



## 大地电磁测深反演的 现状和进展

王家映

近十多年来,大地电磁资料的反演工作引起了许多地球物理学家,特别是反演问题专家的极大兴趣。各种反演方法的提出,标志着反演水平的不断提高和反演理论的进一步完善。

由于实际大地电磁(下称MT)资料的观测频率点数有限,并且具有误差,不管在理论上还是在实践中都给反演工作带来了一些急待解决的问题。它们主要是<sup>〔1〕</sup>:存在性,即给定一组观测数据以后,是否一定存在能拟合观测数据的模型?模型构制,如果对存在性回答是肯定的,如何构制这种模型?非唯一性,是只有一个还是许多个模型都可拟合观测数据?评价,如何从所有能拟合观测数据的模型中提取有用的共同信息?这四大问题是近年来MT反演工作的中心和重点。

理论和实践都证明了解的存在性。存在性问题已经解决。这里只介绍其他三个问题近年来的现状和进展。

### 模 型 构 制

所谓模型构制,就是通过反演求取拟合观测数据 $e_j$  ( $j=1, \dots, N$ )—或阻抗 $Z(\omega_j)$ ,或导纳 $C(\omega_j)$ ,或视电阻率 $\rho_a(\omega_j)$ —的地电模型。但是,由于解的非唯一性,不同的反演方法可能给出完全不同的地球物理模型,揭示不同的模型子空间。因此,选择适当的方法对反演之成败是至关重要的。“知己知彼,百战不殆”,只有了解各种反演方法,才能纵观全局给反演工作以正确的指导。

众所周知,MT观测数据 $e$ 和模型 $m$ 之间一般存在非线性泛函关系,可写为

$$e = f[m] \quad (1)$$

这里 $f$ 是一个非线性算子。

反演非线性泛函最常用的方法是将非线性问题线性化<sup>〔7〕</sup>,或者把非线性问题简化<sup>〔8〕</sup>,大地电磁也不例外。

#### 一、非线性问题线性化:

如在(1)式中模型 $m$ 有一个微小的变化 $\delta m$ ,则有

$$e + \delta e = f[m] + (g, \delta m) + O\|\delta m\|^2, \quad (2)$$

这里 $(g, \delta m) = \int_0^\infty g(z) \delta m(z) dz$ 表示内积。而 $g = g(m)$ 是 $e$ 相对于 $z$ 在 $m$ 处的夫雷

谢特导数。如忽略(2)中的高阶项 $Q \|\delta m\|^2$ , 则有

$$\delta e = (g, \delta m) = \int_0^\infty g(z) \delta m(z) dz. \quad (3)$$

显然, 这是第一类弗里德霍姆积分方程。

其中 $\delta e$ 是观测数据,  $g(z)$ 叫核函数,  $\delta m(z)$ 是待求的模型, 对这种线性泛函已经有了一套成熟解法, 并成功地运用于地球物理资料的各个领域<sup>[9]</sup>。

在解方程时可采可用 $L_1$ 泛数, 设

$$\phi_1 = \int_0^\infty |\delta m(z)| dz, \quad (4)$$

$$\text{或} \quad \phi_2 = \int_0^\infty |\delta m'(z)| dz \quad (5)$$

为目标函数, 用线性规划求解最小模型或最平缓模型。也可采用 $L_2$ 泛数, 在观测数据限制之下求目标函数

$$\phi_3 = \int_0^\infty |\delta m(z)|^2 dz, \quad (6)$$

$$\text{或} \quad \phi_4 = \int_0^\infty |\delta m'(z)|^2 dz \quad (7)$$

的极小。并用奇异值分解和谱展开法构制最小模型或最平缓模型。这里 $\delta m'(z)$ 代表 $\delta m(z)$ 相对于 $z$ 的偏导数。也可以在(4)~(7)被积函数之前加一权函数 $W(z)$ , 以改进 $\delta m(z)$ 的形态, 使之达到预期的要求。

