本人精通MATLAB等编程语言，可以提供以下方向的帮助

1. MATLAB/GUI/SIMULINK/C++/VC++编程问题;
2. 线性与非线性控制、智能控制、模糊控制;
3. 数值计算问题、小波分析算法、有限元问题;
4. 电机控制、电力系统、机器人路径优化、机器人控制;
5. 粒子群算法、神经网络、模拟退火算法等智能优化算法;
6. 图像处理、信号处理、语音信号处理、电子通信等方向;

有问题的朋友，可以将问题直接发到我的邮箱，24小时内给您答复！非常欢迎大家加我为QQ好友，欢迎访问我的空间！

联系方式:

QQ: 626815632

邮箱: 626815632@qq.com

QQ空间: http://626815632.qzone.qq.com/

声明：本资料来源于网络，切勿用做商业用途！请您支持正版图书！

第一章　线性规划

§1　线性规划

在人们的生产实践中，经常会遇到如何利用现有资源来安排生产，以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支—数学规划，而线性规划(Linear Programming 简记 LP)则是数学规划的一个重要分支。自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在理论上趋向成熟，在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后，线性规划的适用领域更为广泛了，已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

1.1 线性规划的实例与定义

例 1　某机床厂生产甲、乙两种机床，每台销售后的利润分别为 4000 元与 3000 元。生产甲机床需用 A、B 机器加工，加工时间分别为每台 2 小时和 1 小时；生产乙机床需用 A、B、C 三种机器加工，加工时间为每台各一小时。若每天可用于加工的机器时数分别为 A 机器 10 小时、B 机器 8 小时和 C 机器 7 小时，问该厂应生产甲、乙机床各几台，才能使总利润最大？

上述问题的数学模型：设该厂生产 x_1 台甲机床和 x_2 乙机床时总利润最大，则 x_1, x_2 应满足

$$\text{（目标函数）}\ \max \quad z = 4x_1 + 3x_2 \tag{1}$$

$$\text{s.t.（约束条件）}\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 10 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_2 \le 7 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases} \tag{2}$$

这里变量 x_1, x_2 称之为决策变量，（1）式被称为问题的目标函数，（2）中的几个不等式是问题的约束条件，记为 s.t.(即 subject to)。由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数，故被称为线性规划问题。

总之，线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下，求一线性目标函数最大或最小的问题。

在解决实际问题时，把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步，但往往也是困难的一步，模型建立得是否恰当，直接影响到求解。而选适当的决策变量，是我们建立有效模型的关键之一。

1.2 线性规划的 Matlab 标准形式

线性规划的目标函数可以是求最大值，也可以是求最小值，约束条件的不等号可以是小于号也可以是大于号。为了避免这种形式多样性带来的不便，Matlab 中规定线性规划的标准形式为

$$\min_{x} c^T x$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

其中 c 和 x 为 n 维列向量，A、Aeq 为适当维数的矩阵，b、beq 为适当维数的列向量。

例如线性规划

$$\max_{x} c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq b$$

的 Matlab 标准型为

$$\min_{x} -c^T x \quad \text{s.t.} \quad -Ax \leq -b$$

1.3 线性规划问题的解的概念

一般线性规划问题的（数学）标准型为

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad i = 1,2,\cdots,m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{4}$$

可行解 满足约束条件（4）的解 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，称为线性规划问题的可行解，而使目标函数（3）达到最大值的可行解叫最优解。

可行域 所有可行解构成的集合称为问题的可行域，记为 R 。

1.4 线性规划的图解法

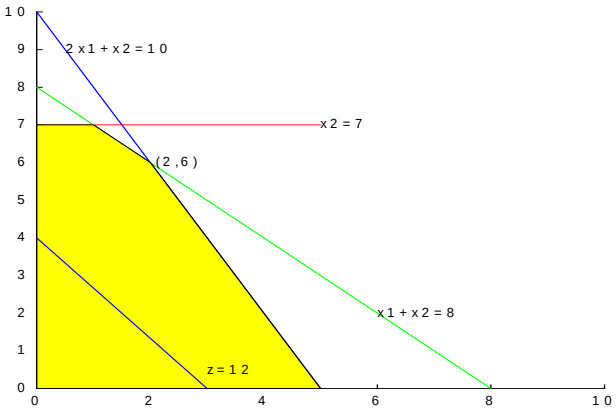


图 1 线性规划的图解示意图

图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。我们先应用图解法来求解例 1。对于每一固定的值 z，使目标函数值等于 z 的点构成的直线称为目标函数等位线，当 z 变动时，我们得到一族平行直线。对于例 1，显然等位线越趋于右上方，其上的点具有越大的目标函数值。不难看出，本例的最优解为 $x^* = (2,6)^T$，最优目标值 $z^* = 26$ 。

从上面的图解过程可以看出并不难证明以下断言：

（1）可行域 R 可能会出现多种情况。R 可能是空集也可能是非空集合，当 R 非空时，它必定是若干个半平面的交集（除非遇到空间维数的退化）。R 既可能是有界区域，也可能是无界区域。

（2）在 R 非空时，线性规划既可以存在有限最优解，也可以不存在有限最优解（其目标函数值无界）。

（3）若线性规划存在有限最优解，则必可找到具有最优目标函数值的可行域 R 的“顶点”。

上述论断可以推广到一般的线性规划问题，区别只在于空间的维数。在一般的 n 维空间中，满足一线性等式 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ 的点集被称为一个超平面，而满足一线性不等式 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b$（或 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \ge b$）的点集被称为一个半空间（其中 $(a_1,\cdots,a_n)$ 为一 n 维行向量，b 为一实数）。若干个半空间的交集被称为多胞形，有界的多胞形又被称为多面体。易见，线性规划的可行域必为多胞形（为统一起见，空集 Φ 也被视为多胞形）。在一般 n 维空间中，要直接得出多胞形“顶点”概念还有一些困难。二维空间中的顶点可以看成为边界直线的交点，但这一几何概念的推广在一般 n 维空间中的几何意义并不十分直观。为此，我们将采用另一途径来定义它。

定义 1 称 n 维空间中的区域 R 为一凸集，若 $\forall x^1, x^2 \in R$ 及 $\forall \lambda \in (0,1)$，有 $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in R$。

定义 2 设 R 为 n 维空间中的一个凸集，R 中的点 x 被称为 R 的一个极点，若不存在 x^1、$x^2 \in R$ 及 $\lambda \in (0,1)$，使得 $x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$。

定义 1 说明凸集中任意两点的连线必在此凸集中；而定义 2 说明，若 x 是凸集 R 的一个极点，则 x 不能位于 R 中任意两点的连线上。不难证明，多胞形必为凸集。同样也不难证明，二维空间中可行域 R 的顶点均为 R 的极点（R 也没有其它的极点）。

1.5 求解线性规划的 Matlab 解法

单纯形法是求解线性规划问题的最常用、最有效的算法之一。这里我们就不介绍单纯形法，有兴趣的读者可以参看其它线性规划书籍。下面我们介绍线性规划的 Matlab 解法。

Matlab 中线性规划的标准型为

$$\min_{x} c^T x \quad \text{s.t.} \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \\ lb \le x \le ub \end{cases}$$

基本函数形式为 linprog(c,A,b)，它的返回值是向量 x 的值。还有其它的一些函数调用形式（在 Matlab 指令窗运行 help linprog 可以看到所有的函数调用形式），如：

[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X_0,OPTIONS)

这里 fval 返回目标函数的值，LB 和 UB 分别是变量 x 的下界和上界，x_0 是 x 的初始值，OPTIONS 是控制参数。

例 2 求解下列线性规划问题

$$\begin{aligned} \max\ & z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 7 \\ & 2x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 10 \\ & x_1 + 3x_2 + x_3 \le 12 \\ & x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

解 （i）编写 M 文件

```
c=[2;3;-5];
a=[-2,5,-1;1,3,1]; b=[-10;12];
aeq=[1,1,1];
beq=7;
x=linprog(-c,a,b,aeq,beq,zeros(3,1))
value=c'*x
```

（ii）将M文件存盘，并命名为example1.m。

（iii）在Matlab指令窗运行example1即可得所求结果。

例3 求解线性规划问题

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解 编写Matlab程序如下：

```
c=[2;3;1];
a=[1,4,2;3,2,0];
b=[8;6];
[x,y]=linprog(c,-a,-b,[],[],zeros(3,1))
```

1.6 可以转化为线性规划的问题

很多看起来不是线性规划的问题也可以通过变换变成线性规划的问题来解决。如：

例4 规划问题为

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \\ \text{s.t.} \quad & Ax \leq b \end{aligned}$$

其中 $x = [x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ ， A 和 b 为相应维数的矩阵和向量。

要把上面的问题变换成线性规划问题，只要注意到事实：对任意的 x_i ，存在 $u_i, v_i > 0$ 满足

$$x_i = u_i - v_i \text{ ， } |x_i| = u_i + v_i$$

事实上，我们只要取 $u_i = \frac{x_i + |x_i|}{2}$ ， $v_i = \frac{|x_i| - x_i}{2}$ 就可以满足上面的条件。

这样，记 $u = [u_1 \quad \cdots \quad u_n]^T$ ， $v = [v_1 \quad \cdots \quad v_n]^T$ ，从而我们可以把上面的问题变成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n} (u_i + v_i) \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} A(u - v) \leq b \\ u, v \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

例 5 $\min\limits_{x_i} \{\max\limits_{y_i} |\varepsilon_i|\}$

其中 $\varepsilon_i = x_i - y_i$ 。

对于这个问题，如果我们取 $x_0 = \max\limits_{y_i} |\varepsilon_i|$ ，这样，上面的问题就变换成

$$\min \quad x_0$$
$$\text{s.t.} \quad x_1 - y_1 \le x_0, \cdots, x_n - y_n \le x_0$$

此即我们通常的线性规划问题。

§2 运输问题(产销平衡)

例 6 某商品有 m 个产地、n 个销地，各产地的产量分别为 $a_1, \cdots, a_m$，各销地的需求量分别为 $b_1, \cdots, b_n$。若该商品由 i 产地运到 j 销地的单位运价为 c_{ij}，问应该如何调运才能使总运费最省？

解：引入变量 x_{ij}，其取值为由 i 产地运往 j 销地的该商品数量，数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1,2, \cdots, n \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

显然是一个线性规划问题，当然可以用单纯形法求解。

对产销平衡的运输问题，由于有以下关系式存在：

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i$$

其约束条件的系数矩阵相当特殊，可用比较简单的计算方法，习惯上称为表上作业法（由康托洛维奇和希奇柯克两人独立地提出，简称康—希表上作业法）。

§3 指派问题

3.1 指派问题的数学模型

例 7 拟分配 n 人去干 n 项工作，每人干且仅干一项工作，若分配第 i 人去干第 j 项工作，需花费 c_{ij} 单位时间，问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少？

容易看出，要给出一个指派问题的实例，只需给出矩阵 $C = (c_{ij})$，C 被称为指派问题的系数矩阵。

引入变量 x_{ij}，若分配 i 干 j 工作，则取 $x_{ij} = 1$，否则取 $x_{ij} = 0$。上述指派问题的数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$$

$$x_{ij} = 0 \text{或} 1$$

上述指派问题的可行解可以用一个矩阵表示，其每行每列均有且只有一个元素为1，其余元素均为0；可以用$1,\cdots,n$中的一个置换表示。

问题中的变量只能取0或1，从而是一个0-1规划问题。一般的0-1规划问题求解极为困难。但指派问题并不难解，其约束方程组的系数矩阵十分特殊（被称为全单位模矩阵，其各阶非零子式均为± 1），其非负可行解的分量只能取0或1，故约束$x_{ij} = 0$或1可改写为$x_{ij} \geq 0$而不改变其解。此时，指派问题被转化为一个特殊的运输问题，其中$m = n$，$a_i = b_j = 1$。

3.2　求解指派问题的匈牙利算法

由于指派问题的特殊性，又存在着由匈牙利数学家Konig提出的更为简便的解法—匈牙利算法。算法主要依据以下事实：如果系数矩阵$C = (c_{ij})$一行（或一列）中每一元素都加上或减去同一个数，得到一个新矩阵$B = (b_{ij})$，则以C或B为系数矩阵的指派问题具有相同的最优指派。

例8　求解指派问题，其系数矩阵为

$$C = \begin{bmatrix} 16 & 15 & 19 & 22 \\ 17 & 21 & 19 & 18 \\ 24 & 22 & 18 & 17 \\ 17 & 19 & 22 & 16 \end{bmatrix}$$

解　将第一行元素减去此行中的最小元素15，同样，第二行元素减去17，第三行元素减去17，最后一行的元素减去16，得

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

再将第3列元素各减去1，得

$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0^* & 3 & 7 \\ 0^* & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 0^* & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0^* \end{bmatrix}$$

以B_2为系数矩阵的指派问题有最优指派

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

由等价性，它也是例7的最优指派。

有时问题会稍复杂一些。

例9 求解系数矩阵C的指派问题

$$C=\begin{bmatrix}12 & 7 & 9 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12\\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6\end{bmatrix}$$

解：先作等价变换如下

$$\begin{matrix}-7\\-6\\-7\\-6\\-4\end{matrix}\begin{bmatrix}12 & 7 & 9 & 7 & 9\\ 8 & 9 & 6 & 6 & 6\\ 7 & 17 & 12 & 14 & 12\\ 15 & 14 & 6 & 6 & 10\\ 4 & 10 & 7 & 10 & 6\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5 & 0^* & 2 & 0 & 2\\ 2 & 3 & 0 & 0^* & 0\\ 0^* & 10 & 5 & 7 & 5\\ 9 & 8 & 0^* & 0 & 4\\ 0 & 6 & 3 & 6 & 2\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \vee\\ \\ \vee\end{matrix}$$

$$\vee$$

容易看出，从变换后的矩阵中只能选出四个位于不同行不同列的零元素，但$n=5$，最优指派还无法看出。此时等价变换还可进行下去。步骤如下：

(1) 对未选出 0 元素的行打∨；

(2) 对∨行中 0 元素所在列打∨；

(3) 对∨列中选中的 0 元素所在行打∨；

重复（2)、(3）直到无法再打∨为止。

可以证明，若用直线划没有打∨的行与打∨的列，就得到了能够覆盖住矩阵中所有零元素的最少条数的直线集合，找出未覆盖的元素中的最小者，令∨行元素减去此数，∨列元素加上此数，则原先选中的 0 元素不变，而未覆盖元素中至少有一个已转变为 0，且新矩阵的指派问题与原问题也等价。上述过程可反复采用，直到能选取出足够的 0 元素为止。例如，对例 5 变换后的矩阵再变换，第三行、第五行元素减去 2，第一列元素加上 2，得

$$\begin{bmatrix}7 & 0 & 2 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 3 & 5 & 3\\ 11 & 8 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 4 & 1 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

现在已可看出，最优指派为$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$。

§4 对偶理论与灵敏度分析

4.1 原始问题和对偶问题

考虑下列一对线性规划模型：

$$\max \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad Ax \le b,\ x \ge 0 \tag{P}$$

和

$$\min \quad b^T y \qquad \text{s.t.} \quad A^T y \ge c,\ y \ge 0 \tag{D}$$

称（P）为原始问题，（D）为它的对偶问题。

不太严谨地说，对偶问题可被看作是原始问题的“行列转置”：

（1） 原始问题中的第 j 列系数与其对偶问题中的第 j 行的系数相同；

（2） 原始目标函数的各个系数行与其对偶问题右侧的各常数列相同；

（3） 原始问题右侧的各常数列与其对偶目标函数的各个系数行相同；

（4） 在这一对问题中，不等式方向和优化方向相反。

考虑线性规划：

$$\min \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad Ax = b, x \geq 0$$

把其中的等式约束变成不等式约束，可得

$$\min \quad c^T x \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \geq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}, x \geq 0$$

它的对偶问题是

$$\max \quad \begin{bmatrix} b^T & -b^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} A^T & -A^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \leq c$$

其中 y_1 和 y_2 分别表示对应于约束 $Ax \geq b$ 和 $-Ax \geq -b$ 的对偶变量组。令 $y = y_1 - y_2$，则上式又可写成

$$\max \quad b^T y \quad \text{s.t.} \quad A^T y \leq c$$

原问题和对偶的对偶约束之间的关系：

min		max	
变量	≥ 0	行约束	≤ 0
	≤ 0		≥ 0
	无限制		$= 0$
行约束	≥ 0	变量	≥ 0
	≤ 0		≤ 0
	$= 0$		无限制

4.2 对偶问题的基本性质

1° 对称性：对偶问题的对偶是原问题。

2° 弱对偶性：若 $\bar{x}$ 是原问题的可行解，$\bar{y}$ 是对偶问题的可行解。则存在 $c^T \bar{x} \leq b^T \bar{y}$。

3° 无界性：若原问题（对偶问题）为无界解，则其对偶问题（原问题）无可行解。

4° 可行解是最优解时的性质：设 $\hat{x}$ 是原问题的可行解，$\hat{y}$ 是对偶问题的可行解，当 $c^T \hat{x} = b^T \hat{y}$ 时，$\hat{x}, \hat{y}$ 是最优解。

5° 对偶定理：若原问题有最优解，那么对偶问题也有最优解；且目标函数值相同。

6° 互补松弛性：若 $\hat{x}, \hat{y}$ 分别是原问题和对偶问题的最优解，则

$$\hat{y}^T (A\hat{x} - b) = 0, \quad \hat{x}^T (A^T \hat{y} - c) = 0$$

例 10 已知线性规划问题

$$\min \quad \omega = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,5$$

已知其对偶问题的最优解为 $y_1^* = \frac{4}{5}, y_2^* = \frac{3}{5}; z = 5$。试用对偶理论找出原问题的最优解。

解　先写出它的对偶问题

$$\max \quad z = 4y_1 + 3y_2$$
$$y_1 + 2y_2 \leq 2 \qquad ①$$
$$y_1 - y_2 \leq 3 \qquad ②$$
$$2y_1 + 3y_3 \leq 5 \qquad ③$$
$$y_1 + y_2 \leq 2 \qquad ④$$
$$3y_1 + y_2 \leq 3 \qquad ⑤$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

将 y_1^*, y_2^* 的值代入约束条件，得②，③，④为严格不等式；由互补松弛性得 $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$。因 $y_1^*, y_2^* > 0$；原问题的两个约束条件应取等式，故有

$$x_1^* + 3x_5^* = 4$$
$$2x_1^* + x_5^* = 3$$

求解后得到 $x_1^* = 1, x_5^* = 1$；故原问题的最优解为

$$X^* = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]'; \omega^* = 5 \quad 。$$

4.3　灵敏度分析

在以前讨论线性规划问题时，假定 a_{ij}, b_i, c_j 都是常数。但实际上这些系数往往是估计值和预测值。如市场条件一变，c_j 值就会变化；a_{ij} 往往是因工艺条件的改变而改变；b_i 是根据资源投入后的经济效果决定的一种决策选择。因此提出这样两个问题：当这些系数有一个或几个发生变化时，已求得的线性规划问题的最优解会有什么变化；或者这些系数在什么范围内变化时，线性规划问题的最优解或最优基不变。这里我们就不讨论了。

4.4　参数线性规划

参数线性规划是研究 a_{ij}, b_i, c_j 这些参数中某一参数连续变化时，使最优解发生变化的各临界点的值。即把某一参数作为参变量，而目标函数在某区间内是这参变量的线性函数，含这参变量的约束条件是线性等式或不等式。因此仍可用单纯形法和对偶单纯形法进行分析参数线性规划问题。

§5　投资的收益和风险

5.1　问题提出

市场上有 n 种资产 s_i（$i = 1,2,\cdots,n$）可以选择，现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 种资产在这一时期内购买 s_i 的平均收益率为 r_i，风险损失率为 q_i，投资越分散，总的风险越少，总体风险可用投资的 s_i 中最大的一个风险来度量。

购买s_i时要付交易费，（费率p_i），当购买额不超过给定值u_i时，交易费按购买u_i计算。另外，假定同期银行存款利率是r_0，既无交易费又无风险。（$r_0=5\%$）

已知$n=4$时相关数据如表1。

表1

s_i	r_i(%)	q_i	p_i(%)	u_i(元)
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案，即用给定资金M，有选择地购买若干种资产或存银行生息，使净收益尽可能大，使总体风险尽可能小。

5.2 符号规定和基本假设

符号规定：

s_i：第i种投资项目，如股票，债券

r_i, p_i, q_i：分别为s_i的平均收益率，交易费率，风险损失率

u_i：s_i的交易定额

r_0：同期银行利率

x_i：投资项目s_i的资金

a：投资风险度

Q：总体收益

基本假设：

1. 投资数额M相当大，为了便于计算，假设$M=1$；
2. 投资越分散，总的风险越小；
3. 总体风险用投资项目s_i中最大的一个风险来度量；
4. n种资产s_i之间是相互独立的；
5. 在投资的这一时期内，r_i, p_i, q_i，r_0为定值，不受意外因素影响；
6. 净收益和总体风险只受r_i, p_i, q_i影响，不受其它因素干扰。

5.3 模型的分析与建立

1. 总体风险用所投资的s_i中最大的一个风险来衡量，即

$$\max\{q_i x_i \mid i=1,2,\cdots,n\}$$

2. 购买s_i所付交易费是一个分段函数，即

$$\text{交易费}=\begin{cases} p_i x_i, & x_i > u_i \\ p_i u_i, & x_i \le u_i \end{cases}$$

而题目所给定的定值u_i（单位：元）相对总投资M很少，$p_i u_i$更小，可以忽略不计，这样购买s_i的净收益为$(r_i - p_i)x_i$。

3. 要使净收益尽可能大，总体风险尽可能小，这是一个多目标规划模型：

目标函数为

$$\begin{cases}\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i\\ \min\max\{q_ix_i\}\end{cases}$$

约束条件为

$$\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M\\ x_i\geq 0,\quad i=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

4. 模型简化

a) 在实际投资中，投资者承受风险的程度不一样，若给定风险一个界限 a，使最大的一个风险 $\frac{q_ix_i}{M}\leq a$，可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。

模型一　固定风险水平，优化收益

$$\max\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\frac{q_ix_i}{M}\leq a\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\quad x_i\geq 0,\quad i=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

b) 若投资者希望总盈利至少达到水平 k 以上，在风险最小的情况下寻求相应的投资组合。

模型二 固定盈利水平，极小化风险

$$\min\{\max\{q_ix_i\}\}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i\geq k\\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\quad x_i\geq 0,\quad i=0,1,\cdots,n\end{cases}$$

c) 投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时，希望选择一个令自己满意的投资组合。因此对风险、收益分别赋予权重 s（$0<s\leq 1$）和 $(1-s)$，s 称为投资偏好系数。

模型三　$\min\ s\{\max\{q_ix_i\}\}-(1-s)\sum_{i=0}^{n}(r_i-p_i)x_i$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=0}^{n}(1+p_i)x_i=M,\quad x_i\geq 0,\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

5.4　模型一的求解

模型一为：

$$\min\ f=(-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185)(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_0+1.01x_1+1.02x_2+1.045x_3+1.065x_4=1 \\ 0.025x_1\le a \\ 0.015x_2\le a \\ 0.055x_3\le a \\ 0.026x_4\le a \\ x_i\ge 0\ (i=0,1,\cdots,4) \end{cases}$$

由于 a 是任意给定的风险度，到底怎样没有一个准则，不同的投资者有不同的风险度。我们从 $a=0$ 开始，以步长 $\Delta a=0.001$ 进行循环搜索，编制程序如下：

```
clc,clear
a=0;
hold on
while a<0.05
    c=[-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185];
    A=[zeros(4,1),diag([0.025,0.015,0.055,0.026])];
    b=a*ones(4,1);
    Aeq=[1,1.01,1.02,1.045,1.065];
    beq=1;
    LB=zeros(5,1);
    [x,Q]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB);
    Q=-Q;
    plot(a,Q,'*r');
    a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```

5.5　结果分析

1. 风险大，收益也大。

2. 当投资越分散时，投资者承担的风险越小，这与题意一致。即：

冒险的投资者会出现集中投资的情况，保守的投资者则尽量分散投资。

3. 在 $a=0.006$ 附近有一个转折点，在这一点左边，风险增加很少时，利润增长很快。在这一点右边，风险增加很大时，利润增长很缓慢，所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说，应该选择曲线的拐点作为最优投资组合，大约是 $a=0.6\%$，$Q=20\%$，所对应投资方案为：

风险度 $a=0.006$，收益 $Q=0.2019$，$x_0=0$，$x_1=0.24$，$x_2=0.4$，$x_3=0.1091$，$x_4=0.2212$。

习　题　一

1. 试将下述问题改写成线性规划问题：

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m}a_{i1}x_i,\sum_{i=1}^{m}a_{i2}x_i,\cdots,\sum_{i=1}^{m}a_{in}x_i\right)\right\}$$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+x_2+\cdots+x_m=1 \\ x_i\ge 0,\quad i=1,\cdots,m \end{cases}$$

2. 试将下列问题改写成线性规划问题：

$$\max \quad z=\sum_{j=1}^{n} c_j \mid x_j \mid$$

$$\text{st.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \\ x_j \text{取值无约束} \end{cases}$$

3．线性回归是一种常用的数理统计方法，这个方法要求对图上的一系列点 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$ 选配一条合适的直线拟合。方法通常是先定直线方程为 $y=a+bx$，然后按某种准则求定 a,b。通常这个准则为最小二乘法，但也可用其他准则。试根据以下准则建立这个问题的线性规划模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} | y_i-(a+bx_i) |$$

4．某厂生产三种产品 I，II，III。每种产品要经过 A,B 两道工序加工。设该厂有两种规格的设备能完成 A 工序，它们以 A_1,A_2 表示；有三种规格的设备能完成 B 工序，它们以 B_1,B_2,B_3 表示。产品 I 可在 A,B 任何一种规格设备上加工。产品 II 可在任何规格的 A 设备上加工，但完成 B 工序时，只能在 B_1 设备上加工；产品 III 只能在 A_2 与 B_2 设备上加工。已知在各种机床设备的单件工时，原材料费，产品销售价格，各种设备有效台时以及满负荷操作时机床设备的费用如表 2，求安排最优的生产计划，使该厂利润最大。

表 2

设备	产品			设备有效台时	满负荷时的设备费用(元)
	I	II	III		
A_1	5	10		6000	300
A_2	7	9	12	10000	321
B_1	6	8		4000	250
B_2	4		11	7000	783
B_3	7			4000	200
原料费(元/件)	0.25	0.35	0.50		
单　价(元/件)	1.25	2.00	2.80		

5．有四个工人，要指派他们分别完成 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 3。

表 3

工人＼工作	A	B	C	D
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

问指派哪个人去完成哪项工作，可使总的消耗时间为最小？

6．某战略轰炸机群奉命摧毁敌人军事目标。已知该目标有四个要害部位，只要摧毁其中之一即可达到目的。为完成此项任务的汽油消耗量限制为 48000 升、重型炸弹 48 枚、轻型炸弹 32 枚。飞机携带重型炸弹时每升汽油可飞行 2 千米，带轻型炸弹时每升汽油可飞行 3 千米。又知每架飞机每次只能装载一枚炸弹，每出发轰炸一次除来回路程汽油消耗（空载时每升汽油可飞行 4 千米）外，起飞和降落每次各消耗 100 升。有关数据如表 4 所示。

表 4

要害部位	离机场距离（千米）	摧毁可能性	
		每枚重型弹	每枚轻型弹
1	450	0.10	0.08
2	480	0.20	0.16
3	540	0.15	0.12
4	600	0.25	0.20

为了使摧毁敌方军事目标的可能性最大，应如何确定飞机轰炸的方案，要求建立这个问题的线性规划模型。

7．用 Matlab 求解下列线性规划问题：

$$\max\ z = 3x_1 - x_2 - x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

8．用 Matlab 求解下列规划问题：

$$\min\quad z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|$$

$$\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -\frac{1}{2}$$

9．一架货机有三个货舱：前舱、中仓和后舱。三个货舱所能装载的货物的最大重量和体积有限制如表 5 所示。并且为了飞机的平衡，三个货舱装载的货物重量必须与其最大的容许量成比例。

表 5　货舱数据

	前舱	中仓	后舱
重量限制（吨）	10	16	8
体积限制（立方米）	6800	8700	5300

现有四类货物用该货机进行装运，货物的规格以及装运后获得的利润如表 6。

表 6　货物规格及利润表

	重量（吨）	空间（立方米/吨）	利润（元/吨）
货物 1	18	480	3100
货物 2	15	650	3800
货物 3	23	580	3500
货物 4	12	390	2850

假设：

（1）每种货物可以无限细分；

（2）每种货物可以分布在一个或者多个货舱内；

（3）不同的货物可以放在同一个货舱内，并且可以保证不留空隙。

问应如何装运，使货机飞行利润最大？

第二章　整数规划

§1　概论

1.1　定义

规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。目前所流行的求解整数规划的方法，往往只适用于整数线性规划。目前还没有一种方法能有效地求解一切整数规划。

1.2　整数规划的分类

如不加特殊说明，一般指整数线性规划。对于整数线性规划模型大致可分为两类：

1° 变量全限制为整数时，称纯（完全）整数规划。

2° 变量部分限制为整数的，称混合整数规划。

1.2　整数规划特点

（i） 原线性规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解出现下述情况：

①原线性规划最优解全是整数，则整数规划最优解与线性规划最优解一致。

②整数规划无可行解。

例 1　原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 = 5, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

其最优实数解为：$x_1 = 0, x_2 = \frac{5}{4}, \min z = \frac{5}{4}$。

③有可行解（当然就存在最优解），但最优解值变差。

例 2　原线性规划为

$$\min \quad z = x_1 + x_2$$
$$2x_1 + 4x_2 = 6, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

其最优实数解为：$x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, \min z = \frac{3}{2}$。

若限制整数得：$x_1 = 1, x_2 = 1, \min z = 2$。

（ii） 整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。

1.3　求解方法分类：

（i）分枝定界法—可求纯或混合整数线性规划。

（ii）割平面法—可求纯或混合整数线性规划。

（iii）隐枚举法—求解“0-1”整数规划：

①过滤隐枚举法；

②分枝隐枚举法。

（iv）匈牙利法—解决指派问题（“0-1”规划特殊情形）。

（v）蒙特卡洛法—求解各种类型规划。

下面将简要介绍常用的几种求解整数规划的方法。

§2　分枝定界法

对有约束条件的最优化问题（其可行解为有限数）的所有可行解空间恰当地进行系统搜索，这就是分枝与定界内容。通常，把全部可行解空间反复地分割为越来越小的子集，称为分枝；并且对每个子集内的解集计算一个目标下界（对于最小值问题），这称为定界。在每次分枝后，凡是界限超出已知可行解集目标值的那些子集不再进一步分枝，

这样，许多子集可不予考虑，这称剪枝。这就是分枝定界法的主要思路。

分枝定界法可用于解纯整数或混合的整数规划问题。在本世纪六十年代初由 Land Doig 和 Dakin 等人提出的。由于这方法灵活且便于用计算机求解，所以现在它已是解整数规划的重要方法。目前已成功地应用于求解生产进度问题、旅行推销员问题、工厂选址问题、背包问题及分配问题等。

设有最大化的整数规划问题 A，与它相应的线性规划为问题 B，从解问题 B 开始，若其最优解不符合 A 的整数条件，那么 B 的最优目标函数必是 A 的最优目标函数 z^* 的上界，记作 $\bar{z}$；而 A 的任意可行解的目标函数值将是 z^* 的一个下界 $\underline{z}$。分枝定界法就是将 B 的可行域分成子区域的方法。逐步减小 $\bar{z}$ 和增大 $\underline{z}$，最终求到 z^*。现用下例来说明：

例 3　求解下述整数规划

$$\text{Max}\quad z=40x_1+90x_2$$

$$\begin{cases}9x_1+7x_2\le 56\\ 7x_1+20x_2\le 70\\ x_1,x_2\ge 0\quad \text{且为整数}\end{cases}$$

解　（i）先不考虑整数限制，即解相应的线性规划 B，得最优解为：

$$x_1=4.8092,x_2=1.8168,z=355.8779$$

可见它不符合整数条件。这时 z 是问题 A 的最优目标函数值 z^* 的上界，记作 $\bar{z}$。而 $x_1=0,x_2=0$ 显然是问题 A 的一个整数可行解，这时 $z=0$，是 z^* 的一个下界，记作 $\underline{z}$，即 $0\le z^*\le 356$。

（ii）因为 x_1,x_2 当前均为非整数，故不满足整数要求，任选一个进行分枝。设选 x_1 进行分枝，把可行集分成 2 个子集：

$$x_1\le[4.8092]=4,\quad x_1\ge[4.8092]+1=5$$

因为 4 与 5 之间无整数，故这两个子集的整数解必与原可行集合整数解一致。这一步称为分枝。这两个子集的规划及求解如下：

问题 B_1：　$\text{Max}\quad z=40x_1+90x_2$

$$\begin{cases}9x_1+7x_2\le 56\\ 7x_1+20x_2\le 70\\ 0\le x_1\le 4,x_2\ge 0\end{cases}$$

最优解为：$x_1=4.0,x_2=2.1,z_1=349$。

问题 B_2：　$\text{Max}\quad z=40x_1+90x_2$

$$\begin{cases}9x_1+7x_2\le 56\\ 7x_1+20x_2\le 70\\ x_1\ge 5,x_2\ge 0\end{cases}$$

最优解为：$x_1=5.0,x_2=1.57,z_1=341.4$。

再定界：$0\le z^*\le 349$。

（iii）对问题 B_1 再进行分枝得问题 B_{11} 和 B_{12}，它们的最优解为

B_{11}： $x_1 = 4, x_2 = 2, z_{11} = 340$

B_{12}： $x_1 = 1.43, \mathrm{x}_2 = 3.00, z_{12} = 327.14$

再定界：$340 \le z^* \le 341$，并将 B_{12} 剪枝。

（iv）对问题 B_2 再进行分枝得问题 B_{21} 和 B_{22}，它们的最优解为

B_{21}： $x_1 = 5.44, \mathrm{x}_2 = 1.00, z_{22} = 308$

B_{22} 无可行解。

将 B_{21}, B_{22} 剪枝。

于是可以断定原问题的最优解为：

$x_1 = 4, x_2 = 2, z^* = 340$

从以上解题过程可得用分枝定界法求解整数规划（最大化）问题的步骤为：

开始，将要求解的整数规划问题称为问题 A，将与它相应的线性规划问题称为问题 B。

（i）解问题 B 可能得到以下情况之一：

（a） B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止.

（b） B 有最优解，并符合问题 A 的整数条件， B 的最优解即为 A 的最优解，则停止。

（c） B 有最优解，但不符合问题 A 的整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$。

（ii）用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取 $x_j = 0, j = 1, \cdots, n$，试探，求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$。以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值；这时有

$$\underline{z} \le z^* \le \bar{z}$$

进行迭代。

第一步：分枝，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_j \le [b_j] \quad 和 \quad x_j \ge [b_j] + 1$$

将这两个约束条件，分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

定界，以每个后继问题为一分枝标明求解的结果，与其它问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{z}$。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界 $\underline{z}$，若无作用 $\underline{z}$ 不变。

第二步：比较与剪枝，各分枝的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这枝，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复第一步骤。一直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止。得最优整数解 $x_j^*, j = 1, \cdots, n$。

§3 $0-1$ 型整数规划

$0-1$ 型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量 x_j 仅取值 0 或 1。这时 x_j 称为 $0-1$ 变量，或称二进制变量。x_j 仅取值 0 或 1 这个条件可由下述约束条件：

$$0 \le x_j \le 1，整数$$

所代替，是和一般整数规划的约束条件形式一致的。在实际问题中，如果引入 $0-1$ 变量，就可以把有各种情况需要分别讨论的线性规划问题统一在一个问题中讨论了。我们先介绍引入 $0-1$ 变量的实际问题，再研究解法。

3.1 引入 $0-1$ 变量的实际问题

3.1.1 投资场所的选定——相互排斥的计划

例 4 某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有 7 个位置（点）$A_i(i=1,2,\cdots,7)$ 可供选择。规定

在东区。由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个；

在西区。由 A_4, A_5 两个点中至少选一个；

在南区，由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用 A_i 点，设备投资估计为 b_i 元，每年可获利润估计为 c_i 元，但投资总额不能超过 B 元。问应选择哪几个点可使年利润为最大？

解题时先引入 $0-1$ 变量 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$

令

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{当}A_i\text{点被选中，}\\ 0, & \text{当}A_i\text{点没被选中.}\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,7.$$

于是问题可列写成：

$$\text{Max} \quad z=\sum_{i=1}^{7}c_i x_i$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{7}b_i x_i \le B\\ x_1+x_2+x_3\le 2\\ x_4+x_5\ge 1\\ x_6+x_7\ge 1, \qquad x_i=0\text{或}1\end{cases}$$

3.1.2 相互排斥的约束条件

有两个相互排斥的约束条件

$5x_1+4x_2\le 24$ 或 $7x_1+3x_2\le 45$。

为了统一在一个问题中，引入 $0-1$ 变量 y，则上述约束条件可改写为：

$$\begin{cases}5x_1+4x_2\le 24+yM\\ 7x_1+3x_2\le 45+(1-y)M\\ y=0\text{或}1\end{cases}$$

其中 M 是充分大的数。

约束条件

$$x_1=0 \quad \text{或} \quad 500\le x_1\le 800$$

可改写为

$$\begin{cases}500y\le x_1\le 800y\\ y=0\text{或}1\end{cases}$$

如果有 m 个互相排斥的约束条件：

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\le b_i \quad i=1,2,\cdots,m$$

为了保证这 m 个约束条件只有一个起作用，我们引入 m 个 $0-1$ 变量 $y_i(i=1,2,\cdots,m)$ 和一个充分大的常数 M ，而下面这一组 $m+1$ 个约束条件

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n\le b_i+y_iM \quad i=1,2,\cdots,m \tag{1}$$

$$y_1+\cdots+y_m=m-1 \tag{2}$$

就合于上述的要求。这是因为，由于（2），m 个 y_i 中只有一个能取 0 值，设 $y_{i^*}=0$，代入（1），就只有 $i=i^*$ 的约束条件起作用，而别的式子都是多余的。

3.1.3 关于固定费用的问题（Fixed Cost Problem）

在讨论线性规划时，有些问题是要求使成本为最小。那时总设固定成本为常数，并在线性规划的模型中不必明显列出。但有些固定费用（固定成本）的问题不能用一般线性规划来描述，但可改变为混合整数规划来解决，见下例。

例 5　某工厂为了生产某种产品，有几种不同的生产方式可供选择，如选定的生产方式投资高（选购自动化程度高的设备），由于产量大，因而分配到每件产品的变动成本就降低；反之，如选定的生产方式投资低，将来分配到每件产品的变动成本可能增加。所以必须全面考虑。今设有三种方式可供选择，令

x_j 表示采用第 j 种方式时的产量；

c_j 表示采用第 j 种方式时每件产品的变动成本；

k_j 表示采用第 j 种方式时的固定成本。

为了说明成本的特点，暂不考虑其它约束条件。采用各种生产方式的总成本分别为

$$P_j=\begin{cases}k_j+c_jx_j, & \text{当}x_j>0\\ 0, & \text{当}x_j=0\end{cases} \qquad j=1,2,3.$$

在构成目标函数时，为了统一在一个问题中讨论，现引入 $0-1$ 变量 y_j，令

$$y_j=\begin{cases}1, & \text{当采用第}j\text{种生产方式，即}x_j>0\text{时，}\\ 0, & \text{当不采用第}j\text{种生产方式，即}x_j=0\text{时.}\end{cases} \tag{3}$$

于是目标函数

$$\min z=(k_1y_1+c_1x_1)+(k_2y_2+c_2x_2)+(k_3y_3+c_3x_3)$$

（3）式这个规定可表为下述 3 个线性约束条件：

$$y_j\varepsilon\le x_j\le y_jM, \quad j=1,2,3 \tag{4}$$

其中 ε 是一个充分小的正常数，M 是个充分大的正常数。（4）式说明，当 $x_j>0$ 时 y_j 必须为 1；当 $x_j=0$ 时只有 y_j 为 0 时才有意义，所以（4）式完全可以代替（3）式。

3.2 $0-1$ 型整数规划解法之一（过滤隐枚举法）

解 $0-1$ 型整数规划最容易想到的方法，和一般整数规划的情形一样，就是穷举法，即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解，这就需要检查变量取值的 2^n 个组合。对于变量个数 n 较大（例如 $n>100$ ），这几乎是不可能的。因此常设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求到问题的最优解。这样的方法称为隐枚举法（Implicit Enumeration），分枝定界法也是一种隐枚举法。当然，对

有些问题隐枚举法并不适用，所以有时穷举法还是必要的。

下面举例说明一种解$0-1$型整数规划的隐枚举法。

例 6　$\text{Max}\quad z=3x_1-2x_2+5x_3$

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3\le 2 \\ x_1+4x_2+x_3\le 4 \\ x_1+x_2\le 3 \\ 4x_2+x_3\le 6 \\ x_1,x_2,x_3=0\text{或}1 \end{cases}$$

求解思路及改进措施：

（i） 先试探性求一个可行解，易看出$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$满足约束条件，故为一个可行解，且$z=3$。

（ii） 因为是求极大值问题，故求最优解时，凡是目标值$z<3$的解不必检验是否满足约束条件即可删除，因它肯定不是最优解，于是应增加一个约束条件（目标值下界）：

（iii） 改进过滤条件。

（iv） 由于对每个组合首先计算目标值以验证过滤条件，故应优先计算目标值 z 大的组合，这样可提前抬高过滤门槛，以减少计算量。

§4 蒙特卡洛法（随机取样法）

前面介绍的常用的整数规划求解方法，主要是针对线性整数规划而言，而对于非线性整数规划目前尚未有一种成熟而准确的求解方法，因为非线性规划本身的通用有效解法尚未找到，更何况是非线性整数规划。

然而，尽管整数规划由于限制变量为整数而增加了难度；然而又由于整数解是有限个，于是为枚举法提供了方便。当然，当自变量维数很大和取值范围很宽情况下，企图用显枚举法（即穷举法）计算出最优值是不现实的，但是应用概率理论可以证明，在一定的计算量的情况下，完全可以得出一个满意解。

例 7　已知非线性整数规划为：

$$\begin{aligned}\text{Max}\ \ z&=x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_4^2+2x_5^2\\ &\quad -8x_1-2x_2-3x_3-x_4-2x_5\end{aligned}$$

$$\begin{cases} 0\le x_i\le 99\quad (i=1,\cdots,5) \\ x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\le 400 \\ x_1+2x_2+2x_3+x_4+6x_5\le 800 \\ 2x_1+x_2+6x_3\le 200 \\ x_3+x_4+5x_5\le 200 \end{cases}$$

如果用显枚举法试探，共需计算$(100)^5=10^{10}$个点，其计算量非常之大。然而应用蒙特卡洛去随机计算10^6个点，便可找到满意解，那么这种方法的可信度究竟怎样呢？

下面就分析随机取样采集10^6个点计算时，应用概率理论来估计一下可信度。

不失一般性，假定一个整数规划的最优点不是孤立的奇点。

假设目标函数落在高值区的概率分别为 0.01，0.00001，则当计算10^6个点后，有

任一个点能落在高值区的概率分别为

$1-0.99^{1000000}\approx 0.99\cdots 99(100\text{多位})$，

$1-0.99999^{1000000}\approx 0.999954602$。

解 （i）首先编写 M 文件 mente.m 定义目标函数 f 和约束向量函数 g，程序如下：

```
function [f,g]=mengte(x);
f=x(1)^2+x(2)^2+3*x(3)^2+4*x(4)^2+2*x(5)-8*x(1)-2*x(2)-3*x(3)-...
x(4)-2*x(5);
g=[sum(x)-400
x(1)+2*x(2)+2*x(3)+x(4)+6*x(5)-800
2*x(1)+x(2)+6*x(3)-200
x(3)+x(4)+5*x(5)-200];
```

（ii）编写M文件mainint.m如下求问题的解：

```
rand('state',sum(clock));
p0=0;
tic
for i=1:10^6
   x=99*rand(5,1);
x1=floor(x);x2=ceil(x);
[f,g]=mengte(x1);
if sum(g<=0)==4
   if p0<=f
      x0=x1;p0=f;
   end
end
[f,g]=mengte(x2);
if sum(g<=0)==4
   if p0<=f
      x0=x2;p0=f;
   end
end
end
x0,p0
toc
```

本题可以使用LINGO软件求得精确的全局最有解，程序如下：

```
model:
sets:
row/1..4/:b;
col/1..5/:c1,c2,x;
link(row,col):a;
endsets
data:
c1=1,1,3,4,2;
c2=-8,-2,-3,-1,-2;
a=1 1 1 1 1
  1 2 2 1 6
  2 1 6 0 0
```

```
  0 0 1 1 5;
b=400,800,200,200;
enddata
max=@sum(col:c1*x^2+c2*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(col:@gin(x));
@for(col:@bnd(0,x,99));
end
```

§5 指派问题的计算机求解

整数规划问题的求解可以使用 Lingo 等专用软件。对于一般的整数规划问题，无法直接利用 Matlab 的函数，必须利用 Matlab 编程实现分枝定界解法和割平面解法。但对于指派问题等$0-1$整数规划问题，可以直接利用 Matlab 的函数 bintprog 进行求解。

例 8　求解下列指派问题，已知指派矩阵为

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 2 & 10 & 3 \\ 8 & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 3 & 5 \\ 9 & 10 & 6 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

解：编写 Matlab 程序如下：

```
c=[3 8 2 10 3;8 7 2 9 7;6 4 2 7 5
   8 4 2 3 5;9 10 6 9 10];
c=c(:);
a=zeros(10,25);
for i=1:5
   a(i,(i-1)*5+1:5*i)=1;
   a(5+i,i:5:25)=1;
end
b=ones(10,1);
[x,y]=bintprog(c,[],[],a,b);
x=reshape(x,[5,5]),y
```

求得最优指派方案为 $x_{15}=x_{23}=x_{32}=x_{44}=x_{51}=1$，最优值为 21。

求解的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
var/1..5/;
link(var,var):c,x;
endsets
data:
c=3 8 2 10 3
  8 7 2 9 7
  6 4 2 7 5
  8 4 2 3 5
  9 10 6 9 10;
enddata
min=@sum(link:c*x);
@for(var(i):@sum(var(j):x(i,j))=1);
@for(var(j):@sum(var(i):x(i,j))=1);
```

```
@for(link:@bin(x));
end
```

§6 生产与销售计划问题

6.1 问题实例

例 9 某公司用两种原油（A 和 B）混合加工成两种汽油（甲和乙）。甲、乙两种汽油含原油的最低比例分别为 50%和 60%，每吨售价分别为 4800 元和 5600 元。该公司现有原油 A 和 B 的库存量分别为 500 吨和 1000 吨，还可以从市场上买到不超过 1500 吨的原油 A。原油 A 的市场价为：购买量不超过 500 吨时的单价为 10000 元/吨；购买量超过 500 吨单不超过 1000 吨时，超过 500 吨的部分 8000 元/吨；购买量超过 1000 吨时，超过 1000 吨的部分 6000 元/吨。该公司应如何安排原油的采购和加工。

6.2 建立模型

（1）问题分析

安排原油采购、加工的目标是利润最大，题目中给出的是两种汽油的售价和原油 A 的采购价，利润为销售汽油的收入与购买原油 A 的支出之差。这里的难点在于原油 A 的采购价与购买量的关系比较复杂，是分段函数关系，能否及如何用线性规划、整数规划模型加以处理是关键所在。

（2）模型建立

设原油 A 的购买量为 x（单位：吨）。根据题目所给数据，采购的支出 $c(x)$ 可表示为如下的分段线性函数（以下价格以千元/吨为单位）：

$$c(x)=\begin{cases}10x, & 0\le x\le 500\\ 1000+8x, & 500\le x\le 1000\\ 3000+6x, & 1000\le x\le 1500\end{cases} \tag{5}$$

设原油 A 用于生产甲、乙两种汽油的数量分别为 x_{11} 和 x_{12}，原油 B 用于生产甲、乙两种汽油的数量分别为 x_{21} 和 x_{22}，则总的收入为 $4.8(x_{11}+x_{21})+5.6(x_{12}+x_{22})$（千元）。于是本例的目标函数（利润）为

$$\max \quad z=4.8(x_{11}+x_{21})+5.6(x_{12}+x_{22})-c(x) \tag{6}$$

约束条件包括加工两种汽油用的原油 A、原油 B 库存量的限制，原油 A 购买量的限制，以及两种汽油含原油 A 的比例限制，它们表示为

$$x_{11}+x_{12}\le 500+x \tag{7}$$

$$x_{21}+x_{22}\le 1000 \tag{8}$$

$$x\le 1500 \tag{9}$$

$$\frac{x_{11}}{x_{11}+x_{21}}\ge 0.5 \tag{10}$$

$$\frac{x_{12}}{x_{12}+x_{22}}\ge 0.6 \tag{11}$$

$$x_{11},x_{12},x_{21},x_{22},x\ge 0 \tag{12}$$

由于（5）式中的 $c(x)$ 不是线性函数，（5）~（12）给出的是一个非线性规划，而且，对于这样用分段函数定义的 $c(x)$，一般的非线性规划软件也难以输入和求解。能不能想办法将该模型化简，从而用现成的软件求解呢？

6.3　求解模型

下面介绍 3 种解法

（1）解法一

一个自然的想法是将原油 A 的采购量 x 分解为三个量，即用 x_1, x_2, x_3 分别表示以价格 10 千元/吨、8 千元/吨、6 千元/吨采购的原油 A 的吨数，总支出为 $c(x)=10x_1+8x_2+6x_3$，且

$$x = x_1 + x_2 + x_3 \tag{13}$$

这时目标函数（6）变为线性函数：

$$\max\ z = 4.8(x_{11}+x_{21}) + 5.6(x_{12}+x_{22}) - (10x_1+8x_2+6x_3) \tag{14}$$

应该注意到，只有当以 10 千元/吨的价格购买 $x_1 = 500$（吨）时，才能以 8 千元/吨的价格购买 $x_2(>0)$，这个条件可以表示为

$$(x_1 - 500)x_2 = 0 \tag{15}$$

同理，只有当以 8 千元/吨的价格购买 $x_2 = 500$（吨）时，才能以 6 千元/吨的价格购买 $x_3(>0)$，于是

$$(x_2 - 500)x_3 = 0 \tag{16}$$

此外，x_1, x_2, x_3 的取值范围是

$$0 \le x_1, x_2, x_3 \le 500 \tag{17}$$

由于有非线性约束（15）、（16），因而（7）～（17）构成非线性规划模型。将该模型输入 LINGO 软件如下：

```
model:
sets:
  var1/1..4/:y; !这里y(1)=x11,y(2)=x21,y(3)=x12,y(4)=x22;
  var2/1..3/:x,c;
endsets
max=4.8*(y(1)+y(2))+5.6*(y(3)+y(4))-@sum(var2:c*x);
y(1)+y(3)<@sum(var2:x)+500;
y(2)+y(4)<1000;
0.5*(y(1)-y(2))>0;
0.4*y(3)-0.6*y(4)>0;
(x(1)-500)*x(2)=0;
(x(2)-500)*x(3)=0;
@for(var2:@bnd(0,x,500));
data:
c=10 8 6;
enddata
end
```

可以用菜单命令“LINGO|Options”在“Global Solver”选项卡上启动全局优化选型，并运行上述程序求得全局最有解：购买 1000 吨原油 A，与库存的 500 吨原油 A 和 1000 吨原油 B 一起，共生产 2500 吨汽油乙，利润为 5000（千元）。

（2）解法二

引入 0－1 变量将（15）和（16）转化为线性约束。

令 $z_1 = 1$，$z_2 = 1$，$z_3 = 1$ 分别表示以 10 千元/吨、8 千元/吨、6 千元/吨的价格采购原油 A，则约束（15）和（16）可以替换为

$500z_2 \le x_1 \le 500z_1$，（18）

$500z_3 \le x_2 \le 500z_2$，（19）

$x_3 \le 500z_3$，（20）

$z_1, z_2, z_3 = 0$ 或 1（21）

式（7）～（14），式（17）～（21）构成混合整数线性规划模型，将它输入 LINGO 软件如下：

```
model:
sets:
  var1/1..4/:y; !这里y(1)=x11,y(2)=x21,y(3)=x12,y(4)=x22;
  var2/1..3/:x,z,c;
endsets
max=4.8*(y(1)+y(2))+5.6*(y(3)+y(4))-@sum(var2:c*x);
y(1)+y(3)<@sum(var2:x)+500;
y(2)+y(4)<1000;
0.5*(y(1)-y(2))>0;
0.4*y(3)-0.6*y(4)>0;
@for(var1(i)|i #lt# 3:500*z(i+1)<x(i);x(i)<500*z(i));
x(3)<500*z(3);
@for(var2:@bin(z));
@for(var2:@bnd(0,x,500));
data:
c=10 8 6;
enddata
end
```

（3）解法三

直接处理分段线性函数 $c(x)$。式（5）表示的函数 $c(x)$ 如图 1 所示。

记 x 轴上的分点为 $b_1 = 0$，$b_2 = 500$，$b_3 = 1000$。当 x 属于第 1 个小区间 $[b_1, b_2]$ 时，记 $x = w_1 b_1 + w_2 b_2$，$w_1 + w_2 = 1$，$w_1, w_2 \ge 0$，因为 $c(x)$ 在 $[b_1, b_2]$ 上是线性的，

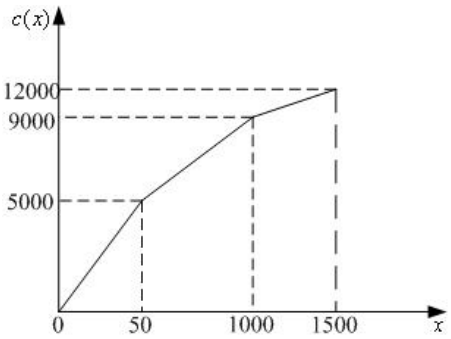


图 1　分段线性函数 $c(x)$ 图形

所以 $c(x) = w_1 c(b_1) + w_2 c(b_2)$。同样，当 x 属于第 2 个小区间 $[b_2, b_3]$ 时，$x = w_2 b_2 + w_3 b_3$，$w_2 + w_3 = 1$，$w_2, w_3 \ge 0$，$c(x) = w_2 c(b_2) + w_3 c(b_3)$。当 x 属于第 3 个小区间 $[b_3, b_4]$ 时，$x = w_3 b_3 + w_4 b_4$，$w_3 + w_4 = 1$，$w_3, w_4 \ge 0$，$c(x) = w_3 c(b_3) + w_4 c(b_4)$。为了表示 x 在哪个小区间，引入 0-1 变量 $z_k (k = 1,2,3)$，当 x 在第 k 个小区间时，$z_k = 1$，否则，$z_k = 0$。这样，$w_1, w_2, w_3, w_4, z_1, z_2, z_3$ 应满

足

$$w_1 \le z_1,\ \ w_2 \le z_1 + z_2,\ \ w_3 \le z_2 + z_3,\ \ w_4 \le z_3 \qquad (22)$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 1,\ \ w_k \ge 0\ (k = 1,2,3,4) \qquad (23)$$

$$z_1 + z_2 + z_3 = 1,\ \ z_1, z_2, z_3 = 0 \text{或} 1 \qquad (24)$$

此时 x 和 $c(x)$ 可以统一地表示为

$$x = w_1 b_1 + w_2 b_2 + w_3 b_3 + w_4 b_4 = 500 w_2 + 1000 w_3 + 1500 w_4 \qquad (25)$$

$$\begin{aligned} c(x) &= w_1 c(b_1) + w_2 c(b_2) + w_3 c(b_3) + w_4 c(b_4) \\ &= 5000 w_2 + 9000 w_3 + 12000 w_4 \end{aligned} \qquad (26)$$

式（6）～（13），式（22）～（26）也构成一个混合整数线性规划模型，可以用 LINGO 求解。输入的 LINGO 模型如下：

```
model:
sets:
  var/1..4/:b,c,y,z,w;
!这里y(1)=x11,y(2)=x21,y(3)=x12,y(4)=x22
端点数为4，即分段数为3;
endsets
data:
b=0,500,1000,1500;
c=0,5000,9000,12000;
z=,,,0;   !增加的虚拟变量z(4)=0;
enddata
max=4.8*(y(1)+y(2))+5.6*(y(3)+y(4))-@sum(var:c*w);
y(1)+y(3)<@sum(var:b*w)+500;
y(2)+y(4)<1000;
0.5*(y(1)-y(2))>0;
0.4*y(3)-0.6*y(4)>0;
w(1)<z(1);
@for(var(i)|i #ne# 1:w(i)<z(i-1)+z(i));
@sum(var:z)=1;
@sum(var:w)=1;
@for(var:@bin(z));
End
```

注：这个问题的关键是处理分段线性函数，我们推荐化为整数线性规划模型的第2和第3种解法，第3种解法更具一般性，其做法如下。

设一个 n 段线性函数 $f(x)$ 的分点为 $b_1 \le \cdots \le b_n \le b_{n+1}$，引入 w_k 将 x 和 $f(x)$ 表示为

$$x = \sum_{k=1}^{n+1} w_k b_k$$

$$f(x_k) = \sum_{k=1}^{n+1} w_k f(b_k)$$

w_k 和0-1变量 z_k 满足

$$w_1 \le z_1,\ \ w_2 \le z_1 + z_2,\ \ \cdots,\ \ w_n \le z_{n-1} + z_n,\ \ w_{n+1} \le z_n \qquad (27)$$

$z_1+z_2+\cdots+z_n=1$，$z_k=0$或1　　（28）

$w_1+w_2+\cdots+w_{n+1}=1$，$w_k\geq 0$（$k=1,2,\cdots,n+1$）　　（29）

习 题 二

1. 用分枝定界法解：

$$\text{Max } z=x_1+x_2$$
$$\begin{cases} x_1+\dfrac{9}{14}x_2\leq\dfrac{51}{14} \\ -2x_1+x_2\leq\dfrac{1}{3} \\ x_1,x_2\geq 0,\ x_1,x_2\text{整数} \end{cases}$$

2. 试将下述非线性的$0-1$规划问题转换成线性的$0-1$规划问题

$$\max \quad z=x_1+x_1x_2-x_3$$
$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3\leq 3 \\ x_j=0\text{或}1,\quad (j=1,2,3) \end{cases}$$

3. 某钻井队要从以下 10 个可供选择的井位中确定 5 个钻井探油，使总的钻探费用为最小。若 10 个井位的代号为$s_1,s_2,\cdots,s_{10}$，相应的钻探费用为$c_1,c_2,\cdots,c_{10}$，并且井位选择上要满足下列限制条件：

（1） 或选择s_1和s_7，或选择钻探s_9；

（2） 选择了s_3或s_4就不能选s_5，或反过来也一样；

（3） 在s_5,s_6,s_7,s_8中最多只能选两个；试建立这个问题的整数规划模型。

4．有一条河流由于河床泥沙淤结，每当上游发生洪水时，就会破堤淹没两岸，造成人员和财产的损失，为减少总的损失，人们采取破堤泄洪的方法，图 2 是该河流一岸区域的信息示意图，在该区域边界上有很高的山，使该区域成为封闭区域。区域内又分成十五个小区，每个小区内标有三个数字，分别表示该区域的海拔高度$h(\text{m})$、面积$S(\text{km}^2)$和被完全淹没时土地、房屋和财产等损失总数k（百万元），我们假设

（a）各小区间有相对高度为 1.2m 的小堤相互隔离，例如第一区和第二区之间事实上有海拔 5.2m 小堤。

（b）当洪水淹没一个小区且洪水高于该小区高度pm 时，该小区的损失$f(k,p)$为该小区的k和p的函数：

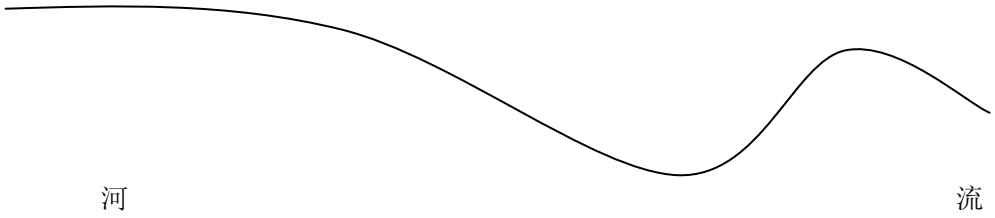
$$f(k,p)=\begin{cases} kp, & 0\leq p\leq 1 \\ k, & p\geq 1 \end{cases}$$

（c）假设决堤口，可选在大堤或小堤的任何地方，决堤口的数量不受限制，但已经决口，就不能再补合，从河流经大堤决口流入小区的洪水量按决口数成比例分配，如在小区之间小堤开一决口，则假设该两小区之间的这段小堤不复存在，若水位高过小堤，则将自动向邻近最低的小区泄洪，若这样的小区有多块时，则平均泄洪。

求

（1）整个区域全部受损失的最小洪水量Q。

（2）当洪水量为$Q/6$，$Q/3$时，分别制定泄洪方案，使总损失最小（在一种方案中，决堤同时进行），并计算出该方案的损失数。



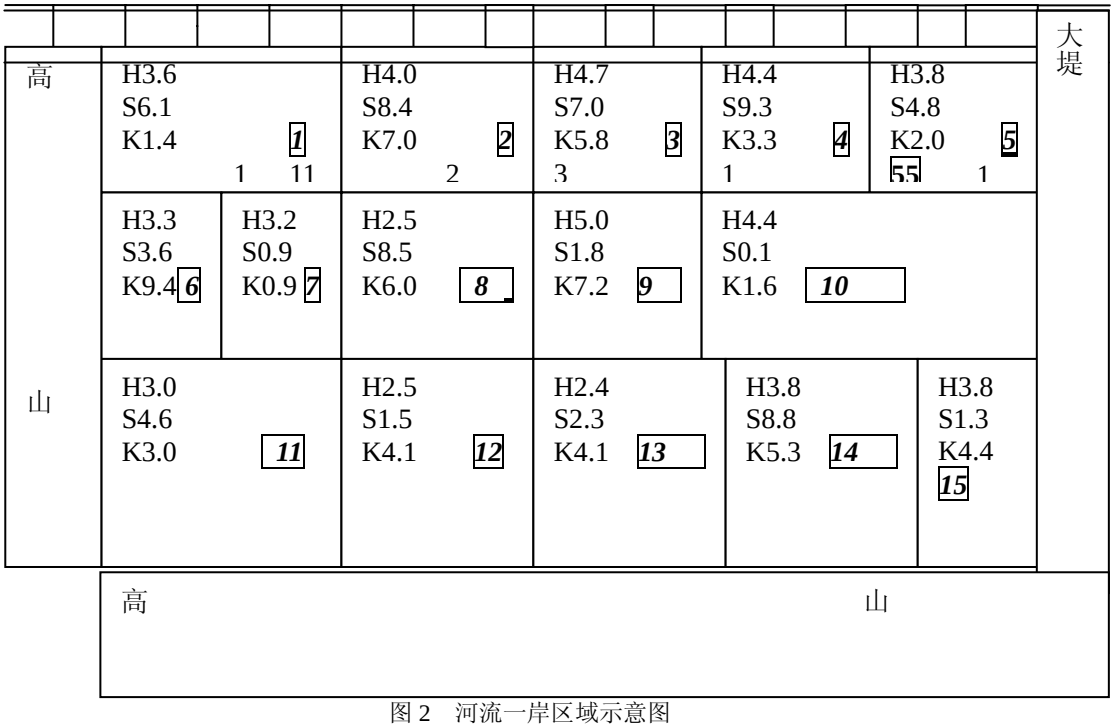


图 2　河流一岸区域示意图

表 1　校址选择数据

备选校址	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
覆盖的居民小区	A_1, A_5 A_7	A_1, A_2 A_5, A_8	$A_1, A_3,$ A_5	A_2, A_4 A_8	A_3, A_6	A_4, A_6 A_8

5．某市为方便小学生上学，拟在新建的 8 个居民小区 $A_1, A_2, \cdots, A_8$ 增设若干所

小学，经过论证知备选校址有: B_1, B_2, …, B_6, 它们能够覆盖的居民小区如表 1。

试建立一个数学模型，确定出最小个数的建校地址，使其能覆盖所有的居民小区。

6. 某公司新购置了某种设备 6 台，欲分配给下属的 4 个企业，已知各企业获得这种设备后年创利润如表 2 所示，单位为千万元。问应如何分配这些设备能使年创总利润最大，最大利润是多少？

表 2　各企业获得设备的年创利润数

设备＼企业	甲	乙	丙	丁
1	4	2	3	4
2	6	4	5	5
3	7	6	7	6
4	7	8	8	6
5	7	9	8	6
6	7	10	8	6

7. 有一场由四个项目(高低杠、平衡木、跳马、自由体操）组成的女子体操团体赛，赛程规定：每个队至多允许 10 名运动员参赛，每一个项目可以有 6 名选手参加。每个选手参赛的成绩评分从高到低依次为：10；9.9；9.8；…；0.1；0。每个代表队的总分是参赛选手所得总分之和，总分最多的代表队为优胜者。此外，还规定每个运动员只能参加全能比赛(四项全参加）与单项比赛这两类中的一类，参加单项比赛的每个运动员至多只能参加三个单项。每个队应有 4 人参加全能比赛，其余运动员参加单项比赛。

表 3　运动员各项目得分及概率分布表

项目＼运动员	1	2	3	4	5
高低杠	8.4~0.15 9.5~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1	9.3~0.1 9.5~0.1 9.6~0.6 9.8~0.2	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.1~0.1 9.1~0.5 9.3~0.3 9.5~0.1	8.4~0.15 9.5~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1
平衡木	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.4~0.15 9.0~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1	8.1~0.1 9.1~0.5 9.3~0.3 9.5~0.1	8.7~0.1 8.9~0.2 9.1~0.6 9.9~0.1	9.0~0.1 9.2~0.1 9.4~0.6 9.7~0.2
跳马	9.1~0.1 9.3~0.1 9.5~0.6 9.8~0.2	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.4~0.15 9.5~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1	9.0~0.1 9.4~0.1 9.5~0.5 9.7~0.3	8.3~0.1 8.7~0.1 8.9~0.6 9.3~0.2
自由体操	8.7~0.1 8.9~0.2 9.1~0.6 9.9~0.1	8.9~0.1 9.1~0.1 9.3~0.6 9.6~0.2	9.5~0.1 9.7~0.1 9.8~0.6 10~0.2	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	9.4~0.1 9.6~0.1 9.7~0.6 9.9~0.2

续表 3　运动员各项目得分及概率分布表

项目＼运动员	6	7	8	9	10

高低杠	9.4~0.1 9.6~0.1 9.7~0.6 9.9~0.2	9.5~0.1 9.7~0.1 9.8~0.6 10~0.2	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.4~0.15 9.5~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1	9.0~0.1 9.2~0.1 9.4~0.6 9.7~0.2
平衡木	8.7~0.1 8.9~0.2 9.1~0.6 9.9~0.1	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.8~0.05 9.2~~0.05 9.8~0.5 10~0.4	8.4~0.1 8.8~0.1 9.2~0.6 9.8~0.2	8.1~0.1 9.1~0.5 9.3~0.3 9.5~0.1
跳马	8.5~0.1 8.7~0.1 8.9~0.5 9.1~0.3	8.3~0.1 8.7~0.1 8.9~0.6 9.3~0.2	8.7~0.1 8.9~0.2 9.1~0.6 9.9~0.1	8.4~0.1 8.8~0.2 9.0~0.6 10~0.1	8.2~0.1 9.2~0.5 9.4~0.3 9.6~0.1
自由体操	8.4~0.15 9.5~0.5 9.2~0.25 9.4~0.1	8.4~0.1 8.8~0.1 9.2~0.6 9.8~0.2	8.2~0.1 9.3~0.5 9.5~0.3 9.8~0.1	9.3~0.1 9.5~0.1 9.7~0.5 9.9~0.3	9.1~0.1 9.3~0.1 9.5~0.6 9.8~0.2

现某代表队的教练已经对其所带领的 10 名运动员参加各个项目的成绩进行了大量测试，教练发现每个运动员在每个单项上的成绩稳定在 4 个得分上(见表 3) ，她们得到这些成绩的相应概率也由统计得出(见表中第二个数据。例如：8.4～0.15 表示取得 8.4 分的概率为 0.15)。试解答以下问题：

（1）每个选手的各单项得分按最悲观估算，在此前提下，请为该队排出一个出场阵容，使该队团体总分尽可能高；每个选手的各单项得分按均值估算，在此前提下，请为该队排出一个出场阵容，使该队团体总分尽可能高。

（2）若对以往的资料及近期各种信息进行分析得到：本次夺冠的团体总分估计为不少于 236.2 分，该队为了夺冠应排出怎样的阵容？以该阵容出战，其夺冠的前景如何？得分前景（即期望值）又如何？它有 90%的把握战胜怎样水平的对手？

第三章　非线性规划

§1　非线性规划

1.1　非线性规划的实例与定义

如果目标函数或约束条件中包含非线性函数，就称这种规划问题为非线性规划问题。一般说来，解非线性规划要比解线性规划问题困难得多。而且，也不象线性规划有单纯形法这一通用方法，非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法，各个方法都有自己特定的适用范围。

下面通过实例归纳出非线性规划数学模型的一般形式，介绍有关非线性规划的基本概念。

例 1　（投资决策问题）某企业有 n 个项目可供选择投资，并且至少要对其中一个项目投资。已知该企业拥有总资金 A 元，投资于第 $i(i=1,\cdots,n)$ 个项目需花资金 a_i 元，并预计可收益 b_i 元。试选择最佳投资方案。

解　设投资决策变量为

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{决定投资第}i\text{个项目}\\ 0, & \text{决定不投资第}i\text{个项目}\end{cases},\quad i=1,\cdots,n,$$

则投资总额为 $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i$，投资总收益为 $\sum_{i=1}^{n}b_ix_i$。因为该公司至少要对一个项目投资，并且总的投资金额不能超过总资金 A，故有限制条件

$$0<\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le A$$

另外，由于 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 只取值 0 或 1，所以还有

$$x_i(1-x_i)=0,\ i=1,\cdots,n.$$

最佳投资方案应是投资额最小而总收益最大的方案，所以这个最佳投资决策问题归结为总资金以及决策变量（取 0 或 1）的限制条件下，极大化总收益和总投资之比。因此，其数学模型为：

$$\max Q=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_ix_i}{\sum_{i=1}^{n}a_ix_i}$$

$$\text{s.t.}\quad 0<\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\le A$$

$$x_i(1-x_i)=0,\ i=1,\cdots,n.$$

上面例题是在一组等式或不等式的约束下，求一个函数的最大值（或最小值）问题，其中至少有一个非线性函数，这类问题称之为非线性规划问题。可概括为一般形式

$$\begin{aligned}&\min\ f(x)\\ &\text{s.t.}\quad h_j(x)\le 0,\quad j=1,\cdots,q\\ &\qquad g_i(x)=0,\quad i=1,\cdots,p\end{aligned}\tag{NP}$$

其中 $x=[x_1 \quad \cdots \quad x_n]^T$ 称为模型（NP）的决策变量，f 称为目标函数，$g_i\ (i=1,\cdots,p)$ 和 $h_j(j=1,\cdots,q)$ 称为约束函数。另外，$g_i(x)=0 \quad (i=1,\cdots,p)$ 称为等式约束，$h_j(x)\le 0 \quad (j=1,\cdots,q)$ 称为不等式的约束。

对于一个实际问题，在把它归结成非线性规划问题时，一般要注意如下几点：

（i）确定供选方案：首先要收集同问题有关的资料和数据，在全面熟悉问题的基础上，确认什么是问题的可供选择的方案，并用一组变量来表示它们。

（ii）提出追求目标：经过资料分析，根据实际需要和可能，提出要追求极小化或极大化的目标。并且，运用各种科学和技术原理，把它表示成数学关系式。

（iii）给出价值标准：在提出要追求的目标之后，要确立所考虑目标的“好”或“坏”的价值标准，并用某种数量形式来描述它。

（iv）寻求限制条件：由于所追求的目标一般都要在一定的条件下取得极小化或极大化效果，因此还需要寻找出问题的所有限制条件，这些条件通常用变量之间的一些不等式或等式来表示。

1.2　线性规划与非线性规划的区别

如果线性规划的最优解存在，其最优解只能在其可行域的边界上达到（特别是可行域的顶点上达到）；而非线性规划的最优解（如果最优解存在）则可能在其可行域的任意一点达到。

1.3　非线性规划的 Matlab 解法

Matlab 中非线性规划的数学模型写成以下形式

$$\min f(x)$$
$$\begin{cases} Ax \le B \\ Aeq \cdot x = Beq \\ C(x) \le 0 \\ Ceq(x) = 0 \end{cases},$$

其中 $f(x)$ 是标量函数，A, B, Aeq, Beq 是相应维数的矩阵和向量，$C(x), Ceq(x)$ 是非线性向量函数。

Matlab 中的命令是

X=FMINCON(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON,OPTIONS)

它的返回值是向量 x，其中 FUN 是用 M 文件定义的函数 $f(x)$；X0 是 x 的初始值；A,B,Aeq,Beq 定义了线性约束 $A*X \le B, Aeq*X = Beq$，如果没有线性约束，则 A=[],B=[],Aeq=[],Beq=[]；LB 和 UB 是变量 x 的下界和上界，如果上界和下界没有约束，则 LB=[]，UB=[]，如果 x 无下界，则 LB 的各分量都为-inf，如果 x 无上界，则 UB 的各分量都为 inf；NONLCON 是用 M 文件定义的非线性向量函数 $C(x), Ceq(x)$；OPTIONS 定义了优化参数，可以使用 Matlab 缺省的参数设置。

例2　求下列非线性规划

$$\min f(x) = x_1^{\,2} + x_2^{\,2} + x_3^2 + 8$$
$$\text{s.t.} \quad x_1^2 - x_2 + x_3^2 \ge 0$$
$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 \le 20$$
$$-x_1 - x_2^{\,2} + 2 = 0$$

$$x_2 + 2x_3^2 = 3$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

解 （i）编写 M 文件 fun1.m 定义目标函数

```
function f=fun1(x);
f=sum(x.^2)+8;
```

（ii）编写M文件fun2.m定义非线性约束条件

```
function [g,h]=fun2(x);
g=[-x(1)^2+x(2)-x(3)^2
   x(1)+x(2)^2+x(3)^3-20];  %非线性不等式约束
h=[-x(1)-x(2)^2+2
   x(2)+2*x(3)^2-3]; %非线性等式约束
```

（iii）编写主程序文件 example2.m 如下：

```
options=optimset('largescale','off');
[x,y]=fmincon('fun1',rand(3,1),[],[],[],[],zeros(3,1),[], ...
'fun2', options)
```

就可以求得当 $x_1 = 0.5522, x_2 = 1.2033, x_3 = 0.9478$ 时，最小值 $y = 10.6511$。

1.4 求解非线性规划的基本迭代格式

记（NP）的可行域为 K。

若 $x^* \in K$，并且

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in K$$

则称 x^* 是（NP）的整体最优解， $f(x^*)$ 是(NP)的整体最优值。如果有

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in K, x \neq x^*$$

则称 x^* 是（NP）的严格整体最优解， $f(x^*)$ 是(NP)的严格整体最优值。

若 $x^* \in K$，并且存在 x^* 的邻域 $N_\delta(x^*)$，使

$$f(x^*) \leq f(x), \quad \forall x \in N_\delta(x^*) \bigcap K,$$

则称 x^* 是（NP）的局部最优解， $f(x^*)$ 是(NP)的局部最优值。如果有

$$f(x^*) < f(x), \quad \forall x \in N_\delta(x^*) \bigcap K$$

则称 x^* 是（NP）的严格局部最优解， $f(x^*)$ 是(NP)的严格局部最优值。

由于线性规划的目标函数为线性函数，可行域为凸集，因而求出的最优解就是整个可行域上的全局最优解。非线性规划却不然，有时求出的某个解虽是一部分可行域上的极值点，但却并不一定是整个可行域上的全局最优解。

对于非线性规划模型(NP)，可以采用迭代方法求它的最优解。迭代方法的基本思想是：从一个选定的初始点 $x^0 \in R^n$ 出发，按照某一特定的迭代规则产生一个点列 $\{x^k\}$，使得当 $\{x^k\}$ 是有穷点列时，其最后一个点是(NP)的最优解；当 $\{x^k\}$ 是无穷点列时，它有极限点，并且其极限点是(NP)的最优解。

设 $x^k \in R^n$ 是某迭代方法的第 k 轮迭代点， $x^{k+1} \in R^n$ 是第 $k+1$ 轮迭代点，记

$$x^{k+1} = x^k + t_k p^k \qquad (1)$$

这里 $t_k \in R^1, p^k \in R^n, \left\| p^k \right\| = 1$，并且 p^k 的方向是从点 x^k 向着点 x^{k+1} 的方向。式（1）就是求解非线性规划模型(NP)的基本迭代格式。

通常，我们把基本迭代格式（1）中的 p^k 称为第 k 轮搜索方向，t_k 为沿 p^k 方向的步长，使用迭代方法求解(NP)的关键在于，如何构造每一轮的搜索方向和确定适当的步长。

设 $\bar{x} \in R^n, p \neq 0$，若存在 $\delta > 0$，使

$$f(\bar{x} + tp) < f(\bar{x}), \forall t \in (0, \delta),$$

称向量 p 是 f 在点 $\bar{x}$ 处的下降方向。

设 $\bar{x} \in R^n, p \neq 0$，若存在 $t > 0$，使

$$\bar{x} + tp \in K,$$

称向量 p 是点 $\bar{x}$ 处关于 K 的可行方向。

一个向量 p，若既是函数 f 在点 $\bar{x}$ 处的下降方向，又是该点关于区域 K 的可行方向，称之为函数 f 在点 $\bar{x}$ 处关于 K 的可行下降方向。

现在，我们给出用基本迭代格式（1）求解(NP)的一般步骤如下：

0° 选取初始点 x^0，令 $k := 0$。

1° 构造搜索方向，依照一定规划，构造 f 在点 x^k 处关于 K 的可行下降方向作为搜索方向 p^k。

2° 寻求搜索步长。以 x^k 为起点沿搜索方向 p^k 寻求适当的步长 t_k，使目标函数值有某种意义的下降。

3° 求出下一个迭代点。按迭代格式（1）求出

$$x^{k+1} = x^k + t_k p^k。$$

若 x^{k+1} 已满足某种终止条件，停止迭代。

4° 以 x^{k+1} 代替 x^k，回到 1°步。

1.5 凸函数、凸规划

设 $f(x)$ 为定义在 n 维欧氏空间 $E^{(n)}$ 中某个凸集 R 上的函数，若对任何实数 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 以及 R 中的任意两点 $x^{(1)}$ 和 $x^{(2)}$，恒有

$$f(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}) \leq \alpha f(x^{(1)}) + (1-\alpha) f(x^{(2)})$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的凸函数。

若对每一个 $\alpha(0 < \alpha < 1)$ 和 $x^{(1)} \neq x^{(2)} \in R$ 恒有

$$f(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}) < \alpha f(x^{(1)}) + (1-\alpha) f(x^{(2)})$$

则称 $f(x)$ 为定义在 R 上的严格凸函数。

考虑非线性规划

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in R} \ f(x) \\ R = \{x \mid g_j(x) \leq 0, j = 1,2,\cdots,l\} \end{cases}$$

假定其中 $f(x)$ 为凸函数，$g_j(x)(j = 1,2,\cdots,l)$ 为凸函数，这样的非线性规划称为凸规划。

可以证明，凸规划的可行域为凸集，其局部最优解即为全局最优解，而且其最优解的集合形成一个凸集。当凸规划的目标函数 $f(x)$ 为严格凸函数时，其最优解必定唯一（假定最优解存在）。由此可见，凸规划是一类比较简单而又具有重要理论意义的非

线性规划。

§2 无约束问题

2.1 一维搜索方法

当用迭代法求函数的极小点时，常常用到一维搜索，即沿某一已知方向求目标函数的极小点。一维搜索的方法很多，常用的有：（1）试探法（“成功—失败”，斐波那契法，0.618 法等）；（2）插值法（抛物线插值法，三次插值法等）；（3）微积分中的求根法（切线法，二分法等）。

考虑一维极小化问题

$$\min_{a\le t\le b} f(t) \tag{2}$$

若 $f(t)$ 是 $[a,b]$ 区间上的下单峰函数，我们介绍通过不断地缩短 $[a,b]$ 的长度，来搜索得（2）的近似最优解的两个方法。

为了缩短区间 $[a,b]$，逐步搜索得（2）的最优解 t^* 的近似值，我们可以采用以下途径：在 $[a,b]$ 中任取两个关于 $[a,b]$ 是对称的点 t_1 和 t_2（不妨设 $t_2<t_1$，并把它们叫做搜索点），计算 $f(t_1)$ 和 $f(t_2)$ 并比较它们的大小。对于单峰函数，若 $f(t_2)<f(t_1)$，则必有 $t^*\in[a,t_1]$，因而 $[a,t_1]$ 是缩短了的单峰区间；若 $f(t_1)<f(t_2)$，则有 $t^*\in[t_2,b]$，故 $[t_2,b]$ 是缩短了的单峰区间；若 $f(t_2)=f(t_1)$，则 $[a,t_1]$ 和 $[t_2,b]$ 都是缩短了的单峰。因此通过两个搜索点处目标函数值大小的比较，总可以获得缩短了的单峰区间。对于新的单峰区间重复上述做法，显然又可获得更短的单峰区间。如此进行，在单峰区间缩短到充分小时，我们可以取最后的搜索点作为（2）最优解的近似值。

应该按照怎样的规则来选取探索点，使给定的单峰区间的长度能尽快地缩短？

2.1.1 Fibonacci 法

如用 F_n 表示计算 n 个函数值能缩短为单位长区间的最大原区间长度，可推出 F_n 满足关系

$$F_0=F_1=1$$
$$F_n=F_{n-2}+F_{n-1},\quad n=2,3,\cdots,$$

数列 $\{F_n\}$ 称为 Fibonacci 数列，F_n 称为第 n 个 Fibonacci 数，相邻两个 Fibonacci 数之比 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$ 称为 Fibonacci 分数。

当用斐波那契法以 n 个探索点来缩短某一区间时，区间长度的第一次缩短率为 $\frac{F_{n-1}}{F_n}$，其后各次分别为 $\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}},\frac{F_{n-3}}{F_{n-2}},\cdots,\frac{F_1}{F_2}$。由此，若 t_1 和 $t_2(t_2<t_1)$ 是单峰区间 $[a,b]$ 中第 1 个和第 2 个探索点的话，那么应有比例关系

$$\frac{t_1-a}{b-a}=\frac{F_{n-1}}{F_n},\quad \frac{t_2-a}{b-a}=\frac{F_{n-2}}{F_n}$$

从而

$$t_1=a+\frac{F_{n-1}}{F_n}(b-a),\ t_2=a+\frac{F_{n-2}}{F_n}(b-a) \tag{3}$$

它们关于 $[a,b]$ 确是对称的点。

如果要求经过一系列探索点搜索之后，使最后的探索点和最优解之间的距离不超过精度$\delta>0$，这就要求最后区间的长度不超过δ，即

$$\frac{b-a}{F_n}\le\delta \tag{4}$$

据此，我们应按照预先给定的精度δ，确定使（4）成立的最小整数n作为搜索次数，直到进行到第n个探索点时停止。

用上述不断缩短函数$f(t)$的单峰区间$[a,b]$的办法，来求得问题（2）的近似解，是 Kiefer(1953 年)提出的，叫做 Finbonacci 法，具体步骤如下：

1° 选取初始数据，确定单峰区间$[a_0,b_0]$，给出搜索精度$\delta>0$，由（4）确定搜索次数n。

2° $k=1,a=a_0,b=b_0$，计算最初两个搜索点，按（3）计算t_1和t_2。

3° while $k<n-1$

$f_1=f(t_1),f_2=f(t_2)$

if $f_1<f_2$

$$a=t_2;t_2=t_1;t_1=a+\frac{F(n-1-k)}{F(n-k)}(b-a)$$

else

$$b=t_1;t_1=t_2;t_2=b+\frac{F(n-1-k)}{F(n-k)}(a-b)$$

end

$k=k+1$

end

4° 当进行至$k=n-1$时，

$$t_1=t_2=\frac{1}{2}(a+b)$$

这就无法借比较函数值$f(t_1)$和$f(t_2)$的大小确定最终区间，为此，取

$$\begin{cases}t_2=\dfrac{1}{2}(a+b)\\ t_1=a+(\dfrac{1}{2}+\varepsilon)(b-a)\end{cases}$$

其中ε为任意小的数。在t_1和t_2这两点中，以函数值较小者为近似极小点，相应的函数值为近似极小值。并得最终区间$[a,t_1]$或$[t_2,b]$。

由上述分析可知，斐波那契法使用对称搜索的方法，逐步缩短所考察的区间，它能以尽量少的函数求值次数，达到预定的某一缩短率。

例 3　试用斐波那契法求函数$f(t)=t^2-t+2$的近似极小点，要求缩短后的区间不大于区间$[-1,3]$的 0.08 倍。

程序留作习题。

2.1.2　0.618 法

若$\omega>0$，满足比例关系

$$\frac{\omega}{1}=\frac{1-\omega}{\omega}$$

称之为黄金分割数，其值为 $\omega=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.6180339887\cdots$。

黄金分割数 ω 和 Fibonacci 分数之间有着重要的关系

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}$$。

现用不变的区间缩短率 0.618，代替斐波那契法每次不同的缩短率，就得到了黄金分割法（0.618 法）。这个方法可以看成是斐波那契法的近似，实现起来比较容易，效果也相当好，因而易于为人们所接受。

用 0.618 法求解，从第 2 个探索点开始每增加一个探索点作一轮迭代以后，原单峰区间要缩短 0.618 倍。计算 n 个探索点的函数值可以把原区间 $[a_0,b_0]$ 连续缩短 $n-1$ 次，因为每次的缩短率均为 μ，故最后的区间长度为

$$(b_0-a_0)\mu^{n-1}$$

这就是说，当已知缩短的相对精度为 δ 时，可用下式计算探索点个数 n：

$$\mu^{n-1}\le\delta$$

当然，也可以不预先计算探索点的数目 n，而在计算过程中逐次加以判断，看是否已满足了提出的精度要求。

0.618 法是一种等速对称进行试探的方法，每次的探索点均取在区间长度的 0.618 倍和 0.382 倍处。

2.2 二次插值法

对极小化问题（2），当 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续时，可以考虑用多项式插值来进行一维搜索。它的基本思想是：在搜索区间中，不断用低次（通常不超过三次）多项式来近似目标函数，并逐步用插值多项式的极小点来逼近（2）的最优解。

2.3 无约束极值问题的解法

无约束极值问题可表述为

$$\min\ f(x),\quad x\in E^{(n)} \tag{5}$$

求解问题（5）的迭代法大体上分为两点：一是用到函数的一阶导数或二阶导数，称为解析法。另一是仅用到函数值，称为直接法。

2.3.1 解析法

2.3.1.1 梯度法（最速下降法）

对基本迭代格式

$$x^{k+1}=x^k+t_k p^k \tag{6}$$

我们总是考虑从点 x^k 出发沿哪一个方向 p^k，使目标函数 f 下降得最快。微积分的知识告诉我们，点 x^k 的负梯度方向

$$p^k=-\nabla f(x^k),$$

是从点 x^k 出发使 f 下降最快的方向。为此，称负梯度方向 $-\nabla f(x^k)$ 为 f 在点 x^k 处的最速下降方向。

按基本迭代格式（6），每一轮从点 x^k 出发沿最速下降方向 $-\nabla f(x^k)$ 作一维搜索，来建立求解无约束极值问题的方法，称之为最速下降法。

这个方法的特点是，每轮的搜索方向都是目标函数在当前点下降最快的方向。同时，用 $\nabla f(x^k)=0$ 或 $\left\|\nabla f(x^k)\right\|\le\varepsilon$ 作为停止条件。其具体步骤如下：

1° 选取初始数据。选取初始点 x^0，给定终止误差，令 $k:=0$。

2° 求梯度向量。计算 $\nabla f(x^k)$，若 $\left\|\nabla f(x^k)\right\|\le\varepsilon$，停止迭代，输出 x^k。否则，进行 3°。

3° 构造负梯度方向。取

$$p^k=-\nabla f(x^k).$$

4° 进行一维搜索。求 t_k，使得

$$f(x^k+t_k p^k)=\min_{t\ge 0} f(x^k+tp^k)$$

令 $x^{k+1}=x^k+t_k p^k, k:=k+1$, 转 2°。

例 4　用最速下降法求解无约束非线性规划问题

$$\min\ f(x)=x_1^2+25x_2^2$$

其中 $x=(x_1,x_2)^T$，要求选取初始点 $x^0=(2,2)^T$。

解　（i）$\nabla f(x)=(2x_1,50x_2)^T$

编写 M 文件 detaf.m，定义函数 $f(x)$ 及其梯度列向量如下

```
function [f,df]=detaf(x);
f=x(1)^2+25*x(2)^2;
df=[2*x(1)
    50*x(2)];
```

（ii）编写主程序文件zuisu.m如下：

```
clc
x=[2;2];
[f0,g]=detaf(x);
while norm(g)>0.000001
   p=-g/norm(g);
   t=1.0;f=detaf(x+t*p);
   while f>f0
      t=t/2;
        f=detaf(x+t*p);
   end
x=x+t*p;
[f0,g]=detaf(x);
end
x,f0
```

2.3.1.2　Newton 法

考虑目标函数 f 在点 x^k 处的二次逼近式

$$f(x)\approx Q(x)=f(x^k)+\nabla f(x^k)^T(x-x^k)+\frac{1}{2}(x-x^k)^T\nabla^2 f(x^k)(x-x^k)$$

假定 Hesse 阵

$$\nabla^2 f(x^k)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_1 \partial x_n}\\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x^k)}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

正定。

由于$\nabla^2 f(x^k)$正定，函数Q的驻点x^{k+1}是$Q(x)$的极小点。为求此极小点，令

$$\nabla Q(x^{k+1})=\nabla f(x^k)+\nabla^2 f(x^k)(x^{k+1}-x^k)=0,$$

即可解得

$$x^{k+1}=x^k-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k).$$

对照基本迭代格式（1），可知从点x^k出发沿搜索方向。

$$p^k=-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k)$$

并取步长$t_k=1$即可得$Q(x)$的最小点x^{k+1}。通常，把方向p^k叫做从点x^k出发的Newton 方向。从一初始点开始，每一轮从当前迭代点出发，沿 Newton 方向并取步长为 1 的求解方法，称之为 Newton 法。其具体步骤如下：

1° 选取初始数据。选取初始点x^0，给定终止误差$\varepsilon>0$，令$k:=0$。

2° 求梯度向量。计算$\nabla f(x^k)$，若$\left\|\nabla f(x^k)\right\|\le\varepsilon$，停止迭代，输出$x^k$。否则，进行 3° 。

3° 构造 Newton 方向。计算$[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$，取

$$p^k=-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k).$$

4° 求下一迭代点。令$x^{k+1}=x^k+p^k, k:=k+1$，转 2° 。

例 5　用 Newton 法求解，

$$\min\ f(x)=x_1^4+25x_2^4+x_1^2x_2^2$$

选取$x^0=(2,2)^T$。

解：（i）$\nabla f(x)=[4x_1^3+2x_1x_2^2 \quad 100x_2^3+2x_1^2x_2]^T$

$$\nabla^2 f=\begin{bmatrix}12x_1^2+2x_2^2 & 4x_1x_2\\ 4x_1x_2 & 300x_2^2+2x_1^2\end{bmatrix}$$

（ii）编写 M 文件 nwfun.m 如下：

```
function [f,df,d2f]=nwfun(x);
f=x(1)^4+25*x(2)^4+x(1)^2*x(2)^2;
df=[4*x(1)^3+2*x(1)*x(2)^2;100*x(2)^3+2*x(1)^2*x(2)];
d2f=[2*x(1)^2+2*x(2)^2,4*x(1)*x(2)
     4*x(1)*x(2),300*x(2)^2+2*x(1)^2];
```

（III）编写主程序文件 example5.m 如下：

```
clc
x=[2;2];
[f0,g1,g2]=nwfun(x);
while norm(g1)>0.00001
   p=-inv(g2)*g1;
   x=x+p;
```

```
  [f0,g1,g2]=nwfun(x);
end
x, f0
```

如果目标函数是非二次函数，一般地说，用 Newton 法通过有限轮迭代并不能保证可求得其最优解。

为了提高计算精度，我们在迭代时可以采用变步长计算上述问题，编写主程序文件 example5_2 如下：

```
clc,clear
x=[2;2];
[f0,g1,g2]=nwfun(x);
while norm(g1)>0.00001
   p=-inv(g2)*g1;p=p/norm(p);
   t=1.0;f=nwfun(x+t*p);
   while f>f0
      t=t/2;f=nwfun(x+t*p);
   end
x=x+t*p;
[f0,g1,g2]=nwfun(x);
end
x,f0
```

Newton 法的优点是收敛速度快；缺点是有时不好用而需采取改进措施，此外，当维数较高时，计算 $-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$ 的工作量很大。

2.3.1.3　变尺度法

变尺度法（Variable Metric Algorithm）是近 20 多年来发展起来的，它不仅是求解无约束极值问题非常有效的算法，而且也已被推广用来求解约束极值问题。由于它既避免了计算二阶导数矩阵及其求逆过程，又比梯度法的收敛速度快，特别是对高维问题具有显著的优越性，因而使变尺度法获得了很高的声誉。下面我们就来简要地介绍一种变尺度法—DFP 法的基本原理及其计算过程。这一方法首先由 Davidon 在 1959 年提出，后经 Fletcher 和 Powell 加以改进。

我们已经知道，牛顿法的搜索方向是 $-[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}\nabla f(x^k)$ ，为了不计算二阶导数矩阵 $[\nabla^2 f(x^k)]$ 及其逆阵，我们设法构造另一个矩阵，用它来逼近二阶导数矩阵的逆阵 $[\nabla^2 f(x^k)]^{-1}$，这一类方法也称拟牛顿法（Quasi-Newton Method）。

下面研究如何构造这样的近似矩阵，并将它记为 $\overline{H}^{(k)}$ 。我们要求：每一步都能以现有的信息来确定下一个搜索方向；每做一次选代，目标函数值均有所下降；这些近似矩阵最后应收敛于解点处的 Hesse 阵的逆阵。

当 $f(x)$ 是二次函数时，其 Hesse 阵为常数阵 A，任两点 x^k 和 x^{k+1} 处的梯度之差为

$$\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^k)=A(x^{k+1}-x^k)$$

或

$$x^{k+1}-x^k=A^{-1}[\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^k)]$$

对于非二次函数，仿照二次函数的情形，要求其 Hesse 阵的逆阵的第 $k+1$ 次近似矩阵 $\overline{H}^{(k+1)}$ 满足关系式

$$x^{k+1}-x^k=\overline{H}^{(k+1)}[\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^k)] \qquad (7)$$

这就是常说的拟 Newton 条件。

若令

$$\begin{cases}\Delta G^{(k)}=\nabla f(x^{k+1})-\nabla f(x^{k})\\ \Delta x^{k}=x^{k+1}-x^{k}\end{cases} \tag{8}$$

则式（7）变为

$$\Delta x^{k}=\overline{H}^{(k+1)}\Delta G^{(k)}, \tag{9}$$

现假定 $\overline{H}^{(k)}$ 已知，用下式求 $\overline{H}^{(k+1)}$（设 $\overline{H}^{(k)}$ 和 $\overline{H}^{(k+1)}$ 均为对称正定阵）：

$$\overline{H}^{(k+1)}=\overline{H}^{(k)}+\Delta\overline{H}^{(k)} \tag{10}$$

其中 $\Delta\overline{H}^{(k)}$ 称为第 k 次校正矩阵。显然，$\overline{H}^{(k+1)}$ 应满足拟 Newton 条件（9），即要求

$$\Delta x^{k}=(\overline{H}^{(k)}+\Delta\overline{H}^{(k)})\Delta G^{(k)}$$

或

$$\Delta\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}=\Delta x^{k}-\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)} \tag{11}$$

由此可以设想，$\Delta\overline{H}^{(k)}$ 的一种比较简单的形式是

$$\Delta\overline{H}^{(k)}=\Delta x^{k}(Q^{(k)})^{T}-\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}(W^{(k)})^{T} \tag{12}$$

其中 $Q^{(k)}$ 和 $W^{(k)}$ 为两个待定列向量。

将式（12）中的 $\Delta\overline{H}^{(k)}$ 代入（11），得

$$\Delta x^{k}(Q^{(k)})^{T}\Delta G^{(k)}-\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}(W^{(k)})^{T}\Delta G^{(k)}=\Delta x^{k}-\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}$$

这说明，应使

$$(Q^{(k)})^{T}\Delta G^{(k)}=(W^{(k)})^{T}\Delta G^{(k)}=1 \tag{13}$$

考虑到 $\Delta\overline{H}^{(k)}$ 应为对称阵，最简单的办法就是取

$$\begin{cases}Q^{(k)}=\eta_{k}\Delta x^{k}\\ W^{(k)}=\xi_{k}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}\end{cases} \tag{14}$$

由式（13）得

$$\eta_{k}(\Delta x^{k})^{T}\Delta G^{(k)}=\xi_{k}(\Delta G^{(k)})^{T}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}=1 \tag{15}$$

若 $(\Delta x^{k})^{T}\Delta G^{(k)}$ 和 $(\Delta G^{(k)})^{T}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}$ 不等于零，则有

$$\begin{cases}\eta_{k}=\dfrac{1}{(\Delta x^{k})^{T}\Delta G^{(k)}}=\dfrac{1}{(\Delta G^{(k)})^{T}\Delta x^{k}}\\ \xi_{k}=\dfrac{1}{(\Delta G^{(k)})^{T}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}}\end{cases} \tag{16}$$

于是，得校正矩阵

$$\Delta\overline{H}^{(k)}=\frac{\Delta x^{k}(\Delta x^{k})^{T}}{(\Delta G^{(k)})^{T}\Delta x^{k}}-\frac{\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}(G^{(k)})^{T}\Delta H^{(k)}}{(\Delta G^{(k)})^{T}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}} \tag{17}$$

从而得到

$$\overline{H}^{(k+1)}=\overline{H}^{(k)}+\frac{\Delta x^{k}(\Delta x^{k})^{T}}{(\Delta G^{(k)})^{T}\Delta x^{k}}-\frac{\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}(G^{(k)})^{T}\Delta H^{(k)}}{(\Delta G^{(k)})^{T}\overline{H}^{(k)}\Delta G^{(k)}} \tag{18}$$

上述矩阵称为尺度矩阵。通常，我们取第一个尺度矩阵 $\overline{H}^{(0)}$ 为单位阵，以后的尺度矩

阵按式（18）逐步形成。可以证明：

（i）当 x^k 不是极小点且 $\overline{H}^{(k)}$ 正定时，式（17）右端两项的分母不为零，从而可按式（18）产生下一个尺度矩阵 $\overline{H}^{(k+1)}$；

（ii）若 $\overline{H}^{(k)}$ 为对称正定阵，则由式（18）产生的 $\overline{H}^{(k+1)}$ 也是对称正定阵；

（iii）由此推出 DFP 法的搜索方向为下降方向。

现将 DFP 变尺度法的计算步骤总结如下。

1° 给定初始点 x^0 及梯度允许误差 $\varepsilon > 0$。

2° 若 $\left\|\nabla f(x^0)\right\| \le \varepsilon$，则 x^0 即为近似极小点，停止迭代，否则，转向下一步。

3° 令

$$\overline{H}^{(0)} = I \quad （单位矩阵），$$

$$p^0 = -\overline{H}^{(0)} \nabla f(x^0)$$

在 p^0 方向进行一维搜索，确定最佳步长 λ_0：

$$\min_{\lambda} f(x^0 + \lambda p^0) = f(x^0 + \lambda_0 p^0)$$

如此可得下一个近似点

$$x^1 = x^0 + \lambda_0 p^0$$

4° 一般地，设已得到近似点 x^k，算出 $\nabla f(x^k)$，若

$$\left\|\nabla f(x^0)\right\| \le \varepsilon$$

则 x^k 即为所求的近似解，停止迭代；否则，计算 $\overline{H}^{(k)}$：

$$\overline{H}^{(k)} = \overline{H}^{(k-1)} + \frac{\Delta x^{k-1}(\Delta x^{k-1})^T}{(\Delta G^{(k-1)})^T \Delta x^{k-1}} - \frac{\overline{H}^{(k-1)} \Delta G^{(k-1)} (G^{(k-1)})^T \Delta H^{(k-1)}}{(\Delta G^{(k-1)})^T \overline{H}^{(k-1)} \Delta G^{(k-1)}}$$

并令 $p^k = -\overline{H}^{(k)} \nabla f(x^k)$，在 p^k 方向上进行一维搜索，得 λ_k，从而可得下一个近似点

$$x^{k+1} = x^k + \lambda_k p^k$$

5° 若 x^{k+1} 满足精度要求，则 x^{k+1} 即为所求的近似解，否则，转回 4°，直到求出某点满足精度要求为止。

2.3.2 直接法

在无约束非线性规划方法中，遇到问题的目标函数不可导或导函数的解析式难以表示时，人们一般需要使用直接搜索方法。同时，由于这些方法一般都比较直观和易于理解，因而在实际应用中常为人们所采用。下面我们介绍 Powell 方法。

这个方法主要由所谓基本搜索、加速搜索和调整搜索方向三部分组成，具体步骤如下：

1° 选取初始数据。选取初始点 x^0，n 个线性无关初始方向，组成初搜索方向组 $\{p^0, p^1, \cdots, p^{n-1}\}$。给定终止误差 $\varepsilon > 0$，令 $k := 0$。

2° 进行基本搜索。令 $y^0 := x^k$，依次沿 $\{p^0, p^1, \cdots, p^{n-1}\}$ 中的方向进行一维搜索。对应地得到辅助迭代点 $y^1, y^2, \cdots, y^n$，即

$$y^j = y^{j-1} + t_{j-1} p^{j-1}$$

$$f(y^{j-1} + t_{j-1} p^{j-1}) = \min_{t \ge 0} f(y^{j-1} + t p^{j-1}), \quad j = 1, \cdots, n$$

3° 构造加速方向。令 $p^n = y^n - y^0$，若 $\|p^n\| \le \varepsilon$，停止迭代，输出 $x^{k+1} = y^n$。否则进行 4° 。

4° 确定调整方向。按下式

$$f(y^{m-1}) - f(y^m) = \max\{f(y^{j-1}) - f(y^j) \mid 1 \le j \le n\}$$

找出 m 。若

$$f(y^0) - 2f(y^n) + f(2y^n - y^0) < 2[f(y^{m-1}) - f(y^m)]$$

成立，进行 5° 。否则，进行 6° 。

5° 调整搜索方向组。令

$$x^{k+1} = y^n + t_n p^n : f(y^n + t_n p^n) = \min_{t \ge 0} f(y^n + tp^n).$$

同时，令

$$\{p^0, p^1, \cdots, p^{n+1}\}_{k+1} := \{p^0, \cdots, p^{m-1}, p^{m+1}, \cdots, p^{n-1}, p^n\},$$

$k := k+1$，转 2° 。

6° 不调整搜索方向组。令 $x^{k+1} := y^n, k := k+1$，转 2° 。

2.4 Matlab 求无约束极值问题

在 Matlab 工具箱中，用于求解无约束极值问题的函数有 fminunc 和 fminsearch，用法介绍如下。

求函数的极小值

$$\min_x f(x),$$

其中 x 可以为标量或向量。

Matlab 中 fminunc 的基本命令是

[X,FVAL]=FMINUNC(FUN,X0,OPTIONS,P1,P2, ...)

其中的返回值 X 是所求得的极小点，FVAL 是函数的极小值，其它返回值的含义参见相关的帮助。FUN 是一个 M 文件，当 FUN 只有一个返回值时，它的返回值是函数 $f(x)$；当 FUN 有两个返回值时，它的第二个返回值是 $f(x)$ 的梯度向量；当 FUN 有三个返回值时，它的第三个返回值是 $f(x)$ 的二阶导数阵（Hessian 阵）。X0 是向量 x 的初始值，OPTIONS 是优化参数，可以使用缺省参数。P1，P2 是可以传递给 FUN 的一些参数。

例 6 求函数 $f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$ 的最小值。

解：编写 M 文件 fun2.m 如下：

```
function [f,g]=fun2(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
g=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1));200*(x(2)-x(1)^2)];
```

编写主函数文件example6.m如下：

```
options = optimset('GradObj','on');
[x,y]=fminunc('fun2',rand(1,2),options)
```

即可求得函数的极小值。

在求极值时，也可以利用二阶导数，编写 M 文件 fun3.m 如下：

```
function [f,df,d2f]=fun3(x);
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
df=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1));200*(x(2)-x(1)^2)];
d2f=[-400*x(2)+1200*x(1)^2+2,-400*x(1)
     -400*x(1),200];
```

编写主函数文件example62.m如下：

```
options = optimset('GradObj','on','Hessian','on');
[x,y]=fminunc('fun3',rand(1,2),options)
```

即可求得函数的极小值。

求多元函数的极值也可以使用 Matlab 的 fminsearch 命令，其使用格式为：

[X,FVAL,EXITFLAG,OUTPUT]＝FMINSEARCH(FUN,X0,OPTIONS,P1,P2,...)

例 7　求函数 $f(x)=\sin(x)+3$ 取最小值时的 x 值。

解　编写 $f(x)$ 的 M 文件 fun4.m 如下：

```
function f=fun4(x);
f=sin(x)+3;
```

编写主函数文件example7.m如下：

```
x0=2;
[x,y]=fminsearch(@fun4,x0)
```

即求得在初值 2 附近的极小点及极小值。

§3　约束极值问题

带有约束条件的极值问题称为约束极值问题，也叫规划问题。

求解约束极值问题要比求解无约束极值问题困难得多。为了简化其优化工作，可采用以下方法：将约束问题化为无约束问题；将非线性规划问题化为线性规划问题，以及能将复杂问题变换为较简单问题的其它方法。

库恩—塔克条件是非线性规划领域中最重要的理论成果之一，是确定某点为最优点的必要条件，但一般说它并不是充分条件（对于凸规划，它既是最优点存在的必要条件，同时也是充分条件）。

3.1　二次规划

若某非线性规划的目标函数为自变量 x 的二次函数，约束条件又全是线性的，就称这种规划为二次规划。

Matlab 中二次规划的数学模型可表述如下：

$$\min \ \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x,$$

$$\text{s.t.} \ \begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \end{cases}$$

这里 H 是实对称矩阵， f, b 是列向量， A 是相应维数的矩阵。

Matlab 中求解二次规划的命令是

[X,FVAL]= QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,OPTIONS)

返回值 X 是决策向量 x 的值，返回值 FVAL 是目标函数在 x 处的值。（具体细节可以参看在 Matlab 指令中运行 help quadprog 后的帮助）。

例 8　求解二次规划

$$\begin{cases} \min \ f(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解　编写如下程序：

```
h=[4,-4;-4,8];
f=[-6;-3];
a=[1,1;4,1];
b=[3;9];
[x,value]=quadprog(h,f,a,b,[],[],zeros(2,1))
```

求得

$$x=\begin{bmatrix}1.9500\\1.0500\end{bmatrix},\ \text{Min}\ f(x)=-11.0250\ 。$$

3.2　罚函数法

利用罚函数法，可将非线性规划问题的求解，转化为求解一系列无约束极值问题，因而也称这种方法为序列无约束最小化技术，简记为 SUMT (Sequential Unconstrained Minization Technique)。

罚函数法求解非线性规划问题的思想是，利用问题中的约束函数作出适当的罚函数，由此构造出带参数的增广目标函数，把问题转化为无约束非线性规划问题。主要有两种形式，一种叫外罚函数法，另一种叫内罚函数法，下面介绍外罚函数法。

考虑问题：

$$\min f(x)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}g_i(x)\le 0,\ i=1,\cdots,r,\\ h_j(x)\ge 0,\ j=1,\cdots,s,\\ k_m(x)=0,\ m=1,\cdots,t\end{cases}$$

取一个充分大的数 $M>0$ ，构造函数

$$P(x,M)=f(x)+M\sum_{i=1}^{r}\max(g_i(x),0)-M\sum_{i=1}^{s}\min(h_i(x),0)+M\sum_{i=1}^{t}|k_i(x)|$$

（或 $P(x,M)=f(x)+M\text{sum}\left(\max\begin{pmatrix}G(x)\\0\end{pmatrix}\right)-M\text{sum}\left(\min\begin{pmatrix}H(x)\\0\end{pmatrix}\right)+M\parallel K(x)\parallel$

这里 $G(x)=\begin{bmatrix}g_1(x) & \cdots & g_r(x)\end{bmatrix}$，$H(x)=\begin{bmatrix}h_1(x) & \cdots & h_s(x)\end{bmatrix}$，

$K(x)=\begin{bmatrix}k_1(x) & \cdots & k_t(t)\end{bmatrix}$，Matlab 中可以直接利用 max 、min 和 sum 函数。）则以增广目标函数 $P(x,M)$ 为目标函数的无约束极值问题

$$\min P(x,M)$$

的最优解 x 也是原问题的最优解。

例 9　求下列非线性规划

$$\begin{cases}\min\ f(x)=x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}+8\\ x_1^{\ 2}-x_2\ge 0\\ -x_1-x_2^{\ 2}+2=0\\ x_1,x_2\ge 0.\end{cases}$$

解　(i)编写 M 文件 test.m

```
function g=test(x);
M=50000;
f=x(1)^2+x(2)^2+8;
g=f-M*min(x(1),0)-M*min(x(2),0)-M*min(x(1)^2-x(2),0)+...
```

```
  M*abs(-x(1)-x(2)^2+2);
```
或者是利用Matlab的求矩阵的极小值和极大值函数编写test.m如下：
```
function g=test(x);
M=50000;
f=x(1)^2+x(2)^2+8;
g=f-M*sum(min([x';zeros(1,2)]))-M*min(x(1)^2-x(2),0)+...
  M*abs(-x(1)-x(2)^2+2);
```
我们也可以修改罚函数的定义，编写test.m如下：
```
function g=test(x);
M=50000;
f=x(1)^2+x(2)^2+8;
g=f-M*min(min(x),0)-M*min(x(1)^2-x(2),0)+M*(-x(1)-x(2)^2+2)^2;
```
(ii)在 Matlab 命令窗口输入

[x,y]=fminunc('test',rand(2,1))

即可求得问题的解。

3.3 Matlab 求约束极值问题

在 Matlab 优化工具箱中，用于求解约束最优化问题的函数有：fminbnd、fmincon、quadprog、fseminf、fminimax，上面我们已经介绍了函数 fmincon 和 quadprog。

3.3.1 fminbnd 函数

求单变量非线性函数在区间上的极小值

$$\min_x f(x),\ x\in[x_1,x_2]$$

Matlab 的命令为

[X,FVAL] = FMINBND(FUN,x1,x2,OPTIONS)，

它的返回值是极小点 x 和函数的极小值。这里 fun 是用 M 文件定义的函数或 Matlab 中的单变量数学函数。

例 10 求函数 $f(x)=(x-3)^2-1, x\in[0,5]$ 的最小值。

解 编写 M 文件 fun5.m

```
function f=fun5(x);
f=(x-3)^2-1;
```

在 Matlab 的命令窗口输入

[x,y]=fminbnd('fun5',0,5)

即可求得极小点和极小值。

3.3.2 fseminf 函数

求

$$\min_x \{F(x)\,|\,C(x)\le 0, Ceq(x)=0, PHI(x,w)\le 0\}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} A*x\le B \\ Aeq*x=Beq \end{cases}$$

其中 $C(x), Ceq(x), PHI(x,w)$ 都是向量函数； w 是附加的向量变量， w 的每个分量都限定在某个区间内。

上述问题的 Matlab 命令格式为

X=FSEMINF(FUN,X0,NTHETA,SEMINFCON,A,B,Aeq,Beq)

其中 FUN 用于定义目标函数 $F(x)$； X0 为 x 的初始值；NTHETA 是半无穷约束 $PHI(x,w)$ 的个数；函数 SEMINFCON 用于定义非线性不等式约束 $C(x)$，非线性等

式约束 $Ceq(x)$ 和半无穷约束 $PHI(x,w)$ 的每一个分量函数，函数 SEMINFCON 有两个输入参量 X 和 S，S 是推荐的取样步长，也许不被使用。

例 11　求函数 $f(x)=(x_1-0.5)^2+(x_2-0.5)^2+(x_3-0.5)^2$ 取最小值时的 x 值，约束为：

$$K_1(x,w_1)=\sin(w_1x_1)\cos(w_1x_2)-\frac{1}{1000}(w_1-50)^2-\sin(w_1x_3)-x_3\le 1$$

$$K_2(x,w_2)=\sin(w_2x_2)\cos(w_2x_1)-\frac{1}{1000}(w_2-50)^2-\sin(w_2x_3)-x_3\le 1$$

$1\le w_1\le 100$，$1\le w_2\le 100$

解　（1）编写 M 文件 fun6.m 定义目标函数如下：

```
function f=fun6(x,s);
f=sum((x-0.5).^2);
```

（2）编写 M 文件 fun7.m 定义约束条件如下：

```
function [c,ceq,k1,k2,s]=fun7(x,s);
c=[];ceq=[];
if isnan(s(1,1))
      s=[0.2,0;0.2 0];
end
%取样值
w1=1:s(1,1):100;
w2=1:s(2,1):100;
%半无穷约束
k1=sin(w1*x(1)).*cos(w1*x(2))-1/1000*(w1-50).^2-sin(w1*x(3))-x(3)-1;
k2=sin(w2*x(2)).*cos(w2*x(1))-1/1000*(w2-50).^2-sin(w2*x(3))-x(3)-1;
%画出半无穷约束的图形
plot(w1,k1,'-',w2,k2,'+');
```

（3）调用函数 fseminf

在 Matlab 的命令窗口输入

```
[x,y]=fseminf(@fun6,rand(3,1),2,@fun7)
```

即可。

3.3.3　fminimax 函数

求解 $\min\limits_{x}\left\{\max\limits_{F_i}F(x)\right\}$

$$\text{s.t.}\begin{cases}A*x\le b\\ Aeq*x=Beq\\ C(x)\le 0\\ Ceq(x)=0\\ LB\le x\le UB\end{cases}$$

其中 $F(x)=\{F_1(x),\cdots,F_m(x)\}$。

上述问题的 Matlab 命令为

```
X=FMINIMAX(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON)
```

例 12　求函数族$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\}$取极大极小值时的 x 值。其中：

$$\begin{cases} f_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2 + 304 \\ f_2(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 \\ f_3(x) = x_1 + 3x_2 - 18 \\ f_4(x) = -x_1 - x_2 \\ f_5(x) = x_1 + x_2 - 8 \end{cases}$$

解　（1）编写 M 文件 fun8.m 定义向量函数如下：

```
function f=fun8(x);
f=[2*x(1)^2+x(2)^2-48*x(1)-40*x(2)+304
    -x(1)^2-3*x(2)^2
    x(1)+3*x(2)-18
    -x(1)-x(2)
    x(1)+x(2)-8];
```

（2）调用函数 fminimax

```
[x,y]=fminimax(@fun8,rand(2,1))
```

3.3.4　利用梯度求解约束优化问题

例 13　已知函数 $f(x) = e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_2 + 1)$，且满足非线性约束：

$$\begin{cases} x_1x_2 - x_1 - x_2 \le -1.5 \\ x_1x_2 \ge -10 \end{cases}$$

求 $\min\limits_x f(x)$

分析：当使用梯度求解上述问题时，效率更高并且结果更准确。

题目中目标函数的梯度为：

$$\begin{bmatrix} e^{x_1}(4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 8x_1 + 6x_2 + 1) \\ e^{x_1}(4x_1 + 4x_2 + 2) \end{bmatrix}$$

解　（1）编写 M 文件 fun9.m 定义目标函数及梯度函数：

```
function [f,df]=fun9(x);
f=exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+2*x(2)+1);
df=[exp(x(1))*(4*x(1)^2+2*x(2)^2+4*x(1)*x(2)+8*x(1)+6*x(2)+1);exp(x(1))*(4*x(2)
+4*x(1)+2)];
```

（2）编写 M 文件 fun10.m 定义约束条件及约束条件的梯度函数：

```
function [c,ceq,dc,dceq]=fun10(x);
c=[x(1)*x(2)-x(1)-x(2)+1.5;-x(1)*x(2)-10];
dc=[x(2)-1,-x(2);x(1)-1,-x(1)];
ceq=[];dceq=[];
```

（3）调用函数 fmincon，编写主函数文件 example13.m 如下：

```
%采用标准算法
options=optimset('largescale','off');
%采用梯度
options=optimset(options,'GradObj','on','GradConstr','on');
[x,y]=fmincon(@fun9,rand(2,1),[],[],[],[],[],[],@fun10,options)
```

3.4 Matlab 优化工具箱的用户图形界面解法

Matlab 优化工具箱中的 optimtool 命令提供了优化问题的用户图形界面解法。optimtool 可应用到所有优化问题的求解，计算结果可以输出到 Matlab 工作空间中。

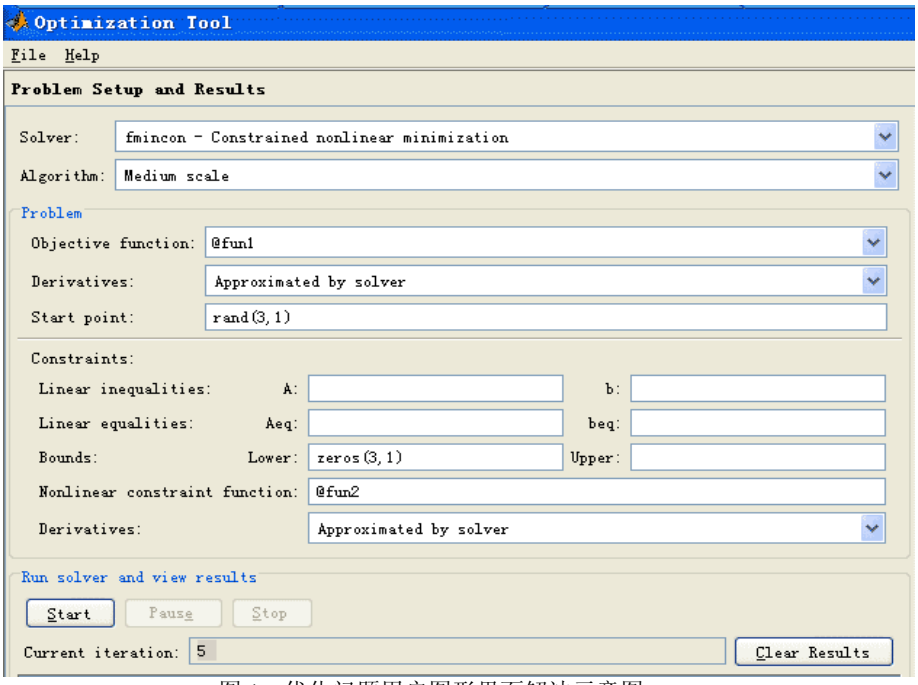


图 1　优化问题用户图形界面解法示意图

例 14　用 optimtool 重新求解例 1。

利用例 1 已经定义好的函数 fun1 和 fun2。在 Matlab 命令窗口运行 optimtool，就打开图形界面，如图 1 所示，填入有关的参数，未填入的参数取值为空或者为默认值，然后用鼠标点一下“start”按钮，就得到求解结果，再使用“file”菜单下的“Export to Workspace…”选项，把计算结果输出到 Matlab 工作空间中去。

§4　飞行管理问题

在约 10，000m 高空的某边长 160km 的正方形区域内，经常有若干架飞机作水平飞行。区域内每架飞机的位置和速度向量均由计算机记录其数据，以便进行飞行管理。当一架欲进入该区域的飞机到达区域边缘时，记录其数据后，要立即计算并判断是否会与区域内的飞机发生碰撞。如果会碰撞，则应计算如何调整各架（包括新进入的）飞机飞行的方向角，以避免碰撞。现假定条件如下：

1）不碰撞的标准为任意两架飞机的距离大于 8km;

2）飞机飞行方向角调整的幅度不应超过 30 度；

3）所有飞机飞行速度均为每小时 800km;

4）进入该区域的飞机在到达区域边缘时，与区域内飞机的距离应在 60km 以上；

5）最多需考虑 6 架飞机；

6）不必考虑飞机离开此区域后的状况。

请你对这个避免碰撞的飞行管理问题建立数学模型，列出计算步骤，对以下数据进行计算（方向角误差不超过 0.01 度），要求飞机飞行方向角调整的幅度尽量小。

设该区域 4 个顶点的座标为(0,0)，(160,0)，(160,160)，(0,160)。记录数据见表 1。

表 1　飞行记录数据

飞机编号	横座标 x	纵座标 y	方向角（度）
1	150	140	243
2	85	85	236
3	150	155	220.5
4	145	50	159
5	130	150	230
新进入	0	0	52

注：方向角指飞行方向与 x 轴正向的夹角。

为方便以后的讨论，我们引进如下记号：

D 为飞行管理区域的边长；

Ω 为飞行管理区域，取直角坐标系使其为 $[0,D]\times[0,D]$；

a 为飞机飞行速度， $a=800$ km/h；

(x_i^0, y_i^0) 为第 i 架飞机的初始位置；

$(x_i(t), y_i(t))$ 为第 i 架飞机在 t 时刻的位置；

θ_i^0 为第 i 架飞机的原飞行方向角，即飞行方向与 x 轴夹角， $0\le\theta_i^0<2\pi$；

$\Delta\theta_i$ 为第 i 架飞机的方向角调整， $-\dfrac{\pi}{6}\le\Delta\theta_i\le\dfrac{\pi}{6}$；

$\theta_i=\theta_i^0+\Delta\theta_i$ 为第 i 架飞机调整后的飞行方向角。

4.1　模型一

根据相对运动的观点在考察两架飞机 i 和 j 的飞行时，可以将飞机 i 视为不动而飞机 j 以相对速度

$$v_{ij}=v_j-v_i=(a\cos\theta_j-a\cos\theta_i, a\sin\theta_j-a\sin\theta_i) \tag{19}$$

相对于飞机 i 运动，对（19）式进行适当的化约可得

$$\begin{aligned} v&=2a\sin\frac{\theta_j-\theta_i}{2}(-\sin\frac{\theta_j+\theta_i}{2},\cos\frac{\theta_j+\theta_i}{2})\\ &=2a\sin\frac{\theta_j-\theta_i}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_j+\theta_i}{2}),\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta_j+\theta_i}{2})) \end{aligned} \tag{20}$$

不妨设 $\theta_j\ge\theta_i$，此时相对飞行方向角为 $\beta_{ij}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta_i+\theta_j}{2}$，见图 2。

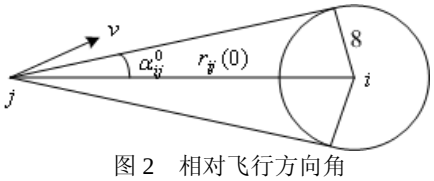


图 2　相对飞行方向角

由于两架飞机的初始距离为

$$r_{ij}(0)=\sqrt{(x_i^0-x_j^0)^2+(y_i^0-y_j^0)^2} \tag{21}$$

$$\alpha_{ij}^0 = \arcsin\frac{8}{r_{ij}(0)} \tag{22}$$

则只要当相对飞行方向角 β_{ij} 满足

$$\alpha_{ij}^0 < \beta_{ij} < 2\pi - \alpha_{ij}^0 \tag{23}$$

时，两架飞机不可能碰撞（见图 2）。

记 β_{ij}^0 为调整前第 j 架飞机相对于第 i 架飞机的相对速度（矢量）与这两架飞机连线（从 j 指向 i 的矢量）的夹角（以连线矢量为基准，逆时针方向为正，顺时针方向为负）。则由式（23）知，两架飞机不碰撞的条件为

$$\left|\beta_{ij}^0 + \frac{1}{2}(\Delta\theta_i + \Delta\theta_j)\right| > \alpha_{ij}^0 \tag{24}$$

其中

$$\beta_{mn}^0 = \text{相对速度 } v_{mn} \text{ 的幅角－从 } n \text{ 指向 } m \text{ 的连线矢量的幅角}$$

$$= \arg\frac{e^{i\theta_n} - e^{i\theta_m}}{(x_m + iy_m) - (x_n + iy_n)}$$

（注意 β_{mn}^0 表达式中的 i 表示虚数单位）这里我们利用复数的幅角，可以很方便地计算角度 β_{mn}^0（$m, n = 1,2,\cdots,6$）。

本问题中的优化目标函数可以有不同的形式：如使所有飞机的最大调整量最小；所有飞机的调整量绝对值之和最小等。这里以所有飞机的调整量绝对值之和最小为目标函数，可以得到如下的数学规划模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{6}\left|\Delta\theta_i\right|$$

$$\text{s.t.} \quad \left|\beta_{ij}^0 + \frac{1}{2}(\Delta\theta_i + \Delta\theta_j)\right| > \alpha_{ij}^0,\ \ i, j = 1,2,\cdots,6,\ \ i \neq j$$

$$\left|\Delta\theta_i\right| \le 30^\circ, \qquad i = 1,2,\cdots,6$$

利用如下的程序：

```
clc,clear
x0=[150 85 150 145 130 0];
y0=[140 85 155 50 150 0];
q=[243 236 220.5 159 230 52];
xy0=[x0; y0];
d0=dist(xy0);     %求矩阵各个列向量之间的距离
d0(find(d0==0))=inf;
a0=asind(8./d0)   %以度为单位的反函数
xy1=x0+i*y0
xy2=exp(i*q*pi/180)
for m=1:6
        for n=1:6
            if n~=m
            b0(m,n)=angle((xy2(n)-xy2(m))/(xy1(m)-xy1(n)));
            end
```

```
        end
    end
    b0=b0*180/pi;
    dlmwrite('txt1.txt',a0,'delimiter', '\t','newline','PC');
    fid=fopen('txt1.txt','a');
    fwrite(fid,'~','char');          %往纯文本文件中写 LINGO 数据的分割符
    dlmwrite('txt1.txt',b0,'delimiter', '\t','newline','PC','-append','roffset', 1)
```

求得 α_{ij}^0 的值如表 2 所示。

表 2　α_{ij}^0 的值

	1	2	3	4	5	6
1	0	5.39119	32.23095	5.091816	20.96336	2.234507
2	5.39119	0	4.804024	6.61346	5.807866	3.815925
3	32.23095	4.804024	0	4.364672	22.83365	2.125539
4	5.091816	6.61346	4.364672	0	4.537692	2.989819
5	20.96336	5.807866	22.83365	4.537692	0	2.309841
6	2.234507	3.815925	2.125539	2.989819	2.309841	0

求得 β_{ij}^0 的值如表 3 所示。

表 3　β_{ij}^0 的值

	1	2	3	4	5	6
1	0	109.26	−128.25	24.18	173.07	14.475
2	109.26	0	−88.871	−42.244	−92.305	9
3	−128.25	−88.871	0	12.476	−58.786	0.31081
4	24.18	−42.244	12.476	0	5.9692	−3.5256
5	173.07	−92.305	−58.786	5.9692	0	1.9144
6	14.475	9	0.31081	−3.5256	1.9144	0

上述飞行管理的数学规划模型可如下输入 LINGO 求解：

```
model:
sets:
plane/1..6/:delta;
link(plane,plane):alpha,beta;
endsets
data:
alpha=@file('txt1.txt');  !需要在alpha的数据后面加上分隔符"~";
beta=@file('txt1.txt');
enddata
min=@sum(plane:@abs(delta));
@for(plane:@bnd(-30,delta,30));
@for(link(i,j)|i#ne#j:@abs(beta(i,j)+0.5*delta(i)+0.5*delta(j))>a
lpha(i,j));
end
```

求得的最优解为 $\Delta\theta_3 = 2.83858^\circ$，$\Delta\theta_5 = -21.0138^\circ$，$\Delta\theta_6 = 0.7908^\circ$，其它调整角度为 0。

4.2　模型二

两架飞机i, j不发生碰撞的条件为

$$(x_i(t)-x_j(t))^2+(y_i(t)-y_j(t))^2>64 \qquad (25)$$

$$1\le i\le 5,\ \ i+1\le j\le 6,\ \ 0\le t\le \min\{T_i,T_j\}$$

其中T_i,T_j分别表示第i, j架飞机飞出正方形区域边界的时刻。这里

$$x_i(t)=x_i^0+at\cos\theta_i,\ \ y_i(t)=y_i^0+at\sin\theta_i,\ \ i=1,2,\cdots,n;$$

$$\theta_i=\theta_i^0+\Delta\theta_i,\ \ |\Delta\theta_i|\le\frac{\pi}{6},\ \ i=1,2,\cdots,n;$$

下面我们把约束条件（25）加强为对所有的时间t都成立，记

$$l_{i,j}=(x_i(t)-x_j(t))^2+(y_i(t)-y_j(t))^2-64=\tilde{a}(i,j)t^2+\tilde{b}(i,j)t+\tilde{c}(i,j)$$

其中$\tilde{a}(i,j)=4a^2\sin^2\dfrac{\theta_i-\theta_j}{2}$,

$$\tilde{b}(i,j)=2a[(x_i(0)-x_j(0))(\cos\theta_i-\cos\theta_j)+(y_i(0)-y_j(0))(\sin\theta_i-\sin\theta_j)]$$

$$\tilde{c}(i,j)=(x_i(0)-x_j(0))^2+(y_i(0)-y_j(0))^2-64$$

则两架i, j飞机不碰撞的条件是

$$\Delta(i,j)=\tilde{b}(i,j)^2-4\tilde{a}(i,j)\tilde{c}(i,j)<0 \qquad (26)$$

这样我们建立如下的非线性规划模型

$$\sum_{i=1}^{6}(\Delta\theta_i)^2$$

s.t. $\Delta(i,j)<0$，$1\le i\le 5$，　$i+1\le j\le 6$

$$|\Delta\theta_i|\le\frac{\pi}{6},\ \ i=1,2,\cdots,6$$

习 题 三

1. 用最速下降法（梯度法）求函数：

$$f(x)=4x_1+6x_2-2x_1^2-2x_1x_2-2x_2^2$$

的极大点。给定初始点$x^0=(1,1)^T$。

2. 试用牛顿法求解：

$$\min f(x)=-\frac{1}{x_1^2+x_2^2+2}$$

取初始点$x^{(0)}=(4,0)^T$，并将采用变步长和采用固定步长$\lambda=1.0$时的情形做比较。

3. 某工厂向用户提供发动机，按合同规定，其交货数量和日期是：第一季度末交40台，第二季末交60台，第三季末交80台。工厂的最大生产能力为每季100台，每季的生产费用是$f(x)=50x+0.2x^2$（元），此处x为该季生产发动机的台数。若工厂生产的多，多余的发动机可移到下季向用户交货，这样，工厂就需支付存贮费，每台发动机每季的存贮费为4元。问该厂每季应生产多少台发动机，才能既满足交货合同，又使工厂所花费的费用最少（假定第一季度开始时发动机无存货）。

4. 用Matlab的非线性规划命令fmincon求解飞行管理问题的模型二。

5. 用罚函数法求解飞行管理问题的模型二。

6. 求下列问题的解

$$\max \ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = 2\boldsymbol{x}_1 + 3\boldsymbol{x}_1^2 + 3\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_2^2 + \boldsymbol{x}_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_1^2 + x_2 + 2x_2^2 + x_3 \le 10$$

$$x_1 + x_1^2 + x_2 + x_2^2 - x_3 \le 50$$

$$2x_1 + x_1^2 + 2x_2 + x_3 \le 40$$

$$x_1^2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 1$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2, x_3 \text{不约束}$$

7.

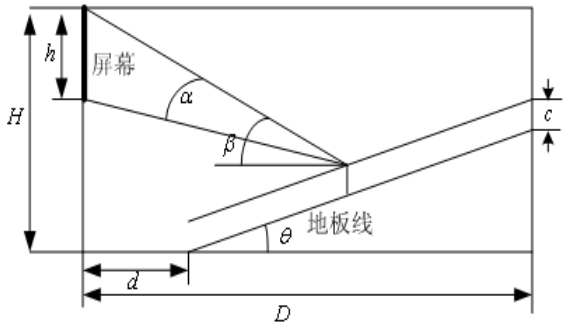


图 3　影院剖面示意图

图 3 为影院的剖面示意图，座位的满意程度主要取决于视角 α 和仰角 β。视角 α 是观众眼睛到屏幕上、下边缘视线的夹角，α 越大越好；仰角 β 是观众眼睛到屏幕上边缘视线与水平线的夹角，β 太大使人的头部过分上仰，引起不舒服感，一般要求 β 不超过 30°。

记影院屏幕高 h，上边缘距地面高 H，地板线倾角 θ，第一排和最后一排座位与屏幕水平距离分别为 d 和 D，观众平均座高为 c（指眼睛到地面的距离）。已知参数 $h=1.8$，$H=5$，$d=4.5$，$D=19$，$c=1.1$（单位：m）。

（1）地板线倾角 $\theta=10^\circ$，问最佳座位在什么地方？

（2）求地板线倾角（一般不超过 20°），使所有观众的平均满意程度最大。

（3）地板线设计成什么形状可以进一步提高观众的满意程度。

第四章　动态规划

§1　引言

1.1　动态规划的发展及研究内容

动态规划（dynamic programming）是运筹学的一个分支，是求解决策过程（decision process）最优化的数学方法。20 世纪 50 年代初 R. E. Bellman 等人在研究多阶段决策过程(multistep decision process)的优化问题时，提出了著名的最优性原理（principle of optimality），把多阶段过程转化为一系列单阶段问题，逐个求解，创立了解决这类过程优化问题的新方法—动态规划。1957 年出版了他的名著《Dynamic Programming》，这是该领域的第一本著作。

动态规划问世以来，在经济管理、生产调度、工程技术和最优控制等方面得到了广泛的应用。例如最短路线、库存管理、资源分配、设备更新、排序、装载等问题，用动态规划方法比用其它方法求解更为方便。

虽然动态规划主要用于求解以时间划分阶段的动态过程的优化问题，但是一些与时间无关的静态规划（如线性规划、非线性规划），只要人为地引进时间因素，把它视为多阶段决策过程，也可以用动态规划方法方便地求解。

应指出，动态规划是求解某类问题的一种方法，是考察问题的一种途径，而不是一种特殊算法（如线性规划是一种算法）。因而，它不象线性规划那样有一个标准的数学表达式和明确定义的一组规则，而必须对具体问题进行具体分析处理。因此，在学习时，除了要对基本概念和方法正确理解外，应以丰富的想象力去建立模型，用创造性的技巧去求解。

例 1　最短路线问题

图 1 是一个线路网，连线上的数字表示两点之间的距离（或费用）。试寻求一条由 A 到 G 距离最短（或费用最省）的路线。

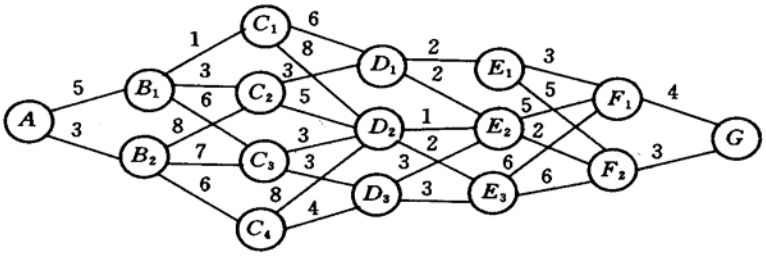


图 1　最短路线问题

例 2　生产计划问题

工厂生产某种产品，每单位（千件）的成本为 1（千元），每次开工的固定成本为 3（千元），工厂每季度的最大生产能力为 6（千件）。经调查，市场对该产品的需求量第一、二、三、四季度分别为 2，3，2，4（千件）。如果工厂在第一、二季度将全年的需求都生产出来，自然可以降低成本（少付固定成本费），但是对于第三、四季度才能上市的产品需付存储费，每季每千件的存储费为 0.5（千元）。还规定年初和年末这种产品均无库存。试制定一个生产计划，即安排每个季度的产量，使一年的总费用（生产成本和存储费）最少。

1.2　决策过程的分类

根据过程的时间变量是离散的还是连续的，分为离散时间决策过程（discrete-time

decision process）和连续时间决策过程（continuous-time decision process）；根据过程的演变是确定的还是随机的，分为确定性决策过程（deterministic decision process）和随机性决策过程（stochastic decision process），其中应用最广的是确定性多阶段决策过程。

§2 基本概念、基本方程和计算方法

2.1 动态规划的基本概念和基本方程

一个多阶段决策过程最优化问题的动态规划模型通常包含以下要素。

2.1.1 阶段

阶段(step)是对整个过程的自然划分。通常根据时间顺序或空间顺序特征来划分阶段，以便按阶段的次序解优化问题。阶段变量一般用 $k=1,2,\cdots,n$ 表示。在例 1 中由 A 出发为 $k=1$，由 $B_i(i=1,2)$ 出发为 $k=2$，依此下去从 $F_i(i=1,2)$ 出发为 $k=6$，共 $n=6$ 个阶段。在例 2 中按照第一、二、三、四季度分为 $k=1,2,3,4$，共四个阶段。

2.1.2 状态

状态（state）表示每个阶段开始时过程所处的自然状况。它应能描述过程的特征并且无后效性，即当某阶段的状态变量给定时，这个阶段以后过程的演变与该阶段以前各阶段的状态无关。通常还要求状态是直接或间接可以观测的。

描述状态的变量称状态变量（state variable）。变量允许取值的范围称允许状态集合(set of admissible states)。用 x_k 表示第 k 阶段的状态变量，它可以是一个数或一个向量。用 X_k 表示第 k 阶段的允许状态集合。在例 1 中 x_2 可取 B_1,B_2，或将 B_i 定义为 $i(i=1,2)$，则 $x_2=1$ 或 2，而 $X_2=\{1,2\}$。

n 个阶段的决策过程有 $n+1$ 个状态变量，x_{n+1} 表示 x_n 演变的结果。在例 1 中 x_7 取 G，或定义为 1，即 $x_7=1$。

根据过程演变的具体情况，状态变量可以是离散的或连续的。为了计算的方便有时将连续变量离散化；为了分析的方便有时又将离散变量视为连续的。

状态变量简称为状态。

2.1.3 决策

当一个阶段的状态确定后，可以作出各种选择从而演变到下一阶段的某个状态，这种选择手段称为决策（decision），在最优控制问题中也称为控制（control）。

描述决策的变量称决策变量（decision variable），变量允许取值的范围称允许决策集合（set of admissible decisions）。用 $u_k(x_k)$ 表示第 k 阶段处于状态 x_k 时的决策变量，它是 x_k 的函数，用 $U_k(x_k)$ 表示 x_k 的允许决策集合。在例 1 中 $u_2(B_1)$ 可取 C_1,C_2 或 C_3，可记作 $u_2(1)=1,2,3$，而 $U_2(1)=\{1,2,3\}$。

决策变量简称决策。

2.1.4 策略

决策组成的序列称为策略（policy）。由初始状态 x_1 开始的全过程的策略记作 $p_{1n}(x_1)$，即

$$p_{1n}(x_1)=\{u_1(x_1),u_2(x_2),\cdots,u_n(x_n)\}.$$

由第 k 阶段的状态 x_k 开始到终止状态的后部子过程的策略记作 $p_{kn}(x_k)$，即

$$p_{kn}(x_k)=\{u_k(x_k),\cdots,u_n(x_n)\},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

类似地，由第 k 到第 j 阶段的子过程的策略记作

$$p_{kj}(x_k)=\{u_k(x_k),\cdots,u_j(x_j)\}.$$

可供选择的策略有一定的范围，称为允许策略集合(set of admissible policies)，用 $P_{1n}(x_1),P_{kn}(x_k),P_{kj}(x_k)$ 表示。

2.1.5. 状态转移方程

在确定性过程中，一旦某阶段的状态和决策为已知，下阶段的状态便完全确定。用状态转移方程（equation of state transition）表示这种演变规律，写作

$$x_{k+1}=T_k(x_k,u_k),k=1,2,\cdots,n. \qquad (1)$$

在例 1 中状态转移方程为 $x_{k+1}=u_k(x_k)$。

2.1.6. 指标函数和最优值函数

指标函数(objective function)是衡量过程优劣的数量指标，它是定义在全过程和所有后部子过程上的数量函数，用 $V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})$ 表示，$k=1,2,\cdots,n$。指标函数应具有可分离性，即 $V_{k,n}$ 可表为 $x_k,u_k,V_{k+1,n}$ 的函数，记为

$$V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})=\varphi_k(x_k,u_k,V_{k+1,n}(x_{k+1},u_{k+1},\cdots,x_{n+1}))$$

并且函数 φ_k 对于变量 $V_{k+1,n}$ 是严格单调的。

过程在第 j 阶段的阶段指标取决于状态 x_j 和决策 u_j，用 $v_j(x_j,u_j)$ 表示。指标函数由 $v_j(j=1,2,\cdots,n)$ 组成，常见的形式有：

阶段指标之和，即

$$V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})=\sum_{j=k}^{n}v_j(x_j,u_j),$$

阶段指标之积，即

$$V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})=\prod_{j=k}^{n}v_j(x_j,u_j),$$

阶段指标之极大（或极小），即

$$V_{k,n}(x_k,u_k,x_{k+1},\cdots,x_{n+1})=\max_{k\le j\le n}(\min)v_j(x_j,u_j).$$

这些形式下第 k 到第 j 阶段子过程的指标函数为 $V_{k,j}(x_k,u_k,\cdots,x_{j+1})$。

根据状态转移方程指标函数 $V_{k,n}$ 还可以表示为状态 x_k 和策略 p_{kn} 的函数，即 $V_{k,n}(x_k,p_{kn})$。在 x_k 给定时指标函数 $V_{k,n}$ 对 p_{kn} 的最优值称为最优值函数（optimal value function），记为 $f_k(x_k)$，即

$$f_k(x_k)=\operatorname*{opt}_{p_{kn}\in P_{kn}(x_k)}V_{k,n}(x_k,p_{kn}),$$

其中 opt 可根据具体情况取 max 或 min。

2.1.7 最优策略和最优轨线

使指标函数 $V_{k,n}$ 达到最优值的策略是从 k 开始的后部子过程的最优策略，记作 $p_{kn}^*=\{u_k^*,\cdots,u_n^*\}$。$p_{1n}^*$ 是全过程的最优策略，简称最优策略（optimal policy）。从初始状态 $x_1(=x_1^*)$ 出发，过程按照 p_{1n}^* 和状态转移方程演变所经历的状态序列 $\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_{n+1}^*\}$ 称最优轨线（optimal trajectory）。

2.1.8　递归方程

如下方程称为递归方程

$$\begin{cases} f_{n+1}(x_{n+1})=0\text{或}1 \\ f_k(x_k)=\underset{u_k\in U_k(x_k)}{\text{opt}}\{v_k(x_k,u_k)\otimes f_{k+1}(x_{k+1})\},k=n,\cdots,1 \end{cases} \tag{2}$$

在上述方程中，当$\otimes$为加法时取$f_{n+1}(x_{n+1})=0$；当$\otimes$为乘法时，取$f_{n+1}(x_{n+1})=1$。动态规划递归方程是动态规划的最优性原理的基础，即：最优策略的子策略，构成最优子策略。用状态转移方程（1）和递归方程（2）求解动态规划的过程，是由$k=n+1$逆推至$k=1$，故这种解法称为逆序解法。当然，对某些动态规划问题，也可采用顺序解法。这时，状态转移方程和递归方程分别为：

$$x_k=T_k^r(x_{k+1},u_k),k=1,\cdots,n \quad ,$$

$$\begin{cases} f_0(x_1)=0\text{或}1 \\ f_k(x_{k+1})=\underset{u_k\in U_{k+1}^r(x_{k+1})}{\text{opt}}\{v_k(x_{k+1},u_k)\otimes f_{k-1}(x_k)\},k=1,\cdots,n \end{cases}$$

例 3　用 lingo 求解例 1 最短路线问题。

```
model:
Title Dynamic Programming;
sets:
vertex/A,B1,B2,C1,C2,C3,C4,D1,D2,D3,E1,E2,E3,F1,F2,G/:L;
road(vertex,vertex)/A B1,A B2,B1 C1,B1 C2,B1 c3,B2 C2,B2 C3,B2 C4,
C1 D1,C1 D2,C2 D1,C2 D2,C3 D2,C3 D3,C4 D2,C4 D3,
D1 E1,D1 E2,D2 E2,D2 E3,D3 E2,D3 E3,
E1 F1,E1 F2,E2 F1,E2 F2,E3 F1,E3 F2,F1 G,F2 G/:D;
endsets
data:
D=5 3 1 3 6 8 7 6
6 8 3 5 3 3 8 4
2 2 1 2 3 3
3 5 5 2 6 6 4 3;
L=0,,,,,,,,,,,,,,,;
enddata
@for(vertex(i)|i#GT#1:L(i)=@min(road(j,i):L(j)+D(j,i)));
end
```

纵上所述，如果一个问题能用动态规划方法求解，那么，我们可以按下列步骤，首先建立起动态规划的数学模型：

（i）将过程划分成恰当的阶段。

（ii）正确选择状态变量x_k，使它既能描述过程的状态，又满足无后效性，同时确定允许状态集合X_k。

（iii）选择决策变量u_k，确定允许决策集合$U_k(x_k)$。

（iv）写出状态转移方程。

（v）确定阶段指标$v_k(x_k,u_k)$及指标函数V_{kn}的形式（阶段指标之和，阶段指标之积，阶段指标之极大或极小等）。

（vi）写出基本方程即最优值函数满足的递归方程，以及端点条件。

§3　逆序解法的计算框图

以自由终端、固定始端、指标函数取和的形式的逆序解法为例给出计算框图，其它情况容易在这个基础上修改得到。

一般化的自由终端条件为

$$f_{n+1}(x_{n+1,i})=\varphi(x_{n+1,i}),\quad i=1,2,\cdots,n_{n+1} \tag{3}$$

其中φ为已知。固定始端条件可表示为$X_1=\{x_1\}=\{x_1^*\}$。

如果状态x_k和决策u_k是连续变量，用数值方法求解时需按照精度要求进行离散化。设状态x_k的允许集合为

$$X_k=\{x_{ki}\mid i=1,2,\cdots,n_k\},\quad i=1,2,\cdots,n_k,k=1,2,\cdots,n.$$

决策$u_{ki}(x_{ki})$的允许集合为

$$U_{ki}=\{u_{ki}^{(j)}\mid j=1,2,\cdots,n_{ki}\},i=1,2,\cdots,n_k,k=1,2,\cdots,n.$$

状态转移方程和阶段指标应对x_k的每个取值x_{ki}和u_{ki}的每个取值$u_{ki}^{(j)}$计算，即$T_k=T_k(x_{ki},u_{ki}^{(j)})$，$v_k=v(x_{ki},u_{ki}^{(j)})$。最优值函数应对$x_k$的每个取值$x_{ki}$计算。基本方程可以表为

$$\begin{aligned}&f_k^{(j)}(x_{ki})=v_k(x_{ki},u_{ki}^{(j)})+f_{k+1}(T_k(x_{ki},u_{ki}^{(j)})),\\&f_k(x_{ki})=\operatorname*{opt}_j f_k^{(j)}(x_{ki}),\\&j=1,2,\cdots,n_{ki},i=1,2,\cdots,n_k,k=n,\cdots,2,1.\end{aligned} \tag{4}$$

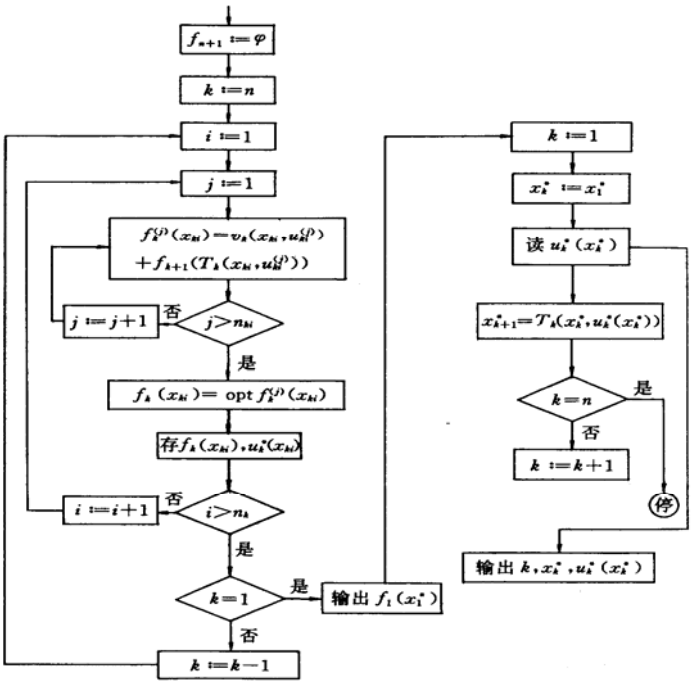


图 2　解法框图

按照（3），（4）逆向计算出 $f_1(x_1^*)$，为全过程的最优值。记状态 x_{ki} 的最优决策为 $u_{ki}^*(x_{ki})$，由 x_1^* 和 $u_{ki}^*(x_{ki})$ 按照状态转移方程计算出最优状态，记作 x_k^*。并得到相应的最优决策，记作 $u_k^*(x_k^*)$。于是最优策略为 $\{u_1^*(x_1^*),u_2^*(x_2^*),\cdots,u_n^*(x_n^*)\}$。

算法程序的框图如图 2 所示。

图的左边部分是函数序列的递推计算，可输出全过程最优值 $f_1(x_1^*)$，如果需要还可以输出后部子过程最优值函数序列 $f_k(x_{ki})$ 和最优决策序列 $u_k^*(x_{ki})$。计算过程中存 $f_k(x_{ki})$ 是备计算 f_{k-1} 之用，在 f_{k-1} 算完后可用 f_{k-1} 将 f_k 替换掉；存 $u_k^*(x_{ki})$ 是备右边部分读 $u_k^*(x_k^*)$ 之用。

图的右边部分是最优状态和最优决策序列的正向计算，可输出最优策略 $\{u_1^*(x_1^*),u_2^*(x_2^*),\cdots,u_n^*(x_n^*)\}$ 和最优轨线 $\{x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*\}$。

§4　动态规划与静态规划的关系

动态规划与静态规划（线性和非线性规划等）研究的对象本质上都是在若干约束条件下的函数极值问题。两种规划在很多情况下原则上可以相互转换。

动态规划可以看作求决策 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 使指标函数 $V_{1n}(x_1,u_1,\ u_2,\cdots,u_n)$ 达到最优（最大或最小）的极值问题，状态转移方程、端点条件以及允许状态集、允许决策集等是约束条件，原则上可以用非线性规划方法求解。

一些静态规划只要适当引入阶段变量、状态、决策等就可以用动态规划方法求解。下面用例子说明。

例 4　用动态规划解下列非线性规划

$$\max \quad \sum_{k=1}^{n} g_k(u_k);$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{n} u_k = a,\ u_k \geq 0.$$

其中 $g_k(u_k)$ 为任意的已知函数。

解　按变量 u_k 的序号划分阶段，看作 n 段决策过程。设状态为 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$，取问题中的变量 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 为决策。状态转移方程为

$$x_1 = a, x_{k+1} = x_k - u_k, k = 1,2,\cdots,n.$$

取 $g_k(u_k)$ 为阶段指标，最优值函数的基本方程为（注意到 $x_{n+1}=0$）

$$f_k(x_k) = \max_{0\leq u_k \leq x_k} [g_k(x_k) + f_{k+1}(x_{k+1})];$$

$$0 \leq x_k \leq a,\ k = n,n-1,\cdots,2,1;$$

$$f_{n+1}(0) = 0.$$

按照逆序解法求出对应于 x_k 每个取值的最优决策 $u_k^*(x_k)$，计算至 $f_1(a)$ 后即可利用状态转移方程得到最优状态序列 $\{x_k^*\}$ 和最优决策序列 $\{u_k^*(x_k^*)\}$。

与静态规划相比，动态规划的优越性在于：

（i）能够得到全局最优解。由于约束条件确定的约束集合往往很复杂，即使指标函数较简单，用非线性规划方法也很难求出全局最优解。而动态规划方法把全过程化为

一系列结构相似的子问题，每个子问题的变量个数大大减少，约束集合也简单得多，易于得到全局最优解。特别是对于约束集合、状态转移和指标函数不能用分析形式给出的优化问题，可以对每个子过程用枚举法求解，而约束条件越多，决策的搜索范围越小，求解也越容易。对于这类问题，动态规划通常是求全局最优解的唯一方法。

（ii）可以得到一族最优解。与非线性规划只能得到全过程的一个最优解不同，动态规划得到的是全过程及所有后部子过程的各个状态的一族最优解。有些实际问题需要这样的解族，即使不需要，它们在分析最优策略和最优值对于状态的稳定性时也是很有用的。当最优策略由于某些原因不能实现时，这样的解族可以用来寻找次优策略。

（iii）能够利用经验提高求解效率。如果实际问题本身就是动态的，由于动态规划方法反映了过程逐段演变的前后联系和动态特征，在计算中可以利用实际知识和经验提高求解效率。如在策略迭代法中，实际经验能够帮助选择较好的初始策略，提高收敛速度。

动态规划的主要缺点是：

（i）没有统一的标准模型，也没有构造模型的通用方法，甚至还没有判断一个问题能否构造动态规划模型的准则。这样就只能对每类问题进行具体分析，构造具体的模型。对于较复杂的问题在选择状态、决策、确定状态转移规律等方面需要丰富的想象力和灵活的技巧性，这就带来了应用上的局限性。

（ii）用数值方法求解时存在维数灾（curse of dimensionality）。若一维状态变量有 m 个取值，那么对于 n 维问题，状态 x_k 就有 m^n 个值，对于每个状态值都要计算、存储函数 $f_k(x_k)$，对于 n 稍大的实际问题的计算往往是不现实的。目前还没有克服维数灾的有效的一般方法。

§5 若干典型问题的动态规划模型

5.1 最短路线问题

对于例 1 一类最短路线问题（shortest Path Problem），阶段按过程的演变划分，状态由各段的初始位置确定，决策为从各个状态出发的走向，即有 $x_{k+1}=u_k(x_k)$，阶段指标为相邻两段状态间的距离 $d_k(x_k,u_k(x_k))$，指标函数为阶段指标之和，最优值函数 $f_k(x_k)$ 是由 x_k 出发到终点的最短距离（或最小费用），基本方程为

$$f_k(x_k)=\min_{u_k(x_k)}[d_k(x_k,u_k(x_k))+f_{k+1}(x_{k+1})],\ k=n,\cdots,1;$$

$$f_{n+1}(x_{n+1})=0.$$

利用这个模型可以算出例 l 的最短路线为 $AB_1C_2D_1E_2F_2G$，相应的最短距离为 18。

5.2 生产计划问题

对于例 2 一类生产计划问题（Production planning problem），阶段按计划时间自然划分，状态定义为每阶段开始时的储存量 x_k，决策为每个阶段的产量 u_k，记每个阶段的需求量（已知量）为 d_k，则状态转移方程为

$$x_{k+1}=x_k+u_k-d_k,\ x_k\geq 0,k=1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

设每阶段开工的固定成本费为 a，生产单位数量产品的成本费为 b，每阶段单位数量产品的储存费为 c，阶段指标为阶段的生产成本和储存费之和，即

$$v_k(x_k,u_k)=cx_k+\begin{cases}a+bu_k, & u_k>0\\ 0\end{cases} \tag{6}$$

指标函数V_{kn}为v_k之和。最优值函数$f_k(x_k)$为从第k段的状态x_k出发到过程终结的最小费用，满足

$$f_k(x_k)=\min_{u_k\in U_k}[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})],\ k=n,\cdots,1.$$

其中允许决策集合U_k由每阶段的最大生产能力决定。若设过程终结时允许存储量为x_{n+1}^0，则终端条件是

$$f_{n+1}(x_{n+1}^0)=0. \tag{7}$$

（5）~（7）构成该问题的动态规划模型。

5.3　资源分配问题

一种或几种资源（包括资金）分配给若干用户，或投资于几家企业，以获得最大的效益。资源分配问题（resource allocating Problem）可以是多阶段决策过程，也可以是静态规划问题，都能构造动态规划模型求解。下面举例说明。

例 5　机器可以在高、低两种负荷下生产。u台机器在高负荷下的年产量是$g(u)$，在低负荷下的年产量是$h(u)$，高、低负荷下机器的年损耗率分别是a_1和b_1（$0<b_1<a_1<1$）。现有m台机器，要安排一个n年的负荷分配计划，即每年初决定多少台机器投入高、低负荷运行，使n年的总产量最大。如果进一步假设$g(u)=\alpha u$，$h(u)=\beta u$（$\alpha>\beta>0$），即高、低负荷下每台机器的年产量分别为α和β，结果将有什么特点。

解　年度为阶段变量$k=1,2,\cdots,n$。状态x_k为第k年初完好的机器数，决策u_k为第k年投入高负荷运行的台数。当x_k或u_k不是整数时，将小数部分理解为一年中正常工作时间或投入高负荷运行时间的比例。

机器在高、低负荷下的年完好率分别记为a和b，则$a=1-a_1$，$b=1-b_1$，有$a<b$。因为第k年投入低负荷运行的机器台数为x_k-u_k，所以状态转移方程是

$$x_{k+1}=au_k+b(x_k-u_k) \tag{8}$$

阶段指标v_k是第k年的产量，有

$$v_k(x_k,u_k)=g(u_k)+h(x_k-u_k) \tag{9}$$

指标函数是阶段指标之和，最优值函数$f_k(x_k)$满足

$$\begin{gathered}f_k(x_k)=\max_{0\le u_k\le x_k}[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})],\\ 0\le x_k\le m,\quad k=n,\cdots,2,1.\end{gathered} \tag{10}$$

及自由终端条件

$$f_{n+1}(x_{n+1})=0,\quad 0\le x_{n+1}\le m. \tag{11}$$

当v_k中的g,h用较简单的函数表达式给出时，对于每个k可以用解析方法求解极值问题。特别，若$g(u)=\alpha u$，$h(u)=\beta u$，（10）中的$[v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_k)]$将是$u_k$的线性函数，最大值点必在区间$0\le u_k\le x_k$的左端点$u_k=0$或右端点$u_k=x_k$取得，即每年初将完好的机器全部投入低负荷或高负荷运行。

§6　具体的应用实例

例 6　设某工厂有 1000 台机器，生产两种产品A、B，若投入x台机器生产A产

品，则纯收入为$5x$，若投入y台机器生产B种产品，则纯收入为$4y$，又知：生产A种产品机器的年折损率为 20%，生产B产品机器的年折损率为 10%，问在 5 年内如何安排各年度的生产计划，才能使总收入最高？

解　年度为阶段变量$k=1,2,3,4,5$。

令x_k表示第k年初完好机器数，u_k表示第k年安排生产A种产品的机器数，则x_k-u_k为第k年安排生产B种产品的机器数，且$0\le u_k\le x_k$。

则第$k+1$年初完好的机器数

$$x_{k+1}=(1-0.2)u_k+(1-0.1)(x_k-u_k)=0.9x_k-0.1u_k \qquad (12)$$

令$v_k(x_k,u_k)$表示第k年的纯收入，$f_k(x_k)$表示第k年初往后各年的最大利润之和。

显然

$$f_6(x_6)=0 \qquad (13)$$

则

$$f_k(x_k)=\max_{0\le u_k\le x_k}\{v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

$$=\max_{0\le u_k\le x_k}\{5u_k+4(x_k-u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}=\max_{0\le u_k\le x_k}\{u_k+4x_k+f_{k+1}(x_{k+1})\} \qquad (14)$$

（1）$k=5$时，由（13）、（14）式得

$$f_5(x_5)=\max_{0\le u_5\le x_5}\{u_5+4x_5\}$$

u_5+4x_5关于u_5求导，知其导数大于零，所以u_5+4x_5在u_5等于x_5处取得最大值，即$u_5=x_5$时，$f_5(x_5)=5x_5$。

（2）$k=4$时，由（12）、（14）式得

$$f_4(x_4)=\max_{0\le u_4\le x_4}\{u_4+4x_4+5x_5\}$$

$$=\max_{0\le u_4\le x_4}\{u_4+4x_4+5(0.9x_4-0.1u_4)\}=\max_{0\le u_4\le x_4}\{0.5u_4+8.5x_4\}$$

当$u_4=x_4$时，$f_4(x_4)=9x_4$

（3）$k=3$时，

$$f_3(x_3)=\max_{0\le u_3\le x_3}\{u_3+4x_3+9x_4\}$$

$$=\max_{0\le u_3\le x_3}\{u_3+4x_3+9(0.9x_3-0.1u_3)\}=\max_{0\le u_3\le x_3}\{0.1u_3+12.1x_3\}$$

当$u_3=x_3$时，$f_3(x_3)=12.2x_3$

（4）$k=2$时，

$$f_2(x_2)=\max_{0\le u_2\le x_2}\{u_2+4x_2+12.2x_3\}=\max_{0\le u_2\le x_2}\{-0.22u_2+14.98x_2\}$$

当$u_2=0$时，$f_2(x_2)=14.98x_2$。

（5）$k=1$时，

$$f_1(x_1)=\max_{0\le u_1\le x_1}\{u_1+4x_1+14.98x_2\}=\max_{0\le u_1\le x_1}\{-0.498u_1+17.482x_1\}$$

当$u_1=0$时，$f_1(x_1)=17.482x_1$。因为

$$x_1=1000\text{（台）}$$

所以由（12）式，进行回代得

$$x_2 = 0.9x_1 - 0.1u_1 = 900$$（台）

$$x_3 = 0.9x_2 - 0.1u_2 = 810$$（台）

$$x_4 = 0.9x_3 - 0.1u_3 = 648$$（台）

$$x_5 = 0.9x_4 - 0.1u_4 = 518.4$$（台）

注：$x_5 = 518.4$台中的0.4台应理解为有一台机器只能使用0.4年将报废。

例7　求解下面问题

$$\max\ z = u_1u_2^2u_3$$

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = c \quad (c > 0) \\ u_i \geq 0 \quad i = 1,2,3 \end{cases}$$

解：　按问题的变量个数划分阶段，把它看作为一个三阶段决策问题。设状态变量为x_1, x_2, x_3, x_4，并记$x_1 = c$；取问题中的变量u_1, u_2, u_3为决策变量；各阶段指标函数按乘积方式结合。令最优值函数$f_k(x_k)$表示第k阶段的初始状态为x_k，从k阶段到3阶段所得到的最大值。

设$x_3 = u_3$，　$x_3 + u_2 = x_2$，　$x_2 + u_1 = x_1 = c$

则有

$$u_3 = x_3, \quad 0 \leq u_2 \leq x_2, \quad 0 \leq u_1 \leq x_1$$

用逆推解法，从后向前依次有

$$f_3(x_3) = \max_{u_3 = x_3}\{u_3\} = x_3 \text{ 及最优解 } u_3^* = x_3$$

$$f_2(x_2) = \max_{0 \leq u_2 \leq x_2}\{u_2^2 f_3(x_3)\} = \max_{0 \leq u_2 \leq x_2}\{u_2^2(x_2 - u_2)\} = \max_{0 \leq u_2 \leq x_2} h_2(u_2, x_2)$$

由$\dfrac{dh_2}{du_2} = 2u_2x_2 - 3u_2^2 = 0$，得$u_2 = \dfrac{2}{3}x_2$和$u_2 = 0$（舍去）

又$\dfrac{d^2h_2}{du_2^2} = 2x_2 - 6u_2$，而$\left.\dfrac{d^2h_2}{du_2^2}\right|_{u_2 = \frac{2}{3}x_2} = -2x_2 < 0$，故$u_2 = \dfrac{2}{3}x_2$为极大值点。

所以$f_2(x_2) = \dfrac{4}{27}x_2^3$及最优解$u_2^* = \dfrac{2}{3}x_2$。

$$f_1(x_1) = \max_{0 \leq u_1 \leq x_1}\{u_1 f_2(x_2)\} = \max_{0 \leq u_1 \leq x_1}\{u_1 \frac{4}{27}(x_1 - u_1)^3\}$$

同样利用微分法易知$f_1(x_1) = \dfrac{1}{64}x_1^4$，最优解$u_1^* = \dfrac{1}{4}x_1$。

由于x_1已知，因而按计算的顺序反推算，可得各阶段的最优决策和最优值。即

$$u_1^* = \frac{1}{4}c, \quad f_1(x_1) = \frac{1}{64}c^4$$

由

$$x_2 = x_1 - u_1^* = c - \frac{1}{4}c = \frac{3}{4}c$$

所以

$$u_2^* = \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{2}c\,,\quad f_2(x_2) = \frac{1}{16}c^3$$

由

$$x_3 = x_2 - u_2^* = \frac{3}{4}c - \frac{1}{2}c = \frac{1}{4}c$$

所以

$$u_3^* = \frac{1}{4}c\,,\quad f_3(x_3) = \frac{1}{4}c$$

因此得到最优解为：$u_1^* = \frac{1}{4}c$，$u_2^* = \frac{1}{2}c$，$u_3^* = \frac{1}{4}c$；

最大值为：$\max z = f_1(c) = \frac{1}{64}c^4$。

习 题 四

1. 用 Matlab 编程求例 6 的解。

2. 有四个工人，要指派他们分别完成 4 项工作，每人做各项工作所消耗的时间如表 1 所示。

表 1

工作 / 工人	*A*	*B*	*C*	*D*
甲	15	18	21	24
乙	19	23	22	18
丙	26	17	16	19
丁	19	21	23	17

问指派哪个人去完成哪项工作，可使总的消耗时间为最小？试对此问题用动态规划方法求解。

3. 为保证某一设备的正常运转，需备有三种不同的零件 E_1, E_2, E_3。若增加备用零件的数量，可提高设备正常运转的可靠性，但增加了费用，而投资额仅为 8000 元。已知备用零件数与它的可靠性和费用的关系如表 2 所示。

表 2

备件数	增加的可靠性			设备的费用（千元）		
	E_1	E_2	E_3	E_1	E_2	E_3
1	0.3	0.2	0.1	1	3	2
2	0.4	0.5	0.2	2	5	3
3	0.5	0.9	0.7	3	6	4

现要求在既不超出投资额的限制，又能尽量提高设备运转的可靠性的条件下，问各种零件的备件数量应是多少为好？

4. 某工厂购进 100 台机器，准备生产 I、II 两种产品，若生产产品 I，每台机器每年可收入 45 万元，损坏率为 65%；若生产产品 II，每台机器每年收入为 35 万元，损坏率为 35%，估计三年后将有新型机器出现，旧的机器将全部淘汰。试问每年应如何

安排生产，使在三年内收入最多？

5．3 名商人各带 1 名随从乘船渡河，一只小船只能容纳 2 人，由他们自己划行。随从们密约，在河的任一岸，一旦随从人数比商人多，就杀商人。此密约被商人知道，如何乘船渡河的大权掌握在商人们手中，商人们怎样安排每次乘船方案，才能安全渡河呢？

6．某一印刷厂有六项加工任务，对印刷车间和装订车间所需时间（单位：天）如表 3 所示，试求最优的加工顺序和总加工天数。

表 3

任务 车间	1	2	3	4	5	6
印刷车间	3	10	5	2	9	11
装订车间	8	12	9	6	5	2

第五章　图与网络模型及方法

§1 概论

图论起源于 18 世纪。第一篇图论论文是瑞士数学家欧拉于 1736 年发表的“哥尼斯堡的七座桥”。1847 年，克希霍夫为了给出电网络方程而引进了“树”的概念。1857 年，凯莱在计数烷C_nH_{2n+2}的同分异构物时，也发现了“树”。哈密尔顿于 1859 年提出“周游世界”游戏，用图论的术语，就是如何找出一个连通图中的生成圈、近几十年来，由于计算机技术和科学的飞速发展，大大地促进了图论研究和应用，图论的理论和方法已经渗透到物理、化学、通讯科学、建筑学、运筹学，生物遗传学、心理学、经济学、社会学等学科中。

图论中所谓的“图”是指某类具体事物和这些事物之间的联系。如果我们用点表示这些具体事物，用连接两点的线段（直的或曲的）表示两个事物的特定的联系，就得到了描述这个“图”的几何形象。图论为任何一个包含了一种二元关系的离散系统提供了一个数学模型，借助于图论的概念、理论和方法，可以对该模型求解。哥尼斯堡七桥问题就是一个典型的例子。在哥尼斯堡有七座桥将普莱格尔河中的两个岛及岛与河岸联结起来，问题是要从这四块陆地中的任何一块开始通过每一座桥正好一次，再回到起点。

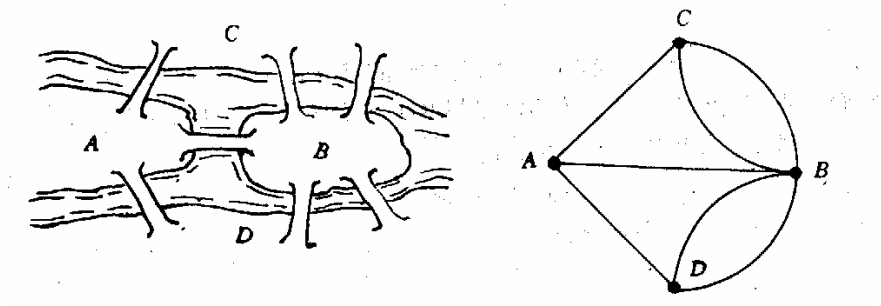


图 1　哥尼斯堡七桥问题

当然可以通过试验去尝试解决这个问题，但该城居民的任何尝试均未成功。欧拉为了解决这个问题，采用了建立数学模型的方法。他将每一块陆地用一个点来代替，将每一座桥用连接相应两点的一条线来代替，从而得到一个有四个“点”，七条“线”的“图”。问题成为从任一点出发一笔画出七条线再回到起点。欧拉考察了一般一笔画的结构特点，给出了一笔画的一个判定法则：这个图是连通的，且每个点都与偶数线相关联，将这个判定法则应用于七桥问题，得到了“不可能走通”的结果，不但彻底解决了这个问题，而且开创了图论研究的先河。

图与网络是运筹学（Operations Research）中的一个经典和重要的分支，所研究的问题涉及经济管理、工业工程、交通运输、计算机科学与信息技术、通讯与网络技术等诸多领域。下面将要讨论的最短路问题、最大流问题、最小费用流问题和匹配问题等都是图与网络的基本问题。

我们首先通过一些例子来了解网络优化问题。

例 1　最短路问题（SPP－shortest path problem）

一名货柜车司机奉命在最短的时间内将一车货物从甲地运往乙地。从甲地到乙地的公路网纵横交错，因此有多种行车路线，这名司机应选择哪条线路呢？假设货柜车的运行速度是恒定的，那么这一问题相当于需要找到一条从甲地到乙地的最短路。

例 2　公路连接问题

某一地区有若干个主要城市，现准备修建高速公路把这些城市连接起来，使得从其

中任何一个城市都可以经高速公路直接或间接到达另一个城市。假定已经知道了任意两个城市之间修建高速公路的成本，那么应如何决定在哪些城市间修建高速公路，使得总成本最小？

例 3　指派问题（assignment problem）

一家公司经理准备安排 N 名员工去完成 N 项任务，每人一项。由于各员工的特点不同，不同的员工去完成同一项任务时所获得的回报是不同的。如何分配工作方案可以使总回报最大？

例 4　中国邮递员问题（CPP－chinese postman problem）

一名邮递员负责投递某个街区的邮件。如何为他（她）设计一条最短的投递路线（从邮局出发，经过投递区内每条街道至少一次，最后返回邮局）？由于这一问题是我国管梅谷教授 1960 年首先提出的，所以国际上称之为中国邮递员问题。

例 5　旅行商问题（TSP－traveling salesman problem）

一名推销员准备前往若干城市推销产品。如何为他（她）设计一条最短的旅行路线（从驻地出发，经过每个城市恰好一次，最后返回驻地）？这一问题的研究历史十分悠久，通常称之为旅行商问题。

例 6　运输问题（transportation problem）

某种原材料有 M 个产地，现在需要将原材料从产地运往 N 个使用这些原材料的工厂。假定 M 个产地的产量和 N 家工厂的需要量已知，单位产品从任一产地到任一工厂的运费已知，那么如何安排运输方案可以使总运输成本最低？

上述问题有两个共同的特点：一是它们的目的都是从若干可能的安排或方案中寻求某种意义下的最优安排或方案，数学上把这种问题称为最优化或优化（optimization）问题；二是它们都易于用图形的形式直观地描述和表达，数学上把这种与图相关的结构称为网络（network）。与图和网络相关的最优化问题就是网络最优化或称网络优化（netwok optimization）问题。所以上面例子中介绍的问题都是网络优化问题。由于多数网络优化问题是以网络上的流（flow）为研究的对象，因此网络优化又常常被称为网络流（network flows）或网络流规划等。

下面首先简要介绍图与网络的一些基本概念。

§2 图与网络的基本概念

2.1 无向图

一个无向图(undirected graph) G 是由一个非空有限集合 $V(G)$ 和 $V(G)$ 中某些元素的无序对集合 $E(G)$ 构成的二元组，记为 $G=(V(G),E(G))$。其中 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 称为图 G 的顶点集（vertex set）或节点集（node set），$V(G)$ 中的每一个元素 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 称为该图的一个顶点（vertex）或节点（node）；$E(G)=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ 称为图 G 的边集（edge set），$E(G)$ 中的每一个元素 e_k (即 $V(G)$ 中某两个元素 v_i,v_j 的无序对) 记为 $e_k=(v_i,v_j)$ 或 $e_k=v_iv_j=v_jv_i$　$(k=1,2,\cdots,m)$，被称为该图的一条从 v_i 到 v_j 的边（edge）。

当边 $e_k=v_iv_j$ 时，称 v_i,v_j 为边 e_k 的端点，并称 v_j 与 v_i 相邻（adjacent）；边 e_k 称为与顶点 v_i,v_j 关联（incident）。如果某两条边至少有一个公共端点，则称这两条边在图 G 中相邻。

边上赋权的无向图称为赋权无向图或无向网络（undirected network）。我们对图和网络不作严格区分，因为任何图总是可以赋权的。

一个图称为**有限图**，如果它的顶点集和边集都有限。图G的顶点数用符号$|V|$或$\nu(G)$表示，边数用$|E|$或$\varepsilon(G)$表示。

当讨论的图只有一个时，总是用G来表示这个图。从而在图论符号中我们常略去字母G，例如，分别用V,E,ν和ε代替$V(G),E(G),\nu(G)$和$\varepsilon(G)$。

端点重合为一点的边称为**环**(loop)。

一个图称为**简单图**(simple graph)，如果它既没有环也没有两条边连接同一对顶点。

2.2 有向图

定义 一个有向图（directed graph 或 digraph）G是由一个非空有限集合V和V中某些元素的有序对集合A构成的二元组，记为$G=(V,A)$。其中$V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$称为图G的顶点集或节点集，V中的每一个元素$v_i(i=1,2,\cdots,n)$称为该图的一个顶点或节点；$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$称为图G的弧集（arc set），A中的每一个元素a_k(即V中某两个元素v_i,v_j的有序对) 记为$a_k=(v_i,v_j)$或$a_k=v_iv_j(k=1,2,\cdots,n)$，被称为该图的一条从$v_i$到$v_j$的弧（arc）。

当弧$a_k=v_iv_j$时，称v_i为a_k的尾（tail），v_j为a_k的头（head），并称弧a_k为v_i的出弧（outgoing arc），为v_j的入弧（incoming arc）。

对应于每个有向图D，可以在相同顶点集上作一个图G，使得对于D的每条弧，G有一条有相同端点的边与之相对应。这个图称为D的基础图。反之，给定任意图G，对于它的每个边，给其端点指定一个顺序，从而确定一条弧，由此得到一个有向图，这样的有向图称为G的一个定向图。

以下若未指明“有向图”三字，“图”字皆指无向图。

2.3 完全图、二分图

每一对不同的顶点都有一条边相连的简单图称为完全图(complete graph)。n个顶点的完全图记为K_n。

若$V(G)=X\bigcup Y$，$X\bigcap Y=\Phi$，$|X||Y|\neq 0$（这里$|X|$表示集合X中的元素个数），X中无相邻顶点对，Y中亦然，则称G为二分图(bipartite graph)；特别地，若$\forall x\in X,\forall y\in Y$，则$xy\in E(G)$，则称$G$为完全二分图，记成$K_{|X|,|Y|}$。

2.4 子图

图H叫做图G的**子图（subgraph）**，记作$H\subset G$，如果$V(H)\subset V(G)$，$E(H)\subset E(G)$。若H是G的子图，则G称为H的**母图**。

G的支撑子图（spanning subgraph，又成生成子图）是指满足$V(H)=V(G)$的子图H。

2.5 顶点的度

设$v\in V(G)$，G中与v关联的边数（每个环算作两条边）称为v的度(degree)，记作$d(v)$。若$d(v)$是奇数，称v是奇顶点(odd point)；$d(v)$是偶数，称v是偶顶点(even point)。关于顶点的度，我们有如下结果：

(i) $\sum_{v\in V}d(v)=2\varepsilon$

(ii) 任意一个图的奇顶点的个数是偶数。

2.6 图与网络的数据结构

网络优化研究的是网络上的各种优化模型与算法。为了在计算机上实现网络优化的算法，首先我们必须有一种方法（即数据结构）在计算机上来描述图与网络。一般来说，算法的好坏与网络的具体表示方法，以及中间结果的操作方案是有关系的。这里我们介绍计算机上用来描述图与网络的 5 种常用表示方法：邻接矩阵表示法、关联矩阵表示法、弧表表示法、邻接表表示法和星形表示法。在下面数据结构的讨论中，我们首先假设 $G=(V,A)$ 是一个简单有向图，$|V|=n,|A|=m$，并假设 V 中的顶点用自然数 $1,2,\cdots,n$ 表示或编号， A 中的弧用自然数 $1,2,\cdots,m$ 表示或编号。对于有多重边或无向网络的情况，我们只是在讨论完简单有向图的表示方法之后，给出一些说明。

（i）邻接矩阵表示法

邻接矩阵表示法是将图以邻接矩阵（adjacency matrix）的形式存储在计算机中。图 $G=(V,A)$ 的邻接矩阵是如下定义的： C 是一个 $n\times n$ 的 $0-1$ 矩阵，即

$$C=(c_{ij})_{n\times n}\in\{0,1\}^{n\times n},$$

$$c_{ij}=\begin{cases}1, & (i,j)\in A,\\ 0, & (i,j)\notin A.\end{cases}$$

也就是说，如果两节点之间有一条弧，则邻接矩阵中对应的元素为 1；否则为 0。可以看出，这种表示法非常简单、直接。但是，在邻接矩阵的所有 n^2 个元素中，只有 m 个为非零元。如果网络比较稀疏，这种表示法浪费大量的存储空间，从而增加了在网络中查找弧的时间。

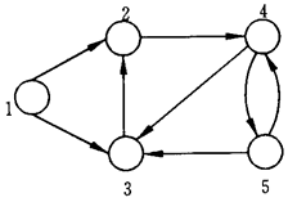


图 2　有向图

例 7　对于图 2 所示的有向图，可以用邻接矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}0&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\end{bmatrix}$$

同样，对于网络中的权，也可以用类似邻接矩阵的 $n\times n$ 矩阵表示。只是此时一条弧所对应的元素不再是 1，而是相应的权而已。如果网络中每条弧赋有多种权，则可以用多个矩阵表示这些权。

（ii）关联矩阵表示法

关联矩阵表示法是将图以关联矩阵（incidence matrix）的形式存储在计算机中．图 $G=(V,A)$ 的关联矩阵 B 是如下定义的： B 是一个 $n\times m$ 的矩阵，即

$$B=(b_{ik})_{n\times m}\in\{-1,0,1\}^{n\times m},$$

$$b_{ik}=\begin{cases}1, & \exists j\in V, k=(i,j)\in A,\\ -1, & \exists j\in V, k=(j,i)\in A,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$$

也就是说，在关联矩阵中，每行对应于图的一个节点，每列对应于图的一条弧。如果一个节点是一条弧的起点，则关联矩阵中对应的元素为 1；如果一个节点是一条弧的终点，则关联矩阵中对应的元素为 -1；如果一个节点与一条弧不关联，则关联矩阵中对应的元素为 0。对于简单图，关联矩阵每列只含有两个非零元（一个 $+1$，一个 -1）。可以看出，这种表示法也非常简单、直接。但是，在关联矩阵的所有 nm 个元素中，只有 $2m$ 个为非零元。如果网络比较稀疏，这种表示法也会浪费大量的存储空间。但由于关联矩阵有许多特别重要的理论性质，因此它在网络优化中是非常重要的概念。

例 8　对于例 7 所示的图，如果关联矩阵中每列对应弧的顺序为(1,2)，(1,3)，(2,4)，(3,2)，(4,3)，(4,5)，(5,3)和(5,4)，则关联矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

同样，对于网络中的权，也可以通过对关联矩阵的扩展来表示。例如，如果网络中每条弧有一个权，我们可以把关联矩阵增加一行，把每一条弧所对应的权存储在增加的行中。如果网络中每条弧赋有多个权，我们可以把关联矩阵增加相应的行数，把每一条弧所对应的权存储在增加的行中。

（iii）弧表表示法

弧表表示法将图以弧表（arc list）的形式存储在计算机中。所谓图的弧表，也就是图的弧集合中的所有有序对。弧表表示法直接列出所有弧的起点和终点，共需 $2m$ 个存储单元，因此当网络比较稀疏时比较方便。此外，对于网络图中每条弧上的权，也要对应地用额外的存储单元表示。例如，例 7 所示的图，假设弧(1,2)，(1,3)，(2,4)，(3,2)，(4,3)，(4,5)，(5,3)和(5,4)上的权分别为 8，9，6，4，0，3，6 和 7，则弧表表示如表 1 所示。

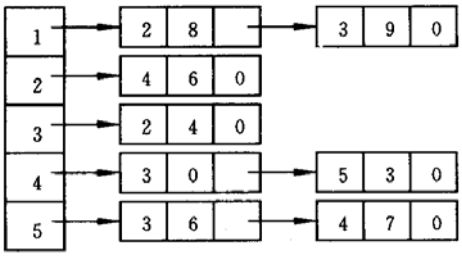
表 1

起点	1	1	2	3	4	4	5	5
终点	2	3	4	2	3	5	3	4
权	8	9	6	4	0	3	6	7

为了便于检索，一般按照起点、终点的字典序顺序存储弧表，如上面的弧表就是按照这样的顺序存储的。

（iv）邻接表表示法

邻接表表示法将图以邻接表（adjacency　lists）的形式存储在计算机中。所谓图的邻接表，也就是图的所有节点的邻接表的集合；而对每个节点，它的邻接表就是它的所有出弧。邻接表表示法就是对图的每个节点，用一个单向链表列出从该节点出发的所有弧，链表中每个单元对应于一条出弧。为了记录弧上的权，链表中每个单元除列出弧的另一个端点外，还可以包含弧上的权等作为数据域。图的整个邻接表可以用一个指针数组表示。例如，例 7 所示的图，邻接表表示为



这是一个 5 维指针数组，每一维（上面表示法中的每一行）对应于一个节点的邻接表，如第 1 行对应于第 1 个节点的邻接表（即第 1 个节点的所有出弧）。每个指针单元的第 1 个数据域表示弧的另一个端点（弧的头），后面的数据域表示对应弧上的权。如第 1 行中的“2”表示弧的另一个端点为 2（即弧为（1,2））,“8”表示对应弧(1,2)上的权为 8;“3”表示弧的另一个端点为 3（即弧为(1,3)），“9”表示对应弧（1，3）上的权为 9。又如，第 5 行说明节点 5 出发的弧有(5,3)、(5,4)，他们对应的权分别为 6 和 7。

对于有向图 $G=(V,A)$，一般用 $A(i)$ 表示节点 i 的邻接表，即节点 i 的所有出弧构成的集合或链表（实际上只需要列出弧的另一个端点，即弧的头）。例如上面例子，$A(1)=\{2,3\}$， $A(5)=\{3,4\}$ 等。

（v）星形表示法

星形（star）表示法的思想与邻接表表示法的思想有一定的相似之处。对每个节点，它也是记录从该节点出发的所有弧，但它不是采用单向链表而是采用一个单一的数组表示。也就是说，在该数组中首先存放从节点 1 出发的所有弧，然后接着存放从节点 2 出发的所有孤，依此类推，最后存放从节点 n 出发的所有孤。对每条弧，要依次存放其起点、终点、权的数值等有关信息。这实际上相当于对所有弧给出了一个顺序和编号，只是从同一节点出发的弧的顺序可以任意排列。此外，为了能够快速检索从每个节点出发的所有弧，我们一般还用一个数组记录每个节点出发的弧的起始地址（即弧的编号）。在这种表示法中，可以快速检索从每个节点出发的所有弧，这种星形表示法称为前向星形（forward star）表示法。

例如，在例 7 所示的图中，仍然假设弧（1,2），（l,3），（2,4），（3,2），（4,3），（4,5），（5,3）和（5,4）上的权分别为 8，9，6，4，0，3，6 和 7。此时该网络图可以用前向星形表示法表示为表 2 和表 3 。

表 2　节点对应的出弧的起始地址编号数组

节点号 i	1	2	3	4	5	6
起始地址 $point(i)$	1	3	4	5	7	9

表 3　记录弧信息的数组

弧编号	1	2	3	4	5	6	7	8
起点	1	1	2	3	4	4	5	5
终点	2	3	4	2	3	5	3	4
权	8	9	6	4	0	3	6	7

在数组 $point$ 中，其元素个数比图的节点数多 1（即 $n+1$），且一定有 $point(1)=1$，$point(n+1)=m+1$。对于节点 i，其对应的出弧存放在弧信息数组的位置区间为

$$[point(i), point(i+1)-1],$$

如果 $point(i)=point(i+1)$，则节点 i 没有出弧。这种表示法与弧表表示法也非常相

似，“记录弧信息的数组”实际上相当于有序存放的“弧表”。只是在前向星形表示法中，弧被编号后有序存放，并增加一个数组（ $point$ ）记录每个节点出发的弧的起始编号。

前向星形表示法有利于快速检索每个节点的所有出弧，但不能快速检索每个节点的所有入弧。为了能够快速检索每个节点的所有入孤，可以采用反向星形（reverse star）表示法：首先存放进入节点 1 的所有孤，然后接着存放进入节点 2 的所有弧，依此类推，最后存放进入节点 n 的所有孤。对每条弧，仍然依次存放其起点、终点、权的数值等有关信息。同样，为了能够快速检索从每个节点的所有入弧，我们一般还用一个数组记录每个节点的入孤的起始地址（即弧的编号）。例如，例 7 所示的图，可以用反向星形表示法表示为表 4 和表 5。

表 4　节点对应的入弧的起始地址编号数组

节点号 i	1	2	3	4	5	6
起始地址 $rpoint(i)$	1	1	3	6	8	9

表 5　记录弧信息的数组

弧编号	1	2	3	4	5	6	7	8
终点	2	2	3	3	3	4	4	5
起点	3	1	1	4	5	5	2	4
权	4	8	9	0	6	7	6	3

如果既希望快速检索每个节点的所有出弧，也希望快速检索每个节点的所有入弧，则可以综合采用前向和反向星形表示法。当然，将孤信息存放两次是没有必要的，可以只用一个数组（trace）记录一条弧在两种表示法中的对应关系即可。例如，可以在采用前向星形表示法的基础上，加上上面介绍的 $rpoint$ 数组和如下的 $trace$ 数组即可。这相当于一种紧凑的双向星形表示法，如表 6 所示。

表 6　两种表示法中的弧的对应关系

反向法中弧编号 j	1	2	3	4	5	6	7	8
正向法中弧编号 $trace(j)$	4	1	2	5	7	8	3	6

对于网络图的表示法，我们作如下说明：

① 星形表示法和邻接表表示法在实际算法实现中都是经常采用的。星形表示法的优点是占用的存储空间较少，并且对那些不提供指针类型的语言（如 FORTRAN 语言等）也容易实现。邻接表表示法对那些提供指针类型的语言（如 C 语言等）是方便的，且增加或删除一条弧所需的计算工作量很少，而这一操作在星形表示法中所需的计算工作量较大（需要花费 $O(m)$ 的计算时间）。有关“计算时间”的观念是网络优化中需要考虑的一个关键因素。

② 当网络不是简单图，而是具有平行弧（即多重弧）时，显然此时邻接矩阵表示法是不能采用的。其他方法则可以很方便地推广到可以处理平行弧的情形。

③ 上述方法可以很方便地推广到可以处理无向图的情形，但由于无向图中边没有方向，因此可能需要做一些自然的修改。例如，可以在计算机中只存储邻接矩阵的一半信息（如上三角部分），因为此时邻接矩阵是对称矩阵。无向图的关联矩阵只含有元素 0 和 $+1$，而不含有 -1，因为此时不区分边的起点和终点。又如，在邻接表和星形表示法中，每条边会被存储两次，而且反向星形表示显然是没有必要的，等等。

2.7　轨与连通

$W = v_0 e_1 v_1 e_2 \cdots e_k v_k$，其中 $e_i \in E(G)$，$1 \le i \le k$，$v_j \in V(G)$，$0 \le j \le k$，e_i 与

v_{i-1}, v_i 关联，称 W 是图 G 的一条道路(walk)，k 为路长，顶点 v_0 和 v_k 分别称为 W 的起点和终点，而 $v_1, v_2, \cdots, v_{k-1}$ 称为它的内部顶点。

若道路 W 的边互不相同，则 W 称为迹(trail)。若道路 W 的顶点互不相同，则 W 称为轨(path)。

称一条道路是闭的，如果它有正的长且起点和终点相同。起点和终点重合的轨叫做圈(cycle)。

若图 G 的两个顶点 u, v 间存在道路，则称 u 和 v 连通(connected)。u, v 间的最短轨的长叫做 u, v 间的距离。记作 $d(u, v)$。若图 G 的任二顶点均连通，则称 G 是连通图。

显然有：

(i) 图 P 是一条轨的充要条件是 P 是连通的，且有两个一度的顶点，其余顶点的度为 2；

(ii) 图 C 是一个圈的充要条件是 C 是各顶点的度均为 2 的连通图。

§3 应用—最短路问题

3.1 两个指定顶点之间的最短路径

问题如下：给出了一个连接若干个城镇的铁路网络，在这个网络的两个指定城镇间，找一条最短铁路线。

以各城镇为图 G 的顶点，两城镇间的直通铁路为图 G 相应两顶点间的边，得图 G。对 G 的每一边 e，赋以一个实数 $w(e)$—直通铁路的长度，称为 e 的权，得到赋权图 G。G 的子图的权是指子图的各边的权和。问题就是求赋权图 G 中指定的两个顶点 u_0, v_0 间的具最小权的轨。这条轨叫做 u_0, v_0 间的最短路，它的权叫做 u_0, v_0 间的距离，亦记作 $d(u_0, v_0)$。

求最短路已有成熟的算法：迪克斯特拉（Dijkstra）算法，其基本思想是按距 u_0 从近到远为顺序，依次求得 u_0 到 G 的各顶点的最短路和距离，直至 v_0（或直至 G 的所有顶点），算法结束。为避免重复并保留每一步的计算信息，采用了标号算法。下面是该算法。

(i) 令 $l(u_0) = 0$，对 $v \neq u_0$，令 $l(v) = \infty$，$S_0 = \{u_0\}$，$i = 0$。

(ii) 对每个 $v \in \overline{S}_i$（$\overline{S}_i = V \setminus S_i$），用

$$\min_{u \in S_i} \{l(v), l(u) + w(uv)\}$$

代替 $l(v)$。计算 $\min_{v \in \overline{S}_i} \{l(v)\}$，把达到这个最小值的一个顶点记为 u_{i+1}，令 $S_{i+1} = S_i \bigcup \{u_{i+1}\}$。

(iii). 若 $i = |V| - 1$，停止；若 $i < |V| - 1$，用 $i + 1$ 代替 i，转(ii)。

算法结束时，从 u_0 到各顶点 v 的距离由 v 的最后一次的标号 $l(v)$ 给出。在 v 进入 S_i 之前的标号 $l(v)$ 叫 T 标号，v 进入 S_i 时的标号 $l(v)$ 叫 P 标号。算法就是不断修改各顶点的 T 标号，直至获得 P 标号。若在算法运行过程中，将每一顶点获得 P 标号所由来的边在图上标明，则算法结束时，u_0 至各顶点的最短路也在图上标示出来了。

例 9　某公司在六个城市 $c_1, c_2, \cdots, c_6$ 中有分公司，从 c_i 到 c_j 的直接航程票价记在下述矩阵的 (i, j) 位置上。（∞ 表示无直接航路），请帮助该公司设计一张城市 c_1 到其它

城市间的票价最便宜的路线图。

$$\begin{bmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{bmatrix}$$

用矩阵 $a_{n\times n}$（n 为顶点个数）存放各边权的邻接矩阵，行向量 pb、$index_1$、$index_2$、d 分别用来存放 P 标号信息、标号顶点顺序、标号顶点索引、最短通路的值。其中分量

$$pb(i)=\begin{cases}1 & \text{当第}i\text{顶点已标号}\\ 0 & \text{当第}i\text{顶点未标号}\end{cases};$$

$index_2(i)$ 存放始点到第 i 点最短通路中第 i 顶点前一顶点的序号；

$d(i)$ 存放由始点到第 i 点最短通路的值。

求第一个城市到其它城市的最短路径的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
a=zeros(6);
a(1,2)=50;a(1,4)=40;a(1,5)=25;a(1,6)=10;
a(2,3)=15;a(2,4)=20;a(2,6)=25;
a(3,4)=10;a(3,5)=20;
a(4,5)=10;a(4,6)=25;
a(5,6)=55;
a=a+a';
a(find(a==0))=inf;
pb(1:length(a))=0;pb(1)=1;index1=1;index2=ones(1,length(a));
d(1:length(a))=inf;d(1)=0;temp=1;
while sum(pb)<length(a)
   tb=find(pb==0);
   d(tb)=min(d(tb),d(temp)+a(temp,tb));
   tmpb=find(d(tb)==min(d(tb)));
   temp=tb(tmpb(1));
   pb(temp)=1;
   index1=[index1,temp];
   temp2=find(d(index1)==d(temp)-a(temp,index1));
   index2(temp)=index1(temp2(1));
end
d, index1, index2
```

3.2　两个指定顶点之间最短路问题的数学表达式

假设有向图有 n 个顶点，现需要求从顶点 1 到顶点 n 的最短路。设 $W=(w_{ij})_{n\times n}$ 为赋权邻接矩阵，其分量为

$$w_{ij}=\begin{cases}w(v_iv_j), & v_iv_j\in E\\ \infty, & \text{其它}\end{cases}$$

决策变量为 x_{ij}，当 $x_{ij}=1$，说明弧 v_iv_j 位于顶点 1 至顶点 n 的路上；否则 $x_{ij}=0$。其数学规划表达式为

$$\min \sum_{v_iv_j\in E} w_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j=1\\ v_iv_j\in E}}^{n} x_{ij} - \sum_{\substack{j=1\\ v_jv_i\in E}}^{n} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i=1 \\ -1, & i=n \\ 0, & i\neq 1,n \end{cases}$$

$$x_{ij}=0 \text{ 或 } 1$$

例 10　在图 3 中，用点表示城市，现有 $A, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3, D$ 共 7 个城市。点与点之间的连线表示城市间有道路相连。连线旁的数字表示道路的长度。现计划从城市 A 到城市 D 铺设一条天然气管道，请设计出最小价格管道铺设方案。

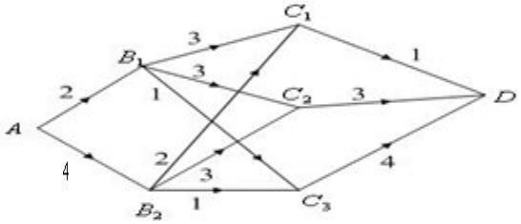


图 3　7 个城市间的连线图

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
cities/A,B1,B2,C1,C2,C3,D/;
roads(cities,cities)/A B1,A B2,B1 C1,B1 C2,B1 C3,B2 C1,
B2 C2,B2 C3,C1 D,C2 D,C3 D/:w,x;
endsets
data:
w=2 4 3 3 1 2 3 1 1 3 4;
enddata
n=@size(cities); !城市的个数;
min=@sum(roads:w*x);
@for(cities(i)|i #ne#1 #and# i #ne#n:
     @sum(roads(i,j):x(i,j))=@sum(roads(j,i):x(j,i)));
@sum(roads(i,j)|i #eq#1:x(i,j))=1;
@sum(roads(i,j)|j #eq#n:x(i,j))=1;
end
```

例 11（无向图的最短路问题）求图 4 中 v_1 到 v_{11} 的最短路。

分析　例 10 处理的问题属于有向图的最短路问题，本例是处理无向图的最短路问题，在处理方式上与有向图的最短路问题有一些差别，这里选择赋权邻接矩阵的方法编写 LINGO 程序。

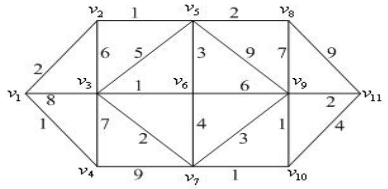


图 4　无向图的最短路问题

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
cities/1..11/;
roads(cities,cities):w,x;
endsets
data:
w=0;
enddata
calc:
w(1,2)=2;w(1,3)=8;w(1,4)=1;
w(2,3)=6;w(2,5)=1;
w(3,4)=7;w(3,5)=5;w(3,6)=1;w(3,7)=2;
w(4,7)=9;
w(5,6)=3;w(5,8)=2;w(5,9)=9;
w(6,7)=4;w(6,9)=6;
w(7,9)=3;w(7,10)=1;
w(8,9)=7;w(8,11)=9;
w(9,10)=1;w(9,11)=2;w(10,11)=4;
@for(roads(i,j):w(i,j)=w(i,j)+w(j,i));
@for(roads(i,j):w(i,j)=@if(w(i,j) #eq# 0, 1000,w(i,j)));
endcalc
n=@size(cities);  !城市的个数;
min=@sum(roads:w*x);
@for(cities(i)|i #ne#1 #and# i #ne#
n:@sum(cities(j):x(i,j))=@sum(cities(j):x(j,i)));
@sum(cities(j):x(1,j))=1;
@sum(cities(j):x(j,1))=0; !不能回到顶点1;
@sum(cities(j):x(j,n))=1;
@for(roads:@bin(x));
end
```

与有向图相比较，在程序中只增加了一个语句`@sum(cities(j):x(j,1))=0`，即从顶点 1 离开后，再不能回到该顶点。

求得的最短路径为 1→2→5→6→3→7→10→9→11，最短路径长度为 13。

3.3 每对顶点之间的最短路径

计算赋权图中各对顶点之间最短路径，显然可以调用 Dijkstra 算法。具体方法是：每次以不同的顶点作为起点，用 Dijkstra 算法求出从该起点到其余顶点的最短路径，反复执行 $n-1$ 次这样的操作，就可得到从每一个顶点到其它顶点的最短路径。这种算法的时间复杂度为 $O(n^3)$。第二种解决这一问题的方法是由 Floyd R W 提出的算法，称之为 Floyd 算法。

假设图G权的邻接矩阵为A_0，

$$A_0=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

来存放各边长度，其中：

$a_{ii}=0 \quad i=1,2,\cdots,n$；

$a_{ij}=\infty$ i,j之间没有边，在程序中以各边都不可能达到的充分大的数代替；

$a_{ij}=w_{ij}$ w_{ij}是i,j之间边的长度，$i,j=1,2,\cdots,n$。

对于无向图，A_0是对称矩阵，$a_{ij}=a_{ji}$。

Floyd 算法的基本思想是：递推产生一个矩阵序列$A_0,A_1,\cdots,A_k,\cdots,A_n$，其中$A_k(i,j)$表示从顶点$v_i$到顶点$v_j$的路径上所经过的顶点序号不大于$k$的最短路径长度。

计算时用迭代公式：

$$A_k(i,j)=\min(A_{k-1}(i,j),A_{k-1}(i,k)+A_{k-1}(k,j))$$

k是迭代次数，$i,j,k=1,2,\cdots,n$。

最后，当$k=n$时，A_n即是各顶点之间的最短通路值。

例12 用Floyd算法求解例9。

矩阵path用来存放每对顶点之间最短路径上所经过的顶点的序号。Floyd算法的Matlab程序如下：

```
clear;clc;
n=6; a=zeros(n);
a(1,2)=50;a(1,4)=40;a(1,5)=25;a(1,6)=10;
a(2,3)=15;a(2,4)=20;a(2,6)=25; a(3,4)=10;a(3,5)=20;
a(4,5)=10;a(4,6)=25; a(5,6)=55;
a=a+a'; M=max(max(a))*n^2; %M为充分大的正实数
a=a+((a==0)-eye(n))*M;
path=zeros(n);
for k=1:n
  for i=1:n
    for j=1:n
      if a(i,j)>a(i,k)+a(k,j)
        a(i,j)=a(i,k)+a(k,j);
        path(i,j)=k;
      end
    end
  end
end
a, path
```

我们使用LINGO9.0编写的FLOYD算法如下：

```
model:
sets:
```

```
nodes/c1..c6/;
link(nodes,nodes):w,path;  !path标志最短路径上走过的顶点;
endsets
data:
path=0;
w=0;
@text(mydata1.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):
      @format(w(i,j),' 10.0f')),@newline(1));
@text(mydata1.txt)=@write(@newline(1));
@text(mydata1.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):
      @format(path(i,j),' 10.0f')),@newline(1));
enddata
calc:
w(1,2)=50;w(1,4)=40;w(1,5)=25;w(1,6)=10;
w(2,3)=15;w(2,4)=20;w(2,6)=25;
w(3,4)=10;w(3,5)=20;
w(4,5)=10;w(4,6)=25;w(5,6)=55;
@for(link(i,j):w(i,j)=w(i,j)+w(j,i));
@for(link(i,j) |i#ne#j:w(i,j)=@if(w(i,j)#eq#0,10000,w(i,j)));
@for(nodes(k):@for(nodes(i):@for(nodes(j):
     tm=@smin(w(i,j),w(i,k)+w(k,j));
     path(i,j)=@if(w(i,j)#gt# tm,k,path(i,j));w(i,j)=tm)));
endcalc
end
```

§4 树

4.1 基本概念

连通的无圈图叫做树，记之为T。若图G满足$V(G)=V(T)$，$E(T)\subset E(G)$，则称T是G的生成树。图G连通的充分必要条件为G有生成树。一个连通图的生成树的个数很多，用$\tau(G)$表示G的生成树的个数，则有公式

公式 (Caylay) $\tau(K_n)=n^{n-2}$。

公式 $\tau(G)=\tau(G-e)+\tau(G\cdot e)$。

其中$G-e$表示从G上删除边e，$G\cdot e$表示把e的长度收缩为零得到的图。

树有下面常用的五个充要条件。

定理 1 （i）G是树当且仅当G中任二顶点之间有且仅有一条轨道。

（ii）G是树当且仅当G无圈，且$\varepsilon=\nu-1$。

（iii）G是树当且仅当G连通，且$\varepsilon=\nu-1$。

（iv）G是树当且仅当G连通，且$\forall e\in E(G)$，$G-e$不连通。

（v）G是树当且仅当G无圈，$\forall e\notin E(G)$，$G+e$恰有一个圈。

4.2 应用—连线问题

欲修筑连接n个城市的铁路，已知i城与j城之间的铁路造价为C_{ij}，设计一个线路图，使总造价最低。

连线问题的数学模型是在连通赋权图上求权最小的生成树。赋权图的具最小权的生成树叫做最小生成树。

下面介绍构造最小生成树的两种常用算法。

4.2.1 prim 算法构造最小生成树

设置两个集合P和Q,其中P用于存放G的最小生成树中的顶点，集合Q存放G

的最小生成树中的边。令集合 P 的初值为 $P=\{v_1\}$（假设构造最小生成树时，从顶点 v_1 出发），集合 Q 的初值为 $Q=\Phi$。prim 算法的思想是，从所有 $p\in P$， $v\in V-P$ 的边中，选取具有最小权值的边 pv，将顶点 v 加入集合 P 中，将边 pv 加入集合 Q 中，如此不断重复，直到 $P=V$ 时，最小生成树构造完毕，这时集合 Q 中包含了最小生成树的所有边。

prim 算法如下：

（i）$P=\{v_1\}$， $Q=\Phi$；

（ii）while $P\sim=V$

找最小边 pv，其中 $p\in P, v\in V-P$

$P=P+\{v\}$

$Q=Q+\{pv\}$

end

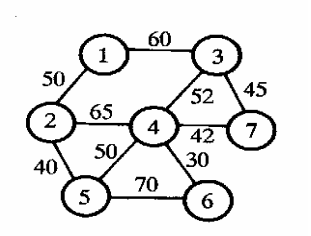


图 5　最小生成树问题

例 13 用 prim 算法求图 5 的最小生成树。

我们用 $result_{3\times n}$ 的第一、二、三行分别表示生成树边的起点、终点、权集合。Matlab 程序如下：

```
clc;clear;
a=zeros(7);
a(1,2)=50; a(1,3)=60;
a(2,4)=65; a(2,5)=40;
a(3,4)=52;a(3,7)=45;
a(4,5)=50; a(4,6)=30;a(4,7)=42;
a(5,6)=70;
a=a+a';a(find(a==0))=inf;
result=[];p=1;tb=2:length(a);
while length(result)~=length(a)-1
   temp=a(p,tb);temp=temp(:);
   d=min(temp);
   [jb,kb]=find(a(p,tb)==d);
   j=p(jb(1));k=tb(kb(1));
   result=[result,[j;k;d]];p=[p,k];tb(find(tb==k))=[];
end
result
```

4.2.1　Kruskal 算法构造最小生成树

科茹斯克尔（Kruskal）算法是一个好算法。Kruskal 算法如下:

(i)选 $e_1\in E(G)$， 使得 $w(e_1)=\min$。

(ii)若 $e_1,e_2,\cdots,e_i$ 已选好，则从 $E(G)-\{e_1,e_2,\cdots,e_i\}$ 中选取 e_{i+1}，使得

① $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_i,e_{i+1}\}]$ 中无圈，且

② $w(e_{i+1})=\min$。

(iii)直到选得 e_{v-1} 为止。

例 14 用 Kruskal 算法构造例 3 的最小生成树。

我们用 $index_{2\times n}$ 存放各边端点的信息，当选中某一边之后，就将此边对应的顶点序号中较大序号 u 改记为此边的另一序号 v，同时把后面边中所有序号为 u 的改记为 v。此方法的几何意义是：将序号 u 的这个顶点收缩到 v 顶点，u 顶点不复存在。后面继续寻查时，发现某边的两个顶点序号相同时，认为已被收缩掉，失去了被选取的资格。

Matlab 程序如下：

