YANTU GONGCHENG
SHUZHI JISUAN

YANTU GONGCHENG SHUZHI JISUAN

岩土工程数值计算

雷晓燕 著

中国铁道出版社

岩土工程数值计算

雷晓燕　著

中国铁道出版社
1999年·北京

（京）新登字 063 号

内 容 简 介

本书详细介绍了用有限元法求解塑性、弹塑性耦合、应变软化、粘塑性和蠕变问题的数值方法；论述了边界元法、离散元法、节理单元和无穷元等数值方法的基本原理，讨论了岩土工程中的特殊问题，如接触问题、锚杆单元、材料参数反分析、耦合问题以及动力问题的数值计算．最后介绍了有限元误差估计和自适应问题。

本书可作为工科院校岩土工程专业本科生及研究生的教材，也可作为土木、交通、水利专业工程技术人员和教师的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

岩土工程数值计算/雷晓燕著．—北京：中国铁道出版社，1999

ISBN 7-113-03399-7

Ⅰ．岩… Ⅱ．雷… Ⅲ．岩土工程-数值计算 Ⅳ．TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 45937 号

书　　名：岩土工程数值计算

著作责任者：雷晓燕

出版·发行：中国铁道出版社（100054，北京市宣武区右安门西街 8 号）

责 任 编 辑：江新锡

封 面 设 计：李艳阳

印　　刷：中国铁道出版社印刷厂

开　　本：850×1168　1/32　印张：10.25　字数：267 千

版　　本：1999 年 11 月第 1 版　1999 年 11 月第 1 次印刷

印　　数：1－1500 册

书　　号：ISBN7-113-03399-7/TU·602

定　　价：29.50 元

版权所有　盗印必究

凡购买铁道版的图书，如有缺页、倒页、脱页者，请与本社发行部调换。

NUMERICAL COMPUTATION
IN
ROCK AND SOIL ENGINEERING

Xiaoyan Lei

Department of Civil Engineering,
East China Jiaotong University,
330013, Nanchang, P. R. CHINA

China Railway Publishing House
1999 Beijing

序

雷晓燕教授撰写的《岩土工程数值计算》一书，将现代工程数值计算方法有效地应用于岩土基础的复杂情况，书中探索和介绍了在各种具体复杂的情况下应用最新离散计算方法的可能，其中包括作者在国内外，特别是在中奥科学研究合作中所取得的有限元、边界元等多方面的综合先进计算技术。

本人认为作者在前言中实事求是地介绍了本书内容上的特点。应该指出的是，雷晓燕教授所著的《岩土工程数值计算》一书，不但在岩土工程方面提供了最新的工程计算方法，解决了许多实际问题，而且在推进计算力学学科发展方面，是有力的贡献。

清华大学固体力学教授　　末永东 等一
中国工程院院士

1999.4.25

About this book

The book, Numerical Computation in Rock and Soil Engineering, authored by Prof. Xiaoyan Lei, represents feature of effectively applying the numerical computational method in modern engineering to complicated problems in rock foundation. It deals with the possibilities of utilizing the newest discrete computational methods, which include the advanced computational techniques of finite elements and boundary elements achieved by author in home and abroad especially in China-Austria scientific cooperation, to cases of all kinds of complicated engineering situations. I think what the author described in preface really affects thd features of this book. It should be pointed out that Prof. Lei not only presents applications of the newest engineering computational method in field of rock and soil engineering but also makes great contributions to the development of computational mechanics.

Qinghua Du

Professor in solid mechanics, Tsinghua University
Member of Chinese Academy of Engineering
1999. 4. 25

前　言

近年来，数值方法一直在不断地发展，它已渗透到科学与工程技术研究的各个主要领域。数值方法的突出优点是能够替代昂贵而又非常耗时的物理试验，对所研究的问题进行数值模拟。本书主要论述岩土工程数值方法的基本原理及其应用。岩土工程是一门交叉学科，其理论广泛应用于隧道开挖、矿山开采、兴建水利设施及地下建筑物等。随着数值方法的不断发展和功能越来越强大计算机的出现，数值模拟已成为工程技术人员必不可少的分析工具。本书正是为了适应工程技术人员日益增长的对掌握数值方法的要求而写作的。它的读者对象主要是岩土工程和土木工程高年级本科生、研究生和工程技术人员。书中内容主要取自国内外学者近一二十年来运用数值方法在岩土工程领域所做的工作，部分内容属作者的研究成果。全书共分十一章，内容包括非线性有限元法、边界元法、离散元法、节理单元、无穷元、接触问题、锚杆单元、材料参数反分析、耦合问题、动力问题及有限元误差估计和自适应问题。

第一章介绍了非线性有限元方程组的解法，论述了用有限元法求解塑性、弹塑性耦合、应变软化、粘塑性和蠕变问题的数值方法。

第二章以二维、三维弹性力学问题为例，详细阐述了边界元法的基本概念及数值方法，内容包括基本解、边界积分方程、边界单元、体积力项的处理等，这一章还介绍了工程上常用的两种有限元与边界元耦合方法。

第三章介绍了离散元法——刚体模型，着重论述了离散元法的概念，刚体动力学、接触判别及接触与相互作用力等问题。

第四章为离散元法的变形体模型，这章内容涉及变形体动力学，模态分解，有限元模态分解，离散系统分析的广义模态法，本构

关系及变形体单元分析举例等。

第五章介绍了岩土工程上常用的节理单元、无穷元及无拉应力模型，包括四结点、六结点、三维节理单元和夹层单元。

第六章接触问题为作者自己的研究成果，主要内容有二维、三维接触单元、大位移接触理论、消除接触摩擦单元应力振荡的方法及运用接触摩擦单元对节理岩体中隧道开挖进行有限元模拟。

第七章介绍了锚杆的本构性质和三维锚杆单元理论及若干运用锚杆单元分析实际问题的例子。

第八章介绍了工程上常用的三种材料参数反分析法，即直接法、逆解法和对偶边界法，并给出了材料反分析在路基边坡中的应用。

第九章讨论了耦合问题，涉及流固耦合，土－毛细孔流相互作用，隐式与显式耦合算法及交叉求解方法。

第十章是求解动力问题较新的算法，重点介绍单步长算法和二阶微分方程的一般算法。

第十一章讨论了有限元误差估计和自适应问题，内容包括误差范数和收敛速度，误差估计（h 细分法）及自适应分析。

书中内容力求跟踪学术前沿，紧密联系工程实际。希望能给读者一些启发。尽管如此，限于作者水平，错误和不当之处还请读者批评指正。

雷晓燕

1999.3.1

Preface

In recent years numerical methods have continued to expand and diversify into all the major fields of scientific and engineering studies. The advantages of them are to provide a valuable alternative to physical models that can be expensive and time consuming. This book deals with elementary principles of numerical methods in rock and soil engineering and applications. Rock and soil engineering is a staggered subject and the theories of which are widely used to tunneling, mining and construction of water conservancy facilities and underground structures. It is aimed at graduate and post graduate students as well as professional engineers of rock and soil and civil engineering who are being increasingly called upon to obtain the knowledge of numerical methods. This book has drawn its materials from research work performed by scholars at home and abroad in recent decades by using numerical methods to field of rock and soil engineering and some are author's research achievements. It is divided to eleven chapters which covers non-linear finite element method, boundary element method, discrete element method, joint elements, infinite elements, contact problems, anchor bolts, back analysis of material parameters, coupling problems, dynamic problems, error estimation of finite elements and adaptivity.

Chapter 1 gives introduction to solutions of non-linear finite element equations. It discusses numerical methods of solving problems of elasto-plasticity, coupling of elasticity and plasticity, stain softening, visco-plasticity and creep by finite element method.

Chapter 2 takes two and three dimensional problems as examples and deals with elementary concepts and numerical method of boundary elements. It includes fundamental solutions, boundary integral equations, boundary elements and treatment of body forces and so on. It also introduces two schemes of coupling finite elements and boundary elements that are commonly used in engineering practice.

Chapter 3 discusses the discrete element method applied to rigid bodies. It highlights concepts of the method, rigid body dynamics, techniques of contact detection, contact and interaction forces and so on.

Chapter 4 describes the discrete element method for deformable bodies, which covers dynamics of deformable bodies, model decomposition, model decomposition in finite elements, generalized model methods for the analysis of discrete systems, constitutive relationships and some examples for deformable body analysis.

Chapter 5 gives joint elements, infinite elements and non-tensile stress model. Types of these elements are 4-node, six node and three dimensional joint elements and sandwich elements.

Chapter 6 deals with research achievements by author, including two and three dimensional contact elements, large displacement theory, technique of eliminatin gstress oscillation on interface of contact friction elements and modeling of tunnel excavation in jointed rocks with finite elements.

Chapter 7 discusses the constitutive behavior of anchor bolts and theory of three dimensional anchor bolts as well as applications in practice by using this element.

Chapter 8 is devoted to three kinds of back analysis methods of material parameters such as direct method, inverse method and dual boundary method. Applications of back analysis of materials

in embankment are given.

Chapter 9 discusses coupling problems. It covers fluid-structure interaction, soil-pore fluid interaction, implicit-explicit combination schemes and staggered solution processes.

Chapter 10 deals with the newer algorithms of solving dynamic problems. It highlights single step algorithms and general algorithms for second order differential equations.

Chapter 11 is concerned with error estimation of finite elements and adaptivity. It covers error norm, convergence rates, error estimation with h refinement and adaptive analysis.

Xiaoyan Lei

1999. 3. 1

主 要 符 号

$\boldsymbol{a}^e$ 单元结点位移向量

$\boldsymbol{a},\dot{\boldsymbol{a}},\ddot{\boldsymbol{a}}$ 系统结点位移、速度和加速度向量

$\boldsymbol{a}'$ 接触单元给定的结点相对位移或接触应力向量

$\hat{\boldsymbol{a}}$ 接触单元给定的结点相对位移向量

$\boldsymbol{A}$ 局部坐标系中接触单元增量相对位移向量

b_i 体力分量

$\boldsymbol{b}$ 体力向量

$\boldsymbol{b}_I,\boldsymbol{b}_{\bar{I}}$ 与界面量和非界面量相对应的体力项

$\boldsymbol{B}$ 应变矩阵

$c(\kappa)$ 粘性系数

C_{ijkl} 四阶张量

$\boldsymbol{C}$ 系统阻尼矩阵

$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon},\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_e,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_p,\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}$ 应变增量、弹性应变增量、塑性应变增量、粘塑性应变增量

$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}$ 应力增量

$\boldsymbol{D},\boldsymbol{D}_{ep},\boldsymbol{D}_p$ 弹性矩阵、弹塑性矩阵、塑性矩阵

e_r 误差允许值

e_{ijk} 置换张量

$\|e\|$ 误差范数

$\|e_u\|_{L_2},\|e_\sigma\|_{L_2}$ 位移和应力误差的 L_2 范数

E 弹性模量

E' 切线模量

$\boldsymbol{f}=-\boldsymbol{Q}$ 系统结点荷载向量

$f(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}^p,w^p)$ 应变空间屈服函数

f_0 线频率

f_c　接触单元等效单元结点荷载向量

$F(\sigma,\varepsilon_p,\kappa)$　应力空间屈服函数

$\boldsymbol{F}^e$　单元结点力向量

$\boldsymbol{g}$　弹性变形向量

G　剪切模量

G_B　锚杆横向剪切模量

G_{ij}^*　伽辽金张量

$\boldsymbol{G}$　边界元系数矩阵

$H(l)$　阶梯函数

$H'=\dfrac{d\sigma_s}{d\varepsilon_p}$　塑性模量

$\boldsymbol{H}$　边界元系数矩阵

i　迭代步

$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$　笛卡尔坐标系单位向量

$\boldsymbol{I}$　单位矩阵

J_2　第二应力不变量

J_3　第三应力不变量

k_n,k_s　法向与切向刚度系数

k_n^l,k_n^m　法向刚度系数

k_s^m　剪切刚度系数

$\boldsymbol{k}^e$　单元刚度矩阵

$\boldsymbol{k}_c$　接触单元等效单元刚度矩阵

K　动能

K_s　锚杆横向剪切刚度

$\boldsymbol{K}$　系统刚度矩阵

$\boldsymbol{K}^s$　对称刚度矩阵

$\boldsymbol{K}_T$　切线刚度矩阵

l_i,m_i,n_i　方向余弦分量

$\boldsymbol{L},\boldsymbol{L}'$　坐标转换矩阵

m　荷载增量步

M_l, M_m, M_{lm} 板单元单位长度的弯矩和扭矩

$\boldsymbol{M}$ 系统质量矩阵

n, s, t 局部坐标系

$\boldsymbol{N}$ 插值函数矩阵

p 流体压力

p_i 面力分量

p_{ij}^* 面力基本解

$\boldsymbol{p}$ 待识别的材料参数

$\bar{\boldsymbol{p}}$ 结点流体压力向量

$\dot{\boldsymbol{p}}$ 结点流体压力对时间的一阶导数

$\ddot{\boldsymbol{p}}$ 结点流体压力对时间的二阶导数

$\boldsymbol{p}_n$ 边界单元结点面力向量

$\boldsymbol{p}$ 边界单元总结点面力向量

Q 塑性势函数

$\boldsymbol{Q}^e$ 单元结点荷载向量

$\boldsymbol{Q}$ 系统结点荷载向量

$\ddot{\boldsymbol{Q}}$ 接触单元给定的结点接触应力向量

$r, \bar{r}$ 位置向量、变形前的位置向量

R_n, R_s 接触点的法向力和切向力

$\boldsymbol{R}$ 反旋转矩阵

s_x, s_y, s_z 偏应力分量

$\boldsymbol{S} = \int_\Gamma \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{N} d\Gamma$ 插值函数矩阵

$\boldsymbol{t}$ 面力向量

t_l, t_n 界面面力、非界面面力向量

T 转换矩阵

u_i 位移分量

u_{ij}^* 位移基本解

$\boldsymbol{u}$ 单元内任意一点的位移向量

$\boldsymbol{u}_n$ 边界单元结点位移向量

U　内应变能

$\boldsymbol{U}$　边界单元总结点位移向量

$\boldsymbol{U}_I$，$\boldsymbol{U}_n$　界面位移、非界面位移向量

$\boldsymbol{v}$　流体速度向量

w　误差函数

w_1，w_2　权函数

w^p　塑性功

W　外力功

x，y，z　笛卡尔坐标系

$\boldsymbol{x}$　域内任一点坐标向量

α　坐标转换矩阵

γ_s　节理单元局部坐标剪应变

Γ　边界

$\Delta\boldsymbol{a}$，$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}$，$\Delta\boldsymbol{\sigma}$　增量位移、增量应变、增量应力向量

Δf_n，Δf_s　法向与切向增量接触力

Δt_{cri}　临界时间步长

$\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$　时间增量

Δu_n，Δu_s　法向与切向增量相对位移

$|\Delta\sigma|$　应力误差的均方根

ε_n　节理单元局部坐标正应变

ε_{ij}　应变张量

ε^*_{jki}　在 ξ 点沿 e_i 方向施加单位荷载引起任一点 q 处的应变分量

$\bar{\varepsilon}^p$　等效塑性应变

$\boldsymbol{\varepsilon}^e$　单元应变向量

$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_c$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_e$，$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}$　应变率、蠕变应变率、弹性应变率、粘塑性应变率向量

η，η^0，η^*　能量范数指标

$\theta(0 \leqslant \theta \leqslant 1)$　欧拉法系数

θ_1，θ_2，θ_3　算法参数

θ_i，$\dot{\theta}_i$　角位移、角速度分量

κ　硬化参数

λ_n，λ_s　节理的法向与切向劲度系数

ξ,η,ζ　局部坐标系

π　系统势能

ρ　质量密度

$\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)$　平均应力

σ_n　节理单元局部坐标系法向应力

σ_s　材料单向屈服应力

σ　有效应力

σ_{ij}　应力张量

σ^{ξ}_{jkl}　在 ξ 点沿 e_i 方向施加单位荷载引起任一点 q 处的应力分量

σ_0　初应力向量

$\boldsymbol{\sigma}^e$　单元应力向量

σ_T　拉应力修正矩阵

$\dot{\sigma}$　应力率

Σ　局部坐标系中接触单元增量接触应力向量

τ_p　峰值剪切强度估计值

τ_s　节理单元局部坐标系剪应力

υ　泊松比

$\varphi(\kappa)$　内摩擦角

ϕ_i　固有模态

$\boldsymbol{\phi}$　特征向量矩阵

$\boldsymbol{\Phi}$　插值函数矩阵

Ψ　有限元方程误差向量

ω_0　角频率

$\boldsymbol{\omega}$　角速度向量

Ω　域内

目　　录

第一章　非线性有限元法 …… 1

1.1　有限元法概述 …… 1

1.2　非线性有限元方程组的解法 …… 5

1.3　塑性问题 …… 10

1.4　弹塑性耦合与应变软化 …… 21

1.5　粘塑性　蠕变问题 …… 25

1.6　算　　例 …… 30

第二章　边界元法 …… 33

2.1　弹性力学基本方程的张量表示 …… 33

2.2　索密哥内那等式 …… 34

2.3　基 本 解 …… 36

2.4　域内应力 …… 37

2.5　边界积分方程 …… 38

2.6　数值方法 …… 41

2.7　边界单元 …… 42

2.8　边界应力 …… 46

2.9　二维问题 …… 47

2.10　体积力项的处理 …… 48

2.11　有限元与边界元耦合法 …… 50

2.12　算例 …… 53

第三章　离散元法　刚体模型 …… 56

3.1　引　　言 …… 56

3.2　离散元的概念 …… 57

3.3　刚体动力学 …… 62

3.4　接触判别与几何模拟 …… 66

3.5 接触与相互作用力 …… 79
3.6 算　　例 …… 83
第四章　离散元方法—变形体模型 …… 88
4.1 变形体动力学 …… 88
4.2 模态分解 …… 94
4.3 有限元模态分解 …… 98
4.4 一维问题详述 …… 99
4.5 离散系统分析的广义模态法 …… 106
4.6 本构关系 …… 113
4.7 变形体单元分析举例 …… 116
第五章　节理单元　无拉应力模型　无穷元 …… 121
5.1 四结点节理单元 …… 121
5.2 六结点曲边节理单元 …… 127
5.3 六结点曲边夹层单元 …… 130
5.4 三维曲面节理单元 …… 132
5.5 三维曲面夹层单元 …… 136
5.6 无拉应力计算模型 …… 139
5.7 无 穷 元 …… 142
第六章　接触问题 …… 148
6.1 二维接触问题 …… 148
6.2 三维接触问题 …… 154
6.3 大位移接触摩擦单元 …… 162
6.4 消除接触摩擦单元应力振荡的方法 …… 169
6.5 节理岩体中隧道开挖的有限元模拟 …… 174
第七章　锚杆单元 …… 179
7.1 锚杆的本构性质 …… 179
7.2 三维锚杆单元理论 …… 183
7.3 算　　例 …… 191
第八章　材料参数反分析及其应用 …… 195
8.1 直 接 法 …… 196

8.2 逆 解 法 …… 197
8.3 对偶边界法 …… 199
8.4 算 例 …… 204
第九章 耦合问题 …… 210
9.1 流固耦合 …… 212
9.2 土一毛细孔流相互作用 …… 224
9.3 隐式与显式耦合算法 …… 229
9.4 交叉求解方法 …… 233
第十章 动力问题 …… 338
10.1 引 言 …… 238
10.2 单步长算法 …… 238
10.3 二阶微分方程的一般算法 …… 251
第十一章 误差估计和有限元自适应问题 …… 268
11.1 引言 …… 268
11.2 误差范数和收敛速度 …… 269
11.3 误差估计——一种简单有效的 h 细分法 …… 275
11.4 h 细分法与自适应分析 …… 285
11.5 阶谱格式的误差估计一 p 自适应基础 …… 288
11.6 讨 论 …… 292
内容索引 …… 296
参考文献 …… 303

Contents

Chapter 1. Nonlinear finite element method ····· 1
1.1 Description about finite element method ····· 1
1.2 Solving of nonlinear finite element equations ····· 5
1.3 Plastic problems ····· 10
1.4 Coupling of elasticity with plasticity and strain softening ····· 21
1.5 Viscoplastic and creep problems ····· 25
1.6 Examples ····· 30
Chapter 2. Boundary element method ····· 33
2.1 Tensor expressions for elementary equations of elastic mechanics ····· 33
2.2 Somigliana Identity ····· 34
2.3 Fundamental solutions ····· 36
2.4 Stresses at internal points ····· 37
2.5 Boundary integral equations ····· 38
2.6 Numerical implementation ····· 41
2.7 Boundary elements ····· 42
2.8 Stresses on the boundary ····· 46
2.9 Two dimensional problem ····· 47
2.10 Treatment of body forces ····· 48
2.11 Coupling of finite element and boundary element solutions ····· 50
2.12 Examples ····· 53
Chapter 3. Discrete element method—rigid bodies ····· 56
3.1 Introduction ····· 56

3.2 Discrete element concept ····· 57
3.3 Rigid body dynamics ····· 62
3.4 Contact detection and geometric modeling ····· 66
3.5 Contact and interaction forces ····· 79
3.6 Examples ····· 83
Chapter 4. Discrete element method—deformable bodies ····· 88
4.1 Dynamics of deformable bodies ····· 88
4.2 Model decomposition ····· 94
4.3 Model decomposition in finite elements ····· 98
4.4 One dimensional problem ····· 99
4.5 Generalized model methods for the analysis of discrete systems ····· 106
4.6 Constitutive relationships ····· 113
4.7 Examples of deformable body analysis ····· 116
Chapter 5. Joint elements, non-tensile stress model and infinite elements ····· 121
5.1 4-node joint element ····· 121
5.2 6-node quadrilateral joint element ····· 127
5.3 6-node quadrilateral sandwich element ····· 130
5.4 Three dimensional quadratic joint element ····· 132
5.5 Three dimensional quadratic sandwich element ····· 136
5.6 Non-tensile stress model ····· 139
5.7 Infinite element ····· 142
Chapter 6. Contact problems ····· 148
6.1 Two dimensional problem ····· 148
6.2 Three dimensional problem ····· 154
6.3 Contact friction element for large displacement ····· 162
6.4 Technique of eliminating stress oscillation on

interface of contact friction elements ····· 169
6.5 Modeling of tunnel excavation in jointed rocks with finite elements ····· 174
Chapters 7. Anchor bolts ····· 179
7.1 Constitutive behavior of anchor bolts ····· 179
7.2 Theory of three dimensional anchor bolts ····· 183
7.3 Examples ····· 191
Chapter 8. Back analysis of material parameters and applications ····· 195
8.1 Direct formulation ····· 196
8.2 Inverse formulation ····· 197
8.3 Dual boundary formulation ····· 199
8.4 Examples ····· 204
Chapter 9. Coupling systems ····· 210
9.1 Fluid-structure interaction ····· 212
9.2 Soil-pore fluid interaction ····· 224
9.3 Implicit-explicit combination schemes ····· 229
9.4 Staggered solution processes ····· 233
Chapter 10. Transient dynamic analysis ····· 238
10.1 Introduction ····· 238
10.2 Single step algorithms ····· 238
10.3 General algorithms for second order equations ····· 251
Chapter 11. Error estimates and adaptive finite element refinement ····· 268
11.1 Introduction ····· 268
11.2 Error norms and convergence rates ····· 269
11.3 Error estimates—a simple and effective procedure for h refinement ····· 275
11.4 The h refinement process and adaptivity ····· 285

11.5 Error estimates for hierarchic formulations—a basis for p adaptive refinement 288
11.6 Discussions 292
Subject Index 296
References 303

第一章　非线性有限元法

1.1　有限元法概述

有限元法按未知场变量的不同选择可分为位移法、应力法和混合法，其中位移法指选择结点位移作为未知场变量，应力法指选择结点应力作为未知场变量，混合法指选择部分结点位移和部分结点应力作为未知场变量。本节主要对位移有限元法作一简单介绍。

1.1.1　单元类型

按照处理问题的不同，可分为平面问题和空间问题，相应的单元称为平面单元和空间单元。常见的平面单元有三角形、四边形和任意四边形单元，空间单元有八结点块体单元和二十结点曲面体单元。如图 1.1 所示。

1.1.2　基本方程

单元内任意一点的位移可通过插值函数用结点位移表示成

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^{e} \tag{1.1}$$

式中　$\boldsymbol{u}$——单元内任意点的位移分量，对平面问题

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}u(x,y)\\ v(x,y)\end{Bmatrix}$$

对空间问题

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}u(x,y,z)\\ v(x,y,z)\\ w(x,y,z)\end{Bmatrix}$$

$\boldsymbol{a}^{e}$——单元结点位移向量；

$\boldsymbol{N}$　插值函数矩阵，与单元类型有关。例如，对八结点任意四边形单元，有

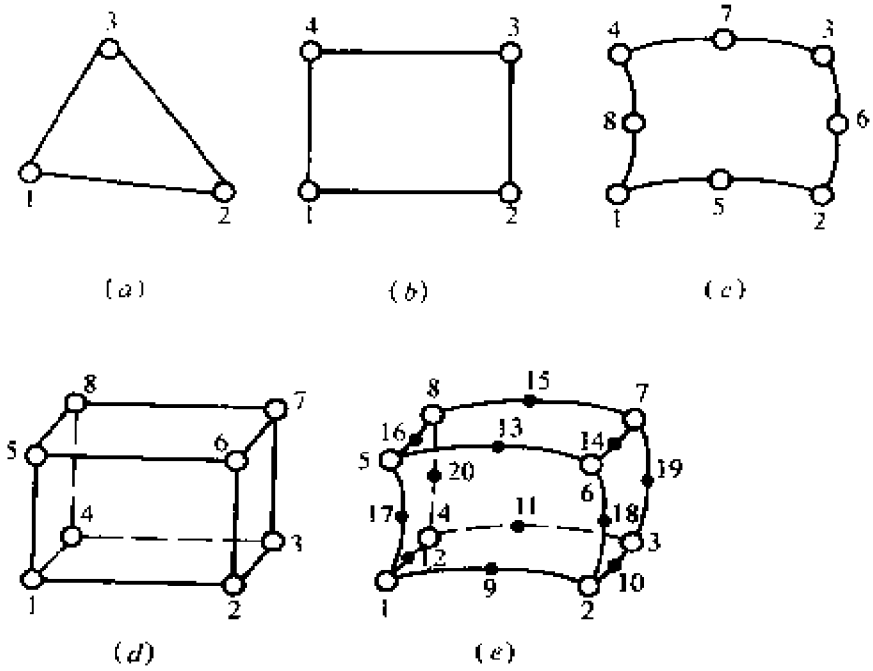


图 1.1　几种典型的单元类型

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

其中

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta-1) \quad (i=1,2,3,4)$$

$$N_i=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta) \quad (i=5,7) \tag{1.3}$$

$$N_i=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_i\xi) \quad (i=6,8)$$

对二十结点曲面体单元，有

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_{20} & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_{20} & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_{20} \end{bmatrix} \tag{1.4}$$

其中

$$N_i=\frac{1}{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta+2)$$

$$(i=1,2,\cdots,8)$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta_i\zeta) \qquad (i=9,11,13,15)$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta) \qquad (i=10,12,14,16) \qquad (1.5)$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1-\zeta^2) \qquad (i=17,18,19,20)$$

单元应变与单元结点位移之间的关系为

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \qquad (1.6)$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^e$——单元应变向量；

$\boldsymbol{B}$——应变矩阵。

利用(1.6)式，通过本构方程可得单元应力为

$$\boldsymbol{\sigma}^e=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}^e=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \qquad (1.7)$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^e$——单元应力向量；

$\boldsymbol{D}$——弹性矩阵，对平面应力问题

$$\boldsymbol{D}=\frac{E}{1-\upsilon^2}\begin{bmatrix}1 & \upsilon & 0\\ \upsilon & 1 & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{1-\upsilon}{2}\end{bmatrix} \qquad (1.8)$$

对平面应变问题，只要将上式中的 E 换成$\frac{E}{1-\upsilon^2}$、υ 换成$\frac{\upsilon}{1-\upsilon}$即可。

对空间问题

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0\\ & & \lambda+2G & 0 & 0 & 0\\ & & & G & 0 & 0\\ & & & & G & 0\\ \text{对称} & & & & & G\end{bmatrix} \qquad (1.9)$$

其中

$$\lambda+2G=\frac{E(1-\nu)}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)},\ G=\frac{E}{2(1+\upsilon)} \qquad (1.10)$$

(1.8)和(1.10)两式中的 E 为材料的弹性模量，υ 为泊松比。

单元结点力与单元结点位移间的关系为

$$\boldsymbol{k}^e\boldsymbol{a}^e = \boldsymbol{F}^e \tag{1.11}$$

式中 $\boldsymbol{k}^e$——单元刚度矩阵；

$\boldsymbol{F}^e$——单元结点力向量。

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega \tag{1.12}$$

1.1.3 单元等效结点荷载

由体积力产生的单元等效结点荷载向量可用下式计算

$$\boldsymbol{Q}_b^e = \int_{\Omega^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega \tag{1.13}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_b^e$——由体积力产生的单元等效结点荷载向量；

$\boldsymbol{b}$——单位体积上的体积力向量。

对于平面问题

$$\boldsymbol{b} = \{b_x \quad b_y\}^{\mathrm{T}}$$

对于空间问题

$$\boldsymbol{b} = \{b_x \quad b_y \quad b_z\}^{\mathrm{T}}$$

由面力产生的等效结点荷载为

$$\boldsymbol{Q}_t^e = \int_{\Gamma^e} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.14}$$

式中 $\boldsymbol{Q}_t^e$——由面力产生的单元等效结点荷载向量；

$\boldsymbol{t}$——单位面积上的面力向量，对于平面问题

$$\boldsymbol{t} = \{t_x \quad t_y\}^{\mathrm{T}}$$

对于空间问题

$$\boldsymbol{t} = \{t_x \quad t_y \quad t_z\}^{\mathrm{T}}$$

1.1.4 有限元法的解题步骤

(1)划分有限元网格，单元编号，结点编号；

(2)按(1.12)式形成各单元刚度矩阵；

(3)将各单元刚度矩阵按“对号入座”规则形成总刚度矩阵；

(4)按(1.13)式或(1.14)式形成单元等效结点荷载向量；

(5)将各单元等效结点荷载向量集合成总结点荷载向量；

(6)建立有限元方程：

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q} \tag{1.15}$$

式中 K——总刚度矩阵，

a——总结点位移向量，

Q——总结点荷载向量，

$$K=\sum_e k^e, Q=\sum_e Q^e;$$

(7)引入边界条件；

(8)解(1.15)式有限元方程，得到结点位移 a；

(9)利用(1.6)式计算单元应变 ε^e，利用(1.7)式计算单元应力 σ^e；

(10)整理计算结果。

1.2 非线性有限元方程组的解法

离散化的非线性方程组一般可写成如下形式[2]：

$$K(a)a=Q \tag{1.16}$$

或

$$\Psi(a)\equiv P(a)+f\equiv K(a)a+f=0 \tag{1.17}$$

式中，$f=-Q$。

该方程的具体形式通常取决于问题的性质和离散的方法。上式中参数 a 代表未知函数的近似解。在以位移为未知量的有限元分析中，它是结点位移向量。

对于线性方程组 $Ka+f=0$ 可以没有困难地直接求解。但对于非线性方程组则不可能。但非线性方程组的各种解法，仍以反复求解这种线性方程组为基础，直到获得收敛解为止。

1.2.1 直接迭代法

对于方程(1.17)式

$$K(a)a+f=0 \tag{1.18}$$

假设有某个初始的试探解 $a=a^0$，代入(1.18)式 $K(a)$ 中，可以求得被改进了的一次近似解

$$a^1=-(K^0)^{-1}f \tag{1.19}$$

其中

$$\boldsymbol{K}^{(0)}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}^{0})$$

重复上述过程，可以得到 n 次近似解

$$\boldsymbol{a}^{n}=-(\boldsymbol{K}^{n-1})^{-1}\boldsymbol{f} \tag{1.20}$$

一直到误差的某种范数小于或等于某个规定的容许小量 e_r，即

$$\|\boldsymbol{e}\|=\|\boldsymbol{a}^{n}-\boldsymbol{a}^{n-1}\|\leqslant e_{\mathrm{r}} \tag{1.21}$$

上述迭代过程可以终止。

从(1.19)式和(1.20)式可以看到，要执行直接迭代法的计算，首先需要假设一个初始的试探解 $\boldsymbol{a}^{0}$，其次是每次迭代需要计算和形成新的系数矩阵 $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}^{n-1})$，并对它进行求逆计算。

关于直接迭代法的收敛性可以指出，当 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a})\sim\boldsymbol{a}$ 是凸的情况(当 $\boldsymbol{a}$ 是标量，即系统为单自由度，$P\sim a$ 表示如图 1.2)，通常解是收敛的。

1.2.2 Newton—Raphson 法[2]

如果(1.17)式第 n 次近似解 $\boldsymbol{a}^{n}$ 已经得到，一般情况下(1.17)式的解不能精确地被满足，即 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^{n})\neq 0$。为得到进一步的近似解 $\boldsymbol{a}^{n+1}$，可将 $\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^{n+1})$ 表示成在 $\boldsymbol{a}^{n}$ 附近仅保留线性项的 Taylor 展开式，即

$$\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^{n+1})\equiv\boldsymbol{\Psi}(\boldsymbol{a}^{n})+\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\right)_{n}\Delta\boldsymbol{a}^{n}=\boldsymbol{0} \tag{1.22}$$

且有

$$\boldsymbol{a}^{n+1}=\boldsymbol{a}^{n}+\Delta\boldsymbol{a}^{n} \tag{1.23}$$

(1.22)式中，$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}$ 是切线矩阵，即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Psi}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\equiv\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{P}}{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}\equiv\boldsymbol{K}_{T}(\boldsymbol{a}) \tag{1.24}$$

将(1.24)式代入(1.22)式中，于是得到

$$\Delta\boldsymbol{a}^{n}=-(\boldsymbol{K}_{T}^{n})^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{n}=-(\boldsymbol{K}_{T}^{n})^{-1}(\boldsymbol{P}^{n}+\boldsymbol{f}) \tag{1.25}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{T}^{n}=\boldsymbol{K}_{T}(\boldsymbol{a}^{n})\qquad\boldsymbol{P}^{n}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}^{n})$$

由于 Taylor 展开式(1.22)仅取线性项，所以 $\boldsymbol{a}^{n+1}$ 仍是近似

解，应重复上述迭代求解过程直止满足收敛要求。

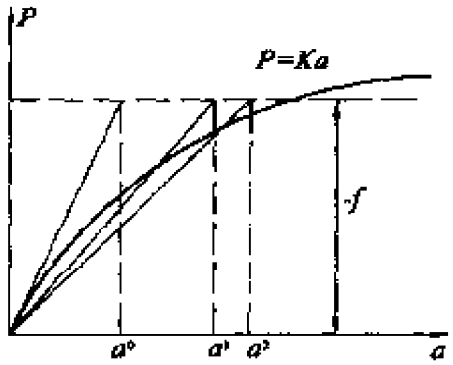


图 1.2　直接迭代法

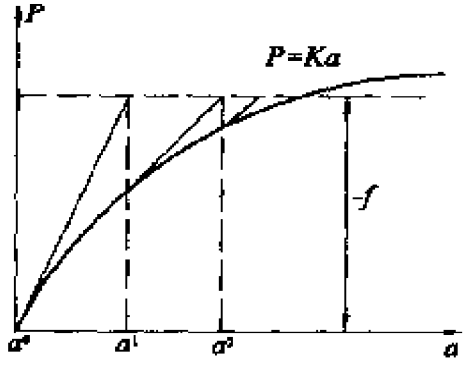


图 1.3　Newton-Raphson 法

Newton-Raphson 方法的求解过程可以表示于图 1.3。一般情况下，它具有良好的收敛性。从(1.25)式可以看到，对于每次迭代，Newton-Raphson 方法需要重新形成和求逆一个新的切线矩阵 $\boldsymbol{K}_T^n$。

为了克服该方法对于每次迭代需要重新形成并求逆一新的切线矩阵所带来的麻烦，常常可以采用一修正的方案，即修正的 Newton-Raphson 方法。其中切线矩阵总是采用它的初始值，即令

$$\boldsymbol{K}_T^n = \boldsymbol{K}_T^0 \tag{1.26}$$

因此(1.25)式可以修正为

$$\Delta \boldsymbol{a}^n = -(\boldsymbol{K}_T^0)^{-1}(\boldsymbol{P}^n + \boldsymbol{f}) \tag{1.27}$$

这样一来，每次迭代求解的是一相同方程组。事实上，在用直接法求解此方程组时，系数矩阵只需要分解一次，每次迭代只进行一次回代即可。显然计算是比较经济的。虽然付出的代价是收敛速度较低，但总体上可能还是合算的。

另一种折中方案是在迭代若干次(例如 m 次)以后，更新 $\boldsymbol{K}_T$ 为 $\boldsymbol{K}_T^m$，再进行以后的迭代，在某些情况下，这种方案是很有效的。修正的 Newton-Raphson 方法的算法过程可表示如图 1.4。

1.2.3　增量法

前面介绍的几种方法，均不能保证在任何情况下都获得收敛解，虽然在某些具体问题中，解的收敛性可以得到证明。另一类方法则是利用这样一个事实，即当“载荷”项 $\boldsymbol{f}$ 为零时，解 $\boldsymbol{a}$ 常常是已

知的。例如，当 f 代表作用在结构上的力，则 a 即为结构的变形。在问题的起始参照点处，一般两者均为零。在这种情况下，研究向量 a 当向量 f 增加时的性态是很方便的。这种方法称为增量法。

只要 f 的增量选得足够小，增量法就能得到收敛解，且得到的解一般总是合理的。此外，计算的中间结果也提供了“加载”过程中的有用信息。

将有限元方程(1.17)中的荷载项改写为 λf_0，即

$$P(a)+\lambda f_0=o \tag{1.28}$$

将上式对 λ 微分，得到

$$\frac{dP}{da}\frac{da}{d\lambda}+f_0=K_T\frac{da}{d\lambda}+f_0=o \tag{1.29}$$

或

$$\frac{da}{d\lambda}=-K_T^{-1}(a)f_0 \tag{1.30}$$

其中 K_T 为已经介绍过的切线矩阵。求解上式有许多方法，欧拉法是最简单的一种，它的表达式为

$$a_{m+1}-a_m=-(K_T(a_m))^{-1}f_0\Delta\lambda_m=-(K_T)_m^{-1}\Delta f_m \tag{1.31}$$

式中的下标是对 λ(或 f)的增量而言的，也即

$$\lambda_{m+1}=\lambda_m-\Delta\lambda_m$$

或

$$f_{m+1}=f_m+\Delta f_m \tag{1.32}$$

利用改进的积分方案，如各种龙格—库塔(Runge Kutte)公式，能够改善解的精度。“修正的”欧拉法(等价于二阶龙格—库塔公式)特别有用。通过表达式(1.31)算出 a_{m+1}^0 之后，再按下式计算改进的 a_{m+1}。

$$a_{m+1}-a_m=-(K_T)_{m+\theta}^{-1}\Delta f_m \tag{1.33}$$

式中

$$(K_T)_{m+\theta}\equiv K_T(a_{m+\theta})$$

$$a_{m+\theta}=(1-\theta)a_m+\theta a_{m+1}^0 \qquad (0<\theta<1)$$

利用上式计算得到的 a_{m+1} 比利用(1.31)式得到的 a_{m+1}^0 有所改进，代价是付出了两倍的计算工作量。

需要指出，无论利用(1.31)式还是(1.33)式计算 a_{m+1}，所得到

的解 $a_m, a_{m+1}, \cdots$，一般情况下是不能精确满足方程(1.28)式，这将导致解的漂移。随着增量数目的增加，这种漂移现象将愈来愈严重。当系统为单自由度时，用 Euler 法求解增量方程(1.31)式以及解的漂移现象如图 1.5 所示。

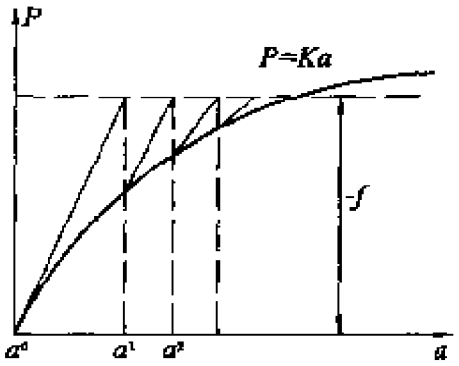


图 1.4 修正的 Newton-Raphson 法

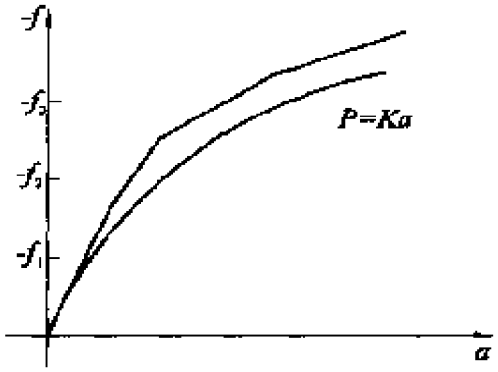


图 1.5 Euler 法解的漂移现象

为了克服解的漂移现象，可以将 Newton-Raphson 方法或修正的 Newton-Raphson 方法用于每一增量步。如采用 Newton-Raphson 方法，在每一增量内进行迭代，则对于 λ 的 $m+1$ 次增量步的第 $n+1$ 次迭代可以表示为

$$\Psi_{m+1}^{n-1}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_{m+1}^{n+1})+\lambda_{m+1}\boldsymbol{f}_0=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_{m+1}^{n})+\lambda_{m+1}\boldsymbol{f}_0+(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^n=\boldsymbol{0} \tag{1.34}$$

由上式解出

$$\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^n=-(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}^{-1}(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_{m+1}^n)+\lambda_{m+1}\boldsymbol{f}_0) \tag{1.35}$$

于是得到 $\boldsymbol{a}_{m+1}$ 的第 $n+1$ 次迭代的改进值

$$\boldsymbol{a}_{m+1}^{n+1}=\boldsymbol{a}_{m+1}^n+\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^n \tag{1.36}$$

(1.35)式中的 $(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}$ 是 $(\boldsymbol{K}_T)_{m+1}$ 的第 n 次迭代时的改进值，开始迭代时用 $\boldsymbol{a}_{m+1}^0=\boldsymbol{a}_m$，连续地进行迭代，最后可以使得方程(1.28)式精确地被满足。

从(1.35)式可见，当采用 Newton-Raphson 迭代时，每次迭代后都要重新形成和分解 $(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}$，无疑工作量是很大的。因此通常采用修正的 Newton-Raphson 方法，这时

$$(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}=(\boldsymbol{K}_T^0)_{m+1}=\boldsymbol{K}_T(\boldsymbol{a}_m) \tag{1.37}$$

如果(1.35)式只求解一次，而不继续进行迭代，则有

$$\Delta a_{m+1}=\Delta a^{0}_{m+1}=-(K_T)_m^{-1}(P_m+\lambda_{m+1}f_0) \tag{1.38}$$

若进一步假设在上一增量步结束时，控制方程(1.28)式是精确满足的，即

$$P_m+\lambda_m f_0=0$$

则

$$\Delta a_{m+1}=-(K_T)_m^{-1}f_0\Delta\lambda_m \tag{1.39}$$

实际上，上式就是(1.31)式。(1.38)式与(1.39)式相比，不同之处在于它考虑了上一增量步中方程(1.27)式未精确满足的因素，将误差 $P_m+\lambda_m f_0$ 合并到 $\Delta\lambda_m f_0$ 中进行求解。(1.27)式在结构分析中实质上是平衡方程。所以(1.35)式或(1.38)式称为考虑平衡校正的迭代算法。对于单自由度系统，将 Newton-Raphson 法或修正的 Newton-Raphson 法和增量法结合使用时，计算过程分别见图 1.6 和图 1.7。

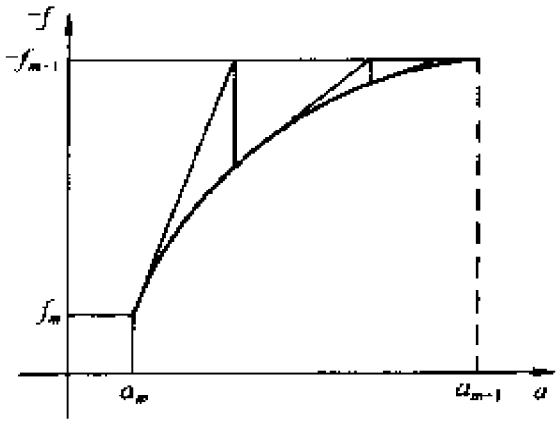


图 1.6 用 Newton-Raphson 解增量方程

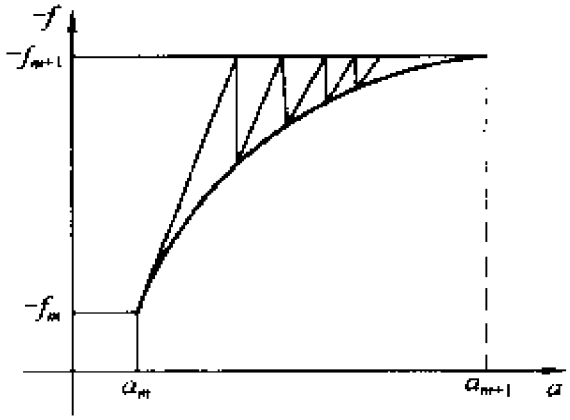
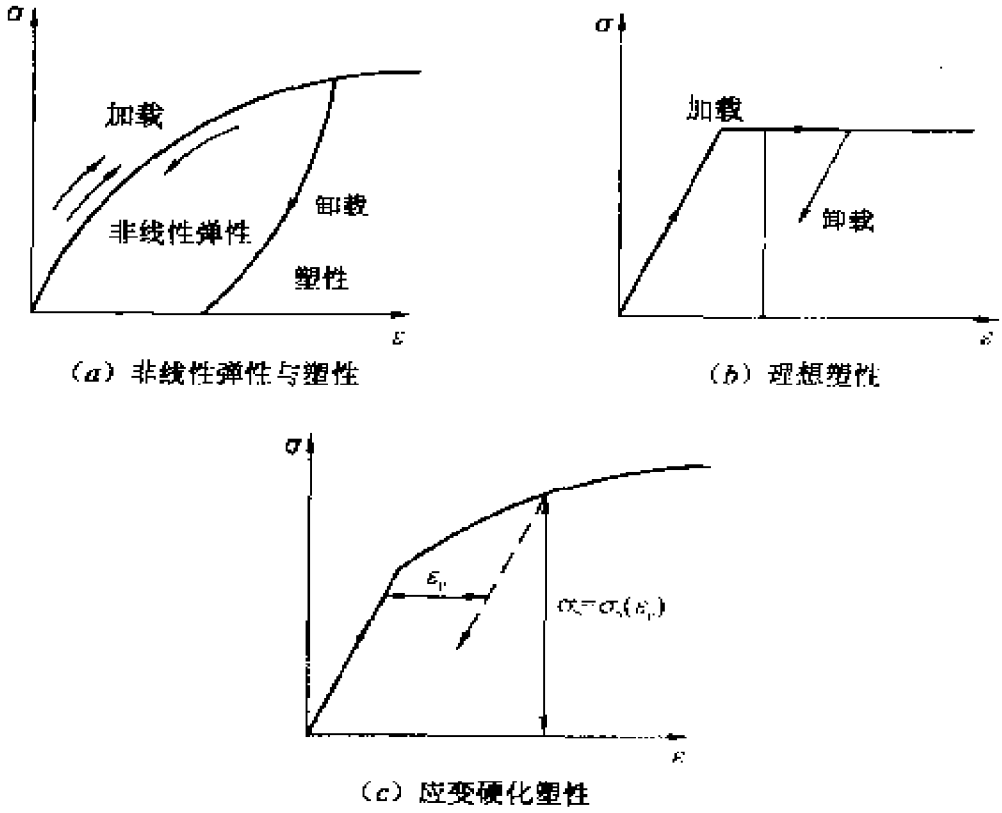


图 1.7 用修正的 Newton-Raphson 解增量方程

1.3 塑性问题

弹塑性材料进入塑性的特征是当载荷卸载以后存在不可恢复的永久变形，因而应力应变之间不再存在唯一的对应关系，这是区别于非线性弹性材料的基本属性。以材料的单向受力情况为例，如图 1.8(a)所示，只是加载时应力应变呈非线性关系，还不足以判定材料是非线性弹性还是弹塑性。但是一经卸载立即发现两者的

区别，非线性弹性材料将沿原路径返回，而弹塑性材料将依据不同历史状况卸载后产生不同的永久变形。



(a) 非线性弹性与塑性　　(b) 理想塑性

(c) 应变硬化塑性

图 1.8　单轴性态

许多材料显示出一种理想塑性性态，这时存在一个确定的屈服应力 σ_s，这一应力下的应变是不确定的。当应力低于 σ_s 时，假设材料具有线性(或非线性)弹性的应力—应变关系，图 1.8(b)示出了这种性态。

更为精密的塑性模型是硬化塑性材料，如图 1.8(c)，这种材料的屈服应力取决于某种参数 κ(例如塑性应变 ε_p)。

对于一般应力状态 σ，塑性理论需要作些扩展，屈服应力的概念也需要推广。

1.3.1　屈服面

该条件规定了材料开始塑性变形的应力状态。对于初始各向同性材料，在一般应力状态下开始进入塑性流动的条件是

$$F(\sigma,\kappa)=f(\sigma)-Y(\kappa)=0 \qquad (1.10)$$

式中 κ 为"硬化"参数。这种屈服条件可看作 n 维应力空间中的一个曲面，其位置由参数 κ 的当时值决定。工程上几种常用的屈服面在 1.3.8 中有详细介绍。

1.3.2 流动法则

流动法则规定塑性应变增量的分量和应力分量以及应力增量分量之间的关系。Von. Mises 流动法则假设塑性应变增量可从塑性势导出，即

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{1.41}$$

上式中，$d\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 是塑性应变增量，λ 是一正的待定有限量，它的具体数值和材料硬化法则有关；Q 是塑性势函数，一般来说它是应力状态和塑性应变的函数。对于稳定的应变硬化材料，Q 通常取与后继屈服函数 F 相同的形式。当 $Q=F$ 时，这种特殊情况称为关联塑性；否则称为非关联塑性。对于关联塑性情况，流动法则表示为

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = \lambda \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{1.42}$$

从微分学知道，$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$ 定义的向量正是沿应力空间内后继屈服面 $F=0$ 的法线方向，所以 Von. Mises 流动法则又称法向流动法则。

1.3.3 硬化法则

硬化法则规定材料进入塑性变形后的后继屈服函数（又称加载函数或加载曲面），一般来说加载函数采用以下形式

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa) = 0 \tag{1.43}$$

现时的塑性应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_p$ 不一定显式地出现在加载函数中，可能通过 κ 隐式地包含在 F 中。

对于理想弹塑性材料，因无硬化效应，显然后继屈服函数和初始屈服函数一致，即

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \kappa) = F(\boldsymbol{\sigma}) = 0 \tag{1.44}$$

对于硬化材料，通常采用以下两种硬化法则

1.3.3.1 各向同性硬化法则

此法则规定材料在进入塑性变形后，加载曲面在各方向均匀

地向外扩张，而其形状、中心及其在应力空间的方位均保持不变。例如对于 $\sigma_3=0$ 的情况，初始屈服轨迹和后继屈服轨迹如图 1.9 所示。如采用 Von. Mises 屈服条件，则各向同性硬化的后继屈服函数可以表示为

$$F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}_p,\kappa)=\sqrt{3}\,\bar{\sigma}-\sigma_s(\kappa)=0 \tag{1.45}$$

式中

$$\begin{aligned}&\bar{\sigma}=\sqrt{J_2}=\left[\frac{1}{2}(s_x^2+s_y^2+s_z^2)+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2+\tau_{xy}^2\right]^{1/2}\\&s_x=\sigma_x-\sigma_m,\ s_y=\sigma_y-\sigma_m,\ s_z=\sigma_z-\sigma_m\\&\sigma_m=\frac{1}{3}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\end{aligned} \tag{1.46}$$

σ_s 是现时的后继屈服应力，它是等效塑性应变 $\bar{\varepsilon}^p$ 的函数

$$\kappa=\bar{\varepsilon}^p=\int d\bar{\varepsilon}^p=\int\left(\frac{2}{3}d\boldsymbol{\varepsilon}_p^{\mathrm{T}}d\boldsymbol{\varepsilon}_p\right)^{1/2} \tag{1.47}$$

$\sigma_s(\bar{\varepsilon}^p)$ 可以从材料的单轴拉伸试验 $\sigma-\varepsilon$ 曲线得到，定义

$$H'=\frac{d\sigma_s}{d\bar{\varepsilon}_p} \tag{1.48}$$

为材料的塑性模量，又称为硬化系数。它和弹性模量 E 以及切线模量 $E'\left(=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)$ 的关系是

$$H'=\frac{EE'}{E-E'} \tag{1.49}$$

1.3.3.2　运动硬化法则

此法则规定材料在进入塑性以后，加载曲面在应力空间作一刚体移动，而其形状、大小和方位均保护不变，见图 1.10。后继屈服函数可表示为

$$F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\alpha})=0 \tag{1.50}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}$ 是加载曲面的中心在应力空间的移动张量，它与材料硬化特性以及变形历史有关。根据 $\boldsymbol{\alpha}$ 的具体规定不同，运动硬化法则又可分为 Prager 运动硬化法则和 Zeigler 修正硬化法则[7]。

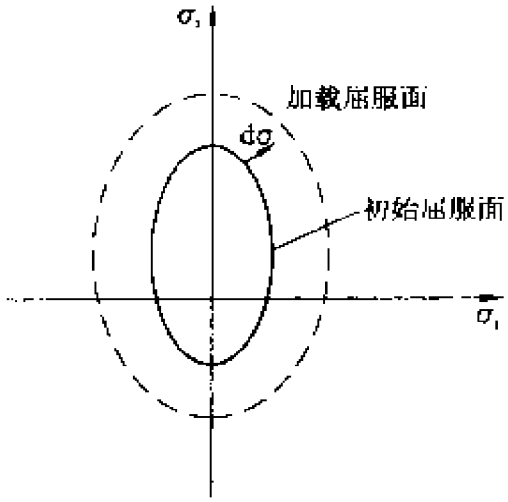


图 1.9 各向同性硬化

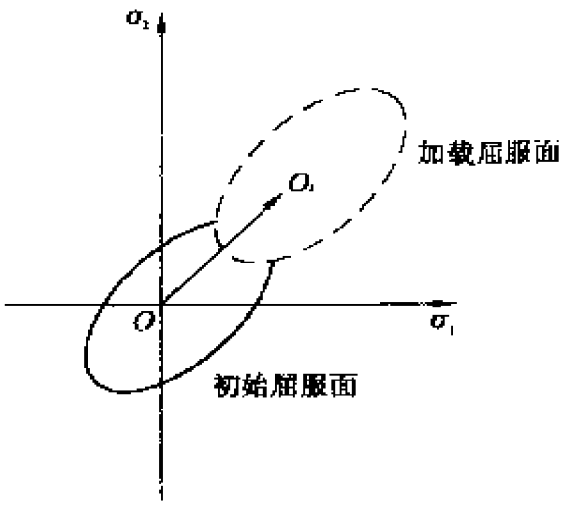


图 1.10 运动硬化

1.3.4 加载、卸载准则

该准则用以判别从一塑性状态出发是继续塑性加载还是弹性卸载，这是计算过程中判定是否继续塑性变形以及决定是采用弹塑性本构关系还是弹性本构关系所必须的。这个准则可表示如下：

若 $F=0, \dfrac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma > 0$ 继续塑性加载；

若 $F=0, \dfrac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma < 0$ 由塑性按弹性卸载；

若 $F=0, \dfrac{\partial f}{\partial \sigma} d\sigma = 0$

则应区分：(1)对于理想弹塑性材料，此情况是塑性加载，因为在此条件下可以继续塑性流动；(2)对于硬化材料，此情况是中性变载，即仍保持在塑性状态，但不发生新的塑性流动。

1.3.5 应力应变关系

当应力产生一无限小增量时，假设应变的变化可分成弹性的及塑性的两部分，即

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \tag{1.51}$$

弹性应变增量与应力增量之间仍由对称的常弹性矩阵 D 联系起来。将(1.42)式代入(1.51)式中，有

$$d\varepsilon = \boldsymbol{D}^{-1} d\sigma + \lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \tag{1.52}$$

发生塑性屈服时，应力状态处在(1.40)式所表示的屈服面上，对(1.40)式微分可得

$$dF=\frac{\partial F}{\partial \sigma_x}d\sigma_x+\frac{\partial F}{\partial \sigma_y}d\sigma_y+\frac{\partial F}{\partial \sigma_z}d\sigma_z+\frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}}d\tau_{yz}+$$
$$\frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}}d\tau_{zx}+\frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}}d\tau_{xy}+\frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa=0 \tag{1.53}$$

或

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}d\boldsymbol{\sigma}-A\lambda=0 \tag{1.54}$$

式中

$$A=-\frac{\partial F}{\partial \kappa}d\kappa\,\frac{1}{\lambda} \tag{1.55}$$

为了消去 λ，用 $\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}$ 乘(1.52)式两端，得到

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}d\boldsymbol{\sigma}=\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}d\boldsymbol{\varepsilon}-\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\lambda \tag{1.56}$$

将(1.56)式代入(1.54)式，有

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}d\boldsymbol{\varepsilon}-\left[\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}+A\right]\lambda=0 \tag{1.57}$$

从上式解出 λ，代入(1.52)式，得到

$$d\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}d\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.58}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}=\boldsymbol{D}-\frac{\boldsymbol{D}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}}{A+\left\{\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\left\{\frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right\}} \tag{1.59}$$

从(1.58)式可见，现在弹塑性矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}$ 替代了增量分析中的弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$。

矩阵 $\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}$ 仅在材料是关联塑性的情况下才是对称的。对于理想塑性材料(这时 $A=0$)，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{ep}}$ 仍有定义。

1.3.6 参数 A 的意义

对于不产生硬化的理想塑性材料，A 取零值。如果考虑材料的

硬化，则必须注意参数 κ 的性质，因为屈服面的变化取决于它。

对于"加工硬化"材料，κ 为发生塑性变形时所作塑性功之总和，于是有

$$d\kappa = \sigma_x d\varepsilon_{x,p} + \sigma_y d\varepsilon_{y,p} + \sigma_z d\varepsilon_{z,p} + \tau_{yz} d\varepsilon_{yz,p} + \tau_{zx} d\varepsilon_{zx,p} + \tau_{xy} d\varepsilon_{xy,p} = \boldsymbol{\sigma}^T d\boldsymbol{\varepsilon}_p \tag{1.60}$$

将(1.42)式代入(1.60)式，得

$$d\kappa = \lambda \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{1.61}$$

把(1.61)式代入(1.55)式中，则 λ 被消去，得到

$$A = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \boldsymbol{\sigma}^T \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{1.62}$$

如果知道 F 与 κ 之间的显式关系式，则(1.62)式是一个严格确定的表达式。

1.3.7 Prandtl-Reuss 关系式

考察 Von. Mises 屈服函数

$$F = \sqrt{3}\bar{\sigma} - \sigma_s \tag{1.63}$$

上式中 $\bar{\sigma}$ 由(1.46)式给出，$\sigma_s = \sigma_s(\kappa)$ 是单轴情况下的屈服应力。

对(1.63)式求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_x} = \frac{\sqrt{3} s_x}{2\bar{\sigma}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} = \frac{\sqrt{3} s_y}{2\bar{\sigma}}, \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} = \frac{\sqrt{3} s_z}{2\bar{\sigma}}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\sqrt{3}\tau_{yz}}{\bar{\sigma}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} = \frac{\sqrt{3}\tau_{zx}}{\bar{\sigma}}, \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\sqrt{3}\tau_{xy}}{\bar{\sigma}} \tag{1.64}$$

其中

$$s_i = \sigma_i - \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \qquad (i = x, y, z)$$

假设材料遵守简单的加工硬化法则，在单轴的情况下，由(1.60)式，有

$$d\kappa = \sigma_s d\varepsilon_p \tag{1.65}$$

如果又给出了 σ_s 和单轴塑性应变 ε_p 之间关系的单轴实验曲线，则可得

$$H' = \frac{\mathrm{d}\sigma_s}{\mathrm{d}\varepsilon_p} \tag{1.66}$$

又

$$-\frac{\partial F}{\partial \kappa} = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \kappa} = \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon_p} \cdot \frac{1}{\sigma_s} = \frac{H'}{\sigma_s} \tag{1.67}$$

式中 H' 是单轴情况下的 $\sigma_s \sim \varepsilon_p$ 曲线在给定 σ_s 处的斜率。

采用相关连的流动法则，将(1.67)和(1.64)两式代入(1.62)式中，得到

$$A = H' \tag{1.68}$$

上式即为 Prandtl-Reuss 关系式。

1.3.8 几种典型的屈服面

对于可在实际中应用的任一种屈服面，都可用以上讨论的一般步骤来确定它的弹塑性矩阵。如果屈服面是各向同性的，则用三个应力不变量来表示屈服面比较方便。以下给出这些不变量的形式

$$\begin{aligned}
\sigma_m &= \frac{J_1}{3} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \\
\bar{\sigma} &= J_2^{1/2} = \left[\frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 + \tau_{xy}^2\right]^{1/2} \\
\theta &= \frac{1}{3}\sin^{-1}\left[-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{\bar{\sigma}^3}\right] \qquad -\frac{\pi}{6} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{6}
\end{aligned} \tag{1.69}$$

其中

$$J_3 = s_x s_y s_z + 2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy} - s_x\tau_{yz}^2 - s_y\tau_{zx}^2 - s_z\tau_{xy}^2 \tag{1.70}$$

几种工程上常用的屈服面可给出如下：

(1)Tresca 条件

$$F = 2\bar{\sigma}\cos\theta - \sigma_s(\kappa) = 0 \tag{1.71}$$

式中，$\sigma_s(\kappa)$是从单轴实验得出的屈服应力。

(2)Von. Mises 条件

$$F = \sqrt{3}\bar{\sigma} - \sigma_s(\kappa) = 0 \tag{1.72}$$

在金属塑性中，上述两种屈服条件都得到了很好的验证。对于土壤、混凝土和其他"内摩擦"材料，经常使用的屈服条件是 Mohr-

Coulomb 条件以及 Drucker Prager 条件。

(3)Mohr-Coulomb 条件

$$F=\sigma_m\sin\phi+\bar{\sigma}\cos\theta-\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}\sin\phi\sin\theta-c\cos\phi=0 \tag{1.73}$$

其中 $c(\kappa)$ 与 $\phi(\kappa)$ 分别是粘聚强度和内摩擦角，它们依赖于某个应变硬化参数 κ。

(4)Drucker-Prager 条件

$$F=3\alpha\sigma_m+\bar{\sigma}-\kappa=0 \tag{1.74}$$

其中

$$\alpha=\frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}\,(3-\sin\phi)},\kappa=\frac{6c\cos\phi}{\sqrt{3}\,(3-\sin\phi)}$$

c、ϕ 仍为某个应变硬化参数的函数。

以上四种形式的屈服面利用表格将其表示成(1.40)式统一形式则式中各项数见表 1.1。

表 1.1　各种屈服准则所用等效应力值和单向屈服应力值

公式编号	屈服准则	等效应力 $f(\sigma)$	单向屈服应力 $Y(\kappa)$
(1.71)	Tresca	$2\bar{\sigma}\cos\theta$	σ_s
(1.72)	Von-Mises	$\sqrt{3}\,\bar{\sigma}$	σ_s
(1.73)	Mohr Coulomb	$\sigma_m\sin\phi+\bar{\sigma}\cos\theta-\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{3}}\sin\phi\sin\theta$	$c\cos\phi$
(1.74)	Drucker－Prager	$3\alpha\sigma_m+\bar{\sigma}$	κ

为了求得各种屈服条件的梯度向量 $\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$ 或 $\frac{\partial Q}{\partial\boldsymbol{\sigma}}$，我们总是可以写出[1]

$$\frac{\partial F}{\partial\boldsymbol{\sigma}}=\frac{\partial F}{\partial\sigma_m}\frac{\partial\sigma_m}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial F}{\partial\bar{\sigma}}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}+\frac{\partial F}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \tag{1.75}$$

注意到

$$\frac{\partial F}{\partial J_3}=\frac{\partial F}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial J_3} \tag{1.76}$$

并利用(1.69)式，我们可把梯度向量$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$写成

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}\boldsymbol{M}^0+\frac{\partial F}{\partial J_2}\boldsymbol{M}^1+\frac{\partial F}{\partial J_3}\boldsymbol{M}^2\right)\boldsymbol{\sigma} \tag{1.77}$$

其中

$$\boldsymbol{M}^0=\frac{1}{9\sigma_m}\begin{bmatrix}1&1&1&0&0&0\\&1&1&0&0&0\\&&1&0&0&0\\&&&0&0&0\\&\text{对 称}&&&0&0\\&&&&&0\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{M}^1=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0\\&\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0\\&&\frac{2}{3}&0&0&0\\&&&2&0&0\\&\text{对 称}&&&2&0\\&&&&&2\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}^2=\begin{bmatrix}\frac{\sigma_x}{3}&\frac{\sigma_z}{3}&\frac{\sigma_y}{3}&-\frac{2}{3}\tau_{yz}&\frac{1}{3}\tau_{zx}&\frac{1}{3}\tau_{xy}\\&\frac{\sigma_y}{3}&\frac{\sigma_x}{3}&\frac{1}{3}\tau_{yz}&-\frac{2}{3}\tau_{zx}&\frac{1}{3}\tau_{xy}\\&&\frac{\sigma_z}{3}&\frac{1}{3}\tau_{yz}&\frac{1}{3}\tau_{zx}&-\frac{2}{3}\tau_{xy}\\&&&-\sigma_x&\tau_{xy}&\tau_{zx}\\&\text{对 称}&&&-\sigma_y&\tau_{yz}\\&&&&&-\sigma_z\end{bmatrix}+\sigma_m\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0\\&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&0&0&0\\&&-\frac{1}{3}&0&0&0\\&&&1&0&0\\&\text{对 称}&&&1&0\\&&&&&1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=[\sigma_x\quad\sigma_y\quad\sigma_z\quad\tau_{yz}\quad\tau_{zx}\quad\tau_{xy}]^T$$

对于以上讨论的四种屈服面，表1.2给出了F对于三个应力不变量的导数的表达式。

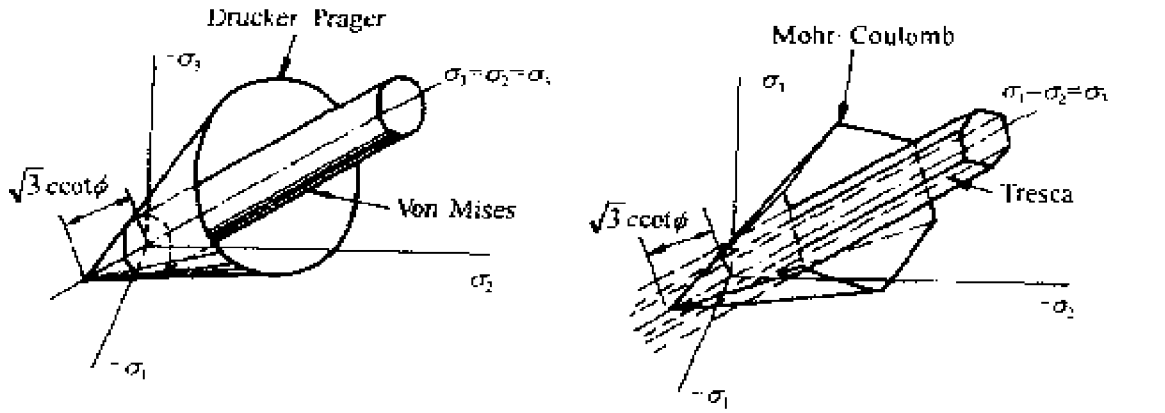
表1.2　各种屈服条件下F对于应力不变量的导数

屈服条件	$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$	$\frac{\partial F}{\partial \sigma}$	$J_2\frac{\partial F}{\partial J_3}$
Tresca	0	$2\cos\theta(1+\tan\theta\tan3\theta)$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos3\theta}$
Von-Mises	0	$\sqrt{3}$	0

续上表

屈服条件	$\frac{\partial F}{\partial \sigma_m}$	$\frac{\partial F}{\partial \theta}$	$J_2\frac{\partial F}{\partial J_3}$
Mohr-Coulomb	$\sin\phi$	$\cos\theta(1+\tan\theta\tan3\theta)+\sin\phi(\tan3\theta-\tan\theta)/\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}\sin\theta+\sin\phi\cos\theta}{2\cos3\theta}$
Drucker-Prager	3α	1.0	0

图 1.11 在主应力空间中示出了上面给出的各种屈服面的形式。



(a) Drucker-Prager 屈服面与 Von Mises 屈服面　　(b) Mohr-Coulomb 屈服面与 Tresca 屈服面

图 1.11　在主应力空间中的某些各向同性屈服面

1.3.9　塑性力学问题计算步骤

由于材料和结构的弹塑性性质与加载以及变形的历史有关，在进行结构的弹塑性分析时，通常将荷载分成若干个增量，然后对每一荷载增量，将弹塑性方程线性化，从而使弹塑性分析这一非线性问题分解为一系列线性问题。

运用(1.34)式，即

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_{m+1}^{n})+\lambda_{m+1}\boldsymbol{f}_0+(\boldsymbol{K}_T^{n})_{m+1}\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^{n}=0 \tag{1.78}$$

其中

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}_{m+1}^{n})=\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n}\mathrm{d}\Omega \tag{1.79}$$

一旦求得了 $\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^{n}$，则可按下式计算 $\boldsymbol{a}_{m+1}^{n+1}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n+1}$

$$\boldsymbol{a}_{m+1}^{n+1}=\boldsymbol{a}_{m+1}^{n}+\Delta\boldsymbol{a}_{m+1}^{n} \tag{1.80}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n+1}=\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n}+\Delta\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n} \tag{1.81}$$

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_{m+1}^{n}=(\boldsymbol{D}_{ep})_{m+1}^{n}\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{m+1}^{n}$$

在(1.78)式给出的各次迭代中，矩阵$(\boldsymbol{K}_T^n)_{m+1}$可以用上一荷载步结束时的切线矩阵$(\boldsymbol{K}_T)_m$来代替，这就是修正的 Newton-Raphson 法。

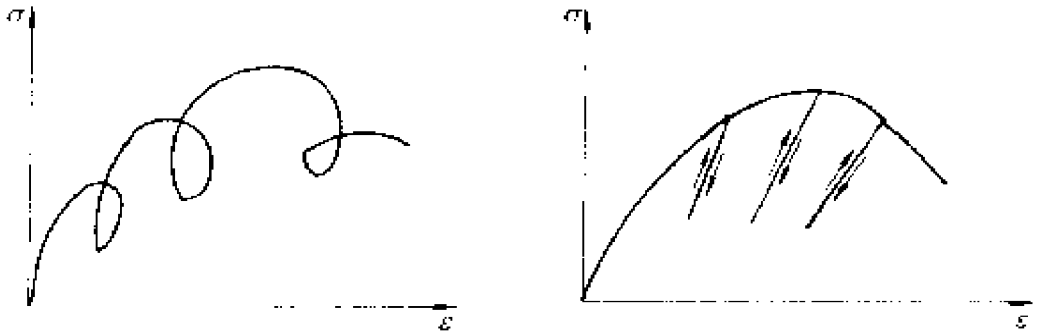
应注意应力$\boldsymbol{\sigma}_{m+1}$必须在当时的屈服面之上或之内，当应力超出屈服面时，经常使用按比例放大或缩小的办法，将应力校正到屈服面上[2]。

1.4 弹塑性耦合与应变软化

岩石介质的弹塑性性质是比较复杂的。岩石样品在刚性试验机(控制位移的试验机)上的单轴实验曲线如图 1.12 所示[4]。从图可以看出，在达到某一极限应力(屈服应力)之后，卸载后变形不能完全恢复。如果忽略蠕变和松弛等时间效应，可以把它看做是塑性变形。

从图 1.12 中还可以看出岩石介质的弹塑性性质与一般的金属材料有很大不同。在强化阶段之后，在应力应变曲线上出现下降的部分，这种性质称为材料的不稳定性质(有时也不加区别地称为应变软化)。随着塑性变形的出现和发展，弹性系数也有明显的变化，特别在非稳定阶段这种变化更为剧烈，这种性质称为弹性与塑性的耦合作用。此外，在讨论三向应力状态本构关系时，对于岩石介质，由塑性应变增量的分量组成的矢量不再像金属材料那样满足和屈服面相关联的正交法则，而是一种非关联的规律。岩石介质的上述特性都是经典的塑性理论所没有考虑的。对于岩石类介质，根据 Ильюшин(依留申)公设(在一个应变循环中，外部作用所作之功为非负)在应变空间表述本构关系是特别方便的。

一个岩石类材料的物质点的应变可用三维应变空间中一个点来代表，通常假设存在一张曲面，它所包围的区域内部所有的点能由弹性应变的路径达到，而在这个曲面上的点表示材料将发生进一步的塑性变形。这个曲面就是应变空间的屈服面或加载面，它可数学地表示为



(a) 实验曲线　　(b) 理想化曲线

图 1.12　单轴实验曲线

$$f(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}},w_{\mathrm{p}})=0 \tag{1.82}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示应变矢量，$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}$ 和 w_{p} 分别为现时物质点经历过的塑性应变和塑性功 $w_{\mathrm{p}}=\int\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}$。在(1.82)式中假设塑性功 w_{p} 是仅有的强化参数。

另一方面，在工程中屈服函数通常是在应力空间表示的

$$F(\boldsymbol{\sigma},w_{\mathrm{p}})=0 \tag{1.83}$$

我们可以通过如下的广义 Hooke 定律

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}) \tag{1.84}$$

建立这两个空间中屈服面之间的转换关系

$$f(\boldsymbol{\varepsilon},\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}},w_{\mathrm{p}})=F(\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}),w_{\mathrm{p}})=F(\boldsymbol{\sigma},w_{\mathrm{p}}) \tag{1.85}$$

对于岩石类材料，为代表弹塑性耦合，我们假设(1.84)式中的弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$，以及它的逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是塑性功 w_{p} 的函数，同时 $\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 保持对称性。

由(1.84)式有 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}$，将其微分，并考虑到 $\mathrm{d}w_{\mathrm{p}}=\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}$，有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}=\boldsymbol{C}\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial\boldsymbol{C}}{\partial w_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}} \tag{1.86}$$

塑性应变增量被假设沿塑性势 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{\sigma},w_{\mathrm{p}})$ 的梯度方向

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}=\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\lambda \tag{1.87}$$

$\mathrm{d}\lambda$ 是一个非负的尺度参数，由(1.86)和(1.87)两式可得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}-(\boldsymbol{D}-\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial w_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}})\frac{\partial\boldsymbol{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\mathrm{d}\lambda \tag{1.88}$$

现考虑加载函数的变化率

$$df=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}d\sigma+\left\{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_p}\right\}^{\mathrm{T}}d\varepsilon_p+\left\{\frac{\partial f}{\partial \omega_p}\right\}d\omega_p \tag{1.89}$$

$df<0$ 只能对应于弹性反应，因为 $f+df$ 给出一个必然小于零的 f 值。从某个塑性状态 $f=0$ 卸载并不引起新的塑性变形，即 $d\varepsilon^p=0, d\omega_p=0$，因此由(1.89)式卸载的条件为

$$l=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}d\sigma<0 \tag{1.90}$$

$df=0$ 表示应变点保持在 $f=0$ 上，它代表物质点从一个塑性状态转到另一塑性状态。对于中性变载而言，$d\varepsilon^p=0, d\omega_p=0$，因而有

$$l=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}d\sigma=0 \tag{1.91}$$

而加载则用下式表示

$$l=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}d\sigma>0 \tag{1.92}$$

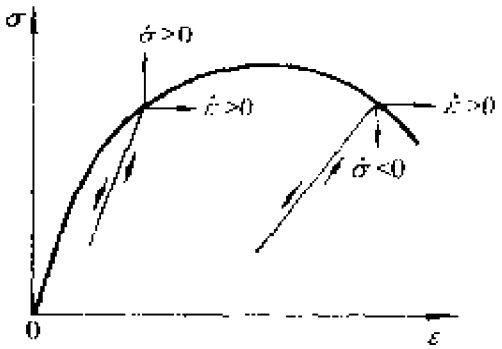


图 1.13 一维情况下的加载准则

一维情况和一般状态下的加载准则(1.90)～(1.92)式的几何表示分别如图 1.13 和图 1.14 所示。这个准则对强化阶段和软化阶段都同时适用，这就是岩石类材料的本构关系需要在应变空间表述的原因之一。(1.90)～(1.92)式的几何解释是明显的，对于应变空间的屈服面上的状态，加载、卸载和中性变载分别对应于应变增量 $d\varepsilon$ 指向屈服面外侧、内侧及与屈服面相切。

在加载($l>0$)时，参数 $d\lambda$ 的大小可由 $df=0$ 定出，它是

$$d\lambda=\frac{1}{A+B}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}d\varepsilon \tag{1.93}$$

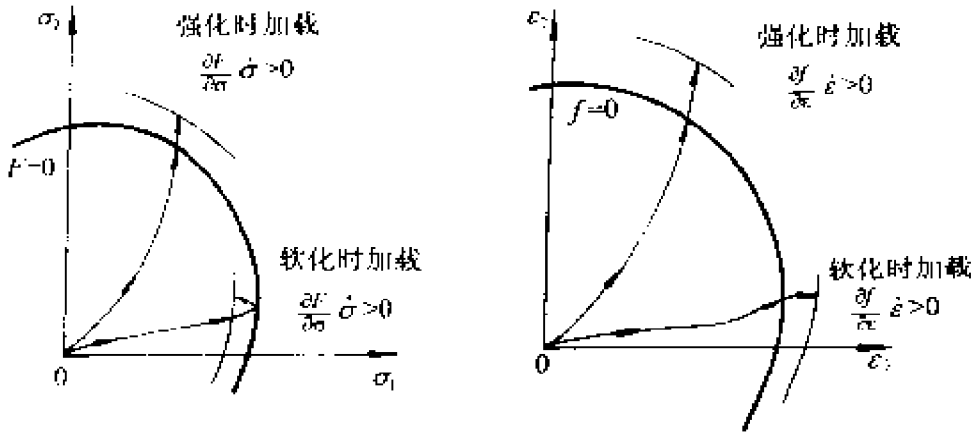


图 1.14　一般状态下的加载准则

其中

$$\boldsymbol{A}=-\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{p}}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

$$\boldsymbol{B}=-\frac{\partial f}{\partial w_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}=-\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\right)^{\mathrm{T}}\left[\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial w_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}+\frac{\partial F}{\partial w_{\mathrm{p}}}\right]\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \tag{1.94}$$

将(1.93)式代入(1.88)式得加载时的本构关系

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{D}_{\mathrm{p}})\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.95}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{p}}=\frac{1}{A+B}\left(\boldsymbol{D}-\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial w_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\right)\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{1.96}$$

引用一个阶梯函数

$$H(l)=\begin{cases}1 & l>0\\ 0 & l\leqslant 0\end{cases} \tag{1.97}$$

考虑到卸载和中性变载的情况，本构关系可写为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}=(\boldsymbol{D}-H(l)\boldsymbol{D}_{\mathrm{p}})\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{1.98}$$

其中 l 是 $\left(\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon}$，塑性变形的不可逆性要求

$$A+B>0,\quad A>0 \tag{1.99}$$

在(1.99)式的条件下，对于所有可能的应变增量，应力增量的反应是惟一的。

若不考虑弹塑性耦合，即弹性矩阵 $\boldsymbol{D}$ 以及它的逆矩阵与塑性功 w_{p} 无关，并利用下列关系

$$\left\{\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}=\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{\mathrm{T}}=-\left\{\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{\mathrm{p}}}\right\}^{\mathrm{T}} \tag{1.100}$$

(1.95)式就退化成(1.58)式。因此上述公式适用硬化、软化以及弹塑性耦合同时存在的情况。

上面就一般形式的加载函数 f 给出了弹塑性本构关系。对于一种具体材料来说，只要知道了 F(或 f)、Q 以及 $\boldsymbol{D}$ 的具体表达式，就可以得到它的相应的本构方程。各类岩石介质的屈服函数的可能形式可见文献[4]、[5]。

1.5 粘塑性 蠕变问题

1.5.1 粘塑性

因为材料能承受的最大应力总是与施加应力的速率有关，所以前面假定的那种固体的纯塑性性态大概只是一种理想的模式。图 1.15(a)是单轴载荷下纯弹塑性性态的模型。根据这个模型，在应力低于屈服应力时，塑性应变率为零，即

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}=0 \qquad \text{当 } \sigma-\sigma_{\mathrm{s}}<0$$

而当 $\sigma-\sigma_{\mathrm{s}}=0$ 时，$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{p}}$ 是不确定的。另一方面，弹塑性材料可抽象为图 1.15(b)所示的模型，在这个模型中，把一个阻尼器和塑性元件并联起来。现在，对于应变率不为零的情况，应力可以超过 σ_{s}。

与处理塑性问题一样，在处理粘塑性问题时也是把总应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 分成弹性分量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{e}}$ 和粘塑性分量 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vp}}$ 两部分，因此总应变率可表示为

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}=\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{e}}+\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{vp}} \tag{1.101}$$

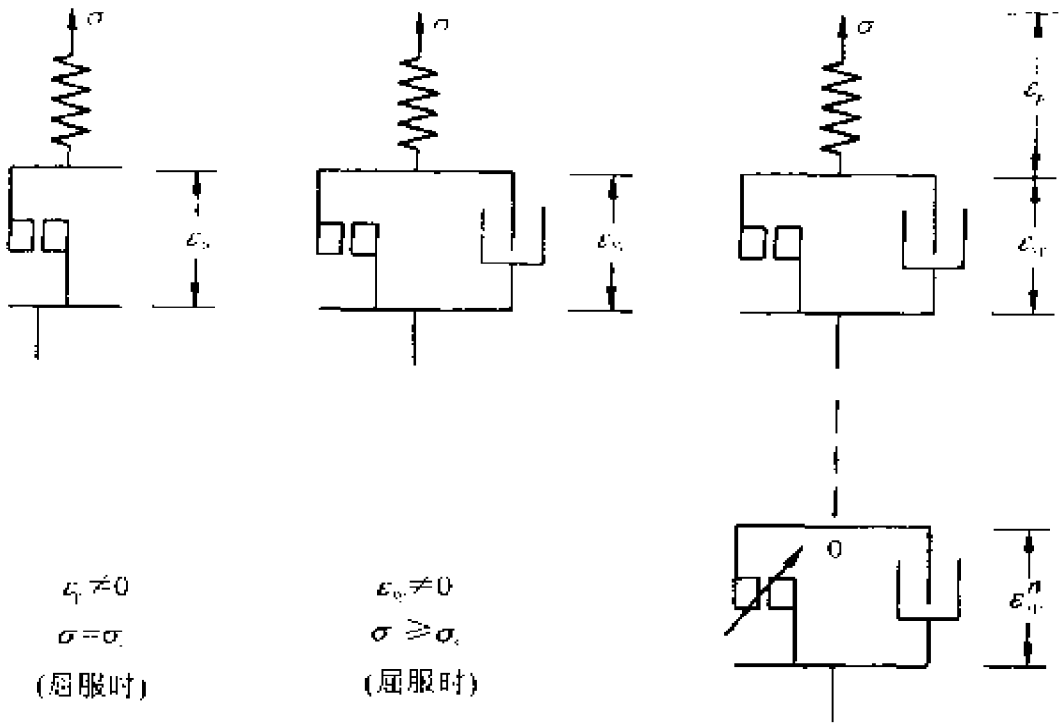
依赖于弹性应变率的总应力率按

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathrm{e}} \tag{1.102}$$

计算。式中 $\boldsymbol{D}$ 为弹性矩阵，由标量形式的屈服条件

$$F(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vp}},\kappa)=f(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{vp}})-Y(\kappa)=0 \tag{1.103}$$

确定是否出现粘塑性。式中 $Y(\kappa)$ 是单向屈服应力，可以是强化参数 κ 的函数。对于摩擦材料，$Y(\kappa)$ 是由表 1.1 第 4 列给出的等效屈服应力。假定只有当 $F>0$ 时才出现粘塑性流动，粘塑性流动法则由下式给出



(a) 弹塑性模型　　(b) 弹粘塑性模型　　(c) 一串弹粘塑性模型

图 1.15　弹塑性模型与弹粘塑性模型

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \tag{1.104}$$

其中 $Q = Q(\sigma, \varepsilon_{vp}, \kappa)$ 是"塑性"势，而 γ 是控制塑性流动率的流动性参数。函数 $\langle \phi(x) \rangle$ 定义为

$$\langle \phi(x) \rangle = \begin{cases} \phi(x) & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases} \tag{1.105}$$

比较(1.41)式和(1.104)式，可以看出传统的非相关联塑性流动法则与现在定义的粘塑性流动的变化率之间的相似性。当取 $F \equiv Q$，即为相关联塑性流动法则的情形，这时，表达式(1.104)式变为

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial F}{\partial \sigma} \tag{1.106}$$

对于函数 ϕ，最常用的形式是

$$\phi(F) = e^{M\left(\frac{F}{Y}\right)} - 1 \tag{1.107}$$

和

$$\phi(F) = \left\{ \frac{F}{Y} \right\}^N \tag{1.108}$$

式中 M 和 N 是给定的常数。

1.5.1.1 粘塑性应变增量

考察时间间隔 $\Delta t_m = t_{m-1} - t_m$，假设在时刻 t_m 已求得结点位移 $\boldsymbol{a}^m$、应力 $\boldsymbol{\sigma}^m$，且力向量 $\boldsymbol{f}_m$ 是已知的，则由(1.106)式表示的应变率法则，用隐式的时间步进方案，可由下式确定在时间间隔 Δt_m 内所产生的应变增量

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m = \Delta t_m [(1-\theta)\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m + \theta \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^{m+1}] \tag{1.109}$$

当 $\theta=0$ 时，我们得到了 Euler 时间积分法，即"全显示法"(或前向差分法)。另一方面，当 $\theta=1$ 时则给出了"全隐式法"(或后向差分法)，应变增量由与时间间隔终点相对应的应变率确定。而 $\theta=1/2$ 时，可得到通常所说的"隐式梯形法"。

利用 Taylor 级数展开式并取线性项，可将(1.109)式中的 $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^{m+1}$ 写成

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^{m+1} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m + \boldsymbol{H}^m \Delta \boldsymbol{\sigma}^m \tag{1.110}$$

式中

$$\boldsymbol{H}^m = \left\{ \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^m = \boldsymbol{H}^m(\boldsymbol{\sigma}^m) \tag{1.111}$$

而 $\Delta \boldsymbol{\sigma}^m$ 是在时间间隔 $\Delta t_m = t_{m+1} - t_m$ 内产生的应力改变量。于是(1.109)式可重新写为

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m \Delta t_m + \boldsymbol{C}^m \Delta \boldsymbol{\sigma}^m \tag{1.112}$$

式中

$$\boldsymbol{C}^m = \theta \Delta t_m \boldsymbol{H}^m \tag{1.113}$$

1.5.1.2 应力增量

由(1.102)式的增量形式得到

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^m = \boldsymbol{D} \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_e^m = \boldsymbol{D}(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^m - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m) \tag{1.114}$$

用位移增量表示总的应变增量

$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^m = \boldsymbol{B}^m \Delta \boldsymbol{a}^m \tag{1.115}$$

将(1.112)式表示的 $\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m$ 代入(1.114)式中，得到

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}^m = \hat{\boldsymbol{D}}^m (\boldsymbol{B}^m \Delta \boldsymbol{a}^m - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m \Delta t_m) \tag{1.116}$$

式中

$$\hat{\boldsymbol{D}}^m = (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{C}^m)^{-1} \boldsymbol{D} = (\boldsymbol{D}^{-1} + \boldsymbol{C}^m)^{-1} \tag{1.117}$$

如用相关联的粘塑性法则时，$\boldsymbol{C}^m$ 为对称矩阵。而对于不相关联的情况，矩阵 $\boldsymbol{C}^m$ 是非对称的，进行分析时需要求解非对称方程。

用显示法($\theta=0$)求解线弹性问题时，方程(1.116)式简化成

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}^m=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{B}\Delta\boldsymbol{a}^m-\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m\Delta t_m) \tag{1.118}$$

1.5.1.3 平衡方程

在任一瞬时 t_m 都要满足平衡方程

$$\int_\Omega(\boldsymbol{B}^m)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}^m\mathrm{d}\Omega+\boldsymbol{f}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.119}$$

式中 $\boldsymbol{f}_m$——t_m 时刻由外荷载所产生的等效结点载荷向量。

在时间增量过程中，必须满足由(1.119)式的增量形式所给出的平衡方程，即

$$\int_\Omega(\boldsymbol{B}^m)^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{\sigma}^m\mathrm{d}\Omega+\Delta\boldsymbol{f}_m=\boldsymbol{0} \tag{1.120}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{f}_m$——载荷在时间间隔 Δt_m 内的变化。

工程中大量问题的载荷增量，是按不连续的时间间隔施加的，除了第一次时间间隔有增量变化外，对于其他时间步长都有 $\Delta\boldsymbol{f}_m=\boldsymbol{0}$。

将式(1.116)式代入(1.120)式，可以得到在时间步长 Δt_m 的位移增量为

$$\Delta\boldsymbol{a}^m=(\boldsymbol{K}_T^m)^{-1}\Delta\boldsymbol{Q}^m \tag{1.121}$$

其中

$$\Delta\boldsymbol{Q}^m=\int_\Omega(\boldsymbol{B}^m)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{D}}^m\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp}^m\Delta t_m\mathrm{d}\Omega-\Delta\boldsymbol{f}_m \tag{1.122}$$

$$\boldsymbol{K}_T^m=\int_\Omega(\boldsymbol{B}^m)^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{D}}^m\boldsymbol{B}^m\mathrm{d}\Omega \tag{1.123}$$

把位移向量 $\Delta\boldsymbol{a}^m$ 回代到(1.118)式，则得到应力增量 $\Delta\boldsymbol{\sigma}^m$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}^{m+1}&=\boldsymbol{\sigma}^m+\Delta\boldsymbol{\sigma}^m\\ \boldsymbol{a}^{m+1}&=\boldsymbol{a}^m+\Delta\boldsymbol{a}^m\end{aligned} \tag{1.124}$$

利用(1.114)式和(1.115)式可给出

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m=\boldsymbol{B}^m\Delta\boldsymbol{a}^m-\boldsymbol{D}^{-1}\Delta\boldsymbol{\sigma}^m \tag{1.125}$$

于是有

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^{m+1}=\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m+\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{vp}^m \tag{1.126}$$

用检查用(1.104)式定义的应变率 $\dot{\varepsilon}_{vp}$ 可以判别是否已达到了稳定条件。

1.5.1.4 平衡的修正

应力增量是根据增量平衡方程(1.120)式的线性化形式计算的。因此，累加上述所有增量应力而得到的总应力 σ^{m+1} 不是准确值，它们不能精确地满足平衡方程(1.119)式。有几种方法可用来进行必要的修正。其中，最简单的方法是按(1.118)式和(1.124)式来计算 σ^{m+1}，然后计算残余力即不平衡力 Ψ，而

$$\Psi^{m+1}=\int_{\Omega}(\boldsymbol{B}^{m+1})^{\mathrm{T}}\sigma^{m+1}\mathrm{d}\Omega+\boldsymbol{f}_{m+1}\neq\boldsymbol{0} \tag{1.127}$$

在下一时步上把这个残余力加到外力增量上去。用这样的方法就免去了一次迭代过程，同时还能减小误差。

可以证明，当 $\theta\geqslant 1/2$ 时，用类似于(1.109)式表示的时间积分法，是无条件稳定的；对于 $\theta<1/2$ 时，积分过程只是有条件稳定的，只有当 Δt_m 小于某临界值时，才能进行对时间的数值积分，在这种情况下应选择时间步长[12]。

1.5.2 蠕变

“蠕变”现象的特征是，在常应力条件下，变形和时间有关。因此除了瞬态应变之外，材料还产生蠕变应变 ε_c，ε_c 一般随着载荷作用期的延长而增大。蠕变本构关系的形式通常是，把蠕变应变率定义为应力和总的蠕变应变的某个函数，即

$$\dot{\varepsilon}_c=\frac{\mathrm{d}\varepsilon_c}{\mathrm{d}t}=\beta(\sigma,\varepsilon_c) \tag{1.128}$$

如不考虑 ε_c 对于 $\dot{\varepsilon}_c$ 的影响，则有

$$\dot{\varepsilon}_c=\beta(\sigma) \tag{1.129}$$

容易看出，上式与粘塑性问题(1.104)式相同。因此在处理蠕变问题时，只要将 1.5.1 中各公式中的 $\dot{\varepsilon}_{vp}^{m}$ 换成 $\dot{\varepsilon}_c^{m}$，而 $\boldsymbol{H}^{m}=\left[\frac{\partial\beta(\sigma)}{\partial\sigma}\right]^{m}$ 即可。

