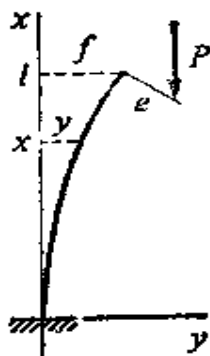


第一章 引 论

稳定问题不同于通常的结构问题,它有它的特殊性,为了确立其特殊性,让我们来看一个简单的例子。

§ 1.1 一个简单问题

图 1.1 表示一端固支另一端偏心加载的柱子。顺便说一下,在研究柱、杆、轴等问题时,除非另作说明,我们总是假设它们是棱柱(圆柱)形的、均匀的、弹性的以及服从虎克定律的。令 l 为柱长, $\alpha = EI$ 为它的抗弯刚度, e 为荷载的偏心率,而 f 为自由端的挠度。如果采用图 1.1 所示坐标系,并假设挠度曲线的斜率和 1



相比是小量,那么截面 x 处的弯矩是 $M = P(e + f - y)$ 图 1.1 偏心加载的柱

($e + f - y$), 因此挠度曲线的(线性化的)微分方程是

$$\alpha y'' = P(e + f - y). \quad (1.1)$$

引入符号

$$\frac{P}{\alpha} = \kappa^2 > 0 \quad (1.2)$$

微分方程(1.1)变成

$$y'' + \kappa^2 y = \kappa(e + f). \quad (1.3)$$

由于柱的下端固支, f 为其上端(未知的)挠度,故边界条件是

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = f. \quad (1.4)$$

(1.3)的一般解为

$$y = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + e + f, \quad (1.5)$$

其中包含三个待定常数 A 、 B 和 f ，它们可以用边界条件(1.4)来确定。这样，我们便得到解

$$y = \frac{1 - \cos \kappa l}{\cos \kappa l} e \quad (1.6)$$

以及其端点挠度

$$f = \left(\frac{1}{\cos \kappa l} - 1 \right) e. \quad (1.7)$$

方程(1.6)已经展示了稳定性问题的一个典型特性。与普通情况下结构理论所得到的结果相对比，它的挠度不再正比于载荷，这一点可用图 1.2 来说明。 i 表示横截面的惯性半径，对不同的

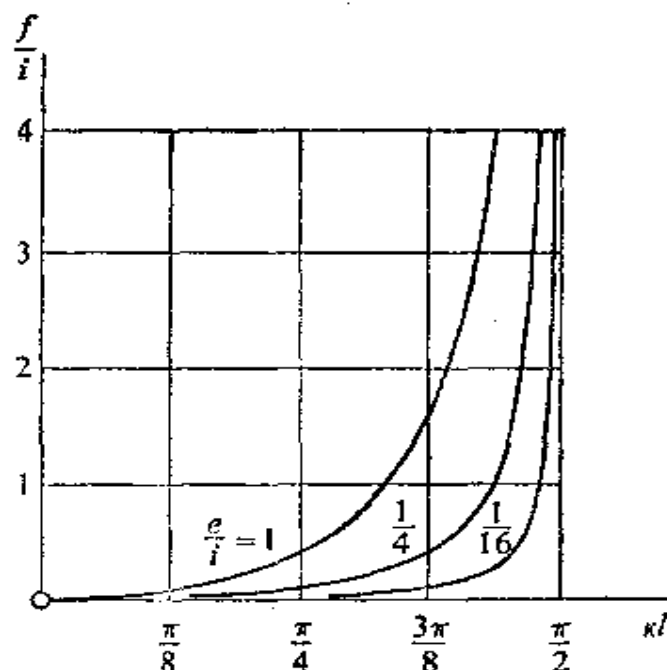


图 1.2 偏心受载柱的挠度

e/i 值图中画出了 f/i 与 $\kappa l = l\sqrt{P/\alpha}$ 的关系曲线。在假设挠度曲线的斜率是小量的基础上，尽管所用的关系已作了线性化处理，但仍然偏离比例关系。这种偏离可以这样来解释，即在建立弯矩

表达式时,必须考虑变形。在简单弯曲问题中这一点是不必要的,实际上,结构力学、弹性力学的绝大部分内容都是基于下列假设,即作用于未变形系统上的力满足平衡条件。这一假设对克希霍夫(Kirchhoff)的一般的唯一性定理[30]来说是至关重要的,而在稳定性问题中则必须予以摒弃。事实上,在许多情况下,我们会看到结构的变形将不是由载荷唯一地确定的。

图 1.2 中的曲线族在 $\kappa l = \frac{\pi}{2}$ 处具有一条公共的铅垂渐近线,也就是

$$P_1 = \alpha \kappa^2 = \frac{\pi^2 \alpha}{4l^2}. \quad (1.8)$$

其含意是:无论偏心 e 多么小,对于载荷的临界值(1.8)来说,杆的挠度变为无穷大。此外,由于不可能完全避免微小的偏心,所以这一结果对表面上是中心受压柱仍然适用。

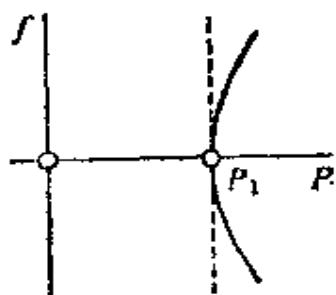
实际上,早在挠度 f 增大到和杆长 l 可以比较之前,线性化的微分方程就已不再适用,因此,图 1.2 的一族曲线只是在水平轴附近才是可靠的。而且,早在荷载达到临界值(1.8)之前,大多数柱将偏离虎克定律的适用范围,甚至会破坏。

柱子破坏载荷随着偏心 e 的减少而趋近 P_1 。如果真的能使 e 做到精确地为零,那么 κl 轴上的 $0 \leq \kappa l \leq \frac{\pi}{2}$ 和渐近线就将代替图 1.2 中的曲线族。也就是对于 $P < P_1$ 的任意载荷,挠度为零,而对于临界载荷(1.8),挠度变为任意值。解的唯一性就会丧失,柱子便易于屈曲,至少在载荷有任意微小增加的趋势下是如此。

按照 §1.2 中所用的思路,对线性化问题作更为细致的研究表明,对于 $e=0$ 和 $P < P_1$ (图 1.3),柱的笔直的形状是一个稳定的平衡位形,这是指由微小的扰动引起的振动只局限于该平衡位置的邻近。对于 $P = P_1$,柱子出现无穷多个附加的弯曲平衡

位形（如中性平衡情形）。再则，对于 $P > P_1$ ，直的形状又是唯一的平衡位形，但它已成为不稳定的。任意微小的干扰，将导致挠度的迅速增加和柱子的破坏。因此很清楚，屈曲是一个稳定性问题。

欧拉(Euler)最早研究了柱子和压杆的屈曲[16]，他指出，如



果分析工作以挠度曲线的精确的微分方程为基础，那么在 P_1 处的竖直线应该用如图 1.3 所示的曲线来代替。

对于 $P > P_1$ ，该曲线代表稳定平衡状态，而 P 轴上的 $P > P_1$ 的点却相应于不稳定的平衡位置。在柔性杆的情形

下，相应于稳定平衡状态的挠度可以相当大。然而，对大多数结构中的压杆来说，其挠度还很小时就已失效。在此情况下， P_1 仍然可以被认为是临界载荷，也称为屈曲载荷。

习题

1. 图 1.4 所示为另一种类型的失稳问题。该结构由两根端部铰接的杆组成，并承受载荷，其初始斜度为 $\alpha = \arcsin h/l$ 。证明中间铰点的挠度 f 与载荷 P 之间的关系为

$$P = 2EF \frac{h-f}{l} [l(l^2 - 2hf + f^2)^{-\frac{1}{2}} - 1]. \quad (1.9)$$

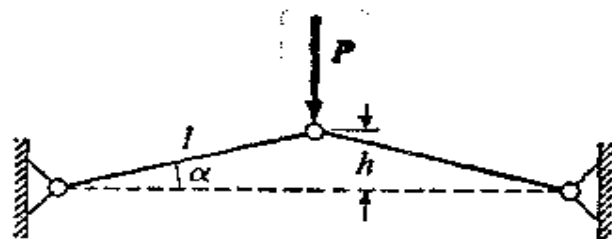


图 1.4 两铰接杆组成的承载结构


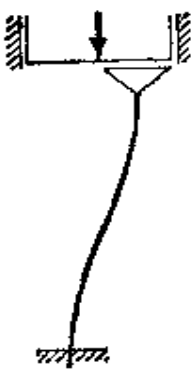



设 $h/l = 1/10$ ，试画出 f/l 与 $P/(2EF)$ 的关系图，并讨论该系统的稳定性。

§ 1.2 经典方法

如果端部条件变化, § 1.1 的屈曲问题有表 1.1 所示的五种不同类型。欧拉已证明屈曲载荷是

$$P_1 = k\pi^2 \frac{a}{l^2}, \quad (1.10)$$

表 1.1 (1.10) 中用的欧拉屈曲因子(欧拉未研究情况 2)

情况	1	2	3	4	5
约 束					
k	4	1	0.25	2.046	1

这里所用的符号与 § 1.1 所定义的相同, 而 k 是列于表 1.1 底行的随问题类型而变化的数值因子。这个公式基于这样的假设: 作用在柱上端的载荷 P 在屈曲过程中, 其量值和方向都保持不变。§ 1.1 中研究过的问题就是表 1.1 中的情况 3。比较 (1.8) 与 (1.10), 即可断定 $k=1/4$ 。

解决稳定问题有好几种方法, 下面我们将通过线性化形式的欧拉屈曲情况 5 来讨论这些方法。为了展示基本思想, 让我们把实际问题和一个单自由度系统问题作一比较, 该问题是: 一质点 m

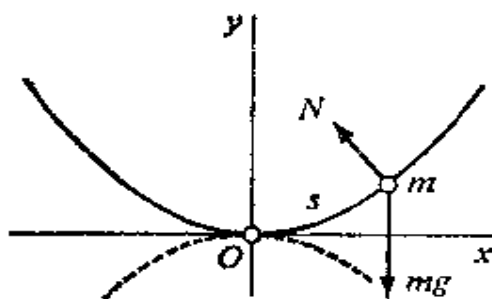


图 1.5 沿抛物线运动的质点

(图 1.5)在其自重 mg 作用下无摩擦地沿抛物线

$$y = \frac{1}{2}ax^2 \quad (1.11)$$

运动。按照 § 1.1 给出的基本定义,只要 $a > 0$,那么,唯一的平衡位置 O 是稳定的。对于 $a = 0$,它成为中性的,而对 $a < 0$,它是不稳定的。

力学系统决不会是完善无缺的,从这一点出发,我们可以假设抛物线绕原点略微转动一下(图 1.6),因而有(近似的)方程

$$y = \frac{1}{2}ax^2 - bx, \quad |b| \ll 1. \quad (1.12)$$

平衡位置已移到转动后的抛物线的最低点。因为

$$\frac{dy}{dx} = ax - b, \quad (1.13)$$

该点的横坐标为

$$x_0 = \frac{b}{a}. \quad (1.14)$$

无论选择多么小的 $b \neq 0$,对于 $a \rightarrow 0$,此值趋于无穷大。这一点对于完善系统(图 1.5)的平衡位置 O 的丧失稳定性来说是有代表性的。

刚才描述的方法正是我们在确定屈曲载荷(1.8)时所采用过的。为了用类似方法讨论情况 5, 让我们在柱的上端引进偏心作

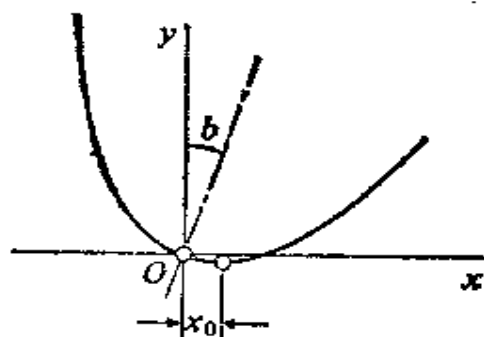


图 1.6 倾斜的抛物线

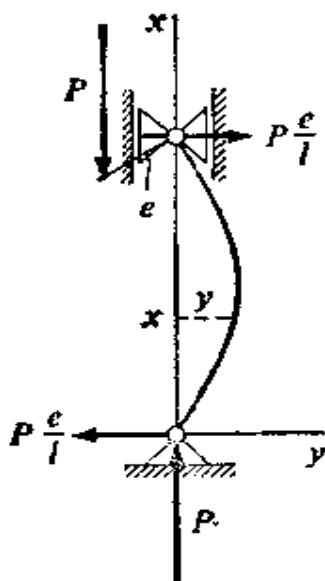


图 1.7 情况5中具有缺陷的柱

为一种不完善性。为维持平衡,有反力 P 和 $P e/l$, 如图 1.7 所示。挠度曲线服从微分方程

$$\alpha y'' = -P \left(y + \frac{e}{l} x \right) \quad (1.15)$$

和边界条件

$$y(0) = y(l) = 0. \quad (1.16)$$

若采用(1.2)的符号,则(1.15)取

$$y'' + \kappa^2 y = -\kappa^2 \frac{e}{l} x \quad (1.17)$$

的形式,其一般解为

$$y = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x - \frac{e}{l} x. \quad (1.18)$$

考虑到边界条件(1.16),解变为

$$y = \left(\frac{\sin \kappa x}{\sin \kappa l} - \frac{x}{l} \right) e. \quad (1.19)$$

因为对于 $\kappa l \rightarrow \pi$, $y \rightarrow \infty$ ($0 < x < l$), 所以屈曲载荷为

$$P_1 = \alpha \kappa^2 = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2}. \quad (1.20)$$

因而证实了表 1.1 中的 $k=1$ 。

刚才叙述的方法基于这样的事实：即系统是具有缺陷的，并且对于荷载的某一确定值来说，人们看到平衡位形变得离开未受载系统的初始位形如此之远，以致结构有遭受破坏的危险。很显然，这种思想可以应用于更为复杂的问题。这种方法可称为缺陷法 (imperfection method)。这一方法是以下列问题为其特征的：当荷载取什么数值时，具有缺陷的系统的静位移变得过分大，甚至无限大（如迄今为止研究过的线性情况）。

另一种方法是与完善系统的平衡位形有关。在图 1.5 的抛物线 (1.11) 的情形中，当参数 α 趋于零的时候，孤立的平衡位置 $x=0$ 发生稳定与不稳定之间的转变，而 $x=0$ 是我们感兴趣的，今后，我们称它为平凡 (trivial) 平衡位置。对于 $\alpha=0$ ，抛物线同 x 轴重合，它上面的任何 $x \neq 0$ 的点代表非平凡的平衡位置。因此平凡平衡位置丧失稳定性是以在它邻近出现非平凡平衡位置为标志的。

为了把这一方法用于情况 5 的欧拉问题，我们令图 1.7 中的偏心 e 等于零，然后，荷载 P 直接作用于上铰，反力 Pe/l 消失。挠度曲线的微分方程为

$$y'' + \kappa^2 y = 0. \quad (1.21)$$

边界条件仍由 (1.16) 给出。(1.21) 的一般解为

$$y = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x. \quad (1.22)$$

(1.16) 的第一个边界条件要求

$$A = 0. \quad (1.23)$$

由第二个边界条件，我们得到

$$B \sin \kappa l = 0 \quad (1.24)$$

对于任意的 κ 值（也就是 P 值），该方程要求 $B=0$ ，因而 $y=0$ ，唯一的平衡位形就是平凡平衡位形。对于

$$\kappa_m l = m\pi \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (1.25)$$

($m=-1, -2, \dots$ 不再提供任何东西, 而 $m=0$, 相应于未受载柱), 条件(1.24)对于任意 B 值都满足, 因而提供无穷多个非平凡平衡位形。

这类问题称为特征值问题, κ_m 或其相应的载荷

$$P_m = \alpha \kappa_m^2 = \frac{m^2 \pi^2 \alpha^2}{l^2} \quad (1.26)$$

称为该问题的特征值, 对应的解

$$y_m(x) = B_m \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (1.27)$$

是特征函数。使非平凡平衡位形存在的值 P_m 也叫作 m 阶欧拉载荷。目前的方法并未从这些载荷中挑选出任何一个。然而, 从前述方法以及现在所讨论的方法, 可以得到实际屈曲载荷是 P_1 , 这和(1.20)是一致的。

刚才讨论的方法是基于这样的思想: 一个(平凡的)平衡位形从稳定转变为不稳定的标志是在平凡平衡位形邻近出现附加的(非平凡的)平衡位形。这个方法称为平衡法 (equilibrium method)。它是以这样的问题作为特征的: 载荷取什么值时, 完善系统允许有非平凡平衡位形?

为了解释第三种方法, 即基于系统势能的方法, 我们需要一些定义。令 $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 是当其自变量取值 $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 为零的函数。如果把变量 x_m ($m=1, 2, \dots, n$) 看作为 n 维空间的笛卡尔坐标, 那么, V 在坐标原点为零。如果对于在原点充分小的邻域

$$|x_m| \leq \varepsilon > 0 \quad (1.28)$$

内的任一组自变量 x_1, x_2, \dots, x_n , 函数 V 是正的(负的), 那么函数 V 称为正(负)定函数。如果在(1.28)内 V 值取同一种符号, 而

且在(1.28)内非原点的一些点上 V 值为零,那么函数 V 称为半正(负)定的。如果在一个任意小的邻域(1.28)内,函数 V 值可取正负两种符号,那么 V 称为不定的。

如果我们取 $V(x=0)=0$,图 1.5 中的质点具有势能

$$V = mgy = \frac{1}{2}mgax^2, \quad (1.29)$$

当且仅当 $a>0$ 时,函数 $V(x)$ 才是正定的。因此,只要势能是正定的,平凡平衡位置也正好是稳定的。

在研究平衡位形的邻域(1.28)时,关键的是仅考虑许可位形(admissible configuration),也就是说满足所有运动学约束的位形。例如在图 1.5 中, V 在抛物线上是正定的,但是,如果考虑到 0 点的邻域中的所有点, V 就不是这样。在柱子的情况中(表 1.1),许可位形是具有连续的一阶导函数并满足运动(或几何)端点条件的连续函数 $y(x)$ 。因为我们排除柱子折断的情形,故连续性的要求是必需的。(在弦的情形中,则不要求一阶导数的连续性。)在表 1.1 例 3 中,运动学端点条件是 $y(0)=0, y'(0)=0$,它们代表运动学(几何)约束,而自由端弯矩为零的条件 $y''(l)=0$ 只是涉及力,因此称为动力端部条件。

为了把正定的概念应用于连续介质(也就是用于柱子)还必须稍微推广一下。在这里,势能依赖于代表位移场的一个或多个函数,而这些函数又有一个或多个自变量。例如在欧拉问题中, V 是形式为 $V[y(x)]$ 的泛函(即函数的函数),其中 $y(x)$ 是一个任意许可函数。对应于图 1.5 的原点的是柱子的平凡平衡位形 $y \equiv 0$ (函数空间的原点),对应于抛物线上的任何其他点的是挠曲的形状 $y(x)$ (函数空间中原点之外的一点)。如果

$$V[y \equiv 0] = 0, \quad V[y(x) \neq 0] > 0, \quad (1.30)$$

则势能 V 是正定的,其中 $y(x)$ 是与平凡函数 $y \equiv 0$ 充分接近的任意一个许可函数。用类似方法,可以推广负定、半定和不定函数。

在弹性系统中,势能是内力的能,也叫作变形能 $V^{(i)}$ 和外载荷的能 $V^{(e)}$ 之和,

$$V = V^{(i)} + V^{(e)} \quad (1.31)$$

在柱子情况下,由挠度曲线的微分方程得到

$$V^{(i)} = \int_0^l \frac{M^2}{2\alpha} dx = \frac{\alpha}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (1.32)$$

由于挠曲的原因,柱子的两端相互靠近的量为

$$\int_0^l (ds - dx) = \int_0^l \left(\sqrt{1 + y'^2} - 1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (1.33)$$

此处只保留 y' 的二次项。因此常荷载 P 的势能为

$$V^{(e)} = -\frac{1}{2} P \int_0^l y'^2 dx. \quad (1.34)$$

系统的总势能(1.31)为

$$V = \frac{1}{2} \alpha \int_0^l y'^2 dx - \frac{1}{2} P \int_0^l y'^2 dx. \quad (1.35)$$

势能 V 作正则化处理,使它在平凡平衡位形 $y \equiv 0$ 处为零。对于 $P \leq 0$ 来说,事实上也对于充分小的正值 P 来说,泛函 V 在任何许可的非平凡位形 $y(x)$ 都是正的,因此,根据与图 1.5 的质点问题的类比知道平凡平衡位形是稳定的。然而对于充分大的 P 值,至少对于某些许可位形 $y(x)$, V 将是负的,这样, V 就不是正定的,因此平凡平衡位形是不稳定的。这种由稳定到不稳定的转变的特征是至少存在一个非平凡的许可位形 $y_1(x)$, 使 $V = 0$, 但是仍然没有使 $V < 0$ 的许可位形。

很清楚,在适当的连续条件之下, $V[y_1(x)]$ 为驻值。因此,我们的问题是要寻找 P 的最小值 P_1 , 在此 P_1 时,非平凡的许可位形 $y_1(x)$ 使 V 取驻值。换言之,我们必须找到 P 的最小值 P_1 , 对于此值的变分问题

$$\delta V = \alpha \int_0^l y'' \delta y'' dx - P \int_0^l y' \delta y' dx = 0 \quad (1.36)$$

具有一个非平凡解，其中 $\delta y(x)$ 仅限于 $y(x)$ 的许可变分。如果 $\eta(x)$ 能在 $y(x)$ 邻近产生一个新的许可位形 $y(x) + \eta(x)$ ，那么函数 $\eta(x) = \delta y(x)$ 称为 $y(x)$ 的许可变分。 $\eta(x)$ 遵守运动学约束条件，因此满足运动学边界条件。

除了符号外， δV 可以解释为内力和外力在一个许可虚位移 δy 上所做的虚功。因此，我们的问题等价于寻找使一个非平凡平衡位形存在的最小载荷。由此可见对这里所考虑的这类问题来说，能量法等价于平衡法。事实上容易看出

$$\delta y' = (\delta y)' = \eta', \quad \delta y'' = (\delta y)'' = \eta'', \quad (1.37)$$

因此，(1.36) 具有下列形式：

$$\delta V = \alpha \int_0^l y'' \eta'' dx - P \int_0^l y' \eta' dx = 0. \quad (1.38)$$

在欧拉的例 5 中运动学边界条件 (1.16) 意味着 $\eta(0) = \eta(l) = 0$ 。

利用分部积分，由 (1.38) 我们得到

$$\delta V = \int_0^l (\alpha y'''' + P y'') \eta dx + \alpha y'' \eta' \Big|_0^l = 0. \quad (1.39)$$

因为 $\eta(x)$ 是一个任意许可函数，所以由 (1.39) 得到微分方程

$$\alpha y'''' + P y'' = 0 \quad (1.40)$$

和动力边界条件

$$y''(0) = y''(l) = 0. \quad (1.41)$$

在满足边界条件 (1.41) 和 (1.16) 下积分 (1.40)，我们便得到微分方程 (1.21)。前面证明过使 (1.21) 和 (1.16) 存在非平凡解的 P 的最小值 P_1 为 (1.20)。因此，其结果与前述各方法的结果相同。

这里所讨论的方法基于下列事实：从稳定到不稳定的转变的标志是 V 不再为正定。这个方法叫做能量法 (energy method)，它以下列问题为特征：即载荷取什么值使得完善系统的势能不再正定？

到目前为止所考虑的各种方法是纯粹静力学性质的，将要讨论的最后一种方法是动力学性质的，它同系统在平衡位置邻近的运动有关。

对于图 1.5 的质点，运动微分方程为

$$m\ddot{s} = -\frac{dV}{ds}. \quad (1.42)$$

将其线性化并利用(1.29)，得到

$$m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx} = -mg\alpha x \quad (1.43)$$

或

$$\ddot{x} + \alpha g x = 0. \quad (1.44)$$

按照 § 1.1 中的基本定义，只要(1.44)的一般解是有界的，那么平衡位置 $x=0$ 就是稳定的。因此，我们再一次得到稳定条件是 $\alpha > 0$ 。

用类似方法，我们可以研究在载荷 P 作用下柱子的振动（图 1.8）。如果 μ 表示每单位长度的质量（常数），惯性力为：

$$dT = \mu \ddot{y}(\xi, t) d\xi. \quad (1.45)$$

此外，还必须引入反力 P ， Q_1 ， Q_2 。按照达朗伯(d'Alembert)原理，挠度曲线由下式确定：

$$\alpha y''(x, t) = -Py(x, t) + Q_1 x - \mu \int_0^x \ddot{y}(\xi, t)(x - \xi) d\xi \quad (1.46)$$

和

$$y(0, t) = y(l, t) = 0. \quad (1.47)$$

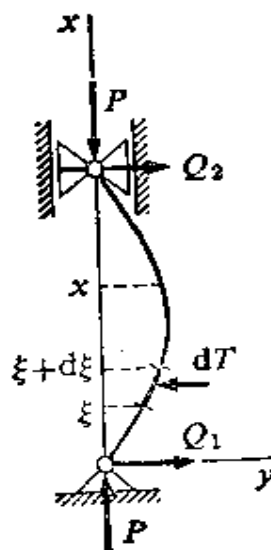


图 1.8 情况 5 中受载柱的振动

我们得到一个积分—微分方程,而不是微分方程。可以对 x 微分,来简化该方程。第一步,我们有

$$\alpha y'''(x, t) = -Py'(x, t) + Q_1 - \mu \int_0^x \ddot{y}(\xi, t) d\xi. \quad (1.48)$$

再微分一次,我们得到

$$\alpha y''''(x, t) = -Py''(x, t) - \mu \ddot{y}(x, t), \quad (1.49)$$

或简写为

$$\alpha y'''' + Py'' + \mu \ddot{y} = 0. \quad (1.50)$$

这一微分方程是四阶的,除(1.47)外,还要求另外两个边界条件

$$y''(0, t) = y''(l, t) = 0, \quad (1.51)$$

亦即两端弯矩均等于零。这些方程形式上是在达朗伯原理的基础上从整个柱子的平衡导出的,同时还要求方程(1.46)至少在 $x=0$ 和 $x=l$ 处得到满足,而方程(1.46)已为较弱的形式(1.50)所代替。

在振动理论中,(1.50)、(1.47)和(1.51)的一般解可以用无限多个所谓固有振动

$$y_m(x, t) = \sin \frac{m\pi x}{l} (A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t), \quad (1.52)$$

$$(m=1, 2, \dots)$$

叠加来得到。现在的问题是对于充分小的初始扰动,亦即充分小的 A_m 、 B_m 值,所有这些固有振动是否保持为任意小?把(1.52)代入(1.50),我们得到固有振动圆频率 ω_m 的方程

$$\mu \omega_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} \alpha - P \right) \quad (m=1, 2, \dots). \quad (1.53)$$

只要圆括号的所有各项是正的,表达式(1.52)就是幅度由初始条件确定的简谐振动。如果圆括号有一项是负的,那么与之相应的 ω_m 是虚值,对于任意小的干扰来说,振动(1.52)就是无界的,因为

$$\cos i\sigma t = \cosh \sigma t, \quad \sin i\sigma t = i \sinh \sigma t, \quad (1.54)$$

此处 $i = \sqrt{-1}$ 。 ω_m 中有一个为零时,也将得到类似结果。因此,

只要 P 比 $\frac{m^2 \pi^2}{l^2} \alpha$ 之中的任何一个都小, 即 $P < P_1$, 那么直柱就是稳定的, 其中 P_1 就是屈曲载荷(1.20)。

最后这种方法是基于下列事实: 对平衡的微小扰动会引起易于发生危险的运动。这一方法称为振动法(vibration method)。它是以这样的问题为其特征的, 在载荷取什么值时, 完善系统在其平衡位置邻近的最一般的自由运动不再有界?

习题

1. 通过两端非精确对心柱(图 1.9), 用缺陷法证明欧拉情况 1 的屈曲载荷(表 1.1)。
2. 用平衡法解情况 4 的欧拉问题。
3. 用能量法证明欧拉情况 2(表 1.1)的屈曲载荷。
4. 图 1.10 系统由两根质量为 m , 长为 l 的刚性杆无摩擦地铰接在一起



图 1.9 例 1 中有缺陷的柱

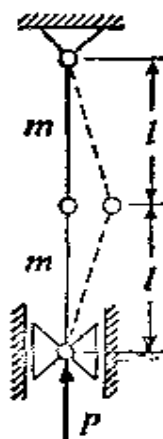


图 1.10 两铰接杆组成的承载结构

所组成, 系统受到载荷 P 及其自重的作用, 不计底部铰的重量。用振动法验证发生屈曲的载荷为 $P_1 = mg$ 。

5. 证明图 1.8 所示的柱与 $\omega_m = 0$ 相应的固有振动是无界的。

§ 1.3 临界状态的评论

在 § 1.2 中我们曾把四种不同的方法用于同一问题的求解。其中三种方法(缺陷法、平衡法和能量法)是基于静力学概念的,而第四种方法(振动法)是一种动力学方法。这四种方法的每一种都是以一个特殊的问题作为它的特征的。尽管看起来这些问题之间似乎毫无联系,但是就情况 5 的屈曲载荷 P_1 来说,其结果是相同的。

然而,对这些结果作更为仔细的评价后,就看出一些差别。其中某些方法直接导出屈曲载荷 P_1 ; 在另一些方法中,得到无穷多个临界载荷 P_m , 而 P_1 是其中的最小值。这个结果依赖于该特征性问题的精确提法。例如对缺陷法略加修改就足以得到高阶的临界载荷。进而,在实际应用能量法时,却经常发生这样的情况,在计算过程中忘记特征性问题,而纯粹在形式上解最后得到的变分问题,从而获得各阶欧拉载荷。

对于 § 1.2 中研究过的柱子的例子和类似情形,不难把这四种方法的特征问题提成使它们的结果一致,给出唯一的一个屈曲载荷。然而,实际上我们仍然面临着四个全然不同的问题。显然这四个问题的答案绝不应该总是相同的。事实上,即使在欧拉问题中,当把这些特征问题提成只得到第一阶临界载荷,某些差别也还存在。例如,按照动力学方法,当载荷 $P > P_1$, 柱子无疑是不稳定的。人们总想从能量法得出同样的结论,但是无论缺陷法或者平衡法都不能提供最起码的一点儿这类信息。

如果考虑更加广泛的一些问题,情况更不令人满意。在许多场合不同方法的结果是不一致的。在本节的后面部分我们将讨论某些这种例子。

稳定性理论的一个重要分支是研究如轴那样的转动系统。对于一个和轴一起转动的观察者来说，载荷中起码有离心力和哥利奥利(Coriolis)力。由此可见任何一个临界状态都和一个角速度相对应，事实上，待确定的与其说是临界载荷，不如说是临界角速度。

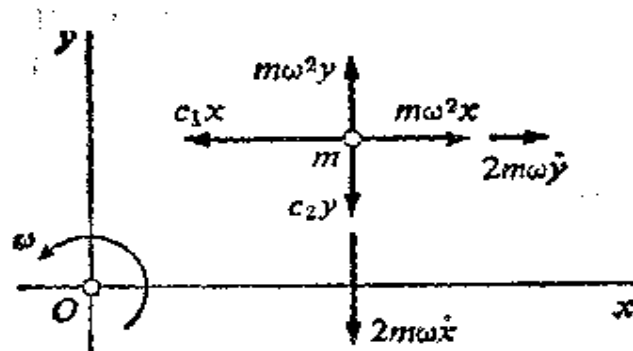


图 1.11 安装在转轴上的圆盘的模型

如果对非圆截面轴的临界速度问题加以简化和线性化，就可以得到图 1.11 的情况。质点 m 在这里代表安装在转轴上的盘子的集中质量，并假设坐标系以角速度 ω 匀速转动的。假设代表旋转轴在两个主方向上的刚度的恢复力是线性的，且由弹性常数 c_1 和 c_2 来决定。显然原点 O 是唯一的平衡位置，它对应着和坐标轴 z 重合的一根直轴。我们感兴趣的是它的稳定性。

因为恢复力是在与转轴一起旋转的坐标系中定义的，把这个问题作为相对平衡或相对运动问题考虑比较方便，除 $-c_1 x$ ， $-c_2 y$ 之外，还需引入离心力 $m\omega^2 \cdot (x, y)$ 和哥氏力 $2m\omega \cdot (\dot{y}, -\dot{x})$ 。哥氏力在实际运动中并不做功。因此总的势能为

$$V = \frac{1}{2} \left[(c_1 - m\omega^2)x^2 + (c_2 - m\omega^2)y^2 \right], \quad (1.55)$$

按照牛顿定律，我们得到在平衡位置邻近运动的微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right)x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + \left(\frac{c_2}{m} - \omega^2\right)y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.56)$$

微分方程(1.56)是线性齐次的, 因此求解时可令

$$x = Ae^{\lambda t}, \quad y = Be^{\lambda t} \quad (1.57)$$

将它们代入(1.56), 得到关于 A 和 B 的齐次线性方程组

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda^2 + \frac{c_1}{m} - \omega^2\right)A - 2\omega\lambda B &= 0, \\ 2m\lambda A + \left(\lambda^2 + \frac{c_2}{m} - \omega^2\right)B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.58)$$

平凡解 $A=B=0$ 代表 O 点的平衡位置。对应于 O 点邻近的运动的非平凡解要求(1.58)的行列式为零, 也就是满足所谓特征方程

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m} - 2\omega^2\right)\lambda^2 + \left(\frac{c_1}{m} - \omega^2\right)\left(\frac{c_2}{m} - \omega^2\right) = 0. \quad (1.59)$$

(1.59)的根为

$$\lambda_{1,2}^2 = -\frac{1}{2}\frac{c_1+c_2}{m} - \omega^2 \mp \left[\frac{1}{4}\left(\frac{c_2-c_1}{m}\right)^2 + 2\frac{c_1+c_2}{m}\omega^2 \right]^{1/2}. \quad (1.60)$$

只要 $\omega \neq 0$, 且 c_1 和 c_2 是正的, 那么 λ_1^2 和 λ_2^2 的值是实数并具有不同的绝对值。因此, (1.59)的四个根成对出现: λ_1 、 $-\lambda_1$ 和 λ_2 、 $-\lambda_2$ 。只要没有一个是零, 它们或者是实数或者是纯虚数, 而且这四个根是不同的。一般解可以通过叠加得到, 如果所有的根是虚数, 也就是 $\lambda_1^2 < 0$ 和 $\lambda_2^2 < 0$, 那么一般解是有界的。事实上, 如果 $\lambda_1^2 < 0$, 相应的基本解(1.57)可用 $\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$ 来表达 (其中 $\omega = i\lambda_1$)。另一方面, 如果 $\lambda_1^2 > 0$, 则解可用 $\text{ch}\lambda_1 t$ 和 $\text{sh}\lambda_1 t$ 来表达。最后, 如果 $\lambda_1 = 0$, 那么 λ_1 是一个重根, (1.57)必须用一个形式略微复杂的且可证明为无界的解来代替。

在 $c_1 \neq c_2$ 的特殊情况下, 我们假设 $c_1 < c_2$ 。考察(1.59)中的系数, 利用 Vieta 关系, 我们立刻发现 $\lambda_1^2 < 0$, 以及

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2^2 < 0, & \quad \left(\omega^2 < \frac{c_1}{m} \text{ 或 } \omega^2 > \frac{c_2}{m} \right), \\ \lambda_2^2 > 0, & \quad \left(\frac{c_1}{m} < \omega^2 < \frac{c_2}{m} \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.61)$$

由此可知, 按照动力学方法, 得到一个单一的有限的临界角速度区域 $c_1/m \leq \omega^2 \leq c_2/m$ (图 1.12)。另一方面, 我们从(1.55)可以得

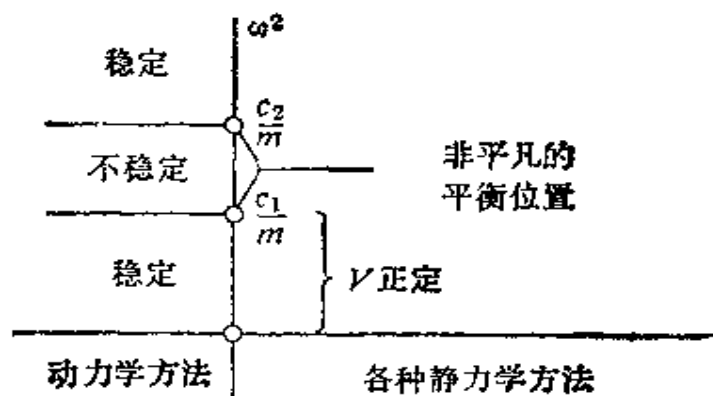


图 1.12 各种方法的比较

出结论: 只有对于 $\omega^2 < c_1/m$, V 才是正定的。因此, 根据能量法, 无限区间 $\omega^2 \geq c_1/m$ 应该是临界的。最后我们看到, 当且仅当 $\lambda = 0$ 是特征方程(1.59)的一个根时, 存在有非平凡平衡位置, 也就是(1.56)有非零常数解。这表明, 平衡法提供不稳定区两个边界 $\omega_1^2 = c_1/m$ 和 $\omega_2^2 = c_2/m$, 但对两边界之间的区域来说, 却未给出关于稳定性的任何信息。用缺陷法也可能得到与此同样的结果。

实验证实了动力学方法的预测。事实上, 对于 $\omega^2 > c_2/m$, O 点的平衡显然是由于哥氏力而得到稳定的, 而在任何一种静力方法中都不出现哥氏力。从这一例子我们认识到: 在实践中确有一些重要的简单问题, 只有动力学方法才能给出它们的答案。

至今未考虑的是 $c_1 = c_2 = c$ 情形, 它对应于轴具有单一弯曲

刚度(例如圆截面轴)的更为普遍的情形。在物理上来说,问题仍然是同样的,但是,从方法论的观点来说却全然改变了。此时不稳定区域(图 1.12)的两个边界重合。因此, $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{c/m}$ 是唯一的临界角速度。此外,对于 $\omega^2 = \omega_1^2 = c/m$, 运动的微分方程成为

$$\ddot{x} - 2\omega_1 \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + 2\omega_1 \dot{x} = 0, \quad (1.62)$$

它们的一般解

$$\left. \begin{aligned} x &= A \cos 2\omega_1 t + B \sin 2\omega_1 t + C, \\ y &= -A \sin 2\omega_1 t + B \cos 2\omega_1 t + D, \end{aligned} \right\} \quad (1.63)$$

是有界的。这里动力学方法不能给出临界值。按照能量法,任何 $\omega > \omega_1$ 应是临界的,而由其余几种方法得出: ω_1 是唯一的临界角速度。

