

# 地表形变分析理论

——地壳运动监测

[德] 阿提内·约克塞尔

Analytical Surface Deformation Theory

—for Detection of the Earth's Crustal Movements

Yüksel Altiner

高荣胜 李正媛 / 译  
陈鑫连 刘序伊 / 校

地震出版社

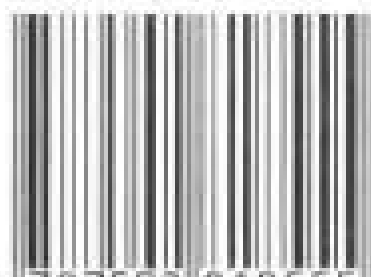
# Analytical Surface Deformation Theory

—for Detection of the Earth's Crust Movements

Yüksel Altınır

责任编辑 / 马 兰  
封面设计 / 邢秀芬

ISBN 7-5028-1855-3



9 787502 818555 >

ISBN 7-5028-1855-3/P · 1069

(2395) 定价: 10.00 元

P

# 地表形变分析理论

——地壳运动监测

[德] 阿提内·约克塞尔

高荣胜 李正媛 译  
陈鑫连 刘序骥 校

地质出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

地壳形变分析理论——地壳运动监测 / (德) 约克塞尔  
著; 高荣胜, 李正媛译. —北京: 地震出版社, 2001. 7  
ISBN 7-5028-1855-3

I. 地… II. ①约…②高…③李… III. ①地壳  
形变 应变分析②地壳运动 地震观测 IV. P315.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 19473 号

**地表形变分析理论**

——地壳运动监测

[德] 阿提内·约克塞尔

高荣胜 李正媛 译  
陈鑫连 刘序伊 校

责任编辑: 马 兰

责任校对: 张晓梅

---

出版发行: 地震出版社

北京民族学院南路 9 号

邮编: 100081

发行部: 68123031 68467993

传真: 68423031

门市部: 68467991

传真: 68467972

总编室: 68162709 68423029

传真: 68467972

E-mail: scis@ht.rol.cn.net

经销: 全国各地新华书店

印刷: 北京地大彩印厂

---

版(印)次: 2001 年 7 月第一版 2001 年 7 月第一次印刷

开本: 850×1168 1/32

字数: 78 千字

印张: 3

印数: 001~600

书号: ISBN 7-5028-1855-3/P·1069 (2395)

定价: 10.00 元

版权所有 翻印必究

(图书出现印装问题, 本社负责调换)

著作权合同登记 图京：01—2000—2474

# Analytical Surface Deformation Theory for Detection of the Earth's Crust Movements

Yüksel Altiner

Translation from the English language edition:

*Analytical Surface Deformation Theory* by Yüksel Altiner

Copyright©Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999

Printed in Germany

All Rights Reserved

BOOKS-NO COMMERCIAL VALUE

本书中文版由著作权人授权地震出版社独家出版发行，2000。版权所有，翻印必究。

## 序 言

地球由于板块运动，日、月潮汐效应，大气、水文、海洋的负荷作用，区域性的地质过程以及旋转变换等，致使地壳上的各点都发生形变。建立在海底扩张速度、转换断层方位角和地震滑动向量基础上的全球板块运动模型，能够描述过去几百万年间的平均板块运动。但在应用全球板块运动模型研究现今地壳构造活动时，对于变化过程复杂的局部区域而言，则难以给出令人满意的描述结果。

在过去 20~25 年间，由于空间观测技术〔甚长基线干涉测量 (VLBI)、卫星激光测距 (SLR)、全球定位系统 (GPS)〕的进步，应用在现今地表形变观测和板块构造活动方面的研究与日俱增。目前，采用这些观测方法，我们能够确定相距很远的两点间的相对运动，其观测精度已达到厘米至亚厘米量级。

应用上述空间技术所能达到的这种高精度观测结果，要求人们对现行的形变分析基础理论重新进行考虑，探讨这类分析理论构成了本书第二章的主题，在该章中还介绍了曲面的内蕴和外蕴形变分析方法；理论应用所涉及的地壳表面几何模拟以及观测方法详述于第三章；最后，第四章侧重于应用亚德里亚海地区的 CRODYN'94 和 CRODYN'96 二期 GPS 联测结果推求速度模型的解算法介绍，这里得到的是有条件的计算解，而不可作为完全

确定的结果，只有通过在这一地区进行更多期的 GPS 联测后，才有可能获得更为令人满意的结论。

我非常感谢萨格勒布州大地测量局 (SGA) 主任布白瑞尼尔·构兹克塔 (Branimir Gojčeta) 博士、萨格勒布大学大地测量学院教授克拉斯米尔·克拉克 (Krešimir Čolic) 博士、斯洛文尼亚联邦共和国卢布尔雅那市测绘局 (SMA) 局长艾利斯·塞立斯卡 (Aleš Seliskar) 博士等，支持在克罗地亚和斯洛文尼亚进行的 GPS 联测工作。另外，也感谢我的同事白兹纳·立白 (Božena Lipej) 博士 (SMA)、萨格勒布大地测量局土地测量处负责人日拉柯·梅迪克 (Zlatko Medić) 博士和卢布尔雅那市测绘局土地测量处负责人杜山·米斯克威克 (Dušan Misković) 博士等对野外工作的帮助和指导。

本书中所引用的 GPS 资料是由德国法兰克福市联邦政府制图及大地测量局 (BKG) 协助收集，我特别要感谢贺门·西格 (Hermann Seeger) 教授和艾渥·瑞哈斯德 (Ewald Reinhart) 教授给予的支持；感谢波恩大学理论大地测量研究所西格夫瑞·汉斯 (Siegfried Heitz) 教授和波恩大学大地测量研究所柏土得·威特 (Bertold Witte) 教授进行的卓有成效的讨论。感谢美国麻省理工学院罗伯特·金 (Robert King) 博士和罗伯特·雷尼格 (Robert Reilinger) 博士阅读本书及对部分章节的评注及建议。

阿提内·约克塞尔

1999 年 8 月于波恩

## 中文版序言

地震造成生命与财富的巨大损失，致使人类长期不懈地探讨这种灾害现象。在这一背景下，由于大洋中脊的发现而衍生出全新的理论观念，大洋中脊几乎被确认为是板块构造理论的起源。板块构造理论认为：岩石圈是由 14~16 块近似为刚性的板块组成，这些板块漂浮在流动的软流圈上，主要受上地幔的对流以及大洋中脊热磁物质外涌的驱动力作用而运动变化，地壳形变如伸张、褶皱作用、剪切等变化，则是这种运动能量释放作用的主要方式。大部分的地壳形变都发生在板块的边界；在边界内部，形变量并不显著或是具有区域特征。上述论述阐明了主要构造事件如：地震活动、火山形成等，沿板块边界发生的机理。

在过去 20 年中，许多世界范围的研究工作都应用了 GPS (Global Positioning System) 测量技术。对于地震预测问题，人们尤为关注的是：能否通过消除地区性的影响、模拟地壳的地表形变和应力变化状态获得解决。虽然，实际地壳的形变发生在三维空间里，但多数的研究确是在接近于水平面的二维形变场下进行的，而且，用于确定形变参数的观测点的运动，一般都依赖于基准。为了消除计算结果对于基准的依赖性，需要使用自由网平差计算出运动量，进而求得应变参数和独立的基准值。对于研究地球物理表面上的地壳形变而言，应用地表形变分析理论，可以避免上述不足。

译本进行了一些小的调整，更正了由 Springer-Verlag 出版社出版的原著中明显的字母输入错误。我要感谢高荣胜先生和李正媛女士将本书译成中文的建议及翻译工作，感谢地震出版社出版本书。

2000 年 1 月于波恩  
Yüksel Altıncı



## 译者说明

《地表形变分析理论——地壳运动监测》一书是阿提内·约克塞尔博士在大地测量方面的研究成果。

书中针对高精度空间观测技术 (VLBI, SLR, GPS) 获得的观测资料, 提出, 需要重新认识形变资料分析方法的理论基础问题。认为要使形变资料处理得到的地表内部几何面数据可用于建立物理或动态模型, 必须考虑研究区域的地形构造问题, 由此, 便需要给出三维欧氏空间下地表曲面的一般表达式。

本书提出了表面形变分析的一种理论方法, 应用这一理论, 由 GPS 观测求得的亚德里亚海地区的运动速率, 描述了该地区的地壳运动状况, 给出了区域的形变和应变结果图示, 探讨了现代大地测量观测结果用于地壳运动物理、力学模型建立中的有关问题, 并附有大量的参考文献。可供从事大地测量、地球物理、构造物理、地震预报、天文等地球科学的科技工作者和高等院校有关专业的师生参考。

陈志遥同志也参加了本书的翻译工作, 游新兆、苏新洲等同志指正了本书 GPS 相关术语的表达, 在此表示诚恳的谢意。

# 目 录

第 1 章 导论 .....	( 1 )
第 2 章 形变理论 .....	( 6 )
§ 2.1 坐标系 .....	( 6 )
§ 2.1.1 笛卡尔坐标系和曲线坐标系 .....	( 6 )
§ 2.1.2 曲面法线坐标系 .....	( 7 )
§ 2.2 三维形变 .....	( 9 )
§ 2.2.1 初略说明 .....	( 9 )
§ 2.2.2 基本概念 .....	( 9 )
§ 2.2.2.1 等参数表示法 .....	( 9 )
§ 2.2.2.2 拉格朗日表示法 .....	( 9 )
§ 2.2.3 特殊形变测度 .....	( 11 )
§ 2.3 地表形变 .....	( 12 )
§ 2.3.1 初略说明 .....	( 12 )
§ 2.3.2 地表内蕴形变 .....	( 12 )
§ 2.3.2.1 等参数表示法 .....	( 12 )
§ 2.3.2.2 基于高斯曲面表达式的计算 .....	( 13 )
§ 2.3.2.3 在外蕴曲面法线坐标系中的计算 .....	( 15 )
§ 2.3.2.4 椭球坐标系中的计算 .....	( 16 )
§ 2.3.3 地表外蕴形变 .....	( 18 )
§ 2.3.3.1 基于高斯曲面表达式的计算 .....	( 18 )
§ 2.3.3.2 在外蕴曲面法线坐标系中的计算 .....	( 23 )
§ 2.3.3.3 椭球坐标系中的计算 .....	( 26 )
§ 2.3.4 应力与形变 .....	( 26 )

<b>第3章 几何模式</b>	(31)
§ 3.1 基本原理	(31)
§ 3.2 多项式内插法	(34)
§ 3.3 拟合推估内插法	(36)
§ 3.4 有限三角元法	(40)
§ 3.4.1 初略说明	(40)
§ 3.4.2 三角元算法	(40)
§ 3.4.3 离散形变测度	(43)
§ 3.4.4 相邻三角元间弯曲变化的求解	(44)
<b>第4章 应用</b>	(46)
§ 4.1 地壳的形变	(46)
§ 4.2 大地测量结果在形变分析中的贡献	(50)
§ 4.3 亚得里亚海地区的板块运动	(51)
§ 4.4 几何模型	(54)
§ 4.4.1 内插方法的应用	(54)
§ 4.4.2 图示法的解释	(54)
§ 4.5 亚得里亚海地区的地表形变	(58)
§ 4.5.1 GPS 观测	(58)
§ 4.5.2 GPS 数据的处理方法	(60)
§ 4.5.3 数据处理	(60)
§ 4.5.4 数据质量的检验	(61)
§ 4.5.5 多期观测成果	(63)
§ 4.5.5.1 绝对坐标的解算结果	(64)
§ 4.5.5.2 相对坐标的解算结果	(65)
§ 4.5.6 地表内蕴形变	(65)
§ 4.5.7 地表外蕴形变	(66)
§ 4.5.8 亚得里亚海地区的图示	(68)
§ 4.6 结束语	(75)
<b>参考文献</b>	(76)

# 第 1 章 导 论

大地测量学对地球科学所作的贡献是建立了地球表面几何学模型，它包括地球表面的内蕴和外蕴几何学的统计和随时间变化的表达式。一方面，“随时间变化的几何学”或地表形变是令人感兴趣的内容；另一方面，将其作为地球岩石圈物理模型的边界值也是十分重要的。

对地球表面局部地区所进行的大地测量形变分析，目前仅局限于估算水平面上的位移量，这些位移通常是以某一平均水平面内的笛卡尔坐标的变化值而导出的。因此，建立在笛卡尔坐标几何学基础上的形变理论被构思成为二维的，这种方法用于山区或者用于起伏变化较小的大范围地区，就无法满足形变分析的需要。

如若希望通过形变分析，获得建立物理或力学模型的有效原始资料，最为重要的是必须从数学模型上针对实际地球表面或地形结构予以研究，即：将地表表示为三维欧氏空间下的曲面，应用建立在适当坐标几何学基础上的微分几何学模型，就可以对地表形变的内蕴和外蕴几何学变化作出全面分析。因而，地表几何模型包括离散观测点位移观测量的表达式，以及建立在这种几何学基础上的地表构造的几何学设计。从物理观点看，观测点及观测系统应与地表的点位相联系，其数学表达式就是在与之相关的几何坐标系下给出。

理想的大地测量系统是由刚体或刚体系组合的物理系统所构成，系统中参数的测量精度和预估参数的估算精度均满足一定的量级范围。所谓预估参数主要是指由距离和方向观测量转换获得的坐标值，或以如全球定位系统（GPS）的方法等直接求得的坐

标值。

在各实测的观测周期内，由直接观测或由坐标转换计算所得的距离值，应满足一定精度的瞬时不变性要求，这是保证刚体点位系统假设得以成立的最为重要的条件。通常，在变形体作相对运动时，它们的距离随时间而变化，包括地表点位以及一些瞬时距离的变化，而各种新的形变理论的出发点正是基于描述这类长度或坐标的瞬时变化。

基于上述认识，最重要的是能够描述物体的表面形变，而这一点正是地区性大地测量形变分析的主要内容。在物理学中，尤其在刚体力学研究领域，不仅限于对于这类表面形变体的观测，与之相联系的几何边界值还可为完全解决质量连续的三维变形物体的动力学问题作出贡献（Heitz 1980~1983；Heitz and Stocker-Meier 1994）。为此，进行三维形变分析方法的探讨是必须的，且该方法成为许多变形研究的基本出发点，在多数情况下，无庸置疑地在大量的教科书中成为讨论的专门论题。在进行地表形变测量的工作当中，一般不必特别指明其本身的重要性，就应以三维空间体的观点进行物体的形变分析，因为：

- 地表形变可借助测量技术惟一确定。
- 通常地表形变作为物体随时间变形的一种定量表示，在未获得进一步的观测值并精密确定出三维连续物体的各特性时，也不可能彻底的解决动力学问题。

对于更为广泛的形变现象的探讨，也正是大地测量学研究中令人感兴趣的论题。首先值得一提的是全球性的称之为地球潮汐的问题，因为潮汐所产生的加速度，可能会造成地球表面的形变（Heitz 1980~1983；Melchior 1983），而从大地测量学或地球物理学的观点来看，地球潮汐问题也是重要的跨学科研究内容，可以归类于板块构造学模型下的地壳应力-变形关系的研究领域（Kersting and Welsch 1989；Miller 1992）。除了这类全球性或大尺度区域范围的研究工作外，在大地测量学的应用中，地区性

的地表形变分析工作，就像对地面建筑、机器和人体外表的研究一样（Caspary 1987；Reiking 1994；Bilajbegovic 1996），显得极为重要（Pelzer 1971；Koch 1988；Saler 1995；Altiuner 1996；Ghitău 1998）。

对于小范围的地表几何动态模型研究，是大地测量学应用研究的焦点，可以据此剖析引起形变的动力变化过程。因而，围绕这一主题所开展的分析研究工作，不仅局限在对坐标或距离变化的研究，作为本书的重点内容地表内蕴与外蕴形变分析理论，将在第 2、3 章中详细论述探讨，并与第 4 章中集中介绍的以 GPS 观测技术进行坐标解算的实例相映证。对上述理论既给出了在笛卡尔坐标系下相应的表示公式，也给出了地面直角坐标系下的相应公式，尤为重要，还给出了用于 GPS 测量的全球椭球坐标系下的表达式。该系统是以地球质量中心为坐标原点，以地球自转轴为坐标轴的地心坐标系，这样可以避免因所采用的基准面不同，而产生基准面间转换的相关问题。三维连续形变理论既是研究地表内蕴形变的基础，又应用在动力学或物理学基本模型的建立中。基于这两方面的因素，将在 § 2.2 的地表形变分析理论中首先介绍；而地区性形变与应力关系的研究将在 § 2.3.4 中逐一说明。

地表形变理论的大地测量应用着眼于建立地球表面几何学模型，这一问题将从离散观测点入手在 § 2.3 中讨论。设：

$$\{P\} \in \text{地表区域 } F \quad (1-1)$$

地表区域  $F$  内的  $P$  点已完成了两期 GPS 观测，对应的观测时刻分别为：

$$t \text{ 和 } \bar{t} \quad (1-2)$$

对于任一点  $P$ ，给出两期的三分量坐标为：

$$q^a := q^a(t), \quad \bar{q}^a := q^a(\bar{t}), \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (1-3)$$

$q^a, \bar{q}^a$  一般为椭球坐标。由 (1-3) 式，可推导出位移坐标的形式为

$$z^a := \bar{q}^a - q^a \quad (1-4)$$

上式表示由 (1-1) 式定义的待研究的地表区域  $F$  的位移场, 通常以观测点  $P$  分布密集一些为好。需要注意的是, 在区域  $F$  内, 选择观测点的密度以及位移场表达式的准确度都不仅是高度变化的函数。即使对于相对平坦的区域, 也需保持适当的观测点分布密度条件, 以确定短距离的位移量。

顾及 (1-2)、(1-3) 式,  $P_m - P_n$  的线性拉伸 (线应变) 为:

$$q_{mn} := (\bar{s}_{mn} - s_{mn}) / s_{mn} \quad (1-5)$$

线性拉伸可由相邻点对直接计算出来。在多数情况下, 这种形变的基本测度是不能令人完全满意的, 它是一种“参数无序集”, 不能清晰地表示 (1-1) 式中  $F$  区域的内蕴形变特征, 特别是它不用以对地表外蕴形变作出直接解释。此外, 这种线性拉伸对深入研究地球上地壳的应力-形变的动力学特征仍然不是一种合适的方法, 前面所提及的不完善之处, 使线性拉伸测度不能用地表形变分析理论中。地表形变分析理论在 § 2.3 中将予以详细说明, 其前提是离散观测点  $\{P\}$  作为构成连续曲面上的元素。换言之, (1-3) 式中的地表点位坐标  $q^a(t)$ , 及 (1-4) 式中地表位移坐标  $z^a$ , 必须以地面坐标的解析函数  $u^a$  来表示, 其中  $a \in \{1, 2\}$ :

$$\begin{aligned} q^a &= q^a(u^a) \\ z^a &= z^a(u^a) \end{aligned} \quad (1-6)$$

这种以内插函数或逼近函数形式的几何模型, 通常具有下列两方面的意义。

- 为了保证内蕴和外蕴形变测度的分析计算具有惟一性, 内插函数 (1-6) 式应该在整個内插区域内相对于  $u^a$  是连续可微的。 (1-7a)

- 相邻观测点之间的内插函数应该满足近似线性特征。

$$(1-7b)$$

内插函数或逼近函数的解算方式通常在应用数学及信息学中使用，这种解算方法已被运用多时，并且适用于变化量值较大时的数据处理过程（Zienkiewicz 1972；Abramowski and Muller 1991；Cui et al. 1992）。在包括大地测量学的各技术领域，都极为重视获得解析函数空间离散函数表达式（Moritz and Sünkel 1977；Reiking 1994）。这个问题一般应满足（1-7a）及（1-7b）式二个条件，在第3章中将详细讨论相关问题，而§3.4中举出的一种特殊处理方法，是用有限三角元法或曲面三角测量法分割地表区域 $F$ ，而在每个三角形内部采用线性内插函数（1-6）式。这种内插函数是较为简易的样条函数，它应在三角形的边界上为连续函数，其函数的导数则可以不满足连续的条件。这样，满足条件（1-7a）便为完全满足条件（1-7b）所代替。这些论点将会对纯理论分析性的形变理论带来极大的冲击，因此有必要对离散形变测度进行定义。

第4章主要阐述观测技术基本原理，以及第2、3章中部分基本理论的应用，并以表格图解方式汇集、介绍亚得里亚海区域的观测作业与形变结果。



## 第 2 章 形变理论

### § 2.1 坐标系

#### § 2.1.1 笛卡尔坐标系和曲线坐标系

在三维欧几里得几何空间下, 用笛卡尔坐标表示为:

$$\text{在 } S \text{ 中的 } x_i, \text{ 在 } \bar{S} \text{ 中的 } \bar{x}_i, \quad (2.1-1)$$

在三维欧几里得空间及二维黎曼几何空间引入下面概念, 广义曲线坐标:

三维坐标:

$$q^a, a \in \{1, 2, 3\} \quad \text{度量张量 } g_{ab} \quad (2.1-2a)$$

二维曲面坐标:

$$u^a, a \in \{1, 2\} \quad \text{度量张量 } f_{ab} \quad (2.1-2b)$$

建立在这些系统基础上的坐标几何学是采用赫兹 (Heitz, 1988) 的表示方式。在几何坐标系下,

由  $q^a \leftrightarrow \bar{q}^a$  进行坐标变换的广义微分方程为:

$$\begin{aligned} \bar{q}^c_{,ab} &= \Gamma_{ab}^d \bar{q}^c_{,d} - \bar{\Gamma}_{de}^c \bar{q}^d_{,a} \bar{q}^e_{,b} \\ \bar{q}^c_{,d} &:= \partial \bar{q}^c / \partial q^d \end{aligned} \quad (2.1-3a)$$

这是一个重要的基本方程, 笛卡尔坐标系与曲线坐标系间的变换:  $q^a \leftrightarrow x^i \equiv x_i$ , 可从上述的微分方程或带有方差和逆协方差的下述的导数方程求得:

导数方程为:

$$x^k_{,ab} = \Gamma_{ab}^d x^k_{,d}, \quad q^i_{,a} = -\Gamma_{de}^i q^d_{,a} q^e_{,b} \quad (2.1-3b)$$

基底向量为:

$$\begin{aligned}x_{k,d}^k &= x_{k,d} := \partial x_k / \partial q^d =: c_{k,d}, \\q_{,i}^d &:= \partial q^d / \partial x_i =: c_i^d;\end{aligned}\quad (2.1-3c)$$

$\Gamma_{ab}^d = q^a$  的克里斯托夫度量符号 (Chritoffel Symbls)。

在曲面几何中, 个别采用笛卡尔坐标系下的高斯曲面表达式:

$$x_i = x_i(u^\alpha) \quad (2.1-4a)$$

而对特殊状况, 则有:

$$\begin{aligned}u^\alpha &:= x_\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\} \\x_i(x_\alpha) &= [x_1, x_2, x_3(x_\alpha)]\end{aligned}\quad (2.1-4b)$$

类似地, 在曲线坐标系下有:

$$q^\mu = q^\mu(u^\alpha) \quad (2.1-5a)$$

并有特例:

$$\begin{aligned}q^\alpha &:= u^\alpha, \quad \alpha \in \{1, 2\} \\q^\mu(u^\alpha) &= [u^1, u^2, q^3(u^\alpha)]\end{aligned}\quad (2.1-5b)$$

## § 2.1.2 曲面法线坐标系

曲面法线坐标由赫兹 (Heitz, 1988) 引入使用, 基本空间和曲面的表达式如下:

外蕴曲面法线坐标系使用下式表示:

$$q^\alpha = (u^1, u^2, q^3 \equiv H) = (u^\alpha, H) \quad (2.1-6a)$$

$$u^\alpha = \text{参考面的曲面坐标} \quad (2.1-6b)$$

式中引用了度量张量  $g_{ab}$  与下述基底向量

$$c_{i,\alpha} := \partial x_i / \partial q^\alpha, \quad c_\alpha^i := \partial q^\alpha / \partial x_i \quad (2.1-6c)$$

由 (2.1-5) 式, 高斯曲面可表示为:

$$q^\alpha(u^\alpha) = [u^1, u^2, H(u^\alpha)] \quad (2.1-6d)$$

以下坐标系可作为外蕴曲面法线坐标系的一种重要特例。

地理椭球坐标系:

参考面 = 旋转椭球面

$$q^\alpha = (\lambda, \phi, H) = (u^\alpha, H) \quad (2.1-7a)$$

$$u^a = (\lambda, \phi) \quad (2.1-7b)$$

= 旋转椭球体的地理经度、纬度

$H$  = 旋转椭球体的高。

对照外蕴曲面形变的表达式, (图 2.1) 则有:

内蕴曲面法线坐标系:

$$p^a = (p^1, p^2, p^3 \equiv h) = (p^a, h) \quad (2.1-8a)$$

$$p^a = \text{参考面的曲面坐标} \quad (2.1-8b)$$

= 无形变时的曲面坐标

式中引用度量张量  $f_{ab}$  与基底向量:

$$h_{i,a} := \partial x_i / \partial p^a, h^a_{,i} := \partial p^a / \partial x_i \quad (2.1-8c)$$

对于研究曲面形变, 外蕴和内蕴曲面法线坐标系通常是相互结合使用的。(2.1-6d) 式及 (2.1-8a) 式, 给出了基本的曲面表达式, 曲面坐标  $u^a$  采用如下形式表示:

$$p^a = (u^a, h) \quad (2.1-8d)$$

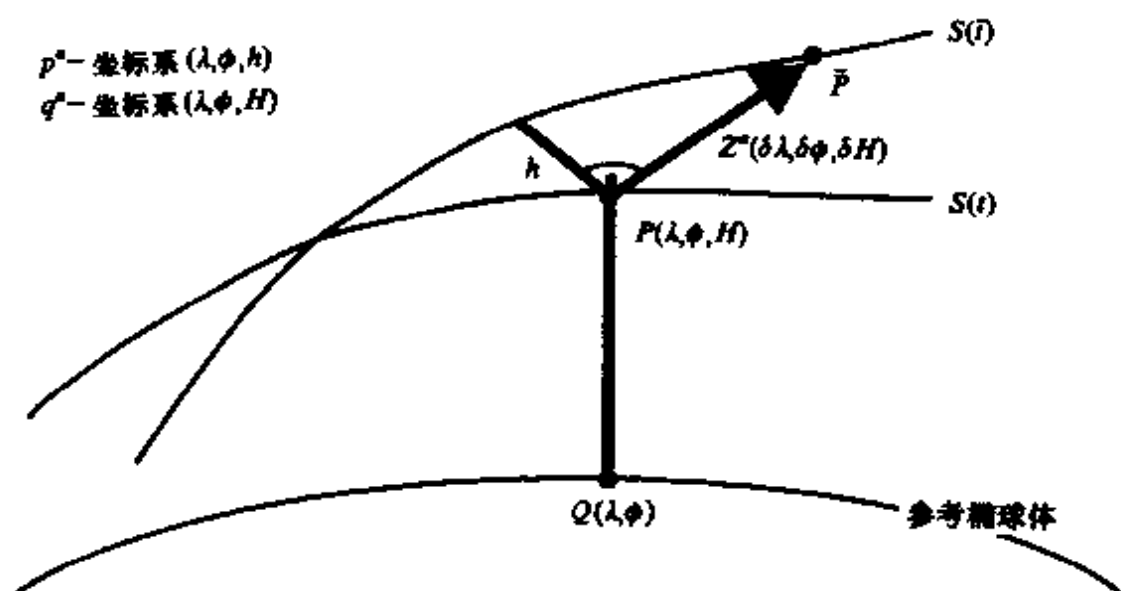


图 2.1 内蕴曲面法线坐标和外蕴曲面法线坐标间的关系

## § 2.2 三维形变

### § 2.2.1 初略说明

形变理论源自于对可变形介质（物体）动力学的表达，因此，可变形点场的三维微分几何学可以作为它所取得的主要进展。在本节中只简短的叙述这一极为重要的成果，因为与下述 § 2.3 节和第 4 章中有关的地面变形是本书的主要论题，当应用于自由物体表面时，可直接采用观测值求得形变值。

