

## 第 2 代小波变换及其在机电设备状态监测中的应用

段晨东, 何正嘉

(西安交通大学机械工程学院, 710049, 西安)

**摘要:** 为了解决最佳小波基函数选择的问题, 采用第 2 代小波变换的方法构造小波, 从振动信号中提取机电设备故障信息. 第 2 代小波变换与经典小波变换不同, 它不依赖 Fourier 变换, 所有的运算在时域上进行, 通过设计预测算子和提升算子可以构造具有某种特性的小波. 针对机电设备的状态监测和故障诊断, 阐述了一种离线设计预测算子和提升算子的方法, 通过求解线性方程组确定预测系数和提升系数, 并在此基础上构造基于插值细分方法的第 2 代小波变换算法. 在某炼油厂机组的状态监测和故障诊断中, 采用该算法有效地提取了轴系不对中的故障信息.

**关键词:** 第 2 代小波变换; 预测算子; 提升算子; 故障诊断

**中图分类号:** TH17 **文献标识码:** A **文章编号:** 0253-987X(2003)07-0695-04

### Second Generation Wavelet Transform and Its Application to Mechanical Monitoring

Duan Chendong, He Zhengjia

(School of Mechanical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

**Abstract:** In order to fix the problem of selecting optimum wavelet basis, the second generation wavelet transform (SGWT) is employed to construct wavelet for extracting the fault information of mechanical equipment from vibration signal. SGWT is different from the classical wavelet transform: not relying on Fourier transform (FT), doing all calculation on time-domain, and constructing special property wavelet by designing predictor and updater. A design method of predictor and updater is described for mechanical equipment monitoring and fault diagnosis. Coefficients of predicting and updating are gained by solving linear equation sets, and then algorithm based on interpolating subdivision method is found by using these coefficients. The fault information of shafting misalignment is efficiently extracted by applying the algorithm in a refinery.

**Key words:** second generation wavelet transform (SGWT); predictor; updater; fault diagnosis

小波变换具有良好的时频局部化特性, 可实现信号在不同频带、不同时刻的分离, 这种分离相当于同时使用一个低通滤波器和若干个带通滤波器而不丢失任何信息. 在小波分析的基础上, 对分解的信号进行再处理, 可以提高诊断的有效性和正确性<sup>[1]</sup>. 第 2 代小波变换继承了传统小波变换的时频局部化特性, 所有的运算在时域上进行, 小波基函数不再是

由某一个函数的平移和伸缩而产生, 具有算法结构简单、速度快、占用内存少等优点<sup>[2]</sup>. 本文在介绍第 2 代小波变换原理的基础上, 讨论了预测算子 ( $P$ ) 和提升算子 ( $U$ ) 的设计方法, 研究了第 2 代小波变换的滤波方法, 并对第 2 代小波变换在机械设备的状态监测和故障诊断方面的应用进行了尝试, 取得了比较满意的效果.

收稿日期: 2002-11-14. 作者简介: 段晨东 (1966~), 男, 博士生; 何正嘉 (联系人), 男, 教授, 博士生导师. 基金项目: 国家高技术研究发展计划专项经费资助项目 (2001AA413330); 国家科技攻关“十五”计划专项经费资助项目 (2001BA2041305).

## 1 第2代小波变换的原理

第2代小波变换是1995年由Wim Sweldens博士提出的使用提升模式构造小波的一种方法<sup>[3]</sup>,它不依赖Fourier变换,小波基函数不再由某一个函数的平移和伸缩而产生,所有的运算都在时域上进行,可以获得与传统小波变换同样的结果,即实现信号在不同频带上的分离.分解过程分别由三部分组成,即剖分、预测和更新.

假设一个信号序列

$$X = \{x_k, k \in \mathbf{Z}\}, \quad x_k \in \mathbf{R} \quad (1)$$

剖分:将信号序列按奇偶样本分成两部分

$$X_e = \{x_{2k}, k \in \mathbf{Z}\} \quad (2)$$

$$X_o = \{x_{2k+1}, k \in \mathbf{Z}\} \quad (3)$$

预测:使用偶样本  $X_e$  估计奇样本  $X_o$

$$X_o = P(X_e) \quad (4)$$

然而,估计值  $X_o$  与实际值  $X_o$  存在着差异,其差异细节信号为  $d = \{d_k, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则

$$d = X_o - \hat{X}_o = X_o - P(X_e) \quad (5)$$

显然,  $P$  的选择应反映原始数据的相关性.