非线性问题线性化后, 很难一次求得所需要的解, 必须反复迭代。在每次求得 $\delta m(z)$ 后, 需把它与 $m(z)$ 相加, 以求得新的模型 $m_1(z)$ 。然后用 $m_1(z)$ 计算新的夫雷谢特导数 $g_1(z)$ 和新的观测数据 $\delta e_1(z)$ 。并求线性泛函

$$\delta e_1 = \int_0^\infty g_1(z) \delta m_1(z) dz \quad (8)$$

中的模型 $\delta m_1(z)$ 。如此反复迭代, 直至满足

$$x^2 = \sum_{i=1}^N \left( \frac{e_i - e_{i \text{ 期}}}{\sigma_i} \right)^2 \quad (9)$$

近似等于观测数据点数 $N$ 为止。

这里 $\sigma_i$ 是第 $i$ 个观测数据的方差。并假设它服从高斯分布, 零平均值的统计分布规律。

在我国和国外的部分学者常用模型参数化的反演方法。即把模型看成是由数个参数(包括电阻率和厚度)决定的, 而不是把它看成是电阻率随深度变化的连续函数。在这种情况下, 观测数据是诸参数之非线性函数。同样, 需把这种非线性函数线性化, 在求得响应函数对各参数导数的基础上, 组成线性方程组。求出各参数的校正量以后, 对初始模型进行校正。并反复迭代, 直至求得适合的解为止。由于模型参数的个数是固定的, 因此, 观测数据的点数必须大于或等于参数的个数。换言之, 这时解的是一组超定方程。然而, 在求解线性泛函时, 观测数据的点数小于或等于未知变量的个数。这时可以组成一组欠定方程。由于超定方程受模型参数的约束, 没有或很少有可能去揭示模型空间的范围, 而欠定方程则不同, 它可能更好地揭示不同解的特性, 因而可以从众多的解中去选择符合地质地球物理要求的模型。当然, 如果解释人员确信该地区是层状(或称参数)模型, 而且选用模型的层数(或参数的数目)是正

确的,那么解超定方程也会得到满意的结果。然而,这是不常见的。

至于把非线性问题线性化后,又用什么方法去解线性方程(超定、欠定),这取决于系数矩阵的条件等因素。现在广泛应用的是奇异值分解法(SVD),脊回归法(或马夸特法),高斯牛顿法等方法。其中SVD法优点较多,效果较好,应用最为广泛。

## 二、非线性问题的简化法:

近年来,特别是自从1972年法国著名的地球物理学家Weidelt发表[8]以来,反演学家们开始从另外一种观点反演大地电磁观测资料。它的基本思想是把非线性问题简化或分解为几个线性问题,或者一个线性问题和一个简单的非线性问题。这种方法引起了众多的地球物理学家的注意,所以在短期内得到了迅速的发展。由于这种方法不需迭代,计算时间大大减少,所以人们又称它为直接法,下面对这类方法简单加以介绍。

### 1. Parker法

正如Parker在[2, 3]中指出的,  $C(\omega)$  是一个最小相位函数,具有正实函数的性质。因此,它可写为

$$C(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{d a(\lambda)}{\lambda + i\omega} = \int_0^{\infty} \frac{a'(\lambda) d\lambda}{\lambda + i\omega} \quad (10)$$

这里  $\lambda$  是函数  $C(\omega)$  在复平面上的极点,而  $a(\lambda)$  和  $a'(\lambda)$  是谱函数及其导数,

$$i = \sqrt{-1}.$$

显然(10)是一个线性泛函。我们可以把  $a'(\lambda)$  看作为模型,  $1/(\lambda + i\omega)$  看作是核函数,利用线性反演法构制各种能拟合观测数据  $C(\omega)$  的模型  $a'(\lambda)$ 。之后,再通过一种非线性变换把  $a'(\lambda)$  变换为待求的地电模型  $m(z)$ 。Parker把部分分式变成连分式,然后直接和地电断面类比,最终求得地电断面的参数。根据这种原理,他构制出了三种完全不同的模型:  $D^+$ 、 $H^+$  和  $C^{2+}$ 。