通过实验能够验证 ω_1 是唯一的临界速度。由此可知,有这样一些问题,对于它们如果不考虑不完善性(缺陷)的话,那么即使动力学方法也会失效。当在静止坐标系中处理这一问题时,这一点得到了确证。在这里这一问题本身是一个振动问题,只要系统是完善的,如果没有扰动,因而就不会发生共振。

图 1.13 给出了另一个例子。质点 m 在固定平面 x, y 内运动,它受到来自坐标轴的力 $-c_1 x$ 、 $-c_2 y$ 和垂直于矢径,并正比于质点至原点 O 的距离的力 μr 的作用。原点 O 是其唯一的平衡位置。力 μr 不是保守力。其余力的势能是

$$V = \frac{1}{2}(c_1 x^2 + c_2 y^2), \quad (1.64)$$

运动的微分方程

$$\ddot{x} + \frac{c_1}{m} x + \frac{\mu}{m} y = 0, \quad \ddot{y} - \frac{\mu}{m} x + \frac{c_2}{m} y = 0 \quad (1.65)$$

其解仍取(1.57)。对于 A 和 B 所得的方程是

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda^2 + \frac{c_1}{m} \right) A + \frac{\mu}{m} B &= 0, \\ -\frac{\mu}{m} A + \left(\lambda^2 + \frac{c_2}{m} \right) B &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.66)$$

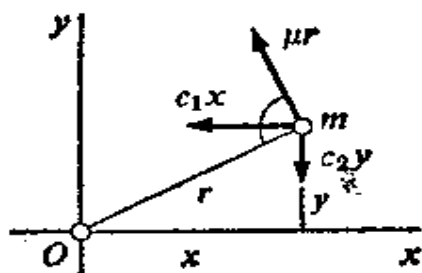


图 1.13 在各种力场中运动的质点

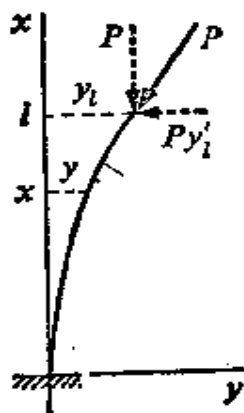


图 1.14 承受切向载荷的情况 3 的柱

其特征方程(存在非平凡解的条件)为

$$\Delta(\lambda) = \lambda^4 + \frac{c_1 + c_2}{m} \lambda^2 + \frac{c_1 c_2 + \mu^2}{m^2} = 0. \quad (1.67)$$

它的根为

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2m} \left\{ c_1 + c_2 \pm \left[(c_1 - c_2)^2 - 4\mu^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (1.68)$$

就我们的目的来说,只考虑两个特殊情况就够了。

如果 $c_1 = c_2 = c > 0$, 那么(1.68)简化为

$$\lambda^2 = -\frac{1}{m} (c \pm i\mu). \quad (1.69)$$

不难看出,对于 $\mu \neq 0$ 的任意值,现在构成的两对共轭复数根中的两个根具有正的实部。相应的基本解可以写成 $e^{r't} \cos \omega t$ 和 $e^{r't} \sin \omega t$ 形式,其中 ω 是实数,且 $r > 0$ 。由此可知,尽管势能(1.64)是正定的,但是按照振动方法,原点却是不稳定的。而且,由(1.67),没有一个根是零,这就意味着这种不稳定并不是用存在非平凡平衡位置来标志的。

当 $c_1 = 2\mu > 0$ 和 $c_2 = -\frac{\mu}{3}$, 方程(1.68)成为

$$\lambda^2 = -\frac{1}{6}(5 \pm \sqrt{13}) \frac{\mu}{m}. \quad (1.70)$$

因为现在 λ^2 的两个值都是负的, 各根都是纯虚数, 因此, 尽管势能 V 是不定的, 而系统却是稳定的。

到目前为止所考虑过的例子都是涉及质点的, 因此都特别简单, 但它们却已揭示了经典方法的基本缺点, 在更为复杂的系统中同样也可以发现这些缺点。作为例子, 我们来研究一个切向受载的柱(图 1.14)。这是略加修改的情况 3 中的欧拉问题。载荷 P 的数值仍是常数, 假设 P 的方向在屈曲过程中不再保持其原来的方向而与挠度曲线相切。

假设在此例中存在一个非平凡平衡位置(图 1.14), 由于切向载荷引起的弯矩符号和曲率的符号不一致, 因此不可能存在任何非平凡平衡位置, 也就是说用平衡法不能指出任何屈曲的危险。为了证明这一结论, 我们注意到挠度曲线的微分方程(对于小倾角问题)为

$$ay'' = P(y_1 - y) - Py'_1(l - x), \quad (1.71)$$

其端部条件为

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y(l) = y_1, \quad y'(l) = y'_1. \quad (1.72)$$

(1.71)的一般解是

$$y = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x - y'_1(l - x) + y_1, \quad (1.73)$$

其中 κ 由(1.2)给出。由端部条件得到 A 、 B 、 y_1 、 y'_1 的线性齐次方程组为

$$\left. \begin{aligned} A & - y'_1 l + y_1 = 0, \\ B \kappa & + y'_1 = 0, \\ A \cos \kappa l + B \sin \kappa l & = 0, \\ -A \kappa \sin \kappa l + B \kappa \cos \kappa l & = 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.74)$$

一个非平凡平衡位形对应于方程组的一个非平凡解。令其行列式为零, 得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & 1 \\ 0 & \kappa & 1 & 0 \\ \cos \kappa l & \sin \kappa l & 0 & 0 \\ -\kappa \sin \kappa l & \kappa \cos \kappa l & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.75)$$

如果按最后一列展开此式,得到一个三阶行列式,再一次按其最后一列展开,我们得到

$$\kappa(\cos^2 \kappa l + \sin^2 \kappa l) = \kappa = 0. \quad (1.76)$$

这就证明了这一事实,即对于 $P > 0$ 来说,不存在非平凡的平衡位形。然而,柱子不会发生屈曲这一点似乎不大可信。在 § 5.2 中将要证明,将静力法用于这一问题是不合理的。实际上,该柱会在某一临界载荷下发生屈曲,其值可用振动法求得。

事前就可以预料静力法必然会失效的另一例子是受到脉动压力的柱,例如该柱受的载荷为

$$P = Q + S \cos \omega t \quad (Q > 0, S > 0). \quad (1.77)$$

表 1.1 的例 5 特别简单。运动微分方程和端部条件在 § 1.2 中已经建立,它们分别为(1.50)、(1.47)和(1.51),而现在的 P 不再是常数,必须用(1.77)代入。这个问题的解将在 § 6.2 中给出。

从以上这些例子,我们可以得出结论:即使在线性理论范围内,也有许多例子,使 § 1.2 中讨论过的一种或几种方法失效,或者用不同方法得到的结果彼此不相一致。可以预料在非线性问题中,情形会更加复杂。我们下面的目的是要建立一个不受限制的方法。很显然,这样的方法必须建立在稳定性概念作比迄今为止更为严格的定义的基础上。

习题

1. 用动力法证明图 1.11 中不稳定区 $c_1/m < \omega^2 < c_2/m$ 的界限点本身是不稳定的。
2. 质点 m 可作为在具有两个不同弯曲刚度的轴上的圆盘的简化模型,

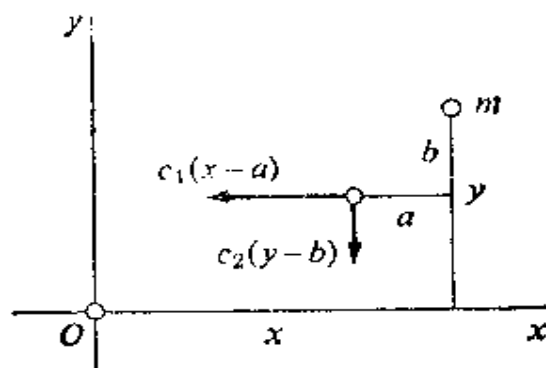


图 1.15 有安装缺陷的圆盘

它受到一旋转坐标系 x, y 轴的恢复力的作用。引入缺陷，即假设恢复力作用在 $x-a$ 和 $y-b$ 处(图 1.15)，其中 a 和 b 是常数。证明该结果和平衡法所得到的结果相同。

3. 在静止坐标系中研究图 1.11 的问题，证明对于 $c_1=c_2=c$ 来说，只要没有缺陷， O 点的平衡是稳定的。

4. 设存在微小的偏心，用缺陷法研究图 1.14 的切向受载柱。

5. 对上而习题 4 的柱子，画出 $\kappa l = n\pi/2$ ($n=1, 2, \dots, 6$) 时的挠度曲线，以说明柱的变形的一些阶段。

§ 1.4 稳定性概念

到目前为止，我们研究过的方法涉及到：(1) 不完善系统的挠度；(2) 完善系统的非平凡平衡位形；(3) 势能；(4) 平衡瞬时受到扰动后的运动。实际上，我们对非平凡平衡位形或势能并不感兴趣。我们所关心的仅仅是从未受载的平衡位形算起的大位移，因为大位移使系统处于危险状态。

作用于一个给定系统的载荷可以由许多力组成。如果我们假设，这些力从零开始成比例地增加，某瞬时的受载状态可以用简称

为载荷的参数 P 来描述。当 P 增加时,产生大的位移有两种可能的原因,第一,系统的平衡位形随着加载而变化,相应的位移常常是小的,且与载荷成比例。这就是在普通线性弹性理论中研究的情况。如果位移增加得较快,且对载荷的某一确定值位移变得过大或者甚至无限(如图 1.11 的情况),我们称它为系统的潜在失稳,因为这一现象通常是由缺陷引起的,并且如果不考虑缺陷的话,这一现象就被忽视。今后我们将宁愿用静力失稳这个术语来描述这一现象。第二,总会存在的扰动使系统产生围绕其平衡位形的运动,在此运动中位移可能变成很大,甚至无限(如在和图 1.8 有关的问题中)。这种情况我们称之为平衡失稳。术语动力失稳描述的是同一的现象。无论发生静力失稳或是动力失稳,系统将被认为是不稳定的,其载荷称为临界载荷。最小临界载荷记作 P_1 。

这两种类型的失稳是不同的。的确在某些情况下,如欧拉问题 (§ 1.2) 中,两者在同一载荷下发生。但在许多别的问题中(如在 § 1.3 中所研究过的一些例子),两者是不相干的,必须分别加以考虑。平衡失稳总是用动力学方法去求得,这一点是很清楚的。而为了解决潜在失稳,必须把可能存在的缺陷考虑进去。

为了使定义更加严谨,让我们来考虑在常载荷作用下的一个有限自由度 n 的系统。设坐标 $\bar{q}_k (k=1, 2, \dots, n)$ 从未受载系统的平衡位形 $\bar{q}_k=0 (k=1, 2, \dots, n)$ 算起。那么受载系统的平衡将用坐标

$$\bar{q}_k = a_k (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.78)$$

来描述,此处 a_k 是载荷的函数。静力失稳的特点是至少有一个 $|a_k|$ 过大。至于多大值就被认为是过大,这取决于系统和它的许可应力。在许多情况下(如图 1.1 的例子)很容易作出判断,即在某一有限的载荷作用下, $|a_k|$ 变为无穷大。

为了研究由扰动所引起的运动,我们采用一组新坐标

$$q_k = \bar{q}_k - \alpha_k \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.79)$$

该坐标是从受载系统的平衡位形算起的。相应的广义速度是

$$\dot{q}_k = \dot{\bar{q}}_k \quad (k=1, 2, \dots, n)。 \quad (1.80)$$

我们限于研究由一类简单扰动引起的自由运动

$$q_k = q_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.81)$$

而这类简单扰动可以用初始条件

$$q_k(0) = q_{k0}, \quad \dot{q}_k(0) = \dot{q}_{k0} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (1.82)$$

来描述。有了这些准备, 我们便可对受载系统的动力稳定性用如下要求来定义: 如果初始值 $|q_{k0}|$ 和 $|\dot{q}_{k0}|$ 取得足够小, 则对任意的时刻 $t > 0$, 所有的函数 $|q_k(t)|$ 保持为任意小。然而, 这一定义是非对称的: 虽然除了 $|q_{k0}|$, 还要求 $|\dot{q}_{k0}|$ 充分小, 但对于 $\dot{q}_k(t)$ 却不能得出任何类似于 $q_k(t)$ 的条件*。更方便的是利用对称的定义即把稳定平衡定义为如下条件: 如果 $|q_{k0}|$ 和 $|\dot{q}_{k0}|$ 取得充分小, 对于任何的 $t > 0$, $|q_k(t)|$ 和 $|\dot{q}_k(t)|$ 保持为任意小。

有一用几何关系解释这一定义的简单方法。在一个 $2n$ 维的欧氏空间中, 即在笛卡尔坐标 $q_k, \dot{q}_k (k=1, 2, \dots, n)$ 的所谓相空间中, 系统的位形和运动状态可用一个相点 $P(q_k, \dot{q}_k)$ 来表示。在相空间中, 相点 P 的运动描述了系统在物理空间中的运动。如果用 $\mathbf{q} = (q_k, \dot{q}_k)$ 表示相空间中 P 的矢径, 则方程

$$q^2 = q_1^2 + \dots + q_n^2 + \dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2 = \eta^2 \quad (1.83)$$

就代表中心为 O 、半径为 η 的超球, 其中 η 是一常数。按照上述定义, 我们有: 如果相点的初始位置在中心为 O 、半径充分小的一个超球之内, 则它仍然保持在半径为任意小的超球(1.83)内, 当且仅当这一条件满足时, 相应于相空间原点的平衡是稳定的。

这些定义是针对有限自由度 n 的系统的。许多实际上感兴

* 译注: 亦即 $\dot{q}_k(t)$ 也是任意小。

趣的系统,特别是结构(例如欧拉压杆)是连续系统,因而具有无限多个自由度。严格说来,对有限自由度 n 所得到的结果不能推广,并将它们用于 n 是无限的情形。事实上,Shield 和 Green [58]曾指出过这种推广中某些内在的困难。这一问题现在仍在讨论中。Shield[59]和 Koiter 在近期的论文[31, 32]中指出,人们终归会找到一个满意的解答的。不管怎样,现在没有更多的选择。看来,如果小心谨慎地去做,在多数情况下,这种推广是可靠的。在 § 2.7 中将讨论一个例子,在该例中,这一推广在某一方面危险的。

从上面给出的定义看出,平衡的稳定性应该用动力学方法来研究。为了确定充分接近原点的相点的轨迹,必须积分运动微分方程。同时,由系统的缺陷而引起的潜在失稳的可能性也应考虑到。

在大多数有实际兴趣的问题中,实现这一过程是相当麻烦的。而静力学方法却简便得多。尽管静力法与我们的定义之间的联系并不那么明显,但事实上直到最近为止这一方法应用于许多结构分析取得了惊人的成功。这就提出了一个问题:在什么情况下以及为什么直接的动力学方法可以由较简单的静力学方法来代替。这个问题的答案要求我们根据系统受力的状况对力学系统进行分类。

习题

1. 解释圆频率为 κ 的单自由度简谐振子在相平面中的运动。

§ 1.5 力与系统

图 1.16 表示一个力 F ,它的作用点 P 沿曲线 C 从 P_1 移动

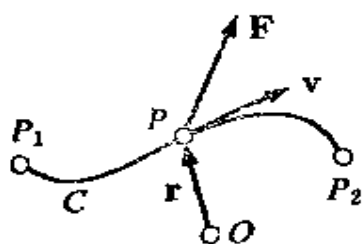


图 1.16 沿一曲线移动的力

到 P_2 。假设 F 是一个与其作用的物体无关的定常力场 $F(\mathbf{r})$, 该力所做的功通常用线积分

$$W = \oint_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} d\mathbf{r}^*, \quad (1.84)$$

来表示。

许多力(例如脉动力)还依赖于时间。它们的函数形式是 $F(\mathbf{r}, t)$, 称为非定常力。另外的一些力(如抛射体的阻力)依赖于它们的作用点的速度 $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}}$, 因而其形式为 $F(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ 。在这些情况下, 功(1.84)不是单纯的线积分, 只有力作用点的运动 $\mathbf{r}(t)$ 是已知的, 功才能计算出来。如果是这种情况, 那么功 W 就成为一个时间积分:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \mathbf{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (1.85)$$

式中时间 t_1 和 t_2 对应于在曲线 C 上的位置 P_1 和 P_2 。而

$$L = \mathbf{F} \mathbf{v} \quad (1.86)$$

是力 F 的功率或作功的速率。

还有许多力, 特别是所有的反作用力, 不参考它们所作用的物体是不能加以定义的。如果物体是有限的, 就会提出一个关于力作用点的问题。在一个滚动的轮子的情形中(图 1.17), 有三个点可以作正压力 N 和静摩擦力 F 的作用点 A , 它们是在接触处的物质点(分别在轮子上和在导轨上), 以及轮子的瞬时中心。前两点是瞬时静止的, 而第三点则是以速度 \mathbf{v} 在运动。图 1.18 中的绳索力 S 有类似的问题。很容易看出, 在所有应用到功的概念的地方(能量原理、虚功原理、拉格朗日方程等等), 在所有的证明中总是用运动物体的物质点的位移, 因此(1.84)与(1.85)必须补充说明: $d\mathbf{r}$ 或 \mathbf{v} 是指所研究的物体上的物质点而言的。

* 译注: $\oint_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} d\mathbf{r} = \oint_{P_1}^{P_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, 下同。

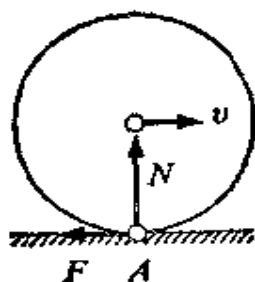


图 1.17 滚动的轮子

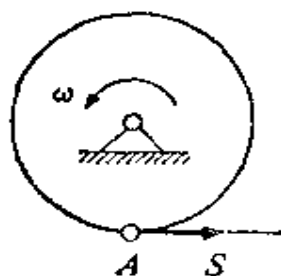


图 1.18 作用在轮子上的绳索力

某些力在纯机械意义上符合能量守恒的概念,因此称为保守力。这一定义要求功(1.84)与连接 P_1 、 P_2 的曲线 C 无关,它只对与作用物体无关的定常力场才有意义。这种类型的力并不很多,也很少有不包括任何其他类型力的系统。为了照顾到真实的情况,我们采用下面的定义:如果力在它所作用系统的任意可能位移上所做的功 W 只依赖于该系统的初始位形和终了位形,则这种力称为保守力。

系统的坐标用 $q_k (k=1, 2, \dots, n)$ 来表示。除非另作说明,下面我们将限于讨论完整系统(holonomic)和平稳系统*(Scleronomic Systems)(见[86]的 p.43 和 p.45)。因为第一个限制,最一般的可能位移可以用任意一组坐标增量 dq_k 来描述。类似地,任意一组广义速度 \dot{q}_k 代表一种可能运动状态。考虑到第二个限制,系统的任一物质单元的矢径为 $r(q_k) (k=1, 2, \dots, n)$, 也就是它不显含时间,故

$$d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} \cdot dq_k. \quad (1.87)$$

因此,作用在系统上的某一力在某一真实位移上所做的元功是

$$dW = \mathbf{F} d\mathbf{r} = \sum_{k=1}^n P_k \cdot dq_k, \quad (1.88)$$

* 译注:亦可译作定常系统

式中

$$P_k = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.89)$$

与此类似, 力在一真实运动中所做的功率是

$$L = \sum_{k=1}^n P_k \dot{q}_k. \quad (1.90)$$

如果 \mathbf{F} 是保守力, 并用 $V(q_k)$ ($k=1, 2, \dots, n$) 表示它的势能, 那么元功也可以写成

$$dW = -dV = - \sum_{k=1}^n \frac{\partial V}{\partial q_k} \cdot dq_k. \quad (1.91)$$

比较(1.88)和(1.91), 我们得到

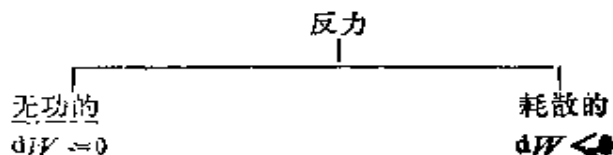
$$P_k = \mathbf{F} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \dot{q}_k} = - \frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1.92)$$

这里 \mathbf{r} 和 V 不依赖于广义速度 \dot{q}_k 和时间 t 。由(1.92)可知, 一般来说, 只有仅仅依赖于系统位形的力才可能是保守力。

在下面几章中将看得很清楚, 在同失稳有关的问题中, 知道所给的力是否是保守力是重要的。为此目的, 下面列出我们会遇到的各种力的类型的目录。首先, 我们要区分主动力或载荷与反作用力或反力。前者是 q_k 、 \dot{q}_k 和 t 的预先给定的函数, 而后者是预先未知, 必须通过积分运动微分方程与运动同时求得的。

在一平稳系统中, 反力的功不会是正的。因此, 反力可以分为无功的(例如正压力和静摩擦力)或耗散的(做负功的, 如动摩擦)两种(表 1.2)。按照我们的定义, 无功反力应认为是保守力。

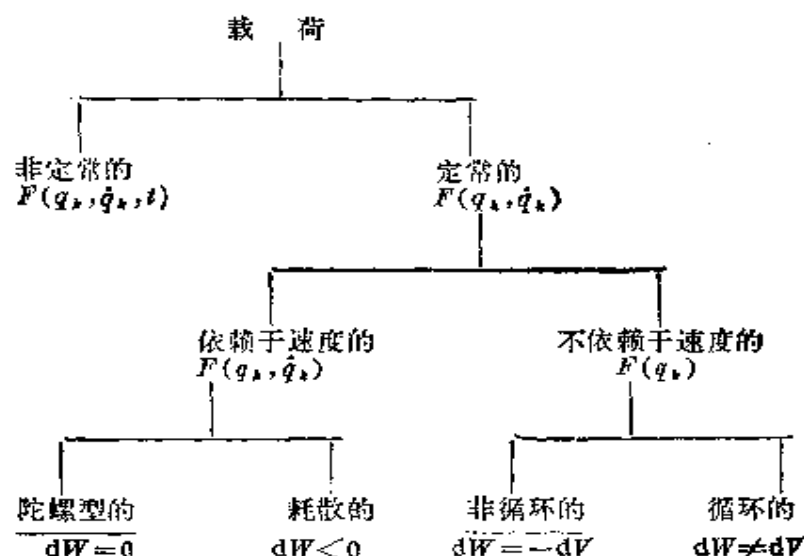
表 1.2 反力的分类



它们是上面给出的规律的第一个例外,因为它们不能从势能导出。

表 1.3 给出载荷的分类。那些显含时间的力(如脉动载荷)

表 1.3 载荷的分类



称为非定常力,它不会是保守力。定常载荷可以分成或者是与速度有关的,或者是与速度无关的两种力。第一种力中,如果力与速度有这样的关系,使得力在真实运动中所做的功总是零(如哥氏力、洛伦兹(Lorentz)力和陀螺力矩等),这种载荷称为陀螺力,它们显然也是保守的,这是上面给出的关于保守力规律的第二个例外。在本书范围内与速度有关的做正功的载荷是不重要的。做负功的那些力(例如流体的摩擦力或空气阻力)叫做耗散力。在与速度无关的载荷中,有些是可以由一个定常的单值势函数导出的(例如重力),借用流体动力学的术语,我们称它们为非循环力,这类载荷是保守的。其它所有与速度无关的载荷称为循环力。

循环载荷比通常想象的更为普遍。它们对经过同一位置作循环运动的物体做功,因而在功率传递设备中(如曲轴、轴、皮带轮等)起着重大的作用。图 1.19 中假设所示的力 F 刚性地和一刚体相连,因此对一个随物体运动的观察者来说,这个力是常数。从

$A \rightarrow B$ 的平动中, 力做了一定量的功。然而, 如果在平动之前和平动之后分别转动 $\frac{\pi}{2}$ 和 $-\frac{\pi}{2}$, 则最后达到相同的终了位置 而力 没有 作功。因此, F 是循环力。如图 1.20 所示的常力偶矩 矢量 M 同样是循环的。事实上, 围绕 z 轴转动 π , M 做的功是正的。围绕 x 轴和 y 轴相继进行两次转动, 每次转动 π , 最后达到相同的终了位置, 但此时 M 做的功却是零。

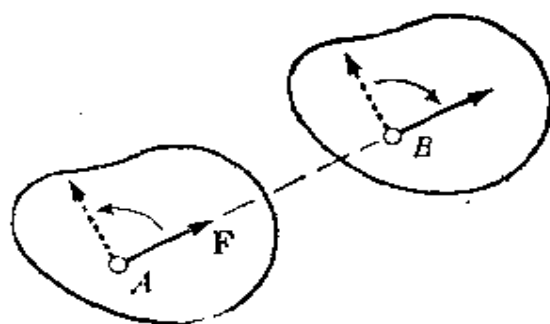


图 1.19 连接在刚体上的力

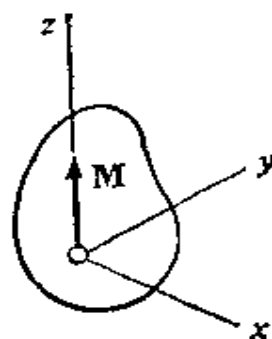


图 1.20 具有常力矩矢量的力偶

如果作用于系统的所有力(载荷和反力)都是保守的, 我们说这是一个保守系统(在表 1.2 和 1.3 中, 在保守力下面加了下划线)。一个保守系统除了无功反力和非循环载荷及陀螺载荷外, 不含有其他力。我们感兴趣的系统总是包含无功反力和非循环载荷。例如, 在欧拉问题中, 所有反力都是无功的, 外载荷 P 以及弹性应力(内载荷)是非循环的。除此以外, 如果还存在陀螺载荷, 我们将说是陀螺保守系统; 如果没有, 则为非陀螺保守系统。

另一方面, 如果一个系统至少包含一个非保守力, 即一个耗散的反力或一个耗散型、循环型或非定常型的载荷, 那么该系统就是非保守的。按照载荷的类型, 我们分别称之为耗散系统、循环系统或非定常系统。非定常系统也称为非自治(heteronomous)系

统,而没有非定常力的系统称为自治系统(autonomous)。

在最一般的情况下,各种类型的力都存在。然而,如果一个系统除了保守力外(这种力实际上总是存在的)只有耗散力,我们称之为纯粹耗散系统。在类似的含义下,我们可以把一个系统称为纯循环或纯非定常系统。

如果系统是保守的,内力与外力的总功就可以用一势能 $V(q_k)$ ($k=1,2,\dots,n$) 来表示。它是由所有的载荷的势能相加得到。与(1.88)及(1.92)相类似,在真实运动中的元功为

$$dW = \sum_{k=1}^n P_k dq_k, \quad (1.93)$$

式中

$$P_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (k=1,2,\dots,n). \quad (1.94)$$

进一步,把虚功原理用于实际运动,就得到形式为

$$\frac{dT}{dt} = L \quad (1.95)$$

的能量定理,式中 T 是系统的动能, L 是总功率。积分(1.95),最后我们得到能量守恒定理

$$T + V = E, \quad (1.96)$$

其中 E 是该系统的总能量,是常数。该定理适用于任一保守系统,不管是陀螺的,还是非陀螺的。

作为第一个例子,图 1.21 给出在自重作用下在均匀旋转的坐标系中运动的质点 m 。显然,重力 $\mathbf{W} = (0, 0, -mg)$ 和离心力 $\mathbf{Z} = m\omega^2(x, y, 0)$ 是非循环的,而哥氏力 $\mathbf{C} = 2m\omega(\dot{y}, -\dot{x}, 0)$ 是陀螺力,因此,该系统,即该质点,是保守的;如果 $\omega \neq 0$, 质点也是有陀螺力的。如果 $\omega = \omega(t)$, \mathbf{Z} 和 \mathbf{C} 成为非定常的,因而质点是非自治的,如果考虑空气阻力,质点是耗散系统。

图 1.22 中在铰链处作用有恢复力矩的双摆可以看作上端固

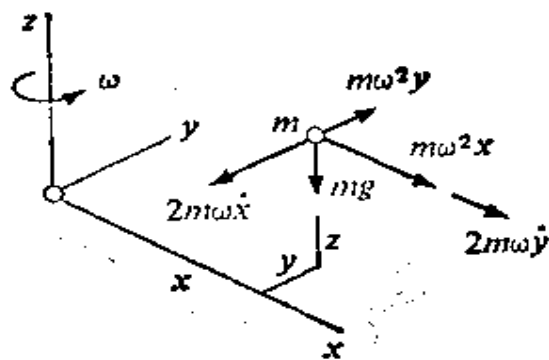


图 1.21 在匀速旋转的坐标系中运动的重质点

支弹性杆的简化模型。只要没有力 F , 该系统是保守的和非陀螺的。若沿第二个摆的轴线作用有力 F , 它就成为纯循环系统, 因为力 F 是图 1.19 中所示的那种类型的力。球摆(图 1.23)如果受常力偶矢量作用(如和图 1.20 有关的讨论), 则它也是循环系统。

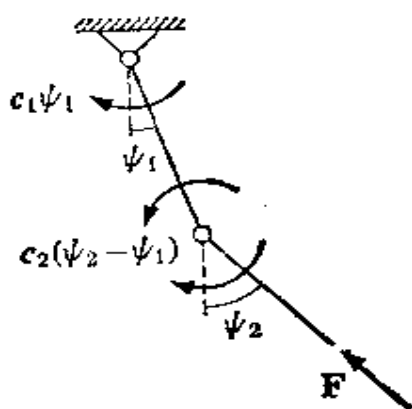


图 1.22 切向受载荷的双摆

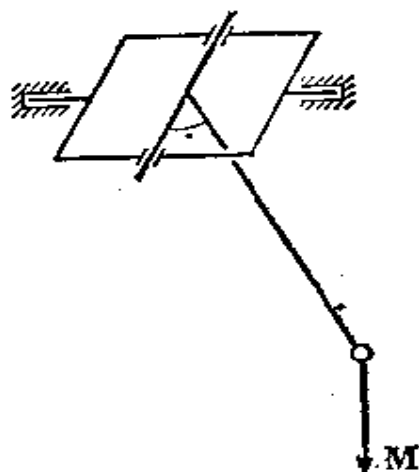

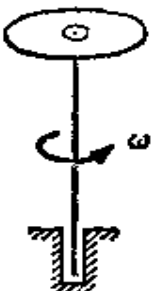
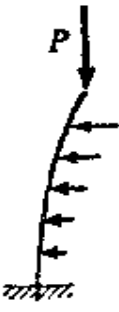




图 1.23 受一常力矩作用的两自由度的摆

在表 1.4 中, 我们再次看到, 力学系统分为保守的或非保守的。前一类又可分为两个子类, 非陀螺保守系统, 或陀螺保守系统。在第二类中, 仅列出最重要的几个子类: 纯耗散的, 纯循环的, 以及纯非定常系统。在每一列中举出的例子说明这五类系统中都

表 1.4 稳定问题的分类

保守系统		非保守系统		
非陀螺的	陀螺的	纯耗散的	纯循环的	纯非定常的
				
欧拉屈曲	临界速度	有阻尼的屈曲	受切向载荷的屈曲	受脉动载荷的屈曲

有实际意义的稳定问题。附带说一下,第二列中举出的临界转速问题,只有在随轴旋转的坐标系中研究,才是陀螺系统。处理在阻尼影响下的屈曲问题(第三列)看来是罕见的,但是一旦认识到稳定概念的动力学性质(§ 1.4)之后,它就是完全正常的。

习题

1. 一辆汽车加速地绕过一个拐角,在车厢内的地板上,一个松脱了的螺母正在滚动,请列举作用在螺母上的各种力(从驾驶员的角度来看)并将它们分类。

§ 1.6 拉格朗日稳定性定理

在一完整系统中,单个坐标 q_i 的增量 δq_i 是一个许可位移。将虚功原理依次用于这些位移增量,得到拉格朗日方程组[86, p.180]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.97)$$

这里广义力 Q_i 是在虚功表达式

$$\delta W = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i \quad (1.98)$$

中 δq_i 的系数。

在保守系统的情况下,大多数教科书认为广义力可以用势能表示为

$$Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.99)$$

这样就得到拉格朗日方程的特殊形式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.100)$$

其中 L 是该系统的所谓动势,即

$$L = T - V. \quad (1.101)$$

实际上,方程(1.99)以及因此而有的(1.100)只适用于非陀螺保守系统。在(1.88)和(1.92)中曾指出,在保守系统的某一真实运动上的实功是

$$dW = \sum_{i=1}^n P_i dq_i \quad \text{式中} \quad P_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i}, \quad (1.102)$$

这里,力与位移属于同一运动,即实际运动。另一方面虚功原理是以虚功表达式(1.98)为基础的,式中 Q_i 是从真实力得到的(也就是作用于真实运动的力),而 δq_i 代表虚位移(它是许可位移,但是任意的)。这里,力和位移则属于不同的运动。因此,第二个方程(1.102)不一定意味着(1.99)。只要作用于该系统的力仅依赖于 q_i 和 t ,那么 Q_i 同 P_i 就的确是一致的,然而只要存在依赖于 \dot{q}_i 的力,两者便是不同的。在保守系统中许可的这样的力只有陀螺力,这些力在实际位移上的功总是零,在一虚位移上所做的功仅偶而

为零。由于它们并不出现在势能中，如果采用(1.100)和(1.101)形式的拉格朗日方程，那么这些力就可能丢失。

设

$$Q_i = P_i + G_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.103)$$

其中 P_i 由(1.102)定义，而广义陀螺力 G_i 从它们的虚功导出，

$$\delta W_g = \sum_{i=1}^n G_i \delta q_i. \quad (1.104)$$

然后，从(1.97)可得出陀螺保守系统的拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = G_i \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.105)$$

作为一个例子，让我们研究图 1.21 的质点在其自重作用下，在匀速转动坐标系中的运动，其动能是

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (1.106)$$

重力和离心力势能是

$$V = -\frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) + m g z, \quad (1.107)$$

因此动能为

$$L = T - V = \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + \omega^2 (x^2 + y^2) - 2 g z]. \quad (1.108)$$

哥氏力是保守力，但又是陀螺力，由它的虚功

$$\delta W_g = 2 m \omega (\dot{y} \delta x - \dot{x} \delta y), \quad (1.109)$$

我们得到广义陀螺力

$$G_x = 2 m \omega \dot{y}, \quad G_y = -2 m \omega \dot{x}, \quad G_z = 0. \quad (1.110)$$

将(1.108)和(1.110)代入拉格朗日方程(1.105)，得到运动微分方程为

$$\ddot{x} - 2 \omega \dot{y} - \omega^2 x = 0, \quad \ddot{y} + 2 \omega \dot{x} - \omega^2 y = 0, \quad \ddot{z} + g = 0. \quad (1.111)$$

它们含有陀螺项，这很容易用牛顿定律来验证。

当用动力学研究平衡位形的稳定性时，拉格朗日方程是一个有力的工具。在 § 1.4 结尾处曾说过，这样做并不总是必要的。事实上第一条捷径是由拉格朗日提出的，并形成为一个一般定理，该定理通常对非陀螺保守系统（即属于表 1.4 中第一子类的系统）建立的，但是实际上它更为普遍[84]，可以适用于仅包含保守力（陀螺的或非陀螺的）和耗散力的一切系统，即适用于表 1.4 中前三个子类的各种系统。

设系统的总势能(1.96) 是坐标 q_k 和广义速度 \dot{q}_k 的一个连续函数，方程(1.83)代表相空间中关于以原点 O 为心、 η 为半径的超球。按照熟知的 Weierstrass 定理，在该球面上能量 E 取最小值 e 。在平稳(scleronomic)系统中，动能 T 是 \dot{q}_k 的正定函数，同时也依赖于 q_k 。如果 V 是 q_k 的正定函数，那么 $E(q_k, \dot{q}_k)$ 在相空间是正定的。如果 η 足够小，便有 $e > 0$ 。既然 E 是一个连续函数，总可以选取初值 q_{k0} 和 \dot{q}_{k0} 使 $E_0 < e$ 。在一个只有保守力和耗散力的系统中， E 不会增长。由此得 $E \leq E_0 < e$ ，相点仍然保持在半径为 η 的超球内，因而平衡是稳定的。这样，我们已证明了下述定理：

拉格朗日定理 如果总能量是连续的，只要势能是正定的，那么只含有保守力和耗散力的系统的平衡就是稳定的。

注意该定理的逆定理不成立。图 1.11 中所示的质点是保守的，只要 $\omega^2 < c_1/m$ ，它的势能(1.55)是正定的，前面曾证明在这个范围内，平衡实际上是稳定的(图 1.2)。然而，当 $\omega^2 > c_2/m$ 时，虽然 V 是负定的，但平衡却再次成为稳定的。

对相当广泛的一些系统，拉格朗日定理是能给出直接结果的唯一的一个普遍原理，且无论系统的方程是否是线性的。为了得到更多的具有普遍性质的结果，较方便的是将运动微分方程线性化。我们曾反复地利用过这种可能性，例如在研究图 1.5 的质点

问题时就这样做过。虽然这样的线性化并非总是合法的（对某些情形，可以证明是不可能的），但是它为更加细致性质的研究提供了一个很好的出发点。事实上，关于由大位移而不是小位移所定义的静力失稳问题，一个给定的系统与它的线性化形式可以具有不同的特性。图 1.3 表明，与线性情况的研究结果相比，静力失稳可能是更无害的。但也有一些反例。另一方面，将给定线性系统的动力失稳所得到的结果加以推广通常是可能的，因为这里的定义是在 $|q_k|$ 和 $|\dot{q}_k|$ 为小量的基础上作出的。事实上，Lyapunov [44], Chetayev [9] 以及其他许多人（见 [45], [10]）曾建立了许多关于非线性系统的稳定性的定理，尽管这些定理不象拉格朗日定理那样一般，但使我们有可能把很多最重要的结果从线性系统转换到非线性系统中去。

因此，看来在稳定性问题的研究中，特别是在下面各章节的结构上，应采用一个合理的计划安排，即首先研究线性系统，然后研究非线性系统。当然，这意味着把我们自己局限于研究那些可以线性化的系统。而且，我们还应记住，对于静力失稳，推广通常是不可能的。

习题

1. 用拉格朗日方程验证图 1.13 所示的质点的微分方程(1.65)。
2. 试证明图 1.24 中在两个预变形弹簧之间的质点的运动不服从单一的线性运动微分方程。

