

重磁资料数据处理问题

《重磁资料数据处理问题》编写组

地质出版社

1072

重磁资料数据处理问题

《重磁资料数据处理问题》编写组



00282444



200313543



2069/09

地质出版社

重磁资料数据处理问题
《重磁资料数据处理问题》编写组

•

国家地质总局书刊编辑室编辑

地质出版社出版

地质印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 • 各地新华书店经售

•

1977年5月北京第一版 • 1978年8月北京第二次印刷

统一书号: 15038 • 新181 定价0.90元

前 言

在毛主席革命路线指引下,在无产阶级文化大革命的推动下,我国地质勘探工作正在出现一个新的跃进。近十年来,在地球物理探矿工作中,采用电子计算技术对资料和数据进行处理及解释是大家所关心的问题之一。为了促进这项工作的发展,一九七四年在国家地质总局一五〇工程组主持下举办了金属矿物探电算学习班。由北京大学和成都、长春、武汉地质学院,中国地质科学院等有关单位编写重磁资料数据处理讲义,并根据参加学习班同志们的意见、试算结果和经验,对原讲义作了补充修改,编成本书。限于时间,未能将后期的一些试算结果完全总结进去。

目前在金属矿物探中使用电子计算机进行数据资料处理的工作,重力和磁法勘探中用得较多,因此本书也就以重磁资料的数据处理为主题,扼要地介绍几种常用的数据处理方法,未作详细的数学演证,附了程序的框图及一些矿区试算实例。全书内容共分四章,主要介绍了重力地形改正值的计算,重磁实测资料的圆滑处理、解析延拓,任意形状三度体的正演问题以及应用最优化方法解反演问题等的算法。

本书第一章由王理、王贵董、王宝仁同志执笔;第二章由陈亚浙、郑志毅、穆石敏同志执笔;第三章由代庭范同志执笔;第四章由陈亚浙、周熙襄、顾学新同志执笔。全书由肖树铁、顾学新同志汇总、修改和定稿。马俊英同志清绘了全书图件,孙运生、张宝书、陈敬良同志参加了部分工作。一五〇工程组的同志们为上机等提供了方便条件。总之,本书是集体劳动的成果。

由于我们对马列的书和毛主席著作学习不够,政治思想水平不高,所述内容很不全面,工作又做得较粗糙,缺乏实践试验,书中一定存在不少错误和缺点,望同志们阅后提出批评和指正。

《重磁资料数据处理问题》编写组

目 录

第一章	计算重力地形改正值	1
§ 1	引言	1
§ 2	地形改正值计算方法介绍	2
§ 3	关于地改程序问题	30
第二章	数字滤波在重磁资料数据处理中的应用	34
§ 1	引言	34
§ 2	最小二乘圆滑方法	38
§ 3	将噪声压低到一定水平的最佳滤波	46
§ 4	积分插值法解析延拓	57
§ 5	级数正则化法解析延拓	83
§ 6	把起伏地形上的场值换算到同一平面及其延拓问题	104
§ 7	其他方法	121
第三章	重磁力异常的正演计算	133
§ 1	引言	133
§ 2	三度体正演问题的多边形截面法	138
§ 3	三度体正演问题的其他方法	156
第四章	应用最优化方法作重磁异常定量解释	165
§ 1	重磁异常定量解释中的选择法	166
§ 2	最优化选择法的几种算法	169
§ 3	最优化方法在重磁异常解释中的应用	192

第一章 计算重力地形改正值

§ 1 引言

计算重力地形改正值是基于简单的正演问题公式：

$$\Delta g_t = f \sigma \iiint_v \frac{z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.1)$$

式中 g_t —重力地形改正值； (x, y, z) —质量单元 dm ($dm = \sigma dx dy dz$) 的坐标； f —万有引力常数 ($f = 6.67 \times 10^{-8} \text{CGS}$)； v —包括在通过测点 $(0, 0, H_0)$ 的水平面 $z = H_0$ 和起伏地形表面之间的全部体积； σ —表层物质的密度。

但是要把这样一个三重积分算出来，事情还是很麻烦的。

首先是积分域 v ，它包括的是地面和过测点的水平面之间的整个物体；由于地形起伏千变万化，无法用一个空间坐标的函数把它的解析表达式给出来，所以我们只能从地形图上按一定的网格读取高程，采用数值积分方法计算。另外，理论上引力物质在 x, y 方向上伸展到无穷远，而实际上我们只能取相当大的有限距离。即使是这样，从地形图上读取高程的数据量仍然是相当大的。

其次，我们把需计算改正值的中心点（测点） C 取作坐标原点。怎样比较精确地算出 C 点周围一个小面积内的引力影响？我们不可能单从加密取高程来考虑，因为这样会使数据量增加，而且地形图的精度也有一定限制。

最后，地形改正是计算最表层的物质引力影响，这一层的密度分布有着相当大的不均匀性。选择一个合适的密度值同样是一个比较困难的问题。

电子计算机能够快速地完成复杂的计算，能够快速地处理大

量数据，这个特点正好适合于计算地形改正，用机器代替人们繁重计算的脑力劳动。然而，目前由于野外测地工作和重力测量工作都没有实现自动记录读数，因此计算前准备数据、准备打孔纸带的工作仍然相当繁重。关于中心点周围一个小面积内的引力影响的计算问题也没有得到很好的解决。作变密度地形改正的方案显然是最合理的方案，但实际测区往往难于取得那样详细的密度分布资料，目前应用电子计算机算重力地改值时仍然是取一个平均密度值。

我们相信，在毛主席革命路线的指引下，通过物探战线广大工人、干部和革命技术人员的共同努力，这些困难的问题一定能够尽快地得到解决。

下面就我们初步使用数字电子计算机计算（以下简称电算）重力地形改正值工作中所遇到的一些问题，提出来与大家共同讨论。

§2 地形改正值计算方法介绍

过去我们人工计算（以下简称手算）地改值是把公式(1.1)化为柱坐标形式：

$$\Delta g_i = f\sigma \int_0^h \int_{R_m}^{R_{m+1}} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} \frac{rzdzdrd\alpha}{(r^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.1)$$

式中 h 、 R_m 、 R_{m+1} 、 α_i 、 α_{i+1} 、 r 、 z 如图1—1、图1—2所示，

其中 $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{2\pi}{n}$ 。

这时积分 (2.1) 可化为 h 、 R 、 α 的显函数形式：

$$\Delta g_i = \frac{2\pi f\sigma}{n} \left(\sqrt{R_m^2 + h^2} - R_m - \sqrt{R_{m+1}^2 + h^2} + R_{m+1} \right).$$

根据上式，给出 R 和 h 的值，我们作出一套函数表。实际计算时，把如图1—1形式的分环透明量板中心对准测点，在地形图

上读出各个扇形的平均高程减去测点高程，在相应的函数表中可以查到地改值。这一套办法是大家所熟知的。

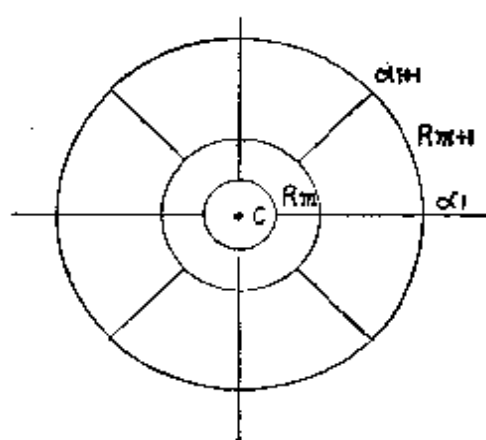


图 1—1 扇形柱体底面的积分域示意图

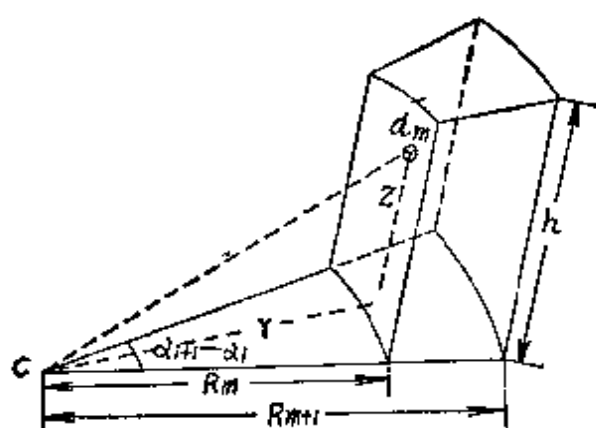


图 1—2 计算扇形柱体引力的坐标系示意图

这种算法无疑是比较简单、方便的。但是它有一个很大弱点，因为是在柱坐标的网格中取高程，而重力测点网是矩形的，当中心点转到另一个测点时，两次取高程所用的坐标完全不能重合。在手算读图中这一点并不感到有很大的不方便，但是电算地改需要把每个高程数据穿成数据纸带送到内存，每个测点都要有它相应的一批高程，整个测区便要准备大量的数据，这样，显然是不恰当的。

有人研究过把柱坐标中的小扇形化成直角坐标中的小方块，这种作法误差比较大，需要引入改正值（图1—3）。通常是把公式（1.1）写成在直角坐标系的方格网中取高程的形式：

$$\Delta g_i = f \sigma \int_0^h \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{z dz dy dx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.2)$$

式中 h 是结点与中心点的高程差。

图1—4表示积分域。该图所示的结点网是方形的（但也可以是矩形网格），这样就可以和重力测网吻合，两次计算能重复利用绝大部分点上的高程。可大量节省数据的准备工作。

实际用于计算的公式是首先对 z 积分，化成二重积分的形式：

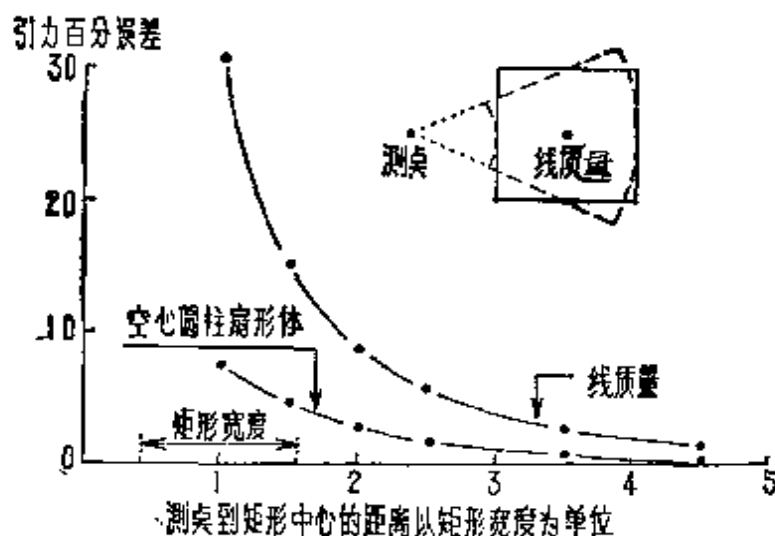


图 1—3 用方形域代替扇形域近似
计算引力值的误差示意图

$$\Delta g_i = f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{r} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx dy. \quad (2.3)$$

然后把 (2.3) 式写成离散求和的形式:

$$\Delta g_i \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{C_{ij}}{r_{ij}} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h_{ij}}{r_{ij}} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (2.4)$$

式中 $C_{ij} = f\sigma D^2 \cdot C'_{ij}$, C'_{ij} 一 所采用的数值积分公式在该结点

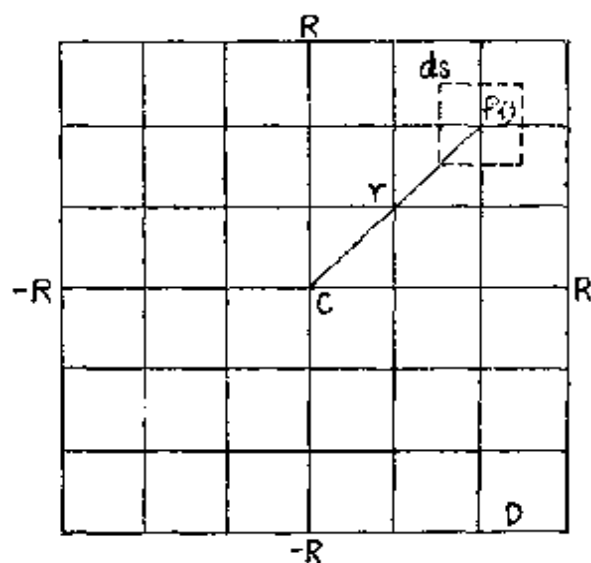


图 1—4 计算机处理时采用的结点网示意图

上的系数； h_{ij} —结点和中心点的高程差； r_{ij} —结点到中心点的距离； i, j —结点在 x 方向和 y 方向的序号。(2.4)式就是我们用于计算的基本公式。计算时一般用二重梯形公式或辛普森公式进行数值积分，就可以满足精度要求。

下面我们简单地介绍一下计算(2.4)式常用的一些方案和方法。

一、分环和结点网

电算地改和手算时一样，也是分环计算的。远离中心点的环区影响值小，我们采用较大的积分步长，在较稀的结点网上取平均高程进行计算；靠近中心点的环区影响值较大，我们采用较小的积分步长，在较密的结点网上取平均高程进行计算。一般来说，环区分得稀，计算的精度低；环区分得密，计算的精度高。但也并不是越密越好，分环过密只会使计算时间增加，工作量加大。根据一些试验和计算，在目前金属矿测量中，对于常用的 10×10 ， 20×20 或 10×20 的一些测网，采用以下分环方案还是比较适合的。

环 区	近 区	中 区	第一远区	第二远区	第三远区
计算半径(米)	0~20	20~80 80~400	400~600	600~1800	1800~4000
积分步长(米)	20	20 40	100	200	400

这种分环由于积分步长是固定的，所以有人称此为“固定网格”。如果测区不是上述测网，例如 10×40 等测网，此时程序必须作适当修改才能使用。这是不足之处。

为了使地改程序适用于不同的测网，同时考虑到一些金属矿区高精度测量的要求，也有采用下列分环办法的，见图1—5，图1—6，图中仅画出1~3环。

环 次	1 环	2 环	3 环	4 环
计算半径	0~10D	10D~20D	20D~40D	40D~80D
积分步长	D	2D	4D	8D

环 次	1	2	3	4	5	6	7	8
计算半径 (D)	0~10	10~20	20~40	40~80	80~160	160~320	320~640	640~1280
积分步长 (D)	1	2	4	8	16	32	64	128

环 次	1	2	3	4	5	6	7	8
计算半径 (D)	0~8	8~16	16~32	32~64	64~128	128~256	256~512	512~1024
积分步长 (D)	1	2	4	8	16	32	64	128

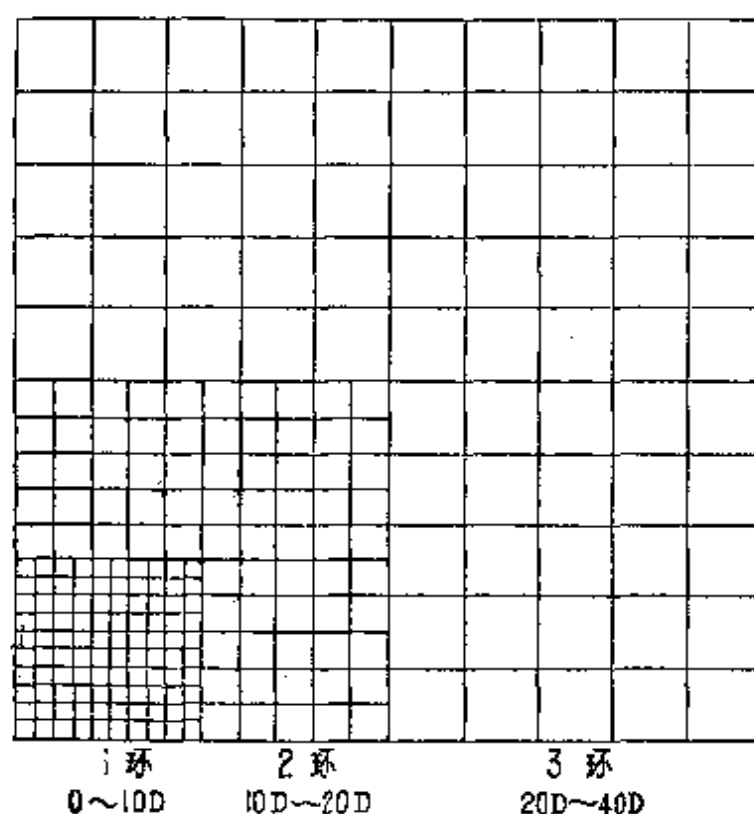


图 1—5 结点网及划分环区示意图

D 是第一环的基本积分步长,可以根据野外重力测量的点距和线距,以及对异常的精度要求进行调整。例如,重力测网为 10×10 或 10×20 时, D 可取作10米,而 20×20 或 20×40 的测网,则 D 可取为20米。在这个方案中,积分步长和计算半径都是以2的倍率增大的。与前种方案比较,环次多,结点密。从分环的角度看,计算时间可能长些,但是对于不同的测网如 10×40 ,即对于

一些线距不等于点距或为点距二倍的测网，毋需修改程序也可以适用。由于这种方案中基本积分步长 D 是可以改变的，所以有人称为“活动网格”。

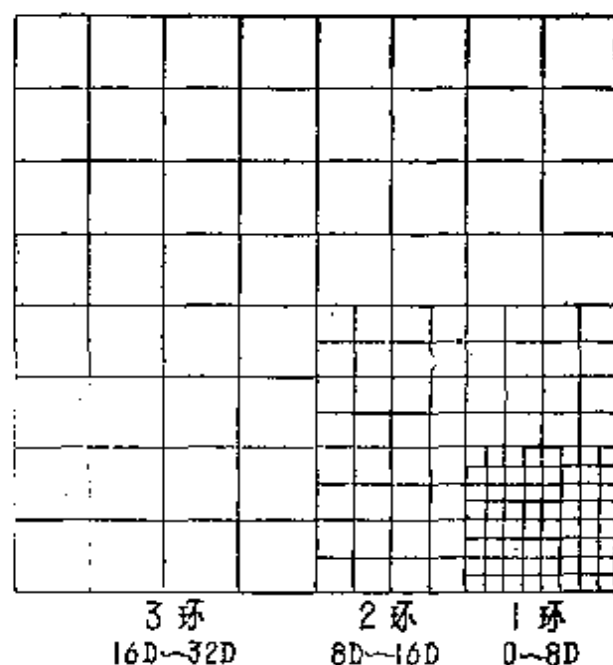


图 1—6 结点网及划分环区示意图

当测区的地形比较平坦时，也有人采用如下的分环方案：

环 域	近 区	中 区	远 区
计算半径	$0 \sim 10D$	$10D \sim 50D$	$50D \sim 250D$
积分步长	D	$5D$	$25D$

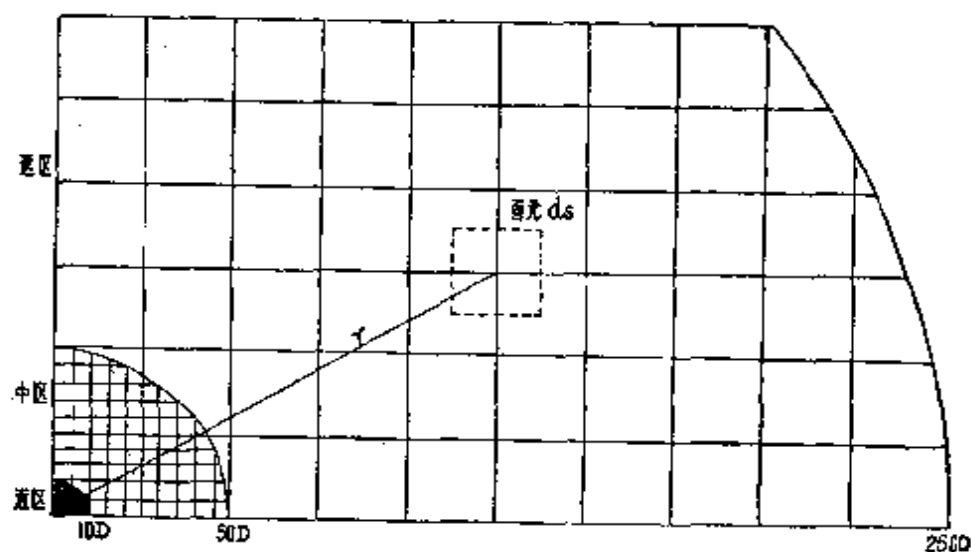


图 1—7 结点网及划分环区示意图

如图1—7所示，如果认为地改范围还不够，可以把计算半径和积分步长分别再扩大五倍，扩展到第二远区，以此类推，可扩到更远。如果我们希望计算中心点周围一个“圆域”的地改值，就可以把圆域外的结点系数给“0”。

这个方案的优点是：环次较少，积分步长和计算半径都以五倍扩展，因而各环可共用一套结点系数。实现这个方案的计算程序比较简单。缺点是分环较稀，在地形较坏的地区无法保证精度。

二、最大计算半径和大地水准面弯曲的影响

实践说明，当计算半径达到某个数值时，在各测点上计算出的地改值变化很小，通常我们就取之作为最大计算半径。由于测区的地形条件、密度分布和对地改精度的要求不尽相同，因而最大计算半径也有所变化。

目前随着重力测量进入高山区，地改的最大计算半径已从数公里增加到10公里、20公里，甚至提出增加到40~50公里。由于地形比高加大，适当增大计算半径是需要的，但是过分追求增大半径，实际上达不到预期的目的。关于选择合适的最大计算半径问题，需要考虑测区的地形、密度情况以及能够正确地分辨和解释异常所需要的异常精度两个方面，通过试验来确定。

地改程序中考虑到对最大计算半径的不同要求，一般都留有可供选择的余地。

下面我们讨论一下大地水准面弯曲对地形改正的影响。

在图1—8中，假定结点 P 到中心点 C 沿着过 C 的水准面 S 的距离为 ΔS ；相对高程为 h ；大地水准面的曲率半径 $OC = R$ 。由于大地水准面弯曲的影响，结点 P 到中心点 C 的实际水平距离为 PC' ，实际高差为 PP' 。由简单的几何关系可知：

$$\begin{aligned} PC' &= (R + h) \sin \phi, \\ PP' &= CC' = R - (R + h) \cos \phi, \\ \phi &= \frac{360 \times \Delta S}{2\pi R} \text{ (度)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

根据(2.5)式，取高差 $h = 1$ 公里，大地水准面的平均曲率

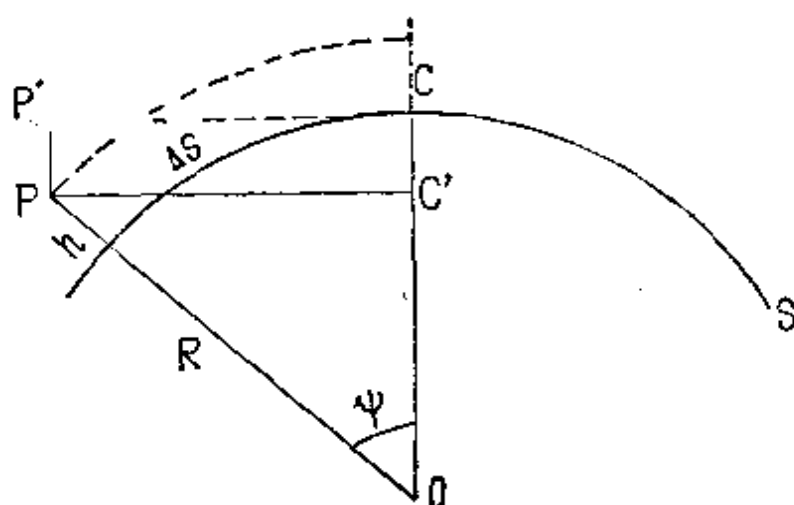


图 1—8 大地水准面弯曲对地形改正的影响

半径 $R = 6371.2$ 公里进行计算。当 $\Delta S < 25$ 公里时，高程相差 0.05 公里以内，水平距相差 0.15 公里以内。可见在 $\Delta S < 25$ 公里的情况下，大地水准面弯曲的影响均在测图误差范围以内，可以不进行校正。如果计算半径超过 25 公里，必须进行这种弯曲影响的校正。

三、被积函数的处理

一般地说，近似式 (2.4) 可以用于计算。为节省计算量，我们改成更简单的形式。在分环方案已确定的情况下，(2.3) 式中：

$$\Delta g_r = f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{r} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx dy,$$

R 及 $-R$ 已取定值。对于图 1—9 的情况，令：

$$K = f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{r} dx dy = 8 f\sigma R \ln (1 + \sqrt{2}). \quad (2.6)$$

对于图 1—10 的情况，令：

$$\begin{aligned} K &= f\sigma \int_{-R_2}^{R_2} \int_{-R_2}^{R_2} \frac{1}{r} dx dy - f\sigma \int_{-R_1}^{R_1} \int_{-R_1}^{R_1} \frac{1}{r} dx dy \\ &= 8 f\sigma (R_2 - R_1) \ln (1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

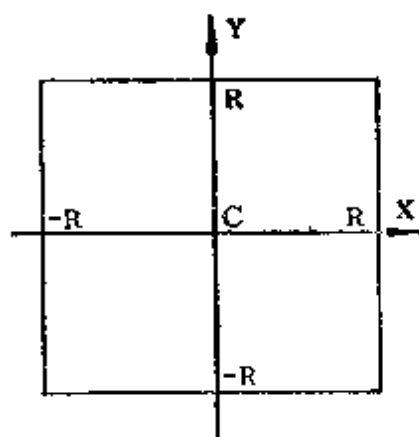


图 1—9 计算内环改正值的积分区域示意图

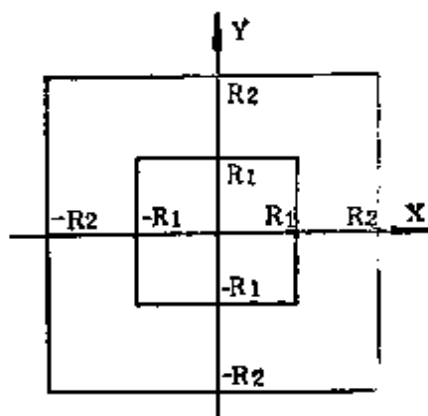


图 1—10 计算外环改正值的积分区域示意图

将 (2.6)、(2.7) 两式代入 (2.3)，并写成离散和形式，

$$\Delta g_i = K + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} [r_{ij}^2 + h_{ij}^2]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.8)$$

其中 $C_{ij} = C'_{ij} f \sigma D^2$ ， C'_{ij} 是数值积分公式在该结点上的系数。

计算式 (2.8) 就是实际应用的一种结点计算方案，计算公式也并不复杂。但是公式中包括着对 r_{ij}^2 与 h_{ij}^2 求和、开方并求倒数的运算。大家知道，机器作除法是最费时间的，而开方程序通常都采用牛顿叠代公式计算，它包含着一连串的除法，因此用 (2.8) 式进行结点计算机器运算时间很长。与其他一些不作开方计算的方案相比，运算时间要长3—5倍。于是我们自然希望找到一个能够节省计算时间的函数或多项式，并使得：

$$\max_{-1 < \frac{h}{r} < 1} \left| [1 - (1 + (h/r)^2)^{-\frac{1}{2}}] - f(h/r) \right| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

$f(h/r)$ 就是我们希望找到的不包括开方运算的函数或多项式， ε 是我们提出的精度要求。

处理这个问题的方法很多，下面我们择要介绍几种方法。

1. 台劳级数展开估计余项的方法

由 (2.3) 式

$$\Delta g_t = f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R -\frac{1}{r} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx dy.$$

令 $\left(\frac{h}{r} \right)^2 = x$, 则 $\left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ 可写成如下形式:

$$\begin{aligned} \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{x}{2} (1 + \theta x)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \theta x \right), \end{aligned} \quad 0 < \theta \leq 1 \quad (2.10)$$

(2.10) 式是对 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 展成台劳级数, 取第一项加上余项, 然后对余项 $-\frac{x}{2}(1+\theta x)^{-\frac{3}{2}}$ 再次作级数展开取至第二项而得到的。

由图1-11中 $(1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 函数曲线的特点, 在区间 $(0,1)$ 内, 按微分中值定理大致估计出 $\theta \approx \frac{1}{3}$ 。将 $\theta = \frac{1}{3}$ 代入 (2.10) 式得到:

$$[1+x]^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{x}{2} \left(1 - \frac{x}{2} \right),$$

故有:

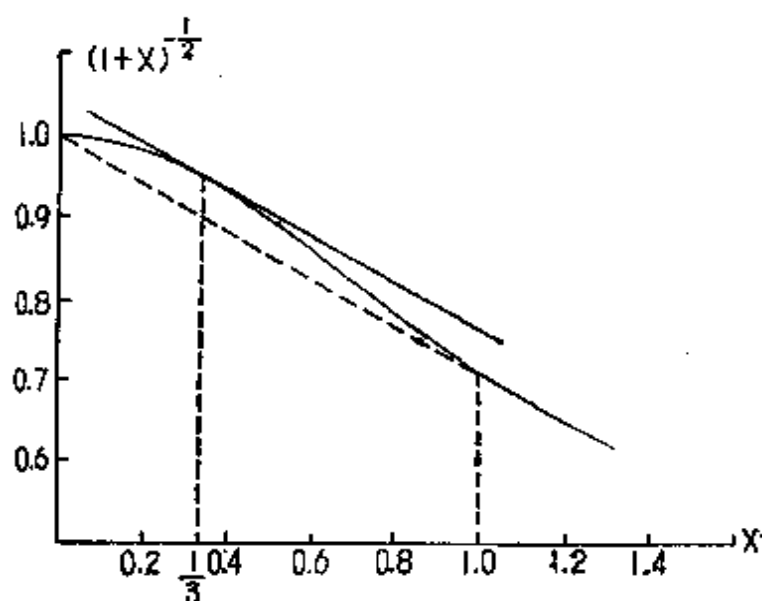


图 1-11 函数 $y = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$ 的曲线图

$$\Delta g_i \approx f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{h^2}{r^3} \cdot \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.11)$$

令 $C_{ij} = \frac{f\sigma}{r_{ij}^3} \cdot C'_{ij}$, C'_{ij} 为所采用的数值积分公式的结点系数,

$K = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]$, 代入(2.11)式,

$$\Delta g_i \approx K \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} h^2. \quad (2.12)$$

当

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) = 25^\circ \text{ 时, } K = 0.4456,$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) = 30^\circ \text{ 时, } K = 0.4167,$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) = 45^\circ \text{ 时, } K = 0.2500.$$

若测区地形起伏不超过 25° 时, 取 $K = 0.45$, 则:

$$\Delta g_i \approx 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} h^2. \quad (2.13)$$

利用(2.13)式计算地形改正, 在地形起伏不超过 25° 的条件下最大误差不超过10%, 可获得0.05毫伽的精度。

计算式(2.13)采用的计算方案是比较粗略的, 但是计算公式极为简单, 每个结点上只作两次乘法、一次加法, 是一种快速计算方法。由于它的算法本身并不很精确, 同时又要求地形比较平缓, 因此, 相应地采用如图1—5那种较稀的结点网是适宜的。

2. 解方程组确定多项式系数的方法

由(2.3)式

$$\Delta g_i = f\sigma \int_{-R}^R \int_{-R}^R \frac{1}{r} \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx dy,$$

令 $\phi\left(\frac{h}{r}\right) = \left[1 - \left(1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$, 将 $\phi\left(\frac{h}{r}\right)$ 展成多项式:

$$a\left(\frac{h}{r}\right)^2 + b\left(\frac{h}{r}\right)^4 + c\left(\frac{h}{r}\right)^6 = \phi\left(\frac{h}{r}\right). \quad (2.14)$$

在 $\frac{h}{r} = 0.3, 0.6$ 及 0.9 三点上令 $\phi\left(\frac{h}{r}\right) = \phi\left(\frac{h}{r}\right)$, 则得一
线性方程组

$$\begin{cases} (0.3)^2 a + (0.3)^4 b + (0.3)^6 c = 0.041175, \\ (0.6)^2 a + (0.6)^4 b + (0.6)^6 c = 0.14251, \\ (0.9)^2 a + (0.9)^4 b + (0.9)^6 c = 0.25671. \end{cases} \quad (2.15)$$

解线性方程组 (2.15) 得到:

$$\begin{aligned} a &= 0.49079, \\ b &= -0.32821, \\ c &= 0.13060. \end{aligned} \quad (2.16)$$

因而地改计算公式可写成:

$$\Delta g_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \left[a \left(\frac{h_{ij}}{r_{ij}} \right)^2 + b \left(\frac{h_{ij}}{r_{ij}} \right)^4 + c \left(\frac{h_{ij}}{r_{ij}} \right)^6 \right], \quad (2.17)$$

其中系数 a 、 b 、 c 分别取 (2.16) 式中相应的值。

曾经用上式与开方求倒数的办法对同一测区分别计算地改值, 对比计算结果, 在大多数情况下两者是一致的。经过展开处理的近似计算公式 (2.17) 能够得到满意的精度。但是当测区地形起伏很大时, 对于坡角 $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{h}{r}\right)$ 超过 45° 的结点 $\frac{h}{r} \geq 1$, 展开式 (2.14) 是发散的, 这时利用计算式 (2.17) 将得出错误的计算结果。

3. 分段展开的方法

根据台劳级数展开的特点, 远离展开点处精度低, 展开点附

近函数拟合的精度高，因此我们建议采用分段展开的办法，以提高对(2.3)式中被积函数逼近的精度，同时也可使在 $-\frac{h}{r} \geq 1$ 的一定范围内，所展成的函数仍适用于地形较坏的情形。具体处理方法如下，

$$(1) \text{ 对于 } 0 \leq \left| \frac{h}{r} \right| \leq 0.3, \text{ 把 } \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

在 $\frac{h}{r} = 0$ 处展开，得：

$$\begin{aligned} 1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &\approx \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right] \\ &= a + b \left(\frac{h}{r} \right)^2 + c \left(\frac{h}{r} \right)^4, \end{aligned} \quad (2.18)$$

其中 $a=0$ ， $b=0.5$ ， $c=-0.375$ 。

$$(2) \text{ 对于 } 0.3 < \left| \frac{h}{r} \right| < 0.7, \text{ 把 } \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

在 $\left(\frac{h}{r} \right)^2 = \frac{1}{3}$ 处展开，得：

$$\begin{aligned} 1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &\approx a' + b' \left(\frac{h}{r} \right)^2 \\ &+ c' \left(\frac{h}{r} \right)^4 + d' \left(\frac{h}{r} \right)^6, \end{aligned} \quad (2.19)$$

其中 $a'=0.00118$ ， $b'=0.48461$ ， $c'=-0.29686$ ， $d'=0.11418$ 。

用切比雪夫多项降阶，去掉 $d' \left(\frac{h}{r} \right)^6$ 一项，得：

$$1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx a + b \left(\frac{h}{r} \right)^2 + c \left(\frac{h}{r} \right)^4. \quad (2.20)$$

其中 $a=0.00474$ ， $b=0.42041$ ， $c=-0.12556$ 。

(3) 对于 $0.7 \leq \left| \frac{h}{r} \right| < 1.5$, 把 $\left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ 在 $\frac{h}{r} = 1$

处展开,

$$\begin{aligned} 1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} &= 1 - \left[2 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 - 1 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \frac{\left(\frac{h}{r} \right)^2 - 1}{2} \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\left(\frac{h}{r} \right)^2 - 1}{2} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{\left(\frac{h}{r} \right)^2 - 1}{2} \right)^2 \right], \end{aligned}$$

经整理后得到:

$$1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \approx a + b \left(\frac{h}{r} \right)^2 + c \left(\frac{h}{r} \right)^4, \quad (2.21)$$

其中 $a = 0.0499$; $b = 0.3093$; $c = -0.0663$ 。

最后 (2.18)、(2.20)、(2.21) 综合成为一个统一的计算公式:

$$\Delta g_i = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{c_{ijk}}{r_{ijk}} \left[a + b \left(\frac{h_{ijk}}{r_{ijk}} \right)^2 + c \left(\frac{h_{ijk}}{r_{ijk}} \right)^4 \right]. \quad (2.22)$$

表1—1列出精确式 $1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$ 和近似公式 $a + b \left(\frac{h}{r} \right)^2 + c \left(\frac{h}{r} \right)^4$ 在 $\frac{h}{r} = 0.1 \sim 1.2$ 时的计算结果。最大的误差为3.3%。

程序中自动判断 $\frac{h_{ijk}}{r_{ijk}}$ 处于哪一段, 选用相应的系数。对于坡角大于 45° 的地形, 同样可以算出比较准确的结果。

关于被积函数的处理方法还有很多, 这里不再一一介绍了。凡是能够简化计算, 而且能够保证一定计算精度的处理方法都可

表 1—1

$\frac{h}{r}$	$1 - \left[1 + \left(\frac{h}{r} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$	$a + b \left(\frac{h}{r} \right)^2 + c \left(\frac{h}{r} \right)^4$	百 分 误 差
0.1	0.004964	0.004975	+ 0.2%
0.2	0.019610	0.019800	+ 0.9%
0.3	0.042175	0.042975	+ 1.2%
0.4	0.07152	0.06998	- 2.0%
0.5	0.10577	0.105864	+ 0.3%
0.6	0.14251	0.14726	+ 3.3%
0.7	0.18077	0.18550	+ 2.6%
0.8	0.21913	0.22069	+ 0.7%
0.9	0.25671	0.25093	+ 0.1%
1.0	0.29289	0.29290	0
1.1	0.32733	0.32708	- 0.1%
1.2	0.35982	0.35780	- 0.6%

以采用，以上所述的方案都不能说是最好的。我们相信，通过大家的实践，一定能够创造出更多更好的新方案来。

四、中心点附近地形影响的计算

这里是指如图 1—12 所表示的中心点 C 周围一个基本积分步长范围内地形改正的计算。它的特殊性在于：第一、距离中心点

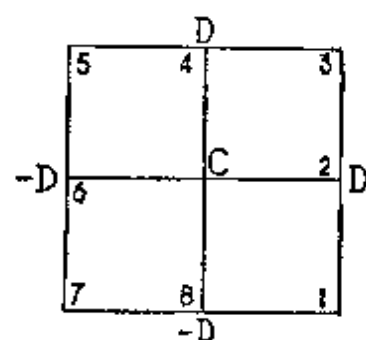


图 1—12 中心点附近的结点分布

最近，影响值很大；第二、在这个小面积内只有 8 个结点，采用数值积分根本不可能算准确；第三、如果设想用加密结点的办法解决算不准确的问题，势必造成数据量呈几何级数增长，实践中行不通。另一方面，中心点 C 是被积函数的奇点，随着结点的加密， r_{ij} 越来越小，

势必造成机器运算中溢出，所以这也是不行的。需要设法提出一个数学模型来模拟这一小块面积上的地形，然后导出积分的解析公式，按解析公式计算地形改正。因此如何提出一个合适的数学模型，使得模型与实际地形有较好的近似，同时还要求计算不能过于复杂，这个问题就显得很重要了。

下面我们分别介绍几种常用的模型。

1. 平均圆锥体模型

将积分限 $[-D, D][-D, D]$ 代入公式 (2.2), 则得到“近区”地改公式为,

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= f\sigma \int_{-D}^D \int_{-D}^D \int_0^h \frac{z dx dy dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = f\sigma \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{1}{r} dx dy \\ &\quad - f\sigma \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{dx dy}{(r^2 + h^2)^{1/2}} \\ &= K_D - f\sigma \int_{-D}^D \int_{-D}^D \frac{1}{r} \frac{dx dy}{\left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^{1/2}}, \quad (2.23)\end{aligned}$$

式中 $K_D = 8 f\sigma D \ln(1 + \sqrt{2})$; 而 r 和 h 是随座标 (x, y) 而变化的。如果将“近区”地形看作是坡度角不变的以中心点 C 为顶点的圆锥曲面的一部分 (图1—13), 则有:

$$\frac{h}{r} = \tan \alpha = \text{const},$$

$$\left[1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2\right]^{-1/2}$$

$$= (1 + \tan^2 \alpha)^{-1/2} = \cos \alpha = \text{const}.$$

代入公式 (2.23) 得到:

$$\Delta g_i = K_e - K_e \cos \alpha \quad (2.24)$$

而实际上在 8 个结点上是不同的比高 h , 我们取 Δg_i 的平均值,

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 (\Delta g_i)_i = K_e - \frac{K_e}{8} \sum_{i=1}^8 \cos \alpha \\ &= K_e - \sum_{i=1}^8 C_i [r_i^2 + h_i^2]^{-1/2} \quad (2.25)\end{aligned}$$

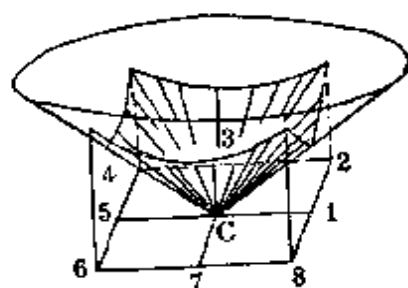


图 1—13 近区地形模型—圆锥

其中 $C_i = \frac{K_{\sigma} r_i}{8}$ 。(2.25) 式和结点计算公式 (2.8) 形式上完全是一样的。

2. 圆锥台阶模型

公式 (2.1) 对 z 积分后得到柱坐标中的二重积分

$$\Delta g_i = f_{\sigma} \iint \left[1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{h^2}{r^2} \right)^{\frac{1}{2}}} \right] r dr d\theta. \quad (2.26)$$

我们讨论 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ 区间, 如图 1—14, 其余部分的计算与此完全相同。将区间分成 $\Delta\theta_1 = \Delta\theta_2$ 两部分, 每一部分的地形视为圆锥曲面的一部分, 圆锥顶点为 C , 斜率为结点的坡度, 则:

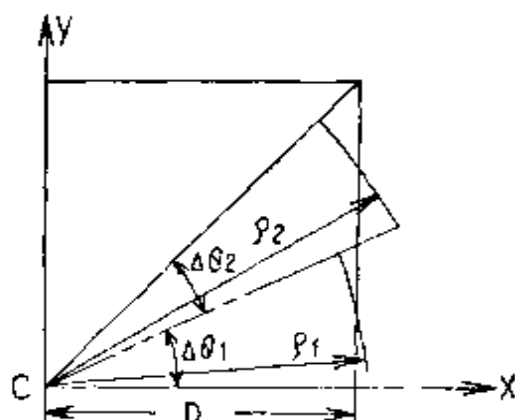


图 1—14 a 近区地形模型—圆锥台阶平面投影

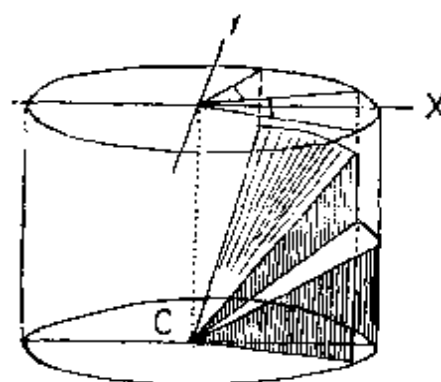


图 1—14 b 近区地形模型—圆锥台阶立体图

$$\frac{h}{r} = \tan \alpha = \text{const},$$

先将 (2.26) 对 r 积分:

$$\Delta g_i = f_{\sigma} \int \left[1 - \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}} \right] r d\theta. \quad (2.27)$$

按照上述的模型, (2.27) 式可写成:

$$\Delta g_i \approx f_{\sigma} \Delta\theta \sum_{i=1}^2 \rho_i \left[1 - \frac{1}{(1 + \tan^2 \alpha_i)^{\frac{1}{2}}} \right], \quad (2.28)$$

其中的 ρ_i 是使扇形与原来的三角形面积相等的等效半径。根据等式

$$\frac{\pi \rho_1^2}{8} = \frac{1}{2} D^2 \tan \frac{\pi}{8},$$

$$\frac{\pi \rho_2^2}{8} = \frac{1}{2} D^2 \left(1 - \tan \frac{\pi}{8} \right),$$

解得 $\rho_1 = 1.028D$; $\rho_2 = 1.222D$ 。

将 $\frac{h_i}{r_i} = \tan \alpha_i$ 代入 (2.28) 式, 并展成多项式形式, 则得

到“近区”八分之一部分的圆锥台阶模型的地改公式为:

$$\Delta g_i = \frac{f \sigma \pi}{8} \sum_{i=1}^2 \rho_i \left[a \left(\frac{h_i}{r_i} \right)^2 + b \left(\frac{h_i}{r_i} \right)^4 + c \left(\frac{h_i}{r_i} \right)^6 \right]. \quad (2.29)$$

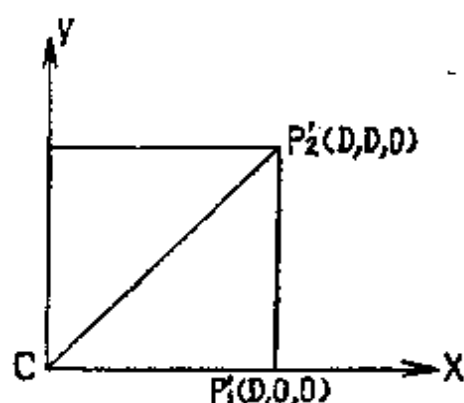


图 1—15 a 近区地形模型—
斜顶面三角棱柱的平面投影

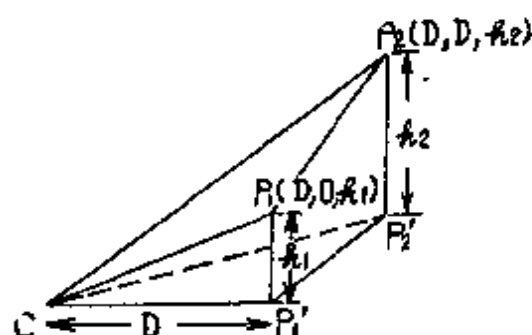


图 1—15 b 近区地形模型—
斜顶面三角棱柱立体图

我们看到,“近区”地改公式 (2.29) 与 (2.17) 在形式上是完全相同的。

3. 斜顶面三角棱柱模型

我们依然讨论“近区”的八分之一部分, 其余部分情况完全相同。如图1—15 a, 1—15 b 所示, 我们把这部分地形看成是由结点 P_1 、 P_2 和中心点 C 三点构成的一个斜平面。这个平面可写

成如下方程式,

$$z = -\frac{h_1}{D}x + \frac{h_2 - h_1}{D}y. \quad (2.30)$$

令 $a = \frac{h_1}{D}$, $b = \frac{h_2 - h_1}{D}$, 代入式 (2.30) 式

$$z = ax + by. \quad (2.31)$$

(2.30) 式中的符号如图1—15 a, 1—15 b 所示。

我们来计算这样一个以 $z = ax + by$ 斜平面为顶面的直三角棱柱的引力垂直分量。

把 (2.31) 式引入基本公式 (1.1),

$$\begin{aligned} \Delta g_z &= f\sigma \iiint_v \frac{z dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= f\sigma \int_0^D dx \int_0^x dy \int_0^{ax+by} \frac{z dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= f\sigma \int_0^D dx \int_0^x \left[\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(a^2 + 1)x^2 + 2abxy + (b^2 + 1)y^2}} \right] dy \\ &= f\sigma \int_0^D \ln(1 + \sqrt{2}) dx - \frac{f\sigma}{\sqrt{b^2 + 1}} \\ &\quad \times \int_0^D \ln \frac{2(b^2 + 1) + 2ab + 2\sqrt{b^2 + 1}\sqrt{(a^2 + 1) + 2ab + (b^2 + 1)}}{ab + 2\sqrt{(b^2 + 1)(a^2 + 1)}} dx \\ &= f\sigma D \ln(1 + \sqrt{2}) + \frac{f\sigma D}{\sqrt{b^2 + 1}} \\ &\quad \times \ln \frac{ab + \sqrt{a^2 + 1}\sqrt{b^2 + 1}}{(b^2 + 1) + ab + \sqrt{b^2 + 1}\sqrt{(a + b)^2 + 2}} \end{aligned} \quad (2.32)$$

(2·32) 式就是计算斜顶面三角棱柱模型地形改正值的最终公式。

以上我们介绍了三种“近区”地改模型。实际上还有许多，但是公式都很繁杂或者是计算有困难，应用得不多，这里不予介绍了。

实质上模型 1 和模型 2 是一样的，但是处理方法略有不同。它们模拟实际地形的近似程度是比较差的，随着地形起伏的增大，计算结果的误差可达 10% 以上。由于它们的计算公式都能写成与结点计算公式相同的形式，因此两套结点系数可以加在一起，简化了计算程序，节省了计算时间。正因为有这样的突出优点，故通常都采用这两种模型。

斜顶面三角棱柱模型模拟实际地形有较大的改善。首先，“近区”分割成八部分之间是“线”接触的，不像前两种模型那样是“台阶”接触的。其次，用平面来模拟一小块地形表面总要比“上凸”的圆锥面（结点高程小于中心点时）和“下凹”的圆锥面（结点高程大于中心点时）这样的模拟合理一些，而且模拟产生的误差随高差的增大而增大的速度是缓慢的。然而这种模型的地改计算公式步骤较多，需要独立地分程序，在八个结点上重复计算一次，这是它的不足之处。

最后必须指出，野外经常遇到的一些台阶、沟谷等特殊地形和山地工程、堤坝等建筑物，用这些模型是模拟不出来的，必须依靠野外实际调查，并且设法用不同的计算方式进行修正。

五、插值问题

在分环和结点网一节中已经谈到，对于远离中心点的环域（中区和远区），我们是在较稀的结点网上进行结点计算的，主要目的是为了减少结点高程的数据量和节省机器内存。这时我们只能算出与较稀的结点网相重合的测点上的地改值，而不是全部测点。解决这一问题的方法，即所谓地形改正的插值问题。插值就是根据已经计算得到的较稀网度上的地改值，内插出较密网度的全部测点上的地改值。我们看到，当结点网的积分距 D_i 大于线

距 Δy 时需要插线, 当 $D_i > \Delta x$ (点距) 时需要插点。

比较麻烦的是, 测点相对于结点不仅有水平位置上的变化, 而且高程也是不同的。下面我们介绍一下在手算地改实践中已经得到证实的地改值的两个变化规律。但需要注意, 它们都是有条件限制的, 并且是在一定的精度范围内近似成立的。

1. 抛物线特征

由 (2.12) 式

$$\Delta g_i \approx K \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ij} h^2.$$

当 $\frac{h}{r} \leq 0.46$, 即 $\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{h}{r} \right) \leq 25^\circ$ 时, 取 $K = 0.45$, 则

$$\Delta g_i \approx 0.45 \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n C_{ij} h^2.$$

很明显这是一个抛物线, 它与精确值之间最大误差可达 0.05 毫伽。式中 $h = H_{ij} - H_0$, H_{ij} 是各结点的实际高程, H_0 是测点的高程。如果以 H_0 为自变量, 它同样是一个抛物线。抛物线的极小点是:

$$H_{min} = \frac{\sum \sum C_{ij} H_{ij}}{\sum \sum C_{ij}}$$

H_{min} 即是某一环的加权平均高程。

这就是所谓的“抛物线特征”, 它是我们在插值中对高程作抛物线内插的基本依据。

2. 线性特征

当测点的高程 H_0 取定值, 而某环的结点高程在一个小范围内呈线性变化时, 则地形改正值也是呈线性变化的, 这就是所谓的“线性特征”, 大量的手算实践已经肯定了这一点。

假定在 x 方向上结点 x_i 到 x_{i+1} 的步长为 D_k , 中间 Δx 处需要内插一点 C , 测点的高程为 H_0 (图1—16 a, 图1—16 b)。

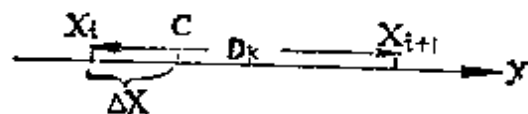


图 1—16 a 插值点与结点的坐标关系

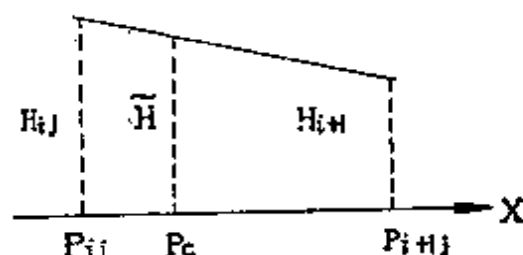


图 1—16 b 高程的线性内插

又假定结点高程在 x 方向上步长 D_k 范围内呈线性变化，相当于插值部位上的高程为 $\tilde{H}$ ，则：

$$\tilde{H} = H_{ij} + \frac{\Delta x}{D_k} (H_{i+1j} - H_{ij}), \quad (2.33)$$

将 (2.33) 式代入 (2.13) 式：

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta g}_i &\approx 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} (\tilde{H} - H_0)^2 \\ &\approx 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \left[H_{ij} + \frac{\Delta x}{D_k} (H_{i+1j} - H_{ij}) - H_0 \right]^2 \\ &\approx 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} (H_{ij} - H_0)^2 \left(1 + 2 \frac{\Delta x}{D_k} \frac{H_{i+1j} - H_{ij}}{H_{ij} - H_0} \right) \\ &\approx (\Delta g_i)_{ij} + 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \left[2 \frac{\Delta x}{D_k} (H_{i+1j} - H_{ij}) (H_{ij} - H_0) \right]. \end{aligned} \quad (2.34)$$

令

$$H_{ij} - H_0 \approx \frac{1}{2} [(H_{i+1j} - H_0) + (H_{ij} - H_0)], \quad (2.35)$$

代入 (2.34) 式

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta g}_i &\approx (\Delta g_i)_{ij} + 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \frac{\Delta x}{D_k} [(H_{i+1j} - H_0) \\ &\quad - (H_{ij} - H_0)] [(H_{i+1j} - H_0) + (H_{ij} - H_0)] \end{aligned}$$

$$\approx (\Delta g_i)_{ij} + \frac{\Delta x}{D_k} 0.45 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} [(H_{i+1,j} - H_0)^2 - (H_{i,j} - H_0)^2]$$

$$\approx (\Delta g_i)_{ij} + \frac{\Delta x}{D_k} [(\Delta g_i)_{i+1,j} - (\Delta g_i)_{ij}]. \quad (2.36)$$

(2.36) 式就是我们在水平位置上进行线性插值的公式。由推导过程可知, 它是在插值范围内结点高程呈线性变化且有 $\frac{H_{i+1,j} - H_{i,j}}{H_{i,j} - H_0} \ll 1$ 时的近似公式。

3. 插值方法介绍

(1) 双重抛物线及双重线性内插法

当插值范围内具备抛物线特征和线性特征时, 地改插值按下列步骤进行。

首先进行高度内插,

设结点 A 上高程为 H_0 , 某环的地改值为 $\Delta g_i(H_0)$, 一阶导数为 g'_i , 二阶导数为 g''_i 。插值点的高程为 H_p , 当 A 点的高程换为 H_p 时, 相应的地改值为,

$$\Delta g_i(H_p) = \Delta g_i(H_0) + \Delta H g'_i + \frac{1}{2} \Delta H^2 g''_i, \quad (2.37)$$

其中 $\Delta H = H_p - H_0$;

(2.37) 式中的一阶导数 g'_i 和二阶导数 g''_i 可以用一阶差商和二阶差商代替, 采用中心差商公式:

$$g'_i = \frac{[\Delta g_i(H_0 + \delta) - \Delta g_i(H_0 - \delta)]}{2\delta}, \quad (2.38)$$

$$g''_i = \frac{[\Delta g_i(H_0 + \delta) + \Delta g_i(H_0 - \delta) - 2\Delta g_i(H_0)]}{\delta^2},$$

式中 δ 为求取差商的步长, 一般选为该环积分步长 D_k 的 $0.1 \sim 0.2$ 倍。

第二步进行水平位置的线性内插:

将 A 、 B 两点换算成插值点 P 的高程的地改值 $\Delta g_i(H_p)_A$,

$\Delta g_i(H_p)_B$ 代入 (2.36) 式作线性内插:

$$\Delta g_i = \Delta g_i(H_p)_A + K_p[\Delta g_i(H_p)_B - \Delta g_i(H_p)_A],$$

其中 K_p 称为插值系数, $K_p = \frac{\Delta x}{D_A}$ 或 $K_p = \frac{\Delta y}{D_A}$ 。

(2) 多分量插值法

对于远区, 地改计算公式 (2.17) 可略去 $\left(\frac{h}{r}\right)^6$ 项, 改写成如下形式:

$$\begin{aligned}\Delta g_i &= f\sigma \sum_i \frac{C_i}{r_i} \left[a \left(\frac{h_i}{r_i} \right)^2 + b \left(\frac{h_i}{r_i} \right)^4 \right] \\ &= \sum_i (a_i h_i^2 + b_i h_i^4),\end{aligned}\quad (2.39)$$

式中 $a_i = f\sigma a \left(\frac{C_i}{r_i^3} \right),$

$$b_i = f\sigma b \left(\frac{C_i}{r_i^5} \right),$$

$$h_i = H_i - H,$$

H —测点高程,

H_i —结点高程,

C_i —结点系数。

将 $h_i = H_i - H$ 代入 (2.39) 式:

$$\Delta g_i = \sum_i [a_i (H_i - H)^2 + b_i (H_i - H)^4]. \quad (2.40)$$

$$\text{令} \quad \bar{H} = \frac{\sum a_i H_i}{\sum a_i}, \quad (2.41)$$

$$H' = H - \bar{H}, \text{ 即 } H = H' + \bar{H}. \quad (2.42)$$

将 (2.42) 式代入 (2.40) 式:

$$\Delta g_i = \sum_i \left[a_i (H_i - \bar{H} - H')^2 + b_i (H_i - \bar{H} - H')^4 \right]. \quad (2.43)$$

将 (2.43) 式内括弧的内容展开后得到:

$$\begin{aligned} \Delta g_i = \sum_i \left\{ a_i \left[(H_i - \bar{H})^2 - 2H'(H_i - \bar{H}) + H'^2 \right] \right. \\ \left. + b_i \left[(H_i - \bar{H})^4 - 4H'(H_i - \bar{H})^3 + 6H'^2(H_i - \bar{H})^2 \right. \right. \\ \left. \left. - 4H'^3(H_i - \bar{H}) + H'^4 \right] \right\}. \quad (2.44) \end{aligned}$$

根据 (2.41) 式, 上式中第二项即 $\sum_i 2a_i H'(H_i - \bar{H})$ 应等于0, 因此

$$\begin{aligned} \Delta g_i = & \left(\sum_i a_i \right) H'^2 + \left(\sum_i b_i \right) H'^4 \\ & + \sum_i a_i (H_i - \bar{H})^2 + \sum_i b_i (H_i - \bar{H})^4 \\ & + \left[\sum_i 6b_i (H_i - \bar{H})^2 \right] H'^2 - \left[\sum_i 4b_i (H_i - \bar{H})^3 \right] H' \\ & - \left[\sum_i 4b_i (H_i - \bar{H}) \right] H'^3. \quad (2.45) \end{aligned}$$

$$\text{令} \quad f(H') = \left(\sum_i a_i \right) H'^2 + \left(\sum_i b_i \right) H'^4,$$

$$P = \sum_i a_i (H_i - \bar{H})^2 + \sum_i b_i (H_i - \bar{H})^4,$$

$$Q = \sum_i 6b_i (H_i - \bar{H})^2,$$

$$R = \sum_i \left[-4b_i (H_i - \bar{H})^3 \right],$$

$$S = \sum_i \left[-4b_i (H_i - \bar{H}) \right], \quad (2.46)$$

则得 $\Delta g_i = f(H') + P + QH'^2 + RH' + SH'^3, \quad (2.47)$

实际计算步骤是:

先按 (2.41) 式和 (2.46) 式在较稀的结点网上计算 $\bar{H}$ 、 P 、 Q 、 R 、 S 的值, 这是由结点计算分程序完成的。

第二步把结点网上的 $\bar{H}$ 、 P 、 Q 、 R 、 S 线性内插为测网上的相应值, 并按 (2.47) 式计算出每个测点上的地改值 Δg_i 。

这个方法计算步骤较多, 但由于考虑了 $\left(-\frac{h}{r}\right)^4$ 一项, 因此在地形起伏较大的测区是适用的。

(3) 四次-二次型插值法

考虑到测区地形起伏较大, 抛物线特征和线性特征往往不具备, 我们把对高程的抛物插值 (二次型) 和对水平位置的线性插值 (一次型) 分别提高一倍, 即是所谓四次-二次型插值法。

a. 对高程的四次型插值

设 $S = \frac{H_p - H_0}{\delta} = \frac{\Delta H}{\delta}$, 采用司梯林插值公式, 取其前五项, 则得:

$$\begin{aligned} \Delta g_i(H_p) = \Delta g_i(H_0) &+ \frac{S}{2} g_i^{(1)} + \frac{S^2}{2!} g_i^{(2)} + \frac{S(S^2-1)}{2 \times 3!} g_i^{(3)} \\ &+ \frac{S^2(S^2-1)}{4!} g_i^{(4)}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

式中 $g_i^{(1)}$ 、 $g_i^{(2)}$ 、 $g_i^{(3)}$ 、 $g_i^{(4)}$ 分别由地改值的一阶、二阶、三阶、四阶中心差分导出, 其算式如下:

$$\begin{aligned} g_i^{(1)} &= [\Delta g_i(H_0 + \delta) - \Delta g_i(H_0 - \delta)], \\ g_i^{(2)} &= \Delta g_i(H_0 + \delta) - 2\Delta g_i(H_0) + \Delta g_i(H_0 - \delta), \\ g_i^{(3)} &= \Delta g_i(H_0 + 2\delta) - 2\Delta g_i(H_0 + \delta) + 2\Delta g_i(H_0 - \delta) - \\ &\quad 6\Delta g_i(H_0 - 2\delta), \\ g_i^{(4)} &= \Delta g_i(H_0 + 2\delta) - 4\Delta g_i(H_0 + \delta) + 6\Delta g_i(H_0) \end{aligned}$$

$$-4\Delta g_i(H_0 - \delta) + \Delta g_i(H_0 - 2\delta). \quad (2.49)$$

b. 水平位置的二次型插值

假定在四个结点上已知地改值和高程。四个结点和插值点的坐标如图 1—17 所示。

如果认为在这样大小的一块面积上地形起伏可以用一个双曲面表示：

$$z = a + bx + cy + dxy, \quad (2.50)$$

那么当测点高程取定值时，地形改正值也将是如同 (2.50) 形式的双

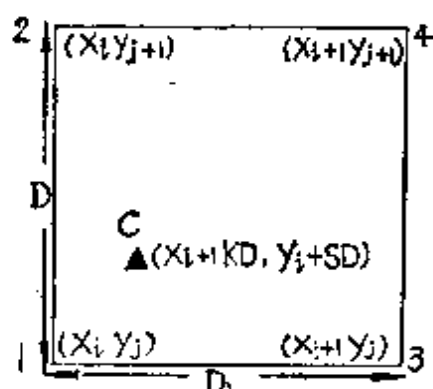


图 1—17 插值点及其附近结点示意图

曲面。

实际插值步骤分两步进行。

首先根据四个结点上已经换算好的四个地改值建立一个方程组，

$$\begin{cases} (\Delta g_i)_1 = a + bx_i + cy_j + dx_i y_j, \\ (\Delta g_i)_2 = a + b(x_i + D) + cy_j + d(x_i + D)y_j, \\ (\Delta g_i)_3 = a + bx_i + c(y_j + D) + dx_i(y_j + D), \\ (\Delta g_i)_4 = a + b(x_i + D) + c(y_j + D) + d(x_i + D)(y_j + D). \end{cases} \quad (2.51)$$

解方程组 (2.51) 得出 a 、 b 、 c 、 d 四个系数：

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{D^2} [(\Delta g_i)_1(x_i + D)(y_j + D) - (\Delta g_i)_2x_i(y_j + D) \\ \quad - (\Delta g_i)_3(x_i + D)y_j + (\Delta g_i)_4x_i y_j], \\ b = -\frac{1}{D^2} [-(\Delta g_i)_1(y_j + D) + (\Delta g_i)_2(y_j + D) \\ \quad + (\Delta g_i)_3y_j - (\Delta g_i)_4y_j], \\ c = -\frac{1}{D^2} [-(\Delta g_i)_1(x_i + D) + (\Delta g_i)_2x_i + (\Delta g_i)_3(x_i + D) \\ \quad - (\Delta g_i)_4x_i], \\ d = -\frac{1}{D^2} [(\Delta g_i)_1 - (\Delta g_i)_2 - (\Delta g_i)_3 + (\Delta g_i)_4]. \end{cases} \quad (2.52)$$

插值的第一步即是按照 (2.52) 式算出 a 、 b 、 c 、 d 四个系数;

插值的第二步即是把插值点 c 的坐标,

$$x = x_i + KD, \quad K = \frac{\Delta x}{D}, \quad x \text{ 方向的插值系数,}$$

$$y = y_i + SD, \quad S = \frac{\Delta y}{D}, \quad y \text{ 方向的插值系数,}$$

代入 (2.50) 式:

$$\begin{aligned} (\Delta g_i)_c = & a + b(x_i + KD) + C(y_i + SD) \\ & + d(x_i + KD)(y_i + SD), \end{aligned} \quad (2.53)$$

式中的系数 a 、 b 、 c 、 d 由 (2.52) 式确定。

六、关于地形图的精度要求

地形改正所需地形图的比例尺和精度, 应根据设计书中提出的地形改正精度和测区具体地形情况来考虑。一般情况下可参考表1—2, 即技术规范中有关手算地改的规定。

表 1—2

等级	地形改正总精度 (毫伽)	地 形 图 比 例 尺			
		0~20米	20~200米	200~1500米	1500~30000米
1	0.025~0.030	1:500 ~1:1000	1:1000 或 1:2000	1:5000 或 1:10000	1:50000
2	0.025~0.040	$\geq 1:2000$	1:2000 或 1:5000	1:5000 或 1:10000	1:50000
3	0.040~0.150	1:1000 或 1:5000	1:2000 或 1:10000	1:10000 或 1:50000	1:50000 或 1:100000

电算地改中结点网画在地形图上, 然后读取高程。因此, 为了保证读数的精度, 应当使结点网的步长在图上有0.5—1厘米的长度。这时近区的高程和水平距读数精确到0.1米, 中区是1米,

远区是10米。一般情况下，我们建议采用第2等级的规定。

测区地形条件较坏时，可以适当考虑增大地形图比例尺，以适应加密结点网的精度要求。如果测区地形平缓或者可以放宽地改精度的要求，也可以采用较小比例尺的图。

测点上的高程数据是水准测量结果，一般仅作为高度内插的高程而不进入结点计算。当测区没有大比例尺地形图时，可以考虑用水准高程计算第一环的地改。水准高程和图面高程精度是不一致的，一般我们不用水准代替图面高程，这样反而增大描绘地形的误差。

在几种比例尺的图上取数时，需要把测区同时投在几张图上。我们应当特别注意在展图过程中引起的水平位置的偏差，使它尽可能小。

§3 关于地改程序问题

目前有几个单位都已编制了重力地改程序。这里将程序的大致计算过程以框图表示，附于图1—18 a、b。

程序适用于点线距相等或线距为二倍点距的测网，如 10×10 ， 10×20 等。电算时是将二倍点距的线距插线成方形测网来计算的。计算步骤为先算远区，再算中区，再算近区。近区又分为全加或半加近区地改值，或不算近区地改值，这时近区地改值用人工计算或实测资料来代替。由于电算和手算的取域不同，前者是方形域，后者是圆形域。从取域来考虑，二者有一差值，因此当用手算或实测的地改值来代替电算的地改值（指近区部分）时，需要引入改正值。

重力地形改正要用大量的结点高程数据，如果是 10×10 的测网，最大计算半径取10公里，那么每算1平方公里的地形改正值大约需要二万个结点高程数据。准备这样大量的数据并穿成纸带，对我们是一个沉重的负担，需要花很多时间来准备数据纸带。为了节省穿孔工作，也为了节省机器的内存单元，程序采用了压缩

