和系统化的全面内容。前面讲了，我们的目的是为初学者“说法”，从而在涉及某些物理概念的地方，我们力图分析得详细一些、透彻一些、好懂一些，力图使读者“心服口服”，而不是“似懂非懂”。

地震勘探工作，本来应该多从动力学方面进行探索，以期多发展些新的方法，但过去在这方面做的工作似乎偏少。从前的地

震教学中也有一些这方面的内容，但往往停留在一般化的理论上，形同弹性力学“搬家”，和实际问题对不上号儿。最近几年，开始出现了物理地震学、亮点技术、波动方程偏移等等的新事物，人们才想起还有这么一个方向。到了这时，讲地震波动力学乃至一般的波动理论(其实都是十九世纪已经成熟的经典理论)，才终于不算完全“无的放矢”了。注意到这种情况，我们在本书的最后部分也稍微谈到了一些地震波动力学的应用。

总而言之，本书讲到的一切问题，都不过是“概要”，是供初学者阅读用的。正因如此，我们在有些地方试着采用了“谈话式的文体”，甚至有时开几句玩笑。

本书序言和前七章由戈革执笔，第八章由董敏煜执笔，参加工作的还有陆基孟、俞康胤、周洁韶等同志；在此表出，以示负责。

1977年8月笔者识于东营

目　录

SY64/30

序　言

第一章　力学概要……1

§.1-1.　本章小引……1

§.1-2.　从科学思维中的“理想化”谈起……2

1.什么叫“理想化”（2）　2.质点（2）　3.物质的三态（3）　4.刚体（3）　5.弹性体（4）

§.1-3.　质点的位置、速度和加速度……6

1.参照体（6）　2.质点的空间位置（7）　3.质点的速度（9）　4.质点的加速度（10）

§.1-4.　刚体绕定轴的转动　角速度和角加速度……13

1.刚体绕定轴的转动(13)　2.角速度和角加速度(14)　3.线量和角量之间的关系（14）　4.角速度矢量（15）

§.1-5.　质量和力……18

1.质量（19）　2.力（19）

§.1-6.　牛顿力学三定律……21

1.第一定律(惯性定律)（22）　2.第二定律（23）　3.第三定律(反作用定律)（25）　4.关于牛顿定律的几点说明（26）　5.动量和冲量（29）

§.1-7.　功和能……31

1.力对质点做的功（31）　2.质点的动能（34）　3.能量概念简述（36）　4.质点在重力场中的位能(38)　5.弹簧的弹性位能（39）　6.弹簧振子的总机械能（40）

§.1-8.　力矩和角动量……43

1.力矩和它所做的功（43）　2.刚体的动能和转动惯量（44）　3.刚体的定轴转动方程（46）　4.力矩和角动量的矢量形式（47）

第二章　物质的弹性……50

§.2-1.　连续体……50

1.连续体的概念（50）　2.连续介质的分类（51）

§.2-2. 直杆的单向拉伸 …… 53
1.实验概况（54） 2.拉伸胁强（55） 3.拉伸协变（57） 4.胡克定律和杨氏模量（57） 5.胁强—胁变曲线（58）
§.2-3. 泊松比 …… 60
§.2-4. 切变模量 …… 62
§.2-5. 体变模量 …… 64
§.2-6. 拉梅系数 …… 65
第三章 数学场论概要 …… 68
§.3-1. 本章小引 …… 68
§.3-2. 标量和矢量 …… 69
1.两种最常见的物理量（69） 2.矢量的加法、倍数和减法（70） 3.矢量和座标（71） 4.二矢量的标积（73） 5.二矢量的矢积（73）
§.3-3. 什么是数学场 …… 74
1.物理场和数学场（74） 2.标量场（75） 3.矢量场（77） 4.张量场（80） 5.数学场的定义域和边值条件（84） 6.本节小结（86）
§.3-4. 数学场的空间导数场 …… 88
1.空间导数的初步概念（88） 2.劈形算符（90） 3.标量场的梯度（91） 4.矢量场的散度（93） 5.矢量场的旋度（95） 6.几个要用到的公式（96） 7.本节小结（98）
§.3-5. 矢量场的标位和矢位 ……100
1.矢量场的分类（100） 2.空间域的连通性（102） 3.标位和矢位（103） 4.所谓规范不变性（105） 5.波动方程 纵波和横波（107） 6.本节小结（108）
§.3-6. 数学场的积分学大意*……109
1.体积分（109） 2.面积分（111） 3.线积分（112） 4.几条常用的定理（113） 5.本节小结（116）
第四章 弹性介质中的胁强和胁变 ……118
§.4-1. 再谈谈连续介质和质点 ……118
§.4-2. 胁强分析 ……120

1.体力和面力（120）　2.复习胁强的概念（122）　3.胁强分量（124）
§.4-3. 胁变分析 ……128
1.初步概念（128）　2.弹性介质中各体积元的变动（129）　3.线胁变和体胁变（130）　4.切胁变（132）　5.位移矢量场的旋度（134）　6.关于科希方程组的相容性（136）
§.4-4. 胁强和胁变的关系——胡克定律……139
1.作为实验规律的胡克定律（139）　2.广义胡克定律（140）　3.各向同性介质中的情况（142）
第五章 弹性介质动力学基础 ……145
§.5-1. 本章小引 ……145
§.5-2. 介质中各体积元的运动方程 ……146
1.体积元的加速度（146）　2.牛顿第二定律对各体积元的应用（148）　3.体积元所受的力矩（153）　4.任意面积元上的胁强（155）　5.声学近似（157）
§.5-3. 弹性波的波动方程 ……159
1.分区均匀的介质（159）　2.波动方程的导出（161）　3.弹性纵波和弹性横波（162）　4.位移矢量场的标位和矢位（164）　5.弹性波的传播速度（166）
§.5-4. 弹性介质的机械能*……168
1.弹性位能（形变位能）（168）　2.体积元的动能（172）　3.能流密度矢量场（172）
§.5-5. 介质对弹性波的吸收*……177
1.吸收的机制（177）　2.波动方程的建立（179）　3.衰减系数（180）
第六章 略论波动方程的求解 ……183
§.6-1. 本章小引 ……183
§.6-2. 无限大的均匀各向同性的弹性介质中的平面波 ……185
1.波动方程的简化（185）　2.一维波动方程的通解（186）　3.一维波动方程的定解（188）　4.平面波的能流密度（189）　5.沿任意指定方向传播的平面波（191）　6.平面正弦波的情况（192）　7.沿任意方向的平面正弦波（193）
§.6-3. 无限大的均匀各向同性的弹性介质中的球面纵波 ……196

1.问题的提法（196）　2.引用球座标系（197）　3.定解问题（199）

§.6-4. 达朗贝尔方程的积分解*……201

1.问题的提法（201）　2.关于δ函数（202）　3.基尔霍夫积分（205）　4.关于推迟位（209）　5.关于超前位（210）　6.当P点在空间域T以外时（210）　7.基尔霍夫衍射公式（212）

第七章　弹性波的反射和透射……216

§.7-1. 本章小引……216

§.7-2. 弹性波在自由表面上的反射……217

1.P波入射（217）　2.SV波入射（222）　3.SH波入射（223）

§.7-3. 弹性纵波在介质分界面上的反射和透射……224

1.问题的提法（224）　2.五个波函数（225）　3.边值条件（226）　4.反射系数和透射系数（227）　5.垂直入射的情况（233）　6.全反射问题（234）

§.7-4. 面波……239

1.情况概述（239）　2.瑞利波（240）　3.疏松覆盖层的影响（244）　4.乐夫波（245）　5.斯通利波（248）

第八章　层状介质中弹性波的反射和透射……252

§.8-1. 本章小引……252

§.8-2. 弹性波在水平多层介质中的反射和透射的基本公式……253

1.弹性波在水平多层介质中的反射和透射的基本公式（253）

2.弹性纵波在水平多层介质中的反射和透射系数（261）

§.8-3. 当弹性波法线入射到水平层状介质时的公式（适用于地震勘探中波动方程偏移等的一套公式）……265

1.一个分界面的情况（266）　2.多个界面的情况（269）

3.传输矩阵（273）

§.8-4. 地震勘探中的薄层反射问题……280

1.薄层反射是薄层内的多次反射的叠加结果（281）　2.薄层反射的频率特性和相位特性的公式（286）　3.薄层的频率特性分析（286）

结束语……292

第一章　力学概要

§.1-1.　本章小引

地震波动力学主要是利用弹性力学的方法来研究地震波的种种特点。弹性力学是整个力学中的一个分支，从而在讨论问题时，不可避免地要用到一般力学中的基本原理。本章的目的就是要简单地温习一下这些原理。我们相信大多数读者是学过一点力学的，这里提供的材料只是一种复习的性质，从而绝不企图进行稍微全面的介绍。但是，学习科学，不可能是一次完成的。所谓"温故而知新"，或者也可以说是一种经验之谈。我们希望，即使是学过力学的同志，读了这一章也还会得到一些新的收获。

力学是研究**机械运动**的科学。所谓机械运动，是指物体的空间位置随时间而变化的过程，或物体的一部分相对于其他部分来说的空间位置随时间而变化的过程。机械运动是物质运动形态中的一种，而且是最简单、最基本的一种。在日常生活和科技工作中，我们无时无刻不遇到这种运动；把它们的规律提高到理性认识的水平并加以系统化，就构成力学中的一些基本原理。

在日常生活中，以及在大多数的工程技术问题中，我们处理的都是一些由许多个原子构成的物体；哪怕是一颗很小的沙粒，也还包含着多少亿个原子。这样的物体叫做**宏观物体**；相反地，大小可以和原子相比或比原子更小的物体叫做**微观物体**。另外也要提到，我们通常遇到的宏观物体，是以不太高的速度运动的，就是说，它们的速度比真空中的光速（$c=2.998\times10^8$米/秒）小许多倍。反映这种宏观物体的低速运动规律的科学，就叫做**古典力学**。换句话说，宏观物体的低速运动，这就是古典力学的"用武之地"，就是它的适用范围；出了这个范围，古典力学就不能

足够确切地反映现实情况，从而也就不再完全适用了❶。

本章介绍的，就是古典力学中的一些要点。

§.1-2. 从科学思维中的“理想化”谈起

1.什么叫“理想化” 任何一个研究对象，任何一个物体，都具有各式各样的（事实上是“不可穷尽的”）一些性质，例如体积、重量、硬度、温度、颜色、电阻率等等，等等。在这许许多多的性质中，按照问题或目的之不同，有时这种性质占主要地位，有时那种性质占主要地位，总是不能来个“平均主义”，把它们同等看待的。例如我使用这支粉笔，首先要看它是什么颜色，其次考虑它是不是软硬适度，大概谁也不会想到它的电阻率是大是小；就是说，适应着我们的目的（拿它写字，而不是当电阻元件用），我们没有必要考虑这支粉笔的电阻率（以及另外许多性质）；如果我认为它根本就无所谓电阻率，那也不会影响我们使用它。当然，事实上任何东西都是有电阻率的，“没有电阻率的物体”是不存在的，但是这并不妨碍我们忽略某些物体的电阻率。这种突出主要矛盾而暂时忽略次要矛盾的思维方法，在科学文献中有时叫做**理想化**。这种方法就其实质来说是符合辩证法的。物理学中的许多概念，例如“无重量的杆”、“完全光滑的平面”、“不可伸缩的完全柔软的线”等等，都应该按照这种意义去理解。事实上，一切科学概念（乃至任何概念）的建立，都离不开这种思维方法。明白了这一点，咱们才能正确理解下面要谈到的以及将来可能学到的一切科学概念和科学规律。

在这样的基础上，我们来介绍力学中常常谈到的几种运动物体。

2.质点 当一个物体的形状和体积在所讨论的问题中都不起显著的作用，从而可以认为那物体极小极小时，那物体就叫做**质点**。一个物体能不能被看成质点，全由所讨论的是什么问题来确定。例如，当讨论地球的绕日运动（公转）时，由于地球的直径比

❶ 古典力学的适用范围比这里讲的还要前广一些，但是我们不讨论那些细节。

从地球到太阳的距离小得多，我们在一定的近似程度上就可以用一个点来代表它，就是说可以把地球看成质点。当讨论宇宙的发展时，甚至可以把银河系和别的星系都看成质点。相反地，当研究地球的自转时，你就不能说地球是一个点，因为一个点是谈不到绕着自己的“轴”转动的。同理，对于我们搞勘探的人来说，地球也不能看成质点。原子是很小的，但是如果你要谈到原子的结构，要研究它的各个组成部分，那原子当然也不能被看成质点。

我们指出，质点是力学中的概念，它不同于几何学中的点；因为我们虽然忽略了它的形状和体积，却不能忽略它的另一种物理性质，那性质叫做惯性，我们很快就要讲到。

从力学的角度来看，一个“大”物体可以设想为由许多小部分构成；当那些小部分的运动完全相同（**物体平动**）时，我们可以适当选择其中一个小部分来代表那整个的物体，并想象物体的“质量”全都集中在那一小部分上；在这种意义上，那物体的运动可以用一个质点的运动来代表；那样想象的质点叫做物体的**质心**。

3.物质的三态　通常的物体可以有三种状态，叫做**气态、液态、固态**。这一点是人人都知道的，但是仔细讨论起来却也问题颇多，我们在此一概从略。气体没有固定的体积，也没有固定的形状，你把它装进任意形状、任意大小的瓶子里，它就占满那瓶子，而不会只躲在某个角落里。液体通常有接近固定的体积，但是没有固定的形状。当然所谓的固定体积也是有条件的，这只是说液体的体积不象气体的那样容易变化罢了。固体的形状和体积都比较稳固，或者说，从力学的角度来看，只有受到“外力”时才会变化。

气体和液体合称**流体**。

4.刚体　固体受到外力就会变形（形状、体积发生变化）。就是最硬的金刚石，也可以琢磨成各种形状的物品。但是，在许多问题中，物体的变形也可能没有多大重要性，从而可以忽略。例

如，在机器的正常运转中，如果不研究各个机件的磨损和振动，就可以认为那些齿轮、连杆等等是不变形的。事实上，由于在各时刻所受的力可能不同，转动中的齿轮可能随时都在改变形状，但是这种变化通常不大，在许多情况下可以不必考虑。

变形可以忽略的物体叫做刚体。还是那话，尽管客观世界中并不存在完全不变形的所谓"绝对刚体"，刚体这一概念却是必要而有用的。不用说，一个特定的物体是否可以看成刚体，也由所研究的问题来决定。

5.弹性体 在许多问题中，连物体的变形也是不能忽略的。例如，忽略了弹簧的变形，那物体就不成其为弹簧了。至于液体或气体，当然一般更不能看成刚体了。

你拉一根弹簧，它就会伸长，它的各匝之间的距离就会增大；相反的，当你压它时，它就会缩短，它的各匝之间的距离就会减小。你轻轻地把手松开，它就轻轻地回复到原来的长度。这种现象带有相当的普遍性。当物体受到外力作用时，它的内部各部分之间就发生相对的位移，从而物体的形状或(和)大小就会改变，这时我们就说物体在外力作用下发生了或得到了形变。其实，我们以后就会讲到，外力的作用引起了物体各部分之间的内力，而形变的发生主要是以内力为依据的，外力只是一种条件而已。人们发现，许多物体都有回复原状的倾向。当外力较小时，物体发生较小的形变；外力停止作用后，物体会在内力的作用下恢复原来的形状和尺寸，其形变会随之而消失；这样的性质就叫做物体的**弹性**，随着外力的消失而消失的那种形变就叫做弹性形变。

也有相反的情况：物体在外力作用下发生形变，而外力停止作用后形变却并不消失，物体的形状、大小并不还原。这样的性质叫做物体的塑性，相应的形变叫做塑性形变。

事实上，所有的物体都同时具有弹性和塑性，只是在适当的条件下其中一种性质可以占很大的优势，而另一种性质则表现得很不显著；这时，我们就可以暂时忽略很次要的那种性质而认为物

体“只具有”特别显著的那种性质。这样，经过理想化，我们就得到**完全弹性体**或**完全塑性体**的概念。例如，你用不太大的力压一个钢锭，它就发生很小的形变；你将外力取消，它就在很好的近似程度上恢复原状。这样，当外力不太大时，钢锭就可以看成完全弹性体。当然，任何科学概念都有它的适用范围，不能把它绝对化。如果你把钢锭送进冷轧机中，就可以把它轧成各种形状的钢材。这时，由于外力很大，远远超过了钢锭的“弹性限度”，从而钢锭的塑性转化成了两种矛盾性质中的主要方面。同样的道理，当外力较大时，软泥、油灰、面团之类的物体都可以看成完全塑性体。

实践证明，一个物体在确定的外力作用下主要是表现弹性还是表现塑性，一般取决于三个条件：(i)物体本身的性质(它的成分、晶体结构，加工和处理的情况等等)；(ii)外力的特点(大小、方向、作用时间、变化频率等等)；(iii)物体所在的环境(温度、压强等等)。一般说来，当作用力足够小而作用时间也足够短时，许多种固体可以看成(完全)弹性体。至于流体，则只在某些方面表现一定的弹性。

在地震勘探工作中，在离震源很近的地方（破裂地带和塑性地带)，爆炸造成的形变很大，从而岩层是不能看成弹性体的。在离震源足够远的地方，岩石受的力很小，受力时间也相当地短，从而那里的岩层一般可以看成弹性体。但是，也应该知道，有些地层的弹性很差，例如干沙、沙土之类，把这样的地层当作弹性体来处理，有可能导致理论和实测之间的较大分歧。

考虑到弹性体对我们的问题的重要性，我们将用第二章的全部篇幅来对它进行一些定量的描述，而且在以下各章中也要随时讨论它。

习题：1.自己多举些质点、刚体、弹性体和塑性体的例子，并说明那些例子所要求的条件。

2.一个乒乓球，在什么时候可以看成质点、刚体、弹性体或塑性体？

3.塑料制品有没有弹性？

4.钢锭很硬，橡皮很软。人们常常认为橡皮有“弹性”而钢锭则没有。他们所说的“弹性”是指的什么性质？和我们所说的弹性是否相同？

5.人们订立规章制度，要求它有一定的灵活性；从物理学的观点来看这种灵活性能不能叫做“弹性”？为什么？

§.1-3. 质点的位置、速度和加速度

本节简单介绍怎样描述一个质点的机械运动。质点是力学中最简单的和最基本的运动客体。但是，一个质点的运动也还是可以相当复杂的；它可以沿着很复杂的路线运动，它的速度也可以按照很复杂的规律变化。力学中研究这种问题的部分叫做质点运动学，我们这里不多讨论，只介绍描述质点运动的几个基本物理量和有关的基本概念。

1.参照体 火车上的乘客觉得车中小桌上的茶杯是静止不动的，而地面上的人却发现那茶杯是随着火车急速运动的。相反地，车上的人看到窗外的树木、电线杆等等都迅速地向“后”闪过去，而地上的人则看到那些东西都静止不动。他们两位意见不同，是因为他们所取的“立脚点”不同。这个例子表明，在讨论某物体(例如茶杯)的运动之前，必须先选定一个标准物体作为你的“立脚点”；你事先认定那个物体算是不动的，其他物体的运动情况全都相对于那个标准物体来判断，来描述。没有这样一个标准，物体运动的描述就可能搞乱了套。这样事先选定的标准物体可以只有一个，也可以是彼此没有相对运动的好几个。这样的物体就叫做**参照体**。参照体选得不同，描述同一物体的运动时会得到不同的结论。这一事实叫做**机械运动的相对性**❶。

❶ 有些人不敢提这个名词，生怕违反了哲学上“运动是绝对的”这一基本原则，结果写出书来啰啰嗦嗦，说不清楚。其实，这里说的“相对性”和哲学上的“相对”、“绝对”并不是一个意思，而是同时也肯定了“静止”的相对性，而且，机械运动也只是各种物质运动形态的一种，而不是物质运动的全部。

随着所研究的问题的不同，参照体的选法也可以不同。在前面所举的例子中，车上的人选了火车作为参照体，他所谈论的是茶杯相对于火车的运动情况；地上的人选了地面作为参照体，谈论的是茶杯相对于地面的运动情况。茶杯相对于火车是静止的，而相对于地面则是运动的。这样，两个观察者就可以互相了解了。讨论物体的机械运动时总要涉及参照体，这虽然显得有点啰嗦，但是不这样就一定会造成许多纠缠和误解。

2.质点的空间位置 参照体选定以后，才谈得到确定质点的空间位置问题。要确定质点的位置，可以有好几种不同的数学方法。例如，我们可以在所选的参照体上画一个适当的座标系，并用质点的座标来确定它的位置。这就叫做确定位置的座标法。

如果所研究的质点是沿着一条已知的直线运动的，我们就可以取那条直线（或和它平行的任一直线）作为 X 轴。于是，质点在任一时刻的位置，就由它在该时刻的 x 座标来确定，如图1-1所示。

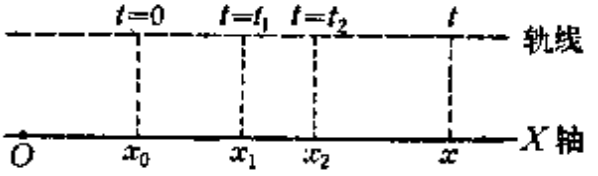


图1-1 质点的 x 座标

如果质点是在一个已知平面上运动的，我们就可以取那个平面（或平行于它的任一其他平面）作为 XY 座标平面。于是质点在任一时刻的位置，就由它在该时刻的 x 座标和 y 座标来确定，如图1-2所示。

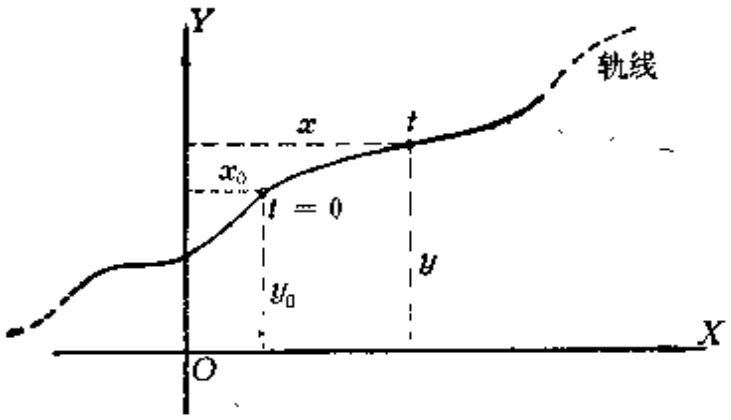


图1-2 质点的平面座标

一般情况，质点是在三维空间中运动的，它的轨线并不限制在某一平面之内。这样，就需要用三个座标来确定一个质点的位置。我们可以设想在所选的参照体上画出三条互相垂直的直线，作为X轴、Y轴

和Z轴。于是，质点在任一时刻的位置，就由它在该时刻的三个空间座标来确定，如图 1-3 所示。

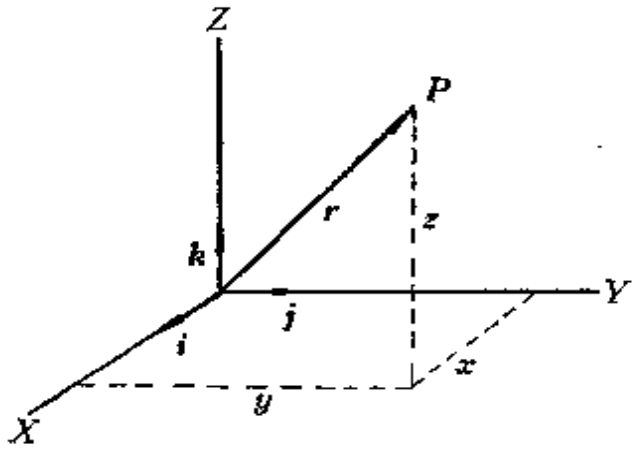


图1-3 质点的空间座标

以上讲的只是直角座标系。除了这种座标系以外，适应着各种不同的目的和情况，还可以有各种别的座标系。就是说，用座标法来确定质点的位置，也还是可以有许多讲头的（座标变换等等）。

联系到质点位置的确定，还需要简单谈谈时间的确定。为了确定时间，首先任意选一个计时起点（例如仪器开动的那一瞬息），叫做第 0 秒，即 $t=0$。从此以后，一秒一秒地（或一毫秒一毫秒地，或一微毫一微毫地）数下去，就得到时间变量 t 的一系列值。每一个 t 值代表一个时刻，即时间轴上的一个点；两个时刻确定一段时间（又叫时段）。例如，地震记录曲线上的任意一点都对应于一个时刻，而曲线上的一段则对应于一段时间。

按照数学上的概念，我们说质点的座标是时间变量 t 的函数，写成：

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}1)$$

知道了这些函数的数学表示式，就可以细致地定出质点的运动，因此，这种函数叫做质点的运动函数❶。

参照体、座标系和计时方式（零点和单位的选择），这三者的总体叫做参照系；这是描述机械运动必不可少的出发点。

现在我们指出，在图1-3中，从原点向所研究的质点画了一

❶ 有些俄文书上把它们叫做“运动方程”，那是错误的，可惜许多中文书也承袭了那种错误！

个矢量 r。这叫做该质点的**矢径**。显然，质点的三个空间座标就是矢径在三个座标轴上的投影。因此，知道了三个座标，就可以定出矢径；反过来，知道了矢径，当然也可以定出三个座标。于是，我们不但可以用空间座标来确定质点的位置，而且可以用矢径来确定它的位置。这后一种办法就叫做确定质点位置的**矢径法**。在某些问题中，例如在许多理论推导中，利用矢径法比较方便，也比较更能表现出事物的客观性；因为，当把座标系转过一个角度时，三个空间座标 x、y、z 都会跟着改变，而矢径 r 却不依赖于座标系，不会因座标系的转动而发生变化。这一点很重要，我们在第三章中还要反复地申说。

显然，运动质点的矢径也是 t 的函数：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是沿 X、Y、Z 轴正方向的单位矢量。这样的三个矢量构成一组正交归一化的**基底矢量**(简称**基矢**)。

3.质点的速度 质点的速度，是描述质点运动快慢和运动方向的物理量。速度既有大小，又有方向，而且经验证明它满足平行四边形的合成法则。就是说，质点的速度是一种**矢量**❶

在直角座标系中，质点的速度 $\boldsymbol{v}$ 和它的三个直角分量 v_x、v_y、v_z 是等效的。根据速度的概念，这三个分量定义为相应座标的时间变化率❷；换句话说，我们有：

$$\left.\begin{aligned} v_x&=\frac{dx}{dt}\\ v_y&=\frac{dy}{dt}\\ v_z&=\frac{dz}{dt}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

❶ 事实上，正是由于人们在实践中多次用到速度、加速度、力、电场强度等等的物理量，它们全都既有大小、又有方向，而且全都满足平行四边形合成法则，因此人们才在这许多物理量中“求同存异”，抽象概括，把它们归入同一类数学量中，而得到了矢量这一数学概念。

❷ 在历史上，正是研究力学时的需要，推动人们逐步形成了导数的概念，并进而发明了微积分。

知道了这三个分速度，也就等于知道了质点的速度矢量：

$$\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}3\text{-}4)$$

常用的速度单位有“米/秒”、“厘米/秒”等等。

4.质点的加速度 在研究力学问题的科学实践中，人们发现不但要讨论质点的速度，而且要谈到质点速度的变化。描述这种变化的快慢和方向的物理量，叫做质点的加速度。实践证明，加速度也是矢量。在直角座标系中，质点的加速度$\boldsymbol{a}$和它的三个直角分量等效；这三个分加速度的定义是：

$$\left.\begin{aligned} a_x&=\frac{dv_x}{dt}\left(=\frac{d^2x}{dt^2}\right)\\ a_y&=\frac{dv_y}{dt}\\ a_z&=\frac{dv_z}{dt}\end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}5)$$

知道了三个分加速度，也就等于知道了质点的加速度矢量：

$$\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \qquad (1\text{-}3\text{-}6)$$

常用的加速度单位有“米/秒^2”、“厘米/秒^2”等等。

那么，照这样搞下去，还要不要讨论“加加速度”乃至更高阶的导数呢？我们说，一般不需要了。应该算到哪一阶导数，要看反映客观规律的需要来确定，并不是为计算而计算。在古典力学中，当叙述或总结基本原理时，要用到加速度，所以我们就定义它和计算它；一般用不到加速度的导数，所以我们就不讨论它，也不专门给它立个“加加速度”的名目。

〔例题〕 有一个质点，沿着半径为r的圆周均匀转动，如图1-4所示。设质点的速度绝对值（叫做**速率**）是v，质点矢径每秒转过的角度是$\frac{d\theta}{dt}=\omega$。我们在质点的运动平面上画一个二维直角座标系，并取圆心作为座标原点。当质点恰好位于X轴上时，

我们开始计时，即取这一时刻为 $t=0$。于是，在任意时刻 t，矢径和 X 轴的夹角是 $\theta=\omega t$。我们的目的是计算质点的速度和加速度。

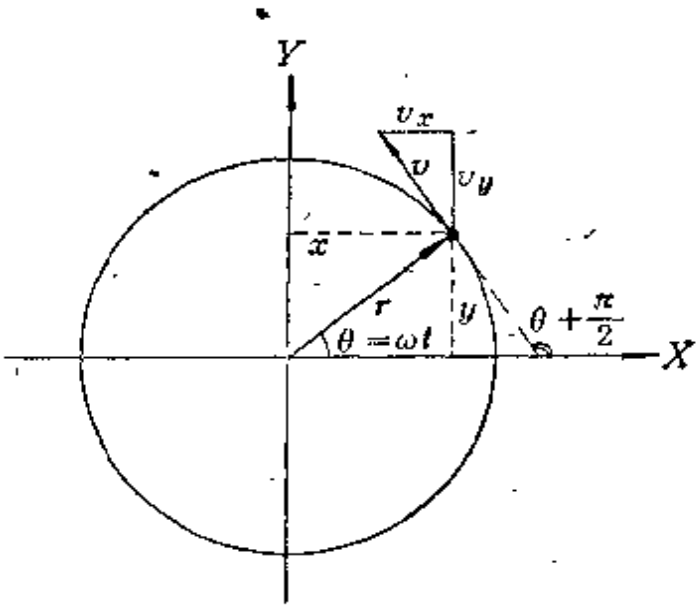


图1-4　质点的匀速率圆周运动

利用上面的定义公式直接计算就行了。由图可见，质点的座标是：

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta = r\cos\omega t \\ y &= r\sin\theta = r\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}7)$$

式中 r 是矢径的绝对值；因为是圆周运动，在运动过程中 r 的值不变。

将上式对 t 求导数，就得到质点的分速度：

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = -r\omega\sin\omega t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = r\omega\cos\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}8)$$

有了分速，就能求出速度的大小和方向。其大小是：

$$|v| = \sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{r^2\omega^2\cos^2\omega t + r^2\omega^2\sin^2\omega t} = r\omega \qquad (1\text{-}3\text{-}9)$$

速度矢量和 X 轴的夹角 θ' 由下式确定：

$$\mathrm{tg}\theta' = \frac{v_y}{v_x} \qquad (1\text{-}3\text{-}10)$$

将(1-3-8)代入，得到：

$$\mathrm{tg}\theta' = -\mathrm{ctg}\theta$$

从而：

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}。 \qquad (1\text{-}3\text{-}11)$$

这就表明，速度矢量垂直于矢径，也就是沿着圆周的切线。

接着求加速度。利用(1-3-5)，得到：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{dv_x}{dt} = -r\omega^2\cos\omega t \\ a_y &= \frac{dv_y}{dt} = -r\omega^2\sin\omega t \end{aligned}\right\} \qquad (1\text{-}3\text{-}12)$$

从而得到加速度的大小是：

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = r\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r} \qquad (1\text{-}3\text{-}13)$$

这就是中学物理课本上常见的公式。我们看到，尽管质点是均匀转动的，尽管它的速率 v 是一个常量，但是，因为它的速度方向不断地在变化，所以它的加速度并不等于零。因此，匀速圆周运动事实上是一种加速运动。

现在再看加速度的方向。用 θ'' 代表加速度矢量和 X 轴的夹角，则该角的余弦是：

$$\cos\theta'' = \frac{a_x}{a} = \frac{-r\omega^2\cos\omega t}{r\omega^2} = -\cos(\omega t) = -\cos\theta$$

这就表明，$\theta'' = \theta \pm \pi$；也就是说，加速度是沿着半径指向圆心的，因此叫做**向心加速度**。

习题：1.确定质点的位置也要先选定参照体吗？试举例说明。

2.“质点是沿直线运动的”，这句话是不是也以一定的参照体为前提？试举例说明。

3.报纸上报道人造卫星的轨道和运动，通常用的是什么参照体？能不能用那个参照体来研究地球的公转和自转？为什么？

4.当以地球为参照体时，通常把座标系画成什么样子？有几种画法？试作图说明。

5.请你分别举出质点的直线运动、平面运动和空间运动的一些实际例子。

6.一质点沿直线运动，其运动函数是：

$$x = At^2 + Bt + C$$

式中 A、B、C 都是常量；试计算其速度和加速度，并分析所得结果。

7.一质点在一个平面上运动，其运动函数是：

$$x = At + B$$

$$y = Ct^2 + Dt + E$$

式中 A、B、C、D、E 都是常量，试计算其速度和加速度，并分析所得结果。怎样定出质点的轨线？

§.1-4. 刚体绕定轴的转动　角速度和角加速度

1.刚体绕定轴的转动　刚体可以看成是由许多小块合并成的；当各小块都够小时，就可以把每一小块看成一个质点。刚体的形状不会变化，从而它的各个部分是牢固地互相结合着的，彼此之间的距离是固定不变的；也就是说，刚体可以认为是由无限多个互相牢固结合着的质点构成的。这么多质点的运动，当然比单独一个质点的运动要复杂；就是说，刚体运动学比质点运动学更加内容丰富。概括地说，刚体的运动包括平动和转动两种方式。这些问题我们不再详细论述，只讲讲绕定轴的转动。

一个轮子绕着固定的轴转动，门的开合，窗的启闭，都可以看成刚体绕定轴的转动。我们设想刚体中有一条固定的直线，叫做轴线；刚体中位于轴线上的点固定不动，其他的点都在垂直于轴线的平面内沿着圆心位于轴线上的圆周运动；整个物体的这种运动就叫做绕定轴的转动。

图 1-5 代表刚体的一个垂直于轴线的截面，O_1 是轴线和截面的交点。在时刻 $t=0$，刚体位于虚线所示的位置；截面上某点位于 P_0。过了一会，到了时刻 t，刚体转过了一个角度，原

来位于 P_0 的那一点到达了 P。线段 $\overline{O_1P_0}$ 和 $\overline{O_1P}$ 之间的夹角叫做刚体在时刻 t 的**角位移**，通常用 θ 代表。显然，角位移是时间变量 t 的函数：

$$\theta=\theta(t) \qquad (1\text{-}4\text{-}1)$$

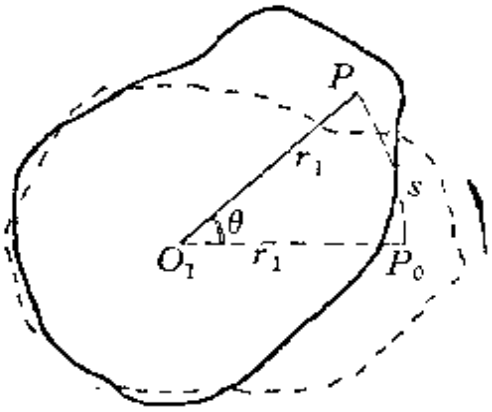


图1-5 刚体绕定轴的转动

刚体在转动中可以时快时慢，甚至可以有时向一个方向转，而有时向另一个方向转，因此，(1-4-1) 的具体形式可以相当复杂，不一定是线性式。这个函数叫做刚体的**定轴转动函数**；知道了这个函数的具体形式，就可以确定刚体在任意时刻的转动状态。

2.角速度和角加速度 在绕定轴转动的条件下，整个刚体的运动情况可以用它的角速度和角加速度来描述，而且这两个物理量可以简单地定义如下：

角速度
$$\omega=\frac{d\theta}{dt} \qquad (1\text{-}4\text{-}2)$$

角加速度
$$\beta=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (1\text{-}4\text{-}3)$$

在理论的讨论中，角度一般以弧度为单位，因此，通常角速度的单位是“弧度/秒”，有时简写作“秒$^{-1}$”；角加速度的单位是“弧度/秒^2”，有时简写作“秒$^{-2}$”。

3.线量和角量之间的关系 我们指出，角速度和角加速度是描述刚体的整体运动情况的。另一方面，当绕着定轴转动时，刚体上不同的点，一般说是运动得不一样快的。由图 1-5 可见，用 r_1 代表线段 $\overline{O_1P_0}$ 和 $\overline{O_1P}$ 的长度，用 s 代表圆弧 $\overset{\frown}{P_0P}$ 的长度，就有：

$$s=r_1\theta \qquad (1\text{-}4\text{-}4)$$

既然考虑的是刚体，在转动中 r_1 是不变的。从而就有：

$$\frac{ds}{dt} = r_1 \frac{d\theta}{dt} \qquad (1\text{-}4\text{-}5)$$

另一方面，所考虑的刚体上某点 P 的速率是：

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

但是，当 ds 很小时，我们有 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$。代入上式并利用（1-4-5）式，就得到：

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \frac{ds}{dt} = r_1 \frac{d\theta}{dt} = r_1\omega \qquad (1\text{-}4\text{-}6)$$

这一关系式，我们在前面的例题中已经得出过，但是那时考虑的是等角速度的情况，现在我们看到，这一关系式在变角速度的情况也成立。相对于角速度和角加速度来说，上节讲过的 v 和 a 叫做质点的线速度和线加速度。（1-4-6）式表示了线速率和角速度的关系。

加速度的情况比较复杂一些。线加速度矢量 a 一般并不和轨线相切；它在轨线切线上的分量叫做切向加速度，其绝对值写作 a_t。可以证明，a_t 和 β 之间存在下列关系：

$$a_t = r_1\beta \qquad (1\text{-}4\text{-}7)$$

式中的 r_1 仍是刚体上从某点 P 到轴线的垂直距离。

4.角速度矢量 为了表述问题的方便，常常有必要用一个矢量来表示角速度。表面看来，这个矢量的定义显得相当别扭，事实上，它在理论推导中使用起来却是颇为方便的。

我们先看图 1-5。轴线固定时，刚体可以有两种转动方向，即顺时针方向和逆时针方向。怎么区别这两种情况呢？很“凑巧”，一条轴线也有两个方向，即由“前”向“后”和由“后”向“前”。为了同时表示出角速度的大小和方向，我们设想沿着轴线画一个矢量，规定用其长度表示 ω 的大小，其方向按右手螺旋法则来确定。什么叫右手螺旋法则？这是为了大家理解一致面

定下来的一个"公约"。这法则有好几种内容完全相同的不同叙述方法。结合我们现在的问题，可以这样叙述：在图 1-5 中，如果刚体逆时针转动，则角速度矢量要从纸面指向我们；反之则从纸面背向我们。这怎么叫做右手螺旋法则呢？很容易回答。设想一个右手螺旋（例如普通的螺丝钉）和刚体一起向同方向转动，其螺旋轴线前进的方向就**规定为**角速度矢量的方向。例如，如果螺旋在图 1-5 中沿着逆时针方向转动，那就是"卸"螺钉，当然螺钉轴线要向我们移动，因此**规定**角速度矢量要从纸面指向我们。再强调一遍，这样的法则只是人们在反映客观规律时**人为地**规定下来的"公约"，它本身并不是什么客观规律。但是，这种规定已经"约定俗成"，已经为大家所公认，人们在许多问题中都同意使用它，因此，希望读者能够把它的意义弄清楚，不要搞混！

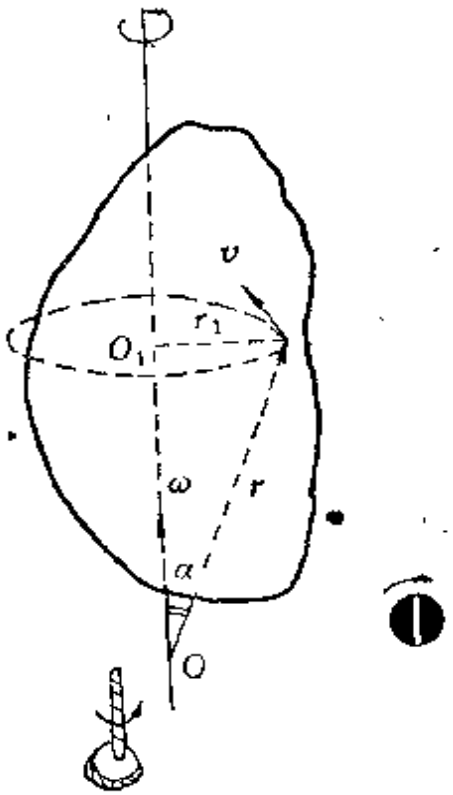


图1-6 角速度矢量和线速度矢量

现在讲角速度矢量。上面那些规定，还可以用图 1-6 来表示。图中的刚体，向着弯曲箭头所指示的方式转动。如果竖直的螺丝钉也向这个方向转动，则其轴线向上运动，所以我们把角速度矢量 ω 向上画。现在看刚体上的任意一点；用 $\boldsymbol{r}$ 代表从轴线上任意选定的原点 O 向这一点画的矢径，则由图可见，该点到轴线的垂直距离是：

$$r_1=|\boldsymbol{r}\sin\alpha| \qquad (1-4-8)$$

式中 α 是矢径和角速度矢量之间的夹角，其正弦一般写作 $\sin(\boldsymbol{r},\omega)$。前已得到，这一点的线速率 $v=r_1\omega$，将 (1-4-8)代入，就得到：

$$v=r_1\omega=|\boldsymbol{r}|\omega|\sin(\boldsymbol{r},\ \omega) \qquad (1-4-9)$$

于是我们可以将刚体上任一点的线速度写成下列的矢积形式：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} \qquad (1\text{-}4\text{-}10)$$

这意思就是，$\boldsymbol{v}$ 的大小由（1-4-9）式确定；$\boldsymbol{v}$ 的方向由下述的右手螺旋法则来确定：设想垂直于 ω 和 $\boldsymbol{r}$ 所确定的平面有一个右手螺旋，如图中右侧的螺丝钉帽所示，如果我们按照通过二者的夹角把 ω 转向 $\boldsymbol{r}$ 的方向旋转这个螺旋，则螺旋前进的方向规定为矢积的方向；由图可见，这恰好就是 $\boldsymbol{v}$ 的方向。

这里我们引用了二矢量的矢积这一概念。任意两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢积 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 定义如下：（1）$\boldsymbol{c}$ 的大小是 $|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$；（2）$\boldsymbol{c}$ 的方向由右手螺旋法则确定，就是说，若通过二者的夹角将 $\boldsymbol{a}$ 转向 $\boldsymbol{b}$，并沿着相同的方向旋转一个右手螺旋，则螺旋轴线前进的方向就代表 $\boldsymbol{c}$ 的方向。由图 1-7 可见：(1)二矢量的矢积永远垂直于该二矢量所确定的平面；(2)矢积的量值等于该二矢量所确定的平行四边形面积的量值。

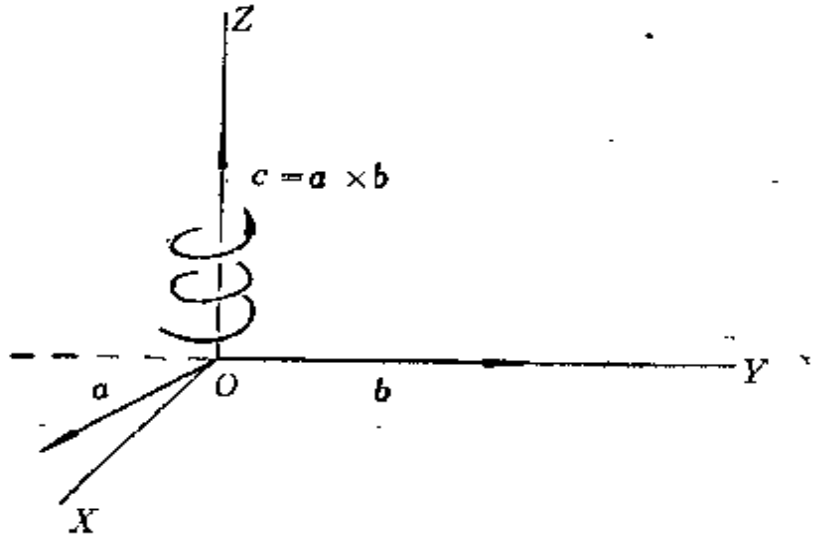


图1-7　二矢量的矢积

我们指出，矢积的概念以后还要多次用到；同时，作为（1-4-4）之矢量形式的（1-4-10），以后也还要用到。角加速度的矢量形式在此从略。

习题：1.地球的公转算不算绕定轴的转动？自转算不算？为什么？

2.若计算的结果〔利用(1-4-2)和(1-4-3)〕得到$\omega<0$或$\beta<0$，这代表什么情况？

3.参阅图 1-5，若最初所取之点不位于P_0而位于另一点P_0'，则得到的转动函数(1-4-1)是否和取P_0时有所不同？为什么？

4.设某一刚体的转动函数是

$$\theta = At^2 + Bt + C$$

式中A、B、C是常量，试计算这一刚体的角速度和角加速度。

5.关于二矢量的矢积，试根据定义证明：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b} = 0$$

6.如果转动物体不能看成刚体，而是可以变形的，(1-4-10)式还有没有意义？

§.1-5. 质量和力

从数学的观点看来，知道了一个质点在各时刻所在的位置，或者说知道了它的运动函数，通过适当的微分计算，就能求出它在各时刻的速度和加速度；反过来，知道了质点在各时刻的加速度，并且知道了它在某一时刻的位置和速度(这叫做初值条件)，通过适当的积分计算，就能求出它在各时刻的速度和位置，从而也就确定了它的运动过程。这些问题都是**质点运动学**的内容。质点运动学讨论的是一个质点可能有什么样的运动，而不研究它在什么条件下才会如此这般地运动。力学中研究机械运动的内在根据和外界条件的那一部分，叫做**动力学**，而质量和力就是动力学中特别重要的两个概念。物理学中的各种概念，尤其是那些很重要、很基本的概念，仔细分析起来都会涉及许许多多的科学问题和哲学认识论的问题。我们不管那些，只做简单地介绍，目的是为了能够接着讲后面的问题而不至显得突如其来。对于质量和

力，读者有个大概的了解就可以了。

1.质量　有人认为质量是物体中“物质的多少”即“物质的数量”的量度；有人认为那种说法还值得商讨(理由不在这里多讲)。他们认为，力学中质点的质量，应该说是**质点的惯性大小的量度**。什么叫惯性，我们等会儿再讲；现在只说，质量是惯性大小的定量表示，惯性较大的质点就算作质量较大。实践证明，不同的质点具有不同的惯性，从而也就具有不同的质量❶。对于古典力学中的质点来说，质量就是它最基本的固有特征；在古典力学中，一个质点的质量在运动过程中是不变的，就是说，它是一个不随时间而变的常量。

物理学中最常用的质量单位是“公斤”，其次是“克”、“吨”等等。这些单位是怎样规定的，我们也不多讲，总之都是公约性的规定就是了。1 吨 = 1000公斤；1 公斤 = 1000克。

附带说说，目前所知的“最小的”物体叫做电子（且不谈中微子)；实验证明，电子的半径不超过 10^{-15} 米。构成各种物体的各种原子和分子，其半径大约比电子的半径大了十万倍左右。前面讲过，这一类的小东西叫做微观物体或微观粒子。我们在日常生活和生产劳动中看到的形形色色的物体，都比电子大了许多亿倍；这些物体叫做宏观物体。另外还有一种物质叫做场（例如电磁场等等)。所有这些东西都有自己的质量。宏观物体的质量可以用天平之类的仪器来测定。带电微观粒子的质量可以用叫做质谱仪的仪器来测定。不带电的微观粒子的质量可以通过它和其他粒子的碰撞来测定。场的质量可以根据它的能量来求出。这些问题我们不再仔细讲，读者只要知道有办法定出各种物体的质量就行了。

在以下的讨论中，我们将只考虑宏观物体。

2.力　任何物体都不是孤立的，它经常和其他物体发生相互

❶ 生活中常常谈到某一产品、某一工作、某一干部、某一大学生的“质量”，那只是说的“品质”或“水平”而已，和物理学中所说的质量不是一回事。例如，说一部汽车的“质量”高，当然不是说它“惯性大”。

联系和相互作用。从初等物理学的角度来看，这种相互作用有各式各样，例如力学的、热学的、电磁的、光学的作用等等。物体之间的**力学的相互作用**，表现为使各物体的速度有一种发生变化的倾向，就是说使各物体趋于做加速运动。这样的相互作用，就叫做物体之间的**相互作用力**。例如，你用手扔一块石头，一使"劲儿"，那石头就飞了出去，它的速度从零变成了不是零，它的速度改变了，所以我们说手对石头作用了力。石头一离开手，手对它就"无能为力"了，想拉也拉不住，想推也推不着了；这时手对石头的作用已经停止了。但是我们发现，这时石头的运动还是不断地在变化，运动的快慢和方向都在变化。于是我们断定，一定是有什么东西对这块石头作用了力。进一步的研究发现，这所谓"什么东西"原来是地球（或者说地球的重力场）和被石头不断打击着的空气，而这两种力就叫做**重力和空气阻力**。

经验证明，物体之间的作用力总是"相互的"，而不是单方面的，不是"来而不往"的。物体 A 对物体 B 作用一个力，物体 B 必然同时对物体 A "回敬"一个力。力总是**成对出现的**，总是有受力的物体和施力的物体，不然那就算不得"真正的"力。但是，在有些情况下，我们对互相作用着的两个物体也并不是"平等看待"的，往往对其中某一物体（例如石头）更注意一些。这时，那个更被我们注意的物体所受的力就叫做**作用力**，而那个不太被我们重视的物体（例如扔石头的手）所受到的"回敬"力就叫做**反作用力**。作用力和反作用力，是一对矛盾中的两个方面；到底把哪个力叫做作用力，要看研究的是哪个物体的运动来确定。

经验证明，力是矢量，既有大小又有方向。物理学中最常用的力的单位叫做"牛顿"，其次常用的单位叫做"达因"。另外还有两种所谓的实用单位(工程单位)，叫做"公斤力"和"克力"。所谓"公斤力"或"克力"，就分别是质量为1公斤或1克的物体在纬度45°的海平面上所受的重力。这些单位的详细规定不在此多讲，只把它们之间的关系写在下面：

$$1\text{牛顿} = 10^5\text{达因} = \frac{1}{9.8}\text{公斤力} = \frac{1}{9.8}\times 10^3\text{克力}$$

为了使大家对这些单位有一个直观的印象，我们举几个生活中常遇到的例子。表 1-1 中列出了我们用天平测得的我国通用的三种辅币的质量。例如，二分辅币的质量是 $m_2 = 1.100$克；当我们用手静静地托着这样一个辅币时，我们的手掌所受到的压力就等于这枚辅币所受的重力。这重力就等于 $w_2 = 1.100$ 克力 $= 1.100 \times 980$ 达因 $= 1078$ 达因。就是说，1 达因小于这个力的一千分之一，那大约比一粒最小的小米压在我们手上的力还要小。再看，一千枚二分的辅币压在手上，那压力等于 1100克力 $= 1.1$ 公斤力 $= 1.1 \times 9.8$ 牛顿 $= 10.78$ 牛顿；就是说，1 牛顿的力比93个二分辅币压在你手上的力略小一些。这样，有了表 1-1，我们对质量的单位和力的单位就都可以有一个大致的印象了。

为了对照，表 1-2 中列举了几种微观粒子的质量。

表1-1 我国通行的三种辅币的质量

名　　称	质　量（克）
一分辅币	$m_1 = 0.670$
二分辅币	$m_2 = 1.100$
五分辅币	$m_3 = 1.710$

表1-2 几种重要基本粒子的质量

粒　　子	质　量（克）
电　　子	9.1091×10^{-28}
质　　子	1.6725×10^{-24}
中　　子	1.6747×10^{-24}

习题： 1.一分辅币的质量等于质子质量的多少倍？等于电子质量的多少倍？

§.1-6. 牛顿力学三定律

自古以来，人们在生活和劳动中随时都遇到力学问题。当搭一个遮蔽风雨的棚子时，应该采用什么样的树枝才能使棚子不会坍下来？第一个石斧是敲击出来的，应该怎样敲击才能达到预期的目的？特别是，当用石头打一只野兽时，应该怎样扔那石头？

这样的问题肯定早在原始时期就已存在，而且是人类在亿万次的实践中根据经验已经逐步解决过的。因此，从很早的时代，人类就已经具备了某些力学知识了。人们起初是积累了一些有关静力学（即力的平衡规律）的知识，后来也积累了一些有关动力学的知识。在我国的古籍中，有着不少这方面的记载。例如，在《墨子全书》中，就记载了现代力学原理的某些雏形。但是，作为一门系统自然科学的古典力学，是十五世纪才开始出现的。当时欧洲的某些国家开始发生社会大变动，原来的封建社会开始向资本主义社会过渡。当时新出现在历史舞台上的资产阶级要求发展工商业，在生产、商业、军事、航海等方面都进行了大量的社会实践，而且在上层建筑中也进行了政治的、经济的、学术的、宗教的激烈斗争❶。正是在这样的社会背景上，经过将近两个世纪的探索和奋斗，人们才在十七世纪比较系统地确立了古典力学的基本结构。在随后的二三百年中，这种结构进一步得到了巨大的充实和改进。

古典力学的理论基础，是根据大量实践经验总结出来的几条原理。在最常见的理论体系中，这几条原理被表述为所谓牛顿定律的形式。前面讲过，这种原理只适用于宏观物体的低速运动，这是因为在总结这些原理时人们的实践还只限于这种运动的研究和应用。在本书后面各章的论述中，我们要直接间接地用到牛顿定律，因此我们在此把这三条定律叙述一下；至于和各定律的应用有关的种种问题，我们不能在这里一一罗列和详细讨论。

1.第一定律（惯性定律） 我们的叙述不是牛顿的原话，也不完全是他的原意；我们的目的是为了便于应用，而仍然不追求什么逻辑形式上的严密性。定律叙述如下：

当一质点不受力或所受的合力为零时，
质点将保持静止或做匀速直线运动。

这句话的意思是，当质点不受力或所受的合力为零时，它就没有加速度，它的速度的大小和方向就保持不变；换句话说，要使质

❶ 参阅《马克思恩格斯选集》第三卷第144～447页。人民出版社1972年版。

点的速度发生大小或(和)方向上的改变，必须对它作用以力，否则它就“顽强地”保持自己的运动状态。物体这种保持运动状态不变的固有顽强性，就叫做它的惯性；前面讲过，表示一质点之惯性大小的物理量就叫做物体的质量。

惯性是一切物体都具有的一种共性；它的存在，反映着物体的机械运动不能无缘无故地产生或消失这样一个客观事实。因此，恩格斯在《自然辩证法》中写道：“力学：它的出发点是惯性，而惯性只是运动不灭的反面表现；”❶第一定律反映了惯性的普遍存在，所以又叫做**惯性定律**。

我们指出，静止是运动的特殊情况(即速度 v 保持为零的情况，或者说 $v=a=0$ 的情况)。质点不受力或所受合力为零时将保持静止或匀速直线运动的状态，所以这两种状态叫做质点的**自然状态**。第一定律断定了什么是自然状态，澄清了历史上关于机械运动的许多模糊观念。有了这一定律，我们就能判断所研究的质点在什么时候受了力和在什么时候没受力（合力为零也算没有受力）。

2.第二定律 由第一定律可以推知，当一个质点受到的合力不等于零时，它就是加速运动的；换句话说，作用力和质点的加速度是同时出现、同时消失的。那么，力和加速度之间的量的关系又是怎样的呢？牛顿第二定律回答了这个特别重要的问题。我们用自己的语言将这一定律叙述如下：

设质量为 m 的质点在某时刻所受的合力是 f，它在该时刻的加速度是 a，则有：

$$f = kma \qquad (1\text{-}6\text{-}1)$$

式中 k 是比例常量。

上式中比例常量 k 的值，取决于测量各有关物理量时所用的单位。要知道，为了使用方便，科学中的各种单位是按照适当的要求“配了套”的；每一种配套方式叫做一种**单位制**。当使用同一单位制时，许多基本定律的表示式都可以得到一定的简化。在

❶ 恩格斯，《自然辩证法》正文第1页，人民出版社1957年版。

力学中，如果 f、m、a 的单位分别用“牛顿”、“公斤”、“米/秒^2”（这叫做 MKS 单位制），或是分别用“达因”、“克”、“厘米/秒^2”（这叫做 CGS 单位制），则上式中的 $k=1$（当初就是按照这种要求配的套），从而牛顿第二定律的表示式变为：

$$\boldsymbol{f}=m\boldsymbol{a} \tag{1-6-2}$$

在直角座标系中写成分量式，就是

$$\left.\begin{aligned} f_x &= ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} \\ f_y &= ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} \\ f_z &= ma_z = m\frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-6-3}$$

这就是我们经常要用的基本方程组；这才是真正的**质点运动方程组**。

牛顿第二定律以一种鲜明的方式表现了质点机械运动的外在条件（力）和内在根据（质量）之间的关系。这是力学中应用最广泛的一条定律。根据这一定律，知道了质点的质量 m（固有的本性）和它**在每一时刻**所受的力 $\boldsymbol{f}(t)$，就很容易定出它在**每一时刻的**加速度 $\boldsymbol{a}(t)$。做到了这一步，问题就归结为运动学的问题了。如果再知道了质点在**某一时刻** t_0 的速度和位置（初值条件，初状态），就可以通过适当的积分运算求出它**在每一时刻**的速度和位置，这样就能详细地确定了质点的全部运动过程。这就是力学中最基本的问题。

必须指出，质点在任一时刻的加速度，只和它在同一时刻所受的力有联系，而和它在一切别的时刻所受的力都没有联系；就是说，牛顿第二定律的表示式(1-6-2)和(1-6-3)是**针对每一时刻写出的**，从而它才实质上是一个或一组**微分方程**。记得这一点，对于分析问题和建立基本方程是有一定好处的；特别是初学者，往往因为没注意这一显然的情况而把问题搞混。

由(1-6-2)和(1-6-3)可见，不但可以根据合力和质量求出质点的总加速度，而且可以根据分力和质量求出质点的分加速度。就是说，质点在某一方向(例如X方向)上的分加速度(a_x)，只和相应的分力(f_x)有关，而和其他的分力无关。这一经验事实，在某些力学书上被叫做“力的独立作用原理”或“牛顿第零定律”。其实，只要将第二定律表示成(1-6-2)那样的矢量关系式，就已经把这一事实概括在内，从而也就用不着另外再讲这么一条“原理”(而且往往讲得很纠缠)了。

3.**第三定律**(反作用定律) 这一定律作为普遍的规律肯定了力的相互性。我们把它叙述如下：

> **当质点A受到质点B的一个作用力f时，质点B必同时受到质点A的一个反作用力f'，这两个力大小相等、方向相反，而且都沿着质点A、B的连线。**

第三定律的数学形式一般写成：

$$f = -f' \qquad (1\text{-}6\text{-}4)$$

但是这一表示式还没有表示出力沿A、B连线这一事实，因此必须补充上另外一个表示式：

$$f \times (r_A - r_B) = f' \times (r_A - r_B) = 0 \qquad (1\text{-}6\text{-}5)$$

式中r_A、r_B分别代表A、B二质点的位置矢径。必须指出，作用力和反作用力是作用在两个质点上，而不是同时作用在一个质点上的。

〔例题〕 一个质量为m的质点，沿着半径为r的圆周作匀速率圆周运动，求这个质点所受的力。

〔解〕 解决力学问题也和作别的事一样，必须坚持原则而最忌主观臆测。什么是力学中的原则？那便是经过无数客观事实验证的一些基本原理。刚一看到这个题目，你可能觉得不知怎么下手。其实，只要真正掌握了牛顿定律，这个题目是再简单不过了。在前面的例题中，已经算出了匀速率圆周运动情况下的加速度，那是一个指向圆心的向心加速度，其量值是，

$$a_{向心} = -\frac{v^2}{r}\vec{r}$$

于是，根据第二定律，质点所受的力必然也指向圆心，其量值是：

$$f_{向心} = ma_{向心} = \frac{mv^2}{r} \qquad (1\text{-}6\text{-}6)$$

问题已经解决了。我们的结论是：当一个质点作匀速率圆周运动时，它只受到一个向心力；如果它还受到别的力，它就不可能作匀速率圆周运动。这种结论是经过无数的实验验证了的。我们举这个极其简单的例子，就是要说明什么是正确的科学态度。有些人头脑中存在着一种模糊的想法，认为质点应该还受到一个什么“离心力”。例如，甚至在一些谈论人造地球卫星的通俗作品上，都公然论述这种观点；那是完全错误的，至少是完全弄混淆了的。

4.关于牛顿定律的几点说明 前面讲了，牛顿定律是古典力学的理论基础。这三条定律看起来似乎很简单，而事实上它们的内容是十分丰富的，它们的概括性是深远而广阔的。我们在这里不能稍许详细地论述那些问题，但是我们觉得还是有必要提到下列几点：

(i)**关于惯性参照系**——前面讲过，描述物体的机械运动，必先选定参照系；那么，当应用牛顿定律时，我们选的是什么样的参照系呢?是任意选一个参照系就行吗?显然不是。还拿从前举过的例子来说明就行了。设一列火车是相对于地面做加速运动的。车上的乘客取火车作参照体，他看到他的茶杯是静止的，从而根据第一定律断定茶杯没有受到力。地上的人取地面作参照体，他看到那茶杯是跟着火车加速前进的，从而也根据第一定律断定那茶杯受了力。他们两位的意见又发生了分歧，而且这回的分歧比上一次的深刻，很不容易调和。进一步的研究表明，在应用牛顿定律时，参照系必须选得合适，才能顺利地解决问题，否则就会遇到一些困难，而且有些现象还似乎解释不通。这种选择

得合适从而保证了牛顿定律的顺利应用的参照系，就叫做**惯性参照系**。例如，经验证明，当讨论地球附近不太巨大的宏观物体的运动时，取地球作参照体就能得到“差强人意”的结果；就是说，应用起牛顿定律来就基本上没什么困难。如果更进一步，取太阳作参照体，就能得到更好的结果，应用起牛顿定律来就更加顺利。总而言之，经验证明，是可以找到相当好的惯性参照系的。这问题涉及的方面也很多，根子也极深，我们就只讲到这个深度吧。

(ii)**牛顿定律和我们的经验**——牛顿定律是根据人们长期的实践经验总结出来的，而且也经历了几百年的实践经验的考验。但是，它们**不是很简单、很直捷了当地**被总结出来，而是经过了许多人的艰苦努力，经过了多方面的探索和尝试，经过了多次的“去粗取精、去伪存真、由此及彼、由表及里”的抽象概括的功夫才得出的“论理的认识”。毛泽东同志说过：“重复地说，论理的认识所以和感性的认识不同，是因为感性的认识是属于事物之片面的、现象的、外部联系的东西，论理的认识则推进了一大步，到达了事物的全体的、本质的、内部联系的东西，到达了暴露周围世界的内在的矛盾，因而能在周围世界的总体上，在周围世界一切方面的内部联系上去把握周围世界的发展。”❶正因为牛顿定律是这种论理的认识，和我们的片面的感性认识有着一定的距离，才使有些初学者觉得定律的内容在某些方面似乎和我们的直觉想法不一致。我们学习科学，常常遇到这种困难；那时就需要深入细致地对问题进行分析，而不应该粗枝大叶地、匆忙地凭主观想象去下结论。

(iii)**再谈谈适用范围问题**——特别是经过本世纪最初几十年的探索，以牛顿定律为其基础的古典力学的适用范围，可以说已经完全弄清楚了。在这个范围之内，事实证明古典力学是经得住实践考验的相对真理。因为自然界是有规律性的，所以不能设想**在这个适用范围之内**会出现任何违反牛顿定律的例外事件。有时

❶ 《毛泽东选集》袖珍合订本，第263页。

候，我们似乎发现了那样的事件；例如，在研究运动带电体的相互作用力时，人们发现它们之间的“洛仑兹力”不服从反作用定律。遇到这样的情况，我们不是轻率地否定经过千百万次实践考验的牛顿定律，而是更仔细、更深入地分析那“例外”事件。分析的结果，我们会找到起先被忽略了的因素；当把那种因素考虑在内时，那事件就和古典力学取得了谐调。例如，进一步分析洛仑兹力的结果，发现只要将电磁场也看作起作用的物质，牛顿第三定律就照样是成立的。

(iv)**古典力学和哲学上的机械决定论**——我们先后两次提到了“初值条件”。为什么要有这种条件呢？理由很简单。(1-6-3)是包括三个微分方程的一个方程组。把这个方程组积分一次，就得到质点的三个分速度；在积分时，会引入三个积分常量；要确定这三个常量的值就需要知道质点的三个分速度在初始时刻的值，即 v_{x0}、v_{y0}、v_{z0}。接着再积分一次，得到质点的运动函数；这时又引入三个积分常量，从而又需要知道质点的三个初始座标值。总而言之，质点的质量是不难知道的，如果我们知道了质点**在一切时刻**所受的力，又在**某一时刻**精确测定了它的速度和位置，那么，在原理上，我们就能够算出它**在一切时刻**的速度和位置，也就是定出它在全部时间中的整个运动过程；例如，我们可以追溯它在一百亿年以前的运动状态，也可以预言它在五千亿年以后的运动状态。世界上会有这样的事吗？看来是不会有的。但是，根据力学的原理，似乎非有这样的事不行！从十七世纪古典力学作为一个科学体系被提出以后，它越来越多地取得了胜利，不但能够说明地球上各种物体的运动，而且也解释并预见了以前认为很难理解的天体运动。尤其是到了十九世纪，甚至连电磁现象也被纳入了这样的体制之中。这种情况影响了人们对自然界的根本看法，影响了哲学上的认识论。有些人认为，整个宇宙可以看成是由极多的质点构成的，如果有一个“超天才”的“大数学家”，能够写出所有质点的运动方程，并且在某一时刻测定了宇宙的初始状态，他就等于掌握了“全部的宇宙秘密”。退一步

讲，就算没人能够做到这一步，宇宙的整体也应该完全按照上述这种方式发展，它的未来，包括它每一组成部分的未来都是由完全确定的规律支配着的，是早已规定好了的，是一点也无法改变的。这样的哲学就叫做机械决定论或拉普拉斯决定论。机械决定论者将物质的运动全都归结为机械运动，他们对科学概念加以不适当的绝对化，他们不理解科学理论。是有一定适用范围的相对真理，不理解必然性和偶然性的辩证关系，他们根本否认偶然性，结果却“把必然性降低为纯粹偶然性的产物”。这种哲学也承认外部世界的客观存在，从而基本上是唯物的，但是它在客观世界的规律性方面有着一系列的错误认识和错误理解，从而“还是没有从神学的自然观中解放出来”，甚至有时还是不得不声称“上帝”就是上面提到过的那位“大数学家”。

恩格斯在《自然辩证法》中用犀利而幽默的笔调对这样的哲学进行了深入透彻的分析和批判❶，有兴趣的读者可以参看。

5.动量和冲量 让我们再看看质点的运动方程(1-6-2)。前面讲过，在古典力学中，物体的质量被看成一个常量，从而(1-6-2)式可以改写一下：

$$\boldsymbol{f} = m\boldsymbol{a} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\boldsymbol{v}) \qquad (1\text{-}6\text{-}7)$$

现在引入一个新的物理量 $\boldsymbol{p}$，叫做质点的**动量**，它的定义如下：

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} \qquad (1\text{-}6\text{-}8)$$

于是质点的运动方程又可以写成：

$$\boldsymbol{f} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (1\text{-}6\text{-}9)$$

就是说，**质点所受的合力，等于质点动量的增加率**。这是牛顿第二定律的另一种表述方式。如果我们在一段时间(t_1，t_2)中求(1-6-9)式的积分，就得到：

$$\boldsymbol{I} = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{f}(t)dt = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta\boldsymbol{p} \qquad (1\text{-}6\text{-}10)$$

❶ 《马克思恩格斯选集》第三卷第540～544页，人民出版社1972年版。或参阅《自然辩证法》第180～183页，人民出版社1957年版。

力在一段时间内的积分 I，叫做它在该段时间内的**冲量**。(1-6-10)式表明，力在一段时间内的冲量，等于质点动量在这段时间之内的增量。这一结论，在古典力学中是作为牛顿第二定律的推论而得出的。但是，这样的讨论并不是只有表面上的、形式化的意义。例如，在打击、碰撞之类的过程中，力的作用时间很短，而它的变化又很复杂，从而要详细知道每一时刻的作用力是很不容易的，但是，根据所研究物体的动量的改变，却很容易定出力的冲量的值。不但如此，将(1-6-9)分别应用于作用力和反作用力，并利用第三定律，很容易推出**动量守恒定律**(推导很容易，在此从略)：设有由若干个物体构成的一个系统，如果它不受到系统以外其他物体的作用力，或是虽受到外界作用力而其合力为零，则系统内部各物体不管如何互相作用(碰撞、爆炸，随便怎么"折腾")，它们的动量的**矢量和**是不会改变的。这一结论本身，在研究物体的相互作用时就是很有用的。这本来是古典力学的结论。但是，自从进入本世纪以来，人们研究了许多远远超出古典力学适用范围的现象(高速运动和微观运动)；人们发现，虽然古典力学的定律对那些现象已经完全不适用，动量守恒定律(或原理)却仍然是成立的(但要对动量的概念加以适当的修订和推广)。这样，动量这个概念的重要性就远远超出了古典力学的范围。时至今日，人类的物理知识已经比以前丰富了许多倍，但是，还没有发现任何一个现象是违反动量守恒定律的。看来这一定律已经成为恩格斯所说的第四类判断，就是说，它反映着自然界的一种普遍的规律，新现象只能充实它，验证它，而不会推翻它了❶。

习题：1.什么叫惯性？一个人因循守旧，对新事物很不敏感，他的"惯性"是不是很大？

2.雨中开车，车轮上水珠四溅，是不是车轮对水珠作用了一个"离心力"？如果不是，为什么水珠会乱溅？

3.你怎样理解物体间作用力的"相互性"？手扔石头，石头

---

❶ 参阅《马克思恩格斯选集》第三卷第545～548页，人民出版社1972年版。或参阅《自然辩证法》第185～187页，人民出版社1957年版。

也“扔”手吗？石头打击空气，空气也“打击”石头吗？在图 1-8 中，人拖着石头在地上前进；根据第三定律，人拖石头，石头必然拖人，那么人和石头为什么能够前进？



图1-8　人拖石头沿地滑行

4.提着自己的头发，谁也不能把自己提得离开地面，但是连几岁的孩子也能从地上跳起来；这是为什么？

5.射击时枪会反冲，手榴弹爆炸时弹片从来不会只向一个方向飞去，这是为什么？

6.什么是动量？怎样理解？跑马拉松的运动员比跑百米的运动员“运动量”大，他们两位谁的动量大？

7.什么是冲量？是我们通常所说的“冲劲”吗？

§.1-7.　功和能

我们常听到别人说起“能量”，自己也跟着说。听得久了，讲得多了，也就对“能量”有了一点初步的印象。但是，问你“能量”到底是什么，你或许就说不上来。因为把那定义背了几千遍，也还是不能解决多大问题。要完全彻底地把能量概念解释清楚，就又几乎要牵动全部的自然科学——而且还要扯到哲学上去(又是哲学)！那怎么办？我们打算在这一节中做些初步的介绍，主要是讲讲“机械能”。机械能分成两种，叫做动能和位能。它们都和力做的功有关，因此我们先要讲讲功。

1.力对质点做的功　在生产劳动中，我们常常要计算工作量。计算的标准有各式各样，例如工作时间、产品数量、完成的地震测线公里数或是编写教材的字数。在力学中，我们有一种统一的、公认的计算工作量的办法，而且把工作量改称为**功**。

这种计算功的方法也是根据实践总结出来的，不是平空出现或任意规定的。但是，为了不把问题扯得太远，我们不再讲那些

来龙去脉，而只讲讲现在我们是怎样计算功的。

先看简单情况。设有一个恒定的、即大小和方向都不改变的力 $\boldsymbol{f}$ 作用在一个质点上；设在这个力(也可以还有别的力)的作用下，这个质点从一点 P_1 沿直线运动到另一点 P_2，如图1-9所示；我们用 $\boldsymbol{s}$ 代表质点的位移 $\overrightarrow{P_1P_2}$。**在这种条件下，力 $\boldsymbol{f}$ 对质点做的功 A 定义为 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 的标积：**

$$A = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{s} = fs\cos(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}) \qquad (1\text{-}7\text{-}1)$$

式中 f 和 s 代表力和位移的绝对值。

当然，$f\cos(\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s})$ 就是 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 上的投影 f_s，从而 $A = f_s s$。这就表明，力 $\boldsymbol{f}$ 可以分成两个分量，一个和 $\boldsymbol{s}$ 平行或反平行，另一个和 $\boldsymbol{s}$ 相垂直；前一个分力做功 $f_s s$，后一个不作功(即做的功等于零)。根据这样的定义，功是**标量**，有大小，有正负，而没有方向。常用的功的单位有：

1 焦耳 = 牛顿 · 米，

1 尔格 = 达因 · 厘米 $= 10^{-7}$ 焦耳。

有了上面的准备，就可以讨论一般情况了。设有一个变化的力 $\boldsymbol{f}$ 作用在质点上，而质点沿着一条曲线路程 s 从空间中的一点 P_1 运动到另一点 P_2，如图1-10所示。在这样的条件下，怎样计算力 $\boldsymbol{f}$ 对质点做的功呢？

这问题自己想想也能回答出来；显然应该计算积分。我们设

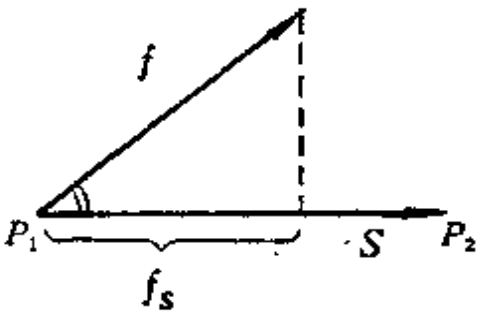


图1-9 常力沿直线位移做功的情况

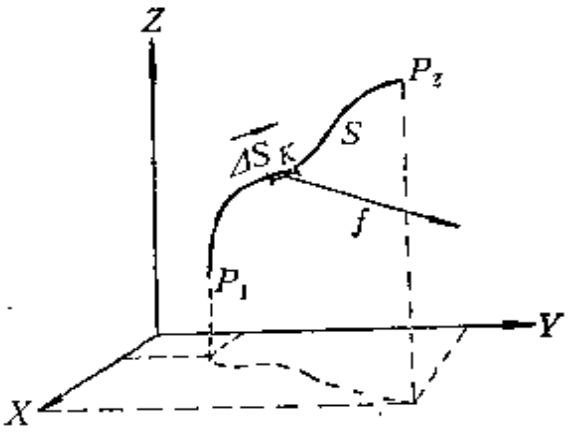


图1-10 变力沿曲线路程做功的情况

想将曲线分成无限多个小段，当每一段都够小时就会得到两个结果：第一，每一小段都可以看成曲线上的一小段切线，即看成直线段；第二，在同一小段的不同点上，可以认为力 $\boldsymbol{f}$ 的大小、方向都相同，即看成常力。这样一来，就可以利用刚刚讲过的方法来计算力 $\boldsymbol{f}$ 在每一小段上做的功了。图中的 $\overrightarrow{\Delta S_k}$ 就是许多小段中的一段，$\boldsymbol{f}_k$ 代表力 $\boldsymbol{f}$ 在这一小段上所取的值，于是力 $\boldsymbol{f}$ 在这一小段上做的功就是：

$$\Delta A_k = f_k \cos\theta_k \Delta S_k \qquad (1\text{-}7\text{-}2)$$

式中 θ_k 代表 $\boldsymbol{f}_k$ 和 $\overrightarrow{\Delta S_k}$ 的夹角。既然功是标量，力 $\boldsymbol{f}$ 在全路程 s 上做的功，就等于它在各小段路程上做的功的代数和：

$$\begin{aligned} A &= \Delta A_1 + \Delta A_2 + \cdots\cdots + \Delta A_k + \cdots\cdots + \Delta A_{最末段} \\ &= f_1 \cos\theta_1 \Delta S_1 + f_2 \cos\theta_2 \Delta S_2 + \cdots\cdots + f_k \cos\theta_k \Delta S_k + \\ &\quad \cdots\cdots + (f\cos\theta \Delta S)_{最末段}。\end{aligned}$$

为了强调每一小段都必须非常小，从而小段的数目必然就非常大，我们当然应取这一和式的极限，才能得到功的准确值。这一极限叫做力 $\boldsymbol{f}$ 沿路程 s 的**线积分**，一般写作：

$$A = \int_{s, P_1 \to P_2} f\cos\theta \, ds \qquad (1\text{-}7\text{-}3)$$

在这里，我们用积分号代替了连加号，并略去了各项的角码。除了取一次极限以外，线积分和连加式并无意义上的不同。(1-7-3)就是功的**普遍定义**。可以注意，曲线积分并不是普通的定积分。只有当路程 s 是直线（$\boldsymbol{f}$ 仍是变力）时，才能把它看成普通的定积分；这时，例如将 s 取作 X 轴，就有

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f\cos\alpha \, dx = \int_{x_1}^{x_2} f_x dx \qquad (1\text{-}7\text{-}4)$$

式中 α 代表力 $\boldsymbol{f}$ 和 X 轴的夹角，如图 1-11 所示。再进一步，如果变力到处和 X 轴平行（即 $\alpha = 0$），则上式变为：

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f dx \qquad (1\text{-}7\text{-}5)$$

式中力的绝对值 f 是 x 的函数。

我们指出，任何的功**总是和一个运动过程**（状态变化过程）相

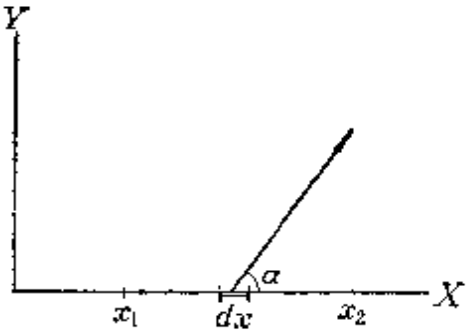


图1-11 变力沿直线路程做功的情况

联系的；即使初态、末态都相同，如果路程不同，一般说力做的功也会不同。因此，不把过程说清楚，笼统地谈论功就是没有确切意义的。

做功的快慢叫做功率，一般用 P 来代表：

$$P=\frac{dA}{dt} \qquad (1\text{-}7\text{-}6)$$

下面即将讲到，功和能量有着密切的联系，因此，有时也把能量的变化率叫做功率：

$$P=\frac{dE}{dt} \qquad (1\text{-}7\text{-}6')$$

式中 E 是所考虑的系统的能量，P 是外力的功率。最常用的功率单位有“瓦”和“千瓦”；1 瓦 = 1 焦耳/秒 = 10^{-3}千瓦。

2.质点的动能 一个迅速飞行的子弹，打中木板可以深入到木板内部，甚至可以把木板打穿。在这个过程中，子弹要反抗木板的阻力而做功(也就是说阻力对子弹做了负功)，同时子弹的速度将逐渐减低。这一类的现象表明，一个运动的质点具有对外做功的本领或“潜力”；经过对外做功的过程，它的这种对外做功的本领就会减小——一个缓慢运动的子弹(“强弩之末”)是打不透木板的(“不足以穿鲁缟”)。另一方面，当速度相同时，大子弹比小子弹“威力”更大，更能够摧毁目标。这就表明，运动物体对外做功的本领，不但和它的速度有关，而且和它的质量有关。这种和运动速度相联系的对外做功的本领，就叫做质点或物体的**动能**。进一步的研究证明，在古典力学的范围内，质点的动能 K 和它的质量 m 及速度 v 之间的关系是：

$$K=\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}7)$$

必须强调，动能是针对某一时刻来说的，因为速度是针对某

一时刻来定义的。一般说来，质点在不同时刻有不同的速度，也就是有不同的“运动状态”，从而它也有不同的动能。因此我们常说，动能是“状态的函数”。在这方面，动能和功是不同的，前者是状态的函数；而后者是“过程的函数”。

根据定义，动能是标量，只有大小，没有方向；其单位和功的单位相同，因为它的作用恰恰在于量度对外做功的本领。

进一步的研究证明，两个质点构成的系统的总动能，等于各质点的动能之和❶：

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}8)$$

多个质点的情况依此类推。

刚才讲，动能表示一种对外做功的本领。对外做了功，质点的动能就减少；反过来，如果外界对它做了功，质点的动能就增多。这种很自然的想法在古典力学中是可以根据牛顿定律推证出来的(证明在此从略)。就是说，**合力对质点做的功，等于质点动能的增量**：

$$A_{合力} = \Delta K = K_{末} - K_{初} = \frac{1}{2} m v_{末}^2 - \frac{1}{2} m v_{初}^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}9)$$

式中 $v_{末}$、$v_{初}$ 分别代表质点在所研究的过程中的末速和初速。这一结果叫做关于质点的**动能原理**。必须注意，这里讲的是**合力做的功，而不是任何别的力做的功**。在应用定理时，必须时常记得这一点。