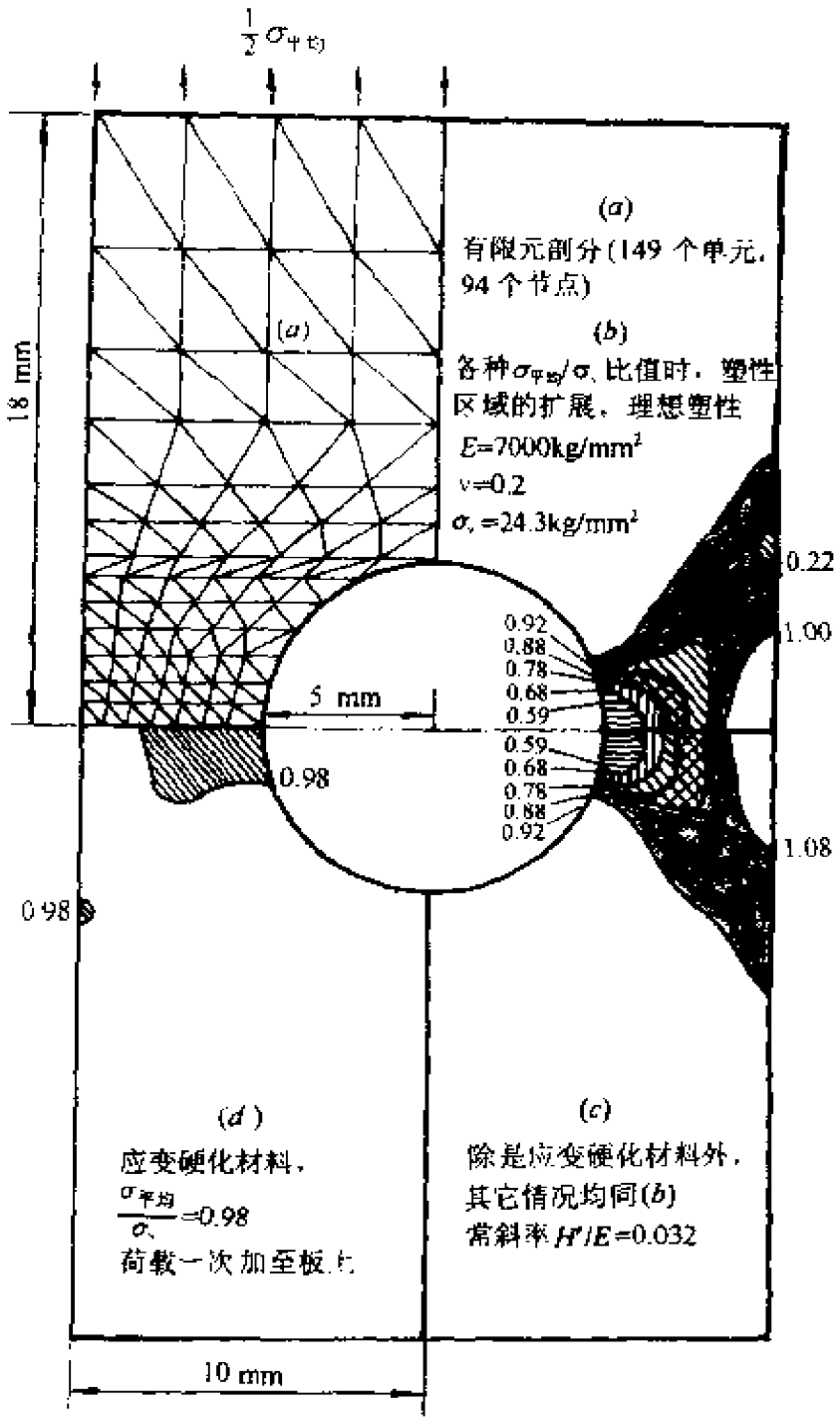


图 1.16　平面应力带孔拉伸板

1.6　算　　例

1.6.1　无应变硬化及有应变硬化材料的带孔平板[1]

图 1.16 给出了带孔拉伸平板的形状和它的简单三角形单元

剖分网格。假设板处于平面应力状态，采用 Von. Mises 屈服准则，在应变硬化的情况下，采用单轴硬化曲线的常斜率 H'（1.48）式，得到了理想塑性及应变硬化情况下的解。图 1.16(*b*)、(*c*)示出了不同载荷水平下塑性区的扩展。

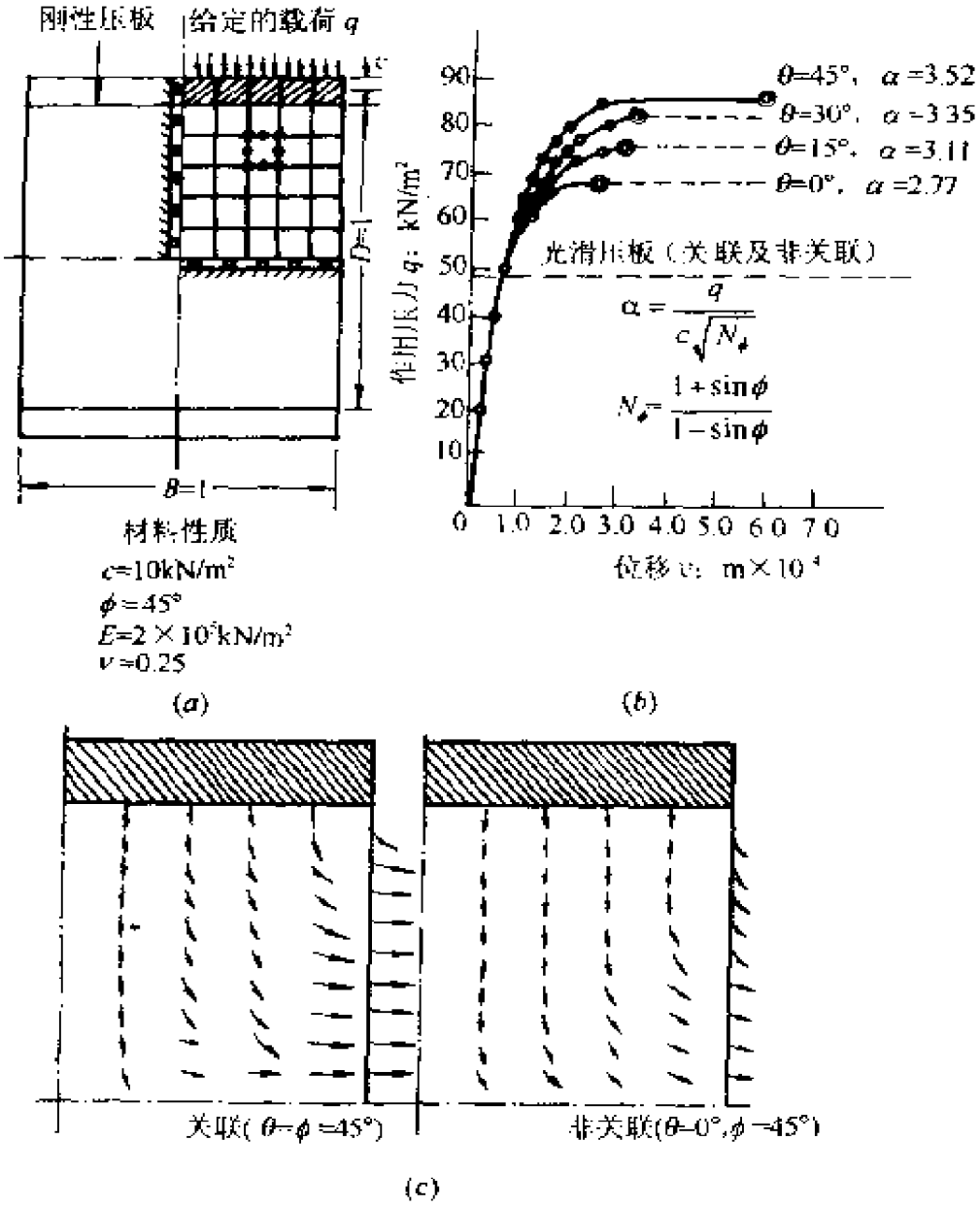


图 1.17　刚性板单轴压缩

1.6.2　刚性板单轴压缩[1]

图 1.17 表示刚性板单轴压缩问题，采用 Mohr-Coulomb 定律

来描述屈服面。为了研究非关联流动法则对计算结果的影响，将摩擦角 $\phi-\theta$ 取不同值的表达式作为塑性势函数。计算结果示于图 1.17(b)和(c)。从中可以看出，θ 不同时，破坏载荷的变化不大，虽然相应的塑性流动形态的差别很明显。

第二章　边界元法

边界元方法首先由英国学者 Bribbia[6] 总结提出，并从 20 世纪 60 年代开始在工程计算中得到了逐步应用。边界元法在处理线弹性问题中显示了巨大的优越性，主要体现在如下三方面：一是计算简单，将问题降维求解；二是计算精度高，应力与位移具有同样的精度；三是可以处理无限域和半无限域的问题。但是它也有缺点，如对变系数、非线性以及时间相关问题较难适应，且它的应用是基于所求解的方程有无基本解，因此，限制了边界元方法在更广泛领域的应用。然而，边界元方法和其他数值方法如有限元法的联合使用，却为解决愈来愈广泛的问题开辟了新的途径。例如，对需要进行非线性分析的区域采用有限元法，对需要进行线性弹性分析或无限域、半无限域的地方采用边界元法，充分发挥各自的优势，使计算效率、计算精度得到提高和改进，这对工程实际应用是很有意义的。目前有限元--边界元耦合法已广泛应用于岩土工程具有无限域、半无限域的问题及流体力学问题中。本章将介绍边界元法的基本概念及有限元与边界元耦合法。

2.1　弹性力学基本方程的张量表示

平衡微分方程[6]

$$\sigma_{ij,j}+b_i=0 \tag{2.1}$$

式中　σ_{ij}——应力张量；

b_i——体积力分量；

$\sigma_{ij,j}=\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$，服从爱因斯坦求和约定。

几何方程

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2.2}$$

式中 ε_{ij} 应变张量；

u_i 位移分量。

本构方程

$$\sigma_{ij}=2G\varepsilon_{ij}+\frac{2G\upsilon}{1-2\upsilon}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ij}-\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\sigma_{kk}\delta_{ij}\right) \tag{2.4}$$

其中

$$G=\frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{2.5}$$

上式中，E 为弹性模量，υ 为泊松比。

(2.3)式还可进一步写成

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.6}$$

其中，C_{ijkl}为四阶张量

$$C_{ijkl}=\frac{2G\upsilon}{1-2\upsilon}\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}) \tag{2.7}$$

用位移分量表示的平衡微分方程，又称 Navier 方程为

$$Gu_{j,kk}+\frac{G}{1-2\upsilon}u_{k,kj}+b_j=0 \tag{2.8}$$

设弹性体的区域为 Ω，边界 $\Gamma=\Gamma_1+\Gamma_2$，其中 Γ_1 为位移边界，Γ_2 为面力边界。边界条件可写成

$$u_i=\bar{u}_i \qquad on \quad \Gamma_1 \tag{2.9}$$

$$\sigma_{ji}n_j=\bar{p}_i \qquad on \quad \Gamma_2 \tag{2.10}$$

其中，$\bar{u}_i$ 为 Γ_1 边界上给定的位移分量，$\bar{p}_i$ 为 Γ_2 边界上给定的面力分量。

2.2 索密哥内那等式

考察由 $\Omega+\Gamma$ 构成的弹性体，如图 2.1，其中 Ω 为内部弹性域，Γ 为边界。弹性体在给定的外力和边界条件下处于平衡状态，相应的物理量为 σ_{ji}、ε_{ji}、u_i、p_i 和 b_i。同时假设另有一包含区域 $\Omega+$

Γ 的区域 $\Omega^*+\Gamma^*$（可以是无限域），如图 2.2，区域 $\Omega^*+\Gamma^*$ 中的物体也处于平衡状态，相应的物理量记为 σ_{ij}^*、ε_{ij}^*、u_i^*、p_i^* 和 b_i^*。

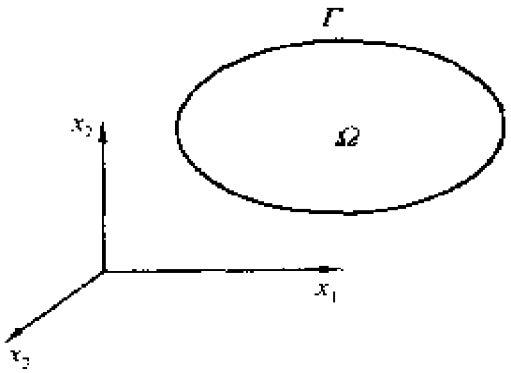


图 2.1　$\Omega+\Gamma$ 区域上的弹性体

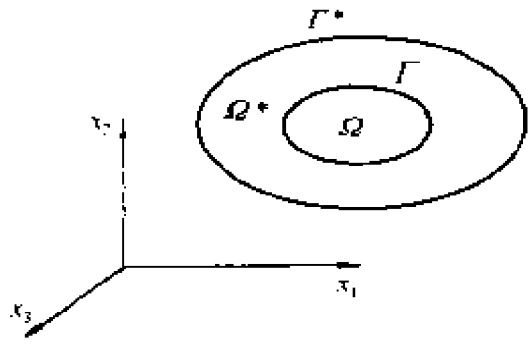


图 2.2　$\Omega^*+\Gamma^*$ 且包含 $\Omega+\Gamma$ 上的弹性体

根据功互等定理，可以得到

$$\int_\Omega \sigma_{jk}\varepsilon_{jk}^* \mathrm{d}\Omega = \int_\Omega \varepsilon_{jk}\sigma_{jk}^* \mathrm{d}\Omega \tag{2.11}$$

对(2.11)式两端分部积分，则有

$$\int_\Omega b_k^* u_k \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma p_k^* u_k \mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega b_k u_k^* \mathrm{d}\Omega + \int_\Gamma p_k u_k^* \mathrm{d}\Gamma \tag{2.12}$$

为进一步简化(2.12)式，设 b_k^* 为对应于域内 Ω^* 中给定点 ξ 处沿任意坐标方向 e_j 施加单位荷载时的体力分量，即

$$b_j^* = \Delta(\xi, x)e_j \tag{2.13}$$

其中，$\Delta(\xi,x)$为 Dirac 函数，$x\in\Omega^*$，为域 Ω^* 内的任一点，e_j 为坐标轴单位矢量。

Dirac 函数具有下列性质

$$\Delta(\xi,x)=\begin{cases}0 & \xi\neq x\\ \infty & \xi=x\end{cases} \tag{2.14}$$

$$\int_\Omega g(x)\Delta(\xi,x)\mathrm{d}\Omega = g(\xi) \tag{2.15}$$

根据上述性质，容易得到(2.12)式第一式为

$$\int_\Omega b_i^* u_i \mathrm{d}\Omega = u_i(\xi)e_i \tag{2.16}$$

若每个点荷载都是独立的，则相应的位移和面力可写成

$$u_j^* = u_{ij}^*(\xi, x)e_i$$
$$p_j^* = p_{ij}^*(\xi, x)e_i \tag{2.17}$$

其中，$u_{ij}^*(\xi, x)$和$p_{ij}^*(\xi, x)$分别表示在ξ点沿e_i方向作用单位荷载引起在x点沿e_i方向的位移和面力。

将(2.16)式和(2.17)式代入(2.12)式中，得到

$$u_i(\xi) = \int_\Gamma u_{ij}^*(\xi, x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma p_{ij}^*(\xi, x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma + \int_\Omega u_{ij}^*(\xi, x)b_j(x)\mathrm{d}\Omega \tag{2.18}$$

(2.18)式即为索密哥内那(Somigliana)等式，$u_{ij}^*(\xi, x)$和$p_{ij}^*(\xi, x)$称为基本解。

2.3 基 本 解

2.3.1 无限域基本解

考察Ω^*为无限域的情况。Γ^*为无限远处的边界，这个问题已由 Kelvin[6]得到了解答，其解为

对三维问题

$$u_{ij}^*(\xi, x) = \frac{1}{16\pi(1-\upsilon)Gr}\{(3-4\upsilon)\delta_{ij} + r_{,i}r_{,j}\} \tag{2.19}$$

对二维平面应变问题

$$u_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{8\pi(1-\upsilon)G}\{(3-4\upsilon)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}\} \tag{2.20}$$

而面力基本解可统一表示成

$$p_{ij}^*(\xi, x) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\upsilon)r^\alpha}\left\{[(1-2\upsilon)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j}]\frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\upsilon)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i)\right\} \tag{2.21}$$

当$\alpha=2$，$\beta=3$时，(2.21)式适用于三维问题；当$\alpha=1$，$\beta=2$时，(2.21)式适用于二维平面应变问题。$r=r(\xi, x)$表示荷载作用点ξ与域内任一点x处的距离。

$$r=(r_ir_i)^{1/2}$$
$$r_i=x_i(x)-x_i(\xi) \tag{2.22}$$
$$r_{,i}=\frac{\partial r}{\partial x_i(x)}=\frac{r_i}{r}$$

由于在 ξ 点沿 e_i 方向施加单位荷载引起任一点 q 处的应变和应力为

$$\varepsilon^*_{jki}(\xi,x)=-\frac{1}{8\alpha\pi(1-\upsilon)Gr^\alpha}\{(1-2\upsilon)(r_{,k}\delta_{ij}+r_{,j}\delta_{ik})-r_{,i}\delta_{jk}+\beta r_{,j}r_{,j}r_{,k}\} \tag{2.23}$$

$$\sigma^*_{jki}(\xi,x)=-\frac{1}{4\alpha\pi(1-\upsilon)r^\alpha}\{(1-2\upsilon)(r_{,k}\delta_{ij}+r_{,j}\delta_{ki}-r_{,i}\delta_{jk})+\beta r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \tag{2.24}$$

若将以上各式中的泊松比 υ 代换成 $\bar{\upsilon}=\frac{\upsilon}{1+\upsilon}$，即可适用于平面应力问题。

2.3.2 半无限域基本解

半无限域基本解可通过叠加原理得到，它可表示成

$$(\quad)^*=(\quad)^k+(\quad)^r \tag{2.25}$$

其中 $(\quad)^k$ 表示由(2.19)～(2.24)各式给出的无限域基本解，$(\quad)^r$ 表示附加项，具体表达式可参见文献[6]中的附录B。

2.4 域内应力

(2.18)式表示域内任一点 $\xi\in\Omega$ 处的位移分量 $u_i(\xi)$，它是 ξ 的连续函数。将(2.18)式对 ξ 求偏导数，可得到应变张量，再代入本构方程，即求得应力

$$\sigma_{ij}(\xi)=\int_\Gamma u^*_{ijk}(\xi,x)p_k(x)\mathrm{d}\Gamma(x)-\int_\Gamma p^*_{ijk}(\xi,x)u_k(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+\int_\Omega u^*_{ijk}(\xi,x)b_k(x)\mathrm{d}\Omega(x) \tag{2.26}$$

对无限域问题

$$u^*_{ijk}\to\quad\sigma^*_{ijk} \tag{2.27}$$

$$p^*_{ijk}=\frac{G}{2\alpha\pi(1-\upsilon)r^{\alpha}}\left\{\beta\frac{\partial r}{\partial n}[(1-2\upsilon)\delta_{ij}r_{,k}+\upsilon(\delta_{ik}r_{,j}+\delta_{jk}r_{,i})-\gamma r_{,i}r_{,j}r_{,k}]+\beta\upsilon(n_ir_{,j}r_{,k}+n_jr_{,i}r_{,k})+(1-2\upsilon)(\beta n_kr_{,i}r_{,j}+n_i\delta_{jk}+n_j\delta_{ik})-(1-4\upsilon)n_k\delta_{ij}\right\} \tag{2.28}$$

其中，当 $\alpha=2,1;\beta=3,2;\gamma=5,4$ 分别适用三维问题和二维问题。

注意有下列关系

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(\xi)}=-r_{,i}=-\frac{\partial r}{\partial x_i(x)} \tag{2.29}$$

对半无限域问题，需要求出相应于附加项( )* 的 u^*_{ijk} 和 p^*_{ijk}，文献[8]给出了结果。

2.5 边界积分方程

从(2.18)式可知，除非已知边界 Γ 上的位移分量和面力分量，否则无法用 Somigliana 等式求得问题的解答。因此，研究(2.18)式当 ξ 趋于边界时的情形是必需的。考察图 2.3 所示的情况，运用(2.18)式，得到

$$u_i(\xi)=\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon}u^*_{ij}(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)-\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+\int_{\Omega'}u^*_{ij}(\xi,x)b_j(x)\mathrm{d}\Omega(x) \tag{2.30}$$

其中，上式右端第二项积分的极限形式为

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\bar{\Gamma}_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma'-\Gamma_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{2.31}$$

而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon}p^*_{ij}(\xi,x)[u_j(x)-u_j(\xi)]\mathrm{d}\Gamma(x)$$

$$\mp \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{u_j(\xi)\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)\mathrm{d}\Gamma(x)\right\} \tag{2.32}$$

(2.32)式右端第一项随 $\varepsilon\to 0$ 而趋于零，第二项与(2.30)式左端的 $u_j(\xi)$ 合并到一起有

$$c_{ij}(\xi)=\left\{\delta_{ij}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\bar{\Gamma}_\varepsilon} p_{ij}^*(\xi,x)\mathrm{d}\Gamma(x)\right\} \tag{2.33}$$

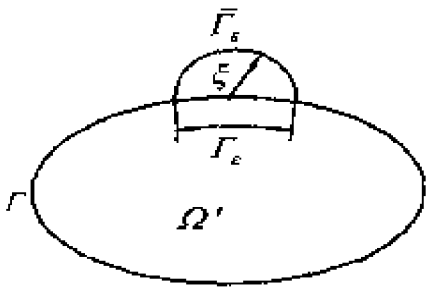


图 2.3 边界上的奇点 ξ

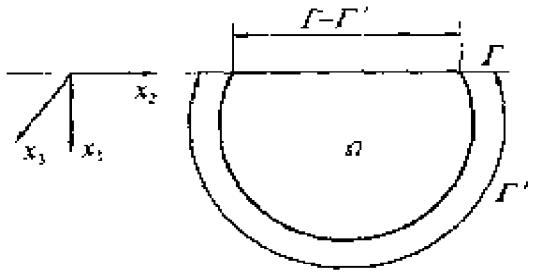


图 2.4 边界与半无限域平面重合的物体

(2.31)式右端第二项在柯西主值意义下存在。(2.30)式中的其余项不含有特殊的奇异性，可与普通意义下的积分同等看待。因此，当 $\varepsilon\to 0$，得到下列方程

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_\Gamma p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)$$
$$=\int_\Gamma u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+\int_\Omega u_{ij}^*(\xi,x)b_i(x)\mathrm{d}\Omega(x) \tag{2.34}$$

其中的 u_{ij}^*、p_{ij}^* 为无限域基本解，(2.34)式既适用二维问题也适合三维问题。当体积力已知且边界条件给定时，(2.34)式是关于边界未知量的边界积分方程，通过将边界离散化，可以建立数值求解方程。

系数 $c_{ij}(\xi)$ 由(2.33)式给出，如果边界切平面在 ξ 点是连续的，则 $c_{ij}(\xi)=\frac{1}{2}\delta_{ij}$，否则要按公式计算。在实际应用中，是运用(2.34)式考虑物体的刚体运动间接求得系数 c_{ij} 和相应的主值。

边界与半无限域平面重合的情况，见图 2.4。与(2.34)式相应

的边界积分方程是

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_{\Gamma'}p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)$$

$$=\int_{\Gamma}u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+\int_{\Omega}u_{ij}^*(\xi,x)b_j(x)\mathrm{d}\Omega(x) \qquad (2.35)$$

其中 u_{ij}^*、p_{ij}^* 为半无限域基本解，当荷载作用于边界 Γ' 上时，系数 c_{ij} 的计算与(2.34)式 c_{ij} 的计算相同；当荷载作用于边界 Γ Γ' 上时，$c_{ij}=\delta_{ij}$。

域中任一点 ξ 处的应力可通过将位移分量求导数的办法得到，与(2.26)式相似的公式有

$$\sigma_{ij}(\xi)=\int_{\Gamma}u_{ijk}^*(\xi,x)p_k(x)\mathrm{d}\Gamma(x)-\int_{\Gamma}p_{ijk}^*(\xi,x)u_k(x)\mathrm{d}\Gamma(x)+$$

$$\int_{\Omega}u_{ijk}^*(\xi,x)b_k(x)\mathrm{d}\Omega(x) \qquad (2.36)$$

以上各式中的体积力项可采用两种处理办法：一是将体积力的作用当作初应力看待，将其解叠加到边界元的解中得到问题最后的解答；二是将体积力项的域内积分化成边界积分，这点在2.10中要专门介绍。

对于无限域中的孔洞问题，如图2.5，在满足正则条件[7]且不计体积力情况下的边界积分方程为

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi)+\int_{\Gamma}p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x)=\int_{\Gamma}u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) \qquad (2.37)$$

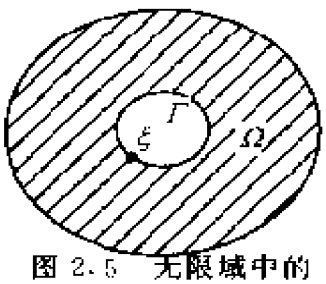


图2.5 无限域中的孔洞问题

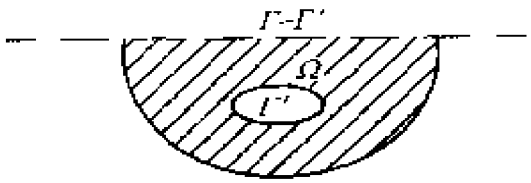
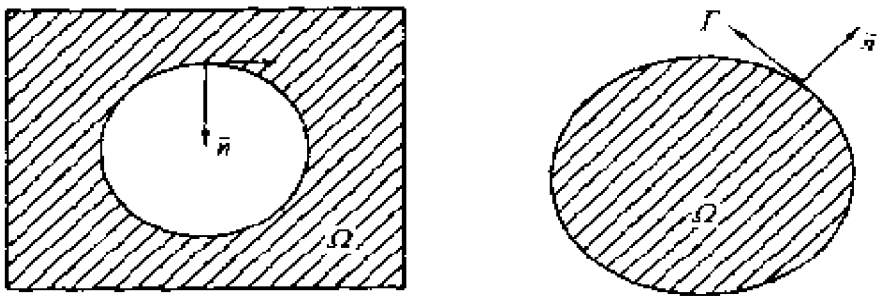


图2.6 半无限域中的孔洞问题

半无限域中孔洞问题的边界积分方程为(图2.6)

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{2.38}$$

(2.37)式与(2.34)式、(2.38)式与(2.35)式在形式上相同，所不同之处仅在确定外法线 $\vec{n}$ 的方向上，对于外域问题，$\vec{n}$ 的指向朝内，对于内域问题，$\vec{n}$ 的指向朝外，见图 2.7。



(a) 外域问题　　(b) 内域问题

图 2.7　外法线的方向

2.6 数 值 方 法

上一节介绍的各种情况下的边界积分方程可以统一写成

$$c_{ij}(\xi)u_j(\xi) + \int_{\Gamma} p_{ij}^*(\xi,x)u_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi,x)p_j(x)\mathrm{d}\Gamma(x) \tag{2.39}$$

对不同问题，应采用不同的基本解，例如无限域基本解或半无限域基本解，系数 c_{ij} 也有不同的取值。另外，对半无限域问题，(2.39)式左端第二项积分边界应为 Γ'。

只有对于非常简单的问题，才能得到(2.39)式的解析解。一般情况下，是采用数值方法求得数值解。求解(2.39)式数值解的步骤包括：

(a)将边界离散成一系列的单元，单元中任一点的位移和面力通过插值函数用单元结点位移和面力表示；

(b)把(2.39)式表示成离散形式，其中的积分采用数值积分方法；

(c)建立包含 N 个结点位移和 N 个结点面力的 N 阶线性代

数方程组；

(d)引入位移或面力边界条件，通常有 N 个边界值是已知的。解线性代数方程组得到其余的边界未知量。域内任一点的位移和应力由离散形式的(2.18)式和(2.26)式或(2.36)式求得。

为了将(2.39)式表示成离散形式，将边界 Γ 划分成有限个单元，单元 Γ_j 中任一点的坐标 x 通过插值函数 ψ 可用单元结点坐标表示成

$$x=\psi^{\mathrm{T}}x_m \tag{2.40}$$

其中在三维问题中，$x=\{x_1 \quad x_2 \quad x_3\}^{\mathrm{T}}$。

用同样的办法，单元中任一点的位移和面力也可通过插值函数用单元结点位移和面力表示成

$$\begin{aligned} u&=\phi^{\mathrm{T}}u_n \\ p&=\phi^{\mathrm{T}}p_n \end{aligned} \tag{2.41}$$

其中，u_n 和 p_n 分别表示单元结点位移和单元结点面力，$u=\{u_1 \quad u_2 \quad u_3\}^{\mathrm{T}}$，$p=\{p_1 \quad p_2 \quad p_3\}^{\mathrm{T}}$。(2.40)式中的角标 m 指用 m 个结点定义单元几何，(2.41)式中的角标 n 指用 n 个结点定义单元的位移和面力。m 可以不等于 n，但为了满足刚体位移条件，要求 $m\leqslant n$。

令

$$u^*=\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix},\quad p^*=\begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

则(2.39)式用矩阵的形式可表示为

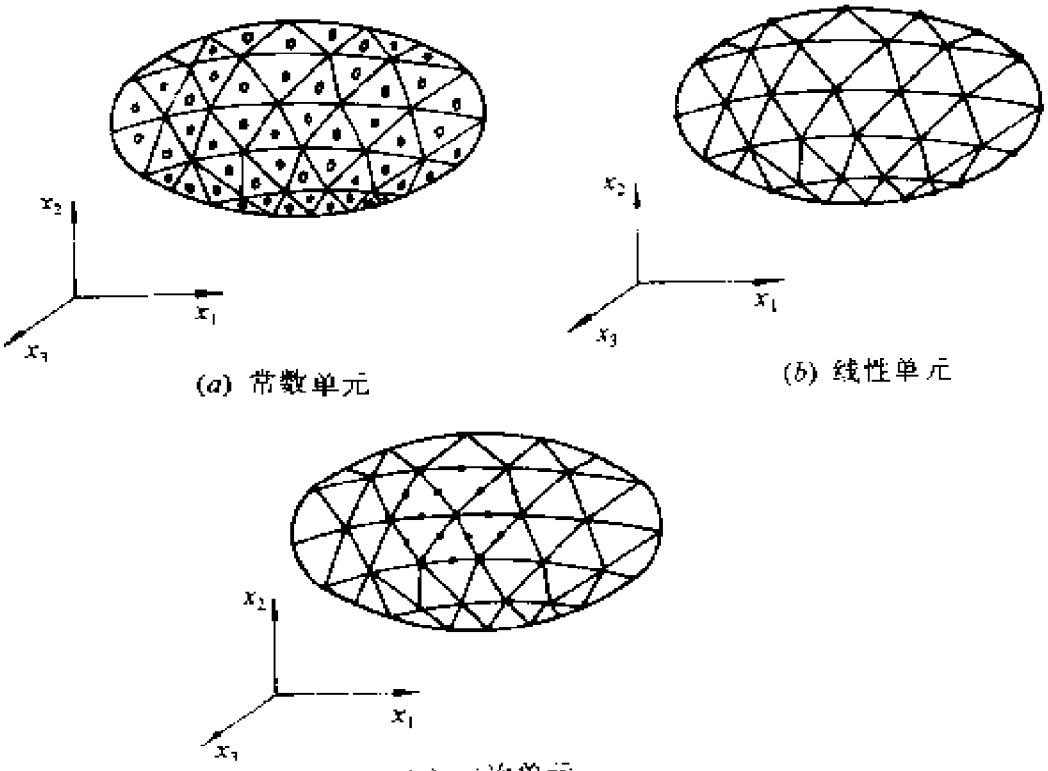
$$cu+\int_\Gamma p^*u\mathrm{d}\Gamma=\int_\Gamma u^*p\mathrm{d}\Gamma \tag{2.43}$$

在(2.43)式中，u^*、p^* 是已知的，c 可通过刚体位移求得，未知量为边界位移 u 和边界面力 p。

2.7 边界单元

根据所采用单元的类型，边界单元可分为常数单元、线性单

元、二次单元和高阶单元。三维问题分为三角形常数元、线性元和二次元，分别见图 2.8(*a*)、(*b*)和(*c*)。



(*a*) 常数单元　　(*b*) 线性单元

(*c*) 二次单元

图 2.8　三维问题边界单元

将边界划分成 N 个单元，单元 Γ_j 中的位移和面力可由(2.41)式用单元结点位移和单元结点面力表示，将(2.41)式代入(2.43)式中，得到

$$\boldsymbol{cu}+\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{p}^{*}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Gamma\right)\boldsymbol{u}_n=\sum_{j=1}^{N}\left(\int_{\Gamma_j}\boldsymbol{u}^{*}\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Gamma\right)\boldsymbol{p}_n \qquad (2.44)$$

式中　Γ_j——第 j 个边界单元。

(2.44)式中的积分通常采用数值积分方法，为此引入坐标 η_1、η_2。直角坐标与自然坐标中微元间的关系如下

$$\mathrm{d}\Gamma=|J|\mathrm{d}\eta_1\mathrm{d}\eta_2 \qquad (2.45)$$

其中 $|J|$ 为 Jacobian 行列式。将(2.45)式代入(2.44)式中，并用数值积分法，则(2.44)式成为

$$cu + \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{l=1}^{L}|J|_l w_l (p^* N^{\mathrm{T}})u_n = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{L}|J|_l w_l (u^* \Phi^{\mathrm{T}})p_n\right. \tag{2.46}$$

式中 L—— 数值积分点总数；

w_l ——加权系数。

对任一结点 i，(2.46)式给出如下方程

$$c_i u_i + \begin{bmatrix}\hat{h}_{i1} & \hat{h}_{i2} & \cdots & \hat{h}_{ii} & \cdots & \hat{h}_{ir}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_i\\\vdots\\u_r\end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix}g_{i1} & g_{i2} & \cdots & g_{ii} & \cdots & g_{ir}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}p_1\\p_2\\\vdots\\p_i\\\vdots\\p_r\end{Bmatrix} \tag{2.47}$$

其中，u_j 和 p_j 为结点 j 的未知量，$\hat{h}_{ij}$和 g_{ij}为结点 i 与边界结点 j 的系数矩阵，对于二维问题，它们是 2×2 阶子矩阵，对三维问题，它们是 3×3 阶子矩阵。

对每一结点都可写出如(2.47)式的方程，集合所有结点，则有

$$\begin{bmatrix}h_{11} & \hat{h}_{12} & \cdots & \hat{h}_{1i} & \cdots & \hat{h}_{1r}\\\hat{h}_{21} & h_{22} & \cdots & \hat{h}_{2i} & \cdots & \hat{h}_{2r}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\hat{h}_{i1} & \hat{h}_{i2} & \cdots & h_{ii} & \cdots & \hat{h}_{ir}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\hat{h}_{r1} & \hat{h}_{r2} & \cdots & \hat{h}_{ri} & \cdots & h_{rr}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_i\\\vdots\\u_r\end{Bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1i} & \cdots & g_{1r} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2i} & \cdots & g_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{i1} & g_{i2} & \cdots & g_{ii} & \cdots & g_{ir} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{r1} & g_{r2} & \cdots & g_{ri} & \cdots & g_{rr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_r \end{Bmatrix} \tag{2.48}$$

其中主对角线上的子矩阵 h_{ii} 为

$$h_{ii} = \hat{h}_{ii} + c_i \tag{2.49}$$

方程(2.48)式可进一步写成

$$HU = GP \tag{2.50}$$

引入边界条件即可求解上式。通常有两类边界条件

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i \qquad on \quad \Gamma_1 \\ p_i &= \bar{p}_i \qquad on \quad \Gamma_2 \end{aligned} \tag{2.51}$$

将(2.50)式中的已知位移和已知面力移到等式右端，未知量移到左端，最后可得

$$AY = F \tag{2.52}$$

现在剩下要解决的问题就是如何计算(2.49)式中的系数 c_i。假设沿任一方向给物体一刚体位移，(2.50)式则成为

$$HI_j = 0 \tag{2.53}$$

其中 I_j 为系统沿 j 方向发生单位位移向量，它对应的是无面力状态。因此有

$$h_{ii} = -\sum_{i \neq j} \hat{h}_{ij} \tag{2.54}$$

上式说明，在实际计算时，不需要单独计算 c_i 和 $\hat{h}_{ii}$。

求解(2.52)式，就可得到整个物体边界位移和面力，进而可求出物体内任一点的位移和应力。

(2.54)式适用于有限域的物体问题，对于无限域和半无限域问题，应运用下列公式计算

$$h_{ii} = I - \sum_{(i)} h_{ij} \tag{2.55}$$

其中 I 为单位矩阵。

2.8 边界应力

在实际应用中，设计师更关心边界应力。这可由计算域内应力公式(2.26)式和(2.36)式取 ξ 趋近边界的极限得到。但这样做的结果将产生奇异积分，只有在 Cauchy 主值意义下才能得到解答。另一种有效的方法是在边界切平面上建立局部坐标系，根据求得的位移分量利用几何方程求得应变分量，最后通过物理方程得到应力分量。这种方法不需要任何积分，现以三维问题为例介绍如下。

在边界欲求应力点建立局部坐标系，如图 2.9 所示，在局部坐标系中，单元内任一点的位移也可用单元结点位移表示成

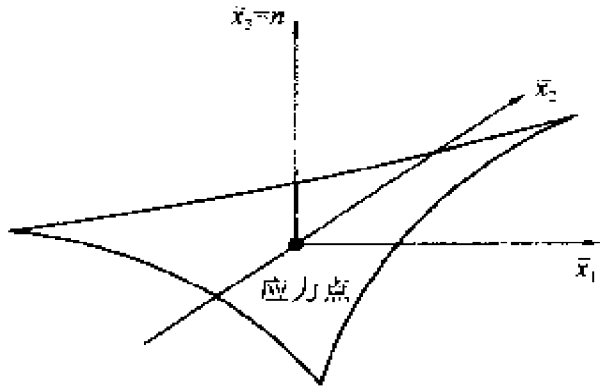


图 2.9 边界应力点局部坐标

$$\bar{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}} \bar{\boldsymbol{u}}_n \tag{2.56}$$

由此可得应变分量

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j}\right) \quad (i,j=1,2) \tag{2.57}$$

根据物理方程，最后得到应力分量如下：

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\upsilon}[\upsilon\bar{\sigma}_{33}+2G(\bar{\varepsilon}_{11}+\upsilon\bar{\varepsilon}_{22})]\\
\bar{\sigma}_{12} &= 2G\bar{\varepsilon}_{12}\\
\bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\upsilon}[\upsilon\bar{\sigma}_{33}+2G(\bar{\varepsilon}_{22}+\upsilon\bar{\varepsilon}_{11})]\\
\bar{\sigma}_{13} &= \bar{p}_1\\
\bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\\
\bar{\sigma}_{23} &= \bar{p}_2
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

对二维平面应变问题，有

$$
\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\upsilon}(\upsilon\bar{\sigma}_{22}+2G\bar{\varepsilon}_{11})\\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1\\
\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

其中

$$
\bar{\varepsilon}_{1k}=\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial x_1}
$$

2.9 二维问题

对二维线弹性问题，令

$$
\boldsymbol{p}^*=\begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix}
\qquad
\boldsymbol{u}^*=\begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix}
\tag{2.60}
$$

位移、面力和体力向量分别记为

$$
\boldsymbol{u}=\{u_1 \quad u_2\}^{\mathrm{T}}
\qquad
\boldsymbol{p}=\{p_1 \quad p_2\}^{\mathrm{T}}
\qquad
\boldsymbol{b}=\{b_1 \quad b_2\}^{\mathrm{T}}
\tag{2.61}
$$

边界积分方程为

$$
\boldsymbol{c}\boldsymbol{u}+\int_\Gamma \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma=\int_\Gamma \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{p}\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega
\tag{2.62}
$$

域内任一点的位移和应力可由以下两式求得

$$
\boldsymbol{u}=\int_\Gamma \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{p}\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{u}\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega \boldsymbol{u}^*\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega
\tag{2.63}
$$

$$
\sigma_{ij}=\int_\Gamma u_{ik,k}^* p_k\mathrm{d}\Gamma-\int_\Gamma p_{ik,k}^* u_k\mathrm{d}\Gamma+\int_\Omega u_{ik,k}^* b_k\mathrm{d}\Omega
\tag{2.64}
$$

其中 u_{ij}^* 和 p_{ij}^* 见(2.27)式和(2.28)式。

考察线性单元。如图 2.10，插值函数

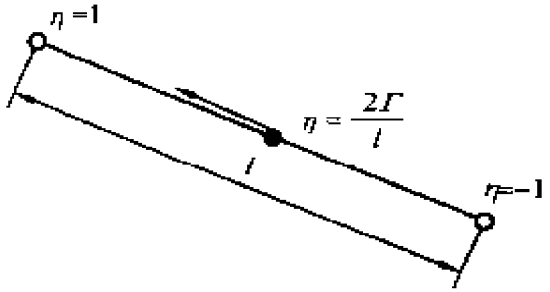


图 2.10 线性单元及自然坐标

$$\varphi_1=\frac{1}{2}(1-\eta),\varphi_2=\frac{1}{2}(1+\eta) \tag{2.65}$$

在自然坐标系中，Jocobian 行列式

$$|J|=\frac{l}{2} \tag{2.66}$$

式中 l——线性单元的长度。

离散化后的边界积分方程仍为

$$\boldsymbol{HU}=\boldsymbol{GP} \tag{2.67}$$

(2.67)式中矩阵 $\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 中的子矩阵为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}&=\left[\hat{\boldsymbol{h}}_{ij}^1 \quad \hat{\boldsymbol{h}}_{ij}^2\right]=\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}\left[\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{p}^* \quad \boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{p}^*\right]\mathrm{d}\eta\\ \boldsymbol{g}&=\left[\hat{\boldsymbol{g}}_{ij}^1 \quad \hat{\boldsymbol{g}}_{ij}^2\right]=\frac{l}{2}\int_{-1}^{1}\left[\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{u}^* \quad \boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{u}^*\right]\mathrm{d}\eta\end{aligned} \tag{2.68}$$

接下去的步骤与 2.7 中的完全相同。

2.10 体积力项的处理

以上各节介绍的边界积分方程、域内计算位移和应力的公式都含有对体积力的域内积分项。在边界元法中，我们仅对物体边界离散，因此在计算含域内积分项时必须采用其他办法。比较有效的方法是将域内积分转化为边界积分。

为讨论方便起见，将(2.34)式中的体积力项单独拿出来研究，并记

$$B_i = \int_\Omega u_{ij}^* b_j \mathrm{d}\Omega \tag{2.69}$$

引入 Galerkin 张量 G_{ij}^*，可将 u_{ij}^* 表示成[6]

$$u_{ij}^* = G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\upsilon)} G_{ik,kj}^* \tag{2.70}$$

对无限域问题

$$G_{ij}^* = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi G} r\delta_{ij} & \text{（三维问题）} \\ \dfrac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\dfrac{1}{r}\right)\delta_{ij} & \text{（二维平面应变问题）} \end{cases} \tag{2.71}$$

容易验证，对于三维问题，将 G_{ij}^* 代入(2.70)式则精确得到(2.19)式，但对二维平面应变问题，由(2.70)式得到的是

$$u_{ij}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\upsilon)G}\left\{(3-4\upsilon)\ln(r)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j} + \left(\frac{7-8\upsilon}{2}\right)\delta_{ij}\right\} \tag{2.72}$$

比较(2.20)式，发现(2.72)式与(2.20)式相差一常数项，但这并不是重要的问题，从物理意义上理解，常数项对应于刚体位移。因此我们在考虑含体积力作用的二维问题时，应将(2.72)式取代(2.20)式作为基本解。

将(2.70)式代入(2.69)式，得到

$$B_i = \int_\Omega \left(G_{ij,kk}^* - \frac{1}{2(1-\upsilon)} G_{ik,kj}^*\right) b_j \mathrm{d}\Omega \tag{2.73}$$

作为应用的例子，考虑质量密度为常数 ρ 的重力情况，这时

$$b_j = \rho g_j \tag{2.74}$$

把(2.74)式代入(2.73)式，得到

$$B_i = b_j \int_\Gamma \left\{G_{ij,k}^* - \frac{1}{2(1-\upsilon)} G_{ik,j}^*\right\} n_k \mathrm{d}\Gamma \tag{2.75}$$

再将(2.71)式代入(2.75)式，并记

$$B_i = \int_\Gamma \hat{p}_i \mathrm{d}\Gamma \tag{2.76}$$

其中

$$p_i^* = \begin{cases} \dfrac{1}{8\pi(1-\upsilon)r^2}\left\{b_k n_k r_{,i} - \dfrac{1}{2(1-\upsilon)}(b_i r_{,k} n_k + b_k r_{,i} n_k)\right\} & \text{(三维问题)} \\ \dfrac{r}{8\pi(1-\upsilon)}\left\{\left[2\ln\left(\dfrac{1}{r}\right)-1\right](b_k n_k r_{,i} - \dfrac{1}{2(1-\upsilon)}(b_i r_{,k} n_k + b_k r_{,i} n_k)\right\} & \text{(二维平面应变)} \end{cases} \tag{2.77}$$

同理，可将域内任一点应力表示成

$$\sigma_{ij} = \int_\Gamma u_{ik}^* p_k \mathrm{d}\Gamma - \int_\Gamma p_{ijk}^* u_k \mathrm{d}\Gamma + \int_\Gamma s_{ij}^* \mathrm{d}\Gamma \tag{2.78}$$

其中，对三维问题

$$s_{ij}^* = \frac{1}{8\pi r^2}\left[n_m r_{,m}(b_i r_{,j} + b_j r_{,i}) + \frac{1}{1-\upsilon}\left\{\upsilon\delta_{ij}(n_m r_{,m} b_s r_{,s} - b_m n_m) - \frac{1}{2}(b_m r_{,m}[n_i r_{,j} + n_j r_{,i}] + [1-2\upsilon][b_i n_j + b_j n_i])\right\}\right] \tag{2.79}$$

对二维平面应变问题

$$s_{ij}^* = \frac{1}{8\pi}\left[2n_m r_{,m}(b_i r_{,j} + b_j r_{,i}) + \frac{1}{1-\upsilon}\left\{\upsilon\delta_{ij}(2n_m r_{,m} b_s r_{,s} + [1-2\ln\left(\frac{1}{r}\right)]b_m n_m) - b_m r_{,m}(n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) + \frac{1-2\upsilon}{2}(1-2\ln\left(\frac{1}{r}\right))(b_i n_j + b_j n_i)\right\}\right] \tag{2.80}$$

2.11 有限元与边界元耦合法

在工程中，有大量涉及无限域或半无限域的应力分析问题，象坝基、隧道、地下工程结构都属于这类问题。这类问题有一个共同特点，就是计算工作量大，如用有限元法来进行计算，则需要划分足够多的单元才能近似无限域或半无限域边界，这将是很不经济的。因此，最近出现的用有限元法和边界元法来分析和计算工程中的问题已越来越受到人们的重视。这是因为有限元法在处理非线性问题上已趋于成熟，且已经有了一系列的应用软件。而边界元法在处理非线性问题方面尚处于研究和发展阶段。迄今为止，尽管已经提出了许多求解的方法，但计算结果和计算效率还不能令人满意，计算程序也比较复杂。而边界元法在处理线弹性问题中却显示

出了巨大的优越性，主要体现在三方面：一是计算简单，将问题降维求解；二是计算精度高，应力与位移具有同样的精度；三是可以处理无限域或半无限域边界。联合使用有限元与边界元两种数值方法，即对于需要进行非线性分析的区域采用有限元法，对需要进行线弹性分析或具有无限域或半无限域边界的区域采用边界元法，充分发挥各自的长处，从而使计算效率、计算精度得到提高和改善，这点对工程实际应用是很有意义的。

有限元与边界元耦合有两种耦合格式[9]，一是将边界元耦合于有限元，二是将有限元耦合于边界元。下面分别给予介绍。

2.11.1 边界元耦合于有限元方法

不失一般性，将整个区域分为二个子域，其中子域 Ω_1 采用有限元方法，另一个子域 Ω_2 采用边界元方法，如图 2.11。

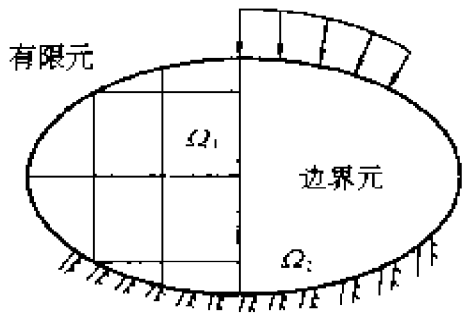


图 2.11 有限元边界元耦合

边界元耦合于有限元的一般做法是将边界元区域看成一个超有限元，形成一个该超单元的单元刚度后集成到整个结构的有限元方程中去。为了减少总体方程的自由度数和带宽，这里将边界元区域看成一个子域，形成仅对界面自由度的方程集成到整域有限元总体方程中去。

对边界元区域 Ω_2，边界量可分为界面位移 $\boldsymbol{U}_I$ 和面力 $\boldsymbol{t}_I$，非界面位移 $\boldsymbol{U}_n$ 和面力 $\boldsymbol{t}_n$。将边界积分方程写成分块形式

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{11} & \boldsymbol{H}_{12}\\ \boldsymbol{H}_{21} & \boldsymbol{H}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_n\\ \boldsymbol{U}_I\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_{11} & \boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{G}_{21} & \boldsymbol{G}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{t}_n\\ \boldsymbol{t}_I\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\boldsymbol{b}_n\\ \boldsymbol{b}_I\end{Bmatrix} \tag{2.81}$$

其中，$\boldsymbol{b}_I$、$\boldsymbol{b}_n$ 分别为与界面量和非界面量相对应的体积力项。

从(2.81)式中消去 $\boldsymbol{U}_n$，得到仅含界面的边界元方程为

$$\boldsymbol{H}\boldsymbol{U}_I=\boldsymbol{G}\boldsymbol{t}_I+\boldsymbol{B} \tag{2.82}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\boldsymbol{H}_{22}-\boldsymbol{H}_{21}\boldsymbol{H}_{11}^{-1}\boldsymbol{H}_{12}\\ \boldsymbol{G}&=\boldsymbol{G}_{22}-\boldsymbol{H}_{21}\boldsymbol{H}_{11}^{-1}\boldsymbol{G}_{12}\\ \boldsymbol{B}&=(\boldsymbol{G}_{21}-\boldsymbol{H}_{21}\boldsymbol{H}_{11}^{-1}\boldsymbol{G}_{11})\boldsymbol{t}_n+\boldsymbol{b}_I-\boldsymbol{H}_{21}\boldsymbol{H}_{11}^{-1}\boldsymbol{b}_n\end{aligned} \tag{2.83}$$

用矩阵 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}^{-1}$ 左乘(2.82)式两端，并令

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K}'&=\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{F}'&=\boldsymbol{M}\boldsymbol{t}_I\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\boldsymbol{Q}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{B}$$

上式中 $\boldsymbol{M}=\int_{\Gamma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}\mathrm{d}\Gamma$；

$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{\Phi}$——分别为位移和面力插值函数矩阵。

由此我们得到

$$\boldsymbol{K}'\boldsymbol{U}_I=\boldsymbol{F}'+\boldsymbol{Q}' \tag{2.85}$$

利用界面上的力和位移的相容条件，可将(2.85)式集合到有限元总体方程中。

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}'$ 是非对称的，从而会引起整个结构总刚度矩阵的非对称性。为了克服这种缺陷，工程实际计算中常采用如下对称的刚度矩阵

$$\boldsymbol{K}^S=\frac{1}{2}(\boldsymbol{K}'+\boldsymbol{K}'^{T}) \tag{2.86}$$

作为一种简化。

2.11.2 有限元耦合于边界元方法

这种方法是从有限元方程出发，通过凝聚非界面自由度而形成的界面面力与位移的关系式作为边界元区域的自然边界条件，从而达到将有限元耦合于边界元的目的。

将有限元方程中的位移分为界面位移 $\boldsymbol{U}_I$ 和非界面位移 $\boldsymbol{U}_n$，写成分块形式则有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_n \\ \boldsymbol{U}_I \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 \end{Bmatrix} \tag{2.87}$$

式中 $\boldsymbol{F}_1$——除界面结点外 Ω_1 域内由外部荷载产生的等效结点力；

$\boldsymbol{F}_2$——界面结点内力；

$\boldsymbol{F}_3$——界面结点由外荷载产生的等效结点力。

从(2.87)式中消去 $\boldsymbol{U}_n$，得到

$$\boldsymbol{F}_2 = \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{F}_1 + (\boldsymbol{K}_{22} - \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{K}_{12})\boldsymbol{U}_I - \boldsymbol{F}_3 \tag{2.88}$$

对有限元区域，在交界面上可以由静力等效原理建立面力与位移的关系，考虑到边界元区域上的面力 $\boldsymbol{t}_I$ 与有限元区域上的面力相差一负号，则有

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{M}\boldsymbol{t}_I \tag{2.89}$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 与(2.84)式中的定义相同。

将(2.88)式代入(2.89)中，得到

$$\boldsymbol{t}_I = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}_I + \boldsymbol{t}^* \tag{2.90}$$

其中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{K}_{12} - \boldsymbol{K}_{22}) \\ \boldsymbol{t}^* &= \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{F}_3 - \boldsymbol{K}_{21}\boldsymbol{K}_{11}^{-1}\boldsymbol{F}_1) \end{aligned} \tag{2.91}$$

(2.90)式即可作为边界元区域上的自然边界条件引入边界积分方程。

2.12 算　　例

2.12.1 半无限域地基刚性块体冲压问题[6]

考虑半无限域地基刚性块体冲压问题，如图 2.12 所示。设刚性块体是完全光滑接触。运用边界元分析时，只需对接触边界进行离散。利用对称性，将二分之一接触边界划分成 12 个线性边界元。

接触边界上的接触应力分布及其与解析解的比较见图 2.12，可见数值计算结果与解析解十分吻合。除计算边界应力外，还选择了域内 4 个点计算应力并与解析解进行比较，结果见表 2.1。

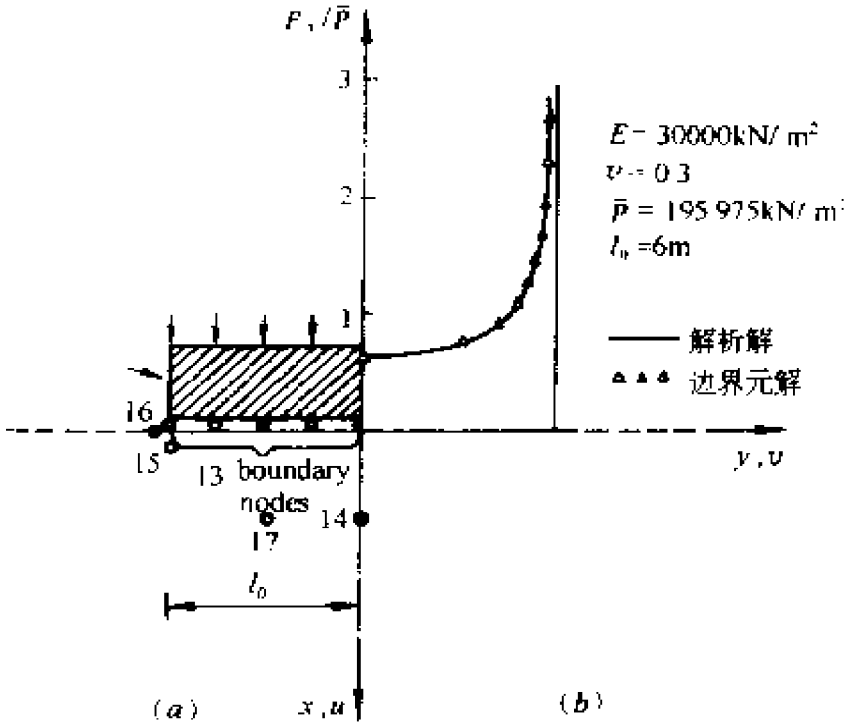


图 2.12　半无限域地基刚性块体冲压问题

表 2.1　边界元法与解析法结果比较(kN/m²)

方　法	结点号	σ_x	σ_y	τ_{xy}
边界元法	14	−133.92	−89.28	0
	15	−330.64	−113.16	107.93
	16	0	0.0	0.0
	17	−151.87	−77.69	−3.14
解析法	14	−133.91	−89.27	0.0
	15	−326.47	−114.43	110.50
	16	0.0	0.0	0.0
	17	−152.00	−77.67	−3.35

2.12.2　无限域中隧道开挖问题[10]

考察无限域中隧道开挖问题，如图 2.13 所示，隧道长 26m，隧道的直径为 12m，$E=490$MPa，$\upsilon=0.32$，$\rho=15.68$kN/m³，$C=0.235$MPa，$\varphi=20°$，初应力场 $\sigma_x^0=\sigma_y^0=\sigma_z^0=-0.6$MPa，$\tau_{xy}^0=\tau_{yz}^0=\tau_{zx}^0=0$。采用临界状态模型来模拟结构的非线性行为。用有限元与边界元耦合法，内部弹塑性区采用有限元，外场无限域采用边界

元。荷载从0.3MPa逐渐加载到0.6MPa，隧道的径向位移和应力分布分别见图2.14和图2.15。

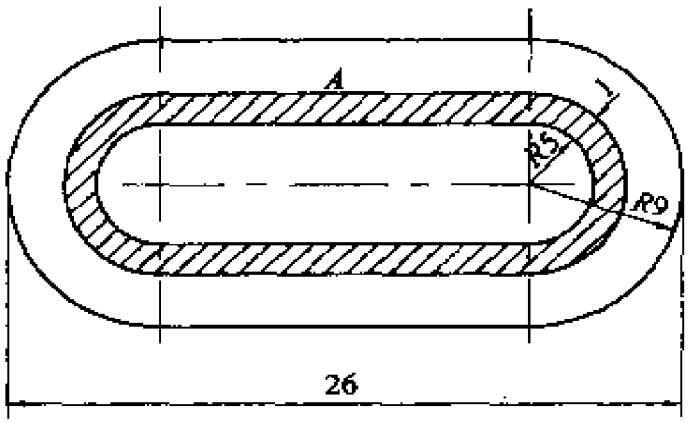


图2.13 无限域中隧道开挖问题

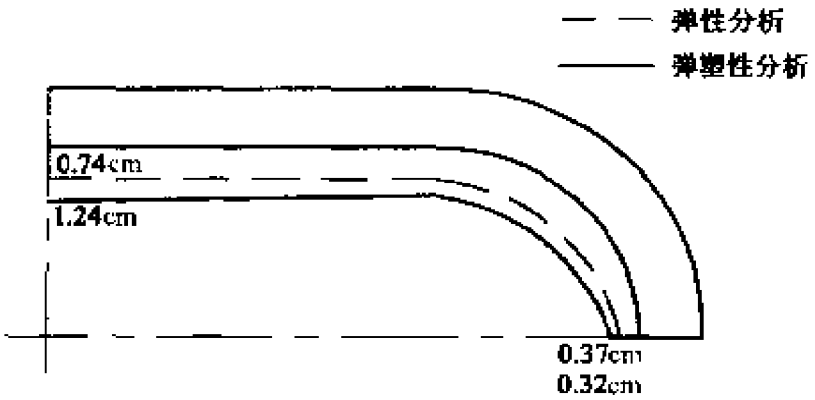


图2.14 隧道径向位移分布

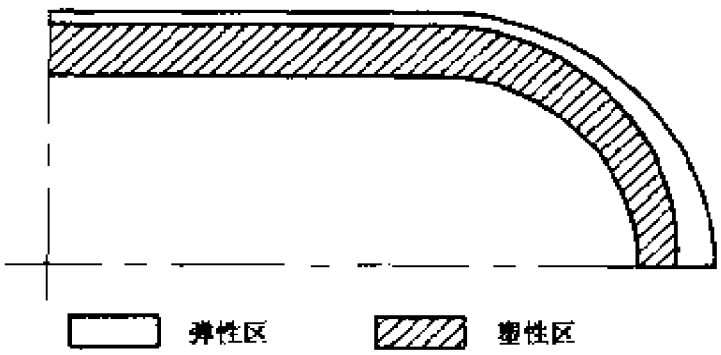


图2.15 隧道径向应力分布

第三章　离散元法—刚体模型

3.1 引　　言

连续性假设作为许多岩石材料包括土、岩石、冰理想化的基础被广泛应用。有限元法、有限差分法和边界元法这些有力的数值技术就是建立在连续性假设的基础上，事实证明这些数值方法对地质工程师来说是极其成功的工具。然而，在许多不能假设连续性的场合，尤其是在岩石力学中，则必须采用其他的求解方法。

本章后面的内容就是介绍被称之为离散元法的基本思想。在60年代这个名称最初是用于有限元法，用在这里主要是指处理物体间具有不连续性问题的数值方法，重点是求解多个物体间的接触和冲击问题。在岩石力学中，有各种各样的离散元方法，象刚块法（Rigid Block Method）、特殊单元法（Distinct Element Method）、刚块弹簧法（Rigid Block Spring Method）及不连续变形法。而在象分子动力学、组合物体动力学及计算机动画技术的其他领域也使用与离散元非常相似的方法。

尽管在文献中都是将离散元法作为一种与有限元法有明显区别的方法而提出，但我们将看到它内在的基础还将归于熟悉的有限元法[14]。事实上，普通的有限元程序可包含在离散元系统中（Barbosa 与 Ghaboussi，1989）[36]，计算连续性变形时用有限元，计算接触问题和物体的相互作用问题则用离散元。

按照最一般的形式，离散元能够分析变形连续和不连续的多个物体相互作用问题、物体的断裂问题以及大位移和大转动问题。这个方法与有限元一样，完全能一般地处理范围广泛的材料本构关系、相互作用准则和任意的几何形状。对承受体力和边界相互作用力的每一个物体求解动力平衡方程。这种方法可模拟应力传播、

振动、阻尼动力效应显著的问题。这些优点使得它尤其适合于分析象岩石这种非连续体。离散元法现在也正被用在汽车冲击、复合材料分析、机械振动、武器效应及动画技术等方面。尽管这里的重点是放在变形体的力学分析上，但它也能用于裂缝间流体流动和节理介质中的热传导问题(Williams，1985)[137]。

离散元技术的威力可从图 3.1 模拟理想轴向压缩试验中看到。左边的承台推动试件撞击另一个固定的承台，当试件中的应力超过强度极限时，试件出现裂纹。进一步压缩引起大变形，试件断裂，伴随着高速度出现一些飞离的碎片。应当注意断裂过程不用用户干预，断裂方向、新单元的产生及新的相互作用力都是由程序自动计算的。如用常规的有限元或有限差分法进行这种比较直观的离散元分析则是非常困难的。

离散元在岩石力学中的进展是从各个领域进行的，有的从物理学中的粒子出发，有的从地质力学出发，有的从结构工程[14]出发。离散元法的理论基础是空气弹性力学、有限元法和有限差分法。一部最好的文献参考书就是 1989 年 10 月 17～19 日在科罗拉多矿山学校举行的离散元方法研讨会论文集。

按照离散元法的发展历史，我们先介绍早期的简单刚体变形单元，再到目前的复杂单元。现在，离散元可自由地用在有限元所涉及的各个范围。离散元公式的建立，开始是基于 Burman (1971)、Cundall(1971)和 Maini(1978)等人的工程经验，更精确的推导应归功于 Kawai (1977)，Balytschko、Plesha、Dowding (1984)，Williams(1985)，Mustoe(1989)等人的工作[14]。下面我们介绍离散元法的一些基本概念。

3.2 离散元的概念

这节将给出一典型的离散元流程图。从直观上看，对弹簧质量系统离散元技术被认为是正确的。在第四章中将看到许多离散元方法等效于常应力有限元的模态分解法。尽管模态分解法在使用串行计算机时与普通有限元格式相比没有明显的优越性，但对于

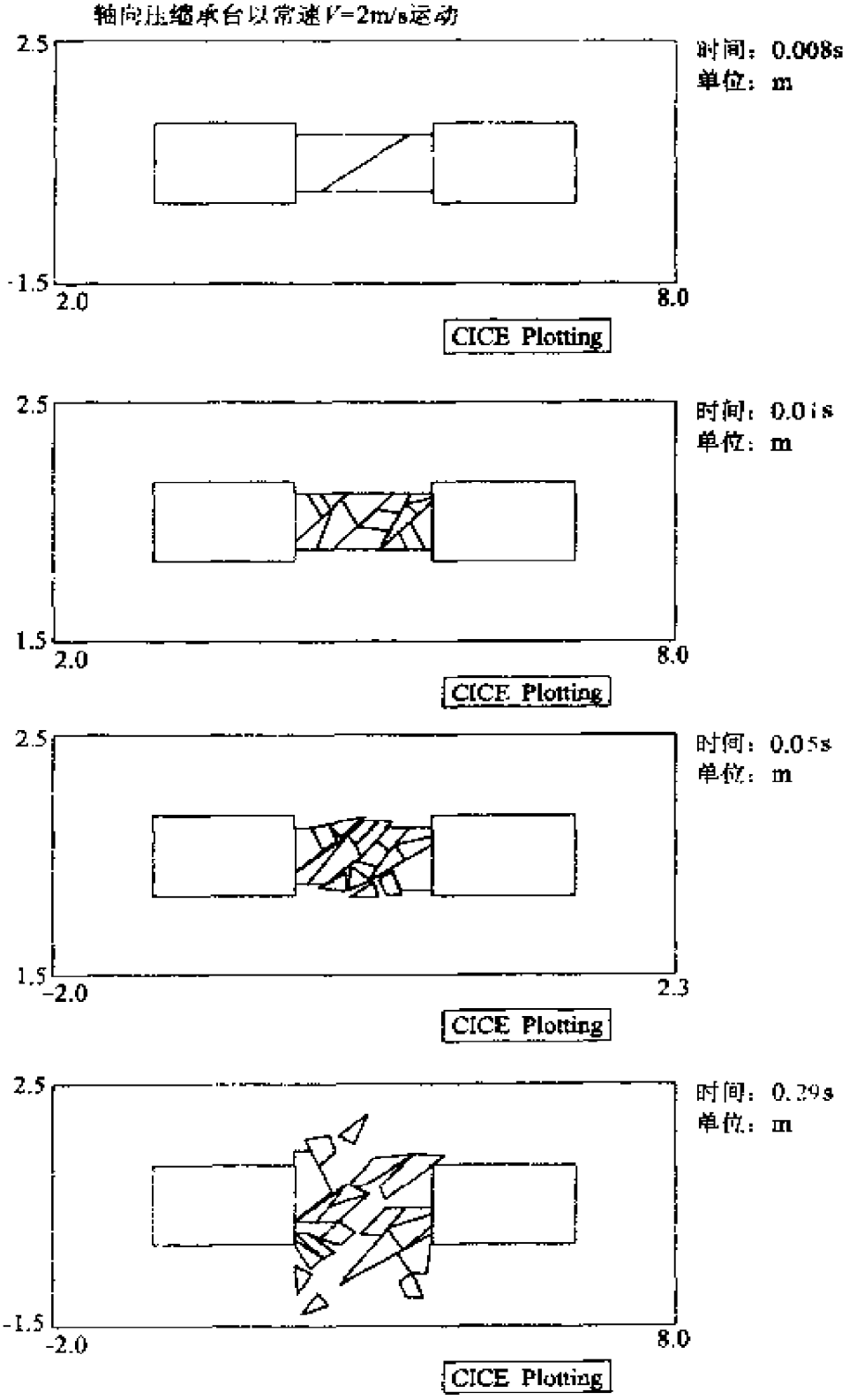


图 3.1　轴向压缩试验试样压碎过程

已成为可能的并行结构，模态分解法有其优越性。由于这个和历史的原因，这里介绍用模态分解法解动力平衡方程。

这里只给出一般形式的方程，关于更详细的推导，读者可参阅后一章。

在使用微分法（有限元和有限差分）对连续体进行一般分析时，单元的网格是在结点相互连接的，从而保证了相邻单元边界位移的协调性。系统方程是通过组合所有单元，包括对系统的约束而形成的。在离散元方法中，一个物体和另一个物体是通过边界接触联系的，边界接触可以是随时间变化的，如图 3.2（为了强调离散元与有限元的区别，图中每个物体由一个单元组成。实际上一个物体可以分成 n 个离散元）。图 3.2(b)表示具有规则节理介质的典型离散元网格。与有限元网格相比，不存在有被好几个单元共享的结点。因此结点 19、24、34 和 37，尽管它们有共同的空间位置，但在数值计算时，则看作明显不同的结点。为清楚起见，图中将它们在空间的位置分开表示。在岩石力学问题应用中，单元可以是完整的岩体、单元之间的空隙及岩石节理。

应当注意在离散元分析中，对于一个单元与另一个单元在何处接触没有限制，可以是结点与结点接触，也可以是结点与单元边界接触。接触单元之间产生的接触力应遵循不同的接触准则，这取决于所模拟的物理问题。例如岩石节理的相互作用关系可以包括粘性、膨胀、由严酷气候引起的损伤及与摩擦有关的应力。

单元间的相邻关系或相互作用在计算中是自动进行的，因为在运动或断裂时，相邻单元在迅速地变化，见图 3.2(a)。

这里叙述的离散元方法能处理由大位移、大转动、滑动和张开而引起的几何非线性和材料非线性问题。对每个离散元，动力平衡控制方程可写成如下的一般形式

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f} \tag{3.1}$$

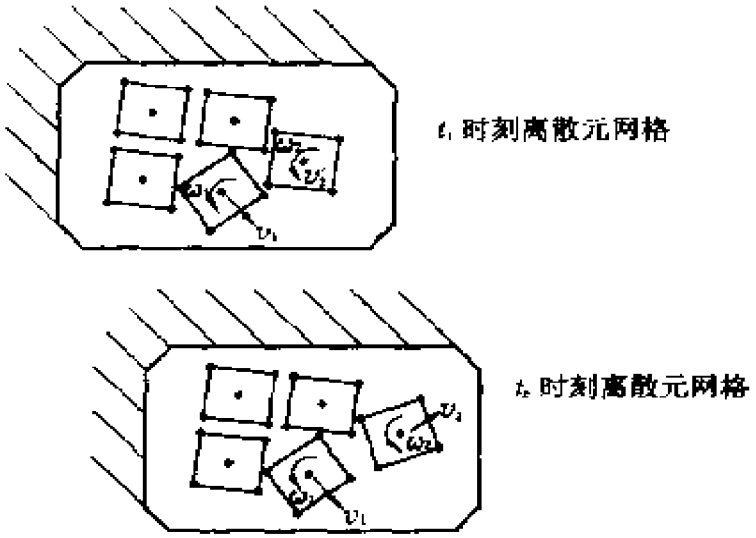
式中 $\boldsymbol{a}$——位移，上面的点表示对时间求导；

$\boldsymbol{M}$——质量矩阵；

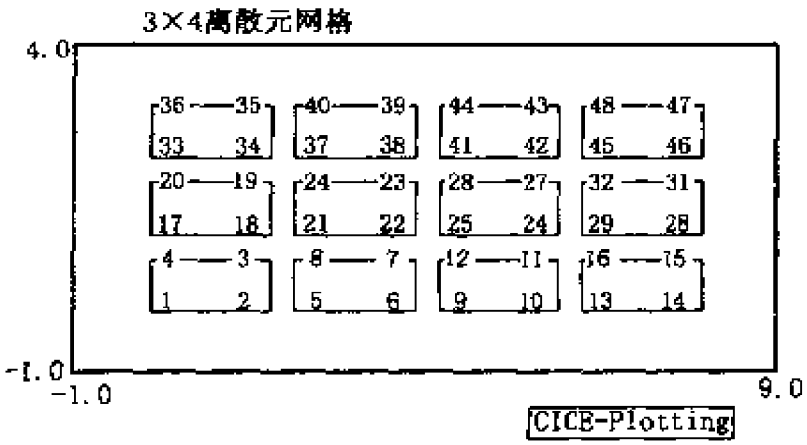
$\boldsymbol{C}$——阻尼矩阵；

K ——刚度矩阵；

f ——作用荷载。



（a）大运动时，单元可能出现的接触状态



（b）连续体离散元网络的结点图

图 3.2 单元可能出现的接触状态及离散元网格

考察如图 3.3 所示的 4 结点双线性等参有限元。单元的运动和变形可表示成单元基模态的叠加(此步骤在第四章第 2 节中作了介绍)。在小弹性增量位移的情况，零频率模态产生刚体运动(平动和转动)。五个高阶模态给出了单元的变形性质。对于高阶单元，所需描述单元变形性质的模态数也要增加。例如，在二维问题中，简单常应变三角形单元需要 3 个变形模态，而 8 结点的二次等参元则需要 13 个变形模态才能惟一确定其变形性质。

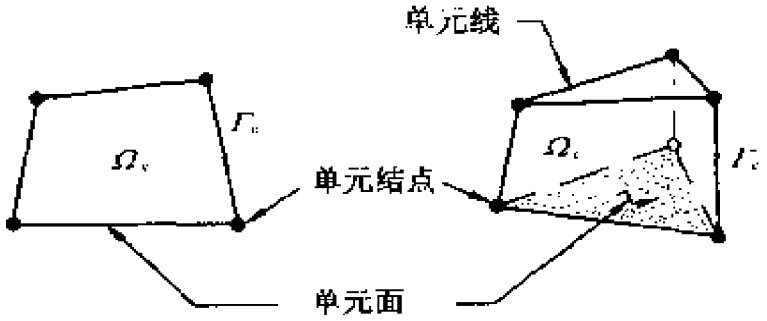


图 3.3　四结点双线性等参元

模态的正交性，使得单元的运动和变形方程(3.1)式能够解耦，从而写成分开的形式。在时间方向上利用中心差分法，对方程进行显式积分，则得到一般形式的方程

$$\ddot{\boldsymbol{a}}^n = \boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{f}^n - \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}^{n-\frac{1}{2}} - \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}^n) \tag{3.2}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{\boldsymbol{a}}^{n-\frac{1}{2}} + \ddot{\boldsymbol{a}}^n \Delta t \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{a}^{n+1} = \boldsymbol{a}^n + \dot{\boldsymbol{a}}^{n-\frac{1}{2}} \Delta t \tag{3.4}$$

式中，Δt 是时间增量，上角标表示步长数，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{K}$ 分别是规范化形式的质量、阻尼和刚度矩阵。在第四章第 2 节中给出了详细的推导。注意，$\boldsymbol{M}$ 是对角的，它的逆是平凡阵。按照以上所说的，对离散元刚体变形模态方程交替积分。这种交替求解方法称显式—显式格式。Belytschko 等(1979)讨论了稳定的极限时间积分步长(见(3.19)式)。

离散元的相互作用是从接触单元的相对运动计算得到的，单元间的相对运动产生增量相互作用力。用在罚函数方法中最简单的相互作用准则是

$$\Delta f_n = k_n \Delta u_n + \beta k_n \Delta \dot{u}_n \tag{3.5}$$

$$\Delta f_s = k_s \Delta u_s + \beta k_s \Delta \dot{u}_s \tag{3.6}$$

式中　β——用于阻止单元与单元振动所必需的与阻尼系数成比例的刚度；

Δf_n 和 Δf_s——单元相互作用的法向和切向增量接触力；

k_n、k_s——单元间的法向和切向刚度；

Δu_n 和 Δu_s——离散元之间法向和切向增量相对位移。

单元间的刚度可以是真实的物理量，例如象岩石节理的刚度，或者是人为定义的，用来形成单元间正确的边界约束，在许多冲击问题中常采用这种做法。对实际的岩石节理，刚度 k_n 和 k_s 是通过测试节理的刚度获得的。关于节理阻尼的资料和文献很有限，然而资料表明，在节理滑动前，与刚度成比例的阻尼大约在 1%～2% 的范围内。如果将两个单元看作连续体的一部分，再人为地假设一个刚度，这个刚度必须足够的大，以强迫离散元之间的协调性。这种情况，从加权余量法的角度看，相互作用刚度类似于强迫位移协调的罚函数(Campbell，J. S. ，1974)[38]。

在典型的离散元程序中，对每一种不同的材料必须输入材料性质和相互作用关系。当然与任何数值方法一样，边界条件、外力、体力也必需输入。

在每个时步中，随着荷载的改变，如重力、浮力、推力、相互作用力等，必须计算每个单元的运动。单元在这些力和力矩的作用下将产生运动和变形。由于要计算物体中的动力波传播，因此在显式—显式格式中，采用较小时间步长计算增量运动是必须的。显式—显式格式完全用在动力问题中，而另一种隐式格式(Belytschko 等 1984)[39]也适用于静力分析。

单元间的增量运动会引起单元间的相互作用，从而在单元中产生应变率。根据材料本构关系性质，增量应力是由增量应变计算得到。采用不同的材料本构关系，单元将具有弹性、粘塑性性质或可能发生断裂。

离散元的断裂相对容易，因为单元间的所有相互作用都是通过边界力而发生的。一旦由一个单元分裂成两个单元的几何记录完成后，标准的离散元算法处理的就是确定新的接触力。

尽管处理结构断裂比较直接，但断裂标准还未很好确定，目前还不能对具有裂纹尖端应力强度应子的裂纹扩展进行详细的模拟。

3.3 刚体动力学

本节将讨论适用于承受任意结点力的离散元的刚体运动方

程。一般，力与物体的运动有关，因此得到的是一组高度非线性的方程。通过采用增量位移和更新的拉格朗日解法可将方程线性化。

这里列出了刚体运动方程而没有给出参考文献，有兴趣的读者可参阅 Kibble (1966)，Chorlton (1972)和 Webster (1978)的论文[14]。

线性运动

牛顿第二运动定律可写成

$$\frac{\mathrm{d}\dot{u}_i}{\mathrm{d}t}=\frac{\sum F_i}{m} \tag{3.7}$$

式中 $\dot{u}$——沿 i 方向的速度；

F_i——沿 i 方向的力分量；

m——物体的质量。

对上式左端在时间步长里采用中心差分格式，从时间间隔 $t^{n-\frac{1}{2}}$ 到 $t^{n+\frac{1}{2}}$，则有

$$\left(\frac{\mathrm{d}\dot{u}_i}{\mathrm{d}t}\right)^n=\left(\frac{\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}-\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t}\right)_i \tag{3.8}$$

整理(3.7)式和(3.8)式，得到

$$\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}}=\dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}}+\frac{\sum F_i^n}{m}\Delta t \tag{3.9}$$

因此，时间步长 $n+\frac{1}{2}$ 时的速度完全可用时间步长 n 和 $n-\frac{1}{2}$ 时的已知量来确定。

时间步长 $n+1$ 时的位移 u_i 也可用已经计算出的位移来表示，即

$$u_i^{n+1}=u_i^n+\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}}\Delta t \tag{3.10}$$

如果给定了时刻 t^n 的初始位置、初速度及作用在物体上的力，则可利用(3.9)和(3.10)两式计算出时刻 t^{n+1} 的加速度、速度和位移。

角转动

对角转动的情形可写出类似(3.7)式的方程

$$\frac{\mathrm{d}\theta_i}{\mathrm{d}t}=\sum P_j(I_{ij})^{-1} \tag{3.11}$$

式中 θ_i —— 角速度；

P_j —— j 方向的作用弯矩；

I_{ij} —— 物体惯性矩张量的分量。

采用与处理线性运动一样的方法，可得到下列方程

$$\theta_i^{n+\frac{1}{2}}=\theta_i^{n-\frac{1}{2}}+\sum P_j^n(I_{ij})^{-1}\Delta t \tag{3.12}$$

$$\theta_i^{n+1}=\theta_i^n+\theta_i^{n+\frac{1}{2}}\Delta t \tag{3.13}$$

式中 θ_i^{n+1} —— $n+1$ 时步的角转动。

至此我们最好停一下，观察(3.7)式与(3.11)式之间的相似处，然后引入一些在后面用来描述更一般问题的术语。

u_i 和 θ_i 都是定义物体状态广义坐标的特殊量；F_i 和 P_j 是广义力；m 和 I_{ij} 是广义质量。在第四章中将得到与刚体运动及其相似的变形模态方程。

阻尼

将与质量成比例的阻尼 $c=\alpha m$ 引入(3.7)式中，则得到下列方程

$$\ddot{u}+\alpha\dot{u}=\frac{F}{m} \tag{3.14}$$

采用中心差分法则有

$$\dot{u}^{n+\frac{1}{2}}=\left(a\dot{u}^{n-\frac{1}{2}}+\frac{\Delta t}{m}\sum F^n\right)b \tag{3.15}$$

其中

$$a=\left|1-\frac{\alpha\Delta t}{2}\right|$$

$$b=\left|1+\frac{\alpha\Delta t}{2}\right|^{-1}$$

同样，对角转动的情况，也可得到如下类似的方程

$$\theta^{n+\frac{1}{2}}=\{\alpha\theta^{n-\frac{1}{2}}+\Delta t\sum P_i^n(I_{ij})\}/b \tag{3.16}$$

一维问题的控制方程是 $m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$，阻尼对简单一维问题的影响可从下面看出。

一维阻尼振荡的一般解为 $u=Ae^{\lambda t}$

其中

$$\lambda=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4km}}{2m} \tag{3.17}$$

振荡性质取决于 c、k、m 之间的相对值，其结论如下：

(1) $c^2<4km$ 时，低阻尼；

(2) $c^2=4km$ 时，临界阻尼；

(3) $c^2>4km$ 时，过阻尼；

(4) $c=0$ 时，自由振动。

注意：当角频率

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\quad，\quad 线频率\quad f_0=\frac{\omega_0}{2\pi} \tag{3.18}$$

时，发生自由振动。

对于与质量成比例的阻尼，即 $c=\alpha m$，临界阻尼发生在 $\alpha_c=2\omega_1=4\pi f_0$；应当注意绝大多数工程问题具有许多振动模态，选取一个 α 值只能使一个频率达到临界阻尼，其他频率或是低阻尼，或是过阻尼。

若要寻找线性问题的静力解，可采用动力松弛技术。Underwood(1980)对此问题进行了全面的综述，并指出这种理论其实就是将密度减小和自动施加阻尼(Papadrakakis 1981)。

在显式格式中，采用中心差分法交替对刚体运动方程(3.11)式和(3.14)式分别积分。在这种显式—显式格式中，稳定的时间步长是(Belytschko，Yen 和 Mullen，1979)

$$\Delta t\leqslant 2_1(1+\mu^2)^{\frac{1}{2}}-\mu)\cdot\omega_{max} \tag{3.19}$$

式中 ω_{max} 组合系统(刚体运动和单元变形)的最大频率；

μ 频率 ω_{max} 时临界阻尼的分数[14]。

这个稳定的极限仅对线性系统获得了证明，然而大量的经验证明，它也适用于非线性系统。

坐标的更新

在二维问题中，刚体的未知量是单元形心处的位移 u_x、u_y，绕形心的转角 θ，以及与它们相应的导数。

与有限元不同，这些未知量都是对应于单元形心的。离散元中的结点定义了单元几何，在某些情况下（二维分析），也定义了单元间的接触点。单元间的相互作用力就是作用在这些接触点上的。然而，一个单元可以用任意多个结点来定义它的几何而不会影响未知量的数目，三维离散元程序 CICE（Hocking 等 1985）[40]及后来的版本 DECICE 程序有多达 120 个结点的单元。若给定了单元的初始几何，随着单元的刚体运动，每个结点的位置可按下式更新。

由下式计算新单元的结点速度和坐标

$$v_i^{n+\frac{1}{2}} = V_i^{n+\frac{1}{2}} + e_{ijk}\omega_j^{n-\frac{1}{2}}(x_k^n - X_k^n) \tag{3.20}$$

$$x_i^{n+1} = x_i^n - v_i^{n+\frac{1}{2}}\Delta t \tag{3.21}$$

式中 $v_i^{n+\frac{1}{2}}$——$t^{n+\frac{1}{2}}$ 时刻的单元结点速度；

x_i^n——t^n 时刻的单元整体坐标；

X_k^n——t^n 时刻的单元形心整体坐标；

$V_i^{n+\frac{1}{2}}$——$t^{n+\frac{1}{2}}$ 时刻的单元形心速度；

e_{ijk} Levi-Civita 置换张量密度，定义为

$e_{ijk}=1$ i,j,k 顺序置换，

$e_{ijk}=-1$ i,j,k 反序置换，

$e_{ijk}=0$ i,j,k 中有两个指标相同。

3.4 接触判别与几何模拟

接触判别的实质就是确定两物体间的相互接触量。一旦确定了接触几何量，罚函数法和拉格朗日乘子法就可用来强加接触条

件。如果只是分析二三个物体的问题，接触面可由分析人员在提交问题时直接输入，以减少程序用于精确确定接触几何所需的判别时间（目前大部分有限元程序都是这样处理的）。对于具有上百个物体的问题，在提交问题时，确定所有可能的接触面是不现实的，也是不可能的。在这种情况下，程序本身必须具有判断接触的功能。设计一个检查每个单元各个面与其他单元的各个面是否接触的算法是比较容易的。但不幸的是，所需要检查次数是与 N^2 成正比，这里 N 是面数，如果每步检查都需要精确地确定物体的几何关系，则这种算法将是非常费时的。

由于这个原因，接触判别算法随着物体个数的增加而迅速变差。目前研究的目标之一就是要寻找一种更好的算法，比如说与 $N\log_2 N$ 或线性成正比。

即使是具有简单几何形状的物体，其可能的相互作用也是很复杂的，图 3.4 给出了两个立方体相互接触的例子。尽管物体的渗入由于为了清楚起见的原因被夸大了，但它的几何形状需由接触算法确定。

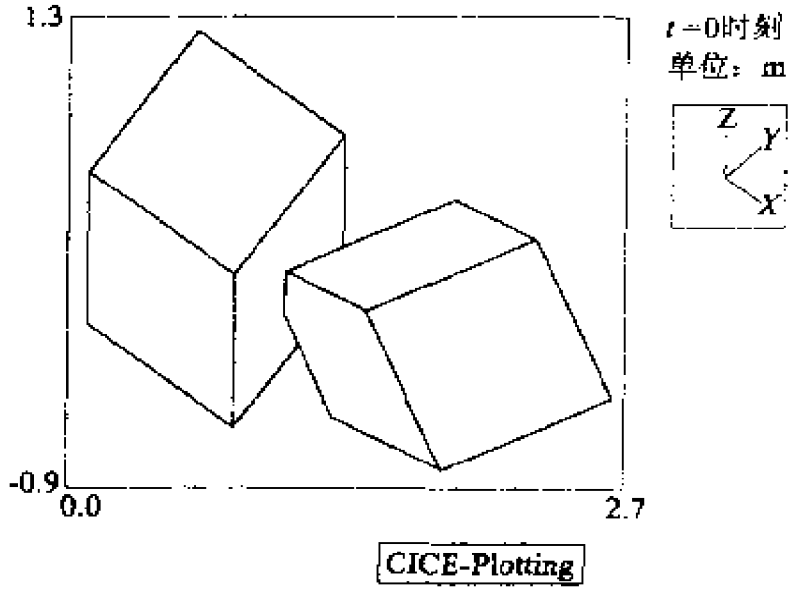


图 3.4　两立方体块相互作用

所以在接触判别中根本的问题是要发明一种能适用接触问题的强有力的算法，使问题在目前的计算机上能有效地实现。为了做

到这点，有必要考虑计算机程序要达到的目标和可用的几何数据。

重要的是我们采用何种方法去实现目标，例如有限元法，仅仅是我们许多可能方法中的一种。目前又提出了一些其他的方法，特别是基于超二次曲线的方法(Williams 和 Pentland，1988)对接触判别有许多显明的优点。

用普通的数值方法模拟物理问题，是将物体的边界和内部离散成一系列的单元，单元的几何形状由一系列的结点坐标定义。单元间平面与空间的关系由一组称为单元连接向量的有序矢量来定义。在有限元中，单元连接信息用来确定单元是如何连接在一起的，从而形成刚度矩阵。单元连接信息是由用户在提交作业时输入的，并通过假定在以后的计算中保持不变。

在离散元中，尽管也必须输入初始单元连接信息，以定义单元所属的物体，但在整个问题的求解过程中，单元连接信息是在不断改变的。因此，开始时接触的物体可能不再保持原有的接触而进入新状态。离散元程序必须要有连续更新单元接触状态的功能。

用一般的术语说，就是程序要能够"识别"几何环境。

识别几何关系需要为程序提供用于作出决定的具体规则。执行这种规则和算法对目前的离散元来说是一大难题。

在缺乏模拟几何形状有效的理论情况下，离散元只能依靠广泛的经验准则。这些准则将在几何判断准则一节中讨论。目前采用这些准则算法效率不高且非常耗费机时。

下面详细介绍有关的数据结构(这种结构在离散元程序中用来进行接触判别)。

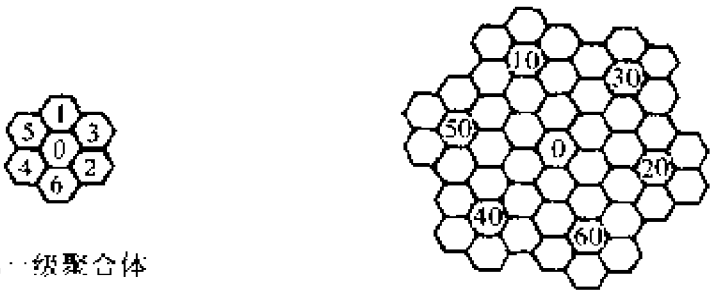
图像模型与细胞分裂模型

我们熟悉的有限元法是采用单元和结点表示物体的，这是图像模型的一个特例。尽管到目前为止大部分数值模型都是采用这种做法，但也有其他可能的表示方法。在二维问题中基于四树或六树以及三维问题中基于八树结构的细胞分裂方法提供了描述物体的另一种方法。由于该法已经成功地应用在某些领域，包括网格的

自动加密，我们将对它的优点作一简单介绍。

描述物体的细胞分裂法　图像法采用具有坐标的结点描述物体。迪卡尔坐标(x,y)和经度-纬度是定义结点的两种坐标系。与此相对照细胞分裂法是采用面积，而不是单个的结点来描述物体的。面积按需要可大可小。

在二维问题中，基于六边形的等级结构是特别有效的，由此得到了"六树"的名称。六树的第一级是由单个的六边形和与它相邻的六边形(图 3.5)所组成的。第二级是以一个第一级为中心聚合



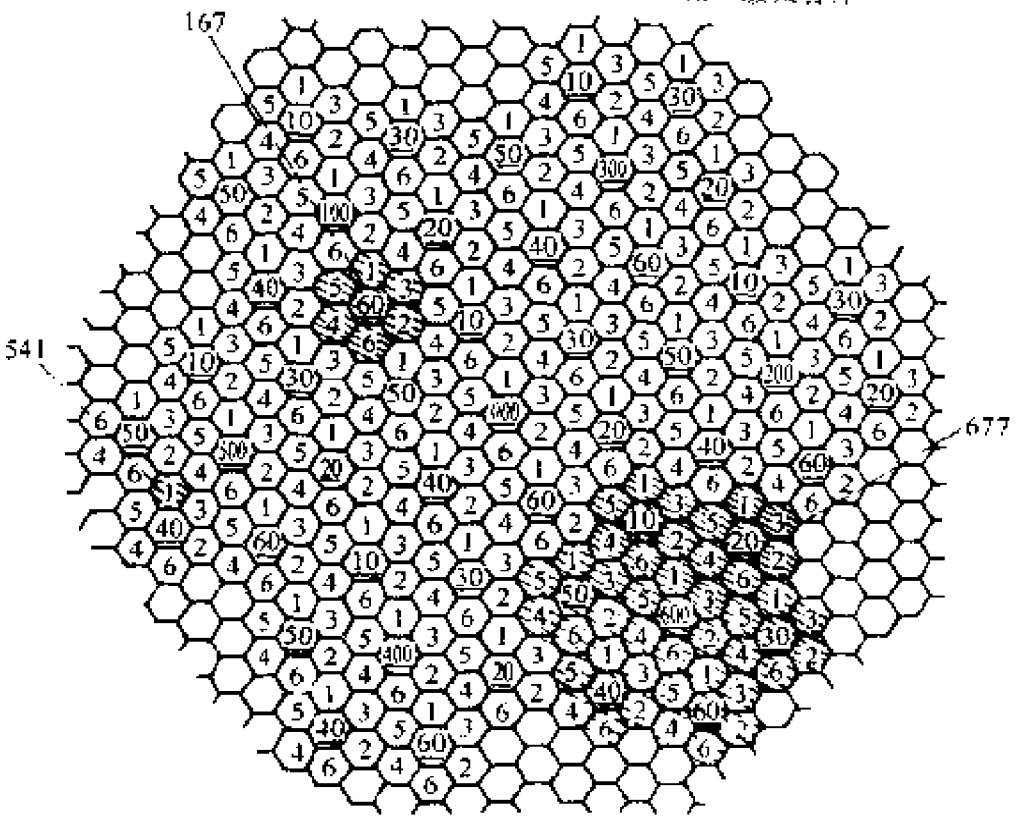


图 3.5　显示地址结构和 541、167、677 地址的六树一级聚合体(注：? 表示被指定等级中的所有细胞)

其他六个相邻的第一级形成的。重复这个过程直到能描述物体所需要的等级为止。这种等级结构可能达到的描述物体的范围可用一个例子来详细说明，即一个二十级的系统可将整个地球的表面分解成一个个直径为 10cm 大小的面积。

任意指定的六边形的地址是由一系列的数字组成的。最低位数字表示第一级聚合体七个细胞(0-6)中被指定的细胞，第二位数字表示第一级被指定的细胞所在第二级的地址，以此类推。