提升:为了在变换中保持存在  $X_e$  的某些频率特性,有必要减少由于剖分所产生的混叠效应,因此引入  $U$ , 并由此导出逼近信号  $s = \{s_k, k \in \mathbf{Z}\}$ , 则.

$$s = X_e + U(d) \quad (6)$$

从频域角度来看,细节信号反映了原始信号中的高频成分,而逼近信号反映了原始信号的低频成分.在式(5)、式(6)中,  $P$  和  $U$  可以选择,因此可以构造具有某种特性的小波函数和尺度函数.

插值细分方法是构造第2代小波变换的途径之一,其基本原理为:在预测阶段,采用  $N$  个偶样本 ( $N = 2D$ ,  $D$  为整数)估计奇样本;在提升阶段,采用  $\bar{N}$  ( $\bar{N} = 2Q$ ,  $Q$  为整数)个相邻的  $d$  更新偶样本.基于插值细分方法的小波变换分解算法(伪代码描述方式)为<sup>[2]</sup>

$$s_{j,k} = s_{j+1,k} \quad (7)$$

$$d_{j,m} = s_{j+1,m} \quad (8)$$

$$d_{j,m} = d_{j,m} - \sum_{k=-D+1}^D p_{j,k,m} s_{j,k} \quad (9)$$

$$s_{j,k} = s_{j,k} + \sum_{m=-Q+1}^Q u_{j,k,m} d_{j,m} \quad (10)$$

式中:  $s_{j,k}$ ,  $d_{j,m}$  分别为第  $j$  次分解时的逼近信号和细节信号;  $p_{j,k,m}$ ,  $u_{j,k,m}$  分别为第  $j$  次分解时的预测系数和提升系数.

## 2 $P$ 和 $U$ 系数的设计算法

从式(9)、式(10)中可以看出,确定  $P$  和  $U$  的系数是进行小波变换的前提.在运算实时性要求不高时,  $P$  的值可以直接通过 Neville 插值算法求出,不必求出  $P$  的每一个系数,然后再通过构造辅助序列的方法来确定  $U$  的系数<sup>[2]</sup>.然而,在设备状态监测时,数据处理的实时性要求较高,采用上述方法难以满足要求,若离线求出  $P$  和  $U$  的系数,那么式(7)~式(10)的变换过程就仅仅为基本的算术运算,可以提高变换速度和计算机系统的效率.

从式(5)中可知,  $P$  的作用是为了保留原始信号中的低频成分,消除  $d$  中的低频成分.从数值分析角度出发,可以认为通过  $P$  构造一个  $N-1$  阶多项式,该多项式可以近似地表示原始信号中低于  $N-1$  阶的信号结构成分.

当  $N=4$  时,用4个相邻的偶样本  $X_e$  估计奇样本  $X_o$ , 当  $n=1$  时,式(5)可以描述为

$$\begin{aligned} d(1) &= x_o(1) - [p_1 x_e(0) + p_2 x_e(1) + \\ &\quad p_3 x_e(2) + p_4 x_e(3)] = \\ &[x_e(0) \ x_o(0) \ x_e(1) \ x_o(1) \ x_e(2) \ x_o(2) \ x_e(3) \ x_o(3)] \\ &\quad [-p_1, 0, -p_2, 1, -p_3, 0, -p_4]^T = \\ &[x_e(0), x_o(0), x_e(1), x_o(1), x_e(2), x_o(2), x_e(3), x_o(3)] g \end{aligned} \quad (11)$$

式中:  $g$  为高通滤波器,  $g = [-p_1, 0, -p_2, 1, -p_3, 0, -p_4]^T$ . 若用  $N$  个偶样本  $X_e$  估计奇样本  $X_o$ , 则

$$\begin{aligned} g &= [g_1, \dots, g_N]^T \\ [-p_1, 0, \dots, 0, -p_i, 1, -p_{i+1}, 0, \dots, -p_{N-1}, 0, -p_N] \end{aligned} \quad (12)$$