```
clc;clear;
a(1,2)=50; a(1,3)=60; a(2,4)=65; a(2,5)=40;
a(3,4)=52;a(3,7)=45; a(4,5)=50; a(4,6)=30;
a(4,7)=42; a(5,6)=70;
[i,j,b]=find(a);
data=[i';j';b'];index=data(1:2,:);
loop=max(size(a))-1;
result=[];
while length(result)<loop
   temp=min(data(3,:));
   flag=find(data(3,:)==temp);
   flag=flag(1);
   v1=data(1,flag);v2=data(2,flag);
   if index(1,flag)~=index(2,flag)
      result=[result,data(:,flag)];
   end
   index(find(index==v2))=v1;
   data(:,flag)=[];
   index(:,flag)=[];
end
result
```

§5 匹配问题

定义 若 $M\subset E(G)$，$\forall e_i,e_j\in M$，e_i 与 e_j 无公共端点（$i\neq j$），则称 M 为图 G 中的一个对集；M 中的一条边的两个端点叫做在对集 M 中相配；M 中的端点称为被 M 许配；G 中每个顶点皆被 M 许配时，M 称为完美对集；G 中已无使 $|M'|>|M|$ 的对集 M'，则 M 称为最大对集；若 G 中有一轨，其边交替地在对集 M 内外出现，则称此轨为 M 的交错轨，交错轨的起止顶点都未被许配时，此交错轨称为可增广轨。

若把可增广轨上在 M 外的边纳入对集，把 M 内的边从对集中删除，则被许配的顶点数增加 2，对集中的“对儿”增加一个。

1957 年，贝尔热(Berge)得到最大对集的充要条件：

定理 2 M 是图 G 中的最大对集当且仅当 G 中无 M 可增广轨。

1935 年，霍尔(Hall)得到下面的许配定理：

定理 3 G 为二分图，X 与 Y 是顶点集的划分，G 中存在把 X 中顶点皆许配的

对集的充要条件是，$\forall S \subset X$，则$|N(S)| \geq |S|$，其中$N(S)$是S中顶点的邻集。

由上述定理可以得出：

推论 1：若G是k次（$k>0$)正则 2 分图，则G有完美对集。

所谓k次正则图，即每顶点皆k度的图。

由此推论得出下面的婚配定理：

定理 4 每个姑娘都结识$k(k \geq 1)$位小伙子，每个小伙子都结识k位姑娘，则每位姑娘都能和她认识的一个小伙子结婚，并且每位小伙子也能和他认识的一个姑娘结婚。

人员分派问题等实际问题可以化成对集来解决。

人员分派问题：工作人员$x_1, x_2, \cdots, x_n$去做n件工作$y_1, y_2, \cdots, y_n$，每人适合做其中一件或几件，问能否每人都有一份适合的工作？如果不能，最多几人可以有适合的工作？

这个问题的数学模型是：G是二分图，顶点集划分为$V(G)=X \bigcup Y$，$X=\{x_1, \cdots, x_n\}$，$Y=\{y_1, \cdots, y_n\}$，当且仅当x_i适合做工作y_j时，$x_i y_j \in E(G)$，求G中的最大对集。

解决这个问题可以利用 1965 年埃德门兹(Edmonds)提出的匈牙利算法。

匈牙利算法：

（i）从G中任意取定一个初始对集M。

（ii）若M把X中的顶点皆许配，停止，M即完美对集；否则取X中未被M许配的一顶点u，记$S=\{u\}$，$T=\Phi$。

（iii）若$N(S)=T$，停止，无完美对集；否则取$y \in N(S)-T$。

（iv）若y是被M许配的，设$yz \in M$，$S=S \bigcup \{z\}$，$T=T \bigcup \{y\}$，转（iii)；否则，取可增广轨$P(u, y)$，令$M=(M-E(P)) \bigcup (E(P)-M)$，转（ii)。

把以上算法稍加修改就能够用来求二分图的最大完美对集。

最优**分派问题：**在人员分派问题中，工作人员适合做的各项工作当中，效益未必一致，我们需要制定一个分派方案，使公司总效益最大。

这个问题的数学模型是：在人员分派问题的模型中，图G的每边加了权$w(x_i y_j) \geq 0$，表示x_i干y_j工作的效益，求加权图G上的权最大的完美对集。

解决这个问题可以用库恩—曼克莱斯（Kuhn-Munkres）算法。为此，我们要引入可行顶点标号与相等子图的概念。

定义 若映射$l: V(G) \to R$，满足$\forall x \in X, y \in Y$，

$$l(x)+l(y) \geq w(x, y),$$

则称l是二分图G的可行顶点标号。令

$$E_l=\{xy \mid xy \in E(G), l(x)+l(y)=w(xy)\},$$

称以E_l为边集的G的生成子图为相等子图，记作G_l。

可行顶点标号是存在的。例如

$$l(x)=\max_{y \in Y} w(xy), \quad x \in X;$$

$$l(y)=0, \qquad y \in Y。$$

定理 5 G_l**的**完美对集即为G的权最大的完美对集。

Kuhn-Munkres 算法

（i）选定初始可行顶点标号l，确定G_l，在G_l中选取一个对集M。

（ii）若X中顶点皆被M许配，停止，M即G的权最大的完美对集；否则，取G_l中未被M许配的顶点u，令$S=\{u\}$，　$T=\Phi$。

(iii)若$N_{G_l}(S)\supset T$，转（iv）；若$N_{G_l}(S)=T$，取

$$\alpha_l=\min_{x\in S,y\notin T}\{l(x)+l(y)-w(xy)\},$$

$$\bar{l}(v)=\begin{cases}l(v)-\alpha_l, & v\in S\\ l(v)+\alpha_l, & v\in T\\ l(v), & \text{其它}\end{cases},$$

$l=\bar{l}$，$G_l=G_{\bar{l}}$。

（iv）选$N_{G_l}(S)-T$中一顶点y，若y已被M许配，且$yz\in M$，则$S=S\bigcup\{z\}$，$T=T\bigcup\{y\}$，转（iii）；否则，取G_l中一个M可增广轨$P(u,y)$，令

$$M=(M-E(P))\bigcup(E(P)-M),$$

转（ii）。

其中$N_{G_l}(S)$是G_l中S的相邻顶点集。

§6　Euler 图和 Hamilton 图

6.1　基本概念

定义　经过G的每条边的迹叫做G的 Euler 迹；闭的 Euler 迹叫做 Euler 回路或E回路；含 Euler 回路的图叫做 Euler 图。

直观地讲，Euler 图就是从一顶点出发每边恰通过一次能回到出发点的那种图，即不重复地行遍所有的边再回到出发点。

定理 6　（i）G是 Euler 图的充分必要条件是G连通且每顶点皆偶次。

（ii）G是 Euler 图的充分必要条件是G连通且$G=\bigcup_{i=1}^{d}C_i$，C_i是圈，$E(C_i)\bigcap E(C_j)=\Phi(i\neq j)$。

（iii）G中有 Euler 迹的充要条件是G连通且至多有两个奇次点。

定义　包含G的每个顶点的轨叫做 Hamilton(哈密顿)轨；闭的 Hamilton 轨叫做 Hamilton 圈或H圈；含 Hamilton 圈的图叫做 Hamilton 图。

直观地讲，Hamilton 图就是从一顶点出发每顶点恰通过一次能回到出发点的那种图，即不重复地行遍所有的顶点再回到出发点。

6.2　Euler 回路的 Fleury 算法

1921 年，Fleury 给出下面的求 Euler 回路的算法。

Fleury 算法：

1°. $\forall v_0\in V(G)$，令$W_0=v_0$。

2°. 假设迹$W_i=v_0e_1v_1\cdots e_iv_i$已经选定，那么按下述方法从$E-\{e_1,\cdots,e_i\}$中选取边$e_{i+1}$：

（i）e_{i+1}和v_i相关联；

（ii）除非没有别的边可选择，否则e_{i+1}不是$G_i = G - \{e_1, \cdots, e_i\}$的割边(cut edge)。(所谓割边是一条删除后使连通图不再连通的边)。

3°. 当第 2 步不能再执行时，算法停止。

6.3 应用

6.3.1 邮递员问题

中国邮递员问题

一位邮递员从邮局选好邮件去投递，然后返回邮局，当然他必须经过他负责投递的每条街道至少一次，为他设计一条投递路线，使得他行程最短。

上述中国邮递员问题的数学模型是：在一个赋权连通图上求一个含所有边的回路，且使此回路的权最小。

显然，若此连通赋权图是 Euler 图，则可用 Fleury 算法求 Euler 回路，此回路即为所求。

对于非 Euler 图，1973 年，Edmonds 和 Johnson 给出下面的解法：

设G是连通赋权图。

（i）求$V_0 = \{v \mid v \in V(G), d(v) = 1(\mathrm{mod}\,2)\}$。

（ii）对每对顶点$u, v \in V_0$，求$d(u,v)$（$d(u,v)$是u与v的距离，可用 Floyd 算法求得）。

（iii）构造完全赋权图$K_{|V_0|}$，以V_0为顶点集，以$d(u,v)$为边uv的权。

（iv）求$K_{|V_0|}$中权之和最小的完美对集M。

（v）求M中边的端点之间的在G中的最短轨。

（vi）在（v）中求得的每条最短轨上每条边添加一条等权的所谓“倍边”（即共端点共权的边）。

（vii）在（vi）中得的图G'上求 Euler 回路即为中国邮递员问题的解。

多邮递员问题：

邮局有$k(k \geq 2)$位投递员，同时投递信件，全城街道都要投递，完成任务返回邮局，如何分配投递路线，使得完成投递任务的时间最早？我们把这一问题记成 kPP。

kPP 的数学模型如下：

$G(V,E)$是连通图，$v_0 \in V(G)$，求G的回路$C_1, \cdots, C_k$，使得

（i）$v_0 \in V(C_i)$，$i = 1,2,\cdots,k$，

（ii）$\max\limits_{1 \leq i \leq k} \sum\limits_{e \in E(C_i)} w(e) = \min$，

（iii）$\bigcup\limits_{i=1}^{k} E(C_i) = E(G)$

6.3.2 旅行商（TSP）问题

一名推销员准备前往若干城市推销产品，然后回到他的出发地。如何为他设计一条最短的旅行路线（从驻地出发，经过每个城市恰好一次，最后返回驻地）？这个问题称为旅行商问题。用图论的术语说，就是在一个赋权完全图中，找出一个有最小权的 Hamilton 圈。称这种圈为最优圈。与最短路问题及连线问题相反，目前还没有求解旅行商问题的有效算法。所以希望有一个方法以获得相当好（但不一定最优）的解。

一个可行的办法是首先求一个 Hamilton 圈C，然后适当修改C以得到具有较小权的另一个 Hamilton 圈。修改的方法叫做改良圈算法。设初始圈$C = v_1 v_2 \cdots v_n v_1$。

（i）对于$1<i+1<j<n$，构造新的 Hamilton 圈:

$$C_{ij}=v_1v_2\cdots v_iv_jv_{j-1}v_{j-2}\cdots v_{i+1}v_{j+1}v_{j+2}\cdots v_nv_1,$$

它是由C中删去边v_iv_{i+1}和v_jv_{j+1}，添加边v_iv_j和$v_{i+1}v_{j+1}$而得到的。若$w(v_iv_j)+w(v_{i+1}v_{j+1})<w(v_iv_{i+1})+w(v_jv_{j+1})$，则以$C_{ij}$代替$C$，$C_{ij}$叫做$C$的改良圈。

（ii）转（i），直至无法改进，停止。

用改良圈算法得到的结果几乎可以肯定不是最优的。为了得到更高的精确度，可以选择不同的初始圈，重复进行几次算法，以求得较精确的结果。

这个算法的优劣程度有时能用 Kruskal 算法加以说明。假设C是G中的最优圈。则对于任何顶点v，$C-v$是在$G-v$中的 Hamilton 轨，因而也是$G-v$的生成树。由此推知：若T是$G-v$中的最优树，同时e和f是和v关联的两条边，并使得$w(e)+w(f)$尽可能小，则$w(T)+w(e)+w(f)$将是$w(C)$的一个上界。

这里介绍的方法已被进一步发展。圈的修改过程一次替换三条边比一次仅替换两条边更为有效；然而，有点奇怪的是，进一步推广这一想法，就不对了。

例 15 从北京（Pe）乘飞机到东京(T)、纽约(N)、墨西哥城(M)、伦敦(L)、巴黎(Pa)五城市做旅游，每城市恰去一次再回北京，应如何安排旅游线，使旅程最短？各城市之间的航线距离如表 7。

表 7　六城市间的距离

	L	M	N	Pa	Pe	T
L		56	35	21	51	60
M	56		21	57	78	70
N	35	21		36	68	68
Pa	21	57	36		51	61
Pe	51	78	68	51		13
T	60	70	68	61	13	

解：编写程序如下：

```
function main
clc,clear
global a
a=zeros(6);
a(1,2)=56;a(1,3)=35;a(1,4)=21;a(1,5)=51;a(1,6)=60;
a(2,3)=21;a(2,4)=57;a(2,5)=78;a(2,6)=70;
a(3,4)=36;a(3,5)=68;a(3,6)=68; a(4,5)=51;a(4,6)=61;
a(5,6)=13; a=a+a'; L=size(a,1);
c1=[5 1:4 6];
[circle,long]=modifycircle(c1,L);
c2=[5 6 1:4];%改变初始圈，该算法的最后一个顶点不动
[circle2,long2]=modifycircle(c2,L);
if long2<long
   long=long2;
   circle=circle2;
end
circle,long
%*****************************************
%修改圈的子函数
%*****************************************
function [circle,long]=modifycircle(c1,L);
```

```
global a
flag=1;
while flag>0
     flag=0;
   for m=1:L-3
      for n=m+2:L-1
        if a(c1(m),c1(n))+a(c1(m+1),c1(n+1))<...
           a(c1(m),c1(m+1))+a(c1(n),c1(n+1))
           flag=1;
           c1(m+1:n)=c1(n:-1:m+1);
        end
     end
  end
end
long=a(c1(1),c1(L));
for i=1:L-1
   long=long+a(c1(i),c1(i+1));
end
circle=c1;
```

6.3.3　旅行商问题的数学表达式

设城市的个数为 n，d_{ij} 是两个城市 i 与 j 之间的距离，$x_{ij}=0$ 或 1（1 表示走过城市 i 到城市 j 的路，0 表示没有选择走这条路）。则有

$$\min \sum_{i\neq j} d_{ij}x_{ij}$$

s.t. $\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1$，$i=1,2,\cdots,n$，（每个点只有一条边出去）

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1$，$j=1,2,\cdots,n$，（每个点只有一条边进去）

$\sum_{i,j\in s} x_{ij}\leq |s|-1$，$2\leq |s|\leq n-1$，$s\subset\{1,2,\cdots,n\}$

（除起点和终点外，各边不构成圈）

$x_{ij}\in\{0,1\}$，$i,j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$。

其中 $|s|$ 表示集合 s 中元素个数。

将旅行商问题写成数学规划的具体形式还需要一定的技巧，下面的例子我们引用 LINGO 帮助中的一个程序。

例 16　已知 SV 地区各城镇之间距离见表 8，某公司计划在 SV 地区做广告宣传，推销员从城市 1 出发，经过各个城镇，再回到城市 1。为节约开支，公司希望推销员走过这 10 个城镇的总距离最少。

表 8　城镇之间的距离

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	8	5	9	12	14	12	16	17	22
2		9	15	17	8	11	18	14	22
3			7	9	11	7	12	12	17
4				3	17	10	7	15	18

5		8	10	6	15	15
6			9	14	8	16
7				8	6	11
8					11	11
9						10

解　编写 LINGO 程序如下：

```
MODEL:
 SETS:
 CITY / 1.. 10/: U; ! U( I) = sequence no. of city;
 LINK( CITY, CITY):
      DIST,  ! The distance matrix;
         X;  ! X( I, J) = 1 if we use link I, J;
ENDSETS
DATA:   !Distance matrix, it need not be symmetric;
 DIST =0    8    5    9   12   14   12   16   17   22
    8    0    9   15   17    8   11   18   14   22
    5    9    0    7    9   11    7   12   12   17
    9   15    7    0    3   17   10    7   15   18
   12   17    9    3    0    8   10    6   15   15
   14    8   11   17    8    0    9   14    8   16
   12   11    7   10   10    9    0    8    6   11
   16   18   12    7    6   14    8    0   11   11
   17   14   12   15   15    8    6   11    0   10
   22   22   17   18   15   16   11   11   10    0;
ENDDATA
!The model:Ref. Desrochers & Laporte, OR Letters,
 Feb. 91;
 N = @SIZE( CITY);
 MIN = @SUM( LINK: DIST * X);
 @FOR( CITY( K):
 !  It must be entered;
  @SUM( CITY( I)| I #NE# K: X( I, K)) = 1;
 !  It must be departed;
  @SUM( CITY( J)| J #NE# K: X( K, J)) = 1;
 ! Weak form of the subtour breaking constraints;
 ! These are not very powerful for large problems;
  @FOR( CITY( J)| J #GT# 1 #AND# J #NE# K:
      U( J) >= U( K) + X ( K, J) -
      ( N - 2) * ( 1 - X( K, J)) +
      ( N - 3) * X( J, K)));
 ! Make the X's 0/1;
 @FOR( LINK: @BIN( X));
 ! For the first and last stop we know...;
 @FOR( CITY( K)| K #GT# 1:
  U( K) <= N - 1 - ( N - 2) * X( 1, K);
  U( K) >= 1  + ( N - 2) * X( K, 1));
END
```

§7　最大流问题

7.1　最大流问题的数学描述

7.1.1 网络中的流

定义　在以V 为节点集，A为弧集的有向图$G=(V,A)$上定义如下的权函数：

（i） $L:A\to R$ 为孤上的权函数，弧 $(i,j)\in A$ 对应的权 $L(i,j)$ 记为 l_{ij}，称为孤 (i,j) 的容量下界（lower bound）；

（ii）$U:A\to R$ 为弧上的权函数，弧 $(i,j)\in A$ 对应的权 $U(i,j)$ 记为 u_{ij}，称为孤 (i,j) 的容量上界，或直接称为容量（capacity）；

（iii） $D:V\to R$ 为顶点上的权函数，节点 $i\in V$ 对应的权 $D(i)$ 记为 d_i，称为顶点 i 的供需量（supply / demand）；

此时所构成的网络称为流网络，可以记为

$N=(V,A,L,U,D)$。

由于我们只讨论 V,A 为有限集合的情况，所以对于弧上的权函数 L,U 和顶点上的权函数 D，可以直接用所有孤上对应的权和顶点上的权组成的有限维向量表示，因此 L,U,D 有时直接称为权向量，或简称权。由于给定有向图 $G=(V,A)$ 后，我们总是可以在它的弧集合和顶点集合上定义各种权函数，所以流网络一般也直接简称为网络。

在流网络中，弧 (i,j) 的容量下界 l_{ij} 和容量上界 u_{ij} 表示的物理意义分别是：通过该弧发送某种“物质”时，必须发送的最小数量为 l_{ij}，而发送的最大数量为 u_{ij}。顶点 $i\in V$ 对应的供需量 d_i 则表示该顶点从网络外部获得的“物质”数量（$d_i>0$ 时），或从该顶点发送到网络外部的“物质”数量（$d_i<0$ 时）。下面我们给出严格定义。

定义 对于流网络 $N=(V,A,L,U,D)$，其上的一个**流**（flow） f 是指从 N 的弧集 A 到 R 的一个函数，即对每条弧 (i,j) 赋予一个实数 f_{ij}（称为弧 (i,j) 的流量）。如果流 f 满足

$$\sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji}=d_i,\quad \forall i\in V, \tag{1}$$

$$l_{ij}\le f_{ij}\le u_{ij},\quad \forall (i,j)\in A, \tag{2}$$

则称 f 为可行流（feasible flow）。至少存在一个可行流的流网络称为可行网络（feasible network）. 约束（1）称为流量守恒条件（也称流量平衡条件），约束（2）称为容量约束。

可见，当 $d_i>0$ 时，表示有 d_i 个单位的流量从网络外部流入该顶点，因此顶点 i 称为供应点（supply node）或源（source），有时也形象地称为起始点或发点等；当 $d_i<0$ 时，表示有 $|d_i|$ 个单位的流量从该顶点流失到网络外部（或说被该顶点吸收），因此顶点 i 称为需求点（demand node）或汇（sink），有时也形象地称为终止点或收点等；当 $d_i=0$ 时，顶点 i 称为转运点（transshipment node）或平衡点、中间点等。此外，根据（1）可知，对于可行网络，必有

$$\sum_{i\in V} d_i=0 \tag{3}$$

也就是说，所有节点上的供需量之和为 0 是网络中存在可行流的必要条件。

一般来说，我们总是可以把 $L\ne 0$ 的流网络转化为 $L=0$ 的流网络进行研究。所以，除非特别说明，以后我们总是假设 $L=0$（即所有孤 (i,j) 的容量下界 $l_{ij}=0$），并将 $L=0$ 时的流网络简记为 $N=(V,A,U,D)$。此时，相应的容量约束（2）为

$0\le f_{ij}\le u_{ij},\quad \forall (i,j)\in A$。

定义 在流网络 $N=(V,A,U,D)$ 中，对于流 f，如果

$$f_{ij}=0,\quad \forall(i,j)\in A,$$

则称 f 为零流，否则为非零流。如果某条弧 (i,j) 上的流量等于其容量（$f_{ij}=u_{ij}$），则称该弧为饱和弧（saturated arc）；如果某条弧 (i,j) 上的流量小于其容量（$f_{ij}<u_{ij}$），则称该弧为非饱和弧；如果某条弧 (i,j) 上的流量为 0（$f_{ij}=0$），则称该弧为空弧（void arc）。

7.1.2 最大流问题

考虑如下流网络 $N=(V,A,U,D)$：节点 s 为网络中唯一的源点，t 为唯一的汇点，而其它节点为转运点。如果网络中存在可行流 f，此时称流 f 的流量（或流值，flow value）为 d_s（根据（3），它自然也等于 $-d_t$），通常记为 v 或 $v(f)$，即

$$v=v(f)=d_s=-d_t\text{。}$$

对这种单源单汇的网络，如果我们并不给定 d_s 和 d_t（即流量不给定），则网络一般记为 $N=(s,t,V,A,U)$。最大流问题（maximum flow problem）就是在 $N=(s,t,V,A,U)$ 中找到流值最大的可行流（即最大流）。我们将会看到，最大流问题的许多算法也可以用来求解流量给定的网络中的可行流。也就是说，当我们解决了最大流问题以后，对于在流量给定的网络中寻找可行流的问题，通常也就可以解决了。

因此，用线性规划的方法，最大流问题可以形式地描述如下：

$$\max v$$

$$\text{s.t.}\sum_{j:(i,j)\in A}f_{ij}-\sum_{j:(j,i)\in A}f_{ji}=\begin{cases}v, & i=s\\ -v, & i=t\\ 0, & i\neq s,t\end{cases},\qquad (4)$$

$$0\le f_{ij}\le u_{ij},\quad \forall(i,j)\in A.\qquad (5)$$

定义 如果一个矩阵 A 的任何子方阵的行列式的值都等于 0，1 或 -1，则称 A 是全幺模的(totally unimodular TU，又译为全单位模的)，或称 A 是全幺模矩阵。

定理 7（整流定理） 最大流问题所对应的约束矩阵是全幺模矩阵。若所有弧容量均为正整数，则问题的最优解为整数解。

最大流问题是一个特殊的线性规划问题。我们将会看到利用图的特点，解决这个问题的方法较之线性规划的一般方法要方便、直观得多。

7.1.3 单源和单汇运输网络

实际问题往往是多源多汇网络，为了计算的规格化，可将多源多汇网络 G 化成单源单汇网络 G'。设 X 是 G 的源，Y 是 G 的汇，具体转化方法如下：

（i）在原图 G 中增加两个新的顶点 x 和 y，令为新图 G' 中之单源和单汇，则 G 中所有顶点 V 成为 G' 之中间顶点集。

（ii）用一条容量为 ∞ 的弧把 x 连接到 X 中的每个顶点。

（iii）用一条容量为 ∞ 的弧把 Y 中的每个顶点连接到 y。

G 和 G' 中的流以一个简单的方式相互对应。若 f 是 G 中的流，则由

$$f'(a)=\begin{cases} f(a), & \text{若}a\text{是}G\text{的弧} \\ f^{+}(v), & \text{若}a=(x,v) \\ f^{-}(v), & \text{若}a=(v,y) \end{cases}$$

所定义的函数 f' 是 G' 中使得 $v(f')=v(f)$ 的流，这里 $f^{+}(v)$ 表示流出 v 的流量，$f^{-}(v)$ 表示流入 v 的流量（在 G 中）。反之，G' 中的流在 G 的弧集上的限制就是 G 中具有相同值的流。

7.2 最大流和最小割关系

设 $N=(s,t,V,A,U)$，$S\subset V$，$s\in S$，$t\in V-S$，则称 $(S,\bar{S})$ 为网络的一个割，其中 $\bar{S}=V-S$，$(S,\bar{S})$ 为尾在 S，头在 $\bar{S}$ 的弧集，称

$$C(S,\bar{S})=\sum_{\substack{(i,j)\in A\\ i\in S,\,j\in\bar{S}}} u_{ij}$$

为割 $(S,\bar{S})$ 的容量。

定理 8　f 是最大流，$(S,\bar{S})$ 是容量最小的割的充要条件是

$$v(f)=C(S,\bar{S})。$$

在网络 $N=(s,t,V,A,U)$ 中，对于轨 $(s,v_2,\cdots,v_{n-1},t)$（此轨为无向的），若 $v_iv_{i+1}\in A$，则称它为前向弧；若 $v_{i+1}v_i\in A$，则称它为后向弧。

在网络 N 中，从 s 到 t 的轨 P 上，若对所有的前向弧 (i,j) 都有 $f_{ij}<u_{ij}$，对所有的后向弧 (i,j) 恒有 $f_{ij}>0$，则称这条轨 P 为从 s 到 t 的关于 f 的可增广轨。

令

$$\delta_{ij}=\begin{cases} u_{ij}-f_{ij}, & \text{当（}i,j\text{）为前向弧} \\ f_{ij}, & \text{当（}i,j\text{）为后向弧} \end{cases},$$

$$\delta=\min\{\delta_{ij}\}$$

则在这条可增广轨上每条前向弧的流都可以增加一个量 δ，而相应的后向弧的流可减少 δ，这样就可使得网络的流量获得增加，同时可以使每条弧的流量不超过它的容量，而且保持为正，也不影响其它弧的流量。总之，网络中 f 可增广轨的存在是有意义的，因为这意味着 f 不是最大流。

7.3 最大流的一种算法—标号法

标号法是由 Ford 和 Fulkerson 在 1957 年提出的。用标号法寻求网络中最大流的基本思想是寻找可增广轨，使网络的流量得到增加，直到最大为止。即首先给出一个初始流，这样的流是存在的，例如零流。如果存在关于它的可增广轨，那么调整该轨上每条弧上的流量，就可以得到新的流。对于新的流，如果仍存在可增广轨，则用同样的方法使流的值增大，继续这个过程，直到网络中不存在关于新得到流的可增广轨为止，则该流就是所求的最大流。

这种方法分为以下两个过程：

A.标号过程：通过标号过程寻找一条可增广轨。

B.增流过程：沿着可增广轨增加网络的流量。

这两个过程的步骤分述如下。

（A）标号过程：

（i）给发点标号为(s^+,∞)。

（ii）若顶点x已经标号，则对x的所有未标号的邻接顶点y按以下规则标号：

① 若$(x,y)\in A$，且$f_{xy}<u_{xy}$时，令$\delta_y=\min\{u_{xy}-f_{xy},\delta_x\}$，则给顶点$y$标号为$(x^+,\delta_y)$，若$f_{xy}=u_{xy}$，则不给顶点$y$标号。

② $(y,x)\in A$，且$f_{yx}>0$，令$\delta_y=\min\{f_{yx},\delta_x\}$，则给$y$标号为$(x^-,\delta_y)$，若$f_{yx}=0$，则不给$y$标号。

（iii）不断地重复步骤（ii）直到收点t被标号，或不再有顶点可以标号为止。当t被标号时，表明存在一条从s到t的可增广轨，则转向增流过程（B）。如若t点不能被标号，且不存在其它可以标号的顶点时，表明不存在从s到t的可增广轨，算法结束，此时所获得的流就是最大流。

（B）增流过程

（i）令$u=t$。

（ii）若u的标号为(v^+,δ_t)，则$f_{vu}=f_{vu}+\delta_t$；若u的标号为(v^-,δ_t)，则$f_{uv}=f_{uv}-\delta_t$。

（iii）若$u=s$，把全部标号去掉，并回到标号过程（A）。否则，令$u=v$，并回到增流过程（ii）。

求网络$N=(s,t,V,A,U)$中的最大流x的算法的程序设计具体步骤如下：

对每个节点j，其标号包括两部分信息

$$(\mathrm{pred}(j),\max\mathrm{f(j)})$$

该节点在可能的增广路中的前一个节点$\mathrm{pred}(j)$，以及沿该可能的增广路到该节点为止可以增广的最大流量$\max\mathrm{f}(j)$。

STEP0　置初始可行流x（如零流）；对节点t标号，即令$\max\mathrm{f}(t)$=任意正值（如1）。

STEP1　若$\max\mathrm{f}(t)>0$，继续下一步；否则停止，已经得到最大流，结束。

STEP2　取消所有节点$j\in V$的标号，即令$\max\mathrm{f}(j)=0$，$\mathrm{pred}(j)=0$；令LIST={ s }，对节点s标号，即令$\max\mathrm{f}(s)=$充分大的正值。

STEP3　如果LIST$\neq\Phi$且$\max\mathrm{f}(t)=0$，继续下一步；否则：（3a）如果t已经有标号（即$\max\mathrm{f}(t)>0$），则找到了一条增广路，沿该增广路对流x进行增广（增广的流量为$\max\mathrm{f}(t)$，增广路可以根据pred回溯方便地得到），转STEP1。

（3b）如果t没有标号（即LIST=Φ且$\max\mathrm{f}(t)=0$），则停止，已得到最大流。

STEP4　从LIST中移走一个节点i；寻找从节点i出发的所有可能的增广弧：（4a）对非饱和前向弧(i,j)，若节点j没有标号（即$\mathrm{pred}(j)=0$），对j进行标号，即令

$$\max\mathrm{f}(j)=\min\{\max\mathrm{f}(i),u_{ij}-x_{ij}\},\ \mathrm{pred}(j)=i,$$

并将j加入LIST中。

（4b）对非空后向弧(j,i)，若节点j没有标号（即$\mathrm{pred}(j)=0$），对j进行标号，即令

$$\max\mathrm{f}(j)=\min\{\max\mathrm{f}(i),x_{ij}\},\ \mathrm{pred}(j)=-i,$$

并将 j 加入 LIST 中。

例 17　用 Ford-Fulkerson 算法计算如图 6 网络中的最大流，每条弧上的两个数字分别表示容量和当前流量。

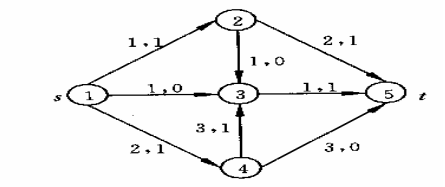


图 6　最大流问题

解　编写程序如下：

```
clc,clear
u(1,2)=1;u(1,3)=1;u(1,4)=2;u(2,3)=1;u(2,5)=2;
u(3,5)=1;u(4,3)=3;u(4,5)=3;
f(1,2)=1;f(1,3)=0;f(1,4)=1;f(2,3)=0;f(2,5)=1;
f(3,5)=1;f(4,3)=1;f(4,5)=0;
n=length(u);list=[];maxf(n)=1;
while maxf(n)>0
   maxf=zeros(1,n);pred=zeros(1,n);
   list=1;record=list;maxf(1)=inf;
   %list是未检查邻接点的标号点，record是已标号点
   while (~isempty(list))&(maxf(n)==0)
      flag=list(1);list(1)=[];
      label1= find(u(flag,:)-f(flag,:));
      label1=setdiff(label1,record);
      list=union(list,label1);
      pred(label1)=flag;
      maxf(label1)=min(maxf(flag),u(flag,label1)...
      -f(flag,label1));
      record=union(record,label1);
      label2=find(f(:,flag));
      label2=label2';
      label2=setdiff(label2,record);
      list=union(list,label2);
      pred(label2)=-flag;
      maxf(label2)=min(maxf(flag),f(label2,flag));
      record=union(record,label2);
   end
      if maxf(n)>0
         v2=n; v1=pred(v2);
         while v2~=1
           if v1>0
              f(v1,v2)=f(v1,v2)+maxf(n);
           else
           v1=abs(v1);
           f(v2,v1)=f(v2,v1)-maxf(n);
           end
         v2=v1; v1=pred(v2);
        end
      end
end
f
```

例18　现需要将城市s的石油通过管道运送到城市t，中间有4个中转站v_1,v_2,v_3和v_4，城市与中转站的连接以及管道的容量如图7所示，求从城市s到城市t的最大流。

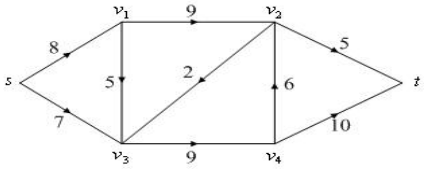


图7　最大流问题

解　使用最大流的数学规划表达式，编写LINGO程序如下：

```
model:
sets:
nodes/s,1,2,3,4,t/;
arcs(nodes,nodes)/s 1,s 3,1 2,1 3,2 3,2 t,3 4,4 2,4 t/:c,f;
endsets
data:
c=8 7 9 5 2 5 9 6 10;
enddata
n=@size(nodes); !顶点的个数;
max=flow;
@for(nodes(i)|i #ne#1 #and# i #ne# n:
     @sum(arcs(i,j):f(i,j))=@sum(arcs(j,i):f(j,i)));
@sum(arcs(i,j)|i #eq# 1:f(i,j))=flow;
@sum(arcs(i,j)|j #eq# n:f(i,j))=flow;
@for(arcs:@bnd(0,f,c));
end
```

在上面的程序中，采用了稀疏集的编写方法。下面介绍的程序编写方法是利用赋权邻接矩阵，这样可以不使用稀疏集的编写方法，更便于推广到复杂网络。

```
model:
sets:
nodes/s,1,2,3,4,t/;
arcs(nodes,nodes):c,f;
endsets
data:
c=0;
@text('fdata.txt')=f;
enddata
calc:
c(1,2)=8;c(1,4)=7;
c(2,3)=9;c(2,4)=5;
c(3,4)=2;c(3,6)=5;
c(4,5)=9;c(5,3)=6;c(5,6)=10;
endcalc
n=@size(nodes); !顶点的个数;
max=flow;
@for(nodes(i)|i #ne#1 #and# i #ne# n:
     @sum(nodes(j):f(i,j))=@sum(nodes(j):f(j,i)));
@sum(nodes(i):f(1,i))=flow;
@sum(nodes(i):f(i,n))=flow;
@for(arcs:@bnd(0,f,c));
end
```

§8 最小费用流及其求法

8.1 最小费用流

上面我们介绍了一个网络上最短路以及最大流的算法，但是还没有考虑到网络上流的费用问题，在许多实际问题中，费用的因素很重要。例如，在运输问题中，人们总是希望在完成运输任务的同时，寻求一个使总的运输费用最小的运输方案。这就是下面要介绍的最小费用流问题。

在运输网络 $N=(s,t,V,A,U)$ 中，设 c_{ij} 是定义在 A 上的非负函数，它表示通过弧 (i,j) 单位流的费用。所谓最小费用流问题就是从发点到收点怎样以最小费用输送一已知量为 $v(f)$ 的总流量。

最小费用流问题可以用如下的线性规划问题描述：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} f_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j:(i,j)\in A} f_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} f_{ji} = d_i \quad ,$$

$$0 \le f_{ij} \le u_{ij}, \quad \forall (i,j) \in A.$$

其中 $d_i = \begin{cases} v(f), & i=s \\ -v(f), & i=t \\ 0, & i \ne s,t \end{cases}$

显然，如果 $v(f)=$ 最大流 $v(f_{\max})$，则本问题就是最小费用最大流问题。如果 $v(f)>v(f_{\max})$，则本问题无解。

例 19（最小费用最大流问题）（续例 18）由于输油管道的长短不一或地质等原因，使每条管道上运输费用也不相同，因此，除考虑输油管道的最大流外，还需要考虑输油管道输送最大流的最小费用。图 8 所示是带有运费的网络，其中第 1 个数字是网络的容量，第 2 个数字是网络的单位运费。

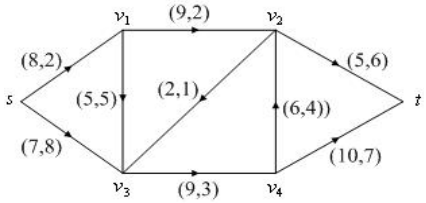


图 8　最小费用最大流问题

解　按照最小费用流的数学规划写出相应的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
nodes/s,1,2,3,4,t/:d;
arcs(nodes,nodes)/s 1,s 3,1 2,1 3,2 3,2 t,3 4,4 2,4 t/:c,u,f;
endsets
data:
d=14 0 0 0 0 -14;  !最大流为14;
c=2 8 2 5 1 6 3 4 7;
u=8 7 9 5 2 5 9 6 10;
enddata
min=@sum(arcs:c*f);
```

```
@for(nodes(i):@sum(arcs(i,j):f(i,j))-@sum(arcs(j,i):f(j,i))=d(i));
@for(arcs:@bnd(0,f,u));
end
```

求得最大流的最小费用是 205，而原最大流的费用为 210 单位，原方案并不是最优的。

类似地，可以利用赋权邻接矩阵编程求得最小费用最大流。LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
nodes/s,1,2,3,4,t/:d;
arcs(nodes,nodes):c,u,f;
endsets
data:
d=14 0 0 0 0 -14;
c=0; u=0;
enddata
calc:
c(1,2)=2;c(1,4)=8;
c(2,3)=2;c(2,4)=5;
c(3,4)=1;c(3,6)=6;
c(4,5)=3;c(5,3)=4;c(5,6)=7;
u(1,2)=8;u(1,4)=7;
u(2,3)=9;u(2,4)=5;
u(3,4)=2;u(3,6)=5;
u(4,5)=9;u(5,3)=6;u(5,6)=10;
endcalc
min=@sum(arcs:c*f);
@for(nodes(i):@sum(nodes(j):f(i,j))-@sum(nodes(j):f(j,i))=d(i));
@for(arcs:@bnd(0,f,u));
end
```

8.2 求最小费用流的一种方法—迭代法

这里所介绍的求最小费用流的方法叫做迭代法。这个方法是由 Busacker 和 Gowan 在 1961 年提出的。其主要步骤如下：

(i)求出从发点到收点的最小费用通路 $\mu(s,t)$。

(ii)对该通路 $\mu(s,t)$ 分配最大可能的流量：

$$\bar{f} = \min_{(i,j)\in\mu(s,t)} \{u_{ij}\}$$

并让通路上的所有边的容量相应减少 $\bar{f}$。这时，对于通路上的饱和边，其单位流费用相应改为 ∞。

(iii)作该通路 $\mu(s,t)$ 上所有边 (i,j) 的反向边 (j,i)。令

$$u_{ji} = \bar{f}\ ,\ \ c_{ji} = -c_{ij}$$

(iv)在这样构成的新网络中，重复上述步骤(i)，(ii)，(iii)，直到从发点到收点的全部流量等于 $v(f)$ 为止（或者再也找不到从 s 到 t 的最小费用道路）。

下面我们编写了最小费用最大流函数 mincostmaxflow，其中调用了利用 Floyd 算法求最短路的函数 floydpath。

求解例 19 具体程序如下（下面的全部程序放在一个文件中）：

```
function mainexample19
clear;clc;
```

```
global M num
c=zeros(6);u=zeros(6);
c(1,2)=2;c(1,4)=8;c(2,3)=2;c(2,4)=5;
c(3,4)=1;c(3,6)=6;c(4,5)=3;c(5,3)=4;c(5,6)=7;
u(1,2)=8;u(1,4)=7;u(2,3)=9;u(2,4)=5;
u(3,4)=2;u(3,6)=5;u(4,5)=9;u(5,3)=6;u(5,6)=10;
num=size(u,1);M=sum(sum(u))*num^2;
[f,val]=mincostmaxflow(u,c)

%求最短路径函数
function path=floydpath(w);
global M num
w=w+((w==0)-eye(num))*M;
p=zeros(num);
for k=1:num
    for i=1:num
        for j=1:num
            if w(i,j)>w(i,k)+w(k,j)
                w(i,j)=w(i,k)+w(k,j);
                p(i,j)=k;
            end
        end
    end
end
if w(1,num) ==M
      path=[];
else
      path=zeros(num);
      s=1;t=num;m=p(s,t);
      while ~isempty(m)
            if m(1)
                  s=[s,m(1)];t=[t,t(1)];t(1)=m(1);
                  m(1)=[];m=[p(s(1),t(1)),m,p(s(end),t(end))];
            else
                  path(s(1),t(1))=1;s(1)=[];m(1)=[];t(1)=[];
            end
      end
end

%最小费用最大流函数
function [flow,val]=mincostmaxflow(rongliang,cost,flowvalue);
%第一个参数：容量矩阵；第二个参数：费用矩阵；
%前两个参数必须在不通路处置零
%第三个参数：指定容量值（可以不写，表示求最小费用最大流）
%返回值 flow 为可行流矩阵,val 为最小费用值
global M
flow=zeros(size(rongliang));allflow=sum(flow(1,:));
if nargin<3
      flowvalue=M;
end
```

```
while allflow<flowvalue
    w=(flow<rongliang).*cost-((flow>0).*cost)';
    path=floydpath(w);%调用 floydpath 函数
    if isempty(path)
        val=sum(sum(flow.*cost));
        return;
    end
    theta=min(min(path.*(rongliang-flow)+(path.*(rongliang-flow)==0).*M));
    theta=min([min(path'.*flow+(path'.*flow==0).*M),theta]);
    flow=flow+(rongliang>0).*(path-path').*theta;
    allflow=sum(flow(1,:));
end
val=sum(sum(flow.*cost));
```

§9 计划评审方法和关键路线法

计划评审方法（program evaluation and review technique, PERT）和关键路线法（critical path method, CPM）是网络分析的重要组成部分，它广泛地用于系统分析和项目管理。计划评审与关键路线方法是在 20 世纪 50 年代提出并发展起来的，1956 年，美国杜邦公司为了协调企业不同业务部门的系统规划，提出了关键路线法。1958 年，美国海军武装部在研制“北极星”导弹计划时，由于导弹的研制系统过于庞大、复杂，为找到一种有效的管理方法，设计了计划评审方法。由于 PERT 与 CPM 既有着相同的目标应用，又有很多相同的术语，这两种方法已合并为一种方法，在国外称为 PERT/CPM，在国内称为统筹方法（scheduling method）。

9.1 计划网络图

例 20 某项目工程由 11 项作业组成（分别用代号 $A, B, \cdots, J, K$ 表示），其计划完成时间及作业间相互关系如表 9 所示，求完成该项目的最短时间。

表 9 作业流程数据

作业	计划完成时间（天）	紧前作业	作业	计划完成时间（天）	紧前作业
A	5	—	G	21	B,E
B	10	—	H	35	B,E
C	11	—	I	25	B,E
D	4	B	J	15	F,G,I
E	4	A	K	20	F,G
F	15	C,D			

例 20 就是计划评审方法或关键路线法需要解决的问题。

9.1.1 计划网络图的概念

定义 称任何消耗时间或资源的行动称为作业。称作业的开始或结束为事件，事件本身不消耗资源。

在计划网络图中通常用圆圈表示事件，用箭线表示工作，如图 9 所示，1，2，3 表示事件，A, B 表示作业。由这种方法画出的网络图称为计划网络图。

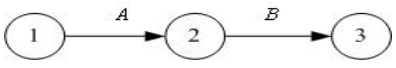


图 9 计划网络图的基本画法

虚工作用虚箭线“……→”表示。它表示工时为零，不消耗任何资源的虚构工作。其作用只是为了正确表示工作的前行后继关系。

定义　在计划网络图中，称从初始事件到最终事件的由各项工作连贯组成的一条路为路线。具有累计作业时间最长的路线称为关键路线。

由此看来，例 20 就是求相应的计划网络图中的关键路线。

9.1.2　建立计划网络图应注意的问题

（1）任何作业在网络中用唯一的箭线表示，任何作业其终点事件的编号必须大于其起点事件。

（2）两个事件之间只能画一条箭线，表示一项作业。对于具有相同开始和结束事件的两项以上的作业，要引进虚事件和虚作业。

（3）任何计划网络图应有唯一的最初事件和唯一的最终事件。

（4）计划网络图不允许出现回路。

（5）计划网络图的画法一般是从左到右，从上到下，尽量作到清晰美观，避免箭头交叉。

9.2　时间参数

9.2.1　事件时间参数

（1）事件的最早时间

事件 j 的最早时间用 $t_E(j)$ 表示，它表明以它为始点的各工作最早可能开始的时间，也表示以它为终点的各工作的最早可能完成时间，它等于从始点事件到该事件的最长路线上所有工作的工时总和。事件最早时间可用下列递推公式，按照事件编号从小到大的顺序逐个计算。

设事件编号为 $1,2,\cdots,n$，则

$$\begin{cases} t_E(1)=0 \\ t_E(j)=\max\limits_i\{t_E(i)+t(i,j)\} \end{cases} \tag{6}$$

其中 $t_E(i)$ 是与事件 j 相邻的各紧前事件的最早时间，$t(i,j)$ 是作业 (i,j) 所需的工时。

终点事件的最早时间显然就是整个工程的总最早完工期，即

$$t_E(n)=\text{总最早完工期} \tag{7}$$

（2）事件的最迟时间

事件 i 的最迟时间用 $t_L(i)$ 表示，它表明在不影响任务总工期条件下，以它为始点的工作的最迟必须开始时间，或以它为终点的各工作的最迟必须完成时间。由于一般情况下，我们都把任务的最早完工时间作为任务的总工期，所以事件最迟时间的计算公式为：

$$\begin{cases} t_L(n)=\text{总工期（或}t_E(n)\text{）} \\ t_L(i)=\min\limits_j\{t_L(j)-t(i,j)\} \end{cases} \tag{8}$$

其中 $t_L(j)$ 是与事件 i 相邻的各紧后事件的最迟时间。

公式（8）也是递推公式，但与（6）相反，是从终点事件开始，按编号由大至小的顺序逐个由后向前计算。

9.2.2　工作的时间参数

（1）工作的最早可能开工时间与工作的最早可能完工时间

一个工作 (i,j) 的最早可能开工时间用 $t_{ES}(i,j)$ 表示。任何一件工作都必须在其所

有紧前工作全部完工后才能开始。工作(i, j)的最早可能完工时间用$t_{EF}(i, j)$表示。它表示工作按最早开工时间开始所能达到的完工时间。它们的计算公式为：

$$\begin{cases} t_{ES}(1, j) = 0 \\ t_{ES}(i, j) = \max\limits_{k}\{t_{ES}(k,i) + t(k,i)\} \\ t_{EF}(i, j) = t_{ES}(i, j) + t(i, j) \end{cases} \tag{9}$$

这组公式也是递推公式。即所有从总开工事件出发的工作$(1, j)$，其最早可能开工时间为零；任一工作(i, j)的最早开工时间要由它的所有紧前工作(k,i)的最早开工时间决定；工作(i, j)的最早完工时间显然等于其最早开工时间与工时之和。

（2）工作的最迟必须开工时间与工作的最迟必须完工时间

一个工作(i, j)的最迟开工时间用$t_{LS}(i, j)$表示。它表示工作(i, j)在不影响整个任务如期完成的前提下，必须开始的最晚时间。

工作(i, j)的最迟必须完工时间用$t_{LF}(i, j)$表示。它表示工作(i, j)按最迟时间开工，所能达到的完工时间。它们的计算公式为：

$$\begin{cases} t_{LF}(i,n) = \text{总完工期（或}t_{EF}(i,n)\text{）} \\ t_{LS}(i, j) = \min\limits_{k}\{t_{LS}(j,k) - t(i, j)\} \\ t_{LF}(i, j) = t_{LS}(i, j) + t(i, j) \end{cases} \tag{10}$$

这组公式是按工作的最迟必须开工时间由终点向始点逐个递推的公式。凡是进入总完工事件n的工作(i,n)，其最迟完工时间必须等于预定总工期或等于这个工作的最早可能完工时间。任一工作(i, j)的最迟必须开工时间由它的所有紧后工作(j,k)的最迟开工时间确定。而工作(i, j)的最迟完工时间显然等于本工作的最迟开工时间与工时的和。

由于任一个事件i（除去始点事件和终点事件），既表示某些工作的开始又表示某些工作的结束。所以从事件与工作的关系考虑，用公式（9），公式（10）求得的有关工作的时间参数也可以通过事件的时间参数公式（6），公式（8）来计算。如工作(i, j)的最早可能开工时间$t_{ES}(i, j)$就等于事件i的最早时间$t_E(i)$。工作(i, j)的最迟必须完工时间等于事件j的最迟时间。

9.2.3　时差

工作的时差又叫工作的机动时间或富裕时间，常用的时差有两种。

（1）工作的总时差

在不影响任务总工期的条件下，某工作(i, j)可以延迟其开工时间的最大幅度，叫做该工作的总时差，用$R(i, j)$表示。其计算公式为：

$$R(i, j) = t_{LF}(i, j) - t_{EF}(i, j) \tag{11}$$

即工作(i, j)的总时差等于它的最迟完工时间与最早完工时间的差。显然$R(i, j)$也等于该工作的最迟开工时间与最早开工时间之差。

（2）工作的单时差

工作的单时差是指在不影响紧后工作的最早开工时间条件下，此工作可以延迟其开工时间的最大幅度，用$r(i, j)$表示。其计算公式为：

$$r(i,j)=t_{ES}(j,k)-t_{EF}(i,j) \qquad (12)$$

即单时差等于其紧后工作的最早开工时间与本工作的最早完工时间之差。

9.3 计划网络图的计算

以例 20 的求解过程为例介绍计划网络图的计算方法。

9.3.1 建立计划网络图

首先建立计划网络图。按照上述规则，建立例 20 的计划网络图，如图 10 所示。

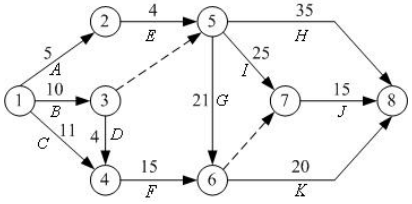


图 10　例 20 的计划网络图

9.3.2 写出相应的规划问题

设 x_i 是事件 i 的开始时间，1为最初事件，n 为最终事件。希望总的工期最短，即极小化 x_n-x_1。设 t_{ij} 是作业 (i,j) 的计划时间，因此，对于事件 i 与事件 j 有不等式

$$x_j \geq x_i + t_{ij}$$

由此得到相应的数学规划问题

$$\min\ x_n - x_1$$

$$\text{s.t.}\quad x_j \geq x_i + t_{ij},\ (i,j)\in A,\ i,j\in V$$

$$x_i \geq 0,\ i\in V$$

其中 V 是所有的事件集合，A 是所有的作业集合。

9.3.3 问题求解

用 LINGO 软件求解例 20。

解　编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
events/1..8/:x;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:t;
endsets
data:
t=5 10 11 4 4 0 15 21 25 35 0 20 15;
enddata
min=x(8)-x(1);
@for(operate(i,j):x(j)>x(i)+t(i,j));
end
```

计算结果给出了各个项目的开工时间，如 $x_1=0$，则作业 A,B,C 的开工时间均是第 0 天；$x_2=5$，作业 E 的开工时间是第 5 天；$x_3=10$，则作业 D 的开工时间是第 10 天；等等。每个作业只要按规定的时间开工，整个项目的最短工期为 51 天。

尽管上述 LINGO 程序给出相应的开工时间和整个项目的最短工期，但统筹方法中

许多有用的信息并没有得到，如项目的关键路径、每个作业的最早开工时间、最迟开工时间等。

例 21（续例 20）求例 20 中每个作业的最早开工时间、最迟开工时间和作业的关键路径。

解　为了得到每个作业的最早开工时间、作业的关键路线等，将目标函数改为 $\sum_{i\in V} x_i$，即作业的开始时间尽量早，这样就可以得到作业的最早开工时间。再引进作业对应弧上的松弛变量 s_{ij}，且 $s_{ij} = x_j - x_i - t_{ij}$，$(i, j) \in A$，这样就可以得到作业的最迟开工时间，记 y_i 表示事件 i 的最迟开工时间。当最早开工时间与最迟开工时间相同时，就得到项目的关键路径。

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
events/1..8/:x,z;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:s,t,m,c,y;
endsets
data:
t=5 10 11 4 4 0 15 21 25 35 0 20 15;
m=5 8    8    3 4 0 15 16 22 30 0 16 12;
c=0 700 400 450 0 0 0 600 300 500 0 500 400;
d=49;
@text(txt2.txt)=x,z;
enddata
min=mincost+sumx;
mincost=@sum(operate:c*y);
sumx=@sum(events:x);
@for(operate(i,j):s(i,j)=x(j)-x(i)+y(i,j)-t(i,j));
n=@size(events);
x(1)=0;
x(n)<d;
@for(operate:@bnd(0,y,t-m));
z(n)=x(n);
@for(events(i)|i#lt#n:z(i)=@min(operate(i,j):z(j)-t(i,j)+y(i,j)));
end
```

最迟开工时间的分析需要用到松弛变量 s_{ij}，当 $s_{ij} > 0$ 时，说明还有剩余时间，对应作业的工期可以推迟 s_{ij}。例如，$s_{78} = 1$，作业（7，8）（J）的开工时间可以推迟 1 天，即开工时间为 36。再如 $s_{46} = 2$，作业（4，6）（F）可以推迟 2 天开始，$s_{14} = 3$，作业（1，4）（C）可以推迟 3 天开始，但由于作业（4，6）（F）已能够推迟 2 天，所以，作业（1，4）（C）最多可推迟 5 天。

由此，可以得到所有作业的最早开工时间和最迟开工时间，如下表所示，方括号中第 1 个数字是最早开工时间，第 2 个数字是最迟开工时间。

表 10　作业数据

作业 (i, j)	开工时间	计划完成时间（天）	作业 (i, j)	开工时间	计划完成时间（天）
$A(1,2)$	[0,1]	5	$G(5,6)$	[10,10]	21

$B(1,3)$	[0,0]	10	$H(5,8)$	[10,16]	35
$C(1,4)$	[0,5]	11	$I(5,7)$	[10,11]	25
$D(3,4)$	[10,12]	4	$J(7,8)$	[35,36]	15
$E(2,5)$	[5,6]	4	$K(6,8)$	[31,31]	20
$F(4,6)$	[14,16]	15			

从上表可以看出，当最早开工时间与最迟开工时间相同时，对应的作业在关键路线上，因此可以画出计划网络图中的关键路线，如图 11 粗线所示。关键路线为 1→3→5→6→8。

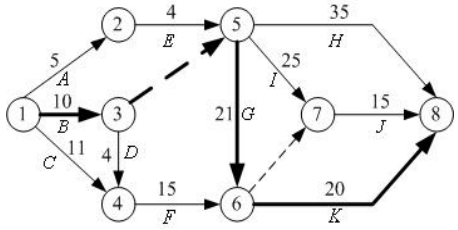


图 11　带有关键路线的计划网络图

9.3.4　将关键路线看成最长路

如果将关键路线看成最长路，则可以按照求最短路的方法（将求极小改为求极大）求出关键路线。

设 x_{ij} 为 0-1 变量，当作业 (i, j) 位于关键路线上取 1，否则取 0。数学规划问题写成：

$$\max \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{\substack{j=1 \\ (i,j)\in A}}^{n} x_{ij} - \sum_{\substack{j=1 \\ (j,i)\in A}}^{n} x_{ji} = \begin{cases} 1, & i = 1 \\ -1, & i = n \\ 0, & i \neq 1, n \end{cases}$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \quad (i, j) \in A$$

例 22　用最长路的方法，求解例 20。

解　按上述数学规划问题写出相应的 LINGO 程序。

```
model:
sets:
events/1..8/:d;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:t,x;
endsets
data:
t=5 10 11 4 4 0 15 21 25 35 0 20 15;
d=1 0 0 0 0 0 0 -1;
enddata
max=@sum(operate:t*x);
@for(events(i):@sum(operate(i,j):x(i,j))-@sum(operate(j,i):x(j,i))=d(i));
end
```

求得工期需要 51 天，关键路线为 1→3→5→6→8。

9.4 关键路线与计划网络的优化

例 23（关键路线与计划网络的优化）假设例 20 中所列的工程要求在 49 天内完成。为提前完成工程，有些作业需要加快进度，缩短工期，而加快进度需要额外增加费用。下表列出例 20 中可缩短工期的所有作业和缩短一天工期额外增加的费用。现在的问题是，如何安排作业才能使额外增加的总费用最少。

表 11　工程作业数据

作业 (i,j)	计划完成时间（天）	最短完成时间（天）	缩短 1 天增加的费用（元）	作业 (i,j)	计划完成时间（天）	最短完成时间（天）	缩短 1 天增加的费用（元）
$B(1,3)$	10	8	700	$H(5,8)$	35	30	500
$C(1,4)$	11	8	400	$I(5,7)$	25	22	300
$E(2,5)$	4	3	450	$J(7,8)$	15	12	400
$G(5,6)$	21	16	600	$K(6,8)$	20	16	500

例 23 所涉及的问题就是计划网络的优化问题，这时需要压缩关键路径来减少最短工期。

9.4.1 计划网络优化的数学表达式

设 x_i 是事件 i 的开始时间，t_{ij} 是作业 (i,j) 的计划时间，m_{ij} 是完成作业 (i,j) 的最短时间，y_{ij} 是作业 (i,j) 可能减少的时间，c_{ij} 是作业 (i,j) 缩短一天增加的费用，因此有

$$x_j - x_i \geq t_{ij} - y_{ij} \quad \text{且} \quad 0 \leq y_{ij} \leq t_{ij} - m_{ij}$$

设 d 是要求完成的天数，1 为最初事件，n 为最终事件，所以有 $x_n - x_1 \leq d$。而问题的总目标是使额外增加的费用最小，即目标函数为 $\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$。由此得到相应的数学规划问题：

$$\min \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} y_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad x_j - x_i + y_{ij} \geq t_{ij}, \ (i,j) \in A, \ i,j \in V$$

$$x_n - x_1 \leq d$$

$$0 \leq y_{ij} \leq t_{ij} - m_{ij}, \ (i,j) \in A, \ i,j \in V$$

9.4.2 计划网络优化的求解

用 LINGO 软件求解例 23，程序如下：

```
model:
sets:
events/1..8/:x;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:t,m,c,y;
endsets
data:
t=5 10 11 4 4 0 15 21 25 35 0 20 15;
```

```
m=5 8  8  3 4 0 15 16 22 30 0 16 12;
c=0 700 400 450 0 0 0 600 300 500 0 500 400;
d=49;
enddata
min=@sum(operate:c*y);
@for(operate(i,j):x(j)-x(i)+y(i,j)>t(i,j));
n=@size(events);
x(n)-x(1)<d;
@for(operate:@bnd(0,y,t-m));
end
```

作业$(1,3)(B)$）压缩 1 天的工期，作业$(6,8)(K)$压缩 1 天工期，这样可以在 49 天完工，需要多花费 1200 元。

如果需要知道压缩工期后的关键路径，则需要稍复杂一点的计算。

例 24 （续例 23） 用 LINGO 软件求解例 23，并求出相应的关键路径、各作业的最早开工时间和最迟开工时间。

解　为了得到作业的最早开工时间，仍在目标函数中加入$\sum_{i\in V} x_i$，记z_i表示事件i的最迟开工时间，其它处理方法与前面相同。

写出相应的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
events/1..8/:x,z;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:s,t,m,c,y;
endsets
data:
t=5 10 11 4 4 0 15 21 25 35 0 20 15;
m=5 8  8  3 4 0 15 16 22 30 0 16 12;
c=0 700 400 450 0 0 0 600 300 500 0 500 400;
d=49;
@text(txt2.txt)=x,z;
enddata
min=mincost+sumx;
mincost=@sum(operate:c*y);
sumx=@sum(events:x);
@for(operate(i,j):s(i,j)=x(j)-x(i)+y(i,j)-t(i,j));
n=@size(events);
x(1)=0;
x(n)<d;
@for(operate:@bnd(0,y,t-m));
z(n)=x(n);
@for(events(i)|i#lt#n:z(i)=@min(operate(i,j):z(j)-t(i,j)+y(i,j)));
end
```

计算出所有作业的最早开工时间和最迟开工时间，见表 12。

表 12　作业数据

作业(i,j)	开工时间	实际完成时间（天）	作业(i,j)	开工时间	实际完成时间（天）
$A(1,2)$	[0,0]	5	$G(5,6)$	[9,9]	21

$B(1,3)$	[0,0]	9	$H(5,8)$	[9,14]	35
$C(1,4)$	[0,4]	11	$I(5,7)$	[9,9]	25
$D(3,4)$	[9,12]	4	$J(7,8)$	[34,34]	15
$E(2,5)$	[5,5]	4	$K(6,8)$	[30,30]	19
$F(4,6)$	[13,15]	15			

当最早开工时间与最迟开工时间相同时，对应的作业就在关键路线上，图 12 中的粗线表示优化后的关键路线。从图 5-10 可以看到，关键路线不止一条。

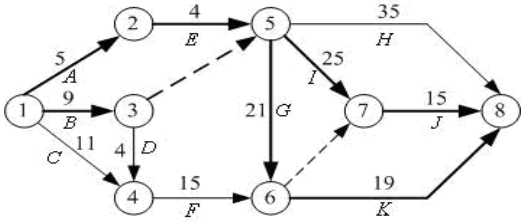


图 12　优化后的关键路线图

9.5　完成作业期望和实现事件的概率

在例 20 中，每项作业完成的时间均看成固定的，但在实际应用中，每一工作的完成会受到一些意外因素的干扰，一般不可能是完全确定的，往往只能凭借经验和过去完成类似工作需要的时间进行估计。通常情况下，对完成一项作业可以给出三个时间上的估计值：最乐观值的估计值（a），最悲观的估计值（b）和最可能的估计值（m）。

设t_{ij}是完成作业(i,j)的实际时间（是一随机变量），通常用下面的方法计算相应的数学期望和方差。

$$E(t_{ij})=\frac{a_{ij}+4m_{ij}+b_{ij}}{6} \tag{13}$$

$$\mathrm{var}(t_{ij})=\frac{(b_{ij}-a_{ij})^2}{36} \tag{14}$$

设T为最短工期，即

$$T=\sum_{(i,j)\in\text{关键路线}} t_{ij} \tag{15}$$

由中心极限定理，可以假设T服从正态分布，并且期望值和方差满足

$$\overline{T}=E(T)=\sum_{(i,j)\in\text{关键路线}} E(t_{ij}) \tag{16}$$

$$S^2=\mathrm{var}(T)=\sum_{(i,j)\in\text{关键路线}} \mathrm{var}(t_{ij}) \tag{17}$$

设规定的工期为d，则在规定的工期内完成整个项目的概率为

$$P\{T\le d\}=\Phi\left(\frac{d-\overline{T}}{S}\right) \tag{18}$$

@psn(x)是 LINGO 软件提供的标准正态分布函数，即

$$@\mathrm{psn}(x)=\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt \tag{19}$$

例 25　已知例 20 中各项作业完成的三个估计时间如下表所示。如果规定时间为 52 天，求在规定时间内完成全部作业的概率。进一步，如果完成全部作业的概率大于等于 95%，那么工期至少需要多少天？

表 13　作业数据

作业	估计时间（天）			作业	估计时间（天）		
(i,j)	a	m	b	(i,j)	a	m	b
$A(1,2)$	3	5	7	$G(5,6)$	18	20	28
$B(1,3)$	8	9	16	$H(5,8)$	26	33	52
$C(1,4)$	8	11	14	$I(5,7)$	18	25	32
$D(3,4)$	2	4	6	$J(7,8)$	12	15	18
$E(2,5)$	3	4	5	$K(6,8)$	11	21	25
$F(4,6)$	8	16	18				

解　对于这个问题采用最长路的编写方法。

按公式（13）和公式（14）计算出各作业的期望值与方差，再由期望时间计算出关键路线。从而由公式（16）和公式（17）得到关键路线的期望与方差的估计值，再利用分布函数@psn(x)，计算出完成作业的概率与完成整个项目的时间。

写出相应的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
events/1..8/:d;
operate(events,events)/1 2,1 3,1 4,2 5,3 4,3 5,4 6,5 6,
5 7,5 8,6 7,6 8,7 8/:a,m,b,et,dt,x;
endsets
data:
a=3 8 8 3 2 0 8 18 18 26 0 11 12;
m= 5 9 11 4 4 0 16 20 25 33 0 21 15;
b=7 16 14 5 6 0 18 28 32 52 0 25 18;
d=1 0 0 0 0 0 0 -1;
limit=52;
enddata
@for(operate:et=(a+4*m+b)/6;dt=(b-a)^2/36);
max=tbar;
tbar=@sum(operate:et*x);
@for(events(i):@sum(operate(i,j):x(i,j))-@sum(operate(j,i):x(j,i))=d(i));
s^2=@sum(operate:dt*x);
p=@psn((limit-tbar)/s);
@psn((days-tbar)/s)=0.95;
end
```

求得关键路线的时间期望为 51 天，标准差为 3.16，在 52 天完成全部作业的概率为 62.4%，如果完成全部作业的概率大于等于 95%，那么工期至少需要 56.2 天。

§10　钢管订购和运输

10.1　问题描述

要铺设一条 $A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_{15}$ 的输送天然气的主管道，如图 14 所示。经筛选

后可以生产这种主管道钢管的钢厂有$S_1,S_2,\cdots S_7$。图中粗线表示铁路，单细线表示公路，双细线表示要铺设的管道(假设沿管道或者原来有公路，或者建有施工公路)，圆圈表示火车站，每段铁路、公路和管道旁的阿拉伯数字表示里程(单位 km)。

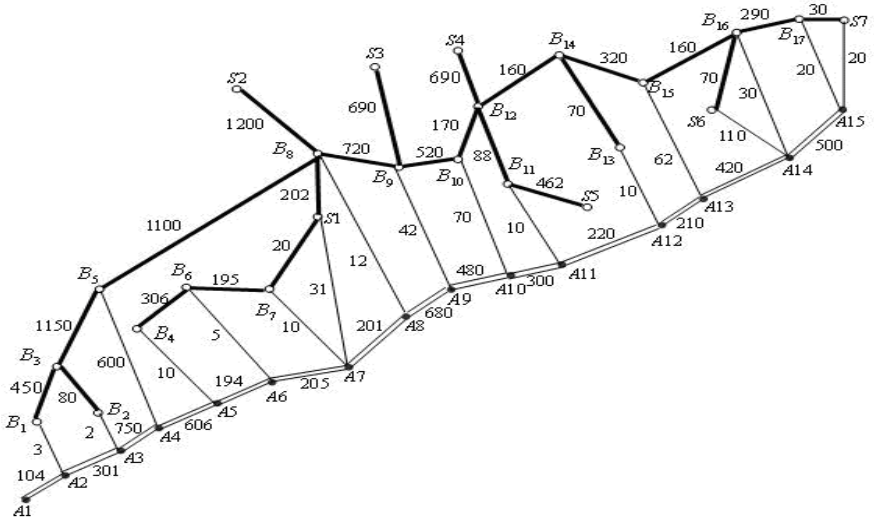


图 14

为方便计，1km 主管道钢管称为 1 单位钢管。

一个钢厂如果承担制造这种钢管，至少需要生产 500 个单位。钢厂S_i在指定期限内能生产该钢管的最大数量为s_i个单位，钢管出厂销价 1 单位钢管为p_i万元，见表 14；1 单位钢管的铁路运价见表 15。

表 14

i	1	2	3	4	5	6	7
s_i	800	800	1000	2000	2000	2000	3000
p_i	160	155	155	160	155	150	160

表 15　单位钢管的铁路运价

里程(km)	≤300	301～350	351～400	401～450	451～500
运价(万元)	20	23	26	29	32
里程(km)	501～600	601～700	701～800	801～900	901～1000
运价(万元)	37	44	50	55	60

1000km 以上每增加 1 至 100km 运价增加 5 万元。公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元（不足整公里部分按整公里计算)。钢管可由铁路、公路运往铺设地点（不只是运到点$A_1,A_2,\cdots,A_{15}$，而是管道全线)。

（1）请制定一个主管道钢管的订购和运输计划，使总费用最小（给出总费用)。

（2）请就（1）的模型分析：哪个钢厂钢管的销价的变化对购运计划和总费用影响

最大，哪个钢厂钢管的产量的上限的变化对购运计划和总费用的影响最大，并给出相应的数字结果。

（3）如果要铺设的管道不是一条线，而是一个树形图，铁路、公路和管道构成网络，请就这种更一般的情形给出一种解决办法，并对图 15 按（1）的要求给出模型和结果。

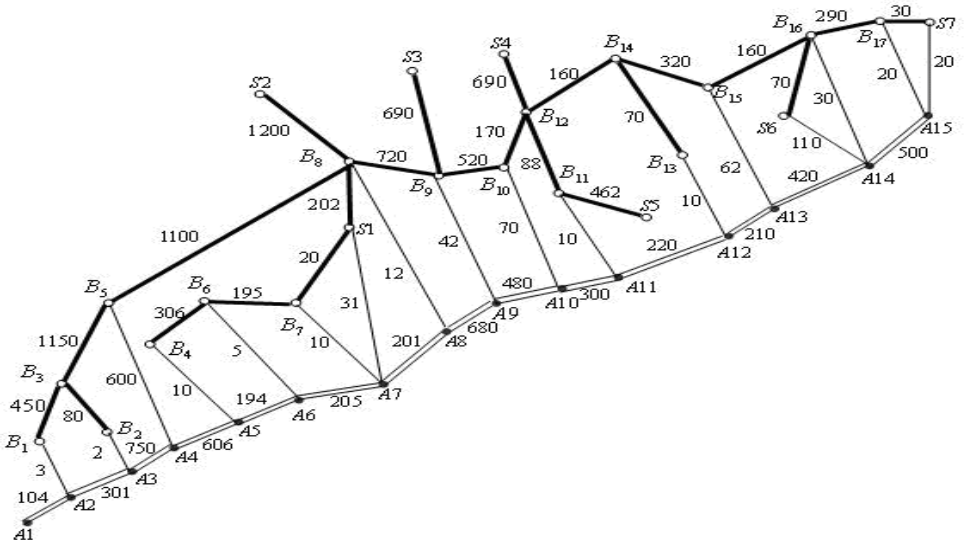


图 15

10.2　模型的建立与求解

记第 i 个钢厂的最大供应量为 s_i，从第 i 个钢厂到铺设节点 j 的订购和运输费用为 c_{ij}；用 l_j 表示管道第 j 段需要铺设的钢管量。x_{ij} 是从钢厂 i 运到节点 j 的钢管量，y_j 是从节点 j 向左铺设的钢管量，z_j 是从节点 j 向右铺设的钢管量。

根据题中所给数据，我们可以先计算出从供应点 S_i 到需求点 A_j 的最小购运费 c_{ij}（即出厂售价与运输费用之和），再根据 c_{ij} 求解总费用，总费用应包括：订购费用（已包含在 c_{ij} 中），运输费用（由各厂 S_i 经铁路、公路至各点 A_j，$i=1,2,\cdots,7$，$j=1,2,\cdots,15$），铺设管道 $A_jA_{j+1}(j=1,2,\cdots,14)$ 的运费。

10.2.1　运费矩阵的计算模型

购买单位钢管及从 S_i（$i=1,2,\cdots,7$）运送到 A_j（$j=1,2,\cdots,15$）的最小购运费用 c_{ij} 的计算：

①计算铁路任意两点间的最小运输费用

构造铁路距离赋权图 $G_1=(V,E_1,W_1)$,其中

$V=\{S_1,\cdots,S_7,A_1,\cdots,A_{15},B_1,\cdots,B_{17}\}$，各顶点的编号见图 14；$W_1=(w_{ij}^1)_{39\times39}$，

$w_{ij}^1=\begin{cases}d_{ij}^1,i,j\text{之间有铁路直接相连}\\+\infty,i,j\text{之间没有铁路直接相连}\end{cases}$（$d_{ij}^1$ 表示 i，j 两点之间的铁路路程。）

由于铁路运费不是连续的，故不能直接用 Floyd 算法来计算最小运输费用。但可以用 Floyd 算法来计算任意两点间的最短铁路距离值，再依据题中的铁路运价表，来计算最小运输费用。这就巧妙的避开铁路运费不是连续的问题。最终计算出铁路任意两点间的最小运输费用 c_{ij}^1。其中，路径值无穷大时的费用也为无穷大。

②计算公路任意两点间的最小运输费用

构造公路距离赋权图 $G_2=(V,E_2,W_2)$,其中 V 同上，$W_2=(w_{ij}^2)_{39\times 39}$，

$w_{ij}^2=\begin{cases} d_{ij}^2, i,j\text{之间有公路直接相连} \\ +\infty, i,j\text{之间没有公路直接相连} \end{cases}$（$d_{ij}^2$ 表示 i，j 两点之间的公路路程。）

依据题中“公路运输费用为 1 单位钢管每公里 0.1 万元（不足整公里部分按整公里计算）”，计算出公路任意两点间的最小运输费用 c_{ij}^2。路径值为无穷大时的费用也为无穷大。

③计算任意两点间的最小运输费用

由于可以用铁路、公路交叉运送，所以任意相邻两点间的最小运输费用为铁路、公路两者最小运输费用的最小值。

构造铁路公路的混合赋权完全图 $G=(V,E,W)$，$W=(\tilde{c}_{ij})_{39\times 39}$，其中 $\tilde{c}_{ij}=\min(c_{ij}^1,c_{ij}^2)$。

对图 G 应用 Floyd 算法，就可以计算出 S_i（$i=1,2,\cdots,7$）到 A_j（$j=1,2,\cdots,15$）的最小运送费用 $\bar{c}_{ij}$（单位：万元）见表 16。

表 16　最小运费计算结果

170.7	160.3	140.2	98.6	38	20.5	3.1	21.2	64.2	92	96	106	121.2	128	142
215.7	205.3	190.2	171.6	111	95.5	86	71.2	114.2	142	146	156	171.2	178	192
230.7	220.3	200.2	181.6	121	105.5	96	86.2	48.2	82	86	96	111.2	118	132
260.7	250.3	235.2	216.6	156	140.5	131	116.2	84.2	62	51	61	76.2	83	97
255.7	245.3	225.2	206.6	146	130.5	121	111.2	79.2	57	33	51	71.2	73	87
265.7	255.3	235.2	216.6	156	140.5	131	121.2	84.2	62	51	45	26.2	11	28
275.7	265.3	245.2	226.6	166	150.5	141	131.2	99.2	76	66	56	38.2	26	2

任意两点间的最小运输费用加上出厂售价，得到单位钢管从任一个 S_i（$i=1,2,\cdots,7$）到 A_j（$j=1,2,\cdots,15$）的购买和运送最小费用 c_{ij}。

10.2.2 总费用的数学规划模型

分析题目可以知道约束条件应包括：

钢厂产量约束：上限和下限（如果生产的话）；

运量约束：x_{ij} 对 i 求和等于 z_j 加 y_j；

y_{j+1} 与 z_j 之和等于 A_jA_{j+1} 段的长度 l_j。

由 A_j 向 A_jA_{j-1} 段铺设管道的运输总路程为 $1+\cdots+y_j=y_j(y_j+1)/2$；

由 A_j 向 A_jA_{j+1} 段铺设管道的运输总路程为 $1+\cdots+z_j=z_j(z_j+1)/2$。

根据以上条件可以建立模型如下：

$$\min \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{15} c_{ij}x_{ij} + \frac{0.1}{2}\sum_{j=1}^{15}(z_j(z_j+1)+y_j(y_j+1)) \tag{20}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \in \{0\} \cup [500, s_i] \qquad i=1,2,\cdots,7 \tag{21}$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = z_j + y_j \qquad j=1,2,\cdots,15 \tag{22}$$

$$y_{j+1} + z_j = l_j \qquad j=1,2,\cdots,14 \tag{23}$$

$$x_{ij} \geq 0, z_j \geq 0, y_j \geq 0 \qquad i=1,2,\cdots 7,\ j=1,2\cdots,15 \tag{24}$$

$$y_1 = 0, z_{15} = 0 \tag{25}$$

10.2.3　Lingo 程序

使用计算机求解上述数学规划时，需要对约束条件（20）进行处理。我们引进$0-1$变量

$$f_i = \begin{cases} 1, & \text{钢厂}i\text{生产} \\ 0, & \text{钢厂}i\text{不生产} \end{cases}$$

把约束条件（20）转化为

$$500 f_i \leq \sum_{j=1}^{15} x_{ij} \leq s_i f_i \text{，} i=1,2,\cdots,7 \tag{26}$$

利用 Lingo 求得总费用的最小值为 127.8632 亿。Lingo 程序如下：

```
model:
sets:
!nodes 表示节点集合;
nodes /S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,A13,A14,A15,
B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9,B10,B11,B12,B13,B14,B15,B16,B17/;
!c1(i,j)表示节点 i 到 j 铁路运输的最小运价（万元）,c2(i,j)表示节点 i 到 j 公路运输的费
用邻接矩阵，c(i,j)表示节点 i 到 j 的最小运价，path 标志最短路径上走过的顶点;
link(nodes, nodes): w, c1,c2,c,path1,path;
supply/S1..S7/:S,P,f;
need/A1..A15/:b,y,z; !y 表示每一点往左铺的量，z 表示往右铺的量;
linkf(supply, need):cf,X;
endsets
data:
S=800 800 1000 2000 2000 2000 3000;
P=160 155  155  160  155  150  160;
b=104,301,750,606,194,205,201,680,480,300,220,210,420,500,0;
path1=0; path=0; w=0; c2=0;
! 以下是格式化输出计算的中间结果和最终结果;
```

```
@text(MiddleCost.txt)=@writefor(supply(i): @writefor(need(j): @format(cf(i,j),' 6.1f' )),
@newline(1));
@text(Train_path.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):@format(path1(i,j),'5.0f')),
@newline(1));
@text(Final_path.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):@format(path(i,j),'5.0f')),
@newline(1));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(supply(i):@writefor(need(j):@format(x(i,j),'5.0f')),
@newline(1) );
@text(FinalResult.txt)=@write(@newline(1));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(need:@format(y,'5.0f') );
@text(FinalResult.txt)=@write(@newline(2));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(need:@format(z,'5.0f') );
enddata
calc:
!输入铁路距离邻接矩阵的上三角元素;
w(1,29)=20;w(1,30)=202;w(2,30)=1200;w(3,31)=690;w(4,34)=690;w(5,33)=462;
w(6,38)=70;w(7,39)=30;w(23,25)=450;w(24,25)=80;w(25,27)=1150;w(26,28)=306;
w(27,30)=1100;w(28,29)=195;w(30,31)=720;w(31,32)=520;w(32,34)=170;w(33,34)=88;
w(34,36)=160;w(35,36)=70;w(36,37)=320;w(37,38)=160;w(38,39)=290;
@for(link(i,j): w(i,j) =    w(i, j)+w(j,i) ); !输入铁路距离邻接矩阵的下三角元素;
@for(link(i,j)|i#ne#j: w(i,j)=@if(w(i,j) #eq# 0, 20000,w(i,j)));  ！无铁路连接，元素为充分
大的数;
!以下就是最短路计算公式（Floyd-Warshall 算法）;
@for(nodes(k):@for(nodes(i):@for(nodes(j):tm=@smin(w(i,j),w(i,k)+w(k,j));
path1(i,j)=@if(w(i,j)#gt# tm,k,path1(i,j));w(i,j)=tm)));
!以下就是按最短路 w 查找相应运费 C1 的计算公式;
@for(link|w#eq#0: C1=0);
@for(link|w#gt#0      #and# w#le#300: C1=20);
@for(link|w#gt#300 #and# w#le#350: C1=23);
@for(link|w#gt#350 #and# w#le#400: C1=26);
@for(link|w#gt#400 #and# w#le#450: C1=29);
@for(link|w#gt#450 #and# w#le#500: C1=32);
@for(link|w#gt#500 #and# w#le#600: C1=37);
@for(link|w#gt#600 #and# w#le#700: C1=44);
@for(link|w#gt#700 #and# w#le#800: C1=50);
@for(link|w#gt#800 #and# w#le#900: C1=55);
@for(link|w#gt#900 #and# w#le#1000: C1=60);
@for(link|w#gt#1000: C1= 60+5*@floor(w/100-10)+@if(@mod(w,100)#eq#0,0,5) );
!输入公路距离邻接矩阵的上三角元素;
c2(1,14)=31;c2(6,21)=110;c2(7,22)=20;c2(8,9)=104;c2(9,10)=301;c2(9,23)=3;
c2(10,11)=750;c2(10,24)=2;c2(11,12)=606;c2(11,27)=600;c2(12,13)=194;c2(12,26)=10;
c2(13,14)=205;c2(13,28)=5;c2(14,15)=201;c2(14,29)=10;c2(15,16)=680;c2(15,30)=12;
c2(16,17)=480;c2(16,31)=42;c2(17,18)=300;c2(17,32)=70;c2(18,19)=220;c2(18,33)=10;
c2(19,20)=210;c2(19,35)=10;c2(20,21)=420;c2(20,37)=62;c2(21,22)=500;c2(21,38)=30;
c2(22,39)=20;
@for(link(i,j): c2(i,j) = c2(i,j)+c2(j,i));   !输入公路距离邻接矩阵的下三角元素;
@for(link(i,j):c2(i,j)=0.1*c2(i,j)); ！距离转化成费用;
@for(link(i,j)|i#ne#j: c2(i,j) =@if(c2(i,j)#eq#0,10000,c2(i,j) ));   !无公路连接，元素为充分
大的数;
```

```
@for(link: C= @if(C1#le#C2,C1,C2));  ! C1 和 C2 矩阵对应元素取最小;
@for(nodes(k):@for(nodes(i):@for(nodes(j):tm=@smin(C(i,j),C(i,k)+C(k,j));
path(i,j)=@if(C(i,j)#gt# tm,k,path(i,j));C(i,j)=tm)));
@for(link(i,j)|i #le# 7 #and# j#ge#8 #and# j#le# 22:cf(i,j-7)=c(i,j)); !提取下面二次规划模型需要的 7×15 矩阵;
endcalc
[obj]min=@sum(linkf(i,j):(cf(i,j)+p(i))*x(i,j))+0.05*@sum(need(j):y(j)^2+y(j)+z(j)^2+z(j));
! 约束;
@for(supply(i):[con1]@sum(need(j):x(i,j))<= S(i)*f(i));
@for(supply(i):[con2]@sum(need(j):x(i,j)) >= 500*f(i));
@for(need(j):[con3] @sum(supply(i):x(i,j))=y(j)+z(j));
@for(need(j)|j#NE#15:[con4] z(j)+y(j+1)=b(j));
y(1)=0; z(15)=0;
@for(supply: @bin(f));
@for(need: @gin(y));
end
```

10.3　管道为树形图时的模型

当管道为树形图时，建立与上面类似的非线性规划模型

$$\min \sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{21} c_{ij}x_{ij} + 0.05\sum_{j=1}^{21}\sum_{(jk)\in E}(y_{jk}^2 + y_{jk}) \tag{27}$$

$$\text{s.t.}\ 500 f_i \le \sum_{j=1}^{21} x_{ij} \le s_i f_i\ ,\ i = 1,2,\cdots,7 \tag{28}$$

$$\sum_{i=1}^{7} x_{ij} = \sum_{(jk)\in E} y_{jk}\ ,\ \ j = 1,2,\cdots,21 \tag{29}$$

$$y_{jk} + y_{kj} = l_{jk}, x_{ij}, y_{jk} \ge 0 \tag{30}$$

其中（jk）是连接 A_j，A_k 的边，E 是树形图的边集，l_{jk} 是从 A_j 到 A_k 的长度，y_{jk} 是由 A_j 沿（jk）铺设的钢管数量。

用 Lingo 求解得最小费用为 `140.6631` 亿元。`Lingo` 程序如下：

```
model:
sets:
 ! nodes 表示节点集合;
nodes
/S1,S2,S3,S4,S5,S6,S7,A1,A2,A3,A4,A5,A6,A7,A8,A9,A10,A11,A12,A13,A14,A15,A16,A17,A18,A19,A20,B1,B2,B3,B4,B5,B6,B7,B8,B9,B10,B11,B12/;
!c1(i,j)表示节点 i 到 j 铁路运输的最小单位运价（万元）,c2(i,j)表示节点 i 到 j 公路运输的邻接权重矩阵，c(i,j)表示节点 i 到 j 的最小单位运价，path 标志最短路径上走过的顶点;
link(nodes, nodes): w, c1,c2,c,path1,path;
supply/S1..S7/:s,p,f;
need/A1..A21/:b,y,z;!y 表示每一点往节点编号小的方向铺设量，z 表示往节点编号大的方向铺设量;
linkf(supply, need):cf,x;
```

```
special/1..3/:sx;  ！铺设节点 9，11，17 往最大编号节点方向的铺设量;
endsets
data:
s=800 800 1000 2000 2000 2000 3000;
p=160 155  155  160  155  150  160;
b=104,301,750,606,194,205,201,680,480,300,220,210,420,500,42,10,130,190,260,100,0;
path1=0; path=0; w=0; c2=0;
！以下是格式化输出计算的中间结果和最终结果;
@text(MiddleCost.txt)=@writefor(supply(i):  @writefor(need(j):  @format(cf(i,j),'  6.1f'  )),
@newline(1));
@text(Train_path.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):@format(path1(i,j),'5.0f')),
@newline(1));
@text(Final_path.txt)=@writefor(nodes(i):@writefor(nodes(j):@format(path(i,j),'5.0f')),
@newline(1));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(supply(i):@writefor(need(j):@format(x(i,j),'5.0f')),
@newline(1) );
@text(FinalResult.txt)=@write(@newline(1));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(need:@format(y,'5.0f'));
@text(FinalResult.txt)=@write(@newline(2));
@text(FinalResult.txt)=@writefor(need:@format(z,'5.0f'));
enddata
calc:
!输入铁路距离邻接矩阵的上三角元素;
w(28,30)=450;w(29,30)=80;w(30,32)=1150;w(31,33)=306;w(33,34)=195;w(1,34)=20;
w(1,35)=202;w(32,35)=1100;w(2,35)=1200;w(23,35)=720;w(3,23)=690;w(23,36)=520;
w(36,37)=170;w(4,37)=690;w(5,24)=462;w(24,37)=88;w(25,37)=160;w(25,26)=70;
w(25,27)=320;w(27,38)=160;w(6,38)=70;w(38,39)=290;w(7,39)=30;
@for(link(i,j): w(i,j) =   w(i, j)+w(j,i) );!输入铁路距离邻接矩阵的下三角元素;
@for(link(i,j)|i#ne#j: w(i,j)=@if(w(i,j) #eq# 0, 20000,w(i,j)));  ！无铁路连接，元素为充分
大的数;
!以下就是最短路计算公式（Floyd-Warshall 算法）;
@for(nodes(k):@for(nodes(i):@for(nodes(j):tm=@smin(w(i,j),w(i,k)+w(k,j));
path1(i,j)=@if(w(i,j)#gt# tm,k,path1(i,j));w(i,j)=tm)));
!以下就是按最短路 w 查找相应运费 C1 的计算公式;
@for(link|w#eq#0: C1=0);
@for(link|w#gt#0     #and# w#le#300: C1=20);
@for(link|w#gt#300 #and# w#le#350: C1=23);
@for(link|w#gt#350 #and# w#le#400: C1=26);
@for(link|w#gt#400 #and# w#le#450: C1=29);
@for(link|w#gt#450 #and# w#le#500: C1=32);
@for(link|w#gt#500 #and# w#le#600: C1=37);
@for(link|w#gt#600 #and# w#le#700: C1=44);
@for(link|w#gt#700 #and# w#le#800: C1=50);
@for(link|w#gt#800 #and# w#le#900: C1=55);
@for(link|w#gt#900 #and# w#le#1000: C1=60);
@for(link|w#gt#1000: C1= 60+5*@floor(w/100-10)+@if(@mod(w,100)#eq#0,0,5) );
!输入公路距离邻接矩阵的上三角元素;
c2(8,9)=104;c2(9,10)=301;c2(10,11)=750;c2(11,12)=606;c2(12,13)=194;c2(13,14)=205;
c2(14,15)=201;c2(15,16)=680;c2(16,17)=480;c2(16,23)=42;c2(17,18)=300;c2(18,19)=220;
```

```
c2(18,24)=10;c2(19,20)=210;c2(20,21)=420;c2(21,22)=500;c2(24,25)=130;c2(24,26)=190;
c2(26,27)=260;c2(6,27)=100;c2(9,28)=3;c2(10,29)=2;c2(11,32)=600;c2(12,31)=10;
c2(13,33)=5;c2(14,34)=10;c2(1,14)=31;c2(15,35)=12;c2(17,36)=70;c2(19,26)=10;
c2(20,27)=62;c2(6,21)=110;c2(21,38)=30;c2(22,39)=20;c2(7,22)=20;
@for(link(i,j): c2(i,j) = c2(i,j)+c2(j,i)); !输入公路距离邻接矩阵的下三角元素;
@for(link(i,j):c2(i,j)=0.1*c2(i,j));  ！距离转化成费用;
@for(link(i,j)|i#ne#j: c2(i,j) =@if(c2(i,j)#eq#0,10000,c2(i,j) ));  ！距离转化成费用;
@for(link: C= @if(C1#le#C2,C1,C2)); !邻接矩阵的对角线元素变为 0;
@for(nodes(k):@for(nodes(i):@for(nodes(j):tm=@smin(C(i,j),C(i,k)+C(k,j));
path(i,j)=@if(C(i,j)#gt# tm,k,path(i,j));C(i,j)=tm)));
@for(link(i,j)|i #le# 7 #and# j#ge#8 #and# j#le# 27:cf(i,j-7)=c(i,j)); !提取下面二次规划模型需要的 7×21 矩阵;
@for(supply(i):cf(i,21)=c(i,6));
endcalc
[obj]min=@sum(linkf(i,j):(cf(i,j)+p(i))*x(i,j))+0.05*@sum(need(j):y(j)^2+y(j)+z(j)^2+z(j))+
0.05*@sum(special:sx^2+sx);
！约束;
@for(supply(i):[con1]@sum(need(j):x(i,j))<= s(i)*f(i));
@for(supply(i):[con2]@sum(need(j):x(i,j)) >= 500*f(i));
@for(need(j)|j#ne#9 #and# j#ne#11 #and# j#ne#17:[con3] @sum(supply(i):x(i,j))=y(j)+z(j));
y(9)+z(9)+sx(1)=@sum(supply(i):x(i,9)); y(11)+z(11)+sx(2)=@sum(supply(i):x(i,11));
y(17)+z(17)+sx(3)=@sum(supply(i):x(i,17));
@for(need(j)|j #le# 14:(z(j)+y(j+1))=b(j));
@for(need(j)|j#ge#19 #and# j#le#20:z(j)+y(j+1)=b(j));
sx(1)+y(16)=42; sx(2)+y(17)=10; sx(3)+y(19)=190; z(17)+y(18)=130;
y(1)+z(15)+z(16)+z(18)+z(21)=0;
@for(supply: @bin(f)); @for(need: @gin(y));
end
```

习 题 五

1. 一只狼、一头山羊和一箩卷心菜在河的同侧。一个摆渡人要将它们运过河去，但由于船小，他一次只能运三者之一过河。显然，不管是狼和山羊，还是山羊和卷心菜，都不能在无人监视的情况下留在一起。问摆渡人应怎样把它们运过河去？

2. 北京（Pe）、东京(T)、纽约(N)、墨西哥城(M)、伦敦(L)、巴黎(Pa)各城市之间的航线距离如表 16。

表 16　六城市间的航线距离

	L	M	N	Pa	Pe	T
L		56	35	21	51	60
M	56		21	57	78	70
N	35	21		36	68	68
Pa	21	57	36		51	61
Pe	51	78	68	51		13
T	60	70	68	61	13	

由上述交通网络的数据确定最小生成树。

3. 某台机器可连续工作 4 年，也可于每年末卖掉，换一台新的。已知于各年初购置一台新机器的价格及不同役龄机器年末的的处理价如表 17 所示。又新机器第一年运行及维修费为 0.3 万元，使用 1-3 年后机器每年的运行及维修费用分别为 0.8，1.5，2.0 万元。试确定该机器的最优更新策略，使 4 年内用于更换、购买及运行维修的总费用为

最省。

表 17

j	第一年	第二年	第三年	第四年
年初购置价	2.5	2.6	2.8	3.1
使用了 j 年的机器处理价	2.0	1.6	1.3	1.1

4. 某产品从仓库运往市场销售。已知各仓库的可供量、各市场需求量及从 i 仓库至 j 市场的路径的运输能力如表 18 所示（表中数字 0 代表无路可通），试求从仓库可运往市场的最大流量，各市场需求能否满足？

表 18

市场 j / 仓库 i	1	2	3	4	可供量
A	30	10	0	40	20
B	0	0	10	50	20
C	20	10	40	5	100
需求量	20	20	60	20	

5. 某单位招收懂俄、英、日、德、法文的翻译各一人，有 5 人应聘。已知乙懂俄文，甲、乙、丙、丁懂英文，甲、丙、丁懂日文，乙、戊懂德文，戊懂法文，问这 5 个人是否都能得到聘书？最多几个得到聘书，招聘后每人从事哪一方面翻译工作？

6. 表 19 给出某运输问题的产销平衡表与单位运价表。将此问题转化为最小费用最大流问题，画出网络图并求数值解。

表 19

产地 \ 销地	1	2	3	产量
A	20	24	5	8
B	30	22	20	7
销量	4	5	6	

7. 求图 16 所示网络的最小费用最大流，弧旁数字为 (c_{ij}, u_{ij})。

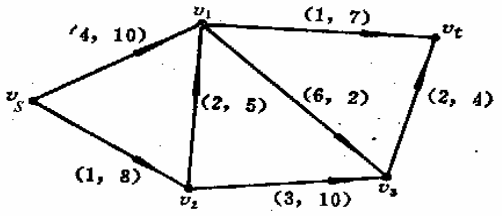


图 16　最小费用最大流

8. 某公司计划推出一种新型产品，需要完成的作业由表 20 所示。

表 20

作业	名称	计划完成时间(周)	紧前作业	最短完成时间(周)	缩短 1 周的费用(元)
A	设计产品	6	—	4	800
B	市场调查	5	—	3	600
C	原材料订货	3	A	1	300

D	原材料收购	2	C	1	600
E	建立产品设计规范	3	A,D	1	400
F	产品广告宣传	2	B	1	300
G	建立产品生产基地	4	E	2	200
H	产品运输到库	2	G,F	2	200

（1）画出产品的计划网络图；

（2）求完成新产品的最短时间，列出各项作业的最早开始时间、最迟开始时间和计划网络的关键路线；

（3）假定公司计划在 17 周内推出该产品，各项作业的最短时间和缩短 1 周的费用如上表所示，求产品在 17 周内上市的最小费用；

（4）如果各项作业的完成时间并不能完全确定，而是根据以往的经验估计出来的，其估计值如表 21 所示。试计算出产品在 21 周内上市的概率和以 95%的概率完成新产品上市所需的周数。

表 21

作业	A	B	C	D	E	F	G	H
最乐观的估计	2	4	2	1	1	3	2	1
最可能的估计	6	5	3	2	3	4	4	2
最悲观的估计	10	6	4	3	5	5	6	4

9．已知下列网络图有关数据如表 22，设间接费用为 15 元/天，求最低成本日程。

表 22

工作代号	正常时间		特急时间	
	工时（d）	费用（元）	工时（d）	费用（元）
①→②	6	100	4	120
②→③	9	200	5	280
②→④	3	80	2	110
③→④	0	0	0	0
③→⑤	7	150	5	180
④→⑥	8	250	3	375
④→⑦	2	120	1	170
⑤→⑧	1	100	1	100
⑥→⑧	4	180	3	200
⑦→⑧	5	130	2	220

第六章　排队论模型

排队论起源于1909年丹麦电话工程师A. K. 爱尔朗的工作，他对电话通话拥挤问题进行了研究。1917 年，爱尔朗发表了他的著名的文章—“自动电话交换中的概率理论的几个问题的解决”。排队论已广泛应用于解决军事、运输、维修、生产、服务、库存、医疗卫生、教育、水利灌溉之类的排队系统的问题，显示了强大的生命力。

排队是在日常生活中经常遇到的现象，如顾客到商店购买物品、病人到医院看病常常要排队。此时要求服务的数量超过服务机构（服务台、服务员等）的容量。也就是说，到达的顾客不能立即得到服务，因而出现了排队现象。这种现象不仅在个人日常生活中出现，电话局的占线问题，车站、码头等交通枢纽的车船堵塞和疏导，故障机器的停机待修，水库的存贮调节等都是有形或无形的排队现象。由于顾客到达和服务时间的随机性。可以说排队现象几乎是不可避免的。

排队论（Queuing Theory）也称**随机服务系统理论**，就是为解决上述问题而发展的一门学科。它研究的内容有下列三部分：

（i）性态问题，即研究各种排队系统的概率规律性，主要是研究队长分布、等待时间分布和忙期分布等，包括了瞬态和稳态两种情形。

（ii）最优化问题，又分静态最优和动态最优，前者指最优设计。后者指现有排队系统的最优运营。

（iii）排队系统的统计推断，即判断一个给定的排队系统符合于哪种模型，以便根据排队理论进行分析研究。

这里将介绍排队论的一些基本知识，分析几个常见的排队模型。

§1　基本概念

1.1　排队过程的一般表示

下图是排队论的一般模型。

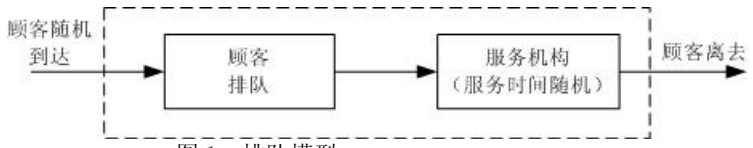


图1　排队模型

图中虚线所包含的部分为排队系统。各个顾客从顾客源出发，随机地来到服务机构，按一定的排队规则等待服务，直到按一定的服务规则接受完服务后离开排队系统。

凡要求服务的对象统称为**顾客**，为顾客服务的人或物称为**服务员**，由顾客和服务员组成服务系统。对于一个服务系统来说，如果服务机构过小，以致不能满足要求服务的众多顾客的需要，那么就会产生拥挤现象而使服务质量降低。 因此，顾客总希望服务机构越大越好，但是，如果服务机构过大，人力和物力方面的开支也就相应增加，从而会造成浪费，因此研究排队模型的目的就是要在顾客需要和服务机构的规模之间进行权衡决策，使其达到合理的平衡。

1.2　排队系统的组成和特征

一般的排队过程都由输入过程、排队规则、服务过程三部分组成，现分述如下：

1.2.1　输入过程

输入过程是指顾客到来时间的规律性，可能有下列不同情况：

（i）顾客的组成可能是有限的，也可能是无限的。

（ii）顾客到达的方式可能是一个一个的，也可能是成批的。

（iii）顾客到达可以是相互独立的，即以前的到达情况对以后的到达没有影响；否则是相关的。

（iv）输入过程可以是平稳的，即相继到达的间隔时间分布及其数学期望、方差等数字特征都与时间无关，否则是非平稳的。

1.2.2 排队规则

排队规则指到达排队系统的顾客按怎样的规则排队等待，可分为损失制，等待制和混合制三种。

（i）损失制（消失制）。当顾客到达时，所有的服务台均被占用，顾客随即离去。

（ii）等待制。当顾客到达时，所有的服务台均被占用，顾客就排队等待，直到接受完服务才离去。例如出故障的机器排队等待维修就是这种情况。

（iii）混合制。介于损失制和等待制之间的是混合制，即既有等待又有损失。有队列长度有限和排队等待时间有限两种情况，在限度以内就排队等待，超过一定限度就离去。

排队方式还分为单列、多列和循环队列。

1.2.3 服务过程

（i）服务机构。主要有以下几种类型：单服务台；多服务台并联（每个服务台同时为不同顾客服务）；多服务台串联（多服务台依次为同一顾客服务）；混合型。

（ii）服务规则。按为顾客服务的次序采用以下几种规则：

①先到先服务，这是通常的情形。

②后到先服务，如情报系统中，最后到的情报信息往往最有价值，因而常被优先处理。

③随机服务，服务台从等待的顾客中随机地取其一进行服务，而不管到达的先后。

④优先服务，如医疗系统对病情严重的病人给予优先治疗。

1.3 排队模型的符号表示

排队模型用六个符号表示，在符号之间用斜线隔开，即 $X/Y/Z/A/B/C$。第一个符号 X 表示顾客到达流或顾客到达间隔时间的分布；第二个符号 Y 表示服务时间的分布；第三个符号 Z 表示服务台数目；第四个符号 A 是系统容量限制；第五个符号 B 是顾客源数目；第六个符号 C 是服务规则，如先到先服务 FCFS，后到先服务 LCFS 等。并约定，如略去后三项，即指 $X/Y/Z/\infty/\infty/\mathrm{FCFS}$ 的情形。我们只讨论先到先服务 FCFS 的情形，所以略去第六项。

表示顾客到达间隔时间和服务时间的分布的约定符号为：

M —指数分布（M 是 Markov 的字头，因为指数分布具有无记忆性，即 Markov 性）；

D —确定型（Deterministic）；

E_k —k 阶爱尔朗(Erlang)分布；

G —一般（general）服务时间的分布；

GI —一般相互独立（General Independent）的时间间隔的分布。

例如，$M/M/1$ 表示相继到达间隔时间为指数分布、服务时间为指数分布、单服务台、等待制系统。$D/M/c$ 表示确定的到达时间、服务时间为指数分布、c 个平行服务台（但顾客是一队）的模型。

1.4 排队系统的运行指标

为了研究排队系统运行的效率，估计其服务质量，确定系统的最优参数，评价系统的结构是否合理并研究其改进的措施，必须确定用以判断系统运行优劣的基本数量指

标，这些数量指标通常是：

(i)**平均队长**：指系统内顾客数（包括正被服务的顾客与排队等待服务的顾客）的数学期望，记作L_s。

(ii)**平均排队长**:指系统内等待服务的顾客数的数学期望，记作L_q。

(iii)**平均逗留时间**：顾客在系统内逗留时间（包括排队等待的时间和接受服务的时间）的数学期望，记作W_s。

（iv）**平均等待时间**：指一个顾客在排队系统中排队等待时间的数学期望，记作W_q。

（v）**平均忙期**：指服务机构连续繁忙时间（顾客到达空闲服务机构起，到服务机构再次空闲止的时间）长度的数学期望，记为T_b。

还有由于顾客被拒绝而使企业受到损失的**损失率**以及以后经常遇到的**服务强度**等，这些都是很重要的指标。

计算这些指标的基础是表达系统状态的概率。所谓**系统的状态**即指系统中顾客数，如果系统中有n个顾客就说系统的状态是n，它的可能值是

（i）队长没有限制时，$n=0,1,2,\cdots$，

（ii）队长有限制，最大数为N时，$n=0,1,\cdots,N$，

（iii）损失制，服务台个数是c时，$n=0,1,\cdots,c$。

这些状态的概率一般是随时刻t而变化，所以在时刻t、系统状态为n的概率用$P_n(t)$表示。稳态时系统状态为n的概率用P_n表示。

§2 输入过程与服务时间的分布

排队系统中的事件流包括顾客到达流和服务时间流。由于顾客到达的间隔时间和服务时间不可能是负值，因此，它的分布是非负随机变量的分布。最常用的分布有泊松分布、确定型分布，指数分布和爱尔朗分布。

2.1 泊松流与指数分布

设$N(t)$表示在时间区间$[0,t)$内到达的顾客数（$t>0$），令$P_n(t_1,t_2)$表示在时间区间$[t_1,t_2)(t_2>t_1)$内有$n(\geq 0)$个顾客到达的概率，即

$$P_n(t_1,t_2)=P\{N(t_2)-N(t_1)=n\}\quad (t_2>t_1,n\geq 0)$$

当$P_n(t_1,t_2)$合于下列三个条件时，我们说顾客的到达形成泊松流。这三个条件是：

1° 在不相重叠的时间区间内顾客到达数是相互独立的，我们称这性质为无后效性。

2° 对充分小的Δt，在时间区间$[t,t+\Delta t)$内有一个顾客到达的概率与t无关，而约与区间长Δt成正比，即

$$P_1(t,t+\Delta t)=\lambda\Delta t+o(\Delta t) \qquad (1)$$

其中$o(\Delta t)$，当$\Delta t\to 0$时，是关于Δt的高阶无穷小。$\lambda>0$是常数，它表示单位时间有一个顾客到达的概率，称为概率强度。

3° 对于充分小的Δt，在时间区间$[t,t+\Delta t)$内有两个或两个以上顾客到达的概率极小，以致可以忽略，即

$$\sum_{n=2}^{\infty}P_n(t,t+\Delta t)=o(\Delta t) \qquad (2)$$

在上述条件下，我们研究顾客到达数 n 的概率分布。

由条件 2°，我们总可以取时间由 0 算起，并简记 $P_n(0,t)=P_n(t)$。

由条件 1°和 2°，有

$$P_0(t+\Delta t)=P_0(t)P_0(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)=\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}(t)P_k(\Delta t),\quad n=1,2,\cdots$$

由条件 2°和 3°得

$$P_0(\Delta t)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

因而有

$$\frac{P_0(t+\Delta t)-P_0(t)}{\Delta t}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t},$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t}.$$

在以上两式中，取 Δt 趋于零的极限，当假设所涉及的函数可导时，得到以下微分方程组：

$$\frac{dP_0(t)}{dt}=-\lambda P_0(t),$$

$$\frac{dP_n(t)}{dt}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t),\quad n=1,2,\cdots.$$

取初值 $P_0(0)=1$，$P_n(0)=0(n=1,2,\cdots)$，容易解出 $P_0(t)=e^{-\lambda t}$；再令 $P_n(t)=U_n(t)e^{-\lambda t}$，可以得到 $U_0(t)$ 及其它 $U_n(t)$ 所满足的微分方程组，即

$$\frac{dU_n(t)}{dt}=\lambda U_{n-1}(t),\quad n=1,2,\cdots,$$

$$U_0(t)=1,\ U_n(t)=0.$$

由此容易解得

$$P_n(t)=\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t},\quad n=1,2,\cdots.$$

正如在概率论中所学过的，我们说随机变量 $\{N(t)=N(s+t)-N(s)\}$ 服从泊松分布。它的数学期望和方差分别是

$$E[N(t)]=\lambda t;\ \mathrm{Var}[N(t)]=\lambda t。$$

当输入过程是泊松流时，那么顾客相继到达的时间间隔 T 必服从指数分布。这是由于

$$P\{T>t\}=P\{[0,t)\text{内呼叫次数为零}\}=P_0(t)=e^{-\lambda t}$$

那么，以 $F(t)$ 表示 T 的分布函数，则有

$$P\{T\le t\}=F(t)=\begin{cases}1-e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

而分布密度函数为

$$f(t)=\lambda e^{-\lambda t},\quad t>0.$$

对于泊松流，λ 表示单位时间平均到达的顾客数，所以 $\frac{1}{\lambda}$ 就表示相继顾客到达平均间隔时间，而这正和 ET 的意义相符。

对一顾客的服务时间也就是在忙期相继离开系统的两顾客的间隔时间，有时也服从指数分布。这时设它的分布函数和密度函数分别是

$$G(t)=1-e^{-\mu t},\quad g(t)=\mu e^{-\mu t}$$

我们得到

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{T\le t+\Delta t\,|\,T>t\}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<T\le t+\Delta t\}}{\Delta t P\{T>t\}}=\mu$$

这表明，在任何小的时间间隔 $[t,t+\Delta t)$ 内一个顾客被服务完了（离去）的概率是 $\mu\Delta t+o(\Delta t)$。μ 表示单位时间能被服务完成的顾客数，称为平均服务率，而 $\frac{1}{\mu}$ 表示一个顾客的平均服务时间。

2.2　常用的几种概率分布及其产生

2.2.1　常用的连续型概率分布

我们只给出这些分布的参数、记号和通常的应用范围，更详细的内容参看专门的概率论书籍。

（i）均匀分布

区间 (a,b) 内的**均匀分布**记作 $U(a,b)$。服从 $U(0,1)$ 分布的随机变量又称为随机数，它是产生其它随机变量的基础。如若 X 为 $U(0,1)$ 分布，则 $Y=a+(b-a)X$ 服从 $U(a,b)$。

（ii）正态分布

以 μ 为期望，σ^2 为方差的**正态分布**记作 $N(\mu,\sigma^2)$。正态分布的应用十分广泛。正态分布还可以作为二项分布一定条件下的近似。

（iii）指数分布

指数分布是单参数 λ 的非对称分布，记作 $\mathrm{Exp}(\lambda)$，概率密度函数为：

$$f(t)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t}, & t\ge 0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

它的数学期望为 $\frac{1}{\lambda}$，方差为 $\frac{1}{\lambda^2}$。指数分布是唯一具有无记忆性的连续型随机变量，即有 $P(X>t+s\,|\,X>t)=P(X>s)$，在排队论、可靠性分析中有广泛应用。

（iv）Gamma 分布

Gamma 分布是双参数 α,β 的非对称分布，记作 $G(\alpha,\beta)$，期望是 $\alpha\beta$。$\alpha=1$ 时蜕化为指数分布。n 个相互独立、同分布（参数 λ）的指数分布之和是 Gamma 分布（$\alpha=n,\beta=\lambda$）。Gamma 分布可用于服务时间，零件寿命等。

Gamma 分布又称爱尔朗分布。

（v）Weibull 分布

Weibull 分布是双参数 α,β 的非对称分布，记作 $W(\alpha,\beta)$。$\alpha=1$ 时蜕化为指数分布。作为设备、零件的寿命分布在可靠性分析中有着非常广泛的应用。

（vi）Beta 分布

Beta 分布是区间 $(0,1)$ 内的双参数、非均匀分布，记作 $B(\alpha,\beta)$。

2.2.2　常用的离散型概率分布

（i）离散均匀分布

（ii）Bernoulli 分布（两点分布）

Bernoulli 分布是 $x=1,0$ 处取值的概率分别是 p 和 $1-p$ 的两点分布，记作 $\text{Bern}(p)$。用于基本的离散模型。

（iii）泊松（Poisson）分布

泊松分布与指数分布有密切的关系。当顾客平均到达率为常数 λ 的到达间隔服从指数分布时，单位时间内到达的顾客数 K 服从泊松分布，即单位时间内到达 k 位顾客的概率为

$$P_k=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\quad k=0,1,2,\cdots$$

记作 $\text{Poisson}(\lambda)$。泊松分布在排队服务、产品检验、生物与医学统计、天文、物理等领域都有广泛应用。

（iv）二项分布

在独立进行的每次试验中，某事件发生的概率为 p，则 n 次试验中该事件发生的次数 K 服从二项分布，即发生 k 次的概率为

$$P_k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n.$$

记作 $B(n,p)$。二项分布是 n 个独立的 Bernoulli 分布之和。它在产品检验、保险、生物和医学统计等领域有着广泛的应用。

当 n,k 很大时，$B(n,p)$ 近似于正态分布 $N(np,np(1-p))$；当 n 很大、p 很小，且 np 约为常数 λ 时，$B(n,p)$ 近似于 $\text{Poisson}(\lambda)$。

§3　生灭过程

一类非常重要且广泛存在的排队系统是生灭过程排队系统。生灭过程是一类特殊的随机过程，在生物学、物理学、运筹学中有广泛的应用。在排队论中，如果 $N(t)$ 表示时刻 t 系统中的顾客数，则 $\{N(t),t\geq 0\}$ 就构成了一个随机过程。如果用“生”表示顾客的到达，“灭”表示顾客的离去，则对许多排队过程来说，$\{N(t),t\geq 0\}$ 就是一类特殊的随机过程－生灭过程。下面结合排队论的术语给出生灭过程的定义。

定义 1　设 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为一个随机过程。若 $N(t)$ 的概率分布具有以下性质：

（1）假设 $N(t)=n$，则从时刻 t 起到下一个顾客到达时刻止的时间服从参数为 λ_n 的负指数分布，$n=0,1,2,\cdots$。

（2）假设 $N(t)=n$，则从时刻 t 起到下一个顾客离去时刻止的时间服从参数为 μ_n 的负指数分别，$n=0,1,2,\cdots$。

（3）同一时刻只有一个顾客到达或离去。

则称 $\{N(t),t\geq 0\}$ 为一个生灭过程。

一般来说，得到 $N(t)$ 的分布 $p_n(t)=P\{N(t)=n\}$（$n=0,1,2,\cdots$）是比较困难的，因此通常是求当系统到达平衡后的状态分布，记为 $p_n,n=0,1,2,\cdots$。

为求平稳分布，考虑系统可能处的任一状态 n。假设记录了一段时间内系统进入状态 n 和离开状态 n 的次数，则因为“进入”和“离开”是交替发生的，所以这两个数要

么相等，要么相差为 1。但就这两种事件的平均发生率来说，可以认为是相等的。即当系统运行相当时间而到达平衡状态后，对任一状态 n 来说，单位时间内进入该状态的平均次数和单位时间内离开该状态的平均次数应该相等，这就是系统在统计平衡下的“流入＝流出”原理。根据这一原理，可得到任一状态下的平衡方程如下：

$$\begin{array}{ll} 0 & \mu_1 p_1 = \lambda_0 p_0 \\ 1 & \lambda_0 p_0 + \mu_2 p_2 = (\lambda_1 + \mu_1) p_1 \\ 2 & \lambda_1 p_1 + \mu_3 p_3 = (\lambda_2 + \mu_2) p_2 \\ \vdots & \vdots \\ n & \lambda_{n-1} p_{n-1} + \mu_{n+1} p_{n+1} = (\lambda_n + \mu_n) p_n \\ \vdots & \vdots \end{array} \tag{3}$$

由上述平衡方程，可求得

$$0: \quad p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

$$1: \quad p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 + \frac{1}{\mu_2}(\mu_1 p_1 - \lambda_0 p_0) = \frac{\lambda_1}{\mu_2} p_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_0}{\mu_2 \mu_1} p_0$$

$$2: \quad p_3 = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 + \frac{1}{\mu_3}(\mu_2 p_2 - \lambda_1 p_1) = \frac{\lambda_2}{\mu_3} p_2 = \frac{\lambda_2 \lambda_1 \lambda_0}{\mu_3 \mu_2 \mu_1} p_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$n: \quad p_{n+1} = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n + \frac{1}{\mu_{n+1}}(\mu_n p_n - \lambda_{n-1} p_{n-1}) = \frac{\lambda_n}{\mu_{n+1}} p_n = \frac{\lambda_n \lambda_{n-1} \cdots \lambda_0}{\mu_{n+1} \mu_n \cdots \mu_1} p_0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

记

$$C_n = \frac{\lambda_{n-1} \lambda_{n-2} \cdots \lambda_0}{\mu_n \mu_{n-1} \cdots \mu_1}, \quad n = 1,2,\cdots \tag{4}$$

则平稳状态的分布为

$$p_n = C_n p_0, \quad n = 1,2,\cdots \tag{5}$$

由概率分布的要求

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

有

$$\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right] p_0 = 1$$

于是

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n} \tag{6}$$

注意：（6）只有当级数 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n$ 收敛时才有意义，即当 $\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty$ 时，才能由上

述公式得到平稳状态的概率分布。

§4 $M/M/s$ 等待制排队模型

4.1 单服务台模型

单服务台等待制模型$M/M/1/\infty$是指：顾客的相继到达时间服从参数为λ的负指数分布，服务台个数为 1，服务时间V服从参数为μ的负指数分布，系统空间无限，允许无限排队，这是一类最简单的排队系统。

4.1.1 队长的分布

记$p_n = P\{N=n\}$（$n=0,1,2,\cdots$）为系统达到平衡状态后队长N的概率分布，则由式（4）～（6），并注意到$\lambda_n=\lambda, n=0,1,2,\cdots$和$\mu_n=\mu, n=0,1,2,\cdots$。记

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}$$

并设$\rho<1$（否则队列将排至无限远），则

$$C_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n,\quad n=1,2,\cdots$$

故

$$p_n=\rho^n p_0,\quad n=1,2,\cdots$$

其中

$$p_0=\frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\right)^{-1}=\left(\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1}=1-\rho \qquad (7)$$

因此

$$p_n=(1-\rho)\rho^n,\quad n=1,2,\cdots \qquad (8)$$

公式（7）和（8）给出了在平衡条件下系统中顾客数为n的概率。由式（7）不难看出，ρ是系统中至少有一个顾客的概率，也就是服务台处于忙的状态的概率，因而也称ρ为服务强度，它反映了系统繁忙的程度。此外，（8）式只有在$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$的条件下才能得到，即要求顾客的平均到达率小于系统的平均服务率，才能使系统达到统计平衡。

4.1.2 几个主要数量指标

对单服务台等待制排队系统，由已得到的平稳状态下队长的分布，可以得到平均队长

$$\begin{aligned}L_s&=\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\sum_{n=1}^{\infty}n(1-\rho)\rho^n\\&=(\rho+2\rho^2+3\rho^3+\cdots)-(\rho^2+2\rho^3+3\rho^4+\cdots) \qquad (9)\\&=\rho+\rho^2+\rho^3+\cdots=\frac{\rho}{1-\rho}=\frac{\lambda}{\mu-\lambda}\end{aligned}$$

平均排队长L_q为

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=L-(1-p_0)=L-\rho=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{10}$$

关于顾客在系统中的逗留时间T，可说明它服从参数为$\mu-\lambda$的复指数分布，即

$$P\{T>t\}=e^{-(\mu-\lambda)t},\quad t\geq 0$$

因此，平均逗留时间

$$W_s=\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{11}$$

因为，顾客在系统中的逗留时间为等待时间T_q和接受服务时间V之和，即

$$T=T_q+V$$

故由

$$W_s=E(T)=E(T_q)+E(V)=W_q+\frac{1}{\mu} \tag{12}$$

可得平均等待时间W_q为

$$W_q=W_s-\frac{1}{\mu}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \tag{13}$$

从式（9）和式（11），可发现平均队长L_s与平均逗留时间W_s具有关系

$$L_s=\lambda W_s \tag{14}$$

同样，从式（10）和式（13），可发现平均排队长L_q与平均等待时间W_q具有关系

$$L_q=\lambda W_q \tag{15}$$

式（14）和式（15）通常称为Little公式，是排队论中一个非常重要的公式。

4.1.3　忙期和闲期

在平衡状态下，忙期B和闲期I一般均为随机变量，求它们的分布是比较麻烦的。因此，我们来求一下平均忙期$\overline{B}$和平均闲期$\overline{I}$。由于忙期和闲期出现的概率分别为ρ和$1-\rho$，所以在一段时间内可以认为忙期和闲期的总长度之比为$\rho:(1-\rho)$。又因为忙期和闲期是交替出现的，所以在充分长的时间里，它们出现的平均次数应是相同的。于是，忙期的平均长度$\overline{B}$和闲期的平均长度$\overline{I}$之比也应是$\rho:(1-\rho)$，即

$$\frac{\overline{B}}{\overline{I}}=\frac{\rho}{1-\rho} \tag{16}$$

又因为在到达为Poisson流时，根据负指数分布的无记忆性和到达与服务相互独立的假设，容易证明从系统空闲时刻起到下一个顾客到达时刻止（即闲期）的时间间隔仍服从参数为λ的负指数分布，且与到达时间间隔相互独立。因此，平均闲期应为$\frac{1}{\lambda}$，这样，便求得平均忙期为

$$\overline{B}=\frac{\rho}{1-\rho}\cdot\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{\mu-\lambda} \tag{17}$$

与式（11）比较，发现平均逗留时间（W_s）＝平均忙期（$\overline{B}$）。这一结果直观看上去是显然的，顾客在系统中逗留的时间越长，服务员连续繁忙的时间也就越长。因此，一

个顾客在系统内的平均逗留时间应等于服务员平均连续忙的时间。

4.2　与排队论模型有关的 LINGO 函数

（1）@peb(load,S)

该函数的返回值是当到达负荷为 load，服务系统中有 S 个服务台且允许排队时系统繁忙的概率，也就是顾客等待的概率。

（2）@pel（load,S）

该函数的返回值是当到达负荷为 load，服务系统中有 S 个服务台且不允许排队时系统损失概率，也就是顾客得不到服务离开的概率。

（3）@pfs(load,S,K)

该函数的返回值是当到达负荷为 load，顾客数为 K，平行服务台数量为 S 时，有限源的 Poisson 服务系统等待或返修顾客数的期望值。

例 1　某修理店只有一个修理工，来修理的顾客到达过程为 Poisson 流，平均 4 人/h；修理时间服从负指数分布，平均需要 6min。试求：（1）修理店空闲的概率；（2）店内恰有 3 个顾客的概率；（3）店内至少有 1 个顾客的概率；（4）在店内的平均顾客数；（5）每位顾客在店内的平均逗留时间；（6）等待服务的平均顾客数；（7）每位顾客平均等待服务时间；（8）顾客在店内等待时间超过 10min 的概率。

解　本例可看成一个 $M/M/1/\infty$ 排队问题，其中

$$\lambda=4,\ \mu=\frac{1}{0.1}=10,\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=0.4$$

（1）修理店空闲的概率

$$p_0=1-\rho=1-0.4=0.6$$

（2）店内恰有 3 个顾客的概率

$$p_3=\rho^3(1-\rho)=0.4^3\times(1-0.4)=0.38$$

（3）店内至少有 1 个顾客的概率

$$P\{N\geq 1\}=1-p_0=\rho=0.4$$

（4）在店内的平均顾客数

$$L_s=\frac{\rho}{1-\rho}=0.67\ \text{（人）}$$

（5）每位顾客在店内的平均逗留时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda}=\frac{0.67}{4}(\text{h})=10(\text{min})$$

（6）等待服务的平均顾客数

$$L_q=L_s-\rho=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{0.4^2}{1-0.4}=0.267\ \text{（人）}$$

（7）每位顾客平均等待服务时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{0.267}{4}(\text{h})=4(\text{min})$$

（8）顾客在店内逗留时间超过 10min 的概率

$$P\{T>10\}=e^{-10(\frac{1}{6}-\frac{1}{15})}=e^{-1}=0.3679$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
```

```
s=1;lamda=4;mu=10;rho=lamda/mu;
Pwait=@peb(rho,s);
p0=1-Pwait;
Pt_gt_10=@exp(-1);
end
```

4.3　多服务台模型（$M/M/s/\infty$）

设顾客单个到达，相继到达时间间隔服从参数为λ的负指数分布，系统中共有s个服务台，每个服务台的服务时间相互独立，且服从参数为μ的负指数分布。当顾客到达时，若有空闲的服务台则马上接受服务，否则便排成一个队列等待，等待时间为无限。

下面来讨论这个排队系统的平稳分布。记$p_n = P\{N=n\}$（$n=0,1,2,\cdots$）为系统达到平稳状态后队长N的概率分布，注意到对个数为s的多服务台系统，有

$\lambda_n = \lambda$，　$n=0,1,2,\cdots$

和

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n=1,2,\cdots,s \\ s\mu, & n=s,s+1,\cdots \end{cases}$$

记$\rho_s = \dfrac{\rho}{s} = \dfrac{\lambda}{s\mu}$，则当$\rho_s<1$时，由式（4），式（5）和式（6），有

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, & n=1,2,\cdots,s \\ \dfrac{(\lambda/\mu)^s}{s!}\left(\dfrac{\lambda}{s\mu}\right)^n = \dfrac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}}, & n\geq s \end{cases} \tag{18}$$

故

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\rho^n}{n!}p_0, & n=1,2,\cdots,s \\ \dfrac{\rho^n}{s!s^{n-s}}p_0, & n\geq s \end{cases} \tag{19}$$

其中

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)}\right]^{-1} \tag{20}$$

公式（19）和式（20）给出了在平衡条件下系统中顾客数为n的概率，当$n\geq s$时，即系统中顾客数大于或等于服务台个数，这时再来的顾客必须等待，因此记

$$c(s,\rho) = \sum_{n=s}^{\infty}p_n = \frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)}p_0 \tag{21}$$

式（21）称为Erlang等待公式，它给出了顾客到达系统时需要等待的概率。

对多服务台等待制排队系统，由已得到的平稳分布可得平均排队长L_q为：

$$L_q = \sum_{n=s+1}^{\infty}(n-s)p_n = \frac{p_0\rho^s}{s!}\sum_{n=s}^{\infty}(n-s)\rho_s^{n-s}$$

$$= \frac{p_0\rho^s}{s!}\frac{d}{d\rho_s}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\rho_s^n\right) = \frac{p_0\rho^s\rho_s}{s!(1-\rho_s)^2} \tag{22}$$

或

$$L_q = \frac{c(s,\rho)\rho_s}{1-\rho_s} \tag{23}$$

记系统中正在接受服务的顾客的平均数为 $\bar{s}$，显然 $\bar{s}$ 也是正在忙的服务台的平均数，故

$$\bar{s} = \sum_{n=0}^{s-1} np_n + s\sum_{n=s}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{s-1}\frac{n\rho^n}{n!}p_0 + s\frac{\rho^s}{s!(1-\rho_s)}p_0$$

$$= p_0\rho\left[\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{\rho^{s-1}}{(s-1)!(1-\rho_s)}\right] = \rho \tag{24}$$

式（24）说明，平均在忙的服务台个数不依赖于服务台个数 s，这是一个有趣的结果。由式（24），可得到平均队长 L_s 为

$$L_s = \text{平均排队长} + \text{正在接受服务的顾客的平均数} = L_q + \rho \tag{25}$$

对多服务台系统，Little 公式依然成立，即有

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda},\quad W_q = \frac{L_q}{\lambda} = W_s - \frac{1}{\mu} \tag{26}$$

例 2　某售票处有 3 个窗口，顾客的到达为 Poisson 流，平均到达率为 $\lambda = 0.9\text{人}/\min$；服务（售票）时间服从负指数分布，平均服务率 $\mu = 0.4\text{人}/\min$。现设顾客到达后排成一个队列，依次向空闲的窗口购票，这一排队系统可看成是一个 $M/M/s/\infty$ 系统，其中

$$s = 3,\quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 2.25,\quad \rho_s = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{2.25}{3} < 1$$

由多服务台等待制系统的有关公式，可得到

（1）整个售票处空闲的概率

$$p_0 = \left[\frac{(2.25)^0}{0!} + \frac{(2.25)^1}{1!} + \frac{(2.25)^2}{2!} + \frac{(2.25)^3}{3!(1-2.25/3)}\right]^{-1} = 0.0748$$

（2）平均排队长

$$L_q = \frac{0.0748\times(2.25)^3\times 2.25/3}{3!(1-2.25/3)^2} = 1.70\ \text{（人）}$$

平均队长

$$L = L_q + \rho = 1.70 + 2.25 = 3.95\ \text{（人）}$$

（3）平均等待时间

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.70}{0.9} = 1.89\ \text{（min）}$$

平均逗留时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda} = \frac{3.95}{0.9} = 4.39\ \text{（min）}$$

（4）顾客到达时必须排队等待的概率

$$c(3,2.25)=\frac{(2.25)^3}{3!(1-2.25/3)}\times 0.0748=0.57$$

在本例中，如果顾客的排队方式变为到达售票处后可到任一窗口前排队，且入队后不再换队，即可形成 3 个队列。这时，原来的$M/M/3/\infty$系统实际上变成了由 3 个$M/M/1/\infty$子系统组成的排队系统，且每个系统的平均到达率为

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\frac{0.9}{3}=0.3\text{（人/min）}$$

下表给出了$M/M/3/\infty$和 3 个$M/M/1/\infty$的比较，不难看出一个$M/M/3/\infty$系统比由 3 个$M/M/1/\infty$系统组成的排队系统具有显著的优越性。即在服务台个数和服务率都不变的条件下，单队排队方式比多队排队方式要优越，这是在对排队系统进行设计和管理的时候应注意的地方。

表 1　排队系统的指标值

项　　目	$M/M/3/\infty$	3 个$M/M/1/\infty$
空闲的概率	0.0748	0.25（每个子系统）
顾客必须等待的概率	0.57	0．75
平均队长	3.95	9（整个系统）
平均排队长	1.70	2.25（每个子系统）
平均逗留时间	4.39（min）	10（min）
平均等待时间	1.89	7.5（min）

求解的 LINGO 程序如下：

```
model:
s=3;lamda=0.9;mu=0.4;rho=lamda/mu;rho_s=rho/s;
P_wait=@peb(rho,s);
p0=6*(1-rho_s)/rho^3*P_wait;
L_q=P_wait*rho_s/(1-rho_s);
L_s=L_q+rho;
W_q=L_q/lamda;
W_s=L_s/lamda;
end
```

§5　$M/M/s/s$ 损失制排队模型

当s个服务台被占用后，顾客自动离去。

这里我们着重介绍如何使用 LINGO 软件中的相关函数。

5.1　损失制排队模型的基本参数

对于损失制排队模型，其模型的基本参数与等待制排队模型有些不同，我们关心如下指标。

（1）系统损失的概率

P_{lost}=@pel(rho,s)

其中 rho 是系统到达负荷$\frac{\lambda}{\mu}$，s 是服务台或服务员的个数。

（2）单位时间内平均进入系统的顾客数（λ_e）

$$\lambda_e=\lambda(1-P_{\text{lost}})$$

（3）系统的相对通过能力（Q）与绝对通过能力（A）

$$Q=1-P_{\text{lost}}$$

$$A=\lambda_e Q=\lambda(1-P_{\text{lost}})^2$$

（4）系统在单位时间内占用服务台（或服务员）的均值（即L_s）

$$L_s=\lambda_e/\mu$$

注意：在损失制排队系统中，$L_q=0$，即等待队长为0。

（5）系统服务台（或服务员）的效率

$$\eta=L_s/s$$

（6）顾客在系统内平均逗留时间（即W_s）

$$W_s=1/\mu$$

注意：在损失制排队系统中，$W_q=0$，即等待时间为0。

在上述公式中，引入λ_e是十分重要的，因为尽管顾客以平均λ的速率到达服务系统，但当系统被占满后，有一部分顾客会自动离去，因此，真正进入系统的顾客输入率是λ_e，它小于λ。

5.2　损失制排队模型计算实例

5.2.1　$s=1$的情况（$M/M/1/1$）

例3　设某条电话线，平均每分钟有0.6次呼唤，若每次通话时间平均为1.25min，求系统相应的参数指标。

解　其参数为S=1，$\lambda=0.6$，$\mu=\dfrac{1}{1.25}$。编写LINGO程序如下：

```
model:
s=1;lamda=0.6;mu=1/1.25;rho=lamda/mu;
Plost=@pel(rho,s);
Q=1-Plost;
lamda_e=Q*lamda;A=Q*lamda_e;
L_s=lamda_e/mu;
eta=L_s/s;
end
```

求得系统的顾客损失率为43%，即43%的电话没有接通，有57%的电话得到了服务，通话率为平均每分钟有0.195次，系统的服务效率为43%。对于一个服务台的损失制系统，系统的服务效率等于系统的顾客损失率，这一点在理论上也是正确的。

5.2.2　$s>1$的情况（$M/M/s/s$）

例4　某单位电话交换台有一台200门内线的总机，已知在上班8h的时间内，有20%的内线分机平均每40min要一次外线电话，80%的分机平均隔120min要一次外线。又知外线打入内线的电话平均每分钟1次。假设与外线通话的时间平均为3min，并且上述时间均服从负指数分布，如果要求电话的通话率为95%，问该交换台应设置多少条外线？

解　（1）电话交换台的服务分成两类，第一类内线打外线，其强度为

$$\lambda_1=\left(\frac{60}{40}\times 0.2+\frac{60}{120}\times 0.8\right)\times 200=140$$

第二类是外线打内线，其强度为

$$\lambda_2=1\times 60=60$$

因此，总强度为

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = 140 + 60 = 200$$

（2）这是损失制服务系统，按题目要求，系统损失的概率不能超过5%，即

$$P_{\text{lost}} \le 0.05$$

（3）外线是整数，在满足条件下，条数越小越好。

由上述三条，写出相应的LINGO程序如下：

```
model:
lamda=200;
mu=60/3;rho=lamda/mu;
Plost=@pel(rho,s);Plost<0.05;
Q=1-Plost;
lamda_e=Q*lamda;A=Q*lamda_e;
L_s=lamda_e/mu;
eta=L_s/s;
min=s;@gin(s);
end
```

求得需要15条外线。在此条件下，交换台的顾客损失率为3.65%，有96.35%的电话得到了服务，通话率为平均每小时185.67次，交换台每条外线的服务效率为64.23%。

求解时，尽量选用简单的模型让LINGO软件求解，而上述程序是解非线性整数规划（尽管是一维的），但计算时间可能会较长，因此，我们选用下面的处理方法，分两步处理。

第一步，求出概率为5%的服务台的个数，尽管要求服务台的个数是整数，但@pel给出的是实数解。

编写LINGO程序：

```
model:
lamda=200;
mu=60/3;rho=lamda/mu;
@pel(rho,s)=0.05;
end
```

求得 $s = 14.33555$。

第二步，注意到@pel(rho,s)是s的单调递减函数，因此，对s取整数（采用只入不舍原则）就是满足条件的最小服务台数，然后再计算出其它的参数指标。

编写LINGO程序如下：

```
model:
lamda=200;
mu=60/3;rho=lamda/mu;
s=15;Plost=@pel(rho,s);
Q=1-Plost;
lamda_e=Q*lamda;A=Q*lamda_e;
L_s=lamda_e/mu;
eta=L_s/s;
end
```

比较上面两种方法的计算结果，其答案是相同的，但第二种方法比第一种方法在计算时间上要少许多。

§6 $M/M/s$ 混合制排队模型

6.1 单服务台混合制模型

单服务台混合制模型 $M/M/1/K$ 是指：顾客的相继到达时间服从参数为 λ 的负指数分布，服务台个数为1，服务时间 V 服从参数为 μ 的负指数分布，系统的空间为 K，当 K 个位置已被顾客占用时，新到的顾客自动离去，当系统中有空位置时，新到的顾客进入系

统排队等待。

首先，仍来求平稳状态下队长 N 的分布 $p_n = P\{N = n\}$，$n = 0,1,2,\cdots$。由于所考虑的排队系统中最多只能容纳 K 个顾客（等待位置只有 $K-1$ 个），因而有

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,2,\cdots,K-1 \\ 0, & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \mu，\ n = 1,2,\cdots,K$$

由式（4），式（5）和式（6），有

$$C_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \rho^n, & n = 1,2,\cdots,K \\ 0, & n > K \end{cases} \tag{27}$$

故

$$p_n = \rho^n p_0，\ n = 1,2,\cdots,K$$

其中

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{K}\rho^n} = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases} \tag{28}$$

由已得到的单服务台混合制排队系统平稳状态下队长的分布，可知当 $\rho \neq 1$ 时，平均队长 L_s 为：

$$L_s = \sum_{n=0}^{K} n p_n = p_0 \rho \sum_{n=1}^{K} n\rho^{n-1}$$

$$= \frac{p_0\rho}{(1-\rho)^2}[1-\rho^K-(1-\rho)K\rho^K] = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(K+1)\rho^{K+1}}{1-\rho^{K+1}} \tag{29}$$

当 $\rho = 1$ 时，

$$L_s = \sum_{n=0}^{K} n p_n = \sum_{n=1}^{K} n\rho^n p_0 = \frac{1}{K+1}\sum_{n=1}^{K} n = \frac{K}{2} \tag{30}$$

类似地可得到平均排队长 L_q 为

$$L_q = \sum_{n=1}^{K}(n-1)p_n = L_s - (1-p_0) \tag{31}$$

或

$$L_q = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho(1+K\rho^K)}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \frac{K(K-1)}{2(K+1)}, & \rho = 1 \end{cases} \tag{32}$$

由于排队系统的容量有限，只有 $K-1$ 个排队位置，因此，当系统空间被占满时，再来的顾客将不能进入系统排队，也就是说不能保证所有到达的顾客都能进入系统等待

服务。假设顾客的到达率（单位时间内来到系统的顾客的平均数）为λ，则当系统处于状态K时，顾客不能进入系统，即顾客可进入系统的概率是$1-p_K$。因此，单位时间内实际可进入系统的顾客的平均数为：

$$\lambda_e=\lambda(1-p_K)=\mu(1-p_0) \tag{33}$$

称λ_e为有效到达率，而p_K也被称为顾客损失率，它表示了在来到系统的所有顾客中不能进入系统的顾客的比例。下面根据 Little 公式，可得

平均逗留时间

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{L_s}{\lambda(1-p_k)} \tag{34}$$

平均等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=\frac{L_q}{\lambda(1-p_K)} \tag{35}$$

且仍有

$$W_s=W_q+\frac{1}{\mu} \tag{36}$$

注意：这里的平均逗留时间和平均等待时间都是针对能够进入系统的顾客而言的。

特别，当$K=1$时，$M/M/1/1$为单服务台损失系统，在上述有关结果中令$K=1$，可得到：

$$p_0=\frac{1}{1+\rho},\quad p_1=\frac{\rho}{1+\rho} \tag{37}$$

$$L_s=p_1=\frac{\rho}{1+\rho}, \tag{38}$$

$$\lambda_e=\lambda(1-p_1)=\lambda p_0=\frac{\lambda}{1+\rho} \tag{39}$$

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{\rho}{\lambda}=\frac{1}{\mu} \tag{40}$$

$$L_q=0,\ W_q=0 \tag{41}$$

例 5　某修理站只有一个修理工，且站内最多只能停放 4 台待修的机器。设待修机器按 Poisson 流到达修理站，平均每分钟到达 1 台；修理时间服从负指数分布，平均每 1.25 分钟可修理 1 台，试求该系统的有关指标。

解　该系统可看成是一个$M/M/1/4$排队系统，其中

$$\lambda=1,\ \mu=\frac{1}{1.25}=0.8,\ \rho=\frac{\lambda}{\mu}=1.25,\ K=4$$

由式（28），

$$p_0=\frac{1-\rho}{1-\rho^5}=\frac{1-1.25}{1-1.25^5}=0.122$$

因而，顾客损失率为：

$$p_4=\rho^4 p_0=1.25^4\times 0.122=0.298$$

有效到达率为：

$$\lambda_e = \lambda(1-p_4) = 1\times(1-0.298) = 0.702$$

平均队长

$$L_s = \frac{1.25}{1-1.25} - \frac{(4+1)\times 1.25^5}{1-1.25^5} = 2.44 \text{（台）}$$

平均排队长

$$L_q = L_s - (1-p_0) = 2.44 - (1-0.122) = 1.56 \text{（台）}$$

平均逗留时间

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{2.44}{0.702} = 3.48 \text{（分钟）}$$

平均等待时间

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 3.48 - \frac{1}{0.8} = 2.23 \text{（分钟）}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
state/1..4/:p;
endsets
lamda=1;mu=1/1.25;rho=lamda/mu;k=4;
lamda*p0=mu*p(1);
(lamda+mu)*p(1)=lamda*p0+mu*p(2);
@for(state(i)|i #gt#1 #and# i #lt#
k:(lamda+mu)*p(i)=lamda*p(i-1)+mu*p(i+1));
lamda*p(k-1)=mu*p(k);
p0+@sum(state:p)=1;
P_lost=p(k);lamda_e=lamda*(1-P_lost);
L_s=@sum(state(i)|i #le#k:i*p(i));
L_q=L_s-(1-p0);
W_s=L_s/lamda_e;
W_q=W_s-1/mu;
end
```

6.2　多服务台混合制模型

多服务台混合制模型 $M/M/s/K$ 是指顾客的相继到达时间服从参数为 λ 的负指数分布，服务台个数为 s，每个服务台服务时间相互独立，且服从参数为 μ 的负指数分布，系统的空间为 K。

由式（4），式（5）和式（6），并注意到在本模型中

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda, & n = 0,1,2,\cdots,K-1 \\ 0, & n \geq K \end{cases}$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & 0 \leq n < s \\ s\mu, & s \leq n \leq K \end{cases}$$

于是

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{\rho^n}{n!}p_0, & 0\le n<s\\ \dfrac{\rho^n}{s!s^{n-s}}p_0, & s\le n\le K\end{cases} \tag{42}$$

其中

$$p_0=\begin{cases}\left(\sum\limits_{n=0}^{s-1}\dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^s(1-\rho_s^{K-s+1})}{s!(1-\rho_s)}\right)^{-1}, & \rho_s\ne 1\\ \left(\sum\limits_{n=0}^{s-1}\dfrac{\rho^n}{n!}+\dfrac{\rho^s}{s!}(K-s+1)\right)^{-1}, & \rho_s=1\end{cases} \tag{43}$$

由平稳分布 $p_n, n=0,1,2,\cdots,K$，可得平均排队长为

$$\begin{aligned}L_q&=\sum_{n=s}^{K}(n-s)p_n\\&=\begin{cases}\dfrac{p_0\rho^s\rho_s}{s!(1-\rho_s)^2}[1-\rho_s^{K-s+1}-(1-\rho_s)(K-s+1)\rho_s^{K-s}], & \rho_s\ne 1\\ \dfrac{p_0\rho^s(K-s)(K-s+1)}{2s!}, & \rho_s=1\end{cases}\end{aligned} \tag{44}$$

为求平均队长，由

$$\begin{aligned}L_q&=\sum_{n=s}^{K}(n-s)p_n=\sum_{n=s}^{K}np_n-s\sum_{n=s}^{K}p_n\\&=\sum_{n=0}^{K}np_n-\sum_{n=0}^{s-1}np_n-s\left(1-\sum_{n=0}^{s-1}p_n\right)=L_s-\sum_{n=0}^{s-1}(n-s)p_n-s\end{aligned}$$

得到

$$L_s=L_q+s+p_0\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(n-s)\rho^n}{n!} \tag{45}$$

由系统空间的有限性，必须考虑顾客的有效到达率 λ_e。对多服务台系统，仍有

$$\lambda_e=\lambda(1-p_K) \tag{46}$$

再利用 Little 公式，得到

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e},\quad W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=W_s-\frac{1}{\mu} \tag{47}$$

平均被占用的服务台数（也是正在接受服务的顾客的平均数）为

$$\begin{aligned}\bar{s}&=\sum_{n=0}^{s-1}np_n+s\sum_{n=s}^{K}p_n=p_0\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{n\rho^n}{n!}+s\sum_{n=s}^{K}\frac{\rho^n}{s!s^{n-s}}\right]\\&=p_0\rho\left[\sum_{n=1}^{s-1}\frac{\rho^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=s}^{K}\frac{\rho^{n-1}}{s!s^{n-1-s}}\right]=p_0\rho\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{\rho^n}{n!}+\sum_{n=s}^{K}\frac{\rho^n}{s!s^{n-s}}-\frac{\rho^K}{s!s^{K-s}}\right]\end{aligned}$$

$$= \rho(1-\frac{\rho^K}{s!s^{K-s}}p_0) = \rho(1-p_K) \quad (48)$$

因此，又有

$$L_s = L_q + \bar{s} = L_q + \rho(1-p_K) \quad (49)$$

例 6　某汽车加油站设有两个加油机，汽车按 Poisson 流到达，平均每分钟到达 2 辆；汽车加油时间服从负指数分布，平均加油时间为 2 分钟。又知加油站上最多只能停放 3 辆等待加油的汽车，汽车到达时，若已满员，则必须开到别的加油站去，试对该系统进行分析。

解　可将该系统看作一个 $M/M/2/5$ 排队系统，其中

$$\lambda = 2,\ \mu = 0.5,\ \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 4,\ s = 2,\ K = 5$$

（1）系统空闲的概率

$$p_0 = \left\{1+4+\frac{4^2[1-(4/2)^{5-2+1}]}{2!(1-4/2)}\right\}^{-1} = 0.008$$

（2）顾客损失率

$$p_5 = \frac{4^5 \times 0.008}{2!\times 2^{5-2}} = 0.512$$

（3）加油站内在等待的平均汽车数

$$L_q = \frac{0.008\times 4^2\times(4/2)}{2!(1-4/2)^2}[1-(4/2)^{5-2+1}-(1-4/2)(5-2+1)(4/2)^{5-2}]$$

$$= 2.18 \text{（辆）}$$

加油站内汽车的平均数为

$$L_s = L_q + \rho(1-p_5) = 2.18 + 4(1-0.512) = 4.13 \text{（辆）}$$

（4）汽车在加油站内平均逗留时间为

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-p_5)} = \frac{4.13}{2(1-0.512)} = 4.23 \text{（分钟）}$$

汽车在加油站内平均等待时间为

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu} = 4.23 - 2 = 2.23 \text{（分钟）}$$

（5）被占用的加油机的平均数为

$$\bar{s} = L_s - L_q = 4.13 - 2.18 = 1.95 \text{（个）}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
state/1..5/:p;
endsets
lamda=2;mu=0.5;rho=lamda/mu;s=2;k=5;
lamda*p0=mu*p(1);
(lamda+mu)*p(1)=lamda*p0+2*mu*p(2);
@for(state(i)|i #gt#1 #and# i #lt# s:
(lamda+i*mu)*p(i)=lamda*p(i-1)+(i+1)*mu*p(i+1));
```

```
@for(state(i)|i #ge# s #and# i #lt# k:
(lamda+s*mu)*p(i)=lamda*p(i-1)+s*mu*p(i+1));
lamda*p(k-1)=s*mu*p(k);
p0+@sum(state:p)=1;
P_lost=p(k);lamda_e=lamda*(1-P_lost);
L_s=@sum(state(i):i*p(i));
L_q=L_s-lamda_e/mu;
W_s=L_s/lamda_e;
W_q=W_s-1/mu;
end
```

在对上述多服务台混合制排队模型 $M/M/s/K$ 的讨论中，当 $s=K$ 时，即为多服务台损失制系统。对损失制系统，有

$$p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\quad n=1,2,\cdots,s \tag{50}$$

其中

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{51}$$

顾客的损失率为

$$B(s,\rho)=p_s=\frac{\rho^s}{s!}\left(\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1} \tag{52}$$

式（52）称为 Erlang 损失公式，$B(s,\rho)$ 亦表示了到达系统后由于系统空间已被占满而不能进入系统的顾客的百分比。

对损失制系统，平均被占用的服务台数（正在接受服务的顾客的平均数）为

$$\begin{aligned}\bar{s}&=\sum_{n=0}^{s}np_n=\sum_{n=0}^{s}\frac{n\rho^n}{n!}p_0\\&=\rho\left(\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}-\frac{\rho^s}{s!}\right)\left(\sum_{n=0}^{s}\frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}=\rho(1-B(s,\rho))\end{aligned} \tag{53}$$

此外，还有

平均队长 $L_s=\bar{s}=\rho(1-B(s,\rho))$ （54）

平均逗留时间 $W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{\rho[1-B(s,\rho)]}{\lambda[1-B(s,\rho)]}=\frac{1}{\mu}$ （55）

其中 $\lambda_e=\lambda(1-p_s)$ 为有效到达率。在损失制系统中，还经常用 $A=\lambda(1-p_s)$ 表示系统的绝对通过能力，即单位时间内系统实际可完成的服务次数；用 $Q=1-p_s$ 表示系统的相对通过能力，即被服务的顾客数与请求服务的顾客数的比值。系统的服务台利用率（或通道利用率）为

$$\eta=\frac{\bar{s}}{s} \tag{56}$$

§7 其它排队模型简介

7.1 有限源排队模型

现在，来分析一下顾客源为有限的排队问题。这类排队问题的主要特征是顾客总数是有限的，如果有 m 个顾客。每个顾客来到系统中接受服务后仍回到原来的总体，还有可能再来，这类排队问题的典型例子是机器看管问题。如一个工人同时看管 m 台机器，当机器发生故障时即停下来等待维修，修好后再投入使用，且仍然可能再发生故障。类似的例子还有 m 个终端共用一台打印机等，如图 2 所示。

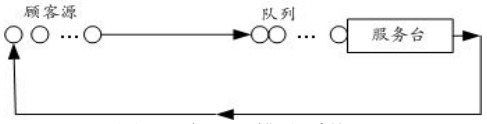


图 2　有限源排队系统

关于顾客的平均到达率，在无限源的情形中是按全体顾客来考虑的，而在有限源的情形下，必须按每一顾客来考虑。设每个顾客的到达率都是相同的，均为 λ（这里 λ 的含义是指单位时间内该顾客来到系统请求服务的次数），且每一顾客在系统外的时间均服从参数为 λ 的负指数分布。由于在系统外的顾客的平均数为 $m-L_s$，故系统的有效到达率为

$$\lambda_e=\lambda(m-L_s)$$

下面讨论平稳状态下队长 N 的分布 $p_n=P\{N=n\}$，$n=0,1,2,\cdots,m$。由于状态间的转移率为

$$\lambda_n=\lambda(m-n)，\quad n=0,1,2,\cdots,m$$

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu, & n=1,2,\cdots,s\\ s\mu, & n=s+1,\cdots,m\end{cases}$$

由式（4），式（5）和式（6），有（记 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$）

$$C_n=\begin{cases}\dfrac{m!}{(m-n)!n!}\rho^n, & n=1,2,\cdots,s\\ \dfrac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\rho^n, & n=s,\cdots,m\end{cases}\tag{57}$$

故

$$p_n=\begin{cases}\dfrac{m!}{(m-n)!n!}\rho^n p_0, & n=1,2,\cdots,s\\ \dfrac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\rho^n p_0, & n=s,\cdots,m\end{cases}\tag{58}$$

其中

$$p_0=\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{m!}{(m-n)!n!}\rho^n+\sum_{n=s}^{m}\frac{m!}{(m-n)!s!s^{n-s}}\rho^n\right]^{-1}\tag{59}$$

下面给出系统的有关运行指标

$$L_q = \sum_{n=s}^{m} (n-s) p_n \tag{60}$$

$$L_s = \sum_{n=0}^{s-1} n p_n + L_q + s(1 - \sum_{n=0}^{s-1} p_n) \tag{61}$$

或

$$L_s = L_q + \frac{\lambda_e}{\mu} = L_q + \rho(m - L_s) \tag{62}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}, \quad W_q = \frac{L_q}{\lambda_e} \tag{63}$$

特别，对单服务台（$s=1$）系统，有

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \rho^n p_0, \quad n = 1,2,\cdots,m \tag{64}$$

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{m!}{(m-n)!} \rho^n \right]^{-1} \tag{65}$$

$$L_q = \sum_{n=1}^{m} (n-1) p_n \tag{66}$$

$$L_s = L_q + (1 - p_0) \tag{67}$$

或

$$L_s = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0) \tag{68}$$

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{m}{\mu(1-p_0)} - \frac{1}{\lambda}, \quad W_q = W_s - \frac{1}{\mu} \tag{69}$$

系统的相对通过能力$Q=1$，绝对通过能力

$$A = \lambda_e Q = \lambda(m - L_s) = \mu(1 - p_0) \tag{70}$$

例 7　设有一工人看管 5 台机器，每台机器正常运转的时间服从负指数分布，平均为 15 分钟。当发生故障后，每次修理时间服从负指数分布，平均为 12 分钟，试求该系统的有关运行指标。

解　用有限源排队模型处理本问题。已知

$$\lambda = \frac{1}{15}, \quad \mu = \frac{1}{12}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = 0.8, \quad m = 5$$

于是，有

（1）修理工人空闲的概率

$$p_0 = \left[\frac{5!}{5!}(0.8)^0 + \frac{5!}{4!}(0.8)^1 + \frac{5!}{3!}(0.8)^2 + \frac{5!}{2!}(0.8)^3 + \frac{5!}{1!}(0.8)^4 + \frac{5!}{0!}(0.8)^5 \right]^{-1} = 0.0073$$

（2）5 台机器都出故障的概率

$$p_5 = \frac{5!}{0!}(0.8)^5 p_0 = 0.287$$

（3）出故障机器的平均数

$$L_s = 5 - \frac{1}{0.8}(1 - 0.0073) = 3.76$$（台）

（4）等待修理机器的平均数

$$L_q = 3.76 - (1 - 0.0073) = 2.77$$（台）

（5）每台机器发生一次故障的平均停工时间

$$W_s = \frac{5}{\frac{1}{12}(1 - 0.0073)} - 15 = 46$$（分钟）

（6）每台机器平均待修时间

$$W_q = 46 - 12 = 34$$（分钟）

（7）系统绝对通过能力（即工人的维修能力）

$$A = \frac{1}{12}(1 - 0.0073) = 0.083$$（台）

即该工人每小时可修理机器的平均台数为$0.083 \times 60 = 4.96$台。

上述结果表面，机器停工时间过长，看管工人几乎没有空闲时间，应采取措施提高服务率或增加工人。

LINGO 计算程序如下

```
model:
lamda=1/15;mu=1/12;rho=lamda/mu;s=1;m=5;
load=m*rho;
L_s=@pfs(load,s,m);
p_0=1-(m-L_s)*rho;
lamda_e=lamda*(m-L_s);
p_5=@exp(@lgm(6))*0.8^5*p_0;
L_q=L_s-(1-p_0);
w_s=L_s/lamda_e;w_q=L_q/lamda_e;
end
```

7.2 服务率或到达率依赖状态的排队模型

在前面的各类排队模型的分析中，均假设顾客的到达率为常数λ，服务台的服务率也为常数μ。而在实际的排队问题中，到达率或服务率可能是随系统的状态而变化的。例如，当系统中顾客数已经比较多时，后来的顾客可能不愿意再进入系统；服务员的服务率当顾客较多时也可能会提高。因此，对单服务台系统，实际的到达率和服务率（它们均依赖于系统所处的状态n）可假设为

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{(n+1)^a}, \quad n = 0,1,2,\cdots$$

$$\mu_n = n^b \mu_1, \quad n = 1,2,\cdots$$

对多服务台系统，实际到达率和服务率假设为

$$\lambda_n = \begin{cases} \lambda_0, & n \le s-1 \\ \left(\frac{s}{n+1}\right)^a \lambda_0, & n \ge s-1 \end{cases}$$

$$\mu_n=\begin{cases} n\mu_1, & n\le s \\ \left(\dfrac{n}{s}\right)^b s\mu_1, & n\ge s \end{cases}$$

其中 λ_n 和 μ_n 分别为系统处于状态 n 时的到达率和服务率。上述假设表明，到达率 λ_n 同系统中已有顾客数 n 呈反比关系；服务率 μ_n 同系统状态 n 呈正比关系。

由式（4），对多服务台系统有

$$C_n=\begin{cases} \dfrac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{n!}, & n=1,2,\cdots,s \\ \dfrac{(\lambda_0/\mu_1)^n}{s!(n!/s!)^{a+b}s^{(1-a-b)(n-s)}}, & n=s,s+1,\cdots \end{cases} \tag{71}$$

下面看一个简单的特例，考虑一个到达依赖状态的单服务台等待制系统 $M/M/1/\infty$，其参数为

$$\lambda_n=\frac{\lambda}{n+1},\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$\mu_n=\mu,\quad n=1,2,\cdots$$

于是由式（5），式（6），并设 $\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}<1$，有

$$p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0,\quad n=1,2,\cdots \tag{72}$$

$$p_0=e^{-\rho} \tag{73}$$

平均队长

$$L_s=\sum_{n=0}^{\infty}np_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\rho^n}{n!}p_0=\rho \tag{74}$$

平均排队长

$$L_q=\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)p_n=L_s-(1-p_0)=\rho+e^{-\rho}-1 \tag{75}$$

有效到达率（单位时间内实际进入系统的顾客的平均数）

$$\lambda_e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{n+1}p_n=\mu(1-e^{-\rho}) \tag{76}$$

平均逗留时间为

$$W_s=\frac{L_s}{\lambda_e}=\frac{\rho}{\mu(1-e^{-\rho})} \tag{77}$$

平均等待时间

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda_e}=W_s-\frac{1}{\mu} \tag{78}$$

7.3　非生灭过程排队模型

一个排队系统的特征是由输入过程，服务机制和排队规则决定的。本章前面所讨论的排队模型都是输入过程为 Poisson 流，服务时间服从负指数分布的生灭过程排队模型。这类排队系统的一个主要特征是马尔可夫性，而马尔可夫性的一个主要性质是由系统当前的状态可以推断未来的状态。但是，当输入过程不是 Poisson 流或服务时间不服从负指数分布时，仅知道系统内当前的顾客数，对于推断系统未来的状态是不充足的，因为正在接受服务的顾客，已经被服务了多长时间，将影响其离开系统的时间。因此，必须引入新的方法来分析具有非负指数分布的排队系统。

7.3.1　$M/G/1$排队模型

$M/G/1$系统是指顾客的到达为 Poisson 流，单个服务台，服务时间为一般分布的排队系统。现假设顾客的平均到达率为λ，服务时间的均值为$\frac{1}{\mu}$，方差为σ^2，则可证明：当$\rho=\frac{\lambda}{\mu}<1$时，系统可以达到平稳状态，而给出平稳分布的表示是比较困难的。已有的几个结果为：

$$p_0=1-\rho \tag{79}$$

$$L_q=\frac{\lambda^2\sigma^2+\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{80}$$

$$L_s=\rho+L_q \tag{81}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda} \tag{82}$$

$$W_s=W_q+\frac{1}{\mu} \tag{83}$$

由式（80）可看出，L_q,L_s,W_s,W_q等仅依赖于ρ和服务时间的方差σ^2，而与分布的类型没有关系，这是排队论中一个非常重要且令人惊奇的结果，式（80）通常被称为 Pollaczek-Khintchine（P-K）公式。

从式（80）还不难发现，当服务率μ给定后，当方差σ^2减少时，平均队长和等待时间等都将减少。因此，可通过改变服务时间的方差来缩短平均队长，当且仅当$\sigma^2=0$，即服务时间为定长时，平均队长（包括等待时间）可减少到最少水平，这一点是符合直观的，因为服务时间越有规律，等候的时间也就越短。

例 8　有一汽车冲洗台，汽车按 Poisson 流到达，平均每小时到达 18 辆，冲洗时间V 根据过去的经验表明，有$E(V)=0.05h/$辆，$\mathrm{Var}(V)=0.01(\mathrm{h/辆})^2$，求有关运行指标，并对系统进行评价。

解　本例中，$\lambda=18$，$\rho=\lambda E(V)=18\times0.05=0.9$，$\sigma^2=0.01$，$\mu=20$，于是

$$L_q=\frac{18^2\times0.01+(0.9)^2}{2(1-0.9)}=20.25\ （辆）$$

$$L_s=20.25+0.9=21.15\ （辆）$$

$$W_s=\frac{21.15}{18}=1.175\ （\mathrm{h}）$$

$$W_q = \frac{20.25}{18} = 1.125 \text{（h）}$$

上述结果表明，这个服务机构很难令顾客满意，突出的问题是顾客的平均等待时间是服务时间的$\frac{W_q}{E(V)} = \frac{1.125}{0.05} = 22.5$倍（通常称$\frac{W_q}{E(V)}$为顾客的时间损失系数）。

例 9　考虑定长服务时间$M/D/1/\infty$模型，这时，$E(V) = \frac{1}{\mu}$，$\sigma^2 = \mathrm{Var(V)} = 0$，由式（80）有

$$L_q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{84}$$

$$L_s = L_q + \rho = \frac{\lambda(2\mu-\lambda)}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{85}$$

$$W_q = \frac{\rho^2}{2\lambda(1-\rho)} = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)} \tag{86}$$

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu} \tag{87}$$

将式（13）和式（86）比较，不难发现在服务时间服从负指数分布的条件下，等待时间正好是定长服务时间的 2 倍。可以证明，在一般服务时间分布下得到的L_q和W_q中，以定长服务时间下得到的为最小。

7.3.2　爱尔朗（Erlang）排队模型

爱尔朗分布族比负指数分布族对现实世界具有更广泛的适应性。下面介绍一个最简单的爱尔朗排队模型。

对爱尔朗排队模型研究的一般方法是根据k阶 Erlang 分布恰为k个相同负指数分布随机变量和的分布这个关系，把服务时间或到达过程假想地（实际并非如此）分为k个独立的同分布的位相（或阶段），然后利用负指数分布的性质来加以分析。如对$M/E_k/1/\infty$系统来说，服务时间是k阶 Erlang 分布，把每个顾客的服务时间假想地分为k个位相，每个位相的平均服务时间为$\frac{1}{k\mu}$，顾客先进入第k个位相，最后进入第 1 个位相。仍令N为系统达到平衡状态时的顾客数，但考虑到顾客可能处在不同位相，故系统的状态一般用(n,i)表示，其中n表示有n个顾客在系统中，i表示正在接受服务的顾客处在第i个位相，令

$$p_{ni} = P\{N = (n,i)\}$$

则可得到类似于（3）的差分方程组，从而在平稳分布存在的条件下得到平稳分布和各有关指标。由于本节已给出了$M/G/1/\infty$系统的主要结果，作为一个特例，可直接给出$M/E_k/1/\infty$的主要数量指标。

由于服务时间为k阶 Erlang 分布，其分布密度函数为

$$a(t) = \frac{\mu k(\mu k t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu k t}, \quad t \geq 0 \tag{88}$$

故其均值和方差分别为

$$E(E_k)=\frac{1}{\mu},\quad \mathrm{Var}(E_k)=\frac{1}{k\mu^2}$$

将 $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$，$\sigma^2=\frac{1}{k\mu^2}$ 代入式（80）～式（83），得

$$L_q=\frac{\rho^2(k+1)}{2k(1-\rho)}=\frac{\rho^2}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \tag{89}$$

$$L_s=L_q+\rho=\frac{\rho}{1-\rho}-\frac{(k-1)\rho^2}{2k(1-\rho)} \tag{90}$$

$$W_s=\frac{1}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)} \tag{91}$$

$$W_q=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}-\frac{(k-1)\rho}{2k\mu(1-\rho)} \tag{92}$$

例 10　设一电话间的顾客按 Poisson 流到达，平均每小时到达 6 人，平均通话时间为 8 分钟，方差为 16 分钟。直观上估计通话时间服从爱尔朗分布，管理人员想知道平均排队长度和顾客平均等待时间是多少？

解　设 V 为通话时间，服从 k 阶 Erlang 分布，由

$$k=\frac{[E(V)]^2}{\mathrm{Var}(V)}=\frac{8^2}{16}=4$$

可知该系统为 $M/E_4/1/\infty$ 系统，其中 $\rho=6\times\frac{8}{60}=0.8$。由式（89），有

$$L_q=\frac{(0.8)^2(4+1)}{2\times4(1-0.8)}=2\ \text{（人）}$$

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda}=\frac{2}{6}=0.33\ \text{（h）}$$

§8　排队系统的优化

排队系统中的优化模型，一般可分为系统设计的优化和系统控制的优化。前者为静态优化，即在服务系统设置以前根据一定的质量指标，找出参数的最优值，从而使系统最为经济。后者为动态优化，即对已有的排队系统寻求使其某一目标函数达到最优的运营机制。由于对后一类问题的阐述需要较多的数学知识，所以本节着重介绍静态最优问题。

在优化问题的处理方法上，一般根据变量的类型是离散的还是连续的，相应地采用边际分析方法或经典的微分法，对较为复杂的优化问题需要用非线性规划或动态规划等方法。

8.1　$M/M/1$ 模型中的最优服务率 μ

先考虑 $M/M/1/\infty$ 模型，取目标函数 z 为单位时间服务成本与顾客在系统中逗留费用之和的期望值，即

$$z=c_s\mu+c_wL_s$$

其中 c_s 为服务一个顾客时单位时间内的服务费用，c_w 为每个顾客在系统中逗留单位时

间的费用，则由式（9），有

$$z = c_s\mu + c_w\frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

令

$$\frac{dz}{d\mu} = c_s - c_w\lambda\frac{1}{(\mu-\lambda)^2} = 0$$

解出最优服务率为

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{c_w}{c_s}\lambda} \tag{93}$$

下面考虑 $M/M/1/K$ 模型，从使服务机构利润最大化来考虑。由于在平稳状态下，单位时间内到达并进入系统的平均顾客数为 $\lambda_e = \lambda(1-p_K)$，它也等于单位时间内实际服务完的平均顾客数。设每服务一个顾客服务机构的收入为 G 元，于是单位时间内收入的期望值是 $\lambda(1-p_K)G$ 元，故利润 z 为

$$z = \lambda(1-p_K)G - c_s\mu = \lambda G\frac{1-\rho^K}{1-\rho^{K+1}} - c_s\mu$$

$$= \lambda\mu G\frac{\mu^K-\lambda^K}{\mu^{K+1}-\lambda^{K+1}} - c_s\mu$$

令 $\frac{dz}{d\mu}=0$，得

$$\rho^{K+1}\frac{K-(K+1)\rho+\rho^{K+1}}{(1-\rho^{K+1})^2} = \frac{c_s}{G} \tag{94}$$

当给定 K 和 $\frac{c_s}{G}$ 后，即可由（94）式得到最优利润的 μ^*。

例 11　设某工人照管 4 台自动机床，机床运转时间（或各台机床损坏的相继时间）平均为负指数分布，假定平均每周有一台机床损坏需要维修，机床运转单位时间内平均收入 100 元，而每增加 1 单位 μ 的维修费用为 75 元。求使总利益达到最大的 μ^*。

解　该系统为 $M/M/1/K/K$ 系统，其中

$$K=4,\ \lambda=1,\ G=100,\ C_s=75$$

设 L_s 是队长，则正常运装的机器为 $K-L_s$ 部，因此目标函数为

$$f = 100(K-L_s) - 75\mu$$

题意就是在上述条件下，求目标函数 f 的最大值。

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
s=1;k=4;lamda=1;
L_s=@pfs(k*lamda/mu,s,k);
max=100*(k-L_s)-75*mu;
end
```

求得 $\mu^* = 1.799$，最优目标值 $f^* = 31.49$。

例 12　假定有一混合制排队系统 $M/M/1/K$，其中 $K=3$，顾客的到达率为每小时 3.6 人，其到达间隔服从 Poisson 过程，系统服务一个顾客收费 2 元。又设系统的服务强度 μ（$\mu=\dfrac{1}{T}$，T 为服务时间）服从负指数分布，其服务成本为每小时 0.5μ 元。求系统为每个顾客的最佳服务时间。

解　系统的损失率为 p_K，则系统每小时服务的人数为 $\lambda(1-p_K)$，每小时运行成本为 0.5μ，因此目标函数为

$$f=2\lambda(1-p_K)-0.5\mu$$

题意就是在上述条件下，求目标函数 f 的最大值。

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
state/1..3/:p;
endsets
lamda=3.6;k=3;
lamda*p0=p(1)/t;
(lamda+1/t)*p(1)=lamda*p0+p(2)/t;
@for(state(i)|i #gt# 1 #and# i #lt# k:
(lamda+1/t)*p(i)=lamda*p(i-1)+p(i+1)/t);
lamda*p(k-1)=p(k)/t;
p0+@sum(state:p)=1;
max=2*lamda*(1-p(k))-0.5/t;
end
```

求得系统为每位顾客最佳服务时间是0.2238h，系统每小时赢利3.70元。

8.2　$M/M/s$ 模型中的最优的服务台数 s^*

这里仅讨论 $M/M/s/\infty$ 系统，已知在平稳状态下单位时间内总费用（服务费用与等待费用）之和的平均值为

$$z=c_s's+c_wL \tag{95}$$

其中 s 为服务台数，c_s' 是每个服务台单位时间内的费用，L 是平均队长。由于 c_s'，c_w 是给定的，故唯一可变的是服务台数 s，所以可将 z 看成是 s 的函数，记为 $z=z(s)$，并求使 $z(s)$ 达到最小的 s^*。

因为 s 只取整数，$z(s)$ 不是连续函数，故不能用经典的微分法，下面采用边际分析方法。根据 $z(s^*)$ 应为最小的特点，有

$$\begin{aligned} z(s^*)&\le z(s^*-1)\\ z(s^*)&\le z(s^*+1)\end{aligned} \tag{96}$$

将式（95）代入式（96），得

$$c_s's^*+c_wL(s^*)\le c_s'(s^*-1)+c_wL(s^*-1)$$

$$c_s's^*+c_wL(s^*)\le c_s'(s^*+1)+c_wL(s^*+1)$$

化简后得到

$$L(s^*)-L(s^*+1)\le\frac{c_s^{'}}{c_w}\le L(s^*-1)-L(s^*) \qquad (97)$$

依次求当$s=1,2,3,\cdots$时L的值，并计算相邻两个L值的差。因$\frac{c_s^{'}}{c_w}$是已知数，根据其落在哪个与s有关的不等式中，即可定出最优的s^*。

例 13　某检验中心为各工厂服务，要求进行检验的工厂(顾客)的到来服从 Poisson 流，平均到达率为$\lambda=48$（次/d)；每天来检验由于停工等原因损失 6 元；服务（检验）时间服从负指数分布，平均服务率为$\mu=25$（次/d)；每设置一个检验员的服务成本为 4 元/d，其它条件均适合$M/M/s/\infty$系统。问应设几个检验员可使总费用的平均值最少？

解　已知$c_s^{'}=4$，$c_w=6$，$\lambda=48$，$\mu=25$，$\frac{\lambda}{\mu}=1.92$，设检验员数为s，由式（20）和式（25）

$$p_0=\left[\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(1.92)^n}{n!}+\frac{(1.92)^s}{(s-1)!(s-1.92)}\right]^{-1}$$

$$L=L_q+\rho=\frac{p_0(1.92)^{s+1}}{(s-1)!(s-1.92)^2}+1.92$$

将$s=1,2,3,4,5$依次代入得到表 2。由于$\frac{c_s^{'}}{c_w}=\frac{4}{6}=0.67$落在区间$(0.582,21.845)$之间，故$s^*=3$，即当设 3 个检验员时可使总费用$z$最小，最小值为

$$z(s^*)=z(3)=27.87\text{（元）}$$

表 2

检验员数s	平均顾客数$L(s)$	$L(s)-L(s+1)\sim L(s-1)-L(s)$	总费用$z(s)$
1	∞		∞
2	24.49	21.845～∞	154.94
3	2.645	0.582～21.845	27.87
4	2.063	0.111～0.582	28.38
5	1.952		31.71

求解的 LINGO 程序如下：

```
model:
lamda=48;mu=25;rho=lamda/mu;
P_wait=@peb(rho,s);
L_q=P_wait*rho/(s-rho);
L_s=L_q+rho;
min=4*s+6*L_s;
@gin(s);@bnd(2,s,5);
end
```

§9　产生给定分布的随机数的方法

Matlab 可以产生常用分布的随机数。下面我们介绍按照给定的概率分布产生随机

数的一般方法，这些方法都以$U(0,1)$分布的随机变量为基础。

(i)反变换法

定理　设X是一个具有连续分布函数$F(x)$的随机变量，则$F(X)$在[0，1]上服从均匀分布。

设概率分布函数$F(x)$是严格单调增的，F的反函数记作F^{-1}。先产生$U\sim U(0,1)$，再取$X=F^{-1}(U)$即为所求，称为反变换法。

指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$能够方便地用反变换法产生。由$\mathrm{Exp}(\lambda)$的分布函数$F(x)=1-e^{-\lambda x}$，可得

$$X=F^{-1}(U)=-\frac{\ln(1-U)}{\lambda}$$

思考　有的书上用$X=-\frac{\ln U}{\lambda}$代替上式，对吗，为什么？

（ii）卷积法

如果随机变量X是n个独立、同分布的另一随机变量Y之和，而Y又容易产生时，先产生n个独立的$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$，再令$X=Y_1+\cdots+Y_n$即可。因为X的分布函数是$Y_1,Y_2,\cdots,Y_n$分布函数的卷积，故称为卷积法。

二项分布可以用卷积法产生。因为$X\sim B(n,p)$是n个独立的$Y\sim Bern(p)$之和，而$Y\sim Bern(p)$很容易由$U\sim U(0,1)$按以下方法得到：若$U\le p$，令$Y=1$；否则令$Y=0$。

(iii)取舍法

若随机变量X在有限区间(a,b)内变化，但概率密度$f(x)$具有任意形式（甚至没有解析表达式），无法用前面的方法产生时，可用取舍法。一种比较简单的取舍法的步骤是：

1° 产生$Y\sim U(a,b)$和$U\sim U(0,1)$；

2° 记$C=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$，若$U\le\frac{f(Y)}{C}$，则取$X=Y$；否则，舍去，返回1°。

§10　排队模型的计算机模拟

10.1 确定随机变量概率分布的常用方法

在模拟一个带有随机因素的实际系统时，究竟用什么样的概率分布描述问题中的随机变量，是我们总是要碰到的一个问题，下面简单介绍确定分布的常用方法：

1° 根据一般知识和经验，可以假定其概率分布的形式，如顾客到达间隔服从指数分布$\mathrm{Exp}(\lambda)$；产品需求量服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$；订票后但未能按时前往机场登机的人数服从二项分布$B(n,p)$。然后由实际数据估计分布的参数λ,μ,σ等，参数估计可用极大似然估计、矩估计等方法。

2° 直接由大量的实际数据作直方图，得到经验分布，再通过假设检验，拟合分布函数，可用χ^2检验等方法。

3° 既缺少先验知识，又缺少数据时，对区间(a,b)内变化的随机变量，可选用Beta分布（包括均匀分布）。先根据经验确定随机变量的均值μ和频率最高时的数值（即密

度函数的最大值点）m，则 Beta 分布中的参数α_1,α_2可由以下关系求出：

$$\mu = a + \frac{\alpha_1(b-a)}{\alpha_1+\alpha_2},\quad m = a + \frac{(\alpha_1-1)(b-a)}{\alpha_1+\alpha_2-2}.$$

10.2　计算机模拟

当排队系统的到达间隔时间和服务时间的概率分布很复杂时，或不能用公式给出时，那么就不能用解析法求解。这就需用随机模拟法求解，现举例说明。

例 14　设某仓库前有一卸货场，货车一般是夜间到达，白天卸货，每天只能卸货 2 车，若一天内到达数超过 2 车，那么就推迟到次日卸货。根据表 3 所示的数据，货车到达数的概率分布（相对频率）平均为 1.5 车/天，求每天推迟卸货的平均车数。

表 3　到达车数的概率

到达车数	0	1	2	3	4	5	≥6
概　　率	0.23	0.30	0.30	0.1	0.05	0.02	0.00

解　这是单服务台的排队系统，可验证到达车数不服从泊松分布，服务时间也不服从指数分布（这是定长服务时间）。

随机模拟法首先要求事件能按历史的概率分布规律出现。模拟时产生的随机数与事件的对应关系如表 4。

表 4　到达车数的概率及其对应的随机数

到达车数	概　率	累积概率	对应的随机数
0	0.23	0.23	$0 \le x < 0.23$
1	0.30	0.53	$0.23 \le x < 0.53$
2	0.30	0.83	$0.53 \le x < 0.83$
3	0.1	0.93	$0.83 \le x < 0.93$
4	0.05	0.98	$0.93 \le x < 0.98$
5	0.02	1.00	$0.98 \le x \le 1.00$

我们用 a1 表示产生的随机数，a2 表示到达的车数，a3 表示需要卸货车数，a4 表示实际卸货车数，a5 表示推迟卸货车数。编写程序如下：

```
clear
rand('state',sum(100*clock));
n=50000;
m=2
a1=rand(n,1);
a2=a1; %a2初始化
a2(find(a1<0.23))=0;
a2(find(0.23<=a1&a1<0.53))=1;
a2(find(0.53<=a1&a1<0.83))=2;
a2(find(0.83<=a1&a1<0.93),1)=3;
a2(find(0.93<=a1&a1<0.98),1)=4;
a2(find(a1>=0.98))=5;
a3=zeros(n,1);a4=zeros(n,1);a5=zeros(n,1); %a2初始化
a3(1)=a2(1);
if a3(1)<=m
   a4(1)=a3(1);a5(1)=0;
else
```

```
   a4(1)=m;a5(1)=a2(1)-m;
end
for i=2:n
   a3(i)=a2(i)+a5(i-1);
   if a3(i)<=m
   a4(i)=a3(i);a5(i)=0;
   else
   a4(i)=m;a5(i)=a3(i)-m;
   end
end
a=[a1,a2,a3,a4,a5];
sum(a)/n
```

例 15　银行计划安置自动取款机，已知 A 型机的价格是 B 型机的 2 倍，而 A 型机的性能—平均服务率也是 B 型机的 2 倍，问应该购置 1 台 A 型机还是 2 台 B 型机。

为了通过模拟回答这类问题，作如下具体假设，顾客平均每分钟到达 1 位，A 型机的平均服务时间为 0.9 分钟，B 型机为 1.8 分钟，顾客到达间隔和服务时间都服从指数分布，2 台 B 型机采取 $M/M/2$ 模型（排一队），用前 100 名顾客（第 1 位顾客到达时取款机前为空）的平均等待时间为指标，对 A 型机和 B 型机分别作 1000 次模拟，进行比较。

理论上已经得到，A 型机和 B 型机前 100 名顾客的平均等待时间分别为 $\mu_1(100)=4.13$，$\mu_2(100)=3.70$，即 B 型机优。

对于 $M/M/1$ 模型，记第 k 位顾客的到达时刻为 c_k，离开时刻为 g_k，等待时间为 w_k，它们很容易根据已有的到达间隔 i_k 和服务时间 s_k 按照以下的递推关系得到（$w_1=0$，设 c_1, g_1 已知）：

$$c_k=c_{k-1}+i_k,\quad g_k=\max(c_k,g_{k-1})+s_k$$

$$w_k=\max(0,g_{k-1}-c_k),\quad k=2,3,\cdots$$

在模拟 A 型机时，我们用cspan表示到达间隔时间，sspan表示服务时间，ctime表示到达时间，gtime表示离开时间，wtime表示等待时间。我们总共模拟了 m 次，每次 n 个顾客。程序如下：

```
tic
rand('state',sum(100*clock));
n=100;m=1000;mu1=1;mu2=0.9;
for j=1:m
   cspan=exprnd(mu1,1,n);sspan=exprnd(mu2,1,n);
   ctime(1)=cspan(1);
   gtime(1)=ctime(1)+sspan(1);
   wtime(1)=0;
   for i=2:n
      ctime(i)=ctime(i-1)+cspan(i);
      gtime(i)=max(ctime(i),gtime(i-1))+sspan(i);
      wtime(i)=max(0,gtime(i-1)-ctime(i));
   end
   result1(j)=sum(wtime)/n;
end
result_1=sum(result1)/m
```

```
toc
```

类似地，模拟B型机的程序如下：

```
tic
rand('state',sum(100*clock));
n=100;m=1000;mu1=1;mu2=1.8;
for j=1:m
   cspan=exprnd(mu1,1,n);sspan=exprnd(mu2,1,n);
   ctime(1)=cspan(1);ctime(2)=ctime(1)+cspan(2);
   gtime(1:2)=ctime(1:2)+sspan(1:2);
   wtime(1:2)=0;flag=gtime(1:2);
   for i=3:n
      ctime(i)=ctime(i-1)+cspan(i);
      gtime(i)=max(ctime(i),min(flag))+sspan(i);
      wtime(i)=max(0,min(flag)-ctime(i));
      flag=[max(flag),gtime(i)];
   end
   result2(j)=sum(wtime)/n;
end
result_2=sum(result2)/m
toc
```

读者可以用下面的程序与上面的程序比较了解编程的效率问题。

```
tic
clear
rand('state',sum(100*clock));
n=100;m=1000;mu1=1;mu2=0.9;
for j=1:m
   ctime(1)=exprnd(mu1);
   gtime(1)=ctime(1)+exprnd(mu2);
   wtime(1)=0;
   for i=2:n
      ctime(i)=ctime(i-1)+exprnd(mu1);
      gtime(i)=max(ctime(i),gtime(i-1))+exprnd(mu2);
      wtime(i)=max(0,gtime(i-1)-ctime(i));
   end
   result(j)=sum(wtime)/n;
end
result=sum(result)/m
toc
```

习 题 六

1. 一个车间内有10台相同的机器，每台机器运行时每小时能创造4元的利润，且平均每小时损坏一次。而一个修理工修复一台机器平均需4小时。以上时间均服从指数分布。设一名修理工一小时工资为6元，试求：

（i）该车间应设多少名修理工，使总费用为最小；

（ii）若要求不能运转的机器的期望数小于4台，则应设多少名修理工；

（iii）若要求损坏机器等待修理的时间少于4小时，又应设多少名修理工。

2. 到达某铁路售票处顾客分两类：一类买南方线路票，到达率为λ_1/小时，另一类买北方线路票，到达率为λ_2/小时，以上均服从泊松分布。该售票处设两个窗口，各

窗口服务一名顾客时间均服从参数 $\mu = 10$ 的指数分布。试比较下列情况时顾客分别等待时间 W_q：（i）两个窗口分别售南方票和北方票；（ii）每个窗口两种票均出售。（分别比较 $\lambda_1 = \lambda_2 = 2,4,6,8$ 时的情形）

3. 一名修理工负责5台机器的维修，每台机器平均每2h损坏一次，又修理工修复一台机器平均需时18.75min，以上时间均服从负指数分布。试求：

（1）所有机器均正常运转的概率；

（2）等待维修的机器的期望数；

（3）假如希望做到有一半时间所有机器都正常运转，则该修理工最多看管多少台机器。

（4）假如维修工工资为8元/h，机器不能正常运转时的损失为40元/h，则该修理工看管多少台机器较为经济合理。

第七章　对策论

§1 引言

社会及经济的发展带来了人与人之间或团体之间的竞争及矛盾，应用科学的方法来解决这样的问题开始于 17 世纪的科学家，如 C.，Huygens 和 W.，Leibnitz 等。现代对策论起源于 1944 年 J.，Von Neumann 和 O.，Morgenstern 的著作《Theory of Games and Economic Behavior》。

对策论亦称竞赛论或博弈论。是研究具有斗争或竞争性质现象的数学理论和方法。一般认为，它既是现代数学的一个新分支，也是运筹学中的一个重要学科。对策论发展的历史并不长，但由于它所研究的现象与人们的政治、经济、军事活动乃至一般的日常生活等有着密切的联系，并且处理问题的方法又有明显特色。所以日益引起广泛的注意。

在日常生活中，经常看到一些具有相互之间斗争或竞争性质的行为。具有竞争或对抗性质的行为称为**对策行为**。在这类行为中。参加斗争或竞争的各方各自具有不同的目标和利益。为了达到各自的目标和利益，各方必须考虑对手的各种可能的行动方案，并力图选取对自己最为有利或最为合理的方案。对策论就是研究对策行为中斗争各方是否存在着最合理的行动方案，以及如何找到这个合理的行动方案的数学理论和方法。

§2　对策问题

对策问题的特征是参与者为利益相互冲突的各方，其结局不取决于其中任意一方的努力而是各方所采取的策略的综合结果。

先考察一个实际例子。

例 1（囚徒的困境） 警察同时逮捕了两人并分开关押，逮捕的原因是他们持有大量伪币，警方怀疑他们伪造钱币，但没有找到充分证据，希望他们能自己供认，这两个人都知道：如果他们双方都不供认，将被以持有大量伪币罪被各判刑 18 个月；如果双方都供认伪造了钱币，将各被判刑 3 年；如果一方供认另一方不供认，则供认方将被从宽处理而免刑，但另一方面将被判刑 7 年。将嫌疑犯 A、B 被判刑的几种可能情况列于表 1。

表 1

		嫌疑犯 B	
		供认	不供认
嫌疑犯 A	供认	（3，3）	（0，7）
	不供认	（7，0）	（1.5，1.5）

表 1 中每对数字表示嫌疑犯 A、B 被判刑的年数。如果两名疑犯均担心对方供认并希望受到最轻的惩罚，最保险的办法自然是承认制造了伪币。

从这一简单实例中可以看出对策现象中包含有的几个基本要素。

2.1　对策的基本要素

（i）局中人

在一个对策行为（或一局对策）中，有权决定自己行动方案的对策参加者，称为局中人。通常用 I 表示局中人的集合．如果有 n 个局中人，则 $I=\{1,2,\cdots,n\}$。一般要求一个对策中至少要有两个局中人。在例 1 中，局中人是 A、B 两名疑犯。

（ii）策略集

一局对策中，可供局中人选择的一个实际可行的完整的行动方案称为一个策略。参加对策的每一局中人 i，$i\in I$，都有自己的策略集 S_i。一般，每一局中人的策略集中至少应包括两个策略。

（iii）赢得函数（支付函数）

在一局对策中，各局中人所选定的策略形成的策略组称为一个局势，即若 s_i 是第 i 个局中人的一个策略，则 n 个局中人的策略组

$$s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$$

就是一个局势。全体局势的集合 S 可用各局中人策略集的笛卡尔积表示，即

$$S=S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$$

当局势出现后，对策的结果也就确定了。也就是说，对任一局势，$s\in S$，局中人 i 可以得到一个赢得 $H_i(s)$。显然，$H_i(s)$ 是局势 s 的函数，称之为第 i 个局中人的赢得函数。这样，就得到一个向量赢得函数 $H(s)=(H_1(s),\cdots,H_n(s))$。

本节我们只讨论有两名局中人的对策问题，其结果可以推广到一般的对策模型中去。

2.2　零和对策（矩阵对策）

零和对策是一类特殊的对策问题。在这类对策中，只有两名局中人，每个局中人都只有有限个策略可供选择。在任一纯局势下，两个局中人的赢得之和总是等于零，即双方的利益是激烈对抗的。

设局中人Ⅰ、Ⅱ的策略集分别为

$$S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\quad S_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$$

当局中人Ⅰ选定策略 α_i 和局中人Ⅱ选定策略 β_j 后，就形成了一个局势 (α_i,β_j)，可见这样的局势共有 mn 个。对任一局势 (α_i,β_j)，记局中人Ⅰ的赢得值为 a_{ij}，并称

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$$

为局中人Ⅰ的赢得矩阵（或为局中人Ⅱ的支付矩阵）。由于假定对策为零和的，故局中人Ⅱ的赢得矩阵就是 $-A$。

当局中人Ⅰ、Ⅱ和策略集 S_1、S_2 及局中人Ⅰ的赢得矩阵 A 确定后，一个零和对策就给定了，零和对策又可称为矩阵对策并可简记成

$$G=\{S_1,S_2;A\}。$$

例 2　设有一矩阵对策 $G=\{S_1,S_2;A\}$，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\}$，

$$A=\begin{bmatrix}12 & -6 & 30 & -22\\ 14 & 2 & 18 & 10\\ -6 & 0 & -10 & 16\end{bmatrix}$$

从 A 中可以看出，若局中人Ⅰ希望获得最大赢利 30，需采取策略 α_1，但此时若局中人Ⅱ采取策略 β_4，局中人Ⅰ非但得不到 30，反而会失去 22。为了稳妥，双方都应考虑到对方有使自己损失最大的动机，在最坏的可能中争取最好的结果，局中人Ⅰ采取策略 α_1、α_2、α_3 时，最坏的赢得结果分别为

$$\min\{12,-6,30,-22\}=-22$$
$$\min\{14,2,18,10\}=2$$
$$\min\{-6,0,-10,16\}=-10$$

其中最好的可能为 $\max\{-22,2,-10\}=2$。如果局中人Ⅰ采取策略 α_2，无论局中人Ⅱ采取什么策略，局中人Ⅰ的赢得均不会少于 2。

局中人Ⅱ采取各方案的最大损失为 $\max\{12,14,-6\}=14$，$\max\{-6,2,0\}=2$，$\max\{30,18,-10\}=30$，和 $\max\{-22,10,16\}=16$。当局中人Ⅱ采取策略 β_2 时，其损失不会超过 2。注意到在赢得矩阵中，2 既是所在行中的最小元素又是所在列中的最大元素。此时，只要对方不改变策略，任一局中人都不可能通过变换策略来增大赢得或减少损失，称这样的局势为对策的一个稳定点或稳定解。

定义1　设 $f(x,y)$ 为一个定义在 $x\in A$ 及 $y\in B$ 上的实值函数，如果存在 $x^*\in A$，$y^*\in B$，使得对一切 $x\in A$ 和 $y\in B$，有

$$f(x,y^*)\le f(x^*,y^*)\le f(x^*,y)$$

则称 (x^*,y^*) 为函数 f 的一个鞍点。

定义 2　设 $G=\{S_1,S_2;A\}$ 为矩阵对策，其中 $S_1=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$，$S_2=\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$，$A=(a_{ij})_{m\times n}$。若等式

$$\max_i\min_j a_{ij}=\min_j\max_i a_{ij}=a_{i^*j^*} \tag{1}$$

成立，记 $V_G=a_{i^*j^*}$，则称 V_G 为对策 G 的值，称使（1）式成立的纯局势 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 为对策 G 的鞍点或稳定解，赢得矩阵中与 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 相对应的元素 $a_{i^*j^*}$ 称为赢得矩阵的鞍点，α_{i^*} 与 β_{j^*} 分别称为局中人Ⅰ与Ⅱ的最优纯策略。

给定一个对策 G，如何判断它是否具有鞍点呢？为了回答这一问题，先引入下面的极大极小原理。

定理 1　设 $G=\{S_1,S_2;A\}$，记 $\mu=\max_i\min_j a_{ij}$，$\nu=-\min_j\max_i a_{ij}$，则必有 $\mu+\nu\le 0$。

证明　$\nu=\max_j\min_i(-a_{ij})$，易见 μ 为Ⅰ的最小赢得，ν 为Ⅱ的最小赢得，由于 G 是零和对策，故 $\mu+\nu\le 0$ 必成立。

定理 2　零和对策 G 具有稳定解的充要条件为 $\mu+\nu=0$。

证明：（充分性）由 μ 和 ν 的定义可知，存在一行例如 p 行，μ 为 p 行中的最小元素，且存在一列例如 q 列，$-\nu$ 为 q 列中的最大元素。故有

$$a_{pq}\ge\mu \text{ 且 } a_{pq}\le-\nu$$

又因 $\mu+\nu=0$，所以 $\mu=-\nu$，从而得出 $a_{pq}=\mu$，a_{pq} 为赢得矩阵的鞍点，(α_p,β_q) 为 G 的稳定解。

（必要性）若 G 具有稳定解 (α_p,β_q)，则 a_{pq} 为赢得矩阵的鞍点。故有

$$\mu=\max_i\min_j a_{ij}\ge\min_j a_{pj}=a_{pq}$$
$$-\nu=\min_j\max_i a_{ij}\le\max_i a_{iq}=a_{pq}$$

从而可得 $\mu+\nu\geq 0$，但根据定理 1，$\mu+\nu\leq 0$ 必成立，故必有 $\mu+\nu=0$。

上述定理给出了对策问题有稳定解（简称为解）的充要条件。当对策问题有解时，其解可以不唯一，当解不唯一时，解之间的关系具有下面两条性质：

性质 1　无差别性。即若 $(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$ 与 $(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则必有 $a_{i_1j_1}=a_{i_2j_2}$。

性质 2　可交换性。即若 $(\alpha_{i_1},\beta_{j_1})$ 和 $(\alpha_{i_2},\beta_{j_2})$ 是对策 G 的两个解，则 $(\alpha_{i_1},\beta_{j_2})$ 和 $(\alpha_{i_2},\beta_{j_1})$ 也是解。

§3　零和对策的混合策略

具有稳定解的零和问题是一类特别简单的对策问题，它所对应的赢得矩阵存在鞍点，任一局中人都不可能通过自己单方面的努力来改进结果。然而，在实际遇到的零和对策中更典型的是 $\mu+\nu\neq 0$ 的情况。由于赢得矩阵中不存在鞍点，此时在只使用纯策略的范围内，对策问题无解。下面我们引进零和对策的混合策略。

设局中人Ⅰ用概率 x_i 选用策略 α_i，局中人Ⅱ用概率 y_j 选用策略 β_j，$\sum\limits_{i=1}^{m}x_i=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j=1$，记 $x=(x_1,\cdots,x_m)^T$，$y=(y_1,\cdots,y_n)^T$，则局中人Ⅰ的期望赢得为 $E(x,y)=x^TAy$。

记

S_1^*：

策略	$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$
概率	$x_1,\cdots,x_m$

S_2^*：

策略	$\beta_1,\cdots,\beta_n$
概率	$y_1,\cdots,y_n$

分别称 S_1^* 与 S_2^* 为局中人Ⅰ和Ⅱ的混合策略。

下面简单地记

$$S_1^*=\{(x_1,\cdots,x_m)^T\mid x_i\geq 0,i=1,\cdots,m;\sum_{i=1}^{m}x_i=1\},$$

$$S_2^*=\{(y_1,\cdots,y_n)^T\mid y_j\geq 0,j=1,\cdots,n;\sum_{j=1}^{n}y_j=1\}$$

定义 4　若存在 m 维概率向量 $\bar{x}$ 和 n 维概率向量 $\bar{y}$，使得对一切 m 维概率向量 x 和 n 维概率向量 y 有

$$\bar{x}^TA\bar{y}=\max_x x^TA\bar{y}=\min_y \bar{x}^TAy$$

则称 $(\bar{x},\bar{y})$ 为混合策略对策问题的鞍点。

定理 3　设 $\bar{x}\in S_1^*$，$\bar{y}\in S_2^*$，则 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 $G=\{S_1,S_2;A\}$ 的解的充要条件是：

$$\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}\bar{y}_j\leq \bar{x}^TA\bar{y}, & i=1,2,\cdots,m\\ \sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\bar{x}_i\geq \bar{x}^TA\bar{y}, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

定理 4　任意混合策略对策问题必存在鞍点，即必存在概率向量 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$，使得：

$\bar{x}^T A\bar{y} = \max\limits_x \min\limits_y x^T Ay = \min\limits_y \max\limits_x x^T Ay$ 。

使用纯策略的对策问题（具有稳定解的对策问题）可以看成使用混合策略的对策问题的特殊情况，相当于以概率 1 选取其中某一策略，以概率 0 选取其余策略。

例 3　A、B 为作战双方，A 方拟派两架轰炸机Ⅰ和Ⅱ去轰炸 B 方的指挥部，轰炸机Ⅰ在前面飞行，Ⅱ随后。两架轰炸机中只有一架带有炸弹，而另一架仅为护航。轰炸机飞至 B 方上空，受到 B 方战斗机的阻击。若战斗机阻击后面的轰炸机Ⅱ，它仅受Ⅱ的射击，被击中的概率为 0.3(Ⅰ来不及返回攻击它)。若战斗机阻击Ⅰ，它将同时受到两架轰炸机的射击，被击中的概率为 0.7。一旦战斗机未被击中，它将以 0.6 的概率击毁其选中的轰炸机。请为 A、B 双方各选择一个最优策略，即：对于 A 方应选择哪一架轰炸机装载炸弹？对于 B 方战斗机应阻击哪一架轰炸机？

解　双方可选择的策略集分别是

$S_A = \{\alpha_1, \alpha_2\}$，$\alpha_1$：轰炸机Ⅰ装炸弹，Ⅱ护航

α_2：轰炸机Ⅱ装炸弹，Ⅰ护航

$S_B = \{\beta_1, \beta_2\}$，$\beta_1$：阻击轰炸机Ⅰ

β_2：阻击轰炸机Ⅱ

赢得矩阵 $R = (a_{ij})_{2\times 2}$，a_{ij} 为 A 方采取策略 α_i 而 B 方采取策略 β_j 时，轰炸机轰炸 B 方指挥部的概率，由题意可计算出：

$a_{11} = 0.7 + 0.3(1-0.6) = 0.82$

$a_{12} = 1$，$a_{21} = 1$

$a_{22} = 0.3 + 0.7(1-0.6) = 0.58$

即赢得矩阵

$$R = \begin{bmatrix} 0.82 & 1 \\ 1 & 0.58 \end{bmatrix}$$

易求得 $\mu = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 0.82$，$\nu = -\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = -1$。由于 $\mu + \nu \neq 0$，矩阵 R 不存在鞍点，应当求最佳混合策略。

现设 A 以概率 x_1 取策略 α_1、以概率 x_2 取策略 α_2；B 以概率 y_1 取策略 β_1、以概率 y_2 取策略 β_2。

先从 B 方来考虑问题。B 采用 β_1 时，A 方轰炸机攻击指挥部的概率期望值为 $E(\beta_1) = 0.82x_1 + x_2$，而 B 采用 β_2 时，A 方轰炸机攻击指挥部的概率的期望值为 $E(\beta_2) = x_1 + 0.58x_2$。若 $E(\beta_1) \neq E(\beta_2)$，不妨设 $E(\beta_1) < E(\beta_2)$，则 B 方必采用 β_1 以减少指挥部被轰炸的概率。故对 A 方选取的最佳概率 x_1 和 x_2，必满足：

$$\begin{cases} 0.82x_1 + x_2 = x_1 + 0.58x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

由此解得 $x_1 = 0.7$， $x_2 = 0.3$。

同样，可从 A 方考虑问题，得

$$\begin{cases} 0.82y_1 + y_2 = y_1 + 0.58y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases}$$

并解得 $y_1 = 0.7$， $y_2 = 0.3$。B 方指挥部被轰炸的概率的期望值 $V_G = 0.874$。

记零和对策 G 的解集为 $T(G)$，下面三个定理是关于对策解集性质的主要结果：

定理 5　设有两个零和对策

$$G_1 = \{S_1, S_2; A_1\}，\ G_2 = \{S_1, S_2; A_2\}$$

其中 $A_1 = \{a_{ij}\}$， $A_2 = \{a_{ij} + L\}$， L 为任一常数。则

（i）$V_{G_2} = V_{G_1} + L$

（ii）$T(G_1) = T(G_2)$

定理 6　设有两个零和对策

$$G_1 = \{S_1, S_2; A\}，\ G_2 = \{S_1, S_2; \alpha A\}$$

其中 $\alpha > 0$ 为任一常数。则

（i）$V_{G_2} = \alpha V_{G_1}$

（ii）$T(G_1) = T(G_2)$

定理 7　设 $G = \{S_1, S_2; A\}$ 为一零和对策，且 $A = -A^T$ 为反对称矩阵（亦称这种对策为对称对策）。则

（i）$V_G = 0$

（ii）$T_1(G) = T_2(G)$

其中 $T_1(G)$ 和 $T_2(G)$ 为局中人Ⅰ和Ⅱ的最优策略集。

§4　零和对策的线性规划解法

当 $m > 2$ 且 $n > 2$ 时，通常采用线性规划方法求解零和对策问题。

局中人Ⅰ选择混合策略 $\bar{x}$ 的目的是使得

$$\bar{x}^T A\bar{y} = \max_x \min_y x^T Ay = \max_x \min_y x^T A(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j)$$

$$= \max_x \min_y \sum_{j=1}^{n} E_j y_j$$

其中 e_j 为只有第 j 个分量为 1 而其余分量均为零的单位向量， $E_j = x^T Ae_j$。记

$u \equiv E_k = \min_j E_j$，由于 $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$，$\min_Y \sum_{j=1}^{n} E_j y_j$ 在 $y_k = 1$，$y_j = 0(j \neq k)$ 时达到最小值 u，故 $\bar{x}$ 应为线性规划问题

$$\max u$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq u, \quad j = 1,2,\cdots,n(\text{即} E_j \geq E_k) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \end{cases} \tag{2}$$

的解。

同理，$\bar{y}$ 应为线性规划

$$\min v$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq v, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \geq 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{3}$$

的解。由线性规划知识，（2）与（3）互为对偶线性规划，它们具有相同的最优目标函数值。

不妨设 $u > 0$，作变换

$$x'_i = \frac{x_i}{u}, \quad i = 1,2,\cdots,m$$

则线性规划问题（2）化为：

$$\min \sum_{i=1}^{m} x'_i$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x'_i \geq 1, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ x'_i \geq 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \end{cases}$$

同理，作变换

$$y'_j = \frac{y_j}{v}, \quad j = 1,2,\cdots,n$$

则线性规划问题（3）化为：

$$\max \sum_{i=1}^{m} y'_i$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y'_j \le 1, \quad i = 1,2,\cdots,m \\ y'_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \end{cases}$$

例 4　在一场敌对的军事行动中，甲方拥有三种进攻性武器 A_1, A_2, A_3，可分别用于摧毁乙方工事；而乙方有三种防御性武器 B_1, B_2, B_3 来对付甲方。据平时演习得到的数据，各种武器间对抗时，相互取胜的可能如下：

A_1 对 B_1　2：1；　A_1 对 B_2　3：1；　A_1 对 B_3　1：2；

A_2 对 B_1　3：7；　A_2 对 B_2　3：2；　A_2 对 B_3　1：3；

A_3 对 B_1　3：1；　A_3 对 B_2　1：4；　A_3 对 B_3　2：1

解　先分别列出甲、乙双方的赢得的可能性矩阵，将甲方矩阵减去乙方矩阵的对应元素，得零和对策时甲方的赢得矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 & -1/3 \\ -2/5 & 1/5 & -1/2 \\ 1/2 & -3/5 & 1/3 \end{bmatrix}$$

编写程序如下：

```
clear
a=[1/3,1/2,-1/3;-2/5,1/5,-1/2;1/2,-3/5,1/3];b=10;
a=a+b*ones(3);   %把赢得矩阵的每个元素变成大于0的数
[x0,u]=linprog(ones(3,1),-a',-ones(3,1),[],[],zeros(3,1));
x=x0/u,u=1/u-b
[y0,v]=linprog(-ones(3,1),a,ones(3,1),[],[],zeros(3,1));
y=y0/(-v),v=1/(-v)-b
```

解得 $\bar{x} = (0.5283, 0, 0.4717)^{\mathrm{T}}$，$\bar{y} = (0, 0.3774, 0.6226)^{\mathrm{T}}$，$u = -0.0189$，故乙方有利。

下面我们使用式（2）和（3），利用 LINGO 编程求例 4 的解。LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
player1/1..3/:x;
player2/1..3/:y;
game(player1,player2):c;
endsets
data:
ctrl=?; !ctrl取1求局中人1的策略，ctrl取0求局中人2的策略;
c=0.3333333 0.5 -0.3333333
-0.4 0.2 -0.5
0.5 -0.6 0.3333333;
enddata
max=u*ctrl-v*(1-ctrl);
@free(u);@free(v);
@for(player2(j):@sum(player1(i):c(i,j)*x(i))>u);
```

```
@for(player1(i):@sum(player2(j):c(i,j)*y(j))<v);
@sum(player1:x)=1;
@sum(player2:y)=1;
end
```

由定理4知，混合对策问题的求解问题可以转化为求不等式约束的可行点，而LINGO软件很容易做到这一点。我们编写如下Lingo程序求解上述问题。

```
model:
sets:
player1/1..3/:x;
player2/1..3/:y;
game(player1,player2):c;
endsets
data:
c=0.3333333 0.5 -0.3333333
-0.4 0.2 -0.5
0.5 -0.6 0.3333333;
enddata
@free(u);
u=@sum(game(i,j):c(i,j)*x(i)*y(j));
@for(player1(i):@sum(player2(j):c(i,j)*y(j))<u);
@for(player2(j):@sum(player1(i):c(i,j)*x(i))>u);
@sum(player1:x)=1;
@sum(player2:y)=1;
end
```

§5 二人非常数和对策

所谓常数和对策是指局中人I和局中人II所赢得的值之和为一常数。显然，二人零和对策是二人常数和对策的特例，即常数为零。

对于二人常数和对策，有纯策略对策和混合策略对策，其求解方法与二人零和对策是相同的。

二人非常数和对策也称为双矩阵对策。也有纯策略对策和混合策略对策两种策略。

5.1 纯策略问题

例1给出了典型的二人非常数和对策，每人的赢得矩阵是不相同的，因此称为双矩阵对策。

问题分析

这是一个二人非常数和对策问题。从表面上看，两犯罪嫌疑人拒不供认，只能被判18个月徒刑，结果是最好的。但仔细分析，却无法做到这一点。因为犯罪嫌疑人 A 如果采用不供认策略，他可能被判刑的刑期为18个月或7年，而犯罪嫌疑人 B 可能判的刑期为0或18个月。而 A 选择供认，他被判的刑期为0或3年，此时，犯罪嫌疑人 B 可能判的刑期为3年或7年。因此，犯罪嫌疑人 A 一定选择供认。基于同样的道理，犯罪嫌疑人 B 也只能选择供认。

选择供认是他们最好的选择，各自被判3年。

按照上面的论述，对于一般纯策略问题，局中人 I、II 的赢得矩阵如表 2 所示。其中局中人 I 有 m 个策略 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$，局中人 II 有 n 个策略 $\beta_1,\cdots,\beta_n$，分别记为

$$S_1=\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\quad S_2=\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$$

$C^1=(c_{ij}^1)_{m\times n}$ 为局中人 I 的赢得矩阵，$C^2=(c_{ij}^2)_{m\times n}$ 为局中人 II 的赢得矩阵。因此，双矩阵对策记为

$$G=\{S_1,S_2,C^1,C^2\}$$

表 2

	β_1	β_2	$\cdots$	β_n
α_1	(c_{11}^1,c_{11}^2)	(c_{12}^1,c_{12}^2)	$\cdots$	(c_{1n}^1,c_{1n}^2)
α_2	(c_{21}^1,c_{21}^2)	(c_{22}^1,c_{22}^2)	$\cdots$	(c_{2n}^1,c_{2n}^2)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
α_m	(c_{m1}^1,c_{m1}^2)	(c_{m2}^1,c_{m2}^2)	$\cdots$	(c_{mn}^1,c_{mn}^2)

定义5　设 $G=\{S_1,S_2,C^1,C^2\}$ 是一双矩阵对策，若等式

$$c_{i^*j^*}^1=\min_j\max_i c_{ij}^1,\quad c_{i^*j^*}^2=\min_i\max_j c_{ij}^2 \tag{4}$$

成立，则记 $v_1=c_{i^*j^*}^1$，并称 v_1 为局中人I的赢得值，记 $v_2=c_{i^*j^*}^2$，并称 v_2 为局中人II的赢得值，称 $(\alpha_{i^*},\beta_{j^*})$ 为 G 在纯策略下的解（或Nash平衡点），称 α_{i^*} 和 β_{j^*} 分别为局中人I，II的最优纯策略。

实际上，定义5也同时给出了纯策略问题的求解方法。因此，对于例1，$((1,0),(1,0))$ 是Nash平衡点，这里 $(1,0)$ 表示以概率1取第一个策略，也就是说，坦白是他们的最佳策略。

5.2　混合对策问题

如果不存在使式（4）成立的对策，则需要求混合对策。类似于二人零和对策情况，需要给出混合对策的最优解。

（1）混合对策问题的基本概念

定义6　在对策 $G=\{S_1,S_2,C^1,C^2\}$ 中，若存在策略对 $\bar{x}\in S_1^*,y\in S_2^*$，使得

$$\begin{cases}x^TC^1\bar{y}\le\bar{x}^TC^1\bar{y},\quad\forall x\in S_1^*\\ \bar{x}^TC^2y\le\bar{x}^TC^2\bar{y},\quad\forall y\in S_2^*\end{cases}$$

则称 $(\bar{x},\bar{y})$ 为 G 的一个非合作平衡点。记 $v_1=\bar{x}^TC^1\bar{y}$，$v_2=\bar{x}^TC^2\bar{y}$，则称 v_1,v_2 分别为局中人I，II的赢得值。

对于混合对策问题有如下定理。

定理8　每个双矩阵对策至少存在一个非合作平衡点。

定理9　混合策略 $(\bar{x},\bar{y})$ 为对策 $G=\{S_1,S_2,C^1,C^2\}$ 的平衡点的充分必要条件是

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^n c_{ij}^1\bar{y}_j\le\bar{x}^TC^1\bar{y},\quad i=1,2,\cdots,m\\ \sum_{i=1}^m c_{ij}^2\bar{x}_i\le\bar{x}^TC^2\bar{y},\quad j=1,2,\cdots,n\end{cases} \tag{5}$$

（2）混合对策问题的求解方法

由定义6可知，求解混合对策就是求非合作对策的平衡点，进一步由定理8得到，求解非合作对策的平衡点，就是求解满足不等式约束（5）的可行点。因此，混合对策

问题的求解问题就转化为求不等式约束（5）的可行点，而LINGO软件可以很容易做到这一点。

例 5　有甲、乙两支游泳队举行包括三个项目的对抗赛。这两支游泳队各有一名健将级运动员（甲队为李，乙队为王），在三个项目中成绩都很突出，但规则准许他们每人只能参加两项比赛，每队的其他两名运动员可参加全部三项比赛。已知各运动员平时成绩（秒）见表 3。

表 3

	甲　队			乙　队		
	赵	钱	李	王	张	孙
100 米蝶泳	59.7	63.2	57.1	58.6	61.4	64.8
100 米仰泳	67.2	68.4	63.2	61.5	64.7	66.5
100 米蛙泳	74.1	75.5	70.3	72.6	73.4	76.9

假定各运动员在比赛中都发挥正常水平，又比赛第一名得5分，第二名得3分，第三名得1分，问教练员应决定让自己队健将参加哪两项比赛，使本队得分最多？（各队参加比赛名单互相保密，定下来后不准变动）

解　分别用 α_1、α_2 和 α_3 表示甲队中李姓健将不参加蝶泳、仰泳、蛙泳比赛的策略，分别用 β_1、β_2 和 β_3 表示乙队中王姓健将不参加蝶泳、仰泳、蛙泳比赛的策略。当甲队采用策略 α_1，乙队采用策略 β_1 时，在100米蝶泳中，甲队中赵获第一、钱获第三得6分，乙队中张获第二，得3分；在100米仰泳中，甲队中李获第二，得3分，乙队中王获第一、张获第三，得6分；在100米蛙泳中，甲队中李获第一，得5分，乙队中王获第二、张获第三，得4分。也就是说，对应于策略 (α_1,β_1)，甲、乙两队各自的得分为 $(14,13)$。表4给出了在全部策略下各队的得分，计算的Matlab程序如下：

```
clc,clear
a=[59.7   63.2 57.1 58.6 61.4 64.8
67.2 68.4 63.2 61.5 64.7 66.5
74.1 75.5 70.3 72.6 73.4 76.9];
m=3;n=3;kk=3;T=1000;
sc1=[5:-2:1,zeros(1,3)]; %1-6 名的得分
sc2=repmat(sc1,kk,1);
for i=1:m
    for j=1:n
        b=a;
        b(i,3)=T;b(j,4)=T; %不参加比赛，时间成绩取为充分大
        [b,ind]=sort(b,2); %对 b 的每一行进行排序
        for k=1:m
            sc2(k,ind(k,:))=sc1; %计算得分
        end
        A_sc(i,j)=sum(sum(sc2(:,1:m)));   %统计得分
        B_sc(i,j)=sum(sum(sc2(:,m+1:end)));
    end
end
A_sc,B_sc
```

```
fid=fopen('txt2.txt','w');
fprintf(fid,'%f\n',A_sc');
fwrite(fid,'~','char');          %往纯文本文件中写 LINGO 数据的分割符
fprintf(fid,'%f\n',B_sc');
fclose(fid);
```

表4

	β_1	β_2	β_3
α_1	(14,13)	(13,14)	(12,15)
α_2	(13,14)	(12,15)	(12,15)
α_3	(12,15)	(12,15)	(13,14)

按照定理8，求最优混合策略，就是求不等式约束（5）的可行解，写出相应的LINGO程序如下：