这种表示空间数据的系统有特别的优点。首先所有地址只涉及整数计算，其次仅仅是物体所处的那些面积需要在树中表示。这两个性质使空间数据的恢复和运算极其有效。

图像数据结构　在图像模型中，每个离散元是用一组与结点、边和面有关的数据表示的，这组数据包括空间坐标和几何关系。面的边界是指定的边和其他相邻的面。边的边界是与其他边共享的结点。在图像数据结构中，需要存储两类信息：定义单元几何的指针(通常是一组有序的结点号)和结点坐标。在程序执行过程中，指针信息和坐标数据必须更新。

数值计算要求所有几何信息从存储在有限元程序中的相关数据中获得。如果几何数据需要频繁地使用，那么将这些信息存储在数据结构中比从单元相关数据计算中得到更有效。图 3.6 为一典型的四面体几何模拟图。从存储的数据中，立即知道结点 N_1 通过边与结点 N_2、N_3 和 N_4 相连，它是 E_1、E_2 和 E_3 三条边的一部分，也是 F_1、F_2 和 F_3 面的公共点。这种描述包含过多的信息，将增加内存，但能提高搜索算法的速度。

图 3.7 表示存储几何信息的另一个例子，在这个例子中给出了楔体单元的结点和表面相关矩阵。确定一条边是否与结点 i、j 有关，只需读入 $a(i,j)$，因此搜索时间与顶点数和面数无关。缺点是需要 $N\times N$ 存储空间，其中大部分是零元素。

算法经过数据的路线可用图来说明。如果起点和终点是在同一位置，则可用回路来表示，如不在同一位置则用树来表示。通过全树的系统算法是可以做到的，这种算法分为前序、后序和在序，

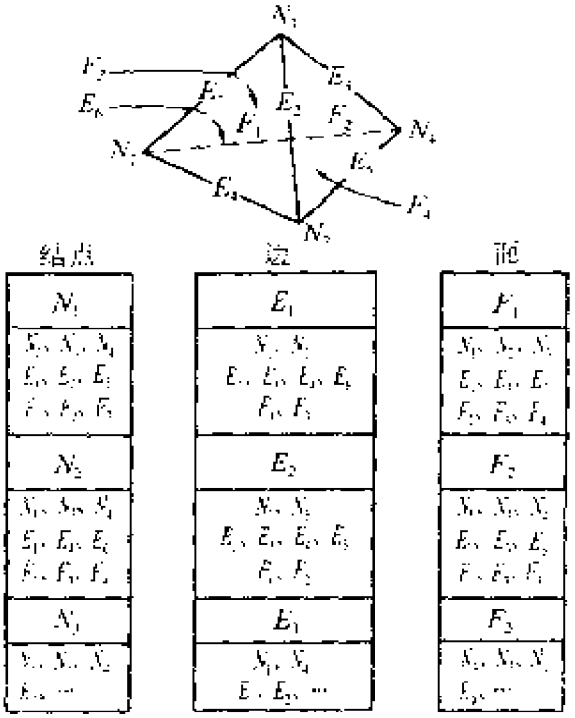


图 3.6　四面体单元的图像模型

如图 3.8 所示。算法在计算机程序中表示为对单元、面、边和结点循环。

用于每种算法的计算时间取决于所分析的问题，对所有应用问题结构数据不可能整体优化。对大部分接触判别算法，多数数据是有利的，尤其是对具有大内存的现代计算机。

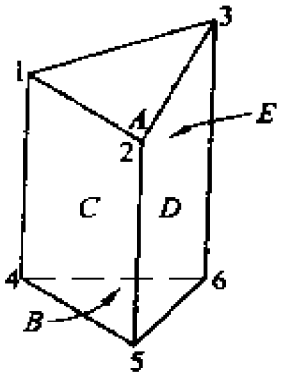
超二次曲面物体的描述及体积模型

超二次曲面是一族参数函数，首先由 Danish designer Peit Hein (1965)研究，最近由 Williams 和 Pentland(1988)[41]建议用于复合物体动力分析，它的方程为

$$\left\{\left(\frac{x}{a}\right)^{2/\beta}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2/\beta}\right\}^{\beta/\alpha}+\left(\frac{z}{c}\right)^{2/\alpha}=1 \tag{3.22}$$

图 3.9 表示通过改变参数 α、β 生成的各种形状的图形。

超二次曲面族也可用具有如下经、纬参数的形式来描述



结点

结点	1	2	3	4	5	6
1	0	1	1	1	0	0
2	1	0	1	0	1	0
3	1	1	0	0	0	1
4	1	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	1	1	1	0

面

面	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	0	1	1	1
B	0	0	1	1	1
C	1	1	0	1	1
D	1	1	1	0	1
E	1	1	1	1	0

图 3.7　楔体单元的相关矩阵

$$\boldsymbol{R}(\eta,\omega)=\begin{bmatrix} a & \cos^{\beta}(\eta) & \cos^{\alpha}(\omega) \\ b & \cos^{\beta}(\eta) & \sin^{\alpha}(\omega) \\ c & \sin^{\beta}(\eta) & \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

其中 $\boldsymbol{R}$ 是含有面结点 x,y,z 分量的三维矢量。在点(η,ω)处面的法向由下式给出

$$\boldsymbol{N}(\eta,\omega)=\begin{bmatrix} 1/a & \cos^{2-\beta}(\eta) & \cos^{2-\alpha}(\omega) \\ 1/b & \cos^{2-\beta}(\eta) & \sin^{2-\alpha}(\omega) \\ 1/c & \sin^{2-\beta}(\eta) & \end{bmatrix} \tag{3.24}$$

如果方程(3.22)式重写成 $F(x,y,z)=1$，$F(x,y,z)$就是点(x,y,z)离超二次曲面的距离。当 $\alpha=\beta=2/n$，$F(x,y,z)$给出了距离 L_n。

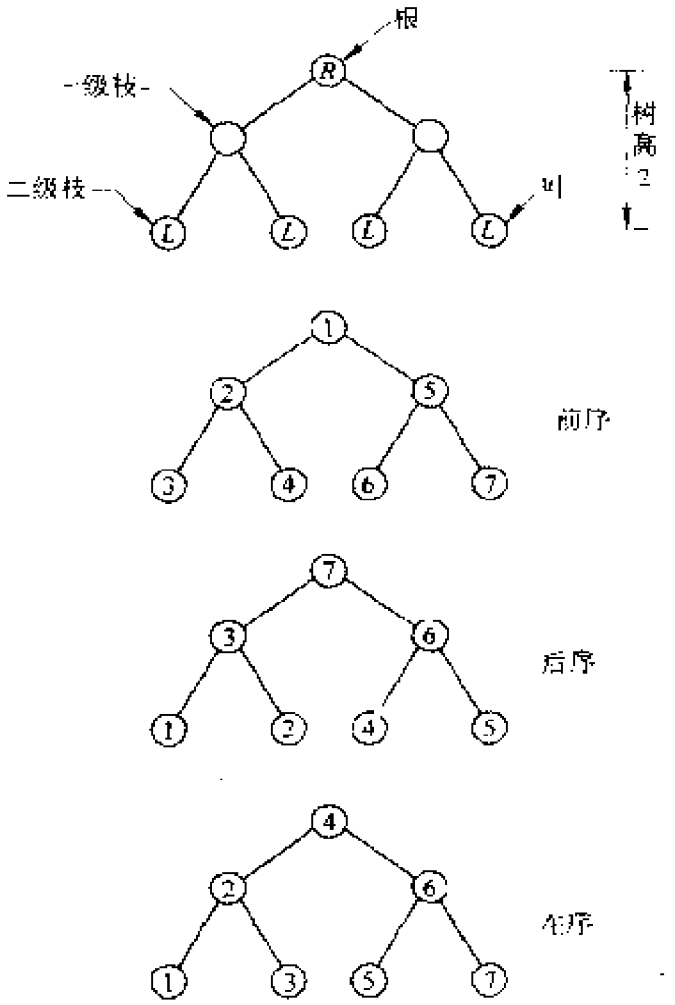


图 3.8　两树结构

这个性质提供了一种非常有用的判别，有时也称为“内一外”检查，它能判别点是位于曲面内还是位于曲面外。当 $F<0$，点位于内部；当 $F>0$，点位于外部；当 $F=0$，点精确地位于曲面上。如果要确定一个物体是否与另一物体相接触，即接触检查，则需要这种精确的判别。

超二次曲面函数提供了关于物体几何的丰富信息。例如，可直接计算曲面法线、曲率、体积和各种力矩。

超二次曲面函数形成了基本的建筑模块，它是一组超级的建筑实体几何(CSG)模块。据估计百分之八十的建筑元件都可由CSG基本模块的组合来表示。

将超二次曲面函数用于接触判别的优点是可使算法减少到四

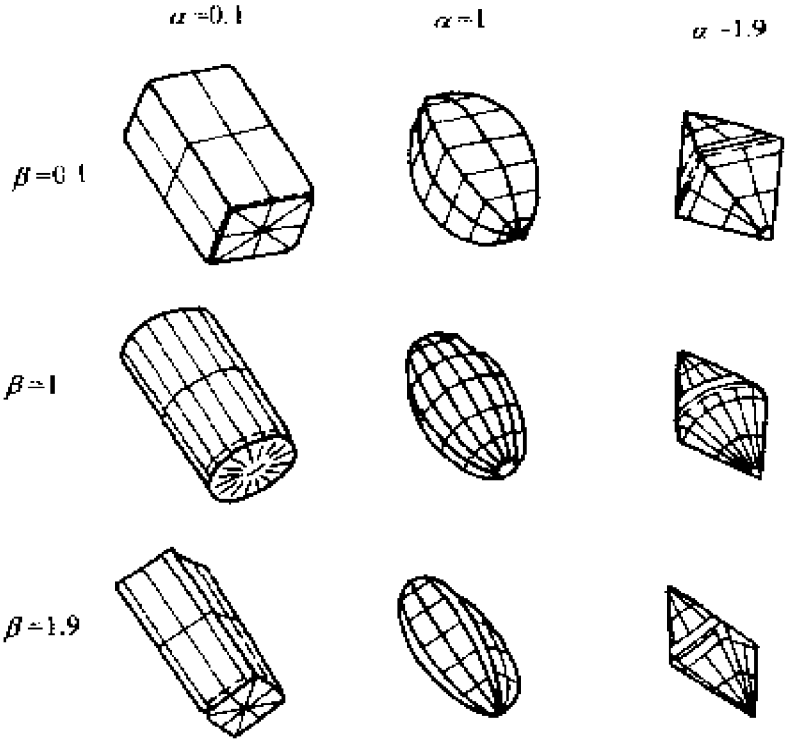


图 3.9　具有各种参数的超二次曲面函数

次为 N 的阶数，其中 N 是每个物体的面数。用离散元程序 Thingworld 试算表明运算速度可提高一至二个数量级。

模糊边界

在下面的讨论中，我们假定用一个普通的点和线边界表示物体。在任何算法中，时间步长总是有限的，单元的位置在一个时间步长中需要更新，因此在下个时步中单元将"跳跃"到一新位置(图 3.10)。这个过程意味着在接触算法中不考虑中间位置。这就引起了问题，因为结点可能会突然出现在另一单元的内部。

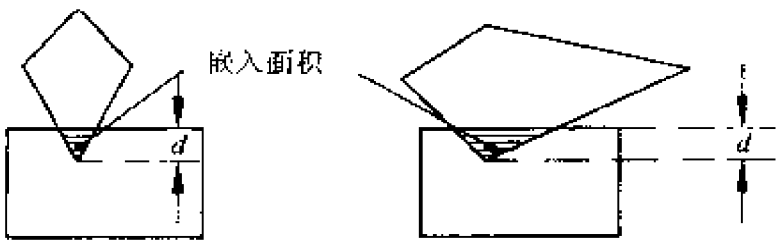


图 3.10　具有相同渗入距离的两个不同的接触例子

解决的办法是在单元真实边界的内外侧定义一边界区域，在边界区域里渗入的结点能合法地停留，相互作用力能产生。区域必须是足够的宽，使得在单个时步中没有结点能跃过它。这种区域的引入使得单元的边界具有“模糊”性。现在对单元边界的所有检查必须有容许范围。这些容许范围和它们隐含的模糊性，使生成有效的‘几何准则’大大复杂化。

当使用罚函数方法施加接触约束时，边界区域的行为类似于航空母舰上的避雷针。当探测到该区域时，结点即被锁住，然后在接触力的作用下慢慢向下移动有限的距离。如果由罚函数产生的力不是足够的大，结点将渗入到单元内以致使程序‘混乱’(图 3.11)。例如，程序可能假定渗入的结点穿过离它最近的面。如果结点实际上穿过了更远距离的面，程序就会在错误的方向产生力。在有许多单元可能相互重叠的三维问题中，解决这类问题将是非常消耗机时的。有效解决问题的方法就是将计算重点放在令人烦恼的接触存在的地方。要做到这点，有必要为程序提供一套判别准则，由此可作出推断什么是、什么不是困难的接触几何形状。

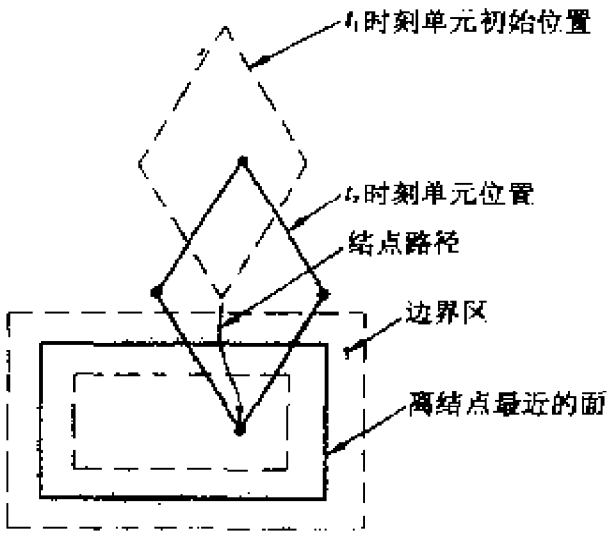


图 3.11　结点渗入单元内部导致程序‘混乱’

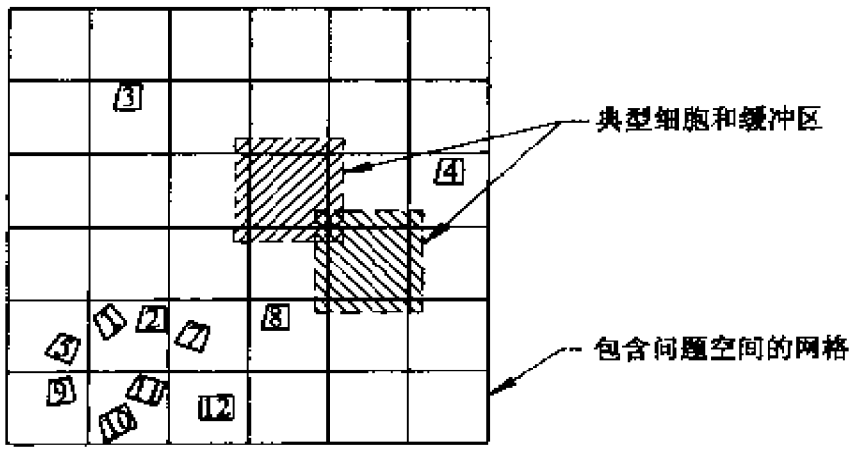
几何判断准则

给定一个具体的在几何上相互接触的物体，人脑能熟练地识

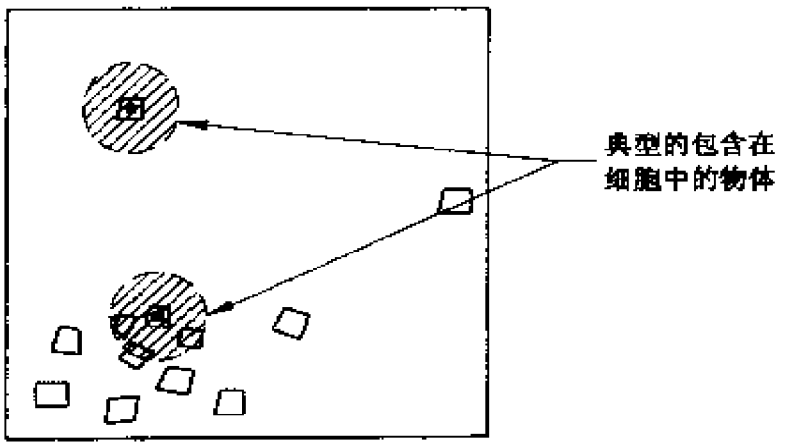
别可能存在的相互作用力。尤其是从思考中能消除无关的信息。例如，对于图 3.12 表示的物体，人脑能迅速地确定物体 3、4 在许多时步中不可能发生相互作用。

某些信息可以略去，或全部略去，或在许多时步中略去，以及某些判别不必经常进行，这些思想就是改进接触判别算法的基础。一个用在 DECICE 程序中被称为邻域筛的具体算法就应用了这种思想。这里以二维形式给出叙述。

在二维问题中，至少一个结点必须参加单元间的接触（在三维问题中，边与边的相互作用也是可能的，见图 3.4）。



(a)空间搜索网格



(b)用细胞描述物体的例子

图 3.12　几何判断准则示意图

在理想的接触判别算法中，各个结点依次被访问。然后对其他

单元的每个面扫描，以确定结点在面上还是在面内，即与面相互作用。

没有必要在每个时步中对所有单元的面进行判别。因为有些面离结点足够远，以致在许多时步中不可能发生接触。因此，在这种情况下通过检查结点与其他单元之间的距离可以减少对许多可能发生接触的检查。这些可能发生接触的面被处理成该结点的邻居，并存储在相邻数组中。以后只需对相邻数组中的面进行接触检查。利用更多一些有用的几何数据可进行细致的检查以排除另外一些面。例如，外法线方向为 $\vec{n}$，且 $\vec{n}$ 的方向与从结点指向该面的方向一致（$n \cdot p > 0$）的平面可看成'隐'面，因为它不可能与指定点相互作用。用这种方式可进行一系列的数值检查，最仔细的检查用于少数接触面，最粗糙的检查用于所有的面，但是这两种检查都是粗糙和不经常的。如果希望所有接触都能如实判别出，则相邻数表必须定期更新。在距离检查方面，如果结点与面之间的相对运动超过了已知的距离（通常取物体搜索半径的一半，这个值包含在相邻数表中），则必须更新相邻数表。

空间搜索与物体搜索

空间搜索　考察如图 3.12 中的物体分布（每个物体构成一个单元）。如果有 N 个物体，则必须进行 $\frac{N(N-1)}{2}$ 次接触检查才能保证所有可能的接触都被检查到（在程序中，实际的检查是在结点和面之间进行，但为简单起见，我们这里叙述的检查是在物体与物体之间进行）。

假设使用网格把问题空间分成 M 个细胞，则平均每个细胞包含 $\frac{N}{M}$ 个物体，一个细胞需进行 $\frac{N}{2M}\left(\frac{N}{M}-1\right)$ 次检查，对所有细胞需进行 $\frac{N}{2}\left(\frac{N}{M}-1\right)$ 次检查。优点是自然的，因为我们默认的假设是一个细胞中的物体不可能与另一个细胞中的其他物体发生作用。上述算法有时效果不太好，因为物体可能会跨过细胞间的网格，轻微

的运动将使得物体从一个细胞转移到另一个细胞，从而导致在每一时步中需对细胞更新。

通过对每个细胞指定一环绕该细胞的缓冲区可克服上述缺点。在这种情况下，细胞中的任何结点都有由细胞中的面和缓冲区组成的指定邻居。一个小缺点就是问题空间的某些区域可能被包含在好几个细胞中，因为缓冲区会重叠。然而，一旦单元被指定了一个细胞，则不需更新细胞定义，除非物体运动了等于缓冲区长度的距离。用这种方法较容易监控几何形状的改变和确定何时需进行更新。这是个重要的考虑，因为进行更新比不需要搜索的存储要做更多的计算工作。

值得注意的是，六边形网格对这种算法也是较有效的，因为对于给定的缓冲区宽度，由缓冲区引起的重叠面积较小。

分割问题空间方法的缺点是没有考虑物体在问题空间的分布。例如，物体可能全部聚集在一个细胞中，在这种情况下，该方法就没有优越性。

一种可供选择使用的方法就是细胞分解法，如六树结构。细胞解法与物体的密度有关，因为细胞(六树的枝)是跟着物体的。这种方法已经用在计算机图像处理中，用射线跟踪法，可多达 100000 个物体。

物体搜索　另一种可选择的方法是将搜索的细胞与另一个单元联系起来，使每个单元都有一个细胞包围它。就好象每个单元有个自己的雷达可以在给定的距离内扫描。单元只需知道在它扫描半径内的其他单元。单元结束扫描并将它所探测到的所有单元记忆在被称为"相邻数表"中。然后程序前进一个时步。在每个时步中，对任意指定单元的接触判别只需用到前次扫描得到的相邻数表。只要单元运动小于更新间的扫描半径，这个过程总是有效的。否则需进行另一次扫描。

在空间搜索与物体搜索两种方法中，缓冲区的大小对算法的效率有至关重要的影响。如果物体相对运动较小，那么小缓冲区将是最有效的。单元运动越快，所需的缓冲区应越大。一个真正智能

化的程序应该具有调节缓冲区大小的能力，这一点甚至比搜索方法更重要。但不幸的是很难做到这一点。

运动接触

在许多接触问题中，初始接触单元仅有形状和位置的改变，在整个求解过程中，不会产生新的接触。适应这种假设的典型问题是滚动齿轮、车轮和坦克履带等。这种假设能大大简化接触检查。

每个接触区域依次被访。根据相邻数表中的数据对相邻结点，边和面进行检查以确定该区域是否扩大。如果检查到新的接触，再对相邻单元作进一步搜索。这种算法特别有效，因为当前的接触信息被用来推测可能发生的新的接触。这个方法成功地用在 UDEC 程序中（Cundall 等，1983）。

3.5 接触与相互作用力

目前的讨论隐含着这样一种假设，即相互作用力是由罚函数产生的。这里只作一些简单的回顾，至于各种可用方法更详细的讨论读者可参阅有限元文献：Bakiska，1973；Brezzi，1974，Hallquist 等，1985[14]。然而需要注意的是任何形式的接触法则或数值技术都能适用离散元。

涉及摩擦的接触问题的一个重要特性就是变形一般与加载历史有关，所以必须及时跟踪加载过程。

稳态问题是某些例外情况，早期对接触问题的研究都集中在这类稳态问题的求解中。

这里我们将集中在运用于动力冲击的方法上。在冲击问题中正确跟踪加载路径是非常重要的。

罚函数技术

强加问题附加约束条件的罚函数法在许多数值模拟领域内被证明是有效的，Cambell（1974），Felippa（1975，1986）和 Zienkiewicz 等（1984）讨论了这一问题。

利用变分原理，对未知位移进行变分可得到通常的有限元方程

$$\frac{\partial \pi}{\partial u_i}=0 \tag{3.25}$$

还可表示成

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f} \tag{3.26}$$

在典型的接触问题中，我们希望强迫一个结点产生与另一个结点相同的位移。具体地说，就是让结点 i 发生与结点 j 相等的运动，即 $u_i-u_j=0$

由于

$$u_i=u_j \tag{3.27}$$

因此也有

$$k(u_i-u_j)^2=0$$

其中 k 称为罚常数。我们现在可以修改变分函数，成为

$$\begin{aligned}
\pi' &= \pi+\frac{k}{2}(u_i-u_j)^2 \\
\frac{\partial \pi'}{\partial u_k} &= \frac{\partial \pi}{\partial u_k} \qquad \text{当 } k\neq i \text{ 或 } k\neq j \\
\frac{\partial \pi'}{\partial u_i} &= \frac{\partial \pi}{\partial u_i}+k(u_i-u_j) \\
\frac{\partial \pi'}{\partial u_j} &= \frac{\partial \pi}{\partial u_j}-k(u_i-u_j)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 也因此可以修改为

$$\begin{bmatrix}
k_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
k_{i1} & \cdots & (k_{ii}+k) & \cdots & (k_{ij}-k) & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
k_{j1} & \cdots & (k_{ji}-k) & \cdots & (k_{jj}+k) & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
k_{n1} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & k_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_j \\ \vdots \\ f_n \end{Bmatrix}$$

即，将 $+k$ 加到对角项 ii 和 jj 中，将 $-k$ 加到非对角项 ij 和 ji 中。

这个方法的一个问题就是确定罚常数 k 的值。如果 k 太小将

不足以形成有效的约束，然而如果 k 太大，则约束的形成以损失变分原理中其他项为代价，即在数值计算过程中约束比所有其他项占统治地位。另外，k 取大数也会引起方程病态，使求解难以进行。

罚常数也可解释为结点 i 与结点 j 之间的弹簧刚度。当弹簧较弱时，结点仅是松散相连的，而坚硬的弹簧将使得结点一起运动。

如果接触通过岩石节理，则弹簧刚度与节理法向刚度或剪切刚度有关，法向刚度和剪切刚度又取决于节理的走向及未知量 u_i 和 u_j 的方向。

拉格朗日乘子法

接触约束也可通过拉格朗日乘子法施加(Babushka，1973)。下面以两个未知量为例介绍该方法，然后将其推广至 n 维空间多个未知量的情形中。

假设要寻找函数 $X(x,y)$的极值。如果没有附加条件，只需求解下列联合方程

$$\frac{\partial X}{\partial x}=0,\frac{\partial X}{\partial y}=0 \tag{3.29}$$

解 x_0,y_0，给出了极值 $f(x_0,y_0)$的位置。现在假设要寻找满足条件 $y=\bar{y}(x)$的极值。这条线一般不通过点(x_0,y_0)，因此也不会与前次相同。将 y 代入 X 使得 X 仅与 x 有关，再对 x 求导，即可获得新解。

现在对用于有限元过程的这种方法作一简单介绍。

考察有附加约束 $u_i-u_j=0$ 的变分方程 $\pi(u_i)=0$。推导泛函如下

$$\begin{aligned}
&\pi'=\pi+\lambda(u_i-u_j)=0\\
&\frac{\partial\pi'}{\partial u_k}=\frac{\partial\pi}{\partial u_k}\qquad(k\neq i\quad k\neq j)\\
&\frac{\partial\pi'}{\partial u_i}=\frac{\partial\pi}{\partial u_i}+\lambda\\
&\frac{\partial\pi'}{\partial u_j}=\frac{\partial\pi}{\partial u_j}-\lambda\qquad\frac{\partial\pi'}{\partial\lambda}=u_i-u_j
\end{aligned} \tag{3.30}$$

通常有限元方程

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f} \tag{3.31}$$

因此必须修改成

$$\begin{bmatrix} \cdots & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & & \boldsymbol{K} \quad \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ \cdots & & & -1 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 \quad \cdots 1 & \cdots & -1 \quad \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_j \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.32}$$

求解这组方程可得到未知量 $\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{\lambda}$。容易证明拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 相当于力。在接触问题中，乘子就是接触面的接触力。

Oden 等(1982)详细讨论了拉格朗日乘子理论，并且证明了保证有惟一解所必需的强迫条件一般是不成立的，即这种解可能不惟一。

引入拉格朗日摄动项可克服这个缺点(Wriggens 等，1985)。拉格朗日摄动项不仅可以保证解的惟一性而且可以消除修改后刚度矩阵对角线上的、在数值计算上令人讨厌的零元素。修改后的变分泛函可取作

$$\pi' = \pi + \lambda(u_i - u_j) + \frac{\lambda^2}{2\epsilon} \tag{3.33}$$

(注意，摄动项类似于罚函数)。

除对 λ 变分外，所有其他方程都不变，

$$\frac{\partial \pi'}{\partial \lambda} = (u_i - u_j) + \frac{\lambda}{\epsilon} \tag{3.34}$$

从而，修改后的有限元方程成为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} & 1/\epsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

对于在变分原理中强加约束的两种方法，从计算的角度看罚函数法最具有吸引力(Oden 等，1982，Hallquist 等，1985)，这种方

法不引入新的变量(拉格朗日乘子(力)通过直接计算后面的因子仍然可以得到)而且可以保证解将收敛到惟一值。

Zienkiewicz 等(1977)、Hughes(1977)和 Malkus 等(1978)对罚项及必须采用减缩积分的问题进行了讨论。

现在介绍用在大多数离散元程序中的一种简单而又有效的罚函数方法。

线性相互作用模型

两单元间点一面相互作用的线性模型有两个要点:

(Ⅰ) 法向和剪切线性相互作用刚度关系

$$R_n = k_n u_n, \qquad R_s = k_s u_s \tag{3.36}$$

式中 R_n 和 R_s——接触点的法向力和切向力;

u_n 和 u_s——接触面上法向和切向结点相对位移;

k_n 和 k_s——法向和切向刚度系数。

(Ⅱ) 接触面摩擦(或强度)准则,它限制了切向相互作用力 R_s 的值,表示为如下不等式

$$R_s \leqslant Cl + R_n \tan\phi \tag{3.37}$$

式中 C——粘结系数;

ϕ——摩擦角;

l——相互作用面的长度。

应该注意,上述表达式实质上是用力代替应力而表示的库仑摩擦定律。

(3.34)式和(3.35)式可以很容易地推广到非线性相互作用的情况。图 3.13 为具有多个物体复杂离散元的情况。

3.6 算 例

在许多岩石力学应用中,尤其涉及到隧道的稳定性,岩石节理的行为是控制参数,而无节理的岩体对变形影响甚微。在这种情况中,刚体离散元法提供了一个极好的分析工具。

Belytschko 等(1984)研究了节理岩体中隧道的稳定性,分析

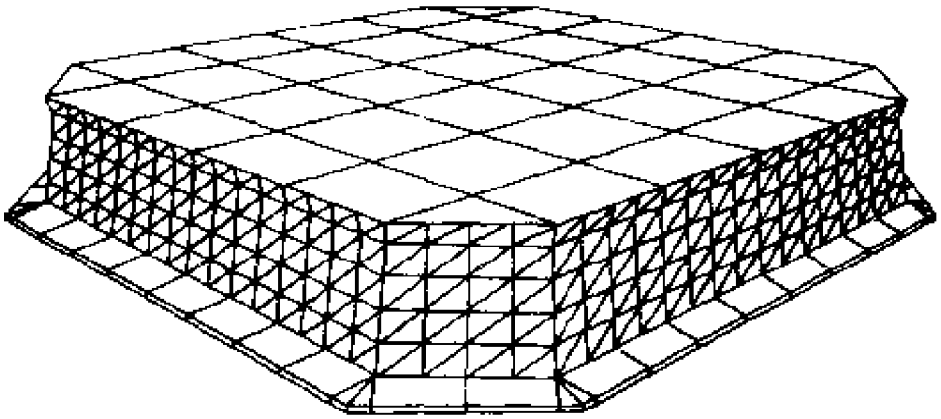


图 3.13　具有多个物体的复杂离散元

中将无节理岩体处理成刚体单元而将节理行为看成约束，用罚函数方法处理。仅仅进行静力分析。采用割线迭代的有效隐式算法。应该指出的是，当采用与杨氏模量有关的应力，及材料在某些方向卸载（隧道开挖即属此情况），割线迭代法比经常采用的切线法优越。隐式算法对静力问题比显式动力松弛算法更有效。

Sandia 国家实验室用刚体单元程序 BLOCK（Taylor，1983），BUMP（Schamaun，1984），CAROM（Gorgham-Bergeron，1985）和 DMC（Taylor 和 Preece，1989）分别对岩石断裂及火山口进行了研究。图 3.14 表示用 BLOCK 程序（Schamaun，1984）模拟矿山孔洞爆破的结果。利用对称性，用 480 个刚体单元代表岩体。单元的大

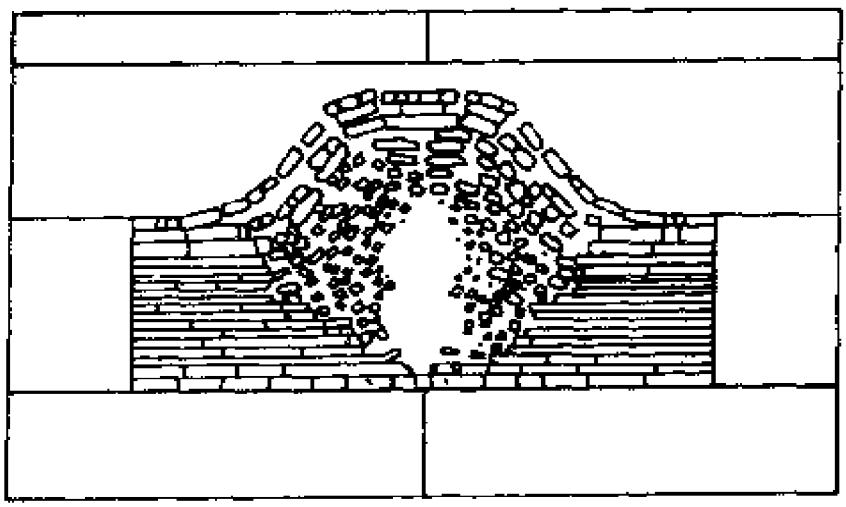


图 3.14　用 BLOCK 刚体单元程序模拟矿山孔洞爆破

小是随机分布的，随着往孔洞靠近，单元的平均尺寸在逐渐减小。

在程序 BLOCK，BUMP 和 CAROM 中使用的方法是从 Cundall 早期程序 BLOCK 发展过来的。为便利编制更有效的程序，连接表结构已经被取代了。在 CAROM 程序中，单元局限于圆盘形，这样大大简化了相互作用的计算，极大地提高了计算速度。

三维刚球程序 DMC(Taylor 和 Preece，1989)及一系列的二维、三维程序(Walton 等，1988，Walton，1982，1983)已被用来分析颗粒材料流动问题。

刚体板单元

Kawai(1977，1979 和 Kawai 等 1980)[42]发展了一种用于连续板，成为刚体弹簧模型(RBSM)的新颖离散元。他们证明了基本方程可从能量泛函得到。尽管在目前这种方法还不能处理非连续体，但它却包含了离散元方法的主要思想。在 Kawai 的模型中，物体被划分成许多三角形单元，如图 3.15。板与板之间通过弹簧相连。改变弹簧刚度可以正确反映板的弯曲性质。这种方法模拟塑性铰破坏很理想，最近已被用于冰块的破坏分析中(Yoshimura 等，1985)。

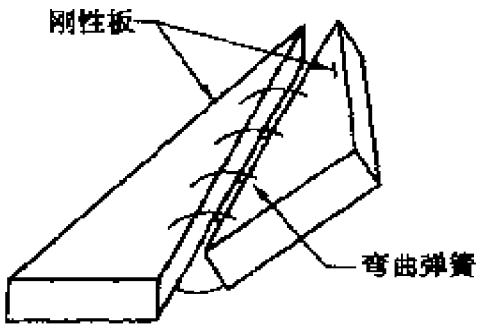


图 3.15 Kawai 刚体板单元，1980

板单元

Mustoe 等(1987)介绍了另一种推导线性位移单元的途径。在这种方法中，通过定义一组有限的交界面刚度，而将弯曲变形限制于相邻单元的交界面上。用这种方法建立的梁单元和板单元(类似

于 Kawai 的方法)分别就是欧拉(Euler)梁和克希霍夫(Kirchoff)板。注意到剪切变形的影响,可通过简单地将适当的线性位移单元叠加是很有趣的。例如,欧拉梁与四结点四边形平面应力元叠加,克希霍夫板与八结点六面体单元叠加。

采用克希霍夫假设可建立主板单元(类似于用简单理论建立梁单元),其中弯矩—曲率半径方程可表示为

$$M_l=D\left(\frac{1}{r_l}+\frac{\upsilon}{r_m}\right),M_m=D\left(\frac{1}{r_m}+\frac{\upsilon}{r_l}\right),M_{lm}=D(1-\upsilon)\frac{1}{r_{lm}} \tag{3.38}$$

式中,l、m 和 n 是板局部坐标系的方向;

$$D=Et^3\{12(1-\upsilon^2)\},\frac{1}{r_l}=\frac{\partial^2 w}{\partial l^2},\frac{1}{r_{lm}}=\frac{\partial^2 w}{\partial l\partial m},\frac{1}{r_m}=\frac{\partial^2 w}{\partial m^2}$$

M_l、M_m 和 M_{lm}表示单位长度的弯矩。

离散板单元实质上是由通过一系列法向和剪切弹簧将四个离散元联接在一起的,这些弹簧形成了四个铰线,如图 3.16(a)。为了得到法向和剪切刚度系数,可令常弯矩引起的常曲率模态等效于上述离散元系统。与 l 轴平行的法向刚度的计算按照下列步骤进行。假设 M_l 非零,$M_m=M_{lm}=0$,引起的变形如图 3.17(a),再从上述方程得到 $M_l=\dfrac{D(1-\upsilon^2)}{r_l}$。

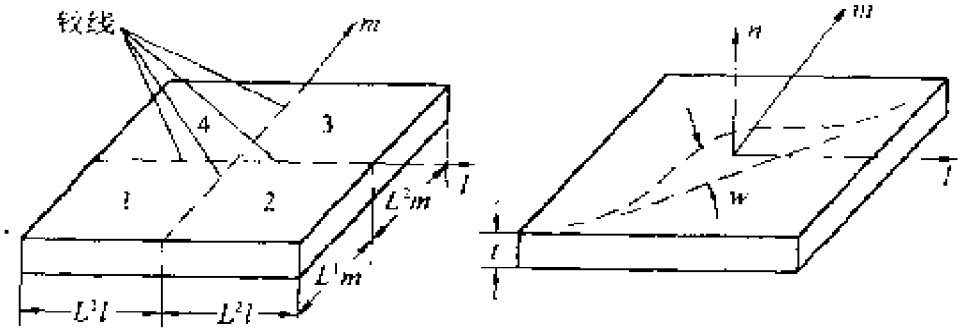
图 3.17(b)表示一个板单元的横断面,在竖向边界定义了两个刚度为 k 值的弹簧。因此,四单元中平行于 l 轴的法向弹簧刚度的总数是八个。

根据使连续板弯曲—曲率关系与离散元组合系统等效的原则,可得到平行于 l 轴的法向刚度系数 k_n^l 如下

$$k_n^l=\frac{EtL_m}{12L_l} \tag{3.39}$$

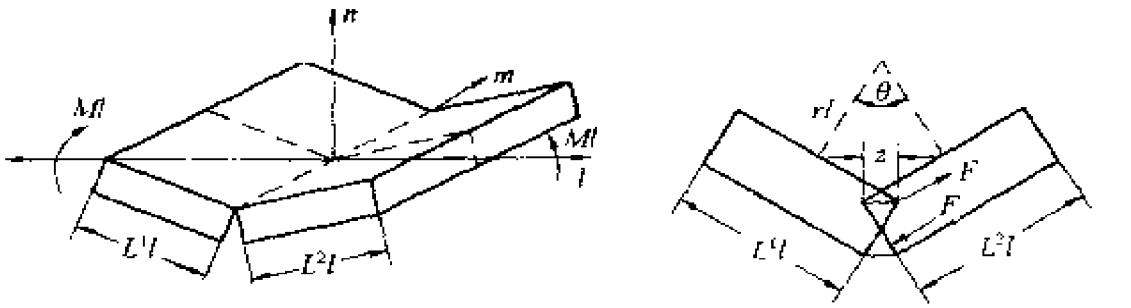
采用类似的方法,假设 $M_l=M_{lm}=0$,M_m 非零即可获得 m 方向的法向刚度系数

$$k_n^m=\frac{EtL_l}{12L_m} \tag{3.40}$$



(a) 含铰线的离散板单元　　(b) 典型的有限单元

图 3.16　由四个离散元组成的板单元



(a) 沿 l 方向发生弯曲的离散板单元　　(b) 离散板单元弯曲时空间法向刚度

图 3.17　离散板单元弯曲时的法向刚度和剪切刚度

剪切刚度(与法向刚度一样作用在结点位置,图 3.17(b))可按计算法向刚度同样的办法进行。平行于 m 轴铰线上的剪切刚度 k_s^m 为

$$k_s^m = \frac{Et^3(1+\upsilon)}{12L_lL_m} = k_s^l \tag{3.41}$$

(3.41)式也给出了平行于 l 轴的另一铰线上的 k_s^l 值。应当注意,二维欧拉梁只需考虑沿一个方向的弯曲变形。

第四章　离散元方法——变形体模型

4.1　变形体动力学

在对变形体单元进行数学推导之前，让我们先来熟悉要研究的问题。

考察受有常力 F 作用的单个变形体单元，如图 4.1。给定单元的几何、密度和弹性模量，需要确定它的运动特性。我们知道用牛顿定律可以确定质心的运动和绕质心的转动。但不能确定单元相对于质心的变形。

在变形体单元中，单元质心是在运动的，固定在单元质心处的一组坐标既有平动又有转动。为了得到相对于这样一组坐标系的运动变形方程，有必要将通常惯性坐标系中的动力平衡方程转换成用单元主轴表示的形式，单元主轴既作平动又作转动，如图4.2。建立于这种坐标系（又称 Tisserand 坐标系）中的单元具有零相对线动量和角动量，其变形可精确地用单元固有弹性模态的展开式

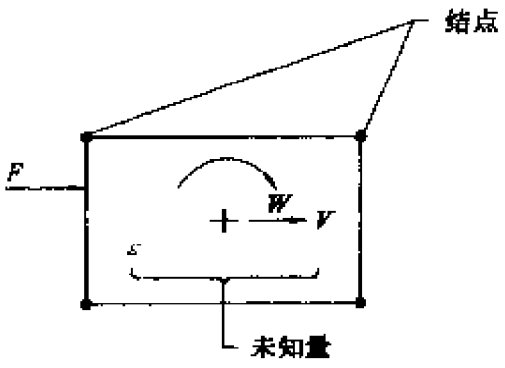


图 4.1　外力作用下离散元的变形

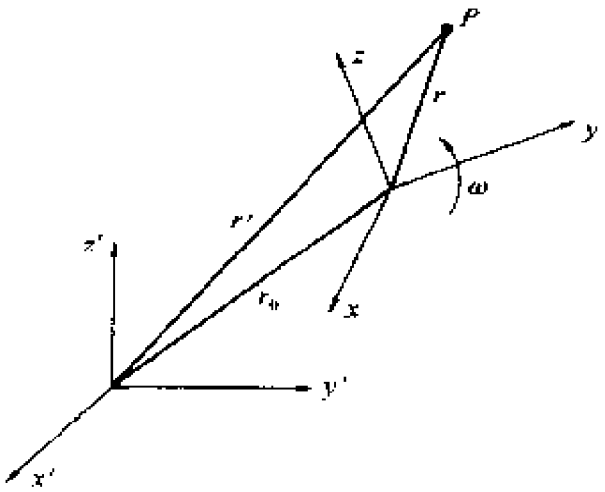


图 4.2　惯性坐标系与非惯性坐标系之间的关系

来表示。模态法完全可用于大转动和大应变问题。对后一种情况，我们必须严格选择适当的应力应变度量方法，并注意变形前后的旋转路径。为避免复杂，我们在这里仅限于小应变问题。更一般的形式已由 Williams 和 Pentland(1988)给出了[41]。

动力平衡方程向非惯性坐标系的转换

以下将讨论在惯性系中作任意大转动的弹性体所须遵循的方程。变形体单元的运动可分解为平均刚体运动和相对运动，刚体运动定义了一个非惯性动力参考系，相对运动指相对于该非惯性参考系的变形。

沿用 Fraeijs de Veubeke(1976)的方法，选择满足零相对线动量和角动量的 Tisserand 条件的动力参考系。对相对位移的均方值而不是对相对动能取极小值，将得到线性形式的零角动量方程，反之将得到非线性方程。这就使得相对位移能精确地用物体固有弹性模态的展开式来表示。

运用哈米顿原理及广义坐标的概念，可以推导出所有的刚体运动方程和变形方程，在每一时步中采用小应变的假设，则可简化这些方程。这些方程不仅适用于小变形，同时也能正确地处理大变形的问题。

力学的基本公理

如同 Eringen(1980)所指出的那样，在惯性标架中，力学的基本公理包括：

公理 1　质量守恒原理

物体的总质量在变形的过程中保持不变

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \, \mathrm{d}\Omega = 0 \tag{4.1}$$

式中　ρ ——初始坐标系中物质点处的质量密度，积分对整个物体体积进行；

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ ——物质时间导数。

公理 2　动量平衡原理

动量对时间的变化率等于作用在物体上的合力。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho v_k\mathrm{d}\Omega=F_k \tag{4.2}$$

式中　$\boldsymbol{p}$——动量；

$\boldsymbol{F}$　　力；

v_k——沿 k 方向的速度分量；

F_k——沿 k 方向的分力；

ρ——密度。

公理 3　动量矩平衡原理

对任一固定点 O 的动量矩的时间变化率等于对同一点 O 的合力矩。

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}\quad 或\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\rho e_{kim}x_i v_m\mathrm{d}\Omega=L_k \tag{4.3}$$

式中　$\boldsymbol{H}$　　对 O 点的动量矩；

$\boldsymbol{L}$——对 O 点的合力矩；

ρ——质量密度；

e_{kim}——Levi-Civita 置换张量分量；

x_i——对 O 点沿 i 方向的力偶臂；

v_m——沿 m 方向的速度分量；

L_k——对 O 点沿 k 方向的力矩分量；

Ω　　体积。

公理 4　能量守恒原理

动能对时间的变化率等于外力所产生的功率$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}$与单位时间内所有进入或离开物体其他能量之和。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(K+E)=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\sum U_e \tag{4.4}$$

式中　K——动能；

E　　内能；

W——外力所做的功；

U_α ——单位时、dl内第 α 种能量(例如：热能、电能)。

从这些基本的公理出发，可建立起相对于惯性标架(用上角标"′"表示)的控制方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}' \tag{4.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{L}' \tag{4.6}$$

式中

$$\boldsymbol{F}'=\int \boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma+\int \boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega$$

$$\boldsymbol{L}'=\int \boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma+\int \boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega$$

$$\boldsymbol{p}'=\int \rho \dot{\boldsymbol{r}}'\,\mathrm{d}\Omega$$

$$\boldsymbol{H}'=\int \rho(\boldsymbol{r}'\times \dot{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}\Omega$$

其中 $\boldsymbol{t}$ ——边界面力，

$\boldsymbol{R}$ ——体力；

Γ 和 Ω 随物体一起变形。

面力 $\boldsymbol{t}$ 和体力 $\boldsymbol{R}$ 包含了所有影响物体的外力，如浮力、拉力和重力等。在浮力和水压力的情况下，仅仅在湿润边界力是不为零的。

方程(4.5)和(4.6)可以写成熟悉的欧拉方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Omega=\int \boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma+\int \boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega \tag{4.7}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \rho(\boldsymbol{r}'\times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t})\mathrm{d}\Omega=\int \boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma+\int \boldsymbol{r}'\times \boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega \tag{4.8}$$

对上述两式运用格林公式，即得到了柯西运动定律，用张量指标形式表示则为

$$\rho \ddot{r}_i=\sigma_{ij,j}+R_i \tag{4.9}$$

和

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ji} \tag{4.10}$$

为了得到动能的表达式，用 $\dot{\boldsymbol{r}}'$ 乘柯西第一定律，再对体积积分，然后运用格林公式，则得到

$$K = \int \boldsymbol{t} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}' \mathrm{d}\Gamma + \int \boldsymbol{R} \cdot \dot{\boldsymbol{r}}' \mathrm{d}\Omega - \int \boldsymbol{T} : \nabla \dot{\boldsymbol{r}}' \mathrm{d}\Omega \qquad (4.11)$$

式中 $K = \frac{1}{2}\int \rho \boldsymbol{r}'^{2} \mathrm{d}\Omega$；

$\boldsymbol{T}$——应力并矢量。

(4.11)式右端最后一项是物体应变能变化率，用张量指标形式也可表示成：

$$\int \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}\mathrm{d}\Omega \qquad (4.12)$$

应力并矢量可写成：

$$\boldsymbol{T} = \sigma_{xx}\vec{i}\vec{i} + \sigma_{yx}\vec{j}\vec{i} + \sigma_{zx}\vec{k}\vec{i} + \sigma_{xy}\vec{i}\vec{j} + \sigma_{yy}\vec{j}\vec{j} + \sigma_{zy}\vec{k}\vec{j} + \sigma_{xz}\vec{i}\vec{k} + \sigma_{yz}\vec{j}\vec{k} + \sigma_{zz}\vec{k}\vec{k} \qquad (4.13)$$

方程向任意参考标架的转换

我们希望将在惯性标架下的基本方程转换到任意非惯性标架中去。为区别，惯性标架中的量用加撇表示，非惯性运动标架中的量用不加撇表示(图 4.2)。

一个给定点的位置矢量和物质导数在两种标架中的关系为

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r} \qquad (4.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \frac{\partial \boldsymbol{r}'}{\partial t} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}' + \dot{\boldsymbol{r}}' \qquad (4.15)$$

式中 $\boldsymbol{\omega}$——惯性标架中的角速度。

从上述方程进一步可得到：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} + \dot{\boldsymbol{r}} \\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t^2} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \boldsymbol{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \dot{\boldsymbol{r}} + \ddot{\boldsymbol{r}} \end{aligned} \qquad (4.16)$$

将这些关系式代入到(4.5)式、(4.6)式和(4.11)式中，则有

$$\boldsymbol{F}=m\ddot{\boldsymbol{r}}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega+2\boldsymbol{p})+\dot{\boldsymbol{p}} \tag{4.17}$$

$$\boldsymbol{L}=-\ddot{\boldsymbol{r}}_0\times\int\rho\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\boldsymbol{I}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{I})+\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\boldsymbol{I}}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{H}+\dot{\boldsymbol{H}} \tag{4.18}$$

式中 $\boldsymbol{I}$——惯性矢量。

同时我们也得到

$$\int\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega+\int\dot{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma=\ddot{\boldsymbol{r}}_0\cdot\boldsymbol{p}+\dot{\boldsymbol{\omega}}\cdot\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\dot{\boldsymbol{I}}\cdot\boldsymbol{\omega}+\dot{\boldsymbol{K}}+\int\boldsymbol{T}:\nabla\dot{\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\Omega \tag{4.19}$$

这三个用非惯性参考标架度量的方程是物体运动控制方程。前两个方程代表动量守恒，后第三个方程代表能量守恒。

非惯性标架的选择

我们将非惯性标架的原点选择在物体的质心处，这时有

$$\dot{\boldsymbol{r}}_0=\frac{1}{m}\int\rho\,\dot{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\Omega \tag{4.20}$$

式中 m——物体的质量。

利用(4.20)式，容易证明

$$\int\rho\,\dot{\boldsymbol{r}}\,\mathrm{d}\Omega=\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0} \tag{4.21}$$

及

$$\dot{\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{0} \tag{4.22}$$

同样我们也选取使在非惯性标架中观察者测量到的物体角动量为零的坐标轴，有

$$\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{H}'-\boldsymbol{r}_0\times\boldsymbol{p}' \tag{4.23}$$

从而

$$\boldsymbol{H}=\dot{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{0} \tag{4.24}$$

惯性标架中的动量和动能表达式则简化成

$$p' = m\dot{r}_0 \tag{4.25}$$

$$H' = m(r_0 \times \dot{r}_0) + \omega \cdot I \tag{4.26}$$

$$K' = \frac{1}{2}m\dot{r}_0^2 + \frac{1}{2}\omega \cdot I \cdot \omega + K \tag{4.27}$$

相对于这个特定的参考标架，运动方程(4.17)式至(4.19)式简化成

$$F = m\ddot{r}_0 \tag{4.28}$$

$$L = \dot{\omega} \cdot I + \omega \times (\omega \cdot I) + \omega \cdot \dot{I} \tag{4.29}$$

$$\int \dot{r} \cdot R d\Omega + \int \dot{r} \cdot t d\Gamma = -\frac{1}{2}\omega \cdot \dot{I} \cdot \omega + \dot{K} + \int T : \nabla \dot{r} d\Omega \tag{4.30}$$

式中 K —— 非惯性参考标架中的动能。

最后一个方程的左端项是外力在物体上所产生的功率，右端的前两项是运动标架中的动能，最后一项是物体内应变能的变化率。

(4.28)式、(4.29)式和(4.30)式定义了相对于动坐标系的运动方程，坐标系的原点在任何时候总是固定在质心处，坐标系的方向选择在使相对于标架的角动量为零的方向。

质心的平动由(4.28)式给出。

物体相对于质心的转动由(4.29)式给出，对于小角速度和小应变的情况，方程简化成熟悉的形式：

$$L = \dot{\omega} \cdot I$$

物体的变形由(4.30)式确定。通过把变形写成固有振动模态的形式，可得到每个模态的解耦方程。

4.2 模 态 分 解

在 Tisserand 坐标系中，物体内任一点的位置为 r(图 4.2)。我们可以写成

$$r = \bar{r} + g \tag{4.31}$$

式中 $\bar{r}$——未变形前点的位置矢量；

g——弹性变形矢量。

(4.31)式也适用于大位移的情况，但是由于应变中非线性项的存在，转动将引起应变。弹性变形矢量 g 可用有限项振动模态的展开式来表示，即

$$g(x,y,z,t)=\sum_i \phi_i(x,y,z)\xi_i(t) \tag{4.32}$$

式中 ξ_i——广义坐标；

ϕ_i——固有模态振型矢量，下标 i 代表第 i 个模态，求和是对所有模态进行。

固有模态具有如下正交性质：

$$\int \rho\,\phi_i\phi_j \mathrm{d}\Omega=\begin{cases}0 & i\neq j\\ m_i & i=j\end{cases} \tag{4.33}$$

式中 m_i——广义质量(有时也称有效质量)。

模态必须满足线动量和角动量方程，对自由振动即为：

$$\int \phi_i \mathrm{d}\Omega=0 \tag{4.34}$$

$$\int \boldsymbol{r}\times\phi_i \mathrm{d}\Omega=0 \tag{4.35}$$

Fraeijs de Veubeke(1976)证明了如果相对位移 g 仅限制于用固有模态的展开式来表示，则均方位移最小值原理将自动满足，并且平均运动(刚体运动)方程(4.28)式和(4.29)式仅与动坐标系的运动有关。

用于广义模态的哈米顿原理

运用加权余量法、拉格朗日原理、哈米顿原理或虚功原理，即可对每个模态方程解耦。这里我们从哈米顿原理出发来进行推导。哈米顿原理可表示为

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(K-U)\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t_1}\delta W\mathrm{d}t \tag{4.36}$$

式中 K 动能；

U —— 内能；

δW —— 虚功。

动能

动能的表达式如下

$$K' = \frac{1}{2}m\dot{r}_c^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}m_i\dot{\xi}_i^2 \tag{4.37}$$

式中

$$m_i = \int \rho\phi_i\phi_i \mathrm{d}\Omega$$

注意，固有模态的正交性保证了广义质量 m_i 的表达式中无交叉项出现。

内应变能/弹性恢复项

自由振动的前两个方程在(4.34)式和(4.35)式中给出了。第三个方程为

$$\Gamma(\boldsymbol{\phi}) = \rho n^2\boldsymbol{\phi} \tag{4.38}$$

式中 n—— 振动模态的角频率(特征值)；

Γ—— 与物体变形性质有关的算子。

内应变能

Bisplinghoff 和 Ashley(1975)证明了小应变问题的内应变能可表示成

$$U = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{g}\cdot\Gamma(\boldsymbol{g})\mathrm{d}\Omega \tag{4.39}$$

利用

$$\boldsymbol{g} = \sum \boldsymbol{\phi}_i\xi_i$$

和正交条件，得

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \int \boldsymbol{\phi}_i\cdot\Gamma(\boldsymbol{\phi}_i)\mathrm{d}\Omega\xi_i\xi_i \tag{4.40}$$

再利用

$$\Gamma(\phi_i) = \rho n_i^2 \phi_i$$

得到

$$U = \frac{1}{2}\sum_i n_i^2 \int \phi_i \cdot \phi_i \rho \mathrm{d}\Omega \xi_i \xi_i \tag{4.41}$$

由于

$$\int \phi_i \cdot \phi_i \rho \mathrm{d}\Omega = m_i$$

从而

$$U = \frac{1}{2}\sum_i m_i n_i^2 \xi_i^2 \tag{4.42}$$

外力所做的功

如果

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma + \int \boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega \tag{4.43}$$

式中 $\boldsymbol{t}$——单位面积上的面力；

$\boldsymbol{R}$——单位体积内的体力。

在广义位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{g}$ 上所做的微功是

$$\delta W = \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{g} = \int \boldsymbol{t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{g}\mathrm{d}\Gamma + \int \boldsymbol{R} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{g}\mathrm{d}\Omega$$

$$= \sum_i \left(\int \boldsymbol{t} \cdot \phi_i \mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\Gamma + \int \boldsymbol{R} \cdot \phi_i \mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\Omega\right) \tag{4.44}$$

将动能、内能和外力所做的功代入哈米顿方程(4.36)式中，对广义坐标 ξ_i 取变分，则有

$$\int \{m_j \ddot{\xi}_j + m_j n_j^2 \xi_j - \int (\boldsymbol{t} \cdot \phi_j)\mathrm{d}\Gamma - (\boldsymbol{R} \cdot \phi_j)\mathrm{d}\Omega\}\mathrm{d}\xi_j \mathrm{d}t = 0 \tag{4.45}$$

由于 $\mathrm{d}\xi_j$ 是完全任意的，因此有

$$m_j \ddot{\xi}_j + m_j n_j^2 \xi_j = \int (\boldsymbol{t} \cdot \phi_j)\mathrm{d}\Gamma + \int (\boldsymbol{R} \cdot \phi_j)\mathrm{d}\Omega \tag{4.46}$$

(4.46)式确定了物体的每个变形模态(选择适当的 ϕ_j，上式也可用于表示刚体运动)。

(4.46)式左端第一项为广义加速度，如：线加速度、角加速度

或变形模态加速度。第二项是由广义位移 ξ_i 引起的恢复力。对刚体运动而言，恢复力为零、因为特征值等于零；对变形模态，恢复力与物体的变形模量和几何形状有关。

右端各项是广义力。对直线运动，ϕ 是单位矢量，各项相加便是合力。对转动情况 ϕ 是由 x、y 组成的矢量，它代表了合力偶。

应该注意在上面的推导中没有考虑阻尼。采用更一般的形式，将改变物体的特征向量和特征值。然而，正如 Bathe and Wilson (1976)所指出的那样，如果我们谨慎选择阻尼且又是小阻尼，如质量阻尼、刚度阻尼或瑞利阻尼，那么阻尼矩阵对特征值和特征向量没有太大影响。

4.3 有限元模态分解

求解问题

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f} \tag{4.47}$$

式中 $\boldsymbol{M}$——质量矩阵；

$\boldsymbol{K}$——对称、正定的刚度矩阵；

$\boldsymbol{a}$——未知的结点位移向量；

$\boldsymbol{f}$——给定的荷载向量。

我们取

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{\phi}\alpha(t) \tag{4.48}$$

式中 $\boldsymbol{\phi}$ 是标准特征值问题

$$\boldsymbol{K}\alpha\boldsymbol{\phi}=\lambda\boldsymbol{M}\alpha\boldsymbol{\phi} \tag{4.49}$$

的特征向量矩阵，$\alpha(t)$是模态参与因子向量。(4.47)式可以重新写成

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}\ddot{\alpha}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}\alpha=\boldsymbol{f} \tag{4.50}$$

用 $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}$ 前乘上式，我们得到

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}\ddot{\alpha}+\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}\alpha=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{f} \tag{4.51}$$

由于 $\boldsymbol{\phi}$ 包含有矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的特征向量，$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}$ 实际上是规范化的矩阵

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}=\Lambda,\ \boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{I} \tag{4.52}$$

式中 Λ —— 对角矩阵，对角线上的元素为特征值 λ_i；

$\boldsymbol{I}$—— 单位矩阵。

n 阶线性方程组现在就分解成了 n 个独立的方程。

$$\ddot{\alpha}_i+\lambda_i\alpha_i=\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f} \tag{4.53}$$

从中我们可以直接求出 α_i。

(4.51)式和(4.53)式是用于确定模态响应大家所熟悉的方程。

4.4 一维问题详述

一维接触问题的模态描述

模态分解原理可用一个简单的一维问题来说明。



图 4.3 形函数为 N_1、N_2 的线性一维单元

考察如图 4.3 所示的一维线性有限元，形函数 N_1 和 N_2 为

$$\begin{aligned} N_1&=\frac{1}{2}(1-\xi),\\ N_2&=\frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \tag{4.54}$$

为简单起见，取单元的长度从 $x=-\frac{L}{2}$ 至 $x=\frac{L}{2}$。单元的杨氏模量用 E 表示，密度用 ρ 表示，截面积用 A 表示。

如果在单元的结点 1 和结点 2 上分别作用有体力 F_1 和 F_2 且不计阻尼，单元的运动和变形可表示成

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F} \tag{4.55}$$

其中，质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 可确定如下：

注意到

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=-\frac{1}{L},\frac{\partial N_2}{\partial x}=\frac{1}{L}$$

和

$$u(x)=\sum_{i=1}^{2}N_iu_i$$

有

$$\varepsilon_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial N_i}{\partial x}u_i=(-\frac{1}{L})u_1+(\frac{1}{L})u_2 \tag{4.56}$$

用典型的有限元符号表示，上式可写成

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{xx}=\boldsymbol{Ba}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix},\boldsymbol{a}=\{u_1\ u_2\}^{\mathrm{T}} \tag{4.57}$$

刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\int\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{DB}\mathrm{d}\Omega$$

在本例中，刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}=\int_{-1}^{1}A\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}E\begin{Bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{Bmatrix}\frac{L}{2}\mathrm{d}\xi=\frac{EA}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} \tag{4.58}$$

选取集中质量矩阵（运用 $m_{ij}=\frac{AL\rho}{2}\int_{-1}^{1}N_iN_j\mathrm{d}\xi$，重复上述计算步骤，即可得到一致质量矩阵）

$$\boldsymbol{M}=\frac{AL\rho}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.59}$$

现在(4.55)式可写成

$$\frac{AL\rho}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\\ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\F_2\end{Bmatrix} \tag{4.60}$$

令

$$u_i=\phi\alpha_i(t)\quad\text{而}\quad\alpha_i(t)=a_ie^{i\omega t}$$

特征值方程则成为

$$\left\{-\rho\omega^2\frac{AL}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\right\}\boldsymbol{\phi}=\mathbf{0} \qquad (4.61)$$

即

$$\begin{bmatrix}(\frac{E}{L}-\rho\omega^2\frac{L}{2}) & -\frac{E}{L}\\ -\frac{E}{L} & (\frac{E}{L}-\rho\omega^2\frac{L}{2})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \qquad (4.62)$$

上式给出

$$\left(1-\frac{\rho\omega^2L^2}{2E}\right)^2-1=0$$

或

$$\left[\left(1-\frac{\rho\omega^2L^2}{2E}\right)-1\right]\left[\left(1-\frac{\rho\omega^2L^2}{2E}\right)+1\right]=0 \qquad (4.63)$$

两个根分别为

$$\omega=0 \quad 和 \quad \omega=\frac{2}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

将(4.62)式重写成

$$\begin{bmatrix}(1-\frac{\rho\omega^2L^2}{2E}) & -1\\ -1 & (1-\frac{\rho\omega^2L^2}{2E})\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{Bmatrix}=\mathbf{0} \qquad (4.64)$$

对 $\omega=0$，有 $\phi_1-\phi_2=0$ 或 $\phi_1=\phi_2$

对 $\omega=\frac{2}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ 有 $\phi_1+\phi_2=0$ 或 $\phi_1=-\phi_2$

因此两特征向量为 $\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}$ 和 $\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}$。

这些特征向量能使 M 正交化，即

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}=\delta_{ij} \qquad (4.65)$$

为此，用 a 乘每个特征向量，其中 $a=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}$

则使 M 正交化的特征向量即是：

$$\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}\begin{Bmatrix}1\\1\end{Bmatrix} \quad 和 \quad \frac{1}{\sqrt{\rho LA}}\begin{Bmatrix}1\\-1\end{Bmatrix}$$

(4.55)式现在转化成

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}-\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F} \tag{4.66}$$

其中

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

刚度矩阵规范化的形式为

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}=\frac{1}{\rho LA}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}=\frac{4E}{\rho L^2}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{4.67}$$

广义力为

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}\begin{Bmatrix}(F_1+F_2)\\(F_1-F_2)\end{Bmatrix}$$

因此变换后的方程为

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\alpha}_1\\\ddot{\alpha}_2\end{Bmatrix}+\frac{4E}{\rho L^2}\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}\begin{Bmatrix}(F_1+F_2)\\(F_1-F_2)\end{Bmatrix} \tag{4.68}$$

从而

$$\ddot{\alpha}_1=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}(F_1+F_2) \tag{4.69}$$

及

$$\ddot{\alpha}_2+\frac{4E}{\rho L^2}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}(F_1-F_2)$$

或

$$\ddot{\alpha}_2+\omega^2\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}(F_1-F_2) \tag{4.70}$$

由于

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\phi}\boldsymbol{\alpha}=-\frac{1}{\sqrt{\rho LA}}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\end{Bmatrix} \tag{4.71}$$

我们可以写成

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix}=\frac{\sqrt{\rho LA}}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix} \tag{4.72}$$

将上式代入(4.69)式和(4.70)式，则有

$$\rho LA\left(\frac{\ddot{u}_1+\ddot{u}_2}{2}\right)=F_1+F_2 \tag{4.73}$$

$$\frac{\rho L^2A}{2}\left(\frac{\ddot{u}_1-\ddot{u}_2}{L}\right)+2EA\,\frac{(u_1-u_2)}{L}=F_1-F_2 \tag{4.74}$$

注意到$\frac{1}{2}(u_1+u_2)$是质心的位移，第一个方程确定了质心的运动，可以写成

$$M\ddot{u}_R=\sum F \tag{4.75}$$

其中 u_R 是质心位移

$$M=\rho AL$$

又注意到$\frac{1}{L}(u_1-u_2)$是单元的应变(单元的长度是 L)，第二个方程可写为

$$\frac{ML}{2}\left(\frac{\ddot{u}_1-\ddot{u}_2}{L}\right)+2E\left(\frac{u_1-u_2}{L}\right)A=(F_1-F_2)$$

或

$$M_R\ddot{\epsilon}+2\sigma A=(F_1-F_2) \tag{4.76}$$

式中 σ——单元的应力；

M_R——广义(有效)质量。

一维接触问题的有限元法

采用标准的有限元方法可以得到一种等效的方法，下面将介绍该方法并与模态法进行比较。

单个线性一维有限元动力平衡方程已由(4.60)式给出

$$\frac{AL\rho}{2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{u}_1\\ \ddot{u}_2\end{Bmatrix}+\frac{AE}{L}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_1\\ u_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\end{Bmatrix}$$

现在考察与结点 2 相连的两个单元，如图 4.4(a)。

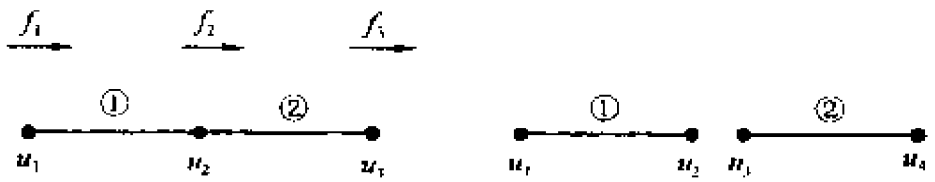
对结点 1

$$m_1\ddot{u}_1 = f_1 - \frac{AE_1}{L_1}(u_1 - u_2) \tag{4.77}$$

式中 E_1 ——单元 1 的模量；

m_1 ——来自单元 1 的结点质量贡献。

对结点 2，它跨过两个单元，对每个单元，可得到如下方程（外力 f 可任意由两个单元共享，结点 2 的总质量假定平均取自每个单元）：



(a) 具有共同结点 2 的两个一维有限元

(b) 两个分开的一维有限元，结点 2、3 之间存在可能的相互作用

图 4.4 与结点 2 相连的两个单元

$$\frac{1}{2}m_2\ddot{u}_2 = \frac{f_2}{2} - \frac{E_1}{L_1}(-u_1 + u_2) - R \quad \text{对单元 1} \tag{4.78}$$

$$\frac{1}{2}m_2\ddot{u}_2 = \frac{f_2}{2} - \frac{E_2}{L_2}(u_2 - u_3) + R \quad \text{对单元 2} \tag{4.79}$$

式中 R ——单元 1 对单元 2 的反作用力。

联系两个单元的总方程为

$$m_2\ddot{u}_2 = f_2 + A\left\{\frac{E_1}{L_1}u_1 - \left(\frac{E_1}{L_1} + \frac{E_2}{L_2}\right)u_2 + \frac{E_2}{L_2}u_3\right\} \tag{4.80}$$

现在分别考察两个单元，在交界处存在有相互作用力 F，如图 4.4(b)，其中 $F = k_{23}(u_3 - u_2)$，k_{23} 表示结点 2 与结点 3 之间的相互作用刚度。

在这种情况下，对 u_2 有方程

$$m_2\ddot{u}_2 = f_2 + A\left\{\frac{E_1}{L_1}u_1 - \left(\frac{E_1}{L_1} + \frac{k_{23}}{A}\right)u_2 + \frac{k_{23}}{A}u_3\right\} \tag{4.81}$$

比较(4.80)和(4.81)两式，可以看到用相互作用刚度代替相邻单元的影响就是用 k_{23} 代替 $\frac{AE_2}{L_2}$。

类似地可以得到结点 3 的方程

$$m_3\ddot{u}_3 = f_3 + A\left\{\frac{k_{23}}{A}u_2 - \left(\frac{k_{23}}{A} + \frac{E_2}{L_2}\right)u_3 - \frac{E_2}{L_2}u_4\right\} \qquad (4.82)$$

现在考察由两个单元组成的物体与由一个单元组成的物体的相互作用问题。下表列出了与每个单元和每个结点有关的量

位移		u_1		u_2		u_3		u_4		u_5
模量 E	0		E_1		E_2		0		E_3		0
刚度 k	0		0		0		k_{34}		0	0
几何形状	u_1		u_2		u_3		u_4		u_5	

我们注意到如果结点两旁的单元模量或刚度是已知的，则可对每个结点形成正确的方程和结点质量。

例如考察结点 3。注意或者是单元模量或者是相互作用刚度将出现在方程中，但不可能同时出现，因此方程可写成

$$m_3\ddot{u}_3 = f_3 + \{p_{23}u_2 - (p_{23} + p_{34})u_3 + p_{34}u_4\} \qquad (4.83)$$

式中 m——总结点质量；

p_{23}——或者代表$\frac{AE_2}{L_2}$或代表结点 2、3 之间的刚度 k_{23}。

引进与质量成比例的阻尼 $c=\alpha m$ 和与刚度成比例的阻尼 $c=\beta k$，则可得到与结点 i 有关的一般方程

$$\begin{aligned}\dot{u}_i^{n+\frac{1}{2}} = {} & R_1R_2\dot{u}_i^{n-\frac{1}{2}} + \frac{R_1\Delta t}{m_i}f_i^n + \frac{R_1\Delta t}{m_i}\\ & \left[p_{i-1,i}u_{i-1}^n - (p_{i-1,i} + p_{i,i+1})u_i^n + p_{i,i+1}u_{i+1}^n\right]\\ & + \frac{R_1\Delta t}{m_i}\left[\beta_{i-1,i}u_{i-1}^{n-\frac{1}{2}} - (\beta_{i-1,i} + \beta_{i,i+1})u_i^{n-\frac{1}{2}}\right.\\ & \left. + \beta_{i,i+1}\dot{u}_{i+1}^{n-\frac{1}{2}}\right] \qquad (4.84)\end{aligned}$$

式中 $R_1 = \left(1 + \frac{\alpha\Delta t}{2}\right)^{-1}$；

$R_2 = \left(1 - \frac{\alpha\Delta t}{2}\right)$。

4.5 离散系统分析的广义模态法

4.5.1 变形单元简介

对一个单元，离散元求解如下形式的动力平衡方程

$$\rho\ddot{u}_i = R_i + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (in \quad \Omega) \tag{4.85}$$

在 Γ_1 上有边界条件 $u_i = u_0$，在 Γ_2 上有 $F_i = F_0$，其中 ρ 是密度，$\ddot{u}_i$ 是沿 i 方向的加速度，R_i 是体力，σ_{ij} 是应力张量(压应力为正)，x_j 是计算物体内所在点 p 的笛卡尔坐标。

刚体方程(4.85)式可以退化成标准的运动方程

$$\sum F_i = m\ddot{u}_i (质心沿\ i\ 方向的平动) \tag{4.86}$$

$$\sum C = I\ddot{\theta} (绕质心的转动) \tag{4.87}$$

式中 F_i——i 方向的合力；

C——绕质心的力偶；

m——单元质量；

I——绕质心的惯性矩。

Cundall 等(1978)推广了刚体模型法，使单元可以有相对于质心的变形。这种单元称简单变形单元。尽管原来的公式在单元应变方面还有许多问题，这点在下面将看到，但是这种方法可通过采用其他单元模态调整至趋于正确。这里我们沿着历史发展的进程首先讨论应变模态法。

假设单元应变方程可写成与刚体模态无关的形式

$$m^k\dot{\varepsilon}^k = \sigma_A^k - \sigma_I^k \tag{4.88}$$

式中 m^k——相对于应变模态 k 的单元广义(有效)质量；

ε^k——应变模态 k 的内应变速率；

σ_A^k——相对于应变模态 k 的单元应力。

这些所谓的"应变方程"已经被用在几种离散(特殊)元格式中。认为它们的正确性是基于这样一种假设，即单元的变形可以表达成刚体运动与应变的迭加，从而单元内任一点 p 处的位移可写成

$$u_i=\bar{u}_i+\omega_{ij}\bar{x}_j+\varepsilon_{ij}\bar{x}_j \tag{4.89}$$

式中 $\bar{x}_i$ ——点 p 相对于单元质心的坐标；

u_i——单元内任一点 p 的位移；

$\bar{u}_i$——质心沿 i 方向的位移；

$\bar{x}_j$——点 p 相对于质心的坐标；

ω_{ij}——转动张量，定义为 $\omega_{ij}=e_{ijk}\omega_k$，其中 e_{ijk} 是置换张量，ω_k 是转动矢量；

ε_{ij}——应变张量。

重复指标隐含求和。

单元内任一点的位移可表示成模态 ϕ 的展开式，(4.89)式只是这种更一般表达式的一个特例，即

$$u_i=\sum\phi_i^k\alpha^k \tag{4.90}$$

式中 ϕ^k——第 k 个模态向量；

α^k——相应的与时间有关的参与因子。

假定所选择的模态满足正交条件，即当 $k\neq l$ 时，$\phi^k\cdot\phi^l=0$

将(4.90)式代入(4.85)式，每一项乘以权函数 ϕ_i^l，再在整个体积上积分，则有

$$\sum_k\int\rho\phi_i^l\phi_i^k\mathrm{d}\Omega\ddot{\alpha}^k=\int\phi_i^lR_i\mathrm{d}\Omega+\int\phi_i^l\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega \tag{4.91}$$

利用模态的正交性，即可得到关于模态 ϕ^l 的方程

$$\int\rho\phi_i^l\phi_i^l\mathrm{d}\Omega\ddot{\alpha}^l=\int\phi_i^lR_i\mathrm{d}\Omega+\int\phi_i^l\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\mathrm{d}\Omega \tag{4.92}$$

上述方程再与力边界条件

$$\int\phi_i^l(F_i-F_0)\mathrm{d}\Gamma_2=0$$

结合起来，则得到

$$m^l\ddot{\alpha}^l=s_A^l-s_l^l \tag{4.93}$$

式中

$$m^l=\int\rho\phi_i^l\phi_i^l\mathrm{d}\Omega$$

$$s_A^l=\int\phi_i^lR_i\mathrm{d}\Omega+\int\phi_i^lF_i\mathrm{d}\Gamma_2$$

$$s_i = \int \phi_i \sigma_{j,j} \mathrm{d}\Omega$$

注意到(4.93)式与(4.88)式极为相似。(4.88)式和(4.89)式是参与因子 α 的特例，坐标 x_i 就是模态 ϕ 的具体形式。至于对由(4.90)式给出的特别选定的模态，还有待于证明其正交条件。

4.5.2 正交条件

考察由(4.90)式给出的变形模态。让我们具体地检查一个四结点线性四边形单元的正交性，如图 4.5。结点位移为 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = \{u_1 \cdots u_8\}^{\mathrm{T}}$，其中对结点 1，$u_1 = u_x$，$u_2 = u_y$ 等等。刚体模态可表示如下

$\boldsymbol{\phi}^{1\mathrm{T}} = \{1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}$ 沿 x 方向平动

$\boldsymbol{\phi}^{2\mathrm{T}} = \{0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1\}$ 沿 y 方向平动

$\boldsymbol{\phi}^{3\mathrm{T}} = \{-y_1 \quad x_1 \quad -y_2 \quad x_2 \quad -y_3 \quad x_3 \quad -y_4 \quad x_4\}$ 绕质心的转动

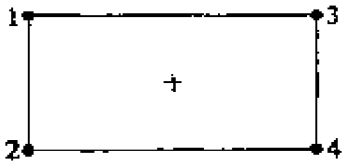
式中，x_i 和 y_i 为相对质心的结点坐标。

应变模态可表示为

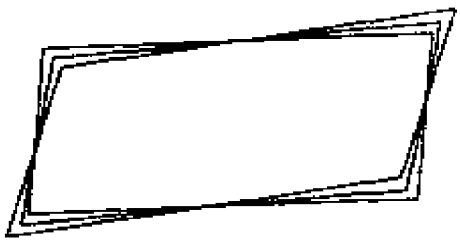
$\boldsymbol{\phi}^{4\mathrm{T}} = \{x_1 \quad 0 \quad x_2 \quad 0 \quad x_3 \quad 0 \quad x_4 \quad 0\}$ 应变 x

$\boldsymbol{\phi}^{5\mathrm{T}} = \{0 \quad y_1 \quad 0 \quad y_2 \quad 0 \quad y_3 \quad 0 \quad y_4\}$ 应变 y

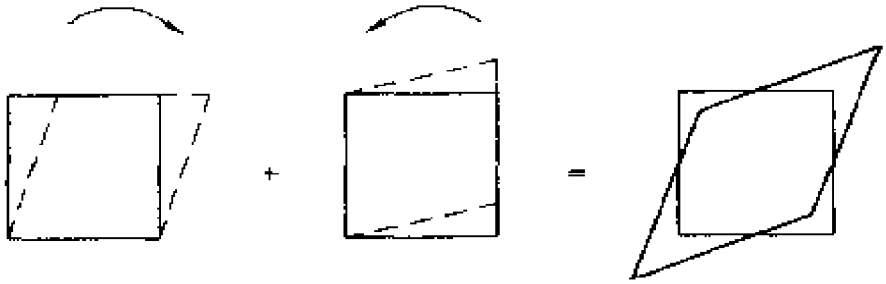
$\boldsymbol{\phi}^{6\mathrm{T}} = \{y_1 \quad x_1 \quad y_2 \quad x_2 \quad y_3 \quad x_3 \quad y_4 \quad x_4\}$ 剪应变



(a) 线性四结点四边形单元



(b) 剪切引起刚体转动



(c) 正方形剪切应变使得转动相互抵消

图 4.5 四结点四边形单元的正交性

还需要两个另外的模态来弥补不足的模式，但由于开始时没有考虑，眼下仅把它们记为 ϕ^7 和 ϕ^8，并且假设它们与其他模态是正交的。

既然要应用模态叠加原理，应变变形模态则必须要正交于刚体平动和转动模态(Bisplinghoff 等 1962；de Veubeke，1972) 这些条件可以写成

$$\int \rho \phi^k \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \text{(除平动外的所有模态)} \tag{4.94}$$

$$\int \rho (r \times \phi^k) \mathrm{d}\Omega = 0 \quad \text{(除转动外的所有模态)} \tag{4.95}$$

对于质量集中在结点上的四边形单元，(4.94)和(4.95)两式所隐含的条件详列在表 4.1 中(对理想化的分布质量，也可导出类似的条件)。

共有四个相互独立的条件，如果每个应变变形模态都要正交于刚体模态的话，则必须满足四个独立的条件。

如果变形是在局部坐标系中度量的，且坐标系的原点又选择在质心处，则条件 $\sum m_i x_i = 0$ 和 $\sum m_i y_i = 0$ 自然满足。但条件 $\sum m_i x_i y_i = 0$ 只有在特别选定的局部坐标系的方向时才能满足。这种坐标系称单元的主坐标系。最后一个条件 $\sum m_i (x_i^2 - y_i^2) = 0$ 一般是不满足的。如果满足条件 $\sum m_i (x_i^2 - y_i^2) = 0$，就出现了主惯性矩相等的特殊情况。因此我们得到结论，对一般形状的单元、剪应变将引起单元转动，所以不能用在与叠加原理有关的方法中。图 4.5(b)表示剪应变和转动是怎样在一个四边形单元中耦合的。

表 4.1　应变为模态时，单元必须满足的条件

条　件	ε_{xx}	ε_{yy}	ε_{xy}
$\int \rho \phi^k \mathrm{d}\Omega = 0$	$\sum m_i x_i = 0$	$\sum m_i y_i = 0$	$\sum m_i (x_i - y_i) = 0$
$\int \rho (r \times \phi^k) \mathrm{d}\Omega = 0$	$\sum m_i x_i y_i = 0$	$\sum m_i x_i y_i = 0$	$\sum m_i (x_i^2 - y_i^2) = 0$

注：m_i —— 结点 i 的质量；

x_i、y_i —— 结点 i 的坐标。

4.5.3 正交于转动的虚剪切模态的导出

为了导出一个与其他模态正交的剪切型模态，有必要了解剪切引起转动的原因。

剪应变 ϵ_{xy} 定义为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 或 $\frac{1}{2}(\epsilon_{yx}+\epsilon_{xy})$，它可以看作是两分开应变之和。对于正方形单元来说，一个变形所固有的转动被另一个变形所固有的转动相抵消，如图 4.5(c)。如果所考察的单元不是正方形，则转动不能互相抵消，于是出现了转动。

为了寻找一个无转动的模态，让我们考察由式 $\bar{\epsilon}_{xy}=a\epsilon_{yx}+b\epsilon_{xy}$ 给出的"虚"剪切模态，式中 a、b 是给定单元的几何常数，相应的 ϕ 为

$$\bar{\phi}_6^{\mathrm{T}}=\{ay_1 \quad bx_1 \quad ay_2 \quad bx_2 \quad ay_3 \quad bx_3 \quad ay_4 \quad bx_4\}$$

在集中质量方法中，正交于转动模态 ϕ_3 的条件为

$$\boldsymbol{\varphi}^{3\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{\phi}}_6=0 \tag{4.96}$$

或

$$a\sum y_i^2=b\sum x_i^2, a:b=\sum x_i^2:\sum y_i^2$$

容易证明，$a:b$ 实际上就等于相对于单元局部坐标系主轴的单元惯性矩之比 $I_y:I_x$。

应该注意，在检查正交性时，必须代入结点的实际坐标值 x_i、y_i 等。然后再验证 $\bar{\phi}_6$ 是否与所有的其他模态 ϕ 正交。

采用与上述相类似的推理方法，可以证明，对一般形状的二维四边形单元，选择既是互相正交的又与单元应变密切相关的模态是可能的。一般来说，这样的模态并非是单元的特征模态。

修改后的应变模态可以用作显式格式的基，类似于 Cundall 等(1978)建议的方法。

4.5.4 改进的方法

考察用于线性有限元的动力平衡方程(4.85)式。在标准的有限元教科书中，如 Bath 和 Wilson(1976)[43]，我们看到，动力平衡方程用矩阵的形式可以写成

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{f}-\boldsymbol{K}\boldsymbol{a} \tag{4.97}$$

式中 a——结点位移向量；

M——质量矩阵；

K——刚度矩阵；

f——结点力向量。

除了 $\ddot{a}$ 假设在时间步长 n 中是已知的外，其他量在该步长中的值都是由计算得到的。

一般刚度矩阵是非对角矩阵。如果质量矩阵是对角矩阵，则可用标准的显式计算格式，每个结点的加速度 $\ddot{u}_i$ 可以从式

$$\ddot{a}=M^{-1}(f-Ka)$$

中独立求得。

对显式格式，关键是要保证质量矩阵是对角的。右端项中已知量 u_i 间的耦合并不防碍使用显式方法。

考察由下式给出的单元变形模态

$$\phi\alpha=a$$

其中假定每个模态都是和其他所有模态正交的，但并不要求是单元的特征模态。用 ϕ^{T} 同乘上式两边，我们得到

$$\phi^{\mathrm{T}}\phi\alpha=\phi^{\mathrm{T}}a$$

$\phi^{\mathrm{T}}\phi$ 总是对角的，如果我们所选择的模态既是正交的又是正规的，那么可以写成

$$\alpha=\phi^{\mathrm{T}}a$$

将 a 和 $\ddot{a}$ 代入(4.97)式，并用 ϕ^{T} 同乘该式，则有

$$\phi^{\mathrm{T}}M\phi\ddot{\alpha}=\phi^{\mathrm{T}}f-\phi^{\mathrm{T}}K\phi\alpha \tag{4.98}$$

现在随 ϕ 的不同选择可得到各种可能的形式。

选择单位矩阵 $\phi=I$，则回到了原来的有限元显式方法，并有 $\alpha=a$。应该注意结点位移仍然形成一组正交的模态，例如

$$\phi^{1\mathrm{T}}=\{1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\}$$

$$\phi^{2\mathrm{T}}=\{0\quad 1\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\quad 0\}$$

当 $i\neq j$ 时，$\phi_i^{\mathrm{T}}\phi_j=0$。

第二种可能的选择就是将 ϕ 取作单元的特征模态矩阵，即 ϕ 是特征问题

$$\boldsymbol{K}\alpha_i\boldsymbol{\phi}_i=\lambda\boldsymbol{M}\alpha_i\boldsymbol{\phi}_i$$

的解。由于 $\boldsymbol{\phi}$ 包含矩阵 k 的特征向量，$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}$ 实际上是规范化的刚度矩阵，而 $\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}$ 则是对角质量矩阵

$$\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\phi}=\Lambda,\boldsymbol{\phi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{I}$$

其中 Λ 是对角矩阵，对角线上的元素为特征值 λ，$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵。n 个耦合的线性方程组现在被分解成了 n 个独立的方程

$$\ddot{\alpha}_i=\boldsymbol{\phi}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}-\lambda_i\alpha_i\quad i=1,\cdots n \tag{4.99}$$

从中我们可以直接求得 α_i。

第三种可能的选择就是取 $\boldsymbol{\phi}$ 为一组正交模态，这组正交模态并非特征模态，但仍能使质量矩阵 $\boldsymbol{M}$ 对角化。这组模态可尽量接近单元应变，但不能是真实的应变，见图 4.5。

无论所选择的模态是特征模态还是非特征模态，应当注意的是在任何时候模态都必须以相对于绕单元转动的局部坐标系的形式给定。若模态方程写成用整体坐标表示，则当单元转动时，质量矩阵不再是对角矩阵。

4.5.5 模态方程的旋转

假定所得到的解耦后的单元模态方程是相对于固定的整体坐标系的。具体地说就是让长方形单元的边与坐标轴对齐。

现在考察在初始坐标系 (x,y) 中的单元模态方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{f}} \tag{4.100}$$

其中，矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是对角的，若选择特征模态，则 $\boldsymbol{K}$ 也是对角矩阵。

现在让单元绕质心旋转 θ 角。

不难证明，对旋转后的单元，矩阵 M' 和 $\boldsymbol{K}'$ 在初始整体坐标系中可以写成

$$\boldsymbol{M}'=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\boldsymbol{R},\boldsymbol{K}'=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\boldsymbol{R} \tag{4.101}$$

其中，$\boldsymbol{R}$ 是反对称旋转矩阵。因此(4.100)式成为

$$\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{M}}\boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{f}} \tag{4.102}$$

上式也是单元相对于整体坐标系的新方程。

容易证明，$\boldsymbol{M}'$ 和 $\boldsymbol{K}'$ 不再是对角阵，(4.102)式现在是耦合的。

为了寻找使方程解耦的坐标轴，用 $\boldsymbol{R}$ 前乘(4.102)式，并注意

到 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ 是单位矩阵），则有

$$\boldsymbol{M}\boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}=\bar{\boldsymbol{f}} \tag{4.103}$$

因此对旋转后的单元，新向量为 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{\alpha}$，也即是旧向量旋转了与单元相同的角度。

然而需要注意的是模态仅相对于随单元旋转的坐标轴是正交的，方程也只有在这些旋转的坐标系中才是解耦的。对于有大应变的单元，定义随物体旋转的坐标轴的路径是一个重要的课题。

有一种特殊情况，就是将结点位移取作模态，即 $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{I}$。在这种情况中，旋转使单位矩阵保持不变，方程可写成用整体坐标表示。

从第三点讨论中，可以得到重要的结论，那就是标准的有限元方法可以用于离散元。

4.6 本构关系

4.6.1 单元本构关系

正如在以前几节中所看到的那样，离散元可完全用与有限元相同的方法构造。材料模型对两种方法也是相同的，因此任何适用于有限元的本构模型也适用于离散元。例如，离散元可描述具有任意形式的屈服面或塑性势的弹粘塑性性质，原则上，在第一章中，所叙述的本构模型都是适用的。

除普通塑性破坏外，离散元还能反映脆性破坏。当单元中的应力状态超过了用户所定义的极限时，脆性断裂发生，单元分成两部分。新单元的生成是自动进行的，由于不需要形成总刚度矩阵，因此在重新组织数据方面不会发生问题（单元也可很容易地删除）。图 4.6 显示了导弹击中隧道时发生的断裂情况。

在 CICE 和 DECICE 程序系统中，采用了具有拉伸截断的莫尔—库仑脆性材料模型。当使用这种材料模型时，可反映三种脆性破坏状态，即：压缩、拉伸、弯曲。下面叙述相对于这些裂开模式的破坏准则。

压缩破坏准则

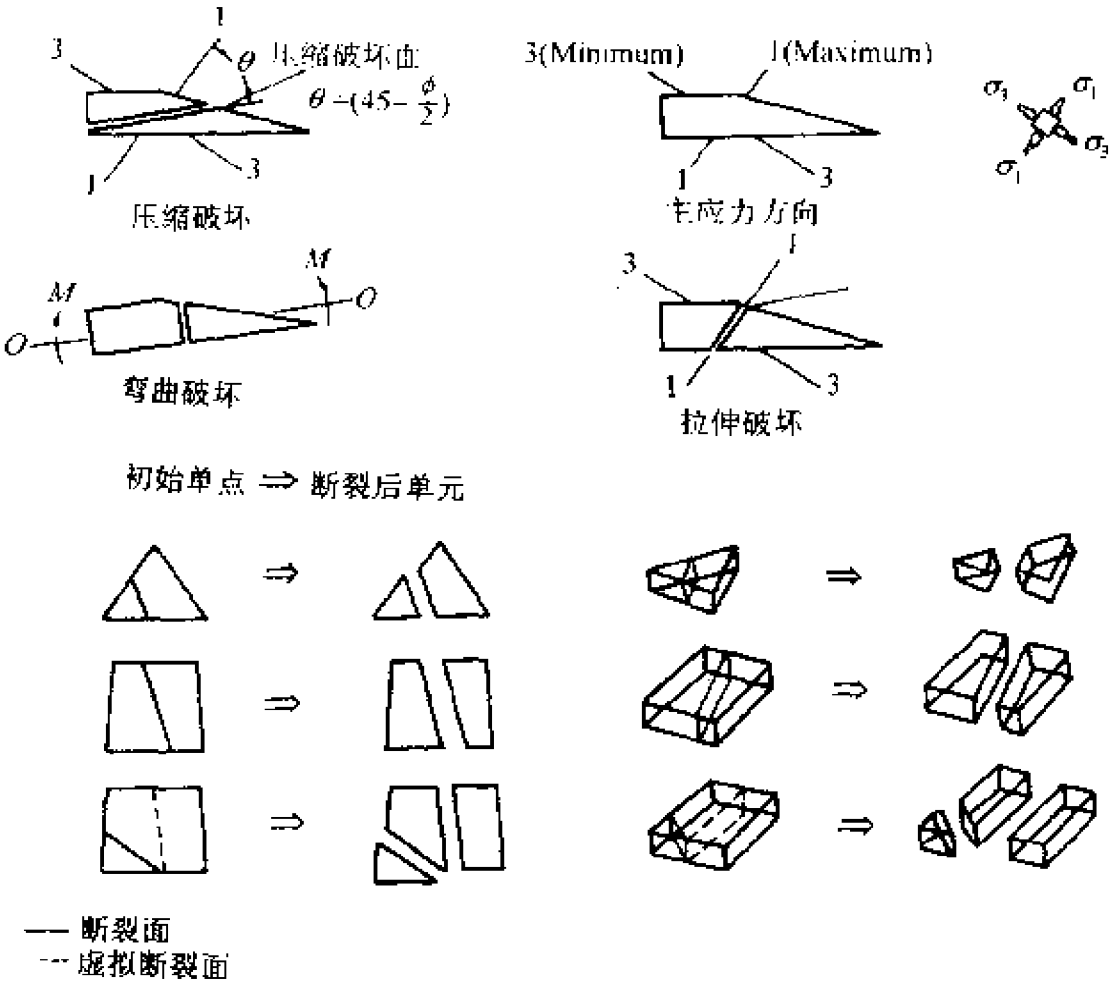


图 4.6　二维、三维单个离散元破坏几何形状

沿平面压缩剪切破坏的莫尔准则是

$$|\tau| \geqslant S_0 + \mu\sigma \tag{4.104}$$

式中　σ、τ——平面上的法向应力和剪应力；

S_0——材料的剪切强度(或内粘结系数)；

μ——材料的内摩擦系数。

破坏准则用在单元网格之间的连线(或连接面)上，判别其是否破坏。(4.104)式中的剪切强度 S_0 可直接给定，也可将其看作是内摩擦系数和无侧限压力强度的函数，由下式计算得到

$$S_0 = \frac{C_0}{2}\left(\sqrt{\mu^2+1} - \mu\right) \tag{4.105}$$

为了运用破坏准则(4.104)式检查单元是否通过质心发生断裂，有必要用最大主应力 σ_1 和最小主应力 σ_3 重写(4.104)式，即

$$\sigma_1 \geqslant C_0 + \sigma_3 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right) \tag{4.106}$$