在力学中，利用动能原理来解决问题有时很方便。例如，还是研究子弹打木板的问题。设木板的厚度是 d，子弹的质量是 m，子弹刚刚碰着木板时的(初)速率是 v，它打穿木板后刚刚离开木板时的(末)速率是 v'，我们来计算木板对子弹的平均阻力 $f_{阻}$。

为什么说是“平均”阻力呢？因为子弹在木板中不同点上所受的阻力可能不同。这是个变力；它的变化情况如何，是很不容易摸清楚的，所以

---

❶ 这一结论并不是“当然”的，而是进一步研究的结果。

咱们现在只算它的平均值❶。

除了这个阻力以外，子弹还受不受别的力？受的，例如重力。但是，比起阻力来，重力不知小了多少倍。（你相信不？为什么？讲讲道理看。）除了重力，还有别的力吗？也许还有，但那些力更小（例如太阳对子弹的引力等等，当然不用考虑）。因此，在现有的条件下，在阻力起作用的过程中，忽略了一些不值得一提的力，就可以把阻力看成子弹所受的合力。只有讲清楚了这一点，才可以利用动能原理。

其实计算是很简单的。既然是阻力，它的方向当然和子弹的运动方向相反；就是说，力和位移的夹角是180°。另外，子弹在木板中走过的路程，可以认为就是木板的厚度 d。因此，合力做的功就是：

$$A=\overline{f}_{阻}\cos 180^\circ\cdot d=-\overline{f}_{阻}\cdot d$$

利用动能原理，就有

$$A=-\overline{f}_{阻}\cdot d=-\frac{1}{2}mv'^2-\left(-\frac{1}{2}mv^2\right)$$

由此就得到：

$$\overline{f}_{阻}=\frac{-\frac{1}{2}mv'^2-\left(-\frac{1}{2}mv^2\right)}{(-d)}=-\frac{m}{2d}(v^2-v'^2)$$

因为 $v>v'$，所以求出来的平均阻力的绝对值是正的；这当然是合理的。

3.能量概念简述　动能只是能量的一种形式。物质的运动是多种多样的，从而它对外做功的本领也有着各种的形式。我们发现，不但做着机械运动的质点或物体具有对外做功的本领、即动能，而且别的一些物体在别的运动过程中也可以对外做功，就是说，各种物体还可以有和别的运动状态相联系的能量。例如，当炸药在炮井中爆炸时，它的化学结构发生变化而放出“化学能量”。这种能量经过一系列的变化而转化成热量。热量使爆炸时形成的气体急剧膨胀，一方面对附近的岩石做功而造成岩石的破坏和塑性形变，另一方面又通过岩石各部分之间的相互作用在“塑性地带”以外的岩石中由近及远地激起振动，这就是地震波。这样，气体的一部分能量就会转化为地震波的能量而传到各处。

❶ 什么叫力的平均值？这里是指一个假想的常力，它所做的功和实际阻力所做的功相等。

以上这些说法，绝不是信口开河地乱讲出来的。不是说，有了这么一些现象，咱们就说有这能量，有那能量，这样乱讲一气就仿佛说明了问题。假如那么办，那就是一种反科学的态度，你的说法就会是经不住推敲和很快就会垮台的。这儿这几句话是有着大量的很精确的实践经验作为后盾的，只是因为我们为了种种原因没有详细地论述那些依据而已。当然，只靠以上这么一点点议论是得不出任何肯定的结论来的。但是，联系到自己在各方面得到的实践经验，你也许可以同意或接受下面这几个论点：第一，物质的运动有各种形态，例如机械的、电磁的、热学的、化学的、生物学的等等；第二，在各种适当的条件下，物质的各种形态的运动不断地互相转化；第三，当条件合适时，任何一种形态的物质运动起码可以有一部分转化为机械运动；第四，**当条件合适时**，可以用动能来量度机械运动、来表示机械运动的**量**。这样，我们就想到，对于其他形态的运动，也应该有相应的物理量来量度它们，于是我们就有了电磁能、热能、化学能、生物能等等的概念；而且，既然各种形态的运动可以互相转化，那也就是说各种能量也应该可以互相转化，并且有确定的“兑换率”，那么，我们也就可以用统一的单位来计量不同形态的能量，也就是量度各种形态的运动了。尤其重要的是，人们根据十分丰富的实践资料，总结得到了**能量的守恒和转化定律**；这定律的意思是：设我们的研究对象是由若干个物体构成的物质系统，这系统可以有各种形态的运动，从而有各种形态的能量；这些形态的能量可以互相转化，但是，**只要系统和外界没有能量的交换，系统中的总能量就是一个常量**。古往今来，人类研究过亿万种自然现象，大至天文学上的变迁，小至电子的运动，不论是宏观的，微观的，高速的，低速的，有生命的，无生命的，总之是没有任何一件事实违反过这条定律。事实上，这样的一条定律正好和辩证唯物主义哲学的一个基本观点相一致；就是说，物质和运动是不可分离的，物质和运动同样不能凭空地创生或凭空地消灭。这样说来，人类的多少万年的实践，就在这种基本的方面给辩证唯物主

义哲学提供了极其丰富的、无法反驳的素材和证据。是啊，无法反驳，但是偏偏有些人想尽办法用各种诡辩来进行“反驳”。在关于能量问题的哲学观点上，历来存在着激烈的唯心、唯物的对立。关于这些问题，我们不在这里多谈了。

4.质点在重力场中的位能 现在我们讲讲另一种机械能——位能。但是，位能这个概念，不象动能那么直观，涉及的问题也比较复杂。因此，我们在这里也只能讲个大概，不想追求理论上的严密性。

地球周围的物体，都受到来自地球的一个作用力，叫做**重力**。物体所受的重力W，和它的质量有关，也和物体所在的高度、经纬度等等因素有关。但是，在这许多因素中，质量是最主要的，因此，在要求的准确度并不太高的情况下，我们可以认为重力和质量成正比，即：

$$W = mg$$

比例系数g叫做**重力常数**。地球周围的物体都受到重力的作用，于是我们说地球周围存在着**重力场**；粗略地说，可以认为这只是反映重力到处存在这一事实的另一种说法。

前面谈到了高度，那就得谈谈这高度是怎么确定的。我们总是先任意取一个“水准面”，例如海平面，作为测量高度的起点；就是说，把那个水准面的高度算作零；比它高的地方，高度算正的；比它低的地方，高度算负的。测量起点选得不同，测得的同一地点的高度也不同；但是那并不影响下面的讨论，一笔表过就行了。好，现在设想把一个质量为m的质点慢慢举起，使它的高度从h_1变成h_2。很容易算出，这时**反抗重力**做的功是：

$$A_g = W \cdot (h_2 - h_1) = mgh_2 - mgh_1 \qquad (1\text{-}7\text{-}10)$$

现在我们看，假设质点在移动之前和移动之后的速度都等于零(慢慢地举)，它的动能并无变化。那么我们做的功不是“白做了”吗？“白做功”的情况是不可能的，一定会引起某些变化。质点的速度虽然没变，但是它的位置却变高了。为了反映这一情况，我们说质点在不同位置上具有不同的对外做功的本领，具有

不同的能量；这种和重力场中的不同位置相联系的能量就叫做**重力位能**。如果质点从较高的地方掉下来，它到达水准面时的速度就较大，从而就可以做较多的功；这就表明，在这种过程中，重力位能转化成了质点的动能。于是我们说，当举高一个质点或物体时，我们的功没有“白做”，而是增加了那质点或物体的重力位能；当它从高处再掉下来时，它就会把那功“还给我们”。这样，(1-7-10)就可以改写成：

$$A_g = \Delta U_g \qquad (1\text{-}7\text{-}11)$$

式中U_g是质点的重力位能，它和高度变量h之间的函数关系是：

$$U_g = mgh \qquad (1\text{-}7\text{-}12)$$

前面讲过，当测量高度的起点选得不同时，h的值就会不同，从而U_g的值也不同，但是，(1-7-11)却不受这种变动的影响，因为这里只涉及重力位能的增量，这增量是不会随着测高起点的不同而不同的。

位能也叫势能，那只是翻译名词的不一致而已。重力位能只是位能的一种。当存在其他力场(例如静电场)时，在适当条件下也可以定义相应的位能(例如静电位能)。实在说，位能是存在于力场中的，但是为了说话方便，我们常常把它叫做“质点的位能”。质点的动能加上它的位能，叫做它的**总机械能**，简称**总能**；用E代表总机械能，就有：

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + U \qquad (1\text{-}7\text{-}13)$$

式中的U是和各种力场相联系的位能的总和。

5.弹簧的弹性位能 再举一种位能的例子，就是弹簧的弹性位能；这对我们理解以后要讲的物质的弹性是相当有帮助的。

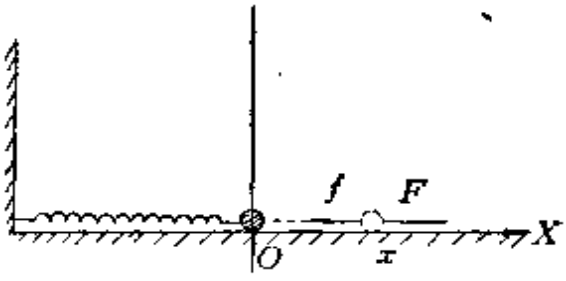


图1-12 弹簧振子的弹性位能

图1-12代表一个水平放置的

弹簧振子，O 是小球的平衡位置，我们就取这一点作为座标原点，并取和弹簧平行的直线作为X 轴。如果我们想让小球离开平衡位置而到达 x 点，那就必须对它作用一个力（用手拉它）。有力，有距离，就对小球做了功。这功怎样了？当然不会“白做”，我们说它变成能量，储存在弹簧里了；这种和弹性形变相联系的能量就叫做**弹性位能**（或形变位能）。

这里的情况和重力场中的情况颇为相象。当你把小球拉到 x 处时，你必须继续拉着它，不然它就会向平衡位置跑过去；这说明弹簧对它作用得有力；当我们拉住那小球时，我们的手是能够感觉到这个弹性力的。在图1-12中，F 代表外界对小球的拉力，f 代表弹性力；二力大小相等，方向相反，互相平衡。经验证明，当 x 不是很大时，两个力的大小都和 x 成正比，即：

$$F_x = -f_x = kx \qquad (1\text{-}7\text{-}14)$$

式中的比例系数 k 叫做弹簧的**劲度系数**（或倔强系数）。这一比例关系，就是最简单形式下的**胡克定律**。

前面讲过，在拉长弹簧的过程中，我们对弹簧做了功；这功转化成弹性位能而储存在弹簧中；当收缩回去时，弹簧就对外做功，而把我们原来做的功“还给我们”。将弹簧没被拉长时的位能算作零，我们只要算出拉长它时做的功，就等于算出了弹簧的位能。用 x' 代表变量，这功可以按公式(1-7-6)来计算，即：

$$A = \int_0^x F_x(x')\,dx'$$

将(1-7-14)代入，得到：

$$U_{弹} = A = \int_0^x kx'\,dx' = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}15)$$

6.弹簧振子的总机械能 在普通物理中，提到过弹簧振子的振动能量，那就是指的它的总机械能：

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U_{弹} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}16)$$

现在我们可以计算这一能量了。

首先分析图1-12中的小球运动情况。在外力F撤消以后，小球将在弹性力的作用下进行振动。根据牛顿第二定律，得到：

$$f_x = -kx = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

或者写作：

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \qquad (1\text{-}7\text{-}17)$$

这就是我们熟悉的谐振动方程，如果我们令

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}18)$$

的话。

我们知道，谐振动方程的解就是谐振动函数，可以写成：

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (1\text{-}7\text{-}19)$$

从而得到：

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (1\text{-}7\text{-}20)$$

将(1-7-19)和(1-7-20)代入(1-7-16)中并利用(1-7-18)，就得到：

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}m\cdot\frac{k}{m}A^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \\ &= \frac{1}{2}kA^2 \qquad (1\text{-}7\text{-}21) \end{aligned}$$

谐振动系统的总机械能和它的振幅平方成正比，这是我们不止一次听到过的事实；现在我们根据古典力学的基本定律，结合弹簧振子的例子证明了这一事实。

既然是谐振动，振幅A当然是常量，从而总机械能也是常

量。就是说，作着谐振动的系统，其总机械能是守恒的；它的动能和位能可以而且确实不断地互相转化，但二者的总和既不减少也不增多。当一个系统中不存在机械能和非机械能的互相转化，而且系统和外界也没有能量的交换时，系统的总机械能是一个常量；这叫做**机械能守恒定律**。谐振动系统的情况便是一个例子。机械能守恒定律是普遍的能量守恒和转化定律的一个推论，而且是一种理想化的情况，因为系统中完全不存在机械能和非机械能的互相转化的情况，在现实世界中是没有的。

习题：1.功的定义是不是合乎我们的常识？一个人扛着一袋米，站了一天没动地方；根据定义他没做功，但是他却累得要命，你怎么看这件事？

2.日常语言中说某人“立了一功”，这和物理学中所说的功是不是一个意思？

3.常力 f 沿直线路程 s 做的功是 $A=fS\cos\theta$；试画出 $\theta=0°$、45°、90°、135°、180°时的情况，并讨论各情况下功的正负。从实践的观点看，这样规定功的正负是否合理？

4.能够说“功就是能”吗？为什么？人们为什么把石油和煤叫做“能源”？除此以外你还知道些什么别的能源？

5.如图1-13所示，一个物体，在倾斜变力的作用下从 $x=10$ 米处沿水平路程移动到 $x=20$ 米处。设力的变化规律是：

$$F=6x\text{牛顿},$$

$$\cos\theta=0.70-0.02x$$

试计算此力所做的功。

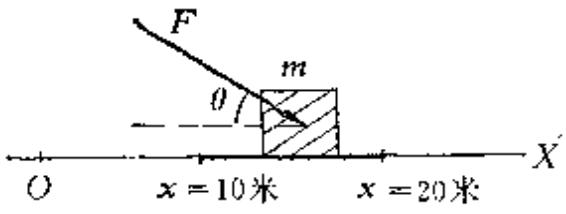


图1-13　倾斜力做的功

6.一根弹簧，当被压短4厘米时作用力是12牛顿；设胡克定律成立，试计算当被压短20厘米时它所具有的弹性位能。弹簧被压缩后，它的弹性位能为什么也是正的？〔注意：计算时要考虑各量的单位。〕

7.什么动力(能源)也不要就能不断地给我们干活的机器，叫做**第一种永动机**。试论证为什么这样的机器是做不出来的。

§.1-8. 力矩和角动量

本节是§1-4的继续，讨论刚体绕定轴转动的动力学问题。如果直接从牛顿定律出发来讨论，当然是最好的，但那种考虑要涉及内力和外力的区分，而且表述形式比较复杂(也比较细致)。因此我们主要从功和能的角度来处理，这样可以简短一些。

1.力矩和它所做的功 当我们开门或关门时，我们总是拉住离门轴较远的那一边，这样比较省劲。如果我们拉着离轴很近的地方，那就很费劲。如果我们直接拉那门轴，那门就根本不转。大量的这一类经验表明，当研究物体的转动时，不但要考虑它所受的力，而且要考虑力和轴线之间的距离。将这两种因素结合起来，就得到力矩的概念。

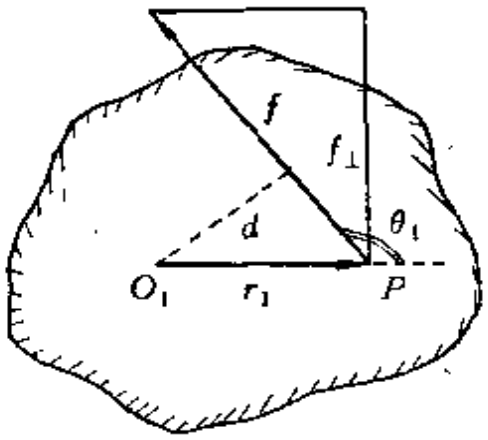


图1-14 力矩的定义

当研究质点的运动时，只考虑它所受的力的大小和方向，不存在力的“作用点”问题，因为力肯定是作用在质点上的，它的作用点是不言而喻的。当考虑刚体或其他物体的转动时，由于刚刚讲过的情况，力的作用点就是不能随便变动的了。图1-14仍然是绕定轴转动的刚体的垂直截面图；O_1是轴线和截面的交点，P是力$\boldsymbol{f}$的作用点，$\boldsymbol{r}_1$是从O_1到P的矢量，θ_1是$\boldsymbol{f}$和$\boldsymbol{r}_1$的夹角，$d=r_1\sin\theta_1$是从O_1到力的作用线的垂直距离，$f_\perp=f\sin\theta_1$是垂直于$\boldsymbol{r}_1$的分力。根据大量的实践经验，这样定义$\boldsymbol{f}$的力矩C是合适的：

$$C=fd=f_\perp r_1=fr_1\sin\theta_1 \qquad (1\text{-}8\text{-}1)$$

这样定义的C是一个标量；我们过一会就要讲到，如果把它定义成一个矢量，那就更加适用一些，同时也就更复杂一些。为了简单，当只考虑定轴转动时，把它看成标量也可以。标量是可以有正负的；可以这样考虑：如图所示，力$\boldsymbol{f}$的作用在于使刚体按逆

时针方向转动，这时我们规定它的力矩 C 为正；在相反的情况则规定 C 为负。如果绕定轴转动的刚体同时受到好几个力矩的作用，则它所受的总力矩等于各个力矩的**代数和**。

有了力矩的定义，我们可以计算它对刚体做的功。如图1-15所示，设刚体转过了一个小角度 $\Delta\theta$，则力的作用点移动了一段距离 $\overset{\frown}{\Delta S}$；当 $\Delta\theta$ 很小时，可以将圆弧 $\overset{\frown}{\Delta S}$ 看成一小段直线。在计算功时，只考虑力沿路程的分量即 $f_\perp$ 就可以了。由功的定义，得到力 f 所做的功是：

$$\Delta A = f_\perp \Delta S = f_\perp r_\perp \Delta\theta = C\Delta\theta \qquad (1\text{-}8\text{-}2)$$

因为用 C 表示了出来，所以这也叫做力矩 C 所做的功。如果角位移较大，而力矩又是变化的，功的表示式显然应该是：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} C(\theta)\,d\theta \qquad (1\text{-}8\text{-}3)$$

2.刚体的动能和转动惯量 设想将刚体分成许多很小很小的小块；分得够小，每一小块都可以看成一个质点。刚体的动能 K，也就等于每一小块的动能 dK 之和。图1-16中的 dV 就是刚体

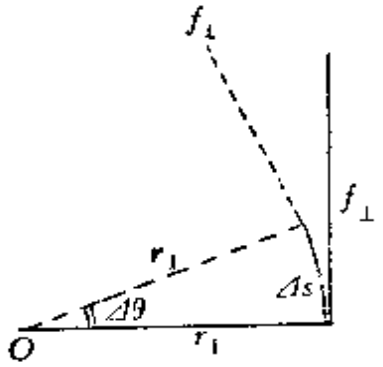


图1-15 力矩做功的情况

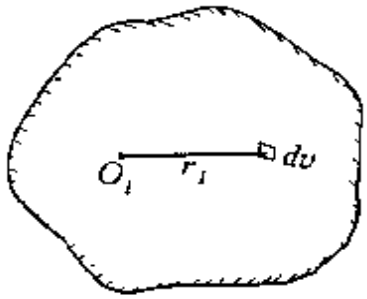


图1-16 刚体动能的计算

中的这样一个体积元，其质量是 $dm = \rho dV$，这里的 ρ 代表质量密度，一般是座标的函数。看成质点，这个体积元的动能就是：

$$dK = \frac{1}{2}(dm)v^2 = \frac{1}{2}\rho v^2 dV \qquad (1\text{-}8\text{-}4)$$

但是，根据(1-4-6)式，

$$v = r_1\omega \qquad (1\text{-}8\text{-}5)$$

式中 r_1 是体积元 dV 和轴线之间的垂直距离，ω 是刚体转动的角速度；我们说过，不同体积元的角速度是相同的。将(1-8-5)代入(1-8-4)并积分，就得到刚体的动能：

$$K = \int_V \frac{1}{2}\rho(r_1\omega)^2 dV = \frac{1}{2}\omega^2\int_V \rho r_1^2 dV \qquad (1\text{-}8\text{-}6)$$

这种积分叫做体积分，是在刚体的整个体积中计算的一个总和。我们令：

$$I = \int_V \rho r_1^2 dV \qquad (1\text{-}8\text{-}7)$$

就可以将刚体的动能写成下式：

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \qquad (1\text{-}8\text{-}8)$$

这在形式上和质点动能的表示式是完全相似的。

定积分 I 叫做刚体对所绕轴线的**转动惯量**；我们很快就会看到，转动惯量是刚体对转动来说的惯性的量度。前面讲过，质点的质量 m，就是质点的惯性的量度。在古典力学中，一个质点的质量(或一个物体的质量)是它所固有的一个最基本的特性，是一个重要的常量。转动惯量则不然。由(1-8-7)可见，I 的值不但取决于刚体中的质量分布〔即 $\rho = \rho(x,y,z)$〕，而且取决于所选轴线的位置和方向〔因为轴线不同各个 r_1 就不同〕。

〔例题〕 有一均匀的圆盘，半径为 R，绕着通过圆心而垂直于盘面的轴线转动，试计算其转动惯量。

〔解〕 如图 1-17 所示，考虑圆盘上一个内半径为 r_1 的环形部分，其宽度为 dr_1，其面积为

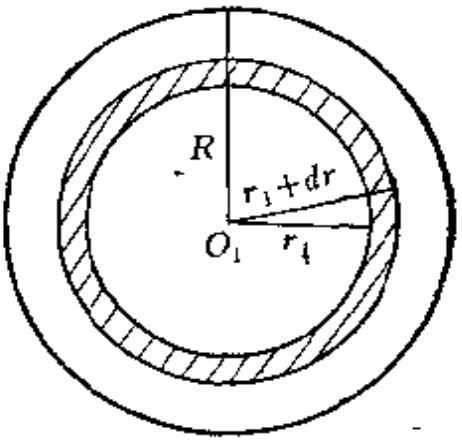


图1-17 均匀圆盘的转动惯量

$ds = 2\pi r_1 dr_1$ 设圆盘厚度为 D，其密度为 ρ。因为圆盘是均匀的，所以 ρ 是常量。环形部分的质量是：

$$dm = D \cdot ds \cdot \rho = 2\pi D \rho r_1 dr_1$$

离轴线的距离就是 r_1，所以它的转动惯量是：

$$dI = r_1^2 dm = 2\pi D \rho r_1^3 dr_1$$

从 0 到 R 积分，就得到整个圆盘的转动惯量：

$$I = \int_0^R 2\pi D \rho r_1^3 \, dr_1 = 2\pi D \rho \cdot \frac{1}{4} r_1^4 \Big|_0^R = \frac{\pi D \rho}{2} R^4$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \qquad (1\text{-}8\text{-}9)$$

式中 $m = \pi R^2 D \rho$ 是整个圆盘的质量。

3.刚体的定轴转动方程 刚体不变形，谈不到弹性位能；当计算合力时将重力考虑在内，就用不着再算它的重力位能。于是，合力矩对刚体做的功，就应该等于它的动能增量。

设 $C_{合}$ 是刚体所受各作用力的合力矩，$d\theta$ 是一个无限小的角位移，则有：

$$A_{合} = C_{合} d\theta = dK$$

利用（1-8-8），就得到

$$C_{合} d\theta = I \omega d\omega$$

但是，$d\theta = \omega dt$，$d\omega = \beta dt$，代入上式并消去公因子，就得到：

$$C_{合} = I\beta = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (1\text{-}8\text{-}10)$$

这就是刚体绕定轴转动时的运动方程。我们看到，这一方程的形式和质点运动方程（1-6-2）的形式完全对应；就是说：$C_{合} \longleftrightarrow f$，$I \longleftrightarrow m$，$\beta \longleftrightarrow a$。当合力矩 $C_{合} = 0$ 时，$\beta = 0$，从而刚体只能以恒定的角速度转动。当不同的刚体受到相同的合力矩作用时，转动惯量大的，角加速度就小；这就表明，转动惯量大的刚体比较“笨重”，不容易发动起来，所以说转动惯量反映着刚体对转动来说的惯性的大小。

(1-8-10) 还可以改写一下：

$$C_{合}dt = Id\omega = d(I\omega) = dM \qquad (1\text{-}8\text{-}11)$$

式中

$$M = I\omega \qquad (1\text{-}8\text{-}12)$$

叫做刚体对所绕定轴而言的**角动量**或**动量矩**。$C_{合}dt$ 叫做力矩在时间 dt 内的**冲量**。这种关系，也和前面所讲有关质点的动量、冲量关系相对应。

4.力矩和角动量的矢量形式 力矩的定义 (1-8-1) 使我们联想到这是一个矢积的绝对值。事实上，力矩和角动量都可以表示成矢量形式，而且不仅仅适用于刚体；尤其是角动量，是一个非常重要的物理量。现在我们简单地谈谈这个问题。

在图 1-18 中，r 表示从参照体上一个固定原点 O 画到某一质点的矢径，f 表示质点所受的合力，$p = mv$ 表示质点的动量。我们定义力矩和角动量如下：

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} \qquad (1\text{-}8\text{-}13)$$

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \qquad (1\text{-}8\text{-}14)$$

二者的关系很容易求出。由牛顿第二定律：

$$\boldsymbol{f} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} \qquad (1\text{-}8\text{-}15)$$

两端用 r 从左边叉乘，得到：

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{f} = \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (1\text{-}8\text{-}16)$$

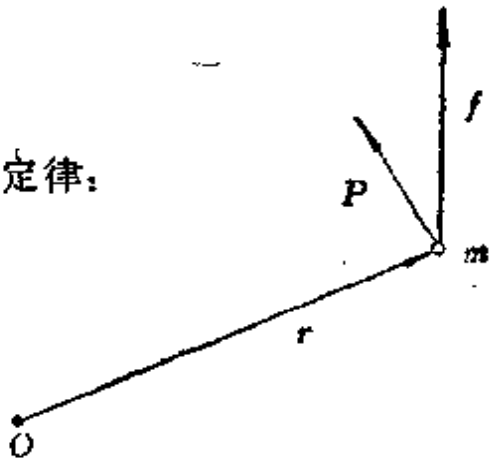


图1-18 力矩和角动量的普遍定义

现在将 (1-8-14) 两端对 t 微分：

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{M} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt} \qquad (1\text{-}8\text{-}17)$$

但是右端第一项为零，因为：

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} = 0$$

于是 (1-8-16) 变成：

$$\boldsymbol{C}=-\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} \qquad (1\text{-}8\text{-}18)$$

这就是（1-8-11）的矢量形式，但它是针对一个质点写出来的。

当 $\boldsymbol{f}$ 总是沿着 $\boldsymbol{r}$ 或 $-\boldsymbol{r}$ 时，这种力就叫做**辏力**（或有心力）。辏力的 $\boldsymbol{C}$ 永远等于零，从而质点的角动量 $\boldsymbol{M}$ 是一个常量（大小和方向都不变）。行星绕日的公转就是这样。如果只考虑太阳的引力而不考虑其他行星对它的“拽动”，行星受到的就是辏力，从而它的角动量守恒。这就是天文学中“开普勒第二定律”的力学证明。

如果所研究的不是单独一个质点而是包括许多个质点的**质点系**，我们也可以针对每一质点写出运动方程（1-8-18）并两端求和；利用牛顿第三定律消去系内各质点之间的相互作用力（内力），就得到下列方程：

$$\sum_i \boldsymbol{C}_i=-\frac{d}{dt}\sum_i \boldsymbol{M}_i \qquad (1\text{-}8\text{-}19)$$

式中左端是质点系所受到的**外力的合力矩**，右端是质点系的**总角动量的时间导数**。由（1-8-19）可见，**如果质点系所受的外力的合力矩等于零，则质点系的总角动量是一个不随时间而变的常量。这一结论叫做角动量守恒定律。**

在古典力学中，角动量守恒定律是牛顿定律的推论。但是，后来发现，这一定律对于古典力学范围以外的现象也是适用的，它也反映着十分普遍的科学规律。

讲到这里，我们已经有了三条守恒定律，就是动量守恒定律、能量守恒（和转化）定律和角动量守恒定律。这是自然界中三条很基本的普遍规律，其重要性绝不局限于古典力学或古典物理学的范围之内。进一步的研究发现，这三条定律和时间、空间的对称性有着内在的联系❶——但是这里不能再讲那些问题了。

❶ 理论的论证见 Goldstein，《Classical Mechanics》，也可参阅关于基本粒子理论和关于群论在物理学中的应用的许多书籍；科学史的论述和分析可以参阅 Б.Г 库兹涅佐夫，《古代物理学、经典物理学和量子物理学中的相对原理》一书，戈革译，商务印书馆1964年版。

习题：1.作用在同一物体上的大小相等、方向相反但不沿着同一直线的两个力，形成一个**力偶**。试作图并证明力偶的力矩（叫做力偶矩）是

$$C = fd \qquad (1\text{-}8\text{-}20)$$

式中 f 是其中一个力的大小，d 是二力作用线之间的垂直距离。试举一些力偶的实际例子。

2.一只手握住铁锹柄的最头上，很不容易把锹端平。若握得离锹头近一些，就更容易一些。这是为什么？

3.一根均匀的细杆，绕着它的中垂线转动，试计算它的转动惯量（设长度为 L，总质量为 M）。

4.根据（1-8-10），当 $C_{合}=0$ 时，刚体将作等角速度的转动，就是说它将转个不停。当关掉电源时，马达或电扇为什么不是转起来没完，而是慢慢停下来？

5.你能举一些角动量守恒的实际例子吗？

参考文献

1·1 史特劳大，《分子物理学》，上册，南开大学物理系译，高等教育出版社1959年版。

1·2 江苏师范学院，《力学讲义》，上册，人民教育出版社1959年版。

1·3 亚·索·康帕涅茨，《理论物理学》，戈革译，高等教育出版社1960年版。

1·4 Richard P.Feynman, 《Feynman Lectures on Physics》 (Feynman物理讲义), Vol.1, Addison-Wesley Co., 1963.

1·5 D. ter Haar, 《Elements of Hamiltonian Mechanics》 (哈密顿力学概要), North-Holland Co., 1961.

1·6 L.D.Landau et al, 《Mechanics》 (力学), Pergamon Press, 1960.

1·7 H. Goldstein, 《Classical Mechanics》 (古典力学), Addison-Wesley, 1959.

1·8 André Mercier, 《Analytical and Canonical Formalism in Physics》 (物理学中的分析表述形式和正则表述形式), North-Holland Co., 1959.

第二章　物质的弹性

§.2-1.　连续体

1.连续体的概念　上一章曾经提到质点、刚体等等概念。我们说过，这些概念都是客观事物的近似的反映（列宁称之为“模写”），都是抓住其重要方面、舍弃其不重要方面而得到的一种概括性的认识。通常，提到一个物体，我们往往把它设想成（看成、当作）连绵不断的那么一大块。我们喝水，总是说喝了一口、两口、一大口、一小口、挺小挺小的一口，等等。当这样说时，我们就认为水是**连续的**；我们在思想上认为水是没有最小单位的，好象喝多么小的一口都可以。用数学的概念来表述，这就是说，我们认为可以从大体积的水中任意取出很小的体积元，其体积ΔV、质量Δm等等都可以是无限小量，就是说可以趋于零。这样的观点就叫做**物质的连续结构观点**。

事实上，我们知道水是由许许多多个大致如图 2-1 所示的那种很小的分子构成的，而不是“真正地、绝对地”连续的。如果我们把 ΔV 取得比分子的体积还要小，我们所取出的就根本不是水，而是别的东西了。换句话说，ΔV 是不能任意缩小而数学地趋于零的，它只能小到一个一定的限度。认为物质是由分子之类的颗粒构成的，这种观点就叫做物质的**分立结构观点**，有时叫做**物质结构的原子论观点**。

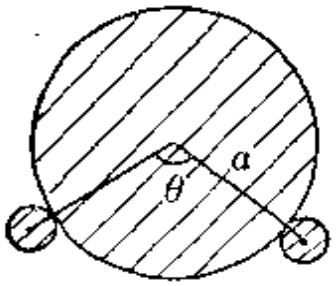


图2-1　水分子示意图

但是，在日常生活中，我们从来不说某人喝下去了“几亿亿个水分子”；就是在水力学之类的科学理论中，人们也极少考虑

到水的分立结构。这是因为分子特别小的原故。物理实验证明，一般物体中的分子，有大的，有小的，其大概的尺寸约为 10^{-10} 米，也就是一米的一百亿分之一。全世界的人口按40亿计算，假如每个人都缩成分子般大小，排成单行才只有一尺多长（四十厘米）。你看分子多小啊（但是它比电子却大了十万倍以上）！正因如此，在大多数的实际问题中，我们遇到的总是许多亿个分子，而不是十个八个的分子。例如，当研究岩石的性能时，你可以取一小块岩石样品来分析它、鉴定它并用它作种种的实验。但是，要知道，就算你取了直径为0.01毫米的那么一个岩石小球，里边的分子或原子也还是有许多亿个。在许多问题的讨论中，直径为 0.01 毫米的小球就可以看成一个无限小的体积了。一方面足够小以致在所研究的问题中可以看成无限小，另一方面又足够大以致物质的分立结构不会有什么显著表现，这样的一种小量叫做**宏观无限小量**。当条件适当，可以用处理数学无限小的办法来处理宏观无限小的量时，我们就可以把所研究的物体看成有着连续结构的东西。在刚体力学、流体力学、弹性力学等等的学科中，我们一般就是采取的这样的观点，那时所研究的物体就叫做**连续体**，而当讨论波的传播时则把它叫做**连续介质**。因为通常总是把传播波的介质看成连续的，所以人们也常常省掉“连续”二字，而简单地把它叫做介质❶。但是，说话时可以省掉，思想上却不能忘掉，否则就会得出离奇的说法而造成混乱了。

当这样的物质连续结构观点可以适用时，我们就可以更放心地使用微积分之类的特别有用的数学工具来描述物体的或物体中各部分的（宏观）机械运动；这当然是大有好处的。

2.连续介质的分类 前面讲了，为了研究一个连续体，我们可以从它里边取出一个小块即一个体积元来进行分析和研究。每

---

❶ 按照《物理学名词》，medium 一词译作“媒质”，没有“介质”这个译名。但是，许多著译者不肯多查查这种工具书，结果“介质”一词反而更加流行！

一个体积元，也都有数不清的种种性质，例如它的化学成分、质量密度、弹性模量、电阻率等等，等等。在这些性质中，有的和我们研究的问题有联系，有的则没有联系。没有或很少联系的，当然可以不谈或暂时不谈了。从连续体中任意取两个体积元，如果它们那些和我们研究的问题有联系的性质全都两两相同，就是说，如果那些性质全都不是所取体积元位置的函数，那连续体就叫做**均匀的**，否则就叫做**非均匀的**。这种定义，显然是和日常生活中的概念相一致的。一池水，如果含有泥沙，一般是不均匀的，底下沙子多，上面沙子少；但是如果把它猛烈地搅动一阵，它就可以被搅匀了。在客观世界中，完全均匀的物体当然是很少或没有的，但是，在许多情况下，忽略物体的不均匀性也可能不会引起很大的误差；在那种情况下，为了简化问题的探讨和计算，我们就可以把那物体看成均匀的。例如，地下岩石的分布本来是非常复杂的；如果完全照顾到那些复杂性，我们就将束手无策，什么研究也进行不了。因此，我们总要提出一些适当的“模型”来表现地下情况的主要方面，这样，就有了地层或岩层的概念。在地震勘探中，人们通常对地震波的速度特别重视（尤其是在几何地震学中）。如果波速在某一地层中可以看成到处相同，那地层就被说成是**均匀层**；如果在同一地层中波速也是到处不同的，那就应该把它叫做**非均匀层**——把它叫做“连续层”是根本不妥当的。

所谓均匀物体，是说它的各个不同部分的性质相同。例如一块很匀净的玻璃，没有气泡，没有杂质，就可以算是一个均匀的物体。有一些矿石比玻璃还要匀净，例如有些不含杂质的方解石或水晶，那真是晶莹透彻，完美无瑕。这种矿石是均匀的，你从不同的地方敲下两小块样品，是找不出它们有什么性质上的差异的。但是，这种矿石在物理性质上却和玻璃有着很大的差别。我们以光的传播速度为例。在玻璃中，设想光从一点出发向各个不同的方向传播，实验证明各方向的传播速度是相同的。假如玻璃中有一个点光源，则它所发光波的波前将是一个扩大着的球面。

在方解石或水晶之类的物体中则不然，光从一点出发向各方向传播，在不同方向上有不同的速度。假如有一个点光源，则它所发光波的波前不是球面而是一个扩大着的椭球面。当研究某一物体时，我们从物体中的一个点出发，沿着不同方向画出许多直线，并沿着这些直线比较那物体的种种性质。如果物体沿着从同一点出发的不同方向显示相同的性质，它就叫做**各向同性的物体**，否则叫做**各向异性的物体**。经验证明，许多单晶体都是各向异性的；它们在机械性能(解理方式)、导热系数、光速等等方面显示着各向异性的特点。相反地，如果物体是多晶体而其晶粒又比较小的话，一般可以把它看成各向同性的物体。地震勘探中，在绝大多数的情况下也是把地层看成各向同性的介质。

我们指出，均匀性和各向同性，这是两个不同的概念。在一些地震学的书中，也曾提到过这两个概念。但是往往没有仔细地解释。现在为了清楚起见，我们比较详细地把这两个概念解释了一下。联系到波的传播和其他作用过程，当然是均匀的或分区均匀的介质最为简单，其次是各向同性的介质，最复杂的是各向异性的介质。在本书中，我们不涉及各向异性介质中的波动过程。

习题：1.教室中的空气可能在哪些方面是不均匀的？

2.自己举出下列几种物体的一些具体例子，并加说明：

(a).均匀的各向同性的物体，

(b).非均匀的各向同性的物体，

(c).均匀的各向异性的物体，

(d).非均匀的各向异性的物体。

3.如果将地下介质看成各向异性的，一般地震学（即几何地震学）中的那些理论还能不能应用？为什么？

§.2-2. 直杆的单向拉伸

为了掌握某种材料的弹性性能，必须进行各种强度实验，面拉伸实验就是其中很重要的一种。设有一种均匀的各向同性的圆

体材料；为了研究它抗拉或拉压的能力，可以用这种材料做成一根直杆，来测试它在不同的拉力或压力下的反应。这就叫做拉伸实验。

1.实验概况 杆件做好后放在桌上，它当然也会受到重力、桌面支撑力等等的作用；但是这些作用都很小，引起的形变也不大，所以我们可以把这时的杆件尺寸叫做它的**自然尺寸**，例如用 l_0、d_0 和 S_0 来分别代表它在这时的长度、直径和截面$\left(\text{当然 } S_0=\frac{1}{4}\pi d_0^2\right)$。

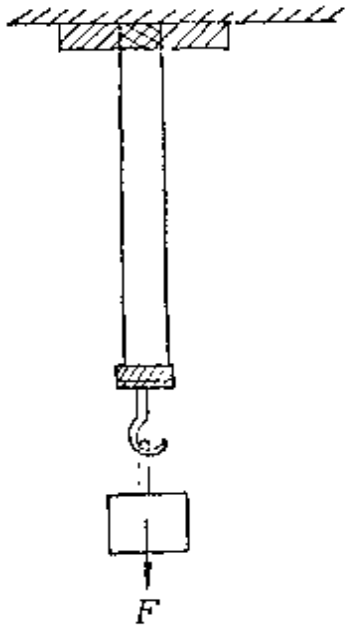


图2-2 拉伸实验示意图

然后，我们把杆件的一头死死地卡住，而在另一头用力去拉它。如图 2-2 所示，我们在它的下端挂上一个砝码。于是，在砝码重量的作用下，杆件的长度就会增加。我们测出并记下这个长度增量 Δl（因为 Δl 很小，所以要用特别的设备来测量它）。换一个砝码，又得到一个相应的 Δl。有了这样的许多数据，我们就对杆件的抗拉性能有了一个初步的了解。抗压性能的测试与此类似。

但是，这样做的结果，只能直接显示某一根杆件的性能。同样一种材料，可以做成各种尺寸的杆件。又细又长的杆件显然不如又粗又短的杆件耐拉。那怎么办？难道每一种尺寸都要试一试吗？当然不行，因为那不但不胜其烦，而且是很不现实的。事实上，把杆件尺寸的影响考虑在内，只要测试一种尺寸的杆件，就不但可以掌握那种特定尺寸杆件的性能，而且可以掌握所研究的那种材料的性能；而掌握了材料的性能，原则上就可以推求任何尺寸杆件的性能了。正是为了通过照顾到样品尺寸而把它的影响消除掉，以体现材料本身的固有性能，才引入了**胁强**和**胁变**的概念。

2.拉伸胁强 由于杆件的重量一般远小于砝码（负载）的重量，我们可以不考虑杆件重量的作用。当杆件下端受到一个拉力 F 的作用时，它的内部无处不处于“紧张状态”，就是说它的内部出现了**弹性力**。为了证实这一点，可以设想用一个截面 S 将杆件分成两部分，例如图 2-3 所示的 A 部分和 B 部分。我们来分析其中某一部分的受力情况，例如分析 B 部分的受力情况。首先，这一段直杆受到向下的拉力 F 的作用。假如它只受到这么一个力，根据牛顿第二定律它就要加速地向下运动，于是杆件就会断掉。现在杆件没有断，说明 A 部分从上面把它拉住了。这个来自 A 部分的向上的拉力 f，可以大致地认为是均匀地分布在截面 S 上而不是集中作用在某一点上的，所以我们在图中用了许多小箭头来代表它。一部分物体通过假想的界面对另一部分物体作用的这种力，就是所谓的**弹性力**；我们以后还要仔细地讨论这种力。

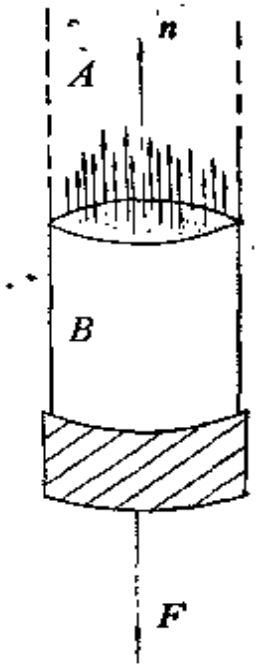


图2-3 拉伸胁强的分析

既然 B 这段直杆是静止的，它所受的合力应该等于零；就是说：

$$\boldsymbol{F}+\boldsymbol{f}=0,$$

$$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{F},\quad f=F \qquad (2\text{-}2\text{-}1)$$

不论你把截面 S 画在什么地方，这里的分析都成立；就是说，象 $\boldsymbol{f}$ 这样的弹性力在杆件的内部到处都存在：总是上边拉着下边，下边拉住上边，不然杆件岂不“散掉了”？现在，为了照顾到杆件的尺寸，或者说为了将杆件尺寸这一因素消去，我们不是单单考虑那个弹性力 $\boldsymbol{f}$，而是考虑**单位面积上的弹性力**：

$$\sigma_S=\boldsymbol{f}/S \qquad (2\text{-}2\text{-}2)$$

σ_S 这个量就叫做和截面 S 相对应的拉伸胁强❶。在现有的条件下，由于存在（2-2-1）式，知道了外力 $\boldsymbol{F}$ 也就可以定出胁强 σ_S 了。

但是必须指出，σ_S 的值和划分 A、B 两部分的方式有关。在图 2-3 中，取的是杆件的垂直截面，这时弹性力 $\boldsymbol{f}$ 和截面 S 相垂直。如果我们从所考虑的 B 部分向外画 S 的一条单位法线 $\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{f}\ /\!/\ \boldsymbol{n}$。但是，也可以不取垂直截面 S，而另外取一个任意的倾斜截面 S' 来把杆件划分成两部分 A' 和 B'，如图 2-4 所示。这样，前面那些关于力的分析仍然成立，(2-2-1)式仍然成立；但是，现在的截面积 S' 比原来的 S 大，从而对应于 S' 的胁强比原来的小：

$$\sigma_S' < \sigma_S$$

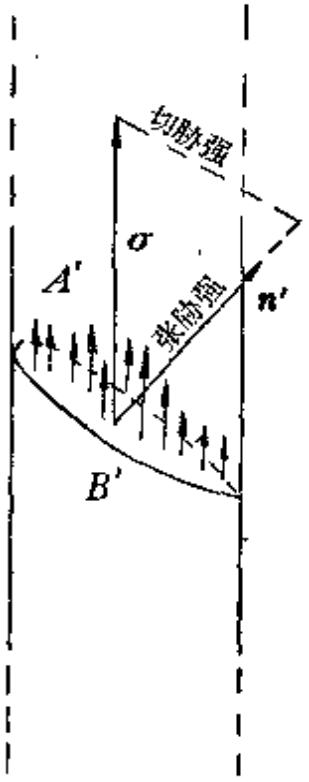


图2-4　张胁强和切胁强

同时，如图所示，现在的胁强 σ_S' 不再垂直于截面 S'，不再平行于外向法线 $\boldsymbol{n}'$ 了。这样，我们可以将 σ_S' 分解成两个分量；垂直于 $\boldsymbol{n}'$ 即平行于截面的分量叫做**切向胁强**(沿着截面的切线)，平行于 $\boldsymbol{n}'$ 即垂直于截面的分量叫做**法向胁强**。在现有的情况下，考虑的是拉伸，从面 A'、B' 两部分是互相拉(而不是互相压)，这时的法向胁强叫做**张胁强**。在相反的情况，如果法向胁强是指向所考虑的那一部分（B'部分）内部的，则把它叫做**压胁强**。

以上假定了弹性力是均匀分布在所取的截面上的。如果分布不均匀，就只能讨论一个个面积元 ΔS 上的胁强；那时胁强就将

❶ 胁强不是力，甚至它的单位也和力的单位不同。由 (2-2-2) 式可见，σ 的单位应该是“牛顿/米^2”等等。这是按面积计算的力的密度，或者说力的“强度”，因此译作胁强是合适的。译作“应力”是不合适的，可惜“应力”一词却比“胁强”流行得多！

是空间座标的函数。这里讲了胁强的初步概念；在本书的第四章中，我们还要进一步讨论这一概念。

3.拉伸胁变 因为胁强是单位面积上的弹性力，它已经和杆件的直径无关了。利用类似的办法，也可以消除杆件长度的影响。当内部存在同样大小的拉胁强时，杆件原长 l_0 越长，则其长度增量 Δl 也越大。忽略了次要因素的影响，可以认为在相同的拉胁强下 Δl 和 l_0 成正比。因此，在考虑杆件的**变形程度**时，我们不是只看它的伸长量 Δl，而是看**单位长度的伸长量**：

$$\in_1 = -\frac{\Delta l}{l_0} \qquad (2\text{-}2\text{-}3)$$

这等于计算 Δl 在 l_0 中所占的百分比；这样一个比值就叫做杆件的**拉伸胁变或拉伸应变**。既然是个比值，胁变 $\in_1$ 是没有单位的；它的值和 l_0 无关，因为已经将杆件的原长“折算”成单位长度了。

4.胡克定律和杨氏模量 实验证明，有许多材料，当胁变够小时，**在一定的范围内胁强和胁变成正比**。这一实验规律就叫做**胡克定律**。例如，在现有的拉伸实验下，当 $\in_1$ 够小时，我们有：

$$\sigma_S \propto \in_1,$$

写成等式，就是：

$$\sigma_S = E \in_1 \qquad (2\text{-}2\text{-}4)$$

式中 σ_S 是和杆件的垂直截面相对应的胁强。比例系数

$$E = \sigma_S / \in_1 \qquad (2\text{-}2\text{-}5)$$

叫做**杨氏模量**。前面讲过，在定义 σ_S 时，已将杆件截面的影响消除掉；在定义 $\in_1$ 时，已将杆件长度的影响消除掉；因此，杨氏模量和样品的尺寸无关，而是表示材料性能的一个物理量❶。由 (2-2-5) 可见，杨氏模量的单位和 σ_S 的单位一致（因为 $\in_1$ 没

❶ 在物性学中，有两套表示材料弹性的参量：一套叫做弹性模量，另一套叫做弹性系数；二者对应地互为倒数。因此，把杨氏模量胡乱地叫做“弹性系数”是完全要不得的。

有单位），就是力的单位除以面积的单位，例如“牛顿/米²”等等。在表 2-1 中，列举了几种材料的杨氏模量。

表2-1　几种材料的杨氏模量（据史特劳夫《分子物理学》）

材料名称	铝		铁		铜	镍		锡
加工条件	拉制	退火	拉制	退火	拉制	轧制	退火	铸
E（公斤力/厘米²×10⁻⁶）	0.719	0.615	2.17	1.46	1.25	2.06	2.01	0.554

材料名称	铂	铅	银	康铜	黄铜	玻璃	松木（竖纹）
加工条件	铸	铸	拉制	拉制	退火	—	—
E（公斤力/厘米²×10⁻⁶）	1.71	0.166	0.805	1.66	0.9	0.44～0.78	1.2

（康铜——60%Cu＋40%Ni；黄铜——60%Cu＋40%Zn。）

通常的材料是放在大气中的，它的表面上到处都受到等于 1 大气压的压强；这叫做它的围压。在地层深处，岩石的围压远远超过 1 大气压。围压可以影响材料的结构和性能，也可以影响它的杨氏模量。关于岩石的弹性数据，可以参阅本章末尾所附的表 2-3。

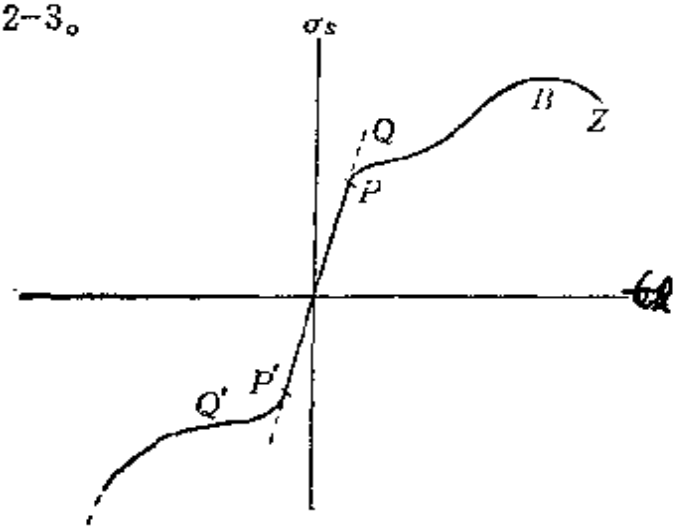


图2-5　一种钢的胁强—胁变曲线

5.胁强—胁变曲线

通过上述这种实验，可以求出材料在单向拉伸（和压缩）条件下的胁强—胁变曲线。图 2-5 代表一种钢的实验曲线，我们看看怎样分析这条曲线所反映的事实。

第一，第一象限中的曲线对应于单向拉伸，第三象限中的曲线对应于单向压缩。对于许多材料来说，这两段曲线的形状并不完全相同；就是说，许多材料的抗拉性能和抗压性能并不相同。

第二，从曲线上看出，从 P' 点到 P 点，基本上是一段直线。这就表明，在这两点的横座标所限定的胁变区间中，胁强和胁变成正比，换句话说，胡克定律在该区间中是成立的。这就叫做小应变情况。在讨论地震波时，我们主要就是研究这种情况下的岩层。

第三，当超出了上述胁变区间时，曲线开始弯曲，表示胡克定律已不成立。但是，实验证明，如果还没达到 Q 点或 Q' 点，

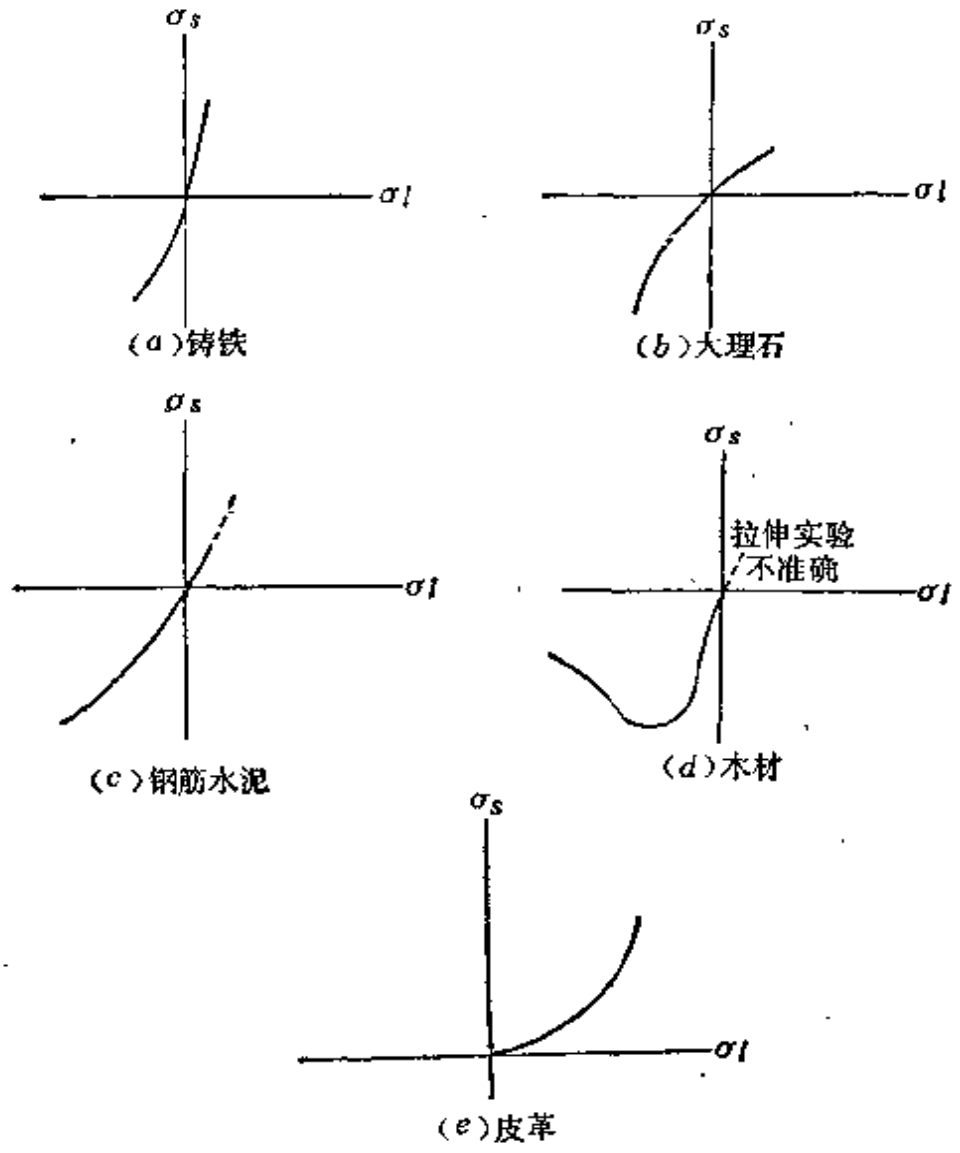


图2-6　几种材料的单向拉伸（和压缩）实验曲线示意图

当把外力取消时材料还能基本上恢复原来的形状和尺寸，表明材料的弹性还占主要地位。

第四，越过了 Q 点和 Q' 点，材料就开始显示塑性，因此 Q 点和 Q' 点所限定的区域叫做材料的弹性区，二点所对应的胁强叫做材料的**弹性限度**。

第五 曲线上有一个最高点 B，它所对应的胁强叫做材料的**断裂强度**。当胁强达到这个值时，杆件的某一部分开始变细（“颈缩现象”），同时杆件迅速伸长，直到断裂（Z 点）。

我们指出，图 2-4 只是带有某种典型性的一个例子。材料不同，所得的实验曲线可以很不相同。图 2-6 中举了几个例子。我们看到，有些材料的实验曲线根本没有直线部分，就是说，那些材料根本不遵循胡克定律，而是遵循更复杂的规律。按照这些实验规律的不同，可以对材料进一步进行分类。这些问题和地震勘探关系不大，所以我们在这里不再多讲。

讲到这里，大家心中可能有一个疑问：这些材料为什么会有如此这般的一些性质呢？这个问题可了不得，又是必须从物质的微观结构中去找答案，那工作是十分不简单的！有些人不理解这一点，在他们写的书中企图用短短的几句话来回答这种性质的问题；我们认为，那种态度是很不严肃和很不科学的！

习题：1.参考前面的图 2-3，分析 A 部分的受力情况。

2.在分析 B 部分的受力情况时，如果杆件的重量不能忽略，将会出现什么结果？

3.在第一章中，当讲到弹簧的拉长和缩短时，曾将胡克定律写成 $f_x=-kx$ 的形式。那种表示式和（2-2-4）式的关系如何？

4.参阅图 2-6，自己分析那些曲线反映着一些什么样的实验事实。

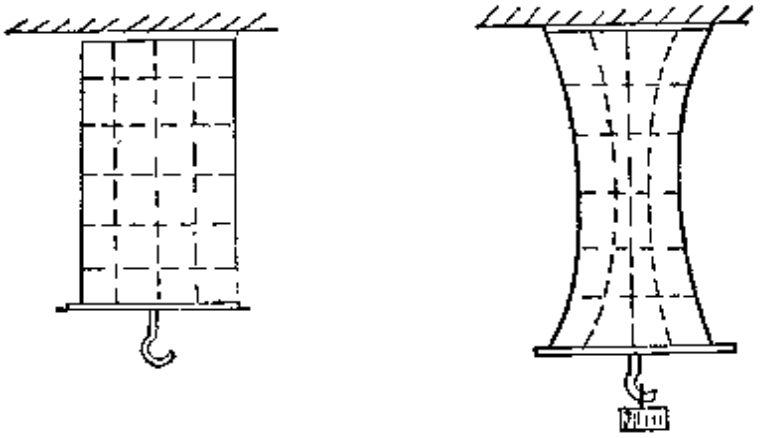
5.杨氏模量较大的材料是比较“软”还是比较“硬”？

§.2-3. 泊松比

在上一节的讨论中，我们无形中假设了在单向拉伸（和单向

压缩）时样品的横向尺寸是不变的。事实上并不是这样，横向尺寸会收缩，只是有时变化较小，从而在某些计算中可以忽略而已。

图 2-7(a) 代表一块长方柱状的橡皮，在它的一个侧面上画



(a)　　(b)

图2-7　单向拉伸时的横向收缩

了一些网格。当橡皮块被拉长时，这些网格就变形，表示横向尺寸缩小，如图 2-7(b) 所示（图中画得比较夸大）。

实验证明，在一定的范围内，纵向胁变和横向胁变成正比。设用 d_0 代表横向尺寸，用 Δd 代表 d_0 的改变量（Δd 是负的，但此处只取绝对值），则横向胁变定义为：

$$\delta = \frac{\Delta d}{d_0} \qquad (2\text{-}3\text{-}1)$$

纵向胁变已经讲过，就是前面的 ϵ_1。于是上述比例关系可以写成：

$$\delta/\epsilon_1 = \frac{(\Delta d/d_0)}{(\Delta l/l_0)} = \nu \qquad (2\text{-}3\text{-}2)$$

比例系数 ν 就叫做所研究材料的**泊松比**；它是材料的一个特征参量。由 (2-3-2) 可见，泊松比是一个比值，从而是一个没有单位的纯数。

实验证明，大多数金属材料的泊松比介于$\frac{1}{4}$和$\frac{1}{3}$之间。理论

研究证明，任何材料的泊松比都介于0和$\frac{1}{2}$之间（证明在此从）。在表2-2中，举出了几种材料在室温下的泊松比。

表2·2 几种材料的泊松比（据史特劳夫《分子物理学》）

材　料	钢(拉制)	铁(熟片)	铜(铸)	铅	玻　璃	软木	石蜡
泊松比 ν	0.34	0.28	0.34	0.4	0.10～0.26	0.00	0.50

§.2-4. 切变模量

剪切力的作用也是很常见的。切东西，剪东西，都是例子。剪刀的两“股”将大小相等而方向相反的两个力同时作用在物体的不同部位，于是物体就被剪开了。在建筑工地上，经常要切断钢筋，那里不但有很大的“剪刀”，而且有专用的机器。这种装置往往是利用两个钢质机件的“相错”来切断钢筋，其大意如图2-8所示。在所有这些例子中，作用力的方向都是和物体的断面相切的，所以叫做剪切力。

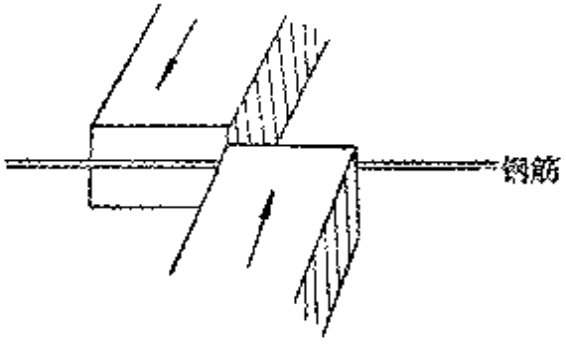


图2-8 剪切力切断钢筋

当然，如果受到的剪切力不很大，物体是不会断开的、它只稍稍歪过去一点。而且，如果剪切力够小，当力停止作用时，物体还可以回到原有的形状。这就叫做物体的切变弹性。

为了说明某种材料的切变弹性，我们设想用那种材料做成一个长方体，如图2-9所示。设把长方体的下表面固定在底座上，在它的上表面上粘了一条宽带子。当用一个力F向旁边拉这条带子时，长

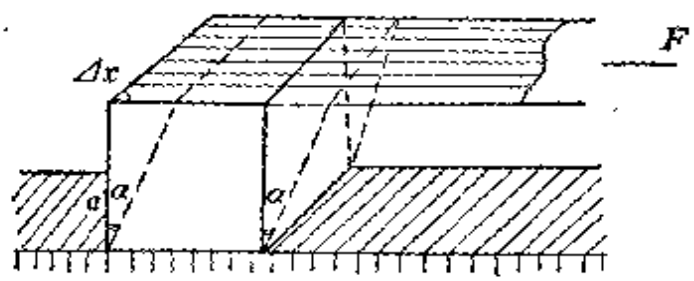


图2-9 长方体的切变

方体就会向旁边“歪”过去，于是长方体变成了平行六面体。这种只改变形状而不改变体积的形变，就叫做**切变**。还是那话，如果F够小，形变不是太大，一松手，物体又会恢复原状，又变成长方体。这说明物体内部存在着和外力相对抗的倾向于使物体恢复原状的**切变弹性力**。我们的目的就是要研究物体材料的这种切变弹性的特征。为此目的，需要定义切变情况下的胁强和胁变。

我们看，当用力F拉那个带子时，带子和物体相接触的各个部分就向旁边拉那个物体，于是，作为反作用力，物体上表面的各个部分就往回拉那带子，这就是切变弹性力。就是说，可以认为切变弹性力f均匀地分布在物体的上表面上，这个力和外力F大小相等而方向相反，即：

$$f = -F, \quad f = F \tag{2-4-1}$$

单位面积上的力就叫做胁强，因此，**切胁强**τ可以定义如下：

$$\tau = f/S, \quad \tau = f/S = F/S \tag{2-4-2}$$

式中S是物体的上表面的面积。

设在一定的切胁强下物体的上表面向旁边移动了一个距离Δx。可以想到，当τ值确定时，物体越高就越容易歪过去；这就是说，当τ值确定时，位移Δx和物体的高度a成正比。因此，切胁变ϵ_τ显然应该定义如下：

$$\epsilon_\tau = \frac{\Delta x}{a} = \mathrm{tg}\alpha \tag{2-4-3}$$

但是，偏转角α通常很小，从而$\mathrm{tg}\alpha \approx \alpha$，且上式可以改写为：

$$\epsilon_\tau = \alpha \tag{2-4-4}$$

实验证明，对于许多固体材料来说，当α很小时胡克定律是成立的；这时就有：

$$\tau/\epsilon_\tau = \tau/\alpha = \mu \tag{2-4-5}$$

式中的比例系数μ叫做材料的**切变模量**或“刚度”。

必须指出，切变弹性是固体材料所特有的性质。对于液体，当加上一个即使很小的切向力时，只要力的作用时间够长，液体的上层就会相对于下层无休止地滑过去；就是说，上层的位移

Δx 会不断地增大，从而也就无法确定切应变($tg\alpha \to \infty$, $\mu \to 0$)。对于气体，当然更谈不到切变弹性了。这一事实在弹性波问题中有很重要的后果。以后我们会讲到，弹性横波的波速和介质的 μ 值有关；当 $\mu = 0$ 时横波的传播速度等于零，也就是说这时横波传播不成。这一结论得到了实践的证实，因为事实上流体（液体和气体）内部是没有横波的。

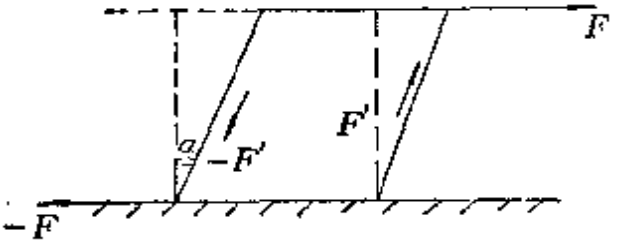


图2-10　切变情况下力偶的平衡

这里附带指出，在图2-9中，当物体的上表面受到一个作用力 $\boldsymbol{F}$ 时，它的下表面就会受到一个作用力 $-\boldsymbol{F}$，不然那物体就要被拉得沿着底座滑动起来。不但如此，上述这两个力构成一个力偶；如果只有这个力偶起作用，物体就会加速地转动起来。现在既然物体并不转动，那就说明底座还对物体作用了别的力，以保持物体既不移动也不转动。这些力的作用情况，大致如图2-10所示。

习题：1.你在日常生活和工作中见过哪些剪切力的实例？试列举几种并说明怎么知道是剪切力？

2.材料的切变模量 μ 大，说明它是“硬”是“软”？

§.2-5.　体变模量

前面提到过物体所受的围压。所谓围压，就是普遍地作用在整个物体表面上的那种压力。暴露在空气中的物体，受到大气的压力。浸泡在液体中的物体，除了受到大气的压力以外还受到液体的压力。气缸中的气体受到活塞和器壁的压力。地下的岩石受到上面地层的压力。这些都表现为物体所受的围压。

当物体受到围压时，它的内部就出现和围压相抗衡的弹性力。当围压改变时，物体的体积也随之而改变。这就叫做**体变弹性**，或**压缩弹性**。我们知道，不但固体具有这种弹性，而且流体

也具有这种弹性。

单位面积上的压力叫做**压强**，一般用 p 来表示：

$$p = F/S \qquad (2\text{-}5\text{-}1)$$

设 V_0 为物体在某一初始压强 p_0 下的体积；当压强变为 p 时，体积变为 V。用 ΔV 代表体积的改变量，就有：

$$\Delta V = V - V_0 \qquad (2\text{-}5\text{-}2)$$

显然，应该把体积的相对改变量叫做体胀变❶，通常用 θ 代表：

$$\theta = \Delta V / V_0 \qquad (2\text{-}5\text{-}3)$$

在这种情况下，胡克定律的表示形式是：

$$\frac{p - p_0}{\theta} = -K \qquad (2\text{-}5\text{-}4)$$

式中的比例系数 K 叫做材料的**体变模量**（或**抗压率**）。因为实验证明 $p - p_0$ 和 $V - V_0$ 异号，所以（2-5-4）中加一个负号，以保证 K 有正值。如果 $p \gg p_0$，从而 p_0 可以忽略，则（2-5-4）变为：

$$p/\theta = -K \qquad (2\text{-}5\text{-}5)$$

以后我们会讲到，弹性纵波的传播速度和介质的体变弹性有关。由于气体、液体和固体这三种介质都可以表现体变弹性，从而在这三种介质的内部都可以激发弹性纵波；这一结论也得到了实践的证实。

§.2-6. 拉梅系数

到此为止，为了描述一块均匀的各向同性的材料的弹性特征，我们已经介绍了四种弹性参量，即杨氏模量 E、泊松比 ν、切变模量 μ 和体变模量 K。对于每一种确定的材料，这些参量都在一定范围内不依赖于胁强值和胁变值而具有固定的值，因为它

---

❶ 体胀变—dilatation，这一名词似乎还没有通行而确当的译法。把它译作“体积膨胀”显然是不合适的，因为那不象一个科学名词，极容易引起误解，而且也表现不出这个量的确切含义。在这一类的命名问题上，那种“率尔操觚”或只靠查外文字典的做法实在使人不敢苟同！本书笔者认为，如果不肯把它译作体胀变，至少也应该译作体胀率或体胀度。（不应译作“体胀系数”！）

们都是一些比例系数。如果材料是不均匀的，就是说，如果它的不同部分具有不同的性质，则这些参量将是空间座标的函数。如果材料是各向异性的，那问题就要复杂多了，其具体情况我们将在第四章中再来稍微介绍一下。

在弹性力学中，为了理论表述上的方便，还常常用到另外一个参量，我们把它叫做 λ 参量。这个参量的起源，和弹性体的热力学有关，在此我们不予讨论。我们可以认为，它只是数学推导中为了简化某些关系式而引入的一个系数，其定义是：

$$\lambda = K - \frac{2}{3}\mu \tag{2-6-1}$$

这样，我们就有了五个参量：E、ν、μ、K、λ。但是，进一步的研究证明，对于均匀的各向同性的材料，只要知道了这五个参量中的任意两个，其余的那三个就可以按已知的公式推求出来。用数学的话来说，这五个参量中**只有两个是独立的**。于是，当然就有了许多表示这些参量之间的关系的公式，而且每一个公式还可能附带着某些特定的适用条件。我们不罗列这些公式，只举出其中的两组作为例子。

（1）已知λ、μ，求 E、ν 和 K：

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \\ \nu &= \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \\ K &= \lambda + \frac{2}{3}\mu \end{aligned}\right\} \tag{2-6-2}$$

（2）已知 E、ν，求λ、μ 和 K：

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1+2\nu)} \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ K &= \frac{E}{3(1-2\nu)} \end{aligned}\right\} \tag{2-6-3}$$

由于λ、μ这两个参量用起来有一定的方便之处，人们有时把这两个参量合称为**拉梅系数**；这样说话就比较方便。有人把λ单独叫做拉梅系数，那样说话不方便，所以我们不采用那种办法。

最后，我们把几种岩石的弹性模量列在表2-3中，以供参考。

表2-3 岩石的弹性模量（据狄塞特尔《构造地质学》）

岩石种类	E		μ		ν
	$p=1$	$p=4000$	$p=1$	$p=4000$	
花岗岩(一)	3.54～4.34	8.36	1.71	3.36	0.180
花岗岩(二)	2.38～6.05	4.49	1.55～2.9	3.45	0.045～0.124
辉绿岩	10.20～10.70	11.40	4.17～4.21	4.46	0.258～0.275
片麻岩	—	—	1.64～1.82	3.38	—
片　岩	7.05	—	3.15	4.13	0.81
砂岩(石英质)	6.36	9.6	3.24	4.42	0.115
板　岩	4.87	—	2.18	2.72	0.115
石灰岩	5.77～6.27	6.3	2.31	2.47	0.25
白云岩	7.1	—	3.23	—	—

E = 杨氏模量，单位为10^{11}达因/厘米^2

μ = 切变模量（刚度），单位为10^{11}达因/厘米^2

ν = 泊松比

p = 围压，单位为公斤力/厘米^2

习题：1.上面的（2-6-2）和（2-6-3）这两组公式可以互相推导；例如，知道了(2-6-2)就能推出（2-6-3），反过来也行。你自己推一推看。

参考文献

2·1 史特劳夫，《分子物理学》，下册，戈革译，高等教育出版社1959年版。

2·2 F. C. Champion &. N. Davy，《Properties of Matter》（物性学），Blackie &. Son Ltd.，1959.