### § 2.2.2 基本概念

#### § 2.2.2.1 等参数表示法

所谓点场是指：

在两个观测时刻  $t$  和  $\bar{t}$  有

$$\{P\} \in \text{物体的体积 } V \text{ 内} \quad (2.2-1a)$$

等参数表示法表示

$$q^a = t \text{ 至 } \bar{t} \text{ 时刻的 } P \text{ 点坐标} \quad (2.2-2a)$$

$$g_{ab} = t \text{ 时刻的度量张量} \quad (2.2-2b)$$

$$\bar{g}_{ab} = \bar{t} \text{ 时刻的度量张量} \quad (2.2-2c)$$

线性元素的平方差是基本的形变测度，其值为：

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = (\bar{g}_{ab} - g_{ab})dq^a dq^b = 2D_{ab}dq^a dq^b \quad (2.2-3a)$$

形变张量

$$D_{ab} = (\bar{g}_{ab} - g_{ab})/2 = D_{ba} \quad (2.2-3b)$$

#### § 2.2.2.2 拉格朗日表示法

由式 (2.2-2) 等参数表示法中，引入坐标向量，得到拉格朗日表示法：

$$x_a(q^a) = \text{在 } S \text{ 系统中 } P(t) \text{ 的笛卡尔坐标}, \quad (2.2-4a)$$

$\bar{x}_i(q^\mu)$  = 在  $\bar{S} \equiv S$  系统中  $P(\bar{t})$  的笛卡尔坐标,  
而当  $S \equiv \bar{S}$  时, 位移向量的定义如下:

$$z_i(q^\mu) := \bar{x}_i(q^\mu) - x_i(q^\mu) \quad (2.2-4b)$$

度量张量

$$g_{ab} = x_{i,a} x_{i,b}, \quad \bar{g}_{ab} = \bar{x}_{i,a} \bar{x}_{i,b} \quad (2.2-5a)$$

由此, 可得以下关系:

$$\bar{g}_{ab} = g_{ab} + x_{i,a} z_{i,b} + x_{i,b} z_{i,a} + z_{i,a} z_{i,b} \quad (2.2-5b)$$

形变张量

$$\begin{aligned} D_{ab} &= (x_{i,a} z_{i,b} + x_{i,b} z_{i,a} + z_{i,a} z_{i,b})/2 \\ &= \epsilon_{ab} + z_{i,a} z_{i,b}/2 \end{aligned} \quad (2.2-5c)$$

$$\epsilon_{ab} := (x_{i,a} z_{i,b} + x_{i,b} z_{i,a})/2 \quad (2.2-5d)$$

在实际应用特别重要的情况是:

微位移:

$$|z_{i,a}| \ll |x_{i,a}| \text{ 时}, \quad (2.2-6a)$$

对微位移采用线性形变张量解算精度已足够

$$D_{ab} \approx \epsilon_{ab} = (x_{i,a} z_{i,b} + x_{i,b} z_{i,a})/2 \quad (2.2-6b)$$

当将 (2.2-5c) 式表示的形变张量转换至笛卡尔坐标时, 则可求得

位移张量:

$$V_{ij} := \partial_j z_i \quad (2.2-7a)$$

笛卡尔形变张量为:

$$D_{ij} := \epsilon_{ij} + V_{ki} V_{kj} / 2 = D_{ji} \quad (2.2-7b)$$

且有

$$\epsilon_{ij} = (V_{ij} + V_{ji})/2 = (\partial_i z_j + \partial_j z_i)/2 \quad (2.2-7c)$$

由 (2.2-7b、c) 式有:

旋转张量:

$$\xi_{ij} = (V_{ji} - V_{ij})/2 = (\partial_i z_j - \partial_j z_i)/2 \quad (2.2-7d)$$

并可获得位移张量为:

$$V_{ij} = \epsilon_{ij} - \xi_{ij} \quad (2.2-7e)$$

对微位移而言，由 (2.2-3a) 式表示的形变测度有以下表达式

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = 2D_{ij} dx_i dx_j \quad (2.2-7f)$$

$$\approx 2\epsilon_{ijk} dx_i dx_j \quad (2.2-7g)$$

旋转张量的特殊表达式为：

$$\xi_{ij} = \epsilon_{ijk} \bar{d}_k \Rightarrow \bar{d}_i = \epsilon_{ijk} \partial_j z_k / 2 \quad (2.2-8a)$$

以及

$$v_i := dz_i / dt$$

$$\tilde{\omega}_i := \bar{d}_i / dt \quad (2.2-8b)$$

$$\tilde{\omega}_i := \epsilon_{ijk} \partial_j v_k$$

= 旋度，旋转， $v_k$  的旋转

### § 2.2.3 特殊形变测度

下述两个参数是最重要的两种形变测度参数即：

$$q := (d\bar{s} - ds) / ds = \text{线性拉伸(线应变)} \quad (2.2-9a)$$

$$\bar{q} := (d\bar{V} - dV) / dV = \text{体积膨胀(体应变)} \quad (2.2-9b)$$

用 (2.2-3a) 式可直接求得方向为

$$r^a = dq^a / ds, \quad \text{例如: } r_i := dx_i / ds \quad (2.2-10a)$$

的线性拉伸 (线应变) 为：

$$q = (1 + 2D_{ab} r^a r^b)^{1/2} - 1 = (1 + 2D_{ij} r_i r_j)^{1/2} - 1$$

当位移量较小时，(2.2-6) 式可简化为：

$$q = \epsilon_{ab} r^a r^b = \epsilon_{ij} r_i r_j \quad (2.2-10b)$$

对 (2.2-9b) 式的体积膨胀引用 Duschek 和 Hochrainer (1965~1968) 表达式，则第一、第二和第三形变张量为：

$$D^{(1)} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \delta_{ip} \delta_{jq} D_{kr} / 2 = D_{ii} \quad (2.2-11a)$$

$$D^{(2)} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} \delta_{ip} \delta_{iq} D_{jq} D_{kr} / 2 \quad (2.2-11b)$$

$$D^{(3)} = \epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} D_{ip} D_{jq} D_{kr} / 6 \quad (2.2-11c)$$

其中：

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \epsilon^{ijk} = +1 \text{ 若 } i, j, k \text{ 是正循环的,} \\ &= -1 \text{ 若 } i, j, k \text{ 是逆循环的,} \\ &= 0 \text{ 若 } i, j, k \text{ 是非循环的.} \end{aligned} \quad (2.2-11d)$$

它是笛卡尔坐标的排列符号，而椭球坐标的排列符号则可参阅 (2.3-27d) 式。

由 (2.2-11a-c) 式，可求得：

体积膨胀（或压缩）

$$\bar{q} = (1 + 2D^{(1)} + 4D^{(2)} + 8D^{(3)})^{1/2} - 1 \quad (2.2-12a)$$

当出现 (2.2-6) 式的微位移情况时，(2.2-11a, c) 可简化为：

$$D^{(1)} = \epsilon_{\bar{a}}, \quad D^{(2)} \approx 0, \quad D^{(3)} \approx 0$$

则 (2.2-12a) 式为：

$$\bar{q} = \epsilon_{\bar{a}} = g^{ab} \epsilon_{ab} \quad (2.2-12b)$$

## § 2.3 地表形变

### § 2.3.1 初略说明

假如只考虑地表内蕴黎曼几何学及其有关的形变，对于大范围地区而言，相应的理论问题已经解决，如在 § 2.2 讨论的三维形变理论，下述的 § 2.3.2.1、§ 2.3.2.2 也肯定了这一点。但在具体的应用中，有必要把相应的地表置于三维欧几里得空间的坐标下，这意味着变形是由外蕴几何学的表面变形所产生的，其相应的基本理论将详述于 § 2.3.3。

### § 2.3.2 地表内蕴形变

#### § 2.3.2.1 等参数表示法

假设一个二维坐标点位

$$\{P\} \in F \quad (2.3-1a)$$

在时刻  $t$  和  $\bar{t}$  进行观测

等参数表示法为：

$$u^a = \text{在瞬时 } t \text{ 和 } \bar{t} \text{ 的 } P \text{ 点坐标} \quad (2.3-2a)$$

$$f_{ab} = \text{在瞬时 } t \text{ 的度量张量} \quad (2.3-2b)$$

$$f_{\alpha\beta} = \text{在瞬时 } \bar{t} \text{ 的度量张量} \quad (2.3-2c)$$

顾及 (2.2-1) 式, 则线性变量的方差是基本的形变测度:

$$d\bar{s}^2 - ds^2 = (\bar{f}_{\alpha\beta} - f_{\alpha\beta}) du^\alpha du^\beta = 2D_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta \quad (2.3-3a)$$

对应有曲面形变张量为:

$$D_{\alpha\beta} = (\bar{f}_{\alpha\beta} - f_{\alpha\beta})/2 = D_{\beta\alpha} \quad (2.3-3b)$$

### § 2.3.2.2 基于高斯曲面表达式的计算

位置向量

$$x_{i,}(u^\alpha) = \text{系统 } S \text{ 中 } P(t) \in F \text{ 的笛卡尔坐标。} \quad (2.3-4a)$$

$$\bar{x}_{i,}(u^\alpha) = \text{在系统 } S \equiv \bar{S} \text{ 中的 } P(\bar{t} \in \bar{F}) \text{ 笛卡尔坐标。}$$

引入中等参数曲面表示式 (2.3-2), 则  $\bar{S} \equiv S$  中的位移向量为:

$$z_{i,}(u^\alpha) := \bar{x}_{i,}(u^\alpha) - x_{i,}(u^\alpha) \quad (2.3-4b)$$

度量张量:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= x_{i,\alpha} x_{i,\beta}, \\ \bar{f}_{\alpha\beta} &= \bar{x}_{i,\alpha} \bar{x}_{i,\beta} \end{aligned} \quad (2.3-5a)$$

并可求得以下关系式:

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + x_{i,\alpha} z_{i,\beta} + x_{i,\beta} z_{i,\alpha} + z_{i,\alpha} z_{i,\beta} \quad (2.3-5b)$$

由此推导出表面形变张量:

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta} &= (x_{i,\alpha} z_{i,\beta} + x_{i,\beta} z_{i,\alpha} + z_{i,\alpha} z_{i,\beta})/2 \\ &= \epsilon_{\alpha\beta} + z_{i,\alpha} z_{i,\beta}/2, \end{aligned} \quad (2.3-5c)$$

$$\epsilon_{\alpha\beta} = (x_{i,\alpha} z_{i,\beta} + x_{i,\beta} z_{i,\alpha})/2 \quad (2.3-5d)$$

对于微位移,

$$|z_{i,\alpha}| \ll |x_{i,\alpha}| \quad (2.3-6a)$$

应用线性曲面形变张量:

$$D_{\alpha\beta} \approx \epsilon_{\alpha\beta} = (x_{i,\alpha} z_{i,\beta} + x_{i,\beta} z_{i,\alpha})/2 \quad (2.3-6b)$$

可达到足够的精度。

以 (2.2-10b、12b) 式求解微位移时, 内蕴曲面形变测度的结果如下:

在  $r^\alpha := du^\alpha/ds$  方向的线性曲面拉伸  $q$  和畸变尺度  $m$ :



$$q := (d\bar{s} - ds)/ds = \epsilon_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta, \quad (2.3-7a)$$

$$m = 1 + q$$

表面膨胀（或压缩）为：

$$\bar{q} = f^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (2.3-7b)$$

相互正交的主形变方向有：

$$\nu_{(n)} := (du^2/du^1)_n \quad n \in \{1, 2\} \quad (2.3-7c)$$

它与线性形变张量  $\epsilon_{\alpha\beta}$  的主轴方向相同，由 (2.3-7a) 式，可得到二次方程式的条件方程式：

$$\begin{aligned} a_0 \nu^2 + a_1 \nu + a_2 &= 0 \\ a_0 &= \epsilon_{12} f_{22} - \epsilon_{22} f_{12} \\ a_1 &= \epsilon_{11} f_{22} - \epsilon_{22} f_{11} \\ a_2 &= \epsilon_{11} f_{12} - \epsilon_{12} f_{11} \end{aligned} \quad (2.3-7d)$$

于是，二次方程式的两个通解为：

$$\left. \begin{matrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{matrix} \right\} = [1/2a_0] [-a_1 \pm (a_1^2 - 4a_0a_2)^{1/2}] \quad (2.3-7e)$$

当计算 (2.3-7e) 式的二次方程式时，以下特例是令人感兴趣的：

$$\begin{aligned} |a_0 a_2| &\ll |a_1^2|: \\ \nu_1 &\rightarrow 0 \quad \nu_2 \rightarrow -a_1/a_0 \\ |a_2| &\ll |a_1| \text{ 且 } |a_0| \ll |a_1|: \\ \nu_1 &\rightarrow 0 \quad \nu_2 \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.3-7f)$$

另一种特例是：

$$\epsilon_{12} \rightarrow 0 \text{ 和 } f_{12} \rightarrow 0$$

也就是主形变方向与正交坐标轴相一致。对应于方向矢量的主形变方向 (2.3-7e)、(2.3-7f) 为：

$$\begin{aligned} r_{(n)}^\alpha &= (1, \nu_{(n)})^\alpha / |(1, \nu_{(n)})^\beta|, \\ |(1, \nu_{(n)})^\beta|^2 &= f_{\alpha\beta} (1, \nu_{(n)})^\alpha (1, \nu_{(n)})^\beta. \end{aligned} \quad (2.3-7g)$$

顾及 (2.3-7g) 式，可获得椭球坐标系下方向向量的分量为：

$$r_{(1)}^1 = 1/(1 + \nu_{(1)}^2)^{1/2}, r_{(2)}^1 = 1/(1 + \nu_{(2)}^2)^{1/2} \quad (2.3-7h)$$

其中

$$r_{(1)}^2 = \nu_{(1)} / (1 + \nu_{(1)}^2)^{1/2}, r_{(2)}^2 = \nu_{(2)} / (1 + \nu_{(2)}^2)^{1/2} \quad (2.3-7i)$$

将上式代入 (2.3-7a) 式, 则线性拉伸 (线应变) 及畸变尺度的极值为:

$$\begin{aligned} q_{(n)} &= \epsilon_{\alpha\beta} r_{(n)}^\alpha r_{(n)}^\beta \\ m_{(n)} &= 1 + q_{(n)}, \quad n \in \{1, 2\} \end{aligned} \quad (2.3-7j)$$

并有畸变向量为:

$$m_{(n)}^\alpha = m_{(n)} r_{(n)}^\alpha \quad (2.3-7k)$$

### § 2.3.2.3 在外蕴曲面法线坐标系中的计算

将 (2.3-4a) 式的位置向量, 以 (2.1-6) 式的外蕴曲面法线坐标表示, 在  $t$  和  $\bar{t}$  时刻可推导出下述等参数曲面表达式:

$$\begin{aligned} q^a(u^a) &= [u^1, u^2, H(u^a)]^a \\ \bar{q}^a(u^a) &= [\bar{u}^1(u^a), \bar{u}^2(u^a), \bar{H}(u^a)]^a \end{aligned} \quad (2.3-8a)$$

对位移向量 (2.3-4b) 式, 可求出相应的位移坐标:

$$z^a(u^a) := \bar{q}^a(u^a) - q^a(u^a) \quad (2.3-8b)$$

对于 (2.3-8a) 式, 考虑 (2.3-6a) 式的微位移时, 则有:

$$|z_{,a}^a| \ll |q_{,a}^a| \quad (2.3-9a)$$

由此可以准确获得在  $q_a$  系统下的表达式为:

$$\begin{aligned} z^a &= c_{,a}^a z_{,a} \\ z_{,a} &= (\partial x_{,a} / \partial q^a) \delta q^a = c_{,a,a} z^a \\ \bar{q}^a &= q^a + z^a \end{aligned} \quad (2.3-9b)$$

即:

$$x_{,a} z_{,a} = q_{,a}^d (z_{,\beta}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\beta}^e z^f) g_{,d} \quad (2.3-9c)$$

依据 (2.3-5a) 式, 则得度量张量:

$$f_{\alpha\beta} = q_{,a}^c q_{,\beta}^d g_{,cd} \quad \bar{f}_{\alpha\beta} = \bar{q}_{,a}^c \bar{q}_{,\beta}^d \bar{g}_{,cd} \quad (2.3-10a)$$

以及  $F$  与  $\bar{F}$  间的关系为:

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + [q_{,a}^d (z_{,\beta}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\beta}^e z^f) + q_{,\beta}^d (z_{,a}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,a}^e z^f) + \cdots] g_{,cd} \quad (2.3-10b)$$

故线性曲面形变张量为:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = [q'_{,\alpha}(z^d_{,\beta} + \Gamma^d_{ef} q^e_{,\beta} z^f) + q'_{,\beta}(z^d_{,\alpha} + \Gamma^d_{ef} q^e_{,\alpha} z^f)] g_{,\alpha} / 2 \quad (2.3-10c)$$

依据 (2.3-8a) 式曲面坐标的结果可求得  $q'$  的一阶导数:

$$q'_{,\alpha} = (\delta^1_{\alpha}, \delta^2_{\alpha}, H_{,\alpha})' \quad (2.3-10d)$$

再用 (2.3-7a-m) 式求解内蕴曲面形变测度。

#### § 2.3.2.4 椭球坐标系中的计算

对 (2.3-8a) 式的曲面坐标用地理坐标表示为:

$$u^{\alpha} = (\lambda, \phi) \quad \alpha \in \{1, 2\} \quad (2.3-11a)$$

借助 (2.1-6) 式, 在时刻  $t$  和  $\bar{t}$  上的连续点位的曲面表达式为:

$$\begin{aligned} q^{\alpha}(u^{\alpha}) &= [\lambda, \phi, H(u^{\alpha})]^{\alpha} \\ \bar{q}^{\alpha}(u^{\alpha}) &= [\bar{\lambda}(u^{\alpha}), \bar{\phi}(u^{\alpha}), \bar{H}(u^{\alpha})]^{\alpha} \end{aligned} \quad (2.3-11b)$$

而 (2.3-8b) 式的位移坐标为:

$$\delta q^{\alpha}(u^{\alpha}) = [\delta \lambda(u^{\alpha}), \delta \phi(u^{\alpha}), \delta H(u^{\alpha})]^{\alpha} \quad (2.3-11c)$$

椭球地理坐标的度量为:

$$g_{\alpha\beta} = (R_1 + H)^2 \cos^2 \phi \delta^1_{\alpha} \delta^1_{\beta} + (R_2 + H)^2 \delta^2_{\alpha} \delta^2_{\beta} + \delta^3_{\alpha} \delta^3_{\beta} \quad (2.3-12a)$$

及

$$\begin{aligned} R_1 &= c/V, \\ R_2 &= c/V^3, \\ c &= a^2/b \end{aligned}$$

式中,  $a$  为旋转椭球体的长半轴;  $b$  为旋转椭球体的短半轴。

且有

$$V = (1 + e'^2 \cos^2 \phi)^{1/2}, e'^2 = (a^2 - b^2)/b^2$$

以  $\lambda$ ,  $\phi$  和  $H$  为参数表示的 (2.3-12a) 式度量张量的一阶偏微分为:

$$\begin{aligned} g_{11,1} &= 0 \\ g_{11,2} &= -(R_1 + H)(R_2 + H) \sin 2\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{11,3} &= 2(R_1 + H)\cos^2\phi \\
g_{22,1} &= 0 \\
g_{22,2} &= 3R_2(R_2 + H)(e''/V)^2\sin 2\phi \quad (2.3-12b) \\
g_{22,3} &= 2(R_2 + H) \\
g_{33,1} &= g_{33,2} = g_{33,3} = 0
\end{aligned}$$

和

$e''$  = 旋转椭球体 (2.3-12a) 的第二偏心率。由 (2.3-12) 式可得到 (2.3-9c) 式中的第二类克利斯托弗符号为:

$$\Gamma_{ab}^{cd} = g^{cd}(g_{ad,b} + g_{bd,a} - g_{ab,d})/2 \quad (2.3-13a)$$

即:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{12}^1 &= -(R_2 + H)\tan\phi/(R_1 + H) \\
\Gamma_{13}^1 &= 1/(R_1 + H) \\
\Gamma_{21}^1 &= \Gamma_{12}^1 \\
\Gamma_{31}^1 &= \Gamma_{13}^1 \\
\Gamma_{11}^2 &= (R_1 + H)\sin 2\phi/2(R_2 + H) \\
\Gamma_{22}^2 &= 2R_2(e''/V)^2\sin 2\phi/2(R_2 + H) \quad (2.3-13b) \\
\Gamma_{23}^2 &= 1/(R_2 + H) \\
\Gamma_{32}^2 &= \Gamma_{23}^2 \\
\Gamma_{11}^3 &= -(R_1 + H)\cos^2\phi \\
\Gamma_{22}^3 &= -(R_2 + H)
\end{aligned}$$

第二类克利斯托弗符号的其它分量均为零, 因此在 (2.3-13b) 式中未一一列出。采用 (2.3-9a、b) 的假设和 (2.3-11c) 式的位移坐标, 可由上式导出在椭球坐标系中的 (2.3-9c) 式:

$$\begin{aligned}
x_{i,1}z_{i,1} &= [z_{,1}^1 + (\Gamma_{1a}^1 + \Gamma_{3a}^1 H_{,1})z^a]g_{11} + [z_{,1}^3 + (\Gamma_{1a}^3 + \Gamma_{3a}^3 H_{,1})z^a]H_{,1} \\
x_{i,1}z_{i,2} &= [z_{,2}^1 + (\Gamma_{2a}^1 + \Gamma_{3a}^1 H_{,2})z^a]g_{11} + [z_{,2}^3 + (\Gamma_{2a}^3 + \Gamma_{3a}^3 H_{,2})z^a]H_{,1} \\
x_{i,2}z_{i,1} &= [z_{,1}^2 + (\Gamma_{1a}^2 + \Gamma_{3a}^2 H_{,1})z^a]g_{22} + [z_{,1}^3 + (\Gamma_{1a}^3 + \Gamma_{3a}^3 H_{,1})z^a]H_{,2} \\
x_{i,2}z_{i,2} &= [z_{,2}^2 + (\Gamma_{2a}^2 + \Gamma_{3a}^2 H_{,2})z^a]g_{22} + [z_{,2}^3 + (\Gamma_{2a}^3 + \Gamma_{3a}^3 H_{,2})z^a]H_{,2} \quad (2.3-14)
\end{aligned}$$

依据度量张量的转换定理

$$f_{\alpha\beta} = q'_{\alpha} q'_{\beta} g_{cd} \quad (2.3-15)$$

可求得在第一时刻  $t$  的等参数曲面表达式 (2.3-2) 中时刻  $t$  点的度量张量  $f_{\alpha\beta}$ :

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} = & [(R_1 + H)^2 \cos^2 \phi + (H_{,1})^2] \delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^1 + \\ & (\delta_{\alpha}^1 \delta_{\beta}^2 + \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^1) H_{,1} H_{,2} + [(R_2 + H)^2 + (H_{,2})^2] \delta_{\alpha}^2 \delta_{\beta}^2 \end{aligned} \quad (2.3-16)$$

从而可以计算出 (2.3-10a) 式在第二时刻  $\bar{t}$  求解  $\bar{f}_{\alpha\beta}$  的度量张量的相应值, 确立 (2.3-10c) 式的线性曲面形变张量  $f_{\alpha\beta}$ , 并依据 (2.3-7) 式求得线性曲面拉伸和面膨胀 (压缩) 的结果。

### § 2.3.3 地表外蕴形变

#### § 2.3.3.1 基于高斯曲面表达式的计算

地面的外蕴形变主要是由下述的第一和第二基本张量的变化所决定的:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{\alpha\beta} - f_{\alpha\beta} \\ \bar{L}_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.3-17a)$$

对微位移的 (2.3-6) 式, 可按 (2.3-5) 式计算出第一基本张量的变量为:

$$\delta f_{\alpha\beta} = \bar{f}_{\alpha\beta} - f_{\alpha\beta} = x_{i,\alpha} z_{i,\beta} + x_{i,\beta} z_{i,\alpha} + \dots = 2\epsilon_{\alpha\beta} \quad (2.3-17b)$$

$$\begin{aligned} \delta f = \bar{f} - f &= f_{11} \delta f_{22} + f_{22} \delta f_{11} - 2f_{12} \delta f_{12} + \dots \\ &= 2(f_{11} \epsilon_{22} + f_{22} \epsilon_{11} - 2f_{12} \epsilon_{12} + \dots) \end{aligned} \quad (2.3-17c)$$

由上述结果, 可得  $F$  和  $\bar{F}$  的第二基本张量为

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= n_{,i} x_{i,\alpha\beta} = \epsilon_{ijk} x_{j,1} x_{k,2} x_{i,\alpha\beta} f^{-1/2} \\ \bar{L}_{\alpha\beta} &= \bar{n}_{,i} \bar{x}_{i,\alpha\beta} = \epsilon_{ijk} \bar{x}_{j,1} \bar{x}_{k,2} \bar{x}_{i,\alpha\beta} \bar{f}^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.3-18a)$$

以及以线性表达式给出的第二基本张量的变量:

$$\begin{aligned} \delta L_{\alpha\beta} &= \bar{L}_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta} \\ &= \epsilon_{ijk} [x_{j,1} x_{k,2} z_{i,\alpha\beta} + (x_{j,1} z_{k,2} + x_{k,2} z_{j,1}) x_{i,\alpha\beta}] / \end{aligned} \quad (2.3-18b)$$

$$\begin{aligned} f^{1/2} &= L_{\alpha\beta} \delta f / (2f) \\ \delta L &= \bar{L} - L \end{aligned} \quad (2.3-18c)$$

$$= L_{11} \delta L_{22} + L_{22} \delta L_{11} - 2L_{12} \delta L_{12} + \delta L_{11} \delta L_{22} + \delta L_{12}^2$$

对  $\delta L$  而言, 由于  $\delta L_{\alpha\beta}$  可能具有与  $L_{\alpha\beta}$  同样的数量级, 因此  $\delta L$  没有如 (2.3-17c) 式那样的线性公式可以使用, 这一点在计算高斯曲率的变化 (2.3-21a) 式时, 显得极为重要。另一方面, 具有更形象的外蕴曲面几何学可由法向曲率来确定为:

在  $r^\alpha := du^\alpha / ds$  方向,

曲率为:

$$\kappa_N = 1/R_N = L_{\alpha\beta} r^\alpha r^\beta \quad (2.3-19a)$$

平均曲率为:

$$H = (\kappa_1 + \kappa_2)/2 = f^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} / 2 \quad (2.3-19b)$$

高斯曲率为:

$$K = (\kappa_1 \kappa_2)^{1/2} = (L/f)^{1/2} \quad (2.3-19c)$$

这里的几何平均值由下式定义:

$$\begin{aligned} f &= |f_{\alpha\beta}| = f_{11} f_{22} - f_{12}^2 \\ L &= |L_{\alpha\beta}| = L_{11} L_{22} - L_{12}^2 \end{aligned} \quad (2.3-19d)$$

依据高斯定理, 曲率  $K$  也可表示为内蕴几何的函数 (Heitz 1988, 参阅第 2 章)

$$K^2 = R_{2112} / f \quad (2.3-19e)$$

互为正交的主曲率方向为:

$$\nu_{(n)} := (du^2/du^1)_n, \quad n \in \{1, 2\} \quad (2.3-20a)$$

它与第二基本张量  $L_{\alpha\beta}$  的主轴方向一致, 由 (2.3-19a) 式出发可得到二次式的条件方程式:

$$\begin{aligned} b_0 \nu^2 + b_1 \nu + b_2 &= 0 \\ b_0 &= L_{12} f_{22} - L_{22} f_{12}, \\ b_1 &= L_{11} f_{22} - L_{22} f_{11} \\ b_2 &= L_{11} f_{12} - L_{12} f_{11} \end{aligned} \quad (2.3-20b)$$

(见第 2 章 (2.3-7) 式以及 Heitz, 1988), 于是二次方程式的两

个通解为:

$$\left. \begin{matrix} \nu_{(1)} \\ \nu_{(2)} \end{matrix} \right\} = [1/(2b_0)] [-b_1 \pm (b_1^2 - 4b_0b_2)^{1/2}] \quad (2.3-20c)$$

下面给出的一些特殊情况是很重要的:

$$\begin{aligned} |b_0b_2| &\ll b_1^2; \\ \nu_{(1)} &\rightarrow 0, \quad \nu_{(2)} \rightarrow -b_1/b_0 \\ |b_2| &\ll |b_1| \text{ 且 } |b_0| \ll |b_1| \\ \nu_{(1)} &\rightarrow 0, \quad \nu_{(2)} \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.3-20d)$$

第二种特殊情况如下:

$$L_{12} \rightarrow 0 \quad \text{及} \quad f_{12} \rightarrow 0$$

例如, 当曲率的主方向与正交坐标线局部一致时就是如此, 从属于方向矢量的由 (2.3-20c、d) 表示的主曲率方向为:

$$\begin{aligned} r_{(n)}^\alpha &= (1, \nu_{(n)})^\alpha / |(1, \nu_{(n)})^\beta| \\ |(1, \nu_{(n)})^\beta|^2 &= f_{\alpha\beta} (1, \nu_{(n)})^\alpha (1, \nu_{(n)})^\beta \end{aligned} \quad (2.3-20e)$$

依据 (2.3-20e) 式, 可以确定椭球坐标系下方向向量的分量:

$$r_{(1)}^1 = 1/(1 + \nu_{(1)}^2)^{1/2}, \quad r_{(2)}^1 = 1/(1 + \nu_{(2)}^2)^{1/2} \quad (2.3-20f)$$

其中,

$$\begin{aligned} r_{(1)}^2 &= \nu_{(1)}/(1 + \nu_{(1)}^2)^{1/2}, \quad r_{(2)}^2 = \nu_{(2)}/(1 + \nu_{(2)}^2)^{1/2} \\ A_{(1)} &= [f_{11} + 2f_{12}\nu_{(1)} + f_{22}\nu_{(1)}^2]^{1/2} \\ A_{(2)} &= [f_{11} + 2f_{12}\nu_{(2)} + f_{22}\nu_{(2)}^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3-20g)$$

如果将上式代入 (2.3-19a) 式, 则可求得主曲率为:

$$\kappa_{N(n)} = L_{\alpha\beta} r_{(n)}^\alpha r_{(n)}^\beta \quad n \in \{1, 2\} \quad (2.3-20h)$$

与 (2.3-20e、f) 式合并, 得主曲率向量为:

$$\kappa_{N(n)}^{\bar{\alpha}} = \kappa_{N(n)} r_{(n)}^\alpha \quad (2.3-20i)$$

由 (2.3-20a-i) 式给出的公式对于已有变形的曲面  $\bar{F}$ , 在形式上也是正确的:

$$\bar{f}_{\alpha\beta} = f_{\alpha\beta} + \delta f_{\alpha\beta}$$

$$\bar{L}_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + \delta L_{\alpha\beta} \quad (2.3-21a)$$

如果类似地依照 (2.3-20a-i) 式计算  $\bar{\nu}_{(n)}$  和  $\bar{r}_{(n)}^a$ , 则从 (2.3-20h) 式出发可求得主曲率的变化量:

$$\begin{aligned} \delta \kappa_{N(n)} &= \bar{\kappa}_{N(n)} - \kappa_{N(n)} = \bar{L}_{\alpha\beta} \bar{r}_{(n)}^\alpha \bar{r}_{(n)}^\beta - L_{\alpha\beta} r_{(n)}^\alpha r_{(n)}^\beta \\ &= \delta L_{\alpha\beta} r_{(n)}^\alpha r_{(n)}^\beta + \bar{L}_{\alpha\beta} (2r_{(n)}^\alpha + \delta r_{(n)}^\alpha) \delta r_{(n)}^\beta \end{aligned} \quad (2.3-21b)$$

$$\delta r_{(n)}^a = \bar{r}_{(n)}^a - r_{(n)}^a$$

通常主曲率的变化与曲率变化极值不完全相同。作为后文的外蕴曲面形变测度平均曲率的变化为:

$$\begin{aligned} \delta H &= \bar{H} - H = (\bar{f}^{\alpha\beta} \bar{L}_{\alpha\beta} - f^{\alpha\beta} L_{\alpha\beta})/2 \\ &= f^{\alpha\beta} \delta L_{\alpha\beta} + \bar{L}_{\alpha\beta} \delta f^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.3-21c)$$

由此确定的高斯曲率的变化为:

$$\delta K = \bar{K} - K = (\bar{L}/\bar{f})^{1/2} - (L/f)^{1/2} \quad (2.3-21d)$$

基于公式 (2.3-18c) 的原因, 按 (2.3-17、18) 式是不可能把 (2.3-21d) 式线性化的, 甚至在曲率出现较小变化时, 主曲率方向的改变量  $\bar{\nu}_{(n)} - \nu_{(n)}$ , 可能会变得很大。

为了表示外蕴曲面变形, 在处理之前, 曲面元素的旋转可以曲面曲率作为参考, 并且依据 (2.1-8d) 式, 在内蕴曲面法线坐标系  $p^a = (u^a, h)$  中, 对它们进行合适的计算。在该式中, 有:

$$\begin{aligned} x_{i,a} &:= \partial x_i / \partial p^a =: h_{i,a} \\ b_i^a &:= \partial p^a / \partial x_i \\ z_{i,a} &:= \partial z_i / \partial p^a \end{aligned} \quad (2.3-22a)$$

对表面上的点, 特别可取:

$$x_{i,3} = b_{i,3} = n_i, \quad z_{i,3} = 0_i \quad (2.3-22b)$$

为便于区别, 在系统  $p^a$  中的量以符号 “ $\sim$ ” 定义。

在笛卡尔坐标 (2.1-1) 中的位移张量为:

$$V_{\eta_j} = \partial_{j_i} z_i = b_j^a z_{i,a} \quad (2.3-23a)$$

因此在内蕴曲面法线坐标系中有:

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{ab} &= \tilde{z}_{a,b} = x_{i,a} x_{j,b} V_{\eta_j} = \delta_{ab}^j h_{i,a} z_{i,b} =: \tilde{\epsilon}_{ab} - \tilde{\xi}_{ab} \end{aligned} \quad (2.3-23b)$$



在  $p^a$  系统中, 对称部分的位移张量为:

$$\bar{\epsilon}_{ab} = (\bar{z}_{a,b} + \bar{z}_{b,a})/2 = (\delta_b^a b_{i,a} z_{i,b} + \delta_a^b b_{i,b} z_{i,a})/2 \quad (2.3-24a)$$

其切向分量形式的线性曲面形变张量

$$\bar{\epsilon}_{a\beta} = (b_{i,a} z_{i,\beta} + b_{i,\beta} z_{i,a})/2 \equiv \epsilon_{a\beta} \quad (2.3-24b)$$

的位移张量的斜对称部分, 为所谓的旋转张量

$$\bar{\xi}_{ab} = (\bar{z}_{b,a} - \bar{z}_{a,b})/2 = (\delta_b^a b_{i,b} z_{i,a} - \delta_a^b b_{i,a} z_{i,b})/2 \quad (2.3-25a)$$

其切向分量形式的旋转法向张量为:

$$\bar{\xi}_{a\beta} = (b_{i,\beta} z_{i,a} - b_{i,a} z_{i,\beta})/2 \equiv \xi_{a\beta} \quad (2.3-25b)$$

用 (2.3-22b、25b) 式可求得对称部分位移张量的特殊表达式为:

$$\bar{\epsilon}_{ab} = \bar{\epsilon}_{a\beta} \delta_a^\alpha \delta_b^\beta + n_i z_{i,a} (\delta_a^\alpha \delta_b^\beta + \delta_b^\alpha \delta_a^\beta)/2 \quad (2.3-26a)$$

以此类推, 由 (2.3-22b) 式, 给出的旋转张量 (2.3-25a、b) 式可以表示为:

$$\bar{\xi}_{ab} = \bar{\xi}_{a\beta} \delta_a^\alpha \delta_b^\beta + n_i z_{i,a} (\delta_a^\alpha \delta_b^\beta - \delta_b^\alpha \delta_a^\beta)/2 \quad (2.3-26b)$$

顾及 (2.3-22b) 式, 把无限小的旋转向量看做是构筑在笛卡尔坐标系中的旋转张量是恰当的。

$$\begin{aligned} d_k &= (1/2) \epsilon_{ijk} \bar{\xi}_j = (1/2) \epsilon_{ijk} b_i^a b_j^b \bar{\xi}_{ab} \\ &= (1/2) \epsilon_{ijk} b_i^a z_{j,a} = (1/2) \epsilon_{ijk} b_i^a z_{j,a} \end{aligned} \quad (2.3-27a)$$

在内蕴曲面法线坐标系  $p^a$  中则有:

$$\bar{d}^i = (1/2) \bar{\epsilon}^{ijk} \bar{\xi}_{ab} = (1/2) \bar{\epsilon}^{ijk} \bar{z}_{b;a} = (1/2) \bar{\epsilon}^{ijk} b_{i,b} z_{j,a} \quad (2.3-27b)$$

平面和高程分量分别为:

$$\begin{aligned} \bar{d}^a &= \bar{f}^{-1/2} (-z_{i,2}, z_{i,1})^a b_{i,3}/2, b_{i,3} = n_i \\ \bar{d}^3 &= \bar{f}^{-1/2} (b_{i,1} z_{i,2} - b_{i,2} z_{i,1})/2 \end{aligned} \quad (2.3-27c)$$

椭球坐标系的排列符号为:

$$\begin{aligned} \epsilon_{def} &= g && \text{若 } d, e, f \text{ 正循环的,} \\ &= -g && \text{若 } d, e, f \text{ 逆循环的,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 \quad \text{若 } d, e, f \text{ 不循环的;} \\
\epsilon^{def} &= 1/g \quad \text{若 } d, e, f \text{ 正循环的,} \\
&= -1/g \quad \text{若 } d, e, f \text{ 逆循环的,} \\
&= 0 \quad \text{若 } d, e, f \text{ 不循环的;}
\end{aligned} \tag{2.3-27d}$$

其中  $g^2 = |g_{ab}| = g_{11}g_{22}$ , 即  $g = (g_{11}g_{22})^{1/2}$  (参阅 2.3-12a 式)。

相对于曲面坐标  $p^\beta = q^\beta = u^\beta$  的笛卡尔旋转向量 (2.3-27a) 的偏导数为:

$$\begin{aligned}
d_{k,\beta} &= (\partial_{L_k} d_k) b_{L,\beta} \\
&= (1/2) \epsilon_{ijk} [(-\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^a b_\gamma^i + \tilde{L}_\beta^a n_i) z_{j,a} + b_\gamma^i z_{j,a\beta}]
\end{aligned} \tag{2.3-28a}$$

而由 (2.3-27b、c) 式, 旋转向量的协方差函数的导数为:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{i,\beta} &= b_k^i d_{k,\beta} \\
&= (1/2) \epsilon_{ijk} b_k^i [(-\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^a b_\gamma^j + \tilde{L}_\beta^a n_i) z_{j,a} + b_\gamma^j z_{j,a\beta}]
\end{aligned} \tag{2.3-28b}$$

(2.3-28a、b) 式是位移的二阶偏导数函数, 因而可以认为由于曲面形变引起了曲率的改变。

### § 2.3.3.2 在外蕴曲面法线坐标系中的计算

应用曲面理论中的高斯-温格尔登 (Gauss - Weingarten) 方程:

$$x_{i,a} = x_{i,a} q_{,a}^a \quad x_{i,a\beta} = x_{i,d} (q_{,a\beta}^d + \Gamma_{ab}^d q_{,a}^a q_{,\beta}^b) \tag{2.3-29a}$$

和

$$\epsilon_{ijk} x_{i,d} x_{j,e} x_{k,f} = \epsilon_{def}, \quad \bar{\epsilon}_{ijk} \bar{x}_{i,d} \bar{x}_{j,e} \bar{x}_{k,f} = \bar{\epsilon}_{def} \tag{2.3-29b}$$

在外蕴曲面法线坐标系  $q^a$  中, § 2.2 中  $F$  和  $\bar{F}$  的基本张量的表达式 (2.3-18a) 可转换成:

$$\begin{aligned}
L_{a\beta} &= \epsilon_{def} q_{,1}^e q_{,2}^f (q_{,a\beta}^d + \Gamma_{ab}^d q_{,a}^a q_{,\beta}^b) f^{-1/2} \\
\bar{L}_{a\beta} &= \bar{\epsilon}_{def} \bar{q}_{,1}^e \bar{q}_{,2}^f (\bar{q}_{,a\beta}^d + \bar{\Gamma}_{ab}^d \bar{q}_{,a}^a \bar{q}_{,\beta}^b) \bar{f}^{-1/2}
\end{aligned} \tag{2.3-30a}$$

依据 (2.3-18b) 式有第二基本张量的变化量:

$$\bar{L}_{a\beta} - L_{a\beta} \tag{2.3-30b}$$

除此以外, 按照 (2.3-29) 式:

$$x_{i, a} = x_{i, a} z^a = c_{i, a} z^a \quad (2.3-31a)$$

相对于曲面坐标 ( $u^a$ ) 的一阶和二阶偏导数必须看作为  $q^a$  的导数的函数, 其结果为:

$$\begin{aligned} z_{i, a} &= c_{i, a} (z'_{, a} + \Gamma_{ab}^c q_{, a}^b z^a) \\ z_{i, a\beta} &= c_{i, a} \{ z'_{, a\beta} + \Gamma_{ab}^c (q_{, \beta}^b z'_{, a} + q_{, a}^b z'_{, \beta}) + \\ &\quad [\Gamma_{ab}^c q_{, a\beta}^b + (\Gamma_{ab, d}^c + \Gamma_{cd}^e \Gamma_{ab}^e) q_{, a}^b q_{, \beta}^d] z^d \} \end{aligned} \quad (2.3-31b)$$

由 (2.3-10d) 式, 可求得  $q^a$  相对于曲面坐标的二阶偏导数:

$$q_{, a\beta}^1 = q_{, a\beta}^2 = 0 \quad (2.3-31c)$$

$$q_{, a\beta}^3 = H_{, 11} \delta_a^1 \delta_\beta^1 + H_{, 12} \delta_a^1 \delta_\beta^2 + H_{, 21} \delta_a^2 \delta_\beta^1 + H_{, 22} \delta_a^2 \delta_\beta^2 \quad (2.3-31d)$$

由 (2.3-29~31) 式, 所有的曲率计算 (2.3-19~21) 式都可以在外蕴曲面法线坐标系  $q^a$  中进行。为了计算某一曲面元的旋转 (2.3-22~28), 应重新从假设 (2.3-8, 9a, b) 出发。与 § 2.3.2.3 节表述的相反, 曲面法线方向的  $h$  分量必须在内蕴曲面法线坐标系中加以考虑, 要使用内蕴  $q^a$  系统和外蕴  $p^a$  系统, 必须为后者提供一种标志, 一般以波形符号  $\sim$  表示之, 有下述表达式:

$$h_{i, a} = \partial x_{i, a} / \partial p^a = c_{i, a} q_{, a}^c, \quad h_{i, a}^{\sim} = \partial p^a / \partial x_{i, a} = c_{i, a}^{\sim} p_{, a}^a \quad (2.3-32a)$$

顾及 (2.3-31a) 式可得:

$$z_{i, b} = c_{i, a} (z'_{, b} + \Gamma_{ef}^d q_{, b}^e z^f) =: c_{i, a} \delta_b^g (z'_{, \beta} + \Gamma_{ef}^d q_{, \beta}^e z^f) \quad (2.3-32b)$$

顾及 (2.3-22b) 式中的第二式满足  $z_{i, \gamma} = 0$ , 因此可得:

$$z'_{, \gamma} = -\Gamma_{ef}^d q_{, \gamma}^e z^f = -\Gamma_{ef}^d n^e z^f \quad (2.3-32c)$$

对应于 (2.3-9c) 式, 则方程式为

$$h_{i, a} z_{i, b} = q_{, a}^c \delta_b^g (z'_{, \beta} + \Gamma_{ef}^d q_{, \beta}^e z^f) g_{c, d} \quad (2.3-32d)$$

将上式代入 (2.3-24a, 25a) 式, 则得对称的位移张量为:

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{ab} = & [q_{,a}^{\epsilon} \delta_b^{\beta} (z_{,\beta}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\beta}^e z^f) + \\ & q_{,b}^{\epsilon} \delta_a^{\alpha} (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f)] g_{cd} / 2\end{aligned}\quad (2.3-33a)$$

旋转张量

$$\begin{aligned}\bar{\xi}_{ab} = & [q_{,a}^{\epsilon} \delta_b^{\beta} (z_{,\beta}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\beta}^e z^f) - \\ & q_{,b}^{\epsilon} \delta_a^{\alpha} (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f)] g_{cd} / 2\end{aligned}\quad (2.3-33b)$$

基于 (2.1-8d) 式假设, 有

$$q^a \equiv u^a \equiv p^a \quad (2.3-34a)$$

$q^a$ ——坐标系统和  $p^a$ ——坐标系统间的转换矩阵为:

$$q_{,a}^d = c_{,a}^d b_{i,a} \quad (2.3-34b)$$

特别地:

$$\begin{aligned}q_{,a}^{\gamma} &= \delta_a^{\gamma}, \quad q_{,a}^3 = H_{,a} \\ q_{,3}^d &= c_{,3}^d n_{,i} = n^d = g^{ad} \epsilon_{ab} q_{,\gamma}^a q_{,\gamma}^b f^{-1/2}\end{aligned}\quad (2.3-34c)$$

及

$$f_{a\beta} = q_{,a}^{\alpha} q_{,\beta}^{\gamma} g_{\alpha\gamma}, \quad f = |f_{a\beta}| = f_{11} f_{12} - f_{12}^2 \quad (2.3-34d)$$

以及  $n_{,i} = b_{i,3}$  在  $p^a$  坐标系下参考曲面的法线。

将  $p^a$  坐标系和  $q^a$  坐标系间的转换矩阵实施逆运算, 则为:

$$p_{,a}^d = b_{,a}^d c_{i,a}, \quad p_{,a}^d q_{,b}^a = \delta_b^d \quad (2.3-35a)$$

特别地有:

$$\begin{aligned}p_{,a}^{\gamma} &= \delta_a^{\gamma}, \quad p_{,a}^3 = h_{,a} = -H_{,a} / n^3 \\ p_{,3}^d &= b_{,3}^d m_{,i} = \tilde{m}^d = (0, 0, 1/n^3)\end{aligned}\quad (2.3-35b)$$

而  $m_{,i} = c_{i,3} = q^a$  坐标系参考曲面法线,  $n_i$  参阅 (2.3-34d) 式。

事实上, (2.3-10b、c) 式之间差别在于计算采用的转换矩阵  $q_{,3}^d$ 。假如只考虑 (2.3-24b) 式的线性曲面形变张量, 则可以 (2.3-33a) 式取代 (2.3-10c) 式。

然而, 在  $p^a$  坐标系中, 旋转张量的三维表达式 (2.3-33b) 是重要的, 因为仅有此种表达式可以作为无穷小旋转向量 (2.3-27b) 式的完全表达式:

$$\begin{aligned}\tilde{d}^c &= (1/2) \bar{\epsilon}^{abc} \bar{\xi}_{ab} = (1/2) \bar{\epsilon}^{abc} b_{i,b} z_{,a}^i \\ &= (1/2) \bar{\epsilon}^{abc} q_{,b}^d (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f) g_{cd}\end{aligned}\quad (2.3-36a)$$

当限于法向旋转张量 (2.3-25b) 式的情况下, 只能计算 (2.3-36a) 式的旋转向量法线分量:

$$\tilde{d}^3 = (1/2)\tilde{\epsilon}^{\alpha\beta 3} q_{,\beta}^{\alpha} (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f) g_{d\alpha} \quad (2.3-36b)$$

与 (2.3-28b) 式相对应, 逆协方差旋转向量的协方差导数, 一般按以下 (2.3-36a) 式计算:

$$d_{,\beta}^c = (1/2)\tilde{\epsilon}^{abc} [q_{,\beta}^c (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f) g_{d\alpha}]_{,\beta}$$

假如把其中的笛卡尔坐标消除掉, 上式的结果必定与 (2.3-28b) 式相同, 因而可先求得:

$$\tilde{d}_{,\beta}^c = (1/2)\tilde{\epsilon}^{mnc} [(-\tilde{\Gamma}_{\beta m}^a + \tilde{L}_{\beta}^a \delta_m^3) h_{j,n} z_{j,\alpha} + \delta_m^a h_{j,n} z_{j,\alpha\beta}] \quad (2.3-37a)$$

依据 (2.3-32d) 式, 则:

$$h_{i,n} z_{i,\alpha} = q_{,\alpha}^i (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f) g_{id} \quad (2.3-37b)$$

并由 (2.3-32b) 式出发, 可得:

$$h_{i,n} z_{i,\alpha\beta} = q_{,\alpha}^i (z_{,\alpha\beta}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z_{,\beta}^f + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha\beta}^e z^f + \Gamma_{ef,o}^d q_{,\alpha}^e q_{,\beta}^o z^f) g_{id} + \Gamma_{do}^d q_{,\beta}^o p_{,\alpha}^d (z_{,\alpha}^d + \Gamma_{ef}^d q_{,\alpha}^e z^f) \tilde{f}_{ng} \quad (2.3-37c)$$

将 (2.3-37b、c) 式代入 (2.3-37a) 式, 则依据 (2.3-34、35) 式可计算出转换矩阵。

### § 2.3.3.3 椭球坐标系中的计算

在椭球地理坐标系中, 外蕴曲面形变理论的表达方式已详述于 § 2.3.2.4, 椭球体坐标  $q^a = (\lambda, \phi, H)$  相对于内蕴曲面法线坐标  $\tilde{p}^a = (\lambda, \phi, h)$  的偏导数结果上是与 (2.3-34b、c) 式相一致的。应用上述结果并顾及 (2.3-13) 式的第二类克利斯托弗符号, 则 (2.3-30) 至 (2.3-36) 式中有关形变的量值都能计算给出。有关张量乘法的更进一步求解, 在程序计算中无法方便的给出, 因为有个别的克利斯托弗符号为零。

### § 2.3.4 应力与形变

在本书中, 不考虑弹性静力学的边值问题一般求解, 以下的

叙述仅简略给出地球表面的局部应力-形变关系。研究表明，在地表区域  $F$  内，内蕴和外蕴形变测度、应力及其变化之间存在很有趣的相关性。

在  $F$  区域内，对待内插点  $p$  所作的全部研究都体现在由 (2.1-8) 式所表示的在  $p$  点生成的内蕴曲面坐标系  $\tilde{S}$  中，

$$p^a = (u^a, h)^a \quad (2.3-38a)$$

$u^a$  = 参考面的地表坐标

度量张量：

$$\tilde{f}_{ab} = x_{i,a} x_{i,b}, \quad \tilde{f}_{a\beta} = f_{a\beta} = x_{i,a} x_{i,\beta} \quad (2.3-38b)$$

如果在区域性的笛卡儿坐标系  $\tilde{S}$  中，则计算本身可大大简化。引入下述各量：

$$\tilde{x}_{i,} = x_{i,}$$

轴 1 位于  $u^1$  的方向线上，

轴 2 位于  $F$  的切面，

轴 3 位于曲表面法线方向  $\tilde{n}_{i,} = \delta_{i3}$  上。

为了不引起混淆，以下略去向量上方的波浪符号“ $\sim$ ”。转换矩阵为：

$$\begin{aligned} x_{i,1} &= f_{11}^{1/2} \delta_{i1} \\ x_{i,2} &= (f_{12}, f_{12}^{1/2}, 0)_i f_{11}^{-1/2} \\ x_{i,3} &= \delta_{i3} \\ p_{,1}^a &= f_{11}^{-1/2} \delta_1^a \\ p_{,2}^a &= (f_{12}, -f_{11}, 0)^a (f_{11})^{-1/2} \\ p_{,3}^a &= \delta_3^a \end{aligned} \quad (2.3-39b)$$

及

$$f = f_{11} f_{22} - f_{12}^2 \quad (2.3-39c)$$

假如能确定内蕴曲面形变，且地表的形变张量 (2.3-6b) 式为已知，并采用 (2.3-39b) 式，将其转换至笛卡尔区域坐标系：

$$\epsilon_{\alpha\beta} = p_{, \alpha}^{\gamma} p_{, \beta}^{\delta} \tilde{\epsilon}_{\gamma\delta}, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{1, 2\} \quad (2.3-40a)$$

并假设笛卡尔坐标系的三个分量是已知，地壳应力为零构成了一个必备条件：

$$s_{13} = \sigma_{ij} n_j = \sigma_{i3} = 0 \quad (2.3-40b)$$

有关动力学的基本理论，请参考有关文献（Heitz, 1980～1983）。假设对于各向同性的线性弹性状态而言，所使用的弹性参数为：

$$\begin{aligned} \lambda, \mu &= \text{拉梅常数} \\ \mu &= \text{剪切模量}, \\ \nu &= \text{泊松比}, \\ E &= 2\mu(1+\nu) = \text{杨氏模量}. \end{aligned} \quad (2.3-41a)$$

