1 绪　论

在通常的弹性力学和塑性力学中，讨论的都是准静态的问题。在这些问题中，假定外载是缓慢地施加到固体和结构上去的，相应地固体和结构内的变形进行得也很缓慢。由于不必考虑物质在变形过程中的加速度，惯性力与外载相比可以忽略不计，因而可以按平衡问题来分析处理。

但是，在工程实际中也经常会遇到动态问题，特别是如果外载很强，随时间变化又很快(下面我们将称这样的载荷为强动载荷)，那么固体和结构的变形也将有很快的变化，这时就需要处理弹塑性体的动力学问题。下面是一些典型的例子：

(1) 汽车、火车、船舶、飞机等交通工具在交通事故中可能互相碰撞引起结构的变形破坏和人员的伤亡；飞鸟对飞机的撞击，如果发生在驾驶舱上或发动机内就更为危险；航天器在太空中受到陨石的撞击，核电站的安全壳受到坠落的飞行器的撞击，等等；这些都是运动物体引起的对结构的碰撞问题。

(2) 在战争中或是由于事故，房屋、桥梁、地下结构以及舰艇、飞机等都可能遭受爆炸载荷的作用，这种载荷通常以空气中的冲击波等形式突然作用到结构上。

(3) 高能束(如强激光)的照射，除引起局部的破坏外，也产生对被照射结构(如飞行器)的强动载荷。

(4) 地震、洪水、台风、海啸等灾害对结构物(如水坝、高层建筑、高耸结构等)产生的强动载荷。

(5) 各种贮能结构由于局部的破裂诱发能量释放而产生强动载荷，例如核电站或化工厂中输送高压流体的管道在局部破裂后产生的管道甩动，压力容器、水坝等在局部损坏后引起灾难性溃

裂、等等。

（6）在爆炸成形、电磁成形等各种动力金属成形过程中，工件受到强动载荷而发生迅速的塑性变形；锻造和高速冲压等过程中也有类似的问题。

工程实际中遇到的这些多种多样的问题要求我们对强动载荷作用下固体材料和结构的行为、性态作出系统的研究，这在力学上主要归结为以下三大类问题：

（i）材料的动态行为；

（ii）固体和结构中的应力波的传播；

（iii）结构的动力响应。

我们首先来看看第一大类问题。在强动载荷作用下，固体和结构物的材料将发生高速变形。由材料变形的微观机制所决定，材料对高速变形的抵御能力通常不同于对缓慢变形的抵御能力。这一点已为许多材料的实验所证实。例如，金属塑性变形的机理主要是位错的运动（参见[1.1]第一章附录或[1.2]的§1.3），而位错在金属晶格中高速通过时遇到的阻力比缓慢通过时的阻力要大，这就造成了大多数金属在高速变形时呈现较高的屈服应力和流动应力。典型材料的实验资料可以在有关书籍([1.3,1.4,1.5])中找到。对材料动态性能研究的一项主要任务就是在实验资料的基础上概括出应变率对材料应力—应变关系的影响，建立与应变率相关的材料动态本构关系[1.4，1.5]。当把这些动态本构关系应用于结构动力学问题时，由于结构内不同微元在不同时刻所经历的应变历史和瞬时应变率各不相同，所以往往需要对本构方程作很大简化，这将在本书 3.1 节中作进一步的讨论。

第二大类问题涉及固体和结构中的应力波。固体或结构的局部表面受到动载作用时，外载产生的应力和变形将以波的形式传播开去。当这种扰动较弱时，产生的是弹性波，扰动较强时，产生的应力将达到或超过材料的初始屈服应力，于是产生塑性波。一般地，设材料中的应力波波速为 c，物体的特征尺度为 L，外载

的特征时间(例如外载上升到最大幅值所经历的时间，或载荷脉冲的持续时间)为 t_c。如果在某一问题中

$$t_c \ll L/c$$

那么物体在这一尺度上的应力和变形的不均匀性是不可忽略的，亦即必须考虑波的效应。例如，由于地壳的特征尺度大，地震和地下爆炸的效应主要通过波的传播表现出来。又如在打桩和分离式 Hopkinson 杆(这是一种研究材料动态性质的重要实验装置)等问题中，扰动是沿着杆长(杆的大特征尺度)方向传播的，因而波的反射、透射、弥散等对问题的分析至关重要。

当梁、板、壳等结构元件受到横向载荷作用时，由于厚度方向上特征尺度小，情况便有所不同。金属材料中的弹性波通常为每秒数公里(例如钢的弹性波速为5.1km/s)，因此一般在微秒($1\mu s = 10^{-6}sec$)量级的时间内就使结构厚度方向的所有质点受到波及，并产生整体的加速运动。结构的这种整体性运动就叫做结构的塑性动力响应，它通常要经历毫秒($1ms = 10^{-3}sec$)量级或更长的时间才会达到结构的最大变形状态。正是由于结构中波的效应和结构动力响应二者在时间区间上相差好几个量级，所以通常可以区分两类问题，分别予以考虑：考察波效应时认为结构尚未发生整体性运动和变形；而考察结构动力响应时则不再考虑波传播的影响。这后一类问题，就是本书的主要内容。

在结构的动力响应过程中，通常总是既有弹性变形，又有塑性变形，这两种变形以及它们之间的分界面都随时间而变化；因此，求解结构动力响应时不仅需要对不同区域采用不同的本构关系，而且要处理复杂的动边界问题。正由于弹塑性动力响应问题在数学上的这种复杂性，至今还没有人能给出任何有限结构的弹塑性动力响应的解析解。为了避开数学上的复杂性，在结构动力响应的理论分析中常常对材料的本构关系作出大幅度的简化。一个最常用也是最成功的理想化是把结构假定为由理想刚塑性材料制成的。这样做不仅忽略了材料的弹性，而且也忽略了材料的应变强

化效应和应变率效应。这样做的背景和依据是：在强动载荷作用下，被考察的结构通常要经历相当大的塑性变形，因而外载做的功绝大部分将转化为塑性变形能而被耗散掉，只有很小一部分转化为弹性变形能；于是，忽略掉弹性变形及相应的能量对于工程上关心的结构的最终变形和失效方式等总体性态并不会造成很大的影响，却可以大大简化问题的数学提法和解法。我们将在第二章给出刚塑性动力响应的一些重要例子。

由于材料理想化上的相似性，结构的刚塑性动力响应的分析同通常塑性力学中的结构的极限分析在概念上和方法上有着密切的联系，例如广泛应用运动许可速度场(机动场)的概念和含有塑性铰的运动机构等。同时，也要注意二者有很大的不同，这主要表现为惯性的介入。塑性力学中的极限分析原理告诉我们，如果结构的材料是理想弹塑性或理想刚塑性的，那么该结构在外载作用下存在一个极限状态，即：外载达到某一极限载荷时，结构将变成机构而丧失进一步承载的能力。但是，若从动力学的观念来考察同一问题，就发现：当动载超过静极限载荷时，结构必然会产生加速度　按照 d'Alembert 原理，就相当于结构的惯性力参加承受外载、抵抗变形。外载越大，加速度就越大，惯性力也越大，因而结构可以在短时间内承受比静极限载荷高得多的外载，这是结构动力响应不同于静力极限分析的一个显著特点。

在结构动力响应的理论分析中，除了采用刚塑性理想化外，还常常对构件的几何形状、支承形式以及外载的特征(脉冲形状、空间分布等)进行必要的理想化，从而建立恰当的力学模型；然后，通过对这些力学模型的透彻研究来揭示结构塑性动力响应的主要特征；同时发展相应的理论、计算和实验方法，为分析更复杂的结构在更复杂的动载下的行为提供依据和工具。尽管现在已有不少求解结构塑性动力响应的大型计算程序问世，但理想化的力学模型分析能够揭示结构动力响应的力学机理，展现清晰的物理图象，因而对于解决工程实际问题和编制大型程序仍然具有重要的

指导作用。

本书的第 2 章将介绍梁、板、壳等基本结构元件的刚塑性小变形动力响应的力学模型、分析方法和典型结果。第 3 章将在第 2 章的基础上讨论刚塑性小变形动力分析中忽略掉的各种主要因素，逐一分析研究它们的效应。第 4 章将转入更一般的讨论，其中将介绍对结构塑性动力学普遍适用的极值原理，还将介绍结构塑性动力学中的两种十分有用的近似技术——模态解和界限定理。最后，第 5 章将对与结构塑性动力学有关的其他几个问题作一个扼要的介绍。

参 考 文 献

[1.1] 王仁，熊祝华，黄文彬. 塑性力学基础. 北京：科学出版社，1982年

[1.2] 余同希. 塑性力学. 北京：高等教育出版社，1989年

[1.3] Johnson W. Impact Strength of Materials. *Edward Arnold, London*, 1972

[1.4] 杨桂通，熊祝华. 塑性动力学. 北京：清华大学出版社. 1984年

[1.5] 乔纳斯 A 朱卡斯等. 碰撞动力学. 张志云等译. 北京：兵器工业出版社. 1989年

2 结构的刚塑性小变形动力响应

本章将给出梁、板、壳等基本结构元件的塑性动力响应的基本分析结果。为了数学处理上的简洁，本章中讨论的所有问题都采用以下两项基本假定：

(1) 材料是理想刚塑性的，即既忽略弹性效应又忽略应变强化效应和应变率效应。

(2) 在动力响应过程中，结构只发生小变形，这样既忽略了几何大变形引起的膜力和膜应变，也忽略了由于结构几何构形变化而引起的非线性应变。

在这两项基本假定的条件下，通过对典型结构元件的塑性动力响应的分析，可以展示刚塑性动力响应的一些重要力学特征，同时展示适用于这类分析的理论方法。

当然，采用上述基本假定也使我们略去了许多实际存在的因素，而其中某些因素在一定条件下可能相当重要。这些将在第3章中予以讨论。

2.1 直梁的刚塑性动力响应

本节将研究等截面直梁在横向动载荷作用下的刚塑性动力响应。对于横向载荷作用下的直梁，我们将采用梁的弹塑性弯曲的工程理论[2.1,2.2]（又称初等理论），其主要假定如下：

(i) 垂直于梁轴的横截面在梁变形后仍然保持为平面并垂直于挠曲后的梁轴（平截面假定）；

(ii) 平行于梁轴的纤维只承受单向应力（拉或压）而不承受纤维间的挤压和剪切（单向应力假定），

(iii) 忽略梁的截面尺寸的变化，忽略中性轴在弯曲过程中的移动，忽略由弯曲引起的反挠曲率*(anti-classic curvature)；

(iv) 忽略剪力对屈服的影响，即屈服只由纤维所受的单向应力的大小决定；

(v) 卸载相当于叠加上反向施加弹塑性弯矩所引起的弹性弯曲(理想卸载假定)。

从塑性力学中我们已经知道，从 σ-ε 关系导出的 M-κ 关系(弯矩-曲率关系)同梁的截面形状有关。在本书中除特别声明之处以外，将只讨论矩形截面梁，其弹性极限弯矩 M_e(指全部纤维保持为弹性时能承受的最大弯矩)为

$$M_e = \frac{1}{6} Y b h^2 \tag{2.1}$$

其中 Y 为材料的屈服应力，b 和 h 分别为截面的宽度和高度。如若再假定材料是理想塑性的，即没有应变强化，则使其全部纤维屈服的塑性极限弯矩为

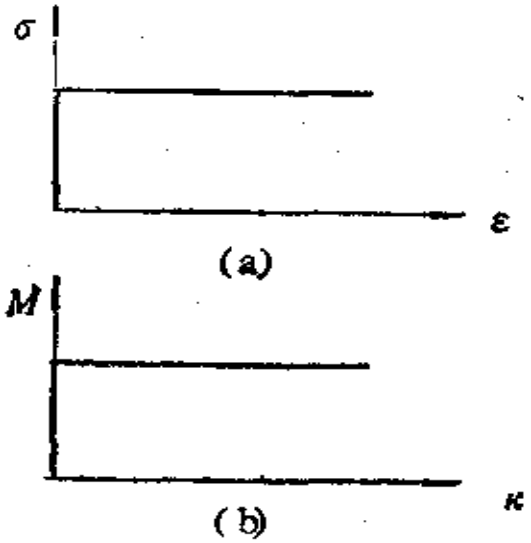


图 2.1

* 矩形截面梁弯曲时，由于弹性状态下材料的 Poisson 比效应和塑性状态下材料体积不变，使得受拉一侧宽度方向收缩，受压一侧扩张，梁的横截面从矩形畸变为扇形，对平面应力状态下的梁和板条，会导致符号相反的横向曲率，此即反挠曲率，详见余同希、章亮炽著《塑性弯曲理论及其应用》，科学出版社，1992，84页

$$M_P = \frac{1}{4} Y b h^2 = \frac{3}{2} M_e \tag{2.2}$$

事实上，若假定材料的 σ-ε 关系是理想刚塑性的(图2.1(a))，则无论梁的截面形状如何，它的 M-κ 关系均呈相似的阶梯形态(图 2.1(b))；当然 M_P 的大小与具体截面的尺寸和形状有关，例如对于内半径为 R，壁厚为 h 的圆管截面可以导出

$$M_P = \frac{4}{3} Y[(R+h)^3 - R^3] \tag{2.3}$$

不难证明，对任何截面 M_P 总是同屈服应力 Y 成正比的。

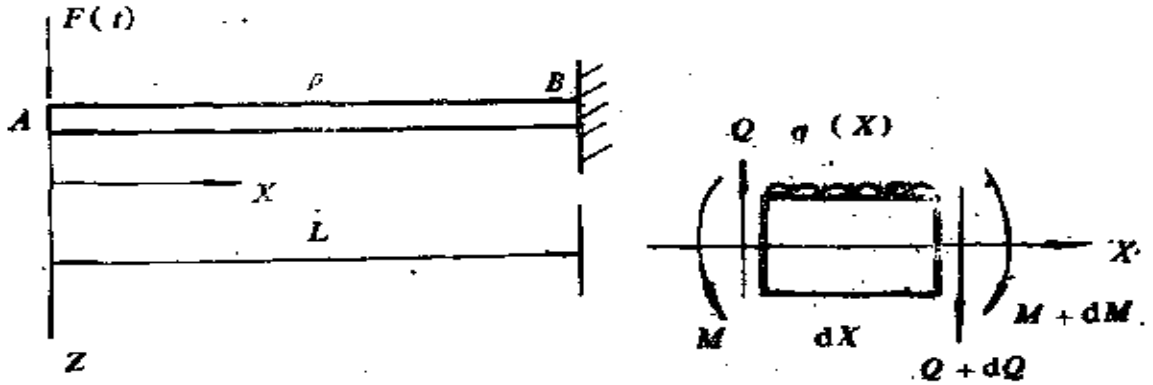
2.1.1 端部承受脉冲载荷的悬臂梁

首先考虑一根长为 L、单位长度质量为 ρ 的均匀悬臂直梁，端部受到脉冲载荷 $F(t)$ 的作用，如图 2.2(a)所示。取 X-Z 坐标如图，原点取在未变形的梁的端点 A 上。根据梁内单元的平衡可以建立方程

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}X} = -g(X), \tag{2.4}$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}X} = -Q(X), \tag{2.5}$$

其中 $g(X)$，$Q(X)$ 和 $M(X)$ 分别是分布外载、剪力和弯矩，其正向由图 2.2(b)规定。



(a) 图 2.2 (b)

1. 阶跃载荷

阶跃载荷，又叫突加载荷，指的是

$$F(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ F, & t\geqslant 0,\end{cases} \tag{2.6}$$

即如图 2.3 所示。由于在 $t\geqslant 0$ 中 F 保持为常量，所以这是一种最简单的动载荷。

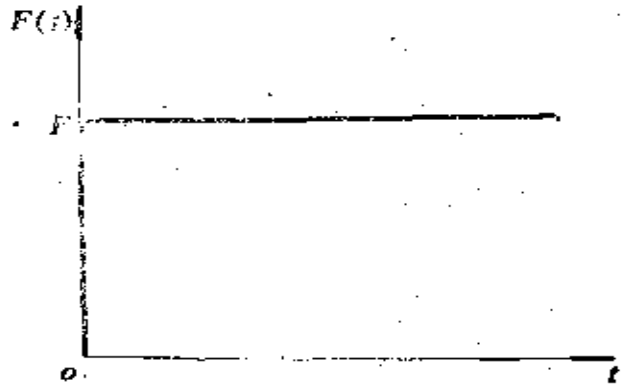


图 2.3

先回顾一下静载的情形。从塑性力学中的极限分析原理可知，当梁是理想塑性材料制成时，极限载荷为

$$F_C=M_P/L, \tag{2.7}$$

当 $F=F_C$，梁内的剪力和弯矩分布如图 2.4。这时梁根部 $M_B=M_P$，该截面成为塑性铰，允许按外力矩作用的方向发生任意转动，因而悬臂梁变成一个绕定点转动的机构，失去了进一步承载的能力。总之，从刚塑性静力学来看，只能允许 $F\leqslant F_C$，而不允许 $F>F_C$。

现在用刚塑性动力学的观点来考察，结论就有所不同。当 $F<F_C$ 时，梁将保持静止、不变形；当 $F>F_C$ 时，梁同样变成一个机构，而超载的部分（$F-F_C$）将引起梁的加速运动，或者按 d'Alembert 原理的观点来解释，超载的这部分由梁的惯性力来平衡。因此，动力学中感兴趣的恰恰正是 $F>F_C$ 的情形。

（1）中载情形（$F_c < F \leqslant 2F_c$）

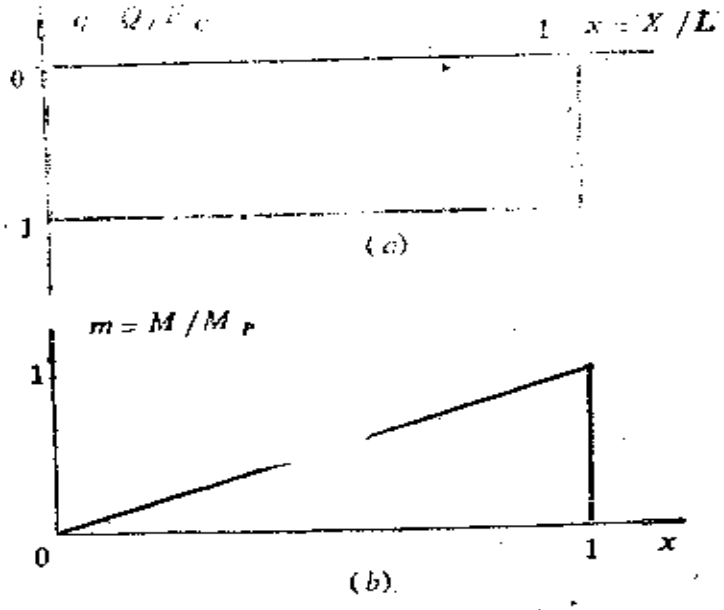


图 2.4

当 F 超过 F_c 不多时，有理由仍采用极限分析得到的破坏机构，于是梁的运动将是绕 B 点的刚体转动，其横向运动方程为（参见图 2.5）。

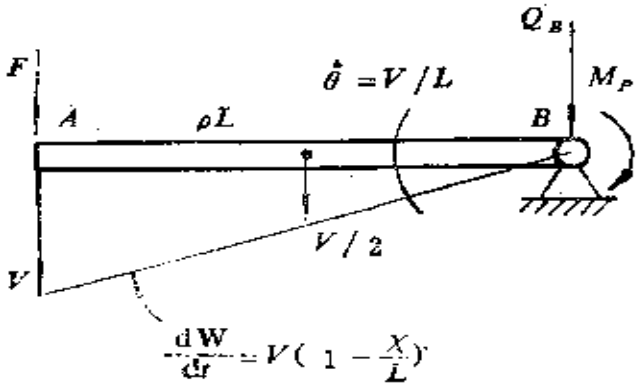


图 2.5

$$\frac{1}{2}\rho L\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = F + Q_B, \tag{2.8}$$

其中 Q_B 是根部 B 处的剪力，以向下为正；$V(t)$ 是梁端部 A 点的速度，ρ 为单位梁长的质量。

同时，悬臂梁绕 B 点转动的运动方程为

$$\frac{1}{3}\rho L^3\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=FL-M_P, \tag{2.9}$$

此式给出的梁端加速度是一个常量

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{3(FL-M_P)}{\rho L^3}=\frac{3(F-F_C)}{\rho L}. \tag{2.10}$$

为了检验 (2.10) 式的正确性，可以考察悬臂梁旋转的动能 K。由于梁上任一截面具有速度 $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=V\left(1-\frac{X}{L}\right)$，故有

$$K=\int_0^L\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}\right)^2\mathrm{d}X=\frac{1}{6}\rho LV^2, \tag{2.11}$$

动能的改变率应等于外力功率减去塑性变形引起的能量耗散率，因而

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=FV-M_P\frac{V}{L}=(F-F_C)V, \tag{2.12}$$

其中 $V/L=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 是梁绕塑性铰旋转的角速度。将(2.11)式代入(2.12)式就得出(2.10)式。

为使公式简洁，下面我们采用无量纲参量。定义

$$\left.\begin{aligned}&x\equiv X/L,\ w\equiv W/L,\ \ f\equiv F/F_C,\ q\equiv Q/F_C,\\&m\equiv M/F_CL=M/M_P,\ \tau\equiv t/T_0,\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

其中 T_0 是由悬臂梁自身决定的一个特征时间

$$T_0\equiv L\sqrt{\frac{\rho}{F_C}}=L\sqrt{\frac{\rho L}{M_P}}. \tag{2.14}$$

从弹性振动理论知(例如[2.3]),悬臂梁的弹性振动的基本周期是

$$T_1=1.787L\sqrt{\frac{\rho L}{EI/L}}. \tag{2.15}$$

因而二者的比为(对矩形截面梁而言)

$$T_0/T_1=0.323\sqrt{\frac{Eh}{YL}}=0.457\sqrt{\frac{1}{\kappa_cL}}, \tag{2.16}$$

其中 $\kappa_e \equiv M_e/EI$ 是最大弹性曲率，M_e 是最大弹性弯矩，参见(2.1)式。

其他物理量都可参照(2.13)式进行无量纲化。例如无量纲速度为

$$v \equiv \frac{V}{L/T_0} = V\sqrt{\frac{\rho}{F_C}} \tag{2.17}$$

为了得到梁内剪力分布，注意梁内的加速度呈线性分布，即

$$\ddot{w} = \dot{v}(1-x), \tag{2.18}$$

其中$(\dot{})\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\quad)$。根据 d'Alembert 原理，与此加速度关联的惯性力可以看成是作用在梁上的分布载荷 $q(x)$；代入方程(2.4)积分后有

$$q(x) = -f + \int_0^x \ddot{w}\mathrm{d}x = -f + \dot{v}\left(x - \frac{x^2}{2}\right),$$

利用(2.10)式的无量纲形式 $\dot{v} = 3(f-1)$ 后得出梁内剪力分布

$$q(x) = \frac{1}{2}(f-3) - \frac{3}{2}(1-x)^2(f-1). \tag{2.19}$$

在梁的根部 B 点，$x=1$，故知该处的反作用力为

$$q_B = q(1) = \frac{1}{2}(f-3). \tag{2.20}$$

将(2.19)式代入方程(2.5)再积分一次就得出弯矩分布

$$m(x) = -\frac{1}{2}\{x(f-3) + [(1-x)^3 - 1](f-1)\}. \tag{2.21}$$

在梁的根部，此式给出 $m_B = m(1) = 1$，与成铰条件相符。

当 $F_C < F < 3F_C$(即 $1 < f < 3$)时，$q_B < 0$，梁内的剪力和弯矩分布如图 2.6。显然，这些分布都同静载情形(图 2.4)不同。从方程(2.5)可知，如果梁内某处剪力为零，则该处弯矩必为极值。若 $q_B < 0$，加之 $q_A = q(0) = -f$，则 $q(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 内不变号，这就可以推知 $m_B = 1$ 是 $m(x)$的最大值，这与我们前面假定的运动机构(图 2.5)相一致。

(2) 高载情形($F>3F_c$)

当 $F>3F_c$(即$f>3$)时，让我们暂时仍假定运动机构如图2.5所示，这时由于(2.20)式给出$P_B>0$，$q(x)$将在梁内某处改变符号。从(2.19)式易求出使 $q(\bar{x})=0$ 的坐标为

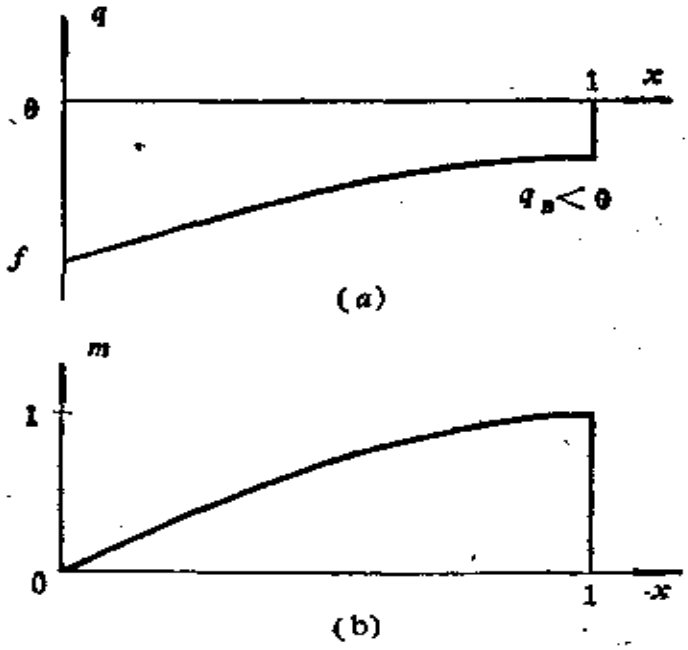


图 2.6

$$\bar{x}=1-\sqrt{\frac{f-3}{3(f-1)}}. \tag{2.22}$$

相应地，此处 $m(\bar{x})$ 将达到极大值，故有

$$m(\bar{x})>m(1)=1. \tag{2.23}$$

这样得到的 $q(x)$和 $m(x)$如图 2.7 中的虚线所示。显然，在$\bar{x}$附近，弯矩超过塑性极限弯矩，违背了极限条件，是不能允许的。这就说明，$f>3$ 时图 2.5 的运动机构将不再有效。

但从图 2.7 中我们受到启发：既然弯矩极值点从根部向外移动，就不妨假定塑性铰出现在梁内某点 H，距端部距离为 $A(<L)$ 的地方。如图 2.8 所示，假定 AH 段绕 H 点作刚体运动，而 HB 段保持静止不动。取 $\lambda\equiv A/L$ 作为 AH 段长度的无量纲度量，很

容易建立 AH 段的运动方程

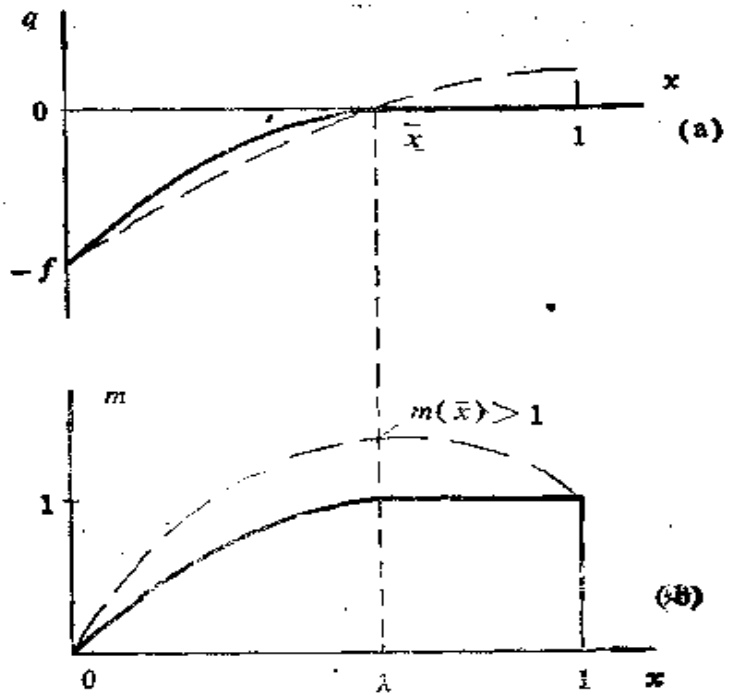


图 2.7

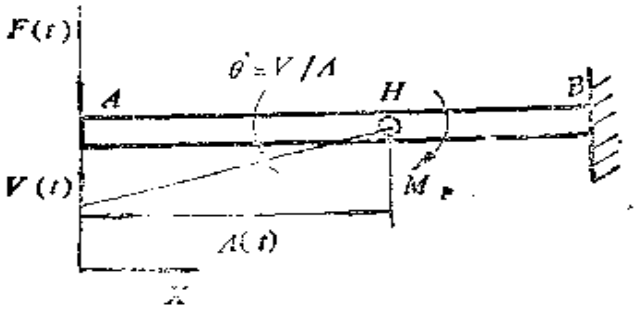


图 2.8

$$\frac{1}{2}\lambda\ddot{v}=f, \tag{2.24}$$

$$\frac{1}{3}\lambda^2\ddot{v}=f\lambda-1, \tag{2.25}$$

其中未知量为 $v(\tau)$ 和 $\lambda(\tau)$。这两个方程代替了前面的(2.8)和(2.9)式。

从这两个方程出发，采用与前面类似的步骤，可以解出

$$\dot{v}=2f/\lambda, \tag{2.26}$$

$$\dot{w}=\dot{v}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)=\frac{2f}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right). \tag{2.27}$$

再注意到弯矩应在 H 点达到极大，即 $m_H=m(\lambda)=1$ 和 $q_H=q(\lambda)=0$，则可求出相应的剪力分布和弯矩分布为

$$q(x)=-f\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^2, \tag{2.28}$$

$$m(x)=1-\frac{f\lambda}{3}\left(1-\frac{x}{\lambda}\right)^3, \tag{2.29}$$

分布曲线如图 2.7 中的实线。值得提到的是，虽然整个 HB 段都有 $M(X)=M_p(A<X<L)$，但由于其上不受横向力，所以仍保持静止、不变形。

对(2.29)式应用自由端条件 $m_A=m(0)=0$ 就得出

$$\lambda=3/f, \tag{2.30}$$

这说明外载越大，塑性铰将越靠近梁的端点。将(2.30)代入(2.26)式得

$$\dot{v}=\frac{2}{3}f^2, \tag{2.31}$$

这说明在高载情形梁端加速度正比于 F^2，而不象中载情形正比于 $(F-F_C)$。综合起来有

$$\dot{v}=\begin{cases}0, & 0\leqslant f\leqslant 1;\\ 3(f-1), & 1<f\leqslant 3;\\ \frac{2}{3}f^2, & 3<f.\end{cases} \tag{2.32}$$

相应的 $\dot{v}\sim f$ 关系见图 2.9。端点的速度和挠度可以由 (2.32)式对时间积分得到。

(3) 小结

从以上关于阶跃载荷作用下悬臂梁的刚塑性动力分析中可以

得到一些很有意义的结论。

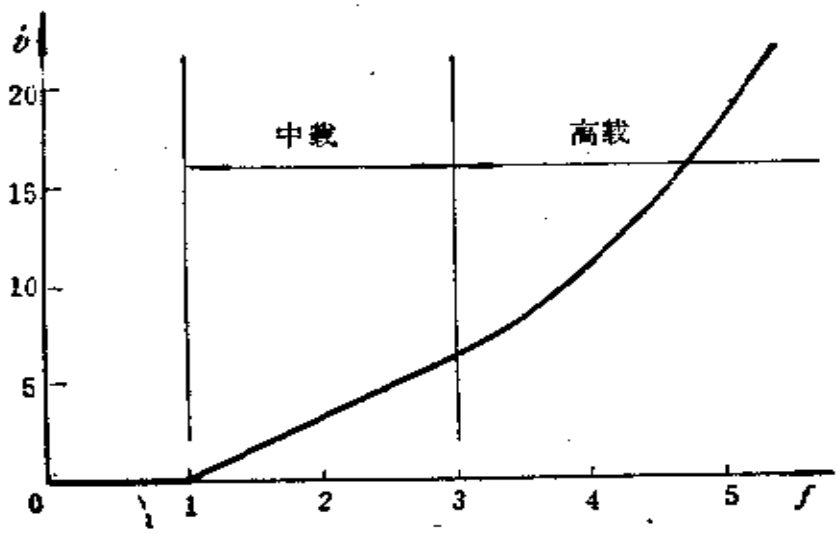


图 2.9

(i) 当悬臂梁受静载作用时，它不能承受大于 F_c 的任何 F；而同一悬臂梁却可以在大于 F_c 的动载 $F(t)$作用下发生运动。在一定意义下可以说，由于惯性力参与承载，受载的范围扩大了。

(ii) 当动载荷 F 大于 F_c 但超过不太多(在本例中为 $F_c<F\leqslant 3F_c$) 时，悬臂梁的动力响应的运动机构与静极限载荷下的破坏机构相同。

(iii) 当动载 F 远远超过 F_c(在本例中为 $F>3F_c$)时，悬臂梁的动力响应将出现新的运动机构，由一个内部塑性铰代替根部的塑性铰。而且从 $A=3M_p/F$ 可知，动载越强，塑性铰的位置越靠近加载点，响应越具局部性。

(iv) 在剪力、弯矩的表达式以及 $A=3M_p/F$ 中都不出现 ρ，这表明只要是均匀直梁，其线密度的大小就不影响运动机构及剪力、弯矩的分布。

2. 矩形脉冲

现在仍研究图 2.2 所示的悬臂梁，但假定端部载荷是一个矩形脉冲

$$F(t)=\begin{cases}F_0, & 0\leqslant t\leqslant t_d;\\ 0, & t_d\leqslant t.\end{cases} \tag{2.33}$$

其中 F_0 为常量，t_d 表示脉冲的持续时间，参见图 2.10。

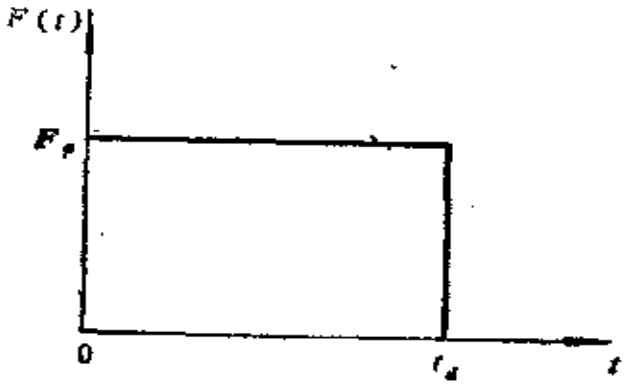


图 2.10

很明显，在 $0\leqslant t\leqslant t_d$ 期间，这一载荷同前面分析的阶跃载荷没有差别；但是从 $t=t_d$ 起随着载荷的卸除，梁的响应就会有所变化。下面我们先着重分析 $f\equiv F_0/F_C>3$ 的情形，这时梁的响应将由三个阶段，或称三个相组成。

（1）响应过程

第一相，$0\leqslant t\leqslant t_d$。这时与阶跃载荷相同。假定运动机构如图 2.8，相应地由(2.30)和(2.31)式得到驻定铰 H_0 的坐标和梁端点的加速度分别为

$$\lambda_0=3/f, \tag{2.34}$$

$$\ddot{v}=\frac{2}{3}f^2, \tag{2.35}$$

进而有

$$v=\frac{2}{3}f^2\tau. \tag{2.36}$$

当 $\tau=t/T_0=\tau_d=t_d/T_0$ 时，第一相结束，此时的端部速度与挠度分别为

$$v_1\equiv v(\tau_d)=\frac{2}{3}pf, \tag{2.37}$$

$$\delta_1 \equiv \delta(\tau_d) = \int_0^{\tau_d} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{3}p^2, \tag{2.38}$$

其中 $p \equiv f\tau_d$ 是该矩形脉冲的无量纲冲量。

在这一相中，梁 AH_0 段绕 H_0 点作定轴转动，转角为

$$\theta_1 \equiv \theta(\tau_d) = \delta_1/\lambda_0 = \frac{1}{9}p^2 f. \tag{2.39}$$

第二相，$t_d \leqslant t \leqslant t_2$。这时由于载荷不再为常量，从(2.30)式可以预计铰的坐标 λ 也可能随之发生变化，即一般地须假设 $\lambda = \lambda(\tau)$。仍考察 AH 段的动量变化和相对于端部初始位置的动量矩变化，可以得出方程

$$\frac{1}{2}\rho AV = \int_0^t F(t)\mathrm{d}t = F_0 t_d \equiv P, \quad (t_d \leqslant t), \tag{2.40}$$

$$\frac{1}{6}\rho A^2 V = M_P t, \tag{2.41}$$

其中 P 是矩形脉冲的总冲量，它与 p 的关系是 $p \equiv P/(F_0 T_0)$。

从(2.40)和(2.41)式解出 A 和 V，并加以无量纲化后得

$$\lambda = 3\tau/p, \tag{2.42}$$

$$v = 6\tau/\lambda^2 = 2p^2/3\tau. \tag{2.43}$$

由(2.42)式可知移行铰的移行速度 $\dot{\lambda} = 3/p$ 是一个常量，且当

$$\tau_2 = p/3 \tag{2.44}$$

时移行铰到达梁的根部。在此时刻梁端部的速度和挠度分别为

$$\begin{aligned} v_2 &\equiv v(\tau_2) = 2p, \\ \delta_2 &\equiv \delta(\tau_2) = \delta_1 + \int_{\tau_d}^{\tau_2} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{p^2}{3}\left[1 + 2\ln\left(\frac{f}{3}\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

值得注意的是，τ_2 和 v_2 都仅仅同冲量 p 有关，而不单独依赖于 f 和 τ_d。

第三相，$t_2 \leqslant t \leqslant t_f$。在移行铰到达梁的根部后，就固定在那里不再移动，直到梁的动能全部耗散完为止。参照(2.10)式，积分后得

$$v = 3(p - \tau). \tag{2.46}$$

上式与(2.35)、(2.43)式一起，给出了 v 随 τ 的变化，如图2.11，其中取定 $f=12$。

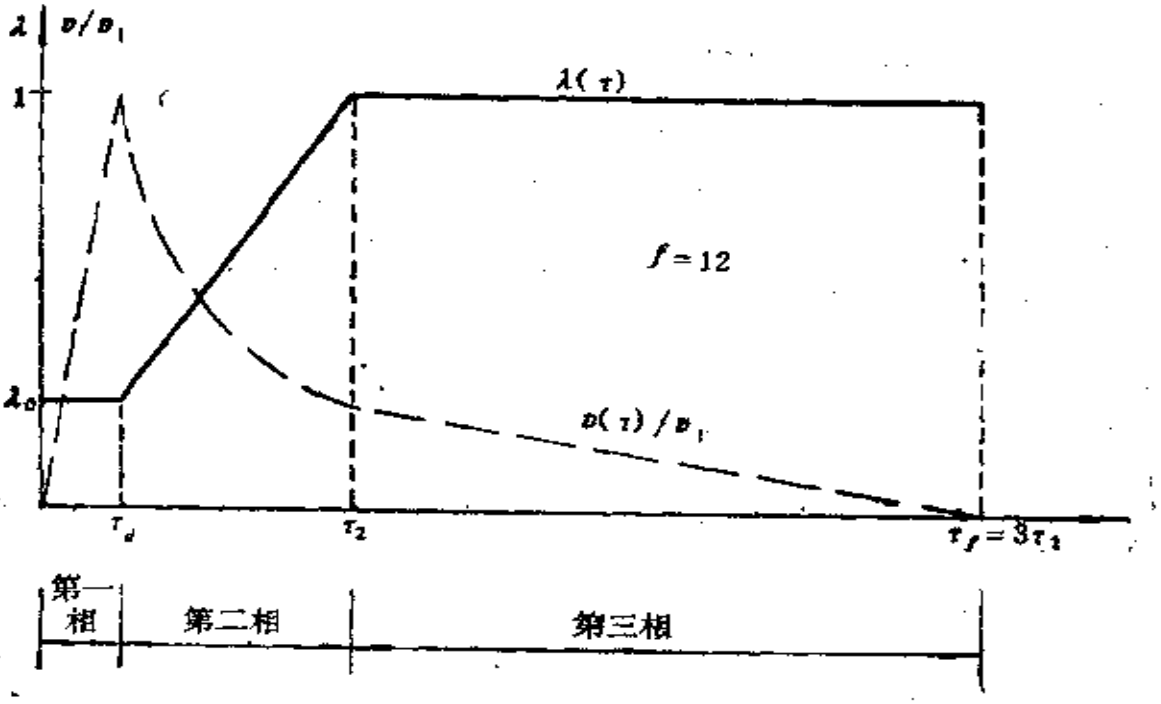


图 2.11

从(2.46)式可知，当时间为

$$\tau_f = p = 3\tau_2 \tag{2.47}$$

时，$v=0$，梁的运动就终结了。此时梁端部的最终挠度为

$$\delta_f \equiv \delta(\tau_f) = \delta_2 + \int_{\tau_1}^{\tau_f} v(\tau)\mathrm{d}\tau = p^2\left[1+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{f}{3}\right)\right], \tag{2.48}$$

而在第三相中梁根部的转角为

$$\theta_3 = \int_{\tau_1}^{\tau_f} v(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{2}{3}p^2. \tag{2.49}$$

(2) 变形后的形状

从上述分析中我们看到，在梁的响应过程中，在 H_0 点和 B 点(根部)形成倾角间断；而由于第二相中铰的移行，会在 H_0B段中产生塑性曲率。根据

$$\frac{V}{\Lambda}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\Lambda}\cdot\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t}=\kappa(X)\frac{\mathrm{d}\Lambda}{\mathrm{d}t},\qquad(2.50)$$

可以计算出无量纲曲率

$$k\equiv\kappa L=\frac{v}{\lambda\dot{\lambda}}=2p^2/3\lambda^2。\qquad(2.51)$$

由于 H_0B 段($\lambda_0\leqslant x\leqslant 1$) 内的任一截面仅当移行铰通过时才产生曲率的变化，故

$$k(x)=w_2''(x)=2p^2/3x^2,\qquad(2.52)$$

其中$(\quad)'\equiv\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\quad)$，$w_2(x)$表示在第二相中产生的挠曲线的变化。从(2.52)式可见，尽管铰的移行速度为常量，由这个铰产生的曲率却随着到梁端距离的增加而减小，这是由于绕铰的角速度是逐渐减小的。

对 (2.52) 式积分两次，并利用梁根部的固支条件 $w_2(1)=w_2'(1)=0$。可得

$$w_2(x)=\frac{2}{3}p^2\left(\ln\frac{1}{x}+x-1\right),\quad\lambda_0\leqslant x\leqslant 1。\qquad(2.53)$$

注意到第一相和第三相中的转角已在(2.39)和(2.49)式中给出，将三部分挠曲线叠加之后得出梁的最终挠曲线为

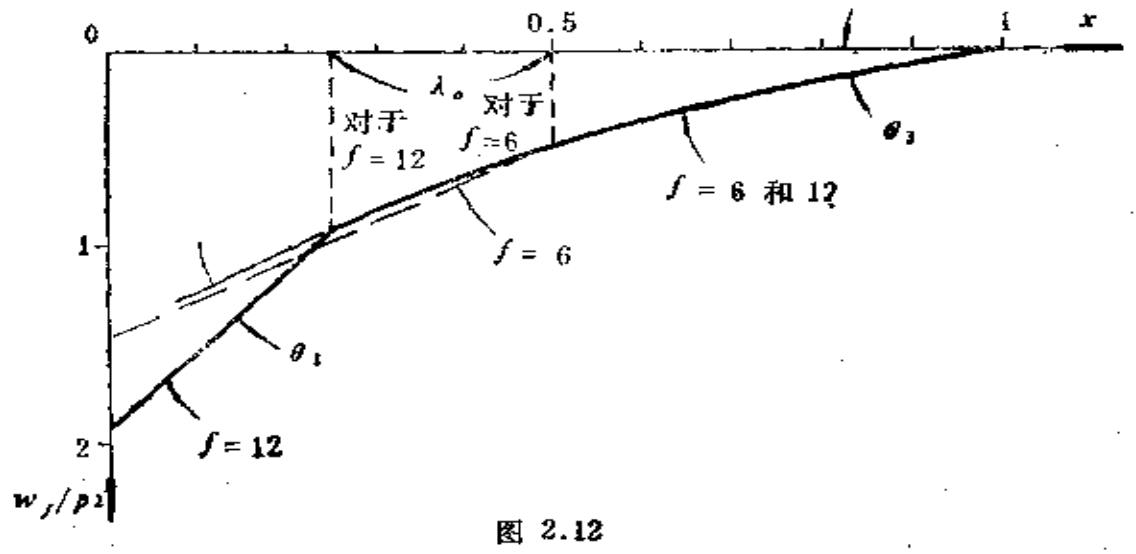


图 2.12

$$w_f(x)=\begin{cases}p^2\left[1-\dfrac{x}{\lambda_0}+\dfrac{2}{3}\ln\left(\dfrac{1}{\lambda_0}\right)\right], & 0\leqslant x\leqslant\lambda_0,\\ \dfrac{2}{3}-p^2\ln\left(\dfrac{1}{x}\right), & \lambda_0\leqslant x\leqslant 1,\end{cases}\tag{2.54}$$

其中 $\lambda_0=3/f$。图 2.12 中画出了 $f=6$ 和 $f=12$ 时梁的最终形状。不难发现，在 $\lambda_0\leqslant x\leqslant 1$ 段内，挠曲线仅与 p 有关而与 f 值无关。

对于所谓冲击载荷的情形，$F_0\to\infty$ 而 $P_0=\text{const}$，于是 $\lambda_0\to 0$，而最终的挠曲线趋近于一条对数曲线。

$$w_f\to\frac{2}{3}-p^2\ln\left(\frac{1}{x}\right).\tag{2.55}$$

由于 $p^2\equiv P^2/F_0^2T_0^3=P^2/F_0\rho L^2=P^2/\rho LM_P$，因而梁端最终挠度

$$\Delta_f\propto w_fL\propto\frac{P^2}{\rho M_P}\propto\frac{P^2}{b^2h^3},\tag{2.56}$$

其中 b 和 h 分别为矩形截面梁的宽度和高度。从上式还看到 Δ_f 与梁长 L 无关。

(3) 能量耗散

现在我们来考察在悬臂梁响应过程中的能量转换。外载做的功易求出为

$$E_{\text{in}}=F_0\Delta(t_d)=P^2F_0/3\rho M_P,\tag{2.57}$$

采用其无量纲形式

$$e_{\text{in}}\equiv\frac{E_{\text{in}}}{M_P}=\frac{1}{3}p^2f.\tag{2.58}$$

由于塑性变形所耗散掉的能量由三个相中的耗散组成，即 $D=D_1+D_2+D_3$，且

$$d_1\equiv D_1/M_P=\theta_1=\frac{1}{9}p^2f,\tag{2.59}$$

$$d_2\equiv D_2/M_P=\int_{\lambda_0}^1k(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{9}p^2(f-3),\tag{2.60}$$

$$d_3\equiv D_3/M_P=\theta_3=\frac{2}{3}p^2.\tag{2.61}$$

易证实 $d_1+d_2+d_3=e_{in}$，且三个相中耗散的能量之比例为

$$d_1:d_2:d_3=\frac{1}{3}:\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{f}\right):\frac{2}{f}。\qquad(2.62)$$

由此可见：(i) 第一相总是耗散总输入能量的 1/3，同 F_0 和 t_d 的大小无关；(ii) 能量耗散在第二相和第三相之间的分配与 $f=F_0/F_c$ 的大小有关；f 越大，则第二相（即移行铰上）耗散的能量越多。图 2.13 画出了能量耗散沿梁长度方向分布的情况。图 2.14 则表现了能量耗散的分配随 f 值变化的情况。

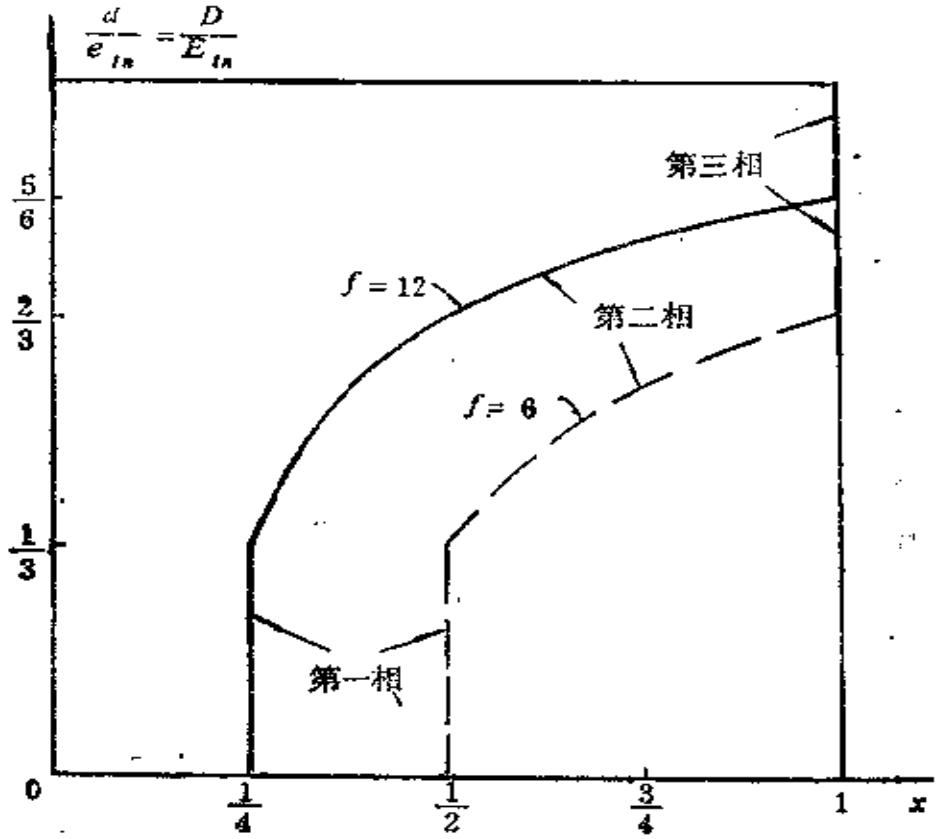


图 2.13

如果 $1\leqslant f\leqslant 3$（即 $(F_c\leqslant F_0\leqslant 3F_c)$），则塑性铰将始终固定在梁的根部。但仍能区分出第一相(加速运动，$0\leqslant t\leqslant t_d$) 和第二相(减速运动，$t_d\leqslant t\leqslant t_f$)，且第一相耗散的能量仍为总输入能量的

1/3。此时梁端的最终挠度不难求出为

$$\delta_f = \frac{3}{2}p^2\left(1-\frac{1}{f}\right),\quad 1\leqslant f\leqslant 3。\tag{2.63}$$

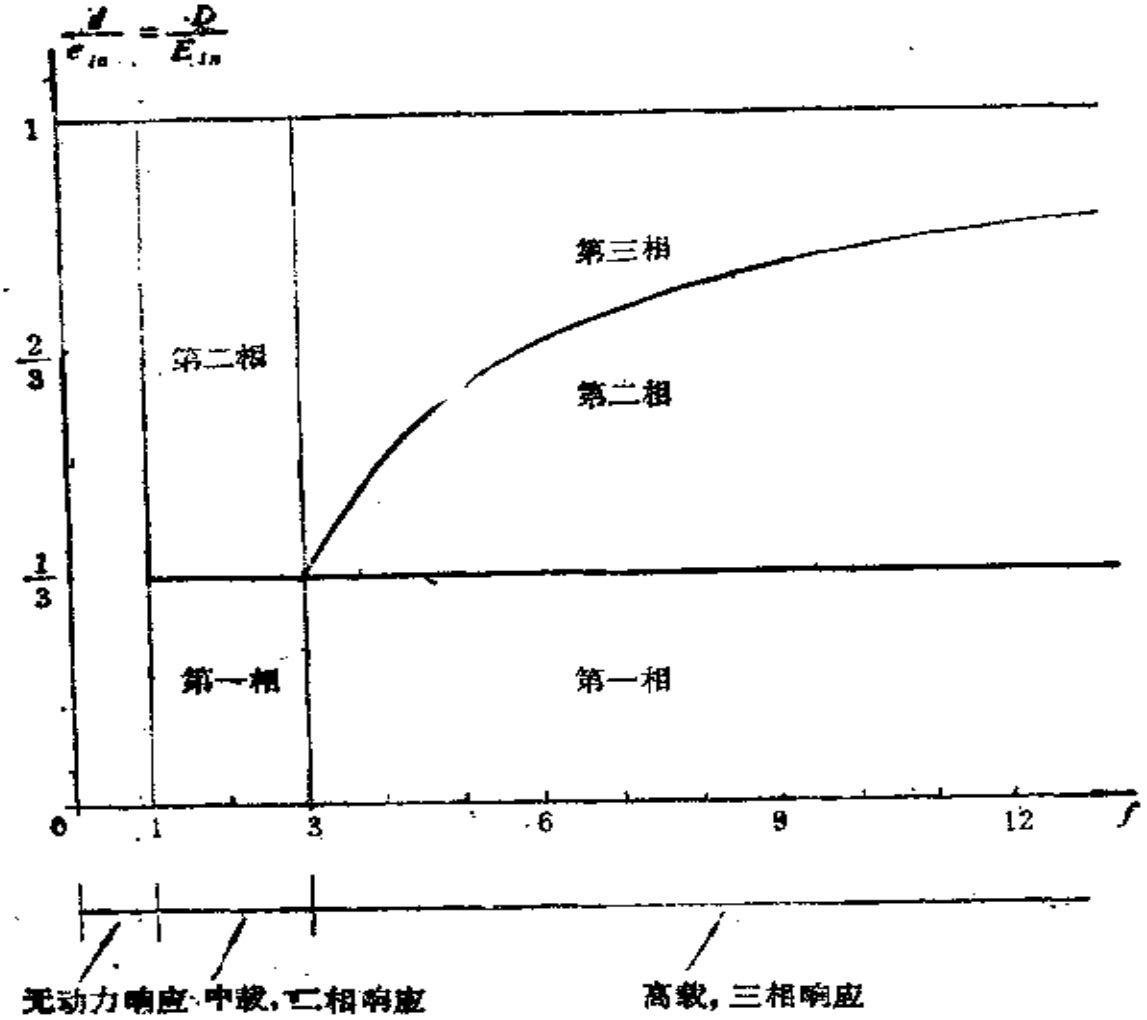


图 2.14

此式与(2.48)式一起，给出了 δ_f 对 f 的依赖关系，如图 2.15 所示。由于 $f\tau_d=p$，这个图也告诉我们当 p 不变而 t_d 变化时，δ_f 会有什么样的变化。

（4）小结

关于悬臂梁对矩形脉冲的动力响应，可以得出以下结论：

(i) 若 $f=F_0/F_c>3$，则梁的响应包含三个相，当 f 很大时第二相最为重要，它的特征是由于外载突然卸除而触发的塑性铰的移行。

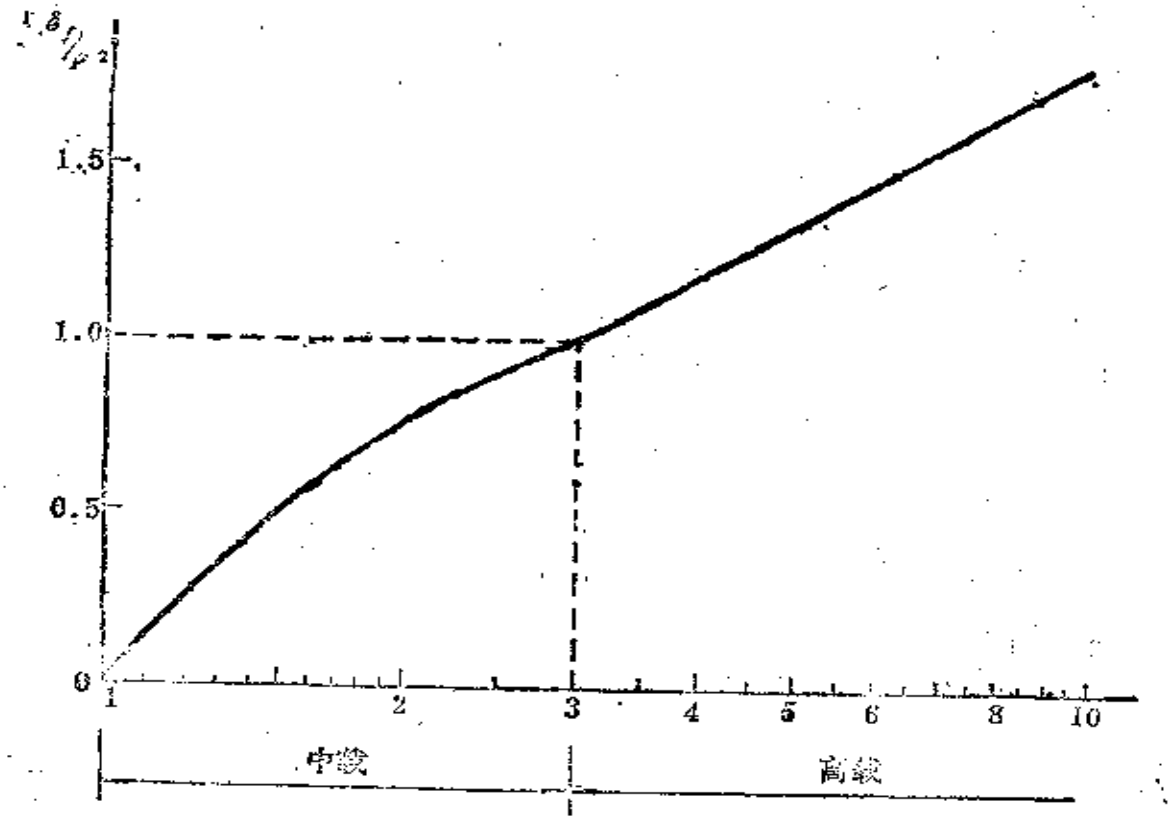


图 2.15

(ii) 与响应过程中的三个相相联系，梁的变形也由三部分构成，即：绕驻定铰 H_0 的转动；由移行铰引起的 H_0B 段的曲率连续变化；绕梁根部 B 的转动。在梁的最终形状中，仅有 H_0B 段具有塑性曲率。

(iii) 虽然移行铰到达梁根部的时间 t_2 与 F_0 的值无关，第二相所耗散的能量却与 F_0 有关；外载越强($f=F_0/F_c$ 越大)，则移行铰耗散的能量占的比例越大。

3. 任意形状的脉冲

现在考虑悬臂梁端部作用一个任意形状的脉冲$F(t)$的问题。虽然脉冲形状可以任意，但我们限定它不改变作用方向，也就是只考虑一个非负的脉冲 $F(t)\geqslant 0$。同时，由于脉冲的初期 $F(t)<F_c$ 的区段将不引起刚塑性梁的任何变形和运动，因此，我们考察的脉冲可以如图 2.16 所示，在 $t=0$ 处便具有 $F(0)\geqslant F_c$ 的特性。

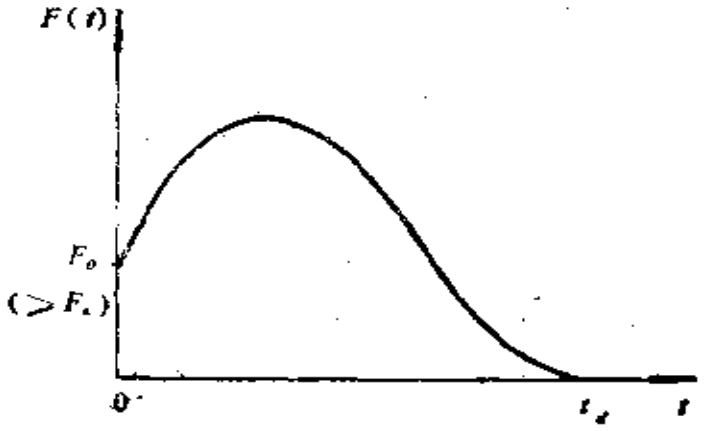


图 2.16

从(2.30)式可以预期，当 $F(t)$随时间变化时，塑性铰的位置 $A(t)$也会随时间而变化；也就是说，在任意脉冲作用下，一般总会出现移行铰。但是，不能简单地从(2.30)式推论出 $A(t)=3M_p/F(t)$，因为任一时刻的塑性铰的位置不仅取决于 $F(t)$ 的瞬时值，还取决于当时梁上的速度场，而这一瞬时速度场是同整个加载历史有关的。

为导出 $A(t)$和 $V(t)$对 $F(t)$的依赖关系，仍假定图 2.8 所示的运动机构，其中 HB 段保持静止不动，于是可以写出 AH 段的运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\rho AV\right)=F(t), \tag{2.64}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{6}\rho A^2V\right)=M_p. \tag{2.65}$$

采用(2.13)式定义的无量纲参量，这两个方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{2}\lambda v\right)=f(\tau), \tag{2.66}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{6}\lambda^2 v\right)=1. \tag{2.67}$$

由它们解出

$$\lambda(\tau)=\frac{3\tau}{J(\tau)}, \tag{2.68}$$

$$v(\tau)=\frac{2}{3\tau}[J(\tau)]^2, \tag{2.69}$$

其中

$$J(\tau)\equiv\int_0^\tau f(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{2.70}$$

由(2.68)式可知塑性铰的移行速度为

$$\dot{\lambda}(\tau)\equiv\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\tau}=3\cdot\frac{J(\tau)-\tau f(\tau)}{[J(\tau)]^2}, \tag{2.71}$$

因而铰的移行方向取决于

$$\mathrm{sign}(\dot{\lambda})=\mathrm{sign}\{J(\tau)-\tau f(\tau)\}. \tag{2.72}$$

假定脉冲 $f(\tau)$是时间 τ 的连续函数，则根据中值定理，对于任意 τ_1 有

$$\frac{J(\tau_1)}{\tau_1}\equiv\frac{1}{\tau_1}\int_0^{\tau_1}f(\tau)\mathrm{d}\tau=f(\tau^*),\quad 0\leqslant\tau^*\leqslant\tau_1. \tag{2.73}$$

因此，可以作出以下讨论：

(i) 如果 $f(\tau)$是 τ 的单调递增函数，即 $\dot{f}>0$，则必有 $f(\tau^*)<f(\tau_1)$，进而从(2.73)和(2.72)式可知 $\dot{\lambda}<0$，亦即铰将向梁的端部移动。

(ii) 如果 $f(\tau)$是 τ 的单调递减函数，即 $\dot{f}<0$，则可推知 $\dot{\lambda}>0$，亦即铰将向梁的根部移动。

(iii) 如果 $f(\tau)\equiv$const，则 $\dot{\lambda}=0$，这样就得出驻定铰。这正是前面讨论过的阶跃载荷的情形。

（iv）如果 $f(\tau)$ 忽增忽减，则产生的移行铰可能改变移行方向，其转向点满足下述条件。

$$\int_0^{\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = \tau f(\tau)。 \tag{2.74}$$

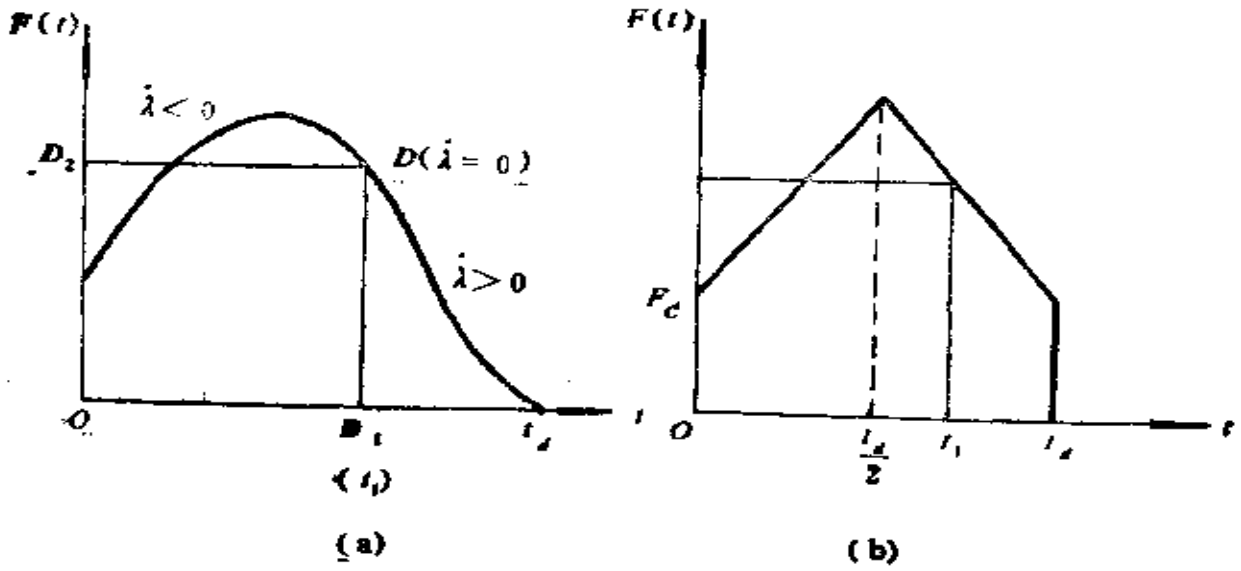


图 2.17

如图2.17(a)所示，从几何上看(2.74)式要求矩形 OD_1DD_2 的面积与脉冲曲线 OD 段下面的面积相等。图 2.17(b)是一个具体例子：假定脉冲为左右对称的，则移行铰的转向点处于 $t_1 = t_d/\sqrt{2} = 0.707t_d$，当 $0<t<t_1$ 时铰向端部移动。而当 $t>t_1$ 时铰向根部移动。

（v）任意脉冲终止后，对于任意 $\tau>\tau_d$ 总有 $J(\tau)=p>0$ 和 $\tau f(\tau)=0$，故从(2.72)式知必有 $\dot{\lambda}>0$，即此后塑性铰必向梁根部移动；而且，从(2.68)式还可知道，塑性铰将在 $\tau=p/3$ 时到达根部，且此时端部速度为 $v=2p$。对于 $p>3\tau_d$ 的任意脉冲，根部塑性铰处的总转角必为 $\theta_B=\frac{2}{3}p^2$。

2.1.2 移行铰的一般特性

从上一小节中我们看到，当梁受到的外载随时间变化时，塑性铰将在梁内移行。移行铰的概念最早是1952年Lee和Symonds在分析自由梁的动力响应时引入的[2.4]，以后被证实是结构刚塑性动力响应中经常遇到的最重要的概念。本节讨论在梁的塑性动力响应中如果存在移行铰，它所具有的一般特性。

从梁对阶跃载荷的响应中我们看到，驻定铰处仍保持位移连续(否则梁就破断了!)，但铰两侧发生相对转动，因而产生一个倾角的间断，或者说斜率的间断。如果这种相对转动仅仅在一个无穷小的时间间隔内发生，这时虽然有角速度($\dot{\theta}$)的间断，却不会造成倾角或斜率(θ)的间断。移行铰正属于后一情况。所以从移行铰的机制就能预计到，它将保持位移和倾角的连续，但θ可以具有时间间断，也就是θ的导数(对时间的导数$\dot{\theta}$是角速度，对空间的导数$\theta' = w''$是曲率)可以间断。

为了导出移行铰处应满足的间断条件，设铰的坐标为$X = \Lambda(t)$。以$\Phi^+ \equiv \Phi(\Lambda + 0)$和$\Phi^- \equiv \Phi(\Lambda - 0)$表示某一函数$\Phi(X)$在铰两侧的值；$[\Phi] \equiv \Phi^+ - \Phi^-$代表该函数在$X = \Lambda(t)$处的跳跃(间断)值。

梁不破断的条件于是可以表示为

$$[w] \equiv w^+ - w^- = 0, \tag{2.75}$$

其中w为无量纲挠度。同时，根据本书2.1开头的基本假定，在梁的弯曲的初等理论中不计入剪切变形，因而不允许梁的截面上发生横向速度的间断，即

$$[\dot{w}] \equiv \dot{w}^+ - \dot{w}^- = 0. \tag{2.76}$$

(2.75)和(2.76)式对驻定铰和移行铰都是成立的。

由于(2.75)式对全部时间过程均成立，该式对时间求导仍应为0。但是w不仅直接依赖于时间τ，还依赖于铰的位置λ(它也可能是时间的函数)。一般地，设

$$\bar{w} = \bar{w}(r, \lambda), \tag{2.77}$$

其中 $r \equiv \tau$，$\lambda = \lambda(\tau)$，二者都视为 τ 的函数。这样，对(2.75)式求导得出

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[\bar{w}] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{\bar{w}^+(r, \lambda) - \bar{w}^-(r, \lambda)\} \\ &= \left(\frac{\partial \bar{w}^+}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \tau} - \frac{\partial \bar{w}^-}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \tau}\right) + \left(\frac{\partial w^+}{\partial \lambda}\cdot\frac{\partial \lambda}{\partial \tau} - \frac{\partial w^-}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial \tau}\right) \\ &= \left(\frac{\partial w^+}{\partial \tau} - \frac{\partial w^-}{\partial \tau}\right) + \dot{\lambda}\left(\frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \lambda} - \frac{\partial w^-}{\partial \lambda}\right), \end{aligned} \tag{2.78}$$

或即

$$[\dot{w}] + \dot{\lambda}[w'] = 0, \tag{2.79}$$

其中 $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial \tau}$ 为速度，$w' = \frac{\partial w}{\partial x}$ 为斜率(或倾角)，$\dot{\lambda}$ 为铰的移行速度。由(2.76)式，$[\dot{w}] = 0$，因此(2.79)式给出

$$\dot{\lambda}[w'] = 0. \tag{2.80}$$

此式表明：对于驻定铰 $\dot{\lambda} = 0$，故可有 $[w'] \neq 0$，即斜率(倾角)允许间断；而对于移行铰 $\dot{\lambda} \neq 0$，故必要求 $[w'] = 0$，即斜率(倾角)须保持连续。

类似地由(2.76)式对时间求导得出

$$[\ddot{w}] + \dot{\lambda}[\dot{w}'] = 0. \tag{2.81}$$

由此可知：对于驻定铰，必有 $[\ddot{w}] = 0$，即加速度必须连续；而对于移行铰，加速度 $\ddot{w}$ 和角速度 $\dot{w}' = \dot{\theta}$ 二者均可发生间断。

此外，对于移行铰，从 $[w'] = 0$ 出发，类似地可以导出

$$[\dot{w}'] + \dot{\lambda}[w''] = 0. \tag{2.82}$$

由(2.81)和(2.82)式消去 $[\dot{w}']$ 则得

$$[\ddot{w}] = \dot{\lambda}^2[w''].\tag{2.83}$$

此式给出了加速度间断与曲率间断的联系。注意(2.82)和(2.83)式仅对移行铰($\dot{\lambda} \neq 0$)成立。

上面导出的这些关系式表征了塑性铰的间断特性。它们亦可概括为表 2.1。

表 2.1 塑性铰的间断特性

物 理 量	驻 定 铰	移 行 铰
铰的移行速度$\dot{\lambda}$	$=0$	$\neq 0$
挠度 w	连续	连续
斜率(倾角)$w'=\theta$	间断	连续
曲率 $w''=k$	连续	间断
速度 $\dot{w}$	连续	连续
角速度 $\dot{w}'=\dot{\theta}$	间断	间断
加速度 $\ddot{w}$	连续	间断

对于理想刚塑性材料制成的梁，只要其中某一截面形成塑性铰，该处满足屈服条件 $|M(\Lambda)|=M_p$，与之相关联的流动法则就要求 $\dot{\theta}\neq 0$，且相应地 $D=M_p\dot{\theta}>0$，即在塑性铰上产生一个正的能量耗散。正因为如此，角速度 $\dot{\theta}$ 的间断是塑性铰（包括驻定铰和移行铰）的根本特征。这一点可由表 2.1 证实。

上面导出的移行铰处间断量的关系式对于梁的动力响应的分析常常很有用。例如对于图 2.8 的构形，由于 HB 段是静止且不变形的，(2.82)式给出

$$\dot{w}'(\lambda-0)+\dot{\lambda}w''(\lambda-0)=0. \tag{2.84}$$

注意 $\dot{w}'(\lambda-0)=-v/\lambda$ 及 $w''(\lambda-0)=k(\lambda)$，(2.84)式便与前面的(2.51)式等价。这说明间断量关系式可用于求解梁的最终挠曲形状。在板的响应中也有类似的间断量关系，在本书 2.3.2 中利用这种间断特性求解了简支圆板响应中某时刻的挠度。

2.1.3 端部承受撞击的悬臂梁(Parkes问题)