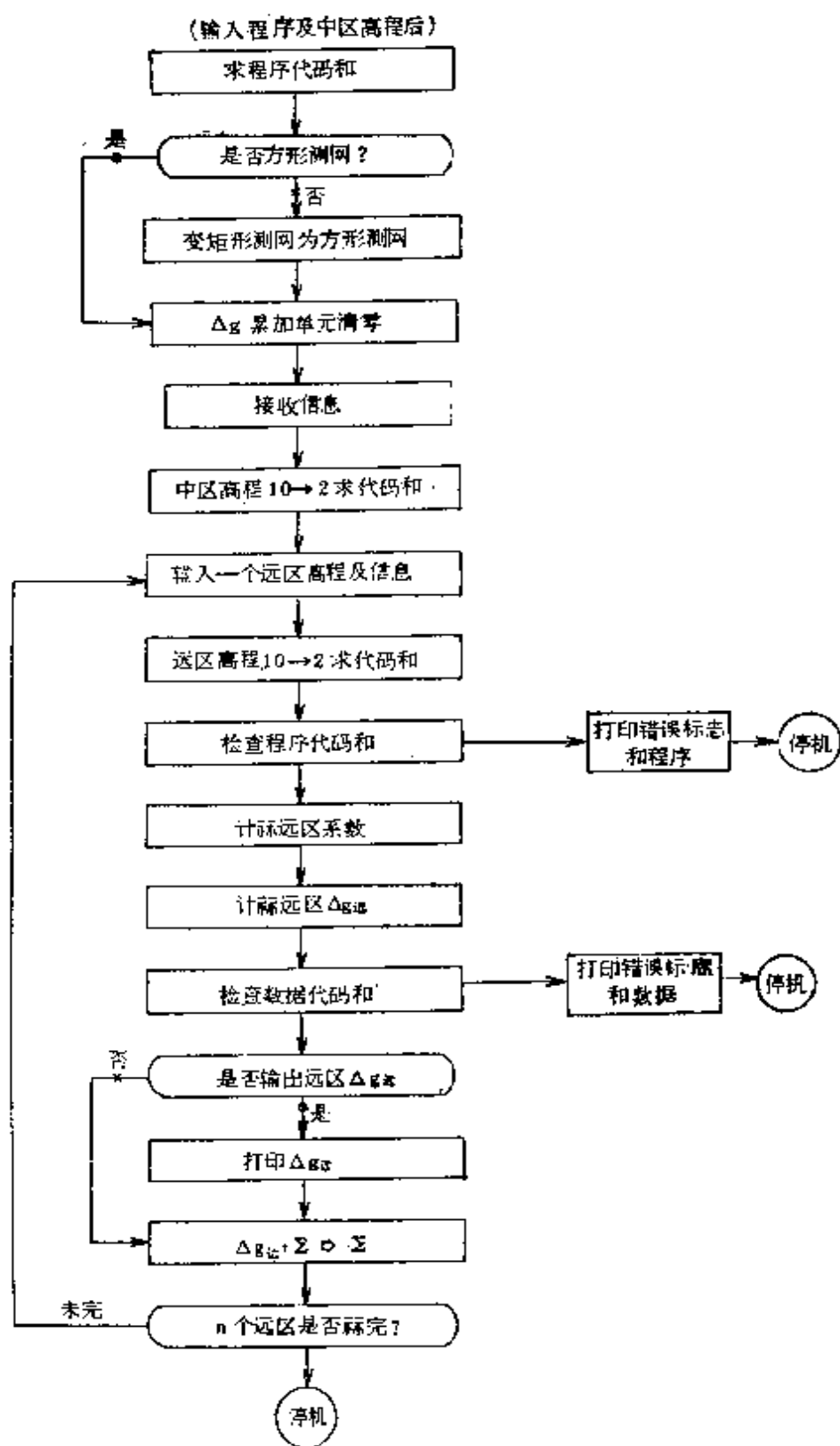


图 1—18 a 重力地改程序框图之一

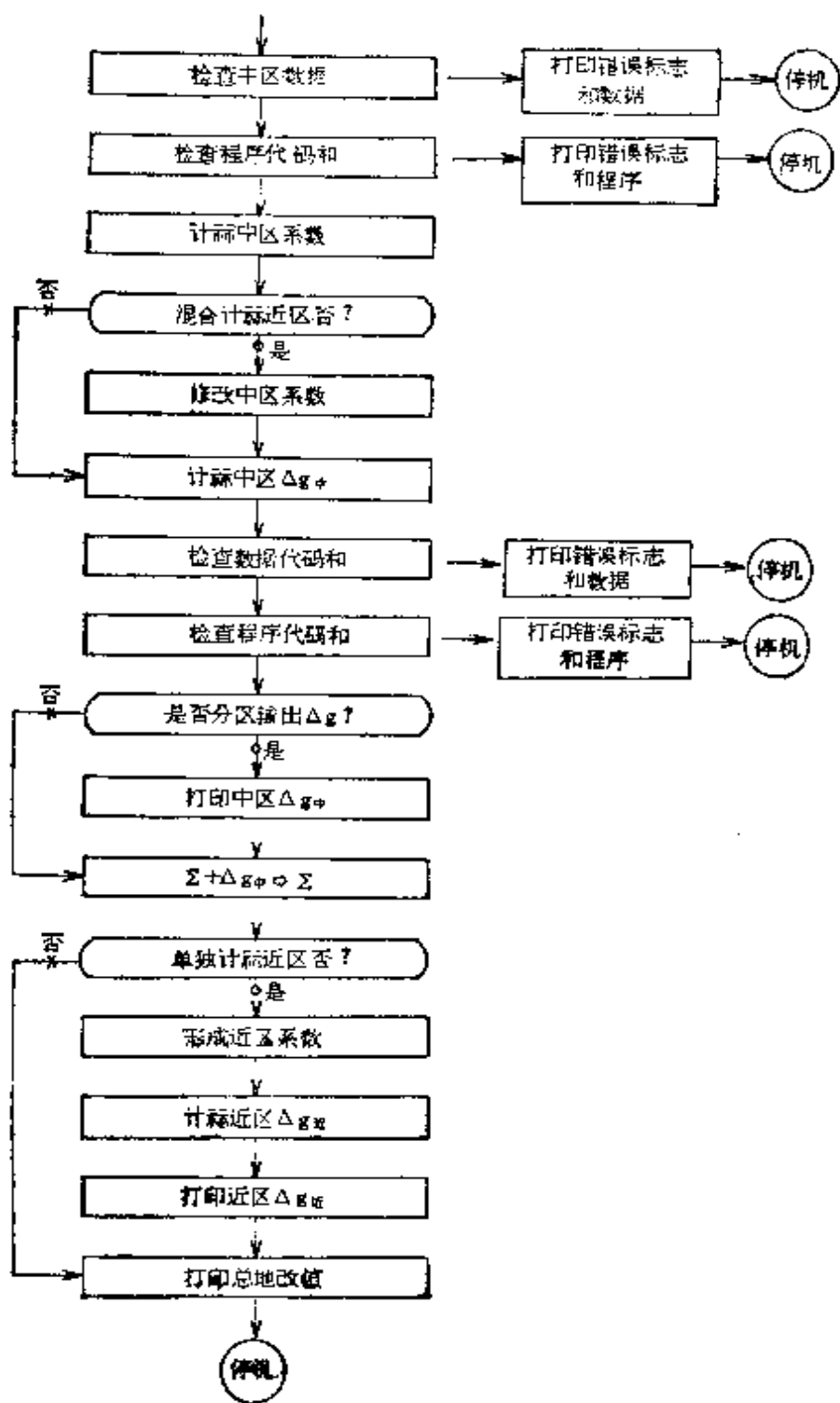


图 1—18 b 重力地改程序框图之二

字长办法，即用半字长的定点数输入，然后再将半字长的定点数化成全字长的浮点数进行计算。为了进一步节省准备数据的工作量，有的程序还采用了几环数据混合一次输入的办法。因为近区的部分数据与远区或较稀环次的数据是重合的，计算某一环时，只需用程序从这批混合数据中挑选相应的数据来计算就行了。

程序中附有数据和程序的检查，用以发现在计算过程中数据或程序是否被破坏，以利于整个计算顺利进行。有关程序的使用方法、数据的准备、信息的给法等，现有的一些程序都各有特点和差别，这里不去赘述。

第二章 数字滤波在重磁资料 数据处理中的应用

§ 1 引 言

在我国地质工作中广泛地使用着重力和磁法勘探。由重磁测量所得到的数据，我们可以了解测区内重、磁场在平面或空间内的分布情况。根据重、磁场特征，结合岩矿体物性资料、各种地质、地形及其他物探资料，利用已有的解释方法可以推断出该地区的地质构造及矿产分布情况。

目前，在资料解释中经常是把复杂的地质情况加以简化。譬如说，认为矿体是孤立存在的，形状是规则的，磁化是均匀的，观测面是水平的等等。但是，实际上客观情况是复杂的。怎样来处理这个问题呢？我们要遵循毛主席的教导：“世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。看问题要从各方面去看，不能只从单方面看”，从实测曲线出发，考虑到各方面的因素，经过分析对比，找出我们所要的异常。面对复杂的异常，怎样才能找出规律呢？这就要对测得的异常加以去粗取精、去伪存真的工作，把干扰从测得结果中除去。野外实测曲线变化的主要原因有：

（1）地质上的原因（矿体形态的变化，岩体影响，岩矿物性变化，地表物质的干扰等）；（2）地形影响；（3）测量误差以及其他一些偶然因素等。不同来源的影响有它们各自的矛盾特殊性，根据这些特殊性可以区分出不同的干扰，从而由复杂的实测异常中找出我们所需要的异常。例如，地表干扰经常是局部干扰，而且有时是随机的。这样，我们就可以用圆滑的办法把局部干扰消除掉，用向上延拓的办法减小局部干扰的影响。有时矿体赋存于岩体之

中，由于岩体磁性的干扰，使异常曲线发生畸变，这就有必要去掉岩体影响，突出矿体影响。一般来说，岩体规模较大，因而可以利用消除局部异常的方法先求出岩体异常，然后从实测曲线中减去岩体影响，求出矿体的剩余异常曲线；也可以用向下延拓的方法来突出矿体影响，或者用高次导数的方法消除大面积的岩体影响。有些异常是由几个相邻矿体引起的，由于埋藏较深，难于区分相邻的几个矿体，这时如果用向下延拓的方法或求高次导数的方法，就有可能区分。上面谈的都是假定在地形平坦的情况下进行解释的。如果地形不平坦，地形起伏也会对测量结果产生一定影响。这时就应当把起伏地形上的测量结果换算到同一水平上来进行解释，实质上这也可看作是一种解析延拓的方法。

通过以上讨论可以看出，为了从实测曲线中区分出有意义的异常，就有必要对实测结果进行处理。这一章将向大家介绍几种重磁测量结果中常用到的数字处理方法。

重磁数据处理中常用到的有二次导数、解析延拓、圆滑、消除区域场等方法。这些方法从数学上看与电学上的滤波作用相似，差别主要在于前者变量是空间坐标 x 、 y 、 z ，后者是时间参数 t 。这样，我们就可以把电学上的一些滤波理论引用到重磁数据处理中来。向上延拓是消除或衰减局部浅层干扰异常，突出深层大面积的岩矿引起的异常。如果把物探中由于岩（矿）体大小不同而引起的异常曲线波形宽窄不同，比喻为电学上的波长长短的话，那么向上延拓就相当于电学上的低通滤波器，通过大面积的（长波的）影响而衰减小范围（短波的）的影响。向下延拓及高次导数突出局部影响，相当于高通滤波器。圆滑是消除局部小的跳动，可以看作是低通滤波器。这样，我们就可以把延拓、求导数、圆滑与电学上的高（低）通滤波器联系起来。

考虑到本章要用到滤波理论，所以在这一节里简要地复习有关滤波理论中的几个常用公式。

滤波器输入、输出电压是时间的函数，分别写为 $\varepsilon_i(t)$ 与 $\varepsilon_o(t)$ ，输入电压与输出电压间可用褶积公式表示

$$\varepsilon_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_i(t-\tau)W(\tau)d\tau. \quad (1.1)$$

在数学中，右端这个积分通常称为时间函数 $\varepsilon_i(t)$ 与 $W(t)$ 的褶积，记作 $\varepsilon * W = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t-\tau)W(\tau)d\tau$ 。在电学中， $W(\tau)$ 叫权函数，它是滤波器的一个特征函数，实际上它就是滤波器对单位脉冲的响应。若时间函数是周期函数，可以把它表示为富氏级数；如时间函数是非周期函数，就不能用富氏级数而用富氏积分表示。时间函数 $\varepsilon(t)$ 与频率函数 $E(\omega)$ 间的关系由富氏变换表示：

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{-2\pi i \omega t} dt, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{2\pi i \omega t} d\omega. \quad (1.3)$$

由 (1.1) 式的富氏变换可以得出一个以频率 ω 为变量的输入输出方程

$$E_0(\omega) = E_i(\omega) \overline{Y}(\omega). \quad (1.4)$$

E_0 、 E_i 、 Y 分别是 ε_0 、 ε_i 、 $W(\tau)$ 的富氏变换， E_0 、 E_i 是输出输入的频谱， $\overline{Y}$ 是滤波器的频率响应。(1.4) 说明时间域的褶积可以用频率域中的乘积表示。(1.4) 式也可记成如下形式： $F(\varepsilon_i * W) = F(\varepsilon_i)F(W)$ ，此处， F 表示对函数的富氏变换，这个公式通常叫做褶积公式。

为便与重磁场问题联系起来，今把时间变量换为二维空间变量 x ， y ，那么相应的公式应为

$$f_0(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f_i(x-\alpha, y-\beta)W(\alpha, \beta)d\alpha d\beta, \quad (1.5)$$

$$F(u, v) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-2\pi i (ux + vy)} dx dy, \quad (1.6)$$

$$f(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{2\pi i (ux + vy)} du dv \quad (1.7)$$

$$F_0(u, v) = F_i(u, v) \cdot \bar{Y}(u, v). \quad (1.8)$$

其中 u, v 是 x, y 方向上单位长度内的波数, α, β 是参变量。

如果数据是在离散的测点上测得的, 那么(1.5)、(1.6)、(1.7)应改写为

$$f_0(x, y) = \Delta x \Delta y \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} \sum_{\rho=-\infty}^{\infty} f_i(x - \lambda \Delta x, y - \rho \Delta y) \times W(\lambda \Delta x, \rho \Delta y) \quad (1.9)$$

$$F(u, v) = \Delta x \Delta y \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(m \Delta x, n \Delta y) \times e^{-2\pi i (um \Delta x + vn \Delta y)} \quad (1.10)$$

$$f(x, y) = \Delta u \Delta v \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} F(k \Delta u, l \Delta v) \times e^{2\pi i (k \Delta u x + l \Delta v y)} \quad (1.11)$$

为了进一步说明滤波与解析延拓的关系, 我们以向上延拓为例, 计算它们的频率响应。假设地下有个地质体, 引起的异常在地面实测值为 $f(x, y, 0)$, 那么它在地面上部 h 距离处 ($h > 0$) 的异常值 $f(x, y, h)$ 由狄里希来公式可以得出

$$f_{\pm}(x, y, h) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{h f(\alpha, \beta, 0) d\alpha d\beta}{[(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + h^2]^{3/2}} \quad (1.12)$$

由1.5式可以看出, 向上延拓的权函数 $W(x, y, h)$ 为

$$W(x, y, h) = \frac{h}{2\pi (h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

由富氏变换可以得出，向上延拓的频率响应为

$$\begin{aligned}\bar{Y}^{\pm}(u, v) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{h}{(h^2 + x^2 + y^2)^{3/2}} \right) e^{-2\pi i(xu + yv)} dx dy \\ &= e^{-2\pi h \sqrt{u^2 + v^2}}\end{aligned}\quad (1.13)$$

从 (1.13) 式可以看出，向上延拓的频率响应是一个负指数函数，它的频应随着频率的升高而下降，即频率越高衰减越多，所以我们说向上延拓相当于一个低通滤波器。考虑到向下延拓是向上延拓的相反过程，所以它的频率响应为

$$\bar{Y}_r = e^{h \cdot 2\pi \sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.14)$$

它是一个正指数函数，因此频率越低，衰减越多，所以我们说它相当于一个高通滤波器。用类似的方法可以求出二阶导数的频率函数为 $4\pi^2(u^2 + v^2)$ ，它是随频率（波数）而增长的函数，因此说二阶导数法相当于高通滤波器。

§2 最小二乘圆滑方法

野外实测曲线中经常包含一些偶然的测量误差及地表干扰，有时也包含一些由于磁性不均匀或地质体表面局部凹凸不平引起的局部变化。为了消除这些干扰，通常采用最小二乘圆滑方法。本节就谈谈最小二乘圆滑方法的基本原理、常用的公式、最小二乘圆滑多项式的阶次和点数对圆滑结果的影响。

野外工作中通常用简单的圆滑方法，即线性圆滑及抛物线圆滑。因此我们先从这两种情况入手，然后推广到一般的最小二乘圆滑方法。

线性圆滑方法，又称平均值方法。

所谓线性圆滑，即假定在一条测线上测点间场强的变化是线性变化的，这时场强可用以下直线方程表示

$$\bar{Z} = a_0 + a_1 x$$

式中 x ——测点的坐标，这里已设点距 $\Delta x = 1$ ，所要圆滑的计算点 $x_0 = 0$ 。一般情况下，需作变换 $t = \frac{x - x_0}{\Delta x} = n$ ，其中 n 是点数号。

$\overline{Z}$ ——圆滑后的场值。

当 $x = 0$ 时， $\overline{Z} = a_0$ 。由此可以看出，确定 $\overline{Z}$ 只需确定 a_0 即可。按最小二乘意义，即需使圆滑值 $\overline{Z}$ 与观测值 Z_i 之差的平方和为最小，如取三点圆滑，即

$$\sum_{i=-1}^1 [Z_i - (a_0 + a_1 x_i)]^2 = \min.$$

对上式就 a_0 、 a_1 求微商，并令其等于零，即可求出 a_0 ，代回得

$$\overline{Z} = a_0 = \frac{1}{3} [Z_{-1} + Z_0 + Z_1]. \quad (2.1a)$$

同样，对于五点线性圆滑公式为

$$\overline{Z} = \frac{1}{5} [Z_{-2} + Z_{-1} + Z_0 + Z_1 + Z_2]. \quad (2.1b)$$

从上式可以看出，所谓线性圆滑即取平均值的意思。图2—1是三点平均及五点平均曲线。从图中可以看出，取的点子越多，曲线越光滑，但峰值降低也越多。

抛物线圆滑方法：

假定在圆滑的范围内异常是按二次曲线变化的，即

$$\overline{Z} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

由最小二乘的含义，对五点 $x_i = i$ ($i = -2, -1, 0, 1, 2$) 而言，即

$$\sum_{i=-2}^2 [Z_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2)]^2 = \min.$$

分别对 a_0 、 a_1 、 a_2 求微商，令其等于零，得

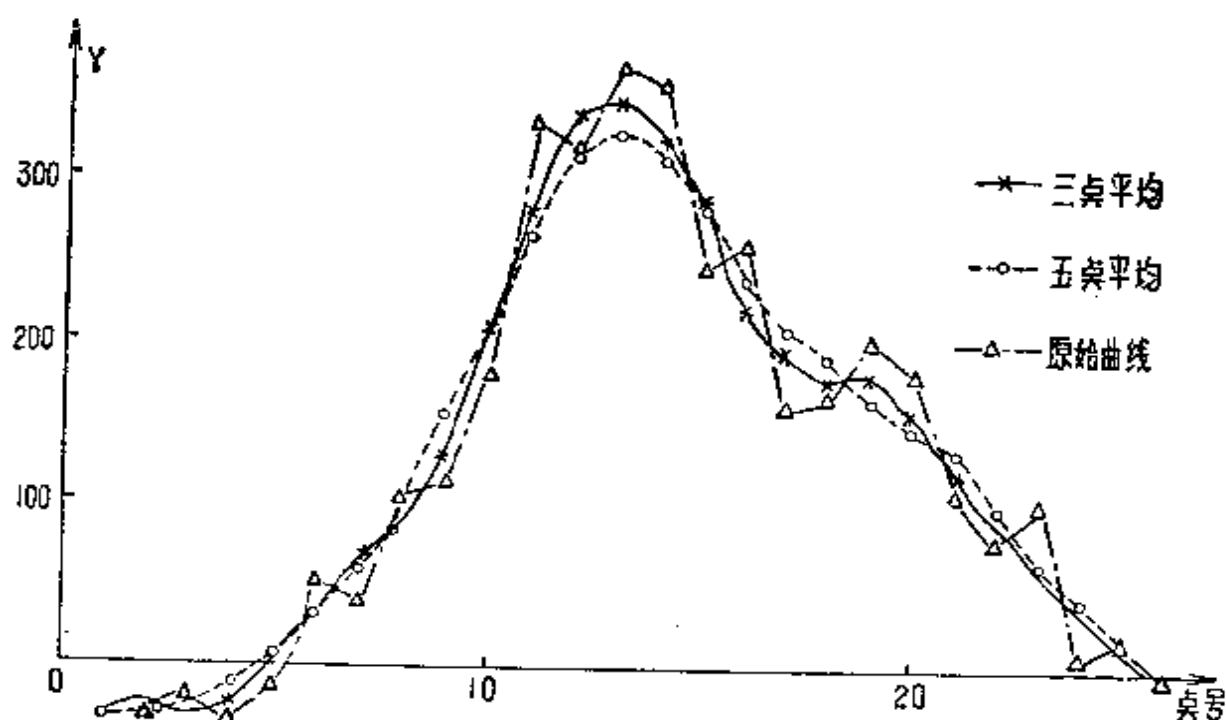


图 2-1 线性平滑曲线

$$\sum_{i=-2}^2 2[Z_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)] = 0,$$

$$\sum_{i=-2}^2 2[Z_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]x_i = 0,$$

$$\sum_{i=-2}^2 2[Z_i - (a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2)]x_i^2 = 0.$$

展开后

$$\begin{aligned} Z_{-2} + Z_{-1} + Z_0 + Z_1 + Z_2 - 5a_0 - 10a_2 &= 0, \\ -2Z_{-2} + 2Z_2 - Z_{-1} + Z_1 - 10a_1 &= 0, \\ 4Z_{-2} + Z_{-1} + Z_1 + 4Z_2 - 10a_0 - 34a_2 &= 0. \end{aligned}$$

解上式得出

$$\begin{aligned} \bar{Z} = a_0 &= \frac{1}{35}[-3Z_{-2} + 12Z_{-1} + 17Z_0 + 12Z_1 - 3Z_2] \\ &= -0.0857Z_{-2} + 0.3428Z_{-1} + 0.4857Z_0 \\ &\quad + 0.3428Z_1 - 0.0857Z_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

一般情况下, 我们可以取 m 阶, $2n+1$ 点圆滑 (m, n 为正整数)。这时, 假定在 $2n+1$ 点圆滑的范围内, 异常是按 m 阶多项式变化的 (点的分布见图2—2), 即

$$\begin{aligned} \bar{Z} = & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ & + \dots + a_m x^m. \end{aligned} \quad (2.3)$$

由最小二乘含义, 应有下式

$$\sum_{i=-n}^n [Z_i - (a_0 + a_1 x_i + \dots + a_m x_i^m)]^2 = \min.$$

根据最小二乘解法, 用矩阵形式表示, 解答为

$$\underline{X} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{Z} \textcircled{1}.$$

如记 $(A^T A)^{-1} A^T$ 为 B , 则

$$\underline{X} = B \underline{Z},$$

其中

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad \underline{Z} = \begin{pmatrix} Z_{-n} \\ \vdots \\ Z_0 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_{-n} & x_{-n}^2 & \dots & x_{-n}^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{pmatrix},$$

A^T 为 A 的转置矩阵, $(A^T A)^{-1}$ 为 $A^T A$ 之逆矩阵。

当 $x=0$ (圆滑点作为坐标原点) 时,

$$\bar{Z} = a_0 = \sum_{i=-n}^n B_{1i} Z_i, \quad (2.4)$$

可见, B 的第一行各元素即圆滑系数。

以上讨论的是一维的最小二乘圆滑方法, 对于二维来说, 作法基本一样。下面以 $(2n+1)^2$ 点二次曲面圆滑为例介绍二维圆滑

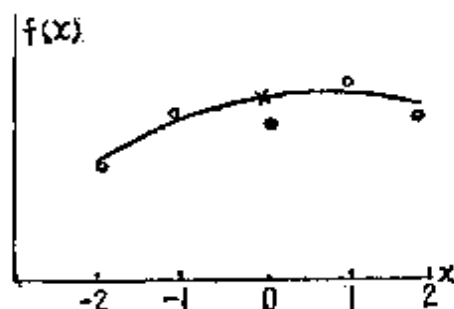


图 2—2 圆滑时点的分布

①这段内用字母下边加横线代表列向量。字母左上角 T 表示转置矩阵, 字母左上角 -1 表示逆矩阵。

方法。

二维二次曲面圆滑的拟合多项式为

$$\bar{Z} = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 \quad (2.5)$$

式中 x 、 y 是相应各点的坐标。

写成矩阵形式

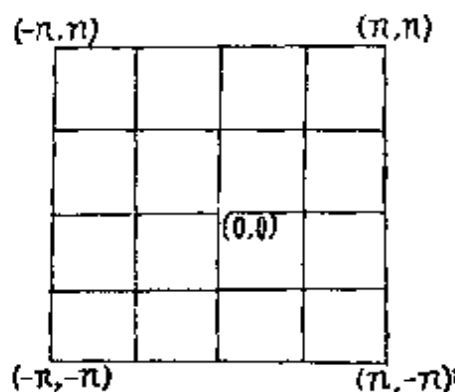
$$\underline{Z} = A \underline{X}$$

其中

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} a_{0,0} \\ a_{1,0} \\ \vdots \\ a_{0,2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{Z}^T = (Z_{-n,-n}, Z_{-(n-1),-n}, \dots, Z_{-1,-n}, Z_{0,-n}, \dots, \\ Z_{0,0}, \dots, Z_{n,0}, Z_{n,1}, \dots, Z_{n,n})$$

A 为系数矩阵，点的分布见图



2—3。

其最小二乘解为

$$\underline{X} = (A^T A)^{-1} A^T \underline{Z}$$

记 $(A^T A)^{-1} A^T$ 为 B ，则

$$\underline{X} = B \underline{Z}$$

如取圆滑点为原点，则

$$\bar{Z} = a_{00} = \sum_{i,j=-n}^n B_{1ij} Z_{ij} \quad (2.5)$$

图 2—3 二维圆滑时点的分布

其中对 i 求和共有 $(2n+1)^2$ 项，脚标的次序与上述 $\underline{Z}^T$ 中次序相对应。 B 的第一行各元素即圆滑系数。根据这种算法，可以编制计算圆滑实测场值的程序，其大致步骤为

1. 形成系数矩阵 A ;
2. 计算 $A^T A$;
3. 计算 $(A^T A)^{-1}$;
4. 计算 $(A^T A)^{-1} A^T$ 的第一行各元素（即圆滑系数）并输出;

5. 计算圆滑值 $\bar{Z} = \sum_{i,j=-n}^n B_{ij} Z_{ij}$ 并输出。

到此为止，我们研究了圆滑系数及圆滑值的计算方法。一维圆滑可以用五点、七点甚至更多的点，二维圆滑可以用九点、二十五点、四十九点……，多项式的阶可以用二阶，也可以用更高的阶，那么生产实践中应当用多少点多少阶好呢？阶数点数对结果有什么影响呢？下面就讨论这一问题。

首先，我们看看图2—4中的圆滑效果。由图2—4可以看出，下同阶次不同点数的圆滑效果有如下一些规律：

1. 点数不变时，阶越低越圆滑；
2. 阶次不变时，点数越多越圆滑；
3. 在不同阶、不同点数的条件下，有时可以得到相近的圆滑效果（如 $m=6, 2n+1=13$ ， $m=10, 2n+1=19$ ， $m=2, 2n+1=7$ ）。

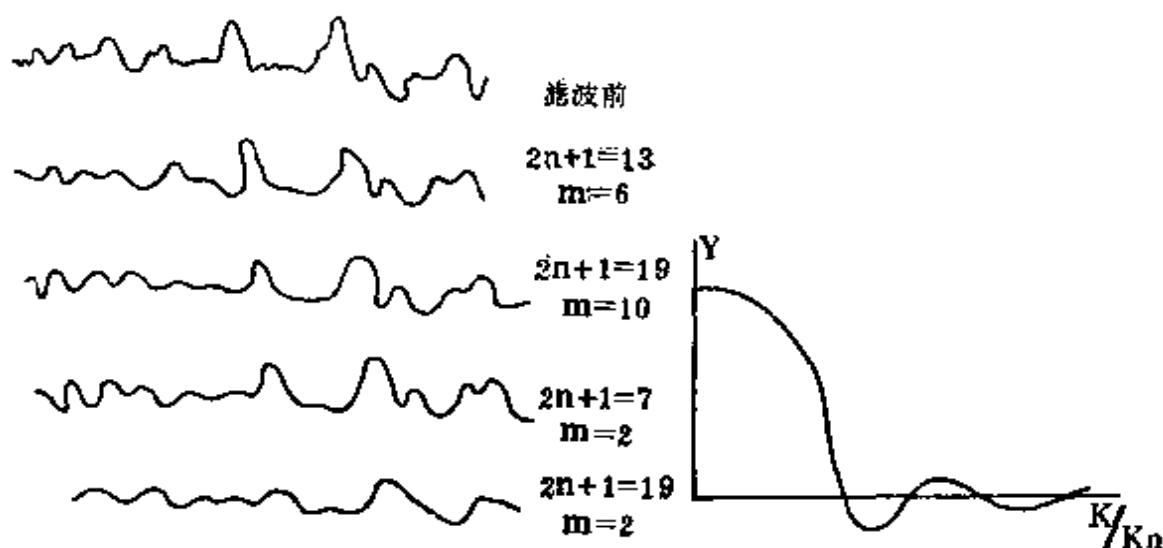


图 2—4 不同点数不同阶次的圆滑效果

图 2—5 圆滑算子的频率响应

为了进一步了解点数、阶次对圆滑效果的影响，我们看看圆滑的频率响应，见图2—5。图中 Y 为频率响应， K 为波数， K_n 为截止频率。由图可见，圆滑的主要频率响应集中于低频部分，

圆滑的输出与最小（第一个）零点有关。最小零点越小，频谱越加集中于更低频的部分。从圆滑角度来说，即更加圆滑。有人计算了一些不同阶次不同点数的圆滑的最小零点位置，其结果以极坐标形式绘于图2—6。由图可以看出， $2n+1=7$ ， $m=2$ ； $2n+1=13$ ， $m=6$ ； $2n+1=19$ ， $m=10$ 的最小零点都很接近，都大致在0.5附近。圆滑效果应当相近，这与图2.4的结果一致。

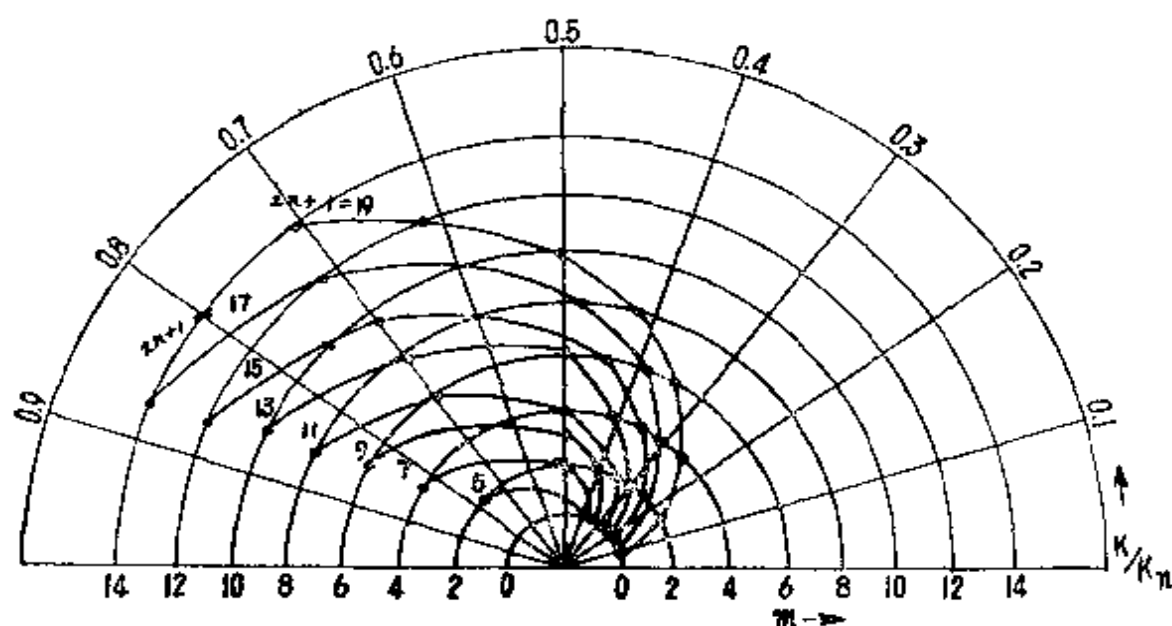


图 2—6 最小二乘圆滑多项式频谱最小零点极坐标图

考虑到不同点数不同阶次的圆滑系数可以得到相近的圆滑效果，所以在圆滑效果相近的条件下少取一些点子更好一些。少取一些点子可以减少一些工作量，同时在图的边缘也可以少损失一些点子。

常用的几组最小二乘圆滑系数列出如下：

一维圆滑（测点为等间距，由于系数对中心点对称，故只写出一半系数），

1. 五点二次圆滑

—0.0857, 0.3428, 0.4827;

2. 七点二次圆滑

—0.0952, 0.1428, 0.2857, 0.3333;

3. 七点四次圆滑

0.02164, -0.1298, 0.3246, 0.5670,

4. 十一点二次圆滑

-0.08391, 0.02097, 0.10256, 0.16083, 0.19580,
0.20740,

5. 十一点四次圆滑

0.04196, -0.10489, -0.02331, 0.13986, 0.27972,
0.33333。

二维圆滑 (测点测线间为等间距):

1. 九点二次曲面圆滑

$$\begin{aligned} Z_{-1-1}, Z_{1-1}, Z_{11}, Z_{-11}, & -\frac{1}{9}, \\ Z_{-10}, Z_{0-1}, Z_{10}, Z_{01}, & -\frac{2}{9}, \\ Z_{00}, & \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

2. 二十五点二次曲面圆滑

$$\begin{aligned} Z_{-2-2}, Z_{+2-2}, Z_{22}, Z_{-22}, & -0.07428, \\ Z_{-2-1}, Z_{2-1}, Z_{21}, Z_{-21}, & \left\{ \begin{array}{l} 0.01142, \\ 0.01142, \end{array} \right. \\ Z_{-1-2}, Z_{1-2}, Z_{12}, Z_{-12}, & \\ Z_{-20}, Z_{0-2}, Z_{20}, Z_{02}, & 0.04000, \\ Z_{-1-1}, Z_{1-1}, Z_{11}, Z_{-11}, & 0.09714, \\ Z_{-01}, Z_{0-1}, Z_{10}, Z_{01}, & 0.12571, \\ Z_{00}, & 0.15428, \end{aligned}$$

3. 四十九点二次曲面圆滑

$$\begin{aligned} Z_{-3-3}, Z_{-33}, Z_{3-3}, Z_{33}, & -0.04761, \\ Z_{-3-2}, Z_{-32}, Z_{3-2}, Z_{32}, & \left\{ \begin{array}{l} -0.01360, \\ -0.01360, \end{array} \right. \\ Z_{-2-3}, Z_{-23}, Z_{2-3}, Z_{23}, & \\ Z_{-3-1}, Z_{-31}, Z_{3-1}, Z_{31}, & \left\{ \begin{array}{l} 0.00680, \\ 0.00680, \end{array} \right. \\ Z_{-1-3}, Z_{-13}, Z_{1-3}, Z_{13}, & \\ Z_{-30}, Z_{30}, Z_{0-3}, Z_{03}, & 0.01360, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Z_{-2-2}, Z_{-22}, Z_{2-2}, Z_{22}, 0.02040; \\
& Z_{-2-1}, Z_{-21}, Z_{2-1}, Z_{21}, \left. \begin{aligned} & Z_{-1-2}, Z_{-12}, Z_{1-2}, Z_{12}, \\ & Z_{-20}, Z_{20}, Z_{0-2}, Z_{02}, 0.04761; \\ & Z_{-1-1}, Z_{-11}, Z_{1-1}, Z_{11}, 0.061224; \\ & Z_{-10}, Z_{10}, Z_{0-1}, Z_{01}, 0.06802; \\ & Z_{00}, \end{aligned} \right\} 0.04081; \\
& \qquad \qquad \qquad 0.07482.
\end{aligned}$$

§ 3 将噪声压低到一定水平的最佳滤波

上面我们介绍了应用最小二乘多项式的数据圆滑方法，它对于各种类型的观测数据的处理是普遍适用的。这一节我们介绍另一种滤波方法，它利用了调和函数的性质，因而专门适用于位场

观测值。这一方法是 B. H 斯特拉霍夫最先提出的。为了叙述简单，我们的讨论只限于一维情况，实际上它们可以毫不困难地推广到二维。

在正式讨论前，我们叙述两点必要的准备知识。

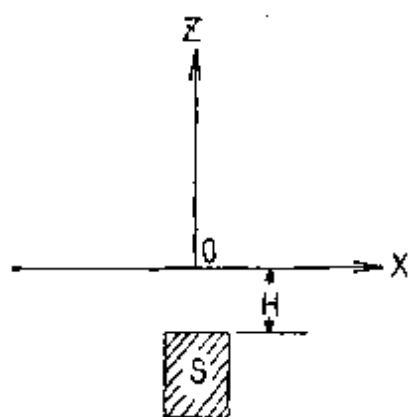


图 2—7 坐标系选取及场源位置示意图

1. 选取坐标系如图2—7。截面 S 表示场源， ox 轴为测线位置， H 表示距地表最近的奇点到 ox 轴之距离。若以 $f(x, z)$ 表示点 (x, z) 处的场强，那么如下的积分关系式成立

$$f(x, 0) = \frac{H - \varepsilon}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi, -(H - \varepsilon))}{(\xi - x)^2 + (H - \varepsilon)^2} d\xi, \quad (3.1)$$

其中 ε 是一个任意小的正数。对 (3.1) 式两端进行富氏变换，有

$$F(\omega, 0) = e^{-2\pi(H - \varepsilon)|\omega|} F(\omega, -(H - \varepsilon)), \quad (3.2)$$

因而，

$$|F(\omega, 0)| \leq e^{-2\pi(H-\varepsilon)|\omega|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, -(H-\varepsilon))| dx. \quad (3.3)$$

2. 设函数 $f(x)$ 的富氏变换为 $F(\omega)$, 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega, \quad (3.4)$$

这一关系称为巴什瓦等式。

下面, 我们转向本节的主要内容。

一、方法的数学表述

在重磁测量中所观测到的数据一般说来是“信号”和“噪声”两部分的迭加, 即

$$\overline{f(x)} = f(x) + S(x), \quad (3.5)$$

其中 $f(x)$ 表示所需要的位场信号, $S(x)$ 表示由各种干扰和误差所形成的噪声。我们的目的是定义一个线性运算 A , 它对 $\overline{f(x)}$ 作用之后得到一个新的函数

$$\widetilde{\overline{f(x)}} = A\{\overline{f(x)}\} = A\{f(x)\} + A\{S(x)\},$$

使得 $A\{f(x)\}$ 与 $f(x)$ 的“差别”尽量地小, 同时使 $A\{S(x)\}$ 相对 $S(x)$ 而言大大降低了幅度。这样就可以用 $\widetilde{\overline{f(x)}}$ 作为 $f(x)$ 的一个比较好的近似。

为此, 采用了如下的算法, 即

$$A_{N,\Delta x}\{\overline{f(x)}\} = \sum_{-N}^N C_K \overline{f(x + K\Delta x)},$$

而且规定 $C_K = C_{-K}$ ($K = 1, 2, \dots, N$), 这一限制从物理观点看来是十分自然的。

问题在于如何确定系数 C_K 。我们分别考虑运算 $A_{N,\Delta x}$ 对信号和噪声的作用。由运算 $A_{N,\Delta x}$ 的定义

$$A_{N,\Delta x}\{f(x)\} = \sum_{-N}^N C_K f(x + K\Delta x).$$

我们用如下的积分来衡量 $f(x)$ 与 $A_{N,\Delta x}\{f(x)\}$ 之间的差别

$$\begin{aligned}\Phi &= \int_{-\infty}^{\infty} |A_{N,\Delta x}\{f(x)\} - f(x)|^2 dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| f(x) - \sum_{-N}^N C_K f(x + K\Delta x) \right|^2 dx.\end{aligned}$$

由巴什瓦等式

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega, 0)|^2 \left(1 - \sum_{-N}^N C_K e^{i2\pi K\Delta x\omega}\right)^2 d\omega.$$

注意到 (3.3) 式和式中 ϵ 的任意性, 我们有

$$\Phi \leq K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H|\omega|} \left(1 - \sum C_K e^{i2\pi K\Delta x\omega}\right)^2 d\omega. \quad (3.6)$$

因而要使 Φ 达到极小, 只需令下式极小

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H|\omega|} \left(1 - \sum C_K e^{i2\pi K\Delta x\omega}\right)^2 d\omega = \min. \quad (3.7)$$

只根据这一个条件来确定系数是不够的, 否则只需令 $C_0 = 1$, 其余的系数均为零, 就可以使 ϕ 达到极小, 但这显然是无意义的, 因为我们同时还应考虑运算 $A_{N,\Delta x}$ 对噪声的作用。

首先, 我们假设噪声满足一定条件, 即如果我们进行很多次测量, 那么每一个测点上所得到的噪声集合的统计性质都是相同的, 特别是均值都是零, 但不同测点上的噪声彼此无关。另外还要假设, 在任意一个测点上进行多次测量时所得到的噪声的统计性质, 和在所有测点上进行一次测量时所得噪声的统计性质是相同的。

用数学的语言来讲, 这就是说 $S(x)$ 是平稳随机过程的一次实现, 对该过程而言, 各态历经定理成立, 且自相关函数有如下形式

$$B_{S(x)}(\xi) = \begin{cases} B_{S(x)}(\xi) \approx 0, & |\xi| < \Delta x, \\ 0, & |\xi| \geq \Delta x. \end{cases} \quad (3.8)$$

在这一条件下

$$\sigma(x) = A_{N, \Delta x}\{S(x)\} = \sum C_K S(x + K \Delta x)$$

仍然是平稳随机过程。为了研究噪声 $S(x)$ 经 $A_{N, \Delta x}$ 作用后的效果，我们来计算它的方差，又由于方差是相关函数在零点的值，故我们首先考虑以 $\sigma(x)$ 为一次实现的平稳随机过程的相关函数。在上述条件下

$$\begin{aligned} B_{\sigma(x)}(\xi) &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \sigma(x) \sigma(x - \xi) dx \\ &= \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X}^X \left(\sum_{-N}^N C_K S(x + K \Delta x) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{-N}^N C_m S(x - \xi + m \Delta x) \right) dx \\ &= \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N C_K C_m \\ &\quad \times \lim_{X \rightarrow \infty} \frac{1}{2X} \int_{-X + K \Delta x}^{X + K \Delta x} S(x) S(x - \xi + (m - K) \Delta x) dx \\ &= \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N C_K C_m B_{S(x)}(\xi - (m - K) \Delta x). \end{aligned}$$

由此方差

$$D_{\sigma(x)} = B_{\sigma(x)}(0) = \sum_{-N}^N \sum_{-N}^N C_K C_m B_{S(x)}((m - K) \Delta x).$$

注意到式 (3.8)，上式进一步简化为

$$D_{\sigma(x)} = D_{S(x)} \sum_{-N}^N C_K^2,$$

也就是说， $S(x)$ 与 $A_{N, \Delta x}\{S(x)\}$ 的方差之间有如下关系

$$\frac{D_{\sigma(x)}}{D_S(x)} = \sum_{-N}^N C_k^2.$$

因而为了达到压制噪声的目的，我们应限制

$$\sum_{-N}^N C_k^2 = \epsilon^2. \quad (3.9)$$

$|\epsilon| < 1$ ，是一个预先给定的数，称为噪声缩减因子。由此，我们得到了系数 C_k 应满足的两个条件，即

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H|\omega|} \left(1 - \sum_{-N}^N C_k e^{-i2\pi K \Delta x \omega}\right)^2 d\omega \approx \min, \\ \sum_{-N}^N C_k^2 = \epsilon^2. \end{array} \right. \quad (3.10)$$

$$(3.11)$$

同样的讨论可以推广到二维情况，这里不再详述。

还要说明的是，在上述推导中对噪声 $S(x)$ 加了一系列限制，实际上当噪声由近地表随机分布的干扰体引起时，对 $S(x)$ 所加的条件可以认为是合理的。

二、求解滤波系数的方法

为了从 (3.10) 和 (3.11) 中对确定的 N 和 ϵ 求出所要的系数 C_k ，我们可以利用稍加变形了的“最速下降法”。

所谓最速下降法是求一个函数极小点的迭代方法。它的基本思想是：在自变量可能取值的范围内任取一点做为初始点，从这一点出发，设法转移到一个新的点，使在新点上的函数值小于原来点上的函数值，这样一步一步地做下去，最终达到使函数达到极小的点。从一个点转向另一个新点的方法是：求出过原来点的一条直线上的极小点作为新的点，这条直线的方向是该点函数的负梯度方向。选择梯度方向，是因为这是函数变化最快的方向。

我们的问题与一般地求函数极小稍有不同。它要求在球面 $\sum C_k^2 = \epsilon^2$ 上求得一点 $\underline{C}$ ，使得函数 ψ 取极小值。为此先在球面上任取一点 $\underline{C}'$ ，做为初值，过 $\underline{C}'$ 作球的切平面 P 。求出 ψ 在 $\underline{C}'$ 的梯度

$\text{grad}\phi(\underline{C}')$ 。取 $\text{grad}\phi(\underline{C}')$ 在切平面 P 上的投影。求 $\phi(\underline{C})$ 在切平面 P 上沿着 $\text{grad}\phi(\underline{C}')$ 投影方向的直线上的极小。联结极小点与球心，求出联线与球面交点的坐标，将交点做为 $\underline{C}^{r+1}$ 。

$$\text{若 } \|\underline{C}^{r+1} - \underline{C}^r\| = \sqrt{\sum_{K=-N}^N (C_K^{r+1} - C_K^r)^2} < \delta,$$

其中 δ 为事先指定的收敛标准，则 $\underline{C}^{r+1}$ 即为所求极小点。反之以 $\underline{C}^{r+1}$ 为初值，重复以上步骤，直至收敛为止。

上述过程的数学表达如下，

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi(\underline{C}^r) &= \sum_{j=-N}^N \frac{\partial\phi(\underline{C}^r)}{\partial C_j} \underline{e}_j \\ &= \sum_{j=-N}^N \left(-B_j + \sum_{K=-N}^N A_{Kj} C_K^r \right) \underline{e}_j, \\ B_j &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H|\omega|} \cos(j2\pi\Delta x\omega) d\omega, \\ A_{Kj} &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H|\omega|} \cos[(K+j)2\pi\Delta x\omega] d\omega. \end{aligned}$$

显然 A_{Kj} 是对称的

$$\text{grad}_P\phi(\underline{C}^r) = \text{grad}\phi(\underline{C}^r) - \text{grad}_R\phi(\underline{C}^r),$$

$\text{grad}_P\phi(\underline{C}^r)$ 和 $\text{grad}_R(\underline{C}^r)$ 是 $\text{grad}\phi(\underline{C}^r)$ 在切平面 P 及其法线方向上的投影

$$\text{grad}_R\phi(\underline{C}^r) = \frac{\partial\phi(\underline{C}^r)}{\partial R} \sum_{K=-N}^N \left(\frac{C_K^r}{\sqrt{\sum_{i=-N}^N (C_i^r)^2}} \right) \underline{e}_K.$$

因而有

$$\text{grad}_P\phi(\underline{C}^r) = \sum_{j=-N}^N \left(\frac{\partial\phi(\underline{C}^r)}{\partial C_j} \right)$$

$$-\frac{\partial \phi(\underline{C}')}{\partial R} \sqrt{\sum_{j=-N}^N (C'_j)^2} \bigg) \underline{e}_j$$

$$= \sum_{j=-N}^N \mu_j(\underline{C}') \underline{e}_j.$$

沿着过球面上一点 $\underline{C}'$ 以 $-\text{grad}_p(\underline{C}')$ 为方向的直线所计算的步长由下式决定

$$\phi(\underline{C}' - \lambda \underline{\mu}(\underline{C}')) = \min,$$

$$\frac{\partial \phi(\underline{C}' - \lambda \underline{\mu}(\underline{C}'))}{\partial \lambda} = 0,$$

$$\lambda = \frac{P(\underline{C}')}{Q(\underline{C}')},$$

其中

$$P(\underline{C}') = - \sum_{j=-N}^N B_j \mu_j(\underline{C}') + \sum_{K=-N}^N \sum_{j=-N}^N C'_K A_{Kj} \mu_j(\underline{C}'),$$

$$Q(\underline{C}') = \sum_{K=-N}^N \sum_{j=-N}^N \mu_K(\underline{C}') \mu_j(\underline{C}') A_{Kj}.$$

用 $C_K^{r \cdot \min}$ 表示在过 $\underline{C}'$ 点以 $-\text{grad}_p \phi(\underline{C}')$ 为方向的直线上所求得的 $\phi(\underline{C})$ 极小点的坐标, 则这一点与原点联线和球面的交点为

$$C_K^{r+1} = - \frac{\epsilon}{\sqrt{\sum_{K=-N}^N (C_K^{r \cdot \min})^2}} C_K^{r \cdot \min},$$

$$K = -N, \dots, N.$$

至此, 算法的数学描述完毕。

三、讨论

要应用上述滤波方法, 还必须回答一系列问题, 诸如: 数据间隔 Δx 如何选择, 点数 N 如何确定, 信号的畸变程度如何等等。

为此乃都(Naidu, P.S.)进行了一系列数字实验。对于一个给定的噪声缩减因子,选择一系列不同的 N 和 Δx 进行计算。除计算系数外,还算出相应的 $\psi_{\min}$ 做为信号畸变程度的度量。结果如图2—8所示。

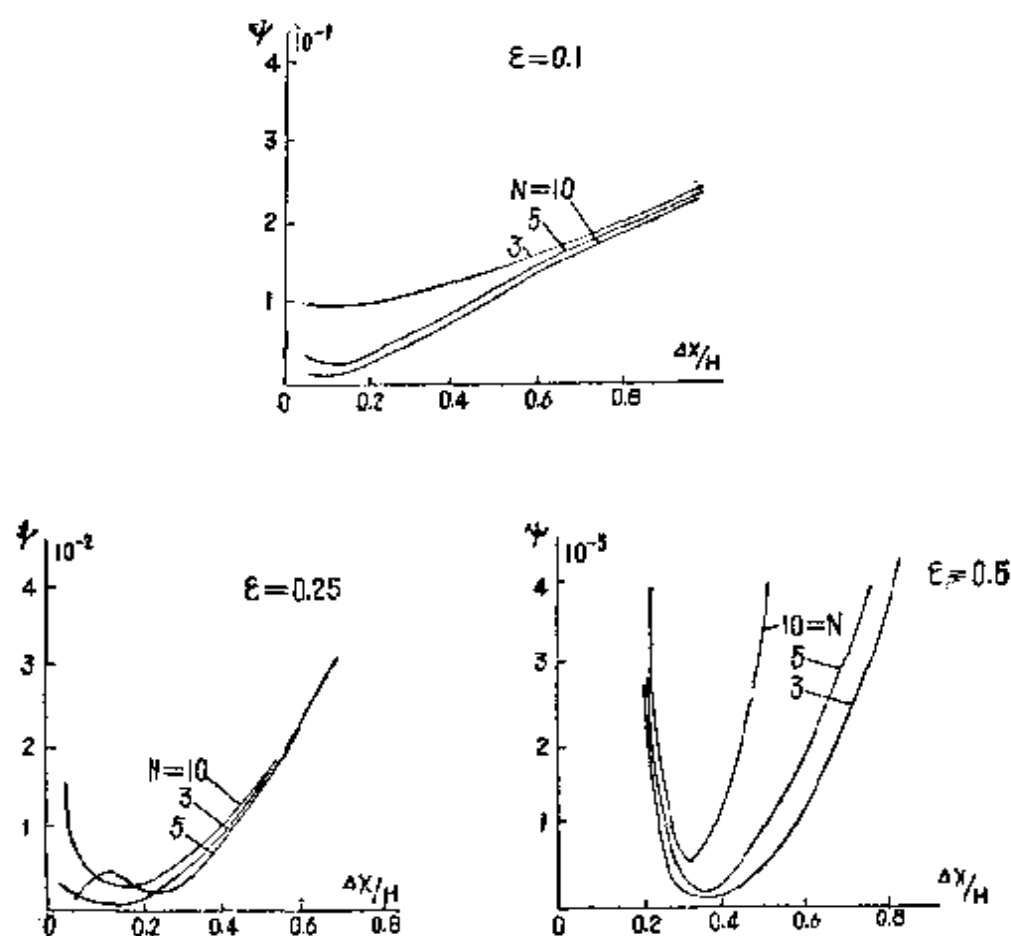


图 2—8 数据间隔 Δx 、点数 N 对信号畸变程度的影响

由实验结果得出以下三点结论:

1. 对于确定的噪声缩减因子而言,有一个最优的 Δx ,使畸变最小。
2. 当噪声缩减因子依次取值0.1、0.25、0.5时,与最优的 N 和 Δx 相应的 ψ 极小值是递减的,每次的减小大于一个量级。

3. 一般说来, 增加 N 不能永远保证 ϕ 降低。

乃都还给出了滤波器频谱特征的图象图(2—9)。由图可见, 当系数数目少时, 对小的噪声缩减因子而言, 低频部分被压制, 但当噪声缩减因子大时, 同样数目的系数就可以使低频部分较好地通过。

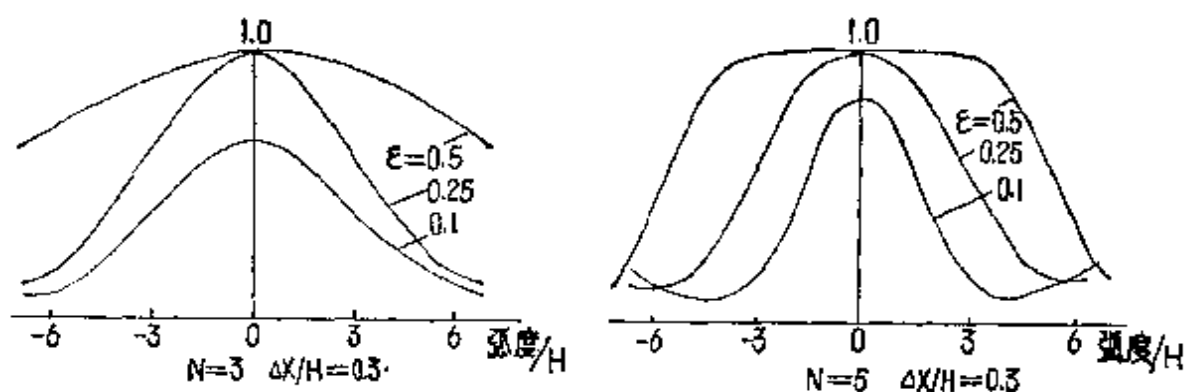


图 2—9 滤波器的频谱特征

我们也利用本节二中叙述的方法进行了试算。从初步结果看来, 在选择滤波器参数时应注意以下条件, 即

$$\epsilon \geq \frac{1}{\sqrt{2N+1}}, \quad (3.12)$$

否则所得到的滤波器会使信号有很大的畸变, 因而实际是不可用的。需要满足条件 (3.12) 的大致理由如下:

从经验与直观来说, 很容易承认一组较好的圆滑系数应满足 $\sum_K C_K \approx 1$ 的条件, 而对本节所介绍的滤波方法而言, 还有一个限制是 $\sum_K C_K^2 = \epsilon^2$ 。因而, 为了保证这两个条件有可能同时成立, 必须注意条件 (3.12)。

从条件 (3.12) 可以看出, ϵ 选择过小是不适宜的, 此时要保证较小的畸变, 则必须应用很大的 N 。以 $\epsilon=0.1$ 为例, 要满足 (3.12) 必须 $N \geq 50$, 显然这是没有实际意义的。

还要说明的一点是,图2—8所示的畸变指标,只是比较不同参数滤波器优劣的相对标志。对于 $\epsilon=0.1$, $N=3, 5, 10$ 而言,上述滤波方法所造成的畸变实际是很大的,这一点从它们不满足条件(3.12)也可以推断出来。

下面简单介绍一下所谓等效高度的问题。由应用B.H.斯特拉霍夫滤波的实际例子看到,圆滑后曲线的主要部分低于应有的数值。 ϵ 越小偏离越多。这启示我们可否不把滤波后的曲线看做原测线上的位场近似值,而看成是比原测线水平高出某一距离 ΔH 处的位场近似值,以减小滤波后的场与真实场的差异。

用数学语言表达,这也就是说,能否确定这样的一个数 $\Delta H > 0$,使得

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f(x, \Delta H) - A_{N, \Delta x} \{f(x, 0)\})^2 dx = \min,$$

ΔH 即称为等效高度。

利用与前面完全类似的推导得出如下确定 ΔH 的条件,即

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi H |\omega|} \left(e^{-2\pi \Delta H |\omega|} - \sum_{-N}^N C_K e^{-i2\pi \Delta x K \omega} \right)^2 d\omega = \min. \quad (3.13)$$

需要注意的是,此时 C_K ($K = -N, \dots, N$) 已经是确定的值,要求的是 ΔH 。将(3.13)式对 ΔH 微分,令其为零,得到了对 ΔH 的下述方程:

$$\frac{1}{4(H + \Delta H)^2} = - \sum_{-N}^N C_K \frac{K^2(\Delta x)^2 - (2H + \Delta H)^2}{[(2H + \Delta H)^2 + K^2(\Delta x)^2]^2},$$

或

$$\frac{(2H + \Delta H)^2}{4(H + \Delta H)^2} = - \sum_{-N}^N C_K \frac{\left[\frac{(K\Delta x)^2}{(2H + \Delta H)^2} - 1 \right]}{\left[\frac{(K\Delta x)^2}{(2H + \Delta H)^2} + 1 \right]^2}.$$

要得到 ΔH ,应求解这一方程,当然这是一件比较麻烦的事。因此对于较小的 N 和 Δx ,乃都给出了如下的近似公式

$$\frac{(2H + \Delta H)^2}{4(H + \Delta H)^2} \approx 0.9 \sum_{-N}^N C_K,$$

或
$$\Delta H \approx \frac{-2H[1 - (0.9 \sum C_K)^{1/2}]}{[1 - 2(0.9 \sum C_K)^{1/2}]}.$$

对于较大的 N 和 Δx 而言, 这一公式是不适用的。

四、数值例子

下面的几组滤波系数, 仅供同志们参考。一维是我们试算的结果, 二维是乃都的结果。

一维:

$$\varepsilon = 0.25, N = 10, \Delta x/H = 0.1.$$

$$C_0 = 0.1832 \quad C_1 = 0.0462 \quad C_2 = 0.0453$$

$$C_3 = 0.0439 \quad C_4 = 0.0420 \quad C_5 = 0.0397$$

$$C_6 = 0.0371 \quad C_7 = 0.0343 \quad C_8 = 0.0314$$

$$C_9 = 0.0286 \quad C_{10} = 0.0258$$

$$\varepsilon = 0.5, N = 3, \Delta x/H = 0.1.$$

$$C_0 = 0.4452 \quad C_1 = 0.0944 \quad C_2 = 0.0932 \quad C_3 = 0.0911$$

$$\varepsilon = 0.5, N = 3, \Delta x/H = 0.2.$$

$$C_0 = 0.4410 \quad C_1 = 0.1167 \quad C_2 = 0.0968 \quad C_3 = 0.0689$$

二维:

$$\Delta x = \Delta y = 0.25H, N = 2, \varepsilon = 0.1.$$

N			
↑	0.01929	0.01460	-0.00208
	0.04471	0.03668	0.01460
	0.05461	0.04471	0.01929
→ N			

$$\Delta x = \Delta y = 0.25H, N = 4, \varepsilon = 0.1;$$

N					
↑	-0.00800	-0.00708	-0.00977	-0.01523	-0.02243
	-0.00984	0.00904	0.00366	0.00494	-0.01523

0.02629	0.02368	0.01549	0.00366	-0.00977
0.03852	0.03436	0.02368	0.00904	-0.00708
0.04356	0.03852	0.02629	-0.00984	-0.00800

→ N

一维滤波系数对中心点对称,因而只列出一半系数。 $N=10$ 指21点圆滑系数。二维滤波系数只列出一个象限的数据, $N=2$ 指25点圆滑系数。

图2—10是我们利用斯特拉霍夫滤波方法对理论模型计算的结果。

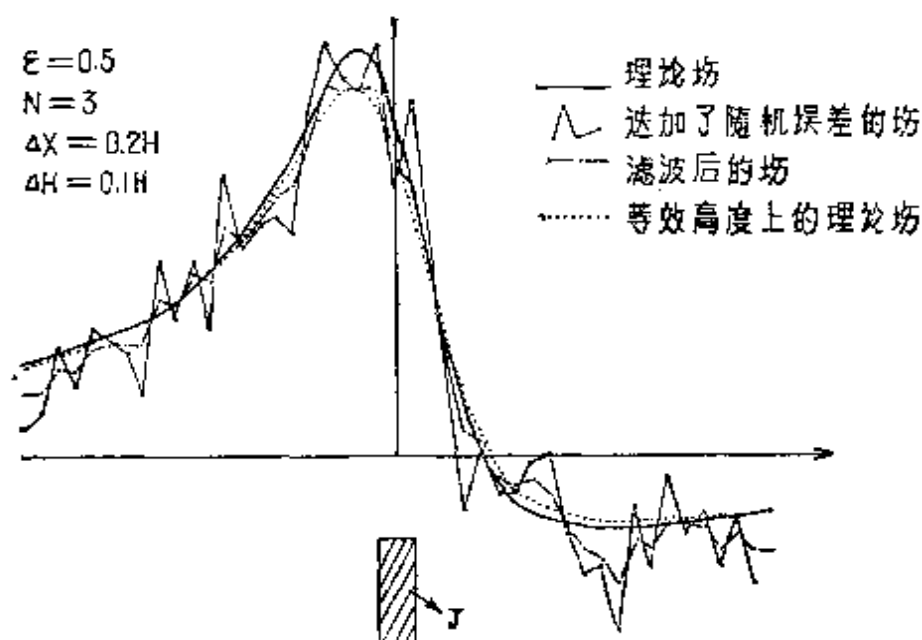


图 2—10 应用斯特拉霍夫方法对理论模型的试算结果

五、斯特拉霍夫滤波器计算框图

在实际计算一组滤波系数之前,尚需进一步处理公式。例如,由于对称性,只要考虑一半的滤波系数;又 B_i 及 A_{kj} 均可化为简单的有限形式等等。因此,框图2—11仅供程序设计时参考之用。

§ 4 积分插值法解析延拓

在物探资料的处理工作中,自采用了电子计算机后,位场的

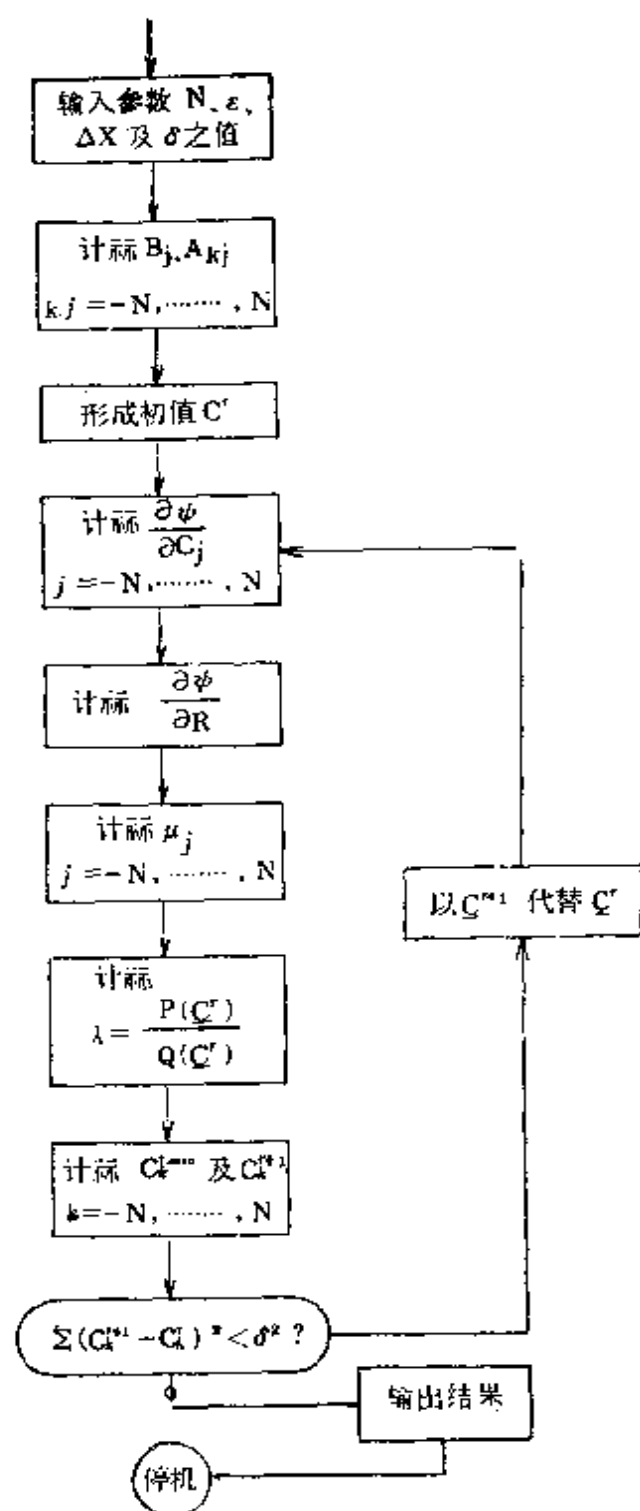


图 2—11 斯特拉霍夫滤波系数计算框图

解析延拓方法，得到了较以前广泛和有效的应用。然而，“一个正确的认识，往往需要经过由物质到精神，由精神到物质，即由实践到认识，由认识到实践这样多次的反复，才能够完成。”对

目前解析延拓方法的认识还需要人们在实践中不断深化, 方法本身也有待进一步改进、完善。

在讨论积分插值法延拓前, 先讨论一下位场解析延拓问题的提出及其解决途径。

1. 在重磁方法找矿工作中, 原始资料通常是从野外测得的一个观测面(或线)上的重磁场分布。有效地利用这些原始资料来确定场源的性质(矿与非矿)、形状、大小、空间位置等, 是物探人员的主要任务。在试图解决这个问题过程中, 产生了很多解释方法, 位场的解析延拓就是其中的一个。

根据野外获得的一个观测面上的位场数值去确定观测面周围除场源以外空间位置上的位场数值, 就是位场的解析延拓。

习惯上称确定观测面以上空间位场数值的过程为向上延拓, 确定观测面以下空间位场数值的过程为向下延拓。

众所周知, 当观测面是平面且充分大时, 这样一个物理模型可抽象成解如下的数学物理方程边值问题, 即所谓狄氏问题, (此方程通常称为拉普拉斯方程)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial z^2} = 0 \\ Z(x, y, z) \Big|_{z=0} = Z(x, y, 0) \\ Z(x, y, z) \Big|_{z=-\infty} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

其中 $Z(x, y, z)$ 为位场函数, $Z(x, y, 0)$ 为观测面上位场函数, 坐标系取如图 2—12 所示。

从数学上知, 上半空间 ($z < 0$ 时), 其解为

$$Z(x, y, z) = \frac{-1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{z Z(\xi, \eta, 0) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2]^{3/2}} \quad (4.2)$$

由此可知, 确定上半空间位场数值, 实际上归结为求解上面的积分问题。因此向上半空间延拓, 原则上是完整地解决了的。

向下半空间延拓, 由于包含场源而且场源情况又属未知, 问题就困难得多。

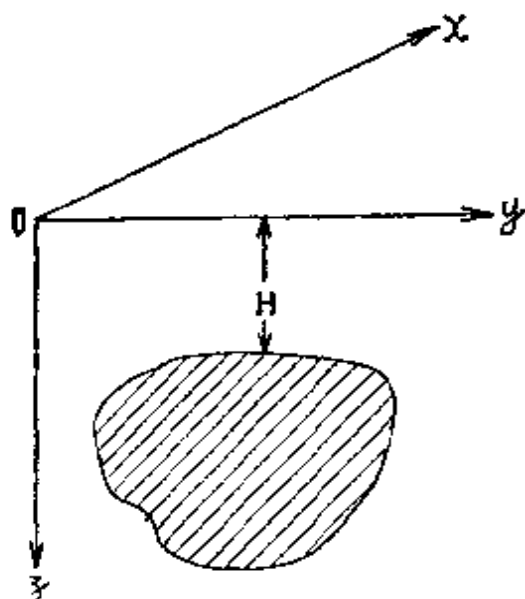


图 2—12 向上延拓坐标系的选取

2. 我们知道, 场源以上、地表以下空间的位场仍然满足拉普拉斯方程, 也就是要求解如下的边值问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z(x, y, z)}{\partial z^2} = 0, \\ Z(x, y, z) \Big|_{z=0} = Z_0(x, y) \end{cases} \quad (4.3)$$

其中 H 为场源到地表的距离。

由数学上知, 这一提法在古典意义下是不适定的, 即边值条件 $Z_0(x, y)$ 有极细微的变化, 所得的解可以变化很大。而野外实测资料总是近似的, 与真正的客观实际总有某种精度范围内的误差。出现上述情况, 就会使人们弄不清那一个是真正反映实际的解。下面用数学表达式说明这一事实。设 $Z_1(x, y, z)$ 为如下边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0, \\ Z(x, y, z) \Big|_{z=0} = Z_1(x, y) \end{cases}$$

的解。当边界条件有一如下形式的误差时,

$$Z(x, y, z) \Big|_{z=0} = Z_1(x, y) + \epsilon \cos Mx \cos Ny,$$

其中 ε 为测量精度范围内的误差, M, N 是任意的正整数。不难验证, 此时解为

$$Z(x, y, z) = Z_1(x, y, z) + \varepsilon e^{(M^2 + N^2)^{1/2} z} \cos Mx \cos Ny.$$

当 $0 < z < H$ 时, 尽管 ε 很小, 只要 M, N 取得充分大, 则 $Z(x, y, z)$ 与 $Z_1(x, y, z)$ 的差可以任意大。可以看出, 这个问题用目前这样的数学提法来进行位场向下延拓有实质性的困难。

3. 针对上面的分析可以看出, 要想有效地进行位场向场源一侧的解析延拓, 需修改数学提法, 以近似地刻划物理模型。本章内只是介绍两类可能的途径。其一是基于解狄氏外问题, 利用了位场分布与场源的埋深有关的物理性质进行积分插值法解析延拓, 其二是压制高频干扰的级数型正则化法解析延拓。