```
model:
sets:
pa/1..3/:x;
pb/1..3/:y;
link(pa,pb):c1,c2;
endsets
data:
c1=@file(txt2.txt);
c2=@file(txt2.txt);
enddata
v1=@sum(link(i,j):c1(i,j)*x(i)*y(j));
v2=@sum(link(i,j):c2(i,j)*x(i)*y(j));
@for(pa(i):@sum(pb(j):c1(i,j)*y(j))<v1);
@for(pb(j):@sum(pa(i):c2(i,j)*x(i))<v2);
@sum(pa:x)=1;@sum(pb:y)=1;
@free(v1);@free(v2);
end
```

求得甲队采用的策略是α_1、α_3方案各占50%，乙队采用的策略是β_2、β_3方案各占50%，甲队的平均得分为12.5分，乙队的平均得分为14.5分。

习 题 七

1. 表 5 是一双矩阵对策，试求局中人A, B的最优策略。

表 5

	局 中 人 B		
局中人 A	(10,4) (8,8)	(4,8) (2,12)	(6,6) (4,10)

2. 有三张纸牌，点数分别为 1，2，3，显然按大小顺序为$3>2>1$。先由A任抽一张，看过后反放在桌上，并任喊大（H）或小（L）。然后由B从剩下纸牌中任抽一张，看过后，B有两种选择：第一，弃权，付给A1 元；第二，翻A的牌，当A喊H时，得点数小的牌者付给对方 3 元，当A喊L时，得点数大的牌者付给对方 2 元。要

求：（i）说明 A,B 各有多少个纯策略；（ii）根据优超原则淘汰具有劣势的策略，并列出 A 的赢得矩阵；（iii）求解双方各自的最优策略和对策值。

3. “二指莫拉问题”。甲、乙二人游戏，每人出一个或两个手指，同时又把猜测对方所出的指数叫出来。如果只有一个人猜测正确，则他所赢得的数目为二人所出指数之和，否则重新开始。写出该对策中各局中人的策略集合及甲的赢得矩阵，并回答局中人是否存在某种出法比其他出法更为有利。

4. 甲、乙两队进行乒乓球团体赛，每队由3名球员组成。双方可排出3种不同的阵容。甲队的3种阵容记为 A,B,C；乙队的3种阵容为Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ。根据以往的记录。两队以不同的阵容交手的结果如表6所示。

表6　甲队得分数

甲队＼乙队	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ
A	−3	−1	−2
B	−6	0	3
C	5	1	−4

表6中的数字为双方各种阵容下甲队的得分数。这次团体赛双方各采取什么阵容比较稳妥？

第八章　层次分析法

层次分析法（Analytic Hierarchy Process，简称 AHP）是对一些较为复杂、较为模糊的问题作出决策的简易方法，它特别适用于那些难于完全定量分析的问题。它是美国运筹学家 T. L. Saaty 教授于上世纪 70 年代初期提出的一种简便、灵活而又实用的多准则决策方法。

§1 层次分析法的基本原理与步骤

人们在进行社会的、经济的以及科学管理领域问题的系统分析中，面临的常常是一个由相互关联、相互制约的众多因素构成的复杂而往往缺少定量数据的系统。层次分析法为这类问题的决策和排序提供了一种新的、简洁而实用的建模方法。

运用层次分析法建模，大体上可按下面四个步骤进行：

（i）建立递阶层次结构模型；

（ii）构造出各层次中的所有判断矩阵；

（iii）层次单排序及一致性检验；

（iv）层次总排序及一致性检验。

下面分别说明这四个步骤的实现过程。

1.1　递阶层次结构的建立与特点

应用 AHP 分析决策问题时，首先要把问题条理化、层次化，构造出一个有层次的结构模型。在这个模型下，复杂问题被分解为元素的组成部分。这些元素又按其属性及关系形成若干层次。上一层次的元素作为准则对下一层次有关元素起支配作用。这些层次可以分为三类：

（i）最高层：这一层次中只有一个元素，一般它是分析问题的预定目标或理想结果，因此也称为目标层。

（ii）中间层：这一层次中包含了为实现目标所涉及的中间环节，它可以由若干个层次组成，包括所需考虑的准则、子准则，因此也称为准则层。

（iii）最底层：这一层次包括了为实现目标可供选择的各种措施、决策方案等，因此也称为措施层或方案层。

递阶层次结构中的层次数与问题的复杂程度及需要分析的详尽程度有关，一般地层次数不受限制。每一层次中各元素所支配的元素一般不要超过 9 个。这是因为支配的元素过多会给两两比较判断带来困难。

下面结合一个实例来说明递阶层次结构的建立。

例 1　假期旅游有 P_1、P_2、P_3 3 个旅游胜地供你选择，试确定一个最佳地点。

在此问题中，你会根据诸如景色、费用、居住、饮食和旅途条件等一些准则去反复比较 3 个侯选地点。可以建立如图 1 的层次结构模型。

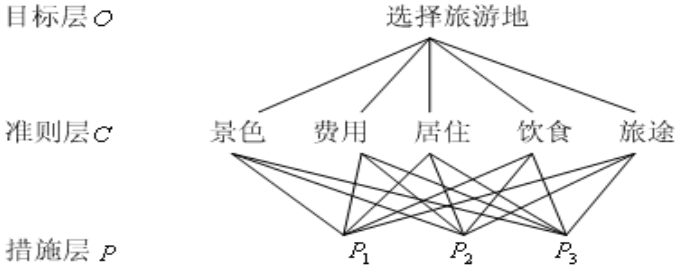


图 1　层次结构模型

1.2　构造判断矩阵

层次结构反映了因素之间的关系，但准则层中的各准则在目标衡量中所占的比重并不一定相同，在决策者的心目中，它们各占有一定的比例。

在确定影响某因素的诸因子在该因素中所占的比重时，遇到的主要困难是这些比重常常不易定量化。此外，当影响某因素的因子较多时，直接考虑各因子对该因素有多大程度的影响时，常常会因考虑不周全、顾此失彼而使决策者提出与他实际认为的重要性程度不相一致的数据，甚至有可能提出一组隐含矛盾的数据。为看清这一点，可作如下假设：将一块重为 1 千克的石块砸成 n 小块，你可以精确称出它们的重量，设为 $w_1,\cdots,w_n$，现在，请人估计这 n 小块的重量占总重量的比例（不能让他知道各小石块的重量），此人不仅很难给出精确的比值，而且完全可能因顾此失彼而提供彼此矛盾的数据。

设现在要比较 n 个因子 $X=\{x_1,\cdots,x_n\}$ 对某因素 Z 的影响大小，怎样比较才能提供可信的数据呢？Saaty 等人建议可以采取对因子进行两两比较建立成对比较矩阵的办法。即每次取两个因子 x_i 和 x_j，以 a_{ij} 表示 x_i 和 x_j 对 Z 的影响大小之比，全部比较结果用矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 表示，称 A 为 $Z-X$ 之间的成对比较判断矩阵（简称判断矩阵）。容易看出，若 x_i 与 x_j 对 Z 的影响之比为 a_{ij}，则 x_j 与 x_i 对 Z 的影响之比应为 $a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$。

定义 1　若矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

（i）$a_{ij}>0$，（ii）$a_{ji}=\dfrac{1}{a_{ij}}$（$i,j=1,2,\cdots,n$）

则称之为正互反矩阵(易见 $a_{ii}=1$，$i=1,\cdots,n$)。

关于如何确定 a_{ij} 的值，Saaty 等建议引用数字 1~9 及其倒数作为标度。表 1 列出了 1~9 标度的含义：

表 1　标度的含义

标度	含　　义
1	表示两个因素相比，具有相同重要性
3	表示两个因素相比，前者比后者稍重要
5	表示两个因素相比，前者比后者明显重要
7	表示两个因素相比，前者比后者强烈重要
9	表示两个因素相比，前者比后者极端重要
2，4，6，8	表示上述相邻判断的中间值
倒数	若因素 i 与因素 j 的重要性之比为 a_{ij}，那么因素 j 与因素 i 重要性之比为 $a_{ji}=1/a_{ij}$。

从心理学观点来看，分级太多会超越人们的判断能力，既增加了作判断的难度，又容易因此而提供虚假数据。Saaty 等人还用实验方法比较了在各种不同标度下人们判断结果的正确性，实验结果也表明，采用 1~9 标度最为合适。

最后，应该指出，一般地作 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次两两判断是必要的。有人认为把所有元素都和某个元素比较，即只作 $n-1$ 次比较就可以了。这种作法的弊病在于，任何一个判断的失误均可导致不合理的排序，而个别判断的失误对于难以定量的系统往往是难以避免的。进行 $\frac{n(n-1)}{2}$ 次比较可以提供更多的信息，通过各种不同角度的反复比较，从而导出一个合理的排序。

1.3　层次单排序及一致性检验

判断矩阵 A 对应于最大特征值 $\lambda_{\max}$ 的特征向量 W，经归一化后即为同一层次相应因素对于上一层次某因素相对重要性的排序权值，这一过程称为层次单排序。

上述构造成对比较判断矩阵的办法虽能减少其它因素的干扰，较客观地反映出一对因子影响力的差别。但综合全部比较结果时，其中难免包含一定程度的非一致性。如果比较结果是前后完全一致的，则矩阵 A 的元素还应当满足：

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik},\quad \forall i,j,k=1,2,\cdots n \tag{1}$$

定义 2　满足关系式（1）的正互反矩阵称为一致矩阵。

需要检验构造出来的（正互反）判断矩阵 A 是否严重地非一致，以便确定是否接受 A。

定理 1　正互反矩阵 A 的最大特征根 $\lambda_{\max}$ 必为正实数，其对应特征向量的所有分量均为正实数。A 的其余特征值的模均严格小于 $\lambda_{\max}$。

定理 2　若 A 为一致矩阵，则

（i）A 必为正互反矩阵。

（ii）A 的转置矩阵 A^T 也是一致矩阵。

（iii）A 的任意两行成比例，比例因子大于零，从而 $\mathrm{rank}(A)=1$（同样，A 的任意两列也成比例）。

（iv）A 的最大特征值 $\lambda_{\max}=n$，其中 n 为矩阵 A 的阶。A 的其余特征根均为零。

（v）若 A 的最大特征值 $\lambda_{\max}$ 对应的特征向量为 $W=(w_1,\cdots,w_n)^T$，则 $a_{ij}=\frac{w_i}{w_j}$，$\forall i,j=1,2,\cdots,n$，即

$$A=\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix}$$

定理 3　n 阶正互反矩阵 A 为一致矩阵当且仅当其最大特征根 $\lambda_{\max}=n$，且当正互反矩阵 A 非一致时，必有 $\lambda_{\max}>n$。

根据定理 3，我们可以由 $\lambda_{\max}$ 是否等于 n 来检验判断矩阵 A 是否为一致矩阵。由

于特征根连续地依赖于a_{ij}，故$\lambda_{\max}$比n大得越多，A的非一致性程度也就越严重，$\lambda_{\max}$对应的标准化特征向量也就越不能真实地反映出$X=\{x_1,\cdots,x_n\}$在对因素Z的影响中所占的比重。因此，对决策者提供的判断矩阵有必要作一次一致性检验，以决定是否能接受它。

对判断矩阵的一致性检验的步骤如下：

（i）计算一致性指标CI

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1}$$

（ii）查找相应的平均随机一致性指标RI。对$n=1,\cdots,9$，Saaty给出了RI的值，如表2所示。

表2　RI的值

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
RI	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45

RI的值是这样得到的，用随机方法构造500个样本矩阵：随机地从1~9及其倒数中抽取数字构造正互反矩阵，求得最大特征根的平均值$\lambda'_{\max}$，并定义

$$RI=\frac{\lambda'_{\max}-n}{n-1}。$$

（iii）计算一致性比例CR

$$CR=\frac{CI}{RI}$$

当$CR<0.10$时，认为判断矩阵的一致性是可以接受的，否则应对判断矩阵作适当修正。

1.4　层次总排序及一致性检验

上面我们得到的是一组元素对其上一层中某元素的权重向量。我们最终要得到各元素，特别是最低层中各方案对于目标的排序权重，从而进行方案选择。总排序权重要自上而下地将单准则下的权重进行合成。

表3　层次总排序合成表

层A / 层B	A_1	A_2	$\cdots$	A_m	B层总排序权值
	a_1	a_2	$\cdots$	a_m	
B_1	b_{11}	b_{12}	$\cdots$	b_{1m}	$\sum_{j=1}^{m}b_{1j}a_j$
B_2	b_{21}	b_{22}	$\cdots$	b_{2m}	$\sum_{j=1}^{m}b_{2j}a_j$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
B_n	b_{n1}	b_{n2}	$\cdots$	b_{nm}	$\sum_{j=1}^{m}b_{nj}a_j$

设上一层次（A层）包含$A_1,\cdots,A_m$共m个因素，它们的层次总排序权重分别为$a_1,\cdots,a_m$。又设其后的下一层次（B层）包含n个因素$B_1,\cdots,B_n$，它们关于A_j的层

次单排序权重分别为 $b_{1j},\cdots,b_{nj}$（当 B_i 与 A_j 无关联时，$b_{ij}=0$）。现求 B 层中各因素关于总目标的权重，即求 B 层各因素的层次总排序权重 $b_1,\cdots,b_n$，计算按表 3 所示方式进行，即 $b_i=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}a_j$，$i=1,\cdots,n$。

对层次总排序也需作一致性检验，检验仍象层次总排序那样由高层到低层逐层进行。这是因为虽然各层次均已经过层次单排序的一致性检验，各成对比较判断矩阵都已具有较为满意的一致性。但当综合考察时，各层次的非一致性仍有可能积累起来，引起最终分析结果较严重的非一致性。

设 B 层中与 A_j 相关的因素的成对比较判断矩阵在单排序中经一致性检验，求得单排序一致性指标为 $CI(j)$，（$j=1,\cdots,m$），相应的平均随机一致性指标为 $RI(j)$（$CI(j)$、$RI(j)$ 已在层次单排序时求得），则 B 层总排序随机一致性比例为

$$CR=\frac{\sum_{j=1}^{m}CI(j)a_j}{\sum_{j=1}^{m}RI(j)a_j}$$

当 $CR<0.10$ 时，认为层次总排序结果具有较满意的一致性并接受该分析结果。

§2　层次分析法的应用

在应用层次分析法研究问题时，遇到的主要困难有两个：（i）如何根据实际情况抽象出较为贴切的层次结构；（ii）如何将某些定性的量作比较接近实际定量化处理。层次分析法对人们的思维过程进行了加工整理，提出了一套系统分析问题的方法，为科学管理和决策提供了较有说服力的依据。但层次分析法也有其局限性，主要表现在：（i）它在很大程度上依赖于人们的经验，主观因素的影响很大，它至多只能排除思维过程中的严重非一致性，却无法排除决策者个人可能存在的严重片面性。（ii）比较、判断过程较为粗糙，不能用于精度要求较高的决策问题。AHP 至多只能算是一种半定量（或定性与定量结合）的方法。

在应用层次分析法时，建立层次结构模型是十分关键的一步。现再分析一个实例，以便说明如何从实际问题中抽象出相应的层次结构。

例 2　挑选合适的工作。经双方恳谈，已有三个单位表示愿意录用某毕业生。该生根据已有信息建立了一个层次结构模型，如图 2 所示。

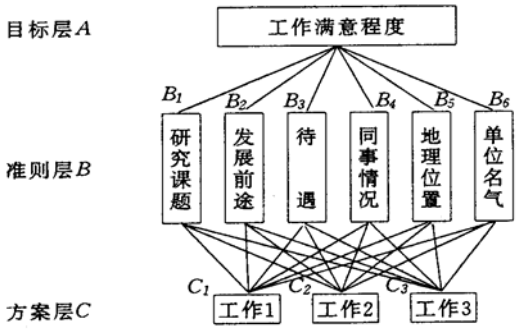


图 2　层次结构模型

准则层的判断矩阵如表 4 所示。

表 4　准则层的判断矩阵

A	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
B_1	1	1	1	4	1	1/2
B_2	1	1	2	4	1	1/2
B_3	1	1/2	1	5	3	1/2
B_4	1/4	1/4	1/5	1	1/3	1/3
B_5	1	1	1/3	3	1	1
B_6	2	2	2	3	3	1

方案层的判断矩阵如表 5 所示。

表 5　方案层的判断矩阵

B_1	C_1	C_2	C_3	B_2	C_1	C_2	C_3	B_3	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/4	1/2	C_1	1	1/4	1/5	C_1	1	3	1/3
C_2	4	1	3	C_2	4	1	1/2	C_2	1/3	1	1/7
C_3	2	1/3	1	C_3	5	2	1	C_3	3	1	1
B_4	C_1	C_2	C_3	B_5	C_1	C_2	C_3	B_6	C_1	C_2	C_3
C_1	1	1/3	5	C_1	1	1	7	C_1	1	7	9
C_2	3	1	7	C_2	1	1	7	C_2	1/7	1	1
C_3	1/5	1/7	1	C_3	1/7	1/7	1	C_3	1/9	1	1

层次总排序的结果如表 6 所示。

表 6　层次总排序

准则		研究课题	发展前途	待遇	同事情况	地理位置	单位名气	总排序权值
准则层权值		0.1507	0.1792	0.1886	0.0472	0.1464	0.2879	
方案层单排序权值	工作 1	0.1365	0.0974	0.2426	0.2790	0.4667	0.7986	0.3952
	工作 2	0.6250	0.3331	0.0879	0.6491	0.4667	0.1049	0.2996
	工作 3	0.2385	0.5695	0.6694	0.0719	0.0667	0.0965	0.3052

根据层次总排序权值，该生最满意的工作为工作 1。

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
fid=fopen('txt3.txt','r');
n1=6;n2=3;
a=[];
for i=1:n1
   tmp=str2num(fgetl(fid));
   a=[a;tmp]; %读准则层判断矩阵
end
for i=1:n1
    str1=char(['b',int2str(i),'=[];']);
    str2=char(['b',int2str(i),'=[b',int2str(i),';tmp];']);
    eval(str1);
    for j=1:n2
        tmp=str2num(fgetl(fid));
        eval(str2); %读方案层的判断矩阵
    end
```

```
end
ri=[0,0,0.58,0.90,1.12,1.24,1.32,1.41,1.45]; %一致性指标
[x,y]=eig(a);
lamda=max(diag(y));
num=find(diag(y)==lamda);
w0=x(:,num)/sum(x(:,num));
cr0=(lamda-n1)/(n1-1)/ri(n1)
for i=1:n1
    [x,y]=eig(eval(char(['b',int2str(i)])));
    lamda=max(diag(y));
    num=find(diag(y)==lamda);
    w1(:,i)=x(:,num)/sum(x(:,num));
    cr1(i)=(lamda-n2)/(n2-1)/ri(n2);
end
cr1, ts=w1*w0, cr=cr1*w0
```

纯文本文件txt3.txt中的数据格式如下：

```
1    1    1    4    1    1/2
1    1    2    4    1    1/2
1    1/2  1    5    3    1/2
1/4  1/4  1/5  1    1/3  1/3
1    1    1/3  3    1    1
2    2    2    3    3    1
1    1/4  1/2
4    1    3
2    1/3  1
1    1/4  1/5
4    1    1/2
5    2    1
1    3    1/3
1/3  1    1/7
3    7    1
1    1/3  5
3    1    7
1/5  1/7  1
1    1    7
1    1    7
1/7  1/7  1
1    7    9
1/7  1    1
1/9  1    1
```

习 题 八

1．若发现一成对比较判断矩阵 A 的非一致性较为严重，应如何寻找引起非一致性的元素？例如，设已构造了成对比较判断矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & 3 \\ 5 & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

（1）对 A 作一致性检验。

（2）如 A 的非一致性较严重，应如何作修正。

2. 你已经去过几家主要的摩托车商店，基本确定将从三种车型中选购一种，你选择的标准主要有：价格、耗油量大小、舒适程度和外观美观情况。经反复思考比较，构造了它们之间的成对比较判断矩阵。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 8 \\ 1/3 & 1 & 5 & 5 \\ 1/7 & 1/5 & 1 & 3 \\ 1/8 & 1/5 & 1/3 & 1 \end{bmatrix}$$

三种车型（记为 a,b,c ）关于价格、耗油量、舒适程度和外表美观情况的成对比较判断矩阵为

（价格）

	a	b	c
a	1	2	3
b	1/2	1	2
c	1/3	1/2	1

（耗油量）

	a	b	c
a	1	1/5	1/2
b	5	1	7
c	2	1/7	1

（舒适程度）

	a	b	c
a	1	3	5
b	1/3	1	4
c	1/5	1/4	1

（外表）

	a	b	c
a	1	1/5	3
b	5	1	7
c	1/3	1/7	1

（1）根据上述矩阵可以看出四项标准在你心目中的比重是不同的，请按由重到轻顺序将它们排出。

（2）哪辆车最便宜、哪辆车最省油、哪辆车最舒适、哪辆车最漂亮？

（3）用层次分析法确定你对这三种车型的喜欢程度（用百分比表示）。

第九章　插值与拟合

插值：求过已知有限个数据点的近似函数。

拟合：已知有限个数据点，求近似函数，不要求过已知数据点，只要求在某种意义下它在这些点上的总偏差最小。

插值和拟合都是要根据一组数据构造一个函数作为近似，由于近似的要求不同，二者的数学方法上是完全不同的。而面对一个实际问题，究竟应该用插值还是拟合，有时容易确定，有时则并不明显。

§1 插值方法

下面介绍几种基本的、常用的插值：拉格朗日多项式插值、牛顿插值、分段线性插值、Hermite 插值和三次样条插值。

1.1　拉格朗日多项式插值

1.1.1　插值多项式

用多项式作为研究插值的工具，称为代数插值。其基本问题是：已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 $n+1$ 个不同点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 处的函数值 $y_i=f(x_i)\ (i=0,1,\cdots,n)$，求一个至多 n 次多项式

$$\varphi_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n \tag{1}$$

使其在给定点处与 $f(x)$ 同值，即满足插值条件

$$\varphi_n(x_i)=f(x_i)=y_i\quad (i=0,1,\cdots,n) \tag{2}$$

$\varphi_n(x)$ 称为插值多项式，$x_i(i=0,1,\cdots,n)$ 称为插值节点，简称节点，$[a,b]$ 称为插值区间。从几何上看，n 次多项式插值就是过 $n+1$ 个点 $(x_i,f(x_i))\ (i=0,1,\cdots,n)$，作一条多项式曲线 $y=\varphi_n(x)$ 近似曲线 $y=f(x)$。

n 次多项式（1）有 $n+1$ 个待定系数，由插值条件（2）恰好给出 $n+1$ 个方程

$$\begin{cases} a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+\cdots+a_nx_0^n=y_0 \\ a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\cdots+a_nx_n^n=y_n \end{cases} \tag{3}$$

记此方程组的系数矩阵为 A，则

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

是范德蒙特(Vandermonde)行列式。当 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 互不相同时，此行列式值不为零。因此方程组（3）有唯一解。这表明，只要 $n+1$ 个节点互不相同，满足插值要求（2）的插值多项式（1）是唯一的。

插值多项式与被插函数之间的差

$$R_n(x)=f(x)-\varphi_n(x)$$

称为截断误差，又称为插值余项。当 $f(x)$ 充分光滑时，

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x),\ \xi\in(a,b)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=\prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$。

1.1.2　拉格朗日插值多项式

实际上比较方便的作法不是解方程（3）求待定系数，而是先构造一组基函数

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\quad,\qquad(i=0,1,\cdots,n)$$

$l_i(x)$ 是 n 次多项式，满足

$$l_i(x_j)=\begin{cases}0 & j\neq i\\ 1 & j=i\end{cases}$$

令

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i l_i(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)\qquad(4)$$

上式称为 n 次 Lagrange 插值多项式，由方程（3）解的唯一性，$n+1$ 个节点的 n 次 Lagrange 插值多项式存在唯一。

1.1.3　用 Matlab 作 Lagrange 插值

Matlab 中没有现成的 Lagrange 插值函数，必须编写一个 M 文件实现 Lagrange 插值。

设 n 个节点数据以数组 $x0, y0$ 输入（注意 Matlat 的数组下标从 1 开始），m 个插值点以数组 x 输入，输出数组 y 为 m 个插值。编写一个名为 lagrange.m 的 M 文件：

```
function y=lagrange(x0,y0,x);
n=length(x0);m=length(x);
for i=1:m
   z=x(i);
   s=0.0;
   for k=1:n
      p=1.0;
      for j=1:n
         if j~=k
            p=p*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
         end
      end
      s=p*y0(k)+s;
   end
   y(i)=s;
end
```

1.2　牛顿（Newton）插值

在导出 Newton 公式前，先介绍公式表示中所需要用到的差商、差分的概念及性质。

1.2.1 差商

定义　设有函数 $f(x), x_0, x_1, x_2, \cdots$ 为一系列互不相等的点，称 $\dfrac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}(i \neq j)$ 为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j 一阶差商（也称均差）记为 $f[x_i, x_j]$，即

$$f[x_i, x_j]=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$$

称一阶差商的差商

$$\frac{f[x_i, x_j]-f[x_j, x_k]}{x_i-x_k}$$

为 $f(x)$ 关于点 x_i, x_j, x_k 的二阶差商，记为 $f[x_i, x_j, x_k]$。一般地，称

$$\frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]-f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0-x_k}$$

为 $f(x)$ 关于点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$ 的 k 阶差商，记为

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k]=\frac{f[x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}]-f[x_1, x_2, \cdots, x_k]}{x_0-x_k}$$

容易证明，差商具有下述性质：

$$f[x_i, x_j]=f[x_j, x_i]$$

$$f[x_i, x_j, x_k]=f[x_i, x_k, x_j]=f[x_j, x_i, x_k]$$

1.2.2　Newton 插值公式

线性插值公式可表成

$$\varphi_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]$$

称为一次 Newton 插值多项式。一般地，由各阶差商的定义，依次可得

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x, x_0]$$

$$f[x, x_0]=f[x_0, x_1]+(x-x_1)f[x, x_0, x_1]$$

$$f[x, x_0, x_1]=f[x_0, x_1, x_2]+(x-x_2)f[x, x_0, x_1, x_2]$$

$$\cdots\cdots$$

$$f[x, x_0, \cdots, x_{n-1}]=f[x_0, x_1, \cdots, x_n]+(x-x_n)f[x, x_0, \cdots, x_n]$$

将以上各式分别乘以 $1, (x-x_0), (x-x_0)(x-x_1), \cdots, (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$，然后相加并消去两边相等的部分，即得

$$\begin{aligned} f(x)=&f(x_0)+(x-x_0)f[x_0, x_1]+\cdots \\ &+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0, x_1, \cdots, x_n] \\ &+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x, x_0, x_1, \cdots, x_n] \end{aligned}$$

记

$$N_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)f[x_0,x_1]+\cdots$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$R_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$=\omega_{n+1}(x)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

显然，$N_n(x)$ 是至多 n 次的多项式，且满足插值条件，因而它是 $f(x)$ 的 n 次插值多项式。这种形式的插值多项式称为 Newton 插值多项式。$R_n(x)$ 称为 Newton 插值余项。

Newton 插值的优点是：每增加一个节点，插值多项式只增加一项，即

$$N_{n+1}(x)=N_n(x)+(x-x_0)\cdots(x-x_n)f[x_0,x_1,\cdots,x_{n+1}]$$

因而便于递推运算。而且 Newton 插值的计算量小于 Lagrange 插值。

由插值多项式的唯一性可知，Newton 插值余项与 Lagrange 余项也是相等的，即

$$R_n(x)=\omega_{n+1}(x)f[x,x_0,x_1,\cdots,x_n]$$
$$=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)\qquad \xi\in(a,b)$$

由此可得差商与导数的关系

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中 $\xi\in(\alpha,\beta),\alpha=\min\limits_{0\le i\le n}\{x_i\},\beta=\max\limits_{0\le i\le n}\{x_i\}$。

1.2.3　差分

当节点等距时，即相邻两个节点之差（称为步长）为常数，Newton 插值公式的形式会更简单。此时关于节点间函数的平均变化率（差商）可用函数值之差（差分）来表示。

定义　设有等距节点 $x_k=x_0+kh(k=0,1,\cdots,n)$，步长 h 为常数，$f_k=f(x_k)$。称相邻两个节点 x_k,x_{k+1} 处的函数值的增量 $f_{k+1}-f_k(k=0,1,\cdots,n-1)$ 为函数 $f(x)$ 在点 x_k 处以 h 为步长的一阶差分，记为 Δf_k，即

$$\Delta f_k=f_{k+1}-f_k\qquad(k=0,1,\cdots,n)$$

类似地，定义差分的差分为高阶差分。如二阶差分为

$$\Delta^2 f_k=\Delta f_{k+1}-\Delta f_k\qquad(k=0,1,\cdots,n-2)$$

一般地，m 阶差分为

$$\Delta^m f_k=\Delta^{m-1}f_{k+1}-\Delta^{m-1}f_k\qquad(k=2,3,\cdots),$$

上面定义的各阶差分又称为向前差分。常用的差分还有两种：

$$\nabla f_k=f_k-f_{k-1}$$

称为 $f(x)$ 在 x_k 处以 h 为步长的向后差分；

$$\delta f_k=f\left(x_k+\frac{h}{2}\right)-f\left(x_k-\frac{h}{2}\right)$$

称为 $f(x)$ 在 x_k 处以 h 为步长的中心差分。一般地，m 阶向后差分与 m 阶中心差分公式为

$$\nabla^m f_k = \nabla^{m-1} f_k - \nabla^{m-1} f_{k-1}$$
$$\delta^m f_k = \delta^{m-1} f_{k+\frac{1}{2}} - \delta^{m-1} f_{k-\frac{1}{2}}$$

差分具有以下性质：

（i）各阶差分均可表成函数值的线性组合，例如

$$\Delta^m f_k = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} f_{k+m-j}$$
$$\nabla^m f_k = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} f_{k-j}$$

（ii）各种差分之间可以互化。向后差分与中心差分化成向前差分的公式如下：

$$\nabla^m f_k = \Delta^m f_{k-m}$$
$$\delta^m f_k = \Delta^m f_{k-\frac{m}{2}}$$

1.2.4　等距节点插值公式

如果插值节点是等距的，则插值公式可用差分表示。设已知节点 $x_k = x_0 + kh \ (k = 0,1,2,\cdots,n)$，则有

$$\begin{aligned} N_n(x) &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) \\ &\quad + \cdots + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \\ &= f_0 + \frac{\Delta f_0}{h}(x - x_0) + \cdots + \frac{\Delta^n f_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

若令 $x = x_0 + th$，则上式又可变形为

$$N_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \cdots + \frac{t(t-1)\cdots(t-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$$

上式称为 Newton 向前插值公式。

1.3　分段线性插值

1.3.1　插值多项式的振荡

用 Lagrange 插值多项式 $L_n(x)$ 近似 $f(x)(a \le x \le b)$，虽然随着节点个数的增加，$L_n(x)$ 的次数 n 变大，多数情况下误差 $|R_n(x)|$ 会变小。但是 n 增大时，$L_n(x)$ 的光滑性变坏，有时会出现很大的振荡。理论上，当 $n \to \infty$，在 $[a,b]$ 内并不能保证 $L_n(x)$ 处处收敛于 $f(x)$。Runge 给出了一个有名的例子：

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in [-5,5]$$

对于较大的 $|x|$，随着 n 的增大，$L_n(x)$ 振荡越来越大，事实上可以证明，仅当 $|x| \le 3.63$ 时，才有 $\lim_{n\to\infty} L_n(x) = f(x)$，而在此区间外，$L_n(x)$ 是发散的。

高次插值多项式的这些缺陷，促使人们转而寻求简单的低次多项式插值。

1.3.2　分段线性插值

简单地说，将每两个相邻的节点用直线连起来，如此形成的一条折线就是分段线性插值函数，记作 $I_n(x)$，它满足 $I_n(x_i) = y_i$，且 $I_n(x)$ 在每个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上是线性

函数$(i=0,1,\cdots,n)$。

$I_n(x)$可以表示为

$$I_n(x)=\sum_{i=0}^{n}y_i l_i(x)$$

$$l_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}, & x\in[x_{i-1},x_i]\ (i=0\text{时舍去})\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}, & x\in[x_i,x_{i+1}]\ (i=n\text{时舍去})\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$I_n(x)$有良好的收敛性，即对于$x\in[a,b]$有，

$\lim\limits_{n\to\infty}I_n(x)=f(x)$。

用$I_n(x)$计算x点的插值时，只用到x左右的两个节点，计算量与节点个数n无关。但n越大，分段越多，插值误差越小。实际上用函数表作插值计算时，分段线性插值就足够了，如数学、物理中用的特殊函数表，数理统计中用的概率分布表等。

1.3.3　用 Matlab 实现分段线性插值

用 Matlab 实现分段线性插值不需要编制函数程序，Matlab 中有现成的一维插值函数 interp1。

y=interp1(x0,y0,x,'method')

method 指定插值的方法，默认为线性插值。其值可为：

'nearest'　最近项插值

'linear'　线性插值

'spline'　逐段 3 次样条插值

'cubic'　保凹凸性 3 次插值。

所有的插值方法要求 x0 是单调的。

当 x0 为等距时可以用快速插值法，使用快速插值法的格式为'*nearest'、'*linear'、'*spline'、'*cubic'。

1.4　埃尔米特(Hermite)插值

1.4.1　Hermite 插值多项式

如果对插值函数，不仅要求它在节点处与函数同值，而且要求它与函数有相同的一阶、二阶甚至更高阶的导数值，这就是 Hermite 插值问题。本节主要讨论在节点处插值函数与函数的值及一阶导数值均相等的 Hermite 插值。

设已知函数$y=f(x)$在$n+1$个互异节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$上的函数值$y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$和导数值$y'_i=f'(x_i)$ $(i=0,1,\cdots,n)$，要求一个至多$2n+1$次的多项式$H(x)$，使得

$$H(x_i)=y_i \qquad H'(x_i)=y'_i \quad (i=0,1,\cdots,n)$$

满足上述条件的多项式$H(x)$称为 Hermite 插值多项式。

Hermite 插值多项式为

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n}h_i[(x_i-x)(2a_iy_i-y'_i)+y_i]$$

其中 $h_i=\prod_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right)^2$，$a_i=\sum_{\substack{j=0\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_j}$。

1.4.2　用 Matlab 实现 Hermite 插值

Matlab 中没有现成的 Hermite 插值函数，必须编写一个 M 文件实现插值。

设 n 个节点的数据以数组 $x0$（已知点的横坐标），$y0$（函数值），$y1$（导数值）输入（注意 Matlat 的数组下标从 1 开始），m 个插值点以数组 x 输入，输出数组 y 为 m 个插值。编写一个名为 hermite.m 的 M 文件：

```
function y=hermite(x0,y0,y1,x);
n=length(x0);m=length(x);
for k=1:m
   yy=0.0;
   for i=1:n
      h=1.0;
      a=0.0;
      for j=1:n
         if j~=i
            h=h*((x(k)-x0(j))/(x0(i)-x0(j)))^2;
            a=1/(x0(i)-x0(j))+a;
         end
      end
      yy=yy+h*((x0(i)-x(k))*(2*a*y0(i)-y1(i))+y0(i));
   end
   y(k)=yy;
end
```

1.5　样条插值

许多工程技术中提出的计算问题对插值函数的光滑性有较高要求，如飞机的机翼外形，内燃机的进、排气门的凸轮曲线，都要求曲线具有较高的光滑程度，不仅要连续，而且要有连续的曲率，这就导致了样条插值的产生。

1.5.1　样条函数的概念

所谓样条（Spline）本来是工程设计中使用的一种绘图工具，它是富有弹性的细木条或细金属条。绘图员利用它把一些已知点连接成一条光滑曲线（称为样条曲线），并使连接点处有连续的曲率。

数学上将具有一定光滑性的分段多项式称为样条函数。具体地说，给定区间 $[a,b]$ 的一个分划

$$\Delta:\quad a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

如果函数 $s(x)$ 满足：

（i）在每个小区间 $[x_i,x_{i-1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ 上 $s(x)$ 是 k 次多项式；

（ii）$s(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有 $k-1$ 阶连续导数。

则称 $s(x)$ 为关于分划 Δ 的 k 次样条函数，其图形称为 k 次样条曲线。$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 称为样条节点，$x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$ 称为内节点，x_0,x_n 称为边界点，这类样条函数的全体记做

$S_P(\Delta,k)$，称为k次样条函数空间。

显然，折线是一次样条曲线。

若$s(x)\in S_P(\Delta,k)$，则$s(x)$是关于分划Δ的k次多项式样条函数。k次多项式样条函数的一般形式为

$$s_k(x)=\sum_{i=0}^{k}\frac{\alpha_i x^i}{i!}+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\beta_j}{k!}(x-x_j)_+^k,$$

其中$\alpha_i(i=0,1,\cdots,k)$和$\beta_j(j=1,2,\cdots,n-1)$均为任意常数，而

$$(x-x_j)_+^k=\begin{cases}(x-x_j)^k, x\geq x_j\\ 0, \quad x<x_j\end{cases}，（j=1,2,\cdots,n-1）$$

在实际中最常用的是$k=2$和3的情况，即为二次样条函数和三次样条函数。

二次样条函数：对于$[a,b]$上的分划$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$s_2(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\frac{\alpha_2}{2!}x^2+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\beta_j}{2!}(x-x_j)_+^2\in S_P(\Delta,2),\tag{5}$$

其中$(x-x_j)_+^2=\begin{cases}(x-x_j)^2, x\geq x_j\\ 0, \quad x<x_j\end{cases}$，（$j=1,2,\cdots,n-1$）。

三次样条函数：对于$[a,b]$上的分划$\Delta: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，则

$$s_3(x)=\alpha_0+\alpha_1 x+\frac{\alpha_2}{2!}x^2+\frac{\alpha_3}{3!}x^3+\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\beta_j}{3!}(x-x_j)_+^3\in S_P(\Delta,3),\tag{6}$$

其中$(x-x_j)_+^3=\begin{cases}(x-x_j)^3, x\geq x_j\\ 0, \quad x<x_j\end{cases}$，（$j=1,2,\cdots,n-1$）。

利用样条函数进行插值，即取插值函数为样条函数，称为样条插值。例如分段线性插值是一次样条插值。下面我们介绍二次、三次样条插值。

1.5.2　二次样条函数插值

首先，我们注意到$s_2(x)\in S_P(\Delta,2)$中含有$n+2$个特定常数，故应需要$n+2$个插值条件，因此，二次样条插值问题可分为两类：

问题（1）：

已知插值节点x_i和相应的函数值$y_i(i=0,1,\cdots,n)$以及端点x_0（或x_n）处的导数值y'_0（或y'_n），求$s_2(x)\in S_P(\Delta,2)$使得

$$\begin{cases}s_2(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)\\ s'_2(x_0)=y_0(\text{或}s'_n(x_n)=y_n)\end{cases}\tag{7}$$

问题（2）：

已知插值节点x_i和相应的导数值$y'_i(i=0,1,2,\cdots,n)$以及端点x_0（或x_n）处的函数值y_0（或y_n），求$s_2(x)\in S_P(\Delta,2)$使得

$$\begin{cases}s'_2(x_i)=y'_i(i=0,1,2,\cdots,n)\\ s_2(x_0)=y_0(\text{或}s_2(x_n)=y_n)\end{cases}\tag{8}$$

事实上，可以证明这两类插值问题都是唯一可解的。

对于问题（1），由条件（7）

$$\begin{cases} s_2(x_0)=\alpha_0+\alpha_1x_0+\dfrac{1}{2}\alpha_2x_0^2=y_0 \\ s_2(x_1)=\alpha_0+\alpha_1x_1+\dfrac{1}{2}\alpha_2x_1^2=y_1 \\ s_2(x_j)=\alpha_0+\alpha_1x_j+\dfrac{1}{2}\alpha_2x_j^2+\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{j-1}\beta_i(x_j-x_i)^2=y_j \quad (j=2,3,\cdots,n) \\ s'_2(x_0)=\alpha_1+\alpha_2x_0=y'_0 \end{cases}$$

引入记号 $X=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})^T$ 为未知向量，$C=(y_0,y_1,\cdots,y_n,y'_0)$ 为已知向量。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \dfrac{1}{2}x_0^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & \dfrac{1}{2}x_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_2 & \dfrac{1}{2}x_2^2 & \dfrac{1}{2}(x_2-x_1)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dfrac{1}{2}x_n^2 & \dfrac{1}{2}(x_n-x_1)^2 & \cdots & \dfrac{1}{2}(x_n-x_{n-1})^2 \\ 0 & 1 & x_0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是，问题转化为求方程组 $AX=C$ 的解 $X=(\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\cdots,\beta_{n-1})^T$ 的问题，即可得到二次样条函数 $s_2(x)$ 的表达式。

对于问题（2）的情况类似。

1.5.3　三次样条函数插值

由于 $s_3(x)\in S_P(\Delta,3)$ 中含有 $n+3$ 个待定系数，故应需要 $n+3$ 个插值条件，已知插值节点 x_i 和相应的函数值 $f(x_i)=y_i(i=0,1,2,\cdots,n)$，这里提供了 $n+1$ 个条件，还需要 2 个边界条件。

常用的三次样条函数的边界条件有 3 种类型：

（i）$s'_3(a)=y'_0, s'_3(b)=y'_n$。由这种边界条件建立的样条插值函数称为 $f(x)$ 的完备三次样条插值函数。

特别地，$y'_0=y'_n=0$ 时，样条曲线在端点处呈水平状态。

如果 $f'(x)$ 不知道，我们可以要求 $s'_3(x)$ 与 $f'(x)$ 在端点处近似相等。这时以 x_0,x_1,x_2,x_3 为节点作一个三次 Newton 插值多项式 $N_a(x)$，以 $x_n,x_{n-1},x_{n-2},x_{n-3}$ 作一个三次 Newton 插值多项式 $N_b(x)$，要求

$$s'(a)=N'_a(a), s'(b)=N'_b(b)$$

由这种边界条件建立的三次样条称为 $f(x)$ 的 Lagrange 三次样条插值函数。

（ii）$s''_3(a)=y''_0, s''_3(b)=y''_3$。特别地 $y''_n=y''_n=0$ 时，称为自然边界条件。

（iii）$s'_3(a+0)=s'_3(b-0), s''_3(a+0)=s''_3(b-0)$，(这里要求$s_3(a+0)=s_3(b-0)$)此条件称为周期条件。

1.5.4 三次样条插值在 Matlab 中的实现

在 Matlab 中数据点称之为断点。如果三次样条插值没有边界条件，最常用的方法，就是采用非扭结（not-a-knot）条件。这个条件强迫第 1 个和第 2 个三次多项式的三阶导数相等。对最后一个和倒数第 2 个三次多项式也做同样地处理。

Matlab 中三次样条插值也有现成的函数：

y=interp1(x0,y0,x,'spline')；

y=spline(x0,y0,x)；

pp=csape(x0,y0,conds)，y=ppval(pp,x)。

其中 x0,y0 是已知数据点，x 是插值点，y 是插值点的函数值。

对于三次样条插值，我们提倡使用函数 csape，csape 的返回值是 pp 形式，要求插值点的函数值，必须调用函数 ppval。

pp=csape(x0,y0)：使用默认的边界条件，即 Lagrange 边界条件。

pp=csape(x0,y0,conds)中的 conds 指定插值的边界条件，其值可为：

'complete'　　边界为一阶导数，即默认的边界条件

'not-a-knot'　非扭结条件

'periodic'　　周期条件

'second'　　边界为二阶导数，二阶导数的值[0, 0]。

'variational'　设置边界的二阶导数值为[0,0]。

对于一些特殊的边界条件，可以通过 conds 的一个1×2矩阵来表示，conds 元素的取值为 1，2。此时，使用命令

pp=csape(x0,y0_ext,conds)

其中 y0_ext=[left, y0, right]，这里 left 表示左边界的取值，right 表示右边界的取值。

conds(i)=j 的含义是给定端点 i 的 j 阶导数，即 conds 的第一个元素表示左边界的条件，第二个元素表示右边界的条件，conds=[2,1]表示左边界是二阶导数，右边界是一阶导数，对应的值由 left 和 right 给出。

详细情况请使用帮助 help csape。

例 1　机床加工

待加工零件的外形根据工艺要求由一组数据(x,y)给出（在平面情况下），用程控铣床加工时每一刀只能沿 x 方向和 y 方向走非常小的一步，这就需要从已知数据得到加工所要求的步长很小的(x,y)坐标。

表 1 中给出的 x,y 数据位于机翼断面的下轮廓线上，假设需要得到 x 坐标每改变 0.1 时的 y 坐标。试完成加工所需数据，画出曲线，并求出 $x=0$ 处的曲线斜率和 $13\le x\le 15$ 范围内 y 的最小值。

表 1

x	0	3	5	7	9	11	12	13	14	15
y	0	1.2	1.7	2.0	2.1	2.0	1.8	1.2	1.0	1.6

要求用 Lagrange、分段线性和三次样条三种插值方法计算。

解　编写以下程序：

```
clc,clear
x0=[0   3   5   7   9   11   12   13   14  15];
```

```
y0=[0  1.2  1.7  2.0  2.1  2.0  1.8  1.2   1.0  1.6];
x=0:0.1:15;
y1=lagrange(x0,y0,x);  %调用前面编写的Lagrange插值函数
y2=interp1(x0,y0,x);
y3=interp1(x0,y0,x,'spline');
pp1=csape(x0,y0); y4=ppval(pp1,x);
pp2=csape(x0,y0,'second'); y5=ppval(pp2,x);
fprintf('比较一下不同插值方法和边界条件的结果:\n')
fprintf('x    y1     y2     y3     y4    y5\n')
xianshi=[x',y1',y2',y3',y4',y5'];
fprintf('%f\t%f\t%f\t%f\t%f\t%f\n',xianshi')
subplot(2,2,1), plot(x0,y0,'+',x,y1), title('Lagrange')
subplot(2,2,2), plot(x0,y0,'+',x,y2), title('Piecewise linear')
subplot(2,2,3), plot(x0,y0,'+',x,y3), title('Spline1')
subplot(2,2,4), plot(x0,y0,'+',x,y4), title('Spline2')
dyx0=ppval(fnder(pp1),x0(1))  %求x=0处的导数
ytemp=y3(131:151);
index=find(ytemp==min(ytemp));
xymin=[x(130+index),ytemp(index)]
```

计算结果略。

可以看出，拉格朗日插值的结果根本不能应用，分段线性插值的光滑性较差（特别是在 $x=14$ 附近弯曲处），建议选用三次样条插值的结果。

1.6 B 样条函数插值方法

1.6.1 磨光函数

实际中的许多问题，往往是既要求近似函数（曲线或曲面）有足够的光滑性，又要求与实际函数有相同的凹凸性，一般插值函数和样条函数都不具有这种性质。如果对于一个特殊函数进行磨光处理生成磨光函数（多项式），则用磨光函数构造出样条函数作为插值函数，既有足够的光滑性，而且也具有较好的保凹凸性，因此磨光函数在一维插值（曲线）和二维插值（曲面）问题中有着广泛的应用。

由积分理论可知，对于可积函数通过积分会提高函数的光滑度，因此，我们可以利用积分方法对函数进行磨光处理。

定义　若 $f(x)$ 为可积函数，对于 $h>0$，则称积分

$$f_{1,h}(x)=\frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f(t)dt$$

为 $f(x)$ 的一次磨光函数，h 称为磨光宽度。

同样的，可以定义 $f(x)$ 的 k 次磨光函数为

$$f_{k,h}(x)=\frac{1}{h}\int_{x-\frac{h}{2}}^{x+\frac{h}{2}} f_{k-1,h}(t)dt \quad （k>1）$$

事实上，磨光函数 $f_{k,h}(x)$ 比 $f(x)$ 的光滑程度要高，且当磨光宽度 h 很少时 $f_{k,h}(x)$ 很接近于 $f(x)$。

1.6.2 等距 B 样条函数

对于任意的函数 $f(x)$，定义其步长为 1 的中心差分算子 δ 如下：

$$\delta f(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x-\frac{1}{2})$$

在此取 $f(x)=x_+^0$，则

$$\delta x_+^0=\left(x+\frac{1}{2}\right)_+^0-\left(x-\frac{1}{2}\right)_+^0$$

是一个单位方波函数（如图 1），记 $\Omega_0(x)=\delta x_+^0$。并取 $h=1$，对 $\Omega_0(x)$ 进行一次磨光得

$$\Omega_1(x)=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}\Omega_0(t)dt=\int_{x-\frac{1}{2}}^{x+\frac{1}{2}}\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)_+^0-\left(t-\frac{1}{2}\right)_+^0\right]dt$$

$$=\int_x^{x+1}t_+^0dt-\int_{x-1}^{x}t_+^0dt=(x+1)_+-2x_++(x-1)_+$$

显然 $\Omega_1(x)$ 是连续的（如图 1）。

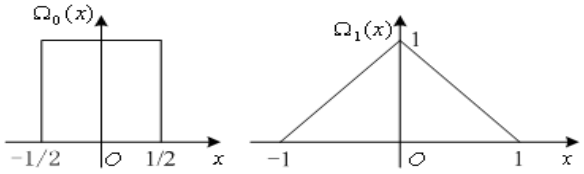


图 1　$\Omega_0(x)$ 和 $\Omega_1(x)$ 的图形

类似地可得到 k 次磨光函数为

$$\Omega_k(x)=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^j\frac{C_{k+1}^j}{k!}\left(x+\frac{k+1}{2}-j\right)_+^k$$

实际上，可以证明：$\Omega_k(x)$ 是分段 k 次多项式，且具有 $k-1$ 阶连续导数，其 k 阶导数有 $k+2$ 个间断点，记为 $x_j=j-\frac{k+1}{2}$（$j=0,1,2,\cdots,k+1$）。从而可知 $\Omega_k(x)$ 是对应于分划 $\Delta:-\infty<x_0<x_1<\cdots<x_{k+1}<+\infty$ 的 k 次多项式样条函数，称之为基本样条函数，简称为 k 次 B 样条。由于样条节点为 $x_j=j-\frac{k+1}{2}$（$j=0,1,2,\cdots,k+1$）是等距的，故 $\Omega_k(x)$ 又称为 k 次等距 B 样条函数。

对于任意函数 $f(x)$ 的 k 次磨光函数，由归纳法可以得到：

$$f_{k,h}(x)=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)f(t)dt\quad\left(x-\frac{h}{2}\le t\le x+\frac{h}{2}\right)$$

特别地，当 $f(x)=1$ 时，有 $\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_{k-1}\left(\frac{x-t}{h}\right)dt=1$，从而 $\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega_k(x)dx=1$，且当 $k\ge1$ 时有递推关系

$$\Omega_k(x)=\frac{1}{k}\left[\left(x+\frac{k+1}{2}\right)\Omega_{k-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{k-1}{2}-x\right)\Omega_{k-1}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]$$

1.6.3　一维等距 B 样条函数插值

等距 B 样条函数与通常的样条有如下的关系：

定理　设有区间$[a,b]$的均匀分划$\Delta: x_j=x_0+jh$（$j=0,1,2,\cdots,n$），$h=\dfrac{b-a}{n}$，则对任意k次样条函数$s_k(x)\in S_P(\Delta,k)$都可以表示为 B 样条函数族

$$\left\{\Omega_k\left(\frac{x-x_0}{h}-j-\frac{k+1}{2}\right)\right\}_{j=-k}^{j=n-1}$$

的线性组合。

根据定理，如果已知曲线上一组点(x_j,y_j)，其中$x_j=x_0+jh$（$h>0,\ j=0,1,2,\cdots,n$），则可以构造出一条样条磨光曲线（即为 B 样条函数族的线性组合）

$$s_k(x)=\sum_{j=-k}^{n-1}c_j\Omega_k\left(\frac{x-x_0}{h}-j\right)$$

其中c_j（$j=-k,-k+1,\cdots,n-1$）为待定常数。用它来逼近曲线，既有较好的精度，又有良好的保凸性。

实际中，最常用的是$k=3$的情况，即一般形式为

$$s_3(x)=\sum_{j=-1}^{n+1}c_j\Omega_3\left(\frac{x-x_0}{h}-j\right)$$

其中$n+3$个待定系数c_j（$j=-1,0,\cdots,n+1$）可以由插值条件确定。

对于插值条件

$$\begin{cases}s_3(x_j)=y_j\ (j=0,1,2,\cdots n)\\ s'_3(x_j)=y'_j\ (j=0,n)\end{cases}$$

有

$$\begin{cases}s'_3(x_0)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{j=-1}^{n+1}c_j\Omega'_3(-j)=y'_0\\ s_3(x_i)=\displaystyle\sum_{j=-1}^{n+1}c_j\Omega_3(i-j)=y_i,\quad i=0,1,2,\cdots,n\\ s'_3(x_n)=\dfrac{1}{h}\displaystyle\sum_{j=-1}^{n+1}c_j\Omega'_3(n-j)=y'_n\end{cases}\tag{9}$$

注意到$\Omega_3(x)$的局部非零性及其函数值：$\Omega_3(0)=\dfrac{2}{3}$，$\Omega_3(\pm1)=\dfrac{1}{6}$，当$|x|\geq2$时$\Omega_3(x)=0$；且由$\Omega'_3(x)=\Omega_2(x+\dfrac{1}{2})-\Omega_2(x-\dfrac{1}{2})$知，$\Omega'_3(0)=0$，$\Omega'_3(\pm1)=\mp\dfrac{1}{2}$，当$|x|\geq2$时$\Omega'_3(x)=0$。则（9）式的每一个方程只有三个非零系数，具体为

$$\begin{cases} -c_{-1}+c_1=2hy'_0 \\ c_{i-1}+4c_i+c_{i+1}=6y_i, \quad i=0,1,2,\cdots,n \\ -c_{n-1}+c_{n+1}=2hy'_n \end{cases} \tag{10}$$

由方程组（10）容易求解出c_j（$j=-1,0,\cdots,n+1$），即可得到三次样条函数$s_3(x)$表达式。

1.6.4　二维等距 B 样条函数插值

设有空间曲面$z=f(x,y)$（未知），如果已知二维等距节点$(x_i,y_j)=(x_0+ih,y_0+j\tau)$（$h,\tau>0$）上的值为$z_{ij}$（$i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,m$），则相应的 B 样条磨光曲面的一般形式为

$$s(x,y)=\sum_{i=-k}^{n-1}\sum_{j=-l}^{m-1}c_{ij}\Omega_k\left(\frac{x-x_0}{h}-i\right)\Omega_l\left(\frac{y-y_0}{\tau}-j\right)$$

其中c_{ij}（$i=0,1,\cdots,n;\ j=0,1,\cdots,m$）为待定常数，$k,l$可以取不同值，常用的也是$k,l=2$和$3$的情形。这是一种具有良好保凸性的光滑曲面（函数），在工程设计中是常用的，但只能使用于均匀划分或近似均匀划分的情况。

1.7 二维插值

前面讲述的都是一维插值，即节点为一维变量，插值函数是一元函数（曲线）。若节点是二维的，插值函数就是二元函数，即曲面。如在某区域测量了若干点（节点）的高程（节点值），为了画出较精确的等高线图，就要先插入更多的点（插值点），计算这些点的高程（插值）。

1.7.1　插值节点为网格节点

已知$m\times n$个节点：(x_i,y_j,z_{ij})（$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$），且$x_1<\cdots<x_m$；$y_1<\cdots<y_n$。求点$(x,y)$处的插值$z$。

Matlab 中有一些计算二维插值的程序。如

z=interp2(x0,y0,z0,x,y,'method')

其中 x0,y0 分别为m维和n维向量，表示节点，z0 为$n\times m$维矩阵，表示节点值，x,y 为一维数组，表示插值点，x 与 y 应是方向不同的向量，即一个是行向量，另一个是列向量，z 为矩阵，它的行数为y的维数，列数为x的维数，表示得到的插值，'method' 的用法同上面的一维插值。

如果是三次样条插值，可以使用命令

pp=csape({x0,y0},z0,conds,valconds)，z=fnval(pp,{x,y})

其中 x0,y0 分别为m维和n维向量，z0 为$m\times n$维矩阵，z为矩阵，它的行数为x的维数，列数为y的维数，表示得到的插值，具体使用方法同一维插值。

例2 在一丘陵地带测量高程，x和y方向每隔100米测一个点，得高程如2表，试插值一曲面，确定合适的模型，并由此找出最高点和该点的高程。

解　编写程序如下：

```
clear,clc
x=100:100:500;
y=100:100:400;
z=[636   697   624   478   450
   698   712   630   478   420
```

```
   680    674    598    412   400
   662    626    552    334   310];
pp=csape({x,y},z')
xi=100:10:500;yi=100:10:400
cz1=fnval(pp,{xi,yi})
cz2=interp2(x,y,z,xi,yi','spline')
[i,j]=find(cz1==max(max(cz1)))
x=xi(i),y=yi(j),zmax=cz1(i,j)
```

表2

y \ x	100	200	300	400	500
100	636	697	624	478	450
200	698	712	630	478	420
300	680	674	598	412	400
400	662	626	552	334	310

1.7.2　插值节点为散乱节点

已知 n 个节点：$(x_i, y_i, z_i)(i = 1,2,\cdots,n)$，求点 (x, y) 处的插值 z 。

对上述问题，Matlab 中提供了插值函数 griddata，其格式为：

ZI = GRIDDATA(X,Y,Z,XI,YI)

其中 X、Y、Z 均为 n 维向量，指明所给数据点的横坐标、纵坐标和竖坐标。向量 XI、YI 是给定的网格点的横坐标和纵坐标，返回值 ZI 为网格（XI，YI）处的函数值。XI 与 YI 应是方向不同的向量，即一个是行向量，另一个是列向量。

例 3　在某海域测得一些点（x,y）处的水深 z 由下表给出，在矩形区域（75,200）×(−50,150) 内画出海底曲面的图形。

表 3

x	129	140	103.5	88	185.5	195	105	157.5	107.5	77	81	162	162	117.5
y	7.5	141.5	23	147	22.5	137.5	85.5	-6.5	-81	3	56.5	-66.5	84	-33.5
z	4	8	6	8	6	8	8	9	9	8	8	9	4	9

解　编写程序如下：

```
x=[129  140  103.5  88  185.5  195  105  157.5  107.5  77  81  162  162  117.5];
y=[7.5  141.5  23   147  22.5  137.5  85.5  -6.5  -81   3  56.5  -66.5  84 -33.5];
z=-[4     8     6     8     6     8     8     9     9   8     8     9     4     9];
xi=75:1:200;
yi=-50:1:150;
zi=griddata(x,y,z,xi,yi','cubic')
subplot(1,2,1), plot(x,y,'*')
subplot(1,2,2), mesh(xi,yi,zi)
```

§2　曲线拟合的线性最小二乘法

2.1　线性最小二乘法

曲线拟合问题的提法是，已知一组（二维）数据，即平面上的 n 个点 (x_i, y_i)，$i = 1,2,\cdots,n$，x_i 互不相同，寻求一个函数（曲线）$y = f(x)$，使 $f(x)$ 在某种准则下与所有数据点最为接近，即曲线拟合得最好。

线性最小二乘法是解决曲线拟合最常用的方法，基本思路是，令

$$f(x)=a_1r_1(x)+a_2r_2(x)+\cdots+a_mr_m(x) \tag{11}$$

其中 $r_k(x)$ 是事先选定的一组线性无关的函数， a_k 是待定系数 $(k=1,2,\cdots,m,m<n)$ 。拟合准则是使 y_i ， $i=1,2,\cdots,n$ ，与 $f(x_i)$ 的距离 δ_i 的平方和最小，称为最小二乘准则。

2.1.1　系数 a_k 的确定

记

$$J(a_1,\cdots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-y_i]^2 \tag{12}$$

为求 $a_1,\cdots,a_m$ 使 J 达到最小，只需利用极值的必要条件 $\dfrac{\partial J}{\partial a_k}=0\ (k=1,\cdots,m)$ ，得到关于 $a_1,\cdots,a_m$ 的线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n}r_j(x_i)[\sum_{k=1}^{m}a_kr_k(x_i)-y_i]=0,\quad (j=1,\cdots,m)$$

即

$$\sum_{k=1}^{m}a_k[\sum_{i=1}^{n}r_j(x_i)r_k(x_i)]=\sum_{i=1}^{n}r_j(x_i)y_i,\quad (j=1,\cdots,m) \tag{13}$$

记

$$R=\begin{bmatrix} r_1(x_1) & \cdots & r_m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_1(x_n) & \cdots & r_m(x_n) \end{bmatrix}_{n\times m},$$

$A=[a_1,\cdots,a_m]^T$ ， $Y=(y_1,\cdots,y_n)^T$

方程组（13）可表为

$$R^TRA=R^TY \tag{14}$$

当 $\{r_1(x),\cdots,r_m(x)\}$ 线性无关时， R 列满秩， R^TR 可逆，于是方程组（14）有唯一解

$$A=(R^TR)^{-1}R^TY$$

2.1.2　函数 $r_k(x)$ 的选取

面对一组数据 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$ ，用线性最小二乘法作曲线拟合时，首要的、也是关键的一步是恰当地选取 $r_1(x),\cdots,r_m(x)$ 。如果通过机理分析，能够知道 y 与 x 之间应该有什么样的函数关系，则 $r_1(x),\cdots,r_m(x)$ 容易确定。若无法知道 y 与 x 之间的关系，通常可以将数据 $(x_i,y_i),i=1,2,\cdots,n$ 作图，直观地判断应该用什么样的曲线去作拟合。人们常用的曲线有

（i）直线　　$y=a_1x+a_2$

（ii）多项式　$y=a_1x^m+\cdots+a_mx+a_{m+1}$（一般 $m=2,3$，不宜太高）

（iii）双曲线（一支）　$y=\dfrac{a_1}{x}+a_2$

（iv）指数曲线　$y = a_1 e^{a_2 x}$

对于指数曲线，拟合前需作变量代换，化为对 a_1, a_2 的线性函数。

已知一组数据，用什么样的曲线拟合最好，可以在直观判断的基础上，选几种曲线分别拟合，然后比较，看哪条曲线的最小二乘指标 J 最小。

2.2 最小二乘法的 Matlab 实现

2.2.1　解方程组方法

在上面的记号下，

$$J(a_1,\cdots,a_m) = \| RA - Y \|^2$$

Matlab 中的线性最小二乘的标准型为

$$\min_A \left\| RA - Y \right\|_2^2,$$

命令为 $A = R \backslash Y$ 。

例 4　用最小二乘法求一个形如 $y = a + bx^2$ 的经验公式，使它与表 4 所示的数据拟合。

表 4

x	19	25	31	38	44
y	19.0	32.3	49.0	73.3	97.8

解　编写程序如下

```
x=[19    25   31    38   44]';
y=[19.0  32.3  49.0  73.3  97.8]';
r=[ones(5,1),x.^2];
ab=r\y
x0=19:0.1:44;
y0=ab(1)+ab(2)*x0.^2;
plot(x,y,'o',x0,y0,'r')
```

2.2.2　多项式拟合方法

如果取 $\{r_1(x),\cdots,r_{m+1}(x)\} = \{1, x, \cdots, x^m\}$，即用 m 次多项式拟合给定数据，Matlab 中有现成的函数

a=polyfit(x0,y0,m)

其中输入参数 x0,y0 为要拟合的数据，m 为拟合多项式的次数，输出参数 a 为拟合多项式 $y=a_m x^m+\cdots+a_1 x+a_0$ 系数 $a=[a_m, \cdots, a_1, a_0]$。

多项式在 x 处的值 y 可用下面的函数计算

y=polyval(a,x)。

例 5 某乡镇企业 1990-1996 年的生产利润如表 5。

表 5

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
利润（万元）	70	122	144	152	174	196	202

试预测 1997 年和 1998 年的利润。

解　作已知数据的的散点图，

```
x0=[1990  1991  1992  1993  1994  1995  1996];
y0=[70   122   144   152   174   196   202];
plot(x0,y0,'*')
```

发现该乡镇企业的年生产利润几乎直线上升。因此，我们可以用 $y=a_1x+a_0$ 作为拟合函数来预测该乡镇企业未来的年利润。编写程序如下：

```
x0=[1990  1991  1992  1993  1994  1995  1996];
y0=[70   122   144   152   174   196   202];
a=polyfit(x0,y0,1)
y97=polyval(a,1997)
y98=polyval(a,1998)
```

求得 $a_1=20$，$a_0=-4.0705\times10^4$，1997 年的生产利润 y97=233.4286，1998 年的生产利润 y98=253.9286。

§3 最小二乘优化

在无约束最优化问题中，有些重要的特殊情形，比如目标函数由若干个函数的平方和构成。这类函数一般可以写成：

$$F(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i^{\,2}(x)\,,x\in R^n$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n)^T$，一般假设 $m\geq n$。我们把极小化这类函数的问题：

$$\min\quad F(x)=\sum_{i=1}^{m}f_i^{\,2}(x)$$

称为最小二乘优化问题。

最小二乘优化是一类比较特殊的优化问题，在处理这类问题时，Matlab 也提供了一些强大的函数。在 Matlab 优化工具箱中，用于求解最小二乘优化问题的函数有：lsqlin、lsqcurvefit、lsqnonlin、lsqnonneg，用法介绍如下。

3.1 lsqlin 函数

求解 $\min\limits_x \dfrac{1}{2}\|Cx-d\|_2^2$

$$\text{s.t.}\quad\begin{cases}A*x\leq b\\ Aeq*x=beq\\ lb\leq x\leq ub\end{cases}$$

其中 C,A,Aeq 为矩阵，d,b,beq,lb,ub,x 为向量。

Matlab 中的函数为：

```
x=lsqlin(C,d,A,b,Aeq,beq,lb,ub,x0)
```

例 6　用 lsqlin 命令求解例 4。

解　编写程序如下：

```
x=[19      25      31      38      44]';
y=[19.0    32.3    49.0    73.3    97.8]';
r=[ones(5,1),x.^2];
ab=lsqlin(r,y)
x0=19:0.1:44;
y0=ab(1)+ab(2)*x0.^2;
plot(x,y,'o',x0,y0,'r')
```

3.2 lsqcurvefit 函数

给定输入输出数列 $xdata, ydata$，求参量 x，使得

$$\min_x \frac{1}{2}\left\|F(x,xdata)-ydata\right\|_2^2=\frac{1}{2}\sum_i\left(F(x,xdata_i)-ydata_i\right)^2$$

Matlab 中的函数为

X=LSQCURVEFIT(FUN,X0,XDATA,YDATA,LB,UB,OPTIONS)

其中 FUN 是定义函数 $F(x,xdata)$ 的 M 文件。

例 7 用下面表 6 中的数据拟合函数 $c(t)=a+be^{-0.02kt}$ 中的参数 a,b,k。

表 6

t_j	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
c_j	4.54	4.99	5.35	5.65	5.90	6.10	6.26	6.39	6.50	6.59

解 该问题即解最优化问题：

$$\min F(a,b,k)=\sum_{i=1}^{10}(a+be^{-0.02kt_j}-c_j)^2$$

（1）编写 M 文件 fun1.m 定义函数 $F(x,tdata)$：

```
function f=fun1(x,tdata);
f=x(1)+x(2)*exp(-0.02*x(3)*tdata);  %其中 x(1)=a，x(2)=b，x(3)=k
```

（2）调用函数 lsqcurvefit，编写程序如下：

```
td=100:100:1000;
cd=[4.54  4.99  5.35  5.65  5.90  6.10  6.26  6.39  6.50  6.59];
x0=[0.2 0.05 0.05];
x=lsqcurvefit(@fun1,x0,td,cd)
```

3.3 lsqnonlin 函数

已知函数向量 $F(x)=[f_1(x),\ \cdots,\ f_k(x)]^T$，求 x 使得

$$\min_x \frac{1}{2}\left\|F(x)\right\|_2^2$$

Matlab 中的函数为

X=LSQNONLIN(FUN,X0,LB,UB,OPTIONS)

其中 FUN 是定义向量函数 $F(x)$ 的 M 文件。

例 8 用 lsqnonlin 函数求解例 7。

解 这里

$$F(x)=F(x,t)=\left[a+be^{-0.02kt_1}-c_1,\ \cdots,\ a+be^{-0.02kt_{10}}-c_{10}\right]^T$$

$$x=[a,\ b,\ k]$$

（1）编写 M 文件 fun2.m 如下：

```
function f=fun2(x);
td=100:100:1000;
cd=[4.54  4.99  5.35  5.65  5.90  6.10  6.26  6.39  6.50  6.59];
f=x(1)+x(2)*exp(-0.02*x(3)*td)-cd;
```

（2）调用函数 lsqnonlin，编写程序如下：

```
x0=[0.2 0.05 0.05];  %初始值是任意取的
x=lsqnonlin(@fun2,x0)
```

3.4 lsqnonneg 函数

求解非负的 x，使得满足 $\min\limits_x \frac{1}{2}\|Cx-d\|_2^2$，

Matlab 中的函数为

```
X = LSQNONNEG(C,d,X0,OPTIONS)
```

例 9　已知 $C=\begin{bmatrix}0.0372 & 0.2869\\ 0.6861 & 0.7071\\ 0.6233 & 0.6245\\ 0.6344 & 0.6170\end{bmatrix}$，$d=\begin{bmatrix}0.8587\\ 0.1781\\ 0.0747\\ 0.8405\end{bmatrix}$，求 $x(x\ge 0)$ 满足

$$\min_x \frac{1}{2}\|Cx-d\|_2^2$$

最小。

解　编写程序如下：

```
c=[0.0372 0.2869;0.6861 0.7071;0.6233 0.6245;0.6344 0.6170];
d=[0.8587;0.1781;0.0747;0.8405];
x=lsqnonneg(c,d)
```

3.5　曲线拟合的用户图形界面求法

Matlab 工具箱提供了命令 cftool，该命令给出了一维数据拟合的交互式环境。具体执行步骤如下：

（1）把数据导入到工作空间；

（2）运行 cftool，打开用户图形界面窗口；

（3）对数据进行预处理；

（4）选择适当的模型进行拟合；

（5）生成一些相关的统计量，并进行预测。

可以通过帮助（运行 doc cftool）熟悉该命令的使用细节。

§4 曲线拟合与函数逼近

前面讲的曲线拟合是已知一组离散数据 $\{(x_i,y_i),i=1,\cdots,n\}$，选择一个较简单的函数 $f(x)$，如多项式，在一定准则如最小二乘准则下，最接近这些数据。

如果已知一个较为复杂的连续函数 $y(x),x\in[a,b]$，要求选择一个较简单的函数 $f(x)$，在一定准则下最接近 $f(x)$，就是所谓函数逼近。

与曲线拟合的最小二乘准则相对应，函数逼近常用的一种准则是最小平方逼近，即

$$J=\int_a^b[f(x)-y(x)]^2dx \tag{15}$$

达到最小。与曲线拟合一样，选一组函数 $\{r_k(x),k=1,\cdots,m\}$ 构造 $f(x)$，即令

$$f(x)=a_1r_1(x)+\cdots+a_mr_m(x)$$

代入（15）式，求$a_1,\cdots,a_m$使J达到极小。利用极值必要条件可得

$$\begin{bmatrix}(r_1,r_1) & \cdots & (r_1,r_m)\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ (r_m,r_1) & \cdots & (r_m,r_m)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(y,r_1)\\ \vdots\\ (y,r_m)\end{bmatrix} \tag{16}$$

这里$(g,h)=\int_a^b g(x)h(x)dx$。当方程组（16）的系数矩阵非奇异时，有唯一解。

最简单的当然是用多项式逼近函数，即选$r_1(x)=1$，$r_2(x)=x$，$r_3(x)=x^2$，…。并且如果能使$\int_a^b r_i(x)r_j(x)dx=0$，$(i\neq j)$，方程组（16）的系数矩阵将是对角阵，计算大大简化。满足这种性质的多项式称正交多项式。

勒让得（Legendre）多项式是在$[-1,1]$区间上的正交多项式，它的表达式为

$$P_0(x)=1,\quad P_k(x)=\frac{1}{2^k k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k,k=1,2,\cdots$$

可以证明

$$\int_{-1}^{1}P_i(x)P_j(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j\\ \dfrac{2}{2i+1}, & i=j\end{cases}$$

$$P_{k+1}(x)=\frac{2k+1}{k+1}xP_k(x)-\frac{k}{k+1}P_{k-1}(x),\quad k=1,2,\cdots$$

常用的正交多项式还有第一类切比雪夫（Chebyshev）多项式

$$T_n(x)=\cos(n\arccos x),\quad (x\in[-1,1],n=0,1,2,\cdots)$$

和拉盖尔（Laguerre）多项式

$$L_n(x)=e^x\frac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x}),\quad (x\in[0,+\infty),n=0,1,2,\cdots)。$$

例 10 求$f(x)=\cos x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$在$H=\mathrm{Span}\{1,x^2,x^4\}$中的最佳平方逼近多项式。

解　编写程序如下：

```
syms x
base=[1,x^2,x^4];
y1=base.'*base
y2=cos(x)*base.'
r1=int(y1,-pi/2,pi/2)
r2=int(y2,-pi/2,pi/2)
a=r1\r2
xishu1=double(a)
digits(8),xishu2=vpa(a)
```

求得 xishu1=0.9996　　-0.4964　　0.0372，即所求的最佳平方逼近多项式为

$$y=0.9996-0.4964x^2+0.0372x^4$$

§5 黄河小浪底调水调沙问题

5.1 问题的提出

2004 年 6 月至 7 月黄河进行了第三次调水调沙试验，特别是首次由小浪底、三门峡和万家寨三大水库联合调度，采用接力式防洪预泄放水，形成人造洪峰进行调沙试验获得成功。整个试验期为 20 多天，小浪底从 6 月 19 日开始预泄放水，直到 7 月 13 日恢复正常供水结束。小浪底水利工程按设计拦沙量为 75.5 亿 m^3，在这之前，小浪底共积泥沙达 14.15 亿 t。这次调水调沙试验一个重要目的就是由小浪底上游的三门峡和万家寨水库泄洪，在小浪底形成人造洪峰，冲刷小浪底库区沉积的泥沙，在小浪底水库开闸泄洪以后，从 6 月 27 日开始三门峡水库和万家寨水库陆续开闸放水，人造洪峰于 29 日先后到达小浪底，7 月 3 日达到最大流量 2700m3/s，使小浪底水库的排沙量也不断地增加。表 7 是由小浪底观测站从 6 月 29 日到 7 月 10 检测到的试验数据。

表 7 观测数据

日期	6.29		6.30		7.1		7.2		7.3		7.4	
时间	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00
水流量	1800	1900	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2650	2700	2720	2650
含沙量	32	60	75	85	90	98	100	102	108	112	115	116
日期	7.5		7.6		7.7		7.8		7.9		7.10	
时间	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00	8:00	20:00
水流量	2600	2500	2300	2200	2000	1850	1820	1800	1750	1500	1000	900
含沙量	118	120	118	105	80	60	50	30	26	20	8	5

现在，根据试验数据建立数学模型研究下面的问题：

（1）给出估计任意时刻的排沙量及总排沙量的方法；

（2）确定排沙量与水流量的关系。

5.2 模型的建立与求解

已知给定的观测时刻是等间距的，以 6 月 29 日零时刻开始计时，则各次观测时刻（离开始时刻 6 月 29 日零时刻的时间）分别为

$$t_i = 3600(12i-4),\ i = 1,2,\cdots,24,$$

其中计时单位为秒。第 1 次观测的时刻 $t_1 = 28800$，最后一次观测的时刻 $t_{24} = 1022400$。

记第 i（$i = 1,2,\cdots,24$）次观测时水流量为 v_i，含沙量为 c_i，则第 i 次观测时的排沙量为 $y_i = c_i v_i$。有关的数据见表 8。

表 8 插值数据对应关系 单位：排沙量为 kg

节点	1	2	3	4	5	6	7	8
时刻	28800	72000	115200	158400	201600	244800	288000	331200
排沙量	57600	114000	157500	187000	207000	235200	250000	265200

节点	9	10	11	12	13	14	15	16
时刻	374400	417600	460800	504000	547200	590400	633600	676800
排沙量	286200	302400	312800	307400	306800	300000	271400	231000
节点	17	18	19	20	21	22	23	24
时刻	720000	763200	806400	849600	892800	936000	979200	1022400
排沙量	160000	111000	91000	54000	45500	30000	8000	4500

对于问题（1），根据所给问题的试验数据，要计算任意时刻的排沙量，就要确定出排沙量随时间变化的规律，可以通过插值来实现。考虑到实际中的排沙量应该是时间的连续函数，为了提高模型的精度，我们采用三次样条函数进行插值。

利用 MATLAB 函数，求出三次样条函数，得到排沙量 $y = y(t)$ 与时间的关系，然后进行积分，就可以得到总的排沙量

$$z = \int_{t_1}^{t_{24}} y(t)dt$$

最后求得总的排沙量为1.844×10^9 t，计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
load data.txt       %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;y=y';
i=1:24;
t=(12*i-4)*3600;
t1=t(1);t2=t(end);
pp=csape(t,y);
xsh=pp.coefs   %求得插值多项式的系数矩阵，每一行是一个区间上多项式的系数。
TL=quadl(@(tt)ppval(pp,tt),t1,t2)
```

也可以利用 3 次 B 样条函数进行插值，求得总的排沙量也为1.844×10^9 t,，计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
load data.txt       %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;y=y';
i=1:24;
t=(12*i-4)*3600;
t1=t(1);t2=t(end);
pp=spapi(4,t,y)          %三次 B 样条
pp2=fn2fm(pp,'pp')    %把 B 样条函数转化为 pp 格式
TL=quadl(@(tt)fnval(pp,tt),t1,t2)
```

对于问题（2），研究排沙量与水量的关系，从试验数据可以看出，开始排沙量是随

着水流量的增加而增长，而后是随着水流量的减少而减少。显然，变化规律并非是线性的关系，为此，把问题分为两部分，从开始水流量增加到最大值 2720m^3/s（即增长的过程）为第一阶段，从水流量的最大值到结束为第二阶段，分别来研究水流量与排沙量的关系。

画出排沙量与水流量的散点图（见图 2）。

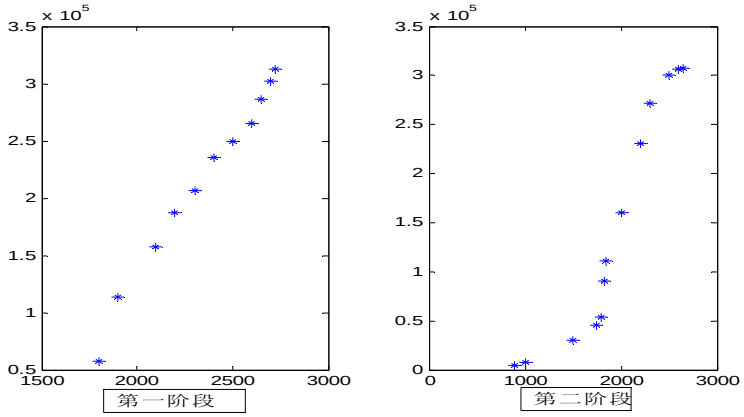


图 2　散点图

画散点图的程序如下：

```
load data.txt
liu=data([1,3],:);
liu=liu';liu=liu(:);
sha=data([2,4],:);
sha=sha';sha=sha(:);
y=sha.*liu;
subplot(1,2,1), plot(liu(1:11),y(1:11),'*')
subplot(1,2,2), plot(liu(12:24),y(12:24),'*')
```

从散点图可以看出，第一阶段基本上是线性关系，第二阶段准备依次用二次、三次、四次曲线来拟合，看哪一个模型的剩余标准差小就选取哪一个模型。最后求得第一阶段排沙量 y 与水流量 v 之间的预测模型为

$$y = 250.5655v - 373384.4661$$

第二阶段的预测模型为一个四次多项式。

$$y = -2.7693\times10^{-7}v^4 + 0.0018v^3 - 4.092v^2 + 3891.0441v - 1.32262749668\times10^6$$

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc, clear
load data.txt       %data.txt 按照原始数据格式把水流量和排沙量排成 4 行，12 列
liu=data([1,3],:); liu=liu'; liu=liu(:);
sha=data([2,4],:); sha=sha'; sha=sha(:);
y=sha.*liu;
%以下是第一阶段的拟合
format long e
nihe1_1=polyfit(liu(1:11),y(1:11),1)     %拟合一次多项式，系数排列从高次幂到低次幂
nihe1_2=polyfit(liu(1:11),y(1:11),2)
```

```
yhat1_1=polyval(nihe1_1,liu(1:11));   %求预测值
yhat1_2=polyval(nihe1_2,liu(1:11));
%以下求误差平凡和与剩余标准差
cha1_1=sum((y(1:11)-yhat1_1).^2); rmse1_1=sqrt(cha1_1/9)
cha1_2=sum((y(1:11)-yhat1_2).^2); rmse1_2=sqrt(cha1_2/8)
%以下是第二阶段的拟合
for j=1:3
    str1=char(['nihe2_' int2str(j) '=polyfit(liu(12:24),y(12:24),' int2str(j+1) ')']);
    eval(str1)
    str2=char(['yhat2_' int2str(j) '=polyval(nihe2_' int2str(j) ',liu(12:24));']);
    eval(str2)
    str3=char(['cha2_' int2str(j) '=sum((y(12:24)-yhat2_' int2str(j) ').^2);'...
        'rmse2_' int2str(j) '=sqrt(cha2_' int2str(j) '/(11-j))']);
    eval(str3)
end
format
```

习 题 九

1. 用给定的多项式，如 $y=x^3-6x^2+5x-3$，产生一组数据 (x_i,y_i)，$i=1,2,\cdots,m$，再在 y_i 上添加随机干扰（可用 rand 产生（0, 1）均匀分布随机数，或用 randn 产生 $N(0,1)$ 分布随机数），然后用 x_i 和添加了随机干扰的 y_i 作 3 次多项式拟合，与原系数比较。如果作 2 或 4 次多项式拟合，结果如何？

2. 已知平面区域 $0\le x\le 5600$，$0\le y\le 4800$ 的高程数据见 9 表（单位：m）。

表 9

4800	1350	1370	1390	1400	1410	960	940	880	800	690	570	430	290	210	150
4400	1370	1390	1410	1430	1440	1140	1110	1050	950	820	690	540	380	300	210
4000	1380	1410	1430	1450	1470	1320	1280	1200	1080	940	780	620	460	370	350
3600	1420	1430	1450	1480	1500	1550	1510	1430	1300	1200	980	850	750	550	500
3200	1430	1450	1460	1500	1550	1600	1550	1600	1600	1600	1550	1500	1500	1550	1550
2800	950	1190	1370	1500	1200	1100	1550	1600	1550	1380	1070	900	1050	1150	1200
2400	910	1090	1270	1500	1200	1100	1350	1450	1200	1150	1010	880	1000	1050	1100
2000	880	1060	1230	1390	1500	1500	1400	900	1100	1060	950	870	900	936	950
1600	830	980	1180	1320	1450	1420	400	1300	700	900	850	810	380	780	750
1200	740	880	1080	1130	1250	1280	1230	1040	900	500	700	780	750	650	550
800	650	760	880	970	1020	1050	1020	830	800	700	300	500	550	480	350
400	510	620	730	800	850	870	850	780	720	650	500	200	300	350	320
0	370	470	550	600	670	690	670	620	580	450	400	300	100	150	250
Y/X	0	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	4000	4400	4800	5200	5600

试用二维插值求 x, y 方向间隔都为 50 的高程，并画出该区域的等高线。

3. 用最小二乘法求一形如 $y=ae^{bx}$ 的经验公式拟合表 10 中的数据。

表 10

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	15.3	20.5	27.4	36.6	49.1	65.6	87.87	117.6

4.（水箱水流量问题）许多供水单位由于没有测量流入或流出水箱流量的设备，而只能测量水箱中的水位。试通过测得的某时刻水箱中水位的数据，估计在任意时刻（包

括水泵灌水期间）t流出水箱的流量 $f(t)$。

给出原始数据表 11，其中长度单位为 E（1E＝30.24cm）。水箱为圆柱体，其直径为 57E。

假设：

（1）影响水箱流量的唯一因素是该区公众对水的普通需要；

（2）水泵的灌水速度为常数；

（3）从水箱中流出水的最大流速小于水泵的灌水速度；

（4）每天的用水量分布都是相似的；

（5）水箱的流水速度可用光滑曲线来近似；

（6）当水箱的水容量达到 514×10^3g 时，开始泵水；达到 677.6×10^3g 时，便停止泵水。

表 11　水位数据表

时间（s）	水位（10^{-2}E）	时间（s）	水位（10^{-2}E）
0	3175	44636	3350
3316	3110	49953	3260
6635	3054	53936	3167
10619	2994	57254	3087
13937	2947	60574	3012
17921	2892	64554	2927
21240	2850	68535	2842
25223	2795	71854	2767
28543	2752	75021	2697
32284	2697	79254	泵水
35932	泵水	82649	泵水
39332	泵水	85968	3475
39435	3550	89953	3397
43318	3445	93270	3340

第十章　数据的统计描述和分析

数理统计研究的对象是受随机因素影响的数据，以下数理统计就简称统计，统计是以概率论为基础的一门应用学科。

数据样本少则几个，多则成千上万，人们希望能用少数几个包含其最多相关信息的数值来体现数据样本总体的规律。描述性统计就是搜集、整理、加工和分析统计数据，使之系统化、条理化，以显示出数据资料的趋势、特征和数量关系。它是统计推断的基础，实用性较强，在统计工作中经常使用。

面对一批数据如何进行描述与分析，需要掌握参数估计和假设检验这两个数理统计的最基本方法。

我们将用 Matlab 的统计工具箱(Statistics Toolbox)来实现数据的统计描述和分析。

§1　统计的基本概念

1.1　总体和样本

总体是人们研究对象的全体，又称母体，如工厂一天生产的全部产品（按合格品及废品分类），学校全体学生的身高。

总体中的每一个基本单位称为个体，个体的特征用一个变量（如 x ）来表示，如一件产品是合格品记 $x=0$，是废品记 $x=1$；一个身高 170（cm）的学生记 $x=170$。

从总体中随机产生的若干个个体的集合称为样本，或子样，如 n 件产品，100 名学生的身高，或者一根轴直径的 10 次测量。实际上这就是从总体中随机取得的一批数据，不妨记作 $x_1,x_2,\cdots,x_n$， n 称为样本容量。

简单地说，统计的任务是由样本推断总体。

1.2　频数表和直方图

一组数据（样本）往往是杂乱无章的，做出它的频数表和直方图，可以看作是对这组数据的一个初步整理和直观描述。

将数据的取值范围划分为若干个区间，然后统计这组数据在每个区间中出现的次数，称为频数，由此得到一个频数表。以数据的取值为横坐标，频数为纵坐标，画出一个阶梯形的图，称为直方图，或频数分布图。

若样本容量不大，能够手工做出频数表和直方图，当样本容量较大时则可以借助 Matlab 这样的软件了。让我们以下面的例子为例，介绍频数表和直方图的作法。

例 1　学生的身高和体重

学校随机抽取 100 名学生，测量他们的身高和体重，所得数据如表

表 1　身高体重数据

身高	体重	身高	体重	身高	体重	身高	体重	身高	体重
172	75	169	55	169	64	171	65	167	47
171	62	168	67	165	52	169	62	168	65
166	62	168	65	164	59	170	58	165	64
160	55	175	67	173	74	172	64	168	57
155	57	176	64	172	69	169	58	176	57
173	58	168	50	169	52	167	72	170	57
166	55	161	49	173	57	175	76	158	51
170	63	169	63	173	61	164	59	165	62
167	53	171	61	166	70	166	63	172	53
173	60	178	64	163	57	169	54	169	66
178	60	177	66	170	56	167	54	169	58
173	73	170	58	160	65	179	62	172	50
163	47	173	67	165	58	176	63	162	52

165	66	172	59	177	66	182	69	175	75
170	60	170	62	169	63	186	77	174	66
163	50	172	59	176	60	166	76	167	63
172	57	177	58	177	67	169	72	166	50
182	63	176	68	172	56	173	59	174	64
171	59	175	68	165	56	169	65	168	62
177	64	184	70	166	49	171	71	170	59

（i） 数据输入

数据输入通常有两种方法，一种是在交互环境中直接输入，如果在统计中数据量比较大，这样作不太方便；另一种办法是先把数据写入一个纯文本数据文件 data.txt 中，格式如例 1 的表 1，有 20 行、10 列，数据列之间用空格键或 Tab 键分割，该数据文件 data.txt 存放在 matlab\work 子目录下，在 Matlab 中用 load 命令读入数据，具体作法是：

load data.txt

这样在内存中建立了一个变量 data，它是一个包含有 20×10 个数据的矩阵。

为了得到我们需要的 100 个身高和体重各为一列的矩阵，应做如下的改变：

```
high=data(:,1:2:9);high=high(:)
weight=data(:,2:2:10);weight=weight(:)
```

（ii）作频数表及直方图

求频数用 hist 命令实现，其用法是：

[N,X] = hist(Y,M)

得到数组（行、列均可）Y 的频数表。它将区间[min(Y),max(Y)]等分为 M 份（缺省时 M 设定为 10），N 返回 M 个小区间的频数，X 返回 M 个小区间的中点。

命令

hist(Y,M)

画出数组 Y 的直方图。

对于例 1 的数据，编写程序如下：

```
load data.txt;
high=data(:,1:2:9);high=high(:);
weight=data(:,2:2:10);weight=weight(:);
[n1,x1]=hist(high)
%下面语句与hist命令等价
%n1=[length(find(high<158.1)),...
%   length(find(high>=158.1&high<161.2)),...
%   length(find(high>=161.2&high<164.5)),...
%   length(find(high>=164.5&high<167.6)),...
%   length(find(high>=167.6&high<170.7)),...
%   length(find(high>=170.7&high<173.8)),...
%   length(find(high>=173.8&high<176.9)),...
%   length(find(high>=176.9&high<180)),...
%   length(find(high>=180&high<183.1)),...
%   length(find(high>=183.1))]
[n2,x2]=hist(weight)
subplot(1,2,1), hist(high)
subplot(1,2,2), hist(weight)
```

计算结果略，直方图如图 1 所示。

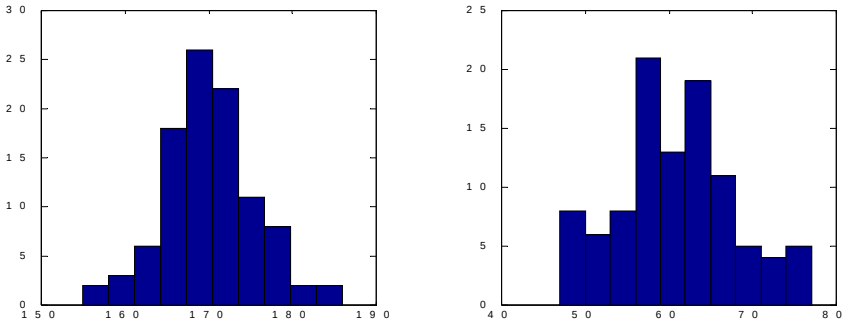


图 1　直方图

从直方图上可以看出，身高的分布大致呈中间高、两端低的钟形；而体重则看不出什么规律。要想从数值上给出更确切的描述，需要进一步研究反映数据特征的所谓“统计量”。直方图所展示的身高的分布形状可看作正态分布，当然也可以用这组数据对分布作假设检验。

例 2　统计下列五行字符串中字符 a、g、c、t 出现的频数

1.aggcacggaaaaacgggaataacggaggaggacttggcacggcattacacggagg
2.cggaggacaaacgggatggcggtattggaggtggcggactgttcgggga
3.gggacggatacggattctggccacggacggaaaggaggacacggcggacataca
4.atggataacggaaacaaaccagacaaacttcggtagaaatacagaagctta
5.cggctggcggacaacggactggcggattccaaaaacggaggaggcggacggaggc

解　把上述五行复制到一个纯文本数据文件 shuju.txt 中，放在 matlab\work 子目录下，编写如下程序：

```
clc
fid1=fopen('shuju.txt','r');
i=1;
while (~feof(fid1))
data=fgetl(fid1);
a=length(find(data==97));
b=length(find(data==99));
c=length(find(data==103));
d=length(find(data==116));
e=length(find(data>=97&data<=122));
f(i,:)=[a  b  c  d  e  a+b+c+d];
i=i+1;
end
f, he=sum(f)
dlmwrite('pinshu.txt',f); dlmwrite('pinshu.txt',he,'-append');
fclose(fid1);
```

我们把统计结果最后写到一个纯文本文件 pinshu.txt 中，在程序中多引进了几个变量，是为了检验字符串是否只包含 a、g、c、t 四个字符。

1.3　统计量

假设有一个容量为 n 的样本（即一组数据），记作 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，需要对它进行一定的加工，才能提出有用的信息，用作对总体（分布）参数的估计和检验。**统计量**就是加工出来的、反映样本数量特征的函数，它不含任何未知量。

下面我们介绍几种常用的统计量。

（i）表示位置的统计量—算术平均值和中位数

算术平均值（简称均值）描述数据取值的平均位置，记作 $\bar{x}$，

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \tag{1}$$

中位数是将数据由小到大排序后位于中间位置的那个数值。

Matlab 中 mean(x)返回 x 的均值，median(x)返回中位数。

（ii）表示变异程度的统计量—标准差、方差和极差

标准差 s 定义为

$$s=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

它是各个数据与均值偏离程度的度量，这种偏离不妨称为变异。

方差是标准差的平方 s^2。

极差是 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的最大值与最小值之差。

Matlab 中 std(x)返回 x 的标准差，var(x)返回方差，range(x)返回极差。

你可能注意到标准差 s 的定义（2）中，对 n 个 $(x_i-\bar{x})$ 的平方求和，却被 $(n-1)$ 除，这是出于无偏估计的要求。若需要改为被 n 除，Matlab 可用 std(x,1)和 var(x,1)来实现。

（iii）中心矩、表示分布形状的统计量—偏度和峰度

随机变量 x 的 r 阶**中心矩**为 $E(x-Ex)^r$。

随机变量 x 的偏度和峰度指的是 x 的标准化变量 $(x-Ex)/\sqrt{Dx}$ 的三阶中心矩和四阶中心矩：

$$\nu_1=E\left[\left(\frac{x-E(x)}{\sqrt{D(x)}}\right)^3\right]=\frac{E\left[(x-E(x))^3\right]}{(D(x))^{3/2}},$$

$$\nu_2=E\left[\left(\frac{x-E(x)}{\sqrt{D(x)}}\right)^4\right]=\frac{E\left[(x-E(x))^4\right]}{(D(x))^{2}}.$$

偏度反映分布的对称性，$\nu_1>0$ 称为右偏态，此时数据位于均值右边的比位于左边的多；$\nu_1<0$ 称为左偏态，情况相反；而 ν_1 接近 0 则可认为分布是对称的。

峰度是分布形状的另一种度量，正态分布的峰度为 3，若 ν_2 比 3 大得多，表示分布有沉重的尾巴，说明样本中含有较多远离均值的数据，因而峰度可以用作衡量偏离正态分布的尺度之一。

Matlab 中 moment(x,order)返回 x 的 order 阶中心矩，order 为中心矩的阶数。skewness(x)返回 x 的偏度，kurtosis(x)返回峰度。

在以上用 Matlab 计算各个统计量的命令中，若 x 为矩阵，则作用于 x 的列，返回一个行向量。

对例 1 给出的学生身高和体重，用 Matlab 计算这些统计量，程序如下：

```
clc
load data.txt;
high=data(:,1:2:9);high=high(:);
weight=data(:,2:2:10);weight=weight(:);
```

```
shuju=[high weight];
jun_zhi=mean(shuju)
zhong_wei_shu=median(shuju)
biao_zhun_cha=std(shuju)
ji_cha=range(shuju)
pian_du=skewness(shuju)
feng_du=kurtosis(shuju)
```

统计量中最重要、最常用的是均值和标准差，由于样本是随机变量，它们作为样本的函数自然也是随机变量，当用它们去推断总体时，有多大的可靠性就与统计量的概率分布有关，因此我们需要知道几个重要分布的简单性质。

1.4 统计中几个重要的概率分布

1.4.1 分布函数、密度函数和分位数

随机变量的特性完全由它的（概率）分布函数或（概率）密度函数来描述。设有随机变量 X，其分布函数定义为 $X \le x$ 的概率，即 $F(x)=P\{X \le x\}$。若 X 是连续型随机变量，则其密度函数 $p(x)$ 与 $F(x)$ 的关系为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} p(x)dx .$$

上 α 分位数是下面常用的一个概念，其定义为：对于 $0<\alpha<1$，使某分布函数 $F(x)=1-\alpha$ 的 x，称为这个分布的上 α 分位数，记作 x_α。

我们前面画过的直方图是频数分布图，频数除以样本容量 n，称为频率，n 充分大时频率是概率的近似，因此直方图可以看作密度函数图形的（离散化）近似。

1.4.2 统计中几个重要的概率分布

（i）正态分布

正态分布随机变量 X 的密度函数曲线呈中间高两边低、对称的钟形，期望（均值）$EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，记作 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ 称均方差或标准差，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时称为标准正态分布，记作 $X \sim N(0,1)$。正态分布完全由均值 μ 和方差 σ^2 决定，它的偏度为 0，峰度为 3。

正态分布可以说是最常见的（连续型）概率分布，成批生产时零件的尺寸，射击中弹着点的位置，仪器反复量测的结果，自然界中一种生物的数量特征等，多数情况下都服从正态分布，这不仅是观察和经验的总结，而且有着深刻的理论依据，即在大量相互独立的、作用差不多大的随机因素影响下形成的随机变量，其极限分布为正态分布。

鉴于正态分布的随机变量在实际生活中如此地常见，记住下面 3 个数字是有用的：

68%的数值落在距均值左右 1 个标准差的范围内，即

$$P\{\mu-\sigma \le X \le \mu+\sigma\}=0.68;$$

95%的数值落在距均值左右 2 个标准差的范围内，即

$$P\{\mu-2\sigma \le X \le \mu+2\sigma\}=0.95;$$

99.7%的数值落在距均值左右 3 个标准差的范围内，即

$$P\{\mu-3\sigma \le X \le \mu+3\sigma\}=0.997 .$$

（ii）χ^2 分布(Chi square)

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为相互独立的、服从标准正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，则它们的平方和 $Y=\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 服从 χ^2 分布，记作 $Y \sim \chi^2(n)$，n 称自由度，它的期望 $EY=n$，

方差 $DY=2n$。

（iii）t 分布

若 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且相互独立，则 $T=\dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ 服从 t 分布，记作 $T\sim t(n)$，n 称自由度。t 分布又称学生氏(Student)分布。

t 分布的密度函数曲线和 $N(0,1)$ 曲线形状相似。理论上 $n\to\infty$ 时，$T\sim t(n)\to N(0,1)$，实际上当 $n>30$ 时它与 $N(0,1)$ 就相差无几了。

（iv）F 分布

若 $X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，且相互独立，则 $F=\dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$ 服从 F 分布，记作 $F\sim F(n_1,n_2)$，(n_1,n_2) 称自由度。

1.4.3 Matlab 统计工具箱(Toolbox\Stats)中的概率分布

Matlab 统计工具箱中有 27 种概率分布，这里只对上面所述 4 种分布列出命令的字符：

norm 正态分布； chi2 χ^2 分布；

t t 分布 f F 分布

工具箱对每一种分布都提供 5 类函数，其命令的字符是：

pdf 概率密度； cdf 分布函数； inv 分布函数的反函数；

stat 均值与方差； rnd 随机数生成

当需要一种分布的某一类函数时，将以上所列的分布命令字符与函数命令字符接起来，并输入自变量（可以是标量、数组或矩阵）和参数就行了，如：

p=normpdf(x,mu,sigma) 均值 mu、标准差 sigma 的正态分布在 x 的密度函数(mu=0，sigma=1 时可缺省)。

p=tcdf(x,n) t 分布（自由度 n）在 x 的分布函数。

x=chi2inv(p,n) χ^2 分布（自由度 n）使分布函数 F(x)=p 的 x(即 p 分位数)。

[m,v]=fstat(n1,n2) F 分布（自由度 n1,n2）的均值 m 和方差 v。

几个分布的密度函数图形就可以用这些命令作出，如：

```
x=-6:0.01:6;y=normpdf(x);z=normpdf(x,0,2);
plot(x,y,x,z),gtext('N(0,1)'),gtext('N(0,2^2)')
```

分布函数的反函数的意义从下例看出：

```
x=chi2inv(0.9,10)
x =
    15.9872
```

如果反过来计算，则

```
P=chi2cdf(15.9872,10)
P =
     0.9000
```

1.5 正态总体统计量的分布

用样本来推断总体，需要知道样本统计量的分布，而样本又是一组与总体同分布的随机变量，所以样本统计量的分布依赖于总体的分布。当总体服从一般的分布时，求某个样本统计量的分布是很困难的，只有在总体服从正态分布时，一些重要的样本统计量（均值、标准差）的分布才有便于使用的结果。另一方面，现实生活中需要进行统计推断的总体，多数可以认为服从（或近似服从）正态分布，所以统计中人们在正态总体的

假定下研究统计量的分布，是必要的与合理的。

设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为一容量 n 的样本，其均值 $\bar{x}$ 和标准差 s 由式（1）、（2）确定，则用 $\bar{x}$ 和 s 构造的下面几个分布在统计中是非常有用的。

$$\bar{x} \sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n}) \quad 或 \quad \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{3}$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1). \tag{4}$$

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \tag{5}$$

设有两个总体 $X \sim N(\mu_1,\sigma_2^2)$ 和 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，及由容量分别为 n_1， n_2 的两个样本确定的均值 $\bar{x},\bar{y}$ 和标准差 s_1,s_2，则

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim N(0,1) \tag{6}$$

$$\frac{(\bar{x}-\bar{y})-(\mu_1-\mu_2)}{s_w\sqrt{1/n_1+1/n_2}} \sim t(n_1+n_2-2) \tag{7}$$

其中 $s_w^2=\dfrac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}$，

$$\frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1,n_2-1) \tag{8}$$

对于（7）式，假定 $\sigma_1=\sigma_2$，但它们未知，于是用 s 代替。在下面的统计推断中我们要反复用到这些分布。

§2 参数估计

利用样本对总体进行统计推断的一类问题是参数估计，即假定已知总体的分布，通常是 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，估计有关的参数，如 μ,σ^2。参数估计分点估计和区间估计两种。

2.1 点估计

点估计是用样本统计量确定总体参数的一个数值。评价估计优劣的标准有无偏性、最小方差性、有效性等，估计的方法有矩法、极大似然法等。

最常用的是对总体均值 μ 和方差 σ^2（或标准差 σ）作点估计。让我们暂时抛开评价标准，当从一个样本按照式（1）、（2）算出样本均值 $\bar{x}$ 和方差 s^2 后，对 μ 和 σ^2（或 σ）一个自然、合理的点估计显然是（在字母上加^表示它的估计值）

$$\hat{\mu}=\bar{x}\,,\ \hat{\sigma}^2=s^2,\quad \hat{\sigma}=s \tag{9}$$

2.2 区间估计

点估计虽然给出了待估参数的一个数值，却没有告诉我们这个估计值的精度和可信程度。一般地，总体的待估参数记作 θ（如 μ,σ^2），由样本算出的 θ 的估计量记作 $\hat{\theta}$，人们常希望给出一个区间 $[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$，使 θ 以一定的概率落在此区间内。若有

$$P\{\hat{\theta}_1<\theta<\hat{\theta}_2\}=1-\alpha\,,\ 0<\alpha<1 \tag{10}$$

则$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$称为$\theta$的置信区间，$\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限，$1-\alpha$称为置信概率或置信水平，$\alpha$称为显著性水平。

给出的置信水平为$1-\alpha$的置信区间$[\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2]$，称为$\theta$的区间估计。置信区间越小，估计的精度越高；置信水平越大，估计的可信程度越高。但是这两个指标显然是矛盾的，通常是在一定的置信水平下使置信区间尽量小。通俗地说，区间估计给出了点估计的误差范围。

2.3 参数估计的 Matlab 实现

Matlab 统计工具箱中，有专门计算总体均值、标准差的点估计和区间估计的函数。对于正态总体，命令是

[mu,sigma,muci,sigmaci]=normfit(x,alpha)

其中 x 为样本（数组或矩阵），alpha 为显著性水平α（alpha 缺省时设定为 0.05），返回总体均值μ和标准差σ的点估计 mu 和 sigma，及总体均值μ和标准差σ的区间估计 muci 和 sigmaci。当 x 为矩阵时，x 的每一列作为一个样本。

Matlab 统计工具箱中还提供了一些具有特定分布总体的区间估计的命令，如 expfit，poissfit，gamfit，你可以从这些字头猜出它们用于哪个分布，具体用法参见帮助系统。

§3 假设检验

统计推断的另一类重要问题是假设检验问题。在总体的分布函数完全未知或只知其形式但不知其参数的情况，为了推断总体的某些性质，提出某些关于总体的假设。例如，提出总体服从泊松分布的假设，又如对于正态总体提出数学期望等于μ_0的假设等。假设检验就是根据样本对所提出的假设做出判断：是接受还是拒绝。这就是所谓的假设检验问题。

3.1 单个总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的检验

假设检验有三种：

双边检验：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$；

右边检验：$H_0:\mu\leq\mu_0$，$H_1:\mu>\mu_0$；

左边检验：$H_0:\mu\geq\mu_0$，$H_1:\mu<\mu_0$。

3.1.1 σ^2已知，关于μ的检验（Z检验）

在 Matlab 中Z检验法由函数 ztest 来实现，命令为

[h,p,ci]=ztest(x,mu,sigma,alpha,tail)

其中输入参数 x 是样本，mu 是H_0中的μ_0，sigma 是总体标准差σ，alpha 是显著性水平α（alpha 缺省时设定为 0.05），tail 是对备选假设H_1的选择：H_1为$\mu\neq\mu_0$时用 tail=0（可缺省）；H_1为$\mu>\mu_0$时用 tail=1；H_1为$\mu<\mu_0$时用 tail=-1。输出参数 h=0 表示接受H_0，h=1 表示拒绝H_0，p 表示在假设H_0下样本均值出现的概率，p 越小H_0越值得怀疑，ci 是μ_0的置信区间。

例 3 某车间用一台包装机包装糖果。包得的袋装糖重是一个随机变量，它服从正态分布。当机器正常时，其均值为 0.5 公斤，标准差为 0.015 公斤。某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖 9 袋，称得净重为（公斤）：

0.497 0.506 0.518 0.524 0.498 0.511 0.520 0.515 0.512

问机器是否正常？

解　总体σ已知，$x \sim N(\mu,0.015^2)$，μ未知。于是提出假设$H_0:\mu=\mu_0=0.5$和$H_1:\mu\neq 0.5$。

Matlab 实现如下：

```
x=[0.497  0.506  0.518  0.524  0.498...
  0.511  0.520  0.515  0.512];
[h,p,ci]=ztest(x,0.5,0.015)
```

求得 h=1，p=0.0248，说明在 0.05 的水平下，可拒绝原假设，即认为这天包装机工作不正常。

3.1.2　σ^2未知，关于μ的检验（t检验）

在 Matlab 中t检验法由函数 ttest 来实现，命令为

[h,p,ci]=ttest(x,mu,alpha,tail)

例 4　某种电子元件的寿命x(以小时计)服从正态分布，μ,σ^2均未知.现得 16 只元件的寿命如下:

159　280　101　212　224　379　179　264
222　362　168　250　149　260　485　170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于 225(小时)？

解　按题意需检验

$$H_0:\mu\le\mu_0=225,\quad H_1:\mu>225,$$

取$\alpha=0.05$。Matlab 实现如下：

```
x=[159  280  101  212  224  379  179  264 ...
  222  362  168  250  149  260  485  170];
[h,p,ci]=ttest(x,225,0.05,1)
```

求得 h=0，p=0.2570，说明在显著水平为 0.05 的情况下，不能拒绝原假设，认为元件的平均寿命不大于 225 小时。

3.2　两个正态总体均值差的检验（t检验）

还可以用t检验法检验具有相同方差的 2 个正态总体均值差的假设。在 Matlab 中由函数 ttest2 实现，命令为：

[h,p,ci]=ttest2(x,y,alpha,tail)

与上面的 ttest 相比，不同处只在于输入的是两个样本 x,y（长度不一定相同），而不是一个样本和它的总体均值；tail 的用法与 ttest 相似，可参看帮助系统。

例 5 在平炉上进行一项试验以确定改变操作方法的建议是否会增加钢的得率,试验是在同一平炉上进行的。每炼一炉钢时除操作方法外,其它条件都可能做到相同。先用标准方法炼一炉,然后用建议的新方法炼一炉,以后交换进行,各炼了 10 炉,其得率分别为

1° 标准方法　78.1　72.4　76.2　74.3　77.4　78.4　76.0　75.6　76.7　77.3
2° 新方法　79.1　81.0　77.3　79.1　80.0　79.1　79.1　77.3　80.2　82.1

设这两个样本相互独立且分别来自正态总体$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$，μ_1,μ_2,σ^2均未知，问建议的新方法能否提高得率?(取$\alpha=0.05$。)

解　(i) 需要检验假设

$$H_0:\mu_1-\mu_2\ge 0,\quad H_1:\mu_1-\mu_2<0.$$

(ii)Matlab 实现

```
x=[78.1  72.4  76.2  74.3  77.4  78.4  76.0  75.6  76.7  77.3];
y=[79.1  81.0  77.3  79.1  80.0  79.1  79.1  77.3  80.2  82.1];
[h,p,ci]=ttest2(x,y,0.05,-1)
```

求得 h=1, p=2.2126×10^{-4}。表明在$\alpha=0.05$的显著水平下，可以拒绝原假设，即认为建议的新操作方法较原方法优。

3.3　分布拟合检验

在实际问题中，有时不能预知总体服从什么类型的分布，这时就需要根据样本来检验关于分布的假设。下面介绍χ^2检验法和专用于检验分布是否为正态的“偏峰、峰度检验法”。

3.3.1　χ^2检验法

H_0：总体x的分布函数为$F(x)$，

H_1：总体x的分布函数不是$F(x)$.

在用下述χ^2检验法检验假设H_0时，若在假设H_0下$F(x)$的形式已知，但其参数值未知，这时需要先用极大似然估计法估计参数，然后作检验。

χ^2检验法的基本思想如下：将随机试验可能结果的全体Ω分为k个互不相容的事件$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ $(\sum_{i=1}^{k} A_k = \Omega, A_i A_j = \Phi, i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,k)$。于是在假设$H_0$下，我们可以计算$p_i = P(A_i)$（或$\hat{p}_i = \hat{P}(A_i)$），$i = 1,2,\cdots,k$。在$n$次试验中，事件$A_i$出现的频率$f_i/n$与$p_i$（$\hat{p}_i$）往往有差异，但一般来说，若$H_0$为真，且试验的次数又甚多时，则这种差异不应该很大。基于这种想法，皮尔逊使用

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - np_i)^2}{np_i} \quad (\text{或 } \chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(f_i - n\hat{p}_i)^2}{n\hat{p}_i}) \tag{11}$$

作为检验假设H_0的统计量。并证明了以下定理。

定理　若n充分大，则当H_0为真时（不论H_0中的分布属什么分布），统计量（11）总是近似地服从自由度为$k-r-1$的χ^2分布，其中r是被估计的参数的个数。

于是，若在假设H_0下算得（11）有

$$\chi^2 \geq \chi_a^2(k-r-1),$$

则在显著性水平α下拒绝H_0，否则就接受。

注意：在使用χ^2检验法时，要求样本容量n不小于 50，以及每个np_i都不小于 5，而且np_i最好是在 5 以上。否则应适当地合并A_i，以满足这个要求。

例 6　下面列出了 84 个伊特拉斯坎（Etruscan）人男子的头颅的最大宽度（mm），试检验这些数据是否来自正态总体（取$\alpha=0.1$）。

141	148	132	138	154	142	150	146	155	158
150	140	147	148	144	150	149	145	149	158
143	141	144	144	126	140	144	142	141	140
145	135	147	146	141	136	140	146	142	137
148	154	137	139	143	140	131	143	141	149
148	135	148	152	143	144	141	143	147	146

150 132 142 142 143 153 149 146 149 138
142 149 142 137 134 144 146 147 140 142
140 137 152 145

解 编写Matlab程序如下：

```
clc
x=[141 148 132 138 154 142 150 146 155 158 ...
150 140 147 148 144 150 149 145 149 158 ...
143 141 144 144 126 140 144 142 141 140 ...
145 135 147 146 141 136 140 146 142 137 ...
148 154 137 139 143 140 131 143 141 149 ...
148 135 148 152 143 144 141 143 147 146 ...
150 132 142 142 143 153 149 146 149 138 ...
142 149 142 137 134 144 146 147 140 142 ...
140 137 152 145];
mm=minmax(x)   %求数据中的最小数和最大数
hist(x,8)      %画直方图
fi=[length(find(x<135)),...
   length(find(x>=135&x<138)),...
   length(find(x>=138&x<142)),...
   length(find(x>=142&x<146)),...
   length(find(x>=146&x<150)),...
   length(find(x>=150&x<154)),...
   length(find(x>=154))]     %各区间上出现的频数
mu=mean(x),sigma=std(x)     %均值和标准差
fendian=[135,138,142,146,150,154]   %区间的分点
p0=normcdf(fendian,mu,sigma)        %分点处分布函数的值
p1=diff(p0)                          %中间各区间的概率
p=[p0(1),p1,1-p0(6)]                 %所有区间的概率
chi=(fi-84*p).^2./(84*p)
chisum=sum(chi)                      %皮尔逊统计量的值
x_a=chi2inv(0.9,4)     %chi2分布的0.9分位数
```

求得皮尔逊统计量chisum= 2.2654，$\chi^2_{0.1}(7-2-1)=\chi^2_{0.1}(4)=7.7794$，故在水平0.1下接受$H_0$，即认为数据来自正态分布总体。

3.3.2 偏度、峰度检验（留作习题1）

3.4 其它非参数检验

Matlab还提供了一些非参数方法。

3.4.1 Wilcoxon秩和检验

在Matlab中，秩和检验由函数ranksum实现。命令为：

[p,h]=ranksum(x,y,alpha)

其中x，y可为不等长向量，alpha为给定的显著水平，它必须为0和1之间的数量。p返回产生两独立样本的总体是否相同的显著性概率，h返回假设检验的结果。如果x和y的总体差别不显著，则h为零；如果x和y的总体差别显著，则h为1。如果p接近于零，则可对原假设质疑。

例7 某商店为了确定向公司A或公司B购买某种产品，将A,B公司以往各次进货的次品率进行比较，数据如下所示，设两样本独立。问两公司的商品的质量有无显著差异。设两公司的商品的次品的密度最多只差一个平移，取$\alpha=0.05$。

A：7.0　3.5　9.6　8.1　6.2　5.1　10.4　4.0　2.0　10.5

B：5.7　3.2　4.2　11.0　9.7　6.9　3.6　4.8　5.6　8.4　10.1　5.5　12.3

解　分别以μ_A、μ_B记公司A、B的商品次品率总体的均值。所需检验的假设是

$H_0:\mu_A=\mu_B$，$H_1:\mu_A\neq\mu_B$.

Matlab实现如下：

```
a=[7.0  3.5  9.6  8.1  6.2  5.1  10.4  4.0  2.0  10.5];
b=[5.7  3.2  4.2  11.0  9.7  6.9  3.6  4.8  5.6  8.4  10.1  5.5
12.3];
[p,h]=ranksum(a,b)
```

求得p=0.8041，h=0，表明两样本总体均值相等的概率为0.8041，并不很接近于零，且h=0说明可以接受原假设，即认为两个公司的商品的质量无明显差异。

3.5　中位数检验

在假设检验中还有一种检验方法为中位数检验,在一般的教学中不一定介绍,但在实际中也是被广泛应用到的。在Matlab中提供了这种检验的函数。函数的使用方法简单，下面只给出函数介绍。

3.5.1　signrank函数

signrank　Wilcoxon符号秩检验

[p,h]=signrank(x,y,alpha)

其中p给出两个配对样本x和y的中位数相等的假设的显著性概率。向量x，y的长度必须相同，alpha为给出的显著性水平，取值为0和1之间的数。h返回假设检验的结果。如果这两个样本的中位数之差几乎为0，则h=0；若有显著差异，则h=1。

3.5.2　signtest函数

signtest　符号检验

[p,h]= signtest(x,y,alpha)

其中p给出两个配对样本x和y的中位数相等的假设的显著性概率。x和y若为向量，二者的长度必须相同；y亦可为标量，在此情况下，计算x的中位数与常数y之间的差异。alpha和h同上。

习 题 十

1. 试用偏度、峰度检验法检验例6中的数据是否来自正态总体（取$\alpha=0.1$）。

2. 下面列出的是某工厂随机选取的20只部件的装配时间（分）：9.8,10.4,10.6,9.6,9.7,9.9,10.9,11.1,9.6,10.2,10.3,9.6,9.9,11.2,10.6,9.8,10.5,10.1,10.5,9.7。设装配时间的总体服从正态分布，是否可以认为装配时间的均值显著地大于10（取$\alpha=0.05$）？

3.表2分别给出两个文学家马克．吐温(Mark Twain)的八篇小品文及斯诺特格拉斯（Snodgrass）的10篇小品文中由3个字母组成的词的比例。

表2

马克．吐温	0.225	0.262	0.217	0.240	0.230	0.229	0.235	0.217		
斯诺特格拉斯	0.209	0.205	0.196	0.210	0.202	0.207	0.224	0.223	0.220	0.201

设两组数据分别来自正态总体，且两总体方差相等。两样本相互独立，问两个作家所写的小品文中包含由3个字母组成的词的比例是否有显著的差异（取$\alpha=0.05$）？

第十一章　方差分析

我们已经作过两个总体均值的假设检验，如两台机床生产的零件尺寸是否相等，病人和正常人的某个生理指标是否一样。如果把这类问题推广一下，要检验两个以上总体的均值彼此是否相等，仍然用以前介绍的方法是很难做到的。而你在实际生产和生活中可以举出许多这样的问题：从用几种不同工艺制成的灯泡中，各抽取了若干个测量其寿命，要推断这几种工艺制成的灯泡寿命是否有显著差异；用几种化肥和几个小麦品种在若干块试验田里种植小麦，要推断不同的化肥和品种对产量有无显著影响。

可以看到，为了使生产过程稳定，达到优质、高产，需要对影响产品质量的因素进行分析，找出有显著影响的那些因素，除了从机理方面进行研究外，常常要作许多试验，对结果作分析、比较，寻求规律。用数理统计分析试验结果、鉴别各因素对结果影响程度的方法称为方差分析（Analysis Of Variance），记作 ANOVA。

人们关心的试验结果称为**指标**，试验中需要考察、可以控制的条件称为**因素或因子**，因素所处的状态称为**水平**。上面提到的灯泡寿命问题是单因素试验，小麦产量问题是双因素试验。处理这些试验结果的统计方法就称为单因素方差分析和双因素方差分析。

§1　单因素方差分析

只考虑一个因素 A 对所关心的指标的影响，A 取几个水平，在每个水平上作若干个试验，试验过程中除 A 外其它影响指标的因素都保持不变（只有随机因素存在），我们的任务是从试验结果推断，因素 A 对指标有无显著影响，即当 A 取不同水平时指标有无显著差别。

A 取某个水平下的指标视为随机变量，判断 A 取不同水平时指标有无显著差别，相当于检验若干总体的均值是否相等。

1.1　数学模型

设 A 取 r 个水平 $A_1, A_2, \cdots, A_r$，在水平 A_i 下总体 x_i 服从正态分布 $N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, \cdots, r$，这里 μ_i, σ^2 未知，μ_i 可以互不相同，但假定 x_i 有相同的方差。又设在每个水平 A_i 下作了 n_i 次独立试验，即从中抽取容量为 n_i 的样本，记作 $x_{ij}, j = 1, \cdots, n_i$，$x_{ij}$ 服从 $N(\mu_i, \sigma^2)$，$i = 1, \cdots, r, j = 1, \cdots, n_i$ 且相互独立。将这些数据列成表 1（单因素试验数据表）的形式。

表 1　单因素试验数据表

A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n_1}
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n_2}
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
A_r	x_{r1}	x_{r2}	$\cdots$	x_{rn_r}

将第 i 行称为第 i 组数据。判断 A 的 r 个水平对指标有无显著影响，相当于要作以下的假设检验

$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r$；　$H_1 : \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_r$ 不全相等

由于 x_{ij} 的取值既受不同水平 A_i 的影响，又受 A_i 固定下随机因素的影响，所以将它分解为

$$x_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij},\ i = 1, \cdots, r,\ j = 1, \cdots, n_i \qquad (1)$$

其中 $\varepsilon_{ij} \sim N(0,\sigma^2)$，且相互独立。记

$$\mu=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}n_i\mu_i\ ,\quad n=\sum_{i=1}^{r}n_i\ ,\quad \alpha_i=\mu_i-\mu\ ,\quad i=1,\cdots,r \tag{2}$$

μ 是总均值，α_i 是水平 A_i 对指标的效应。由（1）、（2）模型可表为

$$\begin{cases} x_{ij}=\mu+\alpha_i+\varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0 \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2), i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,n_i \end{cases} \tag{3}$$

原假设为（以后略去备选假设）

$$H_0:\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0 \tag{4}$$

1.2　统计分析

记

$$\bar{x}_{i\bullet}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij}\ ,\quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}x_{ij} \tag{5}$$

$\bar{x}_{i\bullet}$ 是第 i 组数据的组平均值，$\bar{x}$ 是总平均值。考察全体数据对 $\bar{x}$ 的偏差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x})^2 \tag{6}$$

经分解可得

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x})^2+\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet})^2$$

记

$$S_A=\sum_{i=1}^{r}n_i(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x})^2 \tag{7}$$

$$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet})^2 \tag{8}$$

则

$$S_T=S_A+S_E \tag{9}$$

S_A 是各组均值对总方差的偏差平方和，称为组间平方和；S_E 是各组内的数据对均值偏差平方和的总和。S_A 反映 A 不同水平间的差异，S_E 则表示在同一水平下随机误差的大小。

注意到 $\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet})^2$ 是总体 $N(\mu_i,\sigma^2)$ 的样本方差的 n_i-1 倍，于是有

$$\sum_{j=1}^{n_i}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet})^2\big/\sigma^2\sim\chi^2(n_i-1)$$

由 χ^2 分布的可加性知

$$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2\left(\sum_{i=1}^{r}(n_i-1)\right)$$

即

$$S_E/\sigma^2 \sim \chi^2(n-r)$$

且有

$$ES_E=(n-r)\sigma^2 \tag{10}$$

对S_A作进一步分析可得

$$ES_A=(r-1)\sigma^2+\sum_{i=1}^{r}n_i\alpha_i^2 \tag{11}$$

当H_0成立时

$$ES_A=(r-1)\sigma^2 \tag{12}$$

可知若H_0成立，S_A只反映随机波动，而若H_0不成立，那它就还反映了A的不同水平的效应α_i。单从数值上看，当H_0成立时，由（10）、（12）对于一次试验应有

$$\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)}\approx 1$$

而当H_0不成立时这个比值将远大于1。当H_0成立时，该比值服从自由度$n_1=r-1$，$n_2=(n-r)$的F分布，即

$$F=\frac{S_A/(r-1)}{S_E/(n-r)}\sim F(r-1,n-r) \tag{13}$$

为检验H_0，给定显著性水平α，记F分布的$1-\alpha$分位数为$F_{1-\alpha}(r-1,(n-r))$，检验规则为

$F<F_{1-\alpha}(r-1,(n-r))$时接受$H_0$，否则拒绝。

以上对S_A,S_E,S_T的分析相当于对组间、组内等方差的分析，所以这种假设检验方法称方差分析。

1.3　方差分析表

将试验数据按上述分析、计算的结果排成表 2 的形式，称为单因素方差分析表（Matlab 中给出的方差分析表）。

表2　单因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	$1-p_r$ 分位数	概率
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A=\frac{S_A}{r-1}$	$F_{1-p_r}(r-1,n-r)$	p_r
误差	S_E	$n-r$	$\bar{S}_E=\frac{S_E}{n-r}$		
总和	S_T	$n-1$			

最后一列给出大于F值的概率p_r，$F_{1-p_r}<F_{1-\alpha}(r-1,(n-r))$相当于$p_r>\alpha$。

方差分析一般用的显著性水平是：取$\alpha=0.01$，拒绝H_0，称因素A的影响（或A各水平的差异）非常显著；取$\alpha=0.01$，不拒绝H_0，但取$\alpha=0.05$，拒绝H_0，称因素A的影响显著；取$\alpha=0.05$，不拒绝H_0，称因素A无显著影响。

1.4　Matlab 实现

Matlab 统计工具箱中单因素方差分析的命令是 anoval。

若各组数据个数相等，称为均衡数据。若各组数据个数不等，称非均衡数据。

（1）均衡数据

处理均衡数据的用法为：

p=anoval(x)

返回值 p 是一个概率，当 p>α 时接受H_0，x 为$m\times r$ 的数据矩阵，x 的每一列是一个水平的数据（这里各个水平上的样本容量$n_i=m$）。另外，还输出一个方差表和一个 Box 图。

例 1　为考察 5 名工人的劳动生产率是否相同，记录了每人 4 天的产量，并算出其平均值，如表 3。你能从这些数据推断出他们的生产率有无显著差别吗？

表 3

天＼工人	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	256	254	250	248	236
2	242	330	277	280	252
3	280	290	230	305	220
4	298	295	302	289	252
平均产量	269	292.25	264.75	280.5	240

解　编写程序如下：

```
x=[256    254    250    248    236
   242    330    277    280    252
   280    290    230    305    220
   298    295    302    289    252];
p=anova1(x)
```

求得$p=0.1109>\alpha=0.05$，故接受H_0，即 5 名工人的生产率没有显著差异。方差表对应于上面的单因素方差分析表的$1\sim4$列，$F=2.262$是$F(4,15)$分布的$1-p$分位数，可以验证

fcdf(2.262,4,15)=0.8891=1-p

Box 图反映了各组数据的特征。

注：接受H_0，是将 5 名工人的生产率作为一个整体进行假设检验的结果，并不表明取其中 2 个工人的生产率作两总体的均值检验时，也一定接受均值相等的假设。实际上，读者可以用 ttest2 对本题作$H_0:\mu_2=\mu_5$的检验，看看会得到什么结果。

（2）非均衡数据

处理非均衡数据的用法为：

p=anova1(x,group)

x 为向量，从第 1 组到第r组数据依次排列；group 为与 x 同长度的向量，标志 x 中数据的组别（在与 x 第i组数据相对应的位置处输入整数$i(i=1,2,\cdots,r)$）。

例2　用4种工艺生产灯泡，从各种工艺制成的灯泡中各抽出了若干个测量其寿命，结果如下表，试推断这几种工艺制成的灯泡寿命是否有显著差异。

表4

工艺 序号	A_1	A_2	A_3	A_4
1	1620	1580	1460	1500
2	1670	1600	1540	1550
3	1700	1640	1620	1610
4	1750	1720		1680
5	1800			

解　编写程序如下：

```
x=[1620   1580   1460   1500
  1670   1600   1540   1550
  1700   1640   1620   1610
  1750   1720   1680   1800];
x=[x(1:4),x(16),x(5:8),x(9:11),x(12:15)];
g=[ones(1,5),2*ones(1,4),3*ones(1,3),4*ones(1,4)];
p=anova1(x,g)
```

求得 0.01<p=0.0331<0.05，所以几种工艺制成的灯泡寿命有显著差异。

1.5　多重比较

在灯泡寿命问题中，为了确定哪几种工艺制成的灯泡寿命有显著差异，我们先算出各组数据的均值：

工艺	A_1	A_2	A_3	A_4
均值	1708	1635	1540	1585

虽然 A_1 的均值最大，但要判断它与其它几种有显著差异，还需做多重比较。一般多重比较要对所有 r 个总体作两两对比，分析相互间的差异。根据问题的具体情况可以减少对比次数。

对于上述问题，Matlab多重比较的程序为

```
x=[1620   1580   1460   1500
  1670   1600   1540   1550
  1700   1640   1620   1610
  1750   1720   1680   1800];
x=[x(1:4),x(16),x(5:8),x(9:11),x(12:15)];
g=[ones(1,5),2*ones(1,4),3*ones(1,3),4*ones(1,4)];
[p,t,st]=anova1(x,g)
[c,m,h,nms] = multcompare(st);
[nms num2cell(m)]
```

§2　双因素方差分析

如果要考虑两个因素 A,B 对指标的影响，A,B 各划分几个水平，对每一个水平组合作若干次试验，对所得数据进行方差分析，检验两因素是否分别对指标有显著影响，或者还要进一步检验两因素是否对指标有显著的交互影响。

2.1　数学模型

设 A 取 r 个水平 $A_1,A_2,\cdots,A_r$，B 取 s 个水平 $B_1,B_2,\cdots,B_s$，在水平组合 (A_i,B_j)

下总体 x_{ij} 服从正态分布 $N(\mu_{ij},\sigma^2)$，$i=1,\cdots,r$，$j=1,\cdots,s$。又设在水平组合 (A_i,B_j) 下作了 t 个试验，所得结果记作 x_{ijk}，x_{ijk} 服从 $N(\mu_{ij},\sigma^2)$，$i=1,\cdots,r$，$j=1,\cdots,s$，$k=1,\cdots,t$，且相互独立。将这些数据列成表 5 的形式。

表 5　双因素试验数据表

	B_1	B_2	$\cdots$	B_s
A_1	$x_{111}\cdots x_{11t}$	$x_{121}\cdots x_{12t}$	$\cdots$	$x_{1s1}\cdots x_{1st}$
A_2	$x_{211}\cdots x_{21t}$	$x_{221}\cdots x_{22t}$	$\cdots$	$x_{2s1}\cdots x_{2st}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_r	$x_{r11}\cdots x_{r1t}$	$x_{r21}\cdots x_{r2t}$	$\cdots$	$x_{rs1}\cdots x_{rst}$

将 x_{ijk} 分解为

$$x_{ijk}=\mu_{ij}+\varepsilon_{ijk},\ i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s,\ k=1,\cdots,t \tag{14}$$

其中 $\varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2)$，且相互独立。记

$$\mu=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij},\ \mu_{i\bullet}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}\mu_{ij},\ \alpha_i=\mu_{i\bullet}-\mu$$

$$\mu_{\bullet j}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\mu_{ij},\ \beta_j=\mu_{\bullet j}-\mu,\ \gamma_{ij}=\mu_{ij}-\mu-\alpha_i-\beta_j \tag{15}$$

μ 是总均值，α_i 是水平 A_i 对指标的效应，β_j 是水平 B_j 对指标的效应，γ_{ij} 是水平 A_i 与 B_j 对指标的交互效应。模型表为

$$\begin{cases} x_{ijk}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\gamma_{ij}+\varepsilon_{ijk} \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0,\sum_{j=1}^{s}\beta_j=0,\sum_{i=1}^{r}\gamma_{ij}=\sum_{j=1}^{s}\gamma_{ij}=0 \\ \varepsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2),i=1,\cdots,r,j=1,\cdots,s,k=1,\cdots,t \end{cases} \tag{16}$$

原假设为

$$H_{01}:\alpha_i=0(i=1,\cdots,r) \tag{17}$$

$$H_{02}:\beta_j=0(j=1,\cdots,s) \tag{18}$$

$$H_{03}:\gamma_{ij}=0(i=1,\cdots,r;j=1,\cdots,s) \tag{19}$$

2.2　无交互影响的双因素方差分析

如果根据经验或某种分析能够事先判定两因素之间没有交互影响，每组试验就不必重复，即可令 $t=1$，过程大为简化。

假设 $\gamma_{ij}=0$，于是

$$\mu_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j,\ i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s$$

此时，模型（16）可写成

$$\begin{cases} x_{ij}=\mu+\alpha_i+\beta_j+\varepsilon_{ij} \\ \sum_{i=1}^{r}\alpha_i=0,\sum_{j=1}^{s}\beta_j=0 \\ \varepsilon_{ij}\sim N(0,\sigma^2), i=1,\cdots,r,\ j=1,\cdots,s \end{cases} \tag{20}$$

对这个模型我们所要检验的假设为式（17）和式（18）。下面采用与单因素方差分析模型类似的方法导出检验统计量。

记

$$\bar{x}=\frac{1}{rs}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}\ ,\quad \bar{x}_{i\bullet}=\frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s}x_{ij}\ ,\ \bar{x}_{\bullet j}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}x_{ij}$$

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2$$

其中S_T为全部试验数据的总变差，称为总平方和，对其进行分解

$$\begin{aligned} S_T&=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x})^2 \\ &=\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x})^2+s\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x})^2+r\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x})^2 \\ &=S_E+S_A+S_B \end{aligned}$$

可以验证，在上述平方和分解中交叉项均为 0。其中

$$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{s=1}^{s}(x_{ij}-\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x}_{\bullet j}+\bar{x})^2$$

$$S_A=s\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x})^2\ ,\quad S_B=r\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{\bullet j}-\bar{x})^2$$

我们先来看看S_A的统计意义。因为$\bar{x}_{i\bullet}$是水平A_i下所有观测值的平均，所以$\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i\bullet}-\bar{x})^2$反映了$\bar{x}_{1\bullet},\bar{x}_{2\bullet},\cdots,\bar{x}_{r\bullet}$差异的程度。这种差异是由于因素$A$的不同水平所引起的，因此$S_A$称为因素$A$的平方和。类似地，$S_B$称为因素$B$的平方和。至于$S_E$的意义不甚明显，我们可以这样来理解：因为

$$S_E=S_T-S_A-S_B \tag{21}$$

在我们所考虑的两因素问题中，除了因素A和B之外，剩余的再没有其它系统性因素的影响，因此从总平方和中减去S_A和S_B之后，剩下的数据变差只能归入随机误差，故S_E反映了试验的随机误差。

有了总平方和的分解式

$$S_T=S_E+S_A+S_B$$

以及各个平方和的统计意义，我们就可以明白，假设（17）的检验统计量应取为S_A与S_E的比。

和一元方差分析相类似，可以证明，当H_{01}成立时，

$$F_A=\frac{\frac{S_A}{r-1}}{\frac{S_E}{(r-1)(s-1)}}\sim F(r-1,(r-1)(s-1)) \tag{22}$$

当H_{02}成立时，

$$F_B=\frac{\frac{S_B}{s-1}}{\frac{S_E}{(r-1)(s-1)}}\sim F(s-1,(r-1)(s-1)) \tag{23}$$

检验规则为

$F_A<F_{1-\alpha}(r-1,(r-1)(s-1))$时接受$H_{01}$，否则拒绝$H_{01}$；

$F_B<F_{1-\alpha}(s-1,(r-1)(s-1))$时接受$H_{02}$，否则拒绝$H_{02}$。

我们可以写出方差分析表，如表6所示。

表6　无交互效应的两因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F比
因素A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A=\frac{S_A}{r-1}$	$\frac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B=\frac{S_B}{s-1}$	$\frac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_E=\frac{S_E}{(r-1)(s-1)}$	
总和	S_T	$rs-1$		

2.3　关于交互效应的双因素方差分析

与前面方法类似，记

$$\bar{x}=\frac{1}{rst}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}\ ,\quad \bar{x}_{ij\bullet}=\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}$$

$$\bar{x}_{i\bullet\bullet}=\frac{1}{st}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}\ ,\quad \bar{x}_{\bullet j\bullet}=\frac{1}{rt}\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{t}x_{ijk}$$

将全体数据对$\bar{x}$的偏差平方和

$$S_T=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(x_{ijk}-\bar{x})^2 \tag{24}$$

进行分解，可得

$$S_T=S_E+S_A+S_B+S_{AB} \tag{25}$$

其中

$$S_E=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(x_{ijk}-\bar{x}_{ij\bullet})^2\ ,\quad S_A=st\sum_{i=1}^{r}(\bar{x}_{i\bullet\bullet}-\bar{x})^2$$

$$S_B = rt\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{\bullet j\bullet} - \bar{x})^2\ ,\quad S_{AB} = t\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s}(\bar{x}_{ij\bullet} - \bar{x}_{i\bullet\bullet} - \bar{x}_{\bullet j\bullet} + \bar{x})^2$$

称 S_E 为误差平方和，S_A 为因素 A 的平方和（或行间平方和），S_B 为因素 B 的平方和（或列间平方和），S_{AB} 为交互作用的平方和（或格间平方和）。

可以证明，当 H_{03} 成立时

$$F_{AB} = \frac{\dfrac{S_{AB}}{(r-1)(s-1)}}{\dfrac{S_E}{rs(t-1)}} \sim F((r-1)(s-1), rs(t-1)) \qquad (26)$$

据此统计量，可以检验 H_{03}。

检验因子 A 和 B 的各个水平的效应是否有差异，与 2.2 中的检验是一样的。

将试验数据按上述分析、计算的结果排成表 7 的形式，称为双因素方差分析表。

表 7　关于交互效应的两因素方差分析表

方差来源	平方和	自由度	均方	F 比
因素 A	S_A	$r-1$	$\bar{S}_A = \dfrac{S_A}{r-1}$	$\dfrac{\bar{S}_A}{\bar{S}_E}$
因素 B	S_B	$s-1$	$\bar{S}_B = \dfrac{S_B}{s-1}$	$\dfrac{\bar{S}_B}{\bar{S}_E}$
交互效应	S_{AB}	$(r-1)(s-1)$	$\bar{S}_{AB} = \dfrac{S_{AB}}{(r-1)(s-1)}$	$\dfrac{\bar{S}_{AB}}{\bar{S}_E}$
误差	S_E	$rs(t-1)$	$\bar{S} = \dfrac{S_E}{rs(t-1)}$	
总和	S_T	$rst-1$		

2.4　Matlab 实现

统计工具箱中用 anova2 作双因素方差分析。命令为

```
p=anova2(x,reps)
```

其中 x 不同列的数据表示单一因素的变化情况，不同行中的数据表示另一因素的变化情况。如果每种行—列对（“单元”）有不止一个的观测值，则用参数 reps 来表明每个“单元”多个观测值的不同标号，即 reps 给出重复试验的次数 t。下面的矩阵中，列因素有 3 种水平，行因素有两种水平，但每组水平有两组样本，相应地用下标来标识：

$$\begin{bmatrix} x_{111} & x_{121} & x_{131} \\ x_{112} & x_{122} & x_{132} \\ x_{211} & x_{221} & x_{231} \\ x_{212} & x_{222} & x_{232} \end{bmatrix}$$

例 3　一种火箭使用了四种燃料、三种推进器，进行射程试验，对于每种燃料与每种推进器的组合作一次试验，得到试验数据如表 8。问各种燃料之间及各种推进器之间有无显著差异？

表 8　火箭试验数据

	B_1	B_2	B_3
A_1	58.2	56.2	65.3
A_2	49.1	54.1	51.6
A_3	60.1	70.9	39.2
A_4	75.8	58.2	48.7

解　记燃料为因素 A，它有 4 个水平，水平效应为 $\alpha_i, i=1,2,3,4$。推进器为因素 B，它有 3 个水平，水平效应为 $\beta_j, j=1,2,3$。我们在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验

$$H_1:\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$$

$$H_2:\beta_1=\beta_2=\beta_3=0$$

编写如下的 Matlab 程序：

```
x=[58.2 56.2   65.3
49.1   54.1   51.6
60.1   70.9   39.2
75.8   58.2   48.7];
[p,t,st]=anova2(x)
```

求得p=0.4491　0.7387，表明各种燃料和各种推进器之间的差异对于火箭射程无显著影响。

例 4　一火箭使用了 4 种燃料，3 种推进器作射程试验，每种燃料与每种推进器的组合各发射火箭 2 次，得到如表 9 结果。

表 9　火箭试验数据

	B_1	B_2	B_3
A_1	58.2, 52.6	56.2, 41.2	65.3, 60.8
A_2	49.1, 42.8	54.1, 50.5	51.6, 48.4
A_3	60.1, 58.3	70.9, 73.2	39.2, 40.7
A_4	75.8, 71.5	58.2, 51.0	48.7, 41.4

试在水平 0.05 下，检验不同燃料（因素 A）、不同推进器（因素 B）下的射程是否有显著差异？交互作用是否显著？

解　编写程序如下：

```
clc,clear
x0=[58.2,52.6 56.2,41.2  65.3,60.8
49.1,42.8  54.1,50.5  51.6,48.4
60.1,58.3  70.9,73.2  39.2,40.7
75.8,71.5  58.2,51.0  48.7,41.4];
x1=x0(:,1:2:5);x2=x0(:,2:2:6);
for i=1:4
  x(2*i-1,:)=x1(i,:);
  x(2*i,:)=x2(i,:);
end
[p,t,st]=anova2(x,2)
```

求得 p=0.0035　0.0260　0.0001，表明各试验均值相等的概率都为小概率，故可拒绝均值相等假设。即认为不同燃料（因素 A）、不同推进器（因素 B）下的射程有显著差异，交互作用也是显著的。

§3　正交试验设计与方差分析

前面介绍了一个或两个因素的试验，由于因素较少，我们可以对不同因素的所有可能的水平组合做试验，这叫做全面试验。当因素较多时，虽然理论上仍可采用前面的方法进行全面试验后再做相应的方差分析，但是在实际中有时会遇到试验次数太多的问题。如三因素四水平的问题，所有不同水平的组合有 $4^3=64$ 种，在每一种组合下只进行一次试验，也需做 64 次。如果考虑更多的因素及水平，则全面试验的次数可能会大得惊人。因此在实际应用中，对于多因素做全面试验是不现实的。于是我们考虑是否可以选择其中一部分组合进行试验，这就要用到试验设计方法选择合理的试验方案，使得试验次数不多，但也能得到比较满意的结果。

3.1　用正交表安排试验

正交表是一系列规格化的表格，每个表都有一个记号，如 $L_9(3^4)$，见表 10。

表 10　正交表 $L_9(3^4)$

试验号＼列号	1	2	3	4
1	1	1	3	2
2	2	1	1	1
3	3	1	2	3
4	1	2	2	1
5	2	2	3	3
6	3	2	1	2
7	1	3	1	3
8	2	3	2	2
9	3	3	3	1

从表 10 可见，$L_9(3^4)$ 有 9 行，4 列，表中由数字 1，2，3 组成。

正交表的特点：

（1）每列中数字出现的次数相同，如 $L_9(3^4)$ 表每列中数字 1，2，3 均出现三次。

（2）任取两列数字的搭配是均衡的，如 $L_9(3^4)$ 表里每两列中 $(1,1)$，$(1,2)$，…，$(3,3)$，九种组合各出现一次。

这种均衡性是一般正交表构造的特点，它使得根据正交表安排的试验，其试验结果具有很好的可比性，易于进行统计分析。

用正交表安排试验时，根据因素和水平个数的多少以及试验工作量的大小来考虑选用哪张正交表，下面举例说明。

例 5　为提高某种化学产品的转化率（%），考虑三个有关因素：反应温度 A（℃），反应时间 B（min）和使用催化剂的含量 C（%）。各因素选取三个水平，如表 11 所示。

表 11　转化率试验因素水平表

水平＼因素	温度 A	时间 B	催化剂含量 C
1	80	90	5

2	85	120	6
3	90	150	7

如果做全面试验，则需$3^3=27$次，若用正交表$L_9(3^4)$，仅做9次试验。将三个因素A,B,C分别放在$L_9(3^4)$表的任意三列上，如将A,B分别放在$L_9(3^4)$的第1，2列上，C放在$L_9(3^4)$的第4列上。将表中A,B,C所在的三列上的数字1，2，3分别用相应的因素水平去替代，得9次试验方案。以上工作称为表头设计。再将9次试验结果转化率数据列于表上（见表12）。

表12　转化率试验的正交表

因素 / 试验号	反应温度A	反应时间B	催化剂含量C	转化率
1	80（1）	90（1）	6（2）	31
2	85（2）	90（1）	5（1）	54
3	90（3）	90（1）	7（3）	38
4	80（1）	120（2）	5（1）	53
5	85（2）	120（2）	7（3）	49
6	90（3）	120（2）	6（2）	42
7	80（1）	150（3）	7（3）	57
8	85（2）	150（3）	6（2）	62
9	90（3）	150（3）	5（1）	64

解　我们这里不作统计分析，直接利用Matlab多因素方差分析的函数anovan进行求解，程序如下：

```
y=[31 54 38 53 49 42 57 62 64];
g1=[1 2 3  1 2 3 1 2 3];
g2=[1 1 1 2 2 2 3 3 3];
g3=[2 1 3 1 3 2 3 2 1];
[p,t,st]=anovan(y,{g1,g2,g3})
```

求得概率p=0.1364　0.0283　0.0714，可见因素B、C的各水平对指标值的影响有显著差异（显著性水平取0.1），而因素A的各水平对指标值的影响无显著差异。

习 题 十 一

1. 将抗生素注入人体会产生抗生素与血浆蛋白质结合的现象，以致减少了药效。表13列出5种常用的抗生素注入到牛的体内时，抗生素与血浆蛋白质结合的百分比。试在水平$\alpha=0.05$下检验这些百分比的均值有无显著的差异。设各总体服从正态分布，且方差相同。

表13

青霉素	四环素	链霉素	红霉素	氯霉素
29.6	27.3	5.8	21.6	29.2
24.3	32.6	6.2	17.4	32.8
28.5	30.8	11.0	18.3	25.0
32.0	34.8	8.3	19.0	24.2

2. 为分析4种化肥和3个小麦品种对小麦产量的影响，把一块试验田等分成36小块，对种子和化肥的每一种组合种植3小块田，产量如表14所示（单位公斤），问品种、化肥及二者的交互作用对小麦产量有无显著影响。

表 14

化肥		A_1	A_2	A_3	A_4
品种	B_1	173, 172, 173	174, 176, 178	177, 179, 176	172, 173, 174
	B_2	175, 173, 176	178, 177, 179	174, 175, 173	170, 171, 172
	B_3	177, 175, 176	174, 174, 175	174, 173, 174	169, 169, 170

3.（三因素方差分析）某集团为了研究商品销售点所在的地理位置、销售点处的广告和销售点的装潢这三个因素对商品的影响程度，选了三个位置（如市中心黄金地段、非中心的地段、城乡结合部），两种广告形式，两种装潢档次在四个城市进行了搭配试验。表15是销售量的数据，试在显著水平0.05下，检验不同地理位置、不同广告、不同装潢下的销售量是否有显著差异？

表15　三因素方差数据

城市号 / 水平组合	1	2	3	4
$A_1B_1C_1$	955	967	960	980
$A_1B_1C_2$	927	949	950	930
$A_1B_2C_1$	905	930	910	920
$A_1B_2C_2$	855	860	880	875
$A_2B_1C_1$	880	890	895	900
$A_2B_1C_2$	860	840	850	830
$A_2B_2C_1$	870	865	850	860
$A_2B_2C_2$	830	850	840	830
$A_3B_1C_1$	875	888	900	892
$A_3B_1C_2$	870	850	847	965
$A_3B_2C_1$	870	863	845	855
$A_3B_2C_2$	821	842	832	848

第十二章　回归分析

前面我们讲过曲线拟合问题。曲线拟合问题的特点是，根据得到的若干有关变量的一组数据，寻找因变量与（一个或几个）自变量之间的一个函数，使这个函数对那组数据拟合得最好。通常，函数的形式可以由经验、先验知识或对数据的直观观察决定，要作的工作是由数据用最小二乘法计算函数中的待定系数。从计算的角度看，问题似乎已经完全解决了，还有进一步研究的必要吗?

从数理统计的观点看，这里涉及的都是随机变量，我们根据一个样本计算出的那些系数，只是它们的一个（点）估计，应该对它们作区间估计或假设检验，如果置信区间太大，甚至包含了零点，那么系数的估计值是没有多大意义的。另外也可以用方差分析方法对模型的误差进行分析，对拟合的优劣给出评价。简单地说，回归分析就是对拟合问题作的统计分析。

具体地说，回归分析在一组数据的基础上研究这样几个问题：

（i）建立因变量 y 与自变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$ 之间的回归模型（经验公式）；

（ii）对回归模型的可信度进行检验；

（iii）判断每个自变量 $x_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 对 y 的影响是否显著；

（iv）诊断回归模型是否适合这组数据；

（v）利用回归模型对 y 进行预报或控制。

§1　数据表的基础知识

1.1　样本空间

在本章中，我们所涉及的均是**样本点×变量**类型的数据表。如果有 m 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_m$，对它们分别进行了 n 次采样（或观测），得到 n 个样本点

$$(x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}),\quad i = 1,2,\cdots,n$$

则所构成的数据表 X 可以写成一个 $n \times m$ 维的矩阵。

$$X = (x_{ij})_{n\times m} = \begin{bmatrix} e_1^T \\ \vdots \\ e_n^T \end{bmatrix}$$

式中 $e_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im})^T \in R^m$，$i = 1,2,\cdots,n$，$e_i$ 被称为第 i 个样本点。

样本的均值为

$$\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_m),\quad \bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij},\quad j = 1,2,\cdots,m$$

样本协方差矩阵及样本相关系数矩阵分别为

$$S = (s_{ij})_{m\times m} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(e_k - \bar{x})(e_k - \bar{x})^T$$

$$R = (r_{ij})_{m\times m} = \left(\frac{s_{ij}}{\sqrt{s_{ii}s_{jj}}}\right)$$

其中

$$s_{ij}=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_{ki}-\bar{x}_i)(x_{kj}-\bar{x}_j)$$

1.2　数据的标准化处理

（1）数据的中心化处理

数据的中心化处理是指平移变换，即

$$x_{ij}^{*}=x_{ij}-\bar{x}_j,\ \ i=1,2,\cdots,n;\ \ j=1,2,\cdots,m$$

该变换可以使样本的均值变为 0，而这样的变换既不改变样本点间的相互位置，也不改变变量间的相关性。但变换后，却常常有许多技术上的便利。

（2）数据的无量纲化处理

在实际问题中，不同变量的测量单位往往是不一样的。为了消除变量的量纲效应，使每个变量都具有同等的表现力，数据分析中常用的消量纲的方法，是对不同的变量进行所谓的压缩处理，即使每个变量的方差均变成 1，即

$$x_{ij}^{*}=x_{ij}/s_j$$

其中 $s_j=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2}$ 。

还可以有其它消量纲的方法，如

$$x_{ij}^{*}=x_{ij}/\max_i\{x_{ij}\},\ \ x_{ij}^{*}=x_{ij}/\min_i\{x_{ij}\}$$

$$x_{ij}^{*}=x_{ij}/\bar{x}_j,\ \ x_{ij}^{*}=x_{ij}/(\max_i\{x_{ij}\}-\min_i\{x_{ij}\})$$

（3）标准化处理

所谓对数据的标准化处理，是指对数据同时进行中心化－压缩处理，即

$$x_{ij}^{*}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{s_j},\ \ i=1,2,\cdots,n,\ \ j=1,2,\cdots,m。$$

§2　一元线性回归

2.1　模型

一元线性回归的模型为

$$y=\beta_0+\beta_1x+\varepsilon,\qquad(1)$$

式中，β_0,β_1 为回归系数，ε 是随机误差项，总是假设 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2)$，则随机变量 $y\sim N(\beta_0+\beta_1x,\sigma^2)$。

若对 y 和 x 分别进行了 n 次独立观测，得到以下 n 对观测值

$$(y_i,x_i),\ \ i=1,2,\cdots,n\qquad(2)$$

这 n 对观测值之间的关系符合模型

$$y_i=\beta_0+\beta_1x+\varepsilon_i,\ \ i=1,2,\cdots,n\qquad(3)$$

这里，x_i 是自变量在第 i 次观测时的取值，它是一个非随机变量，并且没有测量误差。对应于 x_i，y_i 是一个随机变量，它的随机性是由 ε_i 造成的。$\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2)$，对于不同的观测，当 $i\neq j$ 时，ε_i 与 ε_j 是相互独立的。

2.2　最小二乘估计方法

2.2.1　最小二乘法

用最小二乘法估计 β_0,β_1 的值，即取 β_0,β_1 的一组估计值 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$，使 y_i 与 $\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x$ 的误差平方和达到最小。若记

$$Q(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)^2$$

则

$$Q(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1)=\min_{\beta_0,\beta_1}Q(\beta_0,\beta_1)=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1 x_i)^2$$

显然 $Q(\beta_0,\beta_1)\geq 0$，且关于 β_0,β_1 可微，则由多元函数存在极值的必要条件得

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_0}=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta_1}=-2\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\beta_0-\beta_1 x_i)=0$$

整理后，得到下面的方程组

$$\begin{cases} n\beta_0+\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i \\ \beta_0\sum_{i=1}^{n}x_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i \end{cases} \tag{4}$$

此方程组称为正规方程组，求解可以得到

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \\ \hat{\beta}_0=\bar{y}-\hat{\beta}_1\bar{x} \end{cases} \tag{5}$$

称 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ 为 β_0,β_1 的最小二乘估计，其中，$\bar{x},\bar{y}$ 分别是 x_i 与 y_i 的样本均值，即

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\quad \bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i$$

关于 β_1 的计算公式还有一个更直观的表示方法，即

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

$$=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\frac{s_y}{s_x}r_{xy}$$

式中 $s_x^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$，$s_y^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$，$r_{xy}$ 是 x 与 y 的样本相关系数。

显然，当 x_i,y_i 都是标准化数据时，则有 $\bar{x}=0$，$\bar{y}=0$，$s_x=1$，$s_y=1$。所以，有

$$\hat{\beta}_0=0,\quad \hat{\beta}_1=r_{xy}$$

回归方程为

$$\hat{y}=r_{xy}x$$

由上可知，对标准化数据，$\hat{\beta}_1$ 可以表示 y 与 x 的相关程度。

2.2.2 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1$ 的性质

作为一个随机变量，$\hat{\beta}_1$ 有以下性质。

1．$\hat{\beta}_1$ 是 y_i 的线性组合，它可以写成

$$\hat{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n}k_iy_i \tag{6}$$

式中，k_i 是固定的常量，$k_i=\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$。

证明　事实上

$$\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})y_i-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

由于

$$\bar{y}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=\bar{y}(n\bar{x}-n\bar{x})=0$$

所以

$$\hat{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}y_i$$

2．因为 $\hat{\beta}_1$ 是随机变量 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的线性组合，而 y_i 是相互独立、且服从正态分布的，所以，$\hat{\beta}_1$ 的抽样分布也服从正态分布。

3．点估计量 $\hat{\beta}_1$ 是总体参数 β_1 的无偏估计，有

$$E(\hat{\beta}_1)=E\left(\sum_{i=1}^{n}k_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i E(y_i)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}k_i E(\beta_0+\beta_1 x_i)=\beta_0\sum_{i=1}^{n}k_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}k_i x_i$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}k_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}k_i x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}x_i=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=1$$

所以

$$E(\hat{\beta}_1)=\beta_1$$

4．估计量 $\hat{\beta}_1$ 的方差为

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2} \qquad (7)$$

这是因为

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)=\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n}k_i y_i\right)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\mathrm{Var}(y_i)=\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma^2=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}k_i^2$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}k_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}\right)^2=\frac{1}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\right]^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$$

因此，式（7）得证。

5．对于总体模型中的参数 β_1，在它的所有线性无偏估计量中，最小二乘估计量 $\hat{\beta}_1$ 具有最小的方差。

记任意一个线性估计量

$$\tilde{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n}c_i y_i$$

式中 c_i 是任意常数，c_i 不全为零，$i=1,2,\cdots,n$。要求 $\tilde{\beta}_1$ 是 β_1 的无偏估计量，即

$$E(\tilde{\beta}_1)=\sum_{i=1}^{n}c_i E(y_i)=\beta_1$$

另一方面，由于 $E(y_i)=\beta_0+\beta_1 x_i$，所以又可以写成

$$E(\tilde{\beta}_1)=\sum_{i=1}^{n}c_i(\beta_0+\beta_1x_i)=\beta_0\sum_{i=1}^{n}c_i+\beta_1\sum_{i=1}^{n}c_ix_i$$

为保证无偏性，c_i 要满足下列限制

$$\sum_{i=1}^{n}c_i=0,\ \sum_{i=1}^{n}c_ix_i=0$$

定义 $c_i=k_i+d_i$，其中 k_i 是式（6）中的组合系数，d_i 是任意常数，则

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_1)=\sigma^2\sum_{i=1}^{n}c_i^2=\sigma^2\left(\sum_{i=1}^{n}k_i^2+\sum_{i=1}^{n}d_i^2+2\sum_{i=1}^{n}k_id_i\right)$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}k_id_i=\sum_{i=1}^{n}k_i(c_i-k_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{x_i-\bar{x}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}-\sum_{i=1}^{n}k_i^2$$

$$=\frac{\sum_{i=1}^{n}c_ix_i-\bar{x}\sum_{i=1}^{n}c_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}-\sum_{i=1}^{n}k_i^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}-\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=0$$

而

$$\sigma^2\sum_{i=1}^{n}k_i^2=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)$$

所以

$$\mathrm{Var}(\tilde{\beta}_1)=\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)+\sigma^2\sum_{i=1}^{n}d_i^2$$

$\sum_{i=1}^{n}d_i^2$ 的最小值为零，所以，当 $\sum_{i=1}^{n}d_i^2=0$ 时，$\tilde{\beta}_1$ 的方差最小。但是，只有当 $d_i\equiv 0$ 时，即 $c_i\equiv k_i$ 时，才有 $\sum_{i=1}^{n}d_i^2=0$。所以，最小二乘估计量 $\hat{\beta}_1$ 在所有无偏估计量中具有最小的方差。

同理，可以得出相应于点估计量 $\hat{\beta}_0$ 的统计性质。对于一元线性正态误差回归模型来说，最小二乘估计量 $\hat{\beta}_0$ 是 y_i 的线性组合，所以，它的抽样分布也是正态的。它是总体参数 β_0 的无偏估计量，即

$$E(\hat{\beta}_0)=\beta_0$$

同样可以证明

$$Var(\hat{\beta}_0)=\sigma^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}]\qquad(8)$$

且 $\hat{\beta}_0$ 是 β_0 的线性无偏的最小方差估计量。

2.2.3　其它性质

用最小二乘法拟合的回归方程还有一些值得注意的性质：

1．残差和为零。

残差

$$e_i = y_i - \hat{y}_i，\ i = 1,2,\cdots,n$$

由第一个正规方程，得

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_1) = 0 \tag{9}$$

2．拟合值 $\hat{y}_i$ 的平均值等于观测值 y_i 的平均值，即

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y} \tag{10}$$

按照第一正规方程，有

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) = \sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i$$

3．当第 i 次试验的残差以相应的自变量取值为权重时，其加权残差和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0 \tag{11}$$

这个结论由第二个正规方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i (y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i) = 0$ 即可得出。

4．当第 i 次试验的残差以相应的因变量的拟合值为权重时，其加权残差和为零，即

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{y}_i e_i = 0 \tag{12}$$

这是因为

$$\sum_{i=1}^{n} (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i) e_i = \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} e_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = 0$$

5．最小二乘回归线总是通过观测数据的重心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 的。

事实上，当自变量取值为 $\bar{x}$ 时，由式（5）

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

所以

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = (\bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}) + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}$$

2.3　拟合效果分析

当根据一组观测数据得到最小二乘拟合方程后，必须考察一下，是否真的能由所得

的模型（$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$）来较好地拟合观测值 y_i？用 $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ 能否较好地反映（或者说解释）y_i 值的取值变化？回归方程的质量如何？误差多大？对这些，都必须予以正确的评估和分析。

2.3.1　残差的样本方差

记残差

$$e_i = y_i - \hat{y}_i,\ \ i = 1,2,\cdots,n$$

残差的样本均值为

$$\bar{e} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i) = 0$$

残差的样本方差为

$$MSE = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(e_i - \bar{e})^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

由于有 $\sum_{i=1}^{n}e_i = 0$ 和 $\sum_{i=1}^{n}x_i e_i = 0$ 的约束，所以，残差平方和有 $(n-2)$ 个自由度。可以证明，在对 $\sum_{i=1}^{n}e_i^2$ 除以其自由度 $(n-2)$ 后得到的 MSE，是总体回归模型中 $\sigma^2 = Var(\varepsilon_i)$ 的无偏估计量。记

$$S_e = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}e_i^2} \qquad (13)$$

一个好的拟合方程，其残差总和应越小越好。残差越小，拟合值与观测值越接近，各观测点在拟合直线周围聚集的紧密程度越高，也就是说，拟合方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 解释 y 的能力越强。

另外，当 S_e 越小时，还说明残差值 e_i 的变异程度越小。由于残差的样本均值为零，所以，其离散范围越小，拟合的模型就越为精确。

2.3.2　判定系数（拟合优度）

对应于不同的 x_i 值，观测值 y_i 的取值是不同的。建立一元线性回归模型的目的，就是试图以 x 的线性函数（$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$）来解释 y 的变异。那么，回归模型 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ 究竟能以多大的精度来解释 y 的变异呢？又有多大部分是无法用这个回归方程来解释的呢？

$y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的变异程度可采用样本方差来测度，即

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

根据式（10），拟合值 $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_n$ 的均值也是 $\bar{y}$，其变异程度可以用下式测度

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

下面看一下 s^2 与 $\hat{s}^2$ 之间的关系，有

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+2\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\bar{y})$$

由于

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)(\hat{y}_i-\bar{y})=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_i-\bar{y})$$

$$=\hat{\beta}_0\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}x_i(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)-\bar{y}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1x_i)=0$$

因此，得到正交分解式为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \qquad (14)$$

记

$SST=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$，这是原始数据 y_i 的总变异平方和，其自由度为 $df_T=n-1$；

$SSR=\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i-\bar{y})^2$，这是用拟合直线 $\hat{y}_i=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_i$ 可解释的变异平方和，其自由度为 $df_R=1$；

$SSE=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2$，这是残差平方和，其的自由度为 $df_E=n-2$。

所以，有

$$SST=SSR+SSE,\quad df_T=df_R+df_E$$

从上式可以看出，y 的变异是由两方面的原因引起的；一是由于 x 的取值不同，而给 y 带来的系统性变异；另一个是由除 x 以外的其它因素的影响。

注意到对于一个确定的样本（一组实现的观测值），SST 是一个定值。所以，可解释变异 SSR 越大，则必然有残差 SSE 越小。这个分解式可同时从两个方面说明拟合方程的优良程度：

（1）SSR 越大，用回归方程来解释 y_i 变异的部分越大，回归方程对原数据解释得越好；

（2）SSE 越小，观测值 y_i 绕回归直线越紧密，回归方程对原数据的拟合效果越好。

因此，可以定义一个测量标准来说明回归方程对原始数据的拟合程度，这就是所谓的判定系数，有些文献上也称之为拟合优度。

判定系数是指可解释的变异占总变异的百分比，用 R^2 表示，有

$$R^2=\frac{SSR}{SST}=(1-\frac{SSE}{SST}) \qquad (15)$$

从判定系数的定义看，R^2 有以下简单性质：

（1）$0\le R^2\le 1$；

（2）当 $R^2=1$ 时，有 $SSR=SST$，也就是说，此时原数据的总变异完全可以由拟合值的变异来解释，并且残差为零（$SSE=0$），即拟合点与原数据完全吻合；

（3）当 $R^2=0$ 时，回归方程完全不能解释原数据的总变异，y 的变异完全由与 x

无关的因素引起，这时 $SSE = SST$ 。

测定系数时一个很有趣的指标：一方面它可以从数据变异的角度指出可解释的变异占总变异的百分比，从而说明回归直线拟合的优良程度；另一方面，它还可以从相关性的角度，说明原因变量 y 与拟合变量 $\hat{y}$ 的相关程度，从这个角度看，拟合变量 $\hat{y}$ 与原变量 y 的相关度越大，拟合直线的优良度就越高。

看下面的式子

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i + e_i - \bar{y})(\hat{y}_i - \bar{y})\right]^2}{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2 \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y})^2} = r^2(y, \hat{y}) \qquad (16)$$

在推导中，注意有

$$\sum_{i=1}^{n} e_i(\hat{y}_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} e_i \hat{y}_i - \bar{y}\sum_{i=1}^{n} e_i = 0$$

所以， R^2 又等于 y 与拟合变量 $\hat{y}$ 的相关系数平方。

还可以证明， $\sqrt{R^2}$ 等于 y 与自变量 x 的相关系数，而相关系数的正、负号与回归系数 $\hat{\beta}_1$ 的符号相同。

2.4 显著性检验

2.4.1 回归模型的线性关系检验

在拟合回归方程之前，我们曾假设数据总体是符合线性正态误差模型的，也就是说，y 与 x 之间的关系是线性关系，即

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1,2,\cdots,n$$

然而，这种假设是否真实，还需进行检验。

对于一个实际观测的样本，虽然可以用判定系数 R^2 说明 y 与 $\hat{y}$ 的相关程度，但是，样本测度指标具有一定的随机因素，还不足以肯定 y 与 x 的线性关系。

假设 y 与 x 之间存在线性关系，则总体模型为

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

如果 $\beta_1 \neq 0$，则称这个模型为全模型。

用最小二乘法拟合全模型，并求出误差平方和为

$$SSE = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

现给出假设 $H_0 : \beta_1 = 0$。如果 H_0 假设成立，则

$$y_i = \beta_0 + \varepsilon_i$$

这个模型被称为选模型。用最小二乘法拟合这个模型，则有

$$\hat{\beta}_1 = 0$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_0 \bar{x} = \bar{y}$$

因此，对所有的 $i = 1,2,\cdots,n$，有

$$\hat{y}_i \equiv \bar{y}$$

该拟合模型的误差平方和为

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2 = SST$$

因此，有

$$SSE \le SST$$

这就是说，全模型的误差总是小于（或等于）选模型的误差的。其原因是在全模型中有较多的参数，可以更好地拟合数据。

假若在某个实际问题中，全模型的误差并不比选模型的误差小很多的话，这说明 H_0 假设成立，即 β_1 近似于零。因此，差额 $(SST-SSE)$ 很少时，表明 H_0 成立。若这个差额很大，说明增加了 x 的线性项后，拟合方程的误差大幅度减少，则应否定 H_0，认为总体参数 β_1 显著不为零。

假设检验使用的统计量为

$$F = \frac{SSR/1}{SSE/(n-2)} = \frac{MSR}{MSE}$$

式中

$$MSR = SSR/df_R = SSR/1$$

$$MSE = SSE/df_E = SSE/(n-2)$$

若假设 $H_0:\beta_1=0$ 成立，由于 $SST=SSR+SSE$，则 SSE/σ^2 与 SSR/σ^2 是独立的随机变量，且

$$SSE/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)，\ SSR/\sigma^2 \sim \chi^2(1)$$

这时

$$F = \frac{MSR}{MSE} \sim F(1,n-2)$$

综上所述，为了检验是否可以用 x 的线性方程式来解释 y，可以进行下面的统计检验。记 y_i 关于 x_i 的总体回归系数为 β_1，则 F 检验的原假设 H_0 与备则假设 H_1 分别是

$$H_0:\beta_1=0，\ H_1:\beta_1\ne 0$$

检验的统计量为

$$F = \frac{MSR}{MSE} \sim F(1,n-2) \qquad (17)$$

对于检验水平 α，按自由度（$n_1=1$，$n_2=n-2$）查 F 分布表，得到拒绝域的临界值 $F_\alpha(1,n-2)$。决策规则为

若 $F \le F_\alpha(1,n-2)$，则接受 H_0 假设，这时认为 β_1 显著为零，无法用 x 的线性关系式来解释 y。

若 $F > F_\alpha(1,n-2)$，则否定 H_0，接受 H_1。这时认为 β_1 显著不为零，可以用 x 的线性关系来解释 y。习惯上说，线性回归方程的 F 检验通过了。

需要注意的是，即使 F 检验通过了，也不说明

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

就是一个恰当的回归模型，事实上，当 H_0 假设被拒绝后，只能说明 y 与 x 之间存在显著的线性关系，但很有可能在模型中还包括更多的回归变量，而不仅仅是一个回归变量 x 。

一般地，回归方程的假设检验包括两个方面：一个是对模型的检验，即检验自变量与因变量之间的关系能否用一个线性模型来表示，这是由 F 检验来完成的；另一个检验是关于回归参数的检验，即当模型检验通过后，还要具体检验每一个自变量对因变量的影响程度是否显著。这就是下面要讨论的 t 检验。在一元线性分析中，由于自变量的个数只有一个，这两种检验是统一的，它们的效果完全是等价的。但是，在多元线性回归分析中，由于变量的个数只有一个，这两种检验是统一的，它们的效果完全是等价的。但是，在多元线性回归分析中，这两个建议的意义是不同的。从逻辑上说，一般常在 F 检验通过后，再进一步进行 t 建议。

2.4.2　回归系数的显著性建议

回归参数的建议是考察每一个自变量对因变量的影响是否显著。换句话说，就是要检验每一个总体参数是否显著不为零。

首先看对 $\beta_1 = 0$ 的检验。 β_1 代表 x_i 变化一个单位对 y_i 的影响程度。对 β_1 的检验就是要看这种影响程度与零是否有显著差异。

由于

$$\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2})$$

$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$ 的点估计为

$$S^2(\hat{\beta}_1) = \frac{MSE}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

容易证明统计量

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S(\hat{\beta}_1)} \sim t(n-2)$$

事实上，由于

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S(\hat{\beta}_1)} = \frac{(\hat{\beta}_1 - \beta_1)/\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)}}{S(\hat{\beta}_1)/\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)}}$$

其分子 $(\hat{\beta}_1 - \beta_1)/\sqrt{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)}$ 服从标准正态分布，而分母项有

$$\frac{S^2(\hat{\beta}_1)}{\mathrm{Var}(\hat{\beta}_1)} = \frac{MSE/\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2/\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} = \frac{MSE}{\sigma^2} = \frac{SSE}{\sigma^2(n-2)}$$

已知 $SSE/\sigma^2 \sim \chi^2(n-2)$，所以

$$\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{S(\hat{\beta}_1)}\sim t(n-2)$$

$\hat{\beta}_1$ 的抽样分布清楚后，可以进行 β_1 是否显著为零的检验。

$H_0:\beta_1=0$， $H_1:\beta_1\neq 0$

检验统计量为

$$t_1=\frac{\hat{\beta}_1}{S(\hat{\beta}_1)}$$

检验统计量 t_1 在 $\beta_1=0$ 假设为真时，服从自由度为 $(n-2)$ 的 t 分布。

对于给定的检验水平 α，则通过 t 分布表可查到统计量 t_1 的临界值 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$。决策规则是：

若 $|t_1|\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，则接受 H_0，认为 β_1 显著为零；

若 $|t_1|> t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，则拒绝 H_0，认为 β_1 显著不为零。

当拒绝了 H_0，认为 β_1 显著不为零时，又称 β_1 通过了 t 检验。

另一方面，由于

$$P\left\{\left|\frac{\hat{\beta}_1-\beta_1}{S(\hat{\beta}_1)}\right|< t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right\}=1-\alpha$$

还可以确定 β_1 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\hat{\beta}_1-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)S(\hat{\beta}_1)\le\beta_1\le\hat{\beta}_1+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)S(\hat{\beta}_1) \qquad (18)$$

同样地，也可以对总体参数 β_0 进行显著性检验，并且求出它的置信区间。它的最小二乘估计量 $\hat{\beta}_0$ 的抽样分布为正态分布，即

$$\hat{\beta}_0\sim N(\beta_0,\sigma^2[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}])$$

$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0)$ 的估计量为

$$S^2(\hat{\beta}_0)=MSE[\frac{1}{n}+\frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}]$$

可以推出

$$\frac{\hat{\beta}_0-\beta_0}{S(\hat{\beta}_0)}\sim t(n-2)$$

为检验 β_0 是否显著为零，提出假设

$H_0:\beta_0=0$， $H_1:\beta_0\neq 0$

检验统计量为

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_0}{S(\hat{\beta}_0)}$$

在$\beta_0 = 0$时，检验统计量t_0服从自由度为$(n-2)$的t分布。

对于给定的检验水平α，则通过t分布表可查到统计量t_0的临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$。决策准则为：

若$|t_0| \le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，则接受$H_0$，认为$\beta_0$显著为零；

若$|t_0| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)$，则拒绝$H_0$，认为$\beta_0$显著不为零。

此外，根据

$$P\left\{\left|\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S(\hat{\beta}_0)}\right| < t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)\right\} = 1-\alpha$$

还可以确定β_0的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\hat{\beta}_0 - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)S(\hat{\beta}_0) \le \beta_0 \le \hat{\beta}_0 + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-2)S(\hat{\beta}_0) \tag{19}$$

§3 多元线性回归

3.1 模型

多元线性回归分析的模型为

$$\begin{cases} y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_m x_m + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \end{cases} \tag{20}$$

式中$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m, \sigma^2$都是与$x_1, x_2, \cdots, x_m$无关的未知参数，其中$\beta_0, \beta_1, \cdots, \beta_m$称为回归系数。

现得到n个独立观测数据$(y_i, x_{i1}, \cdots, x_{im})$，$i = 1, \cdots, n, n > m$，由（20）得

$$\begin{cases} y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_m x_{im} + \varepsilon_i \\ \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{21}$$

记

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{22}$$

$$\varepsilon = [\varepsilon_1 \quad \cdots \quad \varepsilon_n]^T, \quad \beta = [\beta_0 \quad \beta_1 \quad \cdots \quad \beta_m]^T$$

（20）表为

$$\begin{cases} Y = X\beta + \varepsilon \\ \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 E_n) \end{cases} \tag{23}$$

其中E_n为n阶单位矩阵。

3.2　参数估计

模型（20）中的参数 $\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_m$ 仍用最小二乘法估计，即应选取估计值 $\hat{\beta}_j$，使当 $\beta_j=\hat{\beta}_j$ 时，$j=0,1,2,\cdots,m$ 时，误差平方和

$$Q=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_{i1}-\cdots-\beta_mx_{im})^2 \tag{24}$$

达到最小。为此，令

$$\frac{\partial Q}{\partial\beta_j}=0,\quad j=0,1,2,\cdots,n$$

得

$$\begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial\beta_0}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_{i1}-\cdots-\beta_mx_{im})=0\\ \dfrac{\partial Q}{\partial\beta_j}=-2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\beta_0-\beta_1x_{i1}-\cdots-\beta_mx_{im})x_{ij}=0,\quad j=1,2,\cdots,m\end{cases} \tag{25}$$

经整理化为以下正规方程组

$$\begin{cases}\beta_0n+\beta_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}+\beta_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i2}+\cdots+\beta_m\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\\ \beta_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}+\beta_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}^2+\beta_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}x_{i2}+\cdots+\beta_m\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}x_{im}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}y_i\\ \beta_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}+\beta_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}x_{i1}+\beta_2\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}x_{i2}+\cdots+\beta_m\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{im}y_i\end{cases} \tag{26}$$

正规方程组的矩阵形式为

$$X^TX\beta=X^TY \tag{27}$$

当矩阵 X 列满秩时，X^TX 为可逆方阵，（27）式的解为

$$\hat{\beta}=(X^TX)^{-1}X^TY \tag{28}$$

将 $\hat{\beta}$ 代回原模型得到 y 的估计值

$$\hat{y}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_1+\cdots+\hat{\beta}_mx_m \tag{29}$$

而这组数据的拟合值为 $\hat{Y}=X\hat{\beta}$，拟合误差 $e=Y-\hat{Y}$ 称为残差，可作为随机误差 ε 的估计，而

$$Q=\sum_{i=1}^{n}e_i^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-\hat{y}_i)^2 \tag{30}$$

为残差平方和（或剩余平方和），即 $Q(\hat{\beta})$。

3.3　统计分析

不加证明地给出以下结果：

（i）$\hat{\beta}$ 是 β 的线性无偏最小方差估计。指的是 $\hat{\beta}$ 是 Y 的线性函数；$\hat{\beta}$ 的期望等于 β；在 β 的线性无偏估计中，$\hat{\beta}$ 的方差最小。

（ii）$\hat{\beta}$ 服从正态分布

$$\hat{\beta} \sim N(\beta, \sigma^2 (X^T X)^{-1}) \tag{31}$$

记 $(X^T X)^{-1} = (c_{ij})_{n\times n}$。

（iii）对残差平方和 Q，$EQ = (n-m-1)\sigma^2$，且

$$\frac{Q}{\sigma^2} \sim \chi^2 (n-m-1) \tag{32}$$

由此得到 σ^2 的无偏估计

$$s^2 = \frac{Q}{n-m-1} = \hat{\sigma}^2 \tag{33}$$

s^2 是剩余方差（残差的方差），s 称为剩余标准差。

（iv）对总平方和 $SST = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$ 进行分解，有

$$SST = Q + U，\ U = \sum_{i=1}^{n} (\hat{y}_i - \bar{y})^2 \tag{34}$$

其中 Q 是由（24）定义的残差平方和，反映随机误差对 y 的影响，U 称为回归平方和，反映自变量对 y 的影响。上面的分解中利用了正规方程组。

3.4　回归模型的假设检验

因变量 y 与自变量 $x_1, \cdots, x_m$ 之间是否存在如模型（20）所示的线性关系是需要检验的，显然，如果所有的 $|\hat{\beta}_j|$ $(j = 1, \cdots, m)$ 都很小，y 与 $x_1, \cdots, x_m$ 的线性关系就不明显，所以可令原假设为

$$H_0 : \beta_j = 0 (j = 1, \cdots, m)$$

当 H_0 成立时由分解式（34）定义的 U, Q 满足

$$F = \frac{U/m}{Q/(n-m-1)} \sim F(m, n-m-1) \tag{35}$$

在显著性水平 α 下有上 α 分位数 $F_\alpha(m, n-m-1)$，若 $F < F_\alpha(m, n-m-1)$，接受 H_0；否则，拒绝。

注意　接受 H_0 只说明 y 与 $x_1, \cdots, x_m$ 的线性关系不明显，可能存在非线性关系，如平方关系。

还有一些衡量 y 与 $x_1, \cdots, x_m$ 相关程度的指标，如用回归平方和在总平方和中的比值定义复判定系数

$$R^2 = \frac{U}{S} \tag{36}$$

$R = \sqrt{R^2}$ 称为复相关系数，R 越大，y 与 $x_1, \cdots, x_m$ 相关关系越密切，通常，R 大于 0.8（或 0.9）才认为相关关系成立。

3.5　回归系数的假设检验和区间估计

当上面的 H_0 被拒绝时，β_j 不全为零，但是不排除其中若干个等于零。所以应进

一步作如下 m 个检验 $(j=0,1,\cdots,m)$：

$$H_0^{(j)}:\beta_j=0$$

由(31)式，$\hat{\beta}_j\sim N(\beta_j,\sigma^2c_{jj})$，$c_{jj}$ 是 $(X^TX)^{-1}$ 中的第 (j,j) 元素，用 s^2 代替 σ^2，由（31）~（33）式，当 $H_0^{(j)}$ 成立时

$$t_j=\frac{\hat{\beta}_j/\sqrt{c_{jj}}}{\sqrt{Q/(n-m-1)}}\sim t(n-m-1) \tag{37}$$

对给定的 α，若 $|t_j|<t_{\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)$，接受 $H_0^{(j)}$；否则，拒绝。

（37）式也可用于对 β_j 作区间估计（ $j=0,1,\cdots,m$ ），在置信水平 $1-\alpha$ 下，β_j 的置信区间为

$$[\hat{\beta}_j-t_{\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)s\sqrt{c_{jj}},\hat{\beta}_j+t_{\frac{\alpha}{2}}(n-m-1)s\sqrt{c_{jj}}] \tag{38}$$

其中 $s=\sqrt{\frac{Q}{n-m-1}}$。

3.6　利用回归模型进行预测

当回归模型和系数通过检验后，可由给定的 $x_0=(x_{01},\cdots,x_{0m})$ 预测 y_0，y_0 是随机的，显然其预测值（点估计）为

$$\hat{y}_0=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1x_{01}+\cdots+\hat{\beta}_mx_{0m} \tag{39}$$

给定 α 可以算出 y_0 的预测区间（区间估计），结果较复杂，但当 n 较大且 x_{0i} 接近平均值 $\overline{x}_i$ 时，y_0 的预测区间可简化为

$$[\hat{y}_0-z_{\frac{\alpha}{2}}s,\hat{y}_0+z_{\frac{\alpha}{2}}s] \tag{40}$$

其中 $z_{\frac{\alpha}{2}}$ 是标准正态分布的上 $\frac{\alpha}{2}$ 分位数。

对 y_0 的区间估计方法可用于给出已知数据残差 $e_i=y_i-\hat{y}_i\ (i=1,\cdots,n)$ 的置信区间，e_i 服从均值为零的正态分布，所以若某个 e_i 的置信区间不包含零点，则认为这个数据是异常的，可予以剔除。

§4　Matlab 中的回归分析

4.1　多元线性回归

Matlab 统计工具箱用命令 regress 实现多元线性回归，用的方法是最小二乘法，用法是：

```
b=regress(Y,X)
```

其中 Y,X 为按（22）式排列的数据，b 为回归系数估计值 $\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1,\cdots,\hat{\beta}_m$。

```
[b,bint,r,rint,stats]=regress(Y,X,alpha)
```

这里 Y,X 同上，alpha 为显著性水平（缺省时设定为 0.05），b,bint 为回归系数估计值和它们的置信区间，r,rint 为残差（向量）及其置信区间，stats 是用于检验回归模型的统计量，有四个数值，第一个是 R^2（见（36）式），第二个是 F（见（35）式），第三个

是与 F 对应的概率 p， $p<\alpha$ 拒绝 H_0，回归模型成立，第四个是残差的方差 s^2（见（33）式）。

残差及其置信区间可以用 rcoplot(r,rint)画图。

例 1　合金的强度 y 与其中的碳含量 x 有比较密切的关系，今从生产中收集了一批数据如下表 1。

表 1

x	0.10	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18
y	42.0	41.5	45.0	45.5	45.0	47.5	49.0	55.0	50.0

试先拟合一个函数 $y(x)$，再用回归分析对它进行检验。

解　先画出散点图：

```
x=0.1:0.01:0.18;
y=[42,41.5,45.0,45.5,45.0,47.5,49.0,55.0,50.0];
plot(x,y,'+')
```

可知 y 与 x 大致上为线性关系。

设回归模型为

$$y=\beta_0+\beta_1 x \tag{41}$$

用 regress 和 rcoplot 编程如下：

```
clc,clear
x1=[0.1:0.01:0.18]';
y=[42,41.5,45.0,45.5,45.0,47.5,49.0,55.0,50.0]';
x=[ones(9,1),x1];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x);
b,bint,stats,rcoplot(r,rint)
```

得到

```
b =27.4722    137.5000
bint =18.6851      36.2594
       75.7755    199.2245
stats =0.7985    27.7469      0.0012      4.0883
```

即 $\hat{\beta}_0=27.4722$，$\hat{\beta}_1=137.5000$，$\hat{\beta}_0$ 的置信区间是[18.6851,36.2594]，$\hat{\beta}_1$ 的置信区间是[75.7755,199.2245]；$R^2=0.7985$，$F=27.7469$，$p=0.0012$，$s^2=4.0883$。

可知模型（41）成立。

观察命令 rcoplot(r,rint)所画的残差分布，除第 8 个数据外其余残差的置信区间均包含零点，第 8 个点应视为异常点，将其剔除后重新计算，可得

```
b =30.7820      109.3985
bint =26.2805      35.2834
       76.9014    141.8955
stats =0.9188    67.8534      0.0002      0.8797
```

应该用修改后的这个结果。

表 2

x_1 元	120	140	190	130	155	175	125	145	180	150
x_2 元	100	110	90	150	210	150	250	270	300	250
y 个	102	100	120	77	46	93	26	69	65	85

例 2　某厂生产的一种电器的销售量 y 与竞争对手的价格 x_1 和本厂的价格 x_2 有关。表 2 是该商品在 10 个城市的销售记录。试根据这些数据建立 y 与 x_1 和 x_2 的关系式，对得到的模型和系数进行检验。若某市本厂产品售价 160（元），竞争对手售价 170（元），预测商品在该市的销售量。

解　分别画出 y 关于 x_1 和 y 关于 x_2 的散点图，可以看出 y 与 x_2 有较明显的线性关系，而 y 与 x_1 之间的关系则难以确定，我们将作几种尝试，用统计分析决定优劣。

设回归模型为

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 \tag{42}$$

编写如下程序：

```
x1=[120  140  190  130  155  175  125  145  180  150]';
x2=[100  110   90  150  210  150  250  270  300  250]';
y=[102  100   120  77   46   93   26   69   65   85]';
x=[ones(10,1),x1,x2];
[b,bint,r,rint,stats]=regress(y,x);
b,bint,stats
```

得到

```
b =66.5176      0.4139    -0.2698
bint =-32.5060   165.5411
      -0.2018     1.0296
      -0.4611    -0.0785
stats =0.6527     6.5786     0.0247     351.0445
```

可以看出结果不是太好：$p = 0.0247$，取 $\alpha = 0.05$ 时回归模型（42）可用，但取 $\alpha = 0.01$ 则模型不能用；$R^2 = 0.6527$ 较小；$\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ 的置信区间包含了零点。下面将试图用 x_1, x_2 的二次函数改进它。

4.2　多项式回归

如果从数据的散点图上发现 y 与 x 呈较明显的二次（或高次）函数关系，或者用线性模型（20）的效果不太好，就可以选用多项式回归。

4.2.1　一元多项式回归

一元多项式回归可用命令 polyfit 实现。

例 3　将 17 至 29 岁的运动员每两岁一组分为 7 组，每组两人测量其旋转定向能力，以考察年龄对这种运动能力的影响。现得到一组数据如表 3。

表 3

年 龄	17	19	21	23	25	27	29
第一人	20.48	25.13	26.15	30.0	26.1	20.3	19.35
第二人	24.35	28.11	26.3	31.4	26.92	25.7	21.3

试建立二者之间的关系。

解　数据的散点图明显地呈现两端低中间高的形状，所以应拟合一条二次曲线。

选用二次模型

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \tag{43}$$

编写如下程序：

```
x0=17:2:29;x0=[x0,x0];
y0=[20.48  25.13  26.15  30.0  26.1   20.3  19.35...
     24.35  28.11  26.3   31.4  26.92  25.7  21.3];
```

```
[p,s]=polyfit(x0,y0,2); p
```
得到

p =-0.2003　　8.9782　-72.2150

即 $a_2=-0.2003$，$a_1=8.9782$，$a_0=-72.2150$。

上面的s是一个数据结构，用于计算函数值，如

```
[y,delta]=polyconf(p,x0,s);y
```

得到 y 的拟合值，及预测值 y 的置信区间半径delta。

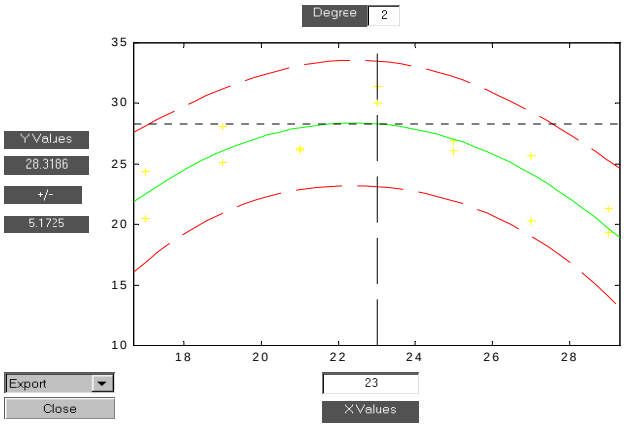


图1　拟合的交互式画面

用polytool(x0,y0,2)，可以得到一个如1图的交互式画面，在画面中绿色曲线为拟合曲线，它两侧的红线是 y 的置信区间。你可以用鼠标移动图中的十字线来改变图下方的 x 值，也可以在窗口内输入，左边就给出 y 的预测值及其置信区间。通过左下方的Export下拉式菜单，可以输出回归系数等。这个命令的用法与下面将介绍的rstool相似。

4.2.2　多元二项式回归

统计工具箱提供了一个作多元二项式回归的命令rstool，它也产生一个交互式画面，并输出有关信息，用法是

rstool(x,y,model,alpha)

其中输入数据x,y分别为 $n\times m$ 矩阵和 n 维向量，alpha为显著性水平 α（缺省时设定为0.05），model由下列4个模型中选择1个（用字符串输入，缺省时设定为线性模型）：

linear(线性)：$y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_mx_m$

purequadratic(纯二次)：$y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_mx_m+\sum_{j=1}^{m}\beta_{jj}x_j^2$

interaction（交叉）：$y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_mx_m+\sum_{1\le j\ne k\le m}\beta_{jk}x_jx_k$

quadratic(完全二次)：$y=\beta_0+\beta_1x_1+\cdots+\beta_mx_m+\sum_{1\le j,k\le m}\beta_{jk}x_jx_k$

我们再作一遍例2 商品销售量与价格问题，选择纯二次模型，即

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\beta_{11}x_1^2+\beta_{22}x_2^2 \qquad (44)$$

编程如下：

```
x1=[120  140  190  130  155  175  125  145  180  150]';
x2=[100  110   90  150  210  150  250  270  300  250]';
y=[102  100   120  77   46   93   26   69   65   85]';
```

```
x=[x1 x2];
rstool(x,y,'purequadratic')
```

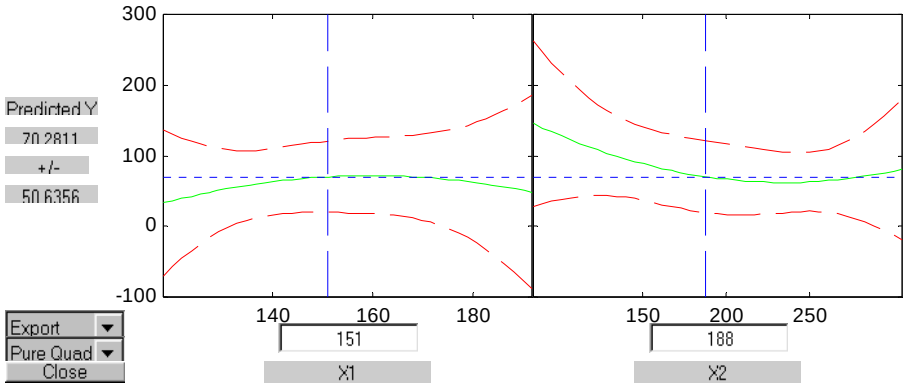


图2　拟合的交互式画面

得到一个如图2所示的交互式画面，左边是 x_1（=151）固定时的曲线 $y(x_1)$ 及其置信区间，右边是 x_2（=188）固定时的曲线 $y(x_2)$ 及其置信区间。用鼠标移动图中的十字线，或在图下方窗口内输入，可改变 x_1, x_2。图左边给出 y 的预测值及其置信区间，就用这种画面可以回答例2提出的“若某市本厂产品售价160（元），竞争对手售价170（元），预测该市的销售量”问题。

图的左下方有两个下拉式菜单，一个菜单Export用以向Matlab工作区传送数据，包括beta(回归系数)，rmse（剩余标准差），residuals(残差)。模型（41）的回归系数和剩余标准差为

beta =−312. 5871　　7. 2701　　−1. 7337　　−0. 0228　　0. 0037

rmse =16.6436

另一个菜单model用以在上述4个模型中选择，你可以比较一下它们的剩余标准差，会发现以模型（24）的rmse=16.6436最小。

注意本例子在Matlab中完全二次模型的形式为

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_2^2 \qquad (45)$$

§5　非线性回归和逐步回归

本节介绍怎样用Matlab统计工具箱实现非线性回归和逐步回归。

5.1 非线性回归

非线性回归是指因变量 y 对回归系数 $\beta_1, \cdots, \beta_m$（而不是自变量）是非线性的。Matlab统计工具箱中的nlinfit，nlparci，nlpredci，nlintool，不仅给出拟合的回归系数，而且可以给出它的置信区间，及预测值和置信区间等。下面通过例题说明这些命令的用法。

例4　在研究化学动力学反应过程中，建立了一个反应速度和反应物含量的数学模型，形式为

$$y = \frac{\beta_4 x_2 - \dfrac{x_3}{\beta_5}}{1 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3}$$

其中 $\beta_1,\cdots,\beta_5$ 是未知的参数， x_1,x_2,x_3 是三种反应物（氢， n 戊烷，异构戊烷）的含量， y 是反应速度。今测得一组数据如表4，试由此确定参数 $\beta_1,\cdots,\beta_5$ ，并给出其置信区间。 $\beta_1,\cdots,\beta_5$ 的参考值为（0.1，0.05，0.02，1，2）。

表4

序号	反应速度 y	氢 x_1	n 戊烷 x_2	异构戊烷 x_3
1	8.55	470	300	10
2	3.79	285	80	10
3	4.82	470	300	120
4	0.02	470	80	120
5	2.75	470	80	10
6	14.39	100	190	10
7	2.54	100	80	65
8	4.35	470	190	65
9	13.00	100	300	54
10	8.50	100	300	120
11	0.05	100	80	120
12	11.32	285	300	10
13	3.13	285	190	120

解　首先，以回归系数和自变量为输入变量，将要拟合的模型写成函数文件huaxue.m：

```
function yhat=huaxue(beta,x);
yhat=(beta(4)*x(:,2)-x(:,3)/beta(5))./(1+beta(1)*x(:,1)+...
beta(2)*x(:,2)+beta(3)*x(:,3));
```

然后，用nlinfit计算回归系数，用nlparci计算回归系数的置信区间，用nlpredci计算预测值及其置信区间，编程如下：

```
clc,clear
x0=[ 1      8.55     470     300      10
 2      3.79     285     80       10
 3      4.82     470     300      120
 4      0.02     470     80       120
 5      2.75     470     80       10
 6      14.39    100     190      10
 7      2.54     100     80       65
 8      4.35     470     190      65
 9      13.00    100     300      54
 10     8.50     100     300      120
 11     0.05     100     80       120
 12     11.32    285     300      10
 13     3.13     285     190      120];
x=x0(:,3:5);
y=x0(:,2);
beta=[0.1,0.05,0.02,1,2]';  %回归系数的初值,任意取的
[betahat,r,j]=nlinfit(x,y,@huaxue,beta);  %r,j是下面命令用的信息
betaci=nlparci(betahat,r,'jacobian',j);
betaa=[betahat,betaci]   %回归系数及其置信区间
[yhat,delta]=nlpredci(@huaxue,x,betahat,r,'jacobian',j)
%y的预测值及其置信区间的半径，置信区间为yhat±delta。
```

用nlintool得到一个交互式画面，左下方的Export可向工作区传送数据，如剩余标

准差等。使用命令

```
nlintool(x,y,'huaxue',beta)
```

可看到画面，并传出剩余标准差rmse= 0.1933。

4.2 逐步回归

实际问题中影响因变量的因素可能很多，我们希望从中挑选出影响显著的自变量来建立回归模型，这就涉及到变量选择的问题，逐步回归是一种从众多变量中有效地选择重要变量的方法。以下只讨论线性回归模型（1）式的情况。

变量选择的标准，简单地说就是所有对因变量影响显著的变量都应选入模型，而影响不显著的变量都不应选入模型，从便于应用的角度应使模型中变量个数尽可能少。

若候选的自变量集合为 $S=\{x_1,\cdots,x_m\}$，从中选出一个子集 $S_1\subset S$，设 S_1 中有 l 个自变量 $(l=1,\cdots,m)$，由 S_1 和因变量 y 构造的回归模型的误差平方和为 Q，则模型的剩余标准差的平方 $s^2=\dfrac{Q}{n-l-1}$，n 为数据样本容量。所选子集 S_1 应使 s 尽量小，通常回归模型中包含的自变量越多，误差平方和 Q 越小，但若模型中包含有对 y 影响很小的变量，那么 Q 不会由于包含这些变量在内而减少多少，却因 l 的增加可能使 s 反而增大，同时这些对 y 影响不显著的变量也会影响模型的稳定性，因此可将剩余标准差 s 最小作为衡量变量选择的一个数量标准。

逐步回归是实现变量选择的一种方法，基本思路为，先确定一初始子集，然后每次从子集外影响显著的变量中引入一个对 y 影响最大的，再对原来子集中的变量进行检验，从变得不显著的变量中剔除一个影响最小的，直到不能引入和剔除为止。使用逐步回归有两点值得注意，一是要适当地选定引入变量的显著性水平 α_{in} 和剔除变量的显著性水平 α_{out}，显然，α_{in} 越大，引入的变量越多；α_{out} 越大，剔除的变量越少。二是由于各个变量之间的相关性，一个新的变量引入后，会使原来认为显著的某个变量变得不显著，从而被剔除，所以在最初选择变量时应尽量选择相互独立性强的那些。

在Matlab统计工具箱中用作逐步回归的是命令stepwise，它提供了一个交互式画面，通过这个工具你可以自由地选择变量，进行统计分析，其通常用法是：

```
stepwise(x,y,inmodel,alpha)
```

其中x是自变量数据，y是因变量数据，分别为 $n\times m$ 和 $n\times 1$ 矩阵，inmodel是矩阵x的列数的指标，给出初始模型中包括的子集（缺省时设定为空），alpha为显著性水平。

Stepwise Regression 窗口，显示回归系数及其置信区间，和其它一些统计量的信息。绿色表明在模型中的变量，红色表明从模型中移去的变量。在这个窗口中有Export按钮，点击Export产生一个菜单，表明了要传送给Matlab工作区的参数，它们给出了统计计算的一些结果。

下面通过一个例子说明stepwise的用法。

例5 水泥凝固时放出的热量 y 与水泥中4种化学成分 x_1,x_2,x_3,x_4 有关，今测得一组数据如表5，试用逐步回归来确定一个线性模型

表5

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	7	26	6	60	78.5
2	1	29	15	52	74.3
3	11	56	8	20	104.3
4	11	31	8	47	87.6
5	7	52	6	33	95.9

6	11	55	9	22	109.2
7	3	71	17	6	102.7
8	1	31	22	44	72.5
9	2	54	18	22	93.1
10	21	47	4	26	115.9
11	1	40	23	34	83.8
12	11	66	9	12	113.3
13	10	68	8	12	109.4

编写程序如下：