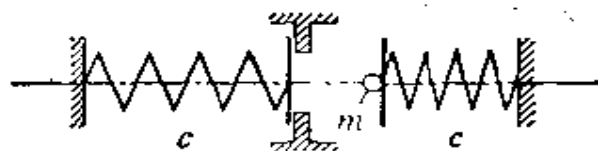


图 1.24 在预压弹簧之间的质点

§ 1.7 线性系统

当一个系统的运动受唯一的一组线性微分方程所控制时, 且每一个自由度有一个方程, 那么该系统就称为线性系统。如果用 \bar{q}_k 表示坐标, 并排除力依赖于 $\ddot{\bar{q}}_k, \dot{\bar{q}}_k, \dots$ 这种不重要的情形(实际上也并不存在), 那么运动微分方程形式为:

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{\bar{q}}_k + g_{ik} \dot{\bar{q}}_k + c_{ik} \bar{q}_k) + h_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.112)$$

式中 m_{ik}, g_{ik}, c_{ik} 以及 h_i 依赖于系统的性质和它的载荷。对于在前面几节中研究过的一些例子, 这一点很容易得到证明。表 1.4 中所列的各类系统, 可以利用式 (1.112) 中的系数的性质加以区分。

如果系数中至少有一个, 或 h_i 中有一个是时间的函数, 那么该系统很显然是非定常的。

从现在起, 我们限于研究各类自治系统, 亦即方程为常系数, 且 h_i 是常数的情形。非齐次方程组 (1.112) 的一般解可以由一个特解和简化的(齐次)方程组

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{\bar{q}}_k + g_{ik} \dot{\bar{q}}_k + c_{ik} \bar{q}_k) = 0 \quad (1.113)$$

的一般解叠加而求得。

(1.112) 的一个特别简单的特解是

$$\bar{q}_i = a_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.114)$$

式中 a_i 是满足线性方程

$$\sum_{k=1}^n c_{ik} \alpha_k = -h_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (1.115)$$

的常数。如果我们要研究(1.112)所描述的系统的平衡位形,就会得到完全同样的关系式(1.114)和(1.115)。因此任何一个平衡位形都与一个形式为(1.114)的特解相对应。进一步,如果引入一组从平衡位形 α_i 度量起的新坐标

$$q_i = \bar{q}_i - \alpha_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (1.116)$$

那么方程组(1.112)化为(1.113)。因此,方程组(1.113)的一般解代表在平衡位形 α_i 附近的运动。

显然,刚才讨论的两个解之间的差别相应于在 §1.4 中介绍过的系统的潜在失稳(静力失稳)和平衡失稳(动力失稳)之间的差别。总有可能这样来选取坐标 \bar{q}_k 使得系统在不受载荷作用时(1.112)中的 h_i 为零,如果在受载荷状态下, h_i 不为零,它们代表在拉格朗日意义下的常广义力,它们和 c_{ik} 一起决定了受载系统的平衡位形。如果在加载过程中 h_i 保持为零,该系统可以称为完善的;如果至少有一个 h_i 不为零,系统就是不完善的(或有缺陷的)。

按照(1.115),完善系统总是具有平凡平衡位形 $\alpha_i = 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 而受载的非完善系统的任何平衡位形都是非平凡的。只要矩阵 c_{ik} 的行列式不为零,完善系统就只有平凡平衡位置;而非完善系统的平衡位形是唯一的和有限的;实际上,如果不完善系统的缺陷很小的话,那么离开平凡平衡位形的位移也是很小的。当 c_{ik} 的行列式为零时,完善系统允许有非平凡平衡位形,这时不完善系统的 α_i (或至少其中的某些)可能成为无穷,因而就发生静力失稳,它可以用平衡法来说明,即以完善系统出现非平凡位形作为标志。

系统在平衡位形附近的运动可用齐次线性方程组(1.113)来描述,按照 §1.4 所给出的定义,只要当 $|q_{i0}|$ 和 $|\dot{q}_{i0}|$ 选取得足够

小时, $|q_i(t)|$ 和 $|\dot{q}_i(t)|$ 仍能保持为任意小, 那么平衡就是稳定的。现在当所有的 $q_i(t)$ 都乘以一个任意常数, (1.113) 的任意一个解仍然是解。因此, 当且仅当 $|q_{i0}|$ 和 $|\dot{q}_{i0}|$ 是有限的条件下, 如果 $[q_i(t)]$ 与 $[\dot{q}_i(t)]$ 仍保持有界, 则平衡是稳定的。

为了求解(1.113), 令

$$q_k = A_k e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (1.117)$$

将它代入(1.113), 我们得到 A_k 的齐次线性方程组

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) A_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.118)$$

平凡解 $A_k = 0 (k=1, 2, \dots, n)$ 相应于平衡状态。当且仅当行列式为零, 即所谓特征方程

$$\det(m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) = 0 \quad (1.119)$$

得以满足时, 才存在非平凡解。如果(1.119)的 $2n$ 个根 $\lambda_j (j=1, 2, \dots, 2n)$ 是不等的实根, 它们就提供形式如(1.117)的 $2n$ 个实的基本解, 通过叠加法, 可得到含有 $2n$ 个常数的一般解, 适当地选择常数, 可使这个一般解适应于任意的初始条件。如果根是不等的复数(至少一部分), 则必以共轭复数 $\lambda = \lambda' \pm i\lambda''$ 的形式成对出现。由(1.118)得到的相应的 A_k 也是形式为 $A'_k \pm iA''_k$ 的共轭复数, 相应的一对基本解(1.117)的形式为

$$q_k = e^{\lambda' t} [(A'_k \pm iA''_k) \cos \lambda'' t - (A''_k \mp iA'_k) \sin \lambda'' t]. \quad (1.120)$$

因为它们的实部和虚部必须满足(1.113), 它们可以用实数的独立的基本解

$$B_k e^{\lambda' t} \cos \lambda'' t \text{ 和 } C_k e^{\lambda' t} \sin \lambda'' t \quad (1.121)$$

来代替。

如果至少有一组初始条件导致无界运动, 即如果至少有一组基本解是无界的, 那就引起动力失稳。因此动力学方法最后归结为研究特征方程的根。按照(1.117)和(1.121), 任何一个根有正

的实部,就意味着失稳。

如果特征方程有重根,方程(1.117)并不总是提供完整的一组基本解。这一情况 Routh[57]曾经讨论过。此时附加的基本解包含有 t 的幂级数乘以指数项,除非 λ 是纯虚数或为零外,它们具有与指数函数本身相同的渐近特性。而任何一个根的实部为零亦意味着失稳。

值得注意的是,刚才所描述的这种动力学方法也能提供静力失稳,因此没有必要用缺陷法作补充研究。上面曾经指出,静力失稳的特征是在完善系统中出现非平凡平衡位形,即(1.113)有一个常数解。这样一个解是 $\lambda=0$ 时的(1.117)形式的解。因此静力失稳对应于特征方程的根为零。

由前面讨论可知,只要特征方程(1.119)的所有根都有负实部,那么线性系统就是稳定的。如果至少有一个根具有正实部,该系统是不稳定的。一个零根标志着静力失稳,也可能是动力失稳。如果任何一个根都不具有正实部,但至少有一对纯虚数根,那么我们就面临着临界状态:该系统可以是稳定的,也可以是不稳定的。

特征方程(1.119)的根是由(1.113)中出现的系数矩阵(m_{ik}), (g_{ik})和(c_{ik})决定的,我们曾指出,这些矩阵反映了我们所关心的各种系统的性质。因此可以预计在 §1.5 中讨论过的各类系统以它们的稳定特性的不同而彼此区别开来。

为了建立各类系统与(1.113)中的系数矩阵之间的联系,我们假设这些微分方程是由拉格朗日方程(1.97)求得的,加速度项 $m_{ik}\ddot{q}_k$ 是由动能导出的,在线性情况下,动能是广义速度的正定二次型

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \quad (1.122)$$

矩阵 (m_{ik}) 是常数矩阵, 它总能加以对称化, 而且实际上必须假设为对称的, 否则加速度项就不会象上面给出的那么简单。最后, 矩阵 (m_{ik}) 还是正定的, 即它具有保证 T 为正定的某些性质, 但这里不作仔细讨论。

现在我们假定系统是保守的和非陀螺的, 那么广义力可由势能 V 得到, 在线性情形下, 势能 V 是坐标的二次型

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k, \quad (1.123)$$

矩阵 (c_{ik}) 是常数阵, 和 (m_{ik}) 同样的理由, 它们也是对称的, 但是不一定是正定的。微分方程 (1.113) 简化为

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.124)$$

如果取消 c_{ik} 的对称条件, (1.124) 也描写了纯循环系统的运动。事实上, 仅依赖于位形的线性广义力的形式为

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n c_{ik} q_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.125)$$

此处矩阵 (c_{ik}) 是常数阵。如果 (c_{ik}) 是非对称的, 它可以分解成对称的与反对称的两部分

$$(c_{ik}) = (c'_{ik}) + (c''_{ik}), \quad (1.126)$$

而

$$c'_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} + c_{ki}), \quad c''_{ik} = \frac{1}{2}(c_{ik} - c_{ki}). \quad (1.127)$$

Q_i 的功是

$$\begin{aligned} dW &= \sum_{i=1}^n Q_i dq_i \\ &= - \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_k dq_i. \end{aligned} \quad (1.128)$$

当且仅当

$$\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} - \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} = c_{ik} - c_{ki} = 2c''_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, \dots, n), \quad (1.129)$$

(1.128)正好是一个全微分,由此可知矩阵 (c''_{ik}) 代表循环力,而非循环力由 (c'_{ik}) 给出。

依赖于运动状态的线性广义力的形式为

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n g_{ik} \dot{q}_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (1.130)$$

因此,一个陀螺或耗散的自治系统的微分方程都是(1.113),其中矩阵 (g_{ik}) 是常数阵, (m_{ik}) 和 (c_{ik}) 具有上面讨论过的性质,如果没有循环力, (c_{ik}) 是对称的。

和(1.126)及(1.127)相类似,矩阵 (g_{ik}) 可分解成对称与反对称两部分,因为 (g''_{ik}) 对功率没有贡献,(1.130)的功率为

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n Q_i \dot{q}_i = - \sum_{i,k=1}^n g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k \\ &= - \sum_{i,k=1}^n g'_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k. \end{aligned} \quad (1.131)$$

由此立即可知,矩阵 (g'_{ik}) 是正定的,代表耗散力,而在真实运动上不做功的陀螺力由 (g''_{ik}) 表示。因此,根据 (g_{ik}) 是不是反对称,来判定一个系统是陀螺系统还是耗散系统。

§ 1.8 非线性系统

在 § 1.6 末尾曾提到,如果非线性系统的微分方程能够线性化,那么由线性系统动力稳定性得到的主要结果可以推广到非线性

性系统。为了便于这一推广，我们阐述几个定理。

在一个可以线性化的系统中，二次型(1.123)可以认为是势能的一级近似，即舍去三次和更高次项而得到的结果。不难看出，对于函数 V ，下列定理是成立的(顺便说一下，对这一类型的任何函数都适用)：

定理 A. 如果近似式(1.123)是确定的(不定的)，那么精确函数 $V(q_k)$ 也是确定的(不定的)。

证明可见 Malkin 的著作 [45, p. 17]。对于半定的情形并无类似的定理。因此，定理 A 的逆定理不成立。有可能近似式(1.123)是半定的，而高阶项使 $V(q_k)$ 的精确表达式成为确定的或不定的。虽然如此，如果近似式(1.123)是带某一符号的半定，那么 $V(q_k)$ 不可能是带相反符号的半定。事实上 Malkin 对于定理 A 作出的证明也证明了下列推论的正确性。

定理 B. 如果近似式(1.123)在原点的一个任意小的邻域内取正(负)值，那么其精确函数 $V(q_k)$ 也取正(负)值。

从这类考虑出发，Lyapunov[44]曾证明了一系列的稳定和不稳定的定理，这些定理的主体提供了研究非线性问题的有力手段。在下面某些章节中我们需要的一些结果是：

定理 C. 在线性化系统中，如果特征方程(1.119)的所有的根都具有负实部，那么实际的(非线性)系统的平衡是稳定的。

定理 D. 在线性化的系统中，如果特征方程至少有一个根具有正实部，那么实际系统的平衡是不稳定的。

这些定理的证明见[45, p. 53]。再则，对于临界状态，即特征方程有实部为零的根，但没有实部为正的根，类似的定理不存在。此时高阶项可以使平衡成为稳定的或不稳定的。

第二章 非陀螺保守系统

在结构中发生的稳定问题大多数是非陀螺保守型的，因此，在本章中我们限于讨论非陀螺保守系统。

§ 2.1 概 述

按照表 1.2 和 1.3 (§ 1.5) 给出的定义，非陀螺保守系统只含有无功反力和非循环载荷，在线性情况下，能量(1.122)和(1.123)为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k. \quad (2.1)$$

而运动微分方程(1.124)为

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.2)$$

式中矩阵 (m_{ik}) 和 (c_{ik}) 是对称常数阵，而且前者还是正定的。

由熟知的代数定理(例如见[61])可知，总可以找到坐标 q_k 的一个实线性变换：

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^n x_{ik} q_k \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.3)$$

使得如(2.1)的两个二次型(其中之一是正定的)，变成所谓正则形式(即只含有纯平方项)，

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i \dot{\varphi}_i^2, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i^2, \quad (2.4)$$

此处, m_i 是正的, φ_i 称为系统的正则坐标。把拉格朗日方程(1.100)和(1.101)用于(2.4)式的能量式, 我们得到用正则坐标表示的运动微分方程

$$m_i \ddot{\varphi}_i + c_i \varphi_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.5)$$

这里, 对于不同坐标的各微分方程是相互独立的。

从原来的坐标 q_i 变换为正则坐标 φ_i 有利于讨论稳定性问题。设

$$\varphi_i = A_i e^{\lambda_i t} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (2.6)$$

我们立即得到

$$\lambda_i^2 = -\frac{c_i}{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (2.7)$$

很清楚, 讨论可以在由(2.7)得到的大小相等、符号相反的根 λ_i 与 $-\lambda_i$ 的基础上进行。顺便说一下, 可以证明它们同用(1.119)式, 从(1.124)得到特征方程的根是一致的。当 $c_i < 0$, 它们分别是正根和负根。当 $c_i > 0$, 它们是共轭虚数。对后一情况(尽管在 § 1.7 的意义下是临界的, 但是无害的)相应的基本解(2.6)是简谐振动, 因而是有界的。在前一情形下, 基本解是实变量的指数函数, 其中之一是无界的。如果 $c_i = 0$, (2.5)的基本解是 $\varphi_i = A_i$ 和 $\varphi_i = B_i t$, 前者代表无数个非平凡平衡位形, 而第二个则是无界的。因为一般解由各正则坐标的基本解叠加而得, 那么就有如下情况: 只要所有的 c_i 都是正的(见图 2.1, 图中小方块表示 λ_i^2 , 而圆圈表示 λ_i), 那么平衡位形 $\varphi_i = 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) 是稳定的。当至少有一个 c_i 是负时, 它是不稳定的。只要 c_i 中有一个为零, 系统是动力和静力不稳定的。

因为不等式 $c_i > 0$ ($i=1, 2, \dots, n$) 是 V 为正定的充分必要条件, 所以拉格朗日定理就可以写成逆定理形式, 亦即, 它可以用

下面的定理来代替:

定理 1. 只要势能是正定的, 那么一个非陀螺保守线性系统的平衡就是稳定的。

在 § 1.2 中曾指出, 势能是变形能 $V^{(1)}$ 与外载荷势能 $V^{(e)}$ 的和, 即

$$V = V^{(1)} + V^{(e)}, \quad (2.8)$$

除了以大变形为特征的有些例外情况外 [其中之一是由 Haringx [20, 21] 和另外一些人 [79] (也可见 [5]) 所解决的螺旋弹簧的屈曲问题], (2.8) 可以写成如下形式:

$$V = V^{(1)} - PU, \quad (2.9)$$

式中 $V^{(1)}$ 是不依赖于载荷的, $P \geq 0$ 是一个表示载荷强度的参数。这一类型的问题将被叫做简单稳定性问题, 相应的系统叫做简单系统。

在不受载状态是稳定的那一类稳定性问题中, $V^{(1)}(q_k)$ 是正定的, $U(q_k)$ 至少能取正值。正则坐标依赖于 P , 而且一般来说 $V^{(1)}(\varphi_k)$ 和 $U(\varphi_k)$ 将不采用它们的正则形式。然而, 在一个简单的稳定问题中, 按照 (2.9) 与 (2.1), 势能可以写成:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_{ik} - Pb_{ik}) q_i q_k, \quad (2.10)$$

式中矩阵 (a_{ik}) 是正定的, 而 (b_{ik}) 或者是不定的, 或者是正定的 (半定的)。对于 $P = 0$, V 是正定的, 因此系统是稳定的。对于充分大的 P 值, V 不再是正定的, 因此系统是不稳定的。从稳定到不稳定的转变发生在某一确定的载荷值 $P = P_1$ 。在图 2.1 中, 至少有一对原来在虚轴上的根 $\lambda_i, -\lambda_i$, 随着 P 增加而向原点移动。当 $P = P_1$ 时, 这一对根在原点相遇; 当 $P > P_1$ 时, 其中的一个根沿正实轴前移, 而另一根沿负实轴移动。根的移动不一定随着 P 而单调变化 [87]。然而, 对于载荷参数的某些确定值 $P_2 > P_1, P_3 > P_2, \dots$ 另外的几对根可能通过原点。因为对于 $P \geq P_1$ 的任何值,

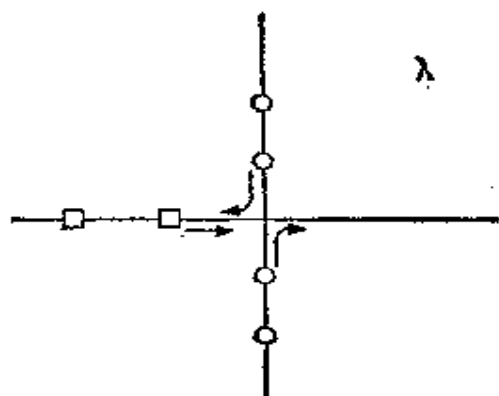


图 2.1 (2.6)式中的特征指数

平衡都是不稳定的，这就没有意义。

在图 2.2 中,取载荷 P 为竖直轴。 $P \geq P_1$ 的不稳定区用交叉阴影线表示。从定理 1 或从图 2.2 得到:

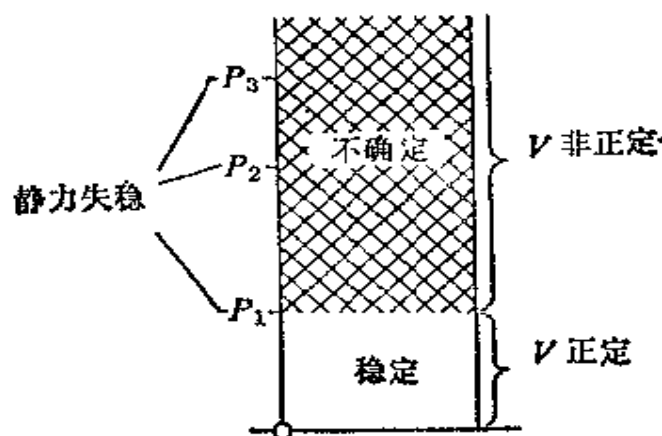


图 2.2 简单的非陀螺保守线性系统的稳定性

定理 2, 在非陀螺保守类型的线性稳定问题中, 所有的临界载荷不仅可以用动力学方法, 而且也可以用能量法求得。如果这是一个简单问题, 则对于任一载荷参数 $P < P_1$, 该系统是稳定的, 而对任意的 $P \geq P_1$ 系统是不稳定的。这里 P_1 是使势能不正定的载荷 P 的最小值。平衡法和缺陷法也给出 P_1 以及其它值 $P_2 > P_1, P_3$

$> P_2 \dots$, 然而这些值是没有意义的。

由此可见, 在这类问题中, 即使不能由平衡法和缺陷法得出任何载荷 $P > P_1$ 是临界的结论, 但是 § 1.2 中介绍过的所有方法都能用来求出 P_1 。由于大多数经典问题是纯非陀螺的, 这一事实也就解释了过去用静力法取得很大成功的原因。

前面的讨论仅局限于线性系统。然而, 如果非线性系统可以线性化, 那么这些结果很容易推广到非线性系统。

只要势能二次近似式(2.10)是正定的, 由于 λ^2 是负的, 那么特征方程的所有的根 λ_i 是虚数(图 2.1)。因此, 在李雅布诺夫意义上这种情况确是临界的 (§ 1.8)。然而, 按照定理 A (§ 1.8), $V(q_i)$ 的精确表达式是正定的, 由拉格朗日定理 (§ 1.6) 可以推出平衡是稳定的。当二次近似式在平衡位形任意小的邻域内允许取负值时, 按照定理 B (§ 1.8) 精确表达式亦取负值。进一步, 如特征方程至少存在一个正根, 那么由定理 D (§ 1.8) 可知平衡是不稳定的。最后, 如果二次近似式是半正定的, 至少有一个根是零, 那么就会发生静力失稳。在此情况下, 线性系统是危险的。但是按照 § 1.6 末所说过的, 对于非线性系统这不一定是危险的, 因此我们得到:

定理 3. 只要非陀螺保守系统的势能的二次近似式(2.10)是正定的, 那么该系统的平衡位形是稳定的。当二次近似式是半正定时, 那么系统可能是稳定的, 也可能是不稳定的; 近似式为其他任何情况, 系统都是不稳定的。如果将定理 2 用于线性化的系统, 它仍能给出正确的稳定区, 但它们的边界可能属于稳定区, 也可能属于不稳定区。

在下面几节中我们将研究非陀螺保守系统的几个例子。

§ 2.2 剪力对屈曲的影响

按照表 1.4, 欧拉屈曲是非陀螺保守问题, 如果考虑剪切, 则由(1.10)给出的与表 1.1 有关的结果需要作某些(微小的)修正。

图 2.3 所示是承受弯矩 M 与剪力 Q 作用的均质棱柱梁的一小段, 由 M 引起的挠曲曲线的曲率是

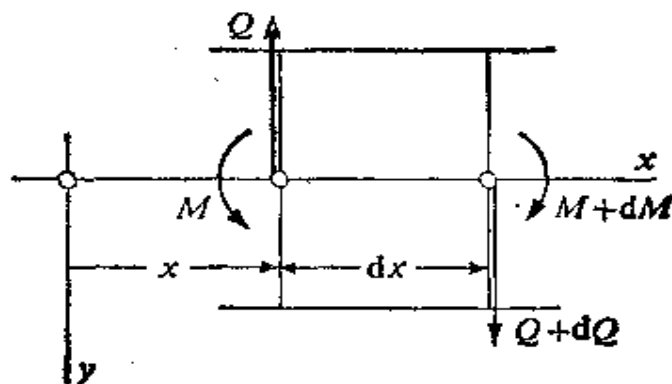


图 2.3 棱柱形梁的单元

$$\kappa_1 = \frac{M}{\alpha}, \quad (2.11)$$

式中 α 表示抗弯刚度, 是常数。为了简单起见, 如果将这一小段当作一个微单元来处理, 剪力引起的剪切角为

$$\gamma = \frac{Q}{\beta}, \quad (2.12)$$

式中 β 表示剪切刚度常数, γ 随 x 的变化(图 2.4)等价于一个附加曲率

$$\kappa_2 = \frac{Q}{\beta} \quad (2.13)$$

所以挠度曲线的微分方程为

$$y'' = \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{M}{\alpha} + \frac{Q'}{\beta}. \quad (2.14)$$

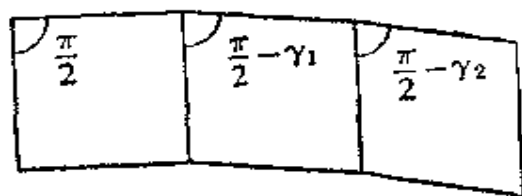


图 2.4 剪切引起的变形

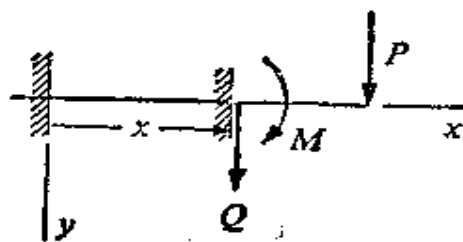


图 2.5 自由端受载的悬臂梁

(2.14)中的最后一项通常是被略去的,但是该项即使是在简单的弯曲问题中,如自由端受载荷的悬臂梁(图 2.5)中,也会引起微小的修正。这里 $M(x) = P(l-x)$, $Q(x) = P$, 因此

$$y'' = \frac{P}{\alpha}(l-x). \quad (2.15)$$

因为 Q 是常数,剪力并不修改挠度曲线的曲率,但是两个边界条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{Q(0)}{\beta} = \frac{P}{\beta} \quad (2.16)$$

中的第二个同 Q 有关。(2.15)和(2.16)的解为

$$y = \frac{P}{6\alpha}x^2(3l-x) + \frac{P}{\beta}x. \quad (2.17)$$

显然,在这里所研究的近似解中,剪切的影响是使悬臂梁绕截面 $x=0$ 处的形心转动了 P/β 角。实际上,自由端的挠度是

$$f = \frac{Pl^3}{3\alpha} + \frac{Pl}{\beta}. \quad (2.18)$$

如果载荷不是作用在梁端,而是均匀地分布在悬臂梁上(如本节末的习题 1),那么剪力使曲率减小,但是使挠度增加。

为了从简单的弯曲问题过渡到稳定问题,我们再次考虑 § 1.2 的表 1.1 中的欧拉情形 5,并同时考虑剪切影响。由于该问题仍是非陀螺保守的,可以采用平衡法。弯矩和剪力(图 2.6)分别为 $M(x) = -Py$ 和 $Q(x) = Py'$, 因而挠度曲线满足微分方程

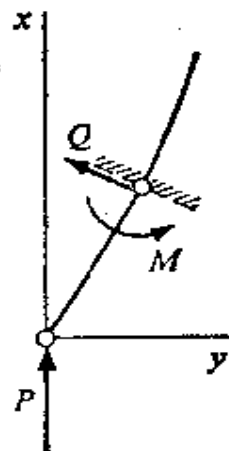
或

$$y'' = -\frac{P}{\alpha}y + \frac{P}{\beta}y'' \quad (2.19)$$

$$y'' + \kappa^2 y = 0, \text{ 式中 } \kappa^2 = \frac{P/\alpha}{1 - P/\beta}. \quad (2.20)$$

除了 κ^2 的含义有修改外, 微分方程与(1.21)相同, 边界条件仍然由(1.16)给出。按照(1.25), 最小特征值为 $\kappa_1 = \pi/l$, 或者利用(2.20)的第二式, 写成载荷 P 的形式

$$P_1 = \frac{\alpha \kappa_1^2}{1 + (\alpha/\beta) \kappa_1^2} = \frac{\pi^2 \alpha}{l^2 + \pi^2 \alpha/\beta}. \quad (2.21)$$



与(1.20)比较可见, 最小临界载荷(2.21)(超过它柱子是不稳定的)由于剪力而降低。

对表 1.1 (§ 1.2) 的例 1 到例 4 各类情况, 除 κ 的含义修改外, 挠度曲线的微分方程不受剪切的影响。在例 2 与例 3 中处理方法同例 5 一样, 因为剪力 Q 不出现在端部条件中。在例 1 中, 一些端部条件含有 Q , 然而在一阶屈曲形态中 Q 却为零。显然在这

各类情况中, 屈曲载荷由于剪力影响而降低。在例 4 中, 要作新的计算才能求得 P_1 。

习题

1. 验证均匀受载悬臂梁的曲率为

$$y'' = \frac{P}{2l\alpha}(l-x)^2 - \frac{P}{l\beta}, \quad (2.22)$$

最大挠度为

$$f = \frac{Pl^3}{8\alpha} + \frac{Pl}{2\beta}. \quad (2.23)$$

2. 如果考虑剪力, 验证欧拉问题例 1 中的屈曲载荷为

$$P_1 = \frac{4\pi^2 a/l^2}{1 + 4\pi^2(a/\beta)/l^2} \quad (2.24)$$

3. 考虑剪力, 验证欧拉问题例 4 的特征方程是

$$\operatorname{tg} \kappa l = \frac{\beta + \alpha \kappa^2}{\beta + 2\alpha \kappa^2} \kappa l. \quad (2.25)$$

把它与不考虑剪力影响时的特征方程作一比较, 说明在此情形下, 剪力的影响也降低了屈曲载荷。

§ 2.3 拉伸屈曲

很容易看出, 如果用适当的方式加载, 杆子在拉伸时也会发生屈曲。只要载荷的量值和方向不变, 该问题仍然是保守的非陀螺的。我们用平衡法来研究一个例子, 并忽略剪力的影响。

图 2.7 为一根杆, 其支承条件同欧拉问题例 5 一样。轴向载荷 P 加在长为 a 的刚性手把的末端, 此刚性手把指向下, 并与杆的挠度曲线上端的切线共线。这里因为有一个水平反力 Q_0 , 挠度曲线的微分方程为

$$\alpha y'' = P(y + \alpha y'_1) + Q_0(l - x) \quad (2.26)$$

或

$$y'' - \kappa^2 y = \kappa^2 \alpha y'_1 + \frac{Q_0}{P} \kappa^2 (l - x), \quad \kappa^2 = \frac{P}{\alpha}. \quad (2.27)$$

其一般解是

$$y = A \operatorname{ch} \kappa x + B \operatorname{sh} \kappa x - \frac{Q_0}{P} (l - x) - \alpha y'_1. \quad (2.28)$$

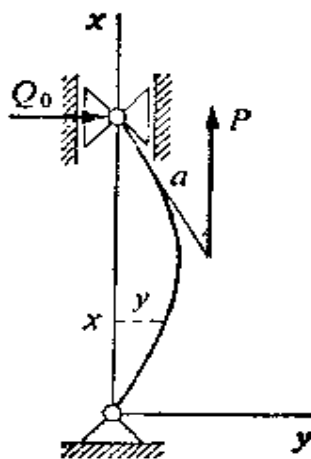


图 2.7 拉伸屈曲

常数 A 、 B 、 Q_0/P 和 y'_i 由边界条件

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'(l) = y'_i, \quad (2.29)$$

和对于下端铰的力矩平衡条件

$$P a y'_i + Q_0 l = 0 \quad (2.30)$$

来决定。事实上，(2.28)到(2.30)各式可给出线性齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} A - \frac{Q_0}{P} l - y'_i a &= 0 \\ A \operatorname{ch} \kappa l + B \operatorname{sh} \kappa l - y'_i a &= 0, \\ A \kappa \operatorname{sh} \kappa l + B \kappa \operatorname{ch} \kappa l + \frac{Q_0}{P} - y'_i &= 0, \\ \frac{Q_0}{P} l + y'_i a &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

它的特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -l & -a \\ \operatorname{ch} \kappa l & \operatorname{sh} \kappa l & 0 & -a \\ \kappa \operatorname{sh} \kappa l & \kappa \operatorname{ch} \kappa l & 1 & -1 \\ 0 & 0 & l & a \end{vmatrix} = 0. \quad (2.32)$$

将最后一行加到第一行上，然后按第一行展开，我们得到

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sh} \kappa l & 0 & -a \\ \kappa \operatorname{ch} \kappa l & 1 & -l \\ 0 & l & a \end{vmatrix} = 0, \quad (2.33)$$

也就是

$$(l + a) \operatorname{sh} \kappa l - a \kappa l \operatorname{ch} \kappa l = 0 \quad (2.34)$$

或

$$\operatorname{th} \kappa l = \frac{\kappa l}{1 + l/a}. \quad (2.35)$$

图 2.8 是超越方程(2.35)的图解，它给出单一的特征值 κ_1 。屈曲载荷依赖于 a 、 l ，还有 α 。对于 $a \ll l$ ，(2.35)式右边 κl 的系数是小量。在此情形下， $\operatorname{th} \kappa_1 l$ 接近于 1，因此有

$$\kappa_1 l \cong 1 + \frac{l}{a} \cong \frac{l}{a} \quad \text{以及} \quad P_1 = \alpha \kappa_1^2 \cong \frac{\alpha}{a^2}. \quad (2.36)$$

Grammel[18]曾讨论过这类问题(也可见[5])。按照相应的欧拉问题, Grammel 解的是两端带有手把的情况 5, 而上面讨论的是一端有手把的情况 5。在情况 1 与情况 2 中, 显然不会发生屈曲, 其他各类情况都包含在本节末的习题中。

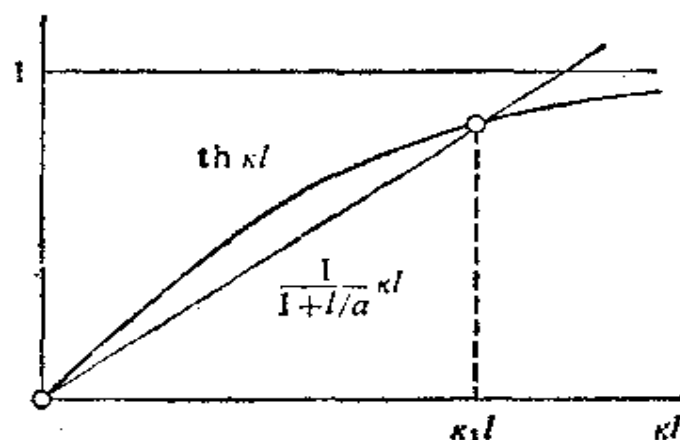


图 2.8 图 2.7 问题的图解

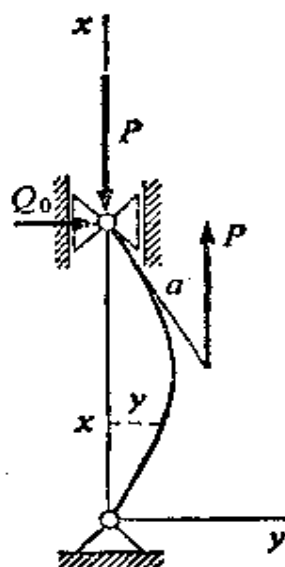


图 2.9 力偶引起的屈曲

图 2.9 所示为图 2.7 的问题与相应的欧拉问题的组合。总载荷相当于一个力偶, 它的矩正比于受载端挠度曲线的斜率, 挠度曲线的微分方程为

$$\alpha y'' = P \alpha y'_i + Q_0(l - x). \quad (2.37)$$

它的一般解为

$$y = -\frac{Q_0}{\alpha} \frac{x^2}{6} + \left(\frac{P}{\alpha} \alpha y'_i + \frac{Q_0}{\alpha} l \right) \frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2, \quad (2.38)$$

应满足边界条件

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y'_i(l) = y'_i \quad (2.39)$$

以及平衡条件

$$P a y'_1 + Q_0 l = 0. \quad (2.40)$$

由此得到 $c_2 = 0$ 及 $y'_1, Q_0/\alpha$ 和 c_1 应满足的线性齐次方程组

$$\left. \begin{aligned} y'_1 \frac{P a}{\alpha} \frac{l^2}{2} + \frac{Q_0}{\alpha} \frac{l^3}{3} + c_1 l &= 0, \\ y'_1 \left(\frac{P a}{\alpha} l - 1 \right) + \frac{Q_0}{\alpha} \frac{l^2}{2} + c_1 &= 0, \\ y'_1 \frac{P a}{\alpha} + \frac{Q_0}{\alpha} l &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.41)$$

它的特征方程是

$$\begin{vmatrix} \frac{P a}{\alpha} \frac{l}{2} & \frac{l^2}{3} & 1 \\ \frac{P a}{\alpha} l - 1 & \frac{l^2}{2} & 1 \\ \frac{P a}{\alpha} & l & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.42)$$

它只有一个代表屈曲载荷的解

$$P_1 = \frac{3 \alpha}{l a}. \quad (2.43)$$

Grammel[18]曾解决过相应于欧拉情况 5 的这一问 题 以及其它许多类似的问题。此外情况 1 和情况 2 是一般常见的。Herrmann 和 Armenakas[24]曾研究过一个多少有点类似的问题,即在表面受到剪力的杆的屈曲问题。

习题

1. 建立图 2.10 所示杆的屈曲的特征方程,验证近似公式

$$P_1 = \alpha \kappa_1^2 = \frac{\alpha}{a^2}, \quad (2.44)$$

对 $a \ll l$ 是适用的。

2. 用题 1 的结果求图 2.11 杆的 P_1 。
3. 验证从图 2.12 到 2.14 所示各类情形的屈曲载荷分别为

$$P_1 = \frac{a}{la}, \quad P_1 = \frac{4a}{la}, \quad P_1 = \frac{2a}{la}. \quad (2.45)$$

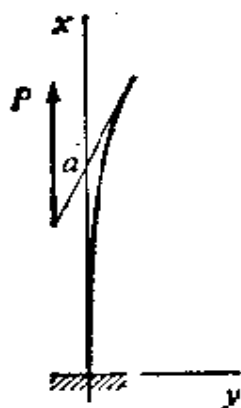


图 2.10 拉伸屈曲,情况 3

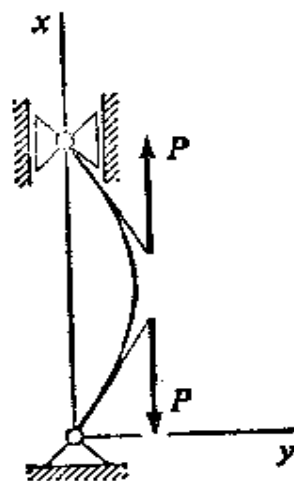


图 2.11 拉伸屈曲,情况 5

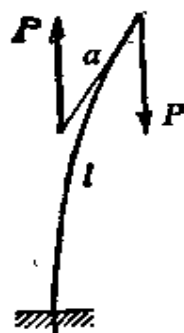


图 2.12 由力偶引起的屈曲,情况 3

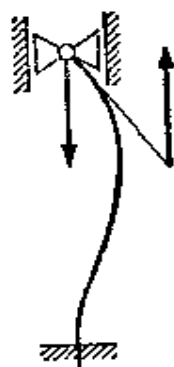


图 2.13 由力偶引起的屈曲,情况 4

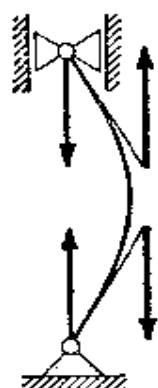


图 2.14 由两个力偶引起的屈曲,情况 5

§ 2.4 板的屈曲

为了了解上述的研究方法如何可以应用于更加复杂的结构,让我们来研究一矩形薄板。

对于柱子,内力和外力的势能分别由(1.32)和(1.34)给出,它们可写成

$$V^{(i)} = \frac{1}{2} \int_0^l \alpha \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx, \quad V^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l N \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx, \quad (2.46)$$