一、积分插值法解析延拓的数学物理基础

为使讨论方便起见, 不失一般性, 位场函数设为磁力异常强度垂直分量 Z 。

我们知道, 在无场源的上半空间延拓问题可用 (4.1) 式表达。观测平面上的 Z 确定后, 上半空间的 Z 就可以准确地求得。

另一方面, 由场的物理性质知, 磁力异常强度分量 Z , 在极值附近可粗略地表示为 h, N, J, V 的函数

$$Z = \frac{CJV}{h^N} \quad (4.4)$$

式中 h ——磁性体顶面深度 (或中心深度);
 N ——决定磁性体形态的一个指数 $N \leq 3$;
 J ——磁性体的磁化强度;
 V ——磁性体的体积;
 C ——某个可变的常数。

此式是对一些简单几何形状磁性体引起的磁异常解析表达式分析后得出的定性的近似估计。以下, 我们将利用这些数学和物理性质、特点, 推导出对位场解析延拓的积分插值法数值计算公式。

当把计算点在平面上的位置定为柱坐标原点时, (4.2) 式

柱坐标形式的积分为

$$Z(0, 0, z) = \frac{-1}{2\pi} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{Z(r, \theta, 0) r z d\theta dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (4.5)$$

设

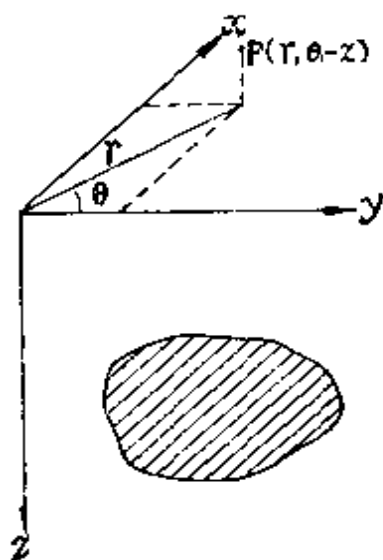


图 2—13 向上延拓应用的柱坐标系

$$\bar{Z}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(r, \theta, 0) d\theta \quad (4.6)$$

$$\text{则 } Z(0, 0, z) = \int_0^{\infty} \frac{-\bar{Z}(r) z r dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (4.7)$$

根据场的性质，足够远处的影响可以忽略不计。

因而

$$Z(0, 0, z) \approx \int_0^{r_N} \frac{-\bar{Z}(r) z r dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}}. \quad (4.8)$$

分段积分，并运用两次积分中值定理，得：

$$\begin{aligned} Z(0, 0, z) &\approx \sum_{i=1}^{N-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{-\bar{Z}(r) z r dr}{[r^2 + z^2]^{3/2}} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \bar{Z}(r_i + \mu_i(r_{i+1} - r_i)) \int_{r_i}^{r_{i+1}} \frac{-z r}{[r^2 + z^2]^{3/2}} dr \\ &= - \sum_{i=1}^{N-1} \bar{Z}(r_i + \mu_i(r_{i+1} - r_i)) z [(r_i^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - (r_{i+1}^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \\ &\approx - \sum_{i=1}^{N-1} [(r_{i+1} - r_i)^{-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \bar{Z}(r) dr] \\ &\quad \times z [(r_i^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - (r_{i+1}^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}] \end{aligned} \quad (4.9)$$

其中 $0 \leq \mu_i \leq 1$, $0 \leq r_i < r_{i+1}$, $i=1, 2, \dots, N-1$ 。

当 $\bar{Z}(r)$ 在相应的积分区间 $[r_i, r_{i+1}]$ 上用插值公式代替时, 最后可得

$$Z(0, 0, z) \approx \sum_{i=1}^N K_i(r_1, \dots, r_N, z) \bar{Z}(r_i) \quad (4.10)$$

其中 $\bar{Z}(r_i)$ 为观测平面上半径为 r_i 的圆周上磁场的平均值, $K_i(r_1, \dots, r_N, z)$ 为向上延拓系数。(4.10) 就是向上延拓的近似公式。

在场源顶面深度 (或中心深度) 以上及其与观测平面下部之间带状区域内磁场的垂直变化, 根据前面的分析, 可近似地用某一类型曲线来刻划。为简便起见, 用一四次多项式来逼近。

设已知离坐标原点垂直距离为 $z = 0, -a', -2a', -3a', -4a'$ 的五点上的场值 $Z(0, 0, 0), Z(0, 0, -a'), Z(0, 0, -2a'), Z(0, 0, -3a'), Z(0, 0, -4a')$ 。以此构成一个四次插值多项式, 则观测平面以下的场值可通过插值公式外推计算。其算式如下:

$$Z(0, 0, z) = \sum_{m=0}^4 \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja') Z(0, 0, -ma')}{(-1)^m m! (4-m)! a'^4 (z + ma')} \quad (4.11)$$

将 $Z(0, 0, -ma')$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned} Z(0, 0, z) = & \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja') \bar{Z}(r_1)}{4! a'^4 z} \\ & + \sum_{m=1}^4 \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja') \left\{ \sum_{i=1}^N K_i(r_1, r_2, \dots, r_N, ma') \bar{Z}(r_i) \right\}}{(-1)^m m! (4-m)! a'^4 (z + ma')} \end{aligned}$$

注意此时 $Z(0, 0, 0) = \bar{Z}(0) = \bar{Z}(r_1)$, 上式整理后得

$$Z(0, 0, z) = \sum_{i=1}^N D_i(r_1, r_2, \dots, r_N, z) \bar{Z}(r_i) \quad (4.12)$$

$$\text{其中 } D_1(r_1, \dots, r_N, z) = \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja')}{4! a'^4 z} + \sum_{m=1}^4 \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja') K_1(r_1, \dots, r_N, ma')}{(-1)^m m! (4-m)! a'^4 (z + ma')}, \quad (4.13)$$

$$D_i(r_1, \dots, r_N, z) = \sum_{m=1}^4 \frac{\prod_{j=0}^4 (z + ja') K_i(r_1, \dots, r_N, ma')}{(-1)^m m! (4-m)! a'^4 (z + ma')}, \quad i=2, \dots, N. \quad (4.14)$$

(4.12) 为向下延拓近似公式。

由(4.10)和(4.12)可看出, 一旦得到了观测平面 N 个圆周上的场的平均值, 那么只要乘以相应的系数, 就能很容易地得出向上延拓或向下延拓的值。

二、算法的具体方案

上面介绍了用积分插值法进行延拓的数学物理基础, 下面给出一个具体的算法方案。对此, 侧重于讨论如何根据实际情况拟订方案中的几个问题。

设观测平面上以点距为单位的方形网格交点(以下简称结点)处的场值已给出。

1. 最大分环半径 r_N 的选取

从前述知, 要计算某一点延拓后的场值, 需要知道半径为 r_N 范围内的场值。从积分公式(4.7)、(4.8)来看, 最大半径 r_N 选得越大, 误差越小, 但延拓后损失的面积也越大。要既考虑到一定的计算精度, 又考虑到尽量少损失一些有效面积, 根据我们的实践经验, 最大半径 r_N 应取为 $\sqrt{136}$ 个点距。

2. 环半径 $r_1, r_2, \dots, r_N$ 的分布

积分插值法延拓的近似计算公式, 是观测平面上半径为 r_i 圆

周上的磁场平均值乘以相应的系数之和。因此，各环圆半径的分布合理不合理对计算结果有很大的影响。

从场的性质知，离计算点近的影响大，远的影响小，圆半径间隔应该逐步变稀。

我们在 $r_1=0$ 到 $r_N=\sqrt{136}$ (点距为单位，以下略) 中间取了 8 个半径值。总共取 10 个半径值为：0, 0.5, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, 5, $\sqrt{50}$, $\sqrt{136}$ 。

3. 分环上点的选取

圆的半径定了以后，磁场的平均值就取决于各环圆周上点的选取。本着准确度与计算量统一的原则，通常取有代表性的若干点的场值的算术平均。

假设以所要计算的点的平面位置坐标为圆心，其坐标为 (i, j) ，即位于沿测线方向第 j 点、垂直测线方向第 i 点上。为简便起见，该点的磁场值记为 $Z(i, j)$ ，且设点距为 1 个单位，各环坐标分别列于下，

在半径 $r_1=0$ 的圆周上 (此时退化为一点) 取 1 点，坐标为 (i, j) ；

在半径 $r_2=0.5$ 的圆周上取 4 点，坐标为

$$(i + \frac{1}{2}, j), (i - \frac{1}{2}, j), \\ (i, j + \frac{1}{2}), (i, j - \frac{1}{2});$$

在半径 $r_3=1$ 的圆周上取 4 点，坐标为

$$(i + 1, j), (i - 1, j), \\ (i, j + 1), (i, j - 1);$$

在半径 $r_4=\sqrt{2}$ 的圆周上取 8 点，坐标为

$$(i + \sqrt{2}, j), (i - \sqrt{2}, j), \\ (i, j + \sqrt{2}), (i, j - \sqrt{2}), \\ (i + 1, j + 1), (i + 1, j - 1), \\ (i - 1, j + 1), (i - 1, j - 1);$$

在半径 $r_5=\sqrt{5}$ 的圆周上取 12 点，坐标为

$$(i + \sqrt{5}, j), (i - \sqrt{5}, j),$$

$$\begin{aligned}
& (i, j + \sqrt{5}), (i, j - \sqrt{5}), \\
& (i + 2, j + 1), (i + 2, j - 1), \\
& (i + 1, j + 2), (i + 1, j - 2), \\
& (i - 1, j + 2), (i - 1, j - 2), \\
& (i - 2, j + 1), (i - 2, j - 1),
\end{aligned}$$

在半径 $r_6 = \sqrt{8}$ 的圆周上取 8 点, 坐标为

$$\begin{aligned}
& (i + \sqrt{8}, j), (i - \sqrt{8}, j), \\
& (i, j + \sqrt{8}), (i, j - \sqrt{8}), \\
& (i + 2, j + 2), (i + 2, j - 2), \\
& (i - 2, j + 2), (i - 2, j - 2),
\end{aligned}$$

在半径 $r_7 = \sqrt{13}$ 的圆周上取 12 点, 坐标为

$$\begin{aligned}
& (i + \sqrt{13}, j), (i - \sqrt{13}, j), \\
& (i, j + \sqrt{13}), (i, j - \sqrt{13}), \\
& (i + 3, j + 2), (i + 3, j - 2), \\
& (i + 2, j + 3), (i + 2, j - 3), \\
& (i - 2, j + 3), (i - 2, j - 3), \\
& (i - 3, j + 2), (i - 3, j - 2),
\end{aligned}$$

在半径 $r_8 = 5$ 的圆周上取 12 点, 坐标为

$$\begin{aligned}
& (i + 5, j), (i - 5, j), \\
& (i, j + 5), (i, j - 5), \\
& (i + 4, j + 3), (i + 4, j - 3), \\
& (i + 3, j + 4), (i + 3, j - 4), \\
& (i - 3, j + 4), (i - 3, j - 4), \\
& (i - 4, j + 3), (i - 4, j - 3),
\end{aligned}$$

在半径 $r_9 = \sqrt{50}$ 的圆周上取 12 点, 坐标为

$$\begin{aligned}
& (i + 7, j + 1), (i + 7, j - 1), \\
& (i + 5, j + 5), (i + 5, j - 5), \\
& (i + 1, j + 7), (i + 1, j - 7), \\
& (i - 1, j + 7), (i - 1, j - 7), \\
& (i - 5, j + 5), (i - 5, j - 5),
\end{aligned}$$

$(i-7, j+1), (i-7, j-1),$
 在半径 $r_{10} = \sqrt{136}$ 的圆周上取 8 点, 坐标为
 $(i+10, j+6), (i+10, j-6),$
 $(i+6, j+10), (i+6, j-10),$
 $(i-6, j+10), (i-6, j-10),$
 $(i-10, j+6), (i-10, j-6)。$

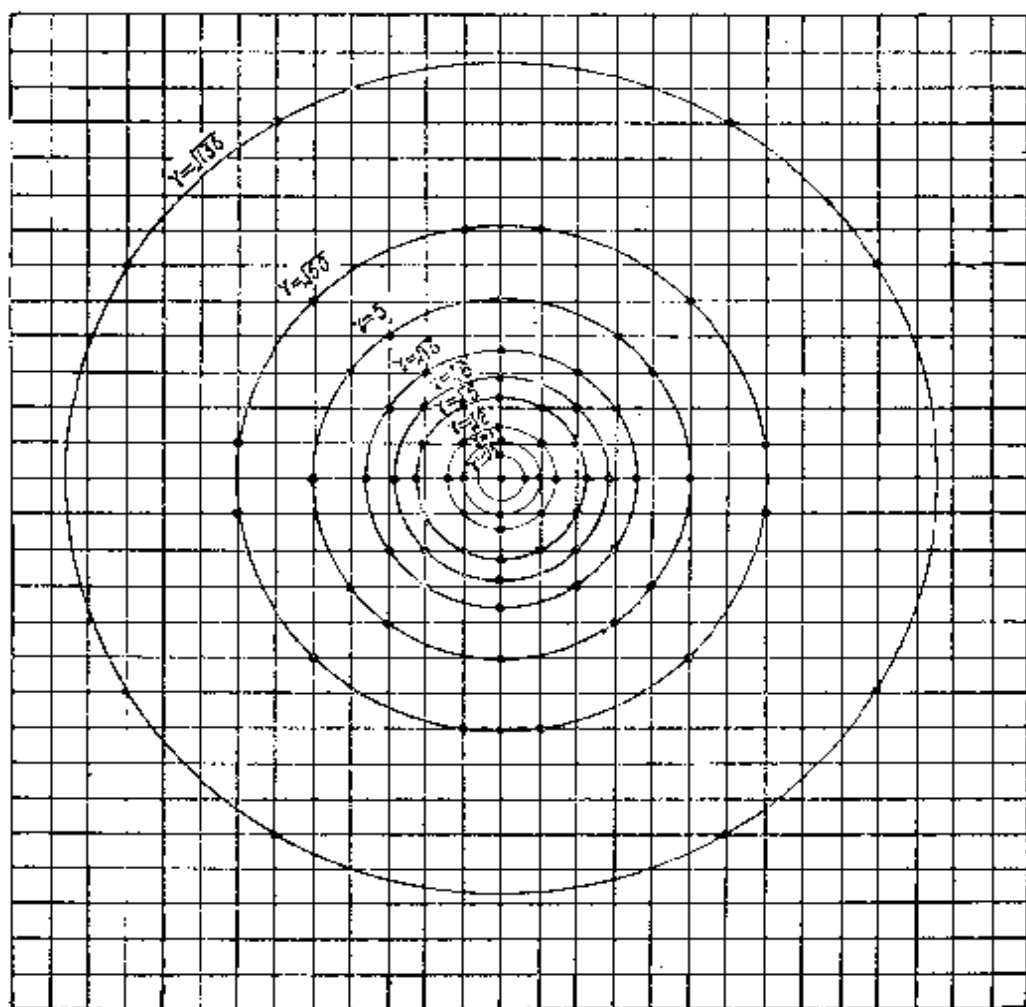


图 2-14 三度延拓取值点分布图

4. 各环上平均场值的计算

由于只在方形网格交点上给出场值, 当所选取的点不在结点
 上时, 就需用插值方法插出。考虑到这种点有对称性, 为简便起
 见, 可近似地用一元高次拉格朗日插值。今将计算各个圆周上平
 均场值的公式列如下。为保留导出过程, (4.15) 式中未归并,

$$\begin{aligned}
Z(r_1) &= Z(0) = Z(i, j), \\
\overline{Z}(r_2) &= \overline{Z}(0.5) = \frac{1}{4} \{ 0.01171875 [Z(i-3, j) + Z(i-2, j) \\
&\quad + Z(i+2, j) + Z(i+3, j) + Z(i, j-3) + Z(i, j-2) \\
&\quad + Z(i, j+2) + Z(i, j+3)] - 0.09765625 [Z(i-2, j) \\
&\quad + Z(i-1, j) + Z(i+1, j) + Z(i+2, j) + Z(i, j-2) \\
&\quad + Z(i, j-1) + Z(i, j+1) + Z(i, j+2)] + 0.5859375 \\
&\quad [Z(i-1, j) + 4Z(i, j) + Z(i+1, j) + Z(i, j-1) \\
&\quad + Z(i, j+1)] \}, \\
\overline{Z}(r_3) &= \overline{Z}(1) = \frac{1}{4} [Z(i+1, j) + Z(i, j+1) + Z(i-1, j) \\
&\quad + Z(i, j-1)], \\
\overline{Z}(r_4) &= \overline{Z}(\sqrt{2}) = \frac{1}{8} \{ Z(i+1, j+1) + Z(i-1, j+1) \\
&\quad + Z(i-1, j-1) + Z(i+1, j-1) + 0.0109475713 \\
&\quad [Z(i+4, j) + Z(i-4, j) + Z(i, j+4) + Z(i, j-4)] \\
&\quad - 0.0892556560 [Z(i+3, j) + Z(i-3, j) + Z(i, j+3) \\
&\quad + Z(i, j-3)] + 0.483249202 [Z(i+2, j) + Z(i-2, j) \\
&\quad + Z(i, j+2) + Z(i, j-2)] + 0.683417470 [Z(i+1, j) \\
&\quad + Z(i-1, j) + Z(i, j+1) + Z(i, j-1)] - 0.100084180 \\
&\quad [4Z(i, j)] + 0.0117255910 [Z(i-1, j) + Z(i+1, j) \\
&\quad + Z(i, j-1) + Z(i, j+1)] \}, \\
\overline{Z}(r_5) &= \overline{Z}(\sqrt{5}) = \frac{1}{12} \{ Z(i+2, j+1) + Z(i+1, j+2) \\
&\quad + Z(i-1, j+2) + Z(i-2, j+1) + Z(i-2, j-1) \\
&\quad + Z(i-1, j-2) + Z(i+1, j-2) + Z(i+2, j-1) \\
&\quad + 0.00732689193 [Z(i+5, j) + Z(i-5, j) + Z(i, j+5) \\
&\quad + Z(i, j-5)] - 0.0574030945 [Z(i+4, j) + Z(i-4, j) \\
&\quad + Z(i, j+4) + Z(i, j-4)] \\
&\quad + 0.265089446 [Z(i+3, j) + Z(i-3, j) \\
&\quad + Z(i, j+3) + Z(i, j-3)] + 0.857847360 [Z(i+2, j) \\
&\quad + Z(i-2, j) + Z(i, j+2) + Z(i, j-2)] - 0.0819171400 \\
&\quad [Z(i+1, j) + Z(i-1, j) + Z(i, j+1) + Z(i, j-1)] \\
&\quad + 0.00905653632 \times 4Z(i, j) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r_6) = \overline{Z}(\sqrt{8}) = & \frac{1}{8}\{Z(i+2, j+2) + Z(i-2, j+2) \\ & + Z(i-2, j-2) + Z(i+2, j-2) + 0.00717651670 \\ & [Z(i+5, j) + Z(i-5, j) + Z(i, j+5) + Z(i, j-5)] \\ & - 0.0665102836 [Z(i+4, j) + Z(i-4, j) + Z(i, j+4) \\ & + Z(i, j-4)] + 0.908321138 [Z(i+3, j) + Z(i-3, j) \\ & + Z(i, j+3) + Z(i, j-3) + 0.188119500 [Z(i+2, j) \\ & + Z(i-2, j) + Z(i, j+2) + Z(i, j-2)] - 0.0426167638 \\ & [Z(i+1, j) + Z(i-1, j) + Z(i, j+1) + Z(i, j-1)] \\ & + 0.00550989247 \times 4Z(i, j)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r_7) = \overline{Z}(\sqrt{13}) = & \frac{1}{12}\{Z(i+3, j+2) + Z(i+2, j+3) \\ & + Z(i-2, j+3) + Z(i-3, j+2) + Z(i-3, j-2) \\ & + Z(i-2, j-3) + Z(i+2, j-3) + Z(i+3, j-2) \\ & + 0.0116114533 [Z(i+6, j) + Z(i-6, j) + Z(i, j+6) \\ & + Z(i, j-6)] - 0.0996918327 [Z(i+5, j) + Z(i-5, j) \\ & + Z(i, j+5) + Z(i, j-5)] + 0.704857930 [Z(i+4, j) \\ & + Z(i-4, j) + Z(i, j+4) + Z(i, j-4)] + 0.459135820 \\ & [Z(i+3, j) + Z(i-3, j) + Z(i, j+3) + Z(i, j-3)] \\ & - 0.0865840577 [Z(i+2, j) + Z(i-2, j) + Z(i, j+2) \\ & + Z(i, j-2)] + 0.0106706896 [Z(i+1, j) + Z(i-1, j) \\ & + Z(i, j+1) + Z(i, j-1)]\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r_8) = \overline{Z}(5) = & \frac{1}{12}\{Z(i+5, j) + Z(i+4, j+3) + Z(i+3, j+4) \\ & + Z(i, j+5) + Z(i-3, j+4) + Z(i-4, j+3) + Z(i-5, j) \\ & + Z(i-4, j-3) + Z(i-3, j-4) + Z(i, j-5) \\ & + Z(i+3, j-4) + Z(i+4, j-3)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{Z}(r_9) = \overline{Z}(\sqrt{50}) = & \frac{1}{12}\{Z(i+7, j+1) + Z(i+5, j+5) \\ & + Z(i+1, j+7) + Z(i-1, j+7) + Z(i-5, j+5) \\ & + Z(i-7, j+1) + Z(i-7, j-1) + Z(i-5, j-5) \\ & + Z(i-1, j-7) + Z(i+1, j-7) + Z(i+5, j-5) \\ & + Z(i+7, j-1)\},\end{aligned}$$

$$\overline{Z}(r_{10}) = \overline{Z}(\sqrt{136}) = \frac{1}{8}\{Z(i+10, j+6) + Z(i+6, j+10)$$

$$\begin{aligned}
& + Z(i-6, j+10) + Z(i-10, j+6) + Z(i-10, j-6) \\
& + Z(i-6, j-10) + Z(i+6, j-10) + Z(i+10, j-6) \}.
\end{aligned}
\tag{4.15}$$

5. 延拓系数

由 (4.10) 和 (4.12) 看出, 延拓值不但依赖于所取圆周上的磁场平均值, 还依赖于延拓系数。针对具体情况合理选择系数是很重要的, 为此给出系数公式的推导。

由公式 (4.9)

$$\begin{aligned}
Z(0, 0, -z) & \approx \sum_{i=1}^{N-1} \left[(r_{i+1} - r_i)^{-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \overline{Z}(r) dr \right] z \\
& \times \left[(r_i^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} - (r_{i+1}^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad 0 \leq r_i < r_{i+1}, \\
& i = 1, 2 \dots N-1
\end{aligned}$$

可以看出, $Z(0, 0, -z)$ 的精度在很大程度上将依赖于

$$(r_{i+1} - r_i)^{-1} \int_{r_i}^{r_{i+1}} \overline{Z}(r) dr.$$

若 $\overline{Z}(r)$ 在各区间上分别用如下的二次插值函数代替, 在 $[r_i, r_{i+1}]$ 上, 令

$$\begin{aligned}
P_2(r) & = \frac{(r - r_{i+1})(r - r_{i+2})}{(r_i - r_{i+1})(r_i - r_{i+2})} \overline{Z}(r_i) \\
& + \frac{(r - r_i)(r - r_{i+2})}{(r_{i+1} - r_i)(r_{i+1} - r_{i+2})} \overline{Z}(r_{i+1}) \\
& + \frac{(r - r_i)(r - r_{i+1})}{(r_{i+2} - r_i)(r_{i+2} - r_{i+1})} \overline{Z}(r_{i+2}), \quad i = 1, 2 \dots, N-2
\end{aligned}$$

在 $[r_{N-1}, r_N]$ 上, 令

$$\begin{aligned}
P_2(r) & = \frac{(r - r_{N-2})(r - r_N)}{(r_{N-1} - r_{N-2})(r_{N-1} - r_N)} \overline{Z}(r_{N-1}) \\
& + \frac{(r - r_{N-2})(r - r_{N-1})}{(r_N - r_{N-2})(r_N - r_{N-1})} \overline{Z}(r_N) \\
& + \frac{(r - r_{N-1})(r - r_N)}{(r_{N-2} - r_{N-1})(r_{N-2} - r_N)} \overline{Z}(r_{N-2})
\end{aligned}$$

将 $P_2(r)$ 代入 $\int_{r_i}^{r_{i+1}} \bar{Z}(r) dr$ 积分后, 可写为如下形式:

$$\int_{r_i}^{r_{i+1}} \bar{Z}(r) dr \approx \int_{r_i}^{r_{i+1}} P_2(r) dr = a_i \bar{Z}(r_i) + b_i \bar{Z}(r_{i+1}), \\ + c_i \bar{Z}(r_{i+2}), \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \quad (4.16)$$

及
$$\int_{r_{N-1}}^{r_N} \bar{Z}(r) dr \approx \int_{r_{N-1}}^{r_N} P_2(r) dr = a_{N-1} \bar{Z}(r_{N-1}), \\ + b_{N-1} \bar{Z}(r_N) + c_{N-1} \bar{Z}(r_{N-2}). \quad (4.17)$$

利用不定积分

$$\int (r-A)(r-B) dr = (r-A)^2 \left(-\frac{r}{3} - \frac{B}{2} + \frac{A}{6} \right)$$

其中 A, B 为常数, 可得

$$\left\{ \begin{aligned} a_i &= \frac{(r_i - r_{i+1}) \left(-\frac{r_i}{3} - \frac{r_{i+2}}{2} + \frac{r_{i+1}}{6} \right)}{r_{i+2} - r_i}, \\ b_i &= \frac{(r_i - r_{i+1}) \left(-\frac{r_{i+1}}{3} - \frac{r_{i+2}}{2} + \frac{r_i}{6} \right)}{(r_{i+2} - r_{i+1})}, \\ c_i &= \frac{(r_i - r_{i+1})^3}{6(r_{i+2} - r_i)(r_{i+2} - r_{i+1})}, \quad i = 1, 2, \dots, N-2. \end{aligned} \right. \quad (4.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} a_{N-1} &= \frac{(r_N - r_{N-1}) \left(-\frac{r_{N-1}}{3} - \frac{r_{N-2}}{2} + \frac{r_N}{6} \right)}{r_{N-1} - r_{N-2}}, \\ b_{N-1} &= \frac{(r_N - r_{N-1}) \left(-\frac{r_N}{3} - \frac{r_{N-2}}{2} + \frac{r_{N-1}}{6} \right)}{r_N - r_{N-2}}, \\ c_{N-1} &= \frac{(r_{N-1} - r_N)^3}{6(r_{N-2} - r_{N-1})(r_{N-2} - r_N)}. \end{aligned} \right. \quad (4.19)$$

将 (4.16)、(4.17)、(4.18)、(4.19) 代入 (4.9), 整理后可写为 (4.10) 的形式:

$$Z(0,0,-z) \approx \sum_{i=1}^N K_i(r_1, r_2, \dots, r_N, z) \overline{Z}(r_i),$$

$$\text{其中 } K_1(r_1, \dots, r_N, z) = \frac{a_1}{r_2 - r_1} z \left(\frac{1}{[r_1^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_2^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (4.20)$$

$$K_2(r_1, \dots, r_N, z) = \frac{a_2}{r_3 - r_2} z \left(\frac{1}{[r_2^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_3^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{b_1}{r_2 - r_1} z \left(\frac{1}{[r_1^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_2^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right), \quad (4.21)$$

$$K_i(r_1, r_2, \dots, r_N, z) = \frac{a_i}{r_{i+1} - r_i} z \left(\frac{1}{[r_i^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{i+1}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{b_{i-1}}{r_i - r_{i-1}} z \left(\frac{1}{[r_{i-1}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_i^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{c_{i-2}}{r_{i-1} - r_{i-2}} z \left(\frac{1}{[r_{i-2}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{i-1}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right), \quad i = 3, \dots, N-3, \quad (4.22)$$

$$K_{N-2}(r_1, \dots, r_N, z) = \frac{a_{N-2}}{r_{N-1} - r_{N-2}} z \left(\frac{1}{[r_{N-2}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{N-1}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{b_{N-3}}{r_{N-2} - r_{N-3}} z \left(\frac{1}{[r_{N-3}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{N-2}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{c_{N-4}}{r_{N-3} - r_{N-4}} z \left(\frac{1}{[r_{N-4}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{[r_{N-3}^2 + z^2]^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$-\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg)+\frac{c_{N-1}}{r_N-r_{N-1}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_N^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg), \quad (4.23)$$

$$K_{N-1}(r_1, \dots, r_N, z) = -\frac{a_{N-1}}{r_N-r_{N-1}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_N^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg)+\frac{b_{N-2}}{r_{N-1}-r_{N-2}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-2}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg)+\frac{c_{N-3}}{r_{N-2}-r_{N-3}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-3}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_{N-2}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg), \quad (4.24)$$

$$K_N(r_1, \dots, r_N, z) = -\frac{b_{N-1}}{r_N-r_{N-1}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_N^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg)+\frac{c_{N-2}}{r_{N-1}-r_{N-2}}z\Bigg(\frac{1}{[r_{N-2}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$-\frac{1}{[r_{N-1}^2+z^2]^{\frac{1}{2}}}\Bigg).$$

$$(4.25)$$

当 $r_1 \dots r_{10}$ 分别取为0, 0.5, 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{13}$, 5, $\sqrt{50}$, $\sqrt{136}$ 时, 对不同的 z 求得的向上延拓系数列表如下页。

对不同的 a' 和 z , 有了相应的向上延拓系数后, 从(4.13)、(4.14), 可求得向下延拓系数(见下页表)。

综上所述, 给出了一个计算延拓值的具体方案。在实际运用时, 应根据具体问题具体分析, 合理选择方案, 对野外资料进行延拓处理。

三、关于程序问题

根据给出的具体方案, 我们编制了DJS-6机算法语言的延拓程序, 该程序的框图附于后, 它有如下功能:

向上延拓系数表

i	r_i	$K_i(r_1 \cdots r_{10}, 1)$	$K_i(r_1 \cdots r_{10}, 2)$	$K_i(r_1 \cdots r_{10}, 3)$	$K_i(r_1 \cdots r_{10}, 4)$
1	0	0.0439886702	0.0124406248	0.0056691984	0.0032175512
2	0.5	0.1469672558	0.0508609750	0.0244885926	0.0141980638
3	1	0.1801796566	0.0852150798	0.0448171192	0.0270176016
4	$\sqrt{2}$	0.1233390162	0.0975833596	0.0630569308	0.0417219910
5	$\sqrt{5}$	0.1520580686	0.1455869648	0.1056331322	0.0744949112
6	$\sqrt{8}$	0.0533458722	0.0765063512	0.0714576388	0.0584120960
7	$\sqrt{13}$	0.0658577580	0.0990192116	0.1022636406	0.0917306046
8	5	0.0525993624	0.0847442302	0.0932036754	0.0864008444
9	$\sqrt{50}$	0.0765135788	0.1416036996	0.1885989834	0.2167815600
10	$\sqrt{136}$	0.0197149942	0.0374026514	0.0515746480	0.0615819332

注: r_i, z 以点距为单位。

向下延拓系数表

i	r_i	$D_i(r_1 \cdots r_{10}, 1)$	$D_i(r_1 \cdots r_{10}, 2)$	$D_i(r_1 \cdots r_{10}, 3)$	$D_i(r_1 \cdots r_{10}, 4)$
1	0	4.659391102	13.68030828	31.60012772	62.83545534
2	0.5	-1.069307706	-4.106682262	-10.52430952	-22.10083488
3	1	-1.147213762	-4.315430524	-10.92069820	-22.74114374
4	$\sqrt{2}$	-0.5311192280	-1.847065844	-4.443248668	-8.933438154
5	$\sqrt{5}$	-0.5183817896	-1.693629950	-3.899035244	-7.590636530
6	$\sqrt{8}$	-0.0672713100	-0.1139719434	-0.0873696286	-0.0835040652
7	$\sqrt{13}$	-0.0879730623	-0.1741201566	-0.2211397048	-0.1783698860
8	5	-0.0581628546	-0.0953681246	-0.0734046586	-0.0575687692
9	$\sqrt{50}$	-0.0752521488	-0.1305744706	-0.1413090592	-0.768084996
10	$\sqrt{136}$	-0.0194147360	-0.0353523466	-0.0438366918	-0.0399923604

注: 表中所算数值取的是: $a' = 1, r_i, z$ 以点距为单位。

1. 适用于任意矩形测网, 如 $100 \times 20, 100 \times 40, 100 \times 50, 100 \times 100$;
2. 可以进行任意的插点、插线或跳点 (线);
3. 可以做九点圆滑或二十五点圆滑;
4. 一次可以求四个深度的延拓值;
5. 可以打印原始数据的圆滑值。

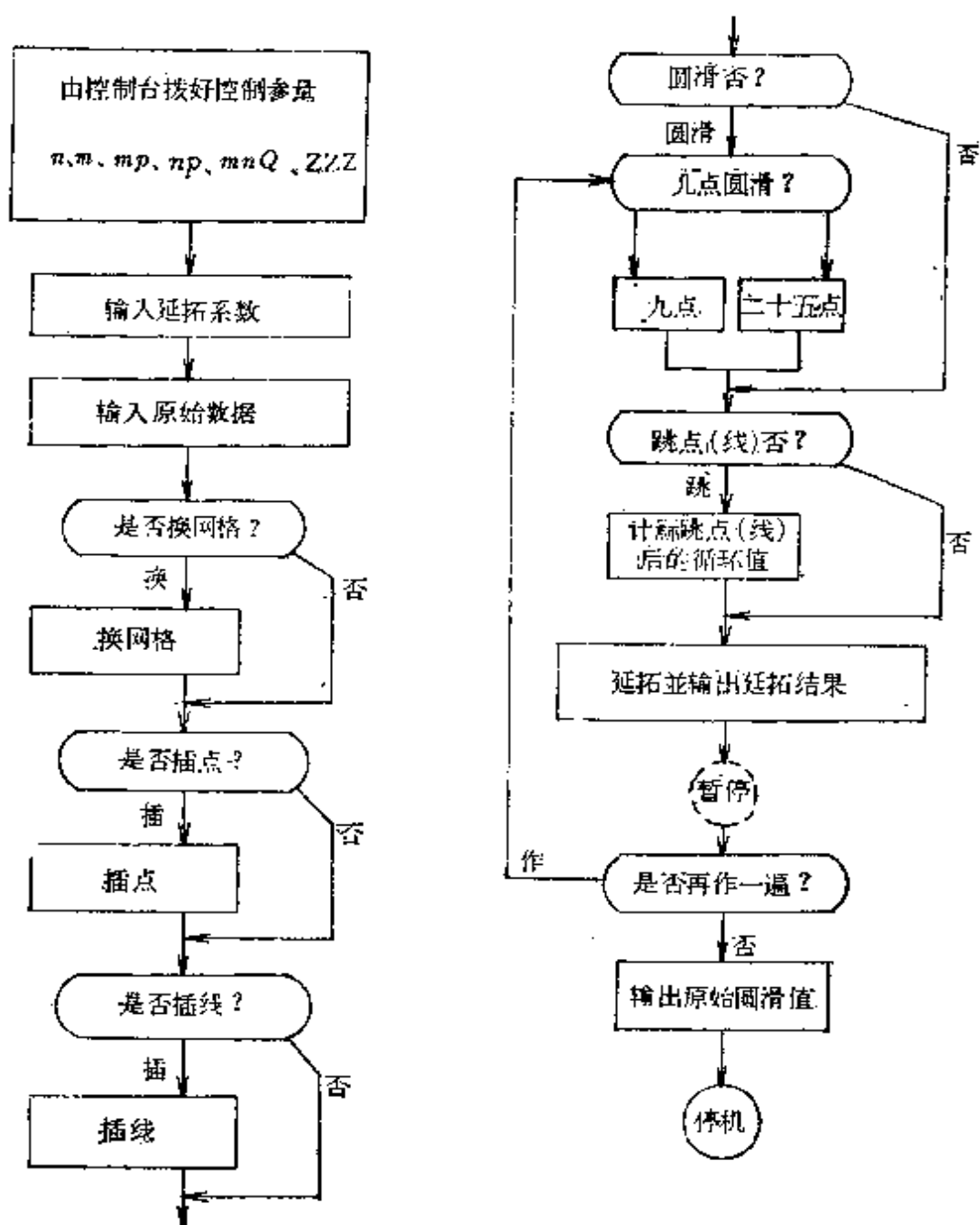


图 2-15 积分插值法延拓程序框图

n —每条线上的测点数; m —测线数; np —插点数; mp —插线数; mnQ —跳点(线)数; ZZZ —控制台变量, 用以控制是否算圆滑值, 几点圆滑, 是否作网格换算(指把 100×40 网格换成 100×50 网格)

四、方法验证与应用实例

1. 验证

对于三度的积分插值法延拓的可靠性, 在工作中作了一些航

测资料延拓的野外验证。验证是用地面核子旋进式磁力仪进行的。由于定位问题、零线问题给对比工作造成了一定困难，但即使

如此，在验证中仍能反映出一些规律性。

在分析的基础上选择了六种类型，作了六条检验剖面，其部分结果绘于图2—16至图2—18。

(1) 74线：下延100米在北面出现一峰，形成双峰异常，而原始曲线(即飞行高度100米时的 ΔT 曲线)没有此情况。经地面工作证实，下延100米的双峰是存在的。

(2) 82线：原始曲线有一双峰异常，峰值南高北低。下延100米后，情况反了过来，出现北高南低，经地面验证是正确的。

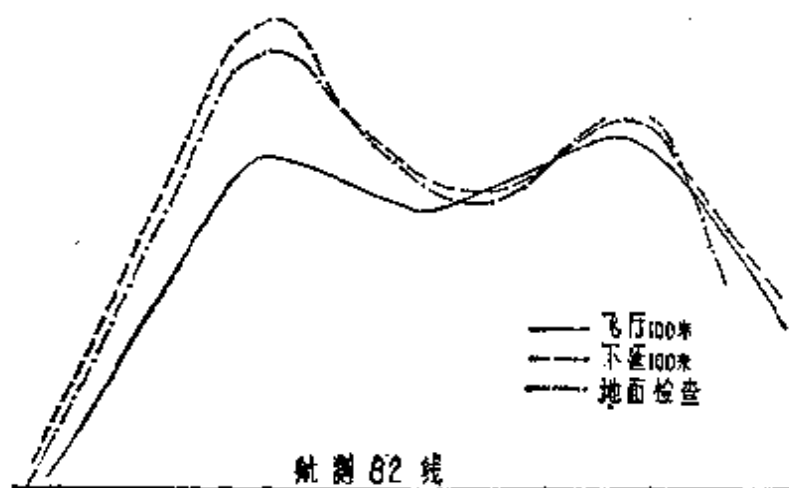
(3) 78线：原始曲线也为一双峰异常，南高北低。下延100米后还是南高北低，野外验证仍是这样。



— 飞行高度100米
- - 向下延拓100米
... 地面检查

图 2—16 航磁资料向下延拓结果与地面实测结果对比剖面之一

是南高北低，野外验证仍是这样。



— 飞行100米
- - 下延100米
... 地面检查

图 2—17 航磁资料向下延拓结果与地面实测结果对比剖面之二

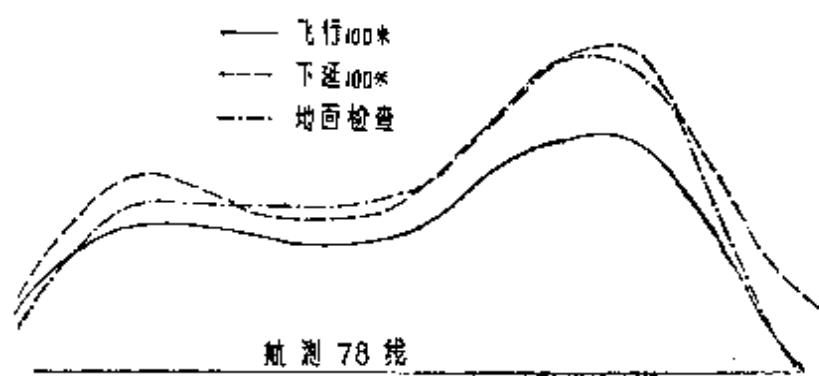


图 2—18 航磁资料向下延拓结果与地面实测结果对比剖面之三

2. 应用实例

例一. 某地区地形平坦, 属覆盖区。磁异常早在一九五九—一九六二年由地面1:2万重磁测量发现, 后又做了1:1万磁法测量。地面磁测 ΔZ 发现东部异常为较宽的低值异常, 峰值300~400 γ ; 西部为比较狭小的孤立异常, 峰值为500~800 γ 。对峰值较高的西部异常, 一九六四年又做了1:5000的地面磁测, 并从一九六五年起对该异常施钻验证, 结果大部分 钻孔均已见磁铁矿 (图 2—19)。东部磁异常当时未被重视。

一九七〇年, 开始研究东部异常。经 ZK201 和 ZK230 孔验证, 在300米以下见到了比较好的磁铁矿体, 厚达50余米, 因而又重新做精度较高的1:5000的地面磁测。

工作结果, 东部异常 峰值最大为400 γ 左右, 但异常比较规则, 且有一定的范围。原来推断认为矿体向东或东南延伸, 布了ZK231和ZK209孔验证, 均落空。又布北部的ZK211、ZK202和ZK203三个孔, 在ZK211落空, 另两孔见矿。

一九七二年, 物探队提出做三维的向下延拓计算试验, 目的是突出局部异常。经向下100、200、250、300米延拓计算后, 整体异常分解为一个个孤立异常 (图2—20)。从局部异常和孔位对比, 证实了原设想矿体向东或东南延伸的推断是不合适的。当时物探队提出, 该地区的接触交代型矿体磁性不均匀、垂向的磁性变化很大, 且是多层矿体 (钻孔资料已证实), 互不相连, 产状向

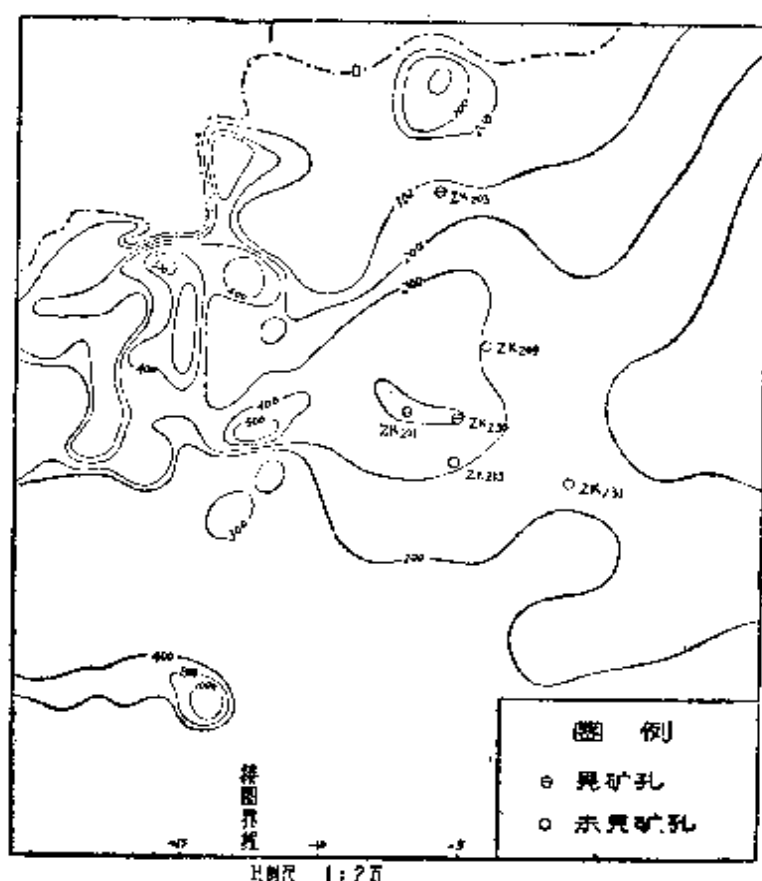


图 2—19 某地西部磁异常 Δz 等值线平面图

北西倾斜。

以后，结合延拓资料，并考虑地质推断，布了 ZK224, ZK225, ZK223, ZK253, ZK259, ZK213, ZK256, 结果大部分孔均见矿，但是原来设想西部矿体与东部矿体相联而布的孔 ZK225, ZK223都落了空，孔位位于延拓异常的南边缘，这是可以解释的。ZK231也在延拓异常外，其余均在延拓异常中见矿。

例二. 某地区异常是由航空磁测发现的，经地面检查认为是一个有意义的异常，钻探验证后发现几层磁铁矿。为了进一步确定矿体产状，一九七四年作过积分插值法解析延拓，延拓结果示于图2—21。

对比图2—21与图2—22可以看出，延拓后的等值线在南部显著收缩，曲线两侧变窄，东南部的异常峰值变为有明显负值的孤立异常。由延拓后的等值线图可以认为，东南部的异常是由孤立

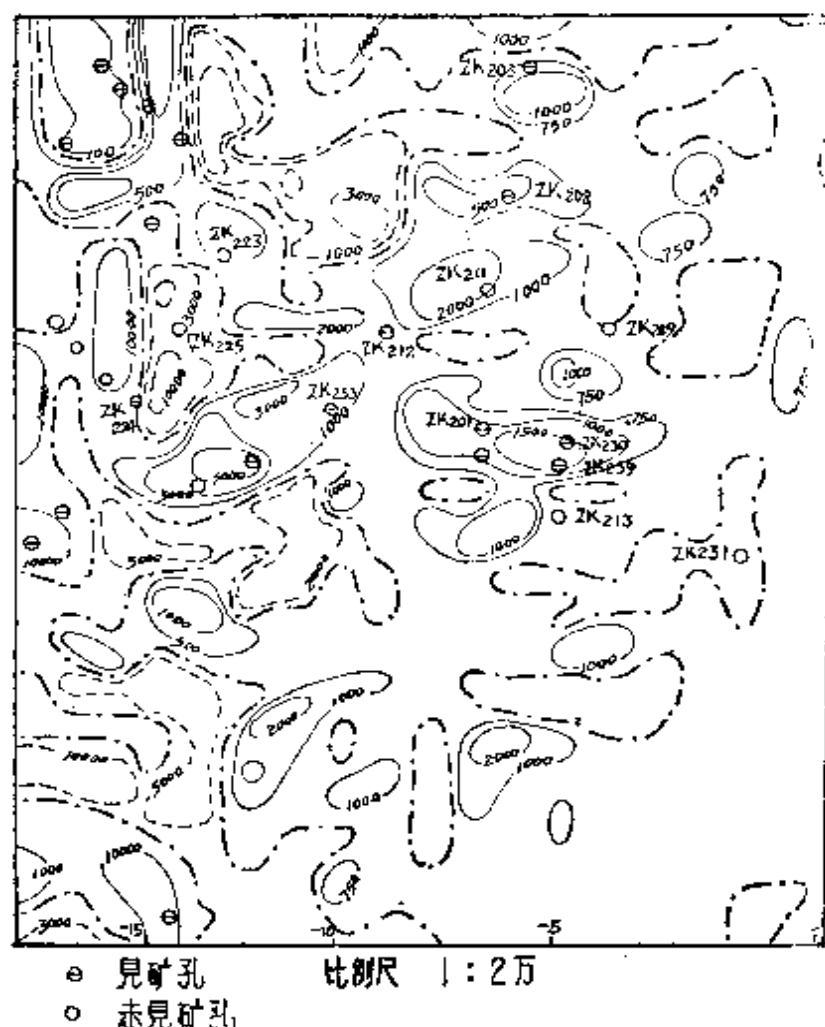


图 2—20 某地西部磁异常下延300米后的 ΔZ 平面等值线图

的小矿体引起的，这已为钻探资料证实。在地面磁测图上，ZK 5孔位于异常中部，但未见矿。研究向下延拓后的等值线图可以发现，ZK 5已位于异常边部，未见矿是可以理解的。

研究图2—23可以看出，不同高度的下延曲线的交点大致相当于矿体边界，因此可以考虑用不同高度的下延曲线交点来圈定矿体边界。不过应当指出，一般来说，曲线交点间的距离大于矿体的分布范围，尤其是矿体不太厚的时候更是如此。

对比图2—23与图2—24可以看出，矿体上的下延曲线随着高度的变化有明显改变，而非矿上的下延曲线随着高度的变化异常值无明显变化，这在一定条件下对考虑区分矿与非矿异常有些意义。

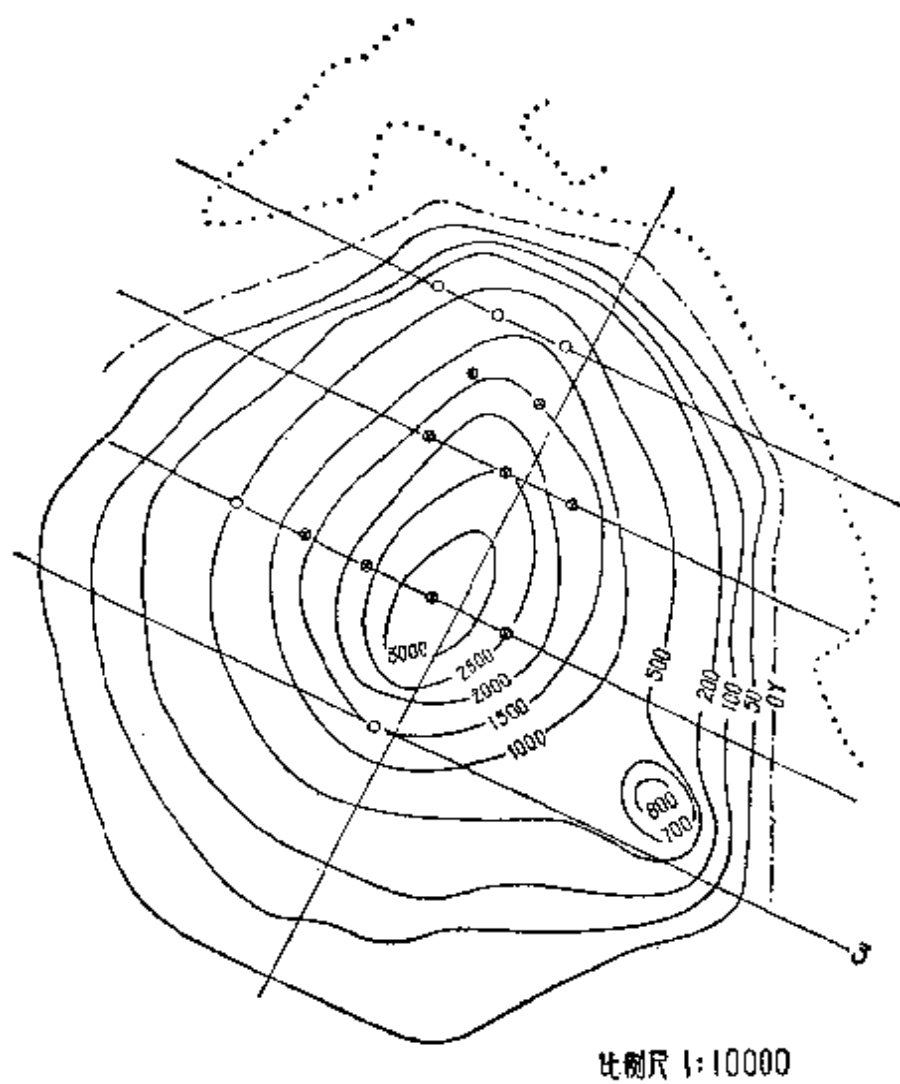


图 2—21 某地区地面实测 ΔZ 等值线图

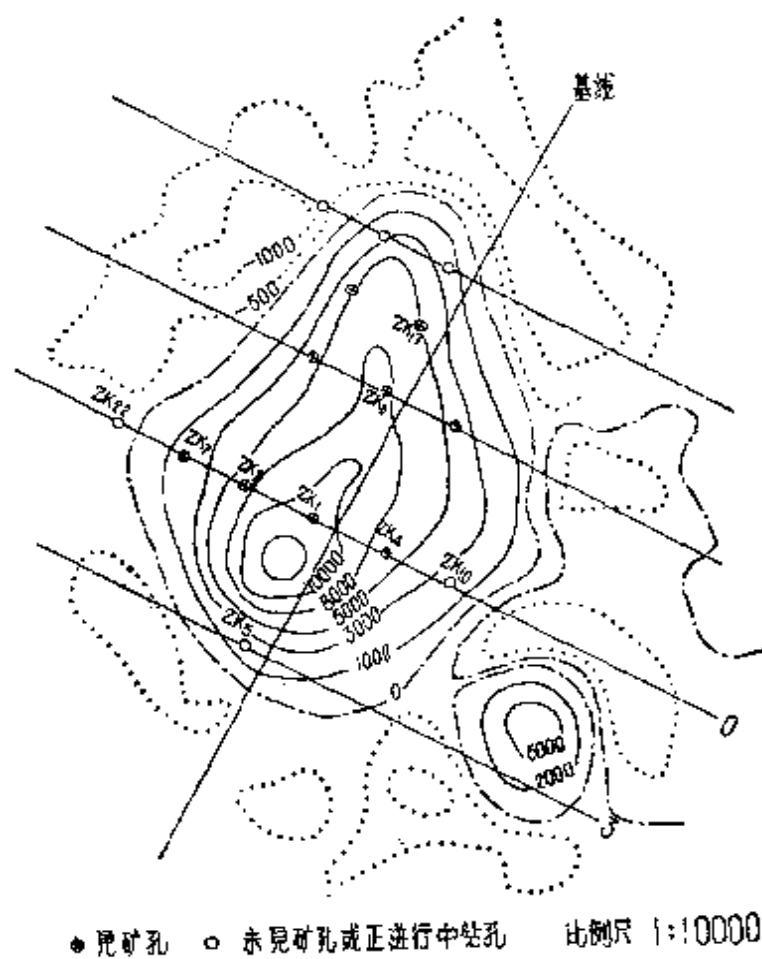


图 2—22 某地区向下延拓160米后的 ΔZ 等值线图

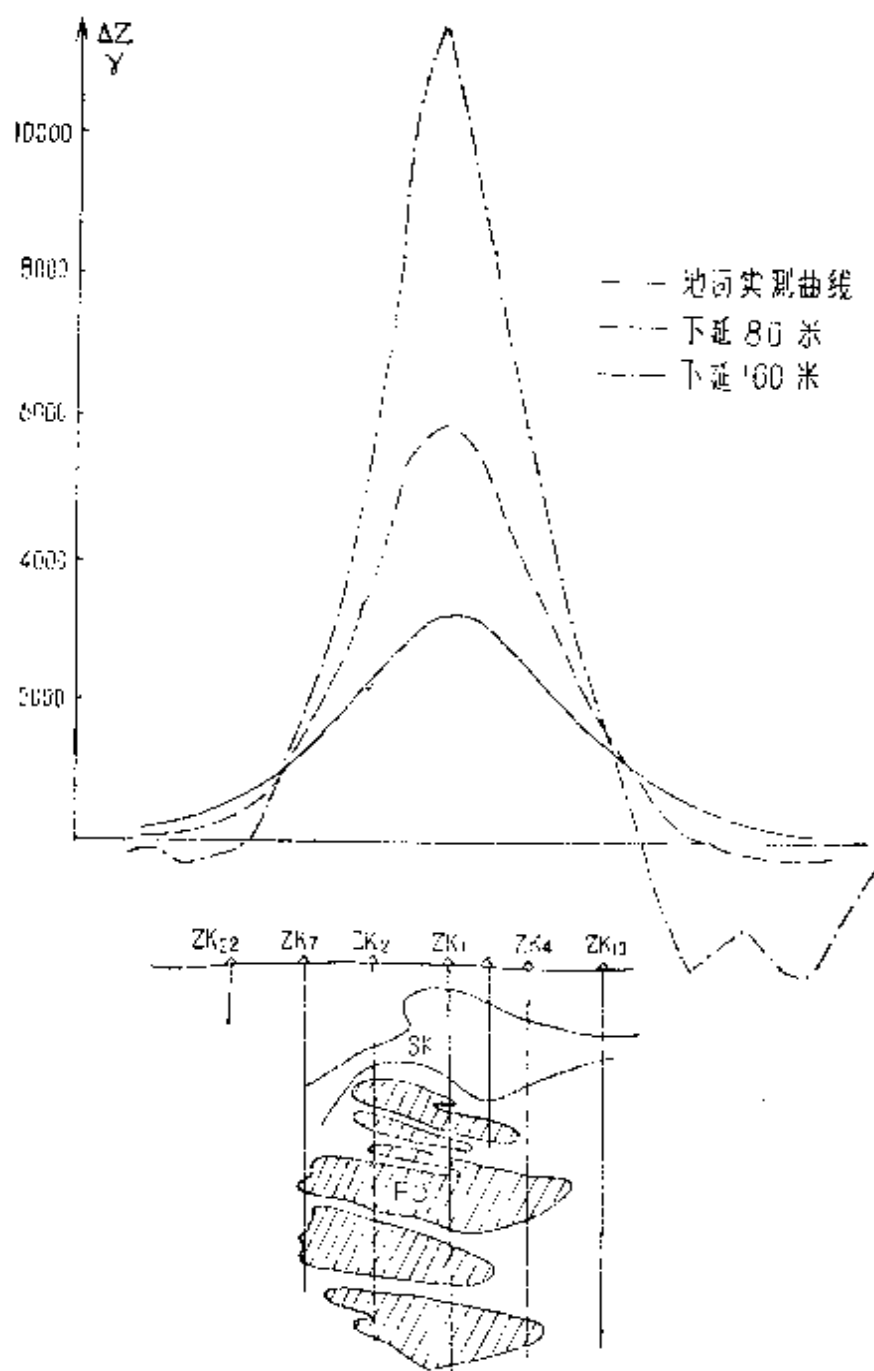


图 2—23 某地区地面实测 ΔZ 及不同高度的延拓曲线 1 号剖面

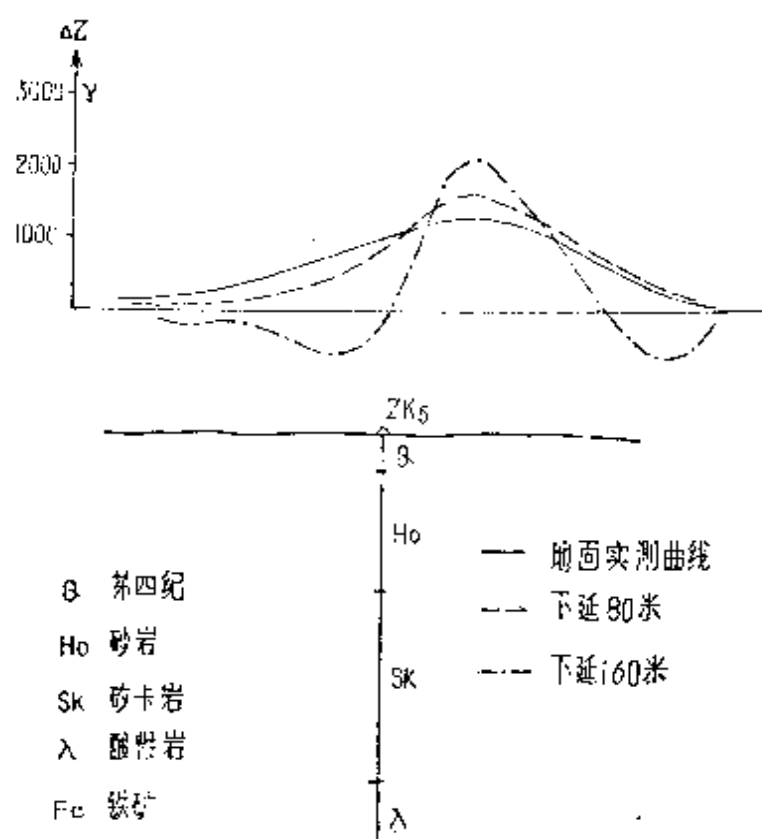


图 2—24 某地区 3 号剖面实测 ΔZ 及不同高度的延拓曲线

§ 5 级数正则化法解析延拓

一、二度问题

1. 位场值延拓问题的三角级数表示

为了叙述简便，我们先以二度问题为例。

取测线为 x 轴， z 轴垂直向下。假设测量进行到正常场为止，取其一端为原点，另一端的坐标为 l （图2—25）。

设位势场为 $Z(x, y)$ ，由于在两端为正常场，变化平缓，可近似认为

$$\left. \frac{\partial Z(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial Z(x, z)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (5.1)$$

如果在测线上位势场的精确值为 $Z_0(x)$ ，则位势场在上半区

域 $\{0 \leq x \leq l, z \leq 0\}$ 应满足下列拉普拉斯方程边值问题,

$$\begin{cases} \Delta Z(x, z) = 0 \text{ ①}, & (z < 0, 0 < x < l), \\ Z(x, z)|_{z=0} = Z_0(x), & Z(x, z)|_{z=-\infty} = 0, \quad (0 \leq x \leq l), \\ \left. \frac{\partial Z(x, z)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial Z(x, z)}{\partial x} \right|_{x=l} = 0, & z < 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

由于 $Z_0(x)$ 满足条件 (5.1), 可展成三角级数,

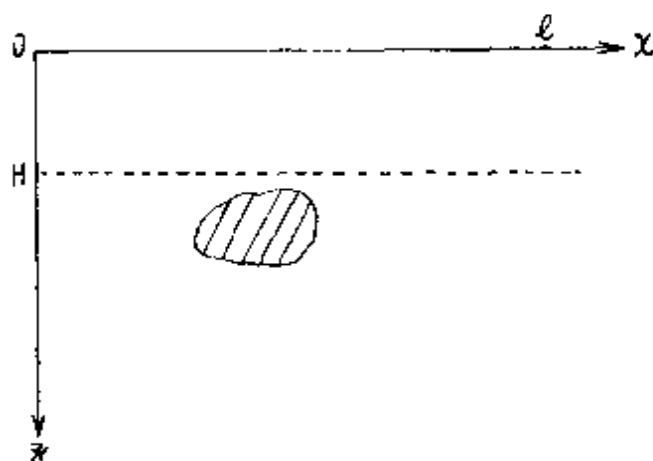


图 2—25 级数正则化延拓方法二度问题坐标示意图

$$Z_0(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00} + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{0n} \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

则边值问题(5.2) 有唯一的解, 且可表示成

$$Z(x, z) = \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00} + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{0n} e^{\frac{n\pi}{l} z} \cos \frac{n\pi}{l} x, \quad z \leq 0. \quad (5.3)$$

这就是上延拓的公式, 其中 Z_{0n} 为地面上实测函数 $Z_0(x)$ 的富氏系数。如果场源在深度 H 以下, 则位势函数在 $z < H$ 内解析, 因此公式 (5.3) 在 $0 < z < H$ 上仍然成立。这样位势场在某一深度 $z (0 < z < H)$ 以下延拓 $Z_z(x)$ 与 $Z_0(x)$ 有如下的关系:

① 此处 $\Delta Z(x, z) = 0$ 就是指拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0$ 简写。

$$\begin{aligned}
Z_z(x) = Z(x, z) &= \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{z0} + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{zn} \cos \frac{n\pi}{l} x \\
&= \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00} + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{0n} e^{\frac{n\pi}{l} z} \cos \frac{n\pi}{l} x,
\end{aligned} \tag{5.4}$$

其中

$$Z_{zn} = Z_{0n} e^{\frac{n\pi}{l} z}. \tag{5.5}$$

在 § 4 中我们已叙述了下延拓的困难，现在我们从三角级数表示中来讨论这种困难，然后提出解决问题的办法。

在实际测量中，由于种种原因，我们在地面上所测得的只是近似的场值 $Z_{\delta}^{\delta}(x)$ ，它与精确场值 $Z_0(x)$ 有如下近似关系

$$\int_0^l [Z_{\delta}^{\delta}(x) - Z_0(x)]^2 dx \leq \delta^2, \tag{5.6}$$

其中 δ 是刻划精度的量。因此

$$Z_{\delta}^{\delta}(x) = Z_0(x) + N_{\delta}(x),$$

它是由精确场值与误差 $N_{\delta}(x)$ 组成的。如果我们也把 $N_{\delta}(x)$ 展成三角级数

$$N_{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} a_0 + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x,$$

则

$$\begin{aligned}
Z_{\delta}^{\delta}(x) &= \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00}^{\delta} + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{0n}^{\delta} \cos \frac{n\pi}{l} x \\
&= \frac{1}{\sqrt{l}} (Z_{00} + a_0) + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n} + a_n) \cos \frac{n\pi}{l} x.
\end{aligned}$$

如果我们形式地按下延拓公式 (5.4) 来计算 $Z_{\delta}^{\delta}(x)$ 的下延拓值 $Z_z^{\delta}(x)$ ，则

$$Z_z^{\delta}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} (Z_{00} + a_0)$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n} + a_n) e^{\frac{n\pi}{l}z} \cos \frac{n\pi}{l}x. \quad (5.7)$$

由于干扰 $N_\delta(x)$ 往往具有高频成分，因此当 n 较大时， a_n 对于 Z_{0n} 占有优势。由于级数中因式 $e^{\frac{n\pi}{l}z}$ 的存在，级数 (5.7) 可能根本不收敛。即使收敛，由于高频成分中的 a_n 被因式 $e^{\frac{n\pi}{l}z}$ 极大地放大，也会使下延拓完全失真，产生激烈跳动。这就是下延拓困难的实质。

2. 正则化方法

为叙述简便，把从深度 z ($0 < z < H$) 上延拓到地面的运算记为 A_z ，对于 $Z_z(x)$ ，

$$A_z Z_z(x) = Z_0(x).$$

已知地面场近似值 $Z_0^\delta(x)$ 的近似关系式 (5.6) 可写成

$$\int_0^l [A_z Z_z(x) - Z_0^\delta(x)]^2 dx \leq \delta^2. \quad (5.8)$$

我们可以这样来求 $Z_0^\delta(x)$ 的近似下延拓 $Z_z^\delta(x)$ ，使它满足

$$\int_0^l [A_z Z_z^\delta(x) - Z_0^\delta(x)]^2 dx \leq \delta^2. \quad (5.9)$$

其物理意义就是：求在深度 z 的场值 $Z_z^\delta(x)$ ，使它上延拓到地面后与实测场值在误差允许范围内拟合。

但是这样的解 $Z_z^\delta(x)$ 有无穷多个，而且可以相差很大。例如有有限三角级数

$$Z_z^{\delta,k} = \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00}^\delta + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^k Z_{0n}^\delta e^{\frac{n\pi}{l}z} \cos \frac{n\pi}{l}x.$$

当 k 充分大时都满足 (5.9)，而且容易验证

$$\int_0^l [A_z Z_z^{\delta,k}(x) - Z_0^\delta(x)]^2 dx \rightarrow 0, \text{ 当 } k \rightarrow \infty. \quad (5.10)$$

如同讨论 (5.7) 一样， $Z_z^{\delta,k}(x)$ 对于不同的 k 可以相差很大，而

且它们很多是剧烈振动的。

一个自然的想法是，从(5.9)的无穷多个解中挑出一个满足

$$\int_0^l [A_z Z_z^\delta(x) - Z_0^\delta(x)]^2 dx = \min \quad (5.11)$$

的解作为下延拓的近似值。但是由(5.10)可以看出这是不可能的，因为这样的函数可能不存在。

由前面的分析知道，由于干扰的存在，将使下延拓曲线激烈跳动。为在允许误差范围内消除干扰，基本的办法就是从不等式(5.9)的所有解中选出曲线变化比较平缓的函数来作为下延拓的近似值。曲线变化较平缓可以用微商最小来描述，也就是求如下极小问题，

$$\int_0^l \left(\frac{dZ_z^\delta(x)}{dx} \right)^2 dx = \min \quad (5.12)$$

在条件(5.9)下的解。用求条件极值的拉格朗日乘子法的思想，我们考虑使

$$M_z^\alpha[Z_z^\delta] = \int_0^l [A_z Z_z^\delta(x) - Z_0^\delta(x)]^2 dx + \alpha \int_0^l \left[\frac{dZ_z^\delta(x)}{dx} \right]^2 dx. \quad (5.13)$$

取极小的函数 $Z_z^{\delta\alpha}(x)$ ，适当地选取 α ，例如使它满足(5.9)，把它作为下延拓的近似值。这种方法称为正则化方法。(5.13)的第二项称为阻尼项，因为它起到阻止 $Z_z^{\delta\alpha}(x)$ 剧烈振动的作用。

我们也要要求 $M_z^\alpha[Z_z^\delta]$ 的极小函数 $Z_z^{\delta\alpha}(x)$ 满足边值条件(5.1)，它可展为三角级数

$$Z_z^{\delta\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{z0}^{\delta\alpha} + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{zn}^{\delta\alpha} \cos \frac{n\pi}{l} x. \quad (5.14)$$

将(5.13)的函数都用三角级数代入，利用巴色瓦等式

$$M_z^\alpha[Z_z^{\delta\alpha}] = \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{-\frac{n\pi}{l} z} Z_{zn}^{\delta\alpha} - Z_{0n}^{\delta\alpha} \right]^2$$

$$+ \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(Z_{zn}^{\delta\alpha} \right)^2. \quad (5.15)$$

为求 $Z_{zn}^{\delta\alpha}(x)$ 使 $M_{\delta}^{\alpha}[Z_{zn}^{\delta\alpha}]$ 取极小, 即求 $Z_{zn}^{\delta\alpha}$ 使 (5.15) 取极小, 由极小的必要条件

$$\frac{\partial M_{\delta}^{\alpha}[Z_{zn}^{\delta\alpha}]}{\partial Z_{zn}^{\delta\alpha}} = 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$$