```
clc,clear
x0=[1     7     26     6     60     78.5
 2     1     29     15     52     74.3
 3     11     56     8     20     104.3
 4     11     31     8     47     87.6
 5     7     52     6     33     95.9
 6     11     55     9     22     109.2
 7     3     71     17     6     102.7
 8     1     31     22     44     72.5
 9     2     54     18     22     93.1
 10     21     47     4     26     115.9
 11     1     40     23     34     83.8
 12     11     66     9     12     113.3
 13     10     68     8     12     109.4];
x=x0(:,2:5);
y=x0(:,6);
stepwise(x,y)
```

得到图3所示的图形界面。

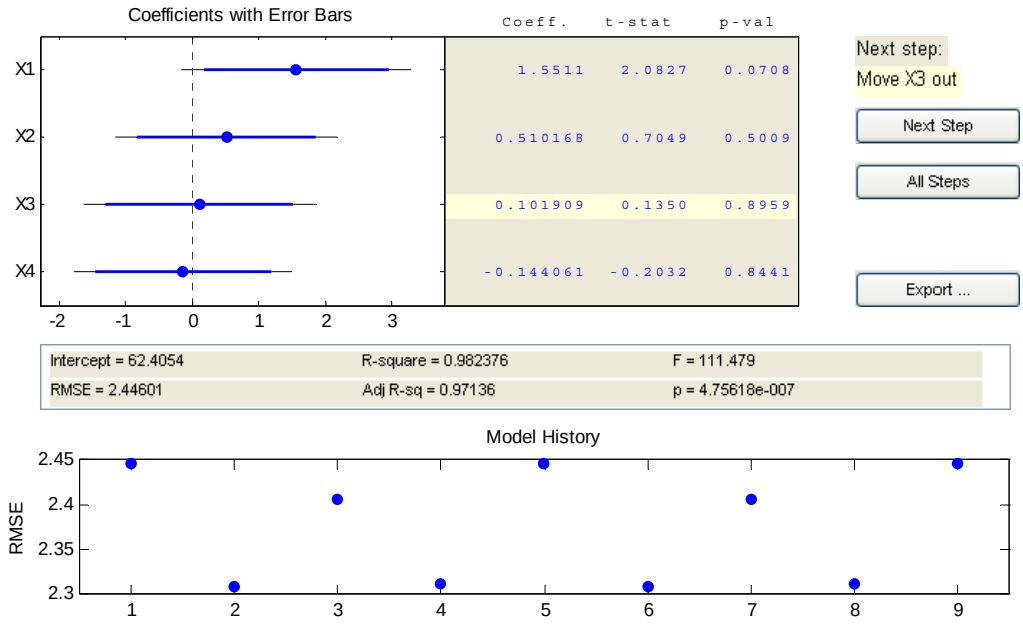


图3　逐步回归交互式画面

可以看出，x_3, x_4 不显著，移去这两个变量后的统计结果如图4。

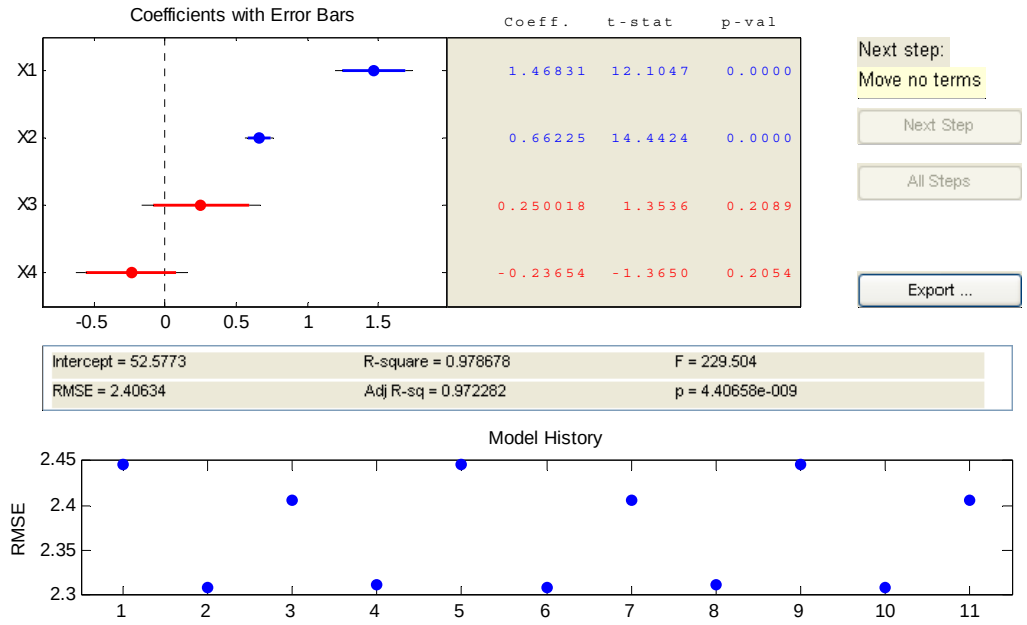


图4　逐步回归交互式画面

这个表中的 x_3, x_4 两行用红色显示，表明它们已移去。

从新的统计结果可以看出，虽然剩余标准差 s（RMSE）没有太大的变化，但是统计量 F 的值明显增大，因此新的回归模型更好一些。可以求出最终的模型为

$$y = 52.5773 + 1.4683x_1 + 0.6623x_2$$

习 题 十 二

1. 某人记录了21天每天使用空调器的时间和使用烘干器的次数，并监视电表以计算出每天的耗电量，数据见表6，试研究耗电量（KWH）与空调器使用的小时数(AC)和烘干器使用次数(DRYER)之间的关系，建立并检验回归模型，诊断是否有异常点。

表6

序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
KWH	35	63	66	17	94	79	93	66	94	82	78
AC	1.5	4.5	5.0	2.0	8.5	6.0	13.5	8.0	12.5	7.5	6.5
DRYER	1	2	2	0	3	3	1	1	1	2	3
序号	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
kWH	65	77	75	62	85	43	57	33	65	33	
AC	8.0	7.5	8.0	7.5	12.0	6.0	2.5	5.0	7.5	6.0	
DRYER	1	2	2	1	1	0	3	0	1	0	

2. 在一丘陵地带测量高程，x 和 y 方向每隔100米测一个点，得高程如下表，试拟合一曲面，确定合适的模型，并由此找出最高点和该点的高程。

表7

x / y	100	200	300	400
100	636	697	624	478
200	698	712	630	478
300	680	674	598	412
400	662	626	552	334

3. 一矿脉有13个相邻样本点，人为地设定一原点，现测得各样本点对原点的距离 x，与该样本点处某种金属含量 y 的一组数据如下，画出散点图观测二者的关系，试建立合适的回归模型，如二次曲线、双曲线、对数曲线等。

表8

x	2	3	4	5	7	8	10
y	106.42	109.20	109.58	109.50	110.00	109.93	110.49
x	11	14	15	16	18	19	
y	110.59	110.60	110.90	110.76	111.00	111.20	

第十三章　微分方程建模

微分方程建模是数学建模的重要方法，因为许多实际问题的数学描述将导致求解微分方程的定解问题。把形形色色的实际问题化成微分方程的定解问题，大体上可以按以下几步：

1. 根据实际要求确定要研究的量(自变量、未知函数、必要的参数等)并确定坐标系。
2. 找出这些量所满足的基本规律(物理的、几何的、化学的或生物学的等等)。
3. 运用这些规律列出方程和定解条件。

列方程常见的方法有：

（i）按规律直接列方程

在数学、力学、物理、化学等学科中许多自然现象所满足的规律已为人们所熟悉，并直接由微分方程所描述。如牛顿第二定律、放射性物质的放射性规律等。我们常利用这些规律对某些实际问题列出微分方程。

（ii）微元分析法与任意区域上取积分的方法

自然界中也有许多现象所满足的规律是通过变量的微元之间的关系式来表达的。对于这类问题，我们不能直接列出自变量和未知函数及其变化率之间的关系式，而是通过微元分析法，利用已知的规律建立一些变量（自变量与未知函数）的微元之间的关系式，然后再通过取极限的方法得到微分方程，或等价地通过任意区域上取积分的方法来建立微分方程。

（iii）模拟近似法

在生物、经济等学科中，许多现象所满足的规律并不很清楚而且相当复杂，因而需要根据实际资料或大量的实验数据，提出各种假设。在一定的假设下，给出实际现象所满足的规律，然后利用适当的数学方法列出微分方程。

在实际的微分方程建模过程中，也往往是上述方法的综合应用。不论应用哪种方法，通常要根据实际情况，作出一定的假设与简化，并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证，以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预测预报的目的。

本章将利用上述方法讨论具体的微分方程的建模问题。

§1　发射卫星为什么用三级火箭

采用运载火箭把人造卫星发射到高空轨道上运行，为什么不能用一级火箭而必须用多级火箭系统？

下面通过建立运载火箭有关的数学模型来回答上述问题。

火箭是一个复杂的系统，为了使问题简单明了，我们只从动力系统和整体结构上分析，并且假设引擎是足够强大的。

1.1　为什么不能用一级火箭发射人造卫星

下面用三个数学模型回答这个问题

1.1.1　卫星进入 600km 高空轨道时，火箭必须的最低速度

首先将问题理想化，假设：

（i）卫星轨道是以地球中心为圆心的某个平面上的圆周，卫星在此轨道上以地球引力作为向心力绕地球作平面匀速圆周运动；

（ii）地球是固定于空间中的一个均匀球体，其质量集中于球心；

（iii）其它星球对卫星的引力忽略不计。

建模与求解：设地球半径为 R，质量为 M；卫星轨道半径为 r，卫星质量为 m。

根据假设（ii）和（iii），卫星只受到地球的引力，由牛顿万有引力定律可知其引力

大小为

$$F=\frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

其中G为引力常数。

为消去常数G，把卫星放在地球表面，则由（1）式得

$$mg=\frac{GMm}{R^2} \quad 或 \quad GM=R^2g$$

再代入（1）式，得

$$F=mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{2}$$

其中$g=9.81(\mathrm{m/s^2})$为重力加速度。

根据假设(i)，若卫星围绕地球作匀速圆周运动的速度为v，则其向心力为mv^2/r，因为卫星所受的地球引力就是它作匀速运动的向心力，故有

$$mg\left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{mv^2}{r}$$

由此便推得卫星距地面为$(r-R)\mathrm{km}$，必须的最低速度的数学模型为

$$v=R\sqrt{\frac{g}{r}} \tag{3}$$

取$R=6400\mathrm{km}$，$r-R=600\mathrm{km}$，代入上式，得

$$v\approx 7.6\mathrm{km/s}$$

即要把卫星送入离地面 600km 高的轨道，火箭的末速度最低应为 7.6km/s。

1.1.2　火箭推进力及升空速度

火箭的简单模型是由一台发动机和一个燃料仓组成。燃料燃烧产生大量气体从火箭末端喷出，给火箭一个向前的推力。火箭飞行要受地球引力、空气阻力、地球自转与公转等的影响，使火箭升空后作曲线运动。为使问题简化，**假设**：

（i）火箭在喷气推动下作直线运动，火箭所受的重力和空气阻力忽略不计。

（ii）在t时刻火箭质量为$m(t)$，速度为$v(t)$，且均为时间t的连续可微函数；

（iii）从火箭末端喷出气体的速度（相对火箭本身）为常数u。

建模与分析：由于火箭在运动过程中不断喷出气体，使其质量不断减少，在$(t,t+\Delta t)$内的减少量可由台劳展式表示为

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t) \tag{4}$$

因为喷出的气体相对于地球的速度为$v(t)-u$，则由动量守恒定律有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\left[\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t)\right](v(t)-u) \tag{5}$$

从（4）式和（5）式可得火箭推进力的数学模型为

$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt} \tag{6}$$

令$t=0$时，$v(0)=v_0$，$m(0)=m_0$，求解上式，得火箭升空速度模型

$$v(t)=v_0+u\ln\frac{m_0}{m(t)} \tag{7}$$

（6）式表明火箭所受推力等于燃料消耗速度与喷气速度（相对火箭）的乘积。（7）式表明，在v_0,m_0一定的条件下，升空速度$v(t)$由喷气速度（相对火箭）u及质量比$m_0/m(t)$决定。这为提高火箭速度找到了正确途径：从燃料上设法提高u值；从结构上设法减少$m(t)$。

1.1.3　一级火箭末速度上限

火箭—卫星系统的质量可分为三部分：m_p（有效负载，如卫星），m_F（燃料质量），m_s（结构质量，如外壳、燃料容器及推进器）。一级火箭末速度上限主要是受目前技术条件的限制，**假设：**

（i）目前技术条件为：相对火箭的喷气速度$u=3\,\text{km/s}$及

$$\frac{m_s}{m_F+m_s}\geq\frac{1}{9}$$

（ii）初速度v_0忽略不计，即$v_0=0$。

建模与求解：因为升空火箭的最终（燃料耗尽）质量为m_p+m_s，由（7）式及假设（ii）得到末速度为

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_p+m_s} \tag{8}$$

令$m_s=\lambda(m_F+m_s)=\lambda(m_0-m_p)$，代入上式，得

$$v=u\ln\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_p} \tag{9}$$

于是，当卫星脱离火箭，即$m_p=0$时，便得火箭末速度上限的数学模型为

$$v^0=u\ln\frac{1}{\lambda}$$

由假设（i），取$u=3\,\text{km}$，$\lambda=\frac{1}{9}$，便得火箭速度上限

$$v^0=3\ln 9\approx 6.6\,\text{km/s}$$

因此，用一级火箭发射卫星，在目前技术条件下无法达到相应高度所需的速度。

1.2　理想火箭模型

从前面对问题的假设和分析可以看出：火箭推进力自始至终在加速着整个火箭，然而随着燃料的不断消耗，所出现的无用结构质量也在随之不断加速，作了无用功，故效益低，浪费大。

所谓理想火箭，就是能够随着燃料的燃烧不断抛弃火箭的无用结构。下面建立它的数学模型。

假设：在$(t,t+\Delta t)$时段丢弃的结构质量与烧掉的燃料质量以α与$1-\alpha$的比例同时进行。

建模与分析：由动量守恒定律，有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\alpha\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot v(t)$$
$$-(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot(v(t)-u)+o(\Delta t)$$

由上式可得理想火箭的数学模型为

$$-m(t)\frac{dv(t)}{dt}=(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\cdot u \tag{10}$$

及

$$v(0)=0,\ m(0)=m_0$$

解之得

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m(t)} \tag{11}$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩卫星质量m_p，从而最终速度的数学模型为

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m_p} \tag{12}$$

（12）式表明，当m_0足够大时，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度。例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使$v=10.5\,\text{km/s}$才行，如果取$u=3\,\text{km/s}$，$\alpha=0.1$，则可推出$m_0/m_p=50$，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭。

1.3　多级火箭卫星系统

理想火箭是设想把无用结构质量连续抛弃以达到最佳的升空速度，虽然这在目前的技术条件下办不到，但它确为发展火箭技术指明了奋斗目标。目前已商业化的多级火箭卫星系统便是朝着这种目标迈进的第一步。多级火箭是从末级开始，逐级燃烧，当第i级燃料烧尽时，第$i+1$级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第i级。我们用m_i表示第i级火箭质量，m_p表示有效负载。为了简单起见，先作如下假设：

（i）设各级火箭具有相同的λ，λm_i表示第i级结构质量，$(1-\lambda)m_i$表示第i级的燃料质量。

（ii）喷气相对火箭的速度u相同，燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变，记该比值为k。

先考虑二级火箭。由（7）式，当第一级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_1=u\ln\frac{m_1+m_2+m_p}{\lambda m_1+m_2+m_p}=u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

在第二级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_2=v_1+u\ln\frac{m_2+m_p}{\lambda m_2+m_p}=2u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1} \tag{13}$$

仍取$u=3\,\text{km/s}$，$\lambda=0.1$，考虑到阻力等因素，为了达到第一宇宙速度，对于二级火箭，欲使$v_2=10.5\,\text{km/s}$，由（13）式得

$$6\ln\frac{k+1}{0.1k+1}=10.5$$

解之得

$$k=11.2,$$

这时

$$\frac{m_0}{m_p}=\frac{m_1+m_2+m_p}{m_p}=(k+1)^2\approx 149$$

同理，可推出三级火箭

$$v_3=3u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

欲使$v_3=10.5\,\text{km/s}$，应该$k\approx 3.25$，从而$m_0/m_p\approx 77$。

与二级火箭相比，在达到相同效果的情况下，三级火箭的质量几乎节省了一半。

现记n级火箭的总质量（包括有效负载m_p）为m_0，在相同假设下（$u=3\,\text{km/s}$，$v_{末}=10.5\,\text{km/s}$，$\lambda=0.1$），可以算出相应的m_0/m_p值，现将计算结果列于下表中：

n（级数）	1	2	3	4	5	…	∞
m_0/m_p	×	149	77	65	60	…	50

实际上，由于受技术条件的限制，采用四级或四级以上的火箭，经济效益是不合算的，因此采用三级火箭是最好的方案。

1.4　最佳结构设计

下面我们将考虑当用n级火箭发射卫星时的最佳结构，即使m_0/m_p最小的结构。

记

$$w_1=m_0=m_1+m_2+\cdots+m_n+m_p$$
$$w_2=m_2+\cdots+m_n+m_p$$
$$\cdots$$
$$w_{n+1}=m_p$$

记

$$k_1=\frac{w_1}{w_2},\ \cdots,\ k_n=\frac{w_n}{w_{n+1}}$$

$$v_{末}=u\ln\left(\frac{w_1}{\lambda m_1+w_2}\cdots\frac{w_n}{\lambda m_n+w_{n+1}}\right)$$

由于$m_1=w_1-w_2$，$m_2=w_2-w_3$，…，$m_n=w_n-w_{n+1}$，可以推出

$$v_{末}=u\ln\left(\frac{k_1}{\lambda(k_1-1)+1}\cdots\frac{k_n}{\lambda(k_n-1)+1}\right)$$

易知

$$\frac{m_0}{m_p}=k_1k_2\cdots k_n$$

则最佳结构问题转化为

$$\min \quad k_1 k_2 \cdots k_n$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{[\lambda(k_1-1)+1]\cdots[\lambda(k_n-1)+1]} = c$$

可以推出当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ 时，$\dfrac{m_0}{m_p}$ 最小。

§2 人口模型

2.1 问题提出

据考古学家论证，地球上出现生命距今已有 20 亿年，而人类的出现距今却不足 200 万年。纵观人类人口总数的增长情况，我们发现：1000 年前人口总数为 2.75 亿。经过漫长的过程到 1830 年，人口总数达 10 亿，又经过 100 年，在 1930 年，人口总数达 20 亿；30 年之后，在 1960 年，人口总数为 30 亿；又经过 15 年，1975 年的人口总数是 40 亿，12 年之后即 1987 年，人口已达 50 亿。

我们自然会产生这样一个问题：人类人口增长的规律是什么？如何在数学上描述这一规律。

2.2 Malthus 模型

1789 年，英国神父 Malthus 在分析了一百多年人口统计资料之后，提出了 Malthus 模型。

模型假设

（i）设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数，且 $x(t)$ 连续可微。

（ii）人口的增长率 r 是常数（增长率=出生率—死亡率）。

（iii）人口数量的变化是封闭的，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡，且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率。

建模与求解

由假设，t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻人口的增量为

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

于是得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{14}$$

其解为

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{15}$$

模型评价

考虑二百多年来人口增长的实际情况，1961 年世界人口总数为 3.06×10^9，在 1961～1970 年这段时间内，每年平均的人口自然增长率为 2%，则（15）式可写为

$$x(t) = 3.06\times10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)} \tag{16}$$

根据 1700～1961 年间世界人口统计数据，我们发现这些数据与（16）式的计算结果相当符合。因为在这期间地球上人口大约每 35 年增加 1 倍，而（16）式算出每 34.6 年增加 1 倍。

但是，当人们用（15）式对 1790 年以来的美国人口进行检验，发现有很大差异。

利用（16）式对世界人口进行预测，也会得出惊异的结论：当 $t = 2670$ 年时，

$x(t)=4.4\times10^{15}$，即 4400 万亿，这相当于地球上每平方米要容纳至少 20 人。

显然，用这一模型进行预测的结果远高于实际人口增长，误差的原因是对增长率 r 的估计过高。由此，可以对 r 是常数的假设提出疑问。

2.3 阻滞增长模型（Logistic 模型）

如何对增长率 r 进行修正呢？我们知道，地球上的资源是有限的，它只能提供一定数量的生命生存所需的条件。随着人口数量的增加，自然资源、环境条件等对人口再增长的限制作用将越来越显著。如果在人口较少时，我们可以把增长率 r 看成常数，那么当人口增加到一定数量之后，就应当视 r 为一个随着人口的增加而减小的量，即将增长率 r 表示为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$，且 $r(x)$ 为 x 的减函数。

模型假设

（i）设 $r(x)$ 为 x 的线性函数，$r(x)=r-sx$。（工程师原则，首先用线性）

（ii）自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为 x_m，即当 $x=x_m$ 时，增长率 $r(x_m)=0$。

建模与求解

由假设（i），（ii）可得 $r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(1-\dfrac{x}{x_m})x,\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{17}$$

（17）式是一个可分离变量的方程，其解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}\tag{18}$$

模型检验 由（17）式，计算可得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=r^2(1-\frac{x}{x_m})(1-\frac{2x}{x_m})x\tag{19}$$

人口总数 $x(t)$ 有如下规律：

（i） $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_m$，即无论人口初值 x_m 如何，人口总数以 x_m 为极限。

（ii）当 $0<x_0<x_m$ 时，$\dfrac{dx}{dt}=r(1-\dfrac{x}{x_m})x>0$，这说明 $x(t)$ 是单调增加的，又由（19）式知：当 $x<\dfrac{x_m}{2}$ 时，$\dfrac{d^2x}{dt^2}>0$，$x=x(t)$ 为凹，当 $x>\dfrac{x_m}{2}$ 时，$\dfrac{d^2x}{dt^2}<0$，$x=x(t)$ 为凸。

（iii）人口变化率 $\dfrac{dx}{dt}$ 在 $x=\dfrac{x_m}{2}$ 时取到最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期，经过这一点之后，生长速率会逐渐变小，最终达到零。

与 Malthus 模型一样，代入一些实际数据进行验算，若取 1790 年为 $t=t_0=0$，$x_0=3.9\times10^6$，$x_m=197\times10^6$，$r=0.3134$ 可以看出，直到 1930 年，计算结果与

实际数据都能较好地吻合，在1930年之后，计算与实际偏差较大。原因之一是60年代的实际人口已经突破了假设的极限人口 x_m，由此可知，本模型的缺点之一就是不易确定 x_m。

2.4 模型推广

可以从另一个角度导出阻滞增长模型，在 Malthus 模型上增加一个竞争项 $-bx^2(b>0)$，它的作用是使纯增长率减少。如果一个国家工业化程度较高，食品供应较充足，能够提供更多的人生存，此时 b 较小；反之 b 较大，故建立方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(a-bx) \qquad (a,b>0), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{20}$$

其解为

$$x(t) = \frac{ax_0}{bx_0 + (a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}} \tag{21}$$

由（21）式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = (a-2bx)(a-bx)x \tag{22}$$

对(20)~(22)式进行分析，有

（i）对任意 $t>t_0$，有 $x(t)>0$，且 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{a}{b}$

（ii）当 $0<x<\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)>0$，$x(t)$ 递增；当 $x=\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)=0$；当 $x(t)>\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)<0$，$x(t)$ 递减。

（iii）当 $0<x<\dfrac{a}{2b}$ 时，$x''(t)>0$，$x(t)$ 为凹，当 $\dfrac{a}{2b}<x<\dfrac{a}{b}$ 时，$x''(t)<0$，$x(t)$ 为凸。

令（20）式第一个方程的右边为 0，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{a}{b}$，称它们是微分方程（20）的平衡解。易知 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \dfrac{a}{b}$，故又称 $\dfrac{a}{b}$ 是（20）式的稳定平衡解。可预测：不论人口开始的数量 x_0 为多少，经过相当长的时间后，人口总数将稳定在 $\dfrac{a}{b}$。

参数 a 和 b 可以通过已知数据利用 Matlab 中的非线性回归命令 nlinfit 求得。

§3 战争模型

早在第一次世界大战期间，F. W. Lanchester 就提出了几个预测战争结局的数学模型，其中包括作战双方均为正规部队；作战双方均为游击队；作战的一方为正规部队，另一方为游击队。后来人们对这些模型作了改进和进一步的解释，用以分析历史上一些著名的战争，如二次世界大战中的美日硫黄岛之战和1975年的越南战争。

影响战争胜负的因素有很多，兵力的多少和战斗力的强弱是两个主要的因素。士兵的数量会随着战争的进行而减少，这种减少可能是因为阵亡、负伤与被俘，也可能是因

为疾病与开小差。分别称之为战斗减员与非战斗减员。士兵的数量也可随着增援部队的到来而增加。从某种意义上来说，当战争结束时，如果一方的士兵人数为零，那么另一方就取得了胜利。如何定量地描述战争中相关因素之间的关系呢？比如如何描述增加士兵数量与提高士兵素质之间的关系。

3.1 模型一 正规战模型

模型假设

（i）双方士兵公开活动。x 方士兵的战斗减员仅与 y 方士兵人数有关。记双方士兵人数分别为 $x(t), y(t)$，则 x 方士兵战斗减员率为 $ay(t)$，a 表示 y 方每个士兵的杀伤率。可知 $a = r_y p_y$，r_y 为 y 方士兵的射击率（每个士兵单位时间的射击次数），p_y 每次射击的命中率。同理，用 b 表示 x 方士兵对 y 方士兵的杀伤率，即 $b = r_x p_x$。

（ii）双方的非战斗减员率仅与本方兵力成正比。减员率系数分别为 α, β。

（iii）设双方的兵力增援率为 $u(t), v(t)$。

模型与求解

由假设可知

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \tag{23}$$

我们对（23）式中的一种理想的情况进行求解，即双方均没有增援与非战斗减员。则（23）式化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{24}$$

其中 x_0, y_0 为双方战前的兵力。

由（24）式的前两式相除，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

分离变量并积分得

$$a(y^2 - y_0^2) = b(x^2 - x_0^2),$$

整理得

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - by_0^2$$

若令 $k = ay_0^2 - bx_0^2$，则有

$$ay^2 - bx^2 = k$$

当 $k = 0$，双方打成平局。当 $k > 0$ 时，y 方获胜。当 $k < 0$ 时，x 方获胜。这样，y 方要想取得战斗胜利，就要使 $k > 0$，即

$$ay_0^2 - bx_0^2 > 0$$

考虑到假设（i），上式可写为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{r_x}{r_y}\right)\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \tag{25}$$

(25)式是 y 方占优势的条件。若交战双方都训练有素，且都处于良好的作战状态。则 r_x 与 r_y， p_z 与 p_y 相差不大，（25）式右边近似为 1。（25）式左边表明，初始兵力比例被平方地放大了。即双方初始兵力之比 $\frac{y_0}{x_0}$，以平方的关系影响着战争的结局。比如说，如果 y 方的兵力增加到原来的 2 倍，x 方兵力不变，则影响着战争的结局的能力将增加 4 倍。此时，x 方要想与 y 方抗衡，须把其士兵的射击率 r_x 增加到原来的 4 倍（ p_x, r_y, p_y 均不变）。

以上是研究双方之间兵力的变化关系。下面将讨论每一方的兵力随时间的变化关系。

对(24)式两边对 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dy}{dt} = abx\ ,$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} - abx = 0 \tag{27}$$

初始条件为

$$x(0) = x_0,\quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -ay_0$$

解之，得

$$x(t) = x_0\mathrm{ch}(\sqrt{ab}\,t) - \sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\mathrm{sh}(\sqrt{ab}\,t)$$

同理可求得 $y(t)$ 的表达式为

$$y(t) = y_0\mathrm{ch}(\sqrt{ab}\,t) - \sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0\mathrm{sh}(\sqrt{ab}\,t)\,。$$

3.2　模型二　游击战模型

模型假设

（i） y 方士兵看不见 x 方士兵， x 方士兵在某个面积为 S_x 的区域内活动。 y 方士兵不是向 x 方士兵射击，而是向该区域射击。此时， x 方士兵的战斗减员不仅与 y 方兵力有关，而且随着 x 方兵力增加而增加。因为在一个有限区域内，士兵人数越多，被杀伤的可能性越大。可设， x 方的战斗减员率为 cxy ，其中 c 为 y 方战斗效果系数，$c = r_y p_y = r_y \frac{S_{ry}}{S_x}$ ，其中 r_y 仍为射击率，命中率 p_y 为 y 方一次射击的有效面积（ S_{ry} ）与 x 方活动面积（ S_x ）之比。

假设（ii），（iii）同模型一的假设（ii），（iii）。

模型与求解

由假设，可得方程

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-cxy-\alpha x+u(t)\\ \dfrac{dy}{dt}=-dxy-\beta y+v(t)\end{cases} \tag{28}$$

其中 $d=r_x p_x=r_x\dfrac{S_{rx}}{S_y}$ 是 x 方战斗效果系数。

为了使（28）式容易求解，可以做一些简化：设交战双方在作战中均无非战斗减员和增援。此时，有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-cxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-dxy\end{cases} \tag{29}$$

两式相除，得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{c},$$

其解为

$$c(y-y_0)=d(x-x_0)$$

令 $l=cy_0-dx_0$，上式可化为

$$cy-dx=l \tag{30}$$

当 $l=0$，双方打成平局。当 $l>0$ 时，y 方获胜。当 $l<0$ 时，x 方获胜。

y 方获胜的条件可以表示为

$$\frac{y_0}{x_0}>\frac{d}{c}=\frac{r_x S_{rx} S_x}{r_y S_{ry} S_y}$$

即初始兵力之比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 以线性关系影响战斗的结局。当双方的射击率 r_x, r_y 与有效射击面积 S_{rx}, S_{ry} 一定时，增加活动面积 S_y 与增加初始兵力 y_0 起着同样的作用。

3.3　模型三　混合战模型

模型假设

（i）x 方为游击队，y 方为正规部队。

（ii）交战双方均无战斗减员与增援。

模型与求解

借鉴模型一与二的思想，可得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{31}$$

其解为

$$cy^2 - 2bx = m \tag{32}$$

其中 $m = cy_0^2 - 2bx_0$。

经验表明，只有当兵力 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 远远大于 1 时，正规部队 y 才能战胜游击队。当 $m > 0$ 时，y 方胜，此时

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2b}{cx_0} = \frac{2r_x p_x S_x}{r_y S_{ry} x_0} \tag{33}$$

一般来说，正规部队以火力强而见长，游击队以活动灵活，活动范围大而见长。这可以通过一些具体数据进行计算。

不妨设 $x_0 = 100$，命中率 $p_x = 0.1$，$\dfrac{r_x}{r_y} = \dfrac{1}{2}$，活动区域的面积 $S_x = 10^6\,\mathrm{m}^2$，y 方有效射击面积 $S_{ry} = 1\,\mathrm{m}^2$，则由（33），y 方取胜的条件为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \frac{2\times 0.1\times 0.1\times 10^6}{2\times 1\times 100} = 100$$

$y_0 > 10x_0$，y 方的兵力是 x 方的 10 倍。

美国人曾用这个模型分析越南战争。根据类似于上面的计算以及四五十年代发生在马来亚、菲律宾、印尼、老挝等地的混合战争的实际情况估计出，正规部队一方要想取胜必须至少投入 8 倍于游击部队一方的兵力，而美国至多只能派出 6 倍于越南的兵力。越南战争的结局是美国不得不接受和谈并撤军，越南人民取得最后的胜利。

3.4　模型四　一个战争实例

J. H. Engel 用二次大战末期美日硫黄岛战役中的美军战地记录，对正规战争模型进行了验证，发现模型结果与实际数据吻合得很好。

硫黄岛位于东京以南 660 英里的海面上，是日军的重要空军基地。美军在 1945 年 2 月开始进攻，激烈的战斗持续了一个月，双方伤亡惨重，日方守军 21500 人全部阵亡或被俘，美方投入兵力 73000 人，伤亡 20265 人，战争进行到 28 天时美军宣布占领该岛，实际战斗到 36 天才停止。美军的战地记录有按天统计的战斗减员和增援情况。日军没有后援，战地记录则全部遗失。

用 $A(t)$ 和 $J(t)$ 表示美军和日军第 t 天的人数，忽略双方的非战斗减员，则

$$\begin{cases}\dfrac{dA}{dt}=-aJ+u(t)\\ \dfrac{dJ}{dt}=-bA\\ A(0)=0,\quad J(0)=21500\end{cases}\tag{34}$$

美军战地记录给出增援率$u(t)$为

$$u(t)=\begin{cases}54000, & 0\le t<1\\ 6000, & 2\le t<3\\ 13000, & 5\le t<6\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

并可由每天伤亡人数算出$A(t)$，$t=1,2,\cdots,36$。下面要利用这些实际数据代入（34）式，算出$A(t)$的理论值，并与实际值比较。

利用给出的数据，对参数a,b进行估计。对（34）式两边积分，并用求和来近似代替积分，有

$$A(t)-A(0)=-a\sum_{\tau=1}^{t}J(\tau)+\sum_{\tau=1}^{t}u(\tau)\tag{35}$$

$$J(t)-J(0)=-b\sum_{\tau=1}^{t}A(\tau)\tag{36}$$

为估计b在（36）式中取$t=36$，因为$J(36)=0$，且由$A(t)$的实际数据可得$\sum_{t=1}^{36}A(t)=2037000$，于是从（36）式估计出$b=0.0106$。再把这个值代入(36)式即可算出$J(t)$，$t=1,2,\cdots,36$。

然后从(35)式估计a。令$t=36$，得

$$a=\frac{\sum_{\tau=1}^{36}u(\tau)-A(36)}{\sum_{\tau=1}^{36}J(\tau)}\tag{37}$$

其中分子是美军的总伤亡人数，为20265人，分母可由已经算出的$J(t)$得到，为372500人，于是从（37）式有$a=0.0544$。把这个值代入（35）式得

$$A(t)=-0.0544\sum_{\tau=1}^{t}J(\tau)+\sum_{\tau=1}^{t}u(\tau)\tag{38}$$

由（38）式就能够算出美军人数$A(t)$的理论值，与实际数据吻合得很好。

习 题 十 三

1. 设位于坐标原点的甲舰向位于x轴上点$A(1,0)$处的乙舰发射导弹，导弹始终对准乙舰。如果乙舰以最大的速度v_0（v_0是常数）沿平行于y轴的直线行驶，导弹的速

度是$5v_0$，求导弹运行的曲线。又乙舰行驶多远时，导弹将它击中？

2. 有高为 1m 的半球形容器，水从它的底部小孔流出。小孔横截面积为 $1cm^2$。开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h（水面与孔口中心的距离）随时间t变化的规律。

3. 在交通十字路口，都会设置红绿灯。为了让那些正行驶在交叉路口或离交叉路口太近而无法停下的车辆通过路口，红绿灯转换中间还要亮起一段时间的黄灯。对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说，万万不可处于这样的进退两难的境地：要安全停车则离路口太近；要想在红灯亮之前通过路口又觉太远。

那么，黄灯应亮多长时间才最为合理呢？

4. 我们知道现在的香烟都有过滤嘴，而且有的过滤嘴还很长，据说过滤嘴可以起到减少毒物进入体内。你认为呢？过滤嘴的作用到底有多大，与使用的材料和过滤嘴的长度有无关系？请你建立一个描述吸烟过程的数学模型，分析人体吸入的毒量与哪些因素有关，以及它们之间的数量表达式。

5. 根据经验当一种新商品投入市场后，随着人们对它的拥有量的增加，其销售量$s(t)$下降的速度与$s(t)$成正比。广告宣传可给销量添加一个增长速度，它与广告费$a(t)$成正比，但广告只能影响这种商品在市场上尚未饱和的部分（设饱和量为M）。建立一个销售$s(t)$的模型。若广告宣传只进行有限时间τ，且广告费为常数a，问$s(t)$如何变化？

第十四章　稳定状态模型

虽然动态过程的变化规律一般要用微分方程建立的动态模型来描述，但是对于某些实际问题，建模的主要目的并不是要寻求动态过程每个瞬时的性态，而是研究某种意义下稳定状态的特征，特别是当时间充分长以后动态过程的变化趋势。譬如在什么情况下描述过程的变量会越来越接近某些确定的数值，在什么情况下又会越来越远离这些数值而导致过程不稳定。为了分析这种稳定与不稳定的规律常常不需要求解微分方程，而可以利用微分方程稳定性理论，直接研究平衡状态的稳定性就行了。

本章先介绍平衡状态与稳定性的概念，然后列举几个这方面的建模例子。

§1　微分方程稳定性理论简介

定义 1　称一个常微分方程（组）是自治的，如果方程（组）

$$\frac{dx}{dt}=F(x,t)=\begin{bmatrix} f_1(x,t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{bmatrix} \tag{1}$$

中的 $F(x,t)=F(x)$，即在 F 中不含时间变量 t。

事实上，如果增补一个方程，一个非自治系统可以转化自治系统，就是说，如果定义

$$y=\begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix},\quad G(y)=\begin{bmatrix} F(x,t) \\ 1 \end{bmatrix}$$

且引入另一个变量 s，则方程（1）与下述方程

$$\frac{dy}{ds}=G(y)$$

是等价的。这就是说自治系统的概念是相对的。下面仅考虑自治系统，这样的系统也称为动力系统。

定义 2　系统

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{2}$$

的相空间是以 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为坐标的空间 R^n，特别，当 $n=2$ 时，称相空间为相平面。空间 R^n 中的点集

$$\{(x_1,\cdots,x_n)\,|\,x_i=x_i(t)\text{满足(2)},i=1,\cdots,n\}$$

称为系统（2）的轨线，所有轨线在相空间中的分布图称为相图。

定义 3　相空间中满足 $F(x_0)=0$ 的点 x_0 称为系统（2）的奇点（或平衡点）。

奇点可以是孤立的，也可以是连续的点集。例如，系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt}=ax+by \\ \dfrac{dy(t)}{dt}=cx+dy \end{cases} \tag{3}$$

当 $ad-bc=0$ 时，有一个连续的奇点的集合。当 $ad-bc\neq 0$ 时，$(0,0)$ 是这个系统的唯一的奇点。下面仅考虑孤立奇点。为了知道何时有孤立奇点，给出下述定理：

定理 1　设 $F(x)$ 是实解析函数，且 x_0 系统（2）的奇点。若 $F(x)$ 在点 x_0 处的 Jacobian 矩阵

$$J(x_0)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right]$$

是非奇异的，则 x_0 是该系统的孤立奇点。

定义 4　设 x_0 是（2）的奇点，称

（i） x_0 是稳定的，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得如果 $|x(0)-x_0|<\delta$，则 $|x(t)-x_0|<\varepsilon$ 对所有的 t 都成立。

（ii） x_0 是渐近稳定的，如果它是稳定的，且 $\lim\limits_{t\to\infty}|x(t)-x_0|=0$。

这样，如果当系统的初始状态靠近于奇点，其轨线对所有的时间 t 仍然接近它，于是说 x_0 是稳定的。另一方面，如果当 $t\to\infty$ 时这些轨线趋于 x_0，则 x_0 是渐近稳定的。

定义 5　一个奇点不是稳定的，则称这个奇点是不稳定的。

对于常系数齐次线性系统（3）有下述定理。

定理 2　设 $x=x(t)$ 是系统（3）的通解。则

（i）如果系统（3）的系数矩阵 A 的一切特征根的实部都是负的，则系统（3）的零解是渐近稳定的。

（ii）如果 A 的特征根中至少有一个根的实部是正的，则系统（3）的零解是不稳定的。

（iii）如果 A 的一切特征根的实部都不是正的，但有零实部，则系统（3）的零解可能是稳定的，也可能是不稳定的，但总不会是渐近稳定的。

定理 2 告诉我们：系统（3）的零解渐近稳定的充分必要条件是 A 的一切特征根的实部都是负的。

对于非线性系统，一般不可能找出其积分曲线或轨迹，也就不可能直接导出奇点的稳定性。为克服这一困难，在奇点附近用一个线性系统来近似这个非线性系统，用这个近似系统的解来给出这个奇点的稳定解。

定义 6　设 x_0 是系统（2）的一个孤立奇点。称系统在 x_0 点几乎是线性的，如果 F 在 x_0 的 Jacobian 矩阵是非奇异的，即 $\det J(x_0)\neq 0$。

设 $F(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，并有直到二阶连续偏导数，则由多元函数的 Taylor 公式，可将 $F(x)$ 展开成 $F(x)=Ax+O(|x|^2)$，其中

$$A=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}$$

是一个常数矩阵，这样得到的线性系统

$$\frac{dx}{dt}=Ax \tag{4}$$

称为系统（2）的线性近似。一开始，人们以为总可以用线性近似系统来代替所研究的

原系统。但后来人们发现，这种看法是不对的，或至少说是不全面的，非线性系统中的许多性质，在它的线性近似中不再保留。即使象零解稳定性这样一个问题，也要在一定条件下，才可用它的线性近似系统代替原系统来研究。关于这个问题，我们有下述定理：

定理 3　如果系统（4）的零解是渐近稳定的，或不稳定的，则原系统的零解也是渐近稳定的或不稳定的。然而，如果系统（4）的零解是稳定的，则原系统的零解是不定的，即此时不能从线性化的系统来导出原系统的稳定性。

系统（3）在其系数矩阵 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 的行列式 $\det A \neq 0$ 的条件下，可知 $(0,0)$ 是系统（3）的唯一的平衡点，它的稳定性由特征方程：

$$\det(A-\lambda I)=0$$

的根 λ（特征根）决定。

定理 4　设线性系统（3）所对应的特征方程是

$$\lambda^2+p\lambda+q=0$$

其中 $p=-(a+d)$，$q=ad-bc$。设 λ_1 和 λ_2 是它的根，则当 $q\neq 0$ 时关于奇点 $O(0,0)$ 有下述结论：

（i）$\lambda_1<\lambda_2<0$，O 是稳定结点；

（ii）$\lambda_1=\lambda_2<0$，O 是稳定退化结点；

（iii）$\lambda_1>\lambda_2>0$，O 是不稳定结点；

（iv）$\lambda_1=\lambda_2>0$，O 是不稳定退化结点；

（v）$\lambda_1<0<\lambda_2$，O 是不稳定鞍点；

（vi）$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha<0$，$O$ 是稳定焦点；

（vii）$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha>0$，$O$ 是不稳定焦点；

（viii）$\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i,\alpha=0$，$O$ 是不稳定中心。

定理 5　设非线性系统

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=ax+by+\varphi(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt}=ax+by+\psi(x,y) \end{cases} \tag{5}$$

中的 φ 和 ψ 满足条件：

（i）在点 O 的某邻域内存在连续的一阶偏导数。

（ii）存在常数 $\delta>0$，使得

$$\lim_{r\to 0}\frac{\varphi(x,y)}{r^{1+\delta}}=\lim_{r\to 0}\frac{\psi(x,y)}{r^{1+\delta}}=0,\ (r=\sqrt{x^2+y^2})$$

又设系统（5）的一次近似系统（3）的特征方程的根没有零实部，则（5）式与（3）式的奇点 O 的类型相同，并有相同的稳定性或不稳定性。

§2　再生资源的管理和开发

渔业资源是一种再生资源，再生资源要注意适度开发，不能为了一时的高产“竭泽而渔”，应该在持续稳产的前提下追求最高产量或最优的经济效益。

这是一类可再生资源管理与开发的模型，这类模型的建立一般先考虑在没有收获的情况下资源自然增长模型，然后再考虑收获策略对资源增长情况的影响。

2.1　资源增长模型

考虑某种鱼的种群的动态。在建立模型之前，做如下的基本假设：

（i）鱼群的数量本身是离散变量，谈不到可微性。但是，由于突然增加或减少的只是单一个体或少数几个个体，与全体数量相比，这种增长率是微小的。所以，可以近似地假设鱼群的数量随时间连续地，甚至是可微地变化。

（ii）假设鱼群生活在一个稳定的环境中，即其增长率与时间无关。

（iii）种群的增长是种群个体死亡与繁殖共同作用的结果。

（iv）资源有限的生存环境对种群的繁衍，生长有抑制作用，而且这一作用与鱼群的数量是成正比的。

记时刻 t 渔场中鱼量为 $x(t)$，我们可以得到 $x(t)$ 所满足的 Logistic 模型：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = rx(1-\dfrac{x}{N}) \\ x(0) = N_0 \end{cases} \tag{6}$$

其中 r 是固有增长率，N 是环境容许的最大鱼量。由分离变量法求得方程（6）解为

$$x(t) = \frac{N}{1+e^{-rt}(N-N_0)/N_0}$$

（6）式有两个平衡点，即 $x_1 = 0$，$x_2 = N$，其中 x_1 是不稳定的，x_2 在正半轴内全局稳定。

2.2　资源开发模型

建立一个在捕捞情况下渔场鱼量遵从的方程，分析鱼量稳定的条件，并且在稳定的前提下，讨论如何控制捕捞使持续产量或经济效益达到最大。

设单位时间的捕捞量与渔场鱼量 $x(t)$ 成正比，比例系数 k 表示单位时间捕捞率，k 可以进一步分解分解为 $k = qE$，E 称为捕捞强度，用可以控制的参数如出海渔船数来度量；q 称为捕捞系数，表示单位强度下的捕捞率。为方便取 $q = 1$，于是单位时间的捕捞量为 $h(x) = Ex(t)$。$h(x) =$ 常数，表示一个特定的捕捞策略，即要求捕鱼者每天只能捕捞一定的数量。这样，捕捞情况下渔场鱼量满足方程

$$\dot{x}(t) = rx(1-\frac{x}{N}) - Ex \tag{7}$$

这是一个一阶非线性方程，且是黎卡提型的。也称为 Scheafer 模型。

希望知道渔场的稳定鱼量和保持稳定的条件，即时间 t 足够长以后渔场鱼量 $x(t)$ 的趋向，并且由此确定最大持续产量。在平衡点处有 $\dfrac{dx}{dt} = 0$，方程（7）有两个平衡点 $x_1 = 0$，$x_2 = N(1-\dfrac{E}{r})$。显然，它们均是方程的解。

在 $E < r$ 的情况下，x_2 是一正平衡点。（7）式可改写为

$$\dot{x}(t) = -x(x-x_2) \tag{8}$$

易知，当 $0 < x < x_2$ 时，$\dot{x}(t) > 0$；$x > x_2$ 时，$\dot{x}(t) < 0$，即平衡解 x_1 是不稳定的，而 x_2 是稳定平衡解。即在捕捞强度 $E < r$ 的情况下，渔场鱼量将稳定在 x_2 的水平，因此

产量（单位时间的捕捞量）也将稳定在 Ex_2 的水平，即此时可获得持续收获量。

当然，当 $E > r$ 时，$\dot{x}(t) < 0$，渔场鱼量将逐渐减少至 $x_1 = 0$，这时的捕捞其实是“竭泽而渔”，当然谈不上获得持续产量了。

如何才能做到渔资源在持续捕捞的条件下为我们提供最大的收益？从数学上说，就是在 $\dot{x}(t) = 0$ 或 $rx(t)(1-\frac{x(t)}{N}) = Ex(t)$ 的条件下极大化所期望的“收益”，这里的“收益”可理解为产量 $h = Ex(t)$，则问题就可以数学地叙述为下述优化问题：

$$h_{\max} = \max Ex(t)$$

约束条件为 $rx(t)(1-\frac{x(t)}{N}) - Ex(t) = 0$。

这里它可以归结为 E 的二次函数 $h(E) = NE(1-\frac{E}{r})$ 的最大值问题。简单的推导不难得到最大持续捕捞强度为 $E_{\max} = \frac{r}{2}$，最大持续产量为 $h_{\max} = \frac{rN}{4}$。捕捞强度 $E_{\max}$ 是得到最大持续捕鱼量的策略。

2.3　经济效益模型

当今，对鱼类资源的开发和利用已经成为人类经济活动的一部分。其目的不是追求最大的渔产量而是最大的经济收益。因而一个自然的想法就是进一步分析经济学行为对鱼类资源开发利用的影响。

如果经济效益用从捕捞所得的收入中扣除开支后的利润来衡量，并且简单地设鱼的销售单价为常数 p，单位捕捞强度（如每条出海渔船）的费用为常数 c，那么单位时间的收入 T 和支出 S 分别为

$$T = ph(x) = pEx，\ S = cE$$

单位时间的利润为

$$R = T - S = pEx - cE$$

利润是渔民所关注的焦点。因此在制定管理策略时所期望极大化的“收益”，这时就应理解为经济利润或净收入而不是鱼的产量 h。因而所讨论的问题就变成了在使鱼量稳定在 $x = x_2 = N(1-\frac{E}{r})$ 的约束条件下的 $R_{\max}$。即求

$$R(E) = pNE(1-\frac{E}{r}) - cE$$

的最大值。容易求出使 $R(E)$ 达到最大的捕捞强度为

$$E_{\max} = \frac{r}{2}(1-\frac{c}{pN})$$

最大利润下的渔场稳定鱼量

$$x_{\max} = \frac{N}{2} + \frac{c}{2p}$$

最大利润下渔场单位时间的持续产量为

$$h_{\max} = rx_{\max}(1-\frac{x_{\max}}{N}) = \frac{rN}{4}(1-\frac{c^2}{p^2N^2})$$

最大可持续净收益

$$R_{\max}=\frac{prN}{4}(1-\frac{c}{pN})^2$$

与前一模型相比较可以看出，在最大效益原则下捕捞强度和持续产量均有减少，而渔场的鱼量有所增加。并且，减少或增加的比例随着捕捞成本 c 的增长而变大，随着销售价格 p 的增长而变小，这显然是符合实际情况的。

2.4　种群的相互竞争模型

有甲乙两个种群，当它们独自在一个自然环境中生存时，数量的演变均遵从 Logistic 规律。记 $x_1(t),x_2(t)$ 是两个种群的数量，r_1,r_2 是它们的固有增长率，N_1,N_2 是它们的最大容量。

于是，对于种群甲有

$$\dot{x}(t)=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1})$$

其中，因子 $(1-\frac{x_1}{N})$ 反映由于甲对有限资源的消耗导致的对它本身增长的阻滞作用，$\frac{x_1}{N_1}$ 可解释为相对 N_1 而言单位数量的甲消耗的食物量（设食物总量为 1）。当两个种群在同一自然环境中生存时，考察由于乙消耗同一种有限资源对甲的增长产生的影响，可以合理地在因子 $(1-\frac{x_1}{N})$ 中再减去一项，该项与种群乙的数量 x_2（相对于 N_2 而言）成正比，于是，种群甲增长的方程为

$$\dot{x}_1(t)=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}) \tag{9}$$

这里 σ_1 的意义是，单位数量乙（相对 N_2 而言）消耗的供养甲的食物量为单位数量甲（相对 N_1）消耗的供养乙的食物量的 σ_1 倍，类似地，甲的存在也影响了乙的增长，种群乙的方程应该是

$$\dot{x}_2(t)=r_2x_2(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}) \tag{10}$$

对 σ_2 可作相应的解释。

在两个种群的相互竞争中，σ_1,σ_2 是两个关键的指标。从上面对它们的解释可知，$\sigma_1>1$ 表示在消耗供养甲的资源中，乙的消耗多于甲，对 $\sigma_2>1$ 可作相应的理解。一般来说，σ_1,σ_2 之间没有确定的关系，在此我们仅讨论 σ_1,σ_2 相互独立的情形。

目的是研究两个种群相互竞争的结局，即 $t\to\infty$ 时，$x_1(t),x_2(t)$ 的趋向，不必要解方程组（9）和（10），只需对它的平衡点进行稳定性分析。为此我们解代数方程

$$\begin{cases} f(x_1,x_2)=r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2})=0 \\ g(x_1,x_2)=r_2x_2(1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2})=0 \end{cases} \tag{11}$$

得到四个平衡点分别为 $P_1(N_1,0)$，$P_2(0,N_2)$，$P_3(\frac{N_1(1-\sigma_1)}{1-\sigma_1\sigma_2},\frac{N_2(1-\sigma_2)}{1-\sigma_1\sigma_2})$，$P_4(0,0)$。

为分析这些点的稳定性，需使用相空间的技巧。首先找出在 x_1x_2 平面上使 $\dot{x}_i(t)>0$ 或 $\dot{x}_i(t)<0$ $(i=1,2)$ 的区域。注意到，当 $r_1x_1(1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2})>0$ 时 $\dot{x}_1(t)>0$，但要使 $x_1>0$ 和 $\dot{x}_1(t)>0$，当且仅当

$$1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}>0,\quad x_1>0$$

类似地 $\dot{x}_1(t)<0$，当且仅当

$$1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}<0,\quad x_1>0$$

这样我们得到在 x_1x_2 平面中,直线

$$\varphi=1-\frac{x_1}{N_1}-\sigma_1\frac{x_2}{N_2}=0 \tag{12}$$

把平面划分为 $\dot{x}_1(t)>0$ 和 $\dot{x}_1(t)<0$ 两个区域。类似地，对 x_2 进行分析得到

（i） $\dot{x}_2(t)>0$，当且仅当

$$1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}>0,\quad x_2>0$$

（ii） $\dot{x}_2(t)<0$，当且仅当

$$1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}<0,\quad x_2>0$$

（iii）直线

$$\phi=1-\sigma_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}=0 \tag{13}$$

将 x_1x_2 平面划分为 $\dot{x}_2(t)>0$ 和 $\dot{x}_2(t)<0$ 两个区域。

两直线（12）和（13）之间的位置关系可以由下图的四种情况来说明。每种可能性对应于平衡点的稳定性说明如下：

（i） $\sigma_1<1,\sigma_2>1$，由图（b）知，两直线将平面 $(x_1>0,x_2>0)$ 划分为三个区域：

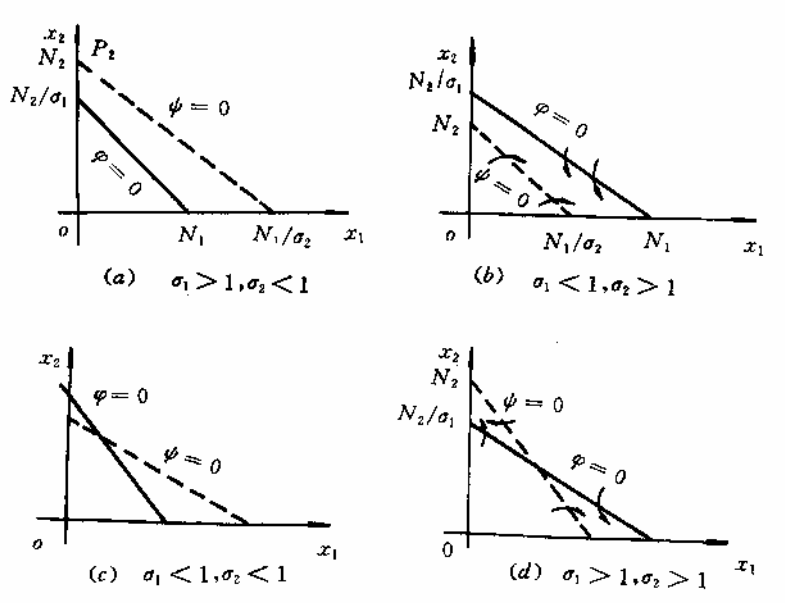
$$S_1:\dot{x}_1(t)>0,\dot{x}_2(t)>0 \tag{14}$$

$$S_2:\dot{x}_1(t)>0,\dot{x}_2(t)<0 \tag{15}$$

$$S_3:\dot{x}_1(t)<0,\dot{x}_2(t)<0 \tag{16}$$

可以说明不论轨线从哪个区域出发，$t\to\infty$ 时都将趋向 $P_1(N_1,0)$。若轨线从 S_1 出发，由（14）式可知随着 t 的增加轨线向右上方运动，必然进入 S_2；若轨线从 S_2 出发，由（15）式可知轨线向下方运动，那么它或者趋向 P_1 点，或者进入 S_3，但进入 S_3 是不可能的。因为，如果设轨线在某时刻 t_1 经直线（12）式进入 S_3，则 $\dot{x}_1(t_1)=0$，由式（9）、

（10）不难看出。



$$\ddot{x}_1(t_1)=-\frac{r_1\sigma_1}{N_2}x_1(t)\dot{x}_2(t_1)$$

由式（15）、（16）知 $\dot{x}_2(t_1)<0$，故 $\ddot{x}_1(t_1)>0$，表明 $x_1(t_1)$ 在 t_1 达到极小值，而这是不可能的，因为在 S_2 中 $\dot{x}_1(t)>0$，即 $x_1(t_1)$ 一直是增加的。若轨线从 S_3 出发，由（16）式可知轨线向左下方运动，那么它或者趋向 P_1 点，或者进入 S_2，而进入 S_2 后，根据上面的分析最终也将趋向 P_1。综合上述分析可以画出轨线示意图。因为直线（12）式上 $dx_1=0$，所以在（12）式上轨线方向垂直于 x 轴；在（13）式上 $dx_2=0$，轨线方向平行于 x_1 轴。

（ii）$\sigma_1>1,\sigma_2<1$，类似的分析可知 $P_2(0,N)$ 稳定。

（iii）$\sigma_1<1,\sigma_2<1$，P_3 稳定。

（iv）$\sigma_1>1,\sigma_2>1$，P_3 不稳定（鞍点）。

因为轨线的初始位置不同，其走向也不同或趋于 P_1 或趋于 P_2。根据建模过程中 σ_1,σ_2 的含义，可以说明 P_1,P_2,P_3 点稳定在生态学上的意义：

①$\sigma_1<1,\sigma_2>1$：$\sigma_1<1$ 意味着在对供养甲的资源的竞争中乙弱于甲，$\sigma_2>1$ 意味着在对供养乙的资源的竞争中甲强于乙，于是种群乙终将灭绝，种群甲趋向最大容量，即 $x_1(t),x_2(t)$ 趋向平衡点 $P_1(N_1,0)$。

②$\sigma_1>1,\sigma_2<1$：情况与①正好相反。

③$\sigma_1<1,\sigma_2<1$：因为在竞争甲的资源中乙较弱，而在竞争乙的资源中甲较弱，于是可以达到一个双方共存的稳定的平衡状态 P_3，这是种群竞争中很少出现的情况。

④$\sigma_1>1,\sigma_2>1$：留作习题。

§3 Volterra 模型

意大利生物学家 D'Ancona 曾致力于鱼类种群相互制约关系的研究，在研究过程中他无意中发现了第一次世界大战期间地中海各港口捕获的几种鱼类占捕获总量百分比的资料，从这些资料中他发现各种软骨掠肉鱼，如鲨鱼、鲢鱼等我们称之为捕食者的一些不是很理想的鱼占总渔获量的百分比，在 1914～1923 年期间，意大利阜姆港收购的捕食者所占的比例有明显的增加：

年代	1914	1915	1916	1917	1918
百分比	11.9	21.4	22.1	21.2	36.4
年代	1919	1920	1921	1922	1923
百分比	27.3	16.0	15.9	14.8	10.7

他知道，捕获的各种鱼的比例基本上代表了地中海渔场中各种鱼类的比例。战争中捕获量大幅度下降，当然使渔场中食用鱼（食饵）增加，以此为生的鲨鱼也随之增加。但是捕获量的下降为什么会使鲨鱼的比例增加，即对捕食者而不是对食饵有利呢？他无法解释这个现象，于是求助于著名的意大利数学家 V. Volterra，希望建立一个食饵—捕食者系统的数学模型，定量地回答这个问题。

3.l　形成模型

为建立这样的模型，我们分别用 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 记食饵和捕食者在时刻 t 的数量。因为大海中鱼类的资源丰富，可以假设如果食饵独立生存则食饵将以增长率 r_1 按指数规律增长，即有 $\dot{x}_1(t)=r_1x_1(t)$。捕食者的存在使食饵的增长率降低，设降低的程度与捕食者数量成正比，于是 $x_1(t)$ 满足方程

$$\dot{x}_1(t)=x_1(r_1-\lambda_1x_2) \tag{17}$$

比例系数反映捕食者掠取食饵的能力。

捕食者离开食饵无法生存，若设它独自存在时死亡率为 r_2，即 $\dot{x}_2(t)=-r_2x_2(t)$，而食饵为它提供食物的作用相当于使死亡率降低，或使之增长。设这个作用与食饵数量成正比，于是 $x_2(t)$ 满足

$$\dot{x}_2(t)=x_2(-r_2+\lambda_2x_1) \tag{18}$$

比例系数 λ_2 反映食饵对捕食者的供养能力。

方程（17）和（18）是在没有人工捕获情况下自然环境中食饵与捕食者之间的制约关系，是 Volterra 提出的最简单的模型。这个模型没有引入竞争项。

3.2　模型分析

这是一个非线性模型，不能求出其解析解，所以我们还是通过平衡点的稳定性分析，研究 $x_1(t),x_2(t)$ 的变化规律。容易得到方程（17）和（18）的平衡点为

$$P_1(0,0),P_2(\frac{r_2}{\lambda_2},\frac{r_1}{\lambda_1}) \tag{19}$$

当然，平衡解 $P_1(0,0)$ 对我们来说是没有意义的。这个方程组还有一族解 $x_1(t)=C_1e^{r_1t}$，$x_2(t)=0$ 和 $x_1(t)=0$，$x_2=C_2e^{-r_2t}$。因此，x_1 轴和 x_2 轴都是方程组（17），（18）的轨线。这意味着：方程（17）、（18）在 $t=t_0$ 由第一象限 $x_1>0,x_2>0$ 出发的每一个解 $x_1(t),x_2(t)$ 在以后一切时间 $t\geq t_0$ 都保持在第一象限内。当 $x_1,x_2>0$ 时，方程（17）、（18）的轨线是一阶方程

$$\frac{dx_1}{dx_2}=\frac{x_1(r_1-\lambda_1 x_2)}{x_2(-r_2+\lambda_2 x_1)}$$

的解曲线。用分离变量方法解得

$$(x_1^{r_2}e^{-\lambda_2 x_1})(x_2^{r_1}e^{-\lambda_1 x_2})=c \tag{20}$$

c 是任意常数。因此，方程（17），（18）的轨线是由式（20）定义的曲线族，我们来证明这些曲线是封闭的。

引理 1　当 $x_1, x_2>0$ 时，方程（20）定义了一组封闭曲线。

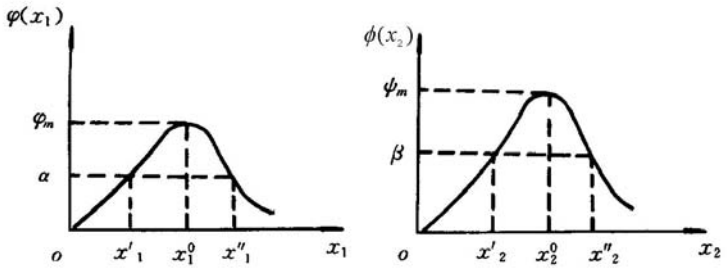
证明　我们首先来确定当 $x_1, x_2>0$ 时函数

$$\varphi(x_1)=x_1^{r_2}e^{-\lambda_2 x_1}$$

和

$$\phi(x_2)=x_2^{r_1}e^{-\lambda_1 x_2}$$

的性状。利用微积分方法可以作出 φ 和 ϕ 的图形。如下图所示。



若它们的极大值分别记作 φ_m 和 ϕ_m，则不难确定 x_1^0、x_2^0 满足

$$\varphi(x_1^0)=\varphi_m,\quad x_1^0=\frac{r_2}{\lambda_2} \tag{21}$$

$$\phi(x_2^0)=\phi_m,\quad x_2^0=\frac{r_1}{\lambda_1} \tag{22}$$

显然，仅当（20）式右端常数 $c\le\varphi_m\phi_m$ 时相轨线才有定义。

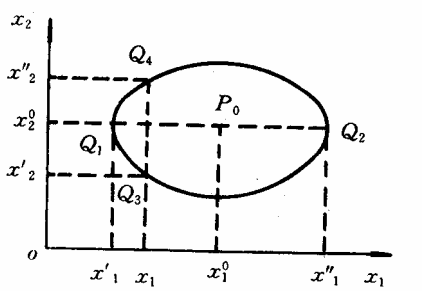
当 $c=\varphi_m\phi_m$ 时，$x_1=x_1^0$，$x_2=x_2^0$，将式（21）和（22）与（19）式比较可知 (x_1^0, x_2^0) 正是平衡点 P_2，所以 P_2 是相轨线的退化点。

为了考察 $c<\varphi_m\phi_m$ 时 $(c>0)$ 轨线的形状，我们只需考虑 $c=\lambda\phi_m$ 的情况，其中 $0<\lambda<\varphi_m$。首先注意到：方程 $x_1^{r_2}e^{-\lambda_2 x_1}=\lambda$ 具有一个解 $x_1=x'_1<x_1^0$ 和另一个解 $x_1=x''_1>x_1^0$。因此，当 $x_1<x'_1$ 或 $x_1>x''_1$ 时，方程

$$\phi(x_2)=x_2^{r_1}e^{-\lambda_1 x_2}=\left(\frac{\lambda}{x_1^{r_2}e^{-\lambda_2 x_1}}\right)\phi_m$$

没有解 x_2。当 $x_1=x'_1$ 或 $x_1=x''_1$ 时，这个方程具有唯一的解 $x_2=x_2^0$，而对于 $x'_1<x_1<x''_1$，则具有两个解 $x'_2(x_1)$ 和 $x''_2(x_1)$。较小的解 $x'_2(x_1)$ 总是小于 x_2^0，较大的解总是大于 x_2^0。当 x_1 趋于 x'_1 或 x''_1 时，$x'_2(x_1)$ 和 $x''_2(x_1)$ 都趋向于 x_2^0。因此，

当 x_1 和 x_2 是正数时，由（20）所定义的曲线都是封闭的。而且，这些封闭曲线中的每一条（除 $x_1 = x_1^0$ 和 $x_2 = x_2^0$ 以外），都不含（17）和（18）的任何平衡点。所以（17）和（18）的具有初始条件 $x_1(0) > 0$，$x_2(0) > 0$ 的所有的解 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 都是时间的周期函数。也就是说，（17）和（18）的具有初始条件 $x_1(0) > 0$，$x_2(0) > 0$ 的每一个解 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 都具有这样的性质：$x_1(t+T) = x_1(t)$，$x_2(t+T) = x_2(t)$，其中 T 是某一正数。



D'Ancona 所用的数据实际上是捕食者的百分比在每一年中的平均值。因此，为了把这些数据同方程组（17）和（18）的结果进行比较，对于（17）和（18）的任何解 $x_1(t)$，$x_2(t)$，我们必须算出 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的“平均值”。值得注意的是，即使还没有准确地求得 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$，我们仍然能够算出这些平均值。

引理 2　设 $x_1(t)$，$x_2(t)$ 是（17）和（18）的周期解，其周期 $T > 0$，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的平均值定义为

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)dt,\quad \bar{x}_2 = \frac{1}{T}\int_0^T x_2(t)dt$$

这时，$\bar{x}_1 = x_1^0$，$\bar{x}_2 = x_2^0$。换句话说，$x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的平均值是平衡解。

证明　把（17）的两端除以 x_1，得到 $\dfrac{\dot{x}_1(t)}{x_1} = r_1 - \lambda_1 x_2$，于是

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}dt = \frac{1}{T}\int_0^T [r_1 - \lambda_1 x_2(t)]dt$$

由于

$$\int_0^T \frac{\dot{x}_1(t)}{x_1(t)}dt = \ln x_1(T) - \ln x_1(0) = 0$$

因此，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \lambda_1 x_2(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T r_1 dt = r_1,$$

于是，$\bar{x}_2 = \dfrac{r_1}{\lambda_1}$。类似地，把（18）的两端除以 $Tx_2(t)$，由 0 到 T 积分，我们得到 $\bar{x}_1 = \dfrac{r_2}{\lambda_2}$。

下面，我们考虑渔业对于上述数学模型的影响。注意到渔业使得食饵总数以速率 εx_1 减少，而使得捕食者的总数以速率 εx_2 减少。常数 ε 反映渔业的水平；即反映了海上的渔船数和下水的网数。因此，真实的状态由下列修正的微分方程组来描述：

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_1(r_1 - \lambda_1 x_2) - \varepsilon x_1 = (r_1 - \varepsilon)x_1 - \lambda_1 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2(t) = x_2(-r_2 + \lambda_2 x_1) - \varepsilon x_2 = -(r_2 + \varepsilon)x_2 + \lambda_2 x_1 x_2 \end{cases} \tag{23}$$

这个方程组同（17），（18）完全一样（当 $r_1 - \varepsilon > 0$ 时），只是其中 r_1 换成 $r_1 - \varepsilon$，而 r_2 换成 $r_2 + \varepsilon$。因此，现在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的平均值是

$$\bar{x}_1=\frac{r_2+\varepsilon}{\lambda_2},\quad \bar{x}_2=\frac{r_1-\varepsilon}{\lambda_1}$$

平均说来，中等捕鱼量$(\varepsilon<r_1)$实际上会增加食饵的数目，而减少捕食者的数目。相反，捕鱼量的降低，平均说来，会增加捕食者的数目，而减少食饵的数目。这个值得注意的结果称为 Volterra 原理，它解释了 D'Ancona 的数据。

值得注意的是 Volterra 模型是非常粗糙的，有兴趣的读者可以作进一步的探讨。

习 题 十 四

1. 单棵树木的商品价值V是由这棵树能够生产的木材体积和质量所决定的。显然$V=V(t)$依赖于树木的年龄t。假设曲线$V(t)$已知，c为树木砍伐成本。试给出砍伐树木（更确切地说砍伐相同年龄的树木）的最优年龄。如果考虑到森林轮种问题，即一旦树木从某一处砍掉，这块土地便可以种植新树，假定各轮种周期具有相等的长度，试建模讨论最优砍伐轮种的森林管理策略的问题。

2. 如果两个种群都能独立生存，共处时又能相互提供食物，试建立种群依存模型并讨论平衡点及稳定性，解释稳定的意义。

3. 如果两个种群都不能独立生存，但共处时可以相互提供食物，试建模以讨论共处的可能性。

4. 如果在食饵—捕食者系统中，捕食者掠夺的对象只是成年的食饵，而未成年的食饵因体积太小免遭捕获。在适当的假设下建立这三者之间关系的模型，求平衡点。

第十五章　常微分方程的解法

建立微分方程只是解决问题的第一步，通常需要求出方程的解来说明实际现象，并加以检验。如果能得到解析形式的解固然是便于分析和应用的，但是我们知道，只有线性常系数微分方程，并且自由项是某些特殊类型的函数时，才可以肯定得到这样的解，而绝大多数变系数方程、非线性方程都是所谓“解不出来”的，即使看起来非常简单的方程如$\frac{dy}{dx}=y^2+x^2$，于是对于用微分方程解决实际问题来说，数值解法就是一个十分重要的手段。

§1　常微分方程的离散化

下面主要讨论一阶常微分方程的初值问题，其一般形式是

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y) & a\le x\le b\\ y(a)=y_0\end{cases} \tag{1}$$

在下面的讨论中，我们总假定函数$f(x,y)$连续，且关于y满足李普希兹(Lipschitz)条件，即存在常数L，使得

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\le L|y-\bar{y}|$$

这样，由常微分方程理论知，初值问题(1)的解必定存在唯一。

所谓数值解法，就是求问题（1）的解$y(x)$在若干点

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N=b$$

处的近似值$y_n(n=1,2,\cdots,N)$的方法，$y_n(n=1,2,\cdots,N)$称为问题（1）的数值解，$h_n=x_{n+1}-x_n$称为由x_n到x_{n+1}的步长。今后如无特别说明，我们总取步长为常量h。

建立数值解法，首先要将微分方程离散化，一般采用以下几种方法：

（i）用差商近似导数

若用向前差商$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$代替$y'(x_n)$代入（1）中的微分方程，则得

$$\frac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}\approx f(x_n,y(x_n))\quad(n=0,1,\cdots)$$

化简得

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

如果用$y(x_n)$的近似值y_n代入上式右端，所得结果作为$y(x_{n+1})$的近似值，记为y_{n+1}，则有

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\quad(n=0,1,\cdots) \tag{2}$$

这样，问题（1）的近似解可通过求解下述问题

$$\begin{cases}y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\quad(n=0,1,\cdots)\\ y_0=y(a)\end{cases} \tag{3}$$

得到，按式（3）由初值y_0可逐次算出$y_1,y_2,\cdots$。式（3）是个离散化的问题，称为差分方程初值问题。

需要说明的是，用不同的差商近似导数，将得到不同的计算公式。

（ii）用数值积分方法

将问题（1）的解表成积分形式，用数值积分方法离散化。例如，对微分方程两端积分，得

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx \quad (n=0,1,\cdots) \tag{4}$$

右边的积分用矩形公式或梯形公式计算。

（iii）Taylor 多项式近似

将函数 $y(x)$ 在 x_n 处展开，取一次 Taylor 多项式近似，则得

$$y(x_{n+1})\approx y(x_n)+hy'(x_n)=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n))$$

再将 $y(x_n)$ 的近似值 y_n 代入上式右端，所得结果作为 $y(x_{n+1})$ 的近似值 y_{n+1}，得到离散化的计算公式

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)$$

以上三种方法都是将微分方程离散化的常用方法，每一类方法又可导出不同形式的计算公式。其中的 Taylor 展开法，不仅可以得到求数值解的公式，而且容易估计截断误差。

§2 欧拉（Euler）方法

2.1 Euler 方法

Euler 方法就是用差分方程初值问题（3）的解来近似微分方程初值问题（1）的解，即由公式（3）依次算出 $y(x_n)$ 的近似值 $y_n(n=1,2,\cdots)$。这组公式求问题（1）的数值解称为向前 Euler 公式。

如果在微分方程离散化时，用向后差商代替导数，即 $y'(x_{n+1})\approx\dfrac{y(x_{n+1})-y(x_n)}{h}$，则得计算公式

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}) \quad (n=0,1,\cdots) \\ y_0=y(a) \end{cases} \tag{5}$$

用这组公式求问题（1）的数值解称为向后 Euler 公式。

向后 Euler 法与 Euler 法形式上相似，但实际计算时却复杂得多。向前 Euler 公式是显式的，可直接求解。向后 Euler 公式的右端含有 y_{n+1}，因此是隐式公式，一般要用迭代法求解，迭代公式通常为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)}) \qquad (k=0,1,2,\cdots) \end{cases} \tag{6}$$

2.2 Euler 方法的误差估计

对于向前 Euler 公式（3）我们看到，当 $n=1,2,\cdots$ 时公式右端的 y_n 都是近似的，所以用它计算的 y_{n+1} 会有累积误差，分析累积误差比较复杂，这里先讨论比较简单的所谓局部截断误差。

假定用（3）式时右端的 y_n 没有误差，即 $y_n=y(x_n)$，那么由此算出

$$y_{n+1}=y(x_n)+hf(x_n,y(x_n)) \tag{7}$$

局部截断误差指的是，按（7）式计算由 x_n 到 x_{n+1} 这一步的计算值 y_{n+1} 与精确值 $y(x_{n+1})$ 之差 $y(x_{n+1})-y_{n+1}$。为了估计它，由 Taylor 展开得到的精确值 $y(x_{n+1})$ 是

$$y(x_{n+1})=y(x_n)+hy'(x_n)+\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3) \tag{8}$$

（7）、（8）两式相减（注意到 $y'=f(x,y)$）得

$$y(x_{n+1})-y_{n+1}=\frac{h^2}{2}y''(x_n)+O(h^3)\approx O(h^2) \tag{9}$$

即局部截断误差是 h^2 阶的，而数值算法的精度定义为：

若一种算法的局部截断误差为 $O(h^{p+1})$，则称该算法具有 p **阶精度**。

显然 p 越大，方法的精度越高。式（9）说明，向前 Euler 方法是一阶方法，因此它的精度不高。

§3 改进的 Euler 方法

3.1 梯形公式

利用数值积分方法将微分方程离散化时，若用梯形公式计算式(4)中之右端积分，即

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))dx\approx\frac{h}{2}[f(x_n,y(x_n))+f(x_{n+1},y(x_{n+1}))]$$

并用 y_n,y_{n+1} 代替 $y(x_n),y(x_{n+1})$，则得计算公式

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$$

这就是求解初值问题（1）的梯形公式。

直观上容易看出，用梯形公式计算数值积分要比矩形公式好。梯形公式为二阶方法。

梯形公式也是隐式格式，一般需用迭代法求解，迭代公式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\dfrac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)})] \\ (k=0,1,2,\cdots) \end{cases} \tag{10}$$

由于函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件，容易看出

$$|y_{n+1}^{(k+1)}-y_{n+1}^{(k)}|\le\frac{hL}{2}|y_{n+1}^{(k)}-y_{n+1}^{(k-1)}|$$

其中 L 为 Lipschitz 常数。因此，当 $0<\dfrac{hL}{2}<1$ 时，迭代收敛。但这样做计算量较大。如果实际计算时精度要求不太高，用公式（10）求解时，每步可以只迭代一次，由此导出一种新的方法—改进 Euler 法。

3.2 改进 Euler 法

按式（5）计算问题（1）的数值解时，如果每步只迭代一次，相当于将 Euler 公式与梯形公式结合使用：先用 Euler 公式求 y_{n+1} 的一个初步近似值 $\bar{y}_{n+1}$，称为预测值，然后用梯形公式校正求得近似值 y_{n+1}，即

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) & \text{预测} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})] & \text{校正} \end{cases} \tag{11}$$

式（11）称为由 Euler 公式和梯形公式得到的预测—校正系统，也叫改进 Euler 法。

为便于编制程序上机，式（11）常改写成

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_q = y_n + hf(x_n + h, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_q) \end{cases} \tag{12}$$

改进 Euler 法是二阶方法。

§4 龙格—库塔（Runge—Kutta）方法

回到 Euler 方法的基本思想—用差商代替导数—上来。实际上，按照微分中值定理应有

$$\frac{y(x_{n+1}) - y(x_n)}{h} = y'(x_n + \theta h), 0 < \theta < 1$$

注意到方程 $y' = f(x, y)$ 就有

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hf(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h)) \tag{13}$$

不妨记 $\overline{K} = f(x_n + \theta h, y(x_n + \theta h))$，称为区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 上的平均斜率。可见给出一种斜率 $\overline{K}$，（13）式就对应地导出一种算法。

向前 Euler 公式简单地取 $f(x_n, y_n)$ 为 $\overline{K}$，精度自然很低。改进的 Euler 公式可理解为 $\overline{K}$ 取 $f(x_n, y_n)$， $f(x_{n+1}, \bar{y}_{n+1})$ 的平均值，其中 $\bar{y}_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$，这种处理提高了精度。

如上分析启示我们，在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 内多取几个点，将它们的斜率加权平均作为 $\overline{K}$，就有可能构造出精度更高的计算公式。这就是龙格—库塔方法的基本思想。

4.1 首先不妨在区间 $[x_n, x_{n+1}]$ 内仍取 2 个点，仿照（13）式用以下形式试一下

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y_n + \beta h k_1), \ 0 < \alpha, \beta < 1 \end{cases} \tag{14}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta$ 为待定系数，看看如何确定它们使（14）式的精度尽量高。为此我们分析局部截断误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1}$，因为 $y_n = y(x_n)$，所以（14）可以化为

$$\begin{cases} y_{n+1} = y(x_n) + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2) \\ k_1 = f(x_n, y(x_n)) = y'(x_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha h, y(x_n) + \beta h k_1) \\ \quad = f(x_n, y(x_n)) + \alpha h f_x(x_n, y(x_n)) \\ \quad + \beta h k_1 f_y(x_n, y(x_n)) + O(h^2) \end{cases} \tag{15}$$

其中 k_2 在点 $(x_n, y(x_n))$ 作了 Taylor 展开。（15）式又可表为

$$y_{n+1} = y(x_n) + (\lambda_1 + \lambda_2) h y'(x_n) + \lambda_2 \alpha h^2 (f_x + \frac{\beta}{\alpha} f f_y) + O(h^3)$$

注意到

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + h y'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

中 $y' = f$， $y'' = f_x + f f_y$，可见为使误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$，只须令

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad \lambda_2 \alpha = \frac{1}{2}, \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1 \tag{16}$$

待定系数满足（16）的（15）式称为 2 阶龙格—库塔公式。由于（16）式有 4 个未知数而只有 3 个方程，所以解不唯一。不难发现，若令 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ ，$\alpha = \beta = 1$，即为改进的 Euler 公式。可以证明，在 $[x_n, x_{n+1}]$ 内只取 2 点的龙格—库塔公式精度最高为 2 阶。

4.2　4 阶龙格—库塔公式

要进一步提高精度，必须取更多的点，如取 4 点构造如下形式的公式：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \lambda_3 k_3 + \lambda_4 k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \alpha_1 h, y_n + \beta_1 h k_1) \\ k_3 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \beta_2 h k_1 + \beta_3 h k_2) \\ k_4 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \beta_4 h k_1 + \beta_5 h k_2 + \beta_6 h k_3) \end{cases} \tag{17}$$

其中待定系数 $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i$ 共 13 个，经过与推导 2 阶龙格—库塔公式类似、但更复杂的计算，得到使局部误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^5)$ 的 11 个方程。取既满足这些方程、又较简单的一组 $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i$，可得

$$\begin{cases} y_{n+1}=\dfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4) \\ k_1=f(x_n,y_n) \\ k_2=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{hk_1}{2}) \\ k_3=f(x_n+\dfrac{h}{2},y_n+\dfrac{hk_2}{2}) \\ k_4=f(x_n+h,y_n+hk_3) \end{cases} \tag{18}$$

这就是常用的 4 阶龙格—库塔方法（简称 RK 方法）。

§5 线性多步法

以上所介绍的各种数值解法都是单步法，这是因为它们在计算 y_{n+1} 时，都只用到前一步的值 y_n，单步法的一般形式是

$$y_{n+1}=y_n+h\varphi(x_n,y_n,h)\quad (n=0,1,\cdots,N-1) \tag{19}$$

其中 $\varphi(x,y,h)$ 称为增量函数，例如 Euler 方法的增量函数为 $f(x,y)$，改进 Euler 法的增量函数为

$$\varphi(x,y,h)=\frac{1}{2}[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]$$

如何通过较多地利用前面的已知信息，如 $y_n,y_{n-1},\cdots,y_{n-r}$，来构造高精度的算法计算 y_{n+1}，这就是多步法的基本思想。经常使用的是线性多步法。

让我们试验一下 $r=1$，即利用 y_n,y_{n-1} 计算 y_{n+1} 的情况。

从用数值积分方法离散化方程的（4）式

$$y(x_{n+1})-y(x_n)=\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx$$

出发，记 $f(x_n,y_n)=f_n$，$f(x_{n-1},y_{n-1})=f_{n-1}$，式中被积函数 $f(x,y(x))$ 用二节点 (x_{n-1},f_{n-1})，(x_n,f_n) 的插值公式得到（因 $x\ge x_n$），所以是外插。

$$\begin{aligned} f(x,y(x)) &= f_n\frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}+f_{n-1}\frac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n} \\ &= \frac{1}{h}[(x-x_{n-1})f_n-(x-x_n)f_{n-1}] \end{aligned} \tag{20}$$

此式在区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 上积分可得

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,y(x))dx=\frac{3h}{2}f_n-\frac{h}{2}f_{n-1}$$

于是得到

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1}) \tag{21}$$

注意到插值公式（20）的误差项含因子 $(x-x_{n-1})(x-x_n)$，在区间 $[x_n,x_{n+1}]$ 上积分后

得出h^3，故公式（21）的局部截断误差为$O(h^3)$，精度比向前 Euler 公式提高 1 阶。

若取$r=2,3,\cdots$可以用类似的方法推导公式，如对于$r=3$有

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(55f_n-59f_{n-1}+37f_{n-2}-9f_{n-3}) \tag{22}$$

其局部截断误差为$O(h^5)$。

如果将上面代替被积函数$f(x,y(x))$用的插值公式由外插改为内插，可进一步减小误差。内插法用的是$y_{n+1},y_n,\cdots,y_{n-r+1}$，取$r=1$时得到的是梯形公式，取$r=3$时可得

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}(9f_{n+1}+19f_n-5f_{n-1}+f_{n-2}) \tag{23}$$

与（22）式相比，虽然其局部截断误差仍为$O(h^5)$，但因它的各项系数（绝对值）大为减小，误差还是小了。当然，（23）式右端的f_{n+1}未知，需要如同向后 Euler 公式一样，用迭代或校正的办法处理。

§6 一阶微分方程组与高阶微分方程的数值解法

6.1 一阶微分方程组的数值解法

设有一阶微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} y'_i=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_m) \\ y_i(a)=y_{i0} \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,m) \tag{24}$$

若记$y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$，$y_0=(y_{10},y_{20},\cdots,y_{m0})^T$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)^T$，则初值问题（24）可写成如下向量形式

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(a)=y_0 \end{cases} \tag{25}$$

如果向量函数$f(x,y)$在区域D：

$$a\le x\le b,\quad y\in R^m$$

连续，且关于y满足 Lipschitz 条件，即存在$L>0$，使得对$\forall x\in[a,b]$，$y_1,y_2\in R^m$，都有

$$\|f(x,y_1)-f(x,y_2)\|\le L\|y_1-y_2\|$$

那么问题（25）在$[a,b]$上存在唯一解$y=y(x)$。

问题（25）与（1）形式上完全相同，故对初值问题（1）所建立的各种数值解法可全部用于求解问题（25）。

6.2 高阶微分方程的数值解法

高阶微分方程的初值问题可以通过变量代换化为一阶微分方程组初值问题。

设有m阶常微分方程初值问题

$$\begin{cases} y^{(m)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(m-1)}) \quad a\le x\le b \\ y(a)=y_0,y'(a)=y_0^{(1)},\cdots,y^{(m-1)}(a)=y_0^{(m-1)} \end{cases} \tag{26}$$

引入新变量$y_1=y,y_2=y',\cdots,y_m=y^{(m-1)}$，问题（26）就化为一阶微分方程初值问题

$$\begin{cases} y'_1 = y_2 & y_1(a) = y_0 \\ y'_2 = y_3 & y_2(a) = y_0^{(1)} \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ y'_{m-1} = y_m & y_{m-1}(a) = y_0^{(m-2)} \\ y'_m = f(x, y_1, \cdots, y_m) & y_m(a) = y_0^{(m-1)} \end{cases} \tag{27}$$

然后用 6.1 中的数值方法求解问题（27），就可以得到问题（26）的数值解。

最后需要指出的是，在化学工程及自动控制等领域中，所涉及的常微分方程组初值问题常常是所谓的“刚性”问题。具体地说，对一阶线性微分方程组

$$\frac{dy}{dx} = Ay + \Phi(x) \tag{28}$$

其中 $y, \Phi \in R^m$, A 为 m 阶方阵。若矩阵 A 的特征值 $\lambda_i (i = 1,2,\cdots,m)$ 满足关系

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0 \quad (i = 1,2,\cdots,m)$$

$$\max_{1\le i\le m} |\mathrm{Re}\,\lambda_i| >> \min_{1\le i\le m} |\mathrm{Re}\,\lambda_i|$$

则称方程组（28）为刚性方程组或 Stiff 方程组，称数

$$s = \max_{1\le i\le m} |\mathrm{Re}\,\lambda_i| / \min_{1\le i\le m} |\mathrm{Re}\,\lambda_i|$$

为刚性比。对刚性方程组，用前面所介绍的方法求解，都会遇到本质上的困难，这是由数值方法本身的稳定性限制所决定的。理论上的分析表明，求解刚性问题所选用的数值方法最好是对步长 h 不作任何限制。

§7 Matlab 解法

7.1 Matlab 数值解

7.1.1 非刚性常微分方程的解法

Matlab 的工具箱提供了几个解非刚性常微分方程的功能函数，如 ode45，ode23，ode113，其中 ode45 采用四五阶 RK 方法，是解非刚性常微分方程的首选方法，ode23 采用二三阶 RK 方法，ode113 采用的是多步法，效率一般比 ode45 高。

Matlab 的工具箱中没有 Euler 方法的功能函数。

（I）对简单的一阶方程的初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

改进的 Euler 公式为

$$\begin{cases} y_p = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_q = y_n + hf(x_n + h, y_p) \\ y_{n+1} = \dfrac{1}{2}(y_p + y_q) \end{cases}$$

我们自己编写改进的 Euler 方法函数 eulerpro.m 如下：

```
function [x,y]=eulerpro(fun,x0,xfinal,y0,n);
if nargin<5,n=50;end
```

```
h=(xfinal-x0)/n;
x(1)=x0;y(1)=y0;
for i=1:n
   x(i+1)=x(i)+h;
   y1=y(i)+h*feval(fun,x(i),y(i));
   y2=y(i)+h*feval(fun,x(i+1),y1);
   y(i+1)=(y1+y2)/2;
end
```

例1　用改进的Euler方法求解

$$y'=-2y+2x^2+2x,\ (0\le x\le 0.5),\ y(0)=1$$

解　编写函数文件 doty.m 如下：

```
function f=doty(x,y);
f=-2*y+2*x^2+2*x;
```

在Matlab命令窗口输入：

```
[x,y]=eulerpro('doty',0,0.5,1,10)
```

即可求得数值解。

（II）ode23，ode45，ode113的使用

Matlab的函数形式是

```
[t,y]=solver('F',tspan，y0)
```

这里solver为ode45，ode23，ode113，输入参数 F 是用M文件定义的微分方程 $y'=f(x,y)$ 右端的函数。tspan=[t0,tfinal]是求解区间，y0是初值。

例2　用RK方法求解

$$y'=-2y+2x^2+2x,\ (0\le x\le 0.5),\ y(0)=1$$

解　同样地编写函数文件 doty.m 如下：

```
function f=doty(x,y);
f=-2*y+2*x^2+2*x;
```

在Matlab命令窗口输入：

```
[x,y]=ode45('doty',0,0.5,1)
```

即可求得数值解。

7.1.2　刚性常微分方程的解法

Matlab的工具箱提供了几个解刚性常微分方程的功能函数，如ode15s，ode23s，ode23t，ode23tb，这些函数的使用同上述非刚性微分方程的功能函数。

7.1.3　高阶微分方程 $y^{(n)}=f(t,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 解法

例 3　考虑初值问题

$$y'''-3y''-y'y=0\quad y(0)=0\quad y'(0)=1\quad y''(0)=-1$$

解　（i）如果设 $y_1=y,y_2=y',y_3=y''$，那么

$$\begin{cases} y_1'=y_2 & y_1(0)=0\\ y'_2=y_3 & y_2(0)=1\\ y'_3=3y_3+y_2y_1 & y_3(0)=-1 \end{cases}$$

初值问题可以写成 $Y'=F(t,Y),Y(0)=Y_0$ 的形式，其中 $Y=[y_1;y_2;y_3]$。

（ii）把一阶方程组写成接受两个参数 t 和 y，返回一个列向量的 M 文件 F.m：

```
function dy=F(t,y);
```

```
    dy=[y(2);y(3);3*y(3)+y(2)*y(1)];
```

注意：尽管不一定用到参数 t 和 y，M—文件必须接受此两参数。这里向量 dy 必须是列向量。

（iii）用 Matlab 解决此问题的函数形式为

```
    [T,Y]=solver('F',tspan,y0)
```

这里 solver 为 ode45、ode23、ode113，输入参数 F 是用 M 文件定义的常微分方程组，tspan=[t0 tfinal]是求解区间，y0 是初值列向量。在 Matlab 命令窗口输入

```
    [T,Y]=ode45('F',[0 1],[0;1;-1])
```

就得到上述常微分方程的数值解。这里 Y 和时刻 T 是一一对应的，Y(:,1)是初值问题的解，Y(:,2)是解的导数，Y(:,3)是解的二阶导数。

例 4　求 van der Pol 方程

$$y''-\mu(1-y^2)y'+y=0$$

的数值解，这里 $\mu>0$ 是一参数。

解　（i）化成常微分方程组。设 $y_1=y, y_2=y'$，则有

$$\begin{cases} y'_1=y_2 \\ y'_2=\mu(1-y_1^2)y_2-y_1 \end{cases}$$

（ii）书写 M 文件（对于 $\mu=1$）vdp1.m:

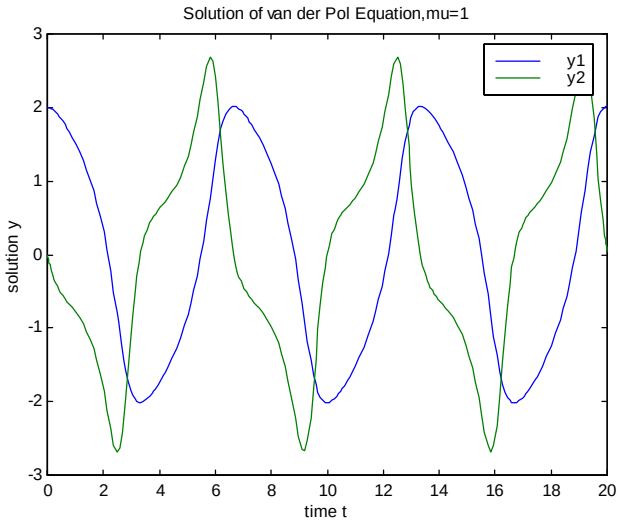
```
function dy=vdp1(t,y);
dy=[y(2);(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

（iii）调用 Matlab 函数。对于初值 $y(0)=2, y'(0)=0$，解为

```
[T,Y]=ode45('vdp1',[0 20],[2;0]);
```

（iv）观察结果。利用图形输出解的结果：

```
plot(T,Y(:,1),'-',T,Y(:,2),'--')
title('Solution of van der Pol Equation,mu=1');
xlabel('time t');
ylabel('solution y');
legend('y1','y2');
```



例 5　van der Pol 方程，$\mu=1000$（刚性）

解　(i)书写 M 文件 vdp1000.m:

```
function dy=vdp1000(t,y);
dy=[y(2);1000*(1-y(1)^2)*y(2)-y(1)];
```

（ii）观察结果

```
[t,y]=ode15s('vdp1000',[0 3000],[2;0]);
plot(t,y(:,1),'o')
title('Solution of van der Pol Equation,mu=1000');
xlabel('time t');
ylabel('solution y(:,1)');
```

7.2　常微分方程的解析解

在 Matlab 中，符号运算工具箱提供了功能强大的求解常微分方程的符号运算命令 dsolve。常微分方程在 Matlab 中按如下规定重新表达：

符号 D 表示对变量的求导。Dy 表示对变量 y 求一阶导数，当需要求变量的 n 阶导数时，用 Dn 表示，D4y 表示对变量 y 求 4 阶导数。

由此，常微分方程 $y''+2y'=y$ 在 Matlab 中，将写成'D2y+2*Dy=y'。

7.2.1　求解常微分方程的通解

无初边值条件的常微分方程的解就是该方程的通解。其使用格式为：

dsolve('diff_equation')

dsolve(' diff_equation'，'var')

式中 diff_equation 为待解的常微分方程，第 1 种格式将以变量 t 为自变量进行求解，第 2 种格式则需定义自变量 var。

例 6　试解常微分方程

$$x^2+y+(x-2y)y'=0$$

解　编写程序如下：

```
syms x y
diff_equ='x^2+y+(x-2*y)*Dy=0';
dsolve(diff_equ,'x')
```

7.2.2　求解常微分方程的初边值问题

求解带有初边值条件的常微分方程的使用格式为：

dsolve('diff_equation'，'condition1，condition2，…'，'var')

其中 condition1，condition2，… 即为微分方程的初边值条件。

例 7　试求微分方程

$$y'''-y''=x,\quad y(1)=8,y'(1)=7,y''(2)=4$$

的解。

解　编写程序如下：

```
y=dsolve('D3y-D2y=x','y(1)=8,Dy(1)=7,D2y(2)=4','x')
```

7.2.3　求解常微分方程组

求解常微分方程组的命令格式为：

dsolve('diff_equ1，diff_equ2，…'，'var')

dsolve('diff_equ1，diff_equ2，…'，'condition1，condition2，…'，'var')

第 1 种格式用于求解方程组的通解，第 2 种格式可以加上初边值条件，用于具体求解。

例 8　试求常微分方程组：

$$\begin{cases} f''+3g=\sin x \\ g'+f'=\cos x \end{cases}$$

的通解和在初边值条件为 $f'(2)=0, f(3)=3, g(5)=1$ 的解。

解　编写程序如下：

```
clc,clear
equ1='D2f+3*g=sin(x)';
equ2='Dg+Df=cos(x)';
[general_f,general_g]=dsolve(equ1,equ2,'x')
[f,g]=dsolve(equ1,equ2,'Df(2)=0,f(3)=3,g(5)=1','x')
```

7.2.4　求解线性常微分方程组

（i）一阶齐次线性微分方程组

$$X'=AX,\quad X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

这里的’表示对 t 求导数。e^{At} 是它的基解矩阵。$X'=AX$，$X(t_0)=X_0$ 的解为 $X(t)=e^{A(t-t_0)}X_0$。

例 9　试解初值问题

$$X'=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}X,\quad X(0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 1\end{bmatrix}$$

解　编写程序如下：

```
syms t
a=[2,1,3;0,2,-1;0,0,2];
x0=[1;2;1];
x=expm(a*t)*x0
```

（ii）非齐次线性方程组

由参数变易法可求得初值问题

$$X'=AX+f(t),\quad X(t_0)=X_0$$

的解为

$$X(t)=e^{A(t-t_0)}X_0+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

例 10　试解初值问题

$$X'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & -2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix}X+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^t\cos 2t\end{bmatrix},\quad X(0)=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}。$$

解　编写程序如下：

```
clc,clear
syms t s
a=[1,0,0;2,1,-2;3,2,1];ft=[0;0;exp(t)*cos(2*t)];
x0=[0;1;1];
x=expm(a*t)*x0+int(expm(a*(t-s))*subs(ft,s),s,0,t);
x=simple(x)
```

习 题 十 五

1．用欧拉方法和龙格—库塔方法求微分方程数值解，画出解的图形，对结果进行分析比较。

（i） $x^2y''+xy'+(x^2-n^2)y=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=2, y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$（Bessel 方程，令 $n=\frac{1}{2}$），精确解 $y=\sin x\sqrt{\frac{2\pi}{x}}$。

（ii） $y''+y\cos x=0, y(0)=1, y'(0)=0$，幂级数解

$$y=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{2}{4!}x^4-\frac{9}{6!}x^6+\frac{55}{8!}x^8-\cdots$$

2．一只小船渡过宽为 d 的河流，目标是起点 A 正对着的另一岸 B 点。已知河水流速 v_1 与船在静水中的速度 v_2 之比为 k。

（i）建立小船航线的方程，求其解析解。

（ii）设 $d=100$ m，$v_1=1$ m/s，$v_2=2$ m/s，用数值解法求渡河所需时间、任意时刻小船的位置及航行曲线，作图，并与解析解比较。

第十六章　差分方程模型

离散状态转移模型涉及的范围很广，可以用到各种不同的数学工具。下面我们对差分方程作一简单的介绍，下一章我们将介绍马氏链模型。

§1　差分方程

1.1　差分方程简介

规定t只取非负整数。记y_t为变量y在t点的取值，则称$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$为$y_t$的一阶向前差分，简称差分，称$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$为$y_t$的二阶差分。类似地，可以定义$y_t$的$n$阶差分$\Delta^n y_t$。

由t、y_t及y_t的差分给出的方程称为y_t的差分方程，其中含y_t的最高阶差分的阶数称为该差分方程的阶。差分方程也可以写成不显含差分的形式。例如，二阶差分方程$\Delta^2 y_t + \Delta y_t + y_t = 0$也可改写成$y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 0$。

满足一差分方程的序列y_t称为差分方程的解。类似于微分方程情况，若解中含有的独立常数的个数等于差分方程的阶数时，称此解为该差分方程的通解。若解中不含任意常数，则称此解为满足某些初值条件的特解。

称如下形式的差分方程

$$a_0 y_{n+t} + a_1 y_{n+t-1} + \cdots + a_n y_t = b(t) \tag{1}$$

为n阶常系数线性差分方程，其中$a_0, a_1, \cdots, a_n$是常数，$a_0 \neq 0$。其对应的齐次方程为

$$a_0 y_{n+t} + a_1 y_{n+t-1} + \cdots + a_n y_t = 0 \tag{2}$$

容易证明，若序列$y_t^{(1)}$与$y_t^{(2)}$均为（2）的解，则$y_t = c_1 y_t^{(1)} + c_2 y_t^{(2)}$也是方程（2）的解，其中$c_1, c_2$为任意常数。若$y_t^{(1)}$是方程（2）的解，$y_t^{(2)}$是方程（1）的解，则$y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)}$也是方程（1）的解。

方程（1）可用如下的代数方法求其通解：

（I）先求解对应的特征方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 = 0 \tag{3}$$

（II）根据特征根的不同情况，求齐次方程（2）的通解。

（i）若特征方程（3）有n个互不相同的实根$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，则齐次方程（2）的通解为

$$c_1 \lambda_1^t + \cdots + c_n \lambda_n^t \quad （c_1, \cdots, c_n 为任意常数）$$

（ii）若λ是特征方程（3）的k重根，通解中对应于λ的项为$(\overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_k t^{k-1})\lambda^t$，$\overline{c}_i (i = 1, \cdots, k)$为任意常数。

（iii）若特征方程（3）有单重复根$\lambda = \alpha \pm \beta i$，通解中对应它们的项为$\overline{c}_1 \rho^t \cos \varphi t + \overline{c}_2 \rho^t \sin \varphi t$，其中$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$为$\lambda$的模，$\varphi = \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{\alpha}$为$\lambda$的幅角。

（iv）若$\lambda = \alpha \pm \beta i$是特征方程（3）的$k$重复根，则通解对应于它们的项为

$$(\overline{c}_1 + \cdots + \overline{c}_k t^{k-1}) \rho^t \cos \varphi t + (\overline{c}_{k+1} + \cdots + \overline{c}_{2k} t^{k-1}) \rho^t \sin \varphi t$$

$\bar{c}_i(i=1,\cdots,2k)$为任意常数。

（III）求非齐次方程（1）的一个特解$\bar{y}_t$。若y_t为方程（2）的通解，则非齐次方程（1）的通解为$\bar{y}_t+y_t$。

求非齐次方程（1）的特解一般要用到常数变易法，计算较繁。对特殊形式的$b(t)$也可使用待定系数法。例如，当$b(t)=b^t p_k(t)$，$p_k(t)$为t的k次多项式时可以证明：若b不是特征根，则非齐次方程（1）有形如$b^t q_k(t)$的特解，$q_k(t)$也是t的k次多项式；若b是r重特征根，则方程（1）有形如$b^t t^r q_k(t)$的特解。进而可利用待定系数法求出$q_k(t)$，从而得到方程（1）的一个特解$\bar{y}_t$。

例 1　求解两阶差分方程$y_{t+2}+y_t=t$。

解　对应齐次方程的特征方程为$\lambda^2+1=0$，其特征根为$\lambda_{1,2}=\pm i$，对应齐次方程的通解为

$$y_t=c_1\cos\frac{\pi}{2}t+c_2\sin\frac{\pi}{2}t$$

原方程有形如$at+b$的特解。代入原方程求得$a=\frac{1}{2}$，$b=-\frac{1}{2}$，故原方程的通解为

$$c_1\cos\frac{\pi}{2}t+c_2\sin\frac{\pi}{2}t+\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$$

例 2　在信道上传输仅用三个字母a,b,c且长度为n的词，规定有两个a连续出现的词不能传输，试确定这个信道容许传输的词的个数。

解　令$h(n)$表示容许传输且长度为n的词的个数，$n=1,2,\cdots$，通过简单计算可求得：$h(1)=3$，$h(2)=8$。当$n\geq 3$时，若词的第一个字母是b或c,则词可按$h(n-1)$种方式完成；若词的第一个字母是a，则第二个字母是b或c，该词剩下的部分可按$h(n-2)$种方式完成。于是，得差分方程

$$h(n)=2h(n-1)+2h(n-2),\ (n=3,4,\cdots)$$

其特征方程为

$$\lambda^2-2\lambda-2=0$$

特征根

$$\lambda_1=1+\sqrt{3},\ \lambda_2=1-\sqrt{3}$$

则通解为

$$h(n)=c_1(1+\sqrt{3})^n+c_2(1-\sqrt{3})^n,\ (n=3,4,\cdots)$$

利用条件$h(1)=3$，$h(2)=8$，求得

$$h(n)=\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1+\sqrt{3})^n+\frac{-2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}(1-\sqrt{3})^n,\ (n=1,2,\cdots)$$

在应用差分方程研究问题时，我们常常需要讨论解的稳定性。对常系数非齐次线性差分方程(1),若不论其对应齐次方程的通解中任意常数$c_1,\cdots,c_n$如何取值,在$t\to+\infty$时总有$y_t\to 0$，则称方程（1）的解是稳定的。根据通解的结构不难看出，非齐次方

程（1）稳定的充要条件为其所有特征根的模均小于 1。

1.2　常系数线性差分方程的 Z 变换解法

常系数线性差分方程采用解析解法比较容易，而且对其解的意义也容易理解，但采用这种解法求解常系数线性非齐次差分方程比较繁琐，通常是采用 Z 变换，将差分方程变换为代数方程去求解。

设有离散序列 $x(k)$，$(k=0,1,2,\cdots)$，则 $x(k)$ 的 Z 变换定义为

$$X(z)=Z[x(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}x(k)z^{-k} \qquad (4)$$

其中 z 是复变量。显然上式右端的级数收敛域是某个圆的外部。

$X(z)$ 的 Z 反变换记作

$$x(k)=Z^{-1}[X(z)]$$

1.2.1　几个常用离散函数的 Z 变换

（i）单位冲激函数 $\delta(k)$ 的 Z 变换

$$Z[\delta(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(k)z^{-k}=[1\times z^{-k}]_{k=0}=1$$

即单位冲激函数的 Z 变换为 1。

（ii）单位阶跃函数 $U(k)$ 的 Z 变换

$$Z[U(k)]=\sum_{k=0}^{\infty}U(k)z^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}1\times z^{-k},$$

即

$$Z[U(k)]=\frac{z}{z-1}\quad(|z|>1)$$

（iii）单边指数函数 $f(k)=a^k$ 的 Z 变换（a 为不等于 1 的正常数）

$$Z[a^k]=\sum_{k=0}^{\infty}a^kz^{-k}=\frac{z}{z-a}\quad(|z|>a)$$

1.2.2　Z 变换的性质

（i）线性性质

设 $Z[f_1(k)]=F_1(z)$，$Z[f_2(k)]=F_2(z)$，则

$$Z[af_1(k)+bf_2(k)]=aF_1(z)+bF_2(z)$$

其中 a,b 为常数。收敛域为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的公共区域。

（ii）平移性

设 $Z[f(k)]=F(z)$，则

$$Z[f(k+1)]=z[F(z)-f(0)],$$

$$Z[f(k+N)]=z^N[F(z)-\sum_{k=0}^{N-1}f(k)z^{-k}],$$

$$Z[f(k-1)]=z^{-1}[F(z)+f(-1)z],$$

$$Z[f(k-N)]=z^{-N}[F(z)+\sum_{k=1}^{N-1}f(-k)z^{k}]$$

例 3　求齐次差分方程

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0,\quad x(0)=0,\quad x(1)=1$$

的解。

解　令 $Z[x(k)]=X(z)$，对差分方程取 Z 变换，得

$$z^2X(z)-z+3zX(z)+2X(z)=0,$$

$$X(z)=\frac{z}{z^2+3z+2}=\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2},$$

对上式取 z 反变换，便得差分方程的解为

$$x(k)=(-1)^k-(-2)^k。$$

§2　蛛网模型

2.1　问题提出

在自由竞争的社会中，很多领域会出现循环波动的现象。在经济领域中，可以从自由集市上某种商品的价格变化看到如下现象：在某一时期，商品的上市量大于需求，引起价格下跌，生产者觉得该商品无利可图，转而经营其它商品；一段时间之后，随着产量的下降，带来的供不应求又会导致价格上升，又有很多生产商会进行该商品的生产；随之而来的，又会出现商品过剩，价格下降。在没有外界干扰的情况下，这种现象将会反复出现。

如何从数学的角度来描述上述现象呢？

2.2　模型假设

（i）设 k 时段商品数量为 x_k，其价格为 y_k。这里，把时间离散化为时段，一个时期相当于商品的一个生产周期。

（ii）同一时段的商品的价格取决于该时段商品的数量，把

$$y_k=f(x_k)\qquad(5)$$

称之为需求函数。出于对自由经济的理解，商品的数量越多，其价格就越低，故可以假设：需求函数为一个单调下降函数。

（iii）下一时段商品数量由上一个时段的商品的价格决定，把

$$x_{k+1}=g(y_k)\qquad(6)$$

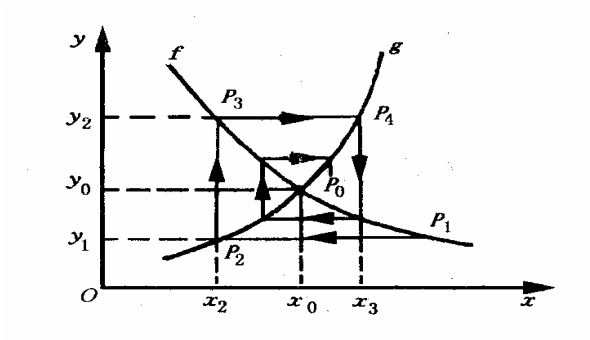
称之为供应函数。由于价格越高可以导致产量越大，故可假设供应函数是一个单调上升的函数。

2.3　模型求解

在同一个坐标系中做出需求函数与供应函数的图形，设两条曲线相交于 $P_0(x_0,y_0)$，则 P_0 为平衡点。因为此时 $x_0=g(y_0)$，$y_0=f(x_0)$，若某个 k，有 $x_k=x_0$，则可推出

$$y_l=y_0,\quad x_l=x_0,\quad (l=k,k+1,\cdots)$$

即商品的数量保持在 x_0，价格保持在 y_0，不妨设 $x_1\neq x_0$，下面考虑 x_k,y_k 在图上的变化 $(k=1,2,\cdots)$。如下图所示，当 x_1 给定后，价格 y_1 由 f 上的 P_1

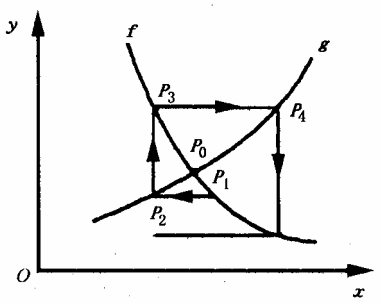


点决定，下一时段的数量 x_2 由 g 上的 P_2 点决定， y_2 又可由 f 上的 P_3 点决定。依此类推，可得一系列的点 $P_1(x_1,y_1)$， $P_2(x_2,y_1)$， $P_3(x_2,y_2)$， $P_4(x_3,y_2)$，图上的箭头表示求出 P_k 的次序，由图知：

$$\lim_{k\to+\infty} P_k(x,y)=P_0(x_0,y_0)\,,$$

即市场经济将趋于稳定。

并不是所有的需求函数和供应函数都趋于稳定，若给定的 f 与 g 的图形如下图所示，得出的 $P_1,P_2,\cdots$ 就不趋于 P_0，此时，市场经济趋向不稳定。



上两图中的折线 $P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,\cdots$ 形似蛛网，故把这种模型称为蛛网模型。在进行市场经济分析中， f 取决于消费者对某种商品的需要程度及其消费水平， g 取决于生产者的生产、管理等能力。

当已经知道需求函数和供应函数之后，可以根据 f 和 g 的性质判断平衡点 P_0 的稳定性。利用结论：当 $|x_1-x_0|$ 较小时， P_0 点的稳定性取决于 f 与 g 在 P_0 点的斜率，即当

$$|f'(x_0)|<|g'(y_0)| \tag{7}$$

时， P_0 点稳定，当

$$|f'(x_0)|>|g'(y_0)| \tag{8}$$

时， P_0 点不稳定。

这一结论的直观解释是：需求曲线越平，供应曲线越陡，越有利于经济稳定。

设 $\alpha=|f'(x_0)|$， $\dfrac{1}{\beta}=|g'(y_0)|$，在 P_0 点附近取 f 与 g 的线性近似，由（5），（6）式得

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \tag{9}$$

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \tag{10}$$

上两式中消去 y_k，得

$$x_{k+1} = -\alpha\beta\, x_k + (1+\alpha\beta)x_0 \tag{11}$$

（11）式对 $k = 1,2,\cdots$ 均成立，有

$$\begin{aligned}
x_{k+1} &= -\alpha\beta\, x_k + (1+\alpha\beta)x_0 \\
(-\alpha\beta)x_k &= (-\alpha\beta)^2 x_{k-1} + (-\alpha\beta)(1+\alpha\beta)x_0 \\
(-\alpha\beta)^2 x_{k-1} &= (-\alpha\beta)^3 x_{k-2} + (-\alpha\beta)^2(1+\alpha\beta)x_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(-\alpha\beta)^{k-2} x_3 &= (-\alpha\beta)^{k-1} x_2 + (-\alpha\beta)^{k-2}(1+\alpha\beta)x_0 \\
(-\alpha\beta)^{k-1} x_2 &= (-\alpha\beta)^k x_1 + (-\alpha\beta)^{k-1}(1+\alpha\beta)x_0
\end{aligned}$$

以上 k 个式子相加，有

$$\begin{aligned}
x_k &= (-\alpha\beta)^k x_1 + (1+\alpha\beta)x_0[1 + (-\alpha\beta) + \cdots + (-\alpha\beta)^{k-1}] \\
&= (-\alpha\beta)^k x_1 + [1 - (-\alpha\beta)^k]x_0
\end{aligned} \tag{12}$$

此为（11）式的解。

若 P_0 是稳定点，则应有：

$$\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = x_0$$

结合（12）式考虑，P_0 点稳定的条件是

$$\alpha\beta < 1 \tag{13}$$

即

$$\alpha < \frac{1}{\beta}$$

同理，P_0 点不稳定的条件是

$$\alpha\beta > 1 \tag{14}$$

即

$$\alpha > \frac{1}{\beta}$$

此时，$\lim_{k\to+\infty} x_{k+1} = \infty$。这与（7），（8）式是一致的。

2.4　模型的修正

在上面模型假设的第（iii）点中引进了供应函数，并且知道 g 取决于管理者的生产、管理水平。如果生产者的管理水平更高一些，他们在决定该商品生产数量 x_{k+1} 时，不仅考虑了前一时期的价格 y_k，而且也考虑了价格 y_{k-1}。为了简化起见，不妨设 x_{k+1} 由 $\frac{1}{2}(y_k + y_{k-1})$ 决定，则供应函数可写成

$$x_{k+1}=g\left[\frac{1}{2}(y_k+y_{k-1})\right]$$

在 P_0 附近取线性近似，则有

$$x_{k+1}-x_0=\frac{\beta}{2}(y_k+y_{k-1}-2y_0) \tag{15}$$

由（9）式有

$$y_k=y_0-\alpha(x_k-x_0)$$

$$y_{k-1}=y_0-\alpha(x_{k-1}-x_0)$$

将上两式代入（15）式，整理得

$$2x_{k+1}+\alpha\beta x_k+\alpha\beta x_{k-1}=(1+\alpha\beta)x_0,\quad (k=2,3,\cdots)$$

这是一个二阶线性差分方程，其特征方程为

$$2\lambda^2+\alpha\beta\lambda+\alpha\beta=0$$

经计算，可得其特征根

$$\lambda_{1,2}=\frac{-\alpha\beta\pm\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4} \tag{16}$$

结论：若方程的特征根均在单位圆内，即 $|\lambda_1|<1$，$|\lambda_2|<1$，则 P_0 为稳定点。

当 $\alpha\beta>8$ 时，（16）式有两个实根，因

$$\lambda_2=\frac{-\alpha\beta-\sqrt{(\alpha\beta)^2-8\alpha\beta}}{4}<-\frac{\alpha\beta}{4},$$

则有 $|\lambda_2|>2$，故此时 P_0 不是稳定点。

当 $\alpha\beta<8$ 时，（16）式有两个共轭复根，此时

$$|\lambda_{1,2}|=\left[\left(\frac{\alpha\beta}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\sqrt{8\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

要使 P_0 为稳定点，只需

$$\alpha\beta<2$$

与（13）式相比，α 与 β 的范围扩大了。这是由于经营者经营管理水平的提高带来的结果。

§3 商品销售量预测

在利用差分方程建模研究实际问题时，常常需要根据统计数据并用最小二乘法来拟合出差分方程的系数。其系统稳定性讨论要用到代数方程的求根。对问题的进一步研究又常需考虑到随机因素的影响，从而用到相应的概率统计知识。

例 4　某商品前 5 年的销售量见表。现希望根据前 5 年的统计数据预测第 6 年起该商品在各季度中的销售量。

年份 / 季度	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
1	11	12	13	15	16
2	16	18	20	24	25

3	25	26	27	30	32
4	12	14	15	15	17

从表中可以看出，该商品在前 5 年相同季节里的销售量呈增长趋势，而在同一年中销售量先增后减，第一季度的销售量最小而第三季度的销售量最大。预测该商品以后的销售情况，根据本例中数据的特征，可以用回归分析方法按季度建立四个经验公式，分别用来预测以后各年同一季度的销售量。例如，如认为第一季度的销售量大体按线性增长，可设销售量 $y_t^{(1)} = at + b$，由

```
x=[[1:5]',ones(5,1)];y=[11 12 13 15 16]';z=x\y
```

求得 $a = z(1) = 1.3$，$b = z(2) = 9.5$。

根据 $y_t^{(1)} = 1.3t + 9.5$，预测第六年起第一季度的销售量为 $y_6^{(1)} = 17.3$，$y_7^{(1)} = 18.6$，…。由于数据少，用回归分析效果不一定好。

如认为销售量并非逐年等量增长而是按前一年或前几年同期销售量的一定比例增长的，则可建立相应的差分方程模型。仍以第一季度为例，为简单起见不再引入上标，以 y_t 表示第 t 年第一季度的销售量，建立形式如下的差分公式：

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2$$

或

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3$$

等等。

上述差分方程中的系数不一定能使所有统计数据吻合，较为合理的办法是用最小二乘法求一组总体吻合较好的数据。以建立二阶差分方程 $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3$ 为例，选取 a_1, a_2, a_3 使

$$\sum_{t=3}^{5} [y_t - (a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3)]^2$$

最小。编写 Matlab 程序如下：

```
y0=[11 12 13 15 16]';
y=y0(3:5);x=[y0(2:4),y0(1:3),ones(3,1)];
z=x\y
```

求得 $a_1 = z(1) = -1$，$a_2 = z(2) = 3$，$a_3 = z(3) = -8$。即所求二阶差分方程为 $y_t = -y_{t-1} + 3y_{t-2} - 8$。

虽然这一差分方程恰好使所有统计数据吻合，但这只是一个巧合。根据这一方程，可迭代求出以后各年第一季度销售量的预测值 $y_6 = 21$，$y_7 = 19$，…等。

上述为预测各年第一季度销售量而建立的二阶差分方程，虽然其系数与前 5 年第一季度的统计数据完全吻合，但用于预测时预测值与事实不符。凭直觉，第六年估计值明显偏高，第七年销售量预测值甚至小于第六年。稍作分析，不难看出，如分别对每一季度建立一差分方程，则根据统计数据拟合出的系数可能会相差甚大，但对同一种商品，这种差异应当是微小的，故应根据统计数据建立一个共用于各个季度的差分方程。为此，将季度编号为 $t = 1,2,\cdots,20$，令 $y_t = a_1 y_{t-4} + a_2$ 或 $y_t = a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-8} + a_3$ 等，利用全体数据来拟合，求拟合得最好的系数。以二阶差分方程为例，为求 a_1, a_2, a_3 使得

$$Q(a_1,a_2,a_3)=\sum_{t=9}^{20}[y_t-(a_1y_{t-4}+a_2y_{t-8}+a_3)]^2$$

最小，编写 Matlab 程序如下：

```
y0=[11 16 25 12 12 18 26 14 13 20 27 15 15 24 30 15 16 25 32 17]';
y=y0(9:20);
x=[y0(5:16),y0(1:12),ones(12,1)];
z=x\y
```

求得 $a_1=z(1)=0.8737$， $a_2=z(2)=0.1941$， $a_3=z(3)=0.6957$，故求得二阶差分方程

$$y_t=0.8737y_{t-4}+0.1941y_{t-8}+0.6957，\ (t\geq 21)$$

根据此式迭代，可求得第六年和第七年第一季度销售量的预测值为

$$y_{21}=17.5869，\ y_{25}=19.1676$$

还是较为可信的。

§4 遗传模型

随着人类的进化，人们为了揭示生命的奥妙，越来越重视遗传学的研究，特别是遗传特征的逐代传播，引起人们更多的注意。无论是人，还是动植物都会将本身的特征遗传给下一代，这主要是因为后代继承了双亲的基因，形成自己的基因对，基因对将确定后代所表现的特征。下面，我们来研究两种类型的遗传：常染色体遗传和 $x-$ 链遗传。根据亲体基因遗传给后代的方式，建立模型，利用这些模型可以逐代研究一个总体基因型的分布。

4.1 常染色体遗传模型

常染色体遗传中，后代从每个亲体的基因对中各继承一个基因，形成自己的基因对，基因对也称为基因型。如果我们所考虑的遗传特征是由两个基因 A 和 a 控制的，那么就有三种基因对，记为 AA,Aa,aa。例如，金鱼草由两个遗传基因决定花的颜色，基因型是 AA 的金鱼草开红花，Aa 型的开粉红色花，而 aa 型的开白花。又如人类眼睛的颜色也是通过常染色体遗传控制的。基因型是 AA 或 Aa 的人，眼睛为棕色，基因型是 aa 的人，眼睛为蓝色。这里因为 AA 和 Aa 都表示了同一外部特征，我们认为基因 A 支配基因 a，也可以认为基因 a 对于 A 来说是隐性的。当一个亲体的基因型为 Aa，而另一个亲体的基因型是 aa 时，那么后代可以从 aa 型中得到基因 a，从 Aa 型中或得到基因 A，或得到基因 a。这样，后代基因型为 Aa 或 aa 的可能性相等。下面给出双亲体基因型的所有可能的结合，以及其后代形成每种基因型的概率，如下表所示。

		父体—母体的基因型					
		$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
后代基因型	AA	1	1/2	0	1/4	0	0
	Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
	aa	0	0	0	1/4	1/2	1

例 5 农场的植物园中某种植物的基因型为 AA,Aa 和 aa。农场计划采用 AA 型的植物与每种基因型植物相结合的方案培育植物后代。那么经过若干年后，这种植物的任一代的三种基因型分布如何？

（a）假设

令 $n=0,1,2,\cdots$。

（i）设a_n,b_n和c_n分别表示第n代植物中，基因型为AA,Aa和aa的植物占植物总数的百分率。令$x^{(n)}$为第n代植物的基因型分布：

$$x^{(n)}=\begin{bmatrix}a_n & b_n & c_n\end{bmatrix}^T$$

当$n=0$时

$$x^{(0)}=\begin{bmatrix}a_0 & b_0 & c_0\end{bmatrix}^T$$

表示植物基因的初始分布（即培育开始时的分布），显然有

$$a_0+b_0+c_0=1$$

（ii）第n代的分布与第$n-1$代的分布之间的关系是通过上面的表格确定的。

（b）建模

根据假设（ii），先考虑第n代中的AA型。由于第$n-1$代的AA型与AA型结合，后代全部是AA型；第$n-1$代的Aa型与AA型结合，后代是AA型的可能性为$\frac{1}{2}$；而第$n-1$代的aa型与AA型结合，后代不可能是AA型。因此当$n=1,2,\cdots$时

$$a_n=1\cdot a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1}+0\cdot c_{n-1}$$

即

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}b_{n-1} \tag{17}$$

类似可推出

$$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}+c_{n-1} \tag{18}$$

$$c_n=0 \tag{19}$$

将（17），（18），（19）式相加，得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$$

根据假设（i），有

$$a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=1$$

对于（17），（18），（19）式，我们采用矩阵形式简记为

$$x^{(n)}=Mx^{(n-1)}，\ n=1,2,\cdots \tag{20}$$

其中

$$M=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由（20）式递推，得

$$x^{(n)}=Mx^{(n-1)}=M^2x^{(n-2)}=\cdots=M^nx^{(0)}$$

（21）

（21）式给出第n代基因型的分布与初始分布的关系。

编写如下 Matlab 程序：

```
syms n a0 b0 c0
M=sym('[1,1/2,0;0,1/2,1;0,0,0]');
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p^(-1)*[a0;b0;c0];
x=simple(x)
```

求得

$$\begin{cases} a_n = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ c_n = 0 \end{cases} \tag{22}$$

当 $n \to \infty$ 时，$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$，所以从（22）式得到

$$a_n \to 1,\ b_n \to 0,\ c_n = 0$$

即在极限的情况下，培育的植物都是 AA 型。

（c）模型的讨论

若在上述问题中，不选用基因 AA 型的植物与每一植物结合，而是将具有相同基因型植物相结合，那么后代具有三种基因型的概率如下表所示。

		父体—母体的基因型		
		$AA-AA$	$Aa-Aa$	$aa-aa$
后代基因型	AA	1	1/4	0
	Aa	0	1/2	0
	aa	0	1/4	1

并且 $x^{(n)} = M^n x^{(0)}$，其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

编写如下 Matlab 程序：

```
syms n a0 b0 c0
M=sym('[1,1/4,0;0,1/2,0;0,1/4,1]');
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p^(-1)*[a0;b0;c0];
x=simple(x)
```

求得

$$\begin{cases} a_n = a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ c_n = c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] b_0 \end{cases} \tag{23}$$

当$n \to \infty$时，$a_n \to a_0 + \frac{1}{2} b_0$，$b_n \to 0$，$c_n \to c_0 + \frac{1}{2} b_0$。因此，如果用基因型相同的植物培育后代，在极限情况下，后代仅具有基因AA和aa。

4.2　常染色体隐性病模型

现在世界上已经发现的遗传病有将近 4000 种。在一般情况下，遗传病与特殊的种族、部落及群体有关。例如，遗传病库利氏贫血症的患者以居住在地中海沿岸为多，镰状网性贫血症一般流行在黑人中，家族黑蒙性白痴症则流行在东欧犹太人中间。患者经常未到成年就痛苦地死去，而他们的父母则是疾病的病源。假若我们能识别这些疾病的隐性患者，并且规定两个隐性患者不能结合（因为两个隐性患者结合，他们的后代就可能成为显性患者），那么未来的儿童，虽然有可能是隐性患者，但决不会出现显性特征，不会受到疾病的折磨。现在，我们考虑在控制结合的情况下，如何确定后代中隐性患者的概率。

（a）假设

（i）常染色体遗传的正常基因记为A，不正常基因记为a，并以AA, Aa, aa分别表示正常人，隐性患者，显性患者的基因型。

（ii）设a_n, b_n分别表示第n代中基因型为AA, Aa的人占总人数的百分比，记$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，$n = 1,2,\cdots$

（iii）为使每个儿童至少有一个正常的父亲或母亲，因此隐性患者必须与正常人结合，其后代的基因型概率由下表给出：

		父母的基因型	
		$AA-AA$	$AA-Aa$
后代基因型	AA	1	1/2
	Aa	0	1/2

（b）建模

由假设（iii），从第$n-1$代到第n代基因型分布的变化取决于方程

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$b_n = 0 \cdot a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

所以$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}$，$n = 1,2,\cdots$，其中

$$M=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

如果初始分布 $x^{(0)}$ 已知，那么第 n 代基因型分布为 $x^{(n)}=M^n x^{(0)}$， $n=1,2,\cdots$。易知

$$\begin{cases}a_n=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0\\ b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0\end{cases}\quad n=1,2,\cdots \tag{24}$$

当 $n\to\infty$ 时， $a_n\to 1$， $b_n\to 0$，隐性患者逐渐消失。从（24）式中可知

$$b_n=\frac{1}{2}b_{n-1}$$

这说明每代隐性患者的概率是前一代隐性患者概率的 $\frac{1}{2}$。

（c）模型讨论

研究在随机结合的情况下，隐性患者的变化是很有意思的，但随机结合导致了非线性化问题，超出了本章范围，然而用其它技巧，在随机结合的情况下可以把（24）式改写为

$$b_n=\frac{b_{n-1}}{1+\frac{1}{2}b_{n-1}} \tag{25}$$

下面给出数值的例子：

某地区有 10%的黑人是镰状网性贫血症隐性患者，如果控制结合，根据（24）式可知下一代（大约 27 年）的隐性患者将减少到 5%；如果随机结合，根据（25）式，可以预言下一代人中有 9.5%是隐性患者，并且可计算出大约每出生 400 个黑人孩子，其中有一个是显性患者。

4.3 $X-$链遗传模型

$X-$链遗传是指雄性具有一个基因 A 或 a，雌性具有两个基因 AA，或 Aa，或 aa。其遗传规律是雄性后代以相等概率得到母体两个基因中的一个，雌性后代从父体中得到一个基因，并从母体的两个基因中等可能地得到一个。下面，研究与 $X-$链遗传有关的近亲繁殖过程。

（a）假设

（i）从一对雌雄结合开始，在它们的后代中，任选雌雄各一个成配偶，然后在它们产生的后代中任选两个结成配偶。如此继续下去。

（ii）父体与母体的基因型组成同胞对，同胞对的形式有 (A,AA)， (A,Aa)， (A,aa)， (a,AA)， (a,Aa)， (a,aa) 六种。初始一对雌雄的同胞对，是这六种类型中的任一种，其后代的基因型如下表所示。

	父体—母体的基因型					
	(A,AA)	(A,Aa)	(A,aa)	(a,AA)	(a,Aa)	(a,aa)

后代基因型	A	1	1/2	0	1	1/2	0
	a	0	1/2	1	0	1/2	1
	AA	1	1/2	0	0	0	0
	Aa	0	1/2	1	1	1/2	0
	aa	0	0	0	0	1/2	1

（iii）在每一代中，配偶的同胞对也是六种类型之一，并有确定的概率。为计算这些概率，设 $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ 分别是第 n 代中配偶的同胞对为 (A, AA)，(A, Aa)，(A, aa)，(a, AA)，(a, Aa)，(a, aa) 型的概率，$n = 0,1,\cdots$。令

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n & e_n & f_n \end{bmatrix}^T，\ n = 0,1,\cdots$$

（iv）如果第 $n-1$ 代配偶的同胞对是 (A, Aa) 型，那么它们的雄性后代将等可能地得到基因 A 和 a，它们的雌性后代的基因型将等可能地是 AA 或 Aa。又由于第 n 代雌雄结合是随机的，那么第 n 代配偶的同胞对将等可能地为四种类型 (A, AA)，(A, Aa)，(a, AA)，(a, Aa) 之一。对于其它类型的同胞对，我们可以进行同样分析，因此有

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}，\ n = 1,2,\cdots \tag{26}$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

从（26）式中易得

$$x^{(n)} = M^n x^{(0)}，\ n = 1,2,\cdots$$

编写如下 Matlab 程序：

```
syms n a0 b0 c0 d0 e0 f0
M=[1 1/4 0 0 0 0;0 1/4 0 1 1/4 0;0 0 0 0 1/4 0;
   0 1/4 0 0 0 0;0 1/4 1 0 1/4 0;0 0 0 0 1/4 1];
M=sym(M);
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p^(-1)*[a0;b0;c0;d0;e0;f0];
x=simple(x)
```

由上述程序计算结果可以看出

当 $n \to \infty$ 时，$x^{(n)} \to \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 + f_0 \end{bmatrix}$，

因此，在极限情况下所有同胞对或者是 (A, AA) 型，或者是 (a, aa) 型。如果初始的父母体同胞对是 (A, Aa) 型，即 $b_0 = 1$，而 $a_0 = c_0 = d_0 = e_0 = f_0 = 0$，于是，当 $n \to \infty$ 时

$$x^{(n)} \to \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

即同胞对是 (A, AA) 型的概率是 $\frac{2}{3}$，是 (a, aa) 型的概率是 $\frac{1}{3}$。

习 题 十 六

1.（汉诺塔问题）n 个大小不同的圆盘依其半径大小依次套在桩 A 上，大的在下，小的在上。现要将此 n 个盘移到空桩 B 或 C 上，但要求一次只能移动一个盘且移动过程中，始终保持大盘在下，小盘在上。移动过程中桩 A 也可利用。设移动 n 个盘的次数为 a_n，试建立关于 a_n 的差分方程，并求 a_n 的通项公式。

2. 设第一月初有雌雄各一的一对小兔。假定两月后长成成兔，同时（即第三月）开始每月初产雌雄各一的一对小兔，新增小兔也按此规律繁殖。设第 n 月末共有 F_n 对兔子，试建立关于 F_n 的差分方程，并求 F_n 的通项公式。

3. 在常染色体遗传的问题中，假设植物总是和基因型是 Aa 的植物结合。求在第 n 代中，基因型为 AA, Aa 和 aa 的植物的百分率，并求当 n 趋于无穷大时，基因型分布的极限。

第十七章　马氏链模型

§1　随机过程的概念

一个随机试验的结果有多种可能性，在数学上用一个随机变量（或随机向量）来描述。在许多情况下，人们不仅需要对随机现象进行一次观测，而且要进行多次，甚至接连不断地观测它的变化过程。这就要研究无限多个，即一族随机变量。随机过程理论就是研究随机现象变化过程的概率规律性的。

定义 1　设$\{\xi_t, t\in T\}$是一族随机变量，T 是一个实数集合，若对任意实数$t\in T$,ξ_t是一个随机变量，则称$\{\xi_t, t\in T\}$为随机过程。

T 称为参数集合，参数t可以看作时间。ξ_t的每一个可能取值称为随机过程的一个状态。其全体可能取值所构成的集合称为状态空间，记作E。当参数集合T为非负整数集时，随机过程又称随机序列。本章要介绍的马尔可夫链就是一类特殊的随机序列。

例 1　在一条自动生产线上检验产品质量，每次取一个，“废品”记为 1，“合格品”记为 0。以ξ_n表示第n次检验结果，则ξ_n是一个随机变量。不断检验，得到一列随机变量$\xi_1,\xi_2,\cdots$，记为$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$。它是一个随机序列，其状态空间$E=\{0,1\}$。

例 2　在m个商店联营出租照相机的业务中（顾客从其中一个商店租出，可以到m个商店中的任意一个归还），规定一天为一个时间单位，“$\xi_t = j$”表示“第t天开始营业时照相机在第j个商店”，$j=1,2,\cdots,m$。则$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$是一个随机序列，其状态空间$E=\{1,2,\cdots,m\}$。

例 3　统计某种商品在t时刻的库存量，对于不同的t，得到一族随机变量，$\{\xi_t, t\in[0,+\infty)\}$是一个随机过程，状态空间$E=[0,R]$，其中$R$为最大库存量。

我们用一族分布函数来描述随机过程的统计规律。一般地，一个随机过程$\{\xi_t, t\in T\}$，对于任意正整数n及T中任意n个元素$t_1,\cdots,t_n$相应的随机变量$\xi_{t_1},\cdots,\xi_{t_n}$的联合分布函数记为

$$F_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{\xi_{t_1}\le x_1,\cdots,\xi_{t_n}\le x_n\} \qquad (1)$$

由于n及$t_i(i=1,\cdots,n)$的任意性，（1）式给出了一族分布函数。记为

$$\{F_{t_1\cdots t_n}(x_1,\cdots,x_n), t_i\in T, i=1,\cdots,n; n=1,2,\cdots\}$$

称它为随机过程$\{\xi_t, t\in T\}$的有穷维分布函数族。它完整地描述了这一随机过程的统计规律性。

§2　马尔可夫链

2.1　马尔可夫链的定义

现实世界中有很多这样的现象：某一系统在已知现在情况的条件下，系统未来时刻的情况只与现在有关，而与过去的历史无直接关系。比如，研究一个商店的累计销售额，如果现在时刻的累计销售额已知，则未来某一时刻的累计销售额与现在时刻以前的任一时刻累计销售额无关。上节中的几个例子也均属此类。描述这类随机现象的数学模型称为马氏模型。

定义 2　设$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$是一个随机序列，状态空间E为有限或可列集，对于任意的正整数m,n，若$i, j, i_k\in E(k=1,\cdots,n-1)$，有

$$P\{\xi_{n+m}=j\,|\,\xi_n=i,\xi_{n-1}=i_{n-1},\cdots,\xi_1=i_1\}=P\{\xi_{n+m}=j\,|\,\xi_n=i\} \quad (2)$$

则称 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 为一个马尔可夫链（简称马氏链），（2）式称为马氏性。

事实上，可以证明若等式（2）对于 $m=1$ 成立，则它对于任意的正整数 m 也成立。因此，只要当 $m=1$ 时（2）式成立，就可以称随机序列 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 具有马氏性，即 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链。

定义 3　设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个马氏链。如果等式（2）右边的条件概率与 n 无关，即

$$P\{\xi_{n+m}=j\,|\,\xi_n=i\}=p_{ij}(m) \quad (3)$$

则称 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 为时齐的马氏链。称 $p_{ij}(m)$ 为系统由状态 i 经过 m 个时间间隔（或 m 步）转移到状态 j 的转移概率。（3）称为时齐性。它的含义是：系统由状态 i 到状态 j 的转移概率只依赖于时间间隔的长短，与起始的时刻无关。本章介绍的马氏链假定都是时齐的，因此省略“时齐”二字。

2.2　转移概率矩阵及柯尔莫哥洛夫定理

对于一个马尔可夫链 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$，称以 m 步转移概率 $p_{ij}(m)$ 为元素的矩阵 $P(m)=(p_{ij}(m))$ 为马尔可夫链的 m 步转移矩阵。当 $m=1$ 时，记 $P(1)=P$ 称为马尔可夫链的一步转移矩阵，或简称转移矩阵。它们具有下列三个基本性质：

（i）对一切 $i,j\in E$，$0\le p_{ij}(m)\le 1$；

（ii）对一切 $i\in E$，$\sum_{j\in E}p_{ij}(m)=1$；

（iii）对一切 $i,j\in E$，$p_{ij}(0)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当}i=j\text{时}\\ 0, & \text{当}i\ne j\text{时}\end{cases}$。

当实际问题可以用马尔可夫链来描述时，首先要确定它的状态空间及参数集合，然后确定它的一步转移概率。关于这一概率的确定，可以由问题的内在规律得到，也可以由过去经验给出，还可以根据观测数据来估计。

例 4　某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔 15 分钟观察一次计算机的运行状态，收集了 24 小时的数据（共作 97 次观察）。用 1 表示正常状态，用 0 表示不正常状态，所得的数据序列如下：

1110010011111110011110111111001111111110001101101
1110110110101111011101111011111100110111111100111

解　设 $X_n(n=1,\cdots,97)$ 为第 n 个时段的计算机状态，可以认为它是一个时齐马氏链，状态空间 $E=\{0,1\}$，编写如下 Matlab 程序：

```
a1='1110010011111110011110111111001111111110001101101';
a2='1110110110101111011101111011111100110111111100111';
a=[a1 a2];
f00=length(findstr('00',a))
f01=length(findstr('01',a))
f10=length(findstr('10',a))
f11=length(findstr('11',a))
```

或者把上述数据序列保存到纯文本文件data1.txt中，存放在Matlab下的work子目录中，编写程序如下：

```
clc,clear
```

```
format rat
fid=fopen('data1.txt','r');
a=[];
while (~feof(fid))
   a=[a fgetl(fid)];
end
for i=0:1
   for j=0:1
      s=[int2str(i),int2str(j)];
      f(i+1,j+1)=length(findstr(s,a));
   end
end
fs=sum(f');
for i=1:2
   f(i,:)=f(i,:)/fs(i);
end
f
```

求得 96 次状态转移的情况是：

$0\to 0$，8 次；　　$0\to 1$，18 次；

$1\to 0$，18 次；　　$1\to 1$，52 次，

因此，一步转移概率可用频率近似地表示为

$$p_{00}=P\{X_{n+1}=0\mid X_n=0\}\approx\frac{8}{8+18}=\frac{4}{13}$$

$$p_{01}=P\{X_{n+1}=1\mid X_n=0\}\approx\frac{18}{8+18}=\frac{9}{13}$$

$$p_{10}=P\{X_{n+1}=0\mid X_n=1\}\approx\frac{18}{18+52}=\frac{9}{35}$$

$$p_{11}=P\{X_{n+1}=1\mid X_n=1\}\approx\frac{52}{18+52}=\frac{26}{35}$$

例 5　设一随机系统状态空间 $E=\{1,2,3,4\}$，记录观测系统所处状态如下：

4 3 2 1 4 3 1 1 2 3
2 1 2 3 4 4 3 3 1 1
1 3 3 2 1 2 2 2 4 4
2 3 2 3 1 1 2 4 3 1

若该系统可用马氏模型描述，估计转移概率 p_{ij}。

解　首先将不同类型的转移数 n_{ij} 统计出来分类记入下表

$i\to j$ 转移数 n_{ij}

	1	2	3	4	行和 n_i
1	4	4	1	1	10
2	3	2	4	2	11
3	4	4	2	1	11
4	0	1	4	2	7

各类转移总和 $\sum_i\sum_j n_{ij}$ 等于观测数据中马氏链处于各种状态次数总和减 1，而行和 n_i 是

系统从状态 i 转移到其它状态的次数，n_{ij} 是由状态 i 到状态 j 的转移次数，则 p_{ij} 的估计值 $p_{ij}=\dfrac{n_{ij}}{n_i}$。计算得

$$\hat{P}=\begin{bmatrix} 2/5 & 2/5 & 1/10 & 1/10 \\ 3/11 & 2/11 & 4/11 & 2/11 \\ 4/11 & 4/11 & 2/11 & 1/11 \\ 0 & 1/7 & 4/7 & 2/7 \end{bmatrix}$$

Matlab 计算程序如下：

```
format rat
clc
a=[4  3  2  1  4  3  1  1  2  3 ...
   2  1  2  3  4  4  3  3  1  1 ...
   1  3  3  2  1  2  2  2  4  4 ...
   2  3  2  3  1  1  2  4  3  1];
for i=1:4
   for j=1:4
      f(i,j)=length(findstr([i j],a));
   end
end
f
ni=(sum(f'))'
for i=1:4
   p(i,:)=f(i,:)/ni(i);
end
p
```

例 6（带有反射壁的随机徘徊）如果在原点右边距离原点一个单位及距原点 $s(s>1)$ 个单位处各立一个弹性壁。一个质点在数轴右半部从距原点两个单位处开始随机徘徊。每次分别以概率 $p(0<p<1)$ 和 $q(q=1-p)$ 向右和向左移动一个单位；若在+1 处，则以概率 p 反射到 2，以概率 q 停在原处；在 s 处，则以概率 q 反射到 $s-1$，以概率 p 停在原处。设 ξ_n 表示徘徊 n 步后的质点位置。$\{\xi_n, n=1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链，其状态空间 $E=\{1,2,\cdots,s\}$，写出转移矩阵 P。

解 $P\{\xi_0=i\}=\begin{cases}1, & \text{当} i=2\text{时} \\ 0, & \text{当} i\neq 2\text{时}\end{cases}$

$$p_{1j}=\begin{cases}q, & \text{当} j=1\text{时} \\ p, & \text{当} j=2\text{时} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$p_{sj}=\begin{cases}p, & \text{当} j=s\text{时} \\ q, & \text{当} j=s-1\text{时} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

$$p_{ij}=\begin{cases}p, & \text{当}j-i=1\text{时}\\ q, & \text{当}j-i=-1\text{时}(i=2,3,\cdots,s-1)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

因此，P 为一个 s 阶方阵，即

$$P=\begin{bmatrix}q & p & 0 & \cdots & 0 & 0\\ q & 0 & p & \cdots & 0 & 0\\ 0 & q & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & q & 0 & p\\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & p\end{bmatrix}。$$

定理 1 （柯尔莫哥洛夫—开普曼定理）设 $\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链，其状态空间 $E=\{1,2,\cdots\}$，则对任意正整数 m,n 有

$$p_{ij}(n+m)=\sum_{k\in E}p_{ik}(n)p_{kj}(m)$$

其中的 $i,j\in E$。

定理 2　设 P 是一个马氏链转移矩阵（P 的行向量是概率向量），$P^{(0)}$ 是初始分布行向量，则第 n 步的概率分布为

$$P^{(n)}=P^{(0)}P^n。$$

例 7　若顾客的购买是无记忆的，即已知现在顾客购买情况，未来顾客的购买情况不受过去购买历史的影响，而只与现在购买情况有关。现在市场上供应 A、B、C 三个不同厂家生产的 50 克袋状味精，用“$\xi_n=1$”、“$\xi_n=2$”、“$\xi_n=3$”分别表示“顾客第 n 次购买 A、B、C 厂的味精”。显然，$\{\xi_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个马氏链。若已知第一次顾客购买三个厂味精的概率依次为 0.2，0.4，0.4。又知道一般顾客购买的倾向由表 2 给出。求顾客第四次购买各家味精的概率。

表 2

		下 次 购 买		
		A	B	C
上次购买	A	0.8	0.1	0.1
	B	0.5	0.1	0.4
	C	0.5	0.3	0.2

解　第一次购买的概率分布为

$$P^{(1)}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4 & 0.4\end{bmatrix}$$

转移矩阵 $P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\ 0.5 & 0.1 & 0.4\\ 0.5 & 0.3 & 0.2\end{bmatrix}$

则顾客第四次购买各家味精的概率为

$$P^{(4)}=P^{(1)}P^3=\begin{bmatrix}0.7004 & 0.136 & 0.1636\end{bmatrix}。$$

2.3　转移概率的渐近性质—极限概率分布

现在我们考虑，随n的增大，P^n是否会趋于某一固定向量？先考虑一个简单例子：转移矩阵$P=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.7 & 0.3\end{bmatrix}$，当$n\to+\infty$时，

$$P^n\to\begin{bmatrix}\frac{7}{12} & \frac{5}{12}\\ \frac{7}{12} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}$$

又若取$u=\begin{bmatrix}\frac{7}{12} & \frac{5}{12}\end{bmatrix}$，则$uP=u$，$u^T$为矩阵$P^T$的对应于特征值$\lambda=1$的特征（概率）向量，$u$也称为$P$的不动点向量。哪些转移矩阵具有不动点向量？为此我们给出正则矩阵的概念。

定义4　一个马氏链的转移矩阵P是正则的，当且仅当存在正整数k，使P^k的每一元素都是正数。

定理3　若P是一个马氏链的正则阵，那么：

（i）P有唯一的不动点向量W，W的每个分量为正。

（ii）P的n次幂P^n（n为正整数）随n的增加趋于矩阵$\overline{W}$，$\overline{W}$的每一行向量均等于不动点向量W。

例8　信息的传播　一条新闻在$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$等人中间传播，传播的方式是$a_1$传给$a_2$，$a_2$传给$a_3$，…如此继续下去，每次传播都是由$a_i$传给$a_{i+1}$。每次传播消息的失真概率是$p$，$0<p<1$，即$a_i$将消息传给$a_{i+1}$时，传错的概率是$p$，这样经过长时间传播，第$n$个人得知消息时，消息的真实程度如何？

设整个传播过程为随机转移过程，消息经过一次传播失真的概率为p，转移矩阵

$$P=\begin{array}{c}\\ 假\\ 真\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cc}假 & 真\end{array}\\ \begin{bmatrix}1-p & p\\ p & 1-p\end{bmatrix}\end{array}$$

P是正则矩阵。又设V是初始分布，则消息经过n次传播后，其可靠程度的概率分布为$V\cdot P^n$。

一般地，设时齐马氏链的状态空间为E，如果对于所有$i,j\in E$，转移概率$p_{ij}(n)$存在极限

$$\lim_{n\to\infty}p_{ij}(n)=\pi_j，（不依赖于i）$$

或

$$P(n)=P^n\xrightarrow[(n\to\infty)]{}\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots\\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_j & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix},$$

则称此链具有遍历性。又若$\sum_j \pi_j = 1$，则同时称$\pi = (\pi_1, \pi_2, \cdots)$为链的极限分布。

下面就有限链的遍历性给出一个充分条件。

定理 4　设时齐（齐次）马氏链$\{\xi_n, n = 1,2,\cdots\}$的状态空间为$E = \{a_1, \cdots, a_N\}$，$P = (p_{ij})$是它的一步转移概率矩阵，如果存在正整数$m$，使对任意的$a_i, a_j \in E$，都有

$$p_{ij}(m) > 0，\ i, j = 1,2,\cdots, N$$

则此链具有遍历性；且有极限分布$\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_N)$，它是方程组

$$\pi = \pi P \quad 或即 \quad \pi_j = \sum_{i=1}^{N} \pi_i p_{ij}，\quad j = 1, \cdots, N$$

的满足条件

$$\pi_j > 0，\ \sum_{j=1}^{N} \pi_j = 1$$

的唯一解。

例 9　根据例 7 中给出的一般顾客购买三种味精倾向的转移矩阵，预测经过长期的多次购买之后，顾客的购买倾向如何？

解　这个马氏链的转移矩阵满足定理 4 的条件，可以求出其极限概率分布。为此，解下列方程组：

$$\begin{cases} p_1 = 0.8p_1 + 0.5p_2 + 0.5p_3 \\ p_2 = 0.1p_1 + 0.1p_2 + 0.3p_3 \\ p_3 = 0.1p_1 + 0.4p_2 + 0.2p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases}$$

编写如下的 Matlab 程序：

```
format rat
p=[0.8 0.1 0.1;0.5 0.1 0.4;0.5 0.3 0.2];
a=[p'-eye(3);ones(1,3)];
b=[zeros(3,1);1];
p_limit=a\b
```

或者利用求转移矩阵P的转置矩阵P^T的特征值 1 对应的特征(概率)向量，求得极限概率。编写程序如下：

```
p=[0.8 0.1 0.1;0.5 0.1 0.4;0.5 0.3 0.2];
p=sym(p');
[x,y]=eig(p)
for i=1:3
   x(:,i)=x(:,i)/sum(x(:,i));
end
x
```

求得$p_1 = \frac{5}{7}$，$p_2 = \frac{11}{84}$，$p_3 = \frac{13}{84}$。

这说明，无论第一次顾客购买的情况如何，经过长期多次购买以后，A厂产的味

精占有市场的$\frac{5}{7}$，B,C两厂产品分别占有市场的$\frac{11}{84}$，$\frac{13}{84}$。

2.4　吸收链

马氏链还有一种重要类型—吸收链。

若马氏链的转移矩阵为

$$P=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{bmatrix}0.3&0.3&0&0.4\\0.2&0.3&0.2&0.3\\0&0.3&0.3&0.4\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array},$$

P的最后一行表示的是，当转移到状态4时，将停留在状态4，状态4称为吸收状态。

如果马氏链至少含有一个吸收状态，并且从每一个非吸收状态出发，都可以到达某个吸收状态，那么这个马氏链被称为吸收链。

具有r个吸收状态，$s(s=n-r)$个非吸收状态的吸收链，它的$n\times n$转移矩阵的标准形式为

$$P=\begin{bmatrix}I_r & O\\ R & S\end{bmatrix} \tag{4}$$

其中I_r为r阶单位阵，O为$r\times s$零阵，R为$s\times r$矩阵，S为$s\times s$矩阵。从（4）得

$$P^n=\begin{bmatrix}I_r & O\\ Q & S^n\end{bmatrix} \tag{5}$$

（5）式中的子阵S^n表示以任何非吸收状态作为初始状态，经过n步转移后，处于S个非吸收状态的概率。

在吸收链中，令$F=(I-S)^{-1}$，则F称为基矩阵。

对于具有标准形式（即(4)式）转移矩阵的吸收链，可以证明以下定理：

定理5　吸收链的基矩阵F中的每个元素，表示从一个非吸收状态出发，过程到达每个非吸收状态的平均转移次数。

定理6　设$N=FC$，F为吸收链的基矩阵，$C=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\end{bmatrix}^T$，则$N$的每个元素表示从非吸收状态出发，到达某个吸收状态被吸收之前的平均转移次数。

定理7　设$B=FR=(b_{ij})$，其中F为吸收链的基矩阵，R为（4）式中的子阵，则b_{ij}表示从非吸收状态i出发，被吸收状态j吸收的概率。

例10　智力竞赛问题　甲、乙两队进行智力竞赛。竞赛规则规定：竞赛开始时，甲、乙两队各记2分，在抢答问题时，如果甲队赢得1分，那么甲队的总分将增加1分，同时乙队总分将减少1分。当甲（或乙）队总分达到4分时，竞赛结束，甲（或乙）获胜。根据队员的智力水平，知道甲队赢得1分的概率为p，失去1分的概率为$1-p$，求：（i）甲队获胜的概率是多少？（ii）竞赛从开始到结束，分数转移的平均次数是多少？（iii）甲队获得1、2、3分的平均次数是多少？

分析　甲队得分有5种可能，即0、1、2、3、4，分别记为状态a_0,a_1,a_2,a_3,a_4，其中a_0和a_4是吸收状态，a_1,a_2和a_3是非吸收状态。过程是以a_2作为初始状态。根据

甲队赢得 1 分的概率为 p，建立转移矩阵：

$$P=\begin{array}{c} \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{6}$$

将（6）式改记为标准形式：

$$P=\begin{bmatrix} I_2 & O \\ R & S \end{bmatrix}$$

其中

$$R=\begin{bmatrix} 1-p & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix} 0 & p & 0 \\ 1-p & 0 & p \\ 0 & 1-p & 0 \end{bmatrix},$$

计算

$$F=(I_3-S)^{-1}=\frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{bmatrix}$$

其中 $q=1-p$。

因为 a_2 是初始状态，根据定理 5，甲队获得 1，2，3 分的平均次数为 $\frac{q}{1-2pq}$，$\frac{1}{1-2pq}$，$\frac{p}{1-2pq}$。又

$$N=FC=\frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1-pq & p & p^2 \\ q & 1 & p \\ q^2 & q & 1-pq \end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} 1+2p^2 & 2 & 1+2p^2 \end{bmatrix}$$

根据定理 6，以 a_2 为初始状态，甲队最终获胜的分数转移的平均次数为 $\frac{2}{1-2pq}$。

又因为

$$B=FR=\frac{1}{1-2pq}\begin{bmatrix} (1-pq)p & p^3 \\ q^2 & p^2 \\ q^3 & (1-pq)p \end{bmatrix}$$

根据定理 7，甲队最后获胜的概率 $b_{22}=\dfrac{p^2}{1-2pq}$。

Matlab 程序如下：

```
syms p q
r=[q,0;0,0;0,p];
s=[0,p,0;q,0,p;0,q,0];
f=(eye(3)-s)^(-1);f=simple(f)
n=f*ones(3,1);n=simple(n)
b=f*r;b=simple(b)
```

§3 马尔可夫链的应用

应用马尔可夫链的计算方法进行马尔可夫分析，主要目的是根据某些变量现在的情况及其变动趋向，来预测它在未来某特定区间可能产生的变动，作为提供某种决策的依据。

例 11（服务网点的设置问题）为适应日益扩大的旅游事业的需要，某城市的甲、乙、丙三个照相馆组成一个联营部，联合经营出租相机的业务。游客可由甲、乙、丙三处任何一处租出相机，用完后，还在三处中任意一处即可。估计其转移概率如下表所示：

		还 相 机 处		
		甲	乙	丙
租相机处	甲	0.2	0.8	0
	乙	0.8	0	0.2
	丙	0.1	0.3	0.6

今欲选择其中之一附设相机维修点，问该点设在哪一个照相馆为最好？

解　由于旅客还相机的情况只与该次租机地点有关，而与相机以前所在的店址无关，所以可用 X_n 表示相机第 n 次被租时所在的店址；“$X_n=1$”、“$X_n=2$”、“$X_n=3$”分别表示相机第 n 次被租用时在甲、乙、丙馆。则 $\{X_n,n=1,2,\cdots\}$ 是一个马尔可夫链，其转移矩阵 P 由上表给出。考虑维修点的设置地点问题，实际上要计算这一马尔可夫链的极限概率分布。

转移矩阵满足定理 4 的条件，极限概率存在，解方程组

$$\begin{cases} p_1=0.2p_1+0.8p_2+0.1p_3 \\ p_2=0.8p_1+0.3p_3 \\ p_3=0.2p_2+0.6p_3 \\ p_1+p_2+p_3=1 \end{cases}$$

得极限概率 $p_1=\dfrac{17}{41}$，$p_2=\dfrac{16}{41}$，$p_3=\dfrac{8}{41}$。

由计算看出，经过长期经营后，该联营部的每架照相机还到甲、乙、丙照相馆的概率分别为 $\dfrac{17}{41}$、$\dfrac{16}{41}$、$\dfrac{8}{41}$。由于还到甲馆的照相机较多，因此维修点设在甲馆较好。但由于还到乙馆的相机与还到甲馆的相差不多，若是乙的其它因素更为有利的话，比如，交通较甲方便，便于零配件的运输，电力供应稳定等等，亦可考虑设在乙馆。

习 题 十 七

1. 在英国，工党成员的第二代加入工党的概率为 0.5，加入保守党的概率为 0.4，加入自由党的概率为 0.1。而保守党成员的第二代加入保守党的概率为 0.7，加入工党的概率为 0.2，加入自由党的概率为 0.1。而自由党成员的第二代加入保守党的概率为 0.2，加入工党的概率为 0.4，加入自由党的概率为 0.4。求自由党成员的第三代加入工党的概率是多少？在经过较长的时间后，各党成员的后代加入各党派的概率分布是否具有稳定性？

2. 社会学的某些调查结果指出：儿童受教育的水平依赖于他们父母受教育的水平。调查过程是将人们划分为三类：E 类，这类人具有初中或初中以下的文化程度；S 类，这类人具有高中文化程度；C 类，这类人受过高等教育。当父或母（指文化程度较高者）是这三类人中某一类型时，其子女将属于这三种类型中的任一种的概率由下面给出

$$
\begin{array}{cc} & \text{子女} \\ & \begin{array}{ccc} E & S & C \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{父} \\ \text{或} \\ \text{母} \end{array} & \begin{array}{c} E \\ S \\ C \end{array} \begin{bmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \end{array}
$$

问：（i）属于 S 类的人们中，其第三代将接受高等教育的概率是多少？

（ii）假设不同的调查结果表明，如果父母之一受过高等教育，那么他们的子女总可以进入大学，修改上面的转移矩阵。

（iii）根据（ii）的解，每一类型人的后代平均要经过多少代，最终都可以接受高等教育？

3. 色盲是 $X-$链遗传，由两种基因 A 和 a 决定。男性只有一个基因 A 或 a，女性有两个基因 AA、Aa 或 aa，当基因为 a 或 aa 时呈现色盲。基因遗传规律为：男性等概率地取母亲的两个基因之一，女性取父亲的基因外又等概率地取母亲的两个基因之一。由此可知，母亲色盲则儿子必色盲但女儿不一定。试用马氏链研究：

（i）若近亲结婚，其后代的发展趋势如何？若父亲非色盲而母亲色盲，问平均经多少代，其后代就会变为全色盲或全不色盲，两者的概率各为多少？

（ii）若不允许双方均色盲的人结婚，情况会怎样？

第十八章　动态优化模型

动态过程的另一类问题是所谓的动态优化问题，这类问题一般要归结为求最优控制函数使某个泛函达到极值。当控制函数可以事先确定为某种特殊的函数形式时，问题又简化为求普通函数的极值。求解泛函极值问题的方法主要有变分法和最优控制理论方法。

§1　变分法简介

变分法是研究泛函极值问题的一种经典数学方法，有着广泛的应用。下面先介绍变分法的基本概念和基本结果，然后介绍动态系统最优控制问题求解的必要条件和最大值原理。

1.1　变分法的基本概念

1.1.1　泛函

设 S 为一函数集合，若对于每一个函数 $x(t)\in S$ 有一个实数 J 与之对应，则称 J 是对应在 S 上的泛函，记作 $J(x(t))$。S 称为 J 的容许函数集。

通俗地说，泛函就是“函数的函数”。

例如对于 xy 平面上过定点 $A(x_1,y_1)$ 和 $B(x_2,y_2)$ 的每一条光滑曲线 $y(x)$，绕 x 轴旋转得一旋转体，旋转体的侧面积是曲线 $y(x)$ 的泛函 $J(y(x))$。由微积分知识不难写出

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}2\pi y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx \tag{1}$$

容许函数集可表示为

$$S=\{y(x)\mid y(x)\in C^1[x_1,x_2],y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2\} \tag{2}$$

最简单的一类泛函表为

$$J(x(t))=\int_{t_1}^{t_2}F(t,x,\dot{x})dt \tag{3}$$

被积函数 F 包含自变量 t，未知函数 x 及导数 $\dot{x}$。（1）式是最简泛函。

1.1.2　泛函的极值

泛函 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)\in S$ 取得极小值是指，对于任意一个与 $x_0(t)$ 接近的 $x(t)\in S$，都有 $J(x(t))\geq J(x_0(t))$。所谓接近，可以用距离 $d(x(t),x_0(t))<\varepsilon$ 来度量，而距离定义为

$$d(x(t),x_0(t))=\max_{t_1\leq t\leq t_2}\{|x(t)-x_0(t)|,|\dot{x}(t)-\dot{x}_0(t)|\}$$

泛函的极大值可以类似地定义。$x_0(t)$ 称为泛函的极值函数或极值曲线。

1.1.3　泛函的变分

如同函数的微分是增量的线性主部一样，泛函的变分是泛函增量的线性主部。作为泛函的自变量，函数 $x(t)$ 在 $x_0(t)$ 的增量记为

$$\delta x(t)=x(t)-x_0(t)$$

也称函数的变分。由它引起的泛函的增量记作

$$\Delta J=J(x_0(t)+\delta x(t))-J(x_0(t))$$

如果 ΔJ 可以表为

$$\Delta J = L(x_0(t), \delta x(t)) + r(x_0(t), \delta x(t))$$

其中 L 为 δx 的线性项，而 r 是 δx 的高阶项，则 L 称为泛函在 $x_0(t)$ 的变分，记作 $\delta J(x_0(t))$。用变动的 $x(t)$ 代替 $x_0(t)$，就有 $\delta J(x(t))$。

泛函变分的一个重要形式是它可以表为对参数 α 的导数：

$$\delta J(x(t)) = \frac{\partial}{\partial \alpha} J(x(t) + \alpha \delta x(t))\Big|_{\alpha=0} \tag{4}$$

这是因为当变分存在时，增量

$$\Delta J = J(x(t) + \alpha \delta x) - J(x(t)) = L(x(t), \alpha \delta x) + r(x(t), \alpha \delta x)$$

根据 L 和 r 的性质有

$$L(x(t), \alpha \delta x) = \alpha L(x(t), \delta x)$$

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{r(x(t), \alpha \delta x)}{\alpha \delta x} \delta x = 0$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x + \alpha \delta x)\Big|_{\alpha=0} = \lim_{\alpha \to 0} \frac{J(x + \alpha \delta x) - J(x)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{L(x, \alpha \delta x) + r(x, \alpha \delta x)}{\alpha} = L(x, \delta x) = \delta J(x)$$

1.1.4　极值与变分

利用变分的表达式（4）可以得到泛函极值与变分的关系：

若 $J(x(t))$ 在 $x_0(t)$ 达到极值（极大或极小），则

$$\delta J(x_0(t)) = 0 \tag{5}$$

这是因为对任意给定的 δx，$J(x_0 + \alpha \delta x)$ 是变量 α 的函数，该函数在 $\alpha = 0$ 处达到极值。根据函数极值的必要条件知

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} J(x_0 + \alpha \delta x)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

于是由（4）式直接得到（5）式。

1.1.5. 变分法的基本引理

引理　$\varphi(x) \in C[x_1, x_2]$，$\forall \eta(x) \in C^1[x_1, x_2]$，$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$，有

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\eta(x)dx \equiv 0,$$

则 $\varphi(x) \equiv 0,\ x \in [x_1, x_2]$。

1.2　无约束条件的泛函极值

求泛函

$$J = \int_{t_0}^{t_f} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \tag{6}$$

的极值，一般是用泛函极值的必要条件去寻找一条曲线 $x(t)$，使给定的二阶连续可微函数 F 沿该曲线的积分达到极值。常称这条曲线为极值曲线（或轨线），记为 $x^*(t)$。

1.2.1 端点固定的情况

设容许曲线 $x(t)$ 满足边界条件

$$x(t_0)=x_0,\ x(t_f)=x_f \tag{7}$$

且二次可微。

首先计算（6）式的变分：

$$\begin{aligned}\delta J &= \frac{\partial}{\partial\alpha}J(x(t)+\alpha\delta x(t))\Big|_{\alpha=0}\\ &= \int_{t_0}^{t_f}\frac{\partial}{\partial\alpha}F(t,x(t)+\alpha\delta x(t),\dot{x}(t)+\alpha\delta\dot{x}(t))\Big|_{\alpha=0}dt\\ &= \int_{t_0}^{t_f}[F_x(t,x,\dot{x})\delta x+F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta\dot{x}]dt\end{aligned} \tag{8}$$

对上式右端第二项做分布积分，并利用 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$，有

$$\int_{t_0}^{t_f}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta\dot{x}dt=-\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t,x,\dot{x})\delta x dt,$$

再代回到（8）式，并利用泛函取极值的必要条件，有

$$\delta J=\int_{t_0}^{t_f}[F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}]\delta x dt=0$$

因为 δx 的任意性，及 $\delta x(t_0)=\delta x(t_f)=0$，所以由基本引理得到著名的欧拉方程

$$F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=0 \tag{9}$$

它是这类最简泛函取极值的必要条件。

（9）式又可记作

$$F_x-F_{t\dot{x}}-F_{x\dot{x}}\dot{x}-F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}=0 \tag{10}$$

通常这是 $x(t)$ 的二阶微分方程，其通解的两个任意常数由（7）式中的两个端点条件确定。

1.2.2　最简泛函的几种特殊情形

(i)　F 不依赖于 $\dot{x}$，即 $F=F(t,x)$

这时 $F_{\dot{x}}\equiv 0$，欧拉方程为 $F_x(t,x)=0$，这个方程以隐函数形式给出 $x(t)$，但它一般不满足边界条件，因此，变分问题无解。

(ii)　F 不依赖 x，即 $F=F(t,\dot{x})$

欧拉方程为

$$\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(t,\dot{x})=0$$

将上式积分一次，便得首次积分 $F_{\dot{x}}(t,\dot{x})=c_1$，由此可求出 $\dot{x}=\varphi(t,c_1)$，积分后得到可能的极值曲线族

$$x=\int\varphi(t,c_1)dt$$

(iii)　F 只依赖于 $\dot{x}$，即 $F=F(\dot{x})$

这时 $F_x=0,F_{t\dot{x}}=0,F_{x\dot{x}}=0$，欧拉方程为

$$\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}=0$$

由此可设 $\ddot{x}=0$ 或 $F_{\dot{x}\dot{x}}=0$，如果 $\ddot{x}=0$，则得到含有两个参数的直线族 $x=c_1t+c_2$。

另外若 $F_{\dot{x}\dot{x}}=0$ 有一个或几个实根时，则除了上面的直线族外，又得到含有一个参数 c 的直线族 $x=kt+c$，它包含于上面含有两个参数的直线族 $x=c_1t+c_2$ 中，于是，在 $F=F(\dot{x})$ 情况下，极值曲线必然是直线族。

（iv） F 只依赖于 x 和 $\dot{x}$，即 $F=F(x,\dot{x})$

这时有 $F_{t\dot{x}}=0$，故欧拉方程为

$$F_x-\dot{x}F_{x\dot{x}}-\ddot{x}F_{\dot{x}\dot{x}}=0$$

此方程具有首次积分为

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}=c_1$$

事实上，注意到 F 不依赖于 t，于是有

$$\frac{d}{dt}(F-\dot{x}F_{\dot{x}})=F_x\dot{x}+F_{\dot{x}}\ddot{x}-\ddot{x}F_{\dot{x}}-\dot{x}\frac{d}{dt}F_{\dot{x}}=\dot{x}(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}})=0\text{。}$$

例 1　(最速降线问题)最速降线问题是历史上变分法开始发展的第一个问题。它是约翰·贝努里（J. Bernoulli）于 1696 年提出的。问题的提法是这样的：设 A 和 B 是铅直平面上不在同一铅直线上的两点，在所有连结 A 和 B 的平面曲线中，求一曲线，当质点仅受重力作用，且初速为零，沿此曲线从 A 滑行至 B 时，使所需时间最短。

解　将 A 点取为坐标原点，x 轴水平向右，y 轴垂直向下，B 点为 $B(x_2,y_2)$。根据能量守恒定律，质点在曲线 $y(x)$ 上任一点处的速度 $\frac{ds}{dt}$ 满足（s 为弧长）

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=mgy$$

将 $ds=\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$ 代入上式得

$$dt=\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

于是质点滑行时间应表为 $y(x)$ 的泛函

$$J(y(x))=\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\,dx$$

端点条件为

$$y(0)=0,y(x_2)=y_2$$

最速降线满足欧拉方程，因为

$$F(y,y')=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$$

不含自变量 x，所以方程（10）可写作

$$F_y-F_{yy'}y'-F_{y'y'}y''=0$$

等价于

$$\frac{d}{dx}(F-y'F_{y'})=0$$

作一次积分得

$$y(1+y'^2)=c_1$$

令 $y'=ctg\frac{\theta}{2}$, 则方程化为

$$y=\frac{c_1}{1+y'^2}=c_1\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)$$

又因

$$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{c_1\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta}{ctg\frac{\theta}{2}}=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta)d\theta$$

积分之，得

$$x=\frac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta)+c_2$$

由边界条件 $y(0)=0$，可知 $c_2=0$，故得

$$\begin{cases}x=\frac{c_1}{2}(\theta-\sin\theta)\\ y=\frac{c_1}{2}(1-\cos\theta).\end{cases}$$

这是摆线（圆滚线）的参数方程，其中常数 c_1 可利用另一边界条件 $y(x_2)=y_2$ 来确定。

例 2　最小旋转面问题

$$J(y(x))=2\pi\int_{x_1}^{x_2}y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

$$S=\{y\mid y\in C^1[x_1,x_2],y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2\}$$

解　因 $F=y\sqrt{1+y'^2}$ 不包含 x，故有首次积分

$$F-y'F_{y'}=y\sqrt{1+y'^2}-y'y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1$$

化简得　$y=c_1\sqrt{1+y'^2}$

令 $y'=sht$，代入上式，　$y=c_1\sqrt{1+sh^2t}=c_1cht$

由于　$dx=\frac{dy}{y'}=\frac{c_1shtdt}{sht}=c_1dt$

积分之，得　$x=c_1t+c_2$

消去 t，就得到 $y=c_1ch\frac{x-c_2}{c_1}$　。

这是悬链线方程。

1.2.3　最简泛函的推广

最简泛函取极值的必要条件可以推广到其它情况。

（ｉ）含多个函数的泛函

使泛函

$$J(y(x),z(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',z,z')dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1)=y_1,y(x_2)=y_2,z(x_1)=z_1,z(x_2)=z_2.$$

的极值曲线 $y=y(x),z=z(x)$ 必满足欧拉方程组

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{d}{dx}F_{y'}=0\\ F_z-\dfrac{d}{dx}F_{z'}=0\end{cases}$$

（ii）含高阶导数的泛函

使泛函

$$J(y(x))=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')dx$$

取极值且满足固定边界条件

$$y(x_1)=y_1,y（x_2）=y_2，\ y'(x_1)=y'_1,y'(x_2)=y'_2$$

的极值曲线 $y=y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y''}=0$$

（iii） 含多元函数的泛函

设 $z(x,y)\in c^2,(x,y)\in D$，使泛函

$$J(z(x,y))=\iint_D F(x,y,z,z_x,z_y)dxdy$$

取极值且在区域 D 的边界线 l 上取已知值的极值函数 $z=z(x,y)$ 必满足方程

$$F_z-\frac{\partial}{\partial x}F_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{z_y}=0$$

上式称为奥式方程。

1.2.4　端点变动的情况（横截条件）

设容许曲线 $x(t)$ 在 t_0 固定，在另一端点 $t=t_f$ 时不固定，是沿着给定的曲线 $x=\psi(t)$ 上变动。于是端点条件表示为

$$\begin{cases}x(t_0)=x_0\\ x(t)=\psi(t)\end{cases}$$

这里 t 是变动的，不妨用参数形式表示为

$$t=t_f+\alpha dt_f$$

寻找端点变动情况的必要条件，可仿照前面端点固定情况进行推导，即有

$$\begin{aligned}0=\delta J&=\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_{t_0}^{t_f+\alpha dt_f}F(t,x+\alpha\delta x,\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})dt\Big|_{\alpha=0}\\ &=\int_{t_0}^{t_f}(F_x-\frac{d}{dt}F_{\dot{x}})\delta xdt+F_{\dot{x}}\delta x\Big|_{t=t_f}+F\Big|_{t=t_f}dt_f\end{aligned}\qquad(11)$$

再对（11）式做如下分析：

（i）对每一个固定的t_f，$x(t)$都满足欧拉方程，即（11）式右端的第一项积分为零；

（ii）为考察（11）式的第二、第三项，建立dt_f与$\delta x\big|_{t=t_f}$之间的关系，因为

$$x(t_f+\alpha dt_f)+\alpha\delta x(t_f+\alpha dt_f)=\psi(t_f+\alpha dt_f)$$

对α求导并令$\alpha=0$得

$$\dot{x}(t_f)dt_f+\delta x\big|_{t=t_f}=\dot{\psi}(t_f)dt_f$$

即

$$\delta x\big|_{t=t_f}=[\dot{\psi}(t_f)-\dot{x}(t_f)]dt_f \tag{12}$$

把（12）代入（11）并利用dt_f的任意性，得

$$[F+(\dot{\psi}-\dot{x})F_{\dot{x}}]\Big|_{t=t_f}=0 \tag{13}$$

（13）式就是确定欧拉方程通解中另一常数的定解条件，称为横截条件。

横截条件有两种常见的特殊情况：

（i）当$x=\psi(t)$是垂直横轴的直线时，t_f固定，$x(t_f)$自由，并称$x(t_f)$为自由端点。此时（11）式中$dt_f=0$及$\delta x\big|_{t=t_f}$的任意性，便得自由端点的横截条件

$$F_{\dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0 \tag{14}$$

（ii）当$x=\psi(t)$是平行横轴的直线时，t_f自由，$x(t_f)$固定，并称$x(t_f)$为平动端点。此时$\dot{\psi}=0$，（13）式的横截条件变为

$$F-\dot{x}F_{\dot{x}}\Big|_{t=t_f}=0 \tag{15}$$

注意，横截条件与欧拉方程联立才能构成泛函极值的必要条件。

1.3　有约束条件的泛函极值

在最优控制系统中，常常要涉及到有约束条件泛函的极值问题，其典型形式是对动态系统

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t)) \tag{16}$$

寻求最优性能指标（目标函数）

$$J(u(t))=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}F(t,x(t),u(t))dt \tag{17}$$

其中$u(t)$是控制策略，$x(t)$是轨线，t_0固定，t_f及$x(t_f)$自由，$x(t)\in R^n$，$u(t)\in R^m$（不受限，充满R^m空间），f,φ,F连续可微。

下面推导取得目标函数极值的最优控制策略$u^*(t)$和最优轨线$x^*(t)$的必要条件。

采用拉格朗日乘子法，化条件极值为无条件极值，即考虑

$$J_1(x,u,\lambda)=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}[F(t,x,u)+\lambda^T(t)(f(t,x,u)-\dot{x})]dt \tag{18}$$

的无条件极值，首先定义（16）式和（17）式的哈密顿（Hamilton）函数为

$$H(t,x,u,\lambda)=F(t,x,u)+\lambda^T(t)f(t,x,u) \tag{19}$$

将其代入（18）式，得到泛函

$$J_1(x,u,\lambda)=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}[H(t,x,u,\lambda)-\lambda^T\dot{x}]dt \qquad (20)$$

下面先对其求变分

$$\begin{aligned}\delta J_1=&\frac{\partial}{\partial\alpha}\{\varphi(t_f+\alpha dt_f,x(t_f)+\alpha\delta x(t_f))\\&+\int_{t_0}^{t_f+\alpha dt_f}[H(t,x+\alpha\delta x,u+\alpha\delta u,\lambda+\alpha\delta\lambda)-(\lambda+\alpha\delta\lambda)^T(\dot{x}+\alpha\delta\dot{x})]dt\}\Big|_{\alpha=0}\\&=\left[\delta x(t_f)\right]^T\varphi_{x(t_f)}+(dt_f)^T\varphi_{t_f}+(dt_f)^TH(t,x,u,\lambda)\Big|_{t=t_f}-(dt_f)^T(\lambda^T\dot{x})\Big|_{t=t_f}\\&\quad+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^TH_x+(\delta u)^TH_u+(\delta\lambda)^TH_\lambda-(\delta\lambda)^T\dot{x}-\lambda^T\delta\dot{x}]dt\\&=(dt_f)^T[\varphi_{t_f}+F(t,x,u,t)\Big|_{t=t_f}]+[\delta x(t_f)]^T\varphi_{x(t_f)}\\&+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^TH_x+(\delta u)^TH_u+(\delta\lambda)^TH_\lambda-(\delta\lambda)^T\dot{x}]dt-\lambda^T(t_f)\delta x\Big|_{t=t_f}+\int_{t_0}^{t_f}(\delta x)^T\dot{\lambda}dt\end{aligned}$$

注意到$\delta x\Big|_{t=t_f}\neq\delta x(t_f)$，$\delta x\Big|_{t=t_f}=\delta x(t_f)-\dot{x}(t_f)dt_f$，因而

$$\begin{aligned}\delta J_1=&(dt_f)^T[\varphi_{t_f}+H(t,x,u,\lambda)\Big|_{t=t_f}]+[\delta x(t_f)]^T(\varphi_x-\lambda)\Big|_{t=t_f}\\&+\int_{t_0}^{t_f}[(\delta x)^T(H_x+\dot{\lambda})+(\delta\lambda)^T(H_\lambda-\dot{x})+(\delta u)^TH_u]dt\end{aligned}$$

再令$\delta J_1=0$，由$dt_f,\delta x(t_f),\delta x,\delta u,\delta\lambda$的任意性，便得

（i）x^*,λ^*必满足正则方程：

① 状态方程　$\dot{x}=H_\lambda=f(t,x,u)$

② 协态方程　$\dot{\lambda}=-H_x$。

（ii）哈密顿函数$H(t,x^*,u,\lambda^*)$作为u的函数，也必满足

$$H_u=0$$

并由此方程求得u^*。

（iii）求x^*,λ^*,u^*时，必利用边界条件

① $x(t_0)=x_0$，　　（用于确定x^*）

② $\lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}$，　　（用于确定$\lambda^*$）

③ $\varphi_{t_f}=-H(t,x,u,\lambda)\Big|_{t=t_f}$，　（确定$t_f$）

1.4　最大（小）值原理

如果受控系统

$$\dot{x}=f(t,x,u),\quad x(t_0)=x_0$$

其控制策略$u(t)$的全体构成有界集U，求$u(t)\in U$，使性能指标

$$J(u(t))=\varphi(t_f,x(t_f))+\int_{t_0}^{t_f}F(t,x,u)dt$$

达到最大（小）值。

最大（小）值原理：如果$f(t,x,u)$，$\varphi(t_f,x(t_f))$和$F(t,x,u)$都是连续可微的，

那么最优控制策略$u^*(t)$和相应的最优轨线$x^*(t)$由下列的必要条件决定：

（i）最优轨线$x^*(t)$，协态向量$\lambda^*(t)$由下列的必要条件决定：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u)，\ u(t)\in U，$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}.$$

（ii）哈密顿函数

$$H(t,x^*,u,\lambda^*)=F(t,x^*,u)+\lambda^{*T}(t)f(t,x^*,u)$$

作为$u(t)$的函数，最优策略$u^*(t)$必须使

$$H(t,x^*,u^*,\lambda^*)=\max_{u\in U}H(t,x^*,u,\lambda^*)$$

或使

$$H(t,x^*,u^*,\lambda^*)=\min_{u\in U}H(t,x^*,u,\lambda^*)\text{ (最小值原理)}$$

（iii）满足相应的边界条件

① 若两端点固定，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\ x(t_f)=x_f。$$

② 若始端固定，终端t_f也固定，而$x(t_f)$自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\ \lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}(t_f,x(t_f))。$$

③ 若始端固定，终端$t_f,x(t_f)$都自由，则正则方程的边界条件为

$$x(0)=x_0，\ \lambda(t_f)=\varphi_{x(t_f)}(t_f,x(t_f))，$$

$$H(t_f,x(t_f),u(t_f),\lambda(t_f))+\varphi_{t_f}(t_f,x(t_f))=0。$$

§2　生产设备的最大经济效益

某工厂购买了一台新设备投入到生产中。一方面该设备随着运行时间的推移其磨损程度愈来愈大，因此其转卖价将随着使用设备的时间增加而减小；另一方面生产设备总是要进行日常保养，花费一定的保养费，保养可以减缓设备的磨损程度，提高设备的转卖价。那么，怎样确定最优保养费和设备转卖时间，才能使这台设备的经济效益最大。

2.1 问题分析与假设

（i）设备的转卖价是时间t的函数，记为$x(t)$。$x(t)$的大小与设备的磨损程度和保养费的多少密切相关。记初始转卖价$x(0)=x_0$。

（ii）设备随其运行时间的推移，磨损程度越来越大。t时刻设备的磨损程度可以用t时刻转卖价的损失值来刻画，常称其为磨损函数或废弃函数，记为$m(t)$。

（iii）保养设备可以减缓设备的磨损速度，提高转卖价。如果$u(t)$是单位时间的保养费，$g(t)$是t时刻的保养效益系数（每用一元保养费所增加的转卖价），那么单位时间的保养效益为$g(t)u(t)$。另外，保养费不能过大（如单位时间保养费超过单位时间产值时，保养失去了意义），只能在有界函数集中选取，记有界函数集为W，则$u(t)\in W$。

（iv）设单位时间的产值与转卖价的比值记为p，则$px(t)$表示在t时刻单位时间的产值，即t时刻的生产率。

（v）转卖价 $x(t)$ 及单位时间的保养费 $u(t)$ 都是时间 t 的连续可微函数。为了统一标准，采用它们的贴现值。对于贴现值的计算，例如转卖价 $x(t)$ 的贴现值计算，如果它的贴现因子为 δ （经过单位时间的单位费用贴现），那么由

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t_1)}{dt_1} = \delta x(t_1) \\ x(t) = 1 \end{cases}$$

解得

$$x(t_1) = e^{-\delta(t-t_1)}$$

令 $t_1 = 0$，便得 t 时刻单位费用的贴现（称贴现系数）为 $e^{-\delta t}$，所以设备在 t 时刻转卖价 $x(t)$ 的贴现为 $x(t)e^{-\delta t}$。仿此计算，$u(t)$ 的贴现为 $u(t)e^{-\delta t}$，单位时间产值的贴现为 $px(t)e^{-\delta t}$。

（vi）欲确定的转卖时间 t_f 和转卖价 $x(t_f)$ 都是自由的。

2.2　模型构造

根据以上的分析与假设可知：考察的对象是设备在生产中的磨损—保养系统；转卖价体现了磨损和保养的综合指标，可以选作系统的状态变量；在生产中设备磨损的不可控性强，其微弱的可控性也是通过保养体现，加之保养本身具有较强的可控性，所以选单位时间的保养费 $u(t)$ 作为控制策略。这样，生产设备的最大经济效益模型可以构成为在设备磨损—保养系统的（转卖价）状态方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = -m(t) + g(t)u(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{21}$$

之下，在满足 $0 \le u(t) \le U$ 的函数集 W 中寻求最优控制策略 $u^*(t)$，使系统的经济效益这一性能指标

$$J(u(t)) = x(t_f)e^{-\delta t_f} + \int_0^{t_f} [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} dt \tag{22}$$

为最大，其中 $t_f, x(t_f)$ 都是自由的。

2.3　模型求解

首先写出问题的哈密顿函数

$$H = [px(t) - u(t)]e^{-\delta t} + \lambda[-m(t) + g(t)m(t)] \tag{23}$$

再由协态方程及边界条件求出 $\lambda(t)$，即由

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda(t)}{dt} = -H_x = -pe^{-\delta t} \\ \lambda(t_f) = \varphi_{x(t_f)} = e^{-\delta t_f} \end{cases}$$

解得

$$\lambda(t) = (1 - \frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}$$

下面利用最大值原理求 $u^*(t)$。先将（23）式改变为

$$H = px(t)e^{-\delta t} - \lambda m(t) + [\lambda g(t) - e^{-\delta t}]u(t)$$

显然，H 是对 u 的线性函数，因此得到

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & \lambda g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \tag{24}$$

或

$$u^*(t) = \begin{cases} U, & [(1-\frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} > 0 \\ 0, & [(1-\frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} < 0 \end{cases} \tag{25}$$

在上式中，还需解决两个问题：一是 $u^*(t) = U$ 与 $u^*(t) = 0$ 的转换点 t_s 在什么位置，即 t_s 等于多少？二是 $u^*(t)$ 是由 U 到 0，还是由 0 到 U。

转换点 t_s 应满足

$$[(1-\frac{p}{\delta})e^{-\delta t_f} + \frac{p}{\delta}e^{-\delta t}]g(t) - e^{-\delta t} = 0$$

即

$$[\frac{p}{\delta} - (\frac{p}{\delta} - 1)e^{\delta(t-t_f)}]g(t) - 1 = 0 \tag{26}$$

从而可解出 t_s。

因为 $g(t)$ 是时间 t 的减函数，所以（26）式的左端也是时间 t 的减函数，也就是说 $u^*(t)$ 随时间应由 U 到 0。于是最优控制策略的具体表达式为

$$u^* = \begin{cases} U, & 0 \le t < t_s \\ 0, & t_s < t \le t_f \end{cases}$$

至于 t_f，$x(t_f)$ 的求法，请见下面的例子。

例 3　在生产设备的最大经济效益的问题中，设 $x(0) = 100$，$U = 1$，$m(t) = 2$，$p = 0.1$，$\delta = 0.05$，$g(t) = \dfrac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$，试求 t_f，$x(t_f)$ 和 $u^*(t)$。

解　由（26）式可得求 t_s 的公式

$$(1+t_s)^{\frac{1}{2}} = 4 - 2e^{0.05(t_s - t_f)} \tag{27}$$

当 $t < t_s$ 时，$u^*(t) = U = 1$，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2 + \frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}$$

当 $t > t_s$ 时，$u^*(t) = 0$，状态方程为

$$\frac{dx}{dt} = -2$$

于是$t > t_s$时，有

$$\int_0^t \frac{dx}{dt}dt = \int_0^{t_s}[-2+\frac{2}{(1+t)^{\frac{1}{2}}}]dt + \int_{t_s}^t (-2)dt$$

解得

$$x(t) = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t \tag{28}$$

由自由边界条件$H\Big|_{t=t_f} = -\varphi_{t_f}$及$\lambda(t_f) = e^{-\delta t_f}$，得

$$-px(t_f)e^{-\delta t_f} + 2e^{-\delta t_f} = -\delta e^{-\delta t_f} x(t_f)$$

于是

$$x(t_f) = \frac{2}{p-\delta} = 40$$

当$t = t_f$时，由（28）式有

$$40 = 4(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 96 - 2t_f$$

即

$$t_f = 2(1+t_s)^{\frac{1}{2}} + 28 \tag{29}$$

将（27）和（29）联立求解，编写如下 Matlab 程序

```
[x,y]=solve('(1+ts)^(1/2)=4-2*exp(0.05*(ts-tf))','tf=2*(1+ts)^(1/2)+28')
```

求得

$$t_s = 10.6，\ t_f = 34.8$$

于是，最优控制策略（保养费）为

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10.6 \\ 0, & 10.6 < t \le 34.8 \end{cases}$$

习 题 十 八

1. 求自原点（0,0）到直线$x + y - 1 = 0$的最速降线。

2. 求概率密度函数$\varphi(x)$，使得信息量

$$J = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ln[v\varphi(x)]dx$$

取最大值，且满足等周条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx = 1 \ ，\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = \sigma^2$$（常数）。

3. 在生产设备或科学仪器中长期运行的零部件，如滚珠、轴承、电器元件等会突然发生故障或损坏，即使是及时更换也已经造成了一定的经济损失。如果在零部件运行一定时期后，就对尚属正常的零件做预防性更换，以避免一旦发生故障带来的损失，从经济上看是否更为合算？如果合算，做这种预防性更换的时间如何确定呢？

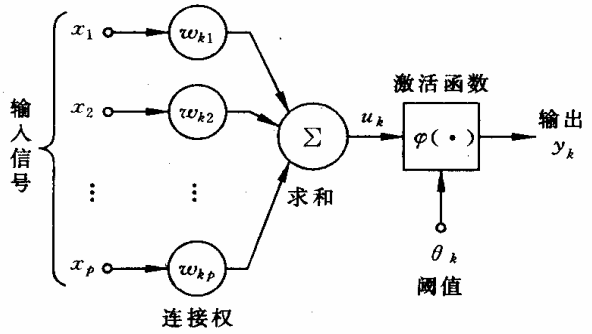
第十九章　神经网络模型

§1　神经网络简介

人工神经网络是在现代神经科学的基础上提出和发展起来的，旨在反映人脑结构及功能的一种抽象数学模型。自 1943 年美国心理学家 W. McCulloch 和数学家 W. Pitts 提出形式神经元的抽象数学模型—MP 模型以来，人工神经网络理论技术经过了 50 多年曲折的发展。特别是 20 世纪 80 年代，人工神经网络的研究取得了重大进展，有关的理论和方法已经发展成一门界于物理学、数学、计算机科学和神经生物学之间的交叉学科。它在模式识别，图像处理，智能控制，组合优化，金融预测与管理，通信，机器人以及专家系统等领域得到广泛的应用，提出了 40 多种神经网络模型，其中比较著名的有感知机，Hopfield 网络，Boltzman 机，自适应共振理论及反向传播网络（BP）等。在这里我们仅讨论最基本的网络模型及其学习算法。

1.1　人工神经元模型

下图表示出了作为人工神经网络（artificial neural network，以下简称 NN）的基本单元的神经元模型，它有三个基本要素：



（i）一组连接（对应于生物神经元的突触），连接强度由各连接上的权值表示，权值为正表示激活，为负表示抑制。

（ii）一个求和单元，用于求取各输入信号的加权和（线性组合）。

（iii）一个非线性激活函数，起非线性映射作用并将神经元输出幅度限制在一定范围内（一般限制在 $(0,1)$ 或 $(-1,1)$ 之间）。

此外还有一个阈值 θ_k（或偏置 $b_k=-\theta_k$）。

以上作用可分别以数学式表达出来：

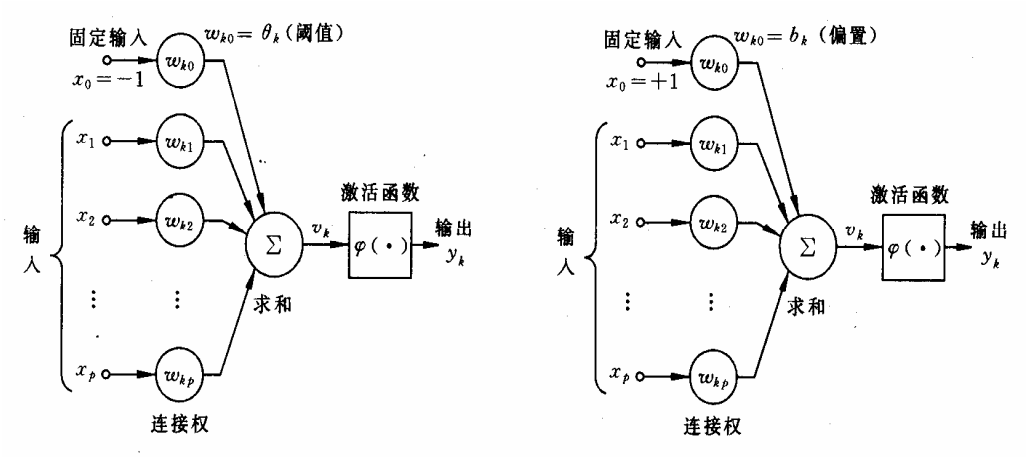
$$u_k=\sum_{j=1}^{p}w_{kj}x_j\,,\quad v_k=u_k-\theta_k\,,\quad y_k=\varphi(v_k)$$

式中 $x_1,x_2,\cdots,x_p$ 为输入信号，$w_{k1},w_{k2},\cdots,w_{kp}$ 为神经元 k 之权值，u_k 为线性组合结果，θ_k 为阈值，$\varphi(\cdot)$ 为激活函数，y_k 为神经元 k 的输出。

若把输入的维数增加一维，则可把阈值 θ_k 包括进去。例如

$$v_k=\sum_{j=0}^{p}w_{kj}x_j\,,\quad y_k=\varphi(u_k)$$

此处增加了一个新的连接，其输入为 $x_0=-1$（或 $+1$），权值为 $w_{k0}=\theta_k$（或 b_k），如下图所示。



激活函数$\varphi(\cdot)$可以有以下几种:

（i）阈值函数

$$\varphi(v)=\begin{cases}1, & v\geq 0\\ 0, & v<0\end{cases} \tag{1}$$

即阶梯函数。这时相应的输出y_k为

$$y_k=\begin{cases}1, & v_k\geq 0\\ 0, & v_k<0\end{cases}$$

其中$v_k=\sum_{j=1}^{p}w_{kj}x_j-\theta_k$，常称此种神经元为$M-P$模型。

（ii）分段线性函数

$$\varphi(v)=\begin{cases}1, & v\geq 1\\ \frac{1}{2}(1+v), & -1<v<1\\ 0, & v\leq -1\end{cases} \tag{2}$$

它类似于一个放大系数为 1 的非线性放大器，当工作于线性区时它是一个线性组合器，放大系数趋于无穷大时变成一个阈值单元。

（iii）sigmoid 函数

最常用的函数形式为

$$\varphi(v)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha v)} \tag{3}$$

参数$\alpha>0$可控制其斜率。另一种常用的是双曲正切函数

$$\varphi(v)=\tanh\left(\frac{v}{2}\right)=\frac{1-\exp(-v)}{1+\exp(-v)} \tag{4}$$

这类函数具有平滑和渐近性，并保持单调性。

Matlab 中的激活（传递）函数如下表所示：

函数名	功　能
purelin	线性传递函数

hardlim	硬限幅传递函数
hardlims	对称硬限幅传递函数
satlin	饱和线性传递函数
satlins	对称饱和线性传递函数
logsig	对数 S 形传递函数
tansig	正切 S 形传递函数
radbas	径向基传递函数
compet	竞争层传递函数

各个函数的定义及使用方法，可以参看 Matlab 的帮助（如在 Matlab 命令窗口运行 help tansig，可以看到 tantig 的使用方法，及 tansig 的定义为 $\varphi(v)=\frac{2}{1+e^{-2v}}-1$）。

1.2　网络结构及工作方式

除单元特性外，网络的拓扑结构也是 NN 的一个重要特性。从连接方式看 NN 主要有两种。

（i）前馈型网络

各神经元接受前一层的输入，并输出给下一层，没有反馈。结点分为两类，即输入单元和计算单元，每一计算单元可有任意个输入，但只有一个输出（它可耦合到任意多个其它结点作为其输入）。通常前馈网络可分为不同的层，第 i 层的输入只与第 $i-1$ 层输出相连，输入和输出结点与外界相连，而其它中间层则称为隐层。

（ii）反馈型网络

所有结点都是计算单元，同时也可接受输入，并向外界输出。

NN 的工作过程主要分为两个阶段：第一个阶段是学习期，此时各计算单元状态不变，各连线上的权值可通过学习来修改；第二阶段是工作期，此时各连接权固定，计算单元状态变化，以达到某种稳定状态。

从作用效果看，前馈网络主要是函数映射，可用于模式识别和函数逼近。反馈网络按对能量函数的极小点的利用来分类有两种：第一类是能量函数的所有极小点都起作用，这一类主要用作各种联想存储器；第二类只利用全局极小点，它主要用于求解最优化问题。

§2　蠓虫分类问题与多层前馈网络

2.1　蠓虫分类问题

蠓虫分类问题可概括叙述如下：生物学家试图对两种蠓虫（Af 与 Apf）进行鉴别，依据的资料是触角和翅膀的长度，已经测得了 9 支 Af 和 6 支 Apf 的数据如下：

Af: (1.24,1.27)，(1.36,1.74)，(1.38,1.64)，(1.38,1.82)，(1.38,1.90)，(1.40,1.70)，(1.48,1.82)，(1.54,1.82)，(1.56,2.08).

Apf: (1.14,1.82)，(1.18,1.96)，(1.20,1.86)，(1.26,2.00)，(1.28,2.00)，(1.30,1.96).

现在的问题是：

（i）根据如上资料，如何制定一种方法，正确地区分两类蠓虫。

（ii）对触角和翼长分别为(1.24,1.80)，(1.28,1.84)与(1.40,2.04)的 3 个标本，用所得到的方法加以识别。

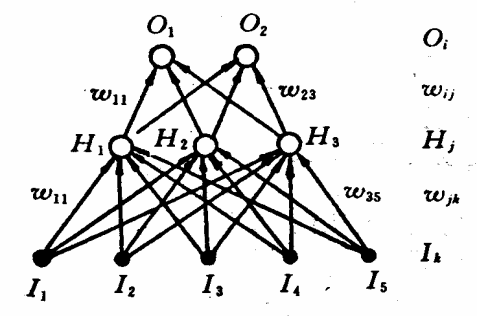
（iii）设 Af 是宝贵的传粉益虫，Apf 是某疾病的载体，是否应该修改分类方法。

如上的问题是有代表性的，它的特点是要求依据已知资料（9 支 Af 的数据和 6 支 Apf 的数据）制定一种分类方法，类别是已经给定的（Af 或 Apf）。今后，我们将 9 支

Af 及 6 支 Apf 的数据集合称之为学习样本。

2.2 多层前馈网络

为解决上述问题，考虑一个其结构如下图所示的人工神经网络，



激活函数由

$$\varphi(v)=\frac{1}{1+\exp(-\alpha v)}$$

来决定。图中最下面单元，即由●所示的一层称为输入层，用以输入已知测量值。在我们的例子中，它只需包括两个单元，一个用以输入触角长度，一个用以输入翅膀长度。中间一层称为处理层或隐单元层，单元个数适当选取，对于它的选取方法，有一些文献进行了讨论，但通过试验来决定，或许是最好的途径。在我们的例子中，取三个就足够了。最上面一层称为输出层，在我们的例子中只包含二个单元，用以输出与每一组输入数据相对应的分类信息. 任何一个中间层单元接受所有输入单元传来的信号，并把处理后的结果传向每一个输出单元，供输出层再次加工，同层的神经元彼此不相联接，输入与输出单元之间也没有直接联接。这样，除了神经元的形式定义外，我们又给出了网络结构。有些文献将这样的网络称为两层前传网络，称为两层的理由是，只有中间层及输出层的单元才对信号进行处理；输入层的单元对输入数据没有任何加工，故不计算在层数之内。

为了叙述上的方便，此处引人如下记号上的约定：令 s 表示一个确定的已知样品标号，在蠓虫问题中，$s=1,2,\cdots,15$，分别表示学习样本中的 15 个样品；当将第 s 个样品的原始数据输入网络时，相应的输出单元状态记为 $O_i^s(i=1,2)$，隐单元状态记为 $H_j^s(j=1,2,3)$，输入单元取值记为 $I_k^s(k=1,2)$。请注意，此处下标 i,j,k 依次对应于输出层、中间层及输入层。在这一约定下，从中间层到输出层的权记为 w_{ij}，从输入层到中间层的权记为 $\overline{w}_{jk}$。如果 w_{ij}，$\overline{w}_{jk}$ 均已给定，那么，对应于任何一组确定的输入 (I_1^s,I_2^s)，网络中所有单元的取值不难确定。事实上，对样品 s 而言，隐单元 j 的输入是

$$\overline{h}_j^s=\sum_{k=1}^{2}\overline{w}_{jk}I_k^s \qquad (5)$$

相应的输出状态是

$$H_j^s=\varphi(\overline{h}_j^s)=\varphi(\sum_{k=1}^{2}\overline{w}_{jk}I_k^s) \qquad (6)$$

由此，输出单元 i 所接收到的迭加信号是

$$h_i^s = \sum_{j=1}^{3} w_{ij} H_j^s = \sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s) \tag{7}$$

网络的最终输出是

$$O_i^s = \varphi(h_i^s) = \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} H_j^s) = \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s)) \tag{8}$$

这里，没有考虑阈值，正如前面已经说明的那样，这一点是无关紧要的。还应指出的是，对于任何一组确定的输入，输出是所有权$\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$的函数。

如果我们能够选定一组适当的权值$\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$，使得对应于学习样本中任何一组 Af 样品的输入$(I_1^s, I_2^s)$，输出$(O_1^s, O_2^s) = (1,0)$，对应于 Apf 的输入数据，输出为$(0,1)$，那么蠓虫分类问题实际上就解决了。因为，对于任何一个未知类别的样品，只要将其触角及翅膀长度输入网络，视其输出模式靠近$(1,0)$亦或$(0,1)$，就可能判断其归属。当然，有可能出现介于中间无法判断的情况。现在的问题是，如何找到一组适当的权值，实现上面所设想的网络功能。

2.3　向后传播算法

对于一个多层网络，如何求得一组恰当的权值，使网络具有特定的功能，在很长一段时间内，曾经是使研究工作者感到困难的一个问题，直到 1985 年，美国加州大学的一个研究小组提出了所谓向后传播算法（Back-Propagation），使问题有了重大进展，这一算法也是促成人工神经网络研究迅猛发展的一个原因。下面就来介绍这一算法。

如前所述，我们希望对应于学习样本中 Af 样品的输出是$(1,0)$，对应于 Apf 的输出是$(0,1)$，这样的输出称之为理想输出。实际上要精确地作到这一点是不可能的，只能希望实际输出尽可能地接近理想输出。为清楚起见，把对应于样品s的理想输出记为$\{T_i^s\}$，那么

$$E(W) = \frac{1}{2} \sum_{i,s} (T_i^s - O_i^s)^2 \tag{9}$$

度量了在一组给定的权下，实际输出与理想输出的差异，由此，寻找一组恰当的权的问题，自然地归结为求适当W的值，使$E(W)$达到极小的问题。将式（8）代入（9），有

$$E(W) = \frac{1}{2} \sum_{s,i} [T_i^s - \varphi(\sum_{j=1}^{3} w_{ij} \varphi(\sum_{k=1}^{2} \overline{w}_{jk} I_k^s))]^2 \tag{10}$$

易知，对每一个变量w_{ij}或$\overline{w}_{ij}$而言，这是一个连续可微的非线性函数，为了求得其极小点与极小值，最为方便的就是使用最速下降法。最速下降法是一种迭代算法，为求出$E(W)$的（局部）极小，它从一个任取的初始点W_0出发，计算在W_0点的负梯度方向$-\nabla E(W_0)$，这是函数在该点下降最快的方向；只要$\nabla E(W_0) \neq 0$，就可沿该方向移动一小段距离，达到一个新的点$W_1 = W_0 - \eta \nabla E(W_0)$，$\eta$是一个参数，只要$\eta$足够小，定能保证$E(W_1) < E(W_0)$。不断重复这一过程，一定能达到$E$的一个（局部）极小点。就本质而言，这就是 BP 算法的全部内容，然而，对人工神经网络问题而言，这一算法的具体形式是非常重要的，下面我们就来给出这一形式表达。

对于隐单元到输出单元的权w_{ij}而言，最速下降法给出的每一步的修正量是

$$\Delta w_{ij} = -\eta \frac{\partial E}{\partial w_{ij}} = \eta \sum_s [T_i^s - O_i^s] \varphi'(h_i^s) H_j^s = \eta \sum_s \delta_i^s H_j^s \qquad (11)$$

此处令

$$\delta_i^s = \varphi'(h_i^s)[T_i^s - O_i^s] \qquad (12)$$

对输入单元到隐单元的权 $\overline{w}_{jk}$

$$\Delta \overline{w}_{jk} = -\eta \frac{\partial E}{\partial \overline{w}_{jk}} = \eta \sum_{s,i} [T_i^s - O_i^s] \varphi'(h_i^s) w_{ij} \varphi'(h_j^s) I_j^s$$

$$= \eta \sum_{s,i} \delta_i^s w_{ij} \varphi'(h_j^s) I_k^s = \eta \sum_s \overline{\delta}_j^s I_k^s \qquad (13)$$

此处

$$\overline{\delta}_j^s = \varphi'(h_j^s) \sum_i w_{ij} \delta_i^s$$

从（11）和（13）式可以看出，所有权的修正量都有如下形式，即

$$\Delta w_{pq} = \eta \sum_s \delta_p^s v_q^s \qquad (14)$$

指标 p 对应于两个单元中输出信号的一端，q 对应于输入信号的一端，v 或者代表 H 或者代表 I 。形式上看来，这一修正是“局部”的，可以看作是 Hebb 律的一种表现形式。还应注意，δ_i^s 由实际输出与理想输出的差及 h_i^s 决定，而 $\overline{\delta}_j^s$ 则需依赖 δ_i^s 算出，因此，这一算法才称为向后传播算法。稍加分析还可知道，利用由（11）~（13）式所给出的计算安排，较之不考虑 δ_p^s 的向后传播，直接计算所有含 φ' 的原表达式，极大地降低了计算工作量。这组关系式称作广义 δ – 法则，它们不难推广到一般的多层网络上去。

利用这一迭代算法，最终生成在一定精度内满足要求的 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$ 的过程，称为人工神经网络的学习过程。可以看出，这里所提供的学习机制是元与元之间权的不断调整，学习样本中任何一个样品所提供的信息，最终将包含在网络的每一个权之中。参数 η 的大小则反映了学习效率。

为了更有效地应用 BP 算法，我们做出如下一些补充说明。

（i）在式（11）与（13）中，$\Delta w_{ij}, \Delta \overline{w}_{jk}$ 表示为与所有样品 s 有关的求和计算。实际上，我们还可以每次仅考虑输入一个样品所造成的修正，然后，按照随机选取的顺序，将所有样品逐个输入，不断重复这一手续，直至收敛到一个满意的解为止。

（ii）在如上的算法中，利用实际输出与理想输出差的平方和作为度量 $\{w_{ij}, \overline{w}_{jk}\}$ 优劣的标准，这并不是唯一的度量方式，完全可以从其它的函数形式出发，例如从相对熵出发，导出相应的算法。

（iii）在如上的讨论中使用的是最速下降法，显然，这也不是唯一的选择，其它的非线性优化方法，诸如共轭梯度法，拟牛顿法等，都可用于计算。为了加速算法的收敛速度，还可以考虑各种不同的修正方式。

（iv）BP 算法的出现，虽然对人工神经网络的发展起了重大推动作用，但是这一算法仍有很多问题．对于一个大的网络系统，BP 算法的工作量仍然是十分可观的，这主要在于算法的收敛速度很慢。更为严重的是，此处所讨论的是非线性函数的优化，那么它就无法逃脱该类问题的共同困难：BP 算法所求得的解，只能保证是依赖于初值选取的局部极小点。为克服这一缺陷，可以考虑改进方法，例如模拟退火算法，或从多个

随机选定的初值点出发，进行多次计算，但这些方法都不可避免地加大了工作量。

2.4　蠓虫分类问题的求解

下面利用上文所叙述的网络结构及方法，对蠓虫分类问题求解。编写 Matlab 程序如下：

```
clear
p1=[1.24,1.27;1.36,1.74;1.38,1.64;1.38,1.82;1.38,1.90;
  1.40,1.70;1.48,1.82;1.54,1.82;1.56,2.08];
p2=[1.14,1.82;1.18,1.96;1.20,1.86;1.26,2.00
  1.28,2.00;1.30,1.96];
p=[p1;p2]';
pr=minmax(p);
goal=[ones(1,9),zeros(1,6);zeros(1,9),ones(1,6)];
plot(p1(:,1),p1(:,2),'h',p2(:,1),p2(:,2),'o')
net=newff(pr,[3,2],{'logsig','logsig'});
net.trainParam.show = 10;
net.trainParam.lr = 0.05;
net.trainParam.goal = 1e-10;
net.trainParam.epochs = 50000;
net = train(net,p,goal);
x=[1.24 1.80;1.28 1.84;1.40 2.04]';
y0=sim(net,p)
y=sim(net,x)
```

§3　处理蠓虫分类的另一种网络方法

3.1 几个有关概念

在介绍本节主要内容之前，首先说明几个不同的概念。在上一节中，我们把利用 BP 算法确定联接强度，即权值的过程称为“学习过程”，这种学习的特点是，对任何一个输入样品，其类别事先是已知的，理想输出也已事先规定，因而从它所产生的实际输出与理想输出的异同，我们清楚地知道网络判断正确与否，故此把这一类学习称为在教师监督下的学习；与它不同的是，有些情况下学习是无监督的，例如，我们试图把一组样品按其本身特点分类，所要划分的类别是事先未知的，需要网络自身通过学习来决定，因而，在学习过程中，对每一输入所产生的输出也就无所谓对错，对于这样的情况，显然 BP 算法是不适用的。

另一个有关概念是所谓有竞争的学习。在上节所讨论的蠓虫分类网络中，尽管我们所希望的理想输出是 $(1,0)$ 或 $(0,1)$，但实际输出并不如此，一般而言，两个输出单元均同时不为 0。与此不同，我们完全可以设想另外一种输出模式：对应任何一组输入，所有输出单元中，只允许有一个处于激发态，即取值为 1，其它输出单元均被抑制，即取值为 0。一种形象的说法是，对应任何一组输入，要求所有的输出单元彼此竞争，唯一的胜利者赢得一切，失败者一无所获，形成这样一种输出机制的网络学习过程，称为有竞争的学习。

3.2　最简单的无监督有竞争的学习

本节叙述一种无监督有竞争的网络学习方法，由此产生的网络可用来将一组输入样品自动划分类别，相似的样品归于同一类别，因而激发同一输出单元，这一分类方式，是网络自身通过学习，从输入数据的关系中得出的。

蠓虫分类问题对应有教师的网络学习过程，显然不能由如上的方法来解决。但在这种无监督有竞争的学习阐明之后，很容易从中导出一种适用于有监督情况的网络方法；此外，本节所介绍的网络，在数据压缩等多种领域，都有其重要应用。

考虑一个仅由输入层与输出层组成的网络系统，输入单元数目与每一样品的测量值数目相等，输出单元数目适当选取。每一个输入单元与所有输出单元联接，第 j 个输入元到第 i 个输出元的权记为 w_{ij}，同层单元间无横向联接。无妨假设所有输入数值均已规化到 $[-1,1]$ 之间，又因为是有竞争的学习，输出单元只取 0 或 1 两个值，且对应每一组输入，只有一个输出元取 1。

取 1 的输出元记为 i^*，称之为优胜者．对于任何一组输入 s，规定优胜者是有最大净输入的输出元，即对输入 $I=(I_1,\cdots,I_n)$ 而言，

$$h_i=\sum_j w_{ij}I_j\equiv W_i\cdot I \tag{15}$$

取最大值的单元，其中 W_i 是输出元 i 所有权系数组成的向量，也就是说

$$W_{i^*}\cdot I\geq W_i\cdot I,\quad (\forall i) \tag{16}$$

如果权向量是按照 $\sum_j w_{ij}^2=1$ 的方式标准化的，（16）式等价于

$$|W_{i^*}-I|\leqslant|W_i-I|,\quad (\forall i) \tag{17}$$

即优胜者是其标准化权向量最靠近输入向量的输出元。令 $O_{i^*}=1$，其余的输出 $O_i=0$。这样的输出规定了输入向量的类别，但为了使这种分类方式有意义，问题化为如何将学习样本中的所有样品，自然地划分为聚类，并对每一聚类找出适当的权向量。为此，采用如下的算法：随机取定一组不大的初始权向量，注意不使它们有任何对称性。然后，将已知样品按照随机顺序输入网络。对输入样品 s，按上文所述确定优胜者 i^*，对所有与 i^* 有关的权作如下修正

$$\Delta w_{i^*j}=\eta(I_j^s-w_{i^*j}) \tag{18}$$

所有其它输出单元的权保持不变。注意到 $O_{i^*}=1$，$O_i=0(i\neq i^*)$，所有权的修正公式可统一表示为

$$\Delta w_{i^*j}=\eta O_i(I_j^s-w_{i^*j})$$

这一形式也可视为 Hebb 律的一种表现。（18）式的几何意义是清楚的，每次修正将优胜者的权向量向输入向量移近一小段距离，这使得同一样品再次输入时，i^* 有更大的获胜可能。可以合理地预期，反复重复以上步骤，使得每个输出单元对应了输入向量的一个聚类，相应的权向量落在了该聚类样品的重心附近。当然，这只是一个极不严密的说明。

特别应当指出，上述算法，对于事先按照 $\sum I_j=1$ 标准化了的输入数据更为适用，整个过程不难由计算机模拟实现。

为了更有效地使用如上算法，下面对实际计算时可能产生的问题，作一些简要说明。

首先，如果初始权选择不当，那么可能出现这样的输出单元，它的权远离任何输入向量，因此，永远不会成为优胜者，相应的权也就永远不会得到修正，这样的单元称之为死单元。为避免出现死单元，可以有多种方法。一种办法是初始权从学习样本中抽样选取，这就保证了它们都落在正确范围内；另一种办法是修正上述的学习算法，使得每一步不仅调整优胜者的权，同时也以一个小得多的 η 值，修正所有其它的权。这样，对于总是失败的单元，其权逐渐地朝着平均输入方向运动，最终也会在某一次竞争中取胜。此外，还存在有多种处理死单元的方法，感兴趣的读者可从文献中找到更多的方法。

另外一个问题是这一算法的收敛性。如果式（18）或（19）中反映学习效率的参数η取为一个固定常数，那么权向量永远不会真正在某一有限点集上稳定下来。因此，应当考虑在公式中引进随学习时间而变化的收敛因子。例如，取$\eta = \eta(t) = \eta_0 t^{-a}$，$0 < a \le 1$。这一因子的适当选取是极为重要的，$\eta$下降太慢，无疑增加了不必要工作量，$\eta$下降太快，则会使学习变得无效。

3.3　LVQ 方法

上述有竞争学习的一个最重要应用是数据压缩中的向量量子化方法（Vector Quantization）。它的基本想法是，把一个给定的输入向量集合I^s分成M个类别，然后用类别指标来代表所有属于该类的向量。向量分量通常取连续值，一旦一组适当的类别确定之后，代替传输或存储输入向量本身，可以只传输或存储它的类别指标。所有的类别由M个所谓“原型向量”来表示，我们可以利用一般的欧氏距离，对每一个输入向量找到最靠近的原型向量，作为它的类别。显然，这种分类方法可以通过有竞争的学习直接得到。一旦学习过程结束，所有权向量的集合，便构成了一个“电码本”。

一般而言，上述无监督有竞争的学习，实际提供了一种聚类分析方法，对如蠓虫分类这种有监督的问题并不适用。1989 年，Kohonen 对向量量子化方法加以修改，提出了一种适用于有监督情况的学习方法，称为学习向量量子化（Learning Vector Quantization），该方法可用于蠓虫分类问题。在有监督的情况下，学习样品的类别是事先已知的，与此相应，每个输出单元所对应的类别也事先作了规定，但是，代表同一类别的输出单元可以不止一个。

在 LVQ 中，对于任一输入向量，仍按无监督有竞争的方式选出优胜者i^*，但权的修正规则则依输入向量的类别与i^*所代表的是否一致而不同，确切地说，令

$$\Delta w_{i^*j} = \begin{cases} \eta(I_j^s - w_{i^*j}) & \text{一致情况} \\ -\eta(I_j^s - w_{i^*j}) & \text{不一致情况} \end{cases}$$

前一种情况，修正和无监督的学习一致，权朝向样品方向移动一小段距离；后一种则相反，权向离开样品方向移动，这样就减少了错误分类的机会。

对于上述的蠓虫分类问题，我们编写 Matlab 程序如下：

```
clear
p1=[1.24,1.27;1.36,1.74;1.38,1.64;1.38,1.82;1.38,1.90;
  1.40,1.70;1.48,1.82;1.54,1.82;1.56,2.08];
p2=[1.14,1.82;1.18,1.96;1.20,1.86;1.26,2.00
  1.28,2.00;1.30,1.96];
p=[p1;p2]'
pr=minmax(p)
goal=[ones(1,9),zeros(1,6);zeros(1,9),ones(1,6)]
net = newlvq(pr,4,[0.6,0.4])
net = train(net,p,goal)
Y = sim(net,p)
x=[1.24 1.80;1.28 1.84;1.40 2.04]'
sim(net,x)
```

习 题 十 九

1. 利用 BP 算法及 sigmoid 函数，研究以下各函数的逼近问题

（i） $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad 1\le x\le 100$

（ii） $f(x)=\sin x,\quad 0\le x\le \dfrac{\pi}{2}$

对每一函数要完成如下工作：

① 获取两组数据，一组作为训练集，一组作为测试集；

② 利用训练集训练一个单隐层的网络；用测试集检验训练结果，改变隐层单元数，研究它对逼近效果的影响。

2. 给定待拟合的曲线形式为

$$f(x)=0.5+0.4\sin(2\pi x)$$

在 $f(x)$ 上等间隔取 11 个点的数据，在此数据的输出值上加均值为 0，均方差 $\sigma=0.05$ 的正态分布噪声作为给定训练数据，用多项式拟合此函数，分别取多项式的阶次为 1，3 和 11 阶，图示出拟合结果，并讨论多项式阶次对拟合结果的影响。

第二十章　偏微分方程的数值解

自然科学与工程技术中种种运动发展过程与平衡现象各自遵守一定的规律。这些规律的定量表述一般地呈现为关于含有未知函数及其导数的方程。我们将只含有未知多元函数及其偏导数的方程，称之为偏微分方程。

方程中出现的未知函数偏导数的最高阶数称为偏微分方程的阶。如果方程中对于未知函数和它的所有偏导数都是线性的，这样的方程称为线性偏微分方程，否则称它为非线性偏微分方程。

初始条件和边界条件称为定解条件，未附加定解条件的偏微分方程称为泛定方程。对于一个具体的问题，定解条件与泛定方程总是同时提出。定解条件与泛定方程作为一个整体，称为定解问题。

§1　偏微分方程的定解问题

各种物理性质的定常（即不随时间变化）过程，都可用椭圆型方程来描述。其最典型、最简单的形式是泊松(Poisson)方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) \tag{1}$$

特别地，当 $f(x,y) \equiv 0$ 时，即为拉普拉斯(Laplace)方程，又称为调和方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

带有稳定热源或内部无热源的稳定温度场的温度分布，不可压缩流体的稳定无旋流动及静电场的电势等均满足这类方程。

Poisson 方程的第一边值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x,y) & \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

其中 Ω 为以 Γ 为边界的有界区域，Γ 为分段光滑曲线，$\Omega \cup \Gamma$ 称为定解区域，$f(x,y), \varphi(x,y)$ 分别为 Ω, Γ 上的已知连续函数。

第二类和第三类边界条件可统一表示成

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u \right)\Big|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x,y) \tag{4}$$

其中 n 为边界 Γ 的外法线方向。当 $\alpha = 0$ 时为第二类边界条件，$\alpha \neq 0$ 时为第三类边界条件。

在研究热传导过程，气体扩散现象及电磁场的传播等随时间变化的非定常物理问题时，常常会遇到抛物型方程。其最简单的形式为一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (a > 0) \tag{5}$$

方程（5）可以有两种不同类型的定解问题：

初值问题（也称为 Cauchy 问题）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & t>0,\quad -\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases} \tag{6}$$

初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}-a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 & 0<t<T,\,0<x<l \\ u(x,0)=\varphi(x) & \\ u(0,t)=g_1(t),\,u(l,t)=g_2(t), & 0\le t\le T\end{cases} \tag{7}$$

其中 $\varphi(x),g_1(t),g_2(t)$ 为已知函数，且满足连接条件

$$\varphi(0)=g_1(0),\quad \varphi(l)=g_2(0)$$

问题（7）中的边界条件 $u(0,t)=g_1(t),u(l,t)=g_2(t)$ 称为第一类边界条件。第二类和第三类边界条件为

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\lambda_1(t)u\right]\Big|_{x=0}=g_1(t),\quad 0\le t\le T \\ &\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda_2(t)u\right]\Big|_{x=l}=g_2(t),\quad 0\le t\le T\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\lambda_1(t)\ge 0,\lambda_2(t)\ge 0$。当 $\lambda_1(t)=\lambda_2(t)\equiv 0$ 时，为第二类边界条件，否则称为第三类边界条件。

双曲型方程的最简单形式为一阶双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+a\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{9}$$

物理中常见的一维振动与波动问题可用二阶波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{10}$$

描述，它是双曲型方程的典型形式。方程（10）的初值问题为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t>0,-\infty<x<+\infty \\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\phi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases} \tag{11}$$

边界条件一般也有三类，最简单的初边值问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & t > 0,\ 0 < x < l \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t) & 0 \le t \le T \end{cases}$$

如果偏微分方程定解问题的解存在，唯一且连续依赖于定解数据（即出现在方程和定解条件中的已知函数），则此定解问题是适定的。可以证明，上面所举各种定解问题都是适定的。

§2 偏微分方程的差分解法

差分方法又称为有限差分方法或网格法，是求偏微分方程定解问题的数值解中应用最广泛的方法之一。它的基本思想是：先对求解区域作网格剖分，将自变量的连续变化区域用有限离散点（网格点）集代替；将问题中出现的连续变量的函数用定义在网格点上离散变量的函数代替；通过用网格点上函数的差商代替导数，将含连续变量的偏微分方程定解问题化成只含有限个未知数的代数方程组（称为差分格式）。如果差分格式有解，且当网格无限变小时其解收敛于原微分方程定解问题的解，则差分格式的解就作为原问题的近似解（数值解）。因此，用差分方法求偏微分方程定解问题一般需要解决以下问题：

（i）选取网格；

（ii）对微分方程及定解条件选择差分近似，列出差分格式；

（iii）求解差分格式；

（iv）讨论差分格式解对于微分方程解的收敛性及误差估计。

下面我们只对偏微分方程的差分解法作一简要的介绍。

2.1 椭圆型方程第一边值问题的差分解法

以 Poisson 方程（1）为基本模型讨论第一边值问题的差分方法。

考虑 Poisson 方程的第一边值问题（3）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y) & (x,y) \in \Omega \\ u(x,y)\big|_{(x,y)\in\Gamma} = \varphi(x,y) & \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

取 h,τ 分别为 x 方向和 y 方向的步长，以两族平行线 $x = x_k = kh, y = y_j = j\tau$ $(k, j = 0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 将定解区域剖分成矩形网格。节点的全体记为 $R = \{(x_k, y_j) \mid x_k = kh, y_j = j\tau, i, j\text{为整数}\}$。定解区域内部的节点称为内点，记内点集 $R \bigcap \Omega$ 为 $\Omega_{h\tau}$。边界 Γ 与网格线的交点称为边界点，边界点全体记为 $\Gamma_{h\tau}$。与节点 (x_k, y_j) 沿 x 方向或 y 方向只差一个步长的点 $(x_{k\pm1}, y_j)$ 和 $(x_k, y_{j\pm1})$ 称为节点 (x_k, y_j) 的相邻节点。如果一个内点的四个相邻节点均属于 $\Omega \bigcup \Gamma$，称为正则内点，正则内点的全体记为 $\Omega^{(1)}$，至少有一个相邻节点不属于 $\Omega \bigcup \Gamma$ 的内点称为非正则内点，非正则内点的全体记为 $\Omega^{(2)}$。我们的问题是要求出问题（3）在全体内点上的数值解。

为简便记，记 $(k, j) = (x_k, y_j), u(k, j) = u(x_k, y_j), f_{k,j} = f(x_k, y_j)$。对正则内点

$(k,j)\in\Omega^{(1)}$，由二阶中心差商公式

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{(k,j)}=\frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2}+O(h^2)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_{(k,j)}=\frac{u(k,j+1)-2u(k,j)+u(k,j-1)}{\tau^2}+O(\tau^2)$$

Poisson 方程（1）在点(k,j)处可表示为

$$\frac{u(k+1,j)-2u(k,j)+u(k-1,j)}{h^2}+\frac{u(k,j+1)-2u(k,j)+u(k,j-1)}{\tau^2}\tag{12}$$

$$=f_{k,j}+O(h^2+\tau^2)$$

在式（12）中略去$O(h^2+\tau^2)$，即得与方程（1）相近似的差分方程

$$\frac{u_{k+1,j}-2u_{k,j}+u_{k-1,j}}{h^2}+\frac{u_{k,j+1}-2u_{k,j}+u_{k,j-1}}{\tau^2}=f_{k,j}\tag{13}$$

式（13）中方程的个数等于正则内点的个数，而未知数$u_{k,j}$则除了包含正则内点处解u的近似值，还包含一些非正则内点处u的近似值，因而方程个数少于未知数个数。在非正则内点处 Poisson 方程的差分近似不能按式（13）给出，需要利用边界条件得到。

边界条件的处理可以有各种方案，下面介绍较简单的两种。

(i) 直接转移

(ii) 线性插值

由式（13）所给出的差分格式称为五点菱形格式，实际计算时经常取$h=\tau$，此时五点菱形格式可化为

$$\frac{1}{h^2}(u_{k+1,j}+u_{k-1,j}+u_{k,j+1}+u_{k,j-1}-4u_{k,j})=f_{k,j}\tag{14}$$

简记为

$$\frac{1}{h^2}\Diamond u_{k,j}=f_{k,j}\tag{15}$$

其中$\Diamond u_{k,j}=u_{k+1,j}+u_{k-1,j}+u_{k,j+1}+u_{k,j-1}-4u_{k,j}$。

求解差分方程组最常用的方法是同步迭代法，同步迭代法是最简单的迭代方式。除边界节点外，区域内节点的初始值是任意取定的。

例 1　用五点菱形格式求解 Laplace 方程第一边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 & (x,y)\in\Omega\\ u(x,y)|_{(x,y)\in\Gamma}=\lg[(1+x)^2+y^2] & \Gamma=\partial\Omega\end{cases}$$

其中$\Omega=\{(x,y)\mid 0\le x,y\le 1\}$。取$h=\tau=\dfrac{1}{3}$。

当$h=\tau$时，利用点$(k,j),(k\pm1,j-1),(k\pm1,j+1)$构造的差分格式

$$\frac{1}{2h^2}(u_{k+1,j+1}+u_{k+1,j-1}+u_{k-1,j+1}+u_{k-1,j-1}-4u_{k,j})=f_{k,j}\tag{16}$$

称为五点矩形格式，简记为

$$\frac{1}{2h^2}\square u_{k,j} = f_{k,j} \tag{17}$$

其中$\square u_{k,j} = u_{k+1,j+1} + u_{k+1,j-1} + u_{k-1,j+1} + u_{k-1,j-1} - 4u_{k,j}$。

2.2 抛物型方程的差分解法

以一维热传导方程（5）

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \qquad (a > 0)$$

为基本模型讨论适用于抛物型方程定解问题的几种差分格式。

首先对xt平面进行网格剖分。分别取h, τ为x方向与t方向的步长，用两族平行直线$x = x_k = kh(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$，$t = t_j = j\tau(j = 0,1,2,\cdots)$，将$xt$平面剖分成矩形网格，节点为$(x_k, t_j)(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, j = 0,1,2,\cdots)$。为简便起见，记$(k, j) = (x_k, y_j)$，$u(k, j) = u(x_k, y_j)$，$\varphi_k = \varphi(x_k)$，$g_{1j} = g_1(t_j)$，$g_{2j} = g_2(t_j)$，$\lambda_{1j} = \lambda_1(t_j)$，$\lambda_{2j} = \lambda_2(t_j)$。

2.2.1 微分方程的差分近似

在网格内点(k, j)处，对$\frac{\partial u}{\partial t}$分别采用向前、向后及中心差商公式，对$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$采用二阶中心差商公式，一维热传导方程（5）可分别表示为

$$\frac{u(k, j+1) - u(k, j)}{\tau} - a\frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} = O(\tau + h^2)$$

$$\frac{u(k, j) - u(k, j-1)}{\tau} - a\frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} = O(\tau + h^2)$$

$$\frac{u(k, j+1) - u(k, j-1)}{2\tau} - a\frac{u(k+1, j) - 2u(k, j) + u(k-1, j)}{h^2} = O(\tau + h^2)$$

由此得到一维热传导方程的不同的差分近似

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} - a\frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0 \tag{18}$$

$$\frac{u_{k,j} - u_{k,j-1}}{\tau} - a\frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0 \tag{19}$$

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j-1}}{2\tau} - a\frac{u_{k+1,j} - 2u_{k,j} + u_{k-1,j}}{h^2} = 0 \tag{20}$$

2.2.2 初、边值条件的处理

为用差分方程求解定解问题（6），（7）等，还需对定解条件进行离散化。

对初始条件及第一类边界条件，可直接得到

$$u_{k,0} = u(x_k, 0) = \varphi_k \qquad (k = 0, \pm 1, \cdots 或 k = 0,1,\cdots,n) \tag{21}$$

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= u(0, t_j) = g_{ij} \\ u_{n,j} &= u(l, t_j) = g_{2j} \end{aligned} \qquad (j = 0,1,\cdots,m-1) \tag{22}$$

其中 $n=\frac{l}{h}, m=\frac{T}{\tau}$。

对第二、三类边界条件则需用差商近似。下面介绍两种较简单的处理方法。

（i）在左边界 $(x=0)$ 处用向前差商近似偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，在右边界 $(x=l)$ 处用向后差商近似偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$，即

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,j)}=\frac{u(1,j)-u(0,j)}{h}+O(h)\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(n,j)}=\frac{u(n,j)-u(n-1,j)}{h}+O(h)\end{aligned}\qquad (j=0,1,\cdots,m)$$

即得边界条件（8）的差分近似为

$$\begin{cases}\dfrac{u_{1,j}-u_{0,j}}{h}-\lambda_{1j}u_{0,j}=g_{1j}\\[2ex]\dfrac{u_{n,j}-u_{n-1,j}}{h}+\lambda_{2j}u_{n,j}=g_{2j}\end{cases}\qquad (j=0,1,\cdots,m)\qquad (23)$$

（ii）用中心差商近似 $\frac{\partial u}{\partial x}$，即

$$\begin{aligned}&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,j)}=\frac{u(1,j)-u(-1,j)}{2h}+O(h^2)\\&\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(n,j)}=\frac{u(n+1,j)-u(n-1,j)}{2h}+O(h^2)\end{aligned}\qquad (j=0,1,\cdots,m)$$

则得边界条件的差分近似为

$$\begin{cases}\dfrac{u_{1,j}-u_{-1,j}}{2h}-\lambda_{1j}u_{0,j}=g_{1j}\\[2ex]\dfrac{u_{n+1,j}-u_{n-1,j}}{2h}+\lambda_{2j}u_{n,j}=g_{2j}\end{cases}\qquad (j=0,1,\cdots,m)\qquad (24)$$

这样处理边界条件，误差的阶数提高了，但式（24）中出现定解区域外的节点 $(-1,j)$ 和 $(n+1,j)$，这就需要将解拓展到定解区域外。可以通过用内节点上的 u 值插值求出 $u_{-1,j}$ 和 $u_{n+1,j}$，也可以假定热传导方程（5）在边界上也成立，将差分方程扩展到边界节点上，由此消去 $u_{-1,j}$ 和 $u_{n+1,j}$。

2.2.3　几种常用的差分格式

下面我们以热传导方程的初边值问题（7）为例给出几种常用的差分格式。

(i) 古典显式格式

为便于计算，令 $r=\frac{a\tau}{h^2}$，式（18）改写成以下形式

$$u_{k,j+1}=ru_{k+1,j}+(1-2r)u_{k,j}+ru_{k-1,j}$$

将式（18）与（21），（22）结合，我们得到求解问题（7）的一种差分格式

$$\begin{cases}u_{k,j+1}=ru_{k+1,j}+(1-2r)u_{k,j}+ru_{k-1,j} & (k=1,2,\cdots,n-1,\ j=0,1,\cdots,m-1)\\ u_{k,0}=\varphi_k & (k=1,2,\cdots,n)\\ u_{0,j}=g_{1j},\quad u_{n,j}=g_{2j} & (j=1,2,\cdots,m)\end{cases}\tag{25}$$

由于第 0 层$(j=0)$上节点处的u值已知$(u_{k,0}=\varphi_k)$，由式（25）即可算出u在第一层$(j=1)$上节点处的近似值$u_{k,1}$。重复使用式（25），可以逐层计算出各层节点的近似值。

（ii）古典隐式格式

将（19）整理并与式（21），（22）联立，得差分格式如下

$$\begin{cases}u_{k,j+1}=u_{k,j}+r(u_{k+1,j+1}-2u_{k,j+1}+u_{k-1,j+1}) & (k=1,2,\cdots,n-1,\ j=0,1,\cdots,m-1)\\ u_{k,0}=\varphi_k & (k=0,1,\cdots,n)\\ u_{0,j}=g_{1j},\quad u_{n,j}=g_{2j} & (j=0,1,\cdots,m)\end{cases}\tag{26}$$

其中$r=\dfrac{a\tau}{h^2}$。虽然第 0 层上的u值仍为已知，但不能由式（30）直接计算以上各层节点上的值$u_{k,j}$，故差分格式（26）称为古典隐式格式。

（iii）杜福特—弗兰克尔（DoFort—Frankel）格式

DoFort—Frankel 格式是三层显式格式，它是由式（24）与（25），（26）结合得到的。具体形式如下：

$$\begin{cases}u_{k,j+1}=\dfrac{2r}{1+2r}(u_{k+1,j}+u_{k-1,j})+\dfrac{1-2r}{1+2r}u_{k,j-1} & (k=1,2,\cdots,n-1,\ j=1,2,\cdots,m-1)\\ u_{k,0}=\varphi_k & (k=0,1,\cdots,n)\\ u_{0,j}=g_{1j},\quad u_{n,j}=g_{2j} & (j=0,1,\cdots,m)\end{cases}\tag{27}$$

用这种格式求解时，除了第 0 层上的值$u_{k,0}$由初值条件（21）得到，必须先用二层格式求出第 1 层上的值$u_{k,1}$，然后再按格式（27）逐层计算$u_{k,j}(j=2,3,\cdots,m)$。

2.3　双曲型方程的差分解法

对二阶波动方程（10）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

如果令$v_1=\dfrac{\partial u}{\partial t},v_2=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，则方程（10）可化成一阶线性双曲型方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_1}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial v_2}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}=\dfrac{\partial v_1}{\partial x}\end{cases}\tag{28}$$

记$v=(v_1,v_2)^T$，则方程组（28）可表成矩阵形式

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\begin{bmatrix}0 & a^2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\frac{\partial v}{\partial x}=A\frac{\partial v}{\partial x} \tag{29}$$

矩阵 A 有两个不同的特征值 $\lambda=\pm a$，故存在非奇异矩阵 P，使得

$$PAP^{-1}=\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & -a\end{bmatrix}=\Lambda$$

作变换 $w=Pv=(w_1,w_2)^T$，方程组（29）可化成

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\Lambda\frac{\partial w}{\partial x} \tag{30}$$

方程组（30）由两个独立的一阶双曲型方程联立而成。因此下面主要讨论一阶双曲型方程的差分解法。

考虑一阶双曲型方程的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+a\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 & t>0 \quad -\infty<x<+\infty\\ u(x,0)=\varphi(x) & -\infty<x<+\infty\end{cases} \tag{31}$$

与抛物型方程的讨论类似，仍将 xt 平面剖分成矩形网格。取 x 方向步长为 h，t 方向步长为 τ，网格线为 $x=x_k=kh(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\ t=t_j=j\tau(j=0,1,2,\cdots)$。为简便起见，记 $(k,j)=(x_k,y_j)$，$u(k,j)=u(x_k,y_j)$，$\varphi_k=\varphi(x_k)$。

以不同的差商近似偏导数，可以得到方程（9）的不同的差分近似

$$\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}+a\frac{u_{k+1,j}-u_{k,j}}{h}=0 \tag{32}$$

$$\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-a\frac{u_{k,j}-u_{k-1,j}}{h}=0 \tag{33}$$

$$\frac{u_{k,j+1}-u_{k,j}}{\tau}-a\frac{u_{k+1,j}-u_{k-1,j}}{2h}=0 \tag{34}$$

结合离散化的初始条件，可以得到几种简单的差分格式。

§3 一维状态空间的偏微分方程的 MATLAB 解法

3.1 工具箱命令介绍

MATLAB 提供了一个指令 pdepe，用以解以下的 PDE 方程式

$$c(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial t}=x^{-m}\frac{\partial}{\partial x}(x^m f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}))+s(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{35}$$

其中时间介于 $t_0\le t\le t_f$ 之间，而位置 x 则介于 $[a,b]$ 有限区域之间。m 值表示问题的对称性，其可为 0，1 或 2，分别表示平板(slab)，圆柱(cylindrical)或球体(spherical)的情形。因而，如果 $m>0$，则 a 必等于 b，也就是说其具有圆柱或球体的对称关系。同时，式中 $f(x,t,u,\partial u/\partial x)$ 一项为流通量(flux)，而 $s(x,t,u,\partial u/\partial x)$ 为来源(source)项。$c(x,t,u,\partial u/\partial x)$ 为偏微分方程的对角线系数矩阵。若某一对角线元素为 0，则表示该偏微分方程为椭圆型偏微分方程，若为正值(不为 0)，则为抛物型偏微分方程。请注意 c 的对角线元素一定不全为 0。偏微分方程初始值可表示为

$$u(x,t_0)=v_0(x) \tag{36}$$

而边界条件为

$$p(x,t,u)+q(x,t)f(x,t,u,\partial u/\partial x)=0 \tag{37}$$

其中 x 为两端点位置，即 a 或 b

用以解含上述初始值及边界值条件的偏微分方程的 MATLAB 命令 pdepe 的用法如下：

$$sol = pdepe(m, pdepe, icfun, bcfun, xmesh, tspan, options)$$

其中

m 为问题之对称参数；

$xmesh$ 为空间变量 x 的网格点(mesh)位置向量，即 $xmesh=[x_0,x_1,\cdots,x_N]$，其中 $x_0=a$(起点)， $x_N=b$(终点)。

$tspan$ 为时间变量 t 的向量，即 $tspan=[t_0,t_1,\cdots,t_M]$，其中 t_0 为起始时间，t_M 为终点时间。

$pdefun$ 为使用者提供的 pde 函数文件。其函数格式如下：

$$[c,f,s]=pdefun(x,t,u,dudx)$$

亦即，使用者仅需提供偏微分方程中的系数向量。c， f 和 s 均为行(column)向量，而向量 c 即为矩阵 c 的对角线元素。

$icfun$ 提供解 u 的起始值，其格式为 $u=icfun(x)$ 值得注意的是 u 为行向量。

$bcfun$ 使用者提供的边界条件函数，格式如下：

$$[pl,ql,pr,ql]=bcfun(xl,ul,xr,ur,t)$$

其中 ul 和 ur 分别表示左边界 $(xl=b)$ 和右边界 $(xr=a)$ u 的近似解。输出变量中， pl 和 ql 分别表示左边界 p 和 q 的行向量，而 pr 和 qr 则为右边界 p 和 q 的行向量。

sol 为解答输出。 sol 为多维的输出向量， $sol(:,:i)$ 为 u_i 的输出，即 $u_i=sol(:,:,i)$。元素 $u_i(j,k)=sol(j,k,i)$ 表示在 $t=tspan(j)$ 和 $x=xmesh(k)$ 时 u_i 之答案。

$options$ 为求解器的相关解法参数。详细说明参见 odeset 的使用方法。

注：

1. MATLAB PDE 求解器 pdepe 的算法，主要是将原来的椭圆型和抛物线型偏微分方程转化为一组常微分方程。此转换的过程是基于使用者所指定的 mesh 点，以二阶空间离散化(spatial discretization)技术为之(Keel and Berzins,1990)，然后以 ode15s 的指令求解。采用 ode15s 的 ode 解法，主要是因为在离散化的过程中，椭圆型偏微分方程被转化为一组代数方程,而抛物线型的偏微分方程则被转化为一组联立的微分方程。因而，原偏微分方程被离散化后，变成一组同时伴有微分方程与代数方程的微分代数方程组，故以 ode15s 便可顺利求解。

2. x 的取点(mesh)位置对解的精确度影响很大，若 pdepe 求解器给出“…has difficulty finding consistent initial considition”的讯息时，使用者可进一步将 mesh 点取密一点，即增加 mesh 点数。另外，若状态 u 在某些特定点上有较快速的变动时，亦需将此处的点取密集些，以增加精确度。值得注意的是 pdepe 并不会自动做 xmesh 的自动取点，使用者必须观察解的特性，自行作取点的操作。一般而言，所取的点数至少需大于 3 以上。

3. tspan 的选取主要是基于使用者对那些特定时间的状态有兴趣而选定。而间距

(step size)的控制由程序自动完成。

4. 若要获得特定位置及时间下的解，可配合以 pdeval 命令。使用格式如下：

$$[uout, duoutdx] = pdeval(m, xmesh, ui, xout)$$

其中

m 代表问题的对称性。m =0 表示平板；m =1 表示圆柱体；m =2 表示球体。其意义同 pdepe 中的自变量 m 。

$xmesh$ 为使用者在 pdepe 中所指定的输出点位置向量。$xmesh = [x_0, x_1, \cdots, x_N]$。

ui 即 $sol(j,:,i)$。也就是说其为 pdepe 输出中第 i 个输出 ui 在各点位置 $xmesh$ 处，时间固定为 $t_j = tspan(j)$ 下的解。

$xout$ 为所欲内插输出点位置向量。此为使用者重新指定的位置向量。

$uout$ 为基于所指定位置 $xout$ ，固定时间 t_f 下的相对应输出。

$duoutdx$ 为相对应的 du/dx 输出值。

ref. Keel,R.D. and M. Berzins, "A Method for the Spatial Discritization of Parabolic Equations in One Space Variable"，SIAM J. Sci. and Sat. Comput.,Vol.11,pp.1-32,1990.