2·3 钱伟长等，《弹性力学》，科学出版社1956年版。

2·4 L.U.狄塞特尔，《构造地质学》，张文佑译，科学出版社1964年版。

第三章　数学场论概要

§.3-1.　本章小引

弹性力学，包括弹性波理论，也象许多别的理论物理学领域一样，可以说它所应用的数学工具主要就是数学场论。数学场论是数学中的一个重要分支，它研究的是标量场、矢量场、张量场的分布和变化。这样一个分支，简直和函数论、微分方程论、积分方程论、几何学、泛函分析这样一些博大精深的研究领域联系得“难解难分”。曾经有两个人合写了两大本《理论物理学方法》，共两千页，主要就是从数学场论着眼的，而在序文中还表示在选材方面有挂一漏万之憾；按照他们的说法，如果写得全面一些，就要“装满一个五英尺高的书架”。这些话并不是故意吓唬人，而是要说明数学场论的内容有多么丰富，同时也要说明我们为什么把这一章写成这样。

在以后各章中，我们无法避开某些数学场论方法的应用。那些方法，如果有根有叶地讲起来就会越讲越远，“不知夷于胡底”了。就算每当用到时稍微解释得详细一些，也会把我们的话题打断，使人很不痛快。因此我们把以后要用到的一些数学知识收集到了这一章中。我们将只讲以后要用的东西，而且讲得尽量通俗易懂。这样，我们就要在很大程度上牺牲数学严密性——连那部两千页大书的作者也作了这样的声明！为此目的，我们采取了以下几种办法。第一，虽然采取座标法是有一些毛病的，我们在介绍问题时还是尽量用了直角座标系。第二，梯度、散度、旋度主要只给出直角座标系中的表示式，而不多讲它们的原始定义和有关概念。第三，关于函数的连续性、可微性、单值性，关于积分的可交换性和收敛性，关于曲线或曲面的正规性，这一类的数学

条件我们基本上一概不提，只假设这些条件全都是得到满足的。第四，基本上只讲数学场的微分学，只在最后一节才稍微谈了一点点积分学。第五，一些定理只讲实质内容，有时谈谈有什么用处，但不引述数学的证明。最后，第六，当然还是只选了最必要的内容。

这样一搞，本章就变得概要而又概要了。读者如果过去学过这方面的东西，可以把本章的内容看成一种复习提纲；如果没有学过，只要对这些问题有个初步的理解，在阅读后面的各章时不致被它们“卡住”也就可以了。必须实事求是地承认，数学场论或一般的场论，不是一门很容易掌握的学科，不经过反复地运用和钻研，恐怕是很难体会它的“精神实质”的。

§.3-2. 标量和矢量

1.两种最常见的物理量 在前两章中，我们已经用到了标量和矢量的概念，并且也用到了矢量的一些运算。考虑到对以后讲述的重要性，现在我们再把这些问题总结一下，并且稍微地系统化一下。

其实，就是在日常生活中，我们也不自觉地运用着标量和矢量的概念。当谈到招生的人数、粮食的储备、资金的存额时，我们是在运用标量的概念。标量首先有一个**单位**；例如多少个人，多少斤粮食、多少元资金，那“个”、“斤”、“元”就是单位。其次，有了单位，标量就可以用一个**数值**来代表，这就是前边说的那些“多少”。我们指出，标量的数值可以有**正负**之分；例如，如果一个部门的计划性不强，把资金用光了，而且还欠了别人的钱，那它的资金存额就是负值（赤字）。单位和数值结合起来，就叫做**量值**。用一个可以有正负的量值就能完全代表的一种量，就叫做**标量**❶。物理学中的质量 m 、密度 ρ、时间 t 等等，地震勘探中的炸药量、道间距、测线公里数等等，都是标量。

另一方面，例如当谈到力量时，总要谈到这力量是推还是拉，

❶ 有的书上把标量（scalar）叫做“数量”，那是不合适的。

是往哪儿推或拉，总之是要谈到它的**方向**。这种既有**量值**（即大小）又有**方向**而且服从确定的运算法则的量，叫做**矢量**。物理学中的速度、加速度、力、电场强度等等都是矢量❶。矢量常用黑体字母表示，其量值（又叫绝对值）则用对应的细体字母表示。例如，矢量 $\boldsymbol{a}$ 的量值用 a 表示。

除了标量和矢量，还有没有别的物理量呢？有。我们不久就要讲到，弹性介质中的胁强，就是比矢量更复杂的一种叫做**张量**的物理量。

2.矢量的加法、倍数和减法　如图3-1所示，张、王、李三个人拉车子。他们的力气不一样大，各人的力气用图中的箭头表示。经验证明，张、王二人一起拉时，和只有李一人拉时的效果**完全相同**，如果 $\boldsymbol{f}_{李}$ 恰好是 $\boldsymbol{f}_{张}$ 和 $\boldsymbol{f}_{王}$ 所构成的平行四边形的对角线的话。这不是任何人的规定，而是经验的事实。既然效果完全相同，当然可以说李的力量等于张、王二人的力量之和。这种说法同时包含了力的大小和方向这两种因素，所以比只考虑力的大小的办法是要好得多的。这样，我们就用一个等式来表示这一事实，即：

$$\boldsymbol{f}_{李}=\boldsymbol{f}_{张}+\boldsymbol{f}_{王} \qquad (3\text{-}2\text{-}1)$$

这就是力的平行四边形法则，也就是矢量加法的一个实例。设有任意两个同性质的矢量（都是速度，或都是加速度，等等）$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，我们可以仿照上面的方法来求它们的**矢量和**。首先按照一定的比例尺在纸上沿着 $\boldsymbol{a}$ 的方向画一个箭头，然后从 $\boldsymbol{a}$ 箭头的末端开

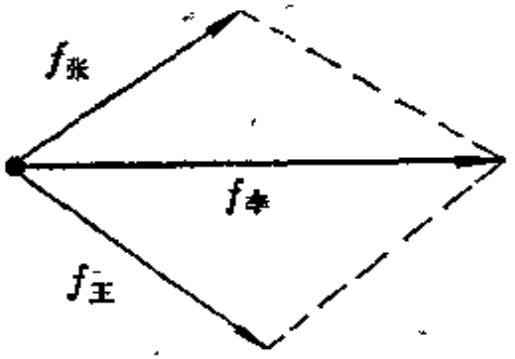


图3-1　力的合成，平行四边形法则

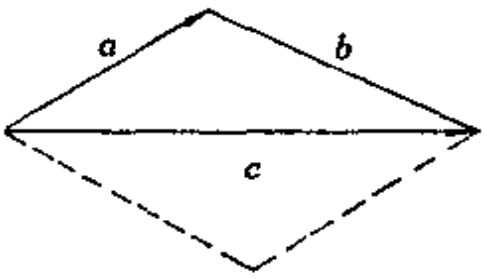


图3-2　矢量加法

❶ 把矢量叫做“向量”也是不完全恰当的。

始，再按相同的比例尺沿着 $\boldsymbol{b}$ 的方向画一个箭头，于是，从 $\boldsymbol{a}$ 的始端到 $\boldsymbol{b}$ 的末端画一个箭头 $\boldsymbol{c}$，这就是代表所求**合矢量**的箭头。由图3-2可见，这种作法是和平行四边形法则完全一致的。

必须指出，只有服从上述这种加法运算的“向量”，才能叫做**矢量**；就是说，求和法则是包含在矢量的定义之内的。按照这种求和（加法）法则，很容易证明下面两个规律：

交换律 $$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \qquad (3-2-2)$$

缔合律 $$(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)+\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}_1+(\boldsymbol{a}_2+\boldsymbol{a}_3) \qquad (3-2-3)$$

正因为有这样一些规律，这种运算才有资格叫做**加法**，因为它和普通的数字加法服从相同的规律。

按照加法的定义，也很容易得出矢量的倍数的概念。我们“当然”应该认为，$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{a}$。那么，如果 k 是一个正实数，则 $k\boldsymbol{a}$ 应该理解为和 $\boldsymbol{a}$ 方向相同而其量值为 $\boldsymbol{a}$ 的 k 倍的一个矢量；如果 k 是一个负实数，则 $k\boldsymbol{a}$ 应理解为和 $\boldsymbol{a}$ 方向相反而其量值为 $\boldsymbol{a}$ 的 $|k|$ 倍的一个矢量。很容易证明，矢量的倍数满足下面这些规律：

缔合律 $$k_1(k_2\boldsymbol{a})=(k_1k_2)\boldsymbol{a} \qquad (3-2-4)$$

分配律 $$k(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=k\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b} \qquad (3-2-5)$$

有了倍数的定义，就可以定义矢量的减法，即：

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-1)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}) \qquad (3-2-6)$$

讲到这里，我们看到，尽管矢量加法的定义和数字加法的定义是不同的，但是二者的**规律**却是相同的。因此，数字加减运算中的那些技巧，例如移项、去括号等等，都可以应用于矢量的加减运算中。

3.矢量和座标 在进行具体的计算时，我们常常引用适当的座标系。座标系是为了计算的方便而**人为地**引入的，它不可避免地带来一些任意性。为了说明这个问题，请看图 3-3 。图中的 $\boldsymbol{r}$ 是平面上一点 P 的矢径，这个矢径确定了 P 对原点 O 而言的距离和方位，它“客观地”表现着 O、P 二点的关系。另一方面，也可以用座标来确定 P 点的位置。但是，即使原点不变，座标系也可以有许多不同的画法，如图中的 XOY 和 $X'OY'$ 所示。我们看

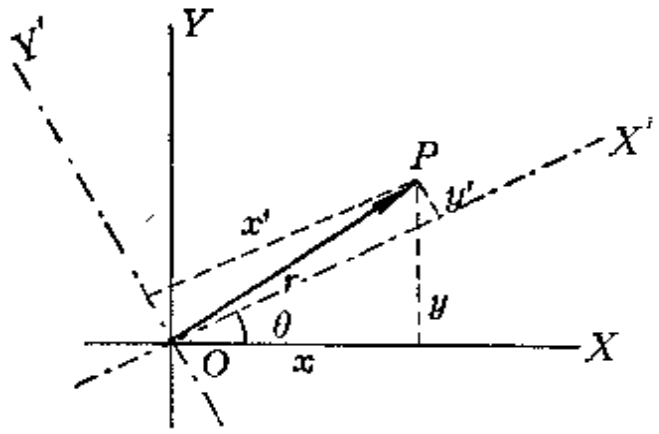


图3-3 平面座标系的转动

到，座标系不同，P 点的座标就不同，但是它的矢径 $\boldsymbol{r}$ 却根本不会受座标变换的影响。如果我们有一些矢量关系式，例如 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$，则这些等式是不会因所取座标系的不同而有所不同的。因此我们说，矢量表示法比座标表示法**有着较大的独立性**，或者说**有着较少的任意性**。另外，一个矢量往往代表一个完整的物理量，例如老张对车子的作用力，而它的座标表示式则在表现问题方面显得比较零散和间接。最后，一个矢量式总是代表着几个（例如三个）座标关系式，写起来也简单一些。因为有这么些好处，特别重要的是第一点，所以在理论推导时人们常常用矢量形式，只有到了要计算最后的结果时才引入适当的座标系。

讲清楚了这种情况，咱们才可以谈矢量的座标表示法。这一点，事实上在第一章中也已经讲过了。例如，在三维直角座标系中，一个矢量 $\boldsymbol{a}$ 可以用它的三个分量来表示：

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k} \qquad (3\text{-}2\text{-}7)$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是沿座标轴的单位矢量。有时候，我们也用一个**列矩阵**来代表一个矢量❶，例如：

$$\boldsymbol{a}=\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}2\text{-}8)$$

我们指出，(3-2-7) 和 (3-2-8) 都是以一定的座标系为先决条件的；脱离了座标系，这两种写法都是没有明确意义的。

如上所述，理论的矢量表述形式本来是比较简练、完整和客观的；但是，有时由于座标用得比较熟练，人们反而觉得矢量形式“抽象”而不易掌握。考虑到这种情况，以后我们也将比较多

❶ 列矩阵—column matrix，按《物理学名词》译法，不按《数学名词》译法。

地利用座标表述形式。但是，我们希望读者能够理解座标形式的缺点，而且，如果想要完全避免使用矢量语言，那就会把理论弄得很冗长了。

4.二矢量的标积 关于二矢量的标积，我们在讲功的定义时已经用过了。两个矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的标积一般写作$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$或$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b})$，其定义是：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=ab\cos\theta \tag{3-2-9}$$

式中θ是二矢量的夹角。

很容易证明，标积运算服从下列的规律：

交换律 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (3-2-10)

分配律 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (3-2-11)

座标式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$ (3-2-12)

5.二矢量的矢积 在前面的§.1-4和§.1-8中，都谈到过矢积的概念。二矢量$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$的矢积一般写作$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$或$[\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}]$，其定义如下：

(i)$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=ab\sin\theta$, (3-2-13)

(ii)$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向按右手螺旋法则确定，就是说，按照从$\boldsymbol{a}$经过二者夹角转向$\boldsymbol{b}$的方向旋转一个右手螺旋，螺旋轴线前进的方向就定义为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向。

很容易证明，右手直角座标系的三个基底矢量满足下列关系式：

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}&=-(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})=\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}&=-(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})=\boldsymbol{i}\\ \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}&=-(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})=\boldsymbol{j}\end{aligned}\right\} \tag{3-2-14}$$

此外，对于任意的$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，还有：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=0 \tag{3-2-15}$$

以及：

反交换律 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$ (3-2-16)

分配律 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$ (3-2-17)

利用分配律和关系式(3-2-14)，可以推出矢积的座标式：

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})\times(b_x\boldsymbol{i}+b_y\boldsymbol{j}+b_z\boldsymbol{k})$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\boldsymbol{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\boldsymbol{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\boldsymbol{k}$$

(3-2-18)

习题：1.以上有许多公式没有证明，只说了一句“很容易证明”就算了。那是有意留下来给读者自己练习的。证明的方法是直接从定义出发，有时用到前边讲了的结果。

2.设 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 是空间中的三个任意矢量，试问下列的几个“乘积”有没有意义？

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c},\qquad \boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},\qquad (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$$

§.3-3. 什么是数学场

以上两节还没有讲到数学场论的正式内容，只是作了一点准备而已。从本节起，我们开始尽可能简练地介绍一点数学场论。

1.物理场和数学场 物理学中所说的场，通常是指某种特殊形式的物质。例如，静止带电体周围存在着一种叫做静电场的东西，可以对其他带电体作用以“静电力”（库仑力）。又如，静止磁铁或恒稳电路（$\frac{di}{dt}=0$）周围存在着一种叫做静磁场的东西，可以对运动电荷作用以“磁力”（洛仑兹力）。再如，加速运动的电荷或交流电路周围不但存在着电场，而且存在着磁场，而且电场和磁场还不断地互相影响，互相转化；这就是我们所说的**电磁场**，而在科研、生产和国防等方面大有用处的电磁波，就是这种不断变化的电磁场。此外还可以举出许多物理场的

例子，现在不多举了❶。

一种特定的场，例如静电场，可以有许多种性质，例如静电场的电场强度、电位等等；每一种性质都要分别地用适当的物理量来描述。一般说来，同一种性质在场中不同的点上会有量的差别，就是说，相应的物理量一般是空间座标的函数；如果场是变化的，相应的物理量还会是时间的函数。一般地说，作为空间座标的函数（有时还是时间的函数）的任何物理量，都叫做一个数学场。

不但在描述物理场的性质时要用到各种的数学场，而且在描述其他“大块物体”的性能或运动时也要用到各种的数学场。这就说到咱们的正题上来了。在地震勘探中，人们要对付的是各种地层，而每一个地层都是一个“大块的物体”，它的性质和状态可能是各点不同的，而且还可能是随时变化的。要描述地层的这些性质或状态，很自然地就要引用适当的数学场。因此，数学场论是研究地震波动力学（以及一般的弹性力学）所不可缺少的工具。

这样讲也许太“抽象”了，需要举一些例子。好的，我们就来举一些最容易搞懂的例子，并通过这些例子来说明数学场的几种类型。

2.标量场　例如，我们在某个地方打了一口取芯井，把那里的岩芯一段段地取上来，在实验室中测定岩样的密度。我们会发现，各段岩芯的密度是不相同的；换句话说，岩芯密度是探井深度的函数。设想我们已经把这个函数的曲线画了出来。换一个地方另打一口探井，你会得到另外一条实验曲线，和原来那一口的并不相同。这岂不是说，地下岩石的密度是各点不同的，岂不是说岩石密度是空间座标的函数吗？请问这一事实怎样用数学形式表示出来？我们当然先取一个原点O。在场论中，把所考虑的场中的一点叫做场点。上面的事实就是说，岩石密度ρ是场点位置的函数。如果采用矢量表示法，我们可以写：

❶ 我们这里有意识地没举重力场和一般引力场的例子，因为那种表面上最简单的场，实质上却最不简单。

$$\rho = \rho(\boldsymbol{r}) \qquad (3\text{-}3\text{-}1)$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是场点的矢径。表示式(3-3-1)读作“密度ρ是场点矢径的函数”。如果引入一个直角座标系，也可以得到座标表示式：

$$\rho = \rho(x、y、z) \qquad (3\text{-}3\text{-}2)$$

式中x、y、z是场点的座标。

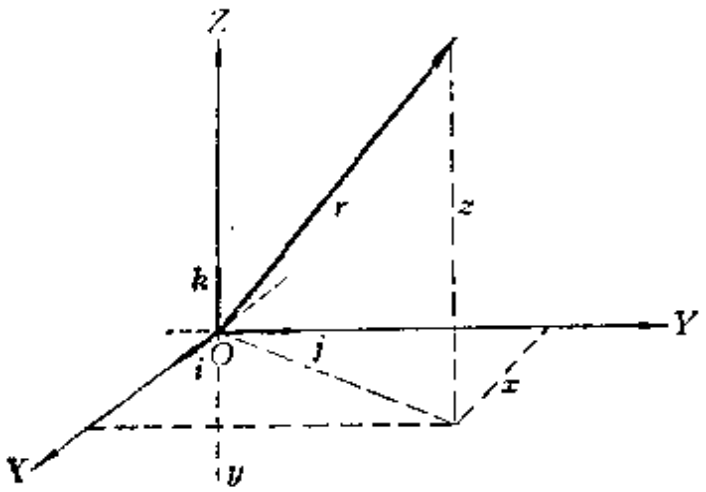


图3-4　场点的矢径和座标

那么，什么是密度？这是谁都知道的；密度就是单位体积中的质量。不过，这里需要再解释几句。在一个广大的岩层中，所谓各点的密度是什么意思呢？这很容易懂。设要测定图3-4中一点P处的岩石密度，只要包围着P点取一个体积元 ΔV，测出它的质量Δm，然后用ΔV一除，就得到这一小块岩石的密度。如果ΔV取得合适，可以看作一个宏观无限小体积的话，这样求得的结果也就可以算是P点的岩石密度了：

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V},\ \Delta V \longrightarrow \text{宏观无限小} \qquad (3\text{-}3\text{-}3)$$

密度是标量，而现在它又是场点位置的函数（也可能还是时间的函数），因此，我们就把这样一个表示着岩石质量分布的物理量ρ（$\boldsymbol{r}$）或ρ（x，y，z），叫做一个密度场；这就是所谓标量场的一个例子。

这样的例子还可以举出很多。例如地层中各点的温度可以到处不同，而且温度还可以取负值（零下若干度），而且还可以随时在变化；总之我们可以有：

$$T = T(\boldsymbol{r},\ t) = T(x,\ y,\ z,\ t) \qquad (3\text{-}3\text{-}4)$$

这样说来，所谓标量场，其实就是随场点位置而变并且也可以随时间而变的一个标量；它有一定的单位，可以取正值也可以

取负值，但是没有方向。随时间而变化的数学场叫做**非稳场**；否则叫做**稳定场**。以上所举的温度场，就是非稳标量场的一个例子。

有一个事实，虽然很明显，但却值得反复强调。设想我们把P点取定了，例如某某村庄旁边的一个井位，深度为1000米。这是一个客观存在的地点，那儿的岩石密度也是客观存在的；不论你怎么画座标系，不论你画不画座标系，甚至不论你来不来（存在不存在），那岩石密度完全不会随你的主观动作而为转移。这是不言而喻的。那么，所谓ρ是场点座标的函数，又是什么意思呢？这当然是就不同各点的密度来说的。就同一个点来说，你取了一个座标系，它的密度有一个数学表示式；你换了另外一个座标系，它的密度也有另外一个数学表示式；不论怎么换，那一点的密度值不能有所不同！因此，我们说，**标量场对座标的几何变换必然是不变的。**如果不是这样，那个函数就不能独立地反映客观事实，从而就没有独立的物理意义，从而也不配叫做标量场！这一点显然极关紧要，但是我们只能讲到这种地步为止。

3.矢量场　有了前面的基础，矢量场的概念也就是很容易理解的了。但是咱们还是先举例子吧！

譬如我们研究河水的流动。靠近河边的地方，水流得慢一些；靠近“中流”的地方，水流得快一些；有的地方水流得很平稳，很顺畅；有的地方水流得很湍激，打着转儿，形成漩涡；河的上游和下游，河面上和河底部，水流快慢都不一样，其流动方向也不同；而且，就是在同一个地方，早晨和晚上的水也不见得流得一样快慢。总而言之，河水的**流动速度**（简称**流速**）v是空间位置和时间的函数：

$$v=v(r,\ t)=v(x,\ y,\ z,\ t)。\qquad (3\text{-}3\text{-}5)$$

这样的一个**矢量函数**，就是矢量场的一个例子。

这本来是很容易理解的，不过，为了以后的应用，也为了加深印象，我们再举两个例子。

首先，我们把(3-3-3)和(3-3-5)结合起来，定义一个新的矢量场：

$$\boldsymbol{j}_m = \rho \boldsymbol{v} \qquad (3\text{-}3\text{-}6)$$

这样一个矢量场，叫做所考虑的流动物质的**质流密度**。既然 ρ 和 $\boldsymbol{v}$ 一般说来都是场点位置和时间的函数，质流密度 $\boldsymbol{j}_m$ 当然一般也是这些东西的函数，关于这个矢量场的物理意义，我们将在以后再进一步讨论。

其次我们来谈谈弹性体中的情况。对于我们的主题，这个例子是特别重要的，因为前面说过，地震波传播所及的地层一般可以看成弹性体。如图3-5所示，在一块广大的弹性体中任取一点，

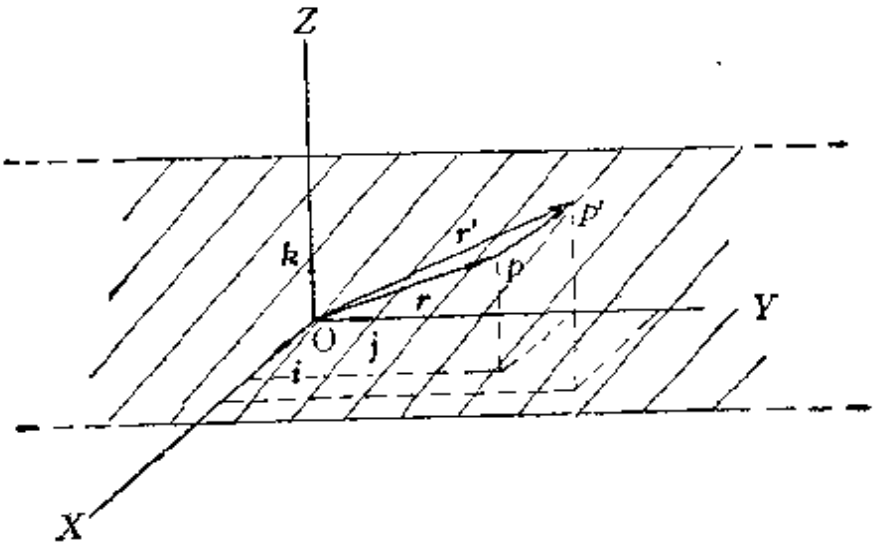


图3-5 弹性体中的位移场

为了具体，可以设想这是地层中一块很小的微生物化石。当弹性体没受外力，从而体内也不存在胁强和胁变时，这一点位于 P；当体内出现胁强和胁变时，一般说这一点会挪动一段小小的距离而达到另一点 P'。也就是说，当出现胁强时，弹性体中这一物质小块发生一个位移；我们用 $\boldsymbol{s}$ 来代表这个位移：

$$\boldsymbol{s} = \overrightarrow{PP'} \qquad (3\text{-}3\text{-}7)$$

很容易想到，如果我们起先不是取的那块小化石，而是取了另一块小化石，它的**起始位置**不是 P 而是 Q，则在胁强分布和上次相同的情况下，这另一块小化石的位移一般和 $\overrightarrow{PP'}$ 不一定相同。就是说，这样的**弹性位移**是场点位置的函数。一般情况，弹性体受到的外力是随时变化的，那么，弹性体内的胁强和胁变也

将是随时变化的，从而弹性位移 s 也将是时间变量 t 的函数：

$$s = s(r,\ t) = s(x,\ y,\ z,\ t) \qquad (3\text{-}3\text{-}8)$$

以后我们会讲到，这样一个**弹性位移场**，是弹性力学中的一个很重要的矢量场。按照弹性力学的通用符号，弹性位移在直角座标系中的三个分量用 u、v w 来代表❶：

$$s = ui + vj + wk \qquad (3\text{-}3\text{-}9)$$

当然，一般说来，u、v w 也都是场点位置和时间变量的函数。

总而言之，如果在一个空间（或曲面）区域内，对应着每一点和每一时刻都存在一个矢量值 a，我们就说在这个区域内存在着（定义了）一个**矢量场** $a\ (x,\ y,\ z,\ t)$。上面举的，就是矢量场的几个例子。

矢量场比标量场复杂，因为对应于每一点和每一时刻，不是有一个标量而是有一个矢量；矢量不但有量值，而且有方向；一般情况，一个矢量有三个分量，而不是象标量那样只有一个量值。如（3-2-7）和（3-2-8）所示，三个分量的总体确定着矢量本身，因此，三个分量的总体（集合）叫做该矢量在所选座标系中的**表象**。前已说明（参阅图 3-3），同样一个矢量，在不同的座标系中有**不同的分量**，也就是有不同的**表象**。在这种**座标变换的性质**方面，矢量的分量是和标量截然不同的。因此，从这种极端重要的性质方面来看，矢量的分量不是标量，而只是矢量的分量而已；不应该把它们和标量混为一谈。换句话说，矢量场的某一分量，并不能叫做一个标量场，因为二者的数学性质是全然不同的。

我们用 N 代表某一点的座标的个数（也就是空间的**维数**），用 n 代表分量的个数。例如在物理空间中，$N=3$，而矢量的分量个数 n 也等于 3。量在平面上，$N=2$，而矢量的分个数 n 也等于 2。就是说，对于矢量，总是有：

$$n = N^1 \qquad (3\text{-}3\text{-}10)$$

如果我们把标量本身叫做它的“分量”，则不管 N 等于几，它的

❶ 这种符号很不合适，但已经非常通行，不好更改了！

n总等于1。就是说，对于标量，总是有：

$$n = N^0 = 1 \qquad (3\text{-}3\text{-}11)$$

这一点，可以这样理解：标量的“复杂性”是第0级，矢量的“复杂性”是第1级。讲这个干吗？这是我们的一个“伏笔”，等一下你就知道是怎么回事了。

4.张量场　弹性力学中的胁强和胁变，实际上是数学场论中所谓的张量场。如果我们掌握了(熟悉了)张量场的运算法则，处理起弹性力学的理论问题来将会有轻车熟路、得心应手之感。但是，要做到那一点，就得先学一套相当抽象而繁复的数学，这对初学者来说是颇为费劲的（虽然绝不是“得不偿失”）。而且，在中等程度的弹性力学书籍中，人们似乎并不假设读者熟悉张量场论，而是“就事论事地”发展弹性理论。这也可以说是“不得已而为之”吧。我们这种入门性的书，当然也应该采用这样的办法。因此，关于张量场，我们根本不想多讲——完全不讲也可以。但是，既然胁强和胁变等等实际上是张量场，如果能够对张量场有一个初步概念，当然对理解弹性力学和弹性波理论是会有相当好处的。下面我们就试着讲讲这个概念。

前面讲了，标量只有一个“分量”，它的“复杂性”是第0级；空间矢量有三个“分量”，它的“复杂性”是第1级。那么，还有没有更复杂的物理量，它们的“复杂性”可以是第2级、第3级……乃至许多级呢？有，那种物理量就叫做**2秩的、3秩的……张量**。你举举例子看。我说，弹性力学中的胁强和胁变，就是2秩张量的例子，但是那种例子我们打算留到下一章去讲。这里只举一个“数学的”例子。

你想，在三维座标系中，任一矢量场$\boldsymbol{a}$有三个分量a_x、a_y、a_z。当然，这三个分量都是场点座标的函数（此外也可能是t的函数，但是我们现在用不着考虑那个问题）。因此，可以写出：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= a_x(x,\ y,\ z) \\ a_y &= a_y(x,\ y,\ z) \\ a_z &= a_z(x,\ y,\ z) \end{aligned}\right\} \qquad (3\text{-}3\text{-}12)$$

如果它们还是t的函数，那就多写几个t，其余的讨论都一样。

在许多情况下，这三个函数都可以认为是连续的和有导数的。那么，设某点P处的场矢量是$\boldsymbol{a}_P$，附近另一点P'处的场矢量是$\boldsymbol{a}_{P'}$，这两个矢量必然相差不大。“相差不大”是多大呢？那就要分头比较相应的分量了。根据多元函数的微分学，当P、P'二点足够靠近时，我们有：

$$\left.\begin{aligned} a'_x - a_x = da_x &= \frac{\partial a_x}{\partial x}dx + \frac{\partial a_x}{\partial y}dy + \frac{\partial a_x}{\partial z}dz \\ a'_y - a_y = da_y &= \frac{\partial a_y}{\partial x}dx + \frac{\partial a_y}{\partial y}dy + \frac{\partial a_y}{\partial z}dz \\ a'_z - a_z = da_z &= \frac{\partial a_z}{\partial x}dx + \frac{\partial a_z}{\partial y}dy + \frac{\partial a_z}{\partial z}dz \end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}3\text{-}13)$$

式中d_x、d_y、d_z是无限小矢量$\overrightarrow{PP'}$的三个分量。要比较相邻二点处的场矢量，必须引用九个空间偏导数。

“糟啦，复杂啦！”复杂是稍微复杂了一点，但是并不难懂；平心静气地一步一步想下去，这问题还是很容易理解的。我们说，由于矢量场$\boldsymbol{a}(r)$在每点都有三个分量，而每个分量又是三个空间座标的函数，因此，为了描述矢量场$\boldsymbol{a}(r)$在某点附近的**变化率**（即其空间分布情况），就不得不引用九个偏导数。这事情好象也是很自然的；从实质上来看，这和用**一个常导数**来描述单元函数在某点（x_0）处的变化率的办法并无不同。

在单元函数的微分学中，每换一次自变数，函数的各阶导数当然也会跟着变。举一个最简单的例子来看看。设，

$$y = f(x) = 5x^2$$

则有：

$$\frac{dy}{dx} = 10x$$

现在换变数，令：

$$\eta = 5x,$$

就有：

$$\frac{dy}{d\eta}=\frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\eta}=10x\times\frac{1}{5}=2x\neq\frac{dy}{dx}$$

在多元函数的微分学中，也有类似的情况。把座标系转动一下（换了个座标系），好，不但矢量的三个分量 a_x、a_y、a_z 都变了（参阅图 3-3），而且它们的九个偏导数也按照更复杂的规律变了。变了固然变了，但它们却还是九个偏导数，而且还是描述着矢量场$\boldsymbol{a}(r)$ 的空间变化率。在这方面，它们和矢量的分量是相似的。当座标系变了时，矢量的三个分量也跟着变，但变出来的还是三个分量，而且**还是那同一个矢量的表象**！九个偏导数的情况也相似；座标系一变，它们也跟着变，但变出来的还是九个新的偏导数（而不是别的玩意儿），而且这九个新的偏导数还是描述着矢量场的空间变化率。因此，我们很自然地想，这九个偏导数的**总体（集合）**，也象 a_x、a_y、a_z 这三个函数的总体一样，它们只是**表象**，它们反映着、确定着某种更本质的东西，那就是矢量场$\boldsymbol{a}(r)$的空间变化率。我们把这种更本质的东西叫做张量❶。矢量场的空间变化率一般也是到处不同的；就是说，九个偏导数一般也还是座标的函数，因此我们说，这九个偏导数代表着一个二秩的张量场。不但如此，正如人们有时把（3-2-8）那样的列矩阵干脆叫做矢量，而不说它是矢量 $\boldsymbol{a}$ 在所选座标系中的表象一样，人们也常常把张量的表象（九个分量的总体）干脆就叫做张量。

物理学中常常遇到和上述情况相类似的情况。我们常常发现，为了描述某一物理状态，不是应该引用一个量（标量），也不是应该引用三个量（矢量的分量），而是必须引用九个量，而且这九个量在座标变换时将象（3-3-13）中那九个偏导数一样地发生变化；这时我们就说那九个量代表（或构成）一个**二秩的张量**。遇到这种情况，**应该把那九个量看成一个整体**，它们共同反映着某种物理状态（例如弹性体中的胁强状态）。如果那九个量都是座标的函数，它们所代表的就是一个**二秩的张量场**。

❶ 张量（tensor）一词本身就使我们想起弹性力学中的“张力”（tension）。

太抽象了？这样原则式地、概念化地讲，当然会显得有些抽象。如果我们举些例子，把有关的概念和关系用数学形式表示出来，那就会心里踏实一些，但是那就会讲得太长，不是我们的原意了。因此，我们只满足于在这里指出，在下一章中就会发现，弹性体中的胁强就必须用上面所说的那样九个函数来描述；那九个函数就叫做胁强场的**分量**。在习惯上，我们用双角码来区分一个二秩张量的分量，并把它们排成一个方阵；例如：

$$\begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}3\text{-}14)$$

第一个角码和 α 的分量角码相对应，第二个角码表明对哪个座标求导数。随便拿一个分量来看看。譬如 α_{zy}；第一个角码是 z，我们就先写一横，在上面写上 ∂a_z；第二个角码是 y，我们就在那一横下面再添上 ∂y。于是就得到了偏导数 $\frac{\partial a_z}{\partial y}$；这就是说，当座标系变换时，$\alpha_{zy}$ 这个分量必须和偏导数 $\frac{\partial a_z}{\partial y}$ 按照相同的规律（相同的数学公式）发生变化。“如果它偏不那么变化呢？”那它就算不得二秩张量的一个分量！

二秩张量的概念就讲这么多吧！由于讲得太简略，大家心中一定出现了许多问题。第一个问题：这东西到底有什么用？回答说：有相当大的用处；任何真正科学的概念和理论，绝不会是人们头脑里的“思想游戏”，它总是在实践的迫促（广义的迫促）下发展起来的。例如，在研究广大弹性体中的弹性力分布时，我们发现不引入胁强的概念就不能把问题表示明白，而胁强的**数学实质**恰恰就是一种二秩张量场。你想，假如二秩张量场的概念（或是任何别的概念）一点儿用处都没有，它怎么能在科学思维中出现？就是偶然出现了，它也“活”不到现在，应该早就被人们忘记了，“死”掉了。

第二个问题，为什么这种张量场叫做“二秩的”？这一点因

为前面有了“伏笔”，应该是很好理解的。这种张量有九个分量，就是说它的分量数目是：

$$n = 9 = 3^2 = N^2 \qquad (3\text{-}3\text{-}15)$$

式中N是所研究的空间的维数（即座标的个数）。N上面的那个指数2，叫做张量的**秩**。在这种理解下，可以把标量叫做零秩张量，把矢量叫做一秩张量，把上述那种有九个分量的量叫做二秩张量。这样，标量、矢量和张量，就在“秩”的意义下统一了起来。当座标系变换时，不同秩的张量的分量按照不同的数学规律（数学公式）变化，相同秩的张量的分量按照相同的数学规律变化。在一定意义下，我们可以说物理学中的一切计算都无非是张量的运算。

第三个问题：有没有三秩的、四秩的或一百秩的张量？回答说：有！怎么没有？你把(3-3-13)中的九个偏导数再分别对三个座标求偏导数，就得到$27 = 3^3 = N^3$个二阶偏导数；它们就代表一个三秩的张量。这样接着搞下去，要多少秩就有多少秩。事实上，在理论物理学的某些领域中(例如在广义相对论中)，确实要用到较高秩的张量，而且要引用曲线座标系，结果就把张量概念进一步发展得更完备、更复杂和更难懂了。当然，谁也不会盲目地搞；在实际上或理论上需要什么张量，就引用什么张量；如果全无必要，费那个劲干什么呢？

5.数学场的定义域和边值条件 在单元函数的理论中，往往要说明一个函数是在哪个区间中定义的。那个区间(x_1, x_2)，也就是函数$f(x)$的定义域了。

数学场论研究的是一个或一组多元函数。这种函数往往是在一个空间区域V中（或一个曲面S上）定义的；那个空间域V（或曲面S）就叫做数学场的定义域。例如，在地震勘探中，我们总是分别在一个个的地层中研究地震波的（参阅图3-5），其中每一个地层，就都是弹性波场的一个定义域。一般说，一个地层常常被设想为有一个厚度，而在其他方面则伸展到很远的地方。也可以换一种说法。我们看图3-6。这里画了一块平板，厚度是d。

这块平板和一个半径为R的球面相交。当R足够大时，这就可以算是一块“无限大的”平板了。这块平板的“边界”，包括上下两个表面和周围一个圆环形的“鼓状面”。我们用S来代表这个闭合的边界面。从几何学的观点看来，一个地层正是和这样一块东西相类似的。举这个例子的目的，是要说明这样一个事实：一个任意的空间域V，总可以认为是由某种边界面S包围着的，不过那边界面的某些部分（乃至全部）可能位于“无限远处”。

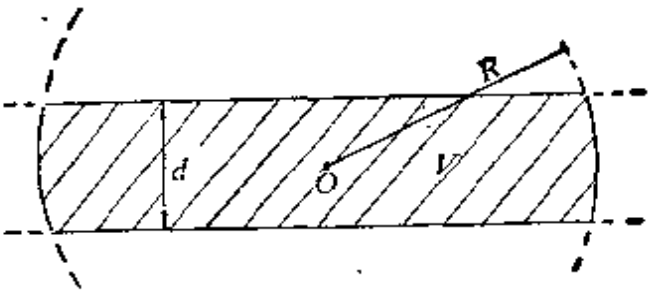


图3-6　一个特定的空间域V

也可能出现如图 3-7 所示的情况。我们有一个闭合曲面S_0，但是S_0里边的物质被剔除了几块，那几块的边界面是S_1、S_2等等。我们要研究的是剩下来的那一部分物质中的场。这时，剩下来的物质所占据的空间，就是我们的场的定义域V。为什么要剔掉那几块呢？也可能那些地方果真是空着的，例如地层中可能有些空洞。但是，更常见的情况是那些地方有它们的特殊性，那里的场不好研究，所以我们暂时把它们划分出去，等一下再单独处理。不管怎么样，当遇到图 3-7 这种情况时，只要把S_0、S_1、S_2的总体叫做定义域V的边界面S，其他的讨论一般是没有什么额外的困难的。

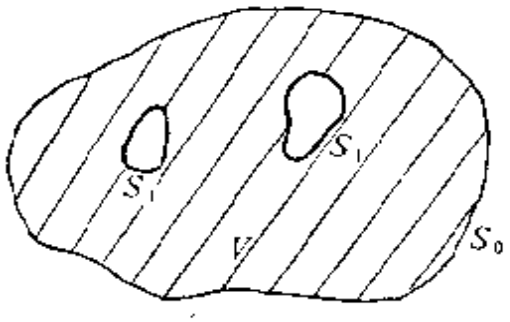


图3-7　另一种空间域V的情况

现在设想我们要在某一空间域V中研究某一数学场（标量场、矢量场或张量场），设域V的边界面是S，如图 3-8 所示。在各种物理学理论（即数学场论的各种物理学应用）中，我们常常遇到这样一种问题（叫做场论的正问题）：（1）要设法确定边界面两侧各点的场有些什么差别，或是确定边界面S各点上的场的值

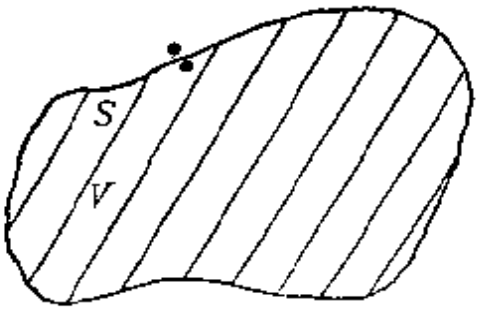


图3-8 一个任意的空间域V及其边界面S

及其导数的值；我们把这一类的数据叫做场在S上的**边值条件**❶；（2）要确定场在V中的空间分布规律；如果场是非稳的，也还要确定它在时间中的变化规律；这种分布和变化的规律，我们总是力图把它用某种偏微分方程组的形式表示出来；这就是场的**基本（微分）方程组**，是解决问题的最基本的依据；（3）如果场是非稳的，一般还需要知道在初始时刻$t=0$时的域V中和曲面S上各点的场的值及其一至二阶偏导数的值；这种数据叫做场的**初值条件**❷。数学场论的结论通常是：知道了上面所讲的这三项资料，通过求解微分方程的办法，就能毫不含糊地把所研究的场在域V中完全确定出来。

当然，这里又只是极其粗略地讲了个大概，还完全没有接触到数学场论的具体内容，同志们有个概略的了解也就可以了。

6.本节小结 （1）所谓数学场，就是为了描述某一物理对象的特定性质或特定状态而在特定空间域中定义的一个或一组多元函数；函数中的自变量一般是场点的座标和时间变量t。

（2）不随时间而变的场叫做稳定场，随时间而变的场叫做非稳场。

（3）数学场可以分为标量场、矢量场和张量场；它们都可以统一在张量场的名下，只是秩数不同罢了。

（4）场论的基本任务，就是在实践认识的基础上得出有关的实验规律，并由此经过抽象概括而得出场的各个分量所满足的基本方程组；然后结合具体条件设法求解这种方程组而定出那些分量的函数形式。

❶ 有时把前一种数据（S两侧）叫做衔接条件，而把后一种数据（S上）单独叫做边值条件，但我们在此不再详细区分。

❷ 如果引入多维时空的概念，初值条件就会成为边值条件的一部分，这问题也不再多讲。

（5）在求解场的基本方程组时，所谓结合具体条件一般表现为要求知道场的边值条件；如果场是非稳的，就还要知道场的初值条件。

（6）为了便于理解，我们主要引用了空间直角座标系，而且以后还要更多地在这种座标系中论述问题。但是，必须初步理解和时刻记得，座标系是人画的，是带有主观性和任意性的，而数学场所反映的物理事实则是客观的和确定的。例如，不论把座标系画在什么地方和画成什么样子，不论画不画什么座标系，地层中某一确定点在某一确定时刻的密度（标量）、弹性位移(矢量)和弹性胁强（二秩张量）都应该是客观存在的，都应该有完全确定的值。换句话说，数学场和它所反映的物理情况，要比座标系客观得多，本质得多，它是不会以座标系的几何变换而为转移的。当把座标系转过一个角度（或几个角度）时，每一矢量的三个分量都会按照一定的规律跟着变化，但是那种变化规律适足以保证矢量本身的量值和方向都不会因座标系的改变而发生变化。正因如此，矢量的三个分量所构成的集合才叫做矢量在所取座标系中的表象；表象会随着座标系而变化，而矢量本身却完全不以座标系的取法而为转移。张量也是这样。当座标系选定了时，一个二秩张量可以用九个分量来表示。当座标系转过一个（或几个）角度时，这九个分量全都“约而不同”地按照它们所应有的规律跟着变，但是那种变化规律也适足以保证张量本身及其所代表的物理性质或物理状态不会因座标系的几何变换而有所改变。这就是矢量和张量的概念之所以特别重要的原因。

习题：1.人们常常提到声场、波场，这些是物理场还是数学场？

2.自己再举一些标量场和矢量场的例子。

3.在平面直角座标系（二维空间）中，一个矢量场 $\boldsymbol{b}$ 有两个分量，b_x和b_y，

$$\boldsymbol{b} = b_x\boldsymbol{i} + b_y\boldsymbol{j}$$

这两个分量的四个偏导数，代表二维空间中的一个二秩张

量：

$$\frac{\partial b_x}{\partial x},\quad \frac{\partial b_x}{\partial y}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial x},\quad \frac{\partial b_y}{\partial y}$$

试参照图 3-3，自己推出这四个偏导数在座标系转动下的变换公式。

§3-4. 数学场的空间导数场

1.空间导数的初步概念 还是从单元函数谈起。一个单元函数 $y=f(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$，一般说还是自变数 x 的函数。将 x 的一个特定值 x_0 代进去，这个导数的值就代表着原函数 $f(x)$ 在 x_0 点附近的**变化率**（请看图3-9）❶。这是我们大家都已知道的。

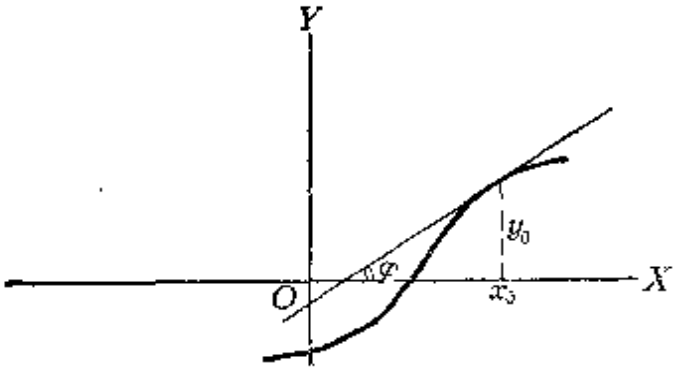


图3-9 单元函数的导数表示函数的变化率

数学场是一些多元函数；它们的空间偏导数，经过适当的组合，也表示着（描述着）原函数在空间某点附近的分布情况（即空间变化情况）。

再说清楚一些？好的。在图3-10中，画出了直角座标系和数学场的定义域 V。设想我们在 V 中任取一点 P，来研究数学场在 P 点附近的分布情况。为此目的，我们画一个很小很小的闭合曲面将 P 点包围起来。这样，就在 P 点周围划分出来一个很小的、可以看成无限小的体积元；这样的体积元就叫做 P 点的**一个邻域**。我们的任务，就是要研究场在这个邻域中的分布情况。

❶ 提醒一下，导数最原始的含意是函数的变化率（增加率），不是什么含糊其辞的“速度”，也不是什么“切线的斜率”。

再说清楚一些。在P点上，场有自己的值——如果研究的是标量场，则所谓场的值是一个标量；如果研究的是矢量场，则所谓场的值是一个矢量，这个矢量可以用它在所选座标系中的三个分量来表示；如果研究的是一个二秩张量场，则它的值是一个二秩张量，这个张量也可用它在所选座标系中的九个分量来表示。好了，现在我们从P点开始，沿着任意选定的方向画一个无限小的矢量$\overrightarrow{dl}$，于是就来到P点邻域中的另一点P'，如图3-11所示。一般说来，数学场在P'点的值和它在P点的值是不相等的。但是，只要场在P点的邻域中是连续的，则它在这二点上的值必然相差很小，因为这两点是无限靠近的。另外，如果场在P点的邻域中是有偏导数的(可微的)，则这两个场值的差(场值增量)可以写成各个偏导数的线性式。具体地说，如果研究的是一个标量场$s\ (x,\ y,\ z)$，则它从P点到P'点的增量ds可以用它的三个偏导数

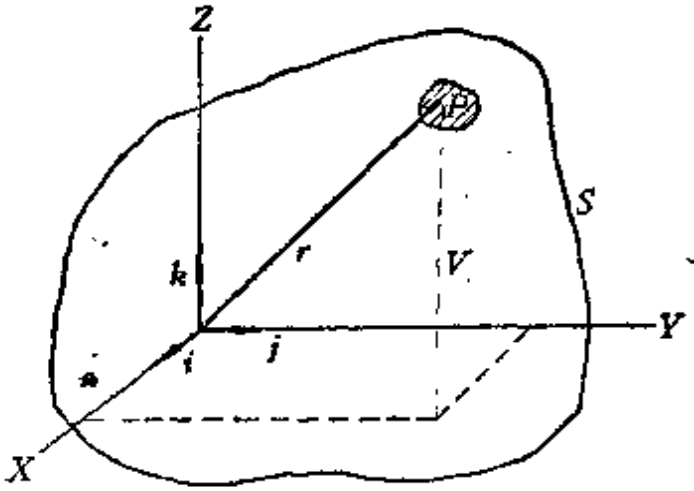


图3-10　场点P及其邻域

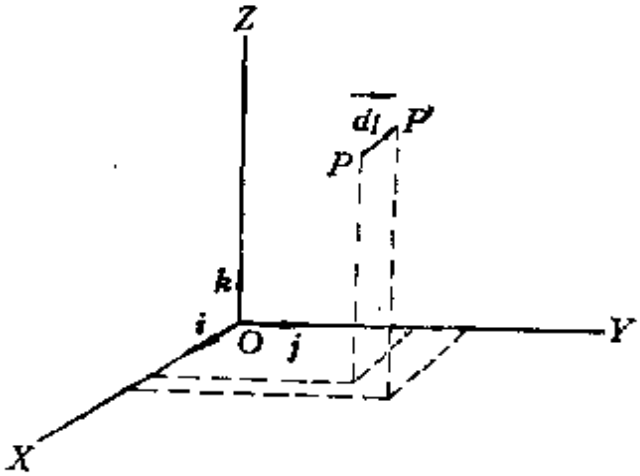


图3-11　从P点出发的一个无限小的位移

$$\frac{\partial s}{\partial x},\ \frac{\partial s}{\partial y},\ \frac{\partial s}{\partial z} \qquad (3\text{-}4\text{-}1)$$

表示出来。如果研究的是一个矢量场$\boldsymbol{a}\ (x,\ y,\ z)$，则它从$P$点到$P'$点的增量$d\boldsymbol{a}$也可以用它的三个分量的九个偏导数表示出来。

在习惯上，我们常常把这个九个偏导数排成一个表：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_x}{\partial x} & \frac{\partial a_x}{\partial y} & \frac{\partial a_x}{\partial z} \\ \frac{\partial a_y}{\partial x} & \frac{\partial a_y}{\partial y} & \frac{\partial a_y}{\partial z} \\ \frac{\partial a_z}{\partial x} & \frac{\partial a_z}{\partial y} & \frac{\partial a_z}{\partial z} \end{pmatrix} \qquad (3\text{-}4\text{-}2)$$

这在数学上叫做 3 × 3 的**矩阵**。我们在这个矩阵中连接着三个偏导数画了一条虚线，这条线叫做矩阵的**主对角线**。如果研究的是二秩或更高秩的张量场，推理的过程也完全类似，只是数学形式越来越繁，我们就不在这里罗列了。

本来，讲到这儿，关于场的空间导数的问题可以说已经讲完了。但是，在场论中，由于阐述问题的需要，人们还常常把（3-4-1）或（3-4-2）中的那些偏导数适当配合起来，构成另外一些数学场，以便更好地描述原来那个场的分布和特征。因此我们还得接着讲下去。

2.劈形算符 为了容易理解，我们将一直在直角座标系中引入概念和阐述问题。但是，我们已经不止一次地强调过，场的性质是不依赖于座标系的，不会因为座标系的**几何变换**（平移、转动、改成球座标系等等）而有所改变❶。

在发表了上面的声明之后，我们来看下面这个公式：

$$\nabla = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z} \qquad (3\text{-}4\text{-}3)$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 是所选直角座标系中的三个基底矢量。但是，整个儿的这个公式却没有独立的数学意义，因为 $\frac{\partial}{\partial x}$ 等等是算不得任何的数学量的。原来，数学上的符号可以分成两大类。一种代表

❶ 已经说过好几次“几何变换”了，这是区别于“运动学的变换”来说的；前者不涉及参照体的改变，而后者则涉及不同的参照体场在“运动学的变换”下的变化情况，是相对论的研究课题，在此不讨论。

数学量，例如 a、b、c、x、y、z、$\frac{\partial y}{\partial x}$、$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{r}$等等。另一种却只代表一种**运算手续**，例如＋、－、×、÷等等。加号“＋”本身没有数值，它只代表将前后两个量“相加”，而什么叫做“相加”还要看所加的是什么量(标量有标量的加法，矢量有矢量的加法，矩阵有矩阵的加法，等等，等等）。同样，$\frac{\partial}{\partial x}$也只代表一种**运算手续**，代表将后面的函数对 x 求偏导数。这种代表运算手续的数学符号就叫做**算符**（或叫**算子**）。把一定的算符作用在不同的函数上，就得到不同的结果。按照这种说法，（3-4-3）也是一个算符，一般叫做**劈形算符**，因为 ∇ 这个符号很象一个尖劈。按照几种特定的方式把劈形算符作用在一些数学场上，就能得到一些很有用的结果。

3.标量场的梯度 设所研究的标量场有偏导数，我们就可以按照下面的方式将劈形算符作用在这个场上：

$$\nabla s = \boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}s + \boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}s + \boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}s, \qquad (3\text{-}4\text{-}4)$$

这里的$\frac{\partial}{\partial x}s$就理解为偏导数$\frac{\partial s}{\partial x}$，余类推。于是，**在形式上**，我们就从一个标量场得出了一个矢量场。为什么说是“在形式上”呢？因为这样得出的结果是不是真正的矢量场还有待证明。我们必须证明（3-4-4）具备矢量的一切性质，服从矢量的运算法则等等。特别说来，必须证明，当座标系转过一个角度时，（3-4-4）的三个“分量”即三个偏导数$\frac{\partial s}{\partial x}$、$\frac{\partial s}{\partial y}$、$\frac{\partial s}{\partial z}$确实是按照矢量分量的变换公式发生变化的；如果不然，（3-4-4）就不能叫做矢量场。证明的方法有好几种，我们全都不讲了。证明的结果是：∇s确实是一个矢量场。在数学场论中，这个矢量场叫做原标量场 s 的梯度（或陡度），有时写成grad s（读作“s 的梯度”或“梯度 s”）：

$$\text{grad}\, s = \nabla s = i\frac{\partial s}{\partial x} + j\frac{\partial s}{\partial y} + k\frac{\partial s}{\partial z} \quad (3\text{-}4\text{-}5)$$

可以说，一个标量场 s 的梯度∇s，是从原标量场求出的“矢量导数场”。

事实上，在研究一个标量场时，我们通常是首先计算它的梯度，因为梯度确实能够很好地反映标量场的分布情况。为了弄清楚这一点，我们回去看看图 3-11。可以把图中的无限小矢量 $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{dl}$ 写成：

$$\overrightarrow{dl} = i\,dx + j\,dy + k\,dz \quad (3\text{-}4\text{-}6)$$

式中dx、dy、dz是 $\overrightarrow{dl}$ 在三个座标轴上的投影。根据多元函数微分学，从P到 P'的场值增量是：

$$ds = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy + \frac{\partial s}{\partial z}dz$$

这恰好是 ∇s 和 $\overrightarrow{dl}$ 的标积：

$$ds = (\nabla s)\cdot\overrightarrow{dl} = (i\frac{\partial s}{\partial x} + j\frac{\partial s}{\partial y} + k\frac{\partial s}{\partial z})\cdot(i\,dx + j\,dy + k\,dz) = \frac{\partial s}{\partial x}dx + \frac{\partial s}{\partial y}dy + \frac{\partial s}{\partial z}dz \quad (3\text{-}4\text{-}7)$$

因此，有了 $\text{grad}\, s = \nabla s$，对于当从 P 点向任意方向移动时的场的变化情况，就算有了全面的了解。由图 3-11可见，$dx/dl = \cos\alpha$，$dy/dl = \cos\beta$和$dz/dl = \cos\gamma$就是小矢量 $\overrightarrow{dl}$ 的三个方向余弦。ds/dl这一比值（当$dl \to 0$ 时）叫做场 s 在 $\overrightarrow{dl}$ 方向上的**方向导数**，通常写作$\frac{\partial s}{\partial l}$。因此，由 (3-4-7)得到：

$$\frac{\partial s}{\partial l} = \frac{\partial s}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial s}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial s}{\partial z}\cos\gamma = l_0\cdot\text{grad}\, s \quad (3\text{-}4\text{-}8)$$

式中 l_0是沿着 $\overrightarrow{dl}$ 方向的单位矢量。我们指出，方向导数虽然也表示一种变化率，但却和一般的偏导数不完全一样，因为 l 并不是 s 所依赖的一个自变量。

梯度是一个数学概念，它本身是没有什么“物理意义”的；这正如导数只代表函数的变化率，而本身并没有任何“物理意义”一样。只有当说定了标量场 s 是个什么物理量时，才谈得到 grad s 的“物理”意义。下面我们要讲到矢量场的散度和旋度；它们也和标量场的梯度一样，只是一些数学概念，就其本身来说是谈不到任何物理意义的。这一点虽然简单，却有不少人没有弄得很清楚！

至于说到物理学中的应用，那当然是五花八门，活动范围很大了。例如，根据物理学的研究，如果讨论的标量场 s 是广大导热介质中的温度场，则各点的 $-\mathrm{grad}\, s$ 的方向就是该点热量流动的方向。又如，如果 s 代表的是静电场的电位场，则 $-\mathrm{grad}\, s$ 恰好就等于该静电场的电场强度。这些当然都是有着毫不含糊的物理意义的。

4.矢量场的散度 前面讲了，为了描述一个标量场的空间分布，有必要从原来的标量场导出一个矢量场，叫做它的梯度（梯度场）。那么，为了描述一个矢量场的空间分布，是不是也有必要从它导出新的数学场呢？很容易想到，前面已经讲过要导出一个二秩张量场。但是，在比较初等的书上，由于张量这一概念不够流行，人们总是尽量避免使用它（另外也还有一些别的原因，这里不细谈）。因此，人们常常把（3-4-2）中那九个偏导数适当地配合起来，以构成由原来的矢量场导出的一个“标量导数场”和一个“矢量导数场”；前者叫做原矢量场的**散度**，后者叫做它的**旋度**。

咱们先讲散度。

我们试着把劈形算符看成一个矢量。为什么说“试着”？因为那东西实际上不是一个矢量而只是一个算符。因此，每当我们把它看成一个矢量时，那都是试着干的。这种看法只能启发我们的思路，“试着”去作出这样那样的推测；推测出来的结果还需要回过头来再行证明。事实上，人们发现，根据这种看法而推测出来的结果，有的是对的，有的是不对的；这就表明，并不能到

处都把 ∇ 看成一个矢量，更不能干脆说它就是一个矢量。但是，值得高兴的是，可以证明，在下面要讲的几个问题中，倒是都可以把它看成一个矢量。

现在说，我们试着把 ∇ 看成一个矢量，并试着把它和所研究的矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 求标积：

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}a_x+\boldsymbol{j}a_y+\boldsymbol{k}a_z)$$

$$=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\qquad(3\text{-}4\text{-}9)$$

这是不是一个真正的标积？就是说，得到的结果是不是一个标量（场）？当座标系转过一个角度时，这种结果是不是真象一个标量似地保持不变？进一步的研究表明，这些问题的答案全都是肯定的。就是说，这样做的结果，我们果真能够从原来的矢量场得出一个标量场；这个标量场 $\nabla\cdot\boldsymbol{a}$ 就叫做原矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的散度，通常写作 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$（读作“$\boldsymbol{a}$ 的散度”或“散度 $\boldsymbol{a}$”）：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\nabla\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\qquad(3\text{-}4\text{-}10)$$

我们看，“散度 $\boldsymbol{a}$”正好就是（3-4-2）那个矩阵的主对角线上三个偏导数的和❶。

还是那话，只有当讲定了矢量场 $\boldsymbol{a}$ 代表什么物理量时，“散度 $\boldsymbol{a}$”才有“物理意义”可言。例如，如果所研究的矢量场是（3-3-6）中的质流密度场 $\boldsymbol{j}_m$，则进一步的研究证明，$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_m$ 反映着流体的“源头”分布情况；说得具体一些，$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_m>0$ 的地方有流体源源不断地冒出来（泉源），$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_m<0$ 的地方有流体不断地“漏掉”（负源头，又叫做“尾闾”），$\mathrm{div}\boldsymbol{j}_m=0$ 的地方既不冒出也不漏掉，流体只是从那些地方流过而已。又如，如果我们考虑的矢量场是（3-3-8）中的弹性位移 $\boldsymbol{s}$，则它的散度 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{s}$ 正好等于弹性介质的体协变；这一点我们在下一章中就

❶ 只有正方形的矩阵（mxm 的矩阵）才有主对角线。正方矩阵主对角线上各“元”的和，叫做该矩阵的迹（trace 或 spur），这是正交变换群下的一个不变量。

要证明。

5.矢量场的旋度　还是试着把 ∇ 看成矢量，并把它和所考虑的矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z)$ 求矢积，就在形式上得到一个新的矢量场：

$$\nabla \times \boldsymbol{a} = \cdots\cdots$$

进一步的研究证明这确实是一个矢量场，叫做原来那个矢量的旋度，通常写作 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$ 或 $\mathrm{rot}\boldsymbol{a}$（读作“$\boldsymbol{a}$的旋度”或“旋度$\boldsymbol{a}$”）❶：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = \mathrm{rot}\boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

$$= \boldsymbol{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \boldsymbol{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \boldsymbol{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \tag{3-4-11}$$

我们看到，$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$ 恰好是由（3-4-2）中不在主对角线上的那六个偏导数组合而成的。这样，和$\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}$一起，就恰好把（3-4-2）中的九个偏导数都用上了。

人们常常觉得旋度这个概念比较“玄”，不容易接受。其实，当用到代表具体物理量的场上时，它也并不多么难以理解。例如，根据水力学，如果我们研究的是（3-3-5）中的流速场 $\boldsymbol{v}$，则$\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$和流体中的“漩涡”有着很密切的关系。这就是“旋度”一词的由来（还和别的问题有关），也是旋度在这种具体应用中的物理意义。

〔例题〕 1.设有一个刚体绕着 Z 轴而转动，如图3-12所示。根据第一章中的论述，这时刚体的角速度可以写成：

$$\omega = \boldsymbol{k}\omega$$

尽管刚体上各点的角速度相同，各点的线速度却不相同。我们可

❶ 英美书上常用curl$\boldsymbol{a}$，德、俄文书上常用rot$\boldsymbol{a}$，二者意义完全相同。

以把这种线速度看成在刚体所占空间域中定义的一个矢量场。本题的目的就是计算这一矢量场的旋度。

根据已知公式，线速度等于：

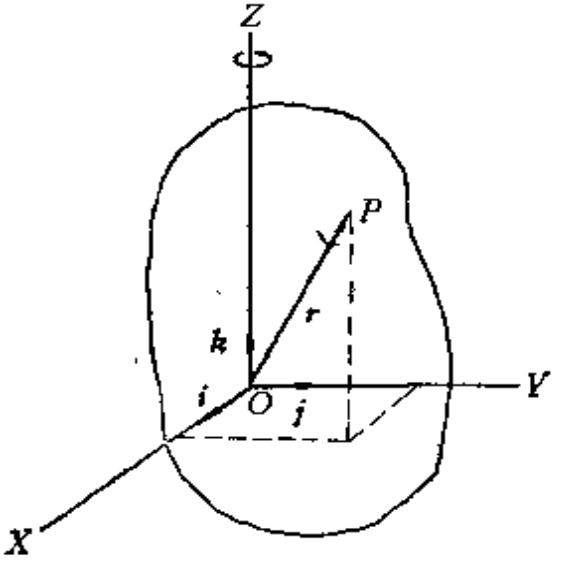


图3-12　刚体的定轴转动

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}(-y\omega)+\boldsymbol{j}(x\omega)$$

就是说，

$$v_x=-y\omega,\quad v_y=x\omega$$

利用（3-4-11），就得到：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{k}(2\omega)=2\omega,$$

或者写作：

$$\omega=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\boldsymbol{v}\qquad(3\text{-}4\text{-}12)$$

我们看到，尽管刚体各点的线速度并不相同，但是各点线速度的旋度却是相同的。而且，也很明显，根据 $\mathrm{curl}\boldsymbol{v}$ 是否等于零，就可以判断刚体是否在转动。这就可以使我们对于旋度一词的意义得到进一步的理解。

6.几个要用到的公式　下面介绍的几个问题，在许多文献上都时常看到，在以下各章中也有时要用到。

（1）**拉普拉斯算符**——设有一个可求导数的标量场 $s(x, y, z, t)$。我们首先求它的梯度：

$$\boldsymbol{G}=\mathrm{grad}\ s=\boldsymbol{i}\frac{\partial s}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial s}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial s}{\partial z}$$

然后再求这个梯度场的散度：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{G}=\frac{\partial G_x}{\partial x}+\frac{\partial G_y}{\partial y}+\frac{\partial G_z}{\partial z}=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

如果我们引入一个算符：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

就可以把上式写成：

$$\nabla^2 s=\mathrm{div}(\mathrm{grad}\ s)=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\qquad(3\text{-}4\text{-}13)$$

∇^2 这个算符就叫做**拉普拉斯算符**（简称**拉氏算符**），而$\nabla^2 s$就叫做标量场 s 的**拉氏量**。有些书上将拉氏算符写成 Δ，但是那就容易和增量符号混淆，而且，拉氏算符可以看成劈形算符的“平方”（标积自乘），所以我们认为还是写成 ∇^2 比较好些。

在理论物理学和各种其他理论科学中，拉氏算符有着极其广泛的应用。设 $\eta=\eta(x,\ y,\ z)$是一个已知函数，则下列形式的偏微分方程叫做**泊松方程**：

$$\nabla^2 s=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\eta\qquad(3\text{-}4\text{-}14)$$

在特例，当在所考虑的空间域中到处都有 $\eta=0$ 时，则泊松方程变成**拉普拉斯方程**：

$$\nabla^2 s=\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0\qquad(3\text{-}4\text{-}15)$$

在适当的已知边值条件下求解这种方程，就能求得标量场 $s(x,\ y,\ z)$。这是偏微分方程理论中的一个很经典的问题。

拉氏算符在座标系的转动下具有不变性，从而它也可以分别作用在矢量场的三个分量上，得到的还是一个矢量场。

（2）**算符的对易性**——设 $s(x,\ y,\ z,\ t)$是可以求导数的多元函数（标量场，或矢量场的分量）。我们看，$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial t}$都是算符，前者表示将函数对 x 求偏导数，后者则表示将它对 t 求偏导数。当函数 $s(x,\ y,\ z,\ t)$ 满足必要的连续性条件时，我们有：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 s}{\partial t\partial x}$$

这时我们就说，$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial t}$这两个算符是**可对易的**（或**可交换的**），并将这种对易性表示为：

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial x}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial x}=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}16)$$

同理，当满足一定的条件时，也有：

$$\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial y}=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}17)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\partial}{\partial z}=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}18)$$

同样，也可以用：

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla-\nabla\frac{\partial}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2-\nabla^2\frac{\partial}{\partial t}=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}20)$$

最后这一关系式，我们在推导弹性波的波动方程时就要用到。

（3）**两个恒等式**——设$s(x,\ y,\ z,\ t)$和$\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)$分别是具有二阶导数的标量场和矢量场。根据梯度、散度和旋度的定义，可以直接推得下列两个恒等式：

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\,s)=\nabla\times(\nabla s)=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}21)$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0 \qquad (3\text{-}4\text{-}22)$$

这两个恒等式，在许多理论的论述中也时常用到。

7.本节小结 （1）为了反映数学场的分布特点，我们定义了标量场的梯度以及矢量场的散度和旋度；它们都是场的一级偏导数的线性式。可以说，梯度是从一个标量场得出的“矢量导数场”（由标得矢），散度是从一个矢量场得出的“标量导数场”

（由矢得标），旋度是从一个矢量场得出的“矢量导数场”（由矢得矢）❶。这三种“导数场”在一般的场论中用得很多，希望大家至少在我们讲到的程度上掌握它们。

（2）为了掌握或记住它们的定义，利用劈形算符最为方便：

$$\mathrm{grad}\, s = \nabla s$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \nabla \cdot \boldsymbol{a}$$

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = \nabla \times \boldsymbol{a}$$

（3）最后我们还论述了以后要用到的一些问题。例如拉普拉斯算符，那可以说是相当重要的。举出的两个恒等式也值得自己验算一下。矢量分析学（矢量场论）中这一类的公式是很多的，一般说都可以用类似的方法得出来；以后自己看书时遇到这一类公式，也可以用这种方法进行验算。

（4）以上为了简明易懂，我们几乎全是在直角座标系中讨论问题的。在直角座标系中，算符 ∇ 和 ∇^2 的形式最为整齐，也最容易记住。在某些具体问题的研究中，有时需要用别的座标系。∇ 和 ∇^2 在那些座标系中的表示形式，到时候自己查查书就行了。

（5）梯度、散度和旋度，也和普通的导数一样，本身只是一些数学概念，它们本身并没有什么“物理意义”。只有把它们用到特定的物理问题中时，才能结合当时的情况讨论当时的特定物理意义。

（6）最后我们指出，不引用任何座标系也可以定义梯度、散度和旋度。那种作法更能体现事物的实质，但是讲起来比较繁复而“抽象”，所以我们没有那样讲。

习题：1.试论证grad s 的方向就是 s 值增加最快的方向。

2.自己验证（3-4-21）和（3-4-22）两个恒等式。

---

❶ 附带指出，在作为矢量的“资格”方面，curl$\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 本身有一点小小的差别。设想我们把某一座标轴（例如 X 轴）的方向颠倒一下，如果 $\boldsymbol{a}$ 保持完全不变，则 curl$\boldsymbol{a}$ 将变号。在这种情况下，我们说 $\boldsymbol{a}$ 是真矢量，curl$\boldsymbol{a}$ 是赝矢量（赝就是“假”的意思）。但是，如果我们不涉及上述这一类的座标变换，这种区分也就没什么必要了。

3.设 r 是场点矢径，$\varphi(r)$是 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的函数，$\boldsymbol{a}(r)$也只是 r 的函数，$\boldsymbol{A}$ 是恒定矢量，试计算下列各式的具体形式：

$$\nabla^2\frac{1}{r},\qquad \mathrm{div}\,(\varphi(r)\boldsymbol{r}),\qquad \mathrm{curl}\,(\varphi(r)\boldsymbol{r})$$

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{r}),\qquad \nabla\,(\boldsymbol{a}(r)\cdot\boldsymbol{r}),\qquad \mathrm{div}\,(\varphi\boldsymbol{a})$$

$$\nabla^2\boldsymbol{a}(r),\qquad \mathrm{curl}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}),\qquad \mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r})$$

$$\nabla^2\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

§.3-5. 矢量场的标位和矢位

1.矢量场的分类 我们再重复一下，任何数学场都有自己的定义域 V，任何矢量场 $\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)$ 也是这样。当研究一个矢量场时，我们往往先在它的定义域中设法求出（或测出）它的散度和旋度，然后就可以根据所得结果将矢量场分入下列几类之中。

（1）**无旋无源场**——这种场在定义域中到处满足：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=0\qquad 和\qquad \mathrm{div}\boldsymbol{a}=0 \tag{3-5-1}$$

大家也许有个疑问：真有这样的场吗？真有。例如 $\boldsymbol{a}=$常量，这就是所谓的**均匀矢量场**。显然，均匀矢量场的散度和旋度到处等于零，但场矢量本身并不一定等于零。

有一个定理，在这里叙述一下，但不证明。

定理 3-1 如果一个无旋无源场在定义域的边界 S 上到处等于零，则该场本身在 V 中到处等于零●。

换句话说，如果只在 V 中满足（3-5-1）式，场本身并不见得到处等于零，还要加上在 S 上到处等于零才行。根据这个定

● 到处等于零，也还可以叫做一个场。例如一个物体，到处的温度都等于零，你能说那个物体“没有温度”吗？

理，不难推出一个很重要的推论。

推论 3-1　设有两个矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$ 和 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$，它们在边界上到处相等（在 S 上 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$），而在定义域中具有相同的散度和旋度（在 V 中满足 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}=\mathrm{div}\boldsymbol{b}$，$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\mathrm{curl}\boldsymbol{b}$），则这两个场在 V 中到处相等（是同一个场）。

〔证〕：二场之差 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 满足定理 3-1 中的条件，从而在 V 中到处有 $\boldsymbol{c}=0$，证完❶。

（2）**无旋场**——这种场在定义域中到处满足：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=0 \qquad (3\text{-}5\text{-}2)$$

这里要求的条件比（3-5-1）少，从而满足（3-5-1）的场必然满足（3-5-2）。因此，关于无旋场的定理，当然也适用于无旋无源场。

无旋场又叫**有位场**（或**有势场**）；为什么这样叫，过一会就要说明。这是一种很重要的矢量场。场论中研究无旋场的那一部分，就叫做位论（势论）。

（3）**无散场**——这种场在定义域中到处满足：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0 \qquad (3\text{-}5\text{-}3)$$

这里也比（3-5-1）少一个条件，从而关于这种场的定理当然也适用于无旋无散场。

无散场这个名称不太流行。比较流行的名称是**无源场或涡旋场**；为什么这样叫，请大家自己考虑一下。

（4）**一般矢量场**——就是不一定满足上述那些条件的矢量场。

如果一个一般矢量场在 V 中有散度和旋度，或者说，如果它在 V 中有一阶偏导数，我们就有下面的定理：

定理3-2　如果 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}$ 和 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 在 V 中有意义，则矢量场 $\boldsymbol{a}$ 可以分解成无旋的部分和无散的部分。

❶ 这个推论在证明场的“唯一性”时特别有用。

换句话说，我们可以把 $\boldsymbol{a}$ 写成两项之和❶：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{s}} \qquad (3\text{-}5\text{-}4)$$

而且在 V 中到处都有：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}_{\mathrm{P}}=0\,,\qquad \mathrm{div}\boldsymbol{a}_{\mathrm{s}}=0 \qquad (3\text{-}5\text{-}5)$$

这个定理我们也不在这里证明，但是在后面讨论地震波时要用到它。

2.空间域的连通性 这里举个例子说明一下就行了。图3-13(a)中的 V_a，是两个同心球面之间的空间域；图3-13(b)中的 V_b，是环形圆管中的空间域。在两个空间域中，各画了一条闭合曲线 l_a 和 l_b。现在你们看，有几件事情 l_a 能作到而 l_b 却不能作到。第一，允许挪动位置和改变形状，**但不许越出域外**，l_a 可以变成 l'_a，再变成 l''_a，最后收缩成一个点❷。第二，还是不许越出域外，可以画一个曲面，以 l_a 为它的唯一边界（即中间没有窟窿），有如以 l_a 为“帽口”的一顶帽子。第三，在 l_a 上任取二点 P_1、P_2；将这两点“钉住”，允许 l_a 改变形状，而不许越出域外，则 l_a 上由 P_1、P_2 分开的两段曲线可以挪动而互相重合。这三件事情，因为总是不许越出域外，所以 l_b 都无法作到。其实这三件事只是同一件事的不同说法，能作到其中一件，必然能作到另外两件。

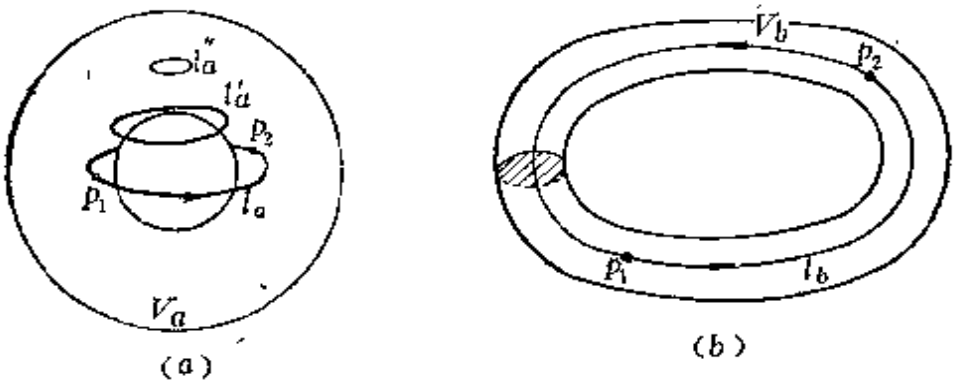


图3-13 单连通域 V_a 和多连通域 V_b

❶ 这里用了地震学中的符号。角码 p 代表初至波，即纵波；角码 s 代表续至波，即横波。

❷ 将 l_a 想象成一条橡皮筋儿！

如果**任意**闭合曲线在一个空间域中都能作到上述这种事儿，那个空间域就叫做**单连通域**；只要有一条曲线作不到，那个空间域就叫做**多连通域**。空间域的连通性，是一种很根本的性质（拓扑学的性质）；关于这问题，我们不多叙述。

讲这一段干什么？因为下面要介绍两条很重要的定理，其中的一条定理要求矢量场的定义域是单连通域。因此，当应用到这个定理时，必须首先分析这个条件是不是得到了满足，不然就会得出错误的结论。至于为什么要求这么个条件，我们也不多谈。

3.标位和矢位 现在就来介绍那两条定理。为了免得过于数学化，我们还是只讲定理的内容，而不讲它们的证明。不过，这两条定理相当重要；在弹性波的理论中要用到它们，在别的理论学科（例如电磁场论）中也要用到它们。因此，在正式叙述它们之前，咱们先来讲讲有关的思路。

请大家翻回去看一看（3-4-21）和（3-4-22）这两个恒等式：

$$\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\,s)=\nabla\times(\nabla s)=0$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\,\boldsymbol{a})=\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a})=0$$

现在的问题是：这两个结论的逆定理是不是成立？“什么叫‘逆定理’？”你看，第一个恒等式断定，一个标量场 S 的梯度，必然是一个无旋场；现在我反过来问，一个无旋场，会不会一定是某一标量场的梯度？换句话说，如果矢量场 $\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)$ 在定义域 V 中到处满足（3-5-2）：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}=0$$

能不能找到一个标量场 S，使它的梯度 $\mathrm{grad}\,s=\nabla s$ 恰好等于 $\boldsymbol{a}$？同样，第二个恒等式断定，任一矢量场 $\boldsymbol{a}$ 的旋度场 $\mathrm{curl}\boldsymbol{a}=\nabla\times\boldsymbol{a}$，必然是一个无源场；现在我也反过来问，一个无源场，会不会一定是另一矢量场的旋度场？换句话说，如果矢量场 $\boldsymbol{b}(x,\ y,\ z,\ t)$ 在定义域 V 中到处满足（3-5-3）：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{b}=\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0,$$

能不能找到另外一个矢量场 $\boldsymbol{c}$，使它的旋度 $\mathrm{curl}\boldsymbol{c}=\nabla\times\boldsymbol{c}$ 恰好等

于这个 $\boldsymbol{b}$?