在 2.1.1 我们假定载荷是已知的时间的函数。对于撞击问题，载荷作用时间很短，变化迅速，一般不能事先给定，但是作

用在结构上的总的冲量是可以知道的。这个冲量就是碰撞过程中撞击载荷关于时间的积分，并等于在碰撞过程中撞击物动量的改变量。

1955 年 Parkes 首先研究了悬臂梁自由端受到刚性物体撞击的问题[2.5]。这个问题有两种等效的提法(参看图 2.18)：

(i) 一个以速度为 V_0 运动的、质量为 G 的刚性物体撞击梁的自由端，然后附着在梁上一起运动；

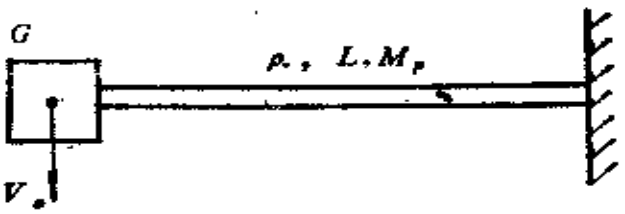


图 2.18

(ii) 悬臂梁自由端原来附有集中质量 G，受到 δ 函数形式的脉冲载荷[2.8]作用而获得速度 V_0。这种载荷称为冲击载荷(impulsive loading)。

在这一小节，我们要介绍 Parkes 对这个问题所给出的完全解。在分析中假定集中质量是刚性的，且不计其大小和形状，并继续采用 2.1.1 所定义的符号和无量纲参数。

1. 响应过程

假定 $F(t)$ 是集中质量 G 所受到的力，它等于悬臂梁端部的剪力。根据 Newton 第二定律，显然有

$$F(t) = -G\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}。\tag{2.85}$$

定义质量比 γ 为集中质量 G 同梁的其余部分质量之比，

$$\gamma \equiv G/\rho L,\tag{2.86}$$

则(2.85)式的无量纲形式为

$$f(\tau) = -\gamma\dot{v}。\tag{2.87}$$

梁的响应由两个相组成，第一相为移行铰从端部向根部运动，

第二相为悬臂梁绕根部作刚体转动。

第一相，$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$。

在初始时刻冲击载荷的量值为无穷大，根据(2.30)式有$\lambda = 0$，即在撞击点处形成塑性铰。当$\tau > 0$时，这个塑性铰朝梁的根部方向运动，即相当于矩形脉冲作用下悬臂梁响应的第二相。类似于2.1.1中，考察τ时刻塑性铰位于λ时梁的动量变化率和相对于端部的动量矩的变化率，利用(2.87)式，可得到如下无量纲运动方程(见图(2.19(a))，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{2}\lambda v\right) = -\gamma\dot{v}, \tag{2.88}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{1}{6}\lambda^2 v\right) = 1. \tag{2.89}$$

上面二式中无量纲端部速度v和移行铰位置λ是时间τ的函数。积分(2.88)和(2.89)式，利用初始条件：$\tau = 0$时，$v = v_0$，得到

$$\lambda v = 2\gamma(v_0 - v), \tag{2.90}$$

$$\lambda^2 v = 6\tau. \tag{2.91}$$

由(2.90)和(2.91)式容易求出v、λ和τ之间的关系

$$v = v_0 \Big/ \left(1 + \frac{\lambda}{2\gamma}\right), \tag{2.92}$$

$$\tau = \frac{v_0\lambda^2}{6\left(1 + \dfrac{\lambda}{2\gamma}\right)}. \tag{2.93}$$

对(2.93)式关于λ求导，得到

$$\mathrm{d}\tau/\mathrm{d}\lambda = \frac{v_0\lambda(2 + \lambda/2\gamma)}{6(1 + \lambda/2\gamma)^2}. \tag{2.94}$$

则移行铰的运动速度为

$$\dot{\lambda} \equiv \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}\tau = \frac{6(1 + \lambda/2\gamma)^2}{v_0\lambda(2 + \lambda/2\gamma)}. \tag{2.95}$$

由上式可以得知，在初始时刻$\lambda = 0$，而$\dot{\lambda} = \infty$，随后塑性铰向根部移行，其移动的速度逐渐减小。当移行铰到达根部时，第

一相结束。

设移行铰到达根部的时间为 τ_1，此刻端部速度为 v_1。因这时有 $\lambda=1$，由(2.92)和(2.93)式可得

$$\tau_1=\frac{v_0\gamma}{3(1+2\gamma)}, \tag{2.96}$$

$$v_1=\frac{2v_0\gamma}{(1+2\gamma)}. \tag{2.97}$$

第一相响应也称为移行铰相，或瞬态运动相。

第二相，$\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2$。

移行铰到达根部后，悬臂梁—集中质量系统运动为绕根部 B 的刚体转动，这一阶段运动也称为模态运动相（参看4.2）。考察这个系统关于根部的动量矩变化率，可得到如下无量纲运动方程

$$\gamma\dot{v}+\frac{1}{3}\dot{v}=1, \tag{2.98}$$

即有

$$\dot{v}=-\frac{3}{(1+3\gamma)}=\text{const}. \tag{2.99}$$

这表明在这一相内，悬臂梁—集中质量系统绕根部作匀减速转动，直至全部动能被耗尽。

由(2.97)和(2.99)式，容易求出第二相响应的持续时间

$$\tau_2-\tau_1=\frac{2v_0\gamma(1+3\gamma)}{3(1+2\gamma)}. \tag{2.100}$$

τ_2 为整个响应的持续时间

$$\tau_2=\tau_f=\tau_1+\frac{2v_0\gamma(1+3\gamma)}{3(1+2\gamma)}=v_0\gamma=p_0, \tag{2.101}$$

其中 $p_0\equiv V_0G/F_cT_0$ 是撞击物作用在悬臂梁上的无量纲总冲量。此式表明无量纲响应时间等于无量纲总冲量，这和矩形脉冲载荷的情况相同，参看(2.47)式。

根部的最终转角为

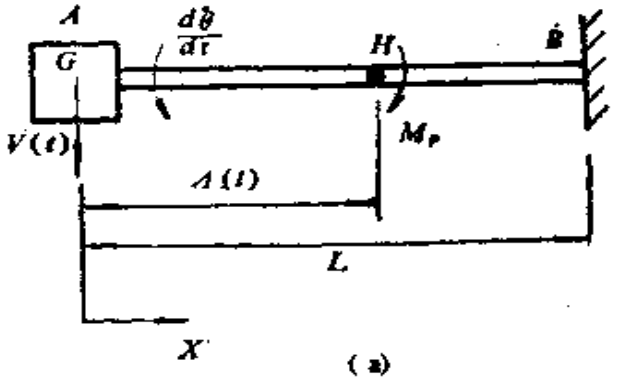
$$\theta_{Bf}=\frac{1}{2}v_1(\tau_B-\tau_1)=\frac{2v_0^2\gamma^2(1+3\gamma)}{3(1+2\gamma)^2}。\qquad(2.102)$$

2. 加速度、剪力和弯矩分布

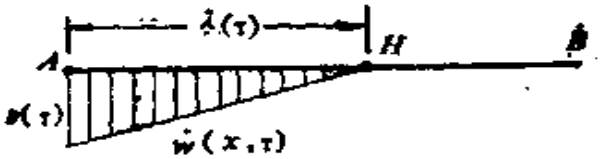
第一相的变形机构是刚性段 AH 绕着铰 H 转动，HB 段处于静止不变形状态，见图 2.19(a)。无量纲速度场如图 2.19(b)所示，

$$\dot{w}=v(1-x/\lambda),\quad x\leqslant\lambda,\qquad(2.103)$$

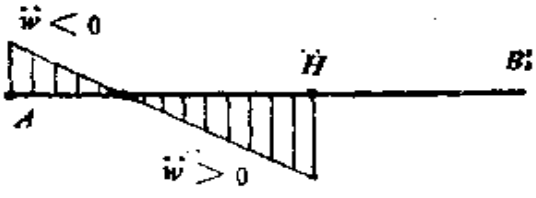
加速度分布为



(a)

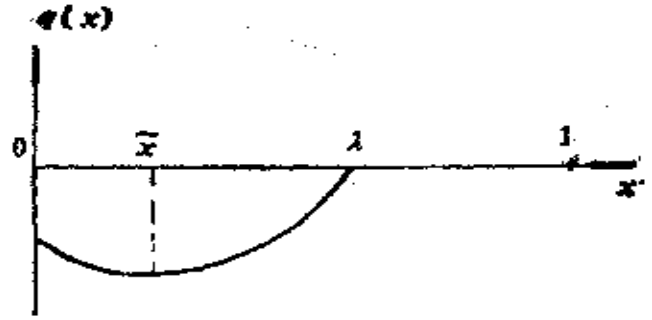


(b)

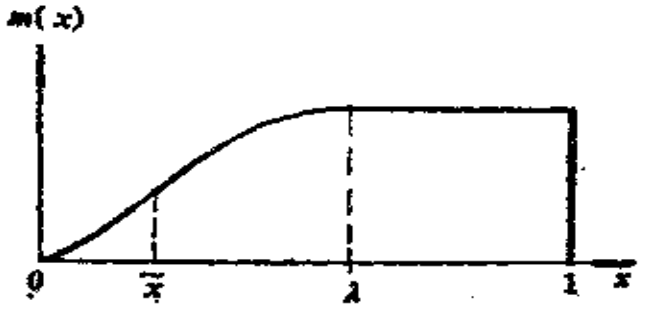


(c)

图 2.19



(d)



(e)

图 2.19

$$\ddot{w} = \dot{v}(1 - x/\lambda) + v\dot{\bar{x}}_\lambda/\lambda^2, \quad x \leqslant \lambda, \tag{2.104}$$

其中 $\dot{v}$ 为端部集中质量的无量纲加速度，它可由(2.92)式关于 τ 求导得到

$$\dot{v} = -\frac{v_0\dot{\lambda}}{2\gamma(1+\lambda/2\gamma)^2}. \tag{2.105}$$

将(2.95)式代入(2.105)式，得到

$$\dot{v} = -\frac{6}{\lambda(\lambda+4\gamma)}. \tag{2.106}$$

将(2.95)和(2.106)式代入(2.104)式，得到

$$\ddot{w} = \frac{6}{\lambda(\lambda+4\gamma)}\left[-1 + \frac{2(\lambda+\gamma)x}{\lambda^2}\right], \quad x \leqslant \lambda, \tag{2.107}$$

加速度分布情况见图 2.19(c)。注意到 $x = \hat{x}$ 处加速度为零，容

易求出

$$\bar{x}=\frac{\lambda^2}{2(\lambda+\gamma)}。\tag{2.108}$$

无量纲剪力 q 可通过积分加速度场得到，

$$q(x)=-f+\int_0^{\bar{x}}\ddot{w}(\bar{x})\mathrm{d}\bar{x}。$$

将(2.87)、(2.99)和(2.107)式代入上式，得

$$q(x)=-\frac{6\gamma}{\lambda(\lambda+4\gamma)}\left[1+\frac{x}{\gamma}-\frac{(\lambda+\gamma)}{\lambda^2\gamma}x^2\right],\quad x\leqslant\lambda,\tag{2.109}$$

q 的分布见图2.19(d)，且有

$$\begin{cases}q(0)=-f=-\dfrac{6\gamma}{\lambda(\lambda+4\gamma)},\\ q(\lambda)=0,\\ q_{\min}=q(\bar{x})=-\dfrac{3(\lambda+2\gamma)^2}{2\lambda(\lambda+\gamma)(\lambda+4\gamma)}。\end{cases}\tag{2.110}$$

上式中 $q(\lambda)=0$ 表明塑性铰处剪力为零。

弯矩分布可通过剪力对 x 积分得到，

$$m(x)=\begin{cases}\dfrac{6\gamma x}{\lambda(\lambda+4\gamma)}\left[1+\dfrac{x}{2\gamma}-\dfrac{(\lambda+\gamma)}{3\lambda^2\gamma}x^2\right], & x\leqslant\lambda\\ 1, & \lambda<x<1,\end{cases}\tag{2.111}$$

无量纲弯矩分布见图 2.19(e)。

集中质量受到的作用力(即端部剪力)为

$$f(\tau)=\begin{cases}\dfrac{6\gamma}{\lambda(\lambda+4\gamma)}, & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_1;\\ \dfrac{3\gamma}{\lambda+3\gamma}, & \tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_f;\end{cases}\tag{2.112}$$

这个力随时间单调减少，且在第一相和第二相转变瞬间有间断。

3. 悬臂梁的最终形状

悬臂梁两个阶段的响应都引起了永久变形。第一相移行铰通过全梁引起了梁的曲率变化，第二相则使悬臂梁整体绕根部转过了一个角度。

移行铰引起的曲率同 AH 段的转动速度和铰的移行速度有关，根据(2.51)式，无量纲曲率为

$$k \equiv \kappa L = \frac{v}{\lambda \dot{\lambda}}. \tag{2.113}$$

将(2.92)和(2.95)式代入(2.113)式，得到最终曲率分布为

$$k_f(x) = w_f''(x) = \frac{2v_0^2\gamma(x+4\gamma)}{3(x+2\gamma)^3}. \tag{2.114}$$

积分(2.114)式，并注意到在根部有 $w_f'(1) = -\theta_{Bf}$，θ_{Bf} 已由(2.102)式给出，得到悬臂梁转角分布

$$\theta_f(x) \approx -w_f'(x) = -\frac{2v_0^2\gamma^2(x+2\gamma)}{3(x+2\gamma)^2}, \tag{2.115}$$

悬臂梁端部的最终转角为

$$\theta_{Af} = \theta_f(0) = \frac{1}{2}\gamma v_0^2 = \frac{K_0}{M_p} \equiv e_0, \tag{2.116}$$

其中 $K_0 = \frac{1}{2}GV_0^2 = E_0$ 是系统的初始动能，e_0 是对应的无量纲能量。

积分(2.115)式，并利用根部条件 $w(1)=0$，可求得梁的最终挠度分布，

$$w_f(x) = \frac{1}{3}v_0^2\gamma^2\left[\frac{1}{1+2\gamma} - \frac{x}{x+2\gamma} + 2\ln\left(\frac{1+2\gamma}{x+2\gamma}\right)\right], \tag{2.117}$$

悬臂梁端部的最终挠度为

$$\delta_f \equiv w_f(0) = \frac{1}{3}v_0^2\gamma^2\left[\frac{1}{1+2\gamma} + 2\ln\left(1+\frac{1}{2\gamma}\right)\right]. \tag{2.118}$$

悬臂梁的最终形状强烈地依赖于质量比 γ。当质量比 $\gamma = 0.2$，1.0 和 5.0 时，悬臂梁的最终形状见图 2.20。当 $\gamma \gg 1$ 时，有

$$w_f(x) \approx \frac{1}{2}\gamma v_0^2(1-x), \tag{2.119}$$

悬臂梁基本上保持为直线形状，梁的响应主要是绕根部作刚体转

动。若$\gamma \ll 1$，则有

$$\bar{w}_f(x) \approx \frac{2}{3}\gamma^2 v_0^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right), \tag{2.120}$$

悬臂梁的形状大体呈对数曲线形式，越接近端部的地方曲率越大。这一理论预测基本上得到了实验的支持。

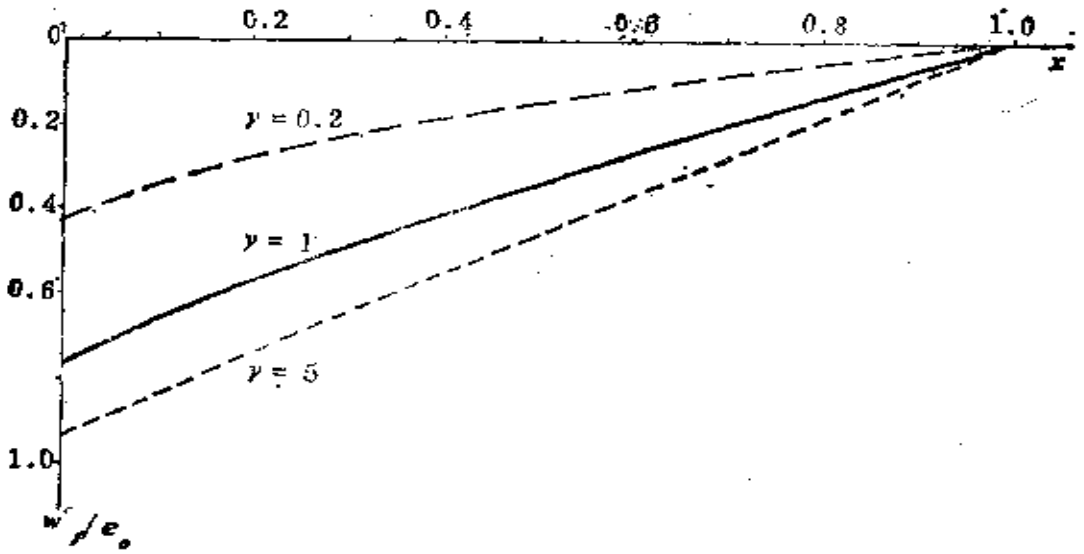


图 2.20

4. 能量耗散的分配

这个系统的总的输入能量就是端部质量的初始动能，其无量纲形式为e_0，见(2.116)式。在第一、二相耗散的能量分别为

$$\begin{cases} D_1 = M_P(\theta_{Af} - \theta_{Bf}), \\ D_2 = M_P\theta_{Bf}; \end{cases} \tag{2.121}$$

相应的无量纲形式能量耗散为

$$\begin{cases} d_1 \equiv D_1/M_P = \theta_{Af} - \theta_{Bf}, \\ d_2 \equiv D_2/M_P = \theta_{Bf}. \end{cases} \tag{2.122}$$

第二相耗散的能量所占的部分为

$$d_2/e_0 = d_2/(d_1 + d_2) = \theta_{Bf}/\theta_{Af} = \frac{4\gamma(1+3\gamma)}{3(1+2\gamma)^2}. \tag{2.123}$$

由此可见，能量耗散的分配只依赖于质量比。受重而慢的撞击物撞击时，$\gamma \gg 1$，有 $d_2/e_0 \to 1$，即绝大部分能量被梁的根部所吸收；受轻而快的撞击物撞击时，$\gamma \ll 1$，有 $d_2/e_0 \to 0$，即绝大部分能量为移行铰所吸收。这个结论和梁的最终变形形状的分析结果是一致的。

通过本节对悬臂梁在不同载荷作用下塑性动力响应分析，可以看到构造一个正确的塑性动力学的解答，要求满足运动方程，几何关系，本构方程(包括处处不违反屈服条件)，以及边界条件和初始条件。参照塑性力学中"完全解"的概念，在塑性动力学中将这种正确解答也称为完全解。本节给出的解答都是完全解。

2.2 非等直构件的刚塑性动力响应

工程实际中有些构件是非等直的，例如曲梁、折梁、变截面梁等。这些构件的刚塑性响应特性和等直梁不完全相同。本节主要介绍阶梯截面梁以及含缺陷的悬臂梁的响应。

假定梁的截面是分段均匀的，因而其塑性极限弯矩 M_p 和单位长度质量 ρ 也是分段均匀的；其它假定则与 2.1 相同。

2.2.1 端部承受阶跃载荷作用的阶梯截面悬臂梁

在 2.1 我们详尽讨论了均匀悬臂直梁的刚塑性响应，在不同的载荷作用下，其变形机构可能包含一个驻定铰或者是一个移行铰。对于阶梯截面悬臂梁，这种单铰模式的变形机构不总是适用的。

考察图2.21(a)所示的阶梯梁端部受阶跃载荷 F(参看图2.3)的作用，设 AC 段和 CB 段的塑性极限弯矩分别为 M_{p1} 和 M_{p2}，且 $M_{p1} > M_{p2}$。当 F 比较大时，按照 2.1.1 的解法求出的驻定铰可能形成在 AC 段上的 H_1 处，相应的弯矩分布如图 2.21(b) 的实线所示。显然 CB 段的屈服条件受到破坏。

再考察图 2.21(c)所示的 $M_{P1}<M_{P2}$ 的阶梯梁。按照2.1.1的解法可能得到驻定铰位于 CB 段的 H_2 处，当 H_2 比较靠近 C 时，弯矩分布将如图 2.21(d)所示。这会使得 AC 段一部分的屈服条件受到破坏。

这些情况表明，对于这些问题，单个塑性铰的变形机构不能给出完全解。这种现象也出现在其他非等直杆件的动力响应问题中。对于这类问题，可以采用两个或多个塑性铰同时存在的变形模式，给出完全解[2.6]。

我们下面将分别对图 2.21(a) 和 (c) 所示的两种阶梯截面悬臂梁应用这种多铰模式进行分析。分析过程基本上都遵循如下五个步骤：

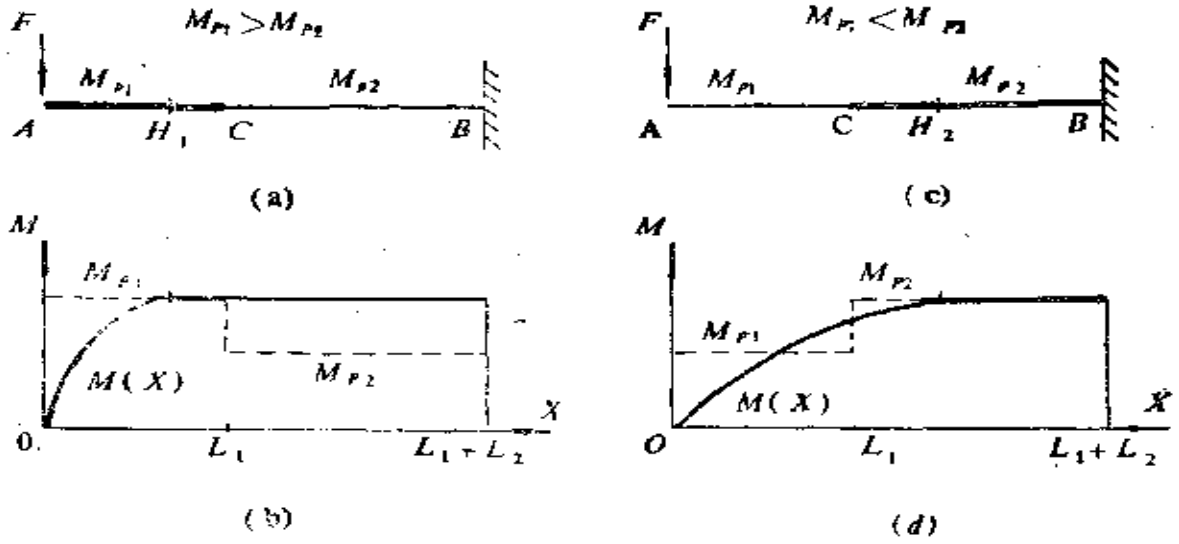


图 2.21

(i) 假定在梁的某处或多处形成一个或多个塑性铰；

(ii) 将梁在所假设的塑性铰处假想切开，得到若干个分离体。根据 d'Alembert 原理，引入惯性力，对每个分离体建立相应的运动方程；

(iii) 对运动方程进行无量纲化；

(iv) 消去运动方程中的加速度项，即可得到载荷和塑性铰位置的关系；

(v) 计算梁上加速度、剪力和弯矩分布，检查屈服条件是否处处都不违反。

在下面分析中，我们采用如下参数、记号和无量纲量，

$$\begin{cases} f=FL_1/M_{P1},\ T_{01}=L_1\sqrt{\dfrac{\rho L_1}{M_{P1}}},\ \tau=t/T_{01},\ \eta_M=M_{P2}/M_{P1} \\ \eta_\rho=\rho_2/\rho_1,\qquad \eta_L=L_2/L_1,\qquad \lambda=A/L_1,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\ )=(\dot{\ }) \end{cases} \tag{2.124}$$

其中 ρ_1、ρ_2 分别为 AC 段和 CB 段的单位长度梁的质量，A 为塑性铰位置的坐标。

1. $\eta_M<1$ 的阶梯梁

首先分析图 2.21(a)所示的 $\eta_M<1$ 的阶梯梁。容易得到该梁无量纲形式的静极限载荷为

$$f_{A0}=F_{A0}L_1/M_{P1}=\eta_M/(1+\eta_L), \tag{2.125}$$

当 $f<f_{A0}$ 时梁保持静止不变形。当 f 从 f_{A0} 开始增加时，塑性铰

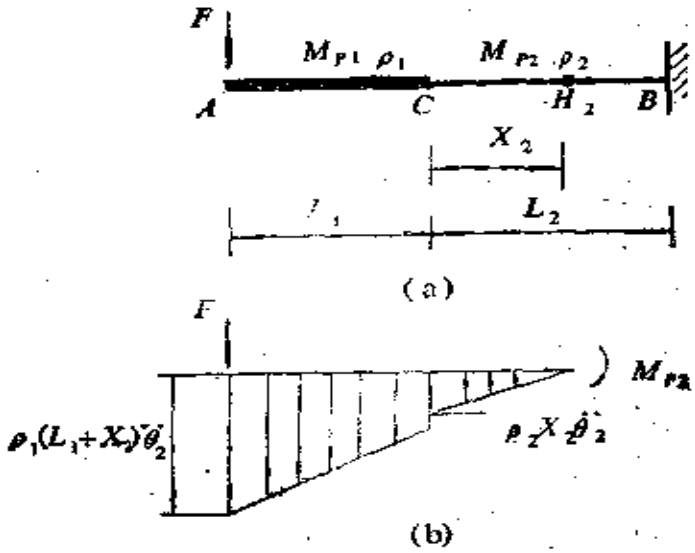


图 2.22

形成在根部 B。当 f 超过某一数值时，塑性铰将形成在 CB 段上的 H_2 处，距离 O 截面为 A_2(图中为 X_2)，并记 $\lambda_2=A_2/L_1$，见图 2.22(a)。图 2.22(b) 为相应的分离体图。按照上述的分析步得到如下骤，无量纲运动方程

$$(\eta_\rho\lambda_2^2+2\lambda_2+1)\ddot{\theta}_2=2f, \tag{2.126}$$

$$[1+3\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2(3+\lambda_2)]\ddot{\theta}_2=6\eta_M, \tag{2.127}$$

其中 θ_2 为塑性铰 H_2 处的转角。由以上二式容易得到如下的载荷和塑性铰位置间的关系，

$$f=3\eta_M(1+2\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2)/[1+3\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2(3+\lambda_2)]。 \tag{2.128}$$

当 $\lambda_2=\eta_L$ 时，H_2 形成在 B 处，记这时的载荷为 f_{A1}，有

$$f_{A1}=3\eta_M(1+2\eta_L+\eta_\rho\eta_L^2)/[1+3\eta_L+\eta_\rho\eta_L^2(3+\eta_L)]。 \tag{2.129}$$

当 $\lambda_2=0$ 时，H_2 形成在 C 处，记这时载荷为 f_{A2}，有

$$f_{A2}=3\eta_M。 \tag{2.130}$$

由以上分析可以得出

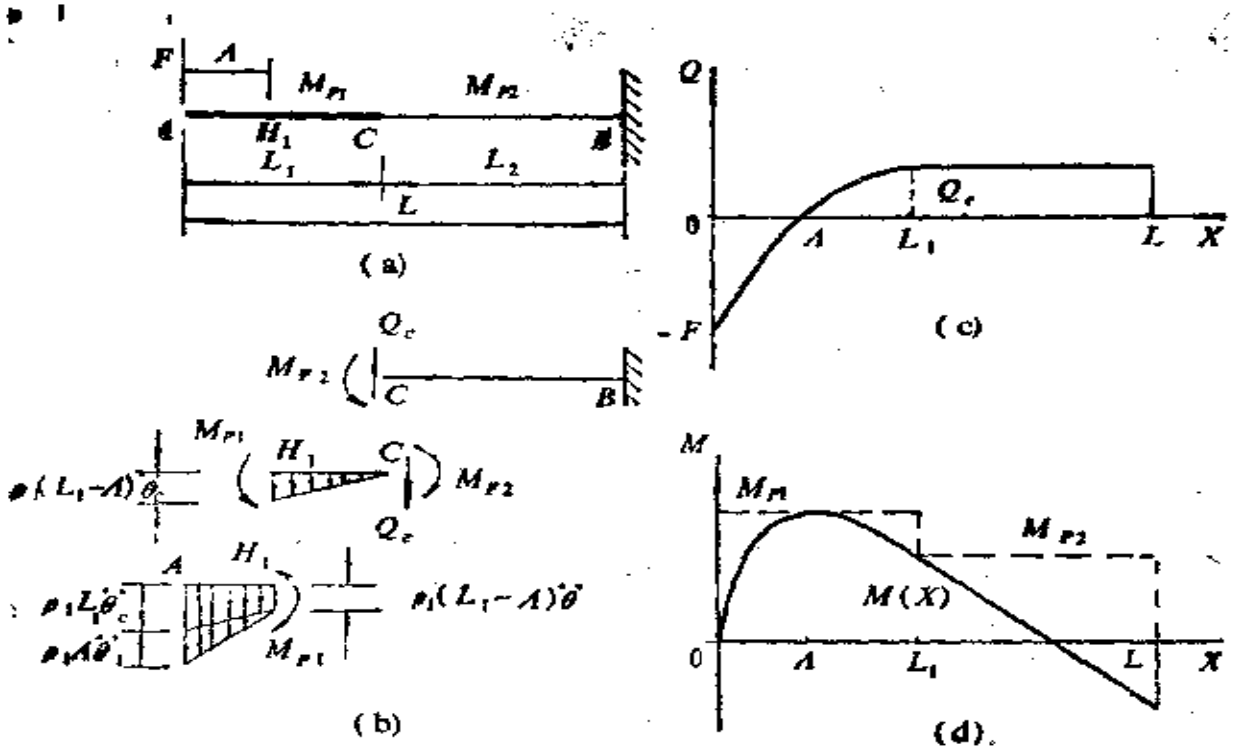


图 2.23

(i) 当 $f \leqslant f_{A0}$ 时，梁保持静止不变形；

(ii) 当 $f_{A0} < f \leqslant f_{A1}$ 时，梁的变形机构为 B 处形成塑性铰；

(iii) 当 $f_{A1} < f \leqslant f_{A2}$ 时，塑性铰形成在 CB 段的 H_2 处。因为载荷是阶跃载荷，所形成的塑性铰是驻定铰。

当载荷大于 f_{A2} 时，可假定变形机构为两个塑性铰：一个位于 AC 段上的 H_1 处，距 A 为 A_1，另一个位于截面变化处 C，见图 2.23(a)，我们称之为双铰模式(double-hinge mode)。图 2.23(b)为相应的分离体图，其中 θ_1 为 H_1 处的相对转角，θ_C 为 C 处的转角。

重复上述步骤，得到如下 4 个无量纲运动方程

$$(1-\lambda_1)^2\ddot{\theta}_C = 2q_C, \tag{2.131}$$

$$(1-\lambda_1)^3\ddot{\theta}_C = 3(1-\eta_M), \tag{2.132}$$

$$\lambda_1[(2-\lambda_1)\ddot{\theta}_C + \lambda_1\ddot{\theta}_1] = 2f, \tag{2.133}$$

$$\lambda_1^2\left[\frac{1}{2}(3-\lambda_1)\ddot{\theta}_C + \lambda_1\ddot{\theta}_1\right] = 3(\lambda_1 f - 1), \tag{2.134}$$

其中 $\lambda_1 \equiv A_1/L_1$，$q_C \equiv Q_C L_1/M_{P1}$，$Q_C$ 为 C 处剪力。从(2.131)—(2.134)式可以得到如下 $f\sim\lambda_1$ 关系的方程

$$2(3-\lambda_1 f)(1-\lambda_1)^2 - 3(1-\eta_M)\lambda_1^2 = 0, \tag{2.135}$$

以及有关的角加速度

$$\ddot{\theta}_1 = [2f - 3\lambda_1(2-\lambda_1)(1-\eta_M)/(1-\lambda_1)^3]/\lambda_1^2, \tag{2.136}$$

$$\ddot{\theta}_C = 3(1-\eta_M)/(1-\lambda_1)^3. \tag{2.137}$$

(2.135)式的数值解表明，f 增大时 λ_1 减小，即 H_1 铰向端部靠近，而由(2.136)式得到 $\ddot{\theta}_1$ 也增大；相反地，f 减小时 λ_1 增大，$\ddot{\theta}_1$ 减小。我们认为应当有 $\ddot{\theta}_1 \geqslant 0$。$\ddot{\theta}_1 = 0$ 时这种双铰变形机构退化为单个塑性铰 C。我们记这个转变状态对应的载荷为 f_{A3}，塑性铰 H_1 的无量纲坐标为 λ_A，由(2.135)和(2.136)式可得

$$2(1-\lambda_A)^3 - (1-\eta_M)(3-2\lambda_A)\lambda_A^2 = 0, \tag{2.138}$$

$$f_{A3} = 3(2-\lambda_A)/\lambda_A(3-2\lambda_A), \tag{2.139}$$

λ_A 是与载荷无关的梁的结构参数。当 $f_{A2} < f < f_{A3}$ 时，梁的变形

机构为在 C 处形成塑性铰。

综上所述，我们可将 $\eta_M<1$ 的阶梯梁的变形机构和载荷的关系归纳为表 2.2。

表 2.2 $\eta_M<1$ 的阶梯梁的变形机构

变形机构	塑性铰	载荷范围
变形机构 1	无铰	$f<f_{A0}$
变形机构 2	单铰 B	$f_{A0}\leqslant f\leqslant f_{A1}$
变形机构 3	单铰 H_2	$f_{A1}<f\leqslant f_{A2}$
变形机构 4	单铰 C	$f_{A2}<f\leqslant f_{AB}$
变形机构 5	双铰 H_1 和 C	$f_{AB}<f$

图 2.23(c)和(d)为 $f>f_{A3}$ 时双塑性铰变形机构对应的剪力和弯矩图。可以看到塑性铰 H_1 处剪力为零，而在塑性铰 C 处剪力不为零。

在检查屈服条件是否都不违反时，我们发现对于 $f>f_{A3}$，由于 Q_C 不为零有可能使悬臂梁根部出现反向弯矩(以载荷 F 产生的弯矩为正向)，若 L_2 足够长，则可能出现反向屈服。因此要求

$$Q_C L_2\leqslant 2M_{P2},$$

无量纲形式为

$$\eta_L\leqslant 2\eta_M/q_C. \tag{2.140}$$

由(2.131)和(2.132)式得到

$$q_C=\frac{2(1-\eta_M)}{2(1-\lambda_1)}. \tag{2.141}$$

由此式可以看出，当 λ_1 达到其最大值 λ_A 时，q_C 也达到它的最大值 $q_{C\max}$，这时(2.140)式的右手边为最小值，对应的载荷为 f_{A3}。由(2.131)—(2.134)式，令 $\ddot{\theta}_1=0$，可推出

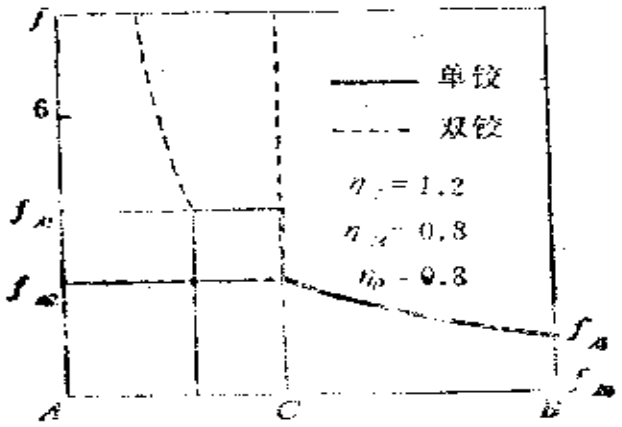
$$q_{c\max}=\frac{1}{2}(f_{AB}-3\eta_M)。 \tag{2.142}$$

因此条件(2.140)式可进一步表示为

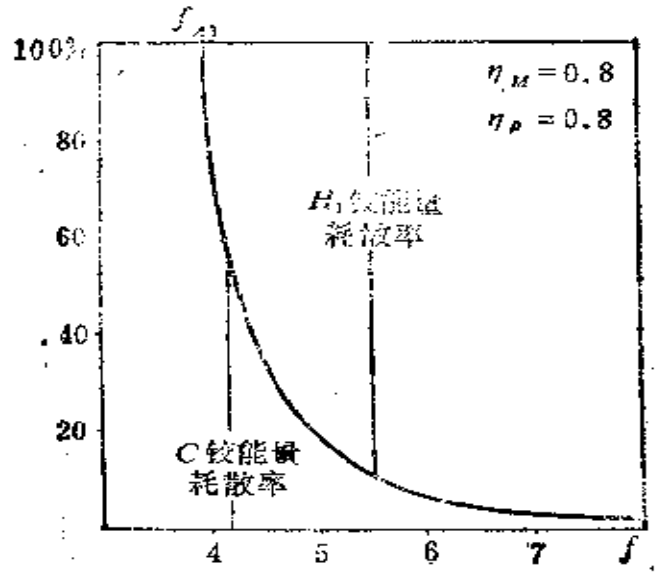
$$\eta_L\leqslant 4\eta_M/(f_{AB}-3\eta_M)。 \tag{2.143}$$

如果(2.143)式成立，上述解答为完全解；如果不成立，对于 $f>f_{AB}$ 要引入三铰变形机构，才能得到完全解[2.17]。

作为一个算例，图 2.24(a)给出了当 $\eta_L=1.2$，$\eta_M=\eta_P=0.8$ 时塑性铰位置与 f 的关系，图 2.24(b)为能量耗散的分布。可以



(a)



(b)

图 2.24

看到，当 f 比较接近 f_{AB} 时，能量主要耗散在 C 处；随着 f 增大，能量耗散向 H_2 铰转移。

2. $\eta_M>1$ 的阶梯梁

对于图 2.25 所示的 $\eta_M>1$ 阶梯梁端部受阶跃载荷作用问题，可以按照同样的方法和步骤进行分析，这里不再重复。这种阶梯悬臂梁在不同的载荷范围有 7 种变形机构，见表 2.3。

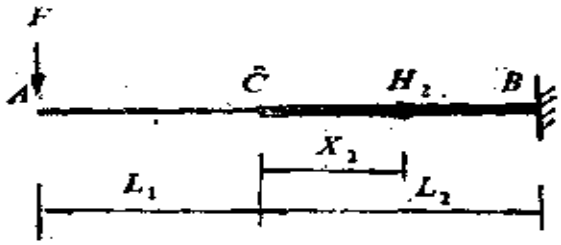


图 2.25

表 2.3 $\eta_M>1$ 的阶梯梁的变形机构

变形机构	塑性铰	载荷范围
变形机构 1	无铰	$f<f_{B0}$
变形机构 2	单铰 B	$f_{B0}\leqslant f\leqslant f_{B1}$
变形机构 3	单铰 H_2	$f_{B1}<f\leqslant f_{B2}$
变形机构 4	双铰 C 和 H_2	$f_{B2}<f\leqslant f_{B3}$
变形机构 5	双铰 C 和 B	$f_{B3}<f\leqslant f_{B4}$
变形机构 6	单铰 C	$f_{B4}<f\leqslant f_{B5}$
变形机构 7	单铰 H_1	$f_{B5}<f$

表 2.3 中的有关载荷范围由下列方程给出

$$f_{B0}=\eta_M/(1+\eta_L) \tag{2.144}$$

$$f_{B1}=\frac{3\eta_M(\eta_\rho\eta_L^2+2\eta_L+1)}{(\eta_\rho-1)(3+\eta_L)\eta_L^2+(1+\eta_L)^3}, \tag{2.145}$$

$$\eta_\rho\lambda_B^3+3\eta_\rho(1-\eta_M)\lambda_B^2+3(1-\eta_M)\lambda_B+1-\eta_M=0, \tag{2.146}$$

$$f_{B2}=1+(\eta_M-1)(2+3\lambda_B)/(\eta_\rho\lambda_B^3), \tag{2.147}$$

$$f_{B3}=3-3(\eta_M-1)(2\eta_\rho\eta_L+1)/(\eta_\rho\eta_L^2), \tag{2.148}$$

$$f_{B4}=3-2(\eta_M-1)/\eta_L, \tag{2.149}$$

$$f_{B5}=3. \tag{2.150}$$

对于 $\eta_M=\eta_\rho=1.2$，$\eta_L=2$，载荷和塑性铰位置的关系如图 2.26 所示。f_{B0} 是梁的静塑性极限载荷。当 $f_{B0}<f\leqslant f_{B1}$ 时，塑性铰形成在根部 B，当 $f_{B1}<f<f_{B2}$ 时，塑性铰形成在 BC 段上某处 H_2，随载荷增大，H_2 向 C 方向移动，但不能到达 C，其极限位置的无量纲坐标为 λ_B。λ_B 由梁的结构参数所确定，与载荷大小无关。对于 $f_{B2}<f<f_{B3}$，变形机构为双铰 C 和 H_2。随载荷增大，H_2 向根部移动，当 $f=f_{B3}$ 时形成在根部。当 $f_{B3}<f<f_{B4}$ 时，变形机构为双铰 C 和 B。当 $f_{B4}<f\leqslant f_{B5}$ 时，只有 C 处为塑性铰。当 $f>f_{B5}$ 时，塑性铰形成在 AC 段上。

注意到当 $\eta_L=\eta_M-1$ 时，有 $f_{B0}=f_{B4}=1$。所以若 $\eta_L<\eta_M-1$，表 2.3 中的变形机构 2—5 不出现。

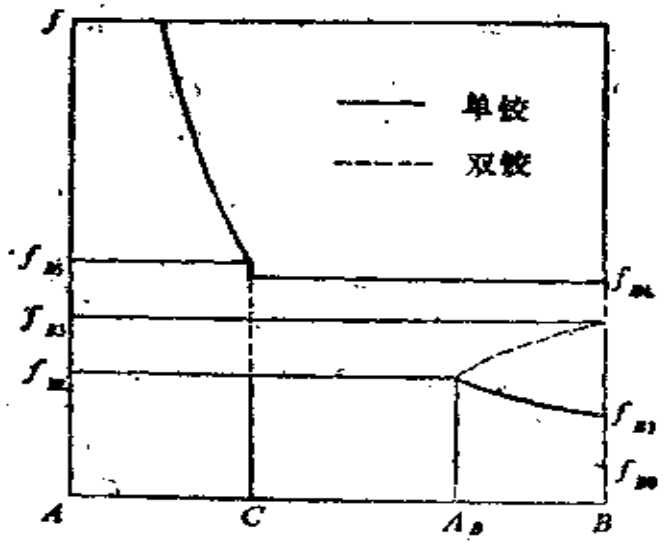


图 2.26

2.2.2 端部承受矩形脉冲载荷的阶梯截面悬臂梁

本小节只考虑图 2.27(a)所示的 $\eta_M<1$ 的阶梯梁端部受矩形

脉冲载荷作用的问题，对于 $\eta_M>1$ 的情况，可参阅文献[2·8]。在下面分析中继续采用2.2.1 所引入和定义的符号和无量纲参数，如(2.124)式。矩形脉冲的形式如图 2.27(b)，相应的无量纲载荷及其持续时间分别为 $f_0=F_0L_1/M_{P1}$，$\tau_d=t_d/T_{01}$。为了一般起见，假定 $f_0>f_{A5}$。这时梁的响应和等直梁受矩形脉冲作用(2.1.1)是类似的，只是开始阶段的变形机构是双塑性铰形式，因而有些不同。运动方程的推导方法也和 2.1.1 类似。

整个响应由四个相组成。

第一相，$0\leqslant\tau\leqslant\tau_d$。

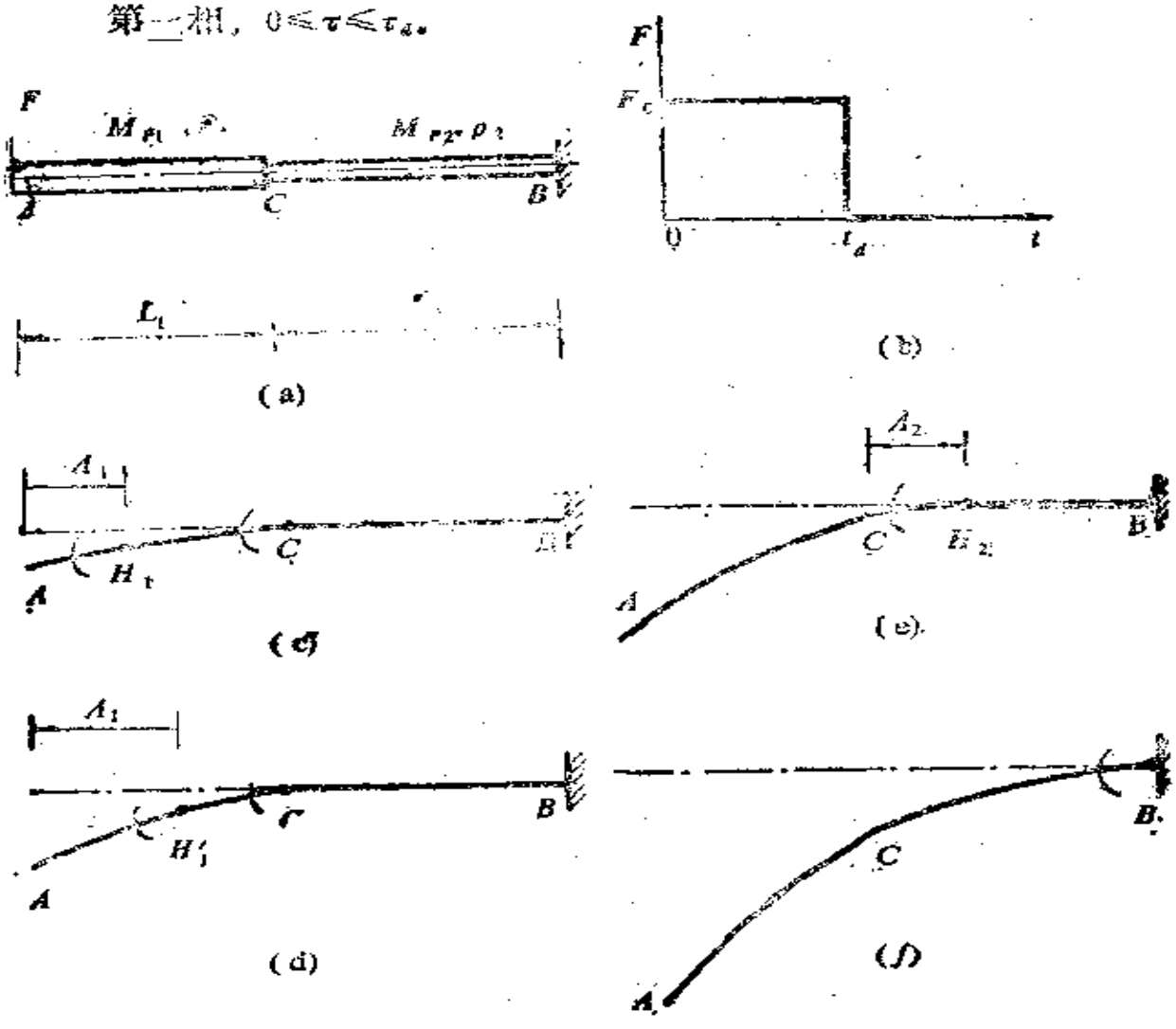


图 2.27

这一阶段的响应同阶跃载荷(2.2.1)，变形机构为两个驻定铰 H_1 和 C，见图 2.27(c)，运动方程为(2.131)—(2.134)式。这里我们用端部的无量纲速度 v 代替塑性铰 H_1 处的无量纲相对转动角速度 $\dot{\theta}_1$。因为有 $v=\dot{\theta}_C+\lambda_1\dot{\theta}_1$，(2.133)和(2.134)式可以改写为

$$\lambda_1[(1-\lambda_1)\ddot{\theta}_C+\dot{v}]=2f_0, \tag{2.151}$$

$$\lambda_1^2[2(1-\lambda_1)\ddot{\theta}_C+\dot{v}]=6。 \tag{2.152}$$

(2.152)式系由(2.133)和(2.134)式推导而来。

在这一阶段 H_1 铰是驻定铰，λ_1 是定值，将之记为 λ_{1I}。由(2.135)式有

$$2(3-\lambda_{1I}f_0)(1-\lambda_{1I})^2-3(1-\eta_M)\lambda_{1I}^2=0。 \tag{2.153}$$

在初始时刻 $\tau=0$ 时，有 $\dot{\theta}_C=v=0$，由(2.132)、(2.151)和(2.152)式可得

$$\dot{\theta}_C=3(1-\eta_M)\tau/(1-\lambda_{1I})^3, \tag{2.154}$$

$$\dot{v}=(4f_0\lambda_{1I}-6)/\lambda_{1I}^3, \tag{2.155}$$

$$v=(4f_0\lambda_{1I}-6)\tau/\lambda_{1I}^3。 \tag{2.156}$$

第二相，$\tau_d\leqslant\tau\leqslant\tau_2$。

当 $\tau>\tau_d$ 时 $f(\tau)=0$，H_1 铰变为移行铰，C 处仍然是塑性铰。因此这一阶段的变形机构为移行铰 H' 和驻定铰 C，见图2.27(d)。当然这种变形机构是否合理，还需检查。

考察 AH' 段动量和动量矩的变化率，可以得到该段的运动方程，这和等直梁运动方程(2.40)和(2.41)式的推导是类似的。该段无量纲形式的运动方程为

$$\lambda_1\dot{v}+\dot{\lambda}_1(v-\dot{\theta}_C)+\lambda_1(1-\lambda_1)\ddot{\theta}_C=0, \tag{2.157}$$

$$\lambda_1^2\dot{v}+2\lambda_1\dot{\lambda}_1(v-\dot{\theta}_C)+2\lambda_1^2(1-\lambda_1)\ddot{\theta}_C=6。 \tag{2.158}$$

CH' 段的运动方程还是(2.131)和(2.132)式。

由(2.132)，(2.157)和(2.150)式得到

$$\ddot{\theta}_C=3(1-\eta_M)/(1-\lambda_1)^3, \tag{2.159}$$

$$\dot{v}=-6/\lambda_1^2。 \tag{2.160}$$

这两个方程中 λ_1 是 τ 的函数，因此无法直接积分。可将(2.159)和(2.160)式代入(2.158)式，得到

$$2\lambda_1\dot{\lambda}_1(v-\dot{\theta}_C)=12-6\lambda_1^2(1-\eta_M)/(1-\lambda_1)^2。\quad(2.161)$$

对上式两边关于 τ 求导，并再次利用(2.159)和(2.160)式，得

$$\ddot{\lambda}_1+\frac{\lambda_1}{\dfrac{2(1-\lambda_1)^6}{\lambda_1^2(1-\eta_M)}-(1-\lambda_1)}=0。\quad(2.162)$$

方程(2.162)式可以积分求解，其初始条件为

$$\lambda_1|_{\tau=\tau_d}=\lambda_{1I},\quad(2.163)$$

$$\dot{\lambda}_1|_{\tau=\tau_d}=\frac{1}{\lambda_{1I}(v_I-\dot{\theta}_{CI})}\left[6-\frac{3\lambda_{1I}^2(1-\eta_M)}{(1-\lambda_{1I})^2}\right],\quad(2.164)$$

其中 v_I，$\dot{\theta}_{CI}$ 为第一相结束时的 v 和 $\dot{\theta}_C$ 值，可由(2.154)和(2.156)式得到，(2.164)式是从(2.161)式推出的。

求出 $\lambda_1=\lambda_1(\tau)$ 以后，将之代入(2.159)和(2.160)式，通过逐步积分可以求得 $\dot{\theta}_C(\tau)$ 和 $v(\tau)$ 等量。

若 $v=\dot{\theta}_C$，则 AH_1' 段相对 $H_1'C$ 段没有相对转动，这表示 H_1' 铰消失，第二相响应结束。移行铰 H_1' 不能到达 C，记其无量纲极限位置为 λ_{1A}，由(2.161)式可求出

$$\lambda_{1A}=\frac{2-\sqrt{2(1-\eta_M)}}{1+\eta_M},\quad(2.165)$$

λ_{1A} 也是结构参数所决定的，与载荷无关。

记第二相结束时刻为 τ_2。可以证明 $\dot{\lambda}_1(\tau_2)=0$。

第三相，$\tau_2<\tau<\tau_3$。

H_1' 铰消失后，C 铰立即变为移行铰 H_2，从 C 向根部移行，见图 2.27(e)。设在某时刻 $\overline{CH_2}=\Lambda_2$，定义 $\lambda_2\equiv\Lambda_2/L_1$。考察 AH_2 段的动量和动量矩变化率，可得如下无量纲运动方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[(\eta_\rho\lambda_2^2+2\lambda_2+1)\dot{\theta}_2]=0,\quad(2.166)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\{[1+3\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2(3+\lambda_2)]\dot{\theta}_2\}=6\eta_M,\quad(2.167)$$

其中 $\dot{\theta}_2$ 为 H_2 处的无量纲转动角速度。

方程(2.166)和(2.167)式的初始条件为

$$\begin{cases}\lambda_2|_{\tau=\tau_1}=0,\\ \dot{\theta}_2|_{\tau=\tau_1}=\dot{\theta}_{C\text{II}}.\end{cases}\tag{2.168}$$

其中 $\dot{\theta}_{C\text{II}}$ 为第二相结束时的 $\dot{\theta}_C$ 值。积分(2.166)和(2.167)式得到

$$\lambda_2(1+2\eta_\rho\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2)\dot{\theta}_{C\text{II}}=6\eta_M(1+2\lambda_2+\eta_\rho\lambda_2^2)(\tau-\tau_{2'}).\tag{2.169}$$

$$\dot{\theta}_2=\dot{\theta}_{C\text{II}}/(\eta_\rho\lambda_2^2+2\lambda_2+1).\tag{2.170}$$

当 $\lambda_2=\eta_L$ 时，H_2 到达 B，第三相结束，记这一时刻为 τ_3。

第四相，$\tau_3<\tau<\tau_f$。

当 H_2 到达 B 后，悬臂梁的运动就变为绕根部 B 的刚体转动，直至耗散完全部动能。根部的最终转角为

$$\theta_B=\dot{\theta}_{2\,\text{III}}(\eta_\rho\eta_L^3+3\eta_L^2+3\eta_L+1)/(6\eta_M),\tag{2.171}$$

其中 $\dot{\theta}_{2\,\text{III}}$ 为第三相结束时(即 H_2 到达根部时)H_2 铰处的转动角速度。

最后应当检查在上述响应的各个阶段，梁的各部分是否有违反屈服条件的情况发生。根据 2.2.1 中的分析，对双塑性铰 H_1—C 变形机构，关于梁的长度有(2.140)式的条件限制。这个条件对于矩形脉冲载荷也适用。因为在矩形脉冲载荷下，CH_1 段第一相和第二相的运动方程为(2.131)和(2.132)式，和阶跃载荷作用下相同，所以(2.141)式也适用于目前情况。将(2.141)式代入(2.140)式，得到

$$\eta_L\leqslant\frac{4\eta_M(1-\lambda_1)}{3(1-\eta_M)},\tag{2.172}$$

在矩形脉冲情况下，λ_1 的最大值为(2.165)式所给出的 λ_{1A}，所以若下列条件成立，就不会有违反屈服条件的情况发生，

$$\eta_L\leqslant\frac{4\eta_M(1-\lambda_{1A})}{3(1-\eta_M)}.\tag{2.173}$$

2.2.3 冲击载荷作用下含裂纹悬臂梁的响应

在核反应堆的管道系统中，由于应力腐蚀、热疲劳等因素影响，管道内壁容易发生微裂纹，并可能演化为宏观裂纹。基于这种工程背景，Petroski [2.9]应用模态近似解*分析了含缺陷的悬臂圆管受冲击载荷作用的响应。最近杨嘉陵和余同希[2.10]在阶梯梁完全解的基础上，给出了含裂纹悬臂梁受冲击载荷的完全解。本小节简要介绍他们的研究结果。

图 2.28 为所研究的含裂纹悬臂梁的几何形状，在距自由端 L_1 处受拉侧有一裂纹。在初始时刻，集中质量 G 受到冲击而获得横向速度 V_0。假定在响应过程中裂纹保持稳定状态。无裂纹截面梁的塑性极限弯矩为 M_p，含裂纹截面的塑性极限弯矩为 ζM_p，其中 ζ 取决于裂纹的尺寸和形状，$0<\zeta<1$。

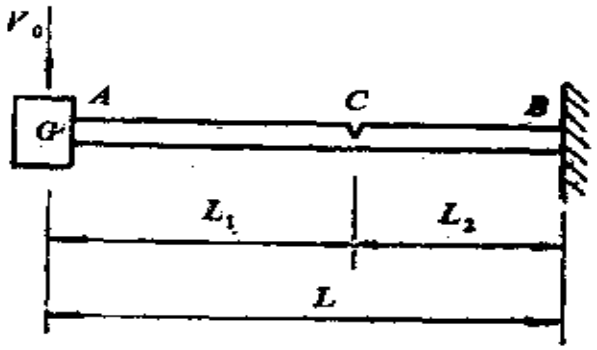


图 2.28

冲击载荷可以看成是矩形脉冲载荷的一种极端情况：作用时间极短，作用力极大。因此可以应用 2.2.2 关于阶梯梁受矩形脉冲载荷作用的结果，来分析目前的问题。整个响应由两个阶段组成。

第一阶段相当于矩形脉冲 $\eta_M<1$ 梁的第二相，变形机构为双塑性铰：移行铰 H_1 和驻定铰 C。当 H_1 移行至 AC 间某处时消失，这一阶段响应结束。这一阶段响应只由一个相组成，即第一相，见

* 模态近似解在本书 4.2 介绍

图 2.29(a)。

第二阶段相当于 $\eta_M>1$ 梁在矩形脉冲作用下后一阶段的响应（详见文献[2.8]）。记质量比 $\gamma_1=G/\rho L_1$，$\Gamma=\left(\gamma_1+\frac{1}{3}\right)\Big/\left(\gamma_1-\frac{1}{2}\right)$，根据梁的结构参数，第二阶段的响应为下列情况之一：

(i) 情况 I：若

$$0<\frac{1-\zeta}{\zeta}<\frac{\eta_L^2}{3\Gamma(1+\eta_L)-1}, \tag{2.174}$$

第二相的变形机构为双驻定铰 C 和 CB 段上的 H_2。当 C 铰消失时，第二相结束。这时 H_2 变为移行铰绕根部运动，这是第三相。当 H_2 到达根部时，第三相结束，第四相为悬臂梁绕根部作定点转动，直至动能耗尽，运动停止。

(ii) 情况 II：若

$$\frac{\eta_L^2}{3\Gamma(1+\eta_L)-1}<\frac{1-\zeta}{\zeta}<\frac{\eta_L}{\Gamma}, \tag{2.175}$$

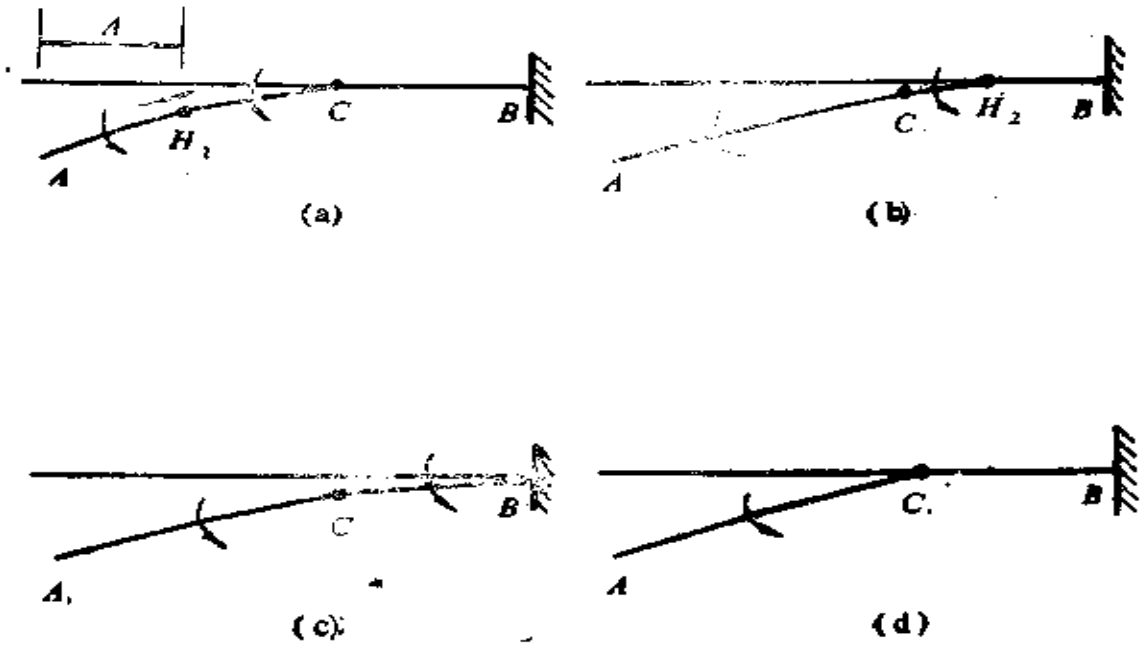


图 2.29

第二相的变形机构为双驻定铰 C 和 B，当 C 铰消失时，第三相结束。随后的第三相为情况 I 的第四相，即绕根部作定点转动。

(iii) 情况 II：若

$$\eta_L/\Gamma \leqslant (1-\zeta)/\zeta, \tag{2.176}$$

第二相的变形机构为单铰 C，直至运动结束。

这三种情况的变形机构分别参看图 2.29(b)，(c)和(d)。

裂纹截面 C 的最终转角可由第一、二相的分析结果得到，详见文献[2.10]。

2.3 板的刚塑性动力响应

板在垂直于其中面的载荷作用下，广义应力有弯矩、膜力和剪力三种。根据这三种广义应力何者为主可将板的塑性动力响应分为三种类型[2.11]：

(i) 膜力为主，对于极薄的板或在大变形情况下，板内膜力是主要的；除了板的边缘外，可以不计弯矩；

(ii) 剪力为主，这主要来自穿甲问题，板在局部撞击作用下受剪力破坏。对于中厚板或厚板的动力问题，也需要考虑剪切变形的影响；

(iii) 弯矩为主，当板的跨度与厚度之比在 10 到 20 或 30 之间时，可以不计剪切变形，在小变形下膜力也可以不计，这时板的弯矩起主要作用。

本节考虑第三种情况，即主要考虑板的弯曲变形。在本节分析中，除了理想刚塑性假定和小变形假定外，还采用薄板小变形理论的基本假定，即

(i) 在变形过程中，板的中面不伸长和缩短；

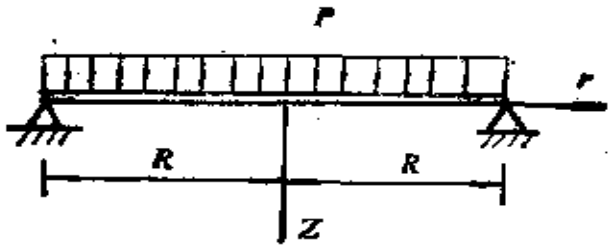
(ii) 变形前垂直于中面的法线，变形后保持为直线，并垂直于变形后的中面，即直法线假定；

(iii) 垂直于中面的正应变可以不计。

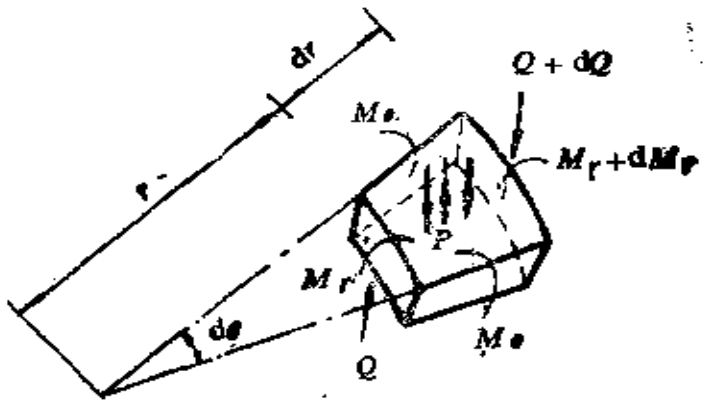
2.3.1 轴对称圆板的基本方程

考虑半径为 R，厚度为 h 的简支圆板受轴对称分布载荷 P 的作用，P 为单位面积上的载荷，见图 2.30(a)。由于膜力可以不计，以及问题的轴对称性，当采用柱坐标时，板内非零的广义应力有弯矩 M_θ，M_r 和剪力 Q，其正向如图 2.30(b)所示。当采用 Tresca 屈服条件时，单位宽度板的塑性极限弯矩为

$$M_s = Yh^2/4, \tag{2.177}$$



(a)



(b)

图 2.30

其中 Y 是材料的屈服应力。

引入如下的参数、记号和无量纲量，

$$\begin{cases} x \equiv r/R,\ T_0 \equiv R\sqrt{\mu R/M_s},\ \tau = t/T_0,\ w \equiv W/R, \\ m_r \equiv M_r/M_s,\ m_\theta \equiv M_\theta/M_s,\ q \equiv QR/M_s, \\ p \equiv PR^2/M_s,\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\quad) \equiv (\dot{}),\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\quad) \equiv (\quad)', \end{cases} \tag{2.178}$$

其中 μ 为单位中面板的质量，W 为板的挠度。

在静载情况下，轴对称圆板的无量纲平衡方程为

$$(xm_r)' - m_\theta = xq, \tag{2.179}$$

$$(xq)' + xp(x) = 0. \tag{2.180}$$

根据 d'Alembert 原理，在动力情况下，考虑板的惯性力，(2.180)式可写成

$$(xq)' = -x(p - \ddot{w}), \tag{2.181}$$

关于 x 积分(2.181)式，并代入(2.179)式，得

$$(xm_r)' - m_\theta = \int_0^x (\ddot{w} - p)x\mathrm{d}x, \tag{2.182}$$

此式就是轴对称圆板的运动方程。

对于轴对称载荷作用下的圆板，主应力方向已知，采用Tresca屈服准则是方便的。根据直法线假定，剪力没有对应的广义应变，

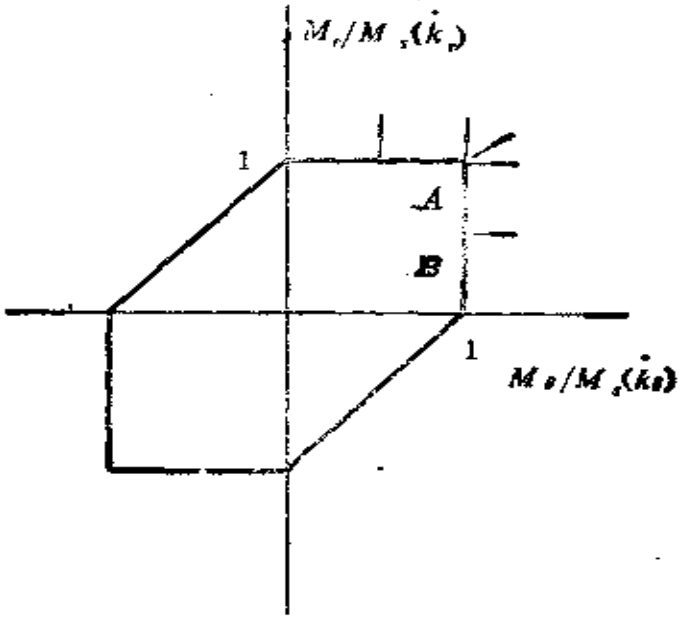


图 2.31

因此是“反力”，不出现在屈服条件之内[2.1,2.2]。采用无量纲广义应力 m_r 和 m_θ，轴对称圆板的屈服面如图 2.31 所示。

对应于 m_r 和 m_θ 的无量纲广义应变(无量纲曲率)为

$$\begin{cases} k_r = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ k_\theta = -\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \end{cases} \tag{2.183}$$

广义应变率为 $\dot{k}_r$ 和 $\dot{k}_\theta$。根据关连流动法则。广义应变率的方向垂直于屈服面。根据广义应力点在屈服面上的位置，就可以确定广义应变率的方向。

由于结构和载荷的对称性，圆板的塑性屈服区也是轴对称的，对应于梁的塑性铰，在圆板中有塑性铰圆。塑性铰圆也有驻定和移行之分。铰圆两侧的挠度、斜率、曲率、速度、角速度和加速度的间断特性和塑性铰的间断特性相同，可参看表 2.1，这里不再重复。对于轴对称圆板，表 2.1 中的曲率间断性仅适用于 k_r，不适用于 k_θ。

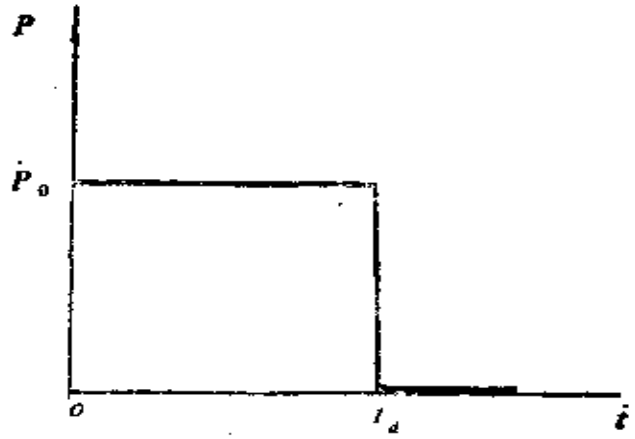


图 2.32

2.3.2 受均布矩形脉冲载荷的简支圆板[2.1,2.12]

考虑简支圆板受均匀分布的矩形脉冲 P 的作用，见图 2.30(a)。脉冲形式如图 2.32，写成无量纲形式为

$$\begin{cases} p(\tau)=p_0, & 0\leqslant\tau\leqslant\tau_d; \\ p(\tau)=0, & \tau_d<\tau; \end{cases} \tag{2.184}$$

其中 $\tau_d\equiv t_d/T_0$。在初始时刻有

$$w(x,0)=\dot{w}(x,0)=0。 \tag{2.185}$$

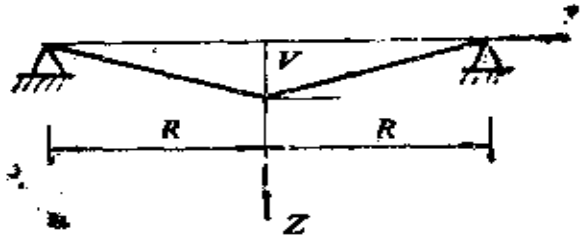
由塑性力学板的极限分析可知，圆板的塑性极限载荷 $P_c=6M_s/R^2$，写成无量纲形式为

$$p_c\equiv P_cR^2/M_s=6。 \tag{2.186}$$

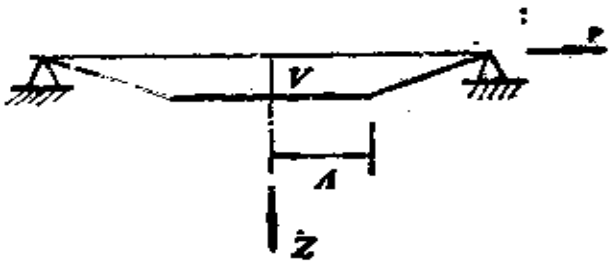
当 $p_0<p_c$ 时，圆板保持静止不变形。当 $p_0>p_c$ 时圆板将变为一个机构，超载部分 p_0-p_c 引起板的加速运动。根据载荷的大小，圆板的响应可分为中载($p_c<p_0<2p_c$)和高载($2p_c<p_0$)两种情况。

1：中载情况($p_c\leqslant p_0<2p_c$)

在中载情况下，载荷超过静态极限载荷不多，有理由假定其变形机构和静载极限状态下相同，即板的速度分布成圆锥形，见图 2.33(a)。整个响应可分为两相。



(a)



(b)

图 2.33

第一相，$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_d$。

设 V 为圆板中点的速度。板的速度场则为 $V(1-r/R)$，写成无量纲形式为

$$\dot{w}(x, \tau) = v(\tau)(1-x), \tag{2.187}$$

其中 v 为 V 的无量纲形式。将上式代入(2.183)式，则得到 $\dot{k}_r = -\dot{w}'' = 0$，$\dot{k}_\theta = -\dot{w}'/x = v/x$。这种广义应变率对应于图2.31屈服曲线的 AB 段。因而对应的广义应力为 $m_\theta = 1$，$0 \leqslant m_r \leqslant 1$。将之代入运动方程(2.182)式，得

$$(xm_r)' = 1 + \dot{v}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) - \frac{p_0}{2}x^2.$$

上式关于 x 积分一次得

$$xm_r = x - \frac{p_0}{6}x^3 + \dot{v}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) + C, \tag{2.188}$$

其中 C 是积分常数，可由 $m_r(0, \tau) = 1$，定出 $C = 0$。再由简支边条件 $m_r(1, \tau) = 0$，求出圆板中心的无量纲加速度

$$\dot{v} = 2(p_0 - p_c). \tag{2.189}$$

此式表明，只有当 $p_0 > p_c$ 时才有正的加速度 $\dot{v} > 0$。

将(2.189)式代回(2.188)式，可求得 m_r 的分布

$$m_r = 1 + \left(\frac{p_0}{p_c} - 2\right)x^2 - \left(\frac{p_0}{p_c} - 1\right)x^3. \tag{2.190}$$

m_r 关于 x 的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}x} = 2x\left(\frac{p_0}{p_c} - 2\right) - 3x^2\left(\frac{p_0}{p_c} - 1\right). \tag{2.191}$$