依据虎克定律（Heitz, 1980～1983），有：

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{ij} \\ &= 2\mu\{\epsilon_{ij} + [\nu/(1-2\nu)]\epsilon_{kk}\delta_{ij}\} \end{aligned} \quad (2.3-41b)$$

结合（2.3-40b）式，有：

$$\sigma_{i3} = 0 = 2\mu\epsilon_{i3} + \lambda\epsilon_{kk}\delta_{i3} \quad (2.3-41c)$$

直接解为：

$$\epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0 \quad (2.3-41d)$$

即，使曲面法线成为形变和应力的主方向，其它两个主方向则在切面 1.～2. 上。由（2.3-41d）式并假设：

$$\epsilon_{12} = 0 \quad (2.3-41e)$$

对坐标轴 1. 与 2. 进行适当持定向，总是有可能做到这一点的。此外，由（2.3-41c）式得：

$$\epsilon_{33} = [\lambda/(2\mu)]\bar{q}\nu = [\nu/(1-\nu)]\bar{q} \quad (2.3-41f)$$

体积膨胀  $\bar{q}\nu$  和表面膨胀  $\bar{q}$  为：

$$\begin{aligned} \bar{q}\nu &= \epsilon_{kk} = [2\mu/(\lambda+2\mu)]\bar{q} \\ \bar{q} &= \epsilon_{aa} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} \end{aligned} \quad (2.3-41g)$$

由上述结果并根据虎克定律，则能计算出水平应力：

$$\begin{aligned} s_{11} = \sigma_{11} &= 2\mu\{\epsilon_{11} + [\nu/(1-\nu)]\bar{q}, \epsilon_{12}, 0\}_1 \\ s_{12} = \sigma_{12} &= 2\mu\{\epsilon_{12}, \epsilon_{22} + [\nu/(1-\nu)]\bar{q}, 0\}_1 \end{aligned} \quad (2.3-41h)$$

在条件 (2.3-41e) 式下, 则:

$$s_{1,2} = s_{2,1} = 0 \quad (2.3-41i)$$

再计算地表  $F$  区域上应力的变化量, 这也是由形变  $F \Rightarrow \bar{F}$  结果而得, 先从笛卡尔局部坐标系  $\bar{S}$  (2.3-39a) 的最简单形式的弹性静力学的微分方程:

$$\sigma_{ij,j} = 0_i \quad (2.3-42a)$$

入手, 就可以做这一点, 这就是赫兹 (Heitz, 1980~1983) 忽略掉的由于形变引起的重力的变化。依据 (2.3-42a) 式的法线导数, 则有:

$$\partial s_{i,3} / \partial x_3 = \sigma_{i3,3} = -\sigma_{i1,1} - \sigma_{i2,2} \quad (2.3-42b)$$

基于 (2.3-41b) 式的虎克定律, 上式右边的导数则为:

$$\sigma_{i1,a} = 2\mu \{ \epsilon_{i1,a} + [\nu/(1-\nu)] \bar{q}_{,a} \delta_{ia} \}, a \in \{1,2\} \quad (2.3-43a)$$

及

$$\bar{q}_{,a} = \epsilon_{11,a} + \epsilon_{22,a} \quad (2.3-43b)$$

将上式代入 (2.3-42b) 式, 其结果为

$$\sigma_{i3,3} = -2\mu \{ \epsilon_{i1,1} + \epsilon_{i2,2} + [\nu/(1-\nu)] (\bar{q}_{,1} \delta_{i1} + \bar{q}_{,2} \delta_{i2}) \} \quad (2.3-43c)$$

至目前为止, 上述所给出的计算式都是严密的。但为进一步验证  $\sigma_{i3,3}$ , 则以试验观测点  $P$  邻域的近似解进行解算。

$$F \equiv P \text{ 点上 } F \text{ 的切面}, \quad (2.3-44a)$$

$$\bar{F} = \text{曲面}$$

可用微位移 (2.3-6a) 的假设来证明这一点, 下面使用了简化式:

$$\begin{aligned} f_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta}, \quad f = 1 \\ x_{i,a} &= \delta_{i,a}, \quad x_{i,\alpha\beta} = 0 \end{aligned} \quad (2.3-44b)$$

$$\begin{aligned} L_{\alpha\beta} &= 0 \\ \epsilon_{ia} &= (z_{i,a} + z_{a,i})/2, \epsilon_{i\alpha,\beta} = (z_{i,\alpha\beta} + z_{\alpha,\beta i})/2 \quad (2.3-44c) \\ z_{i,3} &= 0 \quad z_{i,3\alpha} = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= \delta_{\alpha\beta} + z_{\alpha,\beta} + z_{\beta,\alpha} = \delta_{\alpha\beta} + 2\epsilon_{\alpha\beta} \\
\delta f &= 2(z_{1,1} + z_{2,2}) = 2(\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \quad (2.3-44d) \\
\bar{L}_{\alpha\beta} &= \delta L_{\alpha\beta} = z_{3,\alpha\beta}
\end{aligned}$$

如果轴 1、2 与曲率的主方向相一致，则有：

$$\delta L_{12} = z_{3,12} = 0 \quad (2.3-45a)$$

由 (2.3-21c-e) 式，可得：

$$\delta \kappa_{N(n)} = \delta L_{(m)} = z_{3,(m)} \quad (2.3-45b)$$

$$\delta H = (\delta L_{11} + \delta L_{22})/2 = (z_{3,11} + z_{3,22})/2 \quad (2.3-45c)$$

由此，则 (2.3-43c) 式中的分量可表示如下：

$$\begin{aligned}
\sigma_{13,3} &= -2\mu \{ \epsilon_{11,1} + \epsilon_{12,2} + [\nu/(1-\nu)] \bar{q}_{,1} \} \\
\sigma_{23,3} &= -2\mu \{ \epsilon_{12,1} + \epsilon_{22,2} + [\nu/(1-\nu)] \bar{q}_{,2} \} \quad (2.3-46a)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{33,3} = -2\mu \delta H, \quad 2\mu = E/(1+\nu) \quad (2.3-46b)$$

而水平分量  $\sigma_{i3,3}$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ，仅是由地表内蕴形变所决定。在 (2.3-46a) 式中，由曲线分量  $\tilde{\epsilon}_{\gamma\delta}$  可得笛卡尔地表形变张量的梯度。在大多数情况下，最初确定的 (2.3-10c) 式依据 (2.3-40a) 式可转换成下式：

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\alpha\beta,\mu} &= p_\alpha^\gamma p_\beta^\delta p_\mu^\nu \epsilon_{\gamma\delta,\nu} \\
&= p_\alpha^\gamma p_\beta^\delta p_\mu^\nu [\tilde{\epsilon}_{\gamma\delta,\nu} - \tilde{\Gamma}_{\gamma\nu}^\epsilon \tilde{\epsilon}_{\epsilon\delta} - \tilde{\Gamma}_{\delta\nu}^\epsilon \tilde{\epsilon}_{\epsilon\gamma}] \quad (2.3-47a)
\end{aligned}$$

及  $\alpha, \beta, \dots, \epsilon \in \{1, 2\}$ 。

且 (2.3-46b) 式的垂直分量是 (2.3-21d) 式平均曲率的改变量的函数，因此它是由地表外蕴形变所决定，并有：

$$\delta H = \bar{H} - H_0 \quad (2.3-47b)$$

## 第3章 几何模式

### § 3.1 基本原理

在第一章绪论中, 已经指出以离散分布的观测站的观测值(1-6)式作内插函数, 建立曲面及其随时间变化的几何模式(1-5)式和(1-7)式的重要性, 并给出了相应的点位及位移坐标为:

$$q^u = q^u(u^u), \quad z^u = z^u(u^u) \quad (3.1-1a)$$

在此只采用曲面法线坐标(2.1-6)式, 包括笛卡尔坐标(2.1-4)式表示的高斯曲面表达式, 再加以考虑(2.3-8)式, 则(3.1-1a)式可写成:

$$H = H(u^u) \quad z^u = z^u(u^u) \quad (3.1-1b)$$

而高程及位移坐标可表示为:

$$y(u^u) \in \{H(u^u), z^u(u^u)\} \quad (3.1-1c)$$

并给予特别约定如下:

$$\begin{aligned} P_q &= \text{源点(下面统称观测点, 译注)} \\ &= \text{观测值为 } y_q \text{ 的测站} \end{aligned} \quad (3.1-2a)$$

$$\begin{aligned} P_p &= \text{试验点(下面统称内插点, 译注)} \\ &= \text{内插值为 } \hat{y}_p := \hat{y}(u_p^u) \text{ 的测站} \end{aligned} \quad (3.1-2b)$$

借助于若干个观测点(3.1-2a)作为支撑来确定某个内插函数 $\hat{y}(u^u)$ 被称之为内插法或近似法。这种方法依赖于 $y_q$ 值是否为严格的观测值或仅是残差为极小时的近似值, 这里“内插”一词一般都适用于这两种情况。如果除了观测值(3.1-2a)以外, 在进行内插或近似时, 如果没有给外业观测值 $y(u^u)$ 提供一种形

如假定的动力学模型的辅助数据的话，那么，所采用的仅是纯粹的几何学模型或内插方法，从而必须满足下述条件：

- 观测点 (3.1-3a)

观测点 (3.1-2a) 式的密度确定要保证相邻测站之间的线性内插达到足够的精度或研究的需要。

- 选定几何内插函数 (3.1-3b)

用 (1-7b) 式进行内插，以确保相邻观测点之间存在近似线性内插关系。

由观测值或源点的密度进行精度评估是很容易的。在选择不同的相邻“观测点三角形”的基础上，对单个内插点进行线性内插，由此所得到的内插值与同一个内插点的差值可作为近似值精度的一种测度。如果该精度不足以对几何模型问题给予特定公式的表述，则需要适当加密观测点。

一般而言，借助下述内插法，能够符合 (3.1-3a、b) 式的要求。

- 图形内插法 (3.1-4a)

以函数  $y(u^a)$  值绘制的等值线图。

但是，这种线性离散的内插函数是无法应用计算机解算的。因为它是全部或一部分一部分的求出。

- 解析内插函数法 (3.1-4b)

除了满足 (3.1-3) 式外，同时要求在  $u^a$  坐标系中必须在两时刻间连续，以便能够对内蕴和外蕴曲面形变测度进行全面的解析计算。

例如，依据 (1-7b) 式的解算。这里只考虑如 (3.1-4b) 式的线性内插函数。由 (3.1-2) 式，可将线性内插函数一般表示为如下形式：

$$\hat{y}_p = y_p^T + \sum_q a_{pq} (y_q - y_q^T) \quad (3.1-5a)$$

其中：

$$\begin{aligned} a_{pq} &= \text{系数} \\ &= \text{由 } u_p^a, \{y_p, u_q^a\} \text{ 确定的函数} \end{aligned} \quad (3.1-5b)$$

$$\begin{aligned} y_p^T &= \text{趋势函数} \\ &= \text{以 } u_p^a \text{ 为变量的已知函数} \end{aligned} \quad (3.1-5c)$$

当趋势多项式中  $n'$  的阶数相对较低时, 上式可表示为:

$$y_p^T = y_{p0}^T + \sum_{n_1=1}^{n'_1} \sum_{n_2=1}^{n'_2} b_{n_1 n_2} (u^1)^{n_1} (u^2)^{n_2} \quad (3.1-6a)$$

其中:  $n' = n'_1 + n'_2$ 。

当内插区域较小时, 通常取其平均值以作为一种适用的趋势函数

$$y_p^T = y_{p0}^T = \left( \sum_q y_q \right) / n_q, \quad n_q = \text{源点 } P_q \text{ 的数量} \quad (3.1-6b)$$

各种线性内插法或近似法彼此的差异, 仅是由 (3.1-5a) 式中的  $a_{pq}$  系数值所决定的。对于不同的方法, 均以相同的值满足条件 (3.1-3b) 式, 则对同一试验测点  $P_q$ , 在任何情况下的系数 (3.1-5b) 变化都很小。

在 Abramowsk 与 Müller (1991) 的文章中, 概括介绍了 (3.1-4b) 式的解析内插方法。在任何情况下, 都须首先介绍在 § 3.2 中的多项式内插函数, 这是一种在形式上最为简单的方法。高阶多项式的不足在于会导致逼近条件产生较大的粗差, 这种情况下, 其中一部分可以用样条函数内插法来消除。样条函数是在坐标系矩形窗内逐段连续的低阶 (例如三阶) 多项式, 首先是边界连续, 其次是存在二阶或更高阶对坐标的导数 (参阅 Abramowsk 与 Müller 1991 的第四、五章)。样条逼近技术, 通常形式相对复杂并依赖于数据网格点的分布。在 § 3.3 中, 所叙述的拟合推估内插法有较好的问题处理能力, 一般又称之为最小二乘内插法。该方法假设所需的函数的协方差是已知的, 并且一般是距离的函数。

样条函数与拟合推估技术是属于较严密的内插方法，对 (3.1-2b) 式，源点为  $y_q = y_q$ ；与之相对应，多项式内插方法通常被视为近似法。

在 § 3.4 中，使用有限三角元细分法，作为这种内插方法的特殊情况是以观测站 (3.1-2b) 为三角形顶点划分表面区域  $F$ ，且将 (3.1-5) 式的内插函数分别作为各三角形区域的内插函数。

### § 3.2 多项式内插法

对测站点场  $\{P\} \in$  地表区域  $F$ 。 (3.2-1a)

在  $t$  和  $\bar{t}$  两个时刻进行了观测，作为曲面法线坐标系下的推求结果，(2.3-8) 式仍然适用。

$$\begin{aligned} q^a(u^a) &= [u^1, u^2, H(u^a)]^a \\ \bar{q}^a(u^a) &= [\bar{u}^1(u^a), \bar{u}^2(u^a), \bar{H}(u^a)]^a \end{aligned} \quad (3.2-2a)$$

位移坐标为：

$$z^a(u^a) =: z^a(u^a) = \bar{q}^a(u^a) - q^a(u^a) \quad (3.2-2b)$$

对于地表区域  $F$  及其野外观测的位移场是以如下形式的解析函数作为出发点：

高程  $q^3 \equiv H$  的多项式为：

$$H(u^a) \approx \sum_{n_1=0}^{n'_1} \sum_{n_2=0}^{n'_2} h_{n_1 n_2} (u^1)^{n_1} (u^2)^{n_2} \quad (3.2-3a)$$

位移坐标  $z^a$  的多项式为：

$$z^a(u^a) \approx \sum_{n_1=0}^{n'_1} \sum_{n_2=0}^{n'_2} c_{n_1 n_2}^a (u^1)^{n_1} (u^2)^{n_2} \quad (3.2-3b)$$

系数确定为：

$$h_{n_1 n_2} \text{ 和 } c_{n_1 n_2}^a \quad (3.2-3c)$$

它是根据 (3.2-2a, 2b) 式中的  $H$  及  $z^a$  计算得到的，并可运用最小二乘法平差模型计算求得。在确定 (3.2-3c) 的系数后，根据 § 2.3.2 与 § 2.3.3 可用观测值计算地表内蕴和外蕴形变测度。

多项式的阶数:

$$n' = n'_1 + n'_2 \quad (3.2-4a)$$

表示在两个不同曲面坐标下阶数的组合:

$$u'_1 = u^1 \text{ 的阶数}, \quad u'_2 = u^2 \text{ 的阶数} \quad (3.2-4b)$$

若  $n'_{gr}$  及  $n'_{kl}$  分别是  $n'_1$  及  $n'_2$  二阶数中较大与较小的阶数, 则系数的总个数为:

$$N_{n_1 n_2} = (n'_{kl} + 1)[(n'_{kl} + 2)/2 + n'_{gr} - n'_{kl}], \quad n'_{gr} \geq n'_{kl} \quad (3.2-4c)$$

以多项式表示的关键问题是出现源点之间的波动问题, 这一问题不符合 (3.1-3b) 式的线性要求。当多项式的阶数增加时, 波动现象更加明显, 目前还没有有效的方法可以避免这一问题的出现。这样, 在任何状况下都有必要予以注意的条件是:

$$\bullet \text{ 观测点} \quad (3.2-5a)$$

以等距方式选择观测点或 (3.1-2a) 式的内插点。

$$\bullet \text{ 多项式展开的阶数 } n' \quad (3.2-5b)$$

应选择低阶的多项式以确保能解算 (3.2-3c) 式中的系数。

这两个基本条件对于以  $H$  值表示的地形模型内插是没有困难的, 因为它所要求的精确度值并不高。从理论上讲,  $H$  值可以借助适当比例的地形图获得, 由于  $Z^n$  值可以精确地计算出来, 因而不需要再增加观测便可得到, 但需要有一个密集的观测网点。

$$\bullet \text{ 线性内插 } Z^n \text{ 值} \quad (3.2-5c)$$

内插点  $\bar{P}_q$  位于相邻观测点  $P_q$  之间 (三角形或矩形网络)。应该这样来选择多项式的阶数, 以使得 (3.2-4b) 式的系数的个数满足下式

$$N_{n_1 n_2} \leq \text{观测点 } P_q \text{ 的点数。} \quad (3.2-5d)$$

### § 3.3 拟合推估内插法

拟合推估内插法是由莫里兹 (Moritz, 1973) 首先应用于大地测量的最小二乘法预估法, 目前已发展成为物理大地测量界广泛应用的数学工具 (参考 Moritz 1973, 1980; Moritz and Sükel 1977)。在本书中, 只引用最小二乘法内插拟合推估模型的基本框架, 其原理如下。

该方法源自于 (3.1-5) 式的内插公式, 也可以线性自相关函数表示。假设:

$$\hat{y}_p := \hat{y}_p - \hat{y}_p^T, \quad (3.3-1a)$$

$$y_q := y_q - y_q^T$$

$\hat{y}_p, y_q$  的线性自相关性一般式表示为:

$$\hat{y}_p = \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} y_q \quad n_q = \text{已知点数} \quad (3.3-1b)$$

若以多项式 (3.1-6) 表示趋势函数, 以最小二乘法确立其系数, 则有下列表示法:

$$\langle f_k \rangle := (\sum_{k=1}^n f_k) / n = f_k \text{ 的平均数} \quad (3.3-1c)$$

$$\langle y_q \rangle = 0 \quad \Rightarrow \langle \hat{y}_p \rangle \approx 0 \quad (3.3-1d)$$

当用 (3.1-1b) 式函数进行内插时, 自相关公式 (3.3-1b) 式的特殊形式为:

$$\hat{H}_p = \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} H_q, \quad H := H - H^T \quad (3.3-2a)$$

$$(\hat{z}^a)_p = \sum_{q=1}^{n_q} (h_c^a)_{pq} (z^c)_q, \quad z^a := z^a - (z^a)^T \quad (3.3-2b)$$

(3.3-2b) 式表示的线性向量函数, 它使  $(z^a)_p$  的三个分量分别与观测点  $(z^c)_q$  的三个分量相关, 也称之为“互相关”。不管怎样, 在大多数情况下, 这种复杂的方法可以使单个向量之

间的自相关变得简单:

$$(z^a)_p = \sum_{q=1}^{n_q} h_{pq}(z^a)_q \quad (3.3-2c)$$

在任何情况下,使用自相关函数都有下列特征:系数  $(h^a)_{pq}$  随着距离  $P_p - P_q$  [见 (3.3-5) 式] 的增大而逐渐趋于零;另外,与某一内插点  $P_q$  离得最近的三个测点  $P_p$  对  $(Z^a)_p$  构成主要影响。若依据 (3.1-3b) 式的必要条件,对观测点三角形作线性内插,那么相关公式为 (3.3-2c) 式 [见 3.4.2 节, (3.4-4b)],并可采用相邻近的测点三角形外围的测验点作某些修正。

当运用最小二乘拟合推估法或内插法计算 (3.3-2a, c) 式的相关系数时,从 (3.3-1a、1b) 式的通式着手,若  $y_p$  为试验点  $P_p$  的函数值,则所产生近似的误差值为:

$$\delta y_p := y_p - \hat{y}_p = y_p - \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} y_q \quad (3.3-3a)$$

其平方和均值可以用协方差函数表示为:

$$C_{pq} = C_{qp} := \langle y_p y_q \rangle, \quad C_0 := \langle y_p y_p \rangle \approx \langle y_q y_q \rangle \quad (3.3-3b)$$

并有如下形式:

$$\begin{aligned} (M_p)^2 &= \langle \delta y_p \delta y_p \rangle \\ &= C_0 - 2 \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} C_{pq} + \sum_{q=1}^{n_q} \sum_{l=1}^{n_q} a_{pq} a_{pl} C_{ql} \end{aligned} \quad (3.3-3c)$$

$q, l$  = 源点标号,  $n_q$  = 源点点数

最小二乘法假设:

$$(M_p)^2 \rightarrow \text{最小} \quad (3.3-4a)$$

条件方程式:

$$\partial (M_p)^2 / \partial a_{pq} = 0 \quad (3.3-4b)$$

系数  $a_{pq}$  由 (3.3-3c) 式计算给出:



$$\sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} C_{ql} = C_{pl} \quad l = 1, 2, \dots, n_q \quad (3.3-4c)$$

这是一组线性方程组，构成了一个系数  $C_{pq} = C_{qp}$  的对称矩阵，而  $n_q$  个  $a_{pq}$  系数则由下式确立：

$$a_{pq} = \sum_{l=1}^{n_q} C_{ql}^{-1} C_{pl} \quad (3.3-4d)$$

$C_{ql}^{-1}$  = 协方差矩阵  $C_{ql}$  的逆矩阵。

结合 (3.3-3c) 及 (3.3-4c) 式，可得：

$$(m_p)^2 = C_0 - \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq} C_{pq} \quad (3.3-4e)$$

如果将  $P_p$  与观测点  $Q_n$  被视为同一类点的话，则 (3.3-4d、3a) 式可给出下述结果：

$$a_{nn} = \delta_{nn} = \begin{cases} 0 & n \neq q \\ 1 & n = q \end{cases} \Rightarrow \hat{y}_n = y_n \quad (3.3-4f)$$

协方差函数  $C_{pq}$  选作为：

距离  $s_{pq}$  (点  $Q_p$  与  $Q_q$  之间的距离) 的函数 (3.3-5a)

则  $Q_p$ 、 $Q_q$  为  $P_p$ 、 $P_q$  两点在曲面法线坐标系的参考面上的交点。协方差函数通常可以用指数函数表示 (Heitz, 1968)，以满足条件：

$$C_{pq} = c_1 \exp(-d_1 s_{pq}^2) + c_2 \exp(-d_2 s_{pq}^2) \quad (3.3-5b)$$

$$c_1 + c_2 = C_0, d_2 \ll d_1$$

第一个指数函数用以描述近区域的协方差，而第二个指数函数需要保证随距离具有快速递减性，以避免 (3.3-4c) 式方程式出现奇异矩阵。当 (3.2-5a) 式成立时，便可以使不定形式的协方差函数在任何条件下满足上述要求：

• 观测点 (3.3-6a)

接近似于等距的原则来选定观测点或内插点 (3.1-2a)，根据观测值  $y_q$  采用线性内插方法 (3.2-5c) 式可以得到 (3.3-6a) 式

• 线性内插  $\bar{y}_q$  值 (3.3-6b)

$\bar{y}_q$  为邻近观测点  $P_q$  (三角形或矩形网络) 之间的内插点  $\bar{P}_q$  的线性内插值。

在 3 个或 4 个相邻观测点间进行的局部线性内插, 可以采用拟合推估法或多项式法表达式。

为了解算在 § 2.3.2 和 § 2.3.3 中所介绍的内蕴和外蕴形变测度, 就要计算  $y_p$  相对于曲面坐标的一阶和二阶偏导数则为:

$$\dot{y}_{p,u} = (\partial y / \partial u^a)_p, \quad \dot{y}_{p,ab} = (\partial^2 y / \partial u^a \partial u^b)_p \quad (3.3-7a)$$

由 (3.3-1b) 式、(3.3-4d) 式一般可得:

$$\dot{y}_{p,a\dots} = \sum_{q=1}^{n_q} a_{pq,a\dots} y_q \quad a_{pq,a\dots} = \sum_{q=1}^{n_q} C_{ql}^{-1} C_{pl,a\dots} \quad (3.3-7b)$$

而对于 (3.3-5b) 式的协方差函数, 求偏导数其结果为:

$$\begin{aligned} C_{pl,a} &= -[c_1 d_1 \exp(-d_1 s_{pq}^2) + c_2 d_2 \exp(-d_2 s_{pq}^2)] s_{pl,a}^2 \\ C_{pl,ab} &= [c_1 d_1^2 \exp(-d_1 s_{pq}^2) + c_2 d_2^2 \exp(-d_2 s_{pq}^2)] s_{pl,a}^2 s_{pl,b}^2 - \\ &\quad [c_1 d_1 \exp(-d_1 s_{pq}^2) + c_2 d_2 \exp(-d_2 s_{pq}^2)] s_{pl,ab}^2 \\ s_{pl,a}^2 &:= \partial s_{pl}^2 / \partial u^a, \quad s_{pl,ab}^2 := \partial^2 s_{pl}^2 / \partial u^a \partial u^b \end{aligned} \quad (3.3-7c)$$

在笛卡尔坐标系中有:

$$s_{pq}^2 = (x_{1,q} - x_{1,p})^2 + (x_{2,q} - x_{2,p})^2 \quad (3.3-8a)$$

故有

$$s_{pq,1}^2 = -2(x_{1,q} - x_{1,p}), \quad s_{pq,2}^2 = -2(x_{2,q} - x_{2,p}) \quad (3.3-8b)$$

$$s_{pq,11}^2 = 2, \quad s_{pq,12}^2 = 0, \quad s_{pq,22}^2 = 2$$

在椭球体坐标下, 则有下列近似:

$$s_{pq}^2 = R^2 \{[(\lambda_q - \lambda_p) \cos \phi_m]^2 + (\phi_q - \phi_p)^2\} \quad (3.3-9a)$$

$$\phi_m = (\phi_q + \phi_p)/2 \quad R = \text{平均椭球半径} (R_1 R_2)^{1/2}$$

以及

$$\begin{aligned} s_{pq,1}^2 &= -2R^2 [(\lambda_q - \lambda_p) \cos^2 \phi_m], \quad s_{pq,2}^2 = -2R^2 (\phi_q - \phi_p) \\ s_{pq,11}^2 &= 2R^2 \cos^2 \phi_m, \quad s_{pq,12}^2 = 0 \\ s_{pq,22}^2 &= 2R^2 \end{aligned} \quad (3.3-9b)$$

## § 3.4 有限三角元法

### § 3.4.1 初略说明

一般而言,有限元法(FEM)是以数值方法求解偏微分方程的初始边界值问题。这种方法对于处理机械中的介质连续的受力问题十分重要(Heitz, 1980~1983; Zienkiewicz, 1972),本书只引用有限元法的部份特性,以有限元或三角形表示的几何模型,意指将曲面网格化为有限个更小的曲面或称为有限元,并满足边界连续的必要条件。最简单的元素为平面或曲面的三角元。在三角元的顶点或节点处的高程及位移值存在惟一的线性内插解。以下仅使用了有限三角元法,这种方法既具有简单的数学表达式,又具有直接划分使用分布不均匀观测点的特性。

