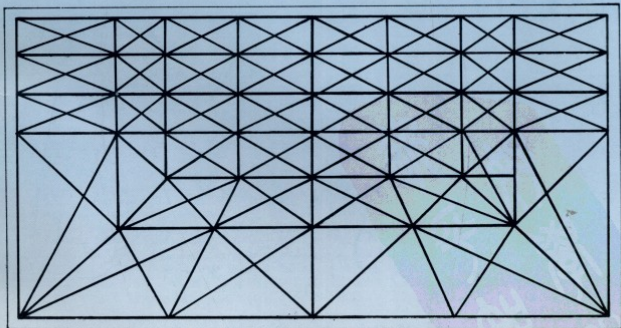


应用地球物理数值模拟 的迭代有限元法

杨进 著



地质出版社

应用地球物理数值模拟的 迭代有限元法

杨 进 著

地 质 出 版 社

· 北 京 ·



内容提要

本书在研究常规数值模拟方法(诸如有限单元法、有限差分法、积分方程法和边界单元法)的基础上,提出了应用地球物理数值模拟的迭代有限元法,并较全面、系统地给出了应用地球物理数值模拟迭代有限元法的方法、原理、以及正、反演应用的实例。全书共分四章。第一章介绍了迭代有限元法的基本原理。第二章给出了二维地电构造中点源场的迭代有限元法。第三章较详细地讨论了迭代有限元法数值模拟的若干问题。第四章介绍了点源二维地电模型的反演方法。

本书可供从事应用地球物理专业的科研人员、高年级学生和研究生参考,也可供相近专业从事数值模拟计算的科研人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

应用地球物理数值模拟的迭代有限元法/杨进著. —北京:地质出版社, 1996. 3
ISBN 7-116-02080-2

I. 应… II. 杨… III. 地球物理学-数值模拟-迭代法: 有限元法 IV. P3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 00970 号

地质出版社出版发行

(100083 北京海淀区学院路 29 号)

责任编辑: 韩洪光 白 铁

北京市汉森科技信息印刷厂印刷 新华书店总店科技发行所经销

开本: 787×1092 1/16 印张: 7.25 字数: 176000

1996 年 3 月北京第一版·1996 年 3 月北京第一次印刷

印数: 1—600 册 定价: 16.00 元

ISBN 7-116-02080-2

P·1563

前 言

本书讨论的主要内容是应用地球物理数值模拟。关于数值模拟,以往国内、外不少学者曾进行了系统地研究,取得了有意义的成果。在前人工作的基础上,我们提出了应用地球物理数值模拟的迭代有限元法。这种方法的基本思想是把应用地球物理数值模拟的区域划分为内区(算区)和外区(边界区)。在内区采用常规的有限单元法,在外区采用有限单元法的迭代算法,通过内、外区的协调处理,实现应用地球物理的数值模拟。这样处理问题的方法相当于有限单元法和“边界单元法”的有机组合。试算表明,这种数值计算方法模拟能力强,模拟精度高,占用计算机内存小,内区处理速度快,且适应能力强,应用范围广。

在本书内容研究过程中,得到傅良魁教授、李金铭教授的悉心指导,谭承泽教授、管志宁教授、陈丽英高工和王建谟高工提出了宝贵的建议,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平所限,书中不足之处,热忱希望读者批评指正。

作者

1996年3月

目 录

绪论	1
一、数值模拟的发展现状	1
二、问题的提出及解决的途径	6
三、研究的意义、内容及特点	7
第一章 迭代有限元法的基本原理	9
一、外区网格剖分	9
二、外区递推公式的推导	10
三、计算量和计算精度的定性估计	12
第二章 二维地电构造中点源场的迭代有限元法	14
一、稳定电流场微分方程边值问题及其相应的变分问题	14
二、变分问题的离散化	15
三、线性方程组的解法	25
四、视电阻率及视极化率的计算	26
五、程序框图及算例	28
第三章 迭代有限元法数值模拟若干问题的讨论	35
一、关于边界条件的应用	35
二、网格剖分方法	37
三、傅氏逆变换波数 λ 的选取	39
四、迭代有限元法误差分析及精度检验	43
五、迭代有限元法程序的功能、效率及参数选取对模拟精度的影响	51
六、迭代有限元法与有限单元法的比较	56
七、复杂模型的模拟结果与分析	57
第四章 点源二维地电模型的反演	65
一、正演问题及响应函数	65
二、广义线性反演方法	66
三、模型参数的评价	74
四、两种反演方法的计算实例	75
附录 二维地电构造中点源场迭代有限元法正演模拟	81
参考文献	106

绪 论

应用地球物理是一门新兴学科,是地学领域的重要组成部分。它广泛地应用于工业、农业、国防建设等各个领域,特别是在解决水文地质、工程地质问题,寻找金属和非金属矿产,勘探石油、天然气、煤田和地热等资源中发挥了极其重要的作用。

众所周知,应用地球物理勘探是基于地下不同岩(矿)石地球物理性质的差异,在人工的或天然的地球物理场的作用下,测定地下地球物理场的分布,结合有关地质资料解释、推断地下地质构造和矿产资源的分布状况,从而达到勘探的目的。但是,要取得较好的地质效果,必须解决应用地球物理的正演问题,即在已知地球物理模型条件下计算地球物理场的分布。在正演模拟的基础上,实现应用地球物理数据的反演解释,即根据地球物理场的分布规律、特征,结合有关地质资料确定地下地质构造。应用地球物理的正演模拟和数据反演是应用地球物理理论研究的重要组成部分。国内外不少学者在这方面曾作了大量的工作,进行了系统地研究,取得了有意义的成果。随着计算机技术的发展,微型计算机的普及,应用地球物理数值模拟方法和数据解释技术也是日新月异。特别是80年代以来,数值模拟和数据解释逐渐走向数字化、自动化和智能化。

应用地球物理数值模拟和数据反演的地球物理问题主要有一维、二维、二维半和三维问题。一维问题是最简单的。在某种意义上讲,二维半问题是最复杂的。应用地球物理主要包括电法(电磁法)、地震、重力和磁法。然而,在这些分支中,电法异常比较复杂,应用电算的难度较大(罗延钟等,1987年)。因此,我们以二维半电法问题的正、反演为特例来进一步研究应用地球物理数值模拟和数值解释方法不失其一般性,仍具有普遍意义。下面就应用地球物理的正、反演问题(以电法勘探为例)在国内外的发展现状作一简要介绍。

一、数值模拟的发展现状

(一) 数值模拟法

由于应用地球物理所研究的场的复杂性,除了个别十分简单的规则形体具有其解析表达式外,其它大多数地球物理模型很难得到其解析解,只能用数值计算法求其地球物理场的近似数值解。为了解决复杂地球物理模型的地球物理场的正演模拟,国内外发展了各种数值模拟方法,主要有有限差分法、有限单元法、积分方程法和边界单元法。

1. 有限差分法

有限差分法是一种较老的数值计算方法。70年代初国外学者C. M. Swift, T. R. Madden和Y. Lamontagne等人把有限差分法用于电法勘探正演模拟计算,后来A. Dey和H. F. Morrison合理地引入了混合边界条件,并用积分插值法导出差分格式,较好地解决了二维半地球物理问题的有限差分模拟。80年代初,我国引进了Dey和Morrison的有限差分法,进而发展了适应于研究复杂地球物理模型的三角形和矩形网格剖分相结合的有限差分算法。

有限差分法是一种网格法,它将正演模拟区域按某种规则剖分成许多均匀或非均匀的

正方形、矩形或其它形状的网格，用网格节点上场值的参数值来描述场的空间分布。然后将场所满足的偏微分方程和相应的边界条件离散化，得到差分方程。设每个单元内岩（矿）石的地球物理性质均匀，地球物理场呈线性分布，那么网格节点上场值可表示成为相邻节点上场值的线性函数。由此可得出方程数和节点数相同的关于节点场值的高阶线性方程组。最后求解方程组便可得到网格节点上的场值。

以稳定电流场中存在二维地电构造的情况为例。电位 U 满足微分方程：

$$\nabla (\sigma \nabla U) = 0 \quad (0.1)$$

式中： σ 为介质的导电率

将求解区离散化形式均匀正方形网格，用 P_{ij} 表示网格节点坐标为 (ih, jh) 的节点，其中 h 为网格的间距。将微分方程离散化，得到求解区内节点电位的差分方程

$$a_{i-1,j}U_{i-1,j} + a_{i,j}U_{i,j} + a_{i+1,j}U_{i+1,j} + a_{i,j+1}U_{i,j+1} + a_{i,j-1}U_{i,j-1} = 0 \quad (0.2)$$

式中： $U_{i,j}$ 表示节点 $P_{i,j}$ 的电位值；

$a_{i,j}$ 是决定于网格步长 h 和地下电导率分布的已知函数

根据边界条件，借助镜像原理可得出网格边界上的差分方程，这样对全部节点得到一个和节点数相同的高阶线性方程组。解方程组便得到场值的空间分布。

有限差分法计算原理和编程都比较简单，易于解决二维、三维的地球物理问题，特别适应于计算规则的地球物理模型。

2. 有限单元法

有限单元法是 50 年代中期发展起来的一种数值模拟方法，起初主要用于结构和应力分析。70 年代初，J. H. Coggon 将它用于电法勘探模拟计算。70 年代末 L. R. Rijo 完善了这种数值计算方法，使之成为正演模拟的有效方法。80 年代初我国引进和发展了 Coggon, Rijo 的有限单元算法。

有限单元法是从地球物理场所满足的偏微分方程出发，根据变分原理或最小能量原理将给定的微分方程边值问题等价地转换成场的泛函极值问题。将模拟区域按照某种规则将地球物理模型剖分成一系列矩形单元或三角形单元。设单元内物理性质均匀，场呈线性变化，这时单元内的泛函是各节点场值的二次函数。根据二次函数取极小的必要条件，泛函对各节点场的变分为零，这样得到一个和节点数相同的高阶线性方程组，解方程组得到各节点上的场值，用它来描述场在空间的分布。

例如，对于稳定电流场，Coggon 根据能量最小原理导出电位 U 的变分方程：

$$\delta J = \Delta \int_{\Omega} f(U) dv = 0 \quad (0.3)$$

式中： $J = \int_{\Omega} f(U) dv$ 为电位函数 U 的泛函

$f(U) = \sigma (\nabla U)^2 + 2U \nabla \cdot \vec{j}$ 为电位 U 的已知函数

$\nabla \cdot \vec{j}$ 为电流源的体密度

求变分方程 (0.3), 就是要找出一个电位函数 U 使泛函 J 最小。其作法是将求解区划分为 M 个单元 Ω_i , 设单元内物性均匀, 场呈线性变化, 即:

$$U = a + bx + cz \quad (0.4)$$

式中: a, b, c 是单元几何形状和节点电位 (U_i, U_j, U_k) 的函数。

根据单元各节点电位值便可得到单元内线性插值函数。

$$U = N_i(x, z)U_i + N_j(x, z)U_j + N_k(x, z)U_k \quad (0.5)$$

式中: N_i, N_j, N_k 称为基函数

于是有:

$$J = \sum_{i=1}^n J_i = \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_i} f(U) d\Omega$$

根据能量最小原理, 得到关于 N 个节点的 N 阶线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial J}{\partial U_1} = 0 \\ \frac{\partial J}{\partial U_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial J}{\partial U_N} = 0 \end{cases} \quad (0.6)$$

解方程组得到各节点电位值, 以此来表示场 U 的空间分布。

有限单元法的优点是适应于模拟形状不规则的地球物理模型, 但编程复杂, 占用计算机内存较大。

3. 积分方程法

早在 50 年代末 60 年代初, L. Alfom, K. Vozoff 等人就提出了用积分方程法计算任意形状构造上的电异常。80 年代初 M. Okabe 和 U. C. Das 等人进一步发展了积分方程法, 使之成为数值模拟的主要方法之一。80 年代中期, 我国引进和发展了积分方程法, 特别是关于三维电法模拟的研究, 取得了有意义的成果, 进一步扩大了该方法的应用范围。

积分方程法是从场满足的微分方程边值问题出发, 通过某种变化导出有关参数满足的积分方程式。把积分域网格离散化, 假设单元体表面上积累电荷密度为常数, 那么就可得到关于各单元电荷密度的高阶线性方程组。解方程求出各单元表面电荷密度, 积分可得到空间任意点产生的异常场。

例如稳定电流场, 积分方程法是基于位场满足的泊松方程积分解, 引出积累电荷的概

念。对于地下半空间而言,当点电流源位于水平地面时,根据镜像原理可将地下任一点 $P(x, y, z)$ 的异常场表示成如下积分形式:

$$U_a(\rho) = \iint_s \sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) ds \quad (0.7)$$

$$\frac{2\pi\sigma}{K_{12}} = \frac{I\rho_1}{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial n R_1} \right) - \iint_{s'} \sigma \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) ds + \iint_s \sigma \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{R} ds \quad (0.8)$$

式中: s 是异常体表面,其镜像为 s' 是从 s 上挖去 P 点及其邻域后剩下的部分;

K_{12} 为反射系数。

求解积分方程 (0.8) 确定电荷密度 σ 。由异常体上电荷密度分布计算电位 $U_a(\rho)$ 的空间分布。

积分方程法的优点是可处理三维局部异常体问题,但是由于线性方程组阶数较高,且系数中又包含积分运算,计算量很大。

4. 边界单元法

边界单元法是一种较新的数值计算方法。它是由美国南安普新 (Southampton) 大学 Brebbia 教授于 1978 年首先提出,主要用于工程计算。80 年代初, M. Okabe 把边界单元法用于地球物理模拟计算。80 年代中期,我国为进了边界单元法。不少学者作了大量的研究工作,取得了显著的成果。

边界单元法解题的基本思想是先将场问题满足的偏微分方程,利用方程的基本解、边界条件导出通过格林公式转化为边界积分方程的场求解的积分表达式。然后对边界进行网格剖分,积分表达式的离散化,可得到关于各节点电位的代数方程组。解方程求出场的空间分布。

如稳定电流场问题,利用格林公式将场满足的微分方程边值问题转化为积分方程:

$$\int_{\Omega} (u \nabla^2 \varphi - \varphi \nabla^2 u) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\Gamma \quad (0.9)$$

令基本解 $\varphi = \frac{1}{4\pi r}$

根据场满足的边界条件可导出:

$$1 - \frac{W_p}{4\pi} u(\rho) = - \int_{\Gamma} u \frac{\cos \beta}{4\pi r^2} d\Gamma + \int_{\Gamma} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\partial u}{\partial n} \frac{1}{4\pi r} d\Gamma \quad (0.10)$$

式中: W_p 是 p 点对区域 Ω 张开的立体角

β 是 $\vec{r}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角

把上式离散化,就可得到 N 个节点关于 u 和 $\frac{\partial u}{\partial n}$ 的 $2N$ 阶线性方程组。边值单元法可把场问题的维数降低一维。由于剖分限于边界,所以单元数目少,形成方程组的阶数较低,占用

计算机内存小,且计算精度高,但边界单元法最后计算的系数矩阵为满阵,可能是非对称的。得到该矩阵的元素需要计算奇积积分,计算较麻烦,不利于狭窄边界层的计算。对复杂的地球物理模型而言,它不如有限单元法模拟能力强。

(二) 数据反演方法

本世纪初,地球物理数据反演的学术思想就产生了萌芽。60年代末,美国地球物理学家 G. E. Backus 和应用数学家 J. F. Gilbert 初步提出了地球物理数据反演的思想和途径,为建立统一的地球物理反演理论和方法奠定了基础。70年代初,美国 R. A. Wiggins 和英国 D. D. Jackson 等人先后提出了广义反演方法。与 BG 理论对应的离散模型的反演方法。80年代以来,随着偏微分方程理论的发展,拟微分算子和 Fourier 积分算子理论的出现,科学家们又致力于变系数偏微分方程的反问题和地学层析成像技术的研究。可以看出应用地球物理数据反演在今后一段时间内将处于地学发展的前沿。

电法勘探二维反演是应用地球物理数据反演的主要分支。下面就电法勘探二维反演在国内、外的研究现状作一简介。

70年代末 W. H. Pelton 等人发表了关于加拿大风凰公司对偶极—偶极装置视电阻率 ρ_v 及视频散率实测拟断面图二维反演的论文。文中采用了“波峰回归法”反演方法。这种方法实质上就是 Marquardt 法和阻片最小二乘法。它采用的解估计为:

$$\Delta m = (A^T A - KI)^{-1} A^T \Delta d \quad (0.11)$$

式中: Δm 为模型参数估计值的增量;

Δd 是实测数据和模拟数据之间的差;

A 是 Jacobian 矩阵。

在曲线拟合的正演模拟计算中,采用数据库的方法,即先用有限差分法或有限单元法对反演地电断面不同参数的可能变化范围组成的一系列地电模型进行试算,得出大量数据存入数据库。实际反演时,利用数据库通过样条插值法求其 Jacobian 矩阵和新的模型正演计算值。1982 年日本学者 Yutaka Sasaki 提出了二维地电构造上激电异常的自动反演。他采用有限单元法作正演、阻尼最小二乘法作反演,而 Jacobian 矩阵是从正演过程出发求取的。如计算网格为 60×20 , 子块数为 20 的地电断面正演计算需计算机内存 1024KB, 在 FACOM M

200 计算机上需 CPU 时间 10 分钟。1984 年 Nariida C. Smith, Keeva, V., A. C. Tripp, G. W. Hohman 等人发表了电法勘探二维反演的文章,它采用有限差分法作正演,广义逆作反演, Jacobian 矩阵的求法同 Sasaki。对于 80×16 的网格在 VAX 11/780 计算机上计算,取 20 个傅氏变换波数正演计算精度可达到 97%。在 Marquardt 方法的基础上, A. C. Tripp 和 G. M. Hohman 利用 G. E. P. Box 和 H. Kanemasu (1972) 的方法求取优化阻尼系数。令目标函数 S 为阻尼系数 h 的二次函数。

$$S = ah^2 + bh + c \quad (0.12)$$

其中 a, b, c 为常数

那么使 S 极小的 h 值是最优化的阻尼参数。应用这种方法,对于 83×13 的网格采用偶极

偶极装置正演计算电阻率为 $100\Omega \cdot m$ 的均匀地下半空间, 视电阻率值的相对误差的为 6% (Univac 1108 型计算机), 反演地电断面的子块限于 25 块之内。最近几年来 (1989 年以来), Lu-Tao Tong, Yutaka Sasaki 利用阻尼最小二乘法实现了起伏地形条件下的二维反演以及偶极和大地电磁测深的联合反演。近期, 岛广正, 荣山敏彦提出了电阻率层析学的基本思想。大久保·博试图把量子力学、理论物理学中的研究成果应用到勘探地球物理中。他介绍了薛定谔方程与格林函数法、波恩逼近法、逆散射法等。这些反演新方法刚刚开始尝试, 还没有达到实用的地步。

国内对电法勘探二维半问题的反演研究如何? 就笔者 1994 年 5 月在全国地技图书馆中文地质文献数据库检索及近期查阅资料所知, 国内对电法勘探二维反演的研究仅仅是开始。到目前为止, 就笔者所知关于二维地电断面拟合反演的文章有 3 篇 (吴其斌, 1984.4, 李貅 1991.5, 李志鹏 1991)。吴其斌采用的方法类似于 Pelton 的方法, 仅适应于二个模型参数的地电断面。李貅等人应用边界单元法作正演计算差商代替微商的方法求 Jacobian 矩阵, 用改进的阻尼最小二乘法作反演, 在宇宙 68 机上实现了单条电测深曲线的二维基底反演。李志鹏用有限单元法、阻尼最小二乘法实现了单条电测深曲线的反演。

二、问题的提出及解决的途径

应用地球物理数值模拟和二维半地球物理问题的数据反演在应用地球物理的理论研究中具有重要的科学价值和实际意义。对于数值模拟而言, 以往国内、外不少学者曾作了系统的研究, 取得了有意义的成果。但是常规的数值模拟方法对实际地球物理模型的模拟能力, 模拟精度, 占用计算机内存、计算时间及计算量来说尚有一定的局限性。诸如有限单元法和有限差分法, 同其它方法相比, 由于网格剖分较密它们模拟复杂地球物理模型的能力较强。但是由于节点较多, 形成方程组的阶数较高, 占用计算机内存较大, 计算时间较长, 且在场源附近和网格边缘附近的节点上场值的误差较大。积分方程法模拟能力不如有限单元法, 且占用内存大, 计算时间长。而边界单元法相对来说是占用计算机内存最小的方法。它的模拟精度较高, 最大相对误差的为 3% (谭捍东, 1991, 张献民, 1988), 但模拟复杂地球物理模型的能力差, 且计算量较大。为了提高应用地球物理数值模拟的精度、减少占用的计算机内存, 加快运标速度, 不少学者在现有方法的基础上作了进一步的改善、优化。他们通过修改边值条件 (周熙襄, 1986; 李志鹏, 1991), 来提高模拟精度。通过对系数矩阵的不变量存储来减少计算量 (李志鹏, 1991)。以重新计算节点和元素压缩稳定矩阵的带宽来减少内存 (M. K. Paul 1991)。采用降元迭代法降低线性方法组的阶数求得最优解 (熊富林等, 1992.3)。这些办法虽然对数值模拟的某些方面有所改进, 但还不够完善, 还需进一步地发展。在前人工作的基础上, 我们把近年来电磁场数值计算的新方法 (Charles W. Steel, 1987) 经过详细推导, 系统地研究, 成功地应于地球物理数值模拟计算的有限单元法之中, 发展成为一种不同于常规有限单元法处理问题的方法。这种方法的基本思想是把数值模拟的区域划分为外区和内区 (即边界区和算区)。在外区采用迭代算法, 经过迭代消环处理把外区外边界移至足够远, 使得外区全部能量集中到内区的边界上。在内区采用常规的算法。这样处理问题的方法相当有限单元法和“边界单元法”的有机组合。为了区别于常规的有限单元法, 我们把这种方法称之为迭代有限元法 (IFEM)。它不仅模拟复杂

地球物理模型的能力强、模拟精度高,且占用计算机内存小。关于应用地球物理二维半问题的数据反演,国外学者利用中、小型计算机作了一定的研究,但是不便于在目前流行的微机上实现。而国内在这方面的研究仅仅是开始。在数学上还没有解决从偏微分方程直接对模型参数直接反演的情况下,我们只能沿用传统的拟合反演方法(诸如 Marquardt 反演法等)。Marquardt 法在反演中是较为成熟的方法,但国外学者 Box, Kanemasu, Bard, Davis 和 Whitting 通过一些算例比较了 Marquardt 法和 Box-Kanemasu 法,认为多数据情况下 Box-Kanemasu 法优于 Marquardt 法(Beck 及 Arnold, 1977)。如 Davies 和 Whitting 给出了不同问题目标函数收敛到 10^{-14} 时各种方法所需迭代次数(表 0.1)。从表中可以看出各种反演方法对不同问题的反演能力不同,各有其长处。为了提高应用地球物理数据反演的能力,寻找较好的数据反演方法,增加反演手段,我们借助 Box-Kanemasu (简称 BK) 的反演思想,经过推导、研究,成功地引进了 BK 反演法。并用迭代有限元法作正演, BK 法作反演在微机上实现了电法勘探二维半问题的反演。

表 0.1 不同问题目标函数收敛到 10^{-14} 时各种方法所需的迭代次数

问题	1	2	3	4	5	6	7
Marquardt 法	92	72	49	98	103	61	21
BK 法	99	59	11	13	15	1	1
改进的 BK 法	26	103	10	14	15	1	1

三、研究的意义、内容及特点

对应用地球物理数值模拟、数据解释的研究的主要意义如下:

1. 系统地研究应用地球物理数值模拟方法,在此基础上提出一种精度较高的数值模拟新方法。该方法能扩大对复杂地球物理问题的模拟能力,缩小问题的计算规模。
2. 该方法可用于系统地计算各种地球物理模型物理场的分布规律和异常特征。进而探讨应用地球物理的新技术、新方法。同时对现有的物理模拟和近似计算方法提供客观的检验。
3. 这种数值模拟方法不仅为应用地球物理二维半问题的数据反演提供了良好的前提,而且为三维地球物理问题的正、反演实现奠定了坚实的基础。
4. 在研究改进的阻尼最小二乘法(简称 MD 法)进行二维反演的同时,引进和发展 BK 反演法,在微机上实现二维反演,在微机上实现二维反演解释以便于野外实际资料的处理,进而提高解释水平增强应用地球物理勘探的地质效果。
5. 本文研究数值模拟方法,适应能力强,应用范围广,它既适应于应用地球物理数值模拟和数据解释,又有利于地学中其它分支的正、反演研究。

本文研究的主要内容有两部分。第一部分为迭代有限元法的系统研究。主要推导适应于应用地球物理二维半问题正演模拟计算的迭代公式,研究符合实际的、切实可行的网格剖分类型和剖分方法,并详细讨论了不同网格类型的剖分方法对模拟精度的影响以及傅氏

变换波数的优化选取。在建立教学模型的基础上,编制二维半迭代有限元法正演模拟程序。应用该程序对不同地球物理模型进行试算,并与其解析解比较,分析该方法的可行性和实用性。第二部分为二维半问题的反演研究。在研究改进的阻尼最小二乘法(MD法)在二维反演解释中应用的同时,引进和发展BK反演法,探讨有效的、稳定的自动反演方法并编制MD法、BK法反演程序,在微机上实现电法勘探二维反演。

本文研究的正演模拟方法同国内外研究的应用地球物理数值模拟方法相比较,具有以下特点。

1. 精度高。试算表明这种方法比国内外常规的有限单元法模拟精度高(至少能提高一个数量级)。

2. 占用内存小,内区处理速度快。便于在微机上开发利用。

3. 模拟能力强。它不仅能对复杂地球物理模型的内区进行详细剖分,而且对各种各样的具有地球模型特征的外区也能进行很好地刻画。

4. 适应性强,应用范围广。它不仅适应于地球物理的各个分支,而且适应于地学领域其它学科其似场问题的正、反演。

本文研究的二维反演新方法BK法同国外Lun Tan Tong (1990), Yutaka Sasaki (1989), A. C. Tripp (1984)等人采用的反演法相比,主要有两个特点:

1. 反演速度快。拟合反演的正演计算中,我们采用迭代有限元法,而国外学者采用有限差分法(Coggon, 1971)和有限单元法(Rijo, 1977)。

2. 反演断面能力强。反演过程中,我们对内区反演的同时,考虑了外区介质的影响,而Tripp等人只考虑场分布区域中反演目标的一个“窗口”。

第一章 迭代有限元法的基本原理

目前,用于解地球物理场及其它复杂场的问题最常用的方法是有限单元法、有限差分法、积分方程法和边界单元法等。这些数值计算方法非常适应于具有封闭边界的有限区域,但是许多地球物理场问题其边界不是封闭的,或者说其边界位于无穷远处。对于这样开区边界的场问题,前人通过建立强加边界条件和混合边界条件,把无限区域化为有限区域,通过常规的数值计算方法(如有限单元法)求解场问题。而迭代有限元法解场问题的基本原理与有限单元法相同,其方法各异。迭代有限元法在数值模拟时把场分布的区域划分为外区和内区,即边界区和算区。在外区采用迭代算法,也就是说,外区通过适应的网格部分、迭代消环等过程,把外区的场能量集中在内区的边界节点上,在内区采用常规的算法。然后通过内、外区边界的协调处理,使求解场问题得到简化。

一、外区网格的剖分

对任意开区域问题,用数值方法求解时要对所考虑的区域进行网格剖分。如图 1.1 所示把场的分布区域划分为内区 R_1 和外区 R_2 , 内区和外区的公共边界为 Γ_0 。在 Γ_0 边界外依次取同心环状边界 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_i$ 后,相应地构成环形区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_i$, 并假设环形区域节点上的场值为 $U_1, U_2, \dots, U_i$ 。这样得到一系列向外延伸的环带,这些环带不同程度地分布着场的能量。当采用特殊的网格剖分时,即把外区划分为同心的、几何上相似的、且各节点数不变的向

外扩张的环状时,可利用迭代算法逐渐消去各环带中节点的场值,而各环带节点上的场能量逐渐集中在内区边界节点上。由于各环带上节点的数目不变,因此在迭代消环处理过程中,当外边界逐渐向外移运时,矩阵的阶数并不增加。矩阵的规模只与内区与外区公共边界节点的数目有关,而与外区大小或者说外区环带的多少无

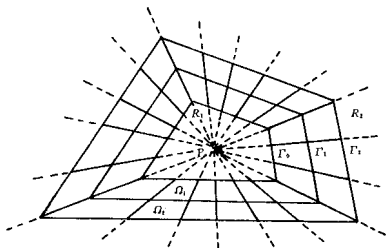


图 1.1 内区和前两层外区剖分示意图

关。

考虑到包围内区 R_1 并邻近内区 R_1 的环形区域 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l$ (Ω_1 内边界 Γ_0 是内区 R_1 的外边界), 要使环形区域的剖分网格适应于迭代消环处理, 环形区域 Ω_i 必须满足下列条件 (Charles W. Steele, 1987):

(1) 存在一点 P , 使得封闭的内、外边界成星形状。也就是说从 P 点发出的射线只与内、外边界各相交一点。如图 1.1 所示。

(2) 在内边界每一节点上:

$$X_j^{(1)} = (x_j, y_j)^{(1)}$$

与外边界相应的节点 $X_j^{(2)}$ 满足:

$$X_j^{(2)} = K X_j^{(1)}$$

式中: K 为投影比例常数。

(3) 在每一环形区域中, 场必须满足 Laplace 方程。

假设 Γ_0 边界上的节点数为 N , 在环域 Ω_1 的边界节点的编号取为:

$$P_j \sim P_{j+1/N} \quad (j \leq N)$$

那么, 在环域 Ω_1 内可得到 $2N \times 2N$ Dirichlet 矩阵 $K^{0,1}$ 。在第二环区 Ω_2 中采用同样的方法进行单元划分, 得到的单元的几何尺寸是相应单元的 K 倍。同时在环域 Ω_2 中有类于 Ω_1 区内相同大小的矩阵 $K^{1,2}$ 。我们还可以注意到环区 Ω_1 的外边界 Γ_1 和环区 Ω_2 的内边界 Γ_1 是公共边界, 因此对于 Ω_1 区和 Ω_2 区可通过消去它们的公共边界得到重新组合, 形成新的矩阵 $K^{0,2}$ 。尽管矩阵的非零元素增加了, 但其阶数仍为 $2N \times 2N$ 。这个新的矩阵 $K^{0,2}$ 包含了矩阵 $K^{0,1}$ 和矩阵 $K^{1,2}$ 的全部信息。在第三环区 Ω_3 中, 它的内边界就是第二环区 Ω_2 的外边界。以同样的方法划分单元, 单元的几何尺寸为内环单元几何尺寸的 K^2 倍。再通过消环重新组合, 形成的矩阵仍为 $2N \times 2N$ 。这样通过逐环消元, 比例常数按某种方式逐次增加, 外边界逐渐向外移动直至最外层边界达到物理上的无穷远。比如 1cm^2 的内区, 当 K 取为 1.5 且按指数幂增加时, 外区各环比例常数为:

$$1.50, 2.25, 5.06, 25.6, 675, 43.1E+04, 1.86E+11, 3.64E+22$$

这样迭代 7 次后, 外层边界就可达到 36623 光年。

二、外区递推公式的推导

如图 1.2 所示, 算区 R_1 的外边界 Γ_0 按比例常数 $K > 1$ 划分为 M 个不同的环形区域, 即 $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_m$ 。每个区域的外边界依次为 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$ 。设 Γ_0 边界节点上场的列向量为 U_0 , Γ_{i-1} 边界上场的列向量为 U_{i-1} , Γ_{i-1} 边界与 Γ_i 边界所夹区域节点上场的列向量为 $U^{(i-1,i)}$, 相应的环域节点上的系数矩阵为 $K^{(i-1,i)}$ 。由于在外区场满足 Laplace 方程:

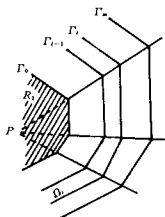


图 1.2 外区 m 个环域划分示意图

$$\nabla^2 U = 0 \quad (1.1)$$

因此在任一环域 Ω_i 中有:

$$\{U^{(i-1,j)} - (U_{i-1}^T, U_i^T)^T\} \quad (1.2)$$

把 $K^{(i-1,j)}$ 用分块矩阵表示, 即

$$K^{(i-1,j)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} \\ K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

在 Ω_{i-1} 区和 Ω_i 区有:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} \\ K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_{i-1} \end{bmatrix} = 0 \quad (1.4)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} \\ K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} A_{i-1}^T U_i = 0 \quad (1.5)$$

合并 (1.5) 式和 (1.6) 式, 得:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} & 0 \\ K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} + K_{11}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} \\ 0 & K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_{i-1} \\ U_i \end{bmatrix} = 0 \quad (1.6)$$

由 (1.6) 式得:

$$U_{i-1} = - (A^{(i-1)})^{-1} K_{21}^{(i-1,j)} U_0 - (A^{(i-1)})^{-1} K_{22}^{(i-1,j)} U_i \quad (1.7)$$

式中:

$$A^{(i-1)} = K_{22}^{(i-1,j)} + K_{11}^{(i-1,j)} \quad (1.8)$$

把 (1.7) 式代入 (1.6) 式消去 U_{i-1} 有:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{(i-1,j)} - K_{12}^{(i-1,j)} (A^{(i-1)})^{-1} K_{21}^{(i-1,j)} & K_{12}^{(i-1,j)} (A^{(i-1)})^{-1} K_{22}^{(i-1,j)} \\ -K_{21}^{(i-1,j)} (A^{(i-1)})^{-1} K_{21}^{(i-1,j)} & K_{22}^{(i-1,j)} - K_{21}^{(i-1,j)} (A^{(i-1)})^{-1} K_{12}^{(i-1,j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_i \end{bmatrix} = 0 \quad (1.9)$$

取:

$$K^{0,i} = \begin{pmatrix} K_{11}^{0,i} & K_{12}^{0,i} \\ K_{21}^{0,i} & K_{22}^{0,i} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

那么 (1.9) 式为:

$$K^{0,i} U^{0,i} = 0 \quad (1.11)$$

即:

$$\begin{pmatrix} K_{11}^{0,i} & K_{12}^{0,i} \\ K_{21}^{0,i} & K_{22}^{0,i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ U_i \end{pmatrix} = 0$$

式中:

$$\begin{cases} K_{11}^{0,i} = K_{11}^{0,i-1} - K_{12}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0,i-1} \\ K_{12}^{0,i} = -K_{12}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{i-1,i} \\ K_{21}^{0,i} = -K_{21}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{21}^{i-1,i} \\ K_{22}^{0,i} = K_{22}^{0,i-1} - K_{21}^{0,i-1} (A^{i-1})^{-1} K_{12}^{i-1,i} \\ A - K_{22}^{0,i-1} + K_{11}^{i-1,i} \quad (i=1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (1.12)$$

(1.12) 式就是迭代有限元外区迭代公式。由 (1.12) 式就可对外区进行消环处理, 直至最外层边界上场能量忽略不计为止。当 Γ_m 趋于无穷远时, $U_m = C$ (C 为常矢量) 由于

$$K^{0,m} U^{0,m} = 0 \quad (1.13)$$

所以从 (1.13) 式得:

$$[K_{11}^{0,m} - K_{12}^{0,m} (K_{22}^{0,m})^{-1} K_{21}^{0,m}] U_0 = 0 \quad (1.14)$$

上面已求出外区系数矩阵, 合并内、外区系数矩阵得到总体刚度矩阵。通过解相应问题的方程组, 便可计算出内区各节点上的场值。若要了解外区场的分布情况, 可以从内区节点对外区节点的场值进行回代。回代公式由 (1.7) 式给出, 其中 $(A^{i-1})^{-1} K_{12}^{0,i-1}$ 和 $(A^{i-1})^{-1} K_{21}^{0,i-1}$ 可由 (1.12) 得到。具体计算时, 可在消环过程中存贮这些中间结果以便回代计算。

三、计算量和计算精度的定性估计

假设迭代有限元法模拟算区外边界节点数为 N , 那么外区计算每迭代一次需计算 4 个 $N \times N$ 阶矩阵。若网格采用均匀剖分, 且矩阵没有采用稀疏化, 那么迭代过程的计算量随 N^3 变化。如果内区纵向节点数为 M , 那么内区计算量与 M^6 成正比。采用较好的稀疏技术可降低一阶——三阶的计算量。因此内区计算量在 M^1 —— M^3 之间。迭代有限元法的迭代消元过程采用解析表达式, 它不会因消元过程而降低模拟精度。同有限元法相比, 迭代有限元法的外区最外层边界可向外移动直至物理上的无穷远, 它基本不受截断误差的影响, 因

此迭代有限法元的计算精度比有限单元法的计算精度高。关于计算精度、计算量等问题将在后面章节详细讨论。

第二章 二维地电构造中点源场的迭代有限元法

迭代有限元法是求解场变分问题的数值计算方法。它求解的步骤是先把场满足的微分方程边值问题等价地化为相应的变分问题,然后对场的分布区域网格剖分、变分问题的离散化导出以各节点场值为变量的高阶线性方程组,最后解方程,得到地下半空间场的分布。

迭代有限元法解稳定电流场问题的基本原理与有限单元法相同,都是根据场的能量最小原理,导出场的变分方程。而区域划分、网格剖分以及外区消元处理等与有限单元法有很大的差别,因此有必要对迭代有限元法求解稳定电流场的方法、步骤作一详细讨论。

一、稳定电流场微分方程的边值问题 及其相应的变分问题

取三维笛卡尔坐标系的 X 轴为垂直于地质体走向的方向, Y 轴为地质体走向的方向, Z 轴垂直向下。设点电流源位于 $A(x_A, y_A, z_A)$ 点, 根据稳定电流场满足的基本方程和边界条件有:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma \frac{\partial U}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma \frac{\partial U}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma \frac{\partial U}{\partial z}) = -I\delta(x-x_A)\delta(y-y_A)\delta(z-z_A) \\ \left. \frac{\partial U}{\partial n} \right|_{z=0} = 0 \\ (\eta U + \frac{\partial U}{\partial n}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

式中: U 为电位, σ 为介质电导率, η 是与修正贝塞尔函数有关的量。

对于点源二维问题,介质的电导率是二维分布,而场源是三维分布。为了使问题简化,我们把三维问题通过傅氏变换化为二维问题。由于电位 U 是关于 Y 轴的偶函数,故取余弦傅氏变换对:

$$\begin{cases} F(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx \\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda \end{cases} \quad (2.2)$$

对(2.1)式取傅氏变换,得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \lambda^2 \sigma V = \frac{1}{2} I \delta(x - x_A) \delta(z - z_A) \\ \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{\Gamma_1 = 0} = 0 \\ \left(\eta V + \frac{\partial V}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma_2} = 0 \\ \eta = \lambda \frac{K_1(\lambda r)}{K_0(\lambda r)} \cos \theta \end{array} \right. \quad (2.3)$$

式中: V 为电位 U 的傅氏变换函数(简称为傅氏电位); Γ_1 为地面边界, Γ_2 为其余边界。 $K_0(\lambda r)$ 、 $K_1(\lambda r)$ 分别为零阶、一阶修正贝塞尔函数, θ 是场源点 A 到 P 点矢径 $\vec{r}$ 与 P 点处外法线方向 $\vec{n}$ 的夹角。根据变分原理, (2.3) 式等价的变分问题为:

$$\begin{aligned} J(V) &= \iint_V \left\{ \sigma \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \lambda^2 V^2 \right] + 2fV \right\} ds + \int_{\Gamma_2} \sigma \eta V^2 dl = \text{极小} \\ f &= -\frac{1}{2} I \delta(x - x_A) \delta(z - z_A) \end{aligned} \quad (2.4)$$

二、变分问题的离散化

迭代有限元法作正演模拟时, 由于受计算机内存、容量和时间的限制, 通常把无限大的地下半空间中场的分布限定在有限的区域内, 并把这个区域进行网格剖分, 相应地把场满足的泛函极值问题离散化。下面分别讨论区域网格剖分、单元分析、系数矩阵的简化、外区迭代消元、总体刚度矩阵合成等问题。

(一) 区域网格剖分

首先把模拟区域划分为内区和外区, 即求解区和边界区。内、外区的大小是根据模拟区域的特征, 算区的范围及计算量等人为规定的。在内区进行网格剖分, 其方法较多, 但不同的剖分方法对场的模拟精度有不同程度的影响。根据前人的讨论(周熙襄, 1986)可知, 采用矩形网格中布置交叉对称三角形的剖分方法(简记为矩形—三角形网格剖分方法)模拟精度高。因此, 在内区采用矩形—三角形网格的剖分方法。这种网格剖分方法, 不仅模拟非均匀体灵活方便, 而且有利于节省内存和减少计算量。在外区为了迭代处理方便, 采用梯形网格中布置由对角线划分的四个三角形的网格(简称为梯形—三角形网格)环域之间按一定比例剖分, 且环域间对应单元成相似单元, 如图 2.1 所示。同时还要注意到剖分的原则, 也就是说各单元的节点只能与相邻单元的节点重合, 不能为相邻单元的边内点; 每个单元内不均匀体介质的电导率为常数; 场变化剧烈的地方, 网格剖分密一些, 场变化平缓的地方网格剖分的稀一些, 单元的大小变化应是逐渐过渡的。

(二) 单元分析

泛函方程组的离散化就是把整个求解区和边界区上的积分表达式表示成各个单元 e 上的积分之和。因此先分析三角形单元上的函数。设 e 单元的三个顶点分别为第 i, j, k 个节点

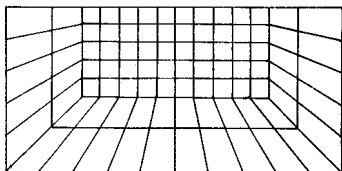


图 2.1 网格剖分示意图

(图 2.1), 其坐标分别记为 (x_i, z_i) 、 (x_j, z_j) 、 (x_k, z_k) , 其对应节点的傅氏电位为 V_i, V_j, V_k , 设单元内 V 是线性函数:

$$V(x, z) = a + bx + cz \quad (2.5)$$

那么单元 e 内线性插值函数 $V(x, z)$ 可近似地表示为三个节点上傅氏电位 V_i, V_j, V_k 的线性函数:

$$V(x, z) = N_i(x, z)V_i + N_j(x, z)V_j + N_k(x, z)V_k \quad (2.6)$$

式中: $N_i(x, z) = \frac{1}{2\Delta e}(a_i + b_i x + c_i z)$

$$N_j(x, z) = \frac{1}{2\Delta e}(a_j + b_j x + c_j z)$$

$$N_k(x, z) = \frac{1}{2\Delta e}(a_k + b_k x + c_k z)$$

称为基函数, 其中

$$a_i = x_j z_k - x_k z_j$$

$$b_i = z_j - z_k$$

$$c_i = x_k - x_j$$

$$a_j = x_k z_i - x_i z_k$$

$$b_j = z_k - z_i$$

$$c_j = x_i - x_k$$

$$a_k = x_i z_j - x_j z_i$$

$$b_k = z_i - z_j$$

$$c_k = x_j - x_i$$

$$\Delta e = \frac{1}{2}(b_{x'} - b_{x''})$$

从(2.6)式中可得到线性函数的一阶偏导数:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial N_i}{\partial x}V_i + \frac{\partial N_j}{\partial x}V_j + \frac{\partial N_k}{\partial x}V_k \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{\partial N_i}{\partial z}V_i + \frac{\partial N_j}{\partial z}V_j + \frac{\partial N_k}{\partial z}V_k\end{aligned}\quad (2.7)$$

其中:

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_i}{\partial x} &= \frac{b_i}{2\Delta e} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x} &= \frac{b_j}{2\Delta e} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x} &= \frac{b_k}{2\Delta e} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} &= \frac{c_i}{2\Delta e} \\ \frac{\partial N_j}{\partial z} &= \frac{c_j}{2\Delta e} \\ \frac{\partial N_k}{\partial z} &= \frac{c_k}{2\Delta e}\end{aligned}$$

从(2.4)式不难推导出三角形单元泛函的一般表达式:

$$\begin{aligned}J_e &= \frac{\sigma}{4\Delta e}[(b_iV_i + b_jV_j + b_kV_k)^2 + (c_iV_i + c_jV_j + c_kV_k)^2] \\ &+ \frac{\sigma\lambda^2\Delta e}{6}(V_i^2 + V_j^2 + V_k^2 + V_iV_j + V_iV_k + V_jV_k) \\ &- \left(\frac{I_i}{n_i}V_i + \frac{I_j}{n_j}V_j + \frac{I_k}{n_k}V_k\right) \\ &+ \begin{cases} \frac{\sigma\eta_{ij}L_{ij}}{3}(V_i^2 + V_j^2 + V_iV_j) & (i, j \in \Gamma_1) \\ \frac{\sigma\eta_{jk}L_{jk}}{3}(V_j^2 + V_k^2 + V_jV_k) & (j, k \in \Gamma_2) \\ \frac{\sigma\eta_{ki}L_{ki}}{3}(V_k^2 + V_i^2 + V_kV_i) & (i, k \in \Gamma_2) \end{cases}\end{aligned}\quad (2.8)$$

式中: n_i, n_j, n_k 分别表示以 i, j, k 为顶点的三角形单元数。

我们的目标是求泛函 J 取得极小的函数 V 。按照极小的必要条件:

$$\frac{\partial J}{\partial V_L} = 0 \quad (L=1, 2, \dots, N)$$

对于内区来说,式中 N 为内区所有节点数,对于外区而言, N 则是任一环域上单元节点的总和。单元 e 上泛函对 V_L 的偏导数:

$$\frac{\partial J_e}{\partial V_L} = 0 \quad (L=1, 2, \dots, N)$$

即:

$$\begin{cases} \frac{\partial J_e}{\partial V_1} = 0 \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_i} = K_{ii}^e V_i + K_{ij}^e V_j + K_{ik}^e V_k - \frac{I_i}{n_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_j} = K_{ji}^e V_i + K_{jj}^e V_j + K_{jk}^e V_k - \frac{I_j}{n_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_k} = K_{ki}^e V_i + K_{kj}^e V_j + K_{kk}^e V_k - \frac{I_k}{n_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_N} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

式中, K_{ij}^e 等写成通式的形式(罗延钟, 1987)为:

$$K_{pq}^e = \sigma \left[\frac{1}{2\Delta e} (b_p b_q + c_p c_q) + \frac{G \Delta e \cdot \lambda^2}{6} + \frac{G \eta L_p}{3} \right] \quad (2.10)$$

$$p, q, r = i, j, k \quad p \neq r$$

$$p = q \text{ 时 } G = 2; \quad p \neq q \text{ 时 } G = 1$$

$$I_r = \begin{cases} \frac{I_r}{n_r} & r = i, j, k \\ 0 & r \neq i, j, k \end{cases} \quad (2.11)$$

将(2.9)式写成矩阵的形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial J_e}{\partial V_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial J_e}{\partial V_N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & K'_{ij} & \cdots & K'_{ji} & \cdots & K'_{ik} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & K'_{ji} & \cdots & K'_{ij} & \cdots & K'_{jk} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & K'_{ik} & \cdots & K'_{kj} & \cdots & K'_{ki} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_i \\ \vdots \\ V_j \\ \vdots \\ V_k \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ I_i/n_i \\ \vdots \\ I_j/n_j \\ \vdots \\ I_k/n_k \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

或： $\{\delta J^e\} = [K^e] \cdot \{V\} - \{I^e\}$

所有单元的 J^e 相加,便得到整个区域的泛函。根据多元函数极值问题的必要条件有:

$$\frac{\partial J}{\partial V} = \frac{\partial}{\partial V} \sum_e J^e = \sum_e \frac{\partial J^e}{\partial V_i} = 0 \quad (2.13)$$

(2.12)式代入(2.13)式得:

$$\sum_e [K^e] \cdot \{V\} - \sum_e \{I^e\} = 0$$

即

$$[K] \{V\} = \{I\} \quad (2.14)$$

式中: $[K] = \sum_e [K^e]$, 其相应元素 $K_{pq} = \sum_e K'_{pq}$

场源列矢量 $\{I\} = \sum_e \{I^e\}$, 其元素 $I_r = \sum_e I^e_r$
 $(p, q = 1, 2, \dots, N) \quad (r = 1, 2, \dots, N)$

(三) 系数矩阵的简化

对模拟区采用矩形—三角形网格剖分,模拟地形或非均匀体的程度较高,在三角形单元内作线性插值近似程度好。但是由于网格剖分较细,节点数较多,系数矩阵的阶数较高,计算量较大。为了保持较好的模拟精度以及较低的系数矩阵的阶数,罗延钟等介绍了一种系数矩阵简化的方法,即取矩形网格中心点为一个虚设节点(此点不设置为供电点),那么,从矩形单元五个节点中消去中心节点,其单元内部能量由矩形的四个顶点来表示,这样就大大地降低了系数矩阵的规模。在内区和外区,采用这种方法对系数矩阵进行简化。

对于外区而言,网格节点通常为梯形—三角形单元,如图 2.2 所示。按照(2.10)式可得

到梯形单元中各三角形单元的系数矩阵。

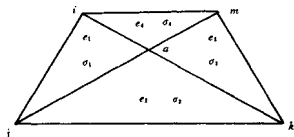


图 2.2 外区梯形—三角形网格单元示意图

单元 e_1 系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned} K_{ii}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_i^2 + c_i^2) + \frac{1}{3} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \\ K_{jj}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_j^2 + c_j^2) + \frac{1}{3} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \\ K_{kk}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_k^2 + c_k^2) + \frac{1}{3} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \\ K_{ij}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_i b_j + c_i c_j) + \frac{1}{6} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \\ K_{jk}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_j b_k + c_j c_k) + \frac{1}{6} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \\ K_{ki}^1 &= \frac{\sigma_1}{2\Delta e_1} (b_k b_i + c_k c_i) + \frac{1}{6} \sigma_1 \Delta e_1 \lambda^2 \end{aligned}$$

单元 e_2 系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned} K_{ii}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_i^2 + c_i^2) + \frac{1}{3} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \\ K_{jj}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_j^2 + c_j^2) + \frac{1}{3} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \\ K_{kk}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_k^2 + c_k^2) + \frac{1}{3} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \\ K_{ij}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_i b_j + c_i c_j) + \frac{1}{6} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \\ K_{jk}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_j b_k + c_j c_k) + \frac{1}{6} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \\ K_{ki}^2 &= \frac{\sigma_2}{2\Delta e_2} (b_k b_i + c_k c_i) + \frac{1}{6} \sigma_2 \Delta e_2 \lambda^2 \end{aligned}$$

单元 e_3 系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned} K_{11}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_i^2 + c_i^2) + \frac{1}{3} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \\ K_{22}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_m^2 + c_m^2) + \frac{1}{3} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \\ K_{33}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_v^2 + c_v^2) + \frac{1}{3} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \\ K_{12}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_i b_m + c_i c_m) + \frac{1}{6} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \\ K_{23}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_m b_v + c_m c_v) + \frac{1}{6} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \\ K_{13}^3 &= \frac{\sigma_3}{2\Delta e_3} (b_i b_v + c_i c_v) + \frac{1}{6} \sigma_3 \Delta e_3 \lambda^2 \end{aligned}$$

单元 e_4 系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned} K_{11}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_w^2 + c_w^2) + \frac{1}{3} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \\ K_{22}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_i^2 + c_i^2) + \frac{1}{3} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \\ K_{33}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_s^2 + c_s^2) + \frac{1}{3} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \\ K_{12}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_w b_i + c_w c_i) + \frac{1}{6} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \\ K_{23}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_i b_s + c_i c_s) + \frac{1}{6} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \\ K_{13}^4 &= \frac{\sigma_4}{2\Delta e_4} (b_w b_s + c_w c_s) + \frac{1}{6} \sigma_4 \Delta e_4 \lambda^2 \end{aligned}$$