预测系数可通过下式求出<sup>[4]</sup>

$$Vg = 0 \quad (13)$$

式中: 矩阵  $V = V[n, m] = n^m$ . 令  $0^0 = 1$ ,  $n = -(N-1), \dots, (N-1)$ ;  $m = 0, \dots, (N-1)$ . 整理式(13), 令  $p = [p_1, p_2, \dots, p_{N-1}, p_N]^T$

$$\text{可得} \quad V^* p = [1, 0, \dots, 0]^T \quad (14)$$

式中:  $V^*$  为  $N \times N$  矩阵. 求解式(14)可以确定  $P$  的系数. 当  $\bar{N} = N$  时, 可以直接将预测系数除以2作为提升系数<sup>[2]</sup>

$$u = [p_1/2, p_2/2, \dots, p_{N-1}/2, p_N/2]^T = [u_1, u_2, \dots, u_{\bar{N}}] \quad (15)$$

当  $\bar{N} \neq N$  时, 提升系数可由式(15)确定<sup>[5]</sup>. 令

$$M_0 = N-1, N_0 = N + \bar{N} - 2$$

$$WBu = [1, 0, \dots, 0]^T \quad (15)$$

式中:  $u = [u_1, u_2, \dots, u_{\bar{N}}]^T$ .  $W$ 、 $B$  由下列方法获得

$$i = 0, 1, \dots, 2N-1: q(i) = 0, \text{ 且 } q(N) = 1$$

$$i = 0, 1, \dots, \overline{N}: q(2i - 1) = p(i)$$

设  $L_g$  为数组  $q$  的长度,即

$$i = 0, 1, \dots, \overline{N}, j = 2i - 1, 2i, \dots, 2i - 1 + L_g(q) - 1:$$

$$B(j, i) = q(j)$$

$$K = 2(N - 1) + L_g(q); j = 0, 1, \dots, \overline{N} - 1$$

$$k = -N_0, -N_0 + 1, \dots, -N_0 + K - 1:$$

$$W(j + 1, k + N_0 + 1) = k^j$$

根据应用系统对象的信号特性,选择预测系数的个数为 4. 当  $N = \overline{N} = 4$  时,根据上述算法可以求得  $P$  的系数  $p_1 \sim p_4$  分别为  $-0.0625, 0.5625, 0.5625, -0.0625$ ,  $u_1 \sim u_4$  分别为  $-0.03125, 0.28125, 0.28125, -0.03125$ . 对于数据序列  $\{x_i, i \in \mathbf{Z}\}$ ,小波变换算法的表达式为

$$x_o(i) = x(2i + 1) \quad (16)$$

$$x_e(i) = x(2i) \quad (17)$$

$$d(i) = x_o(i) - (p_1 x_e(i - 1) + p_2 x_e(i) + p_3 x_e(i + 1) + p_4 x_e(i + 2)) \quad (18)$$

$$s(i) = x_e(i) + (u_1 d(i - 2) + u_2 d(i - 1) + u_3 d(i) + u_4 d(i + 1)) \quad (19)$$

由式(16)~式(19)可导出  $s(i)$  和  $d(i)$  与原始信号  $x(i)$  之间的关系

$$d(i) = x_o(i) -$$

$$[x_e(i - 1) \ x_e(i) \ x_e(i + 1) \ x_e(i + 2)]$$

$$[p_1, p_2, p_3, p_4]^T = \sum_{k=1}^7 g_k x(2i - 2 + k - 1) \quad (20)$$

$$s(i) = \sum_{k=1}^{13} h_k x(2i - 6 + k - 1) \quad (21)$$

式中:  $h_k$  为低通滤波器系数;  $g_k$  为高通滤波器系数. 根据离散小波变换原理,可分别得到小波滤波器的低通滤波器的系数向量和低通滤波器的系数向量为