本书讨论的内容涉及这种曲面三角形的两种应用,即:确定形变内蕴和外蕴形变测度。一是用有限元剖分曲面,以建立严格的或近似等距的控制点,在此基础上,依照§ 3.2和§ 3.3的表达式[特别是(3.2-5a)和(3.3-5b)],采用多项式或拟合推估算法进行内插。使用这种方法,当网格中的有限元连续、可微时,则可以转换为整个区域内的解析几何模型,进而直接计算在§ 2.3中讨论的形变测度值。基于上述考虑,在§ 3.4.2中所讨论的方法可以满足三角有限元法的基本要求。二是有限三角元法还可用于离散形变测度建立全区域的解析模型,这种方法将在§ 3.4.3中介绍。

### § 3.4.2 三角元计算法

设将曲面区域 $F$ 分成若干不相交的三角形,而每个三角形的顶点是(3.1-2a)式中的观测点 $P_q$ ,那么,在§ 3.1中介绍的假设与基本原理,在任何情况下用于单独有限元时,仍然适用。

对于有限三角元  $\Delta$  :

$$\text{顶点为 } P_q, q \in \{1, 2, 3\} \quad (3.4-1a)$$

$$\text{内插点 } P_p \in \Delta \quad (3.4-1b)$$

用 (3.1-5a) 式进行线性内插为:

$$\hat{y}_p = \sum_{q=1}^3 a_{pq} y_q \quad (3.4-1c)$$

$$\hat{y}_p := \hat{y}_p^T$$

$$y_q = y_q - \hat{y}_q^T$$

对于上式, 原则上讲拟合推估法和多项式表示法均适用, 而选用后者多项式表示法的特点是简捷清楚。这时, 在各有限三角元  $\Delta$  内的高程与位移坐标 (3.1-1b、c) 式:

$$y(u^a) \in \{H(u^a), z^a(u^a)\} \quad (3.4-2a)$$

可采用以下一阶多项式确定求解为:

$$\hat{H}(u^b) = c + c_\beta u^b, \quad (3.4-2b)$$

$$\hat{z}^a(u^b) = c^a + c_\beta^a u^b$$

而系数  $c$ 、 $c_\beta$  与  $c^a$ 、 $c_\beta^a$  分别由顶点  $P_q$  的条件方程式计算, 其条件方程为:

$$H_q = c + c_\beta (u^b)_q, \quad (3.4-2c)$$

$$(z^a)_q = c^a + c_\beta^a (u^b)_q$$

该式同样可以用于赫兹 (Heitz, 1980~1983) 提出的三维空间四面体元素的计算问题。

引入张量  $e$  时:

$$e_{\alpha\beta} := \begin{vmatrix} \delta_\alpha^1 & \delta_\beta^1 \\ \delta_\alpha^2 & \delta_\beta^2 \end{vmatrix} \quad (3.4-3)$$

则有下列结果:

$$\hat{H}_p = \sum_{q=1}^3 a_{pq} H_q \quad (3.4-4a)$$

$$(\hat{z}^b)_p = \sum_{q=1}^3 (a_\beta^b)_{pq} (z^b)_q = \sum_{q=1}^3 a_{pq} (z^b)_q \quad (3.4-4b)$$

式中:

$$\begin{aligned} a_{pq} &= [h_q + (h_\beta)_q u^\beta] / D \\ b_q &= -(-1)^q e_{\beta\gamma} (u^\beta)_{q+1} (u^\gamma)_{q+2} \\ (h_\beta)_q &= (-1)^q e_{\beta\gamma} [(u^\gamma)_{q+2} - (u^\gamma)_{q+1}] \end{aligned} \quad (3.4-4c)$$

如果  $q+n>3$ , 则有  $q+n = q+n-3$ ,

$$D = e_{\alpha\beta} [(u^\alpha)_2 - (u^\alpha)_1] [(u^\beta)_3 - (u^\beta)_1]$$

除了这个表达式外, 以内插点坐标  $u^\beta$  清晰表示的内插公式在本书中是令人感兴趣的。由 (3.4-4c) 式可得 (3.4-2b) 式中的系数为:

$$\begin{aligned} c &= \sum_{q=1}^3 [h_q / D] H_q, & c_\beta &= \sum_{q=1}^3 [(h_\beta)_q / D] H_q \\ c^\alpha &= \sum_{q=1}^3 [h_q / D] (z^\alpha)_q, & c_\beta^\alpha &= \sum_{q=1}^3 [(h_\beta)_q / D] (z^\alpha)_q \end{aligned} \quad (3.4-5a)$$

采用 (3.3-7a) 式同样的方法, 由 (3.4-2b) 式可得高程与位移坐标相对于试验点坐标  $u^\beta$  的偏导数为:

$$\begin{aligned} H_\alpha &= c_\alpha & H_{\alpha\beta} &= 0 \\ z_\alpha^\alpha &= c_\alpha^\alpha & z_{\alpha\beta}^\alpha &= 0 \end{aligned} \quad (3.4-5b)$$

这样来选择有限三角元  $\triangle$  边界, 使在曲面法线坐标系下参考面线性方程式为:

$$d + d_\beta u^\beta = 0 \quad (3.4-6)$$

可以用来表示边界线。方程式中系数可以用顶点  $P_q$  的坐标  $(u^\beta)_q$  确定, 其内插值 (3.4-2b, 3.4-4a、b) 在三角元边界上连续。

通常三角形表面是曲面, 但是在笛卡尔坐标中, 用 (2.1-4) 式表示三角形为平面三角形, 与之相对应, 三角形边界也为直线。

### § 3.4.3 离散形变测度

顾及 (3.4-5b) 式, 则可根据 (2.3-10b) 直接计算任意有限三角元  $\Delta$  (3.4-1) 线性的曲面形变张量:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \{q'_{,\alpha}[c^d_{\beta} + \Gamma^d_{ef}q^e_{,\beta}(c^f + c^f_{,\gamma}u^{\gamma})] + q'_{,\beta}[c^d_{\alpha} + \Gamma^d_{ef}q^e_{,\alpha}(c^f + c^f_{,\gamma}u^{\gamma})]\}g_{cd}/2 \quad (3.4-7a)$$

根据 (2.3-36b) 式, 可得无限小的旋转向量:

$$\tilde{d}^c = (1/2)\epsilon^{abc}q^g_{,\beta}[c^d_{\alpha} + \Gamma^d_{ef}q^e_{,\alpha}(c^f + c^f_{,\gamma}u^{\gamma})]g_{dg} \quad (3.4-7b)$$

上述两式的结果通常依赖于以下内插点的选定, 试验点:

$$P_p(u^{\gamma}) \in \Delta \quad (3.4-8a)$$

仅当笛卡尔坐标被选作为外蕴曲面法线坐标的情况下, 三角形表面才为平面, 此时这种依赖关系便不复存在。

若三角元  $\Delta$  的边长较参考面的曲率半径小时, 则对 (3.4-7a)、(3.4-7b) 的依赖性也很小。在这种情形下, 一般是选用内插点  $P_{\Delta}$  坐标的平均值:

$$(u^{\gamma})_{\Delta} = (1/3) \sum_{q=1}^3 (u^{\gamma})_q \quad (3.4-8b)$$

$P_q$  = 有限三角元  $\Delta$  的顶点

内蕴曲面形变测度按下式计算比较合适:

$$\bar{q}_{\Delta} = f^{\alpha\beta} \epsilon_{\alpha\beta} \quad (3.4-9a)$$

= 依据 (2.3-7b) 计算  $P_{\Delta}$  的地表面膨胀

$$q_{(n)\Delta} = \epsilon_{\alpha\beta} (r^{\alpha})_{,n} (r^{\beta})_{,n}, \quad n \in \{1, 2\} \quad (3.4-9b)$$

= 根据 (2.3-7j) 式计算的  $P_{\Delta}$  内线性拉伸的极大值

$\epsilon_{\alpha\beta}$  根据 (3.4-7a) 给出。

为了表示曲面的外蕴形变, 就不能完全采用有限元剖分曲面的方法来考虑在 § 2.3.3.2 所述的曲面曲率的变化。为了确定外蕴曲面几何的变化, 可以根据 (3.4-7b) 式计算平均内插点  $P_{\Delta}$  极其微小的旋转矢量  $(\tilde{d}^c)_{\Delta}$ 。而将该矢量变换至三角元  $\Delta$  顶点  $P_q$  的局部底面有:

$$(d^r)_q = (q^r_{,i})_q (\vec{d}^i)_\Delta \text{ 对 } q \in \{1, 2, 3\} \quad (3.4-10)$$

= 变换至顶点  $P_q$  的三角元  $\Delta$  的平均旋转矢量

在  $P_q$  顶点的局部底面上, 相邻三角元  $\Delta_n$  ( $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ) 的旋转矢量  $(d^r)_{q(n)}$  是彼此相当的, 从它们的差值可以推算出外蕴形变数据。此外, 还存在对外蕴曲面几何进行描述的另一种可能的方法, 就是采用邻近三角形之间的弯曲的变化进行描述。

### § 3.4.4 相邻三角元间弯曲变化的求解

用选定的不共线的三点所组成的三角形将待研究区域网格化后, 就可以按照下式确定与任一三角形内各点相垂直的单位法线向量  $n_i$  (图 3.1):

$$n_i = \frac{\epsilon_{ijk} x_{j,12} x_{k,13}}{|\epsilon_{ijk} x_{j,12} x_{k,13}|} \quad (3.4-11a)$$

式中  $x_{i,12} = x_{i,2} - x_{i,1}$  及  $x_{i,13} = x_{i,3} - x_{i,1}$

相邻三角形  $D_1$  与  $D_2$  的单位法线向量的关系, 以两者间夹角的余弦值表示为:

$$\cos \alpha = \frac{n_{i,D_1}(t) n_{i,D_2}(t)}{|n_{i,D_1}(t)| |n_{i,D_2}(t)|} \quad (3.4-11b)$$

或以两者间夹角的正弦值表示为:

$$\sin \alpha = \frac{|\epsilon_{ijk} n_{j,D_1} n_{k,D_2}|}{|n_{i,D_1}| |n_{i,D_2}|} \quad (3.4-11c)$$

这里, 单位向量为  $|n_{i,D_1}| = |n_{i,D_2}| = 1$

由 (3.4-11b)、(3.4-11c) 式, 在观测时刻  $t$  与  $\bar{t}$  之间, 两相邻三角形间弯曲程度的变化量为:

$$\Delta \alpha_{12} = \alpha_{12}(\bar{t}) - \alpha_{12}(t) \quad (3.4-12)$$

如果求得所有相邻三角形间的弯曲变化, 则可对待研究区的地表外蕴形态变化作出描述。

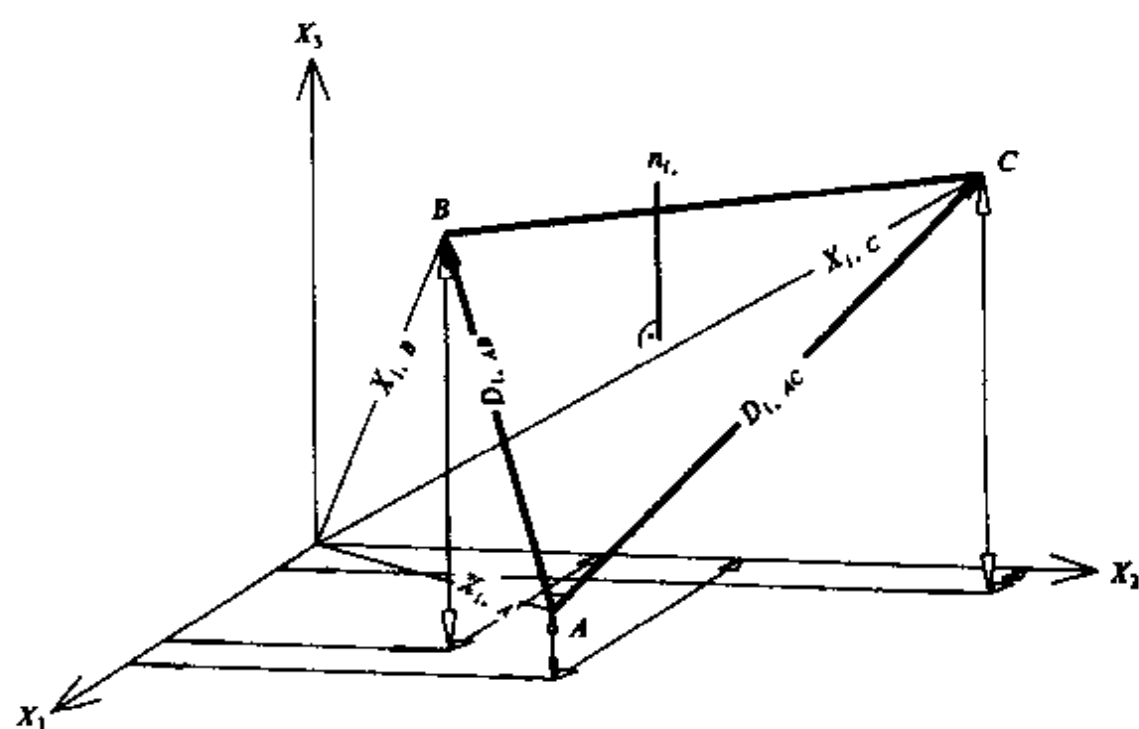


图 3.1 垂直于三角形的单位法线向量

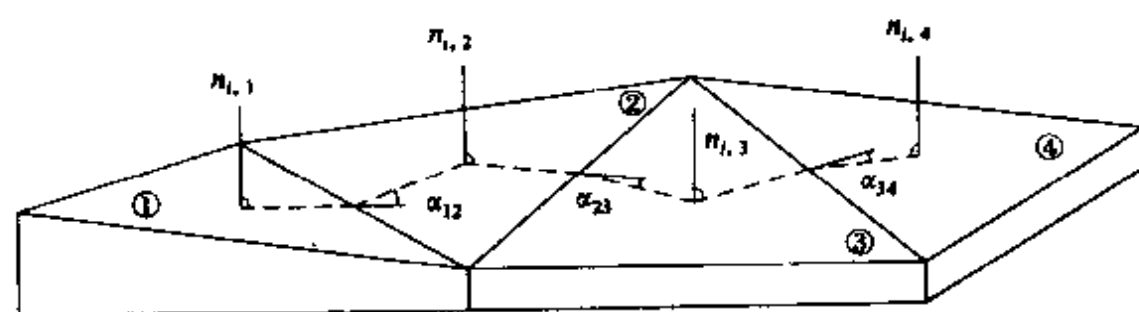


图 3.2 用相邻三角形间的弯曲变化描述  
待研究区的地表外蕴形态变化



## 第 4 章 应 用

### § 4.1 地壳的形变

地壳上的各点都会产生形变的现象,引起地壳各点永久或暂时性位移的主要原因是板块构造运动,潮汐效应,大气、水与海洋的负荷作用,以及地区性的地质变迁过程(参阅 Melchior, 1983; Heitz, 1980~1988)。因此,卫星技术在高精度大地测量学中的应用中,板块运动以及潮汐效应的影响在定义参考框架的测站绝对坐标系及轨道模型方面,至少对布设在板块上的观测网所覆盖的区域应予以考虑。对于引起测站坐标短周期变化的其它因素,则可以通过长时间如持续 24 小时的 GPS 观测,在所研究的局部区域范围内削弱其影响。

建立全球地面参考框架(International Terrestrial Reference Frame ITRF)以及 1989 欧洲地面参考框架(ETRF),均属精密大地测量的应用范围(参阅 Boucher 等, 1982, 1993, 1994; McCarthy 1996; Altircer 等, 1995, 1997a, 1997b; Miskovic and Altiner 1997; Seeger 等, 1998)。1984 全球大地坐标系统(WGS84)是与全球地面参考框架(ITRF)及欧洲地面参考框架(ETRF89)相一致的系統,1984 全球大地坐标系统(WGS84)与全球地面参考框架(ITRF)之差,在全球尺度内处于厘米级范围内(NIMA 1997)。作为控制与归算使用的一组参考框架,必须对全球范围内分布的永久性测站进行连续观测(图 4.1)。在永久性测站上进行连续性观测结果,可以用于精密确定板块运动、计算地球的转动参数,同时亦可用于探讨将地球



图 4.1 IGS 追踪站 (Schneider 1988)

视为变形体时，在受到月球及太阳引力作用下的响应现象。

自 60 年代以来，对地球岩石圈板块运动的描述建立在海底扩张速率，转换断层系统，以及地震滑动向量分析的基础上（参阅 Kent 1976；Miller 1992）。依据这些理论，地壳由 14~16 块漂浮在软流圈上的主要板块构成（图 4.2），而板块运动的作用力可分成两类，一类是由于上地幔的对流运动形成作用于板块的力，另一类是作用在板块边界处的力。在大洋中脊，由于热融岩物质的涌出、冷凝并形成新的岩石，均加速了海底扩张的速度，据此，扩张的板块在它们的边界处会受阻改变而开始运动，这种驱动板块运动的力也属于第二类。通过板块运动，释放能量，其释放能量的多少则视板块的大小、厚度及其运动速率而定。

有些涉及全球板块运动模型的研究结果已公开发表（如 DeMets 等，1990，1994；Argus and Gordon 1991；Seno 等，1987，1983；Wilson 1993a、1993b）。这些模型均是用相对旋转轴的板块旋转向量——欧拉矢量（Euler Vector）来描述板块运动。NUVEL-1 模式描述了 14 块假设为刚性的主要板块相对于

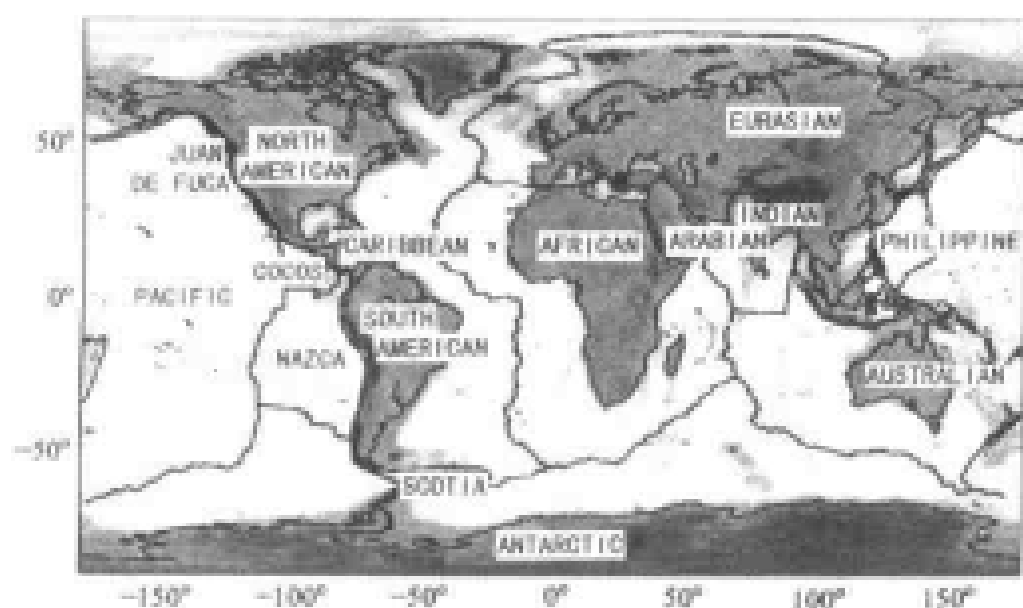


图 4.2 全球主要板块及板块边界

太平洋板块之间的运动 (Demets et al., 1990)。而 NNR-NUVEL1 模型则给出了各板块的绝对角速度 (未考虑相对旋转) (Argus and Gordon 1991)。依据对古地磁时间尺度所作的最新修订, 这些早期模型的角速度应乘以一个重标定因子 0.9562 (DeMets et al., 1994), NUVEL-1A 以及 NNR-NUVEL1A 便是这种重新确定比例尺度的模型。作为示例, 表 4.1 给出了 NUVEL-1A 模型板块运动的角速度值。

表 4.1 NUVEL-1A 模型的板块运动角速度值 (DeMets et al., 1994)

板块名称	纬度/ (°)	经度/ (°)	$\omega$ / (°/a)	$\omega_x$ / (rad/a)	$\omega_y$ / (rad/a)	$\omega_z$ / (rad/a)
Africa	59.160	-73.174	0.9270	0.002400	-0.007939	0.013892
Antarctica	64.315	-83.984	0.8695	0.000689	-0.006541	0.013676
Arabia	59.658	-33.193	1.1107	0.008195	-0.005361	0.016730
Australia	60.080	1.742	1.0744	0.009349	0.000284	0.016252
Caribbean	54.195	-80.802	0.8160	0.001332	-0.008225	0.011551
Cocos	36.823	251.371	1.9975	-0.008915	-0.026445	0.020895
Eurasia	61.066	-85.819	0.8591	0.000529	-0.007235	0.013123
India	60.494	-30.403	1.1034	0.008180	-0.004800	0.016760

续表

板块名称	纬度/ (°)	经度/ (°)	$\omega$ / (°/a)	$\omega_x$ / (rad/a)	$\omega_y$ / (rad/a)	$\omega_z$ / (rad/a)
North America	48.709	-78.167	0.7486	0.001768	-0.008439	0.009817
South America	54.999	-85.752	0.6365	0.000472	-0.006355	0.009100
Nazca	55.578	-90.096	1.3599	-0.000022	-0.013417	0.019579
Rivera	31.000	257.600	2.4500	-0.007880	-0.035800	0.022020
Scotia	49.100	-89.400	0.6600	0.001100	-0.007500	0.008700
Juan de Fuca <sup>(1)</sup>	35.000	26.000	0.5100	0.006510	0.003170	0.005080
Juan de Fuca <sup>(2)</sup>	28.300	29.300	0.5200	0.006710	0.003770	0.004150
Philippine <sup>(3)</sup>	0.000	-47.000	0.9600	0.011400	-0.012200	.000000
Philippine <sup>(4)</sup>	-1.200	-45.800	0.9600	0.011600	-0.012000	0.000300

注: (1) the Juan de Fuca<sup>[1]</sup> 板块是经 Wilson 重新标定的 (Wilson, 1993a); (2) the Juan de Fuca<sup>[2]</sup> 板块是经 Wilson 最近推算后重新标定的 (Wilson 1993b); (3) the Philippine<sup>[3]</sup> 板块是经 Seno 重新标定的 (Seno et al., 1987); (4) the Philippine<sup>[4]</sup> 板块经 Seno 最近推算后重新标定的 (Seno et al., 1993)。

在地球表面上, 任一个观测站在板块上的运动速度可表示为:

$$z_{i,1} = R\omega_p \begin{bmatrix} \cos\phi_p \sin\lambda_p \sin\phi_i - \sin\phi_p \cos\phi_i \sin\lambda_i \\ \cos\phi_p \cos\phi_i \sin\lambda_i - \cos\phi_p \sin\phi_i \sin\lambda_p \\ \sin\phi_p \cos\phi_i \sin(\lambda_i - \lambda_p) \end{bmatrix} \quad (4.1-1)$$

其中  $(\lambda, \phi)_i$  表示观测站在板块上的坐标;  $(\lambda, \phi)_p$  表示板块旋转轴的坐标;  $R$  表示地球的半径;  $\omega$  表示板块的角速度。由下式:

$$x_{i,1}(t) = x_{i,1}(t_0) + z_{i,1}(t - t_0) \quad (4.1-2)$$

可求得由全球板块运动引起的观测点在历元  $t$  相对于历元  $t_0$  的坐标变化改正量。而地壳上不同点位受到月球、太阳引力的作用也不是常数 (图 4.3), 地球因旋转而改变相对于月球、太阳的位置, 这种由此产生的太阳、月球引力的变化, 是形成海洋潮汐与地球固体潮的主要原因 (关于潮汐效应的变化模型, 可参阅 Melchior 1983; Heitz 1980 ~ 1988; Vanicek and Krakiwsky

1986; Sovers and Jacobs 1994; McCarthy 1996)。

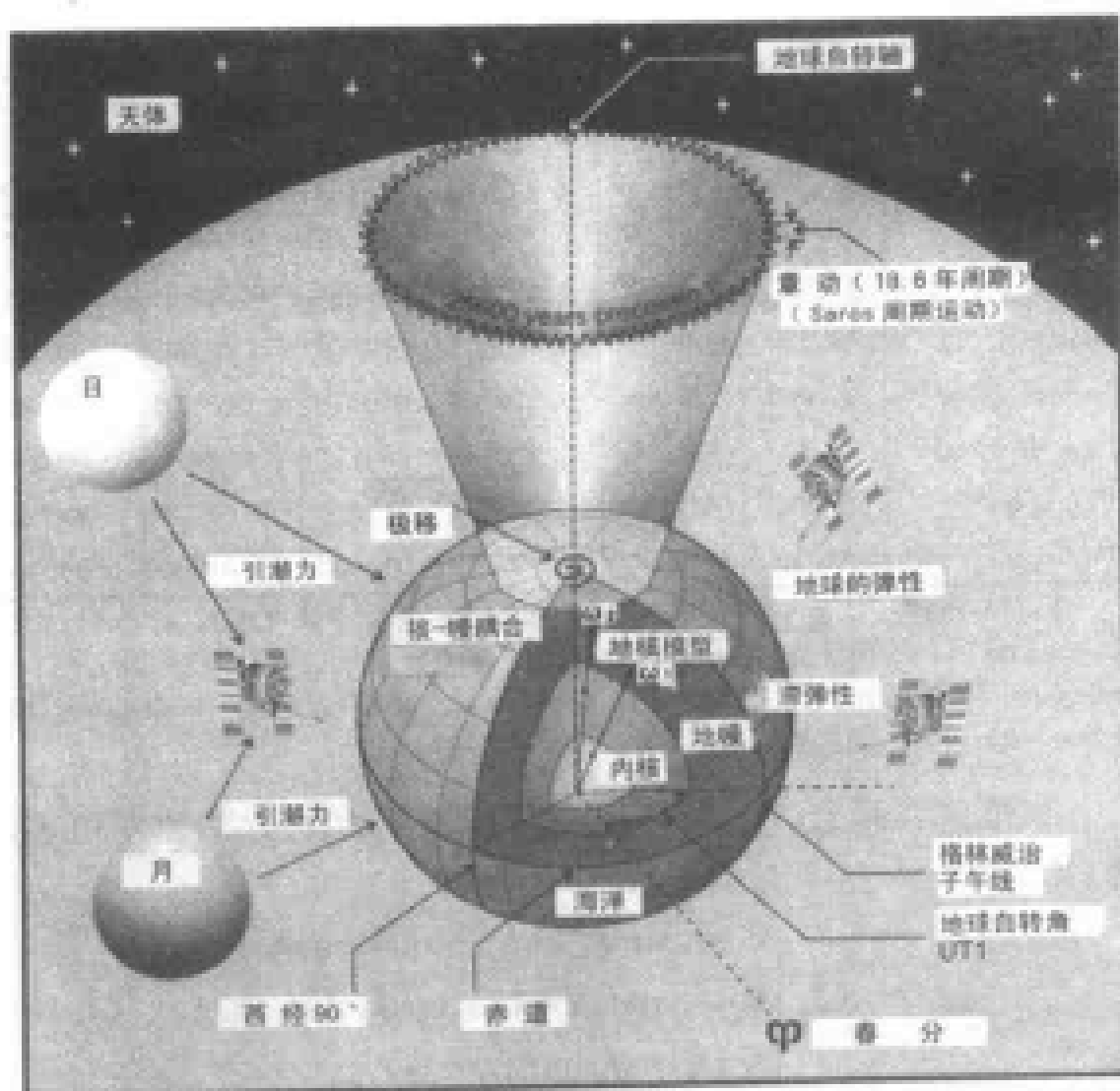


图 4.3 潮汐效应引起观测点暂时或永久性位移 (Schneider, 1998)