根据 $\frac{\mathrm{d}m_r}{\mathrm{d}x} = 0$ 的条件，可得 m_r 的极值点为 $x_1 = 0$ 和 $x_2 = \frac{2}{3}\left(\frac{p_0}{p_c} - 2\right)\Big/\left(\frac{p_0}{p_c} - 1\right)$。当 $\frac{p_0}{p_c} \leqslant 2$ 时，$x_2 < 0$，因而是没有意义的。但是当 $p_0/p_c > 2$ 时，由(2.190)式容易验证有 $m_r(x_2, \tau) > 1$。这说明当 $p_0/p_c > 2$ 时，图 2.33(a)所示的变形机构将使刚塑板的某些部分违反屈服条件，因而不适用于高载情况。

由(2.189)式容易得到圆板中心的无量纲速度和挠度

$$v = 2(p_0 - p_c)\tau, \tag{2.192}$$

$$\delta \equiv \Delta / R = (p_0 - p_c)\tau^2, \tag{2.193}$$

其中 Δ 为圆板中心的挠度。将(2.192)式代入(2.187)式，并关于时间积分，可得这一阶段的圆板速度和挠度分布

$$\dot{w} = 2(p_0 - p_c)(1 - x)\tau, \tag{2.194}$$

$$w = (p_0 - p_c)(1 - x)\tau^2, \tag{2.195}$$

当 $\tau = \tau_d$ 时第一相响应结束，这时板中点挠度和板的速度、挠度分布分别为

$$\delta_1 = (p_0 - p_c)\tau_d^2, \tag{2.196}$$

$$\dot{w}_1 = 2(p_0 - p_c)(1 - x)\tau_d, \tag{2.197}$$

$$w_1 = (p_0 - p_c)(1 - x)\tau_d^2. \tag{2.198}$$

第二相，$\tau_d < \tau < \tau_f$。

第一相结束时板具有速度，因此还将继续运动。由于变形机构不变，因此可将 $p_0 = 0$ 代入第一相的有关方程，并注意到第二相的初始条件为第一相结束时的值，经过积分即可得到第二相的有关解答。

圆板中心的无量纲加速度、速度和挠度分别为

$$\dot{v} = -2p_c, \tag{2.199}$$

$$v = 2(p_0\tau_d - p_c\tau), \tag{2.200}$$

$$\delta = 2p_0\tau_d\tau - p_c\tau^2 - p_0\tau_d^2. \tag{2.201}$$

当 $v = 0$ 时响应结束，最终响应时间 τ_f 由(2.200)式可得

$$\tau_f = p_0\tau_d / p_c. \tag{2.202}$$

由(2.201)式可求出圆板中点的最终无量纲挠度

$$\delta_f = \frac{p_0}{p_c}(p_0 - p_c)\tau_d^2 = \frac{1}{p_c} i_0 i_1, \tag{2.203}$$

其中 $i_0 = p_0\tau_d$ 是板上单位面积受到的无量纲冲量，$i_1 = (p_0 - p_c)\tau_d$ 可称为**超载冲量**。

2．高载情形 $p_0>2p_c$

当载荷超过 $2p_c$ 时，中载时集中于圆心的塑性铰，在响应的初始阶段变为半径为 A_0 的圆周，即塑性铰圆，见图 2.33(b)，相应的变形机构为一截锥。当载荷停止作用后，该塑性铰圆向圆板中心运动。在到达圆板中心后，变形机构又如图 2.33(a)所示的圆锥，以后的运动和中载情况相同，所以对于高载情况，板的运动分为三个相。

第一相，$0\leqslant\tau\leqslant\tau_d$。

这一阶段的变形机构为半径等于 A_0 的驻定塑性铰圆，无量纲半径 $\lambda_0\equiv A_0/R$。在应用运动方程(2.182)式前，首先要判断铰圆内外区域应力状态所对应的广义应力点在屈服面（图 2.31）上的位置。

在铰圆内，$0\leqslant x\leqslant\lambda_0$，板为一平台，可以推测在这个区域有 $m_r=m_\theta=1$，即对应于图 2.31 的 A 点。由(2.182)式得

$$\ddot{w}=\dot{\psi}=p_0,$$

其中 w 为圆板中点的无量纲速度。根据初始时刻速度和挠度等于零的条件，容易求出

$$\begin{cases}\dot{w}=v=p_0\tau,\\ w=\dfrac{1}{2}p_0\tau^2,\end{cases}\quad 0\leqslant x\leqslant\lambda_0。\tag{2.204}$$

在铰圆外，板变形为锥面，无量纲的速度和挠度为

$$\begin{aligned}&\dot{w}=p_0\tau(1-x)/(1-\lambda_0),\\ &w=\frac{1}{2}p_0\tau^2(1-x)/(1-\lambda_0),\end{aligned}\quad \lambda_0\leqslant x\leqslant 1。\tag{2.205}$$

由(2.183)式可得对应的曲率变化率为

$$\begin{cases}\dot{k}_r=-\dfrac{\partial^2\dot{w}}{\partial x^2}=0\\ \dot{k}_\theta=-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial\dot{w}}{\partial x}=\dfrac{p_0\tau}{(1-\lambda_0)x}。\end{cases}\quad(\lambda_0\leqslant x\leqslant 1)。\tag{2.206}$$

由(2.206)式可以看出，铰圆外区域的广义应力点位于屈服面(图

2.31)的 $m_\theta=1$ 段上。这一阶段的载荷大小不变，铰圆半径 λ_0 不变，是驻定铰圆。

将 $m_\theta=1$ 及(2.205)式代入(2.182)式，得

$$(xm_r)'=1-\int_{\lambda_0}^{x}\left(p_0-\dot{v}\frac{1-x}{1-\lambda_0}\right)x\mathrm{d}x. \tag{2.207}$$

积分(2.207)式，并利用 $x=\lambda_0$ 时 $m_r=1$ 的条件，得到

$$m_r=1-\frac{p_0}{12x(1-\lambda_0)}(x^4-2\lambda_0x^3+2\lambda_0^3x-\lambda_0^4). \tag{2.208}$$

到目前为止，铰圆的位置 λ_0 还未确定。根据简支边条件，$m_r(1,\tau)=0$，由(2.208)式给出

$$p_0(1-\lambda_0-\lambda_0^2+\lambda_0^3)=12. \tag{2.209}$$

由上式可以求出 λ_0 与 p_0 的关系，λ_0 随 p_0 增大而增大。

最后还要验证这种变形机构不违背屈服条件，这只要检查总有 $m_r\leqslant 1$，由(2.208)和(2.209)式可以证实这一点。

第二相，$\tau_d<\tau<\tau_2$。

当载荷停止作用后，塑性铰圆变为移行铰圆，无量纲铰圆半径 λ 逐渐减小，直至为零，变形机构也由截锥形变为圆锥形，这时第二相结束。

在第二相，铰圆内区域还是一个平台，广义应力点在屈服面上的位置和第一相相同，而载荷为零。因此可利用第一相时得到的 $\ddot{w}=\dot{v}=p_0$ 推出 $\ddot{w}=0$，即平台匀速运动。铰圆外区域的速度场为截锥状。第二相板的速度分布为

$$\dot{w}=\begin{cases}p_0\tau_d, & 0\leqslant x\leqslant\lambda;\\ p_0\tau_d(1-x)/(1-\lambda), & \lambda\leqslant x\leqslant 1;\end{cases} \tag{2.210}$$

其中 $p_0\tau_d$ 为第一相结束时平台的速度。

板的加速度分布为

$$\ddot{w}=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant\lambda;\\ p_0\tau_d(1-x)\dot{\lambda}/(1-\lambda)^2, & \lambda\leqslant x\leqslant 1;\end{cases} \tag{2.211}$$

其中 $\dot{\lambda}$ 是塑性铰圆的运动速度。将上式代入(2.182)式，得到

$$(xm_r)' = 1 + \frac{p_0\tau_d\dot{\lambda}}{6(1-\lambda)^3}(3x^2 - 3\lambda^2 - 2x^3 + 2\lambda^3),\quad \lambda \leqslant x \leqslant 1。$$

(2.212)

积分(2.212)式，并利用 $x=\lambda$ 时 $m_r=1$，得

$$m_r = 1 + \frac{p_0\tau_d\dot{\lambda}}{12x(1-\lambda)^2}(2x^3 - 6\lambda^2 x - x^4 + 4\lambda^3 x + 4\lambda^3 - 3\lambda^4),$$

$$\lambda \leqslant x \leqslant 1。 \qquad (2.213)$$

根据简支边条件 $m_r(1,\ \tau)=0$，由上式可求出铰圆的移行速度

$$\dot{\lambda} = -\frac{12}{p_0\tau_d(1+2\lambda-3\lambda^2)} = -\frac{2p_c}{p_0\tau_d}\cdot\frac{1}{(1-\lambda)(1+3\lambda)}。$$

(2.214)

将(2.214)式代入(2.213)式，得到铰圆外区的无量纲弯矩分布

$$m_r = 1 + \frac{(x-\lambda)^2}{(1-\lambda)^3(1+3\lambda)x}(x^2 - 2x + 2\lambda x - 4\lambda + 3\lambda^2),$$

$$\lambda \leqslant x \leqslant 1。 \qquad (2.215)$$

可以验证，这种弯矩分布不违反屈服条件。

积分(2.214)式，并利用(2.186)、(2.209)式，得到铰圆位置所满足的方程

$$\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = \frac{2p_c\tau}{p_0\tau_d}。 \qquad (2.216)$$

$\lambda=0$ 时第二相结束。对应的时间 τ_2 可由(2.216)式得到

$$\tau_2 = \frac{p_0\tau_d}{2p_c}。 \qquad (2.217)$$

第二相结束时板的速度、挠度分布是第三相响应的初始条件。第二相结束时的速度分布为

$$\dot{w}_2 = p_0\tau_d(1-x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 1。 \qquad (2.218)$$

为了求挠度分布，应当从(2.216)式中求出 $\lambda=\lambda(\tau)$，代入(2.210)式，并对时间积分。但是这样做计算比较复杂。因为我们只要求 $\tau=\tau_2$ 时刻的挠度，可以借助塑性铰间断条件来求。

在第二相，铰圆向板的中心移动，对于 $\lambda_0 \leqslant x \leqslant 1$，没有铰圆通过，所以变形后的板面还是圆锥形；而对于 $0 \leqslant x \leqslant \lambda_0$，有铰圆通过，变形后的板面为曲面，见图 2.34。在 $x=\lambda_0$ 处，第一相结束时有斜率间断，由(2.205)式可得其间断值为

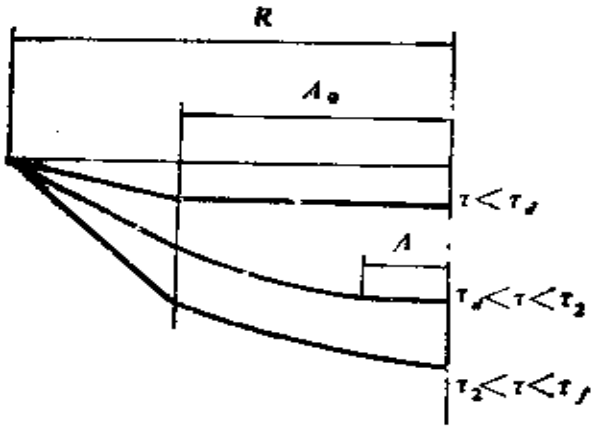


图 2.34

$$[w'] = \bar{w}'(\lambda_0+0, \tau_d) - 0 = -\frac{p_0\tau_d^2}{2(1-\lambda_0)}. \qquad (2.219)$$

移行铰圈的间断性质同移行铰，见表 2.1。在移行铰圈处有 $[w']=0$，$[w'']=-\frac{1}{\dot{\lambda}}[\dot{w}']$。由(2.210)式有

$$[\dot{w}'] = \dot{w}'(\lambda+0,\ \tau) - \dot{w}'(\lambda-0,\ \tau) = \dot{w}'(\lambda+0,\ \tau) - 0,$$

所以

$$[\dot{w}'] = -p_0\tau_d/(1-\lambda). \qquad (2.220)$$

因此，移行铰圆处径向曲率的间断值为

$$[\dot{w}''] = \frac{p_0\tau_d}{\dot{\lambda}(1-\lambda)}.$$

将(2.214)式代入上式，得

$$[\bar{w}''] = -\frac{(1+3\lambda)}{2p_c}(p_0\tau_d)^2. \qquad (2.221)$$

由于在铰圆内是平台，有 $\bar{w}''=0$，而在铰圆外，由(2.210)式可知，$\dot{w}''=0$。这表明圆板的径向曲率等于铰圆通过时所引起的

曲率间断值，铰圆通过后不产生新的曲率，即有

$$w''(x,\tau)=-\frac{(1+3x)}{2p_c}(p_0\tau_d)^2。\qquad(2.222)$$

此式适用于铰圆通过后的区域。在第二相结束时刻积分（2.222）式，得

$$w'(x,\tau_2)=-\frac{(p_0\tau_d)^2}{2p_c}\left(x+\frac{3}{2}x^2\right)+C_1,\qquad(2.223)$$

$$w(x,\tau_2)=-\frac{(p_0\tau_d)^2}{2p_c}(x^2+x^3)+C_1x+C_2,\quad(2.224)$$

式中 C_1 和 C_2 为积分常数。在第二相内，圆板中心处总有 $w'=0$，又因为对于移行铰圆有 $[w']=0$，所以在圆板中心铰圆外侧也有 $w'=0$，由此定出 $C_1=0$。C_2 可以通过圆板中心的挠度定出。在第二相，圆板中心的速度为常数，第二相结束时圆板中心挠度为

$$\delta_2\equiv w(0,\tau_2)=p_0\tau_d(\tau_2-\tau_d)+\frac{1}{2}p_0\tau_d^2。\qquad(2.225)$$

上式右手边第二项是第一相结束时圆板中心的挠度，见（2.204）式。对照(2.224)和(2.225)式可得 $C_2=p_0\tau_d\left(\tau_2-\frac{\tau_d}{2}\right)$，$\tau_2$ 已由(2.217)式给出。最后我们得到

$$w(x,\tau_2)=\frac{p_0\tau_d^2}{4}\left[\frac{p_0}{p_c}(2-x^2-x^3)-2\right],\ 0\leqslant x\leqslant\lambda_0。\quad(2.226)$$

第三相，$\tau_2<\tau<\tau_f$。

第三相的运动和中载情况下第二相是相同的。根据（2.199）式，圆板中心的加速度为 $-2p_c$，第二相结束时，圆板中心的速度为 $p_0\tau_d$，因此第三相的持续时间为

$$\tau_f-\tau_2=\frac{p_0\tau_d}{2p_c}。$$

因为 $\tau_2=p_0\tau_d/2p_c$，所以板的响应时间为

$$\tau_f=2\tau_2=p_0\tau_d/p_c。\qquad(2.227)$$

容易求出在第三相中，圆板中点挠度的增量为 $\frac{(p_0\tau_d)^2}{4p_c}$，第

二相结束时的中点挠度 δ_2 由(2.225)式给出，因此圆板中点的最终挠度为

$$\delta_f=\frac{(p_0\tau_d)^2}{2p_c}\left(\frac{3}{2}-\frac{p_c}{p_0}\right)=\frac{i_0^2}{2p_c}\left(\frac{3}{2}-\frac{p_c}{p_0}\right), \qquad (2.228)$$

其中 $i_0=p_0\tau_d$ 为矩形脉冲的无量纲冲量。

圆板在第三相的挠度增量分布成圆锥形，第二相结束时的挠度分布为(2.226)式，因此最终挠度分布为

$$\begin{aligned}w(x,\tau_f)&=\frac{p_0\tau_d^2}{4}\left[\frac{p_0}{p_c}(2-x^2-x^3)-2\right]+\frac{(p_0\tau_d)^2}{4p_c}(1-x)\\&=\frac{p_0\tau_d^2}{4}\left[\frac{p_0}{p_c}(3-x-x^2-x^3)-2\right],\quad(0\leqslant x\leqslant\lambda_0).\end{aligned} \qquad (2.229)$$

这表明在半径 λ_0 以内，圆板变形后的形状为三次曲面，中心处为一尖角，在半径 λ_0 以外，圆板的形状为一圆锥面，参见图 2.34。

2.3.3 承受均布冲击载荷的简支圆板[2.18]

在 2.1.3，我们曾研究了悬臂梁端部受冲击载荷作用的问题，并指出冲击载荷是一种 δ 函数形式的脉冲载荷，它使得结构(或结构的一部分) 在初始时刻获得一定的初速度。本小节研究图 2.30(a) 所示的简支圆板受均匀分布的冲击载荷作用的问题。圆板处处在初始时刻都获得相同的速度 V_0。

在冲击载荷作用下，单位面积板上受到的冲量 $I_0=\mu V_0$，μ 为单位中面板的质量。这里我们继续采用 2.3.2 和2.3.3中所定义的符号和无量参数。参照(2.203)式，无量纲冲量 $i_0\equiv\frac{I_0R^2}{T_0M_s}=v_0$，$v_0$ 为板的无量纲初速度。

根据 2.3.2 高载情况第一相的结果可知，塑性铰圆半径 λ_0 随载荷 p_0 的增大而增大。而冲击载荷作用瞬间的数值为无穷大，相应地有 $\lambda_0=1$。因此，冲击载荷作用下板的响应的第一相就是移行铰圆从周边开始向中心移动，到达中心时第一相结束；第二相为

圆锥形的变形机构，直至耗尽全部动能。2.3.3 离载情况的第二、三相的有关公式可用于目前情况，只要取 $i_0=v_0$ 代替 $v_0\tau_2$ 即可。因此，由(2.216)式可得移行铰圆半径 λ 与时间的关系满足

$$\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=\frac{12\tau}{i_0}=\frac{2p_e\tau}{v_0}。\tag{2.230}$$

第一相结束的时间和响应持续时间分别为

$$\tau_1=\frac{v_0}{2p_e},\quad \tau_f=v_0/p_e。\tag{2.231}$$

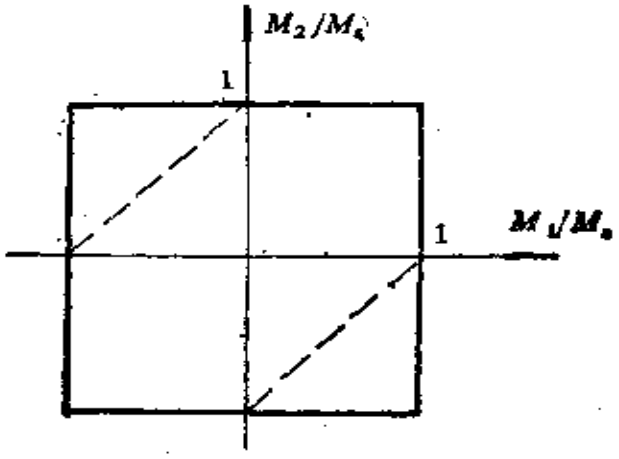
圆板中点的最终挠度可由(2.228)式，令 $p_0\to\infty$，得到

$$\delta_f=\frac{3v_0^2}{4p_e}=\frac{v_0^2}{8}。\tag{2.232}$$

2.3.4 承受均布矩形脉冲载荷的简支方板

对于非圆板，由于主应力方向在变化，情况要复杂得多。至今为止，已发表的完全解只有 Cox 和 Morland 所给出的简支方板在均布载荷作用下的响应[2-14]。为了简化分析，他们采用了如图 2.35(a)所示的 Johansen 屈服面，其中 M_1 和 M_2 为板的主弯矩。显然，Tresca 六边形屈服面(虚线所示)完全在它之内。

设方板的边长为 $2L$，四周简支，见图 2.35(b)，在均布载荷作用下，静力塑性极限载荷为[2-2]。



(a)

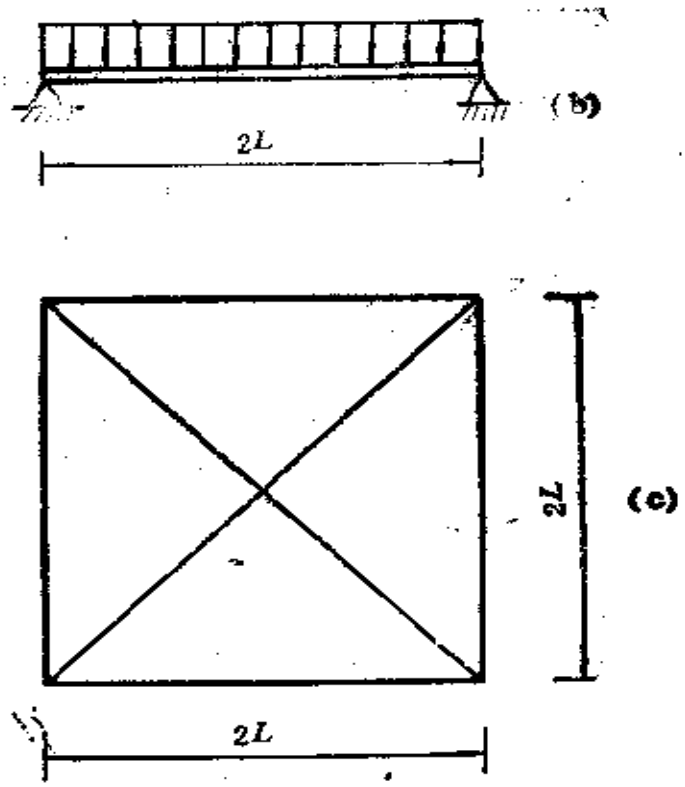


图 2.35

$$P_c = 6M_s/L^2。 \tag{2.233}$$

当载荷 P 为如图 2.32 所示的矩形脉冲时，方板的响应和 2.3.3 所讨论的圆板响应类似，有中载（$P_c \leqslant P_0 \leqslant 2P_c$）和高载（$2P_c \leqslant P_0$）之分。在中载情况下，变形机构为角锥形，沿板的对角线形成固定铰线，见图 2.35(c)。在高载作用下，变形机构为板的中央有一平台的截锥体。Cox 和 Morland 利用坐标变换使得求解过程得到简化，并可推广至求解简支正 n 边形板的动力响应。求解时首先假定板的变形机构，同时寻找与之相应的满足运动方程、边界条件和不违反屈服条件的内力场。详细过程可参阅文献[2.14]和[2.15]。

本节介绍一种基于能量平衡的解法，可以方便地给出中载时的解答。响应过程分为如下两个相。

第一相，$0 \leqslant t \leqslant t_d$。

这一阶段板的变形机构为沿着对角线形成的4条铰线，方板被铰线分成4个相同的刚性等腰直角三角形，并绕着各自板的简支边转动，见图2.35(c)。板变形的阻力来自塑性铰线，因而等于静力塑性极限载荷 P_c。载荷的剩余部分（或称超载部分）P_0-P_c 引起刚性三角块的转动角加速度，因为 P_0-P_c 是常数，所以三角块的角加速度也是常数，设为 ω。整个方板的动能为 $4\times I\omega^2/2$，其中 I 为三角块关于板的简支边的转动惯量。若记板中心的速度为 V，时刻 t 板中心的挠度则为 $Vt^2/2$。根据能量平衡，超载部分 P_0-P_c 所做的功等于板所获得的动能，即有

$$(P_0-P_c)\times 4L^2\times\frac{1}{2}Vt\times\frac{1}{3}=2I\omega^2。\qquad(2.234)$$

因 $I=\mu L^2/6$，μ 为单位中面面积板的质量，由上式得

$$V=2(P_0-P_c)t/\mu。\qquad(2.235)$$

t_d 为矩形脉冲持续时间。当 $t=t_d$ 时，板中心的速度和挠度分别为

$$V_1=2(P_0-P_c)t_d/\mu,$$
$$\Delta_1=(P_0-P_c)t_d/\mu。$$

以 L 代替 R，应用2.3.2中所定义的无量纲量，有

$$v_1=2(p_0-p_c)\tau_d,\qquad(2.236)$$
$$\delta_1=(p_0-p_c)\tau_d^2。\qquad(2.237)$$

第二相，$t_d<t$。

$t=t_d$ 时载荷突然卸去，此时板因具有速度而继续运动，直至全部动能都耗尽。第二相期间的变形机构同第一相。设在第二相期间三角块绕板的简支边又转过了 θ 角。塑性铰线处的相对转角为 $\sqrt{2}\theta$。可以写出如下能量方程

$$4\cdot\frac{1}{2}I\left(\frac{V_1}{L}\right)^2=4L\cdot\sqrt{2}M_s\cdot\sqrt{2}\theta。$$

第二相期间板中心增加的挠度 $\Delta_2=L\theta$，

$$\Delta_2=L\theta=(P_0-P_c)^2t_d^2/(\mu P_c)。$$

因此板中心总的残余挠度为

$$\Delta_f = \Delta_1 + \Delta_2 = P_0(P_0 - P_c)t_d^2/(\mu P_c),$$

其无量纲形式为

$$\delta_f = \frac{p_0}{p_c}(p_0 - p_c)\tau_d^2 = \frac{1}{p_c}i_0 i_1, \qquad (2.238)$$

其中 $i_0 = p_0\tau_d$，$i_1 = (p_0 - p_c)\tau_d$，分别为无量纲初始输入冲量和无量纲超载冲量。对照(2.203)式和(2.238)式，可以发现方板和圆板的无量纲中心挠度在形式上是相同的。

上述解答只适用于 $P_c \leqslant P_0 \leqslant 2P_c$ 的中载情况。如果对于 $P_0 > 2P_c$ 仍然假定变形机构不变，则板的中心附近将违反屈服条件。如同圆板的响应，方板在高载下响应的第一相，板的中央为一平台，载荷卸去后平台面积逐渐缩小，直至缩成板中央的一个点，其后的响应就同中载情况的第二相一样了。

2.4 壳体的刚塑性动力响应

壳体的刚塑性动力响应分析方法类似于梁和板。因为壳体往往涉及到较多的广义应力，相应的屈服面及流动法则比梁和板复杂。这是壳体塑性动力学问题同梁、板的重要差别，也是求解的主要难点。

壳体中平分厚度的曲面称为中面。若壳体厚度与其它尺寸相比很小，则称为薄壳。本节讨论薄壳的刚塑性动力响应。薄壳理论采用了和薄板理论基本相同的假定，即

(i) 直法线假定，即假定变形前垂直于中面的法线，变形后仍然垂直于变形后的中面；

(ii) 垂直于中面的直线段，变形前后长度不变；

(iii) 垂直于中面的正应力很小，可以不计。

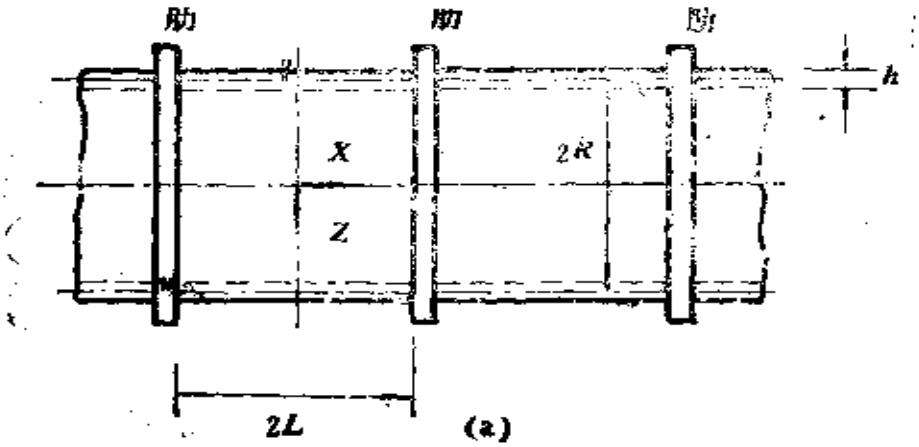
上述假定(i)和(ii)纯属几何性质，根据这些假定导出的关系式对于弹性薄壳和刚塑性薄壳是相同的。假定(iii)和(iii)严格来说是

不相容的，但引起的误差是小量。

薄壳的广义应力有剪力、膜力和弯矩。根据上述假定，剪力属于不作功的内力，或称反力，不影响壳体的屈服条件。壳体屈服条件一般同时包含有膜力和弯矩。对于壳体的屈服，膜力和弯矩相互间有影响，即有所谓交互作用。这种考虑了膜力和弯矩交互作用的屈服条件称为交互作用屈服条件。这种屈服条件是非线性的。即使是壳体静力塑性分析，人们往往也需要采用简化的壳体屈服条件才能得到完全解。这些简化屈服条件有独立作用屈服条件，夹层壳屈服条件等。在动力分析中也同样采用这些简化条件。目前研究较多的有圆柱壳受轴对称侧向动压力作用问题，这时屈服条件只含有一个膜力和一个弯矩，相对来说比较简单。此外还有少量关于球壳、扁壳轴对称问题的研究，这时屈服条件含有 2 个膜力和 2 个弯矩，已经得到的解答很少。本节主要讨论圆柱壳刚塑性动力响应的某些问题，同时对轴对称浅壳问题作一简要介绍。

2.4.1 轴对称圆柱壳的基本方程

考虑图 2.36(a)所示的具有刚性肋的圆柱壳。设两肋间的距离为 $2L$，圆柱壳中面半径为 R，壁厚为 h，受均布内压 P 的作用。由于轴对称性，壳体广义应力只有膜力 N_x 和 N_θ，弯矩 M_x，



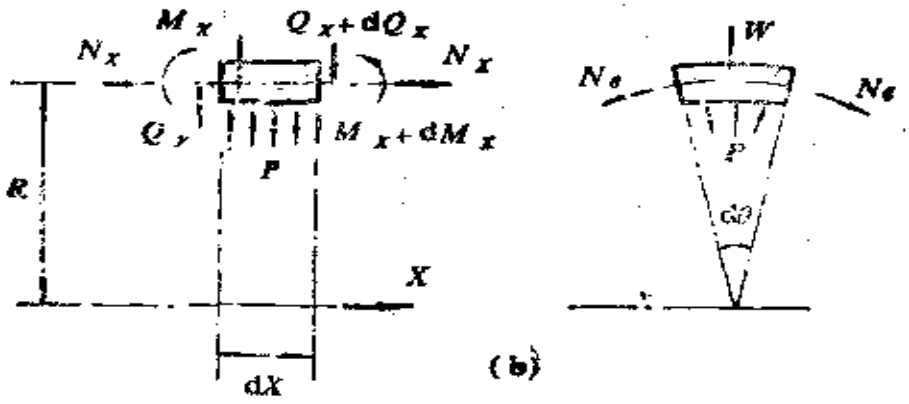


图 2.36

剪力Q_x,其正向如图 2.36(b)所示。壳体径向位移W向外为正。在小变形假定下，可以不计壳体的轴向位移和膜力 N_x。又根据直法线假定，剪力 Q_x 所对应的广义应变为零。

设壳体材料的屈服应力为Y,单位中面面积的壳体质量为μ。仍然记 $M_s=Yh^2/4$，以及塑性极限膜力 $N_s=Yh$,并引入如下的参数，无量纲数和记号，

$$\begin{cases} x\equiv X/L, & w\equiv W/R, & T_0\equiv R\sqrt{\mu/N_s}, \\ \tau\equiv t/T_0, & c\equiv L\sqrt{2/Rh}, & p\equiv PR/N_s, \\ n\equiv N_\theta/N_s, & m\equiv M_x/M_s, & q=Q_xR/M_s, \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\ )\equiv(\ )', & \dfrac{\partial}{\partial\tau}\equiv(\ )(\cdot)。 \end{cases} \tag{2.239}$$

因膜力 N_x 不计，Q_x 为反力不进入屈服条件，因而屈服条件只和膜力 N_θ，弯矩 M_x 有关。若采用 Tresca 屈服准则，在 m-n 平面上屈服面的精确形状如图 2.37 的实线所示[2.5]，即交互作用屈服面。它在第一象限中的曲线 AB 的参数方程为

$$m=1-\eta^2,\quad n=\frac{1}{2}(1+\eta)。 \tag{2.240}$$

与 m，n 对应的广义应变率为

$$\dot{\kappa}_x\equiv\partial^2\dot{w}/\partial x^2,\quad \dot{\varepsilon}_\theta\equiv\partial w/\partial\tau=\dot{w}。 \tag{2.241}$$

这种精确屈服面是非线性的，给求解带来很大困难。屈服面

简化的方法有多种。例如理想夹层壳屈服面，这是分段线性的，如图 2.37 中虚线所示。显然这种近似屈服面完全在精确屈服面内部。另一种常用的简化屈服面是独立作用屈服面，它是由 $|m|=1$ 和 $|n|=1$ 所对应的 4 条直线段构成，如图 2.37 中的点划线 $B'C'E'F'$。显然，精确屈服面完全在它的内部。本节分析都采用独立作用屈服面。

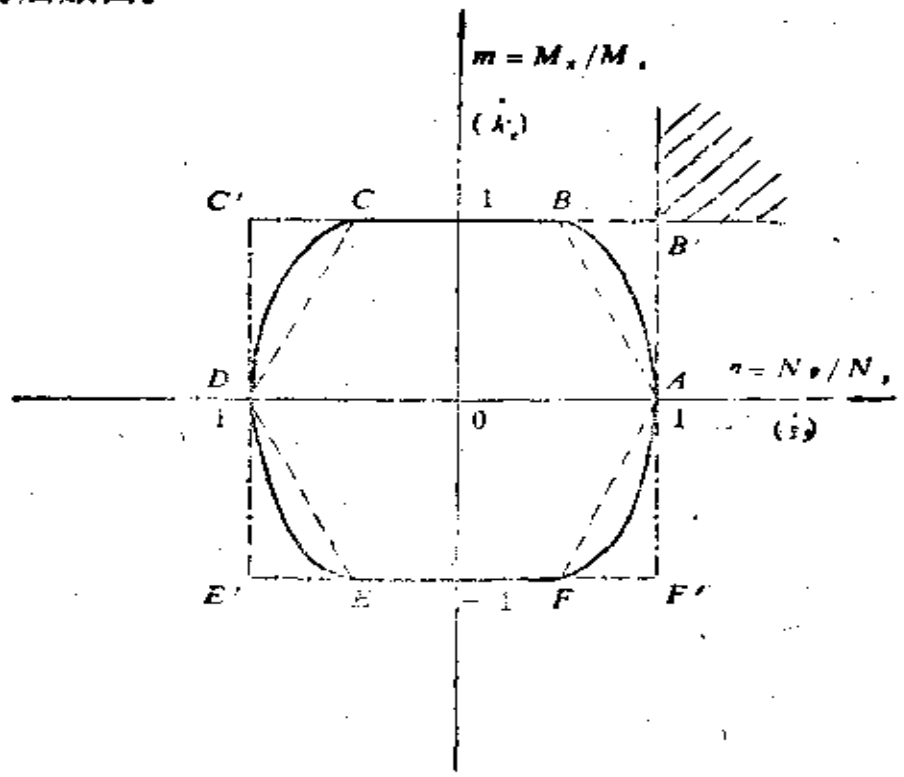


图 2.37

独立作用屈服面所对应的流动法则比较简单。当应力点位于屈服面内部时，塑性应变率为零。当应力点位于 $B'C'$ 或 $E'F'$ 上时，$\dot{k}_x\neq 0$，$\dot{e}_\theta=0$；当应力点位于 $B'F'$ 或 $C'E'$ 上时，$\dot{e}_\theta\neq 0$但 $\dot{k}_x=0$。当应力点位于角点时，应变率向量$(\dot{e}_\theta,\dot{k}_x)$的方向位于相邻屈服曲线外法线所构成的“应变锥”之内，角点 B' 的应变锥如图 2.37 的阴影区所示。

下面讨论运动方程。圆柱壳在均匀内压 P 的作用下，考虑图

2.36(b)所示微段的受力和运动，应用 d'Alembert 原理可以列出如下运动方程

$$\partial M_x/\partial X - Q_x = 0,$$

$$R\partial Q_x/\partial X + N_\theta - RP + \mu R\partial^2 W/\partial t^2 = 0.$$

根据(2.239)式所定义的无量纲参数，由上面二式容易得到无量纲形式的运动方程如下

$$\frac{1}{2c^2} m^v + n - p + \ddot{w} = 0. \tag{2.242}$$

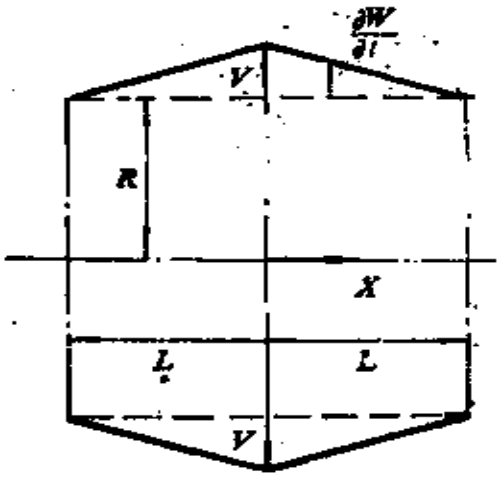


图 2.38

这个运动方程适用于 $p > p_c$ 的情况，p_c 为圆柱壳在静载作用下的极限载荷。考虑图 2.36 所示的具有加强肋的圆柱壳，如果压力沿轴向没有变化，则可以取出两个相邻加强肋之间长为 $2L$ 的一段圆柱壳进行研究。肋的约束可以看成是固支的。在内压 P 的作用下，其塑性破损机构如图 2.38 的实线所示，即在中央和两端加肋处形成塑性铰环，相应的无量纲静力极限载荷为

$$p_c = 1 + \frac{2}{c^2}. \tag{2.243}$$

2.4.2 矩圆柱壳受矩形脉冲内压：中载情况

考虑图 2.38 圆柱壳受到矩形脉冲内压的作用，矩形脉冲形式如图 2.32。无量纲载荷 $p_0 \equiv P_0 R/N_S$，载荷持续时间 $\tau_d \equiv t_d/T_0$。若 $p_0 > p_c$，圆柱壳将发生运动。

第一相，$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_d$。

假定 p_0 超过 p_c 不多，则变形机构可以假设和静载下的破损机构相同，即如图 2.38 所示。设壳体中央径向速度为 V，径向位

移为 Δ；相应的无量纲速度为 v，位移为 δ。壳体上无量纲径向速度分布为

$$\dot{w}\equiv\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{W}{R}\right)=v(1-x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1。\tag{2.244}$$

因为壳体关于 $x=0$ 平面对称，所以只需分析 $x\geqslant 0$ 的一侧。由(2.241)式可知，这种变形机构的广义应变率 $k_x=0$（除了 $x=0$ 和 $x=1$ 处为塑性铰环外），显然壳体上应力点位于独立作用屈服面 $B'F'$ 边上（见图 2.37），即有 $n=1$。因此运动方程(2.242)式可以写成

$$\frac{1}{2c^2}m''=p_0-1-\dot{v}(1-x)。\tag{2.245}$$

将上式积分两次，并利用 $x=0$ 时有 $m=-1$ 和 $m'=q=0$ 的条件，可解得

$$m=2c^2[(p_0-1)x^2/2-(3x^2-x^3)\dot{v}/6]-1。\tag{2.246}$$

此式中 $\dot{v}$ 是未知的，它可由 $x=1$ 处 $m=1$ 的条件求出

$$\dot{v}=\frac{3}{2}\left[p_0-\left(1+\frac{2}{c^2}\right)\right]=\frac{3}{2}p_c\left(\frac{p_0}{p_c}-1\right)。\tag{2.247}$$

上式表明，只有当 $p_0>p_c=1+\frac{2}{c^2}$ 时，才有 $\dot{v}>0$，即壳体才能运动。

在第一相，中央截面（$x=0$）是匀加速运动。因初速度和初位移都是零，所以无量纲速度和位移分别为

$$v=\frac{3}{2}\left(\frac{p_0}{p_c}-1\right)p_c\tau,\tag{2.248}$$

$$\delta\equiv\Delta/R=\frac{3}{4}\left(\frac{p_0}{p_c}-1\right)p_c\tau^2。\tag{2.249}$$

第一相结束时，中央截面的速度和位移分别为

$$v_1=\frac{3}{2}\left(\frac{p_0}{p_c}-1\right)p_c\tau_d,\tag{2.250}$$

$$\delta_1=\frac{3}{4}\left(\frac{p_0}{p_c}-1\right)p_c\tau_d^2。\tag{2.251}$$

第二相，$\tau_d \leqslant \tau \leqslant \tau_f$。

$\tau = \tau_d$ 时载荷 $p = 0$。此后圆柱壳依靠第一相获得的速度继续运动，直至所有动能都耗尽。可以假定第二相的变形机构和第一相相同，因此第一相中得到的弯矩分布(2.246)式和中央截面加速度(2.247)式适用于第二相，只要将 $p_0 = 0$ 代入即可，有

$$m = 2c^2[-x^2/2 - (3x^2 - x^3)\dot{v}/6] - 1, \tag{2.252}$$

$$\dot{v} = -\frac{3}{2}p_c. \tag{2.253}$$

从上式可知，在第二相中央截面是匀减速运动。第二相的初速度和初位移就是第一相结束时的速度和位移 v_1、δ_1。因此容易求得壳体的响应时间 τ_f 和中央截面的最终位移 δ_f，

$$\tau_f = \frac{p_0}{p_c}\tau_d, \tag{2.254}$$

$$\delta_f = \frac{3}{4}\left(\frac{p_0}{p_c} - 1\right)p_0\tau_d^2. \tag{2.255}$$

最后，我们要校核上述解答在任何时刻，壳体的任何部分都不违反屈服条件。

(i) 第一相的弯矩分布为(2.246)式，这是 x 的三次函数，当 x 从 0 增加至 1 时，m 从 -1 增加至 1。因为 $x = 0$ 时有 $m = -1$ 和 $m' = 0$，若 $m'' < 0$，则在 $x = 0$ 附近的区域必然有 $m < -1$，违反屈服条件。为了使应力点沿着图 2.37 中的 $F'B'$ 边变化，要求 $x = 0$ 时 $m'' \geqslant 0$。根据这个要求，将(2.247)代入(2.245)式，得到

$$p_0 \leqslant p_c + \frac{4}{c^2}, \tag{2.256}$$

此式也可写为

$$\frac{p_0}{p_c} \leqslant (6 + c^2)/(2 + c^2). \tag{2.256}'$$

上式给出了关于载荷大小的限制。我们称 $p_c \leqslant p_0 \leqslant p_1 = p_c + \frac{4}{c^2}$ 为中载。因此上述解答适用于中载情况。$p_0 > p_1$ 为高载，

图 2.38 的变形机构不再适用。

此外可以验证，在 $x=1$ 附近不违反屈服条件。

(ii) 第二相的弯矩分布由(2.252)式给出，m 的变化情况和第一相大致相同。对于第二相可以验证，在 $x=0$ 处 $m''>0$ 的要求总是满足的。

当 x 增加至 1 时，要求 m 也逐渐增加至 1，且当 $x=1$ 时有 $m'\geqslant 0$。根据这个要求，由(2.252)和(2.253)式给出

$$c^2=2L^2/Rh\leqslant 6。 \tag{2.257}$$

此式给出了关于壳体几何形状的限制，即要求 $L^2\leqslant 3Rh$。我们称 $L^2\leqslant 3Rh$ 为短壳。上述解答仅适用于短壳情况。对于 $L^2>3Rh$ 的长壳，图 2.37 的变形机构不适用。

2.4.3 短圆柱壳受矩形脉冲内压：高载情况

本小节讨论两端固支圆柱壳受矩形脉冲内压作用，考虑高载情况，即 $p_0>p_1=p_c+4/c^2$，同时限于短壳，即 $c^2\leqslant 6$。矩形脉冲的形状仍然如图 2.32。

由 2.42 中的讨论可知，当 $p_0>p_1$ 时，第一相响应在 $x=0$ 附近违反屈服条件，图 2.37 的变形机构不适用。这也提示我们在高载情况下圆柱壳中部可能有一个 $m=-1$ 的塑性区。

第一相，$0\leqslant\tau\leqslant\tau_d$。

假定第一相的变形机构如图 2.39(a)所示，中间为长 $2\lambda_0$(λ_0为无量纲长度，$\lambda_0=\Lambda_0/L$) 的圆柱形变形区，两侧为圆锥形变形区。设中央截面的径向速度为 V，其无量纲形式为 v。壳体的无量纲径向速度分布可以写为($x\geqslant 0$ 一侧)。

$$\dot{w}=\begin{cases} v, & 0\leqslant x\leqslant\lambda_0; \\ v(1-x)/(1-\lambda_0), & \lambda_0\leqslant x\leqslant 1。 \end{cases} \tag{2.258}$$

根据这种假定的变形机构，可以判定壳体不同变形区的应力点在独立作用屈服面（图 2.37 中的 $B'C'E'F'$）上的位置。由(2.258)式可知，广义应变率 $\dot{\varepsilon}_0$ 在整个圆柱壳上为 0，除了在

塑性铰环处（$x=\lambda_0$ 和 $x=1$）为 $\pm\infty$。根据塑性变形的正交性法则，可以假定

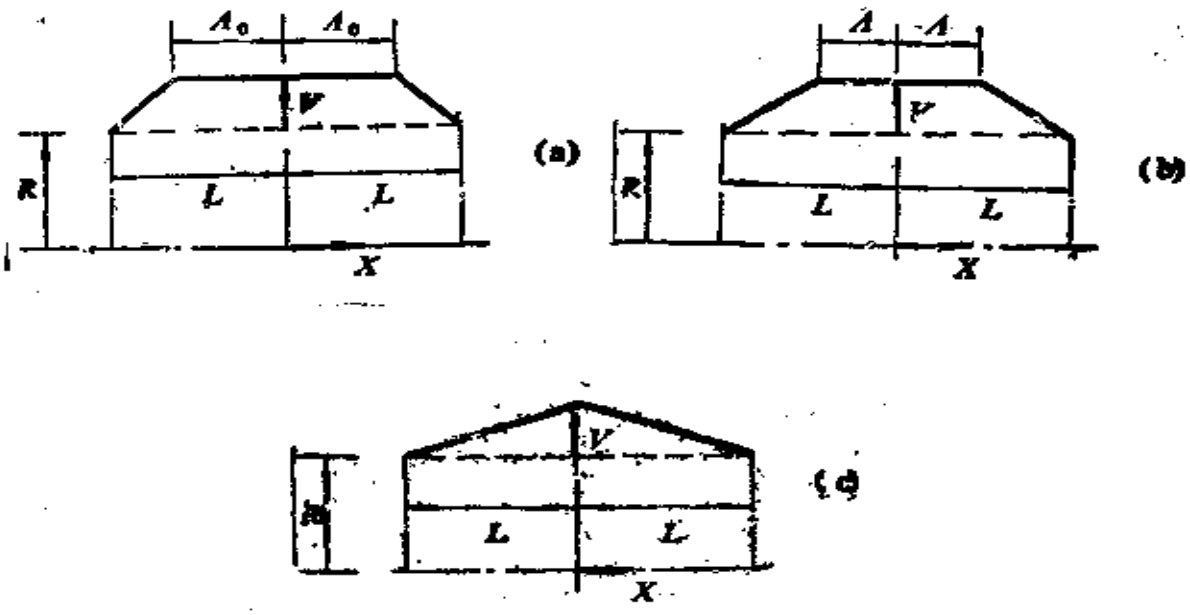


图 2.39

(i) 对于 $0\leqslant x\leqslant\lambda_0$ 段，其上应力点位于图 2.37 的 F' 点，即有 $m=n=1$；

(ii) 对于 $\lambda_0\leqslant x\leqslant 1$ 段，其上应力点位于图 2.37 的 $F'B'$ 段，即有 $n=1$，$-1\leqslant m\leqslant 1$。

以上关于屈服面上应力点的位置的假定和 (2.258) 式所给出的速度分布是一致的。

根据以上关于 $0\leqslant x\leqslant\lambda_0$ 段上应力点位置的假定，可将 $n=1$，$m=-1$，$p=p_0$ 代入(2.242)式，得到

$$\dot{v}=p_0-1. \tag{2.259}$$

此式表明，该段壳体处于匀加速运动，由于初始时刻初速度、初位移为 0，积分(2.259)式得无量纲速度和位移，

$$v=(p_0-1)\tau, \tag{2.260}$$

$$\delta=(p_0-1)\tau^2/2. \tag{2.261}$$

为了求出 $\lambda_0\leqslant x\leqslant 1$ 段上 m 的变化，首先对(2.258)式关于 τ

求导，并将(2.259)式代入，再将求得的 $\ddot{w}$ 代入(2.242)式，得到

$$m'' = 2c^2(p_0-1)(x-\lambda_0)/(1-\lambda_0)。 \tag{2.262}$$

将上式积分两次，并利用 $x=\lambda_0$ 时 $m=-1$，$m'=q=0$，得到

$$m = c^2(p_0-1)(x-\lambda_0)^2/[3(1-\lambda_0)]-1。 \tag{2.263}$$

根据 $x=1$ 时 $m=1$，定出上式中的 λ_0，

$$(1-\lambda_0)^2 = 6/[c^2(p_0-1)]。 \tag{2.264}$$

在第一相 $p=p_0=\text{const}$，所以 λ_0 是常数，即塑性铰环的位置是固定的。由(2.264)式可见，p_0 越大，λ_0 越接近于 1，即塑性铰环越靠近支座。

第一相结束时有

$$v_1 = (p_0-1)\tau_d, \tag{2.265}$$

$$\delta_1 = (p_0-1)\tau_d^2/2。 \tag{2.266}$$

第二相，$\tau_d \leqslant \tau \leqslant \tau_f$。

第一相结束时，壳体的径向速度分布为

$$\dot{w} = \begin{cases} v_1, & 0 \leqslant x \leqslant \lambda_0, \\ v_1(1-x)/(1-\lambda_0), & \lambda_0 \leqslant x \leqslant 1。 \end{cases} \tag{2.267}$$

在第二相有 $p=0$，根据前面关于梁和板在矩形脉冲载荷作用下响应的研究可知，原驻定塑性铰环要变为移行塑性铰环，向壳体中央运动。当铰环运动至截面中央时第二相结束。设在第二相某一时刻塑性铰环位于 λ，见图 2.39(b)，壳体的径向速度为

$$\dot{w} = \begin{cases} v, & 0 \leqslant x \leqslant \lambda, \\ v(1-x)/(1-\lambda), & \lambda \leqslant x \leqslant 1。 \end{cases} \tag{2.268}$$

因为第二相变形机构基本上和第一相相同，所以壳体不同变形段在独立作用屈服面上应力点的位置可以假定也和第一相相同，即在 $0 \leqslant x \leqslant \lambda$ 段，有 $n=1, m=-1$；在 $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ 段，有 $n=1$，$-1 \leqslant m \leqslant 1$。类似于第一相的(2.259)式，在第二相有

$$\dot{v} = -1。 \tag{2.269}$$

这表明圆柱壳中部为匀减速运动。积分(2.269)式两次，并考虑到第一相结束时的速度 v_1 和位移 δ_1，得到

$$v = p_0\tau_d - \tau, \tag{2.270}$$

$$\delta = p_0\tau_d(\tau - \tau_d/2) - \tau^2/2. \tag{2.271}$$

为了求出 $\lambda \leqslant x \leqslant 1$ 段内的弯矩 m 的分布，需要求出该段内的加速度分布。注意到 λ 是 τ 的函数，且 $\dot{v} = -1$，由(2.268)的第二式对 τ 求导，得

$$\ddot{w} = (1-x)[-1/(1-\lambda) + v\dot{\lambda}/(1-\lambda)^2]. \tag{2.272}$$

将上式代入(2.242)式，关于 x 积分两次，并利用 $x=\lambda$ 时 $m=-1$，$m'=q=0$，得到

$$m = -1 - \frac{c^2}{3}\left\{3(x-\lambda)^2 + (x-\lambda)(3-x-2\lambda)\cdot\left[\frac{-1}{(1-\lambda)} + \frac{v\dot{\lambda}}{(1-\lambda)^2}\right]\right\}, \tag{2.273}$$

上式中 $\dot{\lambda}$ 为塑性铰环的移行速度。因为 $x=1$ 时 $m=1$，由(2.273)和(2.270)式可推出

$$\dot{\lambda} = [6 + c^2(1-\lambda)^2]/[2c^2(1-\lambda)(\tau - p_0\tau_d)]. \tag{2.274}$$

为了求出 $\lambda \sim \tau$ 的关系，积分上式，并利用 $\tau = \tau_d$ 时 $\lambda = \lambda_0$，以及 λ_0 满足(2.264)式，得到

$$(1-\lambda)^2 = 6\tau/[c^2(\tau_d p_0 - \tau)]. \tag{2.275}$$

$\lambda = 0$ 时第二相结束，记此时刻为 τ_2，由(2.275)式容易求得

$$\tau_2 = \frac{p_0}{p_c}\tau_d(2+c^2)/(6+c^2). \tag{2.276}$$

将上式代入(2.270)和(2.271)式，可以求得第二相结束时壳体中央的速度和位移，

$$v_2 = 6p_0\tau_d/(6+c^2), \tag{2.277}$$

$$\delta_2 = p_0\tau_d^2[12c^2p_0 + c^4p_0 - (6+c^2)^2]/[2(6+c^2)^2]. \tag{2.278}$$

第三相，$\tau_2 \leqslant \tau \leqslant \tau_f$。

高载下第三相响应和中载下第二相基本相同，差别仅在于初始速度和位移不同。第三相的速度分布如图 2.39(c)所示。因此中央截面的径向加速度为

$$\dot{v} = -\frac{3}{2}p_e, \tag{2.279}$$

且运动停止时间为

$$\tau_f = \frac{p_0\tau_d}{p_e} = \frac{\dot{v}_0}{p_e}. \tag{2.280}$$

将(2.279)式积分两次，并利用第三相的初始条件(2.277)和(2.278)式，将(2.280)式代入，即可得到中央截面的最终位移

$$\delta_f = p_e\tau_d^2\left[\frac{p_0}{p_e}(c^2+8)-(6+c^2)\right]\Big/[2(6+c^2)]. \tag{2.281}$$

最后，我们要检查上述解答是否违反屈服条件。

(i) 第一相变形机构由两部分组成。中间段 $0\leqslant x\leqslant\lambda_0$ 的广义应力和速度分布不违反屈服条件，满足平衡方程和流动法则。侧边段 $\lambda_0\leqslant x\leqslant 1$ 的广义应力 $n=1$，m 由(2.263)式给出。在这一段内，x 从 λ_0 增加至 1，m 从 -1 单调地增加至 1，所以必然有 $-1\leqslant m\leqslant 1$。

(ii) 第二相变形机构和第一相基本相同，只是塑性铰环是移动的。上述解答在 $0\leqslant x\leqslant\lambda$ 段不违反屈服条件。在 $\lambda\leqslant x\leqslant 1$ 段，广义应力 $n=1$，m 由(2.273)式给出，当 x 从 λ 增加至 1 时，m 也从 -1 变化至 1，但却不一定是单调增加的。也就是不一定在这一段上都有 $m'>0$。破坏 $m'>0$ 的条件首先发生在 $x=1$ 处。根据 $m'\geqslant 0$ 的条件，由(2.273)式得到

$$c^2\leqslant 6/(1-\lambda^2). \tag{2.282}$$

短壳要求 $c^2\leqslant 6$，见(2.257)式，显然这将使得(2.282)式自动满足。

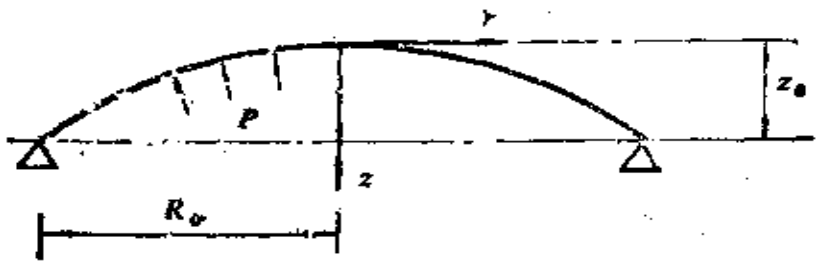
(iii) 高载下的第二相和中载下的第二相相同。因而中载第二相要求 $c^2\leqslant 6$ 也适用于现在情况，即上述解答对于 $c^2\leqslant 6$ 的短壳是不违反屈服条件的。

2.4.4 轴对称扁壳的刚塑性动力响应

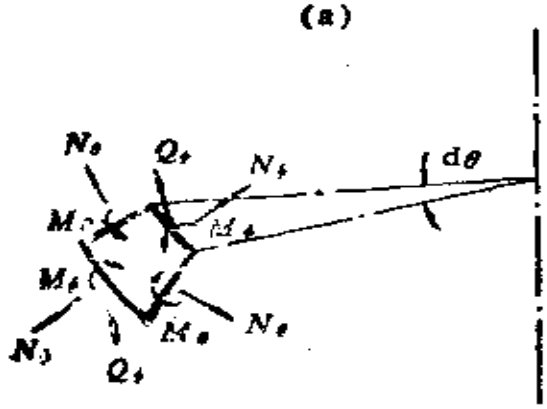
扁壳是指中面扁平的壳，即中面拱高远小于其底面的特征尺

寸。这一小节只讨论一种二次旋转面扁壳(参看图2.40(a)),其方程为

$$z = z_0(r/R_0)^2。 \tag{2.283}$$



(a)



(b)

图 2.40

显然这种扁壳是轴对称的，这里简要介绍它们在均布法向指数衰减载荷 $P = P_0 e^{-t/t_0}$ 作用下的响应,其中 P_0 为初始压力，t_0 为压力脉冲衰减至 P_0/e 时所需的时间。

扁壳的广义应力有膜力 N_θ，N_ϕ，弯矩 M_θ, M_ϕ，剪力 Q_ϕ,它们的正向如图 2.40(b)所示。应用虚功率原理，可以导出如下的运动方程[2.18]。

$$rz'' N_\phi + z' N_\theta + (rQ_\phi)' - rP = \mu r\ddot{W}, \tag{2.284}$$

$$(rN_\phi)' - N_\theta - rz'' Q_\phi = \mu r\ddot{V}, \tag{2.285}$$

$$rQ_\phi = (rM_\phi)' - M_\theta, \tag{2.286}$$

其中 W 和 V 分别为壳体中面各点沿法向及子午线方向的位移，μ

为单位中面面积壳体的质量，$\frac{\partial}{\partial t}(\quad)\equiv(\dot{\quad})$，$\frac{\partial}{\partial r}(\quad)\equiv(\quad)'$。

扁壳的屈服条件包含有2个膜力和2个弯矩，是4维空间中的超曲面。如认为膜力和弯矩之间的交互作用可以忽略，则得到双矩独立作用屈服面。但即使按照这种简化屈服面来解这个问题，还是比较复杂。Jones对双矩独立[2.18]作用屈服面再作简化，在$N_\theta\sim N_\phi$平面和$M_\theta\sim M_\phi$平面上，这种屈服面如图2.41所示，称为独立菱形屈服面（uncoupled diamond yield condition）。这种屈服面内接于双矩独立屈服面。实践证明，这种简化屈服面最为简单。

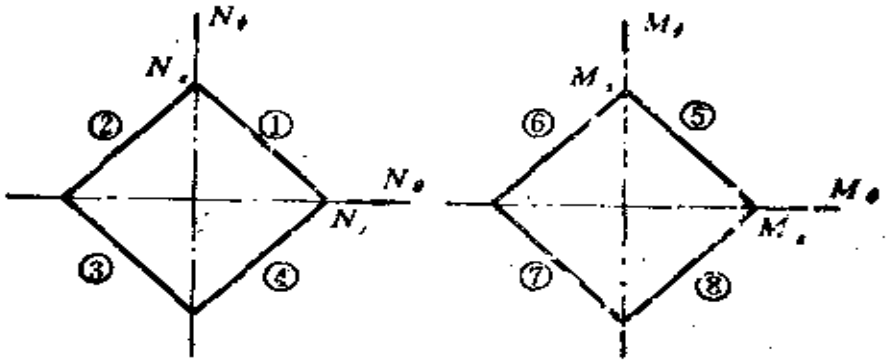


图 2.41

假定壳体运动速度场为

$$\dot{W}=\dot{W}_0[1-(r/R_0)^2],\quad \dot{V}=0。\tag{2.287}$$

注意到$r=0$时有$N_\theta=N_\phi=-N_S/2$，$M_\theta=M_\phi=M_S/2$，即扁壳中央的应力点位于图2.41所示的屈服面的③和⑤边的中点。进一步假定扁壳各处的应力点都位于③和⑤边上，即有

$$N_\theta+N_\phi=-N_S,\quad M_\theta+M_\phi=M_S。\tag{2.288}$$

将(2.287)式和(2.288)的第一式代入(2.284)式，积分之，注意到$r=0$时$Q_\phi=0$，得

$$rQ_\phi=\mu\ddot{W}_0(r^2/2-r^4/4R_0^2)-(r^2/2)\,P_0e^{-t_0/t_0}+r^2z_0N_S/R_0^2。\tag{2.289}$$

将上式代入(2.286)式，并利用(2.288)第二式，积分得

$$M_\phi = M_s/2 + \mu\dot{W}_0(r^2/8 - r^4/24R_0^2) - (r^2/8)P_0e^{-t/t_0} + r^2z_0N_s/4R_0^2. \tag{2.290}$$

当 $r = R_0$ 时，$M_\phi = 0$，由上式得到

$$\mu\dot{W}_0 = \frac{3}{2}(P_0e^{-t/t_0} - P_c), \tag{2.291}$$

其中 P_c 是采用菱形独立屈服面的扁壳静力塑性极限载荷，

$$P_c = 4M_s/R_0^2 + 2z_0N_s/R_0^2. \tag{2.292}$$

将(2.291)式代入(2.290)式，并利用(2.288)第二式，可得

$$M_\phi = M_s/2 + (r^2/16)[(P_0e^{-t/t_0} - P_c)(1 - r^2/R_0^2) - 8M_s/R_0^2], \tag{2.293}$$

$$M_\phi = M_s/2 - (r^2/16)[(P_0e^{-t/t_0} - P_c)(1 - r^2/R_0^2) - 8M_s/R_0^2]. \tag{2.294}$$

将(2.289)，(2.291)式代入(2.285)式，积分得

$$N_\phi = -N_s/2 + (r^2z_0/8R_0^2)[(P_0e^{-t/t_0} - P_c)(1 - r^2/R_0^2) - 8M_s/R_0^2]. \tag{2.295}$$

再由(2.288)第一式得

$$N_\theta = -N_s/2 - (r^2z_0/8R_0^2)[(P_0e^{-t/t_0} - P_c)(1 - r^2/R_0^2) - 8M_s/R_0^2]. \tag{2.296}$$

积分(2.291)式，得

$$\mu\dot{W}_0 = -\frac{2}{3}(P_0t_0e^{-t/t_0} + P_0t) + \frac{3}{2}P_0t_0. \tag{2.297}$$

由 $\dot{W}_0 = 0$ 可得响应时间 t_f 应满足

$$P_0t_0(1 - e^{-t_f/t_0}) - P_ct_f = 0. \tag{2.298}$$

积分(2.297)式得

$$\mu W_0 = 3P_0t_0^2(e^{-t/t_0} - 1)/2 - 3P_ct^2/4 + 3P_0t_0t/2. \tag{2.299}$$

由(2.287)，(2.298)和(2.299)式可得扁壳的最终挠度 W_f，

$$W_f = (3t_f/4\mu)[2t_0(P_0 - P_c) - P_ct_f][1 - (r/R_0)^2]. \tag{2.300}$$

上述解答应当处处不违反屈服条件，由此给出所适用的载荷

范围的2个不等式，

$$P_0 - P_c(1 + t_f/t_0) + 2N_s h/R_0^2 \geqslant 0, \qquad (2.301)$$

$$P_0 - P_c \leqslant 4(1.5 + \sqrt{2})N_s h/R_0^2. \qquad (2.302)$$

如果载荷不满足这两个不等式，就必须重新假设变形模式，或者采用其他形式的屈服条件，进行求解。

参 考 文 献

[2.1] 王仁，熊祝华，黄文彬. 塑性力学基础. 北京：科学出版社，1982

[2.2] 余同希，塑性力学，北京：高等教育出版社，1989

[2.3] 铁摩辛柯等著，胡人礼译，工程中的振动问题. 北京：科学出版社，1981：289

[2.4] Lee E H, Symonds P S. Large plastic deformations of beams under transverse impact, *J. Appl. Mech.*, 1952, 19: 308—314

[2.5] Parkes E W. *The permanent deformation of a cantilever struck* transversely at its tip. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, 1955, 228: 462—476

[2.6] Hua Y L, Yu T X, Reid S R. Double-hinge modes in the dynamic response of plastic cantilever beams subjected to step loading. *Int. J. Impact Engng*, 1988, 7: 401—413

[2.7] Reid S R, Wang B, Hua Y L. Tripple-hinge mechanisms in a bent cantilever beam subjected to an out-of-plane tip force, to be appear in Int. *J. Impact Engng*

[2.8] 杨嘉陵，华云龙，潘海林. 阶梯形悬臂梁在脉冲载荷作用下塑性动力响应的完全解. 爆炸与冲击，1991(1): 21

[2.9] Petroski H J. The permanent deformation of a cracked cantilever struck transversely at its tip. *J. Appl. Mech.*, 1984, 51: 729

[2.10] 杨嘉陵，余同希. 含裂纹悬臂梁的塑性动力响应及破坏. 北京大学学报（自然科学版），1991(5): 576—589

[2.11] 王仁. 在冲击载荷作用下结构塑性分析近况. 中国力学学会第一次极限分析及塑性理论学术讨论会论文选集，1965: 1—22

[2.12] Hopkins H G, Prager W. On the dynamics of plastic circular plates. *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)*, 1954, 5: 317—30

[2.13] Wang A J. The permanent deflection of a plastic plate under blast loading. *J. Appl. Mech.*, 1955,22:375—6

[2.14] Cox A D, Morland L W. Dynamic plastic deformations of simply supported square plates. *J. Mech. Phys. Solids*, 1959, 7:229—41

[2.15] 杨桂通，熊祝华. 塑性动力学. 北京：清华大学出版社，1984

[2.16] Hodge P G. Impact pressure loading of rigid-plastic cylindrical shells to internal blast loading. *J. Mech. Phys. Solids*, 1955, 3:176—88

[2.17] 霍奇 *PG* 著，花冰汝，熊祝华译. 结构的塑性分析. 北京：科学出版社，1966

[2.18] Ich N T, Jones N. The dynamic plastic behaviour of simply supported spherical shell. *Int. J. Solids Struc.*, 1973,9:741—60

[2.19] Jones N, Ich N T. The load carrying capacities of symmetrically loaded shallow shells. *Int. J. Solids Struc.*, 1972, 8: 1339—51

3 结构塑性动力响应中的二级效应

上一章我们基于理想刚塑性和小变形这两个基本假定，对梁、板、壳体等结构在脉冲载荷和冲击载荷下的响应作了分析。这些分析反映了结构的惯性对塑性变形的影响，但是对于实际结构的动力响应而言，这种分析只能看作是“一级近似”。在某些情况下，材料的应变率、应变强化或软化、剪力、转动惯量、材料的弹性性质、以及大变形所引起的轴力及结构几何形状的改变等因素可能产生比较重要的影响。这些因素对于理想刚塑性的小变形分析结果有一定的修正，可以看成是二级效应，它们的影响就是本章研究的对象。

本章主要研究最简单的构件——梁的塑性动力响应中的二级效应，其研究方法和结论往往也适用于其他结构。

在本章若无特别说明，将继续使用 2.1 中所引入的符号和无量纲参数。

3.1 应变率效应

3.1.1 Cowper-Symonds 本构方程

固体材料在静力作用下的本构关系已在弹性力学和塑性力学中详细介绍了。材料的静态试验实际上是准静态加载。通常的准静态拉伸试验的应变率在 $10^{-4}\sim10^{-1}s^{-1}$ 间。例如在 1 分钟内拉断一根标距为 100mm 的软钢试件，其应变率在 $10^{-3}\sim10^{-2}s^{-1}$ 之间。结构在动力作用下的应变率则要高得多，例如可达 10^{3} 以上。

材料的本构关系与应变率有关，这就是材料的应变率敏感性，或者叫粘塑性(viscoplasticity)。图 3.1 为软钢在不同应变

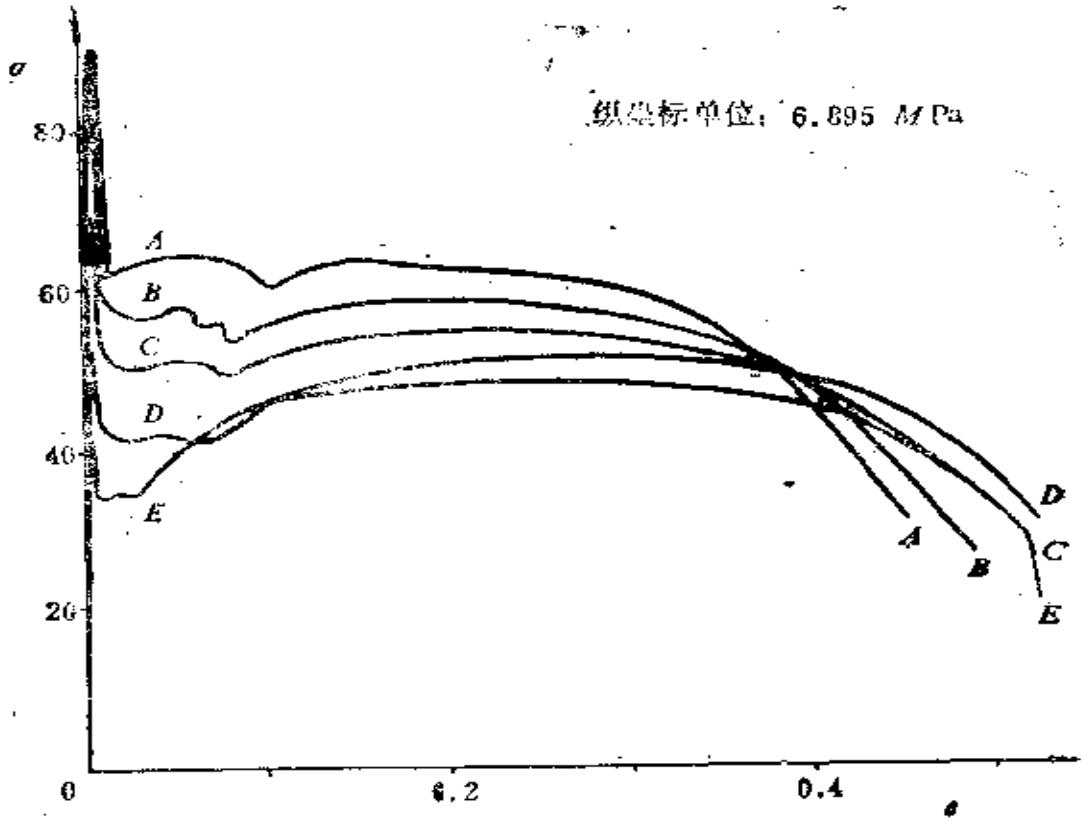


图 3.1

率下的单轴拉伸曲线[3.1]。从该图可以看到，曲线 A（应变率为 $10^{6}s^{-1}$）的上屈服点差不多比曲线 E（应变率为 $10^{-3}s^{-1}$）高一倍。不同材料的应变率敏感程度不同。例如，软钢是一种应变率敏感材料，铝是一种应变率不敏感材料。对于应变率敏感材料制成的结构，若应用与应变率无关的本构关系，可能会引起理论分析与实验结果之间较大的差异。因此建立粘塑性本构关系，从而在结构动力响应中考虑应变率效应，对于有关问题是重要的。

近几十年来，已进行了许多高应变率下材料本构关系的实验研究，并提出多种粘塑性本构关系[3.2]。在这些粘塑性本构关系中，一般都需要有由实验确定的常数。由于实验上的困难，实验

结果往往数据分散，到目前为止，甚至对某些常用材料还缺乏系统可靠的数据。因此比较实用的本构关系应当是对实验工作要求相对较少，而给出的结果又能与现有实验数据比较一致。Cowper 和 Symonds 提出的本构关系就具有这样的特点[3.3]，因而为工程界所广泛采用。本章仅介绍这一种粘塑性本构关系。

在单向应力(拉或压)情况下，Cowper-Symonds 本构关系可以表示为

$$\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t = D(Y_D/Y - 1)^P, \tag{3.1}$$

式中 Y 为静态屈服应力，Y_D 为应变率等于 $\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t$ 时的动态屈服应力，D 和 P 为通过实验确定的材料常数。某些材料的 D 和 P 值见表3.1。应力差 $(Y_D - Y)$ 也称为所谓“过应力”(overstress)，所以(3.1)式是一种过应力型率相关的本构方程。

表 3.1 某些材料的 D 和 P 值

材　　料	$D(\mathrm{s}^{-1})$	P
软　　钢	40	5
铝 合 金	6500	4
不锈钢 304	100	10
α-铁(铁50A)	120	9

(3.1)式还可以写成如下形式

$$Y_D/Y = 1 + \left(\frac{1}{D}\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right)^{1/P}. \tag{3.2}$$