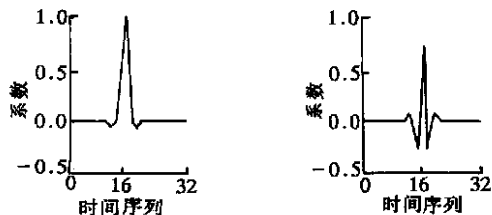
$$g = [g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7] =$$

$$[-p_1, 0, -p_2, 1, -p_3, 0, -p_4]$$

$$h = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8,$$

$$h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}]$$

式中:  $h_1 = -p_1 u_1; h_2 = 0; h_3 = -p_2 u_1 - p_1 u_2; h_4 = u_1; h_5 = -p_1 u_3 - p_2 u_2 - p_3 u_1; h_6 = u_2; h_7 = 1 - p_1 u_4 - p_2 u_3 - p_3 u_2 - p_4 u_1; h_8 = u_3; h_9 = -p_2 u_4 - p_3 u_3 - p_4 u_2; h_{10} = u_4; h_{11} = -p_3 u_4 - p_4 u_3; h_{12} = 0; h_{13} = -p_4 u_4$ . 由  $g, h$  可导出  $N = \overline{N} = 4$  时插值细分小波变换的尺度函数和小波函数,如图 1 所示.



(a) 尺度函数

(b) 小波函数

图 1 2 种函数的波形

### 3 实验与应用

在对旋转机械监测的过程中,由于加工、装配及其本身的动态参数等因素,造成机械转子运转不平衡.从现场采集的动态信号具有非平衡周期性的特点,为了验证式(15)~式(18)的滤波效果,首先用下列模拟信号进行了仿真实验

$y(t) = \sin(2 \times 10 \times t) + (t)$ ,  $t = 0 \sim 0.256$  s 式中:  $(t)$  为加入的白噪声(分布参数为  $N(0, 0.2)$ ). 被测信号的信噪比为 21.626 3 dB,采用式(16)~式(19)的算法进行小波变换,经过第 1~第 4 次滤波后,信噪比分别为 25.860 5 dB, 27.893 7 dB, 30.442 3 dB. 显然,信噪比随着变换尺度的增加而增加,因此对随机白噪声具有较强的抑制作用.

在某炼油厂,重催三机组由烟机、风机、齿轮箱、电机组成.监测系统对烟机 1、2 号瓦,风机 1、2 号瓦,齿轮箱轴的 5 个截面及 10 个测点进行了实时在线监测,其工作转速为 5 745 r/min,采样频率为 2 kHz,数据长度为 512,检测元件为涡流传感器.风机 1 号瓦在  $y$  方向的原始振动信号见图 2. 采用式(16)~式(19)的算法,原始信号的第 1、2 次分解结果如图 3 所示. 通过 2 次分解,分别将原始信号中的高频成分分离到 500~1 000 Hz 和 250~500 Hz 的频带中(见图 3b). 在高频段(500~1 000 Hz)出现了间隔基本相同的峰值,在时间  $t = 0.256$  s 内,共出现了 24.5 个峰值,峰值出现的周期为 10.45 ms,频率约为 95.70 Hz,而系统的工作频率为 95.75 Hz. 因此,系统运行时,在每个周期中都有一个高频干扰. 考察图 1 发现,这些高频干扰是由曲线上的一系列毛刺所引起的. 在 250~500 Hz 的频带中,正好是系统工作频率的 3 倍频、4 倍频和 5 倍频,其信号的能量较大,与图 4 振动信号的频谱一致. 在 0~250 Hz 的频带中,包含了系统工作频率、2 倍频信号以及低频干扰信号,并在图 3 上的 2 倍频信号处出现一个峰值. 风机 1 号瓦相邻测量点(烟机 2 号瓦)的信号具有相同的现象,表明可能是同一个原因引起的.