得到 $Z_{zn}^{\delta\alpha}$ 满足的方程

$$\left[e^{-\frac{n\pi}{l}z} Z_{zn}^{\delta\alpha} - Z_{0n}^{\delta\alpha} \right] e^{-\frac{n\pi}{l}z} + \alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 Z_{zn}^{\delta\alpha} = 0.$$

解出 $Z_{zn}^{\delta\alpha}$ 得到

$$Z_{zn}^{\delta\alpha} = \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}z} Z_{0n}^{\delta\alpha}, \quad (5.16)$$

其中

$$\gamma_n(\alpha) = \frac{1}{1 + \alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z}}. \quad (5.17)$$

因此使 $M_{\delta}^{\alpha}[Z_{zn}^{\delta\alpha}]$ 取极小的函数为

$$Z_{zn}^{\delta\alpha}(x) = \frac{1}{\sqrt{l}} Z_{00}^{\delta\alpha} + \sqrt{-\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}z} Z_{0n}^{\delta\alpha} \cos \frac{n\pi}{l}x. \quad (5.18)$$

3. 正则化方法的收敛性

定理 1. 如果取 $\alpha = \alpha(\delta)$ 满足

$$\alpha(\delta) \rightarrow 0, \quad \frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0, \quad (\text{当 } \delta \rightarrow 0 \text{ 时}), \quad (5.19)$$

则对于这样的 $\alpha = \alpha(\delta)$, $M_{\delta}^{\alpha}(Z_{zn}^{\delta\alpha})$ 的极小函数 $Z_{zn}^{\delta\alpha}(x)$ 有

$$\max_{0 \leq x \leq l} |Z_{zn}^{\delta\alpha}(x) - Z_z(x)| \rightarrow 0, \quad (\text{当 } \delta \rightarrow 0 \text{ 时}). \quad (5.20)$$

证: 在证明中将用到施瓦兹不等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n b_n| \leq \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

另外, 我们根据巴色瓦等式, 把 (5.6) 写成

$$\sum_{n=0}^{\infty} [Z_{0n}^{\delta} - Z_{0n}]^2 \leq \delta^2.$$

回到定理的证明,

$$\begin{aligned} |Z_{\frac{\delta}{l}}^{\delta}(x) - Z_x(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{l}} |Z_{00}^{\delta} - Z_{00}| \\ &+ \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n}^{\delta} - e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{l}} |Z_{00}^{\delta} - Z_{00}| + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n}^{\delta} \right. \\ &\quad \left. - \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n} + \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n} - e^{\frac{n\pi}{l}x} Z_{0n} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{l}} |Z_{00}^{\delta} - Z_{00}| + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} |Z_{0n}^{\delta} - Z_{0n}| \\ &\quad + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \gamma_n(\alpha)) e^{\frac{n\pi}{l}x} |Z_{0n}| = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \end{aligned}$$

逐项估计

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{\sqrt{l}} |Z_{00}^{\delta} - Z_{00}| \leq \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} |Z_{0n}^{\delta} - Z_{0n}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{l}} \delta. \quad (5.21)$$

对于 $\mathcal{E}_2$, 利用施瓦兹不等式

$$\mathcal{E}_2 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi} \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right) \gamma_n(\alpha) e^{\frac{n\pi}{l}x} |Z_{0n}^{\delta} - Z_{0n}|$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right. \\ \left. \times \gamma_n^2(\alpha) e^{\frac{2n\pi}{l}z} (Z_{0n}^2 - Z_{0n})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.22)$$

利用 $1+x^2 \geq 2x$, 则

$$\gamma_n^2(\alpha) = \frac{1}{\left[1 + \alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z} \right]^2} \\ \leq \frac{1}{\left[2\sqrt{\alpha} \left(\frac{n\pi}{l} \right) e^{\frac{n\pi}{l}z} \right]^2} \leq \frac{1}{4\alpha \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z}}. \quad (5.23)$$

记 $C_1(l) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$, 并把(5.23)

代入(5.22), 则

$$\Sigma_2 \leq C_1(l) \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}. \quad (5.24)$$

再估计 Σ_3 , 也利用施瓦兹不等式

$$\Sigma_3 = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \gamma_n(\alpha) \right) \left(\frac{l}{n\pi} \right) \left(\frac{n\pi}{l} \right) e^{\frac{n\pi}{l}z} Z_{0n} \\ \leq \sqrt{\frac{2}{l}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \gamma_n(\alpha) \right)^2 \left(\frac{l}{n\pi} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z} Z_{0n}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.25)$$

由巴色瓦等式容易看出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z} Z_{0n}^2 = \int_0^l \left(\frac{dZ_z(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (5.26)$$

其次, 利用 $\gamma_n(\alpha)$ 的表示式

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (1-\gamma_n(\alpha))^2 \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{\frac{4n\pi}{l}z} \gamma_n^2(\alpha) \\
&= \sum_{n=1}^{N+1} \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{\frac{4n\pi}{l}z} \gamma_n^2(\alpha) \\
&\quad + \sum_{n=N+2}^{\infty} \alpha^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{\frac{4n\pi}{l}z} \gamma_n^2(\alpha)
\end{aligned}$$

对于第一项, 利用 $\gamma_n(\alpha)$ 的估计 (5.23), 对于第二项, 利用

$$r_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 e^{\frac{2n\pi}{l}z}},$$

$$\begin{aligned}
\text{则 } \sum_{n=1}^{\infty} (1-r_n(\alpha))^2 \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 &\leq \alpha \sum_{n=1}^{N+1} e^{\frac{2n\pi}{l}z} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 \\
&\leq \alpha \frac{e^{\frac{2(N+2)\pi}{l}z}}{e^{\frac{2\pi}{l}z} - 1} + \int_{N+1}^{\infty} \left(\frac{l}{x\pi}\right)^2 dx \\
&\leq \frac{\alpha}{e^{\frac{2\pi}{l}z} - 1} e^{\frac{2(N+2)\pi}{l}z} + \frac{l^2}{\pi^2(N+1)}.
\end{aligned}$$

由于上面不等式对于任意的 N 都成立, 我们取 N 为 $\frac{l}{4\pi z} |\ln \alpha|$ 的整数部分, 代入后, 则有

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (1-r_n(\alpha))^2 \left(\frac{l}{n\pi}\right)^2 &\leq \frac{\alpha^{\frac{1}{2}} e^{\frac{4\pi}{l}z}}{e^{\frac{2\pi}{l}z} - 1} + \frac{l^2}{\pi^2} \frac{4\pi z}{|\ln \alpha|} \\
&\leq C'_2(l, z) (|\ln \alpha|)^{-1}, \tag{5.27}
\end{aligned}$$

其中 $C'_2(l, z)$ 是仅与 l, z 有关的某一常数. 这样由 (5.25) — (5.27), 我们得到

$$\Sigma_3 \leq C_2(l, z) (\ln |\alpha|)^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^l \left(\frac{dZ_z(x)}{dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}.$$

综合 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ 的估计, 最后得到

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq x \leq l} |Z_z^{\delta, \alpha}(x) - Z_z(x)| &\leq \frac{1}{\sqrt{l}} \delta + C_1(l) \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}} \\ &+ C_2(l, z) (\ln |\alpha|)^{-\frac{1}{2}} \left[\int_0^l \left(\frac{dZ_z(x)}{dx} \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.28) \end{aligned}$$

因此在定理中关于 $\alpha = \alpha(\delta)$ 的假设下, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时,

$$\max_{0 \leq x \leq l} |Z_z^{\delta, \alpha}(x) - Z_z(x)| \rightarrow 0,$$

这就是所要证的。

4. 参数 α 的选取

根据收敛定理 1, 参数 α 极易选取, 例如取 $\alpha = \delta^k$ ($0 < k < 2$), 定理条件都满足, 但我们希望由实际问题的要求选择较好的 α 。

我们自然是从使 $Z_z^{\delta, \alpha}(x)$ 满足近似式 (5.9) 出发。为简单起见, 记 (5.9) 的左边部分

$$\begin{aligned} \rho_\delta(\alpha) &= \int_0^l [A_z Z_z^{\delta, \alpha}(x) - Z_z(x)]^2 dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [\gamma_n(\alpha) - 1]^2 (Z_{0,n}^\delta)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 e^{\frac{4n\pi}{l} z} \alpha^2 \gamma_n^2(\alpha) (Z_{0,n}^\delta)^2. \quad (5.29) \end{aligned}$$

引理 1. $\rho_\delta(\alpha)$ 在 $\alpha > 0$ 时是 α 的严格单调上升的连续函数, 其取值区间为

$$\left(0, \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0,n}^\delta)^2 \right). \quad (5.30)$$

证：由 $\alpha^2 r_n(\alpha)$ ($n=1, 2, \dots$) 是 α 的严格单调上升的连续函数，就可得到 $\rho_\delta(\alpha)$ 的单调性与连续性。如果不要求严格的数学叙述

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_\delta(\alpha) = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \rho_\delta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2$$

直观上是显然的，因而 $\rho_\delta(\alpha)$ 的取值区间为 (5.30)。

引理 2. 如果

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2 > \delta^2, \quad \text{则 } \rho_\delta(\alpha) = \delta^2 \text{ 有唯一的解 } \alpha = \alpha(\delta),$$

且

$$\alpha(\delta) \leq \frac{C_0 \delta}{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2 - \delta^2}}, \quad (5.31)$$

其中 C_0 是某一常数。因此，如果精确位势场不是常数，则当 $\delta \rightarrow 0$ 时 $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ 。

证： $\rho_\delta(\alpha) = \delta^2$ 有唯一解是引理 1 的直接推论。

估计 (5.31)。由于

$$\begin{aligned} \rho_\delta(\alpha) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4 e^{\frac{4n\pi}{l} z} \alpha^2 r_n^2(\alpha) (Z_{0n}^\delta)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^2}{\left[\alpha + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{-1} e^{-\frac{2n\pi}{l} z} \right]^4} (Z_{0n}^\delta)^2 \\ &\geq \frac{\alpha^2}{(\alpha + C_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2, \end{aligned}$$

其中 $C_0 = \left(\frac{\pi}{l} \right)^{-2} e^{\frac{2\pi}{l} z}$ 由于 $\alpha(\delta)$ 是 $\rho(\alpha) = \delta^2$ 的根，因此

$$\delta^2 \geq \frac{\alpha^4(\delta)}{(\alpha(\delta) + C_0)^2} \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2,$$

解此不等式，可得到 (5.31)。

$$\text{由于 } \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n}^\delta)^2 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n})^2, \quad (\text{当 } \delta \rightarrow 0),$$

如果精确位势场 $Z_0(x)$ 不是常数，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} (Z_{0n})^2 \neq 0$ ，在 (5.31)

中令 $\delta \rightarrow 0$ ，则 $\alpha(\delta) \rightarrow 0$ 。

利用较复杂的数学理论可以证明，对于 $\rho(\alpha) = \delta^2$ 的根 $\alpha = \alpha(\delta)$ ，收敛性 (5.20) 是成立的。但是，稍加强一点条件，也可用初等方法证明

$$\frac{\delta}{\sqrt{\alpha(\delta)}} \rightarrow 0, \quad (\text{当 } \delta \rightarrow 0).$$

因而对于引理 2 所选取的 $\alpha(\delta)$ ，收敛性也成立。由于证明较长，这里从略。

附注：由 $\rho_\delta(\alpha)$ 的表达式直接计算，不难证明 $\rho_\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 作为

λ 的函数是凸函数，即 $\frac{d^2 \rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{d\lambda^2} > 0$ 。因此对于 $\rho_\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \delta^2$ 可以

用快速收敛的牛顿切线法求根，得到 $\lambda(\delta)$ ，取 $\alpha(\delta) = \frac{1}{\lambda(\delta)}$ 。

5. 程序的简要框图 (图 2—26)。

6. 试算结果

利用图 2—26 编制的二度解析延拓程序试算了模型及矿区资料。模型试算结果如图 2—27，2—28 所示。根据试算结果可以看出，级数型正则法延拓有以下规律：

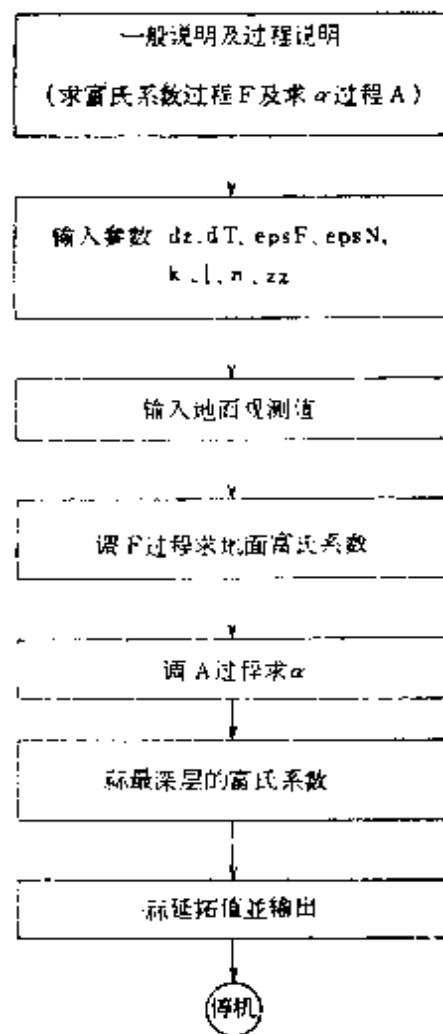


图 2—26 级数正则化延拓
方法二度问题程序框图

dz —下延层距; $dT=\delta^2$; $epsF$ —富氏系数精度; $epsN$ —牛顿切线法迭代精度; k —剖面上的测点数; l —剖面长度; n —富氏系数个数; zz —最大延拓深度。

1. 计算富氏系数的精度对试算结果有较大影响, 系数精度越高效果越好, 但计算时间也越长。

2. α 越大曲线越光滑, 但同时曲线压低得也越厉害。

3. 延拓深度越深误差越大。

图2—29是河北某矿区的资料向下延拓结果。

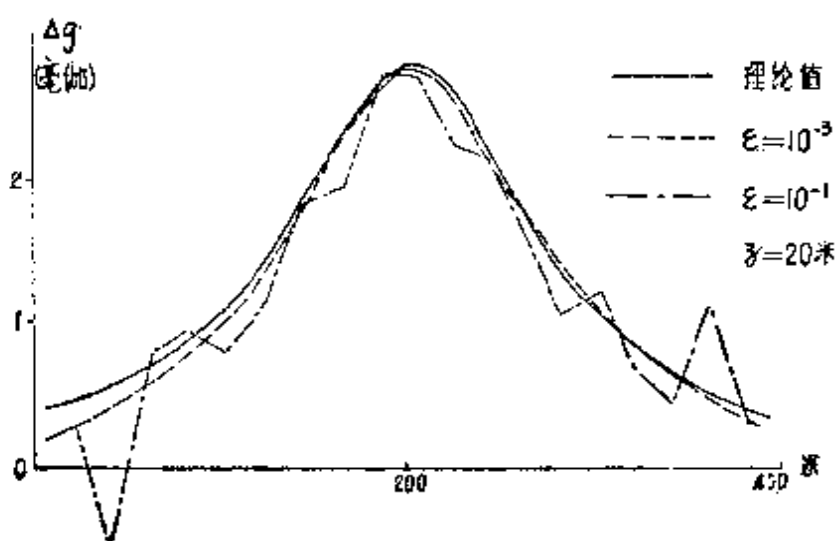


图 2—27 富氏系数精度对延拓效果的影响

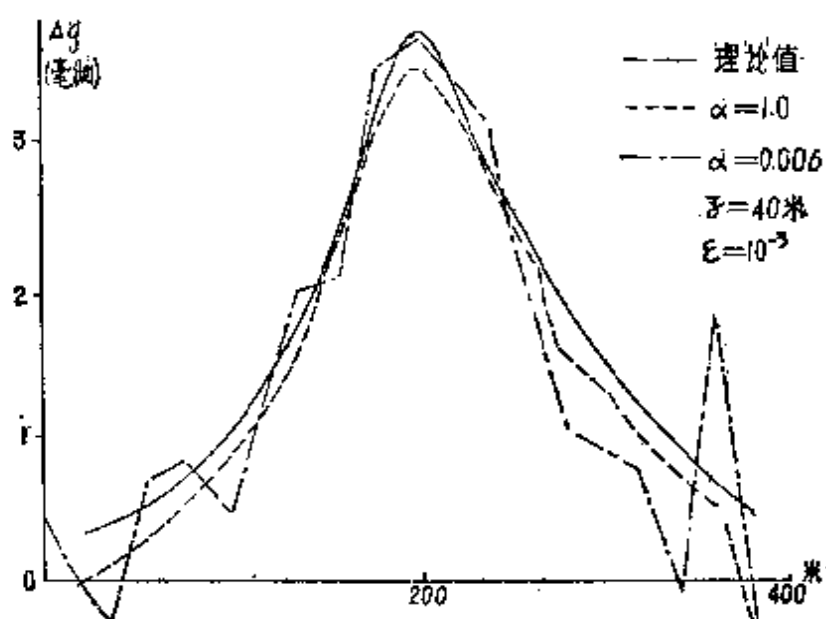


图 2—28 α 对延拓效果的影响

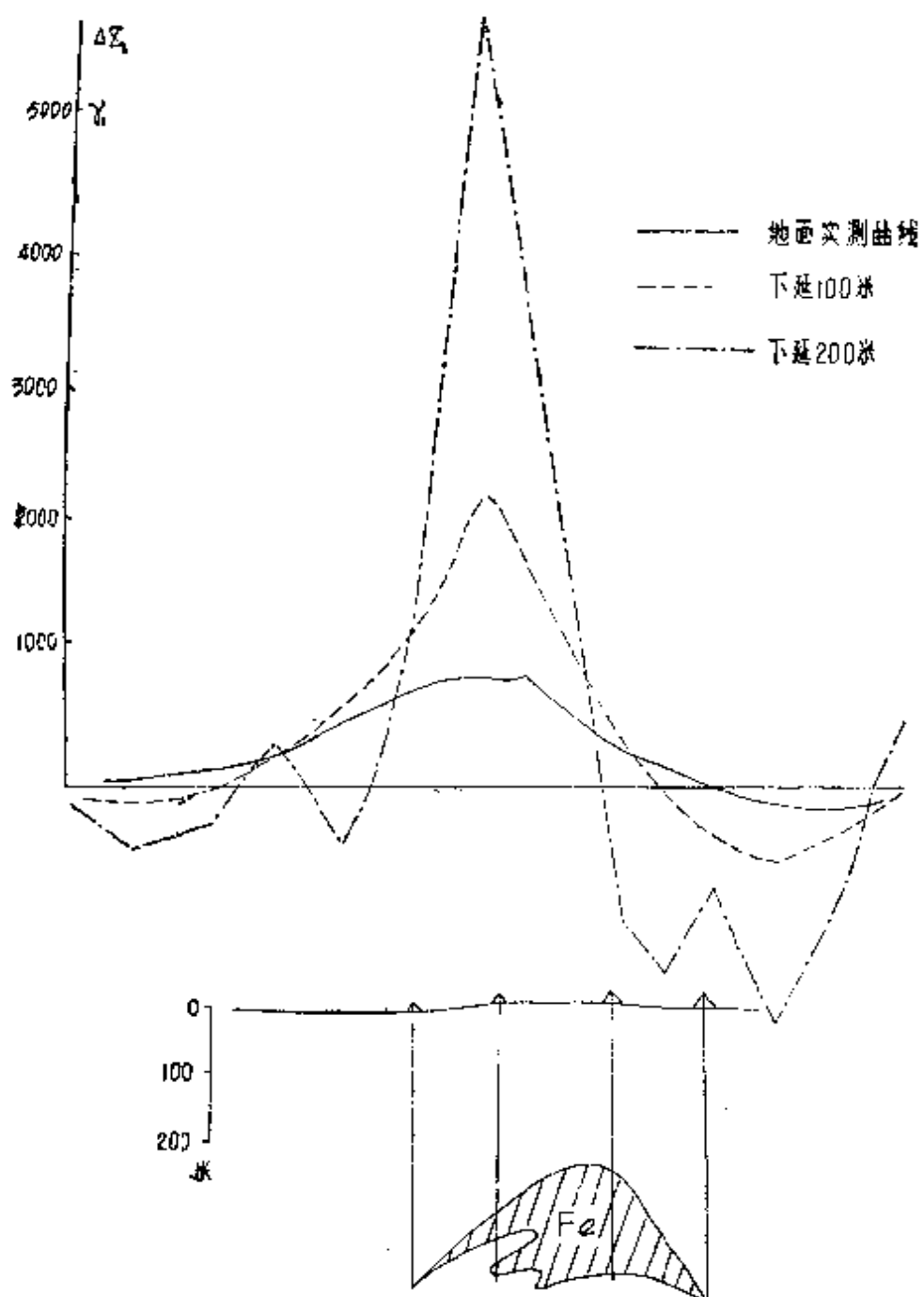


图 2—29 河北某矿区磁异常曲线及其延拓结果

二、三度问题

前面我们以二度问题为例, 说明了级数正则化延拓方法的基本思想及其理论根据。对于三度问题, 在某种形式上也有类似的理论结果。这里主要说明三度级数正则化延拓方法的计算步骤。

首先选取直角坐标系, 以矩形测网的左下方为坐标原点, 测线方向为 x 轴, z 轴垂直向下。在这个坐标系下, 测区为矩形区域 $R: \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ 。已知其上的观测值为 $Z_0^\delta(x, y)$, 由于观测的误差及其它干扰, 它与真正的场值 $Z_0(x, y)$ 的误差为

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [Z_0^\delta(x, y) - Z_0(x, y)]^2 dx dy \leq \delta^2, \quad (5.32)$$

其中 δ 为某一已知量。

设观测值 $Z_0^\delta(x, y)$ 在矩形区域 R 的四边已接近正常场, 变化较为平缓, 则在矩形区域 R 上可将它近似表为以下三角级数

$$Z_0^\delta(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Z_{0,ij}^\delta \cos \frac{i\pi}{l_x} x \cos \frac{j\pi}{l_y} y, \quad (5.33)$$

其中 $Z_{0,ij}^\delta$ 为 $Z_0^\delta(x, y)$ 的富氏系数, 它可用积分

$$Z_{0,ij}^\delta = \frac{e_{ij}}{l_x l_y} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} Z_0^\delta(x, y) \cos \frac{i\pi}{l_x} x \cos \frac{j\pi}{l_y} y dx dy \quad (5.34)$$

表示, 其中

$$e_{ij} = \begin{cases} 1, & i=0, j=0; \\ 2, & i=0, j \neq 0 \text{ 或 } j=0, i \neq 0; \\ 4, & i \neq 0, j \neq 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

因此可以认为 $Z_{0,ij}^\delta$ 为已知。

现在需将 $Z_0^\delta(x, y)$ 延拓到深度为 h 的平面上, 设在此深度为 h 的平面上的场值为 $Z_h^\delta(x, y)$, 它可表示为

$$Z_h^\delta(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} Z_{h,ij}^\delta \cos \frac{i\pi}{l_x} x \cos \frac{j\pi}{l_y} y. \quad (5.36)$$

与前面二度问题类似, 我们将上延拓高度 h 的运算记为 A_h , 则将 $Z_h^\delta(x, y)$ 上延拓到地面的值为

$$A_h Z_h^\delta(x, y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} Z_{hij}^\delta e^{-h p_{ij}} \cos \frac{i\pi}{l_x} x \cos \frac{j\pi}{l_y} y, \quad (5.37)$$

其中

$$p_{ij} = \sqrt{\left(\frac{i\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{j\pi}{l_y}\right)^2}. \quad (5.38)$$

与二度问题类似, 我们将在误差

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} (A_h Z_h^\delta(x, y) - Z_0^\delta(x, y))^2 dx dy \leq \delta^2 \quad (5.39)$$

的允许范围内, 选择曲线变化比较平缓的函数 $Z_h^\delta(x, y)$, 即选取 $Z_h^\delta(x, y)$, 使

$$\int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[\left(\frac{\partial Z_h^\delta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_h^\delta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \min. \quad (5.40)$$

这是一个条件极值问题。同样考虑使

$$\begin{aligned} M_h^\alpha[Z_h^\delta] &= \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [A_h Z_h^\delta(x, y) - Z_0^\delta(x, y)]^2 dx dy \\ &+ \alpha \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \left[\left(\frac{\partial Z_h^\delta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z_h^\delta}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \end{aligned} \quad (5.41)$$

取极小的函数 $Z_h^{\delta, \alpha}(x, y)$, 适当地选取 α , 可以把它作为下延拓的近似值。类似地利用巴色瓦等式及极值必要条件, 可以得到 $Z_h^{\delta, \alpha}(x, y)$ 的富氏系数

$$Z_{hij}^{\delta, \alpha} = r_{ij}(\alpha) Z_{0ij}^\delta e^{h p_{ij}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

其中

$$r_{ij}(\alpha) = [1 + \alpha p_{ij}^2 e^{2h p_{ij}}]^{-1}. \quad (5.43)$$

p_{ij} 如 (5.38) 式所示。

余下的问题在于选择参数 α 。同样记

$$\rho_\delta(\alpha) = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} [A_h Z_h^{\delta, \alpha}(x, y) - Z_0^\delta(x, y)]^2 dx dy. \quad (5.44)$$

α 将作为

$$\rho(\alpha) = \delta^2 \quad (5.45)$$

的根来确定。利用巴色瓦等式容易得到

$$\rho(\alpha) = l_x l_y \sum_{\substack{i, j=0 \\ (i, j) \neq (0, 0)}}^{\infty} e_{ij}^{-1} (Z_{0ij}^\delta)^2 \frac{\alpha^2}{(p_{ij}^{-2} e^{-2R p_{ij}} + \alpha)^2}. \quad (5.46)$$

直接可以证明 $\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 作为 λ 的函数是单调下降的凹函数, 因此

可以用牛顿切线法来求解方程 $\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \delta^2$ 的根 $\lambda(\delta)$, 然后取参

数 $\alpha = \frac{1}{\lambda(\delta)}$ 即为所求。根据牛顿切线法, 给定初值 λ_0 ($\lambda_0 = \frac{1}{\alpha_0}$),

有如下的迭代公式

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \frac{\delta^2 - \rho\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)}{-\frac{d}{d\lambda} \rho\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)}. \quad (5.47)$$

但由于 $\rho\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ 的性质, 由它的图形容易看出, 只有当初值

$\lambda_0 \leq \lambda(\delta)$ 时, 收敛才是有保证的。为了给好初值, 我们必须估计 $\lambda(\delta)$ 的下界, 也就是要估计 (6.45) 的根 $\alpha(\delta)$ 的上界。

如果我们记 $C_0 = \max \{P_{01}^{-1} e^{-2h p_{01}}, P_{10}^{-1} e^{-2h p_{10}}\}$, 根据 (5.46) 式

$$\rho(\alpha) \geq l_x l_y \sum_{\substack{i, j=0 \\ (i, j) \neq (0, 0)}}^{\infty} e_{ij}^{-1} (Z_{0ij}^\delta)^2 \frac{\alpha^2}{(C_0 + \alpha)^2}.$$

对于 (5.45) 的根 $\alpha(\delta)$, 我们有

$$\delta^2 = \rho(\alpha) \geq \left[\frac{\alpha(\delta)}{C_0 + \alpha(\delta)} \right]^2 l_x l_y \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{\infty} e^{-i^2} (Z_{0ij}^{\delta})^2.$$

由此可得到

$$\alpha(\delta) \leq \frac{C_0 \delta}{\sqrt{l_x l_y \sum_{\substack{i,j=0 \\ (i,j) \neq (0,0)}}^{\infty} e^{-i^2} (Z_{0ij}^{\delta})^2 - \delta}}, \quad (5.48)$$

这样就得到了 $\alpha(\delta)$ 的上界。我们可以把 (5.48) 式的右端取作

为 α_0 , 初值 $\lambda_0 = \frac{1}{\alpha_0}$, 就可以保证牛顿切线法的收敛性。

为了使读者对算法有一个清晰的了解, 我们详细地复述一下这个算法的计算步骤。

第一步, 求观测值的富氏系数 Z_{0ij}^{δ} 。它可由 (5.34) 式来计算, 二重积分可以看成累次积分, 每一重积分都是如下形式的积分

$$I = \int_0^{l_x} f(x) \cos \frac{i\pi}{l_x} x dx, \quad (5.49)$$

其中 i 为整数。我们已知 $f(x)$ 在 $[0, l_x]$ 的 k 等分点上的值 $f(s\Delta x)$, $s = 0, 1, 2, \dots, k$,

其中 k 是偶数, 等分间隔 $\Delta x = \frac{l_x}{k}$ 。

积分 (5.49) 的计算可以应用菲伦方法。它是采用对 $f(x)$ 分段二次插值, 然后在每一小段计算 (5.49) 式积分, 而后求和得到的。它与辛卜生公式的主要不同在于: 辛卜生公式是对于被积函数分段二次插值, 而非伦方法仅对被积函数的一部分 $f(x)$ 分段二次插值。

经过繁琐的计算, 可以得到

$$\int_0^{l_x} f(x) \cos \frac{i\pi}{l_x} x dx = \Delta x [\beta C_{2n} + \gamma C_{2n-1}],$$

其中

$$\beta = \begin{cases} \frac{2}{\theta^3} [\theta(1 + \cos^2 \theta) - 2 \sin \theta \cos \theta], & \theta \neq 0, \\ \frac{2}{3}, & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\gamma = \begin{cases} \frac{4}{\theta^3} (\sin \theta - \theta \cos \theta), & \theta \neq 0, \\ \frac{4}{3}, & \theta = 0, \end{cases}$$

$$\theta = \frac{i\pi}{k},$$

$$C_{2n} = \frac{1}{2} [f(0) + f(l_x) \cos k\theta] + \sum_{s=1}^{n-1} f_{2s} \cos 2s\theta,$$

$$C_{2n-1} = \sum_{s=0}^{n-1} f_{2s+1} \cos (2s+1)\theta.$$

欲计算含有三角函数和数的 C_{2n} 与 C_{2n-1} , 可采用一种递推算法, 以减少三角函数的计算次数。

第二步, 取公式 (5.48) 的右端作为 α_0 , $\lambda_0 = \frac{1}{\alpha_0}$ 。利用

(5.46) 式 $\rho(\alpha)$ 的表达式, 按牛顿切线法公式 (5.47) 迭代, 直至收敛。这样, 我们就得到 $\rho(\alpha) = \delta^2$ 的根 $\alpha(\delta)$ 的近似值。

第三步, 利用所计算的 $\alpha = \alpha(\delta)$, 根据 (5.42) 式, 得到 $Z_h^{\delta, \alpha}(x, y)$ 的富氏系数 $Z_{hi}^{\delta, \alpha}$, 则

$$Z_h^{\delta, \alpha}(x, y) = \sum_{i, j=0}^{\infty} Z_{hi}^{\delta, \alpha} \cos \frac{i\pi x}{l_x} \cos \frac{j\pi y}{l_y}.$$

这个双重三角级数可以写成两个单重三角和数累次求得。当然, 实际计算中和数都是取有限项的。每重三角和数同样可用递推算法, 以提高计算速度, 这样我们就得到深度为 h 的下延拓值。

我们曾利用这种方法对江苏某矿区的磁异常进行试算，结果与其他方法大致相同（图2—30、图2—31）。但在6线剖面图中可以看出，试算结果仍有明显的缺点，第三点（300米处）的正异常是虚假的，这从下延280米的平面等值线可以看出，这个正异常在等值线图中基本上没有反映，说明它是孤立的。而5线与6线的第6个点的峰值正好反映矿体的突出部分，见6线剖面图），这说明下延拓的等值线图基本上是正确的。产生上述缺点的原因，可能是由于菲伦方法的缺陷，分段二次插值人为地加进了一些尖点（微商间断点），这就加进了一些高频干扰，这些干扰可能经下延拓放大而有所反映。

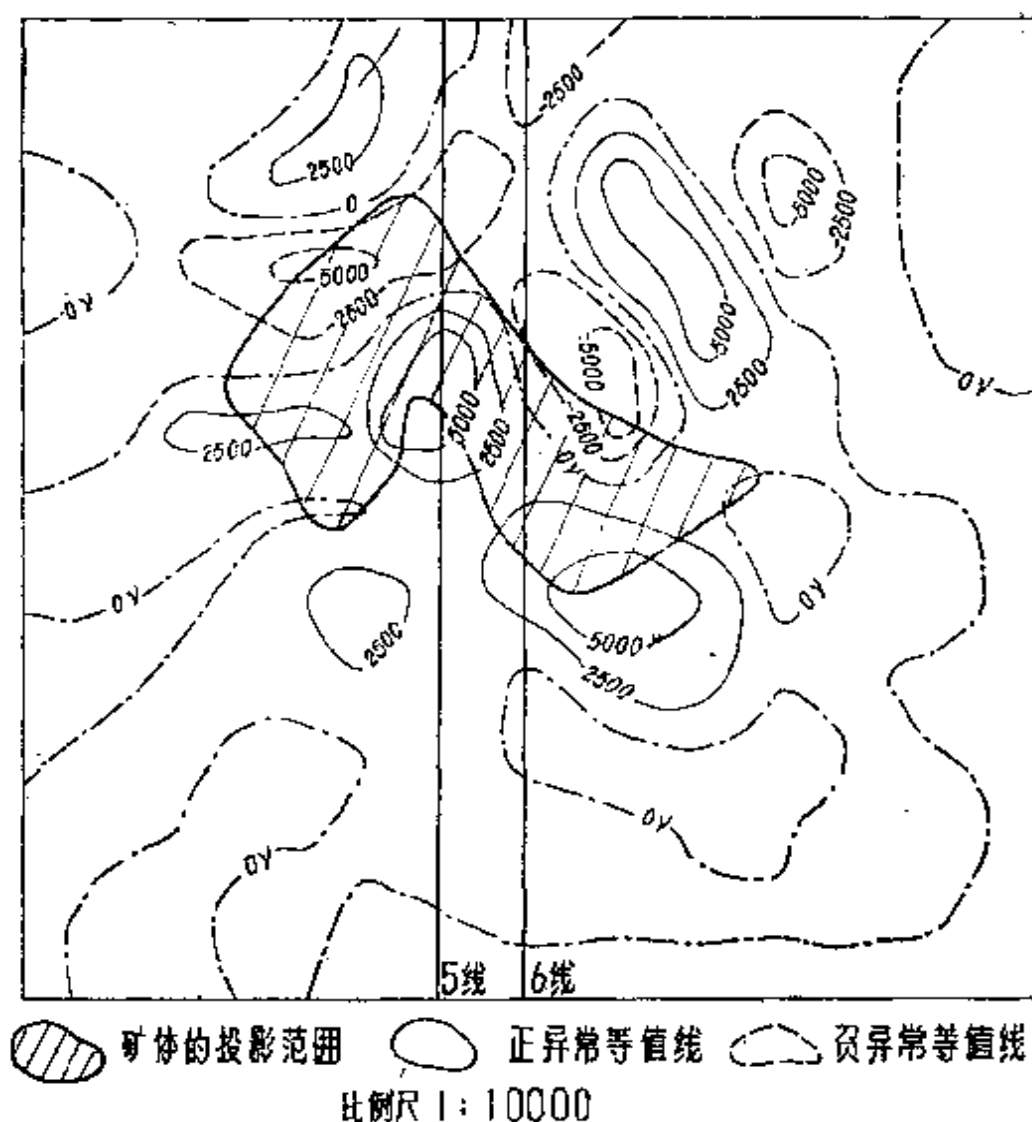


图 2—30 江苏某地磁异常向下延拓280米后的等值线图

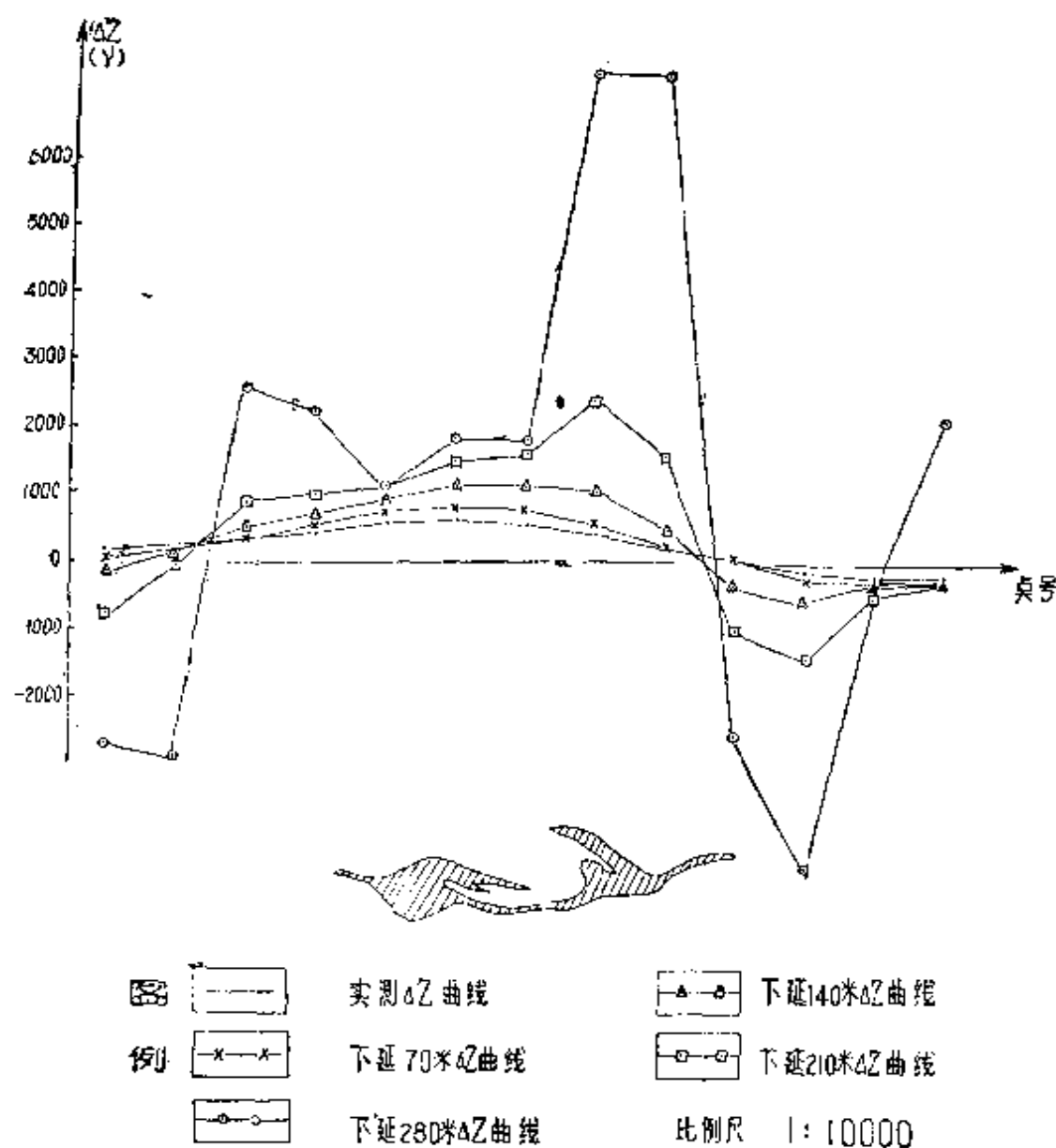


图 2—31 江苏某地磁异常下延拓剖面图

§ 6 把起伏地形上的场值换算到同一平面及其延拓问题

在陆地上的重力和磁法勘探工作中，重磁异常的实测数据往往是在起伏不平的地面上测得的。在航空磁测工作中，也往往因

为飞行高度变化,使异常复杂化。在丘陵地带或山区物探工作中,为使解释工作简单起见,通常需要把起伏地形上实测的重磁异常值换算到同一平面上,或直接将其进行延拓。解决此问题的途径和方法不少,这节中只简单介绍一下有限项调和级数法和镜像法。这两种方法对二度和三度问题原则上都可以进行处理,对后者只介绍了三度问题。

一、有限项调和级数法

为叙述方便,以重力布伽异常为例,用有限项调和级数表示

$$g(x, z) = A_0/2 + \sum_{k=1}^m e^{2\pi k(z/\lambda)} \left[A_k \cos 2\pi k \left(\frac{x}{\lambda} \right) + B_k \sin 2\pi k \left(\frac{x}{\lambda} \right) \right] + \varepsilon(x, z), \quad (6.1)$$

式中 λ 为基本波长 (由剖面长度决定); $2m+1$ 为级数的项数,应小于或等于测点数; A_k, B_k 为级数系数; ε_m 为近似计算中所产生的误差。

如果数据是以相同的点距在 $z=0$ 平面上测得的,那么公式 (6.1) 就是通常的有限项富氏级数,系数可以常用的方法求出,此级数具有正交性。但当测点不在同一平面上时,则公式中含有指数项,因而 (6.1) 式不具备正交性,不能用富氏级数求系数的方法计算系数,需要想其他办法,下面就来介绍这种求系数的方法。

把测得的 n 个数据代入方程 (6.1) 中,得到一组联立方程组:

$$g(x_i, z_i) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m e^{2\pi k \left(\frac{z_i}{\lambda} \right)} \left[A_k \cos 2\pi k \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) + B_k \sin 2\pi k \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) \right] + \varepsilon_i, \quad (6.2)$$

其中 $i=1, 2, \dots, n$ 。

式 (6.2) 中含有 $2m+1$ 个未知数,方程式左边的数值是已知的,考虑到 $2m+1 \leq n$, 所以一般采用最小二乘法来解这个联

立方程组。方程组可以写成如下形式:

$$g_i = \sum_{k=1}^{2m+1} C_{ik} \cdot \alpha_k + \varepsilon_i, \quad (6.3)$$

$$\text{其中, } \begin{aligned} \alpha_k &= A_0/2, & k=1, \\ A_k-1, & & 2 \leq k \leq m+1, \\ B_{k-m-1}, & & m+2 \leq k \leq 2m+1, \end{aligned}$$

$$C_{ik} = \begin{cases} e^{2\pi(K-1)z_i/\lambda} \cos \left[2\pi(k-1) \frac{x_i}{\lambda} \right], & 1 \leq k \leq m+1, \\ e^{2\pi(K-1)z_i/\lambda} \sin \left[2\pi(k-1) \frac{x_i}{\lambda} \right], & m+2 \leq k \leq 2m+1. \end{cases}$$

(6.3) 式写成矩阵形式为^①

$$\underline{g} = C \underline{\alpha} + \underline{\varepsilon}. \quad (6.4)$$

如令 $\hat{\alpha}$ 代表一组能使剩余平方和达极小的 α 值, 则正规方程为

$$C^T C \hat{\alpha} = C^T \underline{g},$$

式中 C^T 是 C 的转置矩阵, 上式解答为

$$\hat{\alpha} = (C^T C)^{-1} C^T \underline{g}, \quad (6.5)$$

式中 $(C^T C)^{-1}$ 是 $C^T C$ 的逆矩阵。

由 (6.5) 求出 $\hat{\alpha}$, 然后代入 (6.3) 即可得到如下方程:

$$\hat{g}_i = \sum_{k=1}^{2m+1} C_{ik} \hat{\alpha}_k,$$

其中前 $m+1$ 个 $\hat{\alpha}_k$ 决定 A_k , 后 m 个 $\hat{\alpha}_k$ 决定 B_k 。有了 A_k 、 B_k 即可得到

$$\begin{aligned} g(x_i, z_i) = & \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^m e^{2\pi k \left(\frac{z_i}{\lambda} \right)} \left[A_k \cos 2\pi k \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) \right. \\ & \left. + B_k \sin 2\pi k \left(\frac{x_i}{\lambda} \right) \right], \end{aligned}$$

① 本节内用字母下加横线表示向量。

把给定的高度 z 代入上式, 即可求出给定高度上的异常值。

以上谈的是二度的情况, 如果地质体是三度的, 那么可以用类似的办法求出对三度体引起的场值的有限项调和级数的表达式, 其形式为

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) = & \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^p e^{2\pi n \left(\frac{m^2}{\lambda_x^2} + \frac{n^2}{\lambda_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} z} \\
 & \times \left[r_1^{mn} \cos 2\pi m \left(\frac{x}{\lambda_x} \right) \cos 2\pi n \left(\frac{y}{\lambda_y} \right) \right. \\
 & + r_2^{mn} \cos 2\pi m \left(\frac{x}{\lambda_x} \right) \sin 2\pi n \left(\frac{y}{\lambda_y} \right) \\
 & + r_3^{mn} \sin 2\pi m \left(\frac{x}{\lambda_x} \right) \cos 2\pi n \left(\frac{y}{\lambda_y} \right) + r_4^{mn} \sin 2\pi m \left(\frac{x}{\lambda_x} \right) \\
 & \left. \times \sin 2\pi n \left(\frac{y}{\lambda_y} \right) \right] + \varepsilon(x, y, z)
 \end{aligned} \quad (6.6)$$

式中 λ_x, λ_y —— x, y 方向上的剖面长度;

r_i^{mn} ($i = 1, 2, 3, 4$)——待定系数;

p ——与级数项数有关的参数。

为进一步简化, 引入一个新的边界条件,

$$\frac{dg}{dx} = \frac{dg}{dy} = 0$$

这时, 异常表达式为

$$\begin{aligned}
 g(x, y, z) = & \sum_{n=0}^p \sum_{m=0}^p e^{2\pi n \left(\frac{m^2}{\lambda_x^2} + \frac{n^2}{\lambda_y^2} \right)^{\frac{1}{2}} z} r_1^{mn} \cos \pi m \left(\frac{x}{\lambda_x} \right) \\
 & \times \cos \pi n \left(\frac{y}{\lambda_y} \right)
 \end{aligned} \quad (6.7)$$

其解法与二维情况相同。

图2—32、图2—33、图2—34是用有限项调和级数法计算的

结果。图2—32是在水平圆柱模型上计算的结果；图2—33是在垂直磁化板状模型上计算的结果；图2—34是在球状模型体上计算的结果，球心埋深140米，地形最大起伏60米。从图2—32及图2—33看来，地形起伏的影响使对称曲线歪曲得很厉害，经过换算后基本上恢复了曲线的对称形状。从图2—34看来，地形影响使峰值偏离了球心（球心在地表上的投影为坐标原点），经过换算后峰值基本上恢复到球心正上方。

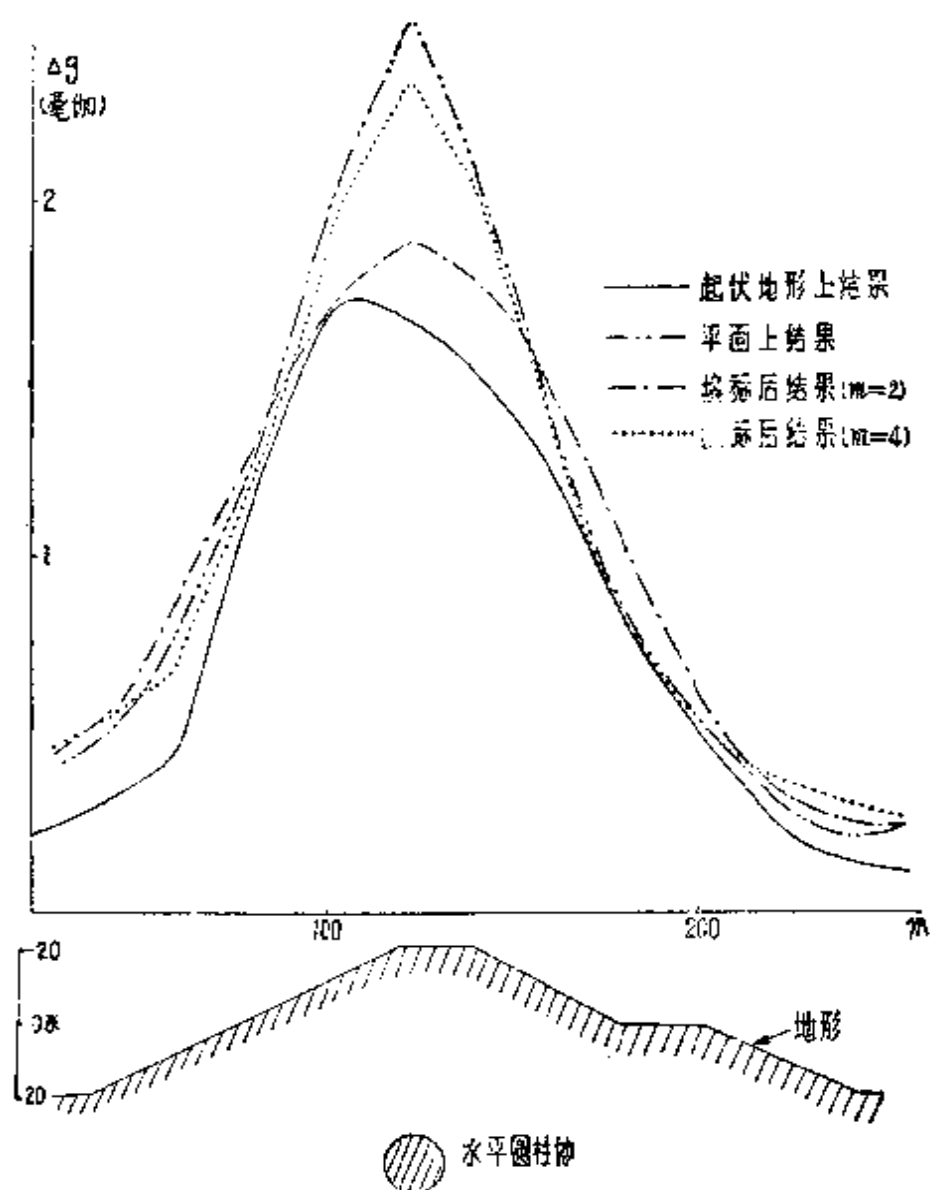


图 2—32 有限项调和级数法计算的结果——水平圆柱体

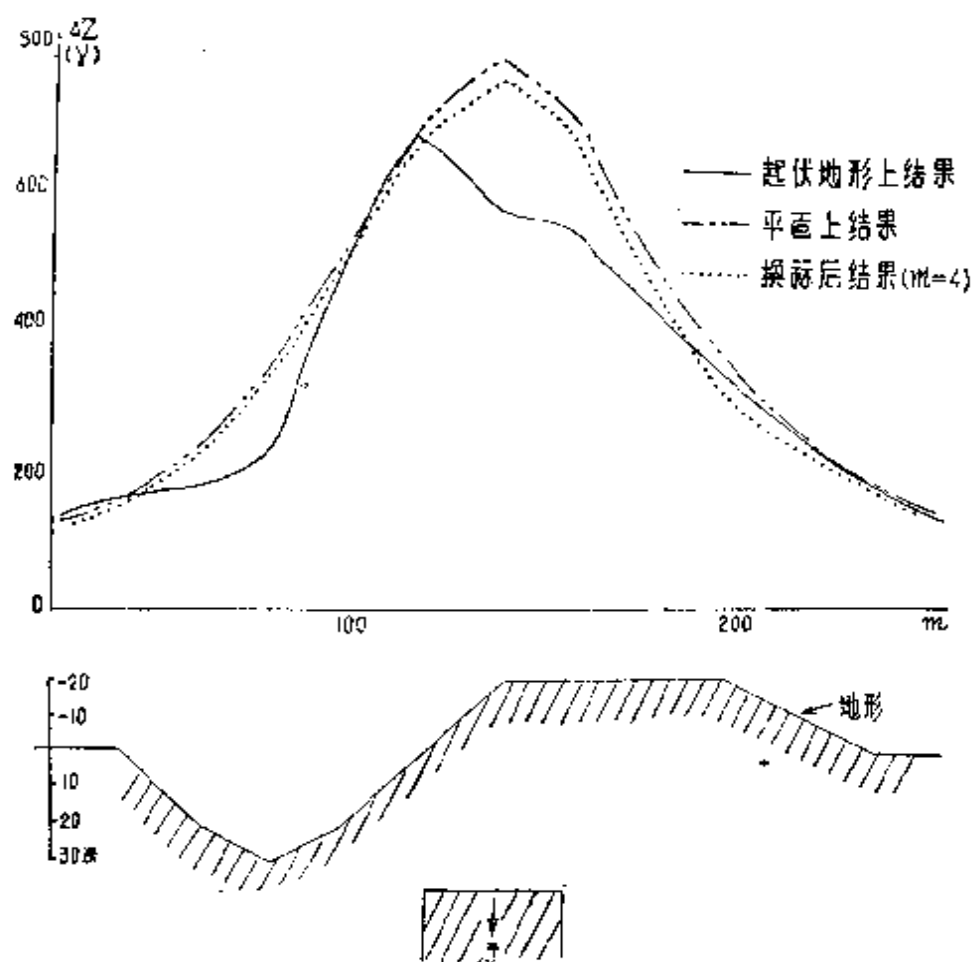


图 2—33 有限项调和级数法计算的结果——垂直磁化板状模型

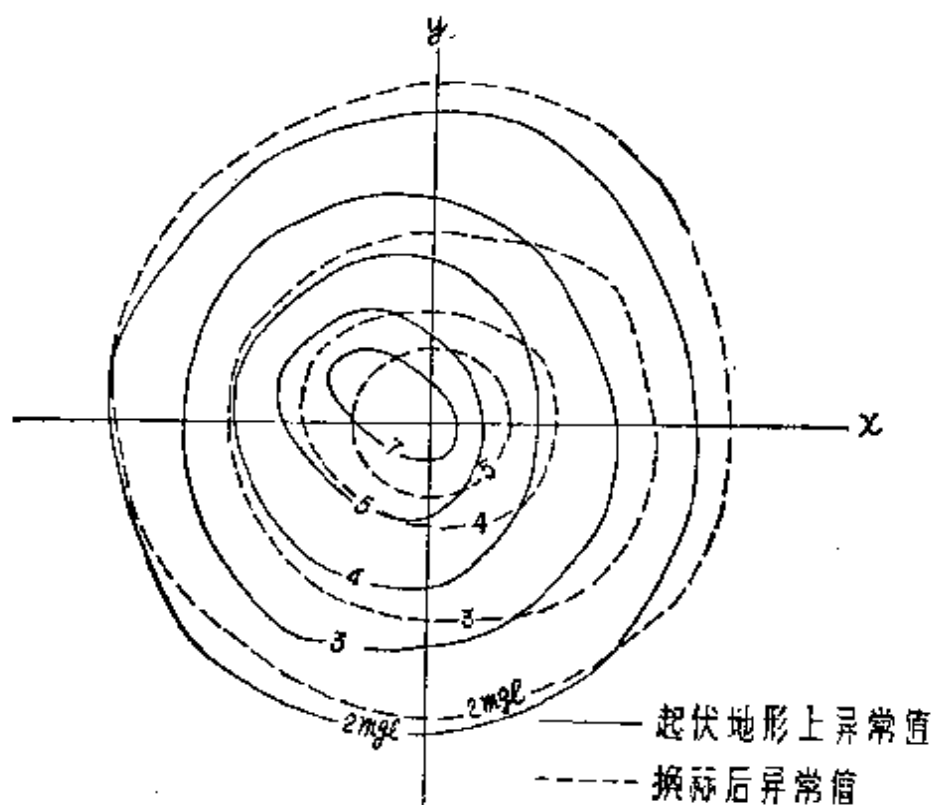


图 2—34 有限项调和级数法计算的结果——球体

二、起伏地形下延拓的镜象法

1. 下延拓的表达式

设在一系列观测点 (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, m$, 上进行观测。每个观测点上的高程为 S_i , 场值为 Z_{0i} 。现在我们要要求下延拓到深度 h 处, 也就是要求在深度为 h 处的场值 $Z_h(x, y)$ 。下面讨论 $Z_h(x, y)$ 应该满足什么条件和要求。

如果已知 $Z_h(x, y)$, 由于它是在一平面上的场值, 我们知道利用它进行上延拓的公式为

$$Z(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{h-z}{2\pi} \frac{Z_h(\xi, \eta) d\xi d\eta}{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (h-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

(6.8)

为简单起见, 我们将记

$$K_h(x, y) = \frac{h}{2\pi} \frac{1}{(x^2 + y^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(6.9)

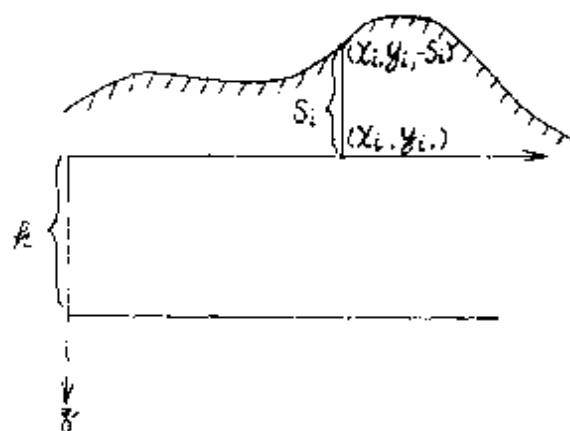


图 2—35 镜象法坐标系图

一个很自然的要求就是 $Z_h(x, y)$ 向上延拓到观测点时, 其值正好等于观测值, 第 i 个观测点的坐标为 $(x_i, y_i, -S_i)$ 。因此, 这个要求就是

$$Z(x_i, y_i, -S_i) = Z_{0i}. \quad (6.10)$$

如果记 $h_i = h + S_i$, 并利用 (6.8), (6.9), 则 (6.10) 式可写成

$$\iint_{-\infty}^{\infty} K_{h_i}(x_i - \xi, y_i - \eta) Z_h(\xi, \eta) d\xi d\eta = Z_{0i}. \quad (6.11)$$

这个方程有无穷多个解，而且它们之间可以相差任意大，因此不可能任取其中一个解来作为 $Z_h(\xi, \eta)$ 的近似解。我们必须从这无穷多个解中选出一个比较符合于实际问题的解。在数学上往往加这样的条件：要求在满足 (6.11) 的解 $Z_h(\xi, \eta)$ 中，使

$$\iint_{-\infty}^{\infty} Z_h^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \min. \quad (6.12)$$

这种条件在这里相当于一个低通滤波器，它将压制观测值的高频干扰，这正符合重磁问题的需要。综上所述，我们把下延拓问题归结为以下条件极值问题

$$\begin{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} Z_h^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \min, \\ (K_{h_i} * Z_h)(x_i, y_i) = Z_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \quad (6.13)$$

其中 $*$ 表示卷积（或称褶积）。(6.13) 式的第二式是 (6.11) 式的简写。对于条件极值，我们可以采用拉格朗日乘子法，考虑

$$M[Z_h] = \iint_{-\infty}^{\infty} Z_h^2(\xi, \eta) d\xi d\eta + \sum_{i=1}^m \lambda_i [(K_{h_i} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{0i}]. \quad (6.14)$$

的极小问题。假设 $Z_h(\xi, \eta)$ 已是极小问题 (6.14) 的解，我们将导出 $Z_h(\xi, \eta)$ 所满足的方程。设 $\delta(\xi, \eta)$ 是任一函数（严格地说，是平方可积的）， t 是任一实数，将 $Z_h(\xi, \eta) + t\delta(\xi, \eta)$ 代入 (6.14)，得到

$$\begin{aligned} M[Z_h + t\delta] &= \iint_{-\infty}^{\infty} [Z_h(\xi, \eta) + t\delta(\xi, \eta)]^2 d\xi d\eta \\ &+ \sum_{i=1}^m \lambda_i [(K_{h_i} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{0i} + t(K_{h_i} * \delta)(x_i, y_i)]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

由 $Z_h(\xi, \eta)$ 的假设， $M[Z_h + t\delta]$ 当 $t = 0$ 达到极小，因此

$$\left. \frac{\partial M[Z_h + t\delta]}{\partial t} \right|_{t=0} = 0.$$

将 (6.15) 式对 t 微商, 再令 $t = 0$, 则得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \left[Z_h(\xi, \eta) + \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \lambda_i K_{hi}(x_i - \xi, y_i - \eta) \right] \delta(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0.$$

由 $\delta(\xi, \eta)$ 的任意性, 则

$$Z_h(\xi, \eta) = - \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} \lambda_i K_{hi}(x_i - \xi, y_i - \eta).$$

这样, 我们给出了 $Z_h(\xi, \eta)$ 的函数表达式, 它是一些点源函数 $K_{hi}(x_i - \xi, y_i - \eta)$ 的线性组合。我们直接写成

$$Z_h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^m a_i K_{hi}(x_i - \xi, y_i - \eta). \quad (6.16)$$

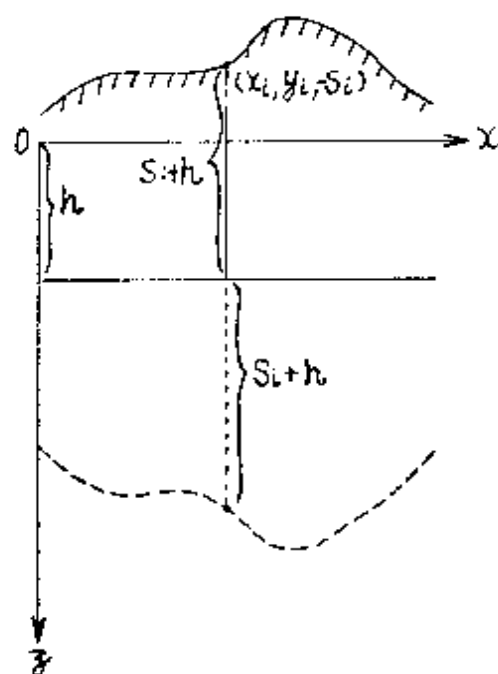


图 2—36 镜象法原理图

可以给这个公式以物理解释, 它相当于在观测点对镜面 $z = h$ 的虚象点, 赋予质量 $(2\pi G^{-1}a_i)$, 在 $z = h$ 上引起的重力垂直分量, 其中 G 是引力常数。因此我们称之为镜象法。

2. 系数的确定

(6.16) 式中的系数 a_i 可由 (6.13) 的第二式确定。将 (6.16) 式代入 (6.13) 的第二式, 得到

$$\sum_{j=1}^m a_j (K_{hi} * K_{hj})(x_i, y_i) = Z_{0i}, \quad (6.17)$$

这是一个线性方程组。利用富氏变换容易给出系数矩阵的表达式。事实上

$$\begin{aligned}(K_{h_i} * K_{h_j})(x_i, y_i) &= \iint_{-\infty}^{\infty} K_{h_i}(x_i - \xi, y_i - \eta) \\ &\quad \times K_{h_j}(x_i - \xi, y_i - \eta) d\xi d\eta \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} K_{h_i}(\xi, \eta) K_{h_j}(x_i - x_i - \xi, y_i - y_i - \eta) d\xi d\eta. \quad (6.18)\end{aligned}$$

先考虑卷积

$$\iint_{-\infty}^{\infty} K_{h_i}(\xi, \eta) K_{h_j}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta. \quad (6.19)$$

我们知道, $K_h(x, y)$ 的富氏变换为 $e^{-2\pi h \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}$, 其中 k_x, k_y 分别表示 x, y 方向上的波数 (频率), 利用卷积定理, (6.19) 式的富氏变换为

$$e^{-2\pi (h_i + h_j) \sqrt{k_x^2 + k_y^2}}.$$

再求其富氏反变换, 则得到

$$\iint_{-\infty}^{\infty} K_{h_i}(\xi, \eta) K_{h_j}(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta = K_{h_i + h_j}(x, y).$$

于是, 由 (6.18) 式得到

$$\begin{aligned}(K_{h_i} * K_{h_j})(x_i, y_i) &= K_{h_i + h_j}(x_i - x_i, y_i - y_i) \\ &= \frac{h_i + h_j}{2\pi} \frac{1}{[(x_i - x_i)^2 + (y_i - y_i)^2 + (h_i + h_j)^2]^{\frac{3}{2}}} = \varphi_{ij}.\end{aligned} \quad (6.20)$$

最后一个等式是我们为简单起见所做的记号。以 B 表示矩阵 $(\varphi_{ij})_{m \times m}$, $\underline{a}$ 表示由 (6.17) 式的系数组成的列向量 $(a_i)_{m \times 1}$, $\underline{Z}$ 表示由观测值组成的列向量 $(Z_{0i})_{m \times 1}$, 则方程组 (6.17) 可简写为矩阵形式

$$B \underline{a} = \underline{Z}. \quad (6.21)$$

现在系数矩阵完全是已知的, 而且可以证明系数矩阵是对称正定

的。(6.21) 式必有唯一解，这样就可以得到所要的延拓值。

3. 存在问题

方程组 (6.21) 的未知数的个数等于观测点的个数，因此它是一个巨大的方程组，不论从计算量或存贮量来看都是不能接受的。与三角级数取有限项一样，我们应该从公式 (6.16) 中挑出较少的项数，既能保证延拓的精度要求，又能减少计算量。减少 (6.16) 式的项数，就相当于减少 (6.11) 式中等式的个数。

资料解释的经验表明，只要有一些特征点，我们就可以把握异常的主要特征。因此，要根据实际情况，选择较少的一些点使式 (6.11) 成立。

从 m 个观测点中，选出 p 个有代表性的特征点 $n_1, n_2, \dots, n_p$ 。代替 (6.11) 式，我们要求

$$(K_{h n_i} * Z_h)(x_{n_i}, y_{n_i}) = Z_{0n_i}, i = 1, 2, \dots, p. \quad (6.22)$$

由 (6.22)，我们得到 Z_h 的表达式为

$$Z_h(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^p a_i K_{h n_i}(x_{n_i} - \xi, y_{n_i} - \eta). \quad (6.23)$$

同样，我们也可以将 (6.23) 代入 (6.22)，得到 a_i 的 p 阶线性方程组来确定系数 a_i 。但是为了充分利用已经观测到的信息，我们将 (6.23) 代入 (6.11) 式，要求在最小二乘意义下满足方程 (6.11)，即使

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m [(K_{h i} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{0i}]^2 \\ & = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^p \varphi_{i n_j} a_j - Z_{0i} \right]^2 = \min = \epsilon^2. \end{aligned} \quad (6.24)$$

如果记矩阵

$$H = \begin{pmatrix} \varphi_{1n_1} & \varphi_{1n_2} & \cdots & \varphi_{1n_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{mn_1} & \varphi_{mn_2} & \cdots & \varphi_{mn_p} \end{pmatrix},$$

则由(6.24)的最小二乘解可以知道, (6.23)的系数 $\underline{a} = (a_i)_{p \times q}$ 可以表示成

$$\underline{a} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{Z}.$$

虽然理论上可以说明 $H^T H$ 是正定矩阵, 但是实际计算表明, 它有时是病态的, 所以我们不得不用较复杂的方法来求(6.23)的系数。

4. 正则化方法

本来观测值就有误差, 因此我们并不需要(6.11)式两边相等, 而仅仅需要它与观测值在允许误差范围内, 所以我们用

$$\sum_{i=1}^m [(K_{hi} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{oi}] \leq \delta^2 \quad (6.25)$$

来代替(6.11), δ 是表示误差允许范围的一个量。用条件极值问题

$$\begin{cases} \iint_{-\infty}^{\infty} Z_h^2(\xi, \eta) d\xi d\eta = \min \\ \sum_{i=1}^m [(K_{hi} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{oi}]^2 \leq \delta^2. \end{cases} \quad (6.26)$$

来代替(6.13)。现在已经有 $Z_h(x, y)$ 的合理表达式(6.23), 因此我们将仅仅从表达式(6.23)这样一些函数类中来找(6.26)的解。这时只有 $\delta \geq \epsilon$ 时才有解(ϵ 见6.24式), ϵ 又是不可能知道的, 因此这里 δ 只起参考作用。我们在计算过程中加以处理, 用正则化的一般方法, 考虑

$$\begin{aligned} \Phi[Z_h] = & \sum_{i=1}^m [(K_{hi} * Z_h)(x_i, y_i) - Z_{oi}]^2 \\ & + \alpha \iint_{-\infty}^{\infty} Z_h^2(\xi, \eta) d\xi d\eta \end{aligned} \quad (6.27)$$

的极小问题。参数 α 将适当选取。将(6.23)代入(6.27)式, 得到

$$\Phi [Z_h] = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^p \varphi_{ijnj} a_j - Z_{0i} \right]^2 \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \varphi_{uinj} a_i a_j \quad (6.28)$$

现在 (6.27) 的极小问题, 化为选取 $a_j (j=1, 2, \dots, p)$ 使 (6.28) 取极小的问题。根据极值的必要条件, 容易得到 $\underline{a}$ 所必须满足的方程

$$(H^T H + \alpha D) \underline{a} = H^T \underline{Z} \quad (6.29)$$

其中矩阵

$$D = \begin{pmatrix} \varphi_{n_1 n_1} & \varphi_{n_1 n_2} & \dots & \varphi_{n_1 n_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{n_p n_1} & \varphi_{n_p n_2} & \dots & \varphi_{n_p n_p} \end{pmatrix}$$

参数 α 的确定与级数正则化类似, 令

$$\rho(\alpha) = \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^p \varphi_{ijnj} a_j - Z_{0i} \right]^2 \quad (6.30)$$

注意其中右端 a_j 与 α 有关。因为

$$\underline{a} = (H^T H + \alpha D)^{-1} H^T \underline{Z}$$

因此 (6.30) 式右端是 α 的函数。同样用

$$\rho(\alpha) = \delta^2$$

来确定参数, 也可用牛顿切线法来进行叠代, 但这时并不完全以收敛来结束叠代, 在满足下面条件之一时都停止叠代。

(1) 方程 (6.29) 病态, 无法求解, 采用前一个 α 值;