当用于梁的弯曲问题时，Cowper-Symonds 方程则表示成梁的塑性极限弯矩和曲率变化率的形式。考虑宽为 b 高为 h 的矩

形截面梁，其动态塑性极限弯矩为

$$M_{PD}=2\int_0^{h/2}Y_D y b\,dy。\tag{3.3}$$

由(3.2)式求出 Y_D 代入(3.3)式，根据梁弯曲的平截面假定有 $\varepsilon=y\kappa$，其中 κ 为梁的曲率，则可以求出(3.3)式右边的积分，得到

$$M_{PD}\Big/\left(\frac{1}{4}Ybh^2\right)=1+\frac{2P}{2P+1}\left(\frac{h}{2D}\frac{d\kappa}{dt}\right)^{\frac{1}{P}}。\tag{3.4}$$

引入新的常数 D_1

$$D_1=\frac{2D}{h}\left(\frac{2P+1}{2P}\right)^P,\tag{3.5}$$

注意到 $M_P=\frac{1}{4}Ybh^2$，由上式得到和(3.2)式相似的、适用于梁弯曲的 Cowper-Symonds 方程

$$M_{PD}/M_P=1+\left(\frac{1}{D_1}\frac{d\kappa}{dt}\right)^{1/P}。\tag{3.6}$$

上式也可写成和(3.1)式相似的形式

$$d\kappa/dt=D_1(M_{PD}/M_P-1)^P。\tag{3.7}$$

以上推导中采用了梁的工程理论，而且没有考虑剪力对屈服的影响。

3.1.2 端部承受撞击的粘塑性悬臂梁

在2.1.3叙述了 Parkes 对刚塑性悬臂梁端部受冲击载荷作用所作的分析。Parkes 在分析中没有考虑材料的应变率效应。60年代初期，Bonder 和 Symonds，Ting 对这个问题首先作了粘塑性分析[3.4,3.5]。本节的内容基本上采用他们的分析，只在个别地方作了微小的改动。

1．基本假定

分析中作了如下基本假定，

(i) 均匀的矩形截面悬臂梁，单位长度质量为 ρ，其端部附有集中质量 G；

(ii) 初始时刻集中质量 G 具有速度 V_0，同时全梁处于静止状态；

(iii) 梁的挠度远小于梁长 L；

(iv) 梁根部附近塑性变形段的惯性不计；

(v) 材料满足 Cowper-Symonds 方程，对于矩形截面梁有(3.6)或(3.7)式。

为清楚起见，这里将 2.1 中所用的符号和引入的无量纲参数，如(2.13)、(2.17)、(2.51)和(2.86)等式，罗列于下

$$\begin{cases} T_0 \equiv L\sqrt{\rho L/M_P}\ ,\ \tau \equiv t/T_0,\ x \equiv X/L,\ w \equiv W/L, \\ \lambda \equiv A/L,\ v \equiv V\Big/\left(\frac{L}{T_0}\right),\ k \equiv \kappa L,\ m \equiv M/M_P, \\ q \equiv Q\Big/\left(\frac{M_P}{L}\right),\ \gamma \equiv G/\rho L,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\quad) \equiv (\dot{}\ ). \end{cases} \tag{3.8}$$

采用这些无量纲参数后的 Cowper-Symonds 方程 (3.6) 和 (3.7)式可以写成

$$\dot{k} \equiv \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\tau} = \eta(m-1)^P, \tag{3.9}$$

$$m = 1 + (\dot{k}/\eta)^{\frac{1}{P}}, \tag{3.10}$$

其中

$$\eta \equiv D_1 L T_0 = \frac{2DL^2}{h}\sqrt{\rho L/M_P}\left(\frac{2P+1}{2P}\right)^P.$$

当采用粘塑性模型时，悬臂梁的响应同刚塑性响应有较大差别。对于受冲击载荷作用的悬臂梁，为了要满足运动方程、屈服条件和流动法则，在初始时刻塑性变形区就应当遍及整个悬臂梁。随后从悬臂梁端部开始有一个卸载区逐渐扩展，塑性变形区向根部收缩。

2. 弯矩和曲率变化率的分布

无量纲弯矩 m 和无量纲曲率变化率 $\dot{k}$ 是一对广义应力和广义应变率。考虑响应过程中某时刻 τ，梁的变形由两个区域组成：长度为 λL 的外部刚性段(卸载区)AH 和长度为 $(1-\lambda)L$ 的内部塑性变形区 HB，见图 3.2(a)。这两个区域的交界面为 H，其坐标为 $A=\lambda(\tau)L$。在 AH 段有 $\dot{k}=0$ 和 $m<1$；在 HB 段则有 $\dot{k}>0$ 和 $m>1$。在交界面 H 处，有 $m_H=1$。设根部 B 处的无量纲剪力为 q_B，该处的弯矩为

$$m_B=1+q_B(1-\lambda)。\tag{3.11}$$

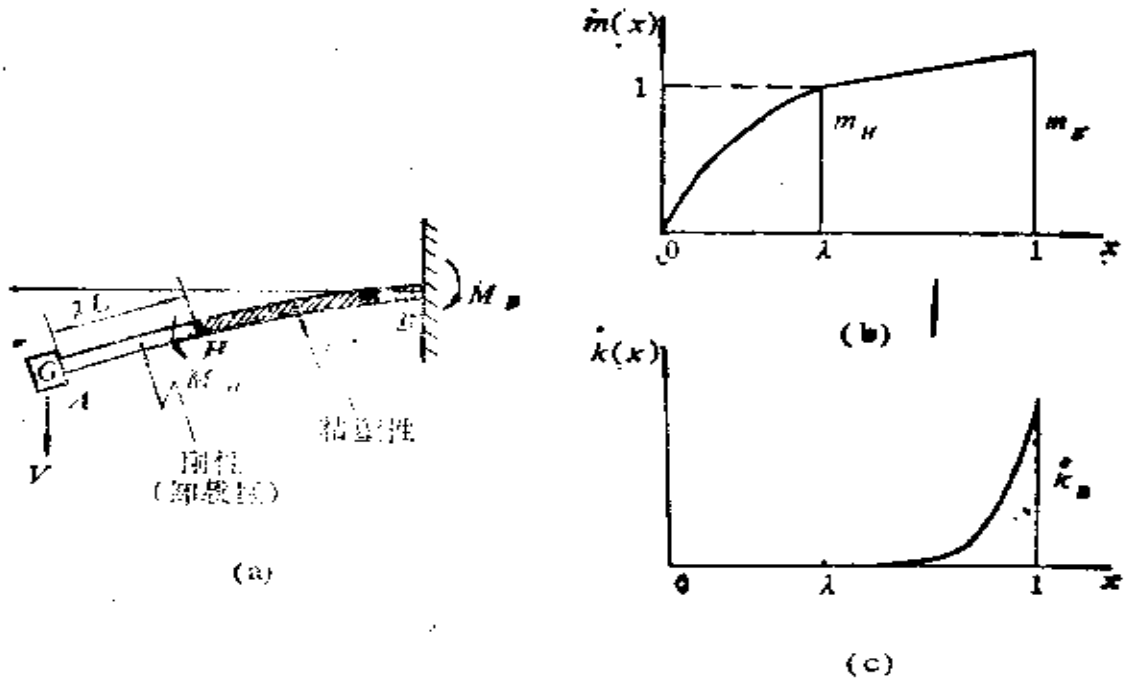


图 3.2

记 B 处无量纲曲率变化率为 $\dot{k}_B=\dot{k}(1)$，由(3.9)式有

$$\dot{k}_B=\eta(m_B-1)^p。\tag{3.12}$$

由(3.11)和(3.12)式得到

$$q_B=\frac{m_B-1}{1-\lambda}=\frac{1}{1-\lambda}\left(\frac{\dot{k}_B}{\eta}\right)^{\frac{1}{p}}。\tag{3.13}$$

根据上述基本假定(iv)，不计 HB 段的惯性力，则 H 处的无

量纲剪力 $q_H=q_B$。因此，HB 段内弯矩呈线性变化，即有

$$m(x)=\frac{1-x+(x-\lambda)m_B}{1-\lambda},\quad \lambda\leqslant x\leqslant 1。\tag{3.14}$$

弯矩 m 的变化情况如图 3.2(b)所示。

由(3.9)、(3.12)和(3.14)式可得 HB 段内的 $\dot{k}$，

$$\dot{k}(x)=\dot{k}_B\left(\frac{x-\lambda}{1-\lambda}\right)^P,\quad \lambda\leqslant x\leqslant 1。\tag{3.15}$$

当 $P=5$ 时，$\dot{k}(x)$的分布如图 3.2 (c)所示。

3. 运动方程及其求解

任一截面的无量纲角速度$\dot{\theta}$可以通过对变形段的曲率变化率加以积分得到。刚性段 AH 的角速度取决于整个塑性变形段 HB 的曲率变化率，有

$$\dot{\theta}_H=\dot{\theta}(\lambda)=\int_\lambda^1\dot{k}(x)\mathrm{d}x=\int_\lambda^1\dot{k}_B\left(\frac{x-\lambda}{1-\lambda}\right)^P\mathrm{d}x,$$

即有

$$\dot{\theta}_H=\dot{k}_B\cdot\frac{1-\lambda}{P+1}。\tag{3.16}$$

塑性变形段 HB 上的无量纲速度为

$$\dot{w}=\int_x^1(\xi-x)\mathrm{d}\dot{\theta}=\int_x^1(\xi-x)\dot{k}(\xi)\mathrm{d}\xi,$$

积分得到

$$\dot{w}(x)=\frac{\dot{k}_B}{(1-\lambda)^P}\left\{\frac{(1-x)(1-\lambda)^{P+1}}{P+1}-\frac{(1-\lambda)^{P+2}-(x-\lambda)^{P+2}}{(P+1)(P+2)}\right\},$$

$$\lambda\leqslant x\leqslant 1。\tag{3.17}$$

因此，界面 H 处的横向速度为

$$\dot{w}_H=\dot{w}(\lambda)=\dot{k}_B(1-\lambda)^2/(P+2)。\tag{3.18}$$

因为 AH 为刚性段，故其速度分布为

$$\dot{w}(x)=\dot{w}_H+\dot{\theta}_H(\lambda-x)=\dot{k}_B\left[\frac{1-\lambda}{P+2}\left(1+\frac{\lambda}{P+1}\right)-\frac{1-\lambda}{P+1}x\right],$$

$$0\leqslant x\leqslant\lambda。\tag{3.19}$$

悬臂梁端部速度为

$$v=\dot{w}(0)=k_B\frac{1-\lambda}{P+2}\cdot\left(1+\frac{\lambda}{P+1}\right). \tag{3.20}$$

根据(3.17)、(3.19)和(3.20)式给出的悬臂梁的速度分布，不难算出悬臂梁的动量和关于根部B的动量矩。于是由动量定理和动量矩定理可以给出如下两个运动方程，

$$\gamma v_0-\int_0^{\tau} q_B\mathrm{d}\tau=\gamma v+\int_0^{\lambda}\dot{w}(x)\mathrm{d}x, \tag{3.21}$$

$$1\cdot\gamma v_0-\int_0^{\tau} m_B\mathrm{d}\tau=1\cdot\gamma v+\int_0^{\lambda}\dot{w}(x)(1-x)\mathrm{d}x, \tag{3.22}$$

其中γv_0是初始时刻的总动量。在(3.21)和(3.22)式中不包括HB段的动量，作为一个近似解，假定它们可以忽略。

由(3.12)式求出m_B，(3.13)式求出q_B，以及从(3.19)式求出$\dot{w}(x)$，并将它们代入(3.21)和(3.22)式，可以得到

$$\gamma v_0-\int_0^{\tau}\frac{1}{1-\lambda}(k_B/\eta)^{\frac{1}{P}}\mathrm{d}\tau=k_B\Gamma_1(\lambda), \tag{3.23}$$

$$\gamma v_0-\int_0^{\tau}[1+(k_B/\eta)^{\frac{1}{P}}]\mathrm{d}\tau=k_B\Gamma_2(\lambda), \tag{3.24}$$

其中

$$\Gamma_1(\lambda)\equiv\frac{1-\lambda}{P+2}\left\{\gamma+\left[1+\frac{\gamma}{P+1}\right]\lambda-\frac{P}{2(P+1)}\lambda^2\right\}, \tag{3.25}$$

$$\Gamma_2(\lambda)\equiv\frac{1-\lambda}{P+2}\left\{\gamma+\left[1+\frac{\gamma}{P+1}\right]\lambda-\frac{2P+1}{2(P+1)}\lambda^2+\frac{2P+1}{6(P+1)}\lambda^3\right\}. \tag{3.26}$$

将(3.25)和(3.26)式相减，得

$$\Gamma_1(\lambda)-\Gamma_2(\lambda)=\frac{1-\lambda}{P+2}\lambda^2\left[\frac{1}{2}(1-\lambda)+\frac{P+2}{6(P+1)}\lambda\right]. \tag{3.27}$$

这表明 $\Gamma_1(\lambda)-\Gamma_2(\lambda)$ 与质量比 γ 无关，且对于 $0<\lambda<1$ 总是正的。

因此，对于端部受到冲击载荷作用的粘塑性悬臂梁，其响应归结为求解 $\dot{k}_B(\tau)$ 和 $\lambda(\tau)$，它们应满足方程(3.23)和(3.24)式。初始条件为当 $\tau=0$ 时，有

$$\lambda(0)=0,\quad \dot{k}_B(0)=(P+2)v_0. \tag{3.28}$$

从 $\tau=0$ 开始，依次在每一个时间间隔对(3.23)和(3.24)式应用迭代法，可以解得任一时刻的 λ 和 $\dot{k}_B$。再将它们代入(3.17)和(3.19)式，并关于时间积分，则求得悬臂梁的变形。

Ting对这个问题给出了一个数值解[3.51]，其参数为 $D=40.4s^{-1}$，$P=5$，$\gamma=1.64$，$\gamma v_0=2.93$。他求得响应时间 $\tau_f=1.635$，端部最终转角 θ_{Af} 为 59.2°，其它有关结果见图3.3—图3.5。

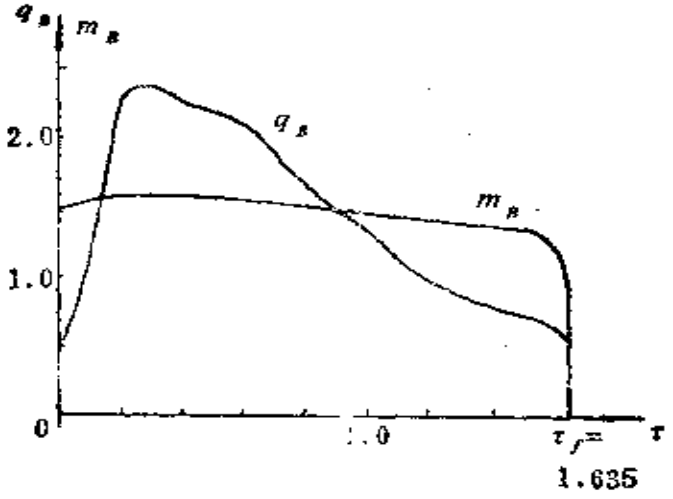


图 3.3

上述解答完全忽略了 HB 段的动量，如果在分析中考虑这一段动量，就会导致需要求解一个四阶非线性浮动边界的抛物型方程。Ting 对这个问题的第二个近似解是基于假定 HB 段的速

度是线性分布的，从而近似地考虑了该段的动量。设 HB 段的速度为

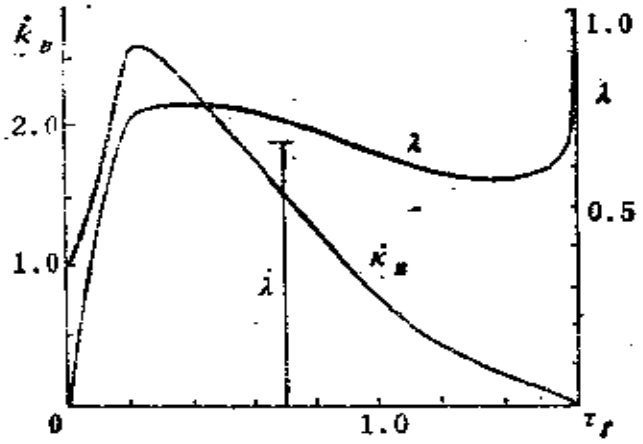


图 3.4

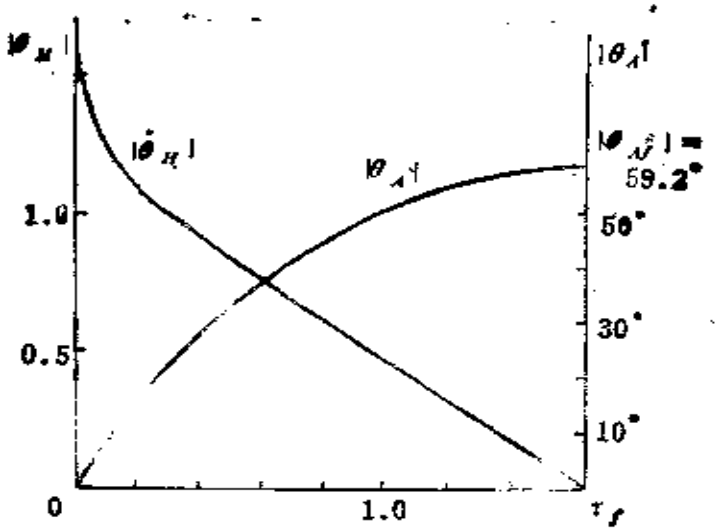


图 3.5

$$\dot{w}(x) = \dot{w}_H \cdot \frac{1-x}{1-\lambda} = \dot{k}_B \frac{(1-\lambda)(1-x)}{P+2}, \quad (\lambda \leqslant x \leqslant 1)。 \qquad (3.29)$$

因考虑了 HB 段的速度，梁的运动方程(3.23)和(3.24)式的右手边需要加上如下的修正项

$$k_B\Gamma_1^* = \int_\lambda^1 \dot{w}(x)\mathrm{d}x = k_B\frac{(1-\lambda)^2}{2(P+2)},$$

$$k_B\Gamma_2^* = \int_\lambda^1 \dot{w}(x)(1-\lambda)\mathrm{d}x = k_B\frac{(1-\lambda)^3}{3(P+2)}. \qquad (3.30)$$

初始条件(3.28)式也需作相应的修正。

$$\begin{cases}\lambda(0)=0,\\ k_B(0)=\dfrac{3\gamma}{1+2\gamma}(P+2)v_0. \end{cases} \qquad (3.31)$$

当用相同的数据来计算第二个近似解时，其结果基本上没有多大变化，只是端部最终转角 θ_{Af} 由以前的 59.2° 变为 58.3°，这个结果更接近于实验结果。这个结果也表明，HB 段的动量可以不计。

4. 近似计算方法

以上数值计算是很复杂的。但从上述计算结果可以看出粘塑性响应有某些特点，根据这些特点可以给出 τ_f，λ 和 θ_{Af} 的近似公式。

首先由图 3.4 可以看出，λ 在响应过程的大部分时间区段内变化很小，这表明刚性区和塑性变形区交界面位置变动很小。假定 λ 的平均值为 $\bar{\lambda}$，则大部分梁的塑性变形发生在靠近根部的 $(1-\bar{\lambda})L$ 的长度内。

另外由图 3.3 可以看到，根部弯矩 m_B 随时间变化很小，可以用其初始时刻的值作为近似。由(3.12)和(3.31)式可得

$$m_B \approx 1+(k_B/\eta)^{\frac{1}{P}} = 1+\left[\frac{3\gamma}{1+3\gamma}\cdot\frac{(P+2)v_0}{\eta}\right]^{\frac{1}{P}}. \qquad (3.32)$$

假定 m_B 在整个响应中是常数，我们可将 $v(\tau_f)=\dot{w}(0,\tau_f)=0$ 代入(3.22)式，可求出响应时间 τ_f 的近似值

$$\tau_f \approx \gamma v_0 \Big/ \left\{1+\left[\frac{3\gamma v_0}{\eta(1+3\gamma)}(P+2)\right]^{\frac{1}{P}}\right\} \qquad (3.33)$$

类似地，在(3.21)式中 q_B 用(3.13)式代入，并将其中 m_B 用(3.32)式的近似值，则当 $\tau=\tau_f$ 时，由该式可得 λ 的近似平均值 $\bar{\lambda}$，

$$\bar{\lambda}\approx 1\Big/\left\{1+\left[\frac{3\gamma v_0}{\eta(1+3\gamma)}(P+2)\right]^{1/P}\right\}. \tag{3.34}$$

最后，我们来求端部最终转角 θ_{Af} 的近似值。因为 AH 段是刚性的，$\dot{\theta}_A=\dot{\theta}_H$，由图 3.5 可以看出 $\dot{\theta}_A$ 几乎呈直线变化，即 $\dot{\theta}_A$ 可以看成是常数，有

$$\ddot{\theta}_A\approx -\dot{\theta}_A(0)/\tau_f. \tag{3.35}$$

因 $\tau=0$ 时 $\lambda=0$，由(3.16)和(3.31)式得

$$\dot{\theta}_A(0)=\dot{k}_B(0)/(P+1)=\frac{3\gamma v_0}{1+3\gamma}\cdot\frac{P+2}{P+1}.$$

由图 3.5 可以看出，若 $\dot{\theta}_A(0)$取值比实际的略小一些，(3.34)式的近似程度会更高一些。故取

$$\dot{\theta}_A(0)\approx 3\gamma v_0/(1+3\gamma). \tag{3.36}$$

这样，由(3.33)～(3.36)式可以得到端部最终转角 θ_{Af} 的近似估值，

$$\theta_{Af}\approx\frac{1}{2}\dot{\theta}_A(0)\tau_f=\frac{3}{2}\cdot\frac{(\gamma v_0)^2}{(1+3\gamma)}\bar{\lambda}. \tag{3.37}$$

3.1.3 应变率效应对最终变形影响的估计

在 3.1.2 中介绍的关于悬臂梁粘塑性分析涉及到复杂的数值计算。在很多情况下，已经有了问题的刚塑性解答，需要估计应变率效应对最终变形的影响。这一小节介绍这种估计的方法。

刚塑性悬臂梁端部受冲击载荷作用的响应有两相，见2.1.3。我们分别计算每相内曲率变化率的平均值，再计算由于应变率效应所引起的曲率减少量。

第一相：由 (2.96)，(2.102) 和 (2.116)式可得平均无量纲曲率变化率为

$$\overline{k_1}=(|\theta_{Af}|-|\theta_{Bf}|)/\tau_1=\frac{v_0}{2}\cdot\frac{8\gamma+3}{2\gamma+1}. \tag{3.38}$$

第二相：悬臂梁绕根部转动，若认为铰的长度为零，则曲率变化率为无穷大。因此，应变率效应同塑性铰的等效长度 L_h 有关。这个长度一般可以取为梁高的 2～5 倍，即

$$L_h=(2\sim5)h. \tag{3.39}$$

由(2.101)等式可得第二相的平均无量纲曲率变化率为

$$\overline{k_2}=\frac{|\theta_{Bf}|}{L_h/L}\cdot\frac{1}{(\tau_f-\tau_1)}=\frac{v_0}{2(1+1/2\gamma)}\cdot\frac{L}{L_h}. \tag{3.40}$$

根据 Cowper-Symonds 方程(3.9)式，在第一相和第二相内，应变率敏感材料制成的悬臂梁的塑性弯矩要分别增加

$$\overline{m}_1=1+(\overline{k_1}/\eta)^{\frac{1}{P}}=1+\left[\frac{v_0}{2\eta}\cdot\frac{8\gamma+3}{2\gamma+1}\right]^{\frac{1}{P}}, \tag{3.41}$$

$$\overline{m}_2=1+(\overline{k_2}/\eta)^{\frac{1}{P}}=1+\left[\frac{v_0}{2\eta(1+1/2\gamma)}\cdot\frac{L}{L_h}\right]^{\frac{1}{P}}. \tag{3.42}$$

有关的变形参数则可以通过相应的刚塑性解，利用 $\overline{m}_1$、$\overline{m}_2$ 修正得到。例如，根部和端部的转角的估计值分别为

$$\theta^*_{Bf}=\theta_{Bf}/\overline{m}_2=-\frac{\gamma v_0^2}{2}\cdot\frac{1+1/3\gamma}{(1+1/2\gamma)^2}\cdot\frac{1}{\overline{m}_2}, \tag{3.43}$$

$$\theta^*_{Af}=-\frac{\gamma v_0^2}{2}\left\{\left[1-\frac{1+1/3\gamma}{(1+1/2\gamma)^2}\right]\frac{1}{\overline{m}_1}+\frac{1+1/3\gamma}{(1+1/2\gamma)^2}\cdot\frac{1}{\overline{m}_2}\right\} \tag{3.44}$$

悬臂梁端部的最终挠度的估计值为

$$\delta^*_f=\delta_{f1}/\overline{m}_1+\delta_{f2}/\overline{m}_2, \tag{3.45}$$

其中 $\delta_{f1}=\delta_f-\delta_{f2}$，$\delta_f$ 是最终端部挠度，见(2.118)式，$\delta_{f2}=|\theta_B|$。对于比较重的撞击物，有 $\gamma\gg1$，响应中第二相占主要地位，有

$$\delta^*_f\approx|\theta^*_{Af}|\approx|\theta^*_{Bf}|\approx\frac{\gamma v_0^2}{2}\cdot\frac{1}{\overline{m}_2}\approx\frac{\gamma v_0^2}{2}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\frac{v_0}{2\eta}\cdot\frac{L}{L_h}\right)^{1/P}\right]}. \tag{3.46}$$

相反地，若撞击物很轻，有 $\gamma \ll 1$，则响应中第一相起主导作用，有

$$|\theta_{0f}^*| \approx 0,$$

$$|\theta_{2f}^*| \approx \frac{\gamma v_0}{2} \cdot \frac{1}{\bar{m}_1} \approx \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{1}{\left[1+\left(\frac{3v_0}{2\eta}\right)^{\frac{1}{p}}\right]}, \tag{3.47}$$

$$\delta_f^* \approx \frac{2}{3}\gamma^2 v_0^2 \ln\left(\frac{1}{2\gamma}\right) \cdot \frac{1}{\bar{m}_1}$$

$$\approx \frac{2}{3}\gamma^2 v_0^2 \ln\left(\frac{1}{2\gamma}\right) \cdot \frac{1}{\left[1+\left(\frac{3v_0}{2\eta}\right)^{\frac{1}{p}}\right]}. \tag{3.48}$$

3.2 应变强化(或软化)效应

3.2.1 概述

大多数工程材料或多或少都有应变强化(或软化)。对于应变强化材料，当应力超过初始屈服应力后，必须增加应力才能产生新的应变。而有一些材料如岩石、混凝土等，应变的结果使材料内部出现损伤，则可能在某个应变范围内出现应变软化现象。应变强化对梁的塑性变形的影响在塑性力学中已研究得很透彻，而在塑性动力学中则研究得很少。

本节首先介绍Jones提出的关于应变强化对动力塑性变形影响的一种估计方法[3.7]。这个方法还可以同时估计应变率效应。然后介绍应变强化悬臂梁的完全解，这个解答也适用于应变软化悬臂梁。在本节中材料的本构关系假定为刚-线性强化(或软化)。对于梁，相应的弯矩-曲率关系为

$$\begin{cases} \text{屈服前：} M \leqslant M_p, \ \kappa = 0; \\ \text{屈服后加载：} M = M_p + \alpha_m \kappa, \ \mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}t > 0; \\ \text{屈服后卸载：} M < M_p + \alpha_m \kappa, \ \mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}t = 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

这些关系如图3.6所示。图中 M_P 为初始塑性弯矩(initial plastic bending moment)。当 $M \leqslant M_P$ 时，梁保持刚性；当 $M > M_P$ 且 $\mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}t > 0$ 时，为加载，如图3.6中实线所示；$\mathrm{d}\kappa/\mathrm{d}t = 0$ 则为卸载，如图中虚线所示。$\alpha_m > 0$ 为强化材料；$\alpha_m < 0$ 为软化材料。α_m 称为强化或软化因子。

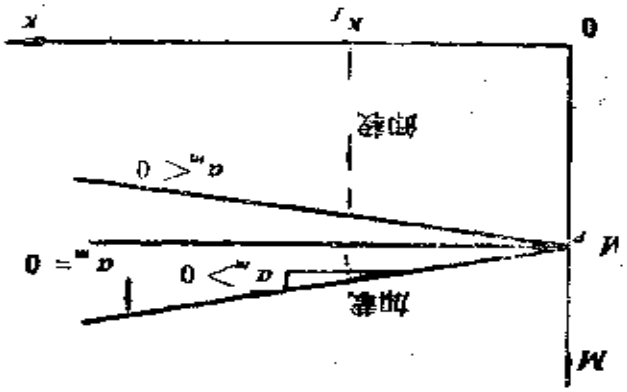


图 3.6

若使用(3.8)式所定义的无量纲参数，加载时的弯矩-曲率关系为

$$m = 1 + \alpha k, \tag{3.50}$$

其中 $\alpha \equiv \alpha_m L / M_P$。

3.2.2 应变强化对最终变形的影响

Jones[3.7]提出的估计应变强化对最终变形影响的方法类似于3.1.3中的方法。这也是通过塑性弯矩的修正因子来估计应变强化的影响。下面以2.1.3中悬臂梁端部受冲击载荷作用的问题为例，进行说明。具体步骤为首先利用理想刚塑性解计算出平均曲率，再将之代入弯矩-曲率关系式(3.49)或(3.50)，从而求出修正因子。

根据2.1.3的分析，悬臂梁端部受冲击载荷作用第一相的无量纲平均曲率为

$$\bar{k}_1 \equiv k_1 L = |\theta_{Af}| - |\theta_{Bf}| = \frac{\gamma v_0^2}{6} \cdot \frac{(8\gamma+3)}{(2\gamma+1)^2}. \tag{3.51}$$

第二相塑性变形集中在根部 B，可以通过引入塑性铰等效长度 L_h，见(3.39)式，来计算无量纲平均曲率，

$$\bar{k}_2 \equiv k_2 L = |\theta_{Bf}| L/L_h = \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{(1+1/3\gamma)}{(1+1/2\gamma)^2} \cdot \frac{L}{L_h}. \tag{3.52}$$

将平均曲率 k_1、k_2 代入(3.49)式，得到第一、二相对应的“平均”塑性弯矩，

$$\bar{M}_1 = M_P + \alpha_m k_1 = M_P + \frac{\alpha_m}{L} \cdot \frac{\gamma v_0^2}{6} \cdot \frac{(8\gamma+3)}{(2\gamma+1)^2}, \tag{3.53}$$

$$\bar{M}_2 = M_P + \alpha_m k_2 = M_P + \frac{\alpha_m}{L} \cdot \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{(1+1/3\gamma)}{(1+1/2\gamma)^2}. \tag{3.54}$$

第一相和第二相的修正因子 $\bar{m}_1$、$\bar{m}_2$ 为

$$\bar{m}_1 \equiv \frac{\bar{M}_1}{M_P} = 1 + \alpha \frac{\gamma v_0^2}{6} \cdot \frac{(8\gamma+3)}{(2\gamma+1)^2}, \tag{3.55}$$

$$\bar{m}_2 \equiv \frac{\bar{M}_2}{M_P} = 1 + \alpha \cdot \frac{L}{L_h} \cdot \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{(1+1/3\gamma)}{(1+1/2\gamma)^2}. \tag{3.56}$$

这样，应变强化悬臂梁最终变形量，如 θ_{Af}、θ_{Bf} 和 δ_f 等，都可按照 3.1.3 中的方法，即(3.43)～(3.45)式，进行估算，其中的 $\bar{m}_1$ 和 $\bar{m}_2$ 根据(3.55)和(3.56)式来计算。

这种方法还可以用于同时有应变强化和应变率效应的情况。假定这两种效应互不耦合，参照(3.2)式可以写成

$$Y_D/Y = f_1\left(\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}\right) f_2(\varepsilon). \tag{3.57}$$

一般情况下，这种解耦不见得能成立，但可以用(3.57)式来初步估计这两种效应对响应的影响，可以取(3.57)式中的 f_1 为 Cowper-Symonds 方程(3.2)式的形式，f_2 一般取为应变的线性函数。

现在我们将(3.57)式这种解耦形式的本构关系推广到弯矩

-曲率-曲率变化率的关系中，得到修正后的弯矩 M_{PD} 同静态塑性弯矩 M_P 之比为

$$\bar{m} \equiv M_{PD}/M_P = \Phi_1\left(\frac{\mathrm{d}\kappa}{\mathrm{d}t}\right)\cdot\Phi_2(\kappa), \tag{3.58}$$

写成无量纲形式，

$$\bar{m} = \phi_1(\dot{\bar{k}})\cdot\phi_2(\bar{k}), \tag{3.59}$$

其中 ϕ_1 可取(3.10)式的形式，ϕ_2 可取 (3.50) 式的形式，于是有

$$\bar{m} = [1 + (\dot{\bar{k}}/\eta)^{\frac{1}{p}}](1 + \alpha\bar{k}). \tag{3.60}$$

3.2.3 应变强化(软化)悬臂梁的动力响应

这一小节的内容是根据 Stronge 和 Yu 1989 年的工作[3.8]，同样是研究图 2.18 所示的悬臂梁，端部受冲击载荷作用，悬臂梁是由应变强化(或软化)材料制成，具有形如 (3.49) 式的弯矩-曲率关系。

在响应的初始时刻，悬臂梁端部的集中质量获得横向速度 V_0。在此瞬间全梁都加载至初始塑性弯矩 M_P，因而全梁也都具有加速度，并开始出现变形。靠近端部的加速度比较大，根部附近加速度比较小。这种加速度分布使得端部附近弯矩迅速小于当时该处的塑性弯矩.从而由端部开始出现一个卸载引起的刚性段，这个刚性段逐步向根部扩展，而塑性变形区则向根部收缩。这个变形机构同 3.1.2 所讨论的机构十分相象，于是在分析中也假定靠近根部的变形区的惯性力可以不计。整个响应可以分成两相。

第一相，$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$。

考虑某时刻 τ，卸载刚性段 AH 长为 Λ，无量纲长度为 $\lambda(\tau) \equiv \Lambda/L$，见图3.7(a)；变形区 HB 段长 $(L-\Lambda)$。因假定 HB 段的速度可以不计，故 AH 段的无量纲速度可以近似表示为

$$\dot{w} = v(1 - x/\lambda),\quad 0 \leqslant x \leqslant \lambda, \tag{3.61}$$

式中符号的定义见 (3.8) 式。

图 3.7(b)-(g)给出了无量纲速度、加速度、剪力和弯矩的

分布，图 3.7(d)和(e)相应于应变强化情况，图 3.7(f)和(g)相应于应变软化情况，实线和虚线分别表示两个时刻。在两段交界处 H 的弯矩为

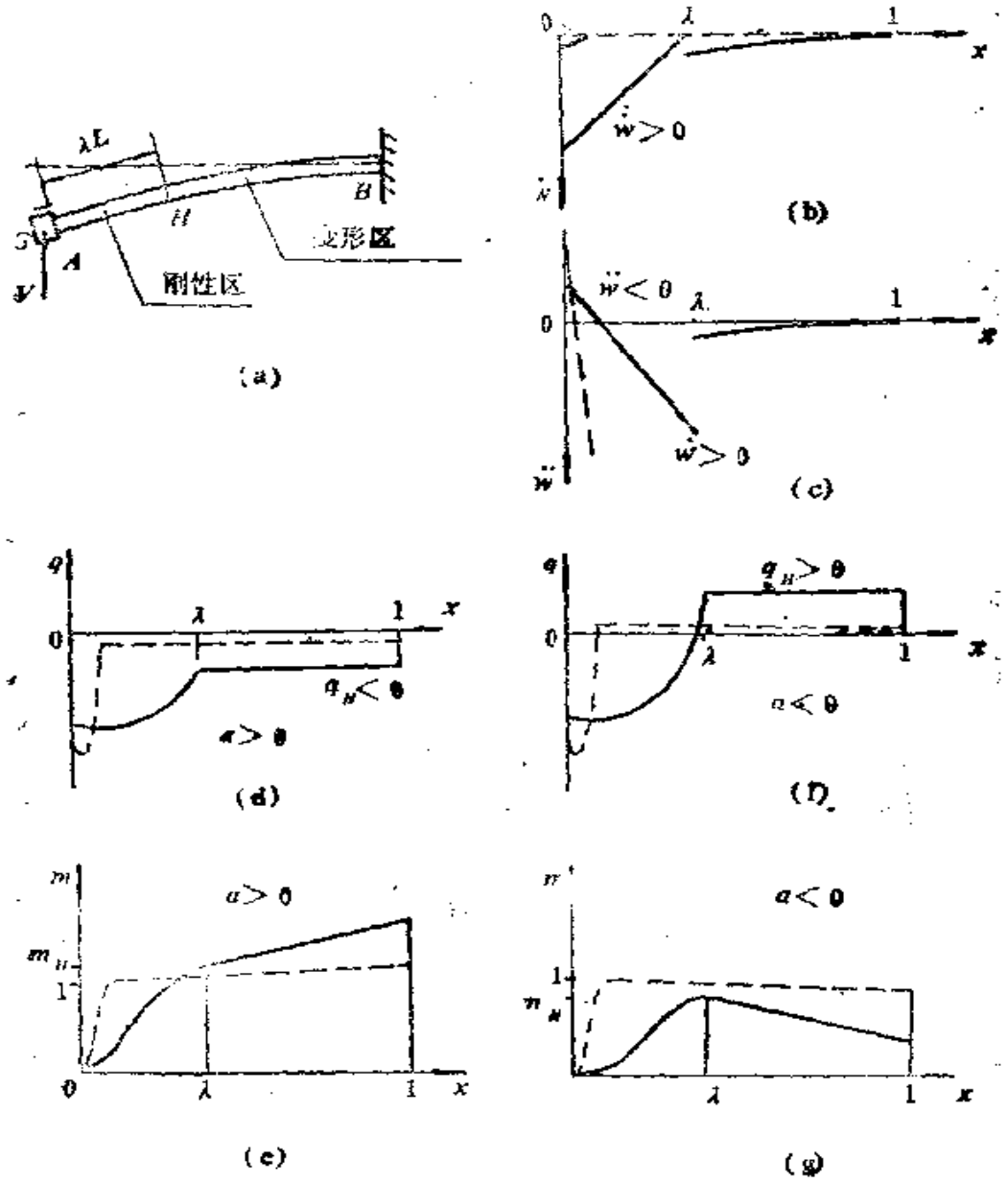


图 3.7

$$m_H = 1 + \alpha k_H, \tag{3.62}$$

其中 $k_H = k(\lambda,\tau) = \bar{w}''(\lambda,\tau)$。

HB 段弯矩呈线性变化，可写成

$$m(x) = 1 - q_H(x-\lambda^*), \qquad \lambda \leqslant x \leqslant 1。 \tag{3.63}$$

式中 λ^* 为 $m(x)$ 线性段的延长线与 $m=1$ 交点处的 x 值，见图 3.8。图中 m_y 为卸载前各截面的塑性弯矩。由(3.50)和(3.63)式得

$$\alpha w''(x) = -q_H(x-\lambda^*), \qquad \lambda \leqslant x \leqslant 1。 \tag{3.64}$$

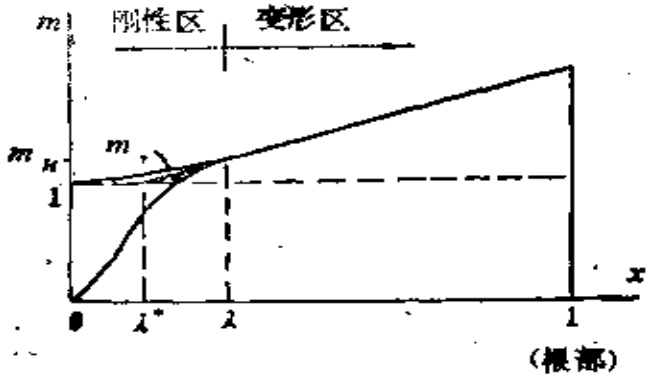


图 3.8

将上式关于 x 积分，并利用边界条件 $\bar{w}'(1,\tau)=0$，得到 HB 段的转角，

$$\bar{w}'(x,\tau) = -q_H(2\lambda^* - 1 - x)(1-x)/2\alpha, \qquad \lambda \leqslant x \leqslant 1。 \tag{3.65}$$

HB 段梁截面转动角速度为

$$\dot{\bar{w}}'(x,\tau) = -[\dot{q}_H(2\lambda^* - 1 - x) + 2q_H\dot{\lambda}^*](1-x)/2\alpha, \qquad \lambda \leqslant x \leqslant 1。 \tag{3.66}$$

交界面 H 处的截面转动角速度为

$$\dot{\bar{w}}'_H = -[\dot{q}_H(2\lambda^* - 1 - \lambda) + 2q_H\dot{\lambda}^*](1-\lambda)/2\alpha。 \tag{3.67}$$

由(3.63)式可得交界 H 处的一个补充方程，

$$0 = \frac{\mathrm{d}m(\lambda,\tau)}{\mathrm{d}\lambda^*} = q_H - (\lambda-\lambda^*)\frac{\mathrm{d}q_H}{\mathrm{d}\lambda^*} = q_H - (\lambda-\lambda^*)\dot{q}_H\frac{1}{\dot{\lambda}^*}。 \tag{3.68}$$

由上式求出 q_H，并代入(3.67)式，得

$$\dot{w}'_H = \dot{q}_H(1-\lambda)^2/2\alpha. \tag{3.69}$$

刚性段 AH 以角速度 $\dot{w}'_H$ 转动，故悬臂梁端部速度为

$$v = -\dot{q}_H\lambda(1-\lambda)^2/2\alpha. \tag{3.70}$$

AH 段的速度如(3.61)式给出，其加速度为

$$\ddot{w}(x,\tau) = \dot{v}(1-x/\lambda) + vx\dot{\lambda}/\lambda^2. \tag{3.71}$$

这个加速度引起交界面 H 处的剪力，

$$c_H = (\gamma + \lambda/2)\dot{v} + v\dot{\lambda}/2. \tag{3.72}$$

同样地可以求出 H 处的弯矩，

$$m_H = -\lambda q_H + \lambda(\dot{v}\lambda + 2v\dot{\lambda})/6. \tag{3.73}$$

上式给出的 m_H 应等于(3.63)式 $x=\lambda$ 时的值，因此有

$$1 + \lambda^* q_H = \lambda(\dot{v}\lambda + 2v\dot{\lambda})/6. \tag{3.74}$$

如果交界面处 $q_H = 0$，则这些关于 AH 段的关系式将和 2.1.3 的 Parkes 的理想刚塑性解相同。

以上(3.68)、(3.70)、(3.72)和(3.74)式经过改写，可得如下一组运动方程，

$$\dot{q}_H(\lambda - \lambda^*) = q_H\dot{\lambda}^*, \tag{3.75}$$

$$\dot{q}_H\lambda(1-\lambda)^2 = -2\alpha v, \tag{3.76}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(2\gamma v + \lambda v) = 2q_H, \tag{3.77}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(\lambda^2 v) = 6(1 + \lambda^* q_H). \tag{3.78}$$

这一组方程的未知函数为 λ，λ^*，q_H 和 v。为了积分方便，可以将之写成

$$\dot{\lambda}^* = -2\alpha v(\lambda - \lambda^*)/[q_H\lambda(1-\lambda)^2], \tag{3.79}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{2\{3(2\gamma+\lambda) + q_H[3\lambda^*(2\gamma+\lambda) - \lambda^2]\}}{\lambda(4\gamma+\lambda)v}, \tag{3.80}$$

$$\dot{q}_H = -\frac{2\alpha v}{\lambda(1-\lambda)^2}, \tag{3.81}$$

$$\dot{v} = -\frac{2[3 + q_H(3\lambda^* - 2\lambda)]}{\lambda(4\gamma+\lambda)}. \tag{3.82}$$

初始条件为

$$\tau=0\text{ 时，}\ \lambda=\lambda^*=q_H=0,\ v=v_0。\tag{3.83}$$

这组微分方程在上述初始条件下是奇异的。但在刚体撞击时，交界面的移动速度 $\dot{\lambda}$ 可由(3.80)式近似给出，

$$\dot{\lambda}=3/(\lambda v_0),\ \text{当}\ \tau\ll 1。\tag{3.84}$$

这和理想刚塑性解(2.95)式在 $\lambda\ll 1$ 时是一样的。积分(3.84)式得

$$\lambda=\sqrt{6\tau/v_0},\ \text{当}\ \tau\ll 1。\tag{3.85}$$

由此给出响应早期的近似结果，

$$\begin{cases} v=v_0\left(1-\dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{\dfrac{6\tau}{v_0}}\right), \\ \lambda^*=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{6\tau}{v_0}}, \\ q_H=-\dfrac{2}{3}\alpha v_0\sqrt{6\tau v_0}。 \end{cases}\qquad \tau\ll 1。\tag{3.86}$$

数值计算表明，结构的变形取决于撞击能量 $e_0=\dfrac{1}{2}\gamma v_0^2$，见(2.116)式，以及强化参数 α，并以无量纲组合 $e_0\alpha=\dfrac{1}{2}\gamma v_0^2\alpha$ 的形式出现。

对于应变强化悬臂梁，$\dot{\lambda}=0$ 时第一相响应结束。刚性段和变形段交界面的极限位置距根部有一定距离。设 λ 的极限值为 $\lambda_1<1$，由(3.80)式得

$$\lambda_1^2/(2\gamma+\lambda_1)=3(\lambda_1^*+1/q_{H1})。\tag{3.87}$$

记此时刻的时间为 τ_1，$\lambda_1^*=\lambda^*(\tau_1)$，$q_{H1}=q_H(\tau_1)$。随后的响应为有固定长度的变形区，$\lambda_1\leqslant x\leqslant 1$。这个区域的大小随强化参数 α 的增大和能量 e_0 的增加而增大。

对于应变软化悬臂梁，交界面总是可以到达根部 B 的，随后响应的变形则集中于根部。

第二相，$\tau_2\leqslant\tau\leqslant\tau_f$。

第一相结束时悬臂梁具有动能 K_1, K_2 与初始动能 $K_0 = \frac{1}{2} G V_0^2$ 之比为

$$K_0/K_0 = \left(1 + \frac{\lambda_1}{3\gamma}\right)\left(\frac{v_1}{v_0}\right)^2, \tag{3.88}$$

其中 $v_1 = v(\tau_1)$。

对于应变强化悬臂梁，这部分能量将耗散在根部附近的变形段内，$\lambda_1 \leqslant x \leqslant 1$。第一相结束时有 $m_{H1} = 1 - (\lambda_1 - \lambda_1^*) q_{H1}$，假定不考虑变形段的硬化，第二相开始时有

$$m_1 \equiv m(x, \tau_1) = m_{H1} - (x - \lambda_1) q_{H1}. \tag{3.89}$$

在第二相，变形段每一截面的弯矩都从初始值 m_1 单调地增加至 $m_2 \equiv m(x, \tau_2)$，τ_2 为总的响应时间，$v(\tau_2) = 0$。为了满足刚性段的运动方程，交界面 H 处的弯矩和剪力在第二相要比例地变化。因此当运动停止时，变形段的弯矩为

$$m_2 = m_1 q_{H2}/q_{H1}. \tag{3.90}$$

在第二相，根部附近变形段的曲率改变为 $k_2 - k_1 = (m_2 - m_1)/\alpha$。这个曲率变化消耗了第二相开始时的全部动能，其无量纲形式为 K_2/M_P。根据这一关系可以求出运动停止时 H 处的剪力

$$q_{H2} = \left\{q_{H1}^2 + \alpha v_1^2 \cdot \frac{(3\gamma + \lambda_1)}{(1-\lambda_1)^3}\left[1 - \frac{m_{H1}}{q_{H1}(1-\lambda_1)} + \frac{m_{H1}^2}{q_{H1}^2(1-\lambda_1)^2}\right]^{-1}\right\}. \tag{3.91}$$

将上式代入(3.90)式，可求得运动结束时的弯矩分布 m_2。因此，悬臂梁的最终曲率可以由第二相的初始条件求出。

对于应变软化悬臂梁，第二相的变形区域收缩为根部一个点，变形区域长度为 0，而曲率改变为无限大。关于这个问题，有的研究者采用给定变形区最小长度，并定义相应的弯矩-曲率关系；Martin 则采用弯矩-转角形式的本构关系代替之[3.9]。

图 3.9—图3.11为根据上述分析所给出的部分数值结果。图 3.9 为轻的撞击质量作用下，第一相端部速度随时间的变化情

况，可以看到大部分能量在第一相被消耗。应变强化系数大的悬

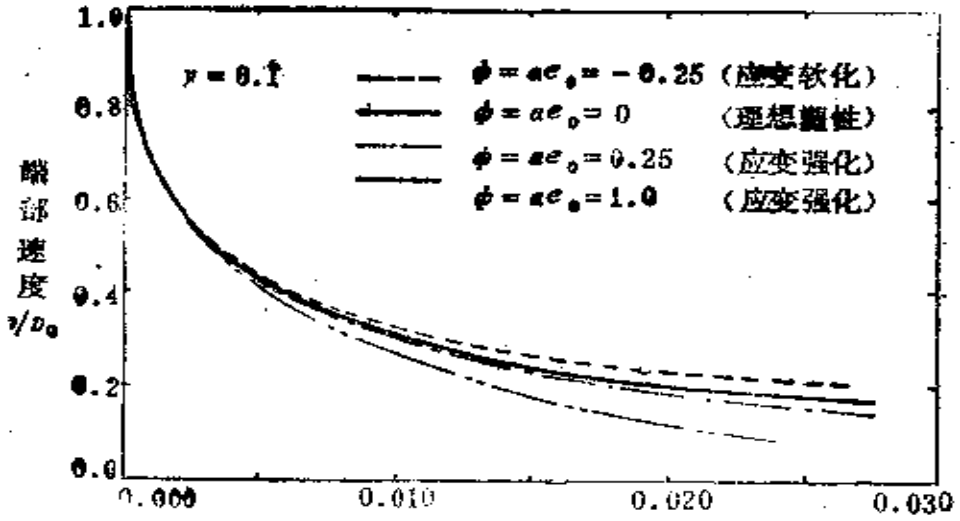


图 3.9

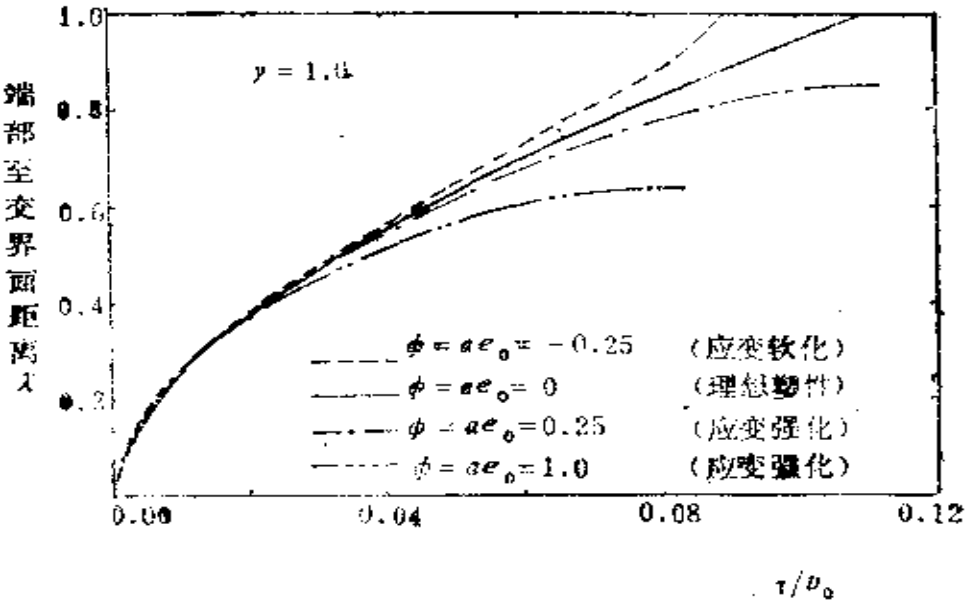


图 3.10

臂梁，在第一相消耗的能量比例较大。图 3.10 为 $\gamma = 1.0$ 时，交界面 H 的位置随时间的变化情况。对于应变强化悬臂梁，H 在距根部还有一段距离时就停止移动了，而且 α 越大，这段距离就越

长，即第二相的变形区长度就越大。图3.11为悬臂梁的最终曲率分布图。

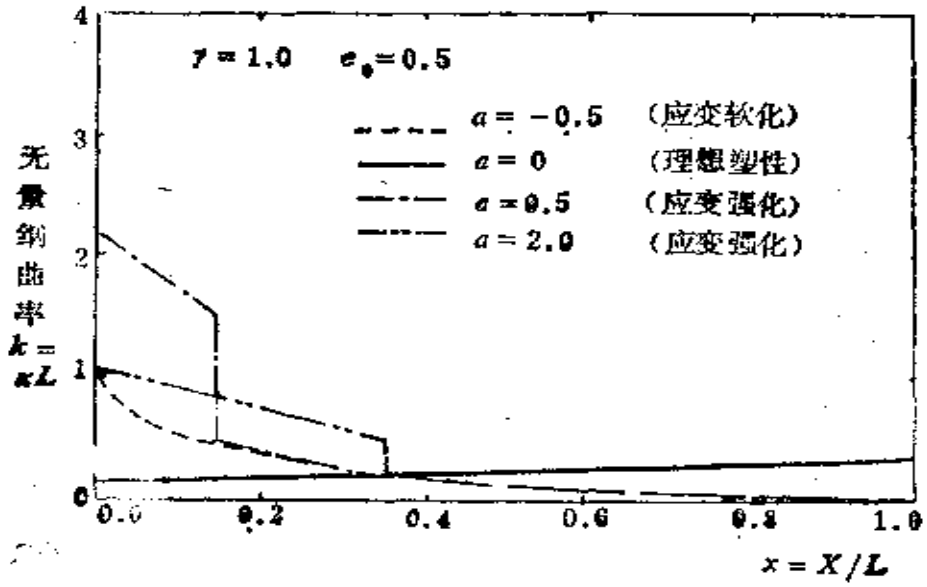


图 3.11

3.3 剪力和转动惯量效应

3.3.1 概述

1. 剪力效应

在2.1中，我们假定剪力对截面屈服的影响可以忽略。这对静载作用下的梁、框架、薄板和薄壳等一般都是正确的，因为剪应力通常比正应力要小得多。以端部作用集中力F的悬臂梁为例，见图2.2(a)，最大弯矩在根部B，$M_B = FL$；梁的剪力是常数，$Q_B = F$也是最大的。当F达到静态极限载荷$F_C = M_P/L$时，$Q_{max} = Q_B = M_P/L$。对于理想塑性材料制成的梁，其截面的塑性极限剪力Q_P可以大致取为屈服剪应力和截面积的乘积，根据Tresca屈服准则，有

$$Q_P = YA/2, \tag{3.92}$$

式中 A 为截面积。因而有

$$Q_{max}/Q_P = 2M_P/(YAL)。 \tag{3.93}$$

对于高为 h 宽为 b 的矩形截面梁，$M_P = Ybh^2/4$，$A = bh$，有

$$Q_{max}/Q_P = h/(2L) \ll 。 \tag{3.94}$$

这说明细长梁在静载作用下最大弯矩达到塑性极限值时，其最大剪力还远远没有达到塑性极限剪力。

但是对于强动载荷作用下的刚塑性结构，理论和实验都证明这时剪力所起的作用要比静载荷情况下重要得多[2.10,3.11]。例如，在2.1.1 研究的端部受阶跃载荷F作用的悬臂梁，Q_{max} 出现在载荷作用点邻近，并且就等于F。如果阶跃载荷 F 的数值比较大，比值 Q_{max}/Q_P 也就相应地较大，甚至可以远大于 1。可见，对于脉冲载荷或冲击载荷作用的问题，剪力可能是重要的，因为这时作用力的数值可以很大，或者从理论上说是无限大。对于这类问题，在一段时间内载荷作用点附近的剪力对截面屈服可能起主要作用，相应的剪切变形甚至剪切破坏都可能需要考虑。在2.3 中曾提到板的刚塑性动力响应问题中有一类是以剪力为主，穿甲问题也就是属于这种情况。

我们在梁的刚塑性动力响应问题中考虑剪力效应，就要求在任何时刻梁内任一截面的剪力都不能超过塑性极限剪力 Q_P。若某截面的剪力达到 Q_P，则该截面两侧将发生相对滑移，有的文献称这样的截面为“剪切铰”。简支梁受均布冲击载荷作用时，在初始时刻两支座处要出现这样的剪切滑移。悬臂梁端部受冲击载荷作用时，端部附近也要出现剪力滑移，这将在 3.3.2 中介绍。

当截面上同时有剪力和弯矩作用时，对于矩形截面梁，Hodge 证明了交互作用屈服条件可以近似地表示为[3.11]

$$(Q/Q_P)^2 + (M/M_P)^2 = 1。 \tag{3.95}$$

这个屈服条件在 $Q/Q_P \sim M/M_P$ 平面上是一个圆，如图 3.12 中

的虚线所示。为了简化分析，人们往往采用类似于2.4中的独立作用屈服条件(independent yield condition)，如图3.12中的

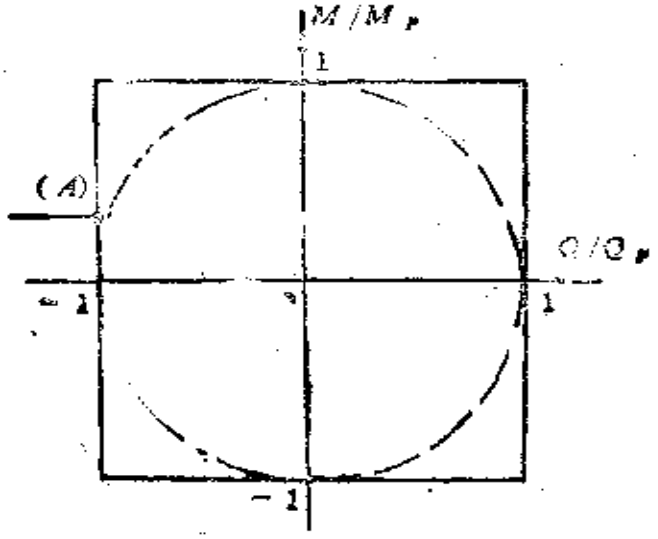


图 3.12

正方形所示。这个简化屈服条件可以表示为

$$\begin{cases} |Q/Q_p| = 1, & |M/M_p| \leqslant 1; \\ |Q/Q_p| \leqslant 1, & |M/M_p| = 1. \end{cases} \tag{3.96}$$

2. 剪切变形和转动惯量效应

梁的运动方程可以根据梁的平衡方程(2.4)和(2.5)式，并应用 d'Alembert 原理引入惯性力来建立。Timoshenko 最先考虑剪切变形和转动惯量的影响，得到如下的运动方程[3.12]

$$\partial Q/\partial X = -g(X) + \rho\partial^2 W/\partial t^2, \tag{3.97}$$

$$Q + \partial M/\partial X = I_r\partial^2\psi/\partial t^2, \tag{3.98}$$

其中 $g(X)$为梁上的分布载荷，ρ 为单位梁长质量，W 为梁截面的横向位移，I_r为单位长度梁的转动惯量，ψ 为弯曲引起的截面转角，M、Q和 g 的正向符号规定见图 2.2(b)。梁的轴线斜率为

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}X = \psi + \gamma, \tag{3.99}$$

其中 γ 是剪力Q引起的梁轴线处的剪切角。这种梁称为 Timcs-

henko 梁。相对而言，第二章中我们采用的是梁的初等理论，则(3.98)式右边为 0，(3.99)式右边略去 γ。

(3.97)～(3.99)式中并未用到本构关系，因而这些方程也适用于塑性情况。Jones 等人应用这一组方程考察了多种刚塑性梁的动力响应中的转动惯量影响[3.18]，结果表明，除了特别短的梁或工字梁外，转动惯量一般不产生大的影响。

3.3.2 悬臂梁端部的剪切变形

这里我们再次研究悬臂梁端部受质量块撞击的问题，在分析中考虑撞击质量块与悬臂梁端部连接处的剪力，及其所在截面的剪切滑移。以下的解是由余同希在[3.14]中给出的。

1. 变形机构

考虑响应某一时刻，在梁的 H_0 处形成塑性铰，见图 3.13(a)。如果不考虑端部的剪切滑移，根据 2.1.3 的分析，由(2.112)式可得端部的无量纲剪力为

$$q_A(\tau)\equiv Q_A L/M_p=-f=-6\gamma/[\lambda(\lambda+4\gamma)]。\qquad(3.100)$$

从上式可以看出，在撞击刚发生时 $\lambda=0$，所以端部剪力 Q_A 立即超过塑性极限剪力 Q_P。因此应当考虑端部与撞击质量连接处的剪切滑移。

首先定义无量纲塑性极限剪力

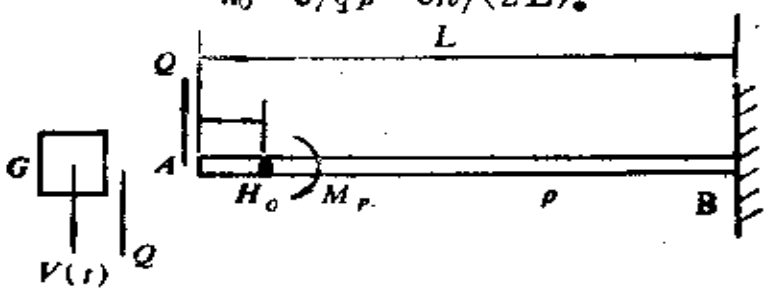
$$q_p\equiv Q_P L/M_p,\qquad(3.101)$$

对于高为 h 的矩形截面梁，有

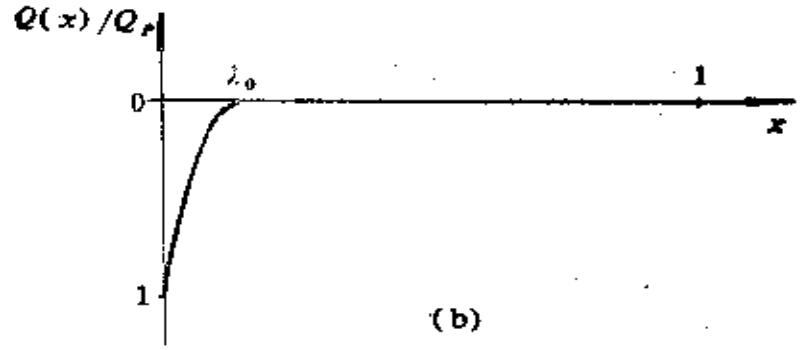
$$q_P=2L/h。\qquad(3.102)$$

当考虑剪力影响时，截面 A 的剪力等于 Q_P，该截面发生剪切滑移。质量块 G 作用有与初速度方向相反的剪力 Q_P 使其减速。悬臂梁端点作用有恒定不变的向下的剪力 Q_P，因而在悬臂梁的某处 H_0 形成一驻定铰。长度为 $\Lambda_0\equiv\lambda_0 L$ 的 AH_0 段绕 H_0 转动。这和 2.1.1 中讨论的阶跃载荷作用下的响应相同。于是由(2.30)式得

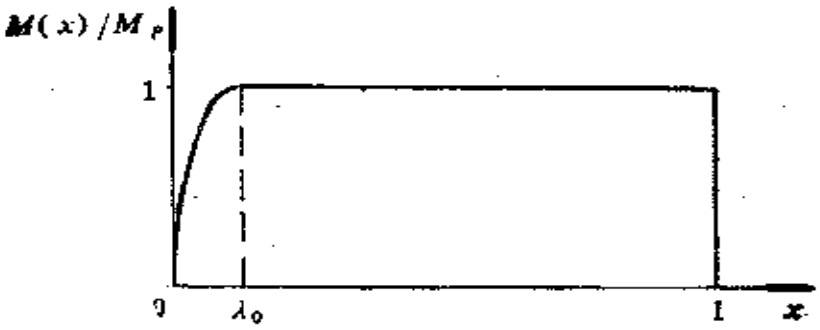
$$\lambda_0 = 3/q_P = 3h/(2L)。 \tag{3.103}$$



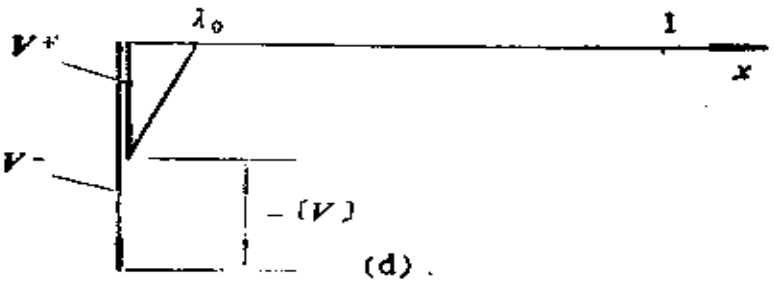
(a)



(b)



(c)



(d)

图 3.13

这里应当指出，上式后一个等式是针对矩形截面得到的，λ_0 同截面形状有关。

基于上述变形机构，由(2.28)和(2.29)式得到

$$\begin{cases} |Q/Q_P| = |q/q_P| = (1-x/\lambda_0)^2, \\ |M/M_P| = |m| = 1-(1-x/\lambda_0)^3. \end{cases} \tag{3.104}$$

其变化如图 3.13(b)和(c)所示。此外，要检查(3.104)式所给出的广义应力不违反屈服条件，所得到的解答才是完全解。这可以将(3.104)式代入(3.95)式，可以验证在 $0 \leqslant x \leqslant \lambda_0$ 上没有违反屈服条件。只是在 $x=0$ 和 $x=\lambda_0$ 处，(3.95)式成立。因此 AH_0 段是刚性的，A 处发生剪切屈服，H_0 处发生弯曲屈服。

2. 运动方程

因为截面 A 处有剪切滑移，所以在该处的横向速度是间断的。梁上横向速度分布如图 3.13(d)所示。采用 2.1.2 中的符号，A 处无量纲速度间断为

$$[v] \equiv \lim_{\varepsilon \to 0}\{v(0+\varepsilon) - v(0-\varepsilon)\} \equiv v^+ - v^-. \tag{3.105}$$

为了计算这个间断量，首先可由(2.31)式得到

$$\dot{v}^+ = \frac{2}{3} q_P^2 = \text{const.} \tag{3.106}$$

积分上式得

$$v^+ = \frac{2}{3} q_P^2 \tau. \tag{3.107}$$

另一方面，由图 3.13(a)中集中质量块的受力可以写出其无量纲形式的运动方程，

$$\gamma \dot{v}^- = -q_P. \tag{3.108}$$

积分上式，并利用初始条件 $\tau=0$ 时 $v^- = v_0$，得

$$v^- = v_0 - \frac{q_P}{\gamma}\tau. \tag{3.109}$$

由(3.106)和(3.109)式可得

$$[v] = -\left\{v_0 - q_P\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{2}{3}q_P\right)\tau\right\}. \tag{3.110}$$

显然，这个速度间断值随时间 τ 线性减少。设 $\tau=\tau_0$ 时剪切滑移停止，由(3.110)式得

$$\tau_0=v_0\Big/\left[q_P\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{3}q_P\right)\right]. \tag{3.111}$$

在截面 A 两侧的相对滑移造成该处的位移间断，其值可以通过积分(3.110)式得到

$$[w]\equiv w^+-w^-=\int_0^\tau [v]\mathrm{d}\tau=-\left\{v_0\tau-\frac{q_P}{2}\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{3}q_P\right)\tau^2\right\} \tag{3.112}$$

将 $\tau=\tau_0$ 代入上式，得到最终位移间断量，

$$\delta_q\equiv[w]_{\tau=\tau_0}=-\frac{\gamma v_0}{2}\cdot\frac{3}{q_P(3+2\gamma q_P)}. \tag{3.113}$$

如果 δ_q 超过某个临界值，就可能发生剪切破坏，这个临界值可设为梁的高度，乘上某一系数 β，即 $|\delta_q|=\beta h/L$ 时发生剪断。

如果 $|\delta_q|<\beta h/L$，则 $\tau=\tau_0$ 时没有发生剪切破坏，这时悬臂梁端部和集中质量块的速度相等，且为

$$v(\tau_0)=\frac{2\gamma q_P}{3+2\gamma q_P}v_0. \tag{3.114}$$

对于 $\tau>\tau_0$ 以后的响应，就如同 2.1.3 中第一相某个时刻以后的运动，这里不再重复。$0\leqslant\tau\leqslant\tau_0$ 这一段的响应可以称为初始剪切相。

图 3.14 为悬臂梁端部的速度和塑性铰位置随时间变化的曲线，有关参数为 $\gamma=0.2$，$L/h=6$。速度曲线下的面积为端部的挠度。由数值计算给出，剪力对端部最终挠度影响很小。对于本例，端部最终挠度只因剪切变形改变了 1.2%。

3. 能量耗散

假定没有发生剪断。剪切相的能量耗散由两部分组成：A 处

剪切滑移耗散的能量和 H 处弯曲变形耗散的能量。用无量纲形式，见(2.59)式，这两部分能量可以写成

$$d_q = |\delta_q| q_P = \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2}{3}\gamma q_P}, \tag{3.115}$$

$$d_m = |\theta(\lambda_0)| = \frac{\gamma^2 v_0^2 q_P}{(3+2\gamma q_P)^2}. \tag{3.116}$$

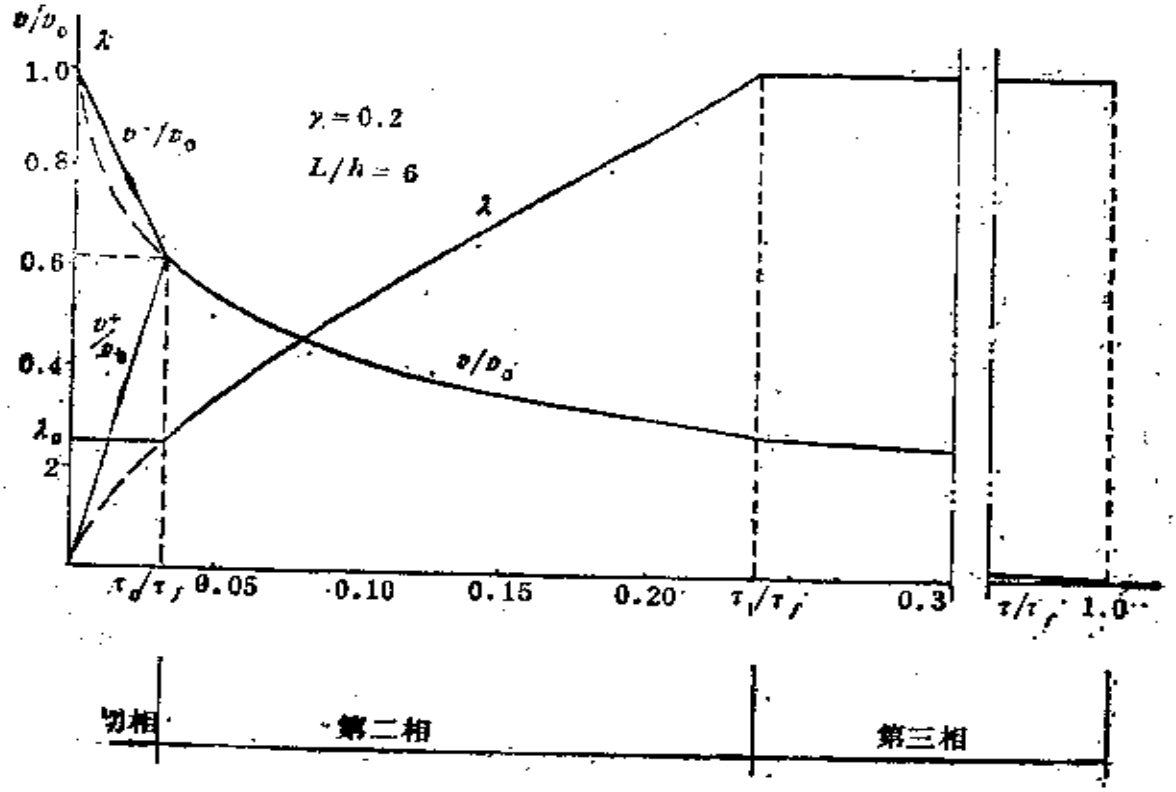


图 3.14

第一相内总的能量耗散为

$$d_1 = d_q + d_m = \frac{\gamma v_0^2}{2} \cdot \frac{9+8\gamma q_P}{(3+2\gamma q_P)^2}. \tag{3.117}$$

因为 $\tau \geqslant \tau_0$ 以后的响应同2.1.3中的情况一样，即第二相为移行铰从 H_0 运动至 B，第三相为绕根部 B 刚体转动，有关的能量耗散 d_2 和 d_3 也可以由 2.1.3 的结果直接给出。由(2.123)式给出第三相耗散的能量，

$$d_3 = |\theta_{Bf}| = e_0 \frac{4\gamma(1+3\gamma)}{3(1+2\gamma)^2}, \tag{3.118}$$