式中 α 是抗弯刚度, $N = -P$ 是法向力。容易证明这些表达式也适合于 α 、 N 是 x 的函数的情形。当 α 和 N 是常数时,如果应用(2.46)两式能量之和,再用挠曲曲线的许可位形,由能量法得到微分方程(1.40)和动力边界条件,在例 5 中该边界条件由(1.41)给出。

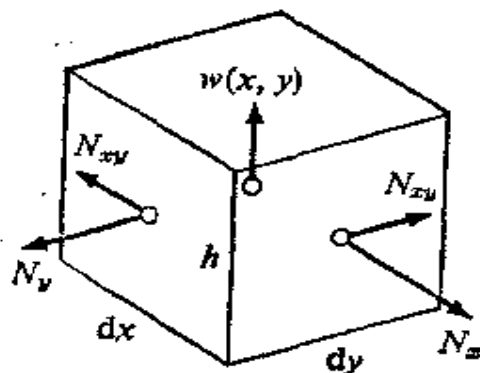


图 2.15 板的单元

图 2.15 所示为一薄板单元,在板的中面内沿着各边界受到载荷的作用。应力状态是平面的,沿板厚 h 积分 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 求得应力合力 N_x , N_y 及 N_{xy} 。当板在边界力的作用下屈曲时,令 $w(x, y)$ 为中面的垂直方向位移。根据铁木辛柯和 Gere[67, p. 337 和 340] 板的变形能由面积分给出

$$V^{(i)} = \frac{1}{2} \iint_F D \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (2.47)$$

式中 ν 为泊桑比, 常数

$$D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{\alpha}{1-\nu^2} \quad (2.48)$$

为单位长度板的抗弯刚度, E 为扬氏模量。外载荷的势能为

$$V^{(e)} = \frac{1}{2} \iint_{\Gamma} \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy. \quad (2.49)$$

(2.47), (2.49) 与 (2.46) 两式显然是相似的。利用 (2.47) 与 (2.49), 能量法给出等厚度板的中面的偏微分方程

$$\begin{aligned} D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \\ = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (2.50)$$

和动力边界条件。对于固支边 $x=0$, 边界条件是

$$w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad (x=0). \quad (2.51)$$

如果该边是简支的, 我们得到

$$w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad (x=0). \quad (2.52)$$

对自由边的情况可得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad (x=0). \quad (2.53)$$

对于四边简支, 沿 b 边均匀受载的矩形板的特殊情形, 坐标系可取成如图 2.16。那么微分方程 (2.50) 就简化为

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (2.54)$$

边界条件成为

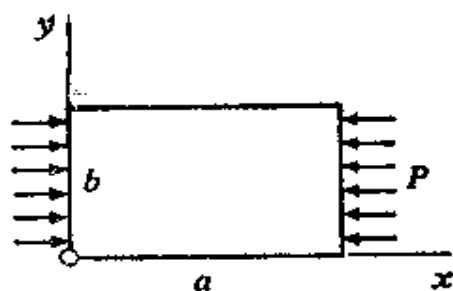


图 2.16 沿一对边受载的简支板

$$\left. \begin{aligned} w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= 0 & (x=0, x=a), \\ w=0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0 & (y=0, y=b). \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

该边界条件下的典型解为：

$$w(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (2.56)$$

式中 m 与 n 是整数。按照傅氏级数的理论，板的最一般的许可位形由(2.56)式对一切正整数 m 、 n 求和所组成。将(2.56)代入(2.54)，我们得到

$$\pi^2 D \left(\frac{m^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + \frac{n^4}{b^4} \right) - P \frac{m^2}{a^2} = 0. \quad (2.57)$$

如果 P 是任意的，那么一般说正整数 m, n 不能满足该方程。由此可见，非平凡平衡位形只有对于下列类型的载荷才存在：

$$P_{mn} = \pi^2 D \frac{a^2}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (m, n \text{ 为正整数}), \quad (2.58)$$

这些载荷就是该问题的特征值。相应的表达式(2.56)是特征函数。根据平衡法，屈曲载荷用最小的特征值来表示。

对于一给定的 $m, n=1$ 给出最小的特征值

$$P_{m1} = \frac{\pi^2 D}{a^2} \left(m + \frac{1}{m} \frac{a^2}{b^2} \right)^2. \quad (2.59)$$

按照(2.56)，当屈曲发生时， x 为常数的截面成一个半波形状。当

$b \rightarrow \infty$ 时, 载荷(2.59)趋向于 a 边为自由的板条的屈曲载荷 $m^2 \pi^2 D / a^2$ 。此值可由相应的欧拉载荷(1.26)将 a 换成 D (l 换成 a) 而得到。由此可见含有 b 的项表示简支边 a 的加强效应。

将(2.59)写成

$$P_{m1} = \frac{\pi^2 D}{b^2} k_m, \quad (2.60)$$

式中

$$k_m = \left(\frac{\mu}{m} - \frac{m}{\mu} \right)^2, \quad \mu = \frac{a}{b}. \quad (2.61)$$

在图 2.17 中画出了函数 $k_m(\mu)$ 。对于一个给定的比值 μ , 这些曲

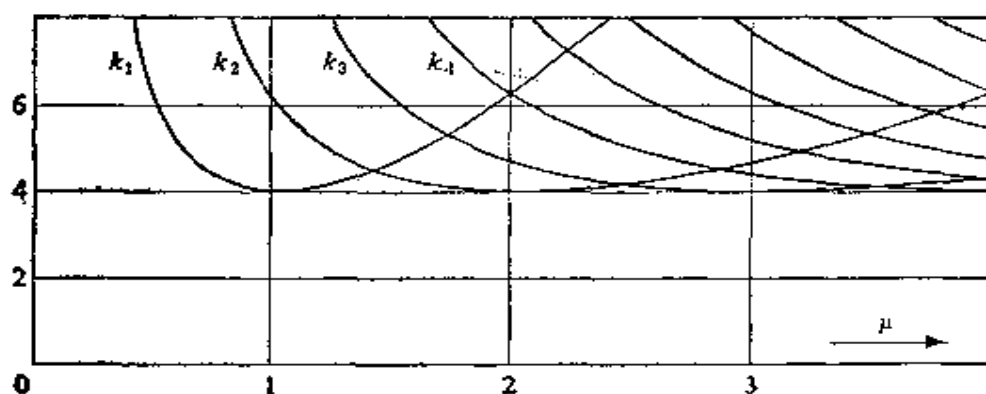


图 2.17 决定图 2.16 的板的屈曲载荷的函数 $k_m(\mu)$

线的最低值就确定了屈曲载荷。当 $\mu = m$ 时, 每个函数 $k_m(\mu)$ 都有一个最小值 $k_m = 4$ 。 m 与 $m+1$ 的两条曲线相交于

$$\mu = m^{\frac{1}{2}} (m+1)^{\frac{1}{2}}.$$

直到 $\mu = \sqrt{2}$, 即对于宽板, 方板以及不太窄的板来说, 屈曲载荷是 P_{11} 。此时, 屈曲发生时在纵方向也是一个半波。对于 $\mu > \sqrt{2}$, 也即对于窄的板, 屈曲载荷为 P_{21}, P_{31}, \dots , 而且屈曲发生时的半

波数在增加,对于方板($b=a$,因而 $\mu=1$)屈曲载荷是 $P_{11}=4\pi^2 D/a^2$
 $\alpha^2=39.4784\cdots \frac{D}{a^2}$ 。

习题:

1. 对于 α 和 N 是 x 的函数情形下,验证表达式(2.46)。
2. 讨论四边简支,沿 x 方向均匀受压力 P ,沿 y 方向均匀受压力 Q 的方板的屈曲。

§ 2.5 瑞 雷 原 理

前几节所以选用这些例子是因为它们简单。实际上,许多问题的求解是相当困难的。在这样的情况下,人们将去寻找近似解。获得这样近似解的最有效方法是以能量法为基础的。为了阐述这些方法,并将其结果与精确解作比较,我们再一次研究 § 2.4 中讨论过的简支矩形板的问题。

受载板的势能具有(2.9)的形式,即

$$V=V^{(1)}-PU, \quad (2.62)$$

式中 $V^{(1)}$ 是变形能(2.47)。 $P>0$ 是总载荷。按照(2.49), U 的形式为:

$$U=\frac{1}{2}\iint\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx dy. \quad (2.63)$$

在 § 2.1 的意义下该问题是简单的。能量法的基础(2.63)是比较所有许可位形的势能 $V[w(x,y)]$,而这些可能位形 $w(x,y)$ 是连续的,具有对 x, y 的连续的一阶偏导数,并满足运动边界条件

$$w=0 \quad (x=0, x=a, y=0, y=b). \quad (2.64)$$

由于 $V^{(1)}$ 和 U 都是正定的,因而对于充分小的 P 值 V 也是正定的,但是当 P 充分大时, V 不再是正定的。屈曲载荷标志着这样的

一个过渡：对于 $P = P_1$ ，存在着一个非平凡位形 $w_1(x, y)$ ，使得 $V = 0$ ，但是仍然没有任何位形 $w(x, y)$ ，使 $V < 0$ 。由此可见，对于 $w_1(x, y)$ 来说， V 是驻值，也即 P_1 是 P 的最小值，在此载荷下，变分问题

$$\delta(V^{(1)} - PU) = 0, \quad (2.65)$$

有一个非平凡解 $w(x, y)$ ，式中 P 限于一些固定值， $w(x, y)$ 限于许可位形。此外还有

$$V^{(1)}[w_1] - P_1 U[w_1] = 0. \quad (2.66)$$

可以重新解释一下方程(2.65)和(2.66)。如果在附加条件 $U = 1$ 把 P 作为拉格朗日乘子，来求 $V^{(1)}$ 的最小值，我们又可得到(2.65)。它的解是 $w_1(x, y)$ ，而且由于(2.66)和附加条件，乘子的相应值 P_1 是 V 的最小值。如果函数 $w(x, y)$ 乘以常数 λ ，它仍然是许可的。与此同时 $V^{(1)}(w)$ 和 $U(w)$ 的表达式按 λ^2 的比例增加。因此，是求满足附加条件 $U = 1$ 之下 $V^{(1)}$ 的最小值，还是直接求 $V^{(1)}/U$ 的最小值，这是无关紧要的。比例

$$R[w] = \frac{V^{(1)}[w]}{U[w]}, \quad (2.67)$$

称为瑞雷商(Rayleigh's quotient)[55]。由(2.66)推知

$$P_1 = R[w_1], \quad (2.68)$$

即屈曲载荷可以作为许可函数的瑞雷商的最小值来求得。这一结论叫做瑞雷原理。

在 § 2.4 中曾提过，用通常的途径求解变分问题时，人们得到中面的微分方程和动力边界条件。这证实了，对于这里研究的这类问题，用平衡法是合法的。用这儿产生的一种纯粹形式的方法进行研究，的确可以得到所有特征值和特征函数。然而，如果记住涉及 $V^{(1)}$ 或 R 的最小值的基本问题，那么平衡法与能量法完全是等价的。

很清楚，虽然选择矩形板作为例子，但是上面的论证并不限于

矩形板。实际上瑞雷原理适合于任何非陀螺保守系统(采用适当的提法甚至可适用于用能量法能解决的更为一般的系统)。对于任意一个许可函数 w , 计算得的商(2.67)是屈曲载荷的上界

$$R[w] \geq P_1. \quad (2.69)$$

一般说来, 可以证明如果人们能够成功地选择 w , 使得它同特征函数 w_1 没有太大的不同, 那么该上界也是 P_1 的一个良好的近似值。

对于 § 2.4 中考虑的四边简支, 一对边上承受均匀载荷的方板($a=b$), 函数

$$w(x, y) = cx(a-x)y(a-y) \quad (2.70)$$

是一个许可位形, 它可以认为是第一特征函数的近似式, 式中 c 是常数。于是相应的函数 $V^{(1)}$ 和 U 为

$$V^{(1)} = \frac{Dc^2}{2} \iint_F \left\{ \begin{aligned} &4[y^2(a-y)^2 + 2xy(a-x)(a-y) \\ &\quad + x^2(a-x)^2] \\ &- 2(1-\nu)[4xy(a-x)(a-y) \\ &\quad - (a-2x)^2(a-2y)^2] \end{aligned} \right\} dx dy \quad (2.71)$$

和

$$U = \frac{c^2}{2} \iint_F (a-2x)^2 y^2 (a-y)^2 dx dy. \quad (2.72)$$

积分后有

$$V^{(1)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5} Dc^2 a^6, \quad U = \frac{1}{180} c^2 a^8. \quad (2.73)$$

因此

$$R = \frac{V^{(1)}}{U} = 44 \frac{D}{a^2} \quad (2.74)$$

是 P_{11} 的上界。同精确值 $P_{11} = 4\pi^2 D/a^2 = 39.4784 \cdots D/a^2$ 相

比, 其误差近似为 11.5%。

习题:

1. 通过计算核对(2.71)至(2.73)各式。

§ 2.6 里茨法与迦辽金法

如果象前节所述那样使用瑞雷原理, 所得到的第一阶特征值的近似值的质量如何是一个技巧问题, 因为它完全依赖于近似函数的选择, 它既要简单又要充分接近第一阶特征函数。里茨[56]提出了一个改进的技术。它基于下列思想, 人们可以不采用按方便而选择的单一函数来形成瑞雷商, 而代之以采用任意多个许可函数 w_k 的线性组合

$$w = \sum c_k w_k. \quad (2.75)$$

当然, 任何这样的组合本身也是一个许可函数, 由它算出第一阶特征值的上界, 然后, 通过适当地选择系数, 使瑞雷商, 也就是上界值为最小值。

为了说明这个过程, 我们不考虑板, 而考虑欧拉柱情况3 (表 1.1 § 1.2), 因为这样就不会让复杂的计算把思路搞糊涂。势能 $V = V^{(1)} - PU$ 由(1.35)给出。运动边界条件为

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad (2.76)$$

而 $V[y(x)]$ 的变分具有(1.36)给出的形式。经分部积分得

$$\int_0^l (\alpha y'''' + P y'') \eta dx + \alpha y'' \eta' \Big|_0^l - (\alpha y''' + P y') \eta \Big|_0^l = 0, \quad (2.77)$$

式中 $\eta(x) = \delta y(x)$, 并已利用了(2.76)。因为 $\eta(x)$ 是一个任意许可函数, (2.77)给出微分方程

$$\alpha y'''' + P y'' = 0, \quad (2.78)$$

和动力端部条件

$$y''(l) = \alpha y'''(l) + P y'(l) = 0, \quad (2.79)$$

此式表示自由端弯矩为零, 而剪力为 P 在端截面上的投影。屈曲载荷是由 (2.78)(2.76) 及 (2.79) 所确定的特征值问题的最小值, 它的精确值为

$$P_1 = \frac{\pi^2 \alpha}{4 l^2} = 2.4674 \cdots \frac{\alpha}{l^2}. \quad (2.80)$$

现在让我们先把精确解搁置一边, 而去求 P_1 的近似解。第一步, 采用一个简单的许可函数来计算瑞雷商

$$R(y) = \frac{V^{(1)}[y]}{U[y]}, \quad (2.81)$$

这一许可函数例如取

$$y(x) = c x^2, \quad (2.82)$$

积分 $V^{(1)}$ 与 U 得

$$V^{(1)} = 2 \alpha c^2 l, \quad U = \frac{2}{3} c^2 l^3. \quad (2.83)$$

由 (2.81) 得到 (2.80) 的上限为

$$R = 3 \frac{\alpha}{l^2}, \quad (2.84)$$

它比精确值大 21.6%。

如果根据里茨法采用两个许可函数 $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$ 的线性组合, 我们可以得到更加精确的结果。取

$$y(x) = c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) \quad (2.85)$$

而

$$y^{(1)}(x) = x^2, \quad y^{(2)}(x) = x^3. \quad (2.86)$$

为了使 $R[c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x)]$ 最小, 我们可以令 $\partial R / \partial c_1 = 0$ 和 $\partial R / \partial c_2 = 0$ 。也可以回到原始问题 (2.65), 要求

$$\frac{\partial}{\partial c_1}(V^{(1)} - PU) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial c_2}(V^{(1)} - PU) = 0, \quad (2.87)$$

式中 $V^{(1)}$ 和 U 由 (2.85) 算出。(2.87) 的意义是显然的：对于所有许可函数的变分问题 (2.65) 被限制于形式为 (2.85) 的试探函数，因而变分问题变为通常的极值问题。由于所考虑的函数的种类受到限制，我们要找的最小值只能偏高。这一点也证明了由 (2.87) 获得的 P 的最小值是屈曲载荷 P_1 的上界。

由 (1.35) 和 (2.85)，将 $V = V^{(1)} - PU$ 和试探函数 y 代入 (2.87)，我们得到

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l (\alpha y'' y^{(1)''} - P y' y^{(1)'}) dx &= 0, \\ \int_0^l (\alpha y'' y^{(2)''} - P y' y^{(2)'}) dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.88)$$

式中 y 仍由 (2.85) 给出。对于 (2.86) 可迅速计算积分，于是便得到，

$$\left. \begin{aligned} \left(4\alpha - \frac{4}{3}Pl^2 \right) c_1 + \left(6\alpha - \frac{3}{2}Pl^2 \right) l c_2 &= 0, \\ \left(6\alpha - \frac{3}{2}Pl^2 \right) c_1 + \left(12\alpha - \frac{9}{5}Pl^2 \right) l c_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.89)$$

这是 c_1 和 c_2 的齐次线性方程组。因为对平凡解 $c_1 = c_2 = 0$ 不感兴趣，我们令其行列式

$$\left(4\alpha - \frac{4}{3}Pl^2 \right) \left(12\alpha - \frac{9}{5}Pl^2 \right) - \left(6\alpha - \frac{3}{2}Pl^2 \right)^2 \quad (2.90)$$

等于零。这样我们得到二次方程

$$\frac{P^2 l^4}{\alpha^2} - \frac{104}{3} \frac{Pl^2}{\alpha} + 80 = 0, \quad (2.91)$$

它的根是

$$P^{(1)} = 2.486 \frac{\alpha}{l^2}, \quad P^{(2)} = 32.181 \frac{\alpha}{l^2}. \quad (2.92)$$

前一个根是我们寻求的近似值。事实上，它是一个上界，只超过真

值 0.77%。可以证明 $P^{(2)}$ (P_1 的另一个上界) 是第二个特征值 P_2 的一个近似值。进而, 通过扩展(2.85), 也即使它包含更多的许可函数, 就可以改善这些结果。

利用(2.88)的分部积分, 类似于从(1.36)导出(2.77)所作的推导, 我们可得到

$$\int_0^l (\alpha y'''' + P y'') y^{(1)} dx + \alpha y'' y^{(1)'} \Big|_0^l - (\alpha y'' + P y') y^{(1)} \Big|_0^l = 0 \quad (2.93)$$

和类似的一个包含 $y^{(2)}$ 而不含 $y^{(1)}$ 的关系式。如果我们假定的函数 $y^{(1)}$ 和 $y^{(2)}$ 不仅满足运动边界条件(2.76)而且也满足动力端部条件(2.79), 则上式中最后两项为零。我们有

$$\int_0^l (\alpha y'''' + P y'') y^{(1)} dx = 0, \quad \int_0^l (\alpha y'''' + P y'') y^{(2)} dx = 0, \quad (2.94)$$

式中 y 仍由(2.85)给出。

这最后两式提出了对里茨法的一种修正方法。为了解释这个由迦辽金(Galerkin[17])提出的修正方法, 我们继续讨论现在的例子, 并再用由 $y^{(1)}(x) \cdots$ 组成的(2.85)型的线性组合来近似第一阶特征函数。但与里茨法不同, 现在要求函数 $y^{(1)} \cdots$ 满足所有的边界条件(2.76)与(2.79)。一般说来, 这样的组合将不满足该问题的微分方程(2.78)。然而, 依次用 $y^{(1)} \cdots$ 去乘由函数(2.85)建立的微分方程的左边, 并在 0 至 l 区间上积分这些乘积, 我们便得到一系列表达式。适当选择系数 c_1, \cdots 使这些式子为零。这个过程的意义是很清楚的: (2.94)式的左边可以解释为用权函数 $y^{(1)} \cdots$ 构成的微分表达式 $\alpha y'''' + P y''$ 的加权平均值, 而该过程的含意是, 即使微分表达式本身不为零, 至少要使其加权平均值为零以使得微分方程在平均意义上得到满足。

Leipholz[41]曾指出, 从更一般的观点来看, 里茨法可以看作

是迦辽金法的一种特殊情况。对于非陀螺保守系统，如果试探函数满足所有的边界条件，则这两种方法是等价的。对于这里讨论的特例，这一点已在前面指出过。Grammel[5]曾给出一个一般的证明。如能熟练地选择试探函数，一般说里茨法能给出临界载荷的良好的近似值。根据瑞雷原理，它的理由是很显然的，因为瑞雷商对第一阶特征函数取驻值，该函数可以变动得相当大而不使该商值明显的变化。

迦辽金法涉及的公式体系比里茨法简单，但另一方面，迦辽金法要求更加仔细地加工试探函数。

习题

1. 应用里茨法分析欧拉问题的例 5。采用试探函数为(2.85)，取 $y^{(1)} = x(l-x)$ 和 $y^{(2)} = x^2(l-x)^2$ 。把所得的近似值，与屈曲载荷的精确值相比较，说明误差为 0.51%。

2. 试用里茨法证明受自重 W 作用，下端固支的均质棱柱形竖直柱的临界长度平方的上界为 $7.887 \alpha/W$ ，更精确的值[67, p 103]为 $7.837 \alpha/W$ 。

§ 2.7 质量分布

前几节讨论的方法都是以能量法为基础的。还有其它可以求到近似值的一些方法，其中之一是利用一个自由度较少的系统来近似原系统。例如一个弹性柱可以用一串由具有弹性恢复力矩的铰连接的刚性元件(图 2.18)来代替。如果该问题是保守的和非陀螺的，那么这样一种简化模型可以用 § 1.2 中所介绍的任何一种方法来处理。

动力法与静力法之间有这样一個基本差别：即系统的运动与质量分布有关，而质量并不出现在静力法中。但是，根据定理 2

和 3 (§ 2.1), 对非陀螺保守系统静力法是合法的, 因此它们必然会给出正确的结果, 换言之, 我们有

定理 4. 对一个非陀螺保守系统, 无论系统是线性的或是可以线性化的, 临界载荷与质量分布无关。

尽管有这条定理, 但在用简化模型代替真实系统的情况下,

应该对质量分布予以特别注意, 至少在用动力法时应该注意。有这样的情况, 尽管简化模型以足够的精度给出了最小临界载荷, 但是对载荷 $P > P_1$, 该模型却给出错误的关于稳定性的总貌。定理 4 是建立在假设动能是正定的基础上的, 在真实系统中这一条件总是满足的, 但是如果简化系统选择不当, 无意中会破坏这一条件。

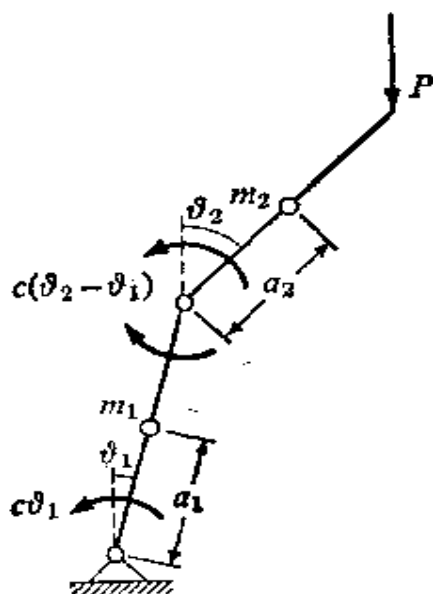


图 2.18 受压柱的模型

图 2.18 的模型表示欧拉情况 3 的一个柱子。l 为两刚性杆件的长度, 集中质量为 m_1 、 m_2 , 它们在各杆件上的位置 a_1 、 a_2 是任意的。如果重力的影响和所有高于二阶的项均予略去, 那么系统的能量为

$$T = \frac{1}{2} [m_1 a_1^2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 (l \dot{\theta}_1 + a_2 \dot{\theta}_2)^2] \quad (2.95)$$

和

$$V = \frac{c}{2} [\theta_1^2 + (\theta_2 - \theta_1)^2] - \frac{Pl}{2} (\theta_1^2 + \theta_2^2), \quad (2.96)$$

用(1.100)形式的拉格朗日法, 我们得到运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\theta}_2 + (2c - Pl) \theta_1 - c \theta_2 &= 0, \\ m_2 l a_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 a_2^2 \ddot{\theta}_2 - c \theta_1 + (c - Pl) \theta_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

令

$$\theta_1 = Ae^{\lambda t}, \quad \theta_2 = Be^{\lambda t}, \quad (2.98)$$

我们得到

$$\left. \begin{aligned} [(m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \lambda^2 + 2c - Pl] A + (m_2 l a_2 \lambda^2 - c) B &= 0, \\ (m_2 l a_2 \lambda^2 - c) A + (m_2 a_2^2 \lambda^2 + c - Pl) B &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.99)$$

它的特征方程

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0 \quad (2.100)$$

是 λ^2 的二次方程，其系数是

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2, \\ p_2 &= [m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_2 (l + a_2)^2] c - [m_1 a_1^2 + m_2 (l^2 + a_2^2)] Pl, \\ p_4 &= c^2 - 3cPl + P^2 l^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

两个铰选取同一弹簧常数 c 意味着我们把柱子的抗弯刚度看作常数。为了近似于质量均匀分布的情况，可以取 $m_1 = m_2 = m/2$, $a_1 = a_2 = l/2$ ，或者 $m_1 = \frac{m}{2}$, $m_2 = \frac{m}{4}$, $a_1 = a_2 = l$ 。前者表示质量 m 集中在两刚性杆的中心，后者表示集中于杆件的末端。可以预计在这两种情形下，最小临界载荷 P_1 是相同的，它是欧拉屈曲载荷的近似值。

另一种选择是 $m_1 = em$, $m_2 = m$, $a_1 = a_2 = l$ ，此处 $e > 0$ 。这相当于总质量为 $(1+e)m$ 。因为与质量分布没有关系，可以预料， P_1 值与上面讨论过的两种情况相同。而且，甚至当 $e \rightarrow 0$ 时，也就是总质量越来越集中于其自由端时， P_1 也必定与 e 无关。系数(2.101)为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= m^2 l^4 \varepsilon, \\ p_2 &= m l^2 [(5 + \varepsilon)c - (2 + \varepsilon)Pl], \\ p_4 &= c^2 - 3cPl + P^2 l^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

我们来考虑 ε 是小量的情形。将(2.100)的判别式 $\Delta = p_2^2 - 4p_0p_4$ 对于 ε 线性化, 得到:

$$\Delta = m^2 l^4 [(25 + 6\varepsilon)c^2 - (20 + 2\varepsilon)cPl + 4P^2 l^2]. \quad (2.103)$$

系数 p_0 总是正的。对于充分小的 P 值, p_2 和 p_4 和 Δ 也总是正的。因此根 λ_1^2 与 λ_2^2 是负的, 该系统是稳定的。在我们的近似式中, 判别式的零点是

$$Pl = \left(\frac{10 + \varepsilon}{4} \pm i \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2} \right) c \quad (\Delta = 0). \quad (2.104)$$

因为等式右面是复数, 所以不可能有实数 P 满足(2.104)。由此可见 λ_1^2 与 λ_2^2 总是不等的两个实数, 图 2.19 画出了 p_2 、 p_4 与 Pl/c 的关系, p_2 的一个零点为

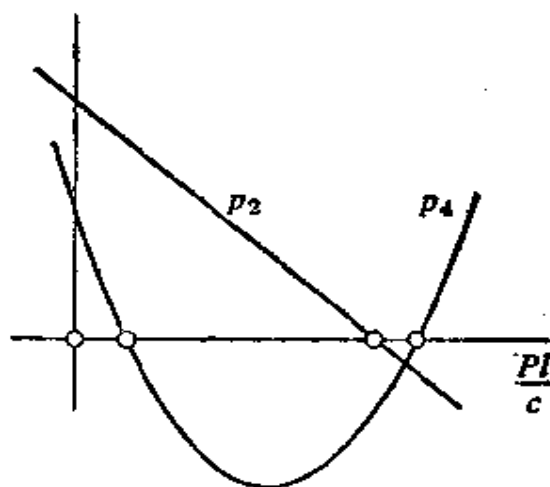


图 2.19 决定图 2.18 系统稳定性的函数

$$Pl = \frac{5 + \varepsilon}{2 + \varepsilon} c \quad (p_2 = 0); \quad (2.105)$$

p_4 的两个零点为

$$Pl = \frac{1}{2} (3 \pm \sqrt{5}) c \quad (p_4 = 0). \quad (2.106)$$

p_2 的零点在 p_4 的两个零点之间。因此，对于

$$P < P_1 = (3 - \sqrt{5}) \frac{c}{2l}, \quad (2.107)$$

p_2 与 p_4 都是正的： $\lambda_1^2 < 0$ ， $\lambda_2^2 < 0$ ，因而平凡平衡位形是稳定的。另一方面，如 $P \geq P_1$ ，我们或者有 $p_4 \leq 0$ ，因而 $\lambda_1^2 \leq 0$ ， $\lambda_2^2 \geq 0$ ，或者有 $p_4 > 0$ ， $p_2 < 0$ ，因而 $\lambda_1^2 > 0$ ， $\lambda_2^2 > 0$ 。无论哪一种情形，平衡位形都是不稳定的。因此，按照定理 2 (§ 2.1) 其结果是：对于任意小的正数 ε ，有单一的一个稳定区 $P < P_1$ 和单一的一个不稳区 $P \geq P_1$ 。

代替令 ε 趋于零，我们可以一开始就令 $\varepsilon = 0$ ，也就是把全部质量集中于系统的上端。在此情况下，(2.102) 简化为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 0, \\ p_2 &= ml^2(5c - 2Pl), \\ p_4 &= c^2 - 3cPl + P^2l^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.108)$$

此时特征方程(2.100)只是 λ^2 的一次方程。这意味着四个基本解丢失了二个，而且有

$$\lambda^2 = -\frac{p_4}{p_2}, \quad (2.109)$$

这里等式右边总是实数。根据图 2.19，对于 $P < P_1$ ，根 λ^2 是负的，而且再次落在 p_2 的零点与 p_4 的第二个零点之间。由(2.105)与(2.106)可知，现在有两个稳定区

$$P < P_1 = (3 - \sqrt{5}) \frac{c}{2l}, \quad \frac{5c}{2l} < P < (3 + \sqrt{5}) \frac{c}{2l}, \quad (2.110)$$

还有两个不稳定区

$$P_1 \leq P \leq \frac{5c}{2l}, \quad P \geq (3 + \sqrt{5}) \frac{c}{2l}. \quad (2.111)$$

这里所考虑的系统是简单的，最后的某些结果——或更准确地说，第二个稳定区(2.110)的存在——是不符合定理 2 的。这个

矛盾可以用下列事实来解释：由于假设 $e=0$ ，丢失了两个基本解，其中之一在(2.110)的第二个区间内是不稳定的。特征方程的降阶具有另外的特性[87]，这很容易用(2.99)式，或者考虑图2.18所示系统的可能运动来确认：由于 $e=0$ ，矩阵 (m_{ik}) 失去了它的正定性，而成为半正定。但是 § 2.1 的这些定理是在假设 (m_{ik}) 是正定的条件下建立起来的。

由此例可见，每当要用一个更加简单的模型来代替原系统时，必须注意模型质量的集中要保持矩阵 (m_{ik}) 原来的确定性。

习题

1. 验证图 2.18 所示系统的最小临界载荷为

$$P = (3 - \sqrt{5}) \frac{c}{2l}, \quad (2.112)$$

其质量分布为

$$\left. \begin{array}{ll} (a) \quad m_1 = m_2 = m/2, & a_1 = a_2 = l/2, \\ (b) \quad m_1 = m/2 & m_2 = m/4 \quad a_1 = a_2 = l. \end{array} \right\} \quad (2.113)$$

把模型的弹簧常数 c 与柱的抗弯刚度 α 这样联系起来，使得作用在自由端的力偶引起的柱的和模型的最大挠度相等。然后将这里的结果与情况 3 欧拉屈曲载荷进行比较。

第三章 陀螺保守系统

按照 § 1.5 所给的定义, 特别表 1.2 及表 1.3 的分类, 陀螺保守型系统既有陀螺载荷也有无功反力和非循环载荷。

§ 3.1 概 述

在线性的情况下, 非循环载荷的动能(1.122)和势能(1.123)分别为

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n m_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n c_{ik} q_i q_k. \quad (3.1)$$

广义陀螺力的形式为(1.130), 即

$$Q_i = - \sum_{k=1}^n g_{ik} \dot{q}_k \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.2)$$

运动的微分方程(1.113)为

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.3)$$

式中矩阵 (m_{ik}) 和 (c_{ik}) 是对称常数阵, (m_{ik}) 是正定的, (g_{ik}) 是反对称常数阵。令

$$q_k = A_k e^{i\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (3.4)$$

由(3.3)我们得到方程组(1.118), 即

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) A_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (3.5)$$

除去相应于平衡状态的平凡解 $A_1 = A_2 = \dots = A_n = 0$, 最后我们

得到特征方程(1.119)

$$\det(m_{ik}\lambda^2 + g_{ik}\lambda + c_{ik}) = 0. \quad (3.6)$$

一个行列式行与列相互交换后,其值是不变的。由于 (m_{ik}) 、 (c_{ik}) 的对称性及 (g_{ik}) 的反对称性,在(3.6)式中行列互换等于改变 λ 的符号。因此,这些根仍然是成对地出现,即 λ_i 与 $-\lambda_i$,只要不是纯虚数或零根外,每对根中必有一根的实部为正。

表 3.1 非陀螺与陀螺保守线性系统的比较

系统 \ V	正 定	非 正 定
保守, 非陀螺的	稳 定	不稳定
保守, 陀螺的	稳 定	?