式中 ϕ ——内摩擦角，且 $\mu = \tan\phi$；

C_0 ——无侧限压力强度。

应当注意无侧限压力强度是与剪切强度和内摩擦系数有关的，其关系为

$$C_0 = 2S_0\left\{(\theta^2+1)^{\frac{1}{2}} + \mu\right\} \tag{4.107}$$

这个破坏模型有两个可能的断裂方向，它们分别与最大主应力的方向成$\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$角。这两个方向称共轭方向，在二维问题中，由下式确定

$$\theta = \arctan^{-1}\left\{\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right\} \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right) \tag{4.108}$$

式中 θ ——断裂面与整体坐标系 x 轴正方向之间的夹角；

σ_x ——应力张量的 x 分量；

τ_{xy} ——剪应力分量。

(4.108)式右端第二项的符号可用随机数发生器确定。用这种方法，对一系列断裂单元就可获得相对随机的裂纹图。

在三维问题中，两个共轭断裂面定义为与 $\sigma_1\sigma_3$ 平面相垂直的两个平面，它们分别对应着与主应力 σ_1 正方向成$\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}\right)$的两个角。

拉伸破坏准则

拉伸破坏准则基于最小应力 σ_3 超过材料的抗拉强度 T_0。在二维问题中，破坏准则可写成

$$\sigma_3 \geqslant T_0 \tag{4.109}$$

断裂面的方向由下式确定

$$\theta = \arctan^{-1}\left\{\frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_{xy}}\right\} \tag{4.110}$$

式中 θ ——断裂面与整体坐标系 x 轴正方向之间的夹角；

σ_3——拉应力(正值表示受拉)。

应当注意,在这种情况下,θ 的方向与最大主应力方向是相同的。类似的定义也适用于三维情况。

弯曲破坏准则

在二维问题中,对梁单元弯曲破坏准则为

$$\sigma_t \geqslant B_0 \tag{4.111}$$

式中 B_0——材料弯曲强度,也是二维梁问题中纤维的最大拉应力。

应当注意 σ_t 由两部分组成,可写成

$$\sigma_t = \sigma_b + \sigma_1 \tag{4.112}$$

式中 σ_b——梁弯曲应力;

σ_1——梁轴向应力 σ_{ij} 的拉应力分量。

破坏面垂直于局部梁单元的轴向,如图 4.6 所示。

三维平板的弯曲破坏与(4.112)式具有相同的形式;然而,在这种情况中,σ_t 定义为作用在平板上下边缘的最大纤维拉应力。应注意,σ_t 的确定需要组合平板弯曲应力(σ_t^b,σ_m^b,σ_{lm}^b)和三维平面应力(σ_x,σ_y,σ_z,τ_{yz},τ_{zx},τ_{xy})。从组合应力状态中,即可找到平板上下边缘最大及最小主应力,由此也可确定最大纤维拉应力 σ_t。

断裂单元的几何形状

在二维问题中,三结点、四结点的单元可通过质心以任意角度裂开,裂开后生成新的单元。图 4.6 表示一些二维断裂单元的几何形状。

三维问题与二维问题类似,即任何三维长方体或楔形单元可以断裂成长方体和楔形单元。一些三维断裂单元的几何形状示于图 4.6 中。

4.7 变形体单元分析举例

关键块的破坏

人们很久以前就认识到许多地下空穴的稳定性是由一块或几

块岩石所控制，这样的岩石称为关键块。如果安装岩石支承来稳定这些关键块，则其他岩石也将稳定。Goodman 等(1984)[44]给出了稳定关键块所需力的详细计算，同时一种称为"不连续位移分析"的一般方法也被提出(Gen-hua shi，1984，1988，1989)[14]。

图 4.7(*a*)表示一个有许多交叉主节理的隧道。节理的方向使得洞顶的稳定性取决于某个关键块的稳定性。分析的目的就是要确定稳定关键块所需要的力。图 4.7(*b*)表示无支承时的破坏机理。然后插入一个支承单元，如图 4.7(*c*)。单元的质心是固定的，但允许单元变形。单元的模量比岩石的模量要大，从而可不计它的变形影响。通过监测作用在这个单元上的力，可确定稳定关键块所必须的最大支承力。

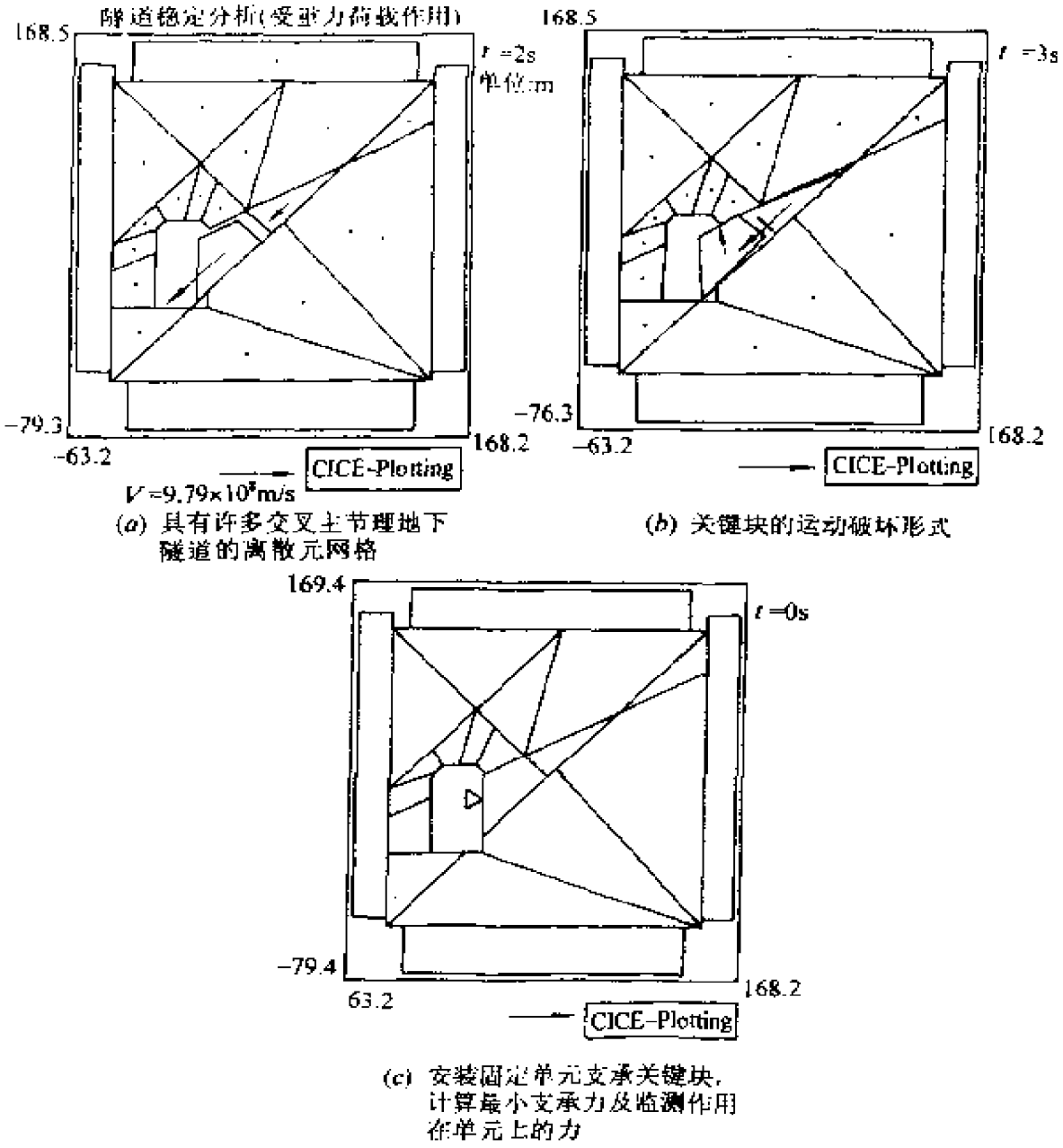
矿山/煤柱通道分析

利用 DECICE 程序，对开挖前具有初始垂直应力和水平应力的矿山/煤矿系统的力学性质进行了分析。共进行了两次计算：(1) 将煤层节理模拟成具有摩擦的节理不连续体；(2) 将煤层看成弹性介质。结果显示了对地表胀鼓及煤柱穿透的影响。所考虑的初应力荷载相当于垂直深度1000 m处的过压力，水平运动力的比率是 0.33。假设均匀密度为2500 kg/m^3。

所考察的问题是两通道系统的交叉剖面。计算中利用几何对称性，仅考虑一个通道，通道宽7.5 m，两边有煤柱，立在3 m的煤层中，节理与水平线成 60°的坡度(见图 4.8)。煤层的摩擦系数假设在 10°～30°之间。本例采用 30°的摩擦角。分析中假定煤柱和煤层具有弹性本构关系，采用表 4.2 中的材料常数。

表 4.2　材料常数

岩石类型	杨氏模量(Pa)	泊松比
煤	1.38×10^9	0.3
沙岩	2.76×10^9	0.17



(a) 具有许多交叉主节理地下隧道的离散元网格

(b) 关键块的运动破坏形式

(c) 安装固定单元支承关键块，计算最小支承力及监测作用在单元上的力

图 4.7 关键块受力分析

采用不连续法模拟煤层的结果如图 4.9 和图 4.10 所示。图 4.9 表示煤层中初应力场的主应力分布，图 4.10 表示最终的应力分布，图 4.11 表示假设煤层为连续介质时分析的结果。

我们看到在不连续法分析中，由于滑动，与连续法的分析比较，通道顶部只能承受较小的水平应力。为了能足够地承受水平推力，随着深度的增加，应力也在增大。取初应力荷载相当于垂直深度1000 m处的过压力，用不连续模型对煤层作进一步分析，与前

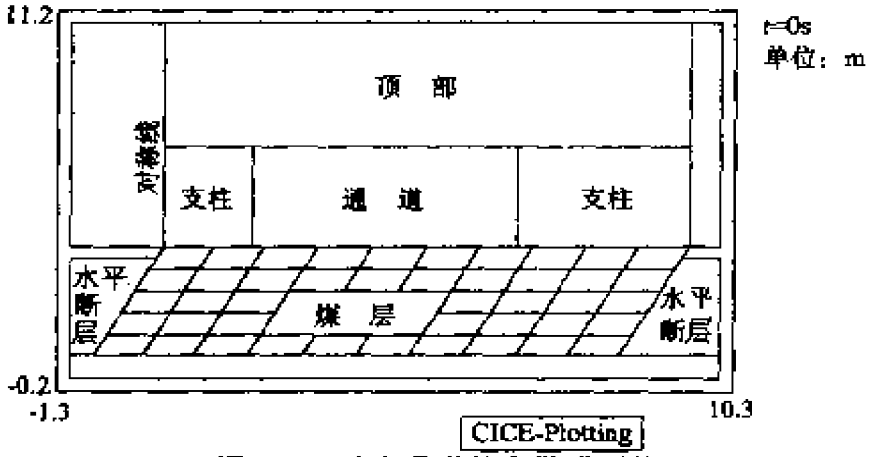


图 4.8 矿山通道的离散元网格

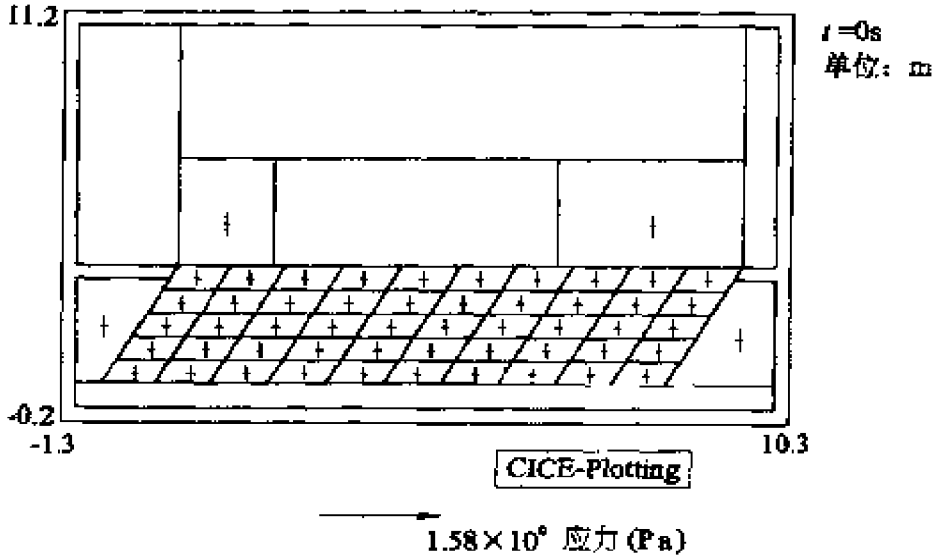


图 4.9 矿山通道不连续法分析—初应力状态

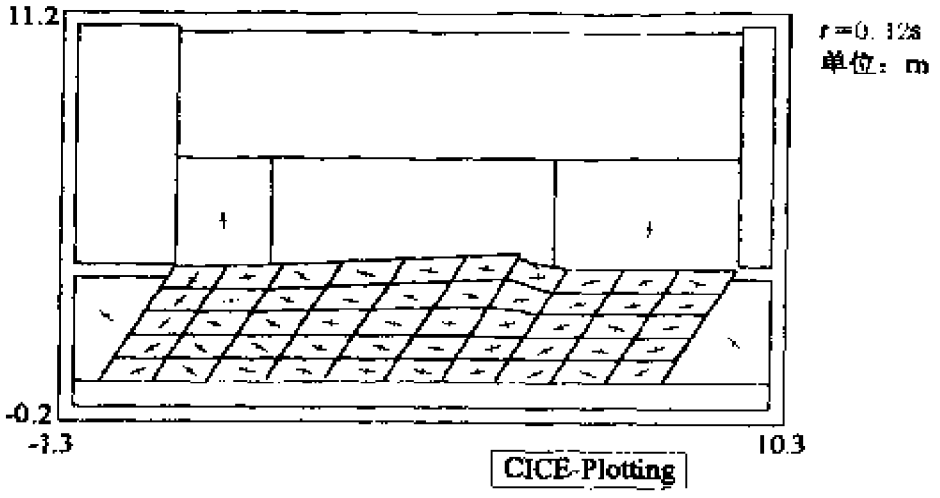


图 4.10 矿山通道不连续法分析—最终应力状态

而所得结果相比(图 4.11),地表的胀鼓在增加,如图 4.12,所得到的结果与煤矿实际情况非常吻合(例如 Beckley Coalbed, Aggson (1978)),这说明离散元能够模拟应力分布和节理位移。

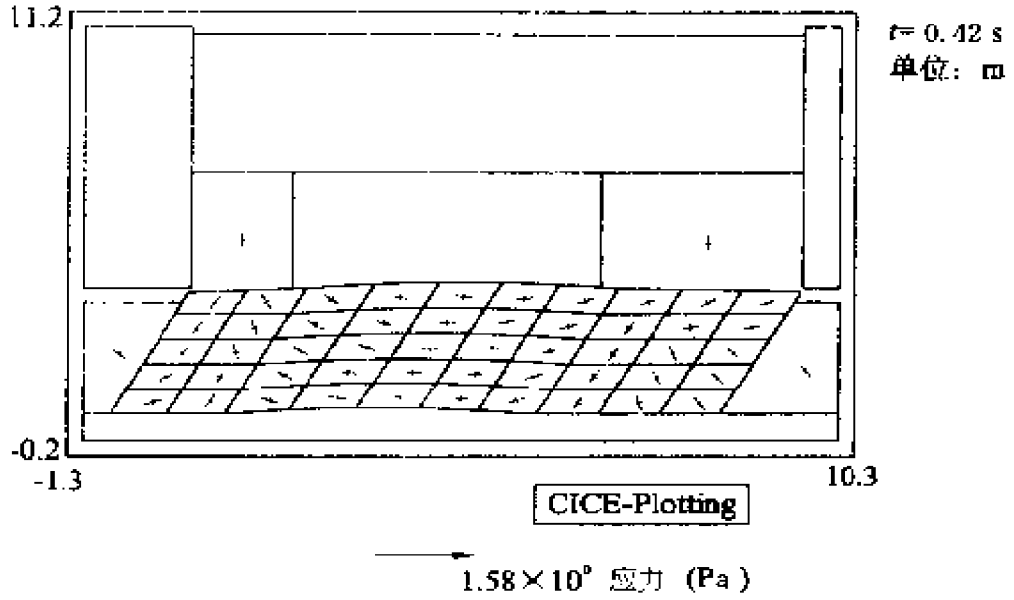


图 4.11 矿山通道连续介质分析—最终应力状态

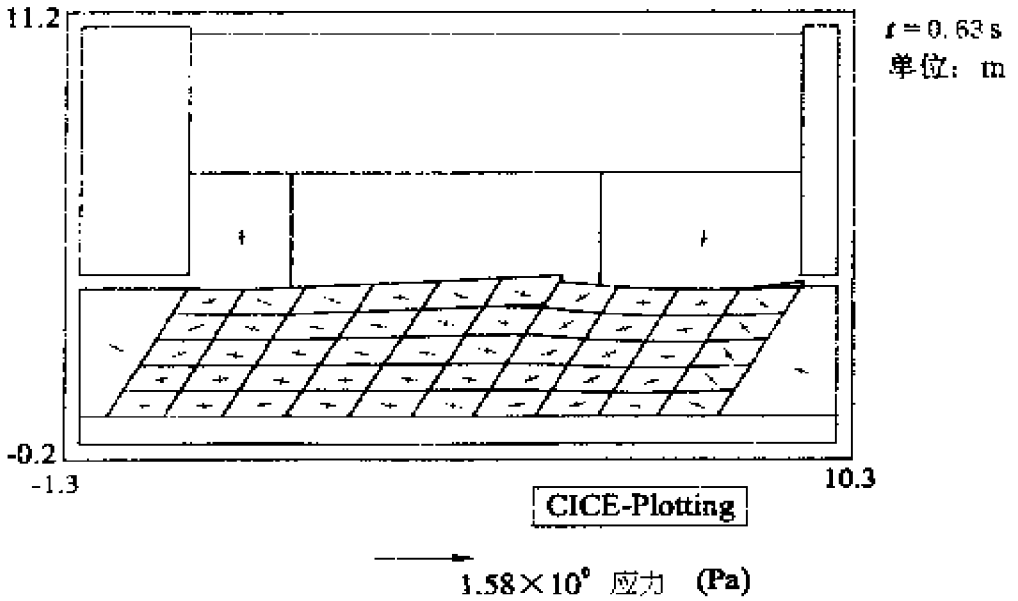


图 4.12 取初应力等于深度1000 m处的过压力时,
采用不连续法分析的结果

第五章　节理单元　无拉应力模型　无穷元

在岩体中往往存在断层和节理，它们对岩体的应力、变形和稳定具有极大的影响。可以说，对于修建在岩体内部或上面的建筑物来说，断层和节理对其安全具有决定性的作用。对于断层的模拟，可采用平面单元或空间块体单元。至于岩体中的节理，由于其宽度很小，一般只有几毫米至几厘米，不能采用通常的平面单元和空间单元。在这里，我们介绍一种节理单元[1]。

5.1　四结点节理单元

5.1.1　单元刚度矩阵

图 5.1 表示一节理单元。单元长度为 l，宽度为 e，厚度（垂直于 x，y 平面）为 t，单元有四个结点 i，j，m，r。把坐标原点放在单元形心上。

单元结点力是

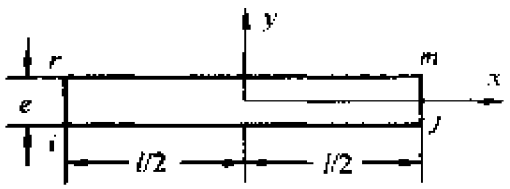


图 5.1　四结点节理单元

$$\boldsymbol{F}^e=\{U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j \quad U_m \quad V_m \quad U_r \quad V_r\}^{\mathrm{T}} \tag{5.1}$$

单元结点位移是

$$\boldsymbol{a}^e=\{u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j \quad u_m \quad v_m \quad u_r \quad v_r\}^{\mathrm{T}} \tag{5.2}$$

假设单元上缘 rm 和下缘 ij 上的位移是线性分布的，即

$$u_1=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)u_i+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)u_m$$

$$u_B=\frac{1}{2}(1-\frac{2x}{l})u_i+\frac{1}{2}(1+\frac{2x}{l})u_j \tag{5.3}$$

由此可知单元上缘和下缘的水平位移差为

$$\Delta u=u_T-u_B=\frac{1}{2}\left[(u_r-u_i)(1-\frac{2x}{l})+(u_m-u_j)(1+\frac{2x}{l})\right] \tag{5.4}$$

同理，单元上缘与下缘的垂直位移差为

$$\Delta v=v_T-v_B=\frac{1}{2}\left[(v_r-v_i)(1-\frac{2x}{l})+(v_m-v_j)(1+\frac{2x}{l})\right] \tag{5.5}$$

假设单元内剪应力与水平位移差成正比，即

$$\tau_s=\lambda_s\Delta u+\tau_{s0} \tag{5.6}$$

单元内正应力与垂直位移差成正比，即

$$\sigma_n=\lambda_n\Delta v+\sigma_{n0} \tag{5.7}$$

其中 λ_s、λ_n——节理的切向和法向劲度系数；

τ_{s0}、σ_{n0}——单元内的初始剪应力和正应力。

令

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix},\boldsymbol{\lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_s & 0\\ 0 & \lambda_n\end{bmatrix},\boldsymbol{\sigma}_0=\begin{Bmatrix}\tau_{s0}\\ \sigma_{n0}\end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

则可将(5.6)、(5.7)两式写成

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{\lambda u}+\boldsymbol{\sigma}_0 \tag{5.9}$$

由(5.4)、(5.5)两式可得

$$\boldsymbol{u}=\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N a}^e \tag{5.10}$$

其中

$$\boldsymbol{N}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_2 & 0 & z_1 & 0\\ 0 & -z_1 & 0 & -z_2 & 0 & z_2 & 0 & z_1\end{bmatrix} \tag{5.11}$$

上式中

$$z_1=1-\frac{2x}{l},\qquad z_2=1+\frac{2x}{l}$$

假设单元各结点产生虚位移 a^{*e}，那么单元内的虚位移差为

$$u^* = Na^{*e} \tag{5.12}$$

在单位长度上，单元应力所作虚功是

$$t(u^*)^T\sigma = (a^{*e})^T tN^T(\lambda u + \sigma_0) \tag{5.13}$$

沿单元长度积分后，即得到单元应力所作虚功，它必须等于单元结点力所作虚功，由此得

$$F^e = \left(t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N^T\lambda N\,dx\right)a^e + t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N^T\sigma_0 dx \tag{5.14}$$

上式右端第二项是由于初应力而多出来的结点力，把它改变符号，即得到由于初应力而产生的结点荷载。上式右端第一项是结点位移引起的结点力，故由(5.14)式可知单元结点力为

$$F^e = k^e a^e \tag{5.15}$$

其中

$$k^e = t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N^T\lambda N dx \tag{5.16}$$

初应力引起荷载

$$Q^e_{\sigma_0} = -t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} N^T\sigma_0 dx \tag{5.17}$$

把 N 的表达式(5.11)代入(5.16)式，并注意到

$$\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z_1^2 dx = \frac{4l}{3},\qquad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z_1 z_2 dx = \frac{2l}{3},\qquad \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z_2^2 dx = \frac{4l}{3}$$

得到局部坐标系中的单元刚度矩阵如下

$$k^e = \frac{lt}{6}\begin{bmatrix}
2\lambda_x & 0 & \lambda_x & 0 & -\lambda_x & 0 & -2\lambda_x & 0\\
0 & 2\lambda_m & 0 & \lambda_m & 0 & -\lambda_m & 0 & -2\lambda_m\\
\lambda_x & 0 & 2\lambda_x & 0 & -2\lambda_x & 0 & -\lambda_x & 0\\
0 & \lambda_m & 0 & 2\lambda_m & 0 & -2\lambda_m & 0 & -\lambda_m\\
-\lambda_x & 0 & -2\lambda_x & 0 & 2\lambda_x & 0 & \lambda_x & 0\\
0 & -\lambda_m & 0 & -2\lambda_m & 0 & 2\lambda_m & 0 & \lambda_m\\
-2\lambda_x & 0 & -\lambda_x & 0 & \lambda_x & 0 & 2\lambda_x & 0\\
0 & -2\lambda_m & 0 & -\lambda_m & 0 & \lambda_m & 0 & 2\lambda_m
\end{bmatrix} \tag{5.18}$$

5.1.2 初应力引起的结点荷载

按式(5.9),单元内的应力沿厚度方向(y 方向)是均匀的,而沿长度(x)方向是线性分布的,与此相适应,设单元内初应力也是沿 x 方向线性分布的,即

$$\begin{aligned}\tau_{s0}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\tau_{si0}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\tau_{sj0}\\ \sigma_{n0}&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\sigma_{ni0}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{2x}{l}\right)\sigma_{nj0}\end{aligned}\tag{5.19}$$

其中,τ_{si0}、σ_{ni0}和 τ_{sj0}、σ_{nj0}是 i 和 j 点的初应力。由(5.17)式可得初应力产生的结点荷载如下

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma_0}^{e}=-\frac{tl}{6}\begin{bmatrix}-2&0&-1&0\\0&-2&0&-1\\-1&0&-2&0\\0&-1&0&-2\\1&0&2&0\\0&1&0&2\\2&0&1&0\\0&2&0&1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_{si0}\\\sigma_{ni0}\\\tau_{sj0}\\\sigma_{nj0}\end{Bmatrix}\tag{5.20}$$

如果单元内初应力是均匀的,即 τ_{s0}和 σ_{n0}由(5.17)式可知初应力引起的结点荷载是

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma_0}^{e}=\frac{tl}{2}\{\tau_{s0}\quad\sigma_{n0}\quad\tau_{s0}\quad\sigma_{n0}\quad-\tau_{s0}\quad-\sigma_{n0}\quad-\tau_{s0}\quad-\sigma_{n0}\}^{\mathrm{T}}\tag{5.21}$$

5.1.3 坐标转换

设单元局部坐标系是(x',y'),而整体坐标系是(x,y),如图5.2所示,两种坐标系有如下变换关系

$$\begin{Bmatrix}x\\y\end{Bmatrix}=\boldsymbol{L}\begin{Bmatrix}x'\\y'\end{Bmatrix}\tag{5.22}$$

其中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\tag{5.23}$$

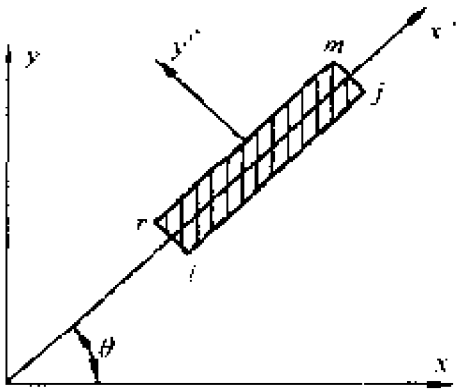


图 5.2　局部坐标与整体坐标

设局部坐标系中的单元结点力为 $\boldsymbol{F}^{e}$，则整体坐标系中的单元结点力为

$$\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{F}^{e} \tag{5.24}$$

其中

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L} & 0 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{L} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{L} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{L}\end{bmatrix} \tag{5.25}$$

同理，整体坐标系中由初应力引起的结点荷载是

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma_0}^{e}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{Q}_{\sigma_0}^{e} \tag{5.26}$$

整体坐标系中的单元刚度矩阵是

$$\boldsymbol{k}^{e}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{k}^{e}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}} \tag{5.27}$$

其中 $\boldsymbol{k}^{e}$ 是局部坐标系中的单元刚度矩阵。

5.1.4　有限宽度的节理单元

上述单元不但适用于宽度接近于零的节理，也可用于有限宽度的节理以及常见的岩体软弱夹层，其宽度一般为几个厘米。现在我们来说明这一点。

设节理的宽度为 e，节理内的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\gamma_{xy}\\ \varepsilon_{y}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\Delta u}{e}\\ \dfrac{\Delta v}{e}\end{Bmatrix}=\frac{1}{e}\boldsymbol{u} \tag{5.28}$$

将(5.10)式代入(5.28)式中，得到

$$\varepsilon = \boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{5.29}$$

其中

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{e}\boldsymbol{N} \tag{5.30}$$

单元内应力为

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \tau_s \\ \sigma_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_s \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{5.31}$$

其中

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

节理单元的刚度矩阵可由下式计算

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega = \frac{t}{e}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x \tag{5.33}$$

令

$$\lambda_s = \frac{G}{e}, \qquad \lambda_n = \frac{E}{e} \tag{5.34}$$

则

$$\boldsymbol{D} = e\boldsymbol{\lambda} \tag{5.35}$$

将(5.35)式代入(5.33)式中，得到

$$\boldsymbol{k}^e = t\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{N}\mathrm{d}x \tag{5.36}$$

上式与(5.16)式完全一致。

由此可见，只要按照(5.34)式定义节理劲度系数 λ_s 和 λ_n，前述节理单元也可用于有限宽度的节理和岩体软弱夹层。

5.1.5 岩体节理的劲度系数

在岩体节理单元的计算中，要用到劲度系数 λ_s 和 λ_n，见(5.6)式和(5.7)式。显然，这些系数要根据实测资料加以整理而得到。根据现场试验的荷载—位移曲线，节理劲度系数可计算如下：

$$\lambda_n = \frac{\partial\sigma}{\partial v}, \qquad \lambda_s = \frac{\partial\tau}{\partial u} \tag{5.37}$$

式中　u 和 v——节理上、下缘之间的水平和垂直位移差。

岩体节理一般是不能承受法向拉力的，所以有

$$\lambda_n=\lambda_s=0 \qquad (当\ \sigma>0\ 时) \tag{5.38}$$

实际计算中，应采用接近于零的数值，不宜直接用零，以免计算过程中“溢出”。

当 $\sigma<0$ 时，λ_n 和 λ_s 都是异于零的。实测资料表明，多数情况下，法向劲度系数 λ_n 可近似地用一常量表示，而切向劲度系数 λ_s 则具有强烈的非线性，不但与切向位移差 u 有关，而且随着正应力 σ 而变化。根据实测资料，我们发现岩体节理切向力与切向位移差之间的关系可用双曲线表示如下

$$\tau=\frac{u}{a+bu} \tag{5.39}$$

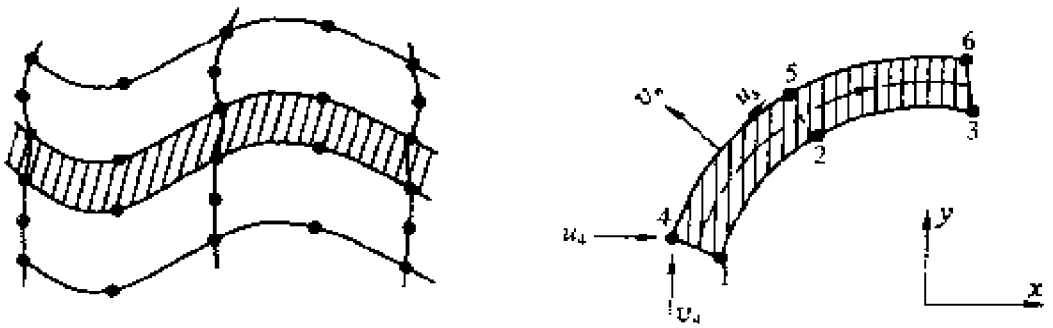
式中　τ——节理所受切向力；

u——节理上下表面的切向位移差；

a、b——由实测资料决定的常数[11]。

5.2　六结点曲边节理单元

如果在完整岩体部分采用八结点曲边单元，相应地，在节理部分可采用六结点曲边单元，如图 5.3 所示。



(a) 母单元　　(b) 子单元

图 5.3　六结点曲边节理单元

假定节理单元的宽度是常量 e，节理的上、下边界都是曲线。单元中任一点的坐标可通过插值函数用结点坐标表示。例如，节理

下边界的坐标为

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 \end{aligned} \tag{5.40}$$

式中，(x_i, y_i)是结点的坐标。

节理中心线的坐标为

$$\begin{aligned} x &= N_1 \bar{x}_1 + N_2 \bar{x}_2 + N_3 \bar{x}_3 \\ y &= N_1 \bar{y}_1 + N_2 \bar{y}_2 + N_3 \bar{y}_3 \end{aligned} \tag{5.41}$$

其中

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_4), \qquad \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_2 + x_5), \qquad \bar{x}_3 = \frac{1}{2}(x_3 + x_6)$$

插值函数 N_i 为

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), \qquad N_2 = 1-\xi^2, \qquad N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{5.42}$$

沿节理单元下边的水平位移为

$$u_B = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \tag{5.43}$$

沿节理单元上边的水平位移为

$$u_T = N_1 u_4 + N_2 u_5 + N_3 u_6 \tag{5.44}$$

节理单元上、下边界的水平位移差为

$$\Delta u = N_1(u_4 - u_1) + N_2(u_5 - u_2) + N_3(u_6 - u_3) \tag{5.45}$$

同样，节理单元上、下边界的垂直位移差为

$$\Delta v = N_1(v_4 - v_1) + N_2(v_5 - v_2) + N_3(v_6 - v_3) \tag{5.46}$$

用矩阵的形式，可写成

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{5.47}$$

其中

$$\boldsymbol{u} = \{\Delta u \quad \Delta v\}^T$$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & -N_2 & 0 & -N_3 & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}^e = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6\}^T$$

设沿单元上、下边界切线方向的位移差为 Δu_s，沿单元上、下

边界法线方向的位移差为 Δv_n，则 Δu_s、Δv_n 可由 Δu 和 Δv 经坐标转换而求得如下：

$$\begin{Bmatrix}\Delta u_s\\ \Delta v_n\end{Bmatrix}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{5.48}$$

式中

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{bmatrix}$$

$$\alpha=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}},\qquad \beta=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}$$

因此，单元内任一点的应变可表示如下

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\Delta u_s}{e}\\ \dfrac{\Delta v_n}{e}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{5.49}$$

而

$$\boldsymbol{B}=\frac{1}{e}\boldsymbol{L}\boldsymbol{N} \tag{5.50}$$

单元内任一点的应力可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{Bmatrix}\tau_s\\ \sigma_n\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}G_s & 0\\ 0 & E_n\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\gamma_s\\ \varepsilon_n\end{Bmatrix}+\boldsymbol{\sigma}_0=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{\sigma}_0$$

式中 G_s、E_n——节理单元在切线方向的剪切模量和法向方向的弹性模量。

根据计算单元刚度矩阵的普遍公式，可得

$$\boldsymbol{k}^e=\frac{l}{e}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}S\mathrm{d}\xi \tag{5.51}$$

其中

$$S=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}$$

由初应力产生的结点荷载由下式计算

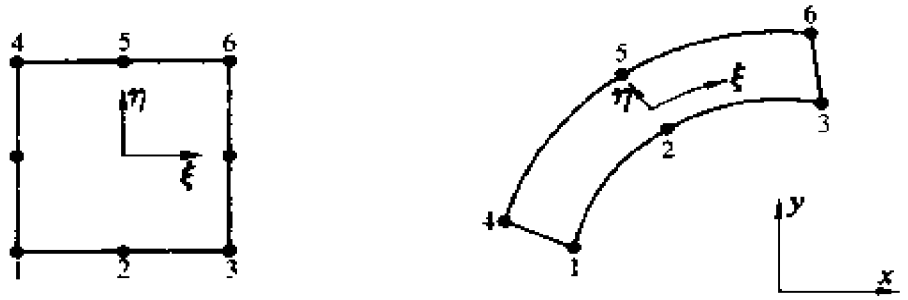
$$Q_{\sigma n}^{e} = -t\int_{-1}^{1} N^{T}L^{T}\sigma_{n}S\mathrm{d}\xi \tag{5.52}$$

(5.51)和(5.52)两式可用数值积分法算出，必须指出，由此二式计算的是整体坐标系(x,y)中的单元刚度矩阵和结点荷载，不必再进行坐标转换。

5.3 六结点曲边夹层单元

在上述节理单元计算中，我们只考虑了法向正应力σ_n和剪应力τ_s，而忽略了切向正应力σ_t。通常节理宽度e是很小的，这样处理所带来的误差是极小的，至于岩体中的软弱夹层，如果其宽度很小，例如只有几厘米，也可以采用上述计算模型。如果其宽度较大，在计算中就必须把切向正应力σ_t的影响也考虑在内。

如图5.4所示，我们用六结点曲边单元来代表一个夹层单元，沿夹层长度方向每边用三个结点，在夹层厚度方向每边用两个结点，夹层的宽度不必是常量，可以是任意的。通过坐标变换由母单元得到任意形状的子单元，所用形函数在夹层长度方向(ξ方向)是二次的，在夹层厚度方向(η方向)是一次的。



(a) 母单元　　(b) 子单元

图5.4　二维夹层单元

子单元内任一点的坐标由下式计算

$$x = \sum_{i=1}^{6} N_i x_i$$

$$y=\sum_{i=1}^{6}N_i y_i \tag{5.53}$$

其中 x_i、y_i 为结点坐标，N_i 为如下形函数：

$$\begin{aligned}
&N_1=-\frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1-\eta),\ N_2=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),\\
&N_3=\frac{1}{4}\xi(1+\xi)(1-\eta),\\
&N_4=-\frac{1}{4}\xi(1-\xi)(1+\eta),\\
&N_5=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),\ N_6=\frac{1}{4}\xi(1+\xi)(1+\eta)
\end{aligned} \tag{5.54}$$

子单元内任一点的位移由下式计算

$$u=\sum_{i=1}^{6}N_i u_i,\quad v=\sum_{i=1}^{6}N_i v_i \tag{5.55}$$

式中，u_i、v_i 为结点 i 的位移分量。

子单元内任一点 i 在整体坐标系(x,y)中的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e \tag{5.56}$$

其中 $\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{B}_1\quad \boldsymbol{B}_2\quad \cdots\quad \boldsymbol{B}_6]$

$$\boldsymbol{B}_i=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_i}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\end{bmatrix}\qquad (i=1,2,\cdots 6)$$

如果材料是各向同性的，可直接用上述矩阵 $\boldsymbol{B}$ 计算单元刚度矩阵，但岩体中的软弱夹层通常是各向异性的，各向异性的主轴一般是软弱夹层的切线和法线，今以软弱夹层中心线($\eta=0$)的切线和法线分别作为局部坐标系的 x' 轴和 y' 轴，在局部坐标系(x'，y')中的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}'$ 可由整体坐标系中的应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 经坐标转换而得到。

$$\boldsymbol{\varepsilon}'=\boldsymbol{T}\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}^e=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{a}^e \tag{5.57}$$

其中

$$\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{T}\boldsymbol{B} \tag{5.58}$$

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix} \alpha^2 & \beta^2 & \alpha\beta \\ \beta^2 & \alpha^2 & -\alpha\beta \\ -2\alpha\beta & 2\alpha\beta & \alpha^2-\beta^2 \end{bmatrix} \tag{5.59}$$

$$\alpha=\frac{\dfrac{\partial x}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}},\qquad \beta=\frac{\dfrac{\partial y}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2}}$$

在计算 α、β 时，取 $\eta=0$。

局部坐标系(x',y')中的应力由下式计算

$$\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'+\boldsymbol{\sigma}_0' \tag{5.60}$$

式中 $\boldsymbol{D}'$ ——局部坐标系中的弹性矩阵。

根据虚功原理，单元刚度矩阵可按下式计算

$$\boldsymbol{k}^e=t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{B}'\,|J|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.61}$$

其中

$$|J|=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix}$$

由初应力 σ_0' 产生的结点荷载由下式计算

$$\boldsymbol{Q}_{\sigma_0}'=-t\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_0'\,|\boldsymbol{J}|\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.62}$$

由上述公式计算的单元刚度矩阵和结点荷载都属于整体坐标系(x,y)，在建立平衡方程组时不必再进行坐标转换。

5.4 三维曲面节理单元

如在完整岩石部分采用 20 结点等参数曲面单元，在节理部分，可相应地采用 16 结点曲面节理单元，如图 5.5 所示。假定节理单元厚度 e 是常量，节理的上、下表面都是曲面。单元中任一点的坐标可通过插值函数用单元结点坐标表示成

$$x=\sum_{i=1}^{8}N_i x_i$$

$$y=\sum_{i=1}^{8}N_iy_i \tag{5.63}$$

$$z=\sum_{i=1}^{8}N_iz_i$$

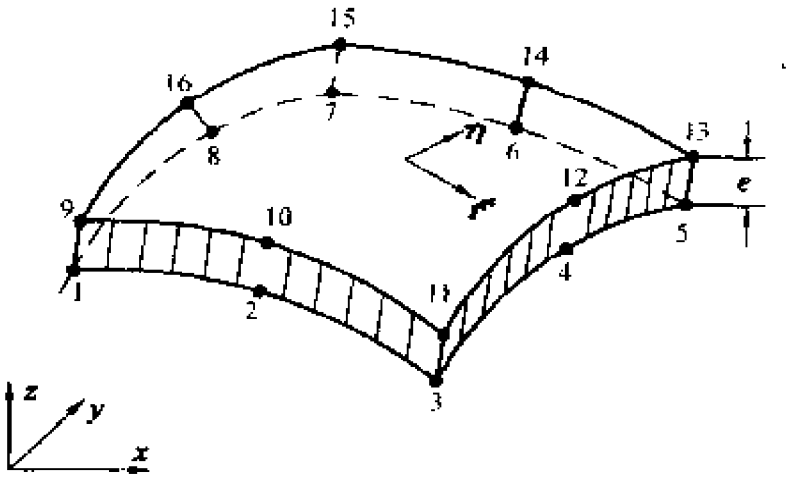


图 5.5 三维曲面节理单元

(5.63)式适用于节理的上、中、下曲面。当应用于中面时，式中的 x_i、y_i、z_i 应取上下曲面结点坐标的平均值。

节理单元上、下表面在 x、y、z 三个方向的位移差可表示成

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^e \tag{5.64}$$

其中

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & 0 & \cdots & N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_4 & 0 & 0 \\ 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & 0 & \cdots & 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & 0 & -N_1 & 0 & 0 & -N_2 & \cdots & 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_4 \end{bmatrix}$$

上式中

$$N_i=\frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \qquad i=1,3,5,7$$

$$N_i=\frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) \qquad i=2,6$$

$$N_i=\frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0) \qquad i=4,8$$

$$\xi_0=\xi_i\xi, \qquad \eta_0=\eta_i\eta$$

现在，我们在单元内任一点 (ξ_0,η_0) 建立一个局部坐标系 $(x'$、

y'、z'），并要求 z' 轴垂直于单元中面。在 (ξ_0,η_0) 点单元中面上有两条曲线，一条是 $\xi=\xi_0$，另一条是 $\eta=\eta_0$，作单元中面的两个切向量 $\mathrm{d}\vec{\xi}$ 和 $\mathrm{d}\vec{\eta}$，其中 $\mathrm{d}\vec{\xi}$ 切于曲线 $\eta=\eta_0$，$\mathrm{d}\vec{\eta}$ 切于曲线 $\xi=\xi_0$，由此可知

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{\xi}&=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)\mathrm{d}\xi\\ \mathrm{d}\vec{\eta}&=\left(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\mathrm{d}\eta\end{aligned}\tag{5.65}$$

式中，$\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ 为 x、y、z 方向的单位向量，今作 z' 垂直于 $\mathrm{d}\vec{\xi}$ 和 $\mathrm{d}\vec{\eta}$，即正交于单元中面，由矢量代数可知

$$z'=\mathrm{d}\vec{\xi}\times\mathrm{d}\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\end{vmatrix}.\tag{5.66}$$

由此可求出 z' 的方向余弦 l_3、m_3、n_3。其他两个坐标轴 y' 和 x' 是切于单元中面的，用如下方法选取，令

$$y'=z'\times x=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_3 & m_3 & n_3\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}\tag{5.67}$$

由此可求出 y' 轴的方向余弦 l_2、m_2、n_2。如 z' 轴与 x 轴平行，可改用 $y'=z'\times y$。

最后作 x' 正交于 y' 和 z'，即

$$x'=y'\times z'\tag{5.68}$$

由此可求出 x' 轴的方向余弦 l_1、m_1、n_1。于是得到局部坐标系（x'、y'、z'）的方向余弦矩阵如下

$$\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix}l_1 & l_2 & l_3\\ m_1 & m_2 & m_3\\ n_1 & n_2 & n_3\end{vmatrix}\tag{5.69}$$

节理单元中任一点(ξ,η)，单元上下表面在x'、y'、z'方向的位移差可由(5.64)式经坐标转换而得到

$$\boldsymbol{u}'=\begin{Bmatrix}\Delta u'\\ \Delta v'\\ \Delta w'\end{Bmatrix}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^{e} \tag{5.70}$$

由于节理单元的厚度e很小，在局部坐标系中任一点的应变可表示如下

$$\boldsymbol{\varepsilon}'=\begin{Bmatrix}\gamma_{x'z'}\\ \gamma_{y'z'}\\ \varepsilon_{z'}\end{Bmatrix}=\frac{1}{e}\boldsymbol{u}'=\boldsymbol{B}'\boldsymbol{a}^{e} \tag{5.71}$$

其中

$$\boldsymbol{B}'=\frac{1}{e}\boldsymbol{T}\boldsymbol{N} \tag{5.72}$$

在局部坐标系中，任一点的应力为

$$\boldsymbol{\sigma}'=\begin{Bmatrix}\tau_{x'z'}\\ \tau_{y'z'}\\ \sigma_{z'}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{D}'\boldsymbol{\varepsilon}'+\boldsymbol{\sigma}_0' \tag{5.73}$$

其中

$$\boldsymbol{D}'=\begin{bmatrix}G_s & 0 & 0\\ 0 & G_s & 0\\ 0 & 0 & E_n\end{bmatrix} \tag{5.74}$$

式中 G_s、E_n——节理单元在切线方向的剪切模量和法线方向的弹性模量。

单元刚度矩阵可由下式计算

$$\boldsymbol{k}^{e}=\frac{1}{e}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{T}\boldsymbol{N}|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{5.75}$$

其中

$$|J|=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^{2}+\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^{2}+\left(\frac{\partial z}{\partial\xi}\frac{\partial x}{\partial\eta}-\frac{\partial z}{\partial\eta}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{2}}$$

初应力产生的结点荷载为

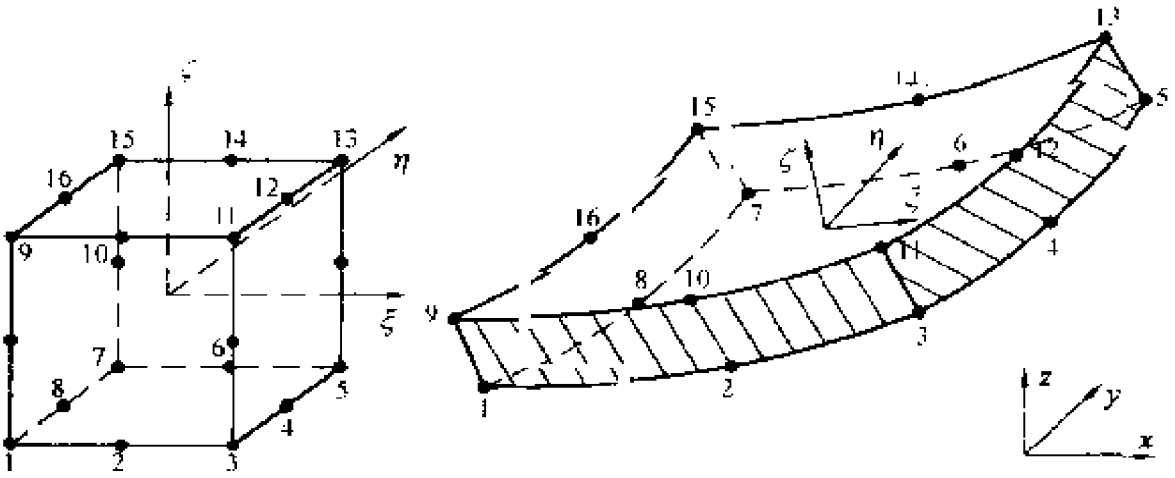
$$\boldsymbol{Q}_{\sigma_0} = -\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'_0 |J| \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \tag{5.76}$$

以上求出的单元刚度矩阵和结点荷载属于整体坐标系统。

5.5 三维曲面夹层单元

当岩体软弱夹层厚度 e 很小时，仍可用上述单元计算。如软弱夹层厚度较大，就必须考虑夹层中面切线方向的两个正应力。下面介绍这种单元的计算方法。

如图 5.6 所示，用 16 结点曲边单元代表一个夹层单元，在夹层平面内，每边用三个结点，用二次插值函数，在夹层厚度方向，每边用两个结点，用一次插值函数。夹层的厚度可以是任意的。通过坐标变换，由母单元得到任意形状的夹层单元。



(a) 母单元　　(b) 子单元

图 5.6　三维曲面夹层单元

夹层单元内任一点的坐标由下式计算

$$x = \sum_{i=1}^{16} N_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^{16} N_i y_i, \quad z = \sum_{i=1}^{16} N_i z_i \tag{5.77}$$

其中 (x_i, y_i, z_i) 为结点 i 的坐标，N_i 为如下形函数

角点：　$N_i = \dfrac{1}{8}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(1+\zeta_0)(\xi_0+\eta_0-1)$

中点：

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta_0)(1+\zeta_0) \qquad i=2,6,10,14$$

$$N_i=\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\xi_0)(1+\zeta_0) \qquad i=4,8,12,16$$

$$\xi_0=\xi_i\xi \qquad \eta_0=\eta_i\eta \qquad \zeta_0=\zeta_i\zeta$$

单元内任一点位移由下式给出

$$u=\sum_{i=1}^{16}N_iu_i \qquad v=\sum_{i=1}^{16}N_iv_i \qquad w=\sum_{i=1}^{16}N_iw_i \tag{5.78}$$

式中 u_i、v_i、w_i 为结点 i 在整体坐标系中的位移分量，由上式分别对 x、y、z 求微商，可得到下列矩阵

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{vmatrix}=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi}\\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta}\\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta}\end{vmatrix} \tag{5.79}$$

式中 $\boldsymbol{J}$ 为雅可比矩阵

$$\boldsymbol{J}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta}\end{vmatrix}$$

由于岩体中软弱夹层是各向异性的，各向异性主轴一般与软弱夹层的法线和切线相符。今在(5.77)式中令 $\zeta=0$ 得到夹层中面，以夹层中面的法线作为局部坐标的 z' 轴，并把局部坐标的 x' 轴和 y' 轴放在夹层中面的切平面内，采用推导(5.69)式相同方法，求得局部坐标系(x'，y'，z')的方向余弦矩阵 $\boldsymbol{T}$，然后对(5.79)式进行变换，得到

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{vmatrix} = \boldsymbol{T}^{-\mathrm{T}} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{vmatrix} \boldsymbol{T} \tag{5.80}$$

由此可得到局部坐标系(x', y', z')中的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon}' = \{\varepsilon_{x'} \quad \varepsilon_{y'} \quad \varepsilon_{z'} \quad \gamma_{x'y'} \quad \gamma_{y'z'} \quad \gamma_{z'x'}\}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}' \boldsymbol{a}' \tag{5.81}$$

注意在上式中，$\boldsymbol{\varepsilon}'$是局部坐标系中的应变，而$\boldsymbol{a}'$是整体坐标系中的结点位移。

假定夹层材料是横观各向同性的，在局部坐标系中的应变由下式计算(见图 5.7)，

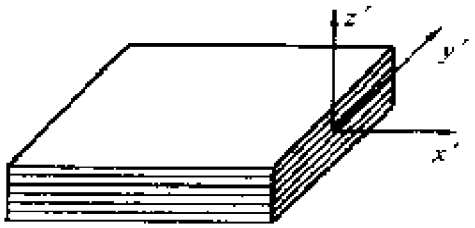


图 5.7　夹层局部坐标系

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \frac{\sigma_{x'}}{E_1} - \upsilon_1 \frac{\sigma_{y'}}{E_1} - \upsilon_2 \frac{\sigma_{z'}}{E_2} \\ \varepsilon_{y'} &= -\upsilon_1 \frac{\sigma_{x'}}{E_1} + \frac{\sigma_{y'}}{E_1} - \upsilon_2 \frac{\sigma_{z'}}{E_2} \\ \varepsilon_{z'} &= -\upsilon_2 \frac{\sigma_{x'}}{E_2} - \upsilon_2 \frac{\sigma_{y'}}{E_2} + \frac{\sigma_{z'}}{E_2} \end{aligned} \tag{5.82}$$

$$\gamma_{x'y'} = \frac{\tau_{x'y'}}{G_1}, \quad \gamma_{y'z'} = \frac{\tau_{y'z'}}{G_2}, \quad \gamma_{z'x'} = \frac{\tau_{z'x'}}{G_2}$$

于是在局部坐标系中的应力—应变关系可表示为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}' \boldsymbol{\varepsilon}' + \boldsymbol{\sigma}'_0 \tag{5.83}$$

其中

$$\boldsymbol{D}'=\frac{E_2}{(1+\upsilon_1)p}\times\begin{bmatrix} n(1-\upsilon_2 n) & n(\upsilon_1+\upsilon_2 n) & n\upsilon_2(1+\upsilon_1) & 0 & 0 & 0 \\ n(\upsilon_1+\upsilon_2 n) & n(1-n\upsilon_2^2) & n\upsilon_2(1+\upsilon_1) & 0 & 0 & 0 \\ n\upsilon_2(1+\upsilon_1) & n\upsilon_2(1+\upsilon_1) & 1-\upsilon_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{np}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\upsilon_1)p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m(1+\upsilon_1)p \end{bmatrix} \tag{5.84}$$

$$n=\frac{E_1}{E_2},\qquad m=\frac{G_2}{E_2},\qquad p=1-\upsilon_1-2n\upsilon_2^2$$

单元刚度矩阵由下式计算

$$\boldsymbol{k}'=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}'\boldsymbol{B}|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.85}$$

初应力产生结点荷载由下式计算

$$\boldsymbol{Q}'_{\sigma_0}=-\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{B}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'_0|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \tag{5.86}$$

式中 $|J|$——雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ 的行列式。

上述单元刚度矩阵和结点荷载都属于整体坐标系。

以上所述的各种节理单元，不但可以代表岩体节理，也可用以代表混凝土坝的接缝及坝体与基础的接触面。

5.6 无拉应力计算模型

岩土工程中有的材料不能承受拉应力，如软弱夹层、裂隙层。因此用有限元法计算时必须对拉应力区进行修正。当岩体中出现拉应力时应认为在该主拉应力的作用方向上岩体已失去抵抗应变

的能力，而在主压应力的作用方向仍可按线弹性材料进行分析。根据上述分析，计算时首先对岩体进行弹性有限元分析，据此判别岩体内各单元是否有主拉应力产生，估算出拉应力区的范围。然后将各单元中的拉应力视为多余应力，利用初应力公式将它们换算成残余力，并用有限元法计算出修正的应力场，再与原有应力场叠加后判别是否还有拉应力区存在。重复进行修正应力计算，直至各单元都不出现拉应力区为止，从而得到最终计算结果。该方法最早由 O. C. Zienkiewicz 提出，一般要迭代 10 次至 15 次以上才能获得结果。这个方法的缺点是不能保证所有的情况都能收敛[12]。

为了减少收敛迭代的次数，Nair 等人认为岩体拉裂后在两个互相垂直的方向上不能相互传递应力，故在计算中可将出现拉应力的各个单元的泊松比减小到趋近于零，这一建议使收敛速度得到了改善，但每次迭代都必须进行刚度矩阵修正计算，从而增加了运算时间。为了避免这个缺点，可采用修正应力法消除泊松比的影响，如图 5.8 所示。

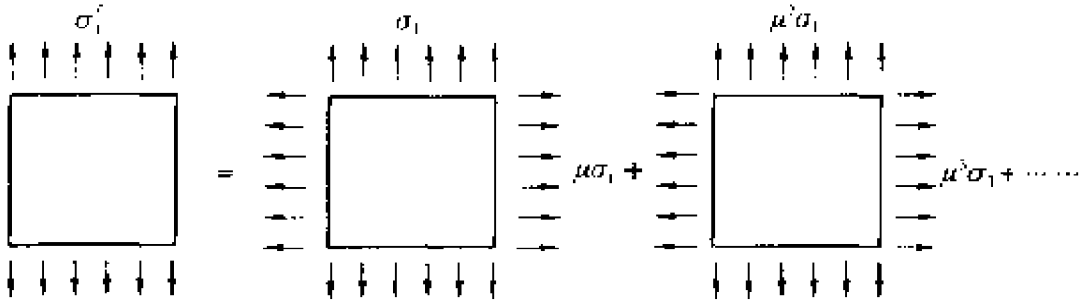


图 5.8　无拉应力计算模型应力修正

对于平面应变问题，设某单元的主应力 σ_1 为拉应力，σ_3 为压应力，并假设该单元在 σ_1 作用下已经破裂。由于单元在 σ_1 方向已经破裂，单元在垂直方向不能传递变形，即有 $\varepsilon_3=0$。由弹性力学平面应变问题的物理方程

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}(\sigma_3-\upsilon\sigma_1)$$

知，为了保证 $\varepsilon_3=0$ 这一条件成立，在 σ_3 方向应施加量值为 $\sigma_3'=\upsilon\sigma_1$ 的拉应力。同理，因材料也不能传递由 σ_3' 的作用引起的垂直方

向的变形，故有 $\epsilon_1'=0$。为了保证这一条件的成立，在 σ_1 方向应施加量值为 $\sigma_1'=\upsilon\sigma_3=\upsilon^2\sigma_1$ 的拉应力，如此重复分析，可得该单元总的修正拉应力，将其记为 $\{\sigma_T'\}$，则有

$$\{\sigma_T'\}=\begin{Bmatrix}\sigma_1^0\\ \sigma_3^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\sigma_1+\upsilon^2\sigma_1+\upsilon^4\sigma_1+\cdots\\ \upsilon\sigma_1+\upsilon^3\sigma_1+\upsilon^5\sigma_1+\cdots\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\sigma_1}{1-\upsilon^2}\\ \dfrac{\upsilon\sigma_1}{1-\upsilon^2}\end{Bmatrix} \tag{5.87}$$

当单元的 σ_1 和 σ_3 均为拉应力时，单元的修正拉应力矩阵 $\{\sigma_T'\}$ 的表达式应改为

$$\{\sigma_T'\}=$$

$$\begin{Bmatrix}\sigma_1^0\\ \sigma_3^0\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}(1+\upsilon^2+\upsilon^4+\cdots)\sigma_1+\upsilon(1+\upsilon^2+\upsilon^4+\cdots)\sigma_3\\ (1+\upsilon^2+\upsilon^4+\cdots)\sigma_3+\upsilon(1+\upsilon^2+\upsilon^4+\cdots)\sigma_1\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\sigma_1+\upsilon\sigma_3}{1-\upsilon^2}\\ \dfrac{\sigma_3+\upsilon\sigma_1}{1-\upsilon^2}\end{Bmatrix} \tag{5.88}$$

相应的有限元方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{Q}+\Delta\boldsymbol{\Psi} \tag{5.89}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Q}&=\int_{\Omega}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}\mathrm{d}\Gamma\\ \Delta\boldsymbol{\Psi}&=-\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{5.90}$$

式中，σ_T 为单元修正拉应力矩阵 $\{\sigma_T'\}$ 经坐标转换后得到的整体坐标系中的拉应力修正矩阵，

$$\sigma_T=\alpha\sigma_T' \tag{5.91}$$

其中 $\sigma_T=\{\sigma_x\quad\sigma_y\quad\tau_{xy}\}^T$，

α—— 坐标转换矩阵

$$\alpha=\begin{bmatrix}l^2 & m^2\\ m^2 & l^2\\ lm & -lm\end{bmatrix} \tag{5.92}$$

l、m 分别为 σ_1 主方向与 x 和 y 轴之间夹角的方向余弦。

现将无拉应力模型的计算步骤归纳如下：

(1)令 $\Delta\Psi=0$，按(5.89)式计算出结点位移 a_0、单元应力 σ_0；

(2)计算各单元高斯点处的主应力和主方向；

(3)判断各高斯点的主应力是否为拉应力，若出现拉应力，转步骤(4)；否则转步骤(9)；

(4)按(5.87)或(5.88)式计算修正应力 σ_T；

(5)按(5.91)式转换成整体坐标系中的拉应力修正矩阵 σ_P；

(6)按(5.90)式计算残余力 $\Delta\Psi$；

(7)按(5.89)式重新求解有限元方程，得 Δa、$\Delta\sigma$；

(8)按下式计算总位移和总应力

$$a=a_0+\Delta a,\sigma=\sigma_0+\Delta\sigma_0$$

转步骤(2)；

(9)结束。

5.7 无 穷 元

在许多工程和物理问题中，无限域和半无限域总是存在的。岩土工程中的典型问题是三维或轴对称开挖，如图 5.9 所示。开挖问题就是要在无穷远处位移为零的半无限域内确定由于荷载释放而引起的变形。现在的问题是怎样用近似的数值计算方法去模拟无穷远处的边界。直观的答案就是用距离物体足够远的固定边界去近似无限的边界条件。然而，多远的距离才算是足够远的边界呢？显然如果人工设置的边界并非足够远时，将出现较大的误差。另一方面，如果边界设置过远，将造成单元数猛增，以大量增加单元而换取较小的计算精度是得不偿失的。

为了克服无穷域带来的困难，人们已经提出了种种方法。例如，用“蜂窝”网格建立递推方程、有限元边界元耦合法[10]。然而，最适用和最有效的方法当属无穷元法。无穷元法最早是由 Bettess[13]提出来的。无穷元法以一种理想的方式描述延伸至无穷远的物体。使用时，只要将无穷元耦合到普通有限元中即可，如图 5.9(b)。

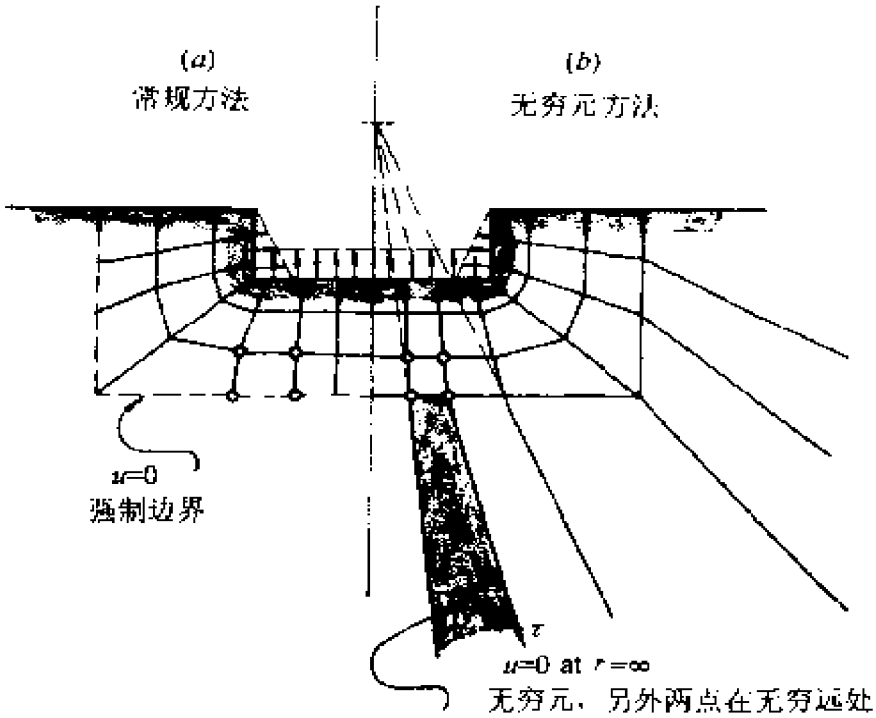


图 5.9　半无限域中开挖问题

无穷元方法的基本思想是将无穷单元映射到正方形单元(对一维问题和三维问题就是分别映射到有限线段和立方体单元)。变换中采用的映射函数必须是完全的，且随着径向距离 r 的增加，映射函数必须反映物体的真实情况。从数学和物理的观点看，映射函数必须反映下列衰减函数

$$\frac{c_1}{r}+\frac{c_2}{r^2}+\frac{c_3}{r^3}+\cdots \tag{5.93}$$

式中　c_i ——任意常数；

r——物体距离原点的径向距离。

在下面讨论中，我们将介绍具有上述特点的映射函数。

图 5.10 表示无穷元和母单元之间的映射关系。

我们首先考察一维映射，设直线 CPQ 沿 x 方向。构造下列函数

$$x=-\frac{\xi}{1-\xi}x_C+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_Q \tag{5.94}$$

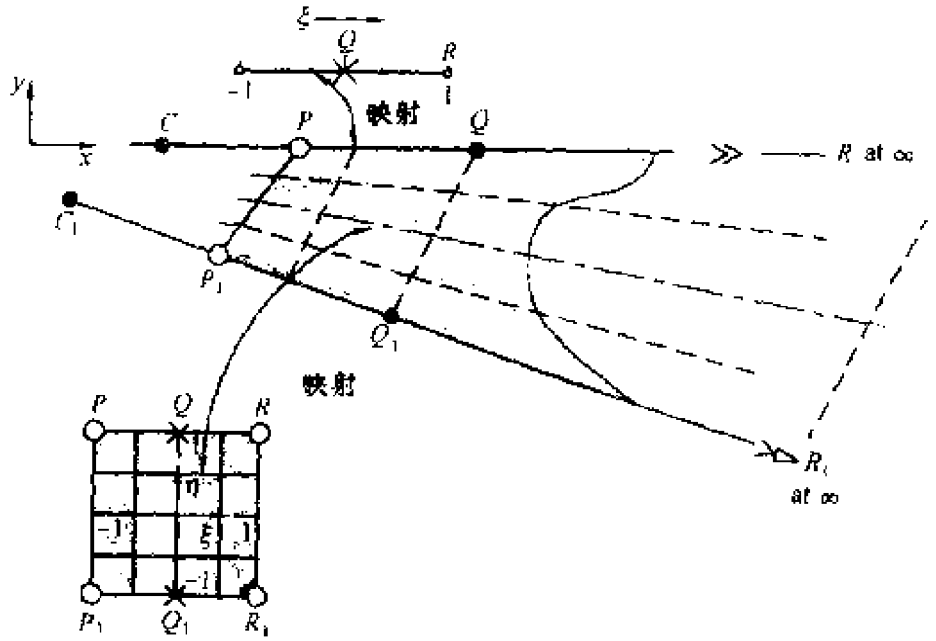


图 5.10　无穷元和母单元之间的映射关系

容易验证：

$$\xi=0 \quad \text{对应于} \quad x=x_Q$$

$$\xi=1 \quad \text{对应于} \quad x=\infty$$

$$\xi=-1 \quad \text{对应于} \quad x=\frac{1}{2}(x_Q+x_C)=x_P$$

其中　P 是点 C 和 Q 的中点。

(5.94)式中的 x 也可以用 Q、P 两点的坐标表示，为此只须将

$$x_C=2x_P-x_Q \tag{5.95}$$

代入到(5.94)式中，即得到

$$x=N_Qx_Q+N_Px_P=(1+\frac{2\xi}{1-\xi})x_Q-\frac{2\xi}{1-\xi}x_P \tag{5.96}$$

上述两种映射都与 x 的坐标原点无关。同时容易验证

$$N_Q+N_P=N_C+N_Q=1 \tag{5.97}$$

然而 C 点的意义非常重要，它表示扰动原点。(5.93)式中的变量 r 是从 C 点度量的，即

$$r=x-x_C \tag{5.98}$$

例如，假定未知函数 u 可以近似用多项式表示为

$$u=\alpha_0+\alpha_1\xi+\alpha_2\xi^2+\alpha_3\xi^3+\cdots \tag{5.99}$$

从(5.94)式中解出 ξ，得到

$$\xi=1-\frac{x_Q-x_C}{x-x_C}=1-\frac{x_Q-x_C}{r} \tag{5.100}$$

将上式代入(5.99)式，则得到类似于(5.93)式的衰减函数，其中 ξ 的线性项对应于 $\frac{1}{r}$，ξ 的平方项对应于 $\frac{1}{r^2}$，…。

对一维问题，随着多项式指数的增加，无穷元将收敛于真解。

下面进一步讨论二维和三维问题。

对二维和三维问题，我们只要简单地将一维问题的映射函数乘以普通单元在 η 或 ζ 方向的形状函数，如图 5.10 所示。

为此，首先将(5.94)式的映射推广到 (x,y,z) 空间中的任意直线

$$\begin{aligned}
x&=-\frac{\xi}{1-\xi}x_{C1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_{Q1}\\
y&=-\frac{\xi}{1-\xi}y_{C1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)y_{Q1}\\
z&=-\frac{\xi}{1-\xi}z_{C1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)z_{Q1}
\end{aligned} \tag{5.101}$$

然后，将 η 方向或 ζ 方向普通单元的形状函数乘以一维映射函数。假定对图 5.10 的 $PP_1QQ_1RR_1$ 单元在 η 方向进行线性插值，则有

$$\begin{aligned}
x=N_1(\eta)&\left[-\frac{\xi}{1-\xi}x_C+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_Q\right]+\\
&N_0(\eta)\left[-\frac{\xi}{1-\xi}x_{C1}+\left(1+\frac{\xi}{1-\xi}\right)x_{Q1}\right]
\end{aligned} \tag{5.102}$$

其中

$$N_1(\eta)=\frac{1}{2}(1+\eta)\qquad N_0(\eta)=\frac{1}{2}(1-\eta)$$

同样，我们可用在 η 方向二次插值构造二维映射函数，如图 5.11 所示。

无穷元在实际应用中是很方便的，只要将该单元迭加到普通

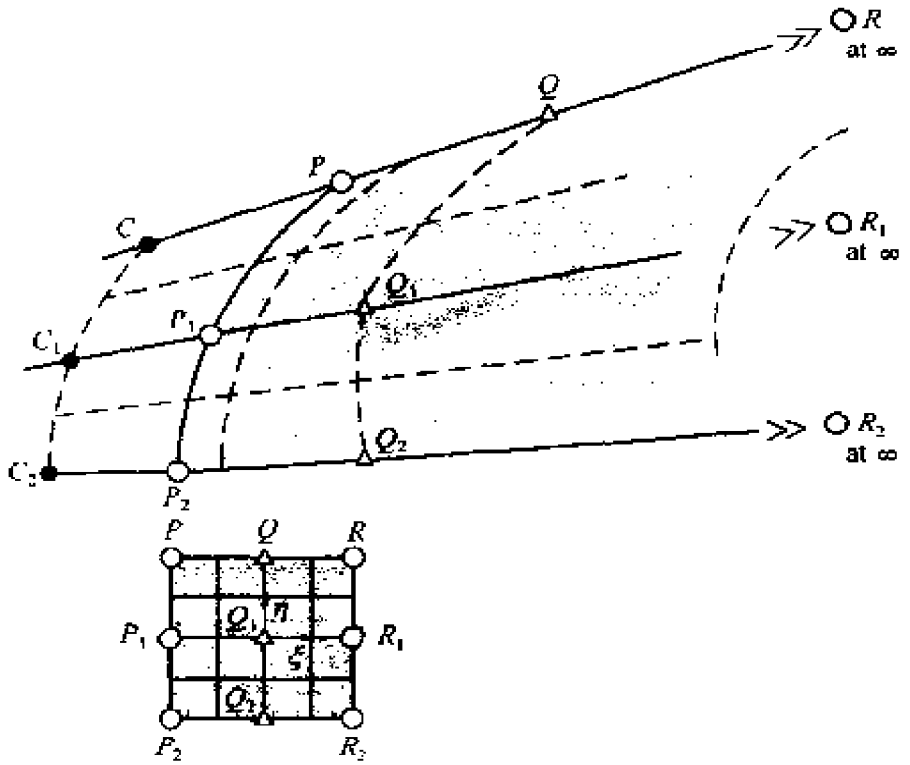


图 5.11　η 方向二次插值的无穷元映射

有限元中即可，见图 5.9(*b*)。读者将看到，无穷元仅在雅可比变换矩阵上不同于普通有限元，在有限元程序设计中仅需对此修改。

坐标 C 的原点，或称“极点”，可选择于每条径线上的任意固定点，如图 5.10 所示。选择原点时，可参考预期数值解的大致分布规律。

图 5.12 表示半无限空间受集中点荷载作用的 Boussineq 问题。图中给出了用固定位移边界和采用无穷元计算两种结果，从中可以看到无穷元结果与解析解吻合良好，普通有限元则有较大误差。在这个例题中，显而易见，无穷元的原点选在集中荷载作用点是合适的。

图 5.13 给出了应用线性无穷元分析流体力学中无旋流绕机翼作用问题。即使采用非常少的普通有限元与无穷元耦合，也获得了非常好的结果。这个问题的解析解可通过无旋流中的拉普拉斯方程得到。无穷元的原点选择在机翼剖面中心线的任意点。

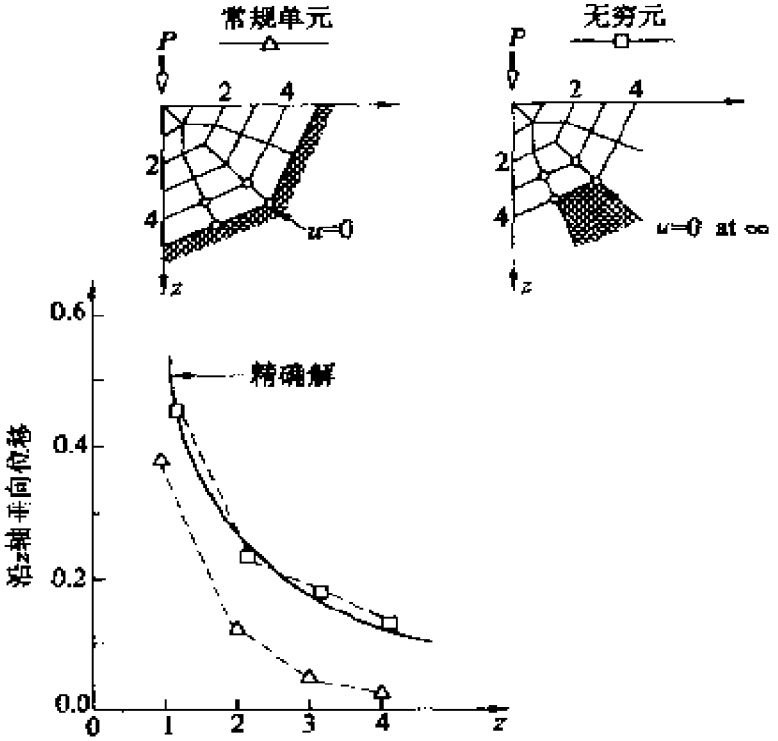
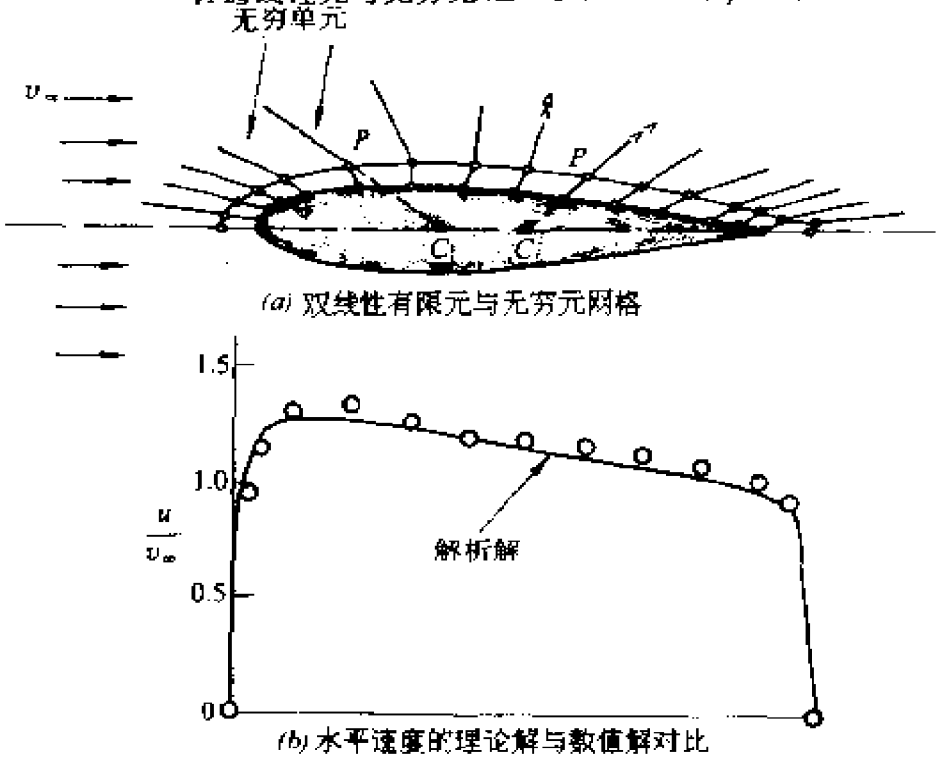


图 5.12　半无限域受集中点荷载作用的 Boussineq 问题

普通线性元与无穷元($E=1$，$\upsilon=0.1$，$p=1$)



(a) 双线性有限元与无穷元网格

(b) 水平速度的理论解与数值解对比

图 5.13　无旋流绕 NACA 0018 机翼作用问题

第六章　接触问题

近年来随着计算机的发展，有限元法已广泛地应用于各种工程接触问题，提出了各种模拟接触问题的特殊单元。这些特殊的单元大多采用数学规划的方法，程序设计复杂和缺乏通用性。本节介绍雷晓燕等[15~18]提出的以部分结点位移和接触应力作为基本未知量的接触摩擦单元。这种单元考虑固定、滑动和张开三种接触条件，能模拟具有初始裂缝和无初始裂缝两物体间的摩擦滑动、张开和闭合。

6.1　二维接触问题

考虑两物体 A 和 B 的接触，对区域 A、B 用普通有限元离散方法将其划分成四边形单元或三角形单元，在两物体间的接触面上则布置双结点，如图 6.1(a)。整个问题的描述采用笛卡尔坐标系(x，y)，局部坐标系则用于描述接触单元。接触问题是非线性问题，宜用增量法和迭代法求解。如不加说明以下各公式中的量都为增量。

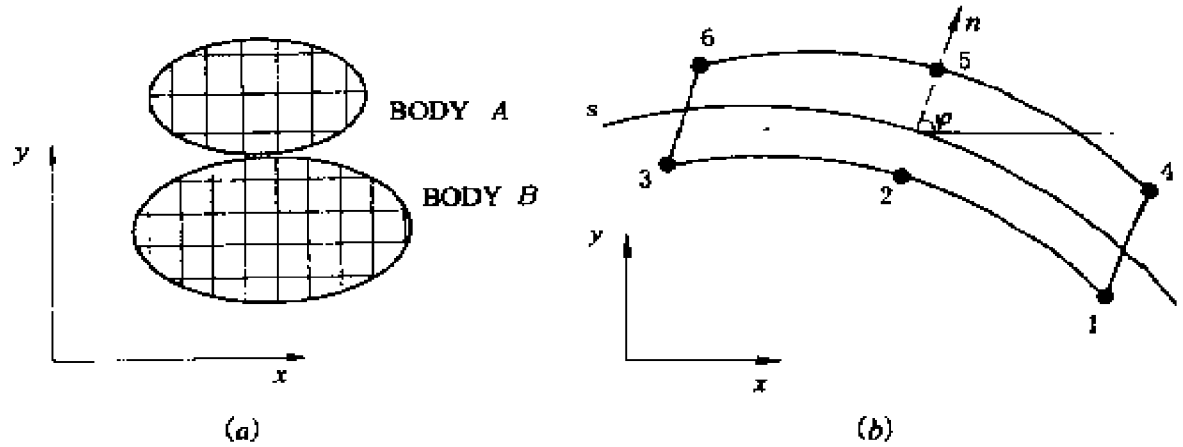


图 6.1　有限元离散网格和接触单元

6.1.1 单元结点接触应力与结点力之间的关系

为了模拟接触面复杂的几何形状，接触元采用六结点的等参元，如图 6.1(*b*)。运用虚位移原理，得到

$$\delta \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F} = \int_{\Gamma} (\delta \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{d}\Gamma \tag{6.1}$$

式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$——整体坐标系中增量结点位移矢量和增量等效结点力矢量：

$$\boldsymbol{a} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_6 \quad v_6\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F} = \{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad \cdots \quad F_{x6} \quad F_{y6}\}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\Sigma}$——局部坐标系中增量相对位移矢量及增量接触应力矢量：

$$\boldsymbol{A} = \{\Delta u' \quad \Delta v'\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \{\sigma \quad \tau\}^{\mathrm{T}}$$

引入插值函数矩阵 $\boldsymbol{N}$

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

如图 6.2 所示，其中

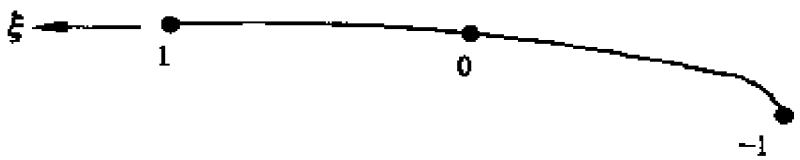


图 6.2 接触单元自然坐标

$$N_1 = -\frac{1}{2}\xi(1-\xi), N_2 = 1-\xi^2, N_3 = \frac{1}{2}\xi(1+\xi) \tag{6.3}$$

单元内任一点的相对位移可用结点相对位移表示为：

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{a}' \tag{6.4}$$

式中，$\Delta\boldsymbol{a}'$ 为局部坐标系中增量结点相对位移矢量：

$$\Delta\boldsymbol{a}' = \{\Delta u_1' \quad \Delta v_1' \quad \Delta u_2' \quad \Delta v_2' \quad \Delta u_3' \quad \Delta v_3'\}^{\mathrm{T}}$$

单元内任一点的接触应力可用结点接触应力表示为：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{N}\sigma \tag{6.5}$$

式中，σ 为局部坐标系中增量结点接触应力矢量：

$$\sigma=\{\sigma_1 \quad \tau_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_2 \quad \sigma_3 \quad \tau_3\}^{\mathrm{T}}$$

局部坐标系中增量结点相对位移与整体坐标系中增量结点位移之间的关系为

$$\Delta a' = Ca \tag{6.6}$$

式中，C 为转换矩阵

$$C=\begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

其中

$$L_i=\begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3) \tag{6.8}$$

其中 φ_i 为整体坐标轴 x 与局部坐标轴 n 之间的夹角，如图 6.1(*b*)所示。

将(6.4)、(6.5)、(6.6)三式代入(6.1)式，得到

$$C^{\mathrm{T}}S\sigma=F \tag{6.9}$$

式中

$$S=\int_{\Gamma} N^{\mathrm{T}}N\mathrm{d}\Gamma \tag{6.10}$$

6.1.2 约束条件

对二维问题，接触条件可分为三类，即固定、滑动和张开。对不同的接触状态，接触面上的位移和应力应满足不同的平衡方程和连续条件。

接触单元的几何和静力约束方程可统一表示成

$$\{C' \quad R\}\begin{Bmatrix} a \\ \sigma \end{Bmatrix}=a^* \tag{6.11}$$

式中 C' ——坐标转换矩阵；

$$C'=\begin{bmatrix} -L_1' & 0 & 0 & L_1' & 0 & 0 \\ 0 & -L_2' & 0 & 0 & L_2' & 0 \\ 0 & 0 & -L_3' & 0 & 0 & L_3' \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

a^* ——给定的结点相对位移或结点接触应力矢量，其值由表6.1确定；

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{R}_1 & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{R}_2 & 0\\ 0 & 0 & \boldsymbol{R}_3\end{bmatrix} \tag{6.13}$$

上两式中的子矩阵 $\boldsymbol{L}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$ 与结点对之间的接触状态有关，现分别说明如下：

(1)固定状态

在固定状态，结点对之间的法向相对位移和切向相对位移等于零，这时有

$$\boldsymbol{L}_i=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix}\quad (i=1,2,3) \tag{6.14}$$

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad (i=1,2,3) \tag{6.15}$$

$$\boldsymbol{a}^*=\{\Delta u_1^* \quad \Delta v_1^* \quad \Delta u_2^* \quad \Delta v_2^* \quad \Delta u_3^* \quad \Delta v_3^*\}^{\mathrm{T}} \tag{6.16}$$

(2)滑动状态

在滑动状态，结点对之间在法线方向仍保持接触，但沿切线方向产生滑动，总剪应力等于容许剪应力。假设仅结点对(1,4)处于滑动状态，其余结点对仍处于固定状态，如图6.1(*b*)。则有

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{bmatrix}\cos\varphi_1 & \sin\varphi_1\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.17}$$

$$\boldsymbol{L}_i=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix}\quad (i=2,3) \tag{6.18}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.19}$$

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad (i=2,3) \tag{6.20}$$

$$\boldsymbol{a}^*=\{\Delta u_1^* \quad T_1 \quad \Delta u_2^* \quad \Delta v_2^* \quad \Delta u_3^* \quad \Delta v_3^*\}^{\mathrm{T}} \tag{6.21}$$

(3)张开状态

在张开状态，结点对沿法线和切线方向的总接触应力等于零，

若假设结点对(1,4)处于张开状态,其余结点对仍处于固定状态,则有

$$\boldsymbol{L}_1^{\prime}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.22}$$

$$\boldsymbol{L}_i^{\prime}=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix} \tag{6.23}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.24}$$

$$\boldsymbol{R}_i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}(i=2,3) \tag{6.25}$$

$$\boldsymbol{a}^*=\{N_1 \quad T_1 \quad \Delta u_2^* \quad \Delta v_2^* \quad \Delta u_3^* \quad \Delta v_3^*\}^{\mathrm{T}} \tag{6.26}$$

(3.16)、(3.21)、(3.26)三式中的 Δu_i^*、Δv_i^*、N_i、T_i 由表 6.1 给出。

6.1.3 等效单元刚度矩阵和结点荷载向量

以上分别建立了结点接触应力和结点荷载之间的关系(6.9)及约束方程(6.11),将(6.9)、(6.11)两式合写在一起,则得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{C}^{\prime} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{a}^*\end{Bmatrix} \tag{6.27}$$

通过形成如下所示的刚度矩阵 $\boldsymbol{k}_c$ 和荷载向量 $\boldsymbol{f}_c$,这种接触单元可以在单元水平上进行刚度和荷载的组装

$$\boldsymbol{k}_c=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{C}^{\prime} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix} \tag{6.28}$$

$$\boldsymbol{f}_c=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{a}^*\end{Bmatrix} \tag{6.29}$$

(6.28)、(6.29)两式分别被称为接触摩擦单元的等效单元刚度矩阵和等效结点荷载向量,可用常规的有限元集成规则迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

6.1.4 数值计算的实现

接触摩擦问题需经多次迭代才能获得正确解,计算时,首先假设单元处于某种接触状态(固定、滑动和张开),按照假定的状态,

分别计算等效单元刚度矩阵和等效荷载向量。解有限元方程后，得到一组试验解。将试验解进行接触状态检查，看其是否与原假设状态相同。若相同，说明原假设接触状态正确，相应的解即为正确解，计算结束。若不同，则选取试验解为新的假设状态，并修改荷载向量，进行新的一轮迭代，直至收敛。

现给出主要计算步骤。

假设在荷载步 k 已进行了第$(i-1)$次迭代，相应的位移和应力 $\boldsymbol{a}_{i-1}^{k}$、$\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^{k}$已经求得，现考察第 i 次迭代的情况：

步骤 1，假定第$(i-1)$次迭代时求得的接触状态为正确状态，按(6.28)式计算等效单元刚度矩阵；

步骤 2，根据假设的接触状态，根据表 6.1 按(6.29)式形成等效单元荷载向量；

步骤 3，将等效单元刚度矩阵和等效单元荷载向量分别组集到总刚度矩阵和总荷载向量中；

步骤 4，求解有限元方程，得到增量位移 $\boldsymbol{a}_i$ 和增量应力 $\boldsymbol{\sigma}_i$；

步骤 5，计算总位移和总应力，

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}_i^k=\boldsymbol{a}^{k-1}+\boldsymbol{a}_i\\ \boldsymbol{\sigma}_i^k=\boldsymbol{\sigma}^{k-1}+\boldsymbol{\sigma}_i\end{cases}\tag{6.30}$$

式中 $\boldsymbol{a}^{k-1}$、$\boldsymbol{\sigma}^{k-1}$——荷载步$(k-1)$时的位移和应力；

步骤 6，按表 6.2 对每一结点对选择新的接触状态；

步骤 7，检查新的接触状态是否与原假设相同，若相同，迭代结束，转新的荷载增量步；否则，转步骤 1，进行新的下一轮迭代。

表 6.1　给定的约束荷载向量 $\boldsymbol{a}'$

荷载步 k → / ↓ $(k-1)$	固　定	滑　动	张　开
固　定	$\Delta u'=0$ $\Delta v'=0$	$\Delta u'=0$ $T=-\tau_*^k-\tau^{k-1}$	$N=-\sigma^{k-1}$ $T=-\tau^{k-1}$
滑　动	$\Delta u'=0$ $\Delta v'=0$	$\Delta u'=0$ $T=-\mu\lvert\sigma^k\rvert-\tau^{k-1}$	$N=-\sigma^{k-1}$ $T=-\tau^{k-1}$
张　开	$\Delta u'=-(\Delta u')_i^{k-1}-g$ $\Delta v'=-(\Delta v')_i\left\lvert\frac{\Delta u'}{(\Delta u')_i}\right\rvert$	$\Delta u'=-(\Delta u')_i^{k-1}-g$ $T=-\mu\lvert\sigma^k\rvert$	$N=0$ $T=0$

表 6.1 为给定的约束荷载向量 a^*，它与各结点对的接触状态有关；表 6.2 给出了各个荷载步中每次迭代进行接触状态检查的判据。

注意到由(6.28)式给出的等效单元刚度矩阵是非对称的，求解非对称线性代数方程组是不经济的，通过修改约束方程(6.11)式可得到对称的等效单元刚度矩阵。由于篇幅的限制，在此不作详细讨论，有兴趣的读者可参考文献[16]。

表 6.2 接触状态判别表

迭代步→(i) ↓ (i−1)	固　定	滑　动	张　开
固　定	$\sigma_t^i<[\sigma]$ $\tau_t^i<[\tau]$	$\sigma_t^i<[\sigma]$ $\tau_t^i\geqslant[\tau]$	$\sigma_t^i\geqslant[\sigma]$
滑　动	$\sigma_t^i<[\sigma]$ $\lvert(\Delta u')_t\rvert<\varepsilon$	$\sigma_t^i<[\sigma]$ $\lvert(\Delta u')_t\rvert\geqslant\varepsilon$	$\sigma_t^i\geqslant[\sigma]$
张　开	$(\Delta u')_n-g<0$		$(\Delta u')_n+g\geqslant0$

表 6.1、表 6.2 中，$[\sigma]$、$[\tau]$分别为法线和切线方向的最大容许应力，其中$[\tau]=-\mu\sigma_n^i$，μ 为材料的摩擦系数，σ_n^i 规定正值表示拉应力；g 为两物体接触面间的初始裂缝。

6.2 三维接触问题

考察三维接触问题，我们用普通有限元离散弹性体，弹性体之间的交界面则布置三维接触单元。整个问题的描述采用笛卡尔坐标(x,y,z)，局部坐标系(n,s,t)则用于描述接触摩擦单元。

6.2.1 接触摩擦单元结点接触应力与结点力之间的关系

定义三维接触单元如图 6.3 所示，运用虚位移原理，得到

$$\delta\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}=\int_{\Gamma}(\delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}\mathrm{d}\Gamma \tag{6.31}$$

式中 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{F}$　整体坐标系中的增量结点位移向量和等效增量结