三角形单元的系数矩阵为对称矩阵, 它们的合成形成梯形单元的系数矩阵, 即

$$[K^E] = [K^1] + [K^2] + [K^3] + [K^4] \quad (2.15)$$

把各三角形单元系数矩阵代入(2.15)式, 得到梯形单元系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned} K_{11}^E &= \frac{1}{2} (b_i^2 + c_i^2) \left(\frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} \right) + \frac{\lambda^2}{3} (\sigma_1 \Delta e_1 + \sigma_4 \Delta e_4) \\ K_{22}^E &= \frac{1}{2} (b_i^2 + c_i^2) \left(\frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\sigma_2}{\Delta e_2} \right) + \frac{\lambda^2}{3} (\sigma_1 \Delta e_1 + \sigma_2 \Delta e_2) \\ K_{33}^E &= \frac{1}{2} (b_i^2 + c_i^2) \left(\frac{\sigma_2}{\Delta e_2} + \frac{\sigma_3}{\Delta e_3} \right) + \frac{\lambda^2}{3} (\sigma_2 \Delta e_2 + \sigma_3 \Delta e_3) \\ K_{44}^E &= \frac{1}{2} (b_w^2 + c_w^2) \left(\frac{\sigma_3}{\Delta e_3} + \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} \right) + \frac{\lambda^2}{3} (\sigma_3 \Delta e_3 + \sigma_4 \Delta e_4) \\ K_{12}^E &= \frac{1}{2} (b_i^2 + c_i^2) \left(\frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\sigma_2}{\Delta e_2} + \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} \right) + \frac{\lambda^2}{3} (\sigma_1 \Delta e_1 + \sigma_2 \Delta e_2 + \sigma_3 \Delta e_3 + \sigma_4 \Delta e_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{ij}^E &= \frac{1}{2}(b_i b_j + c_i c_j) \frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\lambda^2}{6} \sigma_1 \Delta e_1 \\
K_{jk}^E &= \frac{1}{2}(b_j b_k + c_j c_k) \frac{\sigma_2}{\Delta e_2} + \frac{\lambda^2}{6} \sigma_2 \Delta e_2 \\
K_{km}^E &= \frac{1}{2}(b_k b_m + c_k c_m) \frac{\sigma_3}{\Delta e_3} + \frac{\lambda^2}{6} \sigma_3 \Delta e_3 \\
K_{mi}^E &= \frac{1}{2}(b_m b_i + c_m c_i) \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} + \frac{\lambda^2}{6} \sigma_4 \Delta e_4 \\
K_{ib}^E &= \frac{1}{2}(b_i b_a + c_i c_a) \left(\frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} \right) + \frac{\lambda^2}{6} (\sigma_1 \Delta e_1 + \sigma_4 \Delta e_4) \\
K_{ja}^E &= \frac{1}{2}(b_j b_a + c_j c_a) \left(\frac{\sigma_1}{\Delta e_1} + \frac{\sigma_2}{\Delta e_2} \right) + \frac{\lambda^2}{6} (\sigma_1 \Delta e_1 + \sigma_2 \Delta e_2) \\
K_{ba}^E &= \frac{1}{2}(b_a b_a + c_a c_a) \left(\frac{\sigma_2}{\Delta e_2} + \frac{\sigma_3}{\Delta e_3} \right) + \frac{\lambda^2}{6} (\sigma_2 \Delta e_2 + \sigma_3 \Delta e_3) \\
K_{ma}^E &= \frac{1}{2}(b_m b_a + c_m c_a) \left(\frac{\sigma_3}{\Delta e_3} + \frac{\sigma_4}{\Delta e_4} \right) + \frac{\lambda^2}{6} (\sigma_3 \Delta e_3 + \sigma_4 \Delta e_4)
\end{aligned}$$

梯形单元系数矩阵仍为对称矩阵。把梯形中心节点所在的行与列从梯形单元系数矩阵中消去,组成梯形单元关于四个顶点的系数矩阵 $[K^E]$,其非零元素为:

$$\begin{aligned}
K_{ii}^E &= K_{ii}^E - \frac{(K_{ia}^E)^2}{K_{aa}^E} \\
K_{jj}^E &= K_{jj}^E - \frac{(K_{ja}^E)^2}{K_{aa}^E} \\
K_{kk}^E &= K_{kk}^E - \frac{(K_{ka}^E)^2}{K_{aa}^E} \\
K_{mm}^E &= K_{mm}^E - \frac{(K_{ma}^E)^2}{K_{aa}^E} \\
K_{ij}^E &= K_{ij}^E - \frac{(K_{ia}^E \cdot K_{ja}^E)}{K_{aa}^E} \\
K_{jk}^E &= K_{jk}^E - \frac{(K_{ja}^E \cdot K_{ka}^E)}{K_{aa}^E} \\
K_{km}^E &= K_{km}^E - \frac{(K_{ka}^E \cdot K_{ma}^E)}{K_{aa}^E} \\
K_{mi}^E &= K_{mi}^E - \frac{(K_{ma}^E \cdot K_{ia}^E)}{K_{aa}^E} \\
K_{ia}^E &= -\frac{K_{ia}^E K_{ia}^E}{K_{aa}^E} \\
K_{ja}^E &= -\frac{K_{ja}^E K_{ja}^E}{K_{aa}^E}
\end{aligned} \tag{2.16}$$

梯形单元系数矩阵仍为对称矩阵,当梯形单元为外边界时,则(2.16)式中某些非零元素应加上与混合边界条件有关的项。当 i, j 在边界上,则有:

$$\begin{aligned}
K_{ii}^L &= K_{ii}^L + \frac{2}{3} \eta_i L_i \sigma \\
K_{ij}^L &= K_{ij}^L + \frac{2}{3} \eta_j L_j \sigma \\
K_{ij}^L &= K_{ij}^L + \frac{1}{3} \eta_j L_j \sigma
\end{aligned} \quad (2.17)$$

利用(2.16)式和(2.17)式可计算出外区系数矩阵。

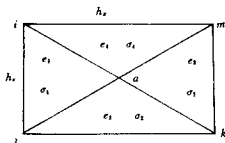


图 2.3 内区矩形-三角形网格单元示意图

当采用矩形-三角形网格剖分时,其单元编号及参数如图 2.3。由于该网格单元对称,各三角形面积都相同,根据(2.10)式、(2.15)式可得出内区矩形-三角形单元系数矩阵的非零元素:

$$\begin{aligned}
K_{ii}^E &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_4) \left(\frac{h_z}{h_x} + \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{6} h_x h_z \right) \\
K_{ij}^E &= \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) \left(\frac{h_z}{h_x} + \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{6} h_x h_z \right) \\
K_{im}^E &= \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \left(\frac{h_z}{h_x} + \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{6} h_x h_z \right) \\
K_{jm}^E &= \frac{1}{2} (\sigma_3 + \sigma_4) \left(\frac{h_z}{h_x} + \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{6} h_x h_z \right) \\
K_{im}^E &= 2(\sigma_1 + \sigma_3) \left(\frac{h_z}{h_x} \right) + 2(\sigma_2 + \sigma_4) \frac{h_x}{h_z} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) \lambda^2}{12} h_x h_z \\
K_{ji}^E &= \frac{\sigma_1}{2} \left(\frac{h_z}{h_x} - \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{12} h_x h_z \right) \\
K_{ji}^E &= \frac{\sigma_2}{2} \left(\frac{h_z}{h_x} + \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{12} h_x h_z \right) \\
K_{im}^E &= \frac{\sigma_3}{2} \left(\frac{h_z}{h_x} - \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{12} h_x h_z \right) \\
K_{im}^E &= \frac{\sigma_4}{2} \left(-\frac{h_z}{h_x} - \frac{h_x}{h_z} + \frac{\lambda^2}{12} h_x h_z \right) \\
K_{im}^E &= -\sigma_4 \frac{h_x}{h_z} - \sigma_1 \frac{h_z}{h_x} + \frac{(\sigma_4 + \sigma_1) \lambda^2}{24} h_x h_z
\end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} K_{ja}^E &= \sigma_1 \frac{h_x}{h_s} - \sigma_2 \frac{h_x}{h_s} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2)\lambda^2}{24} h_s h_x \\ K_{ba}^E &= \sigma_2 \frac{h_x}{h_s} - \sigma_3 \frac{h_x}{h_s} + \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)\lambda^2}{24} h_s h_x \\ K_{ca}^E &= -\sigma_3 \frac{h_x}{h_s} - \sigma_4 \frac{h_x}{h_s} + \frac{(\sigma_3 + \sigma_4)\lambda^2}{24} h_s h_x \end{aligned}$$

矩形-三角形单元系数矩阵为对称矩阵,按照(2.16)式的方法消去网格单元中心节点的系数项,可得到矩形单元关于四个顶点的系数矩阵 $[K^R]$ 。整个内区系数矩阵迭加组合,形成内区系数矩阵 $[K^I]$,那么:

$$[K^I] = \sum_R [K^R] \quad R \in R_I \quad (2.19)$$

这个系数矩阵的阶数等于内区网格节点数。

(四)外区系数矩阵的迭代消元

外区系数矩阵经过简化处理后,计算出梯形单元的系数矩阵 $[K^L]$ 。合成图 1.2 中 Ω 区域各单元系数矩阵 $[K^{(i-1)}]$:

$$[K^{(i-1)}] = \sum_L [K^L] \quad L \in \Omega_i \quad (2.20)$$

根据(1.1)、(1.7)、(1.12)式,且设 $\Gamma_0, \Gamma_{i-1}, \Gamma_i$ 边界上的傅氏电位为 V_0, V_{i-1}, V_i 那么不难得到:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{0,i-1} & K_{12}^{0,i-1} & 0 \\ K_{21}^{0,i-1} & K_{22}^{0,i-1} + K_{11}^{i-1,i} & K_{12}^{i-1,i} \\ 0 & K_{21}^{i-1,i} & K_{22}^{i-1,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ V_{i-1} \\ V_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.21)$$

由(2.21)得:

$$V_{i-1} = - (A^{(i-1)})^{-1} K_{21}^{0,i-1} V_0 - (A^{(i-1)})^{-1} K_{12}^{i-1,i} V_i \quad (2.22)$$

式中:

$$A^{(i-1)} = K_{22}^{0,i-1} + K_{11}^{i-1,i}$$

把(2.22)式代入(2.21)式消去 V_{i-1} 得:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^{0,i} & K_{12}^{0,i} \\ K_{21}^{0,i} & K_{22}^{0,i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_0 \\ V_i \end{Bmatrix} = 0 \quad (2.23)$$

式中:

$$\begin{cases} K_{11}^{0,i} = K_{11}^{0,i-1} - K_{12}^{0,i-1}(A^{i-1})^{-1}K_{21}^{0,i-1} \\ K_{12}^{0,i} = -K_{12}^{0,i-1}(A^{i-1})^{-1}K_{22}^{0,i-1} \\ K_{21}^{0,i} = -K_{21}^{0,i-1}(A^{i-1})^{-1}K_{11}^{0,i-1} \\ K_{22}^{0,i} = K_{22}^{0,i-1} - K_{21}^{0,i-1}(A^{i-1})^{-1}K_{12}^{0,i-1} \\ A^{i-1} = K_{22}^{0,i-1} - K_{21}^{0,i-1} \end{cases} \quad (2.24)$$

按照(2.24)式进行迭代消元,当 Γ_i 达到最外层边界 Γ_m 时,根据(2.24)式计算内区外边界系数矩阵 $[K^{0,m}]$

$$K^{0,m} = K_{11}^{0,m} - K_{12}^{0,m}(K_{22}^{0,m})^{-1}K_{21}^{0,m} \quad (2.25)$$

(2.24)、(2.25)式给出了外区消元的迭代公式。从(2.24)可以看出,消环过程是从内向外逐环进行,直至最外层边界上的场能量趋于无穷小为止。顺便指出,消环过程也可从外向内,其道理是一样的。

(五)系数矩阵的总体合成

经过内区单元系数矩阵的组合和外区环境矩阵的消元得到内区系数矩阵 $[K^i]$ 和外区系数矩阵 $[K^0]$ 。合成内、外区数矩阵形成整个区域上的总体刚度矩阵 $[K]$;

$$[K] = [K^i] + [K^0] \quad (2.26)$$

相应的变分问题的离散化后的线性方程组为:

$$[K]\{V\} = \{F\} \quad (2.27)$$

应该指出, $[K^i]$ 为稀疏带状矩阵,通常采用压缩存储,而 $[K^0]$ 则是方阵,因此内、外区系数矩阵的总体合成时注意其对应项。

三、线性方程组的解法

通常解线性方程组的方法有Cholesky分解法、高斯消去法、QR分解法等。这三种方法比较,QR分解法最为可靠,计算量约为Cholesky分解法的两倍,而Cholesky分解法其速度是最快的。根据刚度矩阵大型、稀疏、带状、对称、正定的特点,我们采用Cholesky分解法。数学上已证明带状、对称、正定矩阵 $[K]$ 作 LDL^T 分解后,下三角矩阵 $[L]$ 也是带状的,且半带宽不超过 $[K]$ 的半带宽。这样可通过 $[K][L]$ 占用相同的内存单元来节省内存量。实际模拟地球物理模型时往往沿水平方向网格较长,节点数较多,沿垂直方向网格较短,节点数较少。若采用图2.1的网格剖分方法,节点编号按环由外向内逐环进行。设内区水平方向节点数为 M ,垂直方向节点数为 N ,内区环数为 L ,那么刚度矩阵非零元素半带宽呈上宽下窄的条带状。对于刚度矩阵的任一行,其非零元素的半带宽 S 有:

$$S_L \leq S \leq S_M$$

其中:

$$S_L = M + 2N - 2L$$

$$S_M = M + 2N$$

由于刚度矩阵非零元素分布呈对称、带状型,故采用压缩存储的方式来节省所需的计算机内存,如图 2.4。

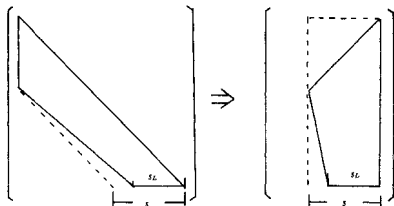


图 2.4 刚度矩阵压缩贮存示意图

从方程(2.27)可知,供电节点只与方程的右端项有关,而与方程的系数矩阵无关。这样在计算不同供电节点上场的分布时,只需形成和分解一次系数矩阵。对于不同的供电节点形成不同的右端项,逐项回代计算,便可得到不同供电节点时,其它节点上的傅氏电位值。

四、视电阻率和视极化率的计算

解方程组(2.27)计算出内区各节点的傅氏电位后,用给定的不同波数 λ 按(2.2)式对傅氏电位作傅氏逆变换,求出内区各节点上的电位 U 。对于一定的电极装置计算出各个节点上的电位后,可计算出该装置的视电阻率 ρ_s 和视极化率 η_s 。

假设供电电极 $A(I)$ 、 $B(-I)$ 和测量电极 M 、 N 为中梯装置,那么视电阻率的计算公式为:

$$\rho_s = K \frac{U_M - U_N}{I} \quad (2.28)$$

式中: U_M 、 U_N 分别表示测量电极 M 、 N 节点上的电位值;

I 为供电电流强度;

K 为装置系数。

$$K = \frac{2\pi}{\frac{1}{AM} - \frac{1}{AN} - \frac{1}{BM} - \frac{1}{BN}} \quad (2.29)$$

对于三极装置 ($AMN, B \rightarrow \infty, AM = na, MN = a$) 有:

$$\begin{aligned} K^A &= 2\pi n(n+1)a \\ \rho_s^A &= K^A \frac{U_M - U_N}{I} \end{aligned} \quad (2.30)$$

当三极装置反向时 ($A \rightarrow \infty, MNB, BN = na, MN = a$)

$$\begin{aligned} K^B &= K^A = 2\pi n(n+1)a \\ \rho_s^B &= K^B \frac{U_M - U_N}{I} \end{aligned}$$

对于对称四极装置 ($AMNB, AM = BN = na, MN = a$)

$$\rho_s^{AB} = \frac{1}{2}(\rho_s^A + \rho_s^B) \quad (2.31)$$

对于偶极装置 ($ABMN, AB = MN = a, AM = BN = (n+1)a$) 有:

$$\begin{aligned} \rho_s^{AB} &= \frac{\varphi \rho_s^A - \rho_s^B}{\varphi - 1} \\ \varphi &= \frac{K^A}{K^B} \end{aligned} \quad (2.32)$$

若计算视极化率 η_s 时,可利用“等效视电阻率法”来模拟激电效应。具体模拟计算时,可先标出地下电阻率为 $\rho_1, \rho_2, \dots$ 等分布时的视电阻率 ρ_s ,然后把地下各非均匀介质对应的极化率 $\eta_1, \eta_2, \dots$ 等转换成等效电阻率 $\rho_1^*, \rho_2^*, \dots$ 等。

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \frac{\rho_1}{1 - \eta_1} \\ \rho_2^* &= \frac{\rho_2}{1 - \eta_2} \end{aligned}$$

采用同样的计算方法可求得等效视电阻率 ρ_s^* ,按(2.33)式计算视极化率 η_s 。

$$\eta_s = \frac{\rho_s^* - \rho_s}{\rho_s^*} \quad (2.33)$$

五、程序框图及算例

(一) 程序框图

在电子计算机上实现迭代有限元算法时,为了灵活、方便、适用,我们把整个模拟计算程序分为三个模块。模块1为程序参数输入的通用模块。该模块主要用于参数输入、参数修改、网格自动剖分,输出网格节点、网格单元剖分示意图和地电参数断面图,以便检查校对。模块2是外区边界计算模块。它根据网格大小和地电参数对外区进行迭代消环处理,最后把处理结果以文件形式存储起来。对于同一地区(或说同一外区)的不同内区的模型,只需作一次外区处理。模块3为模拟计算模块。根据模块1和模块2给出的数据文件计算给定模型的视电阻率或视极化率。各模块流程图见图2.5、图2.6。

(二) 算例

应用点电流源二维地电构造正演模拟的迭代有限元法程序,我们对几种单-极化体的地电模型进行了模拟计算,下面分析其计算结果。

对于低阻方柱体偶极剖面法模拟计算结果示于图2.7。由图可见,当电极距较小时,剖面曲线 ρ_s 在方柱顶上方有幅度较小的极小值,当极距逐渐增大时,极小值的幅度随之增大,且在异常体正上方两侧出现较小对称的极大值。当 $n=3$ 时,极小值的幅度达到最大,当 n 继续增大,方柱上方出现两个极小值,它随着电极距的增大向两侧移动。低阻方柱上偶极剖面异常曲线的形态、特征同低阻球体上理论计算的偶极剖面异常曲线完全一致。高阻方柱体偶极剖面法异常曲线特征见图2.8。从图可看出,当 n 较小时,异常体上方异常曲线为单峰异常,且幅度较小;当 $n=2$ 时,单峰极大值幅度达到最大;当 n 继续增加时,极大值由单峰变为双峰,且逐渐向两侧移动,同时极化体上方出现局部极小,其幅度随 n 的增大而增大。

高低阻直立板体的偶极装置模拟结果由图2.9、图2.10给出。从图不难看出,它们的偶极剖面异常曲线分布形态、特征基本上与高、低阻方柱的异常曲线相似。高、低阻直立板体在图2.9、图2.10给定参数的条件下最佳电极距分别为: $n=2$ 和 $n=3$ 。同时我们还可以看到高、低阻直立板体的数值模拟计算结果与其物理模拟实验结果相吻合。

高低阻倾斜板体上偶极剖面异常曲线见图2.11、图2.12。从图可看到曲线表现为不对称,以其高、低阻异常为主要特征。随着极距的增大高阻体上的异常极大值向板体的倾斜方向移动,低阻体上异常极小值向板体反倾斜方向移动。这些异常特征与物理模拟实验相符。

图2.13、图2.14分别为山谷、山脊上偶极剖面纯地形异常曲线图,由图可见,山谷上以低阻异常为主,两侧有高阻异常带。山脊上方以高阻异常为主,两侧有低阻异常带。其异常分布的规律、特征同物理模型实验结果一致。

从上面几个算例可以看出,各种模型数值模拟计算的异常曲线形态特征和异常分布规律与相应模拟实验结果或理论计算结果一致,这说明迭代有限元法用于点电流源二维地电构造中数值模拟的方法是正确的,对复杂或简单模型的模型的模拟结果是可信的。

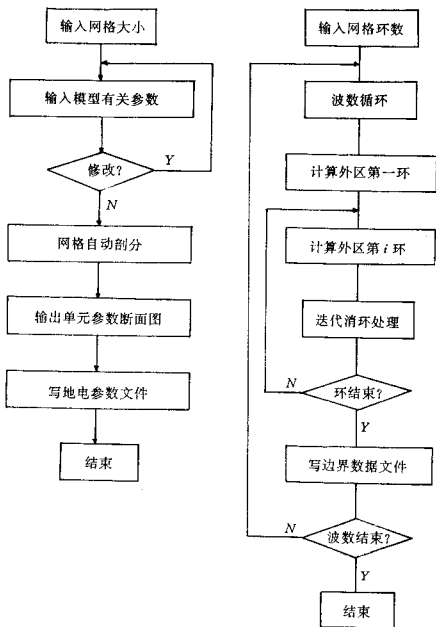


图 2.5 迭代有限元正演模拟外区处理流程图

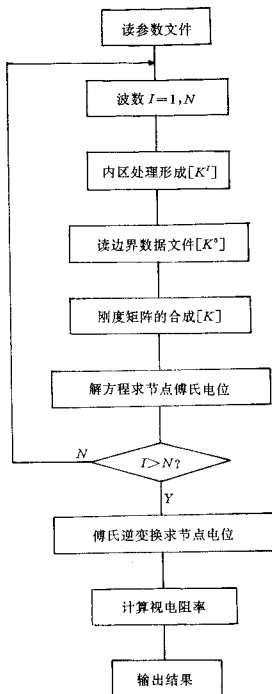


图 2.6 迭代有限元正演模拟内区处理流程图

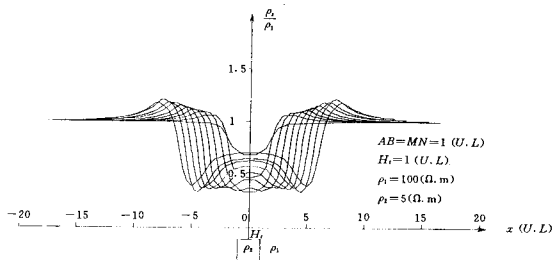


图 2.7 低阻方柱上偶极装置 ρ_2 剖面曲线图

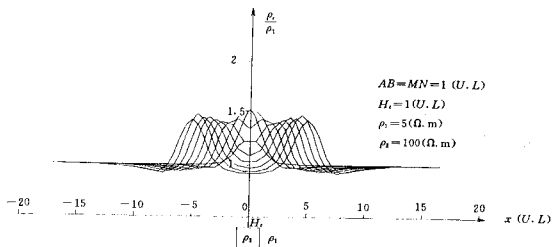


图 2.8 高阻方柱上偶极装置 ρ_2 剖面曲线图

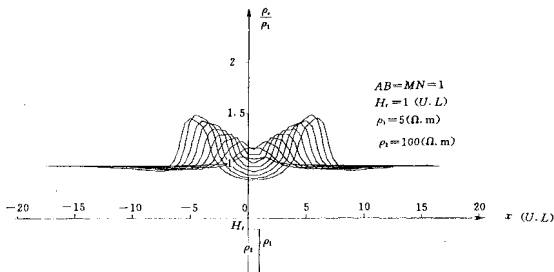


图 2.9 高阻直立板上偶极装置 ρ_z 剖面曲线图

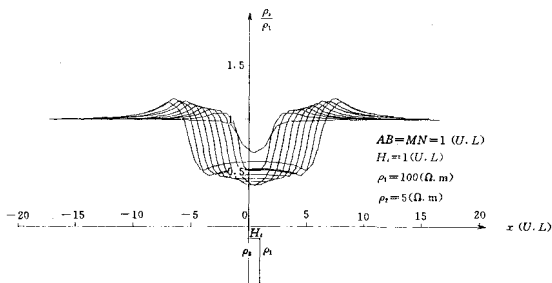


图 2.10 低阻直立板上偶极装置 ρ_z 剖面曲线图

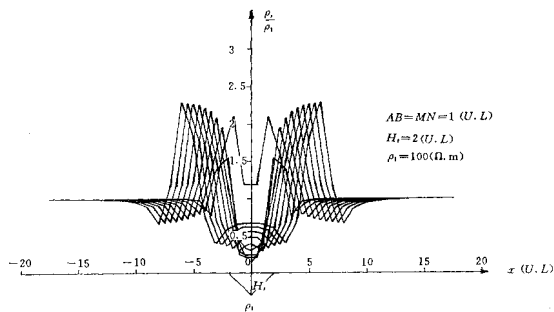


图 2.13 山谷地形上偶极剖面异常曲线图

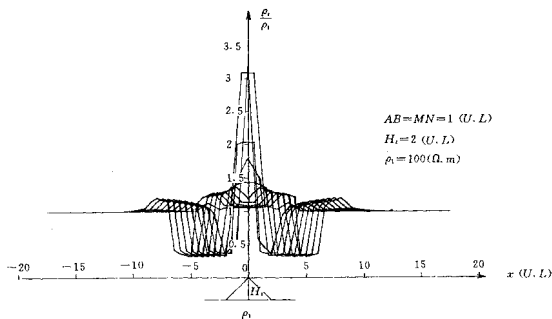


图 2.14 山脊地形上偶极剖面异常曲线图

第三章 迭代有限元法数值模拟若干问题的讨论

我们知道, 迭代有限元法对地球物理模型进行数值模拟主要通过场的变分问题的离散化、区域网格剖分、系数矩阵的总体合成、高阶线性方程组求解、傅氏逆变换和视参数的计算等过程来实现。但有这些过程中, 各个环节的处理方法不同, 则它不同程度地影响着数值计算精度、速度和占用的计算机内存。为了更进一步地了解迭代有限元法的特点, 更好地应用迭代有限元数值计算方法, 我们以点源二维地电构造中迭代有限元法数值模拟为例, 讨论迭代有限元法数值计算的边界条件、网格剖分、傅氏变换波数的选取、迭代有限元法程序的功能、精度及效率, 同时对有限单元法和迭代有限元进行比较, 最后给出几个复杂的地球物理模型的模拟结果。