按照拉格朗日定理(§ 1.6),只要非循环载荷的势能是正定的,那么保守系统就是稳定的。该定理对线性系统和非线性系统,有或没有陀螺力都是正确的。事实上,只要总势能是连续的,该定理就适用。

在§ 2.1中,我们已看到,在没有陀螺力的情况下,如果系统是线性的,那么,只要势能非正定,系统就是不稳定的。这些情况已在表 3.1 中说明,由此得到:

定理5. 一个保守的线性系统,不会由于陀螺力而变成不稳定。

另一方面,一个本来不稳定的系统,当附加有陀螺力后,没有理由必须依然是不稳定的。事实上,我们已经有过一个反例。在§ 1.3中我们研究过一个有不等抗弯刚度的轴的简化模型。它是在转动坐标系的两轴方向受到牵引恢复力的一个质点(图 1.11)。很明显(图 1.12),虽然 V 是非正定的,但是平衡却可以是稳定的。因此,用陀螺力使系统稳定是可能的。Thomson 和 Tait [65]最先详细研究了这一影响。

如果系统在§ 2.1所定义的意义下是简单的,那么势能(3.1)

为形式(2.10)

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^n (a_{ik} - P b_{ik}) q_i q_k. \quad (3.7)$$

式中 (a_{ik}) 是正定的, (b_{ik}) 或者是正定的(半正定)或者是不定的。在这类问题中,常常会碰到载荷参数 P 代表离心力,因而它可以理解为角速度的平方 ω^2 。对于小的 P 值来说,式(3.7)是正定的,因而系统是稳定的。 P 值大到一定数值时, V 不再是正定的。这个转变发生在某一确定的 $P = P_1$ 。此值的特征是至少出现一个使 V 成为驻值的非平凡位形 $q_k (k=1, 2, \dots, n)$ 。由于当系统静止时,陀螺力为零,这是一个相应于 λ 的零根的非平凡平衡位形。

在 λ 平面内,一开始情况与图2.1所描述的很类似。 P 值很小时,所有的根 $\lambda_i, -\lambda_i$ 都位于虚轴上。随着 P 增加,至少有一对根向原点移动,而在 $P = P_1$ 时到达原点。但是与非陀螺系统的情况相反,这些根并没有被限制在坐标轴上,而且当这对根离开原点以后,也不一定就离开虚轴。

例如,对于图1.11所示问题的特殊情况 $c_1 = c_2 = c$, (1.60)取的形式为:

$$\lambda_{1,2}^2 = -\left(\sqrt{\frac{c}{m}} \pm \omega\right)^2 \quad (3.8)$$

由此可见, $\lambda_1^2 < 0$, 且 λ_2^2 也沿负实轴运动, 在 $|\omega| = \sqrt{\frac{c}{m}}$ 时它到达原点, $|\omega|$ 值更大时则又离开原点。这样特征方程的四个根(3.8)在通过原点之后仍然都留在虚轴上。

最后的这一结果表明这样的事实, 即一般说来, 对于 $P > P_1$, 该系统不一定是稳定的。然而, 对于 P_1 , 以及可能对载荷参数的其他值 $P_2 > P_1, P_3 > P_2 \dots$ (简言之, 当一对根通过原点时)会发生静力失稳。很明显, 陀螺力的存在对这一情况不发生影响。

在图3.1中纵坐标取为载荷 P , 用“×”号表示在 $P_1, P_2 \dots$

等点发生静力失稳,在 $P_1, P_2 \cdots$ 之间的未定区,用斜线表示。

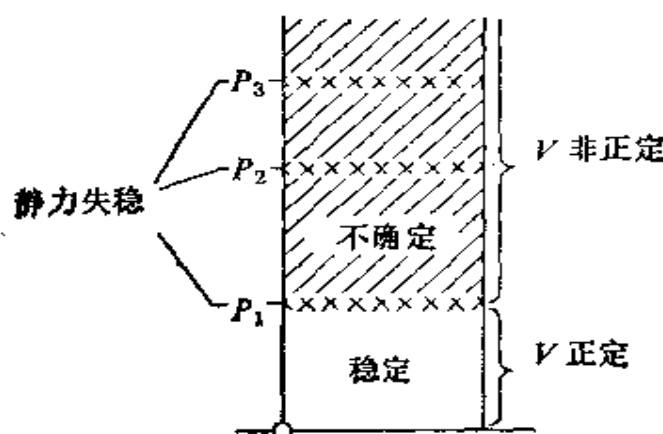


图 3.1 简单的陀螺保守系统的稳定性

由上面的讨论我们得到下述定理：

定理 6. 在陀螺保守型的线性稳定问题中，动力法能单独给出所有的临界载荷。如果系统是简单的，对任意载荷参数 $P < P_1$ ，系统是稳定的，其中 P_1 是用能量法求得的使势能不再为正定的各 P 值中的最小值。平衡法和缺陷法能给出 P_1 以及其他的可能的静力失稳点 $P_2 > P_1, P_3 > P_2 \cdots$ 。任何大于 P_1 的载荷可能是也可能不是临界载荷。

在这类问题中可见，静力法可用以求得 $P_1, P_2 \cdots$ 值，但是对于载荷参数 $P \geq P_1$ ，静力法并没有给出任何关于稳定性的征兆。由于陀螺力的促进稳定的作用，静力失稳可能是唯一存在的不稳定形式。例如图 1.1 中的问题，当 $c_1 = c_2$ 时就是如此。

在非线性情形中，拉格朗日定理仍然有效。由此可见，只要其势能是正定的，那么一个陀螺保守系统是稳定的。对于使势能不再正定的 P 值来说，那么系统的行为比起线性情况下更加不易断定，因为在非线性情况下，静力失稳的发生可以证明是无害的。

§ 3.2 临界角速度

在 § 1.3 中曾经提过，图 1.11 的质点可以作为安装在以角速

度 ω (ω 假定是正的) 转动的轴上的圆盘的模型。 $c_1 = c_2$ 相应于轴具有单一抗弯刚度, 其特点是具有单一的临界角速度 ω_1 ; 而 $c_1 < c_2$ 则表示轴具有不等的抗弯刚度, 其特点是有一临界角速度的区间 $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ 。

本节和下面几节, 将把这个问题在不同方面加以一般化。在原则上讲, 此问题可以在静止坐标系中或在随轴一起转动的坐标系中加以研究。前一情形要运用振动理论的共振概念; 后一情形则是陀螺类系统的稳定问题。

先从第一个方面将问题一般化, 我们来考虑一带有 n 个圆盘的具有单一抗弯刚度的轴, 这些圆盘的质量为 m_1, m_2, \dots, m_n , 圆盘所在截面为 x_1, x_2, \dots, x_n , 而轴自身的质量予以忽略。图 3.2 表示质点 m_i , 轴在 x_i 处的挠度为 y_i 和 z_i 。由轴传递给质点的恢复力

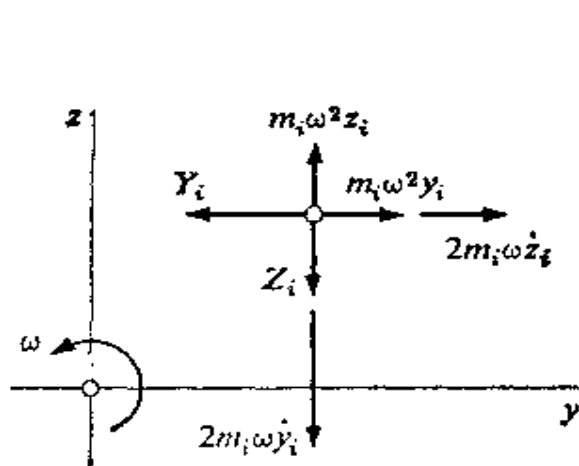


图 3.2 代表安装在匀速转轴上圆盘的质点

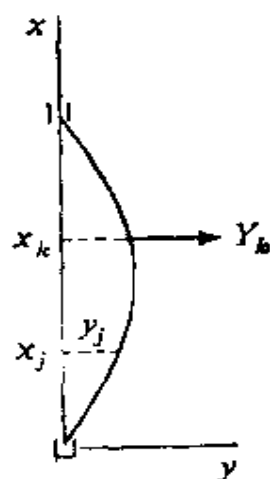


图 3.3 静止轴的挠度

为 Y_i 和 Z_i 。如果坐标系以轴的角速度 ω 转动, 那么还须加上离心力 $m_i \omega^2 \cdot (y_i, z_i)$ 和哥氏力 $2 m_i \omega \cdot (\dot{z}_i, -\dot{y}_i)$ 。

为了计算恢复力, 让我们来研究受到力 Y_k 作用的一根静止轴。利用对 j 与 k 截面的影响系数 a_{jk} , 挠度 y_j 可以写成

$$y_j = \sum_k a_{jk} Y_k \quad (j=1, 2, \dots, n) \quad (3.9)$$

这里及本节中所有的求和式是对所有截面 x_1, x_2, \dots, x_n 而言的。

由卡氏定理 (Castigliano's theorem), 我们有

$$y_i = \frac{\partial V^{(1)}}{\partial Y_i}, \quad (3.10)$$

式中 $V^{(1)}$ 是写成 Y_i 的函数形式的变形能。于是得到

$$\frac{\partial y_j}{\partial Y_k} = \frac{\partial y_k}{\partial Y_j}, \quad (3.11)$$

或者由 (3.9) 得到 Maxwell 对称关系

$$a_{ik} = a_{ki}. \quad (3.12)$$

由 (3.9) 与 (3.10) 得到

$$V^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_{j,k} a_{jk} Y_j Y_k. \quad (3.13)$$

由于必定能从 (3.9) 解出 Y_i , 所以 a_{jk} 的行列式 Δ 不为零。(3.9) 的解为

$$Y_i = \sum_k c_{ik} y_k, \quad c_{ik} = \frac{A_{ki}}{\Delta}, \quad (3.14)$$

式中 A_{ki} 是 a_{ki} 的代数余子式, 还有

$$c_{ik} = c_{ki}. \quad (3.15)$$

由 (3.13)、(3.14) 及恒等式

$$\sum_j a_{jk} A_{pi} = \Delta \delta_{kp} = \begin{cases} \Delta (k=p) \\ 0 (k \neq p) \end{cases}. \quad (3.16)$$

我们进一步得到

$$\left. \begin{aligned} V^{(1)} &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,p,q} a_{jk} c_{ip} c_{kq} y_p y_q, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k,p,q} a_{jk} \frac{A_{pi}}{\Delta} c_{kq} y_p y_q = \frac{1}{2} \sum_{p,q} c_{pq} y_p y_q. \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

由于不旋转轴的平凡平衡位形是稳定的,故矩阵 (c_{ik}) 是正定的,矩阵 (a_{ik}) 也是正定的,这一点在普通坐标系中很容易看出。

对于位移 z_i 和力 Z_k ,可以得到类似结果。因为轴具有单一的抗弯刚度,相应的矩阵依然是 (a_{ik}) 与 (c_{ik}) 。因此质点 m_i 的运动微分方程为

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{y}_i &= m_i \omega^2 y_i + 2 m_i \omega \dot{z}_i - \sum_k c_{ik} y_k, \\ m_i \ddot{z}_i &= m_i \omega^2 z_i - 2 m_i \omega \dot{y}_i - \sum_k c_{ik} z_k. \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

为了在旋转坐标系中求出静力失稳,研究(3.18)式中的两组平衡条件中的一个就足够了。

例如

$$\sum_k c_{ik} y_k - m_i \omega^2 y_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.19)$$

出现非平凡的平衡位形的条件为

$$\begin{vmatrix} c_{11} - m_1 \omega^2 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - m_2 \omega^2 & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} - m_n \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.20)$$

由于 (c_{ik}) 的对称性,(3.20)的各根 $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$ 都是实数。又因 (c_{ik}) 是正定的,这些根是正的。因此有多少个圆盘就有多少个静力失稳。不管转动方向的正负,它们对应于这么多个临界角速度 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 。当然,其中有一些可以是彼此互相重合的。

设 ω_1 是最小的临界角速度,那么由定理6 (§3.1)可知,对于 $0 \leq \omega < \omega_1$,转轴是稳定的,而对 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 肯定是不稳定的。为了搞清楚这些临界值之间的状况,必须研究系统的运动。为简

单起见,在静止坐标系中,运动微分方程(3.18)退化为

$$m_i \ddot{y}_i + \sum_k c_{ik} y_k = 0, \quad m_i \ddot{z}_i + \sum_k c_{ik} z_k = 0. \quad (3.21)$$

这两个方程代表一个系统的自由振动,该系统不但是保守的而且也是非陀螺的。因为这样的振动是无害的,所以使得我们立即得出这样的结论:角速度 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 之间的区间是稳定的。然而,微分方程(3.21)并不含有 ω , 因此不能解释为什么 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ 是临界值。这一明显的矛盾已经解决[82], 因为人们看到, 由于系统的缺陷在质点 m_i 上作用有圆频率为 ω 的附加力, 它们是(3.21)的右边的扰动项。这样, 处于静止状态的观察者就面临着一个共振问题, 共振频率相应于自由振动的圆频率, 即 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$, 因此证实这些值就是临界角速度。

利用(3.14)和(3.9), 平衡条件(3.19)可以表示为力的关系, 即

$$\sum_k a_{ik} Y_k - \frac{1}{m_i \omega^2} Y_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3.22)$$

按照(3.9), 如果所有的 Y_k 为零, 那么所有 y_i 也为零。因此非平凡平衡位形的存在的条件要求

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \frac{1}{m_1 \omega^2} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \frac{1}{m_2 \omega^2} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \frac{1}{m_n \omega^2} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

同(3.20)一样,这是求得各临界角速度的第二个特征方程。

这里研究的轴是属于图 3.1 中 $P_1 = \omega_1^2$ 之间的各区域是稳定的一个例子。如果轴具有两个不等的抗弯刚度,每一主方向 y 与 z 分别有它自己的一组矩阵 $(c_{jk}), (a_{jk})$ 。这并不意味着临界角速度的数目简单地增加一倍。例如在单圆盘情况下,两个矩阵 (c_{jk}) 分别退化为单个元素 c_1, c_2 。运动微分方程(3.18)成为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} &= m\omega^2 y + 2m\omega\dot{z} - c_1 y, \\ m\ddot{z} &= m\omega^2 z - 2m\omega\dot{y} - c_2 z. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

除了符号略有不同,这就是方程组 (1.56)。根据 § 1.3 的分析若 $c_1 < c_2$, 那么区间 $\omega_1^2 = c_1/m \leq \omega^2 \leq c_2/m = \omega_2^2$ 是临界的。所以这是属于图 3.1 中用斜线表示的一个区间是不稳定的一个例子。

习题:

1. 验证图 3.4 所示具有单一抗弯刚度 α , 两端用短轴承支承的轴的临界角速度为

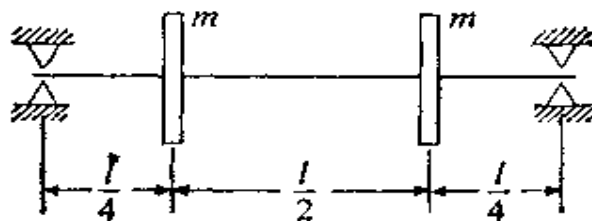


图 3.4 具有两个圆盘的轴

$$\omega_1 = \left(\frac{48\alpha}{ml^3} \right)^{1/2}, \quad \omega_2 = \left(\frac{384\alpha}{ml^3} \right)^{1/2} \quad (3.25)$$

2. 若转轴两端为长的刚性轴承所支承,求解上题。

3. 去掉图 3.4 中的一个圆盘,并假设轴有两个不等的抗弯刚度 α 与 2α , 证明临界区间为

$$\frac{256\alpha}{3ml^3} \leq \omega^2 \leq \frac{256\alpha}{ml^3}, \quad (3.26)$$

§ 3.3 陀螺力矩的影响

在上节中,圆盘是作为质点来处理的。这意味着它们的转动惯量未予考虑。实际上,盘子不仅作平动,而且还作转动。这种附加运动会影响其临界角速度。为了说明这一点,我们来研究一个具有单一抗弯刚度和一个圆盘的轴,并在静止坐标系中进行研究。

在图 3.5 中,设圆盘的形心 S 精确地对准 x_1 截面的中心。圆盘的特性象一个对称陀螺,其形心轴与轴的挠度曲线相切。挠度曲线是一条空间曲线,挠度为 y, z , 相应的斜率为 y', z' 。对于小斜率来说,任意截面 x 处的单位切向矢量可表示为 $v = (1, y', z')$ 。如果截面 x_1 处的单位矢量为 v_1 , 圆盘的主坐标系为 ξ, η, ζ , 这里 ξ 沿 v_1 方向, 而 η, ζ 均垂直于 ξ , 轴 η 平行于 x, y 平面, ζ (按我们设定的近似性) 平行于 x, z 平面。

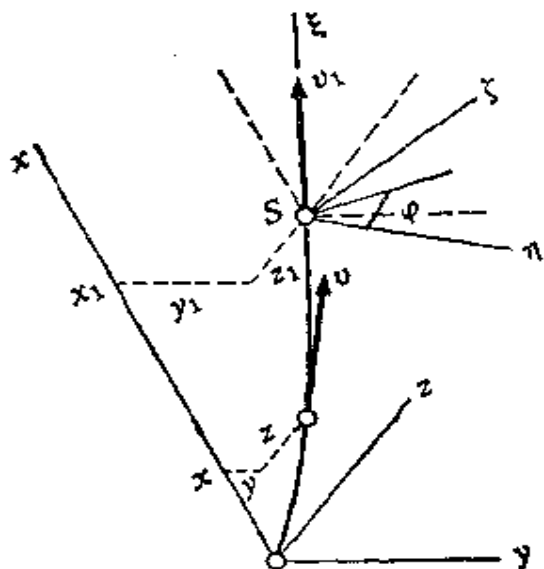


图 3.5 转轴上圆盘的参考坐标系

圆盘的位形可以用坐标 y_1, z_1, y'_1, z'_1 以及在其自身平面内从 η 轴量起的转角 φ 来描述。圆盘的运动状态包括:以速度 \dot{y}_1, \dot{z}_1 的平动, 叠加上自转角速度为 $\omega_s = \dot{\varphi} = \omega$ 的陀螺运动以及角速度为 $\omega_p = (0, -\dot{z}'_1, \dot{y}'_1)$ 的进动。在没有自转时, 盘子对轴的反力为

$$Y = -m\ddot{y}_1, \quad Z = -m\ddot{z}_1, \quad (3.27)$$

反力矩为

$$M'_y = A\ddot{z}'_1, \quad M'_z = -A\ddot{y}'_1, \quad (3.28)$$

式中 m 表示圆盘的质量, A 表示它的赤道惯性矩(取圆盘平面内的任一直径)。按照陀螺理论, 自转引起一个附加力矩, 叫做陀螺力矩 $M_g = C\omega_s \times \omega_p$, 其中 C 是轴惯性矩(对于形心轴 ξ)。就我们设定的近似程度来说, 陀螺力矩的分量为

$$M_y'' = -C\omega \dot{y}_1', \quad M_z'' = -C\omega \dot{z}_1'. \quad (3.29)$$

因此作用在轴上的总反力由力(3.27)和力矩

$$M_y = A\ddot{z}_1' - C\omega \dot{y}_1', \quad M_z = -A\ddot{y}_1' - C\omega \dot{z}_1'. \quad (3.30)$$

组成。

这里我们需要的影响系数是在 x_1 处作用一个单位力在 x_1 处引起的挠度 a 和斜度 b , 以及在 x_1 处作用一个单位力矩在 x_1 处引起的挠度 b' 和斜度 c 。可以证明[4], 这些影响系数组成的矩阵是对称的, 也即 $b' = b$ 。而且该矩阵是正定的, 故它的行列式 Δ 是正的。现在我们有

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= aY + bM_z, & z_1 &= aZ - bM_y, \\ y_1' &= bY + cM_z, & z_1' &= bZ - cM_y \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

及其逆的表达式

$$\left. \begin{aligned} Y &= \frac{1}{\Delta}(cy_1 - by_1'), & M_y &= \frac{1}{\Delta}(bz_1 - az_1'), \\ Z &= \frac{1}{\Delta}(cz_1 - bz_1'), & M_z &= \frac{1}{\Delta}(-by_1 + ay_1'). \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

由(3.27)、(3.30)及(3.32)得到运动微分方程。

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y}_1 + \frac{c}{\Delta}y_1 - \frac{b}{\Delta}y_1' &= 0, \\ m\ddot{z}_1 + \frac{c}{\Delta}z_1 - \frac{b}{\Delta}z_1' &= 0, \\ A\ddot{y}_1' + C\omega \dot{z}_1' - \frac{b}{\Delta}y_1 + \frac{a}{\Delta}y_1' &= 0, \\ A\ddot{z}_1' - C\omega \dot{y}_1' - \frac{b}{\Delta}z_1 + \frac{a}{\Delta}z_1' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

考察一下这些系数, 就可证实该系统是保守的, 并且由于陀螺力矩

的关系,即使在静止坐标系中,该系统仍是陀螺系统。事实上,(3.33)可以看作是由动能

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2) + \frac{1}{2}A(\dot{y}_1'^2 + \dot{z}_1'^2), \quad (3.34)$$

和势能

$$V = \frac{1}{2}A[c(y_1^2 - z_1^2) - 2b(y_1 y_1' + z_1 z_1') + a(y_1'^2 + z_1'^2)], \quad (3.35)$$

以及广义陀螺力

$$-C\omega\dot{z}_1', \quad C\omega\dot{y}_1' \quad (3.36)$$

得到的拉格朗日方程组。因为 m 和 A 是正的,所以 T 是正定的二次型。由于系数 a, b, c 组成的矩阵是正定的,所以 V 也是正定的二次型。因此,不论 ω 为何值,总能量是连续的,且是正定的。由拉格朗日定理(§ 1.6)得出不会有不稳定的平衡。为了解释临界角速度(对于转动的坐标系中的观察者来说,这是静力失稳)这种现象,必须考虑圆盘偏心这种形式的缺陷。在静止坐标系中,这些缺陷会产生引起共振的非定常力。

刚才提到的缺陷可以用一个刚结在盘上的附加质量 $\mu \ll m$ 来代表,在主坐标中它的坐标为

$$\xi = e_1, \quad \eta = e_2 \cos \varphi, \quad \xi = e_2 \sin \varphi, \quad (3.37)$$

式中 e_1, e_2 是引起静力和动力不平衡的偏心量,在静止系统中, μ 的坐标为

$$x_1 + e_1, \quad y_1 + e_2 \cos \varphi, \quad z_1 + e_2 \sin \varphi. \quad (3.38)$$

如果我们不计偏心对于角速度的影响,那么附加质量 μ 产生的惯性力为

$$\left. \begin{aligned} T_x &= 0, \\ T_y &= -\mu(\ddot{y}_1 - e_2 \omega^2 \cos \omega t), \\ T_z &= -\mu(\ddot{z}_1 - e_2 \omega^2 \sin \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

在运动微分方程中计入这些力的作用, 而不计它们产生的属于高阶小量的力矩的作用, (3.33) 的前两式代之以

$$\left. \begin{aligned} (m + \mu) \ddot{y}_1 + \frac{c}{A} y_1 - \frac{b}{A} y_1' &= \mu e_2 \omega^2 \cos \omega t, \\ (m + \mu) \ddot{z}_1 + \frac{c}{A} z_1 - \frac{b}{A} z_1' &= \mu e_2 \omega^2 \sin \omega t, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

而后两式仍保持不变。质量 μ 可以包括在 m 中。进一步, 引入复变量

$$r = y_1 + i z_1, \quad v = y_1' + i z_1'. \quad (3.41)$$

这样运动微分方程就可写成复数形式

$$\left. \begin{aligned} m \ddot{r} + \frac{c}{A} r - \frac{b}{A} v &= \mu e_2 \omega^2 \exp(i\omega t), \\ A \ddot{v} - i C \omega \dot{v} - \frac{b}{A} r + \frac{a}{A} v &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.42)$$

很容易验证, 取 $e_2 = 0$, 由 (3.42) 得到的齐次方程组的一般解是有界的。为了求得 (3.42) 的特解, 我们设

$$r = A' \exp(i\omega t), \quad v = B' \exp(i\omega t), \quad (3.43)$$

式中 A' 和 B' 是复常数。将 (3.43) 代入 (3.42), 我们得到方程组

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{c}{A} - m\omega^2 \right) A' - \frac{b}{A} B' &= \mu e_2 \omega^2, \\ -\frac{b}{A} A' + \left[\frac{a}{A} + (C - A) \omega^2 \right] B' &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

它的行列式为

$$f(\omega^2) = -m(C - A)\omega^4 + \left[\frac{c}{A}(C - A) - \frac{a}{A}m \right] \omega^2 + \frac{ac - b^2}{A^2}. \quad (3.45)$$

只要 $f(\omega^2) \neq 0$, 特解 (3.43) 是有界的。对于 $f(\omega^2) \rightarrow 0$, 幅值 A' 、 B' 就会增大而超出极限。因此 $f(\omega^2) = 0$ 的根就代表临界角速度。特征方程乘以 A/ω^4 得

$$g(\omega^2) = \frac{1}{\omega^4} - [am - c(C-A)] \frac{1}{\omega^2} - \Delta m(C-A) = 0. \quad (3.46)$$

如果取 $A=C=0$, 用以略去陀螺效应, 我们得到

$$\frac{1}{\omega^4} - \frac{am}{\omega^2} = 0 \quad (3.47)$$

或

$$\omega_0^2 = \frac{1}{ma} = \frac{c_1}{m}, \quad (3.48)$$

这正好是 §3.2 所预计的结果。若 $C=A$, 即对于球形陀螺的转子, 我们得到相同的结果。任何场合, 临界角速度都是成对地以 ω , $-\omega$ 出现的。如仅取正值, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\omega_{1,2}^2} = & \frac{1}{2} [am - c(C-A)] \\ & \pm \left\{ \frac{1}{4} [am - c(C-A)]^2 + \Delta m(C-A) \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

实践中, 大多数转子是扁陀螺 ($C > A$)。例如在扁平圆盘的情况下, $C \cong 2A$ 。那么 (3.49) 中取负号会使 ω_2 成为复数。因此, 只有单一的临界角速度 ω_1 。附带说明, ω_1 大于 ω_0 , 因为陀螺效应有增加转轴刚性的倾向。

(3.49) 式中的根式可以写成

$$\frac{1}{4} [am + c(C-A)]^2 - b^2 m(C-A). \quad (3.50)$$

对于长转子 ($C < A$), (3.50) 是正的, 但小于 (3.49) 右边第一项的平方; 因此, 有两个临界角速度 ω_1 与 ω_2 , 可以证明 $\omega_1 < \omega_0 < \omega_2$ 。

在一些论述临界角速度的文献 [62, 5] 中, 还讨论了第二组临界状态, 并称为逆向转动的临界角速度。这种情况是在一个以转轴角速度反向转动的坐标系中考虑平衡来加以解释的。但是, 这样的考虑方法似乎与轴的稳定没有什么关系。因为这些结果不是用动力法求得的, 所以我们可以有把握得出结论: 这种临界状态要么不存在, 要么是由至今一直被忽略的影响因素引起的, 如基础

的振动[82]。但无论如何,对这些结果很少有实验证实。

习题

1. 证明图 3.6 所示轴的临界角速度为

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(1 + 3 \frac{C-A}{ml^2} \right) \left\{ 1 \mp \left[1 - 9 \frac{(C-A)/ml^2}{[1 + 3(C-A)/ml^2]^2} \right]^{1/2} \right\} \quad (3.51)$$

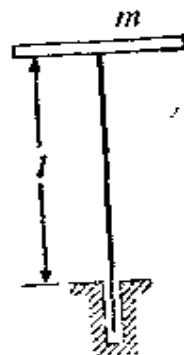


图 3.6 自由端有一圆盘的转轴

1. $\omega_{1,2}/\omega_0$ 作为 $(C-A)/ml^2$ 的函数的图形。

2. 在上题的转轴中,如端部带有半径 $r=l$ 的一个薄圆盘,试证明 $\omega_1/\omega_0 = 1.32$ 。

§ 3.4 压缩的影响

临界角速度最早是在汽轮机上观察到的。这里象在另一些场合一样,轴要传递扭矩和轴向力,这些载荷将影响角速度的临界值。对于轴向力的影响,Melan[47]首先研究过,本节将单独讨论这一影响。

取相应于欧拉屈曲情形 3 作为例子。我们来研究图 3.7 的轴。转轴带有一个圆盘,且具有单一的抗弯刚度,不计陀螺效应。在没有轴向力时这个问题曾在 §1.3 中研究过,它有单一的临界角速度,并由(3.48)给出

$$\omega_1^2 = \frac{c_1}{m} = \frac{1}{m\alpha}, \quad (3.52)$$

式中 c_1 和 α 分别是矩阵 (c_{jk}) 和 (a_{jk}) 在此简单情况下退化而成的单个元素。更具体说, α 就是在 S 点垂直于未变形轴线作用一单

位力后，圆盘中心 S 点所产生的位移。现在该问题中唯一的改变是附加了非陀螺保守力 P 。由于这个附加力 P 并不改变系统的性



图 3.7 受压的转轴

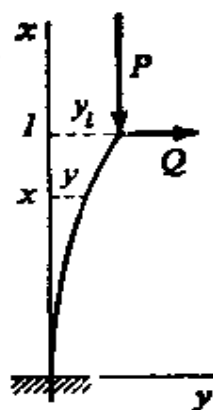


图 3.8 受载悬臂梁的挠度

质，故其结果将仍由(3.52)给出。然而，在计算影响系数 α 时，现在必须考虑力 P 的作用。

图 3.8 表示受到力 P 与 Q 作用的轴。挠度曲线的微分方程为

$$\alpha y'' = Q(l-x) + P(y_1 - y) \quad (3.53)$$

或

$$y'' + \kappa^2 y = \frac{Q}{P} \kappa^2 (l-x) + \kappa^2 y_1, \quad \kappa^2 = \frac{P}{\alpha}. \quad (3.54)$$

它的一般解为

$$y = A \cos \kappa x + B \sin \kappa x + \frac{Q}{P}(1-x) + y_1, \quad (3.55)$$

由边界条件

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= A + \frac{Q}{P}l + y_1 = 0, \\ y'(0) &= B\kappa - \frac{Q}{P} = 0, \\ y(l) - y_1 &= A \cos \kappa l + B \sin \kappa l = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

得到

$$B = \frac{Q}{P} \frac{1}{\kappa}, \quad A = -\frac{Q}{P} \frac{1}{\kappa} \operatorname{tg} \kappa l, \quad (3.57)$$

和

$$y_l = \frac{Q}{P \kappa} (\operatorname{tg} \kappa l - \kappa l). \quad (3.58)$$

由(3.58)可得, 对于 $Q=0$, 位移 y_l 只能为零, 除非 $\operatorname{tg} \kappa l = \infty$, 即除非 $\kappa l = \frac{\pi}{2}, 3\pi/2, \dots$ 。这就证明了欧拉屈曲载荷(1.10)中的 $k = \frac{1}{4}$ 。

现在假设载荷 P 小于静力屈曲载荷 P_1 , 这意味着 $\kappa l \ll \frac{\pi}{2}$, 即 $\kappa l \ll 1$ 。对小量 κl 展开(3.58), 我们得到

$$y_l = \frac{Ql^3}{3\alpha} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{Pl^2}{\alpha} + \dots \right). \quad (3.59)$$

若 $P=0$, 这就得到熟知的挠度公式

$$y_l(P=0) = \frac{Ql^3}{3\alpha}. \quad (3.60)$$

若 $Q=1$, 我们得到(3.52)式要求的影响系数

$$\alpha = \frac{l^3}{3\alpha} \left(1 + \frac{2}{5} \frac{Pl^2}{\alpha} + \dots \right). \quad (3.61)$$

因此取一级近似就有

$$\omega_1^2 = \frac{1}{m\alpha} = \frac{3\alpha}{ml^3} \left(1 - \frac{2}{5} \frac{Pl^2}{\alpha} \right). \quad (3.62)$$

与没有 P 的情况下的值

$$\omega_0^2 = \frac{3\alpha}{ml^3} \quad (3.63)$$

相比,最后我们得

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{5} \frac{Pl^*}{\alpha} \quad (3.64)$$

应该记住(3.64)是一个近似公式,适用于 $P \ll P_1$ 。这一结果表明临界角速度由于受压而减小,由于受拉($P < 0$)而增大。其它情况可用类似方法处理。在 § 5.5 的表 5.3 中列出了一些结果。

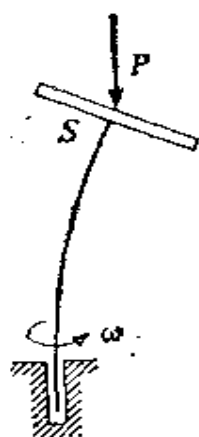


图 3.9 受常扭矩作用的转轴

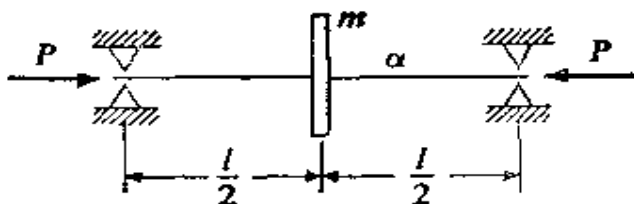


图 3.10 受压缩作用的转轴

用类似的方法可以计算用常力矩矢量表示的扭矩(图 3.9)的影响。但是在 § 1.5 中我们曾指出,一个常力矩矢量一般是循环力,因此问题是非保守的,在 § 5.5 中将研究这类问题。在那里将会指出,用静力法来处理一般说是不正确的。

习题

1. 求图 3.10 所示两端受压轴的临界角速度的一级近似值。对照(5.83)和表 5.3 检查所得结果。

第四章 耗散系统

按照 § 1.5 所给的定义, 将阻尼力加到至今我们所研究过的系统上去就可得到纯粹耗散系统。除了无功反力、非循环力和可能存在的陀螺力以外, 耗散系统包含有耗散反力或耗散载荷。因为到处都有耗散力, 而且很难完全加以消除, 因此这类系统是很重要的。从理论上说, 耗散力有可能仅仅在系统的某些特定运动中显现出来, 例如在双摆中, 两个铰中的一个无摩擦就会碰到这种情况。而实际上, 如在两铰都有摩擦力的双摆中, 耗散力对系统的任何形式的运动都会产生影响。下面将限于讨论后一种情形, 也就是所谓完全耗散系统。

§ 4.1 概 述

如果系统是线性的, 它的微分方程由(1.113)给出

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (4.1)$$

这里, 矩阵 (m_{ik}) 、 (g_{ik}) 和 (c_{ik}) 是常数阵, (m_{ik}) 和 (c_{ik}) 是对称的, 而且 (m_{ik}) 是正定的。矩阵 (g_{ik}) 通常是非对称的, 其对称部分代表耗散力, 而且在完全耗散系统中, 对称部分是正定的。它的反对称部分来源于陀螺力, 当然也可能没有这一部分。按 § 3.1 中的做法, 我们得到特征方程

$$\det(m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) = 0. \quad (4.2)$$

而在一般情况下，上式的根并不是以等值反号的规律成对地出现的。

把所研究的系统同不计耗散力和陀螺力后得到的非陀螺保守系统进行对比是合宜的。按照拉格朗日定理 (§ 1.6)，只要系统的势能(设为连续函数)是正定的，那么这两个系统都是稳定的(即使在非线性情况下)，如果系统是线性的且无耗散力与陀螺力。按

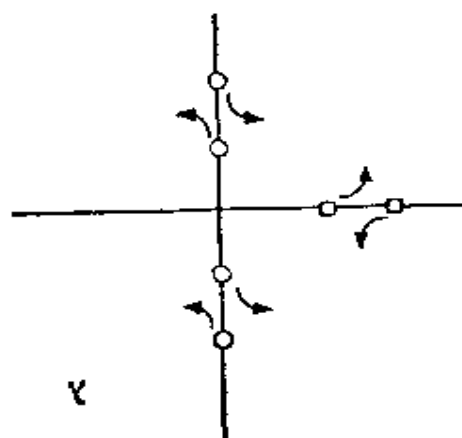


图 4.1 (4.2)的根离开实轴的过程

照定理 1 (§ 2.1)，当系统势能是非正定的，也就是对于 $(g_{ik})=0$ ，(4.2)的根 λ_i 至少有一个是零或是正的(图 4.1)，那么该系统是不稳定的。第一种情况，即具有零根的情形，对应于静力失稳，其特征是特征方程(4.2)中的常数项 $\det c_{ik}$ 为零。这一类失稳显然不依赖于耗散力与陀螺力，因此在这给定系统中也会发生静力失稳。在具有正根的第二种情况中，很容易看到所研究的系统至少有一个具有正实部的根。如果假定不是这样的话，那么当引入与速度有关的力后，因为(4.2)的根是系数的连续函数，原来的正根就会通过虚轴或者至少碰上虚轴。这个与速度有关的力的引入，可用成比例地增加 g_{ik} 的各元素来实现。一个纯虚根 λ_i 与其共轭根 $-\lambda_i$ 一起对应着一个周期运动，然而，在完全耗散系统中周期运动是不可能的，因为只要系统发生运动，其总能量就减少。唯一的可能性是出现一个零根。但是，零根 $\lambda_i=0$ 又是同 (g_{ik}) 无关的，即它不是引入同速度有关的力的结果。这样，我们已证明了下面的定理：

定理 7. 一个纯粹的，而同时又是完全耗散的线性系统，它的特性与无耗散力和无陀螺力的对应系统是完全一致的。

换句话说,定理 1 (§ 2.1) 也可用于纯粹的完全的耗散线性系统。作为一个推论, § 2.1 中关于简单系统的研究仍然是适用的,特别是简单系统的稳定性仍可用图 2.2 来说明,且我们有下述定理:

定理 8. 对于纯粹而又是完全耗散的系统,定理 1 和定理 2 仍然适用。

为了推广上述结果,让我们来研究一个可以线性化的非线性系统。只要系统的势能的二次近似式 (2.10) 是正定的,其精确表达式也是正定的,由拉格朗日定理 (§ 1.6) 可以得出平衡是稳定的。如果没有陀螺力与阻尼力,当二次近似式在平衡位形的一个任意小的邻域内取负值,那么特征方程 (4.2) 至少有一个具有正实部的根。上面曾指出过,当引入与速度有关的力后,这一点仍然是正确的,而且由 § 1.8 的定理 D 知道非线性系统是不稳定的。这样我们有:

定理 9. 定理 3 仍适用于纯粹的而同时又是完全的耗散系统。

§ 4.2 阻尼降低稳定性

§ 4.1 的结果指出,如果耗散是完全的,阻尼力不影响非陀螺保守系统的稳定性。然而,对于陀螺保守系统,情况就不同了。比较一下 § 3.1 与 § 4.1 的结果,我们得出一个意料不到的结论:如果系统由于陀螺项提高了稳定性,那么这样的系统由于加上耗散力又降低稳定性。因此,我们有:

定理 10. 除了非陀螺保守系统外,耗散力可能具有降低稳定性的作用。如果把耗散力加到陀螺保守系统上去,而且耗散是完全的,那么耗散力将抵消陀螺力的稳定作用。

从这个结论来看,陀螺力的稳定作用丧失了它的一些价值。但

是,在一些场合下,耗散力降低稳定的作用显得相当慢或者还可以被另外一些影响所中止。例如对于卧式陀螺,只要自转足够快,陀螺力矩会使它稳定。它可能要经过很长时间,直到由于摩擦,使自转大大降低,最后造成陀螺不稳定。

根据(4.2)根的性质(图4.1)来讨论各种因素的影响是饶有兴趣的。只要没有与速度有关的力,这些根或者是纯虚根(如在图2.1中)或者是实数。随着载荷增加,当一对共轭虚根在原点相遇,随即以一对等值反号的实根离开原点的时候,不稳定开始了。当至少有两个正根的时候,速度相关项的出现和随后的增加可以使两个正根融合,然后分离为一对共轭复根。在完全耗散的情况下,这一对根在正实部的半开平面内,在没有耗散力的情形下,它们可以到达虚轴上。

作为一个例子,我们再来研究临界速度的问题。在§1.3中,图1.11的质点可看作安装在以角速度 ω 转动的轴上的圆盘的模型。 $c_1 = c_2$ 的情形相应于具有单一抗弯刚度的轴。其特点是有单一的临界角速度 ω_1 。为了研究内阻尼的影响,采用随轴一起转动的坐标系比较方便。在一级近似中,我们将以力 $-2mb \cdot (\dot{x}, \dot{y})$ 来代表阻尼的作用(图4.2),式中 b 是阻尼常数,那么运动微分方程为:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2b\dot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + 2b\dot{y} + \left(\frac{c}{m} - \omega^2\right)y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

它们是由(1.56)直接修正得来的。借助于(1.57),我们很容易得到特征方程

$$\left(\lambda^2 + 2b\lambda + \frac{c}{m} - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\lambda^2 = 0 \quad (4.4)$$

或

$$\lambda^2 + 2(b \mp i\omega)\lambda + \frac{c}{m} - \omega^2 = 0. \quad (4.5)$$

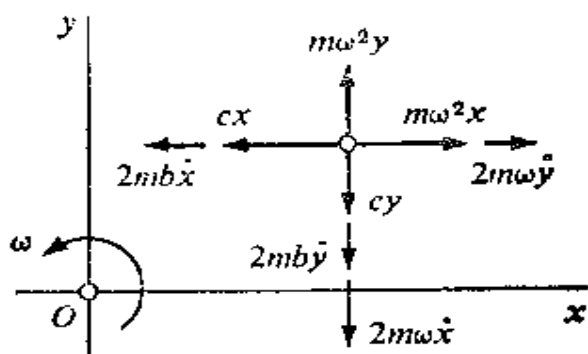


图 4.2 有内摩擦时转轴上的圆盘的模型

令 $\lambda_{1,2}$ 是相应于(4.5)式中取负号的两个根, $\lambda_{3,4}$ 相应于取正号的两个根。

如果无摩擦,(4.5)简化为

$$\lambda^2 \mp 2i\omega\lambda + \frac{c}{m} - \omega^2 = 0. \quad (4.6)$$

因此

$$\lambda_{1,2} = -i(\omega \pm \sqrt{c/m}), \quad \lambda_{3,4} = -i(\omega \pm \sqrt{c/m}). \quad (4.7)$$

这些根是纯虚数,如果 $\omega^2 \neq c/m$,它们是不相等的。这一结果证实当 $\omega^2 \neq c/m$ 时轴的稳定性。图4.3表示 $\omega^2 \leq c/m$ 时根 $\lambda_{1,2}$ 的分布情

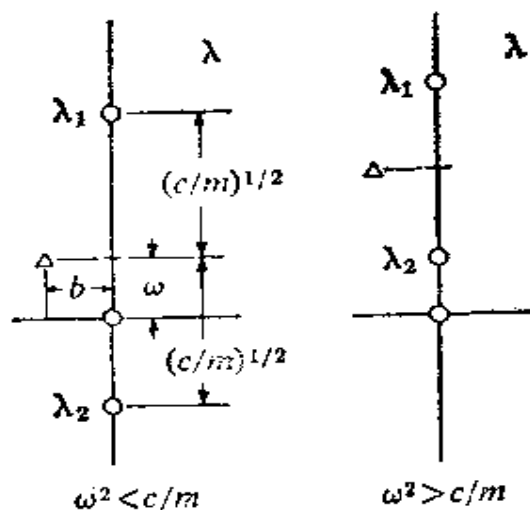


图 4.3 (4.5)、(4.6)式根分布

况,根 $\lambda_{1,2}$ 是以实轴为镜面映像而得到的。

如果有摩擦, b 是正的, 图4.3中根的位置就有变化。从(4.5)可知

$$\lambda_1 \lambda_2 = \frac{c}{m} - \omega^2, \quad \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -b + i\omega, \quad (4.8)$$