其中 e_0 为输入的无量纲动能，见(2.116)式。第二相耗散的能量为

$$d_2 = e_0 - d_1 - d_3 \tag{3.119}$$

对于 $\gamma = 0.2$，$L/h = 6$ 的悬臂梁，每一相耗散的能量的情况如图 3.15 所示。

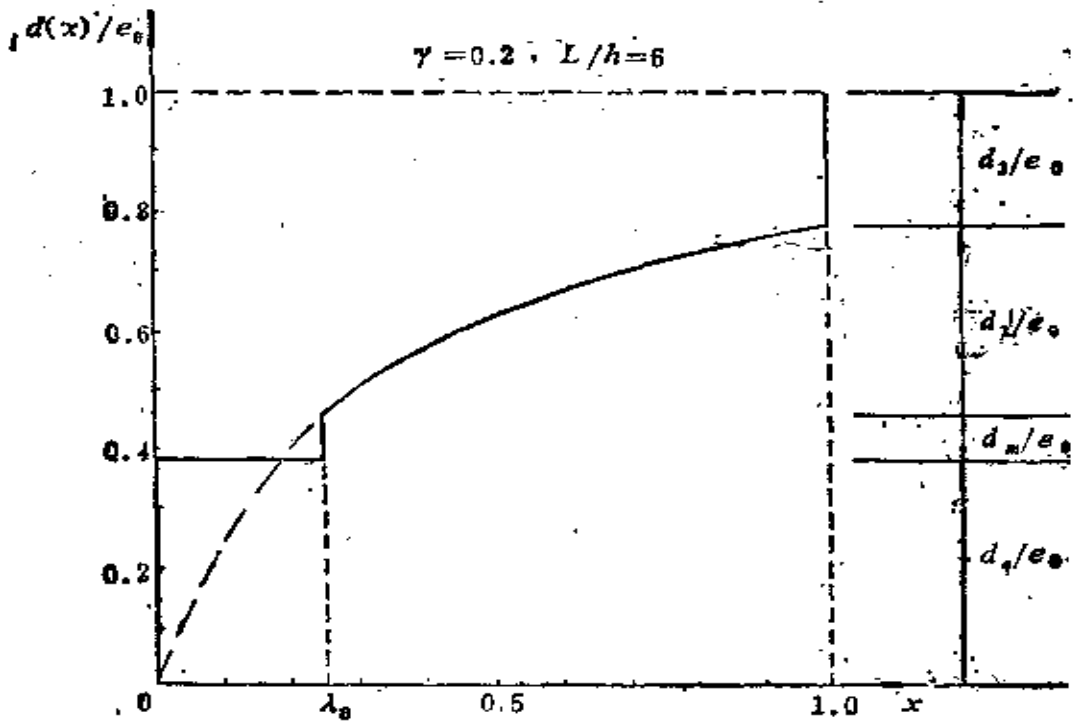


图 3.15

4. 剪切失效

前已提及，若在剪切相发生的剪切滑移达到临界值 βh 就将发生剪断，即剪切失效(shear failure)。这个条件可以写成

$$|\delta_q| \geqslant \beta h / L. \tag{3.120}$$

将(3.102)式代入(3.113)式，然后再代入上式，并为简单起见假定 $\beta = 1$，可得到矩形截面梁端部受撞击而发生剪切失效的条件，

$$\frac{1}{2}\gamma v_0^2 \geqslant 2 + \frac{4}{3}\gamma q_F. \tag{3.121}$$

也即

$$e_0 \equiv \frac{K_0}{M_P} \geqslant 2 + \frac{8G}{3\rho h}, \tag{3.122}$$

其中 e_0 是无量纲初始动能。

根据(3.122)式，可以给出发生剪切失效和不发生剪切失效的区域，见图 3.16。可以看到是否发生剪切失效同初始能量及质量比有关。在 5.3 我们将对结构失效问题作进一步的分析。

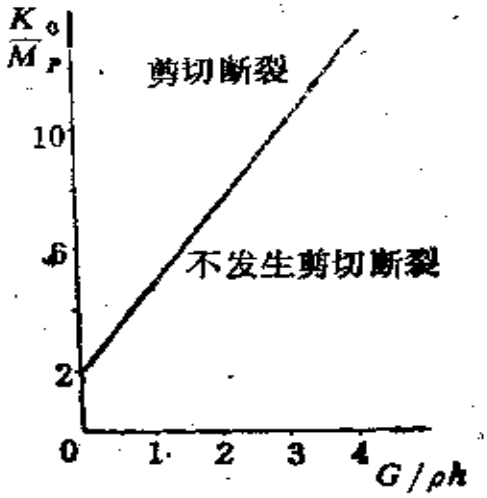


图 3.16

5. 其他情况

当撞击物尺寸较大时，应考虑撞击物的转动惯量对梁的动力响应和剪切失效的影响。这方面的分析可参见[3.14]。

3.4 几何大变形效应

3.4.1 概述

研究结构塑性动力响应中的几何大变形效应的必要性可以从以下几方面看出来。

(i) 刚塑性理想化的依据是：若作用在结构上的动载很强，在结构响应过程中外载做的功远大于结构所能贮存的弹性变形能，那么就有理由忽略弹性变形，只计塑性变形(参看本书 3.5)但这显然是同小变形假定相矛盾的。一般说来，凡是可以忽略弹性变形的场合，往往就应该考虑几何大变形。

(ii) 对结构进行动载实验是验证刚塑性分析的合理性和近似程度的有效手段，但由于上述原因，试件在强动载荷作用下本身就经历了大变形。若不进行大变形分析，就无法判定理论与实

验结果的差异是否应归咎于刚塑性理想化。

(iii) 在对复杂结构(如壳)进行刚塑性动力分析时不可避免地要采用近似屈服条件和相关联的流动法则，由此得出对结构最终变形的上、下限估计；但即使在静载情况若考虑大变形效应也可能导致界限定理的失效，因而在求解动力响应时不能不加以注意。

(iv) 材料的塑性和结构的大变形都是非线性行为。当材料非线性同几何非线性耦合在一起时，在结构响应中往往会出现复杂的、丰富的非线性现象，例如动载作用下的跳跃失稳(snap-through)，以及近年来发现的结构动力响应中的反常行为(参见本书 5.1)。如果不去研究几何大变形效应，那么这些有趣的现象都无法揭示出来。

几何大变形结构塑性动力响应的影响主要有如下两方面：

(i) 结构几何构形变化的影响。在小变形假定下，运动方程是关于初始构形建立的，几何关系也有一定的近似。在大变形情况下，瞬时构形和初始构形可能有较大差别，运动方程应当反映这种构形的变化。例如，即使梁的初始时刻仅有竖直方向的动量分布，当梁的截面转角较大时，其水平方向的动量也是不可忽略的。在强动载荷作用下，各种类型的悬臂结构和某些圆环及框架都可能发生大的构形变化。

(ii) 结构膜力的影响。第二章分析梁和板响应时，都不考虑膜力(对于梁为轴力)对平衡和屈服条件的影响。板的弹性理论已指出，若挠度达到和板厚同一量阶，挠度引起的中面应变也将与弯曲应变同阶，相应的膜力将不可忽略。在板的刚塑性理论中也有同样的情况。对于两端固支、或两端简支但轴向不可移动的梁，情况和板相似。当梁的挠度达到梁的高度同一量阶时，伴随梁的轴线伸长而产生的轴力是不可忽略，要出现在梁的平衡方程中。对于塑性梁的问题，轴力的出现还要影响梁的屈服条件。对于宽为 b 高为 h 的矩形截面梁，设轴力为 N，弯矩为 M，按照最大正应力条件确定的交互作用屈服条件为[8.11] (参见图 3.17)

$$M/M_P+(N/N_P)^2=1, \tag{3.123}$$

其中 M_P 为(2.2)式定义的塑性极限弯矩，$N_P=Ybh$ 为塑性极限轴力。

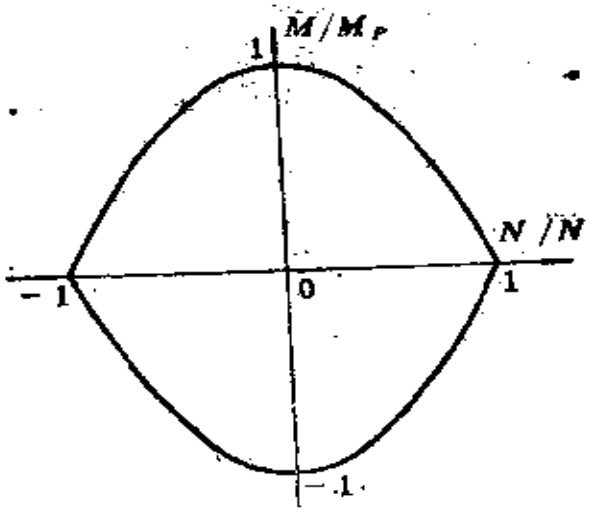


图 3.17

几何大变形效应的这两种情况一般不同时在同一问题中出现，因为前者多是出现在结构支座约束较弱，从而结构可以发生中线(中面)不伸长的大变形的情况，而后者则是出现在结构支座约束(主要是轴向)比较强，从而大变形必然伴有中线(中面)的伸长的情况。对于这两种情况的大变形效应，研究的方法很不一样，我们在下面分别介绍。

大变形还有其他效应，例如离心力效应，在某些情况下是重要的，可参阅文献[3.15]。

3.4.2 悬臂梁大变形分析

本小节介绍的悬臂梁端部受冲击载荷作用的大变形分析是 Ting 于 1965 年给出的[3.16]。除了放弃了小变形假定外，问题的提法和基本假定都和 2.1.3 相同，而且同样不计轴力和轴向变形。下面叙述中使用的无量纲参数和2.1.3中相同，而与 Ting 所用的有所不同。

该问题的大变形响应过程和小变形一样，可以分为两相：第一相为移行铰 H 从端部 A 向根部 B 运动，第二相为已变形的悬臂梁绕根部作刚体转动，见图 3.18(a)。

考虑第一相的某时刻 t，塑性铰移至距端部为 Λ 的 H 处。见图 3.18(a)。变形后 AH 的弧长 $s=\Lambda$，因为我们不计梁的轴向伸长。图 3.18(b) 中有关参数用相应的无量纲参数表示，其中 $s\equiv S/L$。此外，在 H 点建立一个移动坐标系 $\xi\eta$。

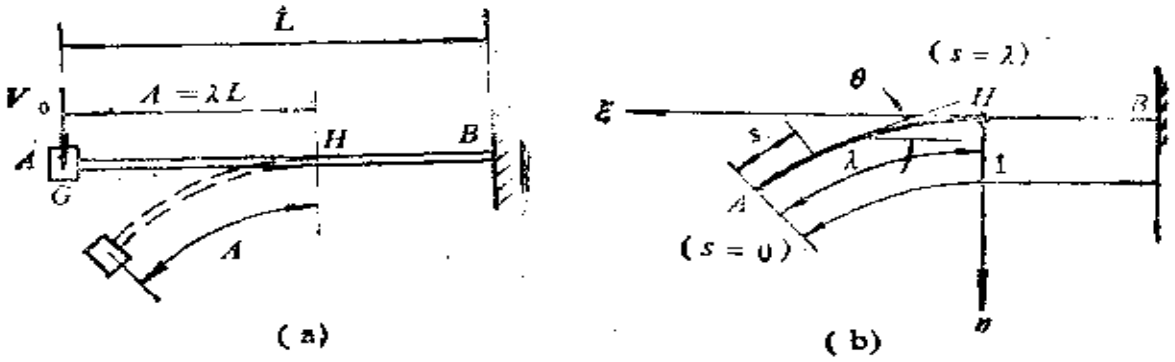


图 3.18

根据理想刚塑性理论，悬臂梁某截面的变形只在移行铰通过该截面时发生。以从 A 点起算的无量纲弧长 s 为参数，若 $s>\lambda$，则无量纲曲率 $k=k(s)=0$；若 $s<\lambda$，则 $k(s)=\text{const}$。任一截面的转角为

$$\theta(s,\lambda)=-\int_s^{\lambda} k(z)\mathrm{d}z. \tag{3.124}$$

AH 间任一截面的 ξ、η 坐标为(参看图 3.18(b))

$$\begin{cases} \xi(s,\lambda)=\int_s^{\lambda}\cos(-\theta(z,\lambda))\mathrm{d}z, \\ \eta(s,\lambda)=\int_s^{\lambda}\sin(-\theta(z,\lambda))\mathrm{d}z. \end{cases} \tag{3.125}$$

变形段 AH(包括撞击物质量)关于 ξ 和 η 轴的无量纲一次矩，以及关于 H 的无量纲二次矩分别为

$$I_\xi(\lambda)\equiv\int_0^\lambda \xi(s,\lambda)\mathrm{d}s+\gamma\xi(0,\lambda), \tag{3.126a}$$

$$I_\eta(\lambda)\equiv\int_0^\lambda \eta(s,\lambda)\mathrm{d}s+\gamma\eta(0,\lambda), \tag{3.126b}$$

$$I_H(\lambda)\equiv\int_0^\lambda [\xi^2(s,\lambda)+\eta^2(s,\lambda)]\mathrm{d}s +\gamma[\xi^2(0,\lambda)+\eta^2(0,\lambda)] \tag{3.126c}$$

利用(3.126)式容易写出 AH 段的无量纲动量守恒方程，以及 AH 段关于 H 点的动量矩方程，

$$-I_\xi(\lambda)\cdot\dot\theta_A(\lambda)=\gamma v_0, \tag{3.127}$$

$$-I_H(\lambda)\cdot\dot\theta_A(\lambda)=\tau-\gamma v_0\lambda, \tag{3.128}$$

其中 $\dot\theta_A(\lambda)$ 是变形段 AH 绕 H 运动的无量纲转动角速度。由(3.124)式可得

$$\dot\theta_A(\lambda)\equiv\frac{\mathrm{d}\theta(0,\lambda)}{\mathrm{d}\tau}=\frac{\mathrm{d}\theta(s,\lambda)}{\mathrm{d}\tau}=-k(\lambda)\cdot\dot\lambda. \tag{3.129}$$

另外从能量观点，输入动能等于某时刻梁的动能与当时塑性铰处已耗散的能量之和，也就是有

$$\frac{1}{2}\dot\theta_A^2(\lambda)I_H(\lambda)+\int_0^\lambda k(z)\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\gamma v_0^2, \tag{3.130}$$

此式右手边就是无量纲输入动能。利用(3.127)式，上式可改写为

$$\frac{\gamma v_0^2}{2}\cdot\frac{I_H(\lambda)}{I_\xi(\lambda)}+\int_0^\lambda k(z)\mathrm{d}z=\frac{\gamma v_0^2}{2}. \tag{3.131}$$

将(3.126)式对 λ 求导，得

$$\begin{cases}\mathrm{d}I_\xi(\lambda)/\mathrm{d}\lambda=\lambda+\gamma-k(\lambda)I_\eta(\lambda),\\ \mathrm{d}I_\eta(\lambda)/\mathrm{d}\lambda=k(\lambda)I_\xi(\lambda),\\ \mathrm{d}I_H(\lambda)/\mathrm{d}\lambda=2I_\xi(\lambda).\end{cases} \tag{3.132}$$

再将(3.131)式对 λ 求导，并借助于(3.132)式，得到

$$k(\lambda)=\gamma^2 v_0^2\frac{(\lambda+\gamma)I_H(\lambda)-I_\xi^2(\lambda)}{I_\xi^2(\lambda)+\gamma^2 v_0^2 I_H(\lambda)I_\eta(\lambda)},\quad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)。\tag{3.133}$$

以上建立了第一相的运动方程。由(3.124)—(3.126)和(3.133)式，通过逐步积分可以求出 $k(\lambda)$。移行铰的位置 λ 和时间 τ 的关系可以由(3.127)和(3.128)式消去 $\dot\theta_A(\lambda)$ 求得

$$\tau=\gamma v_0\left[\lambda-\frac{I_H(\lambda)}{I_\xi(\lambda)}\right]。\tag{3.134}$$

当 $\lambda=1$ 时，移行铰到达根部，第一相结束，记这个时间为 τ_1。由(3.134)式有

$$\tau_1=\gamma v_0\left[1-\frac{I_H(1)}{I_\xi(1)}\right]。\tag{3.135}$$

第二相，$\tau>\tau_1$，悬臂梁绕根部作刚体转动。第一相和第二相的转变时刻，根据能量平衡，有

$$\frac{\gamma v_0^2}{2}\frac{I_H(1)}{I_\xi^2(1)}+\int_0^1 k(z)\mathrm{d}z=\frac{\gamma v_0^2}{2}。\tag{3.136}$$

显然，上式左边第一项是 τ_1 时刻悬臂梁的动能，这些能量全部耗散在根部塑性铰，即有

$$\theta_{Bf}=-\frac{\gamma v_0^2}{2}\cdot\frac{I_H(1)}{I_\xi^2(1)}。\tag{3.137}$$

由(3.127)式，$\tau=\tau_1$ 时端部转动角速度为

$$\dot\theta_A(1)=-\gamma v_0/I_\xi(1)。\tag{3.138}$$

这个速度也是第二相刚体转动初速度。第二相是匀减速运动，故运动持续时间为

$$\tau_2-\tau_1=\frac{2|\theta_{Bf}|}{\gamma v_0/I_\xi(1)}=\gamma v_0\frac{I_H(1)}{I_\xi(1)}。\tag{3.139}$$

总的响应时间 τ_f 为

$$\tau_f=\tau_2=\gamma v_0\equiv p_0。\tag{3.140}$$

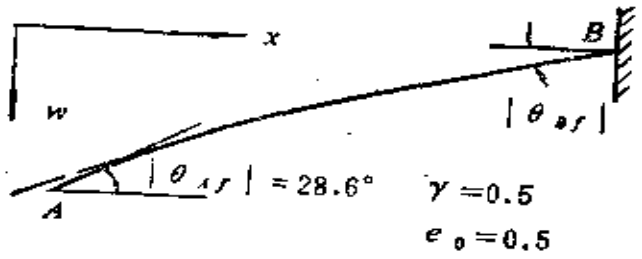
p_0是初始时刻作用在悬臂梁上的无量纲冲量。对照(2.101)式，可以得到这样结论：大变形和小变形分析所得到的响应时间是相同的，并且无量纲形式的响应时间等于所作用的无量纲冲量。

细致分析(3.136)式可以看到，左手边第一项为θ_B，第二项为第一相结束时端部A的转角θ_{A1}。而端部最终转角θ_{Af}为

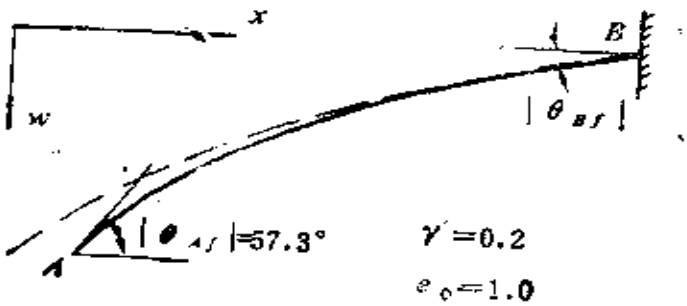
$$\theta_{Af}=\theta_{Bf}+\theta_{A1}=\frac{\gamma}{2}v_0^2\equiv e_0。\tag{3.141}$$

这表明最终转角θ_{Af}等于无量纲初始输入动能。对照(2.116)式可以发现，这个结论和小变形分析也是相同的。

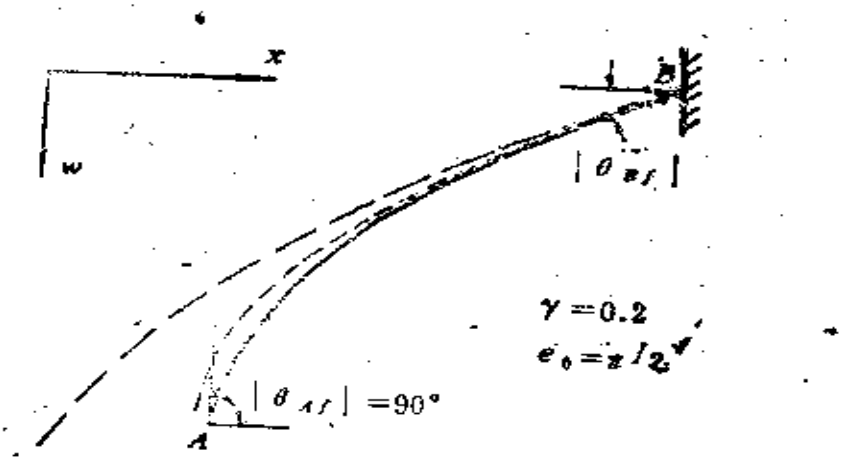
至此我们建立了悬臂梁端部受冲击载荷作用的全部大变形分析方程，Ting给出了这组方程的数值解。图3.19为数值解给出的梁的最终形状，图中实线为大变形分析结果，虚线为相应的小变形结果。可以看出，当输入能量e_0增加时，大变形和小变形结果之间的差别增大。



(a)



(b)



(c)

图 3.19

值得注意的是小变形分析假定梁的每一截面都只有竖直方向运动，因此图 3.19 中小变形分析给出的梁的最终形状(图中虚线所示）看上去比原来的长。这是引起最终形状差别的重要原因。如果将小变形分析中最终截面转角分布(2.115)式中的自变量 w 改为弧长 s，即

$$\theta_f(s)=-\frac{1}{6}v_0^2\gamma^2\cdot\frac{(3\gamma+s)}{\left(\quad+\frac{s}{2\gamma}\right)}, \tag{3.142}$$

这就会使得最终形状差别大大减少。图3.19(c)中靠近实线的那条短虚线就是根据这种修正给出的结果。显然这个结果较原来的小变形结果有很大改进。

最后还应当计算响应过程中 AH 段的弯矩分布，以检查屈服条件是否不违反。

以上分析中没有考虑到 AH 段转动过程中的离心力影响。这种离心力使得 AH 段内弯矩减少，但是又将引起轴力，而轴力又影响屈服条件。对于 γ 较小的情况，这种影响不大。

3.4.3 两端受轴向约束的简支梁

Symonds 和 Mentel 1958 年研究了简支梁受均布冲击载荷

作用的响应问题[3.17]。他们首先研究了两端支座可以水平移动的情况，见图 3.20(a)，这时梁变形后不产生轴力。他们同时还分析了两端支座水平移动受到约束的情况，见图 3.20(b)。这时若挠度达到梁的高度同一量阶，所产生的轴力就不可忽略，轴力对梁的屈服的影响要计入，应当采用轴力-弯矩交互作用屈服条件(3.123)式。虽然这时梁的几何构形变化并不大，但大变形引起的轴力效应却很重要。

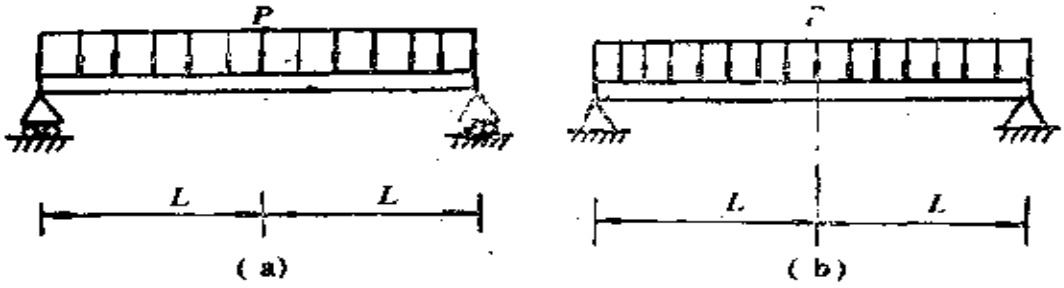


图 3.20

本小节介绍上面提到的 Symonds 和 Mentel 的有关研究工作。假定简支梁长为 $2L$，具有高为 h 宽为 b 的矩形截面，在初始时刻获得速度 V_0。由于对称性，可以只研究左半根梁 AC，见图 3.21(a)。以下叙述中仍然采用 2.1 的有关符号和无量纲参数，这

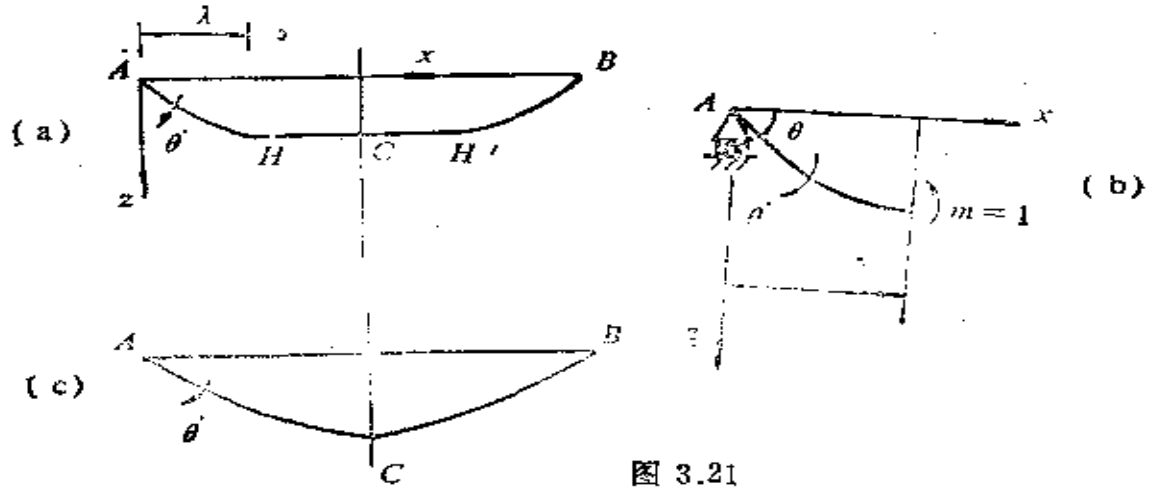


图 3.21

些参数和 Symonds 等人原文不大相同[3.17]。

1. 轴向不受约束的简支梁

首先研究图3.20(a)所示的轴向不受约束的简支梁，在初始时刻全梁获得初速度 V_0，取无量纲化坐标 xz，原点在 A 处，见图3.21(a)。梁的响应由两相组成：第一相有两个移行铰分别由 A、B 处向梁的中部运动。当这两个铰在梁的中点 C 相遇时，形成驻定铰，第一相结束。第二相维持第一相结束时的变形机构，直至消耗尽梁的全部动能。

第一相，　$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$。

考虑第一相中某时刻 τ，移行铰位于 $x=\lambda$ 处。因为 AH 段已获得曲率，故呈弧形，而 HC 段仍保持为水平直线。H 处的弯矩等于 M_p，即 $m_H=1$，剪力为0。所以 HC 段为匀速运动，速度为 v_0。AH 绕 A 作刚体转动，无量纲角速度为 $\dot{\theta}$，θ 为 A 处转角。

AH 段绕 A 点转动的无量纲运动方程为(参看图3.21(b))

$$\frac{1}{3}\lambda^3\ddot{\theta} = -1。 \tag{3.143}$$

这里 λ 和 θ 均为未知函数。H 处的速度为 v_0，由 H 处的速度连续条件给出

$$\lambda\dot{\theta} = v_0。 \tag{3.144}$$

由(3.143)和(3.144)式，以及初始条件 $\tau=0$ 时 $\lambda=0$，解得

$$\lambda^2 = 6\tau/v_0, \tag{3.145}$$

$$\dot{\theta}^2 = v_0^3/(6\tau)。 \tag{3.146}$$

当 $\lambda=1$ 时第一相结束，其时间 τ_1 可由(3.145)式求出

$$\tau_1 = v_0/6。 \tag{3.147}$$

第一相结束时中央截面的无量纲挠度 $\delta_1 \equiv \Delta/L$ 为

$$\delta_1 = v_0\tau_1 = v_0^2/6。 \tag{3.148}$$

简支梁的初始动能为 $K_0 = \frac{1}{2}\rho \cdot 2L \cdot V_0^2 = \rho L V_0^2$，无量纲形式初始动能 e_0 为

$$e_0 \equiv K_0/M_p = v_0^2, \tag{3.149}$$

故有

$$\delta_1 = e_0/6. \tag{3.150}$$

利用(3.146)式，积分 $\dot{\theta}$，并根据 $\tau=0$ 时 $\theta=0$，得到第一相结束时 A 处转角

$$\theta_1 = v_0^2/3. \tag{3.151}$$

为了验证上述解答的正确性，还应当求出 AH 段上的弯矩分布。因为 $\dot{\theta}$ 已经求出，这种验证不难进行，这里不再给出。

第二相，$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$。

第二相的变形机构如图3.21(c)所示，这时中央截面 C 的速度不是常数。由于对称性，截面 C 的剪力为零，弯矩为 M_p。AC 段绕 A 点转动的无量纲运动方程为

$$\ddot{\theta} = -3. \tag{3.152}$$

这说明 AC 段作匀减速运动。第一相结束时的 $\dot{\theta}_1$ 可由(3.146)和(3.147)式求得

$$\dot{\theta}_1 = v_0, \tag{3.153}$$

这是第二相的初始条件。

积分(3.152)式，利用初始条件(3.153)式，得

$$\dot{\theta} = -3\tau + \frac{3}{2}v_0. \tag{3.154}$$

$\dot{\theta}=0$ 时运动停止，所以响应时间为

$$\tau_2 = \tau_f = \frac{1}{2}v_0 = 3\tau_1, \tag{3.155}$$

中央截面 C 的速度为

$$v = \dot{\theta} = \frac{3}{2}v_0 - 3\tau. \tag{3.156}$$

积分(3.156)式，并利用第二相初始条件(3.150)和(3.151)式，得到梁的中央截面的最终挠度和 A 处的最终转角，

$$\delta_f = v_0^2/3 = e_0/3, \tag{3.157}$$

$$\theta_f = v_0^2/2 = \varepsilon_0/2。 \tag{3.158}$$

2. 轴向受约束的简支梁

现在研究图 3.20(b)所示的两端支座简支、轴向不可移动的梁的响应。因为梁挠曲时轴线要伸长，必然会在梁内产生轴向拉力 N，梁的屈服不单是由弯矩决定，还要受到轴力的影响，故需用交互作用屈服条件(3.123)式。

考虑图 3.20(b)所示简支梁在初始时刻全梁获得初速度 V_0。梁的响应过程和前面研究的图 3.20(a)所示的两端简支可移动的情况相同。下面分析采用和前面相同的无量纲表示方法，两个相的变形机构也和前面一样，如图 3.21 所示。

第一相，　$0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1$。

第一相为移行铰相，中间段 HC 保持直线，速度为 v_0；AH 段绕 A 转动，无量纲角速度为 $\dot{\theta}$，这些都和无轴力时相同。不同的是现在有轴力 N，因梁的各个截面转角都很小，N 可以近似地看成沿梁长不变。塑性铰 H 是由弯矩、轴力共同作用形成的广义塑性铰，记其弯矩为 M_H，由(3.123)式有

$$|M_H/M_P| + (N/N_P)^2 = 1, \tag{3.159}$$

其无量纲形式为

$$|m_H| + n^2 = 1, \tag{3.160}$$

其中 $m_H \equiv M_H/M_P$，$n = N/N_P$。

由图 3.22(a)容易列出 AH 段绕 A 转动的运动方程，

$$\frac{1}{3}\lambda^3\ddot{\theta} = -m_H - n\delta \cdot \frac{4L}{h}, \tag{3.161}$$

式中 δ 为中间段的无量纲挠度。(3.161)式适用于矩形截面梁，因推导中利用到矩形截面梁的性质，即

$$N_P/M_P = 4/h。 \tag{3.162}$$

因为塑性铰 H 处的剪力为 0，中间段 CH 处于匀速运动。在(3.161)式中，$\delta = v_0\tau$ 是已知的，未知函数除了 λ 和 θ 外，还有 m_H 和 n，所以需要通过流动法则和有关的几何关系，推出补充方

程，即轴向约束方程。

首先在广义塑性铰 H 处，不仅有曲率变化率 $\dot{\kappa}$，而且有拉伸

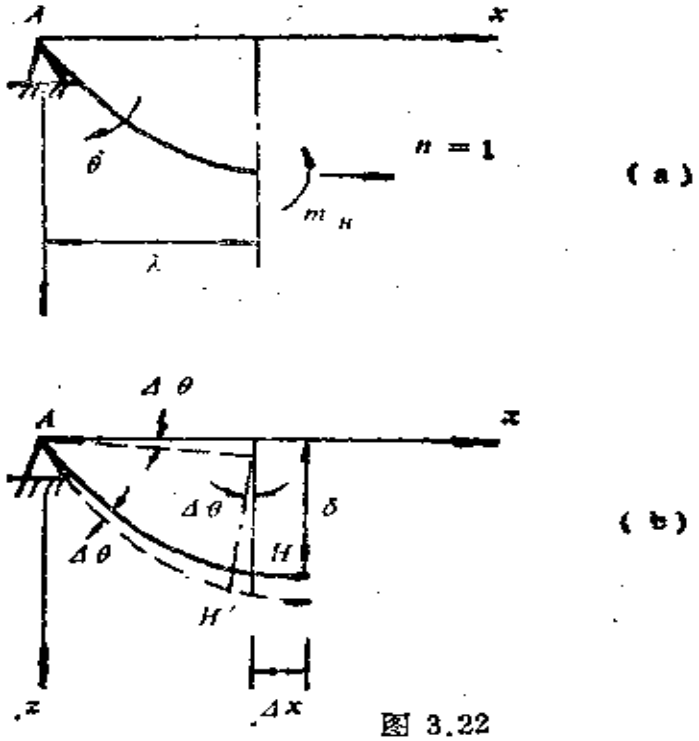


图 3.22

应变率 $\dot{\varepsilon}$。$\dot{\kappa}$ 和 $\dot{\varepsilon}$ 的关系可以由与(3.159)式相关联的流动法则给出

$$\frac{N_P\dot{\varepsilon}}{M_P\dot{\kappa}}=\frac{2N}{N_P}.$$

若采用无量纲曲率变化率 $\dot{k}\equiv L\dot{\kappa}$，并利用(3.162)式，上式可以写成

$$\dot{\varepsilon}/\dot{k}=nh/(2L). \tag{3.163}$$

设在一个微小时间间隔 $\Delta\tau$ 内，AH 段转过 $\Delta\theta$ 角，塑性铰 H 向前移动了 Δx，见图3.22(b)。在微小时间间隔 $\Delta\tau$ 内，小微段 Δx 是塑性变形区，设其应变率为 $\dot{\varepsilon}$，则伸长量为 $\dot{\varepsilon}\Delta x\Delta\tau$。另一方面，因 AH 段刚性转过 $\Delta\theta$ 角引起 Δx 段的伸长为 $\delta\Delta\theta$，见图3.22(b)，δ 为中间段的挠度，因此有

$$\dot{\varepsilon}\Delta x\Delta\tau=\delta\Delta\theta. \tag{3.164}$$

又因为 Δx 段的平均曲率 $\bar{\kappa}=\Delta\theta/\Delta x$，而 Δx 段原来曲率为 0，所

以 $\bar{k}$ 可认为是 Δx 段在 $\Delta\tau$ 时间内获得的增量 Δk，即

$$\Delta k = \Delta\theta/\Delta x。 \tag{3.165}$$

当 $\Delta\tau\to 0$ 时，由(3.164)和(3.165)式得

$$\delta = \dot{\varepsilon}/k。 \tag{3.166}$$

这就是轴向约束方程，将(3.163)式代入上式，得

$$\delta = nh/(2L)。 \tag{3.167}$$

在第一相期间有 $\delta = v_0\tau$，故有

$$n = \frac{2L}{h}v_0\tau \tag{3.168}$$

由 (3.160)、(3.168)和(3.161)式得到

$$\frac{1}{3}\lambda^3\ddot{\theta} = -1-\left(\frac{2L}{h}v_0\tau\right)^2。 \tag{3.169}$$

上式含有两个未知函数 λ 和 θ。再利用 H 处的连续条件(3.144)式，可将(3.169)式变为

$$\frac{1}{3}\lambda\dot{\lambda}v_0 = -1-4v_0^2\tau^2\cdot\left(\frac{L}{h}\right)^2。 \tag{3.170}$$

积分上式，并利用初始条件 $\tau=0$ 时 $\lambda=0$，得

$$\lambda^2 = \frac{6\tau}{v_0}\left[1+\frac{4}{3}v_0^2\tau^2\left(\frac{L}{h}\right)^2\right]。 \tag{3.171}$$

当 $\lambda=1$ 时第一相结束，记这时间为 τ_1，由上式得

$$\tau_1+\frac{4}{3}v_0^2\tau_1^3\cdot\left(\frac{L}{h}\right)^2 = \frac{v_0}{6}。 \tag{3.172}$$

记 δ_1 为第一相结束时中央截面的挠度。将 $\tau_1=\delta_1/v_0$ 代入上式，得到 δ_1 应满足的方程，

$$\delta_1+\frac{4}{3}\delta_1^3\left(\frac{L}{h}\right)^2 = \frac{v_0^2}{6} = \frac{\sigma_0}{6}。 \tag{3.173}$$

与(3.147)、(3.148)式相比较，显然(3.172)、(3.173)式左手边第二项反映了轴力的影响。

还可以求出 $\dot{\theta}$ 和 θ，以及第一相结束时的 $\dot{\theta}_1$ 和 θ_1，且有

$\dot{\theta}_1 = v_0$。

由(3.167)式可知，当 $\Delta = \delta \cdot L \to h/2$ 时，$N \to N_p$，由(3.159)式则有 $M_H \to 0$。这时该梁不再继续承受弯曲，而是只承受拉伸了。梁进入所谓“塑性弦”状态。将 $\delta_1 = h/2L$ 代入(3.173)式，得

$$e_0 = 4h/L. \tag{3.174}$$

这表明上述分析只适用于 $e_0 \leqslant 4h/L$ 的情况。若 $e_0 > 4h/L$，则应当进行弦的分析。

第二相，　$\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$。

第二相的变形机构还和图 3.21(c)一样。两个半梁分别绕两支座作刚体转动，只是现在 C 是一个广义塑性铰。

首先令 $\lambda = 1$，由(3.160)、(3.161)和(3.167)式可得到 AC 段绕 A 转动的运动方程，

$$\frac{1}{3}\ddot{\theta} = -1 - 4\delta^2(L/h)^2. \tag{3.175}$$

中央截面 C 的无量纲速度不再是常数，有

$$v = \dot{\theta}. \tag{3.176}$$

积分(3.176)式，并利用初始条件 $\tau = \tau_1$ 时，$\delta = \delta_1$ 和 $\theta = \theta_1$，得

$$\delta = \delta_1 + \theta - \theta_1. \tag{3.177}$$

将(3.177)式代入(3.175)式，得到

$$\frac{1}{3}\ddot{\theta} = -1 - 4(L/h)^2(\delta_1 + \theta - \theta_1)^2. \tag{3.178}$$

将上式两边同乘以 $\dot{\theta}$，积分后得

$$\frac{1}{6}(\dot{\theta})^2 = -\theta - \frac{4}{3}(L/h)^2(\delta_1 + \theta - \theta_1)^3 + C. \tag{3.179}$$

积分常数 C 可以通过初始条件求得。当 $\tau = \tau_1$ 时，$\theta = \theta_1 = \delta_1$，$\dot{\theta} = \dot{\theta}_1 = v_0$，有

$$C = \theta_1 + \frac{1}{6}v_0^2 + \frac{4}{3}(L/h)^2\delta_1^3. \tag{3.180}$$

当 $\dot{\theta}=0$ 时运动停止，这时 $\tau=\tau_2=\tau_f$。最终转角 θ_f 可由(3.179)式求得。θ_f 满足下列方程

$$\theta_f-\theta_1+\frac{4}{3}\left(\frac{L}{h}\right)^2(\delta_1+\theta_f-\theta_1)^3=\frac{v_0^3}{6}+\frac{4}{3}\left(\frac{L}{h}\right)^2\delta_1^3。\quad(3.181)$$

将最终挠度 $\delta_f=\delta_1+\theta_f-\theta_1$ 代入上式，再利用(3.173)式，得到

$$\delta_f+\frac{4}{3}\left(\frac{L}{h}\right)^2\delta_f^3=\frac{v_0^3}{6}+\delta_1+\frac{4}{3}\left(\frac{L}{h}\right)^2\delta_1^3=\frac{v_0^2}{3}=\frac{e_0}{3}。\quad(3.182)$$

显然，上述解答要求 $N\leqslant N_P$，即 $n\leqslant 1$。同样由(3.167)式可知，当 $\delta_f\to h/(2L)$ 时，$n\to 1$。将 $\delta_f=h/(2L)$ 代入(3.182)式，得

$$e_0=2h/L。\quad(3.183)$$

这说明上述解答仅适用于 $e_0\leqslant 2h/L$ 的情形，这比(3.174)式的要求更严。

当 $e_0\geqslant 4h/L$ 时，在第一相响应中就达到 $N=N_P$，$M=0$ 的“塑性弦”状态。此后 N 保持为常数，运动方程类似于弦振动方程，详见文献[3.17]或[3.18]。

在上述工作的基础上，Symonds 和 Jones 等人先后采用独立作用屈服面对大挠度引起的轴力效应作了进一步讨论[3.19]。这种独立作用屈服面在 m、n 平面上为正方形，见图3.17。利用外包和内含于精确屈服面的独立作用屈服面，可得到对最终挠度的下限和上限估计。

3. 膜力因子法

最近 Yu 和 Stronge 在研究刚塑性地基梁在刚性物体撞击下的动力响应时，提出了一种计入轴力效应的新方法——膜力因子法[3.20]。这种方法的思路是：在所假定的响应模式下，对仅考虑弯矩时的耗散功 J_m 和考虑弯矩、膜力联合作用的耗散功 J_{mn} 加以比较，得出膜力因子

$$f_n\equiv J_{mn}/J_m。\quad(3.184)$$

它可以归结为挠度的一个函数。然后在小挠度运动方程中作如下

替换。

$$M_p \to f_n M_p。 \tag{3.185}$$

并补充挠度与速度间的微分关系，就可以得到大挠度下的运动方程。然后用 Runge-Kutta 法等标准方法求解一阶微分方程组的初值问题，可以得到大挠度响应历程和最终挠度。

对于本节前面分析的轴向受约束的简支梁，应用膜力因子法给出的最终挠度为[3.21]

$$\delta_f + \frac{4}{3}\left(\frac{L}{h}\right)^2 \delta_f^3 = \frac{e_0}{3}, \qquad e_0 \leqslant \frac{2h}{L}; \tag{3.186}$$

$$\delta_f = \sqrt{\frac{h}{6L}} \cdot \sqrt{e_0 - \frac{h}{2L}}, \quad e_0 > \frac{2h}{L}。 \tag{3.187}$$

可以看到，当 $e_0 \leqslant 2h/L$ 时，膜力因子法(3.186)式的结果和精确解(3.182)式是相同的。

余同希和陈发良后来又将这一方法推广到圆板、正多边形板和矩形板的动力响应分析[3.22-3.24]，取得了令人满意的结果。

3.5 弹性效应

3.5.1 概述

金属材料一般都既有一定的塑性又有一定的弹性，因此弹塑性模型比刚塑性模型更接近于实际。但是采用弹塑性模型会在数学上遇到很大的困难，这在本书绪论中已经指出。1950 年 Duwez 等人曾对无限长梁中点受冲击载荷作用的问题作了弹塑性分析[3.25]，因涉及到加载、卸载，情况是复杂的。对于有限结构的情况则更加复杂，至今还没有见到任何弹塑性动力响应的解析解。而应用刚塑性模型，人们成功地给出了很多问题的解析解。因此，在什么情况下可以用刚塑性模型代替弹塑性模型，以及忽略材料的弹性究竟带来多大的误差，自然是人们很关心的问题。

众所周知，在塑性静力学中若塑性应变远大于弹性应变，就有理由忽略弹性应变，即假定结构是刚塑性的。对于塑性动力学问题，Symonds 等人很早就提出以能量比 R 作为理想刚塑性模型适用性的判据[3.26]。R 的定义为

$$R=\frac{\text{结构初始动能(或外界对结构所做的功)}}{\text{结构所能贮存的最大弹性能}} \tag{3.188}$$

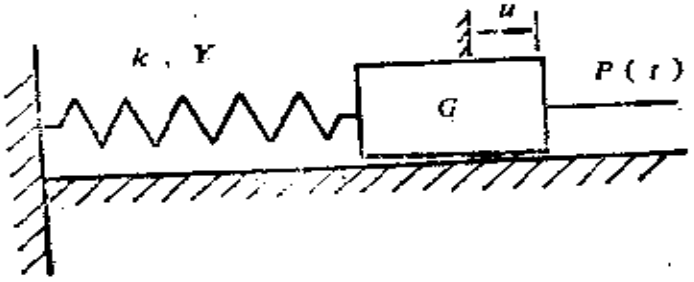
他们提出，至少要有 $R>3$ 才能不计材料的弹性。

但是在动力响应中，弹性效应是复杂的，不是用一个参数 R 所能完全描述的。虽然最大的弹性应变是有限的，但它总出现在塑性应变之前，在强动载荷作用下，结构响应的第一相总是弹性的，随后结构内部某些部分可能加载、卸载交替出现，弹、塑性过程一直存在，直到最后变为弹性振动。由于响应过程的这种复杂现象，对于不同问题在不同的条件下，材料弹性的影响也可能不同。

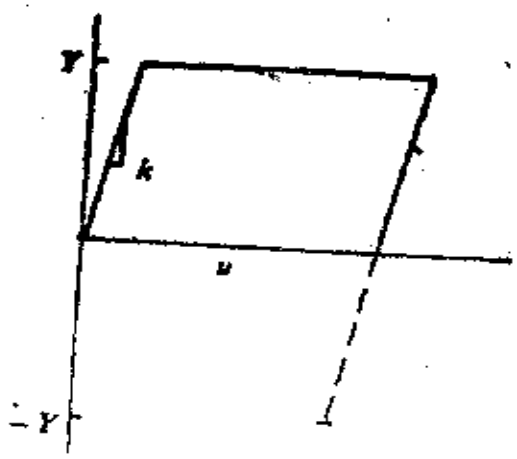
本节首先介绍 Symonds 等人对单自由度系统的弹性效应研究，然后介绍近年来有关弹性效应的数值研究，以及悬臂梁根部弹性效应的研究。

3.5.2 单自由度系统的弹性效应

Symonds 等人研究了图 3.23(a) 所示的单自由度质量-弹簧系统[8.26,8.27]。弹簧具有图 3.23(b)所示的理想弹塑性性质，弹簧常数为 k，屈服力为 Y。集中质量 G 受到任意脉冲 $F(t)$的作用，其形状如图3.23(c)所示。u 为集中质量的水平位移，t_1 为弹簧初次达到屈服的时间，t_m 为 G 达到最大位移 u_m 的时间。



(a)



(b)

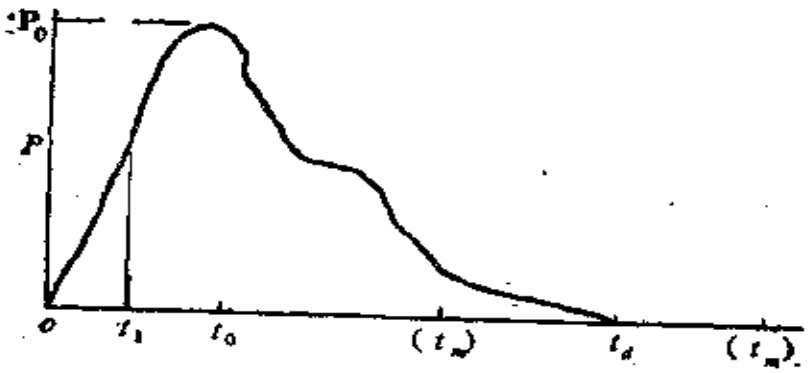


图 3.23

在初始弹性阶段，弹簧力等于 ku，集中质量 G 的运动方程为

$$G\ddot{u} = F(t) - ku. \tag{3.189}$$

设 G 的初始位移和初始速度为 0，则有 [3.12]

$$u_y \equiv u(t_1) = \frac{1}{\omega G}\int_0^{t_1} F(\eta)\sin[\omega(t_1-\eta)]\mathrm{d}\eta. \tag{3.190}$$

$$\dot{u}_1 \equiv \dot{u}(t_1) = \frac{1}{G}\int_0^{t_1} F(\eta)\cos[\omega(t_1-\eta)]\mathrm{d}\eta. \tag{3.191}$$

其中 $u_y = Y/k$ 为弹簧初始屈服时 G 的位移；ω 为系统的圆频率，$\omega = \sqrt{k/G} = 2\pi/T$，$T$ 为系统的弹性振动周期。

随后系统进入塑性阶段，运动方程为

$$G\ddot{u} = F(t) - Y。 \tag{3.192}$$

积分上式得到

$$G\dot{u} = G\dot{u}_1 + \int_{t_1}^{t} F\mathrm{d}t - Y(t-t_1)。 \tag{3.193}$$

根据所设，$t = t_m$ 时 G 达到最大位移 u_m，故有

$$G\dot{u}(t_m) = G\dot{u}_{-1} + \int_{t_1}^{t_m} F\mathrm{d}t - Y(t_m - t_1) = 0。 \tag{3.194}$$

记

$$\begin{cases} P_1(t) \equiv \int_{t_1}^{t} F(\eta)\mathrm{d}\eta, \\ P_{1m} \equiv P_1(t_m) = \int_{t_1}^{t_m} F(\eta)\mathrm{d}\eta。 \end{cases} \tag{3.195}$$

由 (3.194) 式得

$$Y(t_m - t_1) = G\dot{u}_1 + P_{1m}。 \tag{3.196}$$

将(3.192)式积分两次，并利用(3.195)和(3.196)式，得到

$$u_m \equiv u(t_m) = u_Y + \frac{G\dot{u}_1^2}{2Y} + \frac{1}{G}\int_{t_1}^{t_m} P_1(t)\mathrm{d}t - \frac{P_{1m}^2}{2GY}。 \tag{3.197}$$

G 的最终位移

$$u_f = u_m - u_Y。 \tag{3.198}$$

下面分别用上标 rp 和 ep 表示刚塑性解和弹塑性解。定义刚塑性解的最终位移的相对误差为

$$e_r = (u_f^{rp} - u_f^{ep})/u_f^{ep}。 \tag{3.199}$$

显然，这个误差同结构性质和脉冲形状有关。引入下列 3 个参数来描述结构和载荷特性：

(i) 峰值力比 $\mu = F_0/Y$，F_0 为脉冲峰值；

(ii) 无量纲脉冲持续时间 t_d/T，t_d 为脉冲持续时间，$T = 2\pi\sqrt{G/k}$ 为系统周期；

(iii) 能量比 R。

对于图 3.23(a)所示的质量-弹簧系统，所能贮存的弹性变形能为 $Y^2/(2k)$，所以

$$R=Yu_f^{e,p}\Big/\left(\frac{Y^2}{2k}\right)=2u_f^{e,p}/u_T. \tag{3.200}$$

脉冲持续时间对误差有影响。冲击载荷有 $t_d\to 0$，是一种极端情况。设在初始时刻 G 获得的速度为 $\dot{u}_0$，容易求出

$$u_f^{e,p}=G\dot{u}_0^2/(2Y). \tag{3.201}$$

根据能量守恒原理，对于该系统有

$$Yu_f^{e,p}+\frac{1}{2}Yu_T=\frac{1}{2}G\dot{u}_0^2, \tag{3.202}$$

则有

$$u_f^{e,p}=\frac{1}{2Y}(G\dot{u}_0^2-Yu_T). \tag{3.203}$$

将(3.201)和(3.203)式代入(3.199)式，得到单自由度质量-弹簧系统在冲击载荷作用下，刚塑性解的相对误差为

$$e_r=\frac{1}{2}u_T/u_f^{e,p}=\frac{1}{R}. \tag{3.204}$$

对于一般形状的脉冲，$u_f^{e,p}$ 和 $u_f^{r,p}$ 需要通过数值积分(3.197)式，再代入(3.198)式求得，然后再求出相对误差。Symonds 和 Frye 给出了 6 种不同形状的脉冲误差曲线[3.27]，对于每一种形状脉冲，都考虑了有关参数对误差曲线的影响。这里仅介绍矩形脉冲和正弦脉冲的有关结果。

图 3.24 为矩形脉冲作用下的相对误差曲线，可以看到脉冲持续时间 t_d/T 对误差有较大影响：t_d/T 较小时，误差为正，即刚塑性解给出的位移偏大；而当 t_d/T 较大时误差为负，即刚塑性解给出的位移偏小。此图只给出 $t_d/T\leqslant 1$ 的结果。能量比 R 对误差的影响也是明显的，总的来说，随着 R 增大，误差减小，但因又受到 t_d/T 的影响，在某个 t_d/T 的范围内，如 $t_d/T=0.1$ 附近，情况比较复杂。

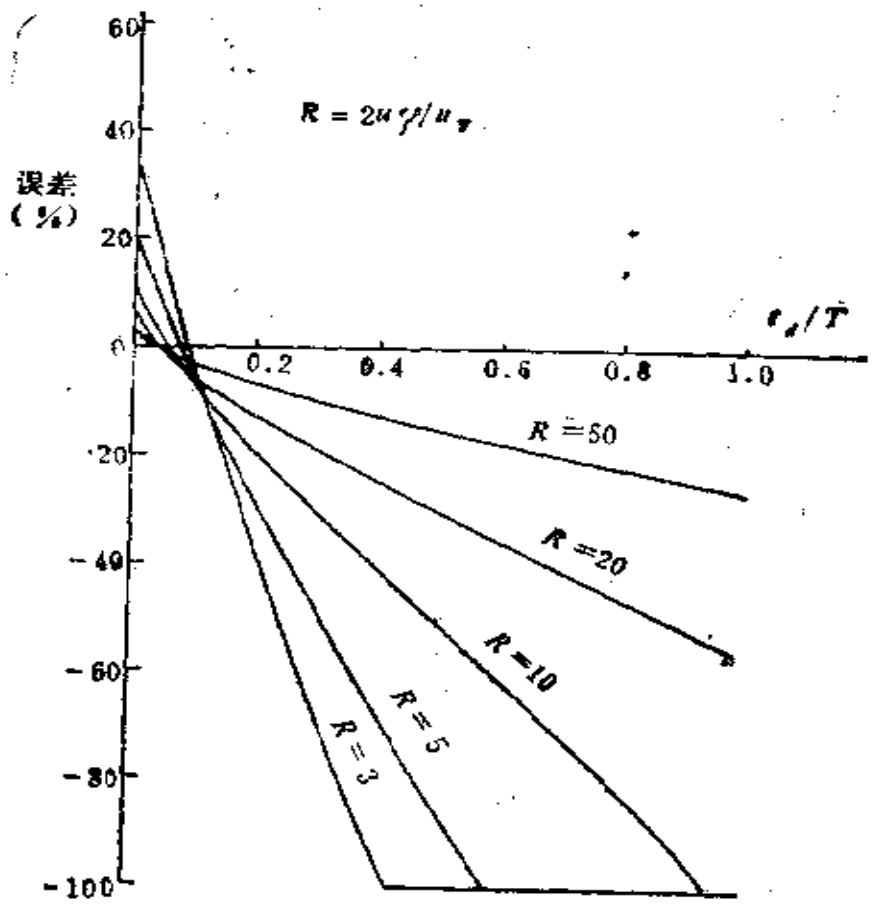


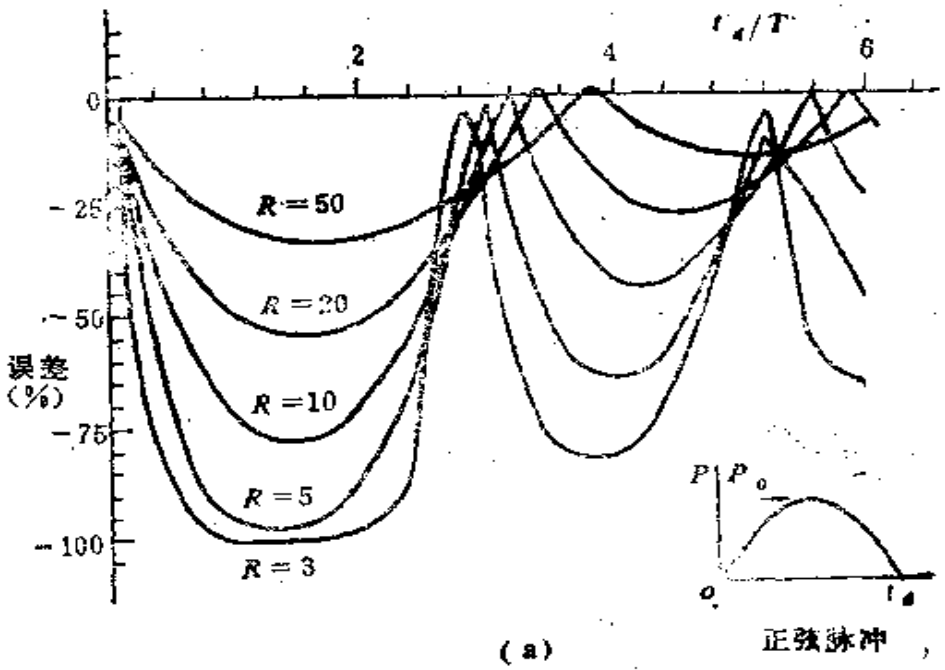
图 3.24

图 3.25(a)为半正弦脉冲作用下的误差曲线。脉冲持续时间 t_d/T 和 R 对误差有较大影响。从图中可以看到误差曲线有很强的波动性。经过规则的间隔，误差接近于 0，而在其他地方皆为负值。曲线的峰值随 t_d/T 的增加而减少。在分析比较了不同脉冲的误差曲线后，Symonds 和 Frye 指出，若脉冲的上升时间(脉冲达到其峰值F_0的时间)为0，误差曲线没有这种波动性，如矩形脉冲；若脉冲上升时间不为 0，其误差曲线都发现有这种波动性。

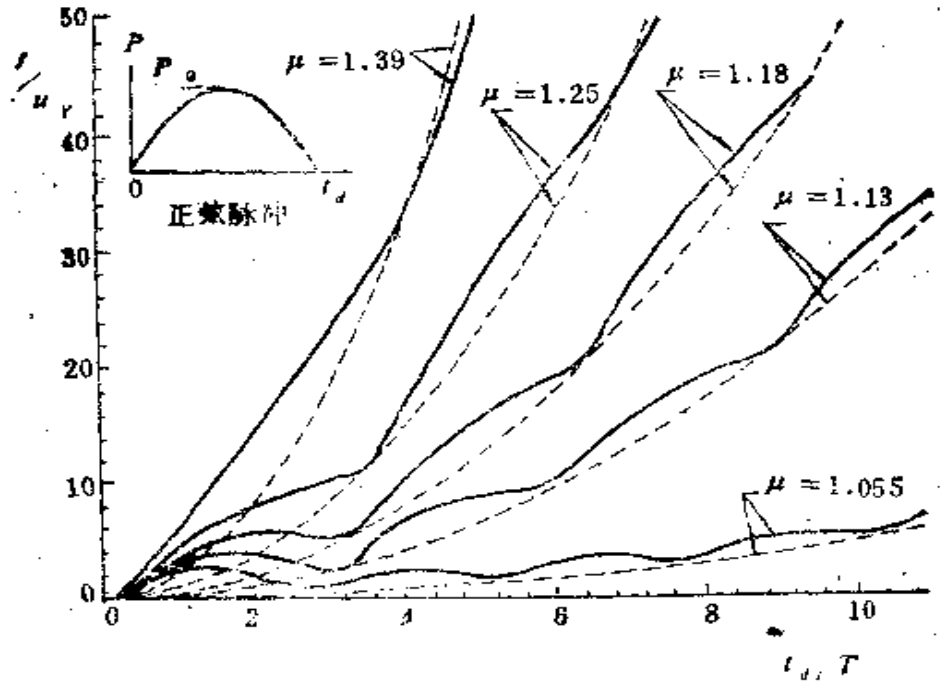
图 3.25(b)为同一例子最终位移随峰值比 $\mu \equiv F_0/Y$ 的变化情况。

上述单自由度质量-弹簧系统比较简单，有可能给出弹塑性

解析解，可以方便地进行误差研究。华云龙和 Stronge 还研究



(a)



(b)

图 3.25

了图 3.26(a)所示的双自由度悬臂梁[3.26]。两个相同的集中质

量 G 由无重量刚性杆 AB 和 BC 连接，变形只能发生在 B 和 C 处。B 和 C 处有某种性质的转动弹簧，例如图 3.26(b)所示的弹塑性弹簧，或如图 3.26(c) 所示的刚塑性弹簧。这个系统在冲击载荷作用下，初始时刻两个集中质量分别获得速度 V_1 和 V_2，见图3.26(a)，可以分别求出这个系统的弹塑性解和刚塑性解。为了简化问题，在弹塑性分析中假定从屈服状态卸载时，不计其弹性变形，见图 3.26(b)。系统的响应过程可分为三相，第一相为弹性响应；当弹簧 B 和 C 中有一个进入塑性状态，就为第二相弹塑

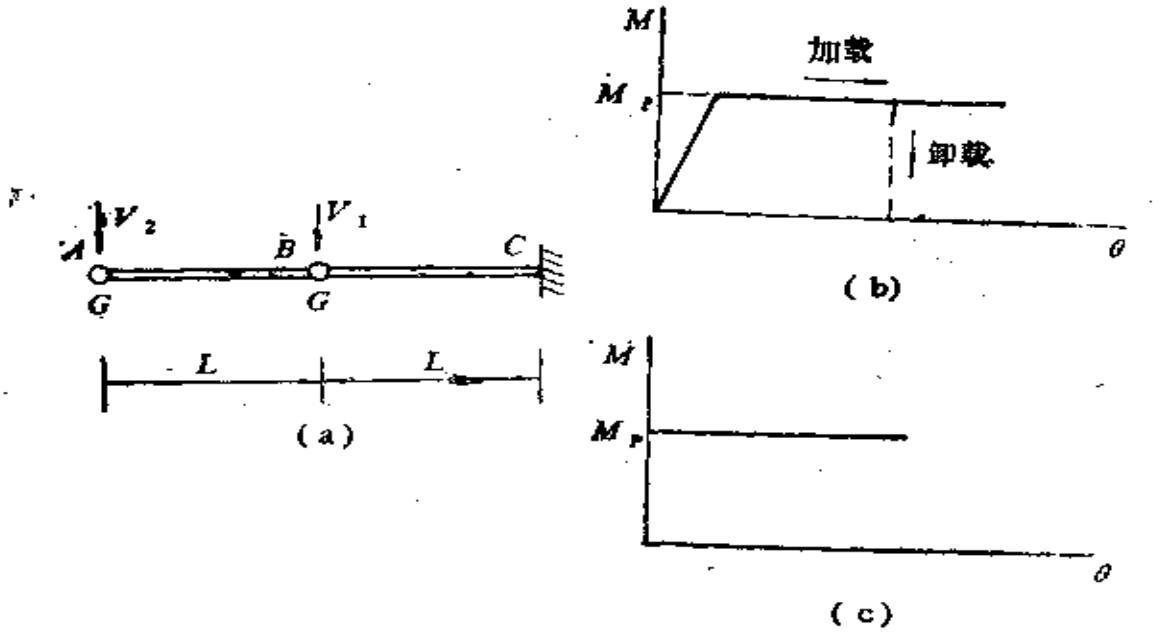


图 3.26

性响应；第三相为完全塑性状态，即 B 和 C 都进入塑性。根据关于卸载的假定，在进入第三相后，就和刚塑性响应相同了。

这个系统刚塑性解的相对误差可以通过 B、C 处的最终转角 θ_B、θ_C 同弹塑性解的相应值的比较来表示，即相对误差为

$$e_r=(|\theta_B^{ep}-\theta_B^{rp}|+|\theta_C^{ep}-\theta_C^{rp}|)/(|\theta_B^{ep}|+|\theta_C^{ep}|), \quad (3.205)$$

其中上标 ep 和 rp 分别表示弹塑性解和刚塑性解。

数值计算结果表明，相对误差不仅同能量比 R 有关，而且同初速度 V_1、V_2 的分布有关[9.28]，见图 3.27。特别是初速度分布在图 3.27 中间的一条实线附近时，相对误差同速度分布有很大关系：初速度位于这条线右下方时，相对误差几乎为 0，而在该线的左上方的一个小区域内，相对误差突然很大，甚至当能量比 R 很大时，例如 $R=20$，相对误差还可能达到10%。当然这

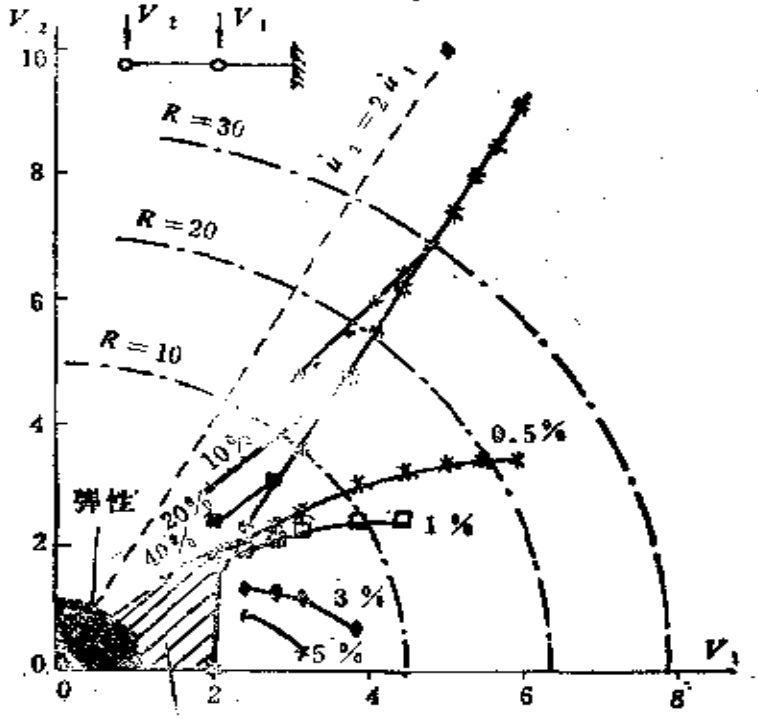


图 3.27

种现象同我们所用的集中质量模型有关，对于一般的均匀截面梁，可能不会出现这种现象。这个例子说明，材料弹性性质对结构动力响应的影响是复杂的，同结构的形式、初动量分布等都有关系。

3.5.3 弹性效应的数值研究

1. 有限元法

近年来由于大型非线性有限元动力程序问世，使得通过数值方法计算结构的弹塑性动力响应成为可能。可以将计算得到的弹塑性解作为"精确解"，将它们同理想刚塑性解比较，以研究弹性效应。1984 年 Symonds 和Fleming，1967 年 Reid 和 Gui（归心根）都先后采用有限元程序 *ABAQUS* 对悬臂梁端部受冲击载荷作用问题进行了分析[3.29,3.30]。在分析中假定梁的材料为理想弹塑性的，并考虑了剪切变形和截面的转动惯量（即 Timoshenko 梁，见 3.3.1），以及梁的几何大变形。我们将采用这种梁的有限元方法记为 TB-FE 模型。他们所用算例的数据列于表 3.2 中。Symonds和Fleming 所用数据是参照 Bodner 和 Symonds 1962 年所做的悬臂梁冲击试验[3.4]。质量比较大，$\gamma=1.64$，能量比 R为 2 至 14.8 之间。Reid 和 Gui 的第一个算例的质量比也是 1.64，第二个算例为小质量比，$\gamma=0.0228$。

表 3.2　有限元算例数据

	S&F	*R&G*:例 1	*R&G*:例 2
$\gamma=G/\rho L$	1.64	1.64	0.0228
$e_0=K_0/M_P$	0.228～1.69	1.69	2.93
$R=2K_0EI/M_e^2L$	2.0～14.8	14.8	51.7
M_P (N·m)	16.5	16.5	24.8
G (kg)	0.336	0.336	0.0023
$V_0(\mathrm{ms}^{-1})$	4.7～12.9	12.9	251.5
单　元　数	28	28	24

下面将他们的计算结果及有关分析综述如下。

(1) 大质量比($\gamma=1.64$)冲击时梁的弹塑性行为

对于 $R=2.0$ 这种能量比较小的冲击，响应的早期有一个弯矩最大值从自由端向根部移动，但这个弯矩最大值的数值要比 M_p 小得多，因此不象是塑性铰。弹性弯曲波将能量从冲击载荷作用点传至根部，从而大部分塑性变形发生在根部。

对于 $R=14.8$ 这种相当大的能量比情况，Reid 和Gui详细计算了不同时刻的弯矩分布，并将响应分为如下四相：

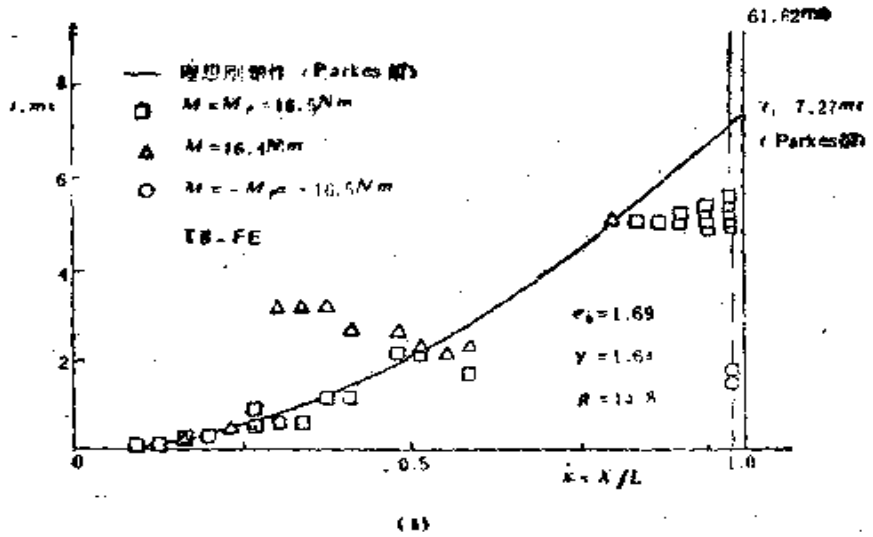
第一相：弹塑性弯曲波。这一阶段内的弯矩分布表现出Timoshenko梁的弯曲波传播的许多特征，可以看到弯矩呈波动分布，且弯曲波具有弥散性。在扰动传播的尾部有一小区域，其上弯矩达到塑性极限弯矩 M_p，它的位置随时间向根部移动。这可以看成是塑性移行铰。在本例中，当时间为 0.281ms 时，弯曲波的前驱部分到达悬臂梁根部。

第二相：根部形成反向铰，移行铰受抑制。在 0.281ms 后，弹性弯曲波在根部被反射回来，入射基本弯曲波同反射波相互作用抑制了移行铰的前进，使得塑性铰有往回朝端部运动的趋势。同时根部弯矩的符号反复变化，量值不断增加，大约在 1.43ms 时，根部形成了反向转动（以载荷对根部的转动方向为正向）的塑性铰。

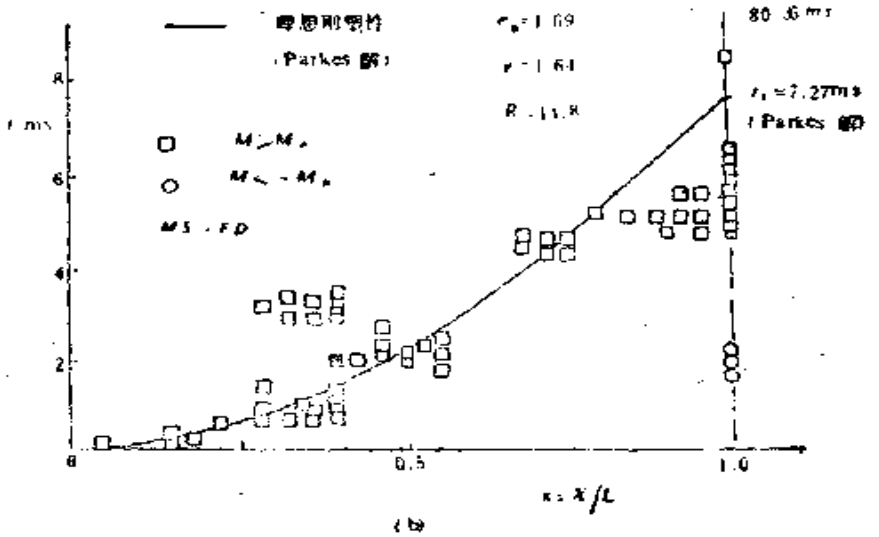
第三相：根部出现正向转动。当根部反向弯曲消耗了一定能量后，弯矩数值开始减少，并逐渐变为正的。在这同时，梁内部的塑性变形区缓慢地移过梁的中部，朝梁的根部移动，见图 3.28(a)。在 4.9ms 以后，根部形成正向铰。

第四相：根部正向转动和弹性振动。塑性变形区很快收缩至根部，大约 62ms 以后只剩下弹性振动。

从图 3.28(a)可以看到塑性变形区的位置随时间的变化情况。响应初期，有一较为集中的塑性变形区从端部开始向内移动，这同刚塑性解的移行铰是类似的，不同的是当根部弯矩反号时，这