一、关于边界条件的应用

在三维笛卡尔坐标系中, 假设供电点位于 $A(x_A, y_A, z_A)$ 点上, 电流强度为 I , 那么稳定电流场电位满足微分方程:

$$\nabla \cdot \sigma \nabla U = -I \delta(x - x_A) \delta(y - y_A) \delta(z - z_A) \quad (3.1)$$

对于二维地电断面, 取 Y 轴平行于地质体的走向, 即 $\sigma = \sigma(x, z)$ 对 (4.1) 式沿 Y 轴作余弦傅氏变换有

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\sigma \frac{\partial V}{\partial z} \right) - \sigma \lambda^2 V = f \quad (3.2)$$

$$f = -\frac{1}{2} I \delta(x - x_A) \delta(z - z_A)$$

式中 V 为 U 的傅氏变换函数 (简称为傅氏电位)

对给定的若干 λ 值分别求解其 $V(x, \lambda, z)$ 后, 可通过傅氏逆变换计算空间电位 U 。

$$U = \frac{2}{\pi} \int V(x, \lambda, z) \cos(\lambda y) d\lambda$$

现在, 关键问题是求傅氏电位 V , 而求 V 必须给定定解问题的边界条件。在地面上 (Γ_1), 电场强度的法向分量为零, 相应的边界条件:

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{r_1} = 0 \quad (3.3)$$

對於其它边界 Γ_2 上, 有三类边界条件:

(1) 第一类边界条件(强加边界条件)

$$V|_{r_2} = 0 \quad (3.4)$$

(2) 第二类边界条件(自然边界条件)

$$\left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{r_2} = 0 \quad (3.5)$$

(3) 第三类边界条件(混合边界条件)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n} + \eta V \right) \Big|_{r_2} = 0$$

$$\eta = \lambda \frac{K_1(\lambda r)}{K_0(\lambda r)} \cos(r \cdot n) \quad (3.6)$$

式中 K_0, K_1 分别为零阶、一阶修正具塞尔函数。

为了计算地下无限半空间稳定电流场的电位分布, 必须把无限区域中的场分布限定在有限区域之中采用有限单元法计算。J. H. Coggon 计算结果表明, 采用式 (3.4) 的边界条件计算 V 和 U 值偏小, 采用式 (3.5) 边界条件计算 V 和 U 值偏大。周熙襄等人沿用 A. Dey 和 H. F. Morrison 的作法, 从均匀半空间中单点电流源电场的性质出发, 导出了混合边界条件。用第三类边界条件比用前两类边界条件计算的 V 和 U 精度较高。因此有限单元法对开区场问题的求解, 边界条件的选择是至关重要的, 边界条件取得合适, 计算精度较高, 边界条件取得不合适, 数值计算的精度较低, 甚至得到错误的结果。對於迭代有限元法而言, 由於它采用了物理上的无限区域来模拟实际地球物理模型的无限区域, 加之其方法本身的性质决定了它进行数值计算对边界条件的要求不太苛刻。不论是采用强加边界条件、自然边界条件, 还是混合边界条件, 它都能得到精度较高的计算结果。采用不同的边界条件只是在程序上和计算时间上不同而已。当采用自然边界条件时, 程序简单, 不需计算零阶、一阶修正具塞尔函数, 但外区处理时间长。采用混合边界条件时, 程序变得复杂, 外区处理时间短。

图 3.1 给出了自然边界条件 (BC-2) 和混合边界条件 (BC-3) 迭代有限元法对均匀地下半空间模拟计算的相对误差曲线图。由图可见, 对于剖分比例因子 $PC=1.2$, $x=15$ 的点而言, 两条误差曲线随着外区环数 NC 的增大, 误差变小; NC 达到某一值时, 误差降到最低; NC 继续增大, 误差达到稳定。取自然边界条件时, 外区环数 NC 达到 30 时, 误差相对稳定。取混合边界条件时, 外区环数 NC 为 10 时, 误差基本稳定。稳定时误差 (相对误差) $\epsilon\% \leq 0.5222\%$

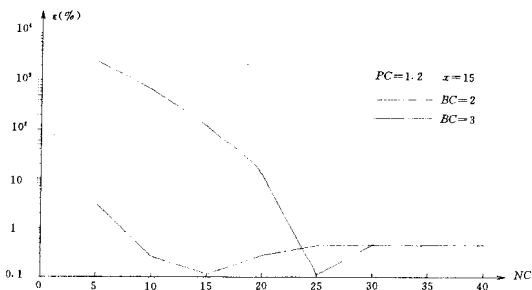


图 3.1 不同边界条件下均匀大地半空间模拟计算误差曲线图

二、网格剖分方法

迭代有限元法对地球物理模型正演模拟时需进行网格剖分。而网格剖分方法不同,对其场的模拟精度亦不同。因此,只有正确地选取网格剖分类型,剖分密度,才能保证模拟精度。

一般说,网格区域越大越好。这是因为泛函积分域就是网格区域。对该区域变分问题求解,必须给定正确的边界条件。然而,对于非均匀地球物理模型,边界条件,尤其是地下边界条件均无法正确求出,常常采用自然边界条件和混合边界条件来近似。只有网格区域边界远离非均匀体,即网格区域足够大时,才能保证模拟计算的精度。但是从另一方面来说,如果网格单元不变,那么增大网格区域,势必大量地增加节点数,以致于增加占用的计算机内存和计算量。对于网格单元而言,当然是越小越好。因为我们对变分问题线性化时,假设了单元内场随坐标呈线性变化和单元内物性均匀。如果单元大,前提条件得不到满足使得计算误差增大。因此,在网格区域不变的情况下,网格单元愈小模拟精度愈高。然而网格单元小,网格剖分节点数大,这样导致线性方程组的阶数较高,占用计算机内存量和计算量较大,给数值模拟带来困难。为了克服网格区域,单元大小中模拟精度和计算量、内存量之间的矛盾,我们采用非均匀网格。在内区选取较小的网格单元,在外区采用从小到大逐渐过渡的网格单元,这样既满足了单元内场呈线性变化、电性均匀的条件,又限制了网格节点的数量。在这个剖分原则的基础上,结合迭代有限元的特点,我们设计出外区网格剖分的三种方案。这三种剖分方案中,内区都采用矩形—三角形网格剖分法。对于外区而言,不同的网格分方案有其不同的特点。

第一方案，如图 3.2 所示，以网格中心点和内区边界点向外区延伸方向作射线与按一定比例放大的环形边界相交构造出大小不同的四边形，再用每个四边形的对角线自身剖分，形成了外区的四边形—三角形剖分网格。这种网格外环节点数目相同，在迭代消环处理时，系数矩阵的阶数不变，所需的计算机内存量也不变，如图 3.5 (a) 所示。这种网格剖分方法类似於 P · P · Silvester 的剖分方法 (Charles W. steel, 1987) 这种网格适应於介质均匀的外区。

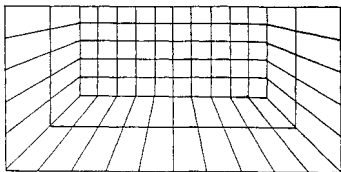


图 3.2 第一方案网格类型示意图

第二方案，如图 3.3。外区采用矩形三角形网格剖分方法。这种网格类似於常规的有限单元法网格，它不仅模拟精度高，而且能较好地模拟较为复杂的地球物理模型，特别是水平层状介质或较大的垂直接触带等。但是，这种网格外区各环节点数目不同，这样外区迭代消环过程中所需计算机内存随着迭代次数的增加而增加，如图 3.5 (b) 所示。

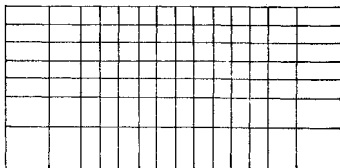


图 3.3 第二方案网格类型示意图

对前两种方案扬长避短，形成第三方案，如图 3.4。在内区左右两侧的外区采用剖分的第二方案，在内区下部的的外区采用剖分第一方案。这种网格剖分方法不仅能较好地适应应用地球物理模型水平层状的特点，而且外区各环节点数目相同。实际迭代消环时，所需计算机内存不变，如图 3.5 (a) 所示。因此，这种网格既能灵活地模拟各种复杂的地球物理

模型，又能节省计算机所占用的内存。

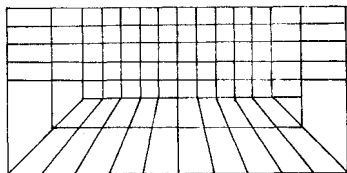


图 3.4 第三方案网格类型示意图

以上给出的三种网格剖分方法中，网格内、外区的大小、网格的剖分密度、节点数目以及节点间距均是可变的。实际模拟计算时，可根据实际需求来确定这些参数。

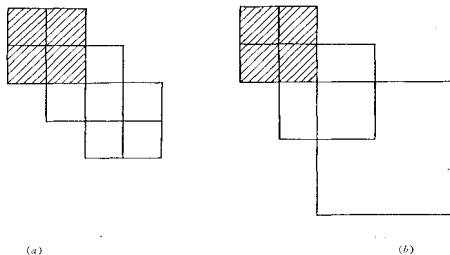


图 3.5 各类网格外区消元过程占用内存示意图
(a) 第一、三方案网格类型 (b) 第二方案网格类型

三、傅氏逆变换波数 λ 的选取

在求解点源二维地电构造的电场问题时，为了使问题简化，采用傅氏变换把问题转化

为波数域中的二维问题。求出波数域中傅氏电位通过傅氏逆变换可得到空间的电位分布。而傅氏逆变换时，波数 λ 的合理选择较难，它选择的好坏直接影响到计算精度和计算时间。不同的学者采用不同的方法选取波数。曾见到的有经验法（罗延钟，1987）和最优化法（徐世浙，1988）。经验法是根据均匀大地条件下傅氏电位的分布特征，给出了波数的选取方法，如：

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{0.1}{r_{\max}} \\ \lambda_N &= \frac{3}{r_{\min}} \\ N &= \frac{\ln \lambda_n - \ln \lambda_1}{\ln q} + 1 \\ q &= 2.5\end{aligned}\quad (3.7)$$

式中： λ_1, λ_N 分别为最小、最大波数， N 为波数个数。

在经验法的基础上，有的学者还采用距离分段法（张献民，1988）来选取不同同距离段上的波数及权系数。它是根据关系式：

$$0.001 \leq \lambda r \leq 4 \quad (3.8)$$

经验地选取波数。若计算 $r=0.5 \sim 100$ 范围内的波数，采用经验法需 11 个，距离分段法取 14 个。最优化法是根据最小二乘原理来选取波数。其基本过程介绍如下。

人们已研究垂直接触面、水平二层、三层地电断面以及其它复杂地电断面的结果表明，即使在非均匀大地条件下， V 随 λ 的变化形态基本上和均匀大地条件下 V 的变化形态相同。这样基于均匀大地条件下得到的波数同样适应于任意复杂的地电断面。在均匀大地条件下，主剖面上 ($Y=0$) 的傅氏电位为

$$\begin{aligned}V(x, \lambda, z) &= \frac{1}{2\pi} K_0(\lambda r) \\ \frac{1}{r} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\lambda r) d\lambda\end{aligned}\quad (3.9)$$

把(2.9)式写为近似式：

$$\frac{1}{r} = \sum_{L=1}^n K_0(\lambda_L r) g_L \quad (3.10)$$

式中： n 为波数个数

λ_L, g_L 分别为第 L 个波数及相应的权系数。

从(3.10)式有：

$$1 = \sum_{L=1}^n r_i K_0(\lambda_i r) g_L = f \quad (3.11)$$

取一系列的 $r_i (i=1, 2, 3, \dots, m)$, 则上式表示为矩阵形式:

$$AG = F \quad (3.12)$$

其中: $a_{ij} = r_i K_0(r_i \lambda_j)$

设目标函数

$$\varphi = (I - F)^T (I - F) = (I - AG)^T (I - AG) \quad (3.13)$$

根据函数极小值的条件:

$$\frac{d\varphi}{dG} = 2(I - AG) \cdot A^T = 0$$

$$\text{有: } A^T AG = A^T I \quad (3.14)$$

从(3.14)式可知, 给定一组波数 λ , 便可求出一组权系数, 使目标函数达到极小, 不同的波数其目标函数的极小值是不同的。我们的目标就是选取一组波数使目标函数达到相对极小。为此, 把 F 在初始波数处台劳展开, 并取其一次项:

$$F = F_0 + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta \lambda \quad (3.15)$$

(3.15)式代入(3.13)式:

$$\varphi = (I - F_0 - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta \lambda)^T (I - F_0 - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta \lambda) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \text{令 } B &= \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)^T \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right) \\ C &= \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)^T (I - F_0) \end{aligned}$$

$$\text{则 } B \Delta \lambda = C \quad (3.17)$$

从上式解出 $\Delta \lambda$, 可得到一组新的波数

$$\lambda^{(1)} = \lambda^{(0)} + \Delta \lambda$$

由於(3.15)式是近似式,因此求其最佳波數需迭代計算。

採用最優化法選取波數的方法,我們編制了程序,對不同距離計算出最佳波數和權系數。下面給出一些計算結果。

設研究範圍 r_i 分別為 $0.5 \sim 20$, $0.5 \sim 50$ 和 $0.5 \sim 100$, 波數個數分別取 $n=4, 5, 6$ 。最後用 $\varepsilon = (\varphi/m)^{1/2}$ 計算均方相對誤差。其計算結果詳見表 3.1。根據計算的 λ, g 按下式計算:

$$\frac{1}{r_i} = \sum_{j=1}^n k_j (\lambda_j r_i) g_j \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

其計算結果見表 3.2。從表 3.2 可見數值解的精度是令人滿意的。

表 3.1 採用最優化法對不同極距段 r 的 λ, G 計算結果

$r=.5 \sim 20$		$r=.5 \sim 50$		$r=.5 \sim 100$	
$n=4$		$n=5$		$n=6$	
$\varepsilon\% = .4230E-01$		$\varepsilon\% = .2791E-01$		$\varepsilon\% = .2515E-01$	
λ	G	λ	G	λ	G
.2476405E-01	.5187726E-01	.9444331E-02	.1972993E-01	.4478236E-02	.9340095E-02
.8049594E+00	.6234500E+00	.8083857E-01	.7618679E-01	.1309727E+00	.9263736E-01
.2839116E+01	.2467477E+01	.2883208E+00	.2113112E+00	.3861408E+00	.2656207E+00
.2160914E+00	.2078751E+00	.8914281E+00	.6419356E+00	.3788741E-01	.3523310E-00
		.2960465E+01	.2488173E+01	.1202597E-01	.9116249E+00
				.4004638E-01	.3103432E-01

表 3-2 不同极距 r 上的精确解与优化波数 λ, G 的数值解比较

R	$1/r$	$1/r'$	$\epsilon\%$
.5	.2000000E+01	.1999987E+01	.6318092E-07
1.0	.1000000E+01	.1000033E+01	.3278255E-06
2.0	.5000000E+00	.4998924E+00	.2152920E-05
3.0	.3333333E+00	.3334366E+00	.3098249E-05
4.0	.2500000E+00	.2498685E+00	.5258918E-05
5.0	.2000000E+00	.1999405E+00	.2973378E-05
6.0	.1666667E+00	.1667110E+00	.2659261E-05
7.0	.1428571E+00	.1429369E+00	.5581975E-05
8.0	.1250000E+00	.1250623E+00	.4987717E-05
9.0	.1111111E+00	.1111374E+00	.2346453E-05
10.0	.1000000E+00	.9999380E+00	.6197393E-05
15.0	.6666667E-01	.6665406E-01	.1891553E-05
20.0	.5000000E-01	.5001680E-01	.3360361E-05
25.0	.4000000E-01	.4000280E-01	.7001311E-06
30.0	.3333334E-01	.3332392E-01	.2823621E-05
35.0	.2857143E-01	.2856597E-01	.1910087E-05
40.0	.2500000E-01	.2500461E-01	.1845658E-05
45.0	.2222222E-01	.2222904E-01	.3069695E-01
50.0	.2000000E-01	.1999155E-01	.4224703E-05
注	$r=0.5-50 \quad N=5$		

四、迭代有限元法误差分析及精度检验

(一) 误差分析

迭代有限元法是一种数值计算(近似计算)方法。用它来解决地球物理场问题时,从建立数学模型、确定各种模型参数、设计数值算法、直至计算机上实现,都存在着误差。一般来说,迭代有限元法的误差主要有四方面。(1)模型误差(离散误差)。主要是由网格剖分、变分问题的离散化以及单元内场呈线性变化和物性均匀的假设等引起的;(2)观测误差。主要是通过观测模型中某些参量而产生的误差;(3)方法误差(或截断误差),主要来源于有限项之和近似某级数之和产生的误差,如有限区域来代表无限区域产生的误差;(4)计算误差(或舍入误差)。它是在模拟计算过程中由程序的某些算法及机器本身有限字长而产生的误差。具体分析如下:

1. 离散误差

离散误差的大小主要决定于网格剖分单元的大小。网格剖分越细相邻节点间场越接近线性变化,微分方程边值问题解的误差就越小。减小离散误差的根本途径是减小网格剖分步长。但是剖分步长小,必然增大节点数目,导致线性方程组的阶数过高,使得在微型计算机上难以实现。因此,剖分步长的选择要兼顾计算机内存和计算量。外区网格剖分应与内区网格剖分相配合,选择适当的剖分比例因子和环数对外区剖分,尽可能地减小离散误差,提高总体计算精度。

2. 观测误差

迭代有限元作实际模拟计算时,观测误差主要是观测模型的电阻率、极化率等参量所产生的误差以及实测数据的误差。在理论研究中没有观测误差。

3. 截断误差

截断误差主要来源于用有限的网格来描述地下无限半空间。按理说迭代有限元法的截断误差可通过足够大的边界区域把截断误差限定在一定的范围之内,但是为了兼顾计算时间、计算精度,应综合考虑。顺便指出,A·Dey 和 H. F. Morrison 基于均匀大地条件下提出的混合边界条件也是改善截断误差的一种有效方法。对于截断误差可利用互换原理来检验,以此确定网格区域是否达到精度要求。实际试算表明,迭代有限元法的截断误差是非常小的,它可控制在很小的误差限内。

4. 计算误差(舍入误差)

在迭代有限元法值模拟时,需计算贝塞尔函数、解方程组、傅氏逆变换等。计算误差主要来源于这些计算过程。下面简单地讨论这些计算过程所产生的误差。

对于零阶、一阶修正贝塞尔函数,我们用近似计算公式(罗延坤,1987)。计算结果表明:计算精度足够高。其计算误差小于 5×10^{-7} 。

解方程组采用改进的平方根法,这种方法求解速度快,舍入误差小,具有一定的精确性,但是它还是存在着误差。要对方程组误差分析,必须解决两个问题。首先分析方程组原始数据扰动对解的影响,估计扰动方程组解的误差界,然后分析算法的稳定性,即计算过程舍入误差对方程组解的影响。进行这些分析的基本工具是向量范数、矩阵范数等。这里不作更详细的讨论,只给出分析的结论。

改进的平方根法(关治,1990)

$$\|\delta A\|_{\infty} \leq C_2 (2n^2 + n^3) \cdot 2^{-t}, \quad \|\delta B\|_{\infty} = 0$$

计算解的误差界:

$$\left\| \frac{x}{x} \right\|_{\infty} \leq \text{Cond}(A)_{\infty} \left(\frac{C_2}{1 - \|A^{-1}\| \|\delta A\|} \right) (2n^2 + n^3) 2^{-t}$$

式中: n 是系数矩阵 A 的阶数;

t 计算机字长;

x 是方程组的近似解;

$\delta A, \delta B$ 分别是系数矩阵和右端项的扰动;

C_2 是接近 1 的系数;

α 是系数矩阵中元素的最大值。

这些估计都是严格的上界。实际使用误差估计式比较困难。对于大多数计算问题而言,只要 $\text{Cond}(A)$ 不是很大,其解是可靠的,精度是较高的。

根据最优化法确定的傅氏逆变换的波数和权系数,在均匀大地条件下计算出场的分布见表 3.2。从表中不难看出,舍入误差是相当小的(相对误差约为 10^{-6} 的数量级),计算精度是令人满意的。

顺便指出,对于计算机字长所引起的误差相对于应用地球物理问题而言是微乎其微的。根据有关定理(关治,1990),如果 α 是 x 的近似值且有 n 位有效数字, $\Delta\alpha$ 是 α 的相对误差,那么 α 的有效位数 n 与 $\Delta\alpha$ 有如下关系:

$$\Delta\alpha \leq 5 \times 10^{-n}$$

如果在微机上采用单精度计算,计算机有 7 位有效数字,那么其实相对误差界为:

$$\Delta\alpha = \left| \frac{x - \alpha}{\alpha} \right| = 5 \times 10^{-7}$$

(二) 精度检验

为了对点源场二维地电构造中迭代有限元法数值模拟结果的精度进行检验,我们对具有解析解,且易于分析对比的水平均匀大地、水平二层和三层地电断面采用常用装置在一定范围内进行了试算。试算中除特别说明外区内均采用均匀网格,网格步长为 1 个单位长度,供电电流取 2π 安培,其它有关参量由图、表中给出。为了便于对比,图表中同时给出解析法计算结果和数值模拟计算结果。

图 3.6 给出均匀大地条件下,采用 31×8 的网格,外区 $PC=1.3, NC=25$ 时,二极装置傅氏电位的理论值和模拟计算值随波数 λ 的变化曲线。可以看出,不论 $AM=10$, 不是 $AM=30$ 的点处,两条曲线基本上重合,这说明本算法对 V 的计算是精确的。

图 3.7 给出 41×10 网格, $PC=1.1, NC=50$ 时在均匀大地条件下二极、三极装置电位随极距变化的理论曲线和模拟曲线。由图可见,两条曲线彼此重合,看不出差别。这说明电位的数值模拟结果的精度是较高的。

为了考察在非均匀大地条件下迭代有限元法的模拟精度,我们分别对二层、三层地电断面上对称四极测深进行模拟计算,同时为了有一个量的估计,我们用表给出理论计算值(T)、数值模拟结果(IFEM),以及其百分相对误差($\varepsilon\%$)。

表 3.3 给出二层 G 型视电阻率曲线的理论值(ρ_s)、(T)和模拟值 ρ_s (IFEM)从表中可知,除了第一个点外,其它各点上视电阻率值百分相对误差 $\varepsilon\%$ 均小于 0.7% 。

表 3.4 给出了三层地电断面上 K 型曲线的理论计算值 $\rho_s(T)$ 和数值模拟值 ρ_s (IFEM)。从表可以看出除第一个极距外,其它极距上视电阻率值的百分相对误差小于 1.2% 。

我们来用非均匀网格 41×10 , 剖分步长从网格中心向外逐渐增大, 取外区 $PC=1.2$, $NC=40$ 分别对水平二层地电构造的 G 、 D 型曲线和水平三层地电构造的 K 、 H 型曲线进行了模拟计算。模拟结果(CV)与其相应的理论值(TV)分别由图 3.8 和图 3.9 给出。从图可见, 理论电测深曲线和模拟曲线略有差别, 这主要是非均匀网格的离散误差所致。

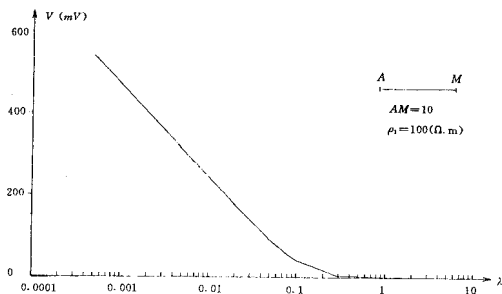


图 3.6a 均匀大地傅氏电位 V 的理论值和模拟值随波数 λ 的变化曲线 ($AM=10$)

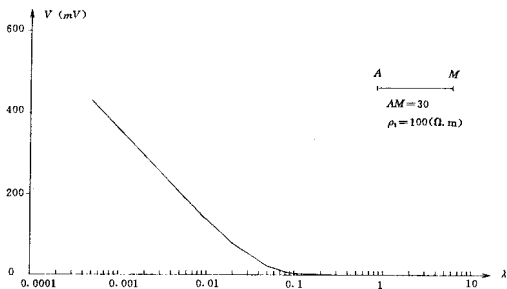


图 3.6b 均匀大地傅氏电位 V 的理论值和模拟值随波数 λ 的变化曲线 ($AM=30$)

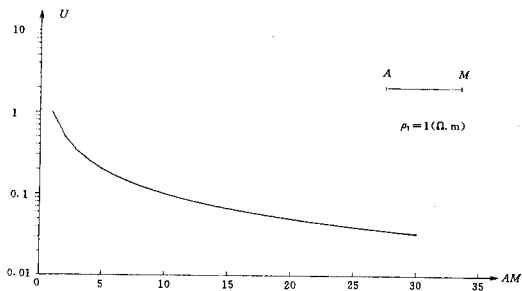


图 3.7a 均匀大地条件下电位随极距变化的理论曲线和模拟曲线(二极装置)

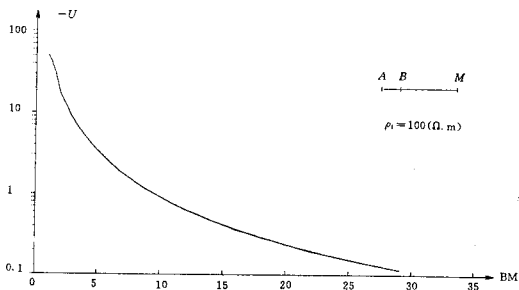


图 3.7b 均匀大地条件下电位随极距变化的理论曲线和模拟曲线(三极装置)

表 3.3 水平二层地电断面上对称四极测深曲线的数值计算结果

No.	AB/2	$\rho(T)$	$\rho_1(\text{IFEM})$	$\epsilon\%$
1	1.50	106.4727	109.15	2.5145
2	2.50	122.9028	122.31	.4823
3	3.50	145.6614	145.89	.1569
4	4.50	169.9040	170.76	.4979
5	5.50	193.0996	194.35	.6475
6	6.50	214.4238	215.60	.5485
7	7.50	233.7787	234.64	.3684
8	8.50	251.3052	251.82	.2049
9	9.50	267.1989	267.44	.0902
10	10.05	281.6497	281.76	.0392
11	11.50	294.8208	294.95	.0418
12	12.50	306.8764	307.00	.0606
13	13.50	317.9241	318.26	.1057
14	14.50	328.0785	328.53	.1376
15	15.50	337.4332	338.00	.1680
16	16.50	346.0699	346.70	.1821
17	17.50	354.0600	354.71	.1836
18	18.50	361.4659	362.13	.1837
注	$P(1)=100$ $H(1)=2.0$ IFEM ₁ $P(2)=500$ $NX=41$ $NZ=10$ $NC=50$ $PC=1.1$			