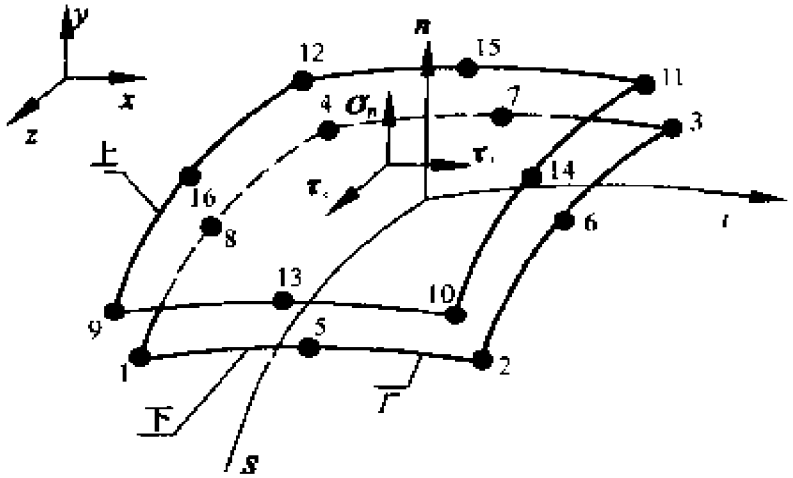


图 6.3　局部坐标系中的三维接触单元

点力向量，

$$\boldsymbol{a}=\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \cdots \quad u_{16} \quad v_{16} \quad w_{16}\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{F}=\{F_{x1} \quad F_{y1} \quad F_{z1} \quad F_{x2} \quad F_{y2} \quad F_{z2} \quad \cdots \quad F_{x16} \quad F_{y16} \quad F_{z16}\}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{\Sigma}$——局部坐标系中的增量相对位移向量和增量接触应力向量，

$$\boldsymbol{A}=\{\Delta u' \quad \Delta v' \quad \Delta w'\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\{\sigma \quad \tau_s \quad \tau_t\}^{\mathrm{T}}$$

引入插值函数矩阵 $\boldsymbol{N}$，则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{a}' \tag{6.32}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\sigma} \tag{6.33}$$

$$\Delta\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{C}\boldsymbol{a} \tag{6.34}$$

式中　$\Delta\boldsymbol{a}'$、$\boldsymbol{\sigma}$——局部坐标系中的增量结点相对位移向量和增量结点接触应力向量

$$\Delta\boldsymbol{a}'=\{\Delta u_1' \quad \Delta v_1' \quad \Delta w_1' \quad \cdots \quad \Delta u_8' \quad \Delta v_8' \quad \Delta w_8'\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\{\sigma_1 \quad \tau_{s1} \quad \tau_{t1} \quad \cdots \quad \sigma_8 \quad \tau_{s8} \quad \tau_{t8}\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

$\boldsymbol{C}$——坐标转换矩阵，

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{L}_1 & & & 0 & \boldsymbol{L}_1 & & & 0 \\ & -\boldsymbol{L}_2 & & & & \boldsymbol{L}_2 & & \\ & & \ddots & & & & \ddots & \\ 0 & & & -\boldsymbol{L}_8 & 0 & & & \boldsymbol{L}_8 \end{bmatrix} \tag{6.36}$$

上式中

$$\boldsymbol{L}_i=\begin{bmatrix} l_{nx} & l_{ny} & l_{nz} \\ l_{sx} & l_{sy} & l_{sz} \\ l_{tx} & l_{ty} & l_{tz} \end{bmatrix} \quad (i=1,2,\cdots 8) \tag{6.37}$$

其中 l_{nx}——局部坐标轴 n 与整体坐标 x 之间的方向余弦。

将(6.32)式、(6.33)式、(6.34)式代入(6.31)式中，得到三维接触问题接触应力与结点力之间的关系为

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{F} \tag{6.38}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\int_{\Gamma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Gamma \tag{6.39}$$

6.2.2 接触面约束条件

在三维接触问题中，接触条件仍然可以分为三类，即固定、滑动和张开。其中固定是指结点对闭合，无相对位移；滑动指接触面上总剪应力超过允许剪应力，结点对之间有相对位移；张开指结点对产生裂缝。

对应于上述不同的接触状态，接触面上的位移和应力应满足不同的连续条件和平衡条件，或称约束条件。例如对图 6.3 中的结点对(1,9)，其约束条件为

$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{L}_1=\begin{Bmatrix} u_9-u_1 \\ v_9-v_1 \\ w_9-w_1 \end{Bmatrix}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{R}_1)\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \tau_{s1} \\ \tau_{t1} \end{Bmatrix}=\boldsymbol{R}_1\begin{Bmatrix} a_1 \\ b_{s1} \\ b_{t1} \end{Bmatrix}+(\boldsymbol{I}_1-\boldsymbol{R}_1)\begin{Bmatrix} N_1 \\ T_{s1} \\ T_{t1} \end{Bmatrix} \tag{6.40}$$

式中 $\boldsymbol{I}_1$——三阶单位矩阵；

a_1、b_{s1}、b_{t1}、N_1、T_{s1}、T_{t1}—— 给定的结点相对位移或接触应力，与上一荷载步和当前计算步时结点对所处的接触状态有关，由表 6.3 给出；

$\boldsymbol{L}_1$—— 结点对(1,9)的方向余弦矩阵，见(6.37)式；

$\boldsymbol{R}_1$ ——对角矩阵，定义如下：

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{6.41}$$

其中，m_1、m_2 和 m_3 与当前计算步结点对所处的接触状态有关

对固定状态

$$m_1=1,m_2=1,m_3=1$$

对滑动状态

$$m_1=1,m_2=0,m_3=0$$

对张开状态

$$m_1=0,m_2=0,m_3=0$$

图 6.4 所示的三维接触元有八个结点对，分别记为(1,9)，(2,10)，…(8,16)。每个结点对都可写出形如(6.40)式的约束方程。因此可将接触单元的约束方程统一表示为

$$\boldsymbol{RCa}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{a}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})\hat{\boldsymbol{Q}} \tag{6.42}$$

式中

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 & & & 0 \\ & \boldsymbol{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{R}_8 \end{bmatrix},\boldsymbol{I}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_1 & & & 0 \\ & \boldsymbol{I}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boldsymbol{I}_8 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}=\{a_1 \quad b_{s1} \quad b_{t1} \quad a_2 \quad b_{s2} \quad b_{t2} \quad \cdots \quad a_8 \quad b_{s8} \quad b_{t8}\}^{\mathrm{T}}$$

$$\hat{\boldsymbol{Q}}=\{N_1 \quad T_{s1} \quad T_{t1} \quad N_2 \quad T_{s2} \quad T_{t2} \cdots \quad N_8 \quad T_{s8} \quad T_{t8}\}^{\mathrm{T}}$$

令

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{a}}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})\hat{\boldsymbol{Q}} \tag{6.43}$$

则约束方程(6.42)式可写成

$$\boldsymbol{RCa}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R})\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{Q} \tag{6.44}$$

6.2.3 三维接触单元的等效刚度矩阵和等效荷载向量

将(6.38)、(6.44)两式合写在一起，则得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{RC} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{\sigma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F} \\ \boldsymbol{Q} \end{Bmatrix} \tag{6.45}$$

由此得到等效单元刚度矩阵和等效结点荷载向量为

$$\boldsymbol{k}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S} \\ \boldsymbol{RC} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{R} \end{bmatrix} \tag{6.46}$$

$$\boldsymbol{f}_e = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \tag{6.47}$$

6.2.4 坐标转换矩阵 L_i

在三维接触单元中，仅用中面的八个结点定义单元的几何形状。在局部坐标系中，插值函数是根据图 6.4 定义的。

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{4}(1+\xi_0)(1+\eta_0)(\xi_0+\eta_0-1) \quad i=1,2,3,4 \\ N_i &= \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi_0) \quad i=5,7 \\ N_i &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta_0) \quad i=6,8 \end{aligned} \tag{6.48}$$

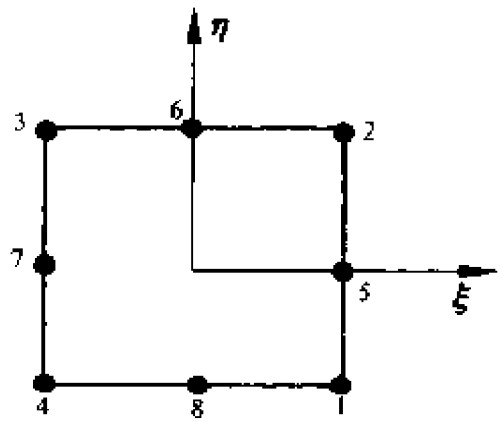


图 6.4 局部坐标系中的单元中面

其中 $\xi_0=\xi_i\xi$，$\eta_0=\eta_i\eta$

为了在单元内任一点建立局部坐标系(n,s,t)，作如下两条切线

$$d\vec{\xi}=(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \xi}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \xi}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \xi})d\xi$$

$$d\vec{\eta}=(\vec{i}\frac{\partial x}{\partial \eta}+\vec{j}\frac{\partial y}{\partial \eta}+\vec{k}\frac{\partial z}{\partial \eta})d\eta \tag{6.49}$$

式中 $\vec{i}$、$\vec{j}$、$\vec{k}$ ——整体坐标系中的单位矢量。

令

$$\vec{n}=d\vec{\xi}\times d\vec{\eta}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta}\end{vmatrix}=n_x\vec{i}+n_y\vec{j}+n_z\vec{k} \tag{6.50}$$

则有

$$l_{nx}=\frac{n_x}{|\vec{n}|},l_{ny}=\frac{n_y}{|\vec{n}|},l_{nz}=\frac{n_z}{|\vec{n}|} \tag{6.51}$$

式中

$$n_x=\frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}-\frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}$$

$$n_y=\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial z}{\partial \eta}$$

$$n_z=\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta}-\frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{\partial y}{\partial \xi}$$

$$|\vec{n}|=\sqrt{n_x^2+n_y^2+n_z^2}$$

再作

$$\vec{S}=\vec{n}\times\vec{i}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_{nx} & l_{ny} & l_{nz}\\ 1 & 0 & 0\end{vmatrix}=S_x\vec{i}+S_y\vec{j}+S_z\vec{k} \tag{6.52}$$

得到

$$l_{sx}=\frac{S_x}{|\vec{S}|},l_{sy}=\frac{S_y}{|\vec{S}|},l_{sz}=\frac{S_z}{|\vec{S}|} \tag{6.53}$$

式中

$$S_x=0,S_y=l_{nz},S_z=-l_{ny}$$

$$|\vec{S}|=\sqrt{S_x^2+S_y^2+S_z^2}$$

如果 $\vec{n}//\vec{i}$，则用 $\vec{S}=\vec{n}\times\vec{j}$ 代替(6.52)式。

最后令

$$\vec{t}=\vec{n}\times\vec{S}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ l_{nx} & l_{ny} & l_{nz}\\ l_{sx} & l_{sy} & l_{sz}\end{vmatrix}=t_x\vec{i}+t_y\vec{j}+t_z\vec{k} \tag{6.54}$$

$$t_x=l_{ny}l_{sz}-l_{sy}l_{nz}$$

$$t_y=l_{sx}l_{nz}-l_{nx}l_{sz}$$

$$t_z=l_{nx}l_{sy}-l_{sx}l_{ny}$$

$$|\vec{t}|=\sqrt{t_x^2+t_y^2+t_z^2}$$

(6.39)式用数值积分法可表示成

$$\boldsymbol{S}=\int_{\Gamma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Gamma=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{6.55}$$

式中

$$|J|=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}-\frac{\partial y}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial z}{\partial\xi}-\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial z}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\frac{\partial y}{\partial\eta}-\frac{\partial x}{\partial\eta}\frac{\partial y}{\partial\xi}\right)^2}$$

6.2.5 数值计算的实现

对于三维接触单元，数值计算步骤与二维接触单元相同，不同之处仅为与表 6.1 和表 6.2 对应的给定的荷载向量和接触状态判别表。表 6.3 和表 6.4 分别为三维接触单元给定的相对结点位移或结点接触应力(它与结点对上一荷载步和当前计算步的接触状态有关)及各个荷载步中每次迭代进行接触状态检查的判据。

表 6.3 和表 6.4 中，σ^{k-1}、τ_s^{k-1}、τ_t^{k-1}、$(\Delta u')^{k-1}$ 分别表示荷载步 $(k-1)$ 时局部坐标系中的法向接触应力、沿 s 和 t 方向的切向剪应力及法向相对位移；g 为沿法线方向的初始裂缝；$(\Delta u')_i$、$(\Delta v')_i$、$(\Delta w')_i$ 分别为荷载步 k 当前迭代步 i 时局部坐标系中沿 n、s、t 方向的增量相对位移；$[\sigma]$ 为局部坐标系中法线方向的容许应力；σ_i^k、τ_i^k 分别为荷载步 k 当前迭代步 i 时局部坐标系中的法向接触应力和切向合剪应力。

表 6.3　相对结点位移向量 $\hat{a}$ 和结点接触应力向量 $\hat{Q}$

荷载步 $\rightarrow k$ ↓ $(k-1)$	固　定	滑　动	张　开
固　定 滑　动	$a=0$ $b_n=0$ $b_t=0$	$a=0$ $T_n=a\tau_n^k-\tau_n^{k-1}$ $T_t=a\tau_t^k-\tau_t^{k-1}$	$N=-\sigma^{k-1}$ $T_n=-\tau_n^{k-1}$ $T_t=-\tau_t^{k-1}$
张　开	$a=-(\Delta u')^{k-1}-g$ $b_n=(\Delta v')_i\left\vert\frac{a}{(\Delta u')_i}\right\vert$ $b_t=(\Delta w')_i\left\vert\frac{a}{(\Delta u')_i}\right\vert$	$a=-(\Delta u')^{k-1}-g$ $T_n=a\tau_n^k$ $T_t=a\tau_t^k$	$N=0$ $T_n=0$ $T_t=0$

表 6.4　接触状态判别表

迭代步 $\rightarrow i$ ↓ $(i-1)$	固　定	滑　动	张　开
固　定	$\sigma_i^k<[\sigma]$ $\tau_i^k<[\tau]$	$\sigma_i^k<[\sigma]$ $\tau_i^k\geqslant[\tau]$	$\sigma_i^k\geqslant[\sigma]$
滑　动	$\sigma_i^k<[\sigma]$ $(\Delta s')_i<\varepsilon$	$\sigma_i^k<[\sigma]$ $(\Delta s')_i\geqslant\varepsilon$	$\sigma_i^k\geqslant[\sigma]$
张　开	$(\Delta u')_i+g<0$		$(\Delta u')_i+g\geqslant 0$

$$(\Delta s')_i=\sqrt{(\Delta v')_i^2+(\Delta w')_i^2} \tag{6.56}$$

$$\alpha=\frac{[\tau]}{\sqrt{(\tau_n^k)^2+(\tau_t^k)^2}} \tag{6.57}$$

ε 为给定的精度，例如可取 $\varepsilon=0.1\text{mm}$。

结点对处于固定的条件是

$$\sigma_i^k<[\sigma],\tau_i^k<[\tau] \tag{6.58}$$

其中

$$\tau_i^k=\sqrt{(\tau_n^k)_i^2+(\tau_t^k)_i^2}$$

$$[\tau]=-\mu\sigma_i^k$$

处于滑动的条件是

$$\sigma_i^k<[\sigma],\tau_i^k\geqslant[\tau] \tag{6.59}$$

在切面上的滑动方向可由下式计算

$$\tan\beta=\frac{(\tau_t^k)_i}{(\tau_n^k)_i} \tag{6.60}$$

处于张开状态的条件是

$$\sigma_i^* \geqslant [\sigma] \tag{6.61}$$

6.3 大位移接触摩擦单元

接触摩擦是工程中最常见和最重要的问题之一。许多研究人员致力于这一领域的工作。早期的研究集中在小位移问题方面，采用的是点—点接触模型，如节理单元、接触单元，罚函数法和拉格朗日法[26]。点—点接触模型算法简单，但在应用上有局限性，不适宜大变形情况。

近年来，随着计算机技术的发展，分析各种复杂大位移接触摩擦问题已成为可能。目前，研究人员的重点是寻求有效算法。这方面早期的工作要数 Rothert 和 Hallquist。自那以后，该领域的研究十分活跃，已有一系列的研究成果问世。由于在大位移接触问题中，点—点接触模型不再适用，需要考虑接触运动。大位移问题中的接触条件是很复杂的，以致于出现了各种各样的理论。目前的理论大多过于复杂，不便于实际应用。本文在文[16]的基础上，采用点—面接触模型，提出了一种新的大位移接触摩擦单元。运用这一模型求解问题时，首先使接触界面上的单元网格点点对应。随着荷载的增加，变形越来越大。在这一过程中，点—点接触变成了点—面接触，单元必须采用更新的位形。

接触摩擦单元定义于图 6.5。单元未知量包括结点位移和接

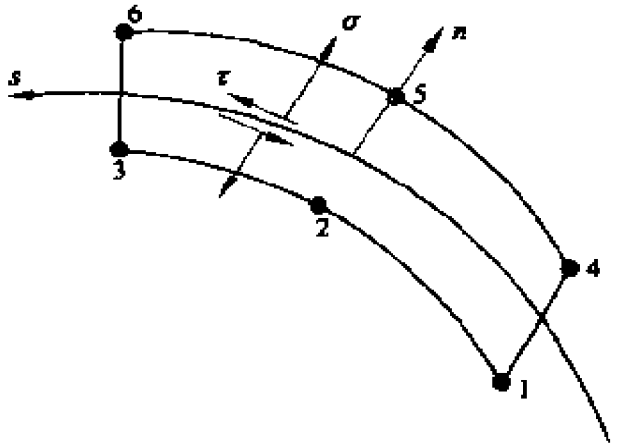


图 6.5 接触摩擦单元

触应力。单元的几何和静力约束条件是作为补充方程包含在接触摩擦单元的刚度方程中。由此建立了大位移接触问题的等效单元刚度矩阵和荷载向量，可以用常规的方法将接触摩擦单元的贡献迭加到总体有限元方程中。

6.3.1 大位移接触摩擦单元理论

在大位移问题中，物体的平衡方程必须建立在当前的位形中。为此，在数值计算时需要采用增量算法。

考察两物体 A 和 B 的接触，A、B 区域采用普通有限元，接触界面采用接触元，接触初始时，结点对应，如图 6.1(a)。整个问题的描述采用笛卡尔坐标系(x，y)，局部坐标系(n，s)则用于描述接触摩擦元。

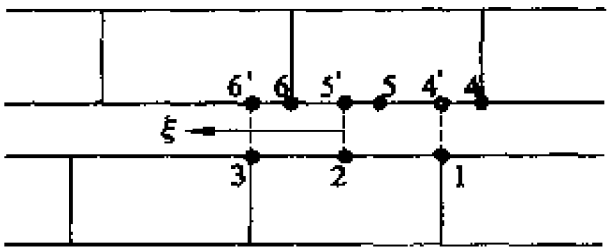


图 6.6 点－面接触时的情形

在接触摩擦分析中，随着外荷载的逐渐增加，变形也越来越大，接触摩擦单元结点对由初始时的点－点接触变成了点—面接触，如图 6.6 所示。这时，单元的位形 1—2—3—4—5—6 必须用新的位形 1—2—3—4′—5′—6′ 更新。

在更新的位形中，运用虚位移原理则有

$$\delta \boldsymbol{a}'^{\mathrm{T}} \boldsymbol{F}' = \int_{\Gamma} (\delta \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma} \mathrm{d}\Gamma \tag{6.62}$$

式中 $\boldsymbol{a}'$——更新位形中整体坐标系下增量结点位移矢量，

$$\boldsymbol{a}' = \{\boldsymbol{a}_1' \quad \boldsymbol{a}_2'\}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{F}'$——更新位形中整体坐标系下增量等效结点力矢量，

$$\boldsymbol{F}' = \{\boldsymbol{F}_1' \quad \boldsymbol{F}_2'\}^{\mathrm{T}}$$

$\boldsymbol{A}$——更新位形中局部坐标系下单元内增量相对位移，

$$\boldsymbol{A} = \{\Delta u \quad \Delta v\}^{\mathrm{T}}$$

Σ ——更新位形中局部坐标系下单元内的接触应力

$$\Sigma=\{\sigma \quad \tau\}^{\mathrm{T}}$$

引入插值函数矩阵 N，结点 4、5、6 的位移可以近似用结点 4′、5′、6′的位移表示成

$$\begin{aligned} u_4&=N_1u_4'+N_2u_5'+N_3u_6' \\ v_4&=N_1v_4'+N_2v_5'+N_3v_6' \end{aligned} \tag{6.63}$$

或

$$\boldsymbol{a}_t=\boldsymbol{H}\boldsymbol{a}_t',\ \boldsymbol{a}_t'=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{a}_t \tag{6.64}$$

式中

$$\boldsymbol{H}=\{\boldsymbol{H}_1 \quad \boldsymbol{H}_2 \quad \boldsymbol{H}_3\}^{\mathrm{T}} \tag{6.65}$$

$$\boldsymbol{H}_i^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}_{\xi_i} \tag{6.66}$$

由此可将 $\boldsymbol{a}'$ 写成

$$\boldsymbol{a}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{a} \tag{6.67}$$

式中 $\boldsymbol{a}$ ——前次位形中整体坐标系下增量结点位移矢量；

$\boldsymbol{M}$ ——转换矩阵

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}^{-1} \end{bmatrix}$$

同样有

$$\boldsymbol{F}'=\boldsymbol{M}\boldsymbol{F} \tag{6.68}$$

式中 $\boldsymbol{F}$——前次位形中整体坐标系下增量等效结点力矢量。

单元内任一点的相对位移可用结点相对位移表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{N}\Delta\boldsymbol{a} \tag{6.59}$$

式中 $\Delta\boldsymbol{a}$——更新位形中局部坐标系下增量结点相对位移矢量。

单元内任一点的接触应力可用结点接触应力表示为

$$\Sigma=\boldsymbol{N}\sigma \tag{6.70}$$

式中 σ——更新位形中局部坐标系下结点接触应力矢量。

局部坐标系中增量结点相对位移与整体坐标系中增量结点位移之间的关系为

$$\Delta\boldsymbol{a}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{a}' \tag{6.71}$$

式中 C——坐标转换矩阵，

$$C=\begin{bmatrix} -L_1 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & -L_2 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & -L_3 & 0 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \tag{6.72}$$

其中

$$L_i=\begin{bmatrix} \cos\varphi_i & \sin\varphi_i \\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix} \quad (i=1,2,3)$$

φ_i 为更新位形中整体坐标轴 x 与局部坐标轴 n 之间的夹角。

将(6.67)～(6.70)四式代入(5.62)式中，得到

$$\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{F} \tag{6.73}$$

其中

$$\boldsymbol{S}=\int_{\Gamma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Gamma \tag{6.74}$$

积分是在当前位形中。

6.3.2 几何和静力约束条件

对二维问题，接触条件可分为三类，即固定、滑动和张开。对不同的接触状态，接触面上的位移和应力应满足不同的平衡方程和连续条件。

接触摩擦单元的几何和静力约束方程可统一表示成

$$\{\boldsymbol{C}' \quad \boldsymbol{R}\}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{a}' \tag{6.75}$$

式中 C'——转换矩阵；

$$C'=\begin{bmatrix} -L_1' & 0 & 0 & L_1' & 0 & 0 \\ 0 & -L_2' & 0 & 0 & L_2' & 0 \\ 0 & 0 & -L_3' & 0 & 0 & L_3' \end{bmatrix} \tag{6.76}$$

R—— 对角矩阵；

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{R}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{R}_3 \end{bmatrix} \tag{6.77}$$

a' —— 给定的结点相对位移或结点接触应力矢量，其值由

表 6.1 确定。

(6.76)式和(6.77)式中的子矩阵 $\boldsymbol{L}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$ 与结点对之间的接触状态有关。

假设结点对(1,4′)处于固定状态,(2,5′)处于滑动状态,(3,6′)处于张开状态,这时(6.76)、(6.77)两式中的子矩阵 $\boldsymbol{L}_i$ 和 $\boldsymbol{R}_i$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{L}_1^i=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ -\sin\varphi_i & \cos\varphi_i\end{bmatrix} \tag{6.78}$$

$$\boldsymbol{L}_2^i=\begin{bmatrix}\cos\varphi_i & \sin\varphi_i\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.79}$$

$$\boldsymbol{L}_3^i=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.80}$$

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{6.81}$$

$$\boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.82}$$

$$\boldsymbol{R}_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \tag{6.83}$$

给定的结点相对位移和结点接触应力具有如下形式

$$\boldsymbol{a}^*=\{\Delta u_1^* \quad \Delta v_1^* \quad \Delta u_2^* \quad T_2 \quad N_3 \quad T_3\}^{\mathrm{T}} \tag{6.84}$$

式中,Δu_1^*、Δv_1^*、N_i、T_i 与上一荷载步结点对所处的接触状态有关,其值由表 6.1 确定。

6.3.3 等效单元刚度—约束矩阵和荷载向量

上两节分别建立了结点接触应力和结点荷载之间的关系(6.73)式及约束方程(6.75)式。将两式合写在一起,则有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{M} & {}^1\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{S}\\ -\boldsymbol{C}^i\boldsymbol{M} & \boldsymbol{R}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{\sigma}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}\\ \boldsymbol{a}^*\end{Bmatrix} \tag{6.85}$$

通过形成如下所示的刚度—约束矩阵 $\boldsymbol{k}_c$ 和荷载矢量 $\boldsymbol{f}_c$,这种新单元可以在单元水平上进行刚度和荷载的组装。

$$k_c=\begin{bmatrix}0 & M^{-1}C^{\mathrm{T}}S\\ C^{\mathrm{T}}M & R\end{bmatrix} \tag{6.86}$$

$$f_c=\begin{Bmatrix}0\\ a^*\end{Bmatrix} \tag{6.87}$$

(6.86)、(6.87)两式分别被称为等效单元刚度—约束矩阵和荷载向量，可用标准的有限元集成规则迭加到总刚度矩阵和总荷载向量中。

6.3.4 算　　法

大位移接触摩擦问题的算法与二维接触摩擦问题相同。

在岩土工程中，运用接触状态判别表时，常采用最大拉应力和Mohr-Coulomb剪切滑动准则，即

$$\sigma\leqslant[\sigma],\tau\leqslant C-\sigma\tan\phi \tag{6.88}$$

式中　C——粘性系数；

ϕ——内摩擦角。

6.3.5 几个问题

6.3.5.1　从整体坐标计算局部坐标 ξ_j

为了形成矩阵 H，见(6.65)、(6.66)式，需要计算 ξ_j。ξ_j 可以利用接触面上的正交条件建立补充方程而求得。如图6.7所示，沿接触面上切线方向的单位矢量为

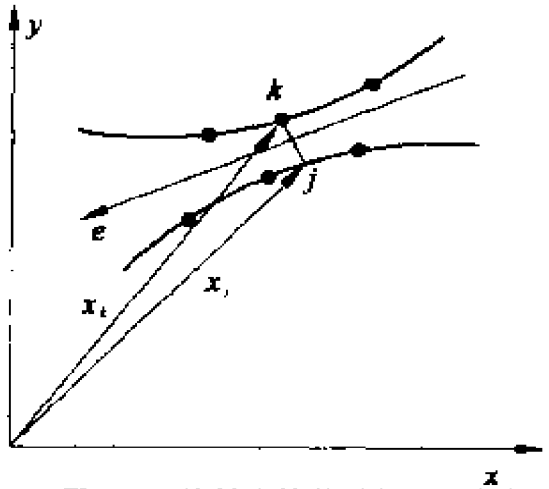


图6.7　接触摩擦单元的正交条件

$$\hat{e}=x_e\hat{i}+y_e\hat{j} \tag{6.89}$$

式中

$$x_r=\left(\frac{\mathrm{d}x}{J\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=\xi_j},\ y_r=\left(\frac{\mathrm{d}y}{J\mathrm{d}\xi}\right)_{\xi=\xi_j}$$

利用正交条件：

$$(\vec{x}_k-\vec{x}_j)\cdot\vec{e}=0 \tag{6.90}$$

或

$$(x_k-x_j)x_r+(y_k-y_j)y_r=0 \tag{6.91}$$

式中

$$x_j=\sum N_i(\xi_j)x_j,\ y_j=\sum N_i(\xi_j)y_i$$

定义

$$f(\xi)=(x_k-x_j)x_r+(y_k-y_j)y_r \tag{6.92}$$

问题归结为寻找 ξ_j，使

$$f(\xi_j)=0 \tag{6.93}$$

利用 Newton 法，可以建立计算 ξ_j 的迭代公式

$$\xi_j=\xi_{j-1}-\frac{f(\xi_{j-1})}{(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi)_{\xi_{j-1}}} \tag{6.94}$$

计算表明，上述算法一般只需经 2～3 次迭代即可收敛。

6.3.5.2　普通单元大位移情况下的有限元方程

当接触元考虑大变形情况时，与之相连的普通单元也必须考虑几何非线性效应。几何非线性问题的有限元解法在许多文献中都有介绍，参见[1]。现简要给出迭代过程中的主要计算步骤。

假设在荷载步 k，已进行了第$(i-1)$次迭代，现考察第 i 次迭代的情况：

(1)计算残余力 ψ_{i-1}

$$\psi_{i-1}=f^k-\int_\Omega \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^k\mathrm{d}\Omega$$

式中　f^k　　荷载步 k 时的总荷载；

$\boldsymbol{B}$——考虑几何非线性效应的应变位移矩阵；

$\boldsymbol{\sigma}_{i-1}^k$——上一迭代步中得到的 Piola-Kirchoff 应力，积分是在前次位形中进行的。

(2)求解增量位移 Δa_{i-1}

$$K^* \Delta a_{i-1} = \psi_{i-1}$$

式中 K^*——考虑几何非线性效应的刚度矩阵。

(3)计算总位移总应力

$$a_i^k = a_{i-1}^k + \Delta a_{i-1}$$

$$\sigma_i^k = \sigma_{i-1}^k + \Delta \sigma_{i-1}$$

6.4 消除接触摩擦单元应力振荡的方法

从事节理单元的研究人员发现在有限元节理单元中存在有虚假应力振荡现象，在接触摩擦单元中同样存在这种现象，即在应力梯度变化较大的接触面上，接触应力存在振荡现象，这与真实情况是违背的。运用特征值分析方法，对接触摩擦单元应力振荡问题进行讨论。

6.4.1 应力振荡问题

为了研究接触摩擦单元的应力振荡问题，首先考察两个算例，采用不同的积分方案，观察接触界面上接触应力的分布[21]。

算例一为光滑刚性基础与弹性地基作用。有限元网格和材料系数如图 6.8 所示，其中接触摩擦单元布置于刚性基础与地基之间。该问题的理论解显示在刚性基础的两端有应力集中现象。图 6.9 表示采用高斯数值积分计算插值函数矩阵(6.10)式时，接触应力与理论解的对比；图 6.10 表示采用牛顿—柯特斯数值积分(Newton-Cotes)时接触应力与理论解的对比。从图 6.9 和图 6.10 可见，高斯数值积分方案应力集中区造成应力振荡现象，而牛顿—柯特斯方法则与理论解十分接近，无应力振荡。

算例二为弹性地基中的桩基拉拔问题，见图 6.11。当逐渐增加作用在桩顶的拉力时，桩基与地基之间的滑动摩擦将自上而下扩展。采用高斯数值积分和牛顿--柯特斯数值积分计算插值函数矩阵(6.10)式时的接触剪应力分别示于图 6.12(a)和(b)中。从图 6.12 中再一次看到，高斯积分引起应力振荡，牛顿—柯特斯积分无振荡现象。

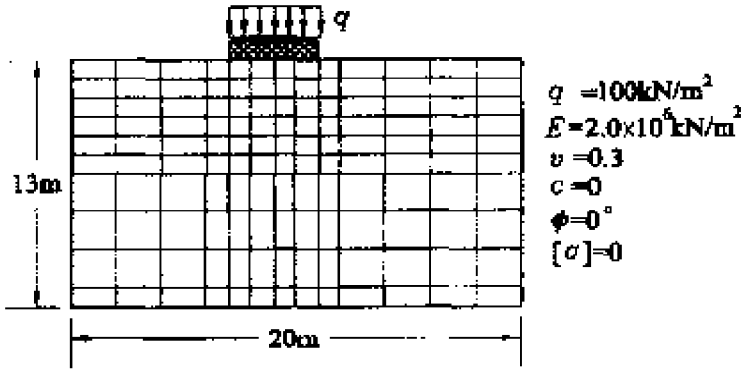


图 6.8　刚性基础与弹性地基的光滑接触

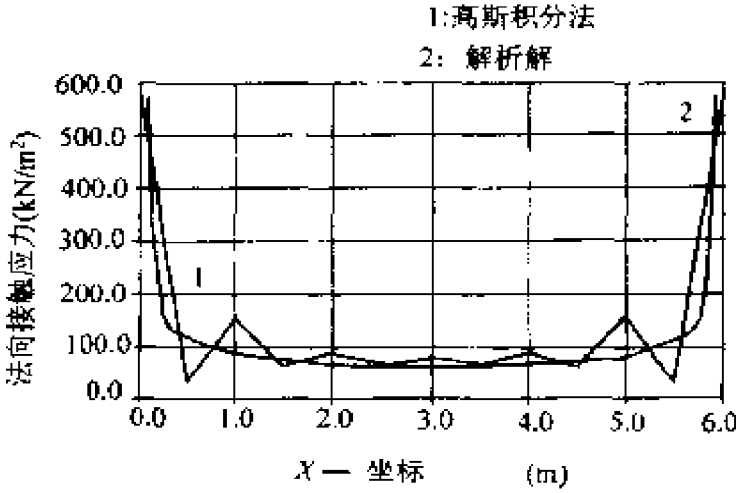


图 6.9　高斯数值积分时接触应力与理论解的对比

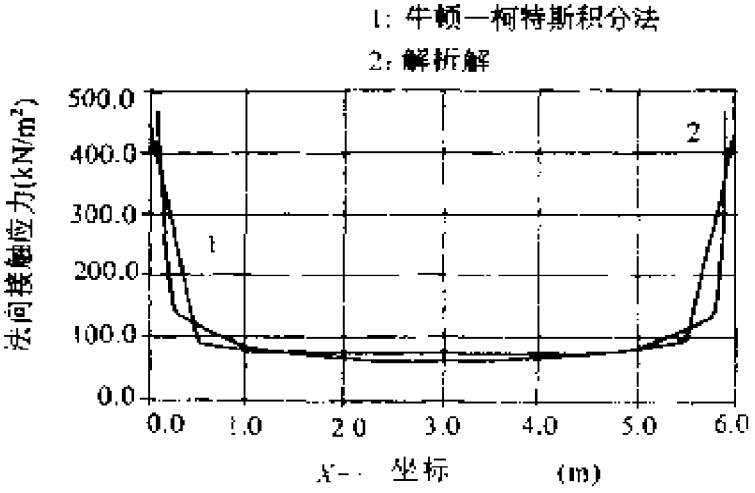


图 6.10　牛顿—柯特斯积分时接触应力与理论解的对比

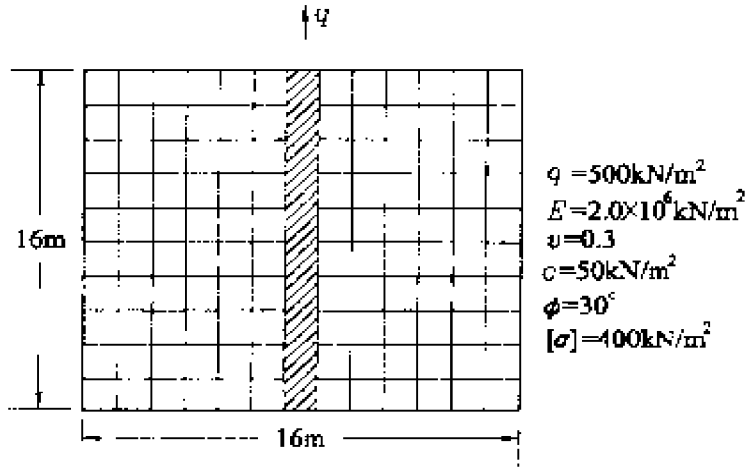
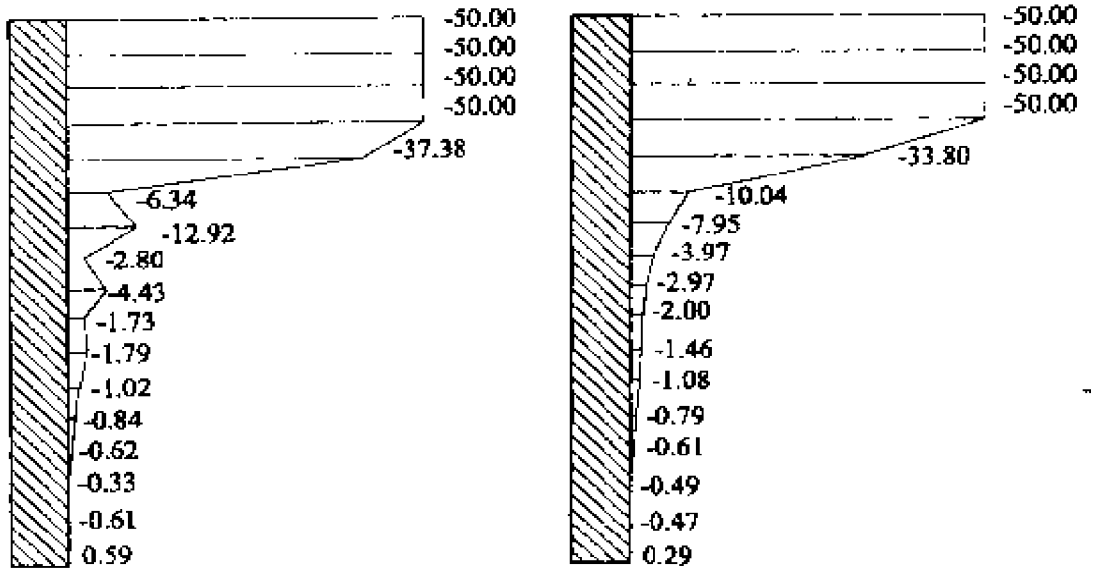


图 6.11　弹性地基中的桩基拉拔



(a)高斯积分时的接触剪应力　　(b)牛顿－柯特斯积分时的接触剪应力

图 6.12　接触面上的剪应力分布

6.4.2　应力振荡的特征值法分析

考察由二个单元组成的系统，一为 8 结点等参元，另一为接触摩擦单元。假设在接触界面上无外力作用，则沿法线方向，两单元需满足下列平衡条件，即

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{N}_c^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}_c \mathrm{d}\Gamma = \int_{\Gamma} \boldsymbol{N}_e^{\mathrm{T}} \boldsymbol{t}_e \mathrm{d}\Gamma \tag{6.95}$$

式中，下标“c”表示接触摩擦单元中的量，“e”表示等参元中的量

N,t 分别表示接触面上的插值函数和分布面力矢量。对接触摩擦单元来说，分布面力即为接触应力 σ。

利用插值函数，单元内的分布面力 t 可用结点面力 $\hat{t}$ 表示成

$$t=N\hat{t} \tag{6.96}$$

将上式代入(6.95)式中，有

$$S_c\hat{t}_c=S_e\hat{t}_e \tag{6.97}$$

式中，S 按(6.10)式定义。

由(6.97)式，可得到 $\hat{t}_c$

$$\hat{t}_c=T\hat{t}_e \tag{6.98}$$

式中

$$T=S_c^{-1}S_e \tag{6.99}$$

在有限元计算中，对外部等参元，常采用高斯数值积分方案。若对接触摩擦单元插值函数矩阵(6.10)式也采用高斯数值积分，则在公共的接触边界上，S_c 与 S_e 具有相同的值，这时矩阵 T 为单位矩阵。根据(6.98)式，接触应力 $\hat{t}_e$ 得不到改善。

当采用牛顿—柯特斯数值积分于接触摩擦单元时，S_c 与 S_e 相差很大，分别为

$$S_c=\frac{L}{30}\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 20 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix} \tag{6.100}$$

$$S_e=\frac{L}{30}\begin{bmatrix}4 & 2 & -1\\ 2 & 16 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{bmatrix} \tag{6.101}$$

式中 L——单元接触边界长度。

为了研究矩阵 T 对应力的平滑作用，分别将分布面力 $\hat{t}_c$ 和 $\hat{t}_e$ 按矩阵 T 特征矢量的基展开成

$$t_c=\sum_{i=1}^{3}\alpha_c^iV_i \tag{6.102}$$

$$t_e=\sum_{i=1}^{3}\alpha_e^iV_i \tag{6.103}$$

式中 V_k——矩阵 T 的特征矢量；

α_i^t、α_i^t——相应的展开系数。

定义

$$\alpha_i^t = \lambda_k \alpha_i^t \tag{6.104}$$

式中，λ_k 被称为放大系数，因为它起着对分布面力放大和压缩的作用。实际上，λ_k 即是对应于特征向量 V_k 的特征值。

将(6.104)式代入(6.102)式中，得

$$\dot{t}_i = \sum_{k=1}^{3} \lambda_k \alpha_i^t V_k \tag{6.105}$$

注意到，上述接触应力表达式中的 λ_k 对接触应力起着平滑作用。

运用(6.98)、(6.103)和(6.105)三式，即可得到下列特征方程

$$(T-\lambda I)V=0 \tag{6.106}$$

式中 I——单位矩阵。

解上述特征方程，得到特征值和相应的特征向量如下

$$\lambda_1=\frac{2}{5},\lambda_2=1,\lambda_3=1 \tag{6.107}$$

$$V_1=\{1,-0.5,1\}^T,V_2=\{1,1,1\}^T,V_3=\{1,1,1\}^T \tag{6.108}$$

图 6.13 给出了矩阵 T 的三个特征向量及相应的模态。根据接触应力的计算公式(6.105)式，从图 6.13 中可见，模态 2 和 3，由于其特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的缘故，对接触应力平滑不起作用。而模态 1，由于其特征值 $\lambda_1=\frac{2}{5}<1$，则受到抑制。在前面给出的两个算例中，接触应力的振荡形式与模态 1 颇相似(见图 6.9 和图 6.12(a))。因此，当采用牛顿—柯特斯数值积分方案时，引起应力振荡的主要模态受到了抑制，从而达到平滑应力的目的。

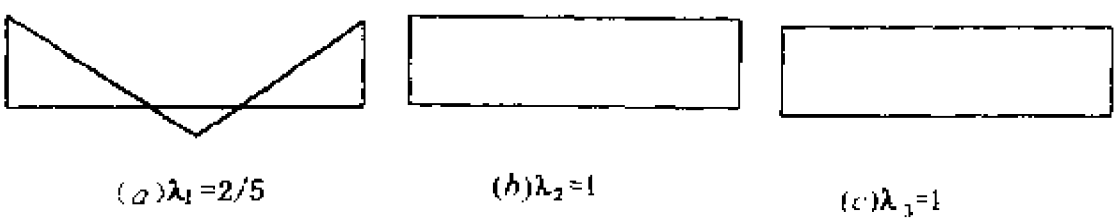


图 6.13 特征值和特征向量

6.4.3 结论与讨论

根据以上特征值分析，可以得出结论，高斯数值积分插值函数矩阵(6.10)式是造成接触应力振荡的原因，采用牛顿－柯特斯数值积分能够消除应力振荡现象。

应当注意，对插值函数矩阵(6.10)式采用三点高斯积分等价于对其进行精确积分。因此，精确积分插值函数矩阵也将引起接触应力振荡。另外，大量的计算显示，当采用牛顿－柯特斯数值积分代替高斯数值积分时，数值解的收敛性有所降低，但影响是微小的。

6.5 节理岩体中隧道开挖的有限元模拟

作为应用实例，我们对某电站压力隧道开挖进行了有限元模拟。岩体地质情况和隧道设计资料见图 6.14。隧道为全断面一次开挖，开挖后实施喷锚支护和混凝土衬砌。为比较节理对隧道开挖的影响，考虑了三种情况。

情况 1，无节理影响的弹塑性模拟。

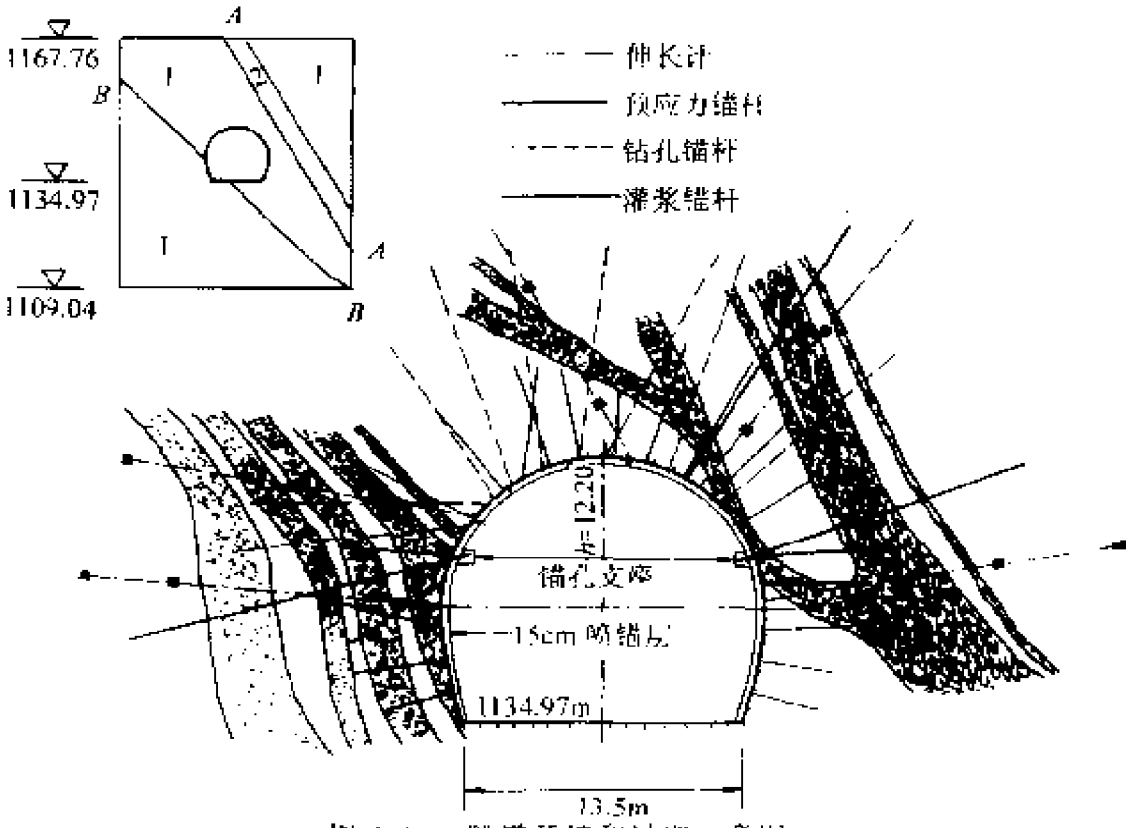


图 6.14 隧道开挖和衬砌示意图

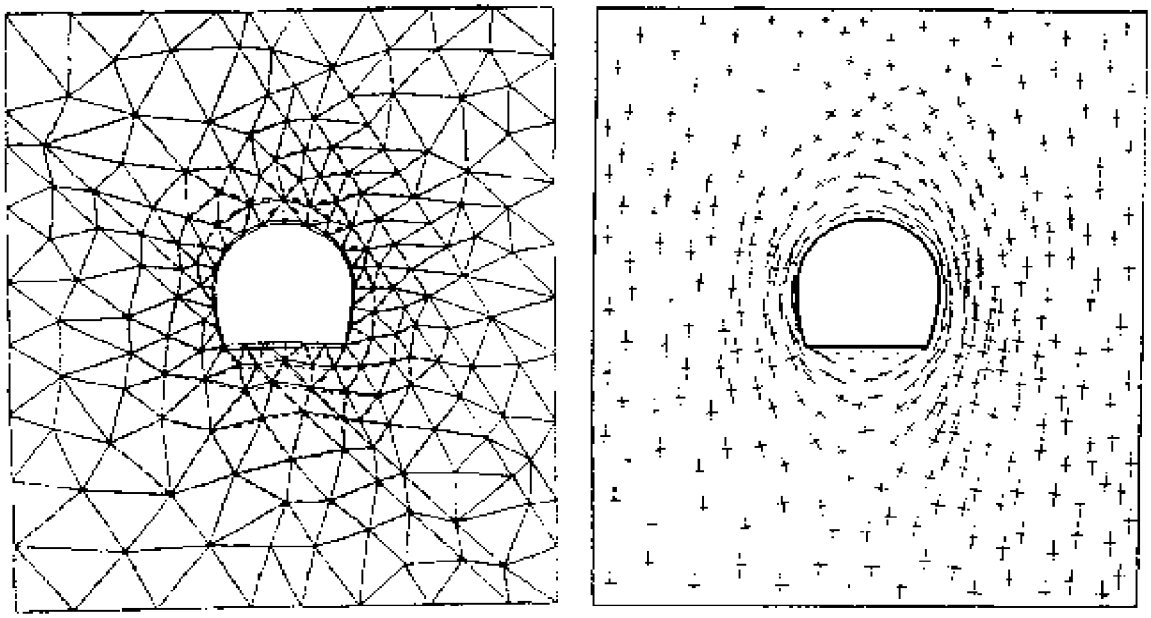
假设岩体为均质各向同性，无节理存在的连续体，但考虑开挖后材料的塑性性质。材料系数为：

$$E=11\times10^{6}\text{kN/m}^2 \qquad \upsilon=0.16 \qquad \rho=28\text{kN/m}^3$$

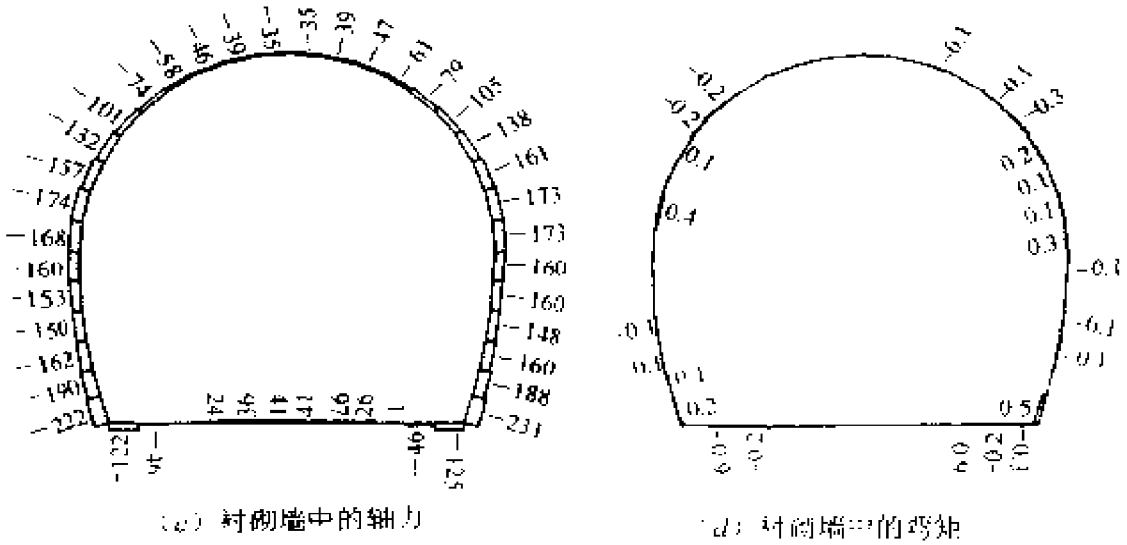
$$\phi=35^\circ \qquad\qquad\qquad\qquad c=1000\text{kN/m}^2$$

情况 2，具有节理 $A-A$ 和软弱夹层影响的弹塑性模拟。

假定岩体中存在节理 $A-A$ 和软弱夹层“2”（图 6.14），其中“1”区的材料系数同情况 1，“2”区软弱夹层的材料参数为：



(a) 变形网格图　　(b) 主应力矢量



(c) 衬砌墙中的轴力　　(d) 衬砌墙中的弯矩

图 6.15　无节理影响的弹塑性模拟

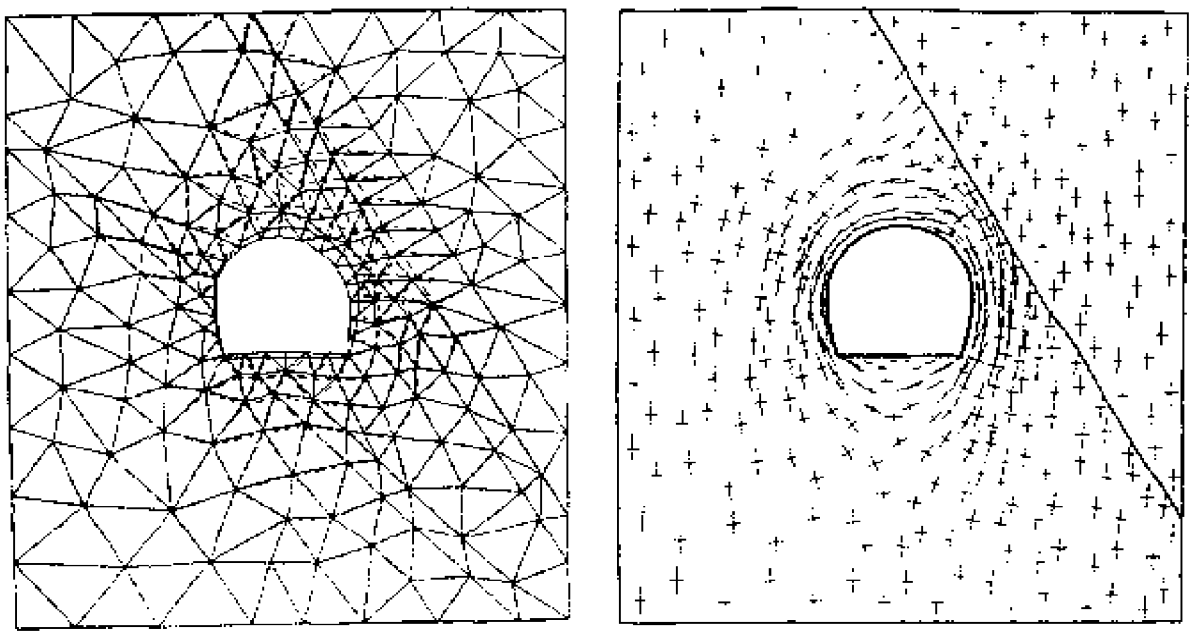
$E_2=8.5\times10^4\text{kN/m}^2$　　$\upsilon_2=0.15$　　$\rho_2=28\text{kN/m}^3$

$\phi_2=35°$　　$c_2=1000\text{kN/m}^2$

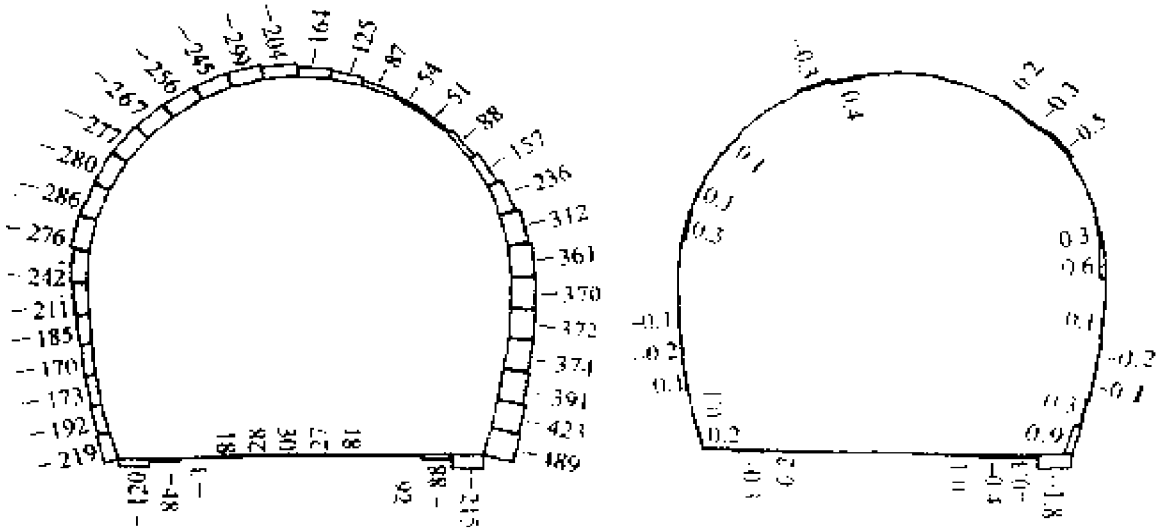
节理的材料参数为：

$\phi_3=35°$　　$c_3=30\text{kN/m}^2$　　$[\sigma]_3=1000\text{kN/m}^2$

情况 3，具有双节理 $A\cdots A$、$B-B$ 和软弱夹层影响的弹塑性模拟。



(a) 变形网格图　　(b) 主应力矢量



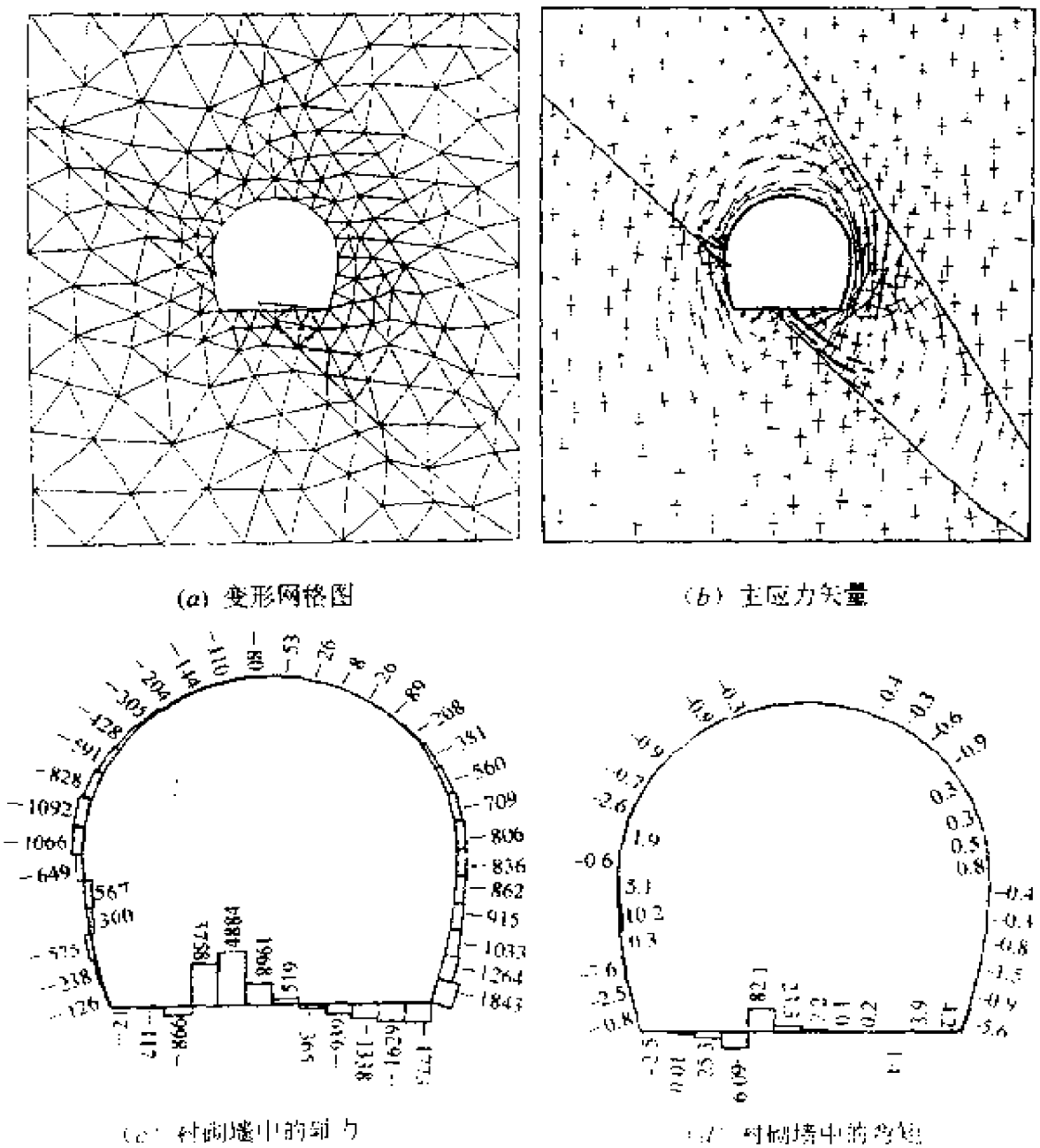
(c) 衬砌墙中的轴力　　(d) 衬砌墙中的弯矩

图 6.16　具有节理 A—A 和软弱夹层影响的弹塑性模拟

假设岩体中存在双节理 $A-A$、$B-B$ 和软弱夹层，其中 $B-B$ 节理穿过开挖面，如图 6.14 所示，材料参数同情况 2。

有限元网格将岩体离散成 430 个六结点三角形单元，42 个接触摩擦单元，1010 个结点。

计算结果用 FEMVUE 程序图形表示，对应于三种情况的计算分别表示在图 6.15、图 6.16 和图 6.17 中。由计算知：



(a) 变形网格图　　(b) 主应力矢量

(c) 衬砌墙中的轴力　　(d) 衬砌墙中的弯矩

图 6.17　具有双节理 $A-A$、$B-B$ 和软弱夹层影响的弹塑性模拟

(1)节理的存在将引起较大的变形，在节理 A—A 面上，局部区域产生了滑动和张开，图 6.16(a)，在节理 B—B 与洞室的交界处有明显的张开现象，如图 6.17(a)。

(2)节理和弱软夹层影响主应力的分布，节理 A A 面的左部区域受开挖影响，右部区域则由于节理和软弱夹层的存在而受影响甚微。同时在节理 B—B 面附近出现了不规则的应力分布和较大的拉应力，如图 6.16(b)和图 6.17(b)所示。

(3)无节理和软弱夹层时，衬砌墙中的最大轴力为－231kN，最大弯矩为 0.5kN·m，发生于洞室右下角；当有一个节理面存在时，轴力增至为 469kN，弯矩为－1.8kN·m，如图 6.16(c)和 6.16(d)；而当节理穿过洞室时，最大轴力和弯矩则猛增至 4884kN 和 82.1kN·m，均发生在节理与洞室的交界处，如图 6.17(c)和 6.17(d)。由此可见，节理的存在使得其变形和受力状况大大恶化，在设计时需加以特别注意。

第七章　锚杆单元

锚杆(特指灌浆锚杆)作为一种支承结构广泛应用于隧道支护、路基加固和边坡稳定等岩土工程中。有关这类问题分析和计算还不十分成熟，目前仍在发展之中。地下隧道支护就是一个典型的例子。在隧道支护设计中，当采用整体衬砌时，隧道支护系统提供的阻力可以足够准确地计算出。但对用锚杆作为支护方式，其计算方法则是十分粗糙的，通常假定锚杆的作用等效于均匀分布的附加内压力。在预应力锚杆中，这种假设更是不合理的。

近年来，随着计算机的出现和有限元技术的发展，有限元法已被用于锚杆的分析和设计中。早期的工作是将锚杆简化为梁单元或桁架元，这种处理方法不能真实地反映锚杆的行为，特别是灌浆的作用。为了解决这个问题，一些研究人员在锚芯和灌浆之间引入了接触单元，这无疑增加了求解问题的复杂性。锚杆问题的进一步研究是建立包含钢芯和灌浆刚度的锚杆单元[22~24]。此后，Aydan[22]又提出了一种修正的锚杆单元，该单元有四个结点，其中两个结点与钢芯相连，另两个结点与灌浆相连。但未考虑钢芯与灌浆之间的剪切滑动作用。雷晓燕在 Aydan 工作的基础上[23]，提出了一种考虑锚芯与灌浆间剪切破坏作用的三维锚杆单元。运用该单元对立方岩体拉拔试验进行了数值计算。计算结果与理论解吻合。作为实际应用的例子，还对路堤加固问题进行了分析。

7.1　锚杆的本构性质

拉拔试验是锚杆问题中用得最多的试验，它能较好地反映锚杆的轴向特性，诸如轴向刚度、轴向强度和粘结力。锚杆剪切强度试验主要是找出岩体变形与剪切强度间的关系。在这些试验的基础上，再综合理论分析，人们建立了各种形式的本构模型。

三种最典型的锚杆本构模型为：锚杆的轴向本构模型、切向剪切本构模型和锚杆穿过断层时的横向剪切本构模型。下面分别介绍这三种本构模型的特点。

7.1.1 轴向性质

锚杆的轴向性质主要受锚芯控制。锚芯的刚度、强度和可延性均比粘结介质大得多。另外，锚杆是一种柔性结构，抗弯能力很小，通常将其看作只受单向拉伸或压缩的一维杆元。锚杆的这种轴向性质可用一维简单的本构模型来描述。考虑运动硬化和循环荷载的一维本构模型见图 7.1。

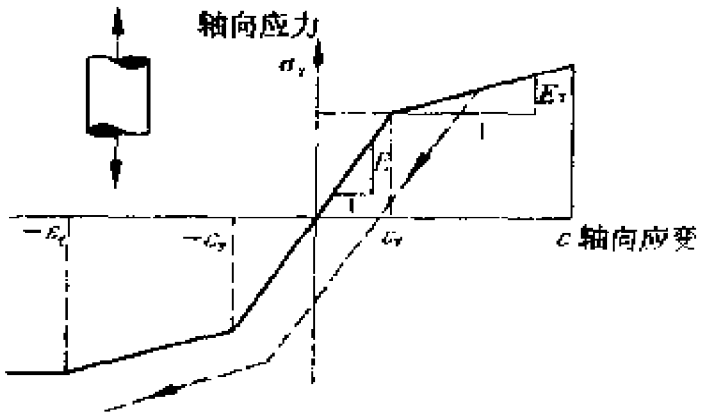


图 7.1 锚杆的轴向性质

7.1.2 切向剪切强度

锚杆中锚芯与灌浆、灌浆与岩体的交界面上均存在着切向相对位移。由此而引起灌浆中与钢杆平行方向上的剪应力，该剪应力可用锚芯直径 D，灌浆厚度 t，灌浆剪切模量 G_g 及切向相对位移表示。

随着切向相对位移的增大，锚杆将逐渐接近破坏状态。由切向剪应力引起的锚杆破坏可发生在灌浆中、岩体中、灌浆与锚芯的交界面或岩体与灌浆的接触面上，如图 7.2 所示。其中尤以发生在岩体与灌浆接触面上的破坏形式为最多见。锚杆的切向剪切强度与粘性系数、摩擦角及嵌入程度有关。随着切向位移的增加，粘性系数和嵌入影响逐渐减小，摩擦作用成为主要因素。图 7.3 表示切向剪应力与剪应变之间的本构关系。在这个简单模型中，没有考虑侧

压力的影响。

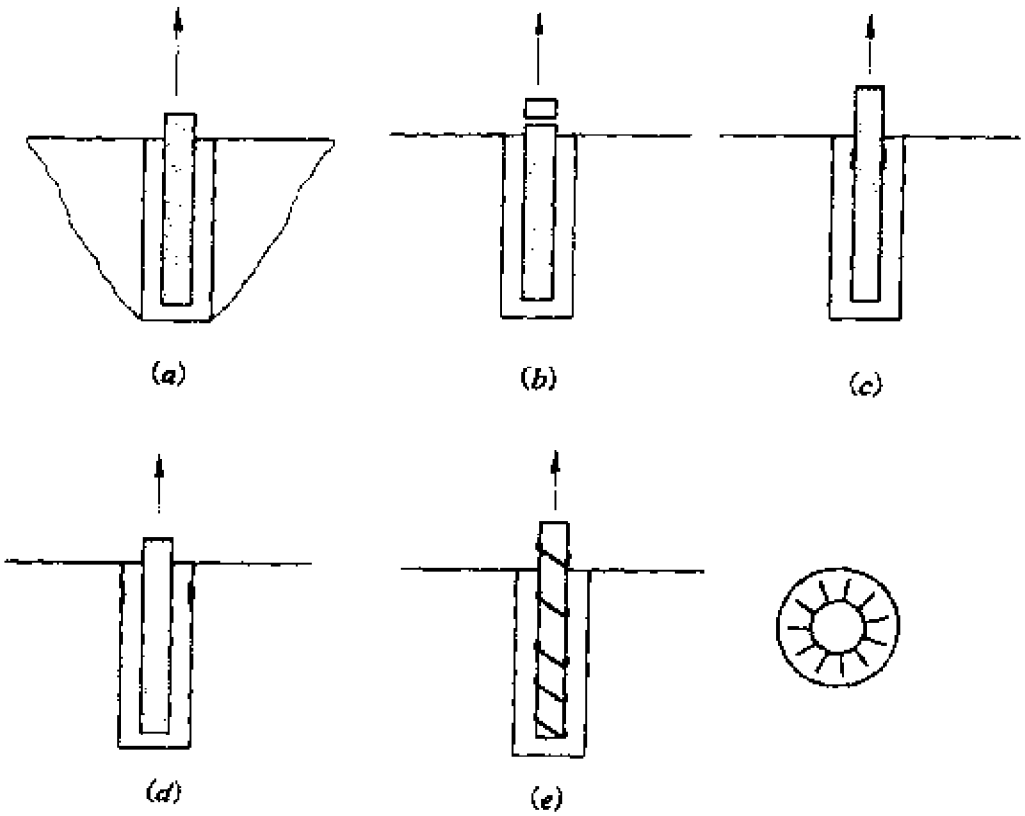


图 7.2　锚杆的几种破坏形式

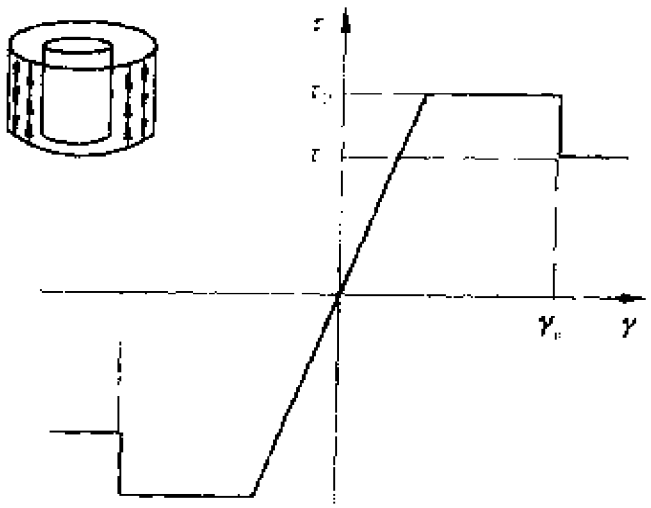


图 7.3　锚杆的切向性质

图 7.3 中的峰值剪切强度可通过拉拔试验得到。如果缺乏足够的资料，可采用下式作为峰值剪切强度的估计值

$$\tau_p = \pi(D + 2t)\tau_i Q_B \qquad (7.1)$$

式中 τ_i——岩体或灌浆的剪切强度，取两者中的较小值；

Q_B——岩体与灌浆间粘结质量系数，$Q_B = 1$ 对应完全粘结状态。

7.1.3 横向剪切性质

充分粘结的锚杆穿过断层或不连续节理面时，既能增加断层或节理的剪切刚度也能增加其剪切强度。这种作用相当于"暗销"(dowel)，它是锚杆的一个突出特点。

锚杆的横向剪切模量可通过其剪切刚度得到

$$G_B = \frac{K_s}{\delta} \qquad \delta > 0 \qquad (7.2)$$

式中 K_s——锚杆的横向剪切刚度；

δ——断层或不连续面的厚度。

Gerdeen 等(1977)将灌浆看作一弹性基础而将锚芯当作支承在弹性基础上的梁，则得到横向剪切刚度为

$$K_s = E_B I \beta^3 \qquad (7.3)$$

式中 E_B——锚芯的弹性模量；

I——锚杆的惯性矩；

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4E_B I}};$$

$$K = E_G \frac{D}{t},$$

其中 E_G——灌浆的弹性模量。

在缺乏试验资料的条件下，可采用上式计算横向剪切刚度。

锚杆对断层剪切强度的贡献主要来自两方面，一是由锚杆施加的轴向力引起断层交界面上的摩擦作用，二是锚杆本身的暗销作用。锚杆垂直穿过断层时，其横向剪切强度可由下列经验公式计算(Bjurstrom，1974)

$$\tau_{\text{dowel}} = 0.67\pi\sqrt{\sigma_B \sigma_c} \qquad (7.4)$$

式中 σ_B——锚芯的屈服强度；

σ_C——岩体的单向抗压强度。

其他一些研究人员(Azuar，等，1979)通过试验也发现锚杆垂直穿过断层时的最大横向抗剪强度约为锚芯单向抗拉强度的一半，即等于钢杆的剪切强度，随着锚杆穿过断层角度的不同，其横向抗剪强度增加到锚芯单向抗拉强度的80%～90%。

在屈服强度以内，锚杆的横向变形与横向剪应力成线性关系，据此可建立锚杆横向剪切本构模型，如图7.4所示。

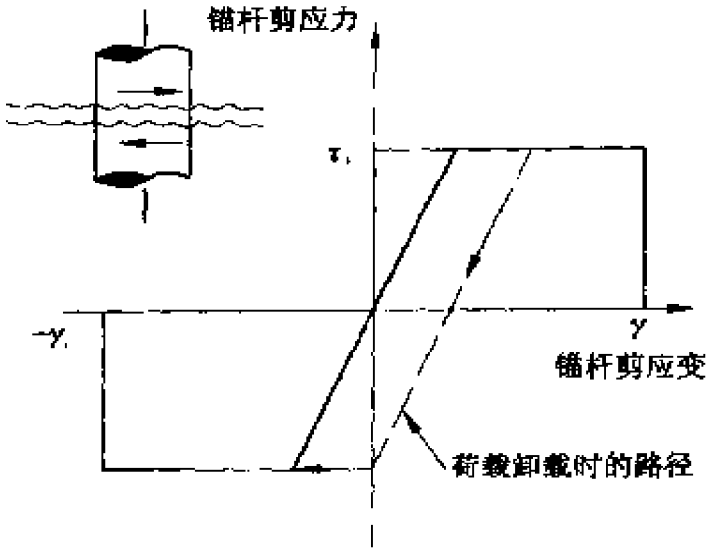


图7.4 锚杆横向剪切本构模型

7.2 三维锚杆单元理论

有限元法由于具有能处理复杂边界、非线性材料、不同荷载组合等优点，已被广泛地应用于工程实践中。对于用锚杆作为支承或加固方式的结构来说，有限元法也是一种理想的数值分析工具。目前已有不少文献介绍过用有限元处理锚杆问题的方法。较典型的做法是将锚杆看作空间桁架或一维梁单元。这些方法不能真实地反映锚杆的特点，主要原因有两点：一是没有考虑灌浆的刚度；二是不能反映锚芯和灌浆间的相对切向位移。为了克服这些缺点，一些研究人员在锚芯和岩体间的灌浆中引入接触单元或节理单元，单元的类型可以是二维、三维和轴对称。这种方法虽能较好地反映锚杆的特点，但过于复杂，尤其是给网格生成带来了很大的困难，

难以在实际中应用。

最近由 Join 和 Van Dillen 提出的锚杆单元，既考虑了灌浆的刚度又能反映灌浆与锚芯交界面上的相互作用。这种锚杆单元类似于某些节理单元，用结点相对位移作为基本未知量。Aydan[22]在此基础上，采用结点整体位移代替相对位移，建立了一种简单实用的四结点锚杆单元。下面详细介绍该单元的理论。

7.2.1 单元定义和基本未知量

锚杆在空间的形式可看作一轴对称结构，锚芯处于轴心位置，周围为灌浆，灌浆与岩体相连。本文定义四结点三维锚杆单元如图 7.5 所示。其中结点 1、2 为灌浆外半径上的两角点，结点 3、4 为锚芯两端点。在生成有限元网格时，结点 1、2 与代表岩体的实体单元相连，如图 7.6 所示。由于锚杆的直径相对于所分析问题的尺寸小得多，因此可认为结点 3、4 的坐标与结点 1、2 的坐标相同，以减少数据输入工作量。但在形成单元刚度矩阵时仍用锚杆的实际尺寸。

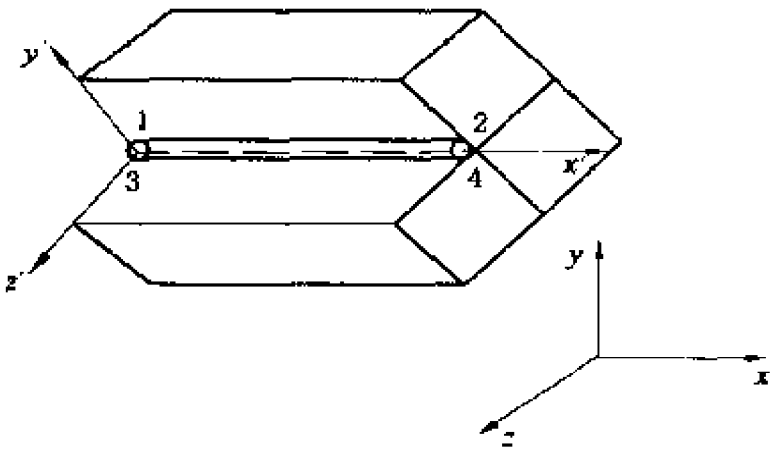


图 7.5 四结点三维锚杆单元

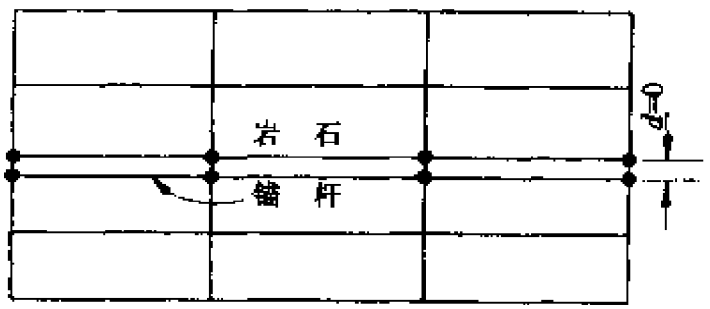


图 7.6 锚杆单元与岩体相连

考虑到锚杆具有轴向性质的特点，锚杆单元的讨论将在局部坐标系(x', y', z')（局部坐标系中的量在字母右上方加一撇），通过适当的坐标变换，即可建立整体坐标系中的有限元方程。

定义锚杆单元在整体坐标系中的结点位移矢量$\{a\}^e$和结点力矢量F^e分别为

$$a^e=\{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad w_3 \quad u_4 \quad v_4 \quad w_4\}^{\mathrm{T}}$$

$$F^e=\{x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad z_3 \quad x_4 \quad y_4 \quad z_4\}^{\mathrm{T}}$$

7.2.2 基本假设

在锚杆单元中，本书采用以下基本假定：(1)锚芯的轴向位移沿锚杆方向成线性分布，沿径线方向位移为常数；(2)灌浆的轴向位移沿锚杆方向成线性分布，沿径线方向则取空间轴对称问题的解析解；(3)轴向应力主要由锚芯承担；(4)不考虑径向的法向应力；(5)切向剪应力主要与锚芯和灌浆间的轴向相对位移有关；(6)横向剪应力主要与锚杆的侧向位移有关，如图 7.7 所示。

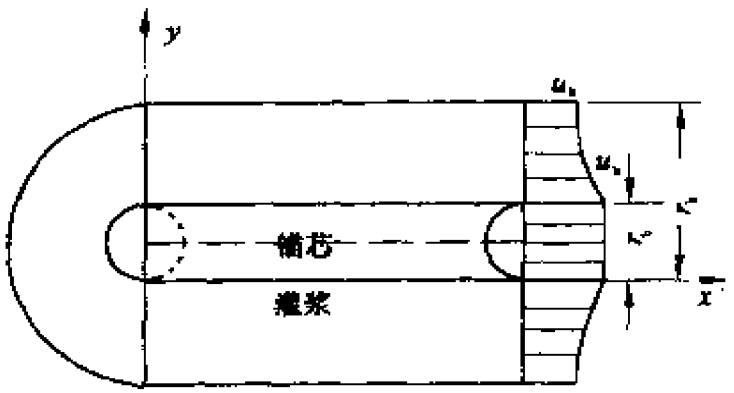


图 7.7 灌浆中轴向位移沿径线方向的分布

沿轴线方向，引入插值函数

$$N_1=1-\xi, \qquad N_2=\xi \tag{7.5}$$

式中 $0\leqslant\xi=\dfrac{x}{l}\leqslant 1$，

其中 l——单元的长度。

单元中任一点的位移分量可通过插值函数用结点位移向量表示成

$$\boldsymbol{u}^{\prime e}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^{e} \tag{7.6}$$

式中 $\boldsymbol{u}^{\prime e}=\{u' \quad v' \quad w'\}^{\mathrm{T}}$

对锚芯

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.7}$$

对灌浆

$$\boldsymbol{N}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 \end{bmatrix} \tag{7.8}$$

7.2.3 灌浆轴向位移的解析表达式

根据基本假设(5)，灌浆主要传递由相对轴向位移引起的切向剪应力。这一假设也被岩体拉拔试验所证实。灌浆轴向位移沿径线方向的分布也可假设为线性分布。但利用空间轴对称问题的基本方程可以得到更精确的解析解。

由基本假设(3)知，锚芯中只考虑轴向正应力，灌浆中只考虑切向剪应力。我们在灌浆中截取一微小的环段，考察其沿轴线方向的平衡，即：

$$\sum x'_{\text{grout}}=0 \tag{7.9}$$

可得

$$2\pi(\tau'_{rx}+\Delta\tau'_{rx})(r+\Delta r)\Delta x'-2\pi\tau'_{rx}r\Delta x'=0 \tag{7.10}$$

式中 τ'_{rx}——局部坐标系中的切向剪应力；

r——径向坐标；

x'——轴向坐标。

上式两端同除以 $2\pi r\Delta r\Delta x'$，并忽略不计高阶小量，则有

$$\frac{\Delta\tau'_{rx}}{\Delta r}+\frac{\tau'_{rx}}{r}=0 \tag{7.11}$$

当 $\Delta r\to 0$ 时，立即得到

$$\frac{\mathrm{d}\tau'_{rx}}{\mathrm{d}r}+\frac{\tau'_{rx}}{r}=0 \tag{7.12}$$

利用切线方向的本构关系，切向剪应力可表示为

$$\tau'_{rx}=\tau'_{g}=G_{g}\gamma'_{g}=G_{g}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}r} \tag{7.13}$$

将上式代入(7.12)式中，得到下列微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}r}=0 \tag{7.14}$$

上述微分方程的通解为

$$u'=c_1\ln r+c_2 \tag{7.15}$$

利用边界条件

$$u'|_{r=r_h}=u'_h$$

$$u'|_{r=r_b}=u'_b$$

可得到轴向位移的解析表达式为

$$u'=\frac{1}{\ln(r_h/r_b)}=[u'_h\ln r-u'_b\ln r+u'_b\ln r_b-u'_h\ln r_b] \tag{7.16}$$

7.2.4 应变与应力

根据基本假设，锚杆单元中只有四个主要应变分量，它们分别是锚芯中由轴向位移引起的轴向应变 ε'_b，灌浆中由相对切向位移引起的切向剪应变 γ'_g，以及由侧向位移引起的沿局部坐标 y'、z' 的横向剪应变 $\gamma'_{y'}$ 和 $\gamma'_{z'}$。用矢量的形式可将单元应变表示为

$$\varepsilon''=\begin{Bmatrix}\varepsilon'_b\\ \gamma'_g\\ \gamma'_{y'}\\ \gamma'_{z'}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u'}{\partial x'}\\ \dfrac{\partial u'}{\partial r}\\ \dfrac{\partial v'}{\partial x'}\\ \dfrac{\partial w'}{\partial x'}\end{Bmatrix} \tag{7.17}$$

现分别计算如下

利用(7.6)式，可得到 ε'_b

$$\varepsilon'_b=\frac{\partial u'}{\partial x'}=\frac{1}{l}(-u'_3+u'_1) \tag{7.18}$$

式中 l——锚杆单元的长度。

利用(7.16)式，可得 γ'_g 为

$$\gamma'_g=\frac{\partial u'}{\partial r}=R(u'_h-u'_b) \tag{7.19}$$

其中

$$R=\frac{1}{r\ln(r_h/r_b)}$$

同样利用(7.6)式，可得 $\gamma'_{x'}$、$\gamma'_{z'}$ 为

$$\gamma'_{x'}=\frac{\partial v'}{\partial x'}=\frac{1}{l}(-v'_1+v'_2) \tag{7.20}$$

$$\gamma'_{z'}=\frac{\partial w}{\partial x'}=\frac{1}{l}(-w'_1+w'_2) \tag{7.21}$$

将(7.18)～(7.21)各式代入(7.17)式中，得到单元应变矢量为

$$\boldsymbol{\varepsilon}'^e=\boldsymbol{B}\boldsymbol{a}'^e \tag{7.22}$$

其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0\ 0 & \frac{1}{l} & 0\ 0 \\ RN_1 & 0 & 0 & RN_2 & 0 & 0 & -RN_1 & 0\ 0 & -RN_2 & 0\ 0 \\ 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0\ 0 & 0 & 0\ 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{l} & 0 & 0 & \frac{1}{l} & 0 & 0\ 0 & 0 & 0\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.23}$$

应力分量可由锚杆的本构方程直接得到

$$\boldsymbol{\sigma}'^e=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}'^e \tag{7.24}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}'^e=\{\sigma'_b\ \tau'_g\ \tau'_{x'}\ \tau'_{z'}\}^T \tag{7.25}$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix} E_b & & & 0 \\ & G_g & & \\ & & G_b & \\ 0 & & & G_b \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

式中 σ'_b——锚芯中的轴向正应力；

τ'_g——灌浆中的切向剪应力；

$\tau'_{y'}$、$\tau'_{z'}$——锚杆中分别沿局部坐标 y' 和 z' 方向的横向剪应力；

E_b——锚芯的弹性模量；

G_g——灌浆的剪切模量；

G_b——锚芯的横向剪切模量。

7.2.5 单元刚度矩阵

由虚功方程或变分原理容易得到有限元刚度矩阵的一般形式为

$$\boldsymbol{k}^e = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} \mathrm{d}\Omega \tag{7.27}$$

在锚杆单元中，局部坐标系下单元刚度矩阵为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}'^e &= \int_0^l \int_0^{r_b} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}x' \\ &= 2\pi l \int_0^1 \int_0^{r_b} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D} \boldsymbol{B} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\xi \end{aligned} \tag{7.28}$$

将(7.23)、(7.26)两式代入(7.28)式，可得到锚杆单元以显式形式表示的刚度矩阵。我们不难发现，在这样得到的单元刚度矩阵中，有四行四列元素全为零，这将造成总刚度矩阵奇异。其原因是我们在计算横向剪应力时只考虑了灌浆的侧向位移，而没有计及锚芯侧向位移的影响。如果我们假设锚芯的侧向位移近似等于灌浆的侧向位移，即 $v'_1 = v'_3$　$w'_1 = w'_3$　$v'_2 = v'_4$　$w'_2 = w'_4$，通过引入一人工刚度 K_d，立即可得到锚杆单元的刚度矩阵为

$$\boldsymbol{k}'^e = \begin{bmatrix}
2K_g & 0 & 0 & K_g & 0 & 0 & -2K_g & 0 & 0 & -K_g & 0 & 0 \\
0 & K_s+K_d & 0 & 0 & -K_s & 0 & 0 & -K_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_s+K_d & 0 & 0 & -K_s & 0 & 0 & -K_d & 0 & 0 & 0 \\
K_g & 0 & 0 & 2K_g & 0 & 0 & -K_g & 0 & 0 & -K_g & 0 & 0 \\
0 & -K_s & 0 & 0 & K_s+K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_d & 0 \\
0 & 0 & K_s & 0 & 0 & K_s+K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -K_d \\
2K_g & 0 & 0 & -K_g & 0 & 0 & K_b+2K_g & 0 & 0 & K_g-K_b & 0 & 0 \\
0 & -K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 & 0 & 0 \\
-K_g & 0 & 0 & 2K_g & 0 & 0 & K_g-K_b & 0 & 0 & K_b+2K_g & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_d
\end{bmatrix} \tag{7.29}$$

上述单元刚度矩阵是在局部坐标系中建立的，在形成有限元

方程之前，还必须将其转换到整体坐标系中，这个转换关系为

$$\boldsymbol{k}^{e}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{k}'^{e}\boldsymbol{\alpha} \tag{7.30}$$

式中 $\boldsymbol{k}^{e}$——整体坐标系中的单元刚度矩阵；

$\boldsymbol{\alpha}$ ——坐标转换矩阵。

整体坐标系中的荷载向量也可通过转换矩阵由局部坐标系中的荷载向量求得

$$\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}'^{e} \tag{7.31}$$

一旦获得了单元刚度矩阵和荷载向量，就可用标准的有限元集成方法将其迭加到有限元方程的总刚度矩阵和总荷载向量中。通过解有限元方程，可直接得到结点位移。

局部坐标系中的单元应力可由下式求得

$$\boldsymbol{\sigma}'^{e}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}'^{e}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{a}^{e} \tag{7.32}$$

7.2.6 锚杆单元残余力

当锚芯与灌浆交界面上的剪切强度超过了剪切峰值强度 τ_p 时，轴向滑动即发生。在数值计算时，滑动破坏可通过计算锚杆的残余力来实现，即

$$\boldsymbol{f}'^{e}_{r}=-\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'^{e}\mathrm{d}\Omega \tag{7.33}$$

其中

$$\boldsymbol{\sigma}'^{e}=\left\{0\quad\frac{(N_1\tau_1+N_2\tau_2)r_b}{r}\quad 0\quad 0\right\}^{\mathrm{T}}$$

$$\tau_1=\langle|\tau'_{g3}|-\tau\rangle\mathrm{sgn}(\tau'_{g3})$$

$$\tau_2=\langle|\tau'_{g4}|-\tau\rangle\mathrm{sgn}(\tau'_{g4})$$

$$\tau=\begin{cases}\tau_p & r'_g<r_p\\ \tau_r & r'_g\geqslant r_p\end{cases}$$

上式中$\langle x\rangle$为任意函数，其定义为

$$\langle x\rangle=\begin{cases}x & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{7.34}$$

锚杆单元的残余力可显式表示为

$$\boldsymbol{f}'^{e}_{r}=\frac{1}{3}\pi r_b L\{-(2\tau_1+\tau_2)\quad 0\quad 0\quad\cdots(\tau_1+2\tau_2)\quad 0\quad 0\quad 2\tau_1+$$

$$\tau_2 \quad 0 \quad 0 \quad \tau_1+2\tau_2 \quad 0 \quad 0\}^T \tag{7.35}$$

整体坐标系中的残余力可由(7.31)式得到。

数值计算时，用 Newton-Raphson 算法，通过施加不平衡残余力，可得到逐渐收敛的解。

7.3 算　　例

为了检验上述理论，下面讨论几个计算实例，并将计算结果与解析解或试验数据进行对比。

7.3.1 岩体拉拔试验

图 7.8 表示一立方块岩体，岩体的边长为 1 m，锚杆穿过岩体中心，外荷载 $P=200$ kN 作用在锚芯的顶端。锚芯、灌浆和岩体的性质见表 7.1。假设岩体为各向同性的弹性体。计算中，将岩体划分成 216 个二十结点等参元，锚杆离散成 12 个锚杆单元。

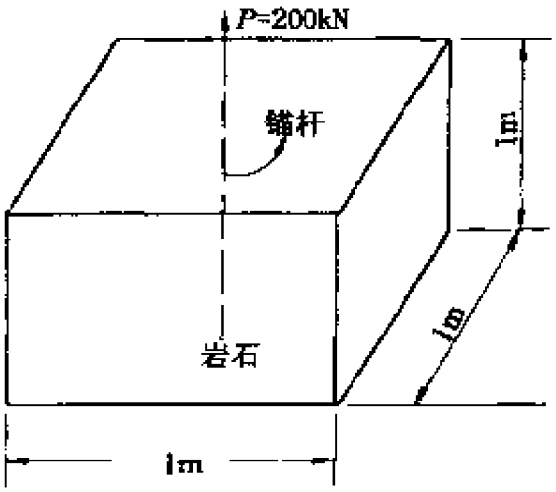


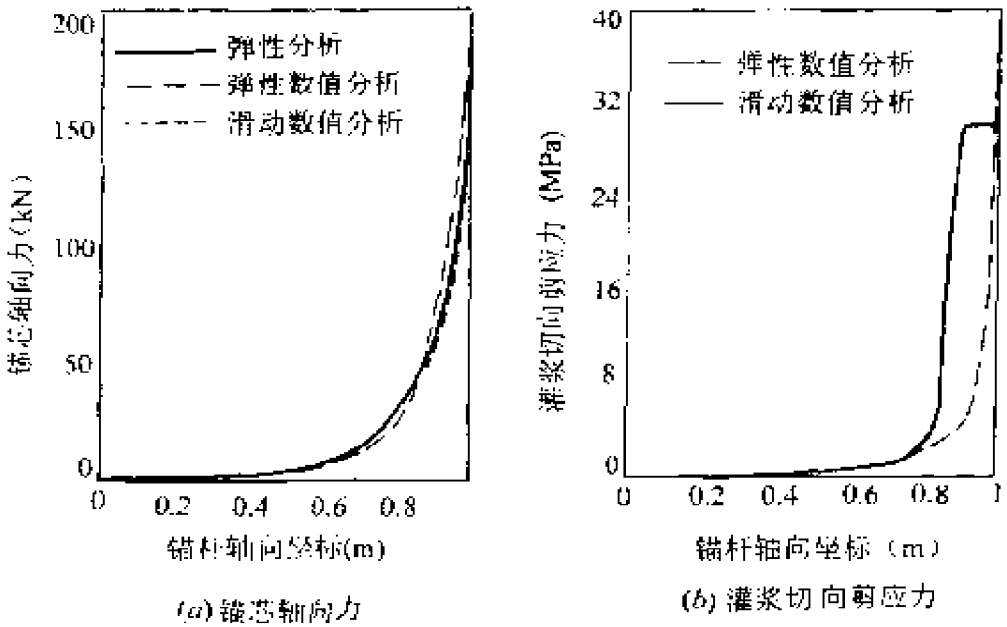
图 7.8　岩体拉拔试验

表 7.1　锚芯和岩体的材料性质

	弹性模量	泊 松 比	剪切模量	半　　径
锚　芯	210 GN/m²	0.30		0.0125 m
灌　浆	20 GN/m²	0.20	8.33 GN/m²	0.03125 m
岩　体	15 GN/m²	0.20	6.25 GN/m²	--