因此, 两个根都不在虚轴上。由(4.8)的第二式知, λ_1 与 λ_2 的连线的中点是 $-b + i\omega$, 图中以 Δ 来标记。因此, 两根中至少有一根在负实部的半开面内。由(4.8)第一式知, λ_1 与 λ_2 的辐角的和为 2π (当 $\omega^2 < c/m$) 或 π (当 $\omega^2 > c/m$)。显然, 对于 $\omega^2 < c/m$, λ_1, λ_2 都在虚轴的左边, 否则它们幅角之和就可能小于 2π 或大于 2π 。另一方面, 对于 $\omega^2 > c/m$, 两点之一必然在虚轴的右边, 否则它的幅角的可能超过 π 。

这样, 我们已经证明, 对于 $\omega^2 < c/m$ 来说轴是稳定的, 而对于 $\omega^2 > c/m$ 则轴是不稳定的。在没有速度相关力时, 区间 $\omega^2 > c/m$ 是不稳定的。在§1.3中曾指出, 而且在§3.1中也曾证实哥氏力使转轴变得稳定。而现在阻尼又使稳定性降低。

同这里得到的结果相反, 实验表明, 至少在实际可能的角速度范围内, $\omega_1 = \sqrt{c/m}$ 是唯一的临界值。因此我们可以断定这里存在着一些附加影响, 这些影响中止了摩擦力降低稳定性的作用。按照Dimentberg[14]的看法, 考虑到滞后效应, 采用一个更加符合实际的内阻模型就能消除理论与实验之间的矛盾。在§4.3中将讨论另一可能性, 即外摩擦具有稳定的倾向, 外摩擦有可能超过内摩擦的失稳作用, 至少在某一角速度范围内是这样。

总之, 这个简单的例子清楚地表明, 稳定性对于一些次要因素是十分敏感的, 因而在解释用简化分析方法获得的结果时必须十分谨慎小心。

习题

1. 在1.11的习题中, 为了能够区别离心力和哥氏力, 我们把角速度 ω 分别记作 ω_1 与 ω_2 。这样特征方程(1.59)可写成

$$\lambda^4 + \left(\frac{c_1}{m} + \frac{c_2}{m} - 2\omega_1^2 + 4\omega_2^2 \right) \lambda^2 + \left(\frac{c_1}{m} - \omega_1^2 \right) \left(\frac{c_2}{m} - \omega_1^2 \right) = 0 \quad (4.9)$$

把 ω_2 从 0 增加到 ω_1 就可以研究哥氏力的稳定作用。

试分析 $c_1 = c_2 = c$ 以及 $\omega^2 = 2c/m$ 时, (4.9) 式的根在 λ 平面内的相应运动。

§ 4.3 Routh-Hurwitz 准则

在前几节中遇到的特征方程都是二次式或是双二次式。关于它们根的性质一直是直接讨论的。在特征方程更加复杂的情况下, 根的讨论变得更加难以理解, 因而需要有一个关于根的性质的一般准则。这一准则曾分别由Routh[57]和Hurwitz[27]独立地提出来。这些准则并不限于耗散系统。由于我们在下面需要用到它们, 故在这里引入, 关于准则的证明, 读者可参照原著。

到目前为止, 我们一直在研究

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik} \ddot{q}_k + g_{ik} \dot{q}_k + c_{ik} q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.10)$$

这类微分方程组, 式中 n 是力学系统的自由度。矩阵 (m_{ik}) , (g_{ik}) 和 (c_{ik}) 的某些特性同系统类型有关。在本节中, 我们不管这些矩阵的个别特性, 只假定它们是实的常数阵。这意味着我们考虑的是很普遍的力学系统, 甚至包括非完整系统 (nonholonomic system) 在内, 但不包括非定常系统。换言之, 我们考虑一切线性自

治系统，这里所研究的微分方程在控制机构和电路网络理论中也会碰到。

令

$$q_k = A_k e^{\lambda t} \quad (k=1, 2, \dots, n) \quad (4.11)$$

由(4.11)，我们得到

$$\sum_{k=1}^m (m_{ik} \lambda^2 + g_{ik} \lambda + c_{ik}) A_k = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (4.12)$$

不考虑平凡解，我们最后得到特征方程

$$p_0 \lambda^m + p_1 \lambda^{m-1} + \dots + p_{m-1} \lambda + p_m = 0. \quad (4.13)$$

上式中的各系数均是实数，阶次 m 不超过 $2n$ ，但可以小于 $2n$ ，因为 (m_{ik}) 并未假定为正定的。此外，因为并没有排除非完整系统，所以 m 不一定是偶数。在§4.4中我们将研究 $m=3$ 的情形，那里方程组(4.10)中有一式代表非完整约束，因此它不包含加速度项。

把特征方程的任意一个根代入(4.12)，我们得到一组幅值 A_1, A_2, \dots, A_n ，它们中至少有一个的值是可任意取的。这一组幅值代表一个基本解，只要各个根是不等的，那么把这些基本解叠加起来就得到一般解。其中包含有 m 个自由常数可供选择，以使一般解满足初始条件。把(1.117)和(1.121)联系起来就可以看到，只要没有一个根具有正实部，则这个一般解就是有界的。可见在 λ 平面内(图4.4)虚轴把稳定区同不稳定区分开来，而虚轴本身似乎是属于稳定区的。但是，如果 $p_m=0$ ，因此 $\lambda=0$ 是特征方程的一个根，则系统是静态不稳定的。故图4.4中的原点属于不稳定区。此外，在§1.7中已经提到重根会使这种情况发生变化，甚至纯虚数的重根，可以使系统成为不

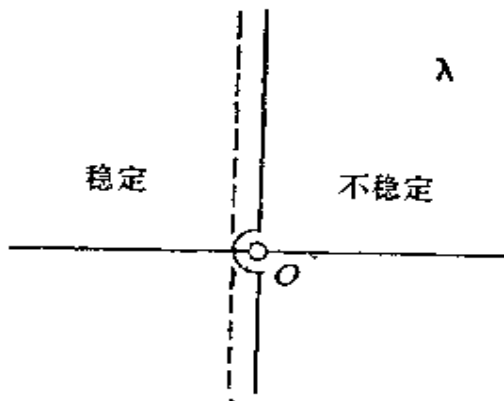


图 4.4 λ 平面内的稳定区与不稳定区

稳定。因此,虚轴(除原点外)不能简单地归于稳定区或不稳定区。

至于非线性系统,如果可以加以线性化,那么情况就完全相同。按照定理C和D (§1.8),虚轴把整个平面分成稳定的和不稳定的两个半平面。原点标志着静力失稳,虚轴的其余部分属于临界情况,在虚轴上系统可能是稳定的,也可能是不稳定的。因此我们想要得到充分的稳定条件,就要保证(图4.4)特征方程的所有的根都具有负实部。从实际观点来看,这种方法是完全可以接受的,只要记住上述方法给出的是稳定区的整个区域。但是用这种方法不能得到边界上的点只有稳定的一种情况。

特征方程(4.13)的根 λ_i 完全取决于系数 p_0, p_1, \dots, p_m 。因此,我们的问题就归结为:为保证所有的 λ_i 都有负实部,对这些系数应有什么限制? Routh与Hurwitz提供的答案可以阐述如下:

写出特征方程(4.13),使得 $p_0 > 0$,然后按下法构成一个 m 阶行列式,从左上角元素 p_1 开始,依次将下标减1形成各行,再依次将下标增加2以形成各列,而下标 $k < 0$ 或 $k > m$ 的所有元素都为零,即

$$D_m = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \vdots \\ p_{2m-1} & p_{2m-2} & \cdots & & & & & & p_m \end{vmatrix}. \quad (4.14)$$

现在我们来研究由 D_m 的一系列所谓主子式所组成的检验函数 D_1, D_2, \dots, D_m ,它们按照具有共同的左上角元素的规律依次形成的。那么,我们所要求的稳定的充分条件为

$$D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_m > 0. \quad (4.15)$$

例如在特征方程阶次为 $m=4$ 的情况下,它的检验函数是行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ 0 & p_4 & p_3 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{vmatrix} \quad (4.16)$$

及其各主子式,也就是函数

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= p_1, \\ D_2 &= p_1 p_2 - p_0 p_3, \\ D_3 &= p_1(p_2 p_3 - p_1 p_4) - p_0 p_3^2, \\ D_4 &= p_1(p_2 p_3 p_4 - p_1 p_4^2) - p_0 p_3^2 p_4. \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

如果该行列式的每一个主子式都是按它的最末行展开,那么各检验函数的计算和相应的稳定条件的讨论就可简化。这样,前面已算得的检验函数就可以被利用,且在结果中出现。而且,最后一个检验函数 D_m 就可用最后一个系数 p_m 来代替,那是因为 $D_m = p_m D_{m-1}$ 。例如 $m=4$ 时,稳定条件成为

$$\left. \begin{aligned} p_1 &> 0, \\ p_1 p_2 - p_0 p_3 &> 0, \\ (p_1 p_2 - p_0 p_3) p_3 - p_1^2 p_4 &> 0, \\ p_4 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

作为一个应用例子,让我们重新研究图1.11的问题,因为 $c_1 = c_2 = c$ 即为具有单一抗弯刚度的以角速度 ω 转动的轴。在§4.2中已经得到,由于内阻尼,除了实验上已被证实过的临界值 $\omega^2 = c/m$ 之外, $\omega^2 > c/m$ 的整个区域应该都是临界的。我们还曾推测至少在一定程度上,外阻尼可能会修正这个结果。

如果我们在静止坐标系中来研究这个问题,弹性力为 $-c \cdot (x, y)$,外阻尼(空气阻力、轴承摩擦等等)可以表示为 $-2mb_1 \cdot (\dot{x}, \dot{y})$ 。由于 m 的牵连速度为 $\omega \cdot (-y, x)$,故相对于以角速度 ω 转动的坐标系它的速度为 $(\dot{x} + \omega y, \dot{y} - \omega x)$,内阻尼为 $-2mb_2 \cdot (\dot{x} + \omega y,$

$\dot{y} = \omega x$)。这样,运动微分方程成为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + 2(b_1 + b_2)\dot{x} + \frac{c}{m}x + 2b_2\omega y &= 0, \\ \ddot{y} + 2(b_1 + b_2)\dot{y} - 2b_2\omega x + \frac{c}{m}y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

从 x 与 y 的系数看出,现在的问题不仅是耗散的,而且也是循环的。借助于(1.57)我们得到特征方程

$$p_0\lambda^4 + p_1\lambda^3 + p_2\lambda^2 + p_3\lambda + p_4 = 0, \quad (4.20)$$

其中各系数为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= 1, \\ p_1 &= 4(b_1 + b_2), \\ p_2 &= 4(b_1 + b_2)^2 + 2\frac{c}{m}, \\ p_3 &= 4(b_1 + b_2)\frac{c}{m}, \\ p_4 &= \frac{c^2}{m^2} + 4b_2^2\omega^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

(4.18)的稳定条件是

$$\left. \begin{aligned} b_1 + b_2 &> 0, \\ (b_1 + b_2) \left[4(b_1 + b_2)^2 + \frac{c}{m} \right] &> 0, \\ (b_1 + b_2)^2 \left[(b_1 + b_2)^2 \frac{c}{m} - 4b_2^2\omega^2 \right] &> 0, \\ \frac{c^2}{m^2} + 4b_2^2\omega^2 &> 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

只要 c, b_1, b_2 是正的,那么前两个条件和最后一个条件是满足的。余下的条件可写成

$$\omega^2 < \left(1 + \frac{b_1}{b_2} \right)^2 \frac{c}{m}. \quad (4.23)$$

如果内阻尼小于外摩擦,那么括号项大于1,这就可以解释为

什么对于 $\omega^2 > c/m$ 转轴是稳定的, 至少在实际可达到的角速度范围内是如此。毫不奇怪, 从(4.23)并不能得出临界值 $\omega^2 = c/m$ 。在§3.2中已经指出过, 在静止坐标系中, 这个值是由于在缺陷影响下的共振而得到的, 而这里却没有考虑缺陷。

习题

1. 列出 5 阶特征方程的稳定性充分准则的公式。
2. 在§4.2中曾经讨论过一个线性内阻尼的转轴的特征方程(4.4), 该式化简成一个复系数的二次方程式, 现将它当作实系数的四阶方程来研究, 证明其稳定条件(4.18)与§4.2中所得到的结果是一致的。

§ 4.4 拖车的摆振

我们曾经提到过, §4.3末尾所研究的问题不是纯耗散的。在这一节里, 我们要研究另一个问题, 这个问题启发性地应用了 § 4.3 中引入的准则, 而且它与本书所研究的大多数问题有很大的不同。

一辆拖车受到载重车的牵引, 平稳地行驶在完全笔直的水平道路上。有时候拖车会显得不稳定, 并开始发生危险的横向摆动[77、78]。在跑道上滑行的飞机也会发生类似的现象[13]。这个问题不但是非纯耗散的, 而且是非

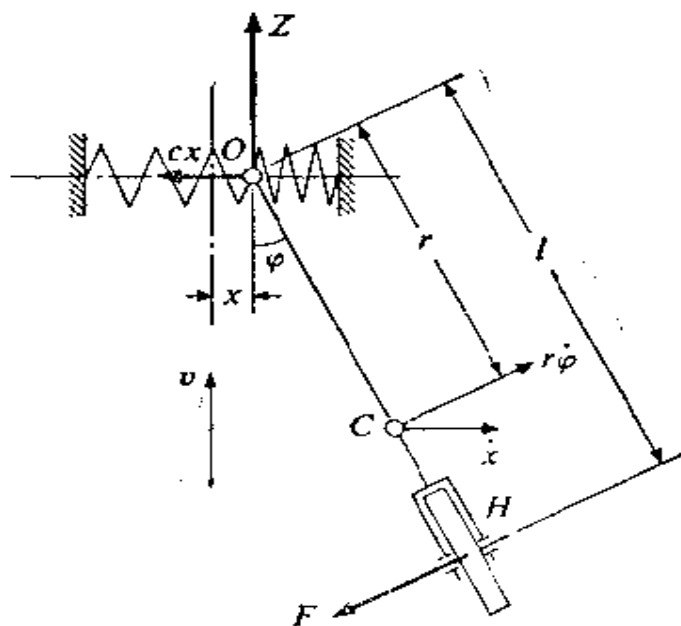


图 4.5 单轴拖车的简化模型

完整的。由于约束提供能量，系统呈现出负耗散，并因此产生自激振动。

图4.5表示一辆单轴拖车的简化模型。两个轮子用一个简单的轮子来代替，拖车用在 O 点铰接、质心为 C 的刚体代替。挂架的柔度用一刚度为 c 的弹簧来表示， O 铰处及轮轴 H 处的摩擦均忽略不计，而轮子与地面之间有干摩擦作用。起初，轮子并不在路面上滑动，这就使问题成为非完整的。在同牵引车一起以匀速 v 作直线运动的参考坐标中，如果忽略轮子的质量，则拖车的坐标为 x 和 φ ，拖车的质量为 m ，它对于 C 和 O 的回转半径分别为 i_c 和 i_o 。作用于拖车的外力是牵引力 Z ，弹簧力 cx 和摩擦力 F 。

如果对于小的 x 与 φ ，我们可以将问题线性化，拖车对上述坐标系的动量只有一个横向分量，即 $m(\dot{x} + r\dot{\varphi})$ 。对于铰 O 的平衡位置的角动量是 $mi_o^2\dot{\varphi} + mr(\dot{x} + r\dot{\varphi})$ 。由动量定理和角动量定理，得到 $Z = F\varphi$ 和

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{x} + r\ddot{\varphi}) &= -cx - F, \\ m(r\ddot{x} + i_o^2\ddot{\varphi}) &= -Fl. \end{aligned} \right\} \quad (4.24)$$

从(4.24)中消去 F ，我们得到第一个运动微分方程：

$$m \left[\left(1 - \frac{r}{l}\right) \ddot{x} + \left(r - \frac{i_o^2}{l}\right) \ddot{\varphi} \right] + cx = 0 \quad (4.25)$$

为了得到第二个微分方程，我们必须利用轮子在路面上不滑动这一条件。轮轴 H 相对于地面的绝对速度的方向为 HO ，它是由 v 加上 \dot{x} 和 $\dot{\varphi}$ 的相应贡献而得到的。因此，在我们假定的近似程度上有

$$\dot{x} + l\dot{\varphi} + v\varphi = 0. \quad (4.26)$$

这一关系是一阶的非完整约束。方程组(4.25)—(4.26)的特征方程是

$$\left[\left(1 - \frac{r}{l}\right) \lambda^2 + \kappa^2 \right] (l\lambda + v) - \left(r - \frac{i_o^2}{l}\right) \lambda^3 = 0 \quad (4.27)$$

式中

$$\kappa^2 = \frac{c}{m} > 0. \quad (4.28)$$

这是个三次方程，可写成

$$p_0 \lambda^3 + p_1 \lambda^2 + p_2 \lambda + p_3 = 0, \quad (4.29)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= l - 2r + \frac{i_c^2}{l}, & p_1 &= \left(1 - \frac{r}{l}\right)v, \\ p_2 &= l\kappa^2, & p_3 &= v\kappa^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.30)$$

我们注意到

$$p_0 = l - 2r + \frac{1}{l}(i_c^2 + r^2) = \frac{1}{l}[(l-r)^2 + i_c^2] > 0. \quad (4.31)$$

因此，运用稳定性准则(4.15)得

$$p_1 > 0, \quad p_1 p_2 - p_0 p_3 > 0, \quad p_3 > 0. \quad (4.32)$$

将(4.30)和(4.31)代入(4.32)，并注意到 $\kappa^2 l > 0$ ，于是就得到

$$(l-r)v > 0,$$

$$(l-r)v - [(l-r)^2 + i_c^2] \frac{v}{l} > 0, \quad v > 0. \quad (4.33)$$

(4.33)的第三个不等式证实了一个众所周知的事实，即拖车后退时是不稳定的。当 $v > 0$ 时，也就是向前运动时，第一个条件要求质心 C 位于轮轴套 H 的前方。另外，第二个不等式可以写成

$$lr - r^2 - i_c^2 > 0 \text{ 或 } (l-r)r > i_c^2. \quad (4.34)$$

它包含第一个条件，而且为了满足这个条件必须尽可能地把拖车的质量集中在距离 OH 的中心附近。

用上述简化方法得到的稳定条件与速度 v 的大小无关。如果考虑到铰 O 处的阻尼和别的影响，诸如载重车后部的侧向运动，那么，可以发现存在着一个临界速度 v_1 ，超过这个速度就会发生失

稳。作者[77,78]曾详细研究过这个问题,包括具有两个轴的拖车的分析。为了达到拖车在相当高的速度下仍然是稳定的目的,作者提出过许多已被观察到的规律。Slibar和Paslay[60]也曾研究过同样的问题,同时还考虑到轮胎的特性。

习题

1. 试研究单轴拖车的摆振问题。设在铰 O 有幅值为 $b\dot{\varphi}$ 的阻尼力矩,证明向前运动的临界速度为 $v_1 = (bl/m)(i_0^2 - rI)$ 。

§ 4.5 关于约束的一个定理

到目前为止,对于简单线性系统得到的结果一直都用图2.2和3.1来描述。这两个图可以组合在图4.6中。斜阴影线表示系统的性质是不确定的,而交叉阴影线表示不稳定。如果耗散是完全的,那么纯耗散系统的特性就与对应的非陀螺保守类型的特性是一样的。我们看到在图4.6描述的三种情况中,对于 $P < P_1$ 来说系统

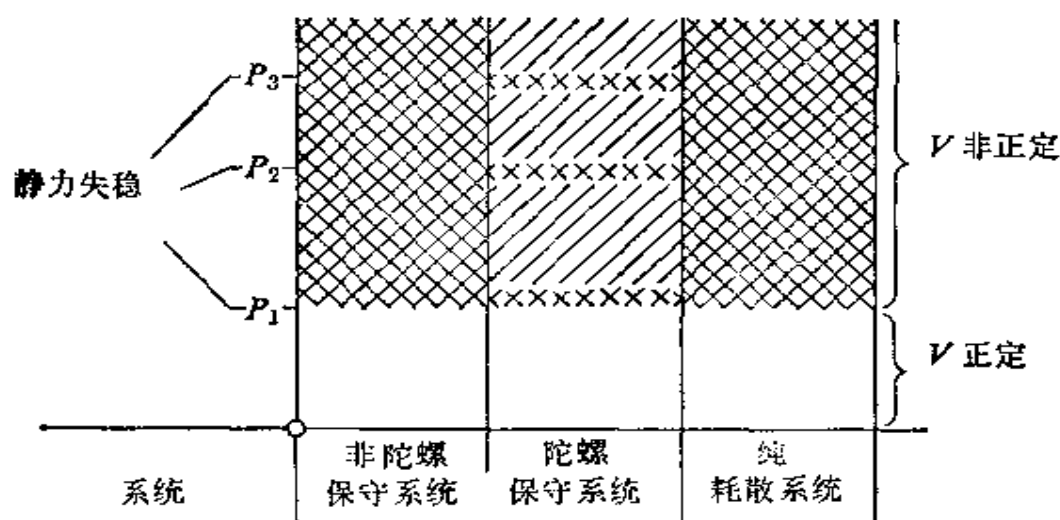


图 4.6 没有循环力或非定常力的简单线性系统的稳定性

都是稳定的, 此外对于 P_1 , 至少在静力学上是不稳定的。在所有这些情况中, P_1 都可以用能量法来求得, 因为 P_1 是 V 非正定时的最小载荷。

让我们研究刚才讨论过的那种类型的两个系统 A 与 B 。假设它们仅仅在约束上不相同。除了 A 的所有约束外, 系统 B 假定具有某些附加约束, 这些附加约束是无功的, 而且与平衡位形 $q_1 = q_2 = \cdots = q_m = 0$ 相协调一致。在位形空间 q_1, q_2, \cdots, q_m 中, 两个系统的许可位形可用两个域 A 与 B 来表示(图4.7)。由于所作的假设, 两个域的任何一個都含有共同的平衡位形点 O , 而且 A 包容着 B , 这意味着系统 B 的任何许可位形也是 A 系统的许可位形, 由于 B 受有附加约束, 反过来说就不正确。

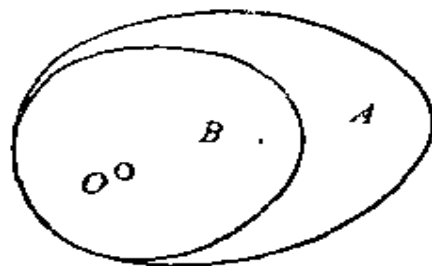


图 4.7 位形空间的允许范围

这样直接得出: 如果 V 在 A 中是正定, 那么 V 在 B 中亦正定。因此我们有下列推论:

定理 11. 在既不含有非定常力, 也不含有循环力的一个简单的线性系统中, 如果附加有一些不改变平衡位形的无功约束, 那么其最小临界载荷也不会降低。

一般来说, 附加约束使最小临界载荷有所增加。这个定理对于非陀螺系统特别有用, 因为在这里 P_1 是稳定与不稳定区域之间转换的标志。

在非线性情形下, 如果把 V 看作为二次近似式, 且记住在载荷 P_1, P_2, \cdots 下, 不一定发生静力失稳, 那么图4.6所包含的各种信息仍然是正确的。对于非陀螺保守系统及纯粹的完全的耗散系统来说, P_1 仍然标志着稳定区与不稳定区之间的转折点。因此我们有

定理 12. 对于属于非陀螺保守型及纯粹和完全耗散型的简单非线性

性系统的动力失稳问题，定理11仍然是正确的。

习题

1. 证明欧拉例子 (§1.2, 表1.1) 的屈曲载荷 (1.10) 与定理 11 是一致的。

第五章 循环系统

纯循环系统是在保守系统上加上循环力得到的。除了无功反力以外,这类系统中包含有循环力,还有非循环力和可能有的陀螺力。

§ 5.1 概 述

在线性情况下,运动微分方程由(1.113)给出

$$\sum_{k=1}^n (m_{ik}\ddot{q}_k + g_{ik}\dot{q}_k + c_{ik}q_k) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5.1)$$

式中矩阵 (m_{ik}) , (g_{ik}) 和 (c_{ik}) 是常数, (m_{ik}) 是对称的和正定的, (g_{ik}) 是反对称的, (c_{ik}) 是非对称的。特征方程是

$$\det(m_{ik}\lambda^2 + g_{ik}\lambda + c_{ik}) = 0. \quad (5.2)$$

在§ 2.1中曾指出,在没有陀螺力和循环力的情况下,根 λ_i 是纯虚数,且只要 V 是正定的,系统就是稳定的。由于 (c_{ik}) 的对称性,(5.2)的根被限制在 λ 平面内的坐标轴上(图 2.1),当第一对根在原点相遇随后沿实轴离开原点时,系统变为不稳定。但是,存在循环力时,这些根不再被限制在坐标轴上,甚至在没有陀螺力时,也是这样。在§ 1.3中,我们碰到过一个例子(图 1.13),在那里,尽管 V 是正定的,而平衡却是不稳定的,而当 V 不是正定时,平衡却是稳定的。很容易看出,对于给定的值 c_1 与 c_2 ,在 μ 增长时(1.67)的判别式变为负的。这意味着循环力的失稳作用是这样产生的,即在这以前一直是不相等的两对根在虚轴上相遇,然后离开

坐标轴(图 5.1)。由这个例子,我们推断出:

定理 13. 循环力可以使保守系统变得稳定或不稳定。

在图 2.18 中所表示的是表 1.1 (§ 2.1) 的欧拉屈曲问题例。原来的柱子被简化为具有集中质量和线性恢复力矩的双摆,端部作用有一坚直的载荷。如果假设载荷沿切线方向作用 (图 5.2),那么这个问题就变成循环的了。为了用处理轴向受载系统的方法

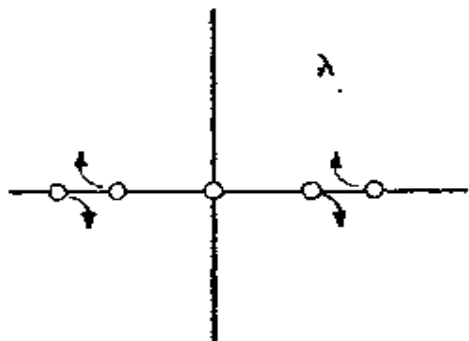


图 5.1 (5.2)式的根离开虚轴过程

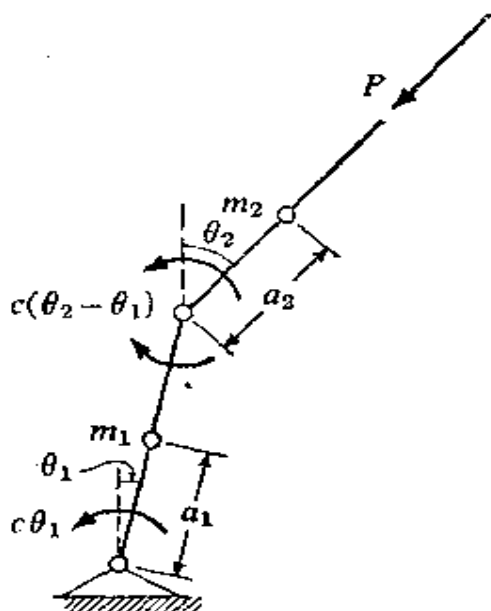


图 5.2 在端部作用有切向载荷的柱的模型

(§ 2.7)来研究这个问题,我们注意到: 在我们设定的近似程度上,两系统的差别在于一个大小为 $P\theta_2$ 的水平力。由于它的虚功为 $-P\theta_2 l(\delta\theta_1 + \delta\theta_2)$, 其中 l 是两刚性杆件的共同长度。因此在 (2.97)中,必须加上广义力

$$Q_1 = Q_2 = -Pl\theta_2. \quad (5.3)$$

因而运动微分方程成为

$$\left. \begin{aligned} (m_1 a_1^2 + m_2 l^2) \ddot{\theta}_1 + m_2 l a_2 \ddot{\theta}_2 + (2c - Pl)\theta_1 \\ - (c - Pl)\theta_2 = 0, \\ m_2 l a_2 \ddot{\theta}_1 + m a_2^2 \ddot{\theta}_2 - c\theta_1 + c\theta_2 = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

按 § 2.7 中的办法推演下去就得到特征方程

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0, \quad (5.5)$$

现在的各个系数稍有不同, 即为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= m_1 m_2 a_1^2 a_2^2, \\ p_2 &= [m_1 a_1^2 + m_2 a_2^2 + m_2 (l + a_2)^2] c \\ &\quad - m_2 a_2 (l + a_2) Pl, \\ p_4 &= c^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

由于 $p_4 > 0$, 因而没有静力失稳。在各种静力学方法中, 单用能量法也能很容易给出各临界载荷。然而, 从图 1.13 的例子我们知道, 对于这类系统能量法是不可靠的。因此, 我们采用动力学方法。

如果我们取 $m_1 = m_2 = m/2$, $a_1 = a_2 = l/2$, 即两个摆杆的质量集中在它们的中心, 那么系数(5.6)为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{64} m^2 l^4, \\ p_2 &= \frac{1}{8} m l^2 (11c - 3Pl), \\ p_4 &= c^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

特征方程的判别式是

$$\Delta = p_2^2 - 4 p_0 p_4 = \frac{3}{64} m^2 l^4 (39c^2 - 22cPl + 3P^2 l^2). \quad (5.8)$$

系数 p_0 与 p_4 恒为正, 系数 p_2 只当 $P < \frac{11}{3}(c/l)$ 时才为正。判别式(5.8)在区间

$$3 \frac{c}{l} < P < \frac{13}{3} \frac{c}{l} \quad (5.9)$$

是负的, 这一情况可用图 5.3 来说明。对于 $P < 3 \frac{c}{l}$, 根 $\lambda_{1,2}^2$ 是负的, 故摆是稳定的。在区间 (5.9) 内, 根是共轭复数, 而对 $P > \frac{13}{3}(c/l)$, 判别式 Δ 为正, 但 P_2 为负, 故根 $\lambda_{1,2}^2$ 是正的, 对这两

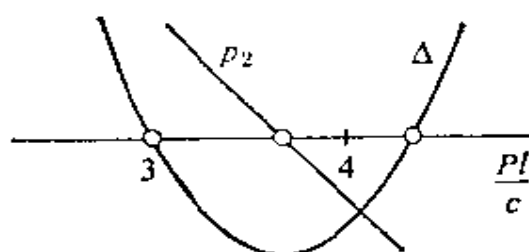


图 5.3 确定图 5.2 系统稳定性的各函数

种情形摆都是不稳定的。显然,对于

$$P > 3 \frac{c}{l} \quad (5.10)$$

的任何载荷值都是临界的。

如果我们取 $m_1 = m/2, m_2 = m/4, a_1 = a_2 = l$, 即质量集中在两摆杆的端部,这时系数(5.6)为

$$\left. \begin{aligned} p_0 &= \frac{1}{8} m^2 l^4, \\ p_2 &= \frac{1}{4} m l^2 (7c - 2Pl), \\ p_4 &= c^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

判别式变成

$$\Delta = \frac{1}{16} m^2 l^4 (41c^2 - 28cPl + 4P^2 l^2). \quad (5.12)$$

重复上面关于根 $\lambda_{1,2}^2$ 的讨论,我们可得到

$$P > \left(\frac{7}{2} - \sqrt{2} \right) \frac{c}{l} = 2.09 \frac{c}{l} \quad (5.13)$$

的任何载荷值都是临界的。

尽管图 2.19 与图 5.3 之间表面上十分相似,但是轴向载荷与切向载荷有着本质的差别。图 2.19 表明,随着 P 的增加轴向受载的双摆的不稳定发生在当 p_4 改变符号时,也就是当 λ_2^2 沿实轴运动而通过原点时。如果受到扰动,那么摆就单调地远离初始平衡位形。系统首先在静力学上变为不稳定,这类失稳有时叫做分叉。

(divergence)*。在切向受载的摆的情形中,失稳出现在当 λ 改变符号时,也就是当 λ_1^2 与 λ_2^2 在负实轴上相遇并随后变为复数的时候(图 5.3)。这里没有静力失稳。如果摆受到扰动,则摆开始以自激振动的方式开始运动,这种自激现象有时称为颤振(flutter)。

(5.10)与(5.13)之间的差别表明在一个循环系统中,临界载荷的范围可能同质量分布有关。因为在静力学方法中不出现质量,因此我们有:

定理 14. 一般来说,循环类型的稳定问题不能用静力学方法来解决。

在铰链处引入阻尼力矩,那么图 5.2 的问题就会变化。按照 § 4.2 定理 10 可以证明[81],阻尼力不仅在陀螺系统中,而且在循环系统中有降低稳定性的作用。Herrmann 和 Jong[26]曾用一种改进方法解决刚才提到的这一特殊问题。Leipholz[40]曾从更为普遍的观点研究了阻尼的影响,他还强调了用动力学方法研究这类问题[37]时迦辽金法的作用。关于最后这个问题亦可见[42]。

习题

1. 证明(5.13)式。

§ 5.2 切向载荷作用下的屈曲

图 5.2 所示的系统代表例 3 屈曲问题的一个简化模型,但是载荷的方向始终与屈曲过程中的挠度曲线的切向一致,而并不保持在它原来的方向。图 5.4 是此问题未经简化的情形。它是纯循环型的问题,因此要用动力学方法。事实上,在 § 1.3 曾说明过,

* 译注,亦可译作“发散”。

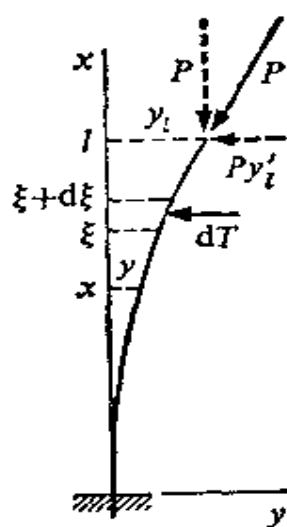


图 5.4 切向受载柱的振动

平衡法不能给出屈曲载荷。正确的解答是由 Beck[2]得到的。

我们用动力学方法来研究在载荷 P 作用下柱子的弯曲振动 (图 5.4)。令 α 为抗弯刚度, μ 是单位长度的质量, α 、 μ 都是常量。象 (1.45) 那样, 惯性力为

$$dT = \mu \ddot{y}(\xi, t) d\xi, \quad (5.14)$$

因而挠度曲线满足下述关系

$$\alpha y''(x, t) = P[y(l, t) - y(x, t)] - Py'(l, t)(l - x) - \mu \int_x^l \ddot{y}(\xi, t)(\xi - x) d\xi. \quad (5.15)$$

对 x 微分两次, 我们得到

$$\alpha y''''(x, t) = -Py'(x, t) + Py'(l, t) + \mu \int_x^l \ddot{y}(\xi, t) d\xi \quad (5.16)$$

和

$$\alpha y'''' + Py'' + \mu \ddot{y} = 0, \quad (5.17)$$

式中各项均是 x, t 的函数, 微分方程 (5.17) 与由欧拉情形得到的微分方程 (1.50) 相同。运动边界条件是

$$y(0, t) = y'(0, t) = 0. \quad (5.18)$$

动力边界条件为

$$y''(l, t) = y'''(l, t) = 0. \quad (5.19)$$

这是根据在自由端处必须满足 (5.15) 和 (5.16) 而得出的, 它们表示在 $x=l$ 处弯矩与剪力都为零。在与之相应的欧拉问题中, 最后一个边界条件 $y'''(l, t) = 0$ 应为 $\alpha y'''(l, t) = -Py'(l, t)$ 。

采用振动理论中的标准步骤, 设

$$y(x, t) = f(x)(A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (5.20)$$

式中函数 $f(x)$ 是任选的, 但要满足

$$f(0) = f'(0) = f''(l) = f'''(l) = 0, \quad (5.21)$$

这样, 端部条件得以满足, (5.20) 就可以看作是受载柱的自由振动。将(5.20)代入(5.17), 我们得到 $f(x)$ 的常微分方程

$$\alpha f'''' + P f'' - \mu \omega^2 f = 0, \quad (5.22)$$

此时暂不考虑边界条件, 并取

$$f(x) = C e^{i\lambda x}, \quad (5.23)$$

我们便得到 λ 的特征方程

$$\alpha \lambda^4 - P \lambda^2 - \mu \omega^2 = 0, \quad (5.24)$$

式中 ω 是未知常数。引入符号

$$\frac{P}{\alpha} = p, \quad \frac{\mu}{\alpha} = \nu, \quad (5.25)$$

那么, 由(5.24)得到

$$\lambda_{1,3}^2 = \frac{p}{2} \pm \left(\frac{p^2}{4} + \nu \omega^2 \right)^{1/2}; \quad (5.26)$$

从而得到(5.24)式的根为

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \pm \left[\frac{p}{2} + \left(\frac{p^2}{4} + \nu \omega^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}, \\ \lambda_{3,4} &= \pm \left[\frac{p}{2} - \left(\frac{p^2}{4} + \nu \omega^2 \right)^{1/2} \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.27)$$

由于 $p \neq 0$ 和 $\omega \neq 0$, 所以这些根是不等的。由此组成(5.22)的一般解是

$$f(x) = \sum_{k=1}^4 C_k \exp(i\lambda_k x). \quad (5.28)$$

将(5.28)代入边界条件(5.21), 最终得到关于 C_k 的齐次线性方程组。结果得到第二个特征方程

$$\left. \begin{aligned} g(\omega^2, p) = (2\nu\omega^2 + p^2) + 2\nu\omega^2 \operatorname{ch}(\lambda_1 l) \cos(\lambda_3 l) \\ + ip\sqrt{\nu\omega^2} \operatorname{sh}(\lambda_1 l) \sin(\lambda_3 l) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.29)$$

对于一给定的柱子, ν 和 l 是已知的, 由(5.27)知, λ_1 与 λ_3 是 p 和 ω^2 的函数。方程(5.29)可以用 $(\nu\omega^2, pl^2)$ 平面内的一族曲线来表示。曲线由无限多个分支组成, 每个分支都从第四象限开始,