以下将以数个例子，详细说明 pdepe 的用法。

3.2　求解一维偏微分方程

例 2　试解以下之偏微分方程式

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

其中 $0 \le x \le 1$，且满足以下之条件限制式

(i)起始值条件

IC：$u(x,0) = \sin(\pi x)$

(ii)边界条件

BC1：$u(0,t) = 0$

BC2：$\pi e^{-t} + \dfrac{\partial u(1,t)}{\partial x} = 0$

注：本问题的解析解为 $u(x,t) = e^{-t}\sin(\pi x)$

解　下面将叙述求解的步骤与过程。当完成以下各步骤后，可进一步将其汇总为一主程序 ex20_1.m，然后求解。

步骤 1　将欲求解的偏微分方程改写成如式的标准式。

$$\pi^2 \frac{\partial u}{\partial t} = x^0 \frac{\partial}{\partial x}\left(x^0 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 0$$

此即

$$c\left(x,t,u,\partial u/\partial x\right) = \pi^2$$

$$f\left(x,t,u,\partial u/\partial x\right) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$s\left(x,t,u,\partial u/\partial x\right) = 0$$

和 $m = 0$ 。

步骤 2　编写偏微分方程的系数向量函数。

```
function [c,f,s]=ex20_1pdefun(x,t,u,dudx)
```

```
c=pi^2;
f=dudx;
s=0;
```

步骤 3　编写起始值条件。

```
function u0=ex20_1ic(x)
u0=sin(pi*x);
```

步骤 4　编写边界条件。在编写之前，先将边界条件改写成标准形式，如式（37），找出相对应的 $p(\cdot)$ 和 $q(\cdot)$ 函数，然后写出 MATLAB 的边界条件函数，例如，原边界条件可写成

$$\text{BC1：}\ u(0,t)+0\cdot\frac{\partial}{\partial x}(0,t)=0 \quad , \quad x=0$$

$$\text{BC2：}\ \pi e^{-t}+1\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(1,t)=0 \quad , \quad x=1$$

即

$$pl=u(0,t),\quad ql=0,$$

和

$$pr=\pi e^{-t},\quad qr=1$$

因而，边界条件函数可编写成

```
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_1bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl=ul;
ql=0;
pr=pi*exp(-t);
qr=1;
```

步骤 5　取点。例如

```
x=linspace(0,1,20); %x 取 20 点
t=linspace(0,2,5); %时间取 5 点输出
```

步骤 6　利用 pdepe 求解。

```
m=0; %依步骤 1 之结果
sol=pdepe(m,@ex20_1pdefun,@ex20_1ic,@ex20_1bc,x,t);
```

步骤 7　显示结果。

```
u=sol(:,:,1);
surf(x,t,u)
title('pde 数值解')
xlabel('位置')
ylabel('时间' )
zlabel('u')
```

若要显示特定点上的解，可进一步指定 x 或 t 的位置，以便绘图。例如，欲了解时间为 2(终点)时，各位置下的解，可输入以下指令(利用 pdeval 指令)：

```
figure(2); %绘成图 2
M=length(t); %取终点时间的下标
xout=linspace(0,1,100); %输出点位置
[uout,dudx]=pdeval(m,x,u(M,:),xout);
plot(xout,uout); %绘图
title('时间为 2 时,各位置下的解')
xlabel('x')
ylabel('u')
```

综合以上各步骤，可写成一个程序求解例 2。其参考程序如下：

```
function ex20_1
%***********************************
%求解一维热传导偏微分方程的一个综合函数程序
%***********************************
m=0;
x=linspace(0,1,20); %xmesh
t=linspace(0,2,20); %tspan
%************
%以 pde 求解
%************
sol=pdepe(m,@ex20_1pdefun,@ex20_1ic,@ex20_1bc,x,t);
u=sol(:,:,1); %取出答案
%************
%绘图输出
%************
figure(1)
surf(x,t,u)
title('pde 数值解')
xlabel('位置 x')
ylabel('时间 t' )
zlabel('数值解 u')
%*************
%与解析解做比较
%*************
figure(2)
surf(x,t,exp(-t)'*sin(pi*x));
title('解析解')
xlabel('位置 x')
ylabel('时间 t' )
zlabel('数值解 u')
%*****************
%t=tf=2 时各位置之解
%*****************
figure(3)
M=length(t); %取终点时间的下表
xout=linspace(0,1,100); %输出点位置
[uout,dudx]=pdeval(m,x,u(M,:),xout);
plot(xout,uout); %绘图
title('时间为 2 时,各位置下的解')
xlabel('x')
ylabel('u')
%******************
%pde 函数
%******************
function [c,f,s]=ex20_1pdefun(x,t,u,dudx)
c=pi^2;
f=dudx;
s=0;
%******************
```

```
%初始条件函数
%******************
function u0=ex20_1ic(x)
u0=sin(pi*x);
%******************
%边界条件函数
%******************
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_1bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl=ul;
ql=0;
pr=pi*exp(-t);
qr=1;
```

例 3　试解以下联立的偏微分方程系统

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}=0.024\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}-F(u_1-u_2)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}=0.170\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+F(u_1-u_2)$$

其中 $F(u_1-u_2)=\exp(5.73(u_1-u_2))-\exp(-11.46(u_1-u_2))$，且 $0\le x\le 1$ 和 $t\ge 0$。此联立偏微分方程系统满足以下初边值条件。

(i)初值条件

$$u_1(x,0)=1$$

$$u_2(x,0)=0$$

(ii)边值条件

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}(0,t)=0$$

$$u_2(0,t)=0$$

$$u_1(1,t)=1$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x}(1,t)=0$$

解　步骤 1：改写偏微分方程为标准式

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{\bullet}*\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}0.024 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ 0.170 & \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-F(u_1-u_2)\\ F(u_1-u_2)\end{bmatrix}$$

因此

$$c=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

$$f=\begin{bmatrix}0.024 & \dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ 0.170 & \dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix}$$

$$s=\begin{bmatrix}-F(u_1-u_2)\\ F(u_1-u_2)\end{bmatrix}$$

和 $m=0$。另外，左边界条件($x=0$ 处)。写成

$$\begin{bmatrix}0\\ u_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_{\bullet}*\begin{bmatrix}0.024\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ 0.170\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

即

$$pl=\begin{bmatrix}0\\ u_2\end{bmatrix},\quad ql=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

同理，右边界条件($x=1$ 处)为

$$\begin{bmatrix}u_1-1\\ 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}_{\bullet}*\begin{bmatrix}0.024\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\\ 0.170\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

即

$$pr=\begin{bmatrix}u_1-1\\ 0\end{bmatrix},\quad qr=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

步骤 2：编写偏微分方程的系数向量函数。

```
function [c,f,s]=ex20_2pdefun(x,t,u,dudx)
c=[1 1]';
f=[0.024 0.170]'.*dudx;
y=u(1)-u(2);
F=exp(5.73*y)-exp(-11.47*y);
s=[-F F]';
```

步骤 3：编写初始条件函数

```
function u0=ex20_2ic(x)
u0=[1 0]';
```

步骤 4：编写边界条件函数

```
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_2bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl=[0 ul(2)]';
ql=[1 0]';
pr=[ur(1)-1 0]';
qr=[0 1]';
```

步骤 5： 取点。

由于此问题的端点均受边界条件的限制，且时间 t 很小时状态的变动很大(由多次求解后的经验得知)，故在两端点处的点可稍微密集些。同时对于 t 小处亦可取密一些。例如，

```
x=[0 0.005 0.01 0.05 0.1 0.2 0.5 0.7 0.9 0.95 0.99 0.995 1];
t=[0 0.005 0.01 0.05 0.1 0.5 1 1.5 2];
```

以上几个主要步骤编写完成后，事实上就可直接完成主程序来求解。此问题的参考程序如下：

```
function ex20_2
%************************************
```

```
%求解一维偏微分方程组的一个综合函数程序
%**************************************
m=0;
x=[0 0.005 0.01 0.05 0.1 0.2 0.5 0.7 0.9 0.95 0.99 0.995 1];
t=[0 0.005 0.01 0.05 0.1 0.5 1 1.5 2];
%**************************************
%利用 pdepe 求解
%**************************************
sol=pdepe(m,@ex20_2pdefun,@ex20_2ic,@ex20_2bc,x,t);
u1=sol(:,:,1); %第一个状态之数值解输出
u2=sol(:,:,2); %第二个状态之数值解输出
%**************************************
%绘图输出
%**************************************
figure(1)
surf(x,t,u1)
title('u1 之数值解')
xlabel('x')
ylabel('t')
%
figure(2)
surf(x,t,u2)
title('u2 之数值解')
xlabel('x')
ylabel('t')
%**************************************
%pde 函数
%**************************************
function [c,f,s]=ex20_2pdefun(x,t,u,dudx)
c=[1 1]';
f=[0.024 0.170]'.*dudx;
y=u(1)-u(2);
F=exp(5.73*y)-exp(-11.47*y);
s=[-F F]';
%**************************************
%初始条件函数
%**************************************
function u0=ex20_2ic(x)
u0=[1 0]';
%**************************************
%边界条件函数
%**************************************
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_2bc(xl,ul,xr,ur,t)
pl=[0 ul(2)]';
ql=[1 0]';
pr=[ur(1)-1 0]';
qr=[0 1]';
```

3.3 化工应用实例

例 4　触煤反应装置内温度及转换率的分布

以外部热交换式的管形固定层触煤反应装置，进行苯加氢反应产生环已烷。此反应系统之质量平衡及热平衡方程式如下：

$$-\frac{\partial T}{\partial L}+\frac{k_e}{GC_p}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{r_A\rho_B(-\Delta H_r)}{GC_p}=0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial L}+\frac{D_e}{u}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{r_A\rho_B M_{ar}}{Gy_0}=0$$

其中T为温度(℃)，f为反应率，L为轴向距离，r为径向距离。此系统的边界条件为

$$L=0\ ,\ T=T_0(r)\ ,\ f=f_0(r)$$

$$r=0\ ,\ \frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial r}=0$$

$$r=r_w\ ,\ -k_e\frac{\partial T}{\partial r}=h_w(T-T_w)$$

$$r=r_w\ ,\ \frac{\partial f}{\partial r}=0$$

此外，式中之相关数据及操作条件如下：

(i)反应速率式

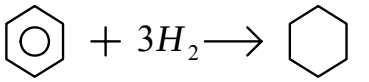


图 1　反应示意图

$$r_A=\frac{kK_H^3K_BP_H^3P_B}{(1+K_HP_H+K_BP_B+K_CP_C)^4}$$

其中P表示分压(atm)，而速率参数为

$$\ln K=-12100/RT+32.3/R$$

$$\ln K_H=15500/RT-31.9/R$$

$$\ln K_B=11200/RT-23.1/R$$

$$\ln K_C=8900/RT-19.4/R$$

上式中，下标 B，H 及 C 分别代表苯，氢及环已烷。R 为理想气体常数(1.987cal/mol·K)。

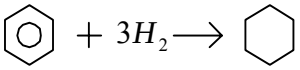
(ii)操作条件及物性数据

总压	$P_t=1.25atm$
反应管管径	$r_w=2.5cm$
壁温	$T_w=100$℃
质量速度	$G=631kg/m^2\cdot hr$
苯对氢之莫耳流量比	$m=30$
反应管入口的苯之莫耳分率	$y_0=0.0323$
反应气体之平均分子量	$M_{av}=4.47$

触煤层密度	$P_B = 1200\,kg/m^3$
流体平均比热	$C_P = 1.74\,kcal/kg-mol$
反应热	$\Delta H_r = -49250\,kcal/kg-mol$
整体传热系数	$h_0 = 65.8\,kcal/m^2 \cdot hr \cdot^0 C$
进料温度	$T(0) = 125$ ℃
反应管管长	$L = 45cm$
流速	$u = 8.03\,m/hr$
有效热传导系数	$K_e = 0.65\,kcal/m \cdot hr \cdot^0 C$
壁境膜传热系数	$h_w = 112\,kcal/m^2 \cdot hr \cdot^0 C$
有效扩散系数	$D_e = 0.755\,m^2/hr$

题意解析：

因反应速率式r_A与分压有关，而分压又与反应率 f 有关。故需进一步将r_A由反应率 f 表示，方能求解偏微分方程。基于以下的反应方程



1	m	
-f	-3f	f
1-f	m-3f	f

图 2　反应方程

则各分压与总压之关系为

$$P_H = P_t \frac{m-3f}{1+m-3f}$$

$$P_B = P_t \frac{m-f}{1+m-3f}$$

$$P_C = P_t \frac{f}{1+m-3f}$$

将上式，连同反应速率式，带入平衡方程式中，配合边界条件，可利用 pdepe 求解。

MATLAB 程序设计

将原方程改写成如式（35）的标准式

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial T}{\partial L} \\ \frac{\partial f}{\partial L} \end{bmatrix} = r^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} r\frac{k_e}{GC_p} & \frac{\partial T}{\partial r} \\ r\frac{D_e}{u} & \frac{\partial f}{\partial r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{r_A \rho_B (-\Delta H_r)}{GC_p} \\ \frac{r_A \rho_B M_{av}}{Gy_0} \end{bmatrix}$$

因此

$$\tilde{c}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\quad \tilde{f}=\begin{bmatrix}\dfrac{k_e}{GC_p} & \dfrac{\partial T}{\partial r}\\ \dfrac{D_e}{u} & \dfrac{\partial f}{\partial r}\end{bmatrix},\quad \tilde{s}=\begin{bmatrix}\dfrac{r_A\rho_B(-\Delta H_r)}{GC_p}\\ \dfrac{r_A\rho_B M_{av}}{Gy_0}\end{bmatrix}$$

和 $m=+1$ (圆柱)。另外，左边界条件($r=0$ 处)写成

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}_{\bullet} * \tilde{f}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

即

$$pl=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad ql=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

同理右边界条件($r=r_w$)可写成

$$\begin{bmatrix}h_w(T-T_w)\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}+GC_p\\1\end{bmatrix}_{\bullet} * \tilde{f}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

即

$$pr=\begin{bmatrix}h_w(T-T_w)\\0\end{bmatrix},\quad qr=\begin{bmatrix}+GC_p\\0\end{bmatrix}$$

根据以上的分析，可编写 MATLAB 程序求解此 PDE 问题，其参考程序如下：

```
function ex60_3_1
%*****************************
% 触媒反应器内温度及转化率的分布
%*****************************
global Pt rw Tw G M y0 Mav rho_B Cp dHr h0 u R ke hw De
%*****************************
% 给定数据
%*****************************
Pt=1.25;  %总压(atm)
rw=0.025;  %管径(m)
Tw=100+273;  %壁温(℃)
G=631;  %质量流率(kg/m2hr)
M=30;
y0=0.0323;
Mav=4.47;
rho_B=1200;
Cp=1.74;
dHr=-49250;
h0=65.8;
T0=125+273;
Lw=1;
u=8.03;
R=1.987;
ke=0.65;
hw=112;
De=0.755;
%*******************
```

```
m=1;
%********************
% 取点
%********************
r=linspace(0,rw,10);
L=linspace(0,Lw,10);
%************************
% 利用 pdepe 求解
%************************
sol=pdepe(m,@ex20_3_1pdefun,@ex20_3_1ic,@ex20_3_1bc,r,L);
T=sol(:,:,1);  %温度
f=sol(:,:,2);  %反应率
%************************
% 绘图输出
%************************
figure(1)
surf(L,r,T'-273)
title('temp')
xlabel('L')
ylabel('r')
zlabel('temp (0C)')
%
figure(2)
surf(L,r,f')
title('reaction rate')
xlabel('L')
ylabel('r')
zlabel('reaction rate')
%************************************************
% PDE 函数
%************************************************
function [c1,f1,s1]=ex20_3_1pdefun(r,L,u1,DuDr)
global Pt rw Tw G M y0 Mav rho_B Cp dHr h0 u R ke hw De
T=u1(1);
f=u1(2);
%
k=exp(-12100/(R*T)+32.3/R);
Kh=exp(15500/(R*T)-31.9/R);
Kb=exp(11200/(R*T)-23.1/R);
Kc=exp(8900/(R*T)-19.4/R);
%
a=1+M-3*f;
ph=Pt*(M-3*f)/a;
pb=Pt*(1-f)/a;
pc=Pt*f/a;
%
rA=k*Kh^3*Kb*ph^3*pb/(1+Kh*ph+Kb*pb+Kc*pc)^4;
%
c1=[1 1]';
f1=[ke/(G*Cp) De/u]'.*DuDr;
%s1=[ke/(G*Cp*r)*DuDr(1)-rA*rho_B*dHr/(G*Cp)-2*h0*(T-Tw)/(rw)
s1=[-rA*rho_B*dHr/(G*Cp);rA*rho_B*Mav/(G*y0)];
%********************************
```

```
%初始条件函数
%*********************************
function u0=ex20_3_1ic(x)
u0=[125+273 0]';
%*********************************
% 边界条件档
%*********************************
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_3_1bc(rl,ul,rr,ur,L)
global Pt rw Tw G M y0 Mav rho_B Cp dHr h0 u R ke hw De
pl=[0 0]';
ql=[1 1]';
pr=[hw*(ur(1)-Tw) 0]';
qr=[G*Cp 1]';
```

例 5　扩散系统之浓度分布

参考如图 3 的装置。管中储放静止液体 B，高度为 L=10 ㎝，放置于充满 A 气体的环境中。假设与 B 液体接触面之浓度为 $C_{A0}=0.01 mol/m^3$，且此浓度不随时间改变而改变，即在操作时间内($h=10$ 天)维持定值。气体 A 在液体 B 中之扩散系数为 $D_{AB}=2\times10^{-9}\ m^2/s$。试决定以下两种情况下，气体 A 溶于液体 B 中之流通量(flux)。

(a) A 与 B 不发生反应；

(b) A 与 B 发生以下之反应

$$A+B\rightarrow C，\ -r_A=kC_A$$

其反应速率常数 $k=2\times10^{-7}\ s^{-1}$。

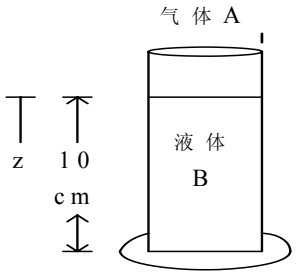


图 3　气体 A 在液体 B 中的扩散

题意解析：

(a) 因气体 A 与液体 B 不发生反应，故其扩散现象的质量平衡方程如下：

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}=D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}$$

依题意，其初始及边界条件为

I.C.　$C_A(z,0)=0$，$z>0$

B.C.　$C_A(0,t)=C_{A0}$，$t\geq0$；$\left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_{z=L}=0$，$t\geq0$

(b) 在气体 A 与液体 B 会发生一次反应的情况下，其质量平衡方程需改写为

$$\frac{\partial C_A}{\partial t}=D_{AB}\frac{\partial^2 C_A}{\partial z^2}+kC_A$$

而起始及边界条件同上。

在获得浓度分布后，即可以 Fick's law

$$N_{Az}(t) = -D_{AB}\left.\frac{\partial C_A}{\partial z}\right|_{z=0}$$

计算流通量。

MATLAB 程序设计：

此问题依旧可以利用 pdepe 迅速求解。现就各状况的处理过程简述如下。

(a)与标准式（35）比较，可得$C=1$， $f=D_{AB}\partial C_A/\partial z$， $s=0$，和$m=0$。另外，经与式（37）比较后得知，左边界及右边界条件之系数分别为

左边界($z=0$)： $pl=C_A(0,t)-C_{A0}$， $ql=0$。

右边界($z=L$)： $pr=0$， $qr=\dfrac{1}{D_{AB}}$。

(b)与标准式（35）比较，可得$m=0$， $C=1$， $f=D_{AB}\partial C_A/\partial z$，和$s=kC_A$。而边界条件之系数同(a)之结果。

利用以上的处理结果，可编写 MATLAB 参考程序如下：

```
function ex20_3_2
%*****************************
% 扩散系统之浓度分布
%*****************************
clear
clc
global DAB k CA0
%*******************************
% 给定数据
%*******************************
CA0=0.01;
L=0.1;
DAB=2e-9;
k=2e-7;
h=10*24*3600;
%*******************************
% 取点
%*******************************
t=linspace(0,h,100);
z=linspace(0,L,10);
%*******************************
% case (a)
%*******************************
m=0;
sol=pdepe(m,@ex20_3_2pdefuna,@ex20_3_2ic,@ex20_3_2bc,z,t);
CA=sol(:,:,1);
for i=1:length(t)
  [CA_i,dCAdz_i]=pdeval(m,z,CA(i,:),0);
  NAz(i)=-dCAdz_i*DAB;
end
figure(1)
subplot(211)
surf(z,t/(24*3600),CA)
title('case (a)')
```

```
xlabel('length (m)')
ylabel('time (day)')
zlabel('conc. (mol/m^3)')
subplot(212)
plot(t/(24*3600),NAz'*24*3600)
xlabel('time (day)')
ylabel('flux (mol/m^2.day)')
%**********************************
% case (b)
%**********************************
m=0;
sol=pdepe(m,@ex20_3_2pdefunb,@ex20_3_2ic,@ex20_3_2bc,z,t);
CA=sol(:,:,1);
for i=1:length(t)
  [CA_i,dCAdz_i]=pdeval(m,z,CA(i,:),0);
  NAz(i)=-dCAdz_i*DAB;
end
%
figure(2)
subplot(211)
surf(z,t/(24*3600),CA)
title('case (b)')
xlabel('length (m)')
ylabel('time (day)')
zlabel('conc. (mol/m^3)')
subplot(212)
plot(t/(24*3600),NAz'*24*3600)
xlabel('time (day)')
ylabel('flux (mol/m^2.day)')
%*******************************************
% PDE 函数
%*******************************************
% case (a)
%*******************************************
function [c,f,s]=ex20_3_2pdefuna(z,t,CA,dCAdz)
global DAB k CA0
c=1;
f=DAB*dCAdz;
s=0;
%*******************************************
% case (a)
%*******************************************
function [c,f,s]=ex20_3_2pdefunb(z,t,CA,dCAdz)
global DAB k CA0
c=1;
f=DAB*dCAdz;
s=k*CA;
%*******************************************
% 初始条件函数
%*******************************************
function CA_i=ex20_3_2ic(z)
CA_i=0;
%************************************************
```

```
% 边界条件函数
%*********************************************
function [pl,ql,pr,qr]=ex20_3_2bc(zl,CAl,zr,CAr,t)
global DAB k CA0
pl=CAl-CA0;
ql=0;
pr=0;
qr=1/DAB;
```

§4 二维状态空间的偏微分方程的 MATLAB 解法

MATLAB 中的偏微分方程（PDE）工具箱是用有限元法寻求典型偏微分方程的数值近似解，该工具箱求解偏微分方程具体步骤与用有限元方法求解偏微分方程的过程是一致的，包括几个步骤，即几何描述、边界条件描述、偏微分方程类型选择、有限元划分计算网格、初始化条件输入，最后给出偏微分方程的数值解（包括画图）。

下面我们讨论的方程是定义在平面上的有界区域 Ω 上，区域的边界记作 $\partial\Omega$ 。

4.1 方程类型

MATLAB 工具箱可以解决下列类型的偏微分方程：

（i）椭圆型偏微分方程

$$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad \text{in} \quad \Omega$$

其中 c,a,f 和未知的 u 可以是 Ω 上的复值函数。

（ii）抛物型偏微分方程

$$d\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad \text{in} \quad \Omega$$

其中 c,a,f,d 可以依赖于时间 t 。

（iii）双曲型偏微分方程

$$d\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f \quad \text{in} \quad \Omega$$

（iv）特征值问题

$$-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=\lambda du \quad \text{in} \quad \Omega$$

其中 λ 是未知的特征值，d 是 Ω 上的复值函数。

（v）非线性椭圆偏微分方程

$$-\nabla\cdot(c(u)\nabla u)+a(u)u=f(u) \quad \text{in} \quad \Omega$$

其中 c,a,f 可以是 u 的函数。

（vi）方程组

$$\begin{cases}-\nabla\cdot(c_{11}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{12}\nabla u_2)+a_{11}u_1+a_{12}u_2=f_1\\ -\nabla\cdot(c_{21}\nabla u_1)-\nabla\cdot(c_{22}\nabla u_2)+a_{21}u_1+a_{22}u_2=f_2\end{cases}$$

4.2 边界条件

边界条件有如下三种：

（i）Dirichlet 条件：$hu=r$ on $\partial\Omega$ 。

（ii）Neumann 条件：$\vec{n}\cdot(c\nabla u)+qu=g$ on $\partial\Omega$ 。

这里 $\vec{n}$ 为区域的单位外法线，h,r,q,g 是定义在 $\partial\Omega$ 上的复值函数。

对于二维方程组情形，Dirichlet 边界条件为

$$h_{11}u_1+h_{12}u_2=r_1,$$

$$h_{21}u_1 + h_{22}u_2 = r_2;$$

Neumann 边界条件为：

$$\vec{n}\cdot(c_{11}\nabla u_1) + \vec{n}\cdot(c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1$$

$$\vec{n}\cdot(c_{21}\nabla u_1) + \vec{n}\cdot(c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2$$

（iii）对于偏微分方程组，混合边界条件为

$$h_{11}u_1 + h_{12}u_2 = r_1$$

$$\vec{n}\cdot(c_{11}\nabla u_1) + \vec{n}\cdot(c_{12}\nabla u_2) + q_{11}u_1 + q_{12}u_2 = g_1 + \mu h_{11}$$

$$\vec{n}\cdot(c_{21}\nabla u_1) + \vec{n}\cdot(c_{22}\nabla u_2) + q_{21}u_1 + q_{22}u_2 = g_2 + \mu h_{12}$$

这里 μ 的计算是使得满足 Dirichlet 边界条件。

4.3　求解偏微分方程

例 6　求解泊松方程

$$-\nabla^2 u = 1,$$

求解区域为单位圆盘，边界条件为在圆盘边界上 $u = 0$。

解　它的精确解为

$$u(x,y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{4}$$

下面求它的数值解，编写程序如下：

```
%(1)问题定义
g='circleg';          %单位圆
b='circleb1';         %边界上为零条件
c=1;a=0;f=1;
%（2）产生初始的三角形网格
[p,e,t]=initmesh(g);
%（3）迭代直至得到误差允许范围内的合格解
error=[]; err=1;
while err > 0.01,
[p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
u=assempde(b,p,e,t,c,a,f);  %求得数值解
exact=(1-p(1,:).^2-p(2,:).^2)/4;
err=norm(u-exact',inf);
error=[error err];
end
%结果显示
subplot(2,2,1),pdemesh(p,e,t);
subplot(2,2,2),pdesurf(p,t,u)
subplot(2,2,3),pdesurf(p,t,u-exact')
```

例7　考虑最小表面问题

$$-\nabla\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\nabla u\right) = 0 \quad 在 \quad \Omega = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1\},$$

在圆盘边界上 $u = x^2$。

解　这是椭圆型方程，其中 $c = \dfrac{1}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}, a = 0, f = 0$，编写程序如下：

```
g='circleg';
b='circleb2';
c='1./sqrt(1+ux.^2+uy.^2)';
rtol=1e-3;
[p,e,t]=initmesh(g);
[p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
u=pdenonlin(b,p,e,t,c,0,0,'Tol',rtol);
pdesurf(p,t,u)
```

例8　求解正方形区域$\{(x,y)\,|\,-1\le x,y\le 1\}$上的热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\Delta u$$

初始条件为$u(0)=\begin{cases}1, & x^2+y^2<0.4^2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

边界条件为Dirichlet条件$u=0$。

解　这里是抛物型方程，其中$c=1,a=0,f=0,d=1$。编写程序如下：

```
%(1)问题定义
g='squareg';        %定义正方形区域
b='squareb1';       %边界上为零条件
c=1;a=0;f=0;d=1;
%（2）产生初始的三角形网格
[p,e,t]=initmesh(g);
%(3)定义初始条件
u0=zeros(size(p,2),1);
ix=find(sqrt(p(1,:).^2+p(2,:).^2)<0.4);
u0(ix)=1
%(4)在时间段为0到0.1的20个点上求解
nframe=20;
tlist=linspace(0,0.1,nframe);
u1=parabolic(u0,tlist,b,p,e,t,c,a,f,d);
%(5)动画图示结果
for j=1:nframe
   pdesurf(p,t,u1(:,j));
   mv(j)=getframe;
end
movie(mv,10)
```

例9　求解正方形区域$\{(x,y)\,|\,-1\le x,y\le 1\}$上的波方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\Delta u$$

初始条件为$u(0)=\arctan(\cos(\pi x))$，$\dfrac{du(0)}{dt}=3\sin(\pi x)\exp(\cos(\pi y))$，边界条件为在$x=\pm 1$上满足Dirichlet条件$u=0$，在$y=\pm 1$上满足Neumann条件$\dfrac{\partial u}{\partial n}=0$。

解　这里是双曲型方程，其中$c=1,a=0,f=0,d=1$。编写程序如下：

```
%(1)问题定义
```

```
g='squareg';        %定义正方形区域
b='squareb3';       %定义边界
c=1;a=0;f=0;d=1;
%（2）产生初始的三角形网格
[p,e,t]=initmesh(g);
%(3)定义初始条件
x=p(1,:)';y=p(2,:)';
u0=atan(cos(pi*x));
ut0=3*sin(pi*x).*exp(cos(pi*y));
%(4)在时间段为0到5的31个点上求解
n=31;
tlist=linspace(0,5,n);
uu=hyperbolic(u0,ut0,tlist,b,p,e,t,c,a,f,d);
%(5)动画图示结果
for j=1:n
   pdesurf(p,t,uu(:,j));
   mv(j)=getframe;
end
movie(mv,10)
```

例 10　求解泊松方程

$$-\nabla^2 u = \delta(0,0)\,,$$

求解区域为单位圆盘，边界条件为在圆盘边界上 $u=0$。

解　它的精确解为

$$u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sqrt{x^2+y^2}\ 。$$

下面求它的数值解，编写程序如下：

```
g='circleg';
b='circleb1';
c=1;a=0;f='circlef';
[p,e,t]=initmesh(g);
[p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t);
u=assempde(b,p,e,t,c,a,f);
exact=-1/(2*pi)*log(sqrt(p(1,:).^2+p(2,:).^2));
subplot(2,2,1),pdemesh(p,e,t);
subplot(2,2,2),pdesurf(p,t,u)
subplot(2,2,3),pdesurf(p,t,u-exact')
```

4.4　偏微分方程的 pdetool 解法

4.4.1　图形界面解法简介

对于一般的区域，任意边界条件的偏微分方程，我们可以利用 MATLAB 中 pdetool 提供的偏微分方程用户图形界面解法。

图形界面解法步骤大致上为：

（1）定义 PDE 问题，包括二维空间范围，边界条件以及 PDE 系数等。

（2）产生离散化之点，并将原 PDE 方程式离散化。

（3）利用有限元素法(finite element method；FEM)求解并显示答案。

在说明此解法工具之前，先介绍此 PDE 图形界面的菜单下方的功能图标(icon)按钮。



透过这些按钮，使用者可轻松地完成偏微分方程的求解。现将这些按钮的主要功能叙述如下：

前五个按钮为 PDE 系统之边界范围绘制功能，由左至右之用法为：

：以对角绘制矩形或正方形。按住鼠标左键可绘制矩形，而正方形需以按住右键的方式绘制。

：从中心点至某一角边的方式绘制矩形或正方形。同样地，鼠标左键绘矩形，右键绘正方形。

：由周围界线的方式绘制椭圆或圆形区域。鼠标左键用以绘制椭圆，而右键用来绘制圆形图形。

：以中心点向外的方式绘制椭圆或圆。同样地，鼠标左及右键，分别用以绘制椭圆及圆形的区域。

：用以绘制多边型等不规则区域，欲关闭此功能需按鼠标右键。

在这些绘制按钮之后的按钮功能依序如下：

：用以给定边界条件。在此功能选定后，使用者可在任一图形边界上按住鼠标左键双击，然后在对话框中输入边界条件。

：用以指定 PDE 问题及相关参数。

：产生图形区域内离散化的网点。

：用以进一步将离散化的网点再取密一点(refine mesh)。

：在指定 PDE 系统，边界条件及区域后，按此钮即开始解题。

：用以指定显示结果绘制方式。

：放大缩小功能，便于图形绘制及显示。

4.4.2　图形界面解法的使用步骤

要利用 pdetool 接口求解之前，需先定义 PDE 问题，其包含三大部份：

（1）利用绘图(draw)模式，定义欲解问题的空间范围(domain)Ω。

（2）利用 boundary 模式，指定边界条件。

（3）利用 PDE 模式，指定 PDE 系数，即输入 c，a，f 和 d 等 PDE 模式中的系数。

在定义 PDE 问题之后，可依以下两个步骤求解

（1）在 mesh 模式下，产生 mesh 点，以便将原问题离散化。

（2）在 solve 模式下，求解。

（3）最后，在 Plot 模式下，显示答案。

下面以 $Poisson's$ 方程式 $-\Delta u = f$ 的求解为例，详细说明 pdetool 的用法。此问题的几何图形及相关边界条件，将于求解过程中加以说明。

步骤 1：在命令窗口中键入 pdetool 以进入 GUI(graphical user interface)界面。选取 Options 中之 Grid 功能，以显示网格线。

步骤 2：利用 Draw 功能，画出问题之几何图形。请注意：使用者可利用内定对象“多边型“，“矩形”，“正方形”，“圆形”，及“椭圆型”，予以组合，例如

(i)先选取“矩形/正方形”对象，移动鼠标至所欲输入左上角点，如坐标(−1,0)点，按住鼠标左键，往右下角拉至坐标为(1,−0.4)处，即形成代号为 R1 的矩形。其余图

形 C1，R1 和 C2 可选取适当对象并类似地画出，以形成如图 4 的图形区域。以代数公式而言，其为 R1+C1+R2+C2

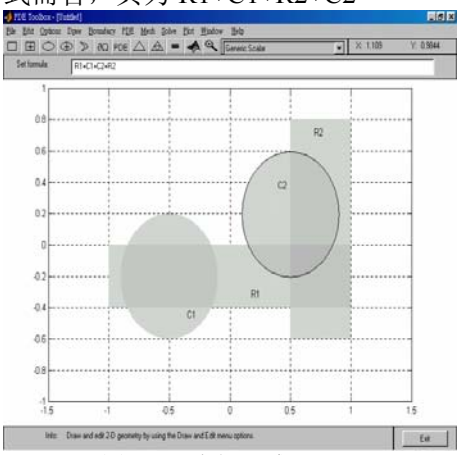


图 4　画求解区域

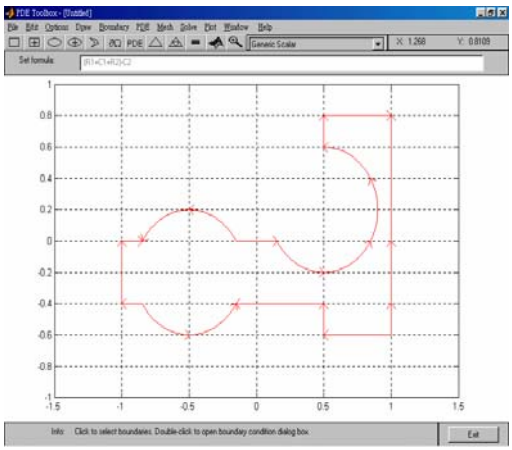


图 5　求解区域图

值得注意的是，圆形区域需以按住鼠标右键的方式来制作(非左键)。同时，如欲进一步修改各图形对象之大小及位置数据，可在该图上双击鼠标左键，然后在对象对话框上输入数据。

(ii)若所欲形成的图形区域，需将 C2 去除，则可在公式列中直接输入 R1+C1+R2−C2 即可。

步骤 3：选取 PDE 功能项，以输入 PDE 方程的系数及类型。因问题为 $-\Delta u = f$，故此为椭圆型的问题，且其标准形式为 $-\nabla\cdot(c\nabla u)+au=f$，比较得知，c=1，a=0 和 f=10，所以对话框输入的情况如图 6。

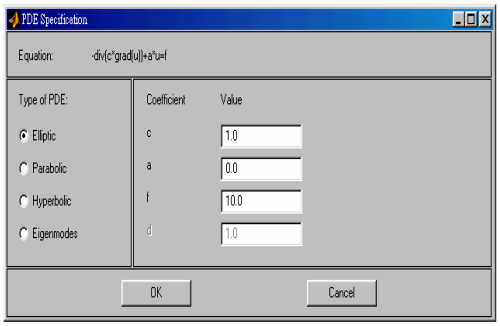


图 6　对话框输入

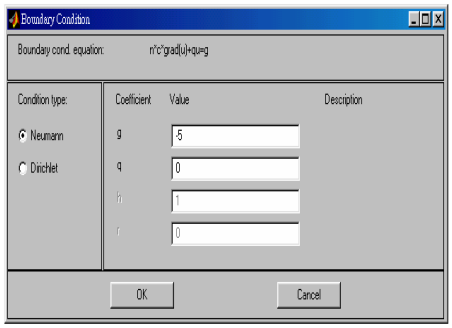


图 7　对话框输入

步骤 4：选取 Boundary 功能，以输入边界条件。假设边界条件为 Neumann 形，且为 $\partial u/\partial n = 5$。其中在弧形部份与标准式知，g=−5 且 q=0。但直线部分其边界条件则在 Dirichlet type 使 h=0，r=0。对话框输入情况见图 7。

步骤 5：选取 Mesh 功能，产生网点。使用者亦可进一步利用将网点取得密一点(refine mesh)，见图 8。

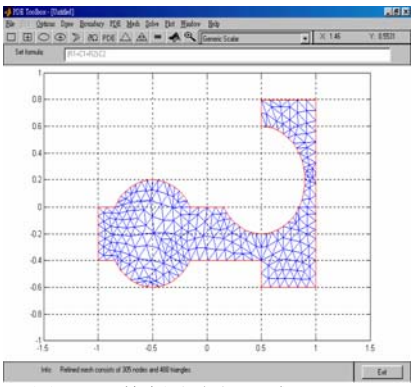


图 8　网格剖分求解区域

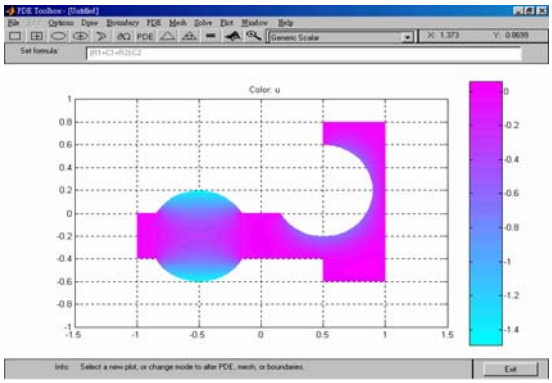


图 9　求解结果示意图

步骤 6：选取 solve 功能，解此 PDE，见图 9。

注意：

1. MATLAB 会以图形的方式展示结果，使用者亦可点选 plot 下之“parameters”功能，选择适当的方式显示图形及数据。例如用 3D 方式显示求解结果。参数设置见图 10，显示结果见图 11。

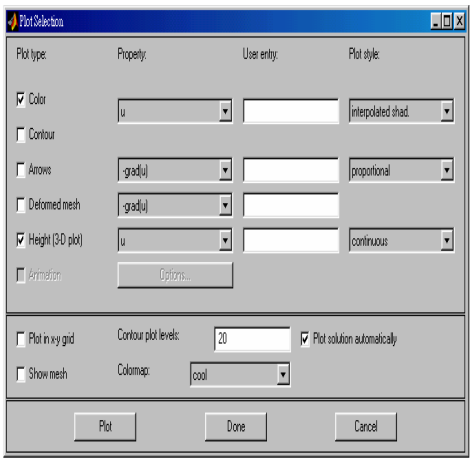


图 10　显示参数设置

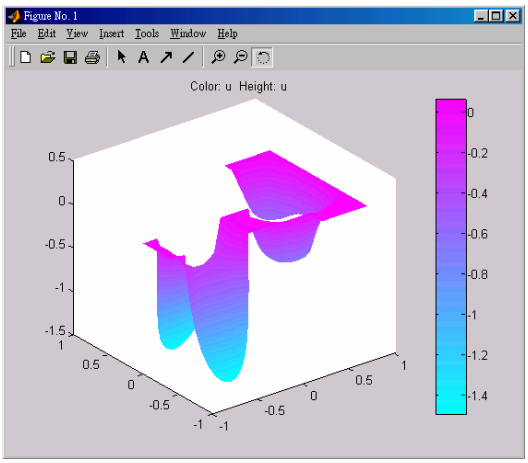


图 11　求解结果显示

2. 另外，若使用者欲将结果输出到命令窗口中，以供后续处理，可利用 solve 功能项下之“export solution”指定变量名称来完成。

3. 如果求抛物型或双曲型方程的数值解，还需要通过“solve”菜单下的“parameters…”选项设置初值条件。

4. 在上面定义边界条件和初始条件时，可以使用一些内置变量。

（1）在边界条件输入框中，可以使用如下变量：

二维坐标 x 和 y，边界线段长度参数 s（s 是以箭头的方向沿边界线段从 0 增加到 1），外法向矢量的分量 nx 和 ny（如果需要边界的切线方向，可以通过 tx=-ny 和 ty=nx 表示），解 u。

（2）在初值条件的输入框中，也可以输入用户定义的 MATLAB 可接受变量（p，e，t，x，y）的函数。

例 11　使用 PDETOOL 重新求例 8 的数值解。

1）定义 PDE 问题，包括二维空间范围，边界条件以及 PDE 系数等。我们这里就省略了。

2）区域剖分以后，通过“Mesh”菜单下的“Export Mesh…”选项可以把 p，e，t 三个参数分别输出到工作间。

3）然后编写函数 fun1(x,y)如下：

```
function f=fun1(x,y);
f=zeros(length(x),1);
ix=find(x.^2+y.^2<0.16);
f(ix)=1;
```

其中的变量 x，y 是 MATLAB 可接受的内置变量。

设置“solve”菜单下的“parameters…”选项如下：

时间框中输入：linspace(0,0.1,20)；

初值框中输入：fun1。

4）设置“plot"菜单下的“parameters…”选项如下：选择 Height(3-D plot) 和 Animation 两项。

5）用鼠标点一下工具栏上的“＝”按钮，就可以画出数值解的 3-D 图形。

习 题 二 十

1. 求二维拉普拉斯方程

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

在边界条件 $u(x,y)\big|_{x=0} = u(x,y)\big|_{x=6} = u(x,y)\big|_{y=0} = 0$，$u(x,y)\big|_{y=2} = 10$ 下的数值解。

2. 求初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0, 0 < x < 1 \\ u(x,0) = 1, & 0 \le x \le 1 \\ u'_x(0,t) - u(0,t) = 0 & t \ge 0 \\ u'_x(1,t) + u(1,t) = 0 & \end{cases}$$

在 $0 \le t \le 3$ 范围内的数值解。

3. 求热传导方程初边值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < 1, 0 < t < 0.5 \\ u(x,0) = \sin \pi x & 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 & 0 \le t \le 0.5 \end{cases}$$

的数值解，并将计算结果与准确解 $u(x,t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x$ 比较。

第二十一章　目标规划

§1　引言

1．线性规划的局限性

只能解决一组线性约束条件下，某一目标只能是一个目标的最大或最小值的问题。

2．实际决策中，衡量方案优劣考虑多个目标

这些目标中，有主要的，也有次要的；有最大值的，也有最小值的；有定量的，也有定性的；有相互补充的，也有相互对立的，LP 则无能为力。

3．目标规划（Goal Programming）

美国经济学家查恩斯（A. Charnes）和库柏（W. W. Cooper）在 1961 年出版的《管理模型及线性规划的工业应用》一书中，首先提出的。

4．求解思路

（1）加权系数法

为每一目标赋一个权系数，把多目标模型转化成单一目标的模型。但困难是要确定合理的权系数，以反映不同目标之间的重要程度。

（2）优先等级法

将各目标按其重要程度不同的优先等级，转化为单目标模型。

（3）有效解法

寻求能够照顾到各个目标，并使决策者感到满意的解。由决策者来确定选取哪一个解，即得到一个满意解。但有效解的数目太多而难以将其一一求出。

§2　目标规划的数学模型

为了具体说明目标规划与线性规划在处理问题的方法上的区别，先通过例子来介绍目标规划的有关概念及数学模型。

例1　某工厂生产 I，II 两种产品，已知有关数据见下表

	I	II	拥有量
原材料 kg	2	1	11
设　备 hr	1	2	10
利润 元/件	8	10	

试求获利最大的生产方案。

解　这是一个单目标的规划问题，用线性规划模型表述为：

$$\max \quad z = 8x_1 + 10x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 + 2x_2 \le 10 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优决策方案为：$x_1^* = 4, x_2^* = 3, z^* = 62$ 元。

但实际上工厂在作决策方案时，要考虑市场等一系列其它条件。如

（i）根据市场信息，产品 I 的销售量有下降的趋势，故考虑产品 I 的产量不大于产品 II。

（ii）超过计划供应的原材料，需要高价采购，这就使成本增加。

（iii）应尽可能充分利用设备，但不希望加班。

（iv）应尽可能达到并超过计划利润指标 56 元。

这样在考虑产品决策时，便为多目标决策问题。目标规划方法是解决这类决策问题的方法之一。下面引入与建立目标规划数学模型有关的概念。

1. 正、负偏差变量

设d为决策变量的函数，正偏差变量$d^+ = \max\{d - d_0, 0\}$表示决策值超过目标值的部分，负偏差变量$d^- = -\min\{d - d_0, 0\}$表示决策值未达到目标值的部分，这里$d_0$表示$d$的目标值。因决策值不可能既超过目标值同时又未达到目标值，即恒有$d^+ \times d^- = 0$。

2. 绝对（刚性）约束和目标约束

绝对约束是指必须严格满足的等式约束和不等式约束；如线性规划问题的所有约束条件，不能满足这些约束条件的解称为非可行解，所以它们是硬约束。目标约束是目标规划特有的，可把约束右端项看作要追求的目标值。在达到此目标值时允许发生正或负偏差，因此在这些约束中加入正、负偏差变量，它们是软约束。线性规划问题的目标函数，在给定目标值和加入正、负偏差变量后可变换为目标约束。也可根据问题的需要将绝对约束变换为目标约束。如：例 1 的目标函数$z = 8x_1 + 10x_2$可变换为目标约束$8x_1 + 10x_2 + d_1^- - d_1^+ = 56$。绝对约束$2x_1 + x_2 \le 11$可变换为目标约束$2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 11$。

3. 优先因子（优先等级）与权系数

一个规划问题常常有若干目标。但决策者在要求达到这些目标时，是有主次或轻重缓急的不同。凡要求第一位达到的目标赋于优先因子P_1，次位的目标赋于优先因子$P_2, \cdots$，并规定$P_k >> P_{k+1}, k = 1,2,\cdots,q$。表示$P_k$比$P_{k+1}$有更大的优先权。以此类推，若要区别具有相同优先因子的两个目标的差别，这时可分别赋于它们不同的权系数w_j，这些都由决策者按具体情况而定。

4. 目标规划的目标函数

目标规划的目标函数（准则函数）是按各目标约束的正、负偏差变量和赋于相应的优先因子而构造的。当每一目标值确定后，决策者的要求是尽可能缩小偏离目标值。因此目标规划的目标函数只能是$\min \quad z = f(d^+, d^-)$。其基本形式有三种：

（1）要求恰好达到目标值，即正、负偏差变量都要尽可能地小，这时

$$\min \quad z = f(d^+ + d^-)$$

（2）要求不超过目标值，即允许达不到目标值，就是正偏差变量要尽可能地小，这时

$$\min \quad z = f(d^+)$$

（3）要求超过目标值，即超过量不限，但必须是负偏差变量要尽可能地小，这时

$$\min \quad z = f(d^-)$$

对每一个具体目标规划问题，可根据决策者的要求和赋于各目标的优先因子来构造目标函数，以下用例子说明。

例 2　例 1 的决策者在原材料供应受严格限制的基础上考虑：首先是产品 II 的产量不低于产品 I 的产量；其次是充分利用设备有效台时，不加班；再次是利润额不小于 56 元。求决策方案。

解　按决策者所要求的，分别赋于这三个目标P_1, P_2, P_3优先因子。这问题的数学

模型是

$$\min \quad P_1d_1^+ + P_2(d_2^- + d_2^+) + P_3d_3^-$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 11 \\ x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \\ x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 10 \\ 8x_1 + 10x_2 + d_3^- - d_3^+ = 56 \\ x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,3. \end{cases}$$

5．目标规划的一般数学模型

设 x_j（$j = 1,2,\cdots,n$）是目标规划的决策变量，共有 m 个约束是刚性约束，可能是等式约束，也可能是不等式约束。设有 l 个柔性目标约束，其目标规划约束的偏差为 d_i^+, d_i^-（$i = 1,2,\cdots,l$）。设有 q 个优先级别，分别为 $P_1, P_2, \cdots, P_q$。在同一个优先级 P_k 中，有不同的权重，分别记为 $w_{kj}^+, w_{kj}^- (j = 1,2,\cdots,l)$。因此目标规划模型的一般数学表达式为

$$\min \quad z = \sum_{k=1}^{q} P_k \left(\sum_{j=1}^{l} w_{kj}^- d_j^- + w_{kj}^+ d_j^+ \right)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i, \quad i = 1, \cdots, m \\ \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1,2,\cdots,l \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,2,\cdots,n \\ d_i^-, d_i^+ \ge 0, \quad i = 1,2,\cdots,l \end{cases}$$

建立目标规划的数学模型时，需要确定目标值、优先等级、权系数等，它都具有一定的主观性和模糊性，可以用专家评定法给以量化。

§3　求解目标规划的序贯式算法

序贯式算法是求解目标规划的一种早期算法，其核心是根据优先级的先后次序，将目标规划问题分解成一系列的单目标规划问题，然后再依次求解。

求解目标规划的序贯算法

对于 $k = 1,2,\cdots,q$，求解单目标规划

$$\min \quad z = \sum_{j=1}^{l} (w_{kj}^- d_j^- + w_{kj}^+ d_j^+) \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le (=, \ge) b_i, \quad i = 1, \cdots, m \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j + d_i^- - d_i^+ = g_i, \quad i = 1,2,\cdots,l \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{l}(w_{sj}^{-}d_j^{-}+w_{sj}^{+}d_j^{+})\le z_s^{*},\quad s=1,2,\cdots,k-1, \tag{4}$$

$$x_j\ge 0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

$$d_i^{-},d_i^{+}\ge 0,\quad i=1,2,\cdots,l \tag{6}$$

其最优目标值为 z_k^{*}，当 $k=1$ 时，约束（4）为空约束。当 $k=q$ 时，z_q^{*} 所对应的解 x^{*} 为目标规划的最优解。

注　此时最优解的概念与线性规划最优解的概念已有所不同，但为方便起见，仍称为最优解。

例 3　某企业生产甲、乙两种产品，需要用到 A,B,C 三种设备，关于产品的赢利与使用设备的工时及限制如下表所示。问该企业应如何安排生产，才能达到下列目标：

	甲	乙	设备的生产能力（h）
A (h/件)	2	2	12
B (h/件)	4	0	16
C (h/件)	0	5	15
赢利（元/件）	200	300	

（1）力求使利润指标不低于 1500 元；

（2）考虑到市场需求，甲、乙两种产品的产量比应尽量保持 1:2；

（3）设备 A 为贵重设备，严格禁止超时使用；

（4）设备 C 可以适当加班，但要控制；设备 B 既要求充分利用，又尽可能不加班。在重要性上，设备 B 是设备 C 的 3 倍。

建立相应的目标规划模型并求解。

解　设备 A 是刚性约束，其余是柔性约束。首先，最重要的指标是企业的利润，因此，将它的优先级列为第一级；其次，甲、乙两种产品的产量保持 1:2 的比例，列为第二级；再次，设备 C,B 的工作时间要有所控制，列为第三级。在第三级中，设备 B 的重要性是设备 C 的三倍，因此，它们的权重不一样，设备 B 前的系数是设备 C 前系数的 3 倍。由此得到相应的目标规划模型。

$$\min z=P_1d_1^{-}+P_2(d_2^{+}+d_2^{-})+P_3(3d_3^{+}+3d_3^{-}+d_4^{+}) \tag{7}$$

$$\text{s.t.}\quad 2x_1+2x_2\le 12 \tag{8}$$

$$200x_1+300x_2+d_1^{-}-d_1^{+}=1500 \tag{9}$$

$$2x_1-x_2+d_2^{-}-d_2^{+}=0 \tag{10}$$

$$4x_1+d_3^{-}-d_3^{+}=16 \tag{11}$$

$$5x_2+d_4^{-}-d_4^{+}=15 \tag{12}$$

$$x_1,x_2,d_i^{-},d_i^{+}\ge 0,\quad i=1,2,3,4 \tag{13}$$

序贯算法中每个单目标问题都是一个线性规划问题，可以使用 LINGO 软件进行求解。

求第一级目标。LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
```

```
S_Con_Num/1..4/:g,dplus,dminus;
S_con(S_Con_Num,Variable):c;
endsets
data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata
min=dminus(1);
2*x(1)+2*x(2)<12;
@for(S_Con_Num(i):@sum(Variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i
)=g(i));
end
```

求得 dminus(1)=0，即目标函数的最优值为 0，第一级偏差为 0。

求第二级目标，LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
S_Con_Num/1..4/:g,dplus,dminus;
S_con(S_Con_Num,Variable):c;
endsets
data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata
min=dplus(2)+dminus(2);    !二级目标函数;
2*x(1)+2*x(2)<12;
@for(S_Con_Num(i):@sum(Variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i
)=g(i));
dminus(1)=0;!一级目标约束;
@for(variable:@gin(x));
end
```

求得目标函数的最优值为 0，即第二级的偏差仍为 0。

求第三级目标，LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
variable/1..2/:x;
S_Con_Num/1..4/:g,dplus,dminus;
S_con(S_Con_Num,Variable):c;
endsets
data:
g=1500 0 16 15;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
enddata
min=3*dplus(3)+3*dminus(3)+dplus(4);    !三级目标函数;
2*x(1)+2*x(2)<12;
@for(S_Con_Num(i):@sum(Variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i
)=g(i));
dminus(1)=0;!一级目标约束;
dplus(2)+dminus(2)=0;!二级目标约束;
end
```

目标函数的最优值为29，即第三级偏差为29。

分析计算结果，$x_1=2$，$x_2=4$，$d_1^+=100$，因此，目标规划的最优解为 $x^*=(2,4)$，最优利润为1600。

上述过程虽然给出了目标规划问题的最优解，但需要连续编几个程序，这样在使用时不方便，下面用 LINGO 软件，编写一个通用的程序，在程序中用到数据段未知数据的编程方法。

例 4（续例 3） 按照序贯式算法，编写求解例 3 的通用 LINGO 程序。

```
model:
sets:
level/1..3/:p,z,goal;
variable/1..2/:x;
h_con_num/1..1/:b;
s_con_num/1..4/:g,dplus,dminus;
h_con(h_con_num,variable):a;
s_con(s_con_num,variable):c;
obj(level,s_con_num)/1 1,2 2,3 3,3 4/:wplus,wminus;
endsets
data:
ctr=?;
goal=? ? 0;
b=12;
g=1500 0 16 15;
a=2 2;
c=200 300 2 -1 4 0 0 5;
wplus=0 1 3 1;
wminus=1 1 3 0;
enddata
min=@sum(level:p*z);
p(ctr)=1;
@for(level(i)|i#ne#ctr:p(i)=0);
@for(level(i):z(i)=@sum(obj(i,j):wplus(i,j)*dplus(j)+wminus(i,j)*
dminus(j)));
@for(h_con_num(i):@sum(variable(j):a(i,j)*x(j))<b(i));
@for(s_con_num(i):@sum(variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i
)=g(i));
@for(level(i)|i #lt# @size(level):@bnd(0,z(i),goal(i)));
end
```

当程序运行时，会出现一个对话框。

在做第一级目标计算时，ctr 输入 1，goal(1)和 goal(2)输入两个较大的值，表明这两项约束不起作用。求得第一级的最优偏差为 0，进行第二轮计算。

在第二级目标的运算中，ctr 输入 2。由于第一级的偏差为 0，因此 goal(1)的输入值为 0，goal(2)输入一个较大的值。求得第二级的最优偏差仍为 0，进行第三级计算。

在第三级的计算中，ctr 输入 3。由于第一级、第二级的偏差均是 0，因此，goal(1)和 goal(2)的输入值也均是 0。最终结果是：$x_1=2$，$x_2=4$，最优利润是 1600 元，第三级的最优偏差为 29。

§4 多标规划的 Matlab 解法

多目标规划可以归结为

$$\min_{x,\gamma} \gamma$$

使得

$$F(x) - weight \cdot \gamma \le goal$$
$$A \cdot x \le b, \quad Aeq \cdot x = beq$$
$$c(x) \le 0, \quad ceq(x) = 0$$
$$lb \le x \le ub$$

其中 $x, weight, goal, b, beq, lb$ 和 ub 是向量，A 和 Aeq 是矩阵；$c(x), ceq(x)$ 和 $F(x)$ 是向量函数，他们可以是非线性函数。$F(x)$ 是所考虑的目标函数，$goal$ 是欲达到的目标，多目标规划的 Matlab 函数 fgoalattain 的用法为

［x,fval］= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight)
［x,fval］= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b)
［x,fval］= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b,Aeq,beq)
［x,fval］= fgoalattain('fun',x_0,goal,weight,A,b,Aeq,beq,lb,ub,nonlcon)

其中 fun 是用 M 文件定义的目标向量函数，x_0 是初值，weight 是权重。A,b 定义不等式约束 A*x≤b，Aeq,beq 定义等式约束 Aeq*x=Beq，nonlcon 是用 M 文件定义的非线性约束 c(x)≤0，ceq(x)=0。返回值 fval 是目标向量函数的值。

要完整掌握其用法，请用 help fgoalattain 或 type fgoalattain 查询相关的帮助。

例 5 求解多目标线性规划问题

$$\max Z_1 = 100x_1 + 90x_2 + 80x_3 + 70x_4$$
$$\min Z_2 = 3x_2 + 2x_4$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 30 \\ x_3 + x_4 \ge 30 \\ 3x_1 + 2x_3 \le 120 \\ 3x_2 + 2x_4 \le 48 \\ x_i \ge 0,\ i = 1,\cdots,4 \end{cases}$$

解 （i）编写 M 函数 Fun.m:

```
function F=Fun(x);
F(1)=-100*x(1)-90*x(2)-80*x(2)-70*x(4);
F(2)=3*x(2)+2*x(4);
```

（ii）编写 M 文件

```
a=[-1 -1  0  0
   0  0  -1 -1
   3  0   2  0
   0  3   0  2];
b=[-30 -30 120 48]';
c1=[-100 -90 -80 -70];
c2=[0 3 0 2];
[x1,g1]=linprog(c1,a,b,[],[],zeros(4,1))  %求第一个目标函数的目标值
[x2,g2]=linprog(c2,a,b,[],[],zeros(4,1))  %求第二个目标函数的目标值
g3=[g1;g2]  %目标goal的值
[x,fval]=fgoalattain('Fun',rand(4,1),g3,abs(g3),a,b,[],[],zeros(4
,1))
```

%这里权重weight=目标goal的绝对值

就可求得问题的解。

§5 目标规划模型的实例

前面介绍了目标规划的求解方法，这里再介绍几个目标规划模型的模型，帮助我们进一步了解目标规划模型的建立和求解过程。

例6 某计算机公司生产三种型号的笔记本电脑 A,B,C 。这三种笔记本电脑需要在复杂的装配线上生产，生产1台 A,B,C 型号的笔记本电脑分别需要5，8，12（h）。公司装配线正常的生产时间是每月1700h。公司营业部门估计 A,B,C 三种笔记本电脑的利润分别是每台1000，1440，2520（元），而公司预测这个月生产的笔记本电脑能够全部售出。公司经理考虑以下目标：

第一目标：充分利用正常的生产能力，避免开工不足；

第二目标：优先满足老客户的需求， A,B,C 三种型号的电脑50，50，80（台），同时根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第三目标：限制装配线加班时间，最好不要超过200h；

第四目标：满足各种型号电脑的销售目标，A,B,C 型号分别为100，120，100（台），再根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子；

第五目标：装配线的加班时间尽可能少。

请列出相应的目标规划模型，并用LINGO软件求解。

解 建立目标约束。

（1）装配线正常生产

设生产 A,B,C 型号的电脑为 x_1,x_2,x_3（台），d_1^- 为装配线正常生产时间未利用数，d_1^+ 为装配线加班时间，希望装配线正常生产，避免开工不足，因此装配线目标约束为

$$\begin{cases}\min\{d_1^-\}\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700\end{cases} \tag{14}$$

（2）销售目标

优先满足老客户的需求，并根据三种电脑的纯利润分配不同的权因子， A,B,C 三种型号的电脑每小时的利润是 $\frac{1000}{5},\frac{1440}{8},\frac{2520}{12}$ ，因此，老客户的销售目标约束为

$$\begin{cases}\min\{20d_2^- +18d_3^- +21d_4^-\}\\ x_1+d_2^- - d_2^+ = 50\\ x_2+d_3^- - d_3^+ = 50\\ x_3+d_4^- - d_4^+ = 80\end{cases} \tag{15}$$

再考虑一般销售。类似上面的讨论，得到

$$\begin{cases}\min\{20d_5^- +18d_6^- +21d_7^-\}\\ x_1+d_5^- - d_5^+ = 100\\ x_2+d_6^- - d_6^+ = 120\\ x_3+d_7^- - d_7^+ = 100\end{cases} \tag{16}$$

（3）加班限制

首先是限制装配线加班时间，不允许超过200h，因此得到

$$\begin{cases}\min\{d_8^-\}\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_8^- - d_8^+ = 1900\end{cases} \tag{17}$$

其次装配线的加班时间尽可能少，即

$$\begin{cases}\min\{d_1^+\}\\ 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700\end{cases} \tag{18}$$

写出目标规划的数学模型

$$\begin{aligned}\min\ z = {} & P_1 d_1^- + P_2(20d_2^- + 18d_3^- + 21d_4^-) + P_3 d_8^+ \\ & + P_4(20d_5^- + 18d_6^- + 21d_7^-) + P_5 d_1^+ \\ \text{s.t.}\quad & 5x_1+8x_2+12x_3+d_1^- - d_1^+ = 1700 \\ & x_1 + d_2^- - d_2^+ = 50 \\ & x_2 + d_3^- - d_3^+ = 50 \\ & x_3 + d_4^- - d_4^+ = 80 \\ & x_1 + d_5^- - d_5^+ = 100 \\ & x_2 + d_6^- - d_6^+ = 120 \\ & x_3 + d_7^- - d_7^+ = 100 \\ & 5x_1+8x_2+12x_3+d_8^- - d_8^+ = 1900 \\ & x_1, x_2, d_i^-, d_i^+ \geq 0,\ i = 1,2,\cdots,8\end{aligned}$$

写出相应的LINGO程序如下：

```
model:
sets:
level/1..5/:p,z,goal;
variable/1..3/:x;
s_con_num/1..8/:g,dplus,dminus;
s_con(s_con_num,variable):c;
obj(level,s_con_num)/1 1,2 2,2 3,2 4,3 8,4 5,4 6,4 7,5
1/:wplus,wminus;
endsets
data:
ctr=?;
goal=? ? ? ? 0;
g=1700 50 50 80 100 120 100 1900;
c=5 8 12 1 0 0 0 1 0 0 0 1 1 0 0 0 1 0 0 0 1 5 8 12;
wplus=0 0 0 0 1 0 0 0 1;
wminus=1 20 18 21 0 20 18 21 0;
enddata
min=@sum(level:p*z);
p(ctr)=1;
@for(level(i)|i#ne#ctr:p(i)=0);
@for(level(i):z(i)=@sum(obj(i,j):wplus(i,j)*dplus(j)+wminus(i,j)*
dminus(j)));
@for(s_con_num(i):@sum(variable(j):c(i,j)*x(j))+dminus(i)-dplus(i
```

```
)=g(i));
@for(level(i)|i #lt# @size(level):@bnd(0,z(i),goal));
End
```

经5次计算得到 $x_1=100$，$x_2=55$，$x_3=80$。装配线生产时间为1900h，满足装配线加班不超过200h的要求。能够满足老客户的需求，但未能达到销售目标。销售总利润为

$$100\times1000+55\times1440+80\times2520=380800$$（元）

例7　已知三个工厂生产的产品供应给四个客户，各工厂生产量、用户需求量及从各工厂到用户的单位产品的运输费用如下表所示，其中总生产量小于总需求量。

用 户	1	2	3	4	生产量
工厂1	5	2	6	7	300
工厂2	3	5	4	6	200
工厂3	4	5	2	3	400
需求量	200	100	450	250	

（1）求总运费最小的运输问题的调度方案。

（2）上级部门经研究后，制定了调配方案的8项指标，并规定了重要性的次序。

第一目标：用户4为重要部门，需求量必须全部满足；

第二目标：供应用户1的产品中，工厂3的产品不少于100个单位；

第三目标：每个用户的满足率不低于80%；

第四目标：应尽量满足各用户的需求；

第五目标：新方案的总运费不超过原运输问题的调度方案的10%；

第六目标：因道路限制，工厂2到用户4的路线应尽量避免运输任务；

第七目标：用户1和用户3的满足率应尽量保持平衡；

第八目标：力求减少总运费。

请列出相应的目标规划模型，并用LINGO程序求解。

解　（1）求解原运输问题

由于总生产量小于总需求量，虚设工厂4，生产量为100个单位，到各个用户间的运费单价为0。用LINGO软件求解，得到总运费是2950元，运输方案如下表所示。

用 户	1	2	3	4	生产量
工厂1		100	200		300
工厂2	200				200
工厂3			250	150	400
工厂4				100	100
需求量	200	100	450	250	

（2）下面按照目标的重要性的等级列出目标规划的约束和目标函数。

设 x_{ij} 为工厂 $i(i=1,2,3)$ 调配给用户 $j(j=1,2,3,4)$ 的运量，c_{ij} 表示从工厂 i 到用户 j 的单位产品的运输费用，$a_j(j=1,2,3,4)$ 表示第 j 个用户的需求量，$b_i(i=1,2,3)$ 表示第 i 个工厂的生产量。

i）供应约束应严格满足，即

$$\sum_{j=1}^{4}x_{ij}\le b_i$$

ii）供应用户1的产品中，工厂3的产品不少于100个单位，即

$$x_{31}+d_1^--d_1^+=100$$

iii）需求约束。各用户的满足率不低于80%，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_2^- - d_2^+ = 160$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_3^- - d_3^+ = 80$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_4^- - d_4^+ = 360$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_5^- - d_5^+ = 200$$

应尽量满足各用户的需求，即

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+d_6^- - d_6^+ = 200$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+d_7^- - d_7^+ = 100$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+d_8^- - d_8^+ = 450$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+d_9^- - d_9^+ = 250$$

iv）新方案的总运费不超过原方案的10%（原运输方案的运费为2950元），即

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{10}^- - d_{10}^+ = 3245$$

v）工厂2到用户4的路线应尽量避免运输任务，即

$$x_{24} + d_{11}^- - d_{11}^+ = 0$$

vi）用户1和用户3的满足率应尽量保持平衡，即

$$(x_{11}+x_{21}+x_{31}) - \frac{200}{450}(x_{13}+x_{23}+x_{33}) + d_{12}^- - d_{12}^+ = 0$$

vii）力求总运费最少，即

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} + d_{13}^- - d_{13}^+ = 2950$$

目标函数为

$$\min z = P_1 d_9^- + P_2 d_1^- + P_3(d_2^- + d_3^- + d_4^- + d_5^-) + P_4(d_6^- + d_7^- + d_8^- + d_9^-)$$
$$+ P_5 d_{10}^+ + P_6 d_{11}^+ + P_7(d_{12}^- + d_{12}^+) + P_8 d_{13}^+$$

编写LINGO程序如下：

```
model:
sets:
level/1..8/:p,z,goal;
s_con_num/1..13/:g,dplus,dminus;
plant/1..3/:a;
customer/1..4/:b;
routes(plant,customer):c,x;
obj(level,s_con_num)/1 9,2 1,3 2,3 3,3 4,3 5,4 6,4 7,4 8,4 9,5 10,6
11,7 12,8 13/:wplus,wminus;
endsets
data:
ctr=?;
goal=? ? ? ? ? ? ? 0;
a=300 200 400;
b=200 100 450 250;
c=5 2 6 7 3 5 4 6 4 5 2 3;
wplus=0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1;
wminus=1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 0;
```

```
enddata
min=@sum(level:p*z);
p(ctr)=1;
@for(level(i)|i#ne#ctr:p(i)=0);
@for(level(i):z(i)=@sum(obj(i,j):wplus(i,j)*dplus(j)+wminus(i,j)*
dminus(j)));
@for(plant(i):@sum(customer(j):x(i,j))<a(i));
x(3,1)+dminus(1)-dplus(1)=100;
@for(customer(j):@sum(plant(i):x(i,j))+dminus(1+j)-dplus(1+j)=0.8
*b(j);
@sum(plant(i):x(i,j))+dminus(5+j)-dplus(5+j)=b(j));
@sum(routes:c*x)+dminus(10)-dplus(10)=3245;
x(2,4)+dminus(11)-dplus(11)=0;
@sum(plant(i):x(i,1))-20/45*@sum(plant(i):x(i,3))+dminus(12)-dplu
s(12)=0;
@sum(routes:c*x)+dminus(13)-dplus(13)=2950;
@for(level(i)|i #lt# @size(level):@bnd(0,z(i),goal));
End
```

经8次运算，得到最终的计算结果，见下表。总运费为3360元，高于原运费410元，超过原方案10%的上限115元。

用 户	1	2	3	4	生产量
工厂1		100		200	300
工厂2	90		110		200
工厂3	100		250	50	400
实际运量	190	100	360	250	
需求量	200	100	450	250	

例8　某公司从三个仓库向四个用户提供某种产品。仓库与用户所在地的供需量及单位运价见下表。

单位：元/件

	B_1	B_2	B_3	B_4	供应量（件）
A_1	5	2	6	7	300
A_2	3	5	4	6	200
A_3	4	5	2	3	400
需求量（件）	200	100	450	250	

公司有关部门根据供求关系和经营条件，确定了下列目标：

P_1：完全满足用户 B_4 的需要；

P_2：A_3 向 B_1 提供的产品数量不少于100件；

P_3：每个用户的供应量不少于其需求的80%；

P_4：从仓库 A_1 到用户 B_2 之间的公路正在大修，运货量应尽量少；

P_5：平衡用户 B_1 和 B_2 的供货满意水平；

P_6：力求总运费最省；

试求满意的调运方案。

解　这是具有6个优先级目标的运输问题。设 x_{ij} 为从仓库 A_i 到用户 B_j 的运输量

（$i=1,2,3$； $j=1,2,3,4$），d_k^-, d_k^+为第k个目标约束中，未达到规定目标的负偏差和超过目标的正偏差。a_i（$i=1,2,3$）是第i个仓库的供应量。

约束条件有以下几种：

i）供应约束（硬约束）。

$$\sum_{j=1}^{4} x_{ij} \le a_i，\ i=1,2,3$$

ii）需求约束。由于产品供不应求，向各用户的实际供应量不可能超过需求量，所以需求正偏差没有意义。记d_j^-为各用户需求量的负偏差，b_j是各用户的需求量（$j=1,2,3,4$），约束为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_j^- = b_j，\ j=1,2,3,4$$

iii）A_3向B_1的供货约束：

$$x_{31} + d_5^- - d_5^+ = 100$$

iv）至少满足用户需求80%的约束：

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} + d_{5+j}^- - d_{5+j}^+ = 0.8b_j，\ j=1,2,3,4$$

v）A_1到B_2的运货量尽量少，也就是运货量尽可能为零。显然，负偏差没有意义，故有

$$x_{12} - d_{10}^+ = 0$$

vi）平衡用户B_1和B_4的满意水平，也就是供应率要相同。约束条件为

$$\sum_{i=1}^{3} x_{i1} - \frac{200}{450}\sum_{i=1}^{3} x_{i3} + d_{11}^- - d_{11}^+ = 0$$

vii）运费尽量少，即尽量等于零，负偏差没有意义。所以

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij} - d_{12}^+ = 0$$

目标函数为

$$\min z = P_1d_4^- + P_2d_5^- + P_3(d_6^- + d_7^- + d_8^- + d_9^-) + P_4d_{10}^+ + P_5(d_{11}^- + d_{11}^+) + P_6d_{12}^+$$

计算程序如下。

```
model:
sets:
plant/A1..A3/:a;
customer/B1..B4/:b;
routes(plant,customer):c,x;
deviation/1..12/:d1,d2,p1,p2;
endsets
data:
a=300 200 400;
b=200 100 450 250;
c=5 2 6 7 3 5 4 6 4 5 2 3;
p1=0,0,0,100000,10000,1000,1000,1000,1000,0,10,0;
p2=0,0,0,0,0,0,0,0,0,100,10,1;
```

```
enddata
@for(plant(i):[con1]@sum(customer(j):x(i,j))<a(i));
@for(customer(j):[con2]@sum(plant(i):x(i,j))+d1(j)=b(j));
[con3] x(3,1)+d1(5)-d2(5)=100;
@for(customer(j):[con4]@sum(plant(i):x(i,j))+d1(5+j)-d2(5+j)=0.8*
b(j));
[con5] x(1,2)-d2(10)=0;
[con6]
@sum(plant(i):x(i,1))-4/9*@sum(plant(i):x(i,3))+d1(11)-d2(11)=0;
[con7] @sum(routes:c*x)-d2(12)=0;
[obj] min=@sum(deviation:p1*d1+p2*d2);
End
```

程序中集合Deviation的属性d1，d2分别为各个负、正偏差变量，p1，p2分别为目标函数中负、正偏差变量的系数。各优先级取值为：

$P_1=10^5$，$P_2=10^4$，$P_3=10^3$，$P_4=10^2$，$P_5=10$，$P_1=1$

上述程序目标函数的值为3570，观察d1，d2的值可以看出最小运费为3570元。

§6 数据包络分析

1978年A. Charnes, W. W. Cooper和E. Rhodes给出了评价多个决策单元（Decision Making Units，简称DMU）相对有效性的数据包络分析方法（data envelopment analysis, DEA）。

目前，数据包络分析是评价具有多指标输入和多指标输出系统的较为有效的方法。

6.1 数据包络分析的基本概念

（1）相对有效评价问题

例9（多指标评价问题） 某市教委需要对六所重点中学进行评价，其相应的指标如下表所示。表中的生均投入和非低收入家庭百分比是输入指标，生均写作得分和生均科技得分是输出指标。请根据这些指标，评价哪些学校是相对有效的。

学　校	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
生均投入(百元/年)	89.39	86.25	108.13	106.38	62.40	47.19
非低收入家庭百分比(%)	64.3	99	99.6	96	96.2	79.9
生均写作得分(分)	25.2	28.2	29.4	26.4	27.2	25.2
生均科技得分(分)	223	287	317	291	295	222

为求解例9，先对上表作简单的分析。

学校C的两项输出指标都是最高的，达到29.4和317，应该说，学校C是最有效的。但从另一方面说，对它的投入也是最高的，达到108.13和99.6，因此，它的效率也可能是最低的。究竟如何评价这六所学校呢？这还需要仔细地分析。

这是一个多指标输入和多指标输出的问题，对于这类评价问题，A. Charnes, W. W. Cooper和E. Rhodes建立了评价决策单元相对有效性的C^2R模型。

（2）数据包络分析的C^2R模型

数据包络分析有多种模型，其中C^2R（由Charnes，Cooper和Rhodes三位作者的第一个英文字母命名）的建模思路清晰、模型形式简单、理论完善。设有n个DMU，每个DMU都有m种投入和s种产出，设x_{ij}（$i=1,\cdots,m$，$j=1,\cdots,n$）表示第j个DMU的第i种投入量，y_{rj}（$r=1,\cdots,s$，$j=1,\cdots,n$）表示第j个DMU的第r种产出量，v_i $(i=1,\cdots,m)$表示第i种投入的权值，u_r（$r=1,\cdots,s$）表示第r种产出的权值。

向量 $X_j, Y_j (j=1,\cdots,n)$ 分别表示决策单元 j 的输入和输出向量，v 和 u 分别表示输入、输出权值向量，则 $X_j=(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{mj})^T$，$Y_j=(y_{1j},y_{2j},\cdots,y_{sj})^T$，$u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)^T$，$v=(v_1,v_2,\cdots,v_s)^T$。

定义决策单元 j 的效率评价指数为

$h_j=(u^TY_j)/(v^TX_j)$，（$j=1,2,\cdots,n$）

评价决策单元 j_0 效率的数学模型为

$$\max \frac{u^TY_{j_0}}{v^TX_{j_0}}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \dfrac{u^TY_j}{v^TX_j}\le 1, \quad j=1,2,\cdots,n \\ u\ge 0, v\ge 0, u\ne 0, v\ne 0 \end{cases} \tag{19}$$

通过Charnes-Cooper变换：$\omega=tv$，$\mu=tu$，$t=\dfrac{1}{v^TX_{j_0}}$，可以将模型（19）变化为等价的线性规划问题

$$\max V_{j_0}=\mu^TY_{j_0}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \omega^TX_j-\mu^TY_j\ge 0, \quad j=1,2,\cdots,n \\ \omega^TX_{j_0}=1 \\ \omega\ge 0, \mu\ge 0 \end{cases} \tag{20}$$

可以证明，模型（19）与模型（20）是等价的。由于线性规划问题的对偶线性规划模型具有明确的经济意义。下面写出模型（20）的对偶形式

$$\min \theta$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}\lambda_jX_j\le \theta X_{j_0} \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_jY_j\ge Y_{j_0} \\ \lambda_j\ge 0, j=1,2,\cdots,n \end{cases} \tag{21}$$

对于C^2R模型（20），有如下定义。

定义1　若线性规划问题（20）的最优目标值$V_{j_0}=1$，则称决策单元 j_0 是弱DEA有效的。

定义2　若线性规划问题（20）存在最优解 $\omega_{j_0}>0$，$\mu_{j_0}>0$，并且其最优目标值 $V_{j_0}=1$，则称决策单元 j_0 是DEA有效的。

从上述定义可以看出，所谓DEA有效，就是指那些决策单元，它们的投入产出比达到最大。因此，我们可以用DEA来对决策单元进行评价。

（3）C^2R模型的求解

从上面的模型可以看到，求解C^2R模型，需要求解若干个线性规划，这一点可以用LINGO软件完成。

例10（续例9） 运用C^2R模型（20）求解例9。

解 按照C^2R模型写出相应的LINGO程序如下：

```
model:
sets:
dmu/1..6/:s,t,p;     !决策单元;
inw/1..2/:w;         !输入权重;
outw/1..2/:u;        !输出权重;
inv(inw,dmu):x;      !输入变量;
outv(outw,dmu):y;
endsets
data:
ctr=?;
x=89.39    86.25    108.13   106.38   62.40    47.19
  64.3     99       99.6     96       96.2     79.9;
y=25.2     28.2     29.4     26.4     27.2     25.2
  223      287      317      291      295      222;
enddata
max=@sum(dmu:p*t);
p(ctr)=1;
@for(dmu(i)|i#ne#ctr:p(i)=0);
@for(dmu(j):s(j)=@sum(inw(i):w(i)*x(i,j));
t(j)=@sum(outw(i):u(i)*y(i,j));s(j)>t(j));
@sum(dmu:p*s)=1;
end
```

在上述程序中，ctr的值分别输入$1,2,\cdots,6$，经过6次计算，得到6个最优目标值

1，0.9096132，0.9635345，0.9143053，1，1

并且对于学校A（决策单元1）有$\omega_2>0,\mu_1>0$，对于学校E（决策单元5）有$\omega_1>0$，$\mu_2>0$和对于学校F（决策单元6）有$\omega_1>0,\mu_1>0$。因此，学校A,E,F是DEA有效的。

习题二十一

1. 试求解多目标线性规划问题

$$\max\begin{cases}z_1=3x_1+x_2\\ z_2=x_1+2x_2\end{cases}\qquad \text{s.t.}\begin{cases}x_1+x_2\le 7\\ x_1\le 5\\ x_2\le 5\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

2. 一个小型的无线电广播台考虑如何最好地安排音乐、新闻和商业节目时间。依据法律，该台每天允许广播12小时，其中商业节目用以赢利，每分钟可收入250美元，新闻节目每分钟需支出40美元，音乐节目每播一分钟费用为17.50美元。法律规定，正常情况下商业节目只能占广播时间的20%，每小时至少安排5分钟新闻节目。问每天的广播节目该如何安排？优先级如下：

p_1：满足法律规定的要求；

p_2：每天的纯收入最大。

试建立该问题的目标规划模型。

3. 某工厂生产两种产品,每件产品I可获利10元，每件产品II可获利8元。每生产一件产品I，需要3小时；每生产一件产品II，需要2.5小时。每周总的有效时间为120小时。若加班生产，则每件产品I的利润降低1.5元；每件产品II的利润降低1元。决策者希望在允许的工作及加班时间内取最大利润，试建立该问题的目标规划模型，并求解。

第二十二章　模糊数学模型

§1　模糊数学的基本概念

1.1　模糊数学简介

1965 年，美国著名计算机与控制专家查德(L.A.Zadeh)教授提出了模糊的概念，并在国际期刊《Information and Control》并发表了第一篇用数学方法研究模糊现象的论文“Fuzzy Sets”(模糊集合)，开创了模糊数学的新领域。

模糊是指客观事物差异的中间过渡中的“不分明性”或“亦此亦彼性”。如高个子与矮个子、年轻人与老年人、热水与凉水、环境污染严重与不严重等。在决策中，也有这种模糊的现象，如选举一个好干部，但怎样才算一个好干部？好干部与不好干部之间没有绝对分明和固定不变的界限。这些现象很难用经典的数学来描述。

模糊数学就是用数学方法研究与处理模糊现象的数学。它作为一门崭新的学科，它是继经典数学、统计数学之后发展起来的一个新的数学学科。经过短暂的沉默和争议之后，迅猛的发展起来了，而且应用越来越广泛。如今的模糊数学的应用已经遍及理、工、农、医及社会科学的各个领域，充分的表现了它强大的生命力和渗透力。

统计数学是将数学的应用范围从确定性的领域扩大到了不确定性的领域，即从必然现象到偶然现象，而模糊数学则是把数学的应用范围从确定领域扩大到了模糊领域，即从精确现象到模糊现象。

实际中，我们处理现实的数学模型可以分成三大类：第一类是确定性数学模型，即模型的背景具有确定性，对象之间具有必然的关系。第二类是随机性的数学模型，即模型的背景具有随机性和偶然性。第三类是模糊性模型，即模型的背景及关系具有模糊性。

1.2　基本概念

1.2.1　模糊集和隶属函数

定义 1　论域 X 到 $[0,1]$ 闭区间上的任意映射

$$\mu_A:\ X \to [0,1]$$

$$x \to \mu_A(x)$$

都确定 X 上的一个模糊集合 A，μ_A 叫做 A 的隶属函数，$\mu_A(x)$ 叫做 x 对模糊集 A 的隶属度，记为：

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

使 $\mu_A(x) = 0.5$ 的点 x_0 称为模糊集 A 的过渡点，此点最具模糊性。

显然，模糊集合 A 完全由隶属函数 μ_A 来刻画，当 $\mu_A(x) = \{0,1\}$ 时，A 退化为一个普通集。

1.2.2　模糊集合的表示方法

当论域 X 为有限集时，记 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 X 上的模糊集 A 有下列三种常见的表示形式。

i)　*zadeh* 表示法

当论域 X 为有限集时，记 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 X 上的模糊集 A 可以写成

$$A = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_A(i)}{x_i} = \frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \cdots + \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$$

注：“$\sum$”和“+”不是求和的意思，只是概括集合诸元的记号；“$\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$”不是分数，它表示点 x_i 对模糊集 A 的隶属度是 $\mu_A(x_i)$。

ii)　序偶表示法

$$A = \{(x_1, \mu_A(x_1)), (x_2, \mu_A(x_2)), \cdots, (x_n, \mu_A(x_n))\}$$

iii)　向量表示法

$$A = (\mu_A(x_1), \mu_A(x_2), \cdots, \mu_A(x_n))$$

当论域 X 为无限集时，X 上的模糊集 A 可以写成

$$A=\int_{x\in X}\frac{\mu_A(x)}{x}$$

注：“ $\int$ ”也不是表示积分的意思，“ $\frac{\mu_A(x_i)}{x_i}$ ”也不是分数。

例 1　设论域 $X=\{x_1(140),x_2(150),x_3(160),x_4(170),x_5(180),x_6(190)\}$ (单位: cm)表示人的身高， X 上的一个模糊集“高个子”(A)的隶属函数 $\mu_A(x)$ 可定义为

$$\mu_A(x)=\frac{x-140}{190-140}$$

用 *zadeh* 表示法，

$$A=\frac{0}{x_1}+\frac{0.2}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.6}{x_4}+\frac{0.8}{x_5}+\frac{1}{x_6}$$

用向量表示法，

$$A=(0,0.2,0.4,0.6,0.8,1)$$

例 2　设论域 $X=[0,1]$，Fuzzy 集 A 表示“年老”，B 表示“年轻”，Zadeh 给出 A、B 的隶属度函数分别为

$$A(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 50\\ [1+(\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1} & 50<x\le 100\end{cases}$$

$$B(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 25\\ [1+(\frac{x-25}{5})^{2}]^{-1} & 25\le x\le 100\end{cases}$$

$A(70)\approx 0.94$，即“70 岁”属于“年老”的程度为 0.94。又易知 $A(60)\approx 0.8$，$B(60)\approx 0.02$，可认为“60 岁”是“较老的”。

$$A=\text{“年老”}=\int_{50}^{100}\frac{[1+(\frac{x-50}{5})^{-2}]^{-1}}{x}$$

$$B=\text{“年轻”}=\int_0^{25}\frac{1}{x}+\int_{25}^{100}\frac{[1+(\frac{x-25}{5})^2]^{-1}}{x}$$

1.2.3　模糊集的运算

常用取大“∨”和取小“∧”算子来定义 Fuzzy 集之间的运算。

定义 2　对于论域 X 上的模糊集 A，B，其隶属函数分别为 $\mu_A(x)$，$\mu_B(x)$。

i) 若对任意 $x\in X$，有 $\mu_B(x)\le\mu_A(x)$，则称 A 包含 B，记为 $B\subseteq A$；

ii) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。

定义 3　对于论域 X 上的模糊集 A，B，

i) 称 Fuzzy 集 $C=A\bigcup B$，$D=A\bigcap B$ 为 A 与 B 的并（union）和交（intersection），即

$$C=(A\bigcup B)(x)=\max\{A(x),B(x)\}=A(x)\vee B(x)$$

$$D=(A\bigcap B(x)=\min\{A(x),B(x)\}=A(x)\wedge B(x)$$

他们相应的隶属度 $\mu_C(x),\mu_D(x)$ 被定义为

$$\mu_C(x)=\max\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

$$\mu_D(x)=\min\{\mu_A(x),\mu_B(x)\}$$

ii) Fuzzy 集 A^C 为 A 的补集或余集(complement)，其隶属度

$$\mu_{A^C}(x)=1-\mu_A(x)$$

例 3　已知

$$X=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\},$$

$$A=\frac{0.3}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.1}{5},$$

$$B=\frac{0.2}{3}+\frac{0.3}{4}+\frac{0.9}{5}+\frac{0.5}{6},$$

则有

$$A\cup B=\frac{0.3}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.8}{3}+\frac{0.4}{4}+\frac{0.9}{5}+\frac{0.5}{6},$$

$$A\cap B=\frac{0.2}{3}+\frac{0.3}{4}+\frac{0.1}{5},$$

$$A^{C}=\frac{0.7}{1}+\frac{0.5}{2}+\frac{0.2}{3}+\frac{0.6}{4}+\frac{0.9}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}。$$

1.2.4　隶属函数的确定方法

模糊数学的基本思想是隶属度的思想。应用模糊数学方法建立数学模型的关键是建立符合实际的隶属函数。如何确定一个模糊集的隶属函数至今还是尚未解决的问题。这里仅仅介绍几种常用的确定隶属函数的方法。

（1）模糊统计方法

模糊统计方法是一种客观方法，主要是基于模糊统计试验的基础上根据隶属度的客观存在性来确定的。所谓的模糊统计试验包含以下四个要素：

i) 论域 X；

ii) X 中的一个固定元素 x_0；

iii) X 中一个随机变动的几何 A^* (普通集)；

iv) X 中一个以 A^* 作为弹性边界的模糊集 A，对 A^* 的变动起着制约作用。其中 $x_0\in A^*$，或者 $x_0\notin A^*$，致使 x_0 对 A 的关系是不确定的。

假设做 n 次模糊统计试验，则可计算出

$$x_0\text{对}A\text{的隶属频率}=\frac{x_0\in A^*\text{的次数}}{n}$$

实际上，当 n 不断增大时，隶属频率趋于稳定，其频率的稳定值称为 x_0 对 A 的隶属度，即

$$\mu_A(x_0)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0\in A^*\text{的次数}}{n}$$

（2）指派方法

指派方法是一种主观的方法，它主要依据人们的实践经验来确定某些模糊集隶属函数的一种方法。

如果模糊集定义在实数域R上，则模糊集的隶属函数称为模糊分布。所谓指派方法就是根据问题的性质主观地选用某些形式地模糊分布，再根据实际测量数据确定其中所包含地参数，常用的模糊分布如表 1 所示。

实际中，根据问题对研究对象的描述来选择适当的模糊分布：

① 偏小型模糊分布一般适合于描述像“小，少，浅，淡，冷，疏，青年”等偏小的程度的模糊现象。

② 偏大型模糊分布一般适合于描述像“大，多，深，浓，热，密，老年”等偏大的程度的模糊现象。

③ 中间型模糊分布一般适合于描述像“中，适中，不太多，不太少，不太深，不太浓，暖和，中年”等处于中间状态的模糊现象。

但是，表 1 给出的隶属函数都是近似的，应用时需要对实际问题进行分析，逐步修改进行完善，最后得到近似程度更好的隶属函数。

（3）其它方法

在实际应用中，用来确定模糊集的隶属函数的方法示多种多样的，主要根据问题的实际意义来确定。譬如，在经济管理、社会管理中，可以借助于已有的“客观尺度”作为模糊集的隶属度。下面举例说明。

如果设论域X表示机器设备，在X上定义模糊集A＝“设备完好”，则可以用“设备完好率”作为A的隶属度。如果X表示产品，在X上定义模糊集A＝“质量稳定”，则可以用产品的“正品率”作为A的隶属度。如果X表示家庭，在X上定义模糊集A＝“家庭贫困”，则可以用“Engel 系数＝食品消费/总消费”作为A的隶属度。

另外，对于有些模糊集而言，直接给出隶属度有时是很困难的，但可以利用所谓的“二元对比排序法”来确定，即首先通过两两比较确定两个元素相应隶属度的大小排出顺序，然后用数学方法加工处理得到所需的隶属函数。

表 1　常用的模糊分布

类型	偏小型	中间型	偏大型
矩阵型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ 0, & x>a\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}1, & a\le x\le b\\ 0, & x<a\text{或}x>b\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\ge a\\ 0, & x<a\end{cases}$
梯形型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ \dfrac{b-x}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c\le x\le d\\ 0, & x<a, x\ge d\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$
k次抛物型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ (\dfrac{b-x}{b-a})^k, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}(\dfrac{x-a}{b-a})^k, & a\le x\le b\\ 1, & b\le x\le c\\ (\dfrac{d-x}{d-c})^k, & c\le x\le d\\ 0, & x<a,\ x\ge d\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}0, & x<a\\ (\dfrac{x-a}{b-a})^k, & a\le x\le b\\ 1, & x>b\end{cases}$
Γ型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ e^{-k(x-a)}, & x>a\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}e^{k(x-a)}, & x<a\\ 1, & a\le x\le b\\ e^{-k(x-a)}, & x>b\end{cases}$	$\mu_A=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-e^{-k(x-a)}, & x\ge a\end{cases}$
正态型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ \exp\left\{-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\}, & x>a\end{cases}$	$\mu_A=\exp\left\{-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\}$	$\mu_A=\begin{cases}0, & x\le a\\ 1-\exp\left\{-\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)^2\right\}, & x>a\end{cases}$
柯西型	$\mu_A=\begin{cases}1, & x\le a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta}, & x>a\end{cases}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$	$\mu_A=\dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^\beta}$ ($\alpha>0$, β 为正偶数)	$\mu_A=\begin{cases}0, & x\le a\\ \dfrac{1}{1+\alpha(x-a)^{-\beta}}, & x>a\end{cases}$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$

1.3　模糊关系、模糊矩阵

1.3.1　基本概念

定义 4　设论域U，V，乘积空间上$U\times V=\{(u,v)|u\in U,v\in V\}$上的一个模糊子集$R$为从从集合$U$到集合$V$的模糊关系。如果模糊关系$R$的隶属函数为

$$\mu_R \ :\ U\times V\to[0,1],\quad (x,y)\mapsto \mu_R(x,y)$$

则称隶属度$\mu_R(x,y)$为(x,y)关于模糊关系R的相关程度。

这是二元模糊关系的数学定义，多元模糊关系也可以类似定义。

设$U=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$V=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$，R为从从U到V的模糊关系，其隶属函数为$\mu_R(x,y)$，对任意的$(x_i,y_j)\in U\times V$有$\mu_R(x_i,y_j)=r_{ij}\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$，记$R=(r_{ij})_{m\times n}$，则$R$就是所谓的模糊矩阵。下面给出一般的定义。

定义 5　设矩阵$R=(r_{ij})_{m\times n}$，且$r_{ij}\in[0,1]$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$，则$R$称为模糊矩阵。

特别地，如果$r_{ij}\in\{0,1\}$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$，则称$R$为布尔(Bool)矩阵。当模糊方阵$R=(r_{ij})_{n\times n}$的对角线上的元素$r_{ij}$都为 1 时，称$R$为模糊自反矩阵。

当$m=1$或者$n=1$时，相应地模糊矩阵为$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)$或者$R=(r_1,r_2,\cdots,r_n)^T$，则分别称为模糊行向量和模糊列向量。

例 4　设评定科研成果等级的指标集为$U=(x_1,x_2,\cdots,x_5)$，x_1表示为科研成果发明或创造、革新的程度，x_2表示安全性能，x_3表示经济效益，x_4表示推广前景，x_5表示成熟性；V表示定性评价的评语论域$V=(y_1,y_2,y_3,y_4)$，y_1,y_2,y_3,y_4分别表示很好、较好、一般、不好。通过专家评审打分，按下表给出$U\times V$上每个有序对(x_i,y_i)指定的隶属度。

表 2　有序对(x_i, y_i)指定的隶属度

y / u / x	V			
	y_1 很好	y_2 较好	y_3 一般	y_4 不好
x_1	0.45	0.35	0.15	0.05
x_2	0.30	0.34	0.10	0.26
x_3	0.50	0.30	0.10	0.10
x_4	0.60	0.30	0.05	0.05
x_5	0.56	0.10	0.20	0.14

由此确定一个从U 到V 的模糊关系R，这个模糊关系的隶属度函数是一个 5×4 阶的矩阵，记为

$$R=\begin{pmatrix} 0.45 & 0.35 & 0.15 & 0.05 \\ 0.3 & 0.34 & 0.1 & 0.26 \\ 0.5 & 0.3 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.3 & 0.05 & 0.05 \\ 0.56 & 0.1 & 0.2 & 0.14 \end{pmatrix}$$

则R 为一个模糊关系矩阵。

1.3.2　模糊矩阵的运算及其性质

(1) 模糊矩阵间的关系及并、交、余运算

定义 6　设$A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$ 都是模糊矩阵，定义

i) 相等：

$$A=B \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij};$$

ii) 包含：

$$A\le B \Leftrightarrow a_{ij}\le b_{ij};$$

iii) 并：

$$A\cup B=(a_{ij}\vee b_{ij})_{m\times n};$$

iv) 交：

$$A \cap B = (a_{ij} \wedge b_{ij})_{m\times n}$$

v) 余：

$$A^C = (1 - a_{ij})_{m\times n}$$

例 5　设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix}$，则

$$A \cup B = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 \end{pmatrix},\quad A \cap B = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0.5 \end{pmatrix},\quad A^C = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.7 & 0.5 \end{pmatrix}$$

(2) 模糊矩阵的合成

定义 7　设 $A = (a_{ik})_{m\times s}$，$B = (b_{kj})_{s\times n}$，称模糊矩阵

$$A \circ B = (c_{ij})_{m\times n}$$

为 A 与 B 的合成，其中

$$c_{ij} = \max\left\{(a_{ik} \wedge b_{kj}) \middle| 1 \le k \le s\right\}$$

例 6　设 $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 & 0 \\ 1 & 0.8 & 0.5 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}$，则

$$A \circ B = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0.7 \end{pmatrix},\qquad B \circ A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 & 0.5 \\ 0.3 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

两模糊矩阵合成的 MATLAB 函数如下：

```
function ab=synt(a,b);
m=size(a,1);n=size(b,2);
for i=1:m
    for j=1:n
       ab(i,j)=max(min([a(i,:);b(:,j)']));
    end
end
```

模糊方阵 $A=(a_{ij})_{m\times m}$ 的幂定义为

$$A^2=A\circ A,\qquad A^k=A^{k-1}\circ A$$

(3) 模糊矩阵的转置

定义 8　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$，称 $A^T=(a_{ji}^T)_{n\times m}$ 为 A 的转置矩阵，其中 $a_{ji}^T=a_{ij}$。

(4) 模糊矩阵的 $\lambda-$截矩阵

定义 9　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，对任意的 $\lambda\in[0,1]$，

i) 令

$$a_{ij}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & a_{ij}\geq\lambda\\ 0, & a_{ij}<\lambda\end{cases}$$

则称 $A_\lambda=(a_{ij}^{(\lambda)})_{m\times n}$ 为模糊矩阵 A 的 λ 截矩阵。

ii) 令

$$a_{ij}^{(\lambda)}=\begin{cases}1, & a_{ij}>\lambda\\ 0, & a_{ij}\leq\lambda\end{cases}$$

则称 $A_{\dot\lambda}=(a_{ij}^{(\lambda)})_{m\times n}$ 为模糊矩阵 A 的 λ 强截矩阵。

显然，对于任意的 $\lambda\in[0,1]$，λ 截矩阵是布尔矩阵。

例 7　设 $A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & 0.2 & 0\\ 0.5 & 1 & 0.1 & 0.3\\ 0.2 & 0.1 & 1 & 0.8\\ 0 & 0.3 & 0.8 & 1\end{pmatrix}$，则

$$A_{0.5}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\quad A_{0.3}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

下面给出模糊矩阵的一个性质。

性质　设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n$ 是模糊自反矩阵(对角线上的元素 r_{ij} 都为 1 的模糊矩阵)，I 是 n 阶单位矩阵，则

$$I\le R\le R^2$$

证：因为 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是模糊自反矩阵，即有 $r_{ii}=1$，所以 $I\le R$，又

$$\max\left\{(a_{ik}\wedge a_{kj})\middle|1\le k\le n\right\}\ge r_{ii}\wedge r_{ij}=r_{ij}$$

即有 $R\le R^2$。

§2　模糊模式识别

本节我们假定论域为 U，U 上的模糊集的全体记为 $F(U)$。

2.1　模糊集的贴近度

贴近度是对两个模糊集接近程度的一种度量。

定义 10　设 $A,B,C\in F(U)$，若映射

$$N:F(U)\times F(U)\to[0,1]$$

满足条件：

（1）$N(A,B)=N(B,A)$；

（2）$N(A,A)=1$，$N(U,\Phi)=0$，这里 Φ 为空集；

（3）若 $A\subseteq B\subseteq C$，则 $N(A,C)\le N(A,B)\wedge N(B,C)$；

则称 $N(A,B)$ 为模糊集 A 与 B 的贴近度。N 称为 $F(U)$ 上的贴近度函数。

1．海明贴近度

若 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，则

$$N(A,B)\triangleq 1-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|A(u_i)-B(u_i)|$$

当 U 为实数域上的闭区间 $[a,b]$ 时，则有

$$N(A,B)\underline{\Delta}1-\frac{1}{b-a}\int_a^b|A(u)-B(u)|du$$

2．欧几里得贴近度

若$U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，则

$$N(A,B)\underline{\Delta}1-\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^{n}(A(u_i)-B(u_i))^2\right)^{1/2}$$

当$U=[a,b]$时，则有

$$N(A,B)\underline{\Delta}1-\frac{1}{\sqrt{b-a}}\left(\int_a^b(A(u)-B(u))^2du\right)^{1/2}$$

3．黎曼贴近度

若U 为实数域，被积函数为黎曼可积，且广义积分收敛，则

$$N_1(A,B)\underline{\Delta}\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}(A(u)\wedge B(u))du}{\int_{-\infty}^{+\infty}(A(u)\vee B(u))du}$$

$$N_2(A,B)\underline{\Delta}\frac{2\int_{-\infty}^{+\infty}(A(u)\wedge B(u))du}{\int_{-\infty}^{+\infty}A(u)du+\int_{-\infty}^{+\infty}B(u)du}$$

例 8　设$U=[0,100]$，且

$$A(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<20\\ \dfrac{x-20}{40}, & 20\le x<60\\ 1, & 60\le x\le 100\end{cases},\quad B(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<40\\ \dfrac{80-x}{40}, & 40\le x<80\\ 0, & 80\le x\le 100\end{cases}$$

见图 1。求黎曼贴近度$N_1(A,B)$。

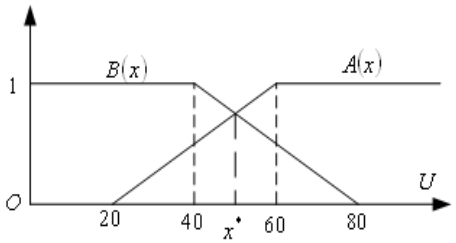


图 1　隶属函数图

解　不难求得 $A(x)$ 和 $B(x)$ 的交点坐标 $x^* = 50$，于是

$$A(x) \wedge B(x) = \begin{cases} \dfrac{x-20}{40}, & 20 \le x < 50 \\ \dfrac{80-x}{40}, & 50 \le x < 80 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

$$A(x) \vee B(x) = \begin{cases} 1, \quad , & 0 \le x < 40 \\ \dfrac{80-x}{40}, & 40 \le x < 50 \\ \dfrac{x-20}{40}, & 50 \le x < 60 \\ 1, & 60 \le x \le 100 \end{cases}$$

$$N_1(A,B) = \frac{\int_0^{100} (A(u) \wedge B(u))du}{\int_0^{100} (A(u) \vee B(u))du} \approx 0.2308$$

计算的 MATLAB 程序：

i）编写定义函数 $A(x) \wedge B(x)$ 的 MATLAB 函数

```
function f1=jixiao(x);
f1=(x>=20 & x<50).*(x-20)/40+(x>=50 & x<80).*(80-x)/40;
```

ii）编写定义函数 $A(x) \vee B(x)$ 的 MATLAB 函数

```
function f2=jida(x);
f2=(x>=0 & x<40)+(x>=40 & x<50).*(80-x)/40+(x>=50 &
x<60).*(x-20)/40+(x>=60 & x<=100);
```

iii）利用 MATLAB 的积分命令 quadl 计算 $N_1(A,B)$

```
N1=quadl(@jixiao,0,100)/quadl(@jida,0,100)
```

例 9　设 $U = R$（实数域），正态型隶属函数

$$A(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma_1}\right)^2}, \quad B(x) = e^{-\left(\frac{x-a}{\sigma_2}\right)^2}$$

求当$\sigma_1 \le \sigma_2$时，$N(A,B)$（见图 2）

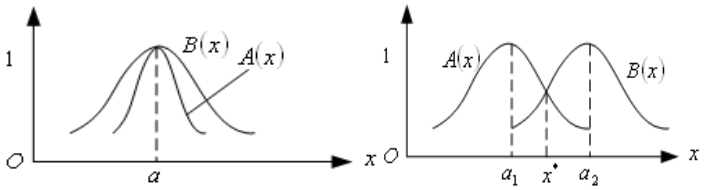


图 2　隶属函数图

解　当$\sigma_1 \le \sigma_2$，$\forall x \in R$，$A(x) \le B(x)$

根据黎曼贴近度，有

$$N_1(A,B) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} B(x)dx} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$N_2(A,B) = \frac{2\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} A(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} B(x)dx} = \frac{2\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}$$

2.2　格贴近度

定义 10　设$A, B \in F(U)$，称

$$A \odot B = \bigvee_{u \in U} (A(u) \wedge B(u))$$

为模糊集A, B的内积。

内积的对偶运算为外积。

定义 11　设$A, B \in F(U)$，称

$$A \otimes B = \bigwedge_{u \in U} (A(u) \vee B(u))$$

为模糊集A, B的外积。

如果在闭区间$[0,1]$上定义“余”运算：$\forall \alpha \in [0,1]$，$\alpha^c = 1 - \alpha$，那么有性质 1

性质 1　$(A \otimes B)^c = A^c \odot B^c$，$(A \odot B)^c = A^c \otimes B^c$。

对$A \in F(U)$，令

$\overline{a} = \bigvee_{u\in U} A(u)$，$\underline{a} = \bigwedge_{u\in U} A(u)$

$\overline{a}$ 和 $\underline{a}$ 分别叫做模糊集 A 的峰值和谷值。对模糊集 A,B,C，不难得到如下性质。

性质 2　$A\odot B \le \overline{a}\wedge\overline{b}$，$A\otimes B \ge \underline{a}\vee\underline{b}$。

性质 3　$A\odot A = \overline{a}$，$A\otimes A = \underline{a}$

性质 4　$\bigvee_{B\in F(U)}(A\odot B) = \overline{a}$，$\bigwedge_{B\in F(U)}(A\otimes B) = \underline{a}$

性质 5　$A\subseteq B \Rightarrow A\odot B = \overline{a}$，$A\otimes B = \underline{b}$

性质 6　$A\odot A^c \le \frac{1}{2}$，$A\otimes B \ge \frac{1}{2}$

性质 7　$A\subseteq B \Rightarrow A\odot B \le B\odot C$，并且 $A\otimes C \le B\otimes C$

由性质发现，给定模糊集 A，让模糊集 B 靠近 A，会使内积 $A\odot B$ 增大而外积 $A\otimes B$ 减少。换句话说，当 $A\odot B$ 较大且 $A\otimes B$ 较少时，A 与 B 比较贴近。所以，采用内积与外积相结合的“格贴近度”来刻画两个模糊集的贴近程度。

引理 1　设 $A,B\in F(U)$，令 $(A,B) = (A\odot B)\wedge(A\otimes B)^c$，则下列结论成立：

（1）$0\le(A,B)\le 1$；

（2）$(A,B) = (B,A)$；

（3）$(A,A) = \overline{a}\wedge(1-\underline{a})$；

（4）$A\subseteq B\subseteq C \Rightarrow (A,C)\le(A,B)\wedge(B,C)$

特别当 $\overline{a}=1$，$\underline{a}=0$ 时，$(A,A)=1$。

根据引理 1 和贴近度的定义，立即得到：

定理 1　设 $A,B\in F(U)$，则

$$(A,B) = (A\odot B)\wedge(A\otimes B)^c$$

是模糊集 A,B 的贴近度，叫做 A,B 的格贴近度。记为

$$N(A,B) = (A\odot B)\wedge(A\otimes B)^c$$

例 10　设论域 R 为实数域，模糊集的隶属函数为

$$A(x)=e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}，\quad B(x)=e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

求 $N(A,B)$。

解法 I　（格贴近度法）对上述函数，有

若 $A(x)\le B(x)$，则 $A\odot B=\underset{x\in R}{\vee}(A(x)\wedge B(x))=\underset{x\in R}{\vee}A(x)=B(x^*)$

若 $B(x)\le A(x)$，则 $A\odot B=\underset{x\in R}{\vee}(A(x)\wedge B(x))=\underset{x\in R}{\vee}B(x)=A(x^*)$

可见，内积 $A\odot B$ 是 $A(x)$ 与 $B(x)$ 相等时的值，这时 $x=x^*$。故可令 $A(x)=B(x)$，

求 x^*，即从

$$e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}=e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}$$

求得

$$x_1=\frac{\sigma_1a_2+\sigma_2a_1}{\sigma_1+\sigma_2}，\quad x_2=\frac{\sigma_2a_1-\sigma_1a_2}{\sigma_2-\sigma_1}$$

其中 x_2 不是最大值点，故选 $x^*=x_1$。于是

$$A\odot B=A(x_1)=e^{-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_2+\sigma_1}\right)^2}$$

而

$$A^C\odot B^C=\underset{x\in R}{\vee}((1-A(x))\wedge(1-B(x)))=1$$

由格贴近度公式，得

$$N(A,B)=e^{-\left(\frac{a_2-a_1}{\sigma_2+\sigma_1}\right)^2}$$

解法 II（黎曼贴近度法）

$$N_1(A,B)=\frac{\int_{-\infty}^{x^*}e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx+\int_{x^*}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx}{\int_{-\infty}^{x^*}e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx+\int_{x^*}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx}$$

$$N_2(A,B)=\frac{\int_{-\infty}^{x^*}e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx+\int_{x^*}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-a_1}{\sigma_1}\right)^2}dx+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\frac{x-a_2}{\sigma_2}\right)^2}dx}$$

其中，$a_1<x^*<a_2$，$x^*=\dfrac{\sigma_2a_1+\sigma_1a_2}{\sigma_1+\sigma_2}$（见解法Ⅰ）。

求解式中各积分非常麻烦，这里就不解下去了。不过已经发现，求解此题，以选择格贴近度法最好。

2.3　模糊模式识别原则

模糊模式识别大致有两种方法，一是直接方法，按“最大隶属原则”归类，主要应用于个体的识别；另一是间接方法，按“择近原则”归类，一般应用于群体模型的识别。

2.3.1　最大隶属原则

设 $A_i\in F(U)$（$i=1,2,\cdots,n$），对 $u_0\in U$，若存在 i_0，使

$$A_{i_0}(u_0)=\max\{A_1(u_0),A_2(u_0),\cdots,A_n(u_0)\}$$

则认为 u_0 相对地隶属于 A_i，这是最大隶属原则。

例 11　考虑人的年龄问题，分为年轻、中年、老年三类，分别对应三个模糊集 A_1,A_2,A_3。设论域 $U=(0,100]$，且对 $x\in(0,100]$，有

$$A_1(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 20\\ 1-2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\le 30\\ 2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\le 40\\ 0, & 40<x\le 100\end{cases}$$

$$A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 50\\ 2\left(\dfrac{x-50}{20}\right)^2, & 50<x\le 60\\ 1-2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\le 70\\ 1, & 70<x\le 100\end{cases}$$

$$A_2(x)=1-A_1(x)-A_3(x)=\begin{cases}0, & 0<x\le 20\\ 2\left(\dfrac{x-20}{20}\right)^2, & 20<x\le 30\\ 1-2\left(\dfrac{x-40}{20}\right)^2, & 30<x\le 40\\ 1, & 40<x\le 50\\ 1-2\left(\dfrac{x-50}{20}\right), & 50<x\le 60\\ 2\left(\dfrac{x-70}{20}\right)^2, & 60<x\le 70\\ 0, & 70<x\le 100\end{cases}$$

某人 40 岁，根据上式，$A_1(40)=0$，$A_2(40)=1$，$A_3(40)=0$，则

$$A_2(40)=\max\{A_1(40),A_2(40),A_3(40)\}=1$$

按最大隶属原则，他应该是中年人。

又如当$x=35$时，$A_1(35)=0.125$，$A_2(35)=0.875$，$A_3(35)=0$。可见 35 岁的人应该是中年人。

2.3.2　择近原则

设$A_i,B\in F(U)$（$i=1,2,\cdots,n$），若存在i_0，使

$$N(A_{i_0},B)=\max\{N(A_1,B),N(A_2,B),\cdots,N(A_n,B)\}$$

则认为B与A_{i_0}最贴近，即判定B与A_{i_0}为一类。该原则称为择近原则。

例 12　现有五个等级的茶叶样品A_1,A_2,A_3,A_4,A_5，待识别茶叶B。反映茶叶质量的因素有六项指标，构成论域U，其中

$$U=\{x_1(\text{条索}),x_2(\text{色泽}),x_3(\text{净度}),x_4(\text{汤色}),x_5(\text{香气}),x_6(\text{滋味})\}$$

设五个等级的样品对 6 项指标的数值为：

$$A_1=(0.5,0.4,0.3,0.6,0.5,0.4)$$

$$A_2=(0.3,0.2,0.2,0.1,0.2,0.2)$$

$$A_3 = (0.2,0.2,0.2,0.1,0.1,0.2)$$

$$A_4 = (0,0.1,0.2,0.1,0.1,0.1)$$

$$A_5 = (0,0.1,0.1,0.1,0.1,0.1)$$

待识别茶叶的各项指标值为

$$B = (0.4,0.2,0.1,0.4,0.5,0.6)$$

确定 B 的属类。

解　利用格贴近度公式计算可得

$$N(B,\mathrm{I}) = 0.5,\quad N(B,\mathrm{II}) = 0.3,\quad N(B,\mathrm{III}) = 0.2,$$

$$N(B,\mathrm{IV}) = 0.2,\quad N(B,\mathrm{V}) = 0.1$$

按择近原则，可以将 B 定为一级茶叶（与 A_1 同属一类）。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
a=[0.5 0.4 0.3 0.6 0.5 0.4
   0.3 0.2 0.2 0.1 0.2 0.2
   0.2 0.2 0.2 0.1 0.1 0.2
   0 0.1 0.2 0.1 0.1 0.1
   0 0.1 0.1 0.1 0.1 0.1];
b=[0.4 0.2 0.1 0.4 0.5 0.6];
for i=1:5
   x=[a(i,:);b];
   t(i)=min([max(min(x)) 1-min(max(x))]);
end
t
```

§3　模糊聚类分析方法

在工程技术和经济管理中，常常需要对某些指标按照一定的标准(相似的程度或亲疏关系等)进行分类处理。例如，根据生物的某些性态对其进行分类，根据空气的性质对空气质量进行分类，以及工业上对产品质量的分类、工程上对工程规模的分类、图像识别中对图形的分类、地质学中对土壤的分类、水资源中的水质分类等等。这些对客观事物按一定的标准进行分类的数学方法称为聚类分析，它是多元统计“物以聚类”的一

种分类方法。然而，在科学技术、经济管理中有许多事物的类与类之间并无清晰的划分，边界具有模糊性，它们之间的关系更多的是模糊关系。对于这类事物的分类，一般用模糊数学方法、我们把应用模糊数学方法进行的聚类分析，称为模糊聚类分析。

3.1　预备知识

3.1.1　模糊等价矩阵

定义 12　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶模糊方阵，$i=1,2,\cdots,m, j=1,2,\cdots,n$，$I$ 是 n 阶单位方阵，若 R 满足

① 自反性：

$$I \le R(\Leftrightarrow r_{ii}=1)；$$

② 对称性：

$$R^T = R\ (\Leftrightarrow r_{ij}=r_{ji})；$$

③ 传递性：

$$R^2 \le R\ (\Leftrightarrow \max\left\{(a_{ik}\wedge a_{kj})\middle|1\le k\le n\right\}\ge r_{ij})；$$

则称 R 为模糊等价矩阵。

定理 2　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶模糊等价方阵，则 $\forall\lambda\in[0,1]$，R_λ 是 n 阶等价布尔矩阵。

定理 3　设 $R=(r_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶模糊等价矩阵，则 $\forall 0\le\lambda\le\mu\le 1$，$R_\mu$ 所决定的分类中的每一个类是 R_λ 所决定的分类中的某个子集。

这就是说，如果 x_i, x_j 按 R_μ 分在一类，则按 $R_\lambda\ (0\le\lambda\le\mu\le 1)$ 也必分在一类，即 R_μ 所决定的分类中的每一个类是 R_λ 所决定的分类中的某个子集。

定理 3 表明：当 $\lambda<\mu$ 时，R_μ 的分类是 R_λ 分类的加细，当 λ 由 1 变成 0 时，R_λ 的分类由细变粗，形成一个动态的聚类图，称之为模糊分类。

例 13　设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$，

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0.4 & 0.8 & 0.5 & 0.5\\ 0.4 & 1 & 0.4 & 0.4 & 0.4\\ 0.8 & 0.4 & 1 & 0.5 & 0.5\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 1 & 0.6\\ 0.5 & 0.4 & 0.5 & 0.6 & 1\end{pmatrix}$$

容易验证，R 为模糊等价矩阵。

当 $\lambda=1$ 时，$R_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，得到的分类是 $\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\}$；

当 $\lambda=0.8$ 时，$R_{0.8}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，得到的分类是 $\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4\},\{x_5\}$；

当 $\lambda=0.6$ 时，$R_{0.6}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$，得到的分类是 $\{x_1,x_3\},\{x_2\},\{x_4,x_5\}$；

当 $\lambda=0.5$ 时，$R_{0.5}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$，得到的分类是 $\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2\}$；

当 $\lambda = 0.4$ 时，$R_{0.5} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，得到的分类是 $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$。

3.1.2 模糊相似矩阵

定义 13　设 $R = (r_{ij})_{n\times n}$ 是 n 阶模糊方阵，$i = 1,2,\cdots,m$, $j = 1,2,\cdots,n$，I 是 n 阶单位方阵，若 R 满足

① 自反性：

$$I \le R(\Leftrightarrow r_{ii} = 1)；$$

② 对称性：

$$R^T = R\ (\Leftrightarrow r_{ij} = r_{ji})；$$

则称 R 为模糊相似矩阵。

定理 4　设 R 为模糊相似矩阵，则存在一个最小的自然数 $k\ (k \le n)$，使得 R^k 为模糊等价矩阵，且对一切大于 k 的自然数 l，恒有 $R^l = R^k$。

证明从略。

定义 13　定理 4 中的 R^k 称为 R 的传递闭包矩阵，记为 $t(R)$。

由定理 4 可以得到将 n 阶模糊相似矩阵 R 改造成 n 阶模糊等价矩阵的方法：

从 n 阶模糊相似矩阵 R 出发，依次求平方：

$$R \to R^2 \to R^4 \to \cdots,$$

直到

$$R^{2^i} \circ R^{2^i} = R^{2^i}\ (2^i \le n, i \le \log_2 n)$$

为止，则

$$t(R) = R^{2^i}。$$

例 14　设

$$R=\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}$$

容易验证，R 为模糊相似矩阵，用平方法求其传递闭包 $t(R)$。

$$R\circ R=\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=R^2$$

$$R^2\circ R^2=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}=R^2$$

故传递闭包

$$t(R)=R^2=\begin{pmatrix}1 & 0.2 & 0.2\\ 0.2 & 1 & 0.3\\ 0.2 & 0.3 & 1\end{pmatrix}$$

容易验证，传递闭包 $t(\tilde{R})$ 是模糊等价矩阵。

3.2　模糊聚类分析法的基本步骤

Step1：数据标准化

(1) 获取数据

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 为被分类的对象，每个对象又由 m 个指标表示其性态，即

$$x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

于是可以得到原始数据矩阵 $A=(x_{ij})_{n\times m}$。

(2) 数据的标准化处理

在实际问题中，不同的数据可能有不同的性质和不同的量纲，为了使原始数据能够适合模糊聚类的要求，需要将原始数据矩阵 A 作标准化处理，即通过适当的数据变换，

将其转化为模糊矩阵。常用的方法有以下两种：

① 平移—标准差变换

$$x_{ij}^{'}=\frac{x_{ij}-\overline{x}_j}{s_j}\quad (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$$

其中

$$\overline{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}\ ,\quad s_j=[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\overline{x}_j)^2]^{\frac{1}{2}},\ (j=1,2,\cdots,m)$$

② 平移—极差变换

如果经过平移—标准差变换后还有某些 $x_{ij}^{'}\notin[0,1]$，则还需对其进行平移—极差变换，即

$$x_{ij}^{''}=\frac{x_{ij}^{'}-\min\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}^{'}\}}{\max\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}^{'}\}-\min\limits_{1\le i\le n}\{x_{ij}^{'}\}},\ (j=1,2,\cdots,m)$$

显然所有的 $x_{ij}^{''}\in[0,1]$，且也不存在量纲因素的影响，从而可以得到模糊矩阵

$$R=(x_{ij}^{''})_{n\times m}$$

Step2：建立模糊相似矩阵

设论域 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，$x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}\ (i=1,2,\cdots,n)$，即数据矩阵 $A=(x_{ij})_{n\times m}$。如果 x_i 与 x_j 的相似程度为 $r_{ij}=R(x_i,x_j)$，则称之为相似系数。确定相似系数 r_{ij} 有下列方法。

(1) 数量积法

对于 $x_i=\{x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{im}\}$，令 $M=\max\limits_{i\ne j}(\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{ik})$，则取

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ \dfrac{1}{M}\sum\limits_{k=1}^{m}x_{ik}\cdot x_{jk}, & i\ne j\end{cases}$$

显然$\left|r_{ij}\right| \in [0,1]$，若出现某些$r_{ij} < 0$，可令$r_{ij}^{'} = \dfrac{r_{ij}+1}{2}$，则有$r_{ij}^{'} \in [0,1]$。也可以用平移—极差变换将其压缩到$[0,1]$上，可以得到模糊相似矩阵$R = (r_{ij})_{n\times m}$。

(2) 夹角余弦法

$$r_{ij} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \cdot x_{jk}\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} x_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} x_{jk}^2}}, \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

(3) 相关系数法

$$r_{ij} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - \overline{x}_i) \cdot (x_{jk} - \overline{x}_j)\right|}{\sqrt{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} - \overline{x}_i)^2 \cdot \sum_{k=1}^{m} (x_{jk} - \overline{x}_j)^2}}, \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

(4) 指数相似系数法

$$r_{ij} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} \exp\left\{-\frac{3}{4}\frac{(x_{ik} - x_{jk})^2}{s_k^2}\right\},$$

其中

$$\overline{x}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ik}, \quad s_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_{ik} - \overline{x}_k)^2, \quad (k = 1,2,\cdots,m)$$

(5) 最大最小值法

$$r_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} \wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m} (x_{ik} \vee x_{jk})}, \quad (x_{ij} > 0, \ \ i, j = 1,2,\cdots,n)$$

(6) 算术平均值法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}+x_{jk})},\quad (x_{ij}>0,\ \ i,j=1,2,\cdots,n)$$

（7）几何平均值法

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}\wedge x_{jk})}{\sum_{k=1}^{m}\sqrt{x_{ik}\cdot x_{jk}}},\quad (x_{ij}>0,\ \ i,j=1,2,\cdots,n)$$

（8）绝对值倒数法

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ M(\sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-x_{jk}\right|)^{-1}, & i\neq j\end{cases}$$

其中 M 为使得所有 $r_{ij}\in[0,1]\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 的确定常数。

（9）绝对值指数法

$$r_{ij}=\exp\{-\sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-x_{jk}\right|\}\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

（10）海明距离法

$$\begin{cases}r_{ij}=1-H\cdot d(x_i,x_j)\\ d(x_i,x_j)=\sum_{k=1}^{m}\left|x_{ik}-x_{jk}\right|\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中 H 为使得所有 $r_{ij}\in[0,1]\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 的确定常数。

（11）欧氏距离法

$$\begin{cases}r_{ij}=1-E\cdot d(x_i,x_j)\\ d(x_i,x_j)=\sqrt{\sum_{k=1}^{m}(x_{ik}-x_{jk})^2}\end{cases},\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

其中 E 为使得所有 $r_{ij}\in[0,1]\ (i,j=1,2,\cdots,n)$ 的确定常数。

(12) 切比雪夫距离法

$$\begin{cases} r_{ij} = 1 - Q \cdot d(x_i, x_j) \\ d(x_i, x_j) = \bigvee\limits_{k=1}^{m} \left| x_{ik} - x_{jk} \right| \end{cases}$$

其中 Q 为使得所有 $r_{ij} \in [0,1]$ $(i, j = 1,2,\cdots,n)$ 的确定常数。

(13) 主观评分法

设有 N 个专家组成专家组 $\{p_1, p_2, \cdots, p_N\}$，让每一个专家对所研究的对象 x_i 与 x_j 相似程度给出评价，并对自己的自信度作出评估。如果第 k 位专家 p_k 关于对象 x_i 与 x_j 的相似程度评价位 $r_{ij}(k)$，对自己的自信度评估为 $a_{ij}(k)$，$(i, j = 1,2,\cdots,n)$，则相关系数定义为

$$r_{ij} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{N} (a_{ij}(k) \cdot r_{ij}(k))}{\sum\limits_{k=1}^{N} a_{ij}(k)}, \quad (i, j = 1,2,\cdots,n)$$

Step3：聚类

所谓聚类方法就是依据模糊矩阵将所研究的对象进行分类的方法。对于不同的置信水平 $\lambda \in [0,1]$，可以得到不同的分类结果，从而形成动态聚类图。常用的方法如下：

(1) 传递闭包法

从 Step2 中求出的模糊相似矩阵 R 出发，来构造一个模糊等价矩阵 R^*。其方法就是用平方法求出 R 的传递闭包 $t(R)$，则 $t(R) = R^*$；然后，由大到小取一组 $\lambda \in [0,1]$，确定相应的 λ 截矩阵，则可以将其分类，同时也可以构成动态聚类图。

(2) 布尔矩阵法

设论域 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$R$ 是 X 上的模糊相似矩阵，对于确定的 λ 水平要求 X 中的元素分类。

首先，由模糊相似矩阵作出其 λ 截矩阵 $R_\lambda = (r_{ij}(\lambda))$，即 R_λ 为布尔矩阵；然后，依据 R_λ 中的 1 元素可以将其分类。

如果 R_λ 为等价矩阵，则 R 也是等价矩阵，则可以直接分类。

若 R_λ 不是等价矩阵，则首先按一定的规则将 R_λ 改造成一个等价的布尔矩阵，再进行分类。

(3) 直接聚类法

此方法是直接由模糊相似矩阵求出聚类图的方法，具体步骤如下：

1) 取 $\lambda_1 = 1$(最大值)，对于每个 x_i 作相似类：$[x_i]_R = \{x_j \mid r_{ij} = 1\}$，即将满足 $r_{ij} = 1$ 的 x_i 与 x_j 视为一类，构成相似类。

相似类和等价类有所不同，不同的相似类可能有公共元素，实际中对于这种情况可以合并为一类。

2) 取 $\lambda_2(\lambda_2 < \lambda_1)$ 为次大值，从 R 中直接找出相似程度为 λ_2 的元素对 (x_i, x_j)，即 $r_{ij} = \lambda_2$，并相应地将对应于 $\lambda_1 = 1$ 的等价分类中 x_i 与 x_j 所在的类合并为一类，即可得到 λ_2 水平上的等价分类。

3) 依次取 $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \cdots$，按第 2)步的方法依次类推，直到合并到 X 成为一类为止，最后可以得到动态聚类图。

3.3 模糊聚类分析应用案例

例 15 某地区内有 12 个气象观测站，10 年来各站测得的年降水量如表 3 所示。为了节省开支，想要适当减少气象观测站，试问减少哪些观察站可以使所得到的降水量信息仍然足够大？

表 3 年降水量（mm）

	站 1	站 2	站 3	站 4	站 5	站 6	站 7	站 8	站 9	站 10	站 11	站 12
1981	276.2	324.5	158.6	412.5	292.8	258.4	334.1	303.2	292.9	243.2	159.7	331.2
1982	251.5	287.3	349.5	297.4	227.8	453.6	321.5	451.0	466.2	307.5	421.1	455.1
1983	192.7	433.2	289.9	366.3	466.2	239.1	357.4	219.7	245.7	411.1	357.0	353.2

1984	246.2	232.4	243.7	372.5	460.4	158.9	298.7	314.5	256.6	327.0	296.5	423.0
1985	291.7	311.0	502.4	254.0	245.6	324.8	401.0	266.5	251.3	289.9	255.4	362.1
1986	466.5	158.9	223.5	425.1	251.4	321.0	315.4	317.4	246.2	277.5	304.2	410.7
1987	258.6	327.4	432.1	403.9	256.6	282.9	389.7	413.2	466.5	199.3	282.1	387.6
1988	453.4	365.5	357.6	258.1	278.8	467.2	355.2	228.5	453.6	315.6	456.3	407.2
1989	158.2	271.0	410.2	344.2	250.0	360.7	376.4	179.4	159.2	342.4	331.2	377.7
1990	324.8	406.5	235.7	288.8	192.6	284.9	290.5	343.7	283.4	281.2	243.7	411.1

解　我们把 12 个气象观测站的观测值看成 12 个向量组，由于本题只给出了 10 年的观测数据，根据线性代数的理论可知，若向量组所含向量的个数大于向量的维数，则该向量组必然线性相关。于是只要求出该向量组的秩就可确定该向量组的最大无关组所含向量的个数，也就是需保留的气象观测站的个数。由于向量组中的其余向量都可由极大线性无关组线性表示，因此，可以使所得到的降水信息量足够大。

用 $i=1,2,\cdots,10$ 分别表示 1981 年，1982 年，…，1990 年。a_{ij}（$i=1,2,\cdots,10$，$j=1,2,\cdots,12$）表示第 j 个观测站第 i 年的观测值，记 $A=(a_{ij})_{10\times 12}$。

利用 MATLAB 可计算出矩阵 A 的秩 $r(A)=10$，且任意 10 个列向量组成的向量组都是极大线性无关组，例如，我们选取前 10 个气象观测站的观测值作为极大线性无关组，则第 11，12 这两个气象观测站的降水量数据完全可以由前 10 个气象观测站的数据表示。设 x_i（$i=1,2,\cdots,12$）表示第 i 个气象观测站或第 i 个观测站的观测值。则有

$$\begin{aligned}x_{11}=&0.0124x_1-0.756x_2+0.1639x_3+0.3191x_4-1.3075x_5\\&-1.0442x_6-0.1649x_7-0.8396x_8+1.679x_9+2.9379x_{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x_{12}=&1.4549x_1+10.6301x_2+9.8035x_3+6.3458x_4+18.9423x_5\\&+19.8061x_6-27.0196x_7+5.868x_8-15.5581x_9-26.9397x_{10}\end{aligned}$$

到目前为止，问题似乎已经完全解决了，可其实不然，因为如果上述观测站的数据不是 10 年，而是超过 12 年，则此时向量的维数大于向量组所含的向量个数，这样的向量组未必线性相关。故上述的解法不具有一般性，下面我们考虑一般的解法，首先，我们利用已有的 12 个气象观测站的数据进行模糊聚类分析，最后确定从哪几类中去掉几个观测站。

（1）建立模糊集合

设 A_j（这里我们仍用普通集合表示）表示第 j 个观测站的降水量信息（$j=1,2,\cdots,12$），我们利用模糊数学建立隶属函数：

$$\mu_{A_j}(x)=e^{-\left(\frac{x-a_j}{b_j}\right)^2}$$

其中 $a_j=\dfrac{\sum_{i=1}^{10}a_{ij}}{10}$，$b_j=\sqrt{\dfrac{1}{9}\sum_{i=1}^{10}(a_{ij}-a_j)^2}$ 。

利用 MATLAB 程序可以求得 a_j,b_j（$j=1,2,\cdots,12$）的值分别见表 4，表 5。

表 4　均值 a_j（$j=1,2,\cdots,12$）的值

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
291.98	311.77	320.32	342.28	292.22	315.15	343.99	303.71	312.16	299.47	310.72	391.89

表 5　均值 b_j（$j=1,2,\cdots,12$）的值

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
100.25	80.93	108.24	63.97	94.1	94.2	38.05	85.07	109.4	57.25	86.52	36.83

（2）利用格贴近度建立模糊相似矩阵

令

$$r_{ij}=e^{-\left(\frac{a_j-a_i}{b_i+b_j}\right)^2}\text{，}(i,j=1,2,\cdots,12)$$

求模糊相似矩阵 $R=(r_{ij})_{12\times12}$，具体求解结果略。

（3）求 R 的传递闭包

求得 R^4 是传递闭包，也就是所求的等价矩阵。这里传递闭包的结果略。

取 $\lambda=0.998$，进行聚类，可以把观测站分为 4 类：

$$\{x_1,x_5\}\cup\{x_2,x_3,x_6,x_8,x_9,x_{10},x_{11}\}\cup\{x_4,x_7\}\cup\{x_{12}\}$$

上述分类具有明显的意义，x_1,x_5 属于该地区 10 年中平均降水量偏低的观测站，x_4,x_7 属于该地区 10 年平均降水量偏高的观测站，x_{12} 是平均降水量最大的观测站，而

其余观测站属于中间水平。

（4）选择保留观测站的准则

显然，去掉的观测站越少，则保留的信息量越大。为此，我们考虑在去掉的观测站数目确定的条件下，使得信息量最大的准则。由于该地区的观测站分为 4 类，且第 4 类只含有一个观测站，因此，我们从前 3 类中各去掉一个观测站，我们的准则如下：

$$\min err = \sum_{i=1}^{10} (\bar{d}_{i3} - \bar{d}_i)^2$$

其中，$\bar{d}_i$ 表示该地区第 i 年的平均降水量，$\bar{d}_{i3}$ 表示该地区去掉 3 各观测站以后第 i 年的平均降水量。利用 MATLAB 软件，我们计算了 28 组不同的方案（表 7），求得满足上述准则应去掉的观测站为：x_5, x_6, x_7，此时年平均降水量曲线如图 1 所示，二者很接近。

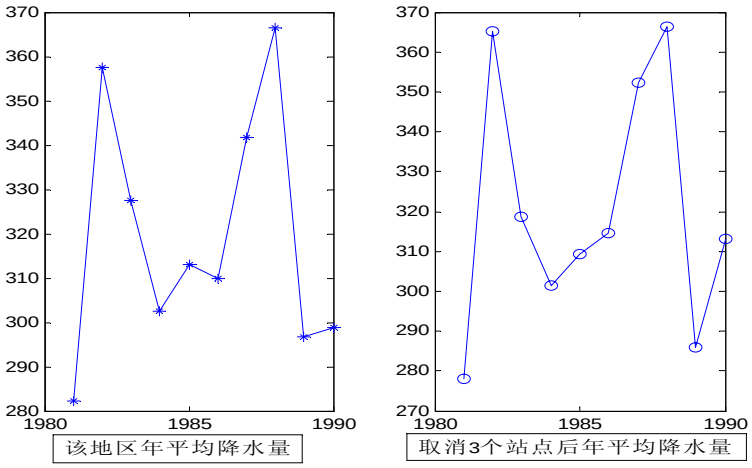


图 3　年降水量比较示意图

表 6　前 3 类各取消一个站点的各方案的误差平方和

取消站点编号			*err*	取消站点编号			*err*
1	4	2	1.71E+03	5	4	2	3.36E+03
1	4	3	1.30E+03	5	4	3	2.27E+03
1	4	6	2.03E+03	5	4	6	1.14E+03
1	4	8	2.94E+03	5	4	8	3.26E+03
1	4	9	2.29E+03	5	4	9	2.04E+03
1	4	10	1.94E+03	5	4	10	4.08E+03
1	4	11	1.49E+03	5	4	11	2.39E+03
1	7	2	1.29E+03	5	7	2	2.51E+03

1	7	3	1.82E+03	5	7	3	2.36E+03
1	7	6	1.95E+03	5	7	6	6.26E+02
1	7	8	1.53E+03	5	7	8	1.42E+03
1	7	9	1.65E+03	5	7	9	9.72E+02
1	7	10	1.11E+03	5	7	10	2.81E+03
1	7	11	1.05E+03	5	7	11	1.51E+03

（5）求解的 MATLAB 程序如下：

i）求模糊相似矩阵的 MATLAB 程序

```
a=[276.2   324.5   158.6   412.5   292.8   258.4   334.1   303.2   292.9   243.2   159.7   331.2
251.5   287.3   349.5   297.4   227.8   453.6   321.5   451.0   466.2   307.5   421.1   455.1
192.7   433.2   289.9   366.3   466.2   239.1   357.4   219.7   245.7   411.1   357.0   353.2
246.2   232.4   243.7   372.5   460.4   158.9   298.7   314.5   256.6   327.0   296.5   423.0
291.7   311.0   502.4   254.0   245.6   324.8   401.0   266.5   251.3   289.9   255.4   362.1
466.5   158.9   223.5   425.1   251.4   321.0   315.4   317.4   246.2   277.5   304.2   410.7
258.6   327.4   432.1   403.9   256.6   282.9   389.7   413.2   466.5   199.3   282.1   387.6
453.4   365.5   357.6   258.1   278.8   467.2   355.2   228.5   453.6   315.6   456.3   407.2
158.2   271.0   410.2   344.2   250.0   360.7   376.4   179.4   159.2   342.4   331.2   377.7
324.8   406.5   235.7   288.8   192.6   284.9   290.5   343.7   283.4   281.2   243.7   411.1];
mu=mean(a),sigma=std(a)
for i=1:12
    for j=1:12
        r(i,j)=exp(-(mu(j)-mu(i))^2/(sigma(i)+sigma(j))^2);
    end
end
r
save data1 r a
```

ii）矩阵合成的 MATLAB 函数

```
function rhat=hecheng(r);
n=length(r);
for i=1:n
    for j=1:n
        rhat(i,j)=max(min([r(i,:);r(:,j)']));
    end
end
```

iii）求模糊等价矩阵和聚类的程序

```
load data1
r1=hecheng(r)
r2=hecheng(r1)
```

```
r3=hecheng(r2)
bh=zeros(12);
bh(find(r2>0.998))=1
```

iv)计算表6的程序

编写计算误差平方和的函数如下：

```
function err=wucha(a,t);
b=a;b(:,t)=[];
mu1=mean(a,2);mu2=mean(b,2);
err=sum((mu1-mu2).^2);
```

计算28个方案的主程序如下：

```
load data1
ind1=[1,5];ind2=[2:3,6,8:11];ind3=[4,7];
so=[];
for i=1:length(ind1)
    for j=1:length(ind3)
        for k=1:length(ind2)
            t=[ind1(i),ind3(j),ind2(k)];
            err=wucha(a,t);
            so=[so;[t,err]];
        end
    end
end
so
tm=find(so(:,4)==min(so(:,4)));
shanchu=so(tm,1:3)
```

§3 模糊决策分析方法

模糊数学中有一个研究的热点问题就是“模糊决策”，它就是研究在模糊环境下或者模糊系统中进行决策的数学理论和方法。模糊决策的目标是把决策论域中的对象在模糊环境下进行排序，或按某些模糊限制条件从决策域中选择出最优对象。

3.1 模糊综合评价法

模糊综合评价方法，是应用模糊关系合成的原理，从多个因素(指标)对被评价事物隶属等级状况进行综合性评判的一种方法，其具体的步骤为:

(1) 确定被评判对象的因素论域U，$U=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$；

(2) 确定评语等级论域V，$V=(v_1,v_2,\cdots,v_n)$。通常评语有$V=$(很高，高，较高，…，较低，低，很低)；

(3) 进行单因素评判，建立模糊关系矩阵R

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}, \qquad 0\le r_{ij}\le 1$$

其中r_{ij}为U中因素u_i对于V中等级v_j的隶属关系；

(4) 确定评判因素权向量$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，A是U中各因素对被评事物的隶属关系，它取决于人们进行模糊综合评判时的着眼点，即根据评判时各因素的重要性分配权重；

(5) 选择评价的合成算子，将A与R合成得到$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$。

$$B=A\mathrm{O}R=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\,\mathrm{O}\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{pmatrix}$$

$$b_j=(a_1 \underset{*}{\bullet} r_{1j}) \underset{*}{+} (a_2 \underset{*}{\bullet} r_{2j}) \underset{*}{+} \cdots \underset{*}{+} (a_n \underset{*}{\bullet} r_{nj}), \quad j=1,2,\cdots,m$$

常用的模糊算子有:

① $M(\wedge,\vee)$，即用$\wedge$代替$\underset{*}{\bullet}$，用$\vee$代替$\underset{*}{+}$，式中$\wedge$为取小运算，$\vee$代表取大运算；

② $M(\bullet,\vee)$，即用实数乘法$\bullet$代替$\underset{*}{\bullet}$，用$\vee$代替$\underset{*}{+}$；

③ $M(\wedge,\oplus)$，即用$\wedge$代替$\underset{*}{\bullet}$，用$\oplus$代替$\underset{*}{+}$，其中$a\oplus b=\min(1,a+b)$；

④ $M(\bullet,\oplus)$，即用实数乘法$\bullet$代替$\underset{*}{\bullet}$，用$\oplus$代替$\underset{*}{+}$。

经过比较研究， $M(\bullet,\oplus)$ 对各因素按权数大小，统筹兼顾，综合考虑，比较合理。

(6) 对模糊综合评价结果 B 作分析处理。

★ 多目标模糊综合评价法建模实例

科技成果通常可用技术水平、技术难度、工作量、经济效益、社会效益等 5 个指标进行评价，等级分为一等、二等、三等、四等。某项科研成果经过评委会评定，得到单因素评判矩阵

$$R=\begin{pmatrix}0.35 & 0.39 & 0.22 & 0.04\\ 0.17 & 0.35 & 0.39 & 0.09\\ 0 & 0.30 & 0.44 & 0.26\\ 0.09 & 0.22 & 0.30 & 0.39\\ 0.43 & 0.35 & 0.22 & 0\end{pmatrix}$$

若为了评定作者的学术成就，取权数分配

$$A=(0.35,0.35,0.1,0.1,0.1)\ ,$$

综合评判为

$$B=A\mathrm{O}R=A=(0.35,0.35,0.1,0.1,0.1)\ \mathrm{O}\begin{pmatrix}0.35 & 0.39 & 0.22 & 0.04\\ 0.17 & 0.35 & 0.39 & 0.09\\ 0 & 0.30 & 0.44 & 0.26\\ 0.09 & 0.22 & 0.30 & 0.39\\ 0.43 & 0.35 & 0.22 & 0\end{pmatrix}$$

用 $M(\wedge,\vee)$ 算子计算得到 $B=(0.35,0.35,0.35,0.1)$ 成果仍模糊，成果评一、二、三等都行，无法分辨。

用 $M(\bullet,\vee)$ 算子，得

$$B=(0.12,0.14,0.14,0.04)$$

用 $M(\wedge,\oplus)$ 算子，得

$$B=(0.71,1,0.87,0.33)$$

用$M(\bullet,\oplus)$算子，得

$$B=(0.23,0.35,0.31,0.11)$$

由计算结果可见，用$M(\bullet,\oplus)$评价模型比较合理，成果应评为二等奖。

3.2　多目标模糊综合评价决策法

当被评价的对象有两个以上时，从多个对象中选择出一个最优的方法称为多目标模糊综合评价决策法。

评价的步骤：

① 对每个对象按上面多个目标（因素）进行模糊综合评价；

② 将模糊评语量化，计算各对象的优先度。假设模糊评价评语量化集（或评价尺度）为S，则各对象的优先度为：

$$N_k=B_kS^T=(B_k^1,B_k^2,\cdots,B_k^m)\cdot(S_1,S_2,\cdots,S_m)^T$$

★ 多目标模糊综合评价决策法建模实例

假定在上例中有两项科研成果，第一项科研成果为甲项，其模糊评价结果为

$$B_1=(0.23,0.5,0.31,0.11)$$

现对科研成果乙进行同样的模糊评价，其评价矩阵为

$$R_2=\begin{pmatrix}0.3 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0\\ 0.4 & 0.30 & 0.2 & 0.1\\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1\\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3\end{pmatrix}$$

各评价因素的权值分配为$A=(0.35,0.35,0.1,0.1,0.1)$

所以，综合评价为

$$B_2 = AOR_2 = A = (0.35,0.35,0.1,0.1,0.1)\ \mathrm{O}\begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.30 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$= (0.28,0.49,0.18,0.003)$$

下面将评语集量化：即（一等、二等、三等、四等）$= (0.4,0.3,0.2,0.1) = S$

所以 $N_1 = B_1 S^T = (0.23,0.5,0.31,0.11)\ (0.4,0.3,0.2,0.1)^T = 0.315$

$N_2 = B_2 S^T = = (0.28,0.49,0.18,0.003)\ (0.4,0.3,0.2,0.1)^T = 0.2953$

所以，$N_1 > N_2$，即项目甲优于项目乙。

例 16　某露天煤矿有五个边坡设计方案，其各项参数根据分析计算结果得到边坡设计方案的参数如下表所示。

表 7 设计方案数据表

项　　目	方案 I	方案 II	方案 III	方案 IV	方案 V
可采矿量(万吨)	4700	6700	5900	8800	7600
基建投资(万元)	5000	5500	5300	6800	6000
采矿成本(元/吨)	4.0	6.1	5.5	7.0	6.8
不稳定费用(万元)	30	50	40	200	160
净现值(万元)	1500	700	1000	50	100

据勘探该矿探明储量 8800 吨，开采总投资不超过 8000 万元，试作出各方案的优劣排序，选出最佳方案。

解　首先确定隶属函数：

（1）可采矿量的隶属函数

因为勘探的地质储量为 8800 吨，故可用资源的利用函数作为隶属函数

$$\mu_A(x) = \frac{x}{8800}$$

（2）投资约束是 8000 万元，所以 $\mu_B(x) = -\frac{x}{8000} + 1$。

（3）根据专家意见，采矿成本 $a_1 \le 5.5$ 元/吨为低成本，$a_2 = 8.0$ 元/吨为高成本，故

$$\mu_C(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a_1\\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1}, & a_1\le x\le a_2\\ 0, & a_2<x\end{cases}$$

（4）不稳定费用的隶属函数 $\mu_D(x)=1-\dfrac{x}{200}$。

（5）净现值的隶属函数

取上限 15（百万元），下限 0.5（百万元），采用线性隶属函数

$$\mu_E(x)=\frac{1}{14.5}(x-0.5)$$

根据各隶属函数计算出 5 个方案所对应的不同隶属度，见表 8。

表 8　隶属度表

项　　目	方案 I	方案 II	方案 III	方案 IV	方案 V
可采矿量	0.5341	0.7614	0.6705	1	0.8636
基建投资	0.3750	0.3125	0.3375	0.15	0.25
采矿成本	1	0.76	1	0.4	0.48
不稳定费用	0.85	0.75	0.8	0	0.2
净现值	1	0.4480	0.6552	0	0.0345

这样就决定了模糊关系矩阵

$$R=\begin{bmatrix}0.5341 & 0.7614 & 0.6705 & 1 & 0.8636\\ 0.3750 & 0.3125 & 0.3375 & 0.15 & 0.25\\ 1 & 0.76 & 1 & 0.4 & 0.48\\ 0.85 & 0.75 & 0.8 & 0 & 0.2\\ 1 & 0.4480 & 0.6552 & 0 & 0.0345\end{bmatrix}$$

根据专家评价，诸项目在决策中占的权重为 $A=(0.25, 0.20, 0.20, 0.10, 0.25)$，于是得诸方案的综合评价为

$$B=AR=(0.7435, 0.5919, 0.6789, 0.3600, 0.3905)$$

由此可知：方案 I 最佳，III 次之，IV 最差。

程序计算如下：

（1）首先编写函数文件 myfun.m 如下：

```
function f=myfun(x);
f(1,:)=x(1,:)/8800;
f(2,:)=1-x(2,:)/8000;
f(3,:)=0;
f(3,find(x(3,:)<=5.5))=1;
```

```
flag=find(x(3,:)>5.5 & x(3,:)<=8);
f(3,flag)=(8-x(3,flag))/2.5;
f(4,:)=1-x(4,:)/200;
f(5,:)=(x(5,:)-50)/1450;
```

（2）编写程序文件如下：

```
x=[4700  6700      5900      8800      7600
5000      5500      5300      6800      6000
4.0  6.1  5.5  7.0  6.8
30   50   40   200  160
1500      700  1000      50   100];
r=myfun(x);
a=[0.25,0.20,0.20,0.10,0.25];
b=a*r
```

3.3　多层次模糊综合评价模型的数学方法

3.3.1 多层次模糊综合评价模型数学方法的基本步骤

(1) 给出被评价的对象集合 $X\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_k\}$

(2) 确定因素集(亦称指标体系) $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$

若因素众多，往往将 $U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$ 按某些属性分成 s 个子集，$U_i=\{u_1^{(i)},u_2^{(i)},\cdots,u_{n_i}^{(i)}\}$，$i=1,2,\cdots s$，且满足条件：

① $\sum_{i=1}^{s}n_i=n$；　② $\bigcup_{i=1}^{s}U_i=U$；　③ $U_i\bigcap U_j=\phi, i\neq j$

(3) 确定评语集 $V=\{v_1,v_2,\cdots v_m\}$.

(4) 由因素集U_i与评语集V，可获得一个评价矩阵 $R_i=\begin{pmatrix} r_{11}^{(i)} & r_{12}^{(i)} & \cdots & r_{1m}^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n_i1}^{(i)} & r_{n_i2}^{(i)} & \cdots & r_{n_im}^{(i)} \end{pmatrix}$

(5) 对每一个U_i，分别作出综合决策。设U_i中的各因素权重的分配(称为模糊权向量)为 $A_i=(a_1^{(i)},a_2^{(i)},\cdots a_{n_i}^{(i)})$，其中 $\sum_{t=1}^{n_i}a_t^{(i)}=1$。

若 R_i 为单因素矩阵，则得到一级评价向量为:

$$A_i \mathrm{O} R_i = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{im}) \underline{\Delta} B_i, \quad i = 1,2,\cdots s$$

(6) 将每个 U_i 视为一个因素，记 $U = \{U_1, U_2, \cdots U_s\}$，于是 U 又是单因素集， U 的单因素判断矩阵为 $R = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sm} \end{pmatrix}$

每个 U_i 作为 U 的一部分，反映了 U 的某种属性，可以按他们的重要性给出权重分配

$$A = (a_1, a_2, \cdots, a_s)$$

于是得到二级模糊综合评价模型为:

$$B = A \mathrm{O} R = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$$

若每个子因素 $U_i\,(i = 1,2,\cdots, s)$ 仍有较多因素， 则可将 U_i 再划分，于是有三级或更高级模型。

3.3.2 多目标模糊综合评价决策法建模实例

科技成果模糊综合评价模型的建立及其有关参数的确定。

（1）科技成果综合评价的因素集(指标体系)的确定

根据科研成果的特点， 并经过专家调研， 设计以下一套综合评价指标体系.

- 科技成果综合评价 (A)
  - 科研效益 (U_1)
    - 直接经济效益 (u_{11})
    - 潜在经济效益 (u_{12})
    - 社会效益 (u_{13})
  - 科研水平 (U_2)
    - 学识水平 (u_{21})
    - 学术创新 (u_{22})
    - 技术水平 (u_{23})
    - 技术创新 (u_{24})
  - 科研投入 (U_3)
    - 科研规模 (u_{31})
    - 科研效率 (u_{32})

目标层(A)　　准则层(B)　　指标层(C)

图 3　科技成果综合评价层次结构

（2）科技成果的评语集的确定

在评价科技成果时，可以将其分为一定的等级. 在此， 从“专家打分”的角度把评价的等级分为“10 分”、“8 分”、“6 分”、“4 分”、“2 分”五个等级，因此评语集表示为：

$$V=\{10\text{分}，\ 8\text{分}，\ 6\text{分}，\ 4\text{分}，\ 2\text{分}\}.$$

（3）确定各指标u_i隶属于V中评语的隶属度r_{ij}.

采用评委会评分法确定隶属度r_{ij}.

若评委会有n个人，那么对某一科技成果， 指标层中某一指标隶属于V中某一评语的隶属度表示为:

$$r_{ij}=\frac{\text{对}C\text{中的某一因子}u_i\text{,全体评委中评其为}V\text{中第}j\text{个等级的人数}}{n}$$

由于C中的 9 个指标按科研效益U_1、科研水平U_2、科研投入U_3三个准则分成了三类，把每个类别中的元素作为一个整体来构造评价矩阵，如U_1(科研效益)中的“直接经济效益”、“潜在经济效益”、“社会效益”对评语集V中的五个等级而言，按上述的定义可得到3×5矩阵R_1，同样可得到R_2，R_3，即

$$R_1=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \end{bmatrix},$$

$$R_2=\begin{bmatrix} r_{11}^{'} & r_{12}^{'} & r_{13}^{'} & r_{14}^{'} & r_{15}^{'} \\ r_{21}^{'} & r_{22}^{'} & r_{23}^{'} & r_{24}^{'} & r_{25}^{'} \\ r_{31}^{'} & r_{32}^{'} & r_{33}^{'} & r_{34}^{'} & r_{35}^{'} \\ r_{41}^{'} & r_{42}^{'} & r_{43}^{'} & r_{44}^{'} & r_{45}^{'} \end{bmatrix}$$

$$R_3=\begin{bmatrix} r_{11}^{''} & r_{12}^{''} & r_{13}^{''} & r_{14}^{''} & r_{15}^{''} \\ r_{21}^{''} & r_{22}^{''} & r_{23}^{''} & r_{24}^{''} & r_{25}^{''} \end{bmatrix}$$

（4）权重a_k的确定

在（1）给出的综合评价体系中三大准则及 9 个指标中， 他们在综合评价中的重要程度是不一样的。地位重要的，应给予较大的权重；反之，应给出较小的权重。下文给出两种确定权重的实用方法。

① 频数统计法确定权重.

设因素集为$U=\{u_1,u_2,\cdots u_n\}$，请k $(k\geq 30)$位专家对各因素提出自己的权重分配。组织者根据回收的权重分配调查表，对每个因素u_i($i=1,2,\cdots n$)进行单因素的权重统计试验， 步骤如下:

i) 对因素u_i($i=1,2,\cdots n$)在它的权重a_{ij}($j=1,2,\cdots k$)中找出最大值M_i和最小值m_i.

ii) 适当选取正整数 p，利用公式$\dfrac{M_i-m_i}{p}$计算出把权重分成 p 组的组距， 并将权重从大到小分成 p 组.

iii) 计算落在每组内权重的频数与频率.

iv) 根据频数和频率分布情况，一般取最大频率所在分组的组中值为因素u_i的权重a_i ($i=1,2,\cdots n$)， 从而得到初始权重的向量为$A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， 再归一化处理，得权重向量为:

$$A=\left(\frac{a_1}{\sum_{i=1}^{n}a_i},\frac{a_2}{\sum_{i=1}^{n}a_i},\cdots,\frac{a_n}{\sum_{i=1}^{n}a_i}\right).$$

② 模糊层次分析法（AHP）确定权重

该法的基本原理是从（1）中给出的综合评价体系的层次结构出发，针对每个准则内的指标，运用专家的知识、智慧、信息和价值观，对同一层或同一个域的指标进行两两比较对比，并按 1—9 判断标度及含义构造判断矩阵$D=(d_{ij})_{n\times n}$，再由组织者计算比

较判断矩阵 D 的最大特征根 $\lambda_{\max}$，并由 $\lambda_{\max}$ 解特征方程：$Dx=\lambda_{\max}x$ 得到对应 $\lambda_{\max}$ 的特征向量 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，最后进行归一化处理，得到最后的评价指标权重向量：

$$A=\left(\frac{x_1}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\frac{x_2}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\cdots,\frac{x_n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right)$$

在确定最终的权重向量之前需要对判断矩阵 D 作一致性检验。

设由以上提供的任一方法所确定的权数向量为：

$$A=(a_1,a_2,a_3)\qquad A_1=(a_{11},a_{12},a_{13})\qquad A_2=(a_{21},a_{22},a_{23},a_{24})\qquad A_3=(a_{31},a_{32})$$

其中 A 表示科研效益 U_1、科研水平 U_2、科研投入 U_3 三个准则的权重向量；A_i 表示各准则 U_i（$i=1,2,3$）中的各指标的权重向量。

（5）科技成果的综合评价

$$B=A\ \mathrm{O}\ R=(a_1,a_2,a_3)\mathrm{O}\begin{pmatrix}A_1\mathrm{O}R_1\\A_2\mathrm{O}R_2\\A_3\mathrm{O}R_3\end{pmatrix}=(a_1,a_2,a_3)\mathrm{O}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}&b_{15}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}&b_{25}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}&b_{35}\end{pmatrix}$$

$$=(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5)$$

其中“O”取算子 $M(\bullet,\oplus)$：$\bullet$ 定义为 $a\cdot b=a\times b=ab$；$\oplus$ 定义为 $a\oplus b=(a+b)\wedge 1$。

对 B 进行归一化处理得：

$$B=\left(\frac{b_1}{\sum_{i=1}^{5}b_i},\frac{b_2}{\sum_{i=1}^{5}b_i},\cdots,\frac{b_5}{\sum_{i=1}^{n}b_i}\right)\underline{\Delta}(C_1\%,C_2\%,\cdots,C_5\%)$$

结果说明：对某科技成果，评委中有 $C_1\%$ 的人认为可得 10 分，有 $C_2\%$ 的人认为可得 8 分，有 $C_3\%$ 的人认为可得 6 分，有 $C_4\%$ 的人认为可得 4 分，有 $C_5\%$ 的人认为

可得 2 分。

进一步的， 把 10 分，8 分，6 分，4 分，2 分作为 5 个档次。令 $Y=(10,8,6,4,2)^T$，所以该科技成果的综合评价得分为：$Z=BOY$， “O”取算子 $M(\cdot,+)$ 得到：

$$Z=10C_1\%+8C_2\%+6C_3\%+4C_4\%+2C_5\%$$

3.4 模糊多属性决策方法

3.4.1 模糊多属性决策理论的描述

模糊多属性决策理论是在经典多属性决策理论基础上发展起来的，它可以描述为：给定一个方案集 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 和相应的每个方案的属性集（也称指标集）$C=(C_1,C_2,\cdots,C_n)$，并给定每种属性相对重要程度的权重集合 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$。把已知的属性指标、权重大小和数据结构都相应的表示成决策空间中的模糊子集或模糊数，得到模糊指标值矩阵，记为 $F=(f_{ij})_{m\times n}$。然后采用广义模糊合成算子对模糊权重向量 w 和模糊指标值矩阵 F 实施变换，得到模糊决策矩阵 D：$D=w\Theta F$， 对于 D 中的元素采用模糊折衷型决策方法对其进行排序， 以此来选出 $A_i\,(i=1,2,\cdots,m)$中的最优方案。

3.4.2 折衷型模糊多属性决策方法

（1）折衷型模糊决策的基本原理

折衷型模糊决策的基本原理是：从原始的样本数据出发，先虚拟模糊正理想和模糊负理想，其中模糊正理想是由每一个指标中模糊指标值的极大值构成；模糊负理想是由每一个指标中模糊指标值的极小值构成。然后采用加权欧氏距离的测度工具来计算各备选对象与模糊正理想和模糊负理想之间的距离。在此基础上，再计算各备选对象属于模糊正理想的隶属度，其方案优选的原则是，隶属度越大，该方案越理想。

（2）折衷型模糊决策的基本步骤

Step1：指标数据的三角形模糊数表达

定义14　记$F(R)$为R上的全体模糊集，设$M \in F(R)$。如果M的隶属度函数μ_M表示为

$$\mu_M(x)=\begin{cases}\dfrac{x-l}{m-l}, & x\in[l,m]\\ \dfrac{x-u}{m-u}, & x\in[m,u]\\ 0, & x<l \text{ 或 } x>u\end{cases}$$

其中 $l\le m\le u$，则称M为三角形模糊数，记为 $M=(l,m,u)=(m_L,m,m_R)$。

下面运用以上的定义将定性、定量指标以及权重数据统一量化为三角形模糊数.

1) 对于定性指标，可以将两极比例法改进为三角模糊数比例法。再利用三角模糊数比例法将定性指标转化为定量指标，其具体的转化形式见表9。

表9　定性指标向定量指标转化的三角模糊数比例法

属性 \ 量化值	(0,0,1)	(1,1,2)	(2,3,4)	(4,5,6)	(6,7,8)	(7,8,9)	(9,10,10)
成本型指标	最高	很高	高	一般	低	很低	最低
收益型指标	最低	很低	低	一般	高	很高	最高

2) 对于精确的定量指标值，也写成三角模糊数的形式。设a是一个具体的精确数，由三角模糊数的定义，则a表示成三角模糊数的形式为：

$$a=(a,a,a) \tag{1}$$

当所有的属性指标全部化为三角模糊数后，设此时得到的模糊指标矩阵为$F=(f_{ij})_{m\times n}$。

3）对于权重向量的三角模糊数表示

① 若权重是定量的形式给出的，则由公式（1）可表示为

$$w=\left[(w_1,w_1,w_1),(w_2,w_2,w_2),(w_3,w_3,w_3),(w_4,w_4,w_4),(w_5,w_5,w_5),(w_6,w_6,w_6)\right] \tag{2}$$

② 若权重是定性描述给出的，此时可以利用表3的转化方法将其转化为三角模糊

数的表达形式.

Step2：模糊指标矩阵 F 归一化处理

一般地，设有 N 个评价对象，对于第 j $(j=1,2,\cdots,5)$ 个评价指标而言，在 F 中对应有 N 个模糊指标值，记为 $x_i=(a_i,b_i,c_i)$， $(i=1,2,\cdots,N)$。将 x_i 进行归一化的具体公式如下:

① 若 x_i 是成本型指标对应的模糊指标值，则归一化公式为

$$y_i=\left(\frac{\min(a_i)}{c_i},\frac{\min(b_i)}{b_i},\frac{\min(c_i)}{a_i}\wedge 1\right) \tag{3}$$

② 若 $\tilde{x}_i$ 是收益型指标对应的模糊指标值，则化归公式为

$$y_i=\left(\frac{a_i}{\max(c_i)},\frac{b_i}{\max(b_i)},\frac{c_i}{\max(a_i)}\wedge 1\right) \tag{3'}$$

设归一化后的模糊指标矩阵 $R=(y_{ij})_{m\times n}$。

Step3：构造模糊决策矩阵

将归一化后的模糊指标矩阵 R 进行加权处理可得到模糊决策矩阵 $D=(r_{ij})_{m\times n}$，其中

$$r_{ij}=w\Theta y_{ij}\ (i=1,2,\cdots,N,\ j=1,2,\cdots,5)$$

这里我们采用普通的加权方式，即若 $w=(w^{(1)},w^{(2)},w^{(3)})$， $y_{ij}=(y_{ij}^{(1)},y_{ij}^{(2)},y_{ij}^{(3)})$，则

$$r_{ij}=w\Theta y_{ij}=(w^{(1)}y_{ij}^{(1)},w^{(2)}y_{ij}^{(2)},w^{(3)}y_{ij}^{(3)}) \tag{4}$$

Step4：确定模糊正理想 M^+ 与模糊负理想 M^-

设

$$M^+=(M_1^+,M_2^+,\cdots,M_{15}^+),\quad M^-=(M_1^-,M_2^-,\cdots,M_{15}^-) \tag{5}$$

其中分量 $M_j^+=\max\{r_{1j},r_{2j},\cdots,r_{nj}\}$ $(j=1,2,\cdots,15)$是模糊决策矩阵 D 中第 j 列的模

糊指标值所对应的模糊极大值；$M_j^- = \min\{r_{1j}, r_{2j}, \cdots, r_{mj}\}$（$j = 1, 2, \cdots, 15$）是模糊决策矩阵 D 中第 j 列的模糊指标值所对应的模糊极小值。

Step5：确定评价对象 i 与模糊正理想 M^+ 之间的距离 d_i^+

$$d_i^+ = \sqrt{\sum_{j=1}^{15}(r_{ij} - M_j^+)^2} \quad , \quad i = 1, 2 \cdots, N \tag{6}$$

Step6：确定评价对象 i 与模糊负理想 M^- 之间的距离 d_i^-

$$d_i^- = \sqrt{\sum_{j=1}^{15}(r_{ij} - M_j^-)^2} \quad , \quad i = 1, 2 \cdots, N \tag{7}$$

Step7：模糊优选决策

设评价对象 i 以隶属度 μ_i 从属于模糊正理想，则

$$\mu_i = \frac{d_i^-}{d_i^+ + d_i^-}, \quad i = 1, 2, \cdots, N \tag{8}$$

显然 $0 \le \mu_i \le 1$，若 A_i 与 M^+ 越接近，则 μ_i 越接近于 1。按隶属度 μ_i 从大到小进行排序。μ_i 越大，表示评价对象 i 越优。最后按隶属度的排序结果确定评价对象的优劣。

3.4.3 折衷型模糊决策方法建模实例

某市直属单位因工作需要，拟向社会公开招聘 8 名公务员，具体的招聘办法和程序如下：

（一）公开考试：凡是年龄不超过 30 周岁，大学专科以上学历，身体健康者均可报名参加考试，考试科目有：综合基础知识、专业知识和“行政职业能力测验”三个部分，每科满分为 100 分。根据考试总分的高低排序选出 16 人选择进入第二阶段的面试考核。

（二）面试考核：面试考核主要考核应聘人员的知识面、对问题的理解能力、应变能力、表达能力等综合素质。按照一定的标准，面试专家组对每个应聘人员的各个方面都给出一个等级评分，从高到低分成 A/B/C/D 四个等级，具体结果见表 10 所示。

现要求根据表 8 中的数据信息对 16 名应聘人员作出综合评价，选出 8 名作为录用的公务员。

表 10　招聘公务员笔试成绩，专家面试评分

应聘人员	笔试成绩	专家组对应聘者特长的等级评分			
		知识面	理解能力	应变能力	表达能力
人员 1	290	A	A	B	B
人员 2	288	A	B	A	C
人员 3	288	B	A	D	C
人员 4	285	A	B	B	B
人员 5	283	B	A	B	C
人员 6	283	B	D	A	B
人员 7	280	A	B	C	B
人员 8	280	B	A	A	C
人员 9	280	B	B	A	B
人员 10	280	D	B	A	C
人员 11	278	D	C	B	A
人员 12	277	A	B	C	A
人员 13	275	B	C	D	A
人员 14	275	D	B	A	B
人员 15	274	A	B	C	B
人员 16	273	B	A	B	C

（此题来源于 2004 高教社杯全国大学生数学建模竞赛 D 题——公务员招聘）

建模过程：

① 借鉴表 9 的思想，对于定性指标值 A，B，C，D，可以定义表 10 的量化标准将这些定性指标进行量化，其具体的量化形式见表 11。

表 11　定性指标量化标准

专家评分等级	A	B	C	D
量化模糊数	(85，90，100)	(75，80，85)	（60，70，75）	(50，55，60)

② 由表 11 和公式（1）把表 10 中的指标信息、权重信息化成三角形模糊数，得到

$$F=\begin{bmatrix}(290,290,290) & (85,90,100) & (85,90,100) & (75,80,85) & (75,80,85)\\ (288,288,288) & (85,90,100) & (75,80,85) & (85,90,100) & (65,70,75)\\ (288,288,288) & (75,80,85) & (85,90,100) & (50,60,65) & (65,70,75)\\ (285,285,285) & (85,90,100) & (75,80,85) & (75,80,85) & (75,80,85)\\ (283,283,283) & (75,80,85) & (85,90,100) & (75,80,85) & (65,70,75)\\ (283,283,283) & (75,80,85) & (50,60,65) & (85,90,100) & (75,80,85)\\ (280,280,280) & (85,90,100) & (75,80,85) & (65,70,75) & (75,80,85)\\ (280,280,280) & (75,80,85) & (85,90,100) & (85,90,100) & (65,70,75)\\ (280,280,280) & (75,80,85) & (75,80,85) & (85,90,100) & (75,80,85)\\ (280,280,280) & (50,60,65) & (75,80,85) & (85,90,100) & (65,70,75)\\ (278,278,278) & (50,60,65) & (65,70,75) & (75,80,85) & (85,90,100)\\ (277,277,277) & (85,90,100) & (75,80,85) & (65,70,75) & (85,90,100)\\ (275,275,275) & (75,80,85) & (65,70,75) & (50,60,65) & (85,90,100)\\ (275,275,275) & (50,60,65) & (75,80,85) & (85,90,100) & (75,80,85)\\ (274,274,274) & (85,90,100) & (75,80,85) & (65,70,75) & (75,80,85)\\ (273,273,273) & (75,80,85) & (85,90,100) & (75,80,85) & (65,70,75)\end{bmatrix}$$

$$W=\left[(0.5,0.5,0.5),(0.125,0.125,0.125)(0.125,0.125,0.125),(0.125,0.125,0.125),(0.125,0.125,0.125)\right]$$

③ 由公式（3’）和（4）将 F 中的数据进行归一加权化，得到模糊决策矩阵 D 。

④ 由公式（5）确定出模糊正理想与模糊负理想

$$M^{+}=[(0.5,0.5,0.5),(0.1063,0.125,0.125),(0.1063,0.125,0.125),(0.1063,0.125,0.125),(0.1063,0.125,0.125)]$$

$$M^{-}=[(0.4707,0.4707,0.4707),(0.0625,0.0764,0.0882),(0.0625,0.0764,0.0882),(0.0625,0.0764,0.0882),(0.075,0.0972,0.125)]$$

⑤ 模糊优选决策

由公式（6）～（8），可求出相应的 d_i^{+} ， d_i^{-} ， $\mu_i\,(i=1,2,\cdots,16)$，结果如表 12。

表 12　计算结果数据表

人员编号	模糊正理想 d_i^{+}	模糊负理想 d_i^{-}	隶属度 μ_i
1	0.0264	0.1338	0.8351
2	0.0462	0.1296	0.7373
3	0.0881	0.1057	0.5454
4	0.0356	0.1205	0.7718
5	0.0537	0.1166	0.6846
6	0.0822	0.103	0.5559
7	0.0578	0.1099	0.6555
8	0.0547	0.1234	0.693
9	0.044	0.117	0.7265
10	0.0928	0.098	0.5135

11	0.0949	0.0863	0.4762
12	0.06	0.114	0.655
13	0.0987	0.0852	0.4634
14	0.0913	0.0987	0.5195
15	0.0688	0.108	0.6109
16	0.0709	0.1127	0.6139

由以上结果可知，16 个人的综合水平的高低排序为:

$$\mu_1 > \mu_4 > \mu_2 > \mu_9 > \mu_8 > \mu_5 > \mu_7 > \mu_{12} > \mu_{16} > \mu_{15} > \mu_6 > \mu_3 > \mu_{14} > \mu_{10} > \mu_{11} > \mu_{13}$$

因此被选种的 8 个人员是人员 1、4、2、9、8、5、7、12。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
%把表 3 中的数据复制到纯文本文件 mohu.txt 中，然后把 A 替换成 85 90 100，
%B 替换成 75 80 85，C 替换成 60 70 75，D 替换成 50 55 60
clc,clear
load mohu.txt
sj=[repmat(mohu(:,1),1,3),mohu(:,2:end)];
%首先进行归一化处理
n=size(sj,2)/3;m=size(sj,1);
w=[0.5*ones(1,3),0.125*ones(1,12)];
w=repmat(w,m,1);
y=[];
for i=1:n
    tm=sj(:,3*i-2:3*i);
    max_t=max(tm);
    max_t=repmat(max_t,m,1);
    max_t=max_t(:,3:-1:1);
    yt=tm./max_t;yt(:,3)=min([yt(:,3)';ones(1,m)]);
    y=[y,yt];
end
%下面求模糊决策矩阵
r=[];
for i=1:n
    tm1=y(:,3*i-2:3*i);tm2=w(:,3*i-2:3*i);
    r=[r,tm1.*tm2];
end
%求 M＋、M－和距离
mplus=max(r);mminus=min(r);
```

```
dplus=dist(mplus,r');dminus=dist(mminus,r');
%求隶属度
mu=dminus./(dplus+dminus);
[mu_sort,ind]=sort(mu,'descend')
```

习题二十二

1. （工程评标问题）某建设单位组织一项工程项目的招标，现组建成评标专家组对 4 个投标单位的标书进行评标。4 个标书的指标信息见表 13，其中前三个指标信息是各投标单位给定的精确数据，后三个指标信息是评标专家组经考察后的定性结论。 请你帮评标专家组设计一个工程评标模型，以确定最后中标单位。

表 13　　各投标单位基本信息表

指标 / 单位	投标报价 (万元)	工期 (月)	主材用料 (万元)	施工方案	质量业绩	企业信誉度
A_1	480	15	192	很好	好	高
A_2	490	14	196	好	一般	一般
A_3	501	14	204	好	好	很高
A_4	475	18	190	一般	很好	一般
权重	0.3	0.1	0.1	0.2	0.1	0.2

第二十三章　现代优化算法

现代优化算法是 80 年代初兴起的启发式算法。这些算法包括禁忌搜索（tabu search），模拟退火（simulated annealing），遗传算法（genetic algorithms），人工神经网络（neural networks）。它们主要用于解决大量的实际应用问题。目前，这些算法在理论和实际应用方面得到了较大的发展。无论这些算法是怎样产生的，它们有一个共同的目标－求 NP-hard 组合优化问题的全局最优解。虽然有这些目标，但 NP-hard 理论限制它们只能以启发式的算法去求解实际问题。

启发式算法包含的算法很多，例如解决复杂优化问题的蚁群算法（Ant Colony Algorithms）。有些启发式算法是根据实际问题而产生的，如解空间分解、解空间的限制等；另一类算法是集成算法，这些算法是诸多启发式算法的合成。

现代优化算法解决组合优化问题，如 TSP（Traveling Salesman Problem）问题，QAP（Quadratic Assignment Problem）问题，JSP（Job-shop Scheduling Problem）问题等效果很好。

§1　模拟退火算法

1.1　算法简介

模拟退火算法得益于材料的统计力学的研究成果。统计力学表明材料中粒子的不同结构对应于粒子的不同能量水平。在高温条件下，粒子的能量较高，可以自由运动和重新排列。在低温条件下，粒子能量较低。如果从高温开始，非常缓慢地降温（这个过程被称为退火），粒子就可以在每个温度下达到热平衡。当系统完全被冷却时，最终形成处于低能状态的晶体。

如果用粒子的能量定义材料的状态，Metropolis 算法用一个简单的数学模型描述了退火过程。假设材料在状态 i 之下的能量为 $E(i)$，那么材料在温度 T 时从状态 i 进入状态 j 就遵循如下规律：

（1）如果 $E(j) \le E(i)$，接受该状态被转换。

（2）如果 $E(j) > E(i)$，则状态转换以如下概率被接受：

$$e^{\frac{E(i)-E(j)}{KT}}$$

其中 K 是物理学中的波尔兹曼常数，T 是材料温度。

在某一个特定温度下，进行了充分的转换之后，材料将达到热平衡。这时材料处于状态 i 的概率满足波尔兹曼分布：

$$P_T(x=i)=\frac{e^{-\frac{E(i)}{KT}}}{\sum_{j\in S} e^{-\frac{E(j)}{KT}}}$$

其中 x 表示材料当前状态的随机变量，S 表示状态空间集合。

显然

$$\lim_{T\to\infty}\frac{e^{-\frac{E(i)}{KT}}}{\sum_{j\in S} e^{-\frac{E(j)}{KT}}}=\frac{1}{|S|}$$

其中$|S|$表示集合S中状态的数量。这表明所有状态在高温下具有相同的概率。而当温度下降时，

$$\lim_{T\to 0}\frac{e^{-\frac{E(i)-E_{\min}}{KT}}}{\sum_{j\in S}e^{-\frac{E(j)-E_{\min}}{KT}}}=\lim_{T\to 0}\frac{e^{-\frac{E(i)-E_{\min}}{KT}}}{\sum_{j\in S_{\min}}e^{-\frac{E(j)-E_{\min}}{KT}}+\sum_{j\notin S_{\min}}e^{-\frac{E(j)-E_{\min}}{KT}}}$$

$$=\lim_{T\to 0}\frac{e^{-\frac{E(i)-E_{\min}}{KT}}}{\sum_{j\in S_{\min}}e^{-\frac{E(j)-E_{\min}}{KT}}}=\begin{cases}\dfrac{1}{|S_{\min}|} & 若i\in S_{\min}\\ 0 & 其它\end{cases}$$

其中$E_{\min}=\min_{j\in S}E(j)$且$S_{\min}=\{i\mid E(i)=E_{\min}\}$。

上式表明当温度降至很低时，材料会以很大概率进入最小能量状态。

假定我们要解决的问题是一个寻找最小值的优化问题。将物理学中模拟退火的思想应用于优化问题就可以得到模拟退火寻优方法。

考虑这样一个组合优化问题：优化函数为$f:x\to R^{+}$，其中$x\in S$，它表示优化问题的一个可行解，$R^{+}=\{y\mid y\in R,y>0\}$，$S$表示函数的定义域。$N(x)\subseteq S$表示$x$的一个邻域集合。

首先给定一个初始温度T_0和该优化问题的一个初始解$x(0)$，并由$x(0)$生成下一个解$x'\in N(x(0))$，是否接受x'作为一个新解$x(1)$依赖于下面概率：

$$P(x(0)\to x')=\begin{cases}1 & 若f(x')<f(x(0))\\ e^{-\frac{f(x')-f(x(0))}{T_0}} & 其它\end{cases}$$

换句话说，如果生成的解x'的函数值比前一个解的函数值更小，则接受$x(1)=x'$作为一个新解。否则以概率$e^{-\frac{f(x')-f(x(0))}{T_0}}$接受$x'$作为一个新解。

泛泛地说，对于某一个温度T_i和该优化问题的一个解$x(k)$，可以生成x'。接受x'作为下一个新解$x(k+1)$的概率为：

$$P(x(k)\to x')=\begin{cases}1 & 若f(x')<f(x(k))\\ e^{-\frac{f(x')-f(x(k))}{T_0}} & 其它\end{cases}\qquad(1)$$

在温度T_i下，经过很多次的转移之后，降低温度T_i，得到$T_{i+1}<T_i$。在T_{i+1}下重复上述过程。因此整个优化过程就是不断寻找新解和缓慢降温的交替过程。最终的解是对该问题寻优的结果。

我们注意到，在每个T_i下，所得到的一个新状态$x(k+1)$完全依赖于前一个状态$x(k)$，可以和前面的状态$x(0),\cdots,x(k-1)$无关，因此这是一个马尔可夫过程。使用马尔可夫过程对上述模拟退火的步骤进行分析，结果表明：从任何一个状态$x(k)$生成x'的概率，在$N(x(k))$中是均匀分布的，且新状态x'被接受的概率满足式（1），那么经过有限次的转换，在温度T_i下的平衡态x_i的分布由下式给出：

$$P_i(T_i)=\frac{e^{-\frac{f(x_i)}{T}}}{\sum_{j\in S}e^{-\frac{f(x_i)}{T_i}}} \qquad (2)$$

当温度T降为 0 时，x_i的分布为：

$$P_i^*=\begin{cases}\dfrac{1}{|S_{\min}|} & \text{若} x_i\in S_{\min}\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

并且

$$\sum_{x_i\in S_{\min}}P_i^*=1$$

这说明如果温度下降十分缓慢，而在每个温度都有足够多次的状态转移，使之在每一个温度下达到热平衡，则全局最优解将以概率 1 被找到。因此可以说模拟退火算法可以找到全局最优解。

在模拟退火算法中应注意以下问题：

（1）理论上，降温过程要足够缓慢，要使得在每一温度下达到热平衡。但在计算机实现中，如果降温速度过缓，所得到的解的性能会较为令人满意，但是算法会太慢，相对于简单的搜索算法不具有明显优势。如果降温速度过快，很可能最终得不到全局最优解。因此使用时要综合考虑解的性能和算法速度，在两者之间采取一种折衷。

（2）要确定在每一温度下状态转换的结束准则。实际操作可以考虑当连续m次的转换过程没有使状态发生变化时结束该温度下的状态转换。最终温度的确定可以提前定为一个较小的值T_e，或连续几个温度下转换过程没有使状态发生变化算法就结束。

（3）选择初始温度和确定某个可行解的邻域的方法也要恰当。

1.2　应用举例

例　已知敌方 100 个目标的经度、纬度如表 1 所示。

表 1　经度和纬度数据表

经度	纬度	经度	纬度	经度	纬度	经度	纬度
53.7121	15.3046	51.1758	0.0322	46.3253	28.2753	30.3313	6.9348
56.5432	21.4188	10.8198	16.2529	22.7891	23.1045	10.1584	12.4819
20.1050	15.4562	1.9451	0.2057	26.4951	22.1221	31.4847	8.9640
26.2418	18.1760	44.0356	13.5401	28.9836	25.9879	38.4722	20.1731
28.2694	29.0011	32.1910	5.8699	36.4863	29.7284	0.9718	28.1477
8.9586	24.6635	16.5618	23.6143	10.5597	15.1178	50.2111	10.2944
8.1519	9.5325	22.1075	18.5569	0.1215	18.8726	48.2077	16.8889
31.9499	17.6309	0.7732	0.4656	47.4134	23.7783	41.8671	3.5667
43.5474	3.9061	53.3524	26.7256	30.8165	13.4595	27.7133	5.0706
23.9222	7.6306	51.9612	22.8511	12.7938	15.7307	4.9568	8.3669
21.5051	24.0909	15.2548	27.2111	6.2070	5.1442	49.2430	16.7044
17.1168	20.0354	34.1688	22.7571	9.4402	3.9200	11.5812	14.5677
52.1181	0.4088	9.5559	11.4219	24.4509	6.5634	26.7213	28.5667
37.5848	16.8474	35.6619	9.9333	24.4654	3.1644	0.7775	6.9576
14.4703	13.6368	19.8660	15.1224	3.1616	4.2428	18.5245	14.3598
58.6849	27.1485	39.5168	16.9371	56.5089	13.7090	52.5211	15.7957
38.4300	8.4648	51.8181	23.0159	8.9983	23.6440	50.1156	23.7816
13.7909	1.9510	34.0574	23.3960	23.0624	8.4319	19.9857	5.7902

40.8801	14.2978	58.8289	14.5229	18.6635	6.7436	52.8423	27.2880
39.9494	29.5114	47.5099	24.0664	10.1121	27.2662	28.7812	27.6659
8.0831	27.6705	9.1556	14.1304	53.7989	0.2199	33.6490	0.3980
1.3496	16.8359	49.9816	6.0828	19.3635	17.6622	36.9545	23.0265
15.7320	19.5697	11.5118	17.3884	44.0398	16.2635	39.7139	28.4203
6.9909	23.1804	38.3392	19.9950	24.6543	19.6057	36.9980	24.3992
4.1591	3.1853	40.1400	20.3030	23.9876	9.4030	41.1084	27.7149

我方有一个基地，经度和纬度为（70,40）。假设我方飞机的速度为 1000 公里/小时。我方派一架飞机从基地出发，侦察完敌方所有目标，再返回原来的基地。在敌方每一目标点的侦察时间不计，求该架飞机所花费的时间（假设我方飞机巡航时间可以充分长）。

这是一个旅行商问题。我们依次给基地编号为 1，敌方目标依次编号为 2，3，…，101，最后我方基地再重复编号为 102（这样便于程序中计算）。距离矩阵 $D=(d_{ij})_{102\times 102}$，其中 d_{ij} 表示表示 i,j 两点的距离，$i,j=1,2,\cdots,102$，这里 D 为实对称矩阵。则问题是求一个从点 1 出发，走遍所有中间点，到达点 102 的一个最短路径。

上面问题中给定的是地理坐标（经度和纬度），我们必须求两点间的实际距离。设 A,B 两点的地理坐标分别为 (x_1,y_1)，(x_2,y_2)，过 A,B 两点的大圆的劣弧长即为两点的实际距离。以地心为坐标原点 O，以赤道平面为 XOY 平面，以 0 度经线圈所在的平面为 XOZ 平面建立三维直角坐标系。则 A,B 两点的直角坐标分别为：

$$A(R\cos x_1\cos y_1, R\sin x_1\cos y_1, R\sin y_1)$$

$$B(R\cos x_2\cos y_2, R\sin x_2\cos y_2, R\sin y_2)$$

其中 $R=6370$ 为地球半径。

A,B 两点的实际距离

$$d=R\arccos\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|}\right),$$

化简得

$$d=R\arccos[\cos(x_1-x_2)\cos y_1\cos y_2+\sin y_1\sin y_2]。$$

求解的模拟退火算法描述如下：

（1）解空间

解空间 S 可表为{1,2,…,101,102 }的所有固定起点和终点的循环排列集合，即

$$S=\{(\pi_1,\cdots,\pi_{102})\mid \pi_1=1,(\pi_2,\cdots,\pi_{101})\text{为}\{2,3,\cdots,101\}\text{的循环排列},\pi_{102}=102\}$$

其中每一个循环排列表示侦察 100 个目标的一个回路，$\pi_i=j$ 表示在第 i 次侦察 j 点，初始解可选为 $(1,2,\cdots,102)$，本文中我们使用 Monte Carlo 方法求得一个较好的初始解。

（2）目标函数

此时的目标函数为侦察所有目标的路径长度或称代价函数。我们要求

$$\min f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{102})=\sum_{i=1}^{101}d_{\pi_i\pi_{i+1}}$$

而一次迭代由下列三步构成：

（3）新解的产生

① 2 变换法

任选序号 u,v（$u<v$）交换u与v之间的顺序，此时的新路径为：

$$\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_v\pi_{v+1}\cdots\pi_{u+1}\pi_u\pi_{v+1}\cdots\pi_{102}$$

② 3 变换法

任选序号u,v和w，将u和v之间的路径插到w之后，对应的新路径为（设$u<v<w$）

$$\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_{v+1}\cdots\pi_w\pi_u\cdots\pi_v\pi_{w+1}\cdots\pi_{102}$$

（4）代价函数差

对于 2 变换法，路径差可表示为

$$\Delta f=(d_{\pi_{u-1}\pi_v}+d_{\pi_u\pi_{v+1}})-(d_{\pi_{u-1}\pi_u}+d_{\pi_v\pi_{v+1}})$$

（5）接受准则

$$P=\begin{cases}1 & \Delta f<0\\ \exp(-\Delta f/T) & \Delta f\geq 0\end{cases}$$

如果$\Delta f<0$，则接受新的路径。否则，以概率$\exp(-\Delta f/T)$接受新的路径，即若$\exp(-\Delta f/T)$大于 0 到 1 之间的随机数则接受。

（6）降温

利用选定的降温系数α进行降温即：$T\leftarrow\alpha T$，得到新的温度，这里我们取$\alpha=0.999$。

（7）结束条件

用选定的终止温度$e=10^{-30}$，判断退火过程是否结束。若$T<e$，算法结束，输出当前状态。

我们编写如下的 matlab 程序如下：

```
clc,clear
load sj.txt      %加载敌方 100 个目标的数据，数据按照表格中的位置保存在纯文本文件 sj.txt 中
x=sj(:,1:2:8);x=x(:);
y=sj(:,2:2:8);y=y(:);
sj=[x y];
d1=[70,40];
sj=[d1;sj;d1];
sj=sj*pi/180;
%距离矩阵 d
d=zeros(102);
for i=1:101
    for j=i+1:102
        temp=cos(sj(i,1)-sj(j,1))*cos(sj(i,2))*cos(sj(j,2))+sin(sj(i,2))*sin(sj(j,2));
        d(i,j)=6370*acos(temp);
    end
end
d=d+d';
S0=[];Sum=inf;
rand('state',sum(clock));
for j=1:1000
    S=[1 1+randperm(100),102];
    temp=0;
```

```
        for i=1:101
            temp=temp+d(S(i),S(i+1));
        end
        if temp<Sum
            S0=S;Sum=temp;
        end
end
e=0.1^30;L=20000;at=0.999;T=1;
%退火过程
for k=1:L
    %产生新解
c=2+floor(100*rand(1,2));
c=sort(c);
c1=c(1);c2=c(2);
   %计算代价函数值
   df=d(S0(c1-1),S0(c2))+d(S0(c1),S0(c2+1))-d(S0(c1-1),S0(c1))-d(S0(c2),S0(c2+1));
    %接受准则
   if df<0
   S0=[S0(1:c1-1),S0(c2:-1:c1),S0(c2+1:102)];
   Sum=Sum+df;
   elseif exp(-df/T)>rand(1)
   S0=[S0(1:c1-1),S0(c2:-1:c1),S0(c2+1:102)];
   Sum=Sum+df;
   end
   T=T*at;
    if T<e
        break;
    end
end
 % 输出巡航路径及路径长度
S0,Sum
```

计算结果为 44 小时左右。其中的一个巡航路径如图 1 所示。

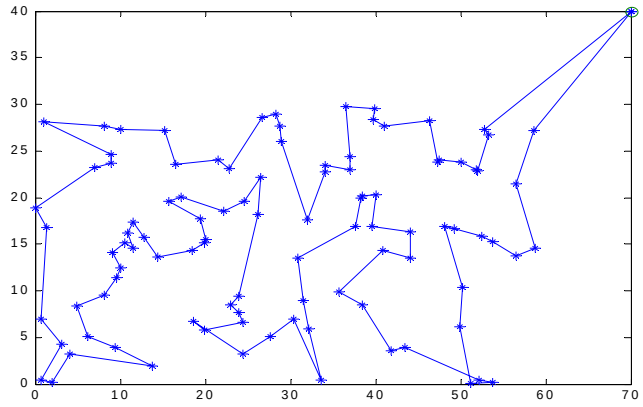


图 1　模拟退火算法求得的巡航路径示意图

§2　遗传算法

2.1　遗传算法简介

遗传算法（Genetic Algorithms，简称 GA）是一种基于自然选择原理和自然遗传机制的搜索（寻优）算法，它是模拟自然界中的生命进化机制，在人工系统中实现特定目标的优化。遗传算法的实质是通过群体搜索技术，根据适者生存的原则逐代进化，最终得到最优解或准最优解。它必须做以下操作：初始群体的产生、求每一个体的适应度、根据适者生存的原则选择优良个体、被选出的优良个体两两配对，通过随机交叉其染色体的基因并随机变异某些染色体的基因后生成下一代群体，按此方法使群体逐代进化，直到满足进化终止条件。其实现方法如下：

（1） 根据具体问题确定可行解域，确定一种编码方法，能用数值串或字符串表示可行解域的每一解。

（2） 对每一解应有一个度量好坏的依据，它用一函数表示，叫做适应度函数，适应度函数应为非负函数。

（3） 确定进化参数群体规模 M 、交叉概率 p_c、变异概率 p_m、进化终止条件。

为便于计算，一般来说，每一代群体的个体数目都取相等。群体规模越大、越容易找到最优解，但由于受到计算机的运算能力的限制，群体规模越大，计算所需要的时间也相应的增加。进化终止条件指的是当进化到什么时候结束，它可以设定到某一代进化结束，也可能根据找出近似最优是否满足精度要求来确定。表 1 列出了生物遗传概念在遗传算法中的对应关系。

表 2 生物遗传概念在遗传算法中的对应关系

生物遗传概念	遗传算法中的作用
适者生存	算法停止时，最优目标值的解有最大的可能被留住
个体	解
染色体	解的编码
基因	解中每一分量的特征
适应性	适应度函数值
种群	根据适应度函数值选取的一组解
交配	通过交配原则产生一组新解的过程
变异	编码的某一分量发生变化的过程

2.2 模型及算法

我们用遗传算法研究 3.1.2 中的问题。

求解的遗传算法的参数设定如下：

种群大小：$M = 50$

最大代数：$G = 1000$

交叉率：$p_c = 1$，交叉概率为 1 能保证种群的充分进化。

变异率：$p_m = 0.1$， 一般而言，变异发生的可能性较小。

（1） 编码策略

采用十进制编码，用随机数列 $\omega_1\omega_2\ldots\omega_{102}$ 作为染色体，其中 $0<\omega_i<1$（$i=2,3,\cdots,101$），$\omega_1=0$，$\omega_{102}=1$；每一个随机序列都和种群中的一个个体相对应，例如一个 9 城市问题的一个染色体为

[0.23，0.82，0.45，0.74，0.87，0.11，0.56，0.69，0.78]

其中编码位置 i 代表城市 i，位置 i 的随机数表示城市 i 在巡回中的顺序，我们将这些随机数按升序排列得到如下巡回：

6－1－3－7－8－4－9－2－5

（2） 初始种群

本文中我们先利用经典的近似算法—改良圈算法求得一个较好的初始种群。即对于初始圈 $C=\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_u\pi_{u+1}\cdots\pi_{v-1}\pi_v\pi_{v+1}\cdots\pi_{102}$，$2\le u<v\le 101$，$2\le\pi_u<\pi_v\le 101$，交换 u 与 v 之间的顺序，此时的新路径为：

$$\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_v\pi_{v-1}\cdots\pi_{u+1}\pi_u\pi_{v+1}\cdots\pi_{102}$$

记 $\Delta f=(d_{\pi_{u-1}\pi_v}+d_{\pi_u\pi_{v+1}})-(d_{\pi_{u-1}\pi_u}+d_{\pi_v\pi_{v+1}})$，若 $\Delta f<0$，则以新的路经修改旧的路经，直到不能修改为止。

（3） 目标函数

目标函数为侦察所有目标的路径长度，适应度函数就取为目标函数。我们要求

$$\min f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{102})=\sum_{i=1}^{101}d_{\pi_i\pi_{i+1}}$$

（4） 交叉操作

我们的交叉操作采用单点交叉。设计如下，对于选定的两个父代个体 $f_1=\omega_1\omega_2\ldots\omega_{102}$，$f_2=\omega'_1\omega'_2\ldots\omega'_{102}$，我们随机地选取第 t 个基因处为交叉点，则经过交叉运算后得到的子代编码为 s_1 和 s_2，s_1 的基因由 f_1 的前 t 个基因和 f_2 的后 $102-t$ 个基因构成，s_2 的基因由 f_2 的前 t 个基因和 f_1 的后 $102-t$ 个基因构成，例如：

$f_1=[0,\ \ 0.14,\ \ 0.25,\ \ 0.27,|\ \ 0.29,\ \ 0.54,\cdots,0.19,\ \ 1]$

$f_2=[0,\ \ 0.23,\ \ 0.44,\ \ 0.56,|\ \ 0.74,\ \ 0.21,\cdots,0.24,\ \ 1]$

设交叉点为第四个基因处，则

$s_1=[0,\ \ 0.14,\ \ 0.25,\ \ 0.27,|\ \ 0.74,\ \ 0.21,\cdots,0.24,\ \ 1]$

$s_2=[0,\ \ 0.23,\ \ 0.44,\ \ 0.56,|\ \ 0.29,\ \ 0.54,\cdots,0.19,\ \ 1]$

交叉操作的方式有很多种选择，我们应该尽可能选取好的交叉方式，保证子代能继承父代的优良特性。同时这里的交叉操作也蕴含了变异操作。

（5） 变异操作

变异也是实现群体多样性的一种手段，同时也是全局寻优的保证。具体设计如下，按照给定的变异率，对选定变异的个体，随机地取三个整数，满足 $1<u<v<w<102$，把 u,v 之间（包括 u 和 v）的基因段插到 w 后面。

（6） 选择

采用确定性的选择策略，也就是说选择目标函数值最小的 M 个个体进化到下一代，这样可以保证父代的优良特性被保存下来。

2.3 模型求解及结论

编写 MATLAB 程序如下：

```
tic
```

```
clc,clear
load sj.txt            %加载敌方 100 个目标的数据
x=sj(:,1:2:8);x=x(:);
y=sj(:,2:2:8);y=y(:);
sj=[x y];
d1=[70,40];
sj0=[d1;sj;d1];
%距离矩阵 d
sj=sj0*pi/180;
d=zeros(102);
for i=1:101
      for j=i+1:102
            temp=cos(sj(i,1)-sj(j,1))*cos(sj(i,2))*cos(sj(j,2))+sin(sj(i,2))*sin(sj(j,2));
            d(i,j)=6370*acos(temp);
      end
end
d=d+d';L=102;w=50;dai=100;
%通过改良圈算法选取优良父代 A
for k=1:w
      c=randperm(100);
      c1=[1,c+1,102];
      flag=1;
 while flag>0
         flag=0;
    for m=1:L-3
         for n=m+2:L-1
            if d(c1(m),c1(n))+d(c1(m+1),c1(n+1))<d(c1(m),c1(m+1))+d(c1(n),c1(n+1))
                flag=1;
                c1(m+1:n)=c1(n:-1:m+1);
            end
         end
    end
 end
   J(k,c1)=1:102;
end
J=J/102;
J(:,1)=0;J(:,102)=1;
rand('state',sum(clock));
%遗传算法实现过程
A=J;
for k=1:dai   %产生 0～1 间随机数列进行编码
      B=A;
      c=randperm(w);
%交配产生子代 B
      for i=1:2:w
            F=2+floor(100*rand(1));
            temp=B(c(i),F:102);
            B(c(i),F:102)=B(c(i+1),F:102);
            B(c(i+1),F:102)=temp;
      end
```