表 3.4 水平三层地电断面上对称四极测深曲线的数值计算结果

No.	AB/2	$\rho(T)$	$\rho_1(\text{IFEM})$	$\epsilon\%$	$\rho_1(\text{IF}-H)$	$\epsilon\%$
1	15	128.19	137.83	7.51	137.83	7.51
2	25	164.39	166.17	1.08	166.16	1.07
3	35	189.98	191.93	1.02	191.92	1.01
4	45	203.08	204.55	.72	204.51	.70
5	55	205.16	207.43	.61	207.35	.57
6	65	201.91	202.97	.52	202.83	.45
7	75	192.68	193.58	.46	193.38	.34
8	85	180.34	181.14	.43	180.77	.23
9	95	166.33	167.02	.41	166.44	.06
10	105	151.71	152.26	.36	151.37	.22
11	115	137.23	137.60	.26	136.27	.79
12	125	123.40	123.54	.10	121.55	1.50
13	135	110.53	110.43	.09	107.47	2.76
14	145	98.77	98.45	.33	94.10	4.73
15	155	88.21	87.70	.57	81.35	7.77
16	165	78.82	78.18	.81	68.94	12.53
17	175	70.56	69.84	1.03	56.54	20.00
18	185	63.36	62.60	1.20	43.30	31.66
注	$P(1)=100.00$ $H(1)=10.00$ IFEM ₁ $P(2)=400.00$ $H(2)=30.00$ $NX=41$ $NZ=10$ $P(3)=20.00$ $NC=50$ $PC=1.1$					

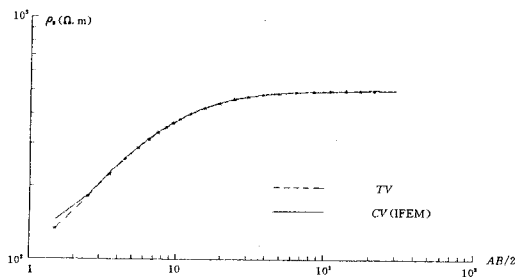


图 3.8a 水平二层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

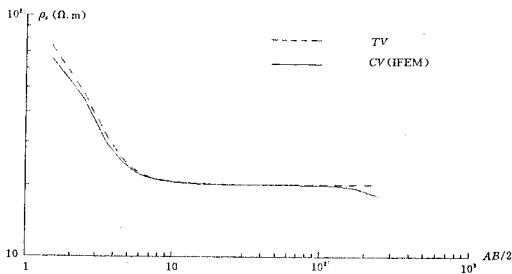


图 3.8b 水平二层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

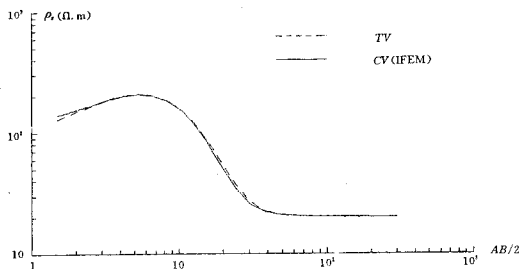


图 3.9a 水平三层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

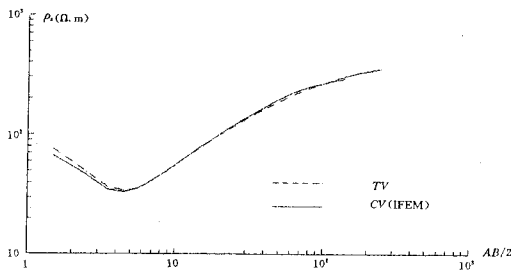


图 3.9b 水平三层地电断面上对称四极测深的理论曲线和模拟曲线

五、迭代有限元法程序的功能、 效率及参数选取对模拟精度的影响

(一) 程序的功能

利用迭代有限元法程序模拟点源二维地电构造的场分布时,参数的输入、修改以及检查校对实行人机对话。网络采用自动剖分,并以屏幕和文件输出关于网格节点编号、网格单元编号以及地电断面的示意图。由此一方面了解剖分情况,另一方面检查参数输入正确与否。外区能够模拟均匀介质、水平层状介质以及较大的直立倾斜断层、接触带。内区可模拟水平、起伏地形条件下单个或多个非均匀体以及水平层状构造。其模拟结果以文件的形式可输出不同供电点上各节点的电位以及联剖、对称四极、偶极装置的视电阻率拟断面,同时输出绘图数据文件。程序稍加修改,采用等效视电阻率法可计算非均匀体的视极化率异常分布。

绘图程序可绘制各种剖面曲线图和平面等值线图。绘图的坐标类型(算术型、对数型)、坐标轴长短、比例尺参数、图形比例尺参数;坐标轴的起始值、步长、终值参数以及曲线圆滑系数都可根据实际要求选取。

(二) 程序的效率

迭代有限元法程序能用于各种复杂地电断面的数值模拟,但是从效率上讲,它更适应于相同外区、不同内区模型的数值模拟批处理。诸如一地区不同小构造的模拟和二维拟合反演过程中的正演模拟,这是因为程序计算外区花费时间较长,内区处理花费时间较短。而外区处理所需时间决定于网格规模的大小以及外区迭代环数的多少。表 3.5 给出不同网格大小、网格类型以及外区迭环数时,用 Quantower386 机程序运行的 CPU 时间。从表中可以看出内区处理时间约为外区处理时间的 1%~5%。第 2 类网格外区计算时间约为 1、3 类网格外区计算时间的 3.6 倍、而占用内存存在给定条件下约为 3 倍。外区迭代环数与运行时间基本上成正比。

(三) 程序中不同参数值的选取对模拟精度的影响

迭代有限元程序不同参数的选取对数值模拟精度有着极其重要的影响,各类参数其影响的方式、程度不同。下面着重讨论内区不同网格大小、外区网格类型、外区迭代环数及迭代比例因子等对模拟精度的影响,以便寻找出各种地电条件下针对不同的精度要求数值模拟的最佳参数。

1. 内区大小对模拟精度的影响

内区大小直接影响着模拟精度。一般说,内区越小,模拟精度越高,在外区边界对内区影响程度较大时,点源节点附近和边界附近的节点电位的相对误差较大,而中间段误差较小。而内区越大,误差曲线中间段曲线变化越平缓。为了检验不同内区大小对模拟精度的影响,我们取 $PC=1.5$, $NC=20$, $\rho_0=100\Omega\cdot m$, $I=2\pi$ 安培,对网格大小分别为 21×6 , 31×8 , 41×10 的三种网格,在均匀大地条件下进行了计算。其电位百分相对误差 $\epsilon\%$ 如图 3.10 所示。可以看出网格中部误差小于 2%,两在两端相对误差小于 3%。

2. 外区网格类型对模拟精度的影响

根据迭代有限元法的基本原理结合地球物理模型物性断面的特点,我们已给出三类网

格剖分类型 (记为 A、B、C)。取网格为 31×8 , $NC=14$, $PC=1.5$, $I=2\pi$ 在均匀大地条件下对三类网格进行了模拟计算, 其计算结果由图 3.11 给出。从计算结果可知, 第 2 类网格 (B) 模拟精度较高, 其电位百分相对误差小于 1%, 而第 1、3 类网格 (A、C) 模拟精度不如第二类网格的模拟精度高, 其电位百分相对误差小于 2.5%

3、外区迭代环数模拟精度的影响

对于一定的内区网格和外区迭代比例因子而言, 笼统地说, 外区迭代环数越多, 模拟精度越高。但是当外区迭代环数达到一定值时, 内区模拟计算的相对误差趋于稳定。对于不同的 PC 值, 使内区误差趋于稳定所需的环数 NC 不同。计算表明当外区外层边界半径达到内区边界半径的 40 倍时, 内区计算的相对误差趋于稳定。外区迭代环数越少, 模拟计算的相对误差曲线变化越复杂, 且模拟精度越低。详见图 3.12。

表 3.5 不同网格大小、网格类型及外区迭代环数时程序的计算时间

(a)

内区网格	网格区域	CPU 时间 (min)	备 注
21×8	外区~内区	22~8	$NC=15$
31×8	外区~内区	73~2.6	
41×10	外区~内区	156~8	

(b)

网格类型	网格区域	CPU 时间 (min)	占用内存量	备 注
1	外区~内区	63~0.8	190k	网格: 31×8 $NC=14$ $PC=1.5$
2	外区~内区	224~2.6	570k	
3	外区~内区	63~2.6	190k	

(c)

外区迭代环数	5	10	15	20	25	30	35	40	45
运行时间 (min)	27	45	71	96	123	143	175	210	222
备 注	网格: 31×8								

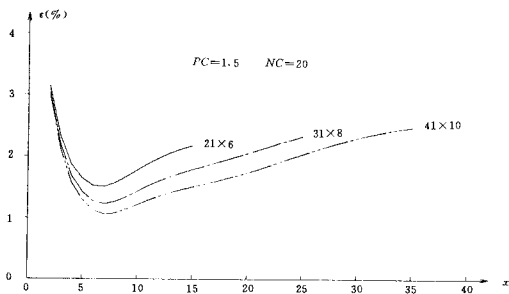


图 3.10 均匀大地条件下不同网格大小数值模拟的电位相对误差曲线

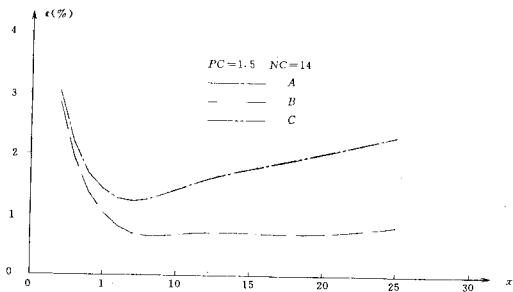


图 3.11 均匀大地条件下各类网格数值模拟的电位相对误差曲线

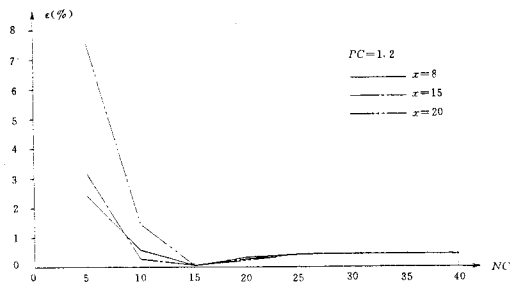


图 3.12a 取不同外区环数 NC 时数值模拟的电位相对误差曲线

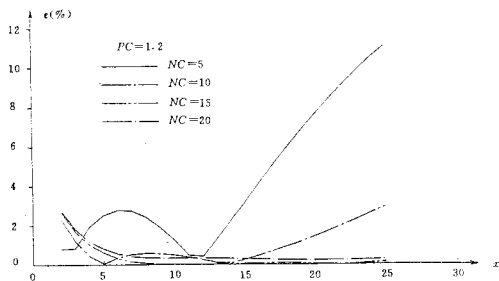


图 3.12b 不同外区环数 NC 数值模拟的电位相对误差曲线

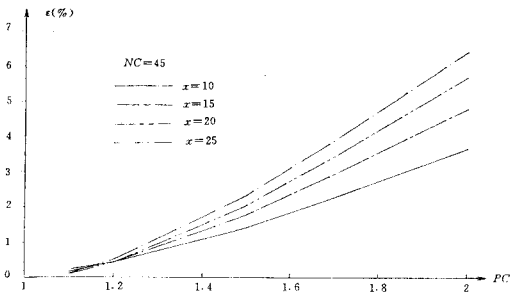


图 3.13a 不同外区剖分比例 PC 数值模拟的电位相对误差曲线

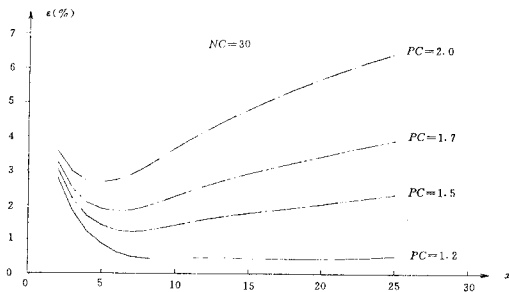


图 3.13b 不同外区剖分比例 PC 数值模拟的电位相对误差曲线

4. 外区迭代比例系数对模拟精度的影响

外区迭代比例系数 PC 的大小对数值计算的精度影响较大。 PC 越小模拟精度越高。为了检验不同 PC 值对模拟精度的影响, 我们取 31×8 的网格, $\rho_0 = 100$, 分别对 $PC = 1.2 \sim 2.0$ 之间的几个值在均匀大地条件下进行了模拟计算, 并把求计算结果绘于图 3.13。从图可见不同 PC 值各节点上计算的电位百分相对误差不同。当 $PC = 1.2$ 时, 远离供电点的节点上电位百分相对误差小于 0.6% , 而 $PC = 2.0$ 时, 则相对误差小于 6.5% , 两者相对误差相差一个数量级。前者相对误差曲线随极距的变化较小, 后者则变化较大。

此外, 为了考察外区电性变化对内区模拟精度的影响, 我们对水平三层介质数值模拟时分别取水平三层介质外区和均匀介质外区两种情况作了计算, 其计算结果见表 3.4。表中 ρ_s (IFT) 和 ρ_s (IF-H) 分别表示三层介质外区和均匀介质外区条件下视电阻率的模拟值, 它们其后的 $\epsilon\%$ 分别表示模拟结果和理论值的百分相对误差。从表中可见, 两种外区条件下内区模拟结果的相对误差在小极距上基本相同, 在大极距上相差较大。它们在大极距上相对误差分别为 1.2% 和 31.7% 。由此可见, 对于非均匀物性的断面模型, 其外区物性变化对内区数值模拟的精度也有一定的影响。

六、迭代有限元法与有限单元法的比较

迭代有限元法是在有限单元法的基础上发展出来的一种的数值模拟方法。这种方法与有限单元法相比又有哪些新特点和独到之处呢? 为了对迭代有限元法有一个全面的了解, 我们以点源二维地电构造中两种方法数值模拟为例, 从原理、网格剖分、模拟断面能力、模拟精度、占用计算机的内存和计算时间等几方面作一比较。

1. 基本原理

有限单元法和迭代有限元法数值模拟的基本原理是相同的, 都是属于网格法, 即通过对求解区网格剖分实现对模拟空间的离散化, 用离散的网格节点表示求解空间, 由节点上的函数值近似表示求解空间的函数分布, 都是以每个单元内场随空间位置呈线性变化和电性均匀的假设为前提, 实现变分问题的离散化。

2. 网格剖分

有限单元法通常把网格区域划分为内密外疏的矩形—三角形网格。由上至下从左向右顺序编号。由于计算机内存量的限制, 网格单元数是有限的。在微型计算机上模拟时, 一般水平节点数限于两位数。迭代有限元法则是把整个区域划分为两部分——外区和内区, 当然内、外区的大小是根据实际情况而人为规定的。内、外区网格剖分、节点编号各自分别进行。在外区可根据需要选择网格类型 (通常取第 3 类网格), 剖分方法如图 3.2~图 3.4。节点编号可从内向外逆时针方向按环编号。在内区网格剖分方法和有限单元法基本相同, 节点编号从外向内逆时针方向按环编号。一般来说, 由于外区采用迭代处理, 因此, 外区单元数不受计算机内存的限制。从某种意义上讲, 它的网格剖分单元是“无限的”。

3. 模拟能力

实际地球物理模型是复杂的, 各式各样的, 但是它基本上是以水平层状为基本特征。有限单元法作实际正演模拟时, 把计算区域从实际地球物理模型中截下一个“窗口”, 在这个“窗口”区域内进行网格剖分等处理来实现数值模拟。而迭代有限元法实际正演模拟时, 把

实际地球物理模型区域作为模拟区域,在这个区域中截下一个“窗口”作为内区,其它区域作为外区,内、外区分别处理实现正演模拟。它不仅可模拟水平层状地层的外区,而且可模拟各种构造(尤其是断层、接触带等)的外区。

4. 模拟精度

为了对比迭代有限元法和有限单元法的模拟精度,我们对有解析解的均匀地下半空间点源场的电位分布采用两种方法进行了数值模拟,其中取网格为 41×10 , 电流强度为 $2\pi A$, 均匀大地电阻率为 $1\Omega \cdot m$, 迭代有限元法外区环数 NC 为 45, 环比例系数 PC 为 1.1。采用迭代有限元法程序(笔者研制)和有限单元法程序(中国地质大学(武汉)和北京物探队 1988.3 联合研制)进行计算的结果由表 3.6 (a) 给出。从表中可以看出在点源附近几个点两种方法模拟电位值与精确解相对误差较大。其它各点上,有限单元法计算电位的最大相对误差为 5.84%, 而迭代有限元法计算电位的相对误差(5 点后)为 0.49%, 在主要(大多数)极距段上迭代有限元法的模拟精度较有限单元法能提高一个数量级次。国外学者采用有限单元法正演模拟计算的相对误差由表 3.6 (b) 给出。

5. 占用计算机内存量

我们知道,不论是有限单元法还是迭代有限元法数值模拟所需的计算机内存是较大的,而刚度矩阵占内存中最大一部分。因此数值模拟所需计算机内存主要取决于刚度矩阵的规模大小及存贮技术。不作任何处理的刚度矩阵是一个大型、稀疏、带状、对称、正定的矩阵。矩阵中非零元素较小(有限元法非零元素 $= 3(3M \times N - 2M - 2N - 2)$, 迭代有限元法非零元素 $= M^2 + 13MN + 4N^2 - 13M - 20N + 12$, 其中 M 、 N 分别表示网格区域水平、垂直节点数), 零元素较多。因此刚度矩阵的压缩存贮有很大的潜力。严格地说,迭代有限元法和有限单元法由于网格剖分方法不同,所需内存量不易对比。但是为了有一个量的概念,不妨以同一网格区域(迭代有限元法取 5 环外区)对比其两种方法刚度矩阵的非零元素及几种不同存贮方式所需计算机内存单元数。表 3.7 给出对比结果。从表中不难看出,迭代有限元法刚度矩阵非零元素较少。

6. 计算时间

为了从计算时间上对比两种方法,我们仍采用相同网格(其中迭代有限元法取 5 环外区)在 Quantower 386 机上进行了计算,其结果示于表 3.8。由表可见,迭代有限元法外区处理时间长,内区处理时间短。因此它适应于同一地区不同局部地电断面的批处理或二维拟合成反演中的正演计算过程。有限单元法更适应于均匀外区单一模型的处理。

顺便指出,有限单元法网格剖分较规则,编程较简单。迭代有限元法剖分较复杂,编程较为烦琐。

七、复杂模型的模拟结果与分析

为了对复杂地球物理模型异常场分布的规律、特征有一个认识,我们对几种复杂的地电断面进行了模拟计算。图 3.14~图 3.18 分别给出网格为 41×10 时不同地电断面偶极偶极装置 ($D-D$) 与 Schlumberger 装置 (SCH) 模拟结果,分别简述如下。

图 3.14 是隐覆直立断层迭代有限元法数值模拟两种装置的视电阻率拟断面图。其中地表电阻率取为 $100\Omega \cdot m$, 断层左侧电阻率为 $500\Omega \cdot m$, 断层右侧电阻率为 $200\Omega \cdot m$ 。从图

可以看出,地表视电阻率较为平缓,断层左侧视电阻率值较高,而断层右侧视电阻率较低。断层线附近,等值线梯度变化随极距的增大而增大。

图 3.15 给出了隐覆拗陷数值模拟视电阻率拟断面图(上层电阻率为 $100\Omega \cdot m$,基底电阻率为 $500\Omega \cdot m$)。小极距上曲线较为平缓,表现出低阻异常特征,当极距增大时,曲线在拗陷中部梯度变大,在偶极-偶极装置上异常变宽。

图 3.16 揭示了隆起构造上视电阻率异常的变化规律(地电参数同图 3.15)。Schlumberger 装置的视电阻率拟断面等值线,在隆起中心表现为高阻,异常形态和地电构造形态相一致。在偶极-偶极装置视电阻率拟断面图上中间出现低阻,两翼有高阻等值圈。

图 3.17 为低阻平行直立板体上数值模拟视电阻率拟断面图,从图不难看出,低阻板附近有低阻等值圈。(注:均匀介质电阻率为 $100\Omega \cdot m$,低阻板电阻率为 $20\Omega \cdot m$)

图 3.18 给出了均匀介质电阻为 $100\Omega \cdot m$,高阻板电阻率为 $500\Omega \cdot m$ 均平行直立板体异常分布特征。可以看出 Schlumberger 装置对垂直方向平行直立的板体水平分辨能力较强。在偶极-偶极拟断面图上两板体中间有高阻等值圈,两板体下方出现低阻等值圈,两板体外侧,有高阻等值圈。

表 3.6 (a) 均匀大地条件下 IFEM 和 FEM 的数值计算结果

No.	AM	U-IFEM	U-FEM	IFEM-ε%	FEM-ε%
1	.130000E+1	.779349E+0	.830000E+0	.2206E+2	.1700E+2
2	.500000E+0	.486240E+0	.480800E+0	.2752E+1	.3840E+0
3	.333333E-0	.327422E+0	.332200E+0	.1773E+1	.3400E+0
4	250000E+0	.247154E+0	.262600E+0	.1138E+1	.1040E+1
5	.200000E+0	.198490E+0	.202800E+0	.7550E-0	.1490E+1
6	.16667E-0	.165848E+0	.170600E+0	.4912E+0	.2360E+1
7	.142857E-0	.142369E+0	.146800E+0	.3417E+0	.2769E+1
8	.125000E-0	.124656E+0	.128900E+0	.2752E+0	.3120E+1
9	.111111E-0	.1108327E+0	.115000E+0	.2557E+0	.3500E+1
10	.100000E+0	.997452E+0	.103800E+0	.2548E+0	.3800E+1
11	.909091E-1	.906769E-0	.946000E-1	.2884E+0	.4060E+1
12	.833333E-1	.831248E-0	.870000E-1	.2502E+0	.4399E+1
13	.769231E-1	.767402E-0	.805000E-1	.2377E+0	.4660E+1
14	.714286E-1	.71718E-1	.749000E-1	.2195E+0	.4860E+1
15	.666667E-1	.665345E-1	.701000E-1	.183E+0	.5150E+1
16	.625000E-1	.623893E-1	.689000E-1	.1771E+0	.5440E+1
17	.588235E-1	.587305E-1	.62000E-1	.1581E+0	.5740E+1
18	.555556E-1	.554760E-1	.58800E-1	.1432E+0	.5840E+1
注	U-IFEM: 41×10 PC-1.1 NC=45 U-FEM: 41×10				

表 3.6 (b) 国外学者采用有限单元法正演模拟的精度

人 名	日期 (年)	网 格	$\epsilon\%$	计算机
Lun-tao Tong	1990	87×17	4%	
A. C. Tro	1984	86×13	6%	Univar-1108
C. Smith	1984	80×16	3%	VAX11/780

表 3.7 刚度矩阵的非零及不同存贮方法所需内存单元

方 法	网 格	非零元素	存贮方法	占内存单元	压缩程度 (%)
有限单元法	31×11	2811	全矩阵存贮	116281	100%
			半矩阵存贮	58311	50.15%
			二维压缩存贮	4433	3.81%
			一维压缩存贮	2811	2.42%
	41×11	3741	全矩阵存贮	203401	100%
			半矩阵存贮	101926	50.11%
			二维压缩存贮	5863	2.88%
			一维压缩存贮	3741	1.84%
迭代有限元法	31×11	1842	全矩阵存贮	15876	13.65%
			半矩阵存贮	8001	6.88%
			二维压缩存贮	4158	3.55%
			一维压缩存贮	1842	1.58%
	41×11	3012	全矩阵存贮	34596	17.01%
			半矩阵存贮	17391	8.55%
			二维压缩存贮	6138	3.02%
			一维压缩存贮	3012	1.48%

表 3.8 不同算区 FEM 和 IFEM 数值模拟的 CPU 时间

算区网格	FEM	IFEM (内区)	IFEM (外区) ($NC=5$)
31×11	7'06"	1'14"	5'00"
41×13	17'30"	4'30"	27'00"

Pseudosection for SCH configuration

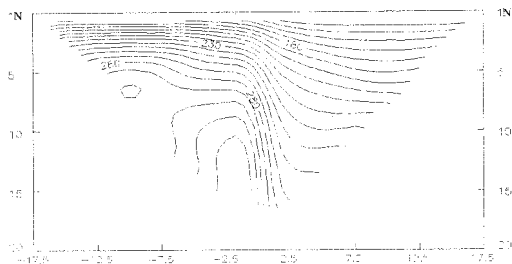


图 3.14a 隐覆直立断层数值模拟视电阻率 ρ_a 拟断面图

Pseudosection for D-D configuration

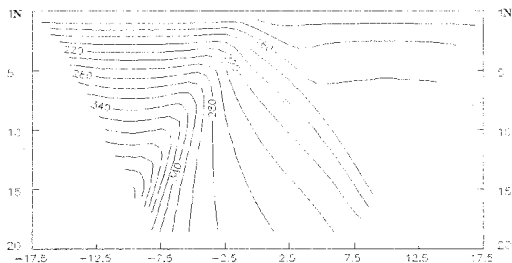


图 3.14b 隐覆直立断层数值模拟视电阻率 ρ_a 拟断面图

Pseudosection for SCH configuration

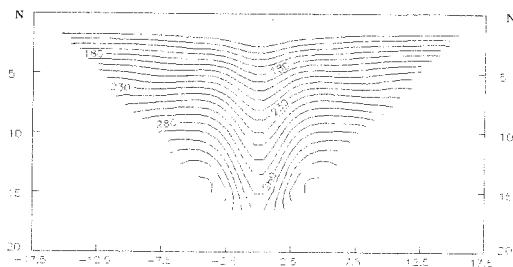


图 3.15a 隐覆拗陷构造数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for D-D configuration

