

文章编号: 1003-711X (2002)01-0026-06

# 一种基于DEM的土方计算方法

徐敬海, 李明峰, 刘伟庆

(南京工业大学 土木学院, 江苏 南京 210009)

**摘要:** 对土木工程中常见的几种土方计算方法进行了详细的分析和比较, 提出了一种基于数字高程模型(DEM)的土方计算方法——不规则三角形法, 并对其精度和实用性作了详细的探讨。

**关键词:** 土方计算; 不规则三角形法; 数字高程模型

中图分类号: TB22 文献标识码: A

土方工程是土木工程施工的主要工种之一, 其主要目的是通过挖填土方使得建筑物的平面位置和高度满足设计要求。为了估计土方工程的工程量和费用, 通常须在地形图上根据设计标高和平面位置进行土方计算。现有的土方计算方法很多, 总体上可分为格网法和截面法两类。格网法模型简单, 易于实现, 比较适于手算。但计算过程繁琐, 计算量大, 且精度不高。截面法分为水平截面法和垂直截面法<sup>[1]</sup>。截面法计算精度优于格网法, 在计算机上易于实现, 但它依附于地面数字成图软件中, 受软件的多功能性的影响, 其成本较高, 因而其实用性往往会受到限制。

## 1 几种土方计算方法的比较

在土方计算过程中, 由于地形形状多变, 且随着地形图比例尺、工作条件、精度要求等情况的不同而有所变化, 所以必须视具体情况而采取不同的方法。

### 1.1 截面法

垂直截面法。设有一幅大比例尺地形图, 其 $D_0$ 区域为一矩形, 也就是自上而下均为直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所限制, 而左和右两边分别为 $y = c$ 和 $y = d$ (图1)。此时, 在整个区域内, 设连续函数为 $f(x, y)$ , 则体积可记为:

$$V = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dy dx \quad (1)$$

收稿日期: 2001-02-22

基金项目: 江苏省“333”人才工程基金资助

作者简介: 徐敬海(1977-), 男, 湖北人, 硕士生。

由此可见,基本的量算方法便是用  $x = e$  ( $e$  为一常数) 确定垂直截面的面积  $s(x)$  (图 2)。

$$s(x) = \int_c^d f(x, y) dy \tag{2}$$

可见垂直截面法主要是求解曲边梯形的问题。由于曲边梯形面积易于用计算机实现,因此该方法往往被数字化成图软件所采用,使土方计算成为该软件的一个功能模块,需要指出的是,工程计算中多用如下的实用公式<sup>[1]</sup>代替公式(1)进行土方计算:

$$V = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{s_i + s_{i+1}}{2} d \tag{3}$$

式中:  $s_i, s_{i+1}$  表示垂直截面面积;  $d$  表示相邻两截面间的距离。

水平截面法。在量算区内,设水平截面距  $\Delta z =$  常数(可看成地形图上等高距),而截面面积  $s(z_i)$  具有任意的形状,则体积近似值  $V$  可用下式表示:

$$V = \sum_{i=1}^n s(z_i) \Delta z_i \tag{4}$$

式中:  $z_i$  为截面之间的某一点,它们间的距离用  $\Delta z_i$  表示。

工程计算中多用如下的实用公式代替式(4):

$$V = \sum_{i=1}^n \frac{[s(z_{i-1}) + s(z_i)] \Delta z_i}{2} \tag{5}$$

式中:  $s(z_{i-1}), s(z_i)$  表示水平截面面积;  $\Delta z_i$  表示相邻两水平截面间的距离。

### 1.2 格网法量算土方

根据格网的形状不同,该方法又分为四棱柱体积法和三棱柱体积法。

四棱柱体积法(正方形格网法)<sup>[1]</sup>。首先在量算土方区域的地形图上划分出正方形格网并推算出各角点的标高,计算出格网的面积  $A$ ; 然后将正方形的四角点标高平均得到  $H_a$ ; 再利用公式:  $V = A H_a$ , 便得到了每个格网的体积; 最后将所有的格网的体积进行求和就计算出了给定区域的土方量。

正方形格网法有计算简便、易于手算等优点,具有很强的实用性,被测绘人员广泛采用。该方法在精度要求不是很高、不具有复杂运算条件下是一种好的计算方法。

三棱柱体积法(直角三角形法)<sup>[1]</sup>。从上面的正方形格网法计算过程可以看出,该法计算粗糙,计算精度一般,在不增加格网密度的条件下,不能很好地解决土方计算中遇到的“破格”问题,为此,提出了三棱柱体积法,该方法与正方形格网法类似,只是将正方形格网法中正方形的对角线连接起来形成直角三角形,计算过程与正方形格网法完全类似。