### 2. Weidelt法<sup>[8]</sup>

Weidelt法的基础是在量子力学中得到成功应用的散射反演理论(Inverse Scattering)。由于它涉及较多的数理基础,这里只简要叙述一下它的思想和流程。

从赫姆霍茨方程

$$E''(z, \omega) - i\omega\mu\sigma(z)E(z, \omega) = 0 \quad (11)$$

出发,作如下变换

$$k = \sqrt{i\omega\mu\sigma(o)}, \quad (12)$$

$$x = \int_0^z \sqrt{\sigma(t)/\sigma(o)} dt, \quad (13)$$

$$u(x) = \sqrt{\sigma(x)/\sigma(o)}. \quad (14)$$

$$f(x, k) = \frac{E(z, \omega)}{E(o, \omega)} u(x), \quad (15)$$

$$v(x) = u''(x) / u(x), \quad (16)$$

以后方程(11)可变为

$$f''(x, k) = \{k^2 + v(x)\}f(x, k) \quad (17)$$

这里 $\omega$ 是圆频率,  $\mu$ 是导磁系数,  $\sigma(z)$ 是在深度 $z$ 处的电导率,  $E(z, \omega)$ 是电场分量,  $k$ 是地表的波数,  $\sigma(x)$ 是在视深度 $x$ 处之视电导率,  $f(x, k)$ 是散射位函数。  $u(x)$ 是在视深度 $x$ 处的相对电导率的四次方根。

解方程 (17) 求得

$$f_{\pm}(0, k) = e^{\pm kx} + \int_{-x}^x A_{\pm}(x, t) e^{\pm kt} dt. \quad (18)$$

可以证明

$$u(x) = 1 + \int_{-x}^x A(x, t) dt, \quad (19)$$

这里  $A(x, t)$  是把  $C(\omega)$  和  $\sigma(z)$  连系起来的媒介。 Weidelt 指出了  $A(x, t)$  和  $C(\omega)$  [或  $C(k)$ ] 之间的关系。

$$A(x, y) = B(x+y) + \int_{-x}^{x-y} A(x, t) \{B(y+t) + B(y-t)\} dt, \quad (20)$$

$$|y| \leq x$$

$$b(k) = \int_0^{\infty} B(x) e^{-kx} dx, \quad (21)$$

而

$$b(k) = (1 - kc(k)) / 2. \quad (22)$$

由此可见, 反演的流程可大致如下:

$$C(k) \rightarrow b(k) \rightarrow B(x) \rightarrow A(x, y) \rightarrow u(x) \rightarrow \sigma(z). \quad (23)$$

不难看出, 从  $C(k)$  可以唯一确定  $b(k)$ 。而从  $b(k)$  到  $B(x)$  是一个熟知的线性反演问题, 不能唯一确定。然而我们可以根据对模型的要求, 设计合适的线性反演方法, 求出合理的  $B(x)$ 。再从  $B(x)$  到  $\sigma(z)$  是一个不难解决的非线性问题, 可以由  $B(x)$  唯一地确定  $\sigma(z)$ 。这样, 就把这个极其复杂的非线性问题化成了图 1 所示的两大步骤。从原理上完全解决了 MT 的反演问题。

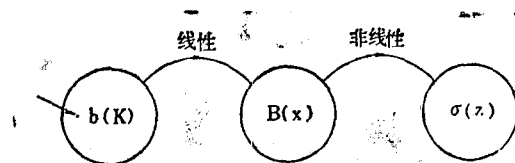


图 1

了解线性反演理论的人, 一定清楚从  $b(k)$  到  $B(x)$  不再是一个困难问题了。至于第二步, 从  $B(x)$  到  $\sigma(z)$ , 是解第二类弗里法霍姆积分方程, 也是不难解决的。