一个定理（一个结论）的逆定理可以成立，也可以不成立，因此，上面这两个问题绝不能随随便便地、“想当然地”回答。现在我说，下面要介绍的两条定理，就是上面这两个问题的正确答案——这答案是经过证明的。

定理 3-3　如果在**单连通域**中定义的一个矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$是无旋的：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = 0$$

则可以找到一个标量场 $s(x, y, z, t)$，使它在该定义域中到处都满足：

$$\mathrm{grad}\, s = \boldsymbol{a} \qquad (3\text{-}5\text{-}6)$$

我们看到，这个定理正面回答了上面提出的第一个问题。满足（3-5-6）式的标量场 $s(x, y, z, t)$，叫做原来那个矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$的**标量位（标量势）**，简称**标位（标势）**。正因为有这个定理，我们才把无旋场又叫做**有位场**。

定理 3-4　如果我们有一个无源场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{b} = 0$$

则可以找到另一个矢量场 $\boldsymbol{c}(x, y, z, t)$，使它在 $\boldsymbol{b}$ 的定义域中到处满足：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \qquad (3\text{-}5\text{-}7)$$

这个定理正面回答了上面提到的另一个问题。我们指出，这一定理并不要求空间域的单连通性。满足（3-5-7）式的矢量场 $\boldsymbol{c}(x, y, z, t)$，叫做原有矢量场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$的**矢量位（矢量势）**，简称**矢位（矢势）**。

那么，引入标位或矢位有什么好处呢？引入标位的好处是不难看出来的，因为标量场比矢量场简单一些。在一个单连通域中，当我们要根据已知条件求出一个矢量场时，如果知道这是个无旋（有位）场，我们就可以首先设法求出它的标位，然后代入(3-5-6)中，就得到所求的矢量场。这样做，往往比直接求那个

矢量场要容易得多。电场的电位，重力场的重力位，就都是依据这种办法引入的❶。至于怎样在已知条件下求出场的标位，那是数学中所谓位论这一很大领域中的问题，我们在此只好从略。

那么，引入矢位有什么好处呢？都是矢量场，本来就挺复杂了，再引入一个新场岂不更复杂？回答是，不能只从表面上来看问题。都是矢量场，也还有容易算出和不容易算出的分别。当我们要根据已知条件求出一个矢量场时，一般是要解那个场所满足的偏微分方程组。如果这种方程组比较简单、比较好解，具体的计算工作就会简化许多。引入矢位的好处也就在这里。一般的情况是，一个场的矢位，往往比场本身更容易处理，它所满足的微分方程比场本身所满足的微分方程来得简单。求出了矢位，只要代入(3-5-7)式中，就能立刻得出所求的矢量场。这种办法，也往往比直接求那个场来得容易。在后面的弹性波理论中，我们将看到这样的例子。

4.所谓规范不变性 刚刚介绍的两个定理，只是肯定了**能找到**标位和矢位，只是肯定了标位和矢位的存在；至于能找到**多少个**，也就是说，至于标位和矢位是不是**唯一确定的**，定理中却没有说——那两个定理是标位和矢位的**存在定理**，而不是**唯一性定理**。

事实上，对于单连通域中的一个确定的无旋场，不是可以找到一个，而是可以找到许多个（无限多个）能够满足(3-5-6)式的标量场。这一点可以直接演证。根据定理3-3，给定了 $\boldsymbol{a}$ 场，一定可以找到一个 $s(x, y, z, t)$ 使它满足：

$$\operatorname{grad} s = \boldsymbol{a}$$

有了这个 s，我们就可以定义另一个标位：

$$s'(x, y, z, t) = s(x, y, z, t) + K \qquad (3\text{-}5\text{-}8)$$

式中 K 是一个任意取定的常数。为什么说这个 s' 也是标位呢？这是可以直接算出来的：

$$\operatorname{grad} s' = \operatorname{grad} s + \operatorname{grad} K = \operatorname{grad} s + 0 = \boldsymbol{a}$$

❶ 热力学中的化学位和热力位，也是仿照这种办法引入的，现不具论。

因为常数 K 的梯度显然等于零。刚才讲，K 是一个任意常数；这样的 K 当然不止一个，从而对应的 s' 也不止一个。换句话说，可以找到无限多个标量场 s、s'、s''……，它们的梯度全都等于我们那个无旋矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$，从而它们同样地有资格"得到标位的称号"。这种标位的不确定性（不唯一性，变通性），就叫做无旋场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$ 的**规范不变性**。

矢位的活动性更大。根据定理 3-4，给定了无源场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$，肯定可以找到一个矢位场 $\boldsymbol{c}(x, y, z, t)$，使它满足：

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}$$

有了这个矢位，我们就可以定义另一个矢位：

$$\boldsymbol{c}'(x,y,z,t) = \boldsymbol{c}(x,y,z,t) + \chi(x,y,z,t), \quad (3\text{-}5\text{-}9)$$

式中 $\chi(x, y, z, t)$ 是一个任意选定的无旋场，即：

$$\mathrm{curl}\,\chi = 0$$

将(3-5-9)式两端取旋度，得到

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{c}' = \mathrm{curl}(\boldsymbol{c} + \chi) = \mathrm{curl}\boldsymbol{c} + \mathrm{curl}\chi$$

$$= \mathrm{curl}\boldsymbol{c} + 0 = \boldsymbol{b}$$

这就表明，这个新定义的 $\boldsymbol{c}'$ 场确实也是一个矢位场。还是那话，(3-5-9) 中的 χ 场可以有无限多种选法，从而也就对应地有无限多个 $\boldsymbol{c}'$ 场。换句话说，可以找到无限多个矢量场 $\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{c}'$、$\boldsymbol{c}''$……，它们的旋度全都等于我们那个无源场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$，从而它们同样地有资格叫做那个无源场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$ 的矢位。这种情况，就叫做无源场 $\boldsymbol{b}(x, y, z, t)$ 的**规范不变性**。

总而言之，单连通域中的无旋场和一般空间域中的无源场，都具有规范不变性。同一个确定的场，可以有无限多个标位或矢位。或者说，给定了矢量场，它的位函数还有许多可能的选法，还有很大的活动余地。你说这是好事还是坏事？我说是件大好事。因为，我们的目的通常是要确定矢量场本身，而寻求位函数只是我们在确定矢量场的过程中所采取的一种手段。现在说，有很多的位函数供你选择，这当然是很值得欢迎的，因为选择的余地越大对工作越有利。因此，当引入位函数时，我们首先要求它满足

(3-5-6) 或 (3-5-7)。这是最基本的要求；不满足这种关系式，就根本算不得什么位函数。但是，既然满足这种关系式的位函数不止一个，我们就可以在这许多位函数中间选出一个最合适的来用。什么叫“最合适的”呢？当然是说满足某种条件。这种对位函数提出的附加条件，叫做**位函数的规范化条件**，有时也叫做**场的规范化条件**。规范化条件通常是适足以唯一地确定所用的位函数。

要知道，规范化条件是由我们来提的；因此，在不同的问题中，我们可以按照当时的方便提出不同的条件，而并不影响我们所求的矢量场。这样，在矢量场的研究中，我们就有了很大的自由。所以说，矢量场具有规范不变性，这是一件大好事。

5.波动方程　纵波和横波　在数学场论中，在理论物理学和应用科学中，所研究的非稳场常常满足下列形式的偏微分方程：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\eta \qquad (3\text{-}5\text{-}10)$$

式中 ψ 代表一个标量场或代表矢量场的一个分量，$\eta(x, y, z, t)$是已知函数，V^2 是一个正的常量。这样的方程叫做**达朗贝尔方程**。当右端的已知函数 $\eta(x, y, z, t) = 0$ 时，就有：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \qquad (3\text{-}5\text{-}11)$$

这样的方程叫做**波动方程**❶。显然，波动方程是达朗贝尔方程的特例。

按照具体条件的不同，达朗贝尔方程或波动方程可以有各式各样的解。对这些解进行分析研究的结果表明，它们**都代表某种波动过程**，而式中的 V **就是波的传播速度**。不但如此，进一步的研究还证明，如果求解方程的结果，得出的是**无旋的** ($\mathrm{curl}\boldsymbol{a} = 0$，$\boldsymbol{a}$ 有矢位) 非稳矢量场，则这样的场是一种**纵波**；如果得

❶ 这里举出的只是波动方程的典型形式。除此以外，还可以有各种稍微不同的形式，例如，方程中可以包含或只包含一阶时间偏导数。这些问题，在此不多讨论。

出的是无源的（涡旋的，$\mathrm{div}\boldsymbol{a}=0$，$\boldsymbol{a}$有标位）非稳矢量场，则这样的场是一种**横波**。正因如此，我们有时把无旋场叫做**纵场**，把无源场叫做**横场**。当然，用不着多说，如果那矢量场既不是无旋的又不是无源的，那就表明既有纵波又有横波，因为根据定理3-2总可以把场分成无旋的部分和无源的部分。

以上这些结论，我们在研究弹性波时都会用到。至于这些结论如何得来，我们不讲了。

6.本节小结 （1）按照矢量场的旋度和散度是否到处等于零，可以将矢量场分成四大类。每一类矢量场都各自有其特点，从而应该用不同的方法去分别对待它们和处理它们。

（2）怎么处理呢？一般是引入位函数。对于（单连通域中的）无旋场，可以引入标位。对于无源场，可以引入矢位。如果所研究的场既不是无旋的也不是无源的，可以把它分解成无旋的和无源的两个部分来分别处理。

（3）无旋场和无源场，都具有所谓规范不变性。因此，在引入标位或矢位时，我们有很大的选择余地。结合当时的具体需要所提出的选择标准，就叫做规范化条件。

（4）非稳的标量场或矢量场，往往满足达朗贝尔方程或波动方程。满足这种方程的无旋场代表纵波；满足这种方程的无源场代表横波；方程中二阶时间偏导数前面的系数，等于波速平方的倒数。

习题：1.设$\boldsymbol{r}$是场点的矢径，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$是$\boldsymbol{r}$的绝对值，试证明：

$$\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\qquad(r\neq 0)$$

是一个无旋场，而

$$s=\frac{1}{r}+C$$

是它的一个标位。

2.设$\boldsymbol{A}$是一常矢量，试证明：

$$\boldsymbol{b}=\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\qquad(r\neq 0)$$

是一个无源场，而

$$\boldsymbol{c}=\frac{\boldsymbol{A}}{r}$$

是它的一个矢位，

3.有一函数：

$$\psi=\psi(\eta),$$

而

$$\eta=lx+my+nz-Vt,$$

式中 l、m、n 是某一固定矢量 $\boldsymbol{K}$ 的方向余弦，满足 $l^2+m^2+n^2=1$。试证明函数 $\psi(\eta)$ 满足波动方程。这样的函数代表什么样的波？

§.3-6. 数学场的积分学大意*

为了不涉及太多的问题，以上各节完全讲的是数学场的微分学；例如，前面几节的重点，就是梯度、散度和旋度，而这三者都是原有场的导数场。但是，要真正研究和场论有关的理论问题，场的积分学也是不可缺少的一部分数学工具。在本节中，我们略述其梗概，以供参考；但是，考虑到本书的性质，在以后的讲述中我们将尽量避免使用这一部分数学工具（也不能完全避免）。

1.**体积分** 如图3-14所示，V 是场的定义域，其边界面是 S_0 和 S_1。设 $\boldsymbol{n}$ 是边界面各点上从域内向域外画的单位法线，简称**外向法线**。设在域 V 中定义了一个标量场 $s(x,\ y,\ z,\ t)$ 或一个矢量场 $\boldsymbol{a}(x,\ y,\ z,\ t)$。在许多实际问题中，我们常常有必要在

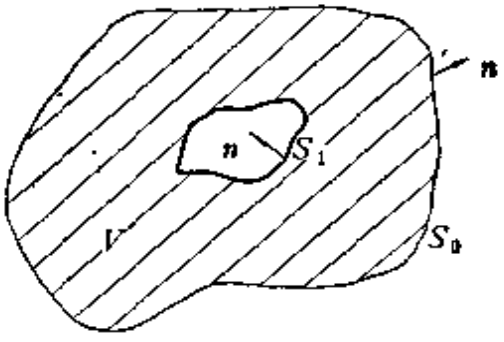


图3-14 场的定义域及其边界面

* 打星号的节次初次阅读时可以从略。下同，不另注。

V 中计算场 S 的积分，或是场 $\boldsymbol{a}$ 的散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{a}$ 的积分❶。

怎么叫“在 V 中计算积分”？其意义很容易明白。举一个例子。设想 S 是前面讲过的质量密度 $\rho(x, y, z, t)$：

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad \Delta V \to \text{宏观无限小}。$$

有了这种质量分布函数，很容易得到 V 中物质的总质量。我们看，每一体积元 ΔV 中的质量是

$$\Delta m = \rho \Delta V \tag{3-6-1}$$

那么 V 中的总质量 m，当然等于各个 Δm 之和。考虑到 ΔV 和 Δm 都是些宏观无限小量，我们应该把这个和式写成积分的形式：

$$m = \int_V \rho dV \tag{3-6-2}$$

根据这种定义❷，这种积分和普通的**定积分**相对应，积分号下的 V 指示了求积分时所在的空间域。这样的积分就叫做**体积分**，因为它是在一个体积中求的，而不象普通的定积分那样是在一个区间中求的。

对于任意的（可积分的）标量场 S，也可以在 V 中或 V 的一部分 V_1 中求它的体积分：

$$\int_V s dV \qquad \text{或} \int_{V_1} s dV \tag{3-6-3}$$

其**数学意义**和（3-6-2）完全相同。矢量场的散度是一个标量场，从而也可以求它的体积分：

$$\int_V (\mathrm{div}\boldsymbol{a}) dV \tag{3-6-4}$$

抽象场的体积分只有数学意义。只有当说定了 s 或 $\boldsymbol{a}$ 是什么物理量时，才谈得到(3-6-3)或(3-6-4)的物理意义。另外，我们也指出，既然体积分是和普通的定积分相当的，如果被积函数中

❶ 在(1-8-6)中，我们首次遇到了这种积分。

❷ 这样的定义不够数学化，没有讲到被积函数的连续性等等，没有形式化地写成和式的极限等等。这是一种“物理式的讲法”，我们的目的在于强调物理上的应用。以后不再多声明了。

不包含 t（稳定场），积分的结果就得到一个确定的量值（例如 m 等于多少公斤）；如果被积函数中包含 t（非稳场），积分的结果就得到包含 t 的一个单元函数。

2.面积分 有时候，需要在一个闭合的或不闭合的曲面上求某一矢量场的积分。我们也首先举一个例子。如图3-15所示，S 是一个不闭合的曲面。为了说话明确，我们先**任意规定**这曲面的边界线 l 的画法，如图中的箭头所示；然后，我们按照右手螺旋法则定出外向法线 n 的画法。这样，就规定好了曲面 S 的里外面。现在我们设想这个曲面位于(3-3-6)那样的质流密度场 j_m 的定义域中，而我们要计算单位时间内从 S 的内面向 S 的外面流过去的流体质量。这样一个量叫做矢量场 j_m 在曲面 S 上的**通量**。为了计算 S 上的通量 Φ_m，我们设想把 S 分成许多宏观无限小的面积元 ΔS，分别计算各个 ΔS 上的通量 $\Delta\Phi_m$。所求的通量 Φ_m，显然等于所有各个 $\Delta\Phi_m$ 的总和。

为了说明 $\Delta\Phi_m$ 如何计算，先看看图3-16。图中画了一个面积

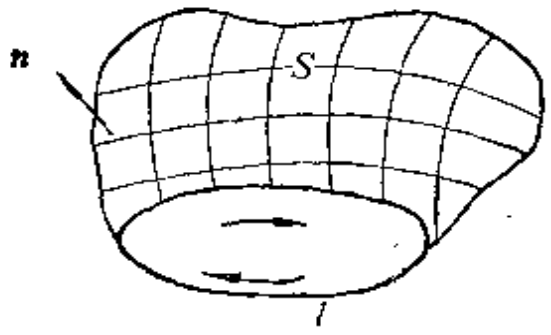


图3-15 曲面 S 和它的边界线 l

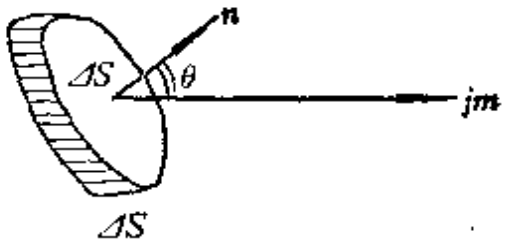


图3-16 面积元 ΔS 上的通量

元 ΔS。既然 ΔS 足够小，它上面各点处的场矢量 j_m 可以认为是相同的，面 ΔS 本身也可以看成一块小平面，n 是 ΔS 上的外向法线。图中画了一个很矮很矮的小柱体，其侧面的斜高平行于 j_m 且等于 $\Delta s = v\Delta t$。不难看出，在很短的时间 Δt 内，小柱体中的物质恰好就是通过 ΔS 的那一部分物质。这柱体的垂直高度是：

$$\Delta h = \Delta s \cdot \cos\theta = v\Delta t \cdot \cos\theta$$

式中 θ 是 j_m 和 n 之间的夹角。因此，柱体的体积是：

$$\Delta V = \Delta S \cdot \Delta h = v\cos\theta \Delta S \Delta t$$

而柱体中流体的质量就是：

$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho v \cos\theta \Delta S \Delta t$$

单位时间内流过ΔS的质量就是$\Delta\Phi_m$：

$$\Delta\Phi_m = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho v \cos\theta \Delta S = \boldsymbol{j}_m \cdot \boldsymbol{n} \Delta S \qquad (3\text{-}6\text{-}5)$$

最后一步是根据$\boldsymbol{j}_m$的定义和标积的定义得到的。现在，S上的通量Φ_m等于各个面积元上的通量的总和；为了强调ΔS是些无限小的面积元，我们当然应该把这个总和写成积分的形式：

$$\Phi_m = \int_s d\Phi_m = \int_s (\boldsymbol{j}_m \cdot \boldsymbol{n}) ds \qquad (3\text{-}6\text{-}6)$$

对于一般的矢量场$\boldsymbol{a}$（x，y，z，t），也可以而且有必要仿照这种办法定义它在某一曲面上的**通量**：

$$\Phi = \int_s a_n ds = \int_s \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} ds \qquad (3\text{-}6\text{-}7)$$

有时候，被积分的矢量场是另一个矢量场的旋度$\boldsymbol{a} = \mathrm{curl}\boldsymbol{b}$；这时就有：

$$\Phi = \int_s \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} ds = \int_s (\boldsymbol{n} \cdot \mathrm{curl}\boldsymbol{b}) ds \qquad (3\text{-}6\text{-}8)$$

如果曲面s是闭合的，我们常常在积分号上加一个圆圈来标明：

$$\Phi = \oint_s a_n ds = \oint_s \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} ds \qquad (3\text{-}6\text{-}9)$$

如果矢量场$\boldsymbol{a}$是稳定的，则求得的Φ是一个定值；如果$\boldsymbol{a}$是非稳的，则Φ只是t的函数。

3.线积分 在计算变力沿曲线路程所作的功时，我们已经讲过线积分的概念；现在只要针对一般的矢量场重新定义一下就行了。

设在矢量场$\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$的定义域中任意画一条曲线路程$l$从$P_1$到$P_2$，如图3-17所示；我们仿照计算功的办法来定义矢量场$\boldsymbol{a}$沿这条路程的线积分。为此，我们设想将l分成许多小段；每一小段都足够小，从而可以把它看成一个无限短的有向线段$\vec{dl}$；同时，当$\vec{dl}$足够短时，同一小段路程上的$\boldsymbol{a}$值可以认为

是相同的。我们把 $\vec{dl}$ 和这个 $\boldsymbol{a}$ 值求标积：

$$\vec{dl}\cdot\boldsymbol{a} = dl\cdot a\cdot\cos\theta = a_l\,dl$$

式中 al 是 $\boldsymbol{a}$ 在 $\vec{dl}$ 上的投影。所谓 $\boldsymbol{a}$ 沿 l 的线积分，就是这些无限小的标积的总和：

$$I = \int_{l_{P_1P_2}} \boldsymbol{a}\cdot\vec{dl} = \int_{l_{P_1P_2}} a_l\,dl \qquad (3\text{-}6\text{-}10)$$

如果场 $\boldsymbol{a}$ 是稳定的，则 I 有一个确定的量值；如果它是非稳的，则 I 是 t 的函数。有时候，我们要计算的是矢量场沿一条闭合路程的线积分；这时，就必须事先说清楚那条闭合曲线是沿着顺时针还是逆时针的方向画出的；例如，图3-18中的 l 是沿着顺时针方向画的。当沿着闭合路程计算线积分时，我们在积分号上画一个圆圈以示区别：

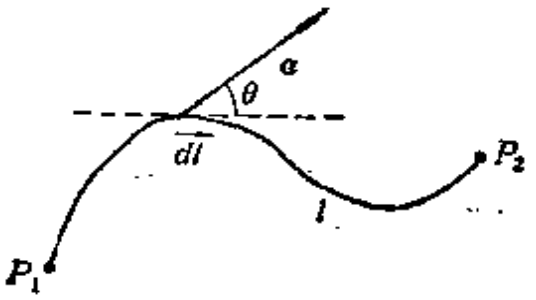


图3-17　线积分示意图

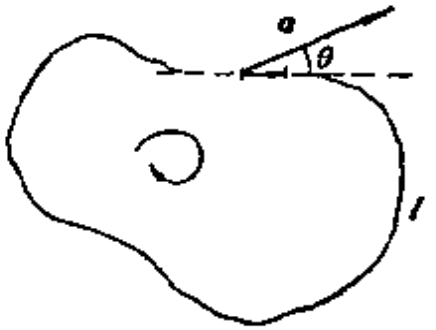


图3-18　场 a 在 l 上的环流

$$I = \oint_l \boldsymbol{a}\cdot\vec{dl} = \oint_l a_l dl \qquad (3\text{-}6\text{-}11)$$

矢量场在闭合路程上的线积分，叫做该场在该路程上的**环流**。

一般说来，即使 p_1、p_2 已经给定，如果路程 l 变了，求得的线积分的值也会变。在特例，任意线积分的值也可能只决定于 p_1、p_2 二点的位置，而和路程 l 无关；**这就是场有标位的充分和必要的条件**（理由在此从略）。

4.几条常用的定理　在场论的研究中，时常要把前面讲到的三种积分互相变换。这样，就要用到一些数学上已经得到证明的定理。下面我们举出最常用的三条定理，但是仍然只讲定理的内容，而略去它们的证明。

定理3-5（高斯定理）　如果一矢量场 $\boldsymbol{a}(x,y,$

z, t）在某一空间域 V 中有一阶偏导数，则该场在边界面 S 上的通量，等于它的散度在 V 中的体积分；写成数学形式，就是：

$$\oint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}dS=\int_V(\mathrm{div}\boldsymbol{a})dV \qquad (3\text{-}6\text{-}12)$$

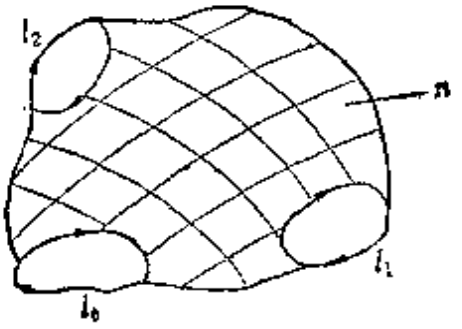


图3-19 一个曲面可以有好几条边界线

这里指出，上式中的 S，可能不止包括一个曲面。例如图3-14中的 S_0 和 S_1，而其各点的 $\boldsymbol{n}$ 则是外向法线，有的书上将 $\boldsymbol{n}$ 定义为内向法线，那时（3-6-12）中就多一个负号。

显然，借助于这个定理，就可以在面积分和体积分之间进行变换。与此类似，还有下列的定理。

定理3-6（斯托克斯定理） 设在单连通域 V 中定义了一个矢量场 $\boldsymbol{a}(x, y, z, t)$，而且该场有一阶偏导数，则该场在 V 中任意闭合曲线 l 上的环流，等于它的旋度在以 l 为边的任一曲面上的通量；写成数学形式，就是：

$$\oint_l \boldsymbol{a}\cdot\vec{dl}=\int_S(\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{curl}\boldsymbol{a})dS, \qquad (3\text{-}6\text{-}13)$$

式中 l 的绕行方向和 $\boldsymbol{n}$ 的方向成右手螺旋的关系。

这里也要指出，有时候，一块曲面的边界不止有一条闭合曲线，如图3-19所示；这时，（3-6-13）的左端，就应该理解为在所有那几条边界线上的环流之和，而且那几条边界线的绕行方向也应该适当配合，以保证 $\boldsymbol{n}$ 有明确的意义。

显然，借助于这个定理，可以在线积分和面积分之间进行变换。

定理3-7（格林公式） 设 Φ 和 Ψ 是两个标量场，它们在某一空间域 V 中有二阶偏导

数，在 V 的边界面 S 上有一阶偏导数，这样就有：

$$\left.\begin{aligned}\int_v [\psi\nabla^2\varphi + (\mathrm{grad}\,\psi)\cdot(\mathrm{grad}\,\varphi)]dV = \oint_s \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS,\\ \int_v [\varphi\nabla^2\psi + (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot(\mathrm{grad}\,\psi)]dV = \oint_s \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS,\end{aligned}\right\} \quad (3\text{-}6\text{-}14)$$

二式相减，得到：

$$\int_v [\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi]dV = \oint_s \left[\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]dS \quad (3\text{-}6\text{-}15)$$

式中 $\frac{\partial}{\partial n}$ 表示沿法线 n 求方向导数。

这一定理，实际上是定理 3-5 的一个推论；只是因为它在理论科学中使用得比较多，我们才把它单独作为一条定理列了出来。承认了定理 3-5，这条定理很容易证明。首先，我们利用 φ 和 ψ 这两个标量场构成两个矢量场：

$$\boldsymbol{a} = \psi\nabla\varphi = \psi\mathrm{grad}\varphi$$
$$\boldsymbol{b} = \varphi\nabla\psi = \varphi\mathrm{grad}\psi$$

根据矢量计算公式，得到：

$$\mathrm{div}\boldsymbol{a} = \psi\nabla^2\varphi + (\mathrm{grad}\,\psi)\cdot(\mathrm{grad}\,\varphi)$$
$$\mathrm{div}\boldsymbol{b} = \varphi\nabla^2\psi + (\mathrm{grad}\,\varphi)\cdot(\mathrm{grad}\,\psi)$$

此外又有：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{a} = \psi\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}\varphi = \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b} = \varphi\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{grad}\psi = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

代入高斯定理（3-6-12）中，就得到所谓第一类格林公式（3-6-14）；二式相减，就得到所谓第二类格林公式（3-6-15）。

格林公式只是一些数学公式，它们所涉及的函数，只须满足

必要的数学条件，而没有什么直接的物理意义。但是，将Ψ、φ这两个抽象的函数和某些具体的物理量（例如静电场的电位）等同起来，就能很巧妙地求解若干物理问题。这样的例子，因为要求较多的物理知识，所以我们无法在此举出。

5.本节小结（1）我们介绍了体积分、面积分和线积分的概念；介绍的方式是“物理的”而不是“数学的”。就是说，虽然这三种积分实质上都是数学的概念，但是我们总是先举一个物理上的例子，然后推广到一般的场。我们强调的是概括性的理解，而不是数学化的细致条件。这三种积分，都是普通定积分的推广形式。有的书上，分别用三个、两个和一个积分号来区别这三种积分，例如将（3-6-2）写成：

$$m=\iiint_V \rho dV$$

我们不采用这种办法，而是到处只写一个积分号，用V、S和l来区分它们。一般说，V、S和l都是存在于三维空间中的。在某些学科中，将这几种积分推广到多维空间中去会带来一定的好处，但是我们这里不再接着谈那些问题了。

（2）有时候，为了寻求新的结论，需要把这三种积分互相变来变去。那时就要用到某些数学定理。我们在本节中举出了最常用到的三条定理。其中的定理3-7，实质上是定理3-5的推论；甚至连名称都不一致，有的书上干脆将定理3-7叫做高斯定理。除此以外，还有另外一些这样的积分定理，例如，从定理3-6出发，也可以推出和定理3-7相对应的定理。但是，所有这些，我们全都略去了。当然，如果将三种积分推广到多维空间，则相应的积分定理也会更加复杂，其数目也会更多起来。这些问题，我们也略去了。

参考文献

3·1 H.E.柯青，《向量计算及张量计算初步》，史福培译，高等教育出版社1958年版。

3·2 G. E. Hay, 《Vector and Tensor Analysis》(矢量分析学和张量分析学), Dover Publications, 1953.

3·3 J.W.Gibbs, 《Vector Analysis》(矢量分析学), Scribner, 1901.

3·4 R.M.Thrall &, L. Tornheim, 《Vector Spaces and Matrices》(矢量空间和矩阵), Johr Wiley &. Sons Inc, 1957.

3·5 P. M. Morse &. H. Feshbach, 《Methods of Theoretical Physics》(理论物理方法), Mc Graw-Hill Co., 1953.

3·6 北京石油学院物理教研室编, 《宏观电磁场论》, 本院讲义, 1962年铅印本。

第四章　弹性介质中的胁强和胁变

§.4-1.　再谈谈连续介质和质点

我们已经多次地提到连续介质和质点。在本书第二章中，我们还简单地介绍了物质结构的连续性观点和分立性（原子性）观点。讲这些问题的目的，是为了使大家能够更确切地理解波动学中特别重要的“介质”这一概念，而不是要正式地谈论科学史问题或认识论问题。

从实质上来讲，连续介质和质点，是我们描述物质及其运动时所引入的两种（理想化的）概念。作为概念，它们基本上是互相矛盾的。质点无所谓体积，从而谈不到由什么物质“构成”；介质是连续的，从而绝不能认为由若干个质点构成——无数的书籍中用到的“介质中的质点”这个概念是没有明确意义的，是在逻辑上说不通的！

当然，这并不是说介质和质点这两个概念之间存在着什么“不可逾越的鸿沟”。事实上，当讲到波时，正如各种书籍上都在使用的办法一样，利用过渡到极限情况的方法，我们可以从“质点系”趋近于连续介质。但是，我们要强调的是，“鸿沟”固然是没有的，两个概念之间的区别却是很大的。

强调这一点并不是毫无实际意义的“概念游戏”，因为，只有明确地理解和区分概念，才能针对不同的概念采取不同的、适当的处理方法。

事实上，描述质点的运动和描述连续介质的运动，在思维方法和数学工具方面都有着颇大的差别。我们在第一章中看到，在古典力学中，质点的运动状态是用它的座标和速度来描述的，这些座标和速度都只是时间变量 t 的函数，也就是说，它们是 t 的

单元函数，从而质点的基本运动方程（牛顿第二定律的数学表示式）也都只是一些常微分方程。因此，在研究古典的质点力学时，如果不涉及什么物理场，数学场论的方法还可以说不是那么绝对必要的。与此相反，在上一章中已经指出，连续介质的运动和状态，却不是用一个或有限几个单元函数就能够反映出来的；要描述它们，总是要引入一个或几个多元函数。也就是说，总是要引入标量场（一个函数）、矢量场（三个分量函数）或二秩乃至更高秩的张量场（九个或更多的函数），而连续介质的基本运动方程（牛顿定律对每一体积元的应用）也必然地是一个或几个偏微分方程——一个偏微分方程实际上和无限多个常微分方程相当。在这种描述中，空间座标不再是动力学变量，而是变成了场点的“编号”，它们作为独立变量出现在描述介质的状态和运动的那些多元函数中。因此，在这种描述中，数学场论的方法一般总是不能完全避免的——事实上，数学场论正是在这一类的客观需要下发展起来的，正如普通的微积分学是在质点力学之类的需要下发展起来的一样。

其实，正如我们已经讲过的，甚至在日常生活中，当提到连续介质（例如谈论喝水）时，我们的思想中也没有“质点”概念的地位；我们不是把那介质想象成一把小米那样的东西，而是把它想象成连绵不断的一大块。只要这种想法（这种概念）能够适用，“质点”的概念就是不必要的和不适用的。固然，在研究连续介质时，人们总是在想象中把它分成许多宏观无限小的体积元，而有时候也把一个体积元看成一个“质点”，但是，这种看法事实上是必须加上一些条件的。连续介质中的一个体积元至少在两个方面不同于力学中所理解的质点：第一，一个体积元的质量 Δm 也是一个宏观无限小的量，而不象质点的质量那样可以取有限值；第二，一个体积元虽然很小，但它总还是一个体积，当提到它时我们总认为它里边包含着无限多个点，就如数学上一个无限小的区间 Δx 也还被认为包含着无限多个点一样。

当然，一碗水中泡了几粒小米的情况也是很常见的。但是，

小米和水还是两种东西，小米并不构成水的一部分——如果是泡的砂糖，它会溶解到水中而形成糖水，但是那时糖就不再以颗粒的形式出现，从而也就又谈不到什么质点了。这就是说，连续介质中“泡”了一些个体的小物体的情况也是很常见的。但是，在描述和研究中，“泡”在介质中的那些物体还是被当作“外来户”，而不能把它们和介质混为一谈；如果它们足够小，当然也可以把它们叫做“质点”，但是这种质点和我们所研究的介质还不是“水乳交溶”的，它们的运动仍然要用单独的（常）微分方程来描述，而不能用描述连续介质本身的那种偏微分方程来描述❶。这样的外来质点，常常要被当成描述连续介质时所引用的那些数学场中的奇点来处理；无论如何，它们和许多书上含糊其辞地提到的所谓“介质中的质点”是指的完全不同的两种东西。

§.4-2. 胁强分析

在第二章中，我们已经初步引入了胁强的概念。现在我们要进一步分析这个概念，并把弹性体中的胁强用某些**分量**表示出来。在此以前，我们首先再来看看弹性体中某一体积元 ΔV 所受的力。



图4-1 弹性介质中的一个体积元

1.体力和面力 图 4-1 中的 ΔV，代表在弹性介质中任意取定的一个体积元。这个体积元受到一些什么作用力呢？至少，它受到重力。我们可以把这个重力写成：

$$\overrightarrow{\Delta W} = (\Delta m)\boldsymbol{g} = \rho \boldsymbol{g} \Delta V \qquad (4\text{-}2\text{-}1)$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 可以叫做**重力常量**或**重力强度**，也就是单位质量所受的重力。我们指出，$\boldsymbol{g}$ 不是一个力，而是力和质量的比值。其次，ΔV 中也可能包含着一些电荷，例如我们可以把这个电荷值写成：

❶ 这里当然只是讲的古典物理学中的情况。在量子物理学中，场和粒子的关系、连续性和分立性的关系，都要比这里讲的情况复杂很多。

$$\Delta q = \rho_e \Delta V \qquad (4\text{-}2\text{-}2)$$

式中的 ρ_e 表示电荷的体密度，也就是单位体积中的电荷。这时，这些电荷就受到 ΔV 以外那些电荷的电场力的作用，而且，如果体积元 ΔV 是运动的，它还可能受到磁力（洛仑兹力）的作用。例如，电场力可以写成：

$$\Delta \vec{f}_{电} = (\Delta q)\boldsymbol{E} = \rho_e \boldsymbol{E}\,\Delta V \qquad (4\text{-}2\text{-}3)$$

式中 $\boldsymbol{E}$ 是 ΔV 所在点上的电场强度。洛仑兹力的表示式也不难写出来，但是我们不再写了。

由（4-2-1）和（4-2-3）可见，重力和电场力，都和受力物质的体积 ΔV 成比例。磁力也是这样。和受力物质的体积有关的力叫做体力；重力、万有引力、电力（库仑力）、磁力（洛仑兹力）都是体力的例子。

附带指出，（4-2-1）中的 $\boldsymbol{g}$，（4-2-3）中的 $\boldsymbol{E}$，通常都是和场点位置及时间有关的矢量场。例如，如果我们要计算某一有限体积 V 中的物质所受的电力，当然就应该将（4-2-3）式在 V 中求积分：

$$\boldsymbol{f}_{电} = \int_V \rho_e \boldsymbol{E} dV \qquad (4\text{-}2\text{-}4)$$

大致地说，所谓的体力，就是应该用某种体积分来表示的力。

另一方面，体积元 ΔV 处于整个弹性介质的包围之中。周围的物质通常也会对它作用以某种弹性力。例如，在最简单的情况下，这种弹性力可以是一种“围压”。显然，这种围压是和 ΔV 的表面积有关的。例如，作用在面积元 ΔS 上的压力，可以写成：

$$\boldsymbol{f}_{压} = -p\boldsymbol{n}\Delta S \qquad (4\text{-}2\text{-}5)$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是 ΔS 上的外向法线，p 是压强（即单位面积上的压力），负号表示是压力而不是张力。这种和面积有关（和 ΔS 成比例）的力，叫做面力。复习一下第二章就可以看到，弹性力都是属于面力这一类的。

在以后的讨论中，我们常常不考虑体力的作用。这样作的理由有好几条。第一，我们的目的是要研究弹性波，弹性波是弹性

介质中机械振动的传播，而和振动或波动直接联系的只是随时间变化的（弹性）力，不随时间变化或变化很缓慢的那一部分体力（例如重力）则实质上没什么影响（只形成一种“本底”，引起恒定的形变）。第二，为了简单，我们不考虑地层中的电磁过程。第三，从效果上看，体力和面力相比往往只占很次要的地位（有波源的地方可能是例外）；例如，只要固体发生很小的一点点形变，它内部的弹性力就会远远超过重力。

2.复习胁强的概念 现在复习一下第二章中讲过的胁强，并把它推广一步。

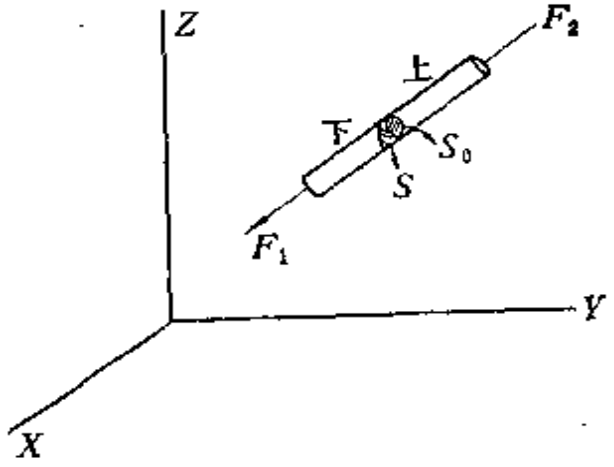


图4-2 面积元的取向和胁强的关系

图4-2中画了一个倾斜的小柱体，在两个力$\boldsymbol{F}_1$和$\boldsymbol{F}_2$的作用下保持平衡（从而就有$\boldsymbol{F}_1=-\boldsymbol{F}_2, F_1=F_2$）。可以设想这样一根小柱体是某种架子上的一个零件，也可以设想它是从广大的弹性介质中划分出来的一个小部分；这第二种看法对于理解以后的问题尤其重要。

设想用一个截面把小柱体分成两部分，暂时把它们叫做“上”和“下”。这样的截面可以有许多种画法。图中的S_0是垂直于柱体轴线的正截面，而S是垂直于Y轴的“斜截面”；显然，$S>S_0$。

“上”、“下”两部分之间一定有相互作用力，不然这柱体岂不被外力拉断了吗？具体地说，先看“上”部；它受到外力$\boldsymbol{F}_2$的作用，但不受$\boldsymbol{F}_1$的作用，因为$\boldsymbol{F}_1$是作用在“下”部上的。但是，假如“上”部只受到$\boldsymbol{F}_2$的作用，它就不可能处于平衡，而是要沿着$\boldsymbol{F}_2$的方向加速地运动，越走越远，柱体就断掉了。现在柱体没断，说明“下”部从后面把它拉住了。这就是说，“下”部对“上”部作用了一个力$\boldsymbol{f}$，这个力把$\boldsymbol{F}_2$抵销了，从而“上”

都才得以保持平衡。于是有：

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{F}_2 \qquad f = F_2 = F_1 \tag{4-2-6}$$

同理可以看到，“下”部也受到“上”部的一个作用力 $\boldsymbol{f}'$，这个 $\boldsymbol{f}'$ 和 $\boldsymbol{f}$ 互为作用和反作用，从而就有：

$$\boldsymbol{f}' = -\boldsymbol{f} \qquad f' = f = F_2 = F_1 \tag{4-2-7}$$

同样，考虑到“下”部也是处于平衡的，就应该有：

$$\boldsymbol{f}' = -\boldsymbol{F}_1 \qquad f' = F_1 \tag{4-2-8}$$

总而言之，你随便用一个（假想的）截面将柱体分为两段，这两段之间必然有相互作用力。在现有的情况，这种相互作用力是到处相同的，而且是和截面的画法无关的。这是物体内部两个部分之间的相互作用力；这恰恰就是我们所说的**弹性力**。假如没有这种内在的弹性力，物体稍微受到一点点外力就会“散掉”（“垮掉”，“流掉”），那当然也就算不得什么“弹性体”了。

我们看，弹性力是通过两部分之间的分界面起作用的，我们可以认为这种力是分布在那个分界面上的；就是说，**弹性力是一种面力**。在所举的这个简单例子中，弹性力的大小、方向都和分界面的取法无关。我们知道，**单位面积上的弹性力就是胁强**，那么，在现有的例子中，力是恒定的，分界面可大可小，从而胁强也就随分界面的不同而不同了。如果我们取的是正截面 S_0，则胁强值最大，面其方向和截面垂直（即只有法向胁强而无切向胁强）。如果我们取的是斜截面 S，则胁强值较小，而其方向和截面不垂直。总而言之，弹性介质中某点的胁强依赖于该点处一个面积元的画法，而其方向却不一定和那个面积元相垂直。因此，不把那个面积元规定好，笼统地谈论胁强是意义不明确的，而这也正是胁强这一物理量的复杂之处！

现在考虑广大的弹性介质中的胁强。如图 4-3 所示，在弹性介质中任取一点 P，按照前面的分析，P 点取定以后，还不能定义该点的胁强，还需要通过该点画一个面积元。这种面积元有许多种画法。为了明确，我们设想从 P 点开始向任意方向画一个单位矢量 $\boldsymbol{n}$，然后垂直于这个 $\boldsymbol{n}$ 画一个宏观无限小的面积 ΔS，这

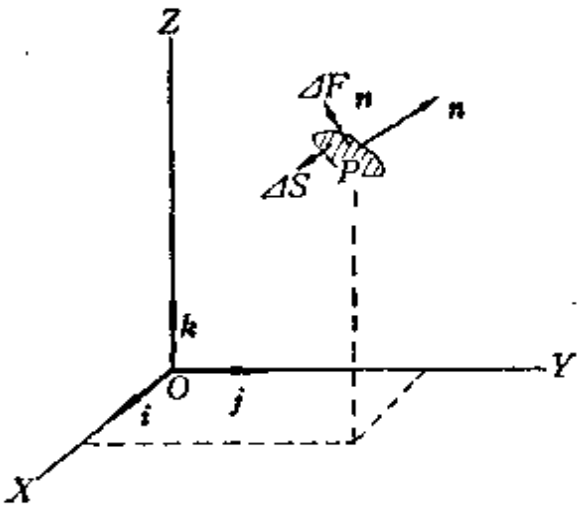


图4-3 胁强的定义

样，n就成为 ΔS 的**正法线**。既然n 的方向有无限多种选法，面积元 ΔS 也就有无限多种画法。

我们把法线n 所指的那一侧叫做 ΔS 的**正面**，而将另一侧叫做 ΔS 的**反面**。按照上面的叙述，一般说来，正面的物质和反面的物质之间会有弹性力的作用。设用 $\overrightarrow{\Delta F_n}$代表**正面的介质通过 ΔS 对反面的介质作用的力**；按照前面的分析，这个力不一定垂直于 ΔS。不管垂直不垂直，P 点处和有向面积元 $n\Delta S$ 相对应的胁强定义为：

$$\sigma_n = \frac{\overrightarrow{\Delta F_n}}{\Delta S},\ \Delta S \longrightarrow \text{宏观无限小} \qquad (4\text{-}2\text{-}9)$$

角码 n 表示胁强的值依赖于 n 的取法；n 的方向不同，σ_n 就会不同。特别说来，当把 n 的方向转一个180°的角时，ΔS 的“正”、“反”面就会交换，这时 σ_n 就会变号。

另外也要指出，按照(4-2-9)这种定义，n 取定以后，σ_n 的值应该是确定的，而和 ΔS 的形状无关；就是说，只要 n 已经取好，不论把 ΔS 画成三角形、正方形、圆形还是别的形状，(4-2-9)中的那个比值（应该说是比值的极限）都是确定的。如果不是这样，胁强的意义就又是不明确的了。实践证明，σ_n的值确实可以认为和 ΔS 的形状无关（而只和它的**取向**有关）。

3.胁强分量 按照(4-2-9)中的定义来看，胁强 σ_n 是一个矢量。但是，弹性介质中的胁强分布，却不能用一个矢量场来描述。因为，已经再三强调过，σ_n 不但和场点 P 的位置有关，而且和该点处的一个面积元的取向有关。当 P 点取定时，有向面积元 $n\Delta S$ 还有无限多种可能的取法，从而 σ_n 还有无限多个可能的值。这种情况，要比矢量场的情况复杂得多了。现在我们要说明的是，在一个指定的场点 P 上，对应于面积元 $n\Delta S$ 的无限多种取

法，固然有无限多个胁强值，但是，这无限多个胁强值却是有着很密切的联系的；知道了其中的几个，就可以按照已知的数学公式算出其余的那无限多个。

其实，在这方面，矢量场的情况也与此类似。当场点 P 取定时，一个矢量场在那儿有一个确定的值 a，这个矢量在不同方向上有不同的投影；方向很多，从而 a 的投影也很多。但是，只要知道了其中三个不在同一平面内的投影，其余的投影就都可以算出来。现在，在胁强的情况下，和每一个方向 n 相联系的不是一个投影而是一个矢量；在广义的理解下，这个矢量可以认为是另外一种更高级的量在所取方向上的“投影”。这个所谓更高级的量就是二秩的胁强张量；它虽然在不同方向上有不同的“投影”，但是，只要知道了其中三个适当的“投影”即三个矢量，其余的“投影”即 σ_n 的那些别的值就都可以算出来。三个矢量本身又有九个投影，这就叫做胁强张量的九个分量。

胁强的分量只是胁强张量在所取座标系中的**表象**；在不同的座标系中，胁强张量的表象不同，但胁强张量本身是不会依赖于座标系的。在直角座标系中，一个矢量可以用它的三个直角分量表示出来，例如：

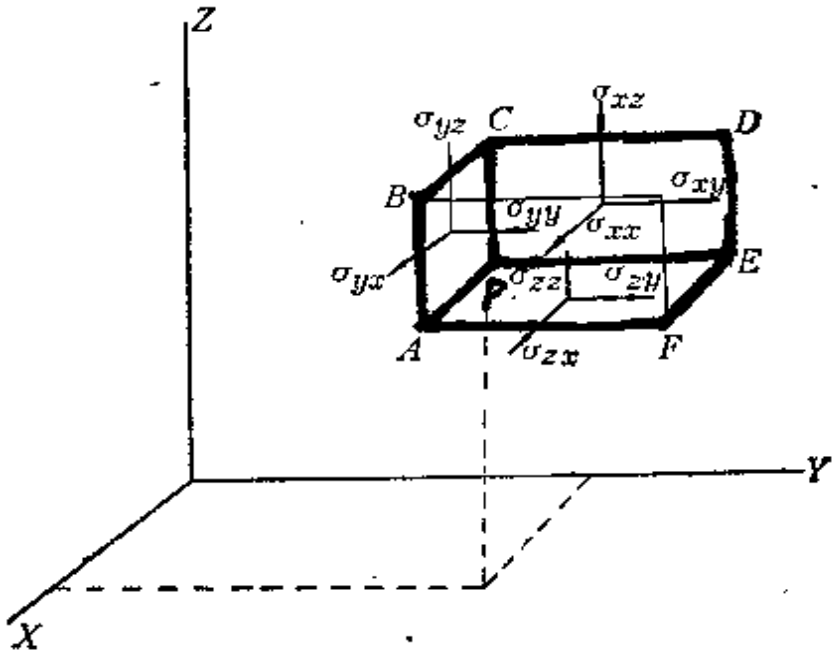
$$a = a_x i + a_y j + a_z k \tag{4-2-10}$$

或：

$$a = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \tag{4-2-11}$$

一个张量也可以用它的九个分量表示出来。这种表示方法也有两种。和(4-2-11)相对应的一种（矩阵表示法），我们立刻就要讲到。和(4-2-10)相对应的一种叫做**并矢式表示法**；那种方法在许多问题中也很有用处，但是为了不把问题扯得太远，我们在本书中将不采用那种表示法。

为了简单地阐明刚才提到的情况，我们在所研究的弹性介质中画一个直角座标系，并在 P 点附近取一个长方形的体积元，来研究这个体积元的壁面上的胁强。如图4-4所示，设这个体积元的三个棱长分别是 Δx、Δy 和 Δz。这个体积元共有六个壁面，但是只有三个壁面交于 P 点。为了明确，我们规定这三个壁面上的**正法线** n 介别平行于三个座标轴。请注意，对于体积元 ΔV 来说，这样的正法线**不是**外向法线而是内向法线。因此，这样定义



$\overline{PA} = \Delta x$
$\overline{PE} = \Delta y$
$\overline{PC} = \Delta z$

图4-4　胁强分量示意图

的胁强反映着体积元的内部介质对外部介质作用的弹性力。

现在先看垂直于 X 轴的小平面 $PEDC$，它的面积等于 $\Delta S_1 = \Delta y \cdot \Delta z$。对应于这个面积元，可以确定一个胁强值 σ_1，当面积元够小时，这个胁强值可以认为是存在于 P 点上的，其相应的弹性力是：

$$\overrightarrow{\Delta F_1} = \sigma_1 \Delta S_1 = \sigma_1 (\Delta y \cdot \Delta z) \qquad (4\text{-}2\text{-}12)$$

再说一遍，这是体积元内部的物质通过面积元 ΔS_1 作用在体积元外部的物质上的力。

胁强值 σ_1 是一个矢量，当然可以分解成三个直角分量，我们把它的三个分量写成：

$$\sigma_{xx}, \qquad \sigma_{xy}, \qquad \sigma_{xz} \qquad (4\text{-}2\text{-}13)$$

就是说，

$$\sigma_1 = \sigma_{xx} i + \sigma_{xy} j + \sigma_{xz} k \qquad (4\text{-}2\text{-}14)$$

这里我们指出，每一个分量有两个角码。第一个角码是 x，表示 σ_1 是在垂直于 X 轴的面积元上定义的胁强；第二个角码表示该

分量平行于哪一个座标轴❶。有着两个相同的角码的那种分量，例如 σ_{xx}，和所考虑的面积元相垂直，是那个面积元上的**法向胁强**；有着两个不同的角码的那种分量，例如 σ_{xy}，和所考虑的面积元相平行，是那个面积元上的**切向胁强**。当法向胁强为正（$\sigma_{xx}>0$）时，它所代表的弹性力是**张力**；当为负时，它所代表的弹性力是**压力**。

用同样的办法考虑面积元 $PCBA$ 和 $PAFE$ 上的胁强值，就又得到六个分量。和(4-2-13)一起，总共是九个分量。这九个分量，习惯上排成一个表如下：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}2\text{-}15)$$

所有这九个分量，一般都是场点座标的函数；在非稳条件下，它们还都是时间变量 t 的函数。可以证明，这样的九个函数，就很全面地反映了弹性介质中弹性力的作用情况，它们表示着一个**二秩的胁强张量场**。在图4-4中，画出了各个分量的**正方向**。

当然，通过所取的场点 P，除了上述三个面积元 $PEDC$、$PCBA$ 和 $PAFE$ 以外，还可以画无数个不同的面积元，面对应于这些面积元也就有无数个不完全相同的胁强值。但是，不难证明，所有那些胁强值都可以用（4-2-15）中的九个分量表示出来。这一点，我们将在下一章中再来证明。

另外，通过考虑图 4-4 中那个小体积元的转动，还可以证明下列的关系：

$$\sigma_{xy}=\sigma_{yx}, \quad \sigma_{yz}=\sigma_{zy}, \quad \sigma_{zx}=\sigma_{xz} \qquad (4\text{-}2\text{-}16)$$

于是，(4-2-15)中的九个分量就只剩了六个是独立的了。这样的分量所表示的二秩张量，叫做二秩的**对称张量**。胁强张量的对称性，我们也在下一章中再来证明。

❶ 胁强分量的符号，在不同的弹性力学书上有不同的写法。从数学的观点看起来，几乎所有的写法都不是完全合适的。我们不便过于标新立异，所以采取了一种折衷的办法，就是说，我们采用了一种也还算比较通行而又尽量合理、但还不是完全合理的符号。

习题：1.在图 4-2 所举的例子中，当所取的面积元改变时，弹性力并不改变，而只是得到的胁强值跟着变。在一般情况，弹性力会不会也随着面积元的不同而不同？试举例说明。

2.任意的九个函数并不一定代表二秩张量的分量；它们还须满足一定的变换条件。按照前面的定义，当座标系转过一个角度时，(4-2-15)中的各个胁变分量会不会改变？数学基础较好的读者可以自己试着推导各个胁强分量的变换公式，并证明它们确实是一个二秩张量的分量。

3.你怎样理解(4-2-16)？

4.胁强分量可能不可能全都和场点座标无关（均匀场)?试举例说明。

§.4-3. 胁变分析

1.初步概念 当弹性介质受到外力作用时，它的内部到处都处于“紧张状态”。为了描述这种“紧张状态”，我们引入了胁强张量场的概念。前面（第二章）讲过，弹性体受到外力时会发生形变，它的形状或（和）体积会发生变化。其实，这时不但它的外形发生变化，它的内部也发生变化；外形的变化不过是内部各处变化的总后果。就是说，伴随着胁强场的出现，弹性介质内部的各个部分都会发生形变。为了描述这种内部形变的分布情况，有必要引入**胁变**（又叫应变）**张量场**。

在上一章中，作为矢量场的例子，曾经介绍过弹性介质中的**位移矢量场**。我们设想，当没有受到外力时，介质内部没有胁强的分布，介质也处于“自然状态”，而介质中的各个部分也各自处于“平衡位置”。当受到外力从而内部出现了胁强场时，介质中各点都发生一个位移。设在自然状态下位于 P 点处的物质，这时移动到了 P' 点，则 P 点处物质的位移是：

$$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{PP'}$$

一般情况，弹性位移 $\boldsymbol{s}$ 是场点位置的函数，而且在非稳条件下还是时间变量 t 的函数：

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},\ t) \qquad (4\text{-}3\text{-}1)$$

在直角座标系中，这个矢量场当然有三个分量，用 u、v、w 来代表，于是就有：

$$\boldsymbol{s} = u\boldsymbol{i} + v\boldsymbol{j} + w\boldsymbol{k} \qquad (4\text{-}3\text{-}2)$$

当然，这三个分量一般也是场点座标和时间的函数：

$$\left.\begin{aligned} u &= u(x,\ y,\ z,\ t) \\ v &= v(x,\ y,\ z,\ t) \\ w &= w(x,\ y,\ z,\ t) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}3)$$

显然，弹性位移场 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},\ t)$ 已经能够全面地反映弹性介质在胁强作用下的变化情况，因为这个矢量场确定着介质中**各点在各时刻**的位移。但是，谈到形变，我们指的是介质中各个体积元的变化。要描述这种变化，就要分析位移场的空间分布，具体地说就是要研究它的散度和旋度；或者说，要研究位移分量的九个偏导数。下面就来看看怎样把这些偏导数配合起来，以显示体积元的各种变化。

2.弹性介质中各体积元的变动 可以证明，弹性介质中一个**足够小的体积元**，一般只能发生三种运动：(a)平动、(b)转动、(c)沿三个互相垂直方向的伸长或缩短。这一结论叫做**亥姆霍兹定理**，其数学证明在此从略。上面说的“转动”，常常表现为形状的变化，即切变。因此，在一些弹性力学书籍中，常把体积元的变化归结为：（1）位置的变化（即平动）、（2）体积的变化、（3）形状的变化。这三种变化可以单独出现，也可以同时出现（互相叠加），其情况如图 4-5 所示。

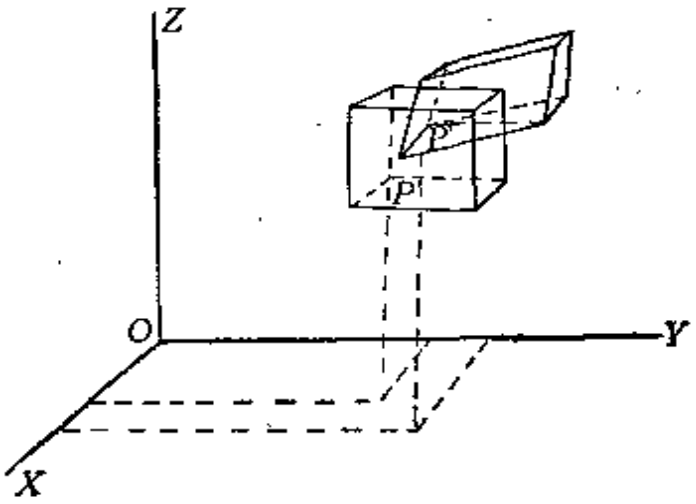


图4-5 弹性介质中体积元的变化

设想当介质处于自然状态时在 P 点附近取

了一个长方形的体积元。当受到胁强作用时，原先位于 P 点处的物质得到一个位移 s_P 而运动到了 P' 点；这就是所说的位置的变化或平动。但是，由于各点的位移不一定相同，体积元的棱长可能发生伸缩，其方向也可能发生转动；前者导致体积的改变，后者导致形状的改变。形状的改变使长方体变成平行六面体，从而各个棱的夹角不再是 $\frac{\pi}{2}$。下面就分别讨论这两种变化情况。

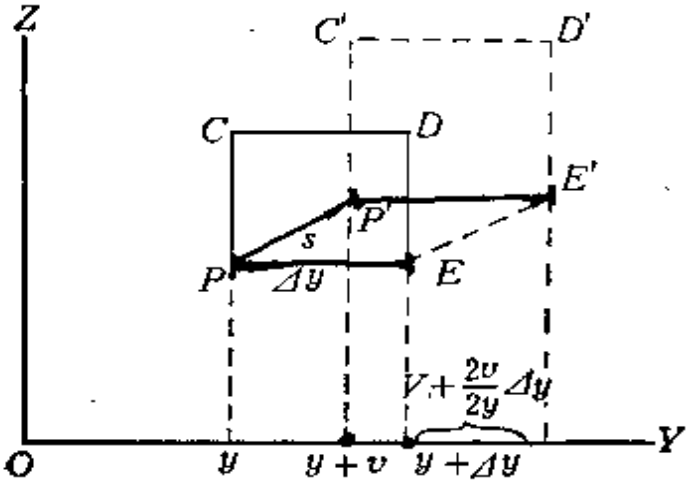


图4-6 体积变化示意图

3.线胁变和体胁变

我们暂时假设体积元除了位置的变化以外只发生体积的变化，而没有发生形状的变化。另外，为了看起来清楚，我们先来考虑体积元在 YOZ 平面上的投影，如图4-6所示。

现在让我们研究体积元棱长 $\overline{PE}=\Delta y$ 的改变。为此，我们看看图中各点的 y 座标。P 点的座标是 y，E 点的座标是 $y+\Delta y$；另一方面，根据位移矢量的定义和偏导数的意义，P' 点的座标是 $y+v$（这里 v 是位移矢量的 y 分量），而 E' 点的座标是 $(y+\Delta y)+(v+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y)$。因此，改变后的棱长是：

$$\overline{P'E'}=\left[(y+\Delta y)+(v+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y)\right]-(y+v)=\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

从而棱长 Δy 的增量是：

$$\overline{P'E'}-\overline{PE}=(\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y)-\Delta y=\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$

长度的**相对增量**就叫做**线胁变**；沿 y 轴方向的线胁变用 $\in_{yy}$ 表示，于是就有：

$$\in_{yy}=\frac{\overline{P'E'}-\overline{PE}}{\overline{PE}}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

另外两个棱长的改变，可以用同样的办法来分析。结果得到：

$$\left.\begin{aligned}\epsilon_{xx}&=\frac{\partial u}{\partial x}\\ \epsilon_{yy}&=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \epsilon_{zz}&=\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}4)$$

要知道，从数学上来说；一个偏导数（或常导数）的值可大可小，但是，既然这里讲的是弹性胁变，ϵ_{xx} 等等就只能取很小的值，因为如果变化太大，就会超过了弹性限度，那时介质就不能再看成完全弹性体，而弹性力学这种理论也就不能完全适用（或完全不能适用）了。记得这一点，就很容易求出体胁变。

改变前的体积　　$\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$

改变后的体积

$$\begin{aligned}(\Delta V)'&=(\Delta x+\Delta u)(\Delta y+\Delta v)(\Delta z+\Delta w)\\ &=\left(\Delta x+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x\right)\left(\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)\left(\Delta z+\frac{\partial w}{\partial z}\Delta z\right)\\ &=\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z\\ &=(1+\epsilon_{xx})(1+\epsilon_{yy})(1+\epsilon_{zz})\Delta V\\ &=(1+\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz}+\text{高次项})\Delta V\end{aligned}$$

既然 ϵ_{xx} 等等都是小量，它们的高次项可以略去，于是就有：

$$(\Delta V)'=\Delta V+(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz})\Delta V$$

体积的相对增量就是体胁变，通常用 θ 代表；于是就有：

$$\theta=\frac{(\Delta V)'-\Delta V}{\Delta V}=\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz} \qquad (4\text{-}3\text{-}5)$$

我们看到，这恰好是位移矢量的散度，即：

$$\theta=\operatorname{div}\boldsymbol{s}=\nabla\cdot\boldsymbol{s} \qquad (4\text{-}3\text{-}6)$$

这一结果表明，体胁变 θ 是三个方向上的线胁变之和（当胁变为

无限小时）。另外也应提到，作为矢量场 $s(r, t)$ 的导数，不论线胁变或体胁变，一般也还是场点位置的函数，而且在非稳条件下还是时间变量 t 的函数。

4.切胁变 在一般情况下，体积元也会发生形状的改变，即切变。我们仍然研究体积元改变前后在 YOZ 平面上的投影，如图4-7所示。

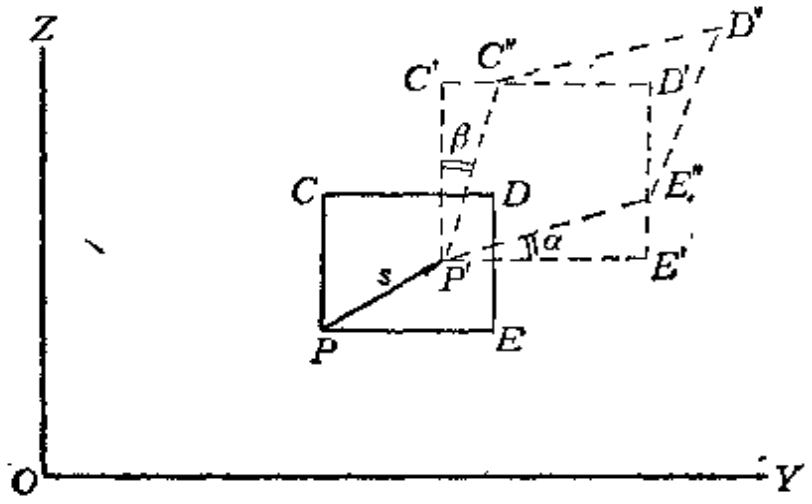


图4-7 体积元的切变示意图

在图4-7中，由于发生了切变，直角 $\angle E'P'C'$ 变成了锐角 $\angle E''P'C''$。总的角度改变量是 $\alpha+\beta$，这里 $\alpha=\angle E'P'E''$，$\beta=\angle C'P'C''$。由于改变量很小，可以用各个角的正切来代替各个角。例如：

$$\alpha=\mathrm{tg}\alpha=\overline{E'E''}/\overline{P'E'} \qquad (4\text{-}3\text{-}7)$$

但是，根据位移矢量和偏导数的定义，

$$\overline{E'E''}=\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y$$

$$\overline{P'E'}=\Delta y+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y=(1+\in_{yy})\Delta y$$

由于 $\in_{yy}\ll 1$，从而可以认为 $\overline{P'E'}=\Delta y$。于是，

$$\alpha=\overline{E'E''}/\overline{P'E'}=\frac{\partial w}{\partial y}$$

同理得到：

$$\beta = \frac{\partial v}{\partial z}$$

总的角度改变量也就是切胁变分量，用$\in_{yz}$来代表。于是就有：

$$\in_{yz} = \alpha + \beta = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \qquad (4\text{-}3\text{-}8)$$

根据这种推导方式可以看到，当$\in_{yz}$为正时，直角变为锐角；当$\in_{yz}$为负时，直角变为钝角。

用同样办法考虑另外两个座标平面上的投影，又可以得到两个分量。结果就有：

$$\left.\begin{aligned} \in_{xy} = \in_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \in_{yz} = \in_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \in_{zx} = \in_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}9)$$

(4-3-4)和(4-3-9)合称**科希方程组**。可以证明，这一方程组所定义的各个量，是一个对称的二秩张量的分量：

$$\begin{pmatrix} \in_{xx} & \in_{xy} & \in_{xz} \\ \in_{yx} & \in_{yy} & \in_{yz} \\ \in_{zx} & \in_{zy} & \in_{zz} \end{pmatrix} \qquad (4\text{-}3\text{-}10)$$

式中，

$$\in_{xy} = \in_{yx}, \quad \in_{yz} = \in_{zy}, \quad \in_{xz} = \in_{zx} \qquad (4\text{-}3\text{-}11)$$

因为各个偏导数一般还是场点位置（和时间t）的函数，所以我们得到的实际上是一个二秩张量场。这就是所说的**胁变张量场**。

根据张量理论或矩阵理论，**当P点已经给定时**，可以通过座标系的转动变换把(4-3-10)这样的对称矩阵变换成对角矩阵。换句话说，**当P点已经给定时**，可以找到一个适当的座标系，使得P点的胁变张量只有对角分量，而没有别的分量。这样的三个座标轴就叫做该点处胁变张量的**主轴**。当长方形体积元的三个棱分别平行于三个主轴时，这个体积元在所给的胁强作用下只发生体积的变化而不发生形状的变化；如果棱长不平行于主轴，则一般会发生形状的变化，也就是说长方体会变成平行六面体。

根据座标变换理论，当座标系转过一个角度时，二秩对称张量（对称矩阵）的对角分量之和（矩阵的迹）是不变量；就是说，体胁变 θ 不会因座标系的不同而不同。这一点，也可以从(4-3-6)式看出来。该式表明，θ 是位移矢量场 $\bullet$ 的散度，从而是一个标量场，它在座标系的转动下当然是不变的。

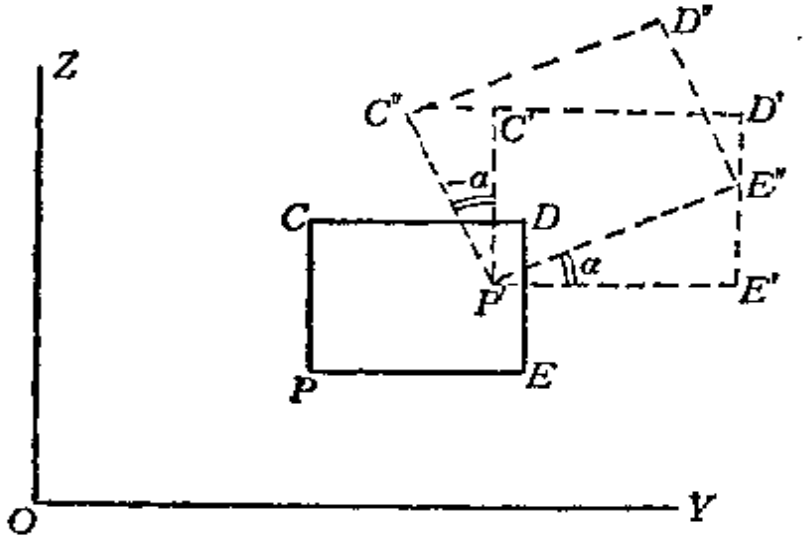


图4-8　投影面积的整体转动

5.位移矢量场的旋度　由(4-3-8)的推导方式(以及图4-7)可以看出，知道了 $\in_{yz}$ 的值，还不能完全地判断体积元是否发生了转动。例如，当 $\alpha = -\beta$ 时，$\in_{yz} = 0$，而这时体积元事实上却发生了转动，其大意如图4-8所示。这一点，还可以从另一方面看出来。我们知道，位移矢量的三个分量 u、v、w 共有九个空间偏导数，而胁变张量却只有六个分量，从而只靠这些分量是不可能完全确定位移矢量场的分布的。为了完全地描述位移矢量场的

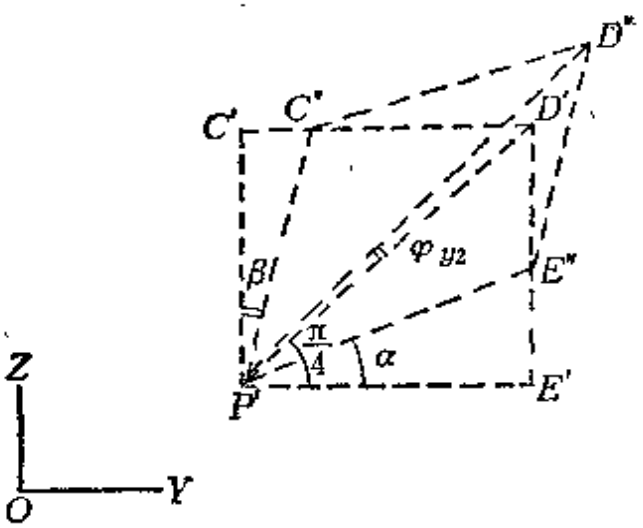


图4-9　面积元对角线的转角

分布或介质中各体积元的变化，有必要分析位移矢量场的旋度的物理意义。

为此目的，我们设想在 P 点取一个立方形的体积元，来研究它在胁强作用下的转动。图4-9仍然表示体积元在 YOZ 平面上的投影。如图所示，面积元 $P'E'D'C'$ 变成 $P'E''D''C''$；在一阶近似下，改变后的面积元可以看成一个菱形，面 φ_{yz} 就是改变前后的对角线之间的夹角。由图可见，这个对角线的转角等于

$$\varphi_{yz}=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right]+\alpha-\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$$

将已经得到的 α 和 β 的表示式代入，就有：

$$\varphi_{yz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) \qquad (4\text{-}3\text{-}12)$$

另外两个座标平面上的情况也可以用同样的办法来进行分析。结果得到：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{xy}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ \varphi_{yz}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\\ \varphi_{zx}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}13)$$

这一方程组，是对于科希方程组的补充。现在总共有了九个方程，显然可以完全描述矢量场 $s(r,\ t)$ 的分布或弹性介质中各个体积元的变化了。换一种说法：设想当介质处于自然状态时我们在它的内部任意画了一个无限小的有向线段 $\vec{dl}$；介质形变以后，这条有向线段的长度和方向都可能改变了；这两方面的改变量都可以利用上述的胁变张量和(4-3-13)中的三个转角表示出来。这一结论就有亥姆霍兹定理的主要内容。

(4-3-13)中的 φ_{xy}，代表正方形截面在 XOY 平面上的转角，

也可以说是立方形的体积元绕着 Z 轴的转角。按照这种理解，我们可以把这几个转角改写一下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_{xy}&=\psi_z\\ \varphi_{yz}&=\psi_x\\ \varphi_{zx}&=\psi_y\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}14)$$

这样改写以后，就可以很明显地看出它们和 $\mathrm{curl}\boldsymbol{s}$ 的关系：

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{s}=2(\psi_x\boldsymbol{i}+\psi_y\boldsymbol{j}+\psi_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{\psi} \qquad (4\text{-}3\text{-}15)$$

式中 $\boldsymbol{\psi}$ 是体积元的角位移矢量，但是，在很多场合，我们宁愿保留(4-3-13)中的符号；现将各分量排成一个矩阵：

$$\begin{pmatrix}0 & \varphi_{xy} & \varphi_{xz}\\ \varphi_{yx} & 0 & \varphi_{yz}\\ \varphi_{zx} & \varphi_{zy} & 0\end{pmatrix} \qquad (4\text{-}3\text{-}16)$$

并定义多出的各个分量如下：

$$\varphi_{yx}=-\varphi_{xy},\qquad \varphi_{zy}=-\varphi_{yz},\qquad \varphi_{xz}=-\varphi_{zx} \qquad (4\text{-}3\text{-}17)$$

满足(4-3-17)这种条件的矩阵叫做**反对称矩阵**。附带提到，根据张量理论，两个矢量的矢积或一个矢量场的旋度，实质上是一个二秩的反对称张量(场)，而不是一个真正的矢量(场)。

(4-3-16)这种矩阵表示法的好处在于，把这个矩阵和胁变张量(4-3-10)适当合并，就能得出位移矢量三个分量的九个偏导数所构成的二秩张量：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} & \dfrac{\partial u}{\partial z}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{\partial v}{\partial z}\\ \dfrac{\partial w}{\partial x} & \dfrac{\partial w}{\partial y} & \dfrac{\partial w}{\partial z}\end{pmatrix} \qquad (4\text{-}3\text{-}18)$$

关于这一点，读者可以自行验证。

6.关于科希方程组的相容性　我们再把科希方程组写出来看看：

$$
\left.
\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
\epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
\epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}
\right\} \qquad (4\text{-}3\text{-}19)
$$

显然，当位移矢量场 $s(x、y、z、t)$ 为已知时，将它的三个分量 u，v，w 代入方程组(4-3-19)中，就能直接定出六个胁变分量。反之，当各个胁变分量为已知时，我们能不能根据(4-3-19)来定出位移矢量的三个分量 u，v，w 呢？这时，关于三个未知函数，我们有六个偏微分方程。那么，一般说来，如果任意指定六个函数来作为胁变分量，解出来的结果就可能互相矛盾。换句话说，不是任意的六个函数就可以作为胁变分量，而是只有满足适当条件的六个函数才行。这一点，还可以从更加“物理化”的方面来加以阐明。设想将无形变的介质分成许多很小的六面体；在形变以后，这些小六面体的形状和体积可能改变了，但是，相邻的六面体必须保持互相密接，不然介质中就会出现裂缝，它的连续性不复存在，当然也就不成其为弹性介质了。[13]图4-10表示的是这些小六面体在某一平面上的投影。在形变之前，相邻二体积元1和2的公共棱 $\overline{PA}$ 长度相等；形变之后，它们的公共棱仍然应该长度相等。在形变之

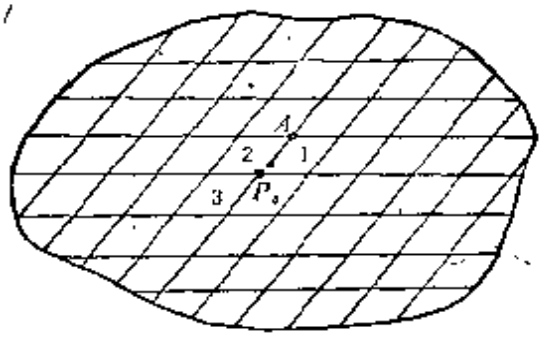


图4-10　形变前的体积元划分示意图

前，相交于 P 点的四个（在空间中是八个）体积元1、2、3、4的四角之和是 2π（八个体积元的立体角之和是 4π）；形变之后，四角之和仍然应该是 2π（八角之和仍是 4π）。这些情况表明，胁变分量一定还满足一些别的关系式，而不能是完全互相独立的。关于胁变分量所应满足的必要条件和充分条件，我们不在这儿列举，读者想要了解时可以在许多弹性力学书籍上找到。

习题：1.设位移矢量场 $\boldsymbol{s}=$ 常量，这代表一种什么样的情况？

2.设位移矢量场 $\boldsymbol{s}=\alpha\boldsymbol{r}$，这儿的 $\boldsymbol{r}$ 是场点的矢径，α 是一个很小的常数，试判断介质中各体积元发生什么变化？

3.试由科希方程组推出胁变分量所应满足的下列必要条件（圣维南方程组）：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\in_{xx}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\in_{yy}}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\in_{xy}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial^2\in_{yy}}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\in_{zz}}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\in_{yz}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial^2\in_{zz}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\in_{xx}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\in_{zx}}{\partial x\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\in_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\in_{zx}}{\partial y}-\frac{\partial\in_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\in_{zz}}{\partial x\partial y}\\
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\in_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial\in_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial\in_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2\in_{xx}}{\partial y\partial z}\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\in_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial\in_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial\in_{zx}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2\in_{yy}}{\partial z\partial x}
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}3\text{-}20)$$

4.试证明下列各分量满足(4-3-20)：

$$\left.\begin{aligned}
&\in_{xx}=k(x^2+y^2)\\
&\in_{yy}=ky^2\\
&\in_{zz}=0\\
&\in_{xy}=2kxy\\
&\in_{yz}=\in_{zx}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}3\text{-}21)$$

式中 k 是一个小常数，而下列各分量却不满足(4-3-13)：

$$\in_{xx}=k(x^2+y^2)z$$
$$\in_{yy}=ky^2z$$
$$\in_{zz}=0$$
$$\in_{xy}=2kxyz$$
$$\in_{yz}=\in_{zx}=0$$

§.4-4. 胁强和胁变的关系——胡克定律

1.作为实验规律的胡克定律 我们已经讲到过胡克定律了。在那种讲述中，胡克定律是作为经验规律而从实验数据（实验曲线）中总结出来的〔温习§.2-2〕。一般地说，科学中所说的“定律”，都是依据实践资料总结出来的适用于某一现象领域的近似规律。例如，在研究气体的状态变化时，一般涉及三个**状态参量**，那就是气体的容积 V、压强 p 和温度 T（绝对温度）。**实验证明**，一般气体的这三个参量之间有着一定的联系，而不是可以任意取值的。例如，当温度不是太低（而压强不是太大）时，一般气体满足理想气体的**物态方程**：

$$pV=nRT \qquad (4\text{-}4\text{-}1)$$

式中 n 是气体的摩耳数，而 R 是气体普适恒量。

关于气体，我们有一些普遍的原理，例如热力学的三条原理；根据这种原理，我们可以推出许多关系式，得到许多一般性的结论。但是，物态方程却不能从热力学原理“推导”出来，而必须从实验数据中总结出来。而且，没有物态方程，许多热力学的一般性结论也往往得不到“落实”。

胡克定律起着弹性力学中的物态方程的作用，它把胁强和胁变联系了起来。我们想，在完全弹性的介质中，胁强和胁变同时出现，同时消失，互为因果，那么，二者之间必然存在着一定的联系，存在着一定的函数关系。但是，这种函数关系的具体形式，却既不能主观地、人为地“规定”，也不能先验地“推测”出来，而是归根结底要到实践中去找答案。因此，我们说，这

里所要讨论的胡克定律，不管它的形式可以多么复杂，分析到最后还应该认为是一种根据实验总结出来而又得到实验验证的、在一定范围内才能适用的客观规律，不然它就不配叫做“定律”。

人们认识事物，总是从简单到复杂，从片面到更多的方面，一步一步向前发展着的。就拿胡克定律来看，它最初应该具有我们在初等物理学中看到过的那种形式，例如，当研究弹簧的伸长时，我们发现弹性力和伸长量成正比：

$$f = -kx \qquad (4\text{-}4\text{-}2)$$

后来，随着实践的进步，这种规律才一步步复杂和完善起来，变成了下面所要讨论的那种形式。

当然，这里并不是要完全否定理论的指导作用和思维的能动作用。人们在进行某一个或某一类特定的实验之前，当然也不妨而且必须根据已有的认识进行一番推测，不然他们的实验就会无所适从，没有明确的方向。但是，我们要强调的是，不管你的推测看起来如何“合理”，如何天花乱坠，只要还没经过实验的验证，那种推测就还是靠不住的❶。我们在许多弹性力学的书籍上看到的关于广义胡克定律的“推导”，事实上只能认为是上述这种性质的理论推测；只有强调了实验的正面验证以后，这种推测才能算作定律。

2.广义胡克定律 我们的目的是要寻求胁强和胁变之间的关系。一般地说，我们共有六个胁强分量和六个胁变分量，因此这种关系可以是相当复杂的。例如，我们设想胁强是胁变的函数，于是就可以写出：

$$\sigma_{xx} = f_1(\in_{xx}, \in_{yy}, \in_{zz}, \in_{xy}, \in_{yz}, \in_{zx}), \text{ 等等。} \qquad (4\text{-}4\text{-}3)$$

我们假设、当胁强不存在时，胁变也到处为零，因此，(4-4-3)的函数式中不包括常数项。另外，$\in_{xx}$ 等等都是些很小的数，

❶ 相反的，实际已经确立的事实或规律，不管从当时已有的理论看来如何地“奇怪”和“说不通”，那也还是不容忽视的事实或规律！

因此，将这种函数展成级数并略去高次项，就得到❶：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= C_{11}\in_{xx}+C_{12}\in_{yy}+C_{13}\in_{zz}+C_{14}\in_{xy}+C_{15}\in_{yz}+C_{16}\in_{zx}\\
\sigma_{yy} &= C_{21}\in_{xx}+C_{22}\in_{yy}+C_{23}\in_{zz}+C_{24}\in_{xy}+C_{25}\in_{yz}+C_{26}\in_{zx}\\
\sigma_{zz} &= C_{31}\in_{xx}+C_{32}\in_{yy}+C_{33}\in_{zz}+C_{34}\in_{xy}+C_{35}\in_{yz}+C_{36}\in_{zx}\\
\sigma_{xy} &= C_{41}\in_{xx}+C_{42}\in_{yy}+C_{43}\in_{zz}+C_{44}\in_{xy}+C_{45}\in_{yz}+C_{46}\in_{zx}\\
\sigma_{yz} &= C_{51}\in_{xx}+C_{52}\in_{yy}+C_{53}\in_{zz}+C_{54}\in_{xy}+C_{55}\in_{yz}+C_{56}\in_{zx}\\
\sigma_{zx} &= C_{61}\in_{xx}+C_{62}\in_{yy}+C_{63}\in_{zz}+C_{64}\in_{xy}+C_{65}\in_{yz}+C_{66}\in_{zx}
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}4)$$

这一方程组表明，每一个胁强分量，都是各个胁变分量的线性函数。这种关系得到了实践的证实，叫做**广义胡克定律**。

如果我们把 σ_{xx}、σ_{yy}、σ_{zz}、σ_{xy}、σ_{yz}、σ_{zx} 和 $\in_{xx}$、$\in_{yy}$、$\in_{zz}$、$\in_{xy}$、$\in_{yz}$、$\in_{zx}$ 分别改写成 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4、σ_5、σ_6 和 $\in_1$、$\in_2$、$\in_3$、$\in_4$、$\in_5$、$\in_6$，则(4-4-4)可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\ C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\ C_{51}&C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\ C_{61}&C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\in_1\\ \in_2\\ \in_3\\ \in_4\\ \in_5\\ \in_6\end{pmatrix} \qquad (4\text{-}4\text{-}5)$$

这一方程显然应该可以求解；就是说，我们应该有：

$$\begin{pmatrix}\in_1\\ \vdots\\ \in_6\end{pmatrix}=C'\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \vdots\\ \sigma_6\end{pmatrix} \qquad (4\text{-}4\text{-}6)$$

式中 C' 是(4-4-5)中那一矩阵的逆矩阵。

广义胡克定律的表示式(4-4-4)中总共有36个弹性模量 C_{mn}

❶ 要想这种级数展式有意义，当然原来的函数就必须满足一定的数学条件；要讲清楚那些条件，就要引入某些概念；而要讲清楚那些概念，却又要引入另外一些概念；如此等等。所以说，数学上的“严密性”，总有某些不够“严密”的地方，从而这种“严密性”只能适可而止，不能无限地追求。至于我们这本书，则根本不追求那种“严密性”，以便把物理思路显示得更为简明。这种情况在此指出，以后不再重述。

(m, $n=1$, 2, 3, 4, 5, 6)。这些模量一般是场点座标的函数。在均匀介质中，这些模量是表征介质的一些常量。但是，进一步的研究证明，这些模量对其下角码是对称的，即 $C_{mn}=C_{nm}$；因此，即使在最一般的各向异性介质中，最多也只有 $\frac{36-6}{2}+6$ $=21$个独立的弹性模量。如果介质的性质具有某种对称性，则弹性模量的数目还会进一步减少。

在上面这种讨论中，我们假设了胁强和胁变同时趋于零。在某些实际情况下，这一假设并不成立——例如，由于加工等等的作用，有些材料内部可能存在“预应力”；就是说，当我们认为它还没有发生形变时，它的内部可能已经有了一种胁强分布。那样的问题需要单独考虑，不能简单地用这里的广义胡克定律来处理。另外还应指出，当我们谈到“场点座标”时，当然是指的形变以前的 P 点的座标(参阅图4-5)；但是，在实际问题中，我们所知道的往往只是形变以后的 P' 点的座标。这二者在概念上是不同的，但它们在数值上差别很小(s 的值不会太大)，因此，将前者换成后者并不会造成多大误差。

3.各向同性介质中的情况 前面已经提到过，实践证明，当胁变(和胁强)不太大时，大多数的岩石都可以看成各向同性的弹性介质。因此，在地震波的理论中，很少用到(4-4-4)那样复杂的胡克定律。这就使我们的理论工作得到了大大的简化。

在第二章中，为了描述一种均匀的各向同性介质的弹性特征，我们引入了五个弹性参量，那就是：杨氏模量 E、泊松比 ν、切变模量 μ、体变模量 K 和 λ 系数。那时我们已经指出，可以证明，在这五个参量中，只有两个是独立的(详细证明在此仍不讲)；换句话说，在各向同性的弹性介质中，(4-4-4)中的那36个模量，不是有21个而是只剩下两个独立量了。这样，利用 E 和 ν，或是利用拉梅系数 λ 和 μ，就可以把各向同性介质的胡克定律表示出来；例如，研究的结果表明，利用拉梅系数 λ 和 μ，可以把胡克定律写成：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{xx} \\
\sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{yy} \\
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{zz} \\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu\in_{xy} = \mu\in_{yx} \\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu\in_{yz} = \mu\in_{zy} \\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu\in_{zx} = \mu\in_{xz}
\end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4\text{-}7)$$

式中 $\theta = \in_{xx} + \in_{yy} + \in_{zz}$ 是体胁变。在下一章中，我们即将用到(4-4-7)这种形式的胡克定律。

再重复一遍，如果介质是均匀的，则 λ 和 μ 是两个常数；如果介质是不均匀的，则 λ 和 μ 是场点座标的函数。至于 λ 和 μ 也是时间变量 t 的函数的情况(例如当介质的温度变化时)，我们将一概不予考虑。

习题：1.利用(4-4-7)和 §2-6中的关系式，证明：

$$\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = 3K\theta \qquad (4\text{-}4\text{-}8)$$

式中 K 是体变模量。

2.求解(4-4-7)，得出用胁强表示胁变的关系式。

3.利用§2-6中的关系式，从(4-4-7)推出用杨氏模量 E 和泊松比 ν 表示的胡克定律。

4.从(4-4-3)那样的一般函数关系通过展成级数而得出(4-4-4)那样的线性关系，这似乎是数学上不会错误的结果；为什么我们说这只是一种推测而不是推导呢？难道这种结果会不对吗？假若实验上发现胁强分量不是和各个胁变分量成比例而是和各个胁变分量的平方成比例，你怎样理解实验和理论之间的这种矛盾？

参 考 文 献

4.1 江苏师范学院，《力学讲义》，下册，人民教育出版社1960年版。

4.2 林赛等，《物理学的基础》，许良英译，商务印书馆1964年版。

4.3 同[2, 3]。

4.4 C.T.Wang，《Applied Elasticity》(应用弹性学)，McGraw-Hill Co., 1953。

4.5 A.Sommerfeld,《Mechanics of Deformable Bodies》(柔体力学), Academic Press, 1950。

4.6 L.D.Landau et al, 《Theory of Elasticity》(弹性理论), Pergamon Press, 1959。

4.7 Sokolnikoff, 《Mathematical Theory of Elasticity》(弹性的数学理论), McGraw-Hill Co., 1956。

第五章　弹性介质动力学基础

§.5-1.　本章小引

上一章分析了弹性介质内部的胁强状态和胁变状态，定义了胁强张量和胁变张量。那些讨论，实质上只是概念的引入，而还没有涉及运动的规律性，还没有涉及弹性力学的正题，还没有涉及真正的动力学原理。固然，我们在§4-4中曾经介绍了(广义的)胡克定律，但是，正如我们强调指出过的那样，胡克定律只是适用于某一特定现象领域的实验规律，而完全算不得什么原理。而且，象这样实验规律，说它是力学中的一条定律也可以，说它是物性学(或弹性学)中的一条定律也可以；只有几条这样的定律是建立不起系统化的科学理论的。

力学中的牛顿定律(和电动力学中的麦克斯韦方程组)则不然。虽然人们还是称它们为“定律”，但是我们说过，这样的定律实际上是一些基本的科学原理。要想对弹性波从理性上加以把握，就应该从这种性质的原理出发来进行分析和概括。换句话说，我们应该设法把牛顿定律应用于弹性介质(的各个部分)，以得出基本的动力学方程组。由于我们主要是研究弹性波，所以还要从这种方程组推出波动方程并对它进行初步的分析说明。本章的任务就是如此。

本章主要研究所谓**完全弹性介质**；就是说，我们假设介质内部只有弹性力在起作用，而且这些弹性力是力学上所谓的**保守力**。在这样的介质中，一旦激发了弹性波，波的总机械能就将守恒。当然，这样的介质在客观世界中是不存在的；物体的机械运动总是不断地和其他形式的运动互相影响、互相转化的。但是，如果把这种转化过程考虑在内，就会使建立基本方程组的工作大

为复杂化。因此，首先和主要考虑完全弹性介质的运动也就是有道理的了。

真实的固体都不可能是完全弹性体。当弹性波在真实固体中传播时，波的能量(机械能量)将逐步转化为热。这可以从好几个方面来加以理解。第一，除了弹性力以外，介质内部可能出现耗散力，例如**内摩擦力**(粘滞力)。第二，介质中某一体积元所受到的胁强可能不是胁变的单值函数；当胁强先增大而后又减小时，胁变的变化曲线可能形成滞后回线，就象磁学上的磁滞回线一样。第三，真实固体可能显示弛豫现象，就是说，当加上胁强时，它的胁变可能并不立即达到应有的值，而是要经过一段弛豫时间才能达到；这样，如果波的周期比介质的特征弛豫时间大不了很多，波就会受到严重的衰减。第四，由于上述的以及其他的原因，当介质发生反复的形变时，它的内部会发热而在介质内部造成温度梯度，结果就会引起**不可逆的**传热过程。所有这一切，都会导致波的机械能向热能的不可逆转化，也就是引起波的衰减。

但是，虽然有这许多现象，却也不排除所有这些现象全都不是主要因素的可能性。例如，传热过程通常是进行得比较缓慢的。在和振动周期数量级相同的时间之内，如果热交换现象可以忽略，则介质中各部分的变化可以看成可逆的绝热过程。这样，就可以认为波的机械能是守恒的，但是要把介质的各个弹性模量 λ、μ、E、ν 等等理解为它们的**绝热值**，而不是理解为通常实验上给出的那种等温值。如果读者将来有必要进行某些定量计算(例如根据弹性模量来计算波速)，这种条件就是必须注意的❶。

正是按照这样的理解，我们将主要讨论理想的弹性介质中的波，只有在最后一节才约略谈到弹性波的吸收问题。

§.5-2. 介质中各体积元的运动方程

1.体积元的加速度 为了具体，我们仍然在直角座标系中讨

❶ 在声学发展史上，最初是根据气体的等温膨胀系数来计算声速的，得到的结果和实验不一致。后来改用了绝热膨胀系数，就和实验取得了一致。

论问题。设想当介质处于自然状态时我们在 P 点取了一个长方形的体积元 $\Delta V=\Delta x\Delta y\Delta z$，如图5-1所示。当介质受到外力，而其内部出现了胁强场时，它的内部同时也出现了位移矢量场 $s(x,y,z,t)$。这时，原来位于 P 点处的物质挪到了 P' 点处，而现在位于 P 点处的物质则是从另外一个平衡位置上挪过来的。因此，如果我们通过分析原来那个体积元 ΔV 的各个表面上的胁强分量而得出这一小块介质所受的作用力，这些作用力就是作用在事后“搬进来”的那一部分介质上，而不是作用在原来“住在”体积元 ΔV 内的那一部分介质上的，因为原来的“住户”已经搬走了。这样说来，我们求出的那些作用力，就应该和“新住户”的加速度联系起来，而不是和“老住户”的加速度联系起来。

但是，要计算“新住户”加速度，就要查一查搬家以前的“户口本”；这是要费点儿事的。费点儿事倒还不要紧，问题是那样得出来的运动方程比较复杂，很不容易进一步分析和求解。幸好，既然所研究的弹性位移很小，“老住户”并没有搬多么远，还住在附近；那地方的胁强场和“原住址”(P 点的邻域)的胁强场差别不会太大。因此，如果我们认为所求得的那些弹性力不是作用在“新住户”上，而是作用在“老住户”上，那也是不会引起多大误差的。利用这种办法得到的方程比较好对付。所以据我们所知，几乎所有弹性力学的书籍上都采用了这种办法。