直角三角形法扩大了格网点的权,进一步细化了格网,并能初步地解决土方计算中的“破格”问题,使计算结果更加合理,较正方形格网法精度有所提高,但相应地增加了计算量。尽管如此,在不加密格网,且不大幅提高计算量的基础上,直角三角形法仍不失为一种好的实用方法,建议工程人员多加采用。

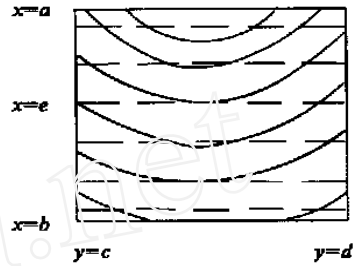


图 1 土方计算区图



图 2 垂直截面图

截面法和格网法存在以下两个不足之处: (1)这两类方法在地形起伏变化大时, 计算困难; (2)两类方法的计算模型都是近似的。

## 2 不规则三角形法方案设计

下面将要提出的基于不规则三角形网数字高程模型(DTM)的土方计算方法——不规则三角形法(Method of Irregular Triangular for Earth Calculate 简称MITEC)可以克服上面两个缺点, 较易计算地形起伏变化大时的土方, 同时有一个准确的数学模型提高计算精度。

### 2.1 不规则三角形网的基本概念

不规则三角形网是一种数字高程模型(DTM), 它是直接利用测区内野外实测的所有地形特征点(离散数据点), 构造出邻接三角形组成的网状结构。不规则三角形网的每个基本单元的核心是组成不规则三角形的三个顶点的三维坐标, 这些坐标数据完全来自原始测量成果。由于观测采样时选取观测点是由地形决定的, 一般是地形坡度的变换点或平面位置的转折点, 从而使得离散点在相关区域中形成非规则形状的三角形。

### 2.2 不规则三角形网的形成方法

建立不规则三角形网的基本过程是将最邻近的3个离散点连接成初始三角形, 然后以该三角形的每条边为基础向外连接邻近的离散点, 组成3个三角形, 接着以这3个三角形的每条边为基础连接邻近离散点, 组成新的三角形。如此继续下去, 直到所有离散点都被连接组成三角形。构造不规则三角形时, 根据取相邻离散点的准则不同, 构造方法有下列几种: 泰森多边形法<sup>[2]</sup>、最近距离法<sup>[2]</sup>、最小边长法<sup>[2]</sup>、边长最小二乘法<sup>[2]</sup>。

MITEC 选用边长最小二乘法形成三角形格网。该方法从离散点集中选择两个距离最近的A点和B点, 构成第一条边AB, 再在其余的离散点中选择三角形的另一顶点P, 使得 $AP^2 + BP^2$ 最小(如图3), 形成第一个三角形; 然后用同样的判断条件对第一个三角形ABP的各边进行扩展, 直到所有的离散点都包含在三角形格网中。

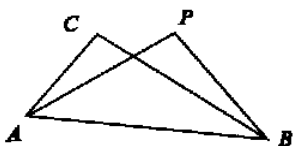


图3 边长最小二乘法图

### 2.3 MITEC 方案设计

首先, 将采集到的地貌点的三维坐标 $(X, Y, H)$ 输入计算机, 通过程序形成不规则三角形网, 这时整个计算土方的地形就形成了由三棱柱组成的集合, 如图4。

其次, 根据给定设计高程确定零平面(即给定设计高程所在的平面), 于是这些三角形被零平面分为两种情况: 一种是全挖方或全填方(图5); 另一种是既有挖方又有填方(图6)。

再次, 根据数学公式将每个不规则三角形的体积计算出来, 以“+”表示挖方, 以“-”表示填方。

最后, 分别统计体积为“+”和体积为“-”的形体的体积总和, 这样“-”的体积总和就是该地形内的填方数, “+”的体积总和就是该地形内的挖方数。

参阅参考文献[1]、[3], 根据几何关系可以推导出下列MITEC计算公式。

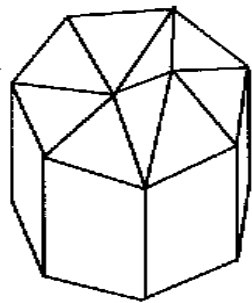


图4 三棱柱集合图

1) 对于全挖或全填的三棱柱形  $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$  (图 5), 可将三棱柱分为  $C_1A_1A_2B_2B_1$  与  $A_2B_2C_1-A_1B_1C_1$  两部分进行计算, 经计算得:

$$V_{A_1B_1C_1-A_2B_2C_2} = \frac{1}{3} s_1 (h_1 + h_2 + h_3) \quad (6)$$

式中,  $s_1$  为三角形  $A_1B_1C_1$  的面积;  $h_1, h_2, h_3$  都是已知地面高程与给定设计高程之间的高差。

2) 对于部分挖与部分填的三棱柱 (图 6), 可分解为楔体  $O_1O_2-B_1C_1CB$  和三棱锥  $A_1A_2O_1O_2$  两部分。则楔体体积  $V_2$  为:

$$V_2 = \frac{1}{3} s_2 h_2 + \frac{1}{3} s_3 (h_2 + h_3) \quad (7)$$

记三棱锥  $A_1A_2O_1O_2$  的体积  $V_1$  为:

$$V_1 = \frac{1}{3} s_4 h_1 \quad (8)$$

式(7)、式(8)中  $s_2, s_3, s_4$  分别为  $B_1O_1O_2, O_2B_1C_1, A_1O_1O_2$  的面积;  $h_1, h_2, h_3$  都是已知地面高程与给定设计高程之间的高差。

在此不必考虑公式中的符号, 因为以“+”表示挖方,“-”表示填方。其中三角形面积计算可采用如下公式:

$$S = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n x_k (y_{k+1} - y_{k-1}) \quad (9)$$

### 3 土方计算方法的精度分析

#### 3.1 正方形格网法的精度分析

正方形格网法的数学模型 (此处是指正方形格网法将野外地形抽象为一些正方体的集合), 其中正方体的高度为  $(H_A + H_B + H_C + H_D)/4$ ,  $H_A, H_B, H_C, H_D$  为  $A, B, C, D$  四点高程与设计高程的高差 (图 7)。这里用  $(H_A + H_B + H_C + H_D)/4$  代替了凹凸不平的地面, 这种代替将会带来较大的误差, 我们将这种误差称为正方形法的模型误差, 简记为  $m_m$ 。

再分析正方形法体积计算公式:

$$V_i = \frac{A}{4} (H_A + H_B + H_C + H_D) \quad (10)$$

式中:  $A$  为格网面积;  $H_A, H_B, H_C, H_D$  是由等高线插值而得, 显然插值是有误差的, 我们称该项误差为正方形法的计算模型误差, 简记为  $m_c$ 。由于正方形格网法多用于白纸测图中, 故该方法必定与等高线的绘制误差有很大的关系, 此外, 用插值法求取格网角点高程时人眼分辨率、地形图比例尺都会影响插值精度, 并将最终影响土方计算的精度。因此可认为:

$$m_c = \sqrt{m_d^2 + m_e^2 + m_r^2} \quad (11)$$

式中:  $m_d$  为绘制等高线的误差;  $m_e$  为人眼分辨率引起的误差;  $m_r$  为比例尺引起的误差。

值得注意的是, 正方形格网法不能解决土方计算中的“破格”问题。如前所述, 虽然加密格网可以从理论上解决该方法的这一缺陷, 但加密格网得到的精度与土方的计算工作量本身是相互矛盾的。考虑到其实用性, 格网不可能加得很密, 因此, “破格”问题是正方形法计算土方的

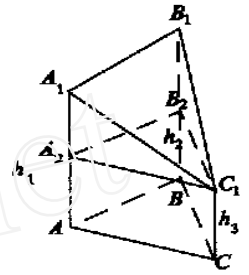


图 5 全挖或全填情况图

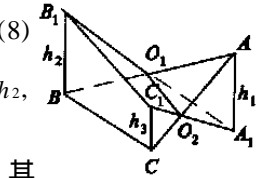


图 6 有挖有填情况图

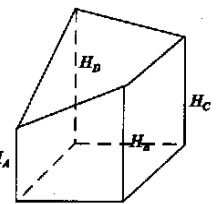


图 7 正方体图

最大挑战,也是其计算误差的一个重要来源,我们称该项误差为正方形格网法的破格误差,在这里记为 $m_{\infty}$ 。基于上述分析,可以近似地认为正方形格网法的误差 $m$ 为:

$$m = \sqrt{m_m^2 + m_c^2 + m_n^2} \quad (12)$$

### 3.2 截面法的精度分析

垂直截面法与水平截面法的精度分析类似,下面以垂直截面法为例分析截面法的精度。

垂直截面法亦称断面法<sup>[2]</sup>。类似地,先分析断面法的数学模型误差。断面法数学模型的精度主要取决于切口线的精度。切口线是指数字地面高程模型(DEM)与垂直截面的交线,由等高线插值而得。