```
%变异产生子代 C
by=find(rand(1,w)<0.1);
if length(by)==0
      by=floor(w*rand(1))+1;
end
C=A(by,:);
L3=length(by);
for j=1:L3
    bw=2+floor(100*rand(1,3));
    bw=sort(bw);
    C(j,:)=C(j,[1:bw(1)-1,bw(2)+1:bw(3),bw(1):bw(2),bw(3)+1:102]);
end
    G=[A;B;C];
    TL=size(G,1);
    %在父代和子代中选择优良品种作为新的父代
    [dd,IX]=sort(G,2);temp(1:TL)=0;
    for j=1:TL
        for i=1:101
            temp(j)=temp(j)+d(IX(j,i),IX(j,i+1));
        end
    end
       [DZ,IZ]=sort(temp);
       A=G(IZ(1:w),:);
end
path=IX(IZ(1),:)
long=DZ(1)
toc
xx=sj0(path,1);yy=sj0(path,2);
plot(xx,yy,'-o')
```

计算结果为 40 小时左右。其中的一个巡航路径如图 2 所示。

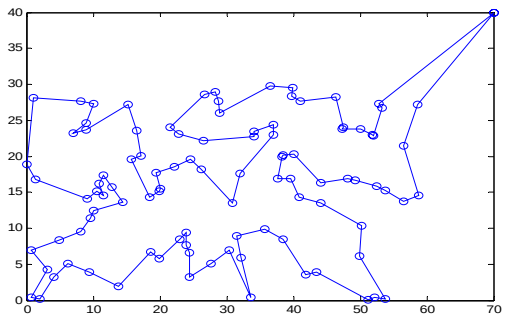


图 2　遗传算法求得的巡航路径示意图

3　禁忌搜索算法

3.1　禁忌搜索算法简介

禁忌搜索算法是组合优化算法的一种，是局部搜索算法的扩展。禁忌搜索算法是人工智能在组合优化算法中的一个成功应用。禁忌搜索算法的特点是采用了禁忌技术。所谓禁忌就是禁止重复前面的工作。禁忌搜索算法用一个禁忌表记录下已经到达过的局部

最优点，在下一次搜索中，利用禁忌表中的信息不再或有选择地搜索这些点。

禁忌搜索算法实现的技术问题是算法的关键。禁忌搜索算法涉及侯选集合、禁忌对象、评价函数、特赦规则、记忆频率信息等概念。

（1）邻域

在组合优化中，距离的概念通常不再适用，但是在一点附近搜索另一个下降的点仍然是组合优化数值求解的基本思想。因此，需要重新定义邻域的概念。

一个组合优化问题可用三参数(D,F,f)表示，其中D表示决策变量的定义域，F表示可行解区域，F中的任何一个元素称为该问题的可行解，f表示目标函数。满足$f(x^*)=\min\{f(x)\mid x\in F\}$的可行解$x^*$称为该问题的最优解。

定义1　对于组合优化问题(D,F,f)，D上的一个映射：

$$N:S\in D\to N(S)\in 2^D$$

称为一个邻域映射，其中2^D表示D的所有子集组成的集合，$N(S)$称为S的邻域，$S'\in N(S)$称为S的一个邻居。

（2）侯选集合

侯选集合由邻域中的邻居组成。常规的方法是从邻域中选择若干个目标值或评价值最佳的邻居入选。

（3）禁忌对象和禁忌长度

禁忌表中的两个主要指标是禁忌对象和禁忌长度。禁忌算法中，由于我们要避免一些操作的重复进行，就要将一些元素放到禁忌表中以禁止对这些元素进行操作，这些元素就是我们指的禁忌对象。禁忌长度是被禁对象不允许选取的迭代次数。一般是给被禁对象x一个数（禁忌长度）t，要求对象x在t步迭代内被禁，在禁忌表中采用$\text{tabu}(x)=t$记忆，每迭代一步，该项指标做运算$\text{tabu}(x)=t-1$，直到$\text{tabu}(x)=0$时解禁。于是，我们可将所有元素分成两类，被禁元素和自由元素。禁忌长度t的选取可以有多种方法，例如$t=$常数，或$t=[\sqrt{n}]$，其中n为邻域中邻居的个数；这种规则容易在算法中实现。

（4）评价函数

评价函数是侯选集合元素选取的一个评价公式，侯选集合的元素通过评价函数值来选取。以目标函数作为评价函数是比较容易理解的。目标值是一个非常直观的指标，但有时为了方便或易于计算，会采用其他函数来取代目标函数。

（5）特赦规则

在禁忌搜索算法的迭代过程中，会出现侯选集中的全部对象都被禁忌，或有一对象被禁，但若解禁则其目标值将有非常大的下降情况。在这样的情况下，为了达到全局最优，我们会让一些禁忌对象重新可选。这种方法称为特赦，相应的规则称为特赦规则。

（6）记忆频率信息

在计算的过程中，记忆一些信息对解决问题是有利的。如一个最好的目标值出现的频率很高，这使我们有理由推测：现有参数的算法可能无法再得到更好的解。根据解决问题的需要，我们可以记忆解集合、被禁对象组、目标值集合等的出现频率。

频率信息有助于进一步加强禁忌搜索的效率。我们可以根据频率信息动态控制禁忌的长度。一个最佳的目标值出现的频率很高，有理由终止计算而将此值认为是最优值。

3.2　模型及求解

我们用禁忌搜索算法研究如下的两个问题：

（1）研究 1.2 中同样的问题。

（2）我方有三个基地，经度、纬度分别为（70,40），（72,45），（68,48）。假设我方所有无人侦察机的速度都为 1000 公里/小时。三个基地各派出一架飞机侦察敌方目标，怎样划分任务，才能使时间最短，且任务比较均衡。

3.2.1　问题（1）的求解

求解的禁忌搜索算法描述如下：

（1）解空间

解空间 S 可表为 $\{1,2,\cdots,101,102\}$ 的所有固定起点和终点的循环排列集合，即

$$S=\{(\pi_1,\cdots,\pi_{102})\,|\,\pi_1=1,(\pi_2,\cdots,\pi_{101})\text{为}\{2,3,\cdots,101\}\text{的循环排列},\pi_{102}=102\}$$

其中每一个循环排列表示侦察 100 个目标的一个回路，$\pi_i=j$ 表示第 i 次侦察 j 点。

（2）目标函数

目标函数为侦察所有目标的路径长度。我们要求

$$\min f(\pi_1,\pi_2,\cdots,\pi_{102})=\sum_{i=1}^{101}w_{\pi_i\pi_{i+1}}$$

（3）候选集合

定义 2　对于路径 $\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_u\pi_{u+1}\cdots\pi_{v-1}\pi_v\pi_{v+1}\cdots\pi_{102}$，交换 u 与 v 之间的顺序，得到的新路径为

$$\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_v\pi_{v-1}\cdots\pi_{u+1}\pi_u\pi_{v+1}\cdots\pi_{102},$$

称为原路径二邻域的一个邻居。

定义 3　对于路径 $\pi_1\cdots\pi_u\pi_{u+1}\cdots\pi_{v-1}\pi_v\pi_{v+1}\cdots\pi_w\pi_{w+1}\cdots\pi_{102}$，将 u 和 v 之间的路径插到 w 之后，得到的新路径为

$$\pi_1\cdots\pi_{u-1}\pi_{v+1}\cdots\pi_w\pi_u\cdots\pi_v\pi_{w+1}\cdots\pi_{102},$$

称为原路径三邻域的一个邻居。

如果要考虑当前解的全部二邻域（或三邻域）的邻居，将面临着太大的工作量。因此我们用随机选取的方法每次选取 50 个邻居组成的集合作为侯选集合。而将省下的时间作更多次搜索，这样做同样可以保证较高的精确度，同时可以大大提高算法的效率。

（4）禁忌长度及禁忌对象

对于上述定义的二邻域中的邻居总数为 C_{100}^2，我们的禁忌长度取为 $t=70\approx\sqrt{C_{100}^2}$。

我们把禁忌表设计成一个循环队列，初始化禁忌表 $H=\Phi$。从候选集合 C 中选出一个向量 x，如果 $x\notin H$，并且 H 不满，则把向量 x 添加到禁忌表中；如果 H 已满，则最早进入禁忌表的向量出列，向量 x 进入到出列的位置。

（5）评价函数

可以用目标函数作为评价函数，但是这样每选取一个新的路径都得去计算总时间，计算量比较大。对于上述二邻域中的邻居作为侯选集合，每一个新路径中只有两条边发生了变化，因此将目标函数的差值作为评价函数可以极大地提高算法的效率。评价函数取为

$$\Delta f=(w_{\pi_{u-1}\pi_v}+w_{\pi_u\pi_{v+1}})-(w_{\pi_{u-1}\pi_u}+w_{\pi_v\pi_{v+1}})$$

禁忌搜索算法的流程如下：

STEP1　选定一个初始解 x^{now} 及给以禁忌表 $H=\Phi$；

STEP2　若满足停止条件，停止计算；否则，在 x^{now} 的邻域 $N(H,x^{\text{now}})$ 中选出满足禁忌要求的侯选集 $\text{Can}_N(x^{\text{now}})$，在 $\text{Can}_N(x^{\text{now}})$ 中选一个评价值最佳的解 x^{next}，$x^{\text{now}} := x^{\text{next}}$，更新禁忌表 H，重复 STEP2。

利用 Matlab 程序求得，我们的巡航时间大约在 41 小时左右，其中的一个巡航路径如下图所示

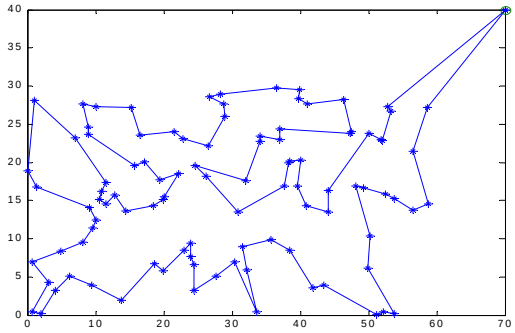


图 3 禁忌搜索算法求得的巡航路径示意图

3.2.2　问题（2）的求解

对于这个问题，我们的基本想法是，先根据敌方基地的分布特点将敌方的基地大体划分在三个区域之内，并使三架侦察机分别对这三个区域的敌军基地进行侦察，求取各自的最短时间。然后对任务不均衡区域之中的点做适当调整。

我们解决问题的步骤如下：

（1）划分子图。要达到比较均衡，应使每架飞机的巡航时间基本相同，由于敌方目标的分布较均匀，可以将敌方目标的地理位置图分成面积基本相同的三部分。如过点（70，40）以斜率 $k_1=\frac{4}{5}$ 作一条斜线，过点（68，48）以斜率 $k_2=\frac{43}{68}$ 作一条斜线，把基地所在的地区划分成三部分 G_1,G_2,G_3（见图 4）。

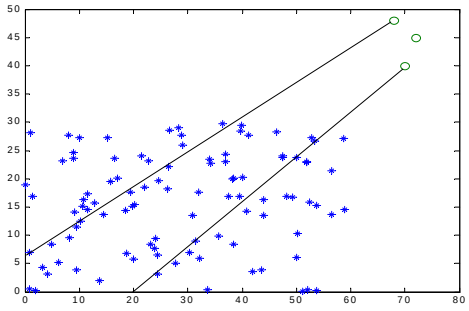


图 4 任务划分示意图

（2）再对每个子图 $G_i(i=1,2,3)$ 分别运用禁忌搜索算法求得其最短侦察路径 ψ_i，和最短侦察时间 $t(\psi_i)\ (i=1,2,3)$。

（3）均衡任务。定义均衡率

$$\eta=\frac{\min\{t(\psi_1),t(\psi_2),t(\psi_3)\}}{\max\{t(\psi_1),t(\psi_2),t(\psi_3)\}}\times 100\%$$

若η接近于 1，则上面划分的任务就可以接受。否则的话，根据$t(\psi_i)$（$i=1,2,3$）的大小用局部搜索算法，调整k_1,k_2的斜率，从而调整各分区内点的个数，直至任务达到均衡。

最后计算结果如下

两直线的斜率分别为$k_1=0.68$，$k_2=0.6484$。

均衡率$\eta=97.57\%$。

三架飞机侦察完所有目标所用的时间分别为

$t(\psi_1)=20.401$小时，$t(\psi_2)=20.910$小时，$t(\psi_3)=20.729$小时。

§4 改进的遗传算法

4.1 引言

无人机航路规划问题实际上是一个组合优化问题，是优化理论中的 NP—hard 问题。因为其解空间不连续，解邻域表达困难，所以难以用通常的算法求解。遗传算法作为现代优化算法之一[1]，其主要特点是对非线性极值问题能以概率 1 跳出局部最优解，找到全局最优解。而遗传算法这种跳出局部最优寻找全局最优特性都基于算法中的交叉和变异。在传统遗传算法的结构中，变异操作在交叉操作基础上进行，强调的是交叉作用，认为变异只是一个生物学背景机制[2]。在具体交叉操作中，人们通常采用断点交叉法（段交叉）多点交叉与均匀交叉，其中断点交叉是指随机地在基因序列中选择一个断点，然后交换双亲上断点右端的所有染色体。在变异操作中，变异算子一般是用 Guassian 分布的随机变异来实现[3,4]。近年来，也有学者尝试用 Cauchy 分布的随机序列来实现变异[5], 希望通过 Cauchy 分布宽大的两翼特性实现更大范围的变异，以利于找到全局最优解。[6]从理论上分析了采用 Cauchy 分布随机变异进化算法的局部收敛性。[7]进一步把二者结合起来, 采用两种分布的线性叠加，但仿真结果显示，算法改进效果并不十分明显。文献[8]将生物进化看成是随机性加上反馈，并指出其中的随机性主要是由系统的内在因素所引起，而不是由外部环境的随机扰动所造成。而混沌系统在其混沌域中表现为随机性，它是确定系统内部随机性的反映，不同于外在的随机特性。本文根据以上特点对基于求解航路规划的遗传算法进行改进，首先将变异操作从交叉操作中分离出来，使其成为独立的并列于交叉的寻优操作，在具体遗传操作中，混沌与遗传操作联系在一起，在交叉操作中，以“门当户对”原则进行个体的配对，利用混沌序列确定交叉点，实行强度最弱的单点交叉，以确保算法收敛精度，削弱和避免寻优抖振问题；在变异操作中，利用混沌序列对染色体中多个基因进行变异，以避免算法早熟。

下面我们研究 1.2 中同样的问题。

4.2 模型及算法

与标准的遗传算法相比，我们做了如下的两点改进。

（1）交叉操作

我们的交叉操作采用改进型交叉。具体设计如下：首先以“门当户对”原则，对父代个体进行配对，即对父代以适应度函数（目标函数）值进行排序，目标函数小的与小的配对，目标函数大的与大的配对。然后利用混沌序列确定交叉点的位置，最后对确定的交叉项进行交叉。例如(Ω_1,Ω_2)配对，他们的染色体分别是$\Omega_1=\omega_1^1\omega_2^1\ldots\omega_{102}^1$，

$\Omega_2 = \omega_1^2\omega_2^2\ldots\omega_{102}^2$，采用 Logistic 混沌序列 $x(n+1)=4x(n)(1-x(n))$ 产生一个 2 到 101 之间的正整数，具体步骤如下：

取一个 $(0,1)$ 随机初始值，然后利用 $x(n+1)=4x(n)(1-x(n))$ 迭代一次产生 1 个 $(0,1)$ 上的混沌值，保存以上混沌值作为产生下一代交叉项的混沌迭代初值，再把这个值分别乘以 100 并加上 2，最后取整即可。假如这个数为 33，那么我们对 (Ω_1,Ω_2) 染色体中相应的基因进行交叉，得到新的染色体 $(\Omega_1^{'},\Omega_2^{'})$

$$\Omega_1^{'} = \omega_1^1\omega_2^1\omega_3^1\omega_4^1\omega_5^1\cdots\omega_{33}^2\omega_{34}^1\cdots\omega_{60}^1\omega_{61}^1\cdots$$

$$\Omega_2^{'} = \omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2\omega_4^2\omega_5^2\cdots\omega_{33}^1\omega_{34}^2\cdots\omega_{60}^2\omega_{61}^2\cdots$$

很明显这种单点交叉对原来的解改动很小，这可以削弱避免遗传算法在组合优化应用中产生的寻优抖振问题，可以提高算法收敛精度。

（2）变异操作

变异也是实现群体多样性的一种手段，是跳出局部最优，全局寻优的重要保证。在本文具体变异算子设计如下，首先根据给定的变异率(本文选为 0.02)，随机地取两个在 2 到 101 之间的整数，对这两个数对应位置的基因进行变异，具体变异以当前的基因值为初值利用混沌序列 $x(n+1)=4x(n)(1-x(n))$ 进行适当次数的迭代，得到变异后新的基因值，从而得到新的染色体。

4.3　仿真结果对比及算法性能分析

计算的 MATLAB 程序如下：

```
tic
clc,clear
load sj.txt        %加载敌方 100 个目标的数据
x=sj(:,1:2:8);x=x(:);
y=sj(:,2:2:8);y=y(:);
sj=[x y];
d1=[70,40];
sj=[d1;sj;d1];
%距离矩阵 d
sj=sj*pi/180;
d=zeros(102);
for i=1:101
    for j=i+1:102

        temp=cos(sj(i,1)-sj(j,1))*cos(sj(i,2))*cos(sj(j,2))+sin(sj(i,2)
        )*sin(sj(j,2));
        d(i,j)=6370*acos(temp);
    end
end
d=d+d';L=102;w=50;dai=100;
%通过改良圈算法选取优良父代 A
for k=1:w
    c=randperm(100);
    c1=[1,c+1,102];
```

```
        flag=1;
     while flag>0
         flag=0;
       for m=1:L-3
          for n=m+2:L-1
            if
d(c1(m),c1(n))+d(c1(m+1),c1(n+1))<d(c1(m),c1(m+1))+d(c1(n),c1(n+1))
               flag=1;
               c1(m+1:n)=c1(n:-1:m+1);
            end
          end
       end
     end
      J(k,c1)=1:102;
   end
   J=J/102;
   J(:,1)=0;J(:,102)=1;
   rand('state',sum(clock));
   %遗传算法实现过程
   A=J;
   for k=1:dai  %产生 0～1 间随机数列进行编码
       B=A;
       %交配产生子代 B
       for i=1:2:w
           ch0=rand;ch(1)=4*ch0*(1-ch0);
           for j=2:50
               ch(j)=4*ch(j-1)*(1-ch(j-1));
           end
           ch=2+floor(100*ch);
           temp=B(i,ch);
           B(i,ch)=B(i+1,ch);
           B(i+1,ch)=temp;
       end
   %变异产生子代 C
   by=find(rand(1,w)<0.1);
   if length(by)==0
       by=floor(w*rand(1))+1;
   end
   C=A(by,:);
   L3=length(by);
   for j=1:L3
      bw=2+floor(100*rand(1,3));
      bw=sort(bw);
      C(j,:)=C(j,[1:bw(1)-1,bw(2)+1:bw(3),bw(1):bw(2),bw(3)+1:102]);
```

```
end
   G=[A;B;C];
   TL=size(G,1);
   %在父代和子代中选择优良品种作为新的父代
   [dd,IX]=sort(G,2);temp(1:TL)=0;
   for j=1:TL
       for i=1:101
           temp(j)=temp(j)+d(IX(j,i),IX(j,i+1));
       end
   end
     [DZ,IZ]=sort(temp);
     A=G(IZ(1:w),:);
end
path=IX(IZ(1),:)
long=DZ(1)
toc
```

在仿真试验中，我们对文中航路规划问题分别利用断点交叉和换位变异结合的遗传算法，多点交叉和移位变异结合的遗传算法[10]和文中提出的改进算法进行求解比较。表 1 是各种算法种群规模（$M=50$）和迭代次数（$G=100$）都相同时连续 20 次求解的平均值（公里），算法平均运算时间（秒）。

表 3　算法性能比较表

指标	断点交叉算法	多点交叉算法	文中改进算法
平均航路距离	41572	40416	39648
算法执行时间	5.937	6.125	2.985

本文从算法结构到具体的遗传操作都进行了改进，其中变异操作从交叉操作中分离出来，使得遗传算法也可以通过并行计算实现，提高算法实现效率。其次改进后的算法，分别采用变化强度不同的交叉操作和变异操作，其中交叉操作采用强度最弱的单点交叉，保证了算法收敛精度，削弱和避免算法因交叉强度大而产生的寻优抖振问题。当然单一的单点交叉很容易使算法早熟，文中采用较大强度的多个基因变异正好解决早熟问题。从仿真结果可以看到改进后的算法效果较为明显。

§5　蚁群算法

5.1　蚁群算法简介

蚁群是自然界中常见的一种生物，人们对蚂蚁的关注大都是因为“蚁群搬家，天要下雨”之类的民谚。然而随着近代仿生学的发展，这种似乎微不足道的小东西越来越多地受到学者们地关注。1991 年意大利学者 M. Dorigo 等人首先提出了蚁群算法，人们开始了对蚁群的研究：相对弱小，功能并不强大的个体是如何完成复杂的工作的（如寻找到食物的最佳路径并返回等）。在此基础上一种很好的优化算法逐步发展起来。

蚁群算法的特点是模拟自然界中蚂蚁的群体行为。科学家发现，蚁群总是能够发现从蚁巢到食物源的最短路径。经研究发现，蚂蚁在行走过的路上留下一种挥发性的激素，蚂蚁就是通过这种激素进行信息交流。蚂蚁趋向于走激素积累较多的路径。找到最短路径的蚂蚁总是最早返回巢穴，从而在路上留下了较多的激素。由于最短路径上积累了较多的激素，选择这条路径的蚂蚁就会越来越多，到最后所有的蚂蚁都会趋向于选择

这条最短路径。基于蚂蚁这种行为而提出的蚁群算法具有群体合作，正反馈选择，并行计算等三大特点，并且可以根据需要为人工蚁加入前瞻、回溯等自然蚁所没有的特点。

在使用蚁群算法求解现实问题时，先生成具有一定数量蚂蚁的蚁群，让每一只蚂蚁建立一个解或解的一部分，每只人工蚁从问题的初始状态出发，根据“激素”浓度来选择下一个要转移到的状态，直到建立起一个解，每只蚂蚁根据所找到的解的好坏程度在所经过的状态上释放与解的质量成正比例的“激素”。之后，每只蚂蚁又开始新的求解过程，直到寻找到满意解。为避免停滞现象，引入了激素更新机制。

5.2　解决 TSP 问题的蚁群算法描述

现以 TSP 问题的求解为例说明蚁群系统模型。首先引进如下记号：n 为城市的个数；m 为蚁群中蚂蚁的数量；d_{ij} 为两城市 i 和 j 之间距离；$b_i(t)$ 为 t 时刻位于城市 i 的蚂蚁的个数，$m=\sum_{i=1}^{n} b_i(t)$；$\tau_{ij}(t)$ 为 t 时刻边弧 (i,j) 的轨迹强度（即 ij 连线上残留的信息量），且设 $\tau_{ij}(0)=c$（c 为常数），$i,j=1,2,\cdots,n$，$i\neq j$；$\eta_{ij}(t)$ 为 t 时刻边弧 (i,j) 的能见度，反映由城市 i 转移到城市 j 的期望程度。

根据上述原理，蚂蚁 $k(k=1,2,\cdots,m)$ 在运动过程中根据各条路径上的信息量决定转移方向。与真实蚁群系统不同，人工蚁群系统具有一定的记忆功能。随着时间的推移，以前留下的信息逐渐消逝，经 n 个时刻，蚂蚁完成一次循环，各路径上信息量要作调整。由此得到下述的人工蚁群系统模型：

1）设人工蚁群在并行地搜索 TSP 的解，并通过一种信息素做媒介相互通信，在每个结点上且和该结点相连的边上以信息素量做搜索下一结点的试探依据，直到找到一个 TSP 问题的可行解。

2）在时刻 t 人工蚁 k 由位置 i 转移至位置 j 的转移概率为

$$p_{ij}^{k}(t)=\begin{cases}\dfrac{\tau_{ij}^{\alpha}(t)\eta_{ij}^{\beta}(t)}{\sum_{v\in S}\tau_{iv}^{\alpha}(t)\eta_{iv}^{\beta}(t)}, & j\in S\\ 0, & j\notin S\end{cases} \tag{3}$$

其中参数 α 为轨迹的相对重要性（$\alpha\geq 0$）；β 为能见度的相对重要性（$\beta\geq 0$）；S 为可行点集，即蚂蚁 k 下一步允许选择的城市。α,β 分别反映了蚂蚁在运动过程中所积累的信息及启发式因子在蚂蚁选择路径中所起的不同作用。

3）当 m 个人工蚁按（3）式找到了可行解，则将各边的信息量用下式修改。即调整信息量的轨迹强度更新方程为

$$\tau_{ij}(t+1)=\rho\tau_{ij}(t)+\Delta\tau_{ij},\quad \rho\in(0,1) \tag{4}$$

$$\Delta\tau_{ij}=\sum_{k=1}^{m}\Delta\tau_{ij}^{k}$$

其中 $\Delta\tau_{ij}^{k}$ 为第 k 只蚂蚁在本次循环中留在路径 (i,j) 上的信息量；$\Delta\tau_{ij}$ 为本次循环中路径 (i,j) 上的信息量的增量；参数 ρ 为轨迹的持久性；$1-\rho$ 为轨迹衰减度，表示信息消逝程度。

对上述系统模型，采用人工蚁群方法求解的算法步骤可归结为：

step 1：$NC\leftarrow 0$（NC 为迭代步数或搜索次数）；各 τ_{ij} 和 $\Delta\tau_{ij}$ 的初始化；将 m 个蚂蚁置于 n 个顶点上。

step 2：将各蚂蚁的初始出发点置于当前解集中；对每个蚂蚁 k（$k=1,2,\cdots,m$）按概率 p_{ij}^k 转移至下一顶点 j；将顶点 j 置于当前解集。

step 3：计算各蚂蚁的目标函数值 $z_k(k=1,\cdots,m)$，记录当前的最好解。

step 4：按更新方程修改轨迹强度。

step 5：$NC \leftarrow NC+1$，若 $NC <$ 预定的迭代次数且无退化行为（即找到的都是相同解），则转 step 2。

若为了简化计算，增加处理较大规模的 TSP 问题的能力，则可将（4）式修改为：

$\tau_{ij}(t+1)=\rho\tau_{ij}(t)+(1-\rho)\Delta\tau_{ij}$，$\rho\in(0,1)$

其中

$$\Delta\tau_{ij}^k=\begin{cases}\dfrac{1}{d_{ij}}, & (i,j)\in BE\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

此处 BE 为本次最优路线上的边集。

5.3　人工蚁群算法性能的讨论

人工蚁群算法是一种基于种群的进化算法。作为一个新兴的研究领域，虽它还远未像 GA、SA 等算法那样形成系统的分析方法和坚实的数学基础，但目前已有一些基本结果。

在 M. Dorigo 三种不同的模型中，循环路径 (i,j) 上信息量的增量 $\Delta\tau_{ij}$ 不同。

1）Ant-quantity system 模型中，

$$\Delta\tau_{ij}^k=\begin{cases}\dfrac{Q}{d_{ij}}, & \text{若第}k\text{只蚂蚁在时刻}t\text{和}t+1\text{之间经过}ij\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

2）在 Ant-density system 模型中，

$$\Delta\tau_{ij}^k=\begin{cases}Q, & \text{若第}k\text{只蚂蚁在时刻}t\text{和}t+1\text{之间经过}ij\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

3）在 Ant-cycle system 模型中，

$$\Delta\tau_{ij}^k=\begin{cases}\dfrac{Q}{L_k}, & \text{若第}k\text{只蚂蚁在本次循环中经过}ij\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 Q 是反映蚂蚁所留轨迹数量的常数，L_k 表示第 k 只蚂蚁在本次循环中所走路径的长度；且 $t=0$ 时，$\tau_{ij}^k(0)=c$，$\Delta\tau_{ij}^k=0$。算法中模型 1）、2）利用的是局部信息，模型 3）利用的是整体信息。

人工蚁群算法中，α,β,Q 等参数对算法性能也有很大的影响。α 值的大小表明留在每个结点上的信息量受重视的程度，α 值越大，蚂蚁选择以前选过的点的可能性越大，但过大会使搜索过早陷于局部极小点；β 的大小表明启发式信息受重视的程度；Q 值会影响算法的收敛速度，Q 过大会使算法收敛于局部极小值，过小又会影响算法的收敛速度，随问题规模的增大 Q 的值也需要随之变化；蚂蚁的数目越多，算法的全局

搜索能力越强，但数目加大将使算法的收敛速度减慢。

参考文献

[1] 邢文训，谢金星. 现代优化算法. 北京：清华大学出版社, 1999.

[2] 张文修，梁怡. 遗传算法的数学基础. 西安：西安交通大学出版社，2002.

[3] Back T，Hoffimeister F and Schwefel H P，“A survey of evolution strategies,”In Proc of the 4th Int. Genetic Algorithms Conference, CA: Morgan Kaufmann Publishers， pp.2-9, 1991.

[4] Fogel D B, “An introduction to simulated evolutionary optimization,” IEEE Transaction Neural Network, vol.5, no.1, pp.3-14, 1994.

[5] Wei C.J，Yao S.S and He Z.Y.，“A modified evolutionary programming,” In Proc 1996 IEEE Int. Evolutionary Computation Conference, NJ, IEEE Press, pp.135-138, 1996.

[6] Rudolph G, “Local convergence rates of simple evolutionary algorithms with Cauchy mutations,” IEEE Transaction Evolutionary Computation, vol.1, no.4, pp.249-258, 1997.

[7] Chellapilla K.，“Combining mutation operators in evolutionary programming,” IEEE Trans on Evolutionary Computation, vol.2, no.3, pp.91-96, 1998.

[8] 吴祥兴, 陈忠. 混沌学导论. 上海: 上海科学技术文献出版社, 1996.

[9] 吴翊，吴梦达，成礼智编著. 数学建模的理论与实践. 长沙：国防科技大学出版社, 1999.

[10] 玄光男，程润伟著，汪定伟等译. 遗传算法与工程设计. 科学出版社，2000.

第二十四章　时间序列模型

时间序列是按时间顺序排列的、随时间变化且相互关联的数据序列。分析时间序列的方法构成数据分析的一个重要领域，即时间序列分析。

时间序列根据所研究的依据不同，可有不同的分类。

1．按所研究的对象的多少分，有一元时间序列和多元时间序列。

2．按时间的连续性可将时间序列分为离散时间序列和连续时间序列两种。

3．按序列的统计特性分，有平稳时间序列和非平稳时间序列。如果一个时间序列的概率分布与时间t无关，则称该序列为严格的（狭义的）平稳时间序列。如果序列的一、二阶矩存在，而且对任意时刻t满足：

（1）均值为常数

（2）协方差为时间间隔τ的函数。

则称该序列为宽平稳时间序列，也叫广义平稳时间序列。我们以后所研究的时间序列主要是宽平稳时间序列。

4．按时间序列的分布规律来分，有高斯型时间序列和非高斯型时间序列。

§1　确定性时间序列分析方法概述

时间序列预测技术就是通过对预测目标自身时间序列的处理，来研究其变化趋势的。一个时间序列往往是以下几类变化形式的叠加或耦合。

（1）长期趋势变动。它是指时间序列朝着一定的方向持续上升或下降，或停留在某一水平上的倾向，它反映了客观事物的主要变化趋势。

（2）季节变动。

（3）循环变动。通常是指周期为一年以上，由非季节因素引起的涨落起伏波形相似的波动。

（4）不规则变动。通常它分为突然变动和随机变动。

通常用T_t表示长期趋势项，S_t表示季节变动趋势项，C_t表示循环变动趋势项，R_t表示随机干扰项。常见的确定性时间序列模型有以下几种类型：

（1）加法模型

$$y_t = T_t + S_t + C_t + R_t$$

（2）乘法模型

$$y_t = T_t \cdot S_t \cdot C_t \cdot R_t$$

（3）混合模型

$$y_t = T_t \cdot S_t + R_t$$

$$y_t = S_t + T_t \cdot C_t \cdot R_t$$

其中y_t是观测目标的观测记录，$E(R_t) = 0$，$E(R_t^2) = \sigma^2$。

如果在预测时间范围以内，无突然变动且随机变动的方差σ^2较小，并且有理由认为过去和现在的演变趋势将继续发展到未来时，可用一些经验方法进行预测。

§2　移动平均法

移动平均法是根据时间序列资料逐渐推移，依次计算包含一定项数的时序平均数，以反映长期趋势的方法。当时间序列的数值由于受周期变动和不规则变动的影响，起伏较大，不易显示出发展趋势时，可用移动平均法，消除这些因素的影响，分析、预测序

列的长期趋势。

移动平均法有简单移动平均法，加权移动平均法，趋势移动平均法等。

2.1　简单移动平均法

设观测序列为 $y_1,\cdots,y_T$，取移动平均的项数 $N<T$。一次简单移动平均值计算公式为：

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1})$$

$$=\frac{1}{N}(y_{t-1}+\cdots+y_{t-N})+\frac{1}{N}(y_t-y_{t-N})=M_{t-1}^{(1)}+\frac{1}{N}(y_t-y_{t-N}) \quad (1)$$

当预测目标的基本趋势是在某一水平上下波动时，可用一次简单移动平均方法建立预测模型：

$$\hat{y}_{t+1}=M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(\hat{y}_t+\cdots+\hat{y}_{t-N+1}),\ t=N,N+1,\cdots, \quad (2)$$

其预测标准误差为：

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{t=N+1}^{T}(\hat{y}_t-y_t)^2}{T-N}}, \quad (3)$$

最近 N 期序列值的平均值作为未来各期的预测结果。一般 N 取值范围：$5\le N\le 200$。当历史序列的基本趋势变化不大且序列中随机变动成分较多时，N 的取值应较大一些。否则 N 的取值应小一些。在有确定的季节变动周期的资料中，移动平均的项数应取周期长度。选择最佳 N 值的一个有效方法是，比较若干模型的预测误差。预测标准误差最小者为好。

例 1　某企业 1 月～11 月份的销售收入时间序列如表 1 示。试用一次简单滑动平均法预测第 12 月份的销售收入。

表 1　企业销售收入

月份 t	1	2	3	4	5	6
销售收入 y_t	533.8	574.6	606.9	649.8	705.1	772.0
月份 t	7	8	9	10	11	
销售收入 y_t	816.4	892.7	963.9	1015.1	1102.7	

解：　分别取 $N=4,N=5$ 的预测公式

$$\hat{y}_{t+1}^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+y_{t-2}+y_{t-3}}{4},\ t=4,5,\cdots,11$$

$$\hat{y}_{t+1}^{(2)}=\frac{y_t+y_{t-1}+y_{t-2}+y_{t-3}+y_{t-4}}{5},\ t=5,\cdots,11$$

当 $N=4$ 时，预测值 $\hat{y}_{12}^{(1)}=993.6$，预测的标准误差为

$$S_1=\sqrt{\frac{\sum_{t=5}^{11}(\hat{y}_t^{(1)}-y_t)^2}{11-4}}=150.5$$

当 $N=5$ 时，预测值 $\hat{y}_{12}^{(2)}=182.4$，预测的标准误差为

$$S_2=\sqrt{\frac{\sum_{t=6}^{11}(\hat{y}_t^{(2)}-y_t)^2}{11-5}}=958.2$$

计算结果表明，$N=4$时，预测的标准误差较小，所以选取$N=4$。预测第 12 月份的销售收入为 993.6。

计算的 Matlab 程序如下：

```
clc,clear
y=[533.8 574.6 606.9 649.8 705.1 772.0 816.4 892.7 963.9 1015.1 1102.7];
m=length(y);
n=[4,5];    %n 为移动平均的项数
for i=1:length(n)
    %由于 n 的取值不同，yhat 的长度不一致，下面使用了细胞数组
    for j=1:m-n(i)+1
        yhat{i}(j)=sum(y(j:j+n(i)-1))/n(i);
    end
    y12(i)=yhat{i}(end);
    s(i)=sqrt(mean((y(n(i)+1:m)-yhat{i}(1:end-1)).^2));
end
y12,s
```

简单移动平均法只适合做近期预测，而且是预测目标的发展趋势变化不大的情况。如果目标的发展趋势存在其它的变化，采用简单移动平均法就会产生较大的预测偏差和滞后。

2.2　加权移动平均法

在简单移动平均公式中，每期数据在求平均时的作用是等同的。但是，每期数据所包含的信息量不一样，近期数据包含着更多关于未来情况的信心。因此，把各期数据等同看待是不尽合理的，应考虑各期数据的重要性，对近期数据给予较大的权重，这就是加权移动平均法的基本思想。

设时间序列为$y_1,y_2,\cdots,y_t,\cdots$；加权移动平均公式为

$$M_{tw}=\frac{w_1y_t+w_2y_2+\cdots+w_Ny_{t-N+1}}{w_1+w_2+\cdots+w_N},\ t\geq N \qquad (4)$$

式中M_{tw}为t期加权移动平均数；w_i为y_{t-i+1}的权数，它体现了相应的y_t在加权平均数中的重要性。

利用加权移动平均数来做预测，其预测公式为

$$\hat{y}_{t+1}=M_{tw} \qquad (5)$$

即以第t期加权移动平均数作为第$t+1$期的预测值。

例 2　我国 1979～1988 年原煤产量如表 2 所示，试用加权移动平均法预测 1989 年的产量。

表 2　我国原煤产量统计数据及加权移动平均预测值表

年份	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
原煤产量 y_t	6.35	6.20	6.22	6.66	7.15	7.89	8.72	8.94	9.28	9.8
三年加权移动平均预测值				6.235	6.4367	6.8317	7.4383	8.1817	8.6917	9.0733

相对误差（%）				6.38	9.98	13.41	14.7	8.48	6.34	7.41

解　取 $w_1=3, w_2=2, w_3=1$，按预测公式

$$\hat{y}_{t+1}=\frac{3y_t+2y_{t-1}+y_{t-2}}{3+2+1}$$

计算三年加权移动平均预测值，其结果列于表 2 中。1989 年我国原煤产量的预测值为（亿吨）

$$\hat{y}_{1989}=\frac{3\times 9.8+2\times 9.28+8.94}{6}=9.48$$

这个预测值偏低，可以修正。其方法是：先计算各年预测值与实际值的相对误差，例如 1982 年为

$$\frac{6.66-6.235}{6.66}=6.38\%$$

将相对误差列于表 2 中，再计算总的平均相对误差。

$$\left(1-\frac{\sum \hat{y}_t}{\sum y_t}\right)\times 100\%=(1-\frac{52.89}{58.44})\times 100\%=9.5\%$$

由于总预测值的平均值比实际值低 9.5%，所以可将 1989 年的预测值修正为

$$\frac{9.48}{1-9.5\%}=10.4788$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
y=[6.35 6.20   6.22   6.66   7.15   7.89   8.72   8.94   9.28
9.8];
w=[1/6;2/6;3/6];
m=length(y);n=3;
for i=1:m-n+1
   yhat(i)=y(i:i+n-1)*w;
end
yhat
err=abs(y(n+1:m)-yhat(1:end-1))./y(n+1:m)
T_err=1-sum(yhat(1:end-1))/sum(y(n+1:m))
y1989=yhat(end)/(1-T_err)
```

在加权移动平均法中，w_t 的选择，同样具有一定的经验性。一般的原则是：近期数据的权数大，远期数据的权数小。至于大到什么程度和小到什么程度，则需要按照预测者对序列的了解和分析来确定。

2.3　趋势移动平均法

简单移动平均法和加权移动平均法，在时间序列没有明显的趋势变动时，能够准确反映实际情况。但当时间序列出现直线增加或减少的变动趋势时，用简单移动平均法和加权移动平均法来预测就会出现滞后偏差。因此，需要进行修正，修正的方法是作二次移动平均，利用移动平均滞后偏差的规律来建立直线趋势的预测模型。这就是趋势移动平均法。

一次移动的平均数为

$$M_t^{(1)}=\frac{1}{N}(y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1})$$

在一次移动平均的基础上再进行一次移动平均就是二次移动平均，其计算公式为

$$M_t^{(2)}=\frac{1}{N}(M_t^{(1)}+\cdots+M_{t-N+1}^{(1)})=M_{t-1}^{(2)}+\frac{1}{N}(M_t^{(1)}-M_{t-N}^{(1)}) \tag{6}$$

下面讨论如何利用移动平均的滞后偏差建立直线趋势预测模型。

设时间序列$\{y_t\}$从某时期开始具有直线趋势，且认为未来时期也按此直线趋势变化，则可设此直线趋势预测模型为

$$\hat{y}_{t+T}=a_t+b_tT\ ,\ T=1,2,\cdots \tag{7}$$

其中t为当前时期数；T为由t至预测期的时期数；a_t为截距；b_t为斜率。两者又称为平滑系数。

现在，我们根据移动平均值来确定平滑系数。由模型（7）可知

$$\begin{aligned}&a_t=y_t\\&y_{t-1}=y_t-b_t\\&y_{t-2}=y_t-2b_t\\&\cdots\\&y_{t-N+1}=y_t-(N-1)b_t\end{aligned}$$

所以

$$M_t^{(1)}=\frac{y_t+y_{t-1}+\cdots+y_{t-N+1}}{N}=\frac{y_t+(y_t-b_t)+\cdots+[y_t-(N-1)b_t]}{N}$$

$$=\frac{Ny_t-[1+2+\cdots+(N-1)]b_t}{N}=y_t-\frac{N-1}{2}b_t$$

因此

$$y_t-M_t^{(1)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{8}$$

由式（7），类似式（8）的推导，可得

$$y_{t-1}-M_{t-1}^{(1)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{9}$$

所以

$$y_t-y_{t-1}=M_t^{(1)}-M_{t-1}^{(1)}=b_t \tag{10}$$

类似式（8）的推导，可得

$$M_t^{(1)}-M_t^{(2)}=\frac{N-1}{2}b_t \tag{11}$$

于是，由式（8）和式（11）可得平滑系数的计算公式为

$$\begin{cases}a_t=2M_t^{(1)}-M_t^{(2)}\\b_t=\dfrac{2}{N-1}(M_t^{(1)}-M_t^{(2)})\end{cases} \tag{12}$$

例 3　我国 1965～1985 年的发电总量如表 3 所示，试预测 1986 年和 1987 年的发电总量。

表 3　我国发电量及一、二次移动平均值计算表

年份	t	发电总量 y_t	一次移动平均，$N=6$	二次移动平均，$N=6$
1965	1	676		
1966	2	825		
1967	3	774		
1968	4	716		
1969	5	940		
1970	6	1159	848.3	
1971	7	1384	966.3	
1972	8	1524	1082.8	
1973	9	1668	1231.8	
1974	10	1688	1393.8	
1975	11	1958	1563.5	1181.1
1976	12	2031	1708.8	1324.5
1977	13	2234	1850.5	1471.9
1978	14	2566	2024.2	1628.8
1979	15	2820	2216.2	1792.8
1980	16	3006	2435.8	1966.5
1981	17	3093	2625	2143.4
1982	18	3277	2832.7	2330.7
1983	19	3514	3046	2530
1984	20	3770	3246.7	2733.7
1985	21	4107	3461.2	2941.2

解　由散点图 1 可以看出，发电总量基本呈直线上升趋势，可用趋势移动平均法来预测。

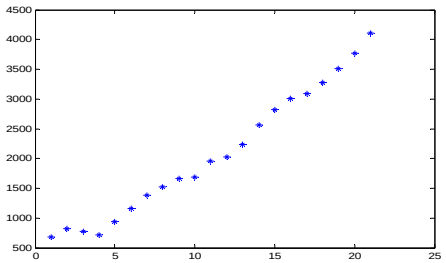


图 1　原始数据散点图

取 $N=6$，分别计算一次和二次移动平均值并列于表 3 中。

$$M_{21}^{(1)}=3461.2,\quad M_{21}^{(2)}=2941.2$$

再由公式（12），得

$$a_{21}=2M_{21}^{(1)}-M_{21}^{(2)}=3981.1$$

$$b_{21}=\frac{2}{6-1}(M_{21}^{(1)}-M_{21}^{(2)})=208$$

于是，得 $t=21$ 时直线趋势预测模型为

$$\hat{y}_{21+T}=3981.1+208T$$

预测 1986 年和 1987 年的发电总量为

$$\hat{y}_{1986}=\hat{y}_{22}=\hat{y}_{21+1}=4192.1$$

$$\hat{y}_{1987}=\hat{y}_{23}=\hat{y}_{21+2}=4397.1$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load y.txt     %把原始数据保存在纯文本文件 y.txt 中
m1=length(y);
n=6;     %n 为移动平均的项数
for i=1:m1-n+1
    yhat1(i)=sum(y(i:i+n-1))/n;
end
yhat1
m2=length(yhat1);
for i=1:m2-n+1
    yhat2(i)=sum(yhat1(i:i+n-1))/n;
end
yhat2
plot(1:21,y,'*')
a21=2*yhat1(end)-yhat2(end)
b21=2*(yhat1(end)-yhat2(end))/(n-1)
y1986=a21+b21
y1987=a21+2*b21
```

趋势移动平均法对于同时存在直线趋势与周期波动的序列，是一种既能反映趋势变化，又可以有效地分离出来周期变动的方法。

§3 指数平滑法

一次移动平均实际上认为最近 N 期数据对未来值影响相同，都加权 $\frac{1}{N}$；而 N 期以前的数据对未来值没有影响，加权为 0。但是，二次及更高次移动平均数的权数却不是 $\frac{1}{N}$，且次数越高，权数的结构越复杂，但永远保持对称的权数，即两端项权数小，中间项权数大，不符合一般系统的动态性。一般说来历史数据对未来值的影响是随时间间隔的增长而递减的。所以，更切合实际的方法应是对各期观测值依时间顺序进行加权平均作为预测值。指数平滑法可满足这一要求，而且具有简单的递推形式。

指数平滑法根据平滑次数的不同，又分为一次指数平滑法、二次指数平滑法和三次指数平滑法等，分别介绍如下。

3.1 一次指数平滑法

1．预测模型

设时间序列为 $y_1, y_2, \cdots, y_t, \cdots$，$\alpha$ 为加权系数，$0<\alpha<1$，一次指数平滑公式为：

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)} = S_{t-1}^{(1)} + \alpha (y_t - S_{t-1}^{(1)}) \qquad (13)$$

式（13）是由移动平均公式改进而来的。由式（1）知，移动平均数的递推公式为

$$M_t^{(1)} = M_{t-1}^{(1)} + \frac{y_t - y_{t-N}}{N}$$

以 $M_{t-1}^{(1)}$ 作为 y_{t-N} 的最佳估计，则有

$$M_t^{(1)} = M_{t-1}^{(1)} + \frac{y_t - M_{t-1}^{(1)}}{N} = \frac{y_t}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right) M_{t-1}^{(1)}$$

令$\alpha=\frac{1}{N}$，以S_t代替$M_t^{(1)}$，即得式（13）

$$S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)S_{t-1}^{(1)}$$

为进一步理解指数平滑的实质，把式（13）依次展开，有

$$S_t^{(1)}=\alpha y_t+(1-\alpha)[\alpha y_{t-1}+(1-\alpha)S_{t-2}^{(1)}]=\cdots=\alpha\sum_{j=0}^{\infty}(1-\alpha)^j y_{t-j} \qquad (14)$$

（14）式表明$S_t^{(1)}$是全部历史数据的加权平均，加权系数分别为$\alpha,\alpha(1-\alpha),\alpha(1-\alpha)^2,\cdots$；显然有

$$\sum_{j=0}^{\infty}\alpha(1-\alpha)^j=\frac{\alpha}{1-(1-\alpha)}=1$$

由于加权系数符合指数规律，又具有平滑数据的功能，故称为指数平滑。

以这种平滑值进行预测，就是一次指数平滑法。预测模型为

$$\hat{y}_{t+1}=S_t^{(1)}$$

即

$$\hat{y}_{t+1}=\alpha y_t+(1-\alpha)\hat{y}_t \qquad (15)$$

也就是以第t期指数平滑值作为$t+1$期预测值。

2．加权系数的选择

在进行指数平滑时，加权系数的选择是很重要的。由式（15）可以看出，α的大小规定了在新预测值中新数据和原预测值所占的比重。α值越大，新数据所占的比重就愈大，原预测值所占的比重就愈小，反之亦然。若把式（15）改写为

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_t+\alpha(y_t-\hat{y}_t) \qquad (16)$$

则从上式可看出，新预测值是根据预测误差对原预测值进行修正而得到的。α的大小则体现了修正的幅度，α值愈大，修正幅度愈大；α值愈小，修正幅度也愈小。

若选取$\alpha=0$，则$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_t$，即下期预测值就等于本期预测值，在预测过程中不考虑任何新信息；若选取$\alpha=1$，则$\hat{y}_{t+1}=y_t$，即下期预测值就等于本期观测值，完全不相信过去的信息。这两种极端情况很难做出正确的预测。因此，α值应根据时间序列的具体性质在0～1之间选择。具体如何选择一般可遵循下列原则：①如果时间序列波动不大，比较平稳，则α应取小一点，如（0.1～0.5）。以减少修正幅度，使预测模型能包含较长时间序列的信息；②如果时间序列具有迅速且明显的变动倾向，则α应取大一点，如（0.6～0.8）。使预测模型灵敏度高一些，以便迅速跟上数据的变化。

在实用上，类似移动平均法，多取几个α值进行试算，看哪个预测误差小，就采用哪个。

3．初始值的确定

用一次指数平滑法进行预测，除了选择合适的α外，还要确定初始值$s_0^{(1)}$。初始值是由预测者估计或指定的。当时间序列的数据较多，比如在20个以上时，初始值对以后的预测值影响很少，可选用第一期数据为初始值。如果时间序列的数据较少，在20个以下时，初始值对以后的预测值影响很大，这时，就必须认真研究如何正确确定初始值。一般以最初几期实际值的平均值作为初始值。

例4　某市1976～1987年某种电器销售额如表4所示。试预测1988年该电器销售额。

解　采用指数平滑法，并分别取$\alpha=0.2,0.5$和0.8进行计算，初始值

$$S_0^{(1)}=\frac{y_1+y_2}{2}=51$$

即

$$\hat{y}_1=S_0^{(1)}=51$$

按预测模型

$$\hat{y}_{t+1}=\alpha y_t+(1-\alpha)\hat{y}_t$$

计算各期预测值，列于表 4 中。

表 4　某种电器销售额及指数平滑预测值计算表　（单位：万元）

年份	t	实际销售额 y_t	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha=0.2$	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha=0.5$	预测值 $\hat{y}_t$ $\alpha=0.8$
1976	1	50	51	51	51
1977	2	52	50.8	50.5	50.2
1978	3	47	51.04	51.25	51.64
1979	4	51	50.23	49.13	47.93
1980	5	49	50.39	50.06	50.39
1981	6	48	50.11	49.53	49.28
1982	7	51	49.69	48.77	48.26
1983	8	40	49.95	49.88	50.45
1984	9	48	47.96	44.94	42.09
1985	10	52	47.97	46.47	46.82
1986	11	51	48.77	49.24	50.96
1987	12	59	49.22	50.12	50.99

从表 4 可以看出，$\alpha=0.2,0.5$和0.8时，预测值是很不相同的。究竟α取何值为好，可通过计算它们的预测标准误差S，选取使S较小的那个α值。预测的标准误差见表 5。

表 5　预测的标准误差

α	0.2	0.5	0.8
S	4.5029	4.5908	4.8426

计算结果表明：$\alpha=0.2$时，S较小，故选取$\alpha=0.2$，预测 1988 年该电器销售额为$\hat{y}_{1988}=51.1754$。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load dianqi.txt     %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=dianqi; n=length(yt);
alpha=[0.2 0.5 0.8];m=length(alpha);
yhat(1,1:m)=(yt(1)+yt(2))/2;
for i=2:n
    yhat(i,:)=alpha*yt(i-1)+(1-alpha).*yhat(i-1,:);
end
yhat
err=sqrt(mean((repmat(yt,1,m)-yhat).^2))
xlswrite('dianqi.xls',yhat)
yhat1988=alpha*yt(n)+(1-alpha).*yhat(n,:)
```

3.2　二次指数平滑法

一次指数平滑法虽然克服了移动平均法的缺点。但当时间序列的变动出现直线趋势时，用一次指数平滑法进行预测，仍存在明显的滞后偏差。因此，也必须加以修正。修正的方法与趋势移动平均法相同，即再作二次指数平滑，利用滞后偏差的规律建立直线趋势模型。这就是二次指数平滑法。其计算公式为

$$S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}^{(1)}$$

$$S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha) S_{t-1}^{(2)} \tag{17}$$

式中 $S_t^{(1)}$ 为一次指数的平滑值；$S_t^{(2)}$ 为二次指数的平滑值。当时间序列 $\{y_t\}$，从某时期开始具有直线趋势时，类似趋势移动平均法，可用直线趋势模型

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T，T = 1,2,\cdots \tag{18}$$

$$\begin{cases} a_t = 2S_t^{(1)} - S_t^{(2)} \\ b_t = \dfrac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) \end{cases} \tag{19}$$

进行预测。

例 5　仍以例 3 我国 1965～1985 年的发电总量资料为例，试用二次指数平滑法预测 1986 年和 1987 年的发电总量。

表 6　我国发电总量及一、二次指数平滑值计算表　　（单位：亿度）

年份	t	发电总量 y_t	一次平滑值	二次平滑值	y_{t+1} 的估计值
1965	1	676	676	676	
1966	2	825	720.7	689.4	676
1967	3	774	736.7	703.6	765.4
1968	4	716	730.5	711.7	784.0
1969	5	940	793.3	736.2	757.4
1970	6	1159	903.0	786.2	875.0
1971	7	1384	1047.3	864.6	1069.9
1972	8	1524	1190.3	962.3	1308.4
1973	9	1668	1333.6	1073.7	1516.1
1974	10	1688	1439.9	1183.6	1705.0
1975	11	1958	1595.4	1307.1	1806.1
1976	12	2031	1726.1	1432.8	2007.2
1977	13	2234	1878.4	1566.5	2145.0
1978	14	2566	2084.7	1722.0	2324.1
1979	15	2820	2305.3	1897.0	2602.9
1980	16	3006	2515.5	2082.5	2888.6
1981	17	3093	2688.8	2264.4	3134.1
1982	18	3277	2865.2	2444.6	3295.0
1983	19	3514	3059.9	2629.2	3466.1
1984	20	3770	3272.9	2822.3	3675.1
1985	21	4107	3523.1	3032.6	3916.6

解　取 $\alpha = 0.3$，初始值 $S_0^{(1)}$ 和 $S_0^{(2)}$ 都取序列的首项数值，即 $S_0^{(1)} = S_0^{(0)} = 676$。计算 $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}$，列于表 6。得到

$$S_{21}^{(1)} = 3523.1，\ S_{21}^{(2)} = 3032.6$$

由公式（19），可得 $t = 21$ 时

$$a_{21} = 2S_{21}^{(1)} - S_{21}^{(2)} = 4013.7,$$

$$b_{21} = \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_{21}^{(1)} - S_{21}^{(2)}) = 210.24$$

于是，得$t = 21$时直线趋势方程为

$$\hat{y}_{21+T} = 4013.7 + 210.24T$$

预测 1986 年和 1987 年的发电总量为（单位：亿度）

$$\hat{y}_{1986} = \hat{y}_{22} = \hat{y}_{21+1} = 4223.95$$

$$\hat{y}_{1987} = \hat{y}_{23} = \hat{y}_{21+2} = 4434.19$$

为了求各期的模拟值。可将式（19）代入直线趋势模型（18），并令$T = 1$，则得

$$\hat{y}_{t+1} = (2S_t^{(1)} - S_t^{(2)}) + \frac{\alpha}{1-\alpha}(S_t^{(1)} - S_t^{(2)})$$

即

$$\hat{y}_{t+1} = \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)S_t^{(1)} - \frac{1}{1-\alpha}S_t^{(2)} \qquad (20)$$

令$t = 1,2,\cdots,21$，由公式（20）可求出各期的模拟值。计算结果见表 6。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load fadian.txt     %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=fadian; n=length(yt);
alpha=0.3; st1(1)=yt(1); st2(1)=yt(1);
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
end
xlswrite('fadian.xls',[st1',st2'])
a=2*st1-st2
b=alpha/(1-alpha)*(st1-st2)
yhat=a+b;
xlswrite('fadian.xls',yhat','Sheet1','C2')
str=char(['C',int2str(n+2)]);
xlswrite('fadian.xls',a(n)+2*b(n),'Sheet1',str)
```

3.3　三次指数平滑法

当时间序列的变动表现为二次曲线趋势时，则需要用三次指数平滑法。三次指数平滑是在二次指数平滑的基础上，再进行一次平滑，其计算公式为

$$\begin{cases} S_t^{(1)} = \alpha y_t + (1-\alpha)S_{t-1}^{(1)} \\ S_t^{(2)} = \alpha S_t^{(1)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(2)} \\ S_t^{(3)} = \alpha S_t^{(2)} + (1-\alpha)S_{t-1}^{(3)} \end{cases} \qquad (21)$$

式中$S_t^{(3)}$为三次指数平滑值。

三次指数平滑法的预测模型为

$$\hat{y}_{t+T} = a_t + b_t T + C_t T^2,\ T = 1,2,\cdots \qquad (22)$$

其中

$$\begin{cases} a_t = 3S_t^{(1)} - 3S_t^{(2)} + S_t^{(3)} \\ b_t = \dfrac{\alpha}{2(1-\alpha)^2}[(6-5\alpha)S_t^{(1)} - 2(5-4\alpha)S_t^{(2)} + (4-3\alpha)S_t^{(3)}] \\ c_t = \dfrac{\alpha^2}{2(1-\alpha)^2}[S_t^{(1)} - 2S_t^{(2)} + S_t^{(3)}] \end{cases} \tag{23}$$

例 6　某省 1978～1988 年全民所有制单位固定资产投资总额如表 7 所示，试预测 1989 年和 1990 年固定资产投资总额。

表 7　某省全民所有制单位固定资产投资总额及一、二、三次指数平滑值计算表（单位：亿元）

年份	t	投资总额 y_t	一次平滑值	二次平滑值	三次平滑值	y_{t+1} 的估计值
1978	1	20.04	21.37	21.77	21.89	21.94
1979	2	20.06	20.98	21.53	21.78	20.23
1980	3	25.72	22.40	21.79	21.78	19.56
1981	4	34.61	26.06	23.07	22.17	24.49
1982	5	51.77	33.78	26.28	23.40	34.59
1983	6	55.92	40.42	30.52	25.54	53.89
1984	7	80.65	52.49	37.11	29.01	64.58
1985	8	131.11	76.07	48.80	34.95	89.30
1986	9	148.58	97.83	63.51	43.52	142.42
1987	10	162.67	117.28	79.64	54.35	176.09
1988	11	232.26	151.77	101.28	68.43	196.26

解　从图 2 可以看出，投资总额呈二次曲线上升，可用三次指数平滑法进行预测。

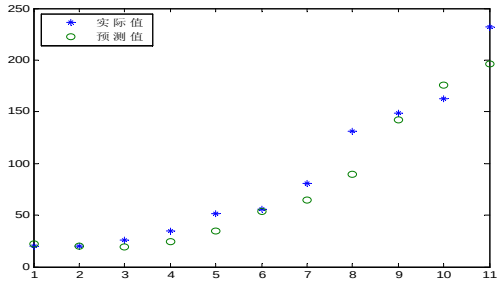


图 2　某省固定资产投资总额趋势图

取 $\alpha = 0.3$，初始值 $S_1^{(0)} = S_2^{(0)} = S_3^{(0)} = \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 21.94$。计算 $S_t^{(1)}, S_t^{(2)}, S_t^{(3)}$ 列于表 7 中。得到

$S_{11}^{(1)} = 151.77$，$S_{11}^{(2)} = 101.28$，$S_{11}^{(3)} = 68.43$

由公式（23），可得到当 $t = 11$ 时

$a_{11} = 219.91$，$b_{11} = 38.38$，$c_{11} = 1.62$

于是，得 $t = 11$ 时预测模型为

$$\hat{y}_{11+T} = 219.91 + 38.38T + 1.62T^2$$

预测 1989 年和 1990 年的固定资产投资总额为（单位：亿元）

$$\hat{y}_{1989} = \hat{y}_{12} = \hat{y}_{11+1} = a_{11} + b_{11} + c_{11} = 259.91$$

$$\hat{y}_{1990} = \hat{y}_{13} = \hat{y}_{11+2} = a_{11} + 2b_{11} + 2^2 c_{11} = 303.16$$

因为国家从 1989 年开始对固定资产投资采取压缩政策，这些预测值显然偏高，应作适当的修正，以消除政策因素的影响。

与二次指数平滑法一样，为了计算各期的模拟值，可将式（23）代入预测模型（22），并令$T=1$，则得

$$\hat{y}_{t+1} = \frac{3-3\alpha+\alpha^2}{(1-\alpha)^2} S_t^{(1)} - \frac{3-\alpha}{(1-\alpha)^2} S_t^{(2)} + \frac{1}{(1-\alpha)^2} S_t^{(3)} \qquad (24)$$

令$t = 0,1,2,\cdots,11$，公式（24）可求出各期的模拟值，见表 7。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load touzi.txt     %原始数据以列向量的方式存放在纯文本文件中
yt=touzi; n=length(yt);
alpha=0.3; st1_0=mean(yt(1:3)); st2_0=st1_0;st3_0=st1_0;
st1(1)=alpha*yt(1)+(1-alpha)*st1_0;
st2(1)=alpha*st1(1)+(1-alpha)*st2_0;
st3(1)=alpha*st2(1)+(1-alpha)*st3_0;
for i=2:n
    st1(i)=alpha*yt(i)+(1-alpha)*st1(i-1);
    st2(i)=alpha*st1(i)+(1-alpha)*st2(i-1);
    st3(i)=alpha*st2(i)+(1-alpha)*st3(i-1);
end
xlswrite('touzi.xls',[st1',st2',st3'])
st1=[st1_0,st1];st2=[st2_0,st2];st3=[st3_0,st3];
a=3*st1-3*st2+st3;
b=0.5*alpha/(1-alpha)^2*((6-5*alpha)*st1-2*(5-4*alpha)*st2+(4-3*alpha)*st3);
c=0.5*alpha^2/(1-alpha)^2*(st1-2*st2+st3);
yhat=a+b+c;
xlswrite('touzi.xls',yhat','Sheet1','D1')
plot(1:n,yt,'*',1:n,yhat(1:n),'O')
legend('实际值','预测值',2)
xishu=[c(n+1),b(n+1),a(n+1)];
yhat1990=polyval(xishu,2)
```

指数平滑预测模型是以时刻t为起点，综合历史序列的信息，对未来进行预测的。选择合适的加权系数α是提高预测精度的关键环节。根据实践经验，α的取值范围一般以 0.1～0.3 为宜。α值愈大，加权系数序列衰减速度愈快，所以实际上α取值大小起着控制参加平均的历史数据的个数的作用。α值愈大意味着采用的数据愈少。因此，可以得到选择α值的一些基本准则。

（1）如果序列的基本趋势比较稳，预测偏差由随机因素造成，则α值应取小一些，以减少修正幅度，使预测模型能包含更多历史数据的信息。

（2）如果预测目标的基本趋势已发生系统地变化，则α值应取得大一些。这样，可以偏重新数据的信息对原模型进行大幅度修正，以使预测模型适应预测目标的新变化。

另外，由于指数平滑公式是递推计算公式，所以必须确定初始值$S_0^{(1)}, S_0^{(2)}, S_0^{(3)}$。可以取前 3～5 个数据的算术平均值作为初始值。

§4 差分指数平滑法

在上节我们已经讲过，当时间序列的变动具有直线趋势时，用一次指数平滑法会出现滞后偏差，其原因在于数据不满足模型要求。因此，我们也可以从数据变换的角度来考虑改进措施，即在运用指数平滑法以前先对数据作一些技术上的处理，使之能适合于一次指数平滑模型，以后再对输出结果作技术上的返回处理，使之恢复为原变量的形态。差分方法是改变数据变动趋势的简易方法。下面我们讨论如何用差分方法来改进指数平滑法。

4.1 一阶差分指数平滑法

当时间序列呈直线增加时，可运用一阶差分指数平滑模型来预测。其公式如下：

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \tag{25}$$

$$\nabla \hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla y_t + (1-\alpha)\nabla \hat{y}_t \tag{26}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \nabla \hat{y}_{t+1} + y_t \tag{27}$$

其中的∇为差分记号。式（25）表示对呈现直线增加的序列作一阶差分，构成一个平稳的新序列；式（26）表示把经过一阶差分后的新序列的指数平滑预测值与变量当前的实际值迭加，作为变量下一期的预测值。对于这个公式的数学意义可作如下的解释。

因为

$$y_{t+1} = y_{t+1} - y_t + y_t = \nabla y_{t+1} + y_t \tag{28}$$

当我们采用按式（26）计算的预测值去估计式（28）中的y_{t+1}，从而式（28）等号左边的y_{t+1}也要改为预测值，亦即成为式（27）。

在前面我们已分析过，指数平滑值实际上是一种加权平均数。因此把序列中逐期增量的加权平均数（指数平滑值）加上当前值的实际数进行预测，比一次指数平滑法只用变量以往取值的加权平均数作为下一期的预测更合理。从而使预测值始终围绕实际值上下波动，从根本上解决了在有直线增长趋势的情况下，用一次指数平滑法所得出的结果始终落后于实际值的问题。

例 7　某工业企业 1977～1986 年锅炉燃料消耗量资料如表 8 所示，试预测 1987 年的燃料消耗量。

表 8　某企业锅炉燃料消耗量的差分指数平滑法计算表（$\alpha = 0.4$）（单位：百吨）

年份	t	燃料消耗量 y_t	差分	差分指数平滑值	预测值
1977	1	24			
1978	2	26	2		
1979	3	27	1	2	28
1980	4	30	3	1.6	28.6
1981	5	32	2	2.16	32.16
1982	6	33	1	2.10	34.10
1983	7	36	3	1.66	34.66
1984	8	40	4	2.19	38.19
1985	9	41	1	2.92	42.92
1986	10	44	3	2.15	43.15
1987	11			2.49	46.49

解　由资料可以看出，燃料消耗量，除个别年份外，逐期增长量大体在 200 吨左

右，即呈直线增长，因此可用一阶差分指数平滑模型来预测。我们取 $\alpha = 0.4$，初始值为新序列首项值，计算结果列于表 8 中。预测 1987 年燃料消耗量为

$\hat{y}_{1987} = 2.49 + 44 = 46.49$（百吨）。

4.2　二阶差分指数平滑模型

当时间序列呈现二次曲线增长时，可用二阶差分指数平滑模型来预测，计算公式如下：

$$\nabla y_t = y_t - y_{t-1} \tag{29}$$

$$\nabla^2 y_t = \nabla y_t - \nabla y_{t-1} \tag{30}$$

$$\nabla^2 \hat{y}_{t+1} = \alpha \nabla^2 y_t + (1-\alpha)\nabla^2 \hat{y}_t \tag{31}$$

$$\hat{y}_{t+1} = \nabla^2 \hat{y}_{t+1} + \nabla y_t + y_t \tag{32}$$

其中 ∇^2 表示二阶差分。

因为

$$y_{t+1} = y_{t+1} - y_t + y_t = \nabla y_{t+1} + y_t = (\nabla y_{t+1} - \nabla y_t) + \nabla y_t + y_t = \nabla^2 y_{t+1} + \nabla y_t + y_t$$

同样，用 $\nabla^2 y_{t+1}$ 的估计值代替 $\nabla^2 y_{t+1}$ 得到式（32）。

差分方法和指数平滑法的联合运用，除了能克服一次指数平滑法的滞后偏差之外，对初始值的问题也有显著的改进。因为数据经过差分处理后，所产生的新序列基本上是平稳的。这时，初始值取新序列的第一期数据对于未来预测值不会有多大影响。其次，它拓展了指数平滑法的适用范围，使一些原来需要运用配合直线趋势模型处理的情况可用这种组合模型来取代。但是，对于指数平滑法存在的加权系数 α 的选择问题，以及只能逐期预测问题，差分指数平滑模型也没有改进。

§5　自适应滤波法

5.1　自适应滤波法的基本过程

自适应滤波法与移动平均法、指数平滑法一样，也是以时间序列的历史观测值进行某种加权平均来预测的，它要寻找一组“最佳”的权数，其办法是先用一组给定的权数来计算一个预测值，然后计算预测误差，再根据预测误差调整权数以减少误差。这样反复进行，直至找出一组“最佳”权数，使误差减少到最低限度。由于这种调整权数的过程与通讯工程中的传输噪声过滤过程极为接近，故称为自适应滤波法。

自适应滤波法的基本预测公式为

$$\hat{y}_{t+1} = w_1 y_t + w_2 y_{t-1} + \cdots + w_N y_{t-N+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i y_{t-i+1} \tag{33}$$

式（33）中，$\hat{y}_{t+1}$ 为第 $t+1$ 期的预测值，w_i 为第 $t-i+1$ 期的观测值权数，y_{t-i+1} 为第 $t-i+1$ 期的观测值，N 为权数的个数。其调整权数的公式为

$$w_i^{'} = w_i + 2k \cdot e_{i+1} y_{t-i+1} \tag{34}$$

式中，$i = 1,2,\cdots,N$，$t = N, N+1,\cdots,n$，n 为序列数据的个数，w_i 为调整前的第 i 个权数，$w_i^{'}$ 为调整后的第 i 个权数，k 为学习常数，e_{i+1} 为第 $t+1$ 期的预测误差。式（34）表明：调整后的一组权数应等于旧的一组权数加上误差调整项，这个调整项包括预测误差、原观测值和学习常数等三个因素。学习常数 k 的大小决定权数调整的速度。

下面举一个简单的例子来说明此法的全过程。设有一个时间序列包括 10 个观测值，如表 9 所示。试用自适应滤波法，以两个权数来求第 11 期的预测值。

表 9　某时间序列数据表

时期 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1
观测值 y_t	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0

本例中 $N=2$。取初始权数 $w_1=0.5$，$w_2=0.5$，并设 $k=0.9$。t 的取值由 $N=2$ 开始，当 $t=2$ 时：

（1）按预测公式（33），求第 $t+1=3$ 期的预测值。

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_3=w_1y_2+w_2y_1=0.15$$

（2）计算预测误差。

$$e_{t+1}=e_3=y_3-\hat{y}_3=0.3-0.15=0.15$$

（3）根据式（34），

$$w_i^{'}=w_i+2k\cdot e_{i+1}y_{t-i+1}$$

调整权数为

$$w_1^{'}=w_1+2ke_3y_2=0.554$$

$$w_2^{'}=w_2+2ke_3y_1=0.527$$

（1）～（3）结束，即完成了一次权数调整，然后 t 进 1 再重复以前步骤。当 $t=3$ 时：

（1）利用所得到的权数，计算第 $t+1=4$ 期的预测值。方法是，舍去最前面的一个观测值 y_1，增加一个新的观测值 y_3。即

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_4=w_1^{'}y_3+w_2^{'}y_2=0.2716$$

（2）计算预测误差

$$e_{t+1}=e_4=y_4-\hat{y}_4=0.13$$

（3）调整权数

$$w_1^{'}=0.554+2\times0.9\times0.13\times0.3=0.624$$

$$w_2^{'}=0.527+2\times0.9\times0.13\times0.2=0.564$$

这样进行到 $t=10$ 时

$$\hat{y}_{t+1}=\hat{y}_{11}=w_1^{'}y_{10}+w_2^{'}y_9$$

但由于没有 $t=11$ 的观测值 y_{11}，因此

$$e_{t+1}=e_{11}=y_{11}-\hat{y}_{11}$$

无法计算。这时，第一轮的调整就此结束。把现有的新权数作为初始权数，重新开始 $t=2$ 的过程。这样反复进行下去，到预测误差（指新一轮的预测总误差）没有明显改进时，就认为获得了一组“最佳”权数，能实际用来预测第 11 期的数值。本例在调整过程中，可使得误差降为零，而权数达到稳定不变，最后得到的“最佳”权数为

$$w_1^{'}=2.0,\quad w_2^{'}=-1.0$$

用“最佳”权数预测第 11 期的取值

$$\hat{y}_{11}=w_1^{'}y_{10}+w_2^{'}y_9=1.1$$

在实际应用中，权数调整计算工作量可能很大，必须借助于计算机才能实现。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
yt=0.1:0.1:1;
```

```
m=length(yt); k=0.9;
N=2; Terr=10000;
w=ones(1,N)/N;
while abs(Terr)>0.00001
    Terr=[];
    for j=N+1:m-1
        yhat(j)=w*yt(j-1:-1:j-N)';
        err=yt(j)-yhat(j);
        Terr=[Terr,abs(err)];
        w=w+2*k*err*yt(j-1:-1:j-N);
    end
    Terr=max(Terr);
end
w, yhat
```

5.2 N,k 值和初始权数的确定

在开始调整权数时，首先要确定权数个数 N 和学习常数 k 。一般说来，当时间序列的观测值呈季节变动时， N 应取季节性长度值。如序列以一年为周期进行季节变动时，若数据是月度的，则取 $N=12$ ，若季节是季度的，则取 $N=4$ 。如果时间序列无明显的周期变动，则可用自相关系数法来确定，即取 N 为最高自相关系数的滞后时期。

k 的取值一般可定为 $1/N$ ，也可以用不同的 k 值来进行计算，以确定一个能使 S 最小的 k 值。

初始权数的确定也很重要，如无其它依据，也可用 $1/N$ 作为初始权系数用，即

$$w_i=\frac{1}{N}(i=1,2,\cdots,N)$$

自适应滤波法有两个明显的优点：一是技术比较简单，可根据预测意图来选择权数的个数和学习常数，以控制预测。也可以由计算机自动选定。二是它使用了全部历史数据来寻求最佳权系数，并随数据轨迹的变化而不断更新权数，从而不断改进预测。

由于自适应滤波法的预测模型简单，又可以在计算机上对数据进行处理，所以这种预测方法应用较为广泛。

§6 趋势外推预测方法

趋势外推法是根据事物的历史和现时资料，寻求事物发展规律，从而推测出事物未来状况的一种比较常用的预测方法。利用趋势外推法进行预测，主要包括六个阶段：（a）选择应预测的参数；（b）收集必要的数据；（c）利用数据拟合曲线；（d）趋势外推；（e）预测说明；（f）研究预测结果在进行决策中应用的可能性。

趋势外推法常用的典型数学模型有：指数曲线、修正指数曲线、生长曲线、包络曲线等。

6.1 指数曲线法

一般来说，技术的进步和生产的增长，在其未达饱和之前的新生时期是遵循指数曲线增长规律的，因此可以用指数曲线对发展中的事物进行预测。

指数曲线的数学模型为

$$y=y_0e^{Kt} \tag{35}$$

其中系数 y_0 和 K 值由历史数据利用回归方法求得。对式（35）取对数可得

$$\ln y=\ln y_0+Kt \tag{36}$$

令

$$Y=\ln y,\quad A=\ln y_0$$

则

$$Y=A+Kt$$

其中 A,K 可以用最小二乘法求得。

6.2　修正指数曲线法

利用指数曲线外推来进行预测时，存在着预测值随着时间的推移会无限增大的情况。这是不符合客观规律的。因为任何事物的发展都是有一定限度的。例如某种畅销产品，在其占有市场的初期是呈指数曲线增长的，但随着产品销售量的增加，产品总量接近于社会饱和量时。这时的预测模型应改用修正指数曲线。

$$\hat{y}_t=K+ab^t \tag{37}$$

在此数学模型中有三个参数 K,a 和 b 要用历史数据来确定。

修正指数曲线用于描述这样一类现象。

（1）初期增长迅速，随后增长率逐渐降低。

（2）当 $K>0$，$a<0$，$0<b<1$ 时，$t\to\infty$，$ab^t\to 0$，即 $\hat{y}_t\to K$。

当 K 值可预先确定时，采用最小二乘法确定模型中的参数。而当 K 值不能预先确定时，应采用三和法。

把时间序列的 n 个观察值等分为三部分，每部分有 m 期，即 $n=3m$。

第一部分：$y_1,y_2,\cdots,y_m$；

第二部分：$y_{m+1},y_{m+2},\cdots,y_{2m}$；

第三部分：$y_{2m+1},y_{2m+2},\cdots,y_{3m}$

令每部分的趋势值之和等于相应的观察值之和，由此给出参数估计值。三和法步骤如下：

记观察值的各部分之和

$$S_1=\sum_{t=1}^{m}y_t,\ S_2=\sum_{t=m+1}^{2m}y_t,\ S_3=\sum_{t=2m+1}^{3m}y_t \tag{38}$$

且

$$\begin{cases}S_1=\sum\limits_{t=1}^{m}\hat{y}_t=\sum\limits_{t=1}^{m}(K+ab^t)=mK+ab(1+b+b^2+\cdots b^{m-1})\\ S_2=\sum\limits_{t=m+1}^{2m}\hat{y}_t=\sum\limits_{t=m+1}^{2m}(K+ab^t)=mK+ab^{m+1}(1+b+b^2+\cdots b^{m-1})\\ S_3=\sum\limits_{t=2m+1}^{3m}\hat{y}_t=\sum\limits_{t=2m+1}^{3m}(K+ab^t)=mK+ab^{2m+1}(1+b+b^2+\cdots b^{m-1})\end{cases} \tag{39}$$

由于

$$(1+b+b^2+\cdots b^{m-1})(b-1)=b^m-1 \tag{40}$$

则根据(11.35) 式，得

$$\begin{cases} S_1 = mK + ab\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \\ S_2 = mK + ab^{m+1}\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \\ S_3 = mK + ab^{2m+1}\dfrac{b^{m-1}}{b-1} \end{cases} \tag{41}$$

由（41）式，解得

$$\begin{cases} b = \left(\dfrac{S_3 - S_2}{S_2 - S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a = (S_2 - S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K = \dfrac{1}{m}\left[S_1 - \dfrac{ab(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{42}$$

至此三个参数全部确定了，于是就可以用式（37）进行预测。

值得注意的是，并不是任何一组数据都可以用修正指数曲线拟合。采用前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的逐期增长量的比率是否接近某一常数 b 。即

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t - y_{t-1}} \approx b \tag{43}$$

例 8　根据统计资料，某厂收音机连续 15 年的销售量如表 10。

表 11　某厂收音机销售量

时间(年)	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976
销售量(万部)	42.1	47.5	52.7	57.7	62.5	67.1	71.5	75.7
时间(年)	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	
销售量(万部)	79.8	83.7	87.5	91.1	94.6	97.9	101.1	

试用修正指数曲线预测 1986 年的销售量。

解　经计算可知

$$\frac{y_{t+1} - y_t}{y_t - y_{t-1}} \in [0.9429,\ 0.9762]$$

可以认定这组数据可以采用修正指数曲线拟合。现将以上 15 个数据分为三部分，每部分 5 个数据，即 $n = 15$ ， $m = 5$ ，并以 1969 年作为开始年份 $t = 1$ 。

根据式（38），得

$S_1 = 262.5$ ， $S_2 = 377.8$ ， $S_3 = 472.2$

再由（42）式，得

$b = 0.9608$ ， $a = -143.2063$ ， $K = 179.7162$

故修正指数曲线的数学模型为

$$y = 179.7162 - 143.2063 \times 0.9608^t \tag{44}$$

预测 1986 年的产量时， $t = 1986 - 1969 + 1 = 18$ 。所以

$$y_{1986}=179.7162-143.2063\times 0.9608^{18}=110$$（万部）

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=xsh; n=length(yt);m=n/3
cf=diff(yt);
for i=1:n-2
    bzh(i)=cf(i+1)/cf(i);
end
range=minmax(bzh)
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
y=yuce(1:18)
%**************************************
%定义预测函数
%**************************************
function y=yuce(t)
global a b k
y=k+a*b.^t;
```

6.3　Compertz 曲线

曲线的一般形式

$$\hat{y}_t=Ka^{b^t}\ ,\ K>0\ ,0<a\neq 1\ ,0<b\neq 1 \qquad (45)$$

采用 Compertz 曲线前应对数据进行检验，检验方法是看给定数据的对数逐期增长量的比率是否接近某一常数 b 。即

$$\frac{\ln y_{t+1}-\ln y_t}{\ln y_t-\ln y_{t-1}}\approx b \qquad (46)$$

Compertz 曲线用于描述这样一类现象：初期增长缓慢，以后逐渐加快。当达到一定程度后，增长率又逐渐下降。

参数估计方法如下：

式（46）两边取对数，得

$$\log \hat{y}_t=\log K+(\log a)b^t \qquad (47)$$

记

$$\hat{y}'_t=\ln \hat{y}_t\ ,\ K'=\ln K\ ,\ a'=\ln a$$

得

$$\hat{y}'_t=K'+a'b^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1=\sum_{t=1}^{m}y'_t\ ,\ S_2=\sum_{t=m+1}^{2m}y'_t\ ,\ S_3=\sum_{t=2m+1}^{3m}y'_t \qquad (48)$$

其中 $y'_t=\ln y_t$ 。则类似式（42），得

$$\begin{cases} b=\left(\dfrac{S_3-S_2}{S_2-S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a'=(S_2-S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K'=\dfrac{1}{m}\left[S_1-\dfrac{a'b(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{49}$$

例 9（续例 8） 根据表 10 的数据，试确定收音机销售量的 Gompertz 曲线方程，求出各年收音机销售量的趋势值，并预测 1986 年的销售量。

解：已知 $n=15$， $m=5$，根据式（48），得

$$S_1=19.7558,\ S_2=21.6094,\ S_3=22.7333$$

再由式（49），得

$$b=0.9048$$

$$a'=-1.2588,\ a=0.284$$

$$K'=4.8929,\ K=133.3341$$

从而收音机销售量的 Compertz 曲线方程为

$$\hat{y}_t=133.3341\times 0.284^{0.9048^t}$$

将 $t=18$ 代入方程，得 1986 年收音机销售量的预测值为

$$\hat{y}_{1986}=108.3143\text{（万部）}$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang2
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=log(xsh); n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
a=exp(a)
k=exp(k)
y=yuce(1:18)
%************************************
%定义预测函数
%************************************
function y=yuce(t);
global a b k
y=k*a.^(b.^t);
```

6.4 Logistic 曲线（生长曲线）

生物的生长过程经历发生、发展到成熟三个阶段，在三个阶段生物的生长速度是不一样的，例如南瓜的重量增长速度，在第一阶段增长的较慢，在发展时期则突然加快，而到了成熟期又趋减慢，形成一条 S 形曲线，这就是有名的 Logistic 曲线（生长曲线），

很多事物，如技术和产品发展进程都有类似的发展过程，因此 Logistic 曲线在预测中有相当广泛的应用。

Logistic 曲线的一般数学模型是

$$\frac{dy}{dt}=ry(1-\frac{y}{L}) \tag{50}$$

式中 y 为预测值，L 为 y 的极限值，r 为增长率常数，$r>0$。解此微分方程得

$$y=\frac{L}{1+ce^{-rt}} \tag{51}$$

式中 c 为常数。

下面我们记 Logistic 曲线的一般形式为

$$y_t=\frac{1}{K+ab^t}，\ K>0，\ a>0，\ 0<b\neq 1 \tag{52}$$

检验能否使用 Logistic 曲线的方法，是看给定数据倒数的逐期增长量的比率是否接近某一常数 b。即

$$\frac{1/y_{t+1}-1/y_t}{1/y_t-1/y_{t-1}}\approx b \tag{53}$$

Logistic 曲线中参数估计方法如下：

作变换

$$y'_t=\frac{1}{y_t}$$

得

$$y'_t=K+ab^t$$

仿照修正指数曲线的三和法估计参数，令

$$S_1=\sum_{t=1}^{m}y'_t\,,\ S_2=\sum_{t=m+1}^{2m}y'_t\,,\ S_3=\sum_{t=2m+1}^{3m}y'_t \tag{54}$$

则类似式（42），得

$$\begin{cases} b=\left(\dfrac{S_3-S_2}{S_2-S_1}\right)^{\frac{1}{m}} \\ a=(S_2-S_1)\dfrac{b-1}{b(b^m-1)^2} \\ K=\dfrac{1}{m}\left[S_1-\dfrac{ab(b^m-1)}{b-1}\right] \end{cases} \tag{55}$$

例 10（续例 8） 根据表 10 的数据，试确定收音机销售量的 Logistic 曲线方程，求出各年收音机销售量的趋势值，并预测 1986 年的销售量。

解：已知 $n=15$，$m=5$，根据式（54），得

$$S_1=0.0971，\ S_2=0.0666，\ S_3=0.0531$$

再由式（55），得

$$b=0.8493，\ a=0.0174，\ K=0.0085$$

从而收音机销售量的 Logistic 曲线方程为

$$\hat{y}_t = \frac{1}{0.0085 + 0.0174 \times 0.8493^t}$$

将$t = 18$代入方程，得 1986 年收音机销售量的预测值为

$$\hat{y}_{1986} = 106.3981$$

计算的 MATLAB 程序如下：

```
function chanliang3
clc,clear
global a b k
load xsh.txt %原始数据存放在纯文本文件 xsh.txt 中
yt=1./xsh; n=length(yt);m=n/3;
s1=sum(yt(1:m)), s2=sum(yt(m+1:2*m)), s3=sum(yt(2*m+1:end))
b=((s3-s2)/(s2-s1))^(1/m)
a=(s2-s1)*(b-1)/(b*(b^m-1)^2)
k=(s1-a*b*(b^m-1)/(b-1))/m
y=yuce(1:18)
%************************************
%定义预测函数
%************************************
function y=yuce(t);
global a b k
y=1./(k+a*b.^t);
```

6.5　趋势线的选择

趋势线的选择有以下几种方式。

1．由散点图选择趋势线。

2．由数据本身的取值规律选择趋势线。

3．比较预测标准误差大小

$$S = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \tag{56}$$

当有几种趋势线可供选择时，应选择S最小的趋势线。

§7　平稳时间序列模型

这里的平稳是指宽平稳，其特性是序列的统计特性不随时间的平移而变化，即均值和协方差不随时间的平移而变化。

下面自回归模型（Auto Regressive Model）简称 AR 模型，移动平均模型（Moving Average Model）简称 MA 模型，自回归移动平均模型（Auto Regressive Moving Average Model）简称 ARMA 模型。下面的X_t为零均值（即中心化处理的）平稳序列。

（1）一般自回归模型 AR(n)

假设时间序列X_t仅与$X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$有线性关系，而在$X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$已知条件下，$X_t$与$X_{t-j}(j = n+1, n+2, \cdots)$无关，$a_t$是一个独立于$X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$的白噪声序列，$a_t \sim N(0, \sigma_a^2)$。

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \cdots + \varphi_n X_{t-n} + a_t$$

上式还可以表示为

$$a_t = X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} - \cdots - \varphi_n X_{t-n}$$

可见，$\mathrm{AR}(n)$ 系统的响应 X_t 具有 n 阶动态性。$\mathrm{AR}(n)$ 模型通过把 X_t 中的依赖于 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 的部分消除掉之后，使得具有 n 阶动态性的序列 X_t 转化为独立的序列 a_t。因此，拟合 $\mathrm{AR}(n)$ 模型的过程也就是使相关序列独立化的过程。

（2）移动平均模型 $\mathrm{MA}(m)$

$\mathrm{AR}(n)$ 系统的特征是系统在 t 时刻的响应 X_t 仅与其以前时刻的响应 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots, X_{t-n}$ 有关，而与其以前时刻进入系统的扰动无关。如果一个系统在 t 时刻的响应 X_t，与其以前时刻 $t-1, t-2, \cdots$ 的响应 $X_{t-1}, X_{t-2}, \cdots$ 无关，而与其以前时刻 $t-1, t-2, \cdots, t-m$ 进入系统的扰动 $a_{t-1}, a_{t-2}, \cdots, a_{t-m}$ 存在着一定的相关关系，那么，这一类系统为 $\mathrm{MA}(m)$ 系统。

$$X_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_m a_{t-m}$$

（3）自回归移动平均模型

一个系统，如果它在时刻 t 的响应 X_t，不仅与其以前时刻的自身值有关，而且还与其以前时刻进入系统的扰动存在一定的依存关系，那么，这个系统就是自回归移动平均系统。

$\mathrm{ARMA}(n,m)$ 模型为

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \cdots - \varphi_n X_{t-n} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_m a_{t-m}$$

对于平稳系统来说，由于 AR、MA、$\mathrm{ARMA}(n,m)$ 模型都是 $\mathrm{ARMA}(n,n-1)$ 模型的特例，我们以 $\mathrm{ARMA}(n,n-1)$ 模型为一般形式来建立时序模型。

§8 ARMA 模型的特性

在时间序列的时域分析中，线性差分方程是极为有效的工具。事实上，任何一个 ARMA 模型都是一个线性差分方程。

8.1 AR(1)系统的格林函数

格林函数就是描述系统记忆扰动程度的函数。

AR(1)模型为

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} = a_t$$

设 $X_{t-1} = y(t)$，则有

$$y(t+1) - \varphi_1 y(t) = a_t \qquad (57)$$

显然是一个一阶非齐次差分方程。

由于

$$\begin{aligned} X_t &= \varphi_1 X_{t-1} + a_t = \varphi_1(\varphi_1 X_{t-2} + a_{t-1}) + a_t \\ &= \varphi_1^2 X_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t \\ &= \varphi_1^3 X_{t-3} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \varphi_1 a_{t-1} + a_t = \cdots \end{aligned}$$

依次递推下去，可得到

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_1^j a_{t-j} \qquad (58)$$

显然（58）式是差分方程（57）的解。

方程解的系数函数 φ_1^j 客观地描述了该系统的动态性，故这个系统函数就叫做记忆函数，也叫格林函数。若用 G_j 表示，则 AR(1)模型的格林函数可以表示为

$$G_j = \varphi_1^j$$

这样（58）式可等价地写成：

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \tag{59}$$

上式也可写成

$$X_t = \sum_{k=-\infty}^{t} G_{t-k} a_k$$

这里 $G_0 = \varphi_1^0 = 1$。

定义后移算子 B， $BX_t = X_{t-1}, B^2 X_t = X_{t-2}, \cdots$，这样，AR(1)可写成

$$(1-\varphi_1 B)X_t = a_t$$

它的解为

$$X_t = \frac{1}{1-\varphi_1 B} a_t = (1+\varphi_1 B + \varphi_1^2 B^2 + \cdots)a_t$$

$$= a_t + \varphi_1 a_{t-1} + \varphi_1^2 a_{t-2} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j}$$

由于格林函数就是差分方程解的系数函数，格林函数的意义可概括如下：

（1）G_j 是前 j 个时间单位以前进入系统的扰动 a_{t-j} 对系统现在行为（响应）影响的权数。

（2）G_j 客观地刻画了系统动态响应衰减的快慢程度。

（3）对于一个平稳系统来说，在某一时刻由于受到进入系统的扰动 a_t 的作用，离开其平衡位置（即平均数－零），G_j 描述系统回到平衡位置的速度，φ_1 的值较小，速度较快；φ_1 的值较大，回复的速度就较慢。

8.2 ARMA(2,1) 系统的格林函数

（1）ARMA(2,1) 系统的格林函数的隐式

ARMA(2,1) 模型是一个二阶非齐次差分方程

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

设该二阶非齐次差分方程的解为

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} G_j a_{t-j} \tag{60}$$

为方便起见，可用 B 算子：

$$(1-\varphi_1 B - \varphi_2 B^2)X_t = (1-\theta_1 B)a_t \tag{61}$$

$$X_t = \left(\sum_{j=0}^{\infty} G_j B^j\right) a_t \tag{62}$$

把（62）式代入（61），比较两边 B 的同次幂的系数得

$$G_0=1,\ G_1=\varphi_1-\theta_1,\ G_j=\varphi_1G_{j-1}+\varphi_2G_{j-2},\ j=3,4,\cdots$$

（2） ARMA(2,1) 系统的格林函数的显式

ARMA(2,1) 模型实质上是一个二阶非齐次差分方程：

$$X_t-\varphi_1X_{t-1}-\varphi_2X_{t-2}=a_t-\theta_1a_{t-1}$$

欲求其解，必须先求出其相应的齐次差分方程的通解。

齐次方程对应的特征方程为

$$\lambda^2-\varphi_1\lambda-\varphi_2=0,$$

特征根为

$$\lambda_1=\frac{\varphi_1+\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2}}{2},\quad \lambda_2=\frac{\varphi_1-\sqrt{\varphi_1^2+4\varphi_2}}{2}$$

齐次差分方程的通解为

$$G_j=c_1\lambda_1^j+c_2\lambda_2^j$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数，其值由初始条件唯一地确定。这里的初始条件为：

$$\begin{cases}G_0=1\\ G_1-\varphi_1=-\theta_1\Rightarrow G_1=\varphi_1-\theta_1\end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases}G_0=c_1+c_2=1\\ G_1=c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=\varphi_1-\theta_1\end{cases}$$

而 $\lambda_1+\lambda_2=\varphi_1$，即

$$\begin{cases}c_1+c_2=1\\ c_1\lambda_1+c_2\lambda_2=\lambda_1+\lambda_2-\theta_1\end{cases}$$

解之，得

$$c_1=\frac{\lambda_1-\theta_1}{\lambda_1-\lambda_2},\quad c_2=\frac{\lambda_2-\theta_1}{\lambda_2-\lambda_1}$$

则 ARMA(2,1) 系统的格林函数为：

$$G_j=\frac{\lambda_1-\theta_1}{\lambda_1-\lambda_2}\lambda_1^j+\frac{\lambda_2-\theta_1}{\lambda_2-\lambda_1}\lambda_2^j$$

8.3　逆函数和可逆性

前面的格林函数，把 X_t 表示为过去 a_t 对 X_t 的影响，或者说系统对过去 a_t 的记忆性，也就是用一个 MA 模型来逼近 X_t 的行为。平稳序列 X_t 的这种表达形式称为 X_t 的“传递形式”。同样我们也可以用过去的 X_t 的一个线性组合来逼近系统现在时刻的行为。即

$$X_t=I_1X_{t-1}+I_2X_{t-2}+\cdots+a_t=\sum_{j=1}^{\infty}I_jX_{t-j}+a_t$$

我们把这种表达形式称为 X_t 的“逆转形式”。其中的系数函数 $I_j(I_0=1)$ 称为逆函

数。可见它是一个无穷阶的自回归模型。一个过程是否具有逆转形式，也就是说逆函数是否存在的性质，通常称为过程是否具有可逆性，如果一个过程可以用一个无限阶的自回归模型逼近，即逆函数存在，我们就称该过程具有可逆性，否则，就是不可逆的。

对于 AR（2）模型

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + a_t$$

有

$$I_1 = \varphi_1,\ I_2 = \varphi_2,\ I_j = 0, j = 3,4,\cdots$$

可见，所谓可逆性，是指移动平均模型可以用 AR 模型表示。

MA(1)模型：

$$X_t = (1-\theta_1 B)a_t$$

那么

$$a_t = \frac{X_t}{1-\theta_1 B} = (1+\theta_1 B+\theta_1^2 B^2+\cdots)X_t = X_t + \sum_{j=1}^{\infty}\theta_1^j X_{t-j}$$

即

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty}(-\theta_1^j X_{t-j}) + a_t$$

可见，$I_j = -\theta_1^j$，显然，只有$|\theta_1|<1$时，才有 $j\to\infty$，$I_j \to 0$，故 MA（1）的可逆性条件为

$$|\theta_1|<1$$

§9 时间序列建模的基本步骤

上面我们介绍了时间序列的一些基本概念，下面我们初步给出时间序列建模的基本步骤，有兴趣的读者可以去查阅相关的参考资料。

时间序列建模的基本步骤如下：

1．数据的预处理：数据的剔取及提取趋势项。

2．取$n=1$，拟合$\mathrm{ARMA}(2n,2n-1)$（即 ARMA(2,1)）模型

（1） $p=3$，拟和$\mathrm{AR}(p)$模型。

设所要拟合的模型为 $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varphi_3 X_{t-3} + a_t$，

用最小二乘法拟合出系数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$。

注意到对于 AR(p)模型，$\varphi_j = I_j$，这里I_j是模型的逆函数，于是可得到I_1, I_2, I_3的值。

（2）估计 ARMA(2,1)模型 $X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = a_t - \theta_1 a_{t-1}$参数的初始值。

对于 ARMA(2,1)模型，我们有：

$$I_j - \theta_1 I_{j-1} = 0,\quad j>2,$$

于是

$$I_3 - \theta_1 I_2 = 0 \Rightarrow \theta_1 = \frac{I_3}{I_2}。$$

注意：以 AR(3)中的I_1, I_2, I_3替代 ARMA(2,1) 中的I_1, I_2, I_3是一种近似代替。通

过这种方法求得的θ_1的绝对值若大于 1，则取其倒数作为初始值，以满足可逆性条件。

知道了I_1, I_2, I_3及θ_1，再用下式来确定 ARMA(2,1)模型中的φ_1, φ_2：

$$\varphi_1 = I_1 + \theta_1;\ \ \varphi_2 = \theta_2 - \theta_1 I_1 + I_2。$$

（3）以（2）中得到的$\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$为初始值，利用非线性最小二乘法得到$\varphi_1, \varphi_2, \theta_1$的终值及置信区间，并且求出残差平方和(RSS)。

3．$n = n+1$，拟合 ARMA$(2n, 2n-1)$模型

其基本步骤与 2 类似。

4．用 F 准则检验模型的适用性。若F检验显著，则转入第 2 步。若F检验不显著，转入第 5 步。

对于 ARMA 模型的适用性检验的实际就是对a_t的独立性检验。检验a_t的独立性的一个简便而有效的办法是拟合更高阶的模型。若更高阶模型的残差平方和有明显减少，就意味着现有模型的a_t不是独立的，因而模型不适用；若更高阶模型的残差平方和没有明显减少，同时更高阶模型中的附加参数的值也很小（其置信区间包含 0），则可认为该模型是适用的。具体的检验准则如下。

设有模型 ARMA(n_1, m_1) 和 ARMA(n_2, m_2)，$n_2 > n_1, m_2 > m_1$。假设$A_0 = \text{ARMA}(n_1, m_1)$模型的残差$a_t$之平方和，$A_1 = \text{ARMA}(n_2, m_2)$模型的残差$a_t$之平方和，$N$是采集数据的数目，则检验准则为：

$$F = \frac{A_1 - A_0}{s} \Big/ \frac{A_0}{N-\gamma} \sim F(s, N-\gamma),$$

其中$\gamma = n_2 + m_2$，$s = n_2 + m_2 - (n_1 + m_1)$。

若这样得到的F值超过由F分布查表所得的在 5%置信水平上的$F(s, N-\gamma)$值，那么由 ARMA(n_1, m_1)模型改变为 ARMA(n_2, m_2)时，残差平方和的改善是显著的，因而拒绝关于模型 ARMA(n_1, m_1)的适用性假设；F值低于查表所得之值，就可以认为在该置信水平上这个模型是适用的。

5．检查$\varphi_{2n}, \theta_{2n-1}$的值是否很小，其置信区间是否包含零。若不是，则适用的模型就是 ARMA$(2n, 2n-1)$。

若$\varphi_{2n}, \theta_{2n-1}$很小，且其置信区间包含零，则拟合 ARMA$(2n-1, 2n-2)$。

6．利用 F 准则检验模型 ARMA$(2n, 2n-1)$和 ARMA$(2n-1, 2n-2)$，若 F 值不显著，转入第 7 步；若 F 值显著，转入第 8 步。

7．舍弃小的 MA 参数，拟合$m < 2n-2$的模型 ARMA$(2n-1, m)$，并用 F 准则进行检验。重复这一过程，直到得出具有最小参数的适用模型为止。

8．舍弃小的 MA 参数，拟合$m < 2n-1$的模型 ARMA$(2n, m)$，并用 F 准则进行检验。重复这一过程，直到得出具有最小参数的适用模型为止。

习题二十四

1．我国 1974～1981 年布的产量如表 11 所示。

表 11　1974～1981 年布的产量

年份	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
产量(亿米)	80.8	94.0	88.4	101.5	110.3	121.5	134.7	142.7

（1）试用趋势移动平均法（取 $N=3$），建立布的年产量预测模型。

（2）分别取 $\alpha=0.3$，$\alpha=0.6$，$S_0^{(1)}=S_0^{(2)}=\dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}=87.7$，建立布的直线指数平滑预测模型。

（3）计算模型拟合误差，比较 3 个模型的优劣。

（4）用最优的模型预测 1982 年和 1985 年布的产量。

2．1960～1982 年全国社会商品零售额如表 12 所示（单位：亿元）。

表 12 全国社会商品零售额数据

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
零售总额	696.9	607.7	604	604.5	638.2	670.3	732.8	770.5
年份	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
零售总额	737.3	801.5	858	929.2	1023.3	1106.7	1163.6	1271.1
年份	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	
零售总额	1339.4	1432.8	1558.6	1800	2140	2350	2570	

试用三次指数平滑法预测 1983 年和 1985 年全国社会商品零售额。

3．某地区粮食产量（亿千克），从 1969～1983 年顺次为：3.78，4.19，4.83，5.46，6.71，7.99，8.60，9.24，9.67，9.87，10.49，10.92，10.93，12.39，12.59，试选用 2～3 种适当的曲线预测模型，预测 1985 年和 1990 年的粮食产量。

第二十五章　存贮论

存贮论（或称为库存论）是定量方法和技术最早的领域之一，是研究存贮系统的性质、运行规律以及如何寻找最优存贮策略的一门学科，是运筹学的重要分支。存贮论的数学模型一般分成两类：一类是确定性模型，它不包含任何随机因素，另一类是带有随机因素的随机存贮模型。

§1　存贮模型中的基本概念

所谓存贮实质上是将供应与需求两个环节以存贮中心联结起来，起到协调与缓和供需之间矛盾的作用。存贮模型的基本形式如图 1 所示。



图 1　存贮问题基本模型

1．存贮问题的基本要素

（1）需求率：单位时间内对某种物品的需求量，用 D 表示。

（2）订货批量：一次订货中，包含某种货物的数量，用 Q 表示。

（3）订货间隔期：两次订货之间的时间间隔，用 T 表示。

2．存贮模型的基本费用

（1）订货费：每组织一次生产、订货或采购的费用，通常认为与定购数量无关，记为 C_D。

（2）存贮费：所有用于存贮的全部费用，通常与存贮物品的多少和时间长短有关。单位存贮费记为 C_P。

（3）短缺损失费：由于物品短缺所产生的一切损失费用，通常与损失物品的多少和短缺时间的长短有关，记为 C_S。

3．存贮策略

所谓一个存贮策略，是指决定什么情况下对存贮进行补充，以及补充数量的多少。下面是一些比较常见的存贮策略。

（1）t 循环策略：不论实际的存贮状态如何，总是每隔一个固定的时间 t，补充一个固定的存贮量 Q。

（2）(t,S) 策略：每隔一个固定的时间 t 补充一次，补充数量以补足一个固定的最大存贮量 S 为准。因此，每次补充的数量是不固定的，要视实际存贮量而定。当存

贮（余额）为 I 时，补充数量为 $Q=S-I$ 。

（3）(s,S) 策略：当存贮（余额）为 I ，若 $I>s$ ，则不对存贮进行补充；若 $I\le s$ ，则对存贮进行补充，补充数量 $Q=S-I$ 。补充后达到最大存贮量 S 。s 称为订货点（或保险存贮量、安全存贮量、警戒点等）。在很多情况下，实际存贮量需要通过盘点才能得知。若每隔一个固定的时间 t 盘点一次，得知当时存贮 I ，然后根据 I 是否超过订货点 s ，决定是否订货、订货多少，这样的策略称为 (t,s,S) 策略。

§2　无约束的确定型存贮模型

我们首先考察经济订购批量存贮模型。

所谓经济订购批量存贮模型（economic ordering quantity, EOQ）是指不允许缺货、货物生产（或补充）的时间很短（通常近似为 0）的模型。

2.1　模型一：不允许缺货，补充时间极短—基本的经济订购批量存贮模型

基本的经济订购批量存贮模型有以下假设：

（1）短缺费为无穷，即 $C_S=\infty$ ；

（2）当存贮降到零后，可以立即得到补充；

（3）需求是连续的、均匀的，即需求速度（单位时间的需求量） D 为常数；

（4）每次的订货量不变，订购费不变；

（5）单位存贮费为 C_p 。

由上述假设，存贮量的变化情况如图 2 所示。

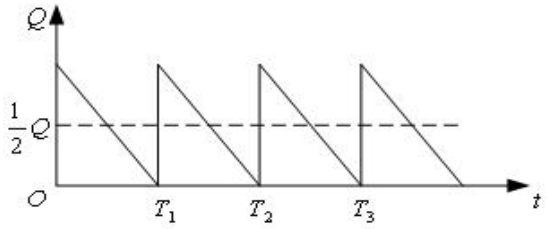


图 2　EOQ 模型的存贮量曲线

在每一个周期（ T ）内，最大的存贮量为 Q ，最小的存贮量为 0，且需求是连续均匀的，因此在一个周期内，其平均存贮量为 $\frac{1}{2}Q$ ，存贮费用为 $\frac{1}{2}C_PQ$ 。

一次订货费为C_D，那么在一个周期（T）内的平均订货非为C_D/T。由于在最初时刻，订货量为Q，在T时刻，存贮量为 0，而且单位时间的需求量为D且连续均匀变化，因此，得到订货量Q、需求量D和订货周期T之间的关系$T=\dfrac{Q}{D}$。

由此计算出一个单位时间内的平均总费用

$$C=\frac{1}{2}C_PQ+\frac{C_DD}{Q} \tag{1}$$

对式（1）求导数，并令其为 0，即

$$\frac{dC}{dQ}=\frac{1}{2}C_P-\frac{C_DD}{Q^2}=0 \tag{2}$$

得到费用最小的订货量

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_DD}{C_P}} \tag{3}$$

最佳订货周期

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D}{C_PD}} \tag{4}$$

最小费用

$$C^*=\frac{1}{2}C_PQ^*+\frac{C_DD}{Q}=\sqrt{2C_DC_PD} \tag{5}$$

公式（3）称为经济订购批量（economic ordering quantity，简写 EOQ）公式，也称为经济批量（economic lot size）公式。

例 1　某商品单位成本为 5 元，每天保管费为成本的 0.1%，每次定购费为 10 元。已知对该商品的需求是 100 件/天，不允许缺货。假设该商品的进货可以随时实现。问应怎样组织进货，才能最经济。

解　根据题意，$C_p=5\times0.1\%=0.005$（元/件·天），$C_D=10$元，$D=100$件/天。

由式（3）～（5），有

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_DD}{C_P}}=\sqrt{\frac{2\times10\times100}{0.005}}=632\text{（件）}$$

$$T^* = \frac{Q^*}{D} = \frac{632}{100} = 6.32 \text{（天）}$$

$$C^* = \sqrt{2C_D C_P D} = 3.16 \text{（元/天）}$$

所以，应该每隔 6.32 天进货一次，每次进货该商品 632 件，能使总费用（存贮费和定购费之和）为最少，平均约 3.16 元/天。

进一步研究，全年的订货次数为

$$n = \frac{365}{6.32} = 57.75 \text{（天）}$$

但 n 必须为正整数，故还需要比较 $n=57$ 与 $n=58$ 时全年的费用。

编写如下LINGO程序：

```
model:
sets:
times/1 2/:n,Q,C;
endsets
data:
n=57 58;
enddata
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times:n=D/Q;C=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
end
```

求得全年组织 58 次订货费用少一点。

利用 LINGO 软件，我们可以直接求出问题的整数解。

LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
times/1..100/:C,Q; !100不是必须的，通常取一个适当大的数就可以了;
endsets
C_D=10;
D=100*365;
C_P=0.005*365;
@for(times(i):Q(i)=D/i;C(i)=0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
C_min=@min(times:C);
Q_best=@sum(times(i):Q(i)*(C(i) #eq# C_min));
N_best=D/Q_best;
end
```

求得一年组织 58 次订货，每次的订货量为 629.3 件，最优费用为 1154.25 元。

2.2　模型二：允许缺货，补充时间较长—经济生产批量存贮模型

模型假设条件：

（1）需求是连续的，即需求速度 D 为常数；

（2）补充需要一定时间。即一旦需要，生产可立刻开始，但生产需要一定周期。设生产是连续均匀的，即生产速度 P 为常数。同时，设 $P>D$；

（3）单位存贮费为 C_P，单位缺货费为 C_S，订购费为 C_D。不考虑货物价值。

存贮状态图见图 3。

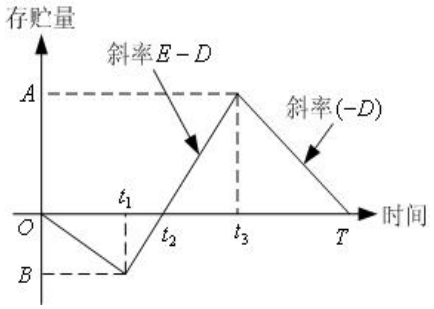


图 3　允许缺货且补充时间较长的存贮模型

$[0,T]$ 为一个存贮周期，t_1 时刻开始生产，t_3 时刻结束生产。

$[0,t_2]$ 时间内存贮为 0，t_1 时达到最大缺货量 B，$[t_1,t_2]$ 时间内产量一方面以速度 D 满足需求，另一方面以速度 $P-D$ 补充 $[0,t_1]$ 时间内的缺货，至 t_2 时刻缺货补足。

$[t_2,t_3]$ 时间内产量一方面以速度 D 满足需求，另一方面以速度 $P-D$ 增加存贮。至 t_3 时刻达到最大存贮量 A，并停止生产。

$[t_3,T]$ 时间内以存贮满足需求，存贮以速度 D 减少。至 T 时刻存贮降为零，进入下一个存贮周期。

下面，根据模型假设条件和存贮状态图，首先导出 $[0,T]$ 时间内的平均总费用（即费用函数），然后确定最优存贮策略。

从 $[0,t_1]$ 看，最大缺货量 $B=Dt_1$；从 $[t_1,t_2]$ 看，最大缺货量 $B=(P-D)(t_2-t_1)$。

故有 $Dt_1=(P-D)(t_2-t_1)$，从中解出：

$$t_1=\frac{P-D}{P}t_2 \tag{6}$$

从 $[t_2,t_3]$ 看，最大存贮量 $A=(P-D)(t_3-t_2)$；从 $[t_3,T]$ 看，最大存贮量 $A=D(T-t_3)$。故有 $(P-D)(t_3-t_2)=R(T-t_3)$，从中解得

$$t_3-t_2=\frac{D}{P}(T-t_2) \tag{7}$$

易知，在 $[0,T]$ 时间内：

存贮费为 $\frac{1}{2}C_P(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2)$；

缺货费为 $\frac{1}{2}C_SDt_1t_2$；

定购费为 C_D。

故 $[0,T]$ 时间内平均总费用为

$$C(T,t_2)=\frac{1}{T}\left[\frac{1}{2}C_P(P-D)(t_3-t_2)(T-t_2)+\frac{1}{2}C_sDt_1t_2+C_D\right]$$

故将（6）和（7）代入，整理后得

$$C(T,t_2)=\frac{(P-D)D}{2P}\left[C_pT-2C_Pt_2+(C_P+C_S)\frac{t_2^2}{T}\right]+\frac{C_D}{T} \tag{8}$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial C(T,t_2)}{\partial T}=0\\[2ex]\dfrac{\partial C(T,t_2)}{\partial t_2}=0\end{cases}$$

可得

$$T^*=\sqrt{\frac{2C_D(C_P+C_S)}{DC_PC_S(1-\frac{D}{P})}}$$

$$t_2^* = \frac{C_P}{C_P + C_S} T^*$$

容易证明，此时的费用$C(T^*, t_2^*)$是费用函数$C(T, t_2)$的最小值。

因此，模型的最优存贮策略各参数值为：

最优存贮周期$T^* = T^* = \sqrt{\frac{2C_D(C_P + C_S)}{DC_PC_S(1-\frac{D}{P})}}$ （9）

经济生产批量$Q^* = DT^* = \sqrt{\frac{2C_DD(C_P + C_S)}{C_PC_S(1-\frac{D}{P})}}$ （10）

缺货补足时间$t_2^* = \frac{C_P}{C_P + C_S} T^* = \sqrt{\frac{2C_DC_PD}{C_S(C_P + C_S)(1-\frac{D}{P})}}$ （11）

开始生产时间$t_1^* = \frac{P-D}{P} t_2^* = \sqrt{\frac{2C_DC_PD(1-\frac{D}{P})}{C_S(C_P + C_S)}}$ （12）

结束生产时间$t_3^* = \frac{D}{P} T^* + (1-\frac{D}{P}) t_2^*$ （13）

最大存贮量$A^* = D(T^* - t_3^*)$ （14）

最大缺货量$B^* = Dt_1^*$ （15）

平均总费用$C^* = \frac{2C_D}{T^*}$ （16）

例 2　有一个生产和销售图书设备的公司，经营一种图书专用设备，基于以往的销售记录和今后市场预测。估计今后一年的需求量为 4900 个，由于占用资金的利息以及存贮库房和其它人力物力的费用，存贮一个书架一年要花费 1000 元。这种书架是该公司自己生产的，每年的生产量 9800 个，而组织一次生产要花费设备调试等生产准备费 500 元。如果允许缺货，缺货费为每年每件 2000 元。该公司为了把成本降到最低，应如何组织生产？要求出其生产、存贮周期，每个周期的最优生产量，以及最少的年总费用。

解　根据题意知，$D = 4900$，$C_P = 1000$，$P = 9800$，$C_D = 500$，$C_S = 2000$，

利用式（9）～（13），（16）求相关的指标。

编写的 LINGO 程序如下：

```
model:
D=4900;
C_P=1000;
P=9800;
C_D=500;
C_S=2000;
T1=(2*C_D*(C_P+C_S)/(D*C_P*C_S*(1-D/P)))^0.5;  !单位为年;
T=T1*365;  !单位为天;
Q=D*T1;
T_S=C_P*T/(C_P+C_S);  !求缺货时间;
T_P=D*T/P;   ! 求生产周期;
C=2*C_D/T1;  ! 求年总费用;
end
```

求得每个周期为 9 天，其中 9 天中有 4.5 天在生产，每次的生产量为 121 件，而且缺货的时间有 3 天。总的费用（包括存贮费、订货费和缺货费）为 4044.52 元。

可以把模型一看作模型二的特殊情况。在模型二中，取消允许缺货和补充需要一定时间的条件，即 $C_S \to \infty$， $P \to \infty$，则模型二就是模型一。事实上，如将 $C_S \to \infty$ 和 $P \to \infty$ 代入模型二的最优存贮策略各参数公式，就可得到模型一的最优存贮策略。只是必须注意，按照模型一的假设条件，应有

$$t_1^* = t_2^* = t_3^* = 0,\quad A^* = Q^*,\quad B^* = 0$$

2.3 模型三：不允许缺货，补充时间较长—基本的经济生产批量存贮模型

在模型二的假设条件中，取消允许缺货条件（即设 $C_s \to \infty$， $t_2 = 0$），就成为模型三。因此，模型三的存贮状态图和最优存贮策略可以从模型二直接导出。

模型三的存贮状态见图 4。下面我们用另外的方法导出模型三的最优存贮策略。

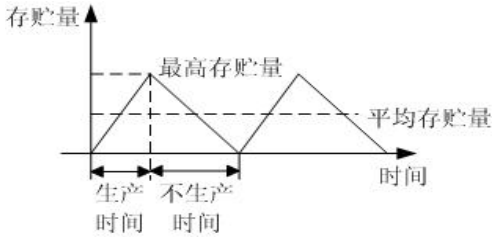


图 4　经济生产批量模型存贮量的变化情况

经济生产批量存贮模型除满足基本假设外，其最主要的假设是：当存贮降到零后，

开始进行生产，生产率为P，且$P>D$，即生产的产品一部分满足需求，剩余部分才作为存贮。

设生产批量为Q，生产时间为t，则生产时间与生产率之间的关系为

$$t=\frac{Q}{P}$$

对于经济生产批量模型，有

$$\text{最高存贮量}=(P-D)t=(P-D)\frac{Q}{P}=(1-\frac{D}{P})Q \tag{17}$$

而平均存贮量是最高存贮量的一半，关于平均固定生产费与经济定购模型中的平均订货费相同，同样是$\frac{C_D D}{Q}$。这样，平均总费用为

$$C=\frac{1}{2}(1-\frac{D}{P})QC_P+\frac{C_D D}{Q} \tag{18}$$

类似于前面的推导，得到最优生产量、最优存贮周期、最大存贮量和最优存贮费用

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_D D}{C_P(1-\frac{D}{P})}} \tag{19}$$

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D P}{C_P D(P-D)}} \tag{20}$$

$$A^*=(1-\frac{D}{P})Q^*=\sqrt{\frac{2(1-\frac{D}{P})C_D D}{C_P}} \tag{21}$$

$$C^*=\frac{2C_D}{T^*}=\sqrt{2(1-\frac{D}{P})C_P C_D D} \tag{22}$$

例 3　商店经销某商品，月需求量为 30 件，需求速度为常数。该商品每件进价 300 元，月存贮费为进价的 2%。向工厂订购该商品时订购费每次 20 元，定购后需 5 天才开始到货，到货速度为常数，即 2 件/天。求最优存贮策略。

解　本例特点是补充除需要入库时间（相当于生产时间）外，还需要考虑拖后时间。因此，订购时间应在存贮降为零之前的第 5 天。除此之外，本例和模型三的假设条件完全一致。本例的存贮状态见图 5。

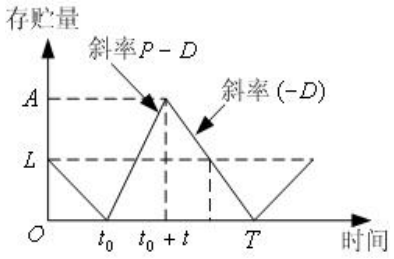


图 5　拖后时间的存贮模型

从图 5 可见，拖后时间为$[0,t_0]$，存贮量L应恰好满足这段时间的需求，故$L=Dt_0$。

根据题意，有$P=2$件/天，$D=1$件/天，$C_P=300\times2\%\times\frac{1}{30}=0.2$元/天·件，$C_D=20$元/次，$t_0=5$天，$L=1\times5=5$件。代入（19）～（22），求得

$$Q^*=20\text{件}，\ T^*=20\text{天}，\ A^*=10\text{件}，\ C^*=2\text{元}$$

在本例中，L称为订货点，其意义是每当发现存贮量降到L或更低时就定购。在存贮管理中，称这样的存贮策略为“定点订货”。类似地，称每隔一个固定时间就订货的存贮策略为“定时订货”，称每次订购量不变的存贮策略为“定量订货”。

2.4　模型四：允许缺货，补充时间极短的经济订购批量存贮模型

在模型二的假设条件中，取消补充需要一定时间的条件（即设$P\to\infty$），就成为模型四。因此，和模型三一样，模型四的存贮状态图和最优存贮策略也可以从模型二直接导出。

模型四的存贮状态图见图 6。下面我们用另外的方法导出模型四的最优存贮策略。

设T仍为时间周期，其中T_1表示T中不缺货时间，T_2表示T中缺货时间，即$T_1+T_2=T$。S为最大缺货量,C_s为缺货损失的单价，Q仍为每次的最高订货量，则$Q-S$为最高存贮量，因为每次得到订货量Q后，立即支付给顾客最大缺货S。

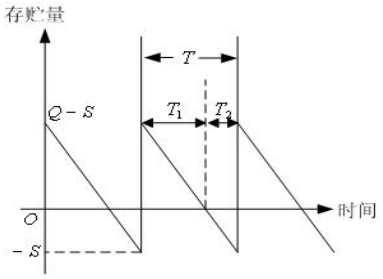


图 6　允许缺货的经济订购批量存贮模型的存贮情况

以一个周期为例，计算出平均存贮量、平均缺货量和平均总费用。

$$\text{平均存贮量}=\frac{\frac{1}{2}(Q-S)T_1+0T_2}{T}=\frac{(Q-S)T_1}{2T} \tag{23}$$

其中

$$T_1=\frac{Q-S}{D},\ T_2=\frac{S}{D},\ T=\frac{Q}{D} \tag{24}$$

由此计算出

$$\text{平均存贮量}=\frac{(Q-S)T_1}{2T}=\frac{(Q-S)^2}{2Q}, \tag{25}$$

$$\text{平均缺货量}=\frac{ST_2}{2T}=\frac{S^2}{2Q} \tag{26}$$

因此，允许缺货的经济订购批量存贮模型的平均总费用

$$C=\frac{C_P(Q-S)^2}{2Q}+\frac{C_DD}{Q}+\frac{C_SS^2}{2Q} \tag{27}$$

求式（10）关于Q和S的偏导数，并求出其极小点

$$Q^*=\sqrt{\frac{2C_DD(C_P+C_s)}{C_PC_s}} \tag{28}$$

$$S^*=\frac{C_P}{C_P+C_s}Q^* \tag{29}$$

最佳订货周期

$$T^*=\frac{Q^*}{D}=\sqrt{\frac{2C_D(C_P+C_s)}{C_PC_sD}} \tag{30}$$

最大存贮量

$$A^* = Q^* - S^* = \sqrt{\frac{2C_D C_S D}{C_P(C_P + C_s)}} \tag{31}$$

最小费用

$$C^* = \frac{2C_D}{T^*} = \frac{C_P(Q^* - S^*)^2}{2Q^*} + \frac{C_D D}{Q^*} + \frac{C_S(S^*)^2}{2Q^*} \tag{32}$$

例 4　某电器公司的生产流水线需要某种零件，该零件需要靠订货得到。已知批量订货的订货费 12000 元/次，每个零件的存贮机费用为 0.3 元/（件·月），每个零件的缺货损失为 1.1 元/（件·月），设该零件的每月需求量为 8000 件。求全年的订货次数、订货量以及最优存贮费用。

解　根据题意，取一年为单位时间，由已知条件，订货费 $C_D = 12000$ 元/次，存贮费 $C_P = 3.6$ 元/（件·年），缺货损失费 $C_S = 13.2$ 元/（件·年），需求率 $D = 96000$ 件/年。该存贮问题可由一个整数规划来表示

$$\min \frac{C_P(Q-S)^2}{2Q} + \frac{C_D D}{Q} + \frac{C_S S^2}{2Q}$$

$$\text{s.t.} \quad n = \frac{D}{Q},$$

$$Q, S \geq 0, \quad n \geq 0 \text{ 且取整数}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
min=0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q;
n=D/Q;@gin(n);
data:
C_D=12000;
D=96000;
C_P=3.6;
C_S=13.2;
enddata
end
```

求得全年组织 3 次订货，每次的订货量为 32000 件，最大缺货量为 6857.141 件，最优费用为 81257.14 元。

对于确定型存贮问题，上述四个模型是最基本的模型。其中，模型一、三、四又

可看作模型二的特殊情况。在每个模型的最优存贮策略的各个参数中，最优存贮周期T是最基本的参数，其它各个参数和它的关系在各个模型中都是相同的。根据模型假设条件的不同，各个模型的最优存贮周期T^*之间也有明显的规律性。因子$\frac{C_P+C_S}{C_S}$对应了是否允许缺货的假设条件，因子$\frac{P}{P-D}$对应了补充是否需要时间的假设条件。

一个存贮问题是否允许缺货或补充是否需要时间，完全取决于对实际问题的处理角度，不存在绝对意义上的不允许缺货或绝对意义上的补充不需要时间。如果缺货引起的后果或损失十分严重，则从管理的角度应当提出不允许缺货的建模要求；否则，可视为允许缺货的情况。至于缺货损失的估计，应当力求全面和精确。如果补充需要的时间相对于存贮周期是微不足道的，则可考虑补充不需要时间的假设条件；否则，需要考虑补充时间。在考虑补充时间时，必须分清拖后时间和生产时间，两者在概念上是不同的。

2.5 模型五：经济定购批量折扣模型

所谓经济订购批量折扣模型是经济订购批量存贮模型的一种发展，即商品的价格是不固定的，是随着订货量的多少而改变的。就一半情况而论，物品订购的越多，物品的单价也就越低，因此折扣模型就是讨论这种情况下物品的订购数量。

一年花费的总费用由三个方面组成：年平均存贮费、年平均订货费和商品的购买费用，即

$$C=\frac{1}{2}QC_P(Q)+\frac{C_DD}{Q}+DK(Q) \tag{33}$$

在式（33）中，$K(Q)$是物品的价格，它与物品的订购数量有关，一般是一个分段表示的函数，即

$$K(Q)=\begin{cases}K_1, & 0\le Q\le Q_1\\ K_2, & Q_1<Q\le Q_2\\ \vdots & \\ K_m, & Q_{m-1}<Q\le Q_m\end{cases}$$

其中$\{Q_i\}_{1\le i\le m}$是单调递增的，而$\{C_i\}_{1\le i\le m}$是单调递减的。

物品的存贮费$C_P(Q)$与物品的价格有关，通常是价格$K(Q)$的r（$0<r<1$）倍，即

$$C_P(Q)=rK(Q) \tag{34}$$

在经济订购批量存贮模型中，也应包含时（33）中的第三项，但当时 $K(Q)=c$ 是常数，因此，第三项也为常数，与目标函数求极值无关，因此，在分析时，没有讨论此项。

对于折扣模型，经济订购批量折扣存贮模型中求最优订购量的公式（3）仍然成立，只不过此时的 C_P 不是常数罢了。假设 C_P 是由式（29）和式（30）确定的，则最优订购量为

$$Q_j^*=\sqrt{\frac{2C_DD}{rK_j}}\,,\quad j=1,2,\cdots,m\,, \tag{35}$$

$$C_j^*=\frac{1}{2}rK_jQ_j^*+\frac{C_DD}{Q_j^*}+K_jD\,,\quad j=1,2,\cdots,m \tag{36}$$

然后再根据 Q_j^* 所在的区间和 C_j^* 的值，选择合适的 Q_j^*。实际上，若存在某个 $i\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得 $Q_i^*\in[Q_{i-1},Q_i]$，则该 Q_i^* 就为最优订货量。

例 5　某公司计划订购一种商品用于销售。该商品的年销售量为 40000 件，每次订货费为 9000 元，商品的价格与订货量的大小有关，为

$$K(Q)=\begin{cases}35.225, & 0\le Q\le 10000\\ 34.525, & 10000<Q\le 20000\\ 34.175, & 20000<Q\le 30000\\ 33.825, & 30000<Q\end{cases}$$

存贮费是商品价格的 20%。问如何安排订购量与订货时间。

解　按上述方法，编写如下的 LINGO 程序：

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q,EOQ,C; !B是订货量的分界点，Q表示由式（35）计算出的订货量，EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
Enddata
@for(range:C_P=R*K;Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
EOQ(1)=Q(1)-(Q(1)-B(1))*(Q(1)#gt# B(1));
```

```
@for(range(i)|i #gt# 1:EOQ(i)=Q(i)+(B(i-1)-Q(i)+1)*(Q(i) #lt#
B(i-1))-(Q(i)-B(i))*(Q(i) #gt# B(i)));
@for(range:C=0.5*C_P*EOQ+C_D*D/EOQ+K*D);
C_min=@min(range:C);
Q_best=@sum(range:EOQ*(C #eq# C_min));
T_best=Q_best/D;
end
```

求得最优订货量为 10211 件，最优存贮费用为 145151510 元，最优订货周期是平均 0.255 年一次。

比较计算结果中的 Q 值与 EOQ 值，会对程序的理解有很大的帮助。

我们也可以使用如下的LINGO程序求得最优订货量和最优订货周期。

```
model:
sets:
range/1..4/:B,K,C_P,Q; !B是订货量的分界点，Q表示由式（35）计算出的订货量，
EOQ是调整后的订货量;
endsets
data:
D=40000; C_D=9000; R=0.2;
B=10000,20000,30000,40000;
K=35.225,34.525,34.175,33.825;
Enddata
n=@size(range);
@for(range:C_P=R*K;Q=(2*C_D*D/C_P)^0.5);
Q_best=Q(1)*(Q(1) #le# B(1))+@sum(range(i)| i #ne# 1 :Q(i)*(Q(i) #gt#
B(i-1) #and# Q(i) #le# B(i)));
T_best=Q_best/D;
end
```

§3 有约束的确定型存贮模型

3.1 带有约束的经济订购批量存贮模型

现在考虑多物品、带有约束的情况。设有 m 种物品，采用下列记号：

（1）D_i, Q_i, K_i（$i=1,2,\cdots,m$）分别表示第 i 种物品的单位需求量、每次订货的批量和物品的单价；

（2）C_D 表示实施一次订货的订货费，即无论物品是否相同，订货费总是相同的；

（3）C_{P_i}（$i=1,2,\cdots,m$）表示第 i 种产品的单位存贮费；

（4）J,W_T 分别表示每次订货可占用资金和库存总容量；

（5）w_i（$i=1,2,\cdots,m$）表示单位第 i 种物品占用的库容量。

类似于前面的推导，可以得到带有约束的多物品的 EOQ 模型。

3.1.1　具有资金约束的 EOQ 模型

类似前面的分析，对于第 i（$i=1,2,\cdots,m$）种物品，当每次订货的订货量为 Q_i 时，单位时间总平均费用为

$$C_i=\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_DD_i}{Q_i}$$

每种物品的单价为 K_i，每次的订货量为 Q_i，则 K_iQ_i 是该种物品占用的资金。因此，资金约束为

$$\sum_{i=1}^{m}K_iQ_i\le J$$

综上所述，得到具有资金约束的 EOQ 模型

$$\min\quad\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_DD_i}{Q_i}\right) \tag{37}$$

$$\text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{m}K_iQ_i\le J \tag{38}$$

$$Q_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m \tag{39}$$

3.1.2　具有库容约束的 EOQ 模型

单位第 i 种物品占用的库容量是 w_i，因此，w_iQ_i 是该种物品占用的总的库容量，结合上面的分析，具有库容约束的 EOQ 模型是

$$\min\quad\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_DD_i}{Q_i}\right) \tag{40}$$

$$\text{s.t.}\quad\sum_{i=1}^{m}w_iQ_i\le W_T \tag{41}$$

$$Q_i\ge 0,\ i=1,2,\cdots,m \tag{42}$$

3.1.3　兼有资金与库容约束的最佳批量模型

结合上述两种模型，得到兼有资金与库容约束的最佳批量模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i}\right) \tag{43}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m}K_iQ_i \le J \tag{44}$$

$$\sum_{i=1}^{m}w_iQ_i \le W_T \tag{45}$$

$$Q_i \ge 0\ ,\ i=1,2,\cdots,m \tag{46}$$

对于这三种模型，可以容易地用 LINGO 软件进行求解。

例 6　某公司需要 5 种物资，其供应与存贮模式为确定性、周期补充、均匀消耗和不允许缺货模型。设该公司的最大库容量(W_T)为 1500m^3，一次订货占用流动资金的上限（J）为 40 万元，订货费（C_D）为 1000 元。5 种物资的年需求量D_i，物资单价K_i，物资的存贮费C_{P_i}，单位占用库w_i如表 1 所示。试求各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

表 1　物资需求、单价、存贮费和单位占用库容情况表

物资i	年需求量D_i	单价K_i(元/件)	存贮费C_{P_i} (元/(件·年))	单位占用库容w_i（m^3/件）
1	600	300	60	1.0
2	900	1000	200	1.5
3	2400	500	100	0.5
4	12000	500	100	2.0
5	18000	100	20	1.0

解　设n_i是第i（$i=1,2,3,4,5$）中物资的年订货次数，按照带有资金与库容约束的最佳批量模型（43）～（46），写出相应的整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{1}{2}C_{P_i}Q_i+\frac{C_D D_i}{Q_i}\right)$$

s.t. $\sum_{i=1}^{5} K_i Q_i \le J$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i Q_i \le W_T$$

$$Q_i \ge 0，\ i=1,2,\cdots,5$$

$$n_i = \frac{D_i}{Q_i}，\text{且 } n_i \text{ 为整数，}\ i=1,2,\cdots,5$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,Q,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*Q+C_D*D/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*Q)<W_T;
@for(kinds:N=D/Q;@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
end
```

求得总费用为 142272.8 元，订货资金还余 7271.694 元，库存余 4.035621 m^3，其余计算结果整理在表 2 中。

表 2　物资的订货次数与订货量

物资 i	订货次数	订货量 Q_i^*（件）
1	7	85.71429
2	13	69.23077
3	14	171.4286
4	40	300.0000

5	29	620.6897

上述计算采用整数规划，如果不计算年订货次数，而只有年订货周期，则不需要整数约束。由于整数规划的计算较慢，因此，在有可能的情况下，应尽量避免求解整数规划问题。

3.2　带有约束允许缺货模型

类似于不允许缺货情况的讨论，对于允许缺货模型，也可以考虑多种类、带有资金和库容约束的数学模型。设 S_i, C_{S_i} 分别为第 i 种物品的最大缺货量、缺货损失单价，其它符号的意义不变。由于 Q_i 是第 i 种物品的最大订货量，则 K_iQ_i 是第 i 种物品占用资金数，$Q_i - S_i$ 是第 i 种物品的最大存贮量（占用库存数），因为 S_i 部分偿还缺货，已不用存贮了。因此，带有资金和库容约束允许缺货的数学模型如下：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{C_{P_i}(Q_i-S_i)^2}{2Q_i}+\frac{C_DD_i}{Q_i}+\frac{C_{S_i}S_i^2}{2Q_i}\right) \tag{47}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{n}K_iQ_i \le J \tag{48}$$

$$\sum_{i=1}^{n}w_i(Q_i-S_i) \le W_T \tag{49}$$

$$Q_i \ge 0,\ i=1,2,\cdots,n \tag{50}$$

例 7（续例 6） 假设缺货损失费（C_{S_i}）是物品的存贮费（C_{P_i}）的 2 倍，其它参数不变，试求出各种物品的订货次数、订货量和总的存贮费用。

解　设 n_i 是第 i 种物品的年订货次数，按照模型（47）～（50），写出相应的整数规划模型

$$\min \quad \sum_{i=1}^{5}\left(\frac{C_{P_i}(Q_i-S_i)^2}{2Q_i}+\frac{C_DD_i}{Q_i}+\frac{C_{S_i}S_i^2}{2Q_i}\right)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{5}K_iQ_i \le J$$

$$\sum_{i=1}^{5} w_i(Q_i - S_i) \le W_T$$

$n_i = \dfrac{D_i}{Q_i}$，且 n_i 为整数，$i = 1,2,\cdots,5$

$Q_i \ge 0$，$i = 1,2,\cdots,5$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..5/:C_P,D,K,W,C_S,Q,S,N;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*C_P*(Q-S)^2/Q+C_D*D/Q+0.5*C_S*S^2/Q);
@sum(kinds:K*Q)<J;
@sum(kinds:W*(Q-S))<W_T;
@for(kinds:N=D/Q;@gin(n));
data:
C_D=1000;
D=600 900 2400 12000 18000;
K=300 1000 500 500 100;
C_P=60 200 100 100 20;
W=1.0 1.5 0.5 2.0 1.0;
J=400000;
W_T=1500;
enddata
@for(kinds:C_S=2*C_P);
end
```

求得总费用为 124660.8 元，订货资金还余 88.46 元，库存余 343.317m^3，其余计算结果整理在表 3 中。

表 3　允许缺货的物资的订货次数与订货量

物资 i	订货次数	订货量 Q_i^*（件）	最大缺货量 S_i（件）
1	7	85.71429	28.57142
2	15	60.00000	20.00000
3	17	141.1765	47.05881
4	38	315.7895	105.2631
5	21	857.1429	285.7142

3.3　带有约束的经济生产批量存贮模型

与经济定购模型类似，对于经济生产批量存贮模型，也可以考虑带有不同情况的约束条件和各种不同物品的综合情况。下面用一个例子来说明问题。

例 8　某公司生产并销售 A,B,C 三种商品，根据市场预测，三种商品每天需求量分别是 400，300，300（件），三种商品每天的生产量分别是 1300，1100，900（件），每安排一次生产，其固定费用（与生产量无关）分别为 10000，12000，13000（元），生产费用每件分别为 1.0，1.1，1.4（元）。商品的生产速率、需求率和最大生产量满足如下约束：

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{D_i}{P_i}+\frac{1.5D_i}{Q_i}\right)\le 1$$

求每种商品的最优生产时间与存贮时间，以及总的最优存贮费用。

解　建立最优生产批量存贮模型：

$$\min \quad \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{1}{2}(1-\frac{D_i}{P_i})Q_iC_{P_i}+\frac{C_{D_i}D_i}{Q_i}\right]$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{D_i}{P_i}+\frac{1.5D_i}{Q_i}\right)\le 1$$

$$T_i=\frac{Q_i}{D_i},\quad i=1,2,3$$

$$T_i\ge 0,\quad Q_i\ge 0,\quad i=1,2,3$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
kinds/1..3/:C_P,P,C_D,D,Q,T,T_P; !T_P表示生产时间;
endsets
min=@sum(kinds:0.5*(1-D/P)*Q*C_P+C_D*D/Q);
@sum(kinds:D/P+1.5*D/Q)<1;
@for(kinds:T=Q/D;T_P=Q/P);
data:
C_D=1000,1200,1300;
D=400,300,300;
C_P=1.0,1.1,1.4;
P=1300,1100,900;
enddata
```

```
end
```

求得 A,B,C 三种商品的生产、存贮周期分别为 51.05936，54.86175，50.79914 天，其中生产天数分别为 15.71057，14.96229，16.93305 天。总的最优生产，存贮费用为 20832.10 元。

§4 单周期随机库存模型

在许多情形中需求量是随机的。随机需求模型可以分为周期观测与连续观测两类。周期观测模型又可分为单周期、多周期及无穷周期等模型。

本节仅讨论单周期随机库存模型。

单周期库存模型又称为单订货模型。模型假定周期末库存对下一个周期没有任何价值。这个问题也称为报童问题，因为报童手中的报纸若卖不完，明天就没有用了。该模型研究的是仅有一次机会的存贮与供需关系的产品。

4.1 模型的基本假设

本模型的基本假设如下：

（1）在整个需求期内只订购一次货物，订货量为 Q，订购费和初始库存均为 0，每单位产品的购价（成本）为 K；

（2）需求量 D 为一个连续的随机变量，且 D 的概率密度为 $f(x)$，当货物出售时，每单位产品的价格为 U；

（3）需求期结束时，没有卖出的货物不存贮而是折价卖出，单位价格为 V。

4.2 模型的推导

单周期随机库存模型的问题是求订购量 Q 为多少时，使得总利润最大。

当需求量 $D=x$ 时，物品的出售量取决于物品的订购量 Q 和需求量 x，即

$$\text{出售量}=\begin{cases}x, & x\le Q\\ Q, & x>Q\end{cases} \tag{51}$$

因此，产生的利润

$$G(Q)=\begin{cases}Ux+V(Q-x)-KQ, & x\le Q\\ UQ-KQ, & x>Q\end{cases} \tag{52}$$

这样一个周期的总利润应该是 $G(Q)$ 的期望值，即

$$E(G(Q))=\int_0^Q (Ux+V(Q-x)-KQ)f(x)dx+\int_Q^\infty (UQ-KQ)f(x)dx$$

$$=(U-K)Q-(U-V)\int_0^Q(Q-x)f(x)dx \tag{53}$$

注意，在上式推导中用到概率密度的性质$\int_0^{+\infty}f(x)dx=1$。

为求极大值，对式（53）两端关于Q求导数，得到

$$\frac{dE[G(Q)]}{dQ}=(U-K)-(U-V)\int_0^Q f(x)dx \tag{54}$$

$$\frac{d^2E[G(Q)]}{dQ^2}=-(U-V)f(Q)<0, \tag{55}$$

注意到二阶导数小于0，因此，满足方程

$$\int_0^Q f(x)dx=\frac{U-K}{U-V} \tag{56}$$

的Q一定是$E[G(Q)]$的极大值点。

对于销售价U、成本价K和折扣价V，应满足$U>K>V$。令$g=U-K$是物品出售后的利润，同时表示物品不足时，由于缺货造成的损失。令$h=K-V$是物品折扣出售的损失，因此方程（56）也可写成

$$\int_0^Q f(x)dx=\frac{U-K}{U-V}=\frac{g}{g+h} \tag{57}$$

为进一步理解公式（53）的含义，将公式（53）改写为

$$E[G(Q)]=(U-K)Q-(U-V)(Q-\mu)-(U-V)\int_Q^{+\infty}(Q-x)f(x)dx$$

$$=U\mu-KQ+V(Q-\mu)-(U-V)\int_Q^{\infty}(x-Q)f(x)dx \tag{58}$$

其中$\mu=\int_0^{+\infty}xf(x)dx$为需求量$D$的数学期望。或者写成

$$E[G(Q)]=g\,\mu-h(Q-\mu)-(g+h)\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx \tag{59}$$

在式（58）中，积分$\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx$相当于当$x>Q$时的损失函数，即式（58）可以理解为

总利润期望值＝总收入期望值－成本＋折扣收入期望值－缺货收入期望值

4.3　模型的求解

例 9（报童问题）　在街中有一报亭，平均每天出售报纸 500 份，出售报纸的数量，与来往的人流有关，假设服从 Poisson 分布，每卖出一份报纸能盈利 0.15 元。如果卖不出去，只能作为废纸处理，每份报纸亏损 0.40 元，问：报亭应如何安排报纸的订购量，使得报亭的利润最大？

解　由题意知，均值 $\mu=500$；每份报纸的利润 $g=0.15$ 元；作为废纸处理时，每份报纸亏损 $h=0.4$ 元。利用式（57）计算出 Q 来，再利用式（59）计算出期望总利润。

对于 Poisson 分布，式（57）中的积分 $\int_0^Q f(x)dx$ 可由 LINGO 中的函数@pps 计算，@pps(μ,Q)是均值为 μ 的 Poisson 分布函数，即

$$@\text{pps}(\mu,Q)=\sum_{x=0}^{Q}\frac{\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

若 Q 不是整数，该函数采用线性插值计算。

式（59）中的积分 $\int_Q^{+\infty}(x-Q)f(x)dx$ 可由函数@ppl 计算，@ppl(μ,Q)表示 Poisson 分布的线性损失函数，即

$$@\text{ppl}(\mu,Q)=\sum_{x=Q+1}^{+\infty}\frac{(x-Q)\mu^x}{x!}e^{-\mu}$$

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
data:
mu=500;g=0.15;h=0.40;
enddata
@pps(mu,Q)=g/(g+h);
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*@ppl(mu,Q);
end
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天盈利 70.93 元。

下面我们使用 MATLAB 求例 9 的解。实际上式(57)中的 Q 是 Poisson 分布的 $\frac{g}{g+h}$ 分位点。对于式（59）中的积分计算，首先定义被积函数，然后使用 MATLAB 中的积分命令 QUADL 进行积分，注意在积分时必须把积分区间化成有限区间。MATLAB 中

被积函数定义如下（其中文件名为 fun1.m）

```
function f=fun1(x);
global Q mu
f=(x-Q).*poisspdf(mu,x);
```

最后编写调用的程序如下：

```
global mu Q
mu=500;g=0.15;h=0.40;
Q=poissinv(g/(g+h),mu)
E_G=g*mu-h*(Q-mu)-(g+h)*(mu-Q-quadl(@fun1,0,Q))
```

求得报亭每天订购报纸 486 份，每天赢利 71.09 元。

例 10　设在某食品店内，每天对面包的需求服从 $\mu=300$，$\sigma=50$ 的正态分布。已知每个面包的售价为 1.50 元，成本 0.90 元，对当天未售出的其处理价为每个 0.60 元，问该商店每天应生产多少面包，使预期的利润为最大？

解　根据题意 $\mu=300$，$\sigma=50$，$U=1.50$，$K=0.9$，$V=0.60$。利用式（57）计算出 Q 来，再利用式（59）计算出期望总利润。但对于正态分布分布，LINGO 只提供了标准正态分布函数@psn(Z)，即

$$@\text{psn}(Z)=\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\tau^2/2}d\tau$$

和标准正态分布的线性损失函数@psl(Z)，即

$$@\text{psl}(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{z}^{+\infty}(\tau-Z)e^{-\tau^2/2}d\tau$$

因此，若用函数@psn 和@psl 计算式（57）和式（59）的积分

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{Q}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \quad \text{和} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{Q}^{+\infty}(x-Q)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

需要做变换 $\tau=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，即

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{Q}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{Z}e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=@\text{psn}(Z)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{Q}^{+\infty}(x-Q)e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{Z}^{+\infty}(\tau-Z)e^{-\frac{\tau^2}{2}}d\tau=\sigma@\text{psl}(Z)$$

其中 $Z=\dfrac{Q-\mu}{\sigma}$。

编写 LINGO 程序如下

```
data:
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
enddata
@psn(Z)=(U-K)/(U-V);
Z=(Q-mu)/sigma;
@free(Z);
E_G = U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*sigma*@psl(Z);
```

求得商店每天生产 322 个面包，可以使总利润达到最大，预期的最大利润为 163.638 元。

同样地，我们使用 MATLAB 求例 10 的解。实际上，式（57）中的 Q 是正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的 $\dfrac{U-K}{U-V}$ 分位点。式（59）中的被积函数的 MATLAB 定义如下（其中文件名为 fun2.m）：

```
function f=fun2(x);
global mu sigma Q
f=(x-Q).*normpdf(x,mu,sigma);
```

最后编写调用的程序如下：

```
global mu sigma Q
mu = 300; sigma = 50; U = 1.50; K = 0.90; V = 0.60;
Q=norminv((U-K)/(U-V),mu,sigma)
E_G=U*mu-K*Q+V*(Q-mu)-(U-V)*(mu-Q-quadl(@fun2,0,Q))
```

求得的结果和 LINGO 的计算结果完全一样。

例 11　（航空机票超订票问题）　某航空公司执行两地的飞行任务，已知飞机的有效载客量为 150 人。按民用航空管理有关规定：旅客因有事或误机，机票可免费改签一次，此外也可在飞机起飞前退票。航空公司为了避免由此发生的损失，采用超量订票的方法，即每班售出票数大于飞机载客数。但由此会发生持票登机旅客多于座位数的情况，在这种情况下，航空公司让超员旅客改乘其它航班，并给旅客机票价的 20%作为补偿。现假设两地的机票价为 1500 元，每位旅客有 0.04 的概率发生有事、误机或退票的情况，问航空公司多售出多少张票？使该公司的预期损失达到最小。

解　先对该问题进行分析。

设飞机的有效载客数为 N，超订票数为 S（即售出票数为 $N+S$），k 为每个座位的赢利值，h 为改乘其它航班旅客的补偿值。设 x 是购票未登机的人数，是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)$。当 $x\le S$ 时，有 $S-x$ 个人购票后，不能登机，航空公司要为

这部分旅客进行补偿。当 $x>S$ 时，有 $x-S$ 个座位没有人坐，航空公司损失的是座位应得的利润，因此，航空公司的损失函数为

$$L(S)=\begin{cases}h(S-x), & x\le S\\ k(x-S), & x>S\end{cases} \tag{60}$$

其期望值为

$$\begin{aligned}E[L(S)]&=\int_0^S h(S-x)f(x)dx+\int_S^{+\infty}k(x-S)f(x)dx\\&=k\mu-kS+(k+h)\int_0^S(S-x)f(x)dx\end{aligned} \tag{61}$$

其中 $\mu=\int_0^{+\infty}xf(x)dx$ 为购票未登机的期望人数。

对式（61）两端关于 S 求导数，得到

$$\frac{dE[L(S)]}{dS}=-k+(k+h)\int_0^S f(x)dx \tag{62}$$

$$\frac{d^2E[L(S)]}{dS^2}=(k+h)f(S)>0 \tag{63}$$

因此，满足方程

$$\int_0^S f(x)dx=\frac{k}{k+h} \tag{64}$$

的 S 是函数 $E[L(S)]$ 的极小值点，即满足方程（64）的 S 使航空公司的损失达到最小。

下面给出具体的求解过程。

设每位顾客购票未登机的概率为 p，共有 $N+S$ 位旅客，则恰有 y 位旅客未登机的概率是 $C_{N+S}^{y}p^{y}(1-p)^{N+S-y}$，即未登机人数 x 服从二项分布。因此，式（64）中的积分应用二项分布计算。

在 LINGO 中提供了二项分布函数 $@\mathrm{pbn}(p,N+S,S)$，即

$$@\mathrm{pbn}(p,N+S,S)=\sum_{y=0}^{S}C_{N+S}^{y}p^{y}(1-p)^{N+S-y} \tag{65}$$

当 $N+S$ 和 S 不是整数时，采用线性插值计算。

在这里，$@\mathrm{pbn}(p,N+S,S)$ 的直观意义是：在 $N+S$ 位旅客中至多有 S 位旅客购票未登机的概率。

根据题意，$N=150$，$p=0.04$，$k=1500$（假设机票价就是航空公司的赢利），$h=1500\times0.2=300$。写出相应的 LINGO 程序如下：

```
data:
  N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
enddata
@pbn(p, N+S, S) = k/(k+h);
```

求得超订的票数 $S=8.222487$，因而，超订的票数在 8～9 张之间，即每班售出的票数在 158～159 张之间。

下面我们使用 MATLAB 求例 11 的解。首先定义函数 $g(S)=\int_0^S f(x)dx-\dfrac{k}{k+h}$，然后求 $G(S)$ 的零点即可。编写 $g(S)$ 的 MATLAB 函数如下（文件名为 fun3.m）：

```
function f=fun3(s);
N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
f=binocdf(s,s+N,p)-k/(k+h);
```

MATLAB 中求函数 $g(S)$ 的零点时溢出（使用命令 FZERO），我们只能编写 MATLAB 的搜索算法如下：

```
for s=1:100
   g(s)=fun3(s);
end
g
```

例 12（续例 11） 所有参数不变，问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期利润达到最大，并计算出相应的利润。

解 下面的计算希望达到以下目的：第一，得到超订票的整数解；第二，计算出预期的利润值。

设飞机的有效载客数为 N，超订票数为 S（即售出票数为 $N+S$），k 为每个座位的赢利值，h 为改乘其它航班旅客的补偿值，p 为每位旅客购票未登机的概率。设 x 是购票未登机的人数，是一个随机变量，其概率密度为 $f(x)$。当 $x\le S$ 时，飞机满座，有 $S-x$ 个人购票后，不能登机，航空公司要为这部分旅客进行补偿。当 $x>S$ 时，飞机没有满座，有 $N+S-x$ 名旅客乘机，因此，航空公司的利润函数为

$$I(S)=\begin{cases}kN-h(S-x), & x\le S\\ k(N+S-x), & x>S\end{cases} \tag{66}$$

其期望值为

$$E[I(S)]=\int_0^S (kN-hS+hx)f(x)dx+\int_S^{+\infty} k(N+S-x)f(x)dx$$

$$=k(N+S-\mu)-(h+k)S\int_0^S f(x)dx+(h+k)\int_0^S xf(x)dx \qquad (67)$$

其中 $\mu=\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 为购票未登机的期望人数。

对式（67）两端关于 S 求导数，得到

$$\frac{dE[L(S)]}{dS}=k-(k+h)\int_0^S f(x)dx \qquad (68)$$

$$\frac{d^2E[L(S)]}{dS^2}=-(k+h)f(S)<0 \qquad (69)$$

因此，满足方程

$$\int_0^S f(x)dx=\frac{k}{k+h} \qquad (70)$$

的 S 是函数 $E[I(S)]$ 的极小值点，即满足方程（70）的 S 使航空公司的利润达到最大。

具体的求解过程同例 11。下面我们比较一下 $S=8$ 和 $S=9$ 哪种情形下的利润最大，首先把式（67）改写成

$$E[I(S)]=k(N+S-\mu)-(h+k)\int_0^S F(x)dx$$

编写的 MATLAB 程序如下：

```
clear,clc
N = 150;p = 0.04;k = 1500;h = 300;
for S=1:15
E_I(S)=k*(N+S-(N+S)*p)-(h+k)*quadl(@(x)binocdf(x,N+S,p),0,S);
end
E_I
```

上面的算法，我们实际上把二项分布看成是连续型的分布。下面从离散分布的角度建立赢利期望值的递推公式。

记 E_j（$j=0,1,\cdots,S$）为超订票数为 j 时，航空公司赢利的期望值。E_j^L 为超订票数为 j 时，最后一个旅客的订票使航空公司获得赢利的期望值。则有

$$E_j=E_{j-1}+E_j^L$$

E_j^L ＝最后 1 名旅客乘到飞机时航空公司赢利值－最后 1 名乘客无座位时的补偿值

因而有

$$E_0 = kN(1-p)\,,$$

$$E_1 = E_0 + E_1^L = E_0 + (1-p)P\{N\text{名旅客中至少有1人不乘机}\}\cdot k$$

$$-(1-p)P\{N\text{名旅客都乘机}\}\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1-@\text{pbn}(p,N,0)]\cdot k - (1-p)\cdot @\text{pbn}(p,N,0)\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[k-(k+h)\cdot @\text{pbn}(p,N,0)]$$

$$\vdots$$

$$E_j = E_{j-1} + E_j^L = E_{j-1} + (1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至少有 } i\text{人不乘机}\}\cdot k$$

$$-(1-p)P\{N+i-1\text{个旅客至多有 } i\text{—1人不乘机}\}\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[1-@\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)]\cdot k$$
$$-(1-p)\cdot @\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)\cdot h$$

$$= E_0 + (1-p)[k-(k+h)\cdot @\text{pbn}(p,N+i-1,i-1)]$$

在上式中，$@\text{pbn}(p,m,x)$ 是 LINGO 中的二项分布函数，即

$$@\text{pbn}(p,m,x) = \sum_{k=0}^{x} C_m^k p^k (1-p)^{m-k}$$

因此，我们只要计算出超订票数 $S = 0,1,2,\cdots$ 的期望值，并比较它们的大小，就可以计算出最优的超订票数和最大赢利的期望值。编写 LINGO 程序如下：

```
sets:
   seats/1..150/;
   extra/1..15/: E_T;
endsets
data:
k = 1500; h = 300; p = 0.04;
enddata
N = @size(seats);
E_T0 = k*N*(1-p);
E_T(1) = E_T0+(1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p,N,0));
@for(extra(i)|i #gt# 1:E_T(i) =
```

```
E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*@pbn(p,N+i-1, i-1)));
```

从计算结果可以看出，超订票数为9张时，航空公司获利利润最大，预期的期望值达到223832.6。

下面我们写出递推运算的 MATLAB 程序如下：

```
clear,clc
k = 1500; h = 300; p = 0.04; n=150;
E_T0=k*n*(1-p)
E_T(1)=E_T0+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(0,n,p));
for i=2:15
   E_T(i)=E_T(i-1)+(1-p)*(k-(k+h)*binocdf(i-1,n+i-1,p));
end
E_T
```

计算结果和 LINGO 的计算结果完全一致。

习题二十五

1．企业生产某种产品，正常生产条件下可生产 10 件/天。根据供货合同，需按 7 件/天供货。存贮费每件 0.13 元/天，缺货费每件 0.5 元/天，每次生产准备费用（装配费）为 80 元，求最优存贮策略。

2．某大型机械需要外购 3 种零件，其有关数据见表 4。若存贮费占单件价格的 25 %，不允许缺货。又限定外购零件的总费用不超过 240000 元，仓库总面积为 250m^2，试确定每种外购零件的最优订货量、订货周期和最小费用。

表 4　三种外购零件的相关数据

零件	年需求量（件）	订货费（元）	单价（元）	占用仓库面积（m^2）
1	1000	1000	3000	0.5
2	3000	1000	1000	1
3	2000	1000	2500	0.8

3.（航空公司超订票问题） 已知飞机的有效载客量为 150 人，机票价为 1500 元。根据公司的长期统计，每个航班旅客的退票和改签发生的人数如表 5 所示。在登机旅客多于座位数的情况下，航空公司规定：超员旅客改乘本公司下一班机，机票免费（即退回原机票款）；若改乘其它航空公司的航班，按机票的 105%退款。据统计前一类旅客占超员旅客的 80%，后一类旅客占 20%。问航空公司多售出多少张票，使该公司的预期损失达到最小。

表 5　航班旅客退票和改签人数概率表

人数 i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	0.18	0.25	0.25	0.16	0.06	0.04	0.03	0.02	0.01

4．某工厂生产某种产品必须经过两道工序，第一道工序在甲车间进行，第二道工序在乙车间进行，甲车间生产的产品作为乙车间生产的原料，工厂计划年生产 1200 件产品，因而乙车间的生产速度为每月 100 件，而甲车间的生产速度为每月 500 件。由于受到乙车间生产能力的限制，甲车间要进行等周期分批的有间断的生产，同时还必须保证乙车间不停工待料。甲车间的产品运到乙车间时要包装，平均每批的包装费为 5 元。若运到乙车间后暂时来不及加工，则要花费存贮费，每件存贮费为 0.4 元。试研究甲车间的最优生产周期，生产时间和生产批量。

第二十六章　经济与金融中的优化问题

本章主要介绍用 LINGO 软件求解经济、金融和市场营销方面的几个优化问题的案例。

§1　经济均衡问题及其应用

在市场经济活动中，当市场上某种产品的价格越高时，生产商越是愿意扩大生产能力（供应能力），提供更多的产品满足市场需求；但市场价格太高时，消费者的消费欲望（需求能力）会下降。反之，当市场上某种商品的价格越低时，消费者的消费欲望（需求能力）会上升，但生产商的供应能力会下降。如果生产商的供应能力和消费者的需求能力长期不匹配，就会导致经济不稳定。在完全市场竞争的环境中，我们总是认为经济活动应当达到均衡（equilibrium），即生产和消费（供应能力和需求能力）达到平衡，不再发生变化，这时该商品的价格就是市场的清算价格。

下面考虑两个简单的单一市场及双边市场的具体实例，并介绍经济均衡思想在拍卖与投标问题、交通流分配问题中的应用案例。

1.1　单一生产商、单一消费者的情形

例 1　假设市场上只有一个生产商（记为甲）和一个消费者（记为乙）。对某种商品，他们在不同价格下的供应能力和需求能力如表 1 所示。举例来说，表中数据的含义是：当单价低于 2 万元但大于或等于 1 万元时，甲愿意生产 2t 产品，乙愿意购买 8t 产品；当单价等于或低于 9 万元但大于 4.5 万元时，乙愿意购买 2t 产品，甲愿意生产 8t 产品；依次类推。那么的市场价格应该是多少？

表 1　不同价格下的供应能力和需求能力

生产商（甲）		消费者（乙）	
单价（万元/t）	供应能力（t）	单价（万元/t）	需求能力（t）
1	2	9	2
2	4	4.5	4
3	6	3	6
4	8	2.25	8

（1）问题分析

仔细观察一下表 1 就可以看出来，这个具体问题的解是一目了然的：清算价格显然应该是 3 万元/t，因为此时供需平衡（都是 6t）。为了能够处理一般情况，下面通过建立优化模型来解决这个问题。

这个问题给人的第一印象似乎没有明确的目标函数，不太像是一个优化问题。不过，我们可以换一个角度来想问题：假设市场上还有一个虚拟的经销商，他是甲乙进行交易的中介。那么，为了使自己获得的利润最大，他将总是以可能的最低价格从甲购买产品，再以可能的最高价格卖给乙，直到进一步的交易无利可图为止。例如，最开始的

2t 产品他将会以 1 万元的单价从甲购买，以 9 万元的单价卖给乙；接下来的 2t 产品他会以 2 万元的单价从甲购买，再以 4.5 万元的单价卖给乙；再接下来的 2t 产品他只能以 3 万元的单价从甲购买，再以 3 万元的单价卖给乙（其实这次交易他已经只是保本，但我们仍然假设这笔交易会发生，例如他为了使自己的营业额尽量大）；最后，如果他继续购买甲的产品卖给乙，他一定会亏本，所以他肯定不会交易。因此，市场清算价格就是 3 万元。根据这个想法，我们就可以建立这个问题的线性规划模型。

（2）模型建立

决策变量：设甲以 1 万元，2 万元，3 万元，4 万元的单价售出的产品数量（单位：t）分别是 x_1, x_2, x_3, x_4，乙以 9 万元，4.5 万元，3 万元，2.25 万元的单价购买的产品数量（单位：t）分别是 y_1, y_2, y_3, y_4。

目标函数：就是虚拟经销商的总利润，即

$$9y_1 + 4.5y_2 + 3y_3 + 2.5y_4 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 \tag{1}$$

约束条件：

供需平衡 $$\sum_{i=1}^{4} x_i = \sum_{i=1}^{4} y_i \tag{2}$$

供应限制 $$x_i \le 2，i = 1,2,3,4 \tag{3}$$

消费限制 $$y_i \le 2，i = 1,2,3,4 \tag{4}$$

非负限制 $$x_i, y_i \ge 0，i = 1,2,3,4 \tag{5}$$

（3）模型求解

式（1）～（5）是一个线性规划模型，可以用 LINGO 求解，对应的 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
gx/1..4/:c1,c2,x,y;
endsets
data:
c1=1 2 3 4;
c2=9,4.5,3,2.5;
enddata
max=@sum(gx:c2*y-c1*x);
@sum(gx:x)=@sum(gx:y);
@for(gx:@bnd(0,x,2);@bnd(0,y,2));
```

```
end
```

求解这个模型，得到如下解答：

```
Global optimal solution found at iteration:           5
  Objective value:                              21.00000

                    Variable           Value        Reduced Cost
                      C1( 1)        1.000000            0.000000
                      C1( 2)        2.000000            0.000000
                      C1( 3)        3.000000            0.000000
                      C1( 4)        4.000000            0.000000
                      C2( 1)        9.000000            0.000000
                      C2( 2)        4.500000            0.000000
                      C2( 3)        3.000000            0.000000
                      C2( 4)        2.500000            0.000000
                       X( 1)        2.000000           -2.000000
                       X( 2)        2.000000           -1.000000
                       X( 3)        0.000000            0.000000
                       X( 4)        0.000000            1.000000
                       Y( 1)        2.000000           -6.000000
                       Y( 2)        2.000000           -1.500000
                       Y( 3)        0.000000            0.000000
                       Y( 4)        0.000000           0.5000000

                         Row    Slack or Surplus      Dual Price
                           1        21.00000            1.000000
                           2        0.000000           -3.000000
```

（4）结果解释

可以看出，最优解为 $x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 2$，$x_3 = x_4 = y_3 = y_4 = 0$。但你肯定觉得这还是没有解决问题，甚至认为这个模型错了，因为这个解法没有包括 3 万元单价的 2t 交易量。虽然容易验证 $x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$，$x_4 = y_4 = 0$ 也是最优解，但在一般情况下是难以保证一定求出这个解的。

那么如何才能确定清算价格呢？请仔细思考一下供需平衡约束（2）的对偶价格（dual prices）的含义。对偶价格又称影子价格，表示的是对应约束的右端项的价值。供需平衡约束目前的右端项为 0，影子价格为－3，意思就是说如果右端项增加一个很小的量（即甲的供应量增加一个很小的量），引起的经销商的损失就是这个小量的 3 倍。可见，此时的销售单价就是 3 万元，这就是清算价格。

（5）模型扩展

一般地，可以假设甲的供应能力随价格的变化情况分为 K 段，即价格位于区间

$[p_k, p_{k+1})$ 时，供应量最多为 c_k（$k=1,2,\cdots,K$；$0<p_1<p_2<\cdots<p_{K+1}=\infty$；$0=c_0<c_1<c_2<\cdots<C_K$），我们把这个函数关系称为供应函数（这里它是一个阶梯函数）。同理，假设乙的消费能力随价格的变化情况分为 L 段，即价格位于区间 $(q_{j+1}, q_j]$ 时，消费量最多为 d_j（$j=1,2,\cdots,L$；$q_1>\cdots>q_L>q_{L+1}=0$；$0=d_0<d_1<\cdots d_L$），我们把这个函数关系称为需求函数（这里它也是一个阶梯函数）。

设甲以 p_k 的价格售出的产品数量为 x_k（$k=1,2,\cdots,K$），乙以 q_j 的价格购入的产品数量为 y_j（$j=1,2,\cdots,L$）。记 $c_0=d_0=0$，则可以建立如下所示的线性规划模型：

$$\max \quad \sum_{j=1}^{L} q_j y_j - \sum_{k=1}^{K} p_k x_k \tag{6}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{j=1}^{L} y_j = 0 \tag{7}$$

$$0 \le x_k \le c_k - c_{k-1},\ k=1,2,\cdots,K \tag{8}$$

$$0 \le y_j \le d_j - d_{j-1},\ j=1,2,\cdots,L \tag{9}$$

1.2　两个生产商、两个消费者的情形

例 2　假设市场上除了例 1 中的甲和乙外，还有另一个生产商（记为丙）和另一个消费者（记为丁），他们在不同价格下的供应能力和需求能力如表 2 所示。此外，从甲销售到丁的每吨产品的运输成本是 1.5 万元，从丙销售到乙的每吨产品的运输成本是 2 万元，而甲、乙之间没有运输成本，丙、丁之间没有运输成本。这时，市场的清算价格应该是多少？甲和丙分别生产多少？乙和丁分别购买多少？

表 2　不同价格下的供应能力和消费能力

生产商（丙）		生产商（丁）	
单价（万元/t）	供应能力（t）	单价（万元/t）	供应能力（t）
2	1	15	1
4	4	8	3
6	8	5	6
8	12	3	10

（1）问题分析

首先，我们看看为什么要考虑从甲销售到丁的产品的运输成本和从丙销售到乙的产品的运输成本。如果不考虑这些运输成本，我们就可以认为甲乙丙丁处于同一个市场上，因此可以将两个生产商（甲和丙）的供应函数合并成一个供应函数，合并后就可以认为市场上仍然只有一个供应商。类似地，乙和丁的需求函数也可以合并成一个需求函数，合并后就可以认为市场上仍然只有一个消费者。这样，就回到了例 1 的情形。

也就是说，考虑运输成本在经济学上的含义，应当是认为甲乙是一个市场（地区或国家），而丙丁是另一个市场（地区或国家）。运输成本也可能还包括关税等成本，由于这个成本的存在，两个市场的清算价可能是不同的。

仍然按照例 1 的思路，可以建立这个问题的线性规划模型。

（2）模型的建立和求解

设甲以 1，2，3，4（万元）的单价售出的产品数量（单位：t）分别是 A_1, A_2, A_3, A_4，乙以 9，4.5，3，2.25（万元）的单价购买的产品数量（单位：t）分别是 X_1, X_2, X_3, X_4；丙以 2，4，6，8（万元）的单价售出的产品数量（单位：t）分别是 B_1, B_2, B_3, B_4，丁以 15，8，5，3（万元）的单价购买的产品数量（单位：t）分别是 Y_1, Y_2, Y_3, Y_4。此外，假设 AX 和 AY 分别是甲向乙和丁的供货量，BX 和 BY 分别是丙向乙和丁的供货量。这些决策变量之间的关系参见示意图 1。

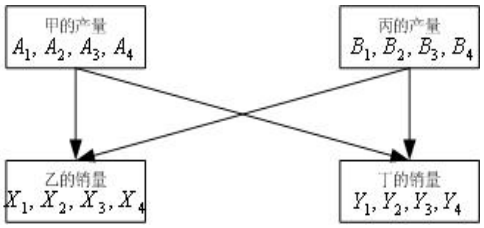


图 1　决策变量之间的关系

目标函数仍然是虚拟经销商的总利润，约束条件仍然是四类（供需平衡、供应限制、需求限制和非负限制），不过这时应注意供需平衡约束应该是包括图 1 所示的决策变量之间的关系：

$$AX + AY = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \tag{10}$$

$$BX + BY = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \tag{11}$$

$$AX + BX = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \tag{12}$$

$$AY + BY = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 \tag{13}$$

此外的其它约束实际上只是一个简单的变量上界约束。

下面直接给出 LINGO 程序：

```
model:
sets:
num1/1..4/:c1,c2,c3,c4,d1,d2,A,B,X,Y;
num2/1,2/:AXY,BXY;
endsets
data:
c1=9 4.5 3 2.25;
c2=15 8 5 3;
c3=1 2 3 4;
c4=2 4 6 8;
d1=1 3 4 4;
d2=1 2 3 4;
enddata
max=@sum(num1:c1*x+c2*y-c3*A-c4*B)-2*BXY(1)-1.5*AXY(2);
@sum(num1:A)-@sum(num2:AXY)=0;
@sum(num1:B)-@sum(num2:BXY)=0;
AXY(1)+BXY(1)-@sum(num1:X)=0;
AXY(2)+BXY(2)-@sum(num1:Y)=0;
@for(num1:@bnd(0,A,2);@bnd(0,X,2);@bnd(0,B,d1);@bnd(0,Y,d2));
end
```

求解这个模型，得到如下解答：

```
  Global optimal solution found at iteration:           0
  Objective value:                              44.00000

                    Variable           Value        Reduced Cost
                      C1( 1)        9.000000            0.000000
                      C1( 2)        4.500000            0.000000
                      C1( 3)        3.000000            0.000000
                      C1( 4)        2.250000            0.000000
                      C2( 1)        15.00000            0.000000
                      C2( 2)        8.000000            0.000000
                      C2( 3)        5.000000            0.000000
                      C2( 4)        3.000000            0.000000
                      C3( 1)        1.000000            0.000000
                      C3( 2)        2.000000            0.000000
                      C3( 3)        3.000000            0.000000
```

C3(4)	4.000000	0.000000
C4(1)	2.000000	0.000000
C4(2)	4.000000	0.000000
C4(3)	6.000000	0.000000
C4(4)	8.000000	0.000000
D1(1)	1.000000	0.000000
D1(2)	3.000000	0.000000
D1(3)	4.000000	0.000000
D1(4)	4.000000	0.000000
D2(1)	1.000000	0.000000
D2(2)	2.000000	0.000000
D2(3)	3.000000	0.000000
D2(4)	4.000000	0.000000
A(1)	2.000000	-2.000000
A(2)	2.000000	-1.000000
A(3)	2.000000	0.000000
A(4)	0.000000	1.000000
B(1)	1.000000	-2.500000
B(2)	3.000000	-0.5000000
B(3)	0.000000	1.500000
B(4)	0.000000	3.500000
X(1)	2.000000	-6.000000
X(2)	2.000000	-1.500000
X(3)	0.000000	0.000000
X(4)	0.000000	0.7500000
Y(1)	1.000000	-10.50000
Y(2)	2.000000	-3.500000
Y(3)	3.000000	-0.5000000
Y(4)	0.000000	1.500000
AXY(1)	4.000000	0.000000
AXY(2)	2.000000	0.000000
BXY(1)	0.000000	3.500000
BXY(2)	4.000000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	44.00000	1.000000
2	0.000000	-3.000000
3	0.000000	-4.500000
4	0.000000	-3.000000
5	0.000000	-4.500000

（3）结果解释

可以看到，最优解为 $A_1 = A_2 = A_3 = X_1 = X_2 = 2$，$B_1 = 1$，$B_2 = 3$，$Y_1 = 1$，$Y_2 = 3$，$Y_3 = 3$，$AX = BY = 4$，$AY = 2$，$A_4 = B_3 = B_4 = X_3 = X_4 = Y_4 = BX = 0$。也就是说，甲将向丁销售2t产品，丙不会向乙销售。

那么如何才能确定清算价格呢？与例1类似，约束（2）是针对生产商甲的供需平衡条件，目前的右端项为0，影子价格为－3，意思就是说如果右端项增加一个很少的量（即甲的供应量增加一个很少的量），引起的经销商的损失就是这个小量的3.5倍。可见，此时甲的销售单价就是3万元，这就是甲面对的清算价格。

完全类似地，可以知道生产商丙面对的清算价格为4.5。自然地，乙面对的清算价格也是3，丁面对的清算价格也是4.5，因为甲乙位于同一个市场，而丙丁也位于同一个市场。这两个市场的清算价之差正好等于从甲、乙到丙、丁的运输成本（1.5），这是非常合理的。

（4）模型扩展

可以和1.1一样，将上面的具体模型一般化，即考虑供应函数和需求函数的分段数不是固定为4，而是任意有限正整数的情形。

很自然地，上面的方法很容易推广到不仅仅是2个市场，而是任意有限个市场的情形。理论上看这当然没有什么难度，只是这时变量会更多，数学表达式变得更复杂一些。

1.3　拍卖与投标问题

例3　假设一家拍卖行对委托的5类艺术品对外拍卖，采用在规定日期前投标人提交投标书的方式进行，最后收到了来自4个投标人的投标书。每类项目的数量、投标人对每个项目的投标价格如表3中所示。例如，有3件第4类艺术品；对每件第4类艺术品，投标人1，2，3愿意出的最高价分别为6，1，3，2（货币单位，如万元）。此外，假设每个投标人对每类艺术品最多只能购买1件，并且每个投标人购买的艺术品的总数不能超过3件。那么，哪些艺术品能够卖出去？卖给谁？这个拍卖和投标问题中每类物品的清算价应该是多少？

表3　拍卖与投标信息

招标项目类型		1	2	3	4	5
招标项目的数量		1	2	3	3	4
投标价格	投标人1	9	2	8	6	3
	投标人2	6	7	9	1	5
	投标人3	7	8	6	3	4
	投标人4	5	4	3	2	1

（1）问题分析

这个具体问题在实际中可能可以通过对所有投标的报价进行排序来解决，例如可以总是将艺术品优先卖给出价最高的投标人。但这种方法不太好确定每类艺术品的清算

价，所以我们这里还是借用前面两个例子中的方法，即假设有一个中间商希望最大化自己的利润，从而建立这个问题的线性规划模型。

（2）问题的一般提法和假设

先建立一般的模型，然后求解本例的具体问题，设有 n 类物品需要拍卖，第 j 类物品的数量为 s_j（$j=1,2,\cdots,n$）；有 m 个投标者，投标者 i（$i=1,2,\cdots m$）对第 j 类物品的投标价格为 b_{ij}（假设非负）。投标者 i 对每类物品最多购买一件，且总件数不能超过 c_i。我们的目标之一是要确定第 j 类物品的清算价格 p_j，它应当满足下列假设条件：

i）成交的第 j 类物品的数量不超过 s_j（$j=1,2,\cdots,n$）；

ii）对第 j 类物品的报价低于 p_j 的投标人将不能获得第 j 类物品；

iii）如果成交的第 j 类物品的数量少于 s_j（$j=1,2,\cdots,n$）可以认为 $p_j=0$（除非拍卖方另外指定一个最低的保护价）；

iv）对第 j 类物品的报价高于 p_j 的投标人有权获得第 j 类物品，但如果他有权获得的物品超过3件，那么我们假设他总是希望使自己的满意度最大（满意度可以用他的报价与市场清算价之差来衡量）。

（3）优化模型

用 $0-1$ 变量 x_{ij} 表示是否分配一件第 j 类物品给投标者 i，即 $x_{ij}=1$ 表示分配，而 $x_{ij}=0$ 表示不分配。目标函数仍然是虚拟的中间商的总利润（认为这些利润全部是拍卖行的利润也可以），即

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_{ij} \tag{14}$$

除变量取值为0或1的约束外，问题的约束条件主要是两类：每类物品的数量限制和每个投标人所能分到的物品的数量限制，即

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le s_j,\ j=1,2,\cdots,n \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le c_i,\ i=1,2,\cdots,m \tag{16}$$

模型就是在约束（15）、（16）下最大化目标函数（14）。

（4）模型求解

编写的LINGO程序如下：

```
MODEL:
TITLE 拍卖与投标;
SETS:
   AUCTION/1..5/: S;
   BIDDER/1..4/ : C;
   LINK(BIDDER,AUCTION): B, X;
ENDSETS
DATA:
   S=1 2 3 3 4;
   C=3 3 3 3;
   B=
```

9	2	8	6	3
6	7	9	1	5
7	8	6	3	4
5	4	3	2	1

```
;
ENDDATA
MAX=@SUM(LINK: B*X);
@FOR(AUCTION(J):
   [AUC_LIM] @SUM(BIDDER(I): X(I,J)) < S(J) );
@FOR(BIDDER(I):
   [BID_LIM] @SUM(AUCTION(J): X(I,J)) < C(I) );
@FOR(LINK: @BND(0,X,1));
END
```

需要指出的是，上面程序中DATA语句的数据表是直接从WORD文档中复制（Ctrl+C）后粘贴（Ctrl+V）过来的，所以显示格式继续保持了WORD文档的风格。

（5）求解结果解释

可以看到，最优解为：投标人1得到艺术品1，3，4，投标人2，3都得到艺术品2，3，5，投标人4得到艺术品4，5。结果，第4，5类艺术品各剩下1件没有成交。

那么如何才能确定清算价格呢？与例1和例2类似，约束“AUC_LIM”是针对每类艺术品的数量限制的，对应的影子价格就是其清算价格：即5类艺术品的清算价格分别是5，5，3，0，0。第4，5类艺术品有剩余，所以清算价格为0，这是符合前面的假设的。

可以指出的是：即使上面模型中不要求 x_{ij} 为0－1变量（即只要求取0～1之间的实

数），由于这个问题的特殊性，最优解中 x_{ij} 也会要么取0，要么取1，不可能取0～1之间的其它数，所以可以将LINGO模型中“@BIN(X)”改为“@BND(0,X,1)”，这个线性规划的结果将与 $0-1$ 整数线性规划得到的结果相同。

最后，大学生的选课问题与此是类似的，即把课程看成招标（拍卖）项目，而把学生愿意付出的选课费看成投标。据说国外有些大学的选课系统就是使用这个模型确定每门课程的清算价格（选课费用）的，而且取得了成功。

1.4　交通流均衡问题

例4　某地有如图2所示的一个公路网，每天上班时间有6千辆小汽车要从居民区 A 前往工作区 D。经过长期观察，我们得到了图中5条道路上每辆汽车的平均行驶时间和汽车流量之间的关系，如表4所示，那么，长期来看，这些汽车将如何在每条道路上分布？

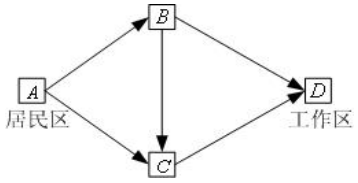


图2　一个公路网示意图

表4　平均行驶时间和汽车流量之间的关系

道　　路		AB	AC	BC	BD	CD
行驶时间（min）	流量 ≤ 2	20	52	12	52	20
	$2<$流量 ≤ 3	30	53	13	53	30
	$3<$流量 ≤ 4	40	54	14	54	40

（1）问题分析

这个问题看起来似乎与前面几个例子完全不同，但实际上交通流与市场经济活动类似，也存在着均衡。

我们可以想象有一个协调者，正如前面几个例子中的所谓中间商可以理解为市场规律一样，实际上这里的所谓协调者也可以认为是交通流的规律。交通流的规律就是每辆汽车都将选择使自己从 A 到 D 运行时间最少的路线，其必然的结果是无论走哪条路线从 A 到 D，最终花费的时间应该是一样的（否则，花费时间较长的那条线路上的部分汽车就会改变自己的路线，以缩短自己的行驶时间）。

也就是说，长期来看，这些汽车在每条道路上的分布将达到均衡状态（所谓均衡，这里的含义就是每辆汽车都不能仅仅通过自身独自改变道路，节省其行驶时间）。在这种想法下，我们来建立线性规划模型。

（2）优化模型

交通流的规律要求所有道路上的流量达到均衡，我们仍然类似例1和例2来考虑问题。如果车流量是一辆车一辆车增加的，那么在每条道路上车流量小于2时，车流量会

有一个分布规律；当某条道路上流量正好超过2时，新加入的一辆车需要选择使自己堵塞时间最短的道路。这就提示我们把同一条道路上的流量分布分解成不同性质的三个部分。也就是说，我们用$Y(AB)$表示道路AB上的总的流量，并进一步把它分解成三部分：

i）道路AB上的流量不超过2时的流量，用$X(2,AB)$表示；

ii）道路AB上的流量超过2但不超过3时，超过2的流量部分用$X(3,AB)$表示；

iii）道路AB上的流量超过3但不超过4时，超过3的流量部分用$X(4,AB)$表示。

依次类推，对道路AC,BC,BD,CD上同理可以定义类似的决策变量。因此，问题中总共有20个决策变量$Y(j)$和$X(i,j)$（$i=2,3,4$，$j=AB,AC,BC,BD,CD$）。

问题的目标应当是使总的堵塞时间最小。用$T(i,j)$表示流量$X(i,j)$对应的堵塞时间（即表3中的数据，是对每辆车而言的），我们看看用$\sum_{i=2,3,4}\sum_{j\text{为道路}}T(i,j)X(i,j)$作为总堵塞时间是否合适。很容易理解：后面加入道路的车辆可能又会造成前面进入道路的车辆的进一步堵塞，如流量为3时，原先流量为2的车辆实际上也只能按$T(3,j)$的时间通过，而不是$T(2,j)$。也就是说，$\sum_{i=2,3,4}\sum_{j\text{为道路}}T(i,j)X(i,j)$并不是总堵塞时间。但是我们也可以发现，$T(i,j)$关于$i$是单调增加的，即不断增加的车流只会使以前的堵塞加剧而不可能使以前的堵塞减缓。所以，关于决策变量$X(i,j)$而言，$\sum_{i=2,3,4}\sum_{j\text{为道路}}T(i,j)X(i,j)$与我们希望优化的目标的单调性是一致的。因此，可以用$\sum_{i=2,3,4}\sum_{j\text{为道路}}T(i,j)X(i,j)$作为目标函数进行优化。

约束条件有三类：

i）每条道路上的总流量Y等于该道路上的分流量X的和；

ii）道路交汇处A,B,C,D（一般称为节点）的流量守恒（即进入量等于流出量）；

iii）决策变量的上限限制，如$X(2,AB)\le 2$，$X(3,AB)\le 1$，$X(4,AB)\le 1$等。

于是对应的优化模型很容易直接写出（略）。

（3）模型求解

编写LINGO程序如下：

```
MODEL:
TITLE 交通流均衡;
SETS:
    ROAD/AB,AC,BC,BD,CD/:Y;
    CAR/2,3,4/;
    LINK(CAR,ROAD): T, X;
ENDSETS
DATA:
! 行驶时间(分钟);
    T=20,52,12,52,20
       30,53,13,53,30
      40,54,14,54,40;
ENDDATA
[OBJ] MIN=@SUM(LINK: T*X);  ! 目标函数;
! 四个节点的流量守恒条件;
[NODE_A] Y(@INDEX(AB))+Y(@INDEX(AC)) = 6;
[NODE_B] Y(@INDEX(AB))=Y(@INDEX(BC))+Y(@INDEX(BD));
[NODE_C] Y(@INDEX(AC))+Y(@INDEX(BC))=Y(@INDEX(CD));
[NODE_D] Y(@INDEX(BD))+Y(@INDEX(CD))=6;
! 每条道路上的总流量Y等于该道路上的分流量X的和;
@FOR( ROAD(I): [ROAD_LIM] @SUM(CAR(J): X(J,I)) = Y(I));
! 每条道路的分流量X的上下界设定;
@FOR(LINK(I,J)|I#EQ#1: @BND(0,X(I,J),2) );
@FOR(LINK(I,J)|I#GT#1: @BND(0,X(I,J),1) );
END
```

可以指出的是，上面4个节点的流量守恒条件中，其实只有3个是独立的（也就是说，第4个条件总可以从其它3个方程推导出来），因此从中去掉任何一个都不会影响到计算结果。

（4）结果解释

LINGO的运行结果表明，均衡时道路 AB, AC, BC, BD, CD 的流量分别是4，2，2，2，4（千辆）车。但是要注意，正如我们建立目标函数时所讨论过的，这时得到的目标函数值452并不是真正的总运行和堵塞时间，而是一个用来表示目标函数趋势的虚拟的量，没有太多实际物理意义。事实上，可以求出这时的真正运行时间是：每辆车通过 AB, AC, BC, BD, CD 道路分别需要40，52，12，52，40（min），也就是在图中三

条路线 $ABD, ACD, ABCD$ 上都需要92min，所以这也说明交通流确实达到了均衡。

于是，均衡时真正的总运行时间应该是 $6\times 92=552$（千辆车·min）。

（5）模型讨论

仔细想想就会发现，上面的解并不是最优解，即均衡解并不一定是最优的流量分配方案。为了求出使所有汽车的总运行时间最小的交通流，应该如何做呢？也就是说，这相当于假设有一个权威的机构来统筹安排，最优地分配这些交通流，而不是像求均衡解时那样认为各个个体（每辆车）都可以自己选择道路，自然达到平衡状态。

为了进行统筹规划，我们需要把新增的流量 $X(i,j)$（$i=2,3,4$，$j=AB,AC,BC,BD,CD$）造成的实际堵塞时间计算出来（仍按每辆车计算），而不是像上面那样不考虑对原有车流造成的堵塞效应。以道路 AB 为例。

i）当流量为2千辆时，每辆车的通过时间为20min，所以总通过时间是40（千辆车·min）；

ii）当流量增加一个单位（本题中一个单位就是1千辆）达到3千辆时，每辆车的通过时间为30min，所以总通过时间是90（千辆车·min）；

iii）当流量再增加一个单位达到4千辆时，每辆车的通过时间为40min，所以总通过时间是160（千辆车·min）。

由此可见，流量超过2而不超过3时，单位流量的增加导致的总通过时间的变化为90－40＝50（千辆车·min）；流量超过3而不超过4时，单位流量的增加导致的总通过时间的变化为160－90＝70（千辆车·min）。

类似地，对所有道路，都可以得到单位流量的增加导致总行驶时间的增量和汽车流量之间的关系（参加表5）。

表5　单位流量的增加导致总行驶时间的增量和汽车流量之间的关系

道　　路		AB	AC	BC	BD	CD
总行驶时间的增量（千辆车·min）	流量≤ 2	20	52	12	52	20
	$2<$流量≤ 3	50	55	15	55	50
	$3<$流量≤ 4	70	57	17	57	70

用表5中的总行驶时间的增量数据代替前面模型中的每辆车的行驶时间数据 $T(i,j)$，模型的其它部分完全不用变。重新求解LINGO模型，LINGO程序如下：

```
MODEL:
TITLE 交通流均衡;
SETS:
    ROAD/AB,AC,BC,BD,CD/:Y;
    CAR/2,3,4/;
```

```
    LINK(CAR,ROAD): T, X;
ENDSETS
DATA:
! 行驶时间(分钟);
    T=
```

20	52	12	52	20
50	55	15	55	50
70	57	17	57	70

```
;
ENDDATA
[OBJ] MIN=@SUM(LINK: T*X);  ! 目标函数;
! 四个节点的流量守恒条件;
[NODE_A] Y(@INDEX(AB))+Y(@INDEX(AC)) = 6;
[NODE_B] Y(@INDEX(AB))=Y(@INDEX(BC))+Y(@INDEX(BD));
[NODE_C] Y(@INDEX(AC))+Y(@INDEX(BC))=Y(@INDEX(CD));
[NODE_D] Y(@INDEX(BD))+Y(@INDEX(CD))=6;
! 每条道路上的总流量Y等于该道路上的分流量X的和;
@FOR( ROAD(I): [ROAD_LIM] @SUM(CAR(J): X(J,I)) = Y(I));
! 每条道路的分流量X的上下界设定;
@FOR(LINK(I,J)|I#EQ#1: @BND(0,X(I,J),2) );
@FOR(LINK(I,J)|I#GT#1: @BND(0,X(I,J),1) );
END
```

求得的最优车流分配方式是：道路 AB, AC, BD, CD 的流量都是3千辆，而道路 BC 上没有流量；总（加权）运行时间为498（千辆车·min），优于均衡时的结果552（千辆车·min）。此时，每辆车的运行时间＝498/6=83（min），少于均衡时的92min。当然，这个最优解必须强制执行，否则 AB 道路上的一些车到底 B 点时，发现当前走 BCD 的时间只需要 $12+30=42$（min），比走 BD 的时间（53min）短很多，所以他们就会改走 BCD，导致走 BCD 的时间（主要是走道路 CD 的时间）增加；如此下去，最后终将到达前面我们得到的均衡状态。

这是一个非常有趣的结果：当一个系统中的每个个体都独自追求个体利益最大化时，整体的利益却没有达到最大化。

更令人惊讶的是：这个例子的道路网中如果没有道路 BC，从 A 到 D 的平均时间是83min；而新开了一条道路 BC 以后，从 A 到 D 的平均时间居然变成92min，不是加快反而减慢了。由此也可以理解，做出一个科学、合理的交通网的规划是一件相当复杂的工作。

§2 投资组合问题

2.1 基本的投资组合模型

例5　美国某三种股票（A,B,C）12年（1943－1954）的价格（已经包括了分红在内）每年的增长情况如表6所示（表中还给出了相应年份的500种股票的价格指数的增长情况）。例如，表中第一个数据1.300的含义是股票A在1943年的年末价值是其年初价值的1.300倍，即收益为30%，其余数据的含义依此类推。假设你在1955年时有一笔资金准备投资这三种股票，并期望年收益率至少达到15%，那么你应当如何投资？当期望的年收益率变化时，投资组合和相应的风险如何变化？

表6　股票收益数据

年　份	股票A	股票B	股票C	股票指数
1943	1.300	1.225	1.149	1.258997
1944	1.103	1.290	1.260	1.197526
1945	1.216	1.216	1.419	1.364361
1946	0.954	0.728	0.922	0.919287
1947	0.929	1.144	1.169	1.057080
1948	1.056	1.107	0.965	1.055012
1949	1.038	1.321	1.133	1.187925
1950	1.089	1.305	1.732	1.317130
1951	1.090	1.195	1.021	1.240164
1952	1.083	1.390	1.131	1.183675
1953	1.035	0.928	1.006	0.990108
1954	1.176	1.715	1.908	1.526236

（1）问题分析

本例的问题称为投资组合（portfolio）问题，早在1952年Markowitz就给出了这个模型的基本框架，而且这个模型后来又得到了不断的研究和改进。一般来说，人们投资股票时的收益是不确定的，因此是一个随机变量，所以除了考虑收益的期望值外，还应当考虑风险。风险用什么衡量？Markowitz建议，风险可以用收益的方差（或标准差）来进行衡量：方差越大，则认为风险越大；方差越小，则认为风险越小。在一定的假设下，用收益的方差（或标准差）来衡量风险确实是合适的。为此，我们先对表6中给出的数据计算出三种股票收益的均值和方差（包括协方差）备用。

一种股票收益的均值衡量的是这种股票的平均收益状况，而收益的方差衡量的是这种股票收益的波动幅度，方差越大则波动越大（收益越不稳定）。两种股票收益的协方差表示的则是它们之间的相关程度：

i）协方差为0时两者不相关。

ii）协方差为正数表示两者正相关，协方差越大则正相关性越强（越有可能一赚皆赚，一赔俱赔）。

iii）协方差为负数表示两者负相关，绝对值越大则负相关性越强（越有可能一个赚，另一个赔）。

记股票 A,B,C 每年的收益率分别为 R_1,R_2,R_3（注意表中的数据减去1以后才是年收益率），则 R_i（$i=1,2,3$）是一个随机变量。用 E 和 D 分别表示随机变量的数学期望和方差算子，用cov表示两个随机变量的协方差（covariance），根据概率论的知识和表6给出的数据，则可以计算出年收益率的数学期望为

$$ER_1=0.0890833,\ ER_2=0.2136667,\ ER_3=0.2345833 \qquad (17)$$

同样，可以计算股票 A,B,C 年收益率的协方差矩阵为

$$\mathrm{COV}=\begin{bmatrix}0.01080754 & 0.01240721 & 0.01307513\\ 0.01240721 & 0.05839170 & 0.05542639\\ 0.01307513 & 0.05542639 & 0.09422681\end{bmatrix} \qquad (18)$$

计算的LINGO程序如下：

```
MODEL:
Title 均值向量Mean与协方差矩阵COV;
SETS:
   YEAR/1..12/;
   STOCKS/ A,  B,  C/: Mean;
   link(YEAR, STOCKS): R;
   temp/1..5/;
   tmatrix(YEAR,temp):tm;
   STST(Stocks,stocks): COV;
ENDSETS
DATA:
   tm =
    1943         1.300         1.225         1.149         1.258997
    1944         1.103         1.290         1.260         1.197526
    1945         1.216         1.216         1.419         1.364361
    1946         0.954         0.728         0.922         0.919287
    1947         0.929         1.144         1.169         1.057080
    1948         1.056         1.107         0.965         1.055012
    1949         1.038         1.321         1.133         1.187925
    1950         1.089         1.305         1.732         1.317130
    1951         1.090         1.195         1.021         1.240164
    1952         1.083         1.390         1.131         1.183675
    1953         1.035         0.928         1.006         0.990108
   1954         1.176         1.715         1.908         1.526236;
```

```
@text(data1.txt)=R;
@text(data2.txt)=Mean;
@text(data3.txt)=COV;
ENDDATA
CALC:  !计算均值向量Mean与协方差矩阵COV;
@for(tmatrix(i,j)|j #ge#2 #and# j #le# 4:R(i,j-1)=tm(i,j)-1);
@for(stocks(i): Mean(i) = @sum(year(j): R(j,i)) / @size(year) );
@for(stst(i,j): COV(i,j) = @sum(year(k):
(R(k,i)-mean(i))*(R(k,j)-mean(j))) / (@size(year)-1) );
ENDCALC
END
```

注意模型中计算协方差矩阵COV时，分母是样本数减去1，而不是样本数，这是常用的计算方法，主要是为了保持这个估计的无偏性（当然，样本数较大时两者差别不太）。

（2）模型建立

用决策变量 x_1, x_2 和 x_3 分别表示投资人投资股票 A, B, C 的比例。假设市场上没有其它投资渠道，且手上资金（可以不妨假设只有1个单位的资金）必须全部用于投资这三种股票，则

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0\ ,\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \qquad (19)$$

年投资收益率 $R = x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3$ 也是一个随机变量。根据概率论的知识，投资的总期望收益为

$$ER = x_1ER_1 + x_2ER_2 + x_3ER_3 \qquad (20)$$

年投资收益率的方差为

$$\begin{aligned} V &= D(x_1R_1 + x_2R_2 + x_3R_3) \\ &= x_1^2DR_1 + x_2^2DR_2 + x_3^2DR_3 \\ &\quad + 2x_1x_2\,\mathrm{cov}(R_1, R_2) + 2x_1x_3\,\mathrm{cov}(R_1, R_3) + 2x_2x_3\,\mathrm{cov}(R_2, R_3) \\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_ix_j\,\mathrm{cov}(R_i, R_j) \end{aligned} \qquad (21)$$

实际的投资者可能面临许多约束条件，这里只考虑题中要求的年收益率（的数学期望）不低于15%，即

$$x_1ER_1 + x_2ER_2 + x_3ER_3 \geq 0.15 \qquad (22)$$

所以，最后的优化模型就是在约束（19）和（22）下极小化（21）。由于目标函数 V 是决策变量的二次函数，而约束都是线性函数，所以这是一个二次规划问题。

（3）用LINGO求解模型

编写LINGO程序如下：

```
MODEL:
SETS:
   YEAR/1..12/;
   STOCKS/ A,  B,  C/: Mean,X;
   link(YEAR, STOCKS): R;
   STST(Stocks,stocks): COV;
ENDSETS
DATA:
TARGET=0.15;
Mean=@file(data2.txt);
COV=@file(data3.txt);
ENDDATA
[OBJ] MIN = @sum(STST(i,j): COV(i,j)*x(i)*x(j));
[ONE] @SUM(STOCKS: X) = 1;
[TWO] @SUM(stocks: mean*x) >= TARGET;
END
```

求得投资三种股票的比例大致是：A占53%，B占36%，C占11%。风险（方差）为0.02241378。

（4）用MATLAB软件对模型进行参数分析

对实际投资人来说，可能不仅希望知道指定的期望投资回报率下的风险（回报率的方差），可能更希望知道风险随着不同的投资回报率是如何变化的，然后作出最后的投资决策。这当然可以通过在上面的模型中不断修改约束中的参数（目前为0.15）来实现，如将0.15改为0.2345，则表示投资回报率希望达到23.45%（这几乎是可能达到的最大值了，因为这几乎是三种股票中最大的投资回报率，即股票C的回报率）。可以想到，这时应主要投资在股票C上。实际求解一下，可以知道最优解中投资股票C的份额大约是99.6%（剩余的大约0.4%投资在股票B上）。

目前LINGO软件还没有二次规划灵敏度分析的功能。下面我们利用MATLAB软件进行灵敏度分析，回报率的取值区间为[0.09,0.234]，变化步长为0.002。编写程序如下：

```
clc,clear
load data2.txt,load data3.txt
h=reshape(data3,[3,3]);
a=data2';
solution=[];
target=0.09;
hold on
while target<0.234
   [x,y]=quadprog(2*h,[],-a,-target,ones(1,3),1,zeros(3,1));
```

```
    plot(target,y,'*b');
    solution=[solution [target;x;y]];
    target=target+0.002;
    end
solution
```

得到的投资回报率与风险之间的关系曲线如图3所示

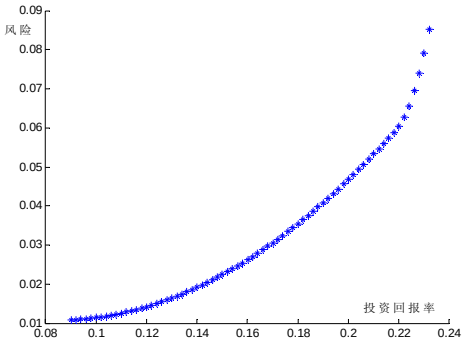


图3　投资回报率与风险之间的关系

从图3可以看出，投资回报率从22%附近开始，风险迅速增大。

2.2　存在无风险资产时的投资组合模型

例6　假设除了例5中的三种股票外，投资人还有一种无风险的投资方式，如购买国库券。假设国库券的年收益率为5%，如何考虑例5中的问题？

（1）问题分析

其实，无风险的投资方式（如国库券、银行存款等）是有风险的投资方式（如股票）的一种特例，所以这就意味着例5中的模型仍然是适用的。只不过无风险的投资方式的收益是固定的，所以方差（包括它与其它投资方式的收益的协方差）都是0。

（2）问题求解

假设国库券的投资方式记为 D，则当希望回报率为15%时，对应的LINGO模型如下：

```
MODEL:
Title 含有国库券的投资组合模型;
SETS:
  STOCKS1/ A,  B,  C/: mean1;
  STST1(Stocks1,stocks1): COV1;
  STOCKS/ A,  B,  C, D/: mean,X;
  STST(Stocks,stocks): COV;
ENDSETS
DATA:
mean=0.05;
```

```
COV=0;
COV1=@file(data3.txt);
Mean1=@file(data2.txt);
TARGET = 0.15; ! 0.10;
ENDDATA
calc:
@for(STOCKS(i)|i #ne# 4: mean(i)=mean1(i));
@for(STST(i,j)| i #ne# 4 #and# j #ne# 4:COV(i,j)=COV1(i,j));
endcalc
[OBJ] MIN = @sum(STST(i,j): COV(i,j)*x(i)*x(j));
[ONE] @SUM(STOCKS: X) = 1;
[TWO] @SUM(stocks: mean*x) >= TARGET;
END
```

计算结果为，投资 A 占8.7%，B 占42.9%，C 占14.3%，D（国库券）占34.1%，风险（方差）为0.02080347。与例5中的风险（方差为0.02241378）比较，无风险资产的存在可以使得投资风险减少。虽然国库券的收益率只有5%，比希望得到的收益率15%小很多，但在国库券上的投资要占到34.1%，其原因就是为了减少风险。

现在，我们把上面模型中的期望收益减少到10%，即把数据段中的语句“TARGET = 0.15”改为“TARGET = 0.10”，重新求解模型。计算结果如下：

投资 A 占4.3%，B 占21.4%，C 占7.2%，D（国库券）占67.1%，此时风险（方差为0.0052）进一步下降。请特别注意：你能发现这个结果（这里不妨称为结果2）与刚才“TARGET = 0.15”的结果（这里不妨称为结果1）有什么联系吗？

仔细观察这两个结果，可以发现：结果2中投资在有风险资产（股票 A,B,C ）上的比例大约都是结果1中相应的比例的一半。也就是说，无论你的期望收益和风险偏好如何，你手上所持有的风险资产本身相互之间的比例居然是不变的！变化的只是投资于风险资产与无风险资产之间的比例。有趣的是，这一现象在一般情况下也是成立的，一般称为“分离定理”，即风险资产之间的投资比例与期望收益和风险偏好无关。1981年诺贝尔经济学奖得主Tobin教授之所以获奖，很大一部分原因就是因为他发现了这个重要的规律。

也正是由于有这样一个重要结果，我们在下面各节的讨论中就不再考虑存在无风险资产的情形了，而只考虑确定风险资产之间的投资比例。

2.3 考虑交易成本的投资组合模型

例7 继续考虑例5（期望收益仍定为15%）。假设你目前持有的股票比例为：股票 A 占50%，B 占35%，C 占15%。这个比例与例5中得到的最优解有所不同。实际股票市场上每次股票买卖通常总有交易费，例如按交易额的1%收取交易费，这时你是否仍需要对所持的股票进行买卖（换手），以便满足最优解的要求？

（1）建立模型

仍用决策变量 x_1, x_2 和 x_3 分别表示投资人应当投资股票 A、B、C 的比例，进一步假设购买股票 A、B、C 的比例为 y_1, y_2 和 y_3，卖出股票 A、B、C 的比例为 z_1, z_2 和 z_3。其中，y_i 和 z_i（$i=1,2,3$）中显然最多只能有一个严格取正数，且

$$x_i, y_i, z_i \geq 0, i=1,2,3 \qquad (23)$$

由于交易费用的存在，这时约束 $x_1+x_2+x_3=1$ 不一定还成立（只有不进行股票买卖，即 $y_1=y_2=y_3=z_1=z_2=z_3=0$ 时，这个约束才成立）。其实，这个关系式的本质是：当前持有的总资金是守恒的，在有交易成本（1%）的情况下，应当表示成如下形式：

$$\sum_{i=1}^{3} x_i + 0.01 \cdot \sum_{i=1}^{3} (y_i + z_i) = 1 \qquad (24)$$

另外，考虑到当前持有的各只股票的份额 c_i, x_i, y_i 与 z_i（$i=1,2,3$）之间也应该满足守恒关系式

$$x_i = c_i + y_i - z_i, \ i=1,2,3 \qquad (25)$$

这就是新问题的约束条件，模型的其它部分不用改变。

（2）模型求解

问题对应的LINGO程序如下：

```
MODEL:
Title 考虑交易费的投资组合模型;
SETS:
   STOCKS/ A,  B,  C/: C,Mean,X,Y,Z;
   STST(Stocks,stocks): COV;
ENDSETS
DATA:
! 股票的初始份额;
c=0.5  0.35  0.15;
TARGET=0.15;
Mean=@file(data2.txt);
COV=@file(data3.txt);
ENDDATA
[OBJ] MIN = @sum(STST(i,j): COV(i,j)*x(i)*x(j));
[ONE] @SUM(STOCKS: X+0.01*Y+0.01*Z) = 1;
```

```
[TWO] @SUM(stocks: mean*x) >= TARGET;
@FOR(stocks: [ADD] x = c + y - z);
END
```

在这个LINGO模型中，股票C是原始集合“STOCKS”的一个元素，不会因为与集合的属性C同名而混淆。这是LINGO新版本比LINGO旧版本的一个改进之处。

2.4 利用股票指数简化投资组合模型

例8 继续考虑例5（期望收益率仍定为15%）。在实际的股票市场上，一般存在成千上万的股票，这时计算两两之间的相关性（协方差矩阵）将是一件非常费事甚至不可能的事情。例如，1000只股票就需要计算 $C_{1000}^2 = 499500$ 个协方差。能否通过一定方式避免协方差的计算，对模型进行简化呢？例如，例5中还给出了当时股票指数的信息，但我们到此为止一直没有利用。我们这一节就考虑利用股票指数对前面的模型进行修改和简化。

（1）问题分析

可以认为股票指数反映的是股票市场的大势信息，对具体每只股票的涨跌通常是有显著影响的。我们这里最简单地假设每只股票的收益与股票指数成线性关系，从而可以通过线性回归方法找出这个线性关系。

（2）线性回归

具体地说，用 M 表示股票指数（也是一个随机变量），其均值为 $m_0 = E(M)$，方差为 $s_0^2 = D(M)$。根据上面的线性关系的假定，对某只具体的股票 i，其价值 R_i（随机变量）可以表示成

$$R_i = u_i + b_i M + e_i \tag{26}$$

其中 u_i 和 b_i 需要根据所给数据经过回归计算得到，e_i 是一个随机误差项，其均值为 $E(e_i) = 0$，方差为 $s_i^2 = D(e_i)$。此外，假设随机误差项 e_i 与其它股票 j（$j \neq i$）和股票指数 M 都是独立的，所以 $E(e_i e_j) = E(e_i M) = 0$。

先看看如何根据所给数据经过回归计算得到 u_i 和 b_i。记所给的12年的数据为 $\{M^{(k)}, R_i^{(k)}\}$，（$k = 1,2,\cdots,12$），线性回归实际上是要使误差的平方和最小，即要解如下优化问题：

$$\min \sum_{k=1}^{12} (e_i^{(k)})^2 = \sum_{k=1}^{12} | u_i + b_i M^{(k)} - R_i^{(k)} |^2 \ , \ i = 1,2,3 \qquad (27)$$

对这里给出的三种股票，可以编写如下LINGO程序求出线性回归的系数u_i和b_i（同时也在计算（CALC）段计算M的均值m_0和方差s_0^2，标准差s_0的值）：

```
MODEL:
Title 线性回归模型;
SETS:
   YEAR/1..12/:M;
   STOCKS/A,  B,  C/: u, b, s2, s;
   temp/1..5/;
   tmatrix(YEAR,temp):tm;
   link(YEAR, STOCKS): R, e;
ENDSETS
DATA:
   num=?;
   tm =
    1943         1.300         1.225         1.149         1.258997
    1944         1.103         1.290         1.260         1.197526
    1945         1.216         1.216         1.419         1.364361
    1946         0.954         0.728         0.922         0.919287
    1947         0.929         1.144         1.169         1.057080
    1948         1.056         1.107         0.965         1.055012
    1949         1.038         1.321         1.133         1.187925
    1950         1.089         1.305         1.732         1.317130
    1951         1.090         1.195         1.021         1.240164
    1952         1.083         1.390         1.131         1.183675
    1953         1.035         0.928         1.006         0.990108
   1954         1.176        1.715         1.908         1.526236;
ENDDATA
CALC:
@for(tmatrix(i,j)|j #ge#2 #and# j #le# 4:R(i,j-1)=tm(i,j));
@for(tmatrix(i,j)| j #eq# 5:M(i)=tm(i,j));
mean0=@sum(year: M)/@size(year);
s20=@sum(year: @sqr(M-mean0)) / (@size(year)-1);
s0=@sqrt(s20);
ENDCALC
```

```
[OBJ] MIN = @sum(stocks(i)|i#eq#num: s2(i));
@for(link(k,i)|i#eq#num: [ERROR] e(k,i) = R(k,i)-u(i)-b(i)*M(k));
@for(stocks(i)|i#eq#num:[VAR] s2(i)=(@sum(year(k): @sqr(e(k,i))) /
(@size(year)-2));
[STD] s(i)=@sqrt(s2(i)) );
@for(stocks: @free(u);@free(b) );
@for(link: @free(e) );
END
```

对上面的这个程序，请注意以下几点：

i）在CALC段直接计算了 M 的均值 m_0 和方差 s_0^2（为了使这个估计是无偏估计，分母是11而不是12）以及标准差 s_0。

ii）程序中使用了两个常用的数学函数：平方函数@sqr和平方根函数@sqrt。

iii）除了计算回归系数外，我们同时估计了回归误差的方差 s_i^2 和标准差 s_i。为了使这个估计是无偏估计，计算 s_i^2 时分母是10而不是11或12，这时因为此时估计了两个参数，自由度少了两个。

iv）@free(u)，@free(b)，@free(e)三个语句一定不能少，因为这几个变量不一定是非负的。

v）DATA段定义了一个变量num，并用“num=?”语句表示其具体值需要由使用者在程序运行时输入。变量num的作用是控制当前对哪只股票进行线性回归（num＝1，2，3分别对应于股票 A,B,C）。

vi）其实，这个问题也可以对三只股票的回归不加区分，即放在同一个模型中同时优化（相应地，只需要去掉上面程序中的控制变量num和所有的过滤条件“i#eq#num”），不过这样就会增加变量的个数，我们不建议大家那样做。也就是说，对于能够分解成小规模问题的优化问题，最好一个一个分开做，这样可以减少问题规模，有助于求到比较好的解。

运行上述LINGO程序，得到的计算结果为：股票指数 M 的均值 $m_0=1.191458$，方差为 $s_0^2=0.02873661$，标准差为 $s_0=0.1695188$；对股票 A，回归系数 $u_1=0.5639761$，$b_1=0.4407264$，误差的方差 $s_1^2=0.00574832$，误差的标准差 $s_1=0.07581767$。

同理（运行时输入num=2或3），可以得到：对股票 B，回归系数 $u_2=-0.2635028$，$b_2=1.239799$，误差的方差 $s_2^2=0.01564263$，误差的标准差 $s_2=0.1250705$。对股

票C，回归系数$u_3=-0.5809592$，$b_3=1.523798$，误差的方差$s_3^2=0.03025165$，误差的标准差$s_3=0.17393$。

（3）优化模型

现在，仍用决策变量x_1,x_2和x_3分别表示投资人应当投资股票A,B,C的比例，其中

$$x_1,x_2,x_3\geq 0，\ x_1+x_2+x_3=1 \tag{28}$$

此时，与2.1节的讨论类似，对应的收益应该表示为

$$R=\sum_{i=1}^{3}x_iR_i=\sum_{i=1}^{3}x_i(u_i+b_iM+e_i) \tag{29}$$

收益的期望为

$$ER=\sum_{i=1}^{3}x_iE(u_i+b_iM+e_i)=\sum_{i=1}^{3}x_i(u_i+b_im_0) \tag{30}$$

收益的方差为

$$DR=\sum_{i=1}^{3}x_i^2D(u_i+b_iM+e_i)=\sum_{i=1}^{3}(b_i^2s_0^2+s_i^2)x_i^2 \tag{31}$$

