

Möbius^{*} 反演的理论及应用

孙建国

(同济大学, 上海 200092)

摘 要

孙建国. Möbius 反演的理论及应用. 石油物探, 1998, 37(2): 25~35

本文简要介绍了一种新的反演方法—Möbius 反演, 包括其基本理论, 在物理学中的应用以及在地球物理学中的可能应用。

关键词: 反演 变换 高维空间 黑体辐射

ABSTRACT

Sun Jianguo^{**}. The theory and application of the Möbius inversion. GPP, 1998, 37(2): 25~35

In the paper, a kind of new inversion method—the Möbius inversion is introduced briefly, including its basic theory, its application in physics, and the possible application in geophysics.

Key words: inversion, transformation, high-dimensional space

一、引 言

尽管 Möbius 反演(变换)^{[1][2]}自上个世纪问世以来在数论中红极一时,但在应用领域里几乎没有什么用场。1990 年,中国人陈难先先生在美国的“物理评论通讯”上发表一篇名为“变形的 Möbius 反演公式及其在物理学中的应用”的文章^[3],巧妙地把 Möbius 反演的整自变量公式推广到连续变量,从而揭开了数论应用新的一页。从那时起,已有十余篇 Möbius 反演在物理学中应用的文章发表^[3-19]。Möbius 反演公式也已从一维推广到了高维空间中去,从整变量到实变量再到复变量,以及有大量的变形 Möbius 反演公式出现。

Möbius 反演之所以具有吸引力在于它不仅为人们解决反演问题提供了一种新的工具,更重要的是它从数学上为我们找到了一种积分形式,而不是常见的微分形式的反演手段,且直接反演而无需迭代,因而有望解决反演的不稳定性和大计算量问题。

本文将简要介绍 Möbius 反演的基本理论,它在物理学中的应用及其在地球物理学中的可

^{*} Möbius Augustus Ferdinand(麦比乌斯)(1790-1868 年),德国著名数学家,早年在莱比锡(Leipzig)大学求学,1816 年担任天文学讲师,后转到哥廷根大学,为大数学家高斯的门生和助手,1844 年升任莱比锡天文台台长。其著名理论有麦比乌斯带(即单面带),麦比乌斯变换,麦比乌斯反演等(该资料来源于幼狮数学大辞典,幼狮文化事业公司,1983 年)。

^{**} Sun Jianguo, Tongji University, Shanghai 200092

本文于 1997 年 10 月 9 日收到,修改稿于 12 月 9 日收到。

能应用。

二、 Möbius 变换的基本理论

1. Möbius 正反变换^[2]

(1) 如果

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d) \quad (1)$$

则有

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) \quad (2)$$

其中 $\sum_{d|n} f(d)$ 表示对整数 n 的所有不同因数 d 关于 f 求和 (d 为正整数)。 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{当 } n = 1 \\ (-1)^r & \text{当 } n \text{ 为 } r \text{ 个不同素数之积} \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (3)$$

其具有如下性质:

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \delta_{n1} \quad (4)$$

(2) 如果

$$G(n) = \prod_{d|n} g(d) \quad (5)$$

则有

$$g(n) = \prod_{d|n} G(d)^{\mu\left(\frac{n}{d}\right)} \quad (6)$$

(3) 若 $x > 0$, 且

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(nx) \quad (7)$$

则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F(nx) \quad (8)$$

只要满足如下条件:

$$\sum_{m,n} |f(mnx)| = \sum_k d(k) |f(kx)| \quad (9)$$

其中, $d(k)$ 是 k 的因子数。

(4) 若 $x > 0$, 且

$$F(x) = \sum_{n=1}^{[x]} f\left(\frac{x}{n}\right) \quad (10)$$

则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right) \quad (11)$$

其中, $[x]$ 表示对 x 取整。

2. 变形的 Möbius 变换对

前述的 Möbius 变换对有诸多的限制因素,因而很难在实际工作中加以应用,为了使这一数论中神秘的工具能用于实际,自 1990 年陈难先先生开始,已有大量的变形 Möbius 变换对得以证明并加以应用,它们都是针对某一问题的反演而提出来的,或是由理论数学家加以推广而得来,下面对目前已出现的变换加以概略的总结。

(1) 变形 Möbius 变换 1^[3]

我们试图以连续变量 x 的函数 $F(x)$ 和 $f(x)$ 分别代替数论函数 $F(n)$ 和 $f(n)$,在这种情况下,把 x 分成 n 份,并令 $n \rightarrow \infty$,注意