## § 4.2 大地测量结果在形变分析中的贡献

岩石圈板块的水平运动量通常在每年几毫米至 150 毫米多的范围，在垂直方向的运动量则相对较小。依靠空间观测技术的发展，已能观测到这类远距离点位之间的小量级相对运动，这类空间观测技术包括：甚长基线干涉测量 (VLBI)、卫星激光测距

(SLR) 以及全球定位系统 (GPS) 等。对于进行板块边界上和断层间距离的观测, 采用传统方法受光电仪器观测距离长度与精度的制约, 往往难以实施。应用空间观测技术, 可以从空中测量时间尺度跨越几年、速率小于每年几毫米的板块的运动量。

大地测量学在板块构造以及地壳运动研究中的作用体现在测量点位间的几何变化, 并推算形成这些变化的动力作用方式。传统的形变分析是采用统计假设检验方法, 检验相对于固定参考点的位移变化的显著性 (参阅 Pelzer 1971; Koch 1985; Caspary 1987; Hekimoglu 1997)。

在应变分析中, 将位移量作为地表坐标系  $u^s$  的连续微分变量, 通过测站位置变化的应变分量, 来计算求解应力分量, 并据此对研究区域内表现的物理特性进行解释, 这便包括研究作用于物体上并导致其几何变形的作用力。因经, 将应变分析视为动力学模型的基础, 而传统的形变分析则类似于运动学模型 (参阅 Flugge 1972; Means 1976; Grafarend 1977; Brunner 1979; Bock 1982; Welsch 1989; Ghitau 1998)。本章致力于第 2、3 章所阐述的曲面形变解析理论的几何学原理的应用, 并使用了 CRODYN'94 与 CRODYN'96 各期联测的平均历元所对应的观测点的坐标差值 (ITRF94 对应于 1995.6 历元), 这些值也可用来确定 GPS 网所覆盖的亚德里亚海周围地区的内蕴和外蕴形变测度, 该 GPS 网是在 1994 年建立的, 它的这些结果作为主要检验对象将在 § 4.4 与 § 4.5 中叙述。

### § 4.3 亚德里亚海地区的板块运动

地震地质的研究表明, 亚德里亚海地区的板块运动受控于非洲板块与欧亚板块之间的碰撞作用。非洲板块做逆时针方向的旋转, 致使欧亚板块北段相对于南段向北移动, 而非洲板块向北移动导致了东地中海构造演化的重大变化, 它形成了爱琴海地区的

隆起，同时，也是亚得里亚海地区诱发地震的主要原因（McKenzie 1972；Udias 1982；Anderson and Jackson 1987；Geiss 1987；Jackson and McKenzie 1988；Mantovani 等，1992；Drewes 1993）。

自 60 年代以来，亚得里亚海地区成为众多科学家研究现今板块构造特征的焦点。有关地中海地震特性的研究以及计算结果的重新解释，都重点增加了近期地震的有关内容，这些内容是大部分已发表的关于该地区构造运动论文的组成部分。

这些研究所得的成果通常可归结为在两个截然不同的研究方向所取得。一部分科学家认为亚得里亚海是非洲板块的一角（Channel 1979；D'argio and Horvath 1984；Mantovani 等，1992；Babbucci 等，1997），Mantovani 等（1992）提出，这一海

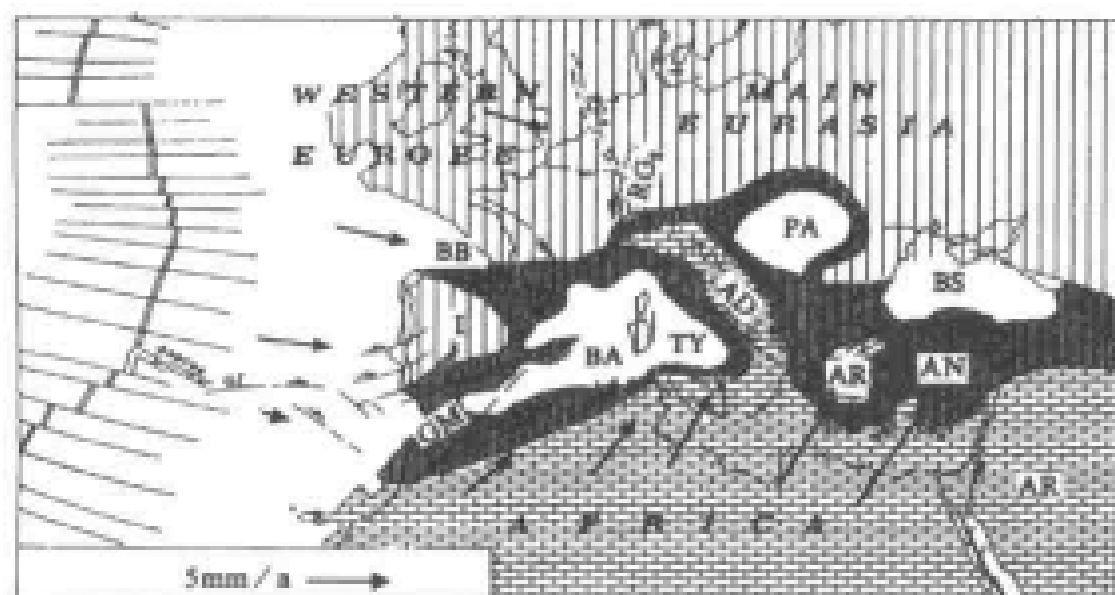


图 4.4 亚得里亚海地区作为非洲板块的一角，

其位移方向为北北西，位移量约为 5mm/a。

图中符号意义为：

AR：阿拉伯半岛；AN：安纳托利亚；BS：黑海；AE：爱琴海；AD：亚得里亚海；PA：潘若尼亚盆地；TY：伊特鲁里亚盆地；BA：巴利阿里盆地；BB：比斯开湾；GM：直布罗陀-摩洛哥板块；RGs：莱茵河地槽系统（Mantovani 等，1992）

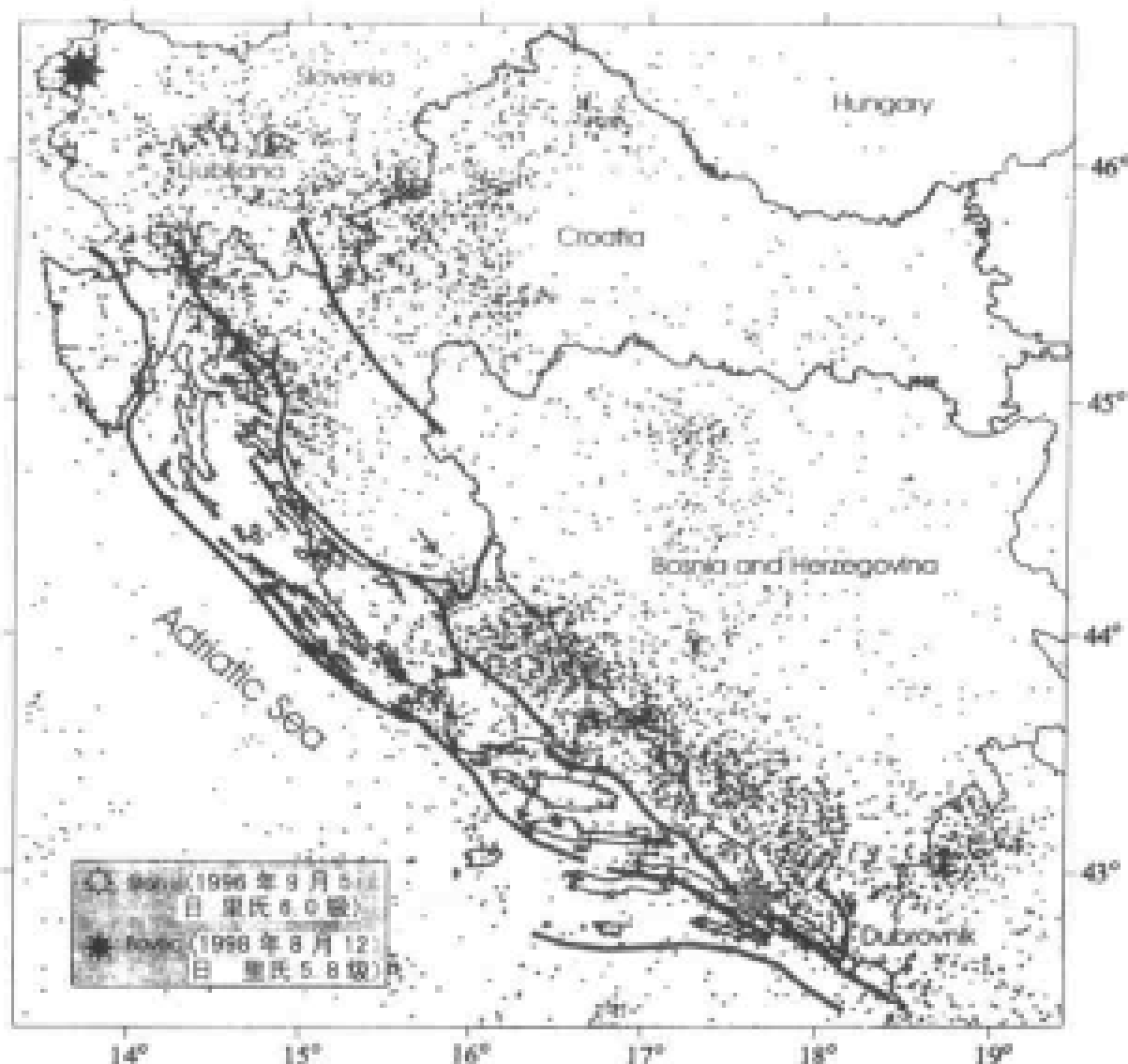


图 4.5 亚德里亚地区近 500 年来发生的地震  
(Skoko and Mokrović 1998)

角是以每年约 5mm 的变化量朝北北西方向移动 (图 4.4); 另一部分科学家则将亚得里亚海假设为一个独立的小型板块, 并运用这一假设解释了该陆地区域上发生的密集地震 (图 4.5), 描述了这一地区最近认识的构造模式和地壳结构 (Celet 1997; Giese and Reutter 1978; Vandenberg and Zijdeveld 1982; Anderson and Jackson 1987), Anderson 及 Jackson (1987) 还用亚得里亚小型板块的内蕴形变解释了该地区地震的丛集性。



## § 4.4 几何模型

### § 4.4.1 内插方法的应用

进行地表形变分析，通常受观测点的选择及观测条件的限制，而这距离理论上的要求在某种情况下出入极大，这也是本书欲讨论的问题所在。受地形条件的限制，在研究区域内难以靠有限的投资来布设数量足够且均匀分布的观测点。所以，在观测区内，更多的高程与位移值要用足够密度而又均匀的网格进行内插计算求得的，为完成这一计算使用的拟合推估法已在 § 3.1 及 § 3.3 中介绍，高程与速度值也可以类似地用样条函数内插法得到，这样，就可以进行两期观测成果的比较。此外，由样条函数法与拟合推估法内插所得的坐标其差值很小，可予以忽略不计。

细分有限三角元素或三角网法也非常适合用于计算内蕴形变测度（参考 3.4.7a），也适合用于观测点的加密计算，这是因为在这处计算方法中，函数在三角形的边界上连续，而不是函数的导数连续。另一方面，用拟合推估法确定外蕴形变测度既简单又明确，由这种方法求得的内插函数，在地表坐标系  $w$  下的内插区域内是二次可微和连续的。应用上述方法，可以在 § 2.3.2 及 § 2.4.3 公式基础上直接计算内蕴和外蕴形变测度。

内蕴形变测度的计算可依据 § 2.3.2.2 与 § 2.3.2.3 的计算公式 (2.3.4a) ~ (2.3-10d)，至于椭球坐标系可参阅 § 2.3.2.4 与之相对应，依据 § 2.3.3.1、§ 2.3.3.2 及 § 2.3.3.3 内的公式 (2.3.17a~37c)，可以计算外蕴形变测度。

### § 4.4.2 图示法的解释

本节将讨论下述图形表示法的一般概念，用来说明地表区域  $F$  内的观测值与形变测度具有下列特性。

• 在参考椭球面上数据的惟一性：每一点可以用惟一的数值表示：

$$Z = Z(\lambda, \phi) \quad (4.4-1a)$$

• 在参考椭球面上的矢量值：每一个点可以用三个数值表示：

$$z^a = Z^a(\lambda, \phi), \quad a \in \{1, 2, 3\} \quad (4.4-1b)$$

• 在切平面  $F$  上的矢量值：每一个点可以用两组或多组数值表示：

$$Z_{\beta n}^{\beta} = Z_{\beta n}^{\beta}(\lambda, \phi), \quad \beta \in \{1, 2\}, \quad n \in \{1, 2, \dots\} \quad (4.4-1c)$$

在 (4.4-1a) 式中数据点的惟一数值表示法，可以独立地推演出地表区域  $F$  (2.3-11a)、(2.3-11b) 式的高程表示方法

$$H = H(\lambda, \phi) \quad (4.4-2a)$$

上述方法同样可以用来表示面膨胀 (2.3-7b) 以及平均曲率的变化 (2.3-21c)：

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \bar{q}(\lambda, \phi), \\ \delta H &= \delta H(\lambda, \phi) \end{aligned} \quad (4.4-2b)$$

采用等值线表示法和标注数值的坐标点格网方法也是合适直观的位移坐标 (2.3-11c)，为：

$$\delta q^a(\lambda, \phi) = [\delta \lambda(\lambda, \phi), \delta \phi(\lambda, \phi), \delta H(\lambda, \phi)]^a \quad (4.4-3a)$$

构成了向量表示法 (4.4-1b)。一种可行的方法是将三个量值分别用等值线表示法表示为：

$$\delta \lambda(\lambda, \phi), \delta \phi(\lambda, \phi), \delta H(\lambda, \phi) \quad (4.4-3b)$$

另一方面，采用图 4.6 的图形向量表示法也可以用来表达这种情况。

在图 4.6 的图面上，画出二维向量的两个水平分量的度量数值：

$$R_1 \cos \phi \cdot \delta \lambda(\lambda, \phi), R_2 \cdot \delta \lambda(\lambda, \phi) \quad (4.4-3c)$$

在  $\phi$  的方向，用一段直线表示高程分量为：

$$\delta H(\lambda, \phi) \quad (4.4-3d)$$

朝上为正，朝下为负。

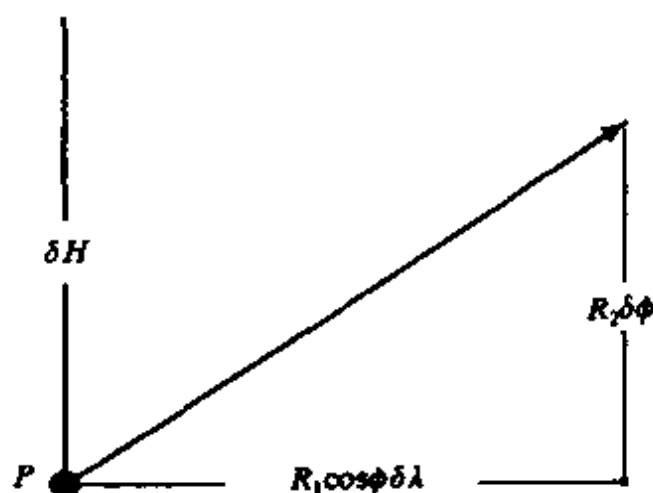


图 4.6 观测点位移的坐标表示法

对于 (4.4-1c) 式这种情况，为了避免产生畸变，采用在切平面上的切向量的表示法是较直观的。如切平面  $F$  上的畸变向量即为 (2.3-7h) 式：

$$m_{(n)}^a(\lambda, \phi) = m_{(n)} r_{(n)}^a, \quad (4.4-4a)$$

上式可以用图 4.7 表示。在大多数情况下，先按下式：

$$m_{(n)} = 1; \text{无畸变量} \quad (4.4-4b)$$

表示的单位圆出发，以放大方式标绘出  $q_{(n)}$ ，然后采用放大因子  $v > 1$  构成为：

$$m_{(n)} = v \cdot m_{(n)v} = 1 + v \cdot q_{(n)} \quad (4.4-4c)$$

以取代图中画出的线段长度如 (4.4-4a) 式。随后，再以图示方式表示在试验点  $p(\lambda, \phi, H)$  处。与等高线相切的切向量：

$$t^a = (t^1, t^2, 0)^a \quad (4.4-4d)$$

它平行于参考椭球面，同时也平行于所要表示的基本平面，以便于可以把它应用到一个特定的具体方向上。对它进行的计算要求说明如下： $t^a$  选作为单位向量，以便可应用度量张量 (2.3-12a) 式表示为：

$$g_{11}(t^1)^2 + g_{22}(t^2)^2 = 1 \quad (4.4-5a)$$

此外，等高线的剪切向量必须满足以下条件式

$$H_{,a}t^a = H_{,\lambda}t^1 + H_{,\phi}t^2 = 0 \quad (4.4-5b)$$

利用 (4.4-5a)、(4.4-5b) 这二个方程式，其分量为：

$$t^1 = 1/(g_{11} + g_{22}v^2)^{1/2} \quad (4.4-5c)$$

及

$$t^2 = vt^1 \quad (4.4-5d)$$

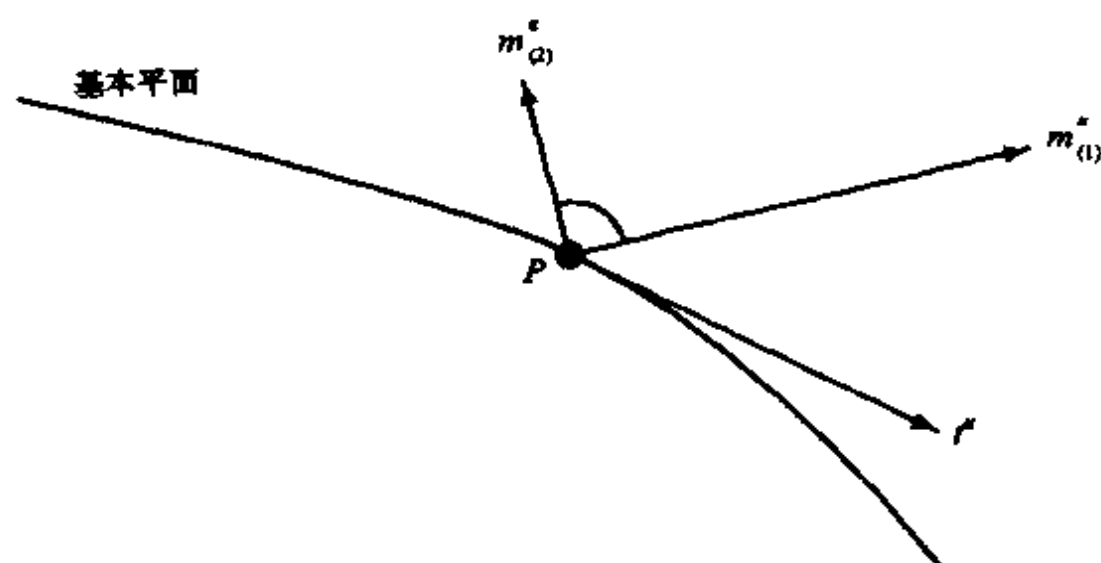


图 4.7 畸变向量的表示法

这两分量即可被确定，式中  $v = -(H_{,\lambda}/H_{,\phi})$ 。如果  $\tilde{t}^a$  是在切平面中的分量，则可由转换方程得：

$$t^b = q_{,a}^b \tilde{t}^a \quad (4.4-5e)$$

并有以下关系式：

$$t^a = \tilde{t}^a,$$

$$t^3 = H_{,\lambda}\tilde{t}^1 + H_{,\phi}\tilde{t}^2 = H_{,\lambda}t^1 + H_{,\phi}t^2 = 0 \quad (4.4-5f)$$

其中第二式对应于 (4.4-5b)。为了确定在切平面上的向量 (4.4-4a) 的表达式，就需要知道在  $\tilde{t}^a$  方向以及与之相垂直方向上的该向量的分量，这两个分量可由下式计算：

$$\hat{m}_{(n)}^1 = f_{a\beta} m_{(n)}^a t^\beta \quad (4.4-5g)$$

$$\hat{m}_{(n)}^2 = f_{a\beta} m_{(n)}^a \epsilon_\gamma^\beta t^\gamma$$

式中度量张量  $f_{\alpha\beta}$  可根据 (2.3-16) 式得到, 而下式

$$\epsilon_r^\beta = (f_{r1}\delta_2^\beta - f_{r2}\delta_1^\beta) f^{-1/2} \quad (4.4-5h)$$

是一个二维  $\epsilon_r^\beta$  张量 (参阅 Heitz 1988)。

主曲率的直观变化 (2.3-21b) 为:

$$\delta k_{N(n)} = \bar{k}_{N(n)} - k_{N(n)} \quad (4.4-6a)$$

相应的向量表示为:

$$k_{N(n)}^a(\lambda, \phi) = \delta k_{N(n)} r_{(n)}^a \quad (4.4-6b)$$

这里, 仅用到最初的方向向量  $r_{(n)}^a$ , 而用平均曲率  $\bar{k}_{N(n)}$  的方向表示似乎不十分恰当。与把距离定义为正值的假设相反, 曲率的变化既可以为正值, 也可以为负值。

## § 4.5 亚得里亚海地区的地表形变

### § 4.5.1 GPS 观测

§ 4.1 所述的全球板块构造模型是建立在海底扩张速率、转换断层的方位角以及通常在板块边界带所获得的地震滑动向量的基础上。这些模式所推估的运动量是过去几百万年时间尺度内的板块平均运动。因此, 用全球板块运动模型研究现今大地构造活动时, 诸如研究亚得里亚海地区极其复杂的运动过程, 也就很难得到满意的结果。正是出于这种考虑, 为探讨亚得里亚海地区的现今形变特征, 由多个组织机构合作, 在 1994 年建立了一个 GPS 观测网 (合作建立观测网的机构有: 法兰克福市联邦政府制图及大地测量局 (BKG), 萨格布勒大学测量学院, 萨格布勒州大地测量局, 卢布尔雅那市测绘局土地测量处)。这一观测网是由分布在克罗地亚 (17 点)、斯洛文尼亚 (3 点) 以及意大利 (2 点) 等共计 22 个观测点组成, 观测网内各测点之间的平均距离为 30km, 1996 年, 这个网又向南边以及西边延伸新设了 7 个新的测点 (3 点在意大利, 4 点在阿尔巴尼亚), 其着重点在于探



中, 观测的方式与 1994 年相同 (Altineret 等, 1997b)。

表 4.2 观测周期及接收卫星的平均数目

年	年积日 (开始—结束)	观测时段		采样间隔 (秒)
		测段数	—测段的开始 至结束时间 (UT)	
1994	158~160	3	9:00 ~ 9:00	15
1996	253~255	3	7:00 ~ 7:00	15
1998	247~249	3	8:00 ~ 8:00	15

#### § 4.5.2 GPS 数据的处理方法

对 CRODYN'94 及 CRODYN'96 两期 GPS 联测数据的处理, 均使用 Bernese GPS 软件 (Rothacher and Mervart 1996), 处理所使用的精密轨道参数则采用 CODE (Center for Orbit Determination in Europe) 星历 (表 4.3)。

表 4.3 数据处理所使用的 CODE 轨道所对应的各个参考框架

GPS 观测周期	轨道参考框架
CRODYN'94	ITRF92, epoch 历元 1994.7
CRODYN'96	ITRF94, epoch 历元 1996.7

在数据处理中利用了 IGS(International GPS Service for Geodynamic)测站当中的 Graz(奥地利)、Matera(意大利)、Zimmerwald(瑞士)、Wettzell(德国)的坐标以定义参考框架的基准, 采用 IERS 技术公报所发布的有关 ITRF92 与 ITRF94 的坐标及其速率便可把 IGS 测站的坐标分别归算到 CRODYN'94 及 CRODYN'96 两期 GPS 联测网中各自的观测历元上。

#### § 4.5.3 数据处理

数据处理的第一步, 原始观测资料转换为 GPS 接收机的独立转换格式 RINEX (Receiver Independent Exchange) 格式, 把观测时输入的天线高, 依据天线的型号归算成 L1/L2 天线相位

中心的值 (Gurtner 等, 1989)。数据处理的第二步, 根据单点定位结果, 用伪距离值对各观测历元做接收机时钟校正, 并存入相位差为零的文档; 然后, 用短基线法解算相位数据的单差; 求出单差后, 在同一基线上使用 L1 与 L2 的相位观测值的线性组合构成 L3 以消去周跳, 与此同时, 先验坐标值则采用三重差分予以改进, 采用先验坐标值, 得到自由联测网的解 (不是指初始相位未定值解), 这一结果可以用于检查处理过程与程序, 进而优化测站点的先验坐标值 (所使用的 IGS 测站坐标除外)。

最后在 Bernese 软件中, 采用 Sigma 初始相位未定值演算法, 解算每一条短基线的 L1 与 L2 的起始相位未定值, 同时亦采用 Quasi-Ionosphere Free 的未知数解算法求出其余基线的未知数。此时, 便可成功地解算出约 95% 的 L1 与 L2 的初始相位的未知数。

#### § 4.5.4 数据质量的检验

为检验观测数据和以日为时间单位所计算的结果, 分别进行各期联测网的解算。为解算每日观测的结果, 观测点坐标采用 1m 的先验中误差值 (自由网平差成果)。将解算出的 L1 与 L2 的相位未知数视为已知参数, 并在法方程求逆计算之前予以事先约化。大气层的滞迟参数则可利用塞斯塔蒙尼 (Saastamoinen) 标准模型每两小时计算一组 (Saastamoinen, 1972)。由 CRODYN'94 与 CRODYN'96 两期联测计算所得每日观测平差结果的特性示于表 4.4 及表 4.5 中。

表 4.4 CRODYN'94 联测网每日平差解的特性

CRODYN'94 年积日	一阶差分残差 RMS (in M)	观测历元数	参数	坐标数
158	0.003	532566	359	69
159	0.003	501872	378	75
160	0.003	423729	375	72