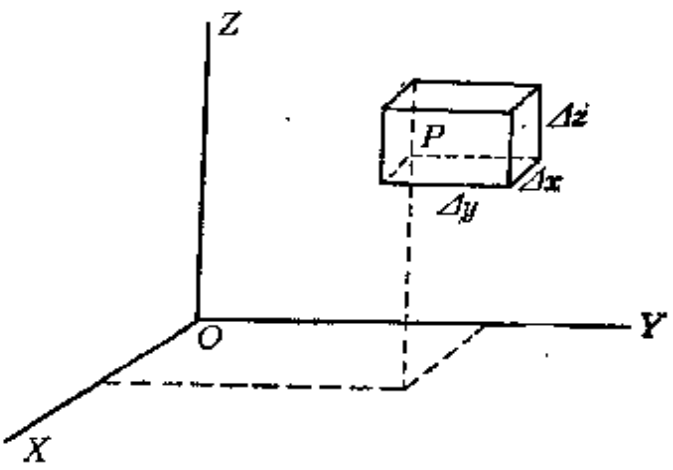


图5-1　介质中的一个体积元

“老住户”的加速度是比较容易计算的。我们看看弹性位移场 $s(x,y,z,t)$；如果我们把这儿的 x、y、z 看成原来那个 P 点的座标，那么，那个点是“老住户”的平衡位置，当然应该认为是个不变的点。这时，正如我们从前说过的，空间座标变成了一种

"编号"而不再是动力学座标。作为"老住户"的动力学座标的是三个位移分量 u、v 和 w。因此，"老住户"的加速度可以直接写出来：

$$\left.\begin{aligned} a_x &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}1)$$

这里使用了偏导数，因为如上所述，P 点是"老住户"的平衡位置，所以该点的座标应该认为是不随时间而变的。

为了更好地理解这个问题，咱们可以回想一下振动学中的情况，例如弹簧振子的情况。弹簧振子上的小球(质点)，当没受激发时位于 O 点，这就是它的平衡位置。受到激发以后，它就在O点附近往返地振动。在振动过程中，O点是不动的，随着时间变化的只是小球和O点之间的距离；这个距离就是弹簧振子的动力学座标。在许多书上，这个距离被写成 x；为了和作为"编号"的平衡位置座标相区别，我们在本书中把它改写成 u。

弹性介质中的情况可以和振动学中的情况相对照。对于"老住户"说来，P 点是平衡位置，这就和振子情况下的 O 点相当。随着时间变化的，不是平衡位置的座标 x_p、y_p、z_p，而是位移矢量的三个分量 u，v，w；这就和振子情况下的位移 u 相当。因此，(5-2-1)就是显而易见的了——但是，让我们再重复一句，这样算出的是"老住户"的而不是"新住户"的加速度！

2．牛顿第二定律对各体积元的应用　下面就来分析 P 点处一个长方形体积元所受的作用力。首先我们再提醒一句，在本节的讨论中，我们将忽略体力的作用，而只考虑面力即弹性力的作用。为了清楚，我们先研究这个体积元在 y 轴方向上所受的力。

如图5-2所示，先看 $PCBA$ 这个面上的情况。这个面的面积是 $\Delta x\Delta z$。这个面垂直于 Y 轴，所以当研究 Y 分力时应该只考虑法向力。按照胁强的定义，这个面上的法向胁强(即单位面积上的法向力)是 σ_{yy}，从而相应的法向弹性力是 $\sigma_{yy}\Delta S = \sigma_{yy}\Delta x\Delta z$。但是，在早先定义胁强时，这个面的正法线是取得和 Y 轴平行

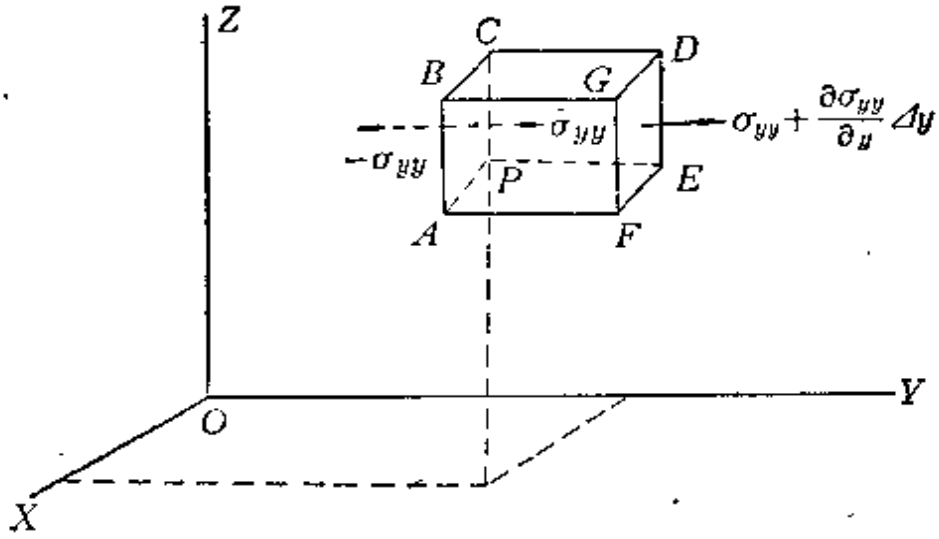


图5-2　法向胁强对 Y 分力的贡献

即指向右侧的，因此，这里算出的是该平面右侧的物质对左侧的物质在 Y 方向上作用的弹性力；也就是说，这是体积元通过该面对外部物质作用的 Y 分力。根据牛顿第三定律，外部物质通过该面对体积元作用的 Y 分力显然和上述这个力差一个负号，即：

$$-\sigma_{yy}\Delta x\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}2)$$

其次再看 $DGFE$ 这个面上的情况；这个面也垂直于 Y 轴，其面积也是 $\Delta x\Delta z$。但是，这个面不经过 P 点，而是在 P 点右方相距 Δy 处。因此，这个面上的法向胁强不是 σ_{yy}，而是 $\sigma_{yy}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\Delta y$；而且，这正是该面右侧的物质对左侧的物质作用的胁强，从而不必再变号了。相应的法向力是：

$$+\left(\sigma_{yy}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

二式合并，就得到外面的介质通过垂直于 Y 轴的两个表面对体积元作用的 Y 分力：

$$\Delta f_{1y}=-\sigma_{yy}\Delta x\Delta z+\left(\sigma_{yy}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z$$

$$=+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}\Delta y\Delta x\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}4)$$

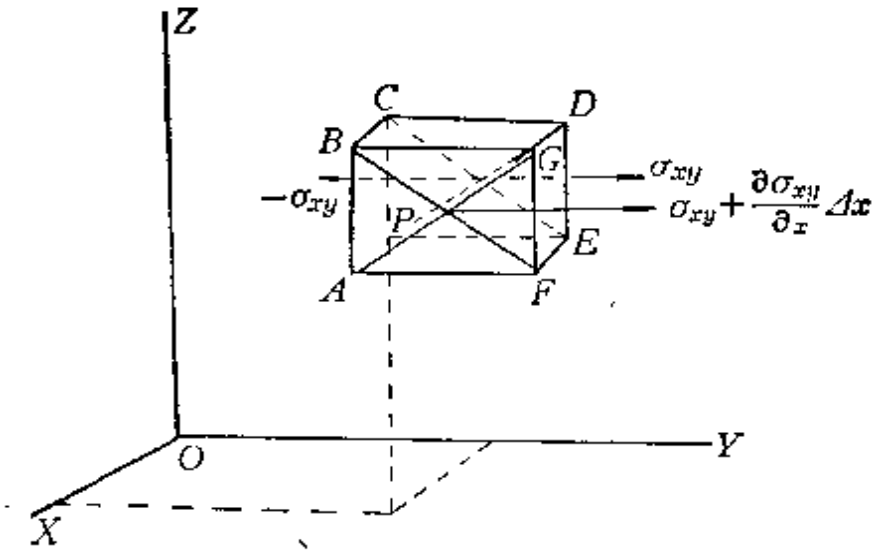


图5-3　切向胁强的分析

但是，这还不算完结，因为其他四个小平面上还有沿 Y 方向的分力(切向力)。分析的方法完全和前面一样，本来用不着再讲了；但是，为了便于自学，这里再重讲一遍。先看 $PEDC$ 这个小平面上的情况，参阅图5-3；这个面垂直于 X 轴，其面积是 $\Delta y\Delta z$。这个面上的 Y 方向的切胁强是 σ_{xy}；但是，根据定义，这是体积元内部的(平面“前侧”的)物质对外部的物质作用的胁强。因此，当计算体积元受到的力时，必须把这个胁强变号；于是，体积元在这个小平面上受到的 Y 方向的分力(切向弹性力)就是：

$$-\sigma_{xy}\Delta y\Delta z$$

其次再看 $AFGB$ 这个小平面；这个面也垂直于 X 轴，面积也是 $\Delta y\Delta z$，但是它不通过 P 点而是离开该点有一个距离 Δx，从面它那儿的 Y 向切胁强是 $\sigma_{xy}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\Delta x$。不必变号，就能算出体积元在这个小平面上所受到的 Y 方向的分弹性力：

$$+\left(\sigma_{xy}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

和上面的结果合并，就得到体积元在这一对小面积上受到的 Y 方向的切向力：

$$\Delta f_{2y} = -\sigma_{xy}\Delta y\Delta z + \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\Delta x\right)\Delta y\Delta z$$

$$= + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}5)$$

最后还要考虑垂直于 Z 轴的一对小平面，它们对 Y 方向的作用力的贡献是：

$$\Delta f_{3y} = + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\Delta z\Delta x\Delta y \qquad (5\text{-}2\text{-}6)$$

分析完了，将三式相加，就得到体积元在 Y 方向上受到的总的力：

$$\Delta f_y = \Delta f_{1y} + \Delta f_{2y} + \Delta f_{3y}$$

$$= \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}7)$$

前面提到过，可以证明，胁强场是一个对称的二秩张量场；就是说：

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx},\quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy},\quad \sigma_{zx} = \sigma_{xz} \qquad (5\text{-}2\text{-}8)$$

这种对称性，我们在下面就要证明。利用了这种对称性，(5-2-7)可以改写成：

$$\Delta f_y = \left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}9)$$

根据牛顿第二定律，力等于质量乘加速度，即：

$$\Delta f_y = (\Delta m)a_y \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

体积元的质量显然是：

$$\Delta m = \rho\Delta V = \rho\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (5\text{-}2\text{-}11)$$

按照前面的分析，在微小位移的近似下，体积元的 Y 方向的加速度分量可以认为是：

$$a_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (5\text{-}2\text{-}12)$$

将(5-2-9)、(5-2-11)和(5-2-12)代入(5-2-10)中，并消去不等于零的公因子 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$，就得到，

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \qquad (5\text{-}2\text{-}13)$$

同理，分析 X 方向上或 Z 方向上的情况，也得到完全类似的方程。结果就得到：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}14)$$

这就是弹性介质的运动方程组(叫做纳维方程组)。这个偏微分方程组，因为已经消去了 ΔV 这样的因子，所以是适用于连续介质中每一点的。当介质处于平衡即其各个部分所受的合力都等于零时，方程组(5-2-14)的右端等于零$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0\right)$，这时就得到弹性介质的平衡方程组：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}15)$$

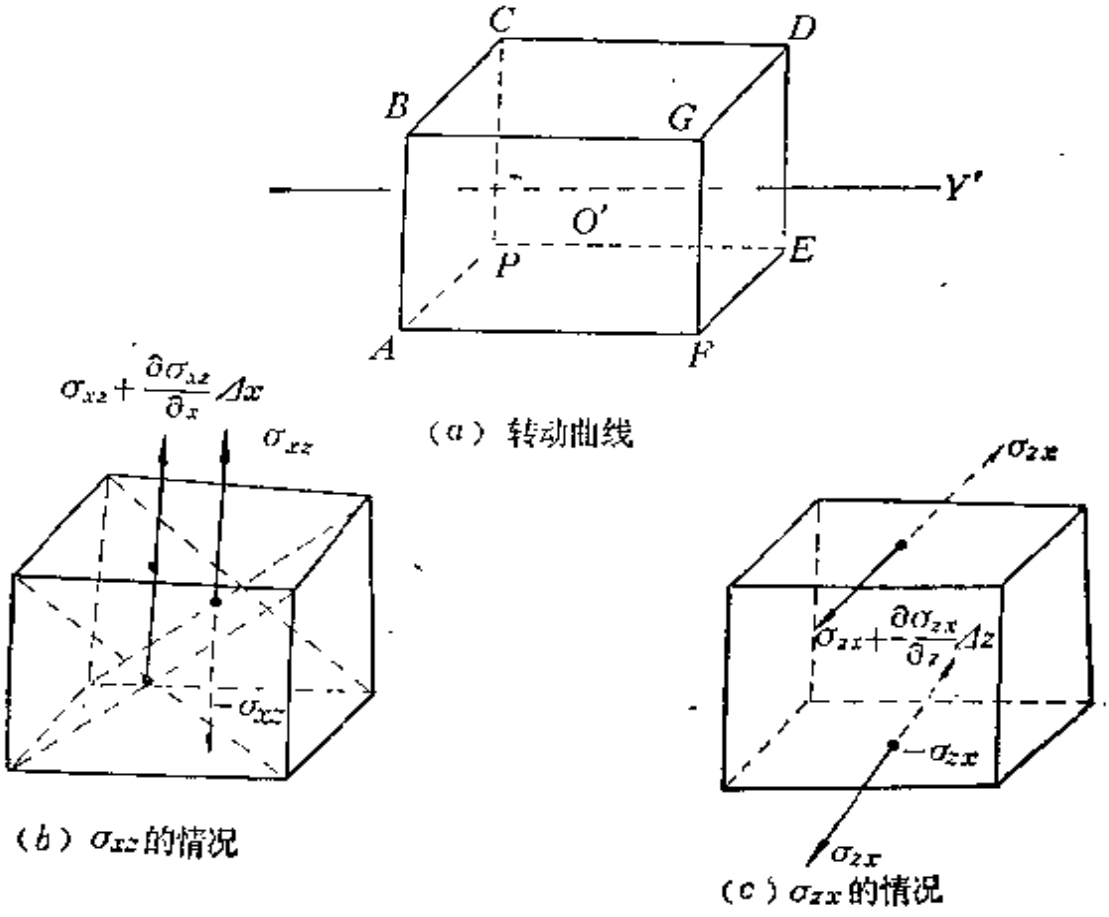
方程组(5-2-14)及其特例(5-2-15)，就是关于弹性介质的运动的基本方程组，因为这实质上就是牛顿第二定律。其所以是偏微分方程组，因为现在研究的是广大连续介质的运动，而不再是分立质点的运动了。

在质点力学中，如果知道了质点在各个时刻所受的力，也知道了质点在某一特定时刻的位置和速度(初值条件)，原则上就可以通过求解质点的运动方程〔例如方程组(1-6-3)〕而定出质点在全部时间进程中的运动。在我们现在考虑的弹性介质的情况，问

题就比较复杂了。一般说来，知道了整个介质所受的外力〔边值条件的一种〕，并不等于知道了介质内部的胁强场，而要确定整个胁强场的分布和变化往往是很困难的(要确定六个多元函数)。因此，直接求解方程组(5-2-14)就能解决问题的情况并不很多；还需要进一步发展理论，设法把各个胁强分量消去。这一工作，我们将在下一节中再来进行。

3.体积元所受的力矩 上面的讨论就是本节的主要内容；下面的讨论是一些补充。

现在我们通过分析体积元所受的力矩来证明胁强张量的对称性。为此目的，我们首先研究体积元绕通过中心而平行于Y轴的轴线的转动，如图5-4(a)所示。我们指出，在体积元的各个面上，它所受到的弹性力可以认为作用在该面的中点上。因此，垂直于Y轴的两个面上的作用力对上述轴线的力矩为零。现在来看



(a) 转动曲线

(b) σ_{xz}的情况

(c) σ_{zx}的情况

图5-4 体积元所受的力矩

垂直于 X 轴的两个面上的情况。如图5-4(b)所示，在 $PEDC$ 面上，对力矩有贡献的切向力是 $f_1=-\sigma_{xz}\Delta y\Delta z$；在 $AFGB$ 面上，对力矩有贡献的切向力是 $f_1'=+\left(\sigma_{xz}+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}-\Delta x\right)\Delta y\Delta z$，这两个力不在一条直线上，可以认为构成一个力偶，因为和 σ_{xz} 相比，f_1' 中的第二项 $\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}-\Delta x$ 是一个无限小的量（当 Δx 为无限小时）。

根据力学中的定义，这两个力的力偶矩是：

$$C_1=|f_1|\Delta x=\sigma_{xz}\Delta x\Delta y\Delta z \qquad (5-2-16)$$

因为二力之间的垂直距离是 Δx。其次再看垂直于 Z 轴的两个面上的情况，如图5-4(c)所示。按照和上面完全相同的道理，得到：

$$C_2=\sigma_{zx}\Delta z\Delta x\Delta y \qquad (5-2-17)$$

比较图5-4中的(b)和(c)，我们看到 C_1 和 C_2 的符号相反。因此，对于轴线 $O'Y'$ 来说，体积元所受到力矩是：

$$\begin{aligned}C_y&=C_2-C_1=(\sigma_{zx}-\sigma_{xz})\Delta x\Delta y\Delta z\\&=(\sigma_{zx}-\sigma_{xz})\Delta V\end{aligned} \qquad (5-2-18)$$

根据力学中的结论，这一力矩应该等于体积元对轴线 $O'Y'$ 而言的转动惯量 I_y 乘上绕此轴线转动的角加速度 β_y：

$$C_y=I_y\beta_y \qquad (5-2-19)$$

根据转动惯量的定义(1-8-7)可以算出，长方体对通过中心而平行于一棱的轴线而言的转动惯量是：

$$I=\frac{m}{12}(a^2+b^2) \qquad (5-2-20)$$

式中 a 和 b 是不平行于轴线的两个棱长。对于所取的体积元，就有：

$$I_y=\frac{1}{12}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\rho\Delta V \qquad (5-2-21)$$

将此式和(5-2-18)代入(5-2-19)中，并消去公因子 ΔV，得到：

$$\sigma_{zx}-\sigma_{xz}=\frac{\rho}{12}[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\beta_y \qquad (5\text{-}2\text{-}22)$$

因为 $\beta_y\neq\infty$ 而当体积元很小时 Δx 和 Δy 都是无限小量，所以上式右端是二阶无限小量；在极限情况，就有：

$$\sigma_{zx}-\sigma_{xz}=0\,,\qquad \sigma_{zx}=\sigma_{xz} \qquad (5\text{-}2\text{-}23)$$

这就是(5-2-8)中的第三个关系式。

用同样的办法分析体积元在另外两个方向上所受的分力矩，就得到另外两个关系式。结果就证明了已经提到过几次的胁强张量场的对称性。

4.任意面积元上的胁强　前面讲过，知道了胁强场在一个直角座标系中的分量，任意面积元上的胁强 σ_n 就可以按照已知数学公式确定出来。这种公式也可以通过分析体积元的受力情况而推导出来。

在讨论这一问题时，首先应该回忆一下介质内部一点 P 处的胁强的定义。我们从 P 点开始任意画一个单位矢量 $\boldsymbol{n}$，然后垂直于这个正法线画一个面积元 ΔS，并把 $\boldsymbol{n}$ 所指向的一侧叫做 ΔS 的正面，而把另一侧叫做 ΔS 的反面。所谓 ΔS 上的胁强 σ_n，就是指正面物质通过 ΔS 对反面物质作用的力和面积 ΔS 之比〔参阅(4-2-9)〕。在定义 σ_n 时曾经强调指出，σ_n 的值应该和 ΔS 的形状无关；而只和 $\boldsymbol{n}$ 的方向有关。我们现在的任务就是要用胁强分量 σ_{xx} 等等把 σ_n 表示出来。

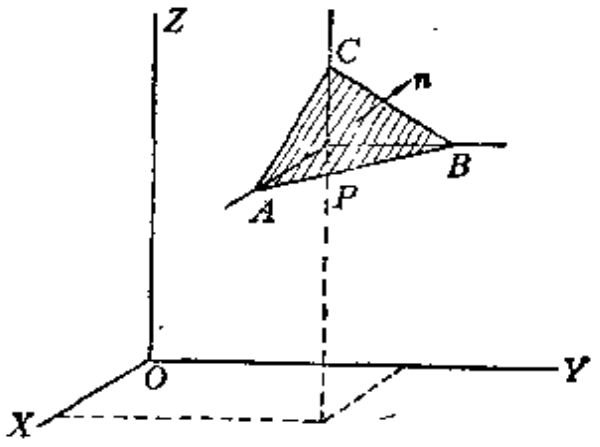


图5-5　无限小四面体的受力分析

为此目的，我们以 P 点为顶点画一个很小的四面体，如图 5-5 所示；这个四面体的三个三角形的表面平行于三个座标平面，而第四

个三角形的表面 ΔS 则垂直于事先任意取定的正法线 n。由于四面体很小，虽然这个 ΔS 并不经过 P 点，我们还是可以把 ΔS 上的胁强看成 P 点处的 σ_n，从而四面体在这个面上所受的力就是：

$$f_{\Delta S} = \sigma_n \Delta S \qquad (5\text{-}2\text{-}24)$$

这一个力，在所选的直角座标系中当然可以分解成三个垂直分量。例如，我们用 X、Y、Z 代表这三个分力，用 σ_{nx}、σ_{ny}、σ_{nz} 代表 σ_n 的三个分量，显然就有：

$$\left.\begin{aligned} X &= \sigma_{nx}\Delta S \\ Y &= \sigma_{ny}\Delta S \\ Z &= \sigma_{nz}\Delta S \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}25)$$

现在再看四面体在其他三个面上的受力情况。根据前面已经讲过的道理，当考虑四面体在这几个面上受到的力时，应该采用胁强分量 σ_{xx} 等等的负值。例如，在 $\triangle PBC$ 上，体积元受到的 X 方向上的力是：

$$f_{1x} = -\sigma_{xx}\Delta S_1 \qquad (5\text{-}2\text{-}26)$$

此处 ΔS_1 代表三角形 PBC 的面积。同理，在 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PAB$ 上，体积元受到的 X 方向上的力分别是：

$$f_{2x} = -\sigma_{yx}\Delta S_2 \qquad (5\text{-}2\text{-}27)$$

$$f_{3x} = -\sigma_{zx}\Delta S_3 \qquad (5\text{-}2\text{-}28)$$

这里 ΔS_2 和 ΔS_3 分别是 $\triangle PAC$ 和 $\triangle PAB$ 的面积。

由图可见，ΔS_1 就是 ΔS 在垂直于 X 轴方向上的投影。因此，如果用 l、m、n 代表法线 n 的三个方向余弦，就有：

$$\left.\begin{aligned} \Delta S_1 &= l\Delta S \\ \Delta S_2 &= m\Delta S \\ \Delta S_3 &= n\Delta S \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}29)$$

结果，整个体积元所受到的 X 方向上的力就是：

$$X + f_{1x} + f_{2x} + f_{3x} = \sigma_{nx}\Delta S - (\sigma_{xx}l + \sigma_{yx}m + \sigma_{zx}n)\Delta S \qquad (5\text{-}2\text{-}30)$$

利用胁强张量的对称性，这一结果又可以写成：

$$(\sigma_{nx} - l\sigma_{xx} - m\sigma_{xy} - n\sigma_{xz})\Delta S \qquad (5\text{-}2\text{-}31)$$

体积元的质量是：

$$\Delta m = \rho \Delta V$$

于是，根据牛顿第二定律，得到：

$$(\sigma_{nx} - l\sigma_{xx} - m\sigma_{xy} - n\sigma_{xz})\Delta S = (\rho \Delta V)a_x \qquad (5\text{-}2\text{-}32)$$

当 ΔS 无限趋近于 P 点时，ΔV 是高阶无限小量，从而(5-2-32)的右端在极限情况下为零；由此就得：

$$\sigma_{nx} = l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz} \qquad (5\text{-}2\text{-}33)$$

用同样的办法可以得到 σ_{ny} 和 σ_{nz} 的表示式，结果就有：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{nx} &= l\sigma_{xx} + m\sigma_{xy} + n\sigma_{xz} \\ \sigma_{ny} &= l\sigma_{yx} + m\sigma_{yy} + n\sigma_{yz} \\ \sigma_{nz} &= l\sigma_{zx} + m\sigma_{zy} + n\sigma_{zz} \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}34)$$

知道了 σ_n 的三个分量，当然也就等于知道了 σ_n 本身。

附带指出，也象胁强张量场的对称性一样，关系式(5-2-34)不但在平衡条件下是成立的，而且在运动条件下也是成立的。这一点，许多弹性力学书籍上也没有适当说明。

另外我们也指出，(5-2-34)显然可以写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}2\text{-}35)$$

5.声学近似 方程组(5-2-14)表明，一般情况下，即使是均匀的各向同性的固体介质，它内部的运动也可以是相当复杂的，因为胁强场的分布可以是相当复杂的。正如下一节将证明的，在这种最简单的固体介质中，也还可以同时存在纵波和横波。

但是，在地震勘探工作中，目前通用的震源（爆炸、气枪、电火花）主要是激发纵波。为了计算上的简单，人们时常把这种地震纵波当作理想流体中的声波来处理。从理论上来看，这种替换好象是没有多大根据的；但是据说这样得到的结果还能解决一些勘探上的问题，就是说，这种办法在一定程度上得到了实践的支持。例如，在克莱保(Claerbout)关于“波动方程偏移”的论文

和书籍中，用的就是这种简化办法。我们姑且把这种办法叫做**声学近似法**。

在粘滞性可以忽略的流体（“理想流体”）中❶，切向胁强分量都等于零，而法向胁强分量只表现为压强；就是说：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}&=-p\\ \sigma_{xy}=\sigma_{yz}=\sigma_{zx}&=0\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}36)$$

于是(5-2-14)变为：

$$\left.\begin{aligned}-\frac{\partial p}{\partial x}&=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\ -\frac{\partial p}{\partial y}&=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\ -\frac{\partial p}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}37)$$

这就是流体的运动方程组。

为了以后方便，我们用 $\tilde{u}$、$\tilde{v}$、$\tilde{w}$ 代表**振动速度**；就是说，我们令：

$$\left.\begin{aligned}\tilde{u}&=\frac{\partial u}{\partial t}\\ \tilde{v}&=\frac{\partial v}{\partial t}\\ \tilde{w}&=\frac{\partial w}{\partial t}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}38)$$

于是，(5-2-37)变为：

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t}&=-\frac{\partial p}{\partial x}\\ \rho\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}&=-\frac{\partial p}{\partial y}\\ \rho\frac{\partial\tilde{w}}{\partial t}&=-\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}2\text{-}39)$$

❶ 附带提到，在现实世界中确然有这样的“理想流体”。实验上发现，在超低温的条件下，有些液体的粘滞系数趋于零；这叫做超流现象。

这就是克莱保所用的基本方程组。

此外，根据第二章中体变模量K的定义即(2-5-3)式，

$$p = -K\theta + p_0 \qquad (5-2-40)$$

但是，由(4-3-5)式，$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$；代入上式，就得到：

$$p = -K\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + p_0 \qquad (5-2-41)$$

两端对t求偏导数，并利用定义式(5-2-38)，就得到：

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -K\left(\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \widetilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \widetilde{w}}{\partial z}\right) + \frac{\partial p_0}{\partial t} \qquad (5-2-42)$$

克莱保关于波动方程偏移的工作，就是从这一类方程开始的。

习题：1.和场点的某一个座标(例如y)无关的胁强分布，叫做平面胁强场。试仿照前面的论证，导出和(5-2-14)相对应的在平面胁强场作用下的弹性介质的运动方程组。

2.在理想流体中，方程组(5-2-34)将变成什么样子？试阐明其物理意义。

3.设一切的量都和y座标无关，而和t的关系是和$e^{j\omega t}$成正比，试论证(5-2-39)在这种条件下变为：

$$\left.\begin{aligned} -\omega^2\rho u &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ -\omega^2\rho w &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (5-2-43)$$

§.5-3. 弹性波的波动方程

1.分区均匀的介质 我们一再说过，牛顿定律是一些具有很大普遍性(虽然也有适用范围)的原理性的规律。在推导方程组(5-2-14)时，我们并没有用到关于介质性质的假设。用了胁变张量场的对称性，但是我们看到，这种对称性也是只根据动力学的道理就可以证明的，从而这并不是任何实质性的限制。因此我们

说，方程组(5-2-14)不但适用于各向同性的介质，而且也适用于各向异性的介质。

但是，正因为它的适用范围太广泛，方程组(5-2-14)的求解也就很不容易；这一点，我们已经在上节中指出过了。现在我们企图从(5-2-14)中消去各个胁强分量，当然就必须用到更具体、更特殊的物理规律，而胡克定律正好适应这样的需要。前面讲过，地震学中最常遇到的地层可以认为是一些各向同性的介质，因此，我们将采用各向同性介质的胡克定律。

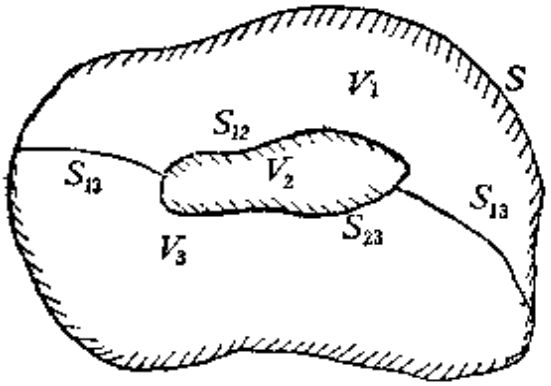


图5-6　分区均匀介质示意图

不但如此，在可能的情况下，我们总是尽量企图将介质分成几块，每一块介质都可以认为是均匀的，如图5-6所示。图中的S是介质的“外”表面，也就是整个场的定义域的外表面(温习§3-3)。整个定义域被分成几个部分，如图中的V_1、V_2、V_3所示；在每一部分中，介质可以认为是均匀的，其分界面如图中的S_{12}、S_{13}、S_{23}所示。如果介质事实上可以这样划分，它就叫做分区均匀的介质。

我们分别在每个“子域”V_i中求解有关的微分方程，然后按照适当的边值条件(衔接条件)将所得的解“衔接”起来，于是就得到整个定义域V中的解。因为每一子域中的介质可以看成均匀的，从而它的各种物理参量都和座标无关；这样，在每一子域中，我们所要解的微分方程就比非均匀介质中的方程来得简单而容易处理。

在我们所要讨论的情况下，如果介质是各向同性的和分区均匀的，则在每一子域中都可以把胡克定律写成下列形式：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\lambda\theta+2\mu\in_{xx}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\\ \sigma_{yy}&=\lambda\theta+2\mu\in_{yy}=\lambda\theta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \\
\sigma_{xy} &= \mu\in_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\
\sigma_{yz} &= \mu\in_{yz} = \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\
\sigma_{zx} &= \mu\in_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}1)$$

式中的拉梅系数 λ 和 μ 都和座标无关；如果介质状态不随时间而变(或是采用适当的改正，例如采用绝热条件下的实验值)，则还可以认为它们也和 t 无关。这就使问题得到了相当的简化。

2.波动方程的导出 将(5-3-1)式代入基本方程组(5-2-14)，就可以把各个胁强分量消去。以(5-2-14)中的第一式为例，就有：

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$$

于是该式变为：

$$\lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$$

$$= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$+ \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}\right]$$

$$= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$= (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\nabla^2 u = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

用同样的方法处理另外两个方程，也得到类似的结果。于是就得到：

$$\left.\begin{aligned}
\mu\nabla^2 u + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x} &= \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\\
\mu\nabla^2 v + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial y} &= \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\\
\mu\nabla^2 w + (\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial z} &= \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}3\text{-}2)$$

式中 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 是拉普拉斯算符，$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ 是体胁变。方程组(5-3-2)就是适用于位移分量 u、v、w 的波动方程。在这一方程组中，除了位移分量 u、v、w 及其导数以外，只包含介质的弹性参量 λ、μ 和介质的质量密度 ρ。既然介质在所考虑的子域内被认为是均匀的，λ、μ 和 ρ 就都是和座标无关的常量。因此，从原理上说，通过求解(和定解)方程组(5-3-2)，就能够求出三个位移分量 u、v、w。求出了这三个函数，代入科希方程组(4-3-19)中，就能定出胁变张量场；再代入胡克定律(5-3-1)中，就能定出胁强张量场。这时，全部问题就可以认为已经得到了解决。

当然，这里讲的只是理论上的情况。实际上的情况绝不这么简单。至于不同的具体问题，它们各自有其特点、条件和困难，所以需要针对具体情况，分别想出适当的办法去分析、解决，绝不是说有了波动方程组就“一劳永逸”了。

3.弹性纵波和弹性横波 我们指出，方程组(5-3-2)可以归

并成矢量形式：

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{s}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{s})=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2} \qquad (5\text{-}3\text{-}3)$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 是位移矢量，$\mathrm{div}\boldsymbol{s}=0$ 是体胁变，$\nabla^2\boldsymbol{s}$ 的意义如下：

$$\nabla^2\boldsymbol{s}=(\nabla^2u)\boldsymbol{i}+(\nabla^2v)\boldsymbol{j}+(\nabla^2w)\boldsymbol{k} \qquad (5\text{-}3\text{-}4)$$

如果位移矢量场 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)$ 是无旋的，就是说，如果所考虑的那一部分介质中到处都有

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{s}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}5)$$

则根据上一章中的分析，介质中的各个小部分只有体积的胀缩而没有转动，就是说，介质中只有弹性纵波而没有弹性横波。在这种条件下，将(5-3-3)两端取散度，利用关系式 $\theta=\mathrm{div}\boldsymbol{s}$ 并利用算符 ∇、∇^2 和 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 的对易性，就得到：

$$\begin{aligned}&\mu\nabla\cdot(\nabla^2\boldsymbol{s})+(\lambda+\mu)\nabla\cdot(\mathrm{grad}\theta)\\&=\mu\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{s})+(\lambda+\mu)\nabla^2\theta\\&=\mu\nabla^2\theta+(\lambda+\mu)\nabla^2\theta=\rho\nabla\cdot\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{s})\\&=\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\end{aligned}$$

也就是说，我们得到体胁变 θ 所满足的波动方程如下：

$$\nabla^2\theta-\frac{\rho}{\lambda+2\mu}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}6)$$

或者写作：

$$\nabla^2\theta-\frac{1}{V_p^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}7)$$

式中

$$V_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \qquad (5\text{-}3\text{-}8)$$

代表介质中弹性纵波的传播速度。

另一方面，如果位移矢量场 $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{r},t)$ 是无源的，就是说，如果所考虑的那一部分介质中到处都有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{s}=0 \qquad \text{即}\theta=0, \qquad (5\text{-}3\text{-}9)$$

则该部分介质中只有横波而无纵波。根据上一章中的分析，因为转动很小，所以可以把

$$\psi = -\frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\boldsymbol{s} = -\frac{1}{2}\,\nabla\times\boldsymbol{s} \qquad (5\text{-}3\text{-}10)$$

叫做体积元的角位移矢量。在这种情况下，将(5-3-3)两端取旋度，就能推出 ψ 所满足的波动方程：

$$\mu\nabla\times(\nabla^2\boldsymbol{s})+(\lambda+\mu)\nabla\times(\nabla\theta)$$

$$=\mu\nabla^2(\nabla\times\boldsymbol{s})+0=\rho\nabla\times\left(\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2}\right)=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\nabla\times\boldsymbol{s}) \qquad (5\text{-}3\text{-}11)$$

这里利用了矢量恒等式(3-4-21)，就是说，

$$\nabla\times(\nabla\theta)=\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\theta)=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}12)$$

将(5-3-11)两端除以 2μ，并利用(5-3-10)，就得到：

$$\nabla^2\psi-\frac{\rho}{\mu}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}13)$$

或者写作：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{V_s^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}14)$$

式中

$$V_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (5\text{-}3\text{-}15)$$

代表介质中弹性横波的传播速度。

4.位移矢量场的标位和矢位 在以上的讨论中，一直忽略了体力的作用，而只考虑了弹性力(面力)的作用。如果需要考虑和介质密度成比例的体力(例如重力或万有引力)，则(5-3-3)式的左端应增加一项：

$$\mu\nabla^2\boldsymbol{s}+(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\boldsymbol{s})+\rho\boldsymbol{g}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{s}}{\partial t^2} \qquad (5\text{-}3\text{-}16)$$

式中 $\boldsymbol{g}$ 代表体力的强度，即单位质量的介质所受到的体力。

在普遍条件下，位移矢量场可以既不是无旋的也不是无源的，但是，根据§3-5中的定理3-2，我们永远可以把一个一般的

矢量场分解成无旋的和无源的两部分。在现在的情况下，我们有：

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_P + \boldsymbol{s}_S \qquad (5\text{-}3\text{-}17)$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_P + \boldsymbol{g}_S \qquad (5\text{-}3\text{-}18)$$

式中

$$\mathrm{curl}\boldsymbol{s}_P = \mathrm{curl}\boldsymbol{g}_P = 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}19)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{s}_S = \mathrm{div}\boldsymbol{g}_S = 0 \qquad (5\text{-}3\text{-}20)$$

如果所考虑的子域是单连通的，这些场就可以有位函数（定理3-3和定理3-4）；就是说，可以找到适当的标量场 Φ、η 和矢量场 Ψ 和 χ，使它们满足：

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}_P + \boldsymbol{s}_S = \mathrm{grad}\Phi + \mathrm{curl}\Psi \qquad (5\text{-}3\text{-}21)$$

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{g}_P + \boldsymbol{g}_S = \mathrm{grad}\eta + \mathrm{curl}\boldsymbol{\chi} \qquad (5\text{-}3\text{-}22)$$

将这两个表示式代入波动方程(5-3-16)中，并将无旋的部分和无源的部分分开，就得到两个方程如下：

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathrm{grad}\Phi) - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}[\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi)]$$

$$-\mu\nabla^2(\mathrm{grad}\Phi) = \rho\mathrm{grad}\eta \qquad (5\text{-}3\text{-}23)$$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\mathrm{curl}\Psi) - (\lambda+\mu)\mathrm{grad}[\mathrm{div}(\mathrm{curl}\Psi)]$$

$$-\mu\nabla^2(\mathrm{curl}\Psi) = \rho\mathrm{curl}\chi \qquad (5\text{-}3\text{-}24)$$

先看(5-3-23)，由于 grad 是线性算符并且可以和式中的其他算符对易，而 λ、μ 和 ρ 又都是常量(分区均匀的介质)，所以可以把 grad 作为“公因子”提出来；就是说，我们有：

$$\mathrm{grad}\left\{\rho\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - (\lambda+\mu)[\mathrm{div}(\mathrm{grad}\Phi)] - \mu\nabla^2\Phi\right\} = \mathrm{grad}(\rho\eta)$$

等式两端都有 grad，能不能把它“消去”呢？一般说是不行的，因为两个场的梯度相等并不意味着那两个场完全相等。但是，由于无旋场具有规范不变性，我们可以把“消去”grad作为规范化条件，于是就得到：

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{\lambda+\mu}{\rho}\nabla^2\Phi-\frac{\mu}{\rho}\nabla^2\Phi=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\nabla^2\Phi$$

$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-V_p^2\nabla^2\Phi=\mathrm{grad}\eta$$

或者写作：

$$\nabla^2\Phi-\frac{1}{V_p^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-\frac{1}{V_p^2}\mathrm{grad}\eta \qquad (5\text{-}3\text{-}25)$$

式中 V_p 是纵波的波速。

其次再看(5-3-24)，根据矢量恒等式，

$$\mathrm{div}(\mathrm{curl}\Psi)=0$$

从而该式左端的第二项根本就等于零。再根据和上面类似的讨论“消去”算符 curl，就得到：

$$\nabla^2\Psi-\frac{1}{V_s^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}=-\frac{1}{V_s^2}\chi \qquad (5\text{-}3\text{-}26)$$

式中 V_s 是横波的波速。

(5-3-25)和(5-3-26)就是位移矢量场的标位和矢位所满足的方程。这恰好就是第三章中提到过的达朗贝尔方程。当体力不存在或可以忽略时，上述两个方程就分别变成和(5-3-7)、(5-3-14)完全相同的波动方程。

根据它们所满足的方程解出标位 Φ 和矢位 Ψ，代入(5-3-21)中就能定出位移矢量场；再利用科希方程组和胡克定律，也就能够定出胁变张量场和胁强张量场了。

5.弹性波的传播速度 关系式 (5-3-8) 和 (5-3-15) 把弹性波的传播速度和介质的弹性参量（以及密度）联系了起来。由(5-3-15)可见，如果介质的切变模量 μ 等于零，则横波的速度为零，这就是理想流体(粘滞性很小的气体和液体)内部不能存在弹性横波的理论证明。

由方程(5-3-8)和(5-3-15)可以求出纵波速度和横波速度之比：

$$V_p/V_s=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\mu}}=\sqrt{2+\frac{\lambda}{\mu}} \qquad (5\text{-}3\text{-}27)$$

这一比值常大于一。

照理说，根据波速和介质性质之间的联系，应该可能依据波速的测定来推断介质的性质和状态；但是，在地震勘探中，这方面的资料积累得还很不足。主要是因为，当处于地壳深处的条件下时，地层的弹性参量和处于地面条件下时可能有很大的差别，而在实验室中模拟地下的条件则是很不容易的。另一方面，由于地下结构的复杂性，准确地测定各个地层中的真实波速也并不是轻而易举的事。不过，近几年来，国外期刊上也开始出现了一些文章，主张用测定V_p/V_s的方法来直接寻找油气藏(和预报天然地震)。这也可能是一个新的发展方向。

习题：1.在地震资料解释中，是把地下物质看成什么样的介质？均匀的还是非均匀的？

2.在非均匀介质中，λ、μ和ρ都是场点座标的函数(它们是一些标量场)。试在这种条件下推导和(5-3-7)、(5-3-14)相对应的波动方程(即θ和Ψ所满足的方程)。

3.利用直角座标系，直接推导(5-3-6)和(5-3-13)。

4.在推导(5-3-23)和(5-3-24)时，我们说“将无旋的部分和无源的部分分开”；那句话是什么意思？为什么可以那样做？

5.试根据你已经掌握的知识，由(5-3-8)和(5-3-15)推出下列关系式：

$$V_p=\sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}} \qquad (5\text{-}3\text{-}28)$$

$$V_s=\sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \qquad (5\text{-}3\text{-}29)$$

式中E和ν分别是介质的杨氏模量和泊松比。

6.理想流体的切变模量$\mu=0$。试利用(5-2-41)和(5-3-6)，论证流体中的纵波满足下列方程(p_0可以忽略)：

$$\nabla^2 p-\frac{1}{V_a^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \qquad (5\text{-}3\text{-}30)$$

式中p为压强，而

$$V_s=\sqrt{\frac{K}{\rho}} \qquad (5-3-31)$$

为声波速度(K为体变模量)。

7.在分区均匀的介质中，我们认为λ、μ、ρ都是常量。但是，如果介质中出现了纵波(胀缩波)，它的θ到处不同，那么各点的ρ也不可能完全相等，从而各点的λ、μ也不一定完全相同。那么，我们在推导波动方程时为什么还把λ、μ、ρ看成常量？是不是我们推错了？

§.5-4. 弹性介质的机械能*

1.弹性位能(形变位能) 在第一章中，我们计算过弹簧振子的弹性位能，那时得到：

$$U=\frac{1}{2}kx^2 \qquad (5-4-1)$$

这一结果，显然可以改写成：

$$U=\frac{1}{2}(kx)x=\frac{1}{2}F(x)x \qquad (5-4-2)$$

式中$F(x)$表示弹簧在伸长为x时所受的外力。根据当时的推导方式可以看出，这种结果显然可以搬用到杆件的单向拉伸的情况，而且也可以推广到一般形变的情况。

为了计算弹性介质某一个体积元中的弹性位能，我们研究它受到的力在形变过程中所做的功。按照胡克定律，胁强和胁变之间存在线性的关系，因此我们可以分别计算各个胁强分量所做的功，然后求各功的代数和，就得到总的功，也就是总的弹性位能(取自然状态下的位能为零)。

如图5-7所示，设开始时什么胁强分量都不存在，只有yy分量从0增加到某一值σ_{yy}。这就对应于体积元的单向拉伸。设当yy分量为σ'_{yy}时$PCBA$面的位移为v，而$DGFE$面的位移为$v+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y=v+\in_{yy}\Delta y$。前面讲过，这时体积元在$PCBA$面上受的力是$-\sigma'_{yy}\Delta x\Delta z$，而在$DGFE$面上受的力是

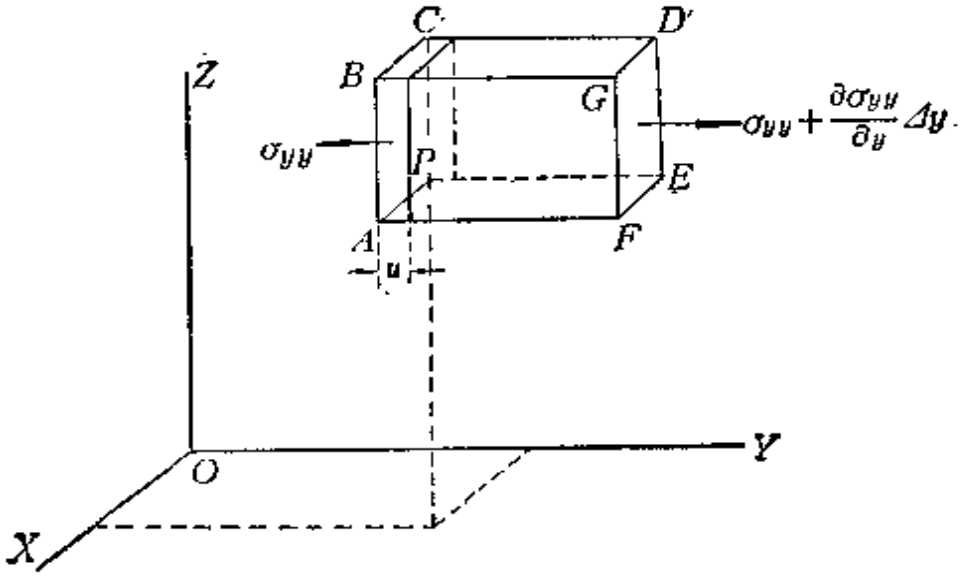


图5-7　弹性位能的计算示意图

$$\left(+\sigma'_{yy}+\frac{\partial\sigma'_{yy}}{\partial y}\Delta y\right)\Delta x\Delta z;$$

但是，后一式中的最后一项是高阶小量，从而可以略去。于是，当胁强从0增加到σ_{yy}时，外力在上述两个面上对体积元所做的功是：

$$\Delta U=\int_{\sigma'_{yy}=0}^{\sigma'_{yy}=\sigma_{yy}}(\sigma'_{yy}\Delta x\Delta z)d\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right)$$

$$-\int_{\sigma'_{yy}=0}^{\sigma'_{yy}=\sigma_{yy}}(\sigma'_{yy}\Delta x\Delta z)dv$$

$$=\int_{\sigma'_{yy}=0}^{\sigma'_{yy}=\sigma_{yy}}\sigma'_{yy}\Delta x\Delta z\,d\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)\Delta y$$

根据胡克定律，$\frac{\partial v}{\partial y}=\in_{yy}=\frac{\sigma'_{yy}}{E}$，因此，上式变为：

$$\Delta U_1=\int_{\sigma'_{yy}=0}^{\sigma'_{yy}=\sigma_{yy}}\sigma'_{yy}\Delta x\,\Delta z\frac{\Delta y}{E}d\,\sigma'_{yy}=\frac{1}{2E}\sigma_{yy}^2\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_{yy}\in_{yy}\Delta x\Delta y\Delta z = -\frac{1}{2}\sigma_{yy}\in_{yy}\Delta V \qquad (5-4-3)$$

式中 $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ 是体积元的体积。

当 yy 分量从 0 增加到 σ_{yy} 时，体积元在垂直方向上也发生形变；例如，在 Z 方向上，胁变分量从 0 变为 $\in_{zz}^{0} = -\nu\in_{yy}$，式中 ν 是介质的泊松比。但是，既然这时 σ_{zz} 还等于零，外力在 z 方向上也就并不做功。

现在设想胁强场的 zz 分量从 0 变为 σ_{zz}，而体积元得到相应的胁变分量 $\in_{zz} = -\frac{\sigma_{zz}}{E}$。那么，重复上面的论证，就得到相应的功，也就是位能增量：

$$\Delta U_2 = \frac{1}{2E}\sigma_{zz}^2\Delta x\Delta y\Delta z = \frac{1}{2}\sigma_{zz}\in_{zz}\Delta V \qquad (5-4-4)$$

但是，当 zz 分量从 0 增加到 σ_{zz} 时，又会反过来在 Y 方向上引起胁变，而使其胁变分量从 $\in_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E}$ 变为 $\frac{\sigma_{yy}}{E} - \nu\frac{\sigma_{zz}}{E}$，这时 σ_{yy} 是保持不变的，而垂直于 Y 轴的面积元移动的距离是 $\frac{-\nu\sigma_{zz}}{E}\Delta y$，因为 $\left(-\frac{\nu\sigma_{zz}}{E}\right)$ 表示 $\in_{yy}$ 的增量，从而必须乘上 Δy 才是距离。于是，这时常力 $\sigma_{yy}\Delta x\Delta z$ 所做的功就是：

$$\Delta U_3 = (\sigma_{yy}\Delta x\Delta z)\left(-\frac{\nu\sigma_{zz}}{E}\right)\Delta y = -\frac{\nu}{E}\sigma_{yy}\sigma_{zz}\Delta V \qquad (5-4-5)$$

此式中没有 $\frac{1}{2}$ 这个因子，因为这是常力做的功。

总起来看，当胁强的 yy 分量和 zz 分量分别从 0 增加到 σ_{yy} 和 σ_{zz} 时，储存在体积元中的弹性位能是：

$$\Delta U_4 = \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 = \frac{1}{2E}(\sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - 2\nu\sigma_{yy}\sigma_{zz})\Delta V \qquad (5-4-6)$$

这时，体积元的最终胁变分量是：

$$\in_{yy}=\frac{1}{E}(\sigma_{yy}-\nu\sigma_{zz}),\quad \in_{zz}=\frac{1}{E}(\sigma_{zz}-\nu\sigma_{yy}) \qquad (5-4-7)$$

很容易看出，(5-4-6)可以写成：

$$\Delta U_4=\frac{1}{2}(\sigma_{yy}\in_{yy}+\sigma_{zz}\in_{zz})\Delta V \qquad (5-4-8)$$

用相同的办法论证还存在 σ_{xx} 时的情况，就得到体积元中储存的胀缩弹性位能：

$$\Delta U_\theta=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\in_{xx}+\sigma_{yy}\in_{yy}+\sigma_{zz}\in_{zz})\Delta V \qquad (5-4-9)$$

我们指出，所得到的表示式和推导时考虑各胁强分量的次序无关；换句话说，弹性位能只依赖于最终的胁变状态，而不依赖于施加胁强的方式。当然，只有这样，才能谈到“位能”；只有这样，我们的推导才可能有意义，才可能是对的。

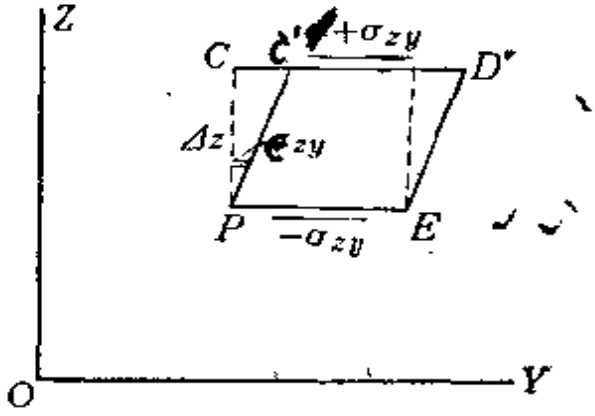


图5-8　切向胁强做功的情况

现在再来研究切向胁强做功的情况。如图 5-8 所示，忽略了高阶小量，可以认为末状态的作用力是 $\sigma_{zy}\Delta x\Delta y$，而移动的距离是 $\overline{CC'}=\in_{zy}\Delta z$。因此，从自然状态积分到末状态，得到的结果是：

$$\Delta U_5=\frac{1}{2}(\sigma_{zy}\Delta x\Delta y)(\in_{zy}\Delta z)=\frac{1}{2}\sigma_{zy}\in_{zy}\Delta V \qquad (5-4-10)$$

其他切向分量做功的情况也可以同样分析。由胡克定律可见，法向胁强不引起切向胁变，切向胁强也不引起法向胁变；因此，当一切胁强分量都存在时，体积元中储存的弹性位能就可以写成：

$$\Delta U=\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\in_{xx}+\sigma_{yy}\in_{yy}+\sigma_{zz}\in_{zz}+\sigma_{xy}\in_{xy}+\sigma_{yz}\in_{yz}+\sigma_{zx}\in_{zx})\Delta V \qquad (5-4-11)$$

单位体积中的能量叫做能量密度；用 ρ_U 代表弹性位能的密度，就有：

$$\rho_U=\frac{\Delta U}{\Delta V}=-\frac{1}{2}(\sigma_{xx}\in_{xx}+\sigma_{yy}\in_{yy}+\sigma_{zz}\in_{zz}+\sigma_{xy}\in_{xy}+\sigma_{yz}\in_{yz}+\sigma_{zx}\in_{zx}) \tag{5-4-12}$$

利用胡克定律消去各个胁强分量，上式又可写成：

$$\rho_U=\frac{1}{2}\{\lambda(\in_{xx}+\in_{yy}+\in_{zz})^2+\mu[2(\in_{xx}^2+\in_{yy}^2+\in_{zz}^2)+\in_{xy}^2+\in_{yz}^2+\in_{zx}^2]\} \tag{5-4-13}$$

另一方面，利用胡克定律消去胁变分量，也可以把 ρ_U 写成胁强分量的二次式，在此从略。

2.体积元的动能 在前面所讲的近似条件下，体积元的动能可以写成：

$$\Delta K=\frac{1}{2}(\Delta m)v^2=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\Delta V \tag{5-4-14}$$

从而动能密度可以写成

$$\rho_K=\frac{\Delta K}{\Delta V}=\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \tag{5-4-15}$$

3.能流密度矢量场 我们知道，位能和动能的和叫做机械能。用 ρ_E 代表机械能密度，就有：

$$\rho_E=\rho_U+\rho_K=\frac{1}{2}\left\{\lambda(\in_{xx}+\in_{yy}+\in_{zz})^2+\mu[2(\in_{xx}^2+\in_{yy}^2+\in_{zz}^2)+\in_{xy}^2+\in_{yz}^2+\in_{zx}^2]+\rho\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2\right\} \tag{5-4-16}$$

显然，这样定义的 ρ_E，正如 ρ_U、ρ_K 一样，是一个标量场；在非稳条件下，它不但是场点位置的函数，而且是 t 的函数。

前面讲过，在非稳条件下，弹性介质内部的运动服从波动方程，就是说，运动表现为弹性波。为了讨论波的能量问题，我们来计算 ρ_E 随时间的变化情况。

首先计算 ρ_U 的变化情况。由(5-4-13)得到：

$$\frac{\partial \rho_U}{\partial t}=\lambda(\epsilon_{xx}+\epsilon_{yy}+\epsilon_{zz})\left(\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t}+\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial t}+\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t}\right)+2\mu\left(\epsilon_{xx}\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t}\right.$$

$$\left.+\epsilon_{yy}\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial t}+\epsilon_{zz}\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t}\right)+\mu\left(\epsilon_{xy}\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t}+\epsilon_{yz}\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial t}+\epsilon_{zx}\frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial t}\right)$$

$$=(\lambda\theta+2\mu\epsilon_{xx})\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t}+(\lambda\theta+2\mu\epsilon_{yy})\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial t}+(\lambda\theta+2\mu\epsilon_{zz})\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t}$$

$$+\mu\epsilon_{xy}\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t}+\mu\epsilon_{yz}\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial t}+\mu\epsilon_{zx}\frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial t}$$

利用各向同性介质中胡克定律的表示式(5-3-1)，就得到：

$$\frac{\partial \rho_U}{\partial t}=\sigma_{xx}\frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial t}+\sigma_{yy}\frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial t}+\sigma_{zz}\frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial t}+\sigma_{xy}\frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial t}+\sigma_{yz}\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial t}$$

$$+\sigma_{zx}\frac{\partial \epsilon_{zx}}{\partial t} \qquad (5\text{-}4\text{-}17)$$

再利用科希方程组，就得到：

$$\frac{\partial \rho_U}{\partial t}=\sigma_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}+\sigma_{yy}\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial y}+\sigma_{zz}\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial z}+\sigma_{xy}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial y}\right)$$

$$+\sigma_{yz}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial t\,\partial z}\right)+\sigma_{zx}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial z}+\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right)$$

(5-4-18)

其次计算 ρ_K 的变化情况。由(5-4-15)得到：

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t}=\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial t}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{s}}{\partial t^2}\right) \qquad (5\text{-}4\text{-}19)$$

利用基本运动方程组(5-2-14)，就得到：

$$\frac{\partial \rho_K}{\partial t}=\left(\frac{\partial u}{\partial t}\boldsymbol{i}+\frac{\partial v}{\partial t}\boldsymbol{j}+\frac{\partial w}{\partial t}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left[\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}\right.$$

$$+\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\right)\boldsymbol{k}\right]$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}\right)+\frac{\partial v}{\partial t}\left(\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\right.$$

$$+\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}\Big)+\frac{\partial w}{\partial t}\Big(\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}\Big)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}$$

$$+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}$$

$$+\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \qquad (5\text{-}4\text{-}20)$$

当然，$\frac{\partial \rho_E}{\partial t}$就等于(5-4-18)和(5-4-20)之和。现在归并同类项。例如，(5-4-18)中的第一项和(5-4-20)中的第一项相加，就得到：

$$\sigma_{xx}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial t}\Big) \qquad (5\text{-}4\text{-}21)$$

式中利用了$\frac{\partial}{\partial t}$和$\frac{\partial}{\partial x}$的对易性。用同样的办法处理各项（并利用胁强张量场的对称性），就得到：

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_{xy}\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma_{xz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\sigma_{yx}\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma_{yz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\sigma_{zx}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_{zy}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big) \qquad (5\text{-}4\text{-}22)$$

现在我们定义一个矢量场，叫做**能流密度矢量场**，用$\boldsymbol{I}$来代表：

$$\boldsymbol{I}=-\Big[\Big(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_{xy}\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma_{xz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\boldsymbol{i}+\Big(\sigma_{yx}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_{yy}\frac{\partial v}{\partial t}$$

$$+\sigma_{yz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\boldsymbol{j}+\Big(\sigma_{zx}\frac{\partial u}{\partial t}+\sigma_{zy}\frac{\partial v}{\partial t}+\sigma_{zz}\frac{\partial w}{\partial t}\Big)\boldsymbol{k}\Big]$$

$$(5\text{-}4\text{-}23)$$

于是(5-4-22)就变成：

$$\frac{\partial \rho_E}{\partial t} = -\operatorname{div} \boldsymbol{I}$$

或者写成：

$$\operatorname{div} \boldsymbol{I} + \frac{\partial \rho_E}{\partial t} = 0 \qquad (5\text{-}4\text{-}24)$$

我们在此指出，定义式(5-4-23)最好写成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} I_x \\ I_y \\ I_z \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \\ \frac{dw}{dt} \end{pmatrix} \qquad (5\text{-}4\text{-}25)$$

熟悉矢量场论的读者可以直接从(5-4-24)式看出矢量场 $\boldsymbol{I}$ 的物理意义；该式可以叫做机械能连续性方程的微分形式，它表示着机械能守恒定律。为了免得不熟悉场论的读者再去查别的书，我们在这里讲一讲这个问题。

设想我们在空间画一个固定的闭合曲面 S，并计算 S 所包围的空间域 V 中的弹性介质的机械能，如图 5-9 所示❶。

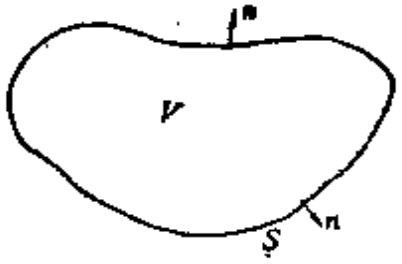


图5-9 弹性介质机械能的计算示意图

用 E_V 代表空间域 V 中弹性介质的机械能，显然就有：

$$E_V = \int_V \rho_E \, dV \qquad (5\text{-}4\text{-}26)$$

这是一个定积分；如果场是非稳的，E_V 将是时间的函数，$E_V = E_V(t)$，从而我们可以计算机械能的变化率（某种功率）$\frac{dE_V}{dt}$。但是，既然曲面 S 是固定的，能量的变化就只能是由各点能量密度的变化所引起的，从而就有：

❶ 我们指出，这样取定的空间域 V，也可以并不被弹性介质所充满。在空着的部分，只要认为 ρ_E 等于零就行了。

$$\frac{dE_V}{dt}=\int_\rho\left(\frac{\partial \rho_E}{\partial t}\right)dV \qquad (5\text{-}4\text{-}27)$$

将(5-4-24)代入上式，并利用高斯定理(3-6-12)，就得到：

$$\frac{dE_V}{dt}=\int_V\left(\frac{\partial \rho_E}{\partial t}\right)dV=-\int_V(\mathrm{div}\boldsymbol{I})dV=-\oint_S(\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n})dS$$

或者写成：

$$\oint_S \boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=-\frac{dE_V}{dt} \qquad (5\text{-}4\text{-}28)$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是 S 上各点的（或者说 dS 处的）**外向法线**。这一表示式可以叫做**机械能连续性方程的积分形式**。

我们看，(5-4-28)式的右端有一个负号，从而代表的是单位时间内域 V 中弹性机械能的**减少量**。**假设域 V 中的机械能和其他能量形式之间的互相转化过程可以忽略**（介质对波的吸收可以忽略），则机械能之所以减少，只可能是由于通过外表面 S 流走了，而(5-4-28)式的左端则恰好是一个“流量”的表示式〔复习“通量”的定义，例如(3-6-6)式〕。因此，$\boldsymbol{I}$ 的意义恰好就是机械能的能流密度；也就是说，某点处 $\boldsymbol{I}$ 的方向表示该点处机械能的传输方向，而其量值 I 则表示**单位时间内通过单位垂直截面流过去的能量**。在这样的理解下，(5-4-24)和(5-4-28)就都是**机械能守恒定律的数学表示式**了。

当然，机械能守恒的情况只是一种理想情况；正如我们已经强调过的，“纯粹的”机械运动是不存在的，从而任一系统的总机械能也不可能是严格守恒的。但是，上面这种讨论却并不因此而减小其实际意义和理论指导作用。因为，当机械能并不守恒时，我们往往只要在所得的结果中增加一些适当的改正项就行了。我们在讨论振动时首先讨论谐振动，在讨论波时首先讨论无吸收的正弦波，也正是采取的这种态度。在波动学中，**所谓波的强度，通常就是指的能流密度**（或能流密度的某种**时间平均值**）。

习题：1.在推导(5-4-8)式时，我们是认为先出现 σ_{yy}，后出现 σ_{zz}。如果先出现 σ_{zz}，后出现 σ_{yy}，也应该得到相同的结果，

请你自己推导一次。

2.试根据(5-4-12)和胡克定律(5-3-1)，将 ρu 表示成胁强分量 σ_{xx} 等等的二次式。

3.试根据定义式(5-4-23)，分析能流密度 I 的单位和量纲。

§.5-5. 介质对弹性波的吸收*

1.吸收的机制 前面讲过，假若弹性波的机械能量真是守恒的，假若弹性波的能量不会转化为任何其他形式的能量，则一旦激发了弹性波，这种弹性波就会永世常存，万古不灭。假若真有那种事，就实在不得了！空气中会充满了越来越强烈的嘈杂声，地壳也会在人的步履和各种机械的震撼下越来越厉害地抖颤起来。因此，波的吸收也并不完全是坏事。

所谓弹性波的吸收，就是指的波的能量（介质中各部分的振动能量）逐步转化为其他形式的能量(最终转化为热量)的过程。在以上的讨论中，我们一直没有考虑这种过程。

假若介质中胁强场和胁变场的关系严格地遵循胡克定律（这样的理想物体叫做**胡克固体**），则各个体积元只可能受到弹性力的作用；从而当然谈不到机械能和其他能量的互相转化问题；这便是以上所讨论的情况。事实上，在运动过程中，真实介质的不同部分之间会出现某种“摩擦力”，叫做**内摩擦力**(或**粘滞力**)。这种内摩擦力的存在就导致机械能量向其他能量的转化，正如阻尼的存在导致振动能量向其他能量的转化一样。

在不同的固体介质中，内摩擦力所遵循的规律是不同的。为了表现这方面的规律，人们提出了种种近似的模型和假设，其中一种就是佛各特（Voigt）假设。佛各特认为，对于某些固体介质来说，胁强分量包括两部分：一部分是**弹性胁强**，即和胁变分量成比例的（满足胡克定律的）胁强；另一部分是**粘滞胁强**，这种胁强和胁变的时间变化率成比例，其比例系数描述着介质的粘滞特征。于是，对于各向同性的介质，胁强和胁变的关系可以写成：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{xx} + \lambda'\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2\mu'\frac{\partial\in_{xx}}{\partial t}\\
\sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{yy} + \lambda'\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2\mu'\frac{\partial\in_{yy}}{\partial t}\\
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{zz} + \lambda'\frac{\partial\theta}{\partial t} + 2\mu'\frac{\partial\in_{zz}}{\partial t}\\
\sigma_{xy} &= \mu\in_{xy} + \mu'\frac{\partial\in_{xy}}{\partial t}\\
\sigma_{yz} &= \mu\in_{yz} + \mu'\frac{\partial\in_{yz}}{\partial t}\\
\sigma_{zx} &= \mu\in_{zx} + \mu'\frac{\partial\in_{zx}}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}5\text{-}1)
$$

式中 λ' 和 μ' 是描述介质粘滞特征的两个参量。上一方程组可以叫做佛各特定律。如果更进一步假设：

$$\mu' = \eta,\ \lambda' = -\frac{2}{3}\eta \qquad (5\text{-}5\text{-}2)$$

则上式变为：

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{xx} + \eta\left(2\frac{\partial\in_{xx}}{\partial t} - \frac{2}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\\
\sigma_{yy} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{yy} + \eta\left(2\frac{\partial\in_{yy}}{\partial t} - \frac{2}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\\
\sigma_{zz} &= \lambda\theta + 2\mu\in_{zz} + \eta\left(2\frac{\partial\in_{zz}}{\partial t} - \frac{2}{3}\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)\\
\sigma_{xy} &= \sigma_{yx} = \mu\in_{xy} + \eta\frac{\partial\in_{xy}}{\partial t}\\
\sigma_{yz} &= \sigma_{zy} = \mu\in_{yz} + \eta\frac{\partial\in_{yz}}{\partial t}\\
\sigma_{zx} &= \sigma_{xz} = \mu\in_{zx} + \eta\frac{\partial\in_{zx}}{\partial t}
\end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}5\text{-}3)
$$

式中的 η 叫做介质的粘滞系数。显然，(5-5-1)及其特例(5-5-3)，

是胡克定律在佛各特假说下的推广。满足(5-5-1)的物体叫做佛各特固体。

2.波动方程的建立 将(5-5-1)代入基本运动方程组(5-2-14)中并利用科希方程组消去胁变分量，就得到位移矢量所满足的波动方程：

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}s)+\mu\nabla^2 s+(\lambda'+\mu')\mathrm{grad}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}s\right)+\mu'\nabla^2\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) \qquad (5\text{-}5\text{-}4)$$

在(5-5-2)的附加条件下，此式变为：

$$\rho\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\mathrm{grad}(\mathrm{div}s)+\mu\nabla^2 s+\frac{1}{3}\eta\mathrm{grad}\left(\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}s\right)+\eta\nabla^2\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) \qquad (5\text{-}5\text{-}5)$$

(5-5-4)和(5-5-5)中比以前的波动方程多出了含一阶时间偏导数的项。熟悉波动方程的读者马上就能知道，这样的项就描述着介质对波的吸收。

将(5-5-5)两端取散度并利用以前得到的关系，就得到：

$$\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\left[(\lambda+2\mu)+\frac{4}{3}\eta\frac{\partial}{\partial t}\right]\nabla^2\theta \qquad (5\text{-}5\text{-}6)$$

这就是吸收性介质中弹性纵波所满足的方程。同理，将(5-5-5)两端取旋度，就得到：

$$\rho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\left(\mu+\eta\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^2\psi \qquad (5\text{-}5\text{-}7)$$

式中 $\psi=\frac{1}{2}\mathrm{curl}\,s$；这就是吸收性介质中弹性横波所满足的方程。这种结果表明，在佛各特固体介质中，弹性纵波和弹性横波也是可以区分开的，但是它们所满足的方程中都出现了含一阶时间偏导数的项。

仿照前面的论证，也可以得出位移矢量场的位函数所满足的波动方程，在此不再多讲。

3.衰减系数　为了说明含一阶时间偏导数的项到底起什么作用，我们来考虑沿+X轴方向传播的平面正弦纵波。按照初等的波动理论，这种波的标位可以写成：

$$\Phi(x,t)=\Phi_0 e^{j(\omega t-\kappa x)} \qquad (5\text{-}5\text{-}8)$$

于是，弹性位移只有 u 分量：

$$u=\frac{\partial \Phi}{\partial x}=-j\kappa\Phi \qquad (5\text{-}5\text{-}9)$$

从而

$$\theta=\frac{\partial u}{\partial x}=-\kappa^2\Phi \qquad (5\text{-}5\text{-}10)$$

将(5-5-10)代入波动方程(5-5-6)中，并引用符号

$$\eta'=\frac{4}{3}\eta \qquad (5\text{-}5\text{-}11)$$

得到：

$$\rho\omega^2=(\lambda+2\mu)\kappa^2+j\eta'\omega\kappa^2 \qquad (5\text{-}5\text{-}12)$$

从而得到

$$\kappa^2=\frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)+j\eta'\omega}=\frac{\rho\omega^2}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\left[(\lambda+2\mu)-j\eta'\omega\right]$$

$$=\frac{\rho\omega^2}{\sqrt{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}}e^{-j\operatorname{arctg}(\eta'\omega/\lambda+2\mu)} \qquad (5\text{-}5\text{-}13)$$

由此得到：

$$\kappa=\left[\frac{\rho^2\omega^4}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}e^{-j\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\eta'\omega/\lambda+2\mu)}$$

$$=\left[\frac{\rho^2\omega^4}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}\left\{\cos\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta'\omega}{\lambda+2\mu}\right)\right]\right.$$

$$\left.-j\sin\left[\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\eta'\omega}{\lambda+2\mu}\right)\right]\right\} \qquad (5\text{-}5\text{-}14)$$

如所预料，这里的圆波数 κ 为复数量。我们令：

$$\kappa=k-j\gamma \qquad (5\text{-}5\text{-}15)$$

于是就得到弹性位移 u 的表示式：

$$u(x,t)=u_0e^{-\gamma x}e^{j(\omega t-kx)} \qquad (5\text{-}5\text{-}16)$$

这就是空间衰减的平面正弦波的波函数。这里有：

$$\gamma=\left[\frac{\rho^2\omega^4}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\eta'\omega}{\lambda+2\mu}\right) \tag{5-5-17}$$

$$k=\left[\frac{\rho^2\omega^4}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\right]^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\eta'\omega}{\lambda+2\mu}\right) \tag{5-5-18}$$

这里的k显然应该代表实值的圆波数：

$$k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{\omega}{V_p} \tag{5-5-19}$$

从而就有：

$$V_p=\frac{\omega}{k}=\left[\frac{\rho^2}{(\lambda+2\mu)^2+\eta'^2\omega^2}\right]^{-\frac{1}{4}}\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\eta'\omega}{\lambda+2\mu}\right)} \tag{5-5-20}$$

结果表明，在佛各特固体介质中，弹性波将随着传播距离的增大而指数地衰减，其衰减系数和波速通常都是频率的函数。这便是波动方程中含一次时间偏导数的项所引起的后果❶。

如果介质的粘滞系数$\eta'=\frac{4}{3}\eta$不依赖于波的频率，则对于低频的波来说应有$\eta'\omega\ll(\lambda+2\mu)$。于是，由(5-5-17)和(5-5-20)得到：

$$\gamma\approx\frac{1}{2}\frac{\eta'\omega^2\rho^{\frac{1}{2}}}{(\lambda+2\mu)^{\frac{3}{2}}} \tag{5-5-21}$$

$$V_p\approx\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \tag{5-5-22}$$

这就是说，这时衰减系数γ和频率的平方成正比，波速和无吸收介质中的波速相同（不依赖于频率）。反过来，对于高频的波，应有$\eta'\omega\gg(\lambda+2\mu)$。于是就有：

❶ 我们顺便指出，在电磁波的情况，导电性媒质是吸收性的媒质，其数学规律和此处的规律颇为相似。

$$\gamma \approx \left(\frac{\rho\omega}{\eta'}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5\text{-}5\text{-}21')$$

$$V_p \approx \left(\frac{\eta'\omega}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5\text{-}5\text{-}22')$$

这就是说，这时衰减系数、波速都和频率的平方根成正比。

有人假设粘滞系数和频率成反比，即：

$$\eta' = \frac{a}{\omega} \qquad (5\text{-}5\text{-}23)$$

式中 a 是一个常量。从此得出结论，衰减系数和频率成正比，而波速和频率无关。据说这种结论得到了某些实验数据的支持。

习题：1.在佛各特假设下，引入位移矢量的标位和矢位，并推导它们所分别满足的方程。

2.仿照上面的讨论，自己分析平面正弦横波的情况。

参 考 文 献

5·1 多单位合编，《地震勘探数字技术》，第三册，科学出版社1977年版。

5·2 同[3·5]。

余见第四章参考文献。

第六章　略论波动方程的求解

§.6-1.　本章小引

波动方程的解就是波函数，而波函数的形式是十分多样化的。就是说，波动过程是客观世界中一种很广泛、很重要而又十分多样化的物质运动方式；描述波动过程绝不是多么简单的工作，那么，求解波动方程的问题当然也就不会很简单，而是有着十分丰富的内容了。

在上一章中我们讲过，波动方程表现的是波动过程的**普遍规律**。只有波动方程而不联系具体的条件（边值条件、初值条件等等），是得不出什么具体的结果的。换句话说，波动方程的求解问题一般要和定解问题联系起来加以考虑。

我们在上一章中已经看到，当照顾到体力的存在时，位移场的位函数满足下列形式的方程（达朗贝尔方程）：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\rho \qquad (6\text{-}1\text{-}1)$$

式中的 ψ 代表标位（Φ），或代表矢位（Ψ）的一个分量；右端的 ρ 不是质量密度，而是和体力场的分布有关的一个函数。在研究这种方程时，应该认为 ρ 是事先给定的。研究的结果表明，ρ 这个函数描述的（反映的）是波源的情况。可以叫做源函数；定义源函数所涉及的空间点叫做源点，其座标叫做源点座标。

我们知道，微分方程是逐点适用的。在波源存在的各点，位函数满足达朗贝尔方程；在波源不存在的地方，位函数满足波动方程：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (6\text{-}1\text{-}2)$$

我们看，(6-1-1)和(6-1-2)的左端只包含未知函数及其导数；(6-1-1)的右端有一个已知函数，这样的微分方程叫做**非齐次方程**，而右端为零的(6-1-2)则叫做**齐次方程**。显然，齐次方程是非齐次方程的特例。

其次再看等号的左端。(6-1-1)和(6-1-2)这样的方程具有两个很好的特点：第一，方程中的每一项都只包含未知函数本身或其某阶导数，而不包含它们的乘积，这样的方程叫做**线性微分方程**；第二，每一项的系数都是常量而不包含自变量 x、y、z、t，这样的方程叫做**常系数微分方程**。另外，方程(6-1-1)和(6-1-2)中只包含未知函数的二阶导数而不包含更高阶的导数，因此我们说这些方程都是**二阶的常系数线性偏微分方程**。这种类型的微分方程在理论物理学和工程技术中都有着很大的重要性。

线性微分方程有一个很重要的性质，就是它的解具有**可叠加性**；就是说，如果找到了两个（或更多个）函数 ψ_1 和 ψ_2 满足那个方程，则另一函数 $a_1\psi_1+a_2\psi_2$ 也满足那个方程（a_1、a_2 是两个任意常量）。这种情况正好反映了物理学中的**叠加原理**。这也正是线性微分方程在实际应用中之所以特别重要的原因之一，而付立叶变换、分离变量法之类的强有力的重要方法也正是在这种基础上发展起来的。

在求解一个常微分方程时，一般是设法求出它的**通解**，然后再利用具体的初值条件定出所需要的特解。例如，在研究谐振动时，我们可以先解谐振动方程：

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\omega^2u=0 \qquad (6\text{-}1\text{-}3)$$

而得出其解：

$$u(t)=A\sin(\omega t+\varphi_0) \qquad (6\text{-}1\text{-}4)$$

这就是**通解**，它包含了两个**待定的积分常数** A 和 φ_0；这两个常数需要根据已知的初座标 u_0 和初速度 v_0 定出。在求解偏微分方程时，这种方法往往是行不通的或不方便的。常微分方程的通解中只包含有限个数的待定常数，而偏微分方程的通解中则一般有

若干个待定的任意函数；要确定这些函数，不但需要知道适当的初值条件，而且需要知道适当的边值条件。因此，微分方程的求解和定解往往是从一开始就互相交织在一起的。

那么，什么样的初值条件和边值条件才算是“适当的”呢？回答是，这些条件必须不多不少，适足以保证下列三点：第一，所求的微分方程的解必须存在（解的存在定理）；第二，必须能够毫不含糊地完全确定那个解，就是说，必须得出单一的解（解的唯一性定理）；第三，当这些条件发生微小的变化时，相应的解必须也只发生足够微小的变化（解的稳定性定理）。如果有一个要求得不到满足或保证，则问题是没有多大实际意义的，从而必须改变问题的提法。就是说，这些要求都有很重大的实际意义，而绝不是数学家们爱钻什么牛角尖。但是，这样一些问题毕竟是理论性比较强的，真正讨论起来就会显得既很抽象又很复杂。因此，本书不多讲这种问题，而只将它们一笔带过。

本章不准备（也不可能）全面地论述波动方程的求解。我们只想举几个最简单的例子，来“演示”一下求解波动方程的大意，并得出地震学文献中时常见到的和最近开始出现的一些结果。再说一遍，无论从数学上还是从物理学上来说，波动方程的求解和定解都是一种涉及面非常广阔的问题，本章的内容事实上还远远不足以显示这一问题的全貌。

§.6-2. 无限大的均匀各向同性的弹性介质中的平面波

1.波动方程的简化 什么叫平面波，它的波函数是什么样子，我们假设读者已经明白（在普物理中已经讲过）。现在有了波动方程，我们就可以证明平面波的波函数是特定条件下的波动方程的解了。

平面波是一种特别简单的波；介质中存在一系列（一族）互相平行的平面，其中每一个平面上各点的振动是同相的；就是说，

每一个这样的平面都是波的等相面（即波面）。这样，取垂直于这些平面的直线作为 X 轴，就可以认为波函数只依赖于场点的 x 座标而不依赖于 y 座标和 z 座标。于是，波动方程变为：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \qquad (6\text{-}2\text{-}1)$$

在地震勘探中，主要讨论的是地震纵波的运动规律。因此，可以认为(6-2-1)式就是上一章中的(5-3-7)式的简化形式；换句话说，我们可以把这里的 ψ 想象为介质的体胁变 θ，而将这里的波速 V 想象为纵波速度 V_p。但是，这样想象只是为了具体而已；事实上，(6-2-1)不但可以描述平面弹性纵波，而且可以描述一般的平面波（例如弹性横波或平面电磁波），而且也可以描述沿绳索或弹簧传播的一维波。因此，(6-2-1)叫做**一维波动方程**。

2．一维波动方程的通解 一维波动方程比较简单，可以用简单的方法求出通解。为此目的，我们进行适当的变量代换，以便把(6-2-1)式进一步化简。我们引入新变量如下：

$$\xi=x-Vt,\quad \eta=x+Vt \qquad (6\text{-}2\text{-}2)$$

也就是说，

$$x=\frac{1}{2}(\xi+\eta),\quad t=\frac{1}{2V}(\eta-\xi) \qquad (6\text{-}2\text{-}3)$$

利用复合函数的求导数方法，得到：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta} \qquad (6\text{-}2\text{-}4)$$

因为由 (6-2-2) 得到 $\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{\partial\eta}{\partial x}=1$。同理得到：

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}(-V)+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}(+V)$$

$$=V\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}-\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right) \qquad (6\text{-}2\text{-}5)$$

再求一次导数，就有：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \qquad (6\text{-}2\text{-}6)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)\frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi}\left[V\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)\right](-V) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left[V\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} - \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)\right](+V) = V^2\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}\right)$$

(6-2-7)

将(6-2-6)和(6-2-7)代入(6-2-1)中，就可以将一维波动方程变换成下列形式：

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}8)$$

(6-2-8)式可以直接求解。该式可以写成：

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}9)$$

这就表明，$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)$只是 η 的函数而和 ξ 无关(偏导数算符$\frac{\partial}{\partial \xi} = 0$的意义)。我们将$\frac{\partial \psi}{\partial \eta}$写成$f(\eta)$。将(6-2-9)式对 ξ 求一次积分，就得到这个函数$f(\eta)$；再对 η 求一次积分，就得到：

$$\psi(\xi,\eta) = \int f(\eta)\,d\eta + \psi_1(\xi) \qquad (5\text{-}2\text{-}10)$$