(2) α 值很小, 叠代已没有意义; 当叠代次数达到已给定的叠代次数时, 也停止叠代。

这样, δ 仍取表示误差的量, 不论其是否 $\geq \epsilon$, 都不影响计算的进行。

5. 实例

我们应用这个方法对模型与矿区进行了试算, 结果表明这个方法是有-一定效果的。

所选择的模型如图2—37。地形是一个山脊, 沿山脊方向排列

两个球, 它们在山坡表面产生的磁异常如图2—38。从山脊下延150米的 ΔZ 平面图如图2—39。在中心剖面(双球连线方向)上的下

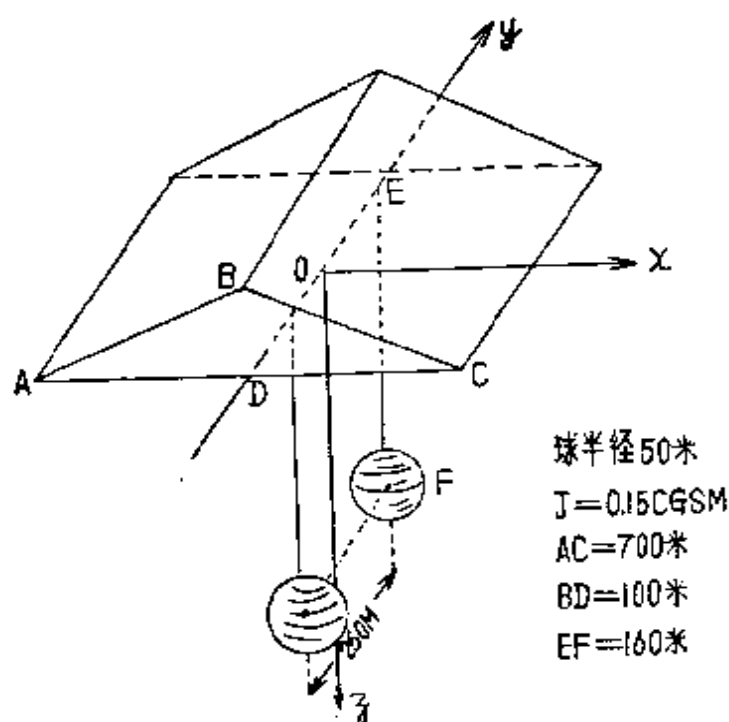


图 2—37 检验镜象法所用的理论模型

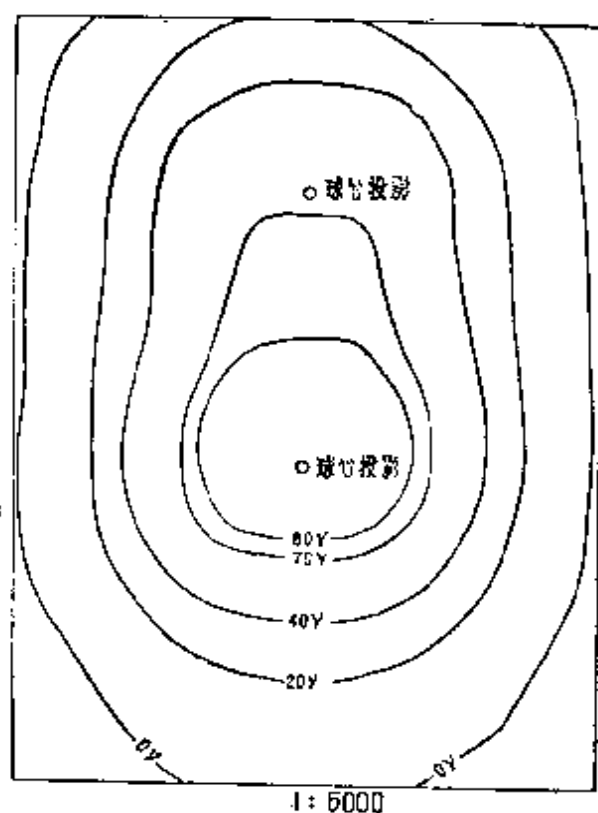


图 2—38 两个球形矿体在山坡上引起的磁异常平面图

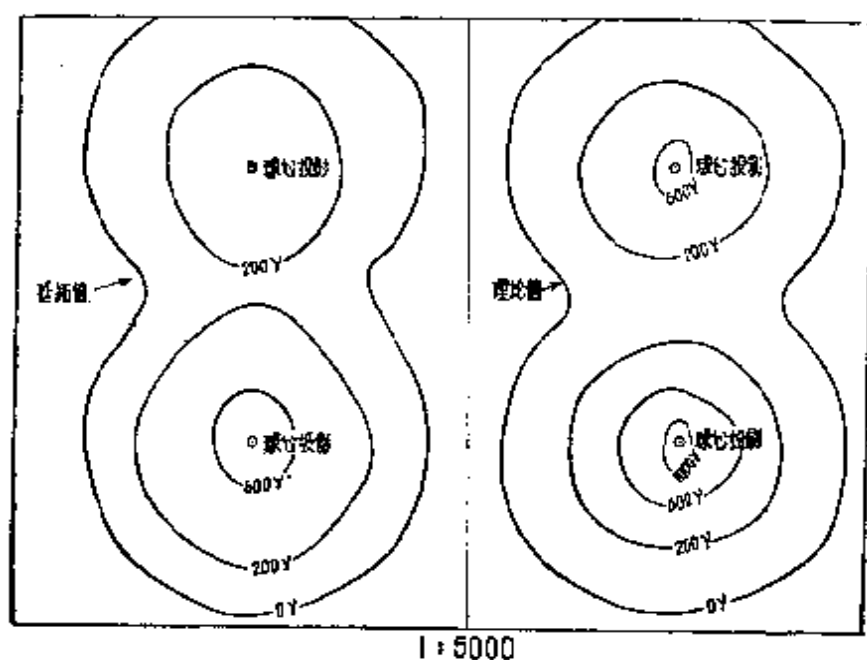


图 2—39 延拓到150米深处的结果与理论值对比图

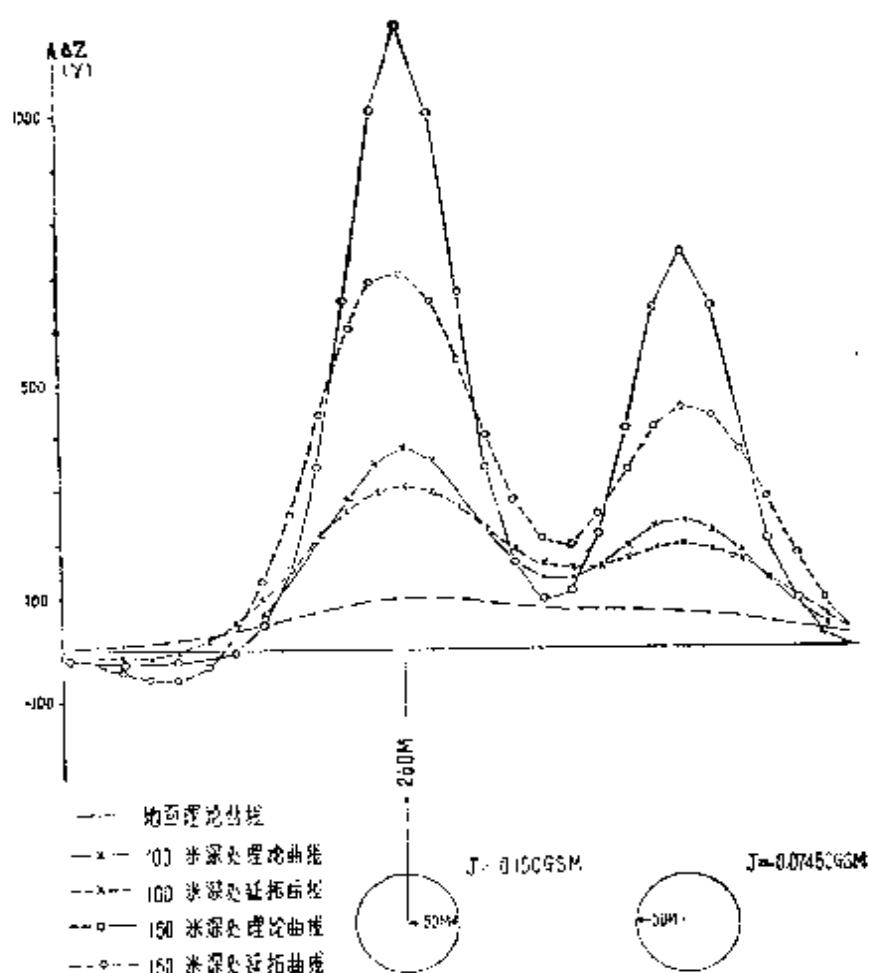


图 2—40 球体异常不同深度的延拓结果

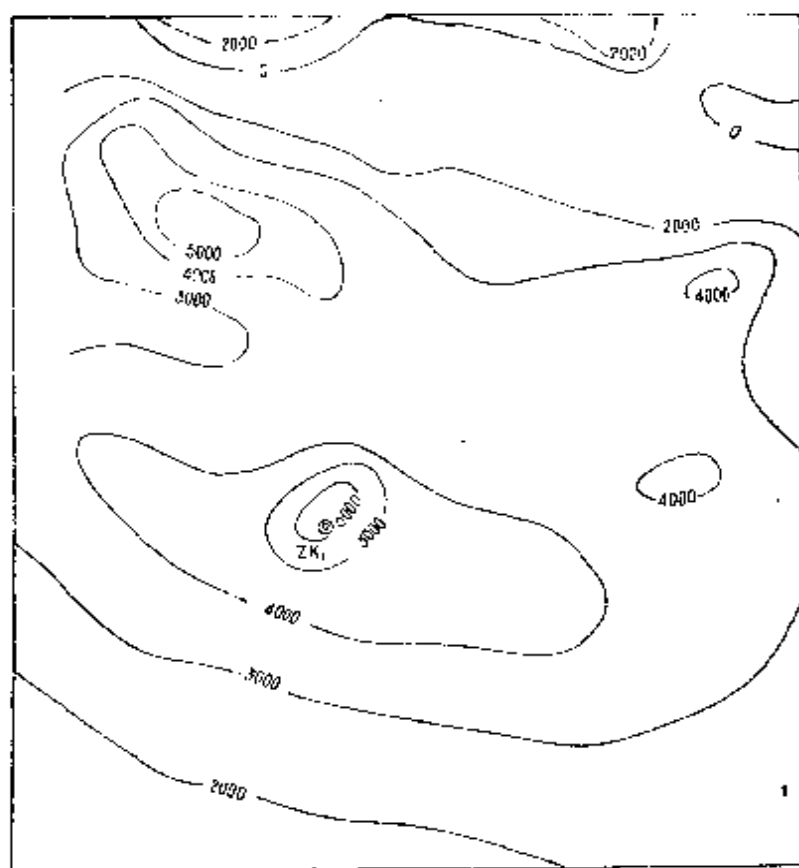


图 2—41 云南某磁异常等值线平面图

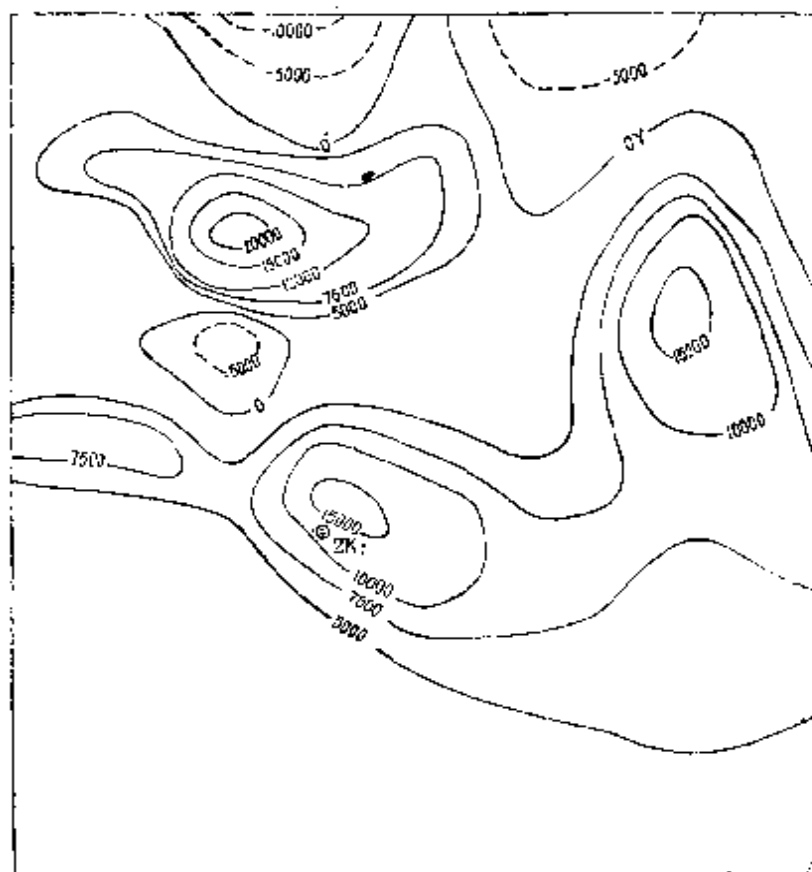


图 2—42 云南某磁异常用镜象法下延拓到海拔 800 米处的等值线平面图

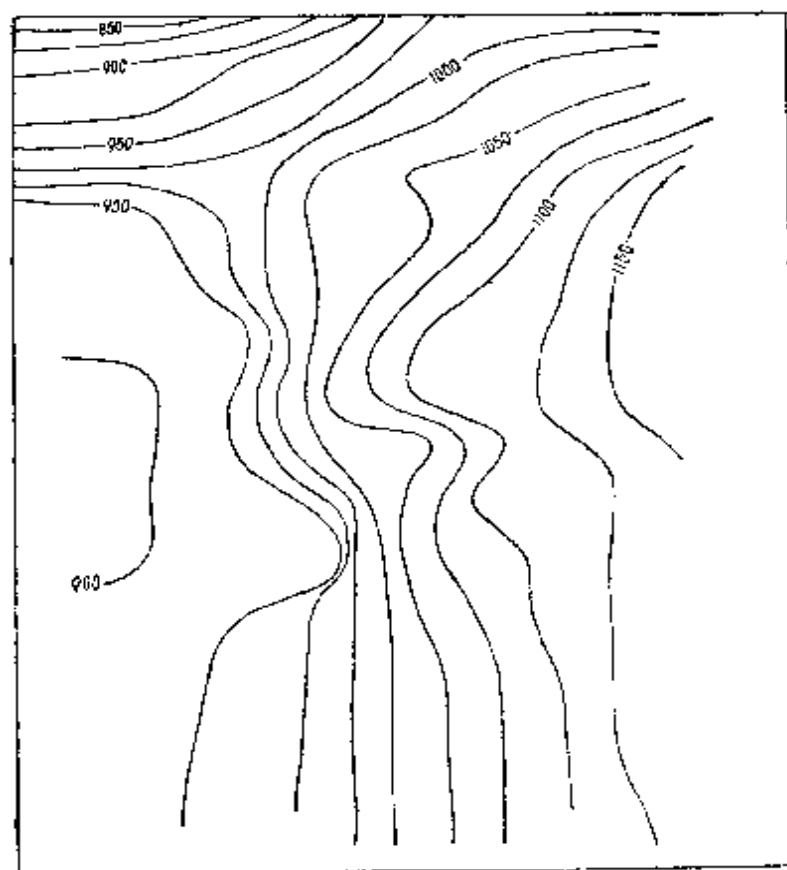


图 2—43 云南 某磁异常区地形示意图

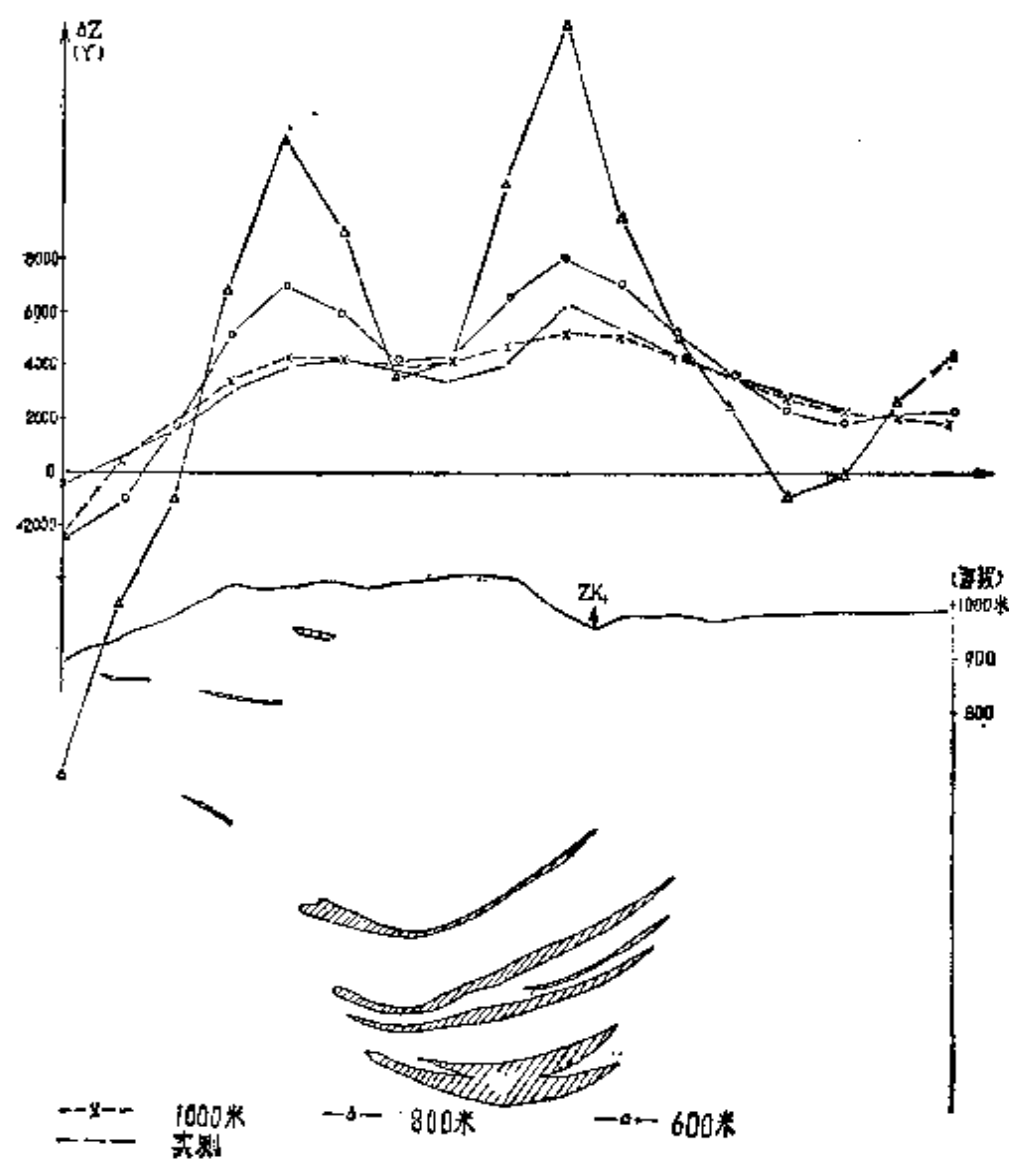


图 2—44 云南某磁异常下延拓结果剖面图

延拓 ΔZ 剖面图如图2—40。这些图表明，通过下延拓将水平方向叠加在一起的双球异常分解为两个孤立异常，体现了方法的分辨能力。但是从延拓值与理论场比较，可以看出峰值压低较多。

对云南某已知矿区磁异常的试算结果参看图2—41至图2—44。地形相对高差达362米，最高点为海拔1184米，向下延拓至海拔800米。最明显的效果是东部异常，原来异常较低，但在海拔800米处平面上的延拓值，其异常极值近16400 γ ，几乎与中部相近，这表明由于地势较高，使实测异常偏低。

§7 其他方法

上面几节中介绍了经常遇到的几种圆滑及延拓方法。目前在重磁数据处理中提出来的方法还有很多，应用范围也相当广泛。本节只简单介绍一下二次导数法和把异常化到地磁极的方法。

一、二次导数法

在重磁工作中，大家都知道，高次导数有较高的分辨力。利用高次导数有可能从复杂的异常中区分出个别有意义的异常，消除区域场的影响。例如，有一个磁性矿体位于磁性岩体附近（图2—45、图2—46），矿体是顺层磁化的。一般说来，它的异常曲线应当是对称的，但是由于磁性岩体的影响，因而使总的磁异常曲线变得不对称，如果不加注意，就可能当成是由倾斜矿体引起的。这时作出磁场在垂直方向上的一次导数，则异常非对称性即可显著降低。同样地，在重力测量中划分区域场与剩余异常时，最简单的方法是在异常图上勾出异常的平缓变化部分，把平缓变化部分当成区域异常，从总异常中减去区域异常，即可得到剩余异常。不过这种方法只有当剩余异常比较尖锐，而且剩余场与区域场走向不同时才能得出较好效果，否则就很难用这种方法区分区域场与剩余场。在这种情况下，可以用中心点单环法及其他二次导数方法求剩余异常。

二次导数能用于求剩余异常，是因为从理论上可以证明剩余

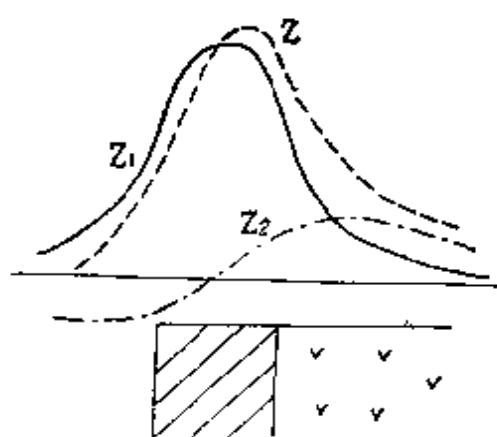


图 2—45 磁性岩矿体的
磁异常垂直分量图

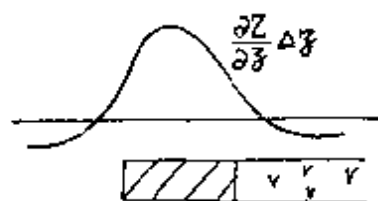


图 2—46 磁性岩、矿体
磁异常垂直分量的导数图

异常与二次导数之间有如下关系式：

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4}{s^2} \{ g_0 - \overline{g_s} \}, \quad (7.1)$$

式中 g_0 —测点的重力值； $\overline{g_s}$ 是离测点距离为 s 处的平均重力值（图2—47）。

这个式子告诉我们，异常的二次导数与剩余重力值成比例，因此可以用二次导数来表示剩余重力异常。但是应当注意的是，二者只是形状相似，数值并不相等。

下面介绍几种常见的二次导数求法。最简单的方法是中心点单环法，它和求剩余异常的中心点单环法的作法基本一样。

中心点单环法即取测点值与测点附近一个半径为 s 的圆上的平均值之差作为剩余值。具体作法是，先求出环上八个点（称为矩形网格法，见图2—48）或六个点（称六角形网格法，见图2—48）的平均值，然后由中心点的数值中减去环上平均值，即可得出剩余值。这种作法的缺点是环的大小、环上点数的多少对结果有

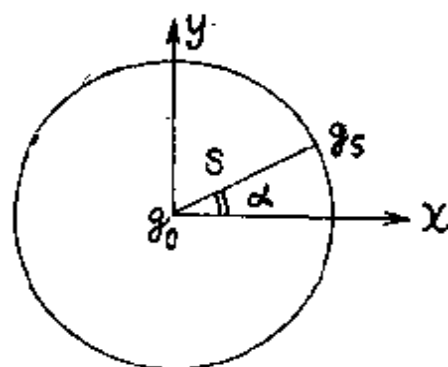


图 2—47 (7.1) 式中
符号意义示意图

一定影响。

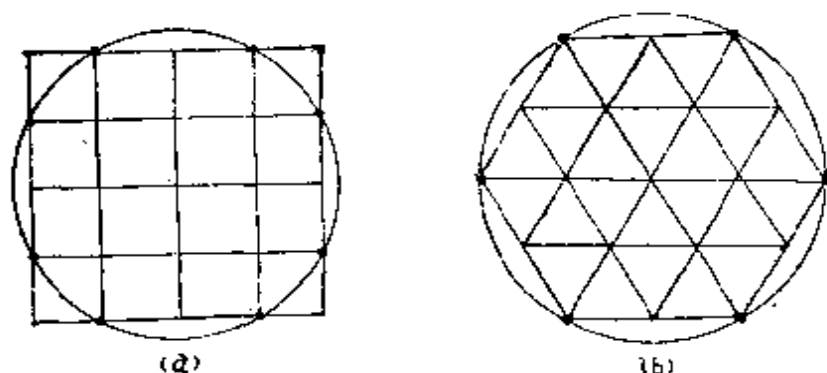


图 2—48 计算二次导数的取值点分布图

中心点单环法公式 (7.1) 的来源如下: 已知, 某一以 s 为半径的圆周上的平均值 $\bar{g}$ 由下式表示 (图2—47):

$$\bar{g}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(s, \alpha) d\alpha.$$

g 是坐标的调和函数, 可展为原点的泰勒级数:

$$\begin{aligned} g(s, \alpha) = g(x, y) = & g(0, 0) + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)_0 x + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_0 y \\ & + \frac{1}{2!} \left\{ \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_0 x^2 + \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_0 y^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right)_0 x y \right\} \\ & + \frac{1}{3!} \left\{ \left(\frac{\partial^3 g}{\partial x^3} \right)_0 x^3 + \dots \right\} + \dots \end{aligned}$$

将上式代入 $\bar{g}(s)$, 并注意 $x = s \cos \alpha$, $y = s \sin \alpha$, 积分后代入积分上下限, 并加以整理得

$$\begin{aligned} \bar{g}(s) = & g(0, 0) + \frac{s^2}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right)_0 + \frac{s^4}{24} \left[\frac{\partial^4 g}{\partial x^4} \right. \\ & \left. + 2 \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 g}{\partial y^4} \right] + \dots \end{aligned}$$

当 s 很小时, 略去 s^4 以上各项得,

$$\bar{g}(s) = g(0) + \frac{s^2}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) = g(0) - \frac{s^2}{4} \frac{\partial^2 g}{\partial z^2},$$

故
$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = -\frac{4}{s^2} [g(0) - \bar{g}(s)].$$

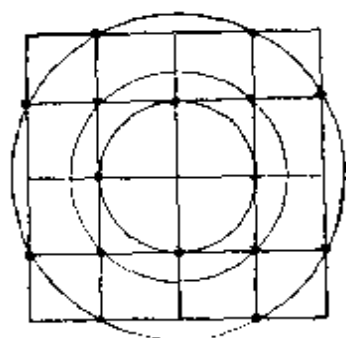


图 2—49 计算二次导数的
三环网格图

其他求二次导数的公式见表2—1。

以埃尔金斯 (Elkins) 的系数为例，三个环上的点子的取法如图2—49所示，第一环第二环取四点，第三环取八点。

图2—50是某地区重力异常图，图2—51~图2—53是用不同方法、不同网格距得到的剩余重力异常图。从图中可以看到，不同方法得到的重力异常的中心位置基本上一致，但是更细致的剩余重力图图形则有些差异。不但如此，同一方法用不同网格距所得到的结果也不一致。这些结果告诉我

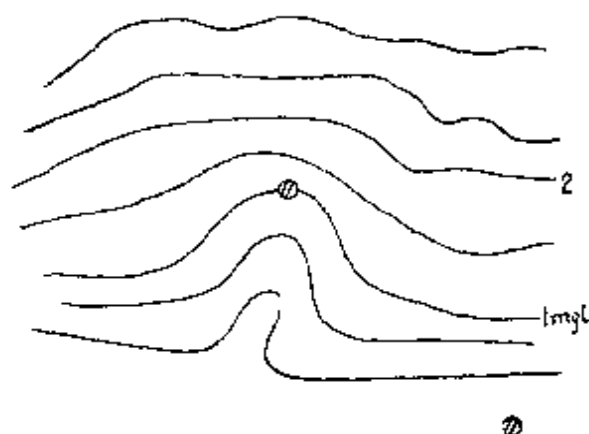


图 2—50 某地重力
异常等值线图

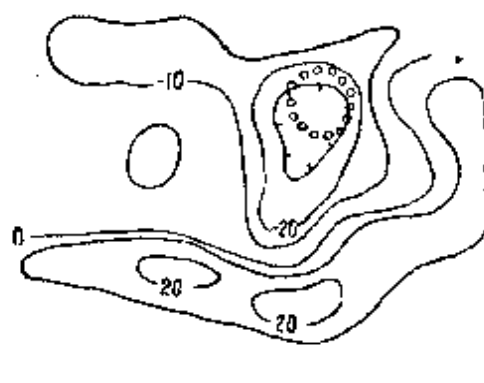


图 2—51 用公式 7 计算
的二次导数，点距0.5里

们，在求异常中心大致位置时用那种方法都可以，但是要用二次导数求得的图形作进一步解释时，则应注意选择所用的方法及网格距。图2—54是我国某地重力异常图。图2—55是用二次导数方法处理该异常后所得到的结果。图2—56是该异常的剩余异常

表 2—1 重、磁力剩余异常及二次导数公式

编号	公式来源	公 式
1	中心点单环法	$\Delta g = g_0 - \bar{g}_a$
1a	"	$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{4}{S^2} (g_0 - \bar{g}_a)$
2	汉 德 森	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \left\{ 6.185 \Delta T_0 - 8.374 \Delta \bar{T}_1 + 2.189 \Delta \bar{T}_2 \right\} \frac{1}{S^2}$
3		$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 2 (3 \Delta T_0 - 4 \Delta \bar{T}_1 + \Delta \bar{T}_2) \frac{1}{S^2}$
4		$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{3} (21 \Delta T_0 - 32 \Delta \bar{T}_1 + 12 \Delta \bar{T}_2 - \Delta \bar{T}_3) \frac{1}{S^2}$
5	埃 尔 金 斯	$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{60 S^2} (64 g_0 - 8 \bar{g}_1 - 16 \bar{g}_2 - 40 \bar{g}_3)$
6	"	$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{28 S^2} (16 g_0 + 8 \bar{g}_1 - 24 \bar{g}_3)$
7	"	$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{62 S^2} (44 g_0 + 16 \bar{g}_1 - 12 \bar{g}_2 - 48 \bar{g}_3)$
8	罗 森 巴 赫	$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{1}{24 S^2} (96 g_0 - 72 \bar{g}_1 - 32 \bar{g}_2 + 8 \bar{g}_3)$

式中 $g, \bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ (重力场值), $\Delta T_0, \Delta \bar{T}_1, \Delta \bar{T}_2, \Delta \bar{T}_3$ (总磁力异常) 分别为半径为 0 及 $S, \sqrt{2}S, \sqrt{5}S, \sqrt{9.23}S$ 圆周上的平均值; K 是比例尺, r 是图上距离; $S = Kr$, S 是实际距离

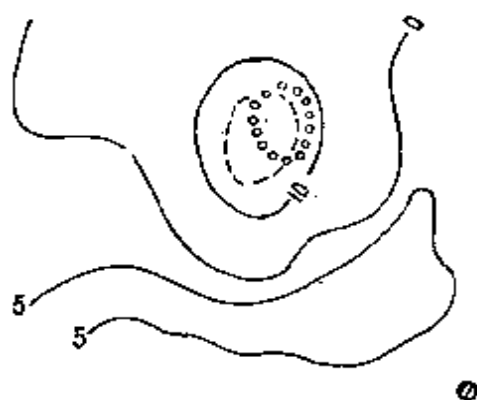


图 2—52 用公式 7 计算的二次导数,点距 1 里

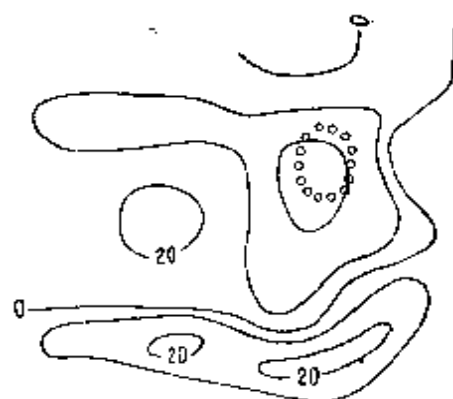


图 2—53 用公式 1a 计算的二次导数,点距 1 里

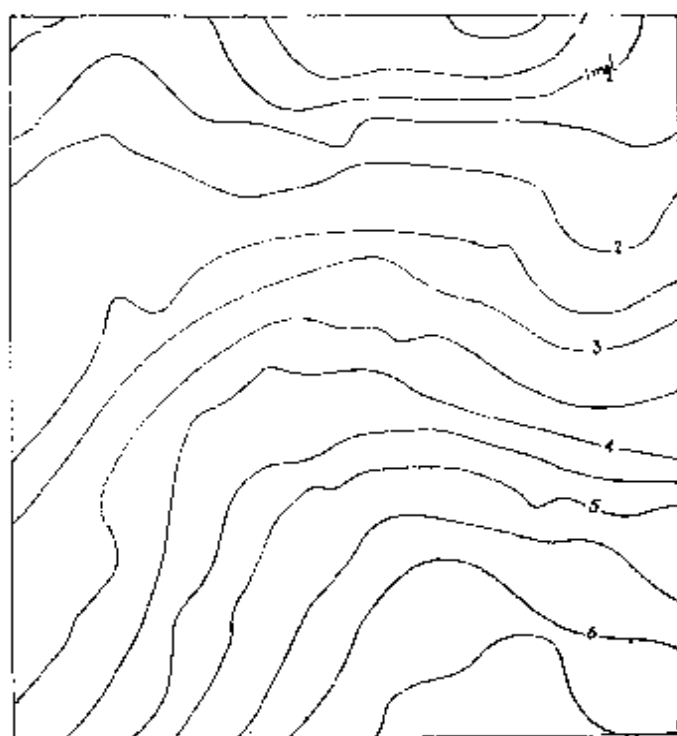


图2—54 某地重力异常图

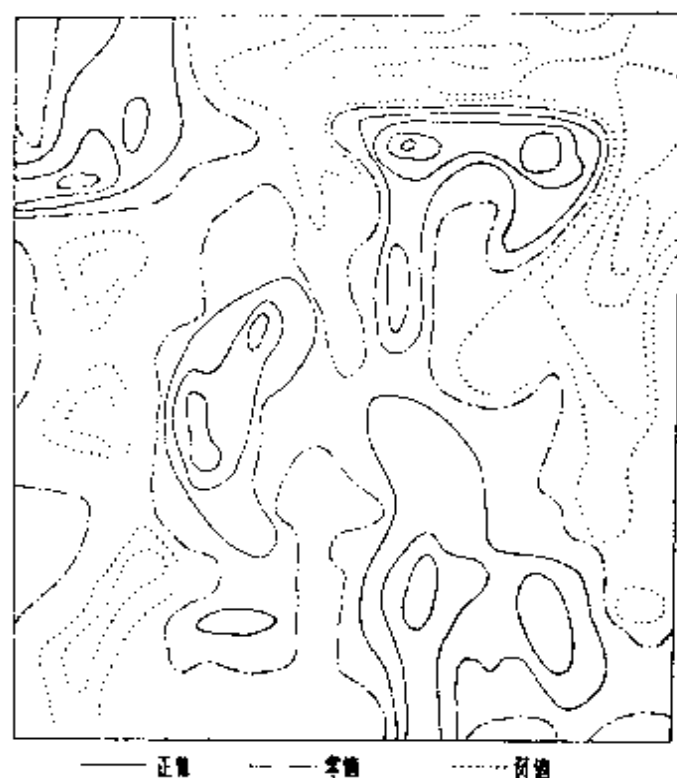


图 2—55 某地重力异常二次导数图

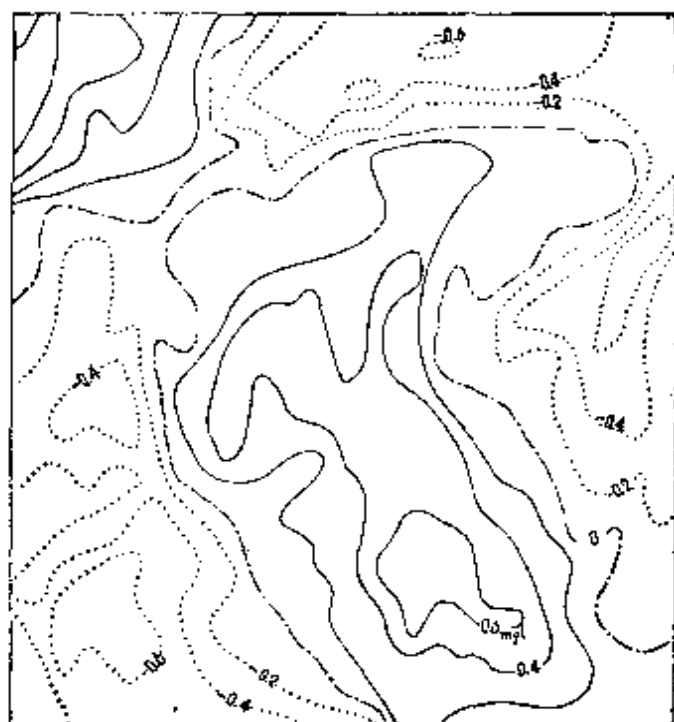


图 2—56 某地剩余重力异常图

图。对比图2—55与图 2—56 可以看出，二次导数的结果与剩余重力异常图反映的异常位置与范围较符合，说明用二次导数划分局部异常是可行的。

还应指出，有人认为求剩余异常时不应当用全部数据，而只用非异常区的数据。具体作法是，先用全部数据求出区域背景值及剩余异常，然后用非异常区的数据再求一次剩余异常，还可以采用趋势分析方法作出趋势面（相当于算出区域背景值）后算出剩余异常值。

二、把磁异常化到地磁极的方法

利用泊松公式把测得的磁场强度化成重力位（准确说应叫似重力位），然后对重力位作二次垂向微商，即可得出相当于垂直磁化的磁场值。由于这种方法是把不同磁化方向的异常化成垂直磁化的异常，相似于把地质体移到地磁极处引起的异常，因此人们把这种方法叫做化到地磁极的方法。

大家都知道，磁位与重力位之间有一重要关系式，即泊松公式

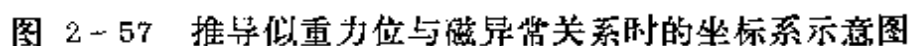
$$\vec{J} \cdot \nabla V = - \int \sigma \cdot U, \quad (7.2)$$

为了简化起见, 我们取 $f\sigma = |\overline{f}|$, 令 $\overline{v}$ 代表磁化强度方向上的单位向量, 则

这个式子表明，可以通过似重力位在磁化强度方向上取一次导数而得到磁位（这里所以叫似重力位，是因为我们计算重力时并不要求真正了解物质密度，而是用 $f\sigma = |\bar{J}|$ 来代替）。相反，也可以通过磁场强度的积分先求出磁位，然后再积分一次，即可求出似重力位（以下简称重力位）。

$$\frac{dg}{d\nu} = -Z. \quad (7.4)$$

假设图 2—57 中直线 MD 由上向下延长至无限远, MD 方向代表磁化强度方向, 在北半球磁化方向向下, 因此我们利用 M 点的上半部分积分, 可以保证积分路线不穿过磁性地质体。在 M 的上半段内取一点 Q , 为了求出 M 点的重力值, 可以沿 MD 直线



积分，得

$$g(M) = \int_0^{\infty} Z(Q) dl.$$

由于我们事先不了解 Q 点的磁异常值，只知道测量平面 π 上的数值，为此要用已知的向上延拓公式求出测量平面之上的异常值。这时，如 P 是 π 平面上的某一点，那么 $Z(Q)$ 由下式决定

$$Z(Q) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{QP} \right) Z(P) ds,$$

式中 ds 是面积元。将上式代入 $g(M)$ 式中，则

$$g(M) = -\frac{1}{2\pi} \iint Z(P) ds \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{QP} \right) dl.$$

$$\text{令} \quad K(MP) = -\int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{QP} \right) dl,$$

$$\text{得} \quad g(M) = \frac{1}{2\pi} \iint K(M, P) Z(P) ds. \quad (7.5)$$

由此式即可把 Z 化成 g ，然后对 g 就 z 微分，即可求出垂直磁化(磁极化的)的磁异常值。具体的磁极化公式可参看本节附录。

图2—58绘有倾角 60° 时的球体异常及校正到地磁极处的磁异常曲线(假定地磁场方向与磁化强度的方向一致)。从图中可以看出，原来的异常中心偏离球心一段距离，而且异常北部出现了大量负值。经过校正后，异常曲线对称，而且异常中心正好落到球体在地面上的投影处。

最后应当指出，虽然有了校正到地磁极的方法，但是由于野外工作中很难准确地定出磁化方向，因此有时就用地磁场方向代替磁化强度方向。这样一来，就会给结果带来一定影响，两个向量的方向相差越大则影响越大。如图2—59所示，在磁化强度倾角为 90° 、地磁场倾角为 60° 、偏角一致的情况下，由于用地磁方向代替了磁化强度方向，因此校正后的异常曲线仍然有些不对称，而且异常中心向北偏移了一段距离。

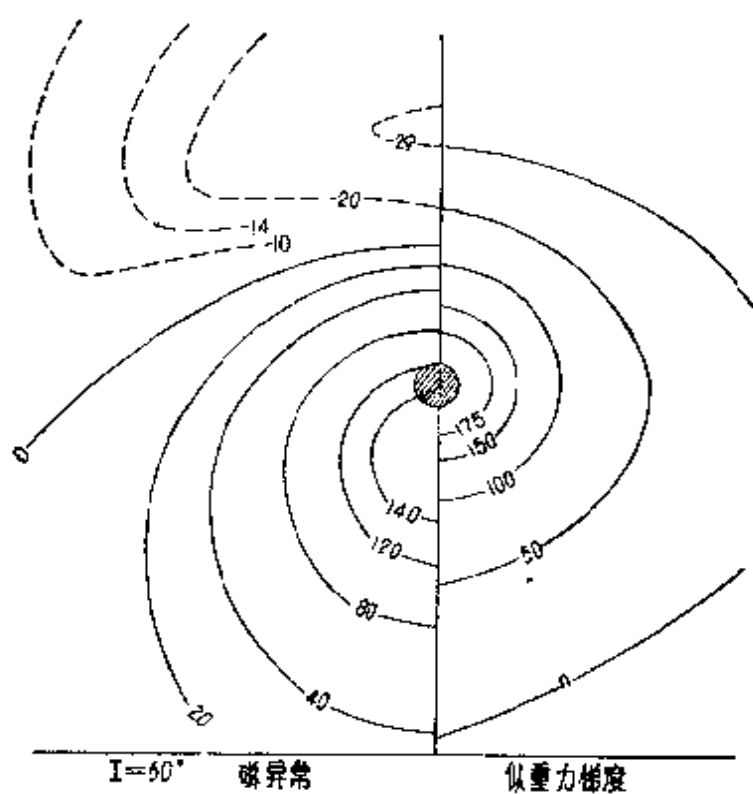


图 2—58 磁化倾角 60° 的球体引起的异常化成似重力梯度

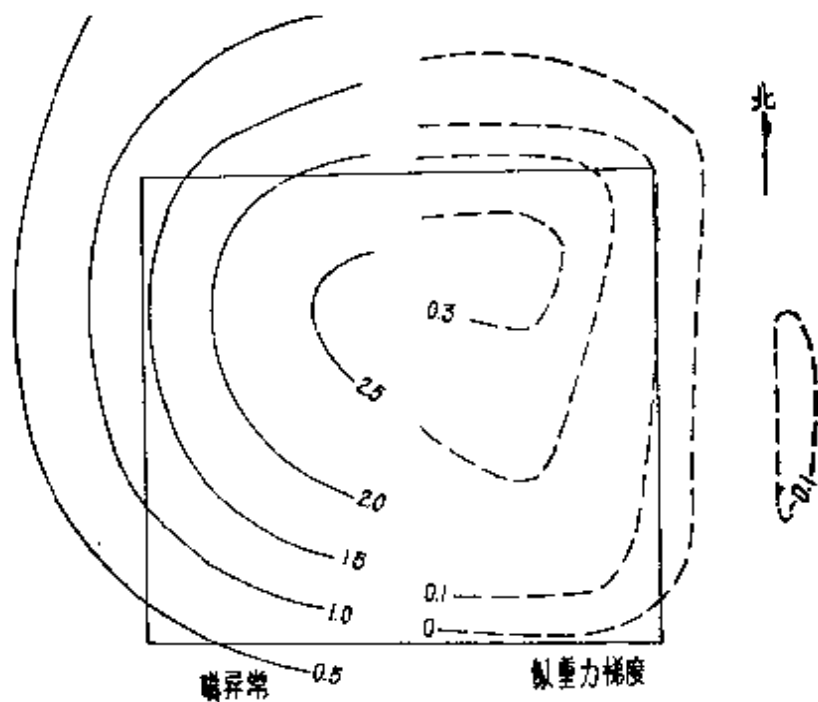


图 2—59 剩磁作用对化到磁极的影响

附 录

假定测得的总磁场强度 T 可以用双重富氏级数展开, 则

$$T = \sum_m \sum_n [A_{mn} \cos k_m x \cos k_n y + B_{mn} \sin k_m x \cos k_n y + C_{mn} \cos k_m x \sin k_n y + D_{mn} \sin k_m x \sin k_n y] e^{-(k_m^2 x + k_n^2 y)^{\frac{1}{2}} z} \quad (7.6)$$

经过一系列运算之后, 可以得出校正到地磁极处的磁场强度公式为

$$Z = \frac{1}{2 \sin I_0 \sin I_r} \sum_{m=0}^{m_0} \sum_{n=0}^{n_0} P_{mn}^2 e^{-\phi_{mn}^2 z} [P'_{mn} \cos(k_m x + k_n y) + Q_{mn} \sin(k_m x + k_n y) + R_{mn} \cos(k_m x - k_n y) + S_{mn} \sin(k_m x - k_n y)] \quad (7.7)$$

式中 Z 是磁场垂直分量,

I_0 、 I 是磁化强度及地磁场的倾角,

$$I_{0r} = 180^\circ - I_0, \quad I_r = 180^\circ - I,$$

$$\phi_{mn} = k_m^2 + k_n^2,$$

$$k_m = 2\pi m/L_x, \quad k_n = 2\pi n/L_y,$$

L_x, L_y —— x, y 方向的基本波长,

x, y, z ——测点坐标,

$$P'_{mn} = \frac{1}{\phi_{mn}^2 + \phi_1^2} [\phi_{mn} E_{mn} + \phi_1 F_{mn}],$$

$$Q_{mn} = \frac{1}{\phi_{mn}^2 + \phi_1^2} [\phi_{mn} F_{mn} - \phi_1 E_{mn}],$$

$$R_{mn} = \frac{1}{\phi_{mn}^2 + \phi_1^2} [\phi_{mn} G_{mn} - \phi_1 H_{mn}],$$

$$S_{mn} = -\frac{1}{p_{mn}^2 + \phi_4^2} [p_{mn} H_{mn} - \phi_4 G_{mn}],$$

$$\phi_3 = \cot I_s [k_m \cos D + k_n \sin D],$$

$$\phi_4 = \cos I_s [k_m \cos D - k_n \sin D],$$

$$E_{mn} = -\frac{p_{mn}}{p_{mn}^2 + \phi_1^2} (A_{mn} - D_{mn}) + -\frac{\phi_1}{p_{mn}^2 + \phi_1^2} (B_{mn} + C_{mn}),$$

$$F_{mn} = -\frac{p_{mn}}{p_{mn}^2 + \phi_1^2} (B_{mn} + C_{mn}) - -\frac{\phi_1}{p_{mn}^2 + \phi_1^2} (A_{mn} - D_{mn}),$$

$$G_{mn} = -\frac{p_{mn}}{p_{mn}^2 + \phi_2^2} (A_{mn} + D_{mn}) + -\frac{\phi_2}{p_{mn}^2 + \phi_2^2} (B_{mn} - C_{mn}),$$

$$H_{mn} = -\frac{p_{mn}}{p_{mn}^2 + \phi_2^2} (B_{mn} - C_{mn}) - -\frac{\phi_2}{p_{mn}^2 + \phi_2^2} (A_{mn} + D_{mn}),$$

$$\phi_1 = \cot I_0 (k_m \cos D_0 + k_n \sin D_0),$$

$$\phi_2 = \cot I_0 (k_m \cos D_0 - k_n \sin D_0),$$

D 、 D_0 是地磁场及磁化强度向量的偏角。

第三章 重磁力异常的正演计算

§ 1 引言

一、正演问题的基本计算公式

我们知道，物探中所谓正演问题即给定地质体的形状大小、空间位置和物性参数，求在它的外部空间任意点引起的物理场。

下面我们将给出用于解重、磁力异常正演问题的基本公式。

1. 重力场的正问题

如图3—1，由场论知道，物体 Q 在其外部某一点 P 的引力位为：

$$W = f \int_Q \frac{\rho}{R} dv, \quad (1.1)$$

式中 f 是引力常数 ($f = 6.67 \times 10^{-3} \text{CGS}$)， ρ 是物体 Q 的剩余密度， dv 是物体 Q 内的小体积元， R 是小体积元 dv 到 P 点的距离。积分是对地质体 Q 进行的。

物体 Q 在 P 点所引起的重力异常 Δg ，就是它的引力位 W 沿铅垂方向的一次微商在该点的值，即有

$$\Delta g = \frac{\partial W}{\partial z_P} = f \int_Q \frac{z_Q - z_P}{R^3} \rho dv. \quad (1.2)$$

对于密度均匀的地质体，剩余密度 ρ 为常量，即可以移到积分号外，于是就有：

$$\Delta g = f \rho \iiint_Q \frac{z_Q - z_P}{R^3} dx_Q dy_Q dz_Q, \quad (1.3)$$

式中 $R = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}$ 。

2. 磁场的正问题

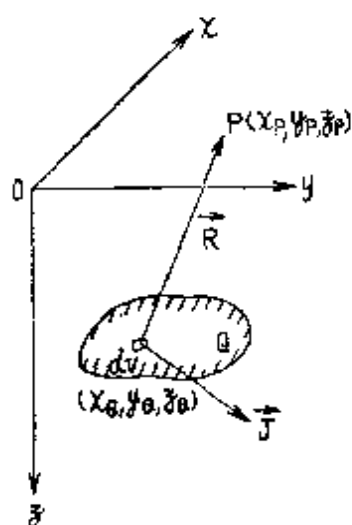


图 3—1 计算场源外任一测点引力位时的坐标示意图

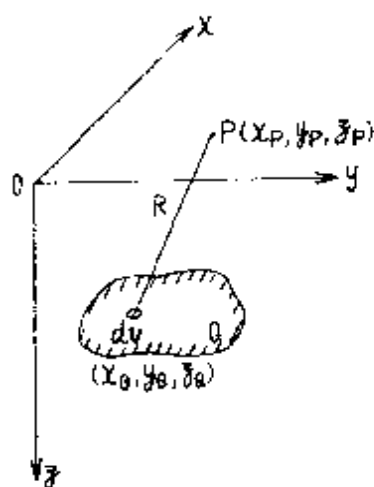


图 3—2 计算场源外任一测点磁位时的坐标示意图

我们知道，磁性物体可以看作是由许多体积很小的元磁体所组成。每一元磁体相当于磁矩为 $(\vec{J} \cdot dv)$ 的磁偶极子 ($\vec{J}$ 为磁体的磁化强度)。元磁体在空间 P 点引起的磁位 dU 按场论有 $dU = \frac{1}{R^3} (\vec{R} \cdot \vec{J} dv)$ ，所以整个物体 Q (图3—2) 在空间 P 点的磁位为：

$$U = \int_Q \frac{\vec{R} \cdot \vec{J} dv}{R^3} = - \int_Q (\vec{J} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{R}) dv. \quad (1.4)$$

对于磁性均匀的地质体，磁化强度 $\vec{J}$ 为常量，可以移到积分号外。式中梯度的运算是按 P 点坐标计算，而积分则按 Q 点坐标，所以可以调换梯度与积分的运算次序。于是就有

$$U = -\vec{J} \cdot \text{grad}_P \int_Q \frac{1}{R} dv = -\vec{J} \cdot \text{grad}_P V. \quad (1.5)$$

上式中 $V = \int_Q \frac{1}{R} dv$ ，即当 $f\rho=1$ 时的“重力位”，式中的积分是对整个磁性体 Q 进行的。所以均匀磁化体的磁位可以用磁化强度 $\vec{J}$ 与“重力位” V 的梯度的标量积的负值来表示。(1.5)

式称为泊松公式，它是计算均匀磁化体磁位的基本公式。

由(1—5)式即可求得物体 Q 在 P 点引起的磁异常在 x 、 y 、 z 三个方向上的分量，即：

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta X &= -\frac{\partial U}{\partial x_P} = \frac{\partial}{\partial x_P} (\vec{J} \cdot \text{grad}_P V) = J_x \frac{\partial^2 V}{\partial x_P^2} \\ &\quad + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial y_P} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial z_P}, \\ \Delta Y &= -\frac{\partial U}{\partial y_P} = \frac{\partial}{\partial y_P} (\vec{J} \cdot \text{grad}_P V) = J_x \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial y_P} \\ &\quad + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial y_P^2} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial y_P \partial z_P}, \\ \Delta Z &= -\frac{\partial U}{\partial z_P} = \frac{\partial}{\partial z_P} (\vec{J} \cdot \text{grad}_P V) = J_x \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial z_P} \\ &\quad + J_y \frac{\partial^2 V}{\partial y_P \partial z_P} + J_z \frac{\partial^2 V}{\partial z_P^2}. \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

上式中 J_x 、 J_y 、 J_z 是磁化强度 $\vec{J}$ 在 x 、 y 、 z 三个方向上的分量。对于这些 V 的二次微商值有：

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial x_P^2} &= \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)^2 - R^2}{R^5} dx dy dz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial y_P} &= \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)(y_Q - y_P)}{R^5} dx dy dz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_P \partial z_P} &= \iiint_Q \frac{3(x_Q - x_P)(z_Q - z_P)}{R^5} dx dy dz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_P^2} &= \iiint_Q \frac{3(y_Q - y_P)^2 - R^2}{R^5} dx dy dz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_P \partial z_P} &= \iiint_Q \frac{3(y_Q - y_P)(z_Q - z_P)}{R^5} dx dy dz, \\ \frac{\partial^2 V}{\partial z_P^2} &= \iiint_Q \frac{3(z_Q - z_P)^2 - R^2}{R^5} dx dy dz. \end{aligned} \right. \quad (1.7)$$

上列各式中积分是对整个物体 Q 进行的，式中：

$$R = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 + (z_P - z_Q)^2}.$$

在航空磁测中测定的是一定高度的地磁场 $\vec{T}$ 在数量上的变化，即 $\Delta T = |\vec{T}| - |\vec{T}_0|$ ($\vec{T}$ 为测定点的地磁场总强度， $\vec{T}_0$ 为正常地磁场或某固定点的地磁场总强度。) 然而磁性地质体所产生的磁异常总强度 $\vec{T}_a$ 是 $\vec{T}$ 与 $\vec{T}_0$ 的矢量差，即 $\vec{T}_a = \vec{T} - \vec{T}_0$ 。所以

$$\Delta T = |\vec{T}| - T_0 = |\vec{T}_0 + \vec{T}_a| - T_0 = \sqrt{T_0^2 + 2T_0T_a\cos\beta + T_a^2}$$

$$- T_0 = T_0 \left(1 + \frac{2T_a}{T_0} \cos\beta + \frac{T_a^2}{T_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} - T_0,$$

式中 β 是 $\vec{T}_0$ 与 $\vec{T}_a$ 的夹角，将上式中根号部分用二项式定理展开则得

$$\Delta T = T_0 + T_a \cos\beta + \frac{1}{2} \sin^2\beta \frac{T_a^2}{T_0} + \dots - T_0.$$

由于一般情况都有 $T_a \ll T_0$ ，故可以略去 $\frac{T_a^2}{T_0}$ 以上的高次项(这时所引起的误差很小，例如当 $T_a = 1000\gamma$ ， $T_0 = 0.5$ 奥斯特，则

$$\left(\frac{1}{2} \sin^2\beta \frac{T_a^2}{T_0} \right) / T_a \leq \frac{T_a}{2T_0} = 1\%). 于是得到：$$

$$\Delta T \doteq T_a \cos\beta, \quad (1.8)$$

所以 ΔT 的一级近似值为 T_a 在 T_0 方向上的投影。如果用磁异常 $\vec{T}_a$ 的三个分量 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 来表示，则有：

$$\Delta T = \Delta X \cos I \cos D + \Delta Y \cos I \sin D + \Delta Z \sin I, \quad (1.9)$$

式中 I 是地磁场倾角， D 是 H_0 (T_0 的水平分量) 与 x 轴的夹角。

以上我们给出了在均匀磁化条件下求磁异常三个分量 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 和总强度 ΔT 的基本计算公式。

另外，我们也可以应用奥-高公式把 (1.4) 式化成表面积分形式来计算均匀磁化体的磁异常。

我们把 $\text{grad}_O \frac{1}{R} = -\text{grad}_P \frac{1}{R}$ 代入 (1.4) 式，则得

$$U = \int_Q (\vec{J} \cdot \text{grad}_O \frac{1}{R}) dv.$$

积分号内的式子利用矢量分析中已知的公式, 即 $\text{div}(\vec{A} \cdot \phi) = \phi \cdot \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \text{grad} \phi$ 来计算, 则得

$$U = \int_Q \text{div}_O \left(-\frac{\vec{J}}{R} \right) dv - \int_Q \frac{\text{div}_O \vec{J}}{R} dv.$$

第一项积分按奥-高公式可变为面积分, 于是有,

$$U = \int_S \frac{\vec{J} \cdot \vec{ds}}{R} - \int_V \frac{\text{div}_O \vec{J}}{R} dv, \quad (1.10)$$

式中第一项积分对磁化体全部表面进行, 相当于磁化体表面磁荷所引起的磁位; 第二项积分则对整个磁化体进行, 相当于体积磁荷对 P 点所引起的磁位。表面磁荷密度 $\sigma = J_n = \vec{J} \cdot \vec{ds}$, 即 $\vec{J}$ 在 $\vec{ds}$ 面积元法线方向的投影; 体积磁荷密度 $\rho = -\text{div}_O \vec{J}$ 。

当磁性体均匀磁化时, 无体积磁荷而仅有面磁荷出现, 故 (1.10) 式中仅剩下第一项, 即为

$$U = \int_S \frac{\vec{J} \cdot \vec{ds}}{R}, \quad (1.11)$$

而 $\Delta X = -\frac{\partial U}{\partial x_P}$, $\Delta Y = -\frac{\partial U}{\partial y_P}$, $\Delta Z = -\frac{\partial U}{\partial z_P}$, 所以由此也可

计算均匀磁化体的磁异常。

二、计算正演问题的概况

目前国内外用数字电子计算机解正演问题的方法很多, 其中绝大多数是用于计算密度或磁性均匀的地质体的重、磁异常。“密度或磁性均匀”这个条件, 对于一般的地质地球物理问题都可以近似适用, 所以这些方法有很大的实际意义。

由上述知, 重、磁力正问题的基本计算公式 (1.3)、(1.6)、(1.7)、(1.9), 实际上就是归结为计算一系列的三重积分 (体积分)。对于一些规则的简单形体, 这些三重积分可以用解析方法求

出准确值，但对于实际问题中的非规则的复杂形体，我们只能求出这些三重积分的近似值。目前国内外用于计算任意形状三度体（密度或磁性均匀）的重、磁异常的方法大致可以分为面元法、线元法、“点”元法和表面积分法。

1. 面元法

用一组平行面把异常体分割成很多截面，每一截面用一个规则形体（如多边形、矩形等）代替而求出其作用值（这时已用解析方法积出二重积分），然后再对剩下的积分用数值积分方法算出，这样就可求得对整个地质体的三重积分近似值。

2. 线元法

用两组相互垂直的平行面把异常体分割成很多棱柱体，每一棱柱体的作用以位于其中心的线元的作用值（这时已用解析方法积出沿线方向的一重积分）代替，然后在垂直于棱的截面上作二重的数值积分而得到所需要的三重积分近似值。

3. “点”元法

把异常体按适当的方法分割成很多小的规则形体（如长方体、立方体等）——这些小单元体的作用，视作“点”的作用，即所谓“点”元，用解析方法计算出每个“点”元的作用值，然后累加求和，即得到所需要的异常近似值。

4. 表面积分法

应用奥-高定理把三重积分（体积分）转换成异常体的表面积分（二重积分），而用一系列规则形状的小平面（如多边形）组合来近似异常体的整个表面。用解析方法分别计算出这些规则形状小平面的作用值，然后累加求和，即得到整个异常体表面积分的近似值，也即所需要的异常近似值。

§2 三度体正演问题的多边形截面法

一、方法的基本原理

这一节我们介绍一种计算任意形状、密度或磁性均匀的三度

体引起的重磁异常数值算法。方法的基本原理如下：用一系列相互平行的垂直剖面来切割地质体，于是得到一组相互平行的地质体截面。对每个截面用多边形近似代替。当适当选取这些多边形的边数和形状时，这个截面形状就可以按一定的精度要求准确地表示出来。然后用解析方法分别计算出每个多边形截面对计算点的作用值，最后对这一系列平行的多边形截面的作用值进行数值积分，就得到了整个异常体对计算点所产生的异常值。这种方法我们简称为多边形截面法。

由上述知，使用该方法时只需把地质勘探中所得到的矿体截面用适当的多边形近似即可用于计算，不需再作其他复杂繁琐的转换作图模拟工作，所以使用简便。另外每个多边形的作用值是由解析方法准确计算得到的，所以具有较高的精度。

二、计算方法

对于前面列出的重磁正演问题的基本计算公式 (1.3)、(1.6)、

(1.7)、(1.9)，如果把计算点 P 移到坐标原点（即令 $x_P = y_P = z_P = 0$ ），则可得如图3—3中所示的物

体 Q 在 P 点引起的重、磁异常计算公式：

$$\Delta g = f \rho V_0, \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \Delta X = J_x V_1 + J_y V_2 + J_z V_3, \\ \Delta Y = J_x V_2 + J_y V_4 + J_z V_5, \\ \Delta Z = J_x V_3 + J_y V_5 + J_z V_6, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \Delta T = & J_x (V_1 \cos I \cos D + V_2 \cos I \sin D + V_3 \sin I) \\ & + J_y (V_2 \cos I \cos D + V_4 \cos I \sin D + V_5 \sin I) \\ & + J_z (V_3 \cos I \cos D + V_5 \cos I \sin D + V_6 \sin I), \end{aligned} \quad (2.3)$$

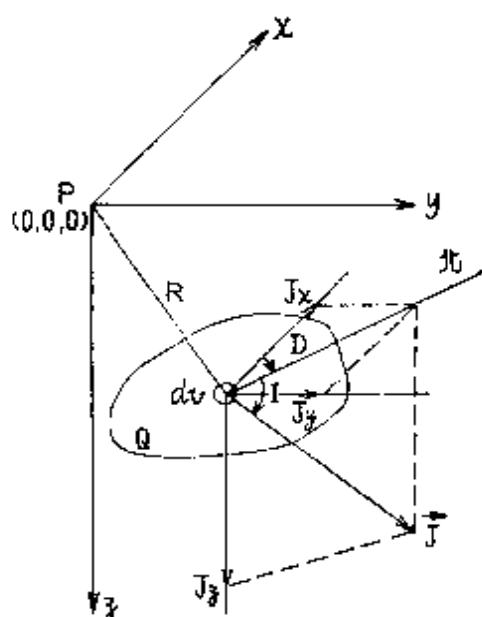


图 3—3 计算场值所用的坐标系及参量意义示意图

式中 V_0 、 V_1 、 V_2 、…… V_6 分别为:

$$V_0 = \iiint_Q \frac{z}{R^3} dx dy dz, \quad (2.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1 = \iiint_Q \frac{3x^2 - R^2}{R^5} dx dy dz, \\ V_2 = \iiint_Q \frac{3xy}{R^5} dx dy dz, \\ V_3 = \iiint_Q \frac{3xz}{R^5} dx dy dz, \\ V_4 = \iiint_Q \frac{3y^2 - R^2}{R^5} dx dy dz, \\ V_5 = \iiint_Q \frac{3yz}{R^5} dx dy dz, \\ V_6 = \iiint_Q \frac{3z^2 - R^2}{R^5} dx dy dz. \end{array} \right. \quad (2.5)$$

上列各式中积分都是对整个地质体 Q 进行的, 积分中变量 x 、 y 、 z 都是 Q 的坐标。

这样求重磁异常就归结为计算 V_0 、 V_1 、 V_2 …… V_6 等一系列的三重积分。

我们对地质体 Q 沿 x 轴作一系列平行的垂直剖面, 所截得的截面形状分别用多边形来代替, 如图3—4、图3—5。

设对体积分 V_0 、 V_1 、 V_2 、…… V_6 由多边形截面的作用值相应地用 S_0 、 S_1 、 S_2 、…… S_6 来表示, 即:

$$S_0 = \iint \frac{z}{R^3} dy dz, \quad (2.6)$$

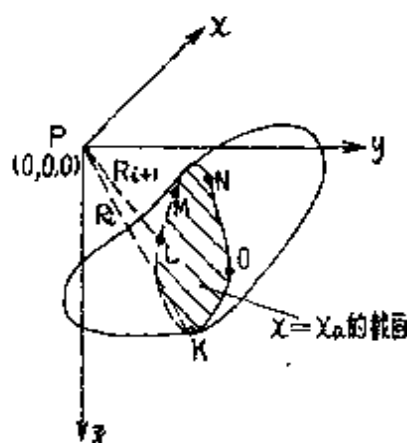


图 3—4 垂直于 x 轴的平面对矿体所截成的不规则截面

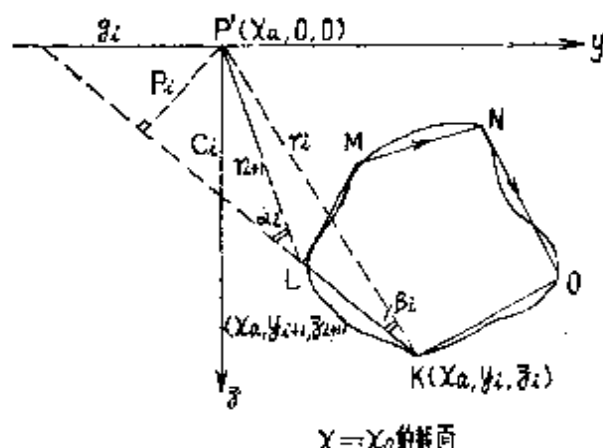


图 3—5 $x = x_0$ 平面内的实际截面以多边形代替及其诸参量意义示意图

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = \iint \frac{3x^2 - R^2}{R^5} dydz, \\ S_2 = \iint \frac{3xy}{R^5} dydz, \\ S_3 = \iint \frac{3xz}{R^5} dydz, \\ S_4 = \iint \frac{3y^2 - R^2}{R^5} dydz, \\ S_5 = \iint \frac{3yz}{R^5} dydz, \\ S_6 = \iint \frac{3z^2 - R^2}{R^5} dydz. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

下面我们以多边形截面 $KLMN \cdots K$ 为例来算出这些面积分。

图3—5中 KL 是多边形的第 i 边, P_i 是 $P'(x_0, 0, 0)$ 到 KL 的垂直距离, g_i 是 KL 在 y 轴上的截距, C_i 是 KL 在 z 轴上的截距。此外, 距离 r_i 、 r_{i+1} 和角度 α_i 、 β_i 等的意义均见图 3—5 所示。

我们先来计算 S_0 。

对于如图3—6所示的多边形截面的第 i 边, KL 与 y 轴组成的梯形面积 $KK'L'L$ 的作用值为:

$$\begin{aligned}
S_{0i} &= \int_{y_{i+1}}^{y_i} dy \int_0^z \frac{z}{(x_a^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dz \\
&= \int_{y_i}^{y_{i+1}} dy \left[-\frac{1}{(x_a^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^z = \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{\sqrt{x_a^2 + y^2 + z^2}} \\
&\quad - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{\sqrt{x_a^2 + y^2}} = (S_{0i})_1 + (S_{0i})_2.
\end{aligned}$$

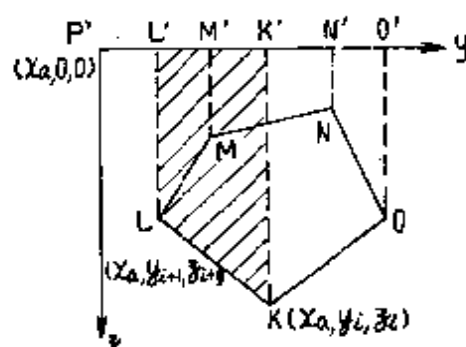


图 3—6 计算多边形截面作用值
时所用诸参量的意义示意图

先看第一项 $(S_{0i})_1$ ，对于直线段 KL ，由两点式的直线方程知

$$(y - y_i)/(z - z_i) = (y_{i+1} - y_i)/(z_{i+1} - z_i),$$

如果令

$$m_i = (z_{i+1} - z_i)/(y_{i+1} - y_i), \quad C_i = z_i - y_i(z_{i+1} - z_i)/(y_{i+1} - y_i),$$