表 4.5 CRODYN'96 联测网每日平差解的特性

CRODYN'96 年积日	一阶差分残差 RMS (in M)	观测历元数	参数	坐标数
253	0.003	591161	586	90
254	0.003	606569	599	90
255	0.004	511890	538	84

表 4.6 CRODYN'94 与 CRODYN'96 联测网自由网平差结果的特性

GPS 联测解	单差的均方根差 RMS (in M)	观测值个数	参数个数	坐标数
CRODYN'94	0.003	1458167	971	73
CRODYN'96	0.003	1709620	1552	93

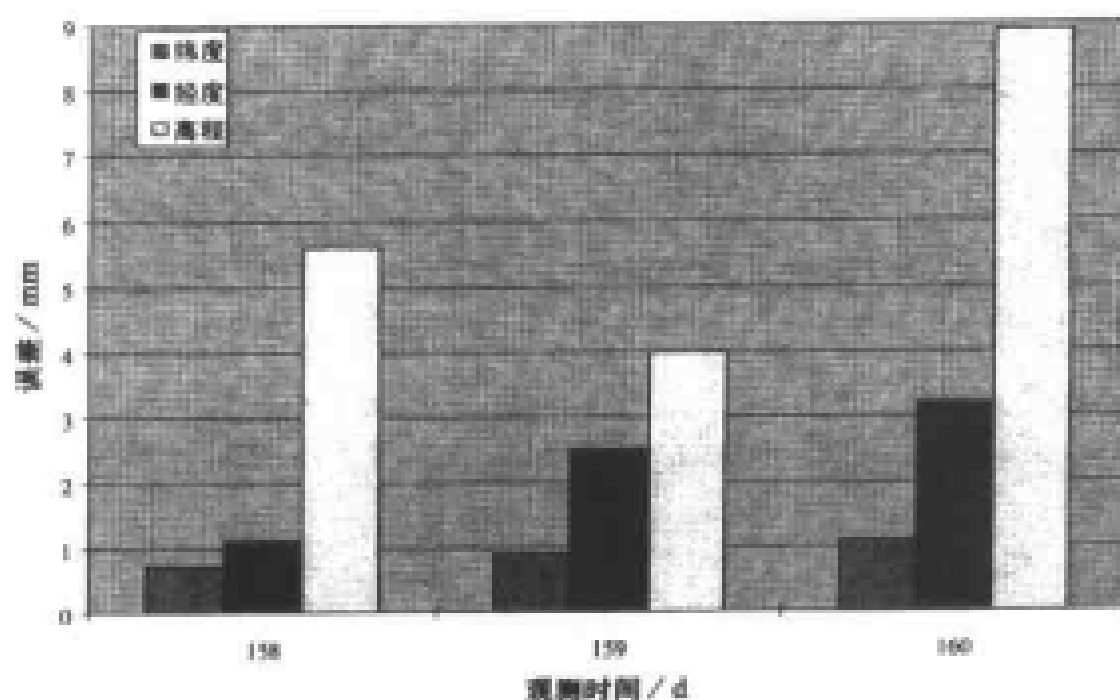


图4.9 用每天自由网结果的7个赫尔默特 (Helmert) 转换参数的估计值计算所得的 CRODYN'94 联测网的每日坐标重复精度

采用 Bernese 软件的 ADDNEQ 程序, 组合出每日解的法方程式; 在测站点位先验中误差为 1 m 的条件下, 解算自由网平差结果 (表 4.6); 在解算出 7 个赫尔默特转换参数的基础上,

用每一期观测对应的自由网平差结果，比较对应点观测坐标的每日解结果；再利用 7 个赫尔默特参数计算出的测站坐标中误差，求出水平坐标分量的误差小于  $\pm 3$  mm，垂直坐标分量的误差约为  $\pm 5$  mm（图 4.9 及图 4.10）。

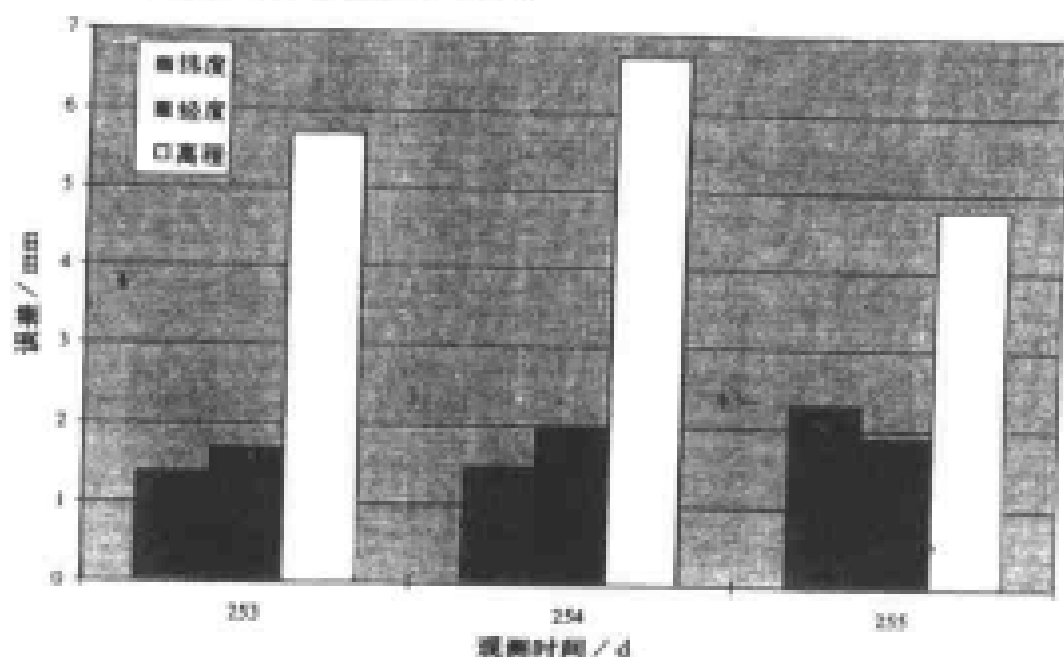


图 4.10 用每天自由网结果的 7 个赫尔默特 (Helmert) 转换参数的估计值计算所得的 CRODYN' 96 联测网的每日坐标重复精度

#### § 4.5.5 多期观测成果

观测点的速度及平均坐标值可用每一期联测网资料组成法方程，用 ADDNEQ 程序解算确定 (Brockmann 1996)。假设资料的所有推估参数具有相同的精度且相互独立，则坐标分量  $y$  的观测值便可以用随时间变化的线性函数  $y + e = at + b = X\beta$ 、方差  $D(y) = \sigma^2 I$  进行模拟 (Brockmann 1996)。未知参数  $\beta = (a, b)^T$  则可用方差-协方差矩阵为  $D(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T P X)^{-1}$  的高斯-马柯夫 (Gaub-Markoff) 模型 ( $X^T P X \hat{\beta} = X^T p_y$ ) 计算求得，其中  $n$  为观测值个数； $u$  是未知参数的个数； $\beta$  为  $(u \times 1)$  个未知数的向

量； $x$  是  $(n \times u)$  的列满秩系数矩阵； $y$  为  $(n \times 1)$  个观测值向量； $e$  是  $(n \times 1)$  个残差向量； $p$  是正定的权矩阵； $\sigma^2$  表示单位权的方差，在这一实例中， $y$  值为随时间变化的线性函数模型，也可以视为一个线性回归的模型。

为了计算每一测站坐标的精度，上式中笛卡尔坐标的误差分量需用位置向量  $(x_i)$  转换为椭球坐标系中的误差分量，即：

$$x_i = [(c/V + H)\cos\phi\cos\lambda, (c/V + H)\cos\phi\sin\lambda, (b/V + H)\sin\phi] \quad (4.5-1a)$$

而对  $q^a = (\lambda, \phi, H)$ ，其系数矩阵  $X = c_{i,a}^a = \partial q^a / \partial x_i$  可利用下列公式求得：

$$X = \begin{bmatrix} -\sin\lambda/N_1 & \cos\lambda/N_1 & 0 \\ -\cos\lambda\sin\phi/N_2 & -\sin\lambda\sin\phi/N_2 & \cos\phi/N_2 \\ \cos\lambda\cos\phi & \sin\lambda\cos\phi & \sin\phi \end{bmatrix} \quad (4.5-1b)$$

式中， $N_1 := \cos\phi (R_1 + H)$ ； $N_2 := (R_2 + H)$ ，而  $a, b, c, R_1, R_2$  的求法可参考 (2.3-12a)。

在反算中，由椭球坐标系误差分量转换为上式笛卡尔坐标系误差分量，其系数矩阵  $X = c_{i,a} = \partial x_i / \partial q^a$  可由下式决定：

$$X = \begin{bmatrix} -\sin\lambda N_1 & -\cos\lambda\sin\phi N_2 & \cos\lambda\cos\phi \\ \cos\lambda N_1 & -\sin\lambda\sin\phi N_2 & \sin\lambda\cos\phi \\ 0 & \cos\phi N_2 & \sin\phi \end{bmatrix} \quad (4.5-1c)$$

对于所计算的测点坐标，均需换算至 1995.6 (ITRF94) 的平均历元，多期观测中二期间的解，可用来描述待研究区域的速度场，亦可用来计算地表内蕴和外蕴的形变测度。而速度估计值的标准误差，水平分量约为 2mm/a，垂直分量则约为 4mm/a。

#### § 4.5.5.1 绝对坐标的解算结果

为计算观测点的绝对坐标以及速度场，在处理过程中引入观测网中的 4 个 IGS 站。数据处理时，所使用的轨道参数分别对应

于 ITRF92 (CRODYN'94 观测网) 及 ITRF94 (CRODYN'96 观测网), 因此 IGS 站的绝对坐标是在不同的 ITRF 下进行计算。利用绝对模型来确定速度场时 (如图 4.11 与 4.12 所示), 是通过固定 4 个 IGS 站坐标与速度而求解确定其他点的速度 (4 个 IGS 站为: Wettzell (Germany), Matera (Italy), Graz (Austria) and Zimmerwald (Switzerland))。在此例中 CRODYN 观测网中测点的速度是相对于 IGS 站的, 而 IGS 站则是对于欧亚板块, 在 ITRF94 下对应于历元 1995 年 6 月的值。由此, 水平运动速度量值的变化在  $15\sim 25\text{mm/a}$  之间, 方向为东北方向; 在高程化值约为  $10\text{mm/a}$  的等级。

#### § 4.5.5.2 相对坐标的解算结果

在相对坐标的确定方法中, 是相对于 Graz 站确定观测点的速度, Graz 站是距 CRODYN 观测网最近的 IGS 站, 它的坐标和速度量值是固定的。用相对法所求得的速度量值如图 4.13 及 4.14 所示。

相对于 Graz 测站的水平变化速度约为  $5\sim 15\text{mm/a}$  之间, 并由北往南逐渐增大, 南部测点呈北南向变化, 而北部测点则较多呈现向西方向的变化; 垂直分量的变化约在  $5\sim 20\text{mm/a}$  之间; 且发现这一区域存在上升的趋势。

#### § 4.5.6 地表内蕴形变

由于绝对模型所得到的速度依赖于被假定为固定站的运动, 所以, 只有相对模型的结果可考虑用来确定形变。为了确定待研究区的内蕴和外蕴形变测度, 需在现有观测点的基础上定义一个覆盖全区范围的方格网, 该网在纬度从  $42.4^\circ\sim 46.4^\circ$  之间, 经度从  $13.6^\circ\sim 17.6^\circ$  范围内被经纬度间距为  $0.1^\circ$  的许多小格网所组成。

用拟合推估法可以确定方格点的高程, 水平与垂直运动速度

以及所要求的它们相对于曲面坐标  $u^a$  的导数的内插值。

对于面膨胀，用  $q$  值符号表示这种形变的性质，正号表示区域内的距离变长（区域膨胀），而负号则说明区域内的距离变短（区域压缩）。

建立在由 § 2.3.2 和 § 2.3.3 所给出的曲面形变分析理论基础上的形变分析结果表明，在亚得里亚海地区有三个不同的形变带（图 4.15）。观测到的最大变形出现在北西区域，该区域受持续的拉伸区所控制，其拉伸值每 10 km 有 2 mm/a 的量级，该区域的表面膨胀结果导致如图 4.16 的拉伸现象，在这一区域，所发现的拉伸位于北西-南及北西-南东方向。

在研究区域内，另一主要拉伸区域在东区与东南区域，在该区域的拉伸量较西北区为小，其拉伸量每 10 km 为 0.5~1.0 mm/a，其方向为西北-南。

在两个拉伸区域之间，发现一个压缩区域（如图 4.15），其压缩量值约为每 10 km 约为 1~2 mm/a，压缩方向则为北-南向以及北-南西向。而研究区内的东北区域则可认为是稳定区域。

#### § 4.5.7 地表外蕴形变

地表外蕴变形可采用 (2.3-21c) 式计算的平均曲率的变化 ( $\delta H$ ) 来描述。它可由 (2.3-17a) 式中的第一和第二基本张量的变化计算出来，其结果可用图 4.17 中的等值线表示。平均曲率最大的变化值是在研究区域的北西-南区被观测到的。在北西部分是个下陷区域，该区的平均地球半径会缩短；另一个下陷区在斯普利市 (Split) 附近被发现，而在研究区南段的杜伯罗威尼克 (Dubrovnik) 附近是上升区域。该区的平均地球半径是增长的。



在 CRODYN'98 GPS 网观测期间，萨格勒布大学测量教授克拉斯米尔·克拉克博士与萨格勒布州大地测量局土地测量处负责人日拉柯·梅迪克正在调试 Makarska 观测站的天线偏心差

#### § 4.5.8 亚得里亚海地区的图示

相对于 IGS 测站的水平速度

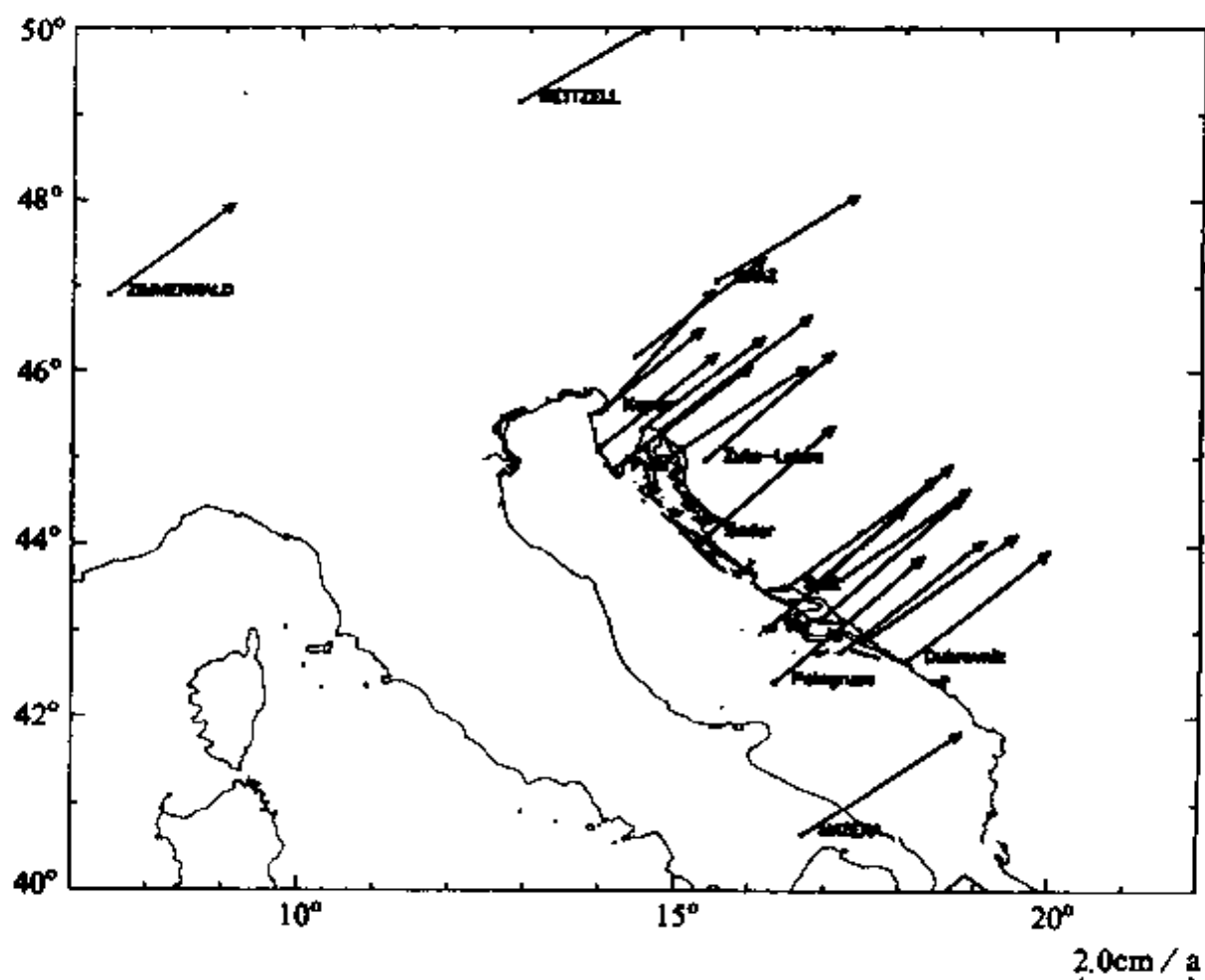


图 4.11 由 CRODYN'94 和 CRODYN'96 GPS 联测解算的水平速度。  
其中, Wetzell, Graz, Matera 和 Zimmerwald 等 IGS 测站的坐标为固定值





# 相对于 GRAZ IGS 测站的水平速度

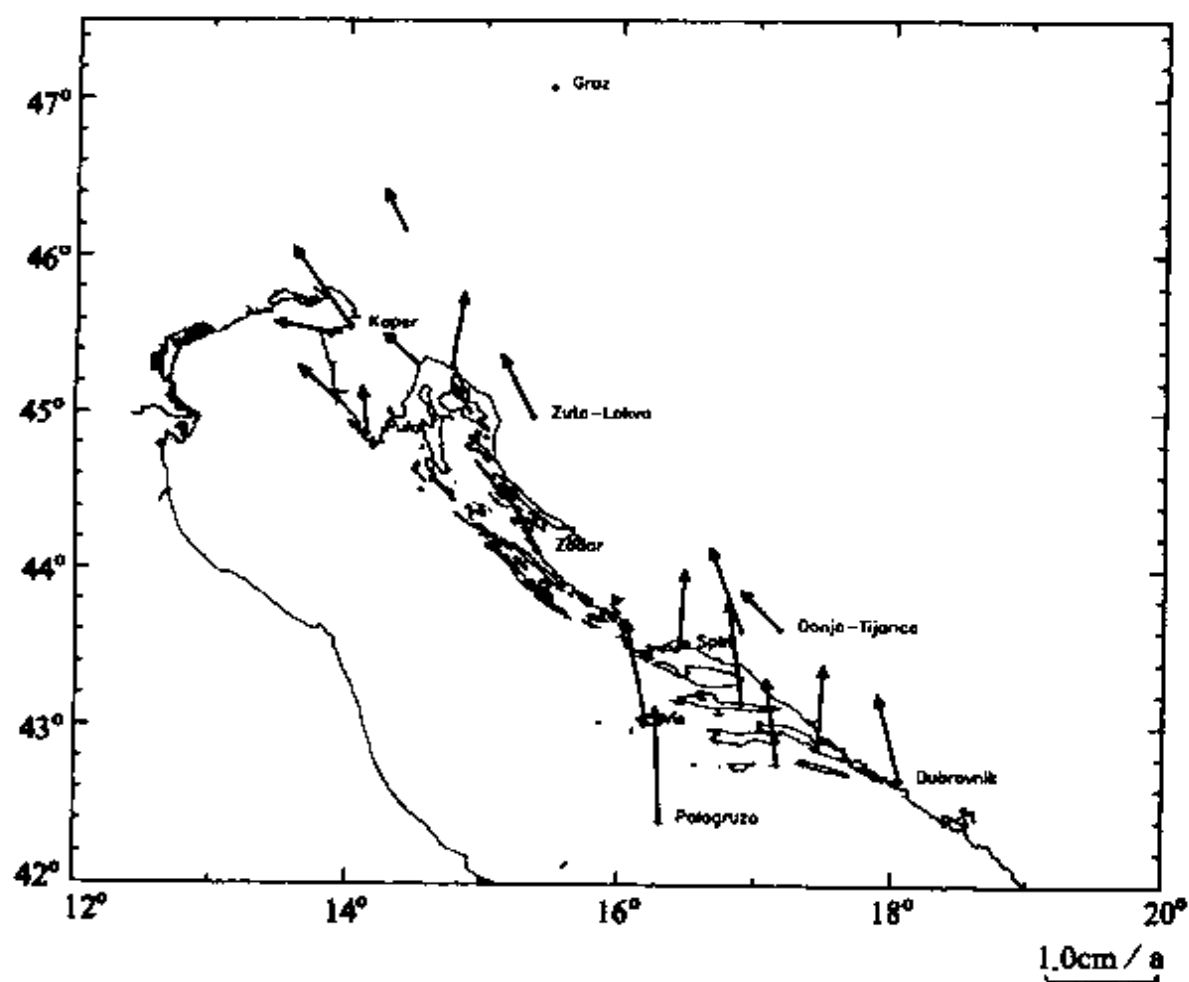


图 4.13 由 CRODYN'94 和 CRODYN'96 GPS 联测求得水平速度。  
其中，Graz IGS 测站为固定站

# 相对于 GRAZ IGS 测站的垂直速度

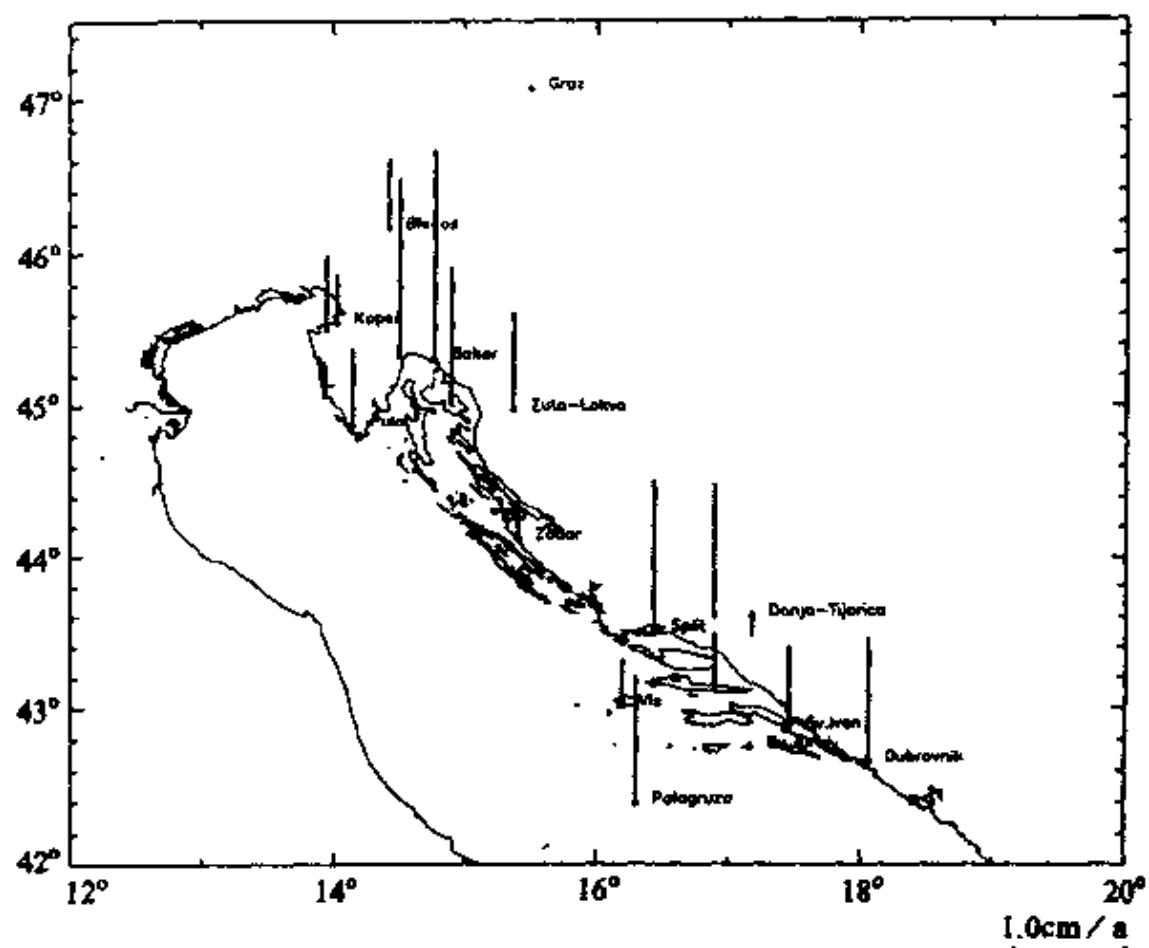


图 4.14 由 CRODYN'94 和 CRODYN'96 GPS 联测解算的垂直速度。  
其中，Graz IGS 测站为固定站

CRODYN (1994~1996) 观测网: 地表表面膨胀(或凹陷)