61.62ms
理想刚塑性 (Parkes 解)
$M = M_p = 16.5Nm$
$M = 16.4Nm$
$M = -M_p = -16.5Nm$
TB-FE
$e_0 = 1.69$
$\gamma = 1.64$
$R = 14.8$
$t_1 = 7.27ms$
(Parkes 解)
t, ms
$x = X/L$
0
0.5
1.0
2
4
6
8

(a)


理想刚塑性
(Parkes 解)
$e_0 = 1.69$
$\gamma = 1.64$
$R = 14.8$
80.36ms
$t_1 = 7.27ms$
(Parkes 解)
$M > M_p$
$M < -M_p$
MS-FD
t, ms
$x = X/L$
0
0.5
1.0
2
4
6
8

(b)

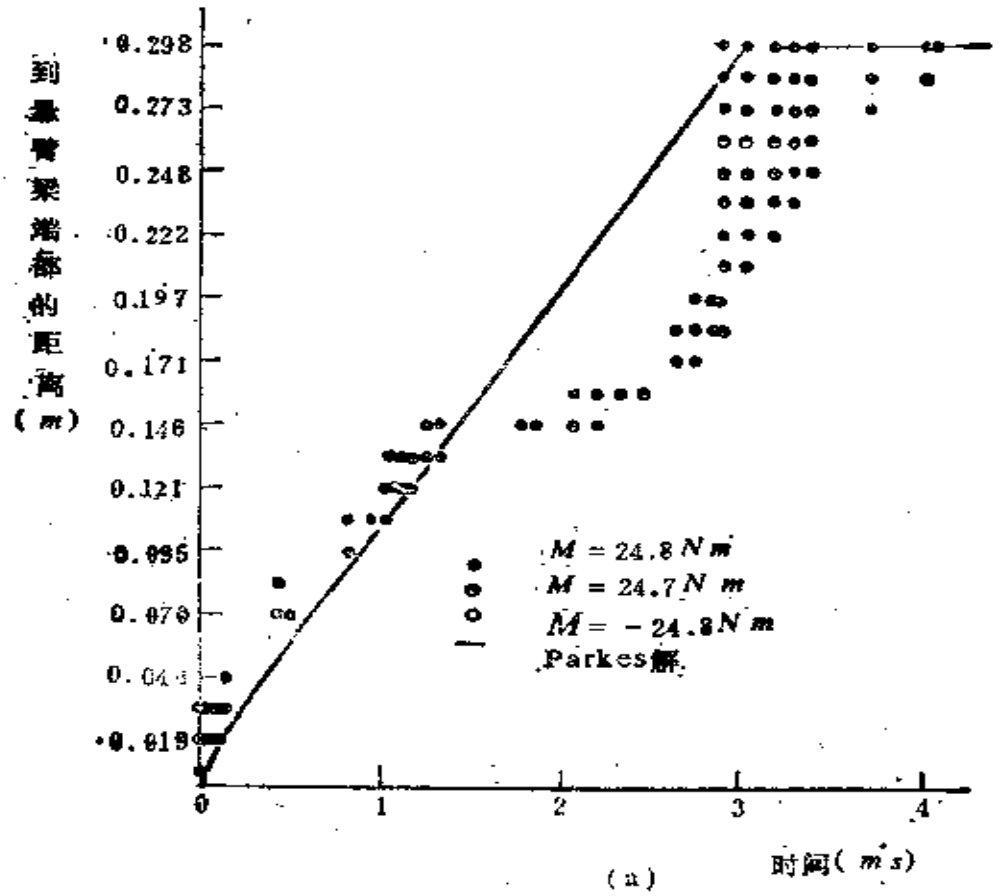
图 3.28

个塑性变形区不再前进，甚至往回移动，后来就突然消失；这期间的弯矩分布也同刚塑性解很不一致。

图 3.28(b)为同一问题应用质量-弹簧有限差分结构模型(AS-FD，见本小节稍后)给出的结果。两种方法给出的结果相当一致。

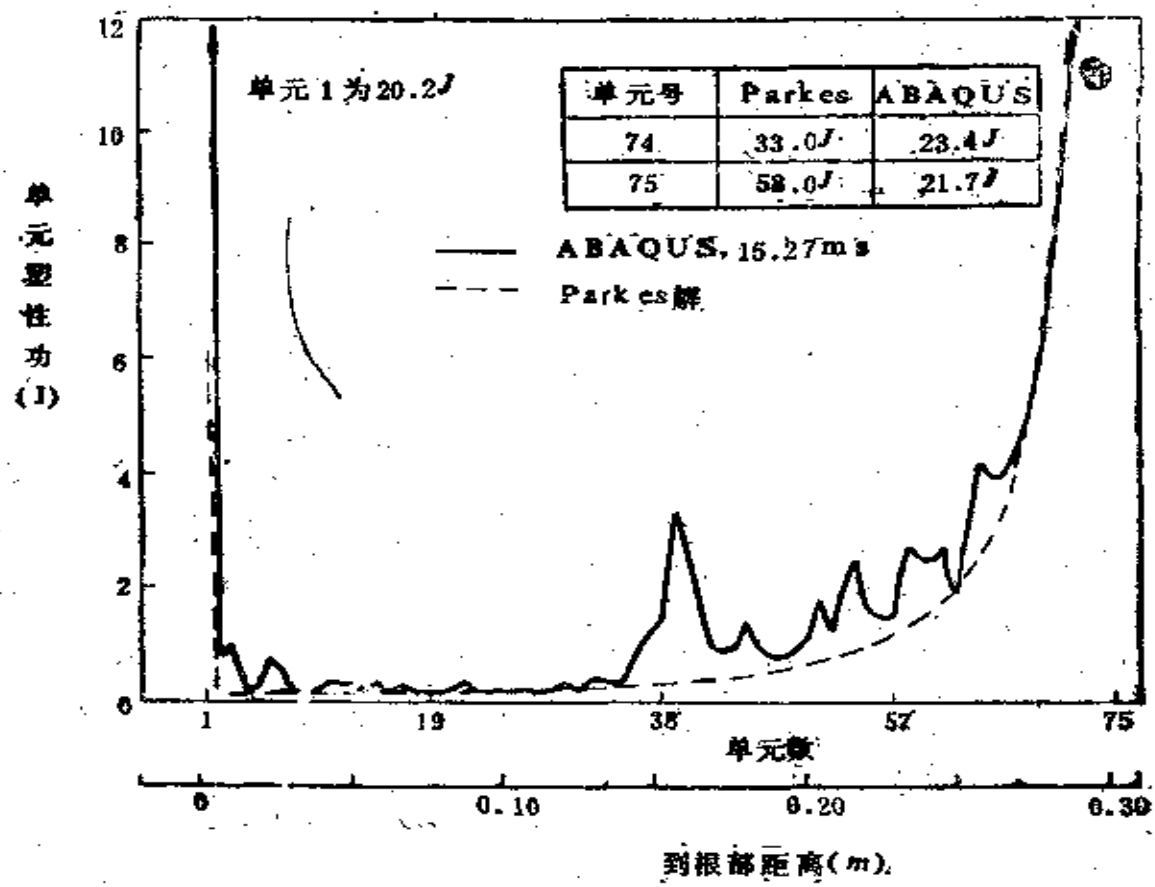
(2) 小质量比($\gamma = 0.0228$)冲击时梁的弹塑性行为。

表3.2中所列Reid和Gui的第二个算例属于子弹撞击悬臂梁这类质量比小，撞击速度高的问题。有限元计算得到的该算例响应过程大致和上例相同，塑性区随时间的变化情况见图3.29(a)，图 3.29(b)为塑性功分布，总的来说塑性功分布和刚塑性解(图中实线所示)很接近，主要区别在于有限元解给出在梁的中部有较



(a)

图 3.29



(b)
图 3.29

大的塑性变形，即有一高曲率区。这一现象为许多实验所证实，即在变形后的悬臂梁中部有一弯折(kink)。这是由于反射弯曲波抑制移行铰的运动的结果。

2. 质量-弹簧有限差分结构模型(MS-FD)

弹塑性结构动力响应问题既是材料非线性，又是几何非线性的瞬态过程，应用非线性通用有限元程序(ABAQUS)计算如悬臂梁这样的简单结构，也十分费机时，因此至今所作的研究也是有限的。

这里我们介绍一种基于结构的有限差分离散方法，并应用这种方法研究悬臂梁端部受冲击的问题。相对来说这种方法的计算量要少得多，而给出的结果同有限元法相当一致。

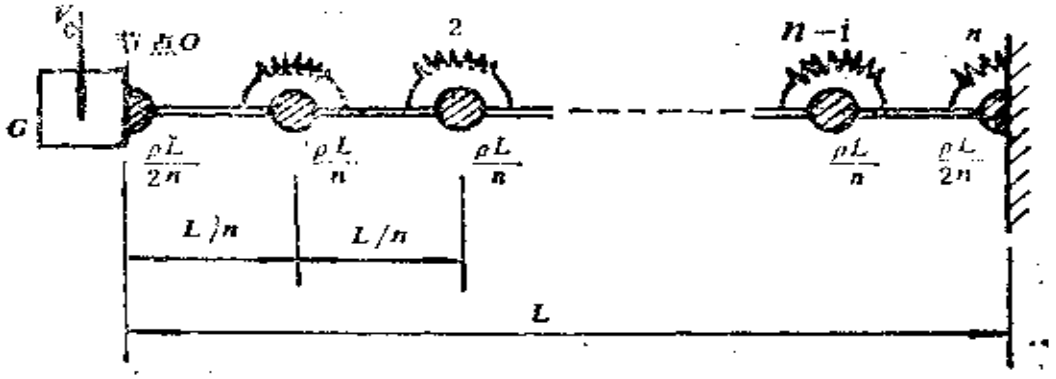
(1) 模型和基本方程

为了计算悬臂梁端部受冲击载荷作用的弹塑性响应，候唯建、余同希和苏先樾采用了图 3.30(a)所示的简化模型[6,81]。这个模型将悬臂梁离散成 n 个等长度的无质量的刚性杆(单元)，梁的质量平均集中在各个节点上，两根相邻的刚性杆通过弹塑性角弹簧连于节点。假定变形是小的，不考虑轴力和剪力效应，也不考虑剪切变形和转动惯量。这是基于 Euler 夹层梁的一个简化模型，简称为 EE-FD 模型。

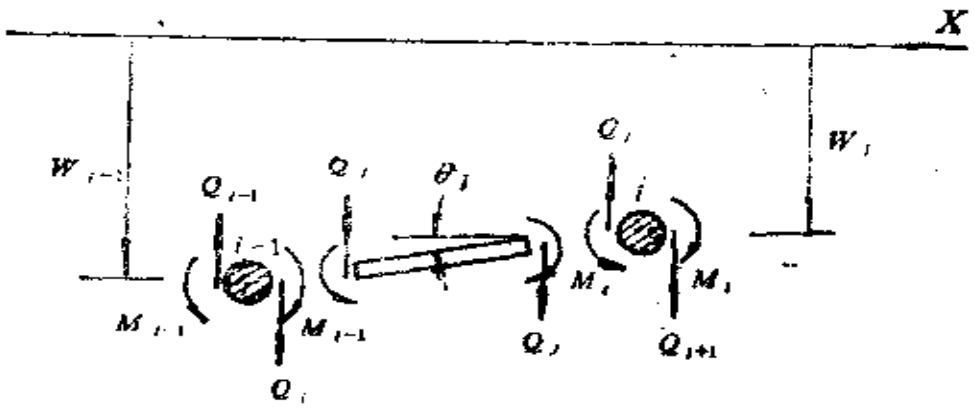
设每个节点的横向位移为 $W_i(t)$。取出联系节点 $i-1$ 和 i 的第 i 根刚性杆来分析，见图3.30(b)。该杆的转角为

$$\theta_i = n(W_{i-1} - W_i)/L, \quad i = 1, 2, \cdots, n. \tag{3.206}$$

第 i 根和第 $i+1$ 根杆间的相对转角 ψ_i 为



(a)



(b)

图 3 30

$$\begin{cases}\psi_i \equiv \theta_i - \theta_{i+1} = n(W_{i+1} - 2W_i + W_{i-1})/L, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 1,2,\cdots,n-1; \\ \psi_n = \theta_n. \end{cases} \tag{3.207}$$

这个相对转角 ψ_i 发生在第 i 个节点处，它和该节点处的弯矩 M_i 之间满足弹塑性线性强化本构关系，即有

$$M_i(\psi_i) = \begin{cases} C\psi_i, & \psi_i \leqslant \psi_Y; \\ M_P + \alpha C(\psi_i - \psi_Y), & \psi_i \geqslant \psi_Y, \dot{\psi}_i > 0; \end{cases} \tag{3.208}$$

其中 C 为弹簧刚度，α 为强化系数，ψ_Y 为最大弹性转角，见图 3.31。卸载时本构关系为

$$M_i(\psi_i) = M_i(\psi_i^*) - C(\psi_i^* - \psi_i),\ \psi_i^* > \psi_i > \psi_i^* - 2\psi_Y, \tag{3.209}$$

上式中 ψ_i^* 是节点 i 处的最大相对转角，条件 $\psi_i > \psi_i^* - 2\psi_Y$ 是出于对材料 Bauschinger 效应的考虑。

因为连杆无质量，质量集中在质点。所以各节点的位移变量间不耦合。考察图 3.30(b)，可列出如下运动方程，

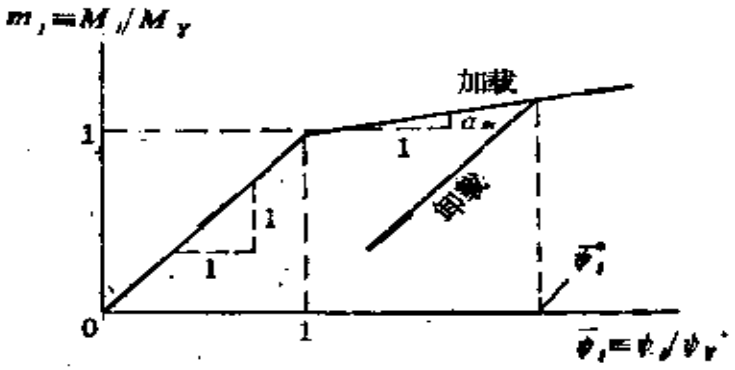


图 3.31

$$\begin{cases} Q_1 = \left(G + \dfrac{\rho L}{2n}\right)\dfrac{\mathrm{d}^2 W_0}{\mathrm{d}t^2}, \\ Q_i - Q_{i-1} = \dfrac{\rho L}{2n}\dfrac{\mathrm{d}^2 W_i}{\mathrm{d}t^2}, \quad i = 2,3,\cdots n; \\ M_i - M_{i-1} = -\dfrac{L}{n}Q_i, \quad i = 1,2,\cdots n. \end{cases} \tag{3.210}$$

悬臂梁的边界条件为

$$\begin{cases} Q_0 = M_0 = 0, \\ W_n = 0; \end{cases} \tag{3.211}$$

初始条件为当 $t=0$ 时，

$$\begin{cases} W_0 = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}W_0}{\mathrm{d}t} = V_0/\sqrt{1+(\rho L/2nG)}, \\ W_i = \dfrac{\mathrm{d}W_i}{\mathrm{d}t} = 0, \ i = 1,2,\cdots n \end{cases} \tag{3.212}$$

此处端部速度是质量 G 和端部质点在撞击后所共有的速度。

以上给出了关于 W_i、θ_i、ψ_i、M_i 和 $Q_i(i=1,2,\cdots n)$ 的一组方程。通过运算，可以得到关于弯矩 M_i 和转角 ψ_i 的 $2n$ 个方程。这一组 $2n$ 个未知数的方程组可以应用 Runge-Kutta 法进行求解。

(2) MS-FD 模型的应用

应用 MS-FD 模型可以容易考察在不同质量比 γ、能量比 R 以及强化系数 α 情况下，悬臂梁的弹塑性响应特性。

图 3.28(b) 就是应用 MS-FD 模型的一个计算结果，图 3.28(a) 为同一问题基于 Timoshenko 梁、大变形的有限元法结果，MS-FD 模型是基于 Euler 梁、小变形分析结果，可以看到二者相当一致。

下面是 MS-FD 模型用于其他参数情况下的结果。

图 3.32(a) 和 (b) 分别为撞击物很重 ($\gamma=5.0$) 和很轻 ($\gamma=0.025$) 的情况下，塑性变形区的位置随时间变化的情况。由图 3.32(a)可以看到，当 $\gamma=5.0$，$R=5.0$ 时，塑性变形区首先出现在梁的中部很短一段时间，然后就在根部附近出现。而当 $\gamma=5.0$，$R=15$ 时，塑性变形区首先也出现在梁的中部，然后就在中部附近前后移动，最后到达根部，其时间和刚塑性解给出的基本相同。注意到根部反向屈服和移行铰在梁中部受抑制都只出现在 $R=15$ 的情况下，而对于 $R=5$ 时没有这些现象。

当质量比很小时，例如 $\gamma = 0.025$，由图3.32(b)可以看到移行铰只到达 0.5 至 0.6 的梁长，然后就消失了。这就是说当撞击

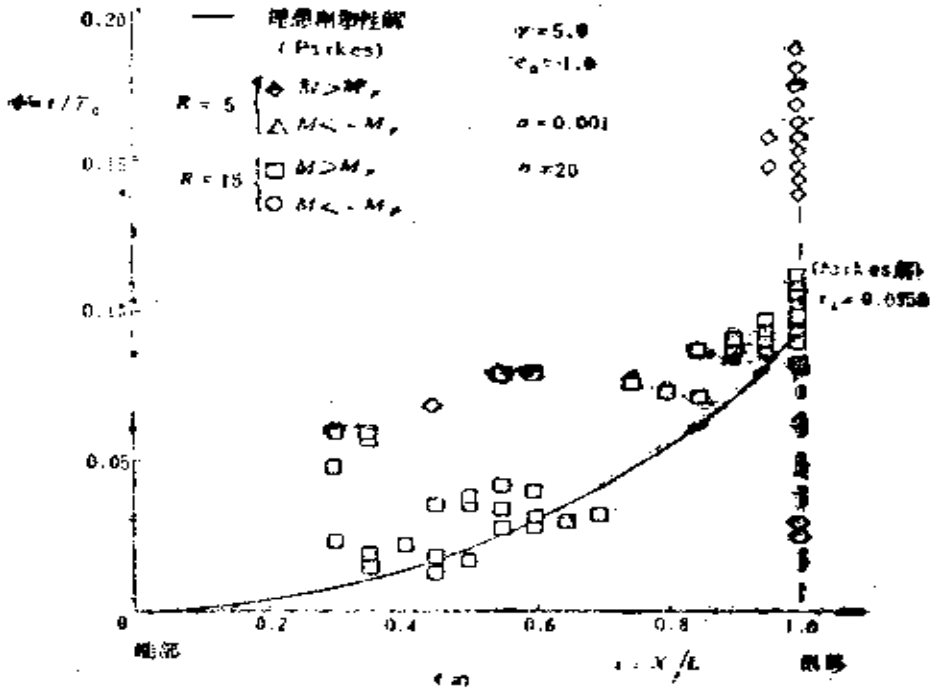


图 3.32

物很轻时，悬臂梁只有部分区段发生塑性变形，在根部可能出现过反向屈服，而不一定有正向屈服。

图 3.33(a)和(b)为质量比和能量比对塑性耗散密度分布的影响。当 γ 比较小，或者 R 比较大时，就有较多的能量耗散在梁的中部。

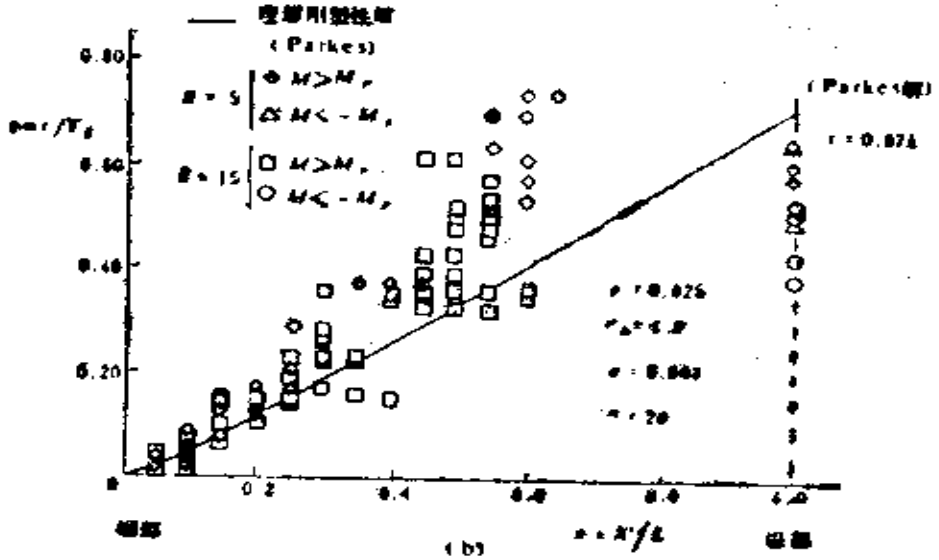

理想刚塑性解
(Parkes)
(Parkes解)
(b)

图 3.32

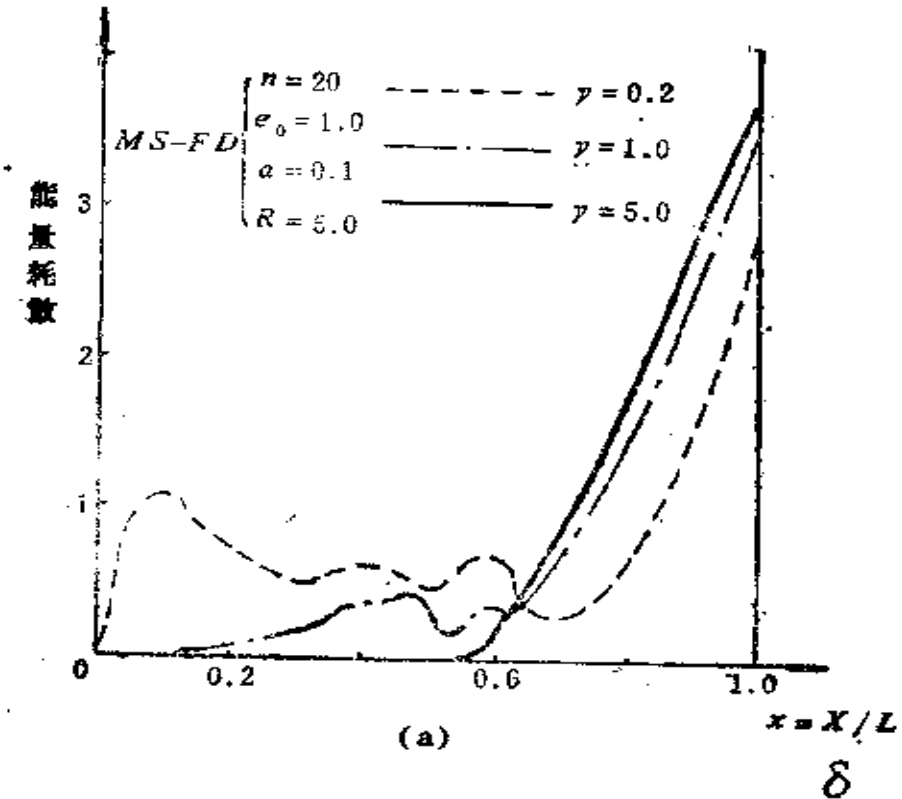

MS-FD
n = 20
e0 = 1.0
a = 0.1
R = 5.0
γ = 0.2
γ = 1.0
γ = 5.0
能量耗散
0
1
2
3
0.2
0.6
1.0
x = X/L
(a)
δ

图 3.33

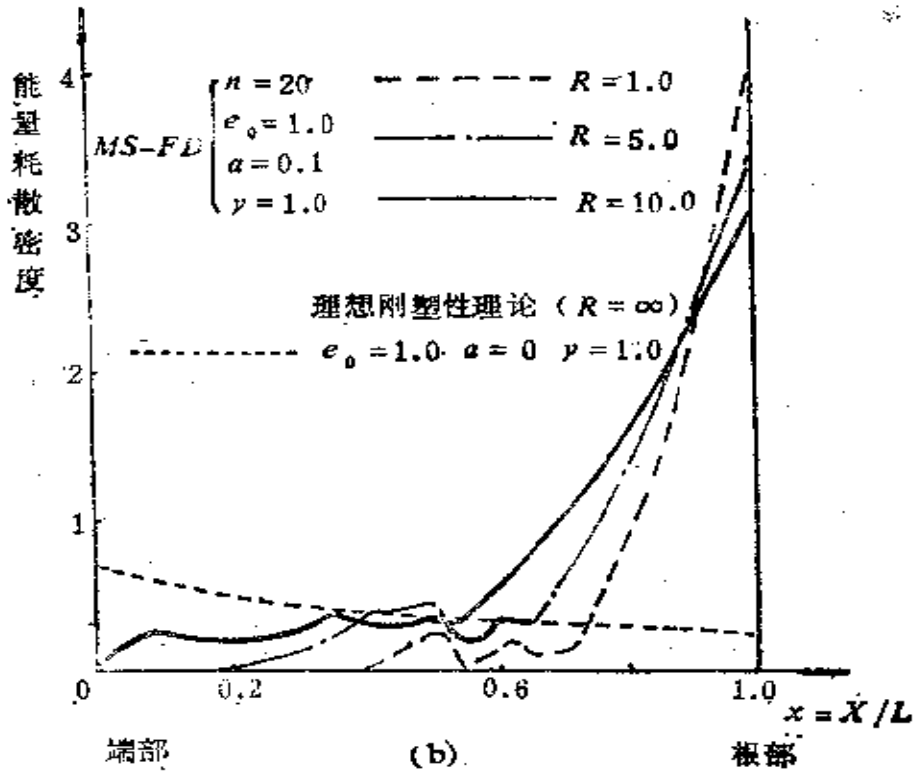


图 3.33

8.5.4 悬臂梁根部弹性变形效应

1. 根部角弹簧模型

从悬臂梁弹塑性动力响应的数值研究发现，当能量比 R 较小时，根部的回弹变形对梁的塑性变形区的发展有较大影响。王晓东和余同希提出了如图 3.34 所示的简化模型[8.8]。这种模型肯定不如 3.5.3 的数值模型那样好，但以尽可能简单的形式，赋于系统一定的贮存弹性能的能力，使之能反映弹塑性结构动力响应的基本特性。

这个模型由一根理想刚塑性梁和一个理想弹塑性的角弹簧组成。梁一方面铰接于支座，另一方面又通过角弹簧同支座联系，见图 3.34(a)。假定材料是应变率无关的，剪力不影响屈服，变形是小的，撞击物可以看成一个具有质量 G 的质点。这个模型除了根部为角弹簧外，其他和 Parkes 问题(2.1.3)相同。

根部角弹簧的性质如图 3.34(b) 所示，取其弹簧屈服力矩等

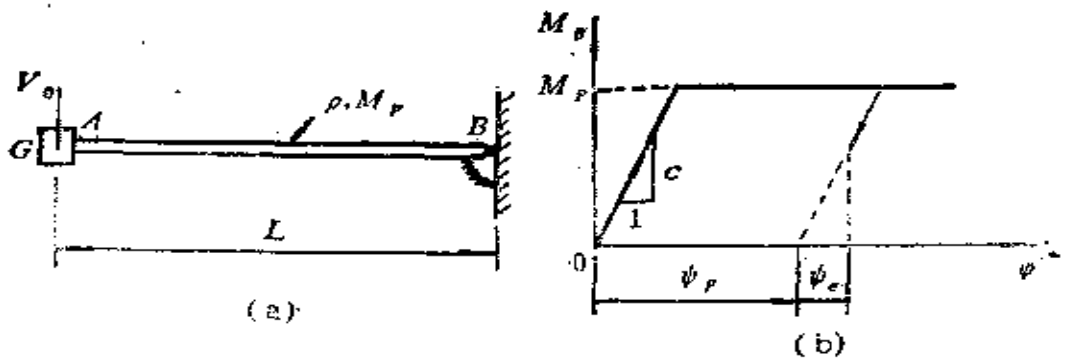


图 3 34

于梁截面的塑性极限弯矩 M_p。弹簧常数 C 根据弹簧所能贮存的最大弹性变形能等于弯曲刚度为 EI 的梁的最大弹性变形能而定出，$C=EI/L$。

2. 基本方程

根据上述假定，当悬臂梁端部受到撞击时将引起梁的弯曲塑性变形和根部角弹簧的弹塑性变形。梁的弯曲塑性变形与刚塑性分析相同，表现为有一塑性移行铰从端部向内部运动。这里所采用的符号都和 2.1.3 中相同。设在 t 时刻塑性铰位于 H，距端部为 $A(t)$，见图 3.35，HB 段绕 B 作刚体转动，转角为 ψ、HB 段上任一点坐标为 X 的速度为

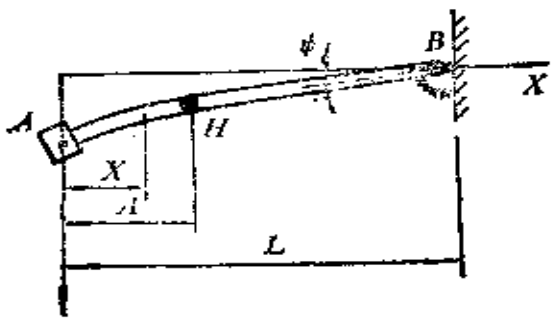


图 3.35

$$\frac{dW}{dt}=(L-X)\frac{d\psi}{dt},\quad (A\leqslant X\leqslant L)。\qquad (3.213)$$

设集中质量 G 的速度为 V。AH 段相对于 HB 段还有绕 H 作刚体转动，因此 AH 段内任一点的速度为

$$\frac{dW}{dt}=(L-X)\frac{d\psi}{dt}+V(1-X/\Lambda),0\leqslant X\leqslant\Lambda。\qquad(3.214)$$

由(3.213)和(3.214)式容易导出梁上各点的加速度分布

$$\frac{d^2W}{dt^2}=\begin{cases}\dfrac{d^2\psi}{dt^2}(L-X),\ \Lambda\leqslant X\leqslant L;\\ (L-X)\dfrac{d^2\psi}{dt^2}+(1-X/\Lambda)\dfrac{dV}{dt}+\dfrac{VX}{\Lambda^2}\dfrac{d\Lambda}{dt},\\ \qquad 0\leqslant X\leqslant\Lambda。\end{cases}\qquad(3.215)$$

采用 2.1 的无量纲参数和记号，对 AH 和 HB 段可列出如下运动方程

$$m_B-1+\frac{1}{3}(1-\lambda)^2\ddot{\psi}=0,\qquad(3.216)$$

$$\left(\gamma+\frac{\lambda}{2}\right)\dot{v}+\left[\gamma+\lambda\left(1-\frac{\lambda}{2}\right)\right]\ddot{\psi}+\frac{v}{2}\dot{\lambda}=0,\qquad(3.217)$$

$$\frac{1}{6}\lambda^2\dot{v}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\lambda}{3}\right)\lambda^2\ddot{\psi}+\frac{1}{3}v\lambda\dot{\lambda}-1=0,\qquad(3.218)$$

其中 $m_B\equiv M_B/M_P$ 为根部 B 的无量纲弯矩，且有

$$m_B=\begin{cases}C\psi_e/M_P,\ \text{弹性状态或卸载};\\ 1\text{或}-1,\ \text{其他情况};\end{cases}\qquad(3.219)$$

ψ_e 是角弹簧变形中的弹性部分，见图 3.34(b)。

方程(3.216)～(3.218)式中的未知函数为 $\psi(\tau)$、$v(\tau)$ 和 $\lambda(\tau)$，初始条件为

$$\tau=0\text{ 时},\ \psi(0)=\dot{\psi}(0)=0,v(0)=v_0,\lambda(0)=0。\qquad(3.220)$$

有些量例如 $\dot{v}$ 和 $\dot{\lambda}$ 在初始时刻是奇异的，这可以通过开始很短时间内积分的修正初始条件来解决。

3. 结果分析

方程(3.216)～(3.218)式可以通过 Runge-Kutta 法逐步积分求解。结果表明，引入根部弹簧对响应行为有较显著的影响。

有两种响应模式。

模式 I：响应开始时移行铰从端部向根部运动，但在到达根部之前，根部弹簧超出弹性范围变为塑性铰。对于这种模式，移行铰总可以到达根部，然后变为绕根部的刚体转动。

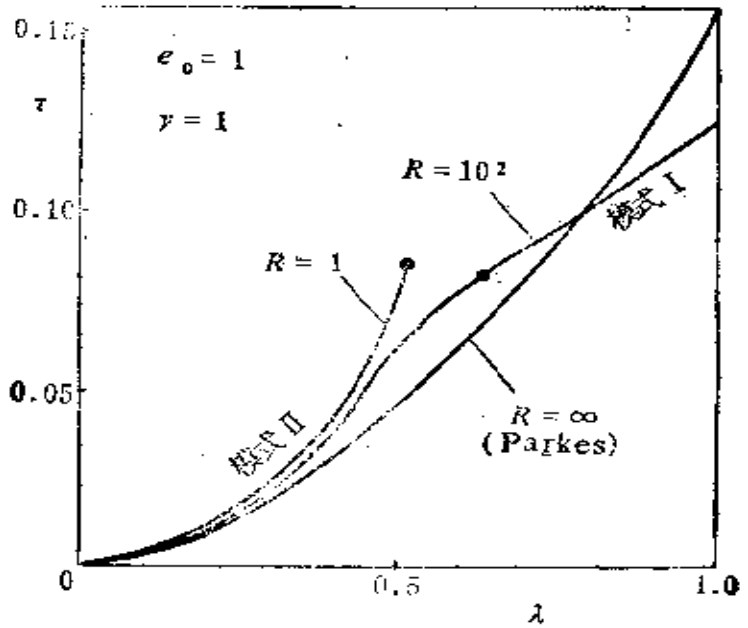


图 3.36

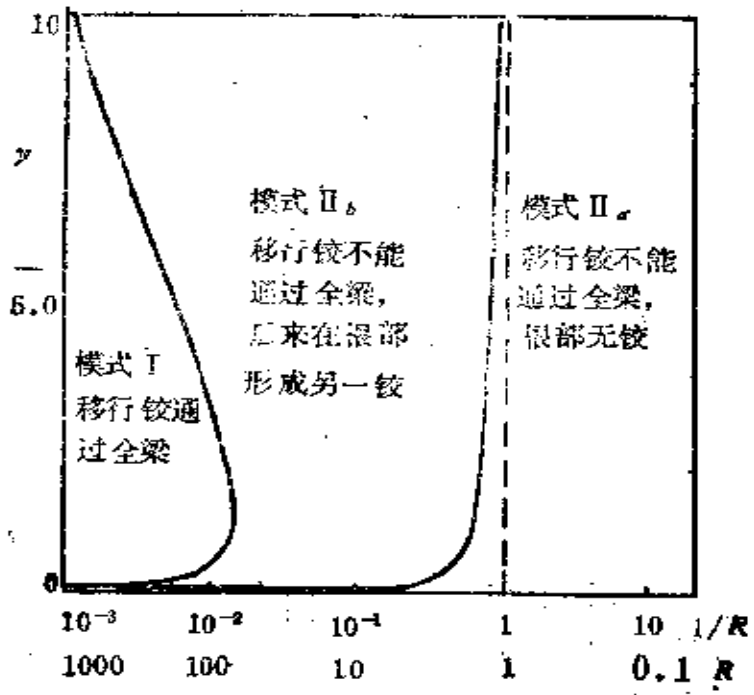


图 3.37

模式Ⅱ：响应开始时移行铰也是从端部向根部运动，但在梁的中部某处停止运动并消失，而根部弹簧还保持为弹性。在这之后，若剩余动能较小，根部将一直保持为弹性状态，这种响应记为模式II_a；否则根部就要进入塑性，则记为模式II_b。

图 3.36 为塑性铰位置与时间的关系。

图 3.37 为$e_0=1$时响应模式与$1/R$和γ的关系。若$1/R>1$，输入的能量小于所能贮存的弹性能，响应总是模式II_a；若$1/R<1$而且$\gamma\gg1$，则响应是模式II_b；若$1/R$很小，而γ中等大小，响应为模式Ⅰ，这同 Parkes 的刚塑性解相象。

这些结果表明，尽管用一个根部角弹簧来代替梁的弹性能力只是一个十分粗糙的近似．但这个简化模型仍然呈现出梁的弹塑性动力响应的一些基本特性，特别是在塑性区可能只传播到约半个梁长就停止移动（模型Ⅱ）这一点上同有限元法和有限差分法的数值分析结果（见 3.5.4）十分相似。

3.5.5 小结

由以上研究可知，能量比R是判断刚塑性解适用性的重要参数，但不是唯一的。下面将本节所介绍的关于悬臂梁端部受冲击载荷作用的弹塑性响应的研究结果归纳于表 3.3 中（主要考察参数R和γ变化时响应的特点）。

表 3.3 R和γ对冲击载荷作用下悬臂梁动力响应的影响

	γ 大	γ小
R 很大（例如 $R>100$）	同刚塑性解(2.1.3)类似，塑性铰通过全梁	同γ大
R 较大（例如$10<R<100$）	移行铰行至梁中部后消失，根部耗散大部分能量	移行铰行至梁中部后消失，根部耗散较少能量
R 较小（例如$2<R<5$）	根部耗散几乎全部能量，响应呈模态形式*	移行铰在梁的中部滞留，然后消失
R 很小（例如$0.5<R<1$）	只有在梁的根部有小的塑性变形，其余几乎全为弹性	在梁的端部有局部塑性变形

* 模态形式响应见4.2。

参 考 文 献

[3.1] Campbell J D. Cooper R H. Yield and flow of low-carbon steel at medium strain rates. *Proc. Conf. on the Physical Basis of Yield and Fracture.London: Institute of Physics and Physical Society*, 1966,77-87

[3.2] 杨桂通、粘塑性本构关系. «塑性力学进展»第5章，王仁，黄克智，朱兆祥主编，北京 中国铁道出版社，1988

[3.3] Cowper G R, Symonds P S. Strain hardening and strain-rate effects in the impact loading of cantilever beams. *Brown Univ. Division of Applied Mathematics Report* No.28, September, 1957

[3.4] Bodner S R, Symonds P S. Experimental and theoretical investigation of the plastic deformation of cantilever beam subjected to impulsive loading. *J. Appl. Mech.*, 1962,29(4):719-27

[3.5] Ting T C T. The plastic deformation of a cantilever beam with strain-rate sensitivity under impulsive loading. *J. Appl. Mech.*, 1964, 31:38

[3.6] Jones N. Influence of strain-hardening and strain-rate sensitivity on the Permanent deformation of impulsively loaded rigid-plastic beams. *Int.J.Solids Struct.*, 1971,7:1007-29

[3.7] Stronge W J, Yu T X. Dynamic plastic deformation in strain-hardening and strain-softening cantilevers. *Int. J. Solids Struct.*, 1989,25:769-82

[3.8] Martin J B. Dynamic bending collaPse of strain-softening cantilever beams. *Structural Failure, ed. T Wierzbicki and N Jones, Chapter* 9, 365-388, John Wiley

[3.9] Symonds P S. Plastic shear deformations in dynamic load problems. *Engineering Plasticity, ed. J Heyman and J A Leckie, Cambridge University Press*, 1968:647-664

[3.10] Liu J, Jones N.Experimental investigation of clamped beams-struck transversely by a mass. *Int.J. Impact Engng.*, 1987, 6(4):303-35

[3.11] 霍奇PG著，蒋咏秋，熊祝华译. 结构的塑性分析. 北京:科学出版社,1966

[3.12] Thomson W T. Theory of vibration with applications. *Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J.*, 1972

[3.13] Jones N, de Oliveira J G. The influence of rotatory inertia and transverse shear on the dynamic plastic behaviour of beams. *J. Appl. Mech.*, 1979, 46(2):303-10

[3.14] 余同希. 端头带有质量块的悬臂梁在冲击载荷下的剪切失效. 爆炸与冲击, 1983(2):97-104

[3.15] 余同希. 结构塑性动力响应中的大变形效应及其分析方法. «塑性力学和地球动力学文集»(余同希,王大钧主编),北京大学出版社,1990:124-131

[3.16] Ting T C T. Large deformation of a rigid, ideally plastic cantilever beam. *J. Appl. Mech.*, 1965, **32**:295-

[3.17] Symonds P S, Mentel T J. Impulsive loading of plastic beams with axial restraints. *J. Mech. Phy. Solid*, 1958, 6:186-202

[3.18] 王仁,熊祝华,黄文彬. 塑性力学基础. 北京:科学出版社,1982

[3.19] Symonds P S, Jones N. Impulsive loading of fully clamped beams with finite plastic deflections and strain-rate sensitivity. *Int. J. Mech. Sci.*, 1972, **14**:49-64

[3.20] Yu T X, Stronge W J. Large deflections of a rigid-plastic beam-on-foundation from impact. *Int. J. Impact Engng.*, 1990, **9**:115-126

[3.21] Chen F L, Yu T X. Analysis of large deflection dynamic response of rigid-plastic beams. *ASCE J. Eng. Mech.*, 1993, **119**, EM6: 1293-1307

[3.22] 余同希,陈发良. 用"膜力因子法"分析简支塑性圆板的大挠度动力响应. 力学学报,1990(5):221-228

[3.23] 陈发良 余同希. 正多边形板的塑性动力响应—小挠度分析和大挠度分析. 爆炸与冲击, 1991, **11**(2):105-116

[3.24] Yu T X, Chen F L. The large deflection dynamic response of rectangular plates. *Int. J. Impact Engng.*, 1992, **12**:603-612

[3.25] Duwez P E, Clark D S, Bohnenblust H F. The behaviour of long beams under impact loading. *J. Appl. Mech.*, 1950, **17**:27-34

[3.26] Symonds P S. A review of elementary approximation techniques for plastic deformation of pulse-loaded structures In Metal forming and impact mechanics, *ed S R Reid, Oxford:*

Pergamon Press, 1985:175-194

[3.27] Symonds P S, Frye C W G. On the relation between rigid-plastic and elastic-plastic predictions of response to pulse loading. *Int. J. Impact Engng.*, 1988,7:139-149

[3.28] Stronge W J, Hua Yunlong. Elastic effects on deformation of impulsively loaded elastoplastic beams. *Int. J. Impact Engng.*, 1990:253-262

[3.29] Symonds P S, Fleming W T Jr. Parkes revisited: on rigid-plastic dynamic structural analysis. *Int. J. Impact Engng.*, 1984, 2: [illegible]6

[3.30] Reid S R, Gui X G. On the elastic-plastic deformation of cantilever beams subjected to tip impact. *Int. J. Impact Engng.*, 1987,6:109-127

[3.31] Yu T X. Elastic effect in the dynamic plastic response of structures. *Chapter 9 in Structural Crashworthiness and Failure, ed. N. Jones and T. Wierzbicki, Elsevier.* 1993:341-384

[3.32] Wang X D, Yu T X. Parkes revisited: effect of elastic deformation at the root of a cantilever beam. *Int. J. Impact Engng.*, 1991, 11:[illegible]7-209

4 极值原理、模态解和界限定理

在第2章中介绍了梁、板、壳基本结构动力响应的某些刚塑性完全解。这些完全解对理解结构塑性动力响应的机制是很重要的，并为我们提供了理想刚塑性结构动力响应的变形历史和最终形状的详尽信息。同时也可看到，尽管我们已对材料性质、载荷情况和结构构形作了大量简化，寻求完全解还是一个十分繁冗的过程。而从工程应用的角度，人们十分需要既能较好反映结构动力响应机制、又简明实用的近似方法。本章要介绍的模态解和界限定理就属于这类近似方法。

作为近似方法的依据，塑性动力问题的一般理论(极值原理、唯一性定理等)在近三十年来也有了很大的发展。正如本书绪论中所指出，由于材料理想化上的相似性，动力问题的有关概念和原理同塑性极限分析原理有密切联系。这是本章介绍的另一内容。

本章讨论的内容大都采用第2章中所作的两项基本假定：理想刚塑性假定和小变形假定，4.3节的某些内容还与应变率效应和大变形有关。

为了对本章中所用到的符号作统一规定，首先叙述一下所研究的问题。考虑一结构体积为 V，表面为 S。表面 S_T 上给定外力 $p_i(\underline{X},t)$，$i=1,2,3$，$\underline{X}=\underline{X}_i$ 为结构表面上某点的坐标，t 为时间；其余表面 S_u 上给定速度边界条件。作用在结构上的体积力为 F_i。结构的位移场、速度场和加速度场分别为 u_i，$\dot{u}_i$ 和 $\ddot{u}_i$，广义应力场和相应的广义应变率场分别为 Q_j 和 $\dot{q}_j$，$j=1,\cdots,n$，n 为广义应力或广义应变率的个数。它们应满足全部基本方程，边界条件和初始条件。

4.1 极值原理和唯一性定理

本节首先介绍若干预备知识，其中主要是动力学虚功率原理，这是本章有关理论推导的基础。然后介绍两个极值原理和唯一性定理。

塑性动力学中有多种不同类型的变分原理，本节所介绍的是两个较常用的关于加速度的极值原理。除此之外还有关于应力的极值原理，Hamilton 型变分原理等，有兴趣的读者可参阅有关著作，如[4.1]。

4.1.1 预备知识

1. 运动许可场和动力许可场

若速度场 $\dot{u}_i$ 和相应的应变率场 $\dot{q}_j$ 在整个结构 V 上满足几何协调方程*，以及 S_u 上的速度边界条件，则称为是运动许可的(kinematically admissible)，并标以上标"C"。由 $\dot{u}_i$ 可求出 $\ddot{u}_i^c$，称为运动许可加速度场。

若广义应力场 Q_j^s，加速度场 $\ddot{u}_i^s$，连同作用在结构上的体积力 F_i 和 S_T 上的面力 p_i，满足运动方程和 S_T 上的应力边界条件，且在整个结构 V 上不违反屈服条件，则称这一组 Q_j^s 和 $\ddot{u}_i^s$ 为动力许可的(dynamically admissible)，相应的量标以上标"s"。屈服条件可用广义应力 Q_j 表示，

$$\Phi(Q_j)=0. \tag{4.1}$$

对于 Q_j^s，有 $\Phi(Q_j^s)\leqslant 0$。如果一组广义应力 Q_j^s，有

$$\Phi(Q_j^s)\leqslant 0, \quad \text{在 } V \text{ 上} \tag{4.2}$$

则称 Q_j^s 为一组"安全的"广义应力。显然 Q_j^s 是"安全的"。

从上面定义可以看到，加速度场可以是运动许可的，也可以是

* 本章中用到下标 i 时，总表示 $i=1,2,3$；用到下标 j 时，总表示 $j=1,\cdots,n$，n 为广义应力个数.

动力许可的。

2. *虚功率原理*

设 $\dot{u}_i$ 在 V 上连续，$\dot{q}_j$ 是运动许可的，$\dot{u}_i^a$ 和 Q_j^a 是动力许可的，但不要求 Q_j^a 处处不违反屈服条件，ρ 为材料体积密度，应用 d'Alembert 原理，动力条件下的虚功率原理可以表示为

$$\int_V F_i\dot{u}_i^a\mathrm{d}V+\int_{S_T}p_i\dot{u}_i^a\mathrm{d}S-\int_V\rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i^a\mathrm{d}V=\int_V Q_j^a\dot{q}_j^a\mathrm{d}V. \tag{4.3}$$

这里用到了指标符号的求和约定：同一项中重复出现的下标为求和下标，如 $F_i\dot{u}_i$ 相当于 $\sum_{i=1}^{3}F_i\dot{u}_i$，$Q_j^a\dot{q}_j^a$ 相当于 $\sum_{j=1}^{n}Q_j^a\dot{q}_j^a$。本章后面使用求和约定时，就不再加以说明了。

若 $\dot{u}_i$ 在 V 上有若干个切向速度间断面 S_1 时，虚功率原理应写成

$$\int_V F_i\dot{u}_i\mathrm{d}V+\int_{S_T}p_i\dot{u}_i\mathrm{d}S-\int_V\rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V Q_j^a\dot{q}_j\mathrm{d}V+\int_{S_1}\tau_i^a[\dot{u}_i]\mathrm{d}S, \tag{4.4}$$

其中 τ_i^a 为间断面上的应力向量，$[\dot{u}_i]$ 为速度间断值。

虚功率原理是一个普遍的基本原理，没有涉及到材料性质。作为虚功率原理的一个直接应用，下面推导在冲击载荷作用下，结构动能的变化率。

在冲击载荷作用下，结构在初始时刻受到一个冲量作用，其余时间结构上的外载为零，即有 $p_i=0$。将真实解的 $\dot{u}_i$，$\ddot{u}_i$，$\dot{q}_j$ 和 Q_j 代入(4.3)式，当不计体力时，有

$$-\int_V\rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V Q_j\dot{q}_j\mathrm{d}V. \tag{4.5}$$

上式右边的被积函数 $\mathscr{D}=Q_j\dot{q}_j$ 是单位体积的能量耗散率(或塑性功率)。对于理想塑性材料，若屈服面 $\Phi(Q_j)=0$ 是严格外凸的，Q_j 可由 $\dot{q}_j$ 唯一确定，即 $\mathscr{D}$ 由 $\dot{q}_j$ 完全确定。对于非严格外凸的

屈服条件，例如Tresca屈服条件，Q_j虽不是由$\dot{q}_j$唯一确定，但$Q_j\dot{q}_j$是由$\dot{q}_j$唯一确定的，其证明可参阅有关塑性力学书籍，例如文献[4.2]。所以可以写成

$$\mathscr{D}=Q_j\dot{q}_j=\mathscr{D}(\dot{q}_j), \tag{4.6}$$

并有

$$Q_j=\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial\dot{q}_j}. \tag{4.7}$$

注意到结构的动能为

$$K=\frac{1}{2}\int_V\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V, \tag{4.8}$$

(4.5)式可以写成

$$-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}=D, \tag{4.9}$$

其中$D\equiv\int\mathscr{D}\mathrm{d}V$为结构的能量耗散率。

3. Drucker 公设及其不等式

塑性力学中有著名的Drucker公设，并可导出相应的不等式[4.2]。Drucker公设及其不等式也可用广义应力和广义应变率的形式表述。

设有两组不违反屈服条件的广义应力Q_j和Q_j^a，即有$\Phi(Q_j)\leqslant 0,\Phi(Q_j^a)\leqslant 0$。根据Drucker公设，可导出下列不等式成立

$$(Q_j-Q_j^a)\dot{q}_j\geqslant 0, \tag{4.10}$$

其中$\dot{q}_j$为和Q_j相应的广义应变率。设与Q_j^a相应的广义应变率为$\dot{q}_j^a$，则可推出有

$$(Q_j-Q_j^a)(\dot{q}_j-\dot{q}_j^a)\geqslant 0. \tag{4.11}$$

4.1.2 动力学加速度极值原理(Martin原理)[4.8]

Martin于1972年给出了动力许可加速度场的一个极值原理[4.8]。

考虑一个结构，其表面 S_T 上给定外载荷 $p(\underline{X},t)$，其余边界 S_u 上速度为零。设 $\ddot{u}_i^a(\underline{X},t)$ 为一组动力许可加速度场，且存在一组相应的动力许可广义应力 Q_j^a，它们满足所有的运动方程和应力边界条件，在整个结构上有 $\Phi(Q_j^a)\leqslant 0$。Martin 指出，真实加速度场使下列泛函取极小值

$$J_1(\ddot{u}_i^a)=\int_V \rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i\mathrm{d}V, \tag{4.12}$$

其中 $\dot{u}_i$ 为 t 时刻结构的真实速度场。

证明　设 $\ddot{u}_i$ 为真实加速度场，有

$$J_1(\ddot{u}_i^a)-J_1(\ddot{u}_i)=\int_V \rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i\mathrm{d}V-\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V. \tag{4.13}$$

通过 $\dot{u}_i$ 可求出 t 时刻的广义应变率 $\dot{q}_j$，将 $\dot{u}_i$、$\dot{q}_j$ 和 $\ddot{u}_i^a$、Q_j^a 代入虚功率原理(4.3)式，得

$$\int_V F_i\dot{u}_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_T} p_i\dot{u}_i\mathrm{d}S-\int_V \rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V Q_j^a\dot{q}_j\mathrm{d}V. \tag{4.14}$$

若将真实解 $\ddot{u}_i$、$\dot{q}_j$、$\ddot{u}_i$ 和 Q_j 代入(4.3)式，则得到

$$\int_V F_i\dot{u}_i\,\mathrm{d}V+\int_{S_T} p_i\dot{u}_i\mathrm{d}S-\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V Q_j\dot{q}_j\mathrm{d}V. \tag{4.15}$$

(4.15)和(4.14)式相减，得到

$$\int_V \rho\ddot{u}_i^a\dot{u}_i\,\mathrm{d}V-\int_V \rho\ddot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V (Q_j-Q_j^a)\dot{q}_j\mathrm{d}V. \tag{4.16}$$

因为 Q_j 是真实解，Q_j^a 是动力许可的，因而都不违反屈服条件，根据 Drucker 公设不等式(4.10)式则有

$$(Q_j-Q_j^a)\cdot\dot{q}_j\geqslant 0, \tag{4.17}$$

这说明(4.16)式的右手边总是大于或等于零。比较(4.13)和(4.16)式，得出

$$J_1(\ddot{u}_i^a)\geqslant J_1(\ddot{u}_i),$$

证毕。

4.1.3 运动学加速度极值原理(Тамуж原理)

苏联学者Тамуж（英译Tamuzh)于1962年提出了关于运动许可加速度场的一个极值原理。[4.3,4.4]

设 t 时刻结构速度场为 $\dot{u}_i(\underline{X},t)$，相应的广义应变率场为 $\dot{q}_j(\underline{X},t)$；$\ddot{u}_i^*(\underline{X},t_1)$ 为运动许可速度场，$t_1 \geqslant t$，且有 $\ddot{u}_i^*(\underline{X},t) = \dot{u}_i(\underline{X},t)$。由 $\ddot{u}_i^*$ 可求出 $\ddot{u}_i$ 和 $\ddot{q}_j^*$，并从而求出 $\ddot{q}_j^*$。Тамуж 指出，在所有的运动许可加速度场 $\ddot{u}_i^*$ 中，真实加速度场使下列泛函取极小值

$$J_2(\ddot{u}_i^*) = \frac{1}{2}\int_V \rho \ddot{u}_i^* \ddot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_V Q_j^* \ddot{q}_j^* \,\mathrm{d}V - \int_V F_i \ddot{u}_i^* \mathrm{d}V - \int_{S_T} p_i \ddot{u}_i^* \mathrm{d}S. \tag{4.18}$$

式中出现的 Q_j^* 系根据不同情况确定。对于严格外凸屈服面：(i) 在时刻 t 有 $\dot{q}_j = \dot{q}_j^* \neq 0$(即塑性变形区)，$Q_j^*$ 可根据流动法则求出，且有 $Q_j^* = Q_j$；(ii) 在时刻 t，$\dot{q}_j = \dot{q}_j^* = 0$，且 $\ddot{q}_j^* = 0$，Q_j^* 可任意取值，只要不违反屈服准则；(iii) 在时刻 t，$\dot{q}_j = \dot{q}_j^* = 0$，但 $\ddot{q}_j^* \neq 0$，这时可将 $\ddot{q}_j^*$ 看成 $\dot{q}_j^*$，通过流动法则定出 Q_j^*，这种做法的理由是对于严格外凸屈服面，应力取决于应变率的方向，当应变率为零时，在该处要发生的应变率方向和 $\dot{q}_j$ 相同。对于非严格外凸屈服面，情况类似于(4.6)式的分析，我们不能唯一确定 Q_j^*，但可以确定 $Q_j^*\ddot{q}_j^*$。

证明　虚功率原理也就是虚速度原理。可以证明若以运动许可加速度场 $\ddot{u}_i^*$ 及相应的应变加速率 $\ddot{q}_j^*$ 代替 $\dot{u}_i^*$ 及 $\dot{q}_j^*$，可得类似于虚速度原理的虚加速度原理

$$\int_V F_i \ddot{u}_i^* \mathrm{d}V + \int_{S_T} p_i \ddot{u}_i^* \mathrm{d}S - \int_V \rho \ddot{u}_i^* \ddot{u}_i^* \mathrm{d}V = \int_V Q_j^* \ddot{q}_j^* \mathrm{d}V. \tag{4.19}$$

真实解 $\ddot{u}_i$，$\ddot{q}_j$ 和 Q_j 既是运动许可的，又是动力许可，将它们代入(4.19)式，得到

$$\int_V F_i\ddot{u}_i\mathrm{d}V+\int_{S_T}p_i\ddot{u}_i\mathrm{d}S-\int_V\rho\ddot{u}_i\ddot{u}_i\mathrm{d}V=\int_V Q_j\ddot{q}_j\mathrm{d}V\ . \tag{4.20}$$

由(4.18)和(4.20)式,有

$$J_2(\ddot{u}_i)=-\frac{1}{2}\int_V\rho\ddot{u}_i\ddot{u}_i\mathrm{d}V\ . \tag{4.21}$$

利用真实解和运动许可加速度场,还可由(4.19)式得到

$$\int_V F_i\ddot{u}_i'\,\mathrm{d}V+\int_{S_T}p_i\ddot{u}_i'\mathrm{d}S-\int_V\rho\ddot{u}_i\ddot{u}_i'\,\mathrm{d}V=\int_V Q_j\ddot{q}_j'\mathrm{d}V\ . \tag{4.22}$$

最后由(4.18)、(4.21)和(4.22)式推得

$$J_2(\ddot{u}_i')-J_2(\ddot{u}_i)=\frac{1}{2}\int_V\rho(\ddot{u}_i-\ddot{u}_i')(\ddot{u}_i-\ddot{u}_i')\mathrm{d}V+\int_V(Q_j'-Q_j)\ddot{q}_j'\mathrm{d}V\ . \tag{4.23}$$

显然,(4.23)式右手边第一项是非负的,第二项也是非负的. 因为若 $\ddot{q}_j'\neq0$,有 $Q_j'=Q_j$; 若 $\ddot{q}_j'=0$,则 $\ddot{q}_j$ 被看作 $\dot{q}_j$,它与屈服面正交且向外,或者 $\ddot{q}_j=0$。因此(4.23)式的右手边是非负的,即有

$$J_2(\ddot{u}_i')\geqslant J_2(\ddot{u}_i)\ ,$$

证毕。

(4.18)式的表述中没有考虑 $\ddot{u}_i$ 有间断的情况。当加速度场有间断时,虚加速度原理应计入间断项.本原理的表述也要加上有关的间断项,读者可参阅有关的书籍或文献,如[4.1]。

Tamym 原理常用来推导结构的运动方程。特别是情况比较复杂时,应用泛函(4.18)式取极值,可以正确地导出运动方程[4.5]。

4.1.4 解的唯一性定理

关于塑性动力学中解的唯一性定理,Martin[4.6] 对刚塑性、粘塑性、弹塑性和弹粘塑性材料都给出了证明。我们这里仅介绍关于刚塑性材料在小变形情况下解的唯一性的证明。并且假定:

(i) 材料满足Drucker 公设，也就是(4.10)和(4.11)式成立；(ii) 结构中不存在运动的速度间断面。对于梁、板、壳等工程结构的响应问题，主要变形是弯曲，不存在速度间断问题，而对于应力波问题和穿甲问题，则要注意这个条件。

考虑本章开始所描述的结构在动载荷作用下的响应问题。假定有两组解答，一组为 $\dot{u}_i^a$，$\ddot{u}_i^a$，$\dot{q}_j^a$，Q_j^a，另一组为 $\dot{u}_i^b$，$\ddot{u}_i^b$，$\dot{q}_j^b$，Q_j^b。这两组解答分别都满足所有的运动方程、几何关系、本构方程、以及 S_p 和 S_u 上的边界条件，并且都满足 $t=0$ 时的初始条件，即 $\dot{u}_i^a(\underline{X},0)=\dot{u}_i^b(\underline{X},0)=\dot{u}_i^0$。

因为在小变形条件下，运动方程、几何关系是线性的，上述两组解之差也将满足这些方程，以及 S_p 上零载荷和 S_u 上零速度的边界条件，所以对这两组解之差可以应用虚功率原理(4.3)式，并得到

$$-\int_V \rho(\ddot{u}_i^a-\ddot{u}_i^b)(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\mathrm{d}V = \int_V (Q_j^a-Q_j^b)(\dot{q}_j^a-\dot{q}_j^b)\mathrm{d}V, \tag{4.24}$$

此式对于 $t\geqslant 0$ 的任何时刻都成立。定义

$$\Delta \equiv \frac{1}{2}\int_V \rho(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)(\dot{u}_i^a-\dot{u}_i^b)\mathrm{d}V, \tag{4.25}$$

(4.24)式可以写成

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t} = -\int_V (Q_j^a-Q_j^b)(\dot{q}_j^a-\dot{q}_j^b)\mathrm{d}V. \tag{4.26}$$

因为 Q_j^a 和 Q_j^b 是本问题的两组应力解答，所以不违反屈服条件，根据(4.11)式，(4.26)式的右边被积函数为非负函数，因此 Δ 是 t 的非增函数。根据 Δ 的定义(4.25)式，总有 $\Delta\geqslant 0$。而在初始时刻 $t=0$，有 $\dot{u}_i^a(\underline{X},0)=\dot{u}_i^b(\underline{X},0)=\dot{u}_i^0$，所以 $\Delta(0)=0$。因此当 $t>0$ 时，恒有 $\Delta=0$。由此可推出这两组解答的速度相同，加速度也相同。而在速度场是连续的且连续可微的条件下，应变率也是

相同的。

应力场的唯一性与本构关系有关。对于弹塑性或弹粘塑性材料，可以证明速度场和应力场都是唯一的。对于刚塑性或刚粘塑性材料，当屈服面严格外凸时，除刚性区外，也有应力的唯一性。若屈服面不是严格外凸的，则在平的屈服面部分应力可以不唯一。

4.2 模态解——基本原理

4.2.1 模态解的思想

从第二章典型刚塑性完全解的实例中，可以看到许多结构的响应都有这样的特点：在响应的初始阶段，变形机构中包含有移行塑性铰(或铰线)，这时结构速度的空间分布形式随时间变化；这一阶段之后，变形机构中只包含驻定塑性铰(或铰线)，结构的响应趋于一种速度的空间分布形式不随时间变化的模态。

从数学上来说，速度的空间分布不随时间变化，意味着速度表达式可以写成时间和空间变量分离的形式，即

$$\dot{w}_i^*(X,t)=\dot{w}^*(t)\phi_i(X), \tag{4.27}$$

式中 $\phi_i(X)$ 表示速度的空间分布，也就是速度模式，或称为形状函数。$\phi_i(X)$ 通常要规范化，使得 $\dot{w}^*(t)$ 表示结构上某特征点的速度随时间变化的历程。上标 "*" 代表与模态解有关的量，下同。

模态解要满足全部基本方程和边界条件，处处不违反屈服条件，但不一定满足初始条件。对于冲击载荷作用下的理想刚塑性结构，在小变形假定下且不计体力，其运动方程和几何关系是线性齐次的，一般可以有这种分离变量形式的解答。速度模式 $\phi_i(X)$ 要根据模态解的这些性质来确定。从第2章的典型完全解可以看到，当外载超过静极限载荷不多时，静载下的破坏机构就是一种

模态形式。对于复杂结构，可以通过实验观察或依据极值原理（见4.3.3）来确定模态。下一节将介绍的关于模态解的 Lee 极值原理给出了确定模态的一个准则。应当强调的是，塑性响应的模态和弹性响应模态在概念上是不同的。

当模态 $\phi_i(X)$ 以某种方式取定后，剩下的问题就是求 $\dot{w}^*(t)$ 了。这就把原来无限自由度的问题简化为一个单自由度系统的问题，这就是 Martin 和 Symonds 于1966年提出的关于理想刚塑性结构在冲击载荷作用下的模态近似解的基本思想[4.7]。这里模态 $\phi_i(X)$ 在整个响应过程中不变，因此也称为恒定模态解。

由(4.27)式可求得加速度 $\ddot{u}_i^*(X,t)$，并且可以写成

$$\ddot{u}_i^*(X,t)=\Omega(t)\cdot\dot{w}_i^*(X,t), \tag{4.28}$$

这表明在每一时刻，恒定模态解的速度和加速度具有相同的空间分布形式。

下面我们利用虚功率原理求 $\dot{w}^*(t)$。在冲击载荷作用下，不计体力 F_i，由虚功率原理可以推出(4.5)式。因为模态解 $\dot{u}_i^*$ 满足全部方程，既是运动许可的又是动力许可的（但一般不是完全解，因为不一定满足初始条件），可将模态解(4.27)式代入(4.5)式，得

$$-\ddot{w}_i^*\dot{w}_i^*\int_V\rho\phi_i^*\phi_i^*\mathrm{d}V=\int_V Q_j^*\dot{q}_j^*\mathrm{d}V, \tag{4.29}$$

其中 Q_j^* 和 $\dot{q}_j^*$ 为对应于模态解(4.27)式的广义应力和广义应变率。$\dot{q}_j^*$ 可从 $\dot{u}_i^*=\dot{w}^*\phi_i$ 求出，并写成分离变量形式

$$\dot{q}_j^*(X,t)=\dot{w}^*(t)k_j^*(X). \tag{4.30}$$

将(4.30)式代入(4.29)式，求得

$$\ddot{w}^*(t)=-\int_V Q_j^*k_j^*\,\mathrm{d}V\Big/\int_V\rho\phi_i\phi_i\mathrm{d}V\equiv-A^*. \tag{4.31}$$

分析(4.31)式可以发现，$\ddot{w}^*$ 实际上与时间无关，是个常数记为 $-A^*$。这是因为对于模态解，$\dot{q}_j^*$ 的方向（即 $\dot{q}_j^*$ 各分量间的比例）不随时间变化，而对于理想刚塑性材料，Q_j^* 与 $\dot{q}_j^*$ 的大小无

关，只取决于 $\dot{q}_j^*$ 的方向，因此也不随时间变化。这表明，若在响应过程中模态形式不变，它实际上是一个单自由度匀减速运动。反映结构上特征点速度的 $\dot{w}^*(t)$ 也就可以写成

$$\dot{w}^*(t) = \dot{w}_0^* - A^*(t), \tag{4.32}$$

式中 $\dot{w}_0^*$ 为 $\dot{w}^*$ 的初值。对应于模态解的结构响应时间 t_f^* 和特定点的最终位移 w_f^* 为

$$t_f^* = \dot{w}_0^*/A^*, \tag{4.33}$$

$$w_f^* = \frac{1}{2}\dot{w}_0^* t_f^* = (\dot{w}_0^*)^2/2A^* = K_0^* \Big/ \int_V Q_j^* \dot{q}_j^* \mathrm{d}V, \tag{4.34}$$

其中 $K_0^* = \frac{1}{2}(\dot{w}_0^*)^2 \int_V \rho \phi_i^* \phi_i^* \mathrm{d}V$ 是模态解的初始动能。

4.2.2 收敛性定理和 $\min \Delta_0$ 技术

上述关于模态解基本思想的介绍中尚遗留两个问题：(i) 模态解和真实解之间的关系；(ii) 如何选取初速度 $\dot{w}_0^*$，才能使模态解在某种意义下最佳逼近真实解。

Martin 提出的模态解的收敛性定理[4.8]是对第一个问题的成功回答。这是他根据解的唯一性定理(4.1.4)的证明引伸得到的。

考虑两个速度场：真实解 $\dot{u}_i(X;t)$ 和模态解 $\dot{u}_i^*(X,t)$，它们相应的广义应力和广义应变率分别为 Q_j、$\dot{q}_j$ 和 Q_j^*、$\dot{q}_j^*$。因为模态解满足全部方程和边界条件，所以这两个解之差也满足除了本构关系外的全部方程，以及 S_T 上零载荷和 S_u 上零速度的边界条件。仿照唯一性定理的证明，对这两个解之差可以应用虚功率原理(4.3)式，并得到

$$-\int_V \rho(\dot{u}_i - \dot{u}_i^*)(\dot{u}_i - \dot{u}_i^*)\,\mathrm{d}V = \int_V (Q_j - Q_j^*)(\dot{q}_j - \dot{q}_j^*)\mathrm{d}V. \tag{4.35}$$

按照(4.25)式的形式定义 $\Delta(t)$

$$\Delta(t)=\frac{1}{2}\int\rho(\dot{u}_i-\dot{u}_i^*)(\dot{u}_i-\dot{u}_i^*)\mathrm{d}V\,. \tag{4.36}$$

这种定义的 Δ 是真实解同模态解之间差别的一种度量。类似于唯一性定理的证明，容易由(4.35)和(4.36)式得到

$$\frac{\mathrm{d}\Delta}{\mathrm{d}t}=\int_V\rho(\dot{u}_i-\dot{u}_i^*)(\ddot{u}_i-\ddot{u}_i^*)\mathrm{d}V$$

$$=-\int_V(Q_j-Q_j^*)(\dot{q}_j-\dot{q}_j^*)\mathrm{d}V\leqslant 0. \tag{4.37}$$

上式表明 $\Delta(t)$是时间的非增函数，总有 $\Delta_0\equiv\Delta(0)\geqslant\Delta(t)$。根据(4.36)式，$\Delta$是非负的，这表明 Δ 的数值随时间而减小(或不变)。由此可得出真实解同模态解间的差别随时间的增长而减小(或不变)，即真实解总是趋于模态形式解。因此我们得到如下的收敛性定理：

受冲击载荷作用的刚塑性结构，不管其响应如何开始，其速度场总是趋于模态形式。

这个定理反映这样的物理事实：当一个刚塑性结构获得一个初速度后，其速度模式可经过一系列演变，但最后将趋于一种速度模式(即模态解)，并保持这种速度模式直至停止。实验和数值计算都证实了结构具有这种性质。例如悬臂梁端部受冲击载荷作用的 Parkes 问题，初始阶段为移行铰从端部向根部运动，当铰到达根部后其响应就变为整根梁绕根部的转动，直至耗尽所有的动能，这后一阶段就是模态运动。

现在来回答如何选取初速度 $\dot{w}_0^*$ 的问题。从收敛性定理的证明可以看到，Δ 反映真实解同模态解之差，Δ 又是随时间非增函数，$\Delta\geqslant 0$。若 $\Delta_0\equiv\Delta(0)$ 比较小，在以后响应过程中，Δ 也会比较小。因此 Martin 和 Symonds 提出使 Δ_0 取最小值来选取 $\dot{w}_0^*$ 的方法[4.7]，即 $\min\Delta_0$ 技术。Δ_0 可由(4.36)式得到

$$\Delta_0=\frac{1}{2}\int_V\rho(\dot{u}_i^0-\dot{w}_0^*\phi_i)(\dot{u}_i^0-\dot{w}_0^*\phi_i)\mathrm{d}V\,, \tag{4.38}$$

式中 $\dot{u}_i^0 \equiv \dot{u}_i(\underline{X},0)$为结构的初始速度分布。根据 $\mathrm{d}\Delta_0/\mathrm{d}\dot{w}_\delta^* = 0$，由(4.38)式得到

$$\dot{w}_\delta^* = \int_V \rho \dot{u}_i^0 \phi_i \mathrm{d}V \Big/ \int_V \rho \phi_i \phi_i \mathrm{d}V. \tag{4.39}$$

将(4.39)式代入(4.38)式，得到 Δ_0 的最小值 $\Delta_\delta^{\min}$，容易证明

$$\Delta_\delta^{\min} = K_0 - K_\delta^*, \tag{4.40}$$

其中 K_0 和 K_δ^* 分别为结构初始动能和模态解所具有的初始动能，

$$K_0 = \frac{1}{2}\int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^0 \mathrm{d}V, \tag{4.41}$$

$$K_\delta^* = \frac{1}{2}(\dot{w}_\delta^*)^2 \int_V \rho \phi_i \phi_i \mathrm{d}V. \tag{4.42}$$

模态解和真实解的初始动能一般不相等，即模态解不匹配动能。最近周青等人指出 $\min\Delta_0$ 技术实质上是动量矩匹配[4.9]。

4.2.3 模态近似方法的步骤和例子

根据以上叙述的模态解基本原理，我们可以将模态近似方法的求解步骤罗列于下：

(i) 选择结构响应的速度模式 $\phi_i(\underline{X})$，以及表征结构模态运动特点的特征点，将整个结构响应近似地表示为一个单自由度匀减速运动；

(ii) 根据 $\min\Delta_0$ 技术，(4.39)式，选取特征点的初速度 $\dot{w}_\delta^*$；

(iii) 应用(4.31)式计算模态运动的减速度 $-A^*$；

(iv) 计算广义应力 Q_j^*，校核所求的模态解是否"安全"；

(v) 应用(4.33)、(4.34)式，计算响应时间和最终位移。

作为一个例子，这里给出 Parkes 问题的模态解。前已提到，这个问题的模态运动就是悬臂梁绕根部作刚体转动。参照图2.5，这个模态解的速度 $\dot{W}^*$ 可写成

$$\dot{W}^* = V^*(1 - X/L), \tag{4.43}$$

速度模式 $\phi = 1 - X/L$，V^* 为端部集中质量速度。

根据 $\min\Delta_0$ 技术，由(4.39)式求得 V^* 的初始值 V_δ^*，

$$V_\delta^* = GV_0 \Big/ \left[G + \int_0^L \rho\left(1-\frac{X}{L}\right)^2 \mathrm{d}X \right] = 3\gamma V_0/(1+3\gamma), \quad (4.44)$$