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{(n/d)|n} f\left(\frac{n}{d}\right) \quad (12)$$

(即等号右端只是左端和号颠倒了一下求和顺序而已)及

$$f(n/d) \rightarrow f(x/d), \quad F(n/d) \rightarrow F(x/d)$$

同时,当谈论 $n \rightarrow \infty$ 时, n 代表一个无穷数列而不是一个单一的数。因此在 Möbius 变换 1(即方程(1)、(2))中关于 $d|n$ 的求和可以变成从 1 到无穷的求和,因为所有的整数都可以看作关于 n 的无限序列的因数。因而可以得出如下的变换对:

如果

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{m}\right) \quad (13)$$

那么

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(m) F\left(\frac{x}{m}\right) \quad (14)$$

这就是第一个变形的 Möbius 变换对,自变量是连续数 x 。

(2) 变形 Möbius 变换 2^[6]

如果

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n^{\alpha}x) \quad (15)$$

那么

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F(n^{\alpha}x) \quad (16)$$

$\alpha \neq 0$ 。

(3) 变形 Möbius 变换 3^[7]

比变形 Möbius 变换对 2 更一般的变形 Möbius 变换对如下:

如果

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n) f[v(n)x] \quad (17)$$

那么

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) h(n) F[v(n)x] \quad (18)$$

其中, $h(n)$ 和 $v(n)$ 为非零完全积性函数,即对任意的 m, n 有

$$h(mn) = h(m)h(n) \neq 0 \quad (19)$$

$$v(mn) = v(m)v(n) \neq 0 \quad (20)$$

只要假定

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |h(mn)f(v(mn)x)| < \infty \quad (21)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |h(mn)F(v(mn)x)| < \infty \quad (22)$$

$$h(1) = v(1) = 1 \quad (23)$$

即可。

一般地, h 和 v 可以取成 n^α 的形式, α 可以是实数, 也可以是复数, 但 $\alpha \neq 0$ 。

(4) 变形 Möbius 变换 4^[8]

如果

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(a_n x) \quad (24)$$

那么

$$f(x) = F(x/a_1) + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(x/a_1^{n+1}) \quad (25)$$

其中, $\{a_n\}$ 是由两两不等的非零实数构造的数列, 而

$$F_n(x) = (-1)^n \sum_{m_1=2}^{\infty} \sum_{m_2=2}^{\infty} \cdots \sum_{m_n=2}^{\infty} F(a_{m_1} a_{m_2} \cdots a_{m_n} x) \quad (26)$$

(5) 变形 Möbius 变换 5^[9]

如果

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f(nx) \quad (27)$$

那么

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{m+1} \mu(n) F(2^{m-1} nx) \quad (28)$$

3. 高维空间中的 Möbius 变换

一般来说一维空间的变形 Möbius 变换都可推广到高维空间中去。

(1) 高维变形 Möbius 变换 1^[6]

如果

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(m^\alpha x, n^\beta y) \quad (29)$$

则有

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(m) \mu(n) F(m^\alpha x, n^\beta y) \quad (30)$$

只要

$$\sum_k \sum_m \sum_l \sum_n |f(m^\alpha k^\alpha x, n^\beta l^\beta y)| = \sum_i \sum_j d(i) d(j) |f(i^\alpha x, j^\beta y)| < \infty \quad (31)$$

及

$$\sum_k \sum_m \sum_l \sum_n |F(m^a k^a x, n^b l^b y)| = \sum_i \sum_j d(i) d(j) |F(i^a x, j^b y)| < \infty \quad (32)$$

满足即可。 $d(i)$ 表示 i 的因子数。

(2)高维变形 Möbius 变换 2^[7]

如果

$$F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} h_1(m) h_2(n) f(v_1(m)x, v_2(n)y) \quad (33)$$

则有

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(m) \mu(n) h_1(m) h_2(n) F(v_1(m)x, v_2(n)y) \quad (34)$$

条件是

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l |h_1(i, j) h_2(k, l) f(v_1(ij)x, v_2(kl)y)| < \infty \quad (35)$$

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_l |h_1(i, j) h_2(k, l) F(v_1(ij)x, v_2(kl)y)| < \infty \quad (36)$$

(3)高维变形 Möbius 变换 3^[8]