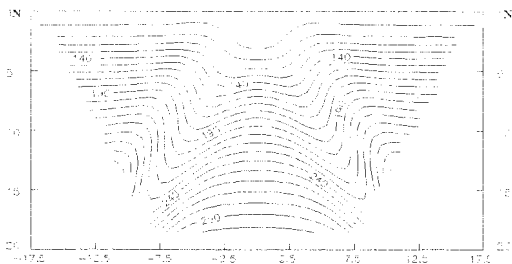


图 3.15b 隐覆拗陷构造数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for SCH configuration

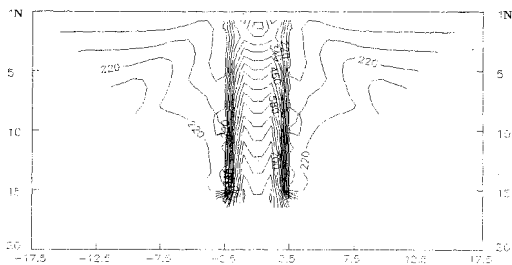


图 3.16a 隆起构造数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for D-D configuration

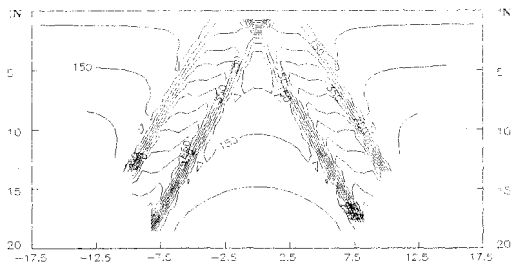


图 3.16b 隆起构造数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for *SCII* configuration

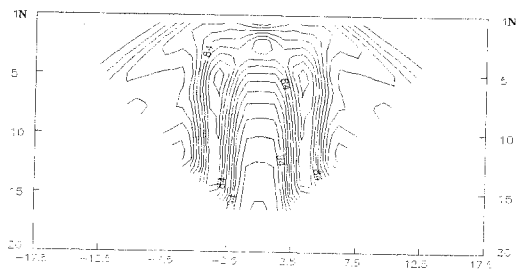


图 3.17a 低阻平行直立板体数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for *D-D* configuration

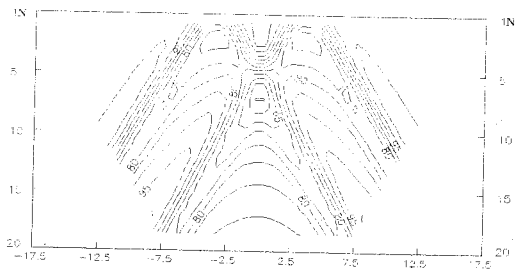


图 3.17b 低阻平行直立板体数值模拟视电阻率 ρ_s 拟断面图

Pseudosection for SCH configuration

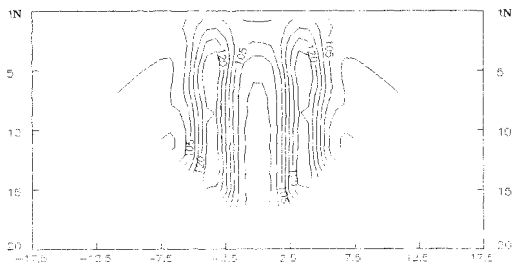


图 3.18a 高阻平行直立板体数值模拟视电阻率 ρ_a 拟断面图

Pseudosection for D-D configuration

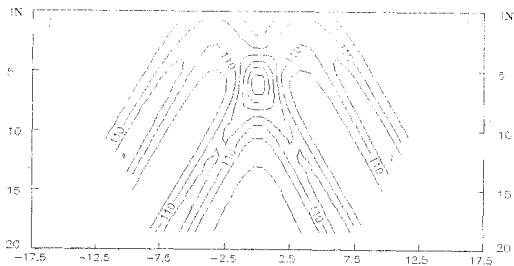


图 3.18b 高阻平行直立板体数值模拟视电阻率 ρ_a 拟断面图

第四章 点源二维地电模型的反演

迄今为止, 电法勘探的资料解释仅仅限于一维模型。而在大多数实际应用中, 诸如矿产资源、地热等复杂的构造, 采用一维模型的解释是不行的, 不切实际的。因此, 为了提高电法勘探的地质效果及解释精度, 迫切需要切实可行的二维反演方法。然而电法勘探二维反演的实现是较为困难的。它主要存在三方面问题。第一, 我们勘探的目标、任务是要了解地下构造, 但命中注定只能对地球表面收集资料, 这样从某种意义上讲, 地球物理问题总是欠定的; 第二, 我们研究的地电断面是二维的, 而场源却是三维的, 这样使反演问题变得更加复杂; 第三, 问题的正、反演计算量大, 算法冗长且难度较大, 不易在微机上实现。针对这些问题, 我们按照广义反演理论, 讨论改进的阻尼最小二乘法反演, 并经过理论推导、建立数学模型, 引入 Bard 等人认为较好的反演方法 Box-Kanamasi 反演法 (简称 BK 反演法)。

一、正演问题及响应函数

电法勘探二维反演方法通常采用曲线拟合法。在大多数有意义的反演问题中, 我们观测的数据和模型参数之间的关系是非线性的。这样就需要某种迭代方法来拟合数据, 而在每次迭代中都需作正演计算。目前, 国外用于拟合反演的正演计算主要有有限差分法和有限单元法, 但这些方法占用内存大, 计算时间长, 不易在微机上实现。因此, 我们在拟合反演的正演计算中采用迭代有限元法。

迭代有限元法作正演计算是先把场满足的微分方程通过傅氏变换把二维半问题化为二维问题, 然后把区域按照某种规则划分为内区和外区, 并在内、外区对网格离散化, 变分问题的离散化。根据离散化公式经计算求出外区系数矩阵 K^o 和内区系数矩阵 K^i 。内、外区系数矩阵的总体合成形成总体刚度矩阵 K 。即:

$$K = K^o + K^i$$

那么在波数域中, 地电模型的响应函数 V 可由 (4.1) 式矩阵方程求得:

$$\begin{aligned} KV &= S \\ \text{或} \quad \sum_{j=1}^n K_{ij} V_j &= S_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (4.1)$$

式中: K 是 $n \times n$ 阶对称、稀疏、带状的正定矩阵

n 为内区网格总节点数

S 是与场源大小、位置有关的项

采用 Cholesky 分解法求解方程 (4.1) 式, 便可求得傅氏电位 V , 然后对 V 进行傅氏逆变换, 得到空间域各节点的电位 U 。这样就可计算各种装置条件下的视电阻率响应。

方程 (4.1) 式两边对网格子块 (由多个电阻值相同的网格单元组成) 的电阻率 ρ_m 求偏导有:

$$KV' = -K'V = -[(K'')' + (K')']V \quad (4.2)$$

取不均匀体都包含在内区网格之中, 那么 $(K'')' = 0$, 这时有:

$$KV' = -(K')'V$$

其中 $(K')'$ 是内区单元矩阵 K^K 对 ρ_m 偏导数之和, 其元素为:

$$\frac{\partial K_{ij}^K}{\partial \rho_m} = \begin{cases} -\frac{K_{ij}^K}{\rho_m} & \rho = \rho_m \\ 0 & \rho \neq \rho_m \end{cases} \quad (4.3)$$

按式 (4.3) 计算 $\frac{\partial K^K}{\partial \rho_m}$, 然后合成, 便可得到 $(K')'$ 。由方程 (4.1) 已得到 V 、 K , 这样不难解出 V' 。由于 U 是 V 的傅氏逆变换, 所以:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho_m} = F^{-1} \left(\frac{\partial V}{\partial \rho_m} \right) \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho_m} = \frac{G}{I} \left(\frac{\partial U_s}{\partial \rho_m} - \frac{\partial U_0}{\partial \rho_m} \right) = \frac{G}{I} \Delta U' \quad (4.5)$$

式中: G 为装置系数 I 为供电电流强度。

这样我们得到了视电阻率对模型参数的偏导数, 即 Jacobian 矩阵。

二、广义线性反演方法

目前, 地球物理反演中应用最为广泛的反演方法是广义反演方法。在地球物理反问题中, 场往往是以泛函方程组的形式给出的, 它离散化后得到某种类型的非线性方程组。如果方程组的精确解存在且唯一, 那么就可以通过某种稳定的算法求其反问题的解。然而, 由于地球物理数据的有限性和不精确性, 涉及的方程组常常不存在精确唯一的解, 这时我们只能用台劳级数展开式把非线性反问题线性化, 然后根据某种准则求其反问题的一个可以接受的解估计。这种广义反演方法称为广义线性反演方法。对于地球物理反问题, 我们不仅依照某种准则构造出一种可以接受的解估计, 而且尽量评价解估计的质量。解估计的质量不是指数据拟合程度的好坏, 因为可以与数据拟合的解估计可能有无穷多。因此数据拟合误差最小并不能说明与真实地球物理模型拟合最好。重要的问题是求出解估计的分辨率

和方差, 只有用它们才能评价我们估计的地电模型的质量。广义线性反演的方法分门别类, 多种多样。这里着重讨论阻尼最小二乘法, 并引出 Box-Kanemasu 反演法。

(一) 改进的阻尼最小二乘法 (MD 反演法)

1. 基本原理

假定地球物理模型可以用有限个离散参数 m 来描述, 且它是空间位置的分块连续函数, 同时假定精确的地球物理数据 d_i 是一个由模型 m 计算得到的数据, 那么精确数据 d_i 和模型 m 的关系可以表示为:

$$d_i = F_i(m) \quad i=1, 2, \dots, n \quad (4.6)$$

其中: F_i 表示第 i 个数据由模型参数 m 到 d_i 规定的正演计算, 即 m 的泛函。

我们的目标就是求任意点上函数 m 的值。不过, 由于地球物理数据的有限性, 用有限个 d_i 反演 m 的唯一解一般不存在。加之地球物理模型分块连续, 它的微积分在其间断面上只能用广义函数来解释, 使得我们只好致力于寻找和评价泛函方程组 (4.6) 式的广义解。在广义反演中泛函方程组离散化为代数方程组。多数情况下这个方程组是非线性方程组, 即:

$$d_i = F_i(m_1, m_2, \dots, m_J) \quad (4.7)$$

如果我们根据先验知识给出模型参数的初始猜测:

$$m_0^T = (m_1^0, m_2^0, \dots, m_J^0)$$

则根据解非线性方程组的迭代思想, 用台劳级数把 (4.7) 式在 m^0 处展开

$$d_i - F_i(m^0) + \sum_{j=1}^J \frac{\partial F_i}{\partial m_j}(m_j - m_j^0) - \dots \quad (4.8)$$

把 (4.8) 式高次项忽略掉, 得到线性化系统, 即:

$$Y = AX \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} Y_i &= \Delta d_i^0 = d_i - F_i(m_1^0, \dots, m_J^0) & i=1, 2, \dots, n \\ X_j &= \Delta m_j^0 = m_j - m_j^0 & j=1, 2, \dots, J \end{aligned} \quad (4.10)$$

而矩阵 A 为 Jacobian 矩阵, 它的元素为:

$$A_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial m_j} \quad (4.11)$$

对于 $Y=AX$ 的方程组, 其最小二乘法的预测误差是向量 e 的欧几里德长度的平方, L_2

范数:

$$\|e\|_2^2 = (Y - AX)^T (Y - AX) \quad (4.12)$$

之所以采用 L_2 范数来衡量其向量的长度, 不用 L_1 范数和 L_∞ 范数, 是因为观测数据 d_i 服从高斯分布 (王明光等人, 1988)。为了获得反问题的解估计, 必须有能精确地选出预测误差为零的无穷多个解中某一类解的方法。要做到这一点就得把某些包含在方程 (4.9) 中的信息附加到该问题中去, 这些附加信息为先验信息。而先验信息有许多形式, 但每一形式它都使关于解特性的期望以定量的形式出现, 而不依赖于实际数据。通常把反问题的解是“简单的”作为期望, 也就是说要使解的欧几里德长度 L 上在 L_2 范数的度量下是最小的。

$$L = X^T X = \sum \Delta m_i^2$$

实际上, L 表示一个物理系统的能量, 离散化后为功率。取 L 极小说明求系统处于能量最稳定条件下的参数。因此, 对于病态方程组 (4.9) 要较为合理地求出其解估计, 不仅要使预测误差最小化, 而且也要使解的长度最小化。

设目标函数:

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= \|e\|_2^2 + \epsilon^2 L \\ &= e^T e + \epsilon^2 X^T X \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi(m) &= (AX - Y)^T (AX - Y) + \epsilon^2 X^T X \\ &= X^T A^T A X - 2X^T A^T Y + Y^T Y + \epsilon^2 X^T X \end{aligned}$$

取极小化, 令 $\frac{\partial \Phi}{\partial X^T} = 0$ 得:

$$2A^T A X - 2A^T Y + 2\epsilon^2 X = 0$$

因此, 阻尼最小二乘法的解估计为:

$$\begin{aligned} \text{或:} \quad \hat{X} &= [A^T A + \epsilon^2 I]^{-1} A^T Y \\ \hat{\Delta m} &= [A^T A + \epsilon^2 I]^{-1} A^T \Delta d \end{aligned} \quad (4.14)$$

式中: ϵ^2 为阻尼系数, 它的选择主要靠实验。

由于方程是非线性的, 所以求解估计靠迭代法。而在每次迭代过程中, 在满足其目标函数下降的前提下选取 ϵ 值, 保证迭代稳定收敛。但是阻尼最小二乘法仅仅根据目标函数作为判断条件来决定下次迭代时 ϵ^2 的大小, 而没有利用本次迭代的有关信息, 这样在探索目标函数的极小值过程中往往带有盲目性。

改进的阻尼最小二乘法 (Fletcher) 在此基础上作了如下改进:

(1) 设立线性化指标 R , 作为迭代是否收敛的标志:

$$R = \frac{\varphi^2 - \varphi^1}{\varphi^1 - \varphi^0} \quad (4.15)$$

式中: φ^0 , φ^1 分别是以 m^0 和 m^1 为参数计算出的目标函数值;

φ^0 , φ^1 是依线性化后函数求出的目标函数值。

$$\varphi^1 - \varphi^0 = 2\Delta m^T \Delta d - \Delta m^T A \Delta m \quad (4.16)$$

设定常数 α 和 β ($0 < \alpha < \beta < 1$)。当 $R > \beta$ 时, 说明目标函数线性化程度较好, 这次迭代收敛, 可缩小 ε^2 , 加大收敛速度; 当 $R < \alpha$ 时, 说明目标函数线性化程度较差, 本次迭代不收敛, 应增大 ε^2 , 向最速下降方向靠拢, 以保证稳定收敛; 当 $\alpha \leq R \leq \beta$, 说明目标函数线性化程度一般, 本次迭代收敛, 保持原阻尼系数不变。

(2) ε^2 的选择

当 $\alpha \leq R \leq \beta$ 时 ε^2 值不变

当 $R > \beta$ 时 取 $\varepsilon^2 = \varepsilon^2/5$

当 $R < \alpha$ 时 取 $\varepsilon^2 = 10\varepsilon^2$

(3) 截止阻尼系数 ε_c^2

通常取 $\varepsilon_c^2 = 10^{-4}$

2. 反演程序流程图

反演程序流程图由图 4.1 给出

(二) Box - Kanemasu 法 (BK 反演法)

1. 方法的基本原理

设矢量 m^0 为初始模型参数, 其在地面第 i 点的模型响应为 $d(i, m^0)$ 。对模型参数 m 的响应函数在其初始模型 m^0 处台劳展开, 并取一次项有:

$$d(i, m) = d(i, m^0) + \sum_k \frac{\partial d(i, m^0)}{\partial m_k} (m_k - m_k^0) \quad (4.17)$$

即: $\Delta d = A \Delta m$

式中: $\Delta d = d(i, m) - d(i, m^0)$

$$\Delta m = m_k - m_k^0$$

$$A = \left. \frac{\partial d(i, m)}{\partial m_k} \right|_{m=m^0}$$

取 $d(i, m)$ 同测量数据一致, 并假定 $d(i, m)$ 的测量误差是 $d(i, m)$ 幅度的百分常数, 这样为了给精确的测量数据加上较大的权, 不精确数据加上较小的权, 我们定义广义预测误差:

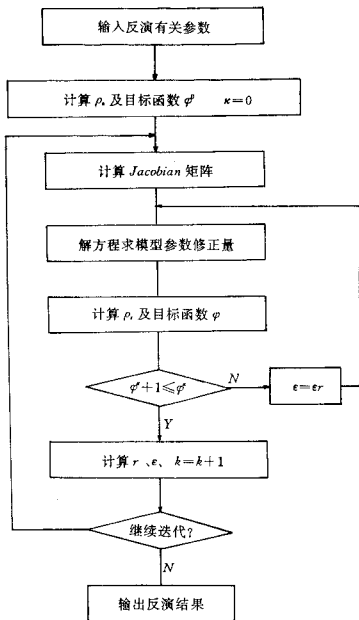


图 4.1 改进的阻尼最小二乘法反演流程图

$$S = e^T W e \quad (4.18)$$

式中:
$$W_{ii} = \left[\frac{1}{d(i, m)} \right]^2 \quad (4.19)$$

按照这种广义预测误差极小来估计模型参数,在超定的情况下采用类似于阻尼最小二乘法的推导不难得出其解估计,即:

$$\Delta \hat{m} = [A^T W A]^{-1} A^T W \Delta d \quad (4.20)$$

由于它是从非线性方程组导出的,因此,必须采用迭代运算。实际上, $\Delta \hat{m}$ 是不稳定的,可能变得很大使 S 增大。避免这种不稳定的方法是高斯截断法,它对超过预测长度 Δm 的比率或 Δm 这个给定参数不合理部分进行截断,即:

$$\Delta m_R = h \Delta m \quad h \leq 1 \quad (4.21)$$

然而合理地选取截断参数 h 是不容易的。

Box, Kanemasu 对 Gauss 方法的截断参数 h 进行了优化。他们把目标函数 S 看作是 h 的二次函数。即:

$$S = ah^2 + bh + c \quad (4.22)$$

式中: a, b, c 是每次迭代的特征常数。

要确定 a, b, c 至少需三个条件。第一个条件取 $h=0$ 时的 S 值,即初始模型参数的目标函数值,记为 S_0 ;第二个条件取 $h=\alpha$ 时的目标函数 S_α ;第三个条件取目标函数在 $h=0$ 时沿高斯方向的偏导数 $(\frac{\partial S}{\partial h})_{h=0}$ 。对 α 的选择原则是使 $m^0 + \alpha \Delta m$ 不包含任何实际不稳定的参数值。根据上三个条件经过推导(推导过程较长,这里从略,感兴趣者可参阅文献 Beck 等人,1977)得到:

$$\begin{cases} c = S_0^{(k)} \\ b = -2G^{(k)} \\ a = [S_\alpha^{(k)} - S_0^{(k)} + 2G^{(k)}\alpha] \alpha^{-2} \end{cases} \quad (4.23)$$

按照极小的条件可知,其极小点 $h^{(k+1)} = -\frac{b}{2a}$ 或:

$$\begin{aligned} h^{k+1} &= G^{(k)} \alpha^2 [S_\alpha^{(k)} - S_0^{(k)} + 2G^{(k)}\alpha]^{-1} \\ G &= \Delta m^T A^T W A \Delta m \end{aligned} \quad (4.24)$$

(4.24)式代入(4.21)式,有

$$\begin{aligned}\Delta m_h^{(k+1)} &= G^{(k)} a^2 [S_a^{(k)} - S_0^{(k)} + 2(G^{(k)} a)^{-1} \Delta m^{(k)}] \\ m^{(k+1)} &= m^{(k)} + \Delta m_h^{(k+1)}\end{aligned}\quad (4.26)$$

利用(4.25)式是有条件的,这些限制条件与 α 值有关,如图4.2。下面分别进行讨论。

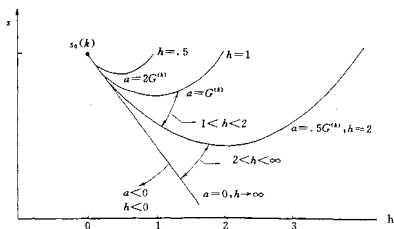


图 4.2 BK 法 S 与 h 关系曲线

当 $\alpha=0$ 时, S 为一条直线, h 在任何位置 S 没有极小值,这时直接取 $h^{(k+1)}=p\alpha$ (其中 p 是一个等于或大于一的常数)

当 $\alpha < 0$ 时,由(4.24)式计算的 h 为负值,同样我们取 $h^{(k+1)}=p\alpha$

当 $\alpha > 0$ 时,其由(4.24)式计算的 h 满足: $h^{(k+1)} \leq p\alpha$,则按(4.24)计算 $h^{(k+1)}$,否则取 $h^{(k+1)}=p\alpha$ 。

以上三种情况必须满足两个条件。其一:

$$S_a^{(k)} < S_0^{(k)} \quad (4.26)$$

如果对于给定的 α 值上式不满足,则减小 α 值再进行检验。当 α 很小时($\alpha < 0.001$)运算停止,修改其模型参数以及有关内容;其二:

$$S_a^{(k)} \geq S_0 \cdot (2 - \alpha^{-1}) \alpha G^{(k)} \quad (4.27)$$

当计算的 $h^{(k+1)}$ 不能使上不等式成立,最好取 $h^{(k+1)}=p\alpha$ 作下次迭代。

2. BK 法求 h 的流程图。

BK 法求 h 的流程图详见图4.3。

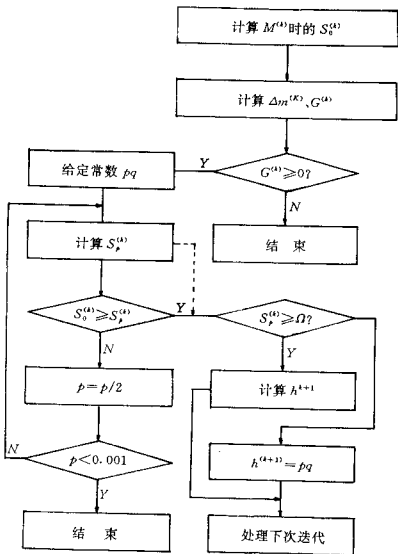


图 4.3 BK 法求 h 流程图

三、模型参数的评价

由于地球物理反问题的多解性,以及先验经验的引入和观测误差的存在,使反问题的解与“真解”有一定的偏离程度。为了对这些观测数据及解估计的好坏程度有一估计,我们作一些有关残差论的某些评价。在概率中对数据及参数评价的有数据分辨率矩阵(也称为数据核) $N=AA^T$;模型分辨率矩阵 $R=A^{-1}A$;单位协方差矩阵 $\text{Cov } m=\sigma^2(A^T A)^{-1}$ 以及分辨率和协方差的优劣评价(Dirichlet 展布),即:

$$\text{Spread}(N) = \|N - I\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [N_{ij} - I_{ij}]^2$$

$$\text{Spread}(R) = \|R - I\|_2^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [R_{ij} - I_{ij}]^2$$

此外,还有 χ 分布和 F 分布等。这些评价方法涉及的内容较多,讨论起来比较复杂。为了简便且能达到模型参数评价的目的,我们着重讨论拟合优度和参数置信区间的估计。

1. 拟合优度

对于地球物理反演最好估计的模型有一估计数据方差,定义为:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\Delta \rho_i^T \cdot \Delta \rho_i}{N - M} \quad (4.28)$$

式中: N 为数据个数, M 为模型参数个数;

$\Delta \rho_i$ 为实测视电阻率与计算视电阻率之差。

$\hat{\sigma}^2$ 的大小表示数据拟合程度,其值越小拟合程度越高。但需指出, $\hat{\sigma}^2$ 的大小仅表示数据的拟合程度,而并不能说明解估计的质量。对解估计的质量评价通常采用参数的协方差矩阵。

2. 模型参数置信区间的估计

在二维半问题的反演解释中,由于存在较深的小块难以与一些较好的数据相匹配,以及邻近高低阻块的等效性,使得它的响应与实际模型的响应相一致。在这种情况下,模型的地质解释需要我们估计模型参数的置信区间。而置信区间的宽度与方差有关。具有大方差的分布往往有较大的置信区间,不过这种关系不是直接的。一种常用的估计量是参数的协方差矩阵。

$$\text{Cov}(m) = \sigma^2(A^T A)^{-1} \quad (4.30)$$

参数协方差矩阵对角元素的平方根给出每块电阻率预估参数的标准偏差估计值。从标准偏差可很快得到估计参数是否有较大的置信区间。应该指出,对置信区间的估计忽略了参数之间的相互联系,同时估计参数是在线性理论的基础上得到的。

四、两种反演方法的计算实例

前面我们讨论了改进的阻尼最小二乘法 and BK 法。对于这两种方法 Davis 和 Whitting 等人利用一些算例进行了比较,认为 BK 法反演效果较好。但是对于复杂的地球物理反演问题(尤其是电法勘探的二维反演问题),这两种反演方法的收敛速度、精度及应用效果又如何呢?为此,我们选取由简单到复杂的地球物理理论或实际模型进行了试算,以便检验方法的可行性及适用性。

算例 1

我们给出浅地表高阻模型,划分为三个子块,如图 4.4(a)所示。在给定相同初始参数的情况下,对偶极-偶极装置拟断面视电阻率值用两种反演方法进行反演。迭代 10 次后两种方法稳定收敛,收敛误差较小,其方差较小。反演结果由表 4.1 给出。从表中可以看出 BK 法收敛结果更逼近真值。两种反演方法的收敛速度详见图 4.4(b)。

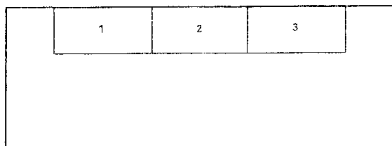


图 4.4(a) 地电断面电阻率子块划分示意图

表 4.1 两种反演方法迭代 10 次后的结果

子 块	ρ_1	ρ_2	ρ_3	备 注
真 值	50	70	50	$\rho_0 = 100$
初 值	100	100	100	
MD 反演法	48.77	69.26	45.59	
BK 反演法	50.12	70.07	50.04	