则 $z = m_i y + C_i$ ，代入 $(S_{0i})_1$ 中，有

$$\begin{aligned}
(S_{0i})_1 &= \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{\sqrt{x_a^2 + C_i^2 + 2m_i C_i y + (1 + m_i^2) y^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + m_i^2}} \ln [2\sqrt{1 + m_i^2} \\
&\quad \times \sqrt{x_a^2 + C_i^2 + 2m_i C_i y + (1 + m_i^2) y^2} \\
&\quad + 2(1 + m_i^2) y + 2m_i C_i] \Big|_{y_i}^{y_{i+1}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+m_i^2}} \ln \frac{R_{i+1} \sqrt{1+m_i^2} + y_{i+1}(1+m_i^2) + m_i C_i}{R_i \sqrt{1+m_i^2} + y_i(1+m_i^2) + m_i C_i},$$

式中 $R_i = \sqrt{x_a^2 + y_i^2 + z_i^2}$, $R_{i+1} = \sqrt{x_a^2 + y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}$ 。

对于第二项 $(S_{0i})_2$, 有

$$\begin{aligned} (S_{0i})_2 &= - \int_{y_i}^{y_{i+1}} \frac{dy}{\sqrt{x_a^2 + y^2}} = - [\ln(y + \sqrt{x_a^2 + y^2})]_{y_i}^{y_{i+1}} \\ &= \ln \frac{y_i + \sqrt{x_a^2 + y_i^2}}{y_{i+1} + \sqrt{x_a^2 + y_{i+1}^2}}. \end{aligned}$$

容易看出, 对于封闭的多边形 $KLMN \cdots K$, $(S_{0i})_2$ 的各项正负相消, 所以 $\sum_i (S_{0i})_2 = 0$ 。

同样地可以计算出梯形面积 $LL'M'M$ 、 $MM'N'N$ 、……等等的作用值, 所有这些作用值的代数和即整个多边形截面 $KLMN \cdots K$ 的作用值, 其算式为

$$\begin{aligned} S_0 &= \sum_i (S_{0i}) = \sum_i (S_{0i})_1 + \sum_i (S_{0i})_2 = \sum_i (S_{0i})_1 \\ &= \sum_i \left[\frac{1}{\sqrt{1+m_i^2}} \ln \frac{R_{i+1} \sqrt{1+m_i^2} + y_{i+1}(1+m_i^2) + m_i C_i}{R_i \sqrt{1+m_i^2} + y_i(1+m_i^2) + m_i C_i} \right]. \end{aligned}$$

下面我们来讨论计算 S_1 。

我们先把 S_1 由直角坐标积分变换到极坐标积分, 则得:

$$S_1 = \iint \frac{3x_a^2 - R^2}{R^5} dy dz = \iint \frac{2x_a^2 - r^2}{(r^2 + x_a^2)^{5/2}} r dr d\varphi.$$

对于图3—7中多边形截面 $KLMN \cdots K$ 中第 i 边 KL 与 P' 组成的三角形面积 $P'KL$ 的作用值为

$$S_{1i} = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \int_0^r \frac{2x_a^2 - r^2}{(r^2 + x_a^2)^{5/2}} r dr$$

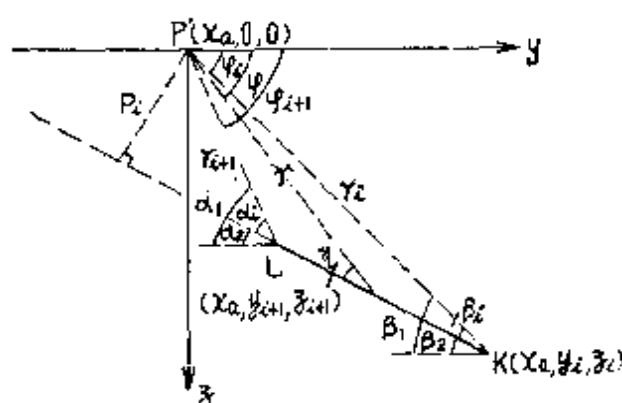


图 3—7 计算多边形截面中第 i 边 KL 与 P' 组成的三角形作用值时诸参数的坐标关系示意图

$$= \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} d\varphi \left[\frac{r^2}{(r^2 + x_a^2)^{3/2}} \right]_0^r = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \frac{r^2}{(x_a^2 + r^2)^{3/2}} d\varphi.$$

由图3—7可知, $r = \frac{P_i}{\sin \eta}$, $\eta = \alpha_i - \varphi_{i+1} + \varphi$, 代入上式则

有,

$$\begin{aligned} S_{ii} &= \int_{\beta_i}^{\alpha_i} \frac{P_i^2}{\sin^2 \eta \left(x_a^2 + \frac{P_i^2}{\sin^2 \eta} \right)^{3/2}} d\eta \\ &= \int_{\beta_i}^{\alpha_i} \frac{P_i^2 \sin \eta}{(P_i^2 + x_a^2 \sin^2 \eta)^{3/2}} d\eta \\ &= \left[\frac{-P_i^2 \cos \eta}{(P_i^2 + x_a^2)(P_i^2 + x_a^2 \sin^2 \eta)^{1/2}} \right]_{\beta_i}^{\alpha_i} = \frac{P_i^2}{(P_i^2 + x_a^2)} \\ &\times \left[\frac{\cos \beta_i}{\sqrt{P_i^2 + x_a^2 \sin^2 \beta_i}} - \frac{\cos \alpha_i}{\sqrt{P_i^2 + x_a^2 \sin^2 \alpha_i}} \right] = \frac{P_i}{(P_i^2 + x_a^2)} \\ &\times \left[\frac{\cos \beta_i}{\sqrt{1 + x_a^2 \frac{\sin^2 \beta_i}{P_i^2}}} - \frac{\cos \alpha_i}{\sqrt{1 + x_a^2 \frac{\sin^2 \alpha_i}{P_i^2}}} \right] = \frac{P_i}{P_i^2 + x_a^2} \end{aligned}$$

$$\times \left[\frac{r_i \cos \beta_i}{\sqrt{r_i^2 + x_a^2}} - \frac{r_{i+1} \cos \alpha_i}{\sqrt{r_{i+1}^2 + x_a^2}} \right] = - \frac{P_i}{P_i^2 + x_a^2} \\ - \left[\frac{r_{i+1} \cos \alpha_i}{R_{i+1}} - \frac{r_i \cos \beta_i}{R_i} \right].$$

上式中的 P_i 、 $\cos \alpha_i$ 、 $\cos \beta_i$ 的计算如下:

$$P_i = r_i \sin \beta_i = r_i \sin(\beta_1 - \beta_2) = r_i (\sin \beta_1 \cos \beta_2 \\ - \sin \beta_2 \cos \beta_1) = r_i \left[\frac{z_i}{r_i} \frac{(y_i - y_{i+1})}{\sqrt{(z_i - z_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}} \right. \\ \left. - \frac{y_i}{r_i} \frac{(z_i - z_{i+1})}{\sqrt{(z_i - z_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2}} \right] \\ = \frac{z_i(y_i - y_{i+1}) - y_i(z_i - z_{i+1})}{\sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}},$$

$$\cos \alpha_i = \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \\ = \cos \alpha_1 \cos \beta_2 + \sin \alpha_1 \sin \beta_2 \\ = \frac{y_{i+1}(y_i - y_{i+1}) + z_{i+1}(z_i - z_{i+1})}{r_{i+1} \sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}},$$

$$\cos \beta_i = \cos(\beta_1 - \beta_2) = \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \sin \beta_1 \sin \beta_2 \\ = \frac{y_i(y_i - y_{i+1}) + z_i(z_i - z_{i+1})}{r_i \sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}},$$

$$\text{式中 } r_i = \sqrt{y_i^2 + z_i^2}, \quad R_i = \sqrt{x_a^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

$$r_{i+1} = \sqrt{y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}, \quad R_{i+1} = \sqrt{x_a^2 + y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}.$$

同样可以计算出三角形面积 $P'LM$ 、 $P'MN$ 、…… 等等的作
用值,而所有这些作用值的代数和即为整个多边形截面 $KLMN \cdots$
 K 的作用值,其公式为:

$$S_i = \sum_i (S_{ii}) = - \sum \frac{P_i}{P_i^2 + x_a^2} \left[\frac{r_{i+1} \cos \alpha_i}{R_{i+1}} - \frac{r_i \cos \beta_i}{R_i} \right].$$

类似地我们可以计算出对于多边形截面 $KLMN \cdots K$ 的 S_2 、
 S_3 、 $\cdots S_6$ 等的作用值。这里我们不一一列出推导过程,而把计算
结果直接列出如下:

$$S_0 = \sum_i \frac{1}{\sqrt{1+m_i^2}} \ln \frac{R_{i+1} \sqrt{1+m_i^2} + y_{i+1}(1+m_i^2) + m_i C_i}{R_i \sqrt{1+m_i^2} + y_i(1+m_i^2) + m_i C_i}, \quad (2.8)$$

$$S_1 = - \sum_i \frac{P_i}{P_i^2 + x_a^2} \left[\frac{\cos \alpha_i \sqrt{y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}}{R_{i+1}} - \frac{\cos \beta_i \sqrt{y_i^2 + z_i^2}}{R_i} \right],$$

$$S_2 = - \sum_i \frac{x_a}{x_a^2(1+n_i^2) + g_i^2} \left[\frac{z_{i+1}(1+n_i^2) + g_i n_i}{R_{i+1}} - \frac{z_i(1+n_i^2) + g_i n_i}{R_i} \right],$$

$$S_3 = \sum_i \frac{x_a}{x_a^2(1+m_i^2) + C_i^2} \left[\frac{y_{i+1}(1+m_i^2) + C_i m_i}{R_{i+1}} - \frac{y_i(1+m_i^2) + C_i m_i}{R_i} \right],$$

$$S_4 = - \sum_i \frac{1}{x_a^2(1+n_i^2) + g_i^2} \left[\frac{g_i z_{i+1} - n_i x_a^2}{R_{i+1}} - \frac{g_i z_i - n_i x_a^2}{R_i} \right],$$

$$S_5 = \sum_i \frac{1}{x_a^2(1+n_i^2) + g_i^2} \left[\frac{g_i n_i z_{i+1} + g_i^2 + x_a^2}{R_{i+1}} - \frac{g_i n_i z_i + g_i^2 + x_a^2}{R_i} \right],$$

$$S_6 = \sum_i \frac{1}{x_a^2(1+m_i^2) + C_i^2} \left[\frac{C_i y_{i+1} - m_i x_a^2}{R_{i+1}} - \frac{C_i y_i - m_i x_a^2}{R_i} \right]. \quad (2.9)$$

上列各式中 P_i 、 $\cos \alpha_i$ 、 $\cos \beta_i$ 、 R_i 、 R_{i+1} 、 n_i 、 g_i 、 m_i 、 C_i 分别为:

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{z_i(y_i - y_{i+1}) - y_i(z_i - z_{i+1})}{\sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2}}, \\
\cos \alpha_i &= \frac{y_{i+1}(y_i - y_{i+1}) + z_{i+1}(z_i - z_{i+1})}{\sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} \sqrt{y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}}, \\
\cos \beta_i &= \frac{y_i(y_i - y_{i+1}) + z_i(z_i - z_{i+1})}{\sqrt{(y_i - y_{i+1})^2 + (z_i - z_{i+1})^2} \sqrt{y_i^2 + z_i^2}}, \\
R_i &= \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}, \\
R_{i+1} &= \sqrt{x_{i+1}^2 + y_{i+1}^2 + z_{i+1}^2}, \\
n_i &= (y_{i+1} - y_i) / (z_{i+1} - z_i), \\
g_i &= y_i - n_i z_i = y_i - z_i (y_{i+1} - y_i) / (z_{i+1} - z_i), \\
m_i &= (z_{i+1} - z_i) / (y_{i+1} - y_i) = \frac{1}{n_i}, \\
C_i &= z_i - m_i y_i = z_i - y_i (z_{i+1} - z_i) / (y_{i+1} - y_i). \quad (2.10)
\end{aligned}$$

上列计算 S_0 、 S_1 、…… S_6 各式中和号都是对多边形的所有边数求和，计算的次序按顺时针方向进行，如图 3—5 中 $KLMN \cdots K$ 的次序。

同样地计算出地质体 Q 的一系列相互平行的多边形截面的 S_0 、 S_1 、…… S_6 等作用值，最后由数值积分方法求出 $V_0 = \int S_0 dx$ ， $V_1 = \int S_1 dx$ ，……等等。这些积分的上、下限取异常体 Q 沿 x 轴方向上的两个端点的坐标值。

下面我们用抛物线公式来计算这些数值积分。如设 S_{01} 、 S_{02} 、 S_{03} 分别为地质体 Q 在 $x = x_1$ 、 x_2 、 x_3 剖面上 S_0 的作用值，则位于剖面 $x = x_1$ 和 $x = x_3$ 之间部分的物体 Q 的 V_{0j} 值为：

$$\begin{aligned}
V_{0j} &= \int_{x_1}^{x_3} S_0 dx = \frac{1}{6} \left[S_{01} \frac{x_1 - x_3}{x_1 - x_2} (3x_2 - x_3 - 2x_1) \right. \\
&\quad \left. + S_{02} \frac{(x_1 - x_3)^3}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + S_{03} \frac{(x_1 - x_3)}{(x_3 - x_2)} (3x_2 - x_1 - 2x_3) \right]. \quad (2.11)
\end{aligned}$$

如果截面间距是相等的, 即 $x_2 - x_1 = x_3 - x_2$, 则上式即简化为等间距的辛卜生公式。

对于所有一系列平行的地质体 Q 的多边形截面, 依次用 (2.11) 式分段计算出 V_{0i} 值, 最后求和, 则得到整个地质体 Q 的 V_0 值。

用同样的方法可计算出 V_1 、 V_2 、 $\dots$ 、 V_6 等值。

将 V_0 、 V_1 、 $\dots$ 、 V_6 值代入 (2.1)、(2.2)、(2.3) 式即可计算出所需要的重磁异常值 Δg 、 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 、 ΔT 等。

我们还可注意到, 由于重力位 V 满足拉普拉斯方程, 即

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \text{ 所以有以下关系式:}$$

$$V_1 + V_4 + V_6 = 0. \quad (2.12)$$

最后值得提出的是, 在计算中可以注意以下几点:

(1) 本方法中 x 、 y 、 z 轴的方向可以任意选定。

(2) 对于无限延深的截面形状, 可以用一些适当大数值的角点坐标来近似表示。

(3) 对于似板状地质体, 可选择坐标系, 使 x 轴垂直于该板状体, 使计算简化。

三、程序简介

我们用本方法在DJS-6数字计算机上初步编制了程序, 可以计算若干个任意形状三度体 (每个异常体的密度或磁性均匀) 在地面上 (可以是起伏地形) 矩形测网计算点上的重力异常 Δg 和磁异常 ΔZ , 以及它们与实测异常值的差, 即剩余重力异常 $\Delta g'$ 和剩余磁异常 $\Delta Z'$ 。

本程序经初步试算, 在同时计算 Δg 和 ΔZ 时, 如计算点总数为 m 个, 所有地质体的多边形截面的角点总数为 n 个, 需用计算时间约为 $\frac{m \times n}{200}$ 秒 (计算 $\Delta g'$ 和 $\Delta Z'$ 的时间很短, 可以忽略)。如果只计算 Δg 和 ΔZ 中之一时, 所用计算时间约减少 $1/3$ 。

程序框图如下:

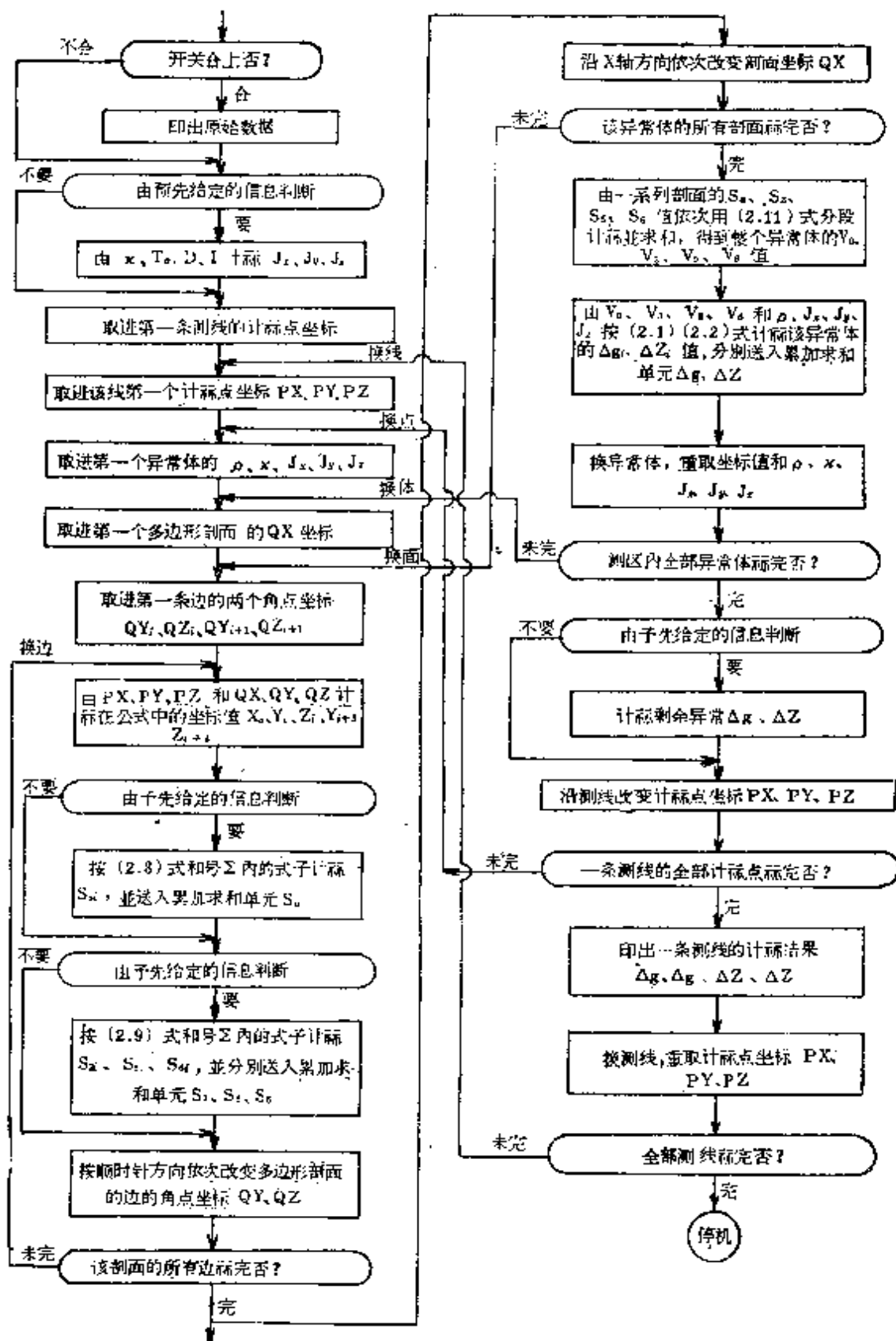


图 3-8 多边形截面法程序框图

四、计算实例

我们用本方法计算了一个理论模型和一个矿区实例，结果如下：

1. 理论模型计算结果

我们选用一个球体作理论模型，此球体的几何参数值为：中心埋深 $H=300$ 米，球半径 $R=200$ 米(图3—9)；物性参数值为：剩余密度 $\rho=1.0$ ，磁化率 $\kappa=0.1$ ，总磁场强度 $T_0=0.5$ ，磁倾角 $I=45^\circ$ ，磁偏角 $D=30^\circ$ 。

以点距 50 米分别用球体理论公式解析计算得重磁力异常 Δg 和 ΔZ 的理论值以及用本方法计算得 Δg 和 ΔZ 的计算值，部分列表如下：

点号	Δg (单位毫伽)				ΔZ (单位 γ)			
	理论值	计算值	误差值	百分误差	理论值	计算值	误差值	百分误差
5	0.152	0.150	0.002	1.3%	2	2	0	0%
7	0.222	0.219	0.003	1.3	78	77	1	1.3
9	0.338	0.334	0.004	1.2	272	268	4	1.5
11	0.536	0.530	0.006	1.1	758	747	11	1.5
13	0.878	0.867	0.011	1.3	1939	1909	30	1.5
15	1.431	1.411	0.020	1.4	4472	4392	80	1.8
17	2.120	2.089	0.031	1.5	8055	7886	169	2.1
19	2.483	2.444	0.039	1.6	8776	8576	200	2.3
21	2.120	2.089	0.031	1.5	4683	4580	103	2.2
23	1.431	1.411	0.020	1.4	972	948	24	2.5
25	0.878	0.867	0.011	1.3	-388	-386	-2	0.5
27	0.536	0.530	0.006	1.1	-607	-600	-7	1.2
29	0.338	0.334	0.004	1.2	-519	-513	-6	1.2
31	0.222	0.219	0.003	1.3	-392	-388	-4	1.0
33	0.152	0.150	0.002	1.3	-289	-286	-3	1.0

用本方法计算时，我们沿 x 轴用不等距的13个剖面来划分此球体，这些剖面依次相隔10、20、30、40、40、60、40、40、40、40、20、20（米）。除首尾两个剖面只截得一个点外，中间的11个剖面截得的圆截面均用内接等二十四边形来近似代替，整个球体

共用266个角点来近似表示。

整条线35个计算点共只用了约1分钟的计算时间。

从上表所列的计算结果可见， Δg 或 ΔZ 的理论值与计算值的误差仅为1—2%，以致在图3—9上只能用同一条曲线来表示 Δg 或 ΔZ 的理论值和计算值。

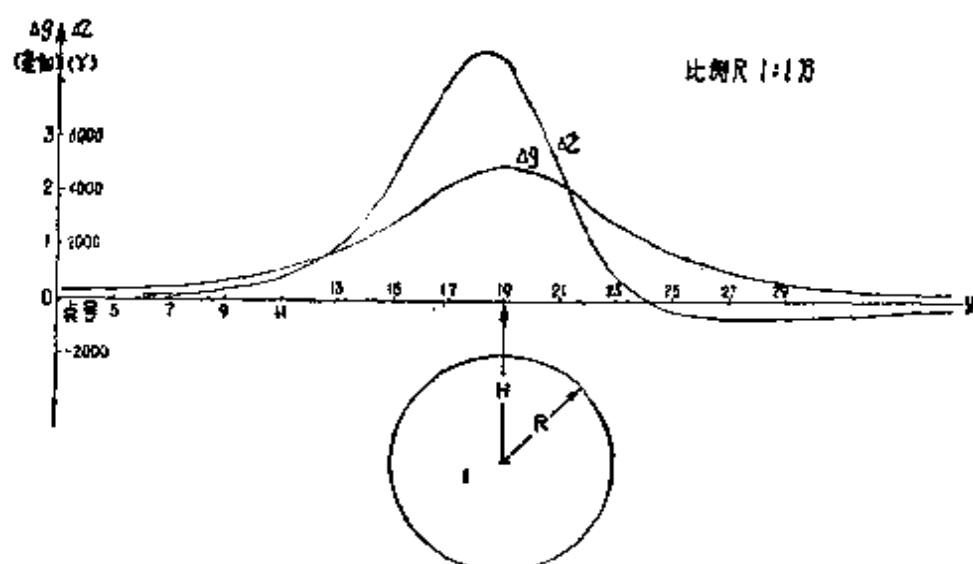


图 3—9 球体模型的计算结果

2. 矿区实例

我们用本方法计算了江苏某矿区的 ΔZ 异常平面图。该矿区位于火山岩分布地区，矿区内地层分布有： K_1 凝灰岩、凝灰角砾岩， J_3 安山岩等。地质构造简单，为一平缓的单斜构造，走向为北东向。矿区下部有辉长闪长玢岩（ $\gamma\delta\mu_3^*$ ）侵入。矿体即产于 $\gamma\delta\mu_3^*$ 辉长闪长玢岩与 J_3 安山岩的接触带中（图3—12，图3—13）。全矿区已施钻孔50余个（图3—10），故五百米深度以内矿体已基本被控制。

经钻孔内标本磁性测定，围岩（包括凝灰角砾岩、凝灰岩、安山岩、辉长闪长玢岩等）磁性很弱，与矿体磁性相比可以忽略。矿体内由于磁性不均匀，分四个磁性体来计算（图3—12，图3—13）。 $M1-1$ 和 $M1-2$ 为强磁性矿体，其磁化率 $\chi=0.157$ CGS，剩余磁化强度 $I_r=0.0131$ CGS。 $M2$ 为中等磁性矿体， $\chi=0.0289$

CGS, $I_r=0.0031$ CGS。M3 为弱磁性矿体, $\kappa=0.0036$ CGS, $I_r=0.0008$ CGS。

经过矿体形态的退磁校正计算(用三轴椭球体的退磁系数作近似校正)后,四个磁性体的磁化强度各分量值 J_x 、 J_y 、 J_z (x 轴为 I 剖面方向, y 轴为 II 剖面方向, z 轴为垂直向下)和在 I 剖面内磁化倾角 i' 分别为:

	J_x	J_y	J_z	i'
M1—1	0.0564	-0.0192	0.0458	39.2°
M1—2	0.0485	-0.0186	0.0270	29.5°
M2	0.0154	-0.0054	0.0147	44.2°
M3	0.0014	-0.0005	0.0016	49.0°

注:因M3为弱磁性矿体,退磁影响很小,可忽略,故未作退磁校正计算。

用本方法计算时,先在每条勘探线剖面上按上述四个磁性体划分得磁性体截面,然后按形状的简繁程度分别用4边至34边形来近似代替这些磁性体截面。我们一共用约350个角点来近似表示整个矿体。

共计算了26条线,每线26个点,共676个计算点(线距为60米,点距为50米)。整个 ΔZ 异常平面图的计算共需时间二十多分钟。

计算结果如图3—11、3—12、3—13所示。可见,计算的 ΔZ 异常形态和强度均与实测的 $\Delta Z'$ 异常(图3—10、3—12、3—13)大致相同。在I剖面上 ΔZ 与 $\Delta Z'$ 异常的差异,可能主要是由于标本磁性资料不够充分,致使磁性体的划分不一定很合适的原因造成。

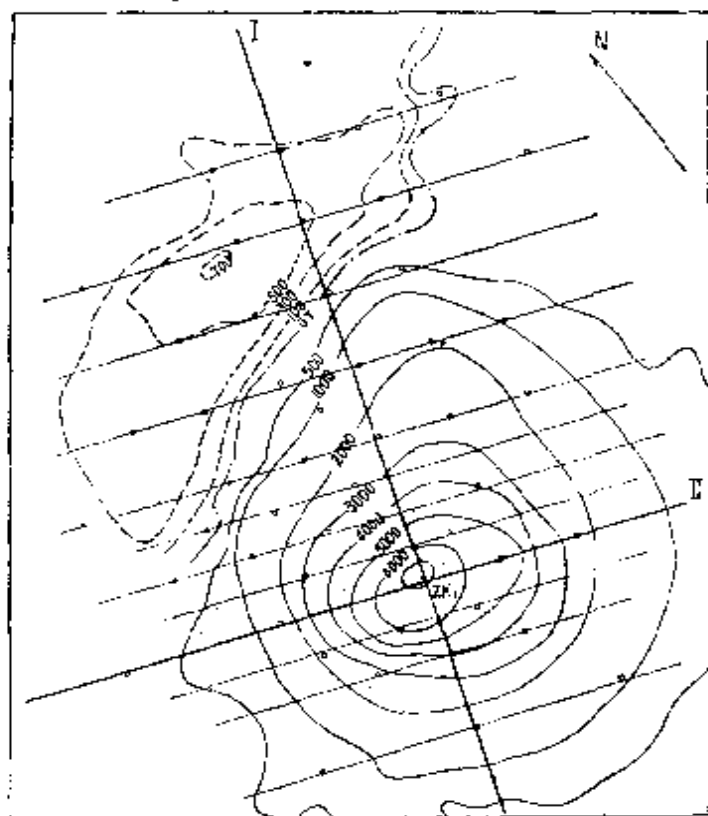


图 3—10 江苏某矿区 $\Delta Z'$ (实测) 异常平面图

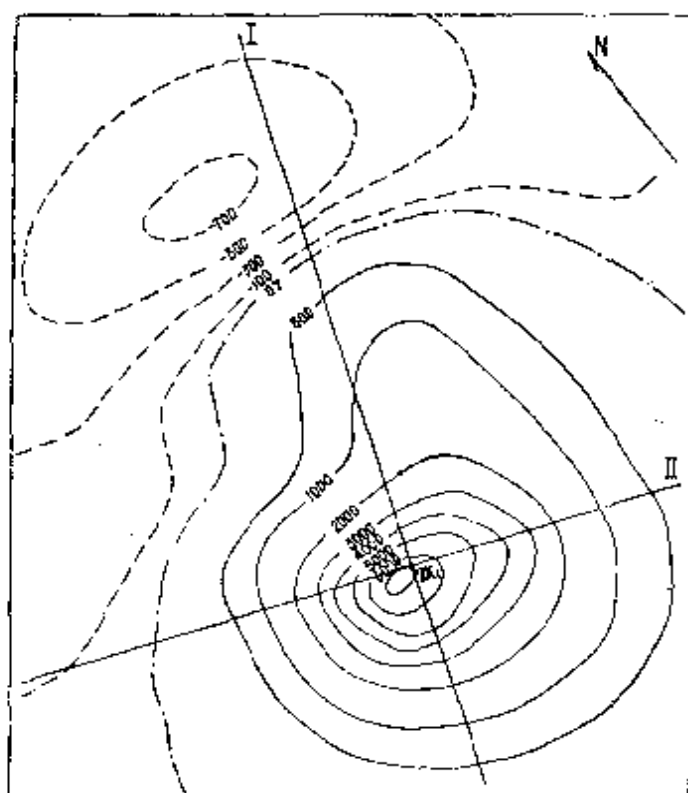


图 3—11 江苏某矿区用面元法计算的 ΔZ 异常等值线平面图

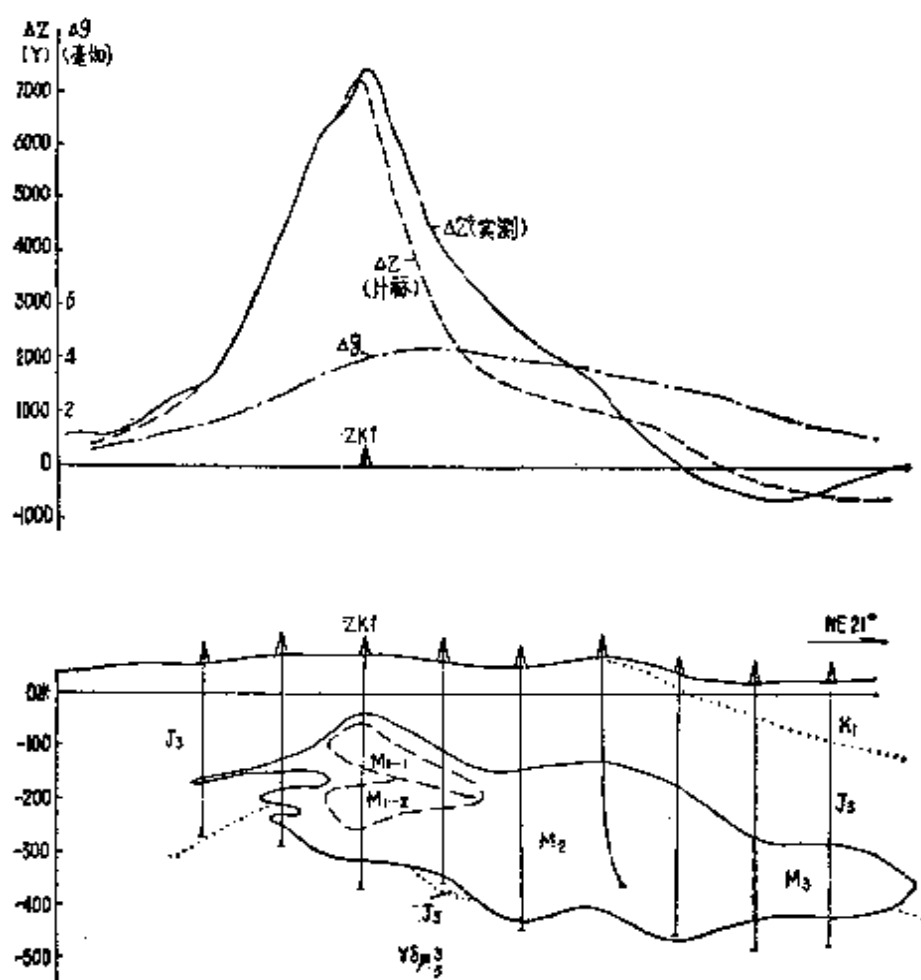


图 3—12 江苏某矿区 I 号剖面地质物探综合图

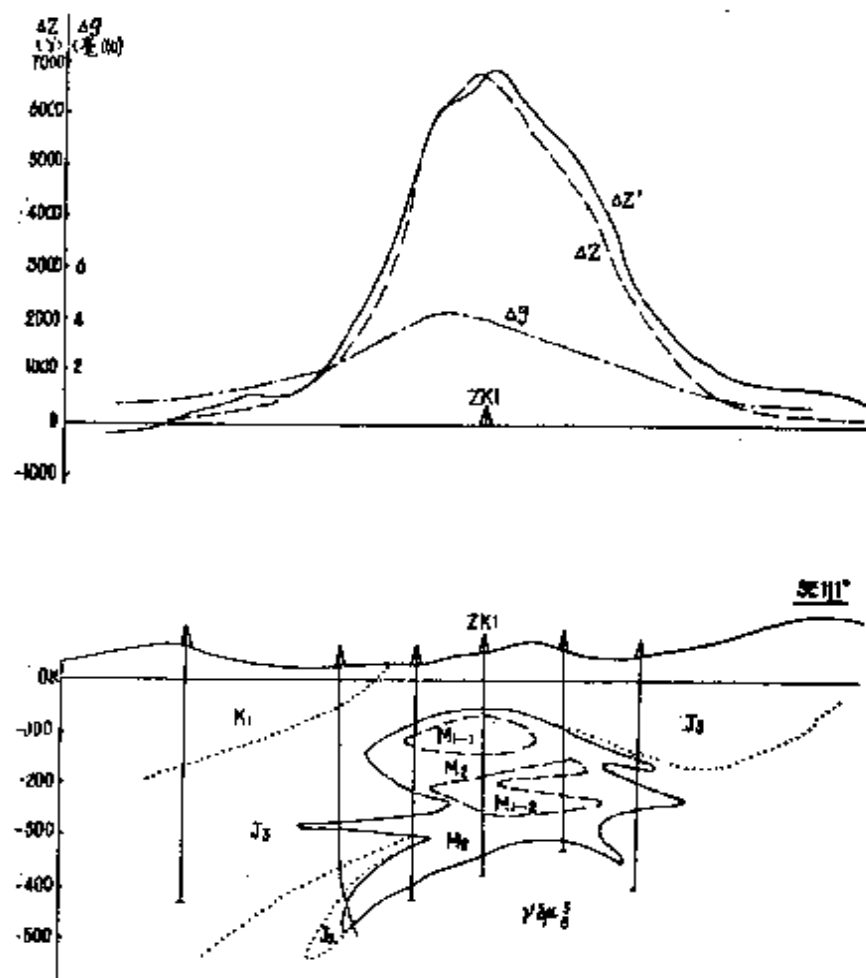


图 3—13 江苏某矿区Ⅱ号剖面地质物探综合图

§ 3 三度体正演问题的其他方法

一、直立矩形棱柱体法

1. 基本原理

本方法的基本思想是：用一组平行于 x 轴的垂直面与另一组平行于 y 轴的垂直截面去切割异常体 Q ，于是得到一系列直立矩

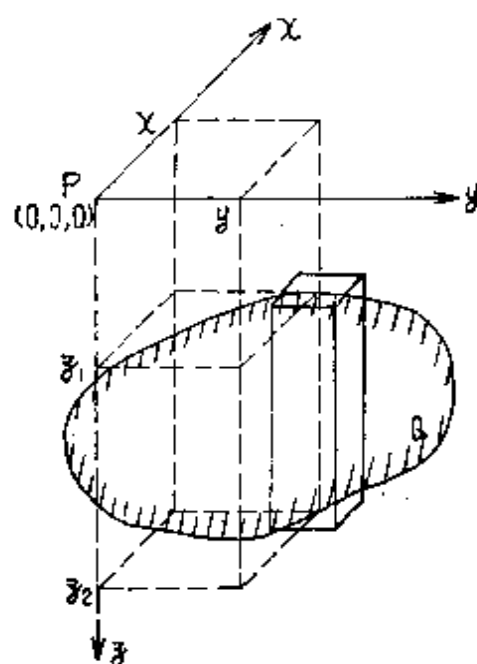


图 3—14 直立矩形棱柱法
所用的体元及坐标系示意图

形棱柱体(图 3—14)。当分割异常体的这两组垂直截面很密时，也即所得到的这一系列直立矩形棱柱体的横截面很小时，每个棱柱体可近似看作为直立棒状体而用解析方法计算出它在计算点 P 引起的作用值。最后对这一系列的作用值在 $x-y$ 平面上进行数值积分，就得到整个引起异常的地质体 Q 对计算点 P 产生的异常值。

2. 计算方法

我们把 (1.3)、(1.7) 式中的三重积分分别对 z 积分，代入积分限，且令 $x_P = y_P = z_P = 0$ ，就得到

近似计算如图 3—14 中物体 Q 在坐标原点 P 的重磁异常值，公式如下：

$$\begin{aligned}\Delta g &= f \rho V_0, \\ \Delta X &= J_x V_1 + J_y V_2 + J_z V_3, \\ \Delta Y &= J_x V_4 + J_y V_5 + J_z V_6, \\ \Delta Z &= J_x V_3 + J_y V_5 + J_z V_6, \\ \Delta T &= \Delta X \cos I \cos D + \Delta Y \cos I \sin D + \Delta Z \sin I.\end{aligned}\tag{3.1}$$

上列各式中的 V_0 、 V_1 、 V_2 、……、 V_6 分别为：

$$\begin{aligned}
V_0 &= -\iint \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) dx dy, \\
V_1 &= \iint \left[-\frac{x^2}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3z_2}{R_2} - \frac{3z_1}{R_1} - \frac{z_2^3}{R_2^3} + \frac{z_1^3}{R_1^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{z_2}{R_2} - \frac{z_1}{R_1} \right) \right] dx dy, \\
V_2 &= \iint \left[\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3z_2}{R_2} - \frac{3z_1}{R_1} - \frac{z_2^3}{R_2^3} + \frac{z_1^3}{R_1^3} \right) \right] dx dy, \\
V_3 &= -\iint \left(\frac{x}{R_2^3} - \frac{x}{R_1^3} \right) dx dy, \\
V_4 &= \iint \left[\frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2} \left(\frac{3z_2}{R_2} - \frac{3z_1}{R_1} - \frac{z_2^3}{R_2^3} + \frac{z_1^3}{R_1^3} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(x^2 + y^2)} \left(\frac{z_2}{R_2} - \frac{z_1}{R_1} \right) \right] dx dy, \\
V_5 &= -\iint \left(\frac{y}{R_2^3} - \frac{y}{R_1^3} \right) dx dy, \\
V_6 &= -\iint \left(\frac{z_2}{R_2^3} - \frac{z_1}{R_1^3} \right) dx dy,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

上列各式中 $R_1 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_1^2}$, $R_2 = \sqrt{x^2 + y^2 + z_2^2}$ 。
 在 (3.2) 式中对 x 、 y 的二重积分可用矩形公式、梯形公式、抛物线公式等等数值积分公式算出:

$$V_k = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} W_i C_j F_k(x_i, y_j), \quad (k=0, 1, \dots, 6).$$

式中 $F_k(x, y)$ 为 $V_0, V_1, \dots, V_6$ 中的被积函数;

W_i, C_j 分别为 x 和 y 方向的数值积分系数。

当 $x_i = y_j = 0$ 时 (即计算点与该线元恰好位于同一铅垂线上时), (3.2) 式中的 V_1, V_2, V_4 中的被积函数简化为,

$$\begin{aligned}
F_1 = F_4 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_2^2} - \frac{1}{z_1^2} \right), \\
F_2 &= 0.
\end{aligned}$$

用本方法计算时，先把异常体用水平矩形网格分成一系列的直立矩形棱柱体（网格距的选择取决于计算精度要求）。对每个棱柱体需给出棱柱体中心坐标 x 、 y 和上、下顶底的坐标 z_1 、 z_2 ，并给出异常体的物性参数，即可根据（3.1）、（3.2）上列各式计算得到异常体在计算点所引起的重磁异常值。

3. 试算结果

我们选用一个球体作模型，用本方法作了试算。球体的几何参数与物性参数与多边形截面法的球体模型相同。

在 x 和 y 方向上均以40米间距来划分这球体，共得121条线元。

以点距100米分别用理论公式和本方法计算其重磁异常值，中心剖面计算结果列表如下：

点 号	Δg (毫伽)			ΔZ (γ)			ΔT (γ)		
	理论值	计算值	百分误差	理论值	计算值	百分误差	理论值	计算值	百分误差
1	0.338	0.334	1.2	272	267	1.8	280	278	0.7
2	0.536	0.530	1.1	752	747	1.5	670	661	1.3
3	0.878	0.869	1.0	1939	1921	0.9	1507	1495	0.8
4	1.430	1.418	0.8	4472	4440	0.7	3025	3004	0.7
5	2.120	2.106	0.7	8055	8031	0.3	4437	4424	0.3
6	2.483	2.470	0.3	8776	8774	0.0	3103	3102	0.0
7	2.120	2.106	0.7	4683	4668	0.4	-331	-332	0.3
8	1.430	1.418	0.8	972	957	1.5	-1924	-1921	0.2
9	0.878	0.869	1.0	-388	-390	0.5	-1770	-1773	0.2
10	0.536	0.530	1.1	-607	-605	0.3	-1259	-1250	0.7
11	0.338	0.334	1.2	-518	-514	0.8	-837	-828	1.1

从上表可知， Δg ， ΔZ ， ΔT 的计算值误差均 $< 2\%$ 。

二、长方体元法

1. 基本原理

对于任意形状的三度体 Q ，我们总可以近似表示成很多不同体积和密度（或磁性）的长方体 Q_i 的组合。用解析方法计算出所有这些长方体 Q_i 在计算点 P 的重磁异常并累加求和，就得到整个

异常体 Q 在计算点 P 引起的重磁异常值。由上可知，本方法的计算精度取决于所用长方体 Q_i 的组合来模拟整个异常体 Q 的近似程度。

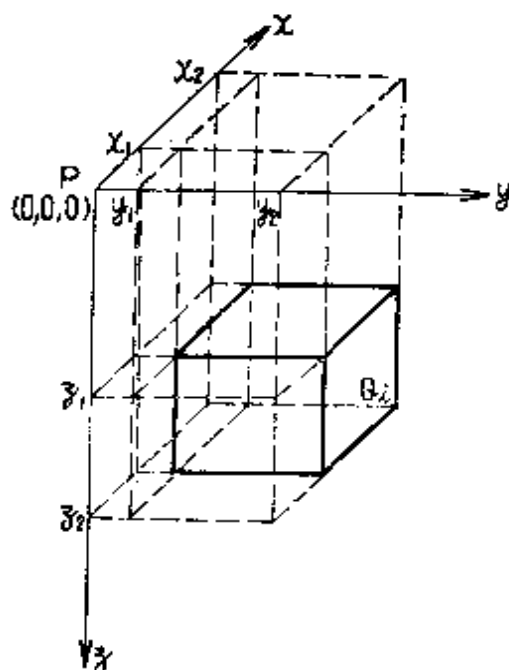


图 3—15 长方体元法所用的体元及其坐标系示意图

2. 计算方法

对于长方体 Q_i ，我们可把 (1.3)、(1.7) 式中的三重积分分别积出，代入积分限，并令 $x_P = y_P = z_P = 0$ ，即得到计算如图3—15长方体 Q_i 在 P 点（位于坐标原点）的重磁异常值的公式如下：

$$\begin{aligned}\Delta g &= f \rho V_0, \\ \Delta X &= J_x V_1 + J_y V_2 + J_z V_3, \\ \Delta Y &= J_x V_4 + J_y V_5 + J_z V_6, \\ \Delta Z &= J_x V_7 + J_y V_8 + J_z V_9, \\ \Delta T &= \Delta X \cos I \cos D + \Delta Y \cos I \sin D + \Delta Z \sin I.\end{aligned}\tag{3.3}$$

上列各式中的 $V_0, V_1, V_2, \dots, V_9$ 分别为：

$$V_0 = - \left| \int \int \int [x \ln(y+R) + y \ln(x+R) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + z \operatorname{tg}^{-1} \frac{zR}{xy} \Big|_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2}, \\
V_1 = & - \left| \left| \left| \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{yz}{xR} \right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \\
V_2 = & + \left| \left| \left| [\ln(z+R)] \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \\
V_3 = & + \left| \left| \left| [\ln(y+R)] \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \\
V_4 = & - \left| \left| \left| \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{xz}{yR} \right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \\
V_5 = & + \left| \left| \left| [\ln(x+R)] \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}, \\
V_6 = & - \left| \left| \left| \left(\operatorname{tg}^{-1} \frac{xy}{zR} \right) \right|_{x_1}^{x_2} \right|_{y_1}^{y_2} \right|_{z_1}^{z_2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

上列各式中 $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ 。

把上列各式中积分限 x_1 、 x_2 、 y_1 、 y_2 、 z_1 、 z_2 分别代入后，即可得到计算 V_0 、 V_1 、 V_2 、……、 V_6 的表达式。

值得指出的是，实际使用中我们还可以通过坐标轴的旋转变换，使上列各式适用于长方体各边不一定平行于 x 、 y 、 z 轴的一般情况，以能更好地模拟实际异常体。

使用本方法时，先要把异常体 Q 按适当方法分割成一系列的长方体元 Q_i ，给出所有这些长方体元 Q_i 的位置及物性数据，即可按 (3.3)、(3.4) 分别计算出每个长方体元 Q_i 在坐标原点 P 引起的异常值，最后累加求和，即得到整个异常体 Q 在计算点 P （位于坐标原点）引起的异常值。

三、表面积分法

1. 基本原理

本法是基于把磁异常正演基本计算公式中的三重积分（体积

分) 转换成异常体表面积分, 并用一系列多边形平面 S_i 来近似异常体的表面 S 形状, 然后用解析方法分别计算出这一系列多边形平面 S_i 的作用值, 最后累加求和, 即得到整个异常体在计算点 P 引起的磁异常值。

2. 计算方法

在第一节重磁正演基本公式中, 我们已由奥-高定理把求磁位的体积分化为表面积分, 得到 $U = \int_S \frac{\vec{J} \cdot d\vec{S}}{R}$, 见(1.11)式。

现在我们用一系列多边形平面 S_i 来近似整个异常体的表面 S , 每个多边形平面 S_i 又可再分成一系列三角形平面 T_{ij} , 见图3-16, 这些三角形 T_{ij} 分别以多边形 S_i 的各边为底边, 以计算点 P (位于坐标原点)在这些多边形平面 S_i 上的投影 P' 点为顶点组成, 则 $U = \sum_i \sum_j (\Delta U_{ij})$, 而 $\Delta U_{ij} = \iint_{T_{ij}} \frac{\vec{J} \cdot d\vec{S}}{R}$ 为其中一个

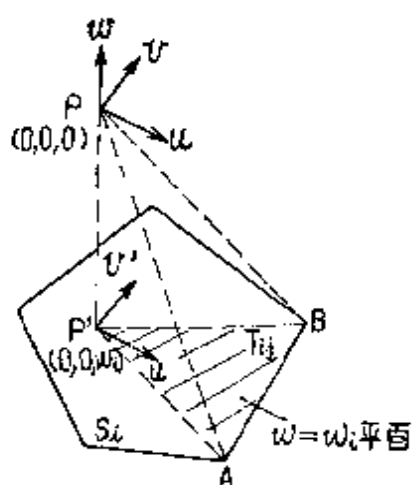


图 3—16 表面积分法所用的面元及其坐标系示意图

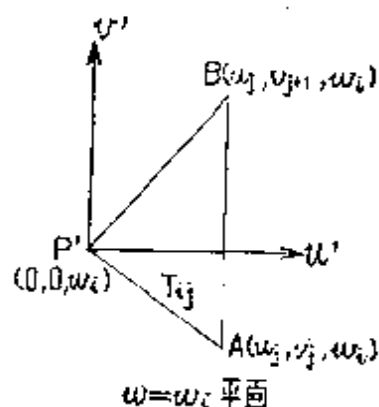


图 3—17 三角形与新坐标系的关系坐标系与新的关系

三角形平面 T_{ij} 在 P 点引起的磁位。

为计算 ΔU_{ij} , 我们可以保持原点不动, 旋转原坐标系 (x, y, z) , 得到一个新的直角坐标系 (u, v, w) , 见图3-16。使 u 轴为平行于 P' 点到 S_i 的第 j 边的垂线方向, v 轴为平行于第 j 边

的方向(它的正向取为使 u, v, w 坐标系为右手系的方向), w 轴平行于 S_i 的外法线方向。如设 $\vec{N}_i$ 为 w 方向上的单位矢量, 则有:

$$\Delta U_{ij} = (\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \iint_{T_{ij}} \frac{dudv}{R},$$

其中 $R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ 。三角形 T_{ij} 在 P 点引起的磁异常 u, v, w 分量分别为:

$$(\Delta H_u)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \iint_{T_{ij}} -\frac{u}{R^3} dudv,$$

$$(\Delta H_v)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \iint_{T_{ij}} -\frac{v}{R^3} dudv,$$

$$(\Delta H_w)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \iint_{T_{ij}} -\frac{w}{R^3} dudv.$$

如果三角形 PAB 的三个顶点在 u, v, w 坐标系中的坐标分别为 $(0, 0, w_i)$ 、 (u_j, v_j, w_i) 、 (u_{j+1}, v_{j+1}, w_i) , 见图 3—17 (注意: 我们取 v 的正向为三角形 PAB 角点 A, B 的次序方向)。于是有,

$$(\Delta H_u)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \int_0^{u_j} du \int_{v_j u/u_j}^{v_{j+1} u/u_j} -\frac{u}{R^3} dv,$$

$$(\Delta H_v)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \int_0^{u_j} du \int_{v_j u/u_j}^{v_{j+1} u/u_j} -\frac{v}{R^3} dv,$$

$$(\Delta H_w)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \int_0^{u_j} du \int_{v_j u/u_j}^{v_{j+1} u/u_j} -\frac{w}{R^3} dv.$$

计算上列积分, 就可得到计算三角形 T_{ij} 在 P 点引起的磁异常 u, v, w 分量的公式如下:

$$(\Delta H_u)_{ij} = -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \left[\frac{v_{j+1}}{r_{j+1}} \ln \frac{R_{j+1} + r_{j+1}}{|w_i|} \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left[-\frac{v_j}{r_j} \ln \frac{R_j + r_j}{|w_i|} - \frac{1}{2} \ln \frac{R_{j+1} + v_{j+1}}{R_{j+1} - v_{j+1}} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{R_j + v_j}{R_j + v_j} \right], \quad (3.5) \\
& (\Delta H_v)_{ij} = (\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \left[\frac{u_j}{r_{j+1}} \ln \frac{R_{j+1} + r_{j+1}}{|w_i|} - \frac{u_j}{r_j} \ln \frac{R_j + r_j}{|w_i|} \right], \\
& (\Delta H_w)_{ij} = \frac{w_i}{|w_i|} (\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{u_j v_{j+1} (R_{j+1} - |w_i|)}{R_{j+1} u_j^2 + v_{j+1}^2 |w_i|} \right. \\
& \left. - \operatorname{tg}^{-1} \frac{u_j v_j (R_j - |w_i|)}{R_j u_j^2 + v_j^2 |w_i|} \right].
\end{aligned}$$

其中 $r_j = \sqrt{u_j^2 + v_j^2}$; $r_{j+1} = \sqrt{u_j^2 + v_{j+1}^2}$;

$R_j = \sqrt{u_j^2 + v_j^2 + w_i^2}$; $R_{j+1} = \sqrt{u_j^2 + v_{j+1}^2 + w_i^2}$ 。

注意上列各式中 $w_i \neq 0$, 也即 P 点不在 S_i 所在的平面内。如果 $w_i = 0$, 顶点 P (这时 P 与 P' 重合) 为奇点。这时可由整个三角形 T_{ij} 中减去 P 点周围半径为 k 的小域 (取 k 小于 P 点到多边形 S_i 的所有角点的距离) 的磁异常来得到正确的结果, 这时有:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \begin{aligned} (\Delta H_u)_{ij} &= -(\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \left[\frac{v_{j+1}}{r_{j+1}} \left(1 + \ln \frac{r_{j+1}}{k} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{v_j}{r_j} \left(1 + \ln \frac{r_j}{k} \right) - \frac{1}{2} \ln \frac{(k_{j+1} + v_{j+1})(k_j - v_j)}{(k_{j+1} - v_{j+1})(k_j + v_j)} \right], \\ (\Delta H_v)_{ij} &= (\vec{J} \cdot \vec{N}_i) \left[\frac{u_j}{r_{j+1}} \left(1 + \ln \frac{r_{j+1}}{k} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{u_j}{r_j} \left(1 + \ln \frac{r_j}{k} \right) \right], \\ (\Delta H_w)_{ij} &= 0. \end{aligned} \right. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

于是按 (3.5)、(3.6) 式可以求出每个三角形平面 T_{ij} 在其 u 、 v 、 w 轴方向的磁异常分量, 然后我们把这些磁异常分量投影到原来的坐标系 x 、 y 、 z 方向, 最后累加求和, 即得到整个异常

体表面 S (也即整个异常体 Q) 在坐标原点 P 引起的磁异常三分量:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta X = \sum_i \sum_j (\Delta H_x)_{ij} = \sum_i \sum_j [(l_u)_{ij} (\Delta H_u)_{ij} \\ \quad + (l_v)_{ij} (\Delta H_v)_{ij} + (l_w)_{ij} (\Delta H_w)_{ij}], \\ \Delta Y = \sum_i \sum_j (\Delta H_y)_{ij} = \sum_i \sum_j [(m_u)_{ij} (\Delta H_u)_{ij} \\ \quad + (m_v)_{ij} (\Delta H_v)_{ij} + (m_w)_{ij} (\Delta H_w)_{ij}], \\ \Delta Z = \sum_i \sum_j (\Delta H_z)_{ij} = \sum_i \sum_j [(n_u)_{ij} (\Delta H_u)_{ij} \\ \quad + (n_v)_{ij} (\Delta H_v)_{ij} + (n_w)_{ij} (\Delta H_w)_{ij}]. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

上列各式中 $(l_u)_{ij}$ 、 $(m_u)_{ij}$ 、 $(n_u)_{ij}$ 、 $(l_v)_{ij}$ 、 $(m_v)_{ij}$ 、 $(n_v)_{ij}$ 、 $(l_w)_{ij}$ 、 $(m_w)_{ij}$ 、 $(n_w)_{ij}$ 分别是对于第 T_{ij} 个三角形平面的新坐标系 u 、 v 、 w 轴关于原坐标系 x 、 y 、 z 轴的方向余弦。

如果把 (3.7) 式计算得到的 ΔX 、 ΔY 、 ΔZ 代入 (1.9) 式, 即

$$\Delta T = \Delta X \cos I \cos D + \Delta Y \cos I \sin D + \Delta Z \sin I,$$

就可求得磁异常总强度。

由上述可知, 用本方法计算时要给出一系列三角形 T_{ij} 的角点在其相应的 u 、 v 、 w 坐标系中的坐标, 以及一系列对于三角形平面 T_{ij} 的新坐标系 u 、 v 、 w 轴关于原坐标系 x 、 y 、 z 轴的方向余弦, 并给出磁性参数, 即可按 (3.5)、(3.6)、(3.7) 式计算出异常体在计算点 P (位于坐标原点) 引起的磁异常值。

第四章 应用最优化方法作重磁异常定量解释

地球物理异常地质解释的基本任务在于回答这样两个问题：第一，测区内的异常是由什么地质体引起？它与测区内的地质构造、岩石和矿产的分布情况关系如何？第二，引起异常的地质体的空间位置、大小、形状及产状如何？对第一个问题的回答通常称为定性解释(异常性质的判定)；对第二个问题的回答称为定量解释。这两个问题不能截然分开，而是互相联系，相辅相成的。

将实际地质体模型化，然后用数学物理方法来研究异常与地质体模型的形状、产状等的对应关系，称为正反演问题。已知地质体模型求场的分布称为正演问题；已知场的分布求地质体模型的参数称为反演问题。这是异常定量解释的数理基础。在目前的重磁力野外工作中，反演问题与异常的定量解释一般认为是同一含义而不予区分。

近几年来，随着利用电子计算机对物探资料数据处理工作的开展，国内外都已注意到利用电子计算机来解重磁异常的反演问题，引用了不少数学方法。目前在重磁异常定量解释中，人们比较关注的方法之一，是最小二乘意义下的非线性最优化方法。这种方法的实质就是大家所熟知的选择法，即使模型体引起的场值理论曲线与实测曲线尽可能地拟合，取这拟合得最好的模型体参数作为我们所推断的地质体的产状等参量值。本章仅就这种方法作介绍。在第一节中介绍最优化选择法的概念，第二节中介绍最优化选择法的几种算法，第三节中介绍最优化方法在重磁异常解释中的应用和实例。

§ 1 重磁异常定量解释中的选择法

一、重磁异常定量计算方法述评

在重磁力勘探中，各种定量计算方法名目繁多。利用某一观测面的异常曲线进行反演计算的方法大致可分为三类：一类是特征点法，一类是任意点法，一类是选择法。

特征点法是利用异常曲线上的一些特殊点如极值点、半极值点、零值点以及拐点等来计算地质体产状要素的方法，常用的有特征点解析法及切线法等。这种方法计算简便快速，是野外工作中最常用的方法。但由于它只利用少数特殊点进行计算，所以抗干扰能力差，一般只适用于计算单个矿体引起的规则又光滑的异常。

任意点法是利用异常曲线上任意点的场值来计算地质体的产状。它的特点是能够利用较多的点上观测值参加计算，从而有可能提高计算结果的精度和抗干扰性，并且可以将多点的计算结果进行比较，来评价计算结果的可靠程度。但是任意点法一般计算公式比较复杂，所以给人工计算带来麻烦，野外工作中应用相对少些，对于斜磁化条件下稍复杂一些模型体还没有建立任意点法的算式。

不管是特征点法还是任意点法，对于形状复杂的地质体或多个地质体（包括干扰因素）引起的复杂叠加异常，定量计算较为困难。

选择法是野外重磁力勘探中常用的方法，如解释二度体磁异常的扇形量板法等。选择法的实质就在于，将实测异常曲线与一系列已知形状模型体产生的理论异常曲线进行比较，当实测曲线与某一条理论曲线相符合（拟合）时，我们就将该理论曲线所对应的模型体及其参数作为实际地质体获得的解释结果。大家知道，用扇形量板解释二度体磁异常是这样进行的：首先根据实测异常曲线的特点和测区有关的地质、物性资料，假定一个磁性体，对

其形状、产状和磁化强度等参量给一个假定值，然后用扇形量板计算出该磁性体的理论曲线，将这个理论曲线与实测曲线比较，如果不符合，则需要修改磁性体的形状与参数，重新计算理论曲线。这样反复多次修改磁性体，直到理论曲线与实测曲线较满意地符合为止，取最后的磁性体作为我们的解释结果。

选择法的优点是，它利用整条观测曲线进行解释，因此资料利用得最充分，当个别点受到歪曲时对解释结果影响不大。它比较适用于复杂异常的解釋。当然，用量板进行选择不是没有困难的，目前对三度体异常的计算没有比较适用的量板，即使对于二度体异常，用量板计算来进行选择的工作量仍然是比较费事的。

在重磁异常的定量计算中还有许多其他的方法，如积分法、高次导数法、场的空间分布法、福氏变换法等。这些方法目前看来都属于一种异常变换（换算）法，都是为了压制某种成份的干扰而突出有意义的异常而进行的。在与干扰作斗争、区分各种异常性质来说，这类方法是有一定意义的。但是我们知道，关于地质体产状的信息是包含在观测异常值之中的。异常变换后只能把某种信息特点突出，而压制某种干扰或其他信息，间接地判定产状情况。选择法如运用得当，有可能较直接地获得关于地质体的产状和参数的情况。

二、最优化选择法的概念

从以上的叙述可知，常用的选择法有以下几个主要步骤：

1. 给出实测异常值；
2. 选择进行解释用的地质体模型；
3. 对地质体模型各参量（包括磁化强度、位置、大小等产状）给初值；
4. 计算地质体模型的理论异常，将该异常与实测异常对比；
5. 评定理论曲线与实测曲线的符合程度，即它们之间差异的大小，判断是否需要修改地质体参量重新计算对比；
6. 若差异不满足要求，修改地质体模型和参量；

7. 重新计算理论曲线与实测曲线再对比, 如此反复下去, 直到理论曲线与实测曲线之间的差异满足要求为止;

8. 记下最后模型体的形状、产状等参量, 作为解释的结果。

利用电子计算机进行选择法计算, 也是完成上述这些步骤(或程序)。在以上步骤中需着重提出两个问题: 第一, 如何评定理论曲线与实测曲线之间的符合程度? 第二, 如何在每次计算后修改好地质体模型的参量? 这两个问题在人工计算过程中计算者可以根据经验来判断, 但在用电子计算机运算过程中怎样使它由机器来自动进行, 这是较复杂的问题。这两个问题, 尤其是后者, 正是这一章中要花较多的篇幅去讨论的问题。为解决第一个问题, 我们必须提出一个判定准则。

设实测磁异常以 ΔZ_k 表示(重力异常通常用 Δg_k 表示), k 为观测点号, $k=1, 2, \dots, m$; m 为观测点数。

又设所选地质体模型的理论异常以 Z 表示, 它是模型体参量和观测点坐标的函数, 即

$$Z = f(x, y, z, b_1, b_2, \dots, b_n), \quad (1.1)$$

式中 x, y, z 为观测点的坐标; $b_1, b_2, \dots, b_n$ 代表模型体产状和物性参数等参量, 参量的个数为 n 。

模型体的初始参量以 $b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_n^{(0)}$ 表示。

理论曲线与实测曲线之间的符合程度以各测点上场值的偏差平方和来衡量。在理论上和实际应用中均证明, 这种衡量标准是比较好的。各测点上理论异常与实测异常值偏差的平方和我们以 Φ 表示, 即

$$\Phi = \sum_{k=1}^m [\Delta Z_k - f(x_k, y_k, z_k, b_1, b_2, \dots, b_n)]^2. \quad (1.2)$$

我们的目的在于求得一组关于模型体参量的修改量 $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$, 来修改模型体给定的初值参量, 即

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} &= b_1^{(0)} + \delta_1^{(1)}, \\ b_2^{(1)} &= b_2^{(0)} + \delta_2^{(1)}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$b_n^{(l)} = b_n^{(l-1)} + \delta_n^{(l)}, \quad l=1, 2, \dots, \dots。$$

把这组新参量代入 Φ 中，使理论异常与实测异常之间的偏差平方和逐步减小，一直进行到使 Φ 值取极小值为止，此时我们便取 $b^{(l)} = (b_1^{(l)}, b_2^{(l)}, b_n^{(l)})$ 作为我们的解释结果。这个准则下的选择法就称为在最小二乘意义下的最优化选择法。这里的函数 Φ ，数学上通常称为目标函数。

总起来说，我们这里指的最优化选择法，仅局限于用偏差平方和来衡量理论曲线与实测曲线的符合程度。当地质体模型各参量的初值选定以后，应该这样来改变参量，使理论场值与实测场值之间的偏差平方和取极小。这里所说的最优仅是最小二乘意义下数学理论的最优。从最优化数学理论来说，这也仅是衡量最优准则的标准之一。从地质上来说是否“最优”，是否合理，是否最好地代表了实际情况，还与模型体是否选得合适和初值选得是否合适等因素有密切关系。

§2 最优化选择法的几种算法

一、求非线性函数近似极小的迭代过程

前一节已提到，异常定量计算的最优化选择法，在于寻求一组模型体参量 b_i ，使 Φ 取极小。因为对磁异常 ΔZ （或重力异常 Δg ）来说，它是 b_i 的非线性函数，因此函数 Φ 是 b_i 的非线性函数。这类问题在数学中称为求非线性函数近似极小问题，亦称为非线性参数的估计问题。如果是线性问题，参数估计比较简单，通常进行一次计算即可求出参数的真值。对于非线性问题，参数估计要复杂得多，为了求解，通常的方法是需要将函数在参数初值的邻域内当成是线性的，即所谓线性化，然后再求参数的改正量。由于这是一种近似方法，所求出的改正量不可能使 Φ 一次达到极小，而是需要一个迭代过程，通过反复计算而逐步逼近函数 Φ 的极小值。

为了说明这个求极小的迭代过程，可以举一个单参量情况的

例子。假如我们要确定引起重力异常 Δg_k 的那个地质体的深度，例如，可选择模型体为已知体积和密度的球体（图4—1）。显然这是一个单参量的问题，这个参量就是球心的埋藏深度。设实际地质体的中心深度为 h ，假定我们取球中心的初始深度为 $z^{(0)}$ ，这时函数

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^n [\Delta g_k - g(z)]^2$$

是球中心深度 z 的函数。上式中 Δg_k 为观测异常， $g(z)$ 是中心深度为 z 的球体理论计算异常。由此可见， Φ 随 z 而变化的图形

可示意画在图4—2中，而 $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ 的图形示意画在图4—3中。要求

Φ 的极小，也就还要求 $\Phi'_z = 0$ 的根，由初值 $z^{(0)}$ 以及 $\Phi(z^{(0)})$ 等我们无法一次求出 Φ 的极小。

例如，用牛顿法求根，结果可求得

$$z^{(1)} = z^{(0)} - \frac{\Phi'(z^{(0)})}{\Phi''(z^{(0)})}.$$

由图4—3可见， $z^{(1)}$ 比 $z^{(0)}$ 更接近于 h ，但还并不等于 h ，还需进一步迭代计算。再以 $z^{(1)}$ 为初值，可求得第二次叠代结果为

$$z^{(2)} = z^{(1)} - \frac{\Phi'(z^{(1)})}{\Phi''(z^{(1)})}.$$

如此下去，最后可以使 z 值等于 h 值（在一定精度范围内），从而迭代停止。

二、单参量非线性函数的极小问题

在实际中参量是很多的，但是从以后几节中可以看到，对于多参量求极小问题往往需要用到对单参量的函数求极小。因此在本节中介绍一下几种求单参量极小的算法。

前段的例子中讲到牛顿法，但它必须用到二阶微商，这是我们所不希望的。下面我们根据以后几节的需要，分两种情况来讨论。

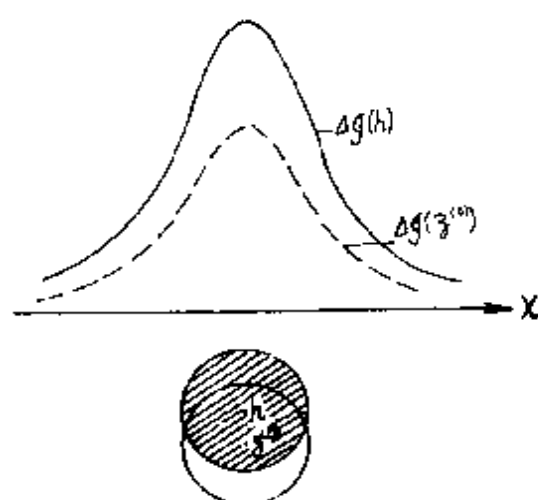


图 4—1 不同埋深时球体的重力异常

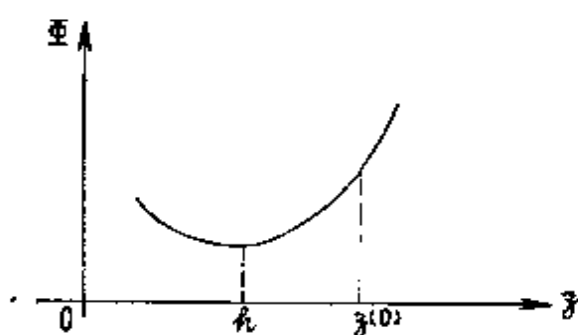


图 4—2 函数 $\Phi(z)$ 随 z 变化的示意图

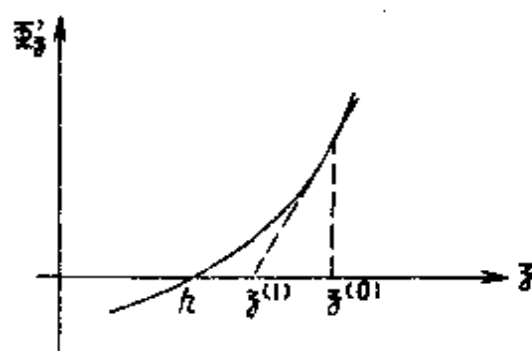


图 4—3 用牛顿切线法求 $\Phi'(z) = 0$ 的根示意图

1. 用计算导数的情况

设单参量函数为 $F(\alpha)$ ，我们将用三次多项式内插的办法来求 $F(\alpha)$ 的极小点，步骤如下：

(1) 对于某一点 a ，计算 $F'(a)$ ，取某一步长 $h > 0$ ，如果 $F'(a) < 0$ ，保持 h ；如果 $F'(a) > 0$ ，则以 $-h$ 代替 h 。计算 $F'(a+h)$ ，如果与 $F'(a)$ 同号，则以 $a+h$ 作为新的起点 a ， $2h$ 作为新的步长，重复以上步骤，直至找到 a ， $F'(a)$ ， $b = a+h$ ， $F'(b)$ ，使得 $F'(b) = 0$ 或 $F'(a)$ 与 $F'(b)$ 异号。