已知  $B(x)$ , 可用数值积分法按 (18) 式, 即 Gel'fand-Levitan 方程, 求解  $A(x, y)$ , ( $|y| \leq x$ )。求得  $A(x, y)$  之后再用 (19) 式计算  $u(x)$ , 最后用 (14) 式和

$$z = \int_0^x [\sigma^{(0)} / \sigma(x)]^{\frac{1}{4}} dx \quad (24)$$

计算  $\sigma(z)$ 。

正如 [10] 所指出的, 如果我们用

$$r(k) = \frac{1 - KC(k)}{1 + KC(k)} \quad (25)$$

而不是  $b(k)$ , 仍按 (23) 流程。可以求得与上面  $B(x)$  相应的  $R(x)$ 。且

$$r(k) = \int_0^{\infty} R(x) e^{-kx} dx. \quad (26)$$

这时

$$A(x, y) = R(x+y) + \int_{-y}^x A(x, t) R(y+t) dt, \quad |y| \leq x \quad (27)$$

这是著名的Marchenko方程。从这个方程出发，也不难求得 $\sigma(z)$ 。

仿照地震勘探，可以得到另一种表达式叫Burridge方程。

$$J(x, y) = 1 + \int_{-y}^x J(x, t) R(y+t) dt, \quad |y| \leq x \quad (28)$$

$$\text{这里} \quad \sigma(x)/\sigma(0) = J^4(x, x) \quad (29)$$

因此，知道 $R(x)$ 后，也不难求得 $\sigma(z)$ 。

求 $\sigma(z)$ 的第四种方法是用Gopinath-Sondhi方程

$$F(x, y) + \frac{1}{2} \int_{-x}^x F(x, t) H(|y-t|) dt = 1, \quad |y| \leq x. \quad (30)$$

$$\text{这里} H(x) = -2B(x). \quad (31)$$

所以

$$F(x, y) = 1 + \int_{-x}^x F(x, t) B(y-t) dt, \quad |y| \leq x. \quad (32)$$

且

$$\sigma(x)/\sigma(0) = F^4(x, x) = F^4(x, -x). \quad (33)$$

总之，可以根据 $C(k)$ 计算 $b(k)$ 或 $r(k)$ ，用线性反演法求解 $B(x)$ 或 $R(x)$ 之后，再用Gel'fand-Levitan，或Gopinath-Sondhi方程由 $B(x)$ 求 $\sigma(z)$ ，或者用Marchenko或Burridge方程由 $R(x)$ 求 $\sigma(z)$ 。

### 3. 拟地震解释法

在<sup>[10]</sup>中已指出，如果把地层划分为电磁波双程旅行时都相等的微层，且设 $\omega = 1$ 时，电磁波旅行时为 $2\sqrt{\mu\sigma_0} h_0 = t_0$ ，则

$$W(\omega) = (Z(\omega)/Z_0(\omega) - 1)/2 = \sum_{n=1}^{\infty} q_n e^{-\sqrt{j\omega} n t_0} \quad (34)$$

不难证明，(34)式的左端就是Weidelt法中的 $b(k)$ 。而 $q_n$ 正是 $B(x)$ 。

$q_n$ 和 $B(x)$ 是同一物理量的不同表达形式，它是当输入电磁波为 $\delta$ 函数时，地球模型的响应函数。其中既包括从不同界面反射回地面的一次波，也包括各种形式的多次波。这恰恰与地震勘探的自激自收的地震记录一样。所不同的是在MT中反映的是电磁波的波阻抗差异

$$\gamma_{i,i+1} = \frac{\sqrt{\rho_{i+1}} - \sqrt{\rho_i}}{\sqrt{\rho_{i+1}} + \sqrt{\rho_i}}, \quad (35)$$

而地震反映的是地震波的波阻抗差异

$$\gamma_{i,i+1} = \frac{V_{i+1}d_{i+1} - V_i d_i}{V_{i+1}d_{i+1} + V_i d_i} \quad (36)$$