图 7.9 表示锚芯中的轴向力和灌浆中的切向剪应力。从图中看到，锚芯中的轴向力和岩体中的应力随着深度的增加而迅速衰

减，尤其是在离顶端 0.4 m 的范围内衰减更快，在此范围内锚芯将其作用迅速传递到了岩体。灌浆中的切向剪应力在岩体顶端 0.1 m的范围内超过了灌浆的剪切强度 τ_{peak}，产生了裂缝。在图7.9(*b*)所示的曲线上，表现为一水平直线。



(*a*) 锚芯轴向力　　(*b*) 灌浆切向剪应力

图 7.9　锚芯轴向力与灌浆切向剪应力

7.3.2　路堤加固问题

作为应用实例，下面研究用锚杆对路堤加固问题。路堤的几何形状和锚杆布置如图 7.10 所示。路堤中央断面布置 5 根直径 ϕ13 cm 的锚杆。路堤除考虑呈线性分布的初应力外，其顶面还作用着均布荷载 $Q=5000\ \mathrm{kN/m^2}$。路堤、锚芯和灌浆的材料性质如表 7.2 所示。

表 7.2　路堤加固问题材料性质

	弹性模量	泊 松 比	剪切模量	半　径
锚　芯	210 GN/m²	0.30		0.025 m
灌　浆	20 GN/m²	0.20	8.33 GN/m²	0.065 m
岩　体	1 GN/m²	0.20	2.08 GN/m²	

为了突出锚杆的作用，计算中考虑了两种情况：一是不计锚杆

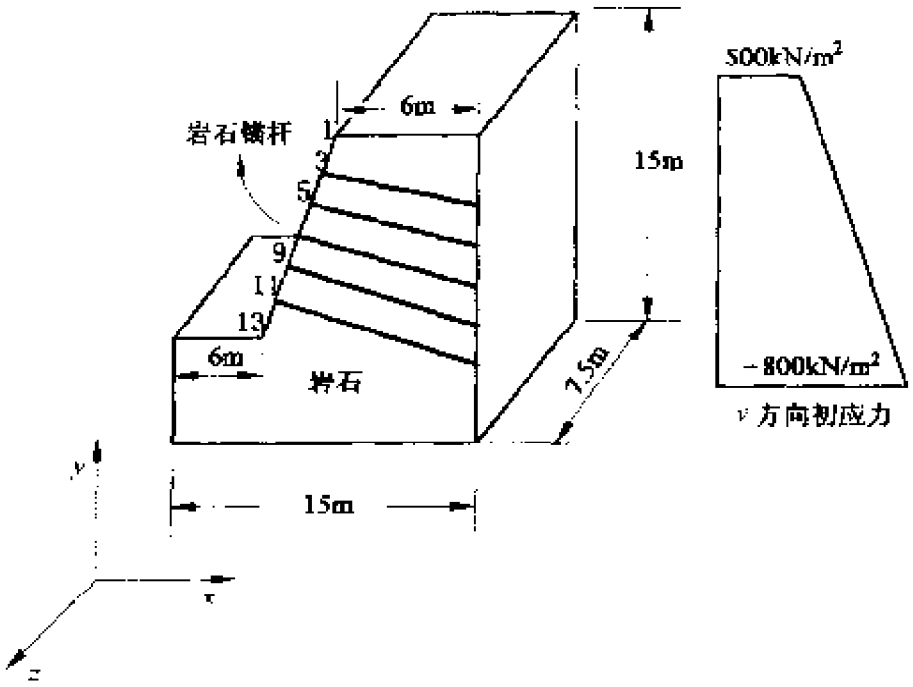


图 7.10　路堤加固问题几何形状和锚杆布置

的弹性分析，二是按本章理论计算。图 7.11 为两种计算情况下路堤中心截面水平位移和垂直位移。由于锚杆加固，水平位移减小 10%。随着锚杆数的进一步增多，水平位移和垂直位移将进一步减小。

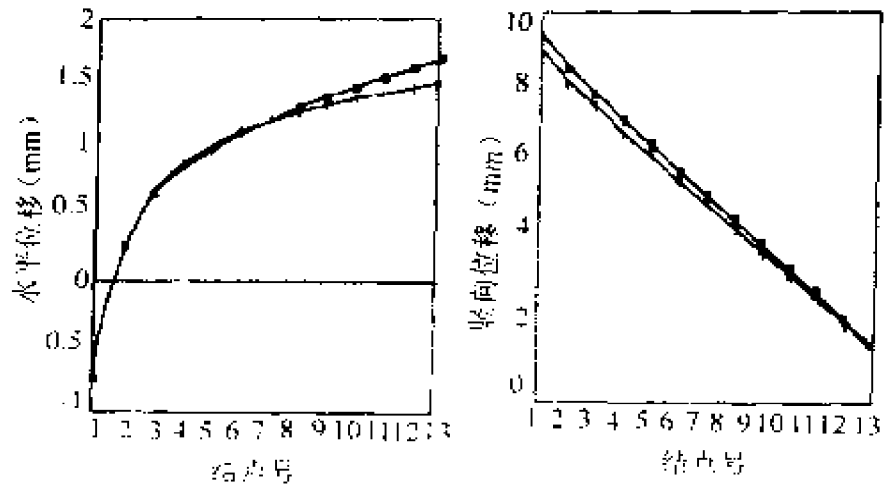


图 7.11　路堤中心截面水平位移和垂直位移

上述介绍的考虑锚芯与灌浆间剪切破坏作用的三维锚杆计算

模型，由于沿径线方向取空间轴对称问题的解析解作为灌浆的轴向位移分布，提高了模型的计算精度，锚芯与灌浆作为整体考虑，建立了三维锚杆单元的显式刚度矩阵和不平衡残余力。岩体拉拔试验和路堤加固计算实例证实了模型的可靠性和实用性。

第八章　材料参数反分析及其应用

在工程中，充分了解工程材料的性质是十分重要的。为了获得工程材料的性质，通常的作法是进行现场试验。对于复杂的问题，还须辅助于理论分析，综合两方面的数据即可获得所需结果。对于已知某些数据，例如位移、应力和速度（这些数据可通过实验得到），寻求所研究问题的材料性质，类似于这样的问题称为材料参数反分析问题，反分析是对应于一般意义下已知问题的材料性质和外力求位移、应力这种正常分析而言的。

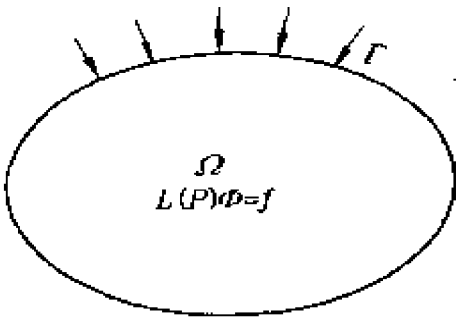


图 8.1　正分析问题

工程反分析问题包含的范围很广，在讨论它的分类以前，先来看看一般意义下的正分析，如图 8.1。求解一个问题的未知量 Φ，必须具备以下条件：

(1)给定的区域 Ω 及相应的边界 Γ；

(2)给定问题的控制方程；

(3)未知变量和相应各阶导数的边界条件或初始条件；

(4)外荷载；

(5)材料系数。

如果上述条件缺少任何一个，正分析则无法进行。反分析是在某些附加条件下反求上述条件的部分量。根据所求量的不同，反分析可分为：

(1)区域反分析；

(2)控制方程反分析；

(3)边界条件或初始条件反分析；

(4)外荷载反分析；

(5)材料参数反分析。

由于土木工程中的问题常常涉及非均匀介质，材料性质在大多数情况下也是未知的，因此材料参数反分析方法在土木工程中起着重要作用。

目前，材料性质反分析共有三类，分别是直接法、逆解法和对偶边界法[25]。下面分别给予介绍。

8.1 直 接 法

直接法具有如下三个特点：一是材料参数隐式地包含在有限元方程中；二是误差函数为测量位移与计算位移的泛函；三是在反分析过程中必须求解有限元方程。

8.1.1 误差函数

误差函数取为

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) \tag{8.1}$$

式中 $\boldsymbol{u}$——计算值；

$\bar{\boldsymbol{u}}$——测量值。

利用 Taylor 级数，可将第 $k+1$ 次迭代时的误差函数用第 k 次迭代已知值表示成

$$w(\boldsymbol{p}^{k+1})=w(\boldsymbol{p}^{k})+\left\{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right\}^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{k}+\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^{2} w}{\partial \boldsymbol{p}^{2}}\right\}^{k}(\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{k})^{2} \tag{8.2}$$

式中 $\boldsymbol{p}$——待识别的材料参数。

令 $w(\boldsymbol{p}^{k+1})\to\min$，即由 $\dfrac{\partial w}{\partial(\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{k})}=0$ 则得到

$$\left\{\frac{\partial^{2} w}{\partial \boldsymbol{p}^{2}}\right\}^{k}\mathrm{d}\boldsymbol{p}^{k}=-\left\{\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}\right\}^{k} \tag{8.3}$$

利用(8.1)式可得

$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{p}}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\bar{\boldsymbol{u}}) \tag{8.4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \boldsymbol{p}^2}=\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{8.5}$$

其中，在推导(8.5)式时，用到了$\frac{\partial^2 \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}^2}=0$，这是因为求解 $\boldsymbol{u}$ 的有限元方程是用一阶 Taylor 近似式。

将(8.4)、(8.5)两式代入(8.3)中，得到求解 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}^k$ 的第 $k+1$ 次迭代方程为

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_k^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_k \mathrm{d}\boldsymbol{p}^k=\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_k^{\mathrm{T}}(\bar{\boldsymbol{u}}-\boldsymbol{u}) \tag{8.6}$$

8.1.2 有限元方程

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F} \tag{8.7}$$

上式两边对 $\boldsymbol{p}$ 求导，则有

$$\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right)_k=-\boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{u}\right)_k \tag{8.8}$$

8.1.3 计算步骤

选择初值 $\boldsymbol{p}^0$

(1)由(8.7)式求得位移 $\boldsymbol{u}$；

(2)根据(8.8)式计算$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{p}}\right\}$；

(3)由(8.6)式计算 $\mathrm{d}\boldsymbol{p}^k$；

(4)计算

$$\boldsymbol{p}^{k+1}=\boldsymbol{p}^k+\mathrm{d}\boldsymbol{p}^k$$

$$\boldsymbol{u}^{k+1}=\boldsymbol{u}^k+\mathrm{d}\boldsymbol{u}^k$$

判别计算是否收敛

$$\frac{\|\boldsymbol{p}^{k+1}-\boldsymbol{p}^k\|}{\|\boldsymbol{p}^{k+1}\|}\leqslant\varepsilon$$

若收敛，计算结束；否则转步骤(1)。

8.2 逆 解 法

逆解法由 Cividini，Jurina 等首次提出，该方法具有如下三个

特点：一是材料参数显式地表示在有限元方程中；二是误差函数基于最小二乘法；三是不需要求解有限元方程。

在弹性力学问题中，弹性矩阵可表示为

$$\boldsymbol{D}=B\boldsymbol{D}_B+G\boldsymbol{D}_G \tag{8.9}$$

式中 B——体积模量；

G——剪切模量；

$\boldsymbol{D}_B$、$\boldsymbol{D}_G$——已知的系数矩阵。

有限元方程可写成

$$(B\boldsymbol{K}^B+G\boldsymbol{K}^G)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F} \tag{8.10}$$

式中，$\boldsymbol{u}=\{\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2\}^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{u}_1$ 为测量值，$\boldsymbol{u}_2$ 为未知量。

将(8.10)式写成分块形式，则有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{u}_1\\ \boldsymbol{u}_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\end{Bmatrix} \tag{8.11}$$

从上式方程第二式解出 $\boldsymbol{u}_2$，回代到第一式，得到

$$(\boldsymbol{K}_{11}-\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{K}_{21})\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{K}_{22}^{-1}\boldsymbol{F}_2 \tag{8.12}$$

其中

$$\boldsymbol{K}_{ij}=B\boldsymbol{K}_{ij}^B+G\boldsymbol{K}_{ij}^G \qquad (i,j=1,2)$$

将 $\boldsymbol{K}_{11}=B\boldsymbol{K}_{11}^B+G\boldsymbol{K}_{11}^G$，$\boldsymbol{K}_{21}=B\boldsymbol{K}_{21}^B+G\boldsymbol{K}_{21}^G$ 代入(8.12)式中，则得到如下形式的方程

$$\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2 \tag{8.13}$$

式中

$$\boldsymbol{V}=[(\boldsymbol{K}_{11}^B-\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_{21}^B)\boldsymbol{u}_1 \quad (\boldsymbol{K}_{11}^G-\boldsymbol{C}\boldsymbol{K}_{21}^G)\boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{p}=\{B \quad G\}^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{K}_{22}^{-1}$$

利用最小二乘法建立误差函数

$$w=\frac{1}{2}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2)\to\min \tag{8.14}$$

由

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}=\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}-\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2)=0$$

得到

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V}\boldsymbol{p}=\boldsymbol{V}^{T}(\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2) \tag{8.15}$$

逆解法求解步骤如下：

(1)选择初值 $\boldsymbol{p}^0$；

(2)计算 $\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{C}$；

(3)根据(8.15)式计算 $\boldsymbol{p}^1$；

•

•

•

第 i 次计算格式为

$$(\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{V})_i\boldsymbol{p}^{i+1}=\{\boldsymbol{V}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{C}\boldsymbol{F}_2)\}_i$$

(4)判别计算是否收敛

$$\frac{\|\boldsymbol{p}^{i+1}-\boldsymbol{p}^{i}\|}{\|\boldsymbol{p}^{i+1}\|}\leqslant\varepsilon$$

8.3 对偶边界法

考察区域为 Ω、边界为 Γ 的弹性问题，如图 8.2 所示。边界 Γ 又可分为给定位移的边界 Γ_u 和给定面力的边界 Γ_σ 两部分。

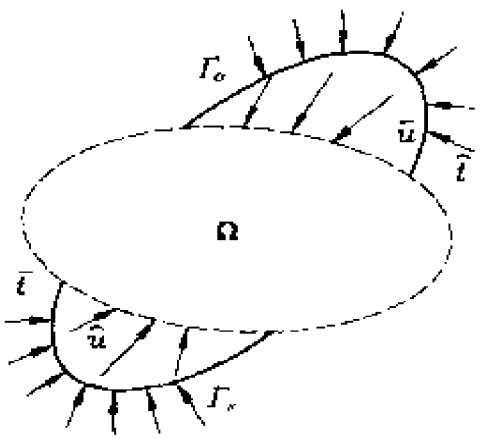


图 8.2 对偶边界法解反分析问题

对于线弹性问题，控制方程为

$$\nabla\cdot\sigma=0 \text{ in } \Omega\subset R^n \qquad (n=1,2,3) \tag{8.16}$$

边界条件：

$$u=\hat{u}\hat{t} \text{ on } \Gamma_u \tag{5.17}$$

$$\sigma n=\hat{t} \text{ on } \Gamma_\sigma \tag{5.18}$$

式中 σ——应力张量；

u——位移矢量；

n——边界外法线矢量。

物理方程

$$\sigma=D\varepsilon \tag{8.19}$$

其中

$$\varepsilon=\frac{1}{2}[(\nabla u)+(\nabla u)^{\mathrm{T}}] \tag{8.20}$$

在对偶边界解法中，为了识别材料参数 p（p 为弹性模量 E 和泊松比 υ），采用如下办法：在边界 Γ_u 上施加一给定位移 $\hat{u}$，同时观察 $\Gamma_{u'}$（$\Gamma_{u'}$ 为 Γ_u 的子域）上对应的面力 $\bar{t}$；或者反过来，在边界 Γ_σ 上施加一给定面力 $\hat{t}$，同时观察 $\Gamma_{\sigma'}$（$\Gamma_{\sigma'}$ 为 Γ_σ 的子域）上对应的位移 $\bar{u}$，如图 8.2 所示，上述条件可表示为

$$u=\bar{u} \quad \text{on} \quad \Gamma_{u'}\subset\Gamma_u \tag{8.21}$$

$$\sigma n=\bar{t} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\sigma'}\subset\Gamma_\sigma \tag{8.22}$$

利用上述附加条件，即可建立识别材料参数 p 的方程。

(8.16)至(8.18)式等价于下列虚功方程

$$\int_\Omega \sigma^{\mathrm{T}}\delta\varepsilon\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_\sigma}\hat{t}^{\mathrm{T}}\delta u\mathrm{d}\Gamma=0 \tag{8.23}$$

引入插值函数，可将域内任一点的位移用结点位移表示成

$$u=Na \tag{8.24}$$

将上式代入(8.23)式，并利用物理方程，则得到有限元方程如下

$$K(p)a=F \tag{8.25}$$

式中

$$K=\int_\Omega B^{\mathrm{T}}D(p)B\mathrm{d}\Omega$$

$$\boldsymbol{F}=\int_{\Gamma_\sigma}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma$$

(8.21)和(8.22)两式用矩阵表示如下

$$\boldsymbol{S}_u\boldsymbol{a}=\bar{\boldsymbol{a}} \tag{8.26}$$

$$\boldsymbol{S}_t\boldsymbol{F}=\int_{\Gamma_u}\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{t}}\mathrm{d}\Gamma=\bar{\boldsymbol{F}} \tag{8.27}$$

式中，$\boldsymbol{S}_u$ 和 $\boldsymbol{S}_t$ 为对角矩阵。例如第 i 个结点为位移观察值，第 j 个结点为面力观察值时，则有

$$\boldsymbol{S}_u=\begin{bmatrix}0 & & & & 0\\ & \ddots & & \iddots & \\ & & 1 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}\quad \text{第 } i \text{ 行}$$

$$\boldsymbol{S}_t=\begin{bmatrix}0 & & & & 0\\ & \ddots & & \iddots & \\ & & 1 & & \\ & \iddots & & \ddots & \\ 0 & & & & 0\end{bmatrix}\quad \text{第 } j \text{ 行}$$

(8.25)式可改写为

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p})\boldsymbol{a}-\boldsymbol{F}\neq 0 \tag{8.28}$$

利用 Taylor 级数，可将第 $k+1$ 次迭代时的误差函数用第 k 次迭代时的已知值表示为

$$\boldsymbol{\Psi}^{k+1}=\boldsymbol{\Psi}^k+\boldsymbol{K}\mathrm{d}\boldsymbol{a}^k-\boldsymbol{I}\mathrm{d}\boldsymbol{F}^k+\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{a}\right]^k\mathrm{d}\boldsymbol{p}^k \tag{8.29}$$

令 $\boldsymbol{\Psi}^{k+1}=0$，得到

$$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p}^k)\mathrm{d}\boldsymbol{a}^k-\boldsymbol{I}\mathrm{d}\boldsymbol{F}^k+\left[\frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{a}\right]^k\mathrm{d}\boldsymbol{p}^k=\boldsymbol{F}^k-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p}^k)\boldsymbol{a}^k \tag{8.30}$$

同理可将(8.26)、(8.27)两式写成迭代格式

$$\boldsymbol{S}_u\mathrm{d}\boldsymbol{a}^k=\bar{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{S}_u\boldsymbol{a}^k \tag{8.31}$$

$$\boldsymbol{S}_t\mathrm{d}\boldsymbol{F}^k=\bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{S}_t\boldsymbol{F}^k \tag{8.32}$$

将(8.30)～(8.32)三式合写在一起，得到

$$\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{R} \tag{8.33}$$

其中

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p}^k) & -\boldsymbol{I} & \left(\dfrac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{p}}\boldsymbol{a}\right)^k\\ \boldsymbol{S}_u & 0 & 0\\ 0 & \boldsymbol{S}_t & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\begin{Bmatrix}\mathrm{d}\boldsymbol{a}^k\\ \mathrm{d}\boldsymbol{F}^k\\ \mathrm{d}\boldsymbol{p}^k\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}^{k+1}-\boldsymbol{a}^k\\ \boldsymbol{F}^{k+1}-\boldsymbol{F}^k\\ \boldsymbol{p}^{k+1}-\boldsymbol{p}^k\end{Bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}^k-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{p}^k)\boldsymbol{a}^k\\ \bar{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{S}_u\boldsymbol{a}^k\\ \bar{\boldsymbol{F}}-\boldsymbol{S}_t\boldsymbol{F}^k\end{Bmatrix}$$

由于(8.33)式是一超定线性方程组，我们改求如下形式的普通方程组

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R} \tag{8.34}$$

上式即为对偶边界法识别材料参数 $\boldsymbol{p}$ 的迭代方程。

在迭代步 k 中，引入线性搜索法。为此定义

$$w(\boldsymbol{p})=\frac{1-\omega}{2}(\boldsymbol{a}-\bar{\boldsymbol{a}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{a}-\bar{\boldsymbol{a}})+\frac{\omega}{2}(\boldsymbol{F}-\bar{\boldsymbol{F}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{F}-\bar{\boldsymbol{F}})-\frac{1}{\epsilon}E^{-}$$

$$-\frac{1}{\epsilon}\upsilon^{-}+\frac{1}{\epsilon}(\upsilon-0.5)^{+} \tag{8.35}$$

式中，$0\leqslant\omega\leqslant1$ 为给定的常数；$0<\epsilon\ll1$ 为罚常数。

(8.35)式中的最后三项是为了使 $E>0$，$0<\upsilon<0.5$。E^{-}、υ^{-} 和 $(\upsilon-0.5)^{+}$ 定义如下

$$a^{+}=\begin{cases}a & a>0\\ 0 & a<0\end{cases}\qquad a^{-}=\begin{cases}0 & a>0\\ a & a<0\end{cases} \tag{8.36}$$

再引入 α^k

$$\alpha_i^k=\frac{\mathrm{d}p_i^k}{p_i^k} \tag{8.37}$$

问题转化成寻求 λ，使

$$w(\boldsymbol{p}^k+\lambda\boldsymbol{\alpha}^k)\rightarrow\min \tag{8.38}$$

采用线性搜索法，将 w 近似表示成

$$w(\boldsymbol{p}^k+\lambda\boldsymbol{\alpha}^k)=w(\boldsymbol{p}^k)+\left\{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k\lambda\boldsymbol{\alpha}^k+\frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^2}\right\}^k\lambda^2(\boldsymbol{\alpha}^k)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\alpha}^k) \tag{8.39}$$

由 $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\lambda}=0$，得到

$$\lambda=-\frac{\left\{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k\boldsymbol{\alpha}^k}{\left\{\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^2}\right\}^k(\boldsymbol{\alpha}^k)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}^k} \tag{8.40}$$

式中，$\left\{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k$、$\left\{\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^2}\right\}^k$ 可由(8.35)式计算得到

$$\left\{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k=(1-\omega)\left\{\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{a}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k+\omega\left\{\boldsymbol{F}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}-\bar{\boldsymbol{F}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k-\frac{1}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}$$
$$-\frac{1}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}v^-}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}+\frac{1}{\epsilon}\frac{\mathrm{d}(v-0.5)^+}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}} \tag{8.41}$$

$$\left\{\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}^2}\right\}^k=(1-\omega)\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k+\omega\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k \tag{8.42}$$

上式中，$\left\{\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}\right\}^k$ 可通过求解(8.34)式得到。

一旦获得了 $\lambda\boldsymbol{\alpha}^k$，即可求得 $\boldsymbol{p}^{k+1}$

$$\boldsymbol{p}^{k+1}=\boldsymbol{p}^k+\lambda\boldsymbol{\alpha}^k \tag{8.43}$$

对偶边界法的收敛准则可选择为

$$\frac{\|\boldsymbol{a}^{k+1}-\boldsymbol{a}^k\|}{\|\boldsymbol{a}^{k+1}\|}\leqslant\epsilon_1$$
$$\frac{\|\boldsymbol{F}^{k+1}-\boldsymbol{F}^k\|}{\|\boldsymbol{F}^{k+1}\|}\leqslant\epsilon_2 \tag{8.44}$$
$$\frac{\|\boldsymbol{p}^{k+1}-\boldsymbol{p}^k\|}{\|\boldsymbol{p}^{k+1}\|}\leqslant\epsilon_3$$

式中，$0<\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3\ll1$ 为给定的精度。(8.44)式中的范数为平方范数

$$\|\boldsymbol{a}\|=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})^{1/2}。$$

8.4 算　　例

8.4.1　一维桁架问题

考察一维桁架问题，如图 8.3 所示。在结点 1 处施加一外力 $\hat{t}=10^6$ N（相当于边界 Γ_σ），同时在结点 1 处观测到位移 $\bar{a}_1=0.2$ m。结点 3 为固定边界，但力是未知的，因此仅有边界条件(8.21)式，这时 $\mathrm{d}F=0$。

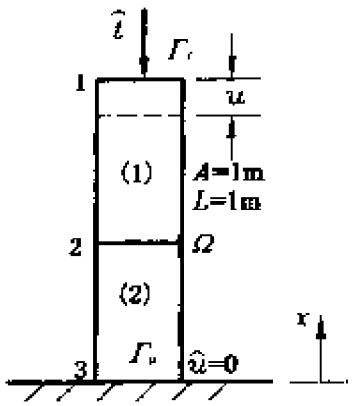


图 8.3　一维桁架问题

由(8.30)、(8.31)式可得

$$\begin{bmatrix} \dfrac{E}{l} & -\dfrac{E}{l} \\ -\dfrac{E}{l} & \dfrac{2E}{l} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \mathrm{d}a_1^k \\ \mathrm{d}a_2^k \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{l} & -\dfrac{1}{l} \\ -\dfrac{1}{l} & \dfrac{2}{l} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix} \mathrm{d}E^k$$

$$= \begin{Bmatrix} -\hat{t} \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \dfrac{E}{l} & -\dfrac{E}{l} \\ -\dfrac{E}{l} & \dfrac{2E}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{d}a_1^k \\ \mathrm{d}a_2^k \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{a}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1^k \\ a_2^k \end{Bmatrix}$$

式中，$l=0.5$ m 为单元的长度，由于不计(8.32)式，则有

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix} 2\left(\frac{E}{l}\right)^2+1 & -3\left(\frac{E}{l}\right)^2 & \frac{E}{l^2}(2a_1-3a_2) \\ -3\left(\frac{E}{l}\right)^2 & 5\left(\frac{E}{l}\right)^2 & \frac{E}{l^2}(-3a_1+5a_2) \\ \frac{E}{l^2}(2a_1-3a_2) & \frac{E}{l^2}(-3a_1+5a_2) & \frac{1}{l^2}(2a_1^2-6a_1a_2+5a_2^2) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}=\begin{Bmatrix} -\frac{E}{l}\hat{\imath}+\left(\frac{E}{l}\right)^2(-2a_1+3a_2)+\bar{a}_1-a_1 \\ \frac{E}{l}\hat{\imath}+\left(\frac{E}{l}\right)^2(3a_1-5a_2) \\ -\frac{1}{l}\hat{\imath}(a_1-a_2)-\frac{1}{l^2}(2a_1^2-6a_1a_2+5a_2^2) \end{Bmatrix}$$

上述各表达式中为了叙述简洁，忽略上角标 k。

计算中，各初始值选择为

$$E^0=2.0\ \mathrm{MPa},a_1^0=-0.5\ \mathrm{m},a_2^0=-0.25\ \mathrm{m}$$

(8.44)式的收敛精度为

$$\varepsilon_1=\varepsilon_3=0.01$$

计算结果见表 8.1。表中还给出了与直接解法和逆解法的比较。在这个简单的例子中，三种算法无明显的差别。

表 8.1　一维桁架识别弹性模量

	初始值	真　值	逆解法	直接法	对偶边界法
弹性模量 E(MPa)	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
迭代次数			1	5	3

8.4.2　单层地基识别弹性模量

考察各向同性的弹性地基，如图 8.4 所示。地基表面边界 AB 为面力边界 Γ_σ，AB 的中央作用有一集中力 10^6N。

观测结点 1 到结点 4 的位移为

$$u_1=u_4=3.94\ \mathrm{cm}\qquad u_2=u_3=5.15\ \mathrm{cm}$$

$$v_1=v_4=-10.51\ \mathrm{cm}\qquad v_2=v_3=-18.76\ \mathrm{cm}$$

同样采用两种方法识别弹性模量，计算结果见表 8.2。

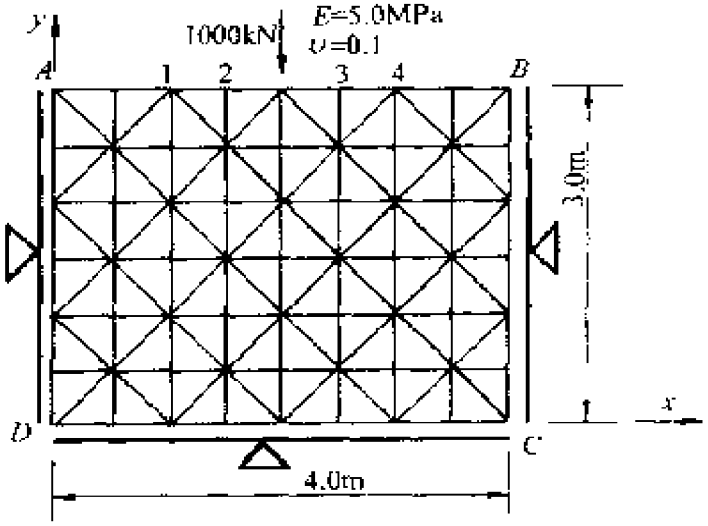


图 8.4　单层地基识别弹性模量

表 8.2　单层地基弹性模量的识别

	初始值	真　值	逆解法	直接法	对偶边界法
弹性模量 E(MPa)	2.0	5.0	5.0	5.0	5.0
迭代次数			2	3	3

8.4.3　单层地基弹性模量和泊松比的识别

计算模型同 8.2 中的问题。但是在这个例子中我们同时识别弹性模量和泊松比。计算结果见表 8.3。表中直接解法指先识别 E，待计算收敛后，再识别 υ。在这个例子中，我们看到，逆解法和直接解法在达到最大迭代次数 20 次后，仍未收敛。

表 8.3　单层地基弹性模量和泊松比的识别

	初始值	真　值	逆解法	直接法	对偶边界法
弹性模量 E(MPa)	2.0	5.0	4.077	5.056	5.0
泊松比 υ	0.2	0.1	0.280	0.102	0.1
迭代次数			20	20	3

8.4.4　多层地基弹性模量和泊松比的识别

考虑三层边坡开挖问题，需要分别确定各层的弹性模量和泊松比。计算模型如图 8.5 所示。在边界 4-6，作用有因开挖而产生的分布荷载，同时观察到各点的位移为

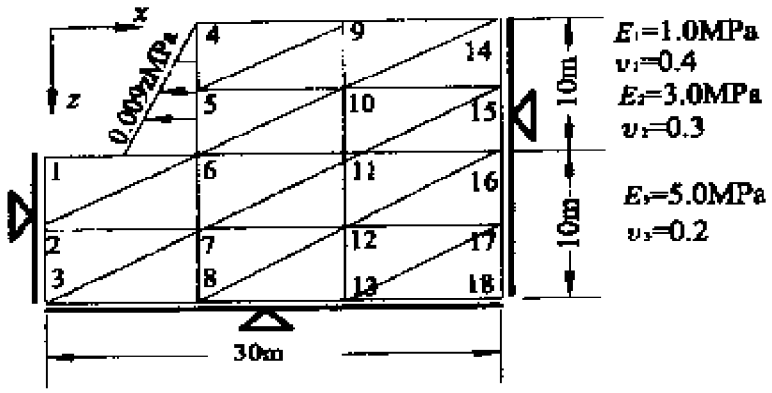


图 8.5　多层地基弹性模量和泊松比的识别

$v_1 = -0.014$ cm　　$u_4 = 2.16$ cm　　$v_4 = 0.926$ cm

$u_5 = 1.81$ cm　　$v_5 = 0.521$ cm　　$u_6 = 0.646$ cm

$v_6 = 0.133$ cm　　$u_9 = 0.959$ cm　　$v_9 = 0.344$ cm

计算结果见表 8.4，从表中可以再一次看出，对偶边界法具有较好的精度。

表 8.4　多层地基弹性模量和泊松比的识别

	初始值	真　值	Arai et al.	对偶边界法
弹性模量 E_1(MPa)	3.0	1.0	1.0	1.0
泊松比 υ_1	0.1	0.4	0.38	0.4
迭代次数			10	5
弹性模量 E_2(MPa)	1.0	3.0	3.0	3.0
泊松比 υ_2	0.1	0.3	0.34	0.3
迭代次数			10	5
弹性模量 E_3(MPa)	3.0	5.0	5.2	5.0
泊松比 υ_3	0.1	0.2	0.14	0.2
迭代次数			10	5

8.4.5　材料参数反分析在铁路道床中的应用

考察由道碴、底碴和路基组成的轨道基础，如图 8.6 所示。假设每种材料为各向同性的弹性体。道碴顶面施加均布荷载 $Q=0.013$MPa，边界 AB、BC、CD 为面力边界 Γ_2。

观测到结点位移为

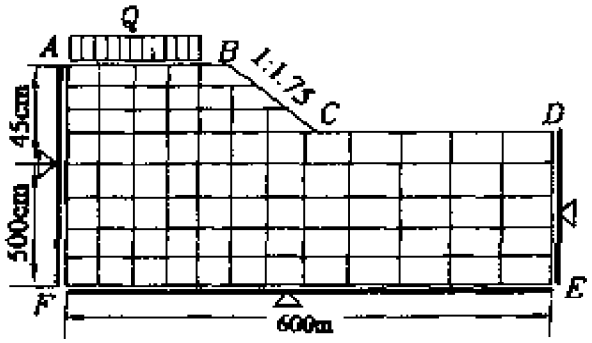


图 8.6　轨道基础弹性模量和泊松比的识比

$u_1=0.0$ mm　$v_1=-1.066$ mm　$u_2=-0.017$ mm　$v_2=-1.062$ mm

$u_3=-0.035$ mm　$v_3=-1.047$ mm　$u_4=-0.052$ mm　$v_4=-1.022$ mm

$u_5=-0.070$ mm　$v_5=-0.987$ mm　$u_6=-0.088$ mm　$v_6=-0.941$ mm

$u_7=-0.105$ mm　$v_7=-0.882$ mm　$u_8=-0.119$ mm　$v_8=-0.810$ mm

$u_9=-0.131$ mm　$v_9=-0.723$ mm　$u_{10}=-0.133$ mm　$v_{10}=-0.632$ mm

$u_{11}=-0.006$ mm　$v_{11}=-0.183$ mm　$u_{12}=-0.008$ mm　$v_{12}=-0.155$ mm

$u_{13}=-0.010$ mm　$v_{13}=-0.130$ mm　$u_{14}=-0.010$ mm　$v_{14}=-0.074$ mm

$u_{15}=-0.009$ mm　$v_{15}=-0.030$ mm　$u_{16}=-0.007$ mm　$v_{16}=-0.005$ mm

$u_{17}=-0.004$ mm　$v_{17}=0.033$ mm　$u_{18}=-0.003$ mm　$v_{18}=0.055$ mm

$u_{19}=-0.001$ mm　$v_{19}=0.071$ mm　$u_{20}=-0.001$ mm　$v_{20}=0.083$ mm

其中，1～10 号结点位于 AB 边界，11～20 号结点位于 CD 边界，计算结果见表 8.5。

从给出的算例中可以看到，对偶边界法具有较高的分析精度。在待识别参数少的情况下，三种方法给出了同样的结果。由于直接法和逆解法算法简单，可考虑选择这两种方法。但在待识别参数较多的情况下，直接法和逆解法精度较差，在某些情况下甚至不收敛，这时宜选用对偶边界法。

表 8.5　轨道基础弹性模量和泊松比的识比

	初始值	计算值
弹性模量 E_1(MPa)	200.0	150.0
泊松比 ν_3	0.27	0.27
弹性模量 E_2(MPa)	100.0	50.0

续上表

	初始值	计算值
泊松比 ν_2	0.3	0.3
弹性模量 E_3(MPa)	60.0	30.0
泊松比 ν_3	0.35	0.35
迭代次数		12

第九章　耦合问题

工程中有很多相互作用的问题。对这类问题，如不考虑它们的共同作用，是不可能求得解答的。相互作用问题也称耦合问题。根据相互作用的强弱程度不同，耦合又可分为强耦合和弱耦合。

典型的耦合问题的例子是流体与结构的相互作用。由于接触力是未知的，任何单独求解流体和结构的企图都是不可能成功的。

耦合问题包含的范围很广。通常将满足以下条件的问题定义为耦合问题：

(1) 两种或两种以上的材料组成的结构；

(2) 任何一种材料的未知量都不能单独求解；

(3) 微分方程中的独立变量不能显式地消去。

耦合法不同于混合法，混合法对同一物理问题采用不同的未知量。例如部分未知量为位移，部分未知量为应力。混合法与耦合问题的区别在于前者可显示地消去部分未知量。另一个区别为耦合问题中的每一个子系统都是适定问题，一旦给定了某些有关的变量值即可求解，混合法则不然。

通常将耦合问题分为两类：一类为各子系统通过接触边界相互耦合，一般每一子系统代表不同的物理问题。另一类为各子系统部分或全部重叠，在这类问题中，耦合是通过描述不同物理问题的控制方程进行的。

第一类问题的典型例子为流固耦合(如图 9.1(*a*))和结构与结构的相互作用(如图 9.1(*b*))，它们之间的共同作用是通过接触边界发生的。

第二类问题的例子有金属挤压成型和土中的渗流问题，如图 9.2所示。在金属挤压过程中，塑性流与温度场是一种强耦合关系。土与渗流的耦合作用是通过渗流压力作用在土骨架上而产生的。

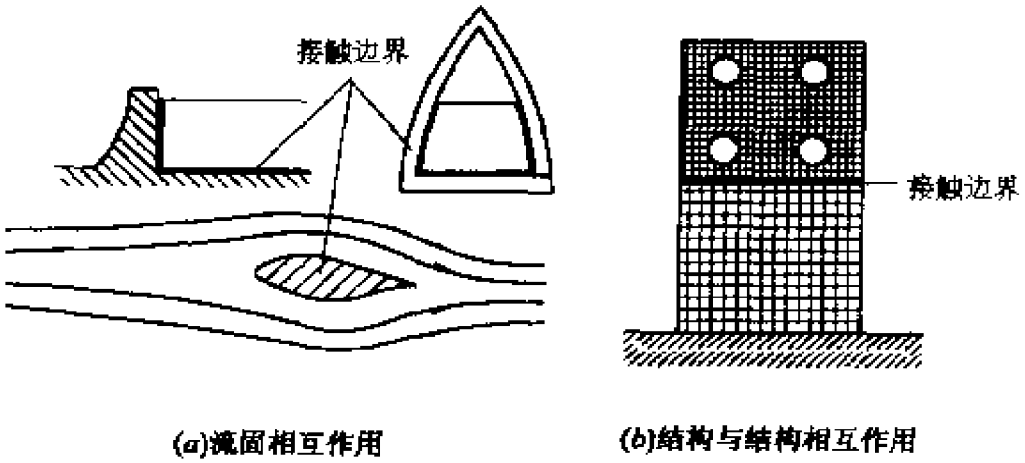
在上述这些例子中，我们发现耦合问题总是与运动有关。事实上，工程中大量的耦合问题都涉及到动力因素。因此在以下的章节中，我们将主要讨论与动力有关的耦合。

由于大多数耦合问题都具有类似的性质，我们只介绍下列两种典型的耦合：

1. 流固相互作用；

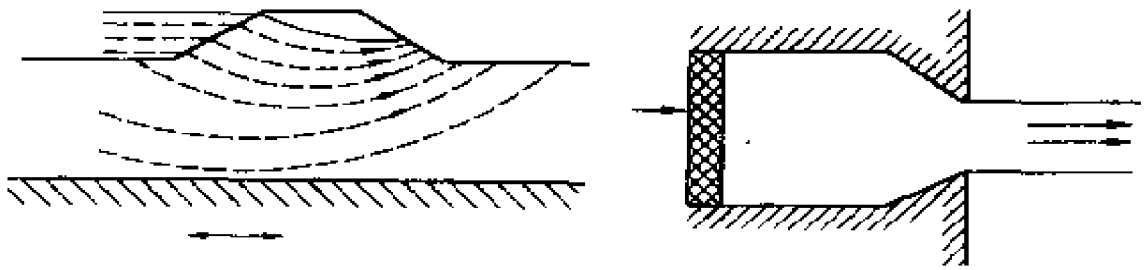
2. 土与流体的相互作用。

在以下对这两个问题的讨论中，我们将会发现处理耦合问题的一般规律，利用这些规律，我们可以处理其他各种各样的耦合问题。



(a)流固相互作用　　(b)结构与结构相互作用

图 9.1　第一类耦合问题



(a)土中渗流问题　　(b)企鹅挤压问题

图 9.2　第二类耦合问题

9.1 流固耦合

9.1.1 流体的基本方程

流固耦合是一个广泛的问题，它涉及到流体的许多性质。有关大运动的流体问题只有在专门的著作中才有介绍。因此，本节将不考虑象机翼颤振等一类复杂的大运动流体问题。

然而，在工程中的相当一大类问题中，流体的变形是属于小位移的范围，但由此而引起的相互作用却是不容忽视的。图 9.1 中的两个例题即属于这类问题。工程师们对这类问题表现出了极大的兴趣，并召开了一系列的研讨会。有幸的是，关于流固耦合中流体的描述已经得到了大大的简化。

小位移流固耦合问题中的流体动力方程可简单地表示为

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} \approx \rho \dot{v} = -\nabla p \tag{9.1}$$

式中 v——流体速度；

ρ、p——流体的密度和压力。

在建立(9.1)式时，我们采用了以下假设：

(*a*) 密度 ρ 的变化是微小的；

(*b*) 流速是足够的小，以致可忽略不计对流的影响；

(*c*) 引起偏应力的流体粘性可忽略不计。

根据上述假设，流体的连续性方程可表示为

$$\rho div v = \rho \nabla^{\mathrm{T}} v = \frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{9.2}$$

注意到有

$$\mathrm{d}\rho = \frac{\rho \mathrm{d}p}{K} \tag{9.3}$$

式中 K——体积模量。

将(9.3)式代入(9.2)式中，得到

$$\nabla^{\mathrm{T}} v = \frac{1}{K} \frac{\partial p}{\partial t} \tag{9.4}$$

从(9.1)和(9.4)两式中消去速度 v，则得到熟知的关于压力 p

的 Helmholtz 方程

$$\nabla^2 p+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \tag{9.5a}$$

式中

$$c=\sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{9.5b}$$

表示流体中的声速。

实际上，上述方程也是声学问题的基础。

9.1.2 流体的边界条件

图 9.3 表示流固耦合问题中可能出现的边界条件。大体上可分为三类边界条件：

1. 接触边界(图 9.3 中的①、②即属于这类边界)。在接触边界上，法向速度或其对时间的导数等于固体的法向速度或相应的加速度，设边界①的外法线方向为 n，作用在边界上的压力为 p，则由(9.1)式，可得

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho\dot{v}_n \tag{9.6}$$

式中，$\dot{v}_n$ 为给定值。

例如：边界①与结构耦合，在此情形下有

$$\dot{v}_n=\ddot{u}_n \tag{9.7}$$

代入(9.6)式中，即得到边界①的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\rho\ddot{u}_n \quad (\text{on } \Gamma_1) \tag{9.8}$$

边界②为流体与固体边界耦合，

$$\dot{v}_z=0 \tag{9.9}$$

由此得到边界②的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=0 \quad (\text{on } \Gamma_2) \tag{9.10}$$

2. 自由边界(图 9.3 中的边界③)。在自由边界上，最简单的假设为

$$p=0 \tag{9.11}$$

在有重力波存在的情况下，假设 η 为相对于平均水平面的高

度，相应的边界条件可近似表示为

$$p=\rho g\eta \tag{9.12}$$

式中 ρ——密度；

g——重力加速度。

运用(9.1)式，并注意到$v_z=\dfrac{\partial \eta}{\partial t}$，假设$\rho$为常数，则(9.12)式可表示为

$$\rho\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}=-\frac{\partial p}{\partial z}\quad(\text{on } \Gamma_3) \tag{9.13}$$

再将(9.12)式代入上式，则得到边界③的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{1}{g}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=-\frac{1}{g}\ddot{p} \tag{9.14}$$

上述条件也称线性表面波条件。

3. 辐射边界(图9.3中的边界④)。这类边界从物理意义上讲是在无穷远处。由于无穷远处没有输入，控制方程的解仅包含发散波。

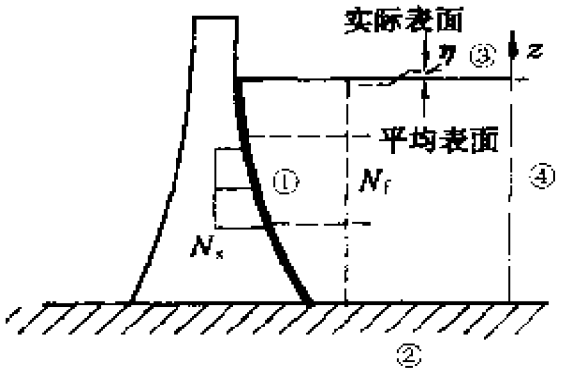


图 9.3 流固耦合系统的边界条件

如果考虑沿水平方向x运动的一维问题，我们知道波动方程(9.5a)的一般解可表示为

$$p=F(x-ct)+G(x+ct) \tag{9.15}$$

式中 c——波速；

F、G——沿x正、负方向运动的两个波。

对辐射边界，由于无反射波，因此

$$p=F(x-ct) \tag{9.16}$$

由此可得

$$\frac{\partial p}{\partial n}=\frac{\partial p}{\partial x}=F' \tag{9.17}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-cF' \tag{9.18}$$

式中，F'代表F对$(x-ct)$的导数。

从(9.17)、(9.18)两式中消去未知函数F'，则得到辐射边界

的边界条件为

$$\frac{\partial p}{\partial n}=-\frac{1}{c}\dot{p} \quad (\text{on } \Gamma_4) \tag{9.19}$$

这个边界条件非常类似(9.14)式，首次由 O. C. Zienkiewicz 提出[26]。

9.1.3 有限元离散方法

采用普通有限元离散方法，将位移表示为

$$\boldsymbol{u}\approx\hat{\boldsymbol{u}}=\boldsymbol{N}_u\boldsymbol{a} \tag{9.20}$$

同样，将流体压力 p 表示成

$$p\approx\hat{p}=\boldsymbol{N}_p\bar{\boldsymbol{p}} \tag{9.21}$$

式中 $\boldsymbol{a}$、$\bar{\boldsymbol{p}}$——固体和流体单元的结点位移和结点压力向量；

$\boldsymbol{N}_u$、$\boldsymbol{N}_p$——相应的插值函数矩阵。

对固体而言，离散的动力问题的有限元方程将在第十章介绍，在流固耦合系统中，只须将流固接触面上的相互作用附加到有限元动力方程中即可，由此得到

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \tag{9.22}$$

式中 $\boldsymbol{M}$——质量矩阵；

$\boldsymbol{C}$——阻尼矩阵；

$\boldsymbol{K}$——刚度矩阵；

$\boldsymbol{Q}$——流固相互作用力矩阵；

$\boldsymbol{f}$——外荷载向量。

(9.22)式中的 $\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{p}}$ 为流固相互作用耦合项

$$\int_{\Gamma_1}\rho\boldsymbol{N}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}p\mathrm{d}\Gamma=\left(\rho\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{N}_a^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}\boldsymbol{N}_p\mathrm{d}\Gamma\right)\ddot{\bar{\boldsymbol{p}}}=\boldsymbol{Q}\ddot{\bar{\boldsymbol{p}}} \tag{9.23}$$

式中 $\boldsymbol{n}$——接触边界的外法线向量。

流体部分离散的有限元方程可通过控制方程和边界条件用伽辽金方法导出。为此，对域内控制方程，选择权函数为流体压力的插值函数 N_i、边界积分项选择权函数为 $-N_i$，则得到

$$I_i=\int_{\Omega}\left(\nabla^2 p+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\right)N_i\mathrm{d}\Omega-\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial p}{\partial n}+\rho\ddot{u}_n\right)N_i\mathrm{d}\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma_2}\frac{\partial p}{\partial z}N_j d\Gamma-\int_{\Gamma_3}\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{g}\ddot{p}\right)N_j d\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_4}\left(\frac{\partial p}{\partial n}+\frac{1}{c}\dot{p}\right)N_j d\Gamma=0 \quad j=1,2,\cdots n \tag{9.24}$$

将(9.21)式代入(9.24)，经分部积分，得到流体离散的有限元方程为

$$\boldsymbol{S}\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}+\widetilde{\boldsymbol{C}}\dot{\overline{\boldsymbol{p}}}+\boldsymbol{H}\overline{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0} \tag{9.25}$$

---

① 注：(9.25)式推导如下：

$$I_j=\int_\Omega\left(\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\overline{p}_i+\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\overline{p}_i+\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2}\overline{p}_i\right)N_j d\Omega+\int_\Omega\frac{1}{c^2}\left(\sum_i N_i\ddot{\overline{p}}_i\right)N_j d\Omega$$
$$-\int_{\Gamma_1}\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial i}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma-\int_{\Gamma_1}\rho\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{u}}N_j d\Gamma-\int_{\Gamma_2}\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial z}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma-$$
$$\int_{\Gamma_3}\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial z}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma-\int_{\Gamma_3}\frac{1}{g}\left(\sum_i N_i\ddot{\overline{p}}_i\right)N_j d\Gamma-$$
$$\int_{\Gamma_4}\left(\sum\frac{\partial N_i}{\partial n}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma-\int_{\Gamma_4}\frac{1}{c}\left(\sum_i N_i\dot{\overline{p}}_i\right)N_j d\Gamma \tag{附-1}$$

上式中的第一项利用分部积分可表示为

$$\int_\Omega\left(\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}\overline{p}_i+\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}\overline{p}_i+\sum_i\frac{\partial^2 N_i}{\partial z^2}\overline{p}_i\right)N_j d\Omega$$
$$=-\int_\Omega\left\{\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial x}\overline{p}_i\right)\frac{\partial N_j}{\partial x}+\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial y}\overline{p}_i\right)\frac{\partial N_j}{\partial y}+\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial z}\overline{p}_i\right)\frac{\partial N_j}{\partial z}\right\}d\Omega$$
$$+\int_\Gamma\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial n}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma$$
$$=-\int_\Omega(\nabla N_j)^{\mathrm{T}}(\nabla N_\rho)\overline{\boldsymbol{p}}d\Omega+\int_{\Gamma_1+\Gamma_2+\Gamma_3-\Gamma_4}\left(\sum_i\frac{\partial N_i}{\partial n}\overline{p}_i\right)N_j d\Gamma \tag{附-2}$$

将上式代入(附-1)，消去相同的边界项，则有

$$I_j=-\int_\Omega(\nabla N_j)^{\mathrm{T}})(\nabla N_\rho)d\Omega\overline{\boldsymbol{p}}+\int_\Omega\frac{1}{c^2}N_j N_\rho d\Omega\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}-\int_{\Gamma_1}\rho N_j\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}N_a d\Gamma\ddot{\boldsymbol{a}}$$
$$-\int_{\Gamma_3}\frac{1}{g}N_j N_\rho d\Gamma\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}-\int_{\Gamma_4}\frac{1}{c}N_j N_\rho d\Gamma\dot{\overline{\boldsymbol{p}}} \qquad (j=1,2,\cdots,n) \tag{附-3}$$

上式可进一步表示成

$$I=-\int_\Omega(\nabla N_\rho)^{\mathrm{T}}(\nabla N_\rho)d\Omega\overline{\boldsymbol{p}}+\int_\Omega\frac{1}{c^2}\boldsymbol{N}_\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\rho d\Omega\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}-\int_{\Gamma_1}\rho\boldsymbol{N}_\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_a d\Gamma\ddot{\boldsymbol{a}}$$
$$\int_{\Gamma_3}\frac{1}{g}\boldsymbol{N}_\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\rho d\Gamma\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}-\int_{\Gamma_4}\frac{1}{c}\boldsymbol{N}_\rho^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_\rho d\Gamma\dot{\overline{\boldsymbol{p}}}$$
$$=-\boldsymbol{H}\overline{\boldsymbol{p}}-\boldsymbol{S}\ddot{\overline{\boldsymbol{p}}}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}}-\widetilde{\boldsymbol{C}}\dot{\overline{\boldsymbol{p}}}$$

其中

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x}\quad\frac{\partial}{\partial y}\quad\frac{\partial}{\partial z}\right\}^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{N}_\rho=\lfloor N_1\quad N_2\quad\cdots\quad N_n\rfloor$$

式中

$$\boldsymbol{S}=-\int_{\Omega}\boldsymbol{N}_p^{\mathrm{T}}\frac{1}{c^2}\boldsymbol{N}_p\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_3}\boldsymbol{N}_p^{\mathrm{T}}\frac{1}{g}\boldsymbol{N}_p\mathrm{d}\Omega$$

$$\tilde{\boldsymbol{C}}=\int_{\Gamma_1}\boldsymbol{N}_p^{\mathrm{T}}\frac{1}{c}\boldsymbol{N}_p\mathrm{d}\Omega \tag{9.26}$$

$$\boldsymbol{H}=\int_{\Omega}\nabla\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\nabla\boldsymbol{N}\mathrm{d}\Omega$$

$\boldsymbol{Q}$ 与(9.23)式中的项相同。

如果流体中有流源或边界上有输入，则(9.25)式变成

$$\boldsymbol{S}\ddot{\bar{\boldsymbol{p}}}+\tilde{\boldsymbol{C}}\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}+\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{q}=0 \tag{9.27}$$

式中 $\boldsymbol{q}$ ——由流源和边界输入引起的附加项。

9.1.4 自由振动

如果我们不计阻尼的影响，考虑自由振动，则(9.22)和(9.25)两式可用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\boldsymbol{a}}\\ \ddot{\bar{\boldsymbol{p}}}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & -\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}\\ \bar{\boldsymbol{p}}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{9.28}$$

传统的处理自由振动的方法是特征值法。但我们立即发现，(9.28)式是非对称和非正定的微分方程组，因此不能直接运用普通的特征值法，虽然从物理意义上可判断所研究的问题存在实的特征值和相应的自由振动模态。

上述问题类似于旋转固体的振动问题，需要采用特殊的处理方法。现在已经出现了各种对称化的方法。通过对称化处理，(9.28)式可转化成普通的特征值问题。

下面介绍一种简单的对称化处理方法。

首先令 $\bar{\boldsymbol{a}}=\tilde{\boldsymbol{a}}e^{i\omega t}$，$\bar{\boldsymbol{p}}=\tilde{\boldsymbol{p}}e^{i\omega t}$，代入(9.28)式，得到

$$\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{p}}-\omega^2\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0} \tag{9.29a}$$

$$\boldsymbol{H}\tilde{\boldsymbol{p}}-\omega^2\boldsymbol{S}\tilde{\boldsymbol{p}}-\omega^2\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\tilde{\boldsymbol{a}}=\boldsymbol{0} \tag{9.29b}$$

再引入一附加变量 $\boldsymbol{q}$，使之满足

$$\tilde{\boldsymbol{p}}=\omega^2\tilde{\boldsymbol{q}} \tag{9.29c}$$

(9.29)三式可合写为

$$\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{S}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}&\boldsymbol{S}\\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}&\boldsymbol{H}\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}\tilde{\boldsymbol{a}}\\ \tilde{\boldsymbol{p}}\\ \tilde{\boldsymbol{q}}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{9.30}$$

上式即为对称的自由振动方程。其中的附加变量 $\tilde{\boldsymbol{q}}$ 还可进一步用静力凝聚的方法消去，使之仅包含原有的基本未知量。

另外一种经常采用的方法是在微分方程中引入一个新的对称变量，然而这显然是没有必要的。

图 9.4 表示一容器中的流体与三维柔性墙相互作用发生自由振动的情况。

9.1.5 强迫振动与逐步求解法

正像稳定、线性、受周期性荷载作用的动力问题可在复频域计算一样，流固耦合问题也可用同样的方法求解。Chopra 等用这种方法对水库与大坝的相互作用进行了许多研究。然而，这种方法一般是不经济的，并且不能用于非线性动力分析。这里采用第十章中介绍的时域逐步求解法。但在流固耦合问题中，由于控制方程是非对称的，因此不能简单地利用第十章中的方法，而必须做必要的修正。用时域逐步求解法时，必须首先对(9.22)和(9.27)两式在时域方向进行离散。

采用第十章中介绍的单步长 SS22 算法，在时间间隔 Δt 中，我们将位移 $\boldsymbol{a}$ 表示为

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\frac{\alpha\tau^2}{2} \tag{9.31}$$

同样将压力 $\bar{\boldsymbol{p}}$ 表示为

$$\bar{\boldsymbol{p}}=\bar{\boldsymbol{p}}_n+\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n\tau+\frac{\beta\tau^2}{2} \tag{9.32}$$

式中 $\tau=t-t_n$

将以上两式代入(9.22)式和(9.27)式中，选择两个不同的权函数 w_1 和 w_2，作加权积分，即：

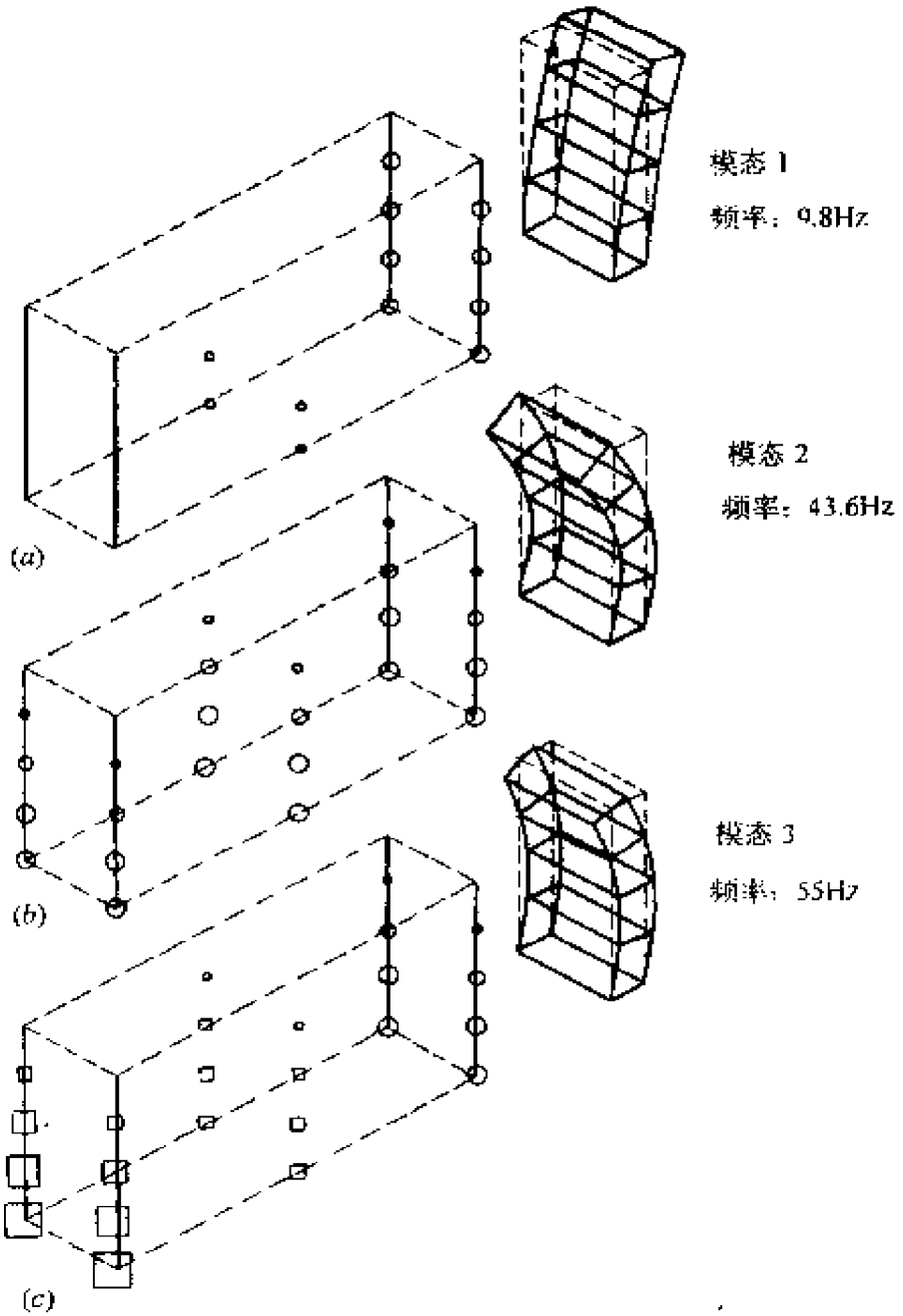


图 9.4 具有自由表面的液体与柔性墙的自由振动

○—压力值的大小；□--符号相反。

$$\int_0^{\Delta t}\left\{\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{\alpha}}+\boldsymbol{C}(\dot{\boldsymbol{a}}_n+\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\tau)+\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\frac{\ddot{\boldsymbol{\alpha}}\tau^2}{2}\right)-\right.$$

$$\left.\boldsymbol{Q}\left(\bar{\boldsymbol{p}}_n+\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n\tau+\frac{\ddot{\bar{\boldsymbol{p}}}\tau^2}{2}\right)+\boldsymbol{f}\right\}w_1(t)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{0} \qquad (9.33a)$$

$$\int_0^{\Delta t}\left\{S\beta+\tilde{C}\left(\dot{\bar{p}}_n+\beta\tau\right)+H\left(\bar{p}_n+\dot{\bar{p}}_n\tau+\frac{\beta\tau^2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+Q^{\mathrm{T}}\alpha+q\right\}w_2(t)\mathrm{d}\tau=0 \tag{9.33b}$$

对上两式积分，则得到：

$$M\alpha+C\left(\dot{a}_n+\alpha\theta_1\Delta t\right)+K\left(a_n+\dot{a}_{n\theta_1}\Delta t+\frac{\alpha\theta_1\Delta t^2}{2}\right)$$
$$-Q\left(\bar{p}_n+\dot{\bar{p}}_n\theta_1\Delta t+\frac{\beta\theta_2\Delta t^2}{2}\right)+f=0 \tag{9.34a}$$

$$S\beta+\tilde{C}\left(\dot{\bar{p}}_n+\beta\bar{\theta}_1\Delta t\right)+H\left(\bar{p}_n+\dot{\bar{p}}_n\bar{\theta}_1\Delta t+\frac{\beta\bar{\theta}_2\Delta t^2}{2}\right)+$$
$$Q^{\mathrm{T}}\alpha+q=0 \tag{9.34b}$$

其中

$$\theta_i=\frac{\int_0^{\Delta t}w_1(t)\tau^i\mathrm{d}\tau}{\Delta t^i\int_0^{\Delta t}w_1(t)\mathrm{d}\tau}\qquad\bar{\theta}_i=\frac{\int_0^{\Delta t}w_2(t)\tau^i\mathrm{d}\tau}{\Delta t^i\int_0^{\Delta t}w_2(t)\mathrm{d}\tau}\quad(i=1,2) \tag{9.35}$$

将(9.34)式写成矩阵形式，则有

$$\begin{bmatrix}\left(M+C\theta_1\Delta t+K\frac{\theta_2\Delta t^2}{2}\right) & -Q\frac{\theta_2\Delta t^2}{2}\\ -Q^{\mathrm{T}}\frac{\theta_2\Delta t^2}{2} & -\frac{\theta_2\Delta t^2}{2}\left(S+\tilde{C}\bar{\theta}_1\Delta t+H\frac{\bar{\theta}_2\Delta t^2}{2}\right)\end{bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix}\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}F_1\\ F_2\end{Bmatrix} \tag{9.36}$$

(9.36)式中的第二式，为了保持对称性，方程两端同乘以$-\frac{\theta_2\Delta t^2}{2}$。$F_1$和$F_2$是由已知量组成的向量。

(9.36)式是关于α、β的线性代数方程组。求解该方程组可得到α、β，再代入(9.31)和(9.32)两式，即可求出位移和压力。其计算步骤与第十章求解瞬态问题相同。这种方法也可用以分析非线性问题。

时域逐步求解法的稳定性取决于θ_i和$\bar{\theta}_i$的取值。可以证明，

当

$$\theta_2 \geqslant \theta_1 \geqslant 0.5$$
$$\bar{\theta}_2 \geqslant \bar{\theta}_1 \geqslant 0.5 \tag{9.37}$$

计算是无条件稳定的[26]。

9.1.6 不可压缩流体

如果流体是不可压且是无粘性的，控制方程则简化为拉普拉斯方程

$$\nabla^2 p = 0 \tag{9.38}$$

上述方程是通过在(9.5a)式中令 $c \to \infty$得到的。

如果不计表面波且作用在边界上的压力为零的情况下，流体部分离散形式的有限元方程(9.25)式则简化为

$$\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}} \tag{9.39}$$

在这种情况下，波的辐射也消失了。

从(9.39)式可直接得到压力 $\bar{\boldsymbol{p}}$

$$\bar{\boldsymbol{p}} = -\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}} \tag{9.40}$$

再将上式代入到离散的结构方程(9.22)式中，则有

$$(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\ddot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{9.41}$$

上述方程是一标准的结构动力有限元方程，惟一的差别是质量矩阵中多了一附加项

$$\boldsymbol{M}_a = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} \tag{9.42}$$

因此可用第十章介绍的普通求解方法计算。

在应用这种耦合法时，我们还必须指出：

1.(9.41)式中的 $\boldsymbol{H}$ 矩阵不必完全求逆，只需对流固耦合面上的压力求逆即可；

2.一般来说，何时可以忽略流体的可压性是一个困难的问题，它取决于我们分析时所关心的频率范围。例如在分析水库 大坝相互作用时，对是否可忽略流体的可压性就有很大的争议。在这个例子中，基本压缩周期的范围为数量级 $\frac{H}{c}$（H 为类似大坝高度

的特征尺寸)。如果基本压缩周期与地震的强迫运动周期处于同一数量级,那么流体的可压性则不能忽略。反之,则可不计其影响。

9.1.7 流体的气穴影响

在水一类的流体中,当压力达到一定值(门槛值)时,压力和体积应变之间不再保持线性关系。当压力达到门槛值时,流体中就形成了气穴或气泡,而压力则几乎保持为常数。为了描述流体的这种性质,就必须引入非线性本构方程。一种方便和有用的本构模型是由牛顿提出的

定义

$$s=\mathrm{div}(\rho u)-\nabla^{\mathrm{T}}(\rho u) \tag{9.43}$$

式中 u —— 流体的位移。

流体的非线性本构关系为

$$p=\begin{cases} -ku_{i,i}=c^2 s & s<\dfrac{(p_a-p_v)}{c^2} \\ p_a-p_v & s\geqslant\dfrac{(p_a-p_v)}{c^2} \end{cases} \tag{9.44}$$

式中 p_a —— $u=0$ 时的大气压力;

p_v —— 气穴压力;

c —— 声速。

显然在以速度和压力作为变量的计算格式中,例如(9.1)式和(9.5)式,控制应变是比较困难的。因此,改变变量是一个明智的选择。为此引入一位移势函数 Ψ,使得

$$\rho u=-\nabla\Psi \tag{9.45}$$

从动量方程(9.1)式中,我们看到

$$\rho\ddot{u}=-\nabla p=-\nabla\ddot{\Psi} \tag{9.46}$$

因而

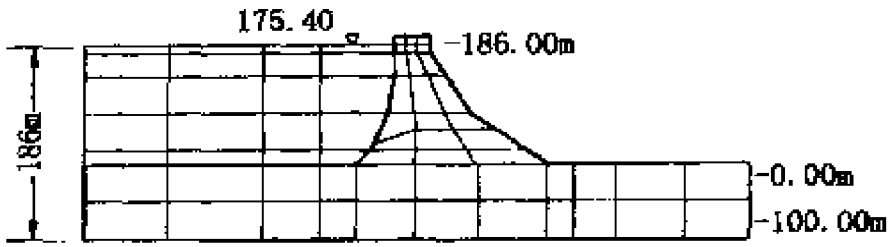
$$\ddot{\Psi}=p \tag{9.47}$$

当 $s<\frac{(p_a-p_v)}{c^2}$ 时，连续性方程(9.2)式则改写为

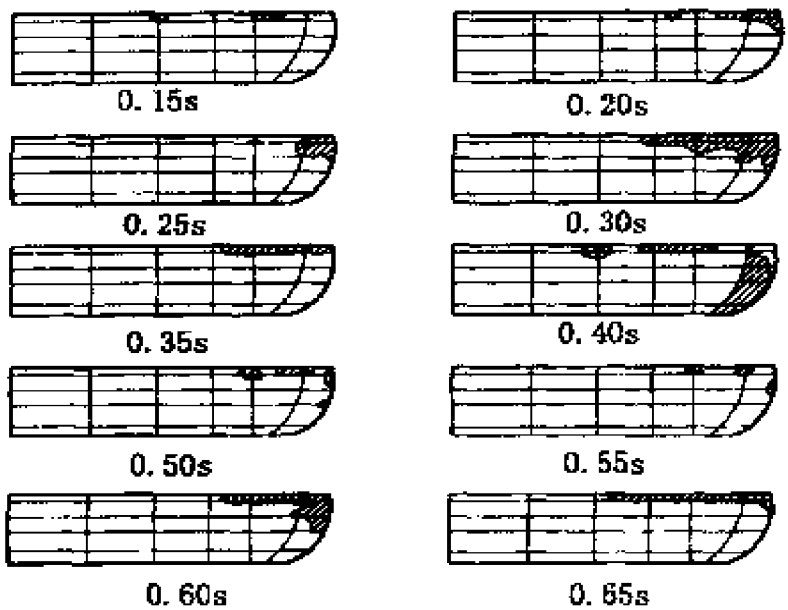
$$s=\rho \mathrm{div}\boldsymbol{u}=-\nabla^2\Psi=\left\{\frac{1}{c^2}\right\}p=\left\{\frac{1}{c^2}\right\}\ddot{\Psi} \tag{9.48}$$

当 $s\geqslant\frac{(p_a-p_v)}{c^2}$，即流体中出现气穴时，则需对上式作相应的修正。

我们发现(9.48)与(9.5a)两式除了变量不同外，方程具有相似的形式。关于气穴问题的边界条件、离散化和耦合方程在文献[26]中进行了详细的讨论，其方法与前面介绍的基本相同。图 9.5 为该文献给出的水库—大坝耦合系统非线性分析的算例。图 9.5 中给出了水库中气穴随时间变化的情况。



(a) 结构—流体相互作用有限元网格



(b) 气穴随时间变化情况

图 9.5 Bhakra 水库—大坝耦合系统非线性分析

9.2 土—毛细孔流相互作用

9.2.1 问题的提出和控制方程

众所周知，土和其他地质材料的性质明显受孔隙流压力的影响。在土力学中，有效应力是个极其重要的概念。如果 σ 代表作用在整个固体和毛细孔面积上的总应力（正号表示拉应力），p 代表毛细孔中流体的压力，则有效应力定义为

$$\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{m}p \tag{9.49}$$

其中

$$\boldsymbol{m} = \{1,1,1,0,0,0\}^{\mathrm{T}}$$

我们知道，只有有效应力才与土颗粒的骨架变形有关。因此联系应力增量和应变增量的本构关系则可表示为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}\mathrm{d}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{9.50}$$

有了上述关系，我们就可用以前介绍的方法立即写出土力学问题的有限元方程如下

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega + \boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{9.51}$$

式中 $\boldsymbol{a}$——结点位移矢量；

$\boldsymbol{B}$——应变矩阵；

$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{f}$——分别为质量矩阵、阻尼矩阵和外荷载矢量。

(9.51)式中的第一项利用(9.49)式可表示为

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\mathrm{d}\Omega = \int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}p\mathrm{d}\Omega \tag{9.52}$$

从而可直接代入有效应力与有效应变的本构关系，进而用结点位移表示。对线弹性情况，土的弹性矩阵为常数，我们立即可以得到

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{f} = \boldsymbol{0} \tag{9.53}$$

式中 $\boldsymbol{K}$——普通意义下的刚度矩阵，

$$\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'\,\mathrm{d}\Omega = \left(\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\mathrm{d}\Omega\right)\boldsymbol{a} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{a} \tag{9.54}$$

$\boldsymbol{Q}$——压力耦合项

$$\boldsymbol{Q}=\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}\boldsymbol{N}_{p}\mathrm{d}\Omega \tag{9.55}$$

其中，$\boldsymbol{N}_p$ 为满足于下式

$$p\approx\boldsymbol{N}_p\,\bar{\boldsymbol{p}} \tag{9.56}$$

的压力插值函数矩阵。

在上述离散方程中，为简单方便起见，位移 $\boldsymbol{u}$ 和压力 $\boldsymbol{p}$ 可采用相同形式的插值函数，尽管它们可采用不同阶次的插值函数。由于在动力方程中存在压力耦合项，显然必须补充关于压力 p 的方程。这个补充方程即为瞬态渗流方程。

$$-\nabla(k\,\nabla p)+\frac{\dot{p}}{Q}+\dot{\varepsilon}_{ii}=0 \tag{9.57}$$

式中 Q——与流体压缩性有关的项；

k——渗透系数；

ε_{ii}——土颗粒骨架的体积应变，它可用结点位移表示成

$$\varepsilon_{ii}\approx\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{a} \tag{9.58}$$

利用伽辽金方法，渗流方程可离散成

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{S}\,\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}+\boldsymbol{H}\,\bar{\boldsymbol{p}}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{0} \tag{9.59}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$ 与(9.55)式定义相同；

$$\begin{aligned}\boldsymbol{S}&=\int_{\Omega}\boldsymbol{N}_p^{\mathrm{T}}\frac{1}{Q}\boldsymbol{N}_p\mathrm{d}\Omega;\\ \boldsymbol{H}&=\int_{\Omega}(\nabla\boldsymbol{N}_p^{\mathrm{T}})k(\nabla\ \boldsymbol{N}_p)\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{9.60}$$

$\boldsymbol{q}$——包含域内和边界积分的项。

土与毛细孔流耦合的离散有限元方程是由 Biot 首次提出的。但上述结果是由 O. C. Zienkiewicz 等得到的。文献[26]详细讨论了各种离散方法及非线性本构关系引起的动力响应。

土与毛细孔流的边界条件可用前面讨论过的方法直接得到，在此不作详细讨论。

9.2.2 耦合方程的求解

尽管我们感兴趣的问题是非线性耦合方程，但首先考虑由

(9.53)和(9.59)两式组成的耦合方程将是有益的。该方程可用矩阵的形式表示为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{a}} \\ \ddot{\bar{\boldsymbol{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}^T & \boldsymbol{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{a}} \\ \dot{\bar{\boldsymbol{p}}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \bar{\boldsymbol{p}} \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{q} \end{Bmatrix} \tag{9.61}$$

这里我们再一次看到，尽管矩阵 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{S}$、$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都是对称矩阵，但由它们形成的耦合方程却是非对称的。由于我们对自由振动兴趣不大，因而将不讨论自由振动方程的对称化问题。而将重点放在一般瞬态问题的算法上。在以下的讨论中，我们将采用与 9.1.5 类似的方法，同样能达到对称化目的。

9.2.3 瞬态逐步求解法

瞬态逐步求解法的过程与 9.1.5 中介绍的方法基本相同。对位移 $\boldsymbol{u}$，我们选择 $p=2$，$j=2$ 的广义纽马克算法，则 $\boldsymbol{a}$、$\dot{\boldsymbol{a}}$ 可表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{n+1} &= \boldsymbol{a}_n + \dot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t + \frac{\ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2}{2} + \frac{\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2}{2} \\ &= \boldsymbol{a}_{n+1}^p + \frac{\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2}{2} \end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} = \dot{\boldsymbol{a}}_n + \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t = \dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}^p + \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t \tag{9.62a}$$

对于变量 $\boldsymbol{p}$，我们选择一次线性插值，即 $p=1$，$j=1$ 的广义纽马克算法

$$\bar{\boldsymbol{p}}_{n+1} = \bar{\boldsymbol{p}}_n + \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n \Delta t + \theta \Delta \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n \Delta t = \bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}^p + \theta \Delta \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n \Delta t \tag{9.62b}$$

上式中的 $\boldsymbol{a}_{n+1}^p$ 等项表示可从时间 t_n 直接计算出的“预测值”，变量 $\Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n$、$\Delta \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n$ 定义为

$$\Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n = \ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} - \ddot{\boldsymbol{a}}_n, \quad \Delta \dot{\bar{\boldsymbol{p}}} = \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_{n+1} - \dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n \tag{9.63}$$

为了得到耦合方程的递推算法，我们只须将上述方程代入(9.53)和(9.59)两式中，即得到

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\int_{\Omega}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}\mathrm{d}\Omega-\boldsymbol{Q}\bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\boldsymbol{S}\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_{n+1}+\boldsymbol{H}\bar{\boldsymbol{p}}_{n+1}+\boldsymbol{q}_{n+1}=\boldsymbol{0} \tag{9.64}$$

式中，$\boldsymbol{\sigma}'_{n+1}$可由 $\boldsymbol{\sigma}_n$ 和有效应力与有效应变间的本构方程而求得。

上述方程一般是非线性的。事实上，在许多情况下，$\boldsymbol{H}$ 矩阵由于应变变化引起渗透系数变化从而与位移 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 有关。关于非线性方程的解法我们已经在第一章作了介绍，读者可参看有关章节。由于大多数非线性算法都是采用线性化的迭代方式进行的，因此下面我们考察线性方程的解法或许是有益的。

将(9.62)、(9.63)两式代入(9.64)式中，则得到

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}+\boldsymbol{C}\beta_1\Delta t+\boldsymbol{K}\beta_2\Delta t^2/2 & -\boldsymbol{Q}\theta\Delta t\\ -\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\beta_1\Delta t & -\beta_1\Delta t(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{H}\theta\Delta t)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Delta\ddot{\boldsymbol{a}}_n\\ \Delta\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\end{Bmatrix} \tag{9.65}$$

式中，$\boldsymbol{F}_1$、$\boldsymbol{F}_2$ 分别为包含已知项的等效结点力矢量，当选择 $\beta_1=\theta$ 时，上式即为对称方程。

求解(9.65)式，可得到未知变量 $\Delta\ddot{\boldsymbol{a}}_n$ 和 $\Delta\dot{\bar{\boldsymbol{p}}}_n$，代入(9.62)和(9.63)两式，即可获得 t_{n+1} 时刻的位移和压力。

上述算法的时间步长的稳定性已由文献[26]导出，当

$$\beta_2\geqslant\beta_1\geqslant\frac{1}{2},\quad\theta\geqslant\frac{1}{2} \tag{9.66}$$

时，算法是无条件稳定的。

9.2.4 一些特例

流体的压缩性经常表现出使矩阵 $\boldsymbol{S}$ 相对于其他项而言，有

$$\boldsymbol{S}\approx\boldsymbol{0} \tag{9.67}$$

的性质。进一步，有时渗透系数 k 也是非常小，例如粘性土，这时

$$\boldsymbol{H}\approx\boldsymbol{0} \tag{9.68}$$

这种现象就是所谓的“不排水”性质。

在不排水的条件下，耦合方程(9.65)式简化为

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \ddot{\boldsymbol{a}} \\ \Delta \ddot{\boldsymbol{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{F}_1 \\ \boldsymbol{F}_2 \end{Bmatrix} \tag{9.69}$$

上述方程有非零解的充分和必要条件是

$$n_u \geqslant n_p \tag{9.70}$$

式中，n_u 和 n_p 分别表示结点位移 $\boldsymbol{a}$ 和结点压力 $\ddot{\boldsymbol{p}}$ 的总数。

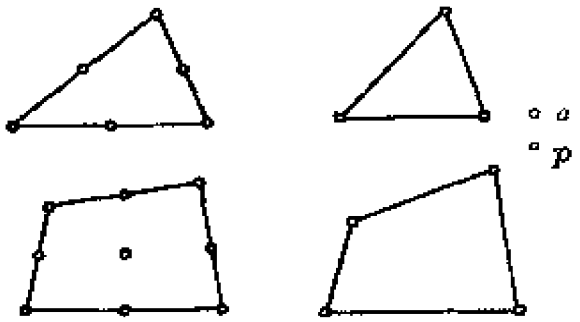


图 9.6　流—固耦合系统中
可能的单元形式

上述问题类似于不可压流体的性质，有关变量 $\boldsymbol{a}$ 和 p 的插值函数必须满足相同的准则。如果对两种变量选择具有 c_0 连续性的插值函数，则可能的单元形式表示在图 9.6 中。

这种算法当然也可用于稳态问题。这时方程将被解耦，渗流方程可单独求解。

最后指出，上述方法也可不加修改地直接用于土的固结问题的计算中，只须令有关的动力项

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{u}} \to 0$$

即可。

9.2.5　例题—　土的液化作用

正象我们在前面所指出的那样，耦合问题中我们最感兴趣的是非线性问题。众所周知，在无孔隙流的情况下，随着重复荷载的作用，土颗粒重新排列引起体积减小（密度减小）。然而当有孔隙流存在时，重复荷载使得孔隙流压力增大，导致土的强度降低。

因此，在动力荷载作用下，土的性质就象流体一样，常常失去

原有的强度，导致地震发生时，结构物的灾害性事故。要用数值计算的方法模拟这种现象却不是件容易的事，原因在于很难建立能充分描述土的性质的本构方程。然而，目前已有许多研究集中于该领域，并取得了一些令人鼓舞的成果。通过数值计算和辅助于试验研究能够对实际问题进行合理和可信的分析和预测。图 9.7 就是这方面应用的一个例子。图中给出了挡水墙基础在离心力作用下土与孔细流相互作用的数值计算结果及与试验数据的对比，两者吻合良好

9.2.6 生物力学、石油勘探及其他应用领域

空隙流与空穴介质的相互作用不仅仅限于土与流体耦合问题。例如，生物力学中人体骨骼与流体相互作用也具有类似的方程。这方面的研究可详见参考文献[27～28]。

在另外一些场合，孔隙中往往含有两种以上的流体。不同流体之间的相互作用也可用相似的方程描述。油田中由于石油开挖引起地面沉降，或石油勘探中遇到的水与油混合物的相互作用则是属于这类应用方面的另一些例子。

9.3 隐式与显式耦合算法

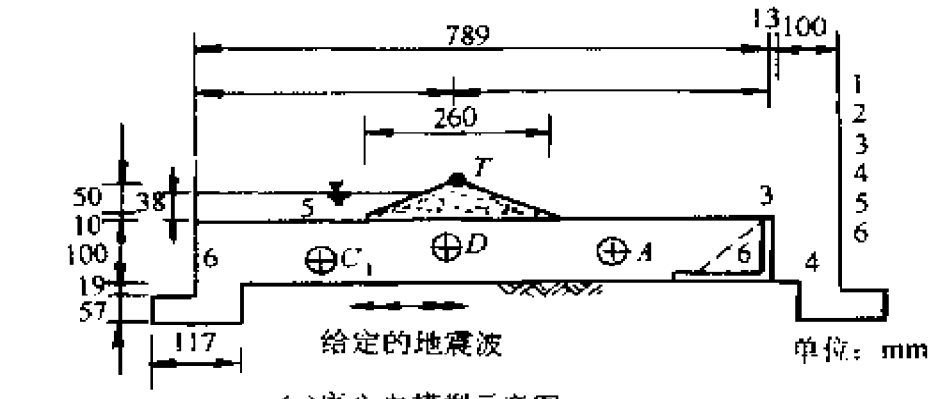
前面两节分别介绍了流固耦合和土与孔隙流间的耦合，这两种耦合都是属于不同物理问题间的耦合。本节介绍的隐式与显式耦合算法既可用于同一物理问题也可用于不同物理问题间耦合的计算。

图 9.1(*b*)表示结构与结构的相互作用，它们的耦合是通过交界面进行的。通常可将这类问题分成两个子结构，每个子结构都具有类似的性质，但可采用不同的离散方法甚至不同的递推算法。

以下的讨论假设整个系统可用一个单一的方程组描述，为简单起见，不妨以一阶线性微分方程为例

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \tag{9.71}$$

上述方程可写成分块形式

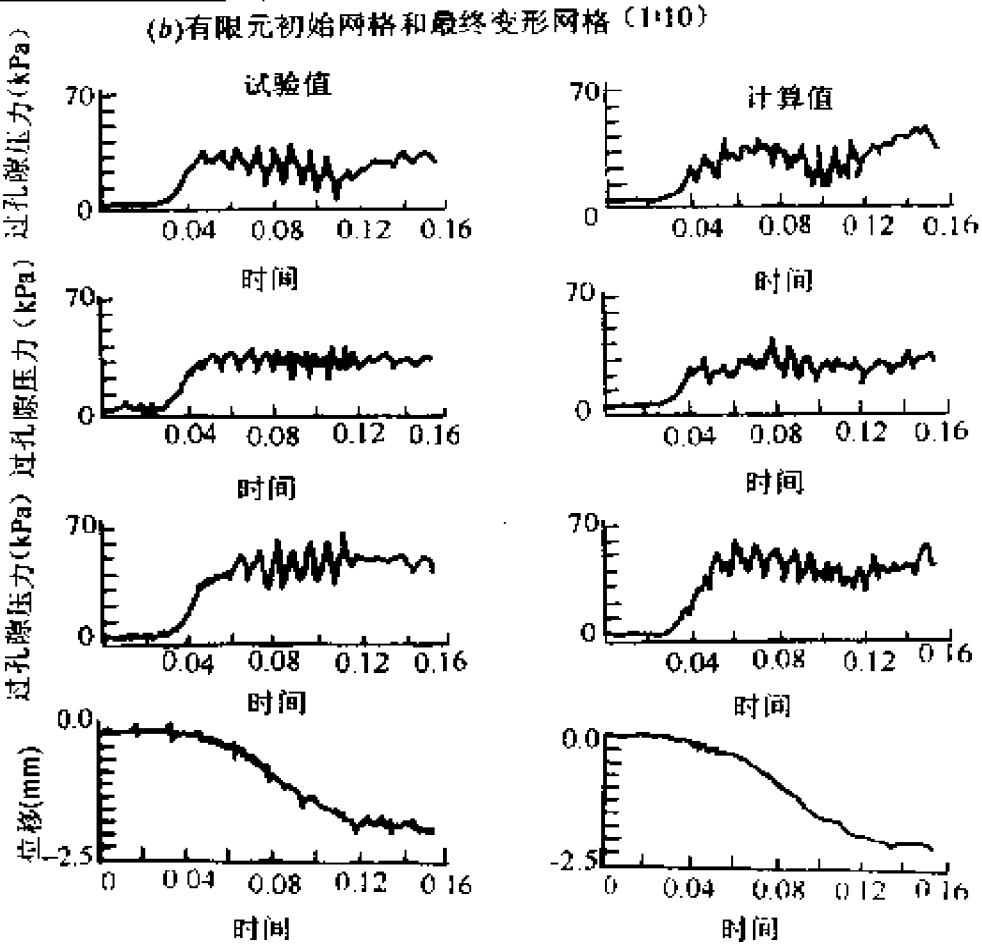


(a)离心力模型示意图

A、D、C—压力传感器；T—位移传感器。



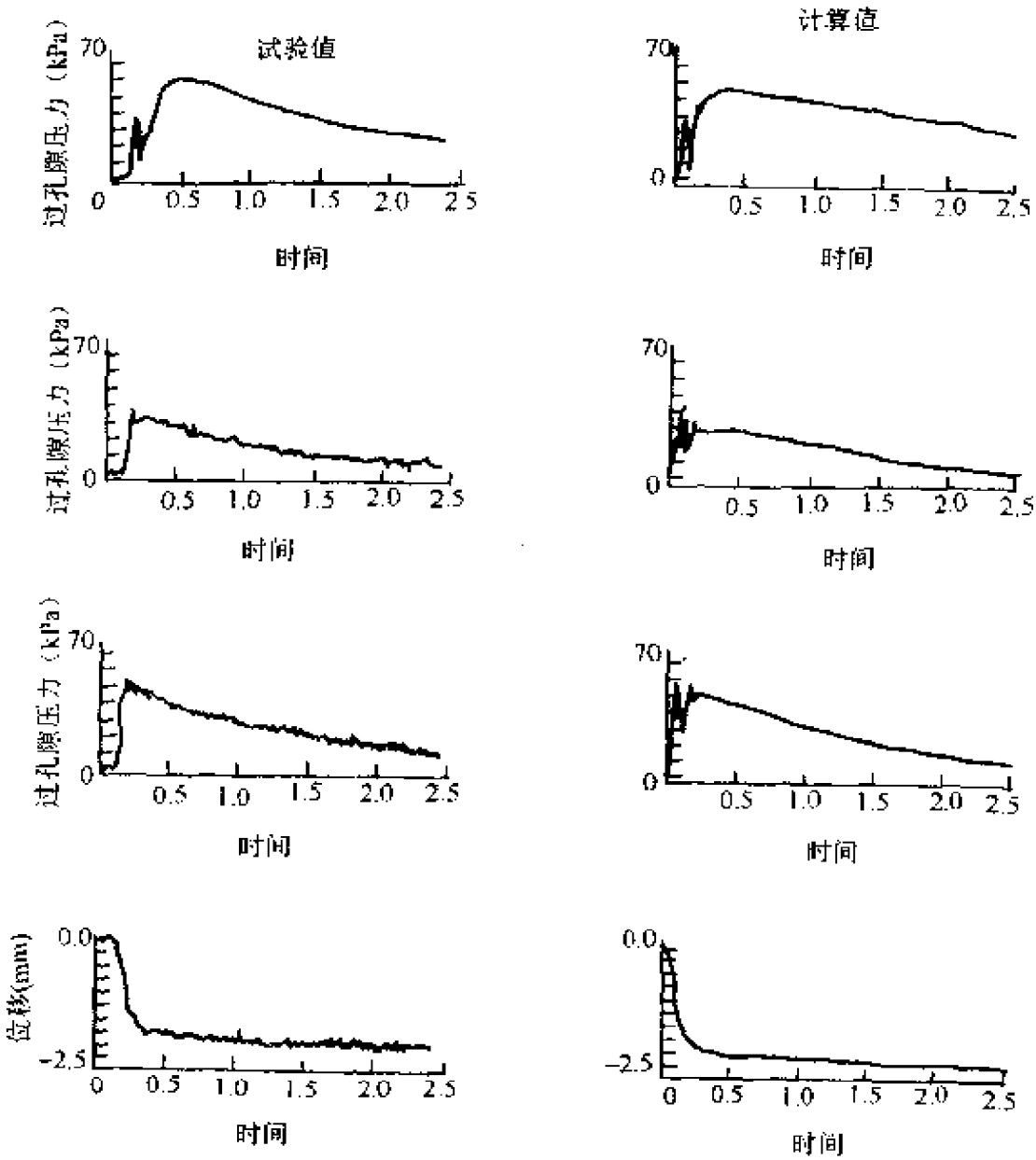
(b)有限元初始网格和最终变形网格（1:10）



(c) A、D、C处过孔隙压力和 T 处位移计算结果与试验数据对比

$0<t<0.16$s　$t=0.12$s 停止地震

图　9.7



(d) A、D、C处过孔隙压力和 f 处位移计算结果与试验数据对比

$0<t<2.5$s (固结过程)

图 9.7　土与孔隙流相互作用分析(用离心力模拟地震运动)

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} \\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\boldsymbol{a}}_1 \\ \dot{\boldsymbol{a}}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{9.72}$$

为了达到不同的目的，可对每一子结构选择不同的算法。这里我们对两个子结构都采用相同的 SS11 算法并取相同的时间步长，但选择不同的参数 θ。

子结构在时刻 t_{n+1} 的位移可表示为

$$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_{1n}+\boldsymbol{\alpha}_1\tau$$

$$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}_{2n}+\boldsymbol{\alpha}_2\tau \tag{9.73}$$

将上式代入(9.72)式中，选择不同的权函数 $w(t)$ 和 $\bar{w}(t)$，则得到

$$\boldsymbol{C}_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{C}_{12}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{K}_{11}(\boldsymbol{a}_{1n}+\theta\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t)+\boldsymbol{K}_{12}(\boldsymbol{a}_{2n}+\theta\boldsymbol{a}_2\Delta t)+\boldsymbol{f}_1=\boldsymbol{0} \tag{9.74a}$$

$$\boldsymbol{C}_{21}\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{C}_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{K}_{21}(\boldsymbol{a}_{1n}+\bar{\theta}\boldsymbol{\alpha}_1\Delta t)+\boldsymbol{K}_{22}(\boldsymbol{a}_{2n}+\bar{\theta}\boldsymbol{\alpha}_2\Delta t)+\boldsymbol{f}_2=\boldsymbol{0} \tag{9.74b}$$

利用上式，可求出未知函数 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$。从中可见，尽管 θ 与 $\bar{\theta}$ 不同，仍可建立递推求解关系。接下去的详细计算过程与前述方法相同。该算法的稳定性在文献[29]中作了详细介绍，现简要介绍其结论：

1. 当 $\theta\geqslant\frac{1}{2}$、$\bar{\theta}\geqslant\frac{1}{2}$ 时，算法为无条件稳定；

2. 当时间步长满足 $\Delta t\leqslant\Delta t_{\text{crit}}$ 时，算法为条件稳定。其中 Δt_{crit} 与不考虑耦合项时每个子结构的临界时间步长有关。

对二阶微分方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \tag{9.75}$$

写成分块形式后，对各个子结构采用 SS22 算法或 GN22 算法，可得到与上相同的结果。

读者也许要问为什么我们在同一个问题中要采用不同的算法呢？在隐式—隐式格式中，最简单的答案或许是我们希望引进不同的算法阻尼。但在显式—隐式格式中还有更重要的理由。我们从动力问题和热传导问题中知道临界时间步长分别与单元的尺寸 h 和 h^2 成比例。显然，如果在单元尺寸很小的子结构中使用显式格式，则只能选择很短的时间步长，这当然是很不经济的。一种较好的做法就是在单元尺寸较小的区域采用无条件稳定的隐式格式($\bar{\theta}\geqslant\frac{1}{2}$)，而在单元尺寸较大的区域采用显式格式(对一阶微分方程 $\theta=0$，二阶微分方程 $\theta_2=0$)。这种显式—隐式格式在实际使用中经常采用。

如果质量矩阵和阻尼矩阵为对称矩阵，这种算法是非常有效的。因为在这种情况下，显式部分的计算与隐式部分无关，可直接计算出边界值以供隐式计算用。我们将在下节讨论这种交叉求解法。

显式—隐式算法的应用首次于1978年提出。

9.4 交叉求解方法

9.4.1 引　　言

我们在上一节曾提到过显式—隐式算法的交叉求解法，所谓交叉求解法就是先独立地用显式格式计算出相应的解，利用显式解的结果再进行隐式计算，如此交叉进行下去，直至求出全部解。在进行第一部分显式计算时，必须假设部分有关的变量（或称预测值），一旦获得了第一部分的解，即可进行后续计算。如果这个计算过程是稳定的，且解的精度在合理范围内，那么这种算法为我们提供了下面许多的选择：

1. 在每个子结构中可完全采用不同的算法；
2. 可以在每个子结构中使用最有效的独立程序；
3. 可以采用具有许多优点的并行算法；
4. 在同一个物理问题中，可开发有效的迭代求解器。

交叉算法的问题已在许多文献中讨论过[30]。如果不作必要的修正，交叉算法有时不能保证无条件收敛。下面我们将介绍一些可供选择的方法。

9.4.2 交叉算法

我们仍将以9.3中的一阶微分方程为例讨论其算法。我们重新考察(9.71)式 以及它的分块形式(9.72)式。为简单起见，我们不妨假设 C 为对角矩阵。

$$\begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = 0 \qquad (9.76)$$

如果对上式中的第一式我们选用 $\theta=0$，即显式算法，第二式选用

$\theta \geqslant \frac{1}{2}$，即无条件稳定的隐式算法，则第一式可独立求解。现在，我们对(9.76)式中的两个方程采用同样的 θ 值，并且给定 a_2^p 作为位移 a_2 的预测值，即

$$a_2 = a_2^p = a_{2n} \tag{9.77}$$

再将(9.73)式代入(9.76)式中，并展开(9.76)式的第一式，则得到

$$C_{11}\alpha_1 + K_{11}(a_{1n} + \theta\alpha_1\Delta t) = -K_{12}a_{2n} - f_1 \tag{9.78}$$

解上述方程可得到变量 α_1，再将 α_1 代入(9.76)式中的第二式，则有

$$C_{22}\alpha_2 + K_{22}(a_{2n} + \theta\alpha_2\Delta t) = -K_{21}(a_{1n} + \theta\alpha_1\Delta t) - f_2 \tag{9.79}$$

由上式可求得 α_2，进而可求出 a_1 和 a_2。如果 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$，上述算法是无条件稳定的。这种方法完全可推广到二阶微分方程的情况，并有同样的结论。

当然，由于在求解(9.76)第一式时使用了 a_2 的预测值，解的精度有所损失。但大量的计算表明，这种方法的精度是可以保证的。

上述交叉算法的优越性在于，即使方程不是显式表示的，也可分开交叉求解，提高了计算效率。

显然这种交叉求解方法可推广到具有多个子结构的系统，关于算法稳定性也具有相同的结论。在具有多个子结构的系统中，类似于(9.76)式的离散有限元方程可以表示成

$$\begin{bmatrix} C_{11} & & & & \mathbf{0} \\ & C_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_{ii} & \\ & & & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & & C_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{a}_1 \\ \dot{a}_2 \\ \vdots \\ \dot{a}_i \\ \vdots \\ \dot{a}_k \end{Bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12} & \cdots & \cdots & & \\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22} & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \boldsymbol{K}_{ij} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \boldsymbol{K}_{kk} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \boldsymbol{a}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_k \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f}_1 \\ \boldsymbol{f}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{f}_k \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \quad (9.80)$$

采用交叉算法求解上述问题时，同样需要引入 $\boldsymbol{a}_2$ $\boldsymbol{a}_3$ … $\boldsymbol{a}_k$ 的预测值，从而将(9.80)式中的第一式展开成

$$\boldsymbol{C}_{11}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1 + \boldsymbol{K}_{11}(\boldsymbol{a}_{1n} + \theta\dot{\boldsymbol{\alpha}}_1\Delta t) = -\boldsymbol{K}_{12}\boldsymbol{a}_{2n} - \boldsymbol{K}_{13}\boldsymbol{a}_{3n} - \cdots\cdots - \boldsymbol{f}_1 \quad (9.81)$$

求得 $\dot{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{a}_1$ 后，仿(9.79)式做法，即可求出全部未知量。这个过程可重复进行下去直至计算结束。

(9.80)式还可进一步分解成只含有一个未知量的形式，使得在每一时间步长中只有一个待求的变量 $\dot{\alpha}_i$。这个方程的一般形式为

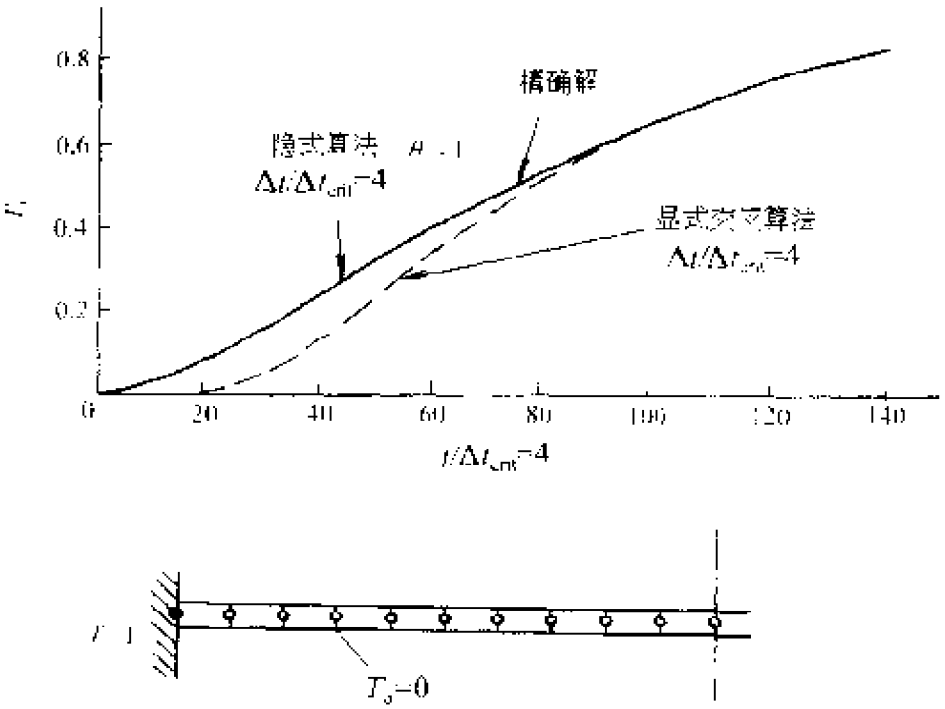
$$(c_{ii} + \theta\Delta t k_{ii})\dot{\alpha}_i = F_i \quad (9.82)$$

这是个完全显式的标量方程，当 $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ 时，算法也是无条件稳定的。

上述交叉算法的误差在计算刚开始时比较大，随着计算不断进行，误差逐渐减小。图 9.8 为一维热传导问题用显式交叉算法的计算结果及与隐式算法和精确解的比较，从中可以看出，在同样的时间步长条件下，显式交叉算法的精度低于隐式算法，但其计算效率则大大高于隐式算法。

9.4.3 流固耦合问题中的交叉算法

交叉算法显然也可用于象流固耦合这类由不同物理材料组成的系统。下面以(9.22)和(9.27)两式表示的线性流固耦合问题为例讨论其算法。为简单起见，忽略阻尼的作用，则有(为书写方便，省略 f p 字母上的横线)



Δt_{cri} 标准显式格式临界时间步长

T_0 中心线温度

图 9.8 显式交叉算法与标准隐式算法的对比

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{M} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\boldsymbol{a}} \\ \ddot{\boldsymbol{p}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{K} & -\boldsymbol{Q} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \boldsymbol{f} \\ -\boldsymbol{q} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{0} \tag{9.83}$$

对变量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{p}$ 采用相同的 GN22 近似表达式，则可将时刻 t_{n+1} 时位移和压力表示成

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} &= \dot{\boldsymbol{a}}_n + \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t - \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t = \dot{\boldsymbol{a}}^{t}_{n+1} - \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t \\
\boldsymbol{a}_{n+1} &= \boldsymbol{a}_n + \dot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2 + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2 = \boldsymbol{a}^{t}_{n+1} + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t^2 \\
\dot{\boldsymbol{p}}_{n+1} &= \dot{\boldsymbol{p}}_n + \ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t + \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t = \dot{\boldsymbol{p}}^{t}_{n+1} + \beta_1 \Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t \\
\boldsymbol{p}_{n+1} &= \boldsymbol{p}_n + \dot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t^2 + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t^2 = \boldsymbol{p}^{t}_{n+1} + \frac{1}{2}\beta_2 \Delta \ddot{\boldsymbol{p}}_n \Delta t^2
\end{aligned} \tag{9.84}$$

将(9.84)式代入(9.83)式中，则得到关于未知变量 $\Delta\ddot{\boldsymbol{a}}_n$ 和 $\Delta\ddot{\boldsymbol{p}}_n$ 的线性代数方程组.