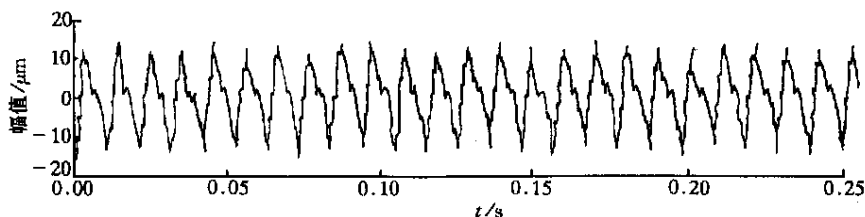
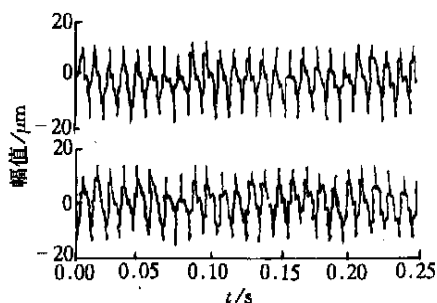
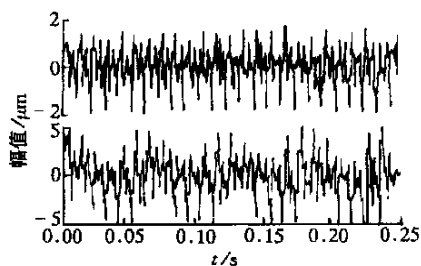


图2 风机1号瓦在y方向的振动信号

综合考虑上述因素,推测信号中的高频干扰是由于烟机与风机轴系不对中而引起的,二者之间的膜片式联轴器为了补偿轴系不对中所造成的周期性错动,而形成了信号中周期性的毛刺。由于错动引起摩擦,使信号中含有有色噪声,因此分布的频带较宽。同时,从图4中可以看出,信号中含有与系统工作频率相关的谐波分量,它们是由轴系不对中造成的。



(a) 逼近信号



(b) 细节信号

图3 采用第2代小波变换的分解信号

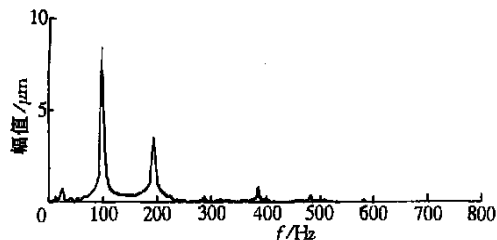


图4 风机1号瓦在y方向振动信号的频谱图

## 4 结 论

第2代小波变换不依赖 Fourier 变换,小波基函数不再是由某一个函数的平移和伸缩而产生。通过设计预测算子和提升算子,可以构造出具有某种特性的小波函数和尺度函数。此外,由于所有的运算都在时域上进行,因此可以获得与传统小波变换同样的结果,即实现信号在不同频带上的分离。本文将这种方法用于提取信号的故障特征,结合其他信号的分析方法,对故障现象进行了有效诊断,并对第2代小波变换在机械设备故障诊断领域的应用进行了尝试。然而,这毕竟是一种新的信号处理方法,如何将这种方法有效地应用到机械设备故障诊断领域中,如何根据信号的特征设计预测算子和提升算子,使它们能够有效地从测量信号中提取特征信号,是一个值得进一步研究的课题。

## 参考文献:

- [1] 何正嘉,訾艳阳,孟庆丰,等. 机械设备非平稳信号的故障诊断原理及应用[M]. 北京:高等教育出版社,2001. 30~38.
- [2] Sweldens W, Peter Schröder. Building your own wavelets at home [DB/OL]. <http://cm.bell-labs.com/who/wim/papers.html/athome>, 1998-01-05.
- [3] Sweldens W. The lifting scheme: a construction of second generation wavelets [J]. SIAM J Math Anal, 1996, 29 (2): 511~546.
- [4] Claypoole R L, Jr Baraniuk R G. Flexible wavelet transforms using lifting [DB/OL]. <http://www.seg.org/meetings/past/seg1998/techprog/st18/papr1375.pdf>, 1998-09-18.
- [5] Claypoole R L, Baraniuk R G, Nowak R D. Adaptive wavelet transforms via lifting [DB/OL]. <http://www.dsp.rice.edu/publications/pub/clayp-SPTTrans99.ps.gz>, 2002-09-23.

(编辑 管咏梅)