式中 (ξ) 相当于单元函数积分中的积分常数，现在它只可能依赖于 ξ。(6-2-10)右端的第一项只可能是 η 的函数，我们把它写成 $\psi_2(\eta)$；于是(6-2-10)变成：

$$\psi(\xi,\eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta) \qquad (6\text{-}2\text{-}11)$$

换回原来的变量 x 和 t，就得到：

$$\psi(x,t) = \psi_1(x - Vt) + \psi_2(x + Vt) \qquad (6\text{-}2\text{-}12)$$

这就是一维波动方程的**通解**。我们看到，这是两个波函数 Ψ_1 和 Ψ_2 的叠加。可以证明，Ψ_1 代表沿 X 轴的正方向以速度 V 而传播的平面波，Ψ_2 代表沿 X 轴的负方向以速度 V 而传播的平面波；这样的波函数全都满足一维波动方程(6-2-1)。

根据上面求解方程的过程可以看出，对于 Ψ_1 和 Ψ_2 这两个函数，我们除了要求它们有二阶导数以外并没附加别的条件；在这种意义上，我们说 Ψ_1、Ψ_2 是两个“任意的”函数，它们代表沿着 $\pm X$ 轴方向传播的**任意形状的**平面波。另外，也可以证明，这种平面波的形状（波形曲线的形状）在传播过程中并不改变；就是说，它们是在**无吸收介质**中传播着的平面波。事实上，在推求弹性介质的基本方程组(5-2-14)时，以及由此而导出(5-3-7)之类的波动方程时，我们一直是只考虑了弹性力而忽略了介质内部的摩擦力。因此，正如前面已经讲过的，(5-3-7)即(6-1-2)这样的波动方程所概括的是**无吸收介质**中的弹性波。

3.一维波动方程的定解　我们假设所考虑的均匀各向同性介质相当大，可以认为它在各个方向都延伸到无限远处。这样，在定解时就用不着考虑波函数的边值条件（定义域 V 的边界 S 在无限远处），而只要考虑初值条件就行了。

波动方程(6-2-1)是二阶的，它的通解(6-2-12)中包含两个“任意”函数；因此，要得出确定的解，不但需要知道 $t=0$ 时各点的初位移，而且还要知道 $t=0$ 时各点的初速度。也就是说，我们要求知道 $\Psi(x,0)$ 和 $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{t=0}$。设这两个函数的形式为已知，写成：

$$\left.\begin{aligned}\Psi(x,0)&=f_1(x)\\ \left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_{t=0}&=f_2(x)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}2\text{-}13)$$

这就是我们所需要的初值条件。

由(6-2-12)和第一个初值条件，得到：

$$\Psi(x,0)=\Psi_1(x)+\Psi_2(x)=f_1(x)\qquad(6\text{-}2\text{-}14)$$

将(6-2-12)对 t 求导数并利用第二个初值条件，得到：

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)_{t=0} = \frac{d\psi_1}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}\Big/_{t=0} + \frac{d\psi_2}{d\eta}\frac{\partial \eta}{\partial t}\Big/_{t=0}$$

$$= (-V)\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\Big/_{t=0} + V\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\Big/_{t=0} = f_2(x) \tag{6-2-15}$$

由此式可以得到：

$$\psi_2(x) - \psi_1(x) = -\frac{1}{V}\int_{x_0}^{x} f_2(x')dx' + C \tag{6-2-16}$$

式中 x_0 和 C 是两个常数。将(6-2-14)和(6-2-16)联立求解，得到：

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(x) &= \frac{1}{2}f_1(x) - \frac{1}{2V}\int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx - \frac{C}{2}\\ \psi_2(x) &= -\frac{1}{2}f_1(x) + \frac{1}{2V}\int_{x_0}^{x} f_2(x)\,dx + \frac{C}{2}\end{aligned}\right\} \tag{6-2-17}$$

这样就将 ψ_1 和 ψ_2 的函数形式确定到了包含一个任意常数 C 的程度。代回(6-2-12)中，得到：

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[f_1(x-Vt) + f_2(x+Vt)]$$

$$+ \frac{1}{2V}\left[\int_{x_0}^{x-Vt} f_2(x')\,dx' - \int_{x_0}^{x-Vt} f_2(x')dx'\right]$$

或者写作：

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}[f_1(x-Vt) + f_1(x+Vt)]$$

$$+ \frac{1}{2V}\int_{x-Vt}^{x+Vt} f_2(x')dx' \tag{6-2-18}$$

这一结果有时叫做**达朗贝尔公式**，这就是一维波动方程的满足所给初值条件(6-2-13)的解。

4.**平面波的能流密度**　为了具体，我们先来研究(6-2-12)中的第一项，并把它简单地写成：

$$\psi(x,t)=\psi(\xi),\quad \xi=x-Vt \qquad (6\text{-}2\text{-}19)$$

如上所述，这个波函数代表沿+X轴传播的平面波。

在纵波的情况，我们可以认为这个ψ就是位移矢量场的标位Φ。于是，位移矢量变为：

$$s(x,t)=\mathrm{grad}\psi=i\psi' \qquad (6\text{-}2\text{-}20)$$

式中ψ′代表单元函数ψ(ξ)的一阶常导数。这一结果表明，位移矢量只有u分量而无其他分量，即：

$$u=\psi',\quad v=0,\quad w=0 \qquad (6\text{-}2\text{-}21)$$

于是，振动速度也只有一个分量，即：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial \psi'}{\partial t}=(-V)\psi'',\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=0 \qquad (6\text{-}2\text{-}22)$$

式中ψ″代表ψ(ξ)的二阶常导数。

将(6-2-21)代入科希方程组中，我们发现胁变张量只有一个分量，即：

$$\in_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=\psi'',\quad \in_{yy}=\cdots\cdots=0 \qquad (6\text{-}2\text{-}23)$$

在这种情况下，当然体胁变也只有一项：

$$\theta=\in_{xx}+0+0=\psi'' \qquad (6\text{-}2\text{-}24)$$

将这种结果代入胡克定律，就求得胁强张量如下：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{xx}&=\lambda\theta+2\mu\in_{xx}=(\lambda+2\mu)\psi''\\ \sigma_{yy}&=\lambda\theta+2\mu\in_{yy}=\lambda\psi''\\ \sigma_{zz}&=\lambda\theta+2\mu\in_{zz}=\lambda\psi''\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}25)$$

其余分量都等于零。

将(6-2-22)和(6-2-25)代入能流密度矢量的定义(5-4-23)中，我们发现该矢量只有一个分量，即：

$$I_x=-\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial t}=(\lambda+2\mu)V_p[\psi'']^2,\ I_y=I_z=0 \qquad (6\text{-}2\text{-}26)$$

式中V_p当然代表纵波速度。

在横波的情况，我们可以把波函数(6-2-19)看成位移矢量场的一个矢位分量，例如Y分量；即认为

$$\psi_x = 0,\quad \psi_y = \psi(x - Vt),\quad \psi_z = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}27)$$

重复前面的讨论，可以得到：

$$I_x = \mu V_s[\psi']^2,\quad I_y = I_z = 0 \qquad (6\text{-}2\text{-}28)$$

应当指出，我们在这里一直是将 ψ 理解为位函数的。由(6-2-21)可见，ψ'是弹性位移；由(6-2-23)可见，ψ''是胁变分量。因此，(6-2-26)和(6-2-28)表明，平面波(6-2-19)的能流密度和胁变分量的平方成正比，从而总是正值。换句话说，用波函数(6-2-19)表示的平面波，不论是纵波还是横波，其能流密度矢量总是沿着 $+X$ 轴方向的。

5.沿任意指定方向传播的平面波 设 N 是一个任意取定的单位矢量，其三个分量（也就是它的三个方向余弦）用 l、m、n 来代表：

$$N = il + jm + kn \qquad (6\text{-}2\text{-}29)$$

我们现在证明，沿N所指的方向传播的平面波，应该用下列波函数来表示：

$$\left.\begin{aligned}\psi(x,y,z,t) &= \psi(\xi)\\ \xi &= lx + my + nz - Vt\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}30)$$

首先证明(6-2-30)确实是波动方程(6-1-2)的解。为此，只要算算偏导数，代入方程中就行了。我们有：

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{d\psi}{d\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x} = l\frac{d\psi}{d\xi} = l\psi'$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{d}{d\xi}(l\psi')\frac{\partial\xi}{\partial x} = l^2\psi'' \qquad (6\text{-}2\text{-}31)$$

同理得到：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = m^2\psi'',\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = n^2\psi'',\quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (-V)^2\psi'' \qquad (6\text{-}2\text{-}32)$$

代入波动方程，得到：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = (l^2 + m^2 + n^2)\psi''$$

$$-\frac{1}{V^2}\cdot V^2\psi'' = 0$$

因为 $l^2+m^2+n^2=1$。这就表明，（6-2-30）果然满足波动方程。

其次证明(6-2-30)表示的是平面波。波函数(6-2-30)所表示的波，其等相面（波面）由下式表示：

$$\xi = lx + my + nz - Vt = 常量C \qquad (6-2-33)$$

对于任意取定的 $t=t_0$，这显然是垂直于N的一族平面，其中某一平面和原点之间的距离取决于参量 t_0 和 C。

根据三维解析几何，可以直接得到这一结论。为了供读者参考，我们在此重新证明一下。设有一平面垂直于单位矢量 N，设(x_0, y_0, z_0)是该平面上的一个固定点，(x,y,z) 是该平面上的变动点，则从定点到动点的矢量是：

$$D = i(x-x_0) + j(y-y_0) + k(z-z_0)$$

既然平面垂直于 N，矢量 D 也必然垂直于 N，从而二矢量的标积为零，即：

$$D \cdot N = (x-x_0)l + (y-y_0)m + (z-z_0)n = 0$$

即

$$lx + my + nz = lx_0 - my_0 + nz_0 = 常量$$

这就是垂直于 N 的平面的方程，而(6-2-33)恰好是这种形式。证完。

最后还应该证明，平面波（6-2-30）是沿着N所指方向（而不是沿着 $-N$的方向）传播的。这一点可以仿照分析波函数(6-2-19)时的办法进行（参阅普通物理教材），但是需要稍微多用一点点三维解析几何学的知识。幸好这一点很容易理解，从而我们这里不再举出那种数学形式的证明了。我们满足于指出，只要将座标系适当地转动一下，使新的 X 轴和所取的单位矢量N方向一致，(6-2-30)就会变成(6-2-19)的形式了。

6.平面正弦波的情况 在弹性纵波的情况，沿 $+X$ 轴传播的平面正弦波可用下列波函数来描述：

$$u(x,t) = u_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V_p}\right) + \varphi_0\right] = u_0 \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) \qquad (6-2-34)$$

式中 u 代表位移矢量的 X 分量，也就是相当于前面的 ψ〔见(6-

2-21)式]。这时，(6-2-26)中的 ψ'' 应该理解为 $\frac{\partial u}{\partial x}$，即：

$$\psi'' = \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \frac{d\psi'}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{\partial\psi'}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$= u_0\left(-\frac{\omega}{V_p}\right)\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{V_p}\right)+\varphi_0\right] \qquad (6\text{-}2\text{-}35)$$

于是(6-2-26)变为：

$$I_x = (\lambda+2\mu)V_p[\psi'']^2$$

$$= (\lambda+2\mu)V_p \cdot u_0^2 \cdot \frac{\omega^2}{V_p^2}\cdot\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{V_p}\right)+\varphi_0\right]$$

$$= (\lambda+2\mu)u_0^2\frac{\omega^2}{V_p}\cos^2\left[\omega\left(t-\frac{x}{V_p}\right)+\varphi_0\right] \qquad (6\text{-}2\text{-}36)$$

利用 V_p 的定义式(5-3-8)，得到

$$(\lambda+2\mu) = \rho V_p^2$$

于是上式变为：

$$I_x = \rho V_p \omega^2 u_0^2 \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) = \rho V_p\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2$$

(6-2-37)

这一结果可以在许多初等物理学的书上看到，但是那里是用的特殊条件下的论证，而我们现在看到这一结果可以从相当普遍的理论中推导出来。

在平面正弦波的情况，所谓波的强度是指能流密度在一个周期之内的平均值，即：

$$\text{强度} = \bar{I}_x = \frac{1}{T}\int_0^T I_x\,dt = \frac{1}{2}\rho V_p \omega^2 u_0^2 \qquad (6\text{-}2\text{-}38)$$

对于横波，也可以求出相似的结果。

我们指出，在弹性波的情况，平面正弦波的强度和位移振幅的平方成正比，也和频率的平方成正比。这是弹性波和电磁波有所不同的地方。根据电磁理论可以证明，平面正弦电磁波的强度是和频率无关的。

7.沿任意方向的平面正弦波 为了写出沿任意方向N传播的

平面正弦波的波函数，引用所谓波矢最为方便。我们定义波矢 $\boldsymbol{k}$ 如下❶：

$$\boldsymbol{k}=\frac{\omega}{V}\boldsymbol{N}=\frac{2\pi}{\lambda}\boldsymbol{N} \qquad (6\text{-}2\text{-}39)$$

式中 ω 是正弦波的圆频率，V 是波速，$\boldsymbol{N}$ 是指示传播方向的单位矢量，其方向余弦仍用 l、m、n 来表示。这样，利用复数表示法，沿 $\boldsymbol{N}$ 方向传播的平面正弦波的位移函数就可以写成：

$$\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_0\\v_0\\w_0\end{pmatrix}e^{i[k(lx+my+nz-Vt)+\varphi_0]} \qquad (6\text{-}2\text{-}40)$$

式中 u，v，w 是三个位移分量，代入运动方程(5-3-2)或(5-3-3)中，得到：

$$\left.\begin{aligned}&-\rho V^2u_0+(\lambda+\mu)l(lu_0+mv_0+nw_0)+\mu u_0=0\\&-\rho V^2v_0+(\lambda+\mu)m(lu_0+mv_0+nw_0)+\mu v_0=0\\&-\rho V^2w_0+(\lambda+\mu)n(lu_0+mv_0+nw_0)+\mu w_0=0\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}41)$$

这一联立方程组中的 u_0、v_0、w_0 就确定着介质中的弹性位移场。

既然平面波是沿着 $\boldsymbol{N}$ 的方向传播的，我们可以把位移矢量 $\boldsymbol{s}$ 分解成三个分量：一个分量沿 $\boldsymbol{N}$ 的方向（也就是沿波矢 $\boldsymbol{k}$ 的方向），表示着弹性纵波（叫做 p 波）；另外两个分量和 $\boldsymbol{N}$ 垂直，而且互相垂直，表示着偏振不同的两种弹性横波（在地震学中通常叫做 SV 波和 SH 波，前者的位移分量位于铅直面内，后者的则位于水平面内）。在特例，当 $\boldsymbol{N}$ 和基底矢量 i 相重合时，上述三个分量就和 u、v、w 相重合；这时 $\boldsymbol{N}$ 的方向余弦变成 $l=1$、$m=0$、$n=0$，从而方程组(6-2-41)变成：

$$\left.\begin{aligned}&-\rho V^2u_0+(\lambda+\mu)u_0+\mu u_0=0\\&-\rho V^2v_0+\mu v_0=0\\&-\rho V^2w_0+\mu w_0=0\end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}2\text{-}42)$$

第一个方程自动地给出纵波速度 V_p，其余两个方程自动地给出

❶ 请注意，这里的 k 不再是沿 Z 轴的单位（基底）矢量。

横波速度V_s。

事实上，在一般情况，(6-2-41)是包含u_0、v_0、w_0的三元一次齐次联立方程组。根据代数学上联立方程组的理论，齐次方程组（即不包含常数项的方程组）具有非零解的条件是系数行列式等于零。对于(6-2-41)来说，系数行列式是一个三阶行列式。展开以后让它等于零，就得到一个含V的三次方程。这个方程有一个单根是纵波速度$V_p=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$，另外两个重根是横波速度$V_s=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$。这就表明，在均匀各向同性的介质中，沿任意方向传播的平面正弦波都可以分解成三个部分：一个部分是纵波（胀缩波，P波）另外两个部分是偏振方向互相垂直的横波(切变波，S波）。

习题：1.作为复习，自己分析波函数

$$\psi(x,t)=\psi(x-Vt),$$

并论证它表示的是沿$+X$轴传播的波形不变（无吸收、无频散）的平面波。

2.令：

$$\xi=x-Vt,\quad \eta=x+Vt,$$

$$\psi_1(x,t)=e^{-\beta x}f_1(\xi),$$

$$\psi_2(x,t)=e^{+\beta x}f_2(\eta)。$$

求偏导数，找出ψ_1、ψ_2分别满足的微分方程。这就是吸收性介质中的一维波动方程。所得出的两个方程能不能合并成一个方程？这种有了波函数倒回去求波动方程的办法有什么缺点？

3.自己证明达朗贝尔公式(6-2-18)的稳定性；就是说，设有两组初值条件，二者相差很小，应该证明和这两组条件相对应的解式(6-2-18)也相差很小。

4.自己推证(6-2-28)式。

5.设

$$\psi(x,t)=\psi(\eta),\quad \eta=x+Vt$$

试讨论这种波的能流密度。

6.纵波函数

$$\Psi(x,y,z,t)=\psi(\xi),\quad \xi=lx+my+nz-Vt$$

出发，计算波的能流密度，并分析所得结果的物理意义。

§.6-3. 无限大的均匀各向同性的弹性介质中的球面纵波

1.问题的提法 如前所述，地震勘探中主要涉及的是弹性纵波，因此本节只讨论球面纵波的问题。

设在一种无限大的均匀各向同性的弹性介质中挖了一个球形空洞，其半径为 a；在某一初始刻 $t=0$ 在洞内用球形炸药包进行爆炸，从而在洞的内表面上产生均匀的压强 p。这一压强随时间 t 的变化情况可以表示成：

$$\text{在 } r=a \text{ 处，}\quad p=\begin{cases}0, & t<0;\\ \phi(t), & t>0。\end{cases}\qquad (6-3-1)$$

我们的任务就是求出介质内部各点在各时刻的弹性位移。从数学上来看，这就是一个在已知边值条件（6-3-1）的情况下求解波动方程的问题。

我们指出，这样的理论问题是和实际情况相当适应的。理论问题的提法通常应该满足两个要求：第一，要能够反映实际情况的典型特征；第二，其数学表述形式不能繁复得无法处理。为了满足这样的要求，我们总是要抓主要的、共性的规律，而忽略一些偶然性的因素，不然也就谈不到什么典型性了。例如，实际地震勘探中，谁也不会在地下挖一个真正球形的洞，一般也并不使用真正球形的炸药包，而且，只要炸药量不是小得没有实际意义，爆炸时总会在炮井附近造成破碎和塑性形变。所有这些细节，在上面的问题中都被略去了。这样才能更集中、更突出地表现球面纵波的规律，所得到的方程和解式也才不致复杂得无法摆弄。

当然，事物总是不断发展的。将来有一天，我们的野外工作

会和现在有了很大的不同，那时就需要适应着当时的情况和条件继续开展理论上的探索，而且理论走在实践前面的情况也是数见不鲜的。但是，不论情况如何发展，过去已经积累下来的知识也还是会有当基石或供借鉴的作用的。

2.引用球座标系　如上所述，我们的问题是经过了很大简化（或称理想化）的。这样的简化保证了问题的球面对称性；而且，关于爆炸条件的规定也消除了出现横波的可能性，因为（6-3-1）式描述的是所谓“胀缩源”，它主要只激起胀缩波即纵波。如果爆炸时在井壁各处产生的压强并不相同，则激起的波中可能包含横波成分；这种可能性我们忽略不计。

我们的问题具有球面对称性，从而在所谓球座标系中求解最为方便。如图 6-1 所示，我们取球形波源的中心作为座标原点。空间一点（场点）P 的位置，可以用它的三个直角座标 x、y、z 来确定，也可以

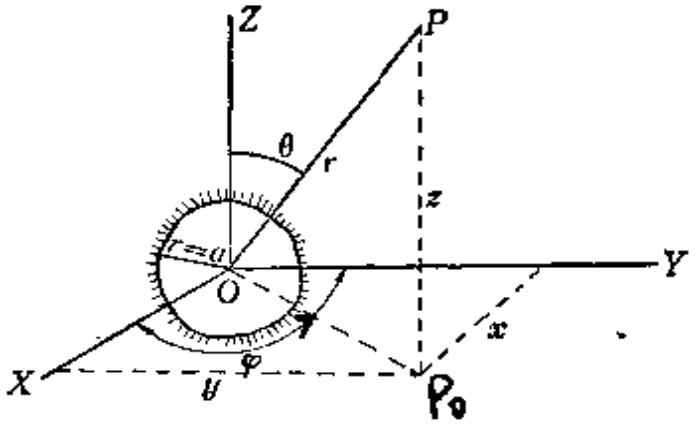


图6-1　直角座标和球座标

用该点和原点之间的距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 和两个角即 θ、φ 来确定；如图所示，θ 就是矢径 $r=\overrightarrow{OP}$ 和 Z 轴之间的夹角，φ 就是矢径在 XOY 平面上的投影 $\overrightarrow{OP_0}$ 和 X 轴之间的夹角。r、θ、φ 这三个量就叫做点 P 的球座标（或球极座标）。不难看出，直角座标和球座标之间存在下列关系：

$$\left.\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}3\text{-}2)$$

在球座标系中，拉普拉斯算符 ∇^2 变为（证明从略）：

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$+\frac{1}{V^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \qquad (6\text{-}3\text{-}3)$$

而体积元的表示式变为：

$$\Delta V = r^2\sin\theta\Delta r\Delta\theta\Delta\varphi \qquad (6\text{-}3\text{-}4)$$

我们现有的问题具有球面对称性；就是说，位移矢量场的位函数只依赖于座标 r 而不依赖于 θ 和 φ，从而可以写成：

$$\psi = \psi(r,t) \qquad (6\text{-}3\text{-}5)$$

对于这样的函数，在拉普拉斯算符(6-3-3)中只保留前面的两项就行了，从而波动方程变为：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

或者写作：

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\psi) = 0 \qquad (6\text{-}3\text{-}6)$$

将 $r\psi$ 看成未知函数，这一方程和一维波动方程(6-2-1)形式相同。因此，我们可以立即写出它的通解：

$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}\left[f_1\left(t-\frac{r-a}{V}\right) + f_2\left(t+\frac{r-a}{V}\right)\right] \qquad (6\text{-}3\text{-}7)$$

这里有几点必须说明。第一，由于(6-3-1)中 $t=0$ 的取法，这里引入了“传播距离” $r-a$ 这个量，因为弹性波是在 $t=0$ 时刻从 $r=a$ 处开始向外传播的。第二，既然在现有条件下主要只出现纵波，这里的 V 就应该理解为纵波速度 V_p，而波函数 $\psi(r,t)$ 也应该理解为位移矢量场的标位 $\Phi(r,t)$。第三，仿照关于平面波的分析可以看出，(6-3-7)中的第一项代表沿 r 向“外”传播的球面波，即发散波，而第二项则代表沿 $-r$ 向“里”传播的球面波；即会聚波；按照现有问题的提法，应该认为后面这种“会聚波”是不存在的，从而应该认为式中的第二项等于零。于是我们就得到适合初值条件的解如下：

$$\psi(r,t) = \Phi(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t-\frac{r-a}{V}\right) \qquad (6\text{-}3\text{-}8)$$

我们指出，承认了 ψ 只和 r 有关而和 r 的方向无关，也可以不直接引用

球座标系而推出(6-3-6)。我们有：

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

从而

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial r}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)=\frac{x}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)$$

$$=\left(\frac{x}{r}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{r^2-x^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

同理得到：

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=\left(\frac{y}{r}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{r^2-y^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=\left(\frac{z}{r}\right)^2\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

三式相加，就得到：

$$\nabla^2\psi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi=\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

由此就可以推得(6-3-5)。

3.定解问题 前面已经利用初值条件排除了会聚波；就是说，已经进行了一部分定解工作。现在求满足边值条件(6-3-1)的解。

定解的方式可以说是颇为直捷了当的。我们已经有了位移矢量场的标位(6-3-8)。由此可以直接求出位移矢量场；代入科希方程组中求出胁变张量场，再利用胡克定律就能求出胁强张量场。我们要求所得的胁强张量场在$r=a$处（炮井壁面上）表现为均匀分布的压强(6-3-1)。

现在先求位移矢量。由于问题具有球面对称性，位移矢量只可能有r分量；就是说，只有

$$s_r(r,t)=\frac{\partial\Phi}{\partial r}\qquad(6\text{-}3\text{-}9)$$

这样一个分量。

在球座标系中，胡克定律可以写成：

$$\sigma_{rr}=-p(r,t)=\lambda\theta+2\mu\in_{rr}\qquad(6\text{-}3\text{-}10)$$

由于球面对称性，其他的胁强分量都等于零。

现在计算胁变张量。首先，根据定义，

$$\in_{rr}=\frac{\partial s_r}{\partial r} \qquad (6\text{-}3\text{-}11)$$

其次，也是根据定义，

$$\theta=\frac{\Delta V-\Delta V_0}{\Delta V_0}$$

$$=\frac{(r+s_r)^2\left(\Delta r+\frac{\partial s_r}{\partial r}\Delta r\right)\sin\theta\Delta\theta\Delta\varphi-r^2\Delta r\sin\varphi\Delta\varphi\Delta\theta}{r^2\Delta r\sin\varphi\Delta\varphi\Delta\theta}$$

因为 $r>a$，从而 $r\gg s_r$，从而 $(r+s_r)^2=r^2+2s_r r$；另外，$\frac{\partial s_r}{\partial r}\ll 1$。

因此，上式变为：

$$\theta=\frac{\partial s_r}{\partial r}+\frac{2s_r}{r} \qquad (6\text{-}3\text{-}12)$$

代入(6-3-10)中，得到

$$p(r,t)=-\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial s_r}{\partial r}+2\lambda\frac{s_r}{r}\right] \qquad (6\text{-}3\text{-}13)$$

在上式中令 $r=a$，应该得到(6-3-1)；就是说，我们应有

$$-\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial s_r}{\partial r}+2\lambda\frac{s_r}{r}\right]_{r=a}=\begin{cases}0,\text{当}t<0,\\ P(t),\text{当}t>0。\end{cases} \qquad (6\text{-}3\text{-}14)$$

将(6-3-8)代入(6-3-9)得到：

$$s_r=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=-\frac{1}{V_p r}\frac{df}{d\tau}-\frac{1}{r^2}f(\tau), \qquad (6\text{-}3\text{-}15)$$

式中 $\tau=t-(r-a)/V_p$。从此又得到：

$$\frac{\partial s_r}{\partial r}=\frac{1}{V_p^2 r}\frac{d^2f}{d\tau^2}+\frac{2}{V_p r^2}\frac{df}{d\tau}+\frac{2}{r^3}f(\tau) \qquad (6\text{-}3\text{-}16)$$

将此二式代入(6-3-14)中，得到：

$$-\left[\frac{\lambda+2\mu}{V_p^2 a}\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{4\mu}{V_p a^2}\frac{df}{dt}+\frac{4\mu}{a^3}f(t)\right]=p(t) \qquad (6\text{-}3\text{-}17)$$

这是一个常系数二阶常微分方程。当边界压强 $p(t)$ 的函数形式已知时，通过求解这一常微分方程，就能定出 $f(t)$ 的函数形式，

从而也就确定了位函数$\Phi(r,t)$的函数形式。

至于怎样求解(6-3-17)，那可以说完全是一个数学问题，我们在此不再赘述，读者可以参阅已有的书籍❶。图6-2是在下列形式的压强函数下得出的曲线：

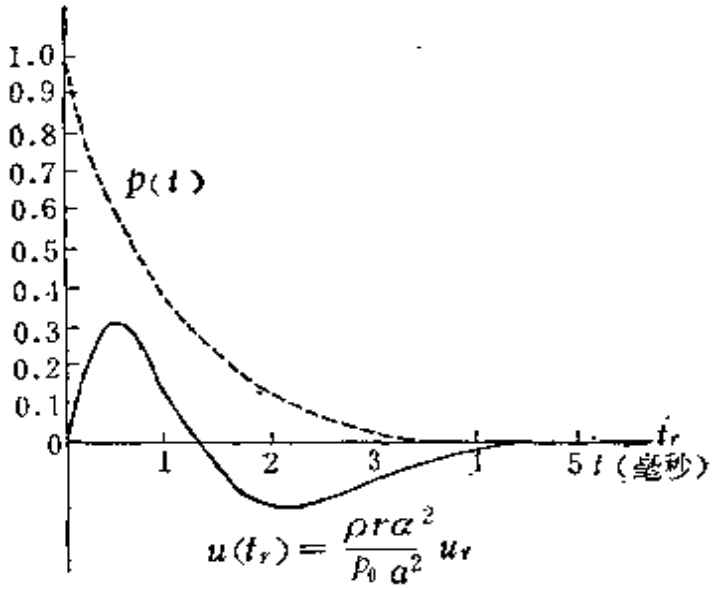


图6-2　波形曲线计算结果一例

$$p(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ p_0e^{-bt}, & t>0, b>0。\end{cases}\qquad(6-3-18)$$

图中的虚线代表(6-3-18)的变化过程，实线表示离波源较远处的波形。其附加的条件是$\lambda=\mu$；满足这种条件的介质叫做**泊松固体**。

习题：1.结合(6-3-8)式，讨论球面发散波的能流密度。

§.6-4.　达朗贝尔方程的积分解*

1.问题的提法　前面讨论了波动方程在一些最简单条件下的解，还没有涉及更广泛、更普遍的解，也没有谈到达朗贝尔方程这种非齐次方程的解。现在我们介绍一种比较普遍的求解达朗贝尔方程的方法，并得出地震勘探中已经开始应用的一个积分公式（基尔霍夫积分）。

达朗贝尔方程的形式是：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-\rho\qquad(6-4-1)$$

❶ 例如傅承义，《地壳物理讲义》第91～98页，中国科学技术大学讲义，1963年版；或《地震勘探数字技术》第三册，第4～10页，科学出版社，1977年版。

这里的未知函数$\Psi=\Psi(x,y,z,t)$可以是位移矢量的标位$\Phi(x,y,z,t)$，也可以是位移矢量的矢位的一个分量；右端的$\rho=\rho(x,y,z,t)$不是质量密度，而是描述波源分布情况的一个已知函数。

设想我们在空间域T中考虑问题；T的外表面是S，如图6-3所示；设域T中的介质是均匀的和各向同性的。我们的目的，是要算出T中任意一点P处的位函数，例如$\Phi(x,y,z,t)$。

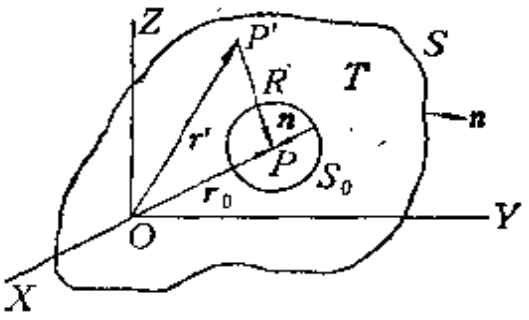


图6-3　求解达朗贝尔方程所用的空间域

很容易想到，P点的位函数，是由分布在域T内和域T外的波源引起的。因此，我们将考虑T内某点P'处的波源在P点引起的位函数，然后将各个P'点的影响叠加起来，就得到域T内的所有波源的总效果。至于域T外的波源，我们将证明它们的效果可以用S上的某一个积分来表示。按照这种想法，我们把P叫做场点，把P'叫做源点，用(x,y,z)和(x',y',z')分别代表场点和源点的座标，用r和r'分别代表该两点的矢径，用$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$代表从$P'$点到$P$点的距离矢量，其绝对值是：

$$R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2} \tag{6-4-2}$$

所求的结果可以利用数学场论中的格林公式得出。为了顺利地应用这种公式，我们设想以p点为心画一个很小的球面S_0，其半径为R_0。我们将S_0和S之间的空间域叫做T_1；当$R_0\to 0$时，域T_1就变成原有的空间域T。以下的工作，就是利用格林公式的问题了。

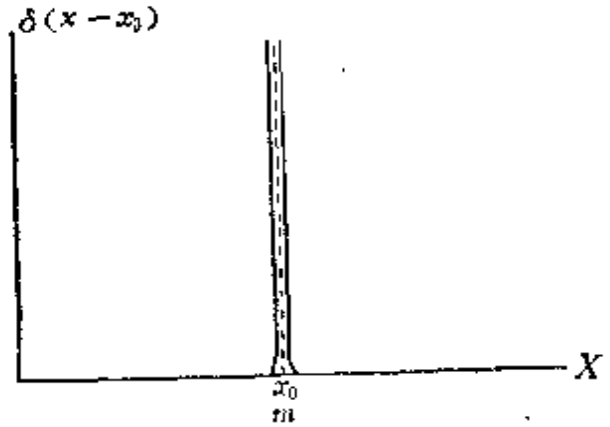


图6-4　δ函数示意图

2.关于δ函数　为了得

出所求的结果，利用所谓的δ函数较为简便。我们简单地谈谈这个“函数”，以供读者参考。

设想在X轴上有一个质点，其质量为m，其座标为x_0，如图6-4所示。在这种情况下，本来是谈不到质量沿X轴的“分布”或质量“密度”问题的，但是，在许多问题中，我们可以引用一种“奇特的”函数，以便把密度概念推广到这种情况。这种函数就叫做狄喇克δ函数，其定义如下：

$$\delta(x)=\left.\begin{cases}0, \text{当} x\neq 0\\ \infty, \text{当} x=0\end{cases}\right\} \qquad (6\text{-}4\text{-}3)$$

另外还要求：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \qquad (6\text{-}4\text{-}4)$$

我们指出，按照通常的定积分概念，(6-4-3)和(6-4-4)是矛盾的；因此，严格说来，满足这两个条件的函数是不存在的，从而δ函数并不是名符其实的函数。但是我们可以把它看成某一函数的极限。例如，可以认为：

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}e^{jkx}dk=\frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{x} \qquad (6\text{-}4\text{-}5)$$

首先我们看，当$x\approx 0$时，$\lim\limits_{K\to\infty}\dfrac{\sin Kx}{x}=\lim\limits_{K\to\infty}\left(K\dfrac{\sin Kx}{Kx}\right)$

$=\lim\limits_{K\to\infty}(K\cdot 1)=\infty$。当$x\neq 0$时，$\dfrac{\sin Kx}{\pi x}$将以周期$\dfrac{2\pi}{K}$而变化，其振幅随$|x|$值的增加而减小。当$K\to\infty$时，函数周期趋于零；这就表明，一离开$x=0$这一点，函数就会很快地降为零。这样，(6-4-3)就基本上得到了满足。此外(6-4-4)也得到满足，因为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=\lim_{K\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Kx}{x}dx\right]=1$$

在上式中，我们曾将极限号和积分号互相对易；在δ函数的定义

中，永远包含着这样一次对易手续。

有了δ函数，就可以在上述情况下把X轴上的质量分布写成：

$$\lambda = m\delta(x - x_0)$$

同理，如果质点存在于(x_0, y_0, z_0)，则相应的质量密度可以写成：

$$\rho = m\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

δ函数的定义和应用，最早出现于量子力学中，后来才推广到别的部门。我们在此举出这函数的几个基本性质而不进行详尽的论证❶。

(i)根据定义，

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{当} x \neq 0 \text{时}, \\ \infty, & \text{当} x = 0 \text{时}, \end{cases}$$

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & \text{当} x \neq x_0 \text{时}, \\ \infty, & \text{当} x = x_0 \text{时}。 \end{cases}$$

(ii)根据定义，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

(iii)设某一函数$F(x)$在任何点都取有限值，而且在x_0点为连续，则当$x \neq x_0$时，$F(x)\delta(x - x_0) = 0$，当$x = x_0$时，$F(x) = F(x_0)$；从而就有：

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta(x - x_0)dx = F(x_0)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)dx = F(x_0)$$

(6-4-6)

(iv)将分部积分法推广到δ函数，可以推得δ函数的"导数"$\delta^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n}\delta(x)$的重要性质。例如：

---

❶ 例如，参阅P. A. M. Dirac，《Principles of Quantum Mechanics》，Oxford Univ Press, 1958；张宗燧，《电动力学和狭义相对论》，科学出版社，1957年版。

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx = F(x)\delta(x-x_0)\Big|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} F'(x)\delta(x-x_0)dx = 0 - F'(x)\Big|_{x=x_0} = -F'(x_0)$$

(6-4-7)

同理得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n F^{(n)}(x_0) \qquad (6\text{-}4\text{-}8)$$

我们指出，上面二式的积分限可以不是$\pm\infty$而是x_1和x_2，只要x_0介于x_1和x_2之间（$x_1<x_0<x_2$）就行。

3.基尔霍夫积分 现在我们就可以利用格林公式来求解达朗贝尔方程了。这是一段比较冗长的数学推演，如果读者觉得没有兴趣，跳过去看后面的结果也并无不可。

前已得到“第二类”格林公式(3-6-15)的形式如下：

$$\int_V (\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)\,dV = \oint_S \left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)ds$$

(6-4-9)

式中ψ、φ是在空间域V内有二阶导数的两个“任意”函数，$\frac{\partial}{\partial n}$表示沿**外向法线**$n$求的方向导数，$S$是域$V$的边界面。

根据上一节的讨论，我们知道，$\frac{F(t+R/V)}{R}$这样的函数满足下列波动方程：

$$\nabla^2\left(\frac{F}{R}\right) - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{F}{R}\right) = 0 \qquad (6\text{-}4\text{-}10)$$

式中F是一个可微函数（有二阶导数）。但是，在图6-3所示的空间域T中，$\frac{1}{R}$这个因子可以趋于∞，正因如此，我们才在P点周围画了那么个小球S_0。排除了P点的邻域，$\frac{F(t+R/V)}{R}$这样

的函数就到处满足格林公式的要求了。这就是我们首先考虑空间域T_1而并不直接考虑空间域T的原因所在。

再说一遍，格林公式中的ψ和φ是两个“任意的”函数❶；适当而巧妙地选择这两个函数，就可以分别解决各式各样的理论物理问题。在现有的问题中，我们令：

$$\varphi = -\frac{\delta(t+R/V)}{R} \qquad (6\text{-}4\text{-}11)$$

式中$\delta(t+R/V)$是前面讲过的δ函数，同时，我们把格林公式中的ψ理解为所求的达朗贝尔方程的解：

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\rho \qquad (6\text{-}4\text{-}12)$$

现在，我们在空间域T_1中将源点座标(x',y',z')看成变数来利用格林公式，该域的边界面是S和S_0。由于现在所选的ψ和φ都是座标和时间的函数，对座标积分以后的结果还是时间变量t的函数。我们首先将(6-4-11)和(6-4-12)代入格林公式(6-4-9)的左端，并用$A(t)$代表所得的结果：

$$\begin{aligned}
A(t) &= \int_{T_1}(\psi\nabla^2\varphi - \varphi\nabla^2\psi)dT' \\
&= -\frac{1}{V^2}\int_{T_1}\left(\psi\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - \varphi\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right)dT' \\
&\quad -\int_{T_1}\frac{\rho\delta(t+R/V)}{R}dT' \\
&= -\frac{1}{V^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{T_1}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dT' \\
&\quad -\int_{T_1}\frac{\rho\delta(t+R/V)}{R}dT'
\end{aligned}$$

式中dT'代表源点P'处的体积元。对t积分，得到：

$$\int_{-\infty}^{\infty}A(t)dt = \int_{T_1}\frac{1}{R}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x',y',z',t)\delta(t+R/V)dt\right\}dT'$$

❶ 注意：这样的函数不叫“格林函数”！

$$+\frac{1}{V^2}\left\{\int_{T_1}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dT'\right\}_{t=-\infty}^{t=+\infty}$$

因为$\delta(t+R/V)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$和$\delta'(t+R/V)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$，所以上式最后一项等于零。于是，利用δ函数的性质，上式变为：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}A(t)dt=\int_{T_1}\frac{\rho(x',y',z',t=-R/V)}{R}dT'$$

(6-4-13)

现在来看格林公式的右端。当把上面所选的ψ和Φ代进去时，应该在曲面S上和小球面S_0上分别计算面积分。我们用$B(t)$代表S_0上的面积分：

$$B(t)=\oint_{S_0}\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)dS$$

$$=\oint_{S_0}\left\{\psi\,\mathrm{grad}'\frac{\delta(t+R/V)}{R}-\frac{\delta(t+R/V)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right)$$

$$\cdot\boldsymbol{n}ds=\oint_{S_0}\left\{\psi\delta(t+R/V)\mathrm{grad}'\left(\frac{1}{R}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\psi}{R}\mathrm{grad}'\delta(t-R/V)-\frac{\delta(t+R/V)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right\}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

$$=\oint_{S_0}\left\{\frac{\psi\delta(t+R/V)}{R^3}\boldsymbol{R}-\frac{\psi}{VR^2}\delta'(t+R/V)\boldsymbol{R}\right.$$

$$\left.-\frac{\delta(t+R/V)}{R}\mathrm{grad}'\psi\right\}\cdot\boldsymbol{n}ds,$$

式中的grad′表示对源点座标求的梯度。我们注意，当在S_0上求积分时，$R=R_0=$常量，从而可以把含R的因子提到积分号前边来。将上式对t积分，交换时间积分和曲面积分的次序，并利用δ函数的性质，式中的δ函数就不再存在，而其他函数中的t则全都换成$-R/V$。例如，上式的后两项将变成：

$$-\oint_{S_0}\left\{\frac{1}{VR^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\delta'(t+R/V)\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{n}dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t+R/V)\mathrm{grad}'\psi\cdot\boldsymbol{n}dt\right\}ds$$

$$=-\oint_{S_0}\left\{\frac{-1}{VR^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=-R/V}\boldsymbol{R}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{R}(\mathrm{grad}'\psi)_{t=-R/V}\right\}\cdot\boldsymbol{n}ds$$

$$=-\left\{\frac{-1}{VR_0^2}\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}_{t=-R/V}+\frac{1}{R_0}\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)}_{t=-R/V}\right\}\oint_{S_0}ds$$

$$=4\pi R_0\left\{-\frac{1}{V}\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)}_{t=-R/V}+\overline{\left(\frac{\partial\psi}{\partial R}\right)}_{t=-R/V}\right\}$$

式中应用了中值定理和 δ 函数的性质。我们假设函数 ψ 及其导数在所考虑的空间域中是连续和有限的，从而各导数的平均值（即中值）也都是有限的。因此，当$R_0\to 0$时，上面的结果趋于零。这时我们就得到：

$$\lim_{R_0\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}B(t)dt=\lim_{R_0\to 0}\left\{4\pi\psi(x,y,z,t=-R_0/V)\right.$$

$$=4\pi\psi(x,y,z,t=0)\qquad(6\text{-}4\text{-}14)$$

同理可以求出格林公式右端和 S 有关的一项的时间积分。结果就得到：

$$\psi(x,y,z,t)_{t=0}=-\frac{1}{4\pi}\int_{\tau}\frac{\rho(x',y',z',t)_{t=-R/V}}{R}d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_{S}\left\{(\psi)_{t=-R/V}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{VR}\frac{\partial R}{\partial n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)_{t=-R/V}-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_{t=-R/V}\right\}ds$$

这就是初时刻$t=0$时位函数ψ在P点的值。改变计时起点，将$t=0$叫做第 t 秒，将时刻 $(-R/V)$ 叫做 $(t-R/V)$，我们就得到位函数的一般表示式：

$$\psi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_T\frac{[\rho]}{R}dT'-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{[\psi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{VR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]\right\}ds \tag{6-4-15}$$

式中的方括号〔 〕表示“推迟”，就是说括号里面各个函数中的t都要换成$t-R/V$。这一结果，就叫做（广义的）基尔霍夫积分。下面我们从几个方面对这一积分进行分析和说明。

4.关于推迟位 我们看到，基尔霍夫积分(6-4-15)中包含着两项。但是，按照具体情况的不同，其中的这一项或那一项可以等于零。为了容易想象，我们先考虑一个简单的例子。设在某时刻$t=0$从P'点的球形邻域中向外发射弹性波，如图6-5所示。设波源区的半径为a，则当$t=t_1$时波前将是半径为$a+Vt_1$的球面（设介质是均匀的和各向同性的）。在这种情况下，如果我们把积分域取得比这个球体还大，换句话说，如果我们的闭合曲面S在这个球面的外边，则该曲面上的积分将等于零，因为这时波还没有传到曲面上的各点，从面各点的位函数ψ及其导数都应该看作零。这样，(6-4-15)的右端就只有第一项。说得更广泛一些，只要知道波源限制在一个有限的空间域T_0之内，而且有一个开始发射的时间$t=0$，我们就可以把曲面S取得足够大而使S上的积分等于零。这种条件叫做**发射条件**❶。在这种条件下，(6-4-15)变成：

$$\psi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\int_{T_0}\frac{\rho(x',y',z',t-R/V)}{R}dT' \tag{6-4-16}$$

这一结果，叫做波场（位移场）在$P(x,y,z)$点的**推迟位**。

推迟位的概念是不难掌握的，只要看看它是怎样计算的就行了。如图6-6所示，我们设想把波源区分成许多体积元，其中的一个是dT'。从这里发出的“信号”，要经过一段时间R/V才能

❶ 这里讲得比较直观，不涉及各种细节，不追求叙述上的全面性和严密性。

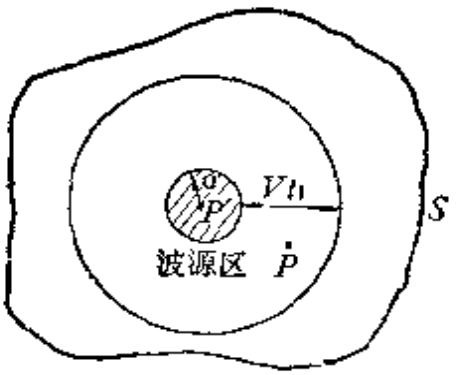


图6-5　球状波源的情况

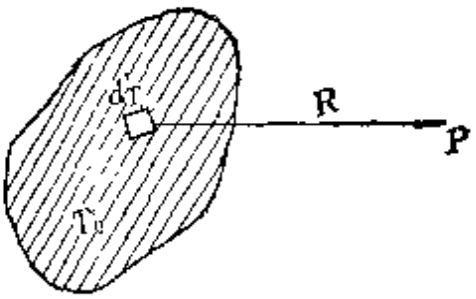


图6-6　推迟位计算示意图

传到场点P。因此，P点处在时刻t从dT'接收到的影响，是在时刻$t-R/V$从dT'中的波源发出的。这就是“推迟”二字的基本含意。至于(6-4-16)中的积分，那当然就表示P点的影响是来自波源区各点的影响的叠加。

我们在此指出，回去看一下(5-3-25)和(5-3-26)就会知道，当计算位移矢量的标位时，所取的ρ函数和计算矢位分量时所取的函数是不同的；当然，这两种情况下所用的波速V也是不同的。公式(6-4-16)概括了这两种情况。

5.关于超前位　我们指出，(6-4-15)并不是达朗贝尔方程的唯一可能的解。如果我们选择格林公式中的φ函数时不是采用(6-4-11)而是采用下式：

$$\varphi=\frac{\delta(t-R/V)}{R}+\cdots \qquad (6-4-17)$$

则(6-4-15)中的变量$t-R/V$都将变为$t+R/V$，而且有些包含$\frac{\partial}{\partial R}$的项将变号。这就是所谓的**超前解**。超前解也是可以得到一定的物理解释的，但是它在地震勘探中目前还没有用上，所以我们一笔表过不提。

6.当P点在空间域T以外时　回去看一下(6-4-15)的推导就可以知道，该式左端的$\psi(x,y,z,t)$这一函数值的出现，完全是因为我们围绕场点P画了一个小球面S_0。这个小球面之所以不得不

面，则是因为P点取在空间域T内，从而函数$\frac{1}{R}$在P点变为∞的原故。如果P点取在域T的外面，如图6-7所示，则当在T中计算积分时函数$\frac{1}{R}$将到处是有限的、连续的和可微的。这时当然用不着画什么小球面。于是，重复前面的计算，我们将得到(6-4-15)式中两个积分之和等于零。这并不是说P点的位函数等于零，而是说用这种办法算不出P点的位函数。这一表面上看来是消极的结论，事实上提供了有时是很有用的知识。

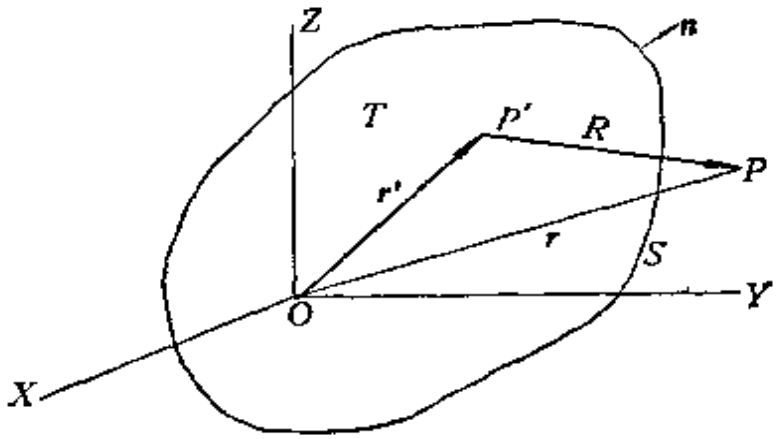


图6-7　P点在域T外面时的情况

综合起来，上面结果可以这样叙述：设在某一空间域T内计算(6-4-15)中的体积分，并在该域的边界面S上计算(6-4-15)中的面积分，若所选P点在T内，则二积分之差等于P点在时刻t的位函数之值；若所选的P点在T外，则二积分之差等于零。至于面积分前是取正号还是取负号（是二积分之和还是二积分之差），则由n和R的正方向的取法而定。

在许多情况下，域T内没有体积波源，即可以认为T内到处$\rho(x',y',z',t)=0$，这时(6-4-15)中的体积分等于零，于是我们得到：

$$-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{[\Psi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial\Psi}{\partial n}\right]\right.$$

$$-\frac{1}{VR}\frac{\partial R}{\partial n}\left[\frac{\partial \psi}{\partial t}\right]\Big\}ds$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\oint_S\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{[\psi]}{R}\right)\cos\theta-\frac{1}{R}\left[\frac{\partial \psi}{\partial n}\right]\right\}ds$$

$$=\begin{cases}\psi(x,y,z,t), & \text{若}P\text{点在}T\text{内},\\ 0, & \text{若}P\text{点在}T\text{外},\end{cases}\qquad(6\text{-}4\text{-}18)$$

式中θ是R和n之间的夹角。这种结果，近来已逐渐出现于有关地震勘探的某些文献中。

我们附带提到，按照上述理论，曲面S外面的波源对S内部各点的影响，可以用(6-4-18)这样的一个曲面积分来表示。在计算这个积分时，不但要求知道S上各点的ψ值，而且要求知道S上各点的$\frac{\partial \psi}{\partial n}$值。进一步的研究表明，这样的要求（边值条件）在数学上是有矛盾的。因此，上述这种理论在逻辑推理上还有着严重的缺点。后来的发展改正了这方面的缺点。但是，在许多实用问题中，上述这样的理论已经能够得出和实测资料相一致的结果。理论上的改进只在某些很细致的方面带来不同。因此，我们这里不再接着讲那种进一步的理论了。

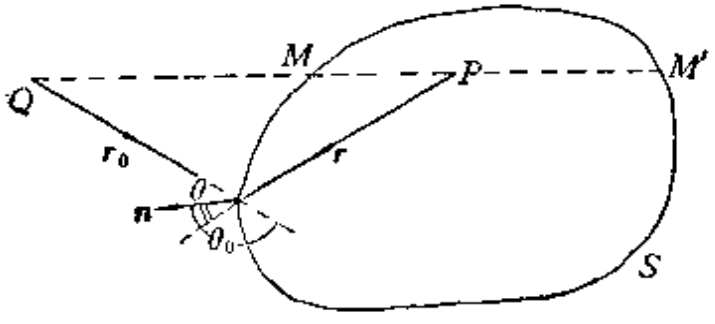


图6-8　基尔霍夫衍射公式示意图

7.基尔霍夫衍射公式　基尔霍夫衍射公式是基尔霍夫积分(6-4-15)或(6-4-18)的一个特例。如图6-8所示，设在Q点有一个点波源，我们要计算P点处的波场值。为了能够解决衍射问题，我们不认为波是从Q点直接传到P点，而是用一个面积分来代替实际的影响。根据前面的理论，这种代替是允许的。

我们包围P点画一个任意的（但应是适当平滑的）闭合曲面

S。设用r_0代表从Q点画到S上某一面积元ΔS的矢量，用r代表从P点画到那一面积元的矢量——此处的r就是前面的R。

现在为了简单，设想点波源Q发出的是球面正弦波。为了便于和物理地震学等方面的文献相对照，我们现在把这种波函数写成余弦函数的形式：

$$\Psi_{\Delta s}=\frac{A}{r_0}\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right) \qquad (6\text{-}4\text{-}19)$$

或者写成复数形式，就是：

$$\Psi_{\Delta s}=\frac{A}{r_0}e^{\,j\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right)} \qquad (6\text{-}4\text{-}20)$$

这就是面积元ΔS处的Ψ值。

现在分别计算(6-4-18)的被积函数中的两项。对于(6-4-20)，我们有：

$$\frac{\partial\Psi}{\partial n}=\frac{\partial\Psi}{\partial r_0}\cos\theta_0 \qquad (6\text{-}4\text{-}21)$$

式中θ_0代表r_0和n之间的夹角。于是就有：

$$\frac{\partial\Psi_{\Delta s}}{\partial n}=\cos\theta_0\left\{-\frac{A}{r_0^2}e^{\,j\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right)}-j\frac{\omega}{V}\frac{A}{r_0}e^{\,j\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right)}\right\}$$

$$=\cos\theta_0\left\{-\frac{A}{r_0^2}e^{\,j\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right)}+\frac{2\pi A}{\lambda r_0}e^{\,j\left(\omega t-\frac{\omega}{V}r_0\right)-j\frac{\pi}{2}}\right\}$$

式中应用了关系式$\omega/V=2\pi/\lambda$和$-j=e^{-j\frac{\pi}{2}}$。**如果$r_0\gg\lambda$的条件成立**，则上式第一项可以略去，于是就有：

$$\frac{\partial}{\partial n}[\Psi]_{\Delta s}=\frac{2\pi A}{\lambda r_0}\cos\theta_0 e^{\,j\omega t-j\frac{\omega}{V}(r_0+r)-j\frac{\pi}{2}} \qquad (6\text{-}4\text{-}22)$$

另外，由(6-4-20)得到：

$$\frac{[\psi]}{r}=\frac{A}{rr_0}e^{j\omega t-j\frac{\omega}{V}(r_0+r)} \qquad (6-4-23)$$

对于此式来说，

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{[\psi]}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{[\psi]}{r}\right)\cdot\cos\theta \qquad (6-4-24)$$

式中θ是r和n之间的夹角。当把(6-4-23)对r微分时，也得到两项；**如果$r\gg\lambda$的条件也成立**，则其中一项也可以略去，剩下来的就是：

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{[\psi]}{r}\right)=\frac{2\pi}{\lambda rr_0}e^{j\omega t-j\frac{\omega}{V}(r_0+r)-j\frac{\pi}{2}} \qquad (6-4-25)$$

将(6-4-22)和(6-4-25)代入(6-4-18)中，就得到：

$$\psi_P(t)=-\frac{A}{2\lambda}\oint_S\frac{1}{r_1r}e^{j\omega\tau-\frac{\omega}{V}(r_0+r)-j\frac{\pi}{2}}(\cos\theta_0-\cos\theta)ds \qquad (6-4-26)$$

或者写作：

$$\psi_P(t)=\frac{A}{4\pi}\frac{\omega}{V}\oint_S\frac{1}{r_0r}e^{2\pi j\left(\frac{t}{T}-\frac{r_0+r}{\lambda}\right)-j\frac{\pi}{2}}(\cos\theta_0-\cos\theta)ds \qquad (6-4-27)$$

这就是作为“物理地震学”之理论基础的衍射基本公式。现在我们看到，这一公式可以从更普遍的基尔霍夫积分(6-4-18)推得，也就是可以通过求解波动方程来得出。至于这一公式对具体衍射问题的应用，我们在此从略。

习题：1.设所研究的是正弦波；其波函数是：

$$\psi(x,y,z,t)=U(x,y,z)e^{j\omega t}$$

设这个函数在所研究的空间域T中满足波动方程：

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{V^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

现在就选这个函数作为格林公式中的ψ函数；作为Φ函数，则选用：

$$\varphi = \frac{1}{R} e^{-jKR},$$

式中$K = \frac{\omega}{V}$。试自己推导相应的基尔霍夫积分解。

答案：

$$\Psi_P(t) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[U \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{e^{-jKR}}{R} \right) - \frac{e^{-jKR}}{R} \frac{\partial U}{\partial n} \right] ds.$$

参 考 文 献

6.1 梁昆森，《数学物理方法》，人民教育出版社1959年版。

6.2 A.A.富拉索夫，《宏观电动力学》，罗零译，高等教育出版社1959年版。

6.3 W.伊文等，《层状介质中的弹性波》，刘光鼎译，科学出版社1966年版。

6.4 C.Л.索波列夫，《数学物理方程》，钱敏等译，人民教育出版社1958年版。

6.5 Kolsky,《Stress Waves in Solids》(固体中的胁强波)，Oxford Univ.Press,1953.

6.6 P.Drude,《The Theory of Optics》(光学理论)，Dover Publications, 1959.

6.7 A.Sommerfeld,《Optics》(光学)，Academic Press,1954.

6.8 J.W.Goodman,《Introduction to Fourier Optics》(傅立叶光学引论)，MaGraw-Hill Co.,1968.

6.9 H.Bateman,《Partial Differential Equations of Mathematical Physics》(数理物理学的偏微分方程)，Dover Publications, 1944.

6.10 付承义等，《地壳物理讲义》，中国科学技术大学讲义，1963年铅印本。

第七章　弹性波的反射和透射

§.7-1.　本章小引

作为进一步研究问题的基础，我们在上一章中讨论了无限大的均匀各向同性介质中的弹性波。我们证明，在那样的介质中，弹性波只可能有纵波和横波这样两种类型。在那样的介质中，如果研究的是平面波，则波的传播方向和传播速度都保持不变，此外，如果介质的吸收特性和频散特性都可以忽略，则平面波的波形（包括视频率、视振幅等等）也将保持不变。

我们知道，地震勘探主要是通过研究层状介质中弹性波的运动和作用来推断地下岩层的构造形态和物理特性，从而不可避免地要涉及介质分界面的问题。为了循序渐进，本章先讨论只有一个分界面的情况。多分界面的情况将在下一章中再来讨论。

事实上，这种问题也就是关于波动方程的边值问题，分界面的作用在于提供了某些边值条件（衔接条件）。所谓分界面就是介质中的一些曲面或平面，在该面的两侧，介质的性质有着一定的差别。例如，如图7-1所示，在两种介质接触面的两侧，介质

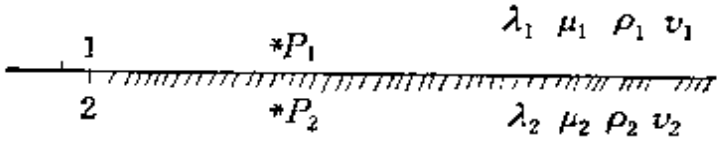


图7-1　介质分界面

的拉梅系数（λ和μ）可以不同，介质的密度可以不同，从而介质中的体波速度（V_P和V_S）也可以不同。设想在分界面的两侧各取一点，P_1和P_2，哪怕这两点离得非常近（$\overline{P_1P_2}$是宏观无限小的量），这两点处的λ_1和λ_2之差也还可以是一个有限的量；这就叫

做介质性质的**不连续分布**了。因此，所谓分界面，就是介质性质的不连续面。在特例，如果第二种介质根本不存在，则第一种介质和真空的分界面叫做该种介质的**自由表面**；在这种情况下，我们当然有$\lambda_2=\mu_2=\rho_2=V_2=0$。

虽然分界面两侧的介质性质是有一定差别的，但是，在研究弹性波的反射、透射等问题时，我们通常认为分界面两侧的介质是密接的；换句话说，我们认为，在波的作用下，两种介质不会沿着分界面发生破裂、剥离、滑动等现象，面是紧紧地贴在一起的。在这样的理解下，下面一些物理量就应该在跨越分界面时是连续的：

(a)弹性位移的法向分量和切向分量；
(b)胁强的法向分量和切向分量。

我们正是要在这样的边值条件下来研究弹性波在分界面上的反射和透射。我们将证明，在一般情况，当入射波只有纵波成分或只有横波成分时，反射波和透射波却同时具有纵波成分和横波成分；只有承认这种情况，上述那种类型的边值条件才能得到满足。另外在某些条件下，还会在靠近分界面的薄层区域中出现某种形式的“面波”。不但如此，承认了这样的边值条件，我们还可以求出弹性波的反射系数和透射系数，从而定出入射能流在反射波和透射波之间的分配情况。

本章将只论述平面正弦波的反射和透射。这并不那么“脱离实际”。地震波固然一般被认为是球面脉冲波，但是我们早已知道，当界面埋藏深度很大面我们的接收地段又较小时，就可以把地震波看成平面波；面且，通过傅立叶变换，一般总可以把脉冲波分解成许多正弦波。另外，为了简单，我们将把分界面看成平面。这也不是多么严重的缺欠。当分界面的曲率半径远远大于正弦波的波长时，这种看法就是可以允许的。

§.7-2. 弹性波在自由表面上的反射

1.*P*波入射 为了便于和地震工作的实际情况相对照，我们

把自由表面取作XOY平面，而把入射面取作XOZ平面，如图7-2所示。

既然$Z<0$的区域中没有介质，当然也就谈不到透射波的问题，从而只考虑反射波也就够了。设入射波只含P波成分，入射角为α。由图可见，当入射波传到自由表面上时，它不但会沿法线方向引起位移，而且会沿切线方向引起位移。结果，在介质中就不但会引起体胁变，而且会引起切胁变。由此可以想到，介质中不但会有反射纵波，而且会有反射横波。但是，根据问题的对称性可知，反射波的位移矢量也和入射波的位移矢量一样不可能有y分量；就是说，反射横波只可能是SV波。我们用α'和β分别代表反射纵波和反射横波的反射角。

我们用各波的弹性位移的量值来表示各个波，并将入射波、反射纵波和反射横波的波函数分别写成：

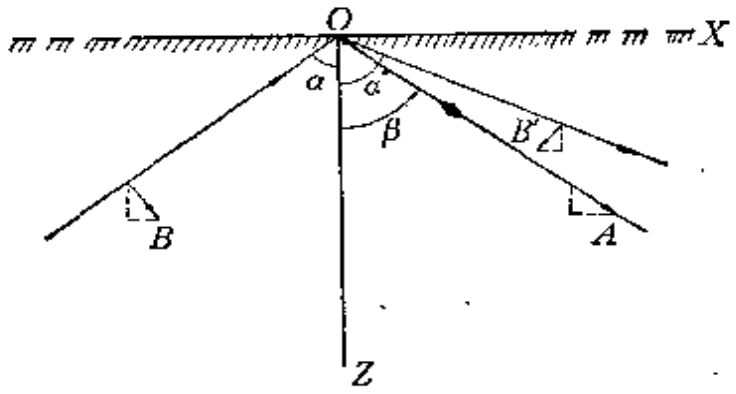


图7-2　P波入射的情况

$$S = Ae^{j(k_x x + k_z z - \omega t)} \qquad (7-2-1)$$

$$S' = A'e^{j(k'_x x + k'_z z - \omega' t)} \qquad (7-2-2)$$

$$S'' = Be^{j(k''_x x + k''_z - \omega'' t)} \qquad (7-2-3)$$

式中

$$k_x = -\frac{\omega}{V_p}\sin\alpha,\quad k'_x = -\frac{\omega}{V_p}\sin\alpha',\quad k''_x = \frac{\omega}{V_s}\sin\beta \qquad (7-2-4)$$

$$k_Z = -\frac{\omega}{V_p}\cos\alpha,\quad k'_z = -\frac{\omega'}{V_p}\cos\alpha',\quad k''_z = -\frac{\omega''}{V_s}\cos\beta,$$

(7-2-5)

显然，这些波函数全都满足波动方程。

既然$z<0$的区域中没有介质，从而谈不到两种介质密接的问题，从而位移连续的条件并不适用；但是，$z<0$的区域中的胁强场当然为零。于是，此问题的边值条件（衔接条件）变成：

$$\sigma_{zx}\Big|_{z=0} = 0,\text{即}\quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}6)$$

$$\sigma_{zz}\Big|_{z=0} = 0,\text{即}\quad \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}7)$$

式中$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}$，而$u$和$w$是总位移矢量在所选座标系中的直角分量。由图可见：

$$u = S\sin\alpha + S'\sin\alpha' - S''\cos\beta \qquad (7\text{-}2\text{-}8)$$

$$w = -S\cos\alpha + S'\cos\alpha' + S''\sin\beta \qquad (7\text{-}2\text{-}9)$$

现在我们先来看看(7-2-6)这个边值条件。将(7-2-1)、(7-2-2)和(7-2-3)代入(7-2-8)和(7-2-9)中，然后再代入(7-2-6)(令$z=0$)，就得到：

$$(jk_z\sin\alpha - jk_x\cos\alpha)Ae^{j(k_x x-\omega t)} + (jk'_z\sin\alpha' + jk'_x\cos\alpha')A'e^{j(k'_x x-\omega' t)} + (jk''_x\sin\beta - jk''_z\cos\beta)Be^{j(k''_x x-\omega'' t)} = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}10)$$

这一方程应该对于x和t的任意值都能成立，这就必然要求：

$$\omega = \omega' = \omega'' \qquad (7\text{-}2\text{-}11)$$

$$k_x = k'_x = k''_x \qquad (7\text{-}2\text{-}12)$$

最后一式可以写成：

$$\frac{\omega}{V_p}\sin\alpha = \frac{\omega}{V_p}\sin\alpha' = \frac{\omega}{V_s}\sin\beta$$

由此就得到：

$$\alpha = \alpha' \qquad (7\text{-}2\text{-}13)$$

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{V_p}{V_s} \qquad (7\text{-}2\text{-}14)$$

于是我们看到，反射波的频率和入射波的频率相同，反射纵波的反射角等于入射角（这就是习见的反射定律），反射横波的反射角和入射角之间存在斯奈尔定律（习见的透射定律）的关系。所有这些结果，都可以从问题的边值条件得出，从而以上的论述就是波动学对反射定律和透射定律这两条经验规律作出的理论解释。下面我们还要讨论 S 波入射的情况，而且以后还要讨论弹性波在两种介质的分界面上的反射和透射；在那些情况下，利用完全相同的论证，也可以得到与此对应的结论。因此，我们以后将不再重复这里的论证，而从一开始就引用应有的结果。

承认了上述这些结论，就可以利用(7-2-4)、(7-2-5)和三角学公式将(7-2-10)简化成下式：

$$(A' - A)V_s \sin 2\alpha - BV_p \cos 2\beta = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}15)$$

现在再看另一个边值条件(7-2-7)。为了简单，我们把这一等式变化一下。由以前的(5-3-8)和(5-3-15)可得：

$$V_p^2\rho = \lambda + 2\mu, \quad \lambda = V_p^2 - 2\mu, \quad V_s^2\rho = \mu$$

从而(7-2-7)变成：

$$\left\{(V_p^2 - 2V_s^2)\theta + 2V_s^2\frac{\partial\omega}{\partial z}\right\}_{z=0} = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}16)$$

通过直接代入并化简，上式变成：

$$(V_p^2 - 2V_s^2\sin^2\alpha)(A + A') + V_pV_s\sin 2\beta \cdot B = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}17)$$

将此式和(7-2-15)联立求解并化简，就得到弹性位移的反射系数如下：

$$\frac{A'}{A} = \frac{V_s^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta - V_p^2 \cos^2 2\beta}{V_s^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta + V_p^2 \cos^2 2\beta} \qquad (7\text{-}2\text{-}18)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{-2V_pV_s \sin 2\alpha \cos 2\beta}{V_s^2 \sin 2\alpha \sin 2\beta + V_p^2 \cos^2 2\beta} \qquad (7\text{-}2\text{-}19)$$

从能量的方面来看，反射系数是指反射波能流密度矢量在自

由表面上的法向分量和入射波的对应分量之比。对于反射纵波，由于$\alpha' = \alpha$，所以能流反射系数是：

$$R_p = (A'/A)^2 \qquad (7\text{-}2\text{-}20)$$

对于反射横波，相应的能流反射系数是：

$$R_2 = \left(\frac{B}{A}\right)^2 \frac{V_s \cos\beta}{V_p \cos\alpha} \qquad (7\text{-}2\text{-}21)$$

由(7-2-18)和(7-2-19)可知，在垂直入射($\alpha = 0$)的情况下，$A' = -A$而$B = 0$；就是说，在这种情况下，"反射波"只包含纵波，而其相位和入射波差$\pm\pi$。当然，也必须看到，在掠入射$\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$的情况下，也会得到$A' = -A$和$B = 0$，但是这时是谈不到什么反射波的。

图7-3中的曲线反映了振幅比A'/A和B/A随入射角的变化情况。所用介质的泊松比是$\nu = \frac{1}{3}$。

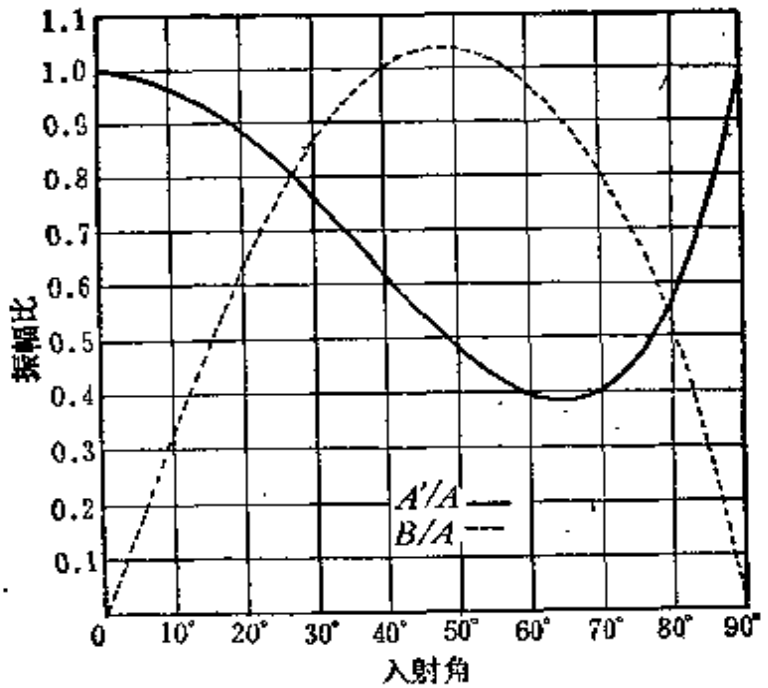


图7-3 振幅比和入射角的关系

有时候，人们不是用弹性位移而是用标位和矢位来表示波场。在现有的情况下，波场和y座标无关，而且一切矢量都没有y分量。因此，用位函

数表示位移矢量的关系式变为：

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_y}{\partial z}$$

$$w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_y}{\partial x}$$

为了简单，将Ψ_y改写成$-\Psi$，就得到：

$$u=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial z} \qquad (7\text{-}2\text{-}22)$$

$$w=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi}{\partial x} \qquad (7\text{-}2\text{-}23)$$

这里的Φ和Ψ显然都满足波动方程；前者描述纵波，后者描述横波。我们将入射P波、反射P波和反射SV波的位函数分别写成：

$$\Phi_p=\Phi_0 e^{\mathrm{j}(k_x x+k_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}24)$$

$$\Phi'_p=\Phi'_0 e^{\mathrm{j}(k'_x x+k'_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}25)$$

$$\Psi=\Psi_0 e^{\mathrm{j}(k''_x x+k''_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}26)$$

式中的波矢分量k_x等等由(7-2-4)和(7-2-5)定义并满足(7-2-12)。将这些波函数代入(7-2-22)和(7-2-23)中[令$\Phi=\Phi_p+\Phi'_p$]，然后再代入边值条件(7-2-6)和(7-2-16)中，经过化简，就得到位函数的反射系数如下：

$$\frac{\Phi'_0}{\Phi_0}=\frac{A'}{A} \qquad (7\text{-}2\text{-}27)$$

$$\frac{\Psi_0}{\Phi_0}=\frac{2V_s^2\sin 2\alpha\cos 2\beta}{V_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta+V_p^2\cos^2 2\beta}=-\frac{V_s}{V_p}\frac{B'}{A} \qquad (7\text{-}2\text{-}28)$$

2.SV波入射 讨论的方法和上面基本相同，反射情况如图7-4所示。和以前一样，我们把入射波、反射横波和反射纵波的波函数分别写成：

$$S=Be^{\mathrm{j}(k_x x+k_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}29)$$

$$S'=Be^{\mathrm{j}(k'_x x+k'_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}30)$$

$$S''=Ae^{\mathrm{j}(k''_x x+k''_z z-\omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}31)$$

式中

$$k_z=k'_x=\frac{\omega}{V_s}\sin\alpha,\quad k''_x=\frac{\omega}{V_p}\sin\beta,\quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{V_s}{V_p} \qquad (7\text{-}2\text{-}32)$$

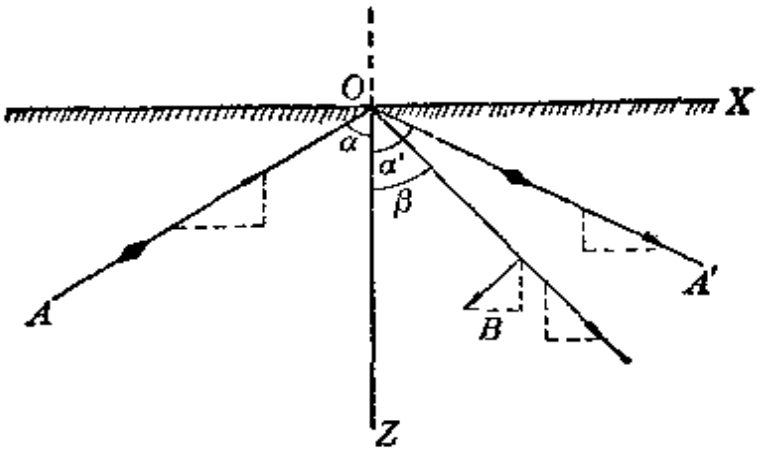


图7-4 PV 波入射的情况

$$k_z = -\frac{\omega}{V_s}\cos\alpha, \quad k'_z = \frac{\omega}{V_s}\cos\alpha, \quad k''_z = \frac{\omega}{V_p}\cos\beta。 \tag{7-2-33}$$

边值条件仍由(7-2-6)和(7-2-16)表示。由图可见，现在应有：

$$u = (S - S')\cos\alpha + S''\sin\beta \tag{7-2-34}$$

$$w = (S + S')\sin\alpha + S''\cos\beta \tag{7-2-35}$$

代入边值条件并化简，得到：

$$(V_p\cos 2\alpha)A - (B - B')V_s\sin 2\alpha = 0$$

$$(V_s\sin 2\beta)A - (B + B')V_p\cos 2\alpha = 0$$

联立求解，就得到弹性位移的反射系数如下：

$$\frac{B'}{B} = \frac{V_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta - V_p^2\cos^2 2\alpha}{V_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta + V_p^2\cos^2 2\alpha} \tag{7-2-36}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{2V_pV_s\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{V_s^2\sin 2\alpha\sin 2\beta + V_p^2\cos^2 2\alpha} \tag{7-2-37}$$

我们指出，$\sin\beta = \frac{V_p}{V_s}\sin\alpha$；当 $\sin\alpha > \frac{V_s}{V_p}$ 时，β无实数值；这时反射P波将变为“滑行波”而不能回到介质内部中来。关于这样的问题，我们以后还要进一步讨论。

3.***SH*波入射**　这一问题最为简单，其情况如图7-5所示。

在这种情况下，位移分量$u = w = 0$，只有$v \neq 0$，从而入射波和反射波的波函数可以分别写成：

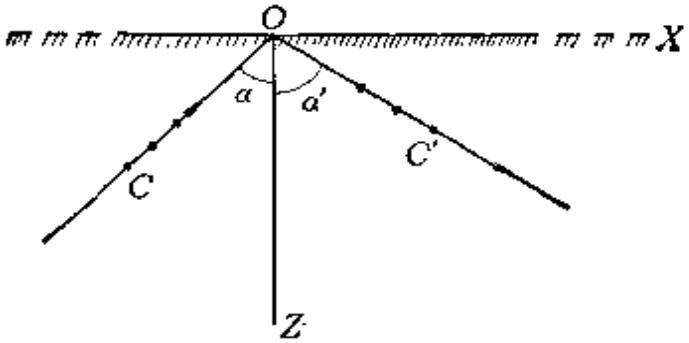


图7-5　PH 波入射的情况

$$v_1 = Ce^{\,j(k_x x + k_z z - \omega t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}38)$$

$$v'_1 = C'e^{\,j(k'_x x + k'_z z - \omega' t)} \qquad (7\text{-}2\text{-}39)$$

这时的边值条件是：

$$\sigma_{zy}\Big|_{z=0} = 0$$

或者写成：

$$\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} = 0 \qquad (7\text{-}2\text{-}40)$$

式中

$$v = v_1 + v'_1 \qquad (7\text{-}2\text{-}41)$$

将波函数代入并重复前面的讨论，就得到：

$$\omega' = \omega \qquad (7\text{-}2\text{-}42)$$

$$\alpha' = \alpha \qquad (7\text{-}2\text{-}43)$$

$$C' = C \qquad (7\text{-}2\text{-}44)$$

各式的意义简单明了，在此不再多谈。

习题：1.在 P 波入射的情况，假如不存在反射横波（SV波），试证(7-2-6)和(7-2-7)这两个边值条件不能同时得到满足。

2.利用反射系数公式，证明 $R_p + R_s = 1$ 。

§.7-3. 弹性纵波在介质分界面上的反射和透射

1.问题的提法　本节主要讨论纵波的反射和透射，横波的情况与此相似。我们假设相互密接的两种介质都是均匀的和各向同性的。讨论的方法可以有两种：第一，从位函数出发；第二，从

弹性位移出发。前一种在理论上比较完整和统一，但是比较复杂和抽象。后一种比较直接，计算过程也比较明显易懂。因此我们准备使用后一种方法。在这种方法中，我们参照上节的结果从一开始就承认反射波和透射波中全都包含纵波和横波两种成分，而且承认所有各波的频率全都相同。这些结论是可以从边值条件推得的，但是我们不再重复这种论证。在这样的理解下，P 波在分界面上的反射和透射可以用图 7-6 表示。

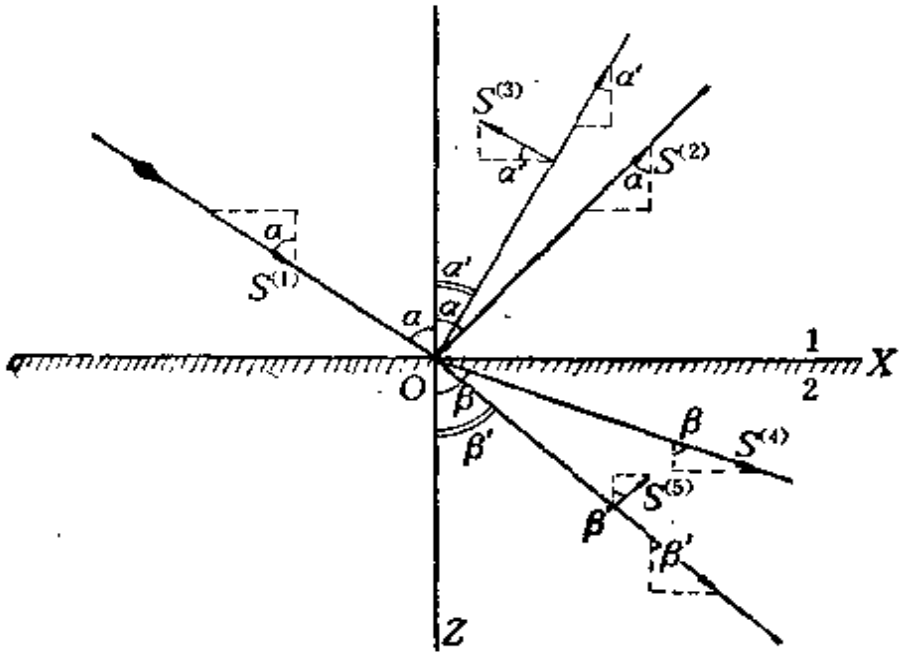


图7-6　P 波的反射和透射

2.五个波函数　还和上节一样，我们写出各个波的弹性位移的量值如下：

$$S^{(\nu)} = S_0^{(\nu)} e^{j(k_x^{(\nu)} x + k_z^{(\nu)} z - \omega t)}$$

$$\nu = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5 \qquad (7\text{-}3\text{-}1)$$