这里 $\rho_i, V_i, d_i$ 分别代表第 $i$ 层之电阻率、地震波的速度和介质的密度。

因此,和地震反射法类似,在求得 $q_n$ 以后,可以画出“时间剖面”,并对时间剖面进行解释。

在计算时,必须对(34)式进行截断(当然 $n$ 要足够大),然后用线性规划求解 $q_n$ 。实践证明,不管是理论还是实际资料,都可以取得良好的结果。

更为重要的是,拟地震解释法可以引入地震勘探中一些业已成熟的方法,如平均速度、识别和压制多次反射以及偏移归位等,作到互相渗透。为MT开辟了一条新路。

#### 4. 近似反演法

为了适应野外的实时处理,在33年SEG年会上,T. D. Gamble提出了不同于Bostic法的一些近似反演法<sup>(12)</sup>,并在我国获得了应用。这种方法从电场随深度按某种简单函数规律衰减这一基本前提出发,找到了视电阻率 $\rho_a$ 和地电模型 $\sigma(z)$ 之间的简单对应关系,并应用这种关系近似计算地电模型。

另一类近似反演法是把视电阻率曲线上的每一点都看成是与地电模型有某种关系的特殊点,然后按这种确定的特殊关系由视电阻率曲线近似地计算地电模型。

除以上几种类型的反演法以外,还有数理统计法,分层解释法等。由于篇幅有限,不打算在这里加以介绍。

#### 5. 二维MT反演问题

一维MT反演问题非唯一性的严重性,迫使不少国内外学者改变方向,暂停二维反演工作。暂停并不等于放弃。在这方面的研究工作仍在不时地继续进行<sup>(11)</sup>。简单说来,二维反演仍可分为间接法和直接法两大类。

##### 1. 间接法:

所谓间接法就是一种基于最优化原理的迭代法。它以有限单元、有限差分和积分方程法等数值法为计算正演问题的近似方法,按最优化的原理计算模型或模型参数的改正量,在对起始模型或模型参数进行修改以后,重复迭代直至最佳拟合为止。因此,在原理上它和一维问题的迭代法完全相同,仅在计算正演问题的方法上有所差异,计算时间大大增加而已。

##### 2. 直接法:

这是一种刚刚处于萌芽状态的新思想。它的基本原理是基于二维MT的直接反演法,分别对MT两种极化方向(TE, TM)的视电阻率曲线进行直接法反演,然后对两个极化方向上的解进行“合并”取得一个完整的模型。

## 非 唯 一 性 问 题

非唯一性,即所谓多解性。这是地球物理,包括MT资料反演中的一大难题。也是许多反演专家多年来工作的中心。

对MT而言,非唯一性主要来源于观测频率点数 $N$ 有限和观测数据具有误差。即使是精确的观测数据,只要观测频率点数有限,也存在非唯一性,只是其范围相对较小而已。

事实证明,非唯一性不仅表现在对同一组观测数据 $e_j = e(\omega_j)$ ,  $j = 1 \cdots, N$ ,反演所获得

的地电模型稍有变化,而且也表现在模型的类别也可能不同。这是因为反演方法不同,数据空间映照的模型子空间也发生变化(图2)。映照的模型子空间的位置、大小和范围,既取决于