该切口线的误差主要来自张力样条函数光滑曲线的误差,记为 $m_c$ ;同时等值线内插值采用的是线性内插,这与实际地形往往不符合。如图8所示,直线 $CD$ 上不规则三角形网的等值点 $E$ ,它与地面的实际等值点 $E'$ 之间的差距 $EE'$ 就是线性内插所带来的误差,这种误差是由于地面的不规则性带来的,大多数插值方法都无法避免这种误差,我们记该项误差为 $m_{\infty}$ 。于是断面法的数学模型误差 $m_m$ 为:

$$m_m = \sqrt{m_g^2 + m_f^2} \quad (13)$$

不难看出, $m_m$ 是用曲线代替实际起伏地面所带来的误差。事实上,即使不考虑数学模型误差,用断面法计算土方时其计算模型仍有不可忽视的误差。断面法的计算公式是:

$$V_i = \frac{s_i + s_{i+1}}{2} d \quad (14)$$

式中 $s_i$ 由辛普森法或梯形法近似计算而得,这样计算曲边梯形将会带来误差,记这项误差为 $m_c$ ;同时体积公式中以 $\frac{s_i + s_{i+1}}{2}$ 来代替间距为 $d$ 内任意截面 $s_i$ 的面积也是不精确的(见图9),同样会带来较大的误差,记为 $m_s$ 。所以断面法的计算模型误差为:

$$m_c = \sqrt{m_i^2 + m_s^2} \quad (15)$$

综上所述并参阅文献[4],可以近似认为断面法的误差为:

$$m = \sqrt{m_m^2 + m_c^2} \quad (16)$$

可以看到,断面法能有效地解决“破格”问题,这也正是断面法计算土方的一个优点。另外,由于地面数字测图都要用计算机程序生成等高线,在已生成数字等高线基础上用断面法编程计算土方具有易编程、易实现且精度较高的特点,因此,断面法是被计算机编程较多采用的一种实用方法。

### 3.3 MITEC的精度分析

MITEC的数学模型是将地面抽象成由三棱柱组成的集合,该方法用直线代替了呈现不规则曲面的地面。如图10所示,实际地面可能是曲线 $ALB$ ,但计算时却用 $AB$ 直线代替了该曲线,这样必然会导致误差,我们记该项误差为 $m_{\infty}$ 。MITEC数学模型中除了此项误差外,不存

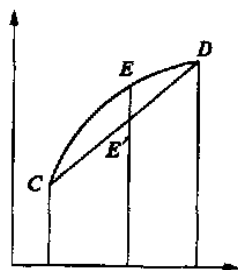


图8 拟合地面曲线图

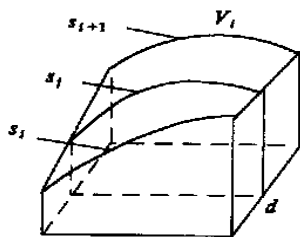


图9 数学模型图

在其它误差, 所以可得 M ITEC 的数学模型误差为:

$$m_m = m_g \quad (17)$$

对于不规则三角形法计算模型误差, 由前述推导可知 M ITEC 的计算模型中采用全解析法计算, 整个计算过程精度高, 误差小。因此, 由忽略不计原则可认为不规则三角形法的误差为:

$$m = m_m = m_g \quad (18)$$

从上述分析可知, 若在土方量算区域边界上取足够的点, 不规则三角形法也能较好地解决“破格”问题。

#### 4 结束语

M ITEC 优于正方形格网法和断面法, 具有容易编程、精度高、计算简便等特点, 是一种实用性较强的方法。利用 M ITEC 计算土方, 可以不绘出地形图, 由野外测得的离散点的三维坐标直接进行计算, 减少了工作量。当然, 也可以根据现有地形图, 经扫描矢量化得到地物点与地形点的离散坐标, 然后进行土方计算。

#### 参考文献:

- [1] 龚剑文. 地图量算[M]. 北京: 测绘出版社, 1991. 180-190, 300-307.
- [2] 刘友光, 黄桂兰, 黄全义, 等. 工程中数字地面模型的建立与应用及大比例尺数字测图[M]. 湖北: 武汉测绘科技大学出版社, 1987. 156-161.
- [3] 慕永峰, 朱昌永, 李建. 三角网结构 DTM 的土方计算及应用[J]. 测绘工程, 2000, 9(1): 52-56.
- [4] 王斌. DEM 土方计算的误差探讨[J]. 铁路航测, 1999, (3): 21-23.

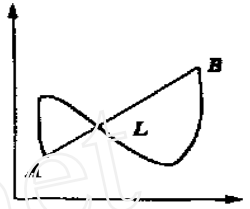


图 10 地面曲线图

## A Method for Calculating Cubic Meter of Earth Volume Based on DEM

XU Jing-hai, LI Ming-feng, LIU Wei-qing

(College of Civil Engineering, Nanjing University of Technology, Nanjing 210009, China)

Abstract: A method for calculating cubic meter of earth volume is proposed in detail in this paper, which is based on digital evaluate model (DEM). With analyses, the method is proved to be more practical and with higher precision.

Key words: cubic meter of earth calculating; method of irregular triangulate for earth calculation (M ITEC); digital evaluate model (DEM)