综上所述，建立如下模型

$$\min\sum_{i=1}^{3}(b_i^2s_0^2+s_i^2)x_i^2 \tag{32}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{i=1}^{3}x_i=1， \tag{33}$$

$$\sum_{i=1}^{3}(u_i+b_im_0)x_i\geq 0.15 \tag{34}$$

$$x_i\geq 0，\ i=1,2,3 \tag{35}$$

（4）模型求解

为了数据传递方便，我们把三个回归模型同时计算。LINGO程序如下：

```
MODEL:
Title 线性回归模型;
SETS:
```

```
   YEAR/1..12/:M;
   STOCKS/A,  B,  C/: u, b, s2, s;
   temp/1..5/;
   tmatrix(YEAR,temp):tm;
   link(YEAR, STOCKS): R, e;
ENDSETS
DATA:
tm =
    1943         1.300         1.225         1.149         1.258997
    1944         1.103         1.290         1.260         1.197526
    1945         1.216         1.216         1.419         1.364361
    1946         0.954         0.728         0.922         0.919287
    1947         0.929         1.144         1.169         1.057080
    1948         1.056         1.107         0.965         1.055012
    1949         1.038         1.321         1.133         1.187925
    1950         1.089         1.305         1.732         1.317130
    1951         1.090         1.195         1.021         1.240164
    1952         1.083         1.390         1.131         1.183675
    1953         1.035         0.928         1.006         0.990108
   1954         1.176         1.715         1.908         1.526236;
@text('data4.txt')=s2;
@text('data5.txt')=u;
@text('data6.txt')=b;
ENDDATA
CALC:
@for(tmatrix(i,j)|j #ge#2 #and# j #le# 4:R(i,j-1)=tm(i,j));
@for(tmatrix(i,j)| j #eq# 5:M(i)=tm(i,j));
mean0=@sum(year: M)/@size(year);
s20=@sum(year: @sqr(M-mean0)) / (@size(year)-1);
s0=@sqrt(s20);
ENDCALC
[OBJ] MIN = @sum(stocks(i): s2(i));
@for(link(k,i): [ERROR] e(k,i) = R(k,i)-u(i)-b(i)*M(k));
@for(stocks(i):[VAR] s2(i)=(@sum(year(k): @sqr(e(k,i))) / (@size(year)-2));
[STD] s(i)=@sqrt(s2(i)) );
@for(stocks: @free(u);@free(b) );
@for(link: @free(e) );
END
```

二次规划（32）～（35）的LINGO程序如下：

```
MODEL:
Title 利用股票指数简化投资组合模型;
SETS:
   STOCKS/A,  B,  C/: u, b, s2, x;
ENDSETS
DATA:
mean0=1.191458;
s20 = 0.02873661;
s2  =  @file(data4.txt);
u   =  @file(data5.txt);
b   =  @file(data6.txt);
ENDDATA
[OBJ] MIN = @sum(stocks: (@sqr(b)*s20+s2)*@sqr(x));
@sum(stocks: x)=1;
@sum(stocks: (u+b*mean0)*x)>1.15;
END
```

计算结果为，最后的持股情况是：A大约占初始时刻总资产的54%，B占27%，C占19%。这个结果与例5的结果是不同的。

2.5 其它目标下的投资组合模型

前面介绍的模型中都是在可能获得的收益的数学期望满足一定最低要求的前提下，用可能获得的收益的方差来衡量投资风险，将其作为最小化的目标。这种做法的合理性通常至少需要有两个基本假设：

（1）可能获得的收益的分布是对称的（如正态分布）。因为这时未来收益高于设定的最低要求和低于设定的最低要求的数量和概率是一样的。可惜的是，实际中这个假设往往难以验证。

（2）投资者对风险（或偏好）的效用函数是二次的，否则为什么值选择效益（随机变量）的二阶矩（方差）来衡量风险使之最小化，而不采用其它阶数的矩？

一般来说，投资者实际关心的通常是未来收益低于设定的最低要求的数量（即低多少）和概率，也就是说更关心的是下侧风险（downside risk）。所以，如果分布不是对称的，则采用收益的方差来衡量投资风险就不一定合适。为了克服这个缺陷，可以用收益低于最低要求的数量的均值（一阶矩）作为下侧风险的衡量依据，即作为最小化的目标。此外，也可以采用收益低于最低要求的数量的二阶矩（即收益的半方差，semivariance）作为衡量投资风险的依据。其实，半方差计算与方差计算类似，只是只有当收益低于最低要求的收益率时，才把两者之差的平方记入总风险，而对收益高于最低要求的收益率时的数据忽略不计。这方面的具体模型这里就不再详细介绍了。

下面介绍一个与上面这些优化目标完全不同的投资组合模型，这个模型虽然很简单，但却会产生一些非常有趣的现象。

例9　假设市场上只有两只股票A、B可供某个投资者购买，且该投资者对未来一

年的股票市场进行了仔细分析，认为市场只能出现两种可能的情况（1和2）。此外，该投资者对每种情况出现的概率、每种情况出现时两只股票的增值情况都进行了预测和分析（见表7，可以看出股票 A、B 的均值和方差都是一样的）。该投资者是一位非常保守的投资人，其投资目标是使两种情况下最小的收益最大化（也就是说，不管未来发生哪种情况，他都能至少获得这个收益）。如何建立模型和求解？

表7　两种情况出现的概率及两只股票的增值情况

情形	发生概率	股票 A	股票 B
1	0.8	1.0	1.2
2	0.2	1.5	0.7

（1）优化模型与求解

设年初投资股票 A、B 的比例分别为 x_1, x_2，决策变量 x_1, x_2 显然应该满足

$$x_1, x_2 \geq 0，\ x_1 + x_2 = 1 \tag{36}$$

此外，使最小收益最大的“保守”目标实际上就是希望：

$$\max\{\min(1.0x_1 + 1.2x_2, 1.5x_1 + 0.7x_2)\} \tag{37}$$

引入一个辅助变量 $y = \min(1.0x_1 + 1.2x_2, 1.5x_1 + 0.7x_2)$，这个模型就可以线性化为

$$\max\ y$$

$$\text{s.t.}\ \ x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + 1.2x_2 \geq y$$

$$1.5x_1 + 0.7x_2 \geq y$$

编写LINGO程序如下：

```
model:
sets:
COL/1..2/:x;
ROW/1..2/;
link(ROW,COL):a;
endsets
data:
a=1 1.2 1.5 0.7;
enddata
max=y;
```

```
@sum(COL:x)=1;
@for(ROW(i):@sum(COL(j):a(i,j)*x(j))>y);
End
```

可见，此时应该投资 A、B 股票各50%，至少可以增值10%。

（2）讨论

现在，假设有一位绝对可靠的朋友告诉该投资者一条重要信息：如果情形1发生，股票 B 的增值将达到30%而不是表7中给出的20%。那么，一般人的想法应该是增加对股票 B 的持有份额。果真如此吗？这个投资人如果将上面模型中的1.2改为1.3计算，将得到如下结果：$x_1=0.5454545$，$x_2=0.4545455$，$y=1.136364$。

也就是说，应该减少对股票 B 的持有份额，增加对股票 A 的持有份额。这真是叫人大吃一惊！这相当于说：有人告诉你有某只股票涨幅要增加了，你赶紧说：那我马上把这只股票再卖点吧。之所以出现如此奇怪的现象，就是由于这个例子中的目标的特殊性引起的：我们可以看到新的解可以保证增值达到13.6364%，确实比原来的10%增加了。

最后需要指出：我们上面所有关于投资组合的这些讨论基本上只是纯技术面的讨论，只利用历史数据来说话，认为历史数据中包含了引起股票涨跌的所有因素。在实际股票市场上，影响股票涨跌的因素可能有很多（如政策变化、银行加息、能源短缺、技术进步等），未来不长时间内可能发生的一些重大事件很可能以前没有发生过，因此也不可能体现在历史数据中。所以，进行投资选择前，还应该进行基本面分析，需要对未来的一些重要影响因素、重大事件发生的可能性及其对每种股票涨跌的影响进行预测和分析，最后综合利用历史数据和这些预测数据，决定投资组合。如何将这些预测数据与历史数据一起使用，建立相应的投资组合模型，这里就不再更多地介绍了。这方面的模型有很多，有兴趣的可以继续查阅相关的专业书籍和研究文献。

§3 市场营销问题

3.1 新产品的市场预测

例10 某公司开发了一种新产品，打算与目前市场上已有的三种同类产品竞争。为了了解这种新产品在市场上的竞争力，在大规模投放市场前，公司营销部门进行了广泛的市场调查，得到了表8。四种产品分别记为 A、B、C、D，其中 A 为新产品，表中的数据的含义是：最近购买某种产品（用行表示）的顾客下次购买四种产品的机会（概率）。例如：表中第一行数据表示当前购买产品 A 的顾客，下次购买产品 A、B、C、D 的概率分别为75%，10%，5%，10%。请你根据这个调查结果，分析新产品 A 未来的市场份额大概是多少？

表8 市场调查数据

产品	A	B	C	D
A	0.75	0.1	0.05	0.1
B	0.4	0.2	0.1	0.3
C	0.1	0.2	0.4	0.3

D	0.2	0.2	0.3	0.3

（1）问题分析

新产品进入市场后，初期的市场份额将会不断发生变化，因此，本例中的问题是一个离散动态随机过程，也就是马氏链（Markov chain）。很显然，上面给出的表实际上是转移概率矩阵（注意每行元素的和肯定为1）。要分析新产品 A 未来的市场份额，就是要计算稳定状态下每种产品的概率。

（2）模型的建立

记 N 为产品种数。产品编号为 i（$i=1,2,\cdots,N$），转移概率矩阵的元素记为 T_{ij}，稳定状态下产品 i 的市场份额记为 p_i。

因为是稳定状态，所以应该有

$$p_i=\sum_{j=1}^{n}p_jT_{ji}\ ,\ \ i=1,2,\cdots,N \qquad (38)$$

不过，这 N 个方程实际上并不独立，至少有一个是冗余的。好在我们还有另一个约束，即 N 种产品的市场份额之和等于1

$$\sum_{j=1}^{N}p_j=1 \qquad (39)$$

可见，这个问题的模型实际上是一个非常简单的方程组（当然，还应该增加概率 p_i 非负的约束）。如果把这些看成约束条件，那就是一个特殊的优化模型（没有目标函数）。

（3）模型的求解

LINGO程序如下：

```
MODEL:
TITLE 新产品的市场预测;
SETS:
  PROD/ A B C D/: P;
  LINK(PROD, PROD): T;
ENDSETS
DATA: ! 转移概率矩阵;
  T = .75  .1  .05  .1
      .4   .2  .1   .3
      .1   .2  .4   .3
      .2   .2  .3   .3;
ENDDATA
@FOR(PROD(I): P(I)=@SUM(LINK(J,I): P(J)* T(J,I)) );
```

```
@SUM(PROD: P) = 1;
@FOR(PROD(I): @WARN( '输入矩阵的每行之和必须是1', @ABS( 1 -
@SUM(LINK(I,J): T(I,J)))#GT# .000001));
END
```

可以指出的是，上面LINGO模型中最后的语句@WARN只是为了验证输入矩阵的每行之和必须是1，而且我们看到为了比较两个实数（如X和1）是否相等，一般不能直接用“X#NE#1”，因为受计算机字长（精度）的限制，实数在计算机内存存储是有误差的。所以，通常的方法是比较这两个实数之差的绝对值是否足够小。

求解结果为 A,B,C,D 的市场份额分别是47.5%，15.25%，16.75%，20.5%。

3.2 产品属性的效用函数

一般来讲，每种产品（如某种品牌的小汽车）都有不同方面的属性，例如价格、安全性、外观、保质期等。在设计和销售新产品之前，了解顾客对每种属性的各个选项的偏好程度非常重要。偏好程度可以用效用函数来表示，即某种属性的不同选项对顾客的价值（效用）。不幸的是，让顾客直接精确地给出每个属性的效用函数一般是困难的，例如对于价格，一般的顾客当然会说越便宜越好，但很难确定10万元的价格和15万元的价格的效用具体是多少。但是，对于具体的产品，产品的各个属性的具体选项配置都已经确定下来了，所以如果我们把一些具体的产品让顾客进行评估打分，顾客通常能比较容易地给出具体产品的效用。那么，从这些具体产品的效用信息中，我们能否反过来估计每个属性中各个选项的效用呢？这种方法通常称为联合分析（conjoint analysis）。下面通过一个例子来说明。

例11 对某种牌号的小汽车，假设只考虑两种属性：价格和安全气囊。价格分为12.9万元、9.9万元、7.9万元；安全气囊的配置为两个、一个、没有。经过市场调查，顾客对该产品的不同配置的偏好程度（效用）如表9所示（表中的值（权重）越大表示顾客越喜欢）。那么，价格和安全气囊的效用函数如何？

表9 顾客对产品的不同配置的偏好程度

价格（万元）	安全气囊		
	2	1	0
12.9	7	3	1
9.9	8	4	2
7.9	9	6	5

（1）模型建立

记价格选项分别为H（高），M（中），L（低），对应的效用为 p_j（j=H，M，L）；安全气囊选项分别为0，1，2，对应的效用为 q_i（$i=0,1,2$）。我们的目的实际上就是

要求出 p_j 和 q_i。

假设价格和安全气囊的效用是线性可加的，即当价格选项为 j、安全气囊选项为 i 时，具体产品的效用 $c(i,j)$ 应该可以用价格的和安全气囊的效用之和来估计

$$c(i,j)=p_j+q_i \tag{40}$$

那么，如何比较不同的估计的好坏呢？一种简单的想法是针对6个待定参数（p_j 和 q_i），表中给出了9组数据，因此可以用最小二乘法确定 p_j 和 q_i。也就是说，此时的目标为

$$\min \sum_i \sum_j [c(i,j)-c_0(i,j)]^2 \tag{41}$$

其中，$c_0(i,j)$ 是表中的数据（安全气囊选项为 i、价格选项为 j 时具体产品的效用）。

因为做效用分析的主要目的是将来用于把不同配置的具体产品的优劣次序排出来，所以另一种方法是希望 $c(i,j)$ 和 $c_0(i,j)$ 保持同样的顺序：即对任意的 (i,j) 和 (k,l)，当 $c_0(i,j)+1\le c_0(k,l)$ 时，也尽量有 $c(i,j)+1\le c(k,l)$（这里“+1”表示 $c(i,j)$ 严格小于 $c(k,l)$，且至少相差1）。于是，可以考虑如下目标函数

$$\min \sum_{i,j} \sum_{k,l} \max\{1+p_j+q_i-p_l-q_k,0\} \tag{42}$$

式中的求和只是对满足 $c_0(i,j)+1\le c_0(k,l)$ 的 (i,j) 和 (k,l) 求和。在LINGO中由于所有的变量默认的都为非负变量，程序中式（42）可以改写为

$$\min \sum_{i,j} \sum_{k,l} (1+p_j+q_i-p_l-q_k)$$

（2）模型求解

LINGO程序如下：

```
MODEL:
TITLE 产品属性的效用函数;
SETS:
   PRICE/H,M,L/:P;
   SAFETY/2,1,0/:Q;
   M(safety,PRICE):CI;
   MM(M,M)|CI(&1,&2)+1 #LE# CI(&3,&4):ERROR;
```

```
ENDSETS
DATA:
   CI=7  8  9  3  4  6  1  2  5;
ENDDATA
@FOR(MM(i,j,k,l):ERROR(i,j,k,l)>1+P(j)+Q(i)-(P(l)+Q(k)));
[obj] MIN = @SUM(mm: ERROR);
END
```

求解这个模型，得到

$$p_H=0,\ p_M=1,\ p_L=4,\ q_0=0,\ q_1=2,\ q_2=7$$

此时模型的最优值（误差和）为0，所以说明在这个效用函数下，虽然得到的产品权重（效用）与问题中给出的数据不完全相同，但产品的相对偏好顺序是完全一致的。

（3）模型的讨论

下面我们看看用最小二乘法确定 p_j 和 q_i 的结果是否与此相同。此时的模型实际上就是一个简单的二次规划模型。LINGO程序为

```
MODEL:
TITLE 最小二乘法计算产品属性的效用函数;
SETS:
   PRICE/H,M,L/:P;
   SAFETY/2,1,0/:Q;
   M(safety,PRICE):CI,ERROR,sort;
ENDSETS
DATA:
   CI =7  8  9  3  4  6  1  2  5;
ENDDATA
@FOR(M(i,j):sort(i,j)=p(j)+q(i);ERROR(i,j)= sort(i,j)-CI(i,j) );
MIN=@SUM(M:@sqr(ERROR));
@FOR(M(i,j): @FREE(ERROR) );
!@FOR(price:@gin(P));
!@FOR(safety:@gin(Q));
END
```

上面模型中的sort变量表示的就是按照这里新计算的效用函数得到的不同配置下的产品的效用。

通过运行LINGO程序，可以看到，此时的效用函数的结果与前面得到的结果不同，但仔细察看SORT的结果可以发现，不同配置产品之间的相对顺序仍然是保持的。

不过，最小二乘法得到的产品的效用是一些带有小数的数，实际中使用不太方便。如果希望得到整数解，只需要在模型中“END”语句前增加下面两行语句：

```
   @FOR(price:@gin(P));
```

```
@FOR(safety:@gin(Q));
```

求解结果中，SORT（1，M）＝SORT（0，L）＝4，这两个配置没能分辨出来。

综合这些讨论，结论还是我们在基本模型中给出的结果比较令人满意。请读者思考一下：基本模型中并没有要求决策变量取整数，为什么正好是整数？这是偶然的，还是必然的？

3.3 机票的销售策略

例12 某航空公司每天有三个航班服务于 A,B,C,H 四个城市，其中城市 H 是可供转机使用的。三个航班的出发地－目的地分别为 AH,HB,HC，可搭乘旅客的最大数量分别为120人，100人，110人，机票的价格分头等舱和经济舱两类。经过市场调查，公司销售部得到了每天旅客的相关信息，见表10。该公司应该在每条航线上分别分配多少头等舱和经济舱的机票？

表10 市场调查数据

出发地－目的地	头等舱 需求（人）	头等舱 价格（元）	经济舱 需求（人）	经济舱 价格（元）
AH	33	190	56	90
AB(经*H*转机)	24	244	43	193
AC(经*H*转机)	12	261	67	199
HB	44	140	69	80
HC	16	186	17	103

（1）问题分析

公司的目标应该是使销售收入最大化，由于头等舱的机票价格大于对应的经济舱的机票价格，很容易让人想到先满足所有头等舱的顾客需求：这样 AH 上的头等舱数量=33+24+12=69，HB 上的头等舱数量=24+44=68，HC 上的头等舱数量=12+16=28，等等，但这种贪婪算法是否一定得到最好的销售计划？

（2）模型建立

考虑5个起终点航线 AH,AB,AC,HB,HC，依次编号为 i（$i=1,2,\cdots,5$），相应的头等舱需求记为 a_i，价格记为 p_i；相应的经济舱需求记为 b_i，价格记为 q_i。此外，三个航班 AH,HB,HC 的顾客容量分别是 $c_1=120$，$c_2=100$，$c_3=110$。这就是例中给出的全部数据。

设航线i（$i=1,2,\cdots,5$）上销售的头等舱机票数为x_i，销售的经济舱机票数为y_i，这就是决策变量。

显然，目标函数应该是

$$\sum_{i=1}^{5}(p_i x_i + q_i y_i) \tag{43}$$

约束条件有以下两类：

i）三个航班上的容量限制

例如，航班AH上的乘客应当是购买AH, AB, AC机票的所有旅客，所以

$$\sum_{i=1}^{3}(x_i + y_i) \le c_1 \tag{44}$$

同理，有

$$x_2 + y_2 + x_4 + y_4 \le c_2 \tag{45}$$

$$x_3 + y_3 + x_5 + y_5 \le c_3 \tag{46}$$

ii）每条航线上的需求限制

$$0 \le x_i \le a_i,\ 0 \le y_i \le b_i,\ i = 1,2,\cdots,5 \tag{47}$$

（3）模型求解

```
MODEL:
TITLE 机票销售计划;
SETS:
   route /AH,AB,AC,HB,HC/:a,b,p,q,x,y;
ENDSETS
DATA:
a p b q=
```

33	190	56	90
24	244	43	193
12	261	67	199
44	140	69	80
16	186	17	103

```
;
c1 c2 c3 = 120 100 110;
ENDDATA
[obj] Max = @SUM(route: p*x+q*y );
```

```
[AH] @SUM(route(i)|i#ne#4#and#i#ne#5:x(i)+y(i)) < c1;
[HB] @SUM(route(i)|i#eq#2#or#i#eq#4:x(i)+y(i))  < c2;
[HC] @SUM(route(i)|i#eq#3#or#i#eq#5:x(i)+y(i))  < c3;
@FOR(route: @bnd(0,x,a);@bnd(0,y,b) );
END
```

计算结果为，航线 AH, AB, AC, HB, HC 上分别销售33，10，12，44，16张头等舱机票，分别销售0，0，65，46，17张经济舱机票，总销售收入为39344元。从三个约束的松弛/剩余（slack or surplus）均为0可知，机上已经全部满员。

（4）结果讨论

按道理，机票张数还应该有整数约束。这里直接按连续线性规划解，得到的解已经都是整数，所以也就没有必要再加上整数约束了。

最后我们指出：最优解中 AB 线路上头等舱的需求（24人）并没有全部得到满足，所以本节开始时介绍的贪婪算法的思想是不能保证求到最优解的。事实上，读者不难求出贪婪算法得到的解对应的总销售额是38854元，小于这里的最优值39344元。

习题二十六

1．某银行经理计划用一笔资金进行有价证券的投资，可供购进的证券及其信用等级、到期年限、收益如表11所示。按照规定，市政证券的收益可以免税，其它证券的收益需按50%的税率纳税。此外还有以下限制：

i）政府及代办机构的证券总共至少要购进400万元；

ii）所购证券的平均信用等级不超过1.4（信用等级数字越小，信用程度越高）；

iii）所购证券的平均到期年限不超过5年。

表11　证券相关的信息

证券名称	证券种类	信用等级	到期年限	到期税前收益（%）
A	市政	2	9	4.3
B	代办机构	2	15	5.4
C	政府	1	4	5.0
D	政府	1	3	4.4
E	市政	5	2	4.5

（1）若该经理有1000万元资金，应如何投资？

（2）如果能够以2.75%的利率借到不超过100万元资金，该经理应如何操作？

（3）在1000万元资金情况下，若证券 A 的税前收益增加为4.5%，投资应否改变？若证券 C 的税前收益减少为4.8%，投资应否改变？

2．假设某公司在银行有一个现金帐户和一个长期投资帐户，现金帐户利息很低，而长期投资帐户利息较高。所有业务往来（收入和支出）只能通过现金帐户进行，如果现金帐户中钱很多，就可能需要将一部分钱转入长期投资帐户；反之，需要将一部分钱

从长期投资帐户转入现金帐户。为简单起见，假设以万元为单位，现金帐户的钱数只能是－20，－10，0，…，40，50（万元）之一，分别记为状态1，2，…，7，8，它们每个月分别导致的费用如表12所示。此外，根据统计，如果当月现金帐户的状态位于i（$2 \le i \le 7$），下个月现金帐户的状态只可能位于$i-1, i, i+1$三者之一，并且概率分别为0.4，0.1，0.5；如果当月现金帐户的状态位于1，则下个月现金帐户的状态只可能位于1和2，并且概率分别为0.5，0.5；如果当月现金帐户的状态位于8，则下个月现金帐户的状态只可能位于7和8，并且概率分别为0.4，0.6。

表12　现金帐户的钱数对应的成本

现金数量(万元)	-20	-10	0	10	20	30	40	50
状态	1	2	3	4	5	6	7	8
费用(万元)	1.4	0.7	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1

每月初你可以改变当前状态（即从长期投资帐户转入现金帐户，或从现金帐户转入长期投资帐户），但假设每次状态的改变银行收取0.3万元的固定费用，此外还要收取转帐金额5%的转帐手续费。请你建立优化模型，确定如果当月现金帐户的状态位于i，是否应该改变当前状态，如何改变状态？

第二十七章　生产与服务运作管理中的优化问题

本章主要介绍生产和服务运作管理方面的一些优化问题。实际上，生产和服务运作管理的内容也是非常丰富的，几乎包含了企业管理的所有方面，本章中只是介绍几个实例而已。

§1　有瓶颈设备的多级生产计划问题

1.1　问题实例

在制造企业的中期或短期生产计划管理中，常常要考虑如下的生产计划优化问题：在给定的外部需求和生产能力等限制条件下，按照一定的生产目标（通常是生产总费用最小）编制未来若干个生产周期的最优生产计划，这种问题在文献上一般称为批量问题（lotsizing problems）。所谓某一产品的生产批量（lotsize），就是每通过一次生产准备生产该产品时的生产数量，它同时决定了库存水平。由于实际生产环境的复杂性，如需求的动态性，生产费用的非线性，生产工艺过程和产品网络结构的复杂性，生产能力的限制，以及车间层生产排序的复杂性等，批量问题是一个非常复杂、非常困难的问题。

我们通过下面的具体实例来说明这种多级生产计划问题的优化模型。这里“多级”的意思是需要考虑产品是通过多个生产阶段（工艺过程）生产出来的。

例 1　某工厂的主要任务是通过组装生产产品 A，用于满足外部市场需求。产品 A 的构成与组装过程见图 1，即 D,E,F,G 是从外部采购的零件，先将零件 D,E 组装成部件 B，零件 F,G 组装成部件 C，然后将部件 B,C 组装成产品 A 出售。图中弧上的数字表示的是组装时部件（或产品）中包含的零件（或部件）的数量（可以称为消耗系数），例如 DB 弧上数字“9”表示组装 1 个部件 B 需要用到 9 个零件 D；BA 弧上的数字“5”表示组装 1 件产品 A 需要用到 5 个部件 B；依此类推。

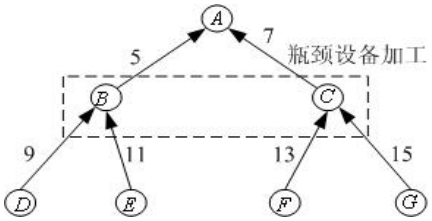


图 1　产品构成与组装过程图

假设该工厂每次生产计划的计划期为 6 周（即每次制定未来 6 周的生产计划），只有最终产品 A 有外部需求，目前收到的订单的需求件数按周的分布如表 1 第 2 行所示。部件 B,C 是在该工厂最关键的设备（可以称为瓶颈设备）上组装出来的，瓶颈设备的

生产能力非常紧张，具体可供能力如表 1 第 3 行所示（第 2 周设备检修，不能使用）。B,C 的能力消耗系数分别为 5 和 8，即生产 1 件 B 需要占用 5 个单位的能力，生产 1 件 C 需要占用 8 个单位的能力。

表 1　生产计划的原始数据

周次	1	2	3	4	5	6	
A 的外部需求	40	0	100	0	90	10	
瓶颈能力	10000	0	5000	5000	1000	1000	
零件编号	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
生产准备费用	400	500	1000	300	200	400	100
单件库存费用	12	0.6	1.0	0.04	0.03	0.04	0.04

对于每种零部件或产品，如果工厂在某一周订购或者生产该零部件或产品，工厂需要一个与订购或生产数量无关的固定成本（称为生产准备费用）；如果某一周结束时该零部件或产品有库存存在，则工厂必须付出一定的库存费用（与库存数量成正比）。这些数据在表 1 第 5 、6 行给出。

按照工厂的信誉要求，目前接收的所有订单到期必须全部交货，不能有缺货；此外，不妨简单地假设目前该企业没有任何零部件或产品库存，也不希望第 6 周结束后留下任何零部件或产品库存。最后，假设不考虑生产提前期，即假设当周采购的零件马上就可用于组装，组装出来的部件也可以马上用于当周组装成品 A。

在上述假设和所给数据下，如何制定未来 6 周的生产计划。

1.2　建立模型

（1）问题分析

这个实例考虑的是在有限的计划期内，给定产品结构、生产能力和相关费用及零部件或成品（以下统称为生产项目）在离散的时间段上（这里是周，也可以是天、月等）的外部需求之后，确定每一生产项目在每一时间段上的生产量（即批量），使总费用最小。由于每一生产项目在每一时间段上生产时必须经过生产准备（setup），所以通常的讨论中总费用至少应考虑生产准备费用和库存费用。其实，细心的读者一定会问：是否需要考虑生产的直接成本（如原材料成本、人力成本、电力成本等）？这是因为本例中假设了不能有缺货发生，且计划初期和末期的库存都是 0，因此在这个 6 周的计划期内 A 的总产量一定正好等于 A 的总需求，所以可以认为相应的直接生产成本是一个常数，因此就不予考虑了。只要理解了我们下面建立优化模型的过程和思想，对于放松这些假定条件以后的情形，也是很容易类似地建立优化模型的。

（2）符号说明

为了建立这类问题的一般模型，我们定义如下数学符号：

N：生产项目总数（本例中 $N=7$）；

T：计划期长度（本例中 $T=6$）；

K：瓶颈资源种类数（本例中 $K=1$）；

M：一个充分大的正数，在模型中起到使模型线性化的作用；

$d_{i,t}$：项目i在t时段的外部需求（本例中只有产品A有外部需求）；

$X_{i,t}$：项目i在t时段的生产批量；

$I_{i,t}$：项目i在t时段的库存量；

$Y_{i,t}$：项目i在t时段是否生产的标志（0：不生产，1：生产）；

$S(i)$：产品结构中项目i的直接后继项目集合；

$r_{i,j}$：产品结构中项目j对项目i的消耗系数；

$s_{i,t}$：项目i在t时段生产时的生产准备费用；

$h_{i,t}$：项目i在t时段的单件库存费用；

$C_{k,t}$：资源k在t时段的能力上限；

$a_{k,i,t}$：项目i在t时段生产时，生产单个项目占用资源k的能力；

在上述数学符号中，只有$X_{i,t}$，$I_{i,t}$，$Y_{i,t}$为决策变量，其余均为已知的计划参数。其实，真正的生产计划只是要求确定$X_{i,t}$就可以了，因为知道$X_{i,t}$以后$I_{i,t}$，$Y_{i,t}$也就自然确定了。另外，在我们的具体例子中参数$s_{i,t}$，$h_{i,t}$，$a_{k,i,t}$其实只与项目i有关，而不随时段t变化，我们这里加上下标t只是为了使模型能够更一般化。

（3）目标函数

这个问题的目标是使生产准备费用和库存费用的总和最小。因此，目标函数应该是每个项目在每个阶段上的生产准备费用和库存费用的总和，即

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(s_{i,t}Y_{i,t}+h_{i,t}I_{i,t}) \qquad (1)$$

（4）约束条件

这个问题中的约束有如下几类：每个项目的物流应该守恒、资源能力限制应该满足、每时段生产某项目前必须经过生产准备和非负约束（对$Y_{i,t}$是$0-1$约束）。

所谓物流守恒，是指对每个时段、每个项目（图中一个节点）而言，该项目在上

一个时段的库存量加上当前时段的生产量，减去该项目当前时段用于满足外部需求的量和用于组装其它项目（直接后继项目）的量，应当等于当前时段的库存量。具体可以写成如下表达式（假设$I_{i,0}=0$）：

$$I_{i,t-1}+X_{i,t}-I_{i,t}=d_{i,t}+\sum_{j\in S(i)}r_{ij}X_{j,t}$$

$$i=1,2,\cdots,N,\ t=1,2,\cdots,T \tag{2}$$

资源能力限制比较容易理解，即

$$\sum_{i=1}^{N}a_{k,i,t}X_{i,t}\le C_{k,t},\ k=1,2,\cdots,K,\ t=1,2,\cdots,T \tag{3}$$

每时段生产某项目前必须经过生产准备，也就是说当$X_{i,t}=0$时$Y_{i,t}=0$；$X_{i,t}>0$时$Y_{i,t}=1$。这本来是一个非线性约束，但是通过引入参数M（很大的正数，表示每个项目每个时段的最大产量）可以化成线性约束，即

$$0\le X_{i,t}\le MY_{i,t},\ Y_{i,t}\in\{0,1\},\ i=1,2,\cdots,N,\ t=1,2,\cdots,T \tag{4}$$

另外有

$$I_{i,t}\ge 0,\ i=1,2,\cdots,N,\ t=1,2,\cdots,T, \tag{5}$$

总结上面的讨论，这个问题的优化模型就是在约束（2）~（4）下使目标函数（1）达到最小。这可以认为是一个混合整数规划模型（因为产量一般较大，可以把$X_{i,t}$和$I_{i,t}$看成连续变量（实数）求解，而只有$Y_{i,t}$为$0-1$变量）。

1.3　求解模型

本例中生产项目总数$N=7$（分别用1~7表示项目A,B,C,D,E,F,G），计划期长度$T=6$（周），瓶颈资源种类数$K=1$。只有A有外部需求，所以$d_{i,t}$中只有$d_{1,t}$可以取非零需求，即表1中的第2行的数据，其它$d_{i,t}$全部为零。参数$s_{i,t}$，$h_{i,t}$只与项目i有关，而不随时段t变化，所以可以略去下标t，其数值就是表1中的最后两行数据。由于只有一种资源，参数$C_{k,t}$可以略去下标k，其数值就是表1中的第3行的数据；而$a_{k,i,t}$只与项目i有关，而不随时段t变化，所以可以同时略去下标k和t，即$a_2=5$，

$a_3=8$（其它a_i为 0）。从图 1 中容易得到项目i的直接后继项目集合$S(i)$和消耗系数$r_{i,j}$。

对本例，A的外部总需求为 240，所以任何项目的产量不会超过$240\times 7\times 15=25000$（从图 1 可以知道，这里$7\times 15$已经是每件产品$A$对任意一个项目的最大的消耗系数了），所以取$M=25000$就已经足够了。

```
MODEL:
TITLE 瓶颈设备的多级生产计划;
SETS:
! PART=项目集合,Setup=生产准备费，Hold=单件库存成本，
  A=对瓶颈资源的消耗系数;
PART/A B C D E F G/:Setup,Hold,A;
! TIME=计划期集合，Capacity=瓶颈设备的能力;
TIME/1..6/:Capacity;
! USES=项目结构关系，Req=项目之间的消耗系数;
USES(PART,PART):Req;
! PXT=项目与时间的派生集合，Demand=外部需求,
  X=产量（批量）, Y=0/1变量，INV=库存;
PXT(PART,TIME):Demand,X,Y,Inv;
ENDSETS
! 目标函数;
[OBJ]Min=@sum(PXT(i,t):setup(i)*Y(i,t)+hold(i)*Inv(i,t));
! 物流平衡方程;
@FOR(PXT(i,t)|t #NE#
1:[Bal]Inv(i,t-1)+X(i,t)-Inv(i,t)=Demand(i,t)+@SUM(USES(i,j):Req(
i,j)*X(j,t)));
@FOR(PXT(i,t)|t #eq#
1:[Ba0]X(i,t)-Inv(i,t)=Demand(i,t)+@SUM(USES(i,j):Req(i,j)*X(j,t)
));
! 能力约束;
@FOR(TIME(t):[Cap]@SUM(PART(i):A(i)*X(i,t))<Capacity(t));
! 其他约束;
M = 25000;
@FOR(PXT(i,t):X(i,t)<=M*Y(i,t));
@FOR(PXT:@BIN(Y));
DATA:
Demand=0;Req =0;
Capacity=10000 0 5000 5000 1000 1000;
```

```
Setup=400 500 1000 300 200 400 100;
Hold=12 0.6 1.0 0.04 0.03 0.04 0.04;
A=0 5 8 0 0 0 0;
ENDDATA
CALC:
demand(1,1)=40;demand(1,3)=100;
demand(1,5)=90;demand(1,6)=10;
req(2,1)=5;req(3,1)=7;req(4,2)=9;
req(5,2)=11;req(6,3)=13;req(7,3)=15;
ENDCALC
END
```

计算结果见表 2（只列出了生产产量 $X_{i,t}$，空格表示不生产，即产量为 0）。

表 2　生产计划的最后结果

周次	1	2	3	4	5	6
A 的产量	40		100		100	
B 的产量	200		1000			
C 的产量	1055			625		
D 的产量	1800		9000			
E 的产量	2200		11000			
F 的产量	13715			8125		
G 的产量	15825			9375		

§2　下料问题

生产中常会遇到通过切割、剪裁、冲压等手段，将原材料加工成所需大小这种工艺过程，称为原料下料（cutting stock）问题。按照进一步的工艺要求，确定下料方案，使用料最省或利润最大，是典型的优化问题。本节通过两个实例讨论用数学规划模型解决这类问题的方法。

2.1　钢管下料问题

例 2　某钢管零售商从钢管厂进货，将钢管按照顾客的要求切割后售出。从钢管厂进货时得到的原料钢管都是 19m 长。

（1）现有一客户需要 50 根 4m 长，20 根 6m 长和 15 根 8m 长的钢管。应如何下料最节省？

（2）零售商如果采用的不同切割模式太多，将会导致生产过程的复杂化，从而增加生产和管理成本，所以该零售商规定采用的不同切割模式不能超过 3 种。此外，该客户除需要（1）中的三种钢管外，还需要 10 根 5m 长的钢管。应如何下料最节省？

2.1.1　问题（1）的求解

（1）问题分析

首先，应当确定哪些切割模式是可行的。所谓一个切割模式，是指按照客户需要

在原料钢管上安排切割的一种组合。例如，我们可以将 19m 长的钢管切割成 3 根 4m 长的钢管，余料为 7m；或者将 19m 长的钢管切割成 4m，6m 和 8m 长的钢管各 1 根，余料为 1m。显然，可行的切割模式是很多的。

其次，应当确定哪些切割模式是合理的。通常假设一个合理的切割模式的余料不应该大于或等于客户需要的钢管的最小尺寸。例如，将 19m 长的钢管切割成 3 根 4m 的钢管是可行的，但余料为 7m，可以进一步将 7m 的余料切割成 4m 钢管（余料为 3m），或者将 7m 的余料切割成 6m 钢管（余料为 1m）。在这种合理性假设下，切割模式一共有 7 种，如表 3 所示。

表 3　钢管下料的合理切割模式

	4m 钢管根数	6m 钢管根数	8m 钢管根数	余料（m）
模式 1	4	0	0	3
模式 2	3	1	0	1
模式 3	2	0	1	3
模式 4	1	2	0	3
模式 5	1	1	1	1
模式 6	0	3	0	1
模式 7	0	0	2	3

问题化为在满足客户需要的条件下，按照哪些种合理的模式，切割多少根原料钢管，最为节省。而所谓节省，可以有两种标准，一是切割后剩余的总余料量最小，二是切割原料钢管的总根数最少。下面将对这两个目标分别讨论。

（2）模型建立

决策变量：用 x_i 表示按照第 i 种模式（$i=1,2,\cdots,7$）切割的原料钢管的根数，显然它们应当是非负整数。

决策目标：以切割后剩余的总余料量最小为目标，则由表 3 可得

$$\min z_1 = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 + 3x_7 \tag{6}$$

以切割原料钢管的总根数最少为目标，则有

$$\min z_2 = \sum_{i=1}^{7} x_i \tag{7}$$

下面分别在这两种目标下求解。

约束条件：为满足客户的需求，按照表 3 应用

$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \geq 50 \tag{8}$$

$$x_2 + x_4 + x_5 + 3x_6 \geq 20 \tag{9}$$

$$x_3 + x_5 + 2x_7 \geq 15 \qquad (10)$$

（3）模型求解

i）将式（6）、（8）～（9）构成的整数线性规划模型（加上整数约束）输入 LINGO

```
model:
TITLE 钢管下料－最小化余量;
sets:
col/1..7/:c,x;
row/1..3/:b;
link(row,col):a;
endsets
data:
c=3 1 3 3 1 1 3;
b=50 20 15;
a=4 3 2 1 1 0 0
  0 1 0 2 1 3 0
  0 0 1 0 1 0 2;
enddata
min=@sum(col:c*x);
@for(row(i):@sum(col(j):a(i,j)*x(j))>=b(i));
@for(col:@gin(x));
end
```

求得按照模式 2 切割 12 根原料钢管，按照模式 5 切割 15 根原料钢管，共 27 根，总余料量为 27m。但 4m 长的钢管比要求多切割了 1 根，6m 长的钢管比要求多切割了 7 根。显然，在总余料量最小的目标下，最优解将是使用余料尽可能小的切割方式（模式 2 和模式 5 的余料为 1m），这会导致切割原料钢管的总根数较多。

ii）将式（7）～（10）构成的整数线性规划模型输入 LINGO

```
model:
TITLE 钢管下料－最小钢管数;
sets:
col/1..7/:c0,c,x;
row/1..3/:b;
link(row,col):a;
endsets
data:
c0=3 1 3 3 1 1 3;
c=1 1 1 1 1 1 1;
b=50 20 15;
a=4 3 2 1 1 0 0
```

```
  0 1 0 2 1 3 0
  0 0 1 0 1 0 2;
enddata
min=@sum(col:c*x);
@for(row(i):[con1]@sum(col(j):a(i,j)*x(j))>=b(i));
@for(col:@gin(x));
[remainder]y=@sum(col:c0*x);
end
```

求得按照模式 2 切割 15 根原料钢管，按模式 5 切割 5 根，按模式 7 切割 5 根，共 25 根，可算出总余料量为 35m。但各长度的钢管数恰好全部满足要求，没有多切割。与上面得到的结果比较，总余料量增加了 8m，但是所用的原料钢管的总根数减少了 2 根。在余料没有什么用途的情况下，通常选择总根数最少为目标。

2.1.2　问题（2）的求解

（1）问题分析

按照问题（1）的思路，可以通过枚举法首先确定哪些切割模式是可行的。但由于需要的钢管规格增加到 4 种，所以枚举法的工作量较大。下面介绍的整数非线性规划模型，可以同时确定切割模式和切割计划，是带有普遍性的方法。

同问题（1）类似，一个合理的切割模式的余料不应该大于或等于客户需要的钢管的最小尺寸（本题中为 4m），切割计划中只使用合理的切割模式，而由于本题中参数都是整数，所以合理的切割模式的余量不能大于 3m。此外，这里我们仅选择总根数最少为目标进行求解。

（2）模型建立

决策变量：由于不同切割模式不能超过 3 种，可以用 x_j 表示按照第 j 种模式（$j=1,2,3$）切割的原料钢管的根数，显然它们应当是非负整数。设所使用的第 j 种切割模式下每根原料钢管生产 4m 长，5m 长，6m 长和 8m 长的钢管数量分别为 $r_{1j},r_{2j},r_{3j},r_{4j}$（非负整数）。记客户需求的 4 种钢管的长度为 l_i，数量为 b_i（$i=1,2,3,4$）。

决策目标：以切割原料钢管的总根数最少为目标，即目标为

$$\min \sum_{j=1}^{3} x_j \tag{11}$$

约束条件：为满足客户的需求，应有

$$\sum_{j=1}^{3} r_{ij} x_j \geq b_i,\ i=1,2,3,4 \tag{12}$$

每一种切割模式必须可行、合理，所以每根原料钢管的成品量不能超过 19m，也不能少于 16m（余量不能大于 3m），于是

$$16 \le \sum_{i=1}^{4} l_i r_{ij} \le 19, \quad j = 1,2,3 \tag{13}$$

（3）模型求解

式（11）～（13）构成这个问题的优化模型。由于在式（11）～（13）中出现了决策变量的乘积，所以这是一个整数非线性规划模型，虽然用 LINGO 软件可以直接求解，但我们发现有时 LINGO 软件运行很长时间也难以得到最优解。为了减少运行时间，可以增加一些显然的约束条件，从而缩小可行解的搜索范围。

例如，由于 3 种切割模型的排列顺序是无关紧要的，所以不妨增加以下约束：

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \tag{14}$$

又如，我们注意到所需原料钢管的总根数有着明显的上界和下界。首先，无论如何，原料钢管的总根数不可能少于$[(4\times 50+5\times 10+6\times 20+8\times 15)/19]=26$（根）。其次，考虑一种非常特殊的生产计划：第一种切割模式下只生产 4m 钢管，1 根原料钢管切割成 4 根 4m 钢管，为满足 50 根 4m 钢管的需求，需要 13 根原料钢管；第二种切割模式下只生产 5m、6m 钢管，一根原料钢管切割成 1 根 5m 钢管和 2 根 6m 钢管，为满足 10 根 5m 钢管和 20 根 6m 钢管的需求，需要 10 根原料钢管；第三种切割模式下只生产 8m 钢管，1 根原料钢管切割成 2 根 8m 钢管，为满足 15 根 8m 钢管的需求，需要 8 根原料钢管。于是满足要求的这种生产计划共需$13+10+8=31$根原料钢管，这就得到了最优解的一个上界。所以可增加以下约束：

$$26 \le \sum_{i=1}^{3} x_i \le 31 \tag{15}$$

将式（11）～（15）构成的模型输入 LINGO 如下：

```
model:
Title 钢管下料 - 最小化钢管根数的LINGO模型;
SETS:
    NEEDS/1..4/:LENGTH,b;
    CUTS/1..3/:X;
    PATTERNS(NEEDS,CUTS):R;
ENDSETS
DATA:
    LENGTH=4 5 6 8;
    b=50 10 20 15;
    CAPACITY=19;
ENDDATA
min=@SUM(CUTS(I): X(I) );
@FOR(NEEDS(I):@SUM(CUTS(J):X(J)*R(I,J))>b(I) );
```

```
    @FOR(CUTS(J):@SUM(NEEDS(I):LENGTH(I)*R(I,J))<CAPACITY );
    @FOR(CUTS(J):@SUM(NEEDS(I):LENGTH(I)*R(I,J))>CAPACITY-@MIN(NEEDS(I):
LENGTH(I)));
    @SUM(CUTS(I):X(I))>26; @SUM(CUTS(I):X(I)) <31; !人为增加约束;
    @FOR(CUTS(I)|I#LT#@SIZE(CUTS):X(I)>X(I+1) ); !人为增加约束;
    @FOR(CUTS(J): @GIN(X(J))) ;
    @FOR(PATTERNS(I,J):@GIN(R(I,J)));
   end
```

得到按照模式 1，2，3 分别切割 10，10，8 根原料钢管，使用原料钢管总根数为 28 根。第一种切割模式下 1 根原料钢管切割成 2 根 4m 钢管、1 根 5m 钢管和 1 根 6m 钢管；第二种切割模式下 1 根原料钢管切割成 3 根 4m 钢管和 1 根 6m 钢管；第三种模式下 1 根原料钢管切割成 2 根 8m 钢管。

2.2　易拉罐下料问题

例 3　某公司采用一套冲压设备生产一种罐装饮料的易拉罐，这种易拉罐是用镀锡板冲压制成的（参见图 2）。易拉罐为圆柱形，包括罐身、上盖和下底，罐身高 10cm，上盖和下底的直径均为 5cm。该公司使用两种不同规格的镀锡板原料，规格 1 的镀锡板为正方形，边长 24cm；规格 2 的镀锡板为长方形，长、宽分别为 32cm 和 28cm。由于生产设备和生产工艺的限制，对于规格 1 的镀锡板原料，只可以按照图 3 中的模式 1、2 或 3 进行冲压；对于规格 2 的镀锡板原料只能按照模式 4 进行冲压。使用模式 1、2、3、4 进行每次冲压所需要的时间分别为 1.5s、2s、1s、3s。

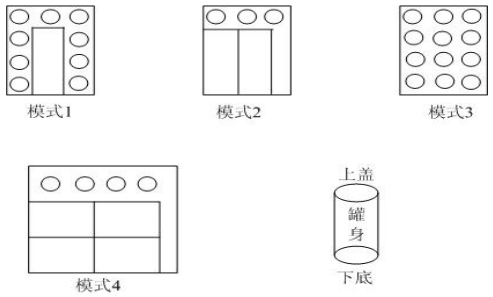


图 2　易拉罐下料模式

该工厂每周工作 40h，每周可供使用的规格 1、2 的镀锡板原料分别为 5 万张和 2 万张。目前每只易拉罐的利润为 0.10 元，原料余料损失为 0.001 元/cm^2（如果周末有罐身、上盖或下底不能配套组装成易拉罐出售，也看做是原料余料损失）。工厂应如何安排每周的生产？

（1）问题分析

与钢管下料问题不同的是，这里的切割模式已经确定，只需计算各种模式下的余料损失。已知上盖和下底的直径 $d=5\,\text{cm}$，可得其面积为 $S_1=\pi d^2/4\approx 19.6\,\text{cm}^2$。周

长为 $L=\pi d\approx 15.7$ cm；已知罐身高 $h=10$ cm，可得其面积为 $S_2=hL\approx 157.1\,\text{cm}^2$。于是模式 1 下的余料损失为 $24^2-9S_1-S_2\approx 242.2$。同理计算其它模式下的余料损失，并可将 4 种冲压模式的特征归纳如表 4。

表 4　4 种冲压模式的特征

	罐身个数	底、盖个数	余料损失（cm^2）	冲压时间（s）
模式 1	1	9	242.2	1.5
模式 2	2	3	202.9	2
模式 3	0	12	340.4	1
模式 4	4	4	189.1	3

问题的目标显然应是易拉罐的利润扣除原料余料损失后的净利润最大，约束条件除每周工作时间和原料数量外，还要考虑罐身和底、盖的配套组装。

（2）模型建立

决策变量：用 x_i 表示按照第 i 种模式的冲压次数（$i=1,2,3,4$），y_1 表示一周生产的易拉罐个数。为计算不能配套组装的罐身和底、盖造成的原料损失，用 y_2 表示不配套的罐身个数，y_3 表示不配套的底、盖个数。虽然实际上 x_i 和 y_1,y_2,y_3 应该是整数，但是由于生产量相当大，可以把它们看成是实数，从而用线性规划模型处理。我们的计量单位是万。

决策目标：假设每周生产的易拉罐能够全部售出，公司每周的销售利润是 $0.1y_1$。原料余料损失包括两部分：4 种冲压模式下的余料损失，和不配套的罐身和底、盖造成的原料损失。按照前面的计算及表 4 的结果，总损失为

$$0.001(242.2x_1+202.9x_2+340.4x_3+189.1x_4+157.1y_2+19.6y_3)$$

于是，决策目标为

$$\max\ 0.1y_1-0.001(242.2x_1+202.9x_2+340.4x_3+189.1x_4+157.1y_2+19.6y_3) \quad (16)$$

约束条件：

i）时间约束。每周工作时间不超过 40h=144000s=14.4（万秒），由表 4 最后一列得

$$1.5x_1+2x_2+x_3+3x_4\le 14.4 \quad (17)$$

ii）原料约束。每周可供使用的规格 1、2 的镀锡板原料分别为 5 万张和 2 万张，即

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \tag{18}$$

$$x_4 \le 2 \tag{19}$$

iii）配套约束。由表 4 知，一周生产的罐身个数为 $x_1 + 2x_2 + 4x_4$，一周生产的底、盖个数为 $9x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 4x_4$，因为应尽可能将它们配套组装成易拉罐销售。所以 y_1 满足

$$y_1 = \min\{x_1 + 2x_2 + 4x_4, (9x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 4x_4)/2\} \tag{20}$$

这时不配套的罐身个数 y_2 和不配套的底、盖个数 y_3 应为

$$y_2 = x_1 + 2x_2 + 4x_4 - y_1 \tag{21}$$

$$y_3 = 9x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 4x_4 - 2y_1 \tag{22}$$

式（16）～（22）就是我们得到的模型，其中式（20）式一个非线性关系，不易直接处理，但是它可以等价为以下两个线性不等式：

$$y_1 \le x_1 + 2x_2 + 4x_4 \tag{23}$$

$$y_1 \le (9x_1 + 3x_2 + 12x_3 + 4x_4)/2 \tag{24}$$

（3）模型求解

在 LINGO 程序中，我们没有必要把式（20）线性化，LINGO 能够自动线性化的。编写 LINGO 程序如下：

```
max=0.1*y1-0.2422*x1-0.2029*x2-0.3404*x3-0.1891*x4-0.1571*y2-0.01
96*y3;
1.5*x1+2*x2+x3+3*x4<14.4;
x1+x2+x3<5;
x4<4;
y1=@smin(x1+2*x2+4*x4,(9*x1+3*x2+12*x3+4*x4)/2);
y2=x1+2*x2+4*x4-y1;
y3=9*x1+3*x2+12*x3+4*x4-2*y1;
```

计算结果略。

（4）评注

下料问题的建模主要有两部分组成，一是确定下料模式，二是构造优化模型。确定下料模式尚无通用的方法，对于钢管下料这样的一维问题，当需要下料的规格不太多时，可以枚举出下料模式，建立整数线性规划模型；否则就要构造整数非线性规划模型，

而这种模型求解比较困难。本节介绍的增加约束条件的方法是将原来的可行域“割去”一部分，但要保证剩下的可行域中仍存在原问题的最优解。而像易拉罐这样的二维问题，就要复杂多了。

§3 面试顺序与消防车调度问题

3.1 面试顺序问题

例 4 有 4 名同学到一家公司参加三个阶段的面试：公司要求每个同学都必须首先找公司秘书初试，然后到部门主管处复试，最后到经理处参加面试，并且不允许插队（即在任何一个阶段 4 名同学的顺序是一样的）。由于 4 名同学的专业背景不同，所以每人在三个阶段的面试时间也不同，如表 5 所示。这 4 名同学约定他们全部面试完以后一起离开公司。假定现在时间是早晨 8:00，请问他们最早何时能离开公司？

表 5 面试时间要求

	秘书初试	主管复试	经理面试
同学甲	13	15	20
同学乙	10	20	18
同学丙	20	16	10
同学丁	8	10	15

（1）建立模型

实际上，这个问题就是要安排 4 名同学的面试顺序，使完成全部面试所花费的时间最少。

记 t_{ij} 为第 i 名同学参加第 j 阶段面试需要的时间（已知），令 x_{ij} 表示第 i 名同学参加第 j 阶段面试的开始时间（不妨记早上 8:00 面试开始为 0 时刻）（$i=1,2,3,4$；$j=1,2,3$），T 为完成全部面试所花费的最少时间。

优化目标为

$$\min T=\{\max_i(x_{i3}+t_{i3})\} \tag{25}$$

约束条件：

i）时间先后次序约束（每人只有参加完前一个阶段的面试后才能进入下一个阶段）：

$$x_{ij}+t_{ij}\le x_{i,j+1},\quad i=1,2,3,4,\quad j=1,2 \tag{26}$$

ii）每个阶段 j 同一时间只能面试 1 名同学：用 $0-1$ 变量 y_{ik} 表示第 k 名同学是否排在第 i 名同学前面（1 表示“是”，0 表示“否”），则

$$x_{ij}+t_{ij}-x_{kj}\le Ty_{ik}\,,\ i,k=1,2,3,4\,,\ i<k\,,\ j=1,2,3 \tag{27}$$

$$x_{kj}+t_{kj}-x_{ij}\le T(1-y_{ik})\,,\ \ i,k=1,2,3,4\,,\ \ i<k\,,\ \ j=1,2,3 \tag{28}$$

可以将非线性的优化目标（25）改写为如下线性优化目标：

$$\min T \tag{29}$$

$$\text{s.t.}\quad T\ge x_{i3}+t_{i3}\,,\ i=1,2,3,4 \tag{30}$$

式（26）～（30）就是这个问题的$0-1$非线性规划模型（当然所有变量还有非负约束，变量y_{ik}还有$0-1$约束）。

（2）求解模型

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
Title 面试问题;
SETS:
Person/1..4/;
Stage/1..3/;
PXS(Person,Stage): T, X;
PXP(Person,Person)|&1 #LT# &2: Y;
ENDSETS
DATA:
T=13, 15, 20, 10 , 20 , 18, 20, 16, 10, 8, 10, 15;
ENDDATA
[obj] min=MAXT;
MAXT>= @max(PXS(i,j)|j#EQ#@size(stage):x(i,j)+t(i,j));
! 只有参加完前一个阶段的面试后才能进入下一个阶段;
@for(PXS(i,j)|j#LT#@size(stage):[ORDER]x(i,j)+t(i,j)<x(i,j+1));
! 同一时间只能面试1名同学;
@for(Stage(j):
    @for(PXP(i,k):[SORT1]x(i,j)+t(i,j)-x(k,j)<MAXT*Y(i,k));
    @for(PXP(i,k):[SORT2]x(k,j)+t(k,j)-x(i,j)<MAXT*(1-Y(i,k))));
@for(PXP: @bin(y));
end
```

计算结果为，所有面试完成至少需要 84min，面试顺序为 4－1－2－3（丁－甲－乙－丙）。早上 8:00 面试开始，最早 9:24 面试可以全部结束。

3.2 消防车调度问题

例 5　某市消防中心同时接到了三处火警电话。根据当前的火势，三处火警地点分别需要 2 辆、2 辆和 3 辆消防车前往灭火。三处火警地点的损失将依赖于消防车到达的及时程度：记 t_{ij} 为第 j 辆消防车到达火警地点 i 的时间，则三处火警地点的损失分别为 $6t_{11}+4t_{12}$，$7t_{21}+3t_{22}$，$9t_{31}+8t_{32}+5t_{33}$。目前可供消防中心调度的消防车正好有 7 辆，分别属于三个消防站（可用消防车数量分别为 3 辆、2 辆、2 辆）。消防车从三个消防站到三个火警地点所需要的时间如表 6 所示。应如何调度消防车，才能使总损失最小？

表 6　消防站到三个火警地点所需要的时间

时间	火警地点 1	火警地点 2	火警地点 3
消防站 1	6	7	9
消防站 2	5	8	11
消防站 3	6	9	10

如果三处火警地点的损失分别为 $4t_{11}+6t_{12}$，$3t_{21}+7t_{22}$，$5t_{31}+8t_{32}+9t_{33}$，调度方案是否需要改变？

（1）问题分析

本题考虑的是为每个火警地点分配消防车的问题，初步看来与线性规划中经典的运输问题有些类似。本题的问题可以看成是指派问题和运输问题的一种变形，我们下面首先把它变成一个运输问题建模求解。

（2）决策变量

为了用运输问题建模求解，我们很自然地把 3 个消防站看成供应点。如果直接把 3 个火警地点看成需求点，我们却不能很方便地描述消防车到达的先后次序，因此难以确定损失的大小。下面我们把 7 辆车的需求分别看成 7 个需求点（分别对应于到达时间 $t_{11},t_{12},t_{21},t_{22},t_{31},t_{32},t_{33}$）。用 x_{ij} 表示消防站 i 是否向第 j 个需求点派车（1 表示派车，0 表示不派车），则共有 21 个 $0-1$ 变量。

（3）模型建立

题目中给出的损失函数都是消防车到达时间的线性函数，所以由所给数据进行简单的计算可知，如果消防站 1 向第 6 个需求点派车（即消防站 1 向火警地点 3 派车但该消防车是到达火警地点 3 的第二辆车），则由此引起的损失为 $8\times 9=72$。同理计算，可以得到损失矩阵如表 7 所示（元素分别记为 c_{ij}）。

表 7　损失矩阵

c_{ij}	火警地点 1		火警地点 2		火警地点 3		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$

消防站 $i=1$	36	24	49	21	81	72	45
消防站 $i=2$	30	20	56	24	99	88	55
消防站 $i=3$	36	24	63	27	90	80	50

于是，使总损失最小的决策目标为

$$\min Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{7}c_{ij}x_{ij} \tag{31}$$

约束条件：约束条件有两类，一类是消防站拥有的消防车的数量限制，另一类是各需求点对消防车的需求量限制。

记 b_i（$i=1,2,3$）为第 i 个消防站拥有消防车的数量，则消防站拥有的消防车的数量限制可以表示为

$$\sum_{j=1}^{7}x_{ij}=b_i,\quad i=1,2,3 \tag{32}$$

各需求点对消防车的需求量限制可以表示为

$$\sum_{i=1}^{3}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,7 \tag{33}$$

（4）模型求解

```
MODEL:
TITLE 消防车问题;
SETS:
supply/1..3/:b;
need/1..7/;
links(supply,need):c,x;
ENDSETS
[OBJ]Min=@sum(links:c*x);
@FOR(supply(i):@sum(need(j):x(i,j))=b(i));
@FOR(need(j):@sum(supply(i):x(i,j))=1);
DATA:
b=3,2,2;
c=36,24,49,21,81,72,45
  30,20,56,24,99,88,55
  36,24,63,27,90,80,50;
ENDDATA
END
```

求得结果为，消防站 1 应向火警地点 2 派 1 辆车，向火警地点 3 派 2 辆车；消防

站 2 应向火警地点 1 派 2 辆车；消防站 3 应向火警地点 2、3 各派 1 辆车。最小总损失为 329。

（5）讨论

i）这个问题本质上仍然和经典的运输问题类似，可以把每辆车到达火场看做需求点，消防站看做供应点。在上面模型中，我们虽然假设 x_{ij} 为 $0-1$ 变量，但求解时是采用线性规划求解的，也就是说没有加上 x_{ij} 为 $0-1$ 变量或整数变量的限制条件，但求解得到的结果中 x_{ij} 正好是 $0-1$ 变量。这一结果不是偶然的，而是运输问题特有的一种性质。

ii）在上面模型中，没有考虑消防车到达各火警地点的先后次序约束，但得到的结果正好满足所有的先后次序约束，这一结果不是必然的，而只是巧合。如对例题后半部分的情形，结果就不是这样了。显然，此时只需要修改损失矩阵如表 8 所示（元素仍然分别记为 c_{ij} ）。

表 8　新的损失矩阵

c_{ij}	火警地点 1		火警地点 2		火警地点 3		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$
消防站 $i=1$	24	36	21	49	45	72	81
消防站 $i=2$	20	30	24	56	55	88	99
消防站 $i=3$	24	36	27	63	50	80	90

此时重新将式（31）～（33）构成的线性规划模型输入 LINGO 求解，可以得到新的最优解：$x_{14}=x_{16}=x_{17}=x_{21}=x_{22}=x_{33}=x_{35}=1$，其它变量为 0（最小总损失仍为 329）。实际上，损失矩阵中只是 1、2 列交换了位置，3、4 列交换了位置，5、7 列交换了位置，因此不用重新求解就可以直接看出以上新的最优解。

但是，以上新的最优解却是不符合实际情况的。例如，$x_{14}=x_{33}=1$ 表明火警地点 2 的第一辆消防车来自消防站 3，第二辆消防车来自消防站 1，但这是不合理的，因为火警地点 2 与消费站 3 有 9min 的距离，大于与消防站 1 的 7min 的距离。分配给火警地点 3 的消防车也有类似的不合理问题。为了解决这一问题，我们必须考虑消防车到达各火警地点的先后次序约束，也就是说必须在简单的运输问题模型中增加一些新的约束，以保证以上的不合理问题不再出现。

首先考虑火警地点 2。由于消防站 1 的消防车到达所需时间（7min）小于消防站 2 的消防车到达所需时间（8 分钟），并都小于消防站 3 的消防车到达所需时间（9 分钟），因此火警地点 2 的第二辆消防车如果来自消防站 1，则火警地点 2 的第 1 辆消防车也一定来自消防站 1；火警地点 2 的第 2 辆消防车如果来自消防站 2，则火警地点 2 的第 1

辆消防车一定来自消防站 1 或 2。因此，必须增加以下约束：

$$x_{14} \le x_{13} \tag{34}$$

$$x_{24} \le x_{13} + x_{23} \tag{35}$$

同理，对火警地点 1，必须增加以下约束：

$$x_{22} \le x_{21} \tag{36}$$

对火警地点 3，必须增加以下约束：

$$x_{16} \le x_{15} \tag{37}$$

$$x_{17} \le x_{16} \tag{38}$$

$$x_{36} \le x_{15} + x_{35} \tag{39}$$

$$2x_{37} \le x_{15} + x_{16} + x_{35} + x_{36} \tag{40}$$

重新将式（31）～（40）构成的整数规划模型（x_{ij} 是 $0-1$ 变量）输入 LINGO 软件如下：

```
MODEL:
TITLE 消防车问题;
SETS:
supply/1..3/:b;
need/1..7/;
links(supply,need):c,x;
ENDSETS
[OBJ]Min=@sum(links:c*x);
@FOR(supply(i):@sum(need(j):x(i,j))=b(i));
@FOR(need(j):@sum(supply(i):x(i,j))=1);
x(1,4)<x(1,3);
x(2,4)<x(1,3)+x(2,3);
x(2,2)<x(2,1);
x(1,6)<x(1,5);
x(1,7)<x(1,6);
x(3,6)<x(1,5)+x(3,5);
2*x(3,7)<x(1,5)+x(1,6)+x(3,5)+x(3,6);
@for(links:@bin(x));
DATA:
```

```
b=3,2,2;
c=  24    36    21    49    45    72    81
    20    30    24    56    55    88    99
    24    36    27    63    50    80    90;
ENDDATA
END
```

求解可以得到：$x_{13}=x_{14}=x_{15}=x_{21}=x_{22}=x_{36}=x_{37}=1$，其它变量为 0（最小总损失仍为 335）。也就是说，消防站 1 应向火警地点 2 派 2 辆车，向火警地点 3 派 1 辆车；消防站 2 应向火警地点 1 派 2 辆车；消防站 3 应向火警地点 3 派 2 辆车。经过检验可以发现，此时的派车方案是合理的。

§4　飞机定位和飞行计划问题

4.1　飞机的精确定位问题

例 6　飞机在飞行过程中，能够收到地面上各个监控台发来的关于飞机当前位置的信息，根据这些信息可以比较精确地确定飞机的位置。如图 3 所示，VOR 是高频多向导航设备的英文缩写，它能够得到飞机与该设备连线的角度信息；DME 是距离测量装置的英文缩写，它能够得到飞机与该设备的举例信息。图中飞机接收到来自 3 个 VOR 给出的角度和 1 个 DME 给出的距离（括号内是测量误差限），并已知这 4 种设备的 x,y 坐标（假设飞机和这些设备在同一平面上）。如何根据这些信息精确地确定当前飞机的位置？

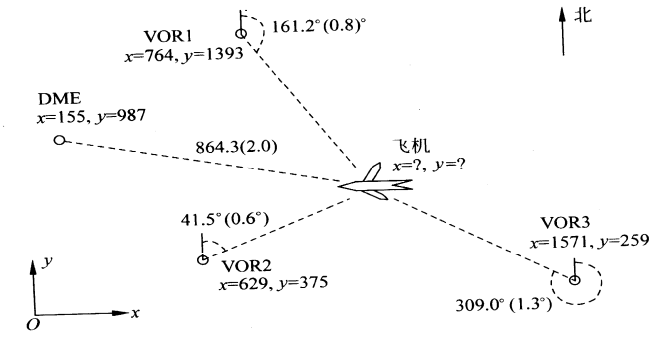


图 3　飞机与监控台

（1）问题分析

记 4 种设备 VOR1、VOR2、VOR3、DME 的坐标为 (x_i,y_i)（以 km 为单位），$i=1,2,3,4$；VOR1、VOR2、VOR3 测量得到的角度为 θ_i（从图中可以看出，按照航空飞行管理的惯例，该角度是从北开始，沿顺时针方向的角度，取值在 $0^\circ\sim360^\circ$ 之间），

角度的误差限为 $\sigma_i, i=1,2,3$；DME 测量得到的距离为 d_4（单位：km），距离的误差限为 σ_4。设飞机当前位置的坐标为 (x,y)，则问题就是在表 9 的已知数据下计算 (x,y)。

表 9　飞机定位问题的数据

	x_i	y_i	原始的 θ_i (或 d_4)	σ_i
VOR1	746	1393	161.2°（2.81347rad）	161.2°（2.81347rad）
VOR2	629	375	45.1°（0.78714rad）	161.2°（2.81347rad）
VOR3	1571	259	309.0°（5.39307rad）	161.2°（2.81347rad）
DME	155	987	864.3km	2.0km

（2）模型 1 及求解

图中角度 θ_i 是点 (x_i,y_i) 和点 (x,y) 的连线与 y 轴的夹角（以 y 轴正向为基准，顺时针方向夹角为正，而不考虑逆时针方向的夹角），于是角度 θ_i 的正切

$$\tan\theta_i=\frac{x-x_i}{y-y_i},\ i=1,2,3 \tag{41}$$

对 DME 测量得到的距离，显然有

$$d_4=\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2} \tag{42}$$

直接利用上面得到的 4 个等式确定飞机的坐标 x,y，这是一个求解超定（非线性）方程组的问题，在最小二乘准则下使计算值与测量值的误差平方和最小（越接近 0 越好），则需要求解

$$\min J(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{x-x_i}{y-y_i}-\tan\theta_i\right)^2+\left[d_4-\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}\right]^2 \tag{43}$$

式（43）是一个非线性（无约束）最小二乘拟合问题。很容易写出其 LINGO 程序如下：

```
MODEL:
TITLE 飞机定位模型1;
SETS:
VOR/1..3/:x0,y0,cita,sigma;
ENDSETS
DATA:
x0, y0, cita, sigma =
746 1393  161.2    0.8
```

```
629 375   45.1    0.6
1571 259   309.0    1.3;
x4 y4 d4 sigma4=155,987,864.3,2.0;
ENDDATA
calc:
@for(VOR:cita=cita*3.14159/180;sigma=sigma*3.14159/180);
endcalc
min=@sum(VOR:@sqr((x-x0)/(y-y0)-@tan(cita)))+@sqr(d4-@sqrt(@sqr(x
-x4)+@sqr(y-y4)));
END
```

上述程序必须使用全局求解器进行求解，否则求得的是一个局部最优解。用“LINGO|OPTIONS”菜单命令启动“Global Solver”选项卡上的“Use Global Solver”选项，然后求解，可以得到全局最优解 $x=1019.306$， $y=987.2909$，对应的目标函数值为 0.4729562，这里的解受 π 的取值影响很大。

（3）模型 2 及求解

注意到这个问题中角度和距离的单位是不一致的（角度为弧度，距离为公里），因此将这 4 个误差平方和同等对待（相加）不是很合适。并且，4 种设备测量的精度（误差限）不同，而上面的方法根本没有考虑测量误差问题。如何利用测量设备的精度信息？这就需要看对例中给出的设备精度如何理解。

一种可能的理解是：设备的测量误差是均匀分布的。以 VOR1 为例，目前测得的角度为 161.2°，测量精度为 0.8°，所以实际的角度应该位于区间 $[161.2^\circ-0.8^\circ,161.2^\circ+0.8^\circ]$ 内。对其它设备也可以类似理解。由于 σ_i 很少，即测量精度很高，所以在相应区间内正切函数 tan 的单调性成立。于是可以得到一组不等式：

$$\tan(\theta_i-\sigma_i)\le\frac{x-x_i}{y-y_i}\le\tan(\theta_i+\sigma_i) \tag{44}$$

$$d_4-\sigma_4\le\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}\le d_4+\sigma_4 \tag{45}$$

也就是说，飞机坐标应该位于上述不等式组成的区域内。

由于这里假设设备的测量误差是均匀分布的，所以飞机坐标在这个区域内的每个点上的可能性应该也是一样的，我们最好应该给出这个区域的 x 和 y 坐标的最大值和最小值。于是我们可以分别以 $\min x$， $\max x$， $\min y$， $\max y$ 为目标，以上面的区域限制条件为约束，求出 x 和 y 坐标的最大值和最小值。

以 $\min x$ 为例，相应的 LINGO 程序为：

```
MODEL:
TITLE 飞机定位模型2;
SETS:
VOR/1..3/:x0,y0,cita,sigma;
ENDSETS
INIT:
x=1000; y=900;
ENDINIT
DATA:
x0, y0, cita, sigma =
746  1393   161.2    0.8
629  375    45.1     0.6
1571 259    309.0    1.3;
x4 y4 d4 sigma4=155,987,864.3,2.0;
ENDDATA
calc:
@for(VOR:cita=cita*3.14159/180;sigma=sigma*3.14159/180);
endcalc
min=x;
@for(VOR:(x-x0)/(y-y0)>@tan(cita-sigma));
@for(VOR:(x-x0)/(y-y0)<@tan(cita+sigma));
d4-sigma4 <((x-x4)^2+(y-y4)^2)^.5 ;
d4+sigma4 >((x-x4)^2+(y-y4)^2)^.5 ;
END
```

注意：用 LINGO9 求解非线性问题，必须对决策变量进行初始化，否则 LINGO 可能找不到可行解。决策变量的初值也有范围限制，取的不合适也可能找不到可行解。

求得的 x 的最小值为 974. 8433。类似地（只需要换目标函数就可以了），可得到 x 的最大值为 982.2005， y 的最小值为 717.1614， y 的最大值为 733.1582。

因此，最后得到的解是一个比较大的矩形区域，大致为 $[975,982]\times[717,733]$。

（4）模型 3 及求解

模型 2 得到的只是一个很大的矩形区域，仍不能令人满意。实际上，模型 2 假设设备的测量误差是均匀分布的，这是很不合理的。一般来说，在多次测量中，应该假设设备的测量误差是正态分布的，而且均值为 0。本例中给出的精度 σ_i 可以认为是测量误差的标准差。

在这种理解下，用各自的误差限 σ_i 对测量误差进行无量纲化（也可以看成是一种加权法）处理是合理的，即求解如下的无约束优化问题更合理。

$$\min E(x,y)=\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\alpha_i-\theta_i}{\sigma_i}\right)^2+\left(\frac{d_4-\sqrt{(x-x_4)^2+(y-y_4)^2}}{\sigma_4}\right)^2 \tag{46}$$

其中

$$\tan\alpha_i=\frac{x-x_i}{y-y_i},\quad i=1,2,3 \tag{47}$$

由于目标函数是平方和的形式，因此这是一个非线性最小二乘拟合问题。相应的 LINGO 程序为：

```
MODEL:
TITLE 飞机定位模型3;
SETS:
VOR/1..3/:x0,y0,cita,sigma,alpha;
ENDSETS
INIT:
x=1000; y=900;
ENDINIT
DATA:
x0, y0, cita, sigma =
746  1393   161.2    0.8
629  375    45.1     0.6
1571 259    309.0    1.3;
x4 y4 d4 sigma4=155,987,864.3,2.0;
ENDDATA
calc:
@for(VOR:cita=cita*3.14159/180;sigma=sigma*3.14159/180);
endcalc
min=@sum(VOR:((alpha-cita)/sigma)^2)+((d4-((x-x4)^2+(y-y4)^2)^.5 )/
sigma4 )^2;
@for(VOR: @tan(alpha)=(x-x0)/(y-y0) );
END
```

启动 LINGO 的全局最优求解程序求解，得到全局最优解 $x=978.3071$，$y=723.9841$，对应的目标函数的值为 0.668035。

这里得到的误差比模型 1 的大，这是因为模型 1 中使用的是绝对误差，而这里使用的是相对于精度 σ_i 的误差。对角度而言，分母 σ_i 很少，所以相对误差比绝对误差大，这是可以理解的。

4.2　飞行计划问题

例 7　这个问题是以第二次世界大战中的一个实际问题为背景，经过简化而提出来的。在甲、乙双方的一场战争中，一部分甲方部队被乙方部队包围长达 4 个月。由于乙方封锁了所有水陆交通要道，被包围的甲方部队只能依靠空中交通维持供给。运送 4 个月的供给分别需要 2，3，3，4 次飞行，每次飞行编队由 50 架飞机组成（每架飞机需要 3 名飞行员），可以运送 10 万吨物质。每架飞机每个月只能飞行一次，每名飞行员每个月也只能飞行一次。在执行完运输任务后的返回途中有 20%的飞机会被乙方部队击落，相应的飞行员也因此牺牲或失踪。在第 1 个月开始时，甲方拥有 110 架飞机和 330 名熟练的飞行员。在每个月开始时，甲方可以招聘新飞行员和购买新飞机。新飞机必须经过一个月的检查后才可以投入使用，新飞行员必须在熟练飞行员的指导下经过一个月的训练才能投入飞行。每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导 20 名飞行员（包括他自己在内）进行训练。每名飞行员在完成一个月的飞行任务后，必须有一个月的带薪假期，假期结束后才能再投入飞行。已知各项费用（单位略去）如表 10 所示，请为甲方安排一个飞行计划。

如果每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导不超过 20 名飞行员（包括他自己在内）进行训练，模型和结果有哪些改变？

表 10　飞行计划的原始数据

	第 1 个月	第 2 个月	第 3 个月	第 4 个月
新飞机价格	200.0	195.0	190.0	185.0
闲置的熟练飞行员报酬	7.0	6.9	6.8	6.7
教练和新飞行员报酬（包括培训费用）	10.0	9,9	9.8	9.7
执行飞行任务的熟练飞行员报酬	9.0	8.9	9.8	9.7
休假期间的熟练飞行员报酬	5.0	4.9	4.8	4.7

（1）问题分析

这个问题看起来很复杂，但只要理解了这个例子中所描述的事实，其实建立优化模型并不困难。首先可以看出，执行飞行任务以及执行飞行任务后休假的熟练飞行员数量是常数，所以这部分费用（报酬）是固定的，在优化目标中可以不考虑。

（2）决策变量

设 4 个月开始时甲方新购买的飞机数量分别为 x_i（$i=1,2,3,4$）架，闲置的飞机数量分别为 y_i 架。4 个月中，飞行员中教练和新飞行员数量分别为 u_i（$i=1,2,3,4$）人，闲置的熟练飞行员数量分别为 v_i 人。

（3）目标函数

优化目标是

$$\min 200x_1+195x_2+190x_3+185x_4+10u_1+9.9u_2+9.8u_3+9.7u_4$$
$$+7v_1+6.9v_2+6.8v_3+6.7v_4$$

（4）约束条件

需要考虑的约束包括：

i）飞机数量限制。4 个月中执行飞行任务的飞机分别为 100，150，150，200（架），但只有 80，120，120，160（架）能够返回供下个月使用。

第 1 个月　$100+y_1=110$　（48）

第 2 个月　$150+y_2=80+y_1+x_1$　（49）

第 3 个月　$150+y_3=120+y_2+x_2$　（50）

第 4 个月　$200+y_4=120+y_3+x_3$　（51）

ii）飞行员数量限制。4 个月中执行飞行任务的熟练飞行员分别为 300，450，450，600（人），但只有 240，360，360，480（人）能够返回（下个月一定休假）。

第 1 个月　$300+0.05u_1+v_1=330$　（52）

第 2 个月　$450+0.05u_2+v_2=u_1+v_1$　（53）

第 3 个月　$450+0.05u_3+v_3=u_2+v_2+240$　（54）

第 4 个月　$600+0.05u_3+v_4=u_3+v_3+360$　（55）

（5）求解

编写 LINGO 程序如下：

```
model:
sets:
col/1..4/:c1,c2,c3,x,u,v,y;
row/1..3/:b1,b2;
endsets
data:
c1=200 195 190 185;
c2=10 9.9 9.8 9.7;
c3=7 6.9 6.8 6.7;
b1=70 30 80;
b2=450 210 240;
enddata
```

```
min=@sum(col:c1*x+c2*u+c3*v);
y(1)=10;
@for(col(i)|i#lt#4:y(i)+x(i)-y(i+1)=b1(i));
0.05*u(1)+v(1)=30;
@for(col(i)|i#lt#4:u(i)+v(i)-0.05*u(i+1)-v(i+1)=b2(i));
@for(col:@gin(x);@gin(u);@gin(v);@gin(y));
end
```

求得的最优解为 $x_1=60$，$x_2=30$，$x_3=80$，$x_4=0$，$u_1=460$，$u_2=220$，$u_3=240$，$u_4=0$，$v_1=7$，$v_2=6$，$v_3=4$，$v_4=4$，$y_1=10$，$y_2=y_3=y_4=0$；目标函数值为 42324.4。

（6）问题讨论

如果每名熟练飞行员可以作为教练每个月指导不超过 20 名飞行员（包括他自己在内）进行训练，则应将教练与新飞行员分开。设 4 个月飞行员中教练为 u_1,u_2,u_3,u_4（人），新飞行员数量分别为 w_1,w_2,w_3,w_4（人）。其它符号不变。飞行员的数量限制约束为

第 1 个月　$300+u_1+v_1=330$；

第 2 个月　$450+u_2+v_2=u_1+v_1+w_1$，$w_1\le 20u_1$；

第 3 个月　$450+u_3+v_3=u_2+v_2+240+w_2$，$w_2\le 20u_2$；

第 4 个月　$600+u_3+v_4=u_3+v_3+360+w_3$；$w_3\le 20u_3$；

目标函数作相应修改，输入 LINGO 如下：

```
model:
sets:
col/1..4/:c1,c2,c3,x,u,v,w,y;
row/1..3/:b1,b2;
endsets
data:
c1=200 195 190 185;
c2=10 9.9 9.8 9.7;
c3=7 6.9 6.8 6.7;
b1=70 30 80;
b2=450 210 240;
enddata
```

```
min=@sum(col:c1*x+c2*(u+w)+c3*v);
y(1)=10;
@for(col(i)|i#lt#4:y(i)+x(i)-y(i+1)=b1(i));
u(1)+v(1)=30;
@for(col(i)|i#lt#4:u(i)+v(i)+w(i)-u(i+1)-v(i+1)=b2(i));
@for(col(i)|i#lt#4:w(i)<20*u(i));
@for(col:@gin(x);@gin(u);@gin(v);@gin(w);@gin(y));
end
```

求得最优解为 $u_1=22,u_2=11,u_3=12,u_4=0$，$v_1=8,v_2=v_3=v_4=0$，$w_1=431,w_2=211,w_3=228,w_4=0$（$x_1\sim x_4,y_1\sim y_4$ 不变）；目标函数的值为 42185.8。

习题二十七

1．某农户拥有 100 亩土地和 25000 元可供投资，每年冬季（9 月中旬至来年 5 月中旬），该家庭的成员可以贡献 3500h 的劳动时间，而夏季为 4000h。如果这些劳动时间有富裕，该家庭中的年轻成员将去附近的农场打工，冬季每小时 6.8 元，夏季每小时 7.0 元。

现金收入来源于三种农作物（大豆、玉米和燕麦）以及两种家禽（奶牛和母鸡）。农作物不需要付出投资，但每头奶牛需要 400 元的初始投资，每只母鸡需要 3 元的初始投资。每头奶牛需要使用 1.5 亩土地，并且冬季需要付出 100h 劳动时间，夏季付出 50h 劳动时间，每年产生的净现金收入为 450 元；每只母鸡的对应数字为：不占用土地，冬季 0.6h，夏季 0.3h，年净现金收入 3.5 元。养鸡厂房最多只能容纳 3000 只母鸡，栅栏的大小限制了最多能饲养 32 头奶牛。

根据估计，三种农作物每种植一亩所需要的劳动时间和收入如表 11 所示。建立数学模型，帮助确定每种农作物应该种植多少亩，以及奶牛和母鸡应该各蓄养多少，使年净现金收入最大。

表 11　种植一亩农作物所需要的劳动时间和收入

农作物	冬季劳动时间（h）	夏季劳动时间（h）	年净现金收入（元/亩）
大豆	20	30	175.0
玉米	35	75	300.0
燕麦	10	40	120.0

2．如图 4，有若干工厂的排污口流入某江，各口有污水处理站，处理站对面是居民点。工厂 1 上游江水流量和污水浓度，国家标准规定的水的污染浓度，以及各个工厂的污水流量和污水浓度均已知道。设污水处理费用与污水处理前后的浓度差和污水流量成正比，使每单位流量的污水下降一个浓度单位需要的处理费用（称处理系数）为已知。处理后的污水与江水混合，流到下一个排污口之前，自然状态下的江水也会使污水浓度

降低一个比例系数（称自净系数），该系数可以估计。试确定各污水处理站出口的污水浓度，使在符合国家标准规定的条件下总的处理费用最小。

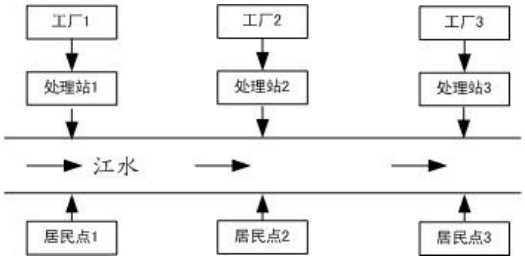


图 4　污水处理问题

先建立一般情况下的数学模型，再求解以下的具体问题：

设上游江水流量为 1000（$10^{12}\,\mathrm{L/min}$），污水浓度为 $0.8\mathrm{mg/L}$，3 个工厂的污水流量均为 5（$10^{12}\,\mathrm{L/min}$），污水浓度（从上游到下游排列）分别为 100，60，50（$\mathrm{mg/L}$），处理系数均为 1 万元/$(10^{12}\,\mathrm{L/min})\times(\mathrm{mg/L})$，3 个工厂之间的两段江面的自净系数（从上游到下游）分别为 0.9 和 0.6。国家标准规定水的污染浓度不能超过 $1\mathrm{mg/L}$。

（1）为了使江面上所有地段的水污染达到国家标准，最少需要花费多少费用？

（2）如果只要求三个居民点上游的水污染达到国家标准，最少需要花费多少费用？

第二十八章　灰色系统理论及其应用

客观世界的很多实际问题，其内部的结构、参数以及特征并未全部被人们了解，人们不可能象研究白箱问题那样将其内部机理研究清楚，只能依据某种思维逻辑与推断来构造模型。对这类部分信息已知而部分信息未知的系统，我们称之为灰色系统。本章介绍的方法是从灰色系统的本征灰色出发，研究在信息大量缺乏或紊乱的情况下，如何对实际问题进行分析和解决。

§1　灰色系统概论

客观世界在不断发展变化的同时，往往通过事物之间及因素之间相互制约、相互联系而构成一个整体，我们称之为系统。按事物内涵的不同，人们已建立了工程技术、社会系统、经济系统等。人们试图对各种系统所外露出的一些特征进行分析，从而弄清楚系统内部的运行机理。从信息的完备性与模型的构建上看，工程技术等系统具有较充足的信息量，其发展变化规律明显，定量描述较方便，结构与参数较具体，人们称之为白色系统；对另一类系统诸如社会系统、农业系统、生态系统等，人们无法建立客观的物理原型，其作用原理亦不明确，内部因素难以辨识或之间关系隐蔽，人们很难准确了解这类系统的行为特征，因此对其定量描述难度较大，带来建立模型的困难。这类系统内部特性部分已知的系统称之为灰色系统。一个系统的内部特性全部未知，则称之为黑色系统。

区别白色系统与灰色系统的重要标志是系统内各因素之间是否具有确定的关系。运动学中物体运动的速度、加速度与其所受到的外力有关，其关系可用牛顿定律以明确的定量来阐明，因此，物体的运动便是一个白色系统。

当然，白、灰、黑是相对于一定的认识层次而言的，因而具有相对性。某人有一天去他朋友家做客，发现当外面的汽车开过来时，他朋友家的狗就躲到屋角里瑟瑟发抖。他对此莫名其妙。但对他朋友来讲，狗的这种行为是可以理解的，因为他知道，狗在前不久曾被汽车撞伤过。显然，同样对于“狗的惧怕行为”，客人因不知内情而面临一个黑箱，而主人则面临一个灰箱。

作为实际问题，灰色系统在大千世界中是大量存在的，绝对的白色或黑色系统是很少的。随着人类认识的进步及对掌握现实世界的要求的升级，人们对社会、经济等问题的研究往往已不满足于定性分析。尽管当代科技日新月异，发展迅速，但人们对自然界的认识仍然是肤浅的。粮食作物的生产是一个实际的关系到人们吃饭的大问题，但同时，它又是一个抽象的灰色系统。肥料、种子、农药、气象、土壤、劳力、水利、耕作及政策等皆是影响生产的因素，但又难以确定影响生产的确定因素，更难确定这些因素与粮食产量的定量关系。人们只能在一定的假设条件（往往是一些经验及常识）下按照某种逻辑推理演绎而得到模型。这种模型并非是粮食作物生产问题在理论认识上的“翻版”，而只能看作是人们在认识上对实际问题的一种“反映”或“逼近”。

社会、经济、农业以及生态系统一般都会有不可忽略的“噪声”（即随即干扰）。现有的研究经常被“噪声”污染。受随机干扰侵蚀的系统理论主要立足于概率统计。通过统计规律、概率分布对事物的发展进行预测，对事物的处置进行决策。现有的系统分

析的量化方法，大都是数理统计法如回归分析、方差分析、主成分分析等，回归分析是应用最广泛的一种办法。但回归分析要求大样本，只有通过大量的数据才能得到量化的规律，这对很多无法得到或一时缺乏数据的实际问题的解决带来困难。回归分析还要求样本有较好的分布规律，而很多实际情形并非如此。例如，我国建国以来经济方面有几次大起大落，难以满足样本有较规律的分布要求。因此，有了大量的数据也不一定能得到统计规律，甚至即使得到了统计规律，也并非任何情况都可以分析。另外，回归分析不能分析因素间动态的关联程度，即使是静态，其精度也不高，且常常出现反常现象。

灰色系统理论提出了一种新的分析方法—关联度分析方法，即根据因素之间发展态势的相似或相异程度来衡量因素间关联的程度，它揭示了事物动态关联的特征与程度。由于以发展态势为立足点，因此对样本量的多少没有过分的要求，也不需要典型的分布规律，计算量少到甚至可用手算，且不致出现关联度的量化结果与定性分析不一致的情况。这种方法已应用到农业经济、水利、宏观经济等各方面，都取得了较好的效果。

灰色系统理论建模的主要任务是根据具体灰色系统的行为特征数据，充分开发并利用不多的数据中的显信息和隐信息，寻找因素间或因素本身的数学关系。通常的办法是采用离散模型，建立一个按时间作逐段分析的模型。但是，离散模型只能对客观系统的发展做短期分析，适应不了从现在起做较长远的分析、规划、决策的要求。尽管连续系统的离散近似模型对许多工程应用来讲是有用的，但在某些研究领域中，人们却常常希望使用微分方程模型。事实上，微分方程的系统描述了我们所希望辨识的系统内部的物理或化学过程的本质。

灰色系统理论首先基于对客观系统的新的认识。尽管某些系统的信息不够充分，但作为系统必然是有特定功能和有序的，只是其内在规律并未充分外露。有些随机量、无规则的干扰成分以及杂乱无章的数据列，从灰色系统的观点看，并不认为是不可捉摸的。相反地，灰色系统理论将随机量看作是在一定范围内变化的灰色量，按适当的办法将原始数据进行处理，将灰色数变换为生成数，从生成数进而得到规律性较强的生成函数。例如，某些系统的数据经处理后呈现出指数规律，这是由于大多数系统都是广义的能量系统，而指数规律是能量变化的一种规律。灰色系统理论的量化基础是生成数，从而突破了概率统计的局限性，使其结果不再是过去依据大量数据得到的经验性的统计规律，而是现实性的生成律。这种使灰色系统变得尽量清晰明了的过程被称为白化。

目前，灰色系统理论已成功地应用于工程控制、经济管理、未来学研究、生态系统及复杂多变的农业系统中，并取得了可喜的成就。灰色系统理论有可能对社会、经济等抽象系统进行分析、建模、预测、决策和控制，它有可能成为人们认识客观系统改造客观系统的一个新型的理论工具。

§2　关联分析

大千世界里的客观事物往往现象复杂，因素繁多。我们往往需要对系统进行因素分析，这些因素中哪些对系统来讲是主要的，哪些是次要的，哪些需要发展，哪些需要抑制，哪些是潜在的，哪些是明显的。一般来讲，这些都是我们极为关心的问题。事实上，因素间关联性如何、关联程度如何量化等问题是系统分析的关键和起点。

因素分析的基本方法过去主要采取回归分析等办法。正如前一节指出的，回归分

析的办法有很多欠缺，如要求大量数据、计算量大及可能出现反常情况等。为克服以上弊病，本节采用关联度分析的办法来做系统分析。

作为一个发展变化的系统，关联分析实际上是动态过程发展态势的量化比较分析。所谓发展态势比较，也就是系统各时期有关统计数据的几何关系的比较。

例如，某地区 1977～1983 年总收入与养猪、养兔收入资料见表 1。

表 1　收入数据

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
总收入	18	20	22	40	44	48	60
养　猪	10	15	16	24	38	40	50
养　兔	3	2	12	10	22	18	20

根据表 1，做曲线图 1。

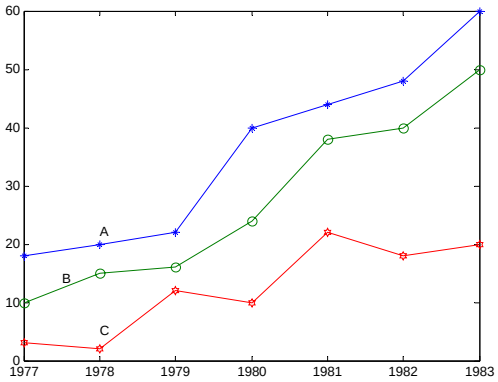


图 1　收入数据图

由上图易看出，曲线 A 与曲线 B 发展趋势比较接近，而与曲线 C 相差较大，因此可以判断，该地区对总收入影响较直接的是养猪业，而不是养兔业。

很显然，几何形状越接近，关联程度也就越大。当然，直观分析对于稍微复杂些的问题则显得难于进行。因此，需要给出一种计算方法来衡量因素间关联程度的大小。

2.1 数据变换技术

为保证建模的质量与系统分析的正确结果，对收集来的原始数据必须进行数据变换和处理，使其消除量纲和具有可比性。

定义 1　设有序列

$$x = (x(1), x(2), \cdots, x(n))$$

则称映射

$$f: x \to y$$
$$f(x(k)) = y(k), \quad k = 1,2,\cdots,n$$

为序列 x 到序列 y 的数据变换。

1）当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{x(1)} = y(k), \quad x(1) \neq 0$$

称 f 是初值化变换。

2）当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\bar{x}} = y(k), \quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x(k)$$

称 f 是均值化变换。

3）当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\max\limits_{k} x(k)} = y(k)$$

称 f 是百分比变换。

4）当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{\min\limits_{k} x(k)} = y(k), \quad \min_{k} x(k) \neq 0$$

称 f 是倍数变换。

5）当

$$f(x(k)) = \frac{x(k)}{x_0} = y(k)$$

其中 x_0 为大于零的某个值，称 f 是归一化变换。

6）当

$$f(x(k))=\frac{x(k)-\min\limits_{k}x(k)}{\max\limits_{k}x(k)}=y(k)$$

称 f 是极差最大值化变换。

7）当

$$f(x(k))=\frac{x(k)-\min\limits_{k}x(k)}{\max\limits_{k}x(k)-\min\limits_{k}x(k)}=y(k)$$

称 f 是区间值化变换。

2.2　关联分析

定义 2　选取参考数列

$$x_0=\{x_0(k)\mid k=1,2,\cdots,n\}=(x_0(1),x_0(2),\cdots,x_0(n))$$

其中 k 表示时刻。假设有 m 个比较数列

$$x_i=\{x_i(k)\mid k=1,2,\cdots,n\}=(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(n))\text{，}\ i=1,2,\cdots,m$$

则称

$$\xi_i(k)=\frac{\min\limits_{s}\min\limits_{t}\left|x_0(t)-x_s(t)\right|+\rho\max\limits_{s}\max\limits_{t}\left|x_0(t)-x_s(t)\right|}{\left|x_0(k)-x_i(k)\right|+\rho\max\limits_{s}\max\limits_{t}\left|x_0(t)-x_s(t)\right|}\qquad(1)$$

为比较数列 x_i 对参考数列 x_0 在 k 时刻的关联系数，其中 $\rho\in[0,1]$ 为分辨系数。称（1）式中 $\min\limits_{s}\min\limits_{t}\left|x_0(t)-x_s(t)\right|$、$\max\limits_{s}\max\limits_{t}\left|x_0(t)-x_s(t)\right|$ 分别为两级最小差及两级最大差。

一般来讲，分辨系数 ρ 越大，分辨率越大；ρ 越小，分辨率越小。

（1）式定义的关联系数是描述比较数列与参考数列在某时刻关联程度的一种指标，由于各个时刻都有一个关联数，因此信息显得过于分散，不便于比较，为此我们给出

定义 3　称

$$r_i=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_i(k)\qquad(2)$$

为数列 x_i 对参考数列 x_0 的关联度。

由（2）易看出，关联度是把各个时刻的关联系数集中为一个平均值，亦即把过于分散的信息集中处理。利用关联度这个概念，我们可以对各种问题进行因素分析。考虑

下面的问题。

例 1　通过对某健将级女子铅球运动员的跟踪调查，获得其 1982 年至 1986 年每年最好成绩及 16 项专项素质和身体素质的时间序列资料，见表 2，试对此铅球运动员的专项成绩进行因素分析。

表 2　各项成绩数据

	1982	1983	1984	1985	1986
铅球专项成绩 x_0	13.6	14.01	14.54	15.64	15.69
4kg 前抛 x_1	11.50	13.00	15.15	15.30	15.02
4kg 后抛 x_2	13.76	16.36	16.90	16.56	17.30
4kg 原地 x_3	12.41	12.70	13.96	14.04	13.46
立定跳远 x_4	2.48	2.49	2.56	2.64	2.59
高　翻 x_5	85	85	90	100	105
抓　举 x_6	55	65	75	80	80
卧　推 x_7	65	70	75	85	90
3kg 前抛 x_8	12.80	15.30	16.24	16.40	17.05
3kg 后抛 x_9	15.30	18.40	18.75	17.95	19.30
3kg 原地 x_{10}	12.71	14.50	14.66	15.88	15.70
3kg 滑步 x_{11}	14.78	15.54	16.03	16.87	17.82
立定三级跳远 x_{12}	7.64	7.56	7.76	7.54	7.70
全　蹲 x_{13}	120	125	130	140	140
挺　举 x_{14}	80	85	90	90	95
30 米起跑 x_{15}	4”2	4”25	4”1	4”06	3”99
100 米 x_{16}	13”1	13”42	12”85	12”72	12”56

在利用（1）式及（2）式计算关联度之前，我们需对表 2 的各个数列做初始化处理。一般来讲，实际问题中的不同数列往往具有不同的量纲，而我们在计算关联系数时，要求量纲要相同。因此，需首先对各种数据进行无量纲化。另外，为了易于比较，要求所有数列有公共的交点。为了解决上述两个问题，我们对给定数列进行变换。

定义 4　给定数列 $x=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$，称

$$\bar{x}=\left(1,\frac{x(2)}{x(1)},\cdots,\frac{x(n)}{x(1)}\right)$$

为原始数列 X 的初始化数列。

这样，我们可对表 2 中的 17 个数列进行初始化处理。注意，对于前 15 个数列，随着时间的增加，数值的增加意味着运动水平的进步，而对后 2 个数列来讲，随着时间的增加，数值（秒数）的减少却意味着运动水平的进步。因此，在对数列 x_{15} 及 x_{16} 进行初始化处理时，采取以下公式

$$x_i=\left(1,\frac{x_i(1)}{x_i(2)},\frac{x_i(1)}{x_i(3)},\frac{x_i(1)}{x_i(4)},\frac{x_i(1)}{x_i(5)}\right),\quad i=15,16$$

依照问题的要求，我们自然选取铅球运动员专项成绩作为参考数列，将表 2 中的各个数列的初始化数列代入（1）及（2）式，易算出各数列的关联度如下表（这里 $\rho=0.5$）。

表 3　关联度计算结果

r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8
0.588	0.663	0.854	0.776	0.855	0.502	0.659	0.582
r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}	r_{13}	r_{14}	r_{15}	r_{16}
0.683	0.696	0.896	0.705	0.933	0.847	0.745	0.726

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load x.txt     %把原始数据存放在纯文本文件 x.txt 中
for i=1:15
    x(i,:)=x(i,:)/x(i,1);     %标准化数据
end
for i=16:17
    x(i,:)=x(i,1)./x(i,:);    %标准化数据
end
data=x;
n=size(data,1);
ck=data(1,:);m1=size(ck,1);
bj=data(2:n,:);m2=size(bj,1);
for i=1:m1
    for j=1:m2
      t(j,:)=bj(j,:)-ck(i,:);
```

```
        end
        jc1=min(min(abs(t')));jc2=max(max(abs(t')));
        rho=0.5;
        ksi=(jc1+rho*jc2)./(abs(t)+rho*jc2);
        rt=sum(ksi')/size(ksi,2);
        r(i,:)=rt;
    end
    r
    [rs,rind]=sort(r,'descend')     %对关联度进行排序
```

由表 3 易看出，影响铅球专项成绩的前八项主要因素依次为全蹲、3kg 滑步、高翻、4kg 原地、挺举、立定跳远、30 米起跳、100 米成绩。因此，在训练中应着重考虑安排这八项指标的练习。这样可减少训练的盲目性，提高训练效果。

应该指出的是，公式（1）中的$|x_0(k)-x_i(k)|$不能区别因素关联是正关联还是负关联，可采取下述办法解决这个问题。记

$$\sigma_i=\sum_{k=1}^{n}kx_i(k)-\sum_{k=1}^{n}x_i(k)\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n},\quad i=1,2,\cdots,n$$

则：

（1）当$\text{sign}(\sigma_i)=\text{sign}(\sigma_j)$，则$x_i$和$x_j$为正关联；

（2）当$\text{sign}(\sigma_i)=-\text{sign}(\sigma_j)$，则$x_i$和$x_j$为负关联。

§3 优势分析

当参考数列不止一个，被比较的因素也不止一个时，则需进行优势分析。

假设有m个参考数列（宜称母因素），记为$y_1,y_2,\cdots,y_m$，再假设有l个比较数列（亦称子因素），记为$x_1,x_2,\cdots,x_l$。显然，每一个参考数列对l个比较数列有l个关联度，设r_{ij}表示比较数列x_j对参考数列y_i的关联度，可构造关联（度）矩阵$R=(r_{ij})_{m\times l}$。根据矩阵R的各个元素的大小，可分析判断出哪些因素起主要影响，哪些因素起次要影响。起主要影响的因素称之为优势因素。再进一步，当某一列元素大于其它列元素时，称此列所对应的子因素为优势子因素；若某一行元素均大于其它行元素时，称此行所对应的母元素为优势母元素。例如，矩阵R的第 3 列元素大于其它各列元素，

$$r_{i3}>r_{ij},\quad i=1,2,\cdots,m;\quad j\neq 3$$

则称 x_3 为优势子因素。

如果矩阵 R 的某个元素达到最大，则该行对应的母因素被认为是所有母因素中影响最大的。

为简单起见，先来讨论一下“对角线”以上元素为零的关联矩阵，例如

$$R=\begin{bmatrix}0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.6 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.7 & 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0\\ 0.4 & 0.6 & 0.7 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.3 & 0.8 & 0.2 & 0.7 & 0.504 & 0\end{bmatrix}$$

因为第 1 列元素是满的，故称第 1 个子元素为潜在优势子因素。第 2 列元素中有一个元素为零，故称第 2 个子因素为次潜在优势子因素。余下类推。

当关联矩阵的“对角线”以下全都是零元素，则称第 1 个母因素为潜在优势母因素……，为了分析方便，我们经常把相对较小的元素近似为零，从而使关联矩阵尽量稀疏。

我们参考一个实际问题。

例 2　某地区有 6 个母因素 y_i（$i=1,2,\cdots,6$），5 个子因素 x_j（$j=1,2,\cdots,5$）如下：

x_1：固定资产投资　　y_1：国民收入

x_2：工业投资　　y_2：工业收入

x_3：农业投资　　y_3：农业收入

x_4：科技投资　　y_4：商业收入

x_5：交通投资　　y_5：交通收入

y_6：建筑业收入

其数据列于表 4。

表 4　投资和收入数据

	1979	1980	1981	1982	1983
x_1	308.58	310	295	346	367
x_2	195.4	189.9	187.2	205	222.7

x_3	24.6	21	12.2	15.1	14.57
x_4	20	25.6	23.3	29.2	30
x_5	18.98	19	22.3	23.5	27.655
y_1	170	174	197	216.4	235.8
y_2	57.55	70.74	76.8	80.7	89.85
y_3	88.56	70	85.38	99.83	103.4
y_4	11.19	13.28	16.82	18.9	22.8
y_5	4.03	4.26	4.34	5.06	5.78
y_6	13.7	15.6	13.77	11.98	13.95

根据表 4 的数据，利用如下的 MATLAB 程序

```
clc,clear
load data.txt   %把原始数据存放在纯文本文件 data.txt 中
n=size(data,1);
for i=1:n
    data(i,:)=data(i,:)/data(i,1); %标准化数据
end
ck=data(6:n,:);m1=size(ck,1);
bj=data(1:5,:);m2=size(bj,1);
for i=1:m1
    for j=1:m2
      t(j,:)=bj(j,:)-ck(i,:);
    end
    jc1=min(min(abs(t')));jc2=max(max(abs(t')));
    rho=0.5;
    ksi=(jc1+rho*jc2)./(abs(t)+rho*jc2);
    rt=sum(ksi')/size(ksi,2);
    r(i,:)=rt;
end
r
```

计算出各个子因素对母因素的关联度（这里取 $\rho = 0.5$），从而得到关联矩阵为

$$R=\begin{bmatrix}0.802 & 0.761 & 0.557 & 0.810 & 0.936\\ 0.689 & 0.666 & 0.529 & 0.885 & 0.800\\ 0.891 & 0.858 & 0.579 & 0.577 & 0.675\\ 0.678 & 0.663 & 0.568 & 0.780 & 0.731\\ 0.811 & 0.774 & 0.565 & 0.804 & 0.921\\ 0.743 & 0.766 & 0.562 & 0.607 & 0.632\end{bmatrix}$$

从关联矩阵 R 可以看出：

（1）第 4 行元素几乎最小，表明各种投资对商业收入影响不大，即商业是一个不太需要依赖外资而能自行发展的行业。从消耗投资上看，这是劣势，但从少投资多收入的效益观点看，商业是优势。

（2）$r_{15}=0.936$ 最大，表明交通投资的多少对国民收入的影响最大。也可以从此看出交通的影响。

（3）$r_{55}=0.921$ 仅次于 r_{15}，表明交通收入主要取决于交通投资，这是很自然的。

（4）在第 4 列中 $r_{24}=0.885$ 最大，表明科技对工业影响最大；而 $r_{34}=0.577$ 是该列中最小的，表明从全面来衡量，还没有使科技投资与农业经济挂上钩，即科技投资针对的不是农村需要的科技。

（5）第三行的前 3 个元素比价大，表明农业是个综合性行业，需其它方面的配合，例如，$r_{31}=0.891$ 表明固定资产投资能够较大地促进农业的发展。另外，$r_{32}=0.858$ 表明农业发展与交通发展也是密切相关的。

§4 生成数

4.1 累加生成

在研究社会系统、经济系统等抽象系统时，往往要遇到随机干扰（即所谓“噪声”）。人们对“噪声”污染系统的研究大多基于概率统计方法。但概率统计方法有很多不足之处：要求大量数据、要求有典型的统计规律、计算工作量等。而且在某些问题中，其概率意义下的结论并不直观或信息量少。例如，预报某天下雨的概率是 0.5，晴天的概率也是 0.5，这种结论对于人们来讲毫无意义。

灰色系统理论把一切随机量都看作灰色数—即在指定范围内变化的所有白色数的全体。对灰色数的处理不是找概率分布或求统计规律，而是利用数据处理的办法去寻找数据间的规律。通过对数列中的数据进行处理，产生新的数列，以此来挖掘和寻找数的规律性的方法，叫做数的生成。数的生成方式有多种：累加生成、累减生成以及加权累加等等。这里主要介绍累加生成。

定义 5　把数列 x 各时刻数据依次累加的过程叫做累加过程，记作 AGO，累加所得的新数列，叫做累加生成数列。具体地，设原始数列为

$x^0=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$，累加生成数列记为 $x^{(1)}=(x^{(1)}(1),\cdots,x^{(1)}(n))$，且 $x^{(0)}$ 与 $x^{(1)}$ 满足

$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=\alpha}^{k}x^{(0)}(i)\text{，}k=\alpha,\cdots,n \tag{3}$$

其中 $\alpha\le n$ 为正整数。上述累加过程当 $1<\alpha\le k$ 时称为去首累加生成，当 $\alpha=1$ 时称为一般累加生成。

这里，我们只讨论 $\alpha=1$ 时的情形，（3）式中上标（1）表示 1 次累加生成，记作 1—AGO。在一次累加数列 $x^{(1)}$ 的基础上再做 1 次累加生成，可得到 2 次累加生成，记作 2—AGO。依次下去，对原始数列 $x^{(0)}$，我们可做 r 次累加生成，记作 r—AGO，从而得到 r 次累加生成数列 $x^{(r)}$。$x^{(r)}$ 与 $x^{(r-1)}$ 满足下面的关系：

$$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(r-1)}(i)\text{，}k=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

在实际应用中，最常用的是 1 次累加生成。本节只讨论 1 次累加生成。

一般地，经济数列等实际问题的数列皆是非负数列，累加生成可使非负的摆动与非摆动的数列或任意无规律性的数列转化为非减的、递增的数列。

当然，有些实际问题的数列中有负数（例如温度等），累加时略微复杂。有时，由于出现正负抵消这种信息损失的现象，数列经过累加生成后规律性非但没得到加强，甚至可能被削弱。对于这种情形，我们可以先进行移轴，然后再做累加生成。

4.2　累减生成

当然，利用数的生成可得到一系列有规律的数据，甚至可拟合成一些函数。但生成数列并非是直接可用的数列，因此，对于生成数还有个还原的问题。对累加生成，还原的办法采用累减生成。

对原始数列依次做前后两数据相减的运算过程叫累减生成，记作 IAGO。若 $x^{(r)}$ 为 r—AGO 数列，则称

$$x^{(r-1)}(k)=x^{(r)}(k)-x^{(r)}(k-1)\text{，}k=2,3,\cdots,n \tag{5}$$

为 r 次累减生成数列。

4.3　均值生成

设原始数列为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$，则称 $x^{(0)}(k-1)$ 与 $x^{(0)}(k)$ 为数

列 $x^{(0)}$ 的一对（紧）邻值，$x^{(0)}(k-1)$ 称为前值，$x^{(0)}(k)$ 称为后值。

对于常数 $\alpha \in [0,1]$，则称

$$z^{(0)}(k) = \alpha\, x^{(0)}(k) + (1-\alpha)x^{(0)}(k-1)$$

为由数列 $x^{(0)}$ 的邻值在生成系数（权）α 下的邻值生成数（或生成值）。

特别地，当生成系数 $\alpha = 0.5$ 时，则称

$$z^{(0)}(k) = 0.5x^{(0)}(k) + 0.5x^{(0)}(k-1) \qquad (6)$$

为（紧）邻均值生成数，即等权邻值生成数。

类似地，可以定义非邻值生成数：

$$z^{(0)}(k) = \alpha\, X^{(0)}(k+1) + (1-\alpha)x^{(0)}(k-1)$$

和

$$\tilde{z}^{(0)}(k) = 0.5x^{(0)}(k+1) + 0.5x^{(0)}(k-1)$$

而数列 $\tilde{z}^{(0)} = (\tilde{z}^{(0)}(1), \tilde{z}^{(0)}(2), \cdots, \tilde{z}^{(0)}(n))$ 称为非紧邻均值（mean）生成数列。

§5 灰色模型 GM

灰色系统理论是基于关联空间、光滑离散函数等概念定义灰导数与灰微分方程，进而用离散数据列建立微分方程形式的动态模型，由于这是本征灰色系统的基本模型，而且模型是近似的、非唯一的，故这种模型为灰色模型，记为 GM（Grey Model），即灰色模型是利用离散随机数经过生成变为随机性被显著削弱而且较有规律的生成数，建立起的微分方程形式的模型，这样便于对其变化过程进行研究和描述。

5.1 GM(1,1)模型

1．GM(1,1)的定义

设 $x^{(0)}$ 为 n 个元素的数列 $x^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$，$x^{(0)}$ 的 AGO 生成数列为 $x^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n))$，其中 $x^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^{k} x^{(0)}(i)$（$k = 1,2,\cdots,n$）。则定义 $x^{(1)}$ 的灰导数为

$$d(k) = x^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - x^{(1)}(k-1),$$

令 $z^{(1)}$ 为数列 $x^{(1)}$ 的紧邻均值数列，即

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),\ \ k=2,3,\cdots n$$

则 $z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$。于是定义 GM(1,1)的灰微分方程模型为

$$d(k)+az^{(1)}(k)=b,$$

即

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b \qquad (7)$$

其中 $x^{(0)}(k)$ 称为灰导数，a 称为发展系数，$z^{(1)}(k)$ 称为白化背景值，b 称为灰作用量。

将时刻 $k=2,3,\cdots,n$ 代入（7）式中有

$$\begin{cases} x^{(0)}(2)+az^{(1)}(2)=b \\ x^{(0)}(3)+az^{(1)}(3)=b \\ \cdots\cdots \\ x^{(0)}(n)+az^{(1)}(n)=b \end{cases}$$

令 $Y=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^T$，$u=(a,b)^T$，$B=\begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$，称 Y 为数据向量，B 为数据矩阵，u 为参数向量，则 GM(1,1)模型可以表示为矩阵方程 $Y=Bu$。

由最小二乘法可以求得

$$\hat{u}=(\hat{a},\hat{b})^T=(B^TB)^{-1}B^TY$$

2．GM(1,1)的白化型

对于 GM(1,1)的灰微分方程（7），如果将 $x^{(0)}(k)$ 的时刻 $k=2,3,\cdots,n$ 视为连续连续的变量 t，则数列 $x^{(1)}$ 就可以视为时间 t 的函数，记为 $x^{(1)}=x^{(1)}(t)$，并让灰导数 $x^{(0)}(k)$ 对应于导数 $\dfrac{dx^{(1)}}{dt}$，背景值 $z^{(1)}(k)$ 对应于 $x^{(1)}(t)$。于是得到 GM(1,1)的灰微分方程对应的白微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b \tag{8}$$

称之为 GM(1,1)的白化型。

值得注意的是：GM(1,1)的白化型（8）并不是由 GM(1,1)的灰微分方程直接推导出来的，它仅仅是一种“借用”或“白化默认”。

另一方面，GM(1,1)的白化型是一个真正的微分方程，如果白化型模型精度高，则表明所用数列建立的模型 GM(1,1)与真正的微分方程模型吻合较好，反之亦然。

5.2 $GM(1,N)$ 模型

1. $GM(1,N)$ 模型定义

GM(1,1)即表示模型是 1 阶的，且只含 1 个变量的灰色模型。而 $GM(1,N)$ 即表示模型是 1 阶的，包含有 N 个变量的灰色模型。

设系统有 N 个行为因子，即原始数列为

$$x_i^{(0)}=(x_i^{(0)}(1),x_i^{(0)}(2),\cdots,x_i^{(0)}(n))，\ i=1,2,\cdots,N$$

记 $x_i^{(1)}$ 为 $x_i^{(0)}$ 的 AGO 数列，即

$$x_i^{(1)}=(x_i^{(1)}(1),x_i^{(1)}(2),\cdots,x_i^{(1)}(n))$$

$$=(x_i^{(1)}(1),x_i^{(1)}(1)+x_i^{(0)}(2),\cdots,x_i^{(1)}(n-1)+x_i^{(0)}(n))，\ i=1,2,\cdots,N$$

其中 $x_i^{(1)}(k)=\sum_{j=1}^{k}x_i^{(0)}(j)$（$k=1,2,\cdots,n$）。取 $x_1^{(1)}$ 的均值数列

$$z_1^{(1)}(k)=0.5x_1^{(1)}(k)+0.5x_1^{(1)}(k-1)，\ k=2,3,\cdots,n$$

则 $z_1^{(1)}=(z_1^{(1)}(2),z_1^{(1)}(3),\cdots,z_1^{(1)}(n))$。于是可得到 $GM(1,N)$ 的灰微分方程为

$$x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(k) \tag{9}$$

其中 $x_1^{(0)}(k)$ 为灰导数，$z_1^{(1)}(k)$ 为背景值，$a,b_i(i=2,3,\cdots,N)$ 为参数。

如果对于一切时刻 $k=2,3,\cdots,n$，引入向量矩阵记号

$$Y=[x_1^{(0)}(2),x_1^{(0)}(3),\cdots,x_1^{(0)}(n)]^T,\quad u=[a,b_2,b_3,\cdots,b_N]^T$$

$$B=\begin{bmatrix}-z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2)\\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n)\end{bmatrix}$$

则$\mathrm{GM}(1,N)$的灰微分方程为

$$Y=Bu$$

其中Y为已知数据向量，B为$\mathrm{GM}(1,N)$已知数据矩阵，u为参数向量。用$\hat{u}$表示u的估计值，令$\varepsilon=Y-B\hat{u}$表示估计值的残差，根据最小二乘法，求使

$$J(\hat{u})=\varepsilon^T\varepsilon=(Y-B\hat{u})^T(Y-B\hat{u})$$

达到最小值的估计值$\hat{u}$。

事实上，如果存在$(B^TB)^{-1}$，则有

$$\hat{u}=[\hat{a},\hat{b}_2,\hat{b}_3,\cdots,\hat{b}_N]^T=(B^TB)^{-1}B^TY \qquad (10)$$

如果(B^TB)为奇异矩阵（例如当$n-1<N$时），即$(B^TB)^{-1}$不存在，则此时$\hat{u}$不能用（10）式确定。但注意到$\hat{u}$的元素实际上是各子因素对主因素影响大小的反映，因此，我们可以引入加权矩阵$W=\mathrm{diag}(w_1,w_2,\cdots,w_N)$，使对各因素的未来发展趋势进行调整控制。对于未来发展减弱趋势的因素赋予较大的权值，而对于未来增强趋势的因素赋予较小的权值，使之更好地反映未来的实际情况。此时，计算向量$\hat{u}$可采用下面的公式

$$\hat{u}=[\hat{a},\hat{b}_2,\hat{b}_3,\cdots,\hat{b}_N]^T=W^{-1}B^T(BW^{-1}B^T)^{-1}Y$$

2．$\mathrm{GM}(1,N)$的白化型

对于模型$\mathrm{GM}(1,N)$的灰微分方程（9），如果将$x_i^{(1)}(k)$的时刻$k=1,2,\cdots,N$视为连续变量t，则数列$x_i^{(1)}(k)$就可以视为时间t的函数，记为$x_i^{(1)}=x_i^{(1)}(t)$。则可得到$\mathrm{GM}(1,N)$的白化微分方程

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}(t)=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(t)\,,$$

即为一阶 N 个变量的微分方程。

§6 灰色预测

灰色预测是指利用 GM 模型对系统行为特征的发展变化规律进行估计预测，同时也可以对行为特征的异常情况发生的时刻进行估计计算，以及对在特定时区内发生事件的未来时间分布情况做出研究等等。这些工作实质上是将“随机过程”当作“灰色过程”，“随机变量”当作“灰变量”，并主要以灰色系统理论中的 GM(1,1)模型来进行处理。

灰色预测在工业、农业、商业等经济领域，以及环境、社会和军事等领域中都有广泛的应用。特别是依据目前已有的数据对未来的发展趋势做出预测分析。

6.1 灰色预测的方法

设已知参考数据列为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$，做 1 次累加（AGO）生成数列

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

$$=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(1)+x^{(0)}(2),\cdots,x^{(1)}(n-1)+x^{(0)}(n))$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$（$k=1,2,\cdots,n$）。求均值数列

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)\,,\quad k=2,3,\cdots n$$

则 $z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$。于是建立灰微分方程为

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b\,,\quad k=2,3,\cdots,n$$

相应的白化微分方程为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}(t)=b\,,\tag{11}$$

记 $u=(a,b)^T$，$Y=(x^{(0)}(2),x^{(0)}(3),\cdots,x^{(0)}(n))^T$，$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$，则由最小二

乘法，求得使 $J(\hat{u})=(Y-B\hat{u})^T(Y-B\hat{u})$ 达到最小值的 $\hat{u}=(a,b)^T=(B^TB)^{-1}B^TY$ 。于是求解方程（11）得

$$x^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a},\quad k=1,2,\cdots,n-1。$$

6.2　灰色预测的步骤

1．数据的检验与处理

首先，为了保证建模方法的可行性，需要对已知数据列做必要的检验处理。设参考数据为 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$，计算数列的级比

$$\lambda(k)=\frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)},\quad k=2,3,\cdots,n$$

如果所有的级比 $\lambda(k)$ 都落在可容覆盖 $(e^{-\frac{2}{n+1}},e^{\frac{2}{n+2}})$ 内，则数列 $x^{(0)}$ 可以作为模型GM(1,1)的数据进行灰色预测。否则，需要对数列 $x^{(0)}$ 做必要的变换处理，使其落入可容覆盖内。即取适当的常数 c，作平移变换

$$y^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)+c,\quad k=1,2,\cdots,n$$

则使数列 $y^{(0)}=(y^{(0)}(1),y^{(0)}(2),\cdots,y^{(0)}(n))$ 的级比

$$\lambda_y(k)=\frac{y^{(0)}(k-1)}{y^{(0)}(k)}\in X,\quad k=2,3,\cdots,n$$

2．建立模型

按 6.1 节中的方法建立模型 GM(1,1)，则可以得到预测值

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a},\quad k=1,2,\cdots,n-1$$

而且 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$，$k=1,2,\cdots,n-1$。

3．检验预测值

（1）残差检验：令残差为 $\varepsilon(k)$，计算

$$\varepsilon(k)=\frac{x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)}{x^{(0)}(k)},\quad k=1,2,\cdots,n$$

如果 $\varepsilon(k)<0.2$，则可认为达到一般要求；如果 $\varepsilon(k)<0.1$，则认为达到较高的要求。

（2）级比偏差值检验：首先由参考数据 $x^{(0)}(k-1)$， $x^{(0)}(k)$ 计算出级比 $\lambda(k)$，再用发展系数 a 求出相应的级比偏差

$$\rho(k)=1-\left(\frac{1-0.5a}{1+0.5a}\right)\lambda(k)$$

如果 $\rho(k)<0.2$，则可认为达到一般要求；如果 $\rho(k)<0.1$，则认为达到较高的要求。

4．预测预报

由模型 GM(1,1)所得到的指定时区内的预测值，实际问题的需要，给出相应的预测预报。

6.3　灾变预测

给定原始数据列 $x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$。如果指定某个定值 ζ，并认为 $x^{(0)}$ 中那些大于 ζ 的点为具有异常值的点，然后将这些数据挑出来另组一数列，则称这一数列为上限灾变数列。例如，给定数列 $x^{(0)}=(3,0.7,8,5)$，若取 $\zeta=1$，则其上限灾变数列为

$$x_{\zeta}^{0}=(3,8,5)$$

同理，可定义下限灾变数列这个概念。注意，灾变预测不是预测数据本身的大小，而是预测异常值出现的时间。我们考虑下面这个问题。

例 3　某地区年平均降雨量数据如表 5

表 5　某地区年平均降雨量数据

年	1	2	3	4	5	6	7	8	9
降雨量	390.6	412	320	559.2	380.8	542.4	553	310	561
年	10	11	12	13	14	15	16	17	
降雨量	300	632	540	406.2	313.8	576	587.6	318.5	

规定 $\zeta=320$，并认为 $x^{(0)}(i)\le\zeta$ 为旱灾。预测下一次旱灾发生的时间。

写出初始数列

$$x^{(0)}=(390.6,412,320,559.2,380.8,542.4,553,310,561,300,632,$$
$$540,406.2,313.8,576,587.6,318.5)$$

由于满足 $x^{(0)}(i) \le 320$ 的 $x^{(0)}(i)$ 即为异常值，易得下限灾变数列为

$$x_{\varsigma}^{0} = (320,310,300,313.8,318.5)$$

其对应的时刻数列为

$$t = (3,8,10,14,17)$$

将数列 t 做 1 次累加，得

$$t^{(1)} = (3,11,21,35,52)$$

建立 GM(1,1)模型，得

$$\hat{u} = (a,b)^{T} = (-0.2536,6.2585)$$

$$\hat{t}^{(1)}(k+1) = 27.6774e^{0.2536k} - 24.6774 \qquad (12)$$

通过（12）式，预测到第 6 个及第 7 个数据为

$$t^{(0)}(6) = 22.034,\ t^{(0)}(7) = 28.3946$$

由于 22.034 与 17 相差 5.034，这表明下一次旱灾将发生在五年以后。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
a=[390.6,412,320,559.2,
380.8,542.4,553,310,561,300,632,540,406.2,313.8,576,587.6,318.5]'
;
t0=find(a<=320);
t1=cumsum(t0);n=length(t1);
B=[-0.5*(t1(1:end-1)+t1(2:end)),ones(n-1,1)];Y=t0(2:end);
r=B\Y
y=dsolve('Dy+a*y=b','y(0)=y0');
y=subs(y,{'a','b','y0'},{r(1),r(2),t1(1)});
yuce1=subs(y,'t',[0:n+1])
digits(6),y=vpa(y)   %为提高预测精度，先计算预测值，再显示微分方程的解
yuce=diff(yuce1);
yuce=[t0(1),yuce]
```

6.4　灰色预测计算实例

例 4　北方某城市 1986～1992 年道路交通噪声平均声级数据见表 6

表 6　市近年来交通噪声数据[dB(A)]

序号	年份	L_{eq}	序号	年份	L_{eq}
1	1986	71.1	5	1990	71.4
2	1987	72.4	6	1991	72.0
3	1988	72.4	7	1992	71.6
4	1989	72.1			

第一步: 级比检验

建立交通噪声平均声级数据时间序列如下：

$$\begin{aligned} x^{(0)} &= (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(7)) \\ &= (71.1, 72.4, 72.4, 72.1, 71.4, 72.0, 71.6) \end{aligned}$$

（1）求级比 $\lambda(k)$

$$\lambda(k) = \frac{x^{(0)}(k-1)}{x^{(0)}(k)}$$

$$\begin{aligned} \lambda &= (\lambda(2), \lambda(3), \cdots, \lambda(7)) \\ &= (0.982, 1, 1.0042, 1.0098, 0.9917, 1.0056) \end{aligned}$$

（2）级比判断

由于所有的 $\lambda(k) \in [0.982, 1.0098]$， $k = 2,3,\cdots,7$，故可以用 $x^{(0)}$ 作满意的 GM（1，1）建模。

第二步: GM（1，1）建模

（1）对原始数据 $x^{(0)}$ 作一次累加，即

$$x^{(1)} = (71.1, 143.5, 215.9, 288, 359.4, 431.4, 503)$$

（2）构造数据矩阵 B 及数据向量 Y

$$B=\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(6)+x^{(1)}(7)) & 1 \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(7) \end{bmatrix}$$

（3）计算 $\hat{u}$

$$\hat{u}=(a,b)^T=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{pmatrix} 0.0023 \\ 72.6573 \end{pmatrix}$$

于是得到 $a=0.0023$， $b=72.6573$。

（4）建立模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+0.0023x^{(1)}=72.6573$$

求解得

$$x^{(1)}(k+1)=(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a})e^{-ak}+\frac{b}{a}=-30929e^{-0.0023k}+31000$$

（5）求生成数列值 $\hat{x}^{(1)}(k+1)$ 及模型还原值 $\hat{x}^{(0)}(k+1)$：

令 $k=1,2,3,4,5,6,$ 由上面的时间响应函数可算得 $\hat{x}^{(1)}$，其中取

$$\hat{x}^{(1)}(1)=\hat{x}^{(0)}(1)=x^{(0)}(1)=71.1$$

由 $\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1),$ 取 $k=2,3,4,\cdots,7$，得

$$\hat{x}^{(0)}=(\hat{x}^{(0)}(1),\hat{x}^{(0)}(2),\cdots,\hat{x}^{(0)}(7))=(71.1,\ 72.4,\ 72.2,\ 72.1,\ 71.9,\ 71.7,\ 71.6)$$

第四步: 模型检验

模型的各种检验指标值的计算结果见表 7.

表 7　GM(1,1)模型检验表

序号	年份	原始值	模型值	残差	相对误差	级比偏差
1	1986	71.1	71.1	0	0	
2	1987	72.4	72.4	-0.0057	0.01%	0.0023
3	1988	72.4	72.2	0.1638	0.23%	0.0203

4	1989	72.1	72.1	0.0329	0.05%	-0.0018
5	1990	71.4	71.9	-0.4984	0.7%	-0.0074
6	1991	72.0	71.7	0.2699	0.37%	0.0107
7	1992	71.6	71.6	0.0378	0.05%	-0.0032

经验证，该模型的精度较高，可进行预测和预报。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x0=[71.1 72.4 72.4 72.1 71.4 72.0 71.6];
n=length(x0);
lamda=x0(1:n-1)./x0(2:n)
range=minmax(lamda)
x1=cumsum(x0)
for i=2:n
    z(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-z(2:n)',ones(n-1,1)];
Y=x0(2:n)';
u=B\Y
x=dsolve('Dx+a*x=b','x(0)=x0');
x=subs(x,{'a','b','x0'},{u(1),u(2),x1(1)});
yuce1=subs(x,'t',[0:n-1]);
digits(6),y=vpa(x)    %为提高预测精度，先计算预测值，再显示微分方程的解
yuce=[x0(1),diff(yuce1)]
epsilon=x0-yuce       %计算残差
delta=abs(epsilon./x0)  %计算相对误差
rho=1-(1-0.5*u(1))/(1+0.5*u(1))*lamda  %计算级比偏差值
```

§7 SARS 疫情对某些经济指标影响问题

7.1 问题的提出

2003 年的 SARS 疫情对中国部分行业的经济发展产生了一定影响，特别是对部分疫情较严重的省市的相关行业所造成的影响是显著的，经济影响主要分为直接经济影响和间接影响。直接经济影响涉及商品零售业、旅游业、综合服务等行业。很多方面难以进行定量地评估，现仅就 SARS 疫情较重的某市商品零售业、旅游业和综合服务业的影响进行定量的评估分析。

究竟 SARS 疫情对商品零售业、旅游业和综合服务业的影响有多大，已知某市从 1997 年 1 月到 2003 年 12 月的商品零售额、接待旅游人数和综合服务收入的统计数据如表 8、表 9 和表 10。

表 8　商品的零售额（单位：亿元）

年代	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	83.0	79.8	78.1	85.1	86.6	88.2	90.3	86.7	93.3	92.5	90.9	96.9
1998	101.7	85.1	87.8	91.6	93.4	94.5	97.4	99.5	104.2	102.3	101.0	123.5
1999	92.2	114.0	93.3	101.0	103.5	105.2	109.5	109.2	109.6	111.2	121.7	131.3
2000	105.0	125.7	106.6	116.0	117.6	118.0	121.7	118.7	120.2	127.8	121.8	121.9
2001	139.3	129.5	122.5	124.5	135.7	130.8	138.7	133.7	136.8	138.9	129.6	133.7
2002	137.5	135.3	133.0	133.4	142.8	141.6	142.9	147.3	159.6	162.1	153.5	155.9
2003	163.2	159.7	158.4	145.2	124.0	144.1	157.0	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

表 9　接待海外旅游人数（单位：万人）

年代	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	9.4	11.3	16.8	19.8	20.3	18.8	20.9	24.9	24.7	24.3	19.4	18.6
1998	9.6	11.7	15.8	19.9	19.5	17.8	17.8	23.3	21.4	24.5	20.1	15.9
1999	10.1	12.9	17.7	21.0	21.0	20.4	21.9	25.8	29.3	29.8	23.6	16.5
2000	11.4	26.0	19.6	25.9	27.6	24.3	23.0	27.8	27.3	28.5	32.8	18.5
2001	11.5	26.4	20.4	26.1	28.9	28.0	25.2	30.8	28.7	28.1	22.2	20.7
2002	13.7	29.7	23.1	28.9	29.0	27.4	26.0	32.2	31.4	32.6	29.2	22.9
2003	15.4	17.1	23.5	11.6	1.78	2.61	8.8	16.2	20.1	24.9	26.5	21.8

表 10　综合服务业累计数额（单位：亿元）

年代	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
1997	96	144	194	276	383	466	554	652	747	832	972
1998	111	169	235	400	459	565	695	805	881	1011	1139
1999	151	238	335	425	541	641	739	866	975	1087	1238
2000	164	263	376	531	600	711	913	1038	1173	1296	1497
2001	182	318	445	576	708	856	1000	1145	1292	1435	1667
2002	216	361	504	642	818	979	1142	1305	1479	1644	1920
2003	241	404	584	741	923	1114	1298	1492	1684	1885	2218

试根据这些历史数据建立预测评估模型，评估 2003 年 SARS 疫情给该市的商品零售业、旅游业和综合服务业所造成的影响。

7.2　模型的分析与假设

根据所掌握的历史统计数据可以看出，在正常情况下，全年的平均值较好地反映了相关指标的变化规律，这样可以把预测评估分成两部分：

（1）利用灰色理论建立 GM(1,1)模型，由 1997－2002 年的平均值预测 2003 年平均值；

（2）通过历史数据计算每个月的指标值与全年总值的关系，从而可预测出正常情

况下 2003 年每个月的指标值，再与实际值比较可以估算出 SARS 疫情实际造成的影响。

给出下面两条假设：

（1）假设该市的统计数据都是可靠准确的；

（2）假设该市在 SARS 疫情流行期间和结束之后，数据的变化只与 SARS 疫情的影响有关，不考虑其它随机因素的影响。

7.3　建立灰色预测模型 GM(1,1)

由已知数据，对于 1997－2002 年某项指标记为矩阵 $A=(a_{ij})_{6\times 12}$，计算每年的年平均值，记为

$$x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(6)) \tag{13}$$

并要求级比 $\lambda(i)=x^{(0)}(i-1)/x^{(0)}(i)\in(0.7515,1.3307)$（$i=2,3,\cdots,6$）。对 $x^{(0)}$ 作一次累加，则

$$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)，\ x^{(1)}(i)=\sum_{k=1}^{i}x^{(0)}(k)\ （i=2,3,\cdots,6）$$

记

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(6)) \tag{14}$$

取 $x^{(1)}$ 的加权均值，则 $z^{(1)}(k)=\alpha\, x^{(1)}(k)+(1-\alpha)x^{(1)}(k-1)$（$k=2,3,\cdots,6$），$\alpha$ 为确定参数，记

$$z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(6)) \tag{15}$$

GM(1,1)的白化微分方程模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b \tag{16}$$

其中 a 是发展灰度，b 是内生控制灰度。

由于 $x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)=x^{(0)}(k)$，取 $x^{(0)}(k)$ 为灰导数，$z^{(1)}(k)$ 为背景值，则方程（16）相应的灰微分方程为

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b\ （k=2,3,\cdots,6）$$

或

$$x^{(0)}(k)=-az^{(1)}(k)+b（k=2,3,\cdots,6）\tag{17}$$

即矩阵形式为

$$Y = B(a,b)^T ,$$

其中 $Y = (x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), \cdots, x^{(0)}(6))$，$B = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & -z^{(1)}(3) & \cdots & -z^{(1)}(6) \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$。

用最小二乘法求得参数的估计值为

$$(\hat{a},\hat{b})^T = (B^T B)^{-1} B^T Y \qquad (18)$$

于是方程（17）有响应（特解）

$$\hat{x}^{(1)}(t+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-at} + \frac{b}{a}$$

则

$$\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) \left(e^{-ak} - e^{-a(k-1)} \right) \qquad (19)$$

由（19）式可以得到 2003 年的平均值为 $\bar{x}$，则预测 2003 年的总值为 $Z = 12\bar{x}$。根据历史数据，可以统计计算出 2003 年第 i 个月的指标值占全年总值的比例为 u_i，即

$$u_i = \sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{6} a_{ij} \Big/ \sum_{i=1}^{12}\sum_{j=1}^{6} a_{ij} \text{，（} i = 1,2,\cdots,12 \text{）} \qquad (20)$$

则 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_{12})$，于是可得 2003 年每一个月的指标值为 $V = Zu$。

7.4　模型的求解

（1）商品零售额

由数据表 8，用（13）和（14）式计算可得年平均值、一次累加值分别为

$$x^{(0)} = (87.6167, 98.5, 108.475, 118.4167, 132.8083, 145.4083)$$

$$x^{(1)} = (97.6167, 186.1167, 294.5917, 413.0083, 545.8167, 691.225)$$

显然 $x^{(0)}$ 的所有级比都在可容区域内，经检验，在这里取参数 $\alpha = 0.4$ 比较合适，由（15）式则有

$$z^{(1)} = (127.0167, 229.5067, 341.9583, 466.1317, 603.98)$$

由最小二乘法用（18）式求得 $a = -0.099$，$b = 85.5985$。由（16）式可得 2003 年的月平均值为 $\bar{x} = 162.8793$ 亿元；年总值为 $Z = 1954.6$ 亿元。由（20）式得每月的比例为

$$u = (0.0794, 0.0807, 0.0749, 0.0786, 0.0819, 0.0818,$$
$$0.0845, 0.0838, 0.0872, 0.0886, 0.0866, 0.092)$$

故 2003 年 1－12 月的预测值为

$$V = Zu = (155.2, 157.7, 146.4, 153.5, 160.1, 159.8,$$
$$165.1, 163.8, 170.5, 173.1, 169.3, 179.8)\ (\text{亿元})$$

将预测值与实际统计值进行比较如表 11 所示。

表 11　2003 年商品的零售额（单位：亿元）

月　份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	155.2	157.7	146.4	153.5	160.1	159.8	165.1	163.8	170.5	173.1	169.3	179.8
实际值	163.2	159.7	158.4	145.2	124.0	144.1	157.0	162.6	171.8	180.7	173.5	176.5

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load han1.txt    %把原始数据保存在纯文本文件han1.txt中
han1(end,:)=[];m=size(han1,2);
x0=mean(han1,2);
x1=cumsum(x0)
alpha=0.4;n=length(x0);
z1=alpha*x1(2:n)+(1-alpha)*x1(1:n-1)
Y=x0(2:n);B=[-z1,ones(n-1,1)];
ab=B\Y
k=6;
x7hat=(x0(1)-ab(2)/ab(1))*(exp(-ab(1)*k)-exp(-ab(1)*(k-1)))
z=m*x7hat
u=sum(han1)/sum(sum(han1))
v=z*u
```

（2）接待海外旅游人数

由数据表9，用(13)和(14)式计算年平均值 $x^{(0)}$ 和一次累加值 $x^{(1)}$。取参数 $\alpha = 0.5$，由（15）式可得加权平均值 $z^{(1)}$。由（18），（19），（20）式可求得 $a = -0.0938$，$b = 16.2671$，$\bar{x} = 30.2649$，$Z = 12\bar{x} = 363.1785$，以及

$$u = (0.0407, 0.0732, 0.0703, 0.0878, 0.0907, 0.0848,$$
$$0.0836, 0.1022, 0.101, 0.1041, 0.0914, 0.0701)$$

于是可得到 2003 年的接待海外旅游人数的预测值，并与实际值比较如表 12 所示。

表 12　2003 年接待海外旅游人数（单位：万人）

月　份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	14.8	26.2	25.5	31.9	33.0	30.8	30.4	37.1	36.7	37.8	33.2	25.5
实际值	15.4	17.1	23.5	11.6	1.78	2.61	8.8	16.2	20.1	24.9	26.5	21.8

（3）综合服务业累计数据

首先将表 10 的数据进行必要的处理，然后用（13）和（14）式计算年平均值 $x^{(0)}$ 和一次累加值 $x^{(1)}$。取参数 $\alpha = 0.4$，由（15）式可得加权平均值 $z^{(1)}$。用（18），（19），（20）式可求得 $a = -0.1361$，$b = 487.7639$，$\bar{x} = 1171.3$，$Z = 11\bar{x} = 12885$，以及

$$u = (0.0191, 0.031, 0.0433, 0.0591, 0.0728, 0.0875,$$
$$0.1046, 0.1205, 0.1358, 0.1515, 0.1749)$$

于是可得到 2003 年的综合服务业累计数额的预测值，并与实际值比较如表 13 所示。

表 13　2003 年综合服务业累计数据（单位：亿元）

月　份	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
预测值	249	399	558	762	938	1127	1348	1553	1750	1952	2254
实际值	241	404	584	741	923	1114	1298	1492	1684	1885	2218

7.5　模型的结果分析

根据该市的统计报告显示，2003 年 4、5、6 三个月的实际商品零售额分别为 145.2、124、144.1 亿元。在这之前，根据统计部门的估计 4、5、6 三个月份 SARS 疫情对该市的商品零售业的影响最为严重，这三个月估计大约损失 62 亿元左右。从我们的模型预测结果来计算，4、5、6 三个月的损失为 60.1 亿元，这个数基本与专家的估计值相符，8 月基本恢复正常，这业说明了模型的正确性和可靠性。

对于旅游业来说是受影响最严重的行业之一，最严重的 4、5、6、7 四个月就损失 100 多万人，按最新统计数据，平均每人消费 1002 美元计算，大约损失 10 亿美元。全年大约损失 162 万人，约合 16.2 亿美元，到年底基本恢复正常。

对于综合服务业中的部分行业影响较大，如航空交通运输、宾馆餐饮等，但有些行业影响不大，如电信、通讯等，总平均来看，影响还不算太大，5、6、7、8 四个月大约损失 70 亿元。

该模型虽是就某经济指标的发展规律进行评估预测而建立的，但类似地也适用于其它方面的一些数据规律的评估预测问题，即该模型具有很广泛的应用性。

§8　道路交通事故灰色 Verhulst 预测模型[43]

灰色预测是通过原始数据的处理和灰色模型的建立，发现和掌握系统发展规律，对系统的未来状态作出科学的定量预测。目前应用较多的灰色预测模型是 GM(1,1)模型、灰色马尔可夫预测模型等，可用于预测交通事故发生次数、死亡人数、受伤人数和财产损失等指标。GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程。

但是道路交通系统是一个动态的时变系统，道路交通事故作为道路系统的行为特征量，具有一定的随机波动性，它的发展呈现某种变化趋势的非平稳随机过程，因此可建立交通事故灰色马尔可夫预测模型，以提高预测精度。但灰色马尔可夫预测模型的应用难点是如何进行状态划分，故对于非单调的摆动发展序列或具有饱和状态的 S 形序列，Verhulst 模型，GM(2,1)模型等更适用。Verhulst 模型主要用来描述具有饱和状态的过程，即 S 形过程，常用于人口预测、生物生长、繁殖预测及产品经济寿命预测等。今年来中国道路交通事故表现为具有饱和状态的 S 形过程，故可采用 Verhulst 模型对其进行预测。

8.1　Verhulst 模型简介

Verhulst 模型的基本原理和计算方法简介图下。

定义 6　设 $x^{(0)}$ 为原始数据序列

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$$

$x^{(1)}$ 为 $x^{(0)}$ 的一次累加生成（1－AGO）序列

$$x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})$$

$$x_k^{(1)}=\sum_{i=1}^{k}x_i^{(0)}\quad（k=1,2,\cdots,n）$$

$z^{(1)}$ 为 $x^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$z^{(1)}=(z_1^{(1)},z_2^{(1)},\cdots,z_n^{(1)})$$

$$z_k^{(1)}=0.5(x_k^{(1)}+x_{k-1}^{(1)})，\ k=2,3,\cdots,n$$

则称

$$x^{(0)}+az^{(1)}=b(z^{(1)})^2 \tag{21}$$

为灰色 Verhulst 模型，a 和 b 为参数。称

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^2 \tag{22}$$

为灰色 Verhulst 模型的白化方程，t 为时间。

定理 1　设灰色 Verhulst 模型如上所述，若

$$\hat{\alpha}=(a,b)^T$$

为参数列，且

$$B=\begin{bmatrix} -z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2 \\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2 \\ \vdots & \vdots \\ -z_n^{(1)} & (z_n^{(1)})^2 \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} x_2^{(0)} \\ x_3^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

则参数列 $\hat{\alpha}$ 的最小二乘估计满足

$$\hat{\alpha}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

定理 2　设灰色 Verhulst 模型如上所述，则白化方程的解（时间响应函数）为

$$x^{(1)}(t)=\frac{ax_0^{(1)}}{bx_0^{(1)}+(a-bx_0^{(1)})e^{at}} \tag{23}$$

灰色 Verhulst 模型的时间响应序列为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)}=\frac{ax_0^{(1)}}{bx_0^{(1)}+(a-bx_0^{(1)})e^{ak}} \tag{24}$$

$x_0^{(1)}$ 取为 $x_1^{(0)}$，则式（24）变为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)}=\frac{ax_1^{(0)}}{bx_1^{(0)}+(a-bx_1^{(0)})e^{ak}} \tag{25}$$

累减还原式为

$$\hat{x}_{k+1}^{(0)}=\hat{x}_{k+1}^{(1)}-\hat{x}_k^{(1)} \tag{26}$$

8.2　道路交通事故 Verhulst 预测模型

在实际问题中，常遇到原始数据本身呈 S 形的过程，这时，可取原始数据为 $x^{(1)}$，其一次累减生成（1—IAGO）为 $x^{(0)}$，建立 Verhulst 模型，直接对 $x^{(1)}$ 进行预测（模拟）。现以中国道路交通事故死亡人数为例，建立交通事故死亡人数 Verhualst 预测模型。

由《中国交通年鉴》、《中国汽车工业年鉴》等可得近年来中国道路交通事故死亡人数统计资料，见表 14。对于 2004 年，“2004(a)”表示按《道路交通安全法》施行前口径统计，“2004(b)”表示按《道路交通安全法》施行后口径统计。

表 14　道路交通事故死亡人数统计

年份	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
死亡人数(万人)	4.93	5.33	5.87	6.35	6.63	7.15	7.37	7.39
年份	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004(a)	2004(b)
死亡人数(万人)	7.81	8.35	9.39	10.59	10.94	10.44	9.92	10.71

1990～2003 年中国道路交通事故死亡人数曲线见图 2，可见曲线呈 S 形，故可建立 Verhulst 模型进行预测，其建模过程如下。

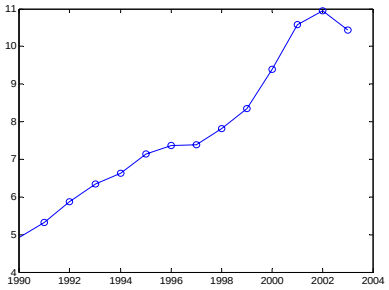


图 2　死亡人数曲线

（1）设 $x^{(1)}$ 为 1990～2003 年死亡人数的原始数据序列，即

$$x^{(1)}=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_{14}^{(1)})=(4.93,5.33,5.87,6.35,6.63,7.15,\\7.37,7.39,7.81,8.35,9.39,10.59,10.94,10.44)$$

（2）对 $x^{(1)}$ 作一次累减生成（1—IAGO），由

$$x_k^{(0)}=x_k^{(1)}-x_{k-1}^{(1)},\quad k=2,3,\cdots,14$$

得

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_{14}^{(0)})=(4.93,0.4,0.54,0.48,0.28,0.52,0.22,\\0.02,0.42,0.54,1.04,1.2,0.35,-0.5)$$

（3）对 $x^{(1)}$ 作紧邻均值生成，令

$$z_k^{(1)}=0.5(x_k^{(1)}+x_{k-1}^{(1)}),\quad k=2,3,\cdots,14$$

得

$$z^{(1)}=(z_2^{(1)},z_3^{(1)},\cdots,z_{14}^{(1)})=(5.13,5.6,6.11,6.49,6.89,7.26,7.38,\\7.6,8.08,8.87,9.99,10.765,10.69)$$

于是

$$B=\begin{bmatrix}-z_2^{(1)} & (z_2^{(1)})^2\\ -z_3^{(1)} & (z_3^{(1)})^2\\ \vdots & \vdots\\ -z_{14}^{(1)} & (z_{14}^{(1)})^2\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}x_2^{(0)}\\ x_3^{(0)}\\ \vdots\\ x_{14}^{(0)}\end{bmatrix}$$

（4）对参数列

$$\hat{\alpha}=(a,b)^T$$

进行最小二乘估计，得

$$\hat{\alpha}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}-0.128\\-0.0089\end{bmatrix}$$

（5）Verhulst 模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}-0.128x^{(1)}=-0.0089(x^{(1)})^2$$

其时间响应为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)}=\frac{\hat{a}x_1^{(1)}}{\hat{b}x_1^{(1)}+(\hat{a}-\hat{b}x_1^{(1)})e^{ak}}=\frac{0.6312}{0.04409+0.08395e^{-0.128k}}$$

（6）$x^{(1)}$ 的预测值 $\hat{x}^{(1)}$ 为

$$\hat{x}^{(1)}=(\hat{x}_1^{(1)},\hat{x}_2^{(1)},\cdots,\hat{x}_{14}^{(1)})=(4.9297,5.3513,5.7866,6.2328,6.6864,7.1438,$$
$$7.6014,8.0553,8.502,8.9382,9.3606,9.7668,10.1545,10.522)$$

（7）模型精度检验。一个灰色模型要经过检验才能判定其是否合理。只有通过检验的模型才能用来进行预测。检验方法有以下几种。

① 残差合格模型

设原始序列为

$$x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$$

相应的灰色模型预测（模拟）序列为

$$\hat{x}^{(0)}=(\hat{x}_1^{(0)},\hat{x}_2^{(0)},\cdots,\hat{x}_n^{(0)})$$

残差序列为

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(x_1^{(0)}-\hat{x}_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}-\hat{x}_n^{(0)})$$

相对误差序列为

$$\Delta=(\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_n)=\left(\left|\frac{\varepsilon_1}{x_1^{(0)}}\right|,\left|\frac{\varepsilon_2}{x_2^{(0)}}\right|,\cdots,\left|\frac{\varepsilon_n}{x_n^{(0)}}\right|\right)$$

则对于 $k\le n$，称

$$\Delta_k = \left| \frac{\varepsilon_k}{x_k^{(0)}} \right|$$

为 k 点模拟相对误差，称

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_k$$

为平均相对误差；称 $1-\overline{\Delta}$ 为平均相对精度，称 $1-\Delta_k$ 为 k 点模拟精度；给定 α，当 $\overline{\Delta} < \alpha$ 且 $\Delta_k < \alpha$ 成立时，称模型为残差合格模型。

② 关联度合格模型

设 $x^{(0)}$ 为原始序列，$\hat{x}^{(0)}$ 为相应的灰色模型预测（模拟）序列，g 为 $x^{(0)}$ 与 $\hat{x}^{(0)}$ 的绝对关联度。若对于给定的 $g_0 > 0$，有 $g > g_0$，则称模型为关联度合格模型。

③ 均方差比合格模型

设 $x^{(0)}$ 为原始序列，$\hat{x}^{(0)}$ 为相应的灰色模型预测（模拟）序列，$\varepsilon^{(0)}$ 为残差序列，则 $x^{(0)}$ 的均值、方差分别为

$$\begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x_k^{(0)} \\ S_1^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (x_k^{(0)} - \overline{x})^2 \end{cases} \tag{27}$$

$\varepsilon^{(0)}$ 的均值、方差分别为

$$\begin{cases} \overline{\varepsilon} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k \\ S_2^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\varepsilon_k - \overline{\varepsilon})^2 \end{cases} \tag{28}$$

均方差比值为

$$C = \frac{S_2}{S_1}$$

对于给定的 $C_0 > 0$，当 $C < C_0$ 时，称模型为均方差比合格模型。

④ 小误差概率合格模型

小误差概率为

$$p = P\{|\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}| < 0.6745S_1\}$$

对于给定的 $p_0 > 0$，当 $p > p_0$ 时，称模型为小误差概率合格模型。

由上可知，给定一组取值，就确定了检验模型精度的一个等级。常用的精度等级见表 15，可供检验模型参考。一般情况下，最常用的是相对误差检验指标。

表 15　灰色模型精度检验等级

等级	指　　标			
	相对误差 Δ	绝对关联度 g_0	均方差比值 C_0	小误差概率 p_0
一	0.01	0.90	0.35	0.95
二	0.05	0.80	0.50	0.80
三	0.10	0.70	0.65	0.70
四	0.20	0.60	0.80	0.60

由以上检验方法，可得 1990～2003 年中国道路交通事故死亡人数 Verhulst 模型误差检验值见表 16。

表 16　Verhulst 模型误差

序号 k	年份	原始数据 $x_k^{(1)}$（万人）	预测值 $\hat{x}_k^{(1)}$（万人）	残差 $x_k^{(1)} - \hat{x}_k^{(1)}$（万人）	相对误差 Δ_k (%)
1	1990	4.93	4.93	0	0
2	1991	5.33	5.3517	−0. 0217	0. 41
3	1992	5.87	5.7872	0. 0828	1. 41
4	1993	6.35	6.2335	0. 1165	1. 83
5	1994	6.63	6.6873	−0. 0573	0. 86
6	1995	7.15	7.1448	0. 0052	0. 07
7	1996	7.37	7.6025	−0. 2325	3. 16
8	1997	7.39	8.0566	−0. 6666	9. 02
9	1998	7.81	8.5034	−0. 6934	8. 88
10	1999	8.35	8.9397	−0. 5897	7. 06
11	2000	9.39	9.3622	0. 0278	0. 3
12	2001	10.59	9.7685	0. 8215	7. 76
13	2002	10.94	10.1562	0. 7838	7. 16
14	2003	10.44	10.5237	−0. 0837	0. 8
15	2004(a)	9.92	10.8681	−0. 9498	9. 57

16	2004(b)	10.71	10.8698	−0. 1598	1. 49

平均相对误差 $\overline{\Delta}=3.74\%$，则模型精度为二级；同时算得绝对关联度 g 为 0.9845，均方差比值 C 为 0.2355，则模型精度为一级，可见模型精度较高，可用于事故预测。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x1=[4.93 5.33 5.87 6.35 6.63 7.15 7.37 7.39 7.81 8.35 9.39 10.59 10.94 10.44];
n=length(x1);
nian=1990:2003;
plot(nian,x1,'o-');
x0=diff(x1);
x0=[x1(1),x0]
for i=2:n
    z1(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
z1
B=[-z1(2:end)',z1(2:end)'.^2]
Y=x0(2:end)'
abhat=B\Y        %估计参数 a,b 的值
x=dsolve('Dx+a*x=b*x^2','x(0)=x0');  %求解常微分方程
x=subs(x,{'a','b','x0'},{abhat(1),abhat(2),x1(1)});  %代入参数值
yuce=subs(x,'t',0:14)    %计算预测值
digits(6); x=vpa(x) %显示微分方程的解，为了提高计算精度，把该语句放在计算预测值之后，或者不使用该语句
yuce(16)=yuce(15);
x1_all=[x1,9.92,10.71];
epsilon=x1_all-yuce    %计算残差
delta=abs(epsilon./x1_all)    %计算相对误差
delta_mean=mean(delta)    %计算平均相对误差
x1_all_0=x1_all-x1_all(1);      %数据列的始点零化像
yuce_0=yuce-yuce(1);      %数据列的始点零化像
s0=abs(sum(x1_all_0(1:end-1))+0.5*x1_all_0(end));
s1=abs(sum(yuce_0(1:end-1))+0.5*yuce_0(end));
tt=yuce_0-x1_all_0;
s1_s0=abs(sum(tt(1:end-1))+0.5*tt(end));
absdegree=(1+s0+s1)/(1+s0+s1+s1_s0)    %计算灰色绝对关联度
c=std(epsilon,1)/std(x1_all,1)    %计算标准差比值
```

8.3　预测结果比较

由 1990～2003 年中国道路交通事故死亡人数资料，得到相应的 GM(1,1)模型为

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}-0.0098x^{(1)}=0.5$$

其时间响应式为

$$\hat{x}_{k+1}^{(1)}=50.9339-46.0039e^{-0.0098k}\text{，}\quad k=0,1,2,\cdots$$

由以上检验法可得 1990～2003 年中国道路交通事故死亡人数 GM(1,1)模型误差值见表 17。

表 17　GM(1,1)模型误差

序号 k	年份	原始数据 $x_k^{(1)}$（万人）	预测值 $\hat{x}_k^{(1)}$（万人）	残差 $x_k^{(1)}-\hat{x}_k^{(1)}$（万人）	相对误差 Δ_k (%)
1	1990	4.93	4.93	0	0
2	1991	5.33	5.3794	−0. 0494	0. 0093
3	1992	5.87	5.8244	0. 0456	0. 0078
4	1993	6.35	6.2651	0. 0849	0. 0134
5	1994	6.63	6.7014	−0. 0714	0. 0108
6	1995	7.15	7.1335	0. 0165	0. 0023
7	1996	7.37	7.5614	−0. 1914	0. 026
8	1997	7.39	7.9851	−0. 5951	0. 0805
9	1998	7.81	8.4046	−0. 5946	0. 0761
10	1999	8.35	8.8201	−0. 4701	0. 0563
11	2000	9.39	9.2315	0. 1585	0. 0169
12	2001	10.59	9.6389	0. 9511	0. 0898
13	2002	10.94	10.0423	0. 8977	0. 0821
14	2003	10.44	10.4417	−0. 0017	0. 0002
15	2004(a)	9.92	10.8373	−0. 9173	0. 0925
16	2004(b)	10.71	10.8373	−0. 1273	0. 0119

平均相对误差 $\overline{\Delta}=3.6\%$，则模型精度为二级；同时算得绝对关联度 g 为 0.9918，均方差比值 C 为 0.2395，则模型精度为一级，可见模型精度较高，可用于事故预测。

比较表 16 和表 17 可知，Verhulst 模型预测精度与 GM(1,1)模型几乎没有差别。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x1=[4.93　5.33　5.87　6.35　6.63　7.15　7.37　7.39　7.81　8.35
9.39　10.59　10.94　10.44];
```

```
n=length(x1);
x0=diff(x1);
x0=[x1(1),x0]
for i=2:n
    z1(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-z1(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=x0(2:end)';
abhat=B\Y        %估计参数 a,b 的值
x=dsolve('Dx+a*x=b','x(0)=x0');
x=subs(x,{'a','b','x0'},{abhat(1),abhat(2),x1(1)});
yuce=subs(x,'t',0:14)    %计算预测值
digits(6); x=vpa(x)  %显示微分方程的解，为了提高计算精度，把该语句放在计算预测值之后，或者不使用该语句
yuce(16)=yuce(15);
x1_all=[x1,9.92,10.71];
epsilon=x1_all-yuce    %计算残差
delta=abs(epsilon./x1_all)    %计算相对误差
delta_mean=mean(delta)    %计算平均相对误差
x1_all_0=x1_all-x1_all(1);      %数据列的始点零化像
yuce_0=yuce-yuce(1);      %数据列的始点零化像
s0=abs(sum(x1_all_0(1:end-1))+0.5*x1_all_0(end));
s1=abs(sum(yuce_0(1:end-1))+0.5*yuce_0(end));
tt=yuce_0-x1_all_0;
s1_s0=abs(sum(tt(1:end-1))+0.5*tt(end));
absdegree=(1+s0+s1)/(1+s0+s1+s1_s0)    %计算灰色绝对关联度
c=std(epsilon,1)/std(x1_all,1)    %计算标准差比值
```

8.4　结语

道路交通安全系统是一个灰色系统，可以应用灰色系统理论进行研究和分析，其中灰色预测模型和方法简便易用，在交通事故预测中得到了较多应用。GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程，而 Verhulst 模型则适用于非单调的摆动发展序列或具有饱和状态的 S 形序列。

§9　GM(2,1)和 DGM 模型

GM(1,1)模型适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程，对于非单调的摆动发展序列或有饱和的 S 形序列，可以考虑建立 GM(2,1)，DGM 和 Verhulst 模型。

9.1　GM(2,1)模型

定义 7　设原始序列

$$x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

其 1－AGO 序列 $x^{(1)}$ 和 1－IAGO 序列 $\alpha^{(1)}x^{(0)}$ 分别为

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

和

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

其中

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\quad k=2,3,\cdots,n$$

$x^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列为

$$z^{(1)}=(z^{(1)}(2),z^{(1)}(3),\cdots,z^{(1)}(n))$$

则称

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+a_1x^{(0)}(k)+a_2z^{(1)}(k)=b \tag{29}$$

为 GM(2,1)模型。

定义 8　称

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b \tag{30}$$

为 GM(2,1)模型的白化方程。

定理 3　设 $x^{(0)}$，$x^{(1)}$，$\alpha^{(1)}x^{(0)}$ 如定义 7 所述，且

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1)\\ x^{(0)}(3)-x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1)\end{bmatrix}$$

则 GM(2,1)参数列 $\hat{a}=(a_1,a_2,b)^T$ 的最小二乘估计为

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

定理 4　关于 GM(2,1)白化方程的解有以下结论：

（1）若 $x^{(1)*}$ 是 $\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b$ 的特解， $\bar{x}^{(1)}$ 是对应齐次方程

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=0$$

的通解，则 $x^{(1)*}+\bar{x}^{(1)}$ 是 GM(2,1)白化方程的通解。

（2）齐次方程的通解有以下三种情况：

当特征方程 $r^2+a_1r+a_2=0$ 有两个不相等的实根 r_1,r_2 时，

$$\bar{x}^{(1)}=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} \tag{31}$$

当特征方程有重根 r 时，

$$\bar{x}^{(1)}=e^{rt}(c_1+c_2t) \tag{32}$$

当特征方程有一对共轭复根 $r_1=\alpha+i\beta$ ， $r_2=\alpha-i\beta$ 时

$$\bar{x}^{(1)}=e^{\alpha t}(c_1\cos\beta t+c_2\sin\beta t) \tag{33}$$

（3）白化方程的特解有以下三种情况：

当零不是特征方程的根时， $x^{(1)*}=C$；

当零是特征方程的单根时， $x^{(1)*}=Cx$；

当零是特征方程的重根时， $x^{(1)*}=Cx^2$。

定理 5　设原始数据序列

$$x=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$$

令

$$xd=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$$

其中

$$x(k)d=\frac{1}{n-k+1}[x(k)+x(k+1)+\cdots+x(n)];\ k=1,2,\cdots,n \tag{34}$$

则当 x 为单调增长序列、单调衰减序列或振荡序列时， d 皆为弱化算子，并称 d 为平均弱化缓冲算子（AWBO）。

例 5　上海市上网户数的 GM(2,1)模型。1996～2001 年上海市上网户数数据序列为

$$x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(6))=(0.33,\ 0.9,\ 10.24,\ 42.24,\ 88.24,\ 104.1)$$

在互联网发展初期，增长势头十分强劲。因此，定理 5 引入的一阶缓冲算子弱化该序列的增长趋势，一阶缓冲序列仍记为 $x^{(0)}$，

$$x^{(0)}=(41,\ 49,\ 61,\ 78,\ 96,\ 104)$$

试以该序列为基础建立 GM(2,1)模型。

解　$x^{(0)}$ 的 1－AGO 序列和 1－IAGO 序列分别为

$$x^{(1)}=(41,\ 90,\ 151,\ 229,\ 325,\ 429)$$

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}=(0,\ 8,\ 12,\ 17,\ 18,\ 8)$$

$x^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$z^{(1)}=(0,\ 65.5,\ 120.5,\ 190,\ 277,\ 377)$$

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(6) & -z^{(1)}(6) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-49 & -65.5 & 1\\ -61 & -120.5 & 1\\ -78 & -190 & 1\\ -96 & -277 & 1\\ -104 & -377 & 1\end{bmatrix}$$

$$Y=(8,12,17,18,8)^T$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}-1.0922\\ 0.1959\\ -31.7983\end{bmatrix}$$

故得 GM(2,1)白化模型

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}-1.0922\frac{dx^{(1)}}{dt}+0.1959x^{(1)}=-31.7983$$

利用边界条件 $x^{(1)}(1)=41$，$x^{(1)}(6)=429$，解之得

$$x^{(1)}(t)=203.85e^{0.22622t}-0.5324e^{0.86597t}-162.317$$

于是 GM(2,1)时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=203.85e^{0.22622k}-0.5324e^{0.86597k}-162.317$$

所以

$$\hat{x}^{(1)}=(41,92,155,232,325,429)$$

做 IAGO 还原，有

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$$

$$\hat{x}^{(0)}=(41,51,63,77,92,104)$$

表 18　误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)}-\hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 Δ_k
2	49	51	−2	4.1%
3	61	63	−2	3.5%
4	78	77	1	1%
5	96	92	4	4%
6	104	104	0	0

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
x0=[41,49,61,78,96,104];
n=length(x0);
x1=cumsum(x0)
a_x0=diff(x0);
a_x0=[0,a_x0]
for i=2:n
   z(i)=0.5*(x1(i)+x1(i-1));
end
B=[-x0(2:end)',-z(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=a_x0(2:end)';
u=B\Y
x=dsolve('D2x+a1*Dx+a2*x=b','x(0)=c1,x(5)=c2');
x=subs(x,{'a1','a2','b','c1','c2'},{u(1),u(2),u(3),x1(1),x1(6)});
yuce=subs(x,'t',0:n-1);
digits(6),x=vpa(x)
x0_hat=[yuce(1),diff(yuce)]
epsilon=x0-x0_hat
delta=abs(epsilon./x0)
```

9.2　DGM(2,1)模型

定义 9　设原始序列

$$x^{(0)}=(x^{(0)}(1),x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n))$$

其 1－AGO 序列 $x^{(1)}$ 和 1－IAGO 序列 $\alpha^{(1)}x^{(0)}$ 分别为

$$x^{(1)}=(x^{(1)}(1),x^{(1)}(2),\cdots,x^{(1)}(n))$$

和

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

其中

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\quad k=2,3,\cdots,n$$

则称

$$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+ax^{(0)}(k)=b \tag{35}$$

为 DGM(2,1)模型。

定义10　称

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b \tag{36}$$

为DGM(2,1)模型的白化方程。

定理6　若 $\hat{a}=[a,b]^T$ 为参数列，而 $x^{(0)},x^{(1)},\alpha^{(1)}x^{(0)}$ 如定义9所述，

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(n) & 1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1)\\ x^{(0)}(3)-x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1)\end{bmatrix}$$

则 DGM(2,1)模型 $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+ax^{(0)}(k)=b$ 的最小二乘估计满足

$$\hat{a}=[a,b]^T=(B^TB)^{-1}B^TY$$

定理 7　设 $x^{(0)}$ 为非负序列，$x^{(1)}$ 为 $x^{(0)}$ 的 1－AGO 序列，$B,Y,\hat{a}$ 如定理 6 所述，则

（1）白化方程$\frac{d^2x^{(1)}}{dt}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b$的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}t+\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\frac{1+a}{a} \tag{37}$$

（2）DGM(2,1)模型$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)+ax^{(0)}(k)=b$的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}(k+1)+\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\frac{1+a}{a} \tag{38}$$

（3）还原值为

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\alpha^{(1)}\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k) \tag{40}$$

证明：（1）$\frac{d^2x^{(1)}}{dt}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b$的通解为$\hat{x}^{(1)}(t)=c_1e^{-at}+\frac{b}{a}t+c_2$。

下面来确定任意常数c_1,c_2。

由于$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)$，即$x^{(1)}(t)\big|_{t=1}=x^{(0)}(1)$，所以

$$x^{(1)}(1)=x^{(0)}(1)=c_1e^{-a}+\frac{b}{a}+c_2 \tag{41}$$

又因为$\hat{x}^{(1)}(t)=c_1e^{-at}+\frac{b}{a}t+c_2$，所以$x^{(0)}(t)=-ac_1e^{-at}+\frac{b}{a}$，而$x^{(0)}(t)\big|_{t=1}=x^{(0)}(1)$，故

$$x^{(0)}(1)=-ac_1e^{-a}+\frac{b}{a} \tag{42}$$

由式（41）和（42）得

$$c_1=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{a},\quad c_2=\left(x^{(0)}-\frac{b}{a}\right)\frac{1+a}{a}$$

故白化方程$\frac{d^2x^{(1)}}{dt}+a\frac{dx^{(1)}}{dt}=b$的时间响应函数为

$$\hat{x}^{(1)}(t)=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{-a(t-1)}+\frac{b}{a}t+\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\frac{1+a}{a}$$

（2）由（1）的证明结果，令$t=k+1$，则$x^{(1)}(t)=x^{(1)}(k+1)$，可得 DGM(2,1)模型的时间响应序列：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(\frac{b}{a^2}-\frac{x^{(0)}(1)}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}(k+1)+\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\frac{1+a}{a}$$

（3）显然成立。

例6　试对序列

$$x^{(0)}=(2.874,\ 3.278,\ 3.39,\ 3.679,\ 3.77,\ 3.8)$$

建立DGM(2,1)模型。

解　因为

$$B=\begin{bmatrix}-3.284 & -3.39 & -3.679 & -3.77 & -3.8\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T$$

$$Y=\begin{bmatrix}0.404 & 0.112 & 0.289 & 0.091 & 0.03\end{bmatrix}$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}0.424\\ 1.7046\end{bmatrix}$$

得DGM模型的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=2.7033e^{-0.424k}+4.0202k+0.1707$$

所以

$$\hat{x}^{(1)}=(2.874,\ 5.96,\ 9.3688,\ 12.9889,\ 16.7473,\ 20.5962)$$

作1－IAGO还原

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)$$

得

$$\hat{x}^{(0)}=(2.874,\ 3.086,\ 3.4088,\ 3.6201,\ 3.7584,\ 3.8488)$$

结果见表19

表 19　误差检验表

序号	原始数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)}-\hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 Δ_k
2	3.278	3.086	－2	4. 1%
3	3.39	3.4088	－2	3. 5%
4	3.679	3.6201	1	1%

5	3.77	3. 7584	4	4%
6	3.8	3.8488	0	0

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
x0=[2.874,3.278,3.39,3.679,3.77,3.8];
n=length(x0);
a_x0=diff(x0);
a_x0=[0,a_x0]
B=[-x0(2:end)',ones(n-1,1)];
Y=a_x0(2:end)';
u=B\Y
x=dsolve('D2x+a*Dx=b','x(0)=c1,Dx(0)=c2');
x=subs(x,{'a','b','c1','c2'},{u(1),u(2),x0(1),x0(1)});
yuce=subs(x,'t',0:n-1);
digits(6),x=vpa(x)
x0_hat=[yuce(1),diff(yuce)]
epsilon=x0-x0_hat
delta=abs(epsilon./x0)
```

§10 $\mathrm{GM}(1,N)$ 和 $\mathrm{GM}(0,N)$ 模型

10.1 $\mathrm{GM}(1,N)$ 模型

定义11 设 $x_1^{(0)}=(x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\cdots,x_1^{(0)}(n))$ 为系统特征数据序列，而

$$x_2^{(0)}=(x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\cdots,x_2^{(0)}(n))$$

$$x_2^{(0)}=(x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\cdots,x_2^{(0)}(n))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_N^{(0)}=(x_N^{(0)}(1),x_N^{(0)}(2),\cdots,x_N^{(0)}(n))$$

为相关因素序列，$x_i^{(1)}$ 为 $x_i^{(0)}$ 的1－AGO序列（$i=1,2,\cdots,N$），$z_1^{(1)}$ 为 $x_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列，则称

$$x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}(k) \qquad (43)$$

为 $\mathrm{GM}(1,N)$ 模型。

定义12　在 $\mathrm{GM}(1,N)$ 模型中，$-a$ 称为系统发展系数，$b_i x_i^{(1)}(k)$ 称为驱动项，b_i 称为驱动系数，$\hat{a}=[a,b_2,\cdots,b_N]^T$ 称为参数列。

定理8　设 $x_1^{(0)}$ 为系统特征数据序列，$x_i^{(0)}(i=2,3,\cdots,N)$ 为相关因素数据序列，$x_i^{(1)}$ 为诸 $x_i^{(0)}$ 的1－AGO序列，$z_1^{(1)}$ 为 $x_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列，

$$B=\begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix}$$

则参数列 $u=[a,b_2,\cdots,b_N]^T$ 的最小二乘估计满足

$$u=(B^TB)^{-1}B^TY$$

定义13　设 $u=[a,b_2,\cdots,b_N]^T$，则称

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}=b_2x_2^{(1)}+b_3x_3^{(1)}+\cdots+b_Nx_N^{(1)} \tag{44}$$

为 $\mathrm{GM}(1,N)$ 模型

$$x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=b_2x_2^{(1)}(k)+b_3x_3^{(1)}(k)+\cdots+b_Nx_N^{(1)}(k)$$

的白化方程，也称影子方程。

定理9　设 $x_i^{(0)},x_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,N)$，$B,Y$ 如定理8所述，

$$u=[a,b_2,\cdots,b_N]^T=(B^TB)^{-1}B^TY$$

则

（1）白化方程 $\dfrac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}=\sum_{i=2}^{N}b_ix_i^{(1)}$ 的解为

$$x_1^{(1)}(t)=e^{-at}\left[\sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(t)e^{at}dt+x_1^{(1)}(0)-\sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(0)dt\right]$$

$$=e^{-at}\left[x_1^{(1)}(0)-t\sum_{i=2}^{N}b_i x_i^{(1)}(0)+\sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(t)e^{at}dt\right] \qquad (45)$$

（2）当 $x_i^{(1)}(i=1,2,\cdots,N)$ 变化幅度很小时，可视 $\sum_{i=2}^{N}b_i x_i^{(1)}(k)$ 为灰常量，则

$\mathrm{GM}(1,N)$ 模型 $x_1^{(0)}(k)+az_1^{(1)}(k)=\sum_{i=2}^{N}b_i x_i^{(1)}(k)$ 的近似时间响应式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=\left(x_1^{(1)}(0)-\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N}b_i x_i^{(1)}(k+1)\right)e^{-ak}+\frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N}b_i x_i^{(1)}(k+1) \qquad (46)$$

其中 $x_1^{(1)}(0)$ 取为 $x_1^{(0)}(1)$。

（3）累减还原式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1)=\alpha^{(1)}\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=\hat{x}_1^{(1)}(k+1)-\hat{x}_1^{(1)}(k)$$

（4）$\mathrm{GM}(1,N)$ 差分模拟式为

$$\hat{x}_1^{(0)}(k)=-az_1^{(1)}(k)+\sum_{i=2}^{N}b_i\hat{x}_i^{(1)}(k)$$

10.2 $\mathrm{GM}(0,N)$ 模型

定义14　设 $x_1^{(0)}=(x_1^{(0)}(1),x_1^{(0)}(2),\cdots,x_1^{(0)}(n))$ 为系统特征数据序列，而

$$x_2^{(0)}=(x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\cdots,x_2^{(0)}(n))$$

$$x_2^{(0)}=(x_2^{(0)}(1),x_2^{(0)}(2),\cdots,x_2^{(0)}(n))$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_N^{(0)}=(x_N^{(0)}(1),x_N^{(0)}(2),\cdots,x_N^{(0)}(n))$$

为相关因素序列，$x_i^{(1)}$ 为 $x_i^{(0)}$ 的1－AGO序列（$i=1,2,\cdots,N$），则称

$$x_1^{(1)}(k)=a+b_2x_2^{(1)}(k)+b_3x_3^{(1)}(k)+\cdots+b_Nx_N^{(1)}(k) \qquad (47)$$

为$\mathrm{GM}(0,N)$模型。

$\mathrm{GM}(0,N)$模型不含导数，因此为静态模型。它形如多元线性回归模型但与一般的多元线性回归模型有着本质的区别。一般的多元线性回归建模以原始数据序列为基础，$\mathrm{GM}(0,N)$的建模基础则是原始数据的1－AGO序列。

定理10　设$x_i^{(0)},x_i^{(1)}$如定义14所述，

$$B=\begin{bmatrix} x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_2^{(1)}(n) & x_3^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(2) \\ x_1^{(1)}(3) \\ \vdots \\ x_1^{(1)}(n) \end{bmatrix}$$

则参数列$u=[a,b_2,\cdots,b_N]^T$的最小二乘估计为

$$u=(B^TB)^{-1}B^TY$$

例7　设系统特征数据序列为

$$x_1^{(0)}=(2.874,\ 3.278,\ 3.307,\ 3.39,\ 3.679)=\{x_1^{(0)}(k)\}_1^5$$

相关因素数据序列为

$$x_2^{(0)}=(7.04,\ 7.645,\ 8.075,\ 8.53,\ 8.774)=\{x_2^{(0)}(k)\}_1^5$$

试分别建立GM(1,2)和GM(0,2)模型。

解　（1）设GM(1,2)白化方程为

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt}+ax_1^{(1)}=bx_2^{(1)}$$

对$x_1^{(0)}$和$x_2^{(0)}$作1－AGO，得

$$x_1^{(1)}=(x_1^{(1)}(1),x_1^{(1)}(2),x_1^{(1)}(3),x_1^{(1)}(4),x_1^{(1)}(5))$$

$$=(2.874,\ 6.152,\ 9.459,\ 12.849,\ 16.528)$$

$$x_2^{(1)}=(x_2^{(1)}(1),x_2^{(1)}(2),x_2^{(1)}(3),x_2^{(1)}(4),x_2^{(1)}(5))$$

$$= (7.04, 14.685, 22.76, 31.29, 40.064)$$

$x_1^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(2), z_1^{(1)}(3), z_1^{(1)}(4), z_1^{(1)}(5)) = (4.513, 7.8055, 11.154, 14.6885)$$

于是有

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) \\ \vdots & \vdots \\ -z_1^{(1)}(5) & x_2^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 14.685 \\ -7.8055 & 22.76 \\ -11.154 & 31.29 \\ -14.6885 & 40.064 \end{bmatrix}$$

$$Y = [x_1^{(0)}(2), x_1^{(0)}(3), x_1^{(0)}(4), x_1^{(0)}(5)]^T = [3.278, 3.307, 3.39, 3.679]^T$$

所以

$$u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \begin{bmatrix} 2.2273 \\ 0.9067 \end{bmatrix}$$

得估计模型

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + 2.2273 x_1^{(1)} = 0.9067 x_2^{(1)}$$

及近似时间响应式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \left(x_1^{(0)}(1) - \frac{b}{a} x_2^{(1)}(k+1) \right) e^{-ak} + \frac{b}{a} x_2^{(1)}(k+1)$$

$$= (2.874 - 0.4071 x_2^{(1)}(k+1)) e^{-2.2273k} + 0.4071 x_2^{(1)}(k+1)$$

由此可得

$\hat{x}_1^{(1)}(2) = 5.6433$， $\hat{x}_1^{(1)}(3) = 9.1908$， $\hat{x}_1^{(1)}(4) = 12.7251$， $\hat{x}_1^{(1)}(5) = 16.3082$

作1—IAGO还原

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1)$$

$$\hat{x}_1^{(0)} = (\hat{x}_1^{(0)}(1), \hat{x}_1^{(0)}(2), \hat{x}_1^{(0)}(3), \hat{x}_1^{(0)}(4), \hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$= (2.874, 2.7693, 3.5475, 3.5343, 3.5822)$$

结果见表20。

表 20　误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)}-\hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 Δ_k
2	3.278	2.7693	0.5087	15.52%
3	3.307	3.5475	−0.2405	7.27%
4	3.39	3.5343	−0.1443	4.26%
5	3.679	3.5822	0.0968	2.63%

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
x10=[2.874,3.278,3.307,3.39,3.679];
x20=[7.04,7.645,8.075,8.53,8.774];
n=length(x10);
x11=cumsum(x10)
x21=cumsum(x20)
for i=2:n
   z11(i)=0.5*(x11(i)+x11(i-1));
end
B=[-z11(2:n)',x21(2:n)'];
Y=x10(2:n)';
u=B\Y
x=dsolve('Dx+a*x=b*x2','x(0)=x0');
x=subs(x,{'a','b','x0','x2'},{u(1),u(2),x10(1),'x21'});
digits(6),x=vpa(x);x=simple(x)
x=subs(x,{'t','x21'},{[0:n-1],x21(1:n)})
xhat=[x(1),diff(x)]
epsilon=x10-xhat
delta=abs(epsilon./x10)
```

（2）设GM(0,2)模型为 $x_1^{(1)}=a+bx_2^{(1)}$，由

$$B=\begin{bmatrix}1 & x_2^{(1)}(1)\\ 1 & x_2^{(1)}(2)\\ 1 & x_2^{(1)}(3)\\ 1 & x_2^{(1)}(4)\\ 1 & x_2^{(1)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7.04\\ 1 & 14.685\\ 1 & 22.76\\ 1 & 31.29\\ 1 & 40.064\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}(1)\\ x_1^{(1)}(2)\\ x_1^{(1)}(3)\\ x_1^{(1)}(4)\\ x_1^{(1)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2.874\\ 6.152\\ 9.459\\ 12.849\\ 16.528\end{bmatrix}$$

可得 $u=[a,b]^T$ 的最小二乘估计

$$u=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}0.0425\\0.4113\end{bmatrix}$$

故有GM(0,2)估计式 $\hat{x}_1^{(1)}(k)=0.0425+0.4113x_2^{(1)}(k)$ 。

由此可得

$$\hat{x}_1^{(1)}(1)=2.9383,\ \hat{x}_1^{(1)}(2)=6.0831,\ \hat{x}_1^{(1)}(3)=9.4047$$

$$\hat{x}_1^{(1)}(4)=12.9134,\ \hat{x}_1^{(1)}(5)=16.5225$$

作1－IAGO还原

$$\hat{x}_1^{(0)}(k)=\hat{x}_1^{(1)}(k)-\hat{x}_1^{(1)}(k-1)$$

$$\hat{x}_1^{(0)}=(\hat{x}_1^{(0)}(1),\hat{x}_1^{(0)}(2),\hat{x}_1^{(0)}(3),\hat{x}_1^{(0)}(4),\hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$=(2.9383,3.1447,3.3216,3.5088,3.6091)$$

结果见表21。

表 21　误差检验表

序号	实际数据 $x_k^{(0)}$	模拟数据 $\hat{x}_k^{(0)}$	残差 $x_k^{(0)}-\hat{x}_k^{(0)}$	相对误差 Δ_k
2	3.278	3. 1447	0. 1333	4. 1%
3	3.307	3. 3216	−0. 0146	0. 4%
4	3.39	3. 5088	−0. 1188	3. 5%
5	3.679	3. 6091	0. 0699	1. 9%

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
x10=[2.874,3.278,3.307,3.39,3.679];
x20=[7.04,7.645,8.075,8.53,8.774];
n=length(x10);
x11=cumsum(x10)
x21=cumsum(x20)
B=[ones(n,1),x21(1:n)'];
Y=x11(1:n)';
u=B\Y
x11hat=B*u
x10hat=[x11hat(1),diff(x11hat)']
epsilon=x10-x10hat
```

```
delta=abs(epsilon./x10)
```

§11 总结

灰色预测法与传统统计方法的比较见表22。

表22 传统统计方法与灰色预测法的比较

方法	所需最少的数据	数据之型态	数据之间隔
简单指数平滑型	5 至 10 个	等间距	短间隔
Holt's 指数平滑型	10 至 15 个	同趋势	短或中间隔
Winter's 指数平滑型	至少5 个以上	同趋势且具规律性	短或中间隔
回归分析法	10 或 20 个以上	同趋势且具规律性	短或中间隔
Causal 回归法	10 个以上	可各种型态相互混合	短、中及长间隔
时间序列压缩法	2 个峰值以上	同趋势、具规律性且可自我调整	短或中间隔
Box Jenkins 法	50 个以上	等间距	短、中及长间隔
灰色预测法	4 个	等间距及非等间距	短、中及长间隔

第二十九章　多元分析

多元分析（multivariate analyses）是多变量的统计分析方法，是数理统计中应用广泛的一个重要分支，其内容庞杂，视角独特，方法多样，深受工程技术人员的青睐和广泛使用，并在使用中不断完善和创新。由于变量的相关性，不能简单地把每个变量的结果进行汇总，这是多变量统计分析的基本出发点。

§1　聚类分析

将认识对象进行分类是人类认识世界的一种重要方法，比如有关世界的时间进程的研究，就形成了历史学，也有关世界空间地域的研究，则形成了地理学。又如在生物学中，为了研究生物的演变，需要对生物进行分类，生物学家根据各种生物的特征，将它们归属于不同的界、门、纲、目、科、属、种之中。事实上，分门别类地对事物进行研究，要远比在一个混杂多变的集合中更清晰、明了和细致，这是因为同一类事物会具有更多的近似特性。在企业的经营管理中，为了确定其目标市场，首先要进行市场细分。因为无论一个企业多么庞大和成功，它也无法满足整个市场的各种需求。而市场细分，可以帮助企业找到适合自己特色，并使企业具有竞争力的分市场，将其作为自己的重点开发目标。

通常，人们可以凭经验和专业知识来实现分类。而聚类分析（cluster analyses）作为一种定量方法，将从数据分析的角度，给出一个更准确、细致的分类工具。

1.1　相似性度量

1.1.1　样本的相似性度量

要用数量化的方法对事物进行分类，就必须用数量化的方法描述事物之间的相似程度。一个事物常常需要用多个变量来刻画。如果对于一群有待分类的样本点需用 p 个变量描述，则每个样本点可以看成是 R^p 空间中的一个点。因此，很自然地想到可以用距离来度量样本点间的相似程度。

记 Ω 是样本点集，距离 $d(\cdot,\cdot)$ 是 $\Omega\times\Omega\to R^+$ 的一个函数，满足条件：

1）$d(x,y)\geq 0$，$x,y\in\Omega$；

2）$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$；

3）$d(x,y)=d(y,x)$，$x,y\in\Omega$；

4）$d(x,y)\leq d(x,z)+d(x,y)$，$x,y,z\in\Omega$。

这一距离的定义是我们所熟知的，它满足正定性，对称性和三角不等式。在聚类分析中，对于定量变量，最常用的是 Minkowski 距离

$$d_q(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{p}\left|x_k-y_k\right|^q\right]^{\frac{1}{q}},\quad q>0$$

当$q=1,2$或$q\to+\infty$时，则分别得到

1）绝对值距离

$$d_1(x,y)=\sum_{k=1}^{q}\left|x_k-y_k\right|, \tag{1}$$

2）欧氏距离

$$d_2(x,y)=\left[\sum_{k=1}^{p}\left|x_k-y_k\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

3）Chebyshev 距离

$$d_\infty(x,y)=\max_{1\le k\le p}\left|x_k-y_k\right|。 \tag{3}$$

在 Minkowski 距离中，最常用的是欧氏距离，它的主要优点是当坐标轴进行正交旋转时，欧氏距离是保持不变的。因此，如果对原坐标系进行平移和旋转变换，则变换后样本点间的距离和变换前完全相同。

值得注意的是在采用 Minkowski 距离时，一定要采用相同量纲的变量。如果变量的量纲不同，测量值变异范围相差悬殊时，建议首先进行数据的标准化处理，然后再计算距离。在采用 Minkowski 距离时，还应尽可能地避免变量的多重相关性（multicollinearity）。多重相关性所造成的信息重叠，会片面强调某些变量的重要性。由于 Minkowski 距离的这些缺点，一种改进的距离就是马氏距离，定义如下

4）马氏（Mahalanobis）距离

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^T\Sigma^{-1}(x-y)} \tag{4}$$

其中x,y为来自p维总体Z的样本观测值，Σ为Z的协方差矩阵，实际中Σ往往是不知道的，常常需要用样本协方差来估计。马氏距离对一切线性变换是不变的，故不受量纲的影响。

此外，还可采用样本相关系数、夹角余弦和其它关联性度量作为相似性度量。近年来随着数据挖掘研究的深入，这方面的新方法层出不穷。

1.1.2　类与类间的相似性度量

如果有两个样本类G_1和G_2，我们可以用下面的一系列方法度量它们间的距离：

1）最短距离法（nearest neighbor or single linkage method）

$$D(G_1,G_2)=\min_{\substack{x_i\in G_1\\ y_j\in G_2}}\{d(x_i,y_j)\}, \tag{5}$$

它的直观意义为两个类中最近两点间的距离。

2）最长距离法（farthest neighbor or complete linkage method）

$$D(G_1,G_2)=\max_{\substack{x_i\in G_1\\ y_j\in G_2}}\{d(x_i,y_j)\}, \tag{6}$$

它的直观意义为两个类中最远两点间的距离。

3）重心法（centroid method）

$$D(G_1,G_2)=d(\bar{x},\bar{y}), \tag{7}$$

其中 $\bar{x},\bar{y}$ 分别为 G_1,G_2 的重心。

4）类平均法（group average method）

$$D(G_1,G_2)=\frac{1}{n_1n_2}\sum_{x_i\in G_1}\sum_{x_j\in G_2}d(x_i,x_j), \tag{8}$$

它等于 G_1,G_2 中两两样本点距离的平均，式中 n_1,n_2 分别为 G_1,G_2 中的样本点个数。

5）离差平方和法（sum of squares method）

若记

$$D_1=\sum_{x_i\in G_1}(x_i-\bar{x}_1)^T(x_i-\bar{x}_1),\quad D_2=\sum_{x_j\in G_2}(x_j-\bar{x}_2)^T(x_j-\bar{x}_2),$$

$$D_{12}=\sum_{x_k\in G_1\cup G_2}(x_k-\bar{x})^T(x_k-\bar{x}),$$

其中

$$\bar{x}_1=\frac{1}{n_1}\sum_{x_i\in G_1}x_i,\quad \bar{x}_2=\frac{1}{n_2}\sum_{x_j\in G_2}x_j,\quad \bar{x}=\frac{1}{n_1+n_2}\sum_{x_k\in G_1\cup G_2}x_k$$

则定义

$$D(G_1,G_2)=D_{12}-D_1-D_2 \tag{9}$$

事实上，若 G_1,G_2 内部点与点距离很小，则它们能很好地各自聚为一类，并且这两类又能够充分分离（即 D_{12} 很大），这时必然有 $D=D_{12}-D_1-D_2$ 很大。因此，按定义可以认为，两类 G_1,G_2 之间的距离很大。离差平方和法最初是由 Ward 在 1936 年提出，

后经 Orloci 等人 1976 年发展起来的，故又称为 Ward 方法。

1.2　系统聚类法

1.2.1　系统聚类法的功能与特点

系统聚类法是聚类分析方法中最常用的一种方法。它的优点在于可以指出由粗到细的多种分类情况，典型的系统聚类结果可由一个聚类图展示出来。

例如，在平面上有 7 个点 $w_1, w_2, \cdots, w_7$（如图 1（a）），可以用聚类图（如图 1（b））来表示聚类结果。

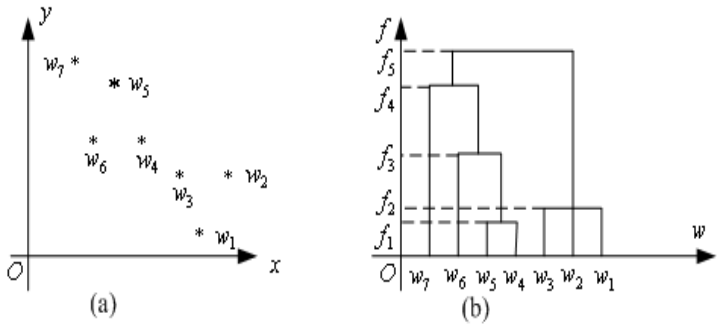


图 1　聚类方法示意图

记 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_7\}$，聚类结果如下：当距离值为 f_5 时，分为一类

$$G_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7\};$$

距离值为 f_4 分为两类：

$$G_1 = \{w_1, w_2, w_3\},\ G_2 = \{w_4, w_5, w_6, w_7\};$$

距离值为 f_3 分为三类：

$$G_1 = \{w_1, w_2, w_3\},\ G_2 = \{w_4, w_5, w_6\},\ G_3 = \{w_7\};$$

距离值为 f_2 分为四类：

$$G_1 = \{w_1, w_2, w_3\},\ G_2 = \{w_4, w_5\},\ G_3 = \{w_6\},\ G_4 = \{w_7\}$$

距离值为 f_1 分为六类：

$$G_1 = \{w_4, w_5\},\ G_2 = \{w_1\},\ G_3 = \{w_2\},\ G_4 = \{w_3\},\ G_5 = \{w_6\},\ G_6 = \{w_7\}$$

距离小于 f_1 分为七类，每一个点自成一类。

怎样才能生成这样的聚类图呢？步骤如下：设$\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_7\}$，

1）计算n个样本点两两之间的距离$\{d_{ij}\}$，记为矩阵$D=(d_{ij})_{n\times n}$；

2）首先构造n个类，每一个类中只包含一个样本点，每一类的平台高度均为零；

3）合并距离最近的两类为新类，并且以这两类间的距离值作为聚类图中的平台高度；

4）计算新类与当前各类的距离，若类的个数已经等于1，转入步骤5），否则，回到步骤3）；

5）画聚类图；

6）决定类的个数和类。

显而易见，这种系统归类过程与计算类和类之间的距离有关，采用不同的距离定义，有可能得出不同的聚类结果。

1.2.2　最短距离法与最长距离法

如果使用最短距离法来测量类与类之间的距离，即称其为系统聚类法中的最短距离法（又称最近邻法），最先由Florek等人1951年和Sneath1957年引入。下面举例说明最短距离法的计算步骤。

例1　设有5个销售员w_1,w_2,w_3,w_4,w_5，他们的销售业绩由二维变量(v_1,v_2)描述，见表1。

表1　销售员业绩表

销售员	v_1（销售量）百件	v_2（回收款项）万元
w_1	1	0
w_2	1	1
w_3	3	2
w_4	4	3
w_5	2	5

记销售员$w_i(i=1,2,3,4,5)$的销售业绩为(v_{i1},v_{i2})。如果使用绝对值距离来测量点与点之间的距离，使用最短距离法来测量类与类之间的距离，即

$$d(w_i,w_j)=\sum_{k=1}^{2}\left|v_{ik}-v_{jk}\right|,\quad D(G_p,G_q)=\min_{\substack{w_i\in G_p\\ w_j\in G_q}}\{d(w_i,w_j)\}$$

由距离公式 $d(\cdot,\cdot)$，可以算出距离矩阵。

$$\begin{array}{c} \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 6 & 6 \\ & 0 & 3 & 5 & 5 \\ & & 0 & 2 & 4 \\ & & & 0 & 4 \\ & & & & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

第一步，所有的元素自成一类 $H_1=\{w_1,w_2,w_3,w_4,w_5\}$。每一个类的平台高度为零，即 $f(w_i)=0(i=1,2,3,4,5)$。显然，这时 $D(G_p,G_q)=d(w_p,w_q)$。

第二步，取新类的平台高度为 1，把 w_1,w_2 合成一个新类 h_6，此时的分类情况是

$$H_2=\{h_6,w_3,w_4,w_5\}$$

第三步，取新类的平台高度为 2，把 w_3,w_4 合成一个新类 h_7，此时的分类情况是

$$H_3=\{h_6,h_7,w_5\}$$

第四步，取新类的平台高度为 3，把 h_6,h_7 合成一个新类 h_8，此时的分类情况是

$$H_4=\{h_8,w_5\}$$

第五步，取新类的平台高度为 4，把 h_8 和 w_5 合成一个新类 h_9，此时的分类情况是

$$H_5=\{h_9\}$$

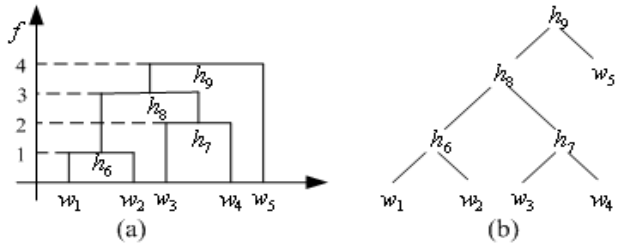


图 2　最短距离法

这样，h_9 已把所有的样本点聚为一类，因此，可以转到画聚类图步骤。画出聚类

图（如图 2（a））。这是一颗二叉树，如图 2（b）。

有了聚类图，就可以按要求进行分类。可以看出，在这五个推销员中 w_5 的工作成绩最佳， w_3, w_4 的工作成绩最好，而 w_1, w_2 的工作成绩较差。

完全类似于以上步骤，但以最长距离法来计算类间距离，就称为系统聚类法中的最长距离法。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
a=[1,0;1,1;3,2;4,3;2,5];
[m,n]=size(a);
d=zeros(m,m);
for i=1:m
    for j=i+1:m
        d(i,j)=mandist(a(i,:),a(j,:)');
    end
end
d
nd=nonzeros(d);
nd=union(nd,nd)
for i=1:m-1
    nd_min=min(nd);
    [row,col]=find(d==nd_min);tm=union(row,col);
    tm=reshape(tm,1,length(tm));
    s(i)={char(['第',int2str(i),'次合成，平台高度为',num2str(nd_min),'
时的分类结果为：',int2str(tm)])};
    %上面大括号{}代表建立数组
    nd(find(nd==nd_min))=[];
    if length(nd)==0
        break
    end
end
s(:)
```

或者使用MATLAB统计工具箱的相关命令，编写如下程序：

```
clc,clear
a=[1,0;1,1;3,2;4,3;2,5];
y=pdist(a,'cityblock');yc=squareform(y)
z=linkage(y)
[h,t]=dendrogram(z)
```

MATLAB中相关命令的使用说明如下：

1）pdist

Y=pdist(X)计算$m\times n$矩阵X（被看作m个大小为n的向量）中两两对象间的欧氏距离。对于有m个对象组成的数据集，共有$(m-1)\cdot m/2$个两两对象组合。

输出Y是包含距离信息的长度为$(m-1)\cdot m/2$的向量。可用squareform函数将此向量转换为方阵，这样可使矩阵中的元素（i,j）对应原始数据集中对象i和j间的距离。

Y=pdist(X,’metric’)中用’metric’指定的方法计算矩阵X中对象间的距离。’metric’可取表2中特征字符串值。

表2 ’metric’取值及含义

字符串	含 义
’Euclid’	欧氏距离（缺省）
’SEuclid’	标准欧氏距离
’Mahal’	马氏距离（Mahalanobis距离）
’CityBlock’	绝对值距离
’Minkowski’	闵氏距离（Minkowski距离）

Y=pdist(X,’minkowski’,p)用闵氏距离计算矩阵X中对象间的距离。P为闵氏距离计算用到的指数值，缺省为2。

2）linkage

Z=linkage(Y)使用最短距离算法生成具层次结构的聚类树。输入矩阵Y为pdist函数输出的$(m-1)\cdot m/2$维距离行向量。

Z=linkage(Y,’method’)使用由’method’指定的算法计算生成聚类树。’method’可取表3中特征字符串值。

表3 ’method’取值及含义

字符串	含 义
’single’	最短距离（缺省）
’complete’	最大距离
’average’	平均距离
’centroid’	重心距离
’ward’	离差平方和方法（Ward方法）

输出Z为包含聚类树信息的$(m-1)\times 3$矩阵。聚类树上的叶节点为原始数据集中的对象，由1到m。它们是单元素的类，级别更高的类都由它们生成。对应于Z中行j每个新生成的类，其索引为$m+j$，其中m为初始叶节点的数量。

第1列和第2列，即Z(i,1:2)包含了被两两连接生成一个新类的所有对象的索引。生成的新类索引为$m+j$。共有$m-1$个级别更高的类，它们对应于聚类树中的内部节点。

第三列，Z(i,3)包含了相应的在类中的两两对象间的连接距离。

3）cluster

T=cluster(Z,cutoff)从连接输出（linkage）中创建聚类。cutoff为定义cluster函数如何生成聚类的阈值，其不同的值含义如表4所示。

表4　cutoff取值及含义

cutoff取值	含　义
0<cutoff<2	cutoff作为不一致系数的阈值。不一致系数对聚类树中对象间的差异进行了量化。如果一个连接的不一致系数大于阈值，则cluster函数将其作为聚类分组的边界。
2<=cutoff	cutoff作为包含在聚类树中的最大分类数

T=cluster(Z,cutoff,depth,flag)从连接输出(linkage)中创建聚类。参数depth指定了聚类数中的层数，进行不一致系数计算时要用到。不一致系数将聚类树中两对象的连接与相邻的连接进行比较。详细说明见函数inconsistent。当参数depth被指定时，cutoff通常作为不一致系数阈值。

参数flag重载参数cutoff的缺省含义。如flag为’inconsistent’，则cutoff作为不一致系数的阈值。如flag为’cluster’，则cutoff作为分类的最大数目。

输出T为大小为m的向量，它用数字对每个对象所属的类进行标识。为了找到包含在类i中的来自原始数据集的对象，可用find(T==i)。

4）zsore(X)

对数据矩阵进行标准化处理，处理方式为

$$\tilde{x}_{ij}=\frac{x_{ij}-\bar{x}_j}{s_j}$$

其中矩阵$X=(x_{ij})_{m\times n}$看作是m个大小为n的向量，$\bar{x}_j,s_j$是每一列的均值和标准差。

5）H＝dendrogram(Z,P)

由linkage产生的数据矩阵Z画聚类树状图。P是结点数，默认值是30。

6）T=clusterdata(X,cutoff)

将矩阵X的数据分类。X为$m\times n$矩阵，被看作m个大小为n的向量。它与以下几个命令等价：

Y=pdist(X,’euclid’)

Z=linkage(Y,’single’)

T=cluster(Z,cutoff)

7)squareform

将pdist的输出转换为方阵。

8）cophenet

c=cophenet(Z,Y) 计算相干系数，它是将Z中的距离信息（由linkage()函数产生）和Y中的距离信息（由pdist()）函数产生进行比较。Z为$(m-1)\times 3$矩阵，距离信息包含在第三列。Y是$(m-1)\cdot m/2$维的行向量。

例如，给定距离为Y的一组对象$\{1,2,\cdots,m\}$，函数linkage()生成聚类树。cophenet()函数用来度量这种分类的失真程度，即由分类所确定的结构与数据间的拟合程度。

输出值c为相干系数。对于要求很高的解，该值的幅度应非常接近1。它也可用来比较两种由不同算法所生成的分类解。

Z(:,3)和Y之间的相干系数定义为

$$c=\frac{\sqrt{\sum_{i<j}(y_{ij}-y)(z_{ij}-z)}}{\sqrt{\sum_{i<j}(y_{ij}-y)^2\sum_{i<j}(z_{ij}-z)^2}}$$

其中y_{ij}为Y中对象i和j间的距离；z_{ij}为Z(:,3)中对象i和j间的距离；y和z分别为Y和Z(:,3)的平均距离。

1.3　变量聚类法

在实际工作中，变量聚类法的应用也是十分重要的。在系统分析或评估过程中，为避免遗漏某些重要因素，往往在一开始选取指标时，尽可能多地考虑所有的相关因素。而这样做的结果，则是变量过多，变量间的相关度高，给系统分析与建模带来很大的不便。因此，人们常常希望能研究变量间的相似关系，按照变量的相似关系把它们聚合成若干类，进而找出影响系统的主要因素。

1.3.1　变量相似性度量

在对变量进行聚类分析时，首先要确定变量的相似性度量，常用的变量相似性度量有两种。

1）相关系数

记变量x_j的取值$(x_{1j},x_{2j},\cdots,x_{nj})^T\in R^n(j=1,2,\cdots,m)$。则可以用两变量$x_j$与$x_k$的样本相关系数作为它们的相似性度量

$$r_{jk}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)(x_{ik}-\bar{x}_k)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-\bar{x}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}},\qquad(10)$$

在对变量进行聚类分析时，利用相关系数矩阵是最多的。

2）夹角余弦

也可以直接利用两变量 x_j 与 x_k 的夹角余弦 r_{jk} 来定义它们的相似性度量，有

$$r_{jk}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{ij}x_{ik}}{\left(\sum_{i=1}^{n}x_{ij}^2\sum_{i=1}^{n}x_{ik}^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{11}$$

各种定义的相似度量均应具有以下两个性质：

a）$|r_{jk}|\le 1$，对于一切 j,k；

b）$r_{jk}=r_{kj}$，对于一切 j,k。

$|r_{jk}|$ 越接近1，x_j 与 x_k 越相关或越相似。$|r_{jk}|$ 越接近零，x_j 与 x_k 的相似性越弱。

1.3.2　变量聚类法

类似于样本集合聚类分析中最常用的最短距离法、最长距离法等，变量聚类法采用了与系统聚类法相同的思路和过程。在变量聚类问题中，常用的有最大系数法、最小系数法等。

1）最大系数法

在最大系数法中，定义两类变量的距离为

$$R(G_1,G_2)=\max_{\substack{x_j\in G_1\\x_k\in G_2}}\{r_{jk}\}, \tag{12}$$

这时，$R(G_1,G_2)$ 等于两类中最相似的两变量间的相似性度量值。

2）最小系数法

在最小系数法中，定义两类变量的距离为

$$R(G_1,G_2)=\min_{\substack{x_j\in G_1\\x_k\in G_2}}\{r_{jk}\}, \tag{13}$$

这时，$R(G_1,G_2)$ 等于两类中相似性最小的两个变量间的相似性度量值。

例2　服装标准制定中的变量聚类法。

在服装标准制定中，对某地成年女子的各部位尺寸进行了统计，通过14个部位的测量资料，获得各因素之间的相关系数表（见表2）。

表5　成年女子各部位相关系数

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

x_1	1												
x_2	0.366	1											
x_3	0.242	0.233	1										
x_4	0.28	0.194	0.59	1									
x_5	0.36	0.324	0.476	0.435	1								
x_6	0.282	0.262	0.483	0.47	0.452	1							
x_7	0.245	0.265	0.54	0.478	0.535	0.663	1						
x_8	0.448	0.345	0.452	0.404	0.431	0.322	0.266	1					
x_9	0.486	0.367	0.365	0.357	0.429	0.283	0.287	0.82	1				
x_{10}	0.648	0.662	0.216	0.032	0.429	0.283	0.263	0.527	0.547	1			
x_{11}	0.689	0.671	0.243	0.313	0.43	0.302	0.294	0.52	0.558	0.957	1		
x_{12}	0.486	0.636	0.174	0.243	0.375	0.296	0.255	0.403	0.417	0.857	0.852	1	
x_{13}	0.133	0.153	0.732	0.477	0.339	0.392	0.446	0.266	0.241	0.054	0.099	0.055	1
x_{14}	0.376	0.252	0.676	0.581	0.441	0.447	0.44	0.424	0.372	0.363	0.376	0.321	0.627	1

其中 x_1 – 上体长，x_2 – 手臂长，x_3 – 胸围，x_4 – 颈围，x_5 – 总肩围，x_6 – 总胸宽，x_7 – 后背宽，x_8 – 前腰节高，x_9 – 后腰节高，x_{10} – 总体长，x_{11} – 身高，x_{12} – 下体长，x_{13} – 腰围，x_{14} – 臀围。用最大系数法对这14个变量进行系统聚类，分类结果如图3。

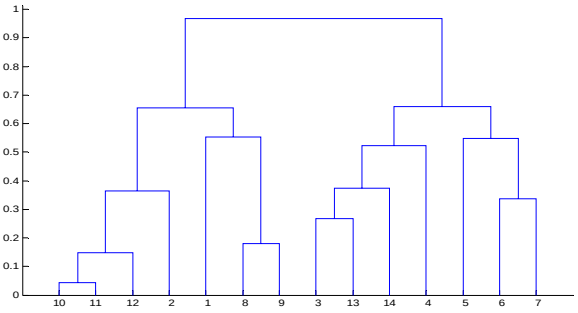


图3　成年女子14个部位指标的聚类图

计算的MATLAB程序如下：

```
%把下三角相关系数矩阵粘贴到纯文本文件ch.txt中
a=textread('ch.txt');
for i=1:14
    a(i,i)=0;
end
b=a(:);b=nonzeros(b);b=b';b=1-b;
z=linkage(b,'complete');
y=cluster(z,2)
dendrogram(z)
ind1=find(y==2);ind1=ind1'
ind2=find(y==1);ind2=ind2'
```

可以看出，人体的变量大体可以分为两类：一类反映人高、矮的变量，如上体长，手臂长，前腰节高，后腰节高，总体长，身高，下体长；另一类是反映人体胖瘦的变量，如胸围，颈围，总肩围，总胸宽，后背宽，腰围，臀围。

§2 聚类分析案例—我国各地区普通高等教育发展状况分析

聚类分析又称群分析，是对多个样本（或指标）进行定量分类的一种多元统计分析方法。对样本进行分类称为Q型聚类分析，对指标进行分类称为R型聚类分析。本案例运用Q型和R型聚类分析方法对我国各地区普通高等教育的发展状况进行分析。

1．案例研究背景

近年来，我国普通高等教育得到了迅速发展，为国家培养了大批人才。但由于我国各地区经济发展水平不均衡，加之高等院校原有布局使各地区高等教育发展的起点不一致，因而各地区普通高等教育的发展水平存在一定的差异， 不同的地区具有不同的特点。对我国各地区普通高等教育的发展状况进行聚类分析，明确各类地区普通高等教育发展状况的差异与特点，有利于管理和决策部门从宏观上把握我国普通高等教育的整体发展现状，分类制定相关政策，更好的指导和规划我国高教事业的整体健康发展。

2．案例研究过程

（1）建立综合评价指标体系

高等教育是依赖高等院校进行的，高等教育的发展状况主要体现在高等院校的相关方面。遵循可比性原则，从高等教育的五个方面选取十项评价指标，具体如图4。

（2）数据资料

指标的原始数据取自《中国统计年鉴，1995》和《中国教育统计年鉴，1995》除以各地区相应的人口数得到十项指标值见表 6。其中：x_1 为每百万人口高等院校数；x_2 为每十万人口高等院校毕业生数；x_3 为每十万人口高等院校招生数；x_4 为每十万人口高等院校在校生数；x_5 为每十万人口高等院校教职工数；x_6 为每十万人口高等院校专职

教师数；x_7为高级职称占专职教师的比例；x_8为平均每所高等院校的在校生数；x_9为国家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重；x_{10}为生均教育经费。

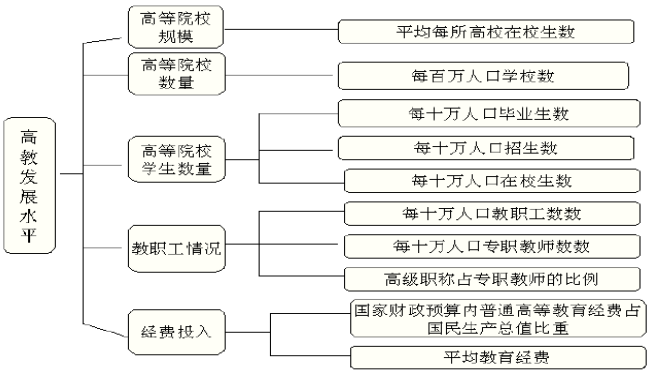


图4　高等教育的十项评价指标

表6　我国各地区普通高等教育发展状况数据

地区	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
北京	5.96	310	461	1557	931	319	44.36	2615	2.20	13631
上海	3.39	234	308	1035	498	161	35.02	3052	.90	12665
天津	2.35	157	229	713	295	109	38.40	3031	.86	9385
陕西	1.35	81	111	364	150	58	30.45	2699	1.22	7881
辽宁	1.50	88	128	421	144	58	34.30	2808	.54	7733
吉林	1.67	86	120	370	153	58	33.53	2215	.76	7480
黑龙江	1.17	63	93	296	117	44	35.22	2528	.58	8570
湖北	1.05	67	92	297	115	43	32.89	2835	.66	7262
江苏	.95	64	94	287	102	39	31.54	3008	.39	7786
广东	.69	39	71	205	61	24	34.50	2988	.37	11355
四川	.56	40	57	177	61	23	32.62	3149	.55	7693
山东	.57	58	64	181	57	22	32.95	3202	.28	6805
甘肃	.71	42	62	190	66	26	28.13	2657	.73	7282
湖南	.74	42	61	194	61	24	33.06	2618	.47	6477
浙江	.86	42	71	204	66	26	29.94	2363	.25	7704
新疆	1.29	47	73	265	114	46	25.93	2060	.37	5719
福建	1.04	53	71	218	63	26	29.01	2099	.29	7106
山西	.85	53	65	218	76	30	25.63	2555	.43	5580
河北	.81	43	66	188	61	23	29.82	2313	.31	5704