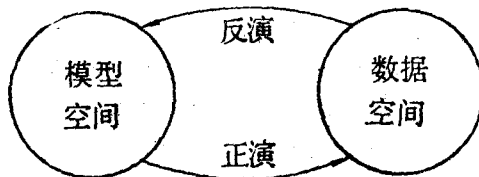


图 2

映照的方法,即反演的方法,也取决于观测数据本身,即频率点数和误差大小。下面仅就一维问题举例加以说明。

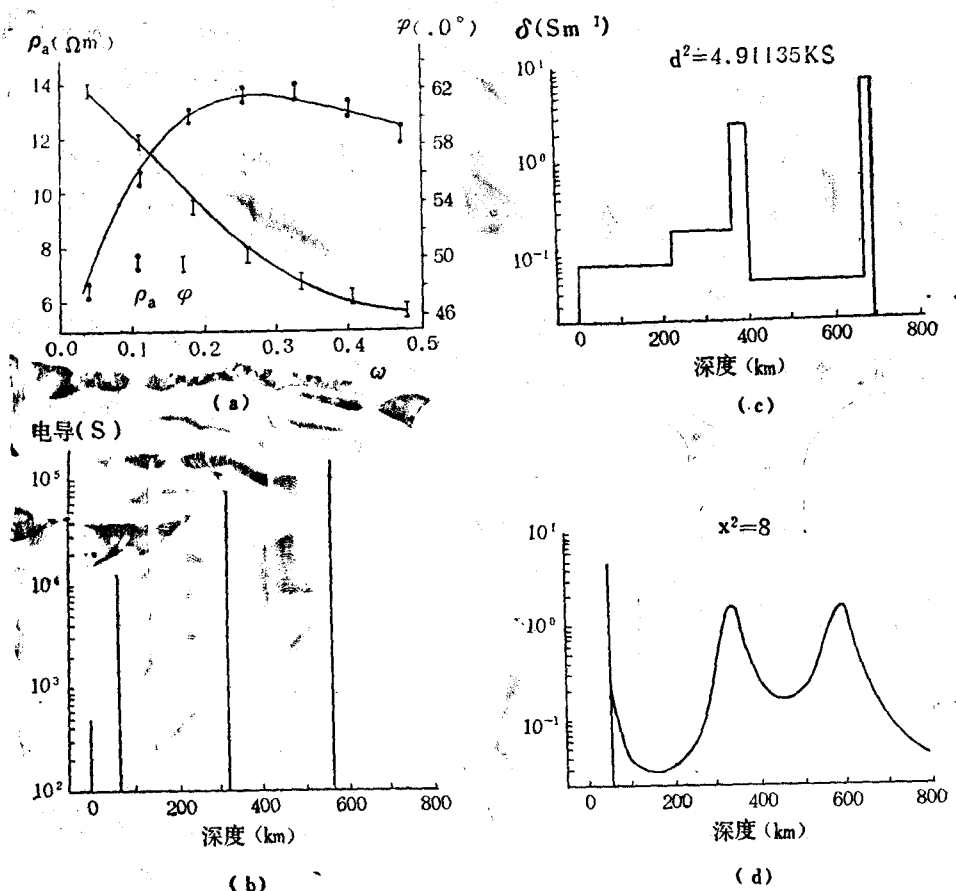


图3 a. 视电阻率和相位曲线; b.  $\delta$  模型; c. 层状模型; d. 连续模型

图3是由Parker<sup>(2,3)</sup>用他所设计的反演法从同一组数据(图2a)所得到的三种完全不同类型的模型: $\delta$ 模型,层状模型和连续模型(图3.b,c,d)。

应该指出,就用同一组数据,我们还可以得到其他不同类型的层状、连续甚至联合模型。可见,非唯一性的严重性远远超出我们的想象。

更有甚者,实际的地球模型并不是一维,往往是二维或三维。其非唯一性肯定要比这复杂和严重得多。

总之,非唯一性问题是MT反演的大敌<sup>(4,5,6)</sup>,是求取接近真实地电模型的真正拦路虎。求得一个能拟合观测数据的模型,并不意味着反演工作的结束,而只完成了反演工作的一部分。在某些情况下甚至只是一小部分。要想从观测数据求取真正的地球模型,起码在目前是不现实的。当前提高反演质量的关键是缩小非唯一性范围,其具体办法,将在下面详细介绍。