上述方程可用交叉算法求解. 首先给定压力的预测值 $\boldsymbol{p}_{n+1}=$

p_{n-1}^{f}，则对应于固体部分的未知量 $\Delta\ddot{a}_n$ 可通过下列方程求出

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{n+1}=-\boldsymbol{f}_{n+1}-\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_{n-1}^{f} \tag{9.85}$$

一旦获得了 $\boldsymbol{a}_{n+1}$，则可求得流体压力 $\boldsymbol{p}_{n+1}$

$$\boldsymbol{S}\ddot{\boldsymbol{p}}_{n+1}-\boldsymbol{H}\boldsymbol{p}_{n+1}=-\boldsymbol{q}-\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} \tag{9.86}$$

应当指出的是，即使 β_1、β_2 的取值均满足算法无条件稳定条件，也不能保证上述流固耦合交叉算法是无条件稳定的，也即算法是条件稳定的。其稳定条件与流体问题中显式计算格式的稳定条件相同。现在已提出了各种稳定的交叉算法，较简单的一种做法是将(9.85)式修改为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+(\boldsymbol{K}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{a}_{n+1}=-\boldsymbol{f}_{n+1}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{p}_{n-1}^{f}+\boldsymbol{Q}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_{n-1}^{f} \tag{9.87}$$

当 β_1、β_2 满足

$$\beta_2\geqslant\beta_1\geqslant\frac{1}{2}$$

时，可以证明，(9.87)式是无条件稳定的。

在使用这种方法时，必须先对 $\boldsymbol{S}$ 矩阵求逆。但由于耦合仅发生于接触边界上，是局部的，因此在实际计算时，只须对涉及到耦合部分的量进行求逆。另外一些稳定的算法也类似地需要计算 $\boldsymbol{H}$ 的逆矩阵。

流固耦合问题的这种交叉算法也已经成功地应用于土与孔隙流相互作用的问题中了。

第十章　动力问题

10.1　引　　言

空间半离散的动力有限元方程可表示为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \tag{10.1}$$

对于热传导问题，则有

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=0 \tag{10.2}$$

其中

$$\dot{\boldsymbol{a}}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\qquad \text{等等}$$

工程中有许多非线性问题，这时

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}),\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}) \tag{10.3}$$

动力问题有限元算法的稳定性是从解耦的单自由度方程讨论中获得的。对应于(10.1)、(10.2)两式解耦的方程为

$$m_i\ddot{y}_i+c_i\dot{y}_i+k_iy_i+f_i=0 \tag{10.4}$$

$$c_i\dot{y}_i+k_iy_i+f_i=0 \tag{10.5}$$

研究表明算法的稳定性条件与上述方程的特征值 ω_i 有关。由于系统的特征值或特征向量的上下限取决于所有单元中最大和最小的特征值或特征向量，即：

$$\begin{aligned}(\omega^e)^2_{\min}&\leqslant(\omega_i)^2_{\min}\\(\omega_i)^2_{\max}&\leqslant(\omega^e)^2_{\max}\end{aligned} \tag{10.6}$$

因此，算法稳定性的条件只须在单元水平上讨论[36]。

10.2　单步长算法

10.2.1　加权残数法

为简单起见，我们以(10.2)式表示的一阶微分方程为例，讨论

单步长算法。在给定的外荷载 f_n 和已知 a_n 的情况下，我们的目的是寻求经过时间间隔 Δt 后 a_{n+1} 的解。

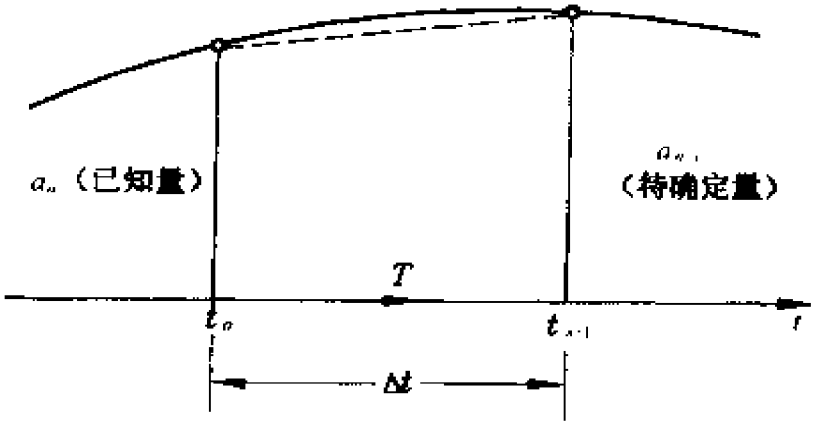


图 10.1 时间间隔 Δt 中变量 a 的近似

我们假设在时间间隔 Δt 内，未知变量 a 可用一阶 Taylor 级数近似表示为（如图 10.1）

$$a \approx \hat{a}(\tau) = a_n + \frac{\tau}{\Delta t}(a_{n+1} - a_n) \tag{10.7}$$

其中：$\tau = t - t_n$

上式也可用有限元法中的插值函数表示成

$$\hat{a}(\tau) = \sum N_i a_i = (1 - \frac{\tau}{\Delta t})a_n + \frac{\tau}{\Delta t}a_{n+1}) \tag{10.8}$$

将(10.7)式或(10.8)式代入(10.2)式，选择权函数 w，作加权积分，则得到

$$\int_0^{\Delta t} w(\boldsymbol{C}\dot{\hat{a}} + \boldsymbol{K}\hat{a} + \boldsymbol{f})\mathrm{d}\tau = \boldsymbol{0} \tag{10.9}$$

定义加权系数 θ 为

$$\theta = \frac{1}{\Delta t}\frac{\int_0^{\Delta t} w\tau \mathrm{d}\tau}{\int_0^{\Delta t} w\mathrm{d}\tau} \tag{10.10}$$

则立即得到积分后的(10.9)式为

$$\frac{1}{\Delta t}\boldsymbol{C}(\boldsymbol{a}_{n+1} - \boldsymbol{a}_n) + \boldsymbol{K}[\boldsymbol{a}_n + \theta(\boldsymbol{a}_{n+1} - \boldsymbol{a}_n)] + \bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{0} \tag{10.11}$$

式中 $\bar{f}$ — 加权意义下 f 的平均值。

$$\bar{f}=\frac{\int_0^{\Delta t} f w \mathrm{d}\tau}{\int_0^{\Delta t} w \mathrm{d}\tau} \tag{10.12}$$

$\bar{f}$ 还可表示为

$$\bar{f}=f_n+\theta(f_{n+1}-f_n) \tag{10.13}$$

实际上，(10.11)式与时刻 $t_n+\theta\Delta t$ 时(10.2)式的差分方程是完全相同的。从这个角度上讲，有限元方法与差分法相比显示不出优越性。但是加权意义下 f 的平均值 $\bar{f}$ 却有重要作用。如图10.2，有限差分法则有困难。

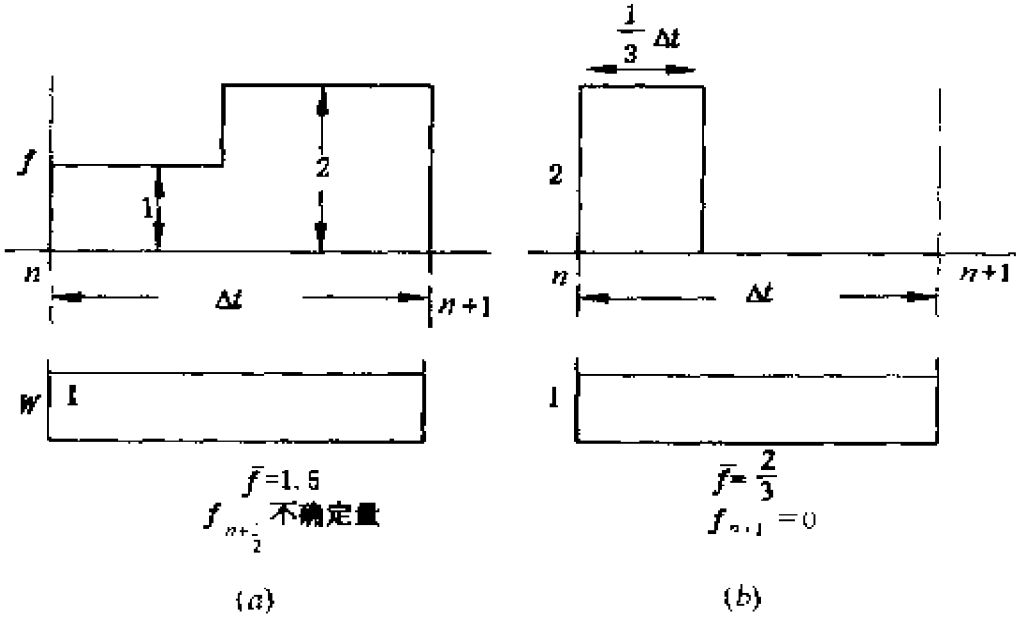


图 10.2　有限元时域离散中力项 $\bar{f}$ 的平均

图 10.3 表示选用不同的权函数 w 时所得到的加权系数 θ。

由(10.11)式，可得到 t_{n+1} 时刻的解为

$$\boldsymbol{a}_{n+1}=(\boldsymbol{C}+\Delta t\theta\boldsymbol{K})^{-1}[(\boldsymbol{C}-\Delta t(1-\theta)\boldsymbol{K})\boldsymbol{a}_n-\bar{\boldsymbol{f}}] \tag{10.14}$$

显然，在计算 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 时需要求逆，在线性问题中仅需作一次求逆即可。我们把这种需要求逆才能得到解答的方法称为隐式算法。然而，当 $\theta=0$ 以及 $\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵时，不需求逆就可直接获得结果。我们将这种方法称为显式算法。显式算法的计算效率很高。

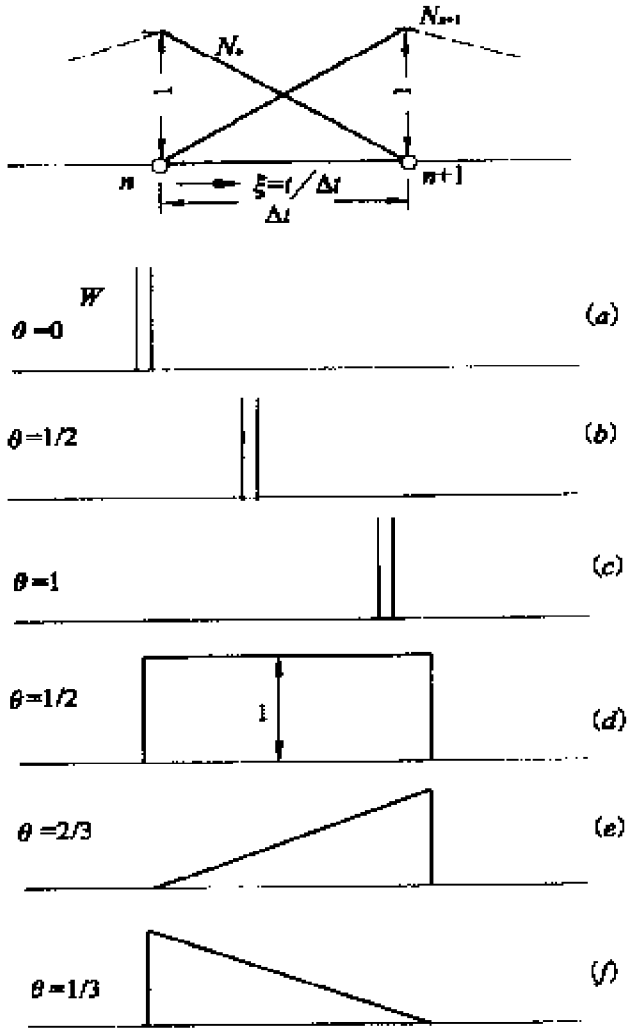


图 10.3　两点递推算法中插值函数 w 和对应的权函数

10.2.2　Taylor 级数配点法

另外一种经常采用的方法就是利用截去了高阶项后的 Taylor 级数分别作为 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 和 $\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$ 的近似值。在已知 $\boldsymbol{a}_n$ 和 $\dot{\boldsymbol{a}}_n$ 的前提下，$\boldsymbol{a}_{n+1}$ 可近似表示为

$$\boldsymbol{a}_{n+1}\approx\boldsymbol{a}_n+\Delta t\dot{\boldsymbol{a}}_n+\Delta t\beta(\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}-\dot{\boldsymbol{a}}_n) \tag{10.15}$$

在 t_{n+1} 时刻对控制方程(10.2)式配点，则有

$$\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{n+1}+\boldsymbol{f}_{n+1}=\boldsymbol{0} \tag{10.16}$$

(10.15)式中的 β 为一参数，其最后一项近似代表 Taylor 级数的截断误差。

将(10.15)式代入(10.16)式中，则得到求解 $\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$ 的递推算法

如下

$$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}=(\boldsymbol{C}+\Delta t\beta\boldsymbol{K})^{-1}[-\boldsymbol{K}(\boldsymbol{a}_n+\Delta t(1-\beta)\dot{\boldsymbol{a}}_n)-\boldsymbol{f}_{n+1}] \tag{10.17}$$

求出 $\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$ 后，代入(10.15)式中，即可得到 $\boldsymbol{a}_{n+1}$。

必须指出

(a) $t=0$ 时刻的初始计算必须利用控制方程(10.2)式。

(b)在确定了参数 $\beta=\theta$ 后，方程(10.17)式的求解与(10.14)式完全类似。后面我们还将看到，它们的算法稳定条件也是相同的。

上述方法在求解非线性问题时具有许多优点，这一点我们在后面还会提到。

10.2.3 其他一些单步长算法

除了用加权残数法建立有限元方程外，还可用其他方法推导有限元方程。例如，早期采用的基于时间域中的变分原理，以及 Hamilton 原理和 Gurtin 变分原理。尽管方法各异，但结果相同。另外一种不同的途径是采用最小二乘法，使方程误差的残数达到最小值。要做到这一点，只要将(10.7)式代入(10.2)式中即可。

读者不难验证下列递推算法

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}}{\Delta t}+\frac{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}}{2}+\frac{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\Delta t}{3}\right)\boldsymbol{a}_{n+1}\\&+\left(-\frac{\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}}{\Delta t}-\frac{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}}{2}+\frac{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{K}\Delta t}{6}\right)\boldsymbol{a}_n\\&+\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\frac{1}{\Delta t^2}\int_0^1\boldsymbol{f}\tau\mathrm{d}\tau-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\frac{1}{\Delta t^2}\int_0^1\boldsymbol{f}\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{10.18}$$

(10.18)式是一个复杂的方程，而且属于隐式算法。尽管它具有很好的精度，如图 10.4 所示，但不便于实际使用。图 10.4 表示单自由度系统，且

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}=1,\boldsymbol{f}=0,a_0=1$$

时，采用不同计算方法得到的(10.2)式的解。从这个例子中可以看到，$\theta=\frac{1}{2}$ 的算法几乎与最小二乘法相同。正是由于 $\theta=\frac{1}{2}$ 具有很

高的计算精度，所以当 Crank 和 Nicolson 提出此算法后，人们习惯于将这种方法称为 Crank-Nicolson 法[26]。

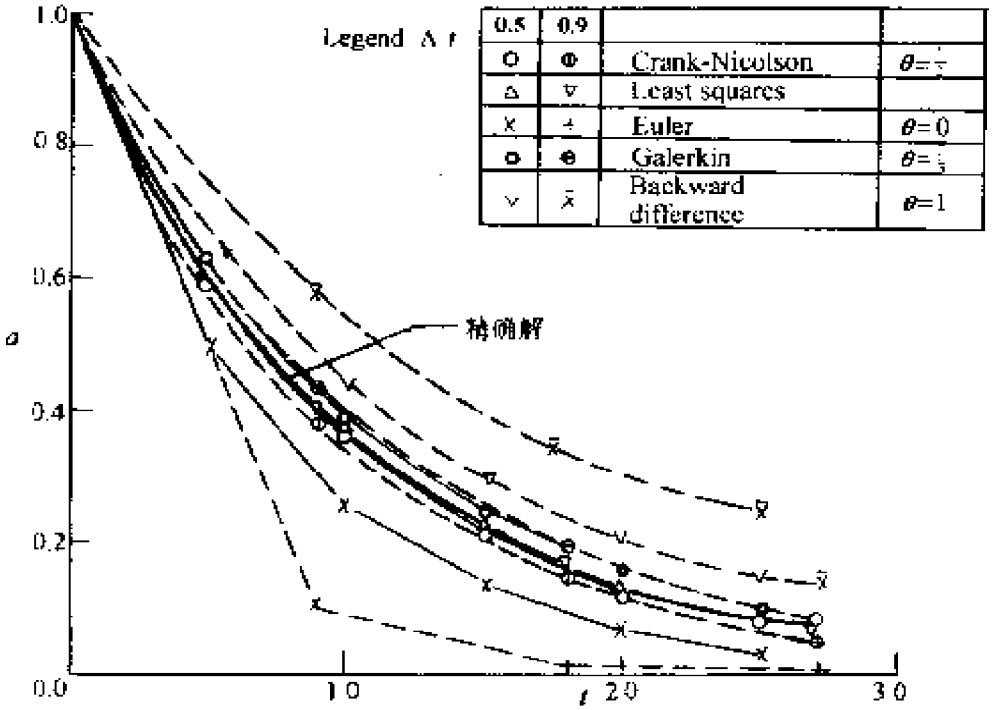


图 10.4 一阶初值问题采用各种算法的比较

10.2.4 一致性和近似误差

任何有限元近似解收敛的充分和必要条件取决于解的一致性和稳定性。O. C. Zienkiewicz 曾详细讨论过这两个问题。为了满足一致性和稳定性的要求，针对边值问题提出了收敛准则。在本章动力问题的讨论中，这些准则仍然适应，只是稳定性的问题显得更重要和更棘手了。

为了满足一致性的要求，函数本身 a 及其导数 $\dot{a}$ 近似表达式中截断误差 $0(\Delta t)^{\alpha}$ 中的指数 α 必须满足 $\alpha \geqslant 1$。对于由(10.2)式表示的一阶线性方程，近似函数中多项式的次数 p 必须大于或等于1，这时 $\dot{a}$ 的精度将达到 $0(\Delta t)$。

同样对由(10.1)式描述的二阶方程，为满足一致性的要求，则必须要求 $p \geqslant 2$。一般来说，随着多项式次数的提高，解的精度也会提高。

提高近似解多项式的次数也可以通过引进附加变量来实现。

例如，对(10.7)式所示的线性近似函数，为了提高近似解的精度，我们可以采用如下的二次函数

$$\boldsymbol{a}\approx\hat{\boldsymbol{a}}(\tau)=\boldsymbol{a}_n+\frac{\tau}{\Delta t}(\boldsymbol{a}_{n+1}-\boldsymbol{a}_n)+\frac{\tau}{\Delta t}\left(1-\frac{\tau}{\Delta t}\right)\tilde{\boldsymbol{a}} \qquad (10.19)$$

式中 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ —— 附加变量。

显然，由于附加变量的引入，增加了所需求问题的自由度数。在求解过程中，必须同时求解 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{a}}$。为了建立同时求解以 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 为未知变量的代数方程组，可选择两个不同的权函数 w、$\tilde{w}$，对原方程作加权积分。

如果我们选择 w 为权函数，再将(10.19)式代入(10.9)式中，则可得到包含 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 为未知量的第一个方程。读者容易验证，这个方程的形式除增加下列与 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 有关的一项外，其余部分与(10.11)式完全相同

$$\left[\boldsymbol{C}\frac{(1-2\theta)}{\Delta t}+\boldsymbol{K}(\theta-\bar{\theta})\right]\tilde{\boldsymbol{a}} \qquad (10.20)$$

其中

$$\bar{\theta}=\frac{1}{\Delta t^2}\frac{\int_0^{\Delta t}w\tau^2\mathrm{d}\tau}{\int_0^{\Delta t}w\mathrm{d}\tau}$$

从(10.20)式中可以看出，当 $\theta=\bar{\theta}=\frac{1}{2}$ 时，与二次项有关的附加变量 $\tilde{\boldsymbol{a}}$ 将消失，方程又回到了(10.11)式原有的形式。由于近似函数是二次的，解的截断误差为 $0(\Delta t)^3$。这就是为什么 Crank-Nicolson 算法具有较高精度的原因。

一般来讲，用引入附加变量的方法提高解的精度，其计算效率是不高的，下面我们将介绍既能提高计算精度且又经济的算法。

10.2.5 稳定性问题

如果我们考察已经得到的递推公式，我们发现对齐次方程，即 $\boldsymbol{f}=0$，这些递推公式具有如下一般形式

$$\boldsymbol{a}_{n+1}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{a}_n \qquad (10.21)$$

式中 $\boldsymbol{A}$ —— 放大矩阵。

例如，在(10.14)式的递推格式中，放大矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有如下形式

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{C}+\Delta t\theta\boldsymbol{K})^{-1}(\boldsymbol{C}-\Delta t(1-\theta)\boldsymbol{K}) \tag{10.22}$$

当然计算过程中的误差也会随着矩阵 $\boldsymbol{A}$ 放大和缩小。

(10.21)式所示递推算法的一般解可以写成

$$\boldsymbol{a}_{n-1}=\mu\boldsymbol{a}_n \tag{10.23}$$

将上式代入(10.21)式，则得到关于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程如下

$$(\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{a}_n=0 \tag{10.24}$$

显然如果所有的特征值 μ 都具有

$$|\mu|>1 \tag{10.25}$$

则任何微小的初始误差都会被不断放大，导致解的不稳定性。

但是确定一个系统的特征值并不是一件容易的事。为简单起见，我们考虑(10.5)式表示的单自由度情形，这时由特征方程(10.24)式，可得到

$$A=\frac{c-\Delta t(1-\theta)k}{c+\Delta t\theta k}=\frac{1-(\omega\Delta t)(1-\theta)}{1+\omega\Delta t\theta}=\mu \tag{10.26}$$

式中

$$\omega=k/c$$

图 10.5 表示选取不同的 θ 值时，μ(或 A)随 $\omega\Delta t$ 变化的情况。从图 10.5 中我们立即看到

(a)当 $\theta\geqslant\frac{1}{2}$ 时

$$|\mu|\leqslant 1 \tag{10.27a}$$

算法是无条件稳定的。

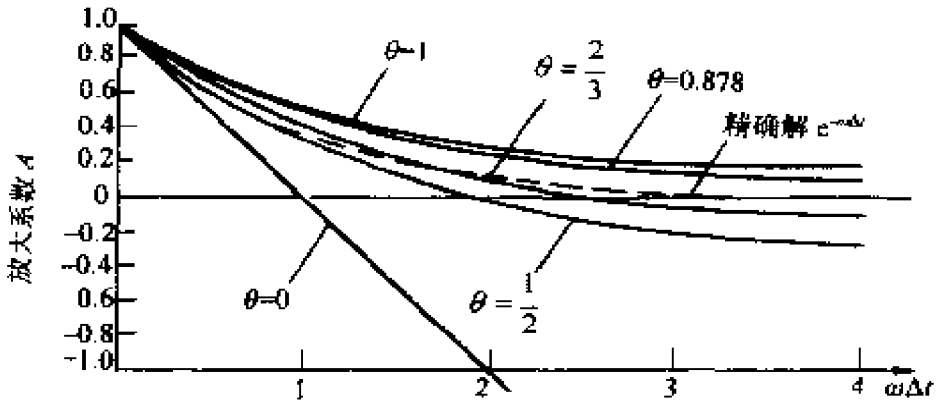
(b)当 $\theta<\frac{1}{2}$，且

$$\omega\Delta t\leqslant\frac{2}{1-2\theta} \tag{10.27b}$$

计算才是稳定的，这时我们称算法为条件稳定。

在条件稳定的算法中，临界时间步长的值取决于单元中最大的特征值 μ。

例如，在热传导问题中，系数 c_n、k_n 可表示为



$\theta=1$　全隐式格式

$\theta=\frac{1}{2}$　Crank-Nicolson 格式

$\theta=\frac{2}{3}$　折衷格式

$\theta=0.878$　Liniger 格式

$\theta=0$　显式格式

图 10.5　不同 θ 值时放大系数 A 的分布

$$c_{ij}=\int_{\Omega_e}\tilde{c}N_i^2\mathrm{d}\Omega,\quad k_{ij}=\int_{\Omega_e}\nabla N_i\tilde{k}\nabla N_j\mathrm{d}\Omega \tag{10.28}$$

考察具有单个自由度的一维线性单元，则有

$$N=\frac{h-x}{h}\qquad c=\int_0^h\bar{c}N^2\mathrm{d}x=\frac{\bar{c}h}{3}$$

$$k=\int_0^h\tilde{k}\left(\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\bar{k}}{h}$$

由以上各式，可得

$$\omega=\frac{k}{c}=\frac{3\bar{k}}{h^2\bar{c}}$$

临界时间步长为

$$\Delta t\leqslant\frac{2}{1-2\theta}\frac{h^2\bar{c}}{3\bar{k}}=\Delta t_{\mathrm{cri}} \tag{10.29}$$

从上式可见，临界时间步长受最小单元尺寸控制。

(10.29)式还说明了以下两点：

(a)在一阶微分方程中，临界时间步长与 h^2 成正比，随着单元

尺寸的减小，临界时间步长迅速减小。

(b)如果采用集中质量矩阵，则有 $c=\frac{\bar{c}h}{2}$，使临界时间步长增加。

图 10.6 为图 10.4 的同一例题，现在采用较大的时间步长。我们注意到，当选取 $\theta=0$ 时，算法为条件稳定。这时若采用时间步长 $\Delta t=2$(大于临界时间步长 $\Delta t_{crit}=1.5$)，则得到的解是振荡和发散的。

10.2.1 节中对算法稳定性的讨论也可用于其他算法稳定性的研究中。例如，我们对 10.2.2 节中介绍的算法进行稳定性分析，当 $\theta=\beta$ 时，具有与上相似的结论。我们把具有相同的行列式值 $|\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I}|$ 的算法称为相似算法。

一般来讲，不同的放大矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可能有相同的行列式值 $|\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I}|$，因而稳定性条件也相同。如果二种算法的放大矩阵也相同，则称为相同算法。在目前的讨论中，这种相同的算法确实是存在的，尽管它们建立的途径不同。

10.2.6 初始条件对稳定性的影响

从理论上讲，选择优化的 θ 值并不是件容易的事。有时，即使采用 $\theta=\frac{1}{2}$，得到的解也是振荡的，如图 10.6 所示($\Delta t=2.5$)。正是由于这个原因，一些人喜欢选用 $\theta=\frac{2}{3}$ 的算法(对应普通的伽辽金方法)，这种算法求得的解相当平滑，表 10.1 表示一维热传导问题的计算结果。在这个例子中，作用在杆单元两端的初始均匀温度突然降到零。计算中，沿杆长方向分成十个线性单元。$\theta=\frac{1}{2}$ 时，振荡现象出现，改用 $\theta=\frac{2}{3}$ 后，计算结果大大改进。尽管时间步长大大高于最小特征值的周期，但引起振荡的主要原因则是温度场的突然变化。

出于同样的原因，Liniger 在简单的一维问题中采用使时域中的误差取极小值的方法，获得了 $\theta=0.878$ 的算法。在图 10.5 中我

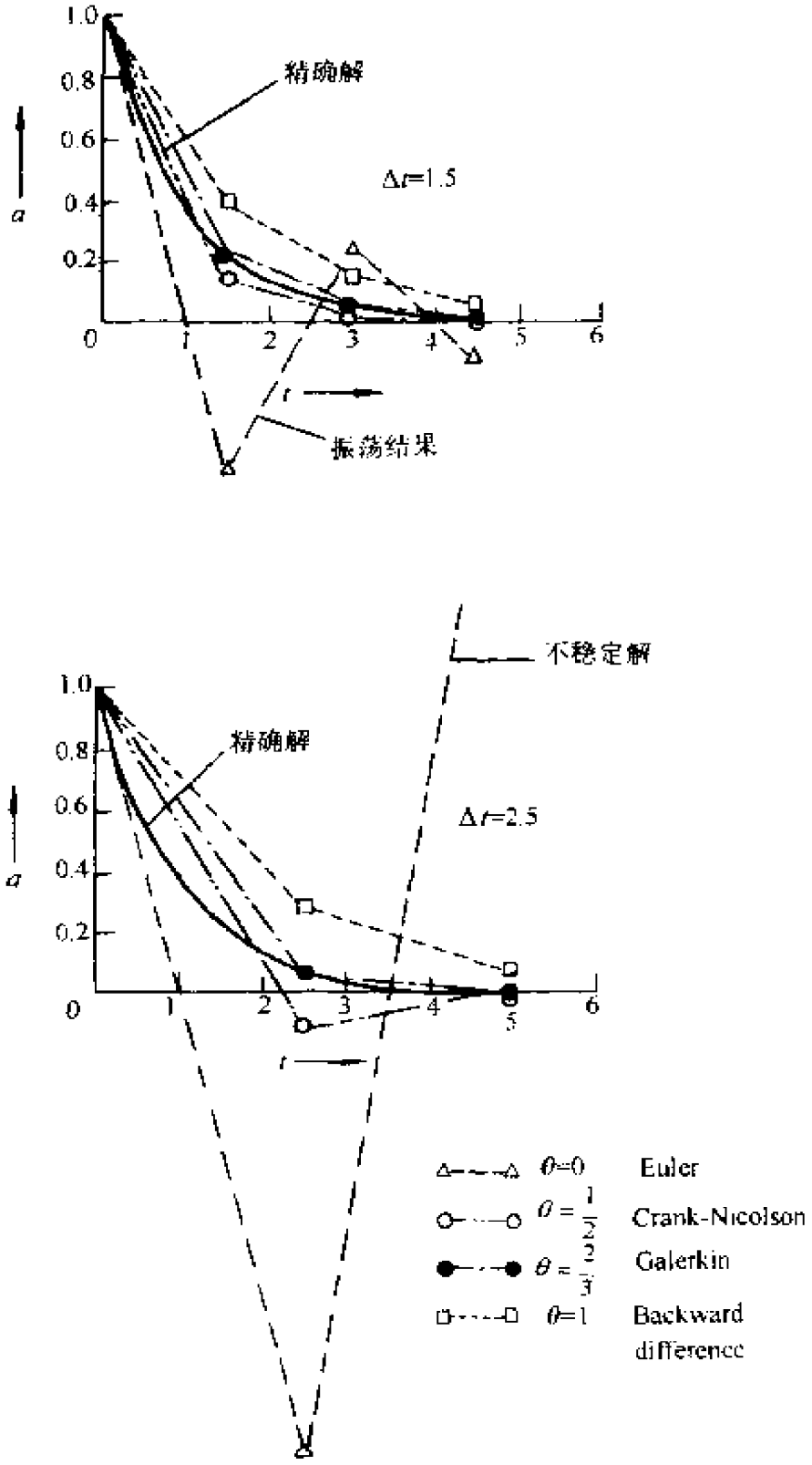


图 10.6　时间步长及 θ 值对解的影响

们观察到这种方法与精确解非常吻合。Liniger 算法除有较好的精度外，还能平抑许多振荡。然而，大部分情况下解的振荡是由于引入了不合理的初始条件。

表 10.1　$\theta=\frac{2}{3}$ 与 $\theta=\frac{1}{2}$ 时，有限元分析结果（$\Delta t=0.01$）

t	$x=0.1$		$x=0.2$		$x=0.3$		$x=0.4$		$x=0.5$	
	$\theta=\frac{2}{3}$	$\theta=\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{2}{3}$	$\theta=\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{2}{3}$	$\theta=\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{2}{3}$	$\theta=\frac{1}{2}$	$\theta=\frac{2}{3}$	$\theta=\frac{1}{2}$
0.01	10.8	28.2	1.6	3.2	0.5	0.7	0.6	0.1	0.5	0.2
0.02	0.5	3.5	2.1	9.5	0.1	0.0	0.5	0.7	0.7	0.4
0.03	1.3	9.9	0.5	0.7	0.8	3.1	0.5	0.2	0.5	0.6
0.05	0.5	4.5	0.4	0.2	0.5	2.3	0.4	0.8	0.5	1.0
0.10	0.1	1.4	0.1	2.0	0.1	1.5	0.1	1.9	0.1	1.6
0.15	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2	0.3	2.1	0.3	2.2
0.20	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6	0.6	2.6
0.30	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5	1.4	3.5

图 10.6 例题中的振荡（$\theta=\frac{1}{2}$）原因至少部分地与计算初始时

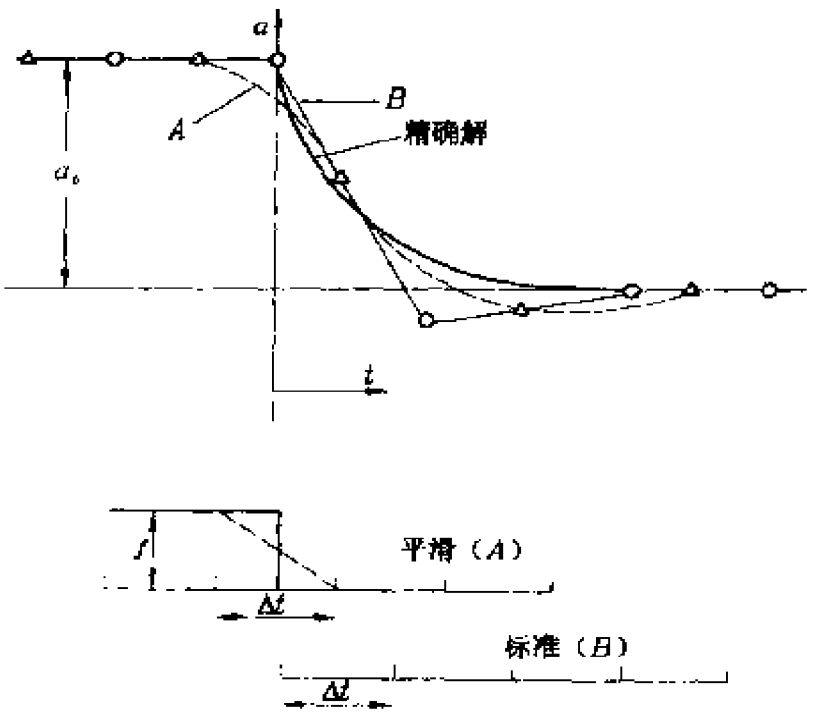


图 10.7　突变荷载对解的影响及平滑方法

荷载项的突变有关。如果我们考虑如下荷载

$$f(t)=\begin{cases}1 & t<0\\ 0 & t\geqslant 0\end{cases}$$

将会发现，在 $t=0$ 时，荷载是不连续的，如图 10.7 所示。从理论上讲，荷载不连续是允许的。但不连续的荷载将导致不连续的位移，这却是我们不希望的。如果我们在初始计算的第一个时间步长 Δt $(-\Delta t/2<t<\Delta t/2)$ 内，近似地用线性函数代替突变荷载，则能获得平滑的解，即使采用大步长 $\Delta t=2.5$ 时也是如此，如图 10.7 所

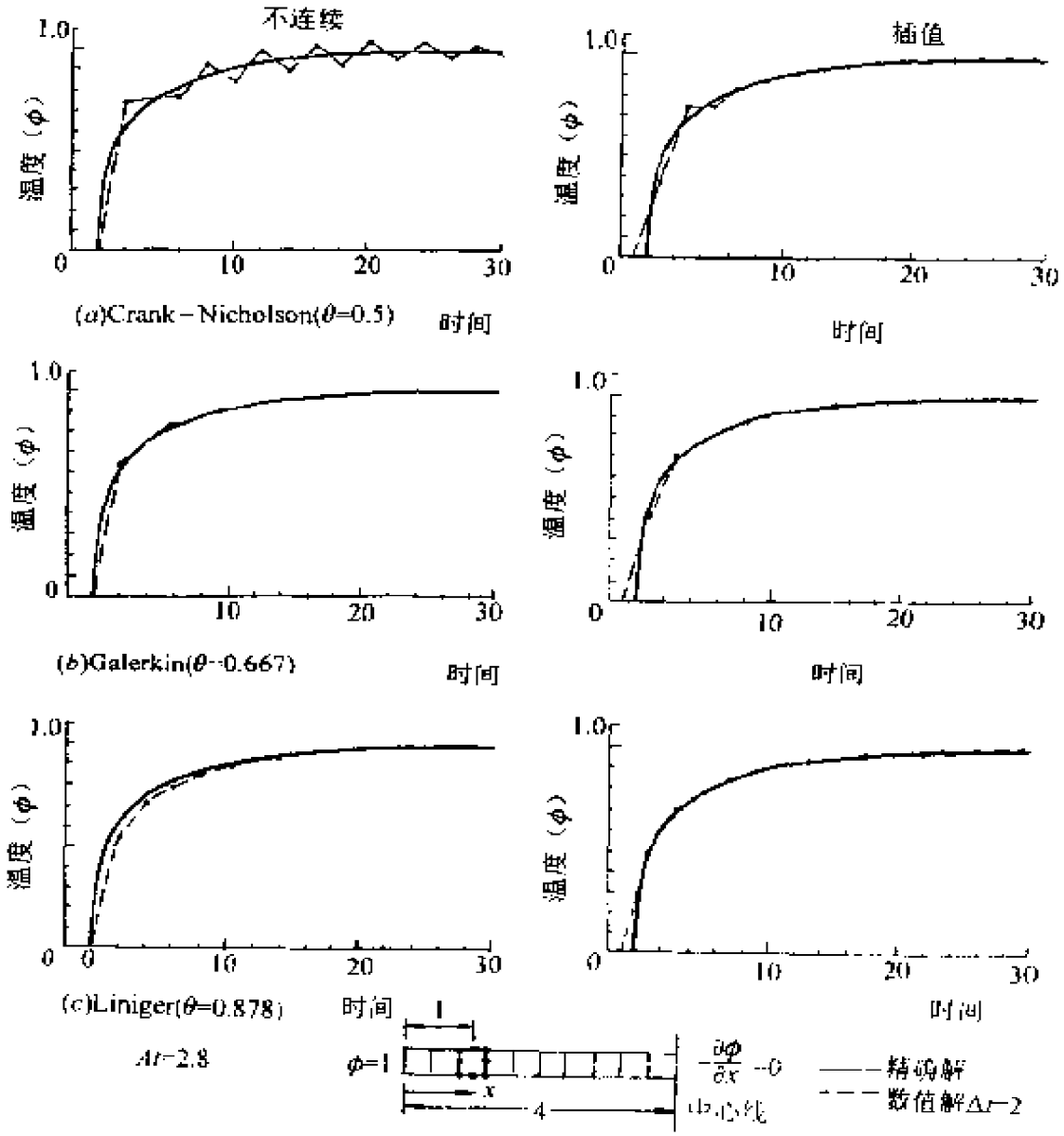


图 10.8　二维热传导问题中突变荷载对解的影响及平滑方法

示。

上述平滑措施也可用于多自由度时的情况。图 10.8 表示二维热传导问题。在这个例子中，初始温度为 0 的梁被突加于温度 $T=1$。若采用 $\theta=\frac{1}{2}$ 的算法时，同样会发生振荡现象。而 $\theta=\frac{2}{3}$ 和 $\theta=0.878$ 的算法则可抑制振荡。进一步若采用线性函数代替突变温度，还可获得更加光滑的结果。

10.3 二阶微分方程的一般算法

10.3.1 二阶微分方程单步长算法

这一节我们将讨论二阶微分方程的两类一般算法。动力问题有限元方程的一般形式为

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}-\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{f}=\boldsymbol{0} \tag{10.30}$$

作为上述方程特例的一阶微分方程，只要令 $\boldsymbol{M}=0$。因此，下面的讨论同样适用于一阶情况。

第一类算法为单步长算法 SSpj(Single Step Algorithm)。其中 p 代表近似解多项式的次数，j 代表微分方程的阶数。第二类算法为广义纽马克法 GNpj(Generalized Newmark Algorithm)。在这两类算法中，未知变量 $\boldsymbol{a}$ 的近似解可采用任意次数 p 的多项式函数。由前面的讨论我们知道，为了保证解的一致性，对于二阶微分方程，p 至少须满足 $p\geqslant 2$。

单步长算法是通过选择权函数对近似解方程的残数作加权积分而建立的一种递推算法，10.2.1 中介绍的方法即属于这类算法的一个特例。广义纽马克法则是采用截断了高阶项的 Taylor 级数作为未知量 $\boldsymbol{a}$ 的近似解函数，类似于 10.2.2 的做法。

在以下的讨论中，我们假设已进行了 n 次时步的计算，并已获得了 t_n 时刻的解 $\boldsymbol{a}_n,\dot{\boldsymbol{a}}_n,\ddot{\boldsymbol{a}}_n\cdots\overset{p-1}{\boldsymbol{a}}_n$，现考察经过时间 Δt 后，t_{n+1} 时刻的情况。我们的目的是要寻求 t_{n+1} 时刻的解 $\boldsymbol{a}_{n+1},\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1},\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1},\cdots\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，其中 p 为近似解多项式的次数。

这种算法的先决条件有点苛刻，因为我们知道一阶微分方程

只需要一个初始条件 $a(0)$，二阶微分方程只要给定两个初始条件 $a(0)$ 和 $\dot{a}(0)$。而上述算法在初始计算时则需要给定从 $a(0)$，$\dot{a}(0)$，$\ddot{a}(0)$，$\cdots\overset{p-1}{a}(0)$ 个条件。但是如果系统是从静止状态开始运动，且外荷载是连续的函数，则全部初始条件均简化为零。否则需要用对控制方程微分的方法确定初始条件。

10.3.2 单步长算法 SSpj 的加权残数格式

将未知变量 a 展开成 p 次多项式

$$a\approx a_n+\dot{a}_n\tau+\frac{\ddot{a}\tau^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha_n^p\tau^p}{p!} \tag{10.31}$$

其中

$$\tau=t-t_n \qquad \Delta t=t_{n+1}-t_n \tag{10.32}$$

上式中，α_n^p 代表在时间间隔 Δt 内未知函数 p 阶导数的平均值，即

$$\alpha_n^p=a^p=\frac{\mathrm{d}^p a}{\mathrm{d}t^p} \tag{10.33}$$

一般来说，α_n^p 是未知的。$p=2$ 时，a 的近似解的几何意义如图10.9所示。

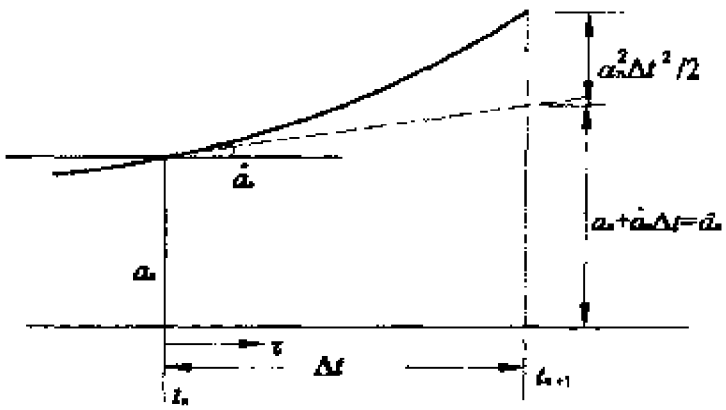


图 10.9 二阶时间近似

我们注意到，为了保证微分方程(10.1)式和(10.2)式中各阶导数的一致性，对二阶动力方程，必须有 $p\geqslant 2$，对一阶方程，则必须使 $p\geqslant 1$。

由(10.31)式，可获得未知函数 a 的各阶导数值 $\dot{a}$，$\ddot{a}$，$\cdots\overset{p-1}{a}$。将这些值代入(10.1)式中，选择权函数 $w(t)$，作加权残数积分

$$\int_0^{\Delta t} w(t)\left\{\boldsymbol{M}\left[\ddot{\boldsymbol{a}}_n+\dddot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\cdots+\frac{\alpha_n^p\tau^{p-2}}{(p-2)!}\right]\right.$$
$$+\boldsymbol{C}\left[\dot{\boldsymbol{a}}_n+\ddot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\cdots+\frac{\alpha_n^p\tau^{p-1}}{(p-1)!}\right] \qquad (10.34)$$
$$\left.+\boldsymbol{K}\left(\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\cdots+\frac{\alpha_n^p\tau^p}{p!}\right)+\boldsymbol{f}\right\}\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{0}$$

若定义

$$\theta_1=\frac{\int_0^{\Delta t}w\tau\mathrm{d}\tau}{\Delta t\int_0^{\Delta t}w\mathrm{d}\tau}\quad\cdots\quad\theta_p=\frac{\int_0^{\Delta t}w\tau^p\mathrm{d}\tau}{\Delta t^p\int_0^{\Delta t}w\mathrm{d}\tau}$$
$$\overline{f}=\frac{\int_0^{\Delta t}wf\mathrm{d}\tau}{\Delta t\int_0^{\Delta t}w\mathrm{d}\tau}\qquad\theta_0=1 \qquad (10.35)$$

则(10.34)式可写成

$$\boldsymbol{M}\left[\tilde{\ddot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\frac{\alpha_n^p\theta_{p-2}\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}\right]+\boldsymbol{C}\left[\tilde{\dot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\frac{\alpha_n^p\theta_{p-1}\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\right]+$$
$$\boldsymbol{K}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\frac{\alpha_n^p\theta_p\Delta t^p}{p!}\right)+\overline{\boldsymbol{f}}_n=\boldsymbol{0} \qquad (10.36)$$

其中

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}=\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\Delta t\theta_1+\cdots+\frac{\boldsymbol{a}_n^{p-1}\Delta t^{p-1}\theta_{p-1}}{(p-1)!}=\sum_{q=0}^{p-1}\frac{\boldsymbol{a}_n^q\Delta t^q\theta_q}{q!}$$
$$\tilde{\dot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}=\dot{\boldsymbol{a}}_n+\ddot{\boldsymbol{a}}_n\Delta t\theta_1+\cdots+\frac{\boldsymbol{a}_n^{p-1}\Delta t^{p-2}\theta_{p-2}}{(p-2)!}=\sum_{q=1}^{p-1}\frac{\boldsymbol{a}_n^q\Delta t^{q-1}\theta_{q-1}}{(q-1)!}$$
$$\tilde{\ddot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}=\ddot{\boldsymbol{a}}_n+\dddot{\boldsymbol{a}}_n\Delta t\theta_1+\cdots+\frac{\boldsymbol{a}_n^{p-1}\Delta t^{p-3}\theta_{p-3}}{(p-3)!}=\sum_{q=2}^{p-1}\frac{\boldsymbol{a}_n^q\Delta t^{q-2}\theta_{q-2}}{(q-2)!} \qquad (10.37)$$

由于$\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}$、$\tilde{\dot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$、$\tilde{\ddot{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$可直接由$t_n$时刻的值求出，因此从(10.36)式，我们可以解得

$$\alpha_n^p=-\left[\frac{\boldsymbol{M}\Delta t^{p-2}\theta_{p-2}}{(p-2)!}+\frac{\boldsymbol{C}\Delta t^{p-1}\theta_{p-1}}{(p-1)!}+\frac{\boldsymbol{K}\Delta t^p\theta_p}{p!}\right]^{-1} \tag{10.38}$$
$$(\boldsymbol{M}\ddot{\tilde{a}}_{n+1}+\boldsymbol{C}\dot{\tilde{a}}_{n+1}+\boldsymbol{K}\tilde{a}_{n+1}+\boldsymbol{f})$$

上式中的$\tilde{a}_{n+1}$、$\dot{\tilde{a}}_{n+1}$、$\ddot{\tilde{a}}_{n+1}$代表 a、$\dot{a}$、$\ddot{a}$ 在时间间隔 Δt 中的平均预测值。

一旦获得了 α_n^p 以后，就可利用下列各式求得 a_{n+1}，$\dot{a}_{n+1}$，$\cdots$，a^{p-1}_{n+1}

$$\begin{aligned}
a_{n+1}&=a_n+\dot{a}_n\Delta t+\cdots+\frac{\alpha_n^p\Delta t^p}{p!}=\hat{a}_{n+1}+\frac{\alpha_n^p\Delta t^p}{p!}\\
\dot{a}_{n+1}&=\dot{a}_n+\ddot{a}_n\Delta t+\cdots+\frac{\alpha_n^p\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}=\hat{\dot{a}}_{n+1}+\frac{\alpha_n^p\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\\
&\vdots\\
a^{p-1}_{n+1}&=a^{p-1}_n+\alpha_n^p\Delta t
\end{aligned} \tag{10.39}$$

单步长算法可以归纳为以下几个步骤：

① 通过选择不同的权函数确定 θ_1，$\theta_2\cdots\theta_p$ 各值；

② 按(10.37)式计算$\tilde{a}_{n+1}$，$\dot{\tilde{a}}_{n+1}$，$\ddot{\tilde{a}}_{n+1}$；

③ 由(10.38)式求解 α_n^p；

④ 按(10.39)式计算 t_{n+1}时刻的 a_{n+1}，$\dot{a}_{n+1}$，$\cdots a^{p-1}_{n+1}$各值，再转入下一时步的计算。

对一阶微分方程，只要省略$\ddot{\tilde{a}}_{n+1}$的计算即可。

如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 是对角矩阵，且 $\theta_p=0$，则用(10.38)式计算 α_n^p 不用求逆，这时算法成显式格式。后面我们将会看到，显式格式仅是条件稳定算法。

当 $\theta_p\neq0$，算法为隐式格式。采用不同的 θ_p 值就得到了各种不同的算法。隐式格式是无条件稳定的算法，这是目前用得最广泛的方法。

单步长算法中两个最重要的特别就是 SS11 和 SS22 算法，下面将分别给予介绍。

SS11 算法

如果我们考察一阶方程，这时 $j=1$。一阶方程的初始条件仅需给定 $\boldsymbol{a}$ 的初始值。正是由于这个原因，选择未知量 $\boldsymbol{a}$ 的近似解为线性函数（$p=1$）是很自然的。SS11 算法由于计算简单被广泛使用。

在(10.31)式中，取 $p=1$，则有

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\alpha\tau \qquad (\alpha_n^1=\alpha=\dot{\boldsymbol{a}}) \tag{10.40}$$

将上式代入(10.2)式，选取权函数 $w(t)$，作加权积分，则得到

$$\boldsymbol{C}\alpha+\boldsymbol{K}(\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\alpha\theta\Delta t)+\bar{\boldsymbol{f}}_n=\boldsymbol{0} \qquad (\theta_1=\theta) \tag{10.41}$$

在 SS11 算法中，$\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}=\boldsymbol{a}_n$

(10.41)式的解为

$$\alpha=-(\boldsymbol{C}+\Delta t\theta\boldsymbol{K})^{-1}(\bar{\boldsymbol{f}}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_n) \tag{10.42}$$

回代至(10.40)式，则得到 t_{n+1} 时刻的解为

$$\boldsymbol{a}_{n+1}=\boldsymbol{a}_n+\alpha\Delta t \tag{10.43}$$

读者容易验证，SS11 算法与(10.14)式的结果是完全相同的。

SS22 算法

考察如(10.1)式所示的二阶方程，这时 $j=2$。二阶方程的初始条件需要给定 $\boldsymbol{a}$、$\dot{\boldsymbol{a}}$ 两个初始值。近似解最简单的形式就是选取 $p=2$ 的二次函数。SS22 算法是动力问题中用得最多的一种算法。

选取未知变量 $\boldsymbol{a}$ 的近似解如下

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\tau+\frac{1}{2}\alpha\tau^2 \qquad (\alpha_n^2=\alpha=\ddot{\boldsymbol{a}}) \tag{10.44}$$

将上式代入(10.1)式，选取权函数 $w(t)$，作加权积分得到

$$\boldsymbol{M}\alpha+\boldsymbol{C}(\dot{\tilde{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\alpha\theta_1\Delta t)+\boldsymbol{K}(\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\frac{1}{2}\alpha\theta_2\Delta t^2)+\bar{\boldsymbol{f}}=\boldsymbol{0} \tag{10.45}$$

式中

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{a}}_{n+1}&=\boldsymbol{a}_n+\dot{\boldsymbol{a}}_n\Delta t\theta_1\\ \dot{\tilde{\boldsymbol{a}}}_{n+1}&=\dot{\boldsymbol{a}}_n\end{aligned} \tag{10.46}$$

由(10.45)式求出 α 以后，即可通过(10.39)式得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{n+1} &= \boldsymbol{a}_n + \dot{\boldsymbol{a}}_n \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2 \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} &= \dot{\boldsymbol{a}}_n + \alpha \Delta t \end{aligned} \tag{10.47}$$

利用上述递推公式，可以获得问题的全部解答。

SS22 算法在许多方面的特征与纽马克方法颇为相似。纽马克方法是工程中最常使用的一种算法，我们在下一节将要详细介绍。例如，SS22 算法的稳定性条件与纽马克方法是相同的，即

$$\text{当} \qquad \theta_1 = \gamma, \theta_2 = 2\beta, \theta_1 \geqslant \theta_2 \geqslant \frac{1}{2} \tag{10.48}$$

时，算法是无条件稳定的。其中 γ、β 是纽马克算法中的两个参数。

如果选择 $\theta_2 = 0$，且 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵时，算法为显式格式。这时若 $\theta_1 \geqslant \frac{1}{2}$，则为条件稳定算法。

上述算法显然也适用于一阶方程，这时 $j=1$，相应的算法为 SS21，其稳定性条件与 SS22 算法相同。

10.3.3 广义纽马克算法 GNpj

广义纽马克算法是利用包含余项在内的 Taylor 级数作为未知变量 $\boldsymbol{a}$ 的近似函数。经典的纽马克方法可以看作是这种算法的一个特例。正是由于这一原因，我们将这类算法称为广义纽马克方法。

在建立广义纽马克算法时，我们是对控制方程(10.1)式在 t_{n+1} 时刻配点，即对

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{n+1} + \boldsymbol{f}_{n+1} = \boldsymbol{0} \tag{10.49}$$

配点。采用类似于(10.15)式的做法，我们将 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 及相应的各阶导数表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{n+1} &= \boldsymbol{a}_n + \Delta t \dot{\boldsymbol{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^p}{p!}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_n + \beta_p \frac{\Delta t^p}{p!}(\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1} - \overset{p}{\boldsymbol{a}}_n) \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} &= \dot{\boldsymbol{a}}_n + \Delta t \ddot{\boldsymbol{a}}_n + \cdots + \frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_n + \beta_{p-1}\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}(\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1} - \overset{p}{\boldsymbol{a}}_n) \\ &\vdots \\ \overset{p-1}{\boldsymbol{a}}_{n+1} &= \overset{p-1}{\boldsymbol{a}}_n + \Delta t \overset{p}{\boldsymbol{a}}_n + \beta_1 \Delta t(\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1} - \overset{p}{\boldsymbol{a}}_n) \quad (\beta_0 = 1) \end{aligned} \tag{10.50}$$

在(10.50)式中，我们采用了 p 阶多项式作为未知函数 $\boldsymbol{a}$ 及其各阶导数的近似函数，不仅如此，近似函数中还包含了级数的余项。余项中的参数 $\beta_j(j=1,2,\cdots p)$ 可以选择，使其获得最佳解。

将(10.50)式中的前三式代入(10.49)式中，则得到求解未知量 $\boldsymbol{a}_{n+1}^{p}$ 的代数方程。一旦求得了 $\boldsymbol{a}_{n+1}^{p}$，即可由(10.50)式确定 $\boldsymbol{a}_{n+1}$，$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}\cdots\overset{p-1}{\boldsymbol{a}}_{n+1}$。(10.49)式的配点方程也可看成是由权函数 $w=\delta(t_{n+1})$ 对(10.1)式作加权积分的结果。

下面我们详细写出(10.50)式的前三式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_{n+1}&=\bar{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\frac{\Delta t^{p}}{p!}\beta_{p}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\\ \dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}&=\dot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\beta_{p-1}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\\ \ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}&=\ddot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}\beta_{p-2}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\end{aligned}\tag{10.51}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{a}}_{n+1}$、$\dot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$ 和 $\ddot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$ 为(10.50)式的前三式不包含余项的级数。将上式代入(10.49)式，则有

$$\boldsymbol{M}\left[\ddot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\beta_{p-2}\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\right]+\boldsymbol{C}\left[\dot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n-1}+\beta_{p-1}\frac{\Delta t^{p-1}}{(p-1)!}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\right]+$$
$$\boldsymbol{K}\left(\bar{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\beta_{p}\frac{\Delta t^{p}}{p!}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}\right)+\boldsymbol{f}_{n+1}=\boldsymbol{0}\tag{10.52}$$

从上式可得到

$$\begin{aligned}\overset{p}{\boldsymbol{a}}_{n+1}=-&\left[\frac{\Delta t^{p-2}\beta_{p-2}}{(p-2)!}\boldsymbol{M}+\frac{\Delta t^{p-1}\beta_{p-1}}{(p-1)!}\boldsymbol{C}+\frac{\Delta t^{p}\beta_{p}}{p!}\boldsymbol{K}\right]^{-1}(\boldsymbol{M}\ddot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\\ &\boldsymbol{C}\dot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}+\boldsymbol{K}\bar{\boldsymbol{a}}_{n+1}+\boldsymbol{f}_{n+1})\end{aligned}\tag{10.53}$$

如果我们在上式中令

$$\beta_{p-2}=\theta_{p-2},\beta_{p-1}=\theta_{p-1},\beta_{p}=\theta_{p}\tag{10.54}$$

则立即发现，GNpj 算法与 SSpj 算法具有相同的形式。但是广义纽马克 GNpj 算法中的 $\bar{\boldsymbol{a}}_{n+1}$、$\dot{\bar{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$ 等则不同于单步长 SSpj 算法中的 $\hat{\boldsymbol{a}}_{n+1}$、$\dot{\hat{\boldsymbol{a}}}_{n+1}$ 等值。前者代表 $\boldsymbol{a}$、$\dot{\boldsymbol{a}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{a}}$ 在 t_{n+1} 时刻的预测值，而后者

则表示 a、$\dot{a}$ 和 $\ddot{a}$ 在 Δt 中的平均预测值。

广义纽马克法的计算过程类似于单步长算法，但初始计算时需要给定 $a_0, \dot{a}_0 \cdots, \overset{p}{a}_0$。对于一般的工程问题，我们只知道初始位移、速度和加速度，高阶导数的初始值可由控制方程求导数得到。广义纽马克方法在每一时步的计算中，都要用到上一时步 a_n、$\dot{a}_n$、$\cdots$、$\overset{p}{a}_n$ 诸值，因此它要求计算机存储更多的数据。

广义纽马克法中最重要的算法是 GN22。

纽马克算法、

前面我们已经提到纽马克算法是动力学问题中使用最广泛的一种方法。但它的确又是广义纽马克法 GNpj 的一个特例。下面我们将简单介绍纽马克算法。

纽马克算法是将 t_{n-1} 时刻的位移和速度表示成如下形式

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{n+1} &= \boldsymbol{a}_n + \Delta t \dot{\boldsymbol{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\boldsymbol{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}\beta_2 \ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} \\ \dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} &= \dot{\boldsymbol{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\boldsymbol{a}}_n + \Delta t \beta_1 \ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} \end{aligned} \tag{10.55}$$

再将其代入动力方程

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} + \boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{n+1} + \boldsymbol{f}_{n+1} = \boldsymbol{0} \tag{10.56}$$

则可确定 t_{n+1} 时刻的未知变量 $\boldsymbol{a}_{n+1}$，$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，$\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$。

不难看出，将(10.55)式代入(10.56)式后，立即得到

$$\begin{aligned} \ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1} = -&\left(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{C}\beta_1 \Delta t + \frac{1}{2}\boldsymbol{K}\beta_2 \Delta t^2\right)^{-1} \\ &\{\boldsymbol{f}_{n+1} + \boldsymbol{C}[\dot{\boldsymbol{a}}_n + \Delta t(1-\beta_1)\ddot{\boldsymbol{a}}_n] + \\ &\boldsymbol{K}\left[\boldsymbol{a}_n + \Delta t \dot{\boldsymbol{a}}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\boldsymbol{a}}_n\right]\} \end{aligned} \tag{10.57}$$

上式与(10.53)式是等效的。

一旦获得了 $\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，则可利用(10.55)式求出 $\boldsymbol{a}_{n+1}$、$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，进行下一时步的计算。这就建立了纽马克法的递推算法。

另外一些研究人员喜欢求出 t_{n+1} 时刻的位移 $\boldsymbol{a}_{n+1}$，而不是加速度 $\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，

$$\boldsymbol{a}_{n+1}=(\boldsymbol{M}+\boldsymbol{C}\beta_1\Delta t+\frac{1}{2}\boldsymbol{K}\beta_2\Delta t^2)^{-1}$$
$$\left\{-\frac{\beta_2\Delta t^2}{2}\boldsymbol{f}_{n+1}-\boldsymbol{C}\left[\frac{1}{2}\beta_2\Delta t^2(\dot{\boldsymbol{a}}_n+\Delta t(1-\beta_1)\ddot{\boldsymbol{a}}_n)-\right.\right.$$
$$\left.\beta_1\Delta t(\boldsymbol{a}_n+\Delta t\dot{\boldsymbol{a}}_n+\frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\boldsymbol{a}}_n)\right]+$$
$$\left.\boldsymbol{M}\left[\boldsymbol{a}_n+\Delta t\dot{\boldsymbol{a}}_n+\frac{\Delta t^2}{2}(1-\beta_2)\ddot{\boldsymbol{a}}_n\right]\right\}$$

(10.58)

当获得了 $\boldsymbol{a}_{n+1}$ 后，同样可利用(10.55)式求出速度 $\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$ 和加速度 $\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$。

在下一节中，我们要着重讨论各种算法的稳定性问题。但是，这里对纽马克方法有如下结论，即：如果 $\beta_1=\theta_1$，$\beta_2=\theta_2$ 满足(10.48)式，则纽马克方法是无条件稳定的算法。从这里我们看到，SS22 算法和 GN22 算法具有完全相同的稳定性条件，尽管它们的算法仅相似。

若 $\beta_2=0$，且 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{C}$ 为对角矩阵，则纽马克方法成为显式计算格式。

利用迭代的方法还可进一步提高 SS/GN 算法的精度。例如对 GN 广义纽马克算法，我们可以用(10.51)式预测 t_{n+1} 时刻第 i 次迭代时的位移 $\boldsymbol{a}_{n+1}^i$、速度 $\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}^i$ 和加速度 $\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}^i$，取

$$\boldsymbol{a}_{n+1}^p=(\boldsymbol{a}_{n+1}^p)^{i-1}$$

当 $i=1$ 时，

$$(\boldsymbol{a}_{n+1}^p)^0=0$$

这时(10.52)式可重新改写成如下形式

$$\boldsymbol{M}\left[(\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1})^{i-1}+\beta_{p-2}\frac{\Delta t^{p-2}}{(p-2)!}(\boldsymbol{a}_{n+1}^p)^i\right]+\boldsymbol{C}\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}^{i-1}+\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}_{n+1}^{i-1}+\boldsymbol{f}_{n+1}=\boldsymbol{0}$$

(10.59)

由上式可求得 $(\boldsymbol{a}_{n+1}^p)^i$，从而可转入下一次迭代。

这种预测/校正算法已成功地用在了各种算法中[1]。当然，它们的稳定条件还和原来一样，没有改变。

10.3.4 一般算法的稳定条件

单步长算法和广义纽马克算法的一致性我们在前面曾作过简略介绍。利用与10.2.5节讨论中同样的办法，我们指出，对于由 p 次多项式构成的近似函数，其局部截断误差为 $O(\Delta t)^{p-1}$。但经过了 n 个时步计算后，总的截断误差对一阶微分方程则变成 $O(\Delta t)^p$，对二阶微分方程则升为 $O(\Delta t)^{p+1}$。关于误差精度的详细讨论请参看文献[26]。

对各种算法而言，稳定性问题是至关重要的。因为只有稳定的算法，得到的结果才是可信的。在这节中，我们将要详细讨论单步长一类算法的稳定性问题。利用同样的方法也可讨论广义纽马克一类算法的稳定条件，有兴趣的读者不妨练习一下。然而我们必须指出：

(a)单步长算法和广义纽马克算法具有相似的性质；

(b)如果选取 $\theta_p=\beta_p$，则这两类算法具有完全相同的数值稳定条件。

关于上述第二个结论的证明需要用到高等代数中的一些知识。

单步长的算法稳定性的讨论可完全按照10.2.5中的方法进行。然而为了实用的目的，我们希望避免写出放大矩阵 A 的显式形式，并采用单自由度的振动方程

$$m\ddot{a}+c\dot{a}+ka=0 \tag{10.60}$$

作为研究的出发点。

对于(10.60)式定义的单自由度方程，(10.36)、(10.38)和(10.39)三式给出了递推算法。对奇次方程而言，(10.60)式标量方程的一般解可表示成

$$\begin{aligned} a_{n+1}&=\mu a_n\\ \dot{a}_{n+1}&=\mu\dot{a}_n\\ &\vdots\\ a^{p-1}_{n+1}&=\mu^{p-1}a^{p-1}_n \end{aligned} \tag{10.61}$$

将上式代入由(10.36)、(10.37)两式组成的控制方程，则有

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{X}_n=\boldsymbol{0} \tag{10.62}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_n=\begin{Bmatrix} a_n \\ \Delta t\dot{a}_n \\ \vdots \\ \Delta t^{p-1}a_n^{p-1} \\ \Delta t^p a_n^p \end{Bmatrix} \tag{10.63}$$

$$\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{p-1} & b_p \\ 1-\mu & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(p-1)!} & \frac{1}{p!} \\ 0 & 1-\mu & 1 & \cdots & \frac{1}{(p-2)!} & \frac{1}{(p-1)!} \\ \cdots & & & & & \\ \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0\cdots & 1-\mu & 1 & \frac{1}{2!} \\ 0 & 0 & 0\cdots & 0 & 1-\mu & 1 \end{bmatrix} \tag{10.64}$$

上式中

$$b_0=\theta_0 k\Delta t^2$$

$$b_1=\theta_0 c\Delta t+\theta_1 k\Delta t^2,\theta_0=1$$

$$b_q=\frac{\theta_{q-2}m}{(q-2)!}+\frac{\theta_{q-1}c\Delta t}{(q-1)!}+\frac{\theta_q k\Delta t^2}{q!} \qquad q=2,3,\cdots p$$

(10.62)式有非零解的必要条件为

$$|\boldsymbol{S}|=0 \tag{10.65}$$

上式行列式是关于 μ 的一元 p 次代数方程，解这个方程，即可获得放大系数矩阵的特征值。单步长算法具有稳定解的充分和必要条件是所有特征值的模必须小于等于 1，即

$$|\mu|\leqslant 1 \tag{10.66}$$

在有重根的情况下，不能取等号。

读者将发现采用上述直接写出矩阵 S 的方法比前面介绍的写出放大系数矩阵 A 的方法简单得多，但两者的结果是完全一致的。

计算稳定条件的极限值即使对上述标量方程也不是件容易的事。正是出于这个原因，我们下面只讨论 $p=2$ 和 $p=3$ 的两种情况。但是，这种方法适用一般情况。

首先我们作如下变换

$$\mu=\frac{1+z}{1-z} \tag{10.67}$$

式中，z 和 μ 一般为复数。容易证明满足(10.67)式的变量 μ 等价于复数 z 的实部为小于或等于零的条件，如图 10.10 所示。

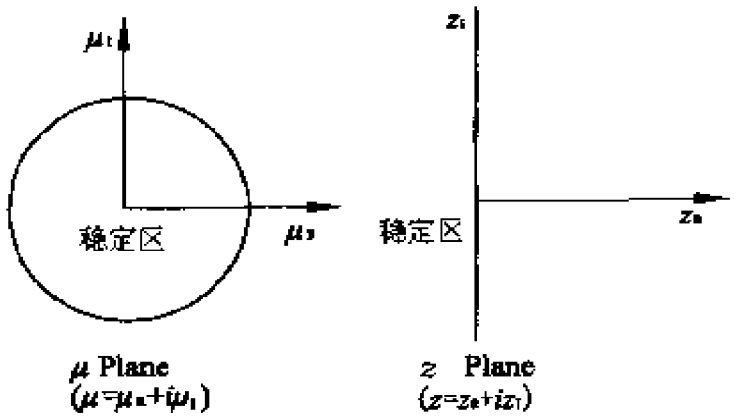


图 10.10 $\mu=\frac{(1+z)}{(1-z)}$的变换

经过引入(10.67)式的变换后，关于 μ 的一元 p 次方程则转化为以 z 为变量的特征方程

$$c_0z^n+c_1z^{n-1}+\cdots+c_n=0 \quad , \quad c_0>0 \tag{10.68}$$

根据著名的 Routh-Hurwitz 定理，方程(10.68)式解的实部为非正的条件为

$$c_0>0 \quad , \quad c_1>0$$

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} > 0 \tag{10.69a}$$

一般情况为

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \cdots & \vdots \\ c_0 & c_2 & c_4 & \cdots & \vdots \\ 0 & c_1 & c_3 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & c_2 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_n \end{vmatrix} > 0 \tag{10.69b}$$

利用上述判别式，我们就可对各种算法的稳定性进行讨论。

10.3.5 单步长 SS22/SS21 算法的稳定条件

将下列各式

$$a_{n+1} = \mu a_n, \dot{a}_{n+1} = \mu \dot{a}_n, f = 0 \tag{10.70}$$

代入(10.45)和(10.47)两式构成的递推算法，则得到

$$m\alpha + c(\dot{a}_n + \alpha\theta_1\Delta t) + k(a_n + \dot{a}_n\theta_1\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\theta_2\Delta t^2) = 0$$

$$-\mu a_n + a_n + \dot{a}_n\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2 = 0$$

$$-\mu\dot{a}_n + \dot{a}_n + \alpha\Delta t = 0 \tag{10.71}$$

按(10.67)式作变量替换，则得到特征多项式为

$$c_0 z^2 + c_1 z + c_2 = 0 \tag{10.72}$$

其中

$$c_0 = 4m + 2(2\theta_1 - 1)c\Delta t + 2(\theta_2 - \theta_1)k\Delta t^2$$

$$c_1 = 2c\Delta t + k\Delta t^2(2\theta_1 - 1)$$

$$c_2 = k\Delta t^2$$

根据 Routh-Hurwitz 定理，计算稳定的条件为

$$c_0 > 0 \quad , \quad c_1 \geqslant 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0$$

或表示成

$$c_0 \geqslant 0, \quad c_1 \geqslant 0, \quad c_2 \geqslant 0 \tag{10.73}$$

由上述不等式，得到算法为无条件稳定的条件是

$$\theta_2 \geqslant \theta_1 \geqslant 0.5 \tag{10.74}$$

上述条件也适合当 $m=0$ 时一阶方程的情况，即 SS21 算法。

如果 Δt 的取值仅能满足部分不等式，则算法为条件稳定。对于 $\theta_2=0$ 的显式格式，(10.73)式不等式条件成为

$$\begin{aligned} &2m+(2\theta_1-1)c\Delta t-\theta_1 k\Delta t^2 \geqslant 0 \\ &2c+(2\theta_1-1)k\Delta t \geqslant 0 \end{aligned} \tag{10.75}$$

若

$$\theta_1 \geqslant 0.5 \tag{10.76}$$

(10.75)式中的第二式自动成立。

如果取 $\theta_1=0.5$，(10.75)式第一式要求时间步长满足

$$\Delta t^2 \leqslant \frac{4m}{k} \tag{10.77}$$

上述条件不能应用到 $m=0$ 一阶方程的 SS21 显式算法，因为这时 $m=0$。然而，如果选取 $\theta_1>0.5$，则由(10.75)第一式得到一阶方程需满足的时间步长条件为

$$\Delta t < \frac{c}{k}\,\frac{2\theta_1-1}{\theta_1} \tag{10.78}$$

对结构动力学问题，研究时间步长上限的性质是十分重要的。我们可以将 10.2.5 节讨论一阶热传导方程中的方法用到动力问题中。考察一个具有单自由度的典型单元，要求时间步长满足

$$\Delta t = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\frac{h}{C} = \Delta t_{cir} \tag{10.79}$$

式中 h——单元的长度；

$C=\sqrt{\dfrac{E}{\xi}}$，为弹性波的传播速度。

当质量矩阵为集中质量时，(10.79)式中的系数应修改为 $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$。从(10.79)式中我们再一次看到，最小的单元长度控制临界时间步长。但有趣的是，在结构动力学问题中，临界时间步长与单元长度 h 成线性关系，而在一阶热传导问题中，临界时间步长则与

h 成平方关系。这意味着，在显式计算格式中，减小单元尺寸对结构动力学问题有利。

10.3.6 高阶算法的稳定条件

采用上述方法，我们可以得到各种高阶算法的稳定条件。为了节省篇幅，我们仅将结论介绍如下，有兴趣的读者可参考有关文献[26]。

SS32/31 算法。在零阻尼($C=0$)的情况下，SS32 算法无条件稳定的条件是

$$\theta_1>\frac{1}{2},\theta_2\geqslant\theta_1+\frac{1}{6},\theta_3\geqslant\frac{3}{2}\quad\theta_2\geqslant\frac{1}{4}$$
$$3\theta_1\theta_2-3\theta_1^2+\theta_2\geqslant\theta_3 \tag{10.80}$$

对一阶方程($m=0$)，即 SS31 算法，(10.80)式中的前四个条件相同，最后一个条件修改为

$$3\theta_1\theta_2-3\theta_1^2+\theta_1\geqslant\theta_3-\frac{[6\theta_1(\theta_1-1)+1]^2}{9(2\theta_2-1)} \tag{10.81}$$

如果令 $\theta_3=0$，则得到显式计算格式。当 $c=0$ 时，相应的时间步长应满足

$$\Delta t^2\leqslant\frac{m}{k}\frac{12(2\theta_1-1)}{6\theta_2-1} \tag{10.82a}$$

对一阶方程($m=0$)，时间步长应满足

$$\Delta t\leqslant\frac{c}{k}\frac{\theta_2-\theta_1}{6\theta_2-1} \tag{10.82b}$$

SS42/41 算法。对 SS42 及更高阶的算法，在结构动力学问题中($m\neq0$)不存在无条件稳定的算法。这个结论的证明需要用到 Dahlquist 定理[26]。SS41 算法具有无条件稳定的性质，但它的一般表达式过于复杂，我们只介绍一个特例，例如，当

$$\theta_1=\frac{5}{2},\theta_2=\frac{35}{6},\theta_3=\frac{25}{2},\theta_4=24$$

时，SS41 为无条件稳定算法。实际上，上述算法等效于 Gear 四步长后向差分法。

有趣的是，SS 和 GN 两类中的某些算法，在性能和稳定性方

面与目前提出的一些算法具有相似的性质。每种算法都有各自的优点，在实际应用中可以根据不同目的的需要加以选择。表 10.2 到 10.4 列出了几类相似算法的 θ 值。

作为这一章的结尾，我们指出，以上介绍的各种算法，都是从 t_n 时刻的已知量 $\boldsymbol{a}_n$、$\dot{\boldsymbol{a}}_n$ 和 $\ddot{\boldsymbol{a}}_n$ 计算 t_{n+1} 时刻的未知量 $\boldsymbol{a}_{n+1}$、$\dot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$、$\ddot{\boldsymbol{a}}_{n+1}$，这种算法我们统称为一步算法。与一步算法相对应的，还有多步算法。多步算法是利用 t_n、t_{n-1}、t_{n-2} 时刻的已知值求得 t_{n+1} 时刻的各未知量。这种算法因为要涉及到前面好几时步的已知值，初始计算需要特殊处理，计算中也需要存储前几时步的数据，尽管精度有所提高，使用并不方便。关于这方面详细的内容，读者可参阅文献[1]。

表 10.2　与 SS21 等效的一类算法

算法	θ 值
Zlamal	$\theta_1=\frac{5}{6},\theta_2=2$
Gear	$\theta_1=\frac{3}{2},\theta_2=2$
Liniger	$\theta_1=1.0848,\theta_2=1$
Liniger	$\theta_1=1.2184,\theta_2=1.292$

表 10.3　与 SS31 等效的一类算法

算法	θ 值
Gear	$\theta_1=2,\theta_2=\frac{11}{3},\theta_3=6$
Liniger	$\theta_1=1.84,\theta_2=3.07,$ $\theta_3=4.5$
Zlamal	$\theta_1=0.8,\theta_2=1.03,$ $\theta_3=1.29$

表 10.4　与 SS32 等效的一类算法

算　　法	θ　　值
Houbolt	$\theta_1=2,\theta_2=\frac{11}{3},\theta_3=6$
Wilson	$\theta_1=\theta,\theta_2=\theta^2,\theta_3=\theta^3$（通常取 $\theta=1.4$）
Bossak-Newmark	$\theta_2=1-\alpha_B$
$(m\ddot{x}+kx=0,$	$\theta_2=\frac{2}{3}\quad\alpha_B+2\beta_B$

续上表

算　　法	θ　　值
$\gamma_B=\frac{1}{2}-\alpha_B$)	$\theta_3=6\beta_B$
Bossak-Newmark	$\theta_1=1-\alpha_B$
($m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0$,	$\theta_2=1-2\alpha_B$
$\gamma_B=\frac{1}{2}-\alpha_B$,	$\theta_3=1-3\alpha_B$
$\beta_B=\frac{1}{6}-\frac{\alpha_B}{2}$)	
Hilber-Hughes-Taylor	$\theta_1=1$
($m\ddot{x}+kx=0$,	$\theta_2=\frac{2}{3}+2\beta_H-2\alpha_H^2$
$\gamma_H=\frac{1}{2}-\alpha_H$)	$\theta_3=6\beta_H(1+\alpha_H)$

第十一章　误差估计和有限元自适应问题

11.1 引　　言

众所周知，有限元方法得到的仅是近似解。随着单元网格“h”的细分和场函数多项式阶数“p”的增加，精确解和近似解在位移和应力方面的误差

$$e_u = u - \hat{u} \tag{11.1a}$$

$$e_\sigma = \sigma - \hat{\sigma} \tag{11.1b}$$

将会逐渐减小。正是由于有限元法能够收敛于真解，才使得人们可以接受各种形式的单元。然而，除了在一些算例中进行过有限元近似解与精确解的对比外，在给定的单元网格下如何确定误差大小这个核心问题还未解决。

在这一章中，我们将重点讨论以下两个问题：

(a)确定在给定的单元网格下有限元分析造成的误差，即，事后误差估计；

(b)如何优化地细分单元以经济地获得满足精度要求的结果。

一般来说，(a)、(b)两问题是相互有影响的，我们把这样两个互相有联系的问题称作自适应问题。为了获得最佳结果，需要做许多工作。

下面我们将讨论这类自适应问题分析的基本原理，同时给出能用于实际分析的直接方法。

在单元网格重生成时，用户为了节省数据准备时间总是希望保留初始网格，而在原有的基础上，通过下列方法进行单元局部细分：

(a)采用与原有单元相同的单元类型，但单元尺寸(h)减小；

(b)保留原有的单元网格，但在单元内增加结点，提高场函数多项式的阶数(p)；

(c)混合采用(a)、(b)方法。

图 11.1 表示(a)、(b)两种方法可能采用的形式，这两种方法分别称为“h”法和“p”法，简称“h”和“p”。

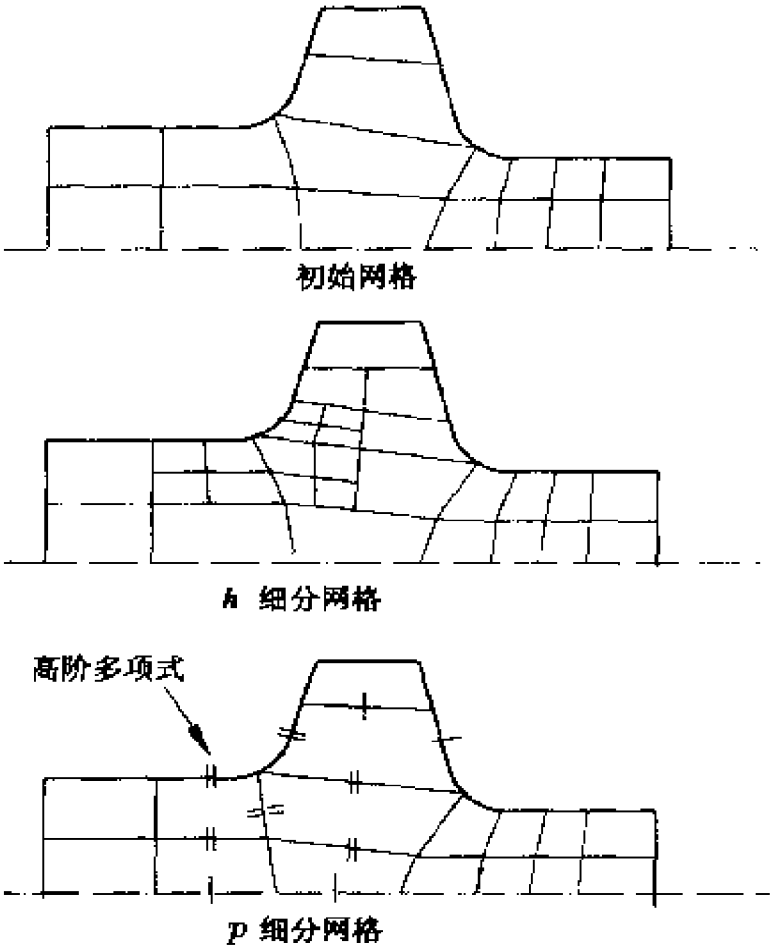


图 11.1 用“h”法和“p”法进行单元网格细分

11.2 误差范数和收敛速度

以(11.1)式的方式定义局部误差通常是不方便的，有时将产生误解。例如，在集中荷载作用的例子中，集中荷载处的位移和应力的局部误差为无穷大，但近似解的整体性能却是可以接受的。在具有凹角的结构线弹性分析中，由于存在应力集中现象，也会产生同样的问题。正是由于这个原因，人们引进了各种积分意义下的范数来度量误差。

例如，若我们考虑的是一般的线性方程

$$\boldsymbol{Lu}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0} \quad (\text{in} \quad \Omega) \tag{11.2}$$

我们可用如下的能量范数定义误差

$$\|e\| = \left(\int_\Omega \boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}} = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.3}$$

实际上，上述标量相当于二次泛函的平方根寻求自伴随算子 $\boldsymbol{L}$ 的极小值。

对弹性问题，可类似定义下列能量泛函

$$\|e\| = \int_\Omega (\boldsymbol{S}\boldsymbol{e})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{e})\mathrm{d}\Omega \tag{11.4}$$

式中 $\boldsymbol{e}$——位移或应力误差，见(11.1)式；

$\boldsymbol{S}$——应变算子

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{u} \quad 及 \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}=\boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{u}} \tag{11.5}$$

$\boldsymbol{D}$——弹性矩阵

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad 及 \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}}=\boldsymbol{D}\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{11.6}$$

(11.4)式的能量范数还可进一步表示为

$$\begin{aligned}\|e\| &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon}-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\varepsilon}-\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}-\hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}-\hat{\boldsymbol{\sigma}})\boldsymbol{D}^{-1}(\boldsymbol{\sigma}-\hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{11.7}$$