变形 Möbius 变换 4 同样可以推广到高维中去,这里从略。它也可以用于复数领域,甚至是算子的。

三、 Möbius 反演在物理学中的应用

Möbius 反演在物理学中已有许多应用^{[1][2][6][9-17]},下面简单加以介绍。

1. 变形 Möbius 变换 1 在光子状态密度反演中的应用^{[3][10]}

格点振动热能可表示:

$$C(T) = rk \int_0^{\infty} \frac{(h\nu/kT)^2 e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT} - 1)^2} g(\nu) d\nu \quad (37)$$

其中, h 是 Planck 常数, k 是 Boltzman 常数, r 表示每单元中的原子数, T 为绝对温度, $g(\nu)$ 是光子状态密度。

问题是怎样根据十分类似的 $C(T)$ 曲线,从积分方程(37)中反演出存在巨大差别的 $g(\nu)$ 来,前人做了很大的努力,仍没有得到解决。然而应用变形 Möbius 变换 1 可以得出非常简洁的反演公式。方法如下:

引进一个新的冷度参数

$$u = h/kT \quad (38)$$

(37)式变为

$$C\left[\frac{h}{ku}\right] = rk \int_0^{\infty} \frac{(u\nu)^2 e^{u\nu}}{(e^{u\nu} - 1)^2} g(\nu) d\nu \quad (39)$$

应用台劳级数展开(令 $x = e^{-u\nu}$, 并用 $\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x < 1$), 可得

$$C\left[\frac{h}{ku}\right] = rk \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} n (u\nu)^2 e^{-n u \nu} g(\nu) d\nu \quad (40)$$

令 $x = nv$, 则

$$\begin{aligned} C(h/ku) &= rk \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (ux/n)^2 e^{-ux} g(x/n) dx \\ &= rku^2 \int_0^{\infty} e^{-uk} \sum_{n=1}^{\infty} (x/n)^2 g(x/n) dx \\ &= rku^2 L[G(x)] \end{aligned} \quad (41)$$

其中,

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^2 g\left(\frac{x}{n}\right) \quad (42)$$

$L[\cdot]$ 是 Laplace 算子。

以 $G(x)$ 和 $x^2 g(x)$ 分别代替方程(13)、(14)中的 $F(x)$ 和 $f(x)$, 可得

$$g(x) = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) G\left(\frac{x}{n}\right) \quad (43)$$

由方程(41)可得

$$G(x) = \frac{1}{rk} L^{-1} \left[\frac{C(h/ku)}{u^2} \right] \quad (44)$$

代入(43)式可得

$$g(v) = \left[\frac{1}{rk v^2} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) L_n^{-1} \left[\frac{c(h/ku)}{u^2} \right] \quad (45)$$

其中, 逆拉普拉斯变换 L_n^{-1} 把 u 空间变到 $\frac{x}{n}$ 空间中去, 即 v 空间中去。

利用(45)式, 即可由测得的温度 C , 反演出光子状态密度来。

2. 变形 Möbius 变换 1 在黑体辐射中的应用^[3]

黑体辐射逆问题是要根据所测得的总体黑体辐射功率谱 $W(v)$ 来反演黑体的区域分布 $a(T)$, 其中 v 是频率。

$W(v)$ 和 $a(T)$ 的关系由 Planck 定律所确定

$$W(v) = \frac{2hv^3}{C^2} \int_0^{\infty} \frac{a(T) dT}{e^{hv/kT} - 1} \quad (46)$$

经与上面类似的推导, 可以求得反演公式如下

$$a(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\mu(n)}{n} \right] f\left(\frac{u}{n}\right) \quad (47)$$

其中, $f(u) = L^{-1}[g(v)]$, $g(v) = \frac{C^2}{2hv^3} w(v)$ 。

3. 经典 Möbius 变换 3 在一维晶格中的应用^[3]

一维晶格问题可归结为

$$V(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v(nx) \quad (48)$$

直接利用经典 Möbius 变换 3 即可非常容易地得到

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) V(nx) \quad (49)$$

或写得更直接些:

$$\nu(x) = V(x) - V(2x) - V(3x) - V(5x) + V(6x) - V(7x) + V(10x) + \cdots \quad (50)$$

4. 变形 Möbius 变换 5 在费密系统反演中的应用^[9]

假设晶体由正负离子组成,并等间隔地排列在一条线上,这时其总能量可表示为

$$\Phi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \nu(nx) \quad (51)$$

根据变形 Möbius 变换 5,我们可以直接得出

$$\nu(x) = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{m-1} \mu(n) \Phi(2^{m-1} nx) \quad (52)$$

5. 本征半导体反演问题^[9]