其中 $\gamma \equiv G/\rho L$ 为质量比。模态运动是匀减速运动，减速度为(4.31)式定义的 A^* 所描述。为此要首先求出模态解的广义应变率 $\dot{q}_f^*$，对于本例广义应变率只有相对转角率，仅在悬臂梁根部不为零，即有

$$\dot{q}^*(X,t) = \begin{cases} 0, & X < L, \\ V^*/L, & X = L. \end{cases} \quad (4.45)$$

在根部的广义应力 Q_f^* 就等于塑性极限弯矩 M_P。这样，由(4.31)式求得

$$\dot{V}^* = -A^* = -\frac{3\gamma M_P}{(1+3\gamma)GL}. \quad (4.46)$$

模态解的加速度为

$$\ddot{W}^* = \dot{V}^*(1-X/L). \quad (4.47)$$

利用截面法可以求出悬臂梁任一截面的弯矩 $M(X)$，容易验证对于任意的质量比 γ 在任何时刻，都有 $|M(X)| \leqslant M_P$，即这个模态解是“安全的”。

由(4.33)式可求出模态解的响应时间 t_f^*，

$$t_f^* = GV_0L/M_P, \quad (4.48)$$

悬臂梁端部的最终挠度为

$$\Delta_f^* \equiv W^*(0,t_f^*) = \frac{3\gamma GV_0^2L}{2(1+3\gamma)M_P}.$$

采用 2.1.3 中的无量纲参数，悬臂梁端部的无量纲最终挠度 δ_f^* 为

$$\delta_f^* \equiv \Delta_f^*/L = \frac{3\gamma}{1+3\gamma}\cdot e_0, \quad (4.49)$$

其中 e_0 为无量纲初始动能，见(2.116)式。

图 4.1 给出了完全解的 δ_f 和模态解的 δ_f^* 随 γ 变化的情况。可以看到，随 γ 增大，δ_f^* 逼近 δ_f。这是可以预计到的。由 2.1.3

的结果可知，当 $\gamma \ll 1$ 时，大部分能量耗散在第一相，其响应主要为移行铰运动；而当 $\gamma \gg 1$ 时，大部分能量耗散在第二相，即绕根部转动，也就是主要是模态运动。

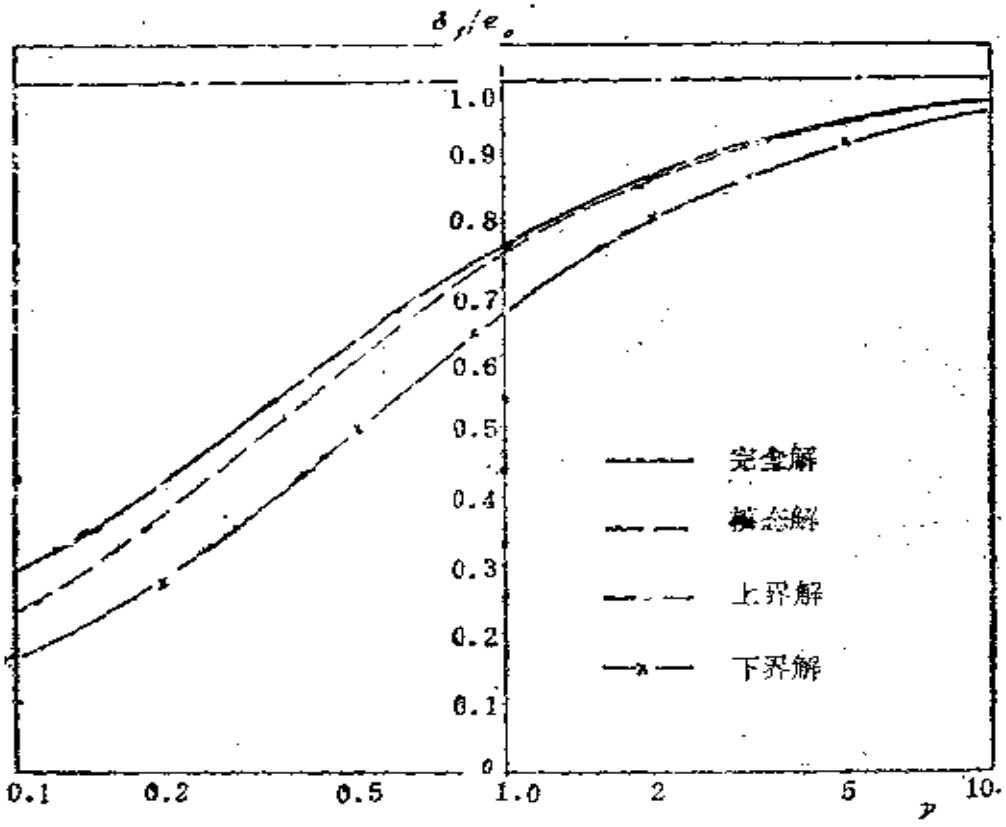


图 4.1

本例中模态解初始速度 V_0^* 是根据 $\min\Delta_0$ 技术，由(4.44)式给出的。而(4.44)式可以写成

$$GV_0^*L+\int_0^L \rho V_0^*\left(1-\frac{X}{L}\right)(L-X)\mathrm{d}X = GV_0L. \quad (4.50)$$

此式右手边是初始时刻梁关于根部的动量矩，而左手边为模态解在初始时刻关于根部的动量矩。因此，这个例子说明了 $\min\Delta_0$ 技术是“动量矩匹配”。

4.3 模态解——进一步发展

4.3.1 高阶模态

塑性动力响应的模态是结构本身的性质，同作用其上的载荷无关，这和弹性振动模态相同。一个结构通常有一族塑性模态、并根据速度分布形式的复杂程度分别称为一阶模态，二阶模态等等。一阶模态也称为基本模态(或主模态)，通常是最重要的，其他模态都是高阶模态。在某些情况下，高阶模态可能比较重要。

图 4.2(a)、(b)、(c)分别为两端固支梁的一、二、三阶模态，其中一、三阶为对称形式，二阶为反对称形式。二阶和三阶模态的

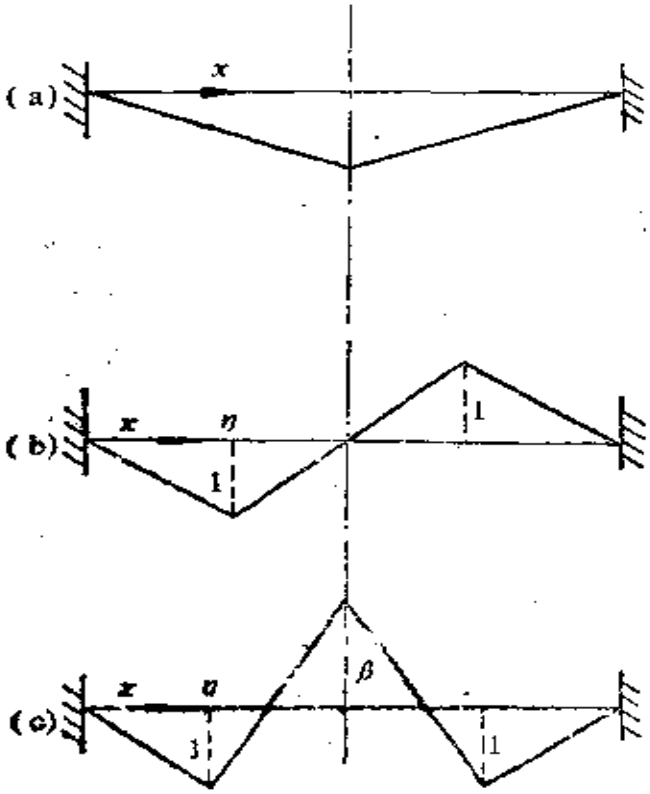


图 4.2

形状由参数 η 和 β 决定。上一节已经指出，模态解满足全部方程和边界条件，同时是"安全的"，模态的形状就是根据模态解的这些性质确定的。如何确定这个问题中的参数 η 和 β，可参阅文献[4.10]。另外，图 4.2 所示的一、二、三阶模态是正交的，但是这不具有普遍性，从理论上来说，并不要求不同阶的塑性模态之间正交，这和弹性振动模态的性质不同。

对于塑性动力响应，模态解不是以不同阶模态叠加的形式出现的，它只能以基本模态或某一高阶模态的形式出现，这与弹性振动中模态可以叠加是根本不同的。那么塑性动力响应的模态解究竟应选取何种模态就值得研究，也就是要研究最优模态和选择最优模态的准则的问题[4.11]，这个问题并未很好解决。在所有的模态中，基本模态具有特殊意义，往往是最可取的模态。但是，如果初速度分布很接近某一高阶模态，则模态解可取这一高阶模态，并得到较好的结果，相反地，若选用基本模态，则误差可能比较大[4.12]。

高阶模态比低阶模态有更多的塑性铰（或塑性变形区），结构的能量耗散率相应地也比较大，能吸收的能量也更多。而基本模态则具有最小的结构能量耗散率。对能量吸收装置而言，如果其设计能够激发高阶模态响应，就会具有较高的效率。

塑性模态还有稳定和不稳定之别。对于稳定模态当初速度有些偏离时，其响应过程会逐渐趋于该模态形式。而不稳定模态正好相反，当初速度有些偏离该模态形式时，以后偏离就会越来越大。通常基本模态是稳定的，高阶模态是不稳定的。

4.3.2 考虑应变率效应的模态解方法

前已指出，常用的工程结构材料（如软钢）具有明显的应变率效应。而反映材料应变率效应的刚粘塑性本构关系是非齐次的。若材料的本构关系是非齐次的，就不存在形如(4.27)式的分离变量形式的恒定模态解。为了使模态解能够考虑应变率效应，可以采用

本节后面介绍的瞬时模态解，或者采用Symonds提出的齐次粘性本构关系匹配刚粘塑性本构关系[4.13]。

在3.1我们介绍了表示材料刚粘塑性性质常用的Cowper-Symonds方程。以梁弯曲为例，参照(3.6)式，Cowper-Symonds方程可写成

$$\begin{cases} M_{PD}/M_P = 1 + (\dot{\kappa}/D_1)^{\frac{1}{P}}, & \dot{\kappa} \neq 0; \\ -1 < M_{PD}/M_P < 1, & \dot{\kappa} = 0; \end{cases} \tag{4.51}$$

其中 M_P 为静态塑性极限弯矩，M_{PD} 为动态塑性极限弯矩，$\dot{\kappa}$ 为曲率变化率，D_1 和 P 为材料常数。Symonds提出利用下列的齐次粘性关系匹配(4.51)式

$$M_{PD}/M_P = \mu(\dot{\kappa}/D')^{\frac{1}{\nu P}}, \tag{4.52}$$

式中参数 μ 和 ν 根据两种本构关系在选定的匹配点具有相同的函数值和斜率值定出。对于冲击载荷问题(即当 $t>0$ 时、结构上的载荷为零)，利用(4.52)式本构关系，运动方程是可分离变量的，若边界条件也可以分离变量，则可以有形如(4.27)式的恒定模态解。利用这种方法，在[4.13]中Symonds给出了考虑应变率情况下的Parkes问题的模态解。这时的模态不再是如(4.23)式所给出的那样简单线性函数，Symonds采用了一套叠代算法确定模态，叠代过程收敛很快。这种解法对原Parkes解有较大改进，而比Ting的算法(3.1)要简单得多。

4.3.3 模态解的极值原理

塑性动力学中有各种极值-变分原理，它们适用于不同的材料和结构类型。4.1中介绍的极值原理，真实解使得满足一定要求的运动许可加速度场或动力许可加速度场的某种泛函取极值。这里要介绍的模态极值原理，通过所定义的泛函在一定条件下取极值，从运动许可速度场中选出满足全部方程的模态形式的解。

模态解具有分离变量的形式(4.27)式

$$u_i^*(X,t)=w^*(t)\phi_i(X) \tag{4.53}$$

根据(4.28)式，上述形式的模态解的速度和加速度空间分布形式相同，

$$\dot{u}_i^*(X,t)=\Omega(t)\cdot\dot{u}_i^*(X,t)。 \tag{4.54}$$

(4.54)式是表示模态响应的另一种等价的形式。

Lee对不同材料类型的结构的模态响应作了全面研究[4.14]，分别提出了极值-变分原理。这里只介绍理想刚塑性结构的模态解条件极值原理，也称Lee极值原理。

设 $\dot{u}_i$、$\dot{q}_j$ 为运动许可的，定义泛函(Lee泛函)

$$J_L(\dot{u}_i)=\int_V \mathscr{D}(\dot{q}_j)\mathrm{d}V-\int_{S_T} p_i\dot{u}_i\mathrm{d}S-\int_V F_i\dot{u}_i\mathrm{d}V, \tag{4.55}$$

其中 $\mathscr{D}$ 为(4.6)式定义的单位体积能量耗散率。Lee证明了在动能水平相同的条件下，

$$K=\frac{1}{2}\int_V \rho\dot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V=\text{const}, \tag{4.56}$$

模态形式的解答(4.54)式使泛函 $J_L(\dot{u}_i)$ 取极值。

这个原理可通过虚功率原理和模态解的性质(4.54)式给以证明，详见[4.14]。关于这个泛函极值的性质有许多人研究过[4.15-4.17]，这里简单叙述一下主要结论。

(1) 加载情况(载荷大于静极限载荷)，有唯一的模态解，它使得泛函(4.55)式达到全局最小值。利用虚功率原理(4.3)式，有

$$\int_{S_T} p_i\dot{u}_i^*\,\mathrm{d}S-\int_V \rho\ddot{u}_i^*\dot{u}_i\mathrm{d}V+\int_V F_i\dot{u}_i^*\mathrm{d}V=\int_V Q_j^*\dot{q}_j\mathrm{d}V。 \tag{4.57}$$

由(4.55)和(4.57)式容易得到

$$J_L(\dot{u}_i^*)=-\int_V \rho\ddot{u}_i^*\dot{u}_i^*\mathrm{d}V=-\frac{\mathrm{d}K^*}{\mathrm{d}t}, \tag{4.58}$$

其中 K^* 是模态解的动能。在加载情况下，$\mathrm{d}K/\mathrm{d}t\geqslant 0$，$J_L(\dot{u}_i^*)$

是最小值表示 dK^*/dt 为最大值。这意味着在加载时，模态响应是这样一种最不费力的路径，它使得结构动能增加的速度最快，赋于结构最多的动能。

（2）在冲击载荷作用下，不计体力 F_i 时，泛函（4.55）式可写成

$$J_L(\dot{u}_i^*)=\int_V \mathscr{D}(\dot{q}_j^*)dV\equiv D, \tag{4.59}$$

D 为结构能量耗散率。根据 Lee 极值原理，在动能水平相同的条件下，模态解使得结构能量耗散率取极值。这种极值可能是非解析极点（角点）或驻值，而驻值可能对应于局部极大、局部极小或鞍点，因而可能不只有一种模态。不同模态的能量耗散率不同，其中有一种模态给出 D 的全局最小值，这就是基本模态（或主模态）。在冲击载荷作用下 $dK/dt\leqslant 0$，当响应以主模态形式进行时，D 最小，也就是动能变化率 $|dK/dt|$ 为最小。这表明结构以这种方式运动时，能持续得最久。这是 4.4 中时间上限定理的依据。

Lee 极值原理为确定模态形式提供了一个方法[4.18]。假定在时刻 t，速度场可用参数 $\alpha(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 表示，

$$\dot{u}_i^*=V^*(t)\phi_i(X,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=V^*(t)\phi_i(\underline{X},\alpha), \tag{4.60}$$

其中 $V^*(t)$ 是 t 时刻结构上某特定点的速度，ϕ_i 是要确定的形状函数。根据所假设的速度场，Lee 泛函和结构动能可分别表示为

$$\begin{cases} J_L(\dot{u}_i^*)=f(\alpha)V^*, \\ K(\dot{u}_i^*)=g(\alpha)(V^*)^2, \end{cases} \tag{4.61}$$

由上式，Lee 泛函可进一步表示为

$$J_L(\dot{u}_i^*)=f(\alpha)\sqrt{K}/\sqrt{g(\alpha)}. \tag{4.62}$$

因为 Lee 极值原理是在动能为常数的条件下给出的，所以 Lee 泛函值极问题就归结为求下列多元函数 $J_K(\alpha)$ 的极值

$$J_K(\alpha)=f(\alpha)/\sqrt{g(\alpha)}. \tag{4.63}$$

由 $J_E(\alpha)$的极值条件给出参数 α，从而确定形状函数 ϕ。

4.3.4 瞬时模态解

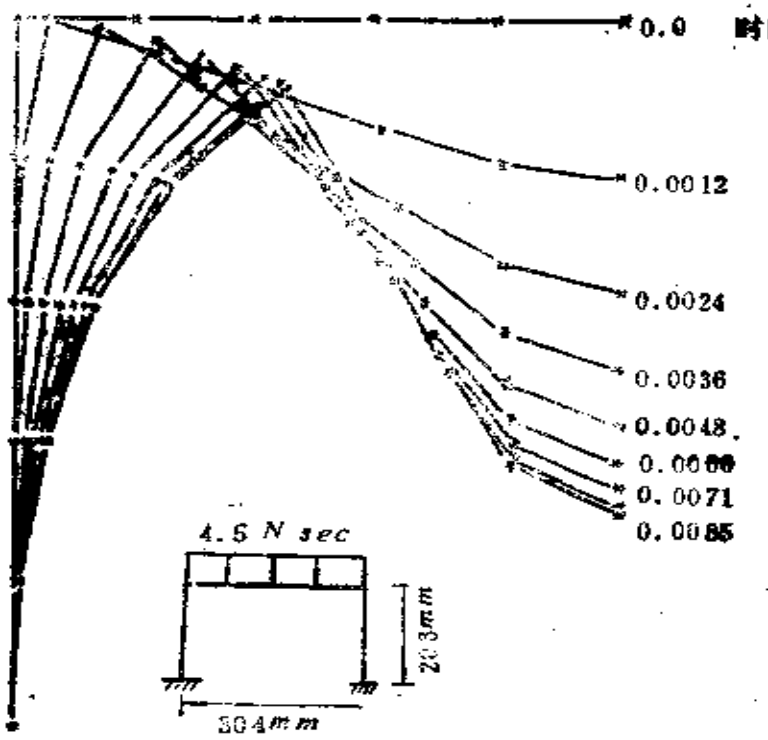
前面已多次提到，恒定模态解只有在一定条件下才存在。对于刚粘塑性结构，由于本构关系非齐次不存在恒定模态解；而对于大变形问题，由于运动方程、几何关系非线性，也不存在恒定模态解。尽管如此，人们还是可以找到在一个个瞬间满足(4.53)或(4.54)式的解答，而把整个响应看成是由一系列瞬时模态响应组成的，不同时刻的瞬时模态不同。这种解答称为瞬时模态解(instantanuous mode solution)。

这种瞬时模态解的思想最早是由 Lee 和 Martin 在研究刚粘塑性结构的近似解中提出的[4.19]。在某时刻 t，当给定相应动能后，可通过一个类似(4.59)式的泛函的极值，求得具有(4.54)式形式的运动许可速度场和加速度场。由于动能变化，速度模式也要变化。这种瞬时模态响应会使局部平衡条件不能满足，因此不是动力许可的。瞬时模态解是近似解。如果从整体来看平衡条件的破坏比较小，则其影响不会严重。

后来 Symonds 等人将瞬时模态解方法应用于大变形问题[4.20,4.21]。考虑材料是刚粘塑性的，要首先用齐次粘性关系匹配替代。初始模态计算和小变形时一样，以后各个时刻模态的计算要在新的构形的基础上。关于瞬时模态的算法，Symonds 等人首先将某一时刻的速度写成变量分离形式，代入运动方程，并将这时的位移场暂时看成固定不变的，使得运动方程也可以分离变量，然后建立相应的模态迭代算法。这样得到的瞬时模态解，其速度场只在特定点是连续的，对于构形没有很大变化的问题，能够给出较好的结果。

Griffin 和 Martin 曾对多种刚粘塑性结构的大变形问题用瞬时模态解进行过分析[4.22]。他们利用模态解的极值原理来确定各个时刻的瞬时模态，这和 Symonds 等人的算法不用。图 4.3为

他们给出的门形框架顶部受均布冲击载荷作用的大变形瞬时模态解。



梁截面高3.10mm， 宽19.1mm

屈服应力 $Y = 228 MPa$，密度 $\rho = 7850 kg/m^3$

$D = 40$， $P = 5$（见（3.1）式）

图 4.3

在上述瞬时模态解大变形分析中，研究者们都采用了齐次粘性本构关系，对于粘性材料，有应力就有应变率，不存在刚性区和塑性变形区的边界，这样就简化了方法的执行。有人认为，这样得到的结果不如直接利用理想刚塑性模型那样容易进行比较和解释。Palomby 和 Stronge 对理想刚塑性结构应用瞬时模态解作了大变形分析[4.18]。他们利用本节前面介绍的 Lee 极值原理确定各瞬时模态，并指出对于结构仅承受冲击载荷的问题，瞬时模态只依赖于结构的瞬时构形。一旦初始模态确定后，一系列后继模态将按其自身规律演化。这种模态演化的方式是结构本身的性质，

而与初速度幅大小和分布无关。他们将这种瞬时模态解称为进化模态解(evolutionary mode solution)。周青和余同希也曾给出了利用 Lee 极值原理得出的门形框架在均布冲击载荷作用下进化模态解的例子[4.28]。

4.4 界限定理

界限定理在某些情况下十分有用。例如对许多工程实际问题，特别是最初规划阶段，工程师们关心的主要是在一定动载荷作用下结构可能发生的最大变形是多少，而不太关心这种运动变形的详尽历程。60年代以来建立的一批界限定理，其思路就是，不寻求速度场的完全解或近似解，而由虚功率原理等总体性条件出发，对结构动力响应的最终位移和响应时间给出上限或下限的估计。

在本节中我们将证明理想刚塑性结构在冲击载荷作用下，关于最终位移和响应时间的上下限的四个定理。这四个定理在60—70年代间建立，都是在小变形假定下给出的，具有形式简单、应用方便的优点。后来，这些界限定理被逐渐推广到可以考虑应变率效应、大变形、以及一般脉冲载荷等比较一般的情况。当然涉及的因素越多，定理的数学表述也越复杂。

4.4.1 界限定理的叙述及证明

定理一 在冲击载荷作用下，刚塑性结构的最终位移 u_i^f 有一个上限，满足

$$\int_{S_T} p_i u_i^f \mathrm{d}S \leqslant \int_V \frac{1}{2}\rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^0 \mathrm{d}V \equiv K_0, \tag{4.64}$$

式中 p_i 是一组与时间无关的、"安全"的面载荷，$\dot{u}_i^0$ 为结构初速度，K_0 为结构初始动能。

证明 这里 p_i 是"安全"的载荷，是指存在一组"安全"的(即

处处都不违反屈服条件)、满足平衡方程的广义应力 Q_j^*，当不计体力时，p_i^*、Q_j^* 和零加速度场构成一个动力许可系统。若取真实速度场 $\dot{u}_i$ 和真实广义应变率 $\dot{q}_j$ 为运动许可场，应用虚功率原理(4.3)式，有

$$\int_{S_T} p_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V Q_j^* \dot{q}_j \mathrm{d}V. \tag{4.65}$$

根据(4.9)式，在冲击载荷作用下，结构的动能变化率为

$$-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int_V Q_j \dot{q}_j \mathrm{d}V, \tag{4.66}$$

式中 Q_j 为真实广义应力。由(4.65)和(4.66)式相减得

$$-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} - \int_{S_T} p_i^* \dot{u}_i \mathrm{d}S = \int_V (Q_j - Q_j^*)\dot{q}_j \mathrm{d}V. \tag{4.67}$$

因为 Q_j、Q_j^* 都是"安全"的，根据(4.10)式可知，(4.67)式的右手边为非负。对(4.67)式两边关于时间积分，注意到初始位移为零，得到

$$\int_{S_T} p_i^* u_i(\underline{X}, t)\mathrm{d}S \leqslant K_0 - K(t). \tag{4.68}$$

设 t_f 为响应持续时间，显然 $K(t_f)=0$。则由(4.68)式可得最终位移 $u_i^f \equiv u_i(\underline{X}, t_f)$ 满足下列不等式

$$\int_{S_T} p_i^* u_i^f \mathrm{d}S \leqslant K_0,$$

此即(4.64)式，证毕。

在实际应用中往往需要求结构上某点 A 沿 n 方向的最终位移 u_{nA}^f。为此，可取 P_i^* 为作用在 A 点沿 n 方向的集中力 R_{nA}^S。并代入(4.64)式，得

$$u_{nA}^f \leqslant K_0 / R_{nA}^S.$$

因为 R_{nA}^S 的最大值为相应的静塑性极限载荷 R_{nA}^L，故有

$$u_{nA}^f \leqslant K_0 / R_{nA}^L \leqslant K_0 / R_{nA}^S. \tag{4.69}$$

定理二 在冲击载荷作用下，刚塑性结构的响应时间 t_f 有一

个下限，满足

$$t_f \geqslant \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i \mathrm{d}V / D(\dot{u}_i^*), \tag{4.70}$$

式中 $\dot{u}_i^0$ 为初速度。$\dot{u}_i^*$ 为与时间无关的运动许可速度场，$\dot{u}_i^* = \dot{u}_i^*(X)$，$D(\dot{u}_i^*)$则为相应于 $\dot{u}_i^*$ 的结构能量耗散率。

证明　从 $\dot{u}_i^*$ 可求出相应的广义应变率 $\dot{q}_j^*$，$\dot{u}_i^*$、$\dot{q}_j^*$ 是运动许可的。若取真实应力 Q_j、真实加速度场 $\ddot{u}_i$ 为动力许可场，不计体力，由虚功率原理可得

$$-\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* \mathrm{d}V = \int_V Q_j \dot{q}_j^* \mathrm{d}V. \tag{4.71}$$

设 Q_j^* 为相应于 $\dot{q}_j^*$ 的一个广义应力场，可将上式右手边写成

$$\int_V Q_j \dot{q}_j^* \mathrm{d}V = \int_V Q_j^* \dot{q}_j^* \mathrm{d}V - \int_V (Q_j^* - Q_j)\dot{q}_j^* \mathrm{d}V . \tag{4.72}$$

根据不等式(4.10)式，上式右手边第二个积分为非负的，所以由(4.71)和(4.72)式得到

$$-\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* \mathrm{d}V \leqslant \int_V Q_j^* \dot{q}_j^* \mathrm{d}V \equiv D(\dot{u}_i^*). \tag{4.73}$$

对(4.73)式两边关于时间从 0 至 t 积分，得到

$$-\int_0^t \left[\int_V \rho \ddot{u}_i \dot{u}_i^* \mathrm{d}V\right]\mathrm{d}t = \int_V \rho(\dot{u}_i^0 - \dot{u}_i)\dot{u}_i^* \mathrm{d}V \leqslant tD(\dot{u}_i^*). \tag{4.74}$$

当 $t = t_f$ 时有 $\dot{u}_i(X, t_f) = 0$，所以有

$$t_f \geqslant \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^* \mathrm{d}V \Big/ D(\dot{u}_i^*) \equiv t_f^*, \tag{4.75}$$

证毕。

定理一和定理二是 Martin 给出的开创性的两个重要界限定理[4.24]。下面对这两个界限定理的精确度作一简要讨论。

(1) 关于位移上限的估计。如果(4.64)或(4.69)式关于最终位移的估计是精确的话，(4.67)式的右手边应当为零。这意味

潜在响应过程中，无论何处发生塑性变形，在该处都要有 $Q_j^s = Q_j$，这对于有移行铰阶段的响应是无法做到的。所以定理一所给出的位移上限往往比实际的大，例如大50%或更多。

（2）关于时间下限的估计。由定理二的证明可知，如果(4.72)式的右手边第二个积分为零，则所给出的响应时间下限是精确的。这要求在构造 $\dot{u}_i^s$ 时，在 $\dot{q}_j$ 不为零处，相应的广义应力 Q_j^s 应等于真实应力 Q_j。这是比较容易做到的，因而定理二往往给出精确的响应时间估计。

定理三 在冲击载荷作用下，刚塑性结构的最终位移 u_i^f 有一个下限，满足

$$\int_V \rho u_i^f \dot{u}_i^s \mathrm{d}V \geqslant \left(\int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^s \mathrm{d}V\right)^2 \Big/ 2D(\dot{u}_i^s), \tag{4.76}$$

式中符号同定理二。

证明 根据定理二证明中的(4.74)和(4.75)式，有

$$\int_V \rho(\dot{u}_i^0 - \dot{u}_i)\dot{u}_i^s \mathrm{d}V \leqslant tD(\dot{u}_i^s), \tag{4.77}$$

$$D(\dot{u}_i^s) = \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^s \mathrm{d}V / t_j^s. \tag{4.78}$$

将(4.78)式的 $D(\dot{u}_i^s)$ 代入(4.77)式，得

$$\int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^s \mathrm{d}V \geqslant (1 - t/t_j^s) \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^s \mathrm{d}V. \tag{4.79}$$

上式左边是时间 t 的某种函数，右边是 t 的线性函数（因积分与 t 无关）。此式的几何意义如图 4.4 所示，因为不等式(4.75)在任一时刻都成立，所以表示左边函数值的曲线总是高于表示右边的直线。曲线下的面积为

$$\int_0^{t_j^s} \left[\int_V \rho \dot{u}_i \dot{u}_i^s \mathrm{d}V\right] \mathrm{d}t = \int_V \rho u_i^f \dot{u}_i^s \mathrm{d}V, \tag{4.80}$$

因为这个面积大于直线下的面积，并利用(4.78)式，可得

$$\int_V \rho u_i^f \dot{u}_i^c \mathrm{d}V \geqslant \frac{1}{2} t_f^c \int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^c \mathrm{d}V$$

$$= \left(\int_V \rho \dot{u}_i^0 \dot{u}_i^c \mathrm{d}V \right)^2 \Big/ 2D(\dot{u}_i^c), \qquad (4.81)$$

证毕。

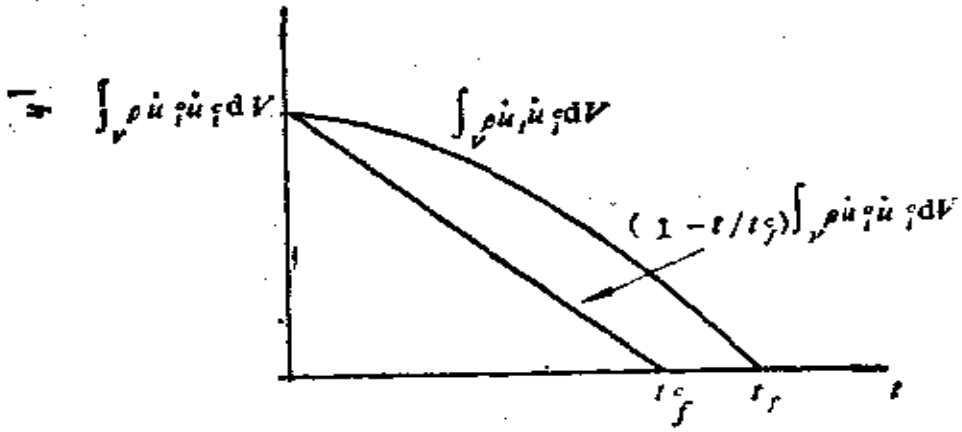


图 4.4

如果初速度和最终位移都平行于某坐标轴，则可以选取 $\dot{u}_i^c$ 也平行于该轴；这样位移和速度场都只有一个分量了。取此轴为 $i=1$，并记 $u_1^f(X)$ 的最大值为 u_{1m}^f，假定 $\dot{u}_1^c(X) \geqslant 0$，$u_{1m}^f \geqslant 0$，由(4.81)式可得

$$u_{1m}^f \geqslant \left(\int_V \rho \dot{u}_1^0 \dot{u}_1^c \mathrm{d}V \right)^2 \Big/ \left[2D(\dot{u}_1^c) \int_V \rho \dot{u}_1^c \mathrm{d}V \right]. \qquad (4.82)$$

定理三是 Moreles 等人于 1970 年给出的[4.25]。后来黄筑平指出(4.79)式左边的函数在 $t > t_f^c$ 时若为负的，就不一定有曲线下面积大于直线下面积的论断，这是其证明的不严格之处[4.26]。

定理四 在冲击载荷作用下，刚塑性结构的响应时间有一个上限，满足

$$t_f \leqslant \sqrt{2K_0 \int_V \rho \phi_i^P \phi_i^P \mathrm{d}V} \Big/ D_P \equiv t_f^P, \qquad (4.83)$$

式中 K_0 为初始动能，其他符号的意义在证明中给出。

证明　这个定理是 Lee[4.14]在研究模态解极值原理时隐含地给出的[4.16]。在 4.3 中介绍 Lee 极值原理时曾指出，当响应以主模态形式进行时，结构能量耗散率为最小、结构动能减少率也为最小，因而结构的运动能持续得最久，也就是说，主模态响应时间 t_f^P 是实际响应时间的上限。

设主模态的形状函数为 ϕ_i^P，速度场为

$$\dot{v}_i^P = \dot{w}_P^*(t)\phi_i^P(X)。 \tag{4.84}$$

模态解的响应时间由(4.33)式给出，主模态的响应时间为

$$t_f^P = \dot{w}_P^*(0)/\dot{A}_P^*。 \tag{4.85}$$

A_P^* 可由(4.31)式求出，

$$A_P^* \equiv \int_V Q_j^{*P} k_j^{*P} \mathrm{d}V \Big/ \int_V \rho\phi_i^P\phi_i^P \mathrm{d}V, \tag{4.86}$$

式中 k_j^{*P} 是主模态速度场所对应的广义应变率 q_j^{*P} 中与时间无关的部分，见(4.30)式，Q_j^{*P} 为相应的广义应力。

$\dot{w}_P^*(0)$ 应根据结构的初始动能 K_0 求出，这样可以确保(4.85)式给出响应时间的上限，有

$$\dot{w}_P^*(0) = \left(2K_0 \Big/ \int_V \rho\phi_i^P\phi_i^P \mathrm{d}V\right)^{\frac{1}{2}}。 \tag{4.87}$$

将(4.86)和(4.87)式代入(4.85)式，就得到(4.83)式，其中

$$D_P \equiv \int_V Q_j^{*P} k_j^{*P} \mathrm{d}V,$$

证毕。

4.4.2　界限定理的应用

作为一个例子，这里我们应用上述四个定理，分析端部受撞击的悬臂梁(即 Parkes 问题)的最终挠度和响应时间，并和 2.1.3所给出的这个问题的完全解进行比较。在2.1.3中得到的无量纲形式端部最终挠度(稍加改写)和响应时间为(所用的无量纲参数可参

阅 2.1.3)

$$\delta_f = \frac{2}{3}e_0\gamma\left[\frac{1}{1+2\gamma}+2\ln\left(1+\frac{1}{2\gamma}\right)\right], \tag{4.88}$$

$$\tau_f = v_0\gamma. \tag{4.89}$$

(1) 端部最终挠度 Δ_f 的上界。

这个问题结构初始动能为 $K_0=\frac{1}{2}GV_0^2$，塑性极限载荷为 $R_{n\Delta}^L=M_p/L$。有关参数参照图 2.18。根据定理一，应用(4.69)式可以给出 Δ_f 的一个上界，

$$\Delta_f \leqslant K_0/R_{n\Delta}^L = GV_0^2L/(2M_p), \tag{4.90}$$

写成无量纲形式为

$$\delta_f \leqslant e_0. \tag{4.91}$$

(2) 响应时间 t_f 的下界。

在应用定理二时，(4.70)式中的 $\dot{u}_i^0$ 和 $\dot{u}_i^*$ 分别为结构的初速度场和与时间无关的运动许可速度场。对于 $\dot{u}_i^0$，现在只有端部有初速度 V_0，其他地方为零。$\dot{u}_i^*$ 可取为 $(1-X/L)\cdot\dot{W}_0$，这里 $\dot{W}_0$ 是端部速度，假定与时间无关。因此 $\int_V \rho\dot{u}_i^0\dot{u}_i^*\,dV = GV_0\dot{W}_0$，$D(\dot{u}_i^*) = M_p\dot{W}_0/L$，代入(4.75)式得

$$t_f \geqslant GV_0L/M_p, \tag{4.92}$$

写成无量纲形式，即为

$$\tau_f \geqslant v_0\gamma. \tag{4.93}$$

对照(4.89)和(4.93)式，可以发现定理二所给出的这个问题的响应时间估计，就等于完全解所给出的响应时间。

(3) 端部最终挠度 Δ_f 的下界。

在应用定理三时，$\dot{u}_i^0$、$\dot{u}_i^*$ 都和定理二相同，因此可进行类似的分析，由(4.82)式得到

$$\Delta_f \geqslant \left(\int_V \rho\dot{u}_i^0\dot{u}_i dV\right)^2 \Big/ \left[2D(\dot{u}_i^*)\int_V \rho\dot{u}_i^*\,dV\right]$$

$$= (GV_0\dot{W}_0)^2 \Big/ \left[\frac{\dot{W}_0 M_P}{L}(\rho L + 2G)\dot{W}_0\right]$$

$$= \frac{GV_0^2}{M_P} L \cdot \frac{\gamma}{(2\gamma+1)}, \tag{4.94}$$

写成无量纲形式，为

$$\delta_f \geqslant \frac{2\gamma}{2\gamma+1}\varepsilon_0. \tag{4.95}$$

关于 δ_f 的上界(4.91)式和下界(4.95)式，都在图 4.1 中表示出。(4.95)式所给出的下界比模态解给出的小，这些解答都随着 γ 增大，向完全解趋近。

(4) 响应时间 t_f 的上界。

在应用定理四时涉及到主模态 ϕ_i^P，悬臂梁的主模态就是绕根部作定点转动，即 $\phi^P = \left(1 - \frac{X}{L}\right)$，相应地有 $D_P = M_P/L$。因此，由(4.83)式得

$$t_f \leqslant \sqrt{2K_0 \int_V \rho \phi_i^P \phi_i^P dV} \Big/ D_P$$

$$= \frac{\sqrt{GV_0^2}}{M_P} L \sqrt{\left[\int_0^L \rho\left(1 - \frac{X}{L}\right)^2 dX + G\right]}$$

$$= \frac{GV_0}{M_P} L \sqrt{1 + \frac{1}{3\gamma}}, \tag{4.96}$$

写成无量纲形式

$$\tau_f \leqslant \varepsilon_0 \gamma \sqrt{1 + \frac{1}{3\gamma}}. \tag{4.97}$$

当质量比 γ 增大时，τ_f 的上界趋于(2.101)式给出的刚塑性完全解的响应时间。

参 考 文 献

[4.1] 杨桂通，熊祝华. 塑性动力学. 北京:清华大学出版社，1984

[4.2] 余同希. 塑性力学. 北京:高等教育出版社,1989

[4.3] Martin J B. Extremum principle for a class of dynamic rigid-plastic problems. *Int. J. Solids Struct.*,1972,**8**:1185-1204

[4.4] Тамуж, В.П.,ОО одном минимальном принципе В динамике жестко-Пластическо готела,Прикаадная Математика и Механчка, 1962,**26**(4):715

[4.5] Yu T X, Symonds P S, Johnson W. A reconsideration and some new results for the circular beam impact proalem.*Int. J. Impact Engng.*, 1986,**4**:221-228

[4.6] Martin J B.A note on uniqueness of solutions for dynamically loaded rigid-plastic and rigid-viscoplastic continua. *J.Appl. Mech.*, 1966,**33**:207-209

[4.7] Martin J B,Symonds P S.Mode approximations for impulsively loaded rigid-plastic structures. *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 1966, **92**(EM5):43-66

[4.8] Martin J B, Lee L S S. Approximate solutions for impulsively loaded elastic-plastic beams. *J. Appl. Mech.*, 1968,**35**: 303-309

[4.9] Znou Q, Zhang T G, Yu T X. A note on determining the initial velocity of a modal field. *J. Appl. Mech.*, 1992, **59**(2): 677-679

[4.10] Jones N, Wierzbicki T.A study of the higher modal dynamic plastic response of beams. *Int. J. Mech. Sci.*, 1976, **18**:533-542

[4.11] Symonds P S. The optimal mode in the mode approximation technique. *Mech. Res. Comm.*, 1980,**7**(1):1-6

[4.12] Lepik Ulo. On the dynamic response of rigid-plastic beams. *J. Struct. Mech.*, 1986,**8**(3):227-235

[4.13] Symonds P S. Approximation techniques for impulsively loaded structure of rate sensitive plastic behavior. *SIAM J. Appl. Math.*, 1973,**25**:482-473

[4.14] Lee L S S.Mode responses of dynamically loaded structures.

J. Appl. Mech., 1972,**39**:904-910

[4.15] Symonds P S, Wierzbihki T. On an extremum principle for mode form solutions in plastic structural dynamics. *J. Appl. Mech.*, 1975,**42**:630-640

[4.16] Symonds P S. Twenty years of developments in inelastic dynamics, 中译文：非弹性动力学20年的进展，华云龙、余同希译. 力学进展, 1986,**16**(3):377-389

[4.17] 黄筑平，王仁. 塑性动力响应中的模态近似方法. 力学进展, 1985, **15**(1):1-20

[4.18] Palomby C, Stronge W. Evolutionary modes for large deflections of dynamically loaded rigid-plastic structures. Mech. *Struct. & Mach.*, 1988,**16**(1):53-80

[4.19] Lee L S S,Martin J B. Approximate Solutions of impulsively loaded structures of a rate sensitive material. *J. Appl. Math. Phys.* 1970,**21**:1011-1032

[4.20] Symonds P S, Chon C T. Approximation techniques for impulsive loading of structures of time-dependent plastic behavior with finite deflections. Proc. Oxford Conf. *"Mechanical Properties of Materials at High Strain Rates", Inst. of Physics Conf. Ser. No.* 21,*Dec.*1974,299-315

[4.21] Symonds P S, Chon C T.Finite viscoplastic defictions of an impulsively loaded plate by the mode approximation technique *J.Mech.Phys.Solids*, 1979,**27**:115-133

[4.22] Griffin P D, Martin J B. Geometrically nonlinear mode approximations for impulsively loaded homogeneous viscous beams and frames. *Int.J.Mech.Sci.*,1983,**25**:15-26

[4.23] 周青，余同希. *Lee* 极值原理与结构的大挠度塑性动力响应. 固体力学学报, 1992,**13**(2):207-213

[4.24] Martin J B. Impulsive loading theorems for rigid-plastic continua. *Proc.ASCE J.Eng.Mech.Div.*, 1964,**90**(EM5):27-42

[4.25] Morales W J, Nevill G E Jr. Lower bounds on deformations of dynamically loaded rigid-plastic continua. *AIAA J.*,1970, **8**(11):2043-2046

[4.26] Huang Z P.Revised lower displacement bounds on impulsively-loaded rigid-plastic structures.*Mech.Res.Comm.*,1985(5):257-264

5 结构塑性动力学的一些其他问题

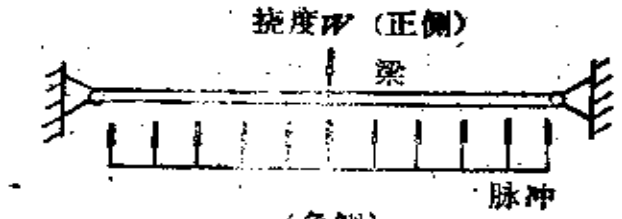
前面的第2—4章从几个不同的侧面讨论了结构的塑性动力响应问题。另外还有其他一些问题，虽然也与结构在强动载荷下的动力行为密切相关，但与通常的动力响应在研究内容和研究方法上有很大不同。限于篇幅，本章只在这种类型的问题中选择4个作一些讨论。

5.1 结构塑性动力响应中的反常行为

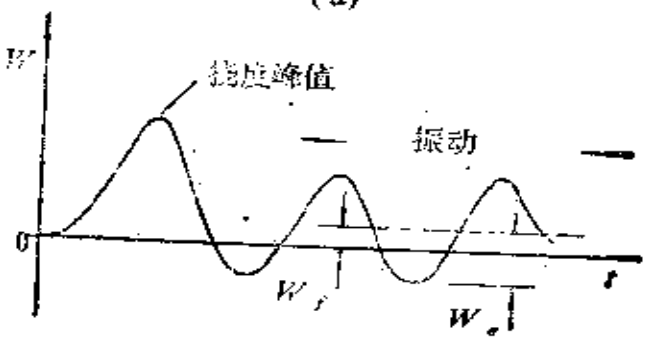
在3.5中曾经提到，对于有限尺度结构的弹塑性动力响应至今尚没有人得到解析解；但是近年来随着许多大型通用有限元数值程序的应用，对于结构在任意动载下的弹塑性动力响应直接求出数值解已成为可能。近年来陆续报道的这方面的算例给我们提供了详尽的信息，但同时也发现计算结果对于原始数据和程序自身的细微差异可能相当敏感。最典型的例子是Symonds和余同希所发现的"反常行为"或叫"奇异行为"(Counterintuitive behavior, or Anomalous behavior)。

5.1.1 简支梁在矩形脉冲作用下动力响应的几种模式

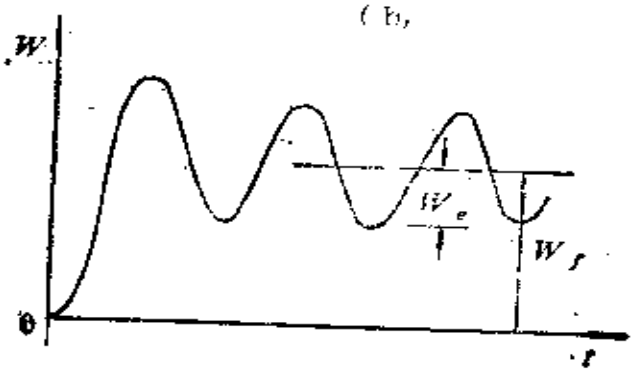
Symonds和余同希采用ABAQUS等著名大型通用程序检验了两端不可移铰支的理想弹塑性梁(图5.1(a))[5.1]，在均布矩形脉冲作用下的动力行为，并按照中点挠度随时间的变化历史区分出三种弹塑性动力响应模式。如果加载脉冲的强度超过静极限载荷不太多，发生的是响应模式I，其中点挠度随时间的变化大致如图5.1(b)所示，即梁在其初始直构形的两侧作非对称振动，当



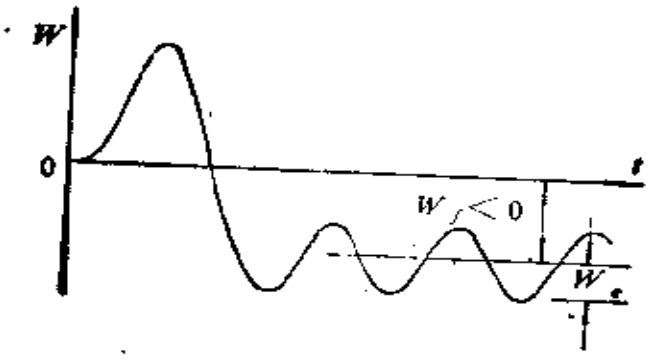
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5.1

振动由于阻尼作用而衰减之后，梁中点的最终挠度为一正值（以载荷作用方向为正向）。如果脉冲强度很强，发生的是响应模式Ⅱ，如图 5.1(c) 所示，梁始终在挠度为正的一侧作振动，并最终停止在该侧的某位置上。由于在加载过程中梁已经产生了较明显的塑性变形，所以模式Ⅱ实际上相当于一个浅拱的振动。这两种响应模式都是符合人们直观的一般工程经验的正常行为。

与人们的直观相违，Symonds 和余同希已发现，对于某种不太弱也不太强的脉冲强度，可以出现另一种响应模式，即模式Ⅲ，其中点挠度的变化历史如图 5.1(d) 所示：即在响应初期梁的挠度为正（包括挠度峰值在内），但随后反弹到挠度为负的一侧（与加载方向相反的一侧），在该侧连续振动，直到弹性振动由于阻尼作用而衰减后，梁最终停留在一个负的挠度上。这种响应模式是一种反常行为。

在采用近 10 种大型通用数值程序重复计算这一算例后发现：虽然得出的响应细节因程序而异，但有一半的程序预报了负的最终挠度。这说明，不符合直观的负挠度并不是某一程序造成的错误，而完全可能是一种实际存在的、具有深刻内在原因的结构反常动力行为。

5.1.2 解释反常行为的理论模型

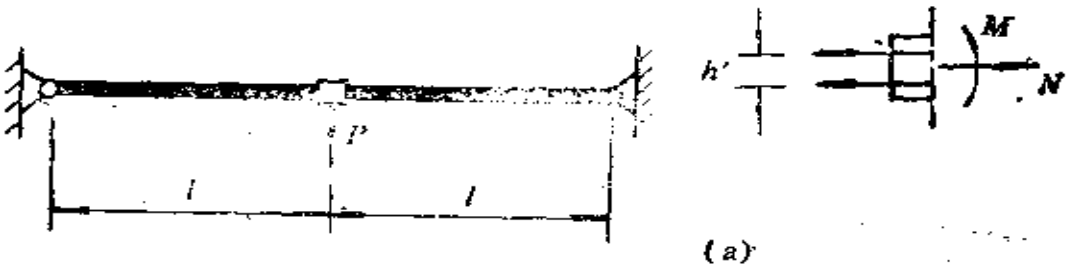
从有限元数值结果看到，不可移铰支梁的动力响应是相当复杂的过程，梁内弯曲与拉压这两种弹塑性变形间有着耦合作用；在外载功、弹性变形能、塑性耗散功及动能这几项能量之间更有着复杂的相互转换。为了阐明反常行为出现的机理和条件，需要采用简化的理论模型。这种模型应能反映不可移简支梁的力学特征，同时又要尽可能地简单，以便用解析方法加以处理。

1. Shanley 型模型

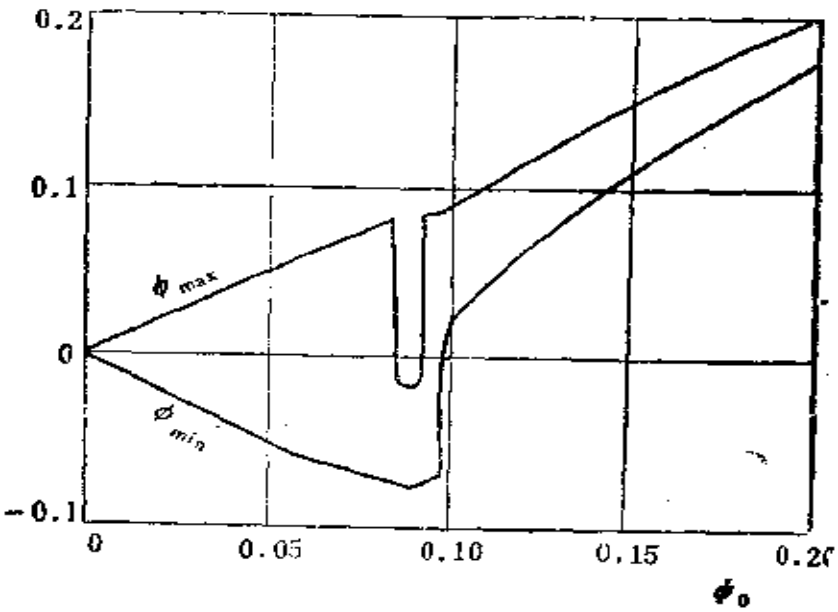
Shanley 最先引入这种模型来分析压杆的塑性屈曲[5.1]。Symonds 和余同希则用其模拟梁的弹塑性动力行为[5.2]。如图

5.2(a)所示，这个模型由两根刚性杆(质量略去不计)和一个变形小块(deformable cell)组成。刚性杆将不可移动的铰支支座同变形小块连接起来。变形小块是一个理想夹层结构，由两层截面积为 A 的薄层构成，二层的间距是 h'。当模型发生横向运动时，两个薄层发生伸长或缩短的轴向变形，其轴力分别为 N_1 和 N_2。这样，这个变形小块既承承受轴力(等于 N_1+N_2)，又承受弯矩(等于 $(N_1-N_2)\cdot h'/2$)。假定模型的质量 G 全部集中在变形小块上，则它的运动方程为

$$(N_1+N_2)l\phi+(N_1-N_2)h'/2+Gl\ddot{\phi}=0, \qquad (5.1)$$



(a)



(b)

图 5.2

其中 l 为刚性连杆的长度，ϕ 为刚性杆转过的角度，($\dot{}$)表示 $\frac{d}{dt}$( )。

不难看出，这个 Shanley 型模型是一个单自由度系统，其运动和变形完全由单一运动变量 ϕ 来表征。同时，这个模型体现了弯曲变形和轴向变形这两种变形要素及相应的内力的相互作用，反映了材料非线性和几何大变形的影响，因而可以期望具备梁的动力行为的基本特征。这里，我们参照文献[5.2]，选取 $\mu = E/Y$ 和 $\eta = h'/l$ 为基本参数，分别代表材料和结构的特征。

当材料为理想弹塑性时，模型的动力响应过程可根据两变形薄层处于弹性或塑性状态区分出若干相。对运动方程(5.1)逐相积分后，可以得出变形历史即 ϕ 随时间变化的历史。当然，这一变形历史既依赖于参数 μ 和 η 的具体数值，又同所施加的脉冲强度有关。事实上，脉冲的强度可以通过“起始角” ϕ_0 来体现。所谓“起始角”也就是加载后发生的第一个峰值，自该峰值后模型便发生卸载，并逐渐演变成一个弹性振动(参看图5.1)。

为了模拟不可移简支梁出现反常行为的情形，选取 $\mu = 400$ 和 $\eta = 0.0271$，计算得出的结果表明：最终弹性振动将在 ϕ_{max} 与 ϕ_{min} 之间进行，而 ϕ_{max} 和 ϕ_{min} 都依赖于起始角 ϕ_0。图5.2(b)画出了这种依赖关系，它形象地说明了，当 ϕ_0 大致在 0.086 和 0.092 之间时，ϕ_{max} 和 ϕ_{min} 二者都取负值，即弹性振动将完全在负侧进行，因此这正是反常行为发生的范围。

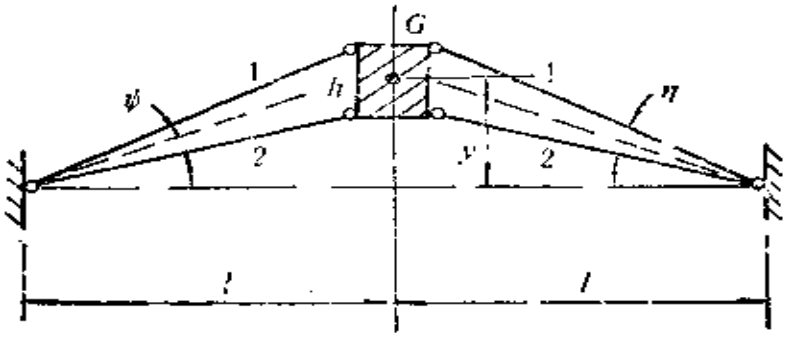
2. 双层弹簧模型

另一种单自由度结构模型是由余同希和徐昱提出并研究的[5.6]。如图5.3(a)所示，这模型中部有一集中质量 G，有两层弹塑性弹簧把 G 用不可移铰支支座连接起来，两层弹簧在与 G 连接处相距为 h，尽管后来证明这个模型与前述Shanley模型实质上相互等价，但在分析内力变化历史时更为直观、方便，且其控制参数可以简单地归结为一个，即 $\beta = \left(\frac{E}{2Y}\right)^{1/2}\left(\frac{h}{2l}\right)$。这个参数将材料

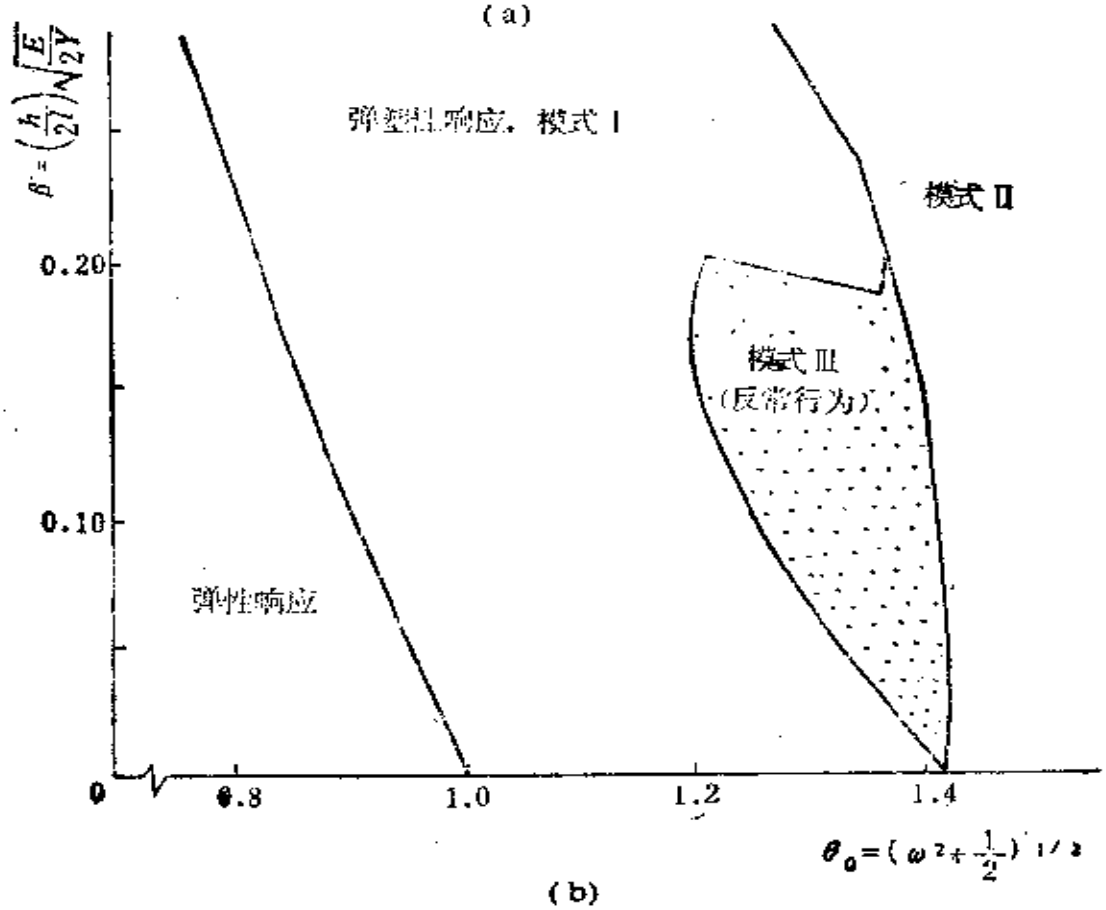
特征和结构几何特征溶合在一起，并完全控制了系统的动力特性.

无量纲形式的运动控制方程为

$$\ddot{\theta}+\frac{n_1+n_2}{2}\theta+\frac{n_1-n_2}{2}\beta=0, \tag{5.2}$$



(a)



(b)

图 5.3

其中 $\theta=\psi\left(\frac{E}{2Y}\right)^{1/2}$，$n_1=N_1/N_P$，$n_2=N_2/N_P$，$E$，$Y$和$N_P$分别是弹簧的杨氏模量、屈服应力和屈服时的轴力。

文献[5.3]从方程(5.2)出发，逐组获得了运动方程的第一积分，然后讨论转化到下一相的条件。通过这样解析地而非数值地跟踪模型在受到一定初始冲击后的变形历史，澄清了相转变条件、反弹越过初始直构形的条件，以及在负侧维持振动的条件等等。把这些条件综合起来，得出了图 5.3(b) 所示的参数平面上的分区图。这个图表明，参数 β 和参数 θ_0 的适当组合，可以导致弹性响应，或三种不同模式的弹塑性动力响应。这里的模式Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ分别与 5.1.1 及图 5.1 中的三种模式相对应。θ_0是无量纲角度 θ 的起始值，它可以用弹簧受冲击后的初始角速度 ω表示出来：$\theta_0=\left(\omega^2+\frac{1}{2}\right)^{1/2}$。从图5.3(b)可以看出，模式Ⅲ，即反常行为，仅出现于一个比较狭窄的参数组合范围内。当模型参数 β取定时，在图 5.3(b)上画一条相应的水平线，与模式Ⅲ的出现区域的边界线相交，便可以知道在这一特定的 β下，什么样的θ_0取值会导致反常行为。例如在 $0.185<\beta<0.2008$ 的范围内，图 5.3(b)预报在 $\theta_{max}-\theta_0$ 图上将有两个而不是一个“陷井”。这一理论预报随后被数值计算所完全证实。又如图5.3(b)还预报，当$\beta>0.236$时，无论 θ_0 为何值，反常行为将不再出现。

5.1.3 对反常行为的进一步研究

在 Symonds 和余同希工作的基础上，近年来各国学者对简单模型以及梁结构的动力响应中的反常行为进行了大量研究，结果表明：

(1) 如果在上述理论模型中增加阻尼项，对模型的动力行为将会产生重大影响。当其他参数不变时，只要阻尼系数有微小变化，就可能导致响应模式和最终位移的显著变化。这一结果暗示了从实验上证实反常行为的难度，因为实际材料既不可能是理想

弹塑性的，其运动阻尼也不完全服从某种简化的阻尼规律。

（2）响应模式和最终位移对数值积分算法极为敏感。当计算的对象不是单自由度模型而是具有很多自由度的结构时，结构离散化的程度，单元的形状，算法的选取等等，都对计算结果产生重大影响。响应模式和最终变形对计算参数和算法的高度敏感性，是在运用大型数值分析程序预报结构动力行为时需要注意的问题，尤其是在可能出现反常行为的参数区域附近。

（3）对二自由度的 Shanley 型模型的分析计算[5.4]说明，在一定参数组合下，这个模型的动力行为可能出现浑沌(Chaos)状态，即中点位置可能无规则地在正侧和负侧间变化，而其最终位置则不可预测。不难设想，结构模型的自由度越多，其响应模式也

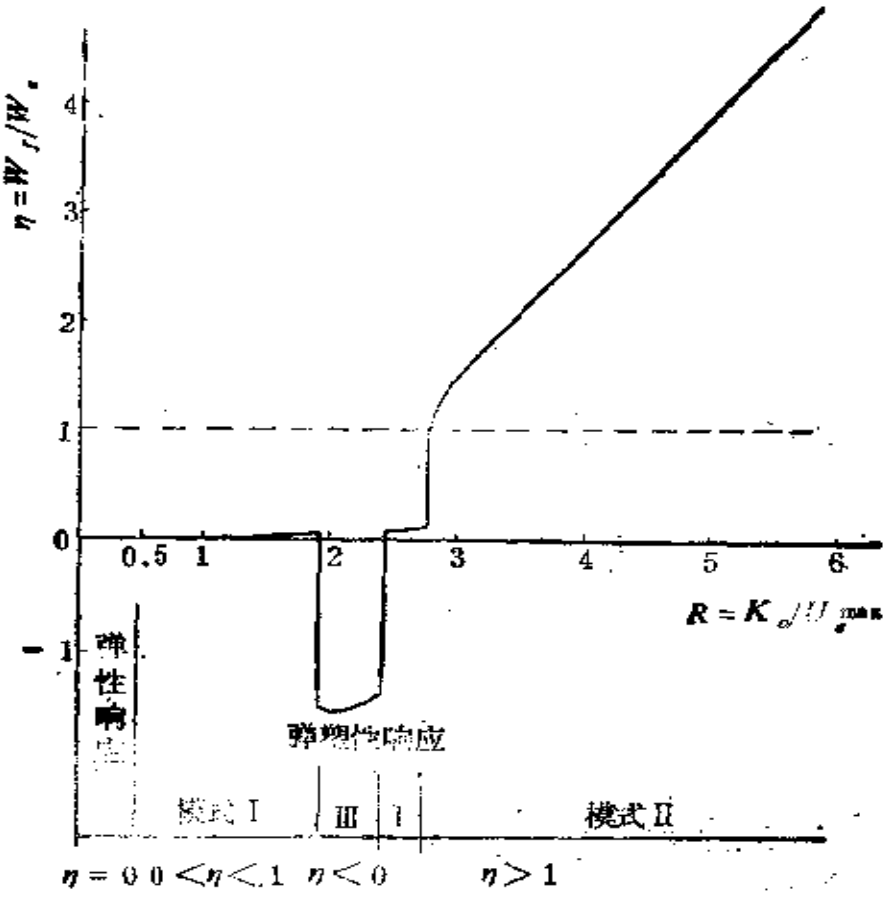


图 5.4

会越复杂；因而，具有无限自由度的连续结构有可能出现以往工程经验所无法推断的动力响应模式，这是在分析实际工程结构问题时必须加以注意的。

（4）尽管结构的动力行为多种多样，仍可用下述简单方式来归纳其响应模式[5.5]。设结构上某一特征点（例如梁的中点）的最终位移为 W_f，响应末期弹性振动的振幅为 W_e，则可引进一个指数 $\eta=W_f/W_e$，显然，图 5.1(b)，(c)，(d)所示的响应模式Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ分别相应于 $0<\eta<1$，$\eta>1$ 和 $\eta<0$ 的情形；而 $\eta=0$ 则代表一个纯弹性响应。如在 3.5 中讲述过的，外力做的功的大小可以用比值 R（参见(3.188)式）来表征。通常结构算例显示 η 值随 R 值的增大而增大，但反常行为（即模式Ⅲ）违背这一规律。例如，将图 5.2(b)的算例重新处理后，其 η 值随 R 值的变化关系见图 5.4，在这个图上不但显示了出现反常行为（$\eta<0$）的区间，而且也看到了从模式Ⅰ到模式Ⅱ之间出现了 η 值的一个跳跃。这说明响应模式的转换可能是一个突变而不是渐变的过程。图 5.4 还表明，刚塑性分析仅当 R 相当大时才适用（这与 3.5 的讨论一致）；当 R 值在 2～3 左右时，响应模式可能相当复杂，刚塑性近似可能导致很大的误差。

5.2 结构的塑性动力屈曲和渐进屈曲

随着各种薄壁轻型结构的日益广泛使用，作为这种结构的主要失效形式（参见 5.3）之一的“屈曲”就一直受到人们的关注。从 Euler 以来，经过许多学者的努力，包括 Koiter，Budiansky，Hutchinson 等人的工作，结构弹性屈曲的线性和非线性理论已渐趋完善。但是塑性屈曲的研究却由于所谓的“塑性屈曲中的佯谬”的阻碍，至今在理论上还陷于困境，尚未找到统一的合理预报方法[5.6]，结构塑性动力屈曲既有塑性变形带来的困难，还兼有惯性力、应变率效应等动力因素引起的复杂性。因此无论是理论

研究，还是实验研究都相当困难。本节仅介绍目前应用较多的扰动分析的工程方法，该方法研究由于位移或速度的初缺陷引起的扰动运动，认为屈曲是由于初缺陷的不均衡发展引起的，屈曲模态是初缺陷中得到最大放大的模态。应用这种方法，人们研究了圆柱壳、圆环等简单构件的塑性动力屈曲。本节首先通过直杆的分析来说明这种方法，然后简要介绍圆柱壳塑性动力屈曲的研究，以及有关第二临界速度和渐进屈曲现象等。

5.2.1 直杆的塑性动力屈曲

考虑图 5.5 所示的两端铰支的等直杆在轴压作用下的动力屈曲。设该杆具有初缺陷 $w_i(X)$，受到不变的轴向压力 P 的作用。当 $t<0$ 时，该压杆因为有必要的横向约束而保持平衡；当 $t=0$ 时，突然移去这些约束，压杆开始运动。下面首先假定杆件是弹性的，介绍动力屈曲的特点和初缺陷扰动分析方法，然后再研究刚-线性强化压杆的动力屈曲。

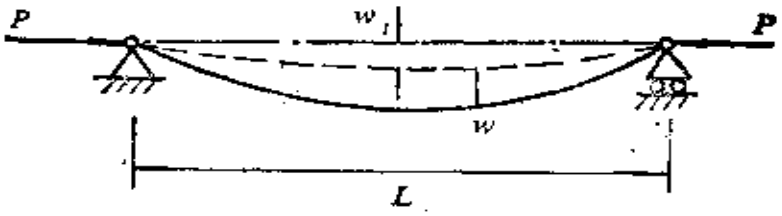


图 5 5

1. *弹性压杆的动力屈曲*

设杆件的抗弯刚度为 EI，截面积为 A，材料密度为 ρ，根据梁的初等理论，容易导出该压杆的横向运动方程[5.7]，

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial X^4}+\rho\frac{\partial^2}{\partial X^2}(w+w_i)=-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (5.3)$$

其中 w 为从 w_i 起算的挠度。压杆的初速度为 0。

若初缺陷为单一正弦函数形式，

$$w_i=W_{i1}\sin\frac{\pi X}{L}, \qquad (5.4)$$

则可求出如下形式的挠度，

$$w = W_1(t)\sin\frac{\pi X}{L}, \tag{5.5}$$

式中$W_1(t)$满足下列方程

$$\rho A\frac{d^2W_1(t)}{dt^2}+\left(\frac{\pi}{L}\right)^2(P_e-P)W_1(t)=P\left(\frac{\pi}{L}\right)^2W_{t1}, \tag{5.6}$$

$P_e=\pi^2EI/L^2$为 Euler 临界载荷。

方程(5.6)的解答同 P 的大小有关。当 $P<P_e$时，压杆的运动为弹性振动，不存在屈曲问题。当 $P>P_e$时，可解得

$$w = A_1W_{t1}\sin\frac{\pi X}{L}, \tag{5.7}$$

其中 A_1称为初缺陷放大函数，

$$A_1=\frac{P}{P_e}\left(\frac{P}{P_e}-1\right)^{-1}\left\{\cosh\left[\left(\frac{P}{P_e}-1\right)^{\frac{1}{2}}\tau\right]-1\right\}. \tag{5.8}$$

上式中 τ 是无量纲时间，

$$\tau\equiv\left(\frac{\pi^4EI}{\rho AL^4}\right)^{1/2}t. \tag{5.9}$$

图 5.6 给出 $A_1(\tau)$ 随 τ 的变化情况。可以看到 $A_1(\tau)$ 随 τ 增大可以变得非常大，而且 P/P_e 越大，$A_1(\tau)$ 增长的速度也越

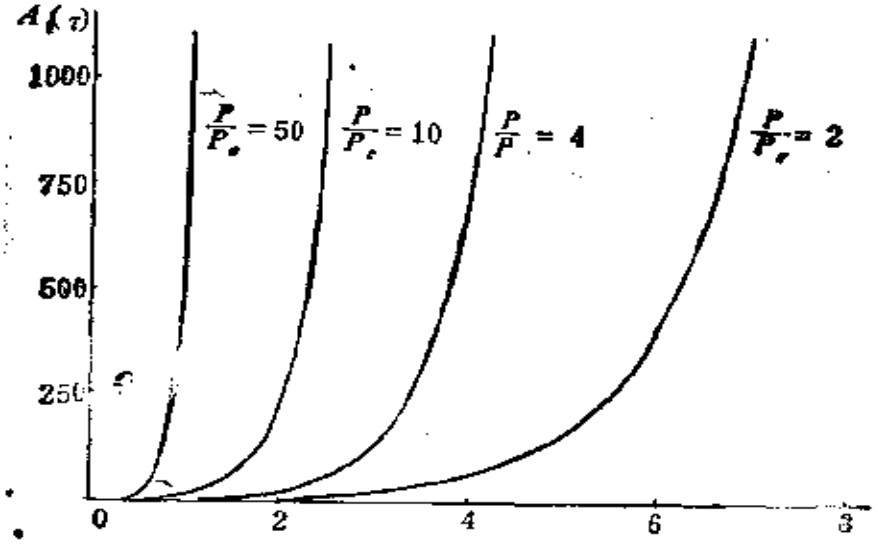


图 5.6

快．这种现象称为动力失稳。

在一般情况下，初缺陷可以表示成如下三角级数形式，

$$w_i = \sum_{n=1}^{\infty} W_{in} \sin \frac{n\pi X}{L}, \tag{5.10}$$

相应地，(5.3)式的解答可以写成

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(t) \sin \frac{n\pi X}{L}, \tag{5.11}$$

其中 $W_n(t)$ 满足下列二阶常微分方程

$$\rho A \frac{\mathrm{d}^2 W_n(t)}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 (n^2 P_e - P) W_n(t) = P\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 W_{in}, \quad n = 1, 2, \cdots, \infty. \tag{5.12}$$