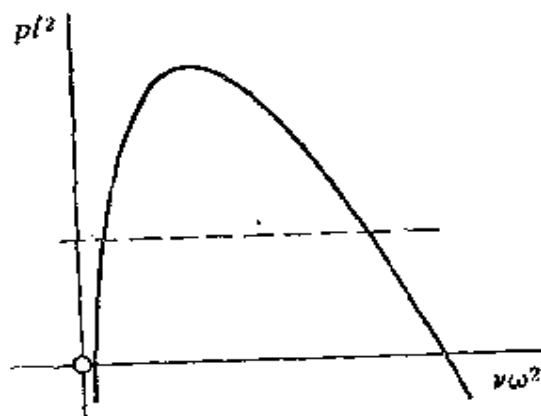


图 5.5 切向受载柱的特征曲线

在第一象限达到极大值, 图 5.5 表示第一个分支, 其余各分支则有较大的极大值。各分支与轴 $\nu\omega^2$ 的交点给出未受载柱的弯曲振动的圆频率。某一给定载荷 P 相应于图 5.5 上的一条水平线。它和曲线的交点给出该受载柱的圆频率。 P 值较小时, 相应的振动仍是简谐振动, 但是若 P 增加到充分大, 虚线不再与第一分支相交,

(5.29) 的根 ω_1^2 与 ω_2^2 就变成复数。由(5.20)很容易看出这意味着幅度是无界的, 也就是自激振荡。因此, 当 pl^2 相应于图 5.5 中第一分支的最大值时, 柱子开始成为不稳定。这一最大值为 $p_1 l^2 = 20.05$, 这时的屈曲载荷为

$$P_1 = \alpha p_1 = 20.05 \frac{\alpha}{l^2}. \quad (5.30)$$

这样, 欧拉公式(1.10)中的因子 k 为

$$k = \frac{20.05}{\pi^2} = 2.031. \quad (5.31)$$

由此可见, 柱子确实会发生屈曲, 而其最小临界载荷约为欧拉载荷的八倍。

这个问题可以从不同方面加以扩展。Pflüger [52] 曾在柱的端部加上一个集中质量。Leipholtz [36, 37] 曾研究过在整个长度

上作用有均匀分布的切向载荷的柱子。总载荷 P 的最小临界值仍表为(1.10), 其中的数值因子 k , 对于例 3 与例 5 分别为 $k=4$ 和 $k=1.92$ 。Hauger [22] 曾研究过线性分布载荷以及其他一些情况。Herrmann 和 Bungay [25] 研究过在端部作用有一个轴向载荷和一个任意切向分量的例 3 的模型。他们指出, 随着这两个力的比例的不同, 失稳可以表现为分叉形式或者颤振形式。另外, 当这两载荷成比例地增加时, 在发生分叉后接着可以是稳定的, 最后发生颤振。发生分叉的起始值可以用静力学方法求得。Dzanelidze [15] 和 Contri [11, 12] 对例 3 的柱子曾得到过类似的结果。Tolaccia [68] 曾研究过作用线通过一固定点的端部载荷作用下的例 3。Barta [1] 研究过另外一些非保守情况。Bolotin [7] 在其著作中对这一领域作了出色的综述, Herrmann [23 a] 则对更近代的情况作了评论。

习题

1. 证明在例 5 情况中, 切向受载柱的屈曲问题在数学上与轴向受载柱的屈曲问题相同。

§ 5.3 扭 转 屈 曲

不仅压缩可以导致屈曲, 一根轴在扭矩作用下, 也会不稳定。作为一个例子, 我们来研究图 5.6 中受扭矩 M 作用的轴, 其支承方式与欧拉柱例 1 相同 (§ 1.2, 表 1.1)。

因为屈曲是以原来直的轴线发生挠曲为其特征的。故目前我们可以不计轴的压缩柔度与扭转柔度, 另外, 剪力影响也予忽略。只要轴线仍是直的, 如在欧拉屈曲情形中一样, 轴的弯矩为零。然而, 只要一旦产生挠曲, 就会在轴的各截面上出现弯矩。当力矩充

分大时,就会导致屈曲。

由于轴承有一定宽度,轴的上端被迫只能绕固定轴 x 转动,因而载荷 M 是非循环的,内应力也是非循环的。余下的力只有不做功的反力。因此,在这种特殊情形下,此问题是非陀螺和保守的,故可以用平衡法来解决。

一般来说,一个非平凡平衡位形可以用一条三维挠曲线来描述,假定挠曲线的斜率很小,由载荷 M 以及轴承的反力 Q_y 、 Q_z 、 M_y 、 M_z 的作用在 x 截面内产生的应力合力由一个力和一个力偶所组成(图 5.7)。我们对此力并无兴趣,而力偶矩矢量的分量为

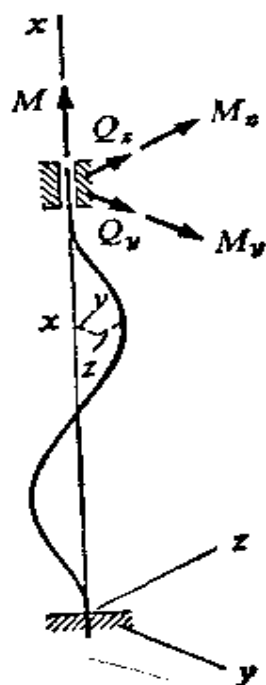


图 5.6 受扭矩作用的轴,情况 1

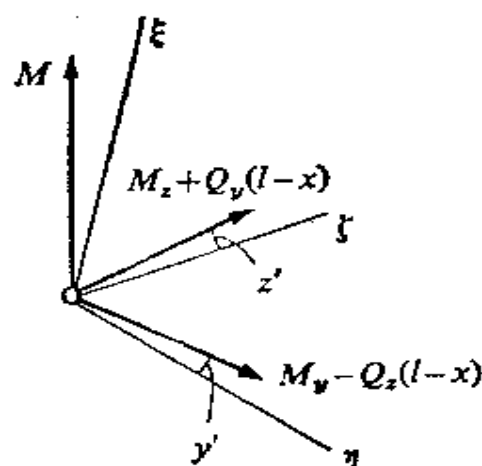


图 5.7 轴的一个截面上应力的合力

$$M_y, \quad M_y - Q_z(l-x), \quad M_z + Q_y(l-x), \quad (5.32)$$

式中 l 表示轴的长度。象在 § 3.3 (图 3.5) 中那样为便于分析,引入主坐标系 ξ 、 η 、 ζ 其中 ξ 沿挠度曲线的切线方向,而 η 平行于 x 、 y 平面, ζ 在我们的近似程度中平行于 x 、 z 平面。将矢量 (5.32)

对此主坐标系重新分解,我们得到沿 η 和 ξ 方向的两个弯矩矢量,其大小分别为

$$\begin{aligned} & -My' + M_y - Q_z(l-x), \\ & -Mz' + M_z + Q_y(l-x). \end{aligned} \quad (5.33)$$

因此挠曲线的微分方程为

$$\left. \begin{aligned} \alpha y'' &= -Mz' + M_z + Q_z(l-x), \\ \alpha z'' &= My' - M_y + Q_y(l-x). \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

对 x 微分两次以消去反力,我们得到微分方程

$$\alpha y'''' + Mz''' = 0, \quad \alpha z'''' - My''' = 0. \quad (5.35)$$

相应的边界条件为

$$\left. \begin{aligned} y(0) &= y'(0) = y(l) = y'(l) = 0, \\ z(0) &= z'(0) = z(l) = z'(l) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

为方便起见,引入复挠度

$$r = y + iz \quad (5.37)$$

和符号

$$w = \frac{M}{\alpha}. \quad (5.38)$$

微分方程(5.35)等价于一个复数关系式

$$r'''' - iwr''' = 0, \quad (5.39)$$

边界条件(5.36)成为

$$r(0) = r'(0) = r(l) = r'(l) = 0. \quad (5.40)$$

(5.39)的一般解为

$$r = Ae^{iwx} + Bx^2 + Cx + D, \quad (5.41)$$

式中 A 、 B 、 C 和 D 是复常数,为满足边界条件就要求

$$\left. \begin{aligned} A & - D = 0, \\ Aiw & + C = 0, \\ Ae^{iwl} + B l^2 + C l + D &= 0, \\ A i w e^{i w l} + 2 B l + C &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.42)$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ iw & 0 & 1 & 0 \\ e^{iwl} & l^2 & l & 1 \\ iwe^{iwl} & 2l & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.43)$$

将第三行减去第一行,并以末列展开,我们立即得到

$$(2-iwl)e^{iwl}-2+iwl, \quad (5.44)$$

或

$$\left(1-\frac{iwl}{2}\right)e^{iwl/2}-\left(1+\frac{iwl}{2}\right)e^{-iwl/2}, \quad (5.45)$$

最后得到

$$\operatorname{tg} \frac{wl}{2} = \frac{wl}{2}. \quad (5.46)$$

此特征方程是超越方程,它的最小解是(图 5.8)

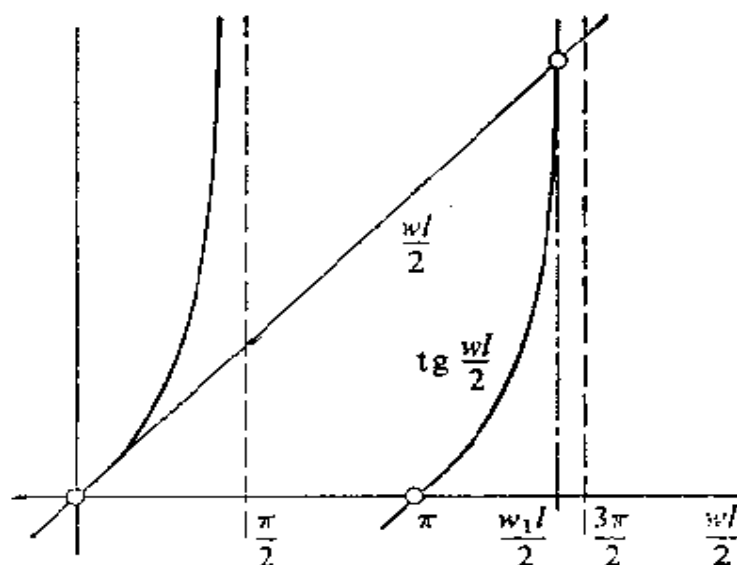


图 5.8 图 5.6问题的图解

$$\frac{w_1 l}{2} = \pm 4.494 . \quad (5.47)$$

因而屈曲力矩为

$$M_1 = \pm 8.988 \frac{\alpha}{l} . \quad (5.48)$$

上式中的正负号表示扭矩的方向是任意的。因为此问题是简单的和非陀螺保守的，§2.1 的定理 2 可以应用，由此可知任何扭矩 $|M| \geq |M_1|$ 都是临界的。

这里研究的问题最早是由 Greenhill[19] 解决的，他曾用同样的方法解决过与表 1.1 (§ 1.2) 中的情况 2 与情况 5 有相应端部条件的问题，其结果可以写成类似欧拉公式的式子

$$M_1 = \pm k\pi \frac{\alpha}{l} , \quad (5.49)$$

式中 k 是一数值因子，在情况 1 中，该因子的值为

$$k = \frac{8.988}{\pi} = 2.861 . \quad (5.50)$$

对于情况 2，Greenhill 求得 $k=2$ 。在情况 5 中，他的结果后来由 Nicolai[51] 和 Troesch[69] 分别独立地纠正过，正确的值也是 $k=2$ 。

实际上，平衡法只对于情况 1 与情况 2 的端部条件才是合理的。在其余情形，挠曲线至少有一端不能保持始终沿着轴线方向。在 § 1.5 中曾经证明过(图 1.20)，作用在可自由地绕任意轴线转动的物体上的常力偶矢量是循环的。只有当转动轴线是固定的情况下，这一证明才失效，而该力偶才可能是非循环的。由此可知，如果载荷是一个大小和方向都不变的力偶，那么正如 Greenhill 及其他作者所暗自假设的那样，情况 3 至情况 5 的问题是循环的。按照定理 14 (§ 5.1)，在这些情况下只有动力学方法才是合理的。

为了证实这一论断，让我们来计算图 5.9 中的轴的挠度曲线。

该轴一端固定,另一端作用有一轴向扭矩 M 和垂直于未挠曲轴线的力 Q ,其分量为 Q_y 与 Q_z 。比较一下图 5.6 和图 5.9 就可以看出,由(5.34)中舍去 M_y 和 M_z 项,就可以得到图 5.9 问题的微分方程,边界条件为

$$y(0) = y'(0) = z(0) = z'(0) = 0. \quad (5.51)$$

引入符号

$$q = \frac{1}{\alpha} (Q_y + iQ_z) \quad (5.52)$$

和(5.38)及复挠度(5.37),我们得到复微分方程

$$r'' - iwr' = q(l-x) \quad (5.53)$$

和边界条件

$$r(0) = r'(0) = 0. \quad (5.54)$$

(5.53)的一般解为

$$r = A \exp(iwx) + B + \frac{q}{iw} \left[\frac{x^2}{2} - \left(l - \frac{1}{iw} \right) x \right], \quad (5.55)$$

式中 A 与 B 是复常数。由端部条件(5.54)得出

$$B = -A = -\frac{q}{w^2} \left(l - \frac{1}{iw} \right). \quad (5.56)$$

于是,挠曲曲线为

$$r = \frac{q}{w^2} \left(l - \frac{1}{iw} \right) \left[1 - \exp(iwx) \right] + \frac{q}{iw} \left[\frac{x^2}{2} - \left(l - \frac{1}{iw} \right) x \right]. \quad (5.57)$$

如果 $Q_y = Q_z = 0$,问题就成为情况 3 的 Greenhill 屈曲问题。当 $q \rightarrow 0$ 时从(5.57)我们得出结论: $r \equiv 0$, 也就是说不存在任何非平凡平衡位形。按照平衡法这意味着 $k = \infty$, 也就是无论载荷多大,轴都不发生屈曲。在情况 4 中可以得到同样的结果。在情况 5 中,如上面已提到过,平衡法求得 $k = 2$ 。

由于平衡法是不合用的,所以毫不奇怪情况 3 与情况 4 会得到不可信的结果。作者[80]和 Troesch[69]用动力学方法重新研

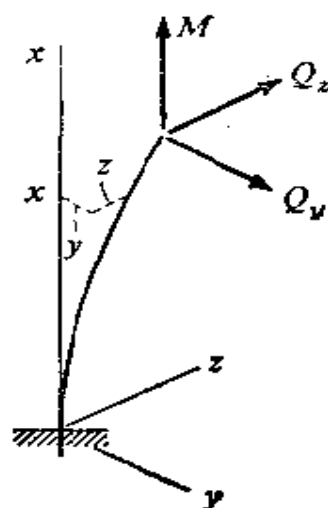


图 5.9 受载悬臂轴的挠曲

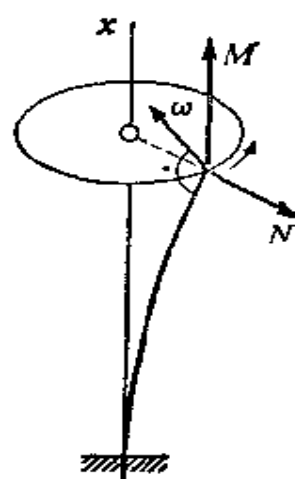


图 5.10 靠在光滑圆盘上的受载轴

究了这些可疑情况,证实了情况 5 的结果是 $k=2$, 对情况 3 与情况 4, 结果原来是 $k=0$, 也就是轴远不是无条件稳定的, 而是在任意小的扭矩作用下都会发生屈曲。下面我不用冗长的计算, 而通过定性的讨论, 来证实情况 3 的 $k=0$ 。

回到方程(5.57), 并将端点复挠度 $r(l)$ 对扭矩的微小量 $|wl| \ll 1$ 展开, 我们得到

$$r(l) = \frac{ql^3}{3} \left(1 + \frac{3}{8} iwl \dots \right). \quad (5.58)$$

等式右端第一项代表只有力 Q 而无扭矩时产生的挠度。在此特殊情况下, 复向量 q 和 $r(l)$ 显然是同向的, 即轴端如所预计的那样沿着力 Q 的方向移动。第二项是由于扭矩引起的一阶修正量。扭矩的存在破坏了 q 与 $r(l)$ 的同向性: 由于扭矩的附加作用, 轴端的挠度不再沿力的方向。

图 5.10 中仍表示图 5.9 的那根轴, 不过现在它只受一轴向力矩 M 作用, 轴的顶端靠在一个完全光滑的圆盘上, 圆盘是固定的, 其中心在 x 轴上, 其平面垂直于 x 轴。显然圆盘给予轴的法向力 N 现在起着图 5.9 中力 Q 的作用, 因为力 N 沿着 $r(l)$

的方向, 所以若 $M \neq 0$, 轴就不能处于平衡, 因而开始沿圆盘运动。如果挠曲曲线的形状不改变, 轴的顶端绕着圆盘产生平动, 同时以角速度 ω 作转动。很容易看出, 矢量 ω 位于 x 轴与接触点所决定的垂直平面内, 且其方向必须垂直于挠曲曲线, 这样才能保持不产生扭转。这样, 扭矩的功率总是正的, 大小为标量积 $M\omega$, 此功转换成动能, 这意味着不论 $M \neq 0$ 的幅度大小如何, 轴总是不稳定的。

这不是对于在情况 3 与情况 4 中得到的失稳情况的正式证明, 而是一种讨论。这种讨论很容易阐明引起这类失稳的机理。

前面曾指出, 在情况 5 中, Greenhill 的结果已为动力学方法所证实。在 § 5.2 末尾还提到过其它一些用静学方法能够求得正确的结果的例子, 虽然这些例子都是循环型的。在这些情况下, 静力学方法适用性的一般的充分条件曾由 Leipholz[38、39]讨论过。

习题

1. 证明在情况 2 中 Greenhill 屈曲问题的因子 $k=2$ 。
2. 试说明上题发生屈曲时, 其挠曲线为螺旋线。证明在一个适当选择的坐标系中, 它的轴线方程为

$$y = \frac{ml}{2\pi}x, \quad z = -\frac{ml^2}{4\pi^2}(ml \ll 1). \quad (5.59)$$

3. 证明将平衡法用于情况 4 的 Greenhill 屈曲问题, 可以得到同情况 3 一样的结果 $k=\infty$ 。

§ 5.4 保守扭转

无疑动力学方法是解决情况 3 至情况 5 Greenhill 屈曲问题的正确方法。值得注意的是它却证明了事先用不合法的方法在情

况 5 中得到的结果。然而在情况 3 与情况 4 中，动力学方法提供的答案似乎同平衡法的一样不可信。人们从来也不曾观察到过一个轴会在任意小的扭矩作用下丧失稳定性。

为了解释这个明显的矛盾现象，我们来研究通常传递扭矩给轴的各种方式，并研究组成这样力偶的力是否真正具有保持扭矩矢量方向不变所必需的特性。作用于汽轮机转子上的力可能会产生这种扭矩，它们称为轴向扭矩。但在其它许多场合，情况就不是如此。

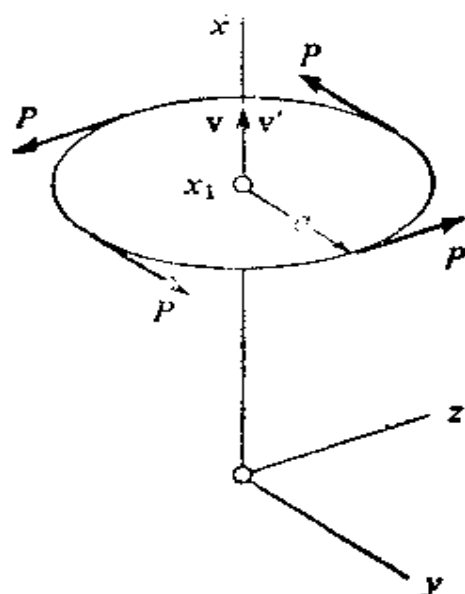


图 5.11 准切向扭矩或半切向扭矩的作用

图 5.11 表示在轴上加一扭矩的一种可能方式。一个圆盘在截面 x_1 处与轴刚性连结，缠绕在圆盘上的两根绳上作用有幅值为 P 且平行于 z 轴的力，圆盘平面垂直于轴。因此，挠曲线在 x_1 处的单位切向矢量 v 也是圆盘的法向矢量，它与包含两根绳的平面的单位法向矢量 v' 一开始是重合的，但在屈曲时，情况就不再如此。两个力 P 组成的扭矩矢量总是

$$M = Mv', \quad M = 2P\alpha. \quad (5.60)$$

在屈曲前， $v = (1, 0, 0)$ ， $v' = (1, 0, 0)$ ，因此有

$$M = M \cdot (1, 0, 0). \quad (5.61)$$

而在屈曲时， $v = (1, y'_1, z'_1)$ 和 $v' = (1, y'_1, 0)$ ；因此

$$M = M \cdot (1, y'_1, 0). \quad (5.62)$$

v 与 v' 之间的这种差别是由于假设在屈曲期间力 P 和绳子都保持其方向不变的结果。 M 在 x, z 平面上的投影仍然是轴向的，而在 x, y 平面上的投影是挠曲线的投影在 x_1 点的切线方向。我

们把这种扭矩称为准切向扭矩(quasitangential)。

如果通过平行于 y 轴的另一根绳加上幅值相等的第二个力偶, 则扭矩的总幅值成为

$$M = 4 P a, \quad (5.63)$$

而单个力偶的矩是 $\frac{M}{2}$ 。关系式(5.62)给出—扭矩 $M_1 = (M/2)(1, y'_1, 0)$, 再加上第二个扭矩 $M_2 = (M/2)(1, 0, z'_1)$, 我们得到

$$M = M \cdot \left(1, \frac{1}{2} y'_1, \frac{1}{2} z'_1\right). \quad (5.64)$$

这个力偶矩矢量的两个投影平分了 x 轴与挠度曲线在 x_1 处的切线的两个投影之间的夹角。这类扭矩称为半切向扭矩(semitangential)。当在圆盘上均匀分布作用有任意 $n > 2$ 个等幅值力时, 可以证明[83], 其结果亦得到一个半切向扭矩。

力也可以通过两根绳加在一根横杆上(图 5.12), 绳起初垂直于横杆及轴。这种情况下, 力 P 与扭矩 M 之间的关系取决于截面 x_1 处的扭转角 θ_1 。因此必须考虑至今一直忽略不计的扭转。如果力平行于 z 轴, 而横杆一开始平行于 y 轴, 在屈曲期间扭矩矢量可以证明[83]为

$$M = M \cdot (1, y'_1 + z'_1 \operatorname{tg} \theta_1, 0), \quad (5.65)$$

式中

$$M = 2 P a \cos \theta_1 \quad (5.66)$$

是屈曲将要开始时扭矩的幅值。这种扭矩称为伪切向扭矩(pseudotangential torque)。可以证明[83]只要是相应于欧拉例 1 到例 5 的任何一种情况, 这种扭矩不可能产生屈曲。理由是显然的: 因为扭转角同扭矩 M 成正比, 而且不可能超过 $\frac{\pi}{2}$, 所以即使 P 增加而超过极限, 力矩 M 仍是有限的。

上面所讨论的扭矩可由作用在绳端的常力来实现。可以预计

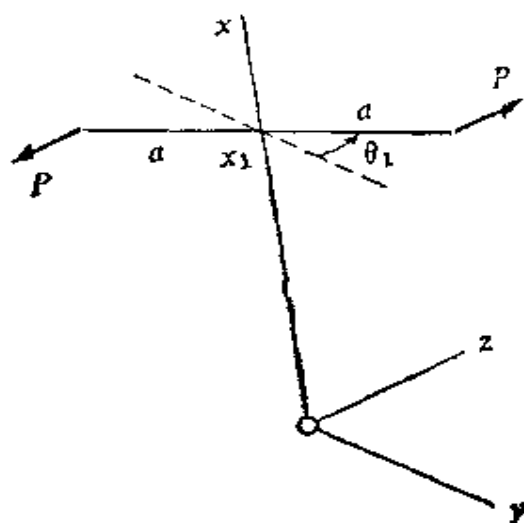


图 5.12 伪切向扭矩的作用

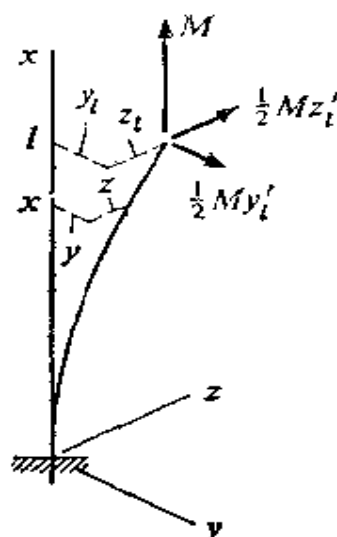


图 5.13 受半切向扭矩作用的轴, 情况 3

并可证明[83]它们是非循环的。Beck[3]曾求得这些以及类似的几种情形下合扭矩的势能。可以得出这类扭矩引起的屈曲是非陀螺保守问题, 按照 § 2.1 定理 2 和 3 它们可以用静力学方法来处理。在此基础上, 计算是十分简单的。此外, 对于情况 3 和情况 4, 可以得出在小载荷作用下是稳定的。

图 5.13 表示按照情况 3 支承的一个轴, 它受一个半切向扭矩的作用。对比图 5.7, 我们看到, 在(5.34)式中舍去含有 Q 的项, 并令 $M_y = M y'_l / 2$ 和 $M_z = M z'_l / 2$, 就可以得到挠曲线的微分方程。于是我们有

$$\left. \begin{aligned} \alpha y'' &= -M z' - \frac{1}{2} M z'_l, \\ \alpha z'' &= M y' - \frac{1}{2} M y'_l, \end{aligned} \right\} \quad (5.67)$$

或者采用(5.37)与(5.38)的符号, 我们有复数形式

$$r'' - i\omega r' = -\frac{1}{2} i\omega r'_l. \quad (5.68)$$

复数端部条件是

$$r(0) = r'(0) = 0, \quad r'(l) = r'_i. \quad (5.69)$$

(5.68)的一般解为

$$r = A e^{iwx} + B + \frac{1}{2} r'_i x. \quad (5.70)$$

由边界条件(5.69)得到三个关系式

$$\left. \begin{aligned} A + B &= 0, \\ A i w + \frac{1}{2} r'_i &= 0, \\ A i w e^{iwl} - \frac{1}{2} r'_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.71)$$

由此我们得到特征方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ i w & 0 & \frac{1}{2} r'_i \\ i w e^{iwl} & 0 & -\frac{1}{2} r'_i \end{vmatrix} = 0, \quad (5.72)$$

或

$$\frac{1}{2} i w (1 + e^{iwl}) = 0. \quad (5.73)$$

将(5.73)分成实部与虚部, 我们发现当

$$\cos wl = -1 \quad (5.74)$$

时, 也即当 $wl = \pm \pi, \pm 3\pi, \dots$ 时, 方程得到满足。从稳定区到不稳定区的过渡发生在 $w_1 = \pm \pi/l$, 亦即发生在扭矩为

$$M_1 = \pm \pi \frac{\alpha}{l}, \quad (5.75)$$

这对应于 Greenhill 公式(5.49)中的因子 $k=1$ 。

用类似的方法可以解决其他端部条件以及其他类型的保守扭矩问题。表 5.1 列有 Greenhill 公式

$$M_1 = \pm k\pi \frac{\alpha}{l} \quad (5.76)$$

中的因子 k 的数值。任何扭矩 $|M| \geq |M_1|$ 都是临界的。在图下面的第一行列出了在 § 5.3 中对轴向扭矩讨论的结果，特别是在情况 3 与情况 4 中两个是零。其余行是半切向扭矩和准切向扭矩的结果，这里不再出现零。在情况 1 与情况 2 中，两端都是长轴承，这意味着各类扭矩之间并无差别，因此结果是一致的。在情况 5 中两端都是短轴承。在准切向扭矩作用下，屈曲载荷与作用在轴端的力偶臂之间的夹角 δ 有关；上行数值对应于 $\delta=0$ ，下行对应于 $\delta=\frac{\pi}{2}$ ，这两个数字并非是对应于 δ 的极值。

表 5.1 的最后两行属于保守扭矩。比较表内相应行内的数据可以证实定理 11 (§ 4.5) 对这些特殊情况的正确性，即从情况 3 到情况 1，从情况 3 到情况 4 以及从情况 5 到情况 4，因子 k 是增大的。另一方面，比较一下同列的值，除第 1 列与第 2 列外，都有相当大的差别，这就是说扭矩施加到轴上去的方式在相当大程度上影响着屈曲载荷，这一点对实际应用来说是很重要的。因为实际中有时候很难确定所加的扭矩的类型。

对于同时受扭矩 M 与压缩力 P 作用的轴来说，研究方法是类似的。临界载荷由相互关连的两个值 P_1 和 M_1 组成。Beck[3] 曾经研究过这类问题。

例如，如果图 5.13 的轴还受到压缩载荷，则微分方程 (5.68) 必须补充一项 $(P/\alpha)(r_1 - r)$ ，端部条件 (5.69) 中要加上 $r(l) = r_1$ ，那么当








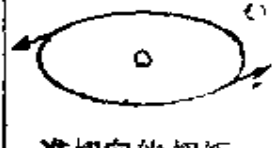
$$\frac{M_1^2 l^2}{\pi^2 \alpha^2} - \frac{4 P_1 l^2}{\pi^2 \alpha} = 1 \quad (5.77)$$

或

$$m^2 + p = 1 \quad (5.78)$$

时，屈曲就会发生，式中

表 5.1 Greenhill 公式(5.76)中的屈曲因子 k

约束	1	2	3	4	5
					
作用的扭矩					
轴向的	2.861	2	0	0	2
 半切向的扭矩	2.861	2	1	2.168	1.564
 纯切向的扭矩	2.861	2	.5	1.576	1.021

$$m = \frac{M_1 l}{\pi \alpha} = \frac{M_1}{M_0}, \quad p = \frac{4 P_1 l^2}{\pi^2 \alpha} = \frac{P_1}{P_0}. \quad (5.79)$$

这里, M_0 是没有压力时的屈曲扭矩, P_0 是没有扭矩时的屈曲载荷。图 5.14 的抛物线画出了 m 与 p 之间的关系(5.78)。压缩屈曲载荷 P_1 由于扭矩而降低, 反之亦然。曲线可以延伸到 P_1 为负的区域, 这意味着由扭矩引起的屈曲可以用拉力来延迟。

在另一些情况下, 虽然 m 与 p 之间的关系更复杂, 但其总的结果是类似的。在有压缩力时, 一个伪切向扭矩也可以成为临界的。

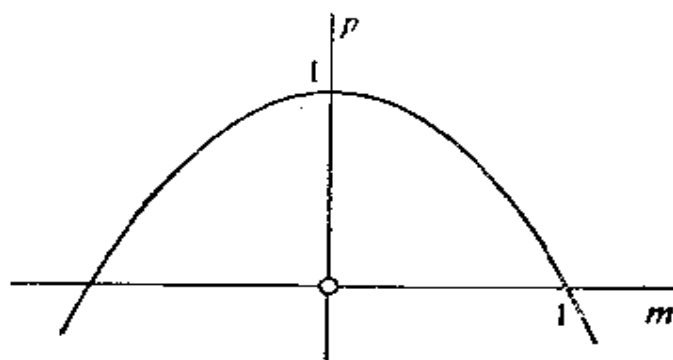


图 5.14 压缩与扭矩同时作用的临界参数, 情况 3

这些结果见 Beck 的论文[3]。Leipholz[34]把情况 1 与情况 2 的问题推广到加上均匀分布的轴向载荷的情形。

习题

1. 证明图 5.12 伪切向扭矩表达式(5.65)。
2. 在 Greenhill 情况 3 中作用有一个切向扭矩矢量, 试说明用平衡法可得到 $k = \infty$ 。
3. 在 Greenhill 问题情况 3 中受有准切向扭矩, 证明 $k = \frac{1}{2}$ 。
4. 在情况 3 的一个轴上, 受有压缩力和半切向扭矩, 证明(5.77)式。

§ 5.5 承载轴的临界转速

对于一个具有单一抗弯刚度、不受载荷作用的单圆盘转轴, 不计轴的质量和圆盘的柔性, 其临界角速度在§1.3和3.3中曾经计算过。如果不考虑陀螺力矩, 则仅有单一的临界角速度, 其值由(3.48)给出

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m a} = \frac{c_1}{m}, \quad (5.80)$$

式中 m 是圆盘质量, a 是影响系数, 它代表作用在轴上圆盘所在

处的单位力引起轴在该点的挠度，而 $c_1 = \frac{1}{a}$ 是相应的弹簧常数。

影响系数总可写成如下形式，即

$$a = \frac{1}{c_1} = h \frac{l^3}{\alpha}, \quad (5.81)$$

式中 l 是轴的长度， α 是它的抗弯刚度， h 是与圆盘所在位置和轴的约束条件有关的数值因子。因此，临界角速度为

$$\omega_0 = \sqrt{\alpha / h m l^3}. \quad (5.82)$$

如果不包括§1.1表1.1中的情况2，因为这种情况的两个轴承必须保持在一直线上，那么表中各个欧拉例子都是最简单的情況。如果假设在情况3中圆盘装在自由端，而其余情况圆盘都装在轴的中央，则(5.81)中的因子 h 就很容易计算出来，结果列在表5.2中




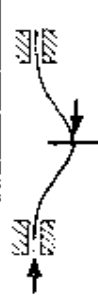



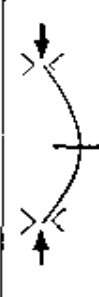
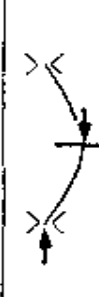

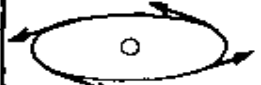
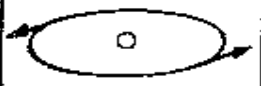
表 5.2 确定影响系数 (5.81) 中的因子 h

情 况	1	3	4	5
h	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{768}$	$\frac{1}{48}$

当轴受到载荷作用时，我们必须区别压缩力或扭矩是从轴的一端一直传递到另一端，还是仅作用在圆盘与轴的一端之间这两种情况。因此，表5.2的四种欧拉例子就派生出八种情况，现将它们重新排列在表5.3的第一行。对于不承受载荷的轴，八种情况就退化为四种，它们的临界角速度由(5.82)给出，式中的数值因子 h 列在表5.3中图下面的第一行中。

压缩力 P 的影响在§3.4中已经研究过。那里，在 P 小于屈曲载荷的条件下，曾算过表5.3情况1的临界角速度(§3.4末的习题还曾算过表5.3中情况7的情况)。可以证明(Melan [47], Biezeno 和 Grammel [5], Wehrli [70]) 其余各类例子的临界角速度 ω_1 都可

表 5.3 (5.82)、(5.83)、(5.84)、(5.85)及(5.87)各式中
决定临界角速度的常数

约束		1	2	3	4	5	6	7	8
									
无载荷	h	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{192}$		$\frac{7}{768}$			$\frac{1}{48}$	
 压缩	k_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{160}$	$\frac{29}{4480}$	$\frac{13}{560}$	$\frac{29}{896}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$
 半切向的扭矩	k_2	$\frac{7}{160}$	$\frac{3}{640}$	$\frac{13}{7680}$	$\frac{87}{35840}$				
	k_4					$\frac{3}{128}$	$\frac{3}{128}$	$\frac{3 \sin \delta}{32}$	$\frac{3}{64}$
 准切向的扭矩	k_2		$\frac{3}{640}$	$\frac{13}{7680}$					
	k_3	$\frac{3}{16}$			$\frac{3}{1792}$				
	k_4					$\frac{3}{128}$	0.02689	$\frac{3 \sin \delta}{32}$	$\frac{3}{64}$

由(3.64)的形式给出,

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 - \kappa_1 \frac{Pl^2}{\alpha} \quad (5.83)$$

式中 ω_0 是未受载荷轴的临界角速度(5.82), κ_1 是表5.3的第二行给出的数值因子。

如果在旋转坐标系中进行研究的话, 那么在轴向扭矩 M 作用

下的问题不仅是陀螺的而且是循环的。按照§5.3, 在例1中, 轴即使没有旋转, 也是不稳定的。可以预料并已得到证明[80]任何角速度都是临界的。对情况7与情况8, Troesch[69]曾得到过同样的结果。

表5.3的最后几行是由作者[82]和 Wehrli[70,71]对承受保守扭矩的轴所得到的结果。假设作用在圆盘上的力偶对静止的观察者来说是半切向或准切向的。至于作用在轴端的力矩对例1到例4无需特殊说明。在情况5到情况8中, 这些力矩被假设为准切向旋转的, 正如用 Cardan 铰把力矩传递给轴的情形一样。对于一个转动的观察者来说, 圆盘上作用有半切向扭矩的问题是纯陀螺的。例1到例4的临界角速度为

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 - k_2 \left(\frac{Ml}{\alpha} \right)^2 \quad (5.84)$$

式中假设扭矩 M 小于屈曲扭矩, k_2 是列在表 5.3 中的另一数值因子。例5到例8有一个临界区间

$$1 - k_4 \frac{Ml}{\alpha} \leq \frac{\omega_1}{\omega_0} \leq 1 + k_4 \frac{Ml}{\alpha}, \quad (5.85)$$

k_4 的值也可以从表 5.3 中得到。在例7中此值与作用于轴两端的扭矩臂之间的夹角 δ 有关(在未受载状态下测得)。当 $\delta = 0$ 时, 计及二阶项, 我们得到临界区间的界限值为

$$\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = 1 - \frac{1}{1920} [51 \pm 45(1 + 2\nu)] \left(\frac{Ml}{\alpha} \right)^2, \quad (5.86)$$

它们同材料的泊桑比 ν 有关。如果作用在圆盘上的力矩是准切向的, 那么对在例1、3、4、6和8, 问题都有变化。对例1、3、4这几种情况, 在静止坐标系中研究更为方便, 这些问题都是非定常的。在例3中, 对于半切向扭矩所得的结果得到了证实; 而在例1和例4中, 人们得到两个临界值

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1 \pm k_3 \frac{Ml}{\alpha}, \quad (5.87)$$

在例 6 与例 8 中，我们找不到一个坐标系使得各种力偶都是定常的，在那里有一个由(5.85)所决定的临界区间。

Leipholtz[35]曾把例 1 与例 2 的结果推广到考虑附加的均布轴向载荷的情形。Wehrli[73]曾把例 7 推广到用 Cardan 铰连接的不对中的轴。

习题

1. 验证表 5.2 中的因子 k 的各值。

§ 5.6 颤 振

在§5.1中，术语“颤振”是用来描写在循环系统中有时发生的自激振动现象。人们首先在飞机机翼上观察到这类振动。当飞机的速度超过一定极限时，就容易发生颤振。

机翼是一个连续体，可以用一能作弯曲与扭转振动的梁来近似。为了进一步简化这个问题，我们用一个矩形刚性板(图 5.15)来代替机翼。它有两个自由度，即升力作用线(通过 B 点并垂直于纸面)的垂直移动 z 和绕升力线的转动 θ 。假设飞机作匀速的水平移动，采用固结在飞机上的参考坐标系是比较方便的。此外，只要研究单位长度的一段板的一个截面就足够了。 C 为该截面的重心， m 为质量， i_c 为绕通过 C 点的纸面法线的回转半径。坐标