## 评 价

从以上的讨论可知,我们可以采用以下办法来缩小解的非唯一性范围,使构制的模型更

接近真实。

1. 用不同类型的反演方法, 构制各式各样的模型, 以暴露不同的解空间。如果各种模型均包含有共同的特性, 就确信它很可能是真实地球模型的特征, 由此可以确定所构制模型的可信度。

2. 根据已知的地质地球物理特征, 选择适当的构制方法, 使解尽可能反映真实地球模型的主要特征。并应尽可能多地加上已知的地质地球物理限制条件, 以减小解的非唯一性范围。

3. 取不同类型的观测数据, 以求得最佳的核函数, 提高观测数据对模型的分辨力, 或者采用新的解释方法以缩小非唯一性范围。

4. 在采用以上措施以后, 求得的解不可避免地仍有较大的非唯一性, 这时可采用以下步骤:

第一, 对构制的模型进行 Backus-Gilbert 的线性评价, 计算对解释有意义的不同深度上的平均函数曲线、平均值以及方差和分辨力等。并综合这些数据, 得到在这个深度上模型的可靠信息。进而, 作出观测资料优劣的评价, 提出进一步实验设计的要求\*。

必须指出, 由于对非线性问题线性化的结果, Backus-Gilbert 的非唯一性评价, 只对那些线性接近的模型才有适用价值。换言之, 只有与真实地球模型线性接近的那些模型, 才能通过评价取得真正的有用信息。

第二, 采用参考推断理论<sup>[13]</sup>, 计算在某个深度上模型电导率可能的上下边界。以弄清反演结果之可信度。

总之, 反演MT资料是一项极其艰巨而又非常重要的工作, 还有不少问题等待着我们去解决。目前甚至还不能说人们已经完全解决了一维模型反演的理论和实践问题。然而我们相信, 在不久的将来, 人们一定会从一维反演冲向二维和三维, 并取得巨大的成功。

### 参 考 文 献

- [1] Parker, R.L., Understanding Inverse Theory. Ann. Rev. Earth Planet. Sci. 1977, No. 5, P. 35—64.
- [2] Parker, R.L., The Inverse Problem of EM Induction: Existence and Construction of Solutions Based on Incomplete Data. J.G.R., 1980 V. 85, No. B8, P. 4421—4428
- [3] Parker, R.L., Numerical Methods for Establishing Solutions to the Inverse Problem of EM Induction J.G.R. 1981, V. 86, No. B10, P. 9574—9584
- [4] Backus, G.E.: Non-uniqueness of the External Geomagnetic field Determined by Surface Intensity Measurements. J.G.R. 1970 V. 75, P. 6339—6341
- [5] Backus, G.E.; Gilbert, F., Uniqueness in the Inversion of Inaccurate Gross Earth Data. Phil. Trans. R. Soc. London Ser. 1970, A 266 P. 132—192
- [6] Anderssen, R.S.: on the Inversion of Global EM Induction Data. Phys. Earth Planet Inter., V. 10, P. 292—298
- [7] Oldenburg, D.W., One-dimensional Inversion of Natural Source MT observations. Geophysics. 1979, V. 44, P. 1218—1244
- [8] Weidelt, P.: The Inverse Problem of Geomagnetic Induction. Z. Geophys., 1972, V. 38, P. 257—289
- [9] Levy, S and Oldenburg, D., The Deconvolution of Phase-Shifted Wavelets. Geophy. 1982, V. 47 P. 1285—1294
- [10] 王家映 一种全新的大地电磁解释法, 武汉地质学院《地质科技情报》1984, No. 3.
- [11] Weidelt, P., Inversion of 2-D Conductivity Structures. Phys. Earth. Planet. Inter. 1975, No. 10, P. 228—291
- [12] Gamble, T., Simple One-D MT Inversion. 53th SEG 1984.
- [13] Oldenburg, D., Funnel Functions in linear and Nonlinear Appraisal J.G.R. 1983, V. 98 No. B9, P. 7387—7398

\* D. Oldenburg, 1-D MT inversion, 1984年在武汉地院讲学讲义。