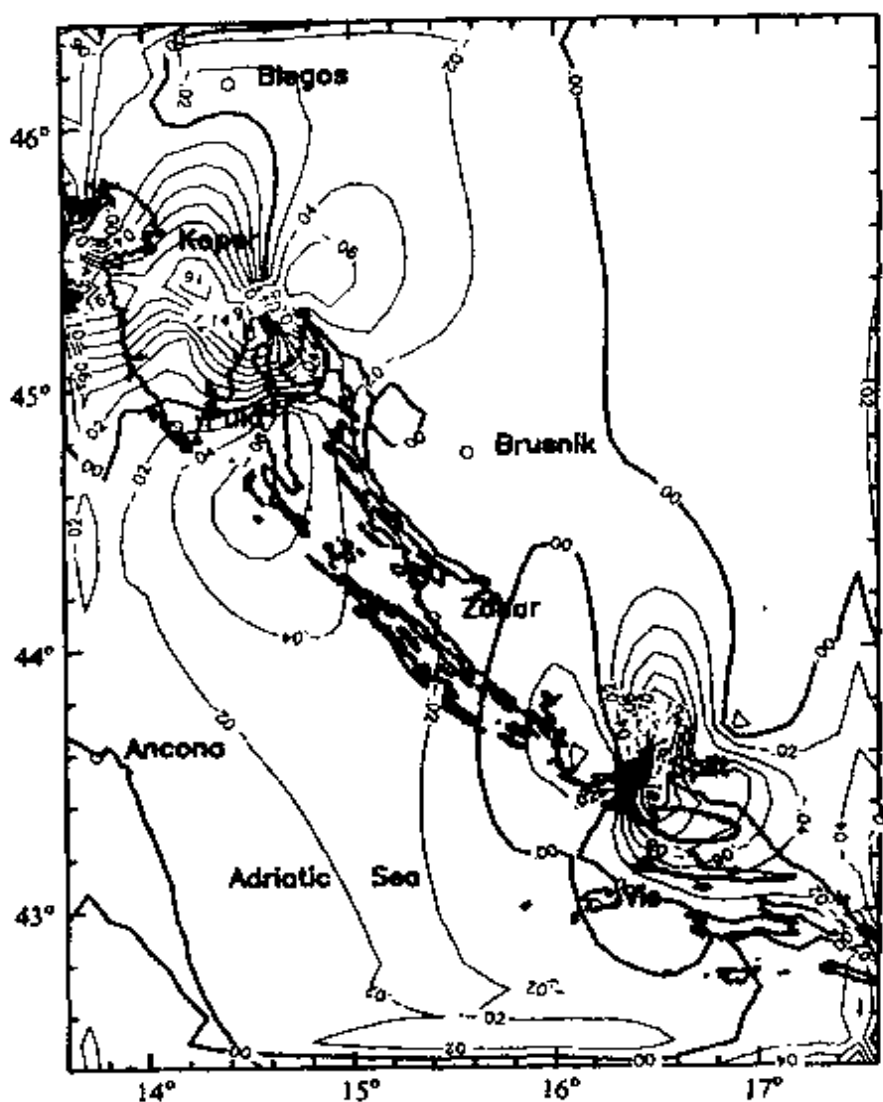


图 4.15 地表面膨胀(或凹陷), 结果以  $\mu$  应变给出。  
正号表示拉伸地区, 负号表示压缩地区

CRODYN (1994~1996) 观测网：地表表面拉伸

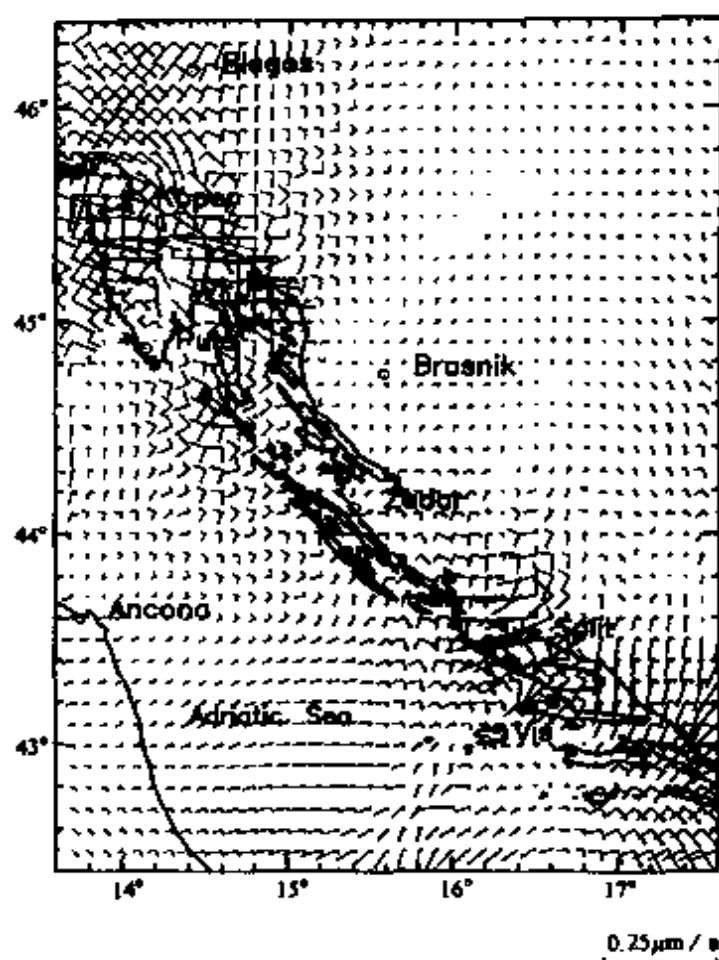


图 4.16 地表面拉伸。箭头表示拉伸的方向和大小，无箭头  
线段表示压缩的方向和大小。结果以  $\mu$  为应变给出

CRODYN (1994~1996) 观测网：平均曲率的变化

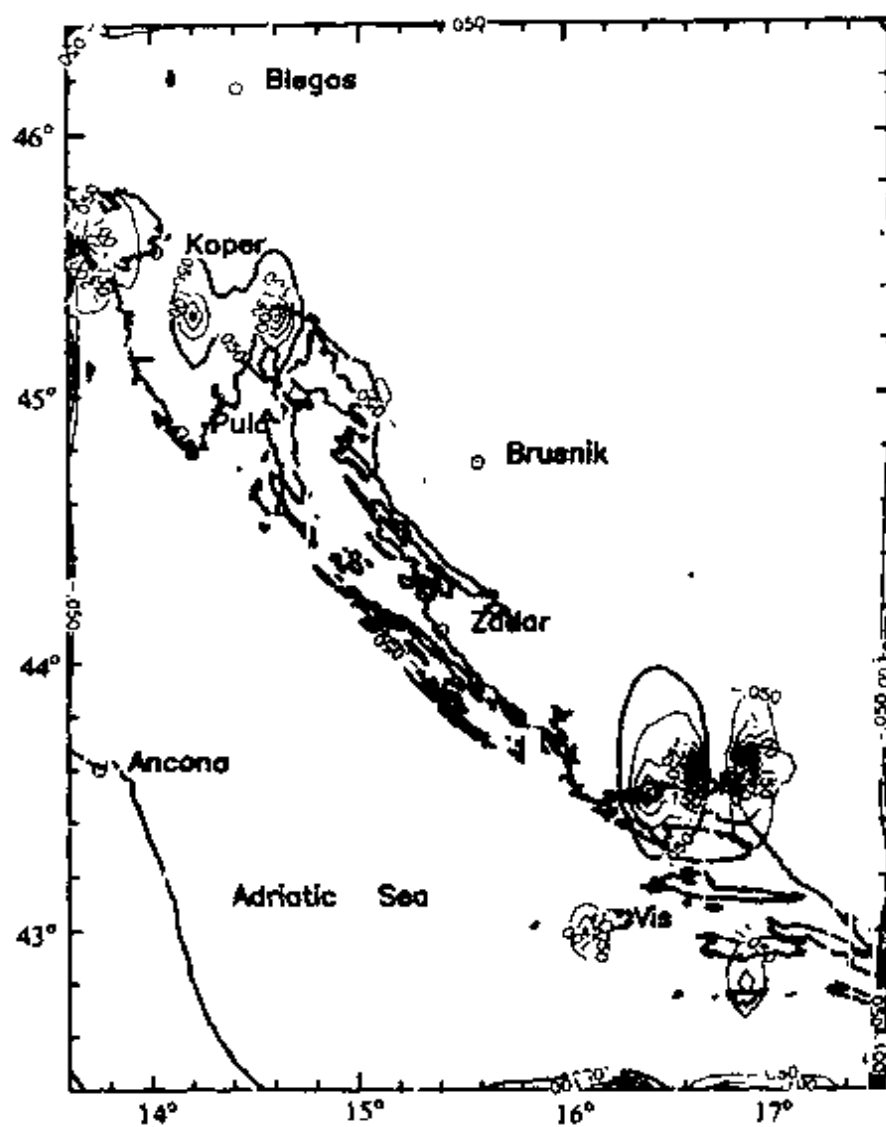


图 4.17 平均曲率的变化。图上所显示的结果要乘以  $10^7$ 。  
正号表示凹陷地区，负号表示隆升地区

## § 4.6 结束语

亚得里亚海地区地震发生的频繁性表明,地震活动特别集中于研究区域的北西部和南部地区。最近 1996 年和 1998 年发生在克罗地亚和斯洛文尼亚的地震支持了上述认识;使用地表形变理论的研究结果,与在同一地区所作的地震和地质研究结果相比较,也得到了很好的一致性。亚得里亚海地区的地震集中区涵盖于 CRODYN'94 和 CRODYN'96 两期 GPS 联测网所计算出的最大地表膨胀区域。

对亚得里亚海地区形变分析表明,在研究区内北-西区域出现了最大变形,其北-西和南-东方向的形变量值达每 10 km 伸长 2 mm/a,这一变化区域与 1998 年 4 月 12 日在 Bovec (斯洛文尼亚)所发生的 5.8 级地震区域相对应;而且,1996 年 9 月 5 日在南克罗地亚的 Ston 发生了 6.0 级地震,在该地区也观测到最大伸张变化。

由 CRODYN'94 和 CRODYN'96 两期 GPS 观测获得的初步结果,支持了亚得里亚海地区是非洲板块的岬角的观点(图 4.15 和图 4.16)。在该区域内,横跨伸张区,以每 10 km 1 至 2 mm/a 的速率向北-南方向压缩,这一变化与非洲板块区域的运动方向和大小相一致。

由于研究周期持续的时间短,因而对亚得里亚海是非洲板块的岬角或是以一独立的微板块存在等问题都无法给出确定的回答。此外,为了消除模型误差和克服地区性的地质过程对测站坐标及速度的影响,还必须考虑得到第三期 GPS 联测的结果,为了进一步对采用 GPS 手段所取得的关于亚得里亚海地区的现今大地构造活动作出严格的论证,尚需进行 8~10 年的长期研究。

## 参 考 文 献

- Abramowsk A, Müller H (1992) Geometrisches Modellieren. Bibliographisches Institut, Mannheim Wien Zürich.
- Altiner Y (1992) SLR— und GPS—Messungen in Anatolien und erste Resultate. Vermessungswesen und Raumordnung, pp. 393~399.
- Altiner Y, Seeger H (1993) Is the Motion of the Eastern Mediterranean Region Faster than Expected?. Geological Journal Vol. 28, pp 319~325.
- Altiner Y, Colic K, Gojceta B, Lipej B, Marjanovic M, Rasic L, Seeger H (1995) Results of the EUREF—1994 Croatia and Slovenia GPS campaign. In: Gubler E, Hornik H (eds) Report on the Symposium of the IAG Subcommission for EUROPE (EUREF). Astronomisch — Geodätische Arbeiten No. 56, München, pp 51~57.
- Altiner Y (1996) Geometrische Modellierung innerer und äußerer Deformationen der Erdoberfläche mit Anwendungen an der Nordanatolische Verwerfung und in der West—Türkei. Deutsche Geodätische Kommission, C 462 Mitteilungen des Instituts für Angewandte Geodäsie, Frankfurt am Main.
- Altiner Y, Basic T, Colic K, Gojceta B, Marjanovic M, Medic Z, Rasic L, Seeger H (1997a) Results of the CROREF'96 GPS Campaign. In: Gubler E, Hornik H (eds) Report on the Symposium of the IAG Subcommission for EUROPE (EUREF). Astronomisch — Geodätische Arbeiten . No. 58, München. pp 108~123.
- Altiner Y, Miskovic D, Seliskar A, Seeger H, Tavcar, D (1997b) Results of the SLOVENIA'95 GPS Campaign. In: Gubler E, Hornik H (eds) Report on the Symposium of the IAG Subcommission for EUROPE (EUREF). Astronomisch — Geodätische Arbeiten No. 58, München, pp. 124~132.
- Altiner Y (1998) Nutzung von GPS—Beobachtungen in der Ebene und ein neues Verfahren zur Darstellung von äußeren Flächenänderungen,

- Vermessungswesen und Raumordnung, Bonn, pp. 42~50.
- Anderson H, Jackson J (1987) Active tectonics of the Adriatic region. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* 91, pp. 937~983.
- Argus D F, Gordon R G (1991) No-Net-Rotation model of current plate velocities incorporating plate rotation model NUVEL-1, *Geophys. Res. Lett.*, 18, pp. 2039~2042.
- Ayan T, Celik R N, Alanko M G, Denli H, Özlüdemir M T, Groten E, Leinen S, Traiser J (1997) Preliminary results of deformation measurements on Karasu Viaduct using GPS technique. In: Altan O, Gründig L (eds) *Second Turkish-German Joint Geodetic Days*, Berlin, pp. 37~50.
- Babbucci D, Tamburelli C, Mantovani E, Albarello D (1997) Tentative list of major deformation events in the Central-Eastern Mediterranean region since the middle Miocene. *Anali Di Geofisica*, Vol. XL, Nr. 3.
- Bilajbegovic A (1996) Erforschung der Verschiebung des Staudammes vom Wasserkraftwerks PERUCA mit den klassischen und modernen elektronischen Instrumenten. In: Pelzer H, Heer R (eds) *Proceedings of the 6th International FIG-Symposium on Deformation Measurements*, Wissenschaftliche Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 217.
- Bock Y (1982) The use of the baseline measurements and geophysical models for the estimation of crustal deformations and the terrestrial reference system. The Ohio State University Research Foundation Columbus, Ohio 43212.
- Boucher C, Altamimi Z, Duhem L (1992) ITRF91 and its assoc velocity field. *IERS Technical Note 12*, Observatoire de Paris.
- Boucher C, Altamimi Z, Duhem L (1993) ITRF92 and its assoc velocity field. *IERS Technical Note 15*, Observatoire de Paris.
- Boucher C, Altamimi Z, Duhem L (1994) Results and Analysis of the ITRF93. *IERS Technical Note 18*, Observatoire de Paris.
- Brockmann E (1996) Combination of Solutions for Geodetic and Geodynamic Application of the Global Positioning System. Ph. D. Thesis, Astro-



nomical Institute, University of Berne Switzerland.

- Brunner F K (1979) On the Analysis of Geodetic Networks for the Determination of the Incremental Strain Tensor. *Survey Review*, pp. 56~67.
- Caspary W (1987) Concepts of Network and Deformation Analysis. School of Surveying, The University of New South Wales.
- Celet P (1977) The dinaric and Aegean arcs: the geology of the Adriatic. In: Nairn A F M, Kanes W H, Stahl F G (eds) *The Ocean Basins and Margins 4A*, pp. 215~261.
- Channel J E T, D'Argio B, Horvath F (1979) Adria, the African Promontory, in *Mesozoic Mediterranean Paleogeography*, *Earth's Science Rev.* 15, pp. 213~292.
- Conzett R, Matthias H J, Schmid H (1980) Beiträge zum VIII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung 1980, Dümmer, Bonn.
- Cui J, Freedden W, Witte B (1992) Gleichmäßige Approximation mittels sphärischer Finite - Elemente und ihre Anwendung in der Geodäsie. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, pp. 266~278.
- D'Argio B, Horvath F (1984) Some remarks on the deformation history of Adria, from the Mesozoic to the Tertiary. *Ann. Geophys.* , 2 (2), pp. 143~146.
- DeMets C, Gordon R G, Argus D F, Stein S ( 1990) Current plate motions. *Geophysical Journal Int.* 101, pp. 425~478.
- DeMets C, Gordon R G, Argus D F, Stein S (1994) Effects of revisions, to the geomagnetic reversal time scale on estimates of current plate motions, *Geophys. Res. Lett.* , Vol. 21, pp. 2191~2194.
- Drewes H (1982) A geodetic approach for the recovery of global kinematic plate parameters. *Bull. Geod.* 56, pp. 70~79.
- Drewes H (1993) A Deformation Model of the Mediterranean from space Geodetic Observations and Geophysical Predictions. Springer, IAG symposia, Vol. 112, pp. 373~378.
- Duschek A, Hochrainer A (1965 ~ 1968) *Tensorrechnung in analytischer Darstellung*. Springer, Wien New York.
- Encarnação J L, Hoschek J, Rix J (1990) Geometrische Verfahren der gra-
- 78 •

- phischen Datenverarbeitung. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- Falkenberg T (1993) Genauigkeitsmaße in geodätischen Netzen und ihre elastostatischen Analogien. Veröff. des Geodätischen Instituts der Technischen Universität München.
- Flügge W (1972) Tensor analysis and continuum mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York.
- GeiB E (1987) Die Lithosphäre im Mediterranean Raum, Ein Beitrag zu Struktur, Schwerfeld und Deformation. Deutsche Geodätische Kommission, C 32, München.
- Gerstenecker C, Demirel H (1993) Deprem kestirimi arastirmalarinda jeodezik katkilar. 4. Harita Kuzultayi, Ankara, pp. 203~215.
- Giese P, Reutter K—J (1978) Crustal and structural features of the margins of the Adria Microplate. In: Closs H, Roeder D, Schmidt K Alps, Apennines, Hellenides. Stuttgart, pp. 565~588.
- Ghitău D (1998) Beiträge der Geodäsie zur Beschreibung der Zustandsänderung eines deformierbaren Körpers im Nachbereich. Allgemeine Vermessungsnachrichten, pp. 239~246.
- Grafarend E (1977) Stress—strain Relations in Geodetic Networks. Communication from the Geodetic Institute Uppsala University No. 16.
- Hauck H, Reinhart E, Wilson P (1992) Das WEGENER-MEDLAS-Projekt. Zeitschrift für Vermessungswesen, pp. 195~205.
- Heck B (1984) Zur geometrischen Analyse von Deformationen in Lagenetzen. Allgemeine Vermessungsnachrichten, pp. 357~364.
- Heitz S (1968) Geoidbestimmung durch Interpolation nach kleinsten Quadraten aufgrund gemessener und interpolierter Lotabweichungen. Deutsche Geodätische Kommission, C 124, Frankfurt am Main.
- Heitz S (1980~1983) Mechanik fester Körper, Dümmler, Bonn Heitz S (1988) Coordinates in Geodesy. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Heitz S, Stöcker—Meier E (1998) Grundlagen der Physikalischen Geodäsie, Dümmler, Bonn.
- Hekimoğlu S (1997) Finite Sample Breakdown Points of Outlier Detection

- Procedures. *Journal of Surveying Engineering*, vol 23(1), pp. 15~31.
- Gurtner W, Mader G, MacArthur D (1989) A common Exchange Format for GPS Data. In: *Proceedings of the Fifth International Geodetic Symposium on Satellite Systems*, Las Cruces, New Mexico.
- Iz H B (1987) An Algorithmic Approach to Crustal Deformation Analysis. Rep. Ohio State Univ. Nr. 382.
- Jackson J, McKenzie D (1988) The relationship between plate motions and seismic moment tensors, and the rates of active deformation in the Mediterranean and Middle East. *Geophysical Journal* (1988) 93, pp. 45~73.
- Kaniuth K, Kleuren D, Tremel H, Schlüter W (1998) Elevationabhängige Phasenzentrumsvariationen geodätischer GPS-Antennen. *Zeitschrift für Vermessungswesen*, pp. 319~325.
- Kent C C (1976) *Plate Tectonics and Crustal Evolution*. Pergamon Press, Inc., New York Toronto Oxford Sydney Braunschweig Paris.
- Koch K R (1985) Ein statistisches Auswerteverfahren für Deformationsmessungen. *Allgemeine Vermessungs-Nachrichten*, pp. 97~108.
- Koch K R (1988) *Parameter Estimation and Hypothesis Testing in Linear Models*. Springer, Berlin Heidelberg New York.
- Köhler, M (1986) Ein geodätischer Beitrag zur Erfassung und Darstellung des Verzerrungsverhaltens von Eisflächen unter Anwendung der Kollokationsmethode. Deutsche Geodätische Kommission, C 318, München.
- König R, Weise K H (1951) *Mathematische Grundlagen der Höheren Geodäsie*. Springer, Berlin Göttingen Heidelberg.
- McKenzie D (1972) Active Tectonics of the Mediterranean Region. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society* 30, pp. 109~185.
- Mantovani E, Albarello D, Babbucci D, Tamburelli C (1992) Recent Geodynamic Evolution of the Central Mediterranean Region Tortonian to Present. Department of Earth Sciences University of Siena.
- McCarthy D D (1996) IERS Technical Note 21, IERS Conventions (1996), Observatoire de Paris.
- Means W D (1976) Stress and strain, *Basic Concepts of Continuum*

- Mechanics for Geologists. Springer, New York Heidelberg Berlin.
- Meier S, Keller W (1990) Geostatistik. Akademie-Verlag, Berlin.
- Melchior P (1983) The Tides of the Planet Earth. Pergamon, Oxford New York Frankfurt am Main.
- Mervart I (1995) Ambiguity Resolution Techniques in Geodetic and Geodynamic Application of the Global Positioning System. Inauguraldissertation der Philosophisch — Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Bern.
- Milev G (1992) Geodätische Methoden zur Untersuchung von Deformationen, Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.
- Miller H (1992) Abriß der Plattentektonik. Enke, Stuttgart
- Miskovic D, Altiner Y (1997) National Report of the Republic of Slovenia. In: Gubler E, Hornik H (eds) Report on the Symposium of the IAG Subcommission for EUROPE (EUREF). Astronomisch — Geodätische Arbeiten No. 58, München, pp. 108~123.
- Moritz H (1973) Least Squares Collocation. Deutsche Geodätische Kommission, A 75, München.
- Moritz H (1980) Advanced Physical Geodesy. Wichmann, Karlsruhe und Abacus Press, Tunbridge Wells Kent.
- Moritz H, Sünkel H (1977) Approximation Methods in Geodesy. Wichmann Verlag, Karlsruhe.
- Müller I I, Serbini S (1989) The Interdisciplinary Role of Space Geodesy. Lecture Note in Earth Sciences, Band 22, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hong Kong.
- Niemeier W (1976) Grundprinzipien und Rechenformeln einer strengen Analyse geodätischer Deformationsmessungen. In: Eichhorn G, Kobold F, Rinner K (eds) Beiträge zum VII. Internationalen Kurs für Ingenieurvermessung 1976. Schriftenreihe Wissenschaft und Technik der Technischen Hochschule Darmstadt.
- Niemeier W (1985) Deformationsanalyse. In: Pelzer H (ed) Geodätische Netze in Lande- und Ingenieurvermessung. Konrad Wittwer Verlag, Stuttgart.

- Noomen R, Springer T A, Ambrosius B A C, Herzberger K, Kuijper D C, Mets G—J, Overgaw B, Wakker K F (1996) Crustal Deformations in the Mediterranean Area Computed From SLR and GPS Observations. *J. Geodynamics* Vol. 21, No. 1. pp. 73~96.
- Oztürk E, Serbetci M (1989) Dengeleme Hesabi II. Karadeniz Teknik Üniversitesi Mühendislik Fakültesi, Trabzon.
- Pelzer H (1971) Zur Analyse geodätischer Deformationsmessungen. Deutsche Geodätische Kommission, C 164, München.
- Reinking J (1994) Geodätische Analyse inhomogener Deformationen mit nichtlinearen Transformationsfunktionen. Deutsche Geodätische Kommission, C 413, München.
- Reilinger R E, McClusky S C, Oral M B, King R W, Toksoz M N, Barka A A, Kinik I, Lenk O, Sanli I (1997) Global Positioning System measurements of present-day crustal movements in the Arabia—Eurasia plate collision zone. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 102 No. B5, pp. 9983~9999.
- Reinhart E, Becker M (1998) Das Zentraleuropäische Geodynamikprojekt CERGOP, Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, Band 1, pp. 109~120.
- Rothacher M, Mervart L (1996) Bernese GPS Software Version 4.0, Bern.
- Saastamoinen J (1972) Atmospheric Correction for the Troposphere and Stratosphere in Radio Ranging of Satellites. *Am. Geophys. Union, Geophys. Monograph Series*, Vol. 15, pp. 247~251.
- Saler H (1995) Erweiterte Modellbildung zur Netzansgleichung für die Deformationsanalyse dargestellt am Beispiel der Geotraverse Venezolanische Anden. Deutsche Geodätische Kommission, C 447, München.
- Schneider M (1998) Earth Rotation, Research Group For Space Geodesy (FGS). Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, Sonderheft.
- Seeger H, Altiner Y, Engelhardt G, Franke P, Habrich H, Schlüter W (1998) 10 Jahre Aufbauarbeit an einem neuen geodätischen Bezugssystem für EUROPA. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und

- Geodäsie, Frankfurt am Main, Band I, pp. 9~51.
- Seno T, Morijama T, Stein S, Woods D F, DeMets C, Argus D, Gordon R (1987) Redetermination of the Philippine sea plate motion (abstract). Eos Trans. AGU, 68, p 1474.
- Seno T, Stein S, Grip P A E (1993) A model for the motion of the Philippine sea plate consistent with NUVEL-1 and geological data. Journal of Geophysical Research, Vol. 98, pp. 17,941~17,948.
- Skoko D, Mokrovic J (1998) Development of seismology — a review. In: Andrija Mohorovicic, Zagreb, pp. 9~41.
- Sovers O J, Jacobs C S (1994) Observation Model and Parameter Partial for the JPL VLBI Parameter Estimation Software "MODEST"—1994. California, Rev. 5, JPL Publication 83~39.
- Sperling D (1994) Zeitabhängige Gravitationseffekte am Beispiel des Pumpspeicherkraftwerkes Vianden. Institut für Theoretische Geodäsie der Universität Bonn.
- Taymaz T, Eyidoğan H, Jackson J (1991) Source parameters of large earthquakes in the East Anatolian Fault Zone (Turkey). Geophys. J. Let. 106, pp. 537~550.
- Udias A (1982) Seismicity and Seismotectonic Stress Field in the Alpine—Mediterranean Region. Am. Geophys. Union, Geodynamics Series, Vol. 7, pp. 75~82.
- Vandenberg J, Zijdeveld J D A (1982) Oaleomagnetism in the Mediterranean area. In: Berkhemer H, Hsu K J (eds) Alpine Mediterranean Geodynamics. Am Geophys. Un. Geodyn. Ser., 7, pp. 83~112.
- Vaniček P, Krakiwsky E (1986) Geodesy, the concepts. Elsevier Amsterdam Lausanne New York Oxford Shannon Tokyo.
- Weber G, Becker M, Franke P (1998) GPS—Permanentnetze in Deutschland und in Europa. Mitteilungen des Bundesamtes für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main, Band I, pp. 93~108.
- Westaway R (1993) Quaternary Uplift Southern Italy. Journal of Geophysical Research, Vol. 98, No. B2, pp. 21,741~21,772.
- Welsch W (1989) Strainanalyse aus geodätischen Netzbeobachtungen. In:

- Kersting N, Welsch W Rezente Knistenbewegungen. Schriftenreihe Vermessungswesen der Universität der Bundeswehr No. 39, München.
- Wilmes H (1983) Entwicklung eines horizontalen Stabextensometers mit hydrostatischer Lagerung zur Messung lokaler Gezeitendeformationen der Lithosphäre. Deutsche Geodätische Kommission bei der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, C 281, München.
- Wilson D S (1993a) Confirmation of the astronomical calibration of the magnetic polarity timescale from sea-floor spreading rates. *Nature*, 364, pp. 788~790.
- Wilson D S (1993b) Confidence intervals for motion and deformation of the Juan de Fuca Plate. *Journal of Geophysical Research*, Vol. 98, pp. 16,053~16,071.
- NIMA (1997) World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships with Local Geodetic Systems. Technical Report of the National Imagery and Mapping Agency of the Department of Defense (USA).
- Wubben G, Schmitz M, Menge F, Seeber G, Völkse C (1997) A new approach for Field Calibration of Absolute Antenna Phase Center Variations. *Navigation* 44 (2), pp. 247~255.
- Zienkiewicz O C (1972) The Finit Element Method. MacGraw Hill Book Company (UK) Limited Maidenhead-Berkshire-England.