方程(5.12)的解答同样依赖于 P 值的大小。当 $\frac{P}{P_e} < n^2$ 时，其解答为与屈曲无关的弹性振动；当 $\frac{P}{P_e} \geqslant n^2$，(5.12)式的解答可表示为

$$W_n(t) = A_n(\tau) W_{in}, \tag{5.13}$$

其中 $A_n(\tau)$ 为第 n 个模态的初缺陷的放大系数，

$$A_n(\tau) = \frac{P}{n^2 P_e}\left(\frac{P}{n^2 P_e} - 1\right)^{-1} \left\{\cosh\left[n^2\left(\frac{P}{n^2 P_e} - 1\right)^{1/2} \tau\right] - 1\right\}. \tag{5.14}$$

设 m 为满足 $\frac{P}{P_e} \geqslant n^2$ 的最大整数，方程(5.3)的解答 w 按(5.11)式的表示方法可以写成

$$w = \sum_{n=1}^{m} A_n(\tau) W_{in} \sin \frac{n\pi X}{L} + \sum_{n=m+1}^{\infty} W_n(\tau) \sin \frac{n\pi X}{L}, \tag{5.15}$$

上式右边第二个求和号中的项是关于弹性振动的，压杆的动力屈曲只与第一个求和号中的项有关。放大函数 $A_n(\tau)$ 与无量纲时间 $n^2\tau$ 的关系类似于图 5.6 中 $A_1(\tau)$ 与 τ 的关系。在同一时刻 τ，$A_n(\tau)$ 的值与模态数 n(即模态阶数) 有关。当 $\frac{P}{P_e} = 50$ 时，对于不

同时刻 τ，$A_n(\tau)$ 与 n 的关系如图 5.7 所示。可以看出，当 n 接近 6 时，$A_n(\tau)$有极值。这时的 n 值称为临界模态数 n_c。根据当 τ 很大时，$\frac{\partial A_n(\tau)}{\partial n}=0$的条件，可以给出 n_c 的近似式

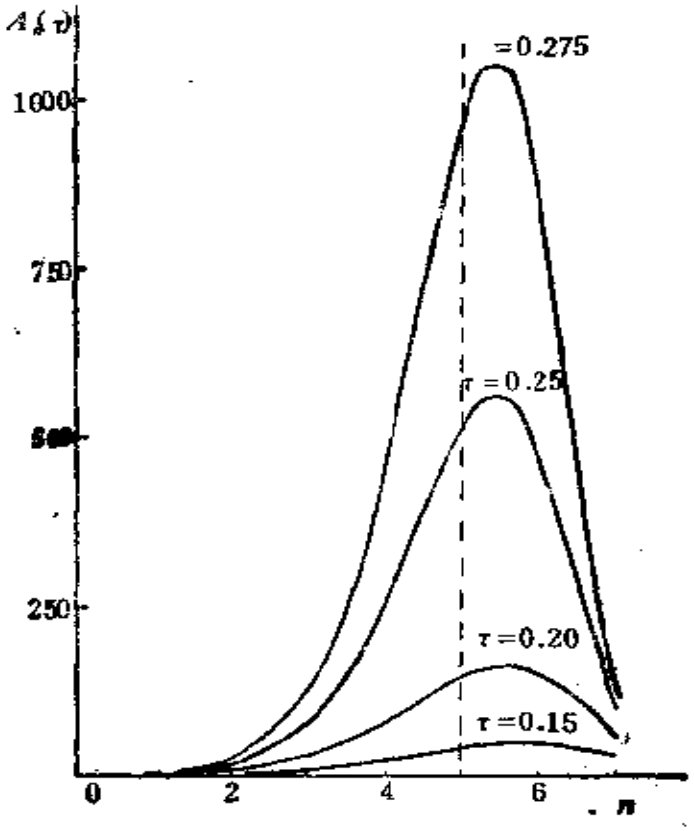


图 5.7

$$n_c=\left(\frac{P}{2P_e}\right)^{1/2}. \tag{5.16}$$

在动力屈曲情况下，具有临界模态数的初缺陷模态得到了最大的放大。由(5.16)式可知，$\frac{P}{P_e}$越大，n_c 也就越大，杆件动力屈曲出现的皱折也越多。

2、直杆的塑性动力屈曲

考虑压杆材料为刚-线性强化，强化模量为 E_h。类似于(5.3)式，这时压杆横向运动方程为

$$E_h I\frac{\partial^4 w}{\partial X^4}+P\frac{\partial^2}{\partial X^2}(w+w_i)=-\rho A\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \qquad (5.17)$$

设初缺陷 w_i 形如(5.10)式，压杆挠度 w 仍然可写成(5.11)式的形式，其中 $W_n(t)$满足下列二阶常微分方程，

$$\rho A\frac{\mathrm{d}^2W_n(t)}{\mathrm{d}t^2}+\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2(n^2P_h-P)W_n(t)$$

$$=P\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2W_{in},\quad n=1,2,\cdots,\infty \qquad (5.18)$$

其中

$$P_h=E_hI\pi^2/L^2. \qquad (5.19)$$

以下的讨论完全类似于弹性直杆动力屈曲。当$\frac{P}{P_h}\geqslant n^2$时，出现塑性动力变形。对应于 n 阶模态初缺陷的放大函数为

$$A_n(\tau)=\frac{P}{n^2P_h}\left(\frac{P}{n^2P_h}-1\right)^{-1}\left\{\cosh\left[n^2\left(\frac{E_h}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{P}{n^2P_h}-1\right)^{\frac{1}{2}}\tau\right]-1\right\}. \qquad (5.20)$$

临界模态数为

$$n_c=\left(\frac{P}{2P_h}\right)^{1/2}. \qquad (5.21)$$

对照(5.16)和(5.21)式可以看到，塑性动力屈曲的临界模态数为弹性动力屈曲的$(E/E_h)^{1/2}$倍。将(5.21)式代入(5.20)式，得到临界模态放大函数

$$A_{nc}(\tau)=2\left\{\cosh\left[\frac{P}{2P_h}\left(\frac{E_h}{E}\right)^{\frac{1}{2}}\tau\right]-1\right\}. \qquad (5.22)$$

对于不同的 P/P_h，A_{nc} 与$(E/E_h)^{\frac{1}{2}}\tau$的关系在图 5.8 中给出。工程中可以利用(5.22)式或图 5.8 来判断压杆是否出现塑性动力屈曲。当然这有一定的随意性.根据构件工作安全性的要求，可以规定最大挠度达到某一给定值，作为衡量出现塑性动力屈曲的标准。例如，最大挠度定为初缺陷的 100 倍。即 $A_{nc}(\tau)=100$。这

时由(5.22)式或图5.8就可以给出塑性动力屈曲的载荷P/P_A，以及所需的持续时间$(E_A/E)^{\frac{1}{2}}\tau$。

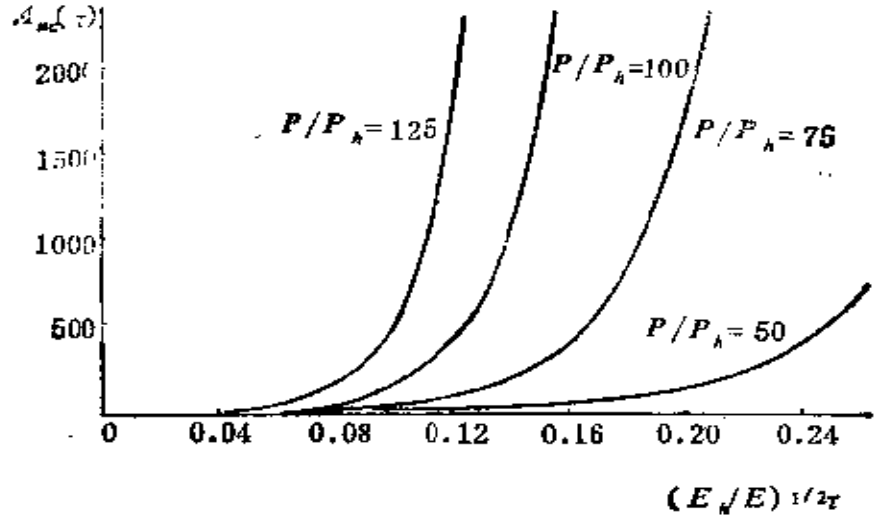


图 5.8

5.2.2 圆柱壳的塑性动力屈曲

圆柱壳的塑性动力屈曲同很多工程问题有关，有不少理论和实验对此进行研究。根据工程背景的不同，目前研究的有两种问题。一种是圆柱壳的一端固定在刚性平面上，另一端通过垫块

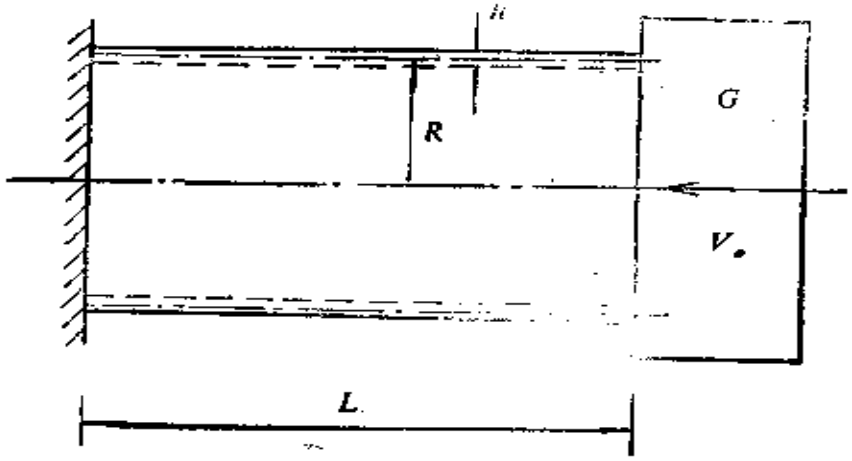


图 5.9

受到一个沿轴向运动的质量块 G 以 V_0 速度撞击。见图 5.9。另一种是圆柱壳连同附着的质量以一定速度撞击到刚性靶上。这两种问题的分析方法类似。本小节以图 5.9 所示的问题为例，简要介绍分析方法及有关结果。

假定圆柱壳的几何形状(包括几何初缺陷)及受力都是轴对称的，变形也是轴对称的，因而是轴对称问题。将圆柱壳的运动分解为主要运动和扰动运动两部分之和，

$$\begin{cases} w(X,t)=\bar{w}(t)+w^0(X,t), \\ u(X,t)=\bar{u}(X,t)+u^0(X,t), \end{cases} \tag{5.23}$$

其中 $\bar{w}$ 和 $\bar{u}$ 分别为主要径向位移和主要轴向位移，w^0 和 u^0 分别为扰动径向位移和扰动轴向位移。

Florence 和 Goodier 根据实验观察，提出圆柱壳受到撞击后端部轴向速度在整个运动过程中保持不变的假定，从而导出了主要位移所引起的应变分量[5.8]。同 5.2.1 的简支压杆分析类似。这里认为扰动运动部分是由于初缺陷引起的。在一般情况下除了位移初缺陷外，还有速度初缺陷。这两种初缺陷都可以展成无穷三角级数，记位移初缺陷的三角级数系数为 a_n，速度初缺陷的系数为 b_n，$n=1,2,\cdots\infty$。扰动运动也表示成三角级数形式，

$$w^0=\sum_{n=1}^{\infty}\bar{w}_n^0(\tau)\sin\frac{n\pi X}{}$$

$\bar{w}_n^0(\tau)$要满足一个类似于(5.18)式的二阶常微分方程，而且同(5.13)式一样，$w_n^0(\tau)$可以写成放大函数同 a_n，b_n 乘积的形式

$$w_n^0(\tau)=E_n(\tau)a_n+F_n(\tau)b_n, \tag{5.25}$$

其中 E_n 和 F_n 分别是位移和速度初缺陷的放大函数。E_n 和 F_n 都随着 τ 的增加而增大，对于某一特定的 n 值，E_n 和 F_n 增长得最快，这个 n 值就是临界模态数 n_c，具有临界模态数的初缺陷成分在撞击时得到最大的放大。数值计算表明，$n=n_c$ 的临界放大函数 E_{nc} 和 F_{nc} 随 V_0 的增大而增大。当 V_0 较小时，E_{nc} 和 F_{nc} 增长缓慢，但是当 V_0 达到某一个数值后，E_{nc}，F_{nc} 的增长十分

迅速，这个速度称为门槛速度或临界速度。这种现象就是圆柱壳的塑性动力屈曲。

Vaughan 对 Florence 和 Goodier 的工作进行了改进[5.9]。他放弃了撞击后撞击质量的速度保持不变的假定，而认为撞击质量作匀减速运动。结合实验观察结果，Vaughan 给出了如下门槛速度的估计式

$$V_0^2=\frac{2\pi h^2 LY}{(m+G)}, \tag{5.26}$$

其中 m 为圆柱壳质量，h 为壳体壁厚，Y 为材料屈服应力。

王仁等人对 AMГ 铝合金的三种不同厚度圆柱壳进行了如图 5.9 所示的冲击试验[5.10]，根据大量实验结果，观察到如下现象：

(i) 当弹头速度 V 从 0 逐渐增加时，壳体产生均匀的轴向压缩和均匀的环向扩张；

(ii) 当弹头速度达到 V_{c1}(这里称之为第一临界速度，即根据(5.26)式计算得到的门槛速度)时，伴随着壳体的均匀变形，开始出现有规则的轴对称正弦屈曲波形，这表明壳体出现塑性动力屈曲。当速度再增加时，正弦波的波幅也随着增加，但波数几乎不变；

(iii) 当弹头速度继续增加，壳体靠近固定端的屈曲波形出现折叠。壳体变形由规则的正弦屈曲波形开始变为非规则的屈曲形式，多数为非轴对称的。此时壳体有较大的轴向缩短。文献[5.10]将此时的速度定为第二临界速度 V_{c2}。再增加弹头撞击速度，只是使得圆柱壳的破坏进一步加剧。

图 5.10 为 3 种厚度不同，其他尺寸相同的圆柱壳的轴向缩短 ΔL 和弹头速度 V 之间的关系曲线。这 3 条曲线在 ΔL 分别等于 Δ_1 和 Δ_2 时有两处跳跃，它们分别对应于第一和第二临界速度 V_{c1}，V_{c2}。当撞击速度达到 V_{c2} 后，壳体某些部位根据原来公式计算的应变率有可能改变符号。也就是相应的屈曲模式偏离了规则的正弦形式。文献[5.10]根据这种应变率反号，给出了 V_{c2} 的近似估算式。

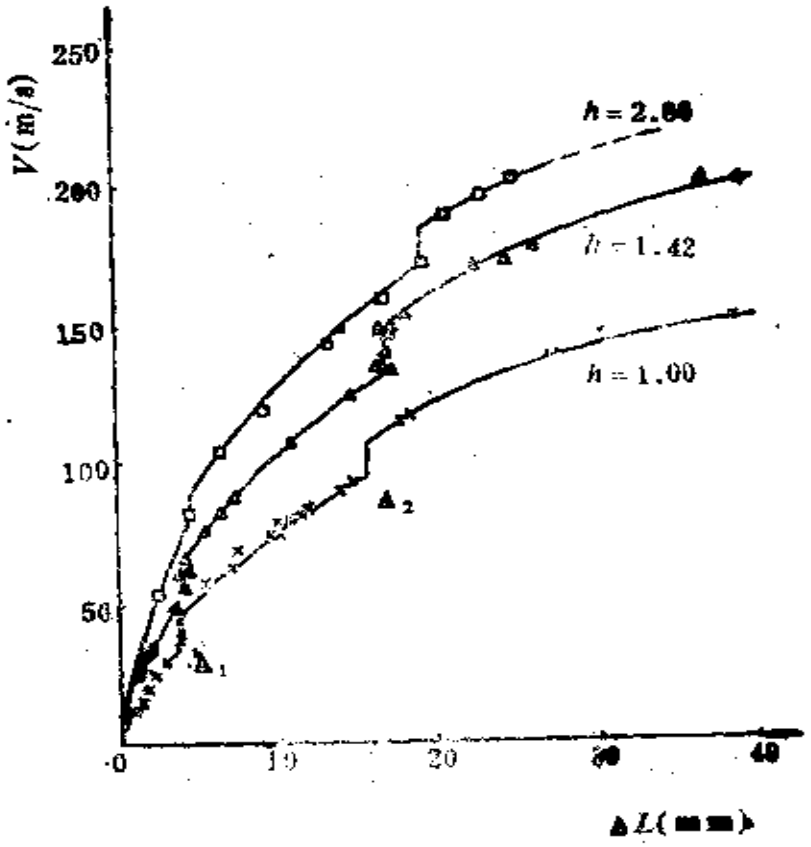


图 5.30

5.2.3 动力渐进屈曲

在5.2.3中所研究的圆柱壳受到轴向高速撞击发生塑性动力屈曲，整个壳体长度范围内都观察到屈曲波形。如果撞击速度较低，撞击质量较大，可能在壳体一端依次出现一个个轴对称的皱折环，如图5.11所示。这种变形现象同圆柱壳在静载荷作用下压溃十分相象。为了区别于5.2.2中的塑性动力屈曲，我们将这种行为称为动力渐进屈曲。

实验观察和理论研究都指出，对于相对厚度较大的圆柱壳，例如 $R/h<25$，在轴向撞击下往往发生如图5.11所示的轴对称屈曲。这种变形形态类似于波纹管或手风琴，因此称为 Concertina mode。Alexander最早研究了这一屈曲模式[5.11]。假定材料是

理想刚塑性的，圆柱壳屈曲过程简化成如图 5.11 所示的每个折屈依次形成的理想情况。在每一折屈过程中耗散的能量有弯曲变形能和壳体中面的伸张变形能、根据这两部分能量之和等于外力所做的功，从而求得折屈过程中轴力的平均值 P_m，

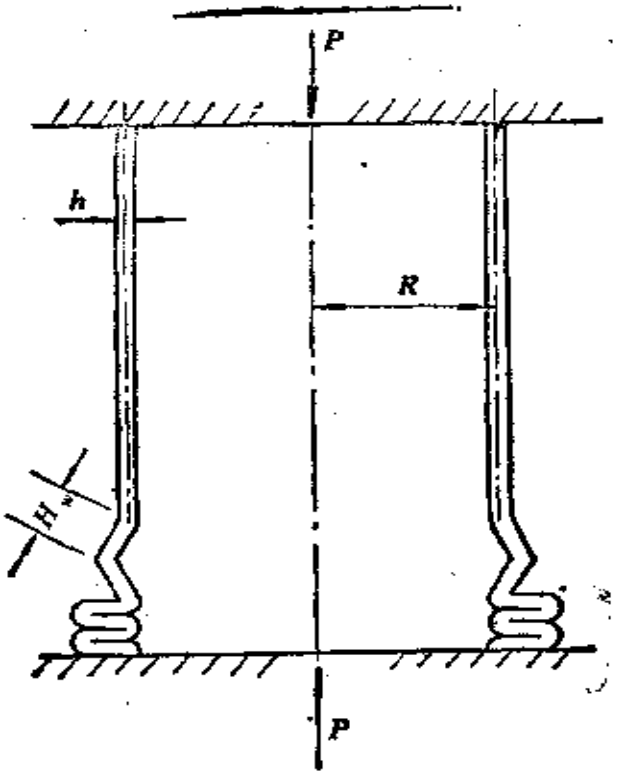


图 5.11

$$P_m = 6Yh\sqrt{2Rh}, \tag{5.27}$$

以及折屈高度 H_w，

$$H_w = (\pi Rh/\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}, \tag{5.28}$$

在推导 P_m 和 H_w 中，假定弯矩和膜力之间没有交互作用，并假定壳壁厚度和折屈长度都保持不变。实际上这样推导没有考虑动力因素；即没有考虑惯性力和应变率效应，当撞击速度较低时，惯性力可以不计。若壳体材料是应变率敏感的，则需要考虑应变率效应。利用 Cowper-Symonds 公式，即 (3.2) 式，可将 P_m 修正为

$$P_m = 6Yh\sqrt{2Rh}\left[1+\left(\frac{V}{4RD}\right)^{\frac{1}{P}}\right], \qquad (5.29)$$

其中 P 和 D 为 Cowper-Symonds 方程中的参数，参见表3.1，V 为撞击速度。

早在人们研究圆柱壳在轴压作用下的弹性稳定性时，就注意到了有轴向和环向同时形成波纹的非轴对称屈曲，通常称为吉村(Yoshimura)模式[5.12]。人们发现这种模式也可以在塑性动力情况下产生，并在大变形时发展成为有如若干个三角块折叠起来的折屈，所以又叫做金刚石模式(diamond mode)。对于相对厚度较小的圆柱壳，例如 $R/h \geqslant 50$，受轴向撞击时常发生这种模式屈曲。许多人研究过这种模式的渐进屈曲。Wierzbicki 1983年提出一个平均轴力的近似公式[5.13]，

$$P_m = 22.87YRh(h/R)^{2/3}. \qquad (5.30)$$

正方形柱壳(方管)在轴向撞击下也有类似的渐进屈曲现象。关于圆柱壳(圆管)和正方形柱壳的塑性动力屈曲和渐进屈曲研究有重要的实际意义。一方面这种研究可以为各种交通工具如火车车厢、飞机、潜艇等结构的耐撞性(structural crashworthiness)提供必要的工程设计数据；另一方面，这些圆管和方管可以作为能量吸收元件[5.14](energy absorbing device)，吸收碰撞能量，避免或减轻碰撞造成的损失，因而受到广泛的重视。

5.3 结构的塑性动力失效

对于车辆、船舶的碰撞、核电站的防护等许多工程结构的安全性问题，人们所关心的主要不是结构受到强动载荷后的变形历史，而是结构最终是否会失效。所谓失效(failure)，从广义上讲是指结构失去原有的功能。因此，结构的过度的永久变形、构件的屈曲等都可以看成失效。如果构件内产生宏观裂纹甚至破断，更无疑是失效。在缓慢变动载荷作用下的构件失效，往往是经过

长时间损伤积累后的疲劳破坏；而在冲击载荷作用下，结构的失效往往迅即发生，这时我们称之为结构的动力失效。

由于失效模式的多样性，很难期望有统一的方法来分析和预测失效。下面仅就结构动力失效的几个问题作一些初步的介绍。

5.3.1 梁在均布冲击下的动力失效

Menkes和 Opat 对铝制固支梁采用层状炸药加载，证实了梁的动力失效模式随外载强度而变化[5.15]。他们的试件尺寸是梁跨度为 102mm 和 204mm，宽 25.4mm，厚 4.75mm，6.35mm 和 9.52mm，见图 5.12。层状炸药爆炸时，梁的整个跨度上受到均布冲击载荷。为避免试件背面的层裂，在炸药和试件间垫入了缓冲层。对每组尺寸的试件，用逐渐增加炸药层厚度的方式逐渐加大载荷强度，这时渐次观察到以下 3 种失效模式(图 5.13)：

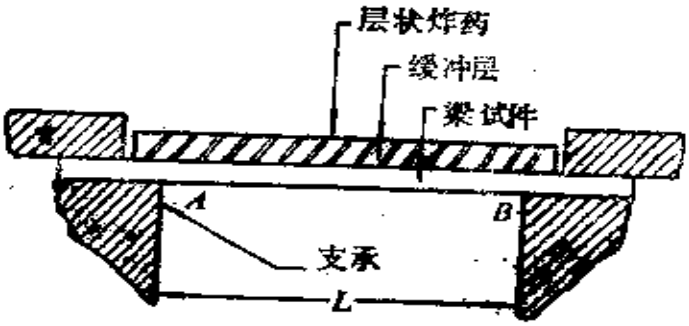


图 5.12

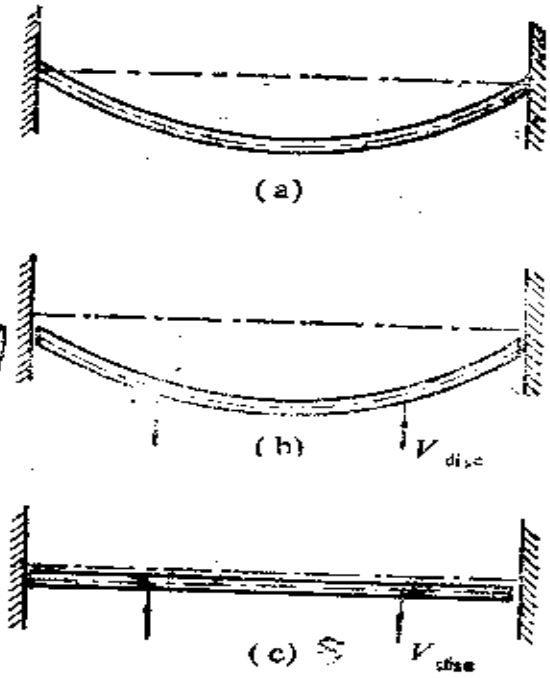


图 5.13

模式 Ⅰ，过度的永久变形；

模式 Ⅱ，在支承附近的拉伸撕裂；

模式 Ⅲ，在支承附近的横向剪切断裂。

图 5.14 是一组典型试件的照片。可以看到，在模式 I 范围内，梁中点最终挠度 Δ，随冲量 I 增加而增大；进入模式 Ⅱ 范围内后，由于拉伸撕裂后梁中段与支承分离，刚体运动带走了一部

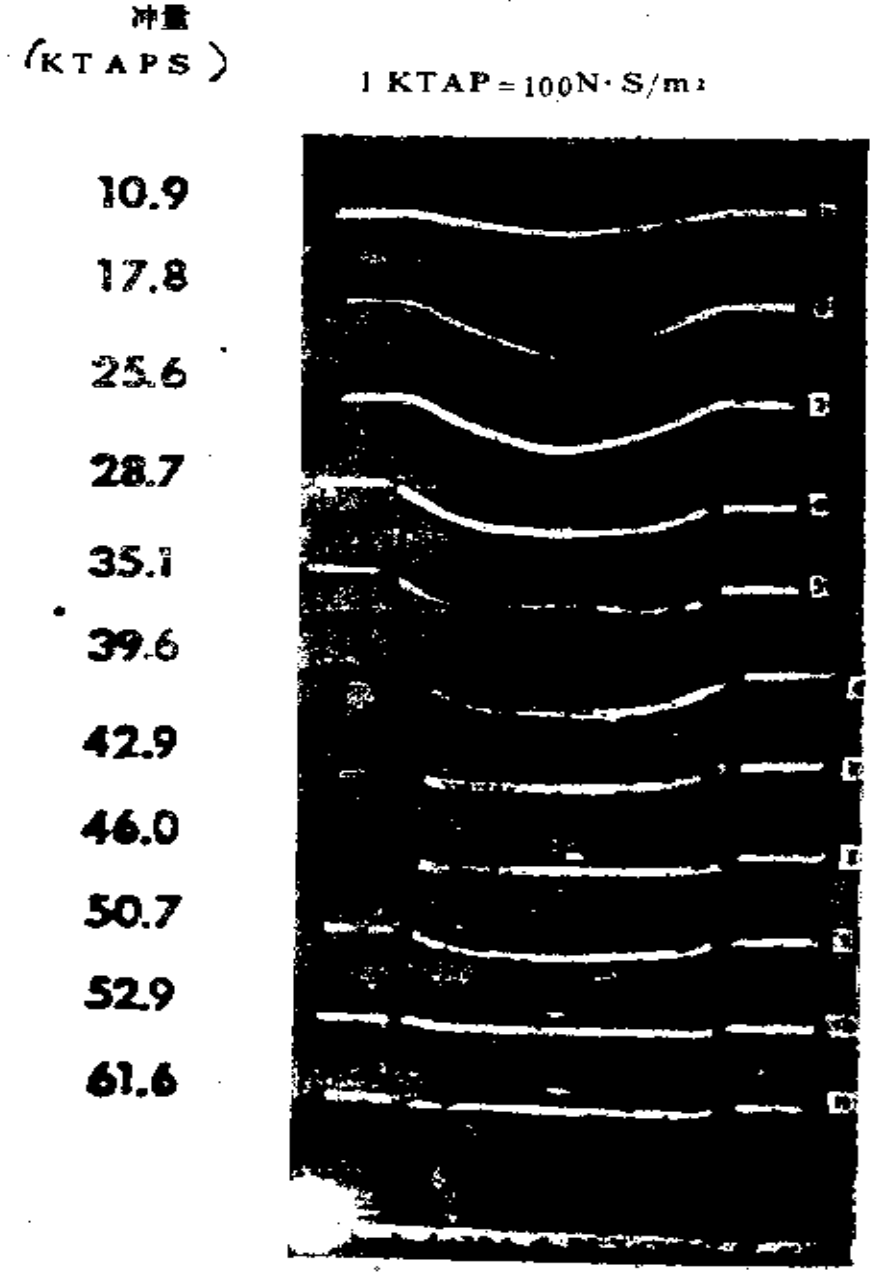


图 5.14

分动能，所以梁的塑性变形反而减小；在模式Ⅲ范围内，剪切断裂更是在响应初期便已发生，因而梁中点的相对挠度很小。Δ_f和I之间的这种复杂的依赖关系可以用图5.15来示意。

Menkes 和 Opat 的实验表明，梁的动力失效模式取决于梁的厚度和外加的冲量。三种模式的发生区域可大致表示如图5.16。

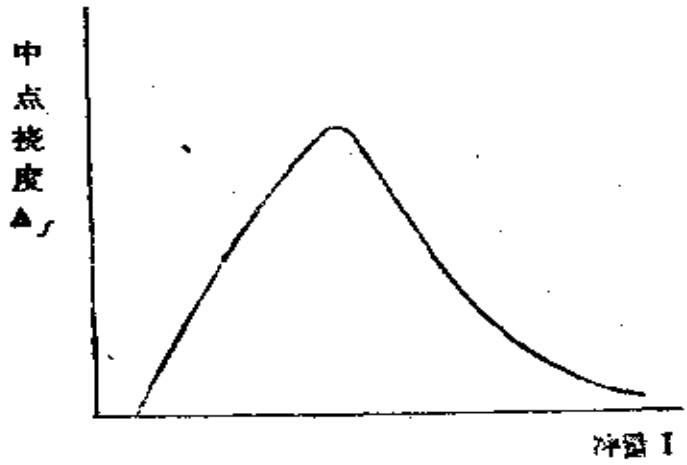


图 5.15

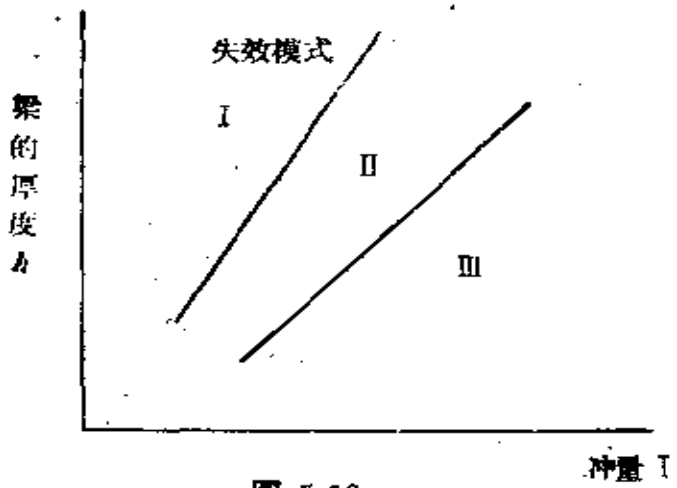


图 5.16

5.3.2 圆板在均布冲击下的动力失效

Teeling-Smith 和 Nurick 对固支软钢圆板在均布冲击载荷

作用下的变形和失效作了实验研究[6.18]。他们的圆板试件半径为50mm，厚1.6mm，也采用层状炸药加载。他们同样发现了三种动力失效模式，且模式转换也取决于所加的冲量。

引入无量纲挠度 $\delta_f \equiv \Delta_f/h$ 和无量纲冲量

$$\phi \equiv I/[\pi R h^2 (\rho Y)^{1/2}], \tag{5.31}$$

其中 Δ_f 为板中心的最终挠度，h 为板厚，R 为板的半径，ρ 为板的密度，Y 为材料的初始屈服应力，I 为加载的冲量。这时[5.16]的实验结果可以归纳为简单的经验关系

$$\delta_f = \begin{cases} 0.407\phi - 0.957, & \phi \leqslant 47 \quad (\text{模式 I}); \\ -0.318\phi + 32.46, & 47 \leqslant \phi \leqslant 97 (\text{模式 II}). \end{cases} \tag{5.32}$$

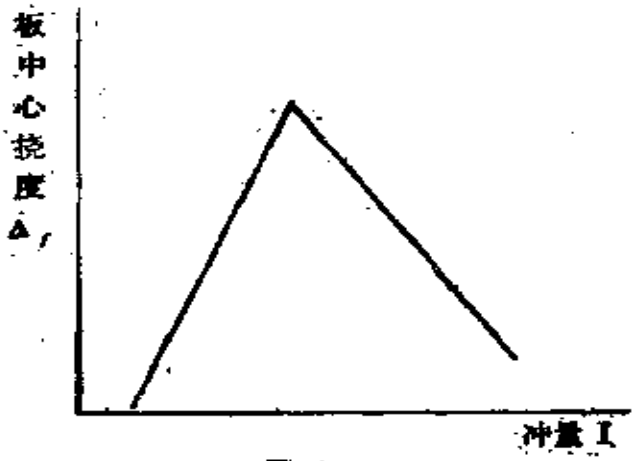


图 5.17

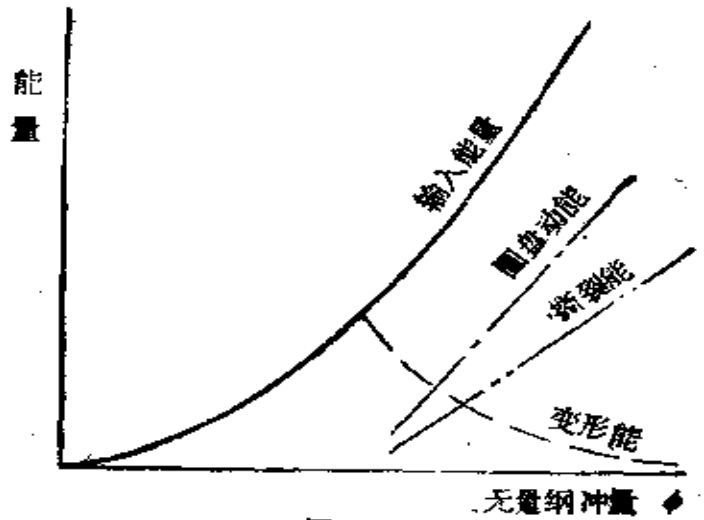


图 5.18

这一双线性关系如图 5.17 所示。

容易看出，模式 I 向模式 II 的转化发生在 $\phi \approx 47$，即板的初速度约为 280m/s，由于模式 II 和 III 都表现为断裂，难以作出准确的分辨；从实验结果分析，这一转换约发生在 $\phi \approx 85 \sim 95$，亦即初速度约为 510～570m/s。

在文献[5.16]中还按照几种假定的剖面形状估计板所吸收的变形能，进而按照三部分能量进行估算并校核了能量平衡。这三部分能量是：1）变形能；2）破裂后中部圆盘带走的动能；3)撕裂能。其中变形能先随 ϕ 增加(模式 I)，后随 ϕ 减小(模式 II)。最后几乎趋于 0（模式 III)。各部分能量随 ϕ 变化的趋势可由图 5.18示意。

6.3.3 对梁、板动力失效的理论分析

基于上述文献报导的结构动力失效的实验观测，已有一些理论工作试图在刚塑性分析的理论框架内预测失效模式。Jones 首先对固支梁受均布冲击的情形作出分析[5.17]，并与 Menkes 和 Opat 的实验[5.15]作了比较。

对模态 I，分析并不困难，只要求得 δ_f 对冲击速度 V_0 的依赖关系即可。由于梁是固支的，挠度较小时轴力对弯曲变形会有显著影响。Jones 采用了独立作用屈服面近似地考虑了这一影响。由此得到对 δ_f 的上下界估计，与实验符合良好。

对模式 II，关键是判断拉伸撕裂在什么条件下会发生。Jones 采用的是，最大拉应变达到某一临界值时，撕裂就会发生。从经典的理想刚塑性模型出发，不难假定塑性变形集中在三个驻定铰（两端支承处及梁中点各一个铰），且在给定冲击速度时可以算出每个铰的相对转角。但是，如果假定铰只是一个没有长度的单一截面，那么相应的拉应变将为无穷大。摆脱这一困难的最简易的办法是引进一个等效铰长，如同我们已在 3.1 和 3.2 中看到的那样，参看(3.39)式。Jones 在[5.17]中所取的等效铰长 L_h 为

（其中 L 为梁长）

$$L_h=\begin{cases}\frac{3}{2}h, & \text{若 } 0\leqslant\Delta/h<1,\\ \frac{1}{4}L, & \text{若 } 1\leqslant\Delta/h.\end{cases}\tag{5.33}$$

也就是说，当挠度 Δ 达到梁厚 h 时，由于梁进入塑性弦状态，全梁产生拉伸塑性变形，于是 L_h 有一个突然的增长。根据刚塑性动力响应的分析和(5.33)式，可以推出拉伸应变与挠度 Δ 的关系为

$$\varepsilon=\left(\frac{h}{L}\right)^2\left\{2\left(\frac{\Delta}{h}\right)^2+\frac{L}{h}-2\right\},\tag{5.34}$$

而当挠度相当大时，Δ 可按下列求出

$$\frac{\Delta}{h}\simeq\frac{1}{2}\left\{\frac{LV_0}{2h}\sqrt{\frac{3\rho}{Y}}-1\right\}.\tag{5.35}$$

将此二式联立起来，并设拉应变达到 ε_m 时梁就会被撕裂，则可以求出模式 I 转化为模式 II 的单位受载面积的临界冲量为

$$I=\rho hV_0=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\rho h^2}{L}\sqrt{\frac{Y}{\rho}}\left\{1+\sqrt{2\left[1+\varepsilon_m\left(\frac{L}{h}\right)^2-\frac{L}{h}\right]}\right\}.\tag{5.36}$$

为分析模式 II，必须计及剪力及相应的剪切变形（即截面间的横向相对滑移）。这可以参照 3.3 的分析，采用图 5.19 的变形机构：中部有 2 个对称的简单弯曲铰，两端为既有弯曲又有剪切的广义塑性铰。弯矩与剪力之间假设满足独立作用屈服面。不难求出同一侧两铰间的距离为

$$z=\frac{6M_P}{Q_P}=\frac{3\sqrt{3}}{2}h=2.6h,\tag{5.37}$$

其中 M_P 和 Q_P 分别为梁的塑性极限弯矩和剪性极限剪力。因为 Q_P 是常量，所以梁支座处的横向滑移是一个匀减速运动。求出总滑移量 Δ_S 后，令其等于梁的厚度 h，就得到剪切断裂的临界条件，亦

即模式Ⅰ发生的临界条件。

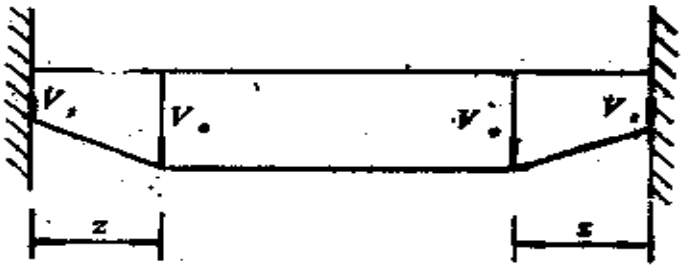


图 5.19

Jones 提出的这套分析方法[5.17]，虽然同 Menkes 和Opat的实验[5.15]能大致符合，但必须人为地假定塑性铰的等效长度，并难以计及弯矩和剪力之间的相互作用。所以，后来他本人把这套失效判别方法称为初等方法；相应的准则

$$\begin{cases}\text{对模式 Ⅱ，}\ \varepsilon=\varepsilon_m,\\ \text{对模式 Ⅰ，}\ \Delta_s=h_c.\end{cases}\tag{5.38}$$

称为初等失效准则。

新近 Shen 和 Jones 提出了能量密度失效准则[5.18],[5.19]，其概念是：利用刚塑性动力响应分析求出塑性铰处的能量耗散，继续引用等效铰长(在估值上作了一些改进)，即可求出铰区的能量耗散密度；当此密度达到某一临界值时发生拉伸撕裂；当剪切耗散的能量对总耗散能量之比 β 达到某一临界值（如 $\beta_c=0.45$）时转化为剪切断裂。这套新方法的优点是用能量耗散的观念把弯矩、轴力和剪力对失效的效应统一起来加以考虑，在计算中可以采用这些广义应力的交互作用屈服面及与之相关连的流动法则。但是，对于等效铰长和 β_c 仍需要作人为假定。这些量值固然可以从实验中回归出来，但对于不同的几何构形和不同的加载条件它们是否保持为常值，还有待进一步验证。

5.3.4 含有初始裂纹的梁的动力失效

上述的实验和分析都假定梁是完善的，即截面均匀、不含任

何缺陷。如果梁中具有初始缺陷，例如含有初始横向裂纹，则在冲击载荷作用下，失效很可能在含缺陷的截面处发生。从能量角度看，如果梁中某截面含有横向裂纹，则冲击载荷所输入的能量除了在移行塑性区和梁的支座附近消耗之外，还会比较集中地消耗在缺陷截面上；随着裂纹附近塑性变形的增大，裂纹有可能失稳、扩展。

Petroski首先研究了含有初始裂纹的梁的动力响应[5.20,5.21]，但他略去了瞬态响应阶段，假定塑性铰始终驻定于梁的支承处和缺陷截面处。杨嘉陵和余同希重新研究了含初始裂纹的悬臂梁、简支梁等一系列问题[5.22,5.23]，求得了包括移行铰阶段在内的动力响应完全解，从而为判断动力失效提供了更为可靠的基础。以悬臂梁为例，他们分析了图 2.28 所示的问题。梁 AB 的塑性极限弯矩为 M_p，但在 C 截面处由于有一横向裂纹，因而该截面的塑性极限弯矩只有 ζM_p，其中 $\zeta(0<\zeta<1)$ 为一取决于裂纹尺寸和形状的因子。杨嘉陵等人采用了“双铰模式”，即一个移行铰和一个位于含裂纹截面的驻定铰，成功地构造了这一悬臂梁受到质量块撞击后的动力响应的刚塑性完全解，详见 2.2.3。

响应过程可以分为两个阶段。根据含裂纹截面 C 在第一阶段和第二阶段中所耗散的总能量，可以进一步讨论初始裂纹的稳定性从而给出失效条件。因为这一过程涉及裂纹尖端附近较大的塑性变形，所以我们可以用断裂力学中的 J 积分或撕裂模量来判断裂纹的失稳与否。例如 J 积分可用下式算出

$$J=-\frac{\partial(\zeta M_p)}{\partial A_{cr}}\theta_c, \tag{5.39}$$

其中 A_{cr} 是裂纹面积，θ_c 是 C 截面在动力响应过程中的总转角。裂纹的稳定性条件可写为

$$\begin{cases} J<J_m: & \text{裂纹稳定;} \\ J\geqslant J_m: & \text{裂纹失稳。} \end{cases} \tag{5.40}$$

其中 J_m 是由材料韧性和裂纹构形决定的 J 积分的临界值。在文

献[5.22]中，具体假定圆管截面的内沿附近存在一个典型的应力腐蚀片状裂纹，计算了径向和环向的最终J积分数值对初裂纹圆周角的依赖性。结果发现，当初裂纹的圆周角大于50°～70°时，继续增大裂纹的圆周角，裂纹在环向失稳的可能性减小，而在径向失稳的可能性增加，因而后果是管道的泄漏，而不是管道的破裂。

以上工作显示了，将冲击动力学同断裂力学结合起来，有可能对含裂纹结构在冲击载荷作用下的动力失效条件及动力失效形式作出理论上的预测。

5.4 尺 度 律

在实验室内进行结构冲击动力学实验时，受到试验设备和经费的限制，往往需要简化原型结构的形状，并在几何尺度上加以缩小。这时模型(model)和原型(prototype)之间就存在一个尺度律或相似律的问题。这就是说，如果模型的空间特征长度与原型的特征长度之比为$\alpha(0<\alpha<1)$，模型及其所受载荷的各种参量应按照什么规律来选取？实验中测量得到的各种参量应按照什么规律换算才能模拟原型结构的行为？

5.4.1 静力问题的初等相似律

对于承受准静态载荷的结构来说，如果模型和原型材料完全相同，所有空间尺度都符合几何相似，所施加的单位面积的外载(面力)也相同，那么从弹塑性理论可知，模型与原型的应力场应完全相同，应变场也完全相同，变形场和位移场应几何相似。

由于模型和原型在应力场和应变场上的一致性，可以看出无论是对于弹性应变能还是塑性变形能，模型和原型的应变能之比都等于体积比，亦即$\bar{w}=\alpha^3 W$。

以上结果在表5.1中罗列在前11项中。

表 5.1　模型和原型间的尺度关系

No	参　　量	原　型	模　型	关　　系
1	结构的空间特征尺度	L	l	$l=\alpha L$
2	面　　积	A	a	$a=\alpha^2 A$
3	体　　积	Ω	ω	$\omega=\alpha^3\Omega$
4	材料的力学特性参数	$E,\nu,Y,\cdots$	$E,\nu,Y,\cdots$	相　　同
5	集　中　力	F	f	$f=\alpha^2 F$
6	分布力(面力)	P	p	$p=P$
7	应　　力	Σ	σ	$\sigma=\Sigma$
8	应　　变	$\in$	ε	$\varepsilon=\in$
9	变形(或位移)	Δ	δ	$\delta=\alpha\Delta$
10	弹性变形能	W^e	w^e	$w^e=\alpha^3 W^e$
11	塑性变形能	W^p	w^p	$w^p=\alpha^3 W^p$
12	弹性应力波速	C_e	C_e	相　　同
13	屈服速度	V_Y	v_Y	$v_Y=V_Y$
14	速　　度	V	v	$v=V$

续　表

No	参　量	原　型	模　型	关　系
15	特征时间尺度	T	t	$t=\alpha T$
16	加　速　度	$\frac{dV}{dT}$	$\frac{dv}{dt}$	$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{\alpha}\frac{dV}{dT}$
17	材料密度	ρ	ρ	相　同
18	质　量	M	m	$m=\alpha^3 M$
19	动　量	MV	mv	$mv=\alpha^4 MV$
20	动　能	K	k	$k=\alpha^5 K$
21	应　变　率	$\frac{d\in}{dT}$	$\frac{d\varepsilon}{dt}$	$\frac{d\varepsilon}{dt}=\frac{1}{\alpha}\frac{d\in}{dT}$
22	弹性断裂能	W^{ef}	w^{ef}	$w^{ef}=\alpha^2 W^{ef}$
23	弹塑性断裂能	W^f	w^f	?
24	重心下降高度	H_c	h_c	$h_c=\alpha H_c$
25	重力势能	MgH_c	mgh_c	$mgh_c=\alpha^4 MgH_c$
26	材料微结构特征尺度	λ	λ	相　同

5.4.2　动力问题的初等相似律

结构受到强动载荷时，由于载荷随时间迅速变动，因此必须

考虑时间尺度的选取。从弹性应力波理论可知，弹性波的波速 $C_0=\sqrt{E/\rho}$ 是一个只依赖于材料力学特性和密度的物理量，因此当模型和原型材料相同时，C_0 也相同。弹性波理论还告诉我们，应力与质点速度成正比，且 $\sigma=\rho C_0 v$。这样，为了使模型受到撞击后与原型受撞击后的应力相一致，撞击速度应取得相同，即应有 $v=V$，

当撞击速度达到所谓“屈服速度”[5·24]

$$v_Y=\frac{Y}{\rho C_0} \tag{5.41}$$

时，材料的应力达到初始屈服应力 Y。因此，当 $v>v_Y$ 时，塑性变形将在材料中产生并传播。由于(5.41)式说明 v_Y 仅依赖于材料、不依赖于模型的几何尺寸；这再一次表明在模型实验中必须保持撞击速度或加载速率与原型的问题相同，才能使其响应的物理特性不改变。

由于模型的空间特征尺度满足 $l=\alpha L$，在保持速度一致（$v=V$）的条件下，特征时间尺度必须按初等相似律缩小，即 $t=\alpha T$。

若结构受到的动载是脉冲载荷，则模型上的载荷强度按 $f=\alpha^2 F$（集中力）或 $p=P$（面分布载荷）确定，在持续时间上则要按 $t=\alpha T$ 转换。例如，构件原型问题是一块圆板在板中心受一矩形脉冲（强度为 F，持续时间为 T_d）的集中力作用，模型的材料和原型相同，板半径、板厚等空间尺度为原型的$\frac{1}{5}\left(\text{即}\alpha=\frac{1}{5}\right)$，则作用在模型圆板上的矩形脉冲应取强度 $f=\frac{F}{25}$，其持续时间应取为 $t_d=\frac{T_d}{5}$。

在结构动力响应过程中，惯性力将进入控制方程。若模型内某撞击物或某特定结构单元的质量是 m，在原型内与之对应的物体和单元质量是 M，当模型与原型材料相同（因而体积密度 ρ 相同），同时所有几何尺寸符合几何相似时，一定有 $m=\alpha^3 M$。于

是与模型有关的运动方程 $f=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 同与原型有关的运动方程 $F=M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$ 可保持完全一致。但是要看到，模型实验中的加速度比原型要大，这是在处理实验数据时须记住的，参见表5.1的第16项。

从动能表达式 $k=\frac{1}{2}mv^2$ 可以看出 $k=\alpha^3K$，这与变形能正比于体积一致。

5.4.3 应变率效应

从理论上讲，结构动力学问题的控制方程组包括几何方程、运动方程和本构方程。在模型与原型间满足初等相似律的条件下，几何方程和运动方程将保持不变，这在前面已经讲过了。边界条件和初始条件的相似性一般也不难满足。现在再考察一下本构关系。

在前面的推理中，实际上假定了应力只是应变的函数，即

$$\sigma=\Phi(\varepsilon),$$

这样从应力场的一致性便可导出应变场的一致性。如果材料是率相关的，则应变率将进入本构方程。即

$$\sigma=\Phi(\varepsilon,\dot{\varepsilon}). \tag{5.42}$$

但是很容易看到，模型和原型间虽然应变是对应相等的，但应变率却不相等，即

$$\varepsilon=\in,\quad \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\alpha}\frac{\mathrm{d}\in}{\mathrm{d}T}. \tag{5.43}$$

当模型小于原型（$\alpha<1$）时，模型响应的应变率比原型要大。因此，如果材料的动态屈服应力随应变率的增加而增大，尽管模型与原型材料完全相同，模型的动态屈服应力也会高于原型；或者说，模型的承载能力要比原型强。对于率敏感材料，这种差异会是相当显著的。这种对初等相似律的背离，是在设计和分析结构动力

实验时必须注意的重要问题。

为了举一个定量的例子，假定某种软钢的本构关系(5.42)式是过应力型率相关的理想弹塑性材料(参见3.1)。图 5.20 中的曲线 1 代表准静态加载时的理想弹塑性特性。在动态的加载条件下，材料的屈服应力提高，并满足 Cowper-Symonds 关系，由(3.2)式，

$$\frac{Y_D}{Y}=1+\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{D}\right)^{\frac{1}{P}}, \tag{5.44}$$

其中 Y 和 Y_D 分别为静态和动态屈服应力，D 和 P 是材料常数，见表 3.1。图 5.20中的曲线 2 和曲线 3 分别代表不同应变率下的材料动态性能。

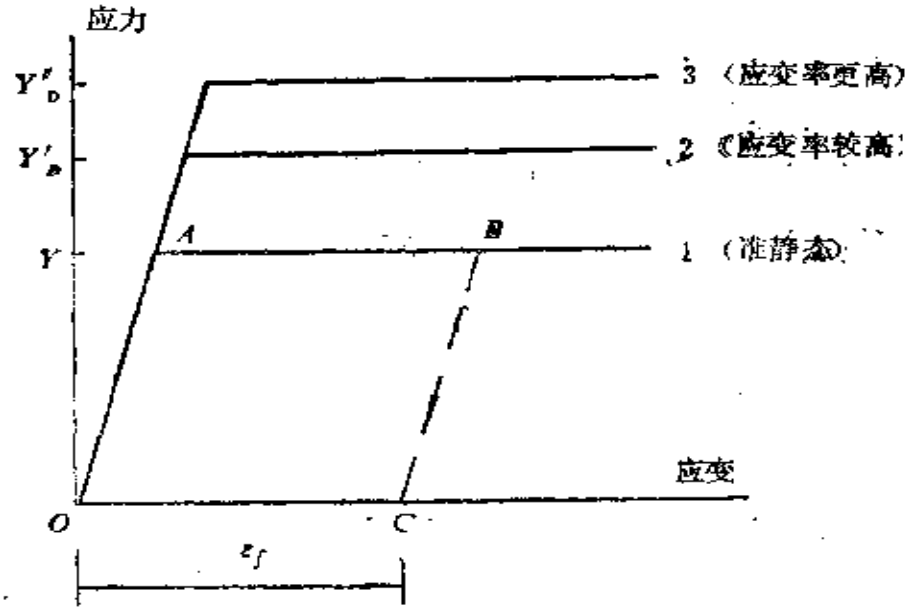


图 5.20

现假定原型是长 400mm，宽和厚均为 50mm 的方杆；受到准静态单轴拉伸，输入的外功为 2KJ，假设变形是均匀的，则单位体积的外功密度为$2\mathrm{KJ}/(0.4\times0.05\times0.05)\mathrm{m}^3=2\times10^6\mathrm{J}/\mathrm{m}^3$。再设准静态屈服应力 $Y=250\mathrm{MN}/\mathrm{m}^2$，参照图 5.20 中的平行四边形 $OABC$，当外功完全转化为变形能后，求得的残余应变为

$$\epsilon_f = \frac{2\times 10^6 \mathrm{J/m^3}}{250\mathrm{MN/m^2}} = 0.008$$

取模型为原型尺度的1/10，即 $\alpha = 0.1$，输入外功为 $\alpha^3 \cdot 2\mathrm{KJ} = 2\mathrm{J}$。由于单位体积的外功密度不变，$Y$ 也相同，必然有 $\varepsilon_f = \epsilon_f$。

当原型和模型都受到快速拉伸时，情况就不同了。设原型拉伸速率为200mm/sec。如前所述，模型拉伸速率应与此相同。这样，应变率分别为 $\frac{d\epsilon}{dT} = 0.5\mathrm{sec}^{-1}$ 和 $\frac{d\varepsilon}{dt} = 5\mathrm{sec}^{-1}$，代入(5.44)式，对软钢可以取 $D = 40.4$ 和 $P = 5$，求得原型的动态屈服应力是 $Y_D = 354\mathrm{MN/m^2}$，而模型的动态屈服应力是 $Y_D = 415\mathrm{MN/m^2}$，后者比前者高出17%，相应的计算给出

$$\epsilon_f = 0.00565,\quad \varepsilon_f = 0.00482.$$

可见，由于应变率效应，模型动态拉伸实验得到的最终应变只是原型的最终应变的85%。尽管其他参量都严格按初等相似律选取，应变率效应这一项因素可导致相当大的错误。

5.4.4 断裂能

对结构的动力响应而言，上面看到的是一个违反相似律的因素，当结构发生动力失效时，会有更多的违反相似律的因素介入。

假如在结构动力失效过程中，外功 W 全部转化为塑性变形能 W^P 和断裂能 W^f，则 $W = W^P + W^f$。对模型而言，输入的外功应为 $w = \alpha^3 W$，期望也有 $w^P = \alpha^3 W^P$ 以使塑性变形场相似。但是断裂能的尺度律比较复杂，一般并不满足 α^3 关系。如果断裂是脆性的，可认为断裂能与裂纹表面积成正比；从而，对于线弹性断裂 $w^{ef} = \alpha^2 W^{ef}$。这时

$$w^P = w - w^{ef} = \alpha^3 W - \alpha^2 W^{ef} = \alpha^3 W^P - \alpha^2(1-\alpha)W^{ef},$$

可见 $w^P < \alpha^3 W^P$。这就是说，由于小模型消耗的断裂功相对较多，留给塑性变形的能量相对减少，因此模型只能发生比原型小

一些的最终变形。与应变率效应一样，这个因素也是使模型抵抗变形和失效的能力高于原型。

对于韧性材料的弹塑性断裂，这里所说的“断裂能”其实主要是裂纹尖端附近的塑性变形能，因而与这一塑性区的体积直接相关连。当这一塑性区的特征尺度比模型的特征尺度小很多时，可以认为前者实际上与后者无关，因而消耗在这区的能量不满足几何相似律，即 $w^f \neq \alpha^3 W^f$。

余同希等人对金属薄板进行了撕裂实验[5.25]，他们利用一对反向转动的辊筒使薄板在卷曲(塑性弯曲)的同时沿预制的沟槽撕裂，通过变化沟槽的数目和深度改变撕裂能在总功中的比例，进而经验性地得出了撕裂能与 $h^{1.61}$ 成正比(h为板厚)的结论。这个结果说明当板厚变化时，撕裂能不依 α^3 规律变化。

刚性楔块切入平板(图5.21)是近年来引起广泛注意的一个研究课题。卢国兴和 Calladine 通过系统的实验测量和数据分析提出了以下经验公式[5.26]

$$W = CYl^{1.3}h^{1.7}, \quad 5 < l/h < 150, \tag{5.45}$$

其中 W 为总功，C 为一常数因子，Y 为材料的屈服应力，l 为切

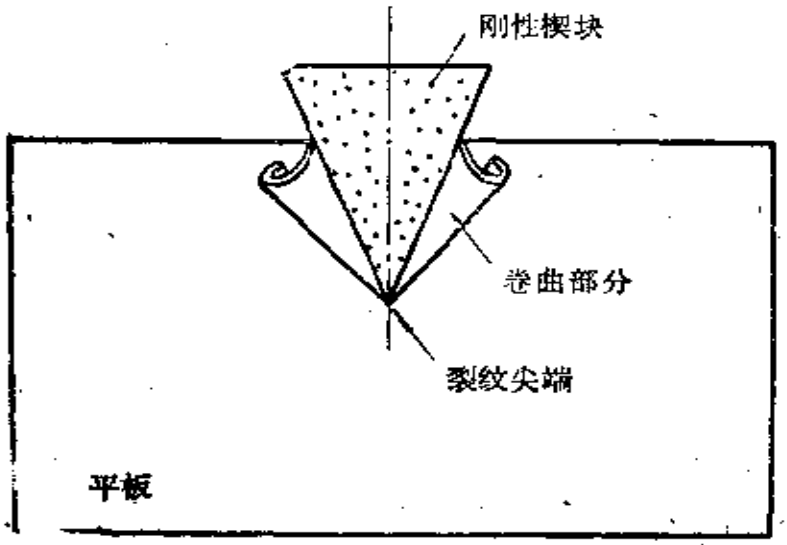


图 5.21

入长度，h 为板厚。后来 Wierzbicki 和 Thomas 提出一个近似的运动学模型[5.27]，估计出在图 5.21 所示的问题中的能量分配为：弯曲能占 24%，膜力能占 36%，摩擦功占 40%，塑性弯曲主要发生在远场(远离裂纹尖端的区域)，膜力主要发生在裂尖附近。由于在这个问题中参数多，运动学关系复杂，摩擦又起到很大作用，所以其中的尺度律还在争议之中。

5.4.5 影响尺度律的其他因素

1. 重力

在大多数结构动力响应问题中，体积力(包括重力)比外加的冲击或脉冲载荷要小得多，因而完全可以略去不计。但如果重力是外功的来源则需注意。例如研究结构在坠落物冲击下的响应和失效时，实验中坠落物的质量按初等相似律 $m=\alpha^3 M$ 确定，但坠落高度必须与原型问题保持相等，才能使撞击速度相等。

另一个例子是车辆在斜坡上的侧向翻滚(图5.24)。在模型实验中，若所有空间尺度符合初等相似律，模型的材料的平均比重与原型相同，则 $m=\alpha^3 M$，同时翻滚的起始高度也按 α 因子缩小，故翻滚时重力提供的外功仅为 $w=\alpha^4 W$，不再满足初等相似律。这个问题可以通过适当增大机身配重，或适当削弱结构的承载截面来解决。

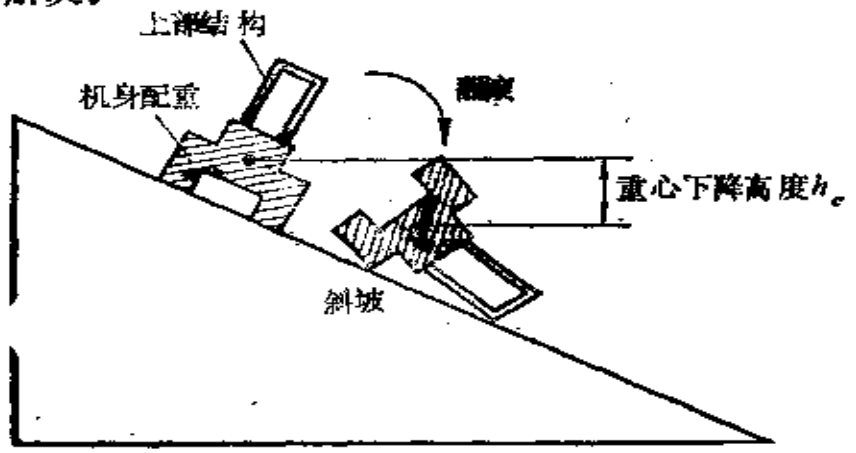


图 5.22

2．摩擦、阻尼和弹性支承

摩擦可以看成是作用在结构表面的分布载荷。当摩擦服从Coulomb定律时，与集中或分布外载成正比的正压力造成的摩擦满足初等相似律；但如果正压力来自重力(如图5.22的例子)，摩擦也会违背初等相似律。

在5.4.2中证实了运动方程 $f=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 与 $F=M\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}$ 的一致性。如若系统中有阻尼和弹性元件，则与模型相关的方程

$$f=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+Cv+k\delta \tag{5.46}$$

转换到原型去时，有

$$\alpha^2F=\alpha^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}+CV+\alpha k\Delta,$$

可见阻尼和弹性元件一般会引起对初等相似律的偏离，除非对于模型取与原型不同的阻尼系数 C 和弹性系数 k。

3．材料的微结构和变形局部化

某些材料具有比较规则的微结构，其尺度可以由λ表示。例如蜂窝材料和泡沫塑料的胞元的大小，混凝土中砂石颗粒的大小等，都可以取作λ。如果λ比模型特征尺度 l 和原型特征尺度 L 都小很多，即模型和原型都由极大数量的微结构组成，则可以认为λ对模型行为影响不大；但若λ与 l 的尺度相差不很大，模型其实不能保持与原型严格的几何相似，这是应予注意的。

当材料和结构的失效涉及变形局部化时也有类似的问题。例如板壳受到高速撞击时有可能因材料的绝热剪切而破坏，绝热剪切带的宽度由材料的微结构决定而与板壳本身的尺度无关。其结果，这种失效过程中的能量消耗也不满足初等相似律。

参 考 文 献

[5.1] Shanley F R. Inelastic column theory. *J. Aero. Sci.*, 1947, 14: 261

[5.2] Symonds P S, Yu T X. Counterintuitive behavior in a problem of elastic-plastic beam dynamics. *J. Appl. Mech.*, 1985, **52**: 517-522

[5.3] Yu T X, Xu Y. The anomalous response of an elastic-plastic structural model to impulsive loading. *J. Appl. Mech.*, 1989, **56**: 868-873

[5.4] Lee J L, Symonds P S. Extended energy approach to chaotic elastic-plastic response to impulsive loading. *Int. J. Mech. Sci.*, 1992, **34**: 139-157

[5.5] Yu T X. Elastic effects in the dynamic plastic response of structures, *in Structural Crashworthiness and Failure* (Ed. N. Jones and T. Wierzbicki), *Chapter* 9. *Elsevier Applied Science*, 1993. 341-384

[5.6] 章亮炽 余同希，王仁，板壳塑性屈曲中的异谬及其研究进展，力学进展，1990，**20**(1)：40-45

[5.7] 铁摩辛柯等著，胡人礼译. 工程中的振动问题. 北京：科学出版社，1981

[5.8] Florence A L, Goodier J N. Dynamic plastic buckling of cylindrical shells in sustained axial compressive flow. *J. Appl. Mech.*, 1968, **35**(1):80-86

[5.9] Vaughan H. The response of a plastic cylindrical shell to axial impact. *ZAMP*, 1969, **20**: 321-328

[5.10] 王仁，韩铭宝，黄筑平，杨青春. 受轴向冲击的圆柱壳塑性动力屈曲实验研究，力学学报，1983(5):509-513

[5.11] Alexander J M. An approximate analysis of the collapse of thin cylindrical shells under axial loading. *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1960, **13**: 10-15

[5.12] Yoshimura Y. On the mechanism of buckling of a circular cylindrical shell under axially compression. *Repts. of the Institute of Sci. and Tech. of the Univ. of Tokyo*, Vol. 50(1951). *Translated in NACA, Tech. Memor.* No. 1390, 1955

[5.13] Wierzbicki T. Optimum design of integrated front panel against crash. *Report for Ford Motor Company, Vehicle Component Dept*, 15 July 1983

[5.14] 余同希. 利用金属塑性变形原理的碰撞能量吸收装置，力学进展，1986，**16**(1):28-39

[5.15] Menkes S B, Opat H J. Broken beams. *Experimental Mechanics*, 1973, **13**:480-486

[5.16] Teeling-Smith R G, Nurick G N. The deformation and tearing of thin circular plates subjected to impulsive loads. *Int. J. Impact Engng.*, 1991, **11**:77-91

[5.17] Jones N. Plastic failure of ductile beams loaded dynamically. *J. Engng. Ind., Trans. ASME*, 1976, **98B**: 131-136

[5.18] Shen W Q, Jones N. A failure criterion for beams under impulsive loading. *Int. J. Impact Engng.*, 1992, **12**:101-121

[5.19] Shen W Q, Jones N. Dynamic response and failure of fully clamped circular plates under impulsive loading. *Int. J. Impact Engng.*, 1993, **13**:259-278

[5.20] Petroski H J. Stability of a crack in a cantilever beam undergoing larger plastic deformation after impact. *Int J. Pres. Ves. & piping*, 1984, **16**:285-298

[5.21] Petroski H J. The permanent deformation of a cracked cantilever struck transversely at its tip. *J. Appl. Mech.*, 1984, **51**:399-404

[5.22] 杨嘉陵，余同希. 含裂纹悬臂梁的塑性动力响应及破坏. 北京大学学报(自然科学版) 1991, **27**(5):576-589

[5.23] 杨嘉陵，余同希. 含稳定缺陷的简支梁在均布强动载荷作用下的刚塑性响应. 固体力学学报，1992, **13**(2):101-112

[5.24] Johnson W. Impact strength of materials. *Edward Arnold*, 1972

[5.25] Yu T X, Zhang D J, Zhang Y, Zhou Q. A study of the quasi-static tearing of thin metal sheets. *Int. J. Mech. Sci.*, 1988, **30**:193-202

[5.26] Lu G, Calladine C R. On the cutting of a plate by a wedge. *Int. J. Mech. Sci.*, 1990, **32**:293-313

[5.27] Wierzbicki T, Thomas P. *Grounding damage of ships, in Structural Creshworthiness and Failure* (Ed. N. Jones and T. Wierzbicki), *Elsevier Applied Science*, 1993:467-507

索　引

Concertina mode	5.2.2
Cowper-Symonds 本构方程	3.1.1
d'Alembert 原理	1,2.1.1,2.2.1,2.3.1,3.4.1
diamond mode	5.2.2
Drucker 公设	4.1.1
Johansen 屈服条件	2.3.4
Lee 极值原理	4.3.3
Lee 泛函	4.3.3
Martin 原理	4.1.2
$\min\Delta_0$ 技术	4.2.2
MS-FD 模型	3.5.3
Parkes 问题	2.1.3
Shanley 型模型	5.1.2
Тамуж 原理	4.1.3
TB-FE 模型	3.5.3
Timoshenko 梁	3.3.1
Tresca 屈服准则	2.3.1,2.4.1

（以下按汉语拼音排列）

B

板	2.3
固支圆～	5.3.2
简支圆～	2.3

简支方～ 2.3.4
扁壳 2.4.4
变形机构 2.2
薄壳 2.4

C

材料微结构 5.4.5
材料的动态行为 1
尺度律 5.4
冲击载荷 2.1.1,2.1.3,2.2.3,3.5,4.2,4.4
均布～ 2.3.3,3.4.3,5.3.1
初等失效准则 5.3.3
初等相似律 5.4
静力问题～ 5.4.1
动力问题～ 5.4.2
初始裂纹 2.3.3,5.3.4

D

大变形分析 3.4.2
等效铰长 3.1.3,5.3.3
动力屈曲 5.2
直杆弹性～ 5.2.1
直杆塑性～ 5.2.1
圆柱壳塑性～ 5.2.2
动力渐进屈曲 5.2.3
动力失效 5.3
～模式 5.3

动力许可场 4.1.1
动量矩匹配 4.2.2,4.2.3
断裂能 5.4.4

E

二级效应 3

F

反常行为 5.1
反挠曲率 2.1.1
方板 2.3.4
非等直构件 2.2

G

刚一线性强化 3.2.1
根部角弹簧悬臂梁模型 3.5.4
广义应变率 2.3,2.4,4
广义应力 2.3,2.4,4
"安全"的～ 4.1.1
过应力 3.1.1

H

浑沌现象 5.1.3

J

几何大变形 3.4
极值原理 4.1
　　动力学加速度～ 4.1.2
　　运动学加速度～ 4.1.3
　　模态解～ 4.3.3
间断特性 2.1.2,2.3
剪力效应 3.3.1
剪切铰 3.3.1
剪切失效 3.3.2
简支梁 3.4,5.1
　　轴向不受约束～ 3.4.3
　　轴向受约束～ 3.4.3,5.1.1
阶跃载荷 2.1.1,2.2.1
结构的耐撞性 5.2.3
结构的塑性动力响应 1
界限定理 4.4

L

理想刚塑性 1,2.1
梁的工程理论 2.1
裂纹扩展 5.3
临界模态数 5.2.1
临界速度 5.2.2
　　第二～ 5.2.2

M

脉冲载荷 2.1.1,3.5.2
　　矩形～ 2.1.1,2.2.2,2.3.2,3.5.2,5.1.1
　　正弦～ 3.5.2
　　任意形状～ 2.1.1
　　均布～ 2.3.2
膜力效应 3.4.1,3.4.3
膜力因子法 3.4.3
模态 4.2.1,4.3
　　基本(或主)～ 4.3.1
　　高阶～ 4.3.1
　　稳定～ 4.3.1
　　不稳定～ 4.3.1
模态解 4.1,4.3
　　恒定～ 4.3
　　瞬时～ 4.3.4
　　进化～ 4.3.4

N

能量比 R 3.5.1
能量耗散 2.1.1,2.1.3,2.2.1
能量吸收装置 5.2.3
粘塑性 3.1
　　～悬臂梁 3.1.2

Q

奇异行为 5.1
强动载荷 1
强化材料 3.2.1
屈服速度 5.4.2
屈服条件 2.3,2.4,4.1
　独立作用～ 2.4.1
　独立塑形～ 2.4.4
　交互作用～ 2.4.1
　精确～ 2.4.1
　理想夹层壳～ 2.4.1
曲率 2.1.1
　无量纲～ 2.1.1,2.3.1
　塑性～ 2.1.1
　最大弹性～ 2.1.1

R

软化材料 3.2.1
塑间断 2.1.2

S

收敛性定理 4.2.2
双层弹簧模型 5.1.2
双铰模式 2.2
双自由度悬臂梁模型 3.5.2

塑性动力屈曲 5.2
直杆的～ 5.2.1
圆柱壳的～ 5.2.1
塑性动力失效 5.3
塑性极限剪力 3.3.1
塑性极限膜力 2.4.1
塑性极限弯矩 2.1.1
塑性极限轴力 3.4.1
塑性铰 2.1
驻定～ 2.1
移行～ 2.1
～环 2.4.1
～线 2.3.4
～圆 2.3.2,2.3.3
塑性弦 3.4.3

T

弹塑性响应 3.5,5.1
弹性极限弯矩 2.1.1
弹性效应 3.5
特征尺度 5.4
特征时间 T_0 2.1.1,2.3.1,2.4.1

W

完全解 2.1.3
唯一性定理 4.1.4
无量纲参数 2.1.1,2.2.1,2.3.1,2.4.1

X

小变形假定 2
虚功率原理 4.1.1
虚加速度原理 4.1.3
虚速度原理 4.1.3
悬臂梁 2.1
～大变形分析 3.4.2
含裂纹～ 2.2.3
阶梯截面～ 2.2.1,2.2.2

Y

移行铰 2.1.2
应变率效应 3.1,4.3.2,5.2.3,5.4.3
应变强化 3.2
应变软化 3.2
有限元法 3.5.3
有限差分法 3.5.3
圆板 2.3,5.3.2
圆柱壳 2.4,5.2.2
具有加强肋的～ 2.4
～的塑性动力屈曲 5.2.2
运动许可场 4.1.1

Z

指数衰减载荷 2.4.4

质量比
质量—弹簧系统
　　单自由度～
轴对称扁壳
转动惯量效应
撞击