算例 2

我们取 5 个电阻率子块(如图 4.5(a)所示),对给定的偶极-偶极装置视电阻率拟断面进行反演。迭代 20 次后两种方法收敛误差分别为 0.3122 和 0.0258。图 4.5(b)给出两种反

演方法的收敛速度图。其反演结果见表 4.2。

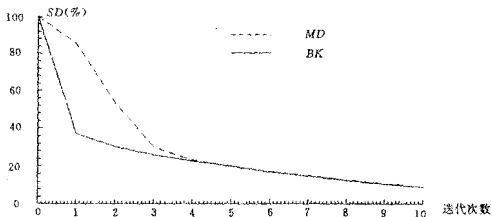


图 4.4(b) 两种反演方法收敛速度图

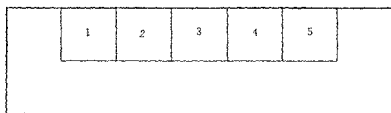


图 4.5(a) 地电断面电阻率子块划分示意图

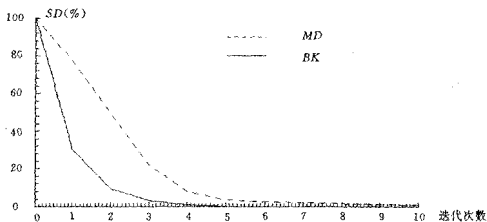


图 4.5(b) 两种反演方法收敛速度图

表 4.2 两种反演方法迭代 20 次后的结果

子 块	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5
真 值	20	50	80	50	20
初 值	100	100	100	100	100
MD 反演法	19.52	53.90	79.84	43.86	25.38
BK 反演法	19.83	52.14	78.94	46.65	23.71

算例 3

对 15×5 的内区网格,我们取如图 4.6(a)所示的 10 个电阻率子块对给定的高阻隆起构造上偶极装置拟断面的视电阻率值进行反演。图 4.6(b)给出反演模型参数的标准偏差。反演结果见表 4.3。从反演结果来看,对偶极装置,浅部电阻率子块反演结果的标准偏差小,而深部偏差较大。

算例 4(河北张家口市供水水文地质勘探实例)

候家庙冲洪积扇位于测区北部宣化城东一带,呈南北展布,由孔旁测深资料可知,黄土电阻率为 $20\Omega \cdot m$,含水砂砾石层电阻率约为 $50\Omega \cdot m$ 。高阻基岩(侏罗系)电阻率约为 $100\Omega \cdot m$ 。电测深工作的目的是大致划分富水段和贫水段的界线。实测对称四极电测深曲线拟断面图如图 4.7(a)。我们取 21×6 的网格,划分为 14 个电阻率子块(图 4.7(b))用 BK 法反演 12 个子块。迭代 10 次后的反演结果如图 4.7(c)。拟合误差 0.2,反演模型参数的标准偏差见图 4.7(d),其反演结果和地质解释相吻合。

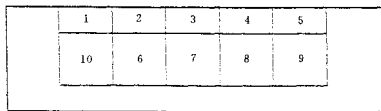


图 4.6(a) 地电断面电阻率子块划分示意图

表 4.3 两种反演方法迭代 14 次后的结果

子 块	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_5	ρ_6	ρ_7	ρ_8	ρ_9	ρ_{10}
真 值	20	50	80	50	20	80	120	80	50	60
初 值	50	80	100	80	50	100	140	100	80	80
MD 反演法	19.52	50.36	77.47	54.11	18.71	63.36	168.9	50.18	307	63.08
BK 反演法	19.89	51.59	76.28	49.26	18.86	61.10	180.3	52.18	354	64.04

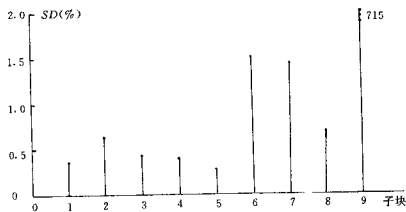


图 4.6(b) BK 法反演的模型参数标准偏差

Field data (Zhangjiakou)

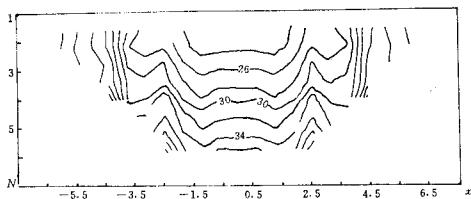


图 4.7(a) 实测对称四极电测深曲线拟断面图

13 50	1 49.98	2 38.53	3 27.91	4 27.98	5 37.32	6 47.53	14 50
	7 30.34	8 19.66	9 19.82	10 19.67	11 20.86	12 32.15	
100							

图 4.7(b) 地电断面电阻率子块划分示意图

Inverse data(Zhangjiakou)

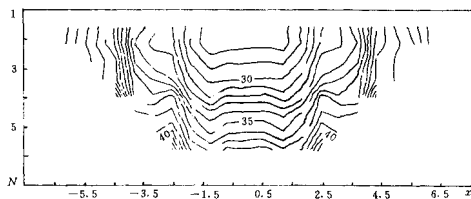


图 4.7(c) BK 法反演的 ρ_s 曲线拟断面图

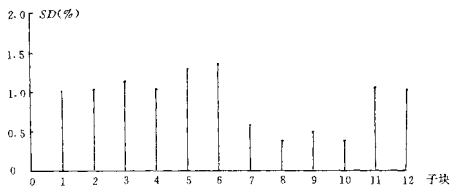


图 4.7(d) BK 法反演的模型参数标准偏差

附录 二维地电构造中点源场的 迭代有限元法正演模拟

一、方法原理简介

点源二维迭代有限元法正演模拟时, 首先把模拟的无限区域化为有限的内区和无限的外区(即算区和边界区)。在外区采用迭代算法, 也就是说, 外区通过适当的网格剖分, 迭代消环处理等过程把外区的场能量集中在内区的边界节点上; 在内区采用常规的有限单元法的算法。通过内区系数矩阵简化, 外区系数矩阵迭代消元处理, 内、外区的边界系数矩阵的协调处理, 及合并内、外区系数矩阵得到总体刚度矩阵, 相应地形成了变分问题离散化后的高阶线性方程组。采用 Cholesky 分解法求解方程组可计算出各节点的傅氏变换电位, 然后对它进行傅氏逆变换, 得到各点上的位场值。这样可得到地下半空间不同介质的位场分布。

二、程序结构及功能

本程序适应于均匀外区和一个或多个非均匀电性体内区的二维地电断面中各种电法装置的视电阻率计算。对于相同内区不同外区的模型, 外区只需计算一次。为了便于参数的输入或修改, 程序可给出参数输入的地电断面图和网格剖分示意图。

本程序由参数输入模块(IFEM-G), 外区处理模块(IFEM-E)和内区计算模块(IFEM-I)组成。参数输入模块(IFEM-G)主要用于输入网格大小、装置类型及地电参数, 输出地电断面模型图、网格剖分单元、节点分布图。外区处理模块(IFEM-E)是对外区网格进行迭代消环处理。它从算区外边界逐渐向外迭代直至足够远的外边界为止, 迭代完毕以文件的形式输出其边界的影响值 外区系数矩阵。内区计算模块(IFEM-I)是对算区进行处理, 根据给定的有关参数和装置类型计算内区系数矩阵, 然后通过内、外区系数矩阵的总体合成、解方程组, 傅氏逆变换求出各节点电位, 最后按电阻率计算公式得到地面各点的视电阻率值。

了例子程序:

QET 计算四边形单元, 形成单元系数矩阵
INVMAT 矩阵求逆过程
TCM 系数矩阵乘积运算
AK0 零阶修正 Bessel 函数
AK1 -阶修正 Bessel 函数

主要标识符说明:

NKK 波数个数

NX	水平节点数
NZ	垂直节点数
NC	外区迭代环数
PC	环域之间的比例因子
CP	比例尺
NE	外区各环节节点数
NET	外区节点总数
NEB	内区外边界节点数
NTP	内区总结点数
NTT	内区三角形单元总数
NHP	电性不均匀体个数
NI	供电点移动节点数
NIB	供电起始节点在水平方向的序号
NNB	极距的起始值 (通常取 1)
NNE	极距的终止值 (通常小于 NI)
NXB	算区起始节点号 (沿 X 方向)
NXE	算区终止节点号 (沿 X 方向)
NST	供电点移动的步长
AM	供电点到 M 点间的节点数
MON	MN 之间的距离
WWT	参数数据文件名
WEX	外区数据文件名
WRT	模拟结果数据文件名
WPF	图形数据文件名

三、程序使用说明

程序的参数输入模块 (IFEM - G), 外区处理模块 (IFEM - E) 和内区计算模块 (IFEM - I) 顺序执行。程序执行时按计算机提示输入给定的参数。

四、程序清单

(一) IFEM - G. FOR

```

C      PROGRAM NAME: IFEM - G. FOR
C      THE PROGRAM IS USED TO INPUT MODEL PARAMETER
C      P0/PP-----RESISTIVITY OF HOMOGENEOUS/NONHOMOGENEOUS
C      MEDIUM
C      NR(1)  ---  -SERIAL NUMBER OF NET POINT IN NONHOMOGENEOUS

```

MEDIUM

```

C    PARAMETER VARIATION: NX,NZ,PP,MON,.MS,NRC
c    PARAMETER (NX=41,NZ=10,nq=nx+nz+nz 3)
c    DIMENSION XD(NX),ZD(NZ),RES(NQ)
    PARAMETER (MNX=51,MNZ=20,MHB=20)
    PARAMETER (MRE=MNX * MNZ/4,MTE=4 * MRE)
    PARAMETER (MNE=MNX+MNZ+MNZ-2,MNE2=2 * MNE)
    PARAMETER (NNT=MNX * MNZ * 4,MZE=MNZ * MNE)
    DIMENSION XD(MNX),ZD(MNZ),RES(MNE)
    DIMENSION NNR(MHB,MRE),NR(MHB,MTE)
    DIMENSION MS(MHB),MMS(MHB),PP(MHB)
    DIMENSION NQ(MNZ,MNE),NRE(MNZ),NP(MNZ,MNE),NRP(MNZ)
    CHARACTER W1(20) * 1,SG(NNT) * 1
    CHARACTER DR1(MNX) * 1,DR2(MNX) * 1,DR3(MNX) * 1,DR4(MNX) * 1
    CHARACTER WDF * 12,WWF * 12,WEX * 1,WRT * 1,WSD * 1,WE * 1
    CHARACTER * 1 WY
    DATA XD/MNX * 0/,ZD/MNZ * 0/,RES/MNE * 0/
    DATA MS/mhb * 0/,MMS/mhb * 0/,PP/mhb * 0/
    DATA NQ/MZE * 0/,NRE/MNZ * 0/,NP/MZE * 0/,NRP/MNZ * 0/
    DATA W1/'1','2','3','4','5','6','7','8','9',
    + 'A','B','C','D','E','F','!','@','#','$','%'/
    DATA SG/NNT * '.'/'
    WRITE(*,*)'-----Input Parameter-----'
    WRITE(*,105)
    READ(*,2050)WDF
    WRITE(*,107)
    READ(*,2050)WWF
    WRITE(*,115)
    READ(*,2040)WEX
    WRITE(*,125)
    READ(*,2040)WRT
    WRITE(*,135)
    READ(*,2040)WSD
    WRITE(*,2300)
    READ(*,*)NX,NZ,NC,PC,CP
    WRITE(*,145)NX-1
    READ(*,*)(XD(I),I=1,NX-1)
145  FORMAT(2X,'Input horizontal interval of met ('I3,')')

```



```

WRITE(*,155) NZ 1
READ(*,*)(ZD(I),I=1,NZ 1)
155  FORMAT(2X,'Input vertical interval of met (' ,I3,' ) :')
      NNQ=NX+NZ+NZ-3
      WRITE(*,165)NNQ
      READ(*,*)(RES(I),i=1,NNQ)
165  FORMAT(2X,'Input boundary Resistivity of E—met (' ,I3,' ) :')
      WRITE(*,*)' '
1020  WRITE(*,2120)
      READ(*,2040) WE
      IF (WE.EQ.'T'.OR. WE.EQ.'t') GOTO 1030
      IF (WE.EQ.'R'.OR. WE.EQ.'r') THEN
          GOTO 1030
      ELSE
          GOTO 1020
      ENDIF
1030  WRITE(*,*)' '
      WRITE(*,2130)
      READ(*,*) NXB,NXE,MON,NNB,NNE
      WRITE(*,2140)
      READ(*,*) NHB
      WRITE(*,2150)
      READ(*,*) P0
      DO 1040 K=1,NHB
          WRITE(*,2160)K
          READ(*,*)PP(K)
          MS(K)=0
          MMS(K)=0
1050  NS=MS(K)
          WRITE(*,2170)K
          READ(*,*) NB,NE
          IF(NB.EQ.555 .OR. NE.EQ.555) GOTO 1040
          NN=NE+NB+1
          DO 1060 I=1,NN
              K0=I+NS
              MS(K)=MS(K)+1
              NR(K,K0)=NB+I-1
1060  CONTINUE
          GOTO 1050

```

```

1040  CONTINUE
1080  DO 1090 K=1,NHB
      WRITE(*,*)'
      -----
      WRITE(*,2020)K,MS(K),PP(K)
      WRITE(*,2030)(NR(K,K1),K1=1,MS(K))
1090  CONTINUE
      WRITE(*,*)'
      -----
      WRITE(*,*)' Do you have found error ? (y/n) '
      READ(*,2040) WY
1100  IF (WY.EQ.'n'.OR. WY.EQ.'N') GOTO 1210
      IF (WY.EQ.'Y'.OR. WY.EQ.'y') GOTO 1110
      GOTO 1100
1110  WRITE(*,2180)
      READ(*,*)K
1120  WRITE(*,*)' Block=',K
      WRITE(*,2030)(NR(K,J),J=1,MS(K))
      WRITE(*,*)' Do you have found error data? (y/n) '
      READ(*,2040) WY
1130  IF (WY.EQ.'n'.OR. WY.EQ.'N') GOTO 1150
      IF (WY.EQ.'Y'.OR. WY.EQ.'y') THEN
          WRITE(*,*)'      Input order number & unit number'
          READ(*,*)K1,K2
          NR(K,K1)=K2
      ELSE
          GOTO 1120
      ENDIF
      WRITE(*,2030)(NR(K,J),J=1,MS(K))
1140  WRITE(*,*)' Do you have found another error data ? (y/n) '
      READ(*,2040) WY
      IF (WY.EQ.'n'.OR. WY.EQ.'N') GOTO 1150
      IF (WY.EQ.'Y'.OR. WY.EQ.'y') THEN
          GOTO 1120
      ELSE
          GOTO 1140
      ENDIF
1150  WRITE(*,*)'      Do you have found lose data ? (y/n)'
      READ(*,2040) WY

```

```

IF (WY.EQ. 'N' .OR. WY.EQ. 'n') GOTO 1180
WRITE( * , * )'      Block =', K
WRITE( * , 2030)(NR(K, K1), K1=1, MS(K))
WRITE( * , * )'      Input correction unit number'
READ( * , * )K1
MS(K)=MS(K)+1
NR(K, MS(K))=K1
DO 1160 K0=1, MS(K)
    NO=NR(K, K0)
    DO 1170 K1=K0+1, MS(K)
        IF(NO.GT. NR(K, K1)) THEN
            NO=NR(K, K1)
            NR(K, K1)=NR(K, K0)
            NR(K, K0)=NO
        ENDIF
1170 CONTINUE
1160 CONTINUE
WRITE( * , 2030)(NR(K, K1), K1=1, MS(K))
GOTO 1150
1180 WRITE( * , * )'      Do you have found extra data ? (y/n)'
READ( * , 2040) WY
IF(WY.EQ. 'N' .OR. WY.EQ. 'n') GOTO 1080
WRITE( * , * )'      Input extre unit number'
READ( * , * ) K3
DO 1190 K1=1, MS(K)
    IF(K3.EQ. NR(K, K1)) THEN
        J1=K1
    ENDIF
1190 CONTINUE
DO 1200 K1=J1, MS(K)
    NR(K, K1)=NR(K, K1+1)
1200 CONTINUE
NR(K, K1)=0
MS(K)=MS(K)-1
WRITE( * , 2030)(NR(K, K1), K1=1, MS(K))
GOTO 1180
1210 WRITE( * , * )'      Is the total data all right ? (y/n)'
READ( * , 2040) WY
IF (WY.EQ. 'N' .OR. WY.EQ. 'n') GOTO 1080

```

```

NZ1=NZ-1
NX1=NX-1
IF (WE.EQ. 'R' .OR. WE.EQ. 'r') THEN
    DO 1012 K1=1,NHB
        DO 1012 K2=1,MS(K1)
            NNR(K1,K2)=NR(K1,K2)
1012 CONTINUE
    DO 1014 K1=1,NHB
        DO 1014 K2=1,320
            NR(K1,K2)=0
1014 CONTINUE
    DO 1016 K1=1,NHB
        MMS(K1)=MS(K1)
        K0=0
    DO 1018 K2=1,MS(K1)
        K0=K0+1
        NR(K1,K0)=NNR(K1,K2)*4-3
        K0=K0+1
        NR(K1,K0)=NNR(K1,K2)*4-2
        K0=K0+1
        NR(K1,K0)=NNR(K1,K2)*4-1
        K0=K0+1
        NR(K1,K0)=NNR(K1,K2)*4
1018 CONTINUE
    MS(K1)=MS(K1)*4
1016 CONTINUE
ENDIF
NBP=NX+2*NZ-2
DO 1220 K=1,NHB
    DO 1230 K1=1,MS(K)
        I=NR(K,K1)
        SG(I)=W1(K)
1230 CONTINUE
1220 CONTINUE
    DO 1240 I=1,NZ1
        NRE(I)=2*NZ+NX-4*I-1
1240 CONTINUE
    DO 1250 I=1,NZ
        NRP(I)=NBP-4*(I-1)

```

```

1250  CONTINUE
      M1=0
      DO 1260 J=1,NZ1
        K1=NZ1-J+1
        DO 1270 I=1,K1
          NQ(I,J)=I+M1
1270  CONTINUE
      M1=M1+NRE(J)*P
1260  CONTINUE
      DO 1280 I=1,NZ1
        K1=NZ1-I+2
        K2=NX1-NZ1+I
        DO 1290 J=K1,K2
          NQ(I,J)=NQ(I,J-1)+1
1290  CONTINUE
1280  CONTINUE
      DO 1300 J=1,NZ1-1
        M1=NRE(NZ-J)
        K1=NX1-NZ1+J+1
        NQ(1,K1)=NQ(1,K1-1)-M1
        DO 1310 I=2,J
          NQ(I,K1)=NQ(I-1,K1)-1
1310  CONTINUE
1300  CONTINUE
      M1=0
      DO 1320 J=1,NZ
        K1=NZ-J+1
        DO 1330 I=1,K1
          NP(I,J)=I+M1
1330  CONTINUE
      M1=M1+NRP(J)
1320  CONTINUE
      DO 1340 I=1,NZ
        K1=NZ-I+2
        K2=NX1-NZ+I
        DO 1350 J=K1,K2
          NP(I,J)=NP(I,J-1)+1
1350  CONTINUE
1340  CONTINUE

```

```

DO 1360 J=1,NZ-1
  M1=NRP(NZ-J+1)
  K1=NX-NZ+J+1
  NP(1,K1)=NP(1,K1-1)-M1
  DO 1370 I=2,J
    NP(I,K1)=NP(I-1,K1)-1
1370  CONTINUE
1360  CONTINUE
C
  OPEN(11,FILE=WDF,STATUS='NEW')
  WRITE(11,2010)WEX,WRT,WSD,WE
  WRITE(11,2000)NX,NZ,NC,PC,CP
  WRITE(11,2002)NXB,NXE,MON,NNB,NNE
  WRITE(11,*)' '
  WRITE(11,2004)(XD(K1),K1=1,NX-1)
  WRITE(11,*)' '
  WRITE(11,2004)(ZD(K1),K1=1,NZ-1)
  WRITE(11,*)' '
  WRITE(11,2004)(RES(K1),K1=1,NNQ)
  WRITE(11,*)' '
  WRITE(11,2002)NHB
  WRITE(11,2004)P0,(PP(K1),K1=1,NHB)
  IF(WE.EQ.'T'.OR.WE.EQ.'t') THEN
    WRITE(11,2002)(MS(K1),K1=1,NHB)
    WRITE(11,2002)((NR(K,K1),K1=1,MS(K)),K=1,NHB)
  ELSE
    WRITE(11,2002)(MMS(K1),K1=1,NHB)
    WRITE(11,2002)((NNR(K,K1),K1=1,MMS(K)),K=1,NHB)
  ENDIF
  CLOSE(11)
  OPEN(1,FILE=WWF,STATUS='NEW')
  WRITE(1,*)' '
  -----No. of net point -----
  -----
  WRITE(1,*)' '
  DO 1380 I=1,NZ
    WRITE(1,2060)(NP(I,J),J=1,NX)
1380  CONTINUE
  WRITE(1,*)' '

```

```

WRITE(1,*)'-----No. of net element-----'
WRITE(1,*)'
DO 1390 I=1,NZ1
  WRITE(1,2060)(NQ(I,J),J=1,NX1)
1390 CONTINUE
WRITE(1,*)'
WRITE(1,*)'-----Geoelectrical Model-----'
WRITE(1,*)' WRITE(1,*)'

DO 1400 I=1,NZ1
  DO 1410 J=1,NX1
    K1=NQ(I,J)*4-3
    K2=NQ(I,J)*4-2
    K3=NQ(I,J)*4-1
    K4=NQ(I,J)*4
    DR4(J)=SG(K4)
    DR3(J)=SG(K3)
    DR2(J)=SG(K2)
    DR1(J)=SG(K1)
1410 CONTINUE
    WRITE(*,2070)(DR4(K4),K4=1,NX1)
    WRITE(*,2080)(DR1(K1),DR3(K1),K1=1,NX1)
    WRITE(*,2070)(DR2(K2),K2=1,NX1)
    WRITE(1,2070)(DR4(K4),K4=1,NX1)
    WRITE(1,2080)(DR1(K1),DR3(K1),K1=1,NX1)
    WRITE(1,2070)(DR2(K2),K2=1,NX1)
1400 CONTINUE
    WP=1
    FF=4
    WRITE(1,*)' '
    WRITE(1,2260)P0
    DO 1440 I=1,NHB
      WRITE(1,2270)W1(I),PP(I)
      IF(I.EQ.WP*FF)THEN
        WP=WP+1
        FF=5
        WRITE(1,*)' '
      ENDIF

```

```

CONTINUE
CLOSE(1)
WRITE(*,* )' '
WRITE(* ,2055)' Written data file name : ',WDF
WRITE(* ,2055)' Written help file name : ',wwf
format(2x,'Input data file name:',')
format(2x,'Input hlp file name:',')
format(2x,'WEX(External data file name)(1)=? ','))
format(2x,'WRT(Result file name(1))=? ','))
format(2x,'WSD(Figure file name(S/D/A)=? ','))
FORMAT(2X,3I7,2F7.2)
FORMAT(2X,10I7)
FORMAT(2X,10F7.1)
FORMAT(2X,4A4)
FORMAT(2X,'Block=',I3,'      Number of element=',I4,' p=','f8.2)
FORMAT(2X,10I7)
FORMAT(A1)
FORMAT(A12)
FORMAT(A27,A12)
FORMAT(1X,50I4)
FORMAT(2X,50(' ',A1,' '))
FORMAT(2X,50(A1,' ',A1))
FORMAT(2X,' The Form of Input Element (T/R) ? ')
FORMAT(2X,' NXB,NXE.MON,NNB,NNE=(5)? ')
FORMAT(2X,' Number of Block - ? ')
FORMAT(2X,' Pθ = ? ')
FORMAT(2X,' Resistivity of Block'.I2,'Ω='.',))
FORMAT(2X,' No. of NB & NE of Block '.I2,'- ? ',))
FORMAT(2X,' Which block ? Please input K = ',))
FORMAT(1X,', '=','f8.2.'ohm','))
FORMAT(1X,', ',A1,'=',f8.2.'ohm','))
FORMAT(10X,' -----
              .-. --.-.')
FORMAT(2X,/////////)
FORMAT(2X,' NX,NZ,NC,PC,CP=? ')
STOP
END
```


(二) IFEM—E. FOR

```
c      The program is to process circle region of external district
c      network .
c      1: To count net—point of quadrilateral element
c      2: To compute X—Z co—ordinates of the net— point relatively
c      3: To calculate coefficient matrix of the quadrilateral element
c      4: To summary coefficient matrix
c      5: To iterate & eliminate middle circle regional
c      6: To form boundary matrix with wave
c      Note:
c          Adjusting parameter variation (7)
c          nkk    nx    nz    nc
c          pc     xil    zil    ww(8)    res(nq)
PARAMETER(NKK=5)
PARAMETER(MNX=41,MNZ=11,MNC=40)
PARAMETER(MNE=MNX+MNZ+MNZ-2,MNE2=2*MNE)
DIMENSION WN(NKK),RES(MNE)
DIMENSION XD(MNX),ZD(MNZ),XZI(2,MNE),XW(MNC),ZW(MNC)
DIMENSION SM11(MNE,MNE),SM12(MNE,MNE),SM21(MNE,MNE)
DIMENSION SM22(MNE,MNE),SM11(MNE,MNE),SM12(MNE,MNE)
DIMENSION SME1(MNE,MNE),SMEE(MNE,MNE)
DIMENSION SNA(MNE,MNE),SKE(MNE,MNE),SKK(MNE2,MNE2)
DIMENSION NQP(4),XP(5),ZP(5),UM(5,5),WS(MNE)
CHARACTER * 1 WW(8),WWT * 8,WDF * 12
CHARACTER WEX * 1,WRT * 1,WSD * 1,WY * 1
EQUIVALENCE (WWT,WW(1))
DATA WN/.9444331E-02,.8083857E-01,.2880208E+00,.8914281E+00,
+.2960465E+01/
DATA XD/MNX * 0.0/
DATA ZD/MNZ * 0.0/
DATA RES/MNE * 0.0/
WRITE(*,2001)
2001  format(2x,' Input data file name:')
      READ(*,2002)WDF
2002  FORMAT(A12)
      write(*,2002)WDF
      OPEN(12,FILE=WDF,STATUS='OLD')
      READ(12,2010)WEX,WRT,WSD,WE
```

```

write( *,2010)WEX,WRT,WSD,WE
READ(12,*)NX,NZ,NC,PC,CP
write( *,2020)NX,NZ,NC,PC,CP
READ(12,*)NXB,NXE,MON,NNB,NNE
write( *,2030)NXB,NXE,MON,NNB,NNE
READ(12,*)(XD(K1),K1=1,NX-1)
write( *,2040)(XD(K1),K1=1,NX-1)
READ(12,*)(ZD(K1),K1=1,NZ-1)
write( *,2040)(ZD(K1),K1=1,NZ-1)
NQ=nx+nz+nz-3
READ(12,*)(RES(K1),K1=1,NQ)
write( *,2040)(RES(K1),K1=1,NQ)
2010 FORMAT(2X,4A4)
2020 FORMAT(2X,3I5,2F5.2)
2030 FORMAT(2X,5I5)
2040 FORMAT(2X,10F6.1)
CLOSE(12)
NE=NX+NZ+NZ-2
NQ=NE-1
NE2=2*NE
NZ1=NZ-1
NC1=NC-1
NX1=NX-1
NX2=NX1-NZ1
NX3=NX2+1
XI1=INT(NX/2.0)
ZI1=0.0
XZI(1,1)=XI1
XZI(2,1)=ZI1
XL=0.
ZL=0.
XZI(1,NE)=ZI1
DO 30 K=1,NX1
    XL=XL+XD(K)
    XZI(1,K+NZ)=XL+XI1
30 CONTINUE
DO 40 K=1,NZ1
    ZL=ZL+ZD(K)
    XZI(2,K+1)=ZL+ZI1