其他标准形式的范数也可以很容易地得到，例如，位移和应力误差的 L_2 范数可表示为

$$\|e_u\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.8}$$

$$\|e_\sigma\|_{L_2} = \left[\int_\Omega (\boldsymbol{\sigma}-\hat{\boldsymbol{\sigma}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}-\hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathrm{d}\Omega\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.9}$$

这样定义的一些范数使得我们能研究那些特别感兴趣的量，也使计算误差的均方根(RMS)成为可能。例如，区域 Ω 中应力误差的均方根 $\Delta\sigma$ 为

$$\|\Delta\sigma\| = \left(\frac{\| e_\sigma \|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{11.10}$$

上述任何形式的范数都适用于全域、部分域及单元的误差估计。

注意到

$$\| e \|^2 = \sum_{i=1}^{m} \| e \|_i^2 \tag{11.11}$$

式中 i——单元区域 Ω_i；

m——单元总数。

进一步还可看到，能量应力范数、L_2 应力范数以及应力均方根范数在形式上非常类似，且估计值也非常相近。

在有限元理论中，我们知道如果位移是 p 次的多项式函数，其应力误差则为 $O(h)^p$。这一结论也应适合误差的能量范数 $\| e \|$。对于无奇异性的问题，误差能量范数有同样的结论。但对于存在奇异性的结构，这一结论并非成立。

图 11.2 和图 11.3 表示两个类似结构的应力分析问题，但第一个例题，结构存在强奇异性[26]。两图中给出了单元均匀细分(h)和多项式阶数 p 增加时误差相对能量范数

$$\eta = \frac{\| e \|}{\| u \|} \times 100\% \tag{11.12}$$

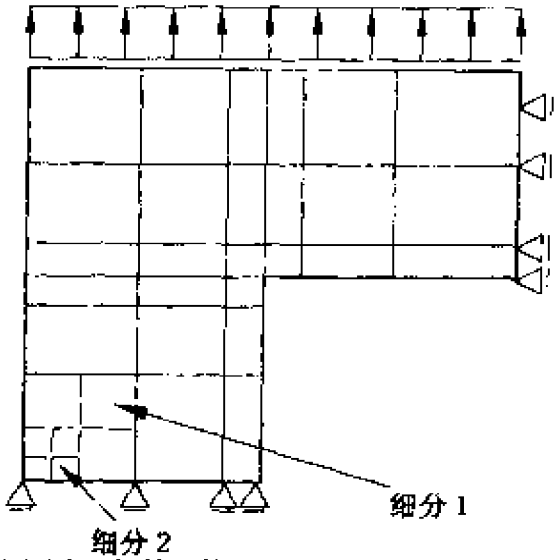
的变化情况。

我们看到了两个有趣的事实。首先，在有奇异性的例题中，"h"收敛速度对线性、二次和三次形状函数几乎都是相同的，且低于理论预计精度 $O(h)^p$，或 $O(NDF)^{-p/2}$（其中 NDF 为自由度数，NDF 近似地与 h^2 成反比）。

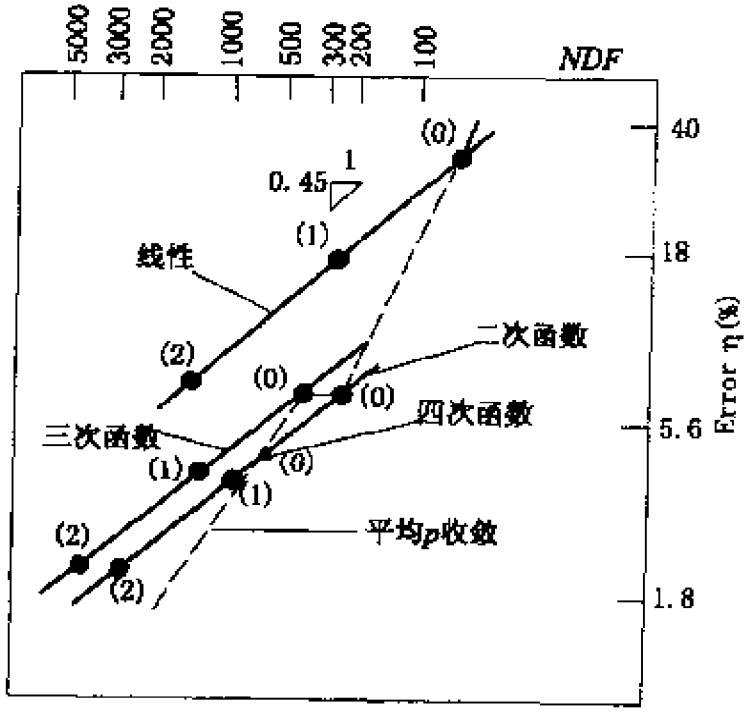
其次，在图 11.3 中，凹角用圆弧过渡避免了奇异性，尽管"h"收敛速度仍低于理论预计值（渐近线），但高阶单元的收敛速度得到了大大改善。

出现这种现象的原因，显然是奇异性。可以证明，对于具有奇异性的问题，其收敛速度为

$$O(NDF)^{-[\min(\lambda, p)]/2} \tag{11.13}$$



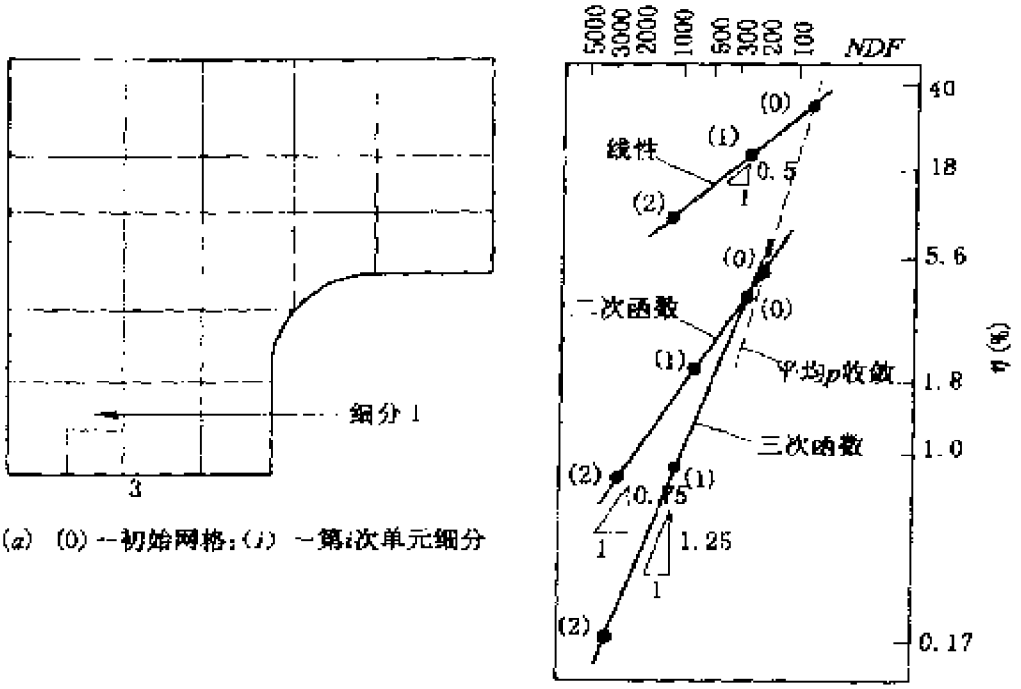
(*a*) (0)—初始网格；(*i*)—第*i*次单元细分



(*b*) 误差η与自由度数*NDF*的关系

图 11.2 受均布荷载作用具有奇异性的 L 型物体，不同 p 值下的"h"收敛速度

（平面应力问题，ν = 0.3）



(a) (0)--初始网格；(i) --第i次单元细分

(b) 误差η与自由度数NDF的关系

图 11.3 受均布荷载作用无奇异性的 L 型物体，
不同 p 值下的"h"收敛速度、平面应力问题 $E=1, \upsilon=0.3$。

(11.13)式中，λ 是与奇异强度有关的数，在弹性问题中，λ 的值在 0.5～0.71 之间，$\lambda=0.5$ 对应于裂缝，$\lambda=0.71$ 对应于 90°的转角[31]。图 11.2 中各阶次 p 单元的 h 收敛速度主要受奇异性控制。

图 11.4 表示另一个具有强奇异性的问题。采用线性和二次三

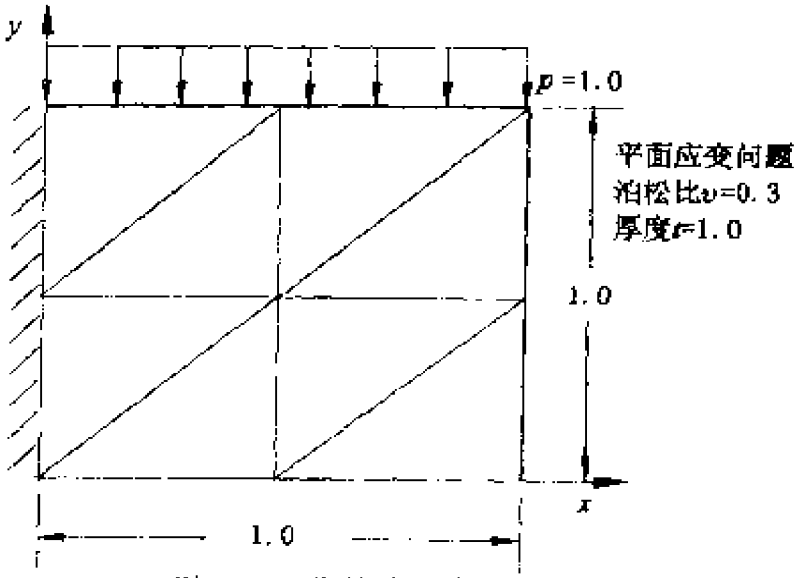


图 11.4 深悬臂梁受均匀荷载作用

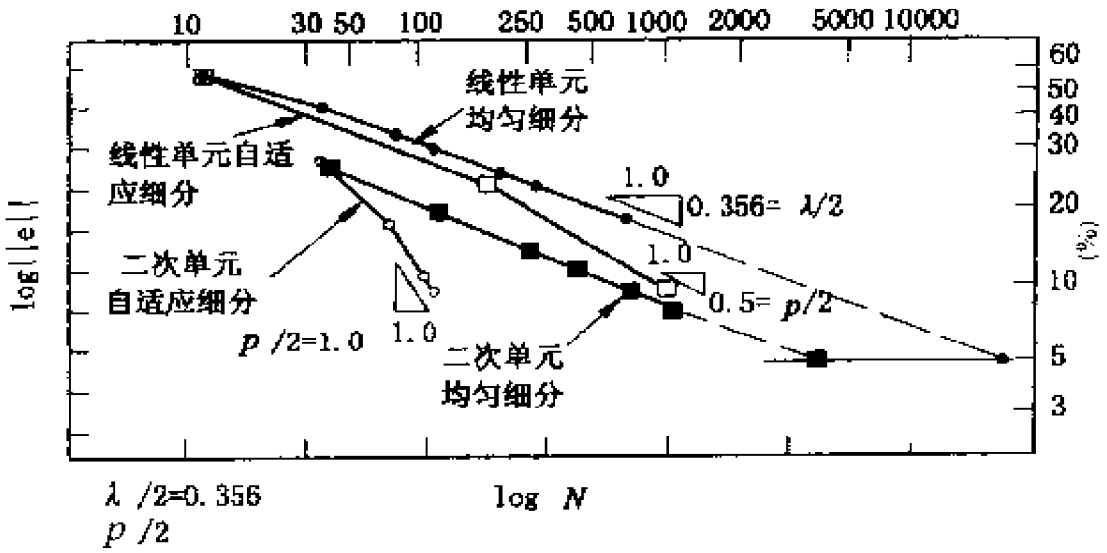
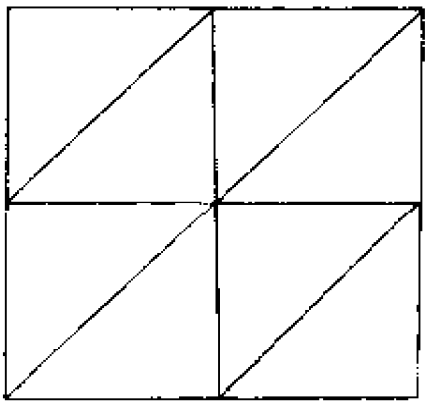
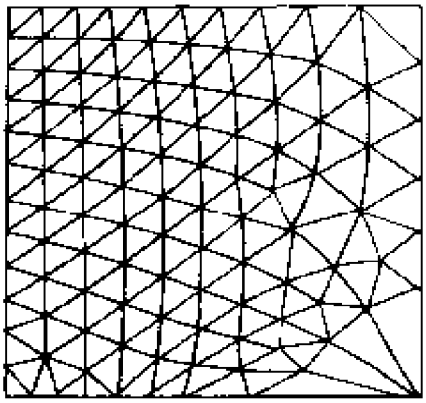


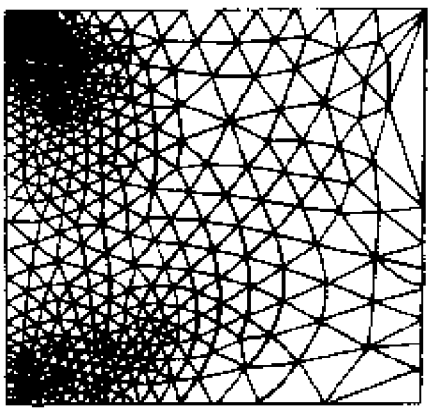
图 11.5　深悬臂梁的试验收敛速度



网格 1



网格 2



网格 3

图 11.6　深悬臂梁三角形单元自适应网格

角形单元。除非按如图 11.6 所示的自适应方法细分网格，否则当单元均匀细化时，其收敛速度同样地主要受奇异性控制，如图 11.5。用自适应方法细分单元，我们将得到一优化网格。在优化网格中，各单元具有相同的误差。优化网格的理论收敛速度仅与 p 值有关，如图 11.5。

关于如何采用自适应方法细分单元我们将在后面讨论。

从图 11.2 和 11.3 中，我们还可以看到一个明显的事实，那就是"p"收敛速度通常较快。这一点只要对相同的网格采用不同的多项式次数进行计算就可验证其正确性。

如果在"p 法"中采用优化网格，那么 p 收敛速度还将大大提高。

11.3 误差估计——一种简单有效的 h 细分法

在弹性问题中，若采用线性单元，则位移近似解 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 具有 C_0 连续性，而应力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ 在单元间则是不连续的。利用应力平均和应力磨平的方法，可以得到改进的具有 C_0 连续的应力 $\boldsymbol{\sigma}^*$。应力改进值 $\boldsymbol{\sigma}^*$ 可用与位移相同的插值函数确定

即
$$\boldsymbol{\sigma}^* = \boldsymbol{N}\bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \tag{11.14}$$

式中 $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*$——结点应力改进值向量。

将(11.14)式代入泛函

$$A(\boldsymbol{\sigma}^*, \hat{\boldsymbol{\sigma}}) = \int_\Omega \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})\mathrm{d}\Omega \tag{11.15}$$

式中 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$——有限元近似解应力。

对(11.15)式变分

$$\frac{\partial A}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = 0 \tag{11.16}$$

则有

$$\int_\Omega \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\sigma}^* - \boldsymbol{\sigma})\mathrm{d}\Omega = 0 \tag{11.17}$$

由此可得：

$$\bar{\sigma}^* = A^{-1}\left(\int_\Omega N^T \hat{\sigma} d\Omega\right) \tag{11.18}$$

式中

$$\hat{\sigma} = DBa \tag{11.19}$$

$$A = \int_\Omega N^T N d\Omega \tag{11.20}$$

式中 a —有限元结点位移向量。

将(11.18)式代入(11.14)式，即得到应力改进值 σ^*。

现在定义应力误差

$$e_\sigma = \sigma^* - \hat{\sigma} \tag{11.21}$$

将(11.21)式代入(11.7)、(11.9)式或(11.10)式，就可在求解有限元方程后，对应力误差的各种范数进行计算(事后估计)。

通过与精确值误差范数计算对比，发现用应力改进值 σ^* 代替精确值 σ 进行误差估计是非常有效的。图 11.7 至图 11.15 给出了一系列误差估计的例子。这些例子涉及各种网格和各种单元类型。例中采用了有效误差估计指标，其定义为

$$\theta = \frac{\| e \|_{估计}}{\| e \|_{精确}} \tag{11.22}$$

大量的计算经验显示，上述误差指标可通过乘以一修正系数加以改进。对弹性问题这个系数为：

双线性四边形单元 1.1；

双线性三角形单元 1.3；

9 结点二次单元 1.6；

二次三角形单元 1.4。

图 11.7 至图 11.15 中的 θ^* 和 η^* 值就是通过这样修正得到的。当然，即使不作修正，有效误差估计指标 θ 也具有良好的性能。

由于应力改进值 σ^* 比不连续的应力计算值的精度高，显然基于(11.21)式的误差估计是一种较好的估计。从图 11.16 一维弹性问题的例题中可以看到这点。

上述介绍的误差估计是一种最简单的方法，很容易运用于实际问题中。与其他方法比较，这种方法具有良好的精度。下面再介绍用计算"残数"进行误差估计的方法。为此将有限元近似解 $\hat{u}$ 代

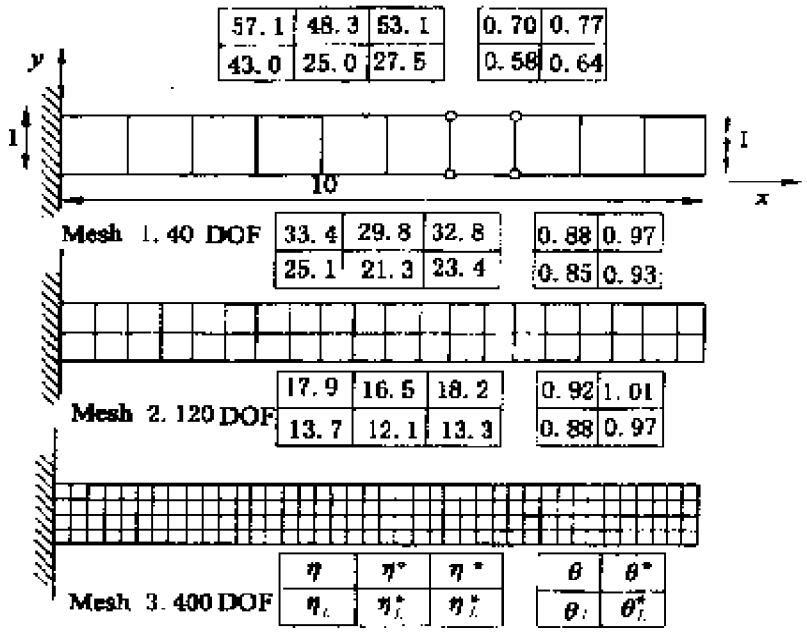


图 11.7 悬臂梁双线性单元均匀细分误差估计与分析

(平面应力问题 $E=10^5, \nu=0.3$)

η …… 能量范数实际误差(%)； θ—— 有效误差估计指标；

η^0 …… 能量范数预测误差(%)；θ' —— 修正的有效误差估计指标；

η' …… 修正的预测误差(%)； 下角标 L 表示 L_2 范数。

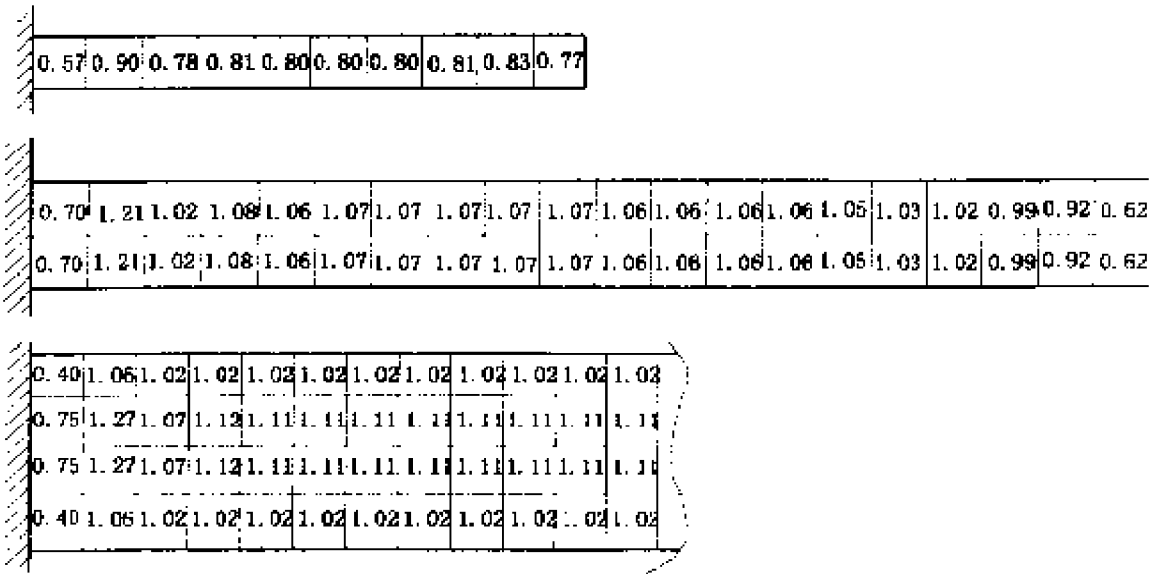


图 11.8 悬臂梁问题的局部有效指标

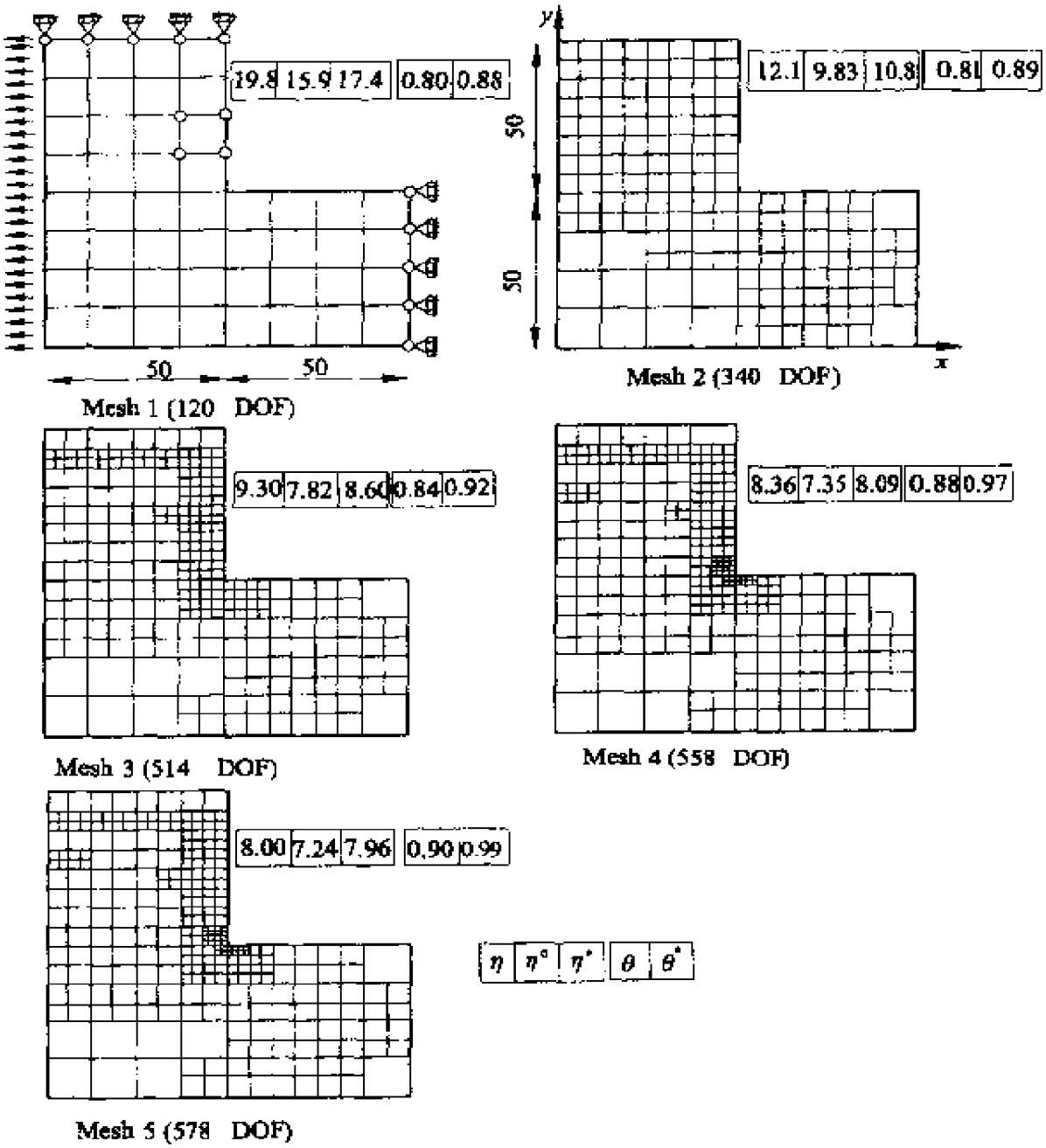


图 11.9 L形物体双线性单元网格逐级细分(平面应力问题)

入到控制方程(11.2)式中,即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{p} \tag{11.23}$$

上述残数在单元内很容易计算,但在单元间的交界面上,若控制方程是二阶微分方程且 $\hat{u}$ 具有 C_0 连续性,则残数为无穷大. 当 $d\Omega\to 0$ 时,残数在域内的积分就等效于不连续的位移梯度(或面力)的边界线积分,即

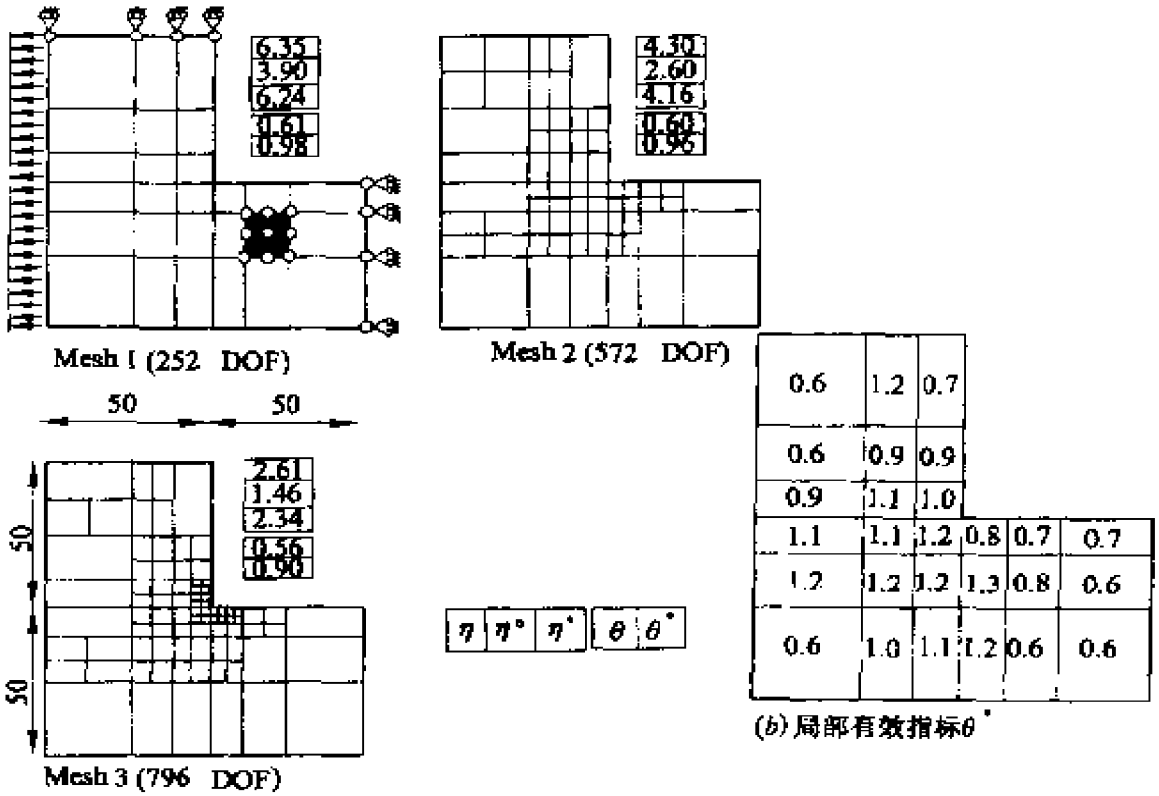


图 11.10 L 形物体 9-结点双二次型单元网格逐级细分
(平面应力问题)

$$\int_{\Omega} r\mathrm{d}\Omega = \int_{I} J\mathrm{d}I \tag{11.24}$$

许多作者得到了类似于上式用能量范数进行误差估计的更一般形式[32~34]

$$\| e \|^2 = C_1\int_{\Omega} r^2\mathrm{d}\Omega + C_2\int_{I} J^2\mathrm{d}I \tag{11.25}$$

式中 $r^2 = \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}$;

I —— 所有单元间的交界面。

对单个二维单元，文献[33]给出了如下估计式

$$\| e \|^2 = \frac{h^2}{24kp^2}\int_{\Omega} r^2\mathrm{d}\Omega + \frac{h}{24kp}\int_{I} J^2\mathrm{d}I \tag{11.26}$$

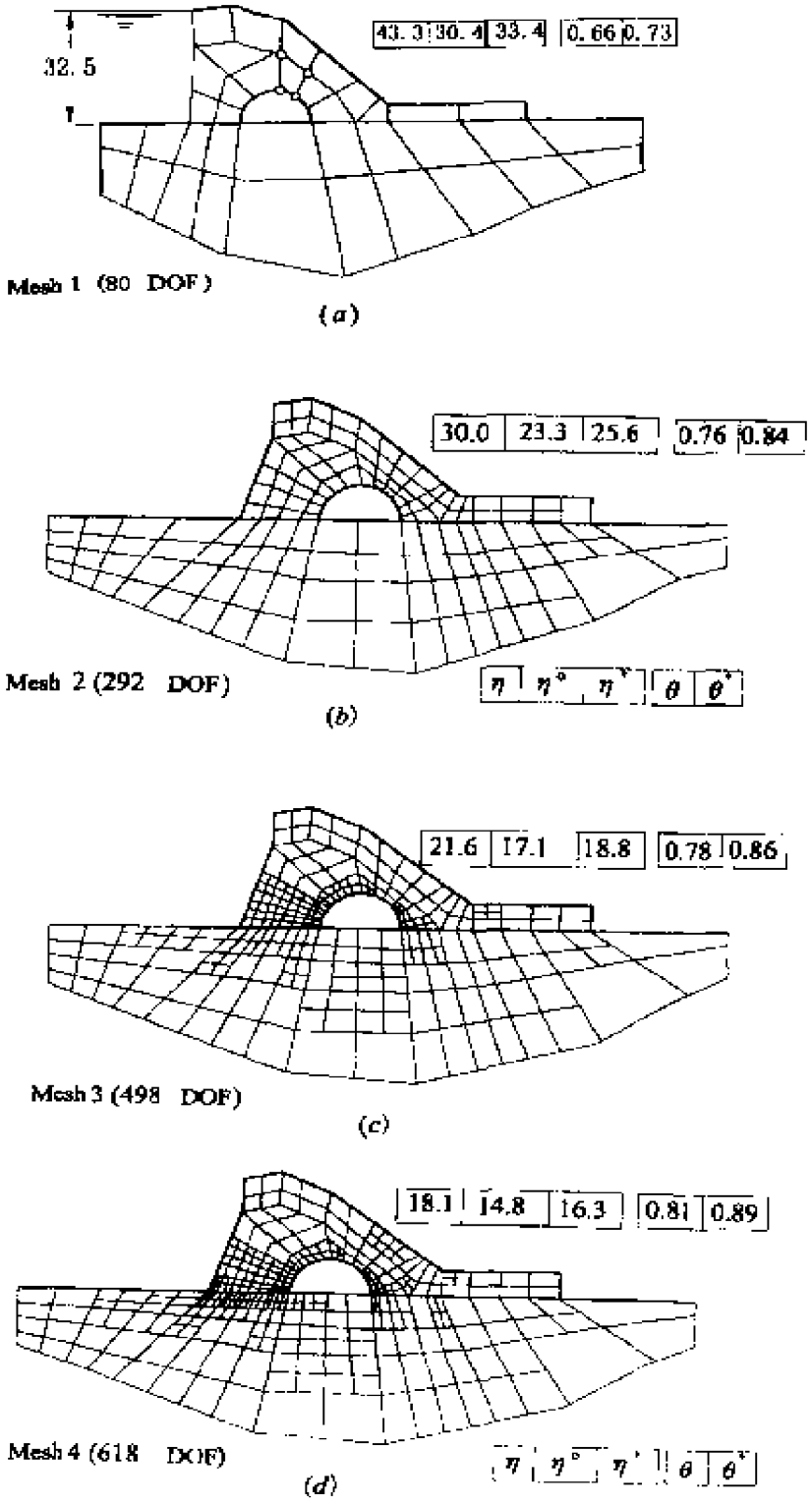


图 11.11 空腹坝双线性单元网格逐级细分(平面应变问题)

网格逐级细分(a) (d)

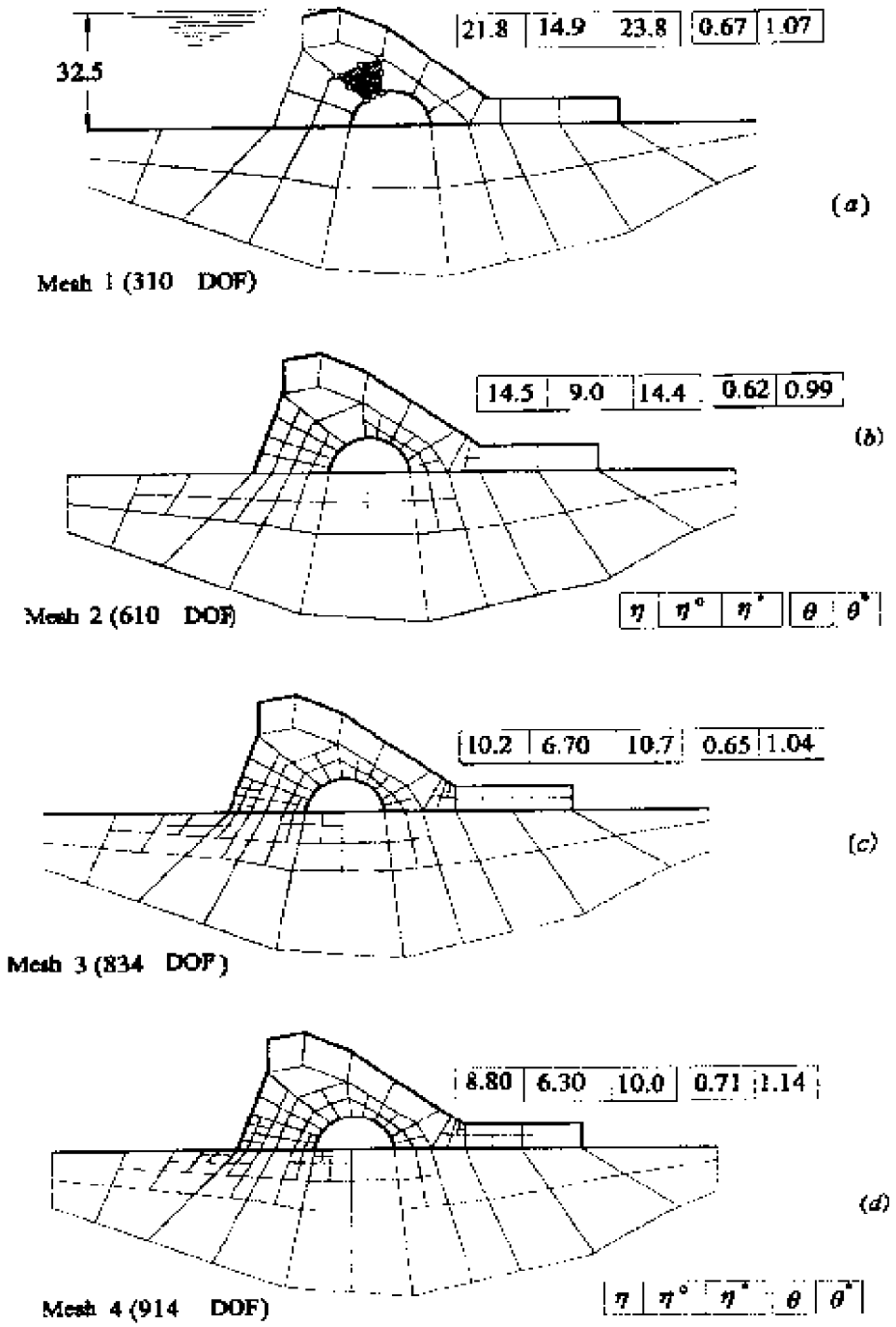
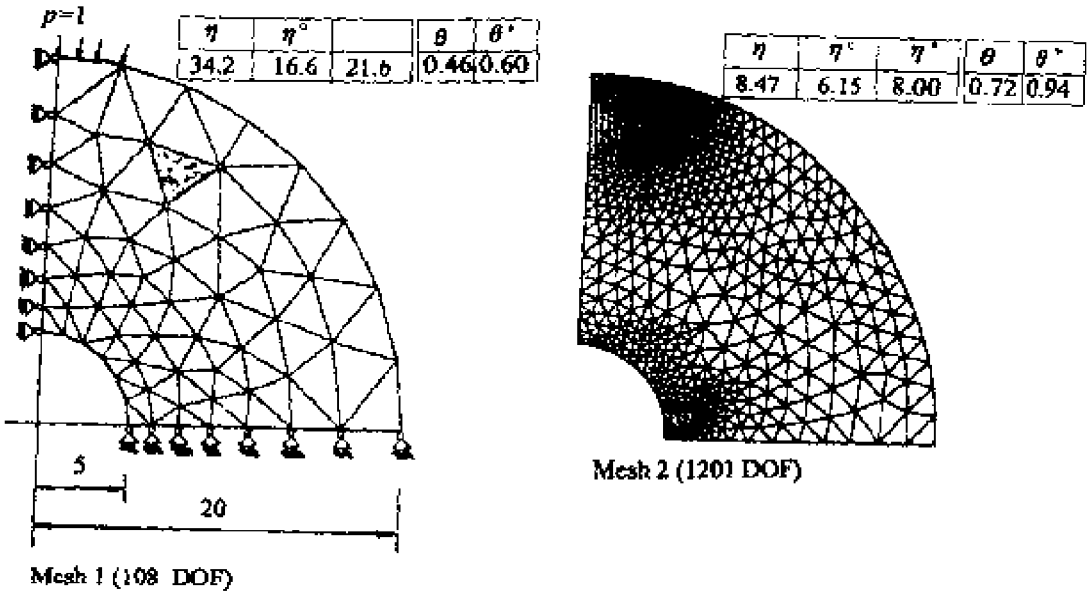
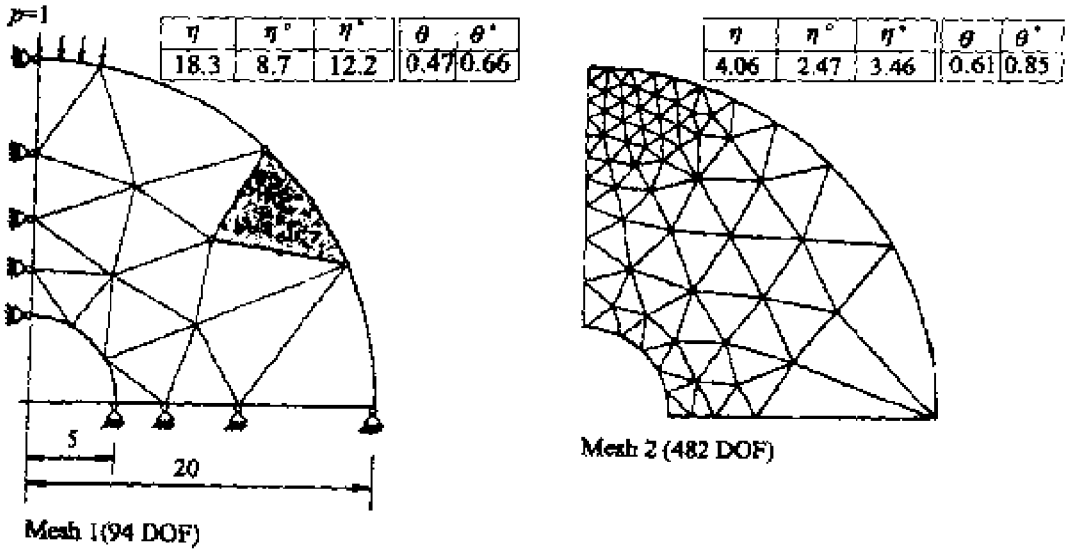


图 11.12 空腹坝双二次单元网格逐级细分(平面应变问题)

网格逐级细分(a)-- (d)

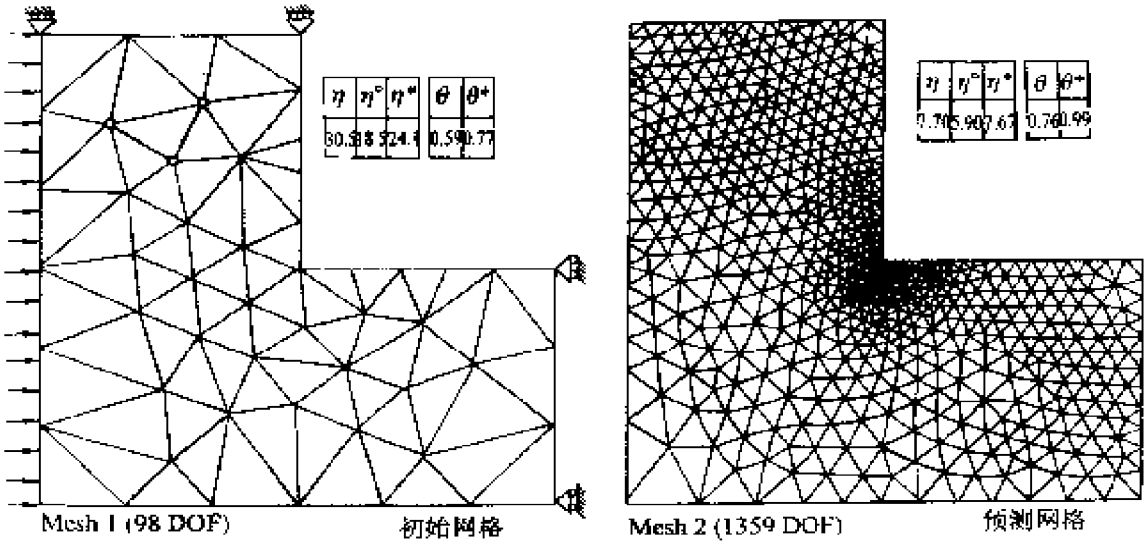


(*a*) 线性单元

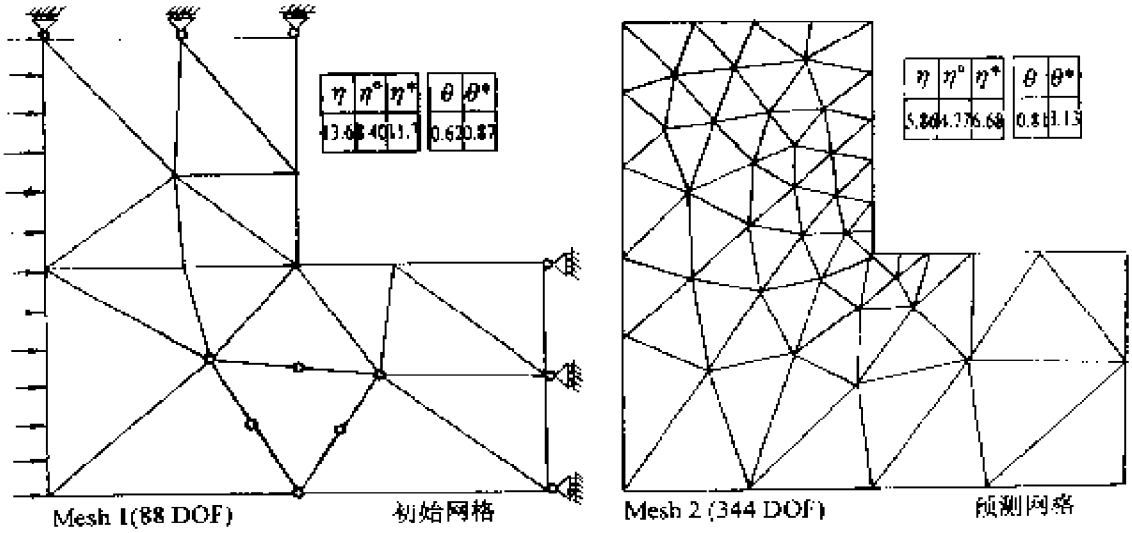


(*b*) 二次单元

图 11.13　网格自动生成以达到5%的精度，受径向压力作用的厚壁圆筒



(a) 线性三角形单元



(b) 二次三角形单元

图 11.14　网格自动生成以达到 5% 的精度，L 形物体平面应力问题

* 按(11.34)式进行网格细分，358 个自由度即可达到 4.61% 的精度

式中　k——与问题类型有关的系数，如：对弹性平面应力问题 $k=\dfrac{E}{(1-\upsilon)}$；

p——近似解多项式的次数；

h——单元边长。

在这一章的后面几节有关“p”收敛的讨论中，我们还要回到这个问题来。这里我们注意到：

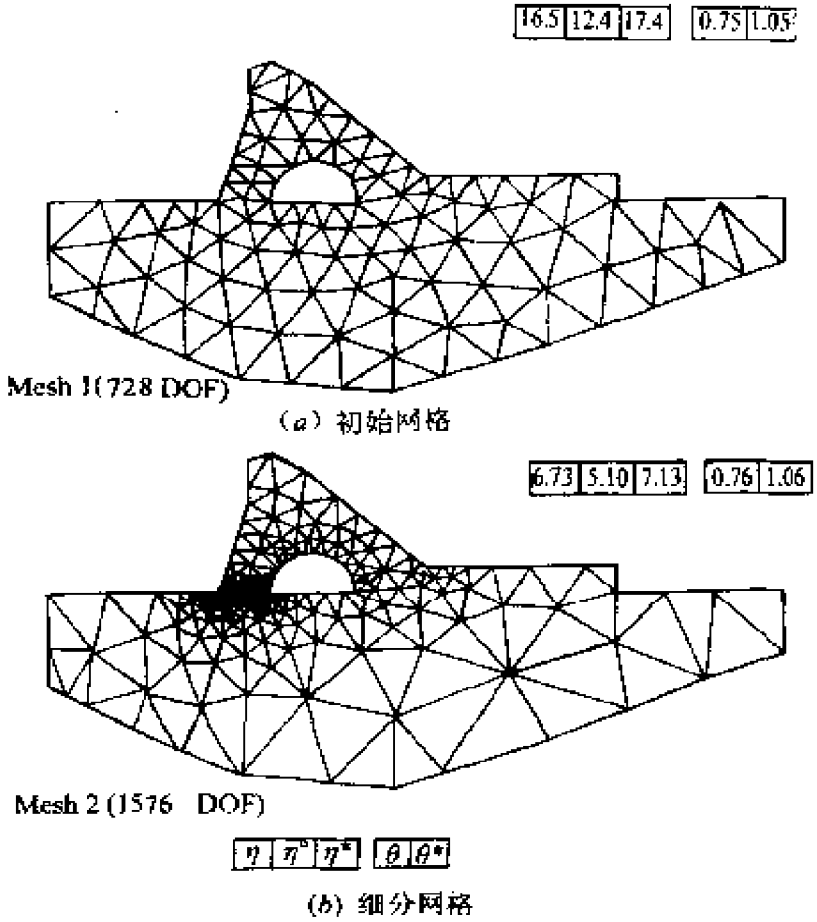


图 11.15 二次三角形单元网格自动生成以达到 5% 的精度：
空腹坝平面应变问题
* 按(11.34)式进行网格细分，1764 个自由度可
达到 4.88% 的精度

(a)由于这种估计包含有不连续量的线积分，因此它比前述的简单估计复杂得多；

(b)至少对四节点双线性单元，应力改进值简单估计法等效于残数积分估计，对此 Babuska 和 Rheinboldt[33]已给出了证明；

(c)对低阶单元而言，(11.26)式积分的主要贡献来自于不连续面力的边界积分。

上述结论已被多数有限元工作者所接受并以此度量误差。实际上，这些结论也被理论所证实。

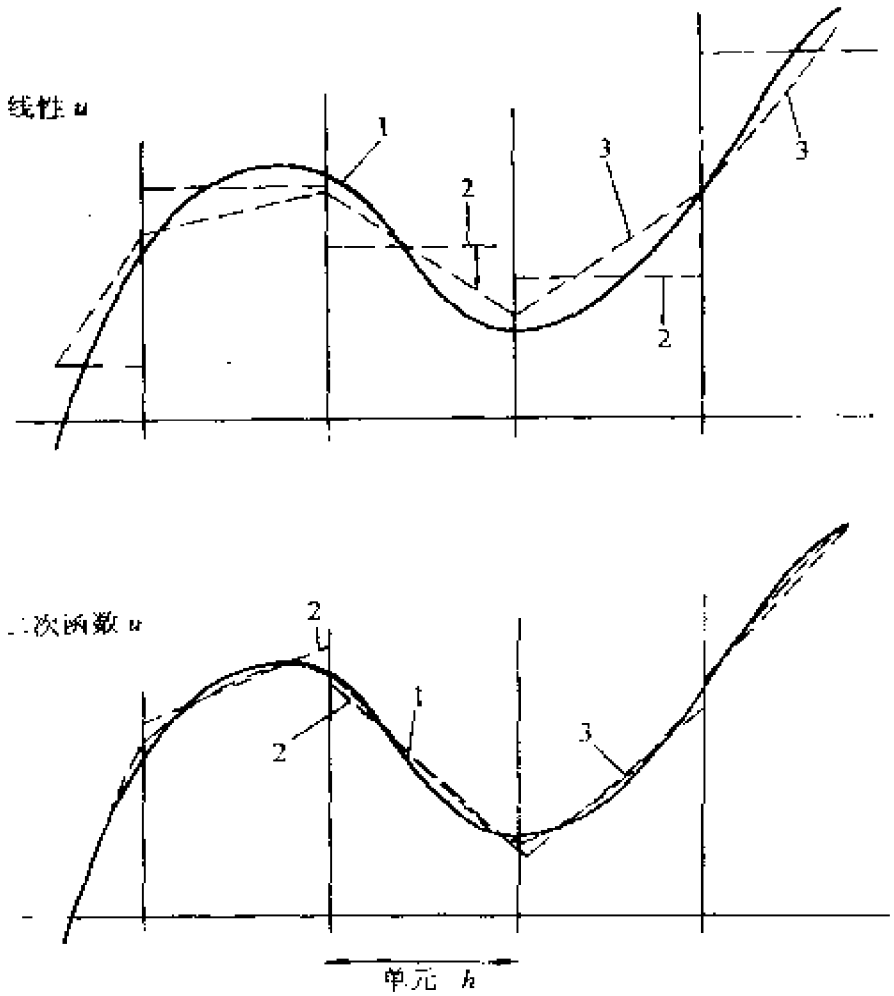


图 11.16　有限元解应力 $\hat{\sigma}$、应力改进值 σ^* 及应力精确值 σ 的比较

1—应力精确值；2—有限元解应力；3—应力改进值。

11.4　h 细分法与自适应分析

上述给出的误差估计法既能反映整体误差，也能在单元水平上较好地体现局部误差，如图 11.8 和图 11.10 所示。如果这些误差均在我们规定的范围内，则计算已结束。但更多的情况是误差超过了允许范围，这就需要细分网格，我们把根据误差准则细分网格这个过程称为自适应过程。这一节的重点就是介绍如何最有效地进行单元细分。显然，有多种选择的方法，这就要看我们的目的是什么。

例如，一种最简单的方法就是使相对能量范数 η 小于规定的

值 η(通常在工程中 $\bar{\eta}$ 规定为 5%)，即

$$\eta \leqslant \bar{\eta} \tag{11.27}$$

我们总是希望，每个单元的能量范数 $\| e \|_i$ 具有相同的值，满足这种条件的网格称优化网格。如果总的允许误差为

$$\bar{\eta}(\| \hat{u} \|^2 + \| e \|^2)^{1/2} \tag{11.28}$$

我们则可定义任意一个单元 i 的能量范数

$$\| e \|_i < \eta \left(\frac{\| \hat{u} \|^2 + \| e \|^2}{m} \right)^{1/2} = e_m \tag{11.29}$$

式中 m ——单元总数。

如果某一单元不满足上述要求，显然该单元需进行网格细分。我们定义

$$\frac{\| e \|_i}{e_m} = \xi_i \tag{11.30}$$

则当

$$\xi_i > 1 \tag{11.31}$$

时，表示单元需要细分。

网格细分需逐步进行，每次只对 $\xi_i > 1$ 的单元对半细分。这个过程称为逐步加密或自适应分析，如图 11.9～图 11.12 所示。这种方法最终能获得满意的解，且总自由度数相对较少。但却不是经济的方法，因为单元逐步加密需要很多时间。

一种更有效的方法就是重新生成网格，使之满足

$$\xi_i \leqslant 1 \tag{11.32}$$

为了达到这个目的，我们在单元水平上采用渐近收敛准则(尽管在有奇异性存在的问题中不可能做到这点)来预测单元尺寸，例如，若我们假定

$$| e |_i \propto h_i^p \tag{11.33}$$

式中 h_i ——当前单元的边长；

p ——近似解多项式的阶数。

为了满足(11.28)式，单元边长应小于下式

$$h = \xi_i^{-\frac{1}{p}} h_i \tag{11.34}$$

目前，已经出现了规定单元边长的网格自动生成程序。从图11.6及图11.13～图11.15中，我们看到了如何由相对粗糙的网格利用预测单元边长的方法而获得了满足精度要求的解。

根据渐近收敛准则预测单元边长进行网格重生成之所以获得成功，其原因是这样的网格细分趋向于优化网格，局部区域的奇异性对全域的收敛性影响不大。我们在图11.6中已经看到了这点。

当然，奇异性是确确实实存在的，为了生成更好的网格，我们对(11.34)式作如下修正

$$h=\xi_i^{-1/\lambda}h_i \tag{11.35}$$

式中 λ ——奇异性强度因子。

对大多数奇异性问题，λ 的范围为0.5～1.0，为方便起见，通常取 $\lambda=0.5$。利用(11.35)修正式，我们对网格进行重生成，一次就取得了较好的结果，如图11.14和图11.15。

在已给出的例题中我们看到了网格加密的一般过程，随着网格的细分或重新生成，结点的总自由度数将会增加。但自由度增加并不意味误差将减小。例如，一个密细的但分布不合理的单元网格的误差将大大高于近于优化网格的误差。为了说明这点，让我们来考虑图11.17的例子。在这个例子中，我们规定误差的精度 η 为5%。我们从均匀网格开始进行网格重生成。单元边长由(11.34)和(11.35)两式预测。

我们看到，均匀网格(8×8单元)总结点自由度数为544，$\eta=9.8\%$，网格重生成后，总结点自由度数为460，$\eta=3.1\%$。也就是说网格重生成后，自由度数减少了而精度却提高了。

如果求解的问题具有方向特征(例如位移 u 沿局部坐标 x' 迅速变化，沿 y' 则变化缓慢)，则在进行网格细分时必须考虑其影响，否则将得不到优化网格。这时我们可以在函数变化快的方向上进行单元细分，在函数变化慢的方向上采用单元粗分或保留原网格。这种方法我们在 p 收敛一节中还要讨论。也可以在不同的方向上引入不同的误差范数。我们在后面还会间接地提到。

正象我们前面指出的一样，能量范数并非是实际运用中最好

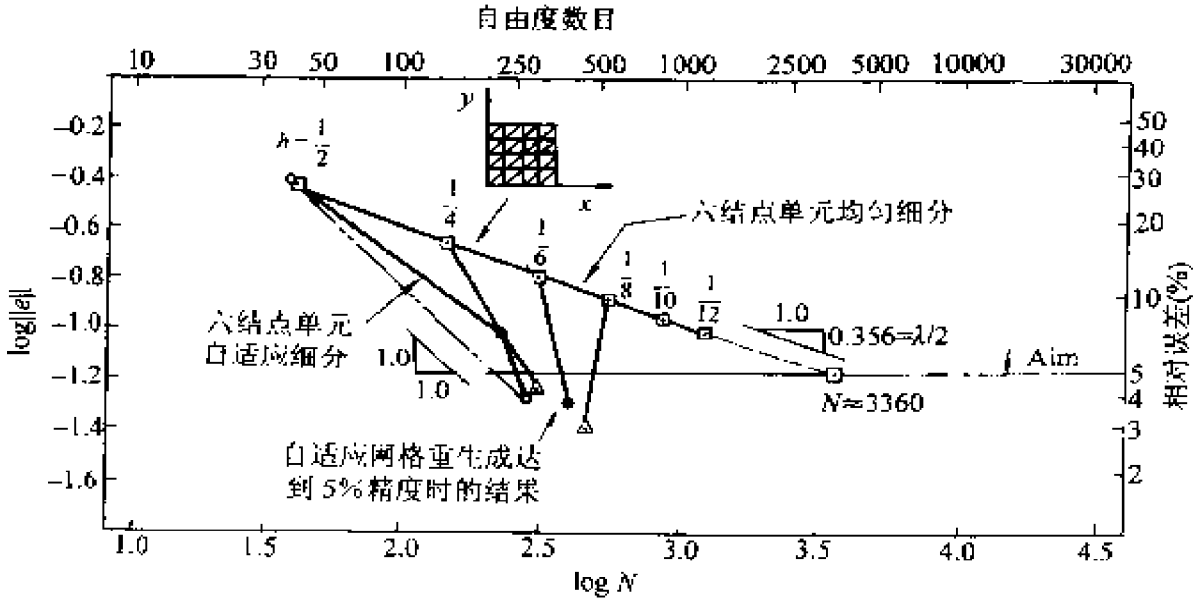


图 11.17　初始网格对 h 收敛速度的影响(二次三角形单元网格自适应细分)

的误差估计方法。局部应力误差(11.10)式也很有效。尽管这种局部估计不太精确,但有时也能得到好的结果。

通过恰当地重新生成网格和计算,能够获得足够精度的应力、位移和应力强度因子等值。这方面的内容很丰富,有兴趣的读者可进一步参考其他文献。

11.5　阶谱格式的误差估计
—p 自适应基础

一旦由(11.7)式获得了近似解的总误差,我们就可作多种选择。一种办法是通过对原有网格作对半加密,另一种做法是提高近似解多项式的阶数,从而获得一个新解。

根据前后两个解可以进行局部误差估计,但是这个估计所花费的代价是相当巨大的。

但如果采用阶谱(Hierarchic)格式,只需用到初始近似解就可进行局部误差估计,其代价则在合理范围内[37]。在 Hierarchic 格式中,对位移进行普通插值

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a} \tag{11.36}$$

得到有限元离散方程为

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{f} \tag{11.37}$$

将阶谱变量 $\boldsymbol{a}^h$ 加入到位移函数中，即

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}^p+\boldsymbol{N}^h\boldsymbol{a}^h \tag{11.38}$$

(11.37)式则变成

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{K}^{ph}\\ \boldsymbol{K}^{hp} & \boldsymbol{K}^{hh}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{a}^p\\ \boldsymbol{a}^h\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\boldsymbol{f}_1\\ \boldsymbol{f}_2\end{Bmatrix} \tag{11.39}$$

解上述方程，得到误差近似式为

$$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a}^p-\boldsymbol{a})+\boldsymbol{N}^h\boldsymbol{a}^h \tag{11.40}$$

将

$$\boldsymbol{a}^p\approx\boldsymbol{a} \tag{11.41}$$

代入(11.39)式中的第二式则得到

$$\boldsymbol{a}^h=(\boldsymbol{K}^{hh})^{-1}(\boldsymbol{f}_2-\boldsymbol{K}^{hp}\boldsymbol{a}) \tag{11.42}$$

计算 $\boldsymbol{a}^h$ 时，仅需对矩阵 $\boldsymbol{K}^{hh}$ 求逆即可。

即使近似解是很粗糙的，通过一次次引入阶谱函数，也会得到很好的结果。

对每一个在结点 i 引入的自由度，$\bar{u}_i^h$ 是标量，且

$$(K_{ii}^{hh})^{-1}=\frac{1}{K_{ii}^{hh}} \tag{11.43}$$

为了将局部误差估计 $\boldsymbol{e}_i^h=\boldsymbol{N}_i^h\boldsymbol{a}^h$ 转换成能量范数，我们有各种不同的方法。

一种方法就是计算相应的应力和应变改变量，由(11.4)式可得

$$\|e\|_i^2=\bar{u}_i^{hT}\int(\boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_i^h)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{N}_i^h)\mathrm{d}\Omega\bar{u}_i^h=u^{hT}K_{ii}^{hh}\bar{u}_i^h \tag{11.44}$$

总误差估计为

$$\|e\|=\left(\sum_{i=1}^{S}\|e\|_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11.45}$$

式中 i——对所有引入的自由度数求和。

另一种方法则是采用残数积分法，注意到

$$\|e\|_r=\left(\int_\Omega\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}}=\left(-\int_\Omega\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11.46}$$

因为对于任意微分方程有

$$\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{u}}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{r} \tag{11.47}$$

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0} \tag{11.48}$$

将(11.48)式减去(11.47)式，得到

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{L}(\boldsymbol{u}-\hat{\boldsymbol{u}})=-\boldsymbol{r} \tag{11.49}$$

对给出的位移 $\hat{\boldsymbol{u}}^h$，根据(11.24)和(11.25)两式可分别算出 $\boldsymbol{r}$ 在单元内和单元边界上的值。我们注意到(11.39)中的第二个方程实际上就表示一加权残数误差，即

$$\boldsymbol{K}^{hh}\boldsymbol{a}^h=-\int_{\Omega}\boldsymbol{N}^h\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega \tag{11.50}$$

利用(11.40)和(11.41)两式，对于引入一个变量 $\bar{u}_i^h$ 的情形，(11.46)式可表示成

$$\|e\|_i^2=\frac{(\int_{\Omega}N_i^h\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega)^2}{K_{ii}^{hh}}=C_i^2 \tag{11.51}$$

上述表达式与(11.44)式完全相同，作为非常准确的误差估计指标，它可用来判断何处需增加自由度。但是，如果新引入的插值函数 N_i^h 与残数 $\boldsymbol{r}$ 正交时，它将失去作用。这时利用许瓦兹不等式可以得到(11.51)式的改进式。因为

$$\left(\int_{\Omega}N_i^h\boldsymbol{r}\mathrm{d}\Omega\right)\leqslant\left(\int_{\Omega}(N_i^h)^2\mathrm{d}\Omega\right)\left(\int_{\Omega}\boldsymbol{r}^2\mathrm{d}\Omega\right) \tag{11.52}$$

如果再乘以修正因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，则得到改进的误差估计式为

$$\|e\|_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{\sum\left(\int_{\Omega}(N_i^h)^2\mathrm{d}\Omega\int_{\Omega}\boldsymbol{r}^2\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}(N_i^h)^2\mathrm{d}\Gamma\int_{\Gamma}J^2\mathrm{d}\Gamma\right)}{K_{ii}^{hh}}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{11.53}$$

和以前一样，上述表达式中的积分包含域内和边界两部分。求和是对所有引进的新增自由度进行的。

显然，上述方法对 p 自适应问题是非常有效的。在 p 自适应过程中，多项式的阶数可以因单元不同而不同。根据(11.51)式或

(11.53)式，可以计算出所有引入自由度的误差估计值。自适应过程对那些具有最大误差估计值的单元进行。

有时也按下述不等式确定自适应分析

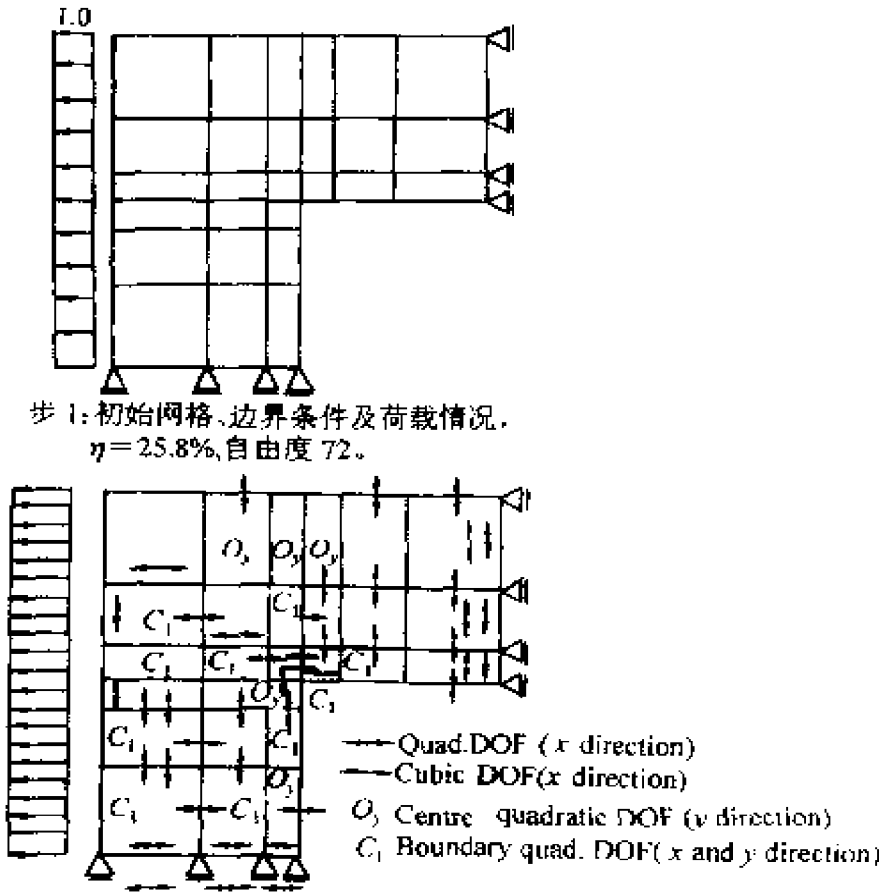
$$C_i \geqslant \gamma C_{max} \tag{11.54}$$

式中 C_{max}——最大误差估计值；

γ——0.1～0.5之间的系数。

显然 $\gamma=0$ 表示所有单元都需增加新自由度。

图11.18即为前面用“h法”讨论过的问题，现用“p法”对这同一问题进行自适应分析。图11.18中给出了最后新增自由度的情况。



步1：初始网格、边界条件及荷载情况，$\eta=25.8\%$，自由度72。

步5：自适应p分析，$\eta=7.2\%$，自由度144。

图11.18 L形物体的p自适应分析

正如前面所指出的那样，p自适应分析也要逐级进行才能达到要求的精度。最终我们能获得自由度较少的网格，但却是不经济

的，我们希望直接获得满足要求的解。关于这方面的进一步讨论，读者可参考有关文献。

11.6 讨　　论

误差估计和自适应问题是有限元应用实践中一个非常重要的课题。这方面的内容非常丰富，这里只对线弹性和自伴随问题进行了有限的讨论。最近的研究表明它的应用领域十分广阔，有兴趣的读者可参考有关文献。这里我们要强调的是误差估计的度量可用许多不同的范数，在某些问题中能量范数实际上是不合理的。一个有说服力的例子就是高速气流绕楔体流动的问题，这是个冲击问题，梯度变化十分剧烈。这个问题较复杂，不展开详细讨论。但这里研究的重点是函数 u 本身而非它的导数，因此用函数 u 本身的 L_2 范数作为误差估计显然比用能量范数更合适。而在如图 11.16 所示的另一个问题中，结点近似解的导数通过应力磨平而获得了较高的精度。据此得到的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}x^2}$（曲率）也具有良好的近似值，这时可用下式作为该问题的误差估计

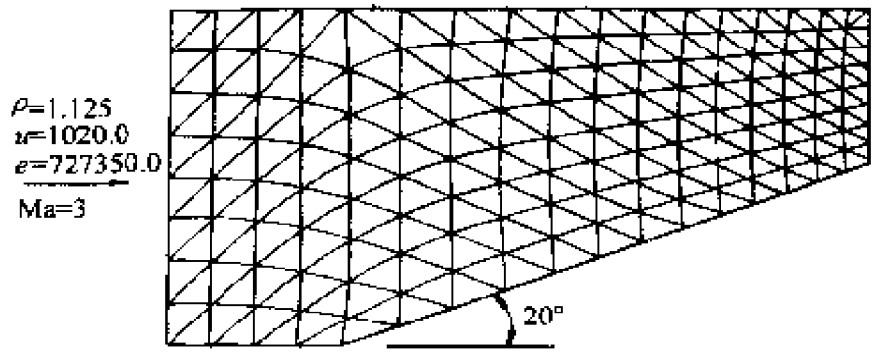
$$e=u-\bar{u}=\frac{1}{2}x_1(h-x_1)\left|\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}x^2}\right| \tag{11.55}$$

如果再假定 x_1 是从单元某一边度量的坐标，$\hat{u}$ 为结点精确值，则立刻得到单元 i 误差估计的 L_2 范数为

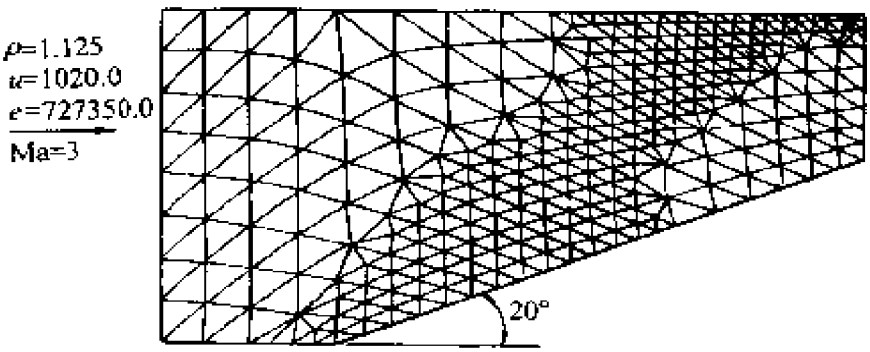
$$\|e\|_i\approx\frac{1}{8}h_i^2\left|\frac{\mathrm{d}^2\hat{u}}{\mathrm{d}x^2}\right| \tag{11.56}$$

据此可对原问题进行自适应分析。

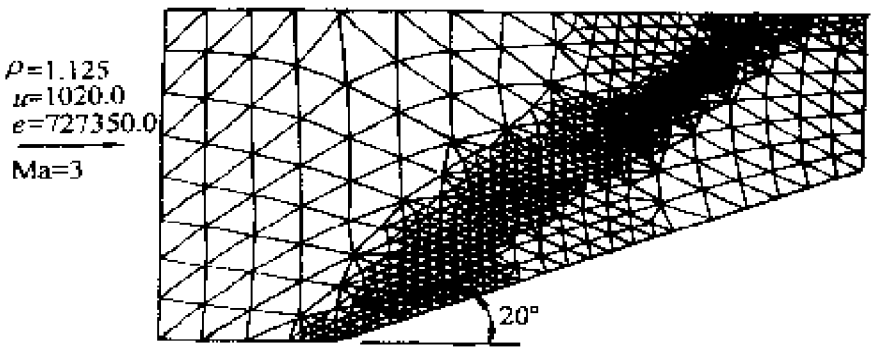
这种方法也可以推广到某些二维问题，运用中既可对整个网格均匀细分，也可仅沿某个方向进行单元加密。图 11.19～图 11.22 即表示采用这种自适应方法跟踪超音速气流冲击区的例子。该问题第一种方案采用了均匀自适应分析，第二方案选择沿某方向采用自适应分析。后一方案得到了优化网格。这种非均匀自适应分析方法也适用于沿某方向存在滑移线的塑性问题，当然这又属于另一应用领域。



(a) 初始网格



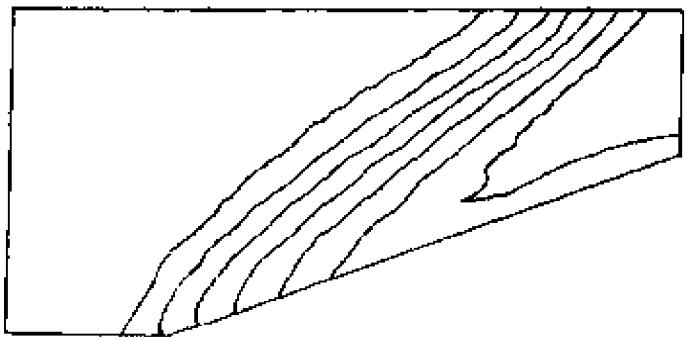
(b)101 步时的网格



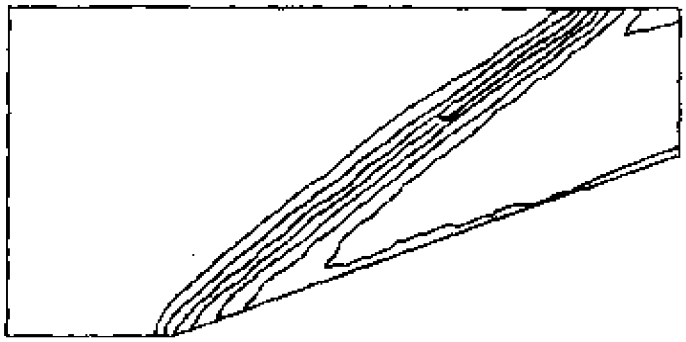
(c) 201 步时的网格

图 11.19 超音速气体通过楔形体

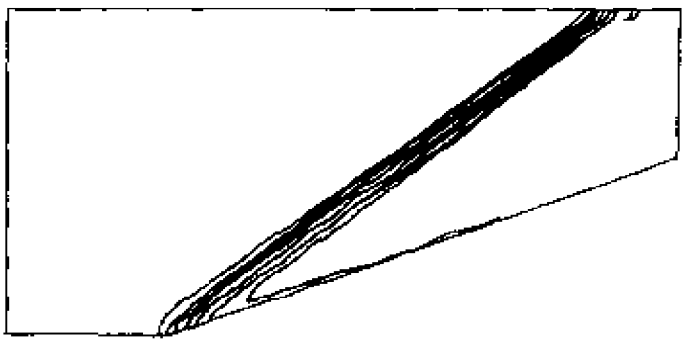
(ρ 为密度，u 为速度，e 为给定的能量值)



(*a*)100 步时的密度

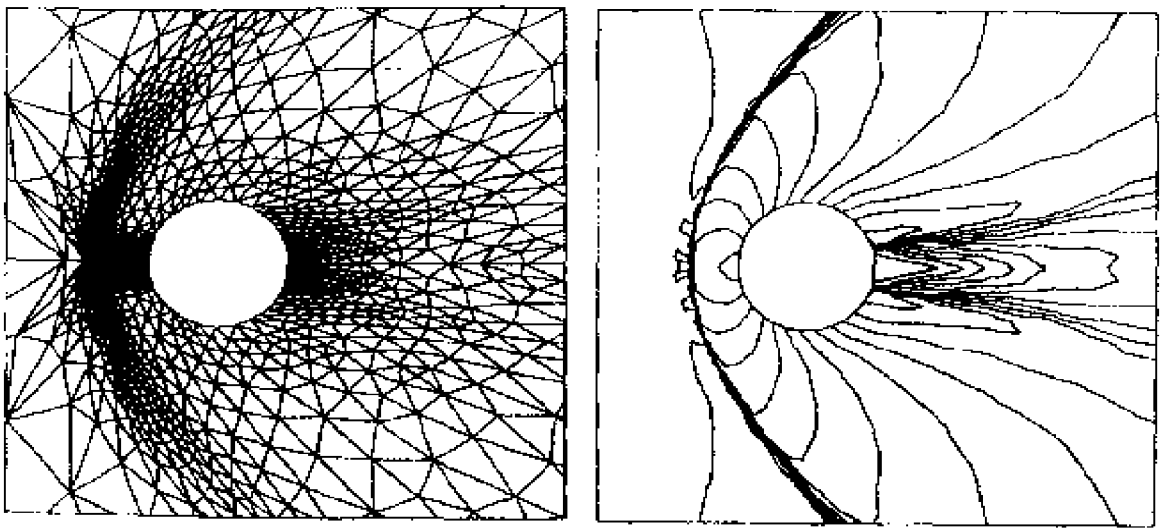


(*b*)200 步时的密度



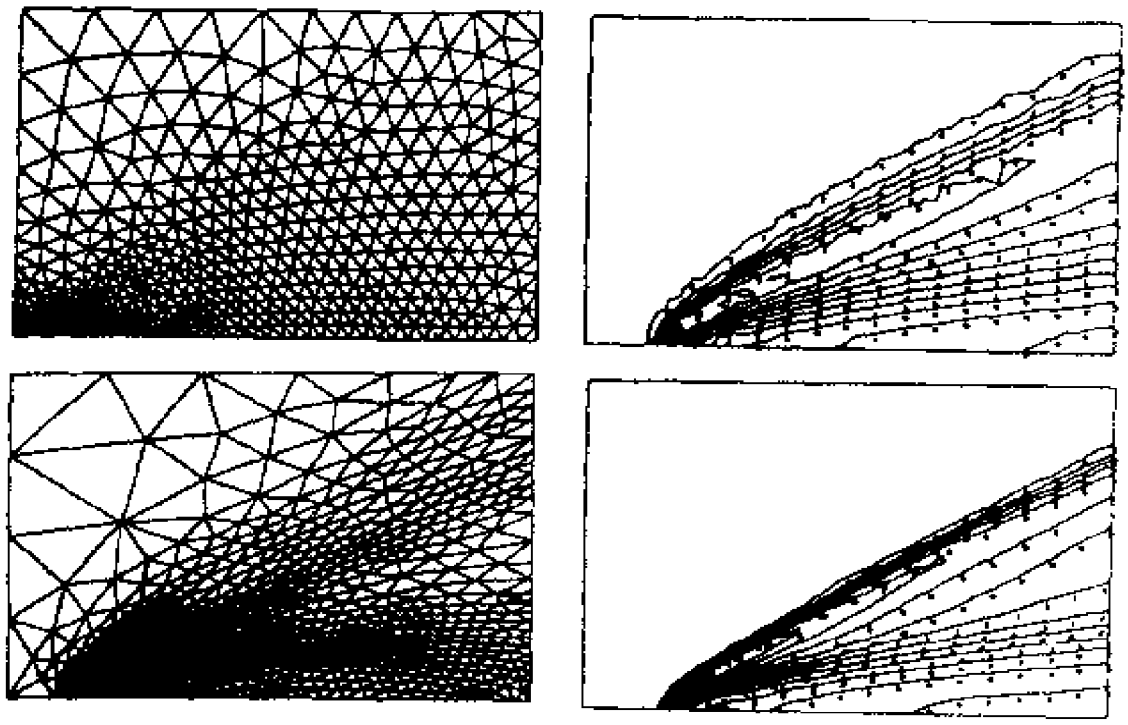
(*c*)250 步时的密度

图 11.20　超音速气流通过契形体时的密度分布



(a)局部网格　　(b)压力系数

图 11.21　气流绕圆柱流动问题，沿给定方向自适应分析
——分三级细分网格，第三次细分后单元数 1348，结点数 709



(a)初始网格和重生成的网格　　(b)密度计算值包络线

图 11.22　粘性气流绕平板流动问题(分三级细分网格)

内 容 索 引

一 画

一致性(Consistency)243
一阶微分方程(First order differential equation)233

二 画

几何模拟(Geometric modeling)66
二阶微分方程(Second order differential equation)233,251
"h"细分("h" refinement)268,275,285
"p"自适应("p" adaptive)285,288,291

三 画

广义模态(Generalized modes)105
大位移(Large displacements)162,163,168
土的液化作用(Soil liquefaction)228
土—毛细孔流相互作用(soil-pore fluid interaction)224
广义纽马克法(Generalized Newmark method)251,256,259

四 画

牛顿—拉夫森法(Newton-Raphson method)6
牛顿—科特斯积分(Newton-Cotes integration)169,170
无限域(Infinite domain)36,40,41
内应变能(Internal strain energy)96
无拉应力模型(No-tension stress model)139
无穷元(Infinite element)142,146
反分析(Back analysis)195,197
不可压缩流体(Incompressible fluid)221
孔隙流(Porous fluid)224

五 画

平衡校正算法(Equilibrium rectification algorithm)10
加载、卸载准则(Loading and unloading criterion)14,23

边界积分方程(Boundary integral equation)38,40,47
边界单元(Boundary element)43
边界应力(Boundary stress)46
边界条件((Boundary conditions)213,214
半无限域(Half infinite domain)37,40,46
边界元耦合于有限元(Coupling boundary elements to finite elements)50,51,54
正交化(Orthogonal to)101
本构关系(Constitutive equation)14,113
节理单元(Joint element)121,125,127,132
对偶边界法(Dual boundary method)199,204,205,206
加权残数法(Weighted residual method)238,252
冯·密赛斯屈服准则(Von. Mises yield criterion)18,19
正交条件(Orthogonality conditions)107

六　画

各向同性硬化(Isotropic hardening)12
刚体位移(Rigid displacements)45,49
有限元与边界元耦合(Coupling of finite elements and boundary elements)50,52,54
刚体模型(Rigid model)56
动力有限元方程(Dynamic finite element equation)238
刚体板单元(Rigid plate element)85
动量平衡原理(Principle of the balance of momentum)90
动量矩平衡原理(Principle of the balance of the moment of momentum)90
关键块的破坏(Key block failure)116
夹层单元(Sandwich element)130,135
有限元耦合于边界元(Coupling finite elements to boundary elements)52
约束条件(Constraint conditions)150,156

收敛准则(Convergence criteria)203
自由边界(Free boundary)213
自由振动(Free vibration)217
交叉算法(Staggered algorithm)233,236,237
优化网格(Optimal mesh)275
收敛速度(Convergence velocity)275,288
自适应分析(Adaptive analysis)285,288,291
曲线坐标(Curvilinear coordinates)130,149
非线性问题(Non-linear problems)5
阶谱格式(Hierarchic formulation)288,289

七　画

应变硬化塑性(Strain hardening plasticity)11
运动硬化(Motion hardening)14
应力应变关系(Stress-strain relationship)14
应变软化(Strain softening)21
体积力(Body forces)48
坐标更新(Update of coordinates)66
运动接触(Motion contact)79
应力振荡(Stress oscillation)169,171
张开状态(Open state)151
纽马克法(Newmark scheme)258
阻尼矩阵(Damping matrix)215,238
插值函数(Interpolation function)3,42,128,131,134,137,149,155
条件稳定(Conditionally stable)245

八　画

直接迭代法(Direct iteration scheme)5
屈服函数(Yield function)16,18
奇异积分(Singularity integration)56
非相关联塑性(Non-associated plasticity)12

细胞分裂模型(Cell decomposition models)68
图像数据结构(Graph-based data structure)70
空间搜索(Space detection)77
拉格朗日乘子法(Lagrangian multiplier method)81
变分原理(Variational principle)80
变形体模型(Model of deformable bodies)88
质量守恒原理(Principle of conservation of mass)89
欧拉方程(Euler's equation)91
拉拔试验(Pull out test)171
直接法(Direct method)106,204,205,206
固定状态(Fixed state)151,160
参数识别(Parameter identification)219,201,204,205,206
泊松比识别(Identifying poisson's ratio)204,205,206
单步长算法(Single step algorithm)238
单元细分(Element refinement)275,285
固有模态(Nature modes)95
质量矩阵(Mass matrix)215,238
放大矩阵(Amplification matrix)245
非惯性坐标(Non-inertial frame)93,94

九　画

修正的牛顿--拉菲森法(Modified Newtow-Raphson method)17,8
相关联塑性(Associated plasticity)12
柯西主值(Cauchy principal value)39,46
罚函数(Penalty function)79
哈米顿原理(Hamilton's principle)95
映射(Mapping)143,144
点--点接触(Node-node contact)163
点--面接触(Node-face contact)163
误差函数(Error function)196,198,201

逆解法(Inverse method)197,202,205,206
结构与结构相互作用(Structure—structure interaction)211
相似算法(Similar algorithm)247
误差范数(Error norm)269
误差估计(Error estimation)268

十　画

流动法则(Flow rule)12,22
莫尔—库仑屈服准则(Mohr-Coulomb yield criterion)18,20
特雷斯卡屈服准则(Tresca yield criterion)18,19
索密哥内那等式(Somigliana identity)34
离散元(Discrete element)56,57,87
能量守恒原理(Principle of conservation of energy)90
破坏准则(Failure criterion)105
特征值分析(Analysis of eigenvalues)98,171,172
流固相互作用(Fluid-solid interaction)211,215
流体基本方程(Elementary equation of fluid)212
流体边界条件(Boundary condition of fluid)213,214
逐步求解法(Step by step algorithm)218,226
泰勒级数配点法(Taylor series collocation)241
能量范数(Energy norm)270,289
热传导(Heat conduction)250

十 一 画

理想塑性(Ideal plasticity)11
弹塑性矩阵(Elasto-plastic matrix)15
弹塑性耦合(Coupling of elasticity and plasticity)21
粘塑性(Visco-plasticity)25,27
基本解(Fundamental solution)36,37
接触判别(Contact detection)66
超二次曲面物体描述(Superquatric object representation)71
接触问题(Contact problems)148

接触状态(Contact states)151,154,157,161
接触摩擦(Contact friction)152,154
弹性模量识别(Identifying elastic modulus)203,204,205
接触边界(Contact boundary)213
隐式—显式耦合算法(Implicit-explicit coupling formulation)229
渗流(Seepage)225

十二画

解的漂移(Shift of solution)9
硬化法则(Hardening rule)12,14
惯性坐标(Inertial frame)92
等效单元刚度矩阵(Equivalent element stiffness matrix)157,163
等效单元结点荷载向量(Equivalent element nodal load vector)152,158
最小二乘法(Least square method)198
强迫振动(Forced vibration)218

十三画

塑性矩阵(Plastic matrix)15
塑性力学(Plasticity)20
塑性位势(Plastic potential)12,22
数值积分(Numerical integration)43,160
叠加原理(Superposition principle)109
锚杆(Anchor bolt)179,180,183,190
路堤(Embankment)191,192
滑动状态(Slip state)151,160
辐射边界(Radiation boundary)214

十四画

模态分解(Modal decomposition)94
模态方程的旋转(Rotation of modal equations)112
隧道开挖模拟(Modeling tunnel excavation)174,175,176
稳定性(Stability)244,247,260,265

模糊边界(Fuzzy condition)74

十 五 画

增量法(Incremental method)7,148

德鲁克—普拉格屈服准则(Drucker-Prager yield criterion)18,19

十 七 画

瞬态问题(Transient problems)238

二 十 画

蠕变(Creep)29

参 考 文 献

[1] O. C. Zienkiewicz, The finite element method (third edition). McGraw Hill (1977).

[2] D. R. J. Owen E. Hinton, Finite elements in Plasticity, Theory and Practice, Pinerge Press Limited (1980).

[3] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理与数值方法. 北京: 清华大学出版社, 1988.

[4] 王仁, 殷有泉. 工程岩石类介质的弹塑性本构关系. 力学学报, 317-325, 1981.

[5] 殷有泉, 曲圣年. 岩石和混凝土一类材料结构的有限单元分析中的本构关系. 北京大学学报, 37-46 (1981).

[6] C. A. Brebbia, J. C. F. Telles, L. C. Wrobel, Boundary element techniques, Berlin Heidelberg New York Tokyo (1984).

[7] Love, A. E. H., A treatise on the mathematical theory of elasticity, Dover, New York (1944).

[8] Tells, J. C. F., and Brebbia, C. A., Boundary element solution for half-plane problems, Int. J. Solids structures 17, 1149-1158 (1981).

[9] X. Y. Lei and Q. H. Du, Recent engineering applications in China on coupling boundary elements with finite elements, Appl. Mech. Rev., 50, 731-740 (1997).

[10] 雷晓燕, 杜庆华. 三维非线性有限元与弹性边界元耦合数值方法. 固体力学学报, 23-32, 1991.

[11] 朱伯芳. 有限单元法原理及其应用. 北京: 水利电力出版社, 1978.

[12] 雷晓燕. 用无拉应力计算模型分析道床变形. 中国铁道科学, 3, 1996.

[13] P. Bettess, Infinite elements, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 53-64 (1977).

[14] G. N. Pande, G. Beer and J. R. Williams, Numerical methods in rock mechanics, John Wiley & Sons LTD (1990).

[15] 雷晓燕. 铁路轨道结构数值分析方法. 北京: 中国铁道出版社, 1998.

[16] X. Y. Lei, G. Swoboda and G. Zenz, Application of contact friction interface element to tunnel excavation in faulted rock, Computers and Geotechnics, 17, 349-370 (1995).

[17] G. Swoboda and X. Y. Lei, Simulation of arch dam foundation interaction with a new friction interface element, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 17, 601-617 (1994).

[18] 雷晓燕, G. Swoboda, 杜庆华. 接触摩擦单元的理论及应用. 岩土工程学报, 16, 23-32, 1994.

[19] 雷晓燕. 三维接触问题新模型研究. 土木工程学报, 29, (1996).

[20] 雷晓燕．大位移接触摩擦单元在工程设计中的应用．华东交通大学学报，11，1-10(1994).

[21] 雷晓燕，王五全．消除接触摩擦单元应力振荡的方法．华东交通大学学报，10，1-8(1993).

[22] O. Aydan, T. Koya, Ichikawa & T. Kawamoto, Anchorage performance and reinforcement effect of fully grouted rockbolts on rock excavations, Proc 6th Int Cong. ISRM, Montreal, 757-760(1978).

[23] 雷晓燕．三维锚杆单元理论及其应用．工程力学，13，50-60(1996).

[24] O. Aydan, T. Koya, Ichikawa, T. Kawamoto, T. Ito & Y. Shimizu, Three-dimensional simulation of an advancing tunnel supported with forepoles, shotcrete, steel ribs and rockbolts, Numerical Methods in Geomechanics, Swoboda (ed.), Innsbruck, Balkema, 1481-1486(1988).

[25] 雷晓燕．材料参数反分析法及其在轨道结构中的应用．中国铁道科学，18，47-54(1997).

[26] O. C. Zienkiewicz, The finite element method, McGraw-Hill, 405-437, (1994).

[27] B. R. Simon, J. S-S. Wu, M. W. Carlton, L. E. Kazarian, E. P. Frace, J. H. Evans and O. C. Zienkiewicz, Poroelastic dynamic structure models of rhesus spinal motion segments, Spine, 10(6), 494-507(1985).

[28] B. R. Simon, J. S-S. Wu and O. C. Zienkiewicz, Higher order, mixed and Hermitean finite element procedures for dynamic analysis of saturated porous media, Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., 10, 483-499(1986).

[29] O. C. Zienkiewicz and A. H. C. Chan, Coupled problems and their numerical solution, in Advances in Computational Non Linear Mechanics (ed. I. S. Doltsinis). Chap. 3, 109-176, Springer-Verlag, Berlin, (1988).

[30] C. A. Felippa and K. C. Park, Staggered transient analysis procedures for coupled mechanics systems: formulation, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 24, 66-681(1980).

[31] B. A. Szabo, Estimation and control of error based on p-convergence, Chapter 3 in Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations (eds I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de. Oliveira), 61-73, Wiley (1986).

[32] I. Babuska, O. C. Zienkiewicz, J. Gago and E. R. de. Oliveira (eds), Accuracy Estimates and Adaptive Refinement in Finite Element Computations, Wiley (1986).

[33] I. Babuska and W. C. Rheinboldt, A posterior error estimates for the finite element method, Int. J. Num. Meth. Eng., 11, 1597-1615(1978).

[34] I. Babuska and W. C. Rheinboldt, Adaptive approaches and reliability estimates in finite element analysis, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 17/18, 519-540 (1979).

[35] O. C. Zienkiewicz, J. P. de S. R. Gago and D. W. Kelly, The hierarchical concept in finite element analysis, Comp. Struct., 16, 53-65 (1981).

[36] Barbosa, R, and Ghaboussi, J., Discrete finite element method, 1st U. S. Conference on Discrete Element Methods, CSM, Golden, Colorado, Oct. 17-19 (1989).

[37] Williams, J. R., Task 1-Validation of UDEC-R thermal capabilities, Report to Rockwell Handford Operations, Richland, WA (1985).

[38] Campbell, J. S., A penalty function approach to the minimization of quadratic functions in finite element analysis, Proc. Finite Elements Engng. University of New South Wales (1974).

[39] Belytschko, T., Plesha, M., and Dowding, C., A computer method for stability analysis of caverns in jointed rock, Int'l Journal Numerical & Analytical Methods in Geomechanics, 8, 437-492 (1984).

[40] Hocking, G., Mustoe, G. G. W., and Williams, J. R., Influence of artificial island side-shapes and ice ride up and pile up, ARCTIC'85 Conference, ASCE, San Francisco, March (1985).

[41] Williams, J. R., and Pentland, A. P., Super quadric object representation for dynamics of multibody structures, ASCM Structures, Congress'89 (1988).

[42] Kawai, T., New element models in discrete structural analysis, Japan Soc. Naval. Arch., Japan, 141, 174-180 (1977).

[43] Bathe, K., and Wilson, E. L., Numerical methods in Finite Element Analysis. New Jersey, Prentice-Hall (1976).

[44] Goodman, R. E., and Shi, Gen-hua, Block theory and it's application to Rock Engineering, Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (1984).