对于有效电子量与空穴量相等的本征半导体来说, n 型载流的密度 $n(T)$ 和对导带有贡献的电子状态密度(DOS, density of states) $g(E)$ 之间存在如下关系

$$n(T) = \int_{E_c}^{\infty} \frac{g(E) dE}{1 + \exp[(E - E_F)/kT]} \quad (53)$$

其中, E_F 是位于 $\frac{1}{2}(E_c + E_v)$ 的费米级, E_c 代表导带的底。问题是怎样根据实验中可测得的载流密度 $n(T)$ 反演出状态密度 $g(E)$ 来。

为此,引入一个“冷度”参数 $u = 1/kT$, 并定义

$$f(u) = n(1/ku) = n(T) \quad (54)$$

和新的状态密度 DOS $G(E)$

$$G(E) = g(E + E_c) \quad (55)$$

我们可得

$$\begin{aligned} f(u) &= \int_{E_c}^{\infty} \frac{g(E) dE}{1 + \exp[(E - E_F)u]} \\ &= \int_0^{\infty} dE G(E) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp[-nu(E + E_c - E_F)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \exp[-nu(E_c - E_F)] L_n[G(E)] \end{aligned} \quad (56)$$

其中,

$$L_n[G(E)] = \int_0^{\infty} dE G(E) \exp(-nuE) \quad (57)$$

根据变形 Möbius 变换 5, 状态密度的拉普拉斯变换可写为

$$L[G(E)] = \exp[u(E_c - E_F)] \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{m-1} \mu(n) f(2^{m-1} nu) \quad (58)$$

求出 $L[G(E)]$ 后, 求逆拉普拉斯变换, 并用(55)式, 即可得到 $g(E)$ 。

6. 三维逆晶格问题及 Möbius 反演^[11]

三维逆晶格问题可归结为下述方程

$$E(\gamma x) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} r(\alpha^2) \Phi(\alpha x) \quad (59)$$

其中, $E()$ 是总能量, γx 是晶格常数, α 代表每个原子相对于原点的距离向量, $r(\alpha^2)$ 代表同一

平方距离 α^2 上的晶格点数。由可测量值 $E(x^2)$ 反演 $\Phi(x)$ 的公式如下

$$\Phi(x) = 2 \sum_{m=\beta}^{\infty} \mu(m) E \left[\frac{\gamma \sqrt{mx}}{\beta} \right] \quad (60)$$

其中, Möbius 函数 $\mu(m)$ 定义如下

$$\sum_{\substack{\alpha^2 | \beta k}} r(\alpha^2) \mu(\beta k / \alpha^2) \delta_{k\beta} \quad (61)$$

注意, 这里的 $\mu(m)$ 不是前面常规意义下的 Möbius 函数, 它要用计算机根据方程(61)求得。

这里定义的 $\mu(m)$ 很有新意, 突破了原有的思维定式, 但它对解决问题有利, 比前面介绍的高维 Möbius 变换公式要简单得多。

文献[12]用了同样的手法, 使原本解起来十分困难, 且只能求出近似解的问题, 经用 Möbius 反演后, 得到了非常简洁且完全精确的表达式。

Möbius 反演在物理学的其它方面还有不少应用^{[13]~[18]}, 基本上都是解决了原来不易解决的问题。

四、 Möbius 反演在地球物理学中的应用

1990 年陈难先先生刚一发表 Möbius 反演在物理学中的应用^[2]的文章之后, J. Maddox 就在英国“自然”杂志的“新闻与回顾”栏目里做了评论^[19], 指出 Möbius 反演一定也会在其它领域里的反演问题上发挥作用, 举的第一个例子就是我们地球物理中根据地震信号对剖面上速度的反演。同时指出, 不仅仅是 Möbius 变换这个原本只是数学家手中的玩具可以在反演中起作用, 其它看似十分抽象的数论理论也许能在实际问题中找到自己的位置, 只不过需要实际工作者的努力罢了。

地球物理学中存在着大量的反演问题, 目前也发展了大量的反演方法, 但很多方法都难以用于实际。大部分方法都要求迭代求解, 一般计算量都大到用户难以承受的程度。

Möbius 反演的各种公式都是直接求解, 不需迭代, 因而计算量小是它的一大优势。且有 $\mu(n)$ 的定义可知 $\mu(n)$ 随着 n 的变化有大量零值, 因而实际上很多求和及求积项是不用做的, 这又大大地减小了计算工作量。