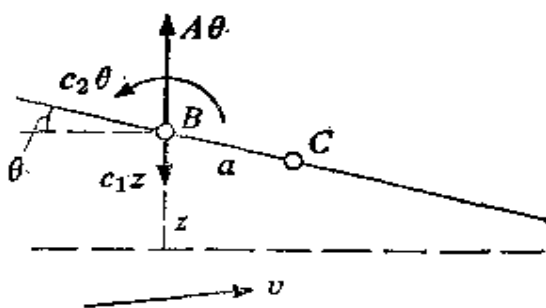


图 5.15 机翼的简化模型

图 5.15 机翼的简化模型。该图展示了机翼的简化模型，一个刚性板。板上有一个点 B，通过 B 点的升力作用线垂直于纸面，其垂直移动为 z 。板上还有一个点 C，为截面的重心。板的转动为 θ 。板的长度为 a 。板的运动速度为 v 。

z 与 θ 都从飞行时该截面的正常位置测量起, 而 v 是远离飞机未受扰动的空气速度。

在这一相当简化的模型中, 这个问题显然与图 5.2 的问题很类似。在正常情况下, 作用于板上的力是平衡的。按照机翼理论, 攻角的增加将产生一附加升力 $A\theta$, 式中 A 正比于飞机速度 v 的平方。另一方面, 假设板是靠恢复力 $c_1 z$ 与恢复力矩 $c_2 \theta$ 弹性地支持在其正常位置的。令 a 为 B 与 C 之间的距离, 则 C 点的速度为 $\dot{z} - a\dot{\theta}$ 。因此该板的功能为

$$\begin{aligned} T &= \frac{m}{2} [(\dot{z} - a\dot{\theta})^2 + i_C^2 \dot{\theta}^2] \\ &= \frac{m}{2} [\dot{z}^2 - 2a\dot{z}\dot{\theta} + (i_C^2 + a^2)\dot{\theta}^2], \end{aligned} \quad (5.88)$$

弹性力的势能为

$$V = \frac{c_1}{2} z^2 + \frac{c_2}{2} \theta^2. \quad (5.89)$$

附加升力用广义力

$$Q_1 = A\theta, \quad Q_2 = 0 \quad (5.90)$$

来表示。利用拉格朗日方程(1.97), 我们得到运动微分方程

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{z} - m a \ddot{\theta} + c_1 z - A\theta &= 0, \\ -m a \ddot{z} + m(i_C^2 + a^2)\ddot{\theta} + c_2 \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.91)$$

与 (m_{ik}) 相反, 矩阵 (c_{ik}) 是非对称的, 因此问题是循环型的。

如果采用下列符号

$$i_B^2 = i_C^2 + a^2, \quad \kappa_1^2 = \frac{c_1}{m}, \quad \kappa_2^2 = \frac{c_2}{m i_B^2}, \quad \alpha = \frac{A}{m} \quad (5.92)$$

其中 i_B 是绕通过 B 点的图 5.15 所示平面的法线的回转半径, α 正比于 v^2 , 那么(5.91)变为

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z} - \alpha \ddot{\theta} + \kappa_1^2 z + \alpha \theta &= 0, \\ -\frac{\alpha}{i_B^2} \ddot{z} + \ddot{\theta} + \kappa_2^2 \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.93)$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 + \kappa_1^2 & -\alpha\lambda^2 - \alpha \\ -\frac{\alpha}{i_B^2}\lambda^2 & \lambda^2 + \kappa_2^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (5.94)$$

或

$$p_0 \lambda^4 + p_2 \lambda^2 + p_4 = 0, \quad (5.95)$$

式中

$$p_0 = 1 - \frac{\alpha^2}{i_B^2} = \frac{i_C^2}{i_B^2}, \quad p_2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \frac{\alpha}{i_B^2} \alpha, \quad p_4 = \kappa_1^2 \kappa_2^2. \quad (5.96)$$

(5.95)的判别式为

$$\Delta = p_2^2 - 4 p_0 p_4 = \left(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - \frac{\alpha}{i_B^2} \alpha \right)^2 - 4 \frac{i_C^2}{i_B^2} \kappa_1^2 \kappa_2^2. \quad (5.97)$$

根据(5.96)知道,系数 p_0 与 p_4 总是正的, p_2 是 α 的线性函数, $\alpha = 0$ 时它为正,并随 α 增大而减小。判别式(5.97)是 α 的二次函数。当 $\alpha = 0$ 时,由于(5.92)的第一个关系,判别式为

$$\Delta(\alpha=0) = (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2 + 4 \frac{\alpha^2}{i_B^2} \kappa_1^2 \kappa_2^2 > 0. \quad (5.98)$$

当 $\alpha = (i_B^2/\alpha)(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)$ 时,即 $p_2 = 0$ 时,判别式是负的,当 α 很大时,判别式重新成为正的。图5.16中绘出了函数 $p_2(\alpha)$ 与 $\Delta(\alpha)$ 。当 $\alpha < \alpha_1$, 系数 p_2 和判别式 Δ 都是正的,(5.95)的两个根 λ_1^2 与 λ_2^2 是不相等的负根,因而板是稳定的。当 $\alpha = \alpha_1$, 两根重合, λ_1 是重根且是虚根,从§1.7的意义上说,平衡是临界的。当 $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$, 判别式是负的,因此 λ_1^2 与 λ_2^2 是共轭复数。当 $\alpha \geq \alpha_2$ 系数 p_2 是负的,而 Δ 是非负的,因此 λ_1^2 与 λ_2^2 是正的。后两种情形的板都是不稳定的。

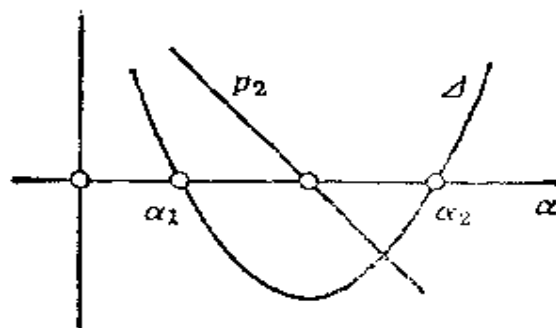


图 5.16 确定图5.15系统稳定性的各函数

由于 α 与 v^2 成正比, 当速度 v 经过某一与 α_1 相对应的值 v_1 时, 板变为不稳定。对于 $v > v_1$, 板仍是不稳定的。如果 v_2 与 α_2 对应, 那么区域 $v_1 < v < v_2$ 的特点是颤振, $v \geq v_2$ 是发散。对真实的机翼, 问题要复杂得多, 但其结果大体相同。

在悬索桥中这种类似的效应是很重要的。悬索桥的桥体可以用一个弹性悬挂的板条来近似, 就象上面研究过的机翼一样。在强风的作用下, 就可能产生自激振动。例如这曾导致 1940 年 Tocomo 悬索桥的倒塌[64]。

第六章 非定常系统

非定常或非自治系统包含有显含时间的载荷。它们的运动微分方程的特征是其系数与时间有关。可以预料研究这样的系统，静力法是不适合的。

§ 6.1 概 述

让我们来研究图6.1的单摆，其质量为 m ，摆长为 l ，它的悬挂点 O 按照

$$x = a \cos \omega t \quad (6.1)$$

的规律沿铅垂线振动。在作铅垂运动(6.1)的参考坐标系中研究单摆是较方便的。在此坐标系中悬挂点是相对静止的。作用在摆锤上的真实力有自重 mg 和反力 S 。相对运动的虚拟力只有离心力

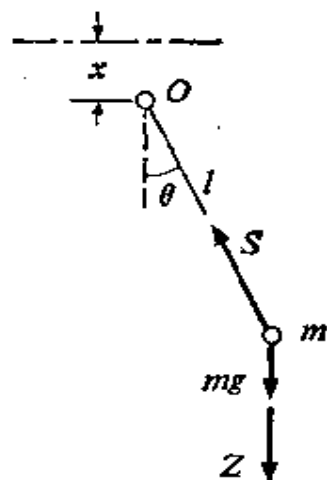


图 6.1 安装在振动支架上的单摆

$$Z = m a \omega^2 \cos \omega t, \quad (6.2)$$

不为零。对小摆角 θ ，运动微分方程为

$$m l \ddot{\theta} = -(m g + m a \omega^2 \cos \omega t) \theta \quad (6.3)$$

或

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{l} + \frac{a \omega^2}{l} \cos \omega t \right) \theta = 0. \quad (6.4)$$

引入新的时间变量

$$\tau = \omega t, \quad (6.5)$$

如果对 τ 的微分记作“/”，并采用符号

$$\delta = \frac{g}{l\omega^2}, \quad \varepsilon = \frac{a}{l}, \quad (6.6)$$

则(6.4)成为

$$\theta' + (\delta + \varepsilon \cos \tau) \theta = 0, \quad (6.7)$$

这就是通常所说的 Mathieu 方程。

按照 Mathieu 微分方程理论[63, 46], (6.7)的一般解对参数 δ, ε 取某些值是有界的, 而取另外一些值是无界的。Strutt 图(图6.2)在 $\delta - \varepsilon$ 平面上给出了稳定区与不稳定区。该图对称于 δ 轴。图中阴影区是稳定的, 区域的边界曲线, 除了它们与 δ 轴的交点

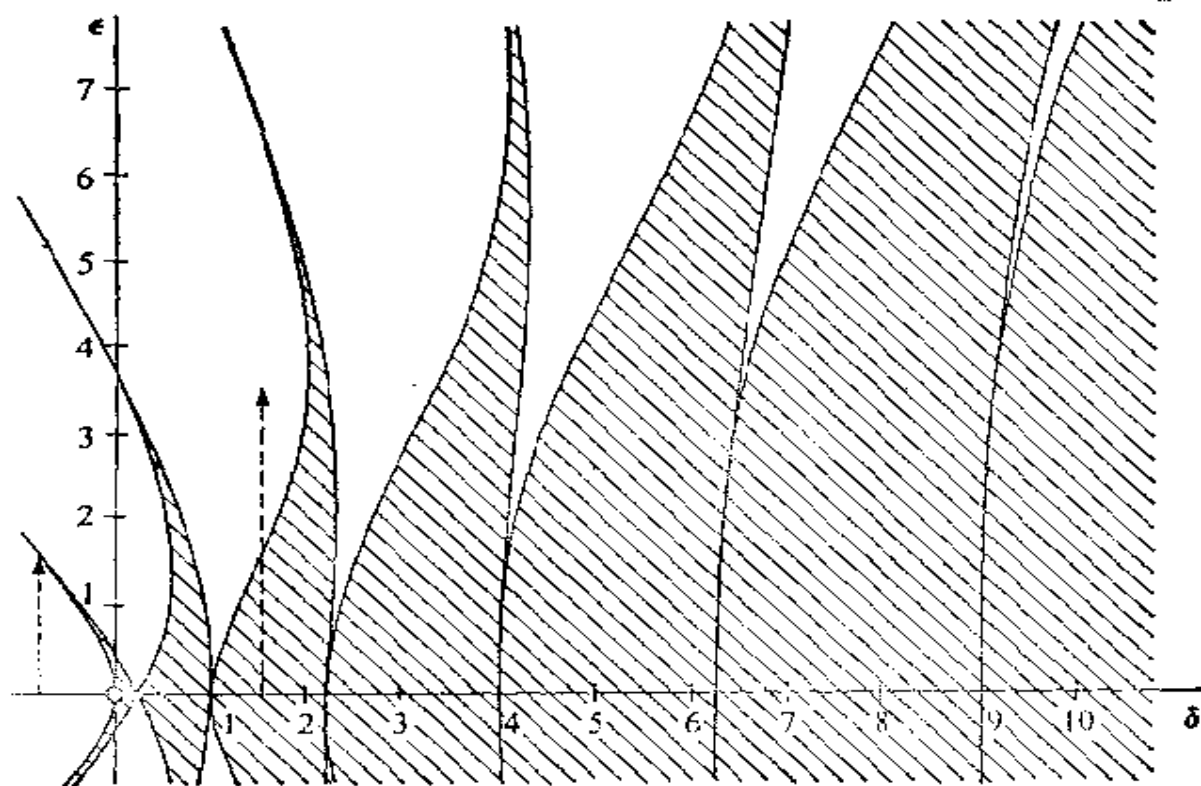


图 6.2 Strutt 图

$\delta = \frac{1}{4}, \frac{4}{4}, \frac{9}{4}, \dots$, 之外, 对应的是不稳定的 δ, ε 值。

根据(6.6)知, $\delta > 0$ 和 $\varepsilon \geq 0$, 说明表征点 $P(\delta, \varepsilon)$ 位于第一象限。 $\varepsilon = 0$ 相应于 $\alpha = 0$, 也就是相应于摆的悬挂点处于静止状态。那时 P 点位于正 δ 轴上, 平衡位形 $\theta = 0$ 是稳定的。随着 ε 的增加, 总可能达到不稳定区。因此, 不管圆频率如何, 一定幅度的振动总是使下平衡位置稳定性降低。

因为运动微分方程是在 θ 很小的假设下导出的, (6.7) 似乎不适合于对上平衡位置 ($\theta = \pi$) 的研究, 然而, 如果把图 6.1 颠倒过来, 或者等价地假设摆锤的重力铅直向上作用, 那么 $\theta = 0$ 就相应于第二个平衡位置。就所涉及到的参数来说, 这等于改变 g 的符号, 也即等于 $\delta < 0, \varepsilon \geq 0$ 。这时表征点 P 在第二象限。对于 $\varepsilon = 0$, P 点在负 δ 轴上, 这个平衡是不稳定的。随着 ε 的增大, 点 P 总是可能到达稳定区。因此, 不管圆频率如何, 总能通过小心控制振动的幅度使上平衡位置成为稳定的。

如果用所谓折合长度, 也就是用量

$$l_0 = \frac{I}{mr} \quad (6.8)$$

来代替 l , 那么这些结果也适用于复合摆。(6.8) 式中的 r 表示质心离开转轴的距离, I 是对此转轴的惯性矩。例如对于长为 l 的均

质棱柱杆, $l_0 = 2l/3$ 。如果质量集中在杆的形心, 可得 $l_0 = \frac{l}{2}$ 。

因此, 其结果同质量分布有关。因为在静力学方法中并不出现质量, 因此我们有:

定理15. 非定常类型的稳定问题不能用静力学来解决。

显然, 这一结果并不局限于线性情况。

在第二、三、四各章中研究过的各类简单线性系统的特性曾用图2.2、3.1与4.6来表示。借助定理14、15, 现在就可全面完成这张

图表(图 6.3)。图中仍用叉号表示不稳定区,斜阴影线表示不确定区。

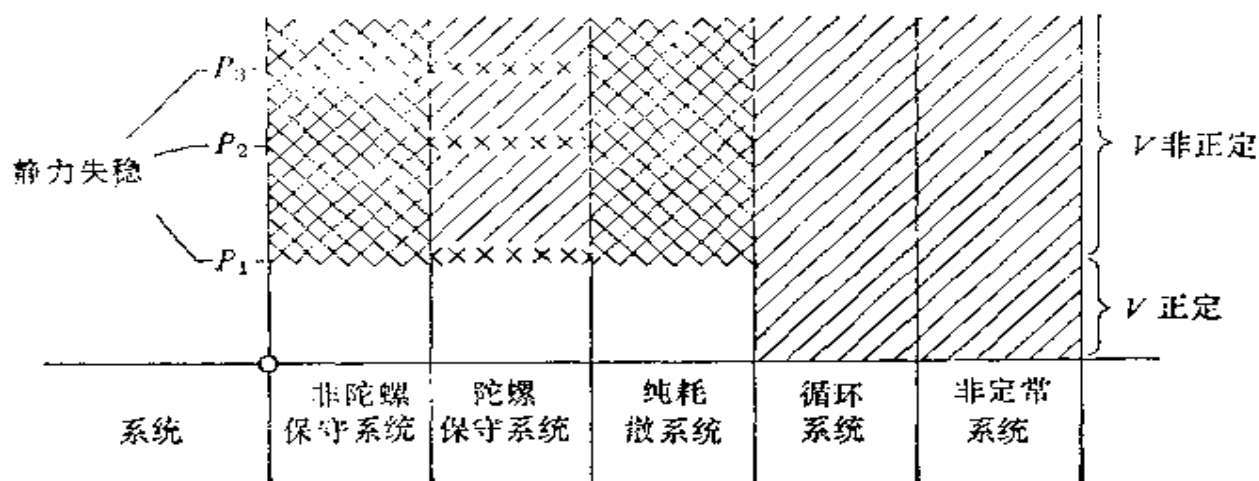


图 6.3 简单线性系统的稳定性

对于非线性系统的动力失稳问题,除了各区的边界变为不确定之外,此图表仍然有效。因此,在载荷 P_1 作用下系统可以是稳定的,或者是不稳定的,而在陀螺保守情况下对于 P_2, P_3, \dots 系统的稳定性也是不确定的。

习题:

1. 试建立数学摆的运动微分方程,其悬挂点在水平方向或在倾斜方向振动。

§ 6.2 脉动压力

受脉动压力作用的柱是一个非定常类型的稳定问题。例如内燃机的连杆就会发生这个问题。我们可以在欧拉屈曲(§ 1.2表

1.1)的任一种端点条件下研究这个问题。

图 6.4 表示一长为 l , 抗弯刚度为 α , 单位长度的质量为常数 μ , 并按例5的端部条件支承的杆, 它受到脉动载荷

$$P = Q + S \cos \omega t \quad (6.9)$$

的作用, 式中 $Q > 0$ 表示压力的平均值, $S > 0$ 表示脉动部分的幅值。对于 P 是常数, 也就是 $S = 0$ 的情况在 §1.2 中曾用动力学方法研究过。那里在推导运动微分方程或边界条件时, 并未用过 P 与时间无关的假定, 所以方程 (1.50),

(1.47) 和 (1.51) 仍然适用于现在的情况, 因此, 柱的弯曲振动需满足微分方程

$$\alpha y'''' + P y'' + \mu \ddot{y} = 0 \quad (6.10)$$

和边界条件

$$y(0, t) = y(l, t) = y''(0, t) = y''(l, t) = 0. \quad (6.11)$$

由于 P 不是常数, 固有振动就不具有 (1.52) 的形式。因此我们把 (1.52) 加以推广, 设

$$y_m(x, t) = A_m(t) \sin \frac{m\pi x}{l} \quad (m = 1, 2, \dots), \quad (6.12)$$

式中 $A_m(t)$ 为一些待定函数。然后把固有振动 (6.12) 叠加起来, 就得到一般解。这样得到的是 y 的傅立叶展开式, 而其各系数都与时间有关。(6.12) 的每一项都满足端部条件 (6.11), 如果有

$$\left(\alpha \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - P \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \right) A_m + \mu \ddot{A}_m = 0 \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (6.13)$$

或者等价地有

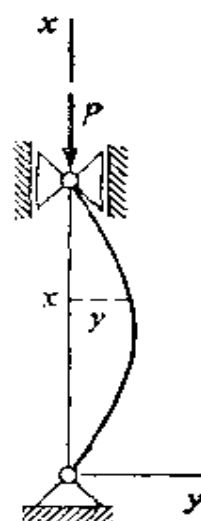


图 6.4 脉动压力作用下的屈曲, 情况 5

$$\ddot{A}_m + \left[\frac{\alpha}{\mu} \frac{m^4 \pi^4}{l^4} - \frac{1}{\mu} \frac{m^2 \pi^2}{l^2} (Q + S \cos \omega t) \right] A_m = 0, \quad (6.14)$$

那么(6.12)的每一项也满足微分方程(6.10)。

如果我们取 $S=0$, 问题便简化为欧拉屈曲。(6.14)的解是一简谐振动, 使括号内表达式为零的 Q 值就是 m 阶欧拉载荷(1.26), 即

$$Q_m = \frac{m^2 \pi^2 \alpha}{l^2}. \quad (6.15)$$

如果 $Q=S=0$, (6.14)描述了未受压力的柱的各阶自由振动 $m=1, 2, \dots$ 。它们的固有频率为

$$\bar{\omega}_m^2 = \frac{m^4 \pi^4 \alpha}{\mu l^4}. \quad (6.16)$$

利用(6.15)与(6.16)的符号, 微分方程(6.14)改写为

$$\ddot{A}_m + \bar{\omega}_m^2 \left[1 - \frac{1}{Q_m} (Q + S \cos \omega t) \right] A_m = 0, \quad (6.17)$$

用(6.5)引入一个新的时间变量 τ , 用“'”表示对 τ 的微分, 我们有

$$A_m'' + \frac{\bar{\omega}_m^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{Q}{Q_m} - \frac{S}{Q_m} \cos \tau \right) A_m = 0, \quad (6.18)$$

因此自由振动的每一个都满足 Mathieu 方程

$$A_m'' + (\delta_m + e_m \cos \tau) A_m = 0, \quad (6.19)$$

式中参数

$$\delta_m = \frac{\bar{\omega}_m^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{Q}{Q_m} \right), \quad e_m = (-) \frac{\bar{\omega}_m^2}{\omega^2} \frac{S}{Q_m}. \quad (6.20)$$

后一式中的“-”号可以舍去, 因为它仅仅等价于在解中的一个相移。事实上 Strutt 图(图6.2)对称于 δ 轴。

对于预先给定的 Q 、 S 和 ω 值来说, 当且仅当代表(6.19)中的参数的所有点 $P_m(\delta_m, e_m)$ 都在稳定区域之内, 那么一般解才是

有界的。设 r_m, θ_m 表示这些点的极坐标(图 6.5)。从(6.15)可得 Q_m 正比于 m^2 。又从(6.20), 得

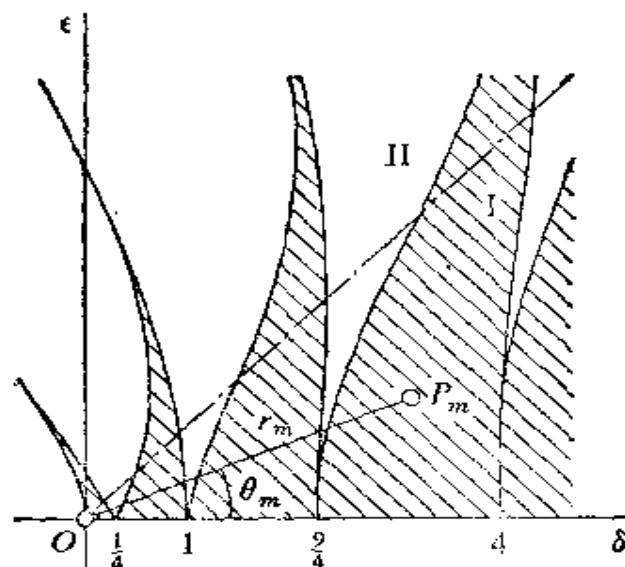


图 6.5 Strutt 图中的表征点

$$\operatorname{tg} \theta_m = \frac{\varepsilon_m}{\delta_m} = \frac{S}{Q_m - Q} \quad (6.21)$$

随着 m 增加, $\operatorname{tg} \theta_m$ 以 $\frac{1}{m^2}$ 趋于零, θ_m 和 $\sin \theta_m$ 也是如此。根据(6.20), (6.15) 和 (6.16), e_m 正比于 m^2 , 因此 $r_m = e_m / \sin \theta_m$ 就以 m^4 趋于无穷。在和式中, 随着 m 增加, 点 P_m 到 O 点的距离 r_m 以 m^4 增加, 而角度 θ_m 以 $\frac{1}{m^2}$ 减小。综观一下图 6.5 可知: 在点 P_1, P_2, \dots 中, 前面几个点是重要的, 因为随 m 增加, P_m 落在稳定区的可能性越来越大。事实上, 一条平分线把第一象限分成 I, II 两个区域, 前者稳定占主导, 而后者不稳定占主导。

如果 $Q + S < Q_1$, 即最大压缩力小于静力屈曲载荷, 同时还有

$$S < Q_1 - Q < Q_2 - Q < \dots \quad (6.22)$$

由(6.21)知, 所有点 P_m 都在区域 I 中, 因此, 柱子很可能是(虽然

并没有肯定)稳定的。如果 $Q + S > Q_1$, 最大压缩力大于静力屈曲载荷, 在此情况下, 至少 P_1 在区域 II 内, 因此柱子很可能(但决不是肯定的)是不稳定的。

为了讨论这些叙述的主要差异, 让我们再看一下图6.5。各稳定区都在 δ 轴上相遇, 相遇点分别是 $1/4, 4/4, 9/4 \dots$ 。在 $1/4$ 点, 边界线的斜率分别是 -2 与 2 , 而在其余点上, 边界线具有平行于 ε 轴的公切线。由此可知, 对于小的 θ_m 值, $\delta = \frac{1}{4}$ 附近的区域特别危险。另外我们注意到这一事实, 即由于总存在阻尼, 实际的稳定区会略微超过Sturtt图所给的界限。根据(6.21)与(6.20), 这意味着, 对于低于静力屈曲载荷 Q_1 的平均载荷 Q 以及压缩力的脉动部分的微小幅值 S 来说, 必须避开下列区域, 即

$$\omega^2 \cong 4 \bar{\omega}_m^2 \left(1 - \frac{Q}{Q_m}\right). \quad (6.23)$$

如果 Q 小于 Q_1 , (6.23)则预计, 当 $\omega \cong 2 \bar{\omega}_m$ 时, 也就是当压力脉动频率接近于未受载柱的固有频率的两倍时就会产生危险的振动。因为阻尼对高阶振型的衰减作用大于对低阶振型的作用, 因而 $\omega \cong 2 \bar{\omega}_1$ 是最危险的情况。

这个问题首先由 Mettler[48]研究过, 后来他提出了受脉动载荷作用的弹性体的一般稳定理论。在他一篇综述[49]中有很丰富的文献目录。应该指出这里研究的例 5 比其他各种情形[43]要简单得多。Weidenhammer[74]曾研究过例 1。向非线性的推广见[75, 50, 76]。W. Keller[29], Wehrli[72]和 H. Keller[28]曾研究过脉动压缩和扭矩对临界角速度的影响。

习题

1. 研究在脉动压力作用下屈曲问题例1, 并指出在此情况下产生的特殊困难。

参 考 文 献

1. Barta, J. *Acta Technica*, 31 (1960), 241.
2. Beck, M. *Z. angew. Math. Phys.*, 3 (1952), 225, 476.
3. Beck, M. *Ing. Arch.*, 23 (1955), 231.
4. Biezeno, C. B., and R. Grammel. *Engineering Dynamics*, Vol. 1. Translated from the German by M. L. Meyer. London: D. Van Nostrand Co., Ltd., 1954.
5. Biezeno, C. B., and R. Grammel. *Engineering Dynamics*, Vol. 2. Translated from the German by M. L. Meyer. London: D. Van Nostrand Co., Ltd., 1954.
6. Bleich, Friedrich. *Buckling Strength of Metal Structures*. Engineering Societies Monographs. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1936.
7. Bolotin, V. V. *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, edited by G. Herrmann. Translated from the Russian by T. K. Lusher. New York: The Macmillan Company, 1963.
8. Bürgermeister, G., and H. Steup. *Stabilitätstheorie mit Erläuterungen zu DIN 4114*, Part 1. Berlin: Akademie-Verlag, 1957.
9. Chetayev, N. G. *C. R. (Doklady) Acad. Sci., USSR*, 1(1934), 529.
10. Chetayev, N. G. *The Stability of Motion*. Translated from the Russian by Morton Nadler. New York: Pergamon Press, 1961.
11. Contri, L. *Giornale del Genio Civile*, 32 (1964).
12. Contri, L. *Atti dell'Ist. Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Classe di Sci. math. e naturali*, 122 (1963-64), 107.
13. Den Hartog, J. P. *Proc. 8th Intern. Congr. Appl. Mech.*, Fac. of Sci., University of Istanbul, 1952, 405.
14. Dimentberg, F. M. *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*. Translated from the Russian. London: Butterworths, 1961.
15. Dzanelidze, G. *Publ. Leningrad Polytechn. Inst.*, 192 (1958), 21.
16. Euler, L. "Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes. Appendix: De curvis elasticis." Lausanne and Geneva, 1744; from *Opera omnia* Vol. I, edited by A.

- Speiser, E. Trost, and Ch. Blanc. Zürich: Orell Füssli, 1952, p. 231.
17. Galerkin, B. G. *Vjestnik Ingenerow Petrograd*, 19 (1915).
 18. Grammel, R. *Ing. Arch.*, 17 (1949), 107.
 19. Greenhill, A. G. *Proc. Inst. Mech. Engrs.* (1883), 182.
 20. Haringx, J. A. *Philips Res. Rep.*, 3 (1948), 401; and 4 (1949), 49.
 21. Haringx, J. A. *Proc. Nederl. Akad. Wet.*, 45 (1942), 533, 650.
 22. Hauger, W. *Ing. Arch.*, 35 (1966), 221.
 23. Hartmann, Friedrich. *Knickung, Kippung, Beulung*, Leipzig and Wien: Franz Deutike, 1937.
 - 23a. Herrmann, G. "Stability of the Equilibrium of Elastic Systems Subjected to Nonconservative Forces, *Appl. Mech. Rev.*, 20 (1967), 103.
 24. Herrmann, G., and A. E. Armenakas. *J. Appl. Mech.*, 27 (1960), 455.
 25. Herrmann, G., and R. W. Bungay. *J. Appl. Mech.*, 31 (1964), 435.
 26. Herrmann, G., and I. Ch. Jong. *J. Appl. Mech.*, 33 (1966), 125.
 27. Hurwitz, A. *Math. Ann.*, 46 (1895), 273.
 28. Keller, H. Doctor's thesis, T. H. Karlsruhe (Professors Mettler and Weidenhammer), 1964.
 29. Keller, W. *Ing. Arch.*, 25 (1957), 71.
 30. Kirchhoff, G. *J. f. Math. (Crelle)*, 56 (1859).
 31. Koiter, W. T. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. B* 66 (1963), 173.
 32. Koiter, W. T. *Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. B* 68 (1965), 178.
 33. Kollbrunner, C. F., and M. Meister. *Knicken, Biegedrillknicken, Kippen, Theorie und Berechnung von Knickstäben, Knickvorschriften*. Berlin: Springer-Verlag, 1961.
 34. Leipholz, H. Doctor's thesis, T. H. Stuttgart (Professors Magnus and Riekert), 1959.
 35. Leipholz, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 11 (1960), 455.
 36. Leipholz, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 13 (1962), 359.
 37. Leipholz, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 13 (1962), 581.
 38. Leipholz, H. *Ing. Arch.*, 32 (1963), 214.
 39. Leipholz, H. *Ing. Arch.*, 32 (1963), 286.

40. Leipholz, H. *Ing. Arch.*, 33 (1964), 308.
41. Leipholz, H. *Ing. Arch.*, 34 (1965), 56.
42. Levinson, M. *Z. angew. Math. Phys.*, 17 (1966), 431.
43. Lubkin, S., and J. J. Stoker. *Quart. Appl. Math.*, 1 (1943), 215.
44. Lyapunov, M. A. "Problème Général de la Stabilité du Mouvement," *Ann. Fac. des Sci. Toulouse*, 9 (1907); reproduced by Princeton University Press, Princeton, 1952.
45. Malkin, I. G. *Theorie der Stabilität einer Bewegung*. Translated from the Russian by W. Hahn and R. Feissig; American translation AEC-tr-3352, Oak Ridge, 1958.
46. McLachlan, N. W. *Theory and Application of Mathieu Functions*. Oxford: University Press, 1947.
47. Melan, H. *Z. öst. Ing. Arch. Ver.*, 69 (1917), 610.
48. Mettler, E. *Mitt. Forsch. Inst. Gutehoffnungshütte-Konzern*, 8 (1940), 1.
49. Mettler, E. *Actes Colloque Int. des Vibrations Nonlineaires, Porquerolles* 1951. Service de Documentation et d'Information Technique de l'Aéronautique, Paris, 1953.
50. Mettler, E. *Ing. Arch.*, 23 (1955), 354.
51. Nicolai, E. L. *Z. angew. Math. Mech.*, 6 (1926), 30.
52. Pflüger, A. *Z. angew. Math. Mech.*, 35 (1955), 191.
53. Pflüger, A. *Stabilitätsprobleme der Elastostatik* (2nd ed.). Berlin: Springer-Verlag, 1964.
54. Ratzersdorfer, J. *Die Knickfestigkeit von Stäben und Tragwerken*. Wien: Springer-Verlag, 1936.
55. Rayleigh, Lord J. W. *The Theory of Sound*, Vol. 1. New York: Dover Publications, 1945, 112.
56. Ritz, W. *J. reine und angew. Math.*, 135 (1908), 1.
57. Routh, E. J. *Advanced Rigid Dynamics*. New York: Dover Publications, 1956, 210.
58. Shield, R. T., and A. E. Green. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 12 (1963), 354.
59. Shield, R. T. *Z. angew. Math. Phys.*, 16 (1965), 649.
60. Slibar, A., and P. Paslay. *Ing. Arch.*, 26 (1958), 383.
61. Sokolnikoff, I. S. *Tensor Analysis*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1964, 45.
62. Stodola, A. *Z. ges. Turbinenwesen*, 15 (1918), 269.
63. Strutt, M. *Lamésche, Mathieusche und verwandte Funktionen in*

- Physik und Technik*. Berlin: Springer-Verlag, 1932.
64. Stüssi, F., and J. Ackeret. *Schweiz. Bauz.*, 117 (1941), 137.
 65. Thomson, Sir W. (Lord Kelvin), and P. G. Tait. *Principles of Mechanics and Dynamics*, Vol. 1. New York: Dover Publications, 1962.
 66. Timoshenko, S. P. *Theory of Elastic Stability*. Engineering Sciences Monographs. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1936.
 67. Timoshenko, S. P., and J. M. Gere. *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed. Engineering Sciences Monographs. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1961.
 68. Tolaccia, S. *Bull. Centre d'Etudes de Recherches et d'Essais Scientifiques du Génie Civil*, 11 (1960), 223.
 69. Troesch, A. *Ing. Arch.*, 20 (1952), 258.
 70. Wehrli, Ch. Diploma thesis, ETH Zürich (Professor Ziegler), 1952.
 71. Wehrli, Ch. Doctor's thesis, ETH Zürich (Professors Ziegler and Saxer), 1956.
 72. Wehrli, Ch. *Ing. Arch.*, 33 (1963), 73.
 73. Wehrli, Ch. *Z. angew. Math. Phys.*, 15 (1964), 154.
 74. Weidenhammer, F. *Ing. Arch.*, 19 (1951), 162.
 75. Weidenhammer, F. *Ing. Arch.*, 20 (1952), 315.
 76. Weidenhammer, F. *Ing. Arch.*, 24 (1956), 53.
 77. Ziegler, H. *Ing. Arch.*, 9 (1938), 96.
 78. Ziegler, H. *Ing. Arch.*, 9 (1938), 241.
 79. Ziegler, H., and A. Huber. *Z. angew. Math. Phys.*, 1 (1950), 189.
 80. Ziegler, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 2 (1951), 265.
 81. Ziegler, H. *Ing. Arch.*, 20 (1952), 49.
 82. Ziegler, H. *Ing. Arch.*, 20 (1952), 377.
 83. Ziegler, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 3 (1952), 96.
 84. Ziegler, H. *Z. angew. Math. Phys.*, 4 (1953), 89, 167.
 85. Ziegler, H. "On the Concept of Elastic Stability," *Advances in Applied Mechanics*, 4 (1956), 351.
 86. Ziegler, H. *Mechanics*, Vol. 2. Translated from the German by D. B. McVean. Reading, Mass.: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1965.
 87. Zuber, R. Diploma thesis, ETH Zürich (Professor Ziegler), 1965.

索引

- Active force, 主动力
Admissible configuration, 许可位形
Admissible variation, 许可变分
Autonomous system, 自治系统
Axial torque, 轴向扭矩
Buckling load, 屈曲载荷
Characteristic equation, 特征方程
Circulatory load, 循环载荷
Circulatory system, 循环系统
Conservative force, 保守力
Conservative system, 保守系统
Critical case of stability, 临界状态
Critical load, 临界载荷
Definite function, 定函数
Dissipative load, 耗散力
Dissipative reaction, 耗散反力
Dissipative system, 耗散系统
Divergence, 发散, 分叉
Dynamic boundary condition, 动力边界条件
Eigenfunction, 特征函数
Eigenvalue, 特征值
Eigenvalue problem, 特征值问题
Energy method, 能量法
Equilibrium method, 平衡法
Equilibrium position, 平衡位置
Euler's formula, 欧拉公式
Flutter, 颤振
Functional, 泛函
Function space, 函数空间
Greenhill's formula, Greenhill 公式
Gyroscopic load, 陀螺力
Gyroscopic system, 陀螺系统
Heteronomous system, 非自治系统
Holonomic systems, 完整系统
Imperfection method, 缺陷法
Imperfect system, 有缺陷系统
Indefinite function, 不定函数
Indefinite functional, 不定泛函
Instationary load, 非定常载荷
Instationary system, 非定常系统
Kinematic boundary condition, 运动边界条件
Kinetic instability, 动力失稳
Latent instability, 潜在失稳
Linear system, 线性系统
Load, 载荷
Lyapunov's theorems, 李雅布诺夫定理
Natural vibrations, 固有振动
Neutral equilibrium, 中性平衡
Noncirculatory load, 非循环载荷
Nonconservative system, 非保守系统
Nontrivial equilibrium position, 非平凡平衡位置
Nonworking reaction, 无功反力
Normal coordinates, 正则坐标

Normal forms of the energies,

能量的正则型

Perfect system, 完善系统

Phase point, 相点

Phase space, 相空间

Pseudotangential torque, 伪切
向扭矩

Quasitangential torque, 准切向
扭矩

Rayleigh's quotient, 瑞雷商

Reaction, 反力

Reactive force, 反力

Semidefinite function, 半定函数

Semidefinite functional, 半定
泛函

Semitangential torque, 半切向
扭矩

Simple stability problem, 简单
稳定问题

Simple system, 简单系统

Scleronomic systems, 平稳系统

Stable equilibrium, 稳定平衡

Static instability, 静力失稳

Stationary load, 定常力

Trivial equilibrium position,
平凡平衡位置

Uniqueness theorem of

Kirchhoff, 克希霍夫唯一性定
理

Unstable equilibrium, 不稳定平衡

Unstable system, 不稳定系统

Variational problem, 变分问题

Velocity-dependent load, 速度
相关力或载荷

Velocity-independent load, 速
度无关力或载荷

Vibration approach, 振动法