仿照上节推理可以得到：

$$k_x^{(1)} = k_x^{(2)} = k_x^{(3)} = k_x^{(4)} = k_x^{(5)} \qquad (7\text{-}3\text{-}2)$$

由此即得反射定律和透射定律如下：

$$\frac{\sin\alpha}{V_{p1}} = \frac{\sin\alpha'}{V_{s1}} = \frac{\sin\beta}{V_{p2}} = \frac{\sin\beta'}{V_{s2}} \qquad (7\text{-}3\text{-}3)$$

另外，由图可见，

$$k_z^{(1)} = +\frac{\omega}{V_{p1}}\cos\alpha,\quad k_z^{(2)} = -\frac{\omega}{V_{p1}}\cos\alpha,\quad k_z^{(3)} = -\frac{\omega}{V_{s1}}\cos\alpha'$$

$$k_z^{(4)} = \frac{\omega}{V_{p2}}\cos\beta,\quad k_z^{(5)} = \frac{\omega}{V_{s2}}\cos\beta' \qquad (7\text{-}3\text{-}4)$$

由图可见，在介质1中，位移的直角分量是：

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= S^{(1)}\sin\alpha + S^{(2)}\sin\alpha - S^{(3)}\cos\alpha' \\ w_1 &= S^{(1)}\cos\alpha - S^{(2)}\cos\alpha - S^{(3)}\sin\alpha' \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}5)$$

在介质2中，位移的直角分量是：

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= S^{(4)}\sin\beta + S^{(5)}\cos\beta' \\ w_2 &= S^{(4)}\cos\beta - S^{(5)}\sin\beta' \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}6)$$

3.边值条件 按照§7-1的论述，此问题的边值条件如下：

在XOY平面上，即 $z=0$ 处，

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= u_2 \\ w_1 &= w_2 \\ (\sigma_{zz})_1 &= (\sigma_{zz})_2 \\ (\sigma_{zx})_1 &= (\sigma_{zx})_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}7)$$

利用各向同性介质中的胡克定律，后两个条件变为：

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\theta_1 + 2\mu_1(\in_{zz})_1 &= \lambda_2\theta_2 + 2\mu_2(\in_{zz})_2 \\ \mu_1(\in_{zx})_1 &= \mu_2(\in_{zx})_2 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}8)$$

式中

$$\left.\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z},\quad (\in_{zz})_1 = \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ \theta_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z},\quad (\in_{zz})_2 = \frac{\partial w_2}{\partial z} \\ (\in_{zx})_1 &= \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \\ (\in_{zx})_2 &= \left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}9)$$

又由以前的(5-3-8)和(5-3-15)两式，得到：

$$V_p^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho},\quad V_s^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

由此得到：

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= (V_p^2 - 2V_s^2)\rho \\ \mu &= V_s^2\rho\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}10)$$

于是，边值条件变为：

当 $z = 0$ 时，$u_1 = u_2$，

$$\left.\begin{aligned}&w_1 = w_2 \\ &(V_{p1}^2 - 2V_{s1}^2)\theta_1 + 2V_{s1}^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1}\left[(V_{p2}^2 - 2V_{s2}^2)\theta_2 + 2V_{s2}^2\left(\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)\right] \\ &V_{s1}^2\left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x}\right) \\ &= \frac{\rho_2}{\rho_1}V_{s2}^2\left(\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}11)$$

4.反射系数和透射系数 以下就是直接计算了。在计算时我们记住：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial(\ \ )}{\partial x} &= ik_x \cdot (\ \ ) \\ \frac{\partial(\ \ )}{\partial z} &= ik_z \cdot (\ \ )\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}12)$$

另外，因子 $e^{i(k_x x - \omega t)}$ 可以消去，而当令 $z = 0$ 时因子 $e^{ik_z z} = 1$。因此，当把各个波函数代入边值条件以后，剩下来的将只是相应的振幅 $S_0^{(\nu)}$。

由(7-3-5)、(7-3-6)和(7-3-3)、(7-3-4)得到：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u_1}{\partial x} &= i\{(k_x^{(1)}S^{(1)} + k_x^{(2)}S^{(2)})\sin\alpha \\ &\quad - k_x^{(3)}S^{(3)}\cos\alpha'\} \\ &= i\omega\left[\frac{\sin^2\alpha}{V_{p1}}(S^{(1)} + S^{(2)})\right.\end{aligned}\right.$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\quad - \frac{\cos\alpha'\sin\alpha'}{V_{s1}} S^{(3)} \Big] \\
\frac{\partial w_1}{\partial z} &= j[k_z^{(1)} S^{(1)} - k_z^{(2)} S^{(2)}]\cos\alpha \\
&\quad - jk_z^{(3)} S^{(3)}\sin\alpha' \\
&= j\omega\Big[\frac{\cos^2\alpha}{V_{p1}}(S^{(1)} + S^{(2)}) \\
&\quad + \frac{\cos\alpha'\sin\alpha'}{V_{s1}} S^{(3)}\Big] \\
\theta_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial z} = \frac{j\omega}{V_{p1}}(S^{(1)} + S^{(2)}) \\
\frac{\partial u_1}{\partial z} &= j[(k_z^{(1)} S^{(1)} + k_z^{(2)} S^{(2)})\sin\alpha \\
&\quad - k_z^{(3)} S^{(3)}\cos\alpha'] \\
&= j\omega\Big[\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{V_{p1}}(S^{(1)} - S^{(2)}) \\
&\quad + \frac{\cos^2\alpha'}{V_{s1}} S^{(3)}\Big] \\
\frac{\partial w_1}{\partial x} &= j[(k_x^{(1)} S^{(1)} + k_x^{(2)} S^{(2)})\cos\alpha \\
&\quad - k_x^{(3)} S^{(3)}\sin\alpha'] \\
&= j\omega\Big[\frac{\cos\alpha\sin\alpha}{V_{p1}}(S^{(1)} - S^{(2)}) \\
&\quad - \frac{\sin^2\alpha'}{V} \cdot S^{(3)}\Big] \\
(\in_{zx})_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w_1}{\partial x} = j\omega\Big[\frac{\sin 2\alpha}{V_{p1}}(S^{(1)} - S^{(2)}) \\
&\quad + \frac{\cos 2\alpha'}{V_{s1}} S^{(3)}\Big]
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}3\text{-}13)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial u_2}{\partial x} &= j[k_x^{(4)} S^{(4)} \sin\beta + k_z^{(5)} S^{(5)} \cos\beta'] \\
&= j\omega\left[\frac{\sin^2\beta}{V_{p2}} S^{(4)} + \frac{\sin\beta'\cos\beta'}{V_{s2}} S^{(5)}\right] \\
\frac{\partial w_2}{\partial z} &= j[k_z^{(4)} S^{(4)} \cos\beta - k_z^{(5)} S^{(5)} \sin\beta'] \\
&= j\omega\left[\frac{\cos^2\beta}{V_{p2}} S^{(4)} - \frac{\sin\beta'\cos\beta'}{V_{s2}} S^{(5)}\right] \\
\theta_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{j\omega}{V_{p2}} S^{(4)} \\
\frac{\partial u_2}{\partial z} &= j[k_z^{(4)} S^{(4)} \sin\beta + k_z^{(5)} S^{(5)} \cos\beta'] \\
&= j\omega\left[\frac{\cos\beta\sin\beta}{V_{p2}} S^{(4)} + \frac{\cos^2\beta'}{V_{s2}} S^{(5)}\right] \\
\frac{\partial w_2}{\partial x} &= j[k_x^{(4)} S^{(4)} \cos\beta - k_z^{(5)} S^{(5)} \sin\beta'] \\
&= j\omega\left[\frac{\cos\beta\sin\beta}{V_{p2}} S^{(4)} - \frac{\sin^2\beta'}{V_{s2}} S^{(5)}\right] \\
(\in_{zx})_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial x} = j\omega\left[\frac{\sin 2\beta}{V_{p2}} S^{(4)}\right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos 2\beta'}{V_{s2}} S^{(5)}\right]
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}3\text{-}14)
$$

将(7-3-5)、(7-3-6)、(7-3-13)、(7-3-14)代入边值条件(7-3-11)中，消去公因子并略加整理，就得到：

$$
\left.
\begin{aligned}
&S_0^{(1)} \sin\alpha + S_0^{(2)} \sin\alpha - S_0^{(3)} \cos\alpha' \\
&\qquad - S_0^{(4)} \sin\beta - S_0^{(5)} \cos\beta' = 0 \\
&S_0^{(1)} \cos\alpha - S_0^{(2)} \cos\alpha - S_0^{(3)} \sin\alpha' \\
&\qquad - S_0^{(4)} \cos\beta - S_0^{(5)} \sin\beta' = 0 \\
&S_0^{(1)} (V_{p1}^2 - 2V_{s1}^2 \sin^2\alpha)/V_{p1} + S_0^{(2)} (V_{p1}^2 \\
&\qquad - 2V_{s1}^2 \sin^2\alpha)/
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_{p1}+S_0^{(3)}V_{s1}\sin 2\alpha' \\
&-S_0^{(4)}\frac{\rho_2}{\rho_1}(V_{p2}^2-2V_{s2}^2\sin^2\beta)/ \\
&V_{p2}+S_0^{(5)}V_{s2}\sin 2\beta'=0 \\
&S_0^{(1)}(V_{s1}^2\sin 2\alpha)/V_{p1} \\
&-S_0^{(2)}(V_{s1}^2\sin 2\alpha)/ \\
&V_{p1}+S_0^{(3)}V_{s1}\cos 2\alpha' \\
&-S_0^{(4)}\frac{\rho_2}{\rho_1}(V_{s2}^2\sin 2\beta)/V_{p2} \\
&-S_0^{(5)}\frac{\rho_2}{\rho_1}V_{s2}\cos 2\beta'=0
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}3\text{-}15)
$$

这一方程组就决定着各波的振幅之间的关系，其中 V_{p1}、V_{p2}、V_{s1}、V_{s2} 和 ρ_1、ρ_2 都认为是已知的。

现在我们定义 ***P*** 波入射时位移振幅的反射系数和透射系数如下：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\text{反射纵波的位移振幅反射系数 } R_{pp}=S_0^{(2)}/S_0^{(1)} \\
&\text{反射横波的位移振幅反射系数 } R_{ps}=S_0^{(3)}/S_0^{(1)} \\
&\text{透射纵波的位移振幅透射系数 } T_{pp}=S_0^{(4)}/S_0^{(1)} \\
&\text{透射横波的位移振幅透射系数 } T_{ps}=S_0^{(5)}/S_0^{(1)}
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}3\text{-}16)
$$

于是，用 $S_0^{(1)}$ 除方程组 (7-3-15) 的各项，就得到各个系数所满足的联立方程组：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sin\alpha+R_{pp}\sin\alpha-R_{ps}\cos\alpha'-T_{pp}\sin\beta \\
&\quad -T_{ps}\cos\beta'=0 \\
&\cos\alpha-R_{pp}\cos\alpha-R_{ps}\sin\alpha'-T_{pp}\cos\beta \\
&\quad +T_{ps}\sin\beta'=0 \\
&(V_{p1}^2-2V_{s1}^2\sin^2\alpha)/V_{p1}+R_{pp}(V_{p1}^2 \\
&\quad -2V_{s1}^2\sin^2\alpha)/V_{p1}+R_{ps}V_{s1}\sin 2\alpha' \\
&\quad -T_{pp}\frac{\rho_2}{\rho_1}V_{p2}^2-2V_{s2}^2\sin^2\beta)/
\end{aligned}
\right\} \quad (7\text{-}3\text{-}17)
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&V_{p2}+T_{ps}V_{s2}\sin 2\beta'=0\\
&(V_{s1}^2\sin 2\alpha)/V_{p1}-R_{pp}(V_{s1}^2\sin 2\alpha)/V_{p1}+R_{ps}V_{s1}\cos 2\alpha'\\
&-T_{pp}\frac{\rho_2}{\rho_1}(V_{s2}^2\sin 2\beta)/\\
&V_{p2}-T_{ps}\frac{\rho_2}{\rho_1}V_{s2}\cos 2\beta'=0
\end{aligned}
\right\}
$$

求解这一方程组，就能得到各个反射系数和透射系数的表示式；式中除包含波速和密度等已知量外，还包含入射角 α、反射角 α 和 α' 以及透射角 β 和 β'。这些角度都可以根据 (7-3-3) 式写成入射角 α 的函数，于是 R_{pp}、R_{ps}、T_{pp} 和 T_{ps} 也就都变成 α 的函数了。

但是，由(7-3-17)可见，这些函数的具体形式将是相当繁复而不好分析的，所以一般是通过画曲线的方法来研究各量的变化情况。图 7-7 给出了一些反射系数的曲线。这些曲线是在 $\lambda=\mu$ 即泊松比为 0.25 的条件下画出的。在图 7-7(b) 和图 7-7(d) 中，为了照顾到波速的差异(也为了适当照顾到能流密度的关系)，纵座标不是代表的 R_{ps}，而是代表的 $(V_{p1}/V_{s1})R_{ps}$。

由图 7-7 可见，在所有这些情况下，反射 P 波和反射 SV 波的反射系数都是随着入射角 α 而相当显著地变化的。在 $V_{p2}\geqslant V_{p1}$ 的情况，纵波具有临界角 $\alpha_c=\arcsin(V_{p1}/V_{p2})$。由图 7-7(a) 可见，当入射角 $\alpha\ll\alpha_c$ 时，R_{pp} 的值随 α 的变化不大，当 $\alpha\to\alpha_c$ 时；R_{pp} 急剧增加，而在 α_c 处达到最大值；当 $\alpha>\alpha_c$ 时，R_{pp} 又急剧减小。另外还可以看到，当 $\alpha<\alpha_c$ 时，随着两种介质波阻抗之差 $\rho_1V_{p1}-\rho_2V_{p2}$ 的逐渐减小，R_{pp} 也逐渐减小。同样，由图 7-7(b) 可见，当 $\alpha=0$ 时，R_{ps} 为零，表明这时没有反射横波。随着 α 的增大，R_{ps} 也逐渐增大，而当 $\alpha\to\alpha_c$ 时急剧下降到零。当 $\alpha>\alpha_c$ 时，R_{ps} 又先增大而后减小。另外，也象反射 P 波一样，随着 $\rho_1V_{p1}-\rho_2V_{p2}$ 的递减，R_{ps} 也递减。

在 $V_{p2}<V_{p1}$ 的情况，纵波没有临界角。R_{pp} 和 R_{ps} 的变化情

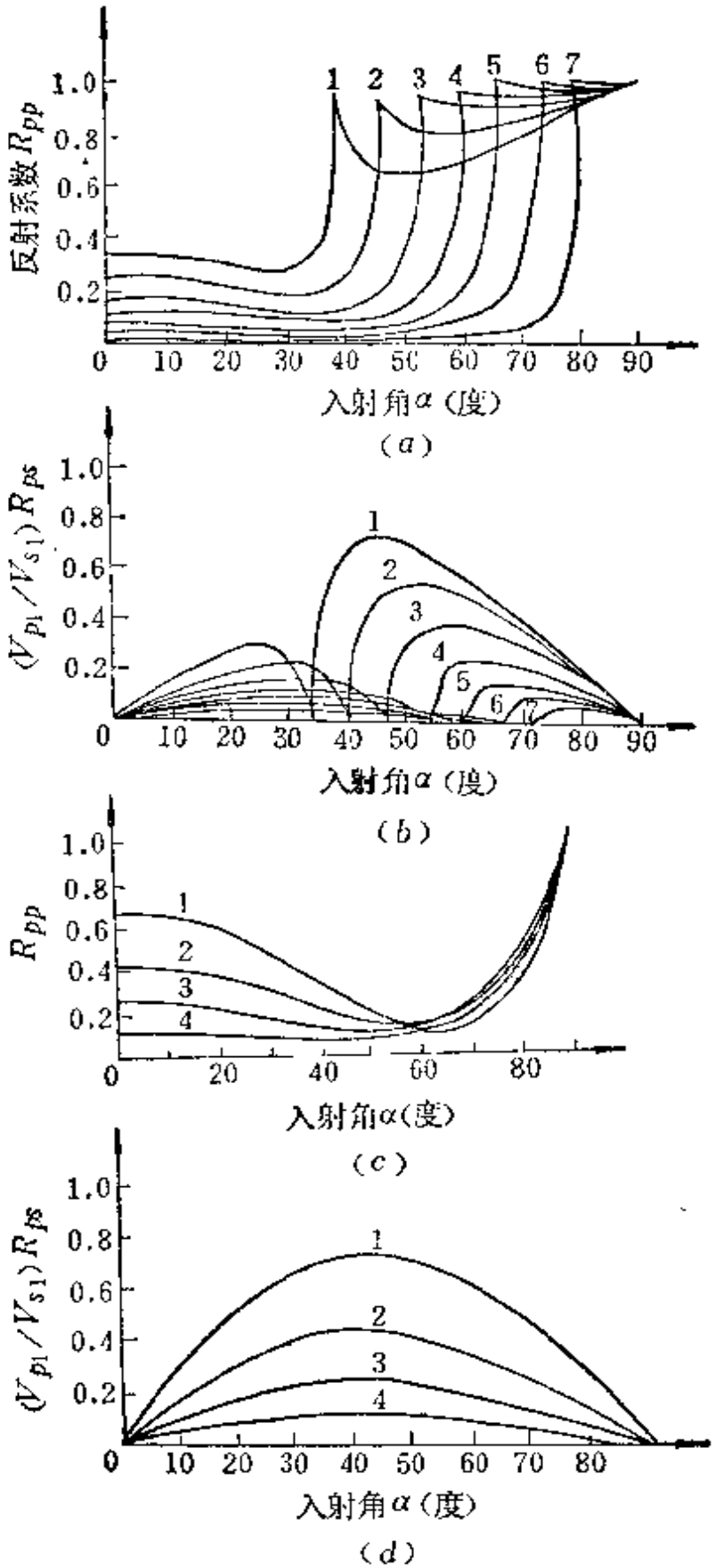

反射系数 R_{pp}
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1 2 3 4 5 6 7
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
入射角α（度）
（a）
$(V_{p1}/V_{s1})R_{ps}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1 2 3 4 5 6
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
入射角α（度）
（b）
R_{pp}
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1 2 3 4
0 20 40 60 80
入射角α（度）
（c）
$(V_{p1}/V_{s1})R_{ps}$
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
1 2 3 4
0 10 20 30 40 50 60 70 80
入射角α（度）
（d）

图7-7　反射曲线实例

况如图 7-7(c) 和7-7(d) 所示。这时反射系数的变化曲线是平滑的。而且，也和前两种情况一样，反射系数将随着 $\rho_1 V_{p1} - \rho_2 V_{p2}$ 的减小而减小。

5.垂直入射的情况 这种情况已经在前面接触到了。所谓垂直入射，当然就是指入射角 α 为零的情况；这时反射角 α、α' 和透射角 β、β' 也都为零，因为有关系式(7-3-3)。在这种条件下，方程组（7-3-17）将变得非常简单，解出的结果也很简单明了。而且，大家知道，在地震勘探工作中，当地层倾角不太大而界面深度远远大于炮检距时，有效波的反射可以近似地看成垂直入射的情况。因此，这一特殊情况的实际意义还是相当大的。

为了讨论垂直入射的情况，只要在（7-3-17）中令 $\alpha=\alpha'=\beta=\beta'=0$ 就行了。这时方程组变为：

$$\left.\begin{aligned} &R_{ps}+T_{ps}=0\\ &1-R_{pp}-T_{pp}=0\\ &1+R_{pp}-T_{pp}\frac{\rho_2 V_{p2}}{\rho_1 V_{p1}}=0\\ &R_{ps}-T_{ps}\frac{\rho_2 V_{s2}}{\rho_1 V_{s1}}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}18)$$

联立求解，就得到：

$$\left.\begin{aligned} &(R_{pp})_0=\frac{\rho_2 V_{p2}-\rho_1 V_{p1}}{\rho_1 V_{p1}+\rho_2 V_{p2}}\\ &(R_{ps})_0=0\\ &(T_{pp})_0=\frac{2\rho_1 V_{p1}}{\rho_1 V_{p1}+\rho_2 V_{p2}}\\ &(T_{ps})_0=0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}19)$$

由此可以得出结论：

(i)当一个平面正弦弹性纵波垂直入射到两种介质的分界面上时，反射波和透射波中都没有横波成分。这一点，从物理直观的方面也可以看出来，因为这时入射波将只引起位移的 ω 分量

(即垂直于分界面的分量)。

(ii)只有当两种介质波阻抗不相等，即当 $\rho_1 V_{p1} - \rho_2 V_{p2} \neq 0$ 时，$(R_{pp})_0$ 才不等于零，也就是说才有反射波（当然是反射纵波）。如果 $\rho_1 V_{p1} - \rho_2 V_{p2} = 0$，则 $(R_{pp})_0 = 0$ 而 $(T_{pp})_0 = 1$。反之，$\rho_1 V_{p1}$ 和 $\rho_2 V_{p2}$ 的差越大，则 $(R_{pp})_0$ 越大而 $(T_{pp})_0$ 越小；就是说，两种介质的波阻抗差别越大，反射波就越强而透射波就越弱。这种情况，在 $\alpha \neq 0$ 的一般条件下已经由图 7-7 中的曲线表示了出来。

(iii)由 $(R_{pp})_0$ 的表示式还可以看出，在 $\rho_2 V_{p2} - \rho_1 V_{p1} > 0$ 的情况下，$(R_{pp})_0 > 0$；这就是说，这时入射波和反射波在分界面（即 $z = 0$ 的平面）上具有相同的相位。反之，在 $\rho_2 V_{p2} - \rho_1 V_{p1} < 0$ 的情况下，$(R_{pp})_0 < 0$；这就是说，这时入射波和反射波在分界面上具有等于 $\pm\pi$ 的相位差。这种现象有时被说成“半波损失”，因为波一被反射，好象就“丢掉了”半个波长(即 $\frac{\lambda}{2}$)❶。

(iv)由 $(T_{pp})_0$ 的表示式可以看出，不论哪种介质的波阻抗较大，$(T_{pp})_0$ 总是正的；这就是说，不论哪种介质的波阻抗较大，透射波并不会有什么半波损失。

(v)在特例，当 $\rho_2 V_{p2} \to 0$ 即 $\rho_2 V_{p2} \ll \rho_1 V_{p1}$ 时，我们将得到自由表面上的反射情况。这时，在垂直入射的条件下，我们将有 $(T_{pp}) \to 0$ 而 $(R_{pp})_0 \to -1$。这是和 §.7-2 中的结论完全一致的，而且也是当然应该一致的。

我们指出，以上这些结论对于研究地震波的振幅都是相当重要的。

6，全反射问题 在几何地震学中，我们已经讨论了全反射现象。按照波的透射定律(斯奈耳定律)，入射角 α 和透射角 β 之间存在下列规律：

❶ 在光学中，透明物质的折射率 n 和光在介质中的传播速度 v 成反比。折射率较大的物质叫做比较光密。当光从光疏物质射向光密物质时，从分界面反射回来的光会有“半波损失”。这一点在实验上得到了证明。

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{V_1}{V_2} \qquad (7\text{-}3\text{-}20)$$

式中 V_1 和 V_2 分别是波在第一种介质和第二种介质中的传播速度。在 $V_2>V_1$ 的情况下，当 $\sin\alpha\to\sin\alpha_c=\frac{V_1}{V_2}$ 时，$\sin\beta\to 1$ 而 $\beta\to\frac{\pi}{2}$。如果只承认（7-3-19）这样的关系（也就是从“射线”的观点来理解波的传播），我们就应该认为这时透射波将沿着分界面“滑行”。这时没有任何波进入第二种介质。这就是我们以前关于全反射现象的理解。

在本节和上节中，用更加精确的波动理论研究了反射和透射的现象。我们已经看到，弹性波的反射和透射，并不是象我们以前所介绍的那么简单。具体地说，当一个平面正弦纵波入射到两种介质的分界面上时，我们一般会得到两种反射波和两种透射波；这些波的反射角或透射角，都和入射角 α 之间存在着类似于（7-3-19）的关系〔参阅(7-3-3)式〕。任何一种波，只要它的波速大于入射波的波速，就都可能显示类似于“全反射”的现象。例如，前面已经提到，当平面正弦 SV 波入射到分界面（或自由表面上时），一般说来，反射波中也是有 P 波成分的。这种 P 波的波速 V_{p1}，通常总是大于入射波的波速 V_{s1} 的。因此，当入射角 α 等于或大于临界角 $\alpha_c=\arcsin(V_{s1}/V_{p1})$ 时，反射 P 波将显示类似于“全反射”的现象；就是说，这时反射 P 波将沿着分界面“滑行”，而并不回到第一种介质的内部。

那么，从我们现在这种更加精确的波动理论看来，应该怎样理解上述这种现象呢？如果这种理论是“值得尊重的”，它应该能够更加自然和更加确切地解释这种现象，而不是满足于有关“射线”的方向问题。事实上，这种理论果然能够作到这一点！

让我们还是以透射波为例来说明这个问题吧！设有一个平面正弦纵波以相当大的入射角射到两种介质的分界面上，如图 7-8 所示。这时，第二种介质中一般会出现透射纵波和透射横波。但

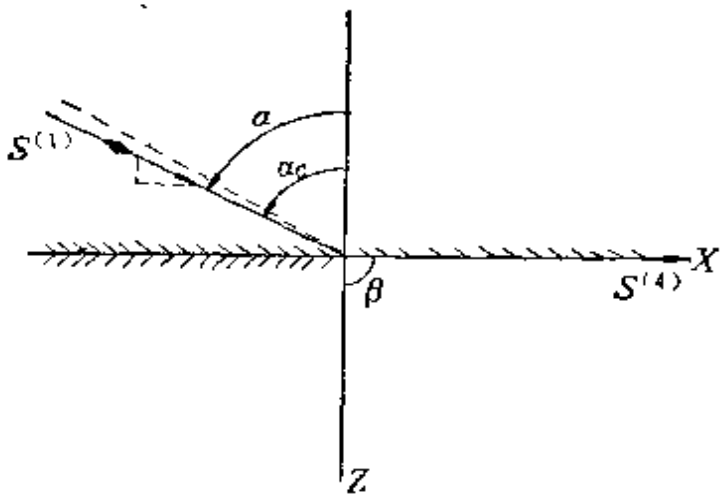


图7-8 “全反射”示意图

是，如果 $V_{p2}>V_{p1}$，而入射角 $\alpha\geqslant\alpha_c=\arcsin(V_{p1}/V_{p2})$，则透射 P 波将不能进入第二种介质中。我们的任务就是要说明这时透射 P 波将变成什么样子。

现在来写写入射 P 波和透射 P 波的波函数。和以前一样，我们仍然把它们写成：

$$\left.\begin{aligned} S^{(1)} &= S_0^{(1)} e^{j(k_x^{(1)}x+k_z^{(1)}z-\omega t)} \\ S^{(4)} &= S_0^{(4)} e^{j(k_x^{(4)}x-k_z^{(4)}z-\omega t)} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}3\text{-}21)$$

但是，现在这个 $S^{(4)}$ 出了点儿“毛病”。

我们看，按照前面的论述，应该有：

$$k_x^{(1)}=k_x^{(4)} \qquad (7\text{-}3\text{-}22)$$

也就是：

$$\frac{\omega}{V_{p1}}\sin\alpha=\frac{\omega}{V_{p2}}\sin\beta \qquad (7\text{-}3\text{-}23)$$

或者写作：

$$\sin\beta=\frac{V_{p2}}{V_{p1}}\sin\alpha \qquad (7\text{-}3\text{-}24)$$

另外，我们还有：

$$k_z^{(1)}=+\frac{\omega}{V_{p1}}\cos\alpha,\quad k_z^{(4)}=+\frac{\omega}{V_{p2}}\cos\beta \qquad (7\text{-}3\text{-}25)$$

根据三角学公式，当然有

$$\cos\beta=\pm\sqrt{1-\sin^2\beta}$$

将 (7-3-24) 代入此式，得到：

$$\cos\beta=\pm\sqrt{1-(V_{p2}/V_{p1})^2\sin^2\alpha} \qquad (7\text{-}3\text{-}26)$$

当 $\sin\alpha>\sin\alpha_c=V_{p1}/V_{p2}$ 时，$\cos\beta$ 变为虚数。这就是问题的所在。

当然，当 $\sin\alpha > \sin\alpha_c$ 时，$\sin\beta$ 应该怎样理解也成问题。但是这个问题并不严重，因为出现在 (7-3-21) 中的并不是 $\sin\beta$ 而是 $k_x^{(4)}$，而根据 (7-3-24)，$k_x^{(4)}$ 的取值和理解是并不引起什么麻烦的。麻烦的是 $k_z^{(4)}$。既然 $\cos\beta$ 成了虚数，我们就只好试着承认这个事实，而把它写成：

$$\cos\beta = \pm j\delta, \qquad (7\text{-}3\text{-}27)$$

式中

$$\delta = \sqrt{(V_{p2}/V_{p1})^2\sin^2\alpha - 1} \qquad (7\text{-}3\text{-}28)$$

于是，

$$k_z^{(4)} = \frac{\omega}{V_{p2}}(\pm j\delta) \qquad (7\text{-}3\text{-}29)$$

代入 (7-3-21) 中，得到：

$$S^{(4)} = S_0^{(4)} e^{j[k_x^{(4)}x + (\pm\frac{\omega}{V_{p2}}j\delta)z - \omega t]}$$

$$= S_0^{(4)} e^{\mp\frac{\omega\delta}{V_{p2}}z} e^{j(k_x^{(4)}x - \omega t)} \qquad (7\text{-}3\text{-}30)$$

在这个波函数的实指数因子 $e^{\mp\frac{\omega\delta}{V_{p2}}z}$ 中，我们只能取指数前面的负号，因为不然的话 $S^{(4)}$ 将随着 z 值的增大而越来越强，那显然不能和现有的问题相适应。这样，最后就得到：

$$S^{(4)} = S_0^{(4)} e^{-\frac{\omega\delta}{V_{p2}}z} e^{j(k_x^{(4)}x - \omega t)} \qquad (7\text{-}3\text{-}31)$$

这里的虚指数因子表明 $S^{(4)}$ 是沿着 $+X$ 轴传播的平面正弦波，而实指数因子则表明这种波的振幅是随着深度 z 的增大而指数地衰减的。

这就是波动理论关于“滑行波”的说明。按照这种图景，“滑行波”确实是沿着分界面传播的；这一点和以前的（几何地震学的）结论相一致。但是，按照现在这种看法，“滑行波”并不是绝对地局限在介质的**分界面上**，而是包含于靠近分界面的**一个薄层之中**；这一点，就比以前的结论进了一步。如果第二种介质只有很薄的一层，则这种“滑行波”有可能透过第二种介质面进

入第三种介质中。这种结论在光学上得到了实验的证明❶

我们指出，以上固然讨论的是 P 波入射时的透射 P 波，但是，对于 SV 波入射时的反射 P 波，或是 SV 波入射时的透射 P 波和透射 SV 波，或是 SH 波入射时的透射 SH 波，这种论证显然也照样能够适用。

图 7-9 表示夹在高波速介质中的低波速薄层。一旦在这种薄层中激起了波，则由于全反射的关系，波动能量的主要部分将被“禁锢”在薄层内部，而很不容易逸出层外。这种限制在低波速薄层中的波叫做**槽波** (channel waves)。它的形成过程和电讯工程中所谓的“波导效应”颇为相似❷。要详细说明槽波的性能，也需要用到和上述论证相似的分析和推算，即用到“复波矢”之类的数学概念。在采煤工业中，利用槽波的反射或透射来测定薄煤层中的断层位置，是一种很重要的方法。

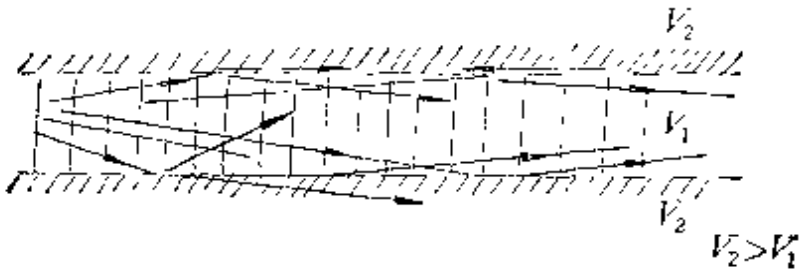


图7-9 “槽波”示意图

习题：1.自己由 (7-3-17) 推得 (7-3-18)，然后推出 (7-3-19)。

2.自己考虑 SH 波入射到介质分界面上时的反射和透射，定出传播规律，求出反射系数和透射系数并分析所得结果。

3.自己考虑 SV 波入射到介质分界面上时的反射和透射（要求同上题）。

4.近来的地震勘探野外工作，有时用的排列长达1,200米。设所要研究的界面在深度为 3,000 米处。试参照图 7-7 中的曲线，

❶ 波动物理学（量子物理学）中有一种“隧道效应” (tunnel effect)，其理论解释和这里的论述颇为相近。

❷ 这里只是讲的形成槽波的简单概念，不可把它看得太死。要仔细研究槽波的性能，当然还得从求解波动方程出发。

自己估计将有效波看成垂直入射情况时所造成的反射系数上的误差。

§.7-4. 面波

1.情况概述 什么叫面波，大家当然已经知道了，这里不再啰嗦。现在只讲讲从弹性波的理论出发怎样看待这个问题，并且预先谈谈理论上得出了一些什么结论。

在前面的两节中，我们考虑了满足波动方程的一些波函数。这些波函数表示着介质的自由表面或分界面上的入射波、反射波或透射波。让我们重复说明一下，我们假设所研究的介质是分区均匀的和各向同性的；关于各向异性介质中的情况（例如双折射现象），我们完全没有讨论。另外，我们所研究的，完全以平面正弦波为限。但是，就算加了这么多的限制条件，上面考虑过的，也还不是波动方程的全部可能的解。除了我们已经讨论过或提到过的（例如入射 SH 波）那些波函数以外，还有另一些也满足波动方程和边值条件的函数，它们代表着沿表面或分界面传播而只在界面附近的薄层中才有适当强度的波。这种波就是咱们所说的**面波**，有的人把它们叫做**表层波**或其他名称。

面波和全反射时的“滑行波”有些相似，但是二者的波速差别颇大，因此不能把它们等同看待。有的书上为了省事，用“滑行波”的道理来解释面波的形成。如果只讲个大概，这样作固无不可，但是严格说来**恐怕在概念上是不能成立的。**最合适的方法还是从求解波动方程开始。

研究的结果表明，在弹性介质的自由表面上，可以形成类似于水波的面波；这种波叫做瑞利波 (Rayleigh waves)。如果表面是完全“自由”的，则瑞利波的速度不依赖于频率，就是说瑞利波**没有频散现象**。但是，如果介质表面上有一个非弹性的疏松覆盖层，例如地面上的表土层，则当照顾到覆盖层的质量时求得的瑞利波**是有频散现象的**。计算表明，瑞利波既有 P 波成分又有 SV 波成分，却没有 SH 波成分。但是，如果介质表面上有一个弹性的

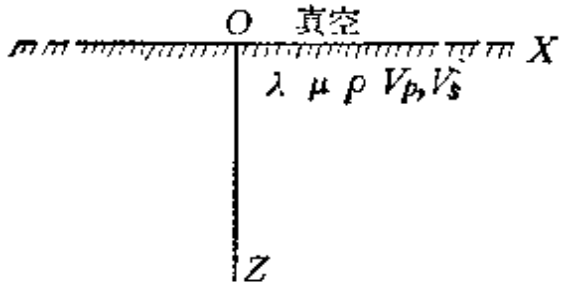


图7-10 弹性介质的自由表面

低波速的覆盖层，则覆盖层内部和该层与下面介质的分界面上可能出现 *SH* 波。这种波叫做乐夫波 (Love waves)。另外，在两种不同介质的分界面上，也可以形成瑞利型的面波；这种面波叫做斯通利波(Stoneley waves)。

这就是关于面波的大致情况。现在我们把这些结论的理论论证写在下面，以供读者参考。

2.瑞利波 所取的座标系如图 7-10 所示。我们引用位移矢量 s 的两个位函数如下：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,z,t) &= \Phi_0(z)e^{j(ax-\omega t)}\\ \Psi(x,z,t) &= \Psi_0(z)e^{j(ax-\omega t)}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}1)$$

这里的 Ψ 相当于一般情况下的 $-\Psi_y$。

将这两个位函数分别代入下列的波动方程：

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{V_p^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{V_s^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0$$

就得到“振幅” Φ_0 和 Ψ_0 所满足的常微分方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} - (a^2-k^2)\Phi_0 &= 0\\ \frac{d^2\Psi_0}{dz^2} - (a^2-k'^2)\Psi_0 &= 0\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}2)$$

式中

$$k^2 = \left(\frac{\omega}{V_p}\right)^2,\quad k'^2 = \left(\frac{\omega}{V_s}\right)^2,\quad \frac{k}{k'} = \frac{V_s}{V_p} \qquad (7\text{-}4\text{-}3)$$

(7-4-2) 的解显然是：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0 &= Ae^{-\sqrt{a^2-k^2}\,z} + A'e^{+\sqrt{a^2-k^2}\,z}\\ \Psi_0 &= Be^{-\sqrt{a^2-k'^2}\,z} + B'e^{+\sqrt{a^2-k'^2}\,z}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}4)$$

正指数的项在 $z\to\infty$ 时无限增大，从而不适合本问题的物理情况，从而必须认为 $A'=B'=0$。于是我们得到：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,\ z,\ t)&=Ae^{-\sqrt{a^2-k^2}\,z}\,e^{j(ax-\omega t)}\\ \Psi(x,\ z,\ t)&=Be^{-\sqrt{a^2-k'^2}\,z}\,e^{j(ax-\omega t)}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}5)$$

有了位函数，就可以求出弹性位移的直角分量：

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\\ w&=\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}6)$$

由此得到：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\\ &\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\\ &\theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\\ &\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\partial x}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\\ &\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\\ &\epsilon_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}=2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z}\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}7)$$

由 (7-4-5) 得到：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=(ja)^2\Phi\\ &\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=(-\sqrt{a^2-k^2})^2\Phi\\ &\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}=(ja)^2\Psi\\ &\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=(-\sqrt{a^2-k'^2})^2\Psi\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}8)$$

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z} = -ja\sqrt{a^2-k^2}\,\Phi$$

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z} = -ja\sqrt{a^2-k'^2}\,\Psi$$

现在边值条件仍然是：

$$\sigma_{zz}\Big|_{z=0} = \sigma_{zx}\Big|_{z=0} \approx 0$$

或者写作：

$$\left.\begin{aligned}&\left[(V_L^2-2V_S^2)\theta+2V_S^2\frac{\partial w}{\partial z}\right]_{z=0} = 0\\&\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}9)$$

将(7-4-7)和(7-4-8)代入，经过整理并利用（7-4-3）稍加变换，就得到：

$$\left.\begin{aligned}&(2a^2-k'^2)A+2ja\sqrt{a^2-k'^2}\,B = 0\\&-2ja\sqrt{a^2-k^2}\,A+(2a^2-k'^2)B = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}10)$$

这是包含未知数 A、B 的两个联立方程，其具有非零解的条件是系数行列式应等于零，就是说：

$$\begin{vmatrix}(2a^2-k'^2) & 2ja\sqrt{a^2-k'^2}\\ -2ja\sqrt{a^2-k^2} & (2a-k'^2)\end{vmatrix} = (2a^2-k'^2)^2$$

$$-4a^2\sqrt{a^2-k^2}\cdot\sqrt{a^2-k'^2} = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}11)$$

这一方程叫做瑞利方程，由此可以求出瑞利波的波矢 a，从而也可以得到它的波速 V_R。

现在看一个特例。假设所研究的介质是所谓泊松固体，就是说，假设 $\lambda=\mu$，$\nu=\frac{1}{4}=0.25$。于是就有 $V_P^2=3V_S^2$，即 $k'^2\approx 3k^2$

这时瑞利方程变为：

$$(2a^2-k'^2)^2-4a^2\sqrt{a^2-k'^2}\cdot\sqrt{a^2-k'^2/3} = 0 \qquad (7\text{-}4\text{-}12)$$

将此式略加简化合并，并令 $a^2/k'^2=\kappa$，就得到：

$$32\kappa^3-56\kappa^2+24\kappa-3=0 \qquad (7\text{-}4\text{-}13)$$

这是关于 κ 的三次方程，它的三个根是

$$\kappa=\frac{1}{4},\ \frac{3-\sqrt{3}}{4},\ \frac{3+\sqrt{3}}{4}$$

我们记得，$\kappa=a^2/k'^2$。当 $\kappa>1$ 时，波函数 (7-4-5) 才将随 z 的增大而减小，从而才能表示面波；当 $\kappa<1$ 时，(7-4-5)将对 z 为周期函数，从而表示介质内部的体波。因此，为了研究面波，我们只能取 $\kappa_0=\frac{3+\sqrt{3}}{4}$ 这个根。这时我们有

$$a_0^2=\frac{3+\sqrt{3}}{4}k'^2=1.183k'^2 \qquad (7\text{-}4\text{-}14)$$

由此求得的瑞利波的波速是：

$$V_R=\frac{\omega}{a_0}=\frac{\omega}{1.183k'}=0.9194V_s \qquad (7\text{-}4\text{-}15)$$

这就表明，泊松固体中瑞利波的速度小于体内横波的传播速度。另外我们也看到，V_R 是不依赖于频率的，或者说均匀各向同性介质自由表面上的瑞利波是没有频散的。

将(7-4-5)代入(7-4-9)中，就得到位移分量的表示式；特别说来，在 $z=0$ 的平面上，我们有：

$$\left.\begin{aligned} u_0&=B\left(\beta-\frac{2a_0^2\beta}{2a_0^2-k'^2}\right)e^{j(a_0x-\omega t)}\\ w_0&=jB\left(\frac{2a_0\alpha\beta}{2a_0^2-k'^2}-a_0\right)e^{j(a_0x-\omega t)}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}16)$$

式中 $\alpha^2=a_0^2-k^2$；$\beta^2=a_0^2-k'^2$。对于泊松固体，$k'^2=3k^2$。代入(7-4-16)中并取实部，得到：

$$\left.\begin{aligned} u_0&=0.42C\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{V_R}x\right)\\ w_0&=0.62C\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{V_R}x\right)\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}17)$$

式中 C 是一个常数。这就表明，自由表面上各点的运动轨迹是

如图 7-11 所示的椭圆，其长短轴之比约为 3 ： 2 。

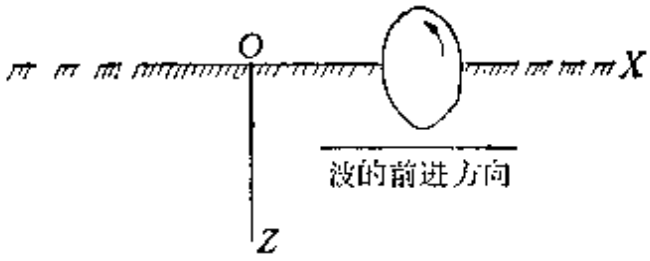


图7-11　瑞利波中各点的轨迹示意图

3.疏松覆盖层的影响

现在我们设想介质的自由表面上有一个非弹性覆盖层，如图7-12所示。设覆盖层的厚度可以忽略，而其单位面积的质量是 γ。

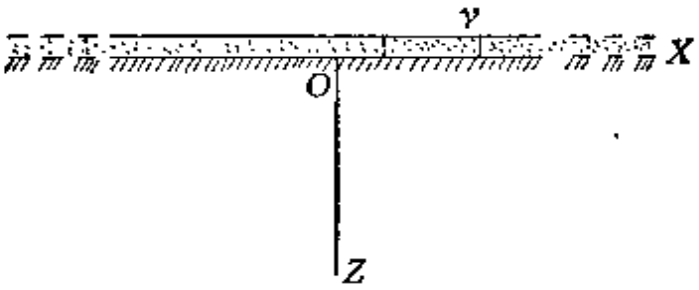


图7-12　介质表面上的非弹性疏松层

在这种条件下，问题的论证和前面基本相同，只有一个边值条件需要稍加修改。我们仍然取位函数如下：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x,\ z,\ t) &= Ae^{-\alpha z}e^{j(ax-\omega t)}\\ \Psi(x,\ z,\ t) &= Be^{-\beta z}e^{j(ax-\omega t)}\end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}18)$$

式中 $\alpha^2 = a^2 - k^2$，$\beta^2 = a^2 - k'^2$，$k = \dfrac{\omega}{V_p}$，$k' = \dfrac{\omega}{V_s}$，$a = \dfrac{\omega}{V_R}$。在 $z = 0$ 的平面上，由于覆盖层的存在，法向胁强分量不再等于零而是等于 $\gamma\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}$，切向胁强分量仍然等于零（因为覆盖层是非弹性物质）。于是，这时的边值条件变为：

$$\sigma_{zz}\Big|_{z=0} = \left(\lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_{z=0} = \gamma\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$\sigma_{zx}\Big|_{z=0} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_{z=0} = 0$$

或者写成：

$$\left.\begin{aligned}&\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)-2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\partial z}\right)\right]_{z=0}\\&=\left[\gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)\right]_{z=0}\\&\left[\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}\right]_{z=0}=0\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}19)$$

将(7-4-18)代入并化简，得到：

$$\left.\begin{aligned}&[\mu(a^2+\beta^2)-\gamma\alpha\omega^2]A+[2\mu a\alpha-\gamma a\omega^2]B=0\\&-2\alpha a A+(\alpha^2+\beta^2)B=0\end{aligned}\right\}\qquad(7\text{-}4\text{-}20)$$

令这一联立方程组的系数行列式等于零，就得到：

$$(a^2+\beta^2)[\mu(a^2+\beta^2)-\gamma\alpha\omega^2]-2\alpha a(2\mu a\beta-\gamma a\omega^2)=0\qquad(7\text{-}4\text{-}21)$$

这一方程中包含 ω，表明瑞利波的波速 $\frac{\omega}{a}$ 将是 ω 的函数：换句话说，**疏松覆盖层的存在将导致瑞利波的频散。**

附带指出，当 $\gamma\to 0$ 时，(7-4-21)就变成前面的瑞利方程(7-4-11)。

4.乐夫波 本章本来不考虑多层介质的问题，从而严格说来乐夫波应该放到下一章中去讨论。但是那样作也未免太死板，而且将造成内容的零乱和思路的中断，所以我们还是在这里讲讲乐夫波。

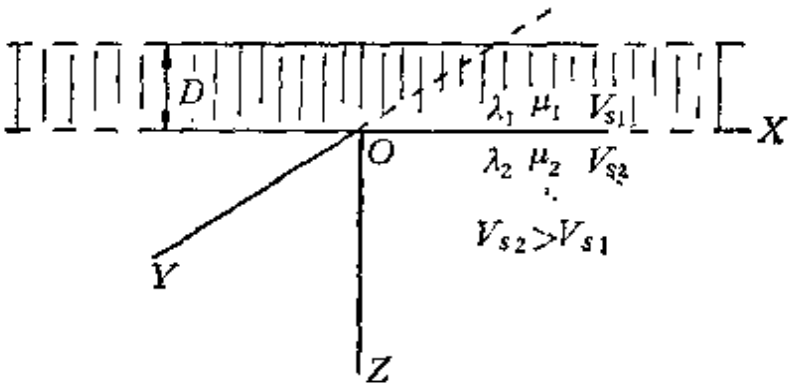


图7-13 介质表面上的低波速覆盖层

如图7-13所示，假设介质的表面上有一个厚度为 D 的覆盖层，其拉梅系数和横波速度为 λ_1、μ_1 和 V_{s1}，介质的拉梅系数和横波速度为 λ_2、μ_2 和 V_{s2}，且设 $V_{s2}>V_{s1}$。现在我们证明，在这种条件下，介质和覆盖层的分界面上可以形成 SH 型的面波。

座标系的取法如图7-13所示。我们试着寻求波动方程的这样一种解：首先，它是 SH 型的，就是说，弹性位移只有 v 分量；其次，在覆盖层的厚度方向上，振幅的分布有周期性；第三，在介质中，波场限于介质和覆盖层的分界面附近，并随着 z 值的增加而指数地衰减。现在就来证明这样的解确实是存在的。为此目的，我们试着令：

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= V_1(z)e^{j(ax-\omega t)}, \quad (-D<z<0) \\ v_2 &= V_2(z)e^{j(ax-\omega t)}, \quad (0<z) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}22)$$

现在先把 v_1 代入波动方程中：

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}-\frac{1}{V_{s1}^2}\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}=0$$

于是得到函数 $V_1(z)$ 所满足的常微分方程如下：

$$\frac{d^2V}{dz^2}+p^2V_1=0, \quad (-D<z<0) \qquad (7\text{-}4\text{-}23)$$

式中 $p^2=k_1^2-a^2$，$k_1^2=\dfrac{\omega^2}{V_{s1}^2}$。显然，(7-4-23)的解是：

$$V_1(z)=A\cos(pz)+B\sin(pz) \qquad (7\text{-}4\text{-}24)$$

式中 A、B 是积分常数。既然要求 $V_1(z)$ 是 z 的周期函数，p 就应该是实数，从而应有 $k_1>a$。同理，将 v_2 代入波动方程中：

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}-\frac{1}{V_{s2}^2}\frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2}=0$$

由此就得到函数 $V_2(z)$ 所满足的常微分方程：

$$\frac{d^2V_2}{dz^2}-b^2V_2=0 \qquad (7\text{-}4\text{-}25)$$

式中 $b^2=a^2-k_2^2$，$k_2^2=\dfrac{\omega^2}{V_{s2}^2}$。这一方程的解是：

$$V_2(z) = Ce^{-bz} + C'e^{+bz} \qquad (7\text{-}4\text{-}26)$$

式中 C、C' 是积分常数。在此我们要求 b 是实数，也就是要求 $k_1 > a > k_2$；这是可能的，因为我们假设了 $V_{s2} > V_{s1}$。另外，既然要求 $\lim_{z\to\infty} V_2(z) \neq \infty$，那就应该取 $C' = 0$。于是，我们就得到所求的波函数如下：

$$\left.\begin{aligned} &v_1(x,z,t) = [A\cos(pz) + B\sin(pz)]e^{j(ax-\omega t)} \\ &(-D < z < 0) \\ &v_2(x,z,t) = Ce^{-bz}e^{j(ax-\omega t)} \quad (0 < z) \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}27)$$

但是，这些波函数还应该满足本问题的边值条件。这些条件是：（1）在 $z = 0$ 的平面上，胁强和位移都应该连续；（2）在 $z = -D$ 的平面上，胁强应该等于零。写成数学表示式，就是：

$$\left.\begin{aligned} &(\sigma_{zy})_1 = (\sigma_{zy})_2 \longrightarrow \left(\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial z} - \mu_2\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)_{z=0} = 0 \\ &\text{位移连续} \longrightarrow (v_1 - v_2)_{z=0} = 0 \\ &\text{在自由表面上，} \left(\mu_1\frac{\partial v_1}{\partial z}\right)_{z=-D} = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}28)$$

将(7-4-27)代入并整理，得到：

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 pB + \mu_2 bC = 0 \\ &A - C = 0 \\ &\sin(pD)A + \cos(pD)B = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}29)$$

消去 A、B、C，就得到：

$$\operatorname{tg}(pD) = \frac{\mu_2 b}{\mu_1 p} \qquad (7\text{-}4\text{-}30)$$

根据前面的定义，我们有：

$$\left.\begin{aligned} &p = \sqrt{k_1^2 - a^2} = a\sqrt{\frac{k_1^2}{a^2} - 1}, \quad k_1^2 = \frac{\omega^2}{V_{s1}^2} \\ &b = \sqrt{a^2 - k_2^2} = a\sqrt{1 - k_2^2/a^2}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{V_{s2}^2} \\ &a = \frac{\omega}{V_L} \end{aligned}\right\} \qquad (7\text{-}4\text{-}31)$$

式中 V_L 应该理解为乐夫波的速度（沿 $+X$ 方向传播）。将这些关系代入(7-4-30)中，就得到乐夫波的**频散方程**：

$$\mu_2\sqrt{1-V_L^2/V_{s2}^2}=\mu_1\sqrt{(V_L^2/V_{s1}^2)-1}\,\mathrm{tg}\left[\frac{\omega D}{V_L}\sqrt{(V_L^2/V_{s1}^2)-1}\right] \tag{7-4-32}$$

我们看到，当 $a=\dfrac{\omega}{V_L}=\dfrac{2\pi}{\lambda_L}$ 很小即波长 λ_L 很大时，(7-4-32)的右端可以看成零，从而 $V_L\to V_{s2}$。当 a 很大从而 λ_L 很小时，$\mathrm{tg}[\ ]$ 很大，从而 $\sqrt{(V_L^2/V_{s1}^2)-1}$ 很小，也就是说 $V_L\to V_{s1}$。在中间情况，V_L 介于 V_{s1} 和 V_{s2} 之间。这就是说 V_L 是 ω 的单调函数。这种情况叫做**正常频散**。

附带指出，如果覆盖层并不存在而弹性介质在其自由表面附近有些不均匀从而造成了适当的波速梯度，则在表面附近也可能出现乐夫波。

现在看看覆盖层中的波场分布。我们有：

$$V_1(z)=A\cos(pz)+B\sin(pz)$$

由(7-4-29)可得：

$$A=-\frac{\cos(pD)}{\sin(pD)}B$$

代入上式，可以得到

$$V_1(z)=V_0\cos[p(D-z)] \tag{7-4-33}$$

式中 V_0 为一常数。由此式可见，在 $p(D-z)=(n+\dfrac{1}{2})\pi$ 处，也就是在 $z=D-\dfrac{2n+1}{2p}\pi$ 处($n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$)，$V_1(z)=0$；就是说，在这样一些平面上，波的振幅在任何时候都为零。这样的面叫做波的**节面**，具有节面或节线的波叫做（在 z 方向上的）**驻波**。换句话说，上述波函数在覆盖层厚度方向上表现着驻波的特点。

5.斯通利波　我们很容易想到一个问题：在任意两种均匀各向同性介质的分界面上，能不能形成某种面波呢？研究的结果是，可以形成瑞利型的面波，其振幅和强度随着向每一种介质内部的深入而指数地减弱。这就叫做斯通利波。

座标系的取法如图7-14所示。位函数在两种介质中分别满足如下的波动方程：

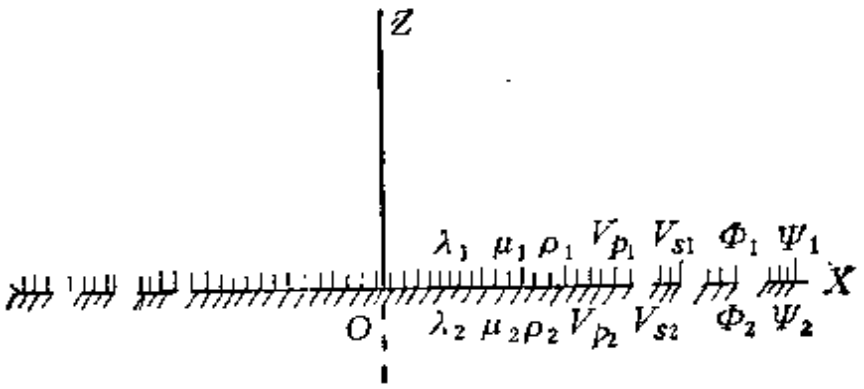


图7-14　两种介质的分界面

$$\left.\begin{aligned}
&\nabla^2\Phi_1-\frac{1}{V_{p1}^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}=0,\quad z>0\\
&\nabla^2\Psi_1-\frac{1}{V_{s1}^2}\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}=0,\quad z>0\\
&\nabla^2\Phi_2-\frac{1}{V_{p2}^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2}=0,\quad z<0\\
&\nabla^2\Psi_2-\frac{1}{V_{s2}^2}\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial t^2}=0,\quad z<0
\end{aligned}\right\}\qquad (7\text{-}4\text{-}34)$$

我们尝试着令：

$$\left.\begin{aligned}
&\Phi_1(x,z,t)=Ae^{-\alpha_1 z}e^{j(ax-\omega t)},\quad z>0\\
&\Psi_1(x,z,t)=Be^{-\beta_1 z}e^{j(ax-\omega t)},\quad z>0\\
&\Phi_2(x,z,t)=Ce^{+\alpha_2 z}e^{j(ax-\omega t)},\quad z<0\\
&\Psi_2(x,z,t)=De^{+\beta_2 z}e^{j(ax-\omega t)},\quad z<0
\end{aligned}\right\}\qquad (7\text{-}4\text{-}35)$$

式中 A、B、C、D 是常数，而且：

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_i=\sqrt{a^2-k_i^2},\quad \beta_i=\sqrt{a^2-k_i'^2}\\
&k_i=\frac{\omega}{V_{pi}},\quad k_i'=\frac{\omega}{V_{si}},\quad i=1,\ 2
\end{aligned}\right\}\qquad (7\text{-}4\text{-}36)$$

显然，(7-4-35)满足相应的波动方程，而且是随着向介质内部的深入而指数减弱的。式中的 a 应该理解为斯通利波的波矢量值，

也就是说，应该认为 $a=\frac{\omega}{V_{st}}=\frac{2\pi}{\lambda_{st}}$，这里 V_{st} 和 λ_{st} 分别表示斯通利波的波速和波长。

剩下来的工作就是适应边值条件了。在分界面 $z=0$ 上，应有：

$$\left.\begin{aligned}&(u_1-u_2)_{z=0}=0\\&(w_1-w_2)_{z=0}=0\\&(\sigma_{zz}^{(1)}-\sigma_{zz}^{(2)})_{z=0}=0\\&(\sigma_{zx}^{(1)}-\sigma_{zx}^{(2)})_{z=0}=0\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}4\text{-}37)$$

用位函数表示出来就是：

$$\left.\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\Psi_1}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}-\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right)_{z=0}=0\right\}\quad(7\text{-}4\text{-}38)$$

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}-\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}-\frac{\partial\Phi_2}{\partial z}+\frac{\partial\Psi_2}{\partial x}\right)_{z=0}=0\\&\left[(\lambda_1+2\mu_1)\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}\right)-2\mu_1\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\right.\right.\\&\left.+\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial x\partial z}\right)-(\lambda_2+2\mu_2)\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial z^2}\right)\\&\left.-2\mu_2\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x\partial z}\right)\right]_{z=0}=0\\&\mu_1\left(\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\right)_{z=0}\\&-\mu_2\left(\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial z^2}+2\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2\Psi_2}{\partial x^2}\right)_{z=0}=0\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}4\text{-}39)$$

将(7-4-35)代入，消去公因子并化简，得到：

$$\left.\begin{aligned}&jaA-\beta_1B-jaC-\beta_2D=0\\&-\alpha_1A-jaB-\alpha_2C+jaD=0\\&\mu_1(a^2+\beta_1^2)A+2j\mu_1\beta_1aB-\mu_2(a^2+\beta_2^2)C\\&+2j\mu_2\beta_2aD=0\\&-2j\mu_1\alpha_1aA+\mu_1(a^2+\beta_1^2)B-2j\mu_2\alpha_2aC\\&-\mu_2(a^2+\beta_2^2)D=0\end{aligned}\right\}\quad(7\text{-}4\text{-}40)$$

还是那话，作为 A、B、C、D 的齐次联立方程组，(7-4-40) 具有非零解的条件是它的系数行列式要等于零；就是说，我们应该有：

$$\begin{vmatrix} ja & -\beta_1 & -ja & -\beta_2 \\ -\alpha_1 & -ja & -\alpha_2 & ja \\ \mu_1(a^2+\beta_1^2) & 2j\mu_1\beta_1 a & -\mu_2(a^2+\beta_2^2) & 2j\mu_2\beta_2 a \\ -2j\mu_1\alpha_1 a & \mu_1(a^2+\beta_1^2) & -2j\mu_2\alpha_2 a & -\mu_2(a^2+\beta_2^2) \end{vmatrix} = 0 \tag{7-4-41}$$

这就是**斯通利波的频散方程**，式中 $a = \frac{\omega}{V_{st}}$。

斯通利波在理论上是存在的，但在地震勘探工作中不象瑞利波那样重要。

习题：1.自己总结瑞利波的特点，并和地震勘探中有效波的特点作一比较。

2.怎样证明在介质的自由表面上不能形成 SH 型的面波？

3.自己推导(7-4-16)式。

4.自己验算(7-4-20)式和(7-4-40)式。

5.在图 7-14 所示的分界面上，能否形成 SH 型的面波？

6.按照本节的理论，面波能量并不是严格地分布在自由表面或介质分界面上，而是分布在界面附近的薄层中。离开界面向介质内部前进，每前进一段距离 d_0，面波振幅就减小到原值的 $\frac{1}{e}$；试讨论这个特征距离 d_0 和面波波长的关系。

参 考 文 献

同[1.3]，[2.3]，[4.6]，[5.1]，[6.2]，[6.3]，[6.5]，[6.6]，[6.7]和[6.10]。

第八章　层状介质中弹性波的反射和透射

§.8-1.　本章小引

上一章讨论了只有一个分界面情况下弹性波的反射和透射。在那样的介质中，假定界面两侧的介质是“密接”的。当弹性波入射到那种介质的分界面上时，将产生反射和透射。并且证明了在一般情况下，当入射波只有纵波或横波成分时，反射波和透过波却同时具有纵波和横波成分。特殊情况下，例如当一个平面正弦弹性纵波垂直入射到两种介质的分界面上时，反射波和透过波中都没有横波成分。反射角和透射角相对于入射角都满足斯奈尔定律(反射定律和透射定律)。如果透过波或反射波的波速大于入射波的波速时，存在一个临界角。当入射角达到临界角时，透过波或反射波将沿界面“滑行”，而不进入第二种或第一种介质，即产生所谓“全反射”或类似“全反射”的现象。反射系数和透过系数（因面它们的能量分配）不仅与介质的波速和密度有关，而且与入射角有关。在某些条件下，还会在靠近分界面的薄层区域中出现某种形式的“面波”。以上种种讨论，只不过是关于波动方程的边值问题。分界面的作用在于提供了某些边值条件。

实际的地层剖面并不是单一的分界面，而是由各种不同岩层组成的多界面，即所谓的多层介质。因此，在上述各章基础上，进一步讨论弹性波在多层介质中的反射和透射，对地震勘探具有实际意义。

可以想象，多层介质是单一界面的两种介质的推广，只不过各波（入射波、反射波和透过波）在遇到新的界面时又要发生“分裂”，产生新的反射波和透过波等等。它们的能量分配（或者反射系数和透射系数）不仅与介质的弹性性质（波速和密度）有

关，而且与入射角的大小有关。因此，讨论多层介质的反射和透射，其数学计算是十分繁重的，只有在出现电子计算机之后，这种数值计算才有可能。

本章中，先讨论平面正弦波在多层介质中沿任意角度的入射情况，再讨论垂直入射的情况，最后讨论薄层问题。

§.8-2. 弹性波在水平多层介质中的反射和透射的基本公式

讨论弹性波在水平多层介质中的反射和透射时，我们不是讨论一个分界面，而是将多层介质的反射和透射问题作为一个整体加以分析。这种分析是基于一套递推公式的应用。

讨论平面正弦波入射的情况。假设有任意多层介质，所有的层都是固态的，在所有的层中纵波和横波都可以传播，这里只讨论 SV 波，不考虑 SH 波。在特殊情况下，我们假设层系的靠边介质是液态的，以只讨论整个层系纵波的反射和透射系数。

1.弹性波在水平多层介质中的反射和透射的基本公式 设有任意多层水平层状介质如图8-1所示。如果有一平面正弦纵波从介质1以入射角 θ_1 入射到第二层的顶而上，我们来看整个层系的反射和透射情况。先讨论第 n 层中弹性波场的分布，其可位于层系的中部，也可位于层系的边部。为了与地震勘探的实际工作相对照，并为讨论方便，我们将座标原点置于第 n 层与第 n

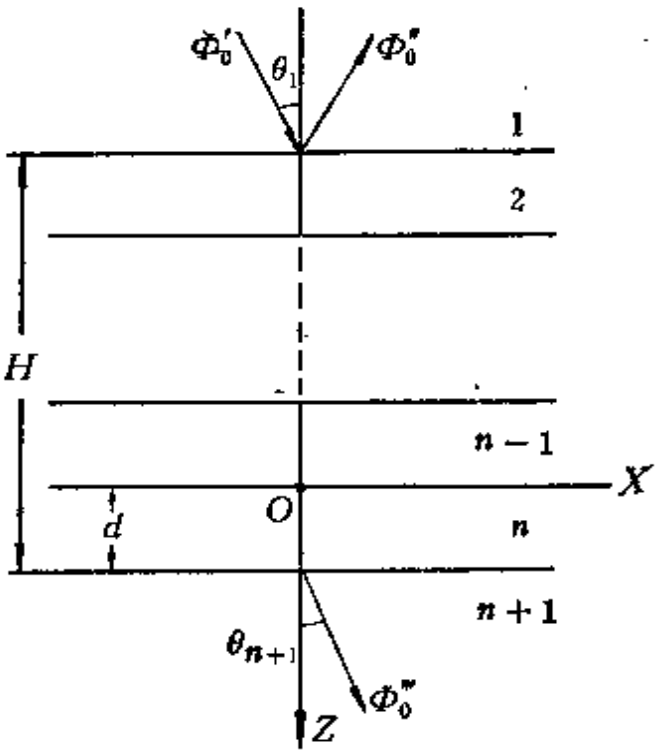


图8-1 水平多层介质及所用的符号

-1 层的分界面上，XOY 面平行于分界面，XOZ 面位于入射面上，并且 Z 轴向下为正。在这种座标系中，由于分界面的作用，在所讨论的 n 层中，将有沿正 Z 方向和负 Z 方向传播的纵波和横波系统。

从位函数出发讨论。层中纵波和横波的位函数可写成：

$$\begin{aligned}\Phi(x,z,t) &= (\Phi_0' e^{-j\alpha z} - \Phi_0'' e^{j\alpha z}) e^{j(ax-\omega t)} \\ \Psi(x,z,t) &= (\Psi_0' e^{-j\beta z} + \Psi_0'' e^{j\beta z}) e^{j(ax-\omega t)}\end{aligned} \qquad (8\text{-}2\text{-}1)$$

式中

$$\alpha = (k_n^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \qquad \beta = (k_n'^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} \qquad (8\text{-}2\text{-}2)$$

这里 $a = k_n \sin\theta_n = k_{n+1}\sin\theta_{n+1}$ 是波矢沿 X 轴的分量。根据场在分界面上连续的条件，a 对纵波、横波以及所有的层都是一样的。在现有情况下，场和 Y 座标无关，而且一切矢量都没有 Y 分量，因此，用位函数表示层中质点在任一点的速度分量为

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \\ v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial x}\end{aligned} \qquad (8\text{-}2\text{-}3)$$

而位移分量 u 和 w 可以从速度分量 v_x 和 v_z 简单地除以 $-j\omega$ 得到❶，即 $v_x = -j\omega u$，$v_z = -j\omega w$。

对于胁强张量的分量 σ_{zz}（法向分量）和 σ_{zx}（切向分量）可按胡克定律求得：

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= \lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_{zx} &= \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\end{aligned} \qquad (8\text{-}2\text{-}4)$$

❶注意，介质质点速度 u 与波在介质中传播的速度 V_p 或 V_s 不同：前者是层中介质质点传播的速度，即 $v = \frac{\partial s}{\partial t}$，s 是质点的位移向量，它的两个分量是 u 和 w，即 $v_x = \frac{\partial u}{\partial t}$，$v_z = \frac{\partial w}{\partial t}$；而后者是弹性扰动状态的传播速度，它是距离 r 对 t 的导数，即 v_p(或 v_s) $= \frac{\partial r}{\partial t}$。

勘强张量的分量通过(8-2-3)式与位函数联系起来。

我们用$v_x^{(n)}, v_z^{(n)}, \sigma_{zz}^{(n)}, \sigma_{zx}^{(n)}$表示$v_x, v_z, \sigma_{zz}, \sigma_{zx}$等量在第$n$层的下界面上（即$Z=d$时）的值，于是这些值可以通过将(8-2-1)代入(8-2-3)式，并令$Z=d$得到：

$$v_x^{(n)} = [j_a(\Phi_0' e^{-j\alpha d} + \Phi_0'' e^{j\alpha d}) - j\beta(-\Psi_0' e^{-j\beta d} + \Psi_0'' e^{j\beta d})] e^{j(ax-\omega t)}$$

在上式中令$P=\alpha d, Q=\beta d$，并将$e^{-j\alpha d}$等指数形式写成三角函数形式，我们就得到：

$$\begin{aligned} v_x^{(n)} = [&ja(\Phi_0'' - \Phi_0')\cos P - a(\Phi_0'' - \Phi_0')\sin P - j\beta(\Psi_0'' \\ &- \Psi_0')\cos Q + \beta(\Psi_0'' + \Psi_0')\sin Q] e^{j(ax-\omega t)} \end{aligned} \tag{8-2-5}$$

同样可以得到：

$$\begin{aligned} v_z^{(n)} = [&-\alpha(\Phi_0'' + \Phi_0')\sin P + j\alpha(\Phi_0'' - \Phi_0')\cos P \\ &- a(\Psi_0'' - \Psi_0')\sin Q + ja(\Psi_0'' + \Psi_0')\cos Q] e^{j(ax-\omega t)} \end{aligned} \tag{8-2-6}$$

将(8-2-5)，(8-2-6)式代入(8-2-4)式，有

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^{(n)} = \Big[&-\frac{j}{\omega}(\lambda^2 k^2 + 2\mu\alpha^2)(\Phi_0'' + \Phi_0')\cos P + \frac{1}{\omega}(\lambda k^2 \\ &+ 2\mu\alpha^2)(\Phi_0'' - \Phi_0')\sin P - \frac{2j\mu}{\omega} a\beta(\Psi_0'' - \Psi_0')\cos Q \\ &+ \frac{2\mu}{\omega} a\beta(\Psi_0'' + \Psi_0')\sin Q \Big] e^{j(ax-\omega t)} \end{aligned} \tag{8-2-7}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{zx}^{(n)} = 2\mu\Big[&\frac{\alpha a}{\omega}(\Phi_0'' + \Phi_0')\sin P - \frac{j\alpha a}{\omega}(\Phi_0'' - \Phi_0')\cos P \\ &+ \frac{1}{2\omega}(a^2 - \beta^2)(\Psi_0'' - \Psi_0')\sin Q + \frac{j}{2\omega}(\beta^2 - a^2) \\ &(\Psi_0'' + \Psi_0')\cos Q \Big] e^{j(ax-\omega t)} \end{aligned} \tag{8-2-8}$$

式中$k=(a^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}$。

式(8-2-5),(8-2-6),(8-2-7)和(8-2-8)可以联合写成矩阵形式:

$$\begin{Bmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n)} \end{Bmatrix} =$$

$$\begin{Bmatrix} ja\cos P & -a\sin P \\ -\alpha\sin P & j\alpha\cos P \\ -\frac{j}{\omega}(\lambda^2k^2+2\mu\alpha^2)\cos P & -\frac{1}{\omega}(\lambda k^2+2\mu\alpha^2)\sin P \\ \frac{\alpha a}{\omega}\sin P & -\frac{j\alpha a}{\omega}\cos P \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -j\beta\cos Q & \beta\sin Q \\ -\alpha\sin Q & ja\cos Q \\ -\frac{2j\mu}{\omega}a\beta\cos Q & \frac{2\mu}{\omega}a\beta\sin Q \\ \frac{1}{2\omega}(a^2-\beta^2)\sin Q & \frac{j}{2\omega}(\beta^2-a^2)\cos Q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_0''+\Phi_0' \\ \Phi_0''-\Phi_0' \\ \Psi_0''-\Psi_0' \\ \Psi_0''+\Psi_0' \end{Bmatrix}$$

(8-2-9)

为简短起见，式中的公共因子 $e^{j(ax-\omega t)}$ 已被省略掉。

在第 n 层的另一界面上（当 $Z=0$ 时），$v_x^{(n-1)}$，$v_z^{(n-1)}$，$\sigma_{zz}^{(n-1)}$，$\sigma_{zx}^{(n-1)}$ 可写成另一矩阵形式，这一矩阵只要令(8-2-9)式中的 $P=Q=0$ 就可以得到。考虑到场在分界面上连续的条件，胁强张量的两个分量和质点速度矢量的两个分量在越过分界面时保持不变，所以 $v_x^{(n-1)}$，$v_z^{(n-1)}$，$\sigma_{zz}^{(n-1)}$，$\sigma_{zx}^{(n-1)}$ 同时也就是第 $n-1$ 层下界面的胁强分量和速度分量值。在令(8-2-9)式中的 $P=Q=0$ 后得到：

$$\begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ja & 0 & -j\beta \\ 0 & j\alpha & 0 \\ -\frac{j}{\omega}(\lambda^2 k^2 + 2\mu\alpha^2) & 0 & -\frac{2j\mu}{\omega}a\beta \\ 0 & -\frac{j\alpha a}{\omega} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ ja \\ 0 \\ \frac{v}{2\omega}(\beta^2 - a^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0'' + \Phi_0' \\ \Phi_0'' - \Phi_0' \\ \Psi_0'' - \Psi_0' \\ \Psi_0'' + \Psi_0' \end{pmatrix} \tag{8-2-10}$$

对(8-2-10)式右端的系数矩阵求逆，解得：

$$\begin{pmatrix} \Phi_0'' + \Phi_0' \\ \Phi_0'' - \Phi_0' \\ \Psi_0'' - \Psi_0' \\ \Psi_0'' + \Psi_0' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{2ja}{x^2} & 0 & \frac{j\omega}{\mu x^3} & 0 \\ 0 & \frac{j(a^2+\beta^2)}{\alpha x^2} & 0 & \frac{2j\omega a}{\alpha x^2} \\ j\left(k\frac{\lambda}{\mu}\frac{}{\beta x^2} + 2\alpha^2\right) & 0 & \frac{ja\omega}{\beta\mu x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2ja}{x^2} & 0 & -\frac{2j\omega}{x^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

(8-2-11)

或记为：

$$\begin{Bmatrix} \Phi_0'' + \Phi_0' \\ \Phi_0'' - \Phi_0' \\ \Psi_0'' - \Psi_0' \\ \Psi_0'' + \Psi_0' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} & & v_x^{(n-1)} \\ & & v_z^{(n-1)} \\ b_{ij} & & \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ & & \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{Bmatrix} \quad (8\text{-}2\text{-}11')$$

将式(8-2-11)代入式(8-2-9)，我们就得到把n层的质点速度分量$v_x^{(n)}$，$v_z^{(n)}$及胁强分量$\sigma_{zz}^{(n)}$，$\sigma_{zx}^{(n)}$同相邻n－1层的速度分量$v_x^{(n-1)}$，$v_z^{(n-1)}$及胁强分量$\sigma_{zz}^{(n-1)}$，$\sigma_{zx}^{(n-1)}$联系起来的递推公式：

$$\begin{Bmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{Bmatrix} \quad (8\text{-}2\text{-}12)$$

式中

$$a_{11} = 2\sin^2\gamma\cos P + \cos 2\gamma\cos Q$$

$$a_{12} = j(\mathrm{tg}\theta\cos 2\gamma\sin P - \sin 2\gamma\sin Q)$$

$$a_{13} = \frac{\sin Q}{\rho v_P}(\cos Q - \cos P)$$

$$a_{14} = -2jv_s(\mathrm{tg}\theta\sin\gamma\sin P + \cos\gamma\sin Q)$$

$$a_{21} = j\left(\frac{v_s\cos\theta}{v_p\cos\gamma}\sin 2\gamma\sin P - \mathrm{tg}\gamma\cos 2\gamma\sin Q\right)$$

$$a_{22} = \cos 2\gamma\cos P + 2\sin^2\gamma\cos Q$$

$$a_{23} = -\frac{j}{\rho v_P}\left(\cos\theta\sin P + \mathrm{tg}\gamma\sin\theta\sin Q\right)$$

$$a_{24} = 2v_s\sin\gamma(\cos Q - \cos P)$$

$$a_{31} = 2\rho v_s\sin\gamma\cos 2\gamma(\cos Q - \cos P)$$

$$a_{32} = -j\rho\left(\frac{v_p\cos 2\gamma}{\cos\theta}\sin P + 4v_s\cos\gamma\sin^2\gamma\sin Q\right)$$

$$a_{33} = \cos 2\gamma\cos P + 2\sin^2\gamma\cos Q$$

$$a_{34} = 2j\rho v_s^2(\cos 2\gamma\,\mathrm{tg}\theta\sin P - \sin 2\gamma\sin Q)$$

$$a_{41} = -j\left(\frac{2}{v_p}\cos\theta\sin^2\gamma\sin P + \frac{\cos^2 2\gamma}{2v_s\cos\gamma}\sin Q\right)$$

$$a_{42} = \frac{\sin\theta\cos 2\gamma}{v_p}(\cos Q - \cos P)$$

$$a_{43} = \frac{j}{2\rho}\left(\frac{\sin 2\theta}{v_p^2}\sin P - \frac{\cos 2\gamma}{v_s^2}\mathrm{tg}\gamma\sin Q\right)$$

$$a_{44} = 2\sin^2\gamma\cos P + \cos 2\gamma\cos Q$$

其中

$$v_p = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad v_s = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{a}{k}, \qquad \sin\gamma = \frac{a}{k'}$$

角 θ 和 γ 可借斯奈尔定律简单地用入射角 θ_1 表示出来：

$$\frac{\sin\theta_1}{v_p^{(1)}} = \frac{\sin\theta}{v_p} = \frac{\sin\gamma}{v_s}$$

其中的 θ，γ，v_p 和 v_s 是指任意层的入射角及纵波和横波的传播速度，而与层的号码无关。如果$\left(v_p/v_p^{(1)}\right) > 1$，则当 $\sin\theta_1 > \left(v_p^{(1)}/v_p\right)$时有$\sin\theta > 1$，这时 θ 无实数值，透过波将沿界面“滑行”，而不进入另一种介质，产生在一个分界面情况下讨论过的所谓“全反射”现象。上面的讨论也适用于 γ 角，如果$\left(v_s/v_p^{(1)}\right) > 1$的话。

式(8-2-12)可以简写为：

$$\begin{bmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ -\frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ -\frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (8\text{-}2\text{-}12')$$

根据递推公式(8-2-12)，如果已经给出 v_x, v_z, σ_{zz}, σ_{zx} 在介质1和介质2之间分界面上的值（我们用 $v_x^{(1)}, v_z^{(1)}, \sigma_{zz}^{(1)}, \sigma_{zx}^{(1)}$ 表示），那么依次应用(8-2-12)，就可以求得当 n 取任意值时，这些量在 n 层同第 $n+1$ 层之间分界面上的值，它们象征性地写为：

$$\begin{bmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ -\frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(1)} \end{bmatrix}$$

(8-2-13)

其中$[a_k]$表示第 k 层的矩阵，其形式如(8-2-12)式右端中的系数矩阵。式(8-2-13)也可写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} v_x^{(n)} \\ v_z^{(n)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} \\ -\frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(1)} \end{bmatrix}$$

(8-2-14)

其中的合成矩阵 A_{11}，……，A_{44} 是矩阵$[a_2]$，……，$[a_n]$的乘积。

对于第 $n-1$ 层的底面（第 n 层的顶面）有：

$$\begin{bmatrix} v_x^{(n-1)} \\ v_z^{(n-1)} \\ \sigma_{zz}^{(n-1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & a_{n-1} & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & a_{n-2} & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} & & & \\ & a_2 & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{8-2-15}$$

把(8-2-15)式代入(8-2-11′)式，我们有：

$$\begin{bmatrix} \Phi_0'' + \Phi_0' \\ \Phi_0'' - \Phi_0' \\ \Psi_0'' - \Psi_0' \\ \Psi_0'' + \Psi_0' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & & \\ & b_n & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & a_{n-1} & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & & \\ & a_{n-2} & & \\ & & & \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} & & & \\ & a_2 & & \\ & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x^{(1)} \\ v_z^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \frac{1}{2\mu}\sigma_{zx}^{(1)} \end{bmatrix} \tag{8-2-16}$$

根据(8-2-16)，在已知各层参数 ρ，V_P，V_S，d 和 α,β,a 的情况下，如果已知第 1 层底面（或第 2 层顶面）的$v_x^{(1)}$，$v_z^{(1)}$(或位移分量$u^{(1)}$，$w^{(1)}$)和$\sigma_{zz}^{(1)}$，$\sigma_{zx}^{(1)}$值，即可算出任意第 n 层中的透射和反射纵波和横波的波函数的“振幅”值 Φ_0'，Φ_0''，Ψ_0'，Ψ_0''

2.弹性纵波在水平多层介质中的反射和透射系数 如果上述水平层状介质中的靠边的介质 1 和介质 $n+1$ 是液体，那么切向勘强$\sigma_{zx}^{(1)}$和$\sigma_{zx}^{(n)}$应当消失。这时，只考虑弹性纵波在整个层系中反射和透射的情形。因为目前地震勘探主要考虑纵波，所以讨论纵波在整个层系中的反射和透射，具有实际意义。

根据(8-2-14)式，我们有：

$$\frac{\sigma_{yx}^{(n)}}{2\mu} = A_{41}\,v_x^{(1)} + A_{42}\,v_z^{(1)} + A_{43}\sigma_{zz}^{(1)} + A_{44}\frac{\sigma_{zx}^{(1)}}{2\mu} \tag{8-2-17}$$