```

```

      XZI(2,NE-K)=ZL+ZI1
40  CONTINUE
      DO 50 K=1,NX1
          XZI(2,K+NZ)=ZL+ZI1
50  CONTINUE
      DO 60 K=1,NZ1
          XZI(1,K+1)=XI1
          XZI(1,NE-K+1)=XI1+XL
60  CONTINUE
      XI2=0.
      ZI2=ZI1+ZL
      HP=2.0*ZL/XL
      WRITE(*,*)' Calculating coefficient matrix by circle region'
      K2=INT(NX/10)
      K1=NX-K2*10
      WW(1)='B'
      WW(2)='D'
      WW(4)=CHAR(K2+48)
      WW(5)=CHAR(K1+48)
      K4=INT(NZ/10)
      K3=NZ-K4*10
      WW(6)=CHAR(K4+48)
      WW(7)=CHAR(K3+48)
      WW(8)=WEX
      WRITE(*,35)NKK,NC1,NQ
      DO 1000 K=1,NKK
          IF(K.LT.10) THEN
              WW(3)=CHAR(K+48)
          ELSEIF(K.GE.10) THEN
              WW(3)=CHAR(K+55)
          ENDIF
          XW(1)=XL/2.0
          ZW(1)=ZL
      DO 2000 I=1,NC1
          WRITE(*,45)NKK,K,NC1,I
          IR1=(I-1)*NE
          IR2=I*NE
          DO 80 K2=1,NE2
              DO 80 K1=1,NE2

```

```

      SKK(K1,K2)=0.
80  CONTINUE
      I1=1-1
      S1=PC*(PC* I1)*XD(1)
      S2=S1*HP
      XW(I+1)=S1+XW(I)
      ZW(I+1)=S2+ZW(I)
      J=0
3000 J=J-1
      J0=(I-1)*NQ+J
      J1=J+IR2
      J2=J1-1
      J3=J+IR1+1
      J4=J3-1
      K1=J1-IR2
      K2=J2-IR2
      K3=J3-IR1
      K4=J4-IR1
      IF(J.LT.NZ1) THEN
        XP(1)=-XW(I+1)
        XP(2)=XP(1)
        XP(3)=-XW(I)
        XP(4)=XP(3)
        ZP(1)=XZI(2,K1)
        ZP(2)=XZI(2,K2)
        ZP(3)=XZI(2,K3)
        ZP(4)=XZI(2,K4)
      ELSEIF(J.EQ.NZ1) THEN
        XP(1)=-XW(I-1)
        XP(2)=XP(1)
        XP(3)=-XW(I)
        XP(4)=XP(3)
        ZP(1)=XZI(2,K1)
        ZP(2)=XZI(2,K2)*XP(2)/XZI(1,K2)
        ZP(3)=XZI(2,K3)*XP(3)/XZI(1,K3)
        ZP(4)=XZI(2,K4)
      ELSEIF(J.EQ.NX3) THEN
        XP(3)=XW(I)
        XP(4)=XP(3)

```

```

XP(1)=XW(I+1)
XP(2)=XP(1)
ZP(1)=XZI(2,K1)*XP(1)/XZI(1,K1)
ZP(2)=XZI(2,K2)
ZP(3)=ZP(2)
ZP(4)=XZI(2,K4)*XP(4)/XZI(1,K4)
ELSEIF(J.GT.NX3)THEN
  XP(3)=XW(I)
  XP(4)=XP(3)
  XP(1)=XW(I+1)
  XP(2)=XP(1)
  ZP(1)=XZI(2,K1)
  ZP(2)=XZI(2,K2)
  ZP(3)=XZI(2,K3)
  ZP(4)=XZI(2,K4)
ELSEIF((J.GT.NZ1).AND.(J.LE.NX2))THEN
  ZP(1)=ZW(I+1)
  ZP(2)=ZP(1)
  ZP(3)=ZW(I)
  ZP(4)=ZP(3)
  XP(1)=XZI(1,K1)*ZP(1)/XZI(2,K1)
  XP(2)=XZI(1,K2)*ZP(2)/XZI(2,K2)
  XP(3)=XZI(1,K3)*ZP(3)/XZI(2,K3)
  XP(4)=XZI(1,K4)*ZP(4)/XZI(2,K4)
ENDIF
PP=RES(J)
CALL QEC(K,I,J,NC1,NZ1,NX2,NKK,WN,PP,XP,ZP,UM)
NQP(1)=J1-IR1
NQP(2)=J2-IR1
NQP(3)=J3-IR1
NQP(4)=J4-IR1
DO 100 K1=1,4
  I1=NQP(K1)
  DO 110 K2=1,4
    I2=NQP(K2)
    SKK(I1,I2)=SKK(I1,I2)+UM(K1,K2)
110 CONTINUE
100 CONTINUE
K1=NQP(1)

```

```

      K2=NQP(2)
      K3=NQP(3)
      K4=NQP(4)
      IF(J.LT.NQ) GOTO 3000
      IF(I.EQ.1) THEN
        DO 120 K1=1,NE
          DO 130 K2=1,NE
            SM11(K1,K2)=SKK(K1,K2)
            SM12(K1,K2)=SKK(K1,K2+NE)
            SM21(K1,K2)=SKK(K1+NE,K2)
            SM22(K1,K2)=SKK(K1+NE,K2+NE)
130      CONTINUE
120      CONTINUE
        ENDIF
      IF(I.GE.2) THEN
        DO 140 K1=1,NE
          DO 150 K2=1,NE
            SM11(K1,K2)=SKK(K1,K2)
            SM12(K1,K2)=SKK(K1,K2+NE)
            SM21(K1,K2)=SKK(K1+NE,K2)
            SM22(K1,K2)=SKK(K1+NE,K2+NE)
150      CONTINUE
140      CONTINUE
        ENDIF
      IF(I.GE.3) THEN
        DO 160 K1=1,NE
          DO 170 K2=1,NE
            SNA(K1,K2)=SM22(K1,K2)+SM11(K1,K2)
170      CONTINUE
160      CONTINUE
        CALL INVMAT(mne,NE,SNA)
        CALL TCM(mne,NE,SM12,SNA,SM21,SKE,WS)
        DO 180 K1=1,NE
          DO 190 K2=1,NE
            SM11(K1,K2)=SM11(K1,K2)-SKE(K1,K2)
190      CONTINUE
180      CONTINUE
        CALL TCM(mne,NE,SM12,SNA,SM11,SKE,WS)
        DO 200 K1=1,NE

```

```

      DO 210 K2=1,NE
        SM12(K1,K2)=-SKE(K1,K2)
210    CONTINUE
200    CONTINUE
      CALL TCM(mne,NE,SMEI,SNA,SM21,SKE,WS)
      DO 220 K1=1,NE
        DO 230 K2=1,NE
          SM21(K1,K2)= SKE(K1,K2)
230    CONTINUE
220    CONTINUE
      CALL TCM(mne,NE,SMEI,SNA,SMIE,SKE,WS)
      DO 240 K1=1,NE
        DO 250 K2=1,NE
          SM22(K1,K2)=SMEE(K1,K2)-SKE(K1,K2)
250    CONTINUE
240    CONTINUE
      ENDIF
      IF(L.EQ.NC1) THEN
        CALL INVMAT(mne,NE,SM22)
        CALL TCM(mne,NE,SM12,SM22,SM21,SKE,WS)
        DO 260 K1=1,NE
          DO 270 K2=1,NE
            SM11(K1,K2)=SM11(K1,K2)-SKE(K1,K2)
270    CONTINUE
260    CONTINUE
      ENDIF
2000  CONTINUE
      OPEN(11,FILE=WWT,STATUS='NEW')
        WRITE(11,55)((SM11(K1,K2),K1=1,NE),K2=1,NE)
      CLOSE(11)
1000  CONTINUE
      WW(3)='P'
      OPEN(11,FILE=WWT,STATUS='NEW')
        WRITE(11,65)WW(2),NC,PC
        WRITE(11,* )' XD: '
        WRITE(11,75)(XD(K),K=1,NX)
        WRITE(11,* )' ZD: '
        WRITE(11,75)(ZD(K),K=1,NZ)
        WRITE(11,* )' REB: '

```

WRITE(11,75)(RES(K),K=1,NQ)

WRITE(11,*)'-----'
-----'

CLOSE(1)

35 FORMAT(2X,' nkk=',I4,' nc1=',I4,' nq=',I4)

45 FORMAT(2X,' K(',I3,')=' ,I4,' NC(',I3,')=' ,I4)

55 FORMAT(1X,E15.7)

65 FORMAT(1X,A1,I4,F6.1)

75 FORMAT(1X,10F6.2)

STOP

ENDP

C

SUBROUTINE QEC(K,I,J,NC1,NZ1,NX2,NKK,WN,PP,X,Z,UM)

REAL X(5),Z(5),UM(5,5),SQ(4),WN(NKK)

DO 20 K1=1,5

DO 20 K2=1,5

UM(K1,K2)=0.

20 CONTINUE

IF((X(1).NE.X(3)).AND.(X(2).NE.X(4)))THEN

A13=(Z(3)-Z(1))/(X(3)-X(1))

A24=(Z(4)-Z(2))/(X(4)-X(2))

B13=-A13*X(1)+Z(1)

B24=-A24*X(2)+Z(2)

X(5)=(B24-B13)/(A13-A24)

Z(5)=(B24*A13-B13*A24)/(A13-A24)

ELSEIF(X(1).EQ.X(3)) THEN

X(5)=X(1)

A24=(Z(4)-Z(2))/(X(4)-X(2))

B24=-A24*X(2)+Z(2)

Z(5)=A24*X(5)+B24

ELSEIF(X(2).EQ.X(4)) THEN

X(5)=X(2)

A13=(Z(3)-Z(1))/(X(3)-X(1))

B13=-A13*X(1)+Z(1)

Z(5)=A13*X(5)+B13

ENDIF

DO 30 I1=1,4

K1=I1

K2=I1+1+4*INT(I1/4)


```

S1=X(K2)*Z(5)-X(5)*Z(K2)
S2=X(K1)*Z(5)-X(5)*Z(K1)
S3=X(K1)*Z(K2)-X(K2)*Z(K1)
SQ(I1)=.5*(ABS(S1-S2+S3))
BJ=Z(K2)-Z(5)
BJ=Z(5)-Z(K1)
BK=Z(K1)-Z(K2)
CI=X(5)-X(K2)
CJ=X(K1)-X(5)
CK=X(K2)-X(K1)
S1=SQ(I1)*WN(K)*WN(K)/6.0
UM(K1,K1)=UM(K1,K1)+0.5*(BI*BI+CI*CI)/SQ(I1)+2.0*S1
UM(K2,K2)=UM(K2,K2)+0.5*(BJ*BJ+CJ*CJ)/SQ(I1)+2.0*S1
UM(5,5)=UM(5,5)+0.5*(BK*BK+CK*CK)/SQ(I1)+2.0*S1
SK1=0.5*(BI*BJ+CI*CJ)/SQ(I1)+S1
SK2=0.5*(BJ*BK+CJ*CK)/SQ(I1)+S1
SK3=0.5*(BK*BI+CK*CI)/SQ(I1)+S1
UM(K1,K2)=UM(K1,K2)+SK1
UM(K2,5)=UM(K2,5)+SK2
UM(5,K1)=UM(5,K1)+SK3
UM(K2,K1)=UM(K2,K1)+SK1
UM(5,K2)=UM(5,K2)+SK2
UM(K1,5)=UM(K1,5)+SK3

```

30

CONTINUE

```

IF(L.EQ.NC1) THEN
  K1=NZ1
  K2=(NZ1+NX2)/2
  K3=NX2+1
  DS=ABS(X(2)-X(1)+Z(2)-Z(1))
  IF(J.LE.K2) THEN
    R1=SQRT(X(1)*X(1)+Z(1)*Z(1))
    IF(J.LE.K1) R2=ABS(X(1))
    IF(J.GT.K1) R2=ABS(Z(1))
  ENDIF
  IF(J.GT.K2) THEN
    IF(J.GE.K3) R2=ABS(X(2))
    IF(J.LT.K3) R2=ABS(Z(2))
  ENDIF
  TR=WN(K)*R1

```

```

      IF (TR. GT. 65. 0) THEN
        ETA = DS * WN(K) * R2/R1
      ELSE
        XX = TR
        S1 = AK0(XX)
        S2 = AK1(XX)
        S1 = S2/S1
        ETA = DS * WN(K) * S1 * R2/R1
      ENDIF
      S2 = 2. 0 * ETA/3. 0
      S3 = S2/2. 0
      UM(1,1) = UM(1,1) + S2
      UM(2,2) = UM(2,2) + S2
      UM(1,2) = UM(1,2) + S3
      UM(2,1) = UM(2,1) + S3
    ENDIF
    DO 40 K1 = 1, 4
      DO 40 K2 = K1, 4
        UM(K1,K2) = UM(K1,K2) - UM(K1,5) * UM(5,K2)/UM(5,5)
        UM(K2,K1) = UM(K1,K2)
40    CONTINUE
      DO 50 K1 = 1, 4
        DO 50 K2 = K1, 4
          UM(K1,K2) = UM(K1,K2)/PP
          UM(K2,K1) = UM(K1,K2)
50    CONTINUE
    RETURN
  END

C
C  GAUSS-GORDAT INV - MAT METHOD
C  NOTE: A(N,N) -- - READ THE KNOWN MATRIX AT STARTING
C  &. OUTPUT INVMAT ON END
SUBROUTINE INVMAT(mne,N,A)
  DIMENSION A(mne,mne)
  KEY = 0
  ESP = .1E-15
  DO 60 K = 1, N
    IF (ABS(A(K,K)). LE. ESP) THEN
      WRITE(*,*) '!!!!!!'

```

```

        PAUSE
    ELSE
        DO 20 I=1,N
            IF (I-K.NE.0) THEN
                A(I,K)=-A(I,K)/A(K,K)
            ENDIF
20      CONTINUE
        A(K,K)=1./A(K,K)
        DO 40 I=1,N
            IF (I-K.NE.0) THEN
                DO 30 J=1,N
                    IF (J-K.NE.0) THEN
                        A(I,J)=A(I,J)+A(K,J)*A(I,K)
                    ENDIF
30          CONTINUE
            ENDIF
40      CONTINUE
        DO 50 J=1,N
            IF (J-K.NE.0) THEN
                A(K,J)=A(K,J)*A(K,K)
            ENDIF
50      CONTINUE
        ENDIF
60      CONTINUE
        KEY=1
        RETURN
    END

```

C

```

SUBROUTINE TCM(mne,N,A,B,C,D,E)
REAL A(mne,mne),B(mne,mne),C(mne,mne),D(mne,mne),E(mne)
DOUBLE PRECISION S1,SS
DO 20 I=1,N
    DO 30 J=1,N
        SS=0.
        DO 40 K=1,N
            S1=A(I,K)*B(K,J)
            SS=SS+S1
40        CONTINUE
        D(I,J)=SNGL(SS)

```

```

30      CONTINUE
20      CONTINUE
        DO 50 I=1,N
            DO 60 J=1,N
                SS=0.
                DO 70 K=1,N
                    S1=D(I,K)*C(K,J)
                    SS=SS+S1
70      CONTINUE
        E(J)=SNGL(SS)
60      CONTINUE
        DO 80 J=1,N
            D(I,J)=E(J)
80      CONTINUE
50      CONTINUE
        RETURN
        END

C
C      THIS FUNCTION SUBPROGRAM EVALUATES THE MODIFIED
C      BESSEL FUNCTION OF ZEROETH ORDER
C
        FUNCTION AK0(X1)
        DOUBLE PRECISION X,T,T1,T2,T3,TT
        X=DBLE(X1)
        IF(X.LE. 2.0) THEN
            T=X/3.75
            T=T*T
            T1=1.0+T*(3.5156229+T*(3.0899424+T*(1.2067492+T*(0.2659732
            *+T*(0.0360768+T*0.0045813))))))
            T=0.5*X
            T2=T*T
            T3=-DLOG(T)*T1-0.57721566+T2*(0.4227842+T2*(0.23069756-T2
            *
            *(0.0348859+T2*(0.00262698+T2*(0.0001075+T2*0.0000074))))))
        ELSE
            T=2.0/X
            TT=DEXP(-X)/DSQRT(X)
            T3=TT*(1.25331414+T*(-0.07832358+T*(0.02189568+T*(-0.
            01062446+T

```

```

      * * (0.00587872+T * (-0.0025154-T * 0.00053208))))))
ENDIF
      AK0=SNGL(T3)
      RETURN
      END

C
C      THIS FUNCTION SUBPROGRAM EVALUATES THE MODIFIED
C      BESSEL FUNCTION OF FIRST ORDER
      FUNCTION AK1(X1)
      DOUBLE PRECISION X,T,T2,T3,T4,T5,T6,T8,T10,T12,B,B1,B2,
      * B3,BB
      X=DBLE(X1)
      IF(X.LE.2.0) THEN
      T=X/3.75
      T2=T * T
      T4=T2 * T2
      T6=T4 * T2
      T8=T6 * T2
      T10=T8 * T2
      T12=T10 * T2
      B=0.5+0.87890594 * T2+0.51498869 * T4+0.15084934 * T6+0.02658733 *
      T8
      * +0.003015329 * T10+0.00032411 * T12
      B1=B * X
      T=0.5 * X
      T2=T * T
      T4=T2 * T2
      T6=T4 * T2
      T8=T6 * T2
      T10=T8 * T2
      T12=T10 * T2
      B2=X * DLOG(T) * B1+1.0+0.15443144 * T2-0.67278579 * T4-0.18156897
      * T6
      * -0.01919402 * T8 -0.00110404 * T10-0.00004686 * T12
      B3=B2/X
      ELSE
      T=2.0/X
      T2=T * T
      T3=T2 * T

```

```

T4=T3 * T
T5=T4 * T
T6=T5 * T
BB=1.25331414 + 0.23498619 * T - 0.0365562 * T2 + 0.01504268 * T3 - 0.0078
    * 0353 * T4 + 0.00325614 * T5 - 0.00068245 * T6
B3=BB * DEXP(-X)/DSQRT(X)
ENDIF
AK1=SNGL(B3)
RETURN
END

```

参 考 文 献

- 傅良魁主编, 电法勘探教程, 地质出版社, 1983。
- 傅良魁主编, 电法勘探文集, 地质出版社, 1986。
- 李金铭等, 地质研究: 激电找水专辑, 中国地质大学, No. 1, 1989。
- 陈乐寿等编著, 大地电磁测深资料处理与解释, 石油工业出版社, 1989。
- 杨文采编著, 地球物理反演和地震层析成像, 地质出版社, 1989。
- 艾伯特兰托拉著, 张先康等译, 反演理论: 数据拟合模型参数估计方法, 学术书刊出版社, 1989。
- 王明光等译, 地球物理数据分析——离散反演理论, 地质出版社, 1988。
- 周熙襄等编著, 电法勘探数值模拟技术, 四川科学技术出版社, 1986。
- 罗延钟、张桂青编著, 电子计算机在电法勘探中的应用, 武汉地质学院出版社, 1987。
- 朴化荣编著, 电磁测深原理, 地质出版社, 1990。
- 田宪淡等著, 电法勘探用边界单元法, 地质出版社, 1990。
- 姚文斌编著, 电测深数值计算和解释入门, 地质出版社, 1989。
- 曾华霖等编译, 重磁勘探反演问题, 石油工业出版社, 1991。
- 薛琴访编, 场论, 地质出版社, 1978。
- 关治、陈景良, 数值计算方法, 清华大学出版社, 1990。
- 王长庚编, 微分方程数值解, 中国地质大学, 1987。
- 麦中凡编, 程序设计技术, 高等学校出版社, 1990。
- 上海计算技术研究所编, 电子计算机算法手册, 上海教育出版社, 1982。
- 李金铭等, 点源二维电阻率测深边界单元法, 物探计算技术, No. 1, 1989。
- 罗延钟等, 关于用有限单元法对二维构造作电阻率法模拟的几个问题, 地球物理学报, Vol. 29, No. 6, 1986。
- 黄绪德, 勘探地球物理与计算技术, 物探化探计算技术, No. 1, 1989。
- 徐世海, 二维电场问题中傅氏反变换的波数 k 的选择, 物探化探计算技术, No. 3, 1988。
- 岛广正 栗山敏彦, 电阻率层析学——二维电阻率反问题的一项改进, 物探化探译丛, No. 2, 1989。
- 大久保·博, 地球物理反演的新方法, 石油物探译丛, No. 1, 1988。
- 李貅等, 复杂二维地电断面电测深法的反演研究, 西安地质学院学报, No. 2, 1991。
- 吴广耀、胡建德, 大地电磁资料的二维连续模型的自动反演, 地球科学, Vol. 15, 1990。
- 熊富林、管志宁, 降元迭代法, 地球物理学报, No. 2, 1992。
- 静恩杰、周洁, 二维电法有限元正演计算的几个问题, 物探化探计算技术, No. 2, 1990。
- 杨进等, 高密度电阻率法的原理与技术, 工程勘察, No. 2, 1989。
- Abramowitz, M. A., Stegun, I. A., Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.
- Beck & Arnold, 1977.
- Parameter Estimation in Engineering and Science, John Wiley and Sons.
- Charles, W. Steels, 1987.
- Numerical Computation of Electric and Magnetic Field, U. S. A.
- Brian R. Spies, 1989.
- Depth of investigation in electromagnetic sounding methods,
- Geophysics Vol. 54 No. 7
- A. A. R. Zohdy, 1989.
- A new method for the automatic interpretation of Schlumberger and Wenner sounding curves,
- Geophysics Vol. 54 No. 2

- L. C. Bartel and R. D. Jacobson, 1987
Results of a controlled-source audiofrequency magnetotelluric survey at the Pahimau thermal area, Kilauea Volcano, Hawaii.
Geophysics Vol. 52 No. 5
- Yutaka Sasaki, 1989
Two-dimensional joint inversion of magnetotelluric and depth dipole-dipole resistivity data.
Geophysics Vol. 54 No. 2
- Hiromasa Shima, 1990
Two-dimensional automatic resistivity inversion technique using alpha centers
Geophysics Vol. 55, No. 6
- R. D. Barker, 1989
Depth of investigation of collinear symmetrical four-electrode arrays
Geophysics Vol. 54 No. 8
- N. C. Smith and K. Vozoff, 1984
Two-dimensional DC resistivity inversion for D-D data
IEEE Trans. Geosci. & Rem. Sens. Vol. GE-22, No. 1
- Lun-Tao Tong and Chieh-Hou Yang, 1990
Incorporation of topography into two-dimensional resistivity inversion
Geophysics Vol. 55, No. 1
- Yutaka Sasaki, 1982
Automatic interpretation of induced polarization data over two-dimensional structures
Memoris of the Faculty of Engineering, Kyushu University Vol. 42, No. 1
- A. C. Tripp, G. W. Hohmann and C. M. Swift, 1984
Two-dimensional resistivity inversion
Geophysics Vol. 49, No. 10
- W. H. Peiton, L. Rijo etc., 1978
Inversion of two-dimensional resistivity and induced polarization data
Geophysics, Vol. 43, No. 4

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名=应用地球物理数值模拟的迭代有限元法

作者=杨进著

页数=107

SS号=12010459

出版日期=1996.3

前言
目录
绪论

- 一、数值模拟的发展现状
- 二、问题的提出及解决的途径
- 三、研究的意义、内容及特点

第一章 迭代有限元法的基本原理

- 一、外区网格剖分
- 二、外区递推公式的推导
- 三、计算量和计算精度的定性估计

第二章 二维地电构造中点源场的迭代有限元法

- 一、稳定电流场微分方程边值问题及其相应的变分问题
- 二、变分问题的离散化
- 三、线性方程组的解法
- 四、视电阻率及视极化率的计算
- 五、程序框图及算例

第三章 迭代有限元法数值模拟若干问题的讨论

- 一、关于边界条件的应用
- 二、网格剖分方法
- 三、傅氏逆变换波数 λ 的选取
- 四、迭代有限元法误差分析及精度检验
- 五、迭代有限元法程序的功能、效率及参数选取对模拟

精度的影响

- 六、迭代有限元法与有限单元法的比较
- 七、复杂模型的模拟结果与分析

第四章 点源二维地电模型的反演

- 一、正演问题及响应函数
- 二、广义线性反演方法
- 三、模型参数的评价
- 四、两种反演方法的计算实例

附录 二维地电构造中点源场迭代有限元法正演模拟

参考文献