(2) 在 $[a, b]$ 区间作三次曲线拟合，即令

$$y = A\alpha^3 + B\alpha^2 + C\alpha + D, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \text{使} \quad y(a) &= F(a), & y'(a) &= F'(a), \\ y(b) &= F(b), & y'(b) &= F'(b). \end{aligned} \quad (2.2)$$

由此可确定 A, B, C, D 。

为简便起见, 设 a 为原点, 则 b 的坐标为 h , 根据 (2.2) 得到

$$\begin{aligned} F(a) &= D, \\ F(b) &= Ah^3 + Bh^2 + Ch + D, \\ v &= F'(a) = C, \\ u &= F'(b) = 3Ah^2 + 2Bh + C. \end{aligned} \quad (2.3)$$

对于三次函数, 其极小点应满足方程

$$y'(\alpha) = 3A\alpha^2 + 2B\alpha + C = 0, \quad (2.4)$$

$$y''(\alpha) = 6A\alpha + 2B > 0. \quad (2.5)$$

由此可解出

$$\alpha = \begin{cases} (-B \pm \sqrt{B^2 - 3AC})/3A, & \text{当 } A \neq 0 \text{ 时,} \\ -C/2B, & \text{当 } A = 0 \text{ 时.} \end{cases} \quad (2.6)$$

为了满足 (2.5), 其中 $\pm$ 号只能取 $+$ 号。为了使 (2.6) 两式统一, 可以将分子分母同乘 $(B + \sqrt{B^2 - 3AC})$, 则

$$\alpha_0 = -\frac{C}{B + \sqrt{B^2 - 3AC}}. \quad (2.7)$$

为计算简便, 我们定义

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= -3(F(a) - F(b))/h = 3(Ah^2 + Bh + C), \\ z &= \mathcal{J} - u - v = Bh + C, \\ w^2 &= z^2 - vu = h^2(B^2 - 3AC), \end{aligned} \quad (2.8)$$

这样, 三次函数的极小点容易用 $\mathcal{J}, u, v, w, z$ 表示

$$\alpha_0 = -\frac{vh}{z - v + w}. \quad (2.9)$$

在原来坐标下, 三次函数的极小点为 $a + \alpha_0$ 。在计算时, 我们不需要解方程组 (2.3), 只需计算 $\mathcal{J}, z, w$, 然后求出 α_0 与 $\alpha_0 + a$ 。

(3) 如果我们要得到精确的极小点, 计算 $F'(a + \alpha_0)$, 如果 $F'(a + \alpha_0)$ 满足所给的精确度, 则 $a + \alpha_0$ 为所求的极小点, 否则以 $a + \alpha_0$ 代替 a , 取 $|h|/10$ 作为新的步长, 回到 (1), 重复以上

步骤，直至满足要求。

我们把这个过程画成框图（4—4）。

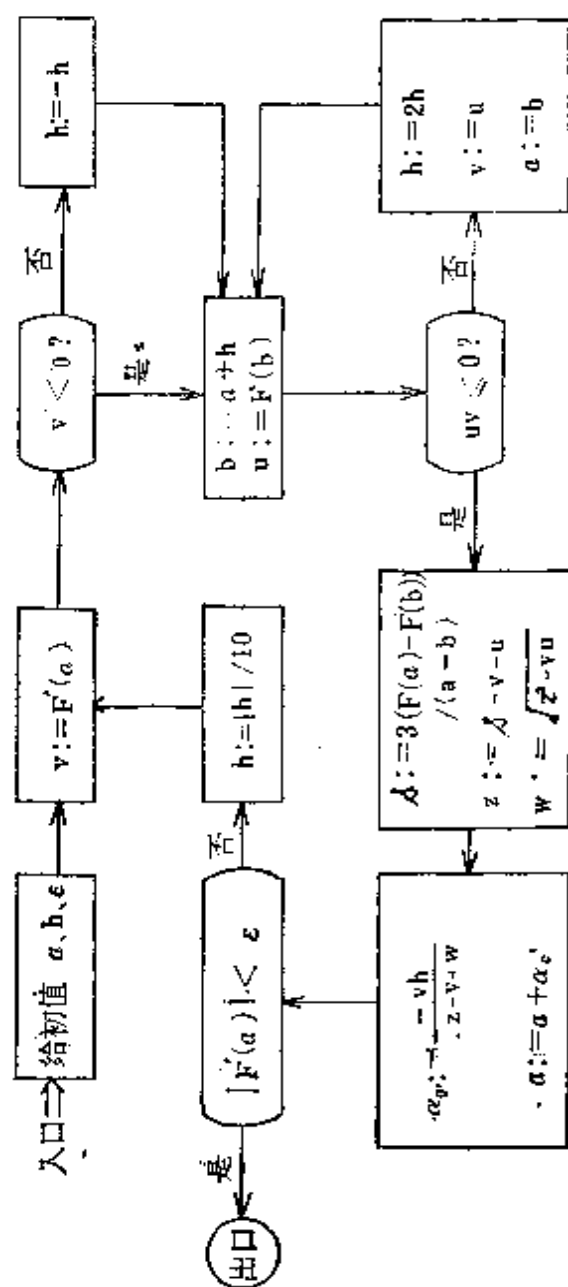


图 4—4 使用三次多项式插值法求单参量函数极小程序框图（计算导数）

2. 不用计算导数的情况

在这里我们介绍二次插值与优选法两种。

(1) 二次插值方法

a. 二次插值公式

设三个点 a, b, c 及其相应的函数值 $F_a = F(a), F_b = F(b), F_c = F(c)$ ，作二次函数通过这三个点 $(a, F_a), (b, F_b), (c, F_c)$ ，

F_c), 根据拉格朗日插值公式

$$y(\alpha) = -\frac{(\alpha-b)(c-\alpha)}{(a-b)(c-a)} F_a + \frac{(\alpha-c)(a-\alpha)}{(b-c)(a-b)} F_b + \frac{(\alpha-a)(b-\alpha)}{(c-a)(b-c)} F_c,$$

其中 α^2 项的系数为

$$A = -\frac{(b-c)F_a + (c-a)F_b + (a-b)F_c}{(a-b)(b-c)(c-a)}.$$

如果 $A > 0$, 则极小点

$$d = \frac{1}{2} \frac{(b^2 - c^2)F_a + (c^2 - a^2)F_b + (a^2 - b^2)F_c}{(b-c)F_a + (c-a)F_b + (a-b)F_c}. \quad (2.10)$$

b. 设寻找极小值的最大区间为 $[\Delta_1, \Delta_2]$, 初始近似极小点 p , 给一步长 h , 使 $p+2h$ 属于 $[\Delta_1, \Delta_2]$, 计算 $F(p)$ 与 $F(p+h)$ 。如果 $F(p) < F(p+h)$, 则计算 $F(p-h)$ 指定 $p-h, p, p+h$ 为 a, b, c 进行二次插值; 如果 $F(p) \geq F(p+h)$, 则计算 $F(p+2h)$, 指定 $p, p+h, p+2h$ 为 a, b, c 进行二次插值, 见示意图4-5。

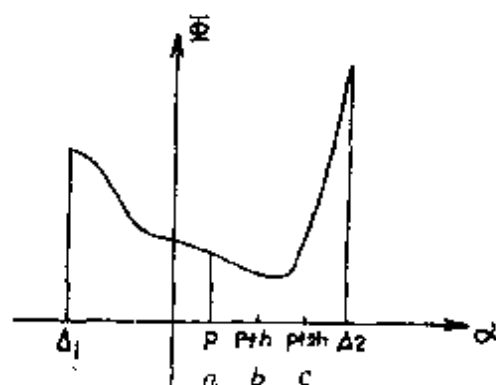


图 4-5 二次插值法求单参量函数极小时区间选取示意图

c. 如果 $A \leq 0$ (此时无极小值), 或 $A > 0$, 但 $y(\alpha)$ 的极小点 d 超出 $[\Delta_1, \Delta_2]$, 则取三点中最小点一边 $[\Delta_1, \Delta_2]$ 的端点为新的指定点, 弃掉最远离它的指定点, 转到(b), 重新进行二次插值。

d. 如果 $A > 0$, d 在 $[\Delta_1, \Delta_2]$ 区间内, 将 d 与 a, b, c 比较, 如果它与它们之间的距离之一在预定的精确度之内, 则选为极小点。否则计算 $F(d)$, 以 d 作为新的指定点, 然后一般是去掉 $F(a), F(b), F(c)$ 中为最大的点, 除了这样的情况, 当去掉较小的一个时, d 在剩余两点的区间里。然后转到(b), 重复以上步骤, 直到求得极小点为止。

把上述过程画在框图4—6中。

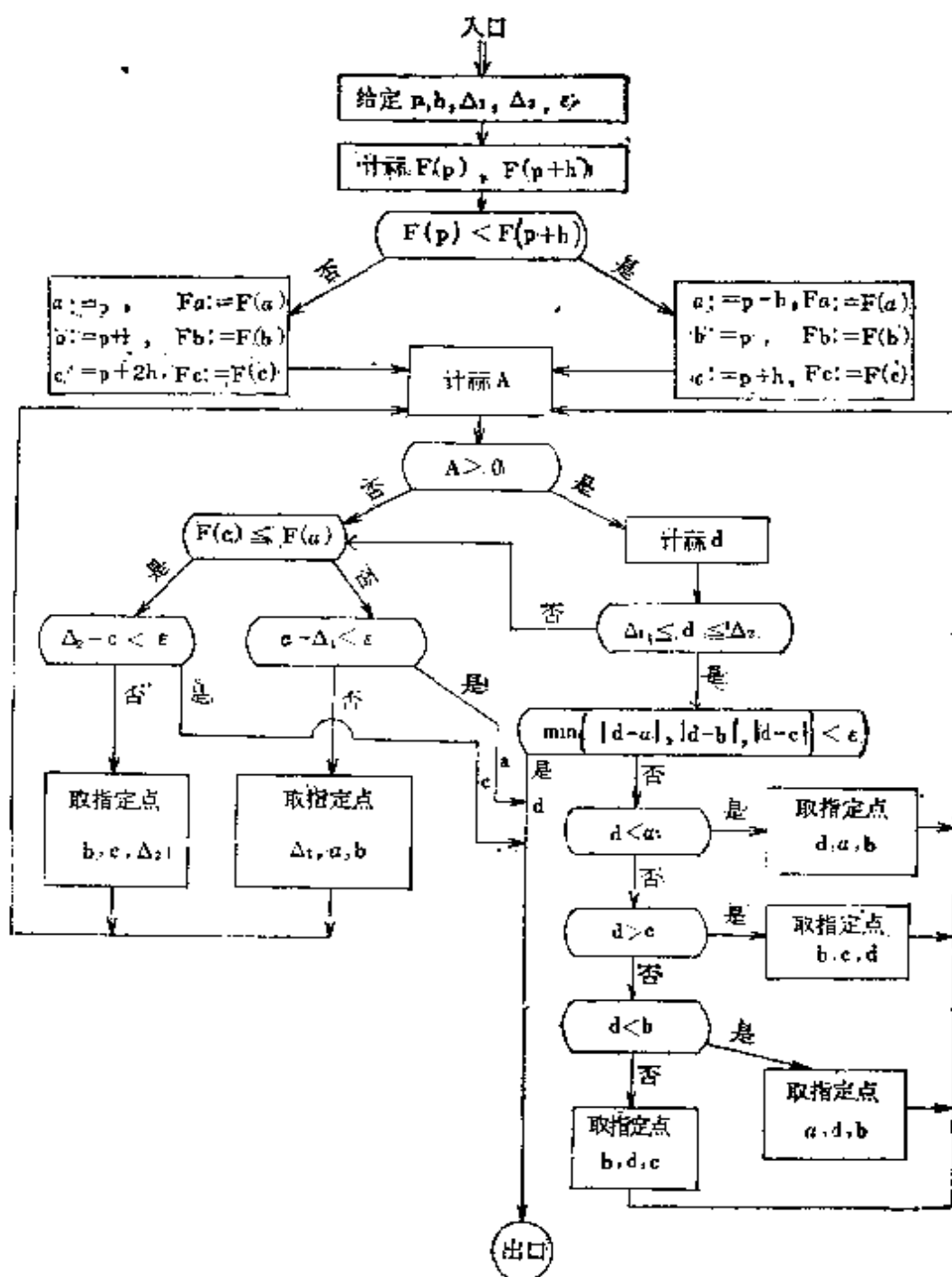


图 4—6 用二次插值法求单参量函数极小程序框图

(2) 优选法 (0.618法)

优选法是大家所熟悉的, 这里不详述了, 只给出一种特殊情况的框图 4—7, 它是针对后面几节中的应用而设计的, 但对各部情况考虑不细, 仅供参考。假设 $F'(0) < 0$, 要在 $[0, 1]$ 区间中

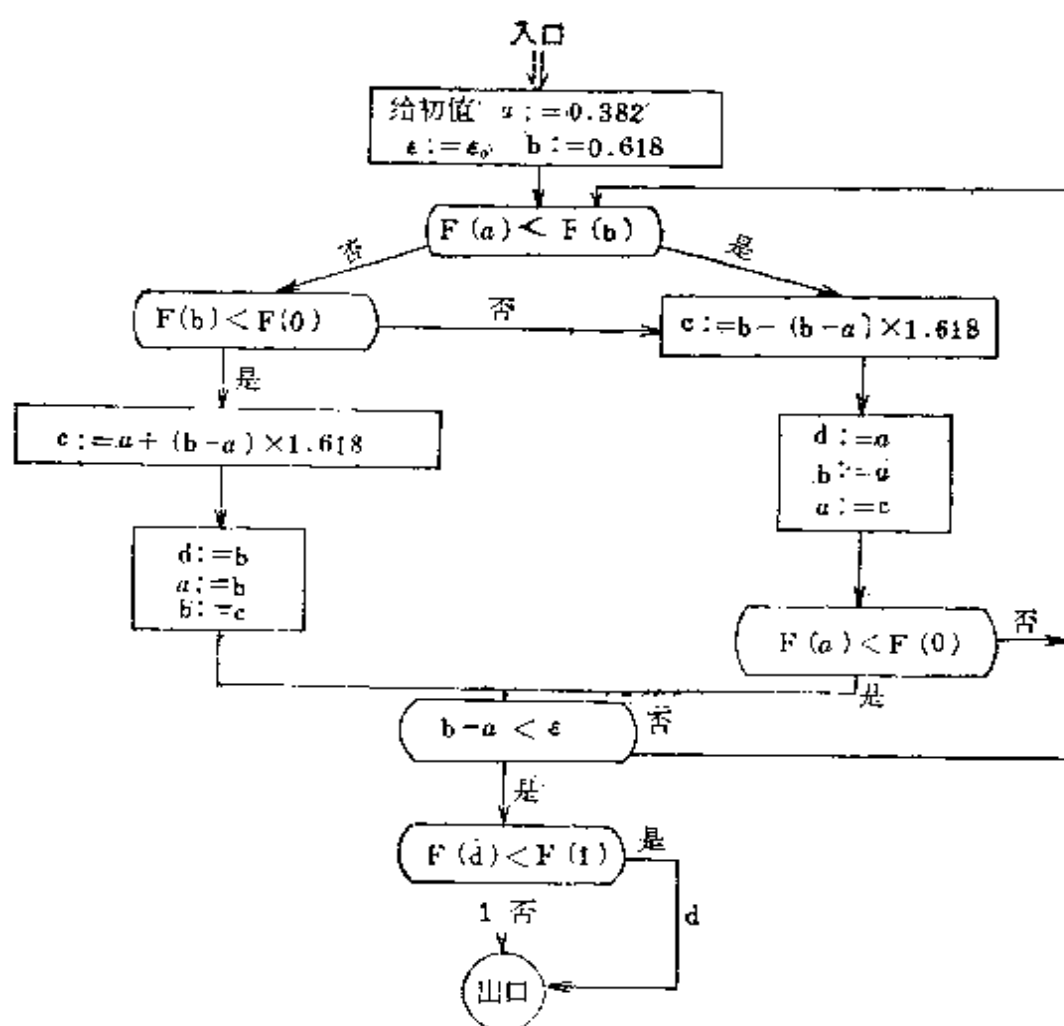


图 4—7 用优选法求单参量极小的程序框图

找出 $F(x)$ 的极小点 d ，且 $F(d) < F(0)$ 。

框图4—7中关于 a, b, c 的相对位置示于图4—8 a 和图4—8 b 中。当求极值的区间不在 $[0, 1]$ ，而是在任意的区间 $[\alpha_1, \alpha_2]$ 内时，则只要作如下变换

$$t = (x - \alpha_1) / (\alpha_2 - \alpha_1).$$

框图4—7中初值 $a = 0.318$ 和 $b = 0.618$ 及 1.618 这些数值在用电子计算机的计算中如需更精确的数值，则可用如下算式得出，

$$a = 1 - (\sqrt{5} - 1) / 2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0.38196601 \dots,$$

$$b = (\sqrt{5} - 1) / 2 = 0.618033988 \dots.$$

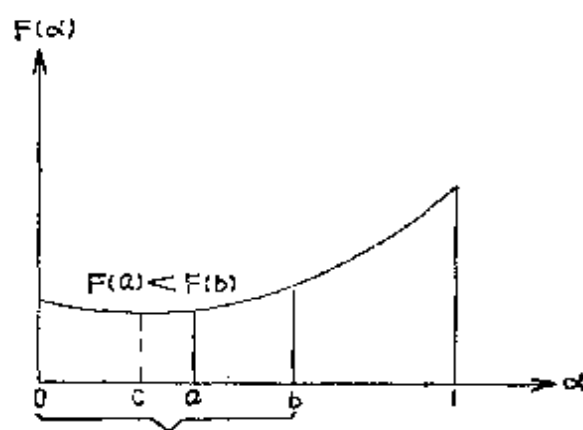


图 4—8 a a 、 b 、 c 的相对位置之一

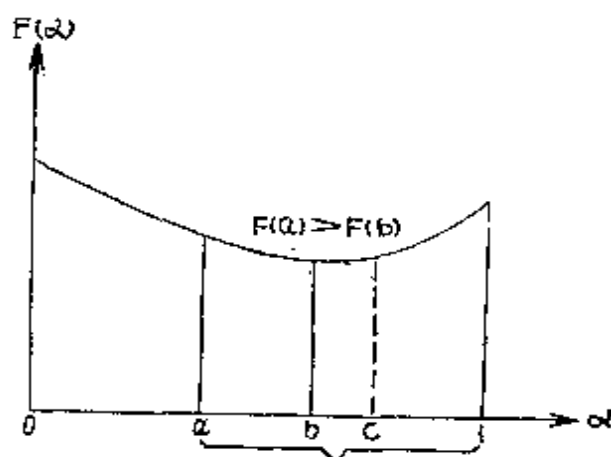


图 4—8 b a 、 b 、 c 的相对位置之二

关于对单参量函数求极小问题的计算方法也不少，这里不去详细介绍，读者可根据具体问题的需要灵活选用。

三、广义最小二乘法

在重磁异常的解释中，一般都是多参量的非线性最优估计问题，理论模型异常

$$Z = f(\underline{x}, b_1, b_2, \dots, b_n) \quad (2.11)$$

是参数 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的非线性函数。其中

$$\underline{x} = (x, y, z)$$

为测点的坐标（在本章中字母下加横线表示向量）。由第一节已提到， $\Delta Z_k (k=1, 2, \dots, m)$ 表示在 m 个观测点 $\underline{x}_k (K=1, 2, \dots, m)$ 上的实测异常，现在要寻求与观测异常相对应的地质体参量

值 $b_i (i=1, 2, \dots, n)$, 使理论模型标出的异常值与实测异常值的偏差平方和

$$\Phi = \sum_{k=0}^m [\Delta Z_k - f(\underline{x}_k, b_1, b_2, \dots, b_n)]^2 \quad (2.12)$$

为最小 (极小)。设 b_i 的初始值为 $b^{(0)}$, 则需计算出

$$b_i^{(1)} = b_i^{(0)} + \delta_i^{(0)}, \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.13)$$

问题在于如何求出校正值 $\delta_i^{(0)}$ 。下面首先介绍高斯提出的方法。

因为 f 是 b_i 的非线性函数, 直接求 b_i 非常困难, 所以应将 f 在 $b^{(0)}$ 附近线性化。我们在 $b_i^{(0)}$ 附近将 f 作台劳展开, 并略去 $\delta_i^{(0)}$ 的二次和二次以上的项, 有

$$\begin{aligned} f(\underline{x}_k, b_1, b_2, \dots, b_n) &= f(\underline{x}_k, b_1^{(0)} + \delta_1^{(0)}, b_2^{(0)} \\ &+ \delta_2^{(0)}, \dots, b_n^{(0)} + \delta_n^{(0)}) = f_k^{(0)} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_1} \delta_1^{(0)} \\ &+ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_2} \delta_2^{(0)} + \dots + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_n} \delta_n^{(0)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

式中 $f_k^{(0)} = f(\underline{x}_k, b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, \dots, b_n^{(0)})$ 是 $b_i = b_i^{(0)}$, $\underline{x} = \underline{x}_k$ 时的函数值

$$\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} = \frac{\partial f(\underline{x}, b_1, b_2, \dots, b_n)}{\partial b_i} \bigg|_{\underline{x} = \underline{x}_k, b_i = b_i^{(0)}}, \quad (i=1, 2, \dots, n)。$$

这里 $f_k^{(0)}$ 和 $\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i}$ 当 $b_i^{(0)}$ 给定时都是 $\underline{x}$ 的函数, 可以直接算

出。

将 (2.14) 式代入 (2.12) 式, 可得:

$$\begin{aligned} \Phi = \hat{\Phi} &= \sum_{k=0}^m [\Delta Z_k - (f_k^{(0)} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_1} \delta_1^{(0)} + \dots \\ &+ \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_n} \delta_n^{(0)})]^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

现在要寻求 $\delta^{(i)}$, 使 $b^{(i)} = b^{(0)} + \delta^{(i)}$ 为参数的模型体理论曲线与实测曲线尽可能地符合, 即使 $\hat{\Phi}$ 值为极小, 这时应满足关系:

$$\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial b_i} = \frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \delta_i} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

由此可得,

$$\begin{aligned}
 0 &= -\frac{\partial \hat{\Phi}}{\partial \delta_i} = 2 \sum_{k=0}^m \left[\Delta Z_k - (f_k^{(0)} + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_1} \delta_1^{(0)} + \dots \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_n} \delta_n^{(0)}) \right] \left(-\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} \right) \\
 &= 2 \left[\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_j} \delta_j^{(0)} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_{k=0}^m \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} (\Delta Z_k - f_k^{(0)}) \right], \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

郎

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=0}^m \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} \delta_i^{(0)} = \sum_{k=0}^m \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} (\Delta Z_k - f_k^{(0)})$$

$$i=1, 2, \dots, n, \quad (2.17)$$

将 (2.17) 写成方程组形式,

[illegible]

式中

$$a_{ij} = \sum_{k=0}^m \frac{\partial f^{(k)}}{\partial b_i} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial b_j},$$

$$g_i = \sum_{k=0}^{992} \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} (\Delta Z_k - f_k^{(0)}).$$

再把 (2.18) 式写成矩阵形式,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

或

$$A \underline{\delta}^{(0)} = \underline{g}, \quad (2.20)$$

其中

$$A_{n \times n} = P^T P,$$

$$P_{m \times n} = \left(\frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial b_i} \right)_{\substack{m \times n \\ k=1, 2, \dots, m, i=1, 2, \dots, n.}}$$

$$\underline{g}_{n \times 1} = P^T (\Delta \underline{Z} - \underline{f}^{(0)}).$$

在本节中，我们以大写字母表示矩阵， P^T 表示矩阵 P 的转置矩阵。

在实际问题中，当观测值给出且选定模型体和给定其初始值 $b_i^{(0)}$ 后， a_{ij} 和 g_i 均可以计算出，求解上面的方程组可得 $\underline{\delta}^{(0)}$ ，进而可求出 $\underline{b}^{(1)} = \underline{b}^{(0)} + \underline{\delta}^{(0)}$ 。以 $\underline{b}^{(1)}$ 作为新的初值，再重复以上步骤计算，直至 $|\delta_i| (i=1, 2, \dots, n)$ 小于允许误差为止。

前面说过，非线性问题所以需要反复迭代和修正，关键在于台劳展式(2.14)是近似的，因此求得的 b_i 也是近似的，其近似程度依赖于 $|\delta_i|$ 的大小。若 $|\delta_i|$ 较大，则 δ_i 的二次项及二次以上的项不能忽略。逐次迭代的结果， b_i 逐步逼近于真值，而 $|\delta_i|$ 也逐次减小，当小到二次项可以忽略时，(2.14) 式便成为精确等式。可以看出，如果二次和二次以上的项其偏导数均为零时，不论 δ_i 有多大，(2.14) 式也总是精确地成立，这就是线性模型的情况，所以线性问题不用迭代，而非线性问题则需要迭代。

以上方法通常称为高斯法，高斯法在应用时，要求矩阵 A 是正定的和非奇异的，否则就不能区分极大、极小或鞍点，或者干脆不能求解。高斯法在应用时还有一个困难，就是迭代过程常常是很不稳定的，当 $\underline{\delta}$ 过大，使台劳展开的高次项不容忽略时，就会发生这样的情况：以参数 $\underline{b}^{(l+1)}$ 计算的 Φ 值比以 $\underline{b}^{(l)}$ 计算的 Φ 值还要大（这里 l 为迭代次数的指标），即高斯法不能保证稳定地

收敛于 Φ 的极小值。

后来,根据多次应用的实际经验,对高斯法提出了一个改进,这时不是把 $\underline{\delta}$ 作为校正值,而只是将 $\underline{\delta}$ 作为校正方向,记为 $\underline{\delta}_l$;而以 $\underline{\delta}_l$ 乘上一个常数 α 作为校正值。问题变为要求 α 值使

$$\Phi(\underline{b}^{(l)} + \alpha \underline{\delta}_l^{(l)}), \quad (l=1, 2, \dots) \quad (2.21)$$

为极小,这是一个单变量求极小的问题,可由本节“二”中的方法计算出。然后取:

$$\underline{b}^{(l+1)} = \underline{b}^{(l)} + \alpha \underline{\delta}_l^{(l)} \quad (2.22)$$

作为新的初值,通常 α 取在 $[0, 1]$ 之间。

把这种方法称为广义最小二乘法,它使迭代的稳定性有所改善。但即使这样,当初值取得不合适时,这种方法也经常不收敛。

四、最速下降法

一般说来, $\Phi(\underline{b})$ 是一个复杂的函数,但是在它的极小值附近不大的范围内,可以视为二次型。假如我们在最优值附近给定了一个初值 $\underline{b}^{(0)}$, 设最优值为 $\underline{b}$, 初值到最优值的改正量为 $\underline{\delta}$, 即 $\underline{b} = \underline{b}^{(0)} + \underline{\delta}$ 。若改正量不大,我们可以将函数 Φ 展成台劳级数并忽略高次项:

$$\begin{aligned} \Phi(\underline{b}) = \Phi(\underline{b}^{(0)} + \underline{\delta}) &= \Phi(\underline{b}^{(0)}) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi(\underline{b}^{(0)})}{\partial b_i} \delta_i \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \Phi(\underline{b}^{(0)})}{\partial b_i \partial b_j} \delta_i \delta_j. \end{aligned}$$

表示成矩阵形式为:

$$\Phi = \Phi_0 + \underline{g}^T \underline{\delta} + \frac{1}{2} \underline{\delta}^T G \underline{\delta}, \quad (2.23)$$

式中

$$\underline{g} = \text{grad} \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b_n} \end{pmatrix}, \quad \underline{\delta} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_1 \partial b_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_1 \partial b_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_1 \partial b_n} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_2 \partial b_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_2 \partial b_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_2 \partial b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_n \partial b_1} & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_n \partial b_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial b_n \partial b_n} \end{pmatrix}.$$

(2.23) 式是个二次型，这就说明了函数 Φ 在最优值附近用二次型来近似。在最优值附近的 $(b_1, b_2, \cdots b_n)$ 邻域内，

$$\Phi(\underline{b}) = \Phi(\underline{b}^{(0)})$$

近似成为一个 n 维空间中的椭球面的部分。当 $n=2$ 时，其呈椭圆形可示意表示在图4—9中。此图中所示的等值线是比较接近实际情况的等值线，不是理想的椭圆。

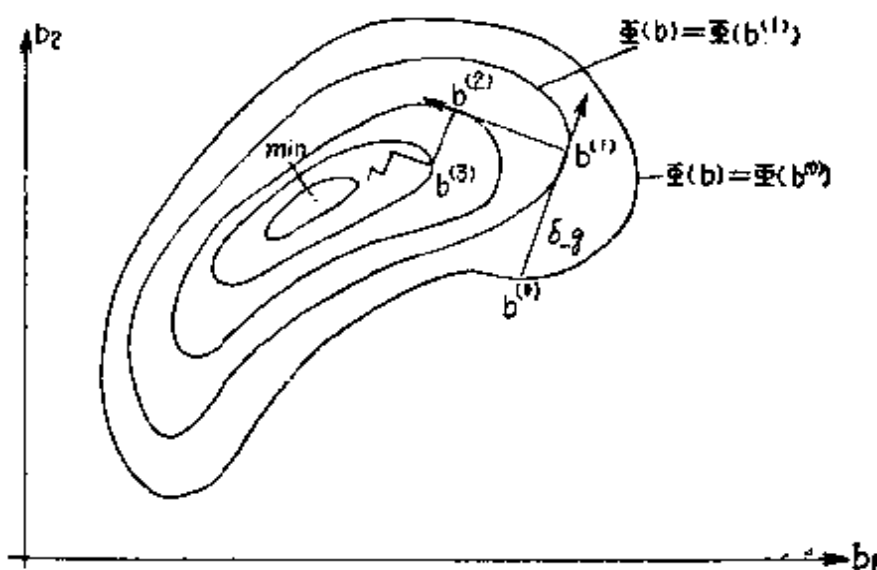


图 4—9 在 n 维空间中的椭球面 ($n=2$)

最速下降法的思想是这样：要寻求 $\Phi(\underline{b})$ 的极小值，从 $\underline{b}^{(0)}$ 出发，应该沿着函数 Φ 减小得最快的方向去找。

从 $\underline{b}^{(0)}$ 出发，函数 $\Phi(\underline{b})$ 在 $\underline{b}^{(0)}$ 点减小得最快的方向是那一个呢？这应当是函数 Φ 在 $\underline{b}^{(0)}$ 点的梯度方向的反方向。我们知道，在 $\underline{b}^{(0)}$ 点函数 Φ 的梯度矢量为：

$$\dots\dots, b_{\pi}^{(0)} - \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial b_{\pi}})$$

取极小。

因为函数 Φ 为非负的函数，如果 $\underline{\delta}_x$ 较小，将 $\Phi(\underline{b}^{(0)} + \lambda \underline{\delta}_x)$ 台劳展开式取到一次项，可写出：

$$\Phi(\underline{b}^{(0)} + \lambda \underline{\delta}_x) \doteq \Phi_0 - \lambda \underline{\delta}_x^T \underline{\delta}_x = \Phi_0 - \lambda |\text{grad } \Phi^2|。$$

为使 Φ 取极小，我们取等式右边为零，由此可得

$$\lambda = \frac{\Phi}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial b_n}\right)^2} \bigg|_{\underline{b} = \underline{b}^0} = - \frac{\Phi_0}{|\text{grad } \Phi_0|^2}。 \quad (2.28)$$

将 λ 代入(2.27)式，可求出第一次迭代的修正值为：

$$\begin{aligned} \underline{b}^{(1)} &= \underline{b}^{(0)} - \frac{\text{grad } \Phi_0}{|\text{grad } \Phi_0|^2} \Phi_0, \\ \underline{b}^{(2)} &= \underline{b}^{(1)} - \frac{\text{grad } \Phi_1}{|\text{grad } \Phi_1|^2} \Phi_1, \\ &\dots\dots\dots \\ \underline{b}^{(i+1)} &= \underline{b}^{(i)} - \frac{\text{grad } \Phi_i}{|\text{grad } \Phi_i|^2} \Phi_i. \end{aligned}$$

以 $\underline{b}^{(1)}$ 作为新的初值，继续沿着 $\underline{b}^{(1)}$ 点对函数的负梯度 $\underline{\delta}_x$ 方向进行计算，求出 λ 和第二次迭代改正值。

如此继续下去，即可最后逼近 Φ 的极小值。最速下降法叠代逼近最优值的情况示如图4—9。

应用最速下降法求函数极小，一般能保证收敛，但收敛的速度常常很慢，往往需要大量的计算工作，特别在函数 Φ 的等值面呈拉长的椭球面形状时，情况更是如此。梯度法中对 λ 的确定有各种不同的方法，由此又有各种名目繁多的叫法，这里不一一介绍。

五、阻尼最小二乘法（又称马奎特方法）

由前面的叙述我们知道，用高斯法进行迭代时，校正矢量的步长较大，如果初值给出较好，能很快收敛，但它的收敛性很不

稳定，当初值取得不好时，常常容易发散。而最速下降法的情况正好相反，它一般能保证收敛，但步长太小，计算很费时间。

另外，高斯法的校正矢量的方向 ($\underline{\delta}_G$) 和最速下降法的方向 ($\underline{\delta}_g$)，也往往是不一致的，特别是当 $\Phi(\underline{b})$ 的等值面为拉长椭圆形状时，两者方向之间的夹角 γ 可达 $80^\circ - 90^\circ$ (图4—10)。例如，对于二次型，高斯法的方向是直接指向 Φ 的极小点，而最速下降法方向 $\underline{\delta}_g$ 是负梯度方向，它垂直地通过 $\underline{b}^{(0)}$ 点函数的切平面。正因为这样，对于非线性函数，当等值面很窄长时， $\underline{\delta}_G$ 远远偏离负梯度方向，这是造成高斯法经常失败的主要原因。



图 4—10 校正矢量的方向

马奎特方法是在高斯法和最速下降法之间取某种插值，它力图能以最大步长前进，同时又能紧靠负梯度方向，这样既能保证收敛，又加快收敛速度。它的基本思想是：在迭代过程的每一步，最好尽量使用接近高斯改正矢量的方向，以使校正步长尽可能地增大，如当这种情况下不能收敛时，再逐步改用接近最速下降的方向 $\underline{\delta}_g$ ，同时缩小步长，以保证收敛。下面我们记由马奎特方法得出的校正矢量。

实现这种思想的方法是：只要将方程

$$A \underline{\delta}_G = \underline{g} \quad (2.20)$$

改变为

$$(A + \lambda I) \underline{\delta}_0 = \underline{g}, \quad (\lambda > 0) \quad (2.29)$$

就可以了，式中 $\underline{\delta}_0$ 是我们要求得的对参数的校正矢量，即马奎特校正矢量； I 为单位矩阵， λ 是用它来作为控制校正方向和步长的任意正数。由 (2.29) 式可见，此时的校正矢量 $\underline{\delta}_0$ 是 λ 的函数，即

$$\underline{\delta}_0 = \underline{\delta}_0(\lambda).$$

由方程(2.20)变成方程(2.29), 明显地改善了收敛性。如果矩阵 A 是奇异的, 当 $\lambda > 0$ 时, $A + \lambda I$ 为正定的。

另外, 因为函数 Φ 的梯度可写为:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_i} = -2 \sum_{k=0}^m \frac{\partial f(k)}{\partial b_i} (\Delta Z(k) - f(k)).$$

将上式与(2.18)式的 g_i 比较, 又从(2.26)式定义, 可见我们能写出

$$-\frac{1}{2} \underline{\delta}_g = \underline{g}. \quad (2.30)$$

由此可见, $\underline{g}$ 的方向就是最速下降法的方向, 再将(2.20), (2.30)和(2.29)三式对比可以发现, (2.29)式实际上就是在高斯法和最速下降法之间取某种插值, λ 就是这种插值的权系数。

这是因为从(2.29)式可知, 当 $\lambda = 0$ 时, 马奎特方法退化为高斯法; 当 λ 充分大时, $\underline{\delta}_0 = -\frac{1}{\lambda} \underline{g}$, 这时马奎特校正方向就是最速下降的方向。由此可见:

1. 当 λ 越来越大时, $\underline{\delta}_0$ 的长度越来越小, 且

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|\underline{\delta}_0\| = 0, \quad (2.31)$$

这里 $\|\underline{\delta}_0\|$ 表示矢量 $\underline{\delta}_0$ 的长度。

2. 当 λ 由零逐渐增大时, $\underline{\delta}_0$ 的方向逐渐由高斯法方向 $\underline{\delta}_g$ 转向最速下降法的方向 $\underline{\delta}_g$, λ 越大, $\underline{\delta}_0$ 的方向越接近 $\underline{\delta}_g$ 。

3. 对 $\lambda > 0$ 的任意实数, $\underline{\delta}_0$ (满足方程(2.29)) 使 Φ 在半径为 $\|\underline{\delta}_0\|$ 的球面上取极小。

上述(2)说明, $\underline{\delta}_0(\lambda)$ 当 λ 增大时越来越接近 Φ 的负梯度方向, 即总是指向 Φ 的下降方向, 又根据(1), 当 $\lambda \rightarrow \infty$ 时, $\|\underline{\delta}_0\| \rightarrow 0$, 因此, 对于任意第 l 次迭代值 $b^{(l)}$, 我们总可以找到充分大的 λ , 使

$$\Phi(\underline{b}^{(l)} + \underline{\delta}_0(\lambda)) < \Phi^{(l)} = \Phi(\underline{b}^{(l)}). \quad (2.32)$$

如果我们取 $\underline{b}^{(i+1)} = \underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_0^{(i)}$, 这保证使 Φ 在每次迭代中改善, 所以上述(1)、(2)是保证下面迭代程序得以稳定进行的理论根据。上述(3)说明了, 在跨出同样步长的情况下, 以 $\underline{\delta}_0(\lambda)$ 的方向为最好, 这便从理论上说明了这种方法的优越之处。

在实际计算中, 显然不能取 λ 太大, 因这样会使步长太小, 收敛太慢。因此, 我们可取如下原则: 即在收敛情况下, λ 宜选较小的值, 也就是接近高斯方法; 仅当 $\Phi^{(i+1)} > \Phi^{(i)}$, 即不满足 Φ 逐渐减小时, 才被迫选取较大的 λ 值。

其计算过程大致如下:

第一, 给定模型体的初值 $\underline{b}^{(0)}$, 计算对应的 $\Phi^{(0)}$ 值; 给定一个常数 ν ($\nu > 1$, 一般可取 $\nu = 2 \sim 10$), 并给定 λ 的一个初值 $\lambda^{(0)}$ 。

第二, 进行下一次迭代时, 先令

$$\lambda = \lambda^{(0)} / \nu. \quad (2.33)$$

第三, 解方程(2.29), 可得 δ , 同时计算 $\Phi^{(i)}$, 若

$$\Phi^{(i+1)} < \Phi^{(i)}, \quad (2.34)$$

则这次迭代完成。否则令 $\lambda_i = \nu \lambda$, 重复第三步, 再进行计算, 若上式成立, 这次迭代完成; 否则继续乘以 ν 增大 λ 。根据上面讨论所知, 只要 λ 充分大时, 总能保证上式成立, 从而结束这次迭代。如进行乘 ν 的次数为 s , 此时则取了 $\lambda^{(s+1)} = \nu^{(s)} (\lambda^{(i)} / \nu)$, $\underline{b}^{(i+1)} = \underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_{\lambda^{(s+1)}}^{(i)}$ 。

第四, 以 $\underline{b}^{(i+1)} = \underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}^{(i)}$ 代替 $\underline{b}^{(0)}$, λ 代替 $\lambda^{(0)}$, 重复以上第二步作下一次迭代, 直至 $|\delta^{(i)}|$ 小于一个事先给定的微小数 (根据精度要求确定), 使迭代收敛为止。

计算过程的框图可参见图4—11。

六、改进的阻尼最小二乘法

从上段末关于阻尼最小二乘法的算法迭代过程可以看出, 该过程有如下缺点:

1. 如果 ν 选择较小, 则当需要增加 λ 时, 马奎特叠代过程第三步中乘 ν 的次数 s 太大, 解方程和计算函数值的次数太多。如果 ν 选择太大, 则在迭代过程中(2.34)式经常不满足, 也就是说, 每

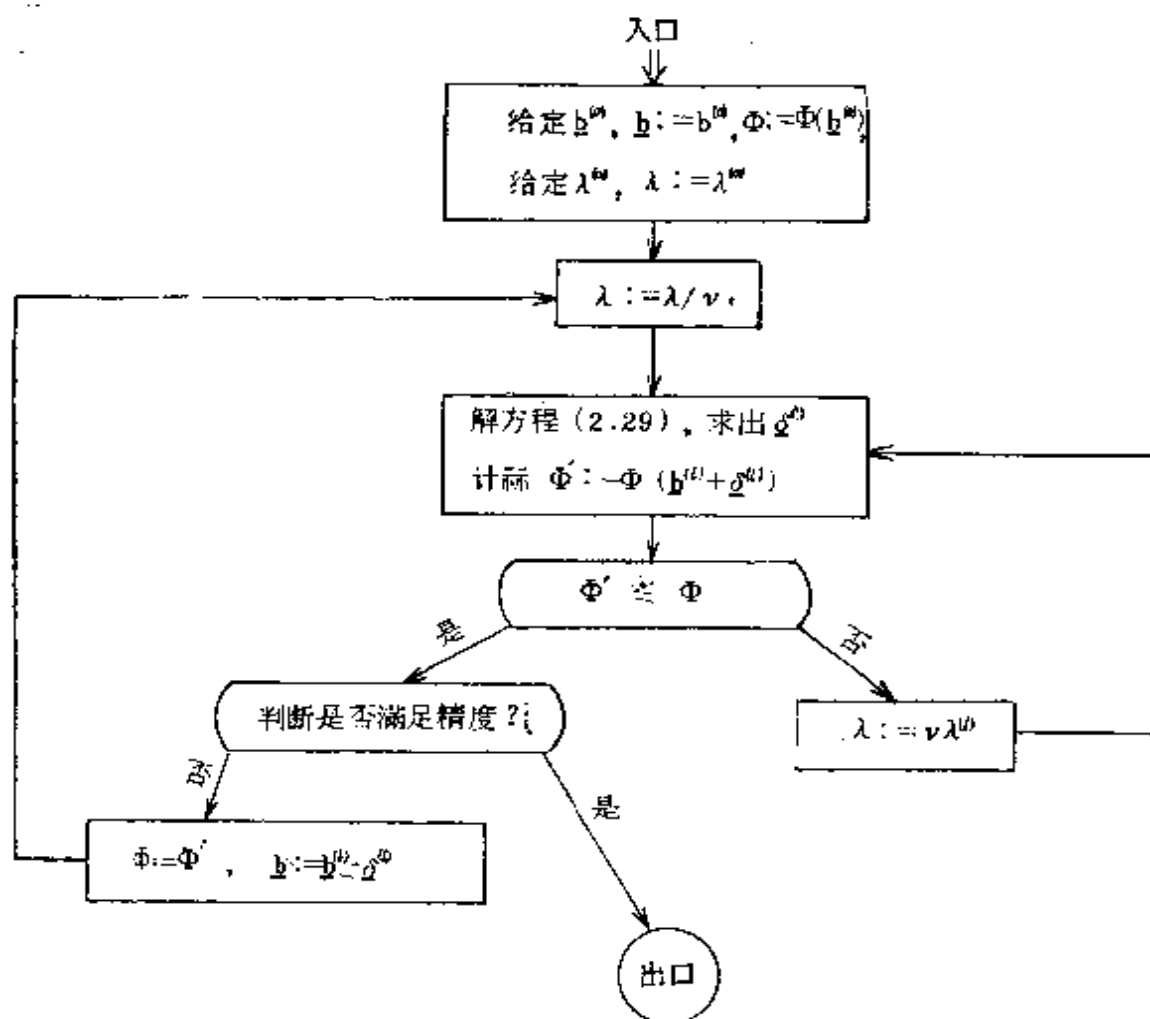


图 4-11 阻尼最小二乘法计算框图

迭代一次，经常要解两次方程，计算两次函数值。

2. 当 λ 很小时， δ_λ 的长度变化不大，因此再用几何级数来缩小阻尼系数 λ 是没有必要的，可以直接采用高斯法以提高收敛速率。

3. 仅仅用满足不等式(2.34)作为缩小 λ 的依据，往往会影响到迭代的收敛性，因为这样有可能导致下次迭代中 λ 缩得太小，而使 Φ 值不下降。

弗莱彻 (R. Fletcher) 在一九七一年提出了改进的办法，这里简述如下：

1. 为了克服第三个缺点，不仅用(2.34)式作为缩小或放大 λ 的条件，而且还依据非线性函数 $\Phi^{(l+1)}(b^{(l)} + \delta^{(l)})$ 是否接近于

线性化后的函数 $\hat{\Phi}^{(i+1)}(\underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_1^{(i)})$ 来衡量。

当比值

$$R = \frac{\Phi(\underline{b}^{(i)}) - \Phi(\underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_1^{(i)})}{\hat{\Phi}(\underline{b}^{(i)}) - \hat{\Phi}(\underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_1^{(i)})} \quad (2.35)$$

接近于 1 时,说明非线性函数 Φ 已较接近于线性化后的函数 $\hat{\Phi}$, 此时应采取往高斯方向靠拢的策略, 因之需缩小 λ ; 如果比值 R 接近于零或小于零, 说明函数 Φ 线性程度还较差, 所以放大 λ ; 对于这两者之间的情况, 仍然保持原来的 λ 。具体地说, 也就是选择常数 ρ, σ , 使 $0 < \rho < \sigma < 1$ 。如果比值 $R < \rho$, 则增加 λ ; 如果 $R > \sigma$, 则缩小 λ ; 如果 $\rho \leq R \leq \sigma$, 则保持原有的 λ 。计算表明, 收敛的速率对 ρ, σ 选取的依赖性并不灵敏, 一般取 $\rho = 0.25$, $\sigma = 0.75$ 为宜。有的建议取 $\rho = 0.5$, $\sigma = 0.9$ 。

(2.35) 式中的分母按下式计算:

$$\hat{\Phi}(\underline{b}^{(i)}) - \hat{\Phi}(\underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_1^{(i)}) = 2\underline{\delta}_1^{(i)\top} \underline{g} - \underline{\delta}_1^{(i)\top} A \underline{\delta}_1^{(i)}. \quad (2.36)$$

2. 比例因子 ν 的选取

比例因子 ν 一般选取在 2 至 10 之间较为合适, 从上述第一个缺点可知, 我们希望 ν 能根据具体情况选取, 使得既不增加过大, 又不因增加得不够大而导致重解方程组。

对于 $R > \sigma$ 时, 取 $\lambda_{(i+1)} = \lambda_{(i)} / 5$; (2.37)

当 $\rho \leq R \leq \sigma$ 时, 取 $\lambda_{(i+1)} = \lambda_{(i)}$; (2.38)

而当 $R < \rho$ 时, 我们需按下式放大阻尼系数

$$\alpha_{(i)} = \frac{1}{2 - [\Phi(\underline{b}^{(i)}) - \Phi(\underline{b}^{(i)} + \underline{\delta}_1^{(i)})] \underline{\delta}_1^{(i)\top} \underline{g}^{(i)}} \quad (2.39)$$

$$\tilde{\lambda} = \lambda_{(i)} + (1 - \alpha_{(i)}^2) \|\underline{\delta}_1^{(i)}\|^2 / 2 \underline{\delta}_1^{(i)\top} D^{-1} (A^* + \lambda_{(i)} I)^{-1} \underline{\delta}_1^{(i)*} \quad (2.40)$$

$$\lambda_{(i+1)} = \begin{cases} 2\lambda_{(i)}, & \tilde{\lambda} < 2\lambda_{(i)} \\ \tilde{\lambda}, & 2\lambda_{(i)} \leq \tilde{\lambda} \leq 10\lambda_{(i)} \\ 10\lambda_{(i)}, & \tilde{\lambda} > 10\lambda_{(i)}. \end{cases} \quad (2.41)$$

式(2.40)中的 $\underline{\delta}_{\lambda}^{(l)*}$ 、 A^* 的上标*是指:

$$A^* = (a_{ij} / \sqrt{a_{ii}} \quad \sqrt{a_{jj}}),$$

其中 a_{ii} , a_{jj} 是原来 A 矩阵的元素。

$$\underline{g}^* = (g_i / \sqrt{a_{ii}}), \quad \underline{\delta}_{\lambda} = (\delta_{\lambda i}^* / \sqrt{a_{ii}}),$$

$$\underline{\delta}_{\lambda} = C^{-1} \underline{\delta}_{\lambda}^*,$$

其中

$$C = \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

对 $\alpha_{(l)}$ 和 δ_{λ} 是在 $\underline{\delta}_{\lambda(l)}$ 方向上, 按最优步长原则, 使

$$\Phi(\underline{b}^{(l)} + \alpha_{(l)} \underline{\delta}_{\lambda(l)}) = \min_{\alpha \geq 0} \Phi(\underline{b}^{(l)} + \alpha \underline{\delta}_{\lambda(l)})$$

成立情况下, 分别用二次插值方法和牛顿切线法求出的, 推导过程这里不去详述。试算结果感到改进不太显著, 可简单些, 改用如下选取方法:

$$\begin{cases} \text{当 } R > \sigma \text{ 时, 则 } \lambda_{(l+1)} = \lambda_{(l)} / 5; \\ \text{当 } \rho \leq R \leq \sigma \text{ 时, 则取 } \lambda_{(l+1)} = \lambda_{(l)}; \\ \text{当 } R < \rho \text{ 时, 则取 } \lambda_{(l+1)} = 10 \lambda_{(l)}. \end{cases} \quad (2.42)$$

3. 截止阻尼系数的选取

在叙述马奎特方法的第二个缺点时, 我们已谈到, 当阻尼系数很小时, $\underline{\delta}_{\lambda}$ 的长度变化不大, 因此不需要再用几何级数来缩小 λ , 而直接采用高斯法, 即取 $\lambda = 0$ 。这就需要确定一截止阻尼系数 λ_c , 使当 λ 缩小到此 λ_c 时, 直接取 $\lambda = 0$ 。

但是 λ_c 必须选择适当。选择太小, 意义不大; 选择太大, 则可能造成迭代的失败, 因此必须在迭代过程中当 $\lambda_{(l)} = 0$ 时, 采用下式

$$\lambda_c = \frac{3}{8} \|\underline{\delta}_{\lambda(l)}\|^2 / \underline{\delta}_{\lambda(l)}^{(l)*T} D^{-1} A^{*-1} \underline{\delta}_{\lambda(l)}^* \quad (2.43)$$

进行修正。

当迭代的改正量的每一分量小于事先给定的精度要求时, 则这次迭代结束; 当目标函数 $\Phi(\underline{b})$ 计算次数超过某一给定的量时, 也强迫使迭代停止。算法的步骤参见框图4—12。

本节内只介绍了目前重磁资料定量解释中正在应用的几种非

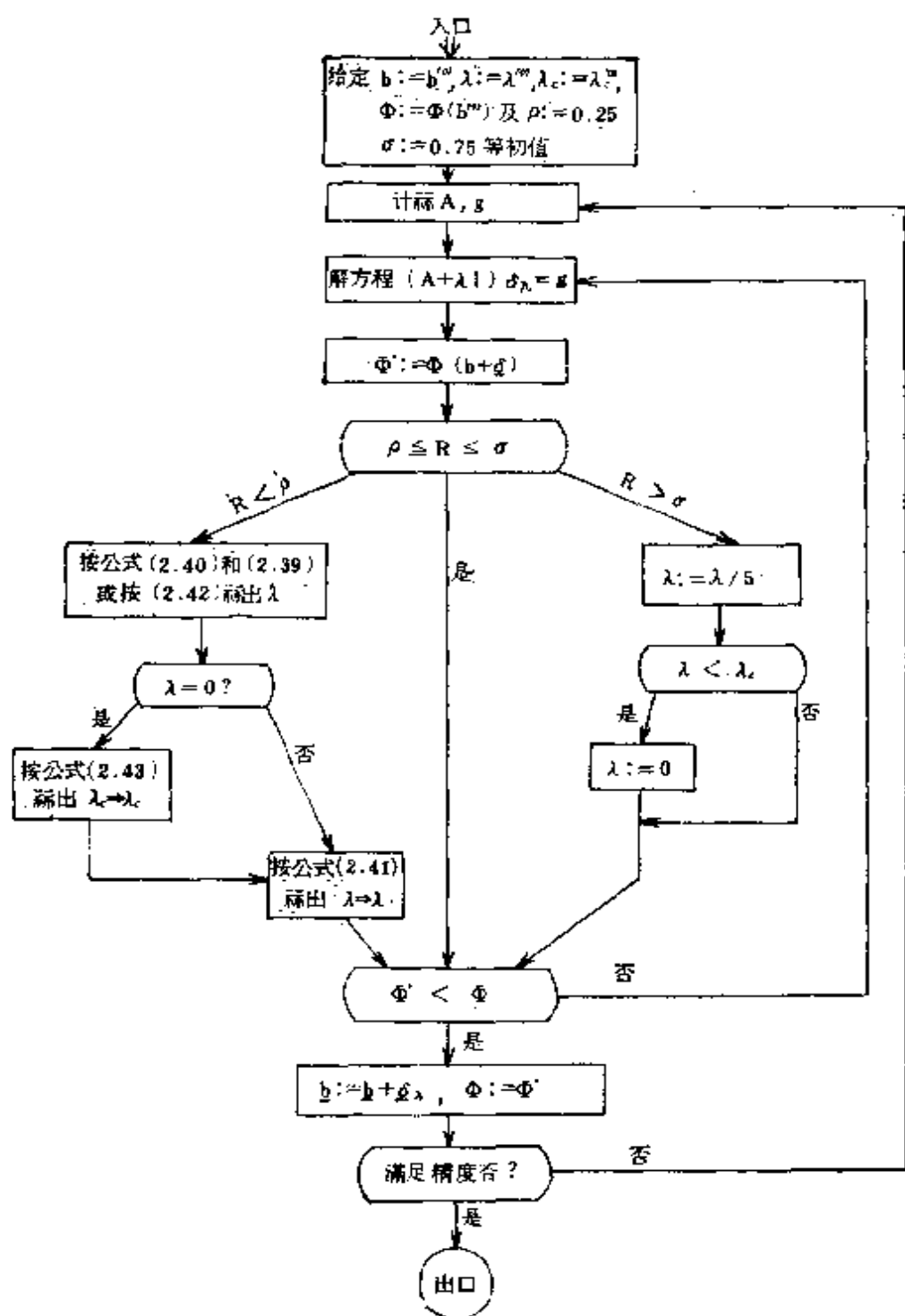


图 4—12 改进的阻尼最小二乘法程序框图

线性最优化算法。但对在非线性最优化算法中一般较为注意的方法,例如,变尺度法(又叫矩阵迭代法)、鲍威尔算法(又称不计算导数的广义最小二乘法)等,这方面有关的其他算法还有很多。

一方面是因为我们试算工作做得较少，另一方面，限于篇幅，所以未作介绍。读者如需进一步探讨，可参阅非线性最优化或非线性规划等有关专著。

§ 3 最优化方法在重磁异常 解释中的应用

上一节简单介绍了最小二乘最优化方法的算法基础，这一节将叙述用最优化方法应用于重磁资料解释中的一些具体问题。这些问题包括：模型体的选择，模型体初值的选择，迭代算法的程序等。问题比较多，目前还没有完善的经验，这里主要介绍我们计算过程中的具体做法，以便大致了解这个方法的工作过程，并介绍我们计算的一些结果。最后简单叙述一下关于最优化迭代计算的收敛性和计算结果的多解性问题。

一、模型体的选择

模型体的选择对解释结果的实际可靠性有重要的影响，通常要根据实际地质情况来选择，还要考虑节省计算时间。目前用得比较多的模型体有：水平方向无限延长的板状体；截面为任意多边形的水平棱柱体；有限薄板与有限长方体等。前两个模型用于狭长异常的解释，后两者用于等轴异常的解释。

利用模型体逼近实际地质体的方式，目前也有两种考虑。

第一，利用单个模型体逼近实际地质体。例如在一些航测资料的解释中， ΔT 异常可视为无限延深的岩脉所引起，这时便可以选无限延深的板为模型体，通过改变板的参量，包括上顶埋深 h ，宽度 $2b$ ，板的倾角和磁化强度，使理论曲线与实测异常符合，来逼近实际岩体。通常多边形截面的水平柱体，是通过改变多边形角点的坐标位置来逼近实际地质体的。这种方法在用扇形量板解释磁异常时也是经常采用的。

第二，利用多个模型体逼近实际地质体。这时选作模型体的模型不是一个，而是用多个模型体叠加的方法来逼近地质体。例

如，图 4—13 便是一个二度体情况，图中选作模型体的是有限延深直立板状体。这些板状体厚度相同，上顶埋深也相同，可变的是板下底深度。图 4—13 便是用这样的模型逼近 V 字形磁性体的计算结果。对三度地质体，可用长方体和有限薄板选作基本模型体。多个有限薄板的叠加可以组成各种板状体，长方体的叠加也可以组成各种形状三度体。图 4—14 就是利用正方形截面的直立

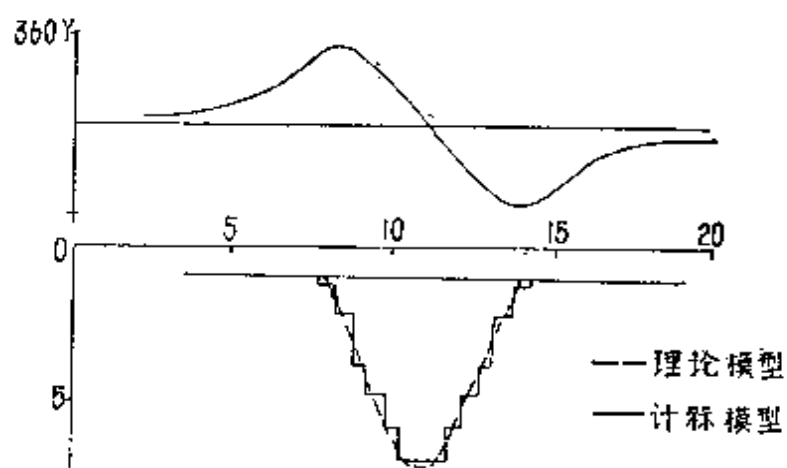


图 4—13 多个直立有限板状体为模型的情况

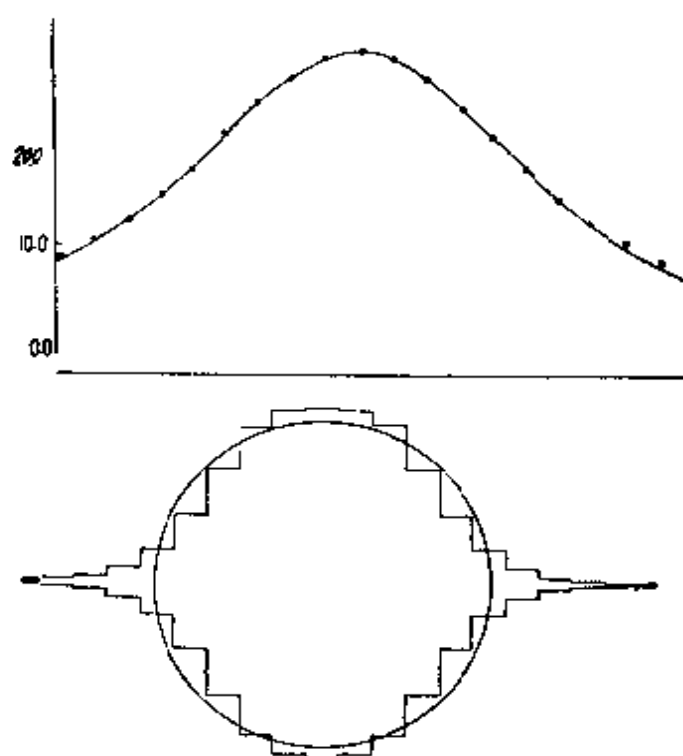


图 4—14 多个长方体逼近球体的情况

长方体作为模型，设这些长方体的中心均在同一深度，让长方体的上顶深度和下底深度为可变的参量，长方体截面的边长也是预先给定的。将这个模型去逼近球体，进行20次迭代结果表示如图4—14中。

我国安徽某磁异常的解释中，曾用长方体来逼近矿体。

以上两种利用模型体逼近地质体的方式，各有特点。利用单个模型体逼近时，参量较少，计算比较简单，但对复杂三度体进行逼近比较困难；利用多个模型体逼近地质体，参量较多，多解性比较突出，计算比较费时，但可能作出较好地逼近复杂地质体的解释。

二、工作方法、程序与试算结果

为了说明应用最优化方法解释重磁资料的方法与程序等，介绍一下我们应用过的程序。分两个方面：一是阻尼最小二乘法，二是改进的阻尼最小二乘法。

1. 阻尼最小二乘法

阻尼最小二乘法的程序框图如图4—15所示，不管是重力异常或是磁异常，或者是磁异常的各个分量，均可以计算。当然，对于不同的模型体和不同的场强，其中计算理论场 f 和 Φ_0 值与计算偏导数这些框的内容应该不同。其他框基本不变。程序框图中的字母所表示的意义一般与本章正文中一致，只有模型体参量的初值改为 $x^{(0)}$ 表示，参量以 x 表示，地面测点坐标以 x_k, y_k, z_k 表示。该程序的计算步骤与前一节原理部分所叙述的一致，只是具体算法表示得详细一些。

关于将矩阵 A 规格化为矩阵 A^* ，是实现运算：

$$a_{ij}^* = a_{ij} / \sqrt{a_{ii}} \cdot \sqrt{a_{jj}}, \quad g_i^* = g_i / \sqrt{a_{ii}}.$$

这样 A^* 矩阵相当于使 A 的值缩小，有利于数值计算，而 A^* 矩阵对角线元素均为1，且保持对称性。

解方程框我们采用了乔累斯基分解法。

(1) 对二度体磁异常的计算

理论异常表达式

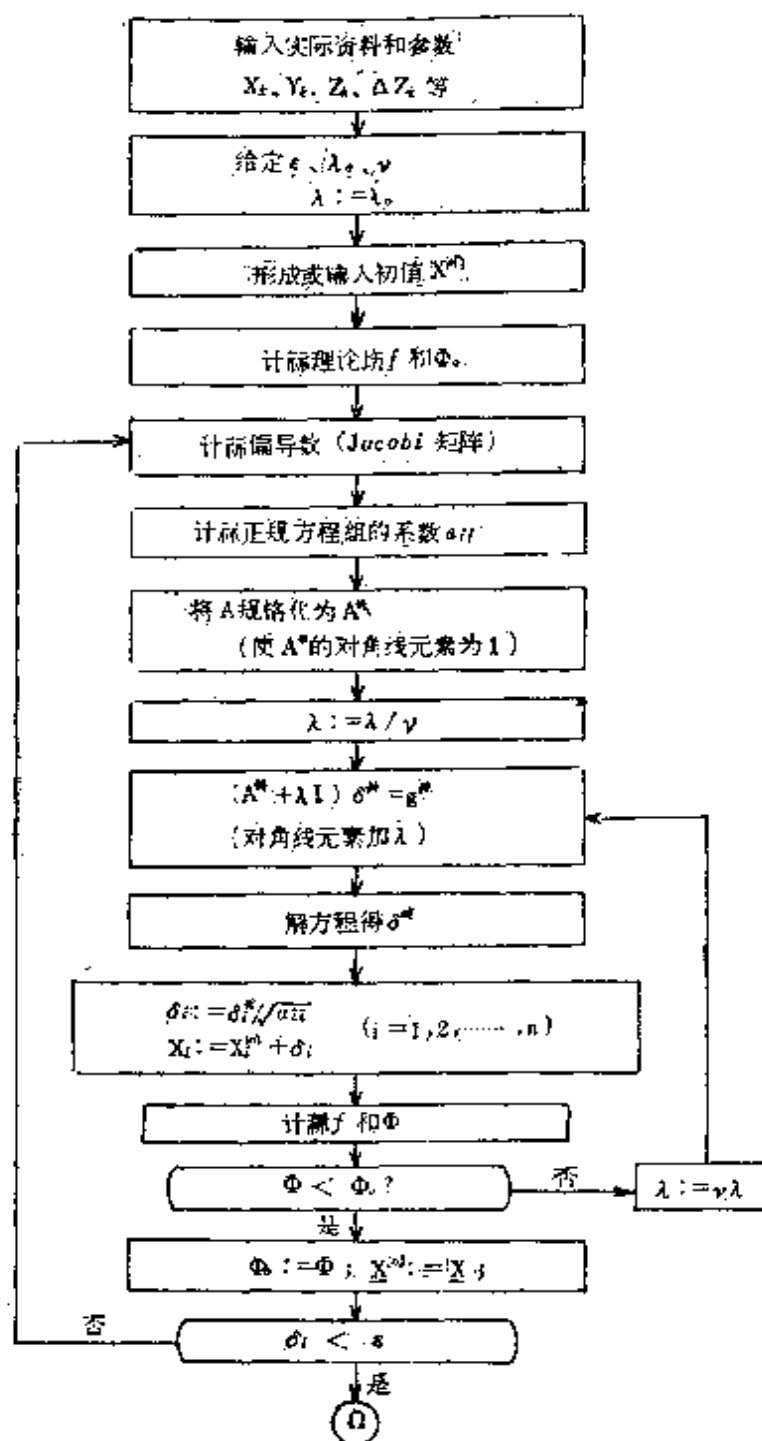


图 4—15 阻尼最小二乘法程序框图

对于二度体磁异常的解释，我们选取截面为多边形的水平柱体模型体。对于该模型体，其理论异常 $\Delta Z = f(x)$ 的表示式为

$$f_k(x) = 2(J_x Q - J_z P), \quad (3.1)$$

式中

$$Q = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(z_{i+1} - z_i)(x_i - x_{i+1})}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{z_i - z_k}{x_i - x_k} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_{i+1} - z_k}{x_{i+1} - x_k} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(x_{i+1} - x_k)^2 + (z_{i+1} - z_k)^2}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \right\},$$

$$P = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2} \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{z_i - z_k}{x_i - x_k} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_{i+1} - z_k}{x_{i+1} - x_k} \right] \right. \\ \left. - \left[\frac{(z_{i+1} - z_i)(x_i - x_{i+1})}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2} \right] \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{(x_{i+1} - x_k)^2 + (z_{i+1} - z_k)^2}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2} \right\}.$$

以上式中 $f_k(x)$ 表示地面第 k 点的磁异常, (x_k, z_k) 是第 k 点的坐标, (x_i, z_i) 是磁性体多边形第 i 个角点的坐标, 多边形的角点有 n 个, 第 $n+1$ 个点与第一点重合, 角点号次序为顺时针方向增加。 J_x 和 J_z 为磁化强度的水平分量和垂直分量。(3.1) 式的导出是容易的, 只要我们将多边形的每一边当成是向右方无限延伸水平层的接触面便可以了。参看图4—16, 例如以1—2边为接触面的水平层, 在任意 k 点的磁场表达式为,

$$\Delta Z_k = -2J \sin \alpha \left[\cos(\alpha - i)(\varphi_1 - \varphi_2) + \sin(\alpha - i) \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right], \quad (3.2)$$

利用

$$\sin(\alpha - i) = \sin \alpha \cos i - \cos \alpha \sin i,$$

$$\cos(\alpha - i) = \cos \alpha \cos i + \sin \alpha \sin i,$$

将(3.2)式展开可得 (同时考虑到 $\beta = 180^\circ - \alpha$),

$$\Delta Z_k = 2J \cos i \sin \beta \cos \beta (\varphi_1 - \varphi_2) - 2J \sin i \sin \beta \sin \beta (\varphi_1 - \varphi_2) \\ - 2J \cos i \sin \beta \sin \beta \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 2J \sin i \sin \beta \cos \beta \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

式中 r_1 和 r_2 分别为第1点和第2点到 k 点的距离, φ_1 和 φ_2 分别为 r_1 和 r_2 与 x 轴的夹角, 不难由三角关系可以看出,

$$J_x = J \cos i, \quad J_z = J \sin i,$$

$$\sin \beta = \frac{z_2 - z_1}{(z_2 - z_1)^2 + (x_1 - x_2)^2},$$

$$\cos \beta = \frac{x_1 - x_2}{(z_2 - z_1)^2 + (x_1 - x_2)^2},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_1 - z_k}{x_1 - x_k},$$

$$\varphi_2 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_2 - z_k}{x_2 - x_k},$$

$$r_1^2 = (x_1 - x_k)^2 + (z_1 - z_k)^2,$$

$$r_2^2 = (x_2 - x_k)^2 + (z_2 - z_k)^2.$$

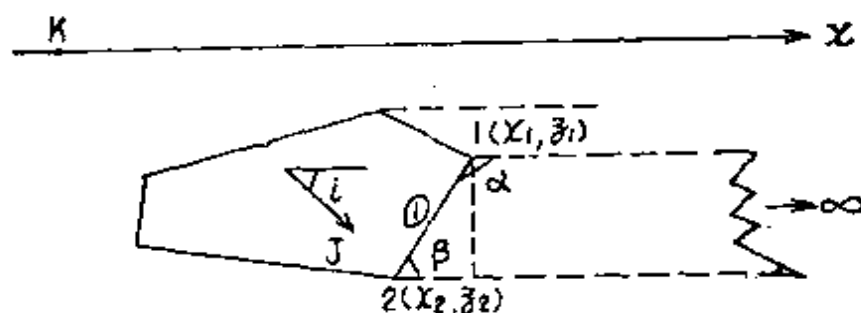


图 4—16 截面为多边形的水平柱体磁场公式的推导

同样可以写出其他各边的磁场，将各边磁场求和即整个磁性体的磁场为(3.1)式。

在程序中模型体理论异常的计算以及下面的它的磁场对参数的导数的计算均编成过程，在主程序可以直接调用。

模型体磁场对参数的导数

在用阻尼最小二乘法的迭代过程中，需要求矩阵 $P^{m \times n}$

$= \left(\frac{\partial f_k}{\partial b_i} \right)$ ，这里 $\left(\frac{\partial f_k}{\partial b_i} \right)$ 就是 $\left(\frac{\partial f_k}{\partial x_i} \right)$ ，为模型体磁场对各参