一般的反演方法涉及到求逆, 实际是一个微分过程, 这与正问题的积分过程相对应。因而测量数据微小的误差或噪音, 经过微分后就会造成解的很大的误差, 稳定性极差。

而 Möbius 反演的公式与正问题一样, 是一个积分过程。因而预计测量数据的误差或噪音不会对反演结果造成太大的危害, 即稳定性要好一些。

Möbius 变换对, 显然是有正、反变换组成的, 因而与傅氏变换、小波变换等一样, 完全可作为信号处理的一种手段。

1. Möbius 变换在信号处理中的应用

前述的所有各种形式的 Möbius 变换都可以用于信号处理, 其过程与傅氏变换一样, 例如用于滤波, 则可以先对信号进行某种形式的 Möbius 变换, 所得结果我们称之为 Möbius 谱, 从谱中找出信号所占有的区间, 予以保留, 对噪音所占有的区间进行压制, 例如充零。然后对加工过的 Möbius 谱做一个逆变换, 即得到了经过滤波的信号。这为我们又提供了一套新的滤波手段。例如我们取有代表性的变换对

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h(n)B(v(n)x) \quad (62)$$

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n)h(n)A(v(n)x) \quad (63)$$

注意, $h(n)$ 、 $v(n)$ 为非零完全积性函数。

当然还会有其它的一些方式,使 Möbius 变换在信号处理中派上用场。

2. Möbius 反演用于地震道反演^[21]

一维地震道的简化模型为

$$x(t) = w(t) * r(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t-\tau)r(\tau)d\tau \quad (64)$$

其中 $w(\tau)$ 为子波, $r(t)$ 是反射系数, $x(t)$ 是地震道数据。

对上式做如下坐标变换

$$\begin{cases} t = \ln T \\ \tau = \ln Y \end{cases} \quad (65)$$

假定 $w(n)$ 是一个非零完全积性函数,即

$$w(nm) = w(n)w(m) \quad (66)$$

$$w(1) = 1 \quad (67)$$

例如取

$$w(n) = \begin{cases} -1^{L+1}n^{-a} & \text{当 } n \text{ 是第 } L \text{ 个质数时} \\ w(m_1) \cdot w(m_2) & \text{当 } n = m_1 \cdot m_2 \text{ 时} \end{cases} \quad (68)$$

利用 Möbius 变换式可得

$$r(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) \frac{w(n)}{n} X\left[\frac{T\Delta Y}{n}\right] \quad (69)$$

利用(69)式求得 $r(T)$ 后,再做一个坐标变换,即可求得 $r(t)$ 。

3. 用 Möbius 反演求地球物理学中的一般反问题^[22]

物理学的例子(光子状态密度反演,黑体辐射问题,本征半导体反演问题等)都可归结为如下问题

$$b(x) = \int_0^{\infty} k(x,s)u(s)ds \quad (70)$$

$b(x)$ 为可测量, $u(x)$ 为未知量。经过对核函数 $k(x,y)$ 巧妙的处理,使之可以利用 Möbius 反演技术,使得原来很难解决的问题,或只能求得某种近似解的问题,现在变得十分简单而精确。地球物理学中的问题同样可归结为上述方程^[20]。例如

(1) 二维重力密度反演问题(参考文献[20]中的方程(4.62))

$$g(x) = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2\gamma z'}{(x-x')^2 + z'^2} \rho(x',z') dx' dz' \quad (71)$$

其中, $g(x)$ 为地面上 x 点的重力异常值, ρ 为地下 (x',z') 处的剩余密度, γ 为万有引力常数,问题是由 g 求 ρ 。

(2) 由上半空间曲线上的位场 $u(x,z)$ 向 $z=0$ 平面延拓的公式(参考文献[20]中的方程(4.114))为

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{zu(x', 0)}{\pi[(x' - x)^2 + z^2]} dx' \quad (72)$$

(3)地震叠后速度异常反演,在 Born 弱散射假设下,公式(参考文献[20]中的方程(7.65))为

$$u_s(\xi, \omega) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \int \frac{\exp[2i\omega |x - \xi|/c_0]}{(4\pi)^2 |x - \xi|^2} \alpha(x) dx \quad (73)$$

已知 u_s , 求 α 。

同样的道理,地球物理学中的一般反问题也可以用 Möbius 反演技术来求解。

五、结 论

Möbius 反演的潜在优势在于:

(1)计算量小,不需迭代,属直接反演方法,且由于 Möbius 函数 $\mu(n)$ 的特性($\mu(n)$ 有大量的零值),使得计算量更小。

(2)反演与正演一样属积分性质,而不是像其它反演方法那样属微分性质,因而有可能对数据误差不甚敏感,稳定性要好一些。

Möbius 反演在物理学中已经有许多应用,相信经过努力在地球物理中也一定能找到它的用武之地。

当然要想用 Möbius 反演来解决地球物理学中的反问题,也存在许多困难。首先是如何把我们的问题变成 Möbius 变换中的某一种形式。要做的工作很多。

本文的目的在于把 Möbius 反演这一在物理学中已得到大量应用的反演方法介绍到地球物理学中来,以期借用这一反演工具来解决地球物理学中难以解决的反演问题。

参 考 文 献

- [1] 柯台、孙琦,《数论讲义》,高等教育出版社,1986 年。
- [2] M. R. Schroeder, Number theory in science and communication with applications in cryptography, Physics, Biology, Digital information and computing, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, Tokyo, 1984.
- [3] Nan-xian Chen, 1990, Modified Möbius inverse formula and its application in physics, Physical Review Letters, Vol. 64, No. 1, P. 1193~1195.
- [4] B. D. Hughes et al., 1990, Chen's inversion formula, Physical Review A., Vol. 42, No. 6, P. 3643~3945.
- [5] G. H. Hardy, E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, fifth edition, 1981.
- [6] S. Y. Ren and J. D. Dow, 1991, Generalized Möbius transforms for inverse problems, Physical letters A, Vol. 54, No. 5, 1991, P. 215~216.
- [7] 那吉生,修改 Möbius 反演公式及其超对称解释,《科学通报》,1992 年第 6 期, P. 19~23.
- [8] 李伯臧, Modified Möbius 反演公式的进一步推广,《科学通报》,1992 年第 1 期, P. 492~495.
- [9] Nan-xian Chen and Guang-bao Ren, Inverse problems on Fermi systems and ionic crystals, Phys. Lett. A, 160(1991), P. 319~324.

- [10] Nan-xian Chen, Ying Chen and Guang-ying Li, 1990, Theoretical investigation on inversion for the phonon density of states, *Phys. Lett. A*, 149(1990), P357~364.
- [11] Nan-xian Chen et al., 3D inverse lattice problems and Möbius inversion, *Phys. Lett. A*, 184 (1994), P. 347~351.
- [12] Nan-xian Chen et al., Phonon dispersions and elastic constants of Ni_3Al and Möbius inversion, *Phys. Lett. A*, 195(1994), P. 135~143.
- [13] Nan-xian Chen and Guang-bao Ren, Carlsson-Gellatt-Ehrenreich technique and the Möbius inversion theorem *Phys. Rev. B*, Vol. 45, No. 14, 1992, P. 8177~8180.
- [14] Abhijit Mookerjee et al., Ab initio pair potentials for FCC metals; an application of the method of Möbius transformation. *J. Phys.: Condens. Matter* 4(1992), P. 2439~2448.
- [15] M. Li et al., Modified Möbius inversion transform and interatomic pair potentials in the bcc-metals Mo and Cr. *Phys. Lett. A* 169(1992), P. 364~370.
- [16] M. Li et al., Modified Möbius inversion transform and phonon dispersion relations for copper. *Phys. Lett. A* 177(1993), P. 134~138.
- [17] Shao-jun Liu et al., Möbius transform and inversion from cohesion to elastic constants. *J. Phys.: Condens. Matter* 5(1993), P. 4381~4390.
- [18] 陈兆斗等, 整环上 Möbius 函数与一个逆问题的解, 《科学通报》, Vol. 38, No. 21, 1993, P. 1936~1939.
- [19] John Maddox, Möbius and problems of inversion, *Nature* Vol. 344, 29, March, 1990, P. 377.
- [20] 杨文采, 《地球物理反演和地震层析成像》, 地质出版社, 1989 年。
- [21] 孙建国、马在田, 用 Möbius 反演做地震道反射系数反演, 《石油地球物理勘探》(待发表)。
- [22] 孙建国、马在田, Möbius 反演在地球物理学中的应用, 《地球物理学报》(待发表)。

(上接第 7 页)

参 考 文 献

- [1] 周长祥, 气层的反射特征及解释, 《石油地球物理勘探》, 1988 年, 23(5)。
- [2] 张德林, 地震储层预测及影响因素分析, 《石油地球物理勘探》, 1996 年, 31(增刊 1)。
- [3] 信荃麟等, 《油藏描述与油藏模型》, 石油大学出版社, 1990 年。