因为 $\sigma_{zx}^{(1)} = \sigma_{zx}^{(n)} = 0$，所以上式变为：

$$A_{41}v_x^{(1)} + A_{42}v_z^{(1)} + A_{43}\sigma_{zz}^{(1)} = 0 \tag{8-2-18}$$

同理有：

$$\begin{aligned} v_z^{(n)} &= A_{21}\,v_x^{(1)} + A_{22}v_z^{(1)} + A_{23}\sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} &= A_{31}\,v_x^{(1)} + A_{32}\,v_z^{(1)} + A_{33}\sigma_{zz}^{(1)} \end{aligned} \tag{8-2-19}$$

根据(8-2-18)式，将(8-2-19)式中的 $v_x^{(1)}$ 用 $v_z^{(1)}$ 和 $\sigma_{zz}^{(1)}$ 表示出来。

因为：

$$v_x^{(1)} = -\frac{A_{42}\,v_z^{(1)} + A_{43}\sigma_{zz}^{(1)}}{A_{41}}$$

代入(8-2-19)得：

$$\begin{aligned} v_z^{(n)} &= \left(A_{22} - \frac{A_{21}A_{42}}{A_{41}}\right)v_z^{(1)} + \left(A_{23} - \frac{A_{21}A_{43}}{A_{41}}\right)\sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} &= \left(A_{32} - \frac{A_{31}A_{42}}{A_{41}}\right)v_z^{(1)} + \left(A_{33} - \frac{A_{31}A_{43}}{A_{41}}\right)\sigma_{zz}^{(1)} \end{aligned} \tag{8-2-20}$$

令：

$$M_{22} = A_{22} - \frac{A_{21}A_{42}}{A_{41}}, \qquad M_{23} = A_{23} - \frac{A_{21}A_{43}}{A_{41}}$$

$$M_{32} = A_{32} - \frac{A_{31}A_{42}}{A_{41}}, \qquad M_{33} = A_{33} - \frac{A_{31}A_{43}}{A_{41}}$$

于是(8-2-20)式可写为：

$$\begin{aligned} v_z^{(n)} &= M_{22}v_z^{(1)} + M_{23}\,\sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(n)} &= M_{32}v_z^{(1)} + M_{33}\,\sigma_{zz}^{(1)} \end{aligned} \tag{8-2-21}$$

现在求整个层系的反射和透射系数。我们用 H 表示整个层系的总厚度，将座标原点置于第 1 层的下界面上。假定弹性纵波从

下标为 1 的液态介质中以入射角 θ_1 射入。这一介质中的入射波和反射波的合成位函数可写成：

$$\Phi_1 = [\Phi'_0 e^{-j\alpha_1 z} + \Phi''_0 e^{j\alpha_1 z}] e^{j(ax-\omega t)}$$
$$\alpha_1 = k_1 \cos\theta_1 \tag{8-2-22}$$

而横波的位函数 $\Psi_1 = 0$。

在固态层系另一面的液体中，只有透过的纵波：

$$\Phi_{n+1} = \Phi''_0 e^{-j\alpha_{n+1}(Z-H)} e^{j(ax-\omega t)}$$
$$\alpha_{n+1} = k_{n+1} \cos\theta_{n+1} \tag{8-2-23}$$

同样 $\Psi_{n+1} = 0$。

角 θ_{n+1} 和 θ_1 由关系式

$$k_1 \sin\theta_1 = k_{n+1} \sin\theta_{n+1}$$

相互联系。

由(8-2-3)和(8-2-4)式有：

$$v_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$
$$\sigma_{zz} = \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) = j \frac{\lambda}{\omega} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \tag{8-2-24}$$
$$= j \frac{\lambda}{\omega} \mathrm{div} \boldsymbol{V}$$

又因为 $\boldsymbol{V} = \mathrm{grad}\Phi$，所以：

$$\sigma_{zz} = j \frac{\lambda}{\omega} \nabla^2 \Phi = -j \frac{\lambda}{\omega} k^2 \Phi = -j\omega\rho\Phi \tag{8-2-25}$$

将(8-2-22)和(8-2-23)式代入(8-2-24)和(8-2-25)式，并分别令 $Z = 0$ 和 $Z = H$。同时，考虑到连续性的条件，法向速度和胁强张量的法向分量在第 n 层下界面的值 $v_z^{(n)}$ 和 $\sigma_{zz}^{(n)}$ 等于它们在液体中当 $Z = H$ 时的值。因此有

$$v_z^{(1)} = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = j\alpha_1 (\Phi''_0 - \Phi'_0)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = (-j\omega\rho_1 \Phi_1)_{z=0} = -j\omega\rho_1 (\Phi''_0 + \Phi'_0)$$

$$v_z^{(n)} = \left(\frac{\partial \Phi_{n+1}}{\partial z}\right)_{z=H} = -j\alpha_{n+1}\Phi_0'' \tag{8-2-26}$$

$$\sigma_{zz}^{(n)} = (-j\omega\rho_{n+1}\Phi_{n+1})_{z=H} = -j\omega\rho_{n+1}\Phi_0''$$

上述各式中都略去了公因子 $e^{j(\omega x-\omega t)}$。

将(8-2-26)代入(8-2-21)式中，便得到确定整个层系反射和透射系数的两个方程：

$$\begin{aligned} -j\alpha_{n+1}\Phi_0' &= M_{22}j\alpha_1(\Phi_0''-\Phi_0') - M_{23}j\omega\rho_1(\Phi_0''+\Phi_0') \\ -j\omega\rho_{n+1}\Phi_0'' &= M_{32}j\alpha_1(\Phi_0''-\Phi_0') - M_{33}j\omega\rho_1(\Phi_0''+\Phi_0') \end{aligned} \tag{8-2-27}$$

联立解(8-2-27)式，便得到反射系数

$$R_{pp} = \frac{\Phi_0''}{\Phi_0'} = \frac{M_{32}-Z_{n+1}M_{22}+(M_{33}-Z_{n+1}M_{23})Z_1}{M_{32}-Z_{n+1}M_{22}-(M_{33}-Z_{n+1}M_{23})Z_1} \tag{8-2-28}$$

其中 $Z_{n-1}=\omega\rho_{n+1}/\alpha_{n+1}$ 和 $Z_1=\omega\rho_1/\alpha_1$ 分别是位于层系底部和顶部液体的阻抗。

我们把透射系数定义为透射波中和入射波中的声压之比，即 $T_{PP}=\rho_{n+1}\Phi_0''/\rho_1\Phi_0'$，从同样的方程求得：

$$T_{pp} = \frac{\rho_{n+1}\Phi_0''}{\rho_1\Phi_0'} = \frac{2(M_{23}M_{32}-M_{22}M_{33})Z_{n+1}}{M_{32}-Z_{n+1}M_{22}-(M_{33}-Z_{n+1}M_{23})Z_1} \tag{8-2-29}$$

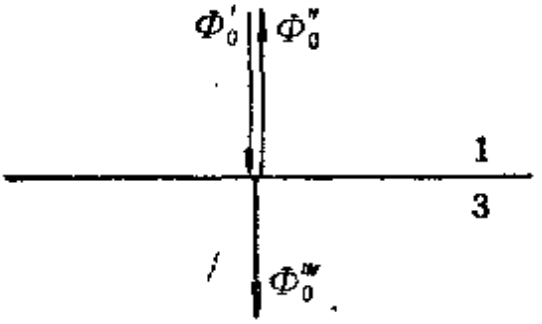


图8-2 单一界面、垂直入射的简单情况

最后，我们用最简单的单一分界面，并且入射波是垂直入射时的情况来验证上述公式。当只有一个分界面时，$n=2$。这时 $A_{ik}=a_{ik}$。因为第 n 层的厚度 $d=0$，所以 $p=Q=0$。而且因为是垂直入射，所以 $\theta=\gamma=0$。于是，式(8-2-12)右端的系数矩阵中，$a_{11}=a_{22}=a_{33}=a_{44}=1$；$a_{12}=a_{13}=a_{14}=a_{21}=a_{23}=a_{24}=a_{31}=a_{32}=a_{34}=a_{41}=a_{42}=a_{43}=0$，即 $A_{ij}=1\,(i=j)$；$A_{ij}=0\,(i\neq j)$，$i,j=1,2,3,4$。于是由(8-2-20)式得 $M_{22}=M_{33}=1$，$M_{23}=M_{32}=0$。分别

代入(8-2-28)和(8-2-29)式，我们就得到单一分界面垂直入射情况下平面纵波的反射系数和透射系数：

$$R_{pp}=\frac{Z_3-Z_1}{Z_3+Z_1}$$

$$T_{pp}=\frac{2Z_3}{Z_3-Z_1}=1+R_{pp} \qquad (8\text{-}2\text{-}30)$$

§.8-3. 当弹性波法线入射到水平层状介质时的公式(适用于地震勘探中波动方程偏移等的一套公式)

当弹性波垂直入射到水平层状介质时，只要令递推公式(8-2-12)中的$\theta=\gamma=0$即可。

为了得出与地震勘探中波动方程偏移及其他应用中相适应的一套公式，我们引入上行波与下行波的概念。

由于$\theta=\gamma=0$，即垂直入射情况，所以简化为一维波动方程解的问题。

已知一维纵波波动方程

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{1}{V_p^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t_2}$$

的通解为

$$\Phi(t,x)=f_1(V_pt-x)+f_2(V_pt+x)$$

函数$f_1(V_p-x)$仅与变量V_pt-x有关，且当V_pt-x不变时，函数$f_1(V_p-x)$亦不变。$V_pt-x=$常数等价于

$$\frac{d}{dt}(V_pt-x)=0$$

即$V_p=\frac{dx}{dt}$。这就是说，波$f_1(V_pt-x)$是以波速V_p沿$+Z$方向传播。在地震勘探中，Z轴取垂直向下为正，故称$f_1(V_pt-x)$为下行波。

同理，$f_2(V_p+z)$当$V_pt+z=$常数时，有$V_p=-\frac{dz}{dt}$，即波$f_2(V_pt+z)$是以波速V_p沿$-Z$方向传播，在地震勘探中称为上行波。

在通常的地震反射法中，由于进行了正常时差校正，因而能用法线入射来近似。又因为界面深度比起炮检距大得多，故可将地震波近似认为是平面波。这样，在水平层状介质中，平面法线入射只需解决一维波动方程问题，使问题的讨论大大简化。

下面讨论平面正弦波垂直入射到多层介质中的反射和透过问题。

1.一个分界面的情况

下行波：

$$D(t,z)=de^{j\omega(t-\frac{z}{V_p})} \qquad (8\text{-}3\text{-}1)$$

上行波：

$$U(t,z)=ue^{j\omega(t-\frac{z}{V_p})} \qquad (8\text{-}3\text{-}2)$$

(8-3-1)和(8-3-2)式是相对于座标原点$Z=0$（地面）面言，按它们沿$+Z$或$-Z$方向传播，区分为下行和上行。如果是相对于$Z=Z_i$的点来区分，则应为：

$$D(t,z)=de^{j\omega(t-\frac{z-z_i}{V_p})}$$

$$U(t,z)=ue^{j\omega(t+\frac{z-z_i}{V_p})} \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

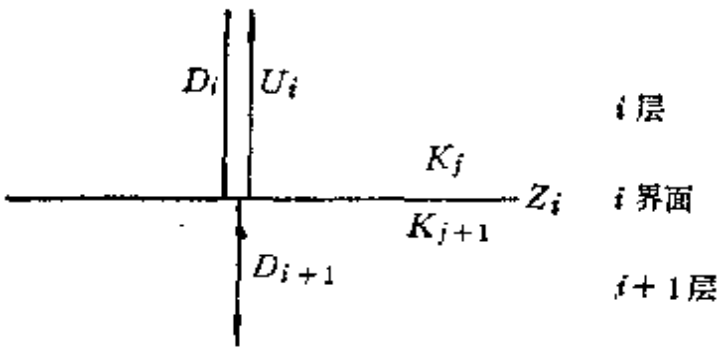


图8-3 第i界面的反射和透射情形

因而下行是沿$Z>Z_i$方向传播，上行是沿$Z<Z_i$方向传播。

设第i层与第$(i+1)$层之间的分界面为第i界面，其深度为$Z=Z_i$，第i层

介质的纵波速度为 V_{p1}，密度为 ρ_i，体积弹性模量 $K_i=\rho_i V_{pi}^2$，第 $(i+1)$ 层介质的相应参数为 V_{pi+1}，ρ_{i+1}，$K_{i+1}=\rho_{i+1}V_{pi+1}$（见图8-3）。

如果波自上方入射，则仅考虑第 i 界面而不考虑其他界面的影响，即只考虑第 i 界面一个分界面的反射和透射时，应有

$$\Phi_i(t,z)=D_i(t,z)+U_i(t,z) \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$
$$\Phi_{i+1}(t,z)=D_{i+1}(t,z)$$

对于平面纵波：

$$D_i(t,z)=d_i e^{j\omega(t-\frac{z-z_i}{V_{pi}})}$$

$$U_i(t,z)=u_i e^{j\omega(t+\frac{z-z_i}{V_{pi}})} \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

$$D_{i+1}(t,z)=d_{i+1}e^{j\omega(t-\frac{z-z_i}{V_{pi+1}})}$$

根据边界条件，在第 i 界面上应有

$$\Phi_i(t,z)/_{z=z_i}=\Phi_{i+1}(t,z)/_{z=z_i}$$
$$\frac{1}{\rho_i}\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\Big/_{z=z_i}=\frac{1}{\rho_{i+1}}\frac{\partial\Phi_{i+1}}{\partial z}\Big/_{z=z_i} \qquad (8\text{-}3\text{-}6)$$

因此有

$$d_i+u_i=d_{i+1}$$
$$\frac{1}{\rho_i}\left(-\frac{1}{V_{pi}}d_i+\frac{1}{V_{pi}}u_i\right)=-\frac{1}{\rho_{i+1}V_{pi+1}}d_{i+1} \qquad (8\text{-}3\text{-}7)$$

其中 u_i，d_i 等分别为上行与下行应力波振幅。联立解(8-3-7)式得应力波的反射系数 R_{pp} 和透过波系数 T_{pp} 分别为：

$$R_{pp}^{(i)}=\frac{u_i}{d_i}=\frac{\rho_{i+1}V_{pi+1}-\rho_i V_{pi}}{\rho_{i+1}V_{pi+1}+\rho_i V_{pi}}=\frac{Z_{i+1}-Z_i}{Z_{i+1}+Z_i}$$
$$T_{pp}^{(i)}=\frac{d_{i+1}}{d_i}=\frac{2\rho_{i+1}V_{pi+1}}{\rho_{i+1}V_{pi+1}+\rho_i V_{pi}}=\frac{2Z_{i+1}}{Z_{i+1}+Z_i} \qquad (8\text{-}3\text{-}8)$$

得到与(8-2-30)式相符的公式。

如果考虑位移波，则边界条件为

$$\Phi_i(t,z)/_{z=z_i} = \Phi_{i+1}(t,z)/_{z=z_i}$$

$$K_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial z}\Big/_{z=z_i} = K_{i+1}\frac{\partial \Phi_{i+1}}{\partial z}\Big/_{z=z_i} \qquad (8\text{-}3\text{-}9)$$

将(8-3-4)和(8-3-5)式代入，并令 $Z=Z_i$ 得

$$d_i + u_i = d_{i+1}$$

$$\frac{K_i}{V_{Pi}}(u_i - d_i) = -\frac{K_{i+1}}{V_{Pi+1}}d_{i+1}$$

或

$$\frac{u_i}{d_i} + 1 = -\frac{d_{i+1}}{d_i}$$

$$\rho_i V_{Pi}\left(\frac{u_i}{d_i} - 1\right) = -\rho_{i+1}V_{Pi+1}\frac{d_{i+1}}{d_i} \qquad (8\text{-}3\text{-}10)$$

其中 u_i 和 d_i 等分别为上行与下行位移波振幅。联立解(8-3-10)式得位移波在第 i 界面的反射系数和透射系数如下：

$$R_{pp}^{(i)'} = \frac{\rho_i V_{pi} - \rho_{i+1}V_{pi+1}}{\rho_i V_{pi} + \rho_{i+1}V_{pi+1}} = -\frac{Z_i - Z_{i+1}}{Z_i + Z_{i+1}}$$

$$T_{pp}^{(i)'} = \frac{2\rho_i V_{pi}}{\rho_i V_{pi} + \rho_{i+1}V_{pi+1}} = \frac{2Z_i}{Z_i + Z_{i+1}} = 1 + R_{pp}^{(i)'} \qquad (8\text{-}3\text{-}11)$$

它同应力波的反射系数大小相等但符号相反，即

$$R'_{pp} = -R_{pp}$$

而透射系数则不相等：

$$T'_{pp} \neq T_{pp}$$

应力波或位移波的反射系数和透射系数分别都满足下列关系：

$$T_{pp} = 1 + R_{pp}, \qquad T'_{pp} = 1 + R'_{pp} \qquad (8\text{-}3\text{-}12)$$

在陆地勘探中，用的是速度检波器，应当用(8-3-11)式的定义；在海上勘探中，用的是压力检波器，故应用(8-3-10)式的定义。

在上面的讨论中，波是由上方入射，即波由第 i 层入射到第 $(i+1)$ 层时的反射和透射情形。如果波由下方入射，即由第

$(i+1)$ 层进入第 i 层时，这时入射波是 U_{i+1}，反射波是 D_{i+1}，而透过波是 U_i，如图8-4所示。

三个波函数：

$$U_{i+1}=U_{i+1}e^{j\omega(t+\frac{z-z_i}{V_{pi+1}})}$$

$$D_{i+1}=d_{i+1}e^{j\omega(t-\frac{z-z_i}{V_{pi+1}})} \tag{8-3-13}$$

$$U_i=u_ie^{j\omega(t-\frac{z-z_i}{V_{pi}})}$$

按上述同样方法，可求得波由下方入射时应力波和位移波的反射系数和透射系数如下。

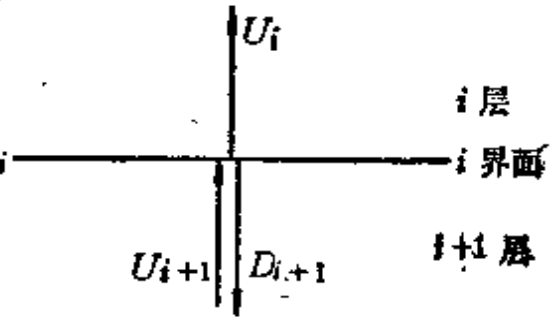


图8-4 波由下方入射的情形

应力波的反射系数和透射系数分别为：

$$\bar{R}_{pp}^{(i)}=\frac{d_{i+1}}{u_{i+1}}=\frac{\rho_iV_{pi}-\rho_{i+1}V_{pi+1}}{\rho_iV_{pi}+\rho_{i+1}V_{pi+1}}$$

$$\bar{T}_{pp}^{(i)}=\frac{u_i}{u_{i+1}}=\frac{2\rho_iV_{pi}}{\rho_iV_{pi}+\rho_{i+1}V_{pi+1}}=1+\bar{R}_{pp} \tag{8-3-14}$$

位移波的反射系数和透射系数分别为：

$$\bar{R}_{pp}^{(i)'}=\frac{d_{i+1}}{u_{i+1}}=\frac{\rho_{i+1}V_{pi+1}-\rho_iV_{pi}}{\rho_{i+1}V_{pi+1}+\rho_iV_{pi}}$$

$$\bar{T}_{pp}^{(i)'}=\frac{u_i}{u_{i+1}}=\frac{2\rho_{i+1}V_{pi+1}}{\rho_{i+1}V_{pi+1}+\rho_iV_{pi}} \tag{8-3-15}$$

比较(8-3-8)，(8-3-11)，(8-3-14)，(8-3-15)式，显然有

$$\bar{R}_{pp}=R'_{pp}=-\bar{R}'_{pp}=-R_{pp}$$

$$\bar{T}_{pp}=T'_{pp},\qquad \bar{T}'_{pp}=T_{pp} \tag{8-3-16}$$

2.多个界面的情况 下面来看第 i 界面的上下关系。因为第 i 界面不是孤立的。在多层介质中，它既有从上面来的入射波 D_i，也有从下面来的入射波 U_{i+1}，因而上行波 U_i 是由反射波 $R_{pp}^{(i)}D_i$ 及透射波 $\bar{T}_{pp}^{(i)}U_{i+1}$ 组成，下行波 D_{i+1} 则是由反射波

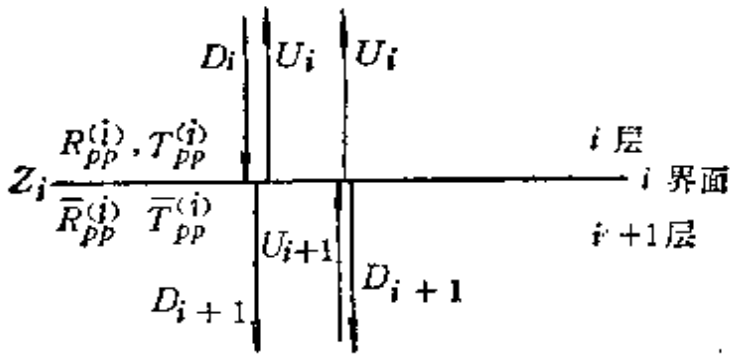


图8-5 第 i 界面的上、下关系

$\bar{R}_{pp}^{(i)}U_{i+1}$ 及透射波 $T_{pp}^{(i)}D_i$ 组成，见图8-5。故在第 i 界面上（即 $z=z_i$ 时）有

$$\begin{aligned} U_i(t,z_i) &= R_{pp}^{(i)}D_i(t,z_i) + \bar{T}_{pp}^{(i)}U_{i+1}(t,z_i) \\ D_{i-1}(t,z_i) &= T_{pp}^{(i)}D_i(t,z_i) + \bar{R}_{pp}^{(i)}U_{i+1}(t,z_i) \end{aligned} \qquad (8\text{-}3\text{-}17)$$

其中

$$D_i(t,z_i) = d_i e^{i\omega\left(t-\frac{z-z_i}{V_{pi}}\right)}\Big|_{z=z_i} = d_i e^{i\omega t}$$

$$U_i(t,z_i) = u_i e^{i\omega\left(t+\frac{z-z_i}{V_{pi}}\right)}\Big|_{z=z_i} = u_i e^{i\omega t}$$

$$D_{i+1}(t,z_i) = d_{i+1}\, e^{i\omega\left(t-\frac{z-z_i}{V_{pi+1}}\right)}\Big|_{z=z_i} = d_{i+1}e^{i\omega t}$$

$$U_{i+1}(t,z_i) = u_{i+1}\, e^{i\omega\left(t+\frac{z-z_i}{V_{i+1}}\right)}\Big|_{z=z_i} = u_{i-1}e^{i\omega t}$$

(8-3-17)式也可用矩阵表示为：

$$\begin{pmatrix} -\bar{T}_{PP}^{(i)} & 0 \\ -\bar{R}_{PP}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_{i+1}(t,z_i) \\ D_{i+1}(t,z_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & R_{PP}^{(i)} \\ 0 & T_{PP}^{(i)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_i(t,z_i) \\ D_i(t,z_i) \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}18)$$

上式矩阵可进一步改写为：

$$\begin{pmatrix} U_{i+1}(t,z_i) \\ D_{i+1}(t,z_i) \end{pmatrix} = \frac{adj\,M}{|M|}\begin{pmatrix} -1 & R_{PP}^{(i)} \\ 0 & T_{PP}^{(i)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_i(t,z_i) \\ D_i(t,z_i) \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}19)$$

其中

$$M=\begin{pmatrix} -\overline{T}_{PP}^{(i)} & 0 \\ -\overline{R}_{PP}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}$$

$adj\,M$ 为矩阵 M 的伴随矩阵，$|M|$ 为矩阵 M 的行列式，即：

$$M^{-1}=\frac{adj\,M}{|M|}=-\frac{1}{\overline{T}_{PP}^{(i)}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\overline{R}_{PP}^{(i)} & -\overline{T}^{(i)}_{PP} \end{pmatrix}$$

利用 $R_{PP}^{(i)}=-\overline{R}_{PP}^{(i)}$ 及 $T_{PP}^{(i)}=1-\overline{R}_{PP}^{(i)}$ 的关系可得：

$$M^{-1}\begin{pmatrix} -1 & R_{PP}^{(i)} \\ 0 & T_{PP}^{(i)} \end{pmatrix}=-\frac{1}{T_{PP}^{(i)}}\begin{pmatrix} -1 & R_{PP}^{(i)} \\ -\overline{R}_{PP}^{(i)} R_{PP}^{(i)}-\overline{R}_{PP}^{(i)} & -T_{PP}^{(i)}\overline{T}_{PP}^{(i)} \end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\overline{T}_{PP}^{(i)}}\begin{pmatrix} 1 & \overline{R}_{PP}^{(i)} \\ \overline{R}_{PP}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}$$

将上式代入(8-3-19)式得到：

$$\begin{pmatrix} U_{i+1}(t,z_i) \\ D_{i+1}(t,z_i) \end{pmatrix}=\frac{1}{\overline{T}_{PP}^{(i)}}\begin{pmatrix} 1 & \overline{R}_{PP}^{(i)} \\ \overline{R}_{PP}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U_1(t,z_1) \\ D_1(t,z_1) \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}20)$$

这个矩阵关系将第 i 界面的上下波相互联系起来了。

再看第 i 层上顶部与下底部之间的关系。设第 i 界面是第 i 层的底面，第(i-1)界面是第 i 层的顶面，如图 8-6 所示。波在第 i 层内的双程旅行时为 τ 毫秒，则层厚可以 $\tau V_{pi}/2$ 来表示。如底面的座标为 z_i，则顶面的座标为 $z_i-\frac{\tau V_{pi}}{2}$。如不考虑层内

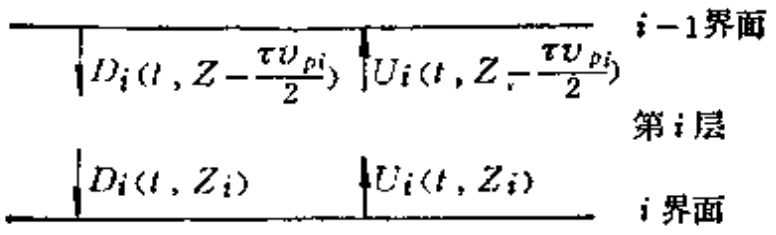


图8-6 层内的反射和透射

的能量弥散现象，上下之间的波将仅有时间延迟关系，而振幅不变。如底面的上行波、下行波分别为：

$$U_i(t,z_i)=u_i e^{j\omega t}$$

$$D_i(t,z_i)=d_i e^{j\omega t}$$

则顶部的上行波、下行波分别为：

$$U_i\left(t,z_i-\frac{\tau V_{pi}}{2}\right)=u_i e^{j\omega\left(t+\frac{z-z_i}{V_{pi}}\right)}\Big|_{z=z_i-\frac{\tau V_{pi}}{2}}$$

$$=u_i e^{j\omega t-j\omega\frac{\tau}{2}}=U_i(t,z_i)e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}$$

$$D_i\left(t,z_i-\frac{\tau V_{pi}}{2}\right)=d_i e^{j\omega\left(t-\frac{z-z_i}{V_{pi}}\right)}\Big|_{z=z_i-\frac{\tau V_{pi}}{2}}$$

$$=d_i e^{j\omega t+j\omega\frac{\tau}{2}}=D_i(t,z_i)e^{j\omega\frac{\tau}{2}}$$

令 $Z=e^{-j\omega\tau}$，$\Delta_i=\frac{\tau V_{pi}}{2}$，则有

$$U_i(t,z_i)=U_i(t,z_i-\Delta_i)Z^{-\frac{1}{2}}$$

$$D_i(t,z_i)=D_i(t,z_i-\Delta_i)Z^{\frac{1}{2}}$$

写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix}U_i(t,z_i)\\D_i(t,z_i)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Z^{-\frac{1}{2}}&0\\0&Z^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_i(t,z_i-\Delta_i)\\D_i(t,z_i-\Delta_i)\end{pmatrix}\qquad(8\text{-}3\text{-}21)$$

将(8-3-21)代入(8-3-20)式，得到联系 i 层与 $(i+1)$ 层的递推关系式：

$$\begin{pmatrix}U_{i+1}(t,z_i)\\D_{i+1}(t,z_i)\end{pmatrix}=\frac{1}{T_{pp}^{(i)}}\begin{pmatrix}1&R_{pp}^{(i)}\\R_{pp}^{(i)}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z^{-\frac{1}{2}}&0\\0&Z^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_i(t,z_i-\Delta_i)\\D_i(t,z_i-\Delta_i)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{Z^{-\frac{1}{2}}}{T_{pp}^{(i)}}\begin{pmatrix}1&ZR_{pp}^{(i)}\\R_{pp}^{(i)}&Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_i(t,z_i-\Delta_i)\\D_i(t,z_i-\Delta_i)\end{pmatrix}\qquad(8\text{-}3\text{-}22)$$

这个递推公式将各层以上顶面为基准互相联系起来了。如果从第

1层开始，直至第 N 层，顺次应用（8-3-22）式，在应用 N 次之后，将得：

$$\begin{pmatrix} U_{N+1} \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \frac{Z^{-N/2}}{\overline{T}_{pp}^{(1)}\overline{T}_{pp}^{(2)}\cdots\overline{T}_{pp}^{(N)}} \begin{pmatrix} 1 & Z\overline{R}_{pp}^{(N)} \\ \overline{R}_{pp}^{(N)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & Z\overline{R}_{pp}^{(N-1)} \\ \overline{R}_{pp}^{(N-1)} & 1 \end{pmatrix} \cdots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & Z\overline{R}_{pp}^{(1)} \\ \overline{R}_{pp}^{(1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}2\text{-}23)$$

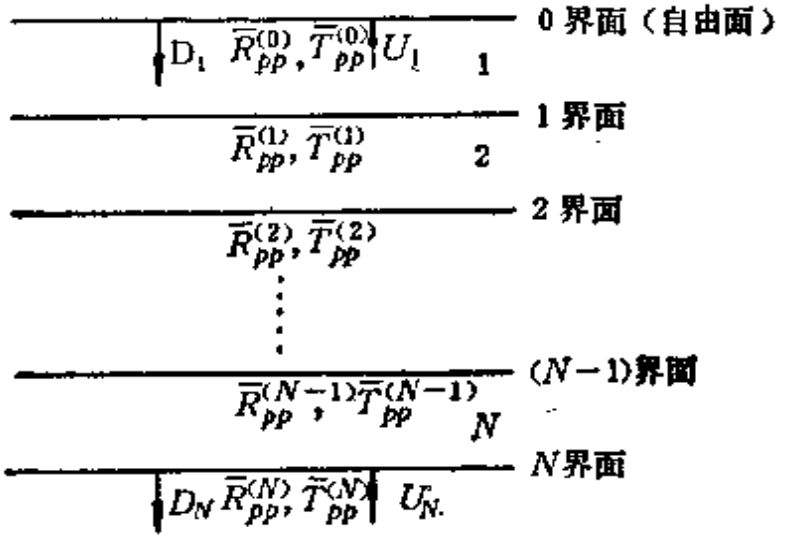


图8-7　多层介质中的上行波与下行波

这样，我们知道第1层顶面的上行波与下行波，即可求得第 $N+1$ 层顶面（根据连续性条件，即第 N 层底面）的下行波与上行波。(8-3-23)式就是 N 层多层介质下行波和上行波的基本关系式。

3.传输矩阵　将(8-3-22)式的右端系数矩阵记为 M_1，即：

$$M_i = \frac{Z^{\frac{1}{2}}}{\overline{T}_{pp}^{(i)}} \begin{pmatrix} 1 & Z\overline{R}_{pp}^{(i)} \\ \overline{R}_{pp}^{(i)} & Z \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}24)$$

M_i 称为第 i 层的层矩阵，它表示波通过第 i 层时所受到的影响。由于它只与该层的弹性性质有关，可看成是该层的一种特性阻抗。(8-3-23)式中各个层矩阵的乘积记为 $(M)_N$，即：

$$(M)_N = \prod_{i=1}^{N} M_i \qquad (8\text{-}3\text{-}25)$$

$(M)_N$ 称为多层介质系统的系统矩阵。它表征整套地层对波传播的影响。因为它与该整套地层的弹性性质有关，可看成是该整套地层的系统特性阻抗。N 层的系统特性阻抗又可表示为：

$$(M)_N = \frac{Z^{-N/2}}{\overline{T}_{PP}^{(N)}} \begin{pmatrix} F_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_N(Z) & Z^N F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}26)$$

其中

$$\overline{T}_{PP}^{(N)} = \overline{T}_{PP}^{(1)}\overline{T}_{PP}^{(2)}\cdots\cdots\overline{T}_{PP}^{(N)} = \prod_{i=1}^{N}\overline{T}_{PP}^{(i)} = \prod_{i=1}^{N}\left(1+\overline{R}_{PP}^{(i)}\right) \qquad (8\text{-}3\text{-}27)$$

合成矩阵

$$\begin{pmatrix} F_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_N(Z) & Z^N F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix}$$

是矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & Z\overline{R}_{PP}^{(i)} \\ \overline{R}_{PP}^{(i)} & Z \end{pmatrix} \quad i = 1,2,\cdots\cdots N$$

的乘积。其中：

$$F_N(Z) = 1 + f_1 Z + f_2 Z^2 + \cdots\cdots + f_{N-2}Z^{N-2} + \overline{R}_{PP}^{(1)}\overline{R}_{PP}^{(N)}Z^{N-1} \qquad (8\text{-}3\text{-}28)$$

$$G_N(Z) = \overline{R}_{PP}^{(N)} + g_1 Z + g_2 Z^2 + \cdots\cdots + g_{N-2}Z^{N-2} + \overline{R}_{PP}^{(1)}Z^{N-1} \qquad (8\text{-}3\text{-}29)$$

$F_N(Z)$ 和 $G_N(Z)$ 均是最高阶为 $(N-1)$ 的 Z 的 N 项多项式，而 $F_N\left(\frac{1}{Z}\right)$ 和 $G_N\left(\frac{1}{Z}\right)$ 则为其复共轭多项式。多项式的系数 f_1，f_2，

……f_{N-2}包含着偶数幂的反射系数$\overline{R}_{pp}$的连乘积，而$g_1, g_2, \cdots\cdots$，g_{N-2}则包含着奇数幂的反射系数$\overline{R}_{pp}$的连乘积。因此当反射系数$\overline{R}_{pp}$改变符号时，多项式$G_N(Z)$将改变符号，而$F_N(Z)$则保持不变。

当有$(N+1)$层时，$(N+1)$层系统的层矩阵连乘积$(M)_{N+1}$可写成：

$$(M)_{N+1} = \frac{Z^{-(N+1)/2}}{\overline{T}_{pp}^{(N+1)}} \begin{pmatrix} F_{N+1}(Z) & Z^{N+1}G_{N+1}\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_{N+1}(Z) & Z^{N+1}F_{N+1}\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix} \tag{8-3-30}$$

由于$(M)_{N+1} = M_{N+1}(M)_N$，因此：

$$\begin{aligned}(M)_{N+1} &= \frac{Z^{-1/2}\ Z^{-N/2}}{\overline{T}_{pp}^{(N+1)}\ \overline{T}_{pp}^{(N)}} \begin{pmatrix} 1 & \overline{R}_{pp}^{(N+1)}Z \\ \overline{R}_{pp}^{(N+1)} & Z \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} F_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_N(Z) & Z^N F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{Z^{-(N+1)/2}}{\overline{T}_{pp}^{(N+1)}} \begin{pmatrix} F_N(Z) + \overline{R}_{pp}^{(N+1)}ZG_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) + \overline{R}_{pp}^{(N+1)}F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ \overline{R}_{pp}^{(N+1)}F_N(Z) + ZG_N(Z) & \overline{R}_{pp}^{(N+1)}Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) + Z^{N+1}F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{8-3-31}$$

比较(8-3-30)和(8-3-31)两式的右端，可得迭代关系：

$$\begin{aligned} F_{N+1}(Z) &= F_N(Z) + \overline{R}_{pp}^{(N+1)}Z\,G_N(Z) \\ G_{N+1}(Z) &= \overline{R}_{pp}^{(N+1)}F_N(Z) + ZG_N(Z) \end{aligned} \tag{8-3-32}$$

并由(8-3-28)和(8-3-29)式可知，迭代计算的初值各为：

$$F_1(Z) = 1,\quad G_1(Z) = \overline{R}_{pp}^{(1)} \tag{8-3-33}$$

从而令$N=1,2,3,\cdots\cdots$，由式(8-3-32)和(8-3-33)可以计算出任何层的层矩阵连乘积的各元素。

所以将(8-3-26)式代入(8-3-23)式得：

$$\begin{pmatrix} U_{N+1} \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \frac{Z^{-N/2}}{\overline{T}_{pp}^{(N)}} \begin{pmatrix} F_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_N(Z) & Z^N F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ D_1 \end{pmatrix} \tag{8-3-34}$$

它可写成一组联立方程：

$$U_{N+1} = \frac{1}{\overline{T}_{pp}^{(N)}} \left[Z^{-N/2} F_N(Z) U_1 + Z^{N/2} G_N\left(\frac{1}{Z}\right) D_1 \right]$$

$$D_{N+1} = \frac{1}{T_{pp}^{(N)}} \left[Z^{-N/2} G_N(Z) U_1 + Z^{N/2} F_N\left(\frac{1}{Z}\right) D_1 \right] \tag{8-3-35}$$

联立解上述方程得：

$$U_1 = \frac{Z^{N/2}}{F_N(Z)} \left[\overline{T}_{pp}^{(N)} U_{N+1} - Z^{N/2} G_N\left(\frac{1}{Z}\right) D_1 \right]$$

$$D_{N+1} = \frac{Z^{N/2}}{F_N(Z)} \left(Z^{-N/2} G_N(Z) U_{N+1} + \frac{F_N(Z) F_N\left(\frac{1}{Z}\right) - G_N(Z) G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{T_{pp}^{(N)}} D_1 \right) \tag{8-3-36}$$

上式可写成矩阵形式为：

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \frac{Z^{N/2}}{F_N(Z)} \begin{pmatrix} \overline{T}_{pp}^{(N)} & \\ Z^{-N/2} G_N(Z) & \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -Z^{N/2} G_N\left(\frac{1}{Z}\right) & \\ \dfrac{F_N(Z) F_N\left(\frac{1}{Z}\right) - G_N(Z) G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{T_{PP}^{(N)}} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{N+1} \\ D_1 \end{pmatrix}$$

$$= (A)_N \begin{pmatrix} U_{N+1} \\ D \end{pmatrix} \qquad (8\text{-}3\text{-}37)$$

这样就把多层介质系统的输入 U_{N+1} 与 D_1 同输出 U_1 与 D_{N+1} 联系了起来。其中联系矩阵 $(A)_N$ 是表示传播介质本身的物理特性的传递矩阵，亦称传输矩阵。波在多层介质中传播时将有振幅和相位的变化，传输矩阵 $(A)_N$ 就是这种变化的数学描述。

进一步将 $(A)_N$ 简化。由式(8-3-24)和(8-3-25)可求出层矩阵的连乘积的行列式应为：

$$|M|_N = \prod_{i=1}^{N} |M|_i = \prod_{i=1}^{N} \frac{Z^{-i/2}}{T_{PP}^{(i)}} \begin{vmatrix} 1 & Z^i R_{PP}^{(i)} \\ R_{PP}^{(i)} & Z^i \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} \frac{Z^{i/2}}{T_{PP}^{(i)}} \left\{1 - R_{PP}^{(i)2}\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{N} Z^{i/2} \frac{\left(1 + R_{PP}^{(i)}\right)\left(1 - R_{PP}^{(i)}\right)}{T_{PP}^{(i)}} = \prod_{i=1}^{N} Z^{i/2} T_{PP}^{(i)}$$

$$= Z^{N/2} T_{PP}^{(N)} \qquad (8\text{-}3\text{-}38)$$

又由(8-3-26)式得：

$$|M|_N = \frac{Z^{-N/2}}{T_{PP}^{(N)}} \begin{vmatrix} F_N(Z) & Z^N G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \\ G_N(Z) & Z^N F_N\left(\frac{1}{Z}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \frac{Z^{N/2}}{\overline{T}_{pp}^{(N)}} \left[F_N(Z) F_N\left(\frac{1}{Z}\right) - G_N(Z)\, G_N\left(\frac{1}{Z}\right) \right]$$

(8-3-39)

比较(8-3-38)和(8-3-39)式，恒有：

$$F_N(Z)F_N\left(\frac{1}{Z}\right) - G_N(Z)\, G_N\left(\frac{1}{Z}\right) = T_{pp}^{(N)}\, \overline{T}_{pp}^{(N)} \quad (8\text{-}3\text{-}40)$$

代入(8-3-37)式得：

$$(A)_N = \begin{pmatrix} Z^{N/2} \dfrac{\overline{T}_{pp}^{(N)}}{F_N(Z)} & -Z^N \dfrac{G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{F_N(Z)} \\ \dfrac{G_N(Z)}{F_N(Z)} & Z^{N/2} \dfrac{T_{pp}^{(N)}}{F_N(Z)} \end{pmatrix}$$

其中$\overline{T}_{pp}^{(N)}$是多层介质系统的上行透射系数，$T_{pp}^{(N)}$是下行透射系数：

$$\overline{T}_{pp}^{(N)} = \prod_{i=1}^{N} \overline{T}_{pp}^{(i)}$$

$$T_{pp}^{(N)} = \prod_{i=1}^{N} T_{pp}^{(i)}$$

于是输出、输入方程变为：

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z^{N/2} \dfrac{\overline{T}_{pp}^{(N)}}{F_N(Z)} & -Z^N \dfrac{G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{F_N(Z)} \\ \dfrac{G_N(Z)}{F_N(Z)} & Z^{N/2} \dfrac{T_{pp}^{(N)}}{F_N(Z)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{N+1} \\ \\ D_1 \end{pmatrix}$$

(8-3-41)

这样，我们在N层多层介质中，知道了第1界面的下行波和第N界面的上行波，就可以求出第1界面的上行波和第N界面的下行波。写成(8-3-41)式的形式，就将平面正弦纵波垂直入射到多层水平层状介质的传播理论同网络理论一致起来。

式(8-3-41)又可写为：

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_N)_{11} & (A_N)_{12} \\ (A_N)_{21} & (A_N)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{N+1} \\ D_1 \end{pmatrix}$$

其中

$$(A_N)_{11} = Z^{N/2} \frac{T_{PP}^{(N)}}{F_N(Z)}$$

是下方入射时的透过传递函数，

$$(A_N)_{21} = \frac{G_N(Z)}{F_N(Z)}$$

是下方入射时的反射传递函数；

$$(A_N)_{12} = -Z^N \frac{G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{F_N(Z)}$$

是上方入射时的反射传递函数，

$$(A_N)_{22} = Z^{N/2} \frac{T_{PP}^{(N)}}{F_N(Z)}$$

是上方入射时的透射传递函数。

设激发震源 D_1 位于地面，并在地面接收反射波 U_1，这时除透过波 D_{N+1} 外，在第$(N+1)$层中不存在上行波 U_{N+1}。设激发脉冲为 $D_1(Z)=1$，则输入、输出方程变为：

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ D_{N+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (A_N)_{11} & (A_N)_{12} \\ (A_N)_{21} & (A_N)_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

于是得到上方入射时的反射波 U_1 及透过波 D_{N+1} 各为：

$$\begin{aligned} U_1 &= (A_N)_{12} = -Z^N G\left(\frac{1}{Z}\right) \Big/ F_N(Z) \\ D_{N+1} &= (A_N)_{22} = Z^{N/2} T_{PP}^{(N)} \Big/ F_N(Z) \end{aligned} \qquad (8\text{-}3\text{-}42)$$

由此可知，在物理意义上$(A_N)_{12}$是输入为δ脉冲时的上方入射的反射传递函数，$(A_N)_{22}$是输入为δ脉冲时的上方入射的透射传递

函数。同理可以证明，$(A_N)_{21}$ 是下方入射时的反射传递函数，$(A_N)_{11}$ 是下方入射时的透射传递函数。

注意，反射传递函数$(A_N)_{12}$与$(A_N)_{21}$存在下述关系：

$$(A_N)_{12}\cdot(A_N)^*_{12}=(A_N)_{21}\cdot(A_N)^*_{21}=\frac{G_N(Z)\,G_N\left(\frac{1}{Z}\right)}{F_N(Z)\,F_N\left(\frac{1}{Z}\right)}$$

式中 * 号表示复共轭。它表明只要激发震源形式不变，上方入射和下方入射的反射波的能量是相等的，这是因为反射系数 $R^{(N)}_{PP}$ 与 $\overline{R}^{(N)}_{PP}$ 在数值上相等，只差一个符号。因此震源与接收位置互易后，反射波能量不变，它们是可互易的。

但对于透射波则并非如此。由于上方入射和下方入射的透射系数不等，即 $T^{(N)}_{PP}\neq\overline{T}^{(N)}_{PP}$，因此无论上方入射和下方入射的透射波或透射波的能量均不相等：

$$(A_N)_{11}\neq(A_N)_{22}$$

$$(A_N)_{11}(A_N)^*_{11}\neq(A_N)_{22}(A_N)^*_{22}$$

其中 * 号亦表示复共轭。因此震源与接收点互易位置后，对于透射波不能保证有相同的观测结果。

§.8-4. 地震勘探中的薄层反射问题

本章的前几节，讨论了多层介质中地震波的传播问题。在那些讨论中，认为每一个层都是比较厚的，即地层厚度 Δh 远大于地震波的波长 λ，或地震波垂直通过这个层的来回反射时间 τ 远大于地震波的视周期 T。（地震波的波长 λ 一般在 70～100 米左右）。在这种情况下，一个地层的上、下界面的反射波是不会发生叠加的。相反，如果地层厚度 $\Delta h\ll\lambda$ 或 $\tau\ll T$，则这种地层上下界面的波动将会发生明显的干涉和叠加，使每一层面所形成的波动在强度变化及波形特点各方面都会具有与厚层不同的特点。这样的地层，在地震勘探中称为“薄层”。必须明确，这种意义下的薄层，不仅考虑层本身绝对厚度的大小，还要考虑到所

研究波动的频率（或波长）的大小。

在地震勘探中讨论这个问题是有实际意义的。因为在实际地层剖面中常常存在这样的薄层，在地层厚度沿横向发生明显变化（如地层发生尖灭等）时，一个“厚层”就会渐变为“薄层”，这个层的反射波的特点也会发生变化。如果我们掌握了这种变化的特征和规律，反过来，就可以更正确地、细致地解释地震剖面上的各种地质现象。同时，如果了解了薄层反射的频谱特点，也有助于选用合适的滤波特性来突出薄层反射。

讨论薄层反射的特点，可以用前面使用过的解波动方程的方法。这可称之为“真正的”动力学方法。考虑到地震勘探中实际应用方便以及使问题的讨论比较简单和明了，讨论地震勘探中的薄层问题也可以从波动的叠加和干涉出发，通过分析薄层上下界面的反射波叠加后的特点，来说明薄层的存在对反射波的影响。严格说来，这并不是真正的讨论波动问题的动力学方法，但是因为这种讨论最后仍能得出关于薄层反射波的一些主要动力学特点（如频谱、强度、波形等）的结论。所以我们把这部分内容放在这一章作为多层介质中地震波传播特点的一个问题加以介绍。

1.薄层反射是薄层内的多次反射的叠加结果

设有图(8-8)所示的一个薄层。它的上、下界面为R_1、R_2，这三种介质的波阻抗是γ_1、γ_2、γ_3；速度是V_1、V_2、V_3；薄层的厚度是Δh。

当有P_1波入射到R_1界面时，产生R_1界面的反射波P_{11}和透过波P_{12}。P_{12}波又在R_2界面上产生反射波P_{122}和透过波P_{123}。P_{122}波又在R_1界面上产生反射波P_{1222}和透过波P_{1221}……。

在垂直入射的情况下，P_{11}、P_{1221}、P_{122221}……等波就会发生叠加（图8-8中把它们分开画出，以便于讨论）。而当介质Ⅱ不是薄层时，则不会发生这些波的互相叠加的情况。所以讨论薄层反射的特点，本质上就是讨论P_{11}波同P_{11}、P_{1221}、P_{122221}……等叠加后的新波动P'_{11}两者之间的差别，以及这种差别与介质结构的特点（即V_1、V_2、V_3，γ_1、γ_2、γ_3，Δh等参数）之间的关

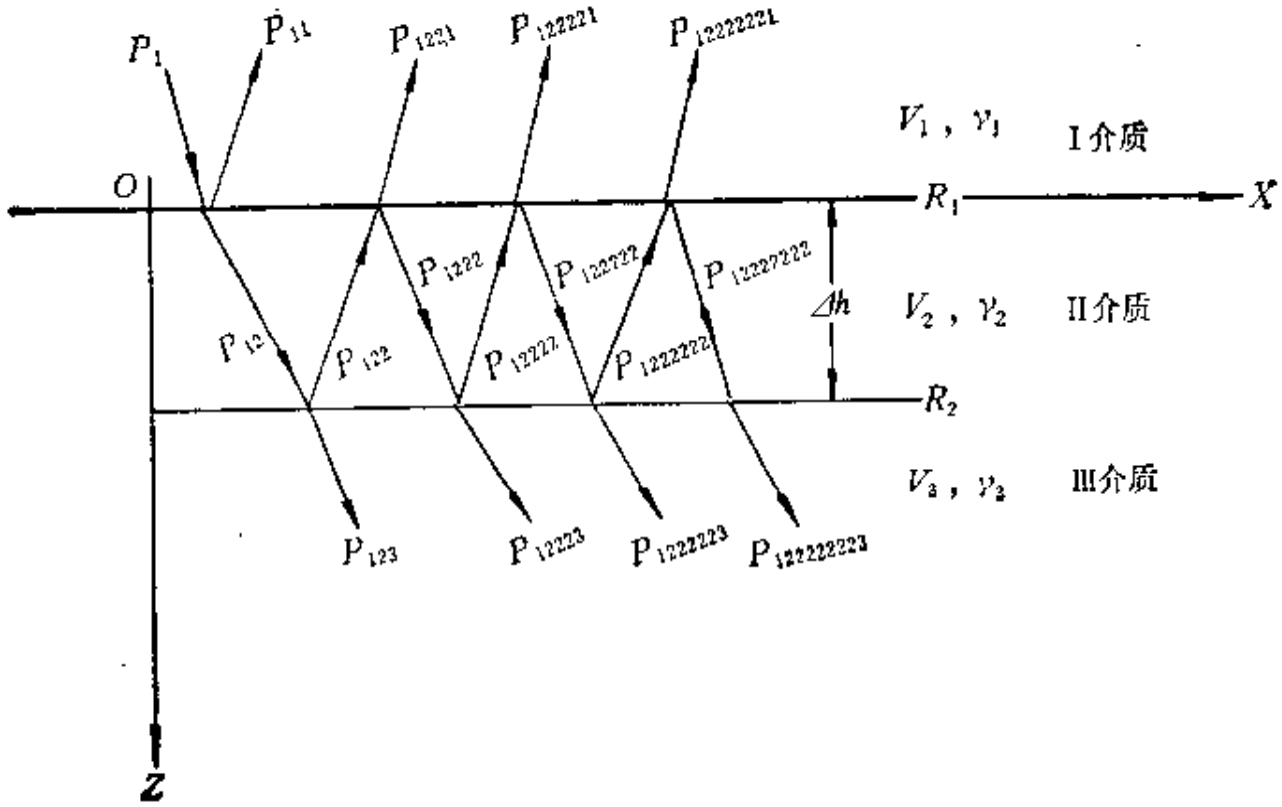

P_1
P_{11}
P_{1221}
P_{122221}
$P_{12222221}$
V_1 , γ_1
I介质
O
R_1
X
P_{1222}
P_{122222}
$P_{12222222}$
Δh
V_2 , γ_2
II介质
P_{12}
P_{122}
P_{12222}
$P_{1222222}$
R_2
V_3 , γ_3
III介质
P_{123}
P_{12223}
$P_{1222223}$
$P_{122222223}$
Z

图8-8 薄层反射示意图

系。下面就定量分析这种关系。

设：座标如图 8-8 所示。

入射波是一个简谐波 $u_{P_1}(z)$

$$u_{P_1}(z) = A_{P_1} e^{j2\pi f\left(t - \frac{z}{V_1}\right)}; \quad z \leqslant 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}1)$$

式中 $u_{P_1}(z)$——入射波引起的质点位移，它是沿Z 轴的；

A_{P_1}——入射波的振幅；

f——入射波的频率；

t——时间。

当 P_1 入射到 R_1 界面后，产生的反射波和透过波 P_{12} 可 表示为：

$$u_{P_{11}}(z) = A_{P_{11}} e^{j2\pi f\left(t + \frac{z}{V_1}\right)}; \quad z \leqslant 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}2)$$

$$u_{P_{12}}(z) = A_{P_{12}} e^{j2\pi f\left(t - \frac{z}{V_2}\right)}; \quad 0 \leqslant z \leqslant \Delta h \qquad (8\text{-}4\text{-}3)$$

式中各符号的意义与(8-4-1)类似。

P_{12} 波入射到薄层的下界面 R_2，又产生反射波 P_{122} 和透过波 P_{123}，反射波 P_{122} 可表示为：

$$u_{P_{122}}(z) = A_{P_{122}} e^{j\left[2\pi f\left(t + \frac{z}{V_2}\right) + \psi\right]}; \quad \Delta h \geqslant z \geqslant 0 \qquad (8\text{-}4\text{-}4)$$

式中Ψ 是反射波 P_{122} 的初相位，其他符号的意义与(8-4-1) 式的类似。

为了确定初相位 Ψ，可以比较在界 面 R_2 上 P_{12} 与 P_{122} 的相位，因为在 R_2 界面上它们的相位应当相等，即 当 $z = \Delta h$ 时，从(8-4-3)与(8-4-4)式可得：

$$e^{j2\pi f\left(t - \frac{\Delta h}{V_2}\right)} = e^{j\left[2\pi f\left(t + \frac{\Delta h}{V_2}\right) + \psi\right]}$$

$$\therefore \quad 2\pi f\left(t - \frac{\Delta h}{V_2}\right) = 2\pi f\left(t + \frac{\Delta h}{V_2}\right) + \Psi$$

$$\Psi = 2\pi f\left[t - \frac{\Delta h}{V_2} - t - \frac{\Delta h}{V_2}\right]$$

$$\psi = -2\pi f\frac{2\Delta h}{V_2} = -\frac{4\pi\Delta h}{V_2}\cdot f\ ;$$

P_{122} 波又透过界面 R_1 到介质 Ⅰ，产生透过波 P_{1221}，它可以表示为：

$$u_{P1221}(z) = A_{P1221}\, e^{j2\pi f\left(t+\frac{z}{V_1}+\frac{2\Delta h}{V_2}\right)}, \qquad (8\text{-}4\text{-}5)$$

$$z \leqslant 0。$$

在第七章已导出垂直入射情况下，入射波、反射波和透过波之间的振幅关系，即：

$$\left.\begin{aligned} &\frac{A_{P11}}{A_{P1}} = \frac{\gamma_2-\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}; \quad \frac{A_{t12}}{A_{P1}} = \frac{2\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}; \\ &\frac{A_{P122}}{A_{P12}} = \frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_2}; \quad \frac{A_{P1221}}{A_{P122}} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}。 \end{aligned}\right\} (8\text{-}4\text{-}6)$$

式中：$\gamma_i = \rho_i \cdot V_i$ 是各层的波阻抗。

由(8-4-6)还可以进一步导出：

$$\delta = \frac{A_{P1221}}{A_{P11}} = \frac{2\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}\cdot A_{P122}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{(\gamma_2-\gamma_1)A_{P1}}$$

$$= \frac{2\gamma_2}{(\gamma_2-\gamma_1)A_{P1}}\cdot\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_2}A_{P12}$$

$$= \frac{2\gamma_2(\gamma_3-\gamma_2)}{(\gamma_2-\gamma_1)(\gamma_3+\gamma_2)}\frac{1}{A_{P1}}\cdot\frac{2\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}A_{P1}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{A_{P1221}}{A_{P11}} = \frac{4\gamma_1\gamma_2(\gamma_3-\gamma_2)}{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_2+\gamma_3)} \qquad (8\text{-}4\text{-}7)$$

$$\frac{A_{P12221}}{A_{P1221}} = \frac{\left(A_{P1}\cdot\frac{2\gamma_1}{\gamma_2+\gamma_1}\right)\left(\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_2}\right)\left(\frac{\gamma_1-\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}\right)}{A_{P1}\frac{2\gamma_1}{(\gamma_2+\gamma_1)}\cdot\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_2}}$$

$$\cdot\frac{\left(\frac{\gamma_3-\gamma_2}{\gamma_3+\gamma_2}\right)\left(\frac{2\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}\right)}{\frac{2\gamma_2}{\gamma_2+\gamma_1}}$$

$$= \frac{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_2)}{(\gamma_2+\gamma_1)(\gamma_3+\gamma_2)} = b$$

同理

$$\frac{A_{P_{1221}}}{A_{P_{121}}} = \frac{A_{P_{12221}}}{A_{P_{1221}}} = \cdots\cdots = b = \frac{(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_2)}{(\gamma_2+\gamma_1)(\gamma_3+\gamma_2)} \tag{8-4-8}$$

在Ⅰ介质中接收到的反射波 P'_{11} 是所有这些多次反射波的叠加，即：

$$u_{P'_{11}}(z) = u_{P_{11}}(z) + u_{P_{1221}}(z) + u_{P_{12221}}(z) + \cdots\cdots$$

$$= A_{P_{11}} e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})} + A_{P_{1221}} e^{j2\pi f[(t+\frac{z}{V_1})-\frac{2h}{V_2}]} + A_{P_{12221}} e^{j2\pi f[(t+\frac{z}{V_1})\frac{4\Delta h}{V_2}]} + \cdots\cdots$$

$$= A_{P_{11}} e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1}} + A_{P_{11}}\delta e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})} \cdot e^{-j2\pi f\frac{2\Delta h}{V_2}} + bA_{P_{11}}\delta e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})} \cdot e^{-j2\pi f\frac{4\Delta h}{V_2}} + \cdots\cdots = A_{P_{11}} e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})}[1 + \delta e^{-j2\pi f\frac{2\Delta h}{V_2}} + b\delta e^{-j2\pi f\frac{4\Delta h}{V_2}} + \cdots\cdots]$$

令 $\tau_0 = \frac{2\Delta h}{V_2}$，

上式可写成

$$u_{P'_{11}} = A_{P_{11}} e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})}[1 + \delta e^{-j2\pi f\tau_0}(be^{-j2\pi f\tau_0} + b^2 e^{-j4\pi f\tau_0} + \cdots\cdots)]$$

上式小括号内是一个公比小于 1 的等比级数，它的和是：

$$\frac{1}{1-be^{j2\pi f\tau_0}}$$

$$\therefore \quad u_{P'_{11}} = A_{P_{11}} e^{j2\pi f(t+\frac{z}{V_1})}\left[1 + \frac{\delta e^{-j2\pi f\tau_0}}{1-be^{-j2\pi f\tau_0}}\right] \tag{8-4-9}$$

2.薄层反射的频率特性和相位特性的公式

对（8-4-9）式进行适当的变换，可化为标准的简谐振动形式：

$$u_{P'_{11}} = A_{P'_{11}} \cdot \sqrt{\frac{1-2(b-\delta)\cos 2\pi f\tau_0 + (b-\delta)^2}{1-2b\cos 2\pi f\tau_0 + b^2}}$$

$$\cdot e^{i\left[2\pi f\left(t+\frac{z}{V_1}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{-\delta\sin 2\pi f\tau_0}{1-2b\cos 2\pi f\tau_0+b^2+\delta(\cos 2\pi f\tau_0-b)}\right)\right]} \qquad (8\text{-}4\text{-}10)$$

比较(8-4-10)和（8-4-1）可知，P'_{11} 的振幅 $A_{P'_{11}}$ 与 R_1 界面上的一次反射波振幅 $A_{P_{11}}$ 之比值是：

$$Q(f) = \sqrt{\frac{1-2(b-\delta)\cos 2\pi f\tau_0 + (b-\delta)^2}{1-2b\cos 2\pi f\tau_0 + b^2}} \qquad (8\text{-}4\text{-}11)$$

P'_{11} 的初相位是：

$$\phi(f) = \operatorname{arctg}\frac{-\delta\sin 2\pi f\tau_0}{1-2b\cos 2\pi f\tau_0 + b^2 + \delta(\cos 2\pi f\tau_0 - b)} \qquad (8\text{-}4\text{-}12)$$

从(8-4-11)与(8-4-12)式可以看出，在Ⅰ介质所接收到的包括薄层内全部多次反射的 P'_{11} 波的振幅和初相位都是入射波频率的函数。我们在讨论厚层问题时已知道，当波垂直入射到厚层时，它的反射系数只与界面两边介质的波阻抗有关；而与入射波的频率无关。但是，现在可以看到，存在薄层的情况下，当波垂直入射到薄层表面时，反射系数不仅与界面两边介质的波阻抗有关，还与入射波的频率有关。因而薄层反射可以看成一个滤波器，入射波在薄层表面发生反射时，好象通过了一个滤波器，经受了某种频率滤波作用。并且，薄层的频率滤波特性与它的厚度和波速有关（即与 τ_0 有关），也与薄层及其上、下地层的波阻抗 γ_1、γ_2、γ_3 有关。(8-4-11)和(8-4-12)两式，就定量地给出了薄层的振幅频率特性和相位频率特性与介质参数的关系。

3.薄层的频率特性分析 利用(8-4-11)和(8-4-12)两式来分析薄层反射的振幅频率特性和相位频率特性不大方便，因为这两

个式子比较复杂，不易得出较明确的结论。同时，在通常的实际条件下 b 一般不大，可以忽略。也就是说，可以把问题简化为只考虑薄层顶面的反射 P_{11} 与薄层底面的一次反射 P_{1221} 的叠加就够了。

此时(8-4-11)与(8-4-12)简化为

$$Q(f)=\sqrt{1+2\delta\cos 2\pi f\tau_0+\delta^2} \tag{8-4-13}$$

$$\phi(f)=arc\,tg\frac{-\delta\sin 2\pi f\tau_0}{1+\delta\cos 2\pi f\tau_0} \tag{8-4-14}$$

当 $\delta=1$ 时，(8-4-13)和(8-4-14)式可进一步简化为

$$Q(f)=2\sin\pi f\tau_0 \tag{8-4-15}$$

$$\phi(f)=\frac{\pi}{2}-\pi f\tau_0 \tag{8-4-16}$$

为了具体分析薄层的频率特性，可以分析由(8-4-13)式所表示的 $Q(f)$ 的特点。为了作图方便，我们取 $f\tau_0$ 为变量，作出 $Q(f\tau_0)-f\tau_0$ 的关系曲线，如图(8-9)所示。图中的曲线以 δ 为参数，并取 $\delta>0$。($\delta>0$ 表示 $\gamma_1<\gamma_2$，$\gamma_3<\gamma_2$ 或 $\gamma_1>\gamma_2$，$\gamma_3>\gamma_2$)。

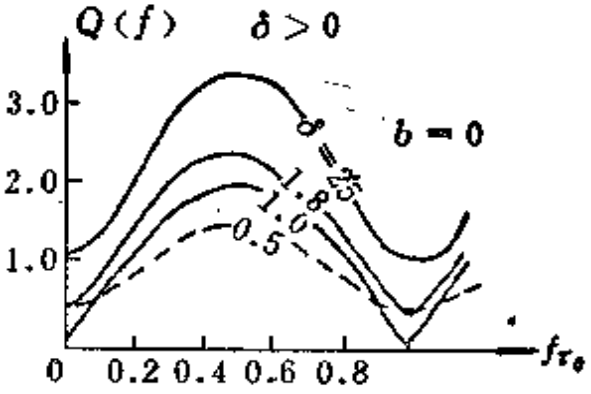


图8-9 薄层反射的频率特性 ($\delta>0$)

图中只画出了 $f\tau_0=0\sim1$ 的第一个周期中的情况。

从图(8-9)中可以看出，薄层反射叠加的效果是对低频及高频的成分有压制作用，接收到的波的中频成分得到相对加强。

下面再举一些实际数据作具体计算，以便较细致地说明薄层的频率特性。

一般常遇到的薄层是夹在均匀的某一地层之中，例如最常遇到的砂岩及粘土地层，常有 $0.6<\frac{\gamma_1}{\gamma_2}<1.65$ 的关系。设 $\Delta h=10$米，$V_2=4.0$公里/秒，$V_1=V_3=2.0$公里/秒，$\rho_1=\rho_2=\rho_3=2.3$

克/厘米³，于是$\gamma_1=\gamma_3=4.6\times10^5$克/厘米²·秒，$\gamma_2=9.2\times10^5$克/厘米²·秒，$\delta=0.88$，$\tau_0=0.005$秒。因此，我们可以利用简化了的(8-4-13)式～(8-4-16)式进行计算，得到在第一个周期中$Q(f)$—f关系如图(8-10)所示。此时在第一个周期中包含了地震波频谱的中频到高频的一部分频率范围。

当τ_0为不同值时，因为$\tau_0=\frac{2\Delta h}{V_2}$，也就是对不同厚度的岩层，$Q(f)$的周期宽度就$f$而言是不同的(就$f\tau_0$而言仍是一样)。所以有时仅仅注意第一周期内的情况是不够的。

设在记录上波的振动延续时间为$\Delta t=0.04$秒。显然，只有在$\Delta t>\tau_0$时才会出现复合反射波。为此，我们研究$\tau_0<0.003$秒的情况。根据一般的实际条件，设$\delta=1$，$\gamma_1=\gamma_3$，$\frac{\gamma_1}{\gamma_2}<0.50$，$V_2$取为3.0公里/秒。当0.01秒$<\tau_0\leqslant$0.03秒时，相应的薄层厚度为15米$<\Delta h<$45米，这是较厚的薄层，在中频地震勘探的频带范围内，$Q(f)$曲线如图(8-11)所示。可以看出，它具有几个极小点，

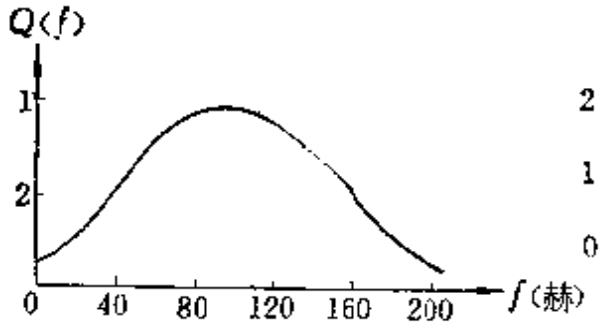


图8-10　在一定条件下($\delta=0.88$，$\tau_0=0.005$秒)第一个周期中的$Q(f)$曲线图

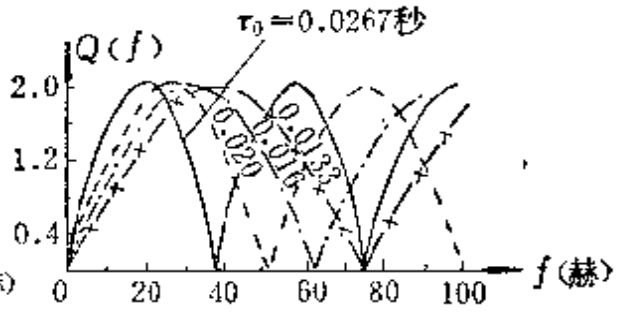


图8-11　中频地震勘探频带范围内的$Q(f)$曲线图

所以复合反射波压制了中频地震勘探工作频带的某几部分的频率。τ_0值不同时，极小点的位置亦不同。当采用不同滤波档时，会得到不同厚度的薄层反射波。可以看出，当薄层厚度变化时，也就是τ_0值不同，频率特性$Q(f)$有着明显的变化。例如当Δh由24米变到40米时，τ_0由0.016变到0.03秒，$Q(f)$极小点由50赫移

到62.5赫。这必然要引起记录上波形的明显变化。这一方面是薄层厚度不同，其记录形状明显不同；另一方面，同一薄层的厚度在横向上有变化时，其反射波的记录形状也发生横向的明显变化。这就为利用薄层反射动力学特点研究薄层提供了依据。

当$0.005<\tau_0<0.01$秒时，相应薄层厚度为7.5米$<\Delta h<15$米（当$V_2=3.0$公里/秒时），$Q(f)$的变化如图(8-12)所示。此时在中频地震勘探的工作频带内，不同τ_0值的曲线其形状变化不大，各曲线只有一个极大点，位置各有不同。当使仪器的滤波通频带由低而高地变化时，将具有由厚而薄的选择性，不同厚度的薄层之复合反射波波形变化不会太明显。

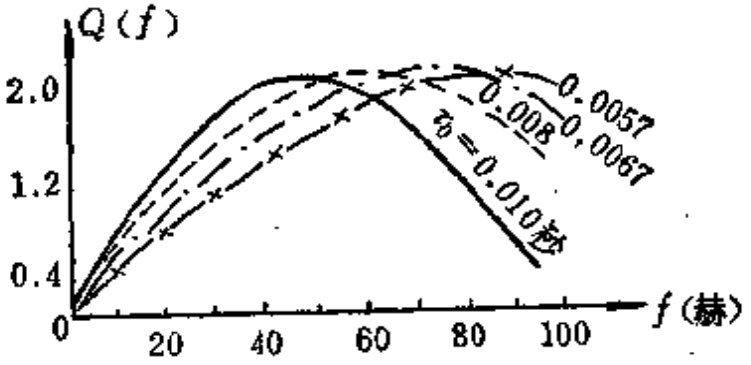


图8-12　当$0.005<\tau_0<0.01$秒时，薄层反射的频率特性曲线

当$\tau_0<0.005$秒时，相当于$\Delta h<7.5$米的极薄层，其频率特性曲线如图(8-13)所示。$Q(f)$在中频地震勘探的工作频带范围内无极值，不同τ_0值的曲线其形状相似，仅斜率有微小不同。此时复合反射波的高频成分相对有所增加，记录形状与薄层厚度关

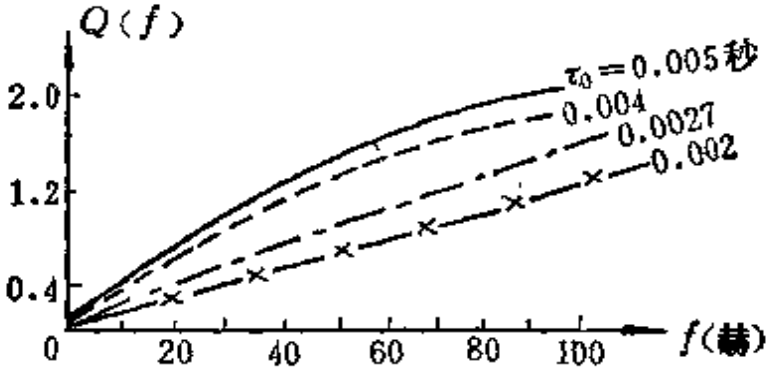


图8-13　当$\tau_0<0.005$秒时薄层的频率特性曲线

联很小。而且，比较图(8-10)、(8-11)、(8-12)、(8-13)Q的数值后，可以看出在厚度较地震波的脉冲长度$V\cdot\Delta t$小30～40倍的极薄层的复合反射波，其强度仍可以与较厚地层上的相比较，所以获得$\Delta h=1.5\sim2$米的岩层上的强而稳定的反射波是可能的。

以上的讨论是当$\delta=1$而言的。当$\delta\fallingdotseq1$时，由图(8-9)可见，$Q(f)$的特点没有原则性的变化，故上述结论是可以加以推广的。当$\delta<1$时，薄层频率选择性变得不够尖锐（曲线比较平稳）。

当$\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3$或$\gamma_1>\gamma_2>\gamma_3$时，即薄层波阻抗对上下地层大于一个，小于另一个。此时$\delta<0$，$Q(f)$具有图8-14的形状。这种情况下讨论的方法与上述相同。显然，极低的频率总是得到相对加强的。

薄层反射频率特性的特点，总结起来是：在不同波阻抗关系、地震脉冲长度、速度变化、所选用的滤波特性、薄层厚度等条件下，将会观测到复合反射波波形的复杂变化。有时高频分量加强；有时低频分量加强；有时是某些频率成分被加强而另一些频率成分被削弱。较厚薄层上的波形稳定性常较薄的薄层上的为差。适当地改变滤波通频带会使记录上某些反射波变得清晰起来，并增加或减少反射的数目。

关于非法线入射的情形，解析求解是复杂的，此时要考虑到反射系数与入射角的关系、横波的影响等问题。如果忽略某些因

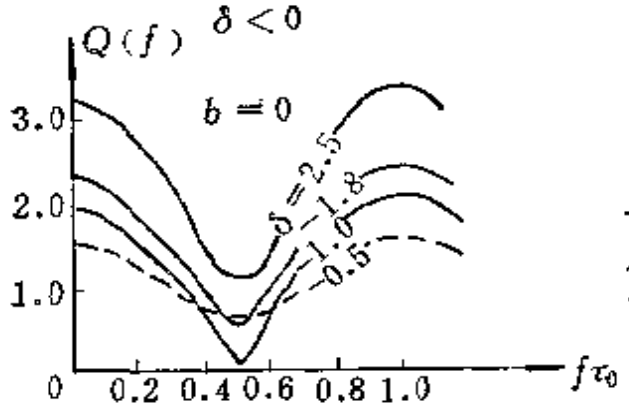


图8-14　$\delta<0$情况下的薄层反射频率特性曲线

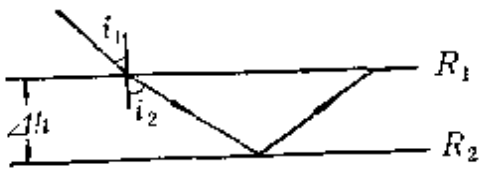


图8-15　非法线入射情况示意图

素的影响，我们可得到这样的结论：当入射角不大时，一级近似的上述法线入射所得到的结论仍是有效的，但岩层的厚度 Δh 应以 $\Delta h^* = \Delta h \cos i_2$ 代替（见图(8-15)）。这里的 Δh^* 称为有效厚度，当入射角 i_1 增加时，Δh^* 则减小。当 $\delta > 1$ 时，岩层频率特性曲线向高频方向延伸（注意不是移动）。

参考文献

1.《分层介质中的波》，M.M.布列霍夫斯基赫著，杨训人译，科学出版社1960年出版。

2.《层状构造模型理论》(油印讲义)，许云编，国家地质总局150工程，国家地质总局第二石油普查大队、武汉地质学院协作组印。1977年9月

3.《Об отражение от тонких пластов в сейсморазведке.》，《Прикладная геофизика》，вып 9，1952年.И.И.гурвич.

4.《Анализ отражений от тонких пластов》，《Прикладная геофизика》，вып.15，1956.И.И.Гурвич.

5.《Динамические характеристики сейсмических волн в реальных средах》，И.С.Берзон等.1962.

结 束 语

最后，我们简单介绍地震波动力学理论在地震勘探中的应用情况。

地震波的动力学理论是地震勘探最重要的理论基础。通过讨论波动方程的建立和它在各种情况下的解，来分析地震波在各种情况下的传播规律、能量分配等，就能深刻阐明地震波的本质，揭露地震波波场的特点同介质结构、性质之间的内在联系。这种联系正是应用地震勘探方法查明地下地层结构和性质的基本依据。

在研究地震波的传播问题时，也可以从地震波运动学，即所谓几何地震学的角度来考虑。它是研究地震波的射线或波前的几何传播规律的，主要用来解决地震波的传播时间问题。在地震勘探诞生以来一个很长的时期内，地震波动力学主要有着理论上的意义。实际的地震资料解释方法是从几何地震学出发建立起来的，即利用地震波传播的时距关系来查明地下地层的构造形态。在解释地震资料时，地震波的动力学特点只被定性地利用，起着辅助的作用。这种状况的造成是与地震勘探的生产发展水平，主要是仪器（包括野外地震仪及处理地震资料的设备）的发展水平和石油勘探本身对地震勘探的要求等各种因素有关的。例如，在采用光点记录或模拟磁带记录阶段，所获得的原始资料质量较低，完全用人工方法或使用模拟回放仪进行资料整理，不可能完成为求取地震波动力学特点需要进行的大量计算工作，更不用说要完成直接从波动方程出发来求解地震波传播的反问题这一浩繁的计算工作了。同时，当地震勘探还主要用来解决地层的构造形态问题时，在地质构造不太复杂的地区，几何地震学的一套方法还是可以胜任的。

但是随着对石油需求的急剧增加，进一步要求地震勘探能寻找各种复杂的油气藏（如地层、岩性油藏）以及直接找油。而当遇到这些复杂地质问题时，几何地震学的方法就不能正确解释由它们所产生的各种复杂的波场图景了。要解决这些问题，必需应用地震波动力学的理论。由此可见，七十年代以来，正是在石油勘探的迫切需要的有力推动下，使地震波动力学理论在地震勘探中的具体应用迅速发展起来。另一方面，数字记录技术能提供高质量的原始资料；引入大容量、高速度的数字电子计算机作为处理地震资料的工具使大量的数值计算工作可以完成；这些条件也使地震波动力学理论的实际应用有了现实的可能。于是，这种必要性和可能性的结合，就促使地震波动力学理论的具体应用在七十年代以来有了突出的进展。这些进展中最有代表性的是亮点技术和波动方程偏移技术。

所谓亮点技术是一种利用地震资料直接找油找气的方法。过去，地震反射法主要是利用地震反射的时间等地震波运动学特点，寻找适宜于油气聚集的地质构造，这是一种间接找油方法。而亮点技术则主要是利用地震反射波的振幅等地震波动力学特点来直接寻找油气藏。在本书第七、八两章讨论的内容，即地震波在介质分界面上的反射和透射，就是亮点技术的主要理论基础。通过讨论得到的(7-3-18)和(7-3-19)式，给出了当一个平面正弦弹性纵波垂直入射到两种介质分界面上时，入射波、反射波，透射波三者之间的能量分配关系。公式

$$(R_{PP})_0 = \frac{\rho_2 V_{P2} - \rho_1 V_{P1}}{\rho_1 V_{P1} + \rho_2 V_{P2}}$$

表明，两种介质的波阻抗差别越大，反射波就越强。由此可见，反射波能量的强弱与反射界面两边介质的波阻抗差，也即与它们的物理性质有着密切的关系。对与油气藏有关的各种岩石的有关参数的实际测定和理论计算表明，在一个典型的油气藏中，气—油界面和油—水界面都是波阻抗差别特别大的界面，会形成非常强的反射振幅。因此，就有可能利用地震记录上的振幅特征来直

接寻找油气。如果在地震时间剖面上出现这种强反射，面其上下左右的反射相对很弱，当用荧光屏显示这样的地震剖面时，则这组反射最亮，因此叫做“亮点”。当然，现在“亮点”的含义已不单指振幅的增强，它概括了地震剖面上由油气藏的存在所引起的一系列标志。这些标志还包括地震反射波极性的反转，吸收系数增大和频率降低等地震波动力学标志。同时还包括速度降低和气—油，气—水接触面的水平界面反射等地震波运动学标志。

利用亮点技术直接寻找油气藏的基本原理并不深奥，但真正实现却很不容易。因为由野外数字地震仪所记录下来的地震反射波的振幅不仅与界面的反射系数有关，同时它还与地震波的激发条件和接收条件，波前发散，吸收，散射，中间界面的透射损失，微屈多次反射，反射系数随入射角的变化，界面聚焦，岩性变化和噪声干扰等许多因素有关。要得到能真正反映地下界面反射系数的变化特点的亮点剖面，就必须尽可能消除其他各种因素对野外记录下来的地震波振幅值的影响。为了找出这些因素与地震波振幅的定量关系，以便设法消除它的影响，就要用到许多有关地震波动力学理论的知识。其中一些基本概念在本书中已作了介绍。亮点技术的应用提高了石油钻探的成功率，并已在世界各地成功地找到了一些油气田。随着地震波动力学理论的发展，完善和数字处理技术的不断改进，亮点技术必将得到更普遍的应用和进一步完善，在石油勘探中发挥更大作用。

波动方程偏移则是利用波动方程的数值解法，使地面观测到的实际地震记录，向地下延拓换算，求得地下各反射（或绕射）点的反射（绕射）振动情况，以如实反映地下岩层真实位置、形态和岩性特征，具有极大的发展前途。波动方程从本质上描述了地震波在地下介质中的传播过程，对于消除多次波，求取地震波在岩层中的传播速度，提取岩层的反射系数，消除海上鸣振，制作人工合成记录等等，都有不可估量的发展前途。

在六十年代后期和七十年代初，地震勘探已完成了方法技术上的又一次重大革新，进入了数字化的阶段。在这样的物质基础

上，地震波动力学理论在地震勘探中的实际应用便应运而生，蓬勃发展起来了。没有数字化，地震波动力学理论的应用不可能成为现实；同样的，如果不直接运用地震波动力学理论来解决地震勘探的问题，则数字化的巨大威力也不可能真正发挥出来。可以预料，这两方面的紧密结合必将把地震勘探技术提高到一个新的水平。正是由于看到了地震勘探的这种发展前景，近几年人们对地震波动力的理论及其在地震勘探中的具体应用的研究非常重视，波动方程偏移技术一时成了地震资料数字处理中最“热门”的课题。本书也就是在这种形势的鼓舞下编写出来，为热心于学习地震波动力学理论的人们提供一点方便。