量的导数矩阵，亦称为雅可比矩阵。对于截面为多边形的水平柱体而言，参数是截面各角点的坐标 (x_i, z_i) ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，第 k 点函数 f_k 对 x_i 和 z_i 的偏导数可求出为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 2(J_x Q_1 - J_z P_1), \\ \frac{\partial f_k}{\partial z_i} &= 2(J_x Q_2 - J_z P_2).\end{aligned}\quad (3.3)$$

式中 Q_1, Q_2, P_1, P_2 分别为

$$\begin{aligned}Q_1 &= \left[(A_i - A_{i-1}) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - (B_i - B_{i-1}) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \right] \\ &+ \left[\left(U_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} - V_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \right) - \left(U_{i-1} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial x_{i-1}} - V_{i-1} \frac{\partial B_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \right) \right], \\ P_1 &= \left[(A_i - A_{i-1}) \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + (B_i - B_{i-1}) \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right] \\ &+ \left[\left(V_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} + U_i \frac{\partial B_i}{\partial x_i} \right) - \left(V_{i-1} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial x_{i-1}} + U_{i-1} \frac{\partial B_{i-1}}{\partial x_{i-1}} \right) \right], \\ Q_2 &= \left[(A_i - A_{i-1}) \frac{\partial U_i}{\partial z_i} - (B_i - B_{i-1}) \frac{\partial V_i}{\partial z_i} \right] \\ &+ \left[\left(U_i \frac{\partial A_i}{\partial z_i} - V_i \frac{\partial B_i}{\partial z_i} \right) - \left(U_{i-1} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial z_{i-1}} - V_{i-1} \frac{\partial B_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \right) \right], \\ P_2 &= \left[(A_i - A_{i-1}) \frac{\partial V_i}{\partial z_i} + (B_i - B_{i-1}) \frac{\partial U_i}{\partial z_i} \right] \\ &+ \left[\left(V_i \frac{\partial A_i}{\partial z_i} + U_i \frac{\partial B_i}{\partial z_i} \right) - \left(V_{i-1} \frac{\partial A_{i-1}}{\partial z_{i-1}} + U_{i-1} \frac{\partial B_{i-1}}{\partial z_{i-1}} \right) \right].\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}A_i &= \frac{(z_{i+1} - z_i)(x_i - x_{i+1})}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2}, \\ A_{i-1} &= \frac{(z_i - z_{i-1})(x_{i-1} - x_i)}{(z_i - z_{i-1})^2 + (x_{i-1} - x_i)^2}, \\ B_i &= \frac{(z_{i+1} - z_i)^2}{(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2},\end{aligned}$$

$$B_{i-1} = \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(z_i - z_{i-1})^2 + (x_{i-1} - x_i)^2},$$

$$U_i = \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_i - z_k}{x_i - x_k} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_{i+1} - z_k}{x_{i+1} - x_k},$$

$$U_{i-1} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_{i-1} - z_k}{x_{i-1} - x_k} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{z_i - z_k}{x_i - x_k},$$

$$V_i = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_{i+1} - x_k)^2 + (z_{i+1} - z_k)^2}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2},$$

$$V_{i-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2}{(x_{i-1} - x_k)^2 + (z_{i-1} - z_k)^2},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{(z_{i+1} - z_i)[(z_{i+1} - z_i)^2 - (x_i - x_{i+1})^2]}{[(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2]^2},$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial z_i} = \frac{(x_i - x_{i+1})[(z_{i+1} - z_i)^2 - (x_i - x_{i+1})^2]}{[(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2]^2},$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial x_i} = -\frac{2(x_i - x_{i+1})(z_{i+1} - z_i)^2}{[(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2]^2},$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial z_i} = -\frac{2(x_i - x_{i+1})^2(z_{i+1} - z_i)}{[(z_{i+1} - z_i)^2 + (x_i - x_{i+1})^2]^2},$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = -\frac{z_i - z_k}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2},$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial z_i} = \frac{x_i - x_k}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2},$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial x_i} = -\frac{x_i - x_k}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2},$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial z_i} = -\frac{z_i - z_k}{(x_i - x_k)^2 + (z_i - z_k)^2}.$$

模型体初值给定方法

在程序中利用特征点法给定多边形柱体的初值。为了避免邻

近磁性体的干扰, 选用磁场高值部分的特征点, 即极大点和半极大值点等。

根据水平圆柱体的磁场解析公式, 可算出如下特征点随磁化倾角 i 变化的数据, 表中距离以圆柱中心埋深 R 为单位。

表 4—1

i	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
x_m	-0.58	-0.47	-0.36	-0.27	-0.18	-0.09	0.00
$x_{1/2}$	-0.18	-0.06	0.05	0.15	0.26	0.37	0.49
$x'_{1/2}$	-1.38	-1.19	-1.02	-0.88	-0.73	-0.60	-0.49
$d_{1/2}$	1.20	1.13	1.07	1.03	0.99	0.97	0.97
$\frac{x_{1/2} - x_m}{x_m - x'_{1/2}}$	0.59	0.56	0.61	0.69	0.80	0.90	1.00

表中各字母的意义如图4—17所示。图中坐标原点选在水平圆柱中心的正上方, 所以表中列出的数据实际为 $(x_m - x_0)$, $(x_{1/2} - x_0)$ 和 $(x'_{1/2} - x_0)$ 等。由表可见, 有以下近似关系

$$R \doteq z_0 = d_{1/2},$$

$$x_0 \doteq x_m + \left(1 - \frac{x_{1/2} - x_m}{x_m - x'_{1/2}}\right) R. \quad (3.4)$$

我们使用上两公式计算水平柱体中心坐标的初值。物体上顶埋深 h , 我们用薄板公式近似估计, 即

$$h = 0.5 d_{1/2}. \quad (3.5)$$

然后求以 $(R - h)$ 为半径的圆的内接正多边形的顶点坐标, 作为模型体的初值。我们用内接正八边形和正四边形作为模型体形状

的初值。

其他初始值和常数值的选择

计算中我们取 $\lambda_0 = 0.1$, $\epsilon = 10^{-3}$, $\nu = 10$ 。当实际场值资料中包含有明显干扰时, 应进行圆滑后再输入, 圆滑也由计算机进行。

对理论模型的试算结果

我们用上面介绍的程序计算了一个理论例子和实际例子。这里先叙述一下计算理论例子的结果，下面再介绍实际例子的计算结果。

计算的理论例子示如图4—18中。图中模型体选为 I II III IV 矩形截面的水平柱体。 ΔZ 曲线是该柱体的理论曲线，给出柱体角点 I、II、III、IV、的 (x, z) 坐标分别为 $(160, 10)$, $(160, 50)$, $(140, 50)$, $(140, 10)$ 。

然后再依据 ΔZ 曲线解反问题。对于八角形截面的模型，叠代求出八角形顶点位置依次为图中的 1、2、3、4、5、6、7、8 点。由图可见，这些点所围成的有效截面与 I II III IV 非常接近，只在磁性体底部稍有差异。

对于截面为四边形的模型也取得了较好的效果，初值选得较好时，迭代四次便与实际物体 I II III IV 完全重合，计算结果列如表4—2。当初值选得较差时，收敛速度大为减慢。

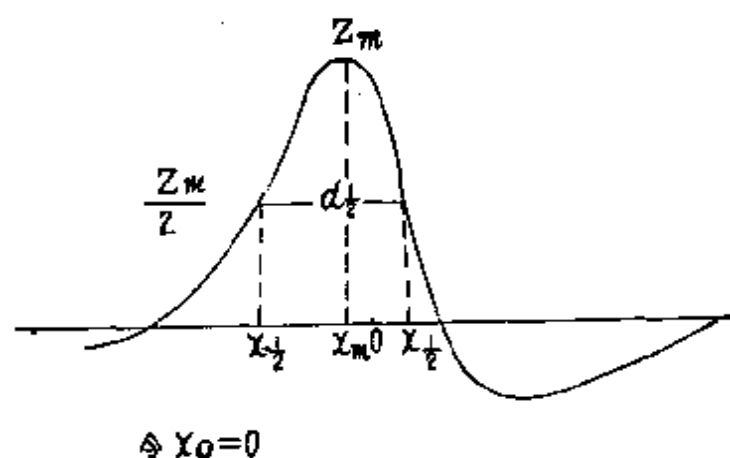


图 4—17 异常曲线特征点图示

对磁测资料的试算结果

对河北某磁异常实测资料进行计算的例子示如图4—19。图中钻探控制的实际矿体用阴影部分表示。对实测异常进行计算的结果用虚线标出，其上记有 I 字；由图可见，这个计算结果“矿体”成为向下延伸较大的脉状体，与实际矿体相差甚大。据分析，这种情况出现的原因是由于区域场的影响。因为区域场的来源

到矿体上方成水平层状。由此初步可以看出，正常场和区域场对叠代结果影响很大，只有消除它们的影响，才能取得较好的结果。

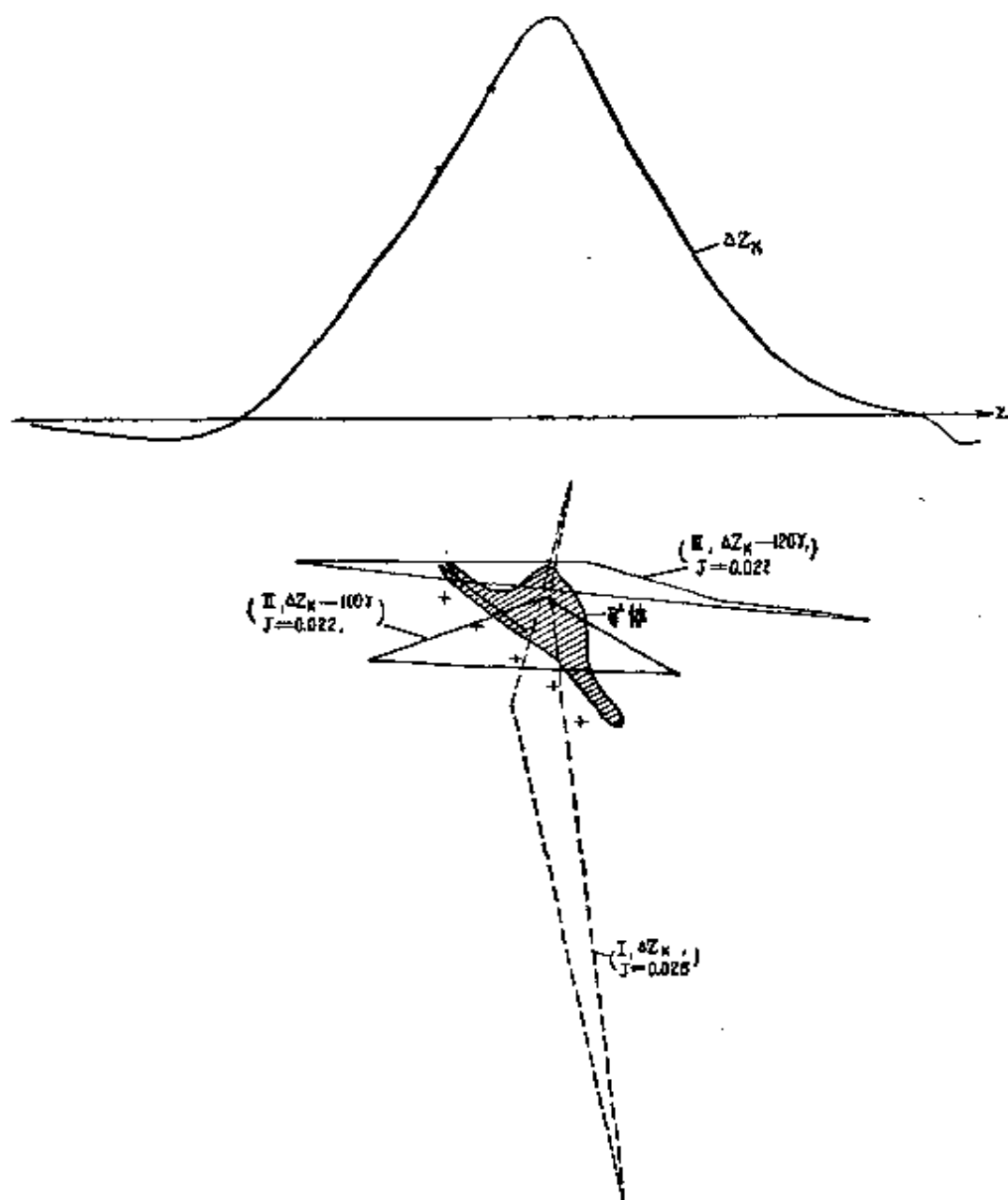


图 4—19 某磁异常的迭代结果

(2) 对三度体磁异常的计算

模型体的理论异常表达式

对于三度体磁异常的计算，这里我们选长方体作为模型体。

长方体的理论磁异常的表达式为

$$\begin{aligned}
\Delta Z &= f(x, y, z) \\
&= +J_x V_x - J_y V_y - J_z V_z \\
&= -\left\{ J_x \ln[R + (y - \beta)] + J_y \ln[R + (x - \alpha)] \right. \\
&\quad \left. - J_z \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y - \beta)(x - \alpha)}{(z - \gamma)R} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x_0 + \frac{a}{2} y_0 + \frac{b}{2} z_0 + \frac{c}{2} \\ x_0 - \frac{a}{2} y_0 - \frac{b}{2} z_0 - \frac{c}{2} \end{array} \right. \\
&\hspace{15em} (3.6)
\end{aligned}$$

其中

$$R = [(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2]^{\frac{1}{2}}$$

J_x, J_y, J_z 是磁性体磁化强度的三个分量；其他各符号的意义如图4—20所示， x_0, y_0, z_0 为长方体中心的坐标， a, b, c 分别为长方体在 x, y, z 方向上的长度。 α, β, γ 为长方体内部体积元的坐标。

模型体磁场对参数的导数

我们在进行三度体磁异常的叠代时，选择 9 个参量， $x_0, y_0,$

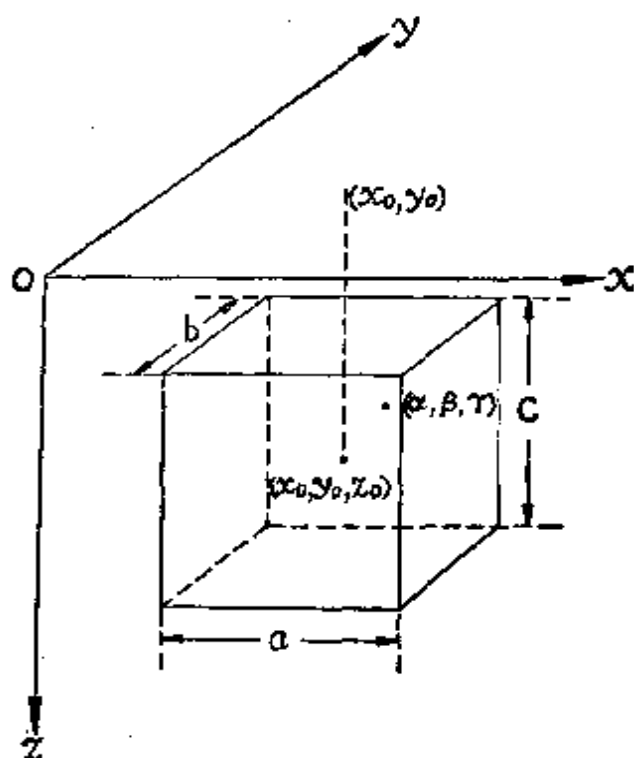


图 4—20 长方模型体的参量图示

$z_0, a, b, c, J_x, J_y, J_z$ 这样磁场对参数的导数可求出为:

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_0} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial x_0} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial x_0} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial x_0} = \left\{ J_x \frac{x-\alpha}{R^2 + R(y-\beta)} \right.$$

$$+ J_y \frac{1}{R} - J_z (y-\beta)(z-\gamma)[R^2 - (x-\alpha)^2]$$

$$\times \left[(z-\gamma)R^3 + R(x-\alpha)^2(y-\beta)^2 \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{ccc} x_0 + \frac{a}{2} & y_0 + \frac{b}{2} & z_0 + \frac{c}{2} \\ | & | & | \\ x_0 - \frac{a}{2} & y_0 - \frac{b}{2} & z_0 - \frac{c}{2} \end{array} \right.$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_0} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial y_0} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial y_0} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial y_0}$$

$$= \left\{ J_x \frac{1}{R} + J_y \frac{y-\beta}{R^2 + R(x-\alpha)} \right.$$

$$- \frac{J_z(x-\alpha)(z-\gamma)[R^2 - (y-\beta)^2]}{(z-\gamma)^2 R^3 + R(x-\alpha)^2(y-\beta)^2} \left\{ \begin{array}{ccc} x_0 + \frac{a}{2} & y_0 + \frac{b}{2} & z_0 + \frac{c}{2} \\ | & | & | \\ x_0 - \frac{a}{2} & y_0 - \frac{b}{2} & z_0 - \frac{c}{2} \end{array} \right\},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial z_0} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial z_0} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial z_0} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial z_0}$$

$$= \left\{ J_x \frac{z-\gamma}{R^2 + R(y-\beta)} + J_y \frac{z-\gamma}{R^2 + R(x-\alpha)} \right.$$

$$+ \frac{J_z(x-\alpha)(y-\beta)[R^2 + (z-\gamma)^2]}{(z-\gamma)^2 R^3 + R(x-\alpha)^2(y-\beta)^2} \left\{ \begin{array}{ccc} x_0 + \frac{a}{2} & y_0 + \frac{b}{2} & z_0 + \frac{c}{2} \\ | & | & | \\ x_0 - \frac{a}{2} & y_0 - \frac{b}{2} & z_0 - \frac{c}{2} \end{array} \right\},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial a} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial a} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial a} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial a}$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} J_x \left[\frac{x-\alpha}{R(R+(y-\beta))} \right]_{x_0 - \frac{a}{2}} + \frac{x-\alpha}{R(R+(y-\beta))} \right|_{x_0 + \frac{a}{2}} \right\}$$

$$+ \frac{1}{2} J_y \left[-\frac{1}{R} \right]_{x_0 - \frac{a}{2}} + \left[-\frac{1}{R} \right]_{x_0 + \frac{a}{2}} \right\}$$

$$-\frac{1}{2}J_x\left[\frac{(y-\beta)(z-\gamma)[R^2-(x-\alpha)^2]}{R[R^2(z-\gamma)^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]}\right]\Big|_{x_0-\frac{a}{2}} \\ +\frac{(y-\beta)(z-\gamma)[R^2-(x-\alpha)^2]}{R[R^2(z-\gamma)^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]}\Big|_{x_0+\frac{a}{2}}\Bigg\}_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}}\Big|_{z_0-\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial b} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial b} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial b} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial b} \\ = \left\{ -\frac{1}{2}J_x \left[-\frac{1}{R} \right]_{y_0-\frac{b}{2}} + \frac{1}{R} \right]_{y_0+\frac{b}{2}} \\ + \frac{1}{2}J_y \left[\frac{y-\beta}{R[R+(x-\alpha)]} \right]_{y_0-\frac{b}{2}} \\ + \frac{y-\beta}{R[R+(x-\alpha)]} \Big|_{y_0+\frac{a}{2}} \\ - \frac{1}{2}J_z \left[\frac{(x-\alpha)(z-\gamma)[R^2-(y-\beta)^2]}{R[R^2(z-\gamma)^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]} \right]_{y_0-\frac{b}{2}} \\ + \frac{(x-\alpha)(z-\gamma)[R^2-(y-\beta)^2]}{R[R^2(z-\gamma)^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]} \Big|_{y_0+\frac{b}{2}} \Bigg\}_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}}\Big|_{z_0-\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}},$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial c} = -J_x \frac{\partial V_x}{\partial c} - J_y \frac{\partial V_y}{\partial c} - J_z \frac{\partial V_z}{\partial c} \\ = \left\{ -\frac{1}{2}J_x \left[-\frac{z-\gamma}{R[R+(y-\beta)]} \right]_{z_0-\frac{c}{2}} + \frac{z-\gamma}{R[R+(y-\beta)]} \right]_{z_0+\frac{c}{2}} \\ + \frac{1}{2}J_y \left[\frac{z-\gamma}{R[R+(x-\alpha)]} \right]_{z_0-\frac{c}{2}} + \frac{z-\gamma}{R[R+(x-\alpha)]} \Big|_{z_0+\frac{c}{2}} \\ + \frac{1}{2}J_z \left[\frac{(x-\alpha)(y-\beta)[R^2+(z-\gamma)^2]}{R[(z-\gamma)^2R^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]} \right]_{z_0-\frac{c}{2}} \\ + \frac{(x-\alpha)(y-\beta)[R^2+(z-\gamma)^2]}{R[(z-\gamma)^2R^2+(x-\alpha)^2(y-\beta)^2]} \Big|_{z_0+\frac{c}{2}} \Bigg\}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x-\alpha)(y-\beta)[R^2+(z-\gamma)^2]}{R[(z-\gamma)^2R^2+(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2]} \left|_{z_0+\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}} \right\} \left|_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \right| \left|_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \right|, \\
\frac{\partial f_k}{\partial J_x} = -V_x = -\{ \ln[R+(y-\beta)] \} & \left|_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \right| \left|_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \right| \left|_{z_0-\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}} \right|, \\
\frac{\partial f_k}{\partial J_y} = -V_y = -\{ \ln[R+(x-\alpha)] \} & \left|_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \right| \left|_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \right| \left|_{z_0-\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}} \right|, \\
\frac{\partial f_k}{\partial J_z} = -V_z = \left\{ \operatorname{tg}^{-1} \frac{(y-\beta)(x-\alpha)}{(z-\gamma)R} \right\} & \left|_{x_0-\frac{a}{2}}^{x_0+\frac{a}{2}} \right| \left|_{y_0-\frac{b}{2}}^{y_0+\frac{b}{2}} \right| \left|_{z_0-\frac{c}{2}}^{z_0+\frac{c}{2}} \right|.
\end{aligned}
\tag{3.7}$$

初值给定方法

三度体异常是等轴状异常，所以要用到异常平面特征，首先确定极大极小点，然后在极大极小点连线的剖面上用特征点法给定长方体的初值。为简单计，根据球体的磁场解析公式，可算出如下特征点随磁化倾角 i 变化的数据，表4—3中距离以球中心埋

表 4—3

i	0	15	30	45	60	75	90
x_m	-0.50	-0.38	-0.29	-0.20	-0.14	-0.07	0.00
$x_{1/2}$	-0.15	-0.01	0.11	0.22	0.31	0.41	0.50
$x'_{1/2}$	-1.13	-0.99	-0.87	-0.77	-0.68	-0.59	-0.50
$d_{1/2}$	0.98	0.98	0.98	0.99	0.99	1.00	1.00
$\frac{x_{1/2} - x_m}{x_m - x'_{1/2}}$	0.55	0.61	0.69	0.74	0.83	0.92	1.00

深 R 为单位。表中各字母的意义见图4—17。坐标原点选在球中心的正上方,所以表中列出的数据实际为 $(x_m - x_0)$, $(x_{1/2} - x_0)$ 和 $(x_{1/2}' - x_0)$ 。由表可见,有与水平圆柱体相似的近似关系:

$$\left. \begin{aligned} R &\Rightarrow z_0 = d_{1/2}, \\ x_0 &= x_m + \left(1 - \frac{x_{1/2} - x_m}{x_m - x_{1/2}'}\right) (x_{1/2} - x_{1/2}'), \\ y_0 &= y_m + \left(1 - \frac{y_{1/2} - y_m}{y_m - y_{1/2}'}\right) (y_{1/2} - y_{1/2}'). \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

对于长方体的初值,设长方体的中心位置即球的中心位置,其他例如可以设长方体的长、宽、高相等,均等于其中心埋深;当然也可以根据对测区的预先知识来确定初值,对磁化强度的三个分量也是这样。

模型的试算结果

模型仍选为长方体,其参数、初值和计算迭代结果均列在表4—4中。由表中数据可见,经四次迭代,所得结果已经较好地符合于真值。两者磁场曲线完全一致。

表 4—4

参 量	初 值	迭 代 结 果				真 值
		1	2	3	4	
x_0	140.0	151.5	149.6	150.1	149.99	150.0
y_0	150.0	155.6	149.5	150.2	149.99	150.0
z_0	56.5	52.6	42.4	39.7	40.0	40.0
a	56.5	61.9	57.3	60.2	59.98	60.0
b	56.5	44.9	62.1	59.5	60.0	60.0
c	56.5	52.5	49.5	39.3	40.0	40.0
J_x	1095	1192	677	953	999.5	1000
J_y	588	1245	701	958	999.5	1000
J_z	916	1044	739	963	999.7	1000

某矿区磁测资料试算结果

对安徽某磁测资料进行了试算,其矿体基本为钻探所控制。

计算时选了两组初值，第一组初值选择与实际矿体位置等参量大致符合，第二组初值与实际参量相差较大，两组初值计算结果基本一致。表4—5中所列为第二组初值计算结果。图4—21、图4—22和图4—23所画的为第一组初值计算的结果。

根据二度体异常的计算经验，在本区资料计算以前，对实测磁场数据进行了正常场改正，对漏点、跳点进行了插补处理。数据穿孔选择了包括异常的20条线，每条线23个测点（原来实测每条测线46个点，经跳点挑选，只穿23个点，点距比实测点距大一倍）。

实际计算时，经跳线处理只用了10条测线，共230个点，每次迭代所需时间约为40秒钟。

由表4—5所列出的计算结果可见， x_0 ， y_0 ， z_0 ， a 和 b 值迭代过程中能比较稳定地收敛，第一组初值和第二组初值均是这样，而厚度 c 和磁化强度 $J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2 + J_z^2}$ 的值之间有多解性，它们的乘积在后面的迭代中大致保持一恒定数，所以在迭代已经趋于稳定的条件下，我们应该这样来选择它们的数值，即选取与

表 4—5

参量	初值	迭 代 结 果							
		1	2	4	6	8	10*	15	20
x_0	900	894	888	882	888	885	879	876	876
y_0	900	867	755	782	773	768	769	775	774
z_0	200	306	620	474	437	397	315	819	318
a	200	108	155	172	256	423	585	571	572
b	200	359	381	364	402	455	565	556	557
c	200	205	336	216	139	90	62	37	30
J_x	0	-484	-1401	-1215	-948	-729	-583	-1076	-1365
J_y	4000	5494	10823	9744	8746	6218	4495	8104	10278
J_z	3300	1621	5191	5520	5245	3924	2875	5032	6300

（表中长度数据以米为单位，磁化强度以 $10^{-5} \times \text{CGSM}$ 为单位）。

实测磁化强度值相符合的 J 的计算值，同时取其所对应的厚度值。例如在表4—5中，我们应选取第十次迭代结果的 c ， J_x ， J_y ， J_z 等

值，而不应取第二十次的迭代结果，因为它的磁化强度比实测的过大。

某铁矿赋存于元古代黑云斜长片麻岩、黑云石英片岩等岩段中。铁矿体有八层，主要矿体较稳定，呈层状—似层状，产状平稳，南翼明显上翘；矿体厚度南翼较大，北翼普遍变薄。

迭代结果示如图4—21、图4—22和图4—23中。由图4—22可见，由于矿体南翼向上翘，造成实测与理论曲线在极大值处差异较大，两曲线在其他地方基本吻合。推断矿体反映了铁矿体平缓的主要部分，矿体北翼厚度变薄的部分没有包含在内，看来它对磁异常值的影响也不大。

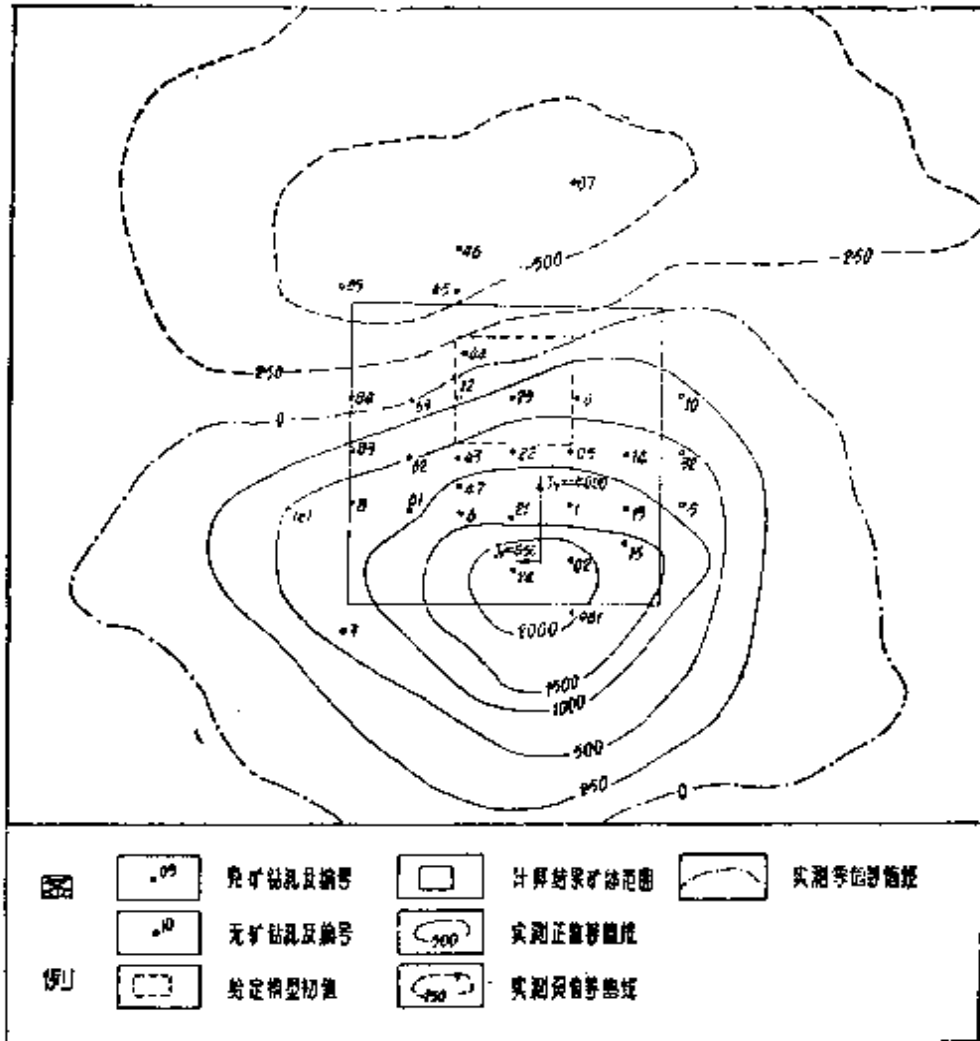


图 4—21 安徽某磁异常及其矿体范围反演计算结果

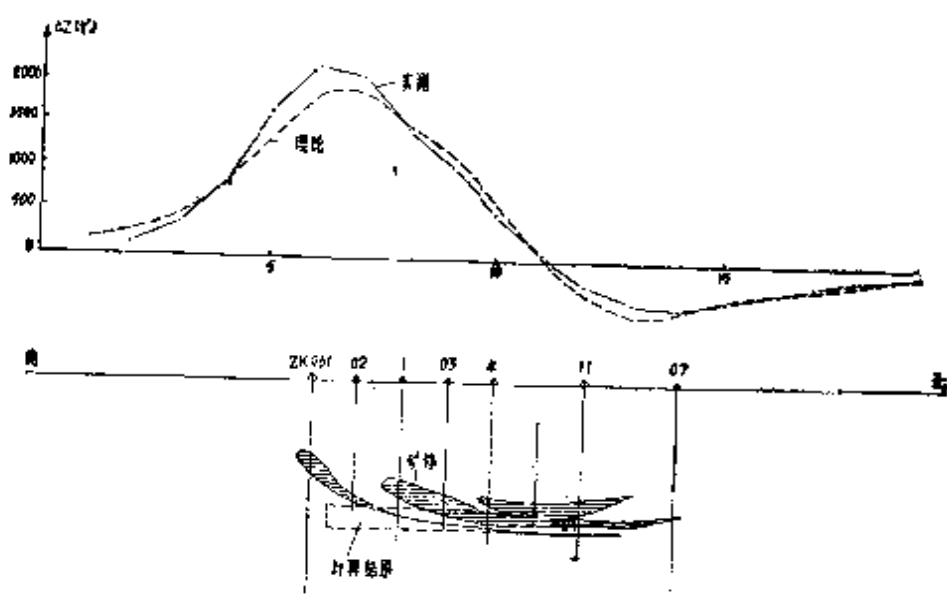


图 4—22 安徽某磁异常南北向剖面

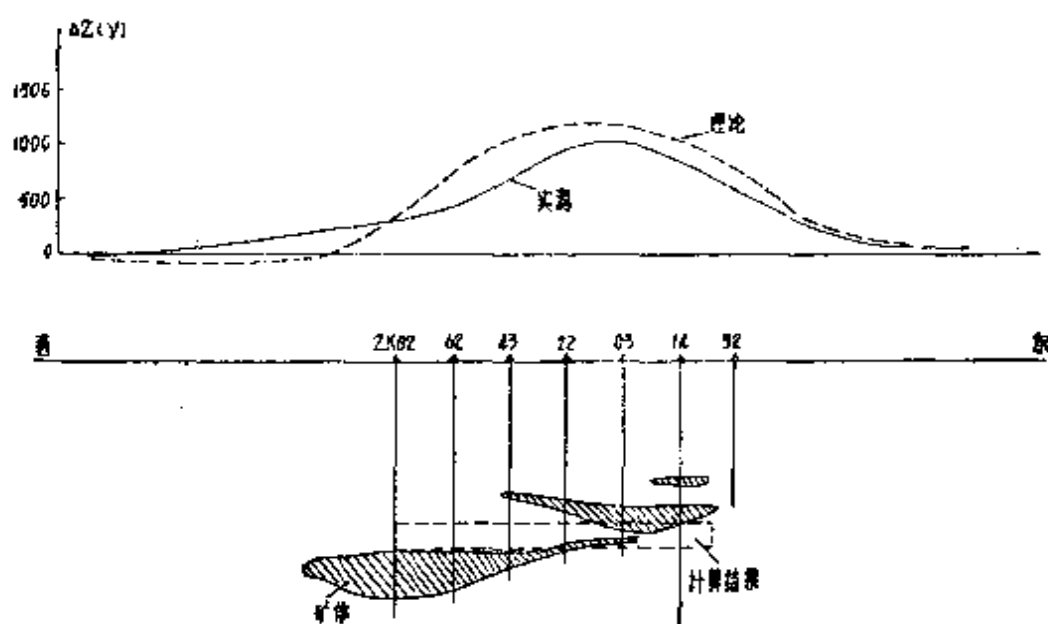


图 4—23 安徽某磁异常东西向剖面

由图4—23可见，矿体呈明显的上下两层。在实测曲线上，西侧梯度突然变缓，反映了深部铁矿体的存在，从等值线图看，向西仍有延伸。推断矿体位于两个铁矿体之间，理论曲线在实测曲线的上下摆动。

由图4—20，结合图4—21和图4—22可见，推断矿体的范围包括了铁矿产状平缓的主要部分。大部分铁矿体包含在推断矿体之

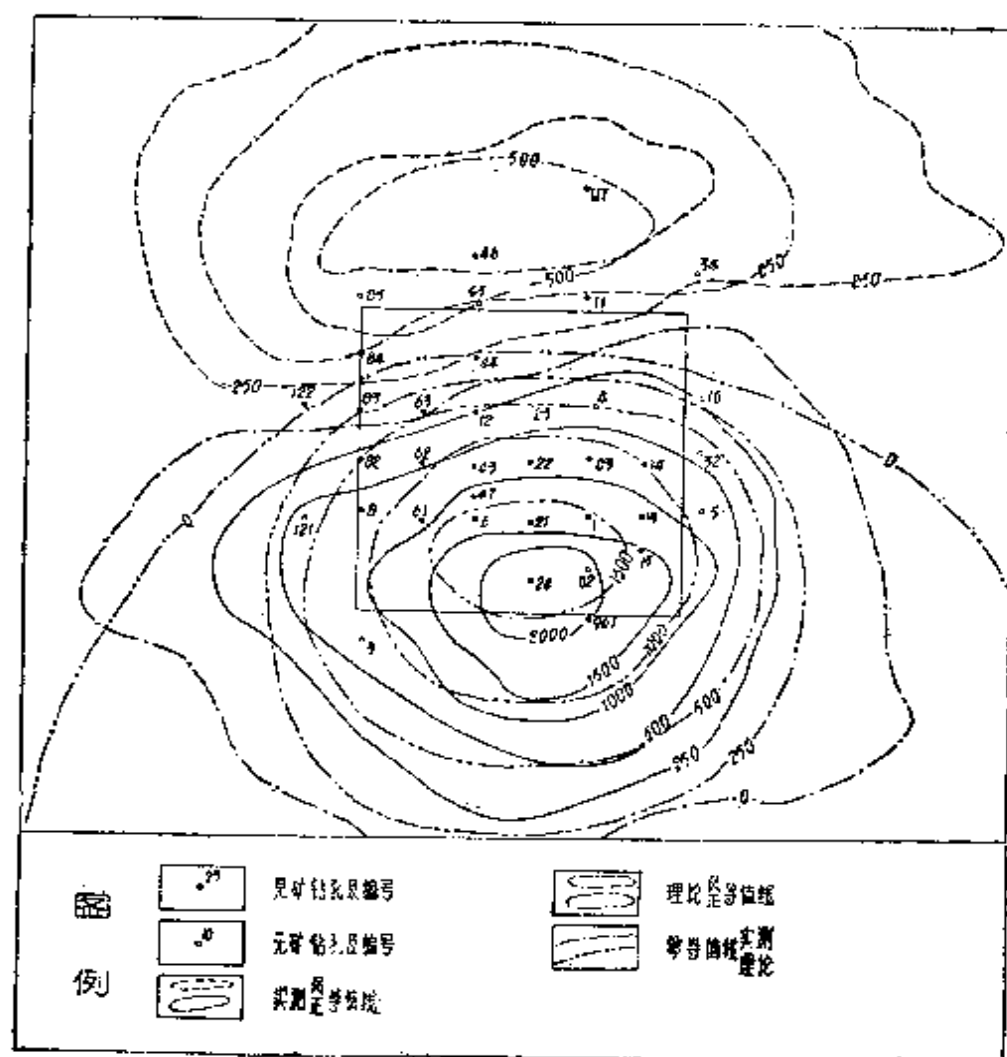


图 4—24 安徽某磁异常和反演结果计算的等值线

中。推断矿体引起的异常见图4—24,理论异常等值线与实测等值线总的趋势是一致的,但是在细节上是不吻合的。由此说明,推断矿体已把引起异常的主要因素控制住了。

综上所述,用一个长方体来拟合矿体时,长方体大致指出了矿体的主要部位,但不能指出矿体的产状变化;当有明显上下两层矿体时,一个长方体只能取折衷位置。虽然如此,在布置验证孔以及在普查勘探中,用此法指导布钻仍有参考价值。

2. 改进的阻尼最小二乘法

我们将改进的马奎特方法应用于解重磁反演问题时,采用了直立长方柱体组合模型,下面对这个模型作简单介绍。

选取直角坐标系 $oxyz$ ， x 轴为测线方向， z 轴垂直向下，原点 O 在测区的左下方，所选取的模型如图4—25。它在一水平矩形网格上，每一小长方格上为一直立长方柱体模型。图上所示的模型应该是由十二个直立长方体组合而成的，这十二个长方体有同样的长 Δx 与宽 Δy 。

我们选取这个矩形网格的左下方角点的前两个坐标 (x_0, y_0) 为参量，这样，这个矩形网格就可以随意挪动。如果用它来拟合某个矿体时，自然可以期望在迭代过程中挪到矿体所在的位置。我们又选取小长方体的长、宽 Δx 、 Δy 为参量，这样矩形网格在两个方向上可以自由地伸缩，在迭代过程中，我们可以

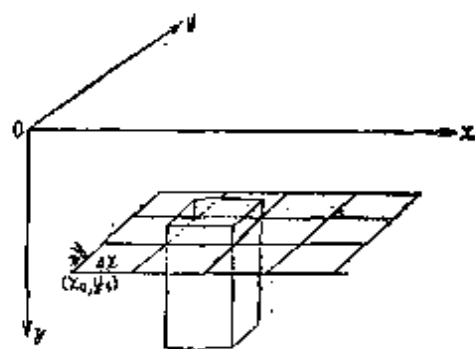


图 4—25 直立长方柱体组合模型示意图

期望矩形网格适当伸缩。以适应矿体横截面的大小。我们还选取每一个小直立长方体的上底与下底为参量，这就表明每一个小直立长方体可以独立地上下自由滑动，它可以适应矿体较复杂的形状，大致反映矿体的倾向与倾角。当小直立长方体的上下底重合时可以认为不存在这个长方体，因此它可以简单地反映多个直立长方体的情况。此外，还选择磁化强度的三个分量为参量。

设在 x 方向上小直立长方体的个数为 k ，在 y 方向上小直立长方体的个数为 l ，这样组合模型共含有 $k \times l$ 个长方体。按照我们上面所叙述的参量的取法，共有 $n = 2kl + 7$ 个参量，即

$$\underline{x} = (z_{111}, z_{211}, z_{112}, z_{212}, \dots, z_{1li}, z_{2li}, \dots, z_{1kl}, z_{2kl}, x_0, y_0, \Delta x, \Delta y, J_x, J_y, J_z),$$

其中 z_{1ij} ， z_{2ij} 分别表示中心点的 x, y 坐标为 $(x_0 + (j - \frac{1}{2})\Delta x, y_0 + (i - \frac{1}{2})\Delta y)$ 的小直立长方体的上底深度与下底深度； $x_0, y_0, \Delta x, \Delta y$ 如前所说明的； J_x, J_y, J_z 表示磁化强度在 x, y, z 坐标方向的三个分量。

对于这个组合模型，容易给出理论场的公式及它们对各参量

的微商。事实上，由于我们已经熟知一个磁性长方体所引起磁场强度垂直分量的公式，对于组合模型只需要把它们叠加起来。为书写简便，我们先记

$$F_p(\alpha, \beta, \gamma) = J_x \ln[(\beta - y_p) + R] + J_y \ln[(\alpha - x_p) + R] \\ - J_z \arctan \frac{(\alpha - x_p)(\beta - y_p)}{(\gamma - z_p) R},$$

其中 (x_p, y_p, z_p) 表示第 p 个观测点的坐标，

$$R = \sqrt{(\alpha - x_p)^2 + (\beta - y_p)^2 + (\gamma - z_p)^2},$$

组合模型体在第 p 个观测点的磁场强度垂直分量为

$$f_p(\underline{x}) = \\ = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l F_p(\alpha, \beta, \gamma) \left| \begin{matrix} x_0 + j\Delta x & y_0 + i\Delta y & z_{2ij} \\ x_0 + (j-1)\Delta x & y_0 + (i-1)\Delta y & z_{1ij} \end{matrix} \right|.$$

它对于各参量的微商容易算出：

$$\frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial z_{1ij}} = \left\{ -\frac{\partial F_p}{\partial \gamma} \right\}_{z_{1ij}} \left\{ \begin{matrix} x_0 + j\Delta x & y_0 + i\Delta y \\ x_0 + (j-1)\Delta x & y_0 + (i-1)\Delta y \end{matrix} \right\}_{z_{1ij}}, \\ \frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial z_{2ij}} = \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial \gamma} \right\}_{z_{2ij}} \left\{ \begin{matrix} x_0 + j\Delta x & y_0 + i\Delta y \\ x_0 + (j-1)\Delta x & y_0 + (i-1)\Delta y \end{matrix} \right\}_{z_{2ij}}, \\ \frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial x_0} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_0 + j\Delta x & y_0 + i\Delta y \\ x_0 + (j-1)\Delta x & y_0 + (i-1)\Delta y \end{matrix} \right\}_{z_{1ij}}, \\ \frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial y_0} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \left\{ \frac{\partial F_p}{\partial \beta} \right\} \left\{ \begin{matrix} x_0 + j\Delta x & y_0 + i\Delta y \\ x_0 + (j-1)\Delta x & y_0 + (i-1)\Delta y \end{matrix} \right\}_{z_{1ij}}, \\ \frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial \Delta x} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^l \left\{ j \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} \right\}_{x_0 + j\Delta x} \\ - (j-1) \frac{\partial F_p}{\partial \alpha} \left|_{x_0 + (j-1)\Delta x} \right\} \left\{ \begin{matrix} y_0 + i\Delta y \\ y_0 + (i-1)\Delta y \end{matrix} \right\}_{z_{1ij}},$$

$$\frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial \Delta y} = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^l \left\{ i \frac{\partial F_p}{\partial \beta} \right\}_{y_0 + i \Delta y} \\ - (i-1) \frac{\partial F_p}{\partial \beta} \Big|_{y_0 + (i-1) \Delta y} \left\{ \left[\frac{x_0 + j \Delta x}{x_0 + (j-1) \Delta x} \right]_{z_{11j}}^{z_{21j}} \right\},$$

$$\frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial J_x} = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^l \ln[(\beta - y_p) \\ + R] \left[\frac{x_0 + j \Delta x}{x_0 + (j-1) \Delta x} \right]_{y_0 + (i-1) \Delta y}^{y_0 + i \Delta y} \Big|_{z_{11j}}^{z_{21j}},$$

$$\frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial J_y} = \sum_{j=1}^h \sum_{i=1}^l \ln[(\alpha - x_p) \\ + R] \left[\frac{x_0 + j \Delta x}{x_0 + (j-1) \Delta x} \right]_{y_0 + (i-1) \Delta y}^{y_0 + i \Delta y} \Big|_{z_{11j}}^{z_{21j}},$$

$$\frac{\partial f_p(\underline{x})}{\partial J_z} = - \sum_{j=1}^h$$

$$\sum_{i=1}^l \operatorname{arctg} \frac{(\alpha - x_p)(\beta - y_p)}{(\gamma - z_p) R} \left[\frac{x_0 + j \Delta x}{x_0 + (j-1) \Delta x} \right]_{y_0 + (i-1) \Delta y}^{y_0 + i \Delta y} \Big|_{z_{11j}}^{z_{21j}}.$$

其中

$$\frac{\partial F_p}{\partial \alpha} = J_x \frac{\alpha - x_p}{R[(\beta - y_p) + R]} + J_y \frac{1}{R} \\ - J_z \frac{(\gamma - z_p)(\beta - y_p)[R^2 - (\alpha - x_p)^2]}{R[R^2(\gamma - z_p)^2 + (\alpha - x_p)^2(\beta - y_p)^2]},$$

$$\frac{\partial F_p}{\partial \beta} = J_x \frac{1}{R} + J_y \frac{\beta - y_p}{R[(\alpha - x_p) + R]} \\ - J_z \frac{(\gamma - z_p)(\alpha - x_p)[R^2 - (\beta - y_p)^2]}{R[R^2(\gamma - z_p)^2 + (\alpha - x_p)^2(\beta - y_p)^2]},$$

$$\frac{\partial F_p}{\partial \gamma} = J_x \frac{\gamma - z_p}{R[(\beta - y_p) + R]} + J_y \frac{\gamma - z_p}{R[(\alpha - x_p) + R]} \\ + J_z \frac{(\alpha - x_p)(\beta - y_p)[R^2 + (\gamma - z_p)^2]}{R[R^2(\gamma - z_p)^2 + (\alpha - x_p)^2 + (\beta - y_p)^2]}.$$

在迭代过程中, 根据参量的物理意义, 通常必须对参量加上以下不等式约束,

$$\varepsilon \leq z_{1j} \leq z_{2j}, \quad j=1, 2, \dots, k; \quad i=1, 2, \dots, l, \\ \Delta x \geq 0, \quad \Delta y \geq 0.$$

其中 ε 为某一大于零的小正数, 例如取 $\varepsilon=5$ 米。这些不等式的意义是明显的, 它表示任一个小直立长方体的下底深度必须不小于上底深度。另外, 小直立长方体不能超出坐标平面 Oxy 。 Δx 、 Δy 都是表示长度, 所加的约束是非常自然的。

我们曾以此方法及上述模型试验算过理论模型与矿区实例, 为简单起见, 我们仅简述矿区实例的结果。

与马奎特方法一样, 我们选取安徽某矿区进行试算。为了减少计算量, 我们并没有让所有的观测值都参加最小二乘拟合, 只根据场的特征, 选择了七十五个特征点及其上的观测值参加最小二乘拟合。当然, 特征点的不同选择, 会得到不同的结果, 但是试算结果说明, 只要基于物探实际经验选择, 特征点数又不是太少, 结果相差是不大的。

所选取的组合模型是由 9 个小直立长方体组成的 ($k=3$, $l=3$)。

矿体的初始位置选取为一个大的直立长方体。经过二十次迭代后, 结果如图4—26、图4—27。由磁异常平面图可以看出, 理论场与观测值的正异常部分基本一致, 但负异常相差较大。由 0 线, 6 线, 4 线的综合剖面图可以看出, 迭代结果大致反映了矿体的范围与倾向。

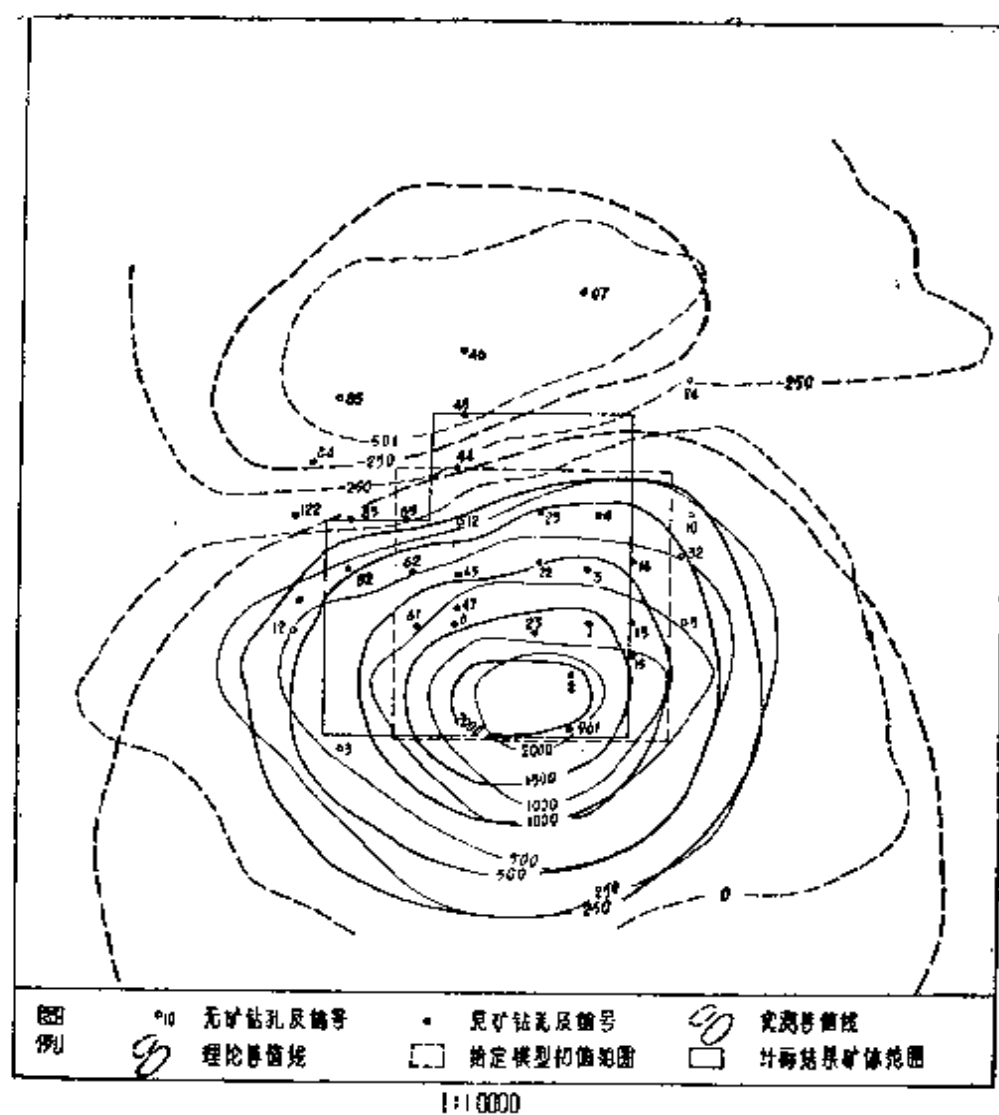


图 4—26 安徽某矿区磁异常上试算结果平面图

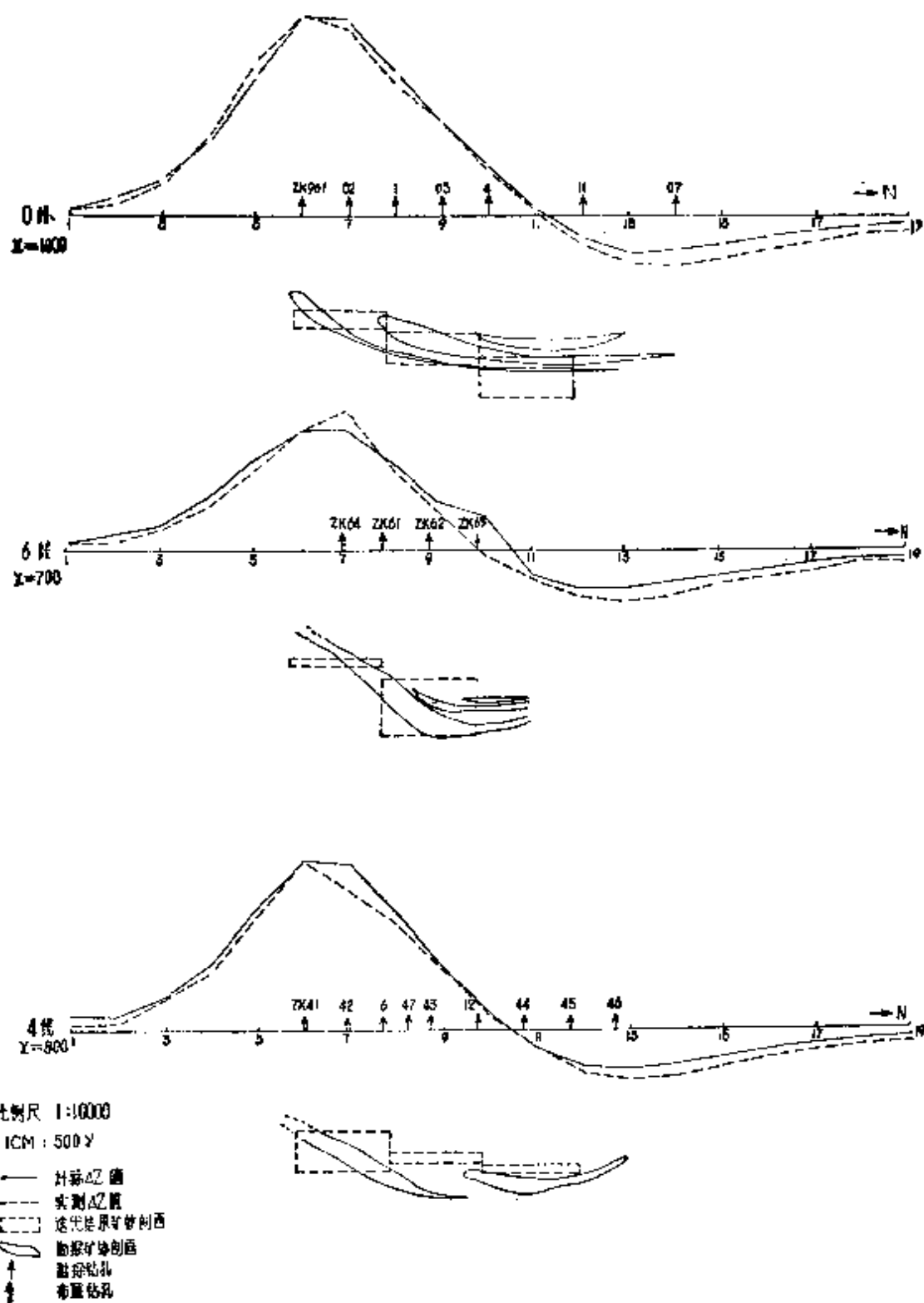


图 4—27 安徽某矿区磁异常上试算结果剖面图

三. 收敛性问题和多解性问题

1. 迭代计算的收敛性问题

所谓迭代过程的收敛性是指这个计算过程能否趋近并找到函数 Φ 的极小值, 以及趋近的快慢如何。这里有两个问题: 一个是该计算过程收敛否? 一个是收敛速度如何? 最优化的方法就在于在保证收敛的情况下, 提高计算的速度。前面我们讲过, 高斯法不能保证稳定的收敛, 但计算速度比较快; 最速下降法计算速度慢, 但能保证收敛; 阻尼最小二乘法(马奎特方法)的思想是在保证收敛时, 尽可能用接近高斯法的方向和用较大的步长。对于平方和极小问题, 目前阻尼最小二乘法在实用上是比较有效的方法。

为了说明马奎特方法的收敛过程, 有人曾经计算过一个理论例子。设实际物体为图4—28中的实线三角形截面的水平柱体, 图中虚线是给定的初值。

图4—29表示函数 $\Phi(z_1, z_2)$ 的等值线, z_1 为第一角点的深度, 取为横坐标, z_2 为第二角点的深度, 取为纵坐标。图中矢量则表示用马奎特方法头几次迭代的结果, λ 初值取为0.2, 以后每次乘0.2来减小 λ 值。由图可见, 迭代计算每次都更趋近收敛, 收敛速度亦较快, 最后的最小二乘解为 $z_1 = 6.3761$, $z_2 = 5.6111$; 实际数据与计算数据偏差均方差为5.91%。

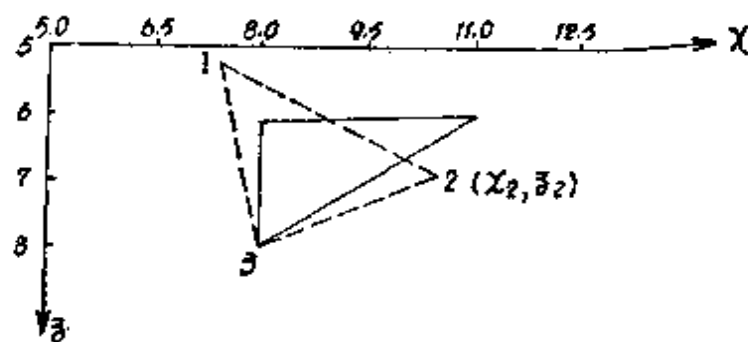


图 4—28 说明马奎特方法收敛过程所用的理论模型及其初值示意图

用马奎特方法的经验表明, 在最初的迭代期间, 采用较大的 λ 收敛较快, 随着接近收敛时, 最好应用高斯法(相当于 $\lambda = 0$ 的情

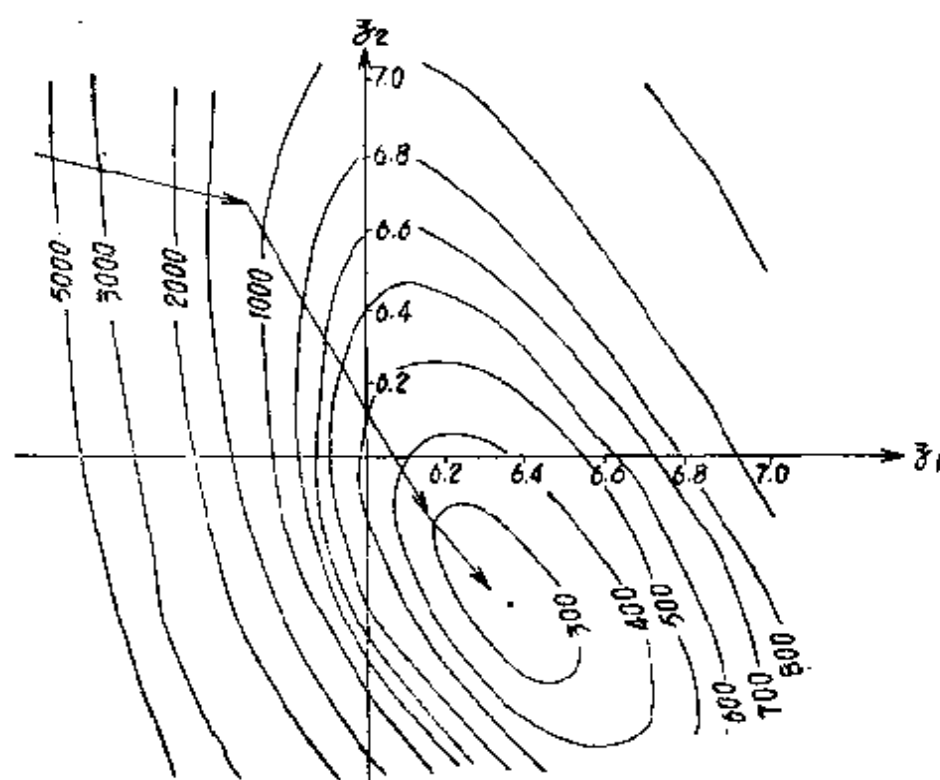


图 4—29 函数 $\Phi(z_1, z_2)$ 的等值线图

况)，即在迭代过程中逐渐减小 λ 。

经验指出，在确定磁场振幅项和背景值时可用线性最小二乘法确定，而不用在迭代过程中确定，这也有利于收敛速度的改善。

当然迭代过程的收敛性与模型体的选择及其初始值的给定都有很大关系，所以我们在选取初始模型值时都应尽可能地接近实际地质情况。

2. 最优化选择法的多解性问题

多解性是指可能的解释结果不是单一的，而是可能有多种的解释结果。最优化选择法并不能消除多解性。多解性的原因，一个是因为关于模型体是简单和均匀的假设，一个是物探资料解释中的固有多解性，还有各种误差和干扰引起不适定问题等。前二

者是引起多解性的主要原因。

多解性的出现是因为函数 Φ 往往有多个极小值。在图4—29中所见 Φ 的等值线为椭圆，具有单个极小值，这是比较典型的情况。当参数增加和函数随参数的非线性程度以及函数的复杂性增加时，有时 Φ 的等值线会出现拉得很长的椭圆，有时 Φ 要出现许多相对极小。在这种情况下，计算的解往往收敛于初值附近的相对极小。

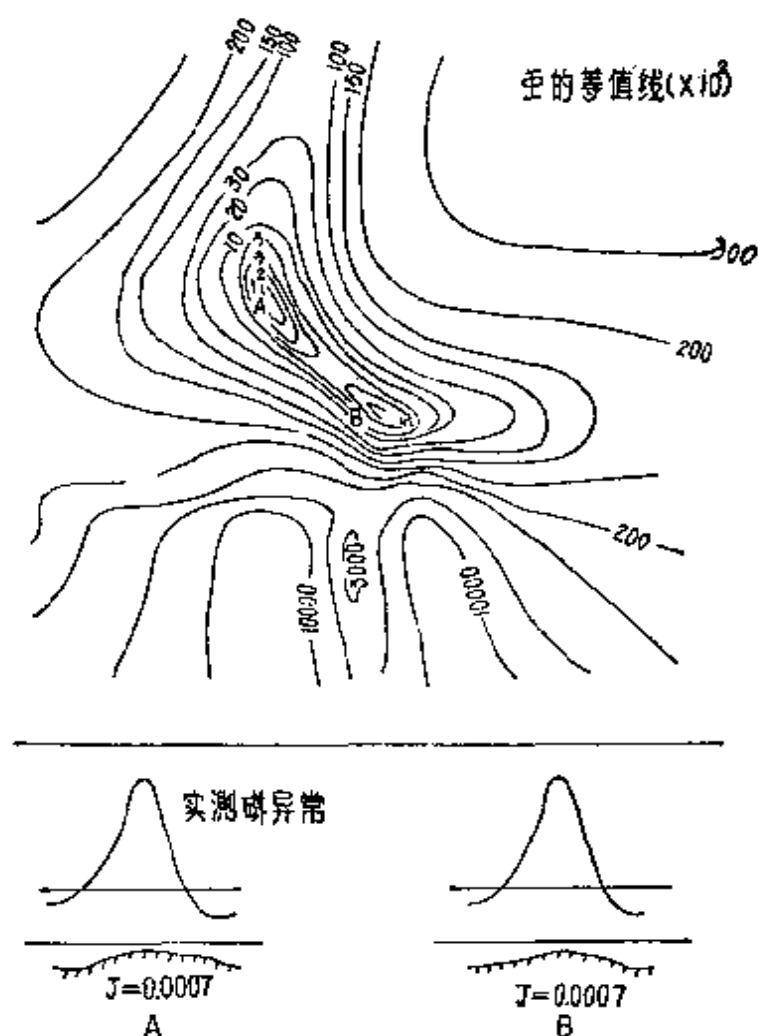


图 4—30 多解性的例子之一

图4—30和图4—31的例子说明多解性。图中A情况是对应于 Φ 的绝对极小值的情况，而B情况和C情况是对应于 Φ 的相对极小情况。当然对于C情况，根据当地地质情况可以判断它为不合

适的解答。

一般说来，多解性增加了解释的困难。对手算说来，通常只能计算一种可能的解，而用高速电子计算机时，如果需要的话，则有时可以算出多种可能的解，然后进行比较，或根据实际地质情况决定取舍，这对实际解释也可能有一定的意义。

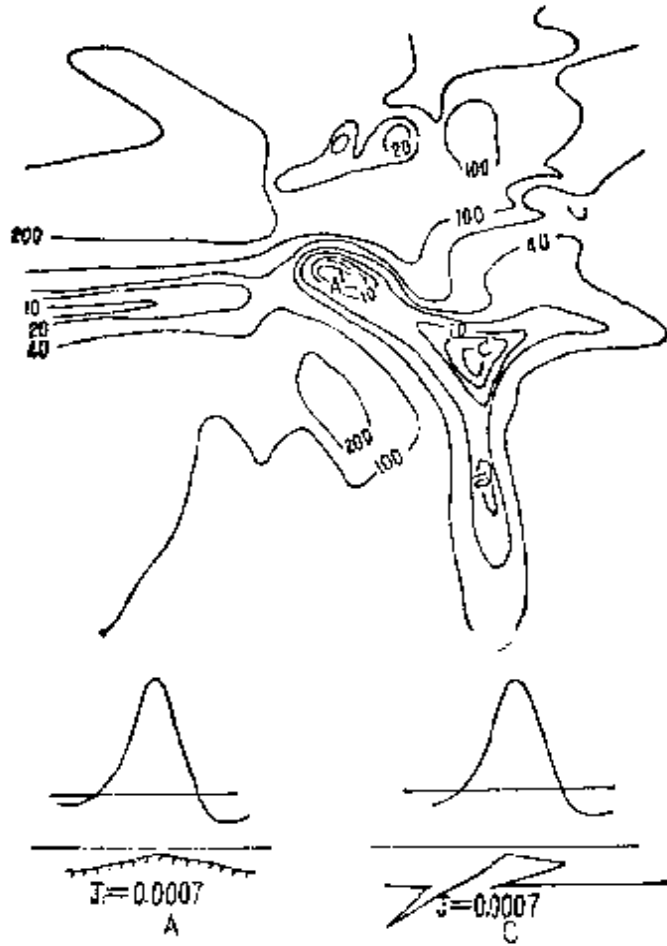


图 4—31 多解性的例子之二

参 考 文 献

1. 熊光楚, 磁铁矿床上磁异常的解释推断, 中国工业出版社, 1963。

2. 黄树棠、顾学新, 斜磁化条件下磁异常的推断解释, 中国工业出版社, 1964。

3. 长春地质学院申宁华编, 磁法勘探教程, 中国工业出版社, 1962。

4. 北京地质学院肖敬涌编, 重力勘探, 中国工业出版社, 1962。

5. Johnson, W. W., A least-squares method of interpreting magnetic anomalies caused by two-dimensional structures, 《Geophysics》, V. 34, p. 65-75, 1968。

6. Mcgrath, P. H. and Hood, P. J., An automatic least-squares multimodel method for magnetic interpretation, 《Geophysics》, V. 38, p. 349-358, 1973。

7. Mcgrath, P. H. and Hood, P. J., The dipping dike case, A computer curve-matching method of magnetic interpretation, 《Geophysics》, V. 35, p. 831-848, 1970。

8. M. Al-chalabi, Interpretation of two-dimensional magnetic profiles by non-linear optimization, 《Bollettino Di Geofisica》, Vol. 12, p. 3-20, 1970。

9. Cordell, L., Henderson, R. G., Iterative three-dimensional solution of gravity anomaly data using a digital computer, 《Geophysics》, V. 33, p. 596-601, 1968。

10. Hjelt, S. E., Experiences with automatic magnetic interpretation using the thick plate model, «Geophysical Prospecting», V. 21, p. 243-265, 1973.

11. Fletcher R., A modified marquardt subroutine for non-linear least squares, «United Kingdom Atomic Energy Authority Research Group, Report», AERE-R 6799, 1971.



00282444