安徽	.59	35	47	146	46	20	32.83	2488	.33	5628
云南	.66	36	40	130	44	19	28.55	1974	.48	9106
江西	.77	43	63	194	67	23	28.81	2515	.34	4085
海南	.70	33	51	165	47	18	27.34	2344	.28	7928
内蒙古	.84	43	48	171	65	29	27.65	2032	.32	5581
西藏	1.69	26	45	137	75	33	12.10	810	1.00	14199
河南	.55	32	46	130	44	17	28.41	2341	.30	5714
广西	.60	28	43	129	39	17	31.93	2146	.24	5139
宁夏	1.39	48	62	208	77	34	22.70	1500	.42	5377
贵州	.64	23	32	93	37	16	28.12	1469	.34	5415
青海	1.48	38	46	151	63	30	17.87	1024	.38	7368

（3）R型聚类分析

定性考察反映高等教育发展状况的五个方面十项评价指标，可以看出，某些指标之间可能存在较强的相关性。比如每十万人口高等院校毕业生数、每十万人口高等院校招生数与每十万人口高等院校在校生数之间可能存在较强的相关性， 每十万人口高等院校教职工数和每十万人口高等院校专职教师数之间可能存在较强的相关性。为了验证这种想法，运用MATLAB软件计算十个指标之间的相关系数，相关系数矩阵如表6所示。

表6　相关系数矩阵

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}
x_1	1.0000	0.9434	0.9528	0.9591	0.9746	0.9798	0.4065	0.0663	0.8680	0.6609
x_2	0.9434	1.0000	0.9946	0.9946	0.9743	0.9702	0.6136	0.3500	0.8039	0.5998
x_3	0.9528	0.9946	1.0000	0.9987	0.9831	0.9807	0.6261	0.3445	0.8231	0.6171
x_4	0.9591	0.9946	0.9987	1.0000	0.9878	0.9856	0.6096	0.3256	0.8276	0.6124
x_5	0.9746	0.9743	0.9831	0.9878	1.0000	0.9986	0.5599	0.2411	0.8590	0.6174
x_6	0.9798	0.9702	0.9807	0.9856	0.9986	1.0000	0.5500	0.2222	0.8691	0.6164
x_7	0.4065	0.6136	0.6261	0.6096	0.5599	0.5500	1.0000	0.7789	0.3655	0.1510
x_8	0.0663	0.3500	0.3445	0.3256	0.2411	0.2222	0.7789	1.0000	0.1122	0.0482
x_9	0.8680	0.8039	0.8231	0.8276	0.8590	0.8691	0.3655	0.1122	1.0000	0.6833
x_{10}	0.6609	0.5998	0.6171	0.6124	0.6174	0.6164	0.1510	0.0482	0.6833	1.0000

可以看出某些指标之间确实存在很强的相关性，因此可以考虑从这些指标中选取

几个有代表性的指标进行聚类分析。为此，把十个指标根据其相关性进行R型聚类，再从每个类中选取代表性的指标。首先对每个变量（指标）的数据分别进行标准化处理。变量间相近性度量采用相关系数，类间相近性度量的计算选用类平均法。聚类树型图见图5。

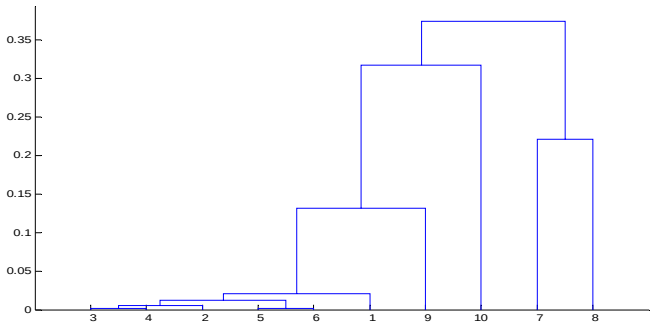


图 5　指标聚类树型图

计算的 MATLAB 程序如下：

```
load gj.txt     %把原始数据保存在纯文本文件 gj.txt 中
r=corrcoef(gj);   %计算相关系数矩阵
d=tril(r);          %取出相关系数矩阵的下三角元素
for i=1:10           %对角线元素化成零
    d(i,i)=0;
end
d=d(:);
d=nonzeros(d);   %取出非零元素
d=d';d=1-d;
z=linkage(d)
dendrogram(z)
```

从聚类图中可以看出，每十万人口高等院校招生数、每十万人口高等院校在校生数、每十万人口高等院校教职工数、每十万人口高等院校专职教师数、每十万人口高等院校毕业生数 5 个指标之间有较大的相关性，最先被聚到一起。如果将 10 个指标分为 6 类，其它 5 个指标各自为一类。这样就从十个指标中选定了六个分析指标：

x_1：每百万人口高等院校数；

x_2：每十万人口高等院校毕业生数；

x_7：高级职称占专职教师的比例；

x_8：平均每所高等院校的在校生数；

x_9：国家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重；

x_{10}：生均教育经费。

可以根据这六个指标对30 个地区进行聚类分析。

（4）Q 型聚类分析

根据这六个指标对30个地区进行聚类分析。首先对每个变量的数据分别进行标准化处理，样本间相近性采用欧氏距离度量，类间距离的计算选用类平均法。聚类树型图见图6。

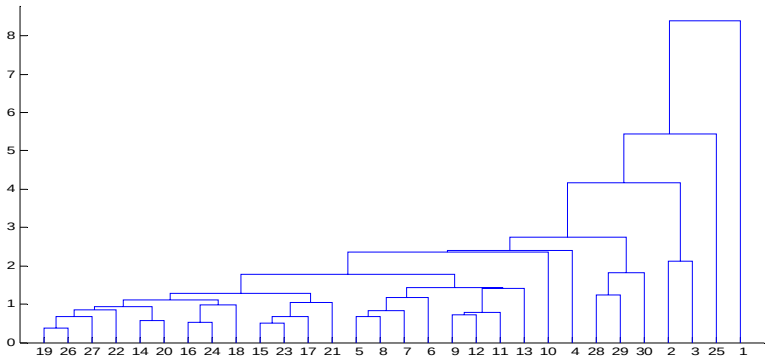


图6　各地区聚类树型图

计算的MATLAB程序如下：

```
load gj.txt   %把原始数据保存在纯文本文件gj.txt中
gj(:,3:6)=[];
gj=zscore(gj);
y=pdist(gj);
z=linkage(y)
dendrogram(z,'average')
```

4．案例研究结果

各地区高等教育发展状况存在较大的差异，高教资源的地区分布很不均衡。如果根据各地区高等教育发展状况把30 个地区分为三类，结果为：

第一类：北京；第二类：西藏；第三类：其他地区。

如果根据各地区高等教育发展状况把30个地区分为四类，结果为：

第一类：北京；第二类：西藏；第三类：上海天津；第四类：其他地区。

如果根据各地区高等教育发展状况把30个地区分为五类，结果为：

第一类：北京；第二类：西藏；第三类：上海天津；第四类：宁夏、贵州、青海；第五类：其他地区。

从以上结果结合聚类图中的合并距离可以看出，北京的高等教育状况与其它地区相比有非常大的不同，主要表现在每百万人口的学校数量和每十万人口的学生数量以及国

家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重等方面远远高于其他地区，这与北京作为全国的政治、经济与文化中心的地位是吻合的。上海和天津作为另外两个较早的直辖市，高等教育状况和北京是类似的状况。宁夏、贵州和青海的高等教育状况极为类似，高等教育资源相对匮乏。西藏作为一个非常特殊的民族地区，其高等教育状况具有和其他地区不同的情形，被单独聚为一类，主要表现在每百万人口高等院校数比较高，国家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重和生均教育经费也相对较高，而高级职称占专职教师的比例与平均每所高等院校的在校生数又都是全国最低的。这正是西藏高等教育状况的特殊之处：人口相对较少，经费比较充足，高等院校规模较小，师资力量薄弱。其他地区的高等教育状况较为类似，共同被聚为一类。针对这种情况，有关部门可以采取相应措施对宁夏、贵州、青海和西藏地区进行扶持，促进当地高等教育事业的发展。

§3 主成分分析

主成分分析（principal component analysis）是1901年Pearson对非随机变量引入的，1933年Hotelling将此方法推广到随机向量的情形，主成分分析和聚类分析有很大的不同，它有严格的数学理论作基础。

主成分分析的主要目的是希望用较少的变量去解释原来资料中的大部分变异，将我们手中许多相关性很高的变量转化成彼此相互独立或不相关的变量。通常是选出比原始变量个数少，能解释大部分资料中的变异的几个新变量，即所谓主成分，并用以解释资料的综合性指标。由此可见，主成分分析实际上是一种降维方法。

3.1 基本思想及方法

如果用 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 表示 p 门课程， $c_1, c_2, \cdots, c_p$ 表示各门课程的权重，那么加权之和就是

$$s = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_p x_p \tag{14}$$

我们希望选择适当的权重能更好地区分学生的成绩。每个学生都对应一个这样的综合成绩，记为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$， n 为学生人数。如果这些值很分散，表明区分得好，即是说，需要寻找这样的加权，能使 $s_1, s_2, \cdots, s_n$ 尽可能的分散，下面来看它的统计定义。

设 $X_1, X_2, \cdots, X_p$ 表示以 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 为样本观测值的随机变量，如果能找到 $c_1, c_2, \cdots, c_p$， 使得

$$\mathrm{Var}(c_1 X_1 + c_2 X_2 + \cdots + c_p X_p) \tag{15}$$

的值达到最大，则由于方差反映了数据差异的程度，因此也就表明我们抓住了这 p 个变量的最大变异。当然，（15）式必须加上某种限制，否则权值可选择无穷大而没有意

义，通常规定

$$c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_p^2 = 1 \tag{16}$$

在此约束下，求（15）式的最优解。由于这个解是 $p-$ 维空间的一个单位向量，它代表一个“方向”，它就是常说的主成分方向。

一个主成分不足以代表原来的 p 个变量，因此需要寻找第二个乃至第三、第四主成分，第二个主成分不应该再包含第一个主成分的信息，统计上的描述就是让这两个主成分的协方差为零，几何上就是这两个主成分的方向正交。具体确定各个主成分的方法如下。

设 Z_i 表示第 i 个主成分，$i = 1,2,\cdots,p$，可设

$$\begin{cases} Z_1 = c_{11}X_1 + c_{12}X_2 + \cdots + c_{1p}X_p \\ Z_2 = c_{21}X_1 + c_{22}X_2 + \cdots + c_{2p}X_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ Z_p = c_{p1}X_1 + c_{p2}X_2 + \cdots + c_{pp}X_p \end{cases} \tag{17}$$

其中对每一个 i，均有 $c_{i1}^2 + c_{i2}^2 + \cdots + c_{ip}^2 = 1$，且 $(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1p})$ 使得 $\mathrm{Var}(Z_1)$ 的值达到最大；$(c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2p})$ 不仅垂直于 $(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1p})$，而且使 $\mathrm{Var}(Z_2)$ 的值达到最大；$(c_{31}, c_{32}, \cdots, c_{3p})$ 同时垂直于 $(c_{11}, c_{12}, \cdots, c_{1p})$ 和 $(c_{21}, c_{22}, \cdots, c_{2p})$，并使 $\mathrm{Var}(Z_3)$ 的值达到最大；以此类推可得全部 p 个主成分，这项工作用手做是很繁琐的，但借助于计算机很容易完成。剩下的是如何确定主成分的个数，我们总结在下面几个注意事项中。

1）主成分分析的结果受量纲的影响，由于各变量的单位可能不一样，如果各自改变量纲，结果会不一样，这是主成分分析的最大问题，回归分析是不存在这种情况的，所以实际中可以先把各变量的数据标准化，然后使用协方差矩阵或相关系数矩阵进行分析。

2）为使方差达到最大的主成分分析，所以不用转轴（由于统计软件常把主成分分析和因子分析放在一起，后者往往需要转轴，使用时应注意）。

3）主成分的保留。用相关系数矩阵求主成分时，Kaiser主张将特征值小于1的主成分予以放弃（这也是SPSS软件的默认值）。

4）在实际研究中，由于主成分的目的是为了降维，减少变量的个数，故一般选取少量的主成分（不超过5或6个），只要它们能解释变异的70％～80％（称累积贡献率）就行了。

下面我们直接通过主成分估计（principle estimate）进一步阐述主成分分析的基本思想和相关概念。

3.2　主成分估计

主成分估计（principal component estimate）是Massy在1965年提出的，它是回归系数参数的一种线性有偏估计(biased estimate)，同其它有偏估计，如岭估计(ridge estimate)等一样，是为了克服最小二乘(LS)估计在设计阵病态（即存在多重共线性）时表现出的不稳定性而提出的。

主成分估计采用的方法是将原来的回归自变量变换到另另一组变量，即主成分，选择其中一部分重要的主成分作为新的自变量（此时丢弃了一部分，影响不大的自变量，这实际达到了降维的目的），然后用最小二乘法对选取主成分后的模型参数进行估计，最后再变换回原来的模型求出参数的估计。

设有 p 个回归（自）变量 $x_1, x_2, \cdots, x_p$，它在第 i 次试验中的取值为

$$x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ip} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$$

将它们写成矩阵形式

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix} \tag{18}$$

（注意这里 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 既表示回归自变量，又表示这些变量的观测值列向量，从上下文中我们容易区分开。）（18）即为设计阵，考虑线性模型

$$Y = \beta_0 1 + X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I), \tag{19}$$

其中 Y 为 $n \times 1$ 向量，β_0 为未知参数，1 为所有元素均为1的 n 维列向量，β 为 $p \times 1$ 未知参数向量，ε 为 $n \times 1$ 误差向量。假定 X 已经标准化（即 X 的每个分量 x_j 均已标准化，如果未标准化，需要作变量的标准化变换 $(x_{ij} - \bar{x}_j)/s_j$，其中 $\bar{x}_j, s_j$ 为 x_j 各分量的均值和标准差。），此时

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \tag{20}$$

对于自变量的任意一个线性组合

$$z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_p x_p, \quad \sum_{j=1}^{p} c_j^2 = 1, \tag{21}$$

将 z 视为一个新的变量。于是 z 在第 i 次试验中的取值为

$$z_i = c_1 x_{i1} + c_2 x_{i2} + \cdots + c_p x_{ip} \quad (i = 1,2,\cdots,n) \tag{22}$$

由于 X 已经标准化，因此

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} c_j x_{ij} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p} c_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 0 \tag{23}$$

记 $w = (c_1, c_2, \cdots, c_p)^T$，则

$$M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i^2 = \frac{1}{n}(Xw)^T(Xw) \tag{24}$$

对于新变量 z 来说，如果在 n 次试验之下它的取值变化不大，即是说 M_2^* 较小，则这个新变量可以去掉。反之，M_2^* 较大，那么这个新变量有较大的变化，它的作用比较明显。注意到 z_i 的取值与 c_i 的选取有关。因此，我们总是希望所选择的 $c_i (i = 1,2,\cdots,p)$，使 M_2^* 达到最大，这才说明新变量在新建的回归模型中有较大的影响。

如果 $X^T X$ 的特征值 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p$，它们所对应的标准化正交特征向量为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p$，则 $M_2^* = (Xw)^T(Xw)/n$ 的最大值在 $w = \eta_1$ 时达到，且最大值为 λ_1 / n。此时新变量 z 即为

$$z = X\eta_1$$

常记 $z_1 = X\eta_1$，并称之为自变量的第一主成分。一般地，如果已经确定了 k 个主成分

$$z_i = X\eta_i \quad (i = 1,2,\cdots,k), \tag{25}$$

则第 $k+1$ 个主成分 $z_{k+1} = Xw$ 可由下面两个条件决定：

1）$w^T \eta_i = 0$，$i = 1,2,\cdots,k$，$w^T w = 1$；

2）在条件1）之下，使 M_2^* 达到最大。

由二次型的条件极值可知，第 $k+1$ 个主成分就是 $z_{k+1} = X\eta_{k+1}$，这样，总共可以找到 p

个主成分 $z_i = X\eta_i$（$i = 1,2,\cdots,p$）。

现在回到线性模型(19)，将 $x_1, x_2, \cdots, x_p$ 变换为主成分 $z_1, z_2, \cdots, z_p$ 之后再求 β 的估计，令

$$Z = (z_1, z_2, \cdots, z_p) = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & \cdots & z_{1p} \\ z_{21} & z_{22} & \cdots & z_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ z_{n1} & z_{n2} & \cdots & z_{np} \end{pmatrix} \tag{26}$$

记 $Q = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_p)_{p\times p}$，$Q$ 为标准化正交阵，且 $Z = XQ$，引入新参数 $\alpha = Q^T\beta$，或者 $\beta = Q\alpha$，则

$$Y = \beta_0 1 + ZQ^T\beta + \varepsilon = \beta_0 1 + Z\alpha + \varepsilon, \tag{27}$$

其中

$$Z^TZ = Q^TX^TXQ = Q^T(X^TX)Q = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_p \end{pmatrix} \tag{28}$$

式（27）称之为模型（19）的典则形式。由式（28）可知，X^TX 的特征值 λ_i 度量了第 i 个主成分 z_i 在 n 次试验中取值变化的大小。如果 $\lambda_i \approx 0$，则该主成分在 n 次试验中取值的变化很小，它的作用可以并入模型（27）中的常数项 β_0。这相当于在典则形式中剔除变量 z_i。

如果 $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_p \approx 0$，则剔除 $z_{r+1}, z_{r+2}, \cdots, z_p$，只剩下 α 的前 r 个分量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$，设它的最小二乘估计为 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \cdots, \hat{\alpha}_r$，而 α 后面的 $p-r$ 个分量则以0作为它们的估计，然后由关系式 $\beta = Q\alpha$ 即可确定 β 的估计，我们称之为 β 的主成分估计，实际步骤如下：

先将 Q, α 分块，即

$$Q=(Q_1,Q_2)，\ \alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix} \tag{29}$$

其中Q_1为$p\times r$矩阵，α_1为r维向量，从而α的主成分估计为

$$\hat{\alpha}=\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1 & 0\end{pmatrix}^T \tag{30}$$

从而得到β的主成分估计

$$\hat{\beta}=(Q_1,Q_2)\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_1\\ 0\end{pmatrix}=Q_1\hat{\alpha}_1 \tag{31}$$

理论上表明：主成分估计在设计阵病态时优于LS估计，但（31）在特征值为1的附近存在跳跃，会影响计算的稳定性，杨虎在1989年给出的单参数主成分估计解决了这个问题。

定义1　若存在$1\le r<p$，使$\lambda_r\ge 1>\lambda_{r+1}$，记

$$A=\mathrm{diag}(\frac{\lambda_1-1+\theta}{\lambda_1},\cdots,\frac{\lambda_r-1+\theta}{\lambda_r},\theta\lambda_{r+1},\cdots,\theta\lambda_p) \tag{32}$$

这里$\theta\in(\lambda_p,1)$为平稳参数，我们称$\hat{\beta}=QAQ^TQ_1\hat{\alpha}_1$为$\beta$的单参数主成分估计。

例3　Hald水泥问题，考察含如下四种化学成分

$x_1=3\mathrm{Ca0}\cdot\mathrm{Al_2O_3}$的含量（%），　　$x_2=3\mathrm{Ca0}\cdot\mathrm{SiO_2}$的含量（%），

$x_3=4\mathrm{Ca0}\cdot\mathrm{Al_2O_3}\cdot\mathrm{Fe_2O_3}$的含量（%），$x_4=2\mathrm{Ca0}\cdot\mathrm{SiO_2}$的含量（%），

的某种水泥，每一克所释放出的热量（卡）Y与这四种成分含量之间的关系。数据共13组，见表7，对数据实施标准化，则$X^TX/12$就是样本相关系数阵（见表8）。

表7　Hald水泥

序号	x_1	x_2	x_3	x_4	y
1	7	26	6	60	78.5
2	1	29	15	52	74.3
3	11	56	8	20	104.3
4	11	31	8	47	87.6
5	7	52	6	33	95.9
6	11	55	9	22	109.2

7	3	71	17	6	102.7
8	1	31	22	44	72.5
9	2	54	18	22	93.1
10	21	47	4	26	115.9
11	1	40	23	34	83.8
12	11	66	9	12	113.3
13	10	68	8	12	109.4

表8 Hald水泥数据的样本相关系数阵

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0.2286	-0.8241	-0.2454
x_2	0.2286	1	-0.1392	-0.9730
x_3	-0.8241	-0.1392	1	0.0295
x_4	-0.2454	-0.9730	0.0295	1

相关系数阵的四个特征值依次为2.2357，1.5761，0.1866，0.0016。最后一个特征值接近于零，前三个特征值之和所占比例（累积贡献率）达到0.999594。于是我们略去第4个主成分。其它三个保留的特征值对应的三个特征向量分别为

$$\eta_1^T = (0.476, 0.5639, -0.3941, -0.5479)$$

$$\eta_2^T = (-0.509, 0.4139, 0.605, -0.4512)$$

$$\eta_3^T = (0.6755, -0.3144, 0.6377, -0.1954)$$

对Hald数据直接作线性回归得经验回归方程

$$\hat{y} = 62.4054 + 1.5511x_1 + 0.5102x_2 + 0.102x_3 - 0.144x_4$$

再由（31）式计算出主成分估计，即可获得如下主成分回归方程

$$\hat{y} = 85.7433 + 1.3119x_1 + 0.2694x_2 - 0.1428x_3 - 0.3801x_4$$

两个方程的区别在于后者具有更小的均方误差，因而更稳定。此外前者所有系数都无法通过显著性检验。

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
load sn.txt  %把原始的x1,x2,x3,x4,y的数据保存在纯文本文件sn.txt中
[m,n]=size(sn);num=3; %num为选取的主成分的个数
```

```
mu=mean(sn);sigma=std(sn);
snb=zscore(sn); %数据标准化
b=snb(:,1:end-1); %x1,x2,x3,x4的数据赋给b
r=cov(b);  %标准化数据的协方差阵就是相关系数阵
[x,y,z]=pcacov(r);
f=repmat(sign(sum(x)),size(x,1),1);
x=x.*f;
%以下是普通的最小二乘法回归
r=[ones(m,1),b]\snb(:,end);  %标准化数据的回归方程系数
bzh=mu./sigma;
ch10=mu(end)-bzh(1:end-1)*r(2:end)*sigma(end)  %原始数据的常数项
fr=r(2:end);fr=fr';
ch1=fr./sigma(1:end-1)*sigma(end) %原始数据的x1,x2等等系数
%以下是主成分回归
pval=b*x(:,1:num);
rp=[ones(m,1),pval]\snb(:,end);  %主成分数据的回归方程系数
beta=x(:,1:num)*rp(2:num+1);              %标准化数据的回归方程系数
ch20=mu(end)-bzh(1:end-1)*beta*sigma(end)  %原始数据的常数项
fr=beta';
ch2=fr./sigma(1:end-1)*sigma(end) %原始数据的x1,x2等等系数
check1=sqrt(sum((sn(:,1:end-1)*ch1'+ch10-sn(:,end)).^2)/(m-n))
check2=sqrt(sum((sn(:,1:end-1)*ch2'+ch20-sn(:,end)).^2)/(m-num-1))
```

3.3　特征值因子的筛选

回到主成分分析，实际中确定（17）式中的系数就是采用（28）式中矩阵的特征向量。因此，剩下的问题仅仅是将 X^TX 的特征值按由大到小的次序排列之后，如何筛选这些特征值？一个实用的方法是删去 $\lambda_{r+1},\lambda_{r+2},\cdots,\lambda_p$ 后，这些删去的特征值之和占整个特征值之和 $\sum\lambda_i$ 的15％以下，换句话说，余下的特征值所占的比重（定义为累积贡献率）将超过85％，当然这不是一种严格的规定，今年来文献中关于这方面的讨论很多，有很多比较成熟的方法，这里不一一介绍。

单纯考虑累积贡献率有时是不够的，还需要考虑选择的主成分对原始变量的贡献值，我们用相关系数的平方和来表示，如果选取的主成分为 $z_1,z_2,\cdots,z_r$，则它们对原变量 x_i 的贡献值为

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{r} r^2(z_j, x_i) \tag{33}$$

例4　设 $X = (x_1, x_2, x_3)$，且

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则可算得 $\lambda_1 = 5.8284$，$\lambda_2 = 0.1716$，如果我们仅取第一个主成分，由于其累积贡献率已经达到 97.14%，似乎很理想了，但如果进一步计算主成分对原变量的贡献值，容易发现

$$\rho_3 = r^2(z_1, x_3) = 0$$

可见，第一个主成分对第三个变量的贡献值为0，这是因为 x_3 和 x_1, x_2 都不相关。由于在第一个主成分中一点也不包含 x_3 的信息，这时只选择一个主成分就不够了，需要再取第二个主成分。

例5　研究纽约股票市场上五种股票的周回升率。这里，周回升率＝（本星期五市场收盘价－上星期五市场收盘价）/上星期五市场收盘价。从1975年1月到1976年12月，对这五种股票作了100组独立观测。因为随着一般经济状况的变化，股票有集聚的趋势，因此，不同股票周末回升率是彼此相关的。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_5$ 分别为五只股票的周回升率，则从数据算得

$$\bar{x}^T = (0.0054, 0.0048, 0.0057, 0.0063, 0.0037)$$

$$R = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.577 & 0.509 & 0.387 & 0.462 \\ 0.577 & 1.000 & 0.599 & 0.389 & 0.322 \\ 0.509 & 0.599 & 1.000 & 0.436 & 0.426 \\ 0.387 & 0.389 & 0.436 & 1.000 & 0.523 \\ 0.462 & 0.322 & 0.426 & 0.523 & 1.000 \end{pmatrix}$$

这里 R 是标准化数据的协方差矩阵，R 的特征值和标准正交特征向量为

$$\lambda_1 = 2.857,\ \lambda_2 = 0.809,\ \lambda_3 = 0.540,\ \lambda_4 = 0.452,\ \lambda_5 = 0.343,$$

$$\eta_1^T = (0.464, 0.457, 0.470, 0.421, 0.421)$$

$$\eta_2^T = (0.240, 0.509, 0.260, -0.526, -0.582)$$

标准化变量的前两个主成分为

$$z_1 = 0.464\tilde{x}_1 + 0.457\tilde{x}_2 + 0.470\tilde{x}_3 + 0.421\tilde{x}_4 + 0.421\tilde{x}_5$$

$$z_2 = 0.240\tilde{x}_1 + 0.509\tilde{x}_2 + 0.260\tilde{x}_3 - 0.526\tilde{x}_4 - 0.582\tilde{x}_5$$

它们的累积贡献率为

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\sum_{i=1}^{5}\lambda_i} \times 100\% = 73\%$$

这两个主成分具有重要的实际解释，第一主成分大约等于这五种股票周回升率和的一个常数倍，通常称为股票市场主成分，简称市场主成分；第二主成分代表化学股票（在 z_2 中系数为正的三只股票都是化学工业上市企业）和石油股票（在 z_2 中系数为负的两只股票恰好都为石油板块的上市企业）的一个对照，称之为工业主成分。这说明，这些股票周回升率的大部分变差来自市场活动和与它不相关的工业活动。关于股票价格的这个结论与经典的证券理论吻合。至于其它主成分解释较为困难，很可能表示每种股票自身的变差，好在它们的贡献率很少，可以忽略不计。

§4　主成分分析案例－我国各地区普通高等教育发展水平综合评价

主成分分析试图在力保数据信息丢失最少的原则下，对多变量的截面数据表进行最佳综合简化，也就是说，对高维变量空间进行降维处理。本案例运用主成分分析方法综合评价我国各地区普通高等教育的发展水平。

问题与第2节中的问题相同，我们这里就不重复叙述了。

4.1　主成分分析法的步骤

主成分分析法进行评价的步骤如下：

1）对原始数据进行标准化处理

假设进行主成分分析的指标变量有 m 个：$x_1, x_2, \cdots, x_m$，共有 n 个评价对象，第 i 个评价对象的第 j 个指标的取值为 x_{ij}。将各指标值 x_{ij} 转换成标准化指标 $\tilde{x}_{ij}$，

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, \quad (i = 1,2,\cdots,n; \quad j = 1,2,\cdots,m)$$

其中 $\bar{x}_j=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{ij}$，$s_j=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij}-\bar{x}_j)^2$，（$j=1,2,\cdots,m$），即 $\bar{x}_j,s_j$ 为第 j 个指标的样本均值和样本标准差。对应地，称

$$\tilde{x}_i=\frac{x_i-\bar{x}_i}{s_i}，（i=1,2,\cdots,m）$$

为标准化指标变量。

2）计算相关系数矩阵 R

相关系数矩阵 $R=(r_{ij})_{m\times m}$

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{x}_{ki}\cdot\tilde{x}_{kj}}{n-1}，（i,j=1,2,\cdots,m）$$

式中 $r_{ii}=1$，$r_{ij}=r_{ji}$，r_{ij} 是第 i 个指标与第 j 个指标的相关系数。

3）计算特征值和特征向量

计算相关系数矩阵 R 的特征值 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_m\geq 0$，及对应的特征向量 $u_1,u_2,\cdots,u_m$，其中 $u_j=(u_{1j},u_{2j},\cdots,u_{nj})^T$，由特征向量组成 m 个新的指标变量

$$\begin{cases}y_1=u_{11}\tilde{x}_1+u_{21}\tilde{x}_2+\cdots+u_{n1}\tilde{x}_n\\ y_2=u_{12}\tilde{x}_1+u_{22}\tilde{x}_2+\cdots+u_{n2}\tilde{x}_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m=u_{1m}\tilde{x}_1+u_{2m}\tilde{x}_2+\cdots+u_{nm}\tilde{x}_n\end{cases}$$

式中 y_1 是第1主成分，y_2 是第2主成分，…，y_m 是第 m 主成分。

4）选择 p（$p\leq m$）个主成分，计算综合评价值

① 计算特征值 $\lambda_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的信息贡献率和累积贡献率。称

$$b_j=\frac{\lambda_j}{\sum_{k=1}^{m}\lambda_k}（j=1,2,\cdots,m）$$

为主成分 y_j 的信息贡献率；

$$\alpha_p = \frac{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k}{\sum_{k=1}^{m} \lambda_k}$$

为主成分 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ 的累积贡献率，当 α_p 接近于1（ $\alpha_p = 0.85, 0.90, 0.95$ ）时，则选择前 p 个指标变量 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ 作为 p 个主成分，代替原来 m 个指标变量，从而可对 p 个主成分进行综合分析。

② 计算综合得分

$$Z = \sum_{j=1}^{p} b_j y_j$$

其中 b_j 为第 j 个主成分的信息贡献率，根据综合得分值就可进行评价。

4.2　基于主成分分析法的综合评价

定性考察反映高等教育发展状况的五个方面十项评价指标，可以看出，某些指标之间可能存在较强的相关性。比如每十万人口高等院校毕业生数、每十万人口高等院校招生数与每十万人口高等院校在校生数之间可能存在较强的相关性， 每十万人口高等院校教职工数和每十万人口高等院校专职教师数之间可能存在较强的相关性。为了验证这种想法，计算十个指标之间的相关系数。

可以看出某些指标之间确实存在很强的相关性，如果直接用这些指标进行综合评价，必然造成信息的重叠，影响评价结果的客观性。主成分分析方法可以把多个指标转化为少数几个不相关的综合指标，因此，可以考虑利用主成分进行综合评价。

利用MATLAB软件对十个评价指标进行主成分分析，相关系数矩阵的前几个特征根及其贡献率如表7。

表7　主成分分析结果

序号	特征根	贡献率	累计贡献率
1	7.5022	75.0216	75.0216
2	1.577	15.7699	90.7915
3	0.5362	5.3621	96.1536
4	0.2064	2.0638	98.2174
5	0.145	1.4500	99.6674
6	0.0222	0.2219	99.8893

可以看出，前两个特征根的累计贡献率就达到90%以上，主成分分析效果很好。下面选取前四个主成分（累计贡献率就达到98%）进行综合评价。前四个特征根对应的特

征向量见表8。

表8　标准化变量的前4个主成分对应的特征向量

	$\tilde{x}_1$	$\tilde{x}_2$	$\tilde{x}_3$	$\tilde{x}_4$	$\tilde{x}_5$	$\tilde{x}_6$	$\tilde{x}_7$	$\tilde{x}_8$	$\tilde{x}_9$	$\tilde{x}_{10}$
第1特征向量	0.3497	0.3590	0.3623	0.3623	0.3605	0.3602	0.2241	0.1201	0.3192	0.2452
第2特征向量	-0.1972	0.0343	0.0291	0.0138	-0.0507	-0.0646	0.5826	0.7021	-0.1941	-0.2865
第3特征向量	−0. 1639	−0. 1084	−0. 0900	−0. 1128	−0. 1534	−0. 1645	−0. 0397	0. 3577	0. 1204	0. 8637
第4特征向量	-0.1022	-0.2266	-0.1692	-0.1607	-0.0442	-0.0032	0. 0812	0. 0702	0. 8999	0. 2457

由此可得四个主成分分别为

$$y_1 = 0.3497\tilde{x}_1 + 0.359\tilde{x}_2 + \cdots + 0.2452\tilde{x}_{10}$$

$$y_2 = -0.1972\tilde{x}_1 + 0.0343\tilde{x}_2 + \cdots - 0.286\tilde{x}_{10}$$

$$y_3 = -0.1639\tilde{x}_1 - 0.1084\tilde{x}_2 + \cdots + 0.8637\tilde{x}_{10}$$

$$y_4 = -0.1022\tilde{x}_1 - 0.2266\tilde{x}_2 + \cdots - 0.2457\tilde{x}_{10}$$

从主成分的系数可以看出，第一主成分主要反映了前六个指标（学校数、学生数和教师数方面）的信息，第二主成分主要反映了高校规模和教师中高级职称的比例，第三主成分主要反映了生均教育经费，第四主成分主要反映了国家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重。把各地区原始十个指标的标准化数据代入四个主成分的表达式，就可以得到各地区的四个主成分值。

分别以四个主成分的贡献率为权重，构建主成分综合评价模型：

$$Z = 0.7502y_1 + 0.1577y_2 + 0.0536y_3 + 0.0206y_4$$

把各地区的四个主成分值代入上式，可以得到各地区高教发展水平的综合评价值以及排序结果如表9。

表9　排名和综合评价结果

地区	北京	上海	天津	陕西	辽宁	吉林	黑龙江	湖北	江苏	广东
名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
综合评价值	8.6043	4.4738	2.7881	0.8119	0.7621	0.5884	0.2971	0.2455	0.0581	0.0058
地区	四川	山东	甘肃	湖南	浙江	新疆	福建	山西	河北	安徽

名次	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
综合评价值	-0.268	-0.3645	-0.4879	-0.5065	-0.7016	-0.7428	-0.7697	-0.7965	-0.8895	-0.8917
地区	云南	江西	海南	内蒙古	西藏	河南	广西	宁夏	贵州	青海
名次	21	22	23	24	25	26	27	28	28	30
综合评价值	-0.9557	-0.9610	-1.0147	-1.1246	-1.1470	-1.2059	-1.2250	-1.2513	-1.6514	-1.68

```
clc,clear
load gj.txt   %把原始数据保存在纯文本文件gj.txt中
gj=zscore(gj); %数据标准化
r=corrcoef(gj);  %计算相关系数矩阵
[x,y,z]=pcacov(r);
f=repmat(sign(sum(x)),size(x,1),1);
x=x.*f;
df=gj*x(:,1:4)
tf=df*z(1:4)/100;
[stf,ind]=sort(tf,'descend')
```

4.3　结论

各地区高等教育发展水平存在较大的差异，高教资源的地区分布很不均衡。北京、上海、天津等地区高等教育发展水平遥遥领先，主要表现在每百万人口的学校数量和每十万人口的教师数量、学生数量以及国家财政预算内普通高教经费占国内生产总值的比重等方面。陕西和东北三省地区高等教育发展水平也比较高。贵州、广西、河南、安徽等地区高等教育发展水平比较落后，这些地区的高等教育发展需要政策和资金的扶持。值得一提的是西藏、新疆、甘肃等经济不发达地区的高等教育发展水平居于中上游水平，可能是由于人口等原因。

§5　因子分析

因子分析（factor analysis）是由英国心理学家Spearman在1904年提出来的，他成功地解决了智力测验得分的统计分析，长期以来，教育心理学家不断丰富、发展了因子分析理论和方法，并应用这一方法在行为科学领域进行了广泛的研究。

因子分析可以看成主成分分析的推广，它也是多元统计分析中常用的一种降维方式，因子分析所涉及的计算与主成分分析也很类似，但差别也是很明显的：1）主成分分析把方差划分为不同的正交成分，而因子分析则把方差划归为不同的起因因子；2）因子分析中特征值的计算只能从相关系数矩阵出发，且必须将主成分转换成因子。

因子分析有确定的模型，观察数据在模型中被分解为公共因子、特殊因子和误差三部分。初学因子分析的最大困难在于理解它的模型，我们先看如下几个例子。

例6　为了解学生的知识和能力，对学生进行了抽样命题考试，考题包括的面很广，但总的来讲可归结为学生的语文水平、数学推导、艺术修养、历史知识、生活知识等五

个方面，我们把每一个方面称为一个（公共）因子，显然每个学生的成绩均可由这五个因子来确定，即可设想第i个学生考试的分数X_i能用这五个公共因子$F_1,F_2,\cdots,F_5$的线性组合表示出来

$$X_i=\mu_i+a_{i1}F_1+a_{i2}F_2+\cdots+a_{i5}F_5+U_i\text{，（}i=1,2,\cdots,N\text{）}\qquad(34)$$

线性组合系数$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{i5}$称为因子载荷（loadings），它分别表示第$i$个学生在这五个因子方面的能力；$\mu_i$是总平均，$U_i$是第$i$个学生的能力和知识不能被这五个因子包含的部分，称为特殊因子，常假定$U_i\sim N(0,\sigma_i^2)$，不难发现，这个模型与回归模型在形式上是很相似的，但这里$F_1,F_2,\cdots,F_5$的值却是未知的，有关参数的意义也有很大的差异。

因子分析的首要任务就是估计因子载荷a_{ij}的方差σ_i^2，然后给因子F_i一个合理的解释，若难以进行合理的解释，则需要进一步作因子旋转，希望旋转后能发现比较合理的解释。

例7　诊断时，医生检测了病人的五个生理指标：收缩压、舒张压、心跳间隔、呼吸间隔和舌下温度，但依据生理学知识，这五个指标是受植物神经支配的，植物神经又分为交感神经和副交感神经，因此这五个指标可用交感神经和副交感神经两个公共因子来确定，从而也构成了因子模型。

例8　Holjinger和Swineford在芝加哥郊区对145名七、八年级学生进行了24个心理测验，通过因子分析，这24个心理指标被归结为4个公共因子，即词语因子、速度因子、推理因子和记忆因子。

特别需要说明的是这里的因子和试验设计里的因子（或因素）是不同的，它比较抽象和概括，往往是不可以单独测量的。

5.1　因子分析模型

设有p个原始变量$x_i(i=1,2,\cdots,p)$，它们可能相关，也可能独立，将x_i标准化得到新变量z_i，则可以建立因子分析模型如下：

$$z_i=a_{i1}F_1+a_{i2}F_2+\cdots+a_{im}F_m+c_iU_i\text{（}i=1,2,\cdots,p\text{），}\qquad(35)$$

其中$F_j(j=1,2,\cdots,m)$出现在每个变量的表达式中，称为公共因子，它们的含义要根据具体问题来解释，$U_i(i=1,2,\cdots,p)$仅与变量z_i有关，称为特殊因子，系数a_{ij},c_i

（$i=1,2,\cdots,p$， $j=1,2,\cdots,m$）称为因子载荷， $A=(a_{ij})$ 称为载荷矩阵。

可以将（35）式表示为如下的矩阵形式

$$z=AF+CU \tag{36}$$

其中 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_p)^T$， $F=(F_1,F_2,\cdots,F_m)^T$， $U=(U_1,U_2,\cdots,U_p)^T$，

$$A=(a_{ij})_{p\times m}，\ C=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_p)$$

对此模型通常需要假设

1）各特殊因子之间以及特殊因子与所有公共因子之间均相互独立，即

$$\begin{cases}\mathrm{Cov}(U)=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_p^2)\\ \mathrm{Cov}(F,U)=0\end{cases} \tag{37}$$

2）各公共因子都是均值为0，方差为1的独立正态随机变量，其协方差矩阵为单位阵 I_m，即 $F\sim N(0,I_m)$。当因子 F 的各个分量相关时，$\mathrm{Cov}(F)$ 不再是对角阵，这样的模型称为斜交因子模型，我们不考虑这种模型。

m 个公共因子对第 i 个变量方差的贡献称为第 i 共同度，记为 h_i^2，

$$h_i^2=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{im}^2 \tag{38}$$

而特殊因子的方差称为特殊方差或者特殊值（即（37）式中的 σ_i^2， $i=1,2,\cdots,p$），从而第 i 个变量的方差有如下分解

$$\mathrm{Varz}_i=h_i^2+\sigma_i^2，\ i=1,2,\cdots,p \tag{39}$$

因子分析的一个基本问题是如何估计因子载荷，亦即如何求解因子模型（35），我们下面仅仅介绍最常用的基于样本相关系数矩阵 R 的主成分解。

设 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_p$ 为样本相关系数矩阵 R 的特征值，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_p$ 为相应的标准正交化特征向量。设 $m<p$，则样本相关系数矩阵 R 的主成分因子分析的载荷矩阵 A 为

$$A=(\sqrt{\lambda_1}\eta_1,\sqrt{\lambda_2}\eta_2,\cdots,\sqrt{\lambda_m}\eta_m)， \tag{40}$$

特殊因子的方差用 $R-AA^T$ 的对角元来估计，即

$$\sigma_i^2 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 \qquad (41)$$

例9（续例5） 我们考虑样本相关系数矩阵 R 的前两个样本主成分，对 $m=1$ 和 $m=2$，因子分析主成分解见表10，对 $m=2$，残差矩阵 $R - AA^T - \mathrm{Cov}(U)$ 为

$$\begin{bmatrix} 0 & -0.1274 & -0.1643 & -0.0689 & 0.0173 \\ -0.1274 & 0 & -0.1223 & 0.0553 & 0.0118 \\ -0.1643 & -0.1234 & 0 & -0.0193 & -0.0171 \\ -0.0689 & 0.0553 & -0.0193 & 0 & -0.2317 \\ 0.0173 & 0.0118 & -0.0171 & -0.2317 & 0 \end{bmatrix}$$

表10　因子分析主成分解

变量	一个因子		两个因子		
	因子载荷估计 F_1	特殊方差	因子载荷估计		特殊方差
			F_1	F_2	
1	0.7836	0.3860	0.7836	-0.2162	0.3393
2	0.7726	0.4031	0.7726	-0.4581	0.1932
3	0.7947	0.3685	0.7947	-0.2343	0.3136
4	0.7123	0.4926	0.7123	0.4729	0.2690
5	0.7119	0.4931	0.7119	0.5235	0.2191
累积贡献	0.571342		0.571342	0.733175	

由这两个因子解释的总方差比一个因子大很多。然而，对 $m=2$，残差矩阵负元素较多，这表明 AA^T 产生的数比 R 中对应元素（相关系数）要大。

第一个因子 F_1 代表了一般经济条件，称为市场因子，所有股票在这个因子上的载荷都比较大，且大致相等，第二个因子是化学股和石油股的一个对照，两者分别有比较大的负、正载荷。可见 F_2 使不同的工业部门的股票产生差异，通常称之为工业因子。归纳起来，我们有如下结论：股票回升率由一般经济条件、工业部门活动和各公司本身特殊活动三部分决定，这与例5的结论基本一致。

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
r=[1.000 0.577 0.509 0.387 0.462
   0.577 1.000 0.599 0.389 0.322
```

```
    0.509 0.599 1.000 0.436 0.426
    0.387 0.389 0.436 1.000 0.523
    0.462 0.322 0.426 0.523 1.000];
[vec,val,con]=pcacov(r);
f1=repmat(sign(sum(vec)),size(vec,1),1);
vec=vec.*f1;      %特征向量正负号转换
f2=repmat(sqrt(val)',size(vec,1),1);
a=vec.*f2
a1=a(:,1);   %一个因子的载荷矩阵
tm=r-a1*a1';
tcha1=diag(tm)   %一个因子的特殊方差
a2=a(:,[1,2]);  %两个因子的载荷矩阵
tm=r-a2*a2';
tcha2=diag(tm)  %两个因子的特殊方差
ccha2=r-a2*a2'-diag(tcha2)  %求两个因子时的残差矩阵
gong=cumsum(con)      %求累积贡献率
```

5.2　因子旋转

上面主成分解是不唯一的，因为对 A 作任何正交变换都不会改变原来的 AA^T，即设 Q 为 m 阶正交矩阵，$B=AQ$ 则有 $BB^T=AA^T$，载荷矩阵的这种不唯一性表明看是不利的，但我们却可以利用这种不变性，通过适当的因子变换，使变换后新的因子具有更鲜明的实际意义或可解释性，比如，我们可以通过正交变换使 B 中有尽可能多的元素等于或接近于0，从而使因子载荷矩阵结构简单化，便于做出更有实际意义的解释。

由于正交变换是一种旋转变换，如果我们选取方差最大的正交旋转，即将各个因子旋转到某个位置，使每个变量在旋转后的因子轴上的投影向最大、最小两级分化，从而使每个因子中的高载荷只出现在少数的变量上，在最后得到的旋转因子载荷矩阵中，每列元素除几个值外，其余的均接近于0。

5.2.1　考虑两个因子的平面正交旋转

设因子载荷矩阵为

$$A=(a_{ij})，\ i=1,2,\cdots,p，\ j=1,2 \tag{42}$$

取正交矩阵

$$Q=\begin{pmatrix}\cos\phi & -\sin\phi\\ \sin\phi & \cos\phi\end{pmatrix} \tag{43}$$

这是逆时针旋转，如作顺时针旋转，只需将（43）式次对角线上的两个元素对换即可。并记

$$B = AQ = (b_{ij})\,,\ i = 1,2,\cdots,p\,,\ \ j = 1,2 \tag{44}$$

称 B 为旋转因子载荷矩阵，此时模型（36）变为

$$z = B(Q^T F) + CU \tag{45}$$

同时，公共因子 F 也随之变为 $Q^T F$，现在希望通过旋转，将变量分为主要由不同因子说明的两个部分，因此，要求 $(b_{11}^2, b_{21}^2, \cdots, b_{p1}^2)$ 和 $(b_{12}^2, b_{22}^2, \cdots, b_{p2}^2)^T$ 这两列数据分别求得的方差尽可能的大。

下面考虑相对方差

$$V_j = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{b_{ij}^2}{h_i^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}\frac{b_{ij}^2}{h_i^2}\right)^2\,,\ \ j = 1,2 \tag{46}$$

取 b_{ij} 是为了消除 b_{ij} 符号的影响，除以 h_i^2 是为了消除各个变量对公共因子依赖程度不同的影响，正交旋转的目的是为了使总方差 $V = V_1 + V_2$ 达到最大。令 $\frac{dV}{d\phi} = 0$，经计算，ϕ 应满足

$$\tan 4\phi = \frac{D_0 - 2A_0B_0 / p}{C_0 - (A_0^2 - B_0^2)/p} \tag{47}$$

其中

$$\begin{cases} A_0 = \sum_{i=1}^{p} u_i, & B_0 = \sum_{i=1}^{p} v_i \\ C_0 = \sum_{i=1}^{p} (u_i^2 - v_i^2), & D_0 = 2\sum_{i=1}^{p} u_i v_i \\ u_i = \left(\frac{a_{i1}}{h_i}\right)^2 - \left(\frac{a_{i2}}{h_i}\right)^2, & v_i = \frac{2a_{i1}a_{i2}}{h_i^2} \end{cases} \tag{48}$$

当 $m = 2$ 时，还可以通过图解法，凭直觉将坐标轴旋转一个角度 ϕ，一般的做法是先对变量聚类，利用这些类很容易确定新的公共因子。

5.2.2　公共因子数 $m > 2$ 的情形

可以每次考虑不同的两个因子的旋转，从 m 个因子中每次选两个旋转，共有

$m(m-1)/2$种选择，这样共有$m(m-1)/2$旋转，做完这$m(m-1)/2$次旋转就算完成了一个循环，然后重新开始第二个循环，每经一个循环，A阵的各列的相对方差和V只会变大，当第k次循环后的$V^{(k)}$与上一次循环的$V^{(k-1)}$比较变化不大时，就停止旋转。

例10　设某三个变量的样本相关系数矩阵为

$$R=\begin{pmatrix} 1 & -1/3 & 2/3 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

试从R出发，作因子分析。

解　1）求R的特征值及其相应的特征向量。

由特征方程$\det(R-\lambda I)=0$可得三个特征值，依大小次序记为$\lambda_1=1.7454$，

$\lambda_2=1$，$\lambda_3=0.2546$，由于前面两个特征值的累积方差贡献率已达91.51%，因而只要取两个主因子就行了，下面给出了前两个特征值对应的特征向量：

$$\eta_1^T=(0.7071, 0.3162, -0.6325)$$

$$\eta_2^T=(0, 0.8944, 0.4472)$$

2）求因子载荷矩阵A

由（40）式即可算出

$$A=\begin{pmatrix} 0.9342 & 0 \\ -0.4178 & 0.8944 \\ 0.8355 & 0.4472 \end{pmatrix}$$

3）对载荷矩阵A作正交旋转

对载荷矩阵A作正交旋转，使得到的矩阵$A_1=AQ$的方差和最大。计算结果为

$$Q=\begin{pmatrix} 0.9320 & -0.3625 \\ 0.3625 & 0.9320 \end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix} 0.8706 & -0.3386 \\ -0.0651 & 0.9850 \\ 0.9408 & 0.1139 \end{pmatrix}$$

求解的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
r=[1 -1/3 2/3;-1/3 1 0;2/3 0 1];
[vec,val,con]=pcacov(r);num=2;
fl=repmat(sign(sum(vec)),size(vec,1),1);
```

```
vec=vec.*f1;      %特征向量正负号转换
f2=repmat(sqrt(val)',size(vec,1),1);
a=vec.*f2    %载荷矩阵
[b,t]=rotatefactors(a(:,1:num),'method', 'varimax')
```

例11　在一项关于消费者爱好的研究中，随机的邀请一些顾客对某种新食品进行评价，共有5项指标（变量，1－味道，2－价格，3－风味，4－适于快餐，5－能量补充），均采用7级打分法，它们的相关系数矩阵

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 0.02 & 0.96 & 0.42 & 0.01 \\ 0.02 & 1 & 0.13 & 0.71 & 0.85 \\ 0.96 & 0.13 & 1 & 0.5 & 0.11 \\ 0.42 & 0.71 & 0.5 & 1 & 0.79 \\ 0.01 & 0.85 & 0.11 & 0.79 & 1 \end{pmatrix}$$

从相关系数矩阵R可以看出，变量1和3、2和5各成一组，而变量4似乎更接近（2，5）组，于是，我们可以期望，因子模型可以取两个、至多三个公共因子。

R的前两个特征值为2.8531和1.8063，其余三个均小于1，这两个公共因子对样本方差的累计贡献率为0.9319，于是，我们选$m=2$，因子载荷、贡献率和特殊方差的估计列入表11中。

表11　因子分析表

变量	因子载荷估计		旋转因子载荷估计		共同度	特殊方差（未旋转）
	F_1	F_2	Q^TF_1	Q^TF_2		
1	0.5599	0.8161	0.027	0.9854	0.9795	0.0205
2	0.7773	-0.5242	0.8734	0.0034	0.8789	0.1211
3	0.6453	0.7479	0.1329	0.9705	0.9759	0.0241
4	0.9391	-0.1049	0.8178	0.4035	0.8929	0.1071
5	0.7982	-0.5432	0.9734	-0.0179	0.9322	0.0678
特征值	2.8531	1.8063				
累积贡献	57.0618	93.1885				

因为$AA^T+\mathrm{Cov}(U)$与R比较接近，所以从直观上，我们可以认为两个因子的模型给出了数据较好的拟合。另一方面，五个贡献值都比较大，表明了这两个公共因子确实解释了每个变量方差的绝大部分。

很明显，变量2，4，5在Q^TF_1上有大载荷，而在Q^TF_2上的载荷较小或可忽略。相反，变量1，3在Q^TF_2上有大载荷，而在Q^TF_1上的载荷却是可以忽略。因此，我们有

理由称Q^TF_1为营养因子，Q^TF_2为滋味因子。旋转的效果一目了然。

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
load li11.txt  %把原始的相关系数矩阵保存在纯文本文件li11.txt中
r=li11;num=2; %num为因子的个数
[vec,val,con]=pcacov(r);
f1=repmat(sign(sum(vec)),size(vec,1),1);
vec=vec.*f1;      %特征向量正负号转换
f2=repmat(sqrt(val)',size(vec,1),1);
a=vec.*f2
a1=a(:,[1:num])   %因子的载荷矩阵
tm=r-a1*a1';
tcha=diag(tm)   %因子的特殊方差
ccha=r-a1*a1'-diag(tcha)  %求残差矩阵
gong=cumsum(con(1:num))      %求累积贡献率
[b1,b2]=factoran(r,2,'xtype','cov','rotate','varimax')   %求旋转因子载荷矩阵和特殊方差
```

在因子分析中，一般人们的重点是估计因子模型的参数，即载荷矩阵，有时公共因子的估计，即所谓因子得分，也是需要的，因子得分可以用于模型诊断，也可以作下一步分析的原始数据，需要指出的是，因子得分的计算并不是通常意义下的参数估计，它是对不可观测的随机向量F_i取值的估计。通常可以用加权最小二乘法和回归法来估计因子得分。

§6 因子分析案例

因子分析(factor analysis)是一种数据简化的技术。它通过研究众多变量之间的内部依赖关系，探求观测数据中的基本结构，并用少数几个假想变量来表示其基本的数据结构。这几个假想变量能够反映原来众多变量的主要信息。原始的变量是可观测的显在变量，而假想变量是不可观测的潜在变量，称为因子。

因子分析与回归分析不同，因子分析中的因子是一个比较抽象的概念，而回归因子有非常明确的实际意义。

主成分分析分析与因子分析也有不同，主成分分析仅仅是变量变换，而因子分析需要构造因子模型。

主成分分析:原始变量的线性组合表示新的综合变量，即主成分。

因子分析：潜在的假想变量和随机影响变量的线性组合表示原始变量。

下面我们首先总结一下因子分析的原理。

6.1 因子分析的原理

6.1.1　因子分析模型

1. 数学模型

设 $X_i(i=1,2,\cdots,p)$ 个变量，如果表示为

$$X_i=\mu_i+a_{i1}F_1+\cdots+a_{im}F_m+\varepsilon_i\text{，（}m\le p\text{）}\qquad(49)$$

或

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_p\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\\vdots\\F_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_p\end{bmatrix}$$

或

$$X-\mu=AF+\varepsilon$$

其中

$$X=\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_p\end{bmatrix},\ \mu=\begin{bmatrix}\mu_1\\\mu_2\\\vdots\\\mu_p\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pm}\end{bmatrix},\ \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\vdots\\\varepsilon_p\end{bmatrix}$$

称 $F_1,F_2,\cdots,F_p$ 为公共因子，是不可观测的变量，它们的系数称为载荷因子。ε_i 是特殊因子，是不能被前 m 个公共因子包含的部分。并且满足

$E(F)=0$，$E(\varepsilon)=0$，$\mathrm{Cov}(F)=I_m$，

$D(\varepsilon)=Cov(\varepsilon)=\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2)$，$\mathrm{cov}(F,\varepsilon)=0$。

2．因子分析模型的性质

（1）原始变量 X 的协方差矩阵的分解

由 $X-\mu=AF+\varepsilon$，得 $\mathrm{Cov}(X-\mu)=A\mathrm{Cov}(F)A^T+\mathrm{Cov}(\varepsilon)$，即

$$Cov(X)=AA^T+\mathrm{diag}(\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2)$$

$\sigma_1^2,\sigma_2^2,\cdots,\sigma_m^2$ 的值越小，则公共因子共享的成分越多。

（2）载荷矩阵不是唯一的

设 T 为一个 $p\times p$ 的正交矩阵，令 $\tilde{A}=AT$，$\tilde{F}=T^TF$，则模型可以表示为

$$X = \mu + \tilde{A}\tilde{F} + \varepsilon$$

3．因子载荷矩阵中的几个统计性质

（1）因子载荷 a_{ij} 的统计意义

因子载荷 a_{ij} 是第 i 个变量与第 j 个公共因子的相关系数，反映了第 i 个变量与第 j 个公共因子的相关重要性。绝对值越大，相关的密切程度越高。

（2）变量共同度的统计意义

变量 X_i 的共同度是因子载荷矩阵的第 i 行的元素的平方和。记为 $h_i^2 = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$ 。对（49）式两边求方差，得

$$\mathrm{Var}(X_i) = a_{i1}^2\mathrm{Var}(F_1) + \cdots + a_{im}^2\mathrm{Var}(F_m) + \mathrm{Var}(\varepsilon_i)$$

即

$$1 = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2 + \sigma_i^2$$

可以看出所有的公共因子和特殊因子对变量 X_i 的贡献为1。如果 $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2$ 非常靠近1，σ_i^2 非常小，则因子分析的效果好，从原变量空间到公共因子空间的转化效果好。

（3）公共因子 F_j 方差贡献的统计意义

因子载荷矩阵中各列元素的平方和

$$S_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}^2$$

称为 $F_j(j = 1,2,\cdots,m)$ 对所有的 X_i 的方差贡献和。衡量 F_j 的相对重要性。

6.1.2　因子载荷矩阵的估计方法

1.主成分分析法

见第五节。

2．主因子法

主因子方法是对主成分方法的修正，假定我们首先对变量进行标准化变换。则

$$R = AA^T + D$$

$$R^* = AA^T = R - D$$

称 R^* 为约相关系数矩阵， R^* 对角线上的元素是 h_i^2 ，而不是1。

$$R^* = R - \hat{D} = \begin{bmatrix} \hat{h}_1^2 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & \hat{h}_2^2 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & \hat{h}_p^2 \end{bmatrix}$$

直接求 R^* 的前 p 个特征值和对应的正交特征向量。得到如下的矩阵

$$A=[\sqrt{\lambda_1^*}u_1^* \quad \sqrt{\lambda_2^*}u_2^* \quad \cdots \quad \sqrt{\lambda_p^*}u_p^*]$$

其中 R^* 的特征值： $\lambda_1^* \geq \lambda_2^* \geq \cdots \geq \lambda_p^*$ ，对应的正交特征向量为 $u_1^*, u_2^*, \cdots, u_p^*$ 。

在实际应用中，特殊因子的方差一般都是未知的，可以通过一组样本来估计。估计的方法有如下几种：

1）取 $\hat{h}_i^2 = 1$ ，在这个情况下主因子解与主成分解等价。

2）取 $\hat{h}_i^2 = R_i^2$ ， R_i^2 为 x_i 与其它所有的原始变量 x_j 的复相关系数的平方，即 x_i 对其余的 $p-1$ 个 x_j 的回归方程的判定系数，这是因为 x_i 与公共因子的关系是通过其余的 $p-1$ 个 x_j 的线性组合联系起来的。

3）取 $\hat{h}_i^2 = \max|r_{ij}|(j \neq i)$ ，这意味着取 x_i 与其余的 x_j 的简单相关系数的绝对值最大者。

4）取 $\hat{h}_i^2 = \dfrac{1}{p-1}\sum\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{p} r_{ij}$ ，其中要求该值为正数。

5）取 $\hat{h}_i^2 = 1/r^{ii}$ ，其中 r^{ii} 是 R^{-1} 的对角元素。

3．极大似然估计法（略）

例12　假定某地固定资产投资率 x_1 ，通货膨胀率 x_2 ，失业率 x_3 ，相关系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 1 & -2/5 \\ -1/5 & -2/5 & 1 \end{bmatrix}$$

试用主成分分析法求因子分析模型。

解　特征值为 $\lambda_1=1.5464$，$\lambda_2=0.8536$，$\lambda_3=0.6$，特征向量

$$u_1=\begin{bmatrix}0.4597\\0.628\\-0.628\end{bmatrix},\quad u_2=\begin{bmatrix}0.8881\\-0.3251\\0.3251\end{bmatrix},\quad u_3=\begin{bmatrix}0\\0.7071\\0.7071\end{bmatrix}$$

载荷矩阵

$$A=\left[\sqrt{\lambda_1}u_1\quad\sqrt{\lambda_2}u_2\quad\sqrt{\lambda_3}u_3\right]=\begin{bmatrix}0.5717&0.8205&0\\0.7809&-0.3003&0.5477\\-0.7809&0.3003&0.5477\end{bmatrix}$$

$$x_1=0.5717F_1+0.8205F_2$$

$$x_2=0.7809F_1-0.3003F_2+0.5477F_3$$

$$x_3=-0.7809F_1+0.3003F_2+0.5477F_3$$

可取前两个因子 F_1 和 F_2 为公共因子，第一公因子 F_1 为物价因子，对 X 的贡献为1.5464，第二公因子 F_2 为投资因子，对 X 的贡献为0.8536。共同度分别为1，0.7，0.7。

计算的MATLAB程序为：

```
clc,clear
r=[1 1/5 -1/5;1/5 1 -2/5;-1/5 -2/5 1];
[vec,val,con]=pcacov(r);num=2;
f1=repmat(sign(sum(vec)),size(vec,1),1);
vec=vec.*f1;      %特征向量正负号转换
f2=repmat(sqrt(val)',size(vec,1),1);
a=vec.*f2    %载荷矩阵
s1=sum(a.^2,1)
tt=a.^2;tt=tt(:,1:num);
s2=sum(tt,2)
```

例13　假定某地固定资产投资率 x_1，通货膨胀率 x_2，失业率 x_3，相关系数矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&1/5&-1/5\\1/5&1&-2/5\\-1/5&-2/5&1\end{bmatrix}$$

试用主因子分析法求因子分析模型。

解　假定用 $\hat{h}_i^2 = \max|r_{ij}|(j \neq i)$ 代替初始的 h_i^2。则有 $h_1^2 = \frac{1}{5}$，$h_2^2 = \frac{2}{5}$，$h_3^2 = \frac{2}{5}$ 。

$$R^* = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 2/5 & -2/5 \\ -1/5 & -2/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

特征值为 $\lambda_1 = 0.9123$，$\lambda_2 = 0.0877$，$\lambda_3 = 0$。非零特征值对应的特征向量为

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0.369 \\ 0.6572 \\ -0.6572 \end{bmatrix}，\quad u_2 = \begin{bmatrix} 0.9294 \\ -0.261 \\ 0.261 \end{bmatrix}$$

取两个主因子，求得载荷矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0.3525 & 0.2752 \\ 0.6277 & -0.0773 \\ -0.6277 & 0.0773 \end{bmatrix}$$

6.1.3　因子旋转（正交变换）

建立因子分析数学模型目的不仅仅要找出公共因子以及对变量进行分组，更重要的要知道每个公共因子的意义，以便进行进一步的分析，如果每个公共因子的含义不清，则不便于进行实际背景的解释。由于因子载荷阵是不唯一的，所以应该对因子载荷阵进行旋转。目的是使因子载荷阵的结构简化，使载荷矩阵每列或行的元素平方值向0和1两级分化。有三种主要的正交旋转法，四次方最大法、方差最大法和等量最大法。

1．方差最大法

方差最大法从简化因子载荷矩阵的每一列出发，使和每个因子有关的载荷的平方的方差最大。当只有少数几个变量在某个因子上有较高的载荷时，对因子的解释最简单。方差最大的直观意义是希望通过因子旋转后，使每个因子上的载荷尽量拉开距离，一部分的载荷趋于±1，另一部分趋于0。

2．四次方最大旋转

四次方最大旋转是从简化载荷矩阵的行出发，通过旋转初始因子，使每个变量只在一个因子上有较高的载荷，而在其它的因子上尽可能低的载荷。如果每个变量只在一个因子上有非零的载荷，这时的因子解释是最简单的。

四次方最大法通过使因子载荷矩阵中每一行的因子载荷平方的方差达到最大。

3．等量最大法

等量最大法把四次方最大法和方差最大法结合起来，求它们的加权平均最大。

6.2　因子得分

1．因子得分的概念

前面我们主要解决了用公共因子的线性组合来表示一组观测变量的有关问题。如果

我们要使用这些因子做其他的研究，比如把得到的因子作为自变量来做回归分析，对样本进行分类或评价，这就需要我们对公共因子进行测度，即给出公共因子的值。

因子分析的数学模型为：

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$$

原变量被表示为公共因子的线性组合，当载荷矩阵旋转之后，公共因子可以做出解释，通常的情况下，我们还想反过来把公共因子表示为原变量的线性组合。

因子得分函数

$$F_j = \beta_{j1}X_1 + \cdots + \beta_{jp}X_p, \quad j = 1,2,\cdots,m$$

可见，要求得每个因子的得分，必须求得分函数的系数，而由于 $p > m$，所以不能得到精确的得分，只能通过估计。

（1）巴特莱特因子得分(加权最小二乘法）

把 $x_i - \mu_i$ 看作因变量，把因子载荷矩阵

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pm} \end{bmatrix}$$

看成自变量的观测。

$$\begin{cases} x_{i1} - \mu_1 = a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \cdots + a_{1m}f_m + \varepsilon_1 \\ x_{i2} - \mu_2 = a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \cdots + a_{2m}f_m + \varepsilon_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{ip} - \mu_p = a_{p1}f_1 + a_{p2}f_2 + \cdots + a_{pm}f_m + \varepsilon_p \end{cases}$$

由于特殊因子的方差相异，所以用加权最小二乘法求得分。使

$$\sum_{j=1}^{p}[(x_{ij} - \mu_i) - (a_{i1}\hat{f}_1 + a_{i2}\hat{f}_2 + \cdots a_{im}\hat{f}_m)]^2 / \sigma_i^2$$

最小的 $\hat{f}_1,\cdots,\hat{f}_m$ 是相应个案的因子得分。

用矩阵表达有

$$x - \mu = AF + \varepsilon$$

则要使

$$(x-\mu-AF)^T D^{-1}(x-\mu-AF) \qquad (50)$$

达到最小，其中

$$D=\begin{bmatrix}\sigma_1^{-2} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_p^{-2}\end{bmatrix}$$

使（50）式取得最小值的 F 是相应个案的因子得分。

计算得 F 满足

$$A^T D^{-1}F = A^T D^{-1}A(x-\mu)$$

解之得

$$\hat{F} = (A^T D^{-1}A)^{-1}A^T D^{-1}(x-\mu)$$

（2）回归方法

下面我们简单介绍一下回归方法的思想。

不妨设

$$\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1m}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2m}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{p1}&a_{p2}&\cdots&a_{pm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\\vdots\\F_m\end{bmatrix}$$

则有

$$\hat{F}_j = b_{j1}X_1+\cdots+b_{jp}X_p,\quad j=1,2,\cdots,m$$

记

$$\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1p}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2p}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{m1}&b_{m2}&\cdots&b_{mp}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

$$a_{ij}=\gamma_{X_iF_j}=E(X_iF_j)=E[X_i(b_{j1}X_1+\cdots+b_{jp}X_p)]$$

$$=b_{j1}\gamma_{i1}+\cdots+b_{jp}\gamma_{ip}=[\gamma_{i1}\quad\gamma_{i2}\quad\cdots\quad\gamma_{ip}]\begin{bmatrix}b_{j1}\\b_{j2}\\\vdots\\b_{jp}\end{bmatrix}$$

则我们有如下的方程组

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pp} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{j1} \\ b_{j2} \\ \vdots \\ b_{jp} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{bmatrix}$$

分别为原始变量的相关系数矩阵，第 j 个因子得分函数的系数，载荷矩阵的第 j 列。

用矩阵表示有

$$[b_1^T \quad b_2^T \quad \cdots \quad b_m^T] = R^{-1}A$$

6.3　因子分析的步骤

1．选择分析的变量

用定性分析和定量分析的方法选择变量,因子分析的前提条件是观测变量间有较强的相关性，因为如果变量之间无相关性或相关性较小的话，他们不会有共享因子,所以原始变量间应该有较强的相关性。

2．计算所选原始变量的相关系数矩阵

相关系数矩阵描述了原始变量之间的相关关系。可以帮助判断原始变量之间是否存在相关关系，这对因子分析是非常重要的，因为如果所选变量之间无关系，做因子分析是不恰当的。并且相关系数矩阵是估计因子结构的基础。

3．提出公共因子

这一步要确定因子求解的方法和因子的个数。需要根据研究者的设计方案或有关的经验或知识事先确定。因子个数的确定可以根据因子方差的大小。只取方差大于1(或特征值大于1)的那些因子，因为方差小于1的因子其贡献可能很小；按照因子的累计方差贡献率来确定，一般认为要达到60％才能符合要求。

4．因子旋转

通过坐标变换使每个原始变量在尽可能少的因子之间有密切的关系,这样因子解的实际意义更容易解释,并为每个潜在因子赋予有实际意义的名字。

5．计算因子得分

求出各样本的因子得分，有了因子得分值，则可以在许多分析中使用这些因子，例如以因子的得分做聚类分析的变量，做回归分析中的回归因子。

6.4　我国上市公司赢利能力与资本结构的实证分析

已知上市公司的数据见表12。

表12　上市公司数据

公司	销售净利率 x_1	资产净利率 x_2	净资产收益率 x_3	销售毛利率 x_4	资产负利率 x
歌华有线	43.31	7.39	8.73	54.89	15.35
五粮液	17.11	12.13	17.29	44.25	29.69
用友软件	21.11	6.03	7	89.37	13.82
太太药业	29.55	8.62	10.13	73	14.88
浙江阳光	11	8.41	11.83	25.22	25.49
烟台万华	17.63	13.86	15.41	36.44	10.03
方正科技	2.73	4.22	17.16	9.96	74.12
红河光明	29.11	5.44	6.09	56.26	9.85
贵州茅台	20.29	9.48	12.97	82.23	26.73
中铁二局	3.99	4.64	9.35	13.04	50.19
红星发展	22.65	11.13	14.3	50.51	21.59
伊利股份	4.43	7.3	14.36	29.04	44.74
青岛海尔	5.4	8.9	12.53	65.5	23.27
湖北宜化	7.06	2.79	5.24	19.79	40.68
雅戈尔	19.82	10.53	18.55	42.04	37.19
福建南纸	7.26	2.99	6.99	22.72	56.58

试用因子分析法对上述企业进行综合评价。

1.对原始数据进行标准化处理

假设进行因子分析的指标变量有 p 个：$x_1, x_2, \cdots, x_p$，共有 n 个评价对象，第 i 个评价对象的第 j 个指标的取值为 x_{ij}。将各指标值 x_{ij} 转换成标准化指标 $\tilde{x}_{ij}$，

$$\tilde{x}_{ij} = \frac{x_{ij} - \bar{x}_j}{s_j}, \quad (i = 1,2,\cdots,n;\ \ j = 1,2,\cdots,p)$$

其中 $\bar{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$，$s_j = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$，（$j = 1,2,\cdots,p$），即 $\bar{x}_j, s_j$ 为第 j 个指标的样本均值和样本标准差。对应地，称

$$\tilde{x}_i = \frac{x_i - \bar{x}_i}{s_i}, \quad (i = 1,2,\cdots,p)$$

为标准化指标变量。

2．计算相关系数矩阵 R

相关系数矩阵 $R = (r_{ij})_{p\times p}$

$$r_{ij}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\tilde{x}_{ki}\cdot\tilde{x}_{kj}}{n-1}，（i,j=1,2,\cdots,p）$$

式中$r_{ii}=1$，$r_{ij}=r_{ji}$，r_{ij}是第i个指标与第j个指标的相关系数。

3．计算初等载荷矩阵

计算相关系数矩阵R的特征值$\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_p\geq 0$，及对应的特征向量

$u_1,u_2,\cdots,u_p$，其中$u_j=(u_{1j},u_{2j},\cdots,u_{nj})^T$，初等载荷矩阵

$$A=[\sqrt{\lambda_1}u_1\quad\sqrt{\lambda_2}u_2\quad\cdots\quad\sqrt{\lambda_p}u_p]$$

4．选择m（$m\leq p$）个主因子，进行因子旋转

根据初等载荷矩阵，计算各个公共因子的贡献率，并选择m个主因子。对提取的因子载荷矩阵进行旋转，得到矩阵$B=\hat{A}T$（其中$\hat{A}$为A的前m列，T为正交矩阵），构造因子模型

$$\begin{cases}\tilde{x}_1=b_{11}F_1+\cdots+b_{1m}F_m\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \tilde{x}_p=b_{p1}F_1+\cdots+b_{pm}F_m\end{cases}$$

利用MATLAB程序计算得旋转后的因子贡献及贡献率见表13、因子载荷阵见表14。

表13 贡献率数据

因子	贡献	贡献率	累计贡献率
1	1.7794	44.49	44.49
2	1.6673	41.68	86.17

表14 旋转因子分析表

指标	主因子1	主因子2
销售净利率	0.893	0.0082
资产净利率	0.372	0.8854
净资产收益率	-0.2302	0.9386
销售毛利率	0.8892	0.0494

5.计算因子得分，并进行综合评价

我们用回归方法求单个因子得分函数

$$\hat{F}_j=b_{j1}\tilde{x}_1+\cdots+b_{jp}\tilde{x}_p，\quad j=1,2,\cdots,m$$

记

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

则有

$$[b_1^T \quad b_2^T \quad \cdots \quad b_m^T] = R^{-1}A$$

计算得各个因子得分函数

$$F_1 = 0.531\tilde{x}_1 + 0.1615\tilde{x}_2 - 0.1831\tilde{x}_3 + 0.5015\tilde{x}_4$$

$$F_2 = -0.045\tilde{x}_1 + 0.5151\tilde{x}_2 + 0.581\tilde{x}_3 - 0.0199\tilde{x}_4$$

利用综合因子得分公式

$$F = \frac{44.49F_1 + 41.68F_2}{86.17}$$

计算出16家上市公司赢利能力的综合得分见表15。

表15　上市公司综合排名表

排名	1	2	3	4	5	6	7	8
F_1	0.0315	0.0025	0.9789	0.4558	-0.0563	1.2791	1.5159	1.2477
F_2	1.4691	1.4477	0.3959	0.8548	1.3577	-0.1564	-0.5814	-0.9729
F	0.7269	0．7016	0．6969	0．6488	0．6277	0．5847	0．5014	0.1735
公司	烟台万华	五粮液	贵州茅台	红星发展	雅戈尔	太太药业	歌华有线	用友软件
排名	9	10	11	12	13	14	15	16
F_1	-0.0351	0.9313	-0.6094	-0.9859	-1.7266	-1.2509	-0.8872	-0.891
F_2	0.3166	-1.1949	0.1544	0.3468	0.2639	-0.7424	-1.1091	-1.2403
F	0.135	-0.0972	-0.2399	-0.3412	-0.7637	-1.0049	-1.1091	-1.2403
公司	青岛海尔	红河光明	浙江阳光	伊利股份	方正科技	中铁二局	福建南纸	湖北宜化

我们通过相关分析，在显著水平为0.05的情况下，得出赢利能力 F 与资产负债率 x 之间的相关系数为-0.6987，这表明两者存在中度相关关系。因子分析法的回归方程为：

$$F = 0.829 - 0.0268x$$

回归方程在显著性水平0.05的情况下，通过了假设检验。

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
```

```
load data.txt    %把原始数据保存在纯文本文件data.txt中
data=reshape(data,[16,5]);
m=size(data,1);
x=data(:,5);data=data(:,1:4),num=2;
data=zscore(data); %数据标准化
r=cov(data);
[vec,val,con]=pcacov(r);  %进行主成分分析的相关计算
val,con
f1=repmat(sign(sum(vec)),size(vec,1),1);
vec=vec.*f1;      %特征向量正负号转换
f2=repmat(sqrt(val)',size(vec,1),1);
a=vec.*f2    %载荷矩阵
%如果指标变量多，选取的主因子个数少，可以直接使用factoran进行因子分析
%本题中4个指标变量，选取2个主因子，factoran无法实现
[b,t]=rotatefactors(a(:,1:num),'method', 'varimax')  %旋转变换
bz=[b,a(:,num+1:end)]   %旋转后的载荷矩阵
gx=sum(bz.^2)              %计算因子贡献
gxv=gx/sum(gx)             %计算因子贡献率
dfxsh=inv(r)*b             %计算得分函数的系数
df=data*dfxsh             %计算各个因子的得分
zdf=df*gxv(1:num)'/sum(gxv(1:num))            %对各因子的得分进行加权求和
[szdf,ind]=sort(zdf,'descend')       %对企业进行排名
xianshi=[df(ind,:)';zdf(ind)';ind'] %显示计算结果
[x_zdf_coef,p]=corrcoef([zdf,x])    %计算相关系数
[d1,d1int,d2,d2int,stats]=regress(zdf,[ones(m,1),x]) %回归分析计算
```

6.4　主成分分析法与因子分析法数学模型的异同比较

1．相同点

在以下几方面是相同的：指标的标准化，相关系数矩阵及其特征值和特征向量，用累计贡献率确定主成分、因子个数 m，单个主成分与综合主成分的分析评价、单因子与综合因子的分析评价步骤。

2．不同点

不同之处见表 16。

表 16　主成分分析与因子分析法的不同点

主成分分析数学模型	因子分析的一种数学模型

$F_i = a_{1i}x_1 + a_{2i}x_2 + \cdots a_{pi}x_p$ $= a_i^T x, \quad i = 1,2,\cdots,m$	$x_j = b_{j1}F_1 + b_{j2}F_2 + \cdots + b_{jm}F_m + \varepsilon_j$ $j = 1,2,\cdots,p$
$A = (a_{ij})_{p\times m} = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$，$Ra_1 = \lambda_i a_i$ R 为相关系数矩阵，λ_i, a_i 是相应的特征值和单位特征向量，$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_p \geq 0$	因子载荷矩阵 $B = (b_{ij})_{p\times m} = \hat{B}C$，$\hat{B} = (\sqrt{\lambda_1}a_1, \cdots, \sqrt{\lambda_m}a_m)$ 为初等因子载荷矩阵（λ_i, a_i 同左），C 为正交旋转矩阵
$A^T A = I$（A 为正交矩阵）	$B^T B \neq I$（B 为非正交阵）
用 A 的第 i 列绝对值大的对应变量对 F_i 命名	将 B 的第 j 列绝对值大的对应变量归为 F_j 一类并由此对 z_j 命名
$\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_m$ 互不相同时，a_{ij} 唯一	相关系数 $r_{X_i F_j} = b_{ij}$ 不是唯一的
协方差 $\mathrm{cov}(F_i, F_j) = \lambda_i \delta_{ij}$，$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$	协方差 $\mathrm{cov}(F_i, F_j) = \delta_{ij}$，$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$
λ_i（特征值）为主成分 F_i 的方差	$v_i = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}^2 (\neq \lambda_i)$ 为因子 F_i 对 x 的贡献
主成分 F_j 是由 x 确定的	因子 F_i 是不可观测的
主成分函数 $(F_1, F_2, \cdots, F_m)^T = A^T x$	因子得分函数 $(F_1, F_2, \cdots, F_m)^T = R^{-1}Bx$
主成分 F_i 中 x 的系数平方和 $\sum_{k=1}^{p} a_{ki}^2 = 1$，无特殊因子	$\sum_{i=1}^{m} b_{ji}^2 + \sigma_j^2 = h_j^2 + \sigma_j^2 = 1$，$h_j^2$ 称为共同度，σ_j^2 称为特殊方差
综合主成分函数：$F = \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i / p) F_i$，	综合因子得分函数：$F = \sum_{i=1}^{m} (v_i / p) F_i$，

其中 $p=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i$	其中 $p=\sum_{i=1}^{m}v_i$

§7　判别分析

判别分析（distinguish analysis）是根据所研究的个体的观测指标来推断该个体所属类型的一种统计方法，在自然科学和社会科学的研究中经常会碰到这种统计问题。例如在地质找矿中我们要根据某异常点的地质结构、化探和物探的各项指标来判断该异常点属于哪一种矿化类型；医生要根据某人的各项化验指标的结果来判断该人属于什么病症；调查了某地区的土地生产率、劳动生产率、人均收入、费用水平、农村工业比重等指标，来确定该地区属于哪一种经济类型地区等等。该方法起源于 1921 年 Pearson 的种族相似系数法，1936 年 Fisher 提出线性判别函数，并形成把一个样本归类到两个总体之一的判别法。

判别问题用统计的语言来表达，就是已有 q 个总体 $X_1,X_2,\cdots,X_q$，它们的分布函数分别为 $F_1(x),F_2(x),\cdots F_q(x)$，每个 $F_i(x)$ 都是 p 维函数。对于给定的样本 X，要判断它来自哪一个总体？当然，应该要求判别准则在某种意义下是最优的，例如错判的概率最小或错判的损失最小等。我们仅介绍最基本的几种判别方法，即距离判别，Bayes 判别和 Fisher 判别。

7.1　距离判别

距离判别是简单、直观的一种判别方法，该方法适用于连续性随机变量的判别类，对变量的概率分布没有什么限制。

1．Mahalanobis 距离的概念

通常我们定义的距离是 Euclid 距离（简称欧氏距离）。但在统计分析与计算中，Euclid 距离就不适用了，看一下下面的例子（见图 6）。

为简单起见，考虑一维 $p=1$的情况。设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(4,2^2)$。从图 6 上来看，A 点距 X 的均值 $\mu_1=0$ 较近，距 Y 的均值 $\mu_2=4$ 较远。但从概率角度来分析问题，情况并非如此。经计算，A 点的 x 值为 1.66，也就是说，A 点距 $\mu_1=0$ 是 $1.66\sigma_1$，而 A 点距 $\mu_2=4$ 却只有 $1.77\sigma_2$，因此，应该认为 A 点距 μ_2 更近一点。

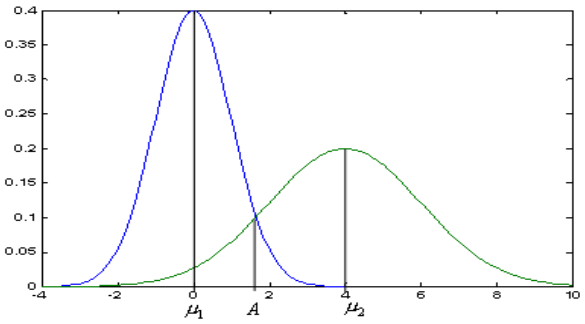


图 6　不同均值、方差的正态分布

定义 2　设 x, y 是从均值为 μ，协方差为 Σ 的总体 A 中抽取的样本，则总体 A 内两点 x 与 y 的 Mahalanobis 距离（简称马氏距离）定义为

$$d(x,y)=\sqrt{(x-y)^T\Sigma^{-1}(x-y)}$$

定义样本 x 与总体 A 的 Mahalanobis 距离为

$$d(x,A)=\sqrt{(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}$$

2．距离判别的判别准则和判别函数

在这里讨论两个总体的距离判别，分协方差相同和协方差不同两种进行讨论。

设总体 A 和 B 的均值向量分别为 μ_1 和 μ_2，协方差阵分别为 Σ_1 和 Σ_2，今给一个样本 x，要判断 x 来自哪一个总体。

首先考虑协方差相同，即

$$\mu_1\neq\mu_2,\quad \Sigma_1=\Sigma_2=\Sigma$$

要判断 x 来自哪一个总体，需要计算 x 到总体 A 和 B Mahalanobis 距离 $d(x,A)$ 和 $d(x,B)$，然后进行比较，若 $d(x,A)\le d(x,B)$，则判定 x 属于 A；否则判定 x 来自 B。由此得到如下判别准则：

$$x\in\begin{cases}A, & d(x,A)\le d(x,B)\\ B, & d(x,A)>d(x,B)\end{cases}$$

现在引进判别函数的表达式，考察 $d^2(x,A)$ 与 $d^2(x,B)$ 之间的关系，有

$$d^2(x,B)-d^2(x,A)=(x-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_2)-(x-\mu_1)^T\Sigma^{-1}(x-\mu_1)$$

$$= 2(x-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)$$

其中 $\bar{\mu}=\dfrac{\mu_1+\mu_2}{2}$ 是两个总体的均值。

令

$$w(x)=(x-\bar{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2) \tag{51}$$

称 $w(x)$ 为两总体距离的判别函数，因此判别准则变为

$$x\in\begin{cases}A, & w(x)\geq 0\\ B, & w(x)<0\end{cases}$$

在实际计算中，总体的均值与协方差阵是未知的，因此总体的均值与协方差需要用样本的均值与协方差来代替，设 $x_1^{(1)},x_2^{(1)},\cdots,x_{n_1}^{(1)}$ 是来自总体 A 的 n_1 个样本，$x_1^{(2)},x_2^{(2)},\cdots,x_{n_2}^{(2)}$ 是来自总体 B 的 n_2 个样本，则样本的均值与协方差为

$$\hat{\mu}_i=\bar{x}^{(i)}=\frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}x_j^{(i)}\ ,\quad j=1,2 \tag{52}$$

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{n_1+n_2-2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i}(x_j^{(i)}-\bar{x}^{(i)})(x_j^{(i)}-\bar{x}^{(i)})^T=\frac{1}{n_1+n_2-2}(S_1+S_2) \tag{53}$$

其中

$$S_i=\sum_{j=1}^{n_i}(x_j^{(i)}-\bar{x}^{(i)})(x_j^{(i)}-\bar{x}^{(i)})^T\ ,\quad i=1,2$$

对于待测样本 x，其判别函数定义为

$$\hat{w}(x)=(x-\bar{x})^T\hat{\Sigma}^{-1}(\bar{x}^{(1)}-\bar{x}^{(2)})\ ,$$

其中

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}^{(1)}+\bar{x}^{(2)}}{2}$$

其判别准则为

$$x\in\begin{cases}A, & \hat{w}(x)\geq 0\\ B, & \hat{w}(x)<0\end{cases}$$

再考虑协方差不同的情况，即

$\mu_1 \neq \mu_2$， $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$

对于样本 x，在方差不同的情况下，判别函数为

$$w(x) = (x-\mu_2)^T \Sigma_2^{-1}(x-\mu_2) - (x-\mu_1)^T \Sigma_1^{-1}(x-\mu_1)$$

与前面讨论的情况相同，在实际计算中总体的均值与协方差是未知的，同样需要用样本的均值与协方差来代替。因此，对于待测样本 x，判别函数定义为

$$\hat{w}(x) = (x-\overline{x}^{(2)})^T \hat{\Sigma}_2^{-1}(x-\overline{x}^{(2)}) - (x-\overline{x}^{(1)})^T \hat{\Sigma}_1^{-1}(x-\overline{x}^{(1)})$$

其中

$$\hat{\Sigma}_i = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(x_j^{(i)} - \overline{x}^{(i)})(x_j^{(i)} - \overline{x}^{(i)})^T = \frac{1}{n_i - 1}S_i \text{， } i = 1,2 \text{。}$$

7.2 Fisher 判别

Fisher 判别的基本思想是投影，即将表面上不易分类的数据通过投影到某个方向上，使得投影类与类之间得以分离的一种判别方法。

仅考虑两总体的情况，设两个 p 维总体为 X_1, X_2，且都有二阶矩存在。Fisher 的判别思想是变换多元观测 x 到一元观测 y，使得由总体 X_1, X_2 产生的 y 尽可能的分离开来。

设在 p 维的情况下， x 的线性组合 $y = a^T x$，其中 a 为 p 维实向量。设 X_1, X_2 的均值向量分别为 μ_1, μ_2（均为 p 维），且有公共的协方差矩阵 Σ（$\Sigma > 0$）。那么线性组合 $y = a^T x$ 的均值为

$$\mu_{y_1} = E(y \mid x \in X_1) = a^T \mu_1$$

$$\mu_{y_2} = E(y \mid x \in X_2) = a^T \mu_2$$

其方差为

$$\sigma_y^2 = \mathrm{Var}(y) = a^T \Sigma a$$

考虑比

$$\frac{(\mu_{y_1} - \mu_{y_2})^2}{\sigma_y^2} = \frac{[a^T(\mu_1 - \mu_2)]^2}{a^T \Sigma a} = \frac{(a^T \delta)^2}{a^T \Sigma a} \qquad (54)$$

其中$\delta=\mu_1-\mu_2$为两总体均值向量差，根据 Fisher 的思想，我们要选择a使得（54）式达到最大。

定理 1　x为p维随机变量，设$y=a^Tx$，当选取$a=c\Sigma^{-1}\delta$，$c\neq 0$为常数时，（54）式达到最大。

特别当$c=1$时，线性函数

$$y=a^Tx=(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}x$$

称为 Fisher 线性判别函数。令

$$K=\frac{1}{2}(\mu_{y_1}+\mu_{y_2})=\frac{1}{2}(a^T\mu_1+a^T\mu_2)=\frac{1}{2}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}(\mu_1+\mu_2)$$

定理 2　利用上面的记号，取$a^T=(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}$，则有

$$\mu_{y_1}-K>0,\quad \mu_{y_2}-K<0$$

由定理 2 我们得到如下的 Fisher 判别规则：

$$\begin{cases}x\in X_1, & \text{当}x\text{使得}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}x\geq K\\ x\in X_2, & \text{当}x\text{使得}(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}x<K\end{cases}$$

定义判别函数

$$W(x)=(\mu_1-\mu_2)^T\Sigma^{-1}x-K=(x-\frac{1}{2}(\mu_1+\mu_2))^T\Sigma^{-1}(\mu_1-\mu_2)\qquad(55)$$

则判别规则可改写成

$$\begin{cases}x\in X_1, & \text{当}x\text{使得}W(x)\geq 0\\ x\in X_2, & \text{当}x\text{使得}W(x)<0\end{cases}$$

当总体的参数未知时，我们用样本对μ_1,μ_2及Σ进行估计，注意到这里的 Fisher 判别与距离判别一样不需要知道总体的分布类型，但两总体的均值向量必须有显著的差异才行，否则判别无意义。

7.3　Bayes 判别

Bayes 判别和 Bayes 估计的思想方法是一样的，即假定对研究的对象已经有一定的认识，这种认识常用先验概率来描述，当我们取得一个样本后，就可以用样本来修正已有的先验概率分布，得出后验概率分布，再通过后验概率分布进行各种统计推断。

1．误判概率与误判损失

设有两个总体X_1和X_2，根据某一个判别规则，将实际上为X_1的个体判为X_2或

者将实际上为 X_2 的个体判为 X_1 的概率就是误判概率，一个好的判别规则应该使误判概率最小。除此之外还有一个误判损失问题或者说误判产生的花费（cost）问题，如把 X_1 的个体误判到 X_2 的损失比 X_2 的个体误判到 X_1 严重得多，则人们在作前一种判断时就要特别谨慎。譬如在药品检验中把有毒的样品判为无毒后果比无毒样品判为有毒严重得多，因此一个好的判别规则还必须使误判损失最小。

为了说明问题，我们仍以两个总体的情况来讨论。设所考虑的两个总体：X_1 与 X_2 分别具有密度函数 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，其中 x 为 p 维向量。记 Ω 为 x 的所有可能观测值的全体，称它为样本空间，R_1 为根据我们的规则要判为 X_1 的那些 x 的全体，而 $R_2 = \Omega - R_1$ 是要判为 X_2 的那些 x 的全体。显然 R_1 与 R_2 互斥完备。某样本实际是来自 X_1，但被判为 X_2 的概率为

$$P(2|1) = P(x \in R_2 \mid X_1) = \int_{R_2} \cdots \int f_1(x)dx$$

来自 X_2，但被判为 X_1 的概率为

$$P(1|2) = P(x \in R_1 \mid X_2) = \int_{R_1} \cdots \int f_2(x)dx$$

类似地，来自 X_1 被判为 X_1 的概率，来自 X_2 被判为 X_2 的概率分别为

$$P(1|1) = P(x \in R_1 \mid X_1) = \int_{R_1} \cdots \int f_1(x)dx$$

$$P(2|2) = P(x \in R_2 \mid X_2) = \int_{R_2} \cdots \int f_2(x)dx$$

又设 p_1, p_2 分别表示总体 X_1 和 X_2 的先验概率，且 $p_1 + p_2 = 1$，于是

$$P(\text{正确地判为}X_1) = P(\text{来自}X_1, \text{被判为}X_1) = P(x \in R_1 \mid X_1) \cdot P(X_1) = P(1|1) \cdot p_1$$

$$P(\text{误判到}X_1) = P(\text{来自}X_2, \text{被判为}X_1) = P(x \in R_1 \mid X_2) \cdot P(X_2) = P(1|2) \cdot p_2$$

类似地有

$$P(\text{正确地判为}X_2) = P(2|2) \cdot p_2$$

$$P(\text{误判到}X_2) = P(2|1)\cdot p_1$$

设 $L(1|2)$ 表示来自 X_2 误判为 X_1 引起的损失，$L(2|1)$ 表示来自 X_1 误判为 X_2 引起的损失，并规定 $L(1|1) = L(2|2) = 0$。

将上述的误判概率与误判损失结合起来，定义平均误判损失（expected cost of misclassification，简记为 ECM）如下：

$$\text{ECM}(R_1, R_2) = L(2|1)P(2|1)p_1 + L(1|2)P(1|2)p_2\,, \tag{56}$$

一个合理的判别规则应使 ECM 达到极小。

2．两总体的 Bayes 判别

由上面叙述知道，我们要选择样本空间 Ω 的一个划分：R_1 和 $R_2 = \Omega - R_1$ 使得平均损失（56）式达到极小。

定理 3　极小化平均损失（56）的区域 R_1 和 R_2 为

$$R_1 = \left\{x : \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \frac{L(1|2)}{L(2|1)}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right\}$$

$$R_2 = \left\{x : \frac{f_1(x)}{f_2(x)} < \frac{L(1|2)}{L(2|1)}\cdot\frac{p_2}{p_1}\right\}$$

（当 $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{L(1|2)}{L(2|1)}\cdot\dfrac{p_2}{p_1}$ 时，即 x 为边界点，它可归入 R_1，R_2 的任何一个，为了方便就将它归入 R_1）。

由上述定理，我们得到两总体的 Bayes 判别准则：

$$\begin{cases} x \in X_1, & \text{当}x\text{使得}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \dfrac{L(1|2)}{L(2|1)}\cdot\dfrac{p_2}{p_1} \\ x \in X_2, & \text{当}x\text{使得}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{L(1|2)}{L(2|1)}\cdot\dfrac{p_2}{p_1} \end{cases} \tag{57}$$

应用此准则时仅仅需要计算：

1）新样本点 $x_0 = (x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0p})^T$ 的密度函数比 $f_1(x_0) / f_2(x_0)$；

2）损失比 $L(1|2) / L(2|1)$；

3）先验概率比 p_2 / p_1。

损失和先验概率以比值的形式出现是很重要的，因为确定两种损失的比值（或两总体的先验概率的比值）往往比确定损失本身（或先验概率本身）来得容易。下面列举（57）的三种特殊情况：

1）当 $p_2 / p_1 = 1$

$$\begin{cases} x \in X_1, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \dfrac{L(1|2)}{L(2|1)} \\ x \in X_2, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{L(1|2)}{L(2|1)} \end{cases} \tag{58}$$

2）当 $L(1|2)/L(2|1)=1$ 时

$$\begin{cases} x \in X_1, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq \dfrac{p_2}{p_1} \\ x \in X_2, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{p_2}{p_1} \end{cases} \tag{59}$$

3） $p_1 / p_2 = L(1|2)/L(2|1)=1$ 时

$$\begin{cases} x \in X_1, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \geq 1 \\ x \in X_2, & \text{当}x\text{使得} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < 1 \end{cases} \tag{60}$$

对于具体问题，如果先验概率或者其比值都难以确定，此时就利用规则（58），同样如误判损失或者其比值都是难以确定，此时就利用规则（59），如果上述两者都难以确定则利用规则（60），最后这种情况是一种无可奈何的办法，当然判别也变得很简单：若 $f_1(x) \geq f_2(x)$，则判 $x \in X_1$，否则判 $x \in X_2$。

我们将上述的两总体 Bayes 判别应用于正态总体 $X_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$（$i=1,2$），分两种情况讨论。

1）$\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma$，（$\Sigma > 0$），此时 X_i 的密度为

$$f_i(x) = (2\pi)^{-p/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu_i)^T \Sigma^{-1}(x-\mu_i)\} \tag{61}$$

定理 4　设总体 $X_i \sim N_p(\mu_i, \Sigma_i)$（$i=1,2$），其中 $\Sigma > 0$，则使平均误判损失极小的划分为

$$\begin{cases} R_1 = \{x : W(x) \geq \beta\} \\ R_2 = \{x : W(x) < \beta\} \end{cases} \tag{62}$$

其中

$$W(x) = [x - \frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)]^T \Sigma^{-1}(\mu_1 - \mu_2) \tag{63}$$

$$\beta = \ln \frac{L(1|2) \cdot p_2}{L(2|1) \cdot p_1} \tag{64}$$

不难发现（63）式的 $W(x)$ 与 Fisher 判别和马氏距离判别的线性判别函数（55），（51）是一致的。判别规则也只是判别限不一样。

如果总体的 μ_1, μ_2 和 Σ 未知，用式（52）和（53），算出总体样本的 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2$ 和 $\hat{\Sigma}$，来代替 μ_1, μ_2 和 Σ，得到的判别函数

$$W(x) = [x - \frac{1}{2}(\hat{\mu}_1 + \hat{\mu}_2)]^T \hat{\Sigma}^{-1}(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2) \tag{65}$$

称为 Anderson 线性判别函数，判别的规则为

$$\begin{cases} x \in X_1, & \text{当} x \text{使得} W(x) \geq \beta \\ x \in X_2, & \text{当} x \text{使得} W(x) < \beta \end{cases} \tag{66}$$

其中 β 由（64）所决定。

这里应该指出，总体参数用其估计来代替，所得到的规则，仅仅只是最优（在平均误判损失达到极小的意义下）规则的一个估计，这时对于一个具体问题来讲，我们并没有把握说所得到的规则能够使平均误判损失达到最小，但当样本的容量充分大时，估计 $\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{\Sigma}$ 分别和 μ_1, μ_2, Σ 很接近，因此我们有理由认为“样本”判别规则的性质会很好。

2）$\Sigma_1 \neq \Sigma_2$（$\Sigma_1 > 0$，$\Sigma_2 > 0$）

由于误判损失极小化的划分依赖于密度函数之比 $f_1(x) / f_2(x)$ 或等价于它的对数 $\ln(f_1(x) / f_2(x))$，把协方差矩阵不等的两个多元正态密度代入这个比后，包含 $|\Sigma_i|^{1/2}$

（$i=1,2$）的因子不能消去，而且 $f_i(x)$ 的指数部分也不能组合成简单表达式，因此，

对于 $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ 时，由定理 3 可得判别区域：

$$\begin{cases} R_1 = \{x : W(x) \geq K\} \\ R_2 = \{x : W(x) < K\} \end{cases} \tag{67}$$

其中

$$W(x) = -\frac{1}{2} x^T (\Sigma_1^{-1} - \Sigma_2^{-1}) x + (\mu_1^T \Sigma_1^{-1} - \mu_2^T \Sigma_2^{-1}) x \tag{68}$$

$$K = \ln\left(\frac{L(1|2)p_2}{L(2|1)p_1}\right) + \frac{1}{2}\ln\frac{|\Sigma_1|}{|\Sigma_2|} + \frac{1}{2}(\mu_1^T \Sigma_1^{-1} \mu_1 - \mu_2^T \Sigma_2^{-1} \mu_2) \tag{69}$$

显然，判别函数 $W(x)$ 是关于 x 的二次函数，它比 $\Sigma_1 = \Sigma_2$ 时的情况复杂得多。如果 $\mu_i, \Sigma_i (i=1,2)$ 未知，仍可采用其估计来代替。

例 14　表 17 是某气象站预报有无春旱的实际资料，x_1 与 x_2 都是综合预报因子（气象含义从略），有春旱的是 6 个年份的资料，无春旱的是 8 个年份的资料，它们的先验概率分别用 $6/14$ 和 $8/14$ 来估计，并设误判损失相等，试建立 Anderson 线性判别函数。

表 17　某气象站有无春旱的资料

序　号		1	2	3	4	5	6	7	8
春旱	x_1	24.8	24.1	26.6	23.5	25.5	27.4		
	x_2	-2.0	-2.4	-3.0	-1.9	-2.1	-3.1		
	$W(x_1, x_2)$	3.0156	2.8796	10.0929	-0.0322	4.8098	12.0960		
无春旱	x_1	22.1	21.6	22.0	22.8	22.7	21.5	22.1	21.4
	x_2	-0.7	-1.4	-0.8	-1.6	-1.5	-1.0	-1.2	-1.3
	$W(x_1, x_2)$	-6.9371	-5.6602	-6.8144	-2.4897	-3.0303	-7.1958	-5.2789	-6.4097

由表 17 的数据计算得

$$\hat{\mu}_1 = (25.3167,\ -2.4167)^T,\quad \hat{\mu}_2 = (22.0250,\ -1.1875)^T$$

$$S_1=\begin{pmatrix}11.0683 & -3.2883\\ -3.2883 & 1.3483\end{pmatrix},\quad S_2=\begin{pmatrix}1.9150 & -0.4425\\ -0.4425 & 0.7488\end{pmatrix}$$

$$\hat{\Sigma}=\begin{pmatrix}1.0819 & -0.3109\\ -0.3109 & 0.1748\end{pmatrix},\quad \beta=\ln\frac{p_2}{p_1}=0.288$$

将上述计算结果代入 Anderson 线性判别函数得

$$W(x)=W(x_1,x_2)=2.0893x_1-3.3165x_2-55.4331$$

判别限为 0.288，将表 17 的数据代入$W(x)$，计算的结果填在表 17 中$W(x_1,x_2)$相应的栏目中，错判的只有一个，即春旱中的第 4 号，与历史资料的拟合率达 93%。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
a=[24.8      24.1      26.6      23.5      25.5      27.4
-2.0      -2.4      -3.0      -1.9      -2.1      -3.1]';
b=[22.1      21.6      22.0      22.8      22.7      21.5      22.1      21.4
-0.7      -1.4      -0.8      -1.6      -1.5      -1.0      -1.2      -1.3]';
n1=6;n2=8;
mu1=mean(a);mu2=mean(b);
mu1=mu1',mu2=mu2'
s1=(n1-1)*cov(a),s2=(n2-1)*cov(b)
sigma2=(s1+s2)/(n1+n2-2)
beta=log(8/6)
syms x1 x2
x=[x1;x2];
wx=(x-0.5*(mu1+mu2))'*inv(sigma2)*(mu1-mu2);
digits(6),wx=vpa(wx)
ahat=subs(wx,{x1,x2},{a(:,1),a(:,2)})
bhat=subs(wx,{x1,x2},{b(:,1),b(:,2)})
```

下面我们编写$\Sigma_1\neq\Sigma_2$情形下的 MATLAB 程序：

```
clc,clear
p1=6/14;p2=8/14;
a=[24.8      24.1      26.6      23.5      25.5      27.4
-2.0      -2.4      -3.0      -1.9      -2.1      -3.1]';
b=[22.1      21.6      22.0      22.8      22.7      21.5      22.1      21.4
-0.7      -1.4      -0.8      -1.6      -1.5      -1.0      -1.2      -1.3]';
```

```
n1=6;n2=8;
mu1=mean(a);mu2=mean(b);
mu1=mu1',mu2=mu2'
cov1=cov(a),cov2=cov(b)
k=log(p2/p1)+0.5*log(det(cov1)/det(cov2))+0.5*(mu1'*inv(cov1)*mu1-mu2'*inv(
cov2)*mu2)
syms x1 x2
x=[x1;x2];
wx=-0.5*x.'*(inv(cov1)-inv(cov2))*x+(mu1'*inv(cov1)-mu2'*inv(cov2))*x;
digits(6),wx=vpa(wx);
wx=simple(wx)
ahat=subs(wx,{x1,x2},{a(:,1),a(:,2)})
bhat=subs(wx,{x1,x2},{b(:,1),b(:,2)})
ahat>=k,bhat<k
```

分类正确率为 100%。

7.4　应用举例

例 15　某种产品的生产厂家有 12 家，其中 7 家的产品受消费者欢迎，属于畅销品，定义为 1 类；5 家的产品不大受消费者欢迎，属于滞销品，定义为 2 类。将 12 家的产品的式样，包装和耐久性进行了评估后，得分资料见表 18。

表 18　生产厂家的数据

厂家	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
式样	9	7	8	8	9	8	7	4	3	6	2	1	6
包装	8	6	7	5	9	9	5	4	6	3	4	2	4
耐久性	7	6	8	5	3	7	6	4	6	3	5	2	5
类别	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	待判

今有一新得厂家，得分为（6，4，5），该厂的产品是否受欢迎。

利用如下的 MATLAB 程序：

```
train=[9    7    8    8    9    8    7    4    3    6    2    1
8    6    7    5    9    9    5    4    6    3    4    2
7    6    8    5    3    7    6    4    6    3    5    2]';
sample=[6 4 5];
group=[ones(7,1);2*ones(5,1)];
[x1,y1]=classify(sample,train,group,'mahalanobis')
[x2,y2]=classify(sample,train,group,'linear')
```

求得利用马氏距离和线性分类方法都把新厂家分在第一类。

§8 典型相关分析（Canonical correlation analysis）

8.1 典型相关分析的基本思想

通常情况下，为了研究两组变量

$$(x_1, x_2, \cdots, x_p)，(y_1, y_2, \cdots, y_q)$$

的相关关系，可以用最原始的方法，分别计算两组变量之间的全部相关系数，一共有 pq 个简单相关系数，这样又繁琐又不能抓住问题的本质。如果能够采用类似于主成分的思想，分别找出两组变量的各自的某个线性组合，讨论线性组合之间的相关关系，则更简捷。

首先分别在每组变量中找出第一对线性组合，使其具有最大相关性，

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{p1}x_p \\ v_1 = b_{11}y_1 + b_{21}y_2 + \cdots + b_{q1}y_q \end{cases}$$

然后再在每组变量中找出第二对线性组合，使其分别与本组内的第一线性组合不相关，第二对本身具有次大的相关性。

$$\begin{cases} u_2 = a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{p2}x_p \\ v_2 = b_{12}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{q2}y_q \end{cases}$$

u_2 与 u_1、v_2 与 v_1 不相关，但 u_2 和 v_2 相关。如此继续下去，直至进行到 r 步，两组变量的相关性被提取完为止，可以得到 r 组变量，这里 $r \le \min(p, q)$。

8.2 典型相关的数学描述

研究两组随机变量之间的相关关系，可用复相关系数（也称全相关系数）。1936 年 Hotelling 将简单相关系数推广到多个随机变量与多个随机变量之间的相关关系的讨论中，提出了典型相关分析。

实际问题中，需要考虑两组变量之间的相关关系的问题很多，例如，考虑几种主要产品的价格（作为第一组变量）和相应这些产品的销售量（作为第二组变量）之间的相关关系；考虑投资性变量（如劳动者人数、货物周转量、生产建设投资等）与国民收入变量（如工农业国民收入、运输业国民收入、建筑业国民收入等）之间的相关关系等等。

复相关系数描述两组随机变量 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ 与 $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$ 之间的相关程度。其思想是先将每一组随机变量作线性组合，成为两个随机变量：

$$u = a^T X = \sum_{i=1}^{p} a_i x_i \,,\ v = b^T Y = \sum_{i=1}^{q} b_i y_i \qquad (70)$$

再研究 u 与 v 的相关系数。由于 u, v 与投影向量 a, b 有关，所以 r_{uv} 与 a, b 有关，

$r_{uv}=r_{uv}(a,b)$。我们取在$a^T\Sigma_{XX}a=1$和$b^T\Sigma_{YY}b=1$的条件下使r_{uv}达到最大的a,b作为投影向量，这样得到的相关系数为复相关系数：

$$r_{uv}=\max_{\substack{a^T\Sigma_{XX}a=1\\ b^T\Sigma_{YY}b=1}} r_{uv}(a,b) \tag{71}$$

将两组变量的协方差矩阵分块得：

$$\mathrm{Cov}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathrm{Var}(X) & \mathrm{Cov}(X,Y)\\ \mathrm{Cov}(Y,X) & \mathrm{Var}(Y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Sigma_{XX} & \Sigma_{XY}\\ \Sigma_{YX} & \Sigma_{YY}\end{pmatrix} \tag{72}$$

此时

$$r_{uv}=\frac{\mathrm{Cov}(a^TX,b^TY)}{\sqrt{D(a^TX)}\sqrt{D(b^TY)}}=\frac{a^T\Sigma_{XY}b}{\sqrt{a^T\Sigma_{XX}a}\sqrt{b^T\Sigma_{YY}b}}=a^T\Sigma_{XY}b \tag{73}$$

因此问题转化为在$a^T\Sigma_{XX}a=1$和$b^T\Sigma_{YY}b=1$的条件下求$a^T\Sigma_{XY}b$的极大值。

根据条件极值的求法引入lagrange乘数，可将问题转化为求

$$S(a,b)=a^T\Sigma_{XY}b-\frac{\lambda}{2}(a^T\Sigma_{XX}a-1)-\frac{\gamma}{2}(b^T\Sigma_{YY}b-1) \tag{74}$$

的极大值，其中λ,γ是Lagrange乘数。

由极值的必要条件得方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial a}=\Sigma_{XY}b-\lambda\Sigma_{XX}a=0\\[2ex] \dfrac{\partial S}{\partial b}=\Sigma_{YX}a-\gamma\Sigma_{YY}b=0\end{cases} \tag{75}$$

将上二式分别左乘a^T与b^T，则得

$$\begin{cases}a^T\Sigma_{XY}b=\lambda a^T\Sigma_{XX}a=\lambda\\ b^T\Sigma_{YX}a=\gamma b^T\Sigma_{YY}b=\gamma\end{cases} \tag{76}$$

注意$\Sigma_{XY}=\Sigma_{YX}^T$，所以

$$\lambda=\gamma=a^T\Sigma_{XY}b \tag{77}$$

代入方程组（75）得：

$$\begin{cases}\Sigma_{XY}b-\lambda\Sigma_{XX}a=0\\ \Sigma_{YX}a-\lambda\Sigma_{YY}b=0\end{cases} \tag{78}$$

以 Σ_{YY}^{-1} 左乘（78）第二式得 $\lambda b=\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}a$，所以

$$b=\frac{1}{\lambda}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}a$$

代入（78）第一式得：

$$(\Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}-\lambda^2\Sigma_{XX})a=0 \tag{79}$$

同理可得

$$(\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}-\lambda^2\Sigma_{YY})b=0 \tag{80}$$

记

$$M_1=\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY}\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\text{，}\ M_2=\Sigma_{YY}^{-1}\Sigma_{YX}\Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XY} \tag{81}$$

则得

$$M_1a=\lambda^2a\text{，}\ M_2b=\lambda^2b \tag{82}$$

说明 λ^2 既是 M_1 又是 M_2 的特征根，a,b 就是其相应于 M_1 和 M_2 的特征向量。M_1 和 M_2 的特征根非负，均在0和1之间，相等的非零特征根数目等于 $\min(p,q)$，不妨设为 q。

设 $M_1a=\lambda^2a$ 的特征根排序为 $\lambda_1^2\geq\lambda_2^2\geq\cdots\geq\lambda_q^2$，其余 $p-q$ 个特征根为0，我们称 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_q$ 为典型相关系数。相应从 $M_1a=\lambda^2a$ 解出的特征向量为 $a_1,a_2,\cdots,a_p$，从 $M_2b=\lambda^2b$ 解出的特征向量为 $b_1,b_2,\cdots,b_q$，从而可得 q 对线性组合：

$$u_i=a_i^TX\text{，}\ v_i=b_i^TY\text{，}\ i=1,2,\cdots,q \tag{83}$$

称每一对变量为典型变量。求典型相关系数和典型变量归结为求 M_1 和 M_2 的特征根和特征向量。

还可以证明，当 $i\neq j$ 时，

$$\mathrm{Cov}(u_i,u_j)=\mathrm{Cov}(a_i^TX,a_j^TX)=a_i^T\Sigma_{XX}a_j=0 \tag{84}$$

$$\mathrm{Cov}(v_i,v_j)=\mathrm{Cov}(b_i^TY,b_j^TY)=b_i^T\Sigma_{YY}b_j=0 \tag{85}$$

表示一切典型变量都是不相关的，并且其方差为1，

$$\mathrm{Cov}(u_i,u_j)=E(u_iu_j)=\delta_{ij} \tag{86}$$

$$\mathrm{Cov}(v_i,v_j)=E(v_iv_j)=\delta_{ij} \tag{87}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{88}$$

X 与 Y 的同一对典型变量 u_i 和 v_i 之间的相关系数为 λ_i，不同对的典型变量 u_i 和 v_j（$i\neq j$）之间不相关，也就是说协方差为0，即

$$Cov(u_i,v_j)=E(u_iv_j)=\begin{cases}\lambda_i, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{89}$$

当总体的均值向量 μ 和协差阵 Σ 未知时，无法求总体的典型相关系数和典型变量，因而需要给出样本的典型相关系数和典型变量。

设 $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 和 $Y_{(1)},\cdots,Y_{(n)}$ 为来自总体容量为 n 的样本，这时有协方差阵的无偏估计：

$$\hat{\Sigma}_{XX}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\overline{X})(X_{(i)}-\overline{X})^T \tag{90}$$

$$\hat{\Sigma}_{YY}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_{(i)}-\overline{Y})(Y_{(i)}-\overline{Y})^T \tag{91}$$

$$\hat{\Sigma}_{XY}=\hat{\Sigma}_{YX}^T=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_{(i)}-\overline{X})(Y_{(j)}-\overline{Y})^T \tag{92}$$

其中 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_{(i)}$，$\overline{Y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Y_{(i)}$，用 $\hat{\Sigma}$ 代替 Σ 并按（81）和（82）求出 $\hat{\lambda}_i$ 和 $\hat{a},\hat{b}$，

称 $\hat{\lambda}_i$ 为样本典型相关系数，称 $\hat{u}_i=\hat{a}_i^TX$，$\hat{v}_i=\hat{b}_i^TY$，（$i=1,\cdots,q$）为样本的典型变量。

计算时也可从样本的相关系数矩阵出发求样本的典型相关系数和典型变量，将相关系数矩阵 R 取代协方差阵，计算过程是一样的。

如果复相关系数中的一个变量是一维的，那么也可以称为偏相关系数。偏相关系数

是描述一个随机变量 y 与多个随机变量（一组随机变量） $X=(x_1,x_2,\cdots,x_p)^T$ 之间的关系。其思想是先将那一组随机变量作线性组合，成为一个随机变量：

$$u=c^TX=\sum_{i=1}^{p}c_ix_i \tag{93}$$

再研究 y 与 u 的相关系数。由于 u 与投影向量 c 有关，所以 r_{yu} 与 c 有关，$r_{yu}=r_{yu}(c)$。我们取在 $c^T\Sigma_{XX}c=1$ 的条件下使 r_{yu} 达到最大的 c 作为投影向量得到的相关系数为偏相关系数：

$$r_{yu}=\max_{c^T\Sigma_{XX}c=1}r_{yu}(c) \tag{94}$$

其余推导与计算过程与复相关系数的类似。

8.3　原始变量与典型变量之间的相关性

（1）原始变量与典型变量之间的相关系数

设原始变量相关系数矩阵

$$R=\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{bmatrix}$$

X 典型变量系数矩阵

$$A=[a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_r]_{p\times r}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r}\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pr}\end{bmatrix}$$

Y 典型变量系数矩阵

$$B=[b_1\quad b_2\quad\cdots\quad b_r]_{p\times r}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r}\\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2r}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{q1} & b_{q2} & \cdots & b_{qr}\end{bmatrix}$$

则有

$$\operatorname{cov}(x_i,u_j)=\operatorname{cov}(x_i,\sum_{k=1}^{p}a_{kj}x_k)=\sum_{k=1}^{p}a_{kj}\operatorname{cov}(x_i,x_k)$$

x_i 与 u_j 的相关系数

$$\rho(x_i,u_j)=\sum_{k=1}^{p}a_{kj}\operatorname{cov}(x_i,x_k)/\sqrt{D(x_i)}$$

同理可计算得

$$\rho(x_i,v_j)=\sum_{k=1}^{q}b_{kj}\operatorname{cov}(x_i,y_k)/\sqrt{D(x_i)}$$

$$\rho(y_i,u_j)=\sum_{k=1}^{p}a_{kj}\operatorname{cov}(y_i,x_k)/\sqrt{D(y_i)}$$

$$\rho(y_i,v_j)=\sum_{k=1}^{q}b_{kj}\operatorname{cov}(y_i,y_k)/\sqrt{D(y_i)}$$

（2）各组原始变量被典型变量所解释的方差

X 组原始变量被 u_i 解释的方差比例

$$m_{u_i}=\sum_{k=1}^{p}\rho^2(u_i,x_k)/p,$$

X 组原始变量被 v_i 解释的方差比例

$$m_{v_i}=\sum_{k=1}^{p}\rho^2(v_i,x_k)/p$$

Y 组原始变量被 u_i 解释的方差比例

$$n_{u_i}=\sum_{k=1}^{q}\rho^2(u_i,y_k)/q$$

Y 组原始变量被 v_i 解释的方差比例

$$n_{v_i}=\sum_{k=1}^{q}\rho^2(v_i,y_k)/q$$

8.4　典型相关系数的检验

在实际应用中，总体的协方差矩阵常常是未知的，类似于其他的统计分析方法，需要从总体中抽出一个样本，根据样本对总体的协方差或相关系数矩阵进行估计，然后利用估计得到的协方差或相关系数矩阵进行分析。由于估计中抽样误差的存在，所以估计以后还需要进行有关的假设检验。

1．计算样本的协方差阵

假设有 X 组和 Y 组变量，样本容量为 n，观测值矩阵为

$$\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} & y_{11} & \cdots & y_{1q} \\ x_{21} & \cdots & x_{2p} & y_{21} & \cdots & y_{2p} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} & y_{n1} & \cdots & y_{nq} \end{bmatrix}$$

对应的标准化数据矩阵为

$$Z=\begin{bmatrix} \dfrac{x_{11}-\bar{x}_1}{\sigma_x^1} & \cdots & \dfrac{x_{1p}-\bar{x}_p}{\sigma_x^p} & \dfrac{y_{11}-\bar{y}_1}{\sigma_y^1} & \cdots & \dfrac{y_{1q}-\bar{y}_q}{\sigma_y^q} \\ \dfrac{x_{21}-\bar{x}_1}{\sigma_x^1} & \cdots & \dfrac{x_{2p}-\bar{x}_p}{\sigma_x^p} & \dfrac{y_{21}-\bar{y}_1}{\sigma_y^1} & \cdots & \dfrac{y_{2q}-\bar{y}_q}{\sigma_y^q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{x_{n1}-\bar{x}_1}{\sigma_x^1} & \cdots & \dfrac{x_{np}-\bar{x}_p}{\sigma_x^p} & \dfrac{y_{n1}-\bar{y}_1}{\sigma_y^1} & \cdots & \dfrac{y_{2q}-\bar{y}_q}{\sigma_y^q} \end{bmatrix}$$

样本的协方差

$$\hat{\Sigma}=\frac{1}{n-1}Z^TZ=\frac{1}{n-1}\begin{bmatrix} S_{XX} & S_{XY} \\ S_{YX} & S_{YY} \end{bmatrix}=\frac{1}{n-1}S$$

2．整体检验（$H_0:\Sigma_{XY}=0$；$H_1:\Sigma_{XY}\neq 0$）

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\cdots\rho_r=0$$

$H_1:\rho_i(i=1,2,\cdots,r)$ 中至少 ρ_1 不为零

检验的统计量为

$$\Lambda_1=\frac{|S|}{|S_{XX}||S_{YY}|}$$

经计算得

$$\Lambda_1=\left|I-S_{XX}^{-1}S_{XY}S_{YY}^{-1}S_{YX}\right|=\prod_{i=1}^{p}(1-\lambda_i)$$

若 Λ_1 小，则支持 H_1。

在原假设为真的情况下，检验的统计量

$$Q_1 = -\left[n - \frac{1}{2}(p+q+3)\right]\ln \Lambda_1$$

近似服从自由度为 pq 的 χ^2 分布。在给定的显著水平 α 下，如果 $Q_1 \geq \chi_\alpha^2(pq)$，则拒绝原假设，认为至少第一对典型变量之间的相关性显著。

3．部分总体典型相关系数为零的检验

$H_0 : \rho_2 = \rho_3 = \cdots \rho_r = 0$

$H_1 : \rho_2, \rho_3, \cdots, \rho_r$ 至少有一非零

若原假设 H_0 被接受，则认为只有第一对典型变量是有用的；若原假设 H_0 被拒绝，则认为第二对典型变量也是有用的，并进一步检验假设。

$H_0 : \rho_3 = \rho_4 = \cdots \rho_r = 0$

$H_1 : \rho_3, \rho_4, \cdots, \rho_r$ 至少有一非零

如此进行下去，直至对某个 k

$H_0 : \rho_{k+1} = \rho_{k+2} = \cdots \rho_r = 0$

$H_1 : \rho_{k+1}, \rho_{k+2}, \cdots, \rho_r$ 至少有一非零

检验的统计量

$$\Lambda_{k+1} = \prod_{i=k+1}^{r}(1-\lambda_i)，\quad Q = -[n-k-\frac{1}{2}(p+q+3) + \sum_{i=2}^{k+1}\lambda_i^{-1}]\ln \Lambda_{k+1}$$

近似服从自由度为 $(p-k)(q-k)$ 的 χ^2 分布。在给定的显著水平 α 下，如果 $Q \geq \chi_\alpha^2((p-k)(q-k))$，则拒绝原假设，认为至少第 $k+1$ 对典型变量之间的相关性显著。

8.5　典型相关分析案例

8.5.1　职业满意度典型相关分析

某调查公司从一个大型零售公司随机调查了 784 人，测量了 5 个职业特性指标和 7 个职业满意变量，有关的变量见表 19。讨论两组指标之间是否相联系。

表 19　指标变量表

X 组	x_1－用户反馈， x_2－任务重要性， x_3－任务多样性， x_4－任务特殊性 x_5－自主性
Y 组	y_1－主管满意度， y_2－事业前景满意度， y_3－财政满意度， y_4－工作强度满意度 y_5－公司地位满意度， y_6－工作满意度， y_7－总体满意度

相关系数矩阵数据见表 20。

表 20　相关系数矩阵数据

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	1.00	0.49	0.53	0.49	0.51	0.33	0.32	0.20	0.19	0.30	0.37	0.21
x_2	0.49	1.00	0.57	0.46	0.53	0.30	0.21	0.16	0.08	0.27	0.35	0.20
x_3	0.53	0.57	1.00	0.48	0.57	0.31	0.23	0.14	0.07	0.24	0.37	0.18
x_4	0.49	0.46	0.48	1.00	0.57	0.24	0.22	0.12	0.19	0.21	0.29	0.16
x_5	0.51	0.53	0.57	0.57	1.00	0.38	0.32	0.17	0.23	0.32	0.36	0.27
y_1	0.33	0.30	0.31	0.24	0.38	1.00	0.43	0.27	0.24	0.34	0.37	0.40
y_2	0.32	0.21	0.23	0.22	0.32	0.43	1.00	0.33	0.26	0.54	0.32	0.58
y_3	0.20	0.16	0.14	0.12	0.17	0.27	0.33	1.00	0.25	0.46	0.29	0.45
y_4	0.19	0.08	0.07	0.19	0.23	0.24	0.26	0.25	1.00	0.28	0.30	0.27
y_5	0.30	0.27	0.24	0.21	0.32	0.34	0.54	0.46	0.28	1.00	0.35	0.59
y_6	0.37	0.35	0.37	0.29	0.36	0.37	0.32	0.29	0.30	0.35	1.00	0.31
y_7	0.21	0.20	0.18	0.16	0.27	0.40	0.58	0.45	0.27	0.59	0.31	1.00

一些计算结果的数据见下面的表格。

表 21　X 组的典型变量

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.421704	-0.34285	0.857665	-0.78841	0.030843
x_2	0.195106	0.668299	-0.44343	-0.26913	0.983229

x_3	0.167613	0.853156	0.259213	0.468757	-0.91414
x_4	-0.02289	-0.35607	0.423106	1.042324	0.524367
x_5	0.459656	-0.72872	-0.97991	-0.16817	-0.43924

表 22　原始变量与本组典型变量之间的相关系数

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
x_1	0.829349	-0.10934	0.48534	-0.24687	0.061056
x_2	0.730368	0.436584	-0.20014	0.002084	0.485692
x_3	0.753343	0.466088	0.105568	0.301958	-0.33603
x_4	0.615952	-0.22251	0.205263	0.661353	0.302609
x_5	0.860623	-0.26604	-0.38859	0.148424	-0.12457
	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
y_1	0.756411	0.044607	0.339474	0.129367	-0.33702
y_2	0.643884	0.358163	-0.17172	0.352983	-0.33353
y_3	0.387242	0.037277	-0.17673	0.53477	0.414847
y_4	0.377162	0.791935	-0.00536	-0.28865	0.334077
y_5	0.653234	0.108391	0.209182	0.437648	0.434613
y_6	0.803986	-0.2416	-0.23477	-0.40522	0.196419
y_7	0.502422	0.162848	0.4933	0.188958	0.067761

表 23　原始变量与对应组典型变量之间的相关系数

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
x_1	0.459216	0.025848	-0.05785	0.017831	0.003497
x_2	0.404409	-0.10321	0.023854	-0.00015	0.027816
x_3	0.417131	-0.11019	-0.01258	-0.02181	-0.01924
x_4	0.341056	0.052602	-0.02446	-0.04777	0.01733
x_5	0.476532	0.062893	0.046315	-0.01072	-0.00713

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5
y_1	0.41883	-0.01055	-0.04046	-0.00934	-0.0193
y_2	0.356523	-0.08467	0.020466	-0.0255	-0.0191
y_3	0.214418	-0.00881	0.021064	-0.03863	0.023758
y_4	0.208837	-0.18722	0.000639	0.020849	0.019133
y_5	0.3617	-0.02562	-0.02493	-0.03161	0.02489
y_6	0.445172	0.057116	0.027981	0.029268	0.011249
y_7	0.278194	-0.0385	-0.05879	-0.01365	0.003881

表24　典型相关系数

1	2	3	4	5
0.553706	0.236404	0.119186	0.072228	0.05727

可以看出，所有五个表示职业特性的变量与u_1有大致相同的相关系数，u_1视为形容职业特性的指标。第一对典型变量的第二个成员v_1与y_1, y_2, y_5, y_6有较大的相关系数，说明v_1主要代表了主管满意度，事业前景满意度，公司地位满意度和工种满意度。而u_1和v_1之间的相关系数0.5537。

u_1和v_1解释的本组原始变量的比率：

$$m_{u_1} = 0.5818，\ n_{v_1} = 0.3721$$

X组的原始变量被u_1到u_5解释了100%，Y组的原始变量被v_1到v_5解释了80.3%。

计算的MATLAB程序如下：

```
clc,clear
load da.txt    %原始的相关系数矩阵保存在纯文本文件da.txt中
%r为相关系数矩阵
r=da;
n1=5;n2=7;num=min(n1,n2);
s1=r(1:n1,1:n1);
s12=r(1:n1,n1+1:end);
```

```
s21=s12';
s2=r(n1+1:end,n1+1:end);
m1=inv(s1)*s12*inv(s2)*s21;
m2=inv(s2)*s21*inv(s1)*s12;
[x1,y1]=eig(m1);
%以下是特征向量归一化，满足a's1a=1
gu1=x1'*s1*x1;
gu1=sqrt(diag(gu1));  %求典型相关系数
gu1=gu1'.*sign(sum(x1));    %每个特征向量的最大分量为正
gu1=repmat(gu1,length(gu1),1);
a=x1./gu1;
y1=diag(y1);      %取出特征值
[y1,ind1]=sort(y1,'descend');  %特征值按照从大到小排列
a=a(:,ind1(1:num))      %取出X组的系数阵
y1=sqrt(y1(1:num))      %计算典型相关系数
flag=1;
xlswrite('bk1.xls',a,'Sheet1','A1')    %把计算结果写到Excel文件中去
flag=n1+2;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',y1','Sheet1',str)
[x2,y2]=eig(m2);
%以下是特征向量归一化，满足b's2b=1
gu2=x2'*s2*x2;
gu2=sqrt(diag(gu2));
gu2=gu2'.*sign(sum(x2));
gu2=repmat(gu2,length(gu2),1);
b=x2./gu2;
y2=diag(y2);
[y2,ind2]=sort(y2,'descend');
b=b(:,ind2(1:num))
y2=sqrt(y2(1:num))  %计算典型相关系数
flag=flag+2;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',b,'Sheet1',str)
flag=flag+n2+1;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',y2','Sheet1',str)
x_u_r=s1*a;       %x,u的相关系数
x_u_r=x_u_r(:,1:num)
```

```
flag=flag+2;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',x_u_r,'Sheet1',str)
y_v_r=s2*b;       %y,v的相关系数
y_v_r=y_v_r(:,1:num)
flag=flag+n1+1;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',y_v_r,'Sheet1',str)
x_v_r=s12*b;      %x,v的相关系数
x_v_r=x_v_r(:,1:num)
flag=flag+n2+1;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',x_v_r,'Sheet1',str)
y_u_r=s21*a;      %y,u的相关系数
y_u_r=y_u_r(:,1:num)
flag=flag+n1+1;
str=char(['A',int2str(flag)]);
xlswrite('bk1.xls',y_u_r,'Sheet1',str)
mu=sum(x_u_r.^2)/n1     %x组原始变量被u_i解释的方差比例
mv=sum(x_v_r.^2)/n1     %x组原始变量被v_i解释的方差比例
nu=sum(y_u_r.^2)/n2     %y组原始变量被u_i解释的方差比例
nv=sum(y_v_r.^2)/n2     %y组原始变量被v_i解释的方差比例
```

8.5.2 中国城市竞争力与基础设施的典型相关分析

1．导言

随着经济全球化和我国加入 WTO，作为区域中心的城市在区域经济发展中的作用越来越重要，城市间的竞争也愈演愈烈，许多有识之士甚至断言，21 世纪，国家之间、区域之间、国际企业之间的竞争将突出地表现为城市层面上的竞争。因此，为了应对新的经济社会环境，积极探索影响城市竞争力的因素，研究提高城市综合实力的方法，充分发挥其集聚与扩散作用，以进一步带动整个区域经济建设，已成为一项重要的战略课题，城市竞争力研究已受到学术界的高度重视。钟卫东和张伟（2002）分析了城市竞争力评价中存在的问题，应用综合指数修正法构建城市竞争力的三级评价指标体系，并提出了纵横因子评价法；徐康宁（2002）提出建立测度城市竞争力指标体系的四个原则和三级指标共确定了 69 个具体指标；沈正平、马晓冬、戴先杰和翟仁祥（2002）构建了测度城市竞争力的指标体系，并用因子分析、聚类分析等方法对新亚欧大陆桥经济带 25 个样本城市的竞争力进行了评价；倪鹏飞(2002)提出城市竞争力与基础设施竞争力假说，并运用主成分分析和模糊曲线分析法进行了分析检验；此外，郝寿义、成起宏(1999)、上海社会科学院(2001)、唐礼智(2001)和和宁越敏(2002)等都对城市竞争力问题作了可贵的探索。但通过查阅上述文献发现，现有成果在城市竞争力评价方法上尚存在一些缺陷

和不足，有许多问题需要进一步探讨。下面将典型相关分析方法引入到城市竞争力评价问题中，对城市竞争力与城市基础设施的相关性进行实证分析，并据此提出了相应的政策建议。

2．典型相关分析法的基本思想

统计分析中，我们用简单相关系数反映两个变量之间的线性相关关系。1936 年 Hotelling 将线性相关性推广到两组变量的讨论中，提出了典型相关分析方法。它的基本思想是仿照主成分分析法中把多变量与多变量之间的相关化为两个变量之间相关的做法，首先在每组变量内部找出具有最大相关性的一对线性组合，然后再在每组变量内找出第二对线性组合，使其本身具有最大的相关性，并分别与第一对线性组合不相关。如此下去，直到两组变量内各变量之间的相关性被提取完毕为止。有了这些最大相关的线性组合，则讨论两组变量之间的相关，就转化为研究这些线性组合的最大相关，从而减少了研究变量的个数。典型相关分析的过程如下：

假设有两组随机变量 $X=(x_1,\cdots,x_p)^T$，$Y=(y_1,\cdots,y_q)^T$，Z 为 $p+q$ 维总体的 n 次中心化观测数据阵：

$$Z=\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1p} & y_{11} & \cdots & y_{1q} \\ x_{21} & \cdots & x_{2p} & y_{21} & \cdots & y_{2q} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{np} & y_{n1} & \cdots & y_{nq} \end{pmatrix}$$

第一步，计算相关系数阵 R，并将 R 剖分为 $R=\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{pmatrix}$，其中 R_{11}，R_{22} 分别为第一组变量和第二组变量的相关系数阵，$R_{12}=R_{21}^T$ 为第一组与第二组变量的相关系数阵。

第二步，求典型相关系数及典型变量。首先求 $M_1=R_{11}^{-1}R_{12}R_{22}^{-1}R_{21}$ 的特征根 λ_i^2，特征向量 a_i；$M_2=R_{22}^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}$ 的特征根 λ_i^2，特征向量 b_i，则有

则典型变量为

$$u_1=a_1^TX,v_1=b_1^TY;u_2=a_2^TX,v_2=b_2^TY;\cdots;u_t=a_t^TX,v_t=b_t^TY(t\le\min(p,q))$$

第三步，典型相关系数 λ_i 的显著性检验。

第四步，典型结构与典型冗余分析。

典型结构指原始变量与典型变量之间的相关系数阵 $R(X,V)$，据此可以计算任一个典型变量 u_k 或 v_k 解释本组变量 X(或Y) 总变差的百分比 $R_d(X;u_k)$（或 $R_d(Y;v_k)$）。同时可求得前 t 个典型变量 $u_1,\cdots,u_t$(或 $v_1,\cdots,v_t$) 解释本组变量 X(或Y) 总变差的累计百分比 $R_d(X;u_1,\cdots,u_t)$ 或 $R_d(Y;v_1,\cdots,v_t)$。

典型冗余分析用来研究典型变量解释另一组变量总变差百分比的问题。第二组典

型变量v_k解释第一组变量X总变差的百分比$R_d(X;v_k)$（或第一组中典型变量解释的变差被第二组中典型变量重复解释的百分比）简称为第一组典型变量的冗余测度；第一组典型变量u_k解释第二组变量Y总变差的百分比$R_d(Y;u_k)$（或第二组中典型变量解释的变差被第一组中典型变量重复解释的百分比）简称为第二组典型变量的冗余测度。冗余测度的大小表示这对典型变量能够对另一组变差相互解释的程度大小。

3．城市竞争力与基础设施关系的典型相关分析

（1）城市竞争力指标与基础设施指标

城市竞争力主要取决于产业经济效益、对外开放程度、基础设施、市民素质、政府管理及环境质量等因素。城市基础设施是以物质形态为特征的城市基础结构系统，是指城市可利用的各种设施及质量，包括交通、通讯、能源动力系统，住房储备，文、卫、科教机构和设施等。基础设施是城市经济、社会活动的基本载体，它的规模、类型、水平直接影响着城市产业的发展和价值体系的形成，因此，基础设施竞争力是城市竞争力的重要组成部分，对提高城市竞争力非常重要。

我们选取了从不同的角度表现城市竞争力的四个关键性指标，构建了城市竞争力指标体系：市场占有率、GDP 增长率、劳动生产率和居民人均收入。城市基础设施指标体系主要包含六个指标：对外设施指数（由城市货运量和客运量指标综合构成），对内基本设施指数（由城市能源、交通、道路、住房等具体指标综合而成），每百人拥有电话机数，技术性设施指数（是城市现代交通、通讯、信息设施的综合指数，由港口个数、机场等级、高速公路、高速铁路、地铁个数、光缆线路数等加权综合构成），文化设施指数（由公共藏书量、文化馆数量、影剧院数量等指标加权综合构成），卫生设施指数（由医院个数、万人医院床位数综合构成）。

我们选取了 20 个最具有代表性的城市，城市名称和竞争力、基础设施各项指标数据如表 25、表 26。

表 25　城市竞争力表现要素得分

城市	劳动生产率 y_1	市场占有率 y_2	居民人均收入 y_3	长期经济增长率 y_4	城市	劳动生产率 y_1	市场占有率 y_2	居民人均收入 y_3	长期经济增长率 y_4
上海	45623.05	2.5	8439	16.27	青岛	33334.62	0.63	6222	11.63
深圳	52256.67	1.3	18579	21.5	武汉	24633.27	0.59	5573	16.39
广州	46551.87	1.13	10445	11.92	温州	39258.78	-0.69	9034	22.43
北京	28146.76	1.38	7813	15	福州	38201.47	-0.34	7083	18.53
厦门	38670.43	0.12	8980	26.71	重庆	16524.32	0.44	5323	12.22
天津	26316.96	1.37	6609	11.07	成都	31855.63	-0.02	6019	11.88
大连	45330.53	0.56	6070	12.4	宁波	22528.8	-0.16	9069	15.7
杭州	45853.89	0.28	7896	13.93	石家庄	21831.94	-0.15	5497	13.56
南京	35964.64	0.74	6497	8.97	西安	19966.36	-0.15	5344	12.43
珠海	55832.61	-0.12	13149	9.22	哈尔滨	19225.71	-0.16	4233	10.16

数据来源：倪鹏飞等:《城市竞争力蓝皮书：中国城市竞争力报告 NO.1》，北京，社会科学出版社 2003 年版。

表 26　城市基础设施构成要素得分

城市	对外设施指数 x_1	对内设施指数 x_2	每百人电话数 x_3	技术设施指数 x_4	文化设施指数 x_5	卫生设施指数 x_6	城市	对外设施指数 x_1	对内设施指数 x_2	每百人电话数 x_3	技术设施指数 x_4	文化设施指数 x_5	卫生设施指数 x_6
上海	1.03	0.42	50	2.15	1.23	1.64	青岛	0.01	-0.14	24	0.37	-0.4	-0.49
深圳	1.34	0.13	131	0.33	-0.27	-0.64	武汉	0.02	-0.47	28	0.03	0.15	0.26
广州	1.07	0.4	48	1.31	0.49	0.09	温州	-0.47	0.03	45	-0.76	-0.46	-0.75
北京	-0.43	0.19	20	0.87	3.57	1.8	福州	-0.45	-0.2	34	-0.45	-0.34	-0.52
厦门	-0.53	0.25	32	-0.09	-0.33	-0.84	重庆	0.72	-0.83	13	0.05	-0.09	0.56
天津	-0.11	0.07	27	0.68	-0.12	0.87	成都	0.37	-0.54	21	-0.11	-0.24	-0.02
大连	0.35	0.06	31	0.28	-0.3	-0.16	宁波	0.01	0.38	40	-0.17	-0.4	-0.71
杭州	-0.5	0.27	38	-0.78	-0.12	1.61	石家庄	-0.81	-0.49	22	-0.38	-0.21	-0.59
南京	0.31	0.25	43	0.49	-0.09	-0.06	西安	-0.24	-0.91	18	-0.05	-0.27	0.61
珠海	-0.28	0.84	37	-0.79	-0.49	-0.98	哈尔滨	-0.53	-0.77	27	-0.45	-0.18	1.08

数据来源：倪鹏飞等:《城市竞争力蓝皮书：中国城市竞争力报告 NO.1》，北京，社会科学出版社 2003 年版。

（2）城市竞争力与基础设施的典型相关分析

将上述经过整理的指标数据利用 MATLAB 软件的 CANONCORR 函数进行处理，得出如下结果。

① 典型相关系数及其检验

典型相关系数及其检验如表 27 所示

表 27　典型相关系数

序号	1	2	3	4
典型相关系数	0.9601	0.9499	0.6470	0.3571

由上表可知，前两个典型相关系数均较高，表明相应典型变量之间密切相关。但要确定典型变量相关性的显著程度，尚需进行相关系数的 χ^2 统计量检验，具体做法是：比较统计量 χ^2 计算值与临界值的大小，据比较结果判定典型变量相关性的显著程度。其结果如表 28 所示。

表 28　相关系数检验表

序号	自由度	x^2 计算值	x^2 临界值(显著水平 0.05)
1	24	74.9775	3.7608e-007
2	15	40.8284	3.3963e-004

3	8	9.2942	0.3181
4	3	2.0579	0.5605

注：表中的 e-007 表示10^{-7}。

从上表看这 4 对典型变量均通过了 χ^2 统计量检验，表明相应典型变量之间相关关系显著，能够用城市基础设施变量组来解释城市竞争力变量组。

② 典型相关模型

鉴于原始变量的计量单位不同，不宜直接比较，本文采用标准化的典型系数，给出典型相关模型，如下表 29 所示：

表 29　典型相关模型

1	$u_1 = 0.1535x_1 + 0.3423x_2 + 0.4913x_3 + 0.3372x_4 + 0.1149x_5 + 0.1419x_6$ $v_1 = 0.1395y_1 + 0.7185y_2 + 0.427y_3 + 0.0285y_4$
2	$u_2 = -0.2134x_1 - 0.2637x_2 - 0.3953x_3 + 0.869x_4 - 0.2429x_5 + 0.3856x_6$ $v_2 = 0.1322y_1 - 0.7361y_2 + 0.772y_3 + 0.0059y_4$

由表 29 第一组典型相关方程可知，基础设施方面的主要因素是 x_2, x_3, x_4（典型载荷分别为 0.3423，0.4913，0.3372），说明基础设施中影响城市竞争力的主要因素是对内设施指数（x_2）、每百人电话数（x_3）和技术设施指数（x_4）；城市竞争力的第一典型变量 v_1 与 y_2 呈高度相关，说明在城市竞争力中，市场占有率（y_2）占有主要地位。根据第二组典型相关方程，x_4（技术设施指数）是基础设施方面的主要因素，而居民人均收入（y_3）（典型载荷为 0.869），是反映城市竞争力的一个重要指标。由于第一组典型变量占有信息量比重较大，所以总体上基础设施方面的主要因素按重要程度依次是 x_3, x_2, x_4，反映城市竞争力的主要指标是 y_2, y_3。

③ 典型结构

结构分析是依据原始变量与典型变量之间的相关系数给出的，如表 30 所示。

表 30　结构分析(相关系数)

	u_1	u_2	v_1	v_2

x_1	-0.71449	0.094452	-0.68599	0.089723
x_2	-0.63728	-0.34418	-0.61185	-0.32695
x_3	-0.71902	-0.54257	-0.69034	-0.5154
x_4	-0.72322	0.632013	-0.69437	0.600373
x_5	-0.41018	0.468804	-0.39381	0.445334
x_6	-0.1968	0.725205	-0.18895	0.688899
	v_1	v_2	u_1	u_2
y_1	-0.62924	-0.49738	-0.60414	-0.47248
y_2	-0.8475	0.529457	-0.81369	0.502951
y_3	-0.69906	-0.70239	-0.67117	-0.66722
y_4	-0.16928	-0.38871	-0.16253	-0.36925

由表30知，x_1, x_2, x_3, x_4与“基础设施组”的第一典型变量u_1均呈高度相关，说明对外设施、对内设施、每白人电话数和技术设施在反映城市基础设施方面占有主导地位，其中又以技术设施居于首位。x_2与基础设施组的第二变量和竞争力组的第二变量都呈高度相关，但由于u_2, v_2所含信息量比较低，故总体上看x_2对城市竞争力影响较小。“竞争力组”的第一典型变量v_1与y_2的相关系数均比较高，体现了y_2在反映城市竞争力中占有主导地位。y_3与v_1呈较高相关，与v_2呈高相关，但v_2凝聚的信息量有限，因而y_3在“竞争力”中的贡献低于y_2。由于第一对典型变量之间的高度相关，导致“基础设施组”中四个主要变量与“竞争力组”中的第一典型变量呈高度相关；而“竞争力组”中的y_2则与“影响组”的第一典型变量也呈高度相关。这种一致性从数量上体现了“基础设施组”对“竞争力组”的本质影响作用，与指标的实际经济联系非常吻合，说明典型相关分析结果具有较高的可信度。

值得一提的是，与线性回归模型不同，相关系数与典型系数可以有不同的符号。如基础设施方面的u_2与x_5相关系数为正值（0.468804），而典型系数却为负值（-0.2429）；竞争力方面的v_2与y_3，相关系数为负值（-0.70239），而典型系数却为正值（0.772）。由于出现这种反号的情况，称x_5, y_3为抑制变量(Suppressor)。由表30的相关系数还可以看出，“影响组”的第一典型变量u_1对y_2（市场占有率）有相当高的预测能力，系数值

为-0.81369，而对 y_4（长期经济增长率）预测能力较差，系数值仅为-0.16253。

④ 典型冗余分析与解释能力

典型相关系数的平方的实际意义是一对典型变量之间的共享方差在两个典型变量各自方差中的比例。

典型冗余分析用来表示各典型变量对原始变量组整体的变差解释程度，分为组内变差解释和组间变差解释，典型冗余分析的结果见表31和表32。

表31　被典型变量解释的 X 组原始变量的方差

被本组的典型变量解释			典型相关系数平方	被对方 Y 组典型变量解释		
	比例	累计比例			比例	累积比例
u_1	0.3606	0.3606	0.9218	v_1	0.3324	0.3324
u_2	0.2612	0.6218	0.9024	v_2	0.2357	0.5681
u_3	0.0631	0.6849	0.4186	v_3	0.0264	0.5945
u_4	0.0795	0.7644	0.1275	v_4	0.0101	0.6046

表32　被典型变量解释的 Y 组原始变量的方差

被本组的典型变量解释			典型相关系数平方	被对方 X 组典型变量解释		
	比例	累计比例			比例	累积比例
v_1	0.4079	0.4079	0.9218	u_1	0.4079	0.4079
v_2	0.2644	0.6723	0.9024	u_2	0.2930	0.7009
v_3	0.0648	0.7371	0.4186	u_3	0.1549	0.8558
v_4	0.0184	0.7555	0.1275	u_4	0.1442	1

从上表 31 和表 32 可以看出，两对典型变量 u_1、u_2 和 v_1、v_2 均较好地预测了对应的那组变量，而且交互解释能力也比较强。来自城市“竞争力组”的方差被“基础设施组”典型变量 u_1、u_2 解释的比例和为 70.09%；来自“基础设施组”的方差被“竞争力组”典型变量 v_1、v_2 解释的方差比例和为 56.81%。城市竞争力变量组被其自身及其对立典型变量解释的百分比、基础设施变量组被其自身及其对立典型变量解释的百分比均较高，尤其是第一对典型变量具有较高的解释百分比，反映两者之间较高的相关性。

4．城市竞争力与基础设施关系的经济分析

根据城市竞争力与基础设施关系的典型相关分析结果，城市竞争力与基础设施之间的关系可从下列三个方面进行阐述：

（1）市场占有率是决定城市竞争力水平的首要指标，每白人电话数、设施指数和技术设施指数是影响城市竞争力的主要基础设施变量。

市场占有率是企业竞争力大小的最直接表现，它反映一个城市域外产品需求的大小和其产品在全部城市产品市场中的份额，反映了一个城市创造价值的相对规模。根据典型载荷的大小可知，影响市场占有率的最主要因素是技术设施指数。技术设施指数是城市现代交通、通讯、信息设施的综合指数，由先进交通设施指标港口个数、机场等级、高速公路、高速铁路、地铁个数、光缆线路数加权而成，是一个主客观结合指标，它代表了一个城市的物流和信息流传播水平和扩散速度。第一典型变量显示，城市竞争力中的市场占有率与基础设施关系最密切，影响一个城市市场占有率的基础设施因素主要是交通和信息设施，这也是与信息时代的发展相一致的。因此，第一典型变量真实的反映了城市竞争力与基础设施力之间的本质联系，它将市场占有率从竞争力中提取出来，强调了信息基础设施建设对提升城市竞争力的重要性。

（2）城市居民人均收入是反映城市竞争力的另外一个重要变量。

城市居民人均收入和长期经济增长率综合反映了城市在域内和域外创造价值的状况。城市居民人均收入是城市创造价值在其域内成员收益上的直接反映，而城市吸引、占领、争夺、控制资源和市场创造价值的能力、潜力及持续性决定于 GDP 的长期增长，即 GDP 增长率反映了城市价值扩展的速度和潜力。因此，居民人均收入可以综合反映出一个城市吸引、控制资源和创造市场价值的能力和潜力。基础设施建设中的对内设施指数通过城市能源、交通、道路、住房和卫生设施条件等影响并制约着城市吸引、利用资源并创造价值的能力和水平。由于现在城市的竞争不再是自然资源的单一竞争，人才竞争已成为竞争的主要对象和核心，占有人才便控制了城市竞争的制高点，也就决定了城市创造价值的能力和潜力。而城市能源是价值创造的基础，交通、道路、住房及卫生设施等决定着城市利用资源和对人才的吸引力。因此，城市基础设施中的对内设施建设对提升城市竞争力具有重要作用。第二对典型变量还说明，每百人电话数和技术设施指数与居民人均收入和长期经济增长率反方向增长，电话和技术设施方面的投资在一定程度上影响了城市利用资源、创造价值的水平。因为电话的数量和技术设施投资必然要占用城市有限的人力、物力资源，短时期内会影响城市居民人均收入水平和 GDP 的增长。

（3）劳动生产率在我国城市竞争力中的作用尚不明显。

从以上典型分析结果可以得出，目前我国劳动生产率在城市竞争力中的重要作用尚不明显，这可能源于两个原因：一是我国各城市的劳动生产率低，对城市竞争力的贡献率不高；二是城市基础设施建设与劳动生产率之间的相关度不高。但相关研究成果显示，中国目前的劳动生产率并不低，不能否认劳动生产率在城市竞争力中的作用（张金昌，2002），如果这一结论成立，则对这一问题唯一的解释就是城市基础设施建设与劳动生产率的关联度不高。

计算的 MATLAB 程序如下：

```
clc,clear
load x.txt      %原始的x组的数据保存在纯文本文件x.txt中
load y.txt      %原始的y组的数据保存在纯文本文件y.txt中
n1=size(x,2);n2=size(y,2);
x=zscore(x);y=zscore(y);      %标准化数据
```

```
n=size(x,1);
%a,b返回的是典型变量的系数，r返回的是典型相关系数
%u,v返回的是典型变量的值，stats返回的是假设检验的一些统计量的值
[a,b,r,u,v,stats]=canoncorr(x,y)
x_u_r=x'*u/(n-1)     %计算x,u的相关系数
y_v_r=y'*v/(n-1)     %计算y,v的相关系数
x_v_r=x'*v/(n-1)     %计算x,v的相关系数
y_u_r=y'*u/(n-1)     %计算y,u的相关系数
mu=sum(x_u_r.^2)/n1     %x组原始变量被u_i解释的方差比例
mv=sum(x_v_r.^2)/n1     %x组原始变量被v_i解释的方差比例
nu=sum(y_u_r.^2)/n2     %y组原始变量被u_i解释的方差比例
nv=sum(y_v_r.^2)/n2     %y组原始变量被v_i解释的方差比例
val=r.^2                %典型系数的平方
```

习题二十九

1．表 33 是 1999 年中国省、自治区的城市规模结构特征的一些数据，试通过聚类分析将这些省、自治区进行分类。

表 33　城市规模结构特征数据

省、自治区	城市规模（万人）	城市首位度	城市指数	基尼系数	城市规模中位值（万人）
京津冀	699.70	1.4371	0.9364	0.7804	10.880
山西	179.46	1.8982	1.0006	0.5870	11.780
内蒙古	111.13	1.4180	0.6772	0.5158	17.775
辽宁	389.60	1.9182	0.8541	0.5762	26.320
吉林	211.34	1.7880	1.0798	0.4569	19.705
黑龙江	259.00	2.3059	0.3417	0.5076	23.480
苏沪	923.19	3.7350	2.0572	0.6208	22.160
浙江	139.29	1.8712	0.8858	0.4536	12.670
安徽	102.78	1.2333	0.5326	0.3798	27.375
福建	108.50	1.7291	0.9325	0.4687	11.120
江西	129.20	3.2454	1.1935	0.4519	17.080
山东	173.35	1.0018	0.4296	0.4503	21.215
河南	151.54	1.4927	0.6775	0.4738	13.940
湖北	434.46	7.1328	2.4413	0.5282	19.190
湖南	139.29	2.3501	0.8360	0.4890	14.250
广东	336.54	3.5407	1.3863	0.4020	22.195
广西	96.12	1.2288	0.6382	0.5000	14.340
海南	45.43	2.1915	0.8648	0.4136	8.730

川渝	365.01	1.6801	1.1486	0.5720	18.615
云南	146.00	6.6333	2.3785	0.5359	12.250
贵州	136.22	2.8279	1.2918	0.5984	10.470
西藏	11.79	4.1514	1.1798	0.6118	7.315
陕西	244.04	5.1194	1.9682	0.6287	17.800
甘肃	145.49	4.7515	1.9366	0.5806	11.650
青海	61.36	8.2695	0.8598	0.8098	7.420
宁夏	47.60	1.5078	0.9587	0.4843	9.730
新疆	128.67	3.8535	1.6216	0.4901	14.470

2. 表 34 是我国 1984—2000 年宏观投资的一些数据，试利用主成分分析对投资效益进行分析和排序。

表34　1984—2000年宏观投资效益主要指标

年份	投资效果系数（无时滞）	投资效果系数（时滞一年）	全社会固定资产交付使用率	建设项目投产率	基建房屋竣工率
1984	0.71	0.49	0.41	0.51	0.46
1985	0.40	0.49	0.44	0.57	0.50
1986	0.55	0.56	0.48	0.53	0.49
1987	0.62	0.93	0.38	0.53	0.47
1988	0.45	0.42	0.41	0.54	0.47
1989	0.36	0.37	0.46	0.54	0.48
1990	0.55	0.68	0.42	0.54	0.46
1991	0.62	0.90	0.38	0.56	0.46
1992	0.61	0.99	0.33	0.57	0.43
1993	0.71	0.93	0.35	0.66	0.44
1994	0.59	0.69	0.36	0.57	0.48
1995	0.41	0.47	0.40	0.54	0.48
1996	0.26	0.29	0.43	0.57	0.48
1997	0.14	0.16	0.43	0.55	0.47
1998	0.12	0.13	0.45	0.59	0.54
1999	0.22	0.25	0.44	0.58	0.52
2000	0.71	0.49	0.41	0.51	0.46

3. 表35资料为25名健康人的7项生化检验结果，7项生化检验指标依次命名为 $x_1, x_2, \cdots, x_7$，请对该资料进行因子分析。

表35　检验数据

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7

3.76	3.66	0.54	5.28	9.77	13.74	4.78
8.59	4.99	1.34	10.02	7.5	10.16	2.13
6.22	6.14	4.52	9.84	2.17	2.73	1.09
7.57	7.28	7.07	12.66	1.79	2.1	0.82
9.03	7.08	2.59	11.76	4.54	6.22	1.28
5.51	3.98	1.3	6.92	5.33	7.3	2.4
3.27	0.62	0.44	3.36	7.63	8.84	8.39
8.74	7	3.31	11.68	3.53	4.76	1.12
9.64	9.49	1.03	13.57	13.13	18.52	2.35
9.73	1.33	1	9.87	9.87	11.06	3.7
8.59	2.98	1.17	9.17	7.85	9.91	2.62
7.12	5.49	3.68	9.72	2.64	3.43	1.19
4.69	3.01	2.17	5.98	2.76	3.55	2.01
5.51	1.34	1.27	5.81	4.57	5.38	3.43
1.66	1.61	1.57	2.8	1.78	2.09	3.72
5.9	5.76	1.55	8.84	5.4	7.5	1.97
9.84	9.27	1.51	13.6	9.02	12.67	1.75
8.39	4.92	2.54	10.05	3.96	5.24	1.43
4.94	4.38	1.03	6.68	6.49	9.06	2.81
7.23	2.3	1.77	7.79	4.39	5.37	2.27
9.46	7.31	1.04	12	11.58	16.18	2.42
9.55	5.35	4.25	11.74	2.77	3.51	1.05
4.94	4.52	4.5	8.07	1.79	2.1	1.29
8.21	3.08	2.42	9.1	3.75	4.66	1.72
9.41	6.44	5.11	12.5	2.45	3.1	0.91

4．为了了解家庭的特征与其消费模式之间的关系。调查了70个家庭的下面两组变量：

$$\begin{cases} x_1: \text{每年去餐馆就餐的频率} \\ x_2: \text{每年外出看电影频率} \end{cases}, \quad \begin{cases} y_1: \text{户主的年龄} \\ y_2: \text{家庭的年收入} \\ y_3: \text{户主受教育程度} \end{cases}$$

已知相关系数矩阵见表36，试对两组变量之间的相关性进行典型相关分析。

表36　相关系数矩阵

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3
x_1	1	0.8	0.26	0.67	0.34
x_2	0.8	1	0.33	0.59	0.34
y_1	0.26	0.33	1	0.37	0.21

y_2	0.67	0.59	0.37	1	0.35
y_3	0.34	0.34	0.21	0.35	1

5．近年来我国淡水湖水质富营养化的污染日趋严重，如何对湖泊水质的富营养化进行综合评价与治理是摆在我们面前的一项重要任务。表 37 和表 38 分别为我国 5 个湖泊的实测数据和湖泊水质评价标准。

表 37　全国 5 个主要湖泊评价参数的实测数据

	总磷（mg/L）	耗氧量（mg/L）	透明度（L）	总氮（mg/L）
杭州西湖	130	10.3	0.35	2.76
武汉东胡	105	10.7	0.4	2.0
青海湖	20	1.4	4.5	0.22
巢湖	30	6.26	0.25	1.67
滇池	20	10.13	0.5	0.23

表 38　湖泊水质评价标准

评价参数	极贫营养	贫营养	中营养	富营养	极富营养
总磷	<1	4	23	110	>660
耗氧量	<0.09	0.36	1.8	7.1	>27.1
透明度	>37	12	2.4	0.55	<0.17
总氮	<0.02	0.06	0.31	1.2	>4.6

（1）试利用以上数据，分析总磷、耗氧量、透明度和总氮这 4 种指标对湖泊水质富营养化所起作用。

（2）对上述 5 个湖泊的水质进行综合评估，确定水质等级。

第三十章　偏最小二乘回归

在实际问题中，经常遇到需要研究两组多重相关变量间的相互依赖关系，并研究用一组变量（常称为自变量或预测变量）去预测另一组变量（常称为因变量或响应变量），除了最小二乘准则下的经典多元线性回归分析（MLR），提取自变量组主成分的主成分回归分析（PCR）等方法外，还有近年发展起来的偏最小二乘（PLS）回归方法。

偏最小二乘回归提供一种多对多线性回归建模的方法，特别当两组变量的个数很多，且都存在多重相关性，而观测数据的数量（样本量）又较少时，用偏最小二乘回归建立的模型具有传统的经典回归分析等方法所没有的优点。

偏最小二乘回归分析在建模过程中集中了主成分分析，典型相关分析和线性回归分析方法的特点，因此在分析结果中，除了可以提供一个更为合理的回归模型外，还可以同时完成一些类似于主成分分析和典型相关分析的研究内容，提供更丰富、深入的一些信息。

本章介绍偏最小二乘回归分析的建模方法;通过例子从预测角度对所建立的回归模型进行比较。

§1　偏最小二乘回归

考虑 p 个变量 $y_1,y_2,\cdots,y_p$ 与 m 个自变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的建模问题。偏最小二乘回归的基本作法是首先在自变量集中提出第一成分 t_1（t_1 是 $x_1,\cdots,x_m$ 的线性组合，且尽可能多地提取原自变量集中的变异信息）；同时在因变量集中也提取第一成分 u_1，并要求 t_1 与 u_1 相关程度达到最大。然后建立因变量 $y_1,\cdots,y_p$ 与 t_1 的回归，如果回归方程已达到满意的精度，则算法中止。否则继续第二对成分的提取，直到能达到满意的精度为止。若最终对自变量集提取 r 个成分 $t_1,t_2,\cdots,t_r$，偏最小二乘回归将通过建立 $y_1,\cdots,y_p$ 与 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 的回归式，然后再表示为 $y_1,\cdots,y_p$ 与原自变量的回归方程式，即偏最小二乘回归方程式。

为了方便起见，不妨假定 p 个因变量 $y_1,\cdots,y_p$ 与 m 个自变量 $x_1,\cdots,x_m$ 均为标准化变量。因变量组和自变量组的 n 次标准化观测数据阵分别记为

$$F_0=\begin{bmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{np} \end{bmatrix},\quad E_0=\begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}$$

偏最小二乘回归分析建模的具体步骤如下：

（1）分别提取两变量组的第一对成分，并使之相关性达最大。

假设从两组变量分别提出第一对成分为t_1和u_1，t_1是自变量集$X=(x_1,\cdots,x_m)^T$的线性组合：$t_1=w_{11}x_1+\cdots+w_{1m}x_m=w_1^TX$，$u_1$是因变量集$Y=(y_1,\cdots,y_p)^T$的线性组合：$u_1=v_{11}y_1+\cdots+v_{1p}y_p=v_1^TY$。为了回归分析的需要，要求：

① t_1和u_1各自尽可能多地提取所在变量组的变异信息；

② t_1和u_1的相关程度达到最大。

由两组变量集的标准化观测数据阵E_0和F_0，可以计算第一对成分的得分向量，记为$\hat{t}_1$和$\hat{u}_1$：

$$\hat{t}_1=E_0w_1=\begin{bmatrix}x_{11}&\cdots&x_{1m}\\ \vdots& &\vdots\\ x_{n1}&\cdots&x_{nm}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_{11}\\ \vdots\\ w_{1m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t_{11}\\ \vdots\\ t_{n1}\end{bmatrix}$$

$$\hat{u}_1=F_0v_1=\begin{bmatrix}y_{11}&\cdots&y_{1p}\\ \vdots& &\vdots\\ y_{n1}&\cdots&y_{np}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_{11}\\ \vdots\\ v_{1p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_{11}\\ \vdots\\ u_{n1}\end{bmatrix}$$

第一对成分t_1和u_1的协方差$\mathrm{Cov}(t_1,u_1)$可用第一对成分的得分向量$\hat{t}_1$和$\hat{u}_1$的内积来计算。故而以上两个要求可化为数学上的条件极值问题：

$$\begin{cases}<\hat{t}_1,\hat{u}_1>=<E_0w_1,Y_0v_1>=w_1^TE_0^TF_0x_1\Rightarrow\max\\ w_1^Tw=\|w_1\|^2=1,\quad v_1^Tv_1=\|v_1\|^2=1\end{cases}$$

利用Lagrange乘数法，问题化为求单位向量w_1和v_1，使$\theta_1=w_1^TE_0^TF_0v_1\Rightarrow$最大。问题的求解只须通过计算$m\times m$矩阵$M=E_0^TF_0F_0^TE_0$的特征值和特征向量，且$M$的最大特征值为$\theta_1^2$，相应的单位特征向量就是所求的解$w_1$，而$v_1$可由$w_1$计算得到$v_1=\dfrac{1}{\theta_1}F_0^TE_0w_1$。

（2）建立$y_1,\cdots,y_p$对t_1的回归及$x_1,\cdots,x_m$对t_1的回归。

假定回归模型为

$$\begin{cases} E_0 = \hat{t}_1 \alpha_1^T + E_1 \\ F_0 = \hat{u}_1 \beta_1^T + F_1 \end{cases}$$

其中 $\alpha_1 = (\alpha_{11}, \cdots, \alpha_{1m})^T$， $\beta_1 = (\beta_{11}, \cdots, \beta_{1p})^T$ 分别是多对一的回归模型中的参数向量，E_1 和 F_1 是残差阵。回归系数向量 α_1, β_1 的最小二乘估计为

$$\begin{cases} \alpha_1 = E_0^T \hat{t}_1 \Big/ \left\| \hat{t}_1 \right\|^2 \\ \beta_1 = F_0^T \hat{t}_1 \Big/ \left\| \hat{t}_1 \right\|^2 \end{cases},$$

称 α_1, β_1 为模型效应负荷量。

（3）用残差阵 E_1 和 F_1 代替 E_0 和 F_0 重复以上步骤。

记 $\hat{E}_0 = \hat{t}_1 \alpha_1^T$， $\hat{F}_0 = \hat{t}_1 \beta_1^T$，则残差阵 $E_1 = E_0 - \hat{E}_0$， $F_1 = F_0 - \hat{F}_0$。如果残差阵 F_1 中元素的绝对值近似为 0，则认为用第一个成分建立的回归式精度已满足需要了，可以停止抽取成分。否则用残差阵 E_1 和 F_1 代替 E_0 和 F_0 重复以上步骤即得：

$w_2 = (w_{21}, \cdots, w_{2m})^T$； $v_2 = (v_{21}, \cdots, v_{2p})^T$ 分别为第二对成分的权数。而 $\hat{t}_2 = E_1 w_2$， $\hat{u}_2 = F_1 v_2$ 为第二对成分的得分向量。

$\alpha_2 = \dfrac{E_1^T \hat{t}_2}{\left\| \hat{t}_2 \right\|^2}$， $\beta_2 = \dfrac{F_1^T \hat{t}_2}{\left\| \hat{t}_2 \right\|^2}$ 分别为 X, Y 的第二对成分的负荷量。这时有

$$\begin{cases} E_0 = \hat{t}_1 \alpha_1^T + \hat{t}_2 \alpha_2^T + E_2 \\ F_0 = \hat{t}_1 \beta_1^T + \hat{t}_2 \beta_2^T + F_2 \end{cases}$$

（4）设 $n \times m$ 数据阵 E_0 的秩为 $r \le \min(n-1, m)$，则存在 r 个成分 $t_1, t_2, \cdots, t_r$，使得

$$\begin{cases} E_0 = \hat{t}_1 \alpha_1^T + \cdots + \hat{t}_r \alpha_r^T + E_r \\ F_0 = \hat{t}_1 \beta_1^T + \cdots + \hat{t}_r \beta_r^T + F_r \end{cases}$$

把 $t_k = w_{k1} x_1 + \cdots + w_{km} x_m$（$k = 1, 2, \cdots, r$），代入 $Y = t_1 \beta_1 + \cdots + t_r \beta_r$，即得 p 个因变量的偏最小二乘回归方程式

$y_j = a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jm}x_m$，（$j = 1,2,\cdots,m$）

（5）交叉有效性检验。

一般情况下，偏最小二乘法并不需要选用存在的r个成分$t_1, t_2, \cdots, t_r$来建立回归式，而像主成分分析一样，只选用前l个成分（$l \le r$），即可得到预测能力较好的回归模型。对于建模所需提取的主成分个数l，可以通过交叉有效性检验来确定。

每次舍去第i个观测（$i = 1,2,\cdots,n$），用余下的$n-1$个观测值按偏最小二乘回归方法建模，并考虑抽取h个成分后拟合的回归式，然后把舍去的第i个观测点代入所拟合的回归方程式，得到$y_j(j = 1,2,\cdots,p)$在第i个观测点上的预测值$\hat{y}_{(i)j}(h)$。对$i = 1,2,\cdots,n$重复以上的验证，即得抽取h个成分时第j个因变量$y_j(j = 1,2,\cdots,p)$的预测误差平方和为

$$\mathrm{PRESS}_j(h) = \sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \hat{y}_{(i)j}(h))^2 \quad （j = 1,2,\cdots,p）$$

$Y = (y_1,\cdots,y_p)^T$的预测误差平方和为

$$\mathrm{PRESS}(h) = \sum_{i=1}^{p}\mathrm{PRESS}_j(h)。$$

另外，再采用所有的样本点，拟合含h个成分的回归方程。这时，记第i个样本点的预测值为$\hat{y}_{ij}(h)$，则可以定义y_j的误差平方和为

$$\mathrm{SS}_j(h) = \sum_{i=1}^{n}(y_{ij} - \hat{y}_{ij}(h))^2$$

定义Y的误差平方和为

$$\mathrm{SS}(h) = \sum_{j=1}^{p}\mathrm{SS}_j(h)$$

当$\mathrm{PRESS}(h)$达到最小值时，对应的h即为所求的成分个数。通常，总有$\mathrm{PRESS}(h)$大于$\mathrm{SS}(h)$，而$\mathrm{SS}(h)$则小于$\mathrm{SS}(h-1)$。因此，在提取成分时，总希望比值$\mathrm{PRESS}(h)/\mathrm{SS}(h-1)$越小越好；一般可设定限制值为0.05，即当

$$\mathrm{PRESS}(h)/\mathrm{SS}(h-1) \le (1-0.05)^2 = 0.95^2$$

时，增加成分t_h有利于模型精度的提高。或者反过来说，当

$$\mathrm{PRESS}(h)/\mathrm{SS}(h-1) > 0.95^2$$

时，就认为增加新的成分t_h，对减少方程的预测误差无明显的改善作用。

为此，定义交叉有效性为$Q_h^2 = 1-\mathrm{PRESS}(h)/\mathrm{SS}(h-1)$，这样，在建模的每一步计算结束前，均进行交叉有效性检验，如果在第h步有$Q_h^2 < 1-0.95^2 = 0.0985$，则模型达到精度要求，可停止提取成分；若$Q_h^2 \ge 0.0975$，表示第$h$步提取的$t_h$成分的边际贡献显著，应继续第$h+1$步计算。

§2　一种更简洁的计算方法

上节介绍的算法原则和推导过程的思路在目前的文献中是最为常见的。然而，还有一种更为简洁的计算方法，即直接在$E_0,\cdots,E_{r-1}$矩阵中提取成分$t_1,\cdots,t_r\,(r \le m)$。要求$t_h$能尽可能多地携带$X$中的信息，同时，$t_h$对因变量系统$F_0$有最大的解释能力。注意，无需在$F_0$中提取成分得分$u_h$，这可以使计算过程大为简化，并且对算法结论的解释也更为方便。

偏最小二乘法的简记算法的步骤如下：

（1）求矩阵$E_0^T F_0 F_0^T E_0$最大特征值所对应的特征向量w_1，求得成分$t_1 = w_1^T X$，计算成分得分向量$\hat{t}_1 = E_0 w_1$，和残差矩阵$E_1 = E_0 - \hat{t}_1 \alpha_1^T$，其中$\alpha_1 = E_0^T \hat{t}_1 \Big/ \left\|\hat{t}_1\right\|^2$。

（2）求矩阵$E_1^T F_0 F_0^T E_1$最大特征值所对应的特征向量w_2，求得成分$t_2 = w_2^T X$，计算成分得分向量$\hat{t}_2 = E_1 w_2$，和残差矩阵$E_2 = E_1 - \hat{t}_2 \alpha_2^T$，其中$\alpha_2 = E_1^T \hat{t}_2 \Big/ \left\|\hat{t}_2\right\|^2$。

⋮

（r）至第r步，求矩阵$E_{r-1}^T F_0 F_0^T E_{r-1}$最大特征值所对应的特征向量$w_r$，求得成分$t_r = w_r^T X$，计算成分得分向量$\hat{t}_r = E_{r-1} w_r$。

如果根据交叉有效性，确定共抽取 r 个成分 $t_1,\cdots,t_r$ 可以得到一个满意的预测模型，则求 F_0 在 $\hat{t}_1,\cdots,\hat{t}_r$ 上的普通最小二乘回归方程为

$$F_0=\hat{t}_1\beta_1^T+\cdots+\hat{t}_r\beta_r^T+F_r$$

把 $t_k=w_{k1}^*x_1+\cdots+w_{km}^*x_m$（$k=1,2,\cdots,r$），代入 $Y=t_1\beta_1+\cdots+t_r\beta_r$，即得 p 个因变量的偏最小二乘回归方程式

$$y_j=a_{j1}x_1+\cdots+a_{jm}x_m,\ (\ j=1,2,\cdots,m\ )。$$

这里的 w_h^* 满足 $\hat{t}_h=E_0w_h^*$，$w_h^*=\prod_{j=1}^{h-1}(I-w_j\alpha_j^T)w_h$。

§3 案例分析

本节采用兰纳胡德（Linnerud）给出的关于体能训练的数据进行偏最小二乘回归建模。在这个数据系统中被测的样本点，是某健身俱乐部的 20 位中年男子。被测变量分为两组。第一组是身体特征指标 X，包括：体重、腰围、脉搏。第二组变量是训练结果指标 Y，包括：单杠、弯曲、跳高。原始数据见表 1。

表 1　体能训练数据

No	体重(x_1)	腰围(x_2)	脉搏(x_3)	单杠(y_1)	弯曲(y_2)	跳高(y_3)
1	191	36	50	5	162	60
2	189	37	52	2	110	60
3	193	38	58	12	101	101
4	162	35	62	12	105	37
5	189	35	46	13	155	58
6	182	36	56	4	101	42
7	211	38	56	8	101	38
8	167	34	60	6	125	40
9	176	31	74	15	200	40
10	154	33	56	17	251	250
11	169	34	50	17	120	38
12	166	33	52	13	210	115
13	154	34	64	14	215	105
14	247	46	50	1	50	50
15	193	36	46	6	70	31
16	202	37	62	12	210	120

17	176	37	54	4	60	25
18	157	32	52	11	230	80
19	156	33	54	15	225	73
20	138	33	68	2	110	43
均值	178.6	35.4	56.1	9.45	145.55	70.3
标准差	24.6905	3.202	7.2104	5.2863	62.5666	51.2775

表 2 给出了这 6 个变量的简单相关系数矩阵。从相关系数矩阵可以看出，体重与腰围是正相关的；体重、腰围与脉搏负相关；而在单杠、弯曲与跳高之间是正相关的。从两组变量间的关系看，单杠、弯曲和跳高的训练成绩与体重、腰围负相关，与脉搏正相关。

表 2　相关系数矩阵

	1	0.8702	−0.3658	−0.3897	−0.4931	−0.2263
	0.8702	1	−0.3529	−0.5522	−0.6456	−0.1915
	−0.3658	−0.3529	1	0.1506	0.225	0.0349
	−0.3897	−0.5522	0.1506	1	0.6957	0.4958
	−0.4931	−0.6456	0.225	0.6957	1	0.6692
	−0.2263	−0.1915	0.0349	0.4958	0.6692	1

利用如下的 MATLAB 程序：

```
clc,clear
load pz.txt     %原始数据存放在纯文本文件 pz.txt 中
mu=mean(pz);sig=std(pz); %求均值和标准差
rr=corrcoef(pz);     %求相关系数矩阵
data=zscore(pz); %数据标准化
n=3;m=3;     %n 是自变量的个数,m 是因变量的个数
x0=pz(:,1:n);y0=pz(:,n+1:end);
e0=data(:,1:n);f0=data(:,n+1:end);
num=size(e0,1);%求样本点的个数
chg=eye(n);   %w 到 w*变换矩阵的初始化
for i=1:n
%以下计算 w，w*和 t 的得分向量，
    matrix=e0'*f0*f0'*e0;
    [vec,val]=eig(matrix); %求特征值和特征向量
    val=diag(val);     %提出对角线元素
    [val,ind]=sort(val,'descend');
    w(:,i)=vec(:,ind(1));       %提出最大特征值对应的特征向量
```

```
    w_star(:,i)=chg*w(:,i);    %计算 w*的取值
    t(:,i)=e0*w(:,i);          %计算成分 ti 的得分
    alpha=e0'*t(:,i)/(t(:,i)'*t(:,i));    %计算 alpha_i
    chg=chg*(eye(n)-w(:,i)*alpha');       %计算 w 到 w*的变换矩阵
    e=e0-t(:,i)*alpha';       %计算残差矩阵
    e0=e;
%以下计算 ss(i)的值
    beta=[t(:,1:i),ones(num,1)]\f0;     %求回归方程的系数
    beta(end,:)=[];     %删除回归分析的常数项
    cancha=f0-t(:,1:i)*beta;       %求残差矩阵
    ss(i)=sum(sum(cancha.^2));    %求误差平方和
%以下计算 press(i)
    for j=1:num
        t1=t(:,1:i);f1=f0;
        she_t=t1(j,:);she_f=f1(j,:);    %把舍去的第 j 个样本点保存起来
        t1(j,:)=[];f1(j,:)=[];          %删除第 j 个观测值
        beta1=[t1,ones(num-1,1)]\f1;    %求回归分析的系数
        beta1(end,:)=[];                %删除回归分析的常数项
        cancha=she_f-she_t*beta1;    %求残差向量
        press_i(j)=sum(cancha.^2);
    end
    press(i)=sum(press_i);
    if i>1
        Q_h2(i)=1-press(i)/ss(i-1);
    else
        Q_h2(1)=1;
    end
    if Q_h2(i)<0.0975
        fprintf('提出的成分个数 r=%d',i);
        r=i;
        break
    end
end
beta_z=[t(:,1:r),ones(num,1)]\f0;     %求 Y 关于 t 的回归系数
beta_z(end,:)=[];          %删除常数项
xishu=w_star(:,1:r)*beta_z;     %求 Y 关于 X 的回归系数，且是针对标准数据的回归系数，
每一列是一个回归方程
mu_x=mu(1:n);mu_y=mu(n+1:end);
sig_x=sig(1:n);sig_y=sig(n+1:end);
```

```
for i=1:m
    ch0(i)=mu_y(i)-mu_x./sig_x*sig_y(i)*xishu(:,i);  %计算原始数据的回归方程的常数项
end
for i=1:m
    xish(:,i)=xishu(:,i)./sig_x'*sig_y(i);  %计算原始数据的回归方程的系数，每一列是一个回归方程
end
sol=[ch0;xish]          %显示回归方程的系数，每一列是一个方程，每一列的第一个数是常数项
save mydata x0 y0 num xishu ch0 xish
```

计算得只要提出两个成分t_1, t_2即可，交叉有效性$Q_2^2 = -0.1969$。w_h与w_h^*的取值见表 3，成分t_h的得分$\hat{t}_h$见表 4。

表 3　w_h与w_h^*的取值

自变量	w_1	w_2	w_1^*	w_2^*
x_1	−0. 5899	-0.4688	−0. 5899	-0.3679
x_2	−0. 7713	0.5680	−0. 7713	0.6999
x_3	0. 2389	0.6765	0. 2389	0.6356

表 4　成分t_h的得分$\hat{t}_h$

No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{t}_1$	−0. 6429	−0. 7697	−0. 9074	0. 6884	−0. 4867	−0. 2291	−1. 4037	0. 7436	1. 7151	1. 1626
$\hat{t}_2$	−0. 5914	−0. 1667	0. 5212	0. 68	−1. 1328	0. 0717	0. 0767	0. 2106	0. 6549	−0. 1668
No	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\hat{t}_1$	0. 3645	0. 7433	1. 1867	−4. 3898	−0. 8232	−0. 749	−0. 3929	1. 1993	1. 0485	1. 9424
$\hat{t}_2$	−0. 7007	−0. 6983	0. 757	0. 76	−0. 9738	0. 5211	0. 2034	−0. 7827	−0. 3729	1. 1294

标准化变量$\tilde{y}_k$关于成分t_1的回归模型如下

$$\tilde{y}_k = r_{1k}t_1 + r_{2k}t_2,\quad k = 1,2,3$$

由于成分 t_h 可以写成原变量的标准化变量 $\tilde{x}_j$ 的函数，即有

$$t_h = w_{1h}^* \tilde{x}_1 + w_{2h}^* \tilde{x}_2 + w_{3h}^* \tilde{x}_3$$

由此可得由成分 t_1 所建立的偏最小二乘回归模型为

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k &= r_{1k}(w_{11}^* \tilde{x}_1 + w_{21}^* \tilde{x}_2 + w_{31}^* \tilde{x}_3) + r_{2k}(w_{12}^* \tilde{x}_1 + w_{22}^* \tilde{x}_2 + w_{32}^* \tilde{x}_3) \\ &= (r_{1k} w_{11}^* + r_{2k} w_{12}^*)\tilde{x}_1 + (r_{1k} w_{21}^* + r_{2k} w_{22}^*)\tilde{x}_2 + (r_{1k} w_{31}^* + r_{2k} w_{32}^*)\tilde{x}_3\end{aligned}$$

有关 $r_h = (r_{h1}, r_{h2}, r_{h3})$ 的计算结果见表 5。

表 5　回归系数 r_h

k	1	2	3
r_1	0.3416	0.4161	0.1430
r_2	−0. 3364	−0. 2908	−0. 0652

所以，有

$$\tilde{y}_1 = -0.0778\tilde{x}_1 - 0.4989\tilde{x}_2 - 0.1322\tilde{x}_3$$

$$\tilde{y}_2 = -0.1385\tilde{x}_1 - 0.5244\tilde{x}_2 - 0.0854\tilde{x}_3$$

$$\tilde{y}_3 = -0.0604\tilde{x}_1 - 0.1559\tilde{x}_2 - 0.0073\tilde{x}_3$$

将标准化变量 $\tilde{y}_k, \tilde{x}_k (k = 1,2,3)$ 分别还原成原始变量 $y_k, x_k (k = 1,2,3)$，则回归方程为

$$y_1 = 47.0197 - 0.0167x_1 - 0.8237x_2 - 0.0969x_3$$

$$y_2 = 612.5671 - 0.3509x_1 - 10.2477x_2 - 0.7412x_3$$

$$y_3 = 183.9849 - 0.1253x_1 - 2.4969x_2 - 0.0518x_3$$

为了更直观、迅速地观察各个自变量在解释 $y_k (k = 1,2,3)$ 时的边际作用，可以绘制回归系数图，见图 1。这个图是针对标准化数据的回归方程的。

从回归系数图中可以立刻观察到，腰围变量在解释三个回归方程时起到了极为重要的作用。然而，与单杠及弯曲相比，跳高成绩的回归方程显然不够理想，三个自变量对它的解释能力均很低。

为了考察这三个回归方程的模型精度，我们以 $(\hat{y}_{ik}, y_{ik})$ 为坐标值，对所有的样本点绘制预测图。$\hat{y}_{ik}$ 是第 k 个变量，第 i 个样本点 (y_{ik}) 的预测值。在这个预测图上，如果所有点都能在图的对角线附近均匀分布，则方程的拟合值与原值差异很小，这个方程的拟合效果就是满意的。体能训练的预测图见图 2。

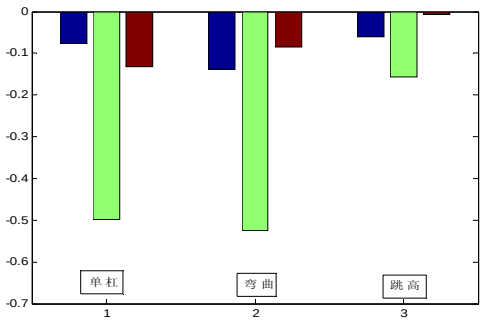


图 1　回归系数的直方图

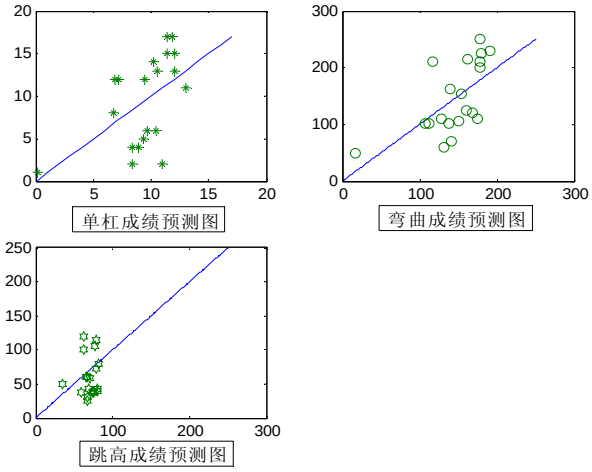


图 2　体能训练预测图

画直方图的 MATLAB 程序为：bar(xishu')
画体能训练的预测图的 MATLAB 程序如下：

```
load mydata
num
ch0=repmat(ch0,num,1);
yhat=ch0+x0*xish; %计算 y 的预测值
y1max=max(yhat);
y2max=max(y0);
```

```
ymax=max([y1max;y2max])
cancha=yhat-y0; %计算残差
subplot(2,2,1)
plot(0:ymax(1),0:ymax(1),yhat(:,1),y0(:,1),'*')
subplot(2,2,2)
plot(0:ymax(2),0:ymax(2),yhat(:,2),y0(:,2),'O')
subplot(2,2,3)
plot(0:ymax(3),0:ymax(3),yhat(:,3),y0(:,3),'H')
```

附录一　Matlab 入门

§1　概论

常用的数学软件有 Maple, Mathematica, Matlab 等；常用的大型统计软件有 SAS ,SPSS 等。下面我们简要地介绍一些 Matlab 的功能，应用范围及发展史。

Matlab 有五大通用功能：数值计算功能(Nemeric)，符号运算功能(Sybolic) (当要求 Matlab 进行符号运算时,它就请求 Malpe 计算并将结果返回到 Matlab 命令窗口)，数据可视化功能(Graphic)，数据图形文字统一处理功能(Notebook)和建模仿真可视化功能(Simulink)。

Matlab 在线性代数，矩阵分析，数值及优化，数理统计和随机信号分析，电路与系统，系统动力学，信号和图像处理，控制理论分析和系统设计，过程控制，建模和仿真，通信系统，财政金融的众多领域的理论研究和工程设计中得到了广泛应用。

MATLAB 是 1984 年由美国 Mathworks 公司推向市场。该软件有三大特点：一是功能强大；二是界面友善，语言自然；三是开放性强(仅 Mathworks 公司就推出了 30 多个应用工具箱)。Matlab 的版本目前已经发展到 Matlab7.3。

§2　Matlab 简介

1. 指令行的编辑

启动 Matlab 后，就可以利用 Matlab 工作。由于 Matlab 是一种交互式语言，随时输入指令，即时给出运算结果是它的工作方式。

```
2*sin(0.3*pi)/(1+sqrt(5)) ↵
```

ans=0.5000　(ans 是一个保留的 Matlab 字符串，它表示上面一个式子的返回结果，用于结果的缺省变量名)

2. 入门演示

```
intro↵  demo↵
```

3. 帮助

```
① help↵                %帮助总揽
    help  elfun↵       %关于基本函数的帮助信息
    help  exp↵         %指数函数 exp 的详细信息
```

② lookfor 指令

当要查找具有某种功能但又不知道准确名字的指令时，help 的能力就不够了，lookfor 可以根据用户提供的完整或不完整的关键词，去搜索出一组与之相关的指令。

```
    lookfor  integral↵    %查找有关积分的指令
    lookfor  fourier↵     %查找能进行傅利叶变换的指令
```

③ 超文本格式的帮助文件

在 Matlab 中，关于一个函数的帮助信息可以用 doc 命令以超文本的方式给出，如：

```
doc↵
doc doc↵
doc eig↵     %eig 求矩阵的特征值和特征向量
```

④ pdf 帮助文件

4. 简单的矩阵输入

① 要直接输入矩阵时，矩阵元素用空格或逗号分隔；矩阵行用分号“;”隔离，整个矩阵放在方括号“[ ]”里。

A=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]↵

说明：指令执行后，矩阵A被保存在 Matlab 的工作间（workspace）中，以备后用。如果用户不用 clear 指令清除它，或对它进行重新赋值，那末该矩阵会一直保存在工作间中，直到本 Matlab 指令窗关闭为止。

② 矩阵的分行输入

A=[1,2,3
4,5,6
7,8,9]

5. 语句与变量

① Matlab 语句有两种最常见的形式

i) 表达式

ii)变量=表达式

[例1] 表达式的计算结果

1996/18↵

ans=110.8889

[例2] 计算结果的赋值

s=1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+...
1/7-1/8;↵

说明：三个小黑点是“连行号”，分号“;”作用是：指令执行结果将不显示在屏幕上，但变量 s 将驻留在内存中。若用户想看 s 的值，可键入以下命令：

s↵

（s=
0.6345）

② 特殊变量

ans	用于结果的缺省变量名
pi	圆周率
eps	计算机的最小数
flops	浮点运算次数
inf	无穷大 如 1/0
NaN	不定量 如 0/0
i（j）	i=j=$\sqrt{-1}$
nargin	所用函数的输入变量数目
nargout	所用函数的输出变量数目
realmin	最小可用正实数
realmax	最大可用正实数

6. 数据结构：向量、矩阵、结构数组和细胞数组

①向量的转置

z=[1+j,2+pi*i,-sqrt(-1)]'

z =
1.0000 - 1.0000i
2.0000 - 3.1416i
0 + 1.0000i

当对复数向量进行转置操作时,可以得到其共轭转置向量。

z.' (非共轭转置向量)

②产生一个行向量

t=[0:0.1:10]　　%产生从 0 到 10 的行向量，元素之间间隔为 0.1

t=linspace(n1,n2,n)

%产生 n1 和 n2 之间线性均匀分布的 n 个数（缺省 n 时,产生 100 个数）

t=logspace(n1,n2,n)　（缺省 n 时,产生 50 个点）

③ who,whos,size 和 length 是对提供工作空间变量信息很有用处的四个命令。

who　　执行该命令可列出储存空间的所有变量

whos　　显示所有的变量，变量所占的字节数及该变量是否是实数

size(a)　　执行该命令可以得到矩阵 a 的行数与列数

length(a)执行该命令后，屏幕上显示出向量 a 的长度。如果 a 是矩阵，则显示的参数为行数列数中的最大数。

④ 矩阵的标号

A(m,n)表示矩阵 A 的第 m 行，第 n 列的元素；

A(1:2,1:3)表示矩阵 A 的从第一行到第二行，从第一列到第三列的所有元素；

A(:) 可以得到一个长向量,该向量的元素是按列一一叠加在一起的。例如

a=[1 2;3 4]；a（:）↵

ans=

1

3

2

4

矩阵的下标也可以是向量。例如

b=a(x,y)↵；　可以得到一个矩阵 b。a 的行标来自向量 x，而列标来自向量 y。

例如，矩阵 a 有 n 列，那末

b=a(:,n:-1:1)

将使矩阵 a 按列的逆序排列。

⑤ 特殊矩阵

i)单位矩阵

eye(m),eye(size(a)) 可以得到与矩阵 a 同样大小的单位矩阵,eye(m,n)可得到一个可允许的最大单位矩阵而其余处补 0。

ii)所有元素为 1 的矩阵

ones(n)，ones(size(a))，ones(m，n)

iii）所有元素为 0 的矩阵

zeros(n)，zeros(m,n)

iv）空矩阵是一个特殊矩阵,这在线性代数中是不存在的。

例如: q=[ ]

矩阵 q 在工作空间之中,但它的大小为零。通过空阵的办法可以删去行与列。例如

a=rand(5)；　a(:,1:3)=[]

第一条指令执行后得到一个5×5的矩阵；第二条指令将矩阵 a 的前三列删除。

v) 对角矩阵

当 v 是向量时，diag(v)得到以 v 的元素为对角线上元素的对角矩阵；

当 v 是矩阵时，diag(v) 得到一个列向量，其元素为矩阵 v 对角线上的元素，diag(v,1)得到矩阵 v 对角线上移一行的元素组成的列向量，diag(v,-1)得到矩阵 v 对角线下移一行的元素组成的列向量。

⑥ 字符串要用单引号。例如：

```
disp('text string')      % disp 显示命令
```

还有几个字符串命令可以作为文字说明和绘图标题说明等，如num2str,int2str,fprintf 和 sprintf。同样，可以借助于 help 命令了解它们的具体用法。

⑦ 结构数组

有时需要将不同的数据类型组合成一个整体，以便于引用。这些组合在一个整体中的数据是相互联系的。例如，一个学生的学号、姓名、性别、年龄、成绩、家庭地址等项都是和该学生有联系的。

下面简单介绍结构体的定义与引用。

i）结构数组的定义

定义结构数组可以采用两种方法：用赋值语句定义和用函数 struct 定义。

用赋值语句定义结构时，只要给出结构的属性赋值，Matlab 就会自动把该属性增加到结构中，赋值时，结构名和属性名用“.”分开。例如，下面三条语句将定义一个1×1的结构数组，结构名为 student，有三个属性：name、num、test。该结构数组只有一个元素，在命令窗口中键入结构名 student，将显示该元素所有属性的属性值的特性。

```
student.name='John Doe';
student.num=123456;
student.test=[79 75 73;80 78 79;90 85 80];
```

再键入以下三行可给该结构数组增加一个元素。

```
student(2).name='Ann Lane';
student(2).num=123422;
student(2).test=[70 76 73;80 99 79;90 85 80;80 85 86];
```

现在结构数组 student 的维数为1×2。当结构数组的元素超过 1 个时，MATLAB 的帮助信息中，不再显示不同属性的值，而只显示数组名、属性名和维数大小。

函数 struct 也可用来定义结构数组，其调用格式为：

结构数组名＝struct(‘属性 1’,’属性值 1’, ‘属性 2’,’属性值 2’, …)

ii）结构数组属性值的修改、设置和获取

结构数组一旦形成，就可取出数组中的某个元素并修改该元素的某个属性的值。以上面建立的 student 数组为例，命令

```
str=student(2).name
```

可取出第二个元素的 name 属性的值。

命令

```
n=student(2).test(4,2)
```

取出第二个元素 test 的值中第四行第二列上的数。

同理，可用命令

```
student(2).test(4,2)=0
```

修改第二个元素 test 的值中第四行第二列上的数的值。

关于结构数组有如下函数：

函数名	作用
struct	生成和转换为结构数组
fieldnames	查询结构数组的属性名
getfield	查询结构数组的属性值
setfield	设置结构数组的属性值
rmfield	删除属性

isfield	检查是否为数组的属性
isstruct	检查数组是否为结构型

⑧ 细胞数组

细胞数组也是 MATLAB 里的一类特殊的数组。在 MATLAB 里，由于有细胞数组这个数据类型，才能把不同类型、不同维数的数组组成为一个数组。

细胞数组的每一个元素可为类型不同、维数不同的矩阵、向量、标量或多维数组，所有元素用大括号括起来。如矩阵 A=[1 2 3 4;2 3 4 5;3 4 5 6]，则命令

```
c={A,sum(A),sum(sum(A))}
```

得到一个1×3的细胞数组。

关于细胞数组有如下函数：

函数名	作用
celldisp	显示细胞数组的内容
cell	生成细胞数组
cellplot	用图形方式显示细胞数组
num2cell	把数值型转换为细胞型
deal	输入和输出的匹配
cell2struct	把细胞数组转换为结构数组
struct2cell	把结构数组转换为细胞数组
iscell	检验数组是否为细胞型

i）细胞数组的生成

有两种方法可以生成细胞数组：用赋值语句直接生成；先用 cell 函数预分配数组，然后再对每个元素赋值。

有两种方法可对元素赋值：一种方法采用数组元素的下标赋值。下面四句命令将建立一个2×2的细胞数组。

```
A(1,1)={[1:5;6:10]};
A(1,2)={'Anne cat'};
A(2,1)={3+7i};
A(2,2)={0:pi/10:pi};
```

在大括号中,逗号或者空格表示每行元素之间的分割,分号表示不同行之间的分割。

另一种方法则把细胞数组的元素用大括号括起来，而所赋的值采用其它数组的形式。例如下面四句生成的细胞数组和上面所生成的完全一样。

```
A{1,1}=[1:5;6:10];
A{1,2}='Anne cat';
A{2,1}=3+7i;
A{2,2}=0:pi/10:pi;
```

命令

```
B=cell(3,4)
```

创建一个3×4的细胞矩阵。

ii）细胞数组内容的查看

对于上面建立的数组 A,在 Matlab 命令窗口键入变量名 A,将显示数组的简要信息。

函数 celldisp 用来显示细胞数组的每个元素的值。函数 cellplot 将画出细胞数组的每个元素的结构图。

当给已经定义的细胞数组下标范围外的元素赋值时，Matlab 自动扩维，对于没有

赋值的元素，赋值为空矩阵。

7. 数学运算与函数

① 基本代数运算操作　+，-，*，\，/，^，

② 矩阵运算函数：求行列式（det），矩阵求逆（inv），求秩（rank），求迹(trace)，求模（norm），d=eig(A)求矩阵 A 的特征值，[v,d]=eig(A)求矩阵 A 的特征向量和特征值，这里 v 的列向量是对应的特征向量。

矩阵基本运算：

A\B, B/A, A.*B, A./B, A.\B, A.^B。

③ 基本数学函数

常用的数学函数有 sin，cos，tan，abs，min，sqrt，log，log10，sign，asin，acos，atan，max，sum，exp，fix 等。具体使用方法请参看帮助 help。

常用的矩阵函数有 expm，logm，sqrtm 和 funm，funm 函数可计算任何一个基本数学函数的矩阵函数。它可以表示为

fa=funm(a,'fun')

式中，fun 可以是任意一个基本函数，如 sin，cos，log10 等。

④ 多项式

任意多项式都可以用一个行向量来表示，即 n 维的向量 a 表示多项式 $y(x)=a(1)x^{n-1}+a(2)x^{n-2}+\cdots+a(n-1)x+a(n)$，反过来，任意一个向量就可以作为多项式。

例如：

```
p=[1  -6  11  -6]; poly2sym(p,'x')
 ans =
 x^3-6*x^2+11*x-6
```

求 s^3+2s^2+3s+4 的根可用如下命令。

```
A=[1  2  3  4];roots(A)
```

i) poly 函数

p=poly(A)，A 是一个 $n\times n$ 的矩阵时，此函数返回矩阵 A 的特征多项式 p，p 是 $n+1$ 维向量；A 是向量时，此函数返回以向量中的元素为根的多项式。

ii) 多项式的数组运算

y=polyval(p,x) 计算多项式在 x 处的值，x 可以是矩阵或向量，此时函数计算多项式在 x 的每个元素处的值。

iii) 多项式的矩阵运算

y=polyvalm(p,x) 相当于用矩阵 x 代替多项式的变量来对矩阵而不是对数组进行运算，x 必须是方阵。例如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\quad p(A)=A^2+3A+2I$$

可采用如下的命令进行计算

```
p=[1  3  2];
a=[1  2; 3  4];
polyvalm(p,a)
```

iv) 多项式的乘法和除法运算

w=conv(u,v) 此函数求多项式 u 和 v 的乘积，即求向量 u 和 v 的卷积。如果 m=length(u)，n=length(v)，则 w 的长度为 m+n-1。

[q,r]=deconv(u,v) 此函数表示多项式 u 除以多项式 v 得到商多项式 q 和余数多项式 r，如果 r 的元素全部为零，则表示多项式 v 可以整除多项式 u。

8. 绘图命令

① 二维图形

二维绘图的基本命令有 plot，loglog，semilogx，semilogy 和 polar。它们的使用方法基本相同，其不同特点是在不同的坐标中绘制图形。plot 命令使用线性坐标空间绘制图形；loglog 命令在两个对数坐标空间中绘制图形；而 semilogx(或 semilogy)命令使用 x 轴(或 y 轴)为对数刻度，另外一个轴为线性刻度的坐标空间绘制图形；polar 使用极坐标空间绘制图形。

二维绘图命令 plot 为了适应各种绘图需要，提供了用于控制线色、数据点和线型的 3 组基本参数。它的使用格式如下：

plot(x,y,'color_point_linestyle')

该命令是绘制 y 对应 x 的轨迹的命令。y 与 x 均为向量，且具有相同的元素个数。用字符串'color_point_linestyle'完成对上面 3 个参数的设置。线色(r-red,g-green，b-blue，w-white，k-black，i-invisible，y-yellow)，数据点（.，o，x，+，*，S，H，D，V，^，>，<，p）与线型（-，-.，--，:）都可以根据需要适当选择。

当 plot(x,y)中的 x 和 y 均为 $m\times n$ 矩阵时，plot 命令将绘得 n 条曲线。

plot(t,[x1,x2,x3])在同一坐标轴内同时绘制三条曲线。

如果多重曲线对应不同的向量绘制，可使用命令

plot(t1,x1,t2,x2,t3,x3)

式中 x1 对应 t1，x2 对应 t2 等等。在这种情况下，t1,t2 和 t3 可以具有不同的元素个数，但要求 x1,,x2 和 x3 必须分别与 t1,t2 和 t3 具有相同的元素数量。

subplot 命令使得在一个屏幕上可以分开显示 n 个不同坐标系，且可分别在每一个坐标系中绘制曲线。其命令格式如下：

subplot(r,c,p)

该命令将屏幕分成 r*c，而 p 表示在第几个窗口。窗口的排号是从左到右，自上而下。

在图形绘制完毕后，执行如下命令可以再在图中加入题目、标号、说明和分格线等。这些命令有 title，xlabel，ylabel，text，gtext 等。它们的命令格式如下：

title('My Title')，xlabel('My X-axis Label')，ylabel('My Y-axis Label')，

text(x,y,'Text for annotation')，gtext('Text for annotation')，

grid

gtext命令是使用鼠标器定位的文字注释命令。当输入命令后，可以在屏幕上得到一个光标，然后使用鼠标器控制它的位置。按鼠标器的左键，即可确定文字设定的位置。

hold on 是图形保持命令，可以把当前图形保持在屏幕上不变，同时在这个坐标系内绘制另外一个图形。hold 命令是一个交替转换命令，即执行一次，转变一个状态（相当于hold on、hold off）。

Matlab可以自动选择坐标轴的定标尺度，也可以使用axis命令定义坐标轴的特殊定标尺度。其命令格式如下：

axis([x-min,x-max,y-min,y-max])

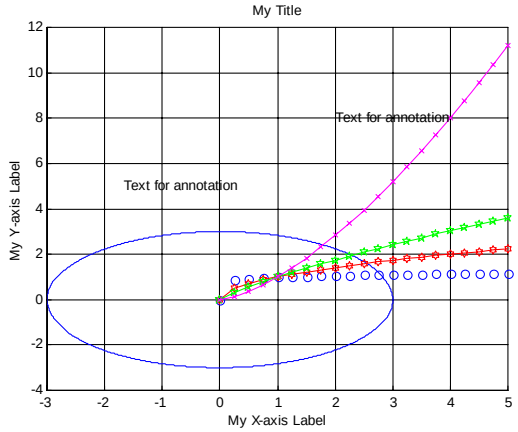
axis 命令的另一个作用是控制纵横尺度的比例。例如，输入 axis('square')后，可得到一个显示方框，此时再在该框内绘制一个圆形时（如：plot(sin(x),cos(x))，在屏幕上可以看到一个圆（一般情况下，由于屏幕的不规则原因，只能看到一个椭圆)。再次输入 axis('normal')命令，屏幕返回到一般状态。

例

```
x=0:0.25:5;
```

```
y1=x.^0.1;
y2=x.^0.5;
y3=x.^0.8;
y4=x.^1.5;
t=0:0.001:2*pi;
hold on
plot(3*cos(t),3*sin(t))
plot(x,y1,'bo',x,y2,'rH-')
plot(x,y3,'gp--')
plot(x,y4,'mx-.')
title('My Title'),xlabel('My X-axis Label'),ylabel('My Y-axis
Label')
text(2,8,'Text for annotation')
gtext('Text for annotation'),grid
```

结果如图所示：



例　用极坐标绘图命令绘制方程 $r=\cos 2\theta$（四叶玫瑰线）的图形。

```
x=0:0.1:2*pi;
r=cos(2*x);
polar(x,r)
```

例　随机地产生 20 个数据，再根据这些数据画统计直方图。

```
x=rand(1,20);
y=round(20*x);
subplot(1,2,1)
hist(x)
subplot(1,2,2)
hist(y)
```

② 三维图形

在实际工程计算中，最常用的三维绘图是三维曲线图、三维网格图和三维曲面图 3 种基本类型。与此对应，Matlab 也提供了 3 个三维基本绘图命令（三维曲线命令 plot3、三维网格命令 mesh 和三维表面命令 surf）。下面先初步介绍其中的两个。

i）三维曲线

plot3(x,y,z)通过描点连线画出曲线，这里 x,y,z 都是 n 维向量，分别表示该曲线上点集的横坐标、纵坐标、竖坐标。

例　在区间［0，10＊pi］画出参数曲线 $x=\sin(t)$，$y=\cos(t)$，$z=t$，并分别标注。

```
t=0:pi/50:10*pi;
plot3(sin(t),cos(t),t)
xlabel('sin(t)'),ylabel('cos(t)'),zlabel('t')
```

ii）网格

命令 mesh(x,y,z)画网格曲面。这里 x,y,z 是三个同维数的数据矩阵，分别表示数据点的横坐标、纵坐标、竖坐标，命令 mesh(x,y,z)将该数据点在空间中描出，并连成网格。

例　绘制二元函数

$$z=\frac{\sin(xy)}{xy}$$

的三维网格图。

```
x=-3:0.1:3;y=-5:0.1:5;
x1=ones(size(y'))*x;y1=y'*ones(size(x));
[x2,y2]=meshgrid(x,y);
z1=(sin(x1.*y1)+eps)./(x1.*y1+eps);
z2=(sin(x2.*y2)+eps)./(x2.*y2+eps);
subplot(1,2,1),mesh(x1,y1,z1)
subplot(1,2,2),mesh(x2,y2,z2)
```

③ 符号函数的简易绘图函数 ezplot

ezplot(f)绘制 f(x)的函数图，这里 f 为代表数学表达式的包含单个符号变量 x 的字符串或符号表达式。x 轴的近似范围为［－2*pi，2*pi］。

ezplot(f,xmin,xmax)或 ezplot(f,[min,max])使用输入参数来代替默认横坐标范围［－2*pi，2*pi］。

例　画出函数 $y=\tan x$ 的图形

解：ezplot(‘tan(x)’)

④ 绘制函数图函数 fplot

fplot(fun,lims)绘制由字符串 fun 指定函数名的函数在 x 轴区间为 lims=[xmin, xmax]的函数图。若 lims=[xmin,xmax,ymin,ymax]，则 y 轴也被输入限制。fun 必须为 M 文件的函数名或对变量 x 的可执行字符串，此字符串被送入函数 eval 后被执行。函数 fun(x)必须要返回针对向量 x 的每一元素结果的行向量。

例　画 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<1\\ 1+\dfrac{1}{x}, & x\geq 1\end{cases}$ 的图形。

解：（1）首先用 M 文件 fun1.m 定义函数 $f(x)$ 如下：

```
function y=fun1(x);
if x<1
```

```
    y=x+1;
else
    y=1+1./x;
end
```
（2）在 matlab 命令窗口输入

fplot(‘fun1’,[-3,3])

就可画出函数 $f(x)$ 的图形。

⑤ 画等高线的函数 contour

在 Matlab 中，可以用 contour 命令绘制平面等高线，用 contour3 命令绘制空间等高线。

绘制平面等高线 contour 命令的具体使用格式为：

```
contour(x,y,z,n)
contour(x,y,z,v)
contourf(…)
```

其中 x，y 为其横纵坐标值向量，如果 x 为 s 维，y 为 m 维，则 z 为 m×s 维矩阵，为对应于坐标（x,y）的高度。参数 n 为整数，指定了绘出等高线的条数。参数 v 为向量，指定了在哪些高度绘出等高线，如只想在一个高度 z 绘出等高线，则 v=[z，z]。

contourf(…)命令的参数与 contour 命令完全相同，只是其绘出的等高线图将被自动填上颜色。

```
c=contour(x,y,z,n)
c=contour(x,y,z,,v)
```

上面 2 个命令用来计算所画等高线的 x，y 坐标值。

```
clabel(c)
clabel(c,v)
```

上面 2 个命令用来标注计算的 c 阵处的高度值。clabel(c)将把所绘等高线全部自动标注，clabel(c,v)将自动标注由向量 v 确定的若干条等高线的高度值。

例

```
clc;clf;
x=0:400:5600;
y=0:400:4800;
z=[370,470,550,600,670,690,670,620,580,450,400,300,100,150,250;
    510,620,730,800,850,870,850,780,720,650,500,200,300,350,320;
    650,760,880,970,1020,1050,1020,830,800,700,300,500,550,480,350;
    740,880,1080,1130,1250,1280,1230,1040,900,500,700,780,750,650,550;
    830,980,1180,1320,1450,1420,1400,1300,700,900,850,810,380,780,750;
    880,1060,1230,1390,1500,1500,1400,900,1100,1060,950,870,900,930,950;
    910,1090,1270,1500,1200,1100,1350,1450,1200,1150,1010,880,1000,1050,1100;
    950,1190,1370,1500,1200,1100,1550,1600,1550,1380,1070,900,1050,1150,1200;
    1430,1450,1460,1500,1550,1600,1550,1600,1600,1600,1550,1500,1500,1550,1550;
    1420,1430,1450,1480,1500,1550,1510,1430,1300,1200,980,850,750,550,500;
    1380,1410,1430,1450,1470,1320,1280,1200,1080,940,780,620,460,370,350;
    1370,1390,1410,1430,1440,1140,1110,1050,950,820,690,540,380,300,210;
    1350,1370,1390,1400,1410,960,940,880,800,690,570,430,290,210,150];
figure,hold on
c=contourf(x,y,z,10);clabel(c)
text(0,800,'▼\leftarrow 起点','fontsize',15,'color','r')
text(4000,2000,'▼\leftarrow 居民点','fontsize',15,'color','r')
```

```
text(2000,4000,'▼\leftarrow 矿区','fontsize',15,'color','b')
line([2400,4800],[2400,0])
figure
surf(x,y,z),view(50,30),hold on
text(0,800,680,'▼','fontsize',15,'color','r')
text(0,600,880,'起点','fontsize',15,'color','r')
text(4000,2000,950,'▼','fontsize',15,'color','r')
text(4200,2000,1150,'居民点','fontsize',15,'color','w')
text(2000,4000,1320,'▼\leftarrow 矿区','fontsize',15,'color','b')
```

§3 程序设计

1．关系和逻辑运算

关系运算符有以下 6 种

<，<=，>，>=，==，～=，

关系成立时结果为 1，否则为 0。

逻辑运算符有

＆，｜，～，xor

分别代表逻辑运算中的与、或、非、异或。0 的逻辑量为“假”，而任意非零数的逻辑量为“真”。

例

```
a=[1,2,3,4];
b=[0,1,0,2];
a&b,a|b,~a,xor(a,b)
```

2．关系和逻辑函数

除了关系和逻辑运算符，Matlab 提供了关系和逻辑函数。

any(x)

如果在向量 x 中，至少有一个非零元素，则 any(x)返回 1；矩阵 x 的每一列有非零元素，返回 1。

all(x)

如果在一个向量 x 中，所有元素非零，则 all(x)返回 1；矩阵 x 中的每一列所有元素非零，则返回 1。

find：找出向量或矩阵中非零元素的位置标识

find 函数在对数组元素进行查找、替换和修改等操作中占有非常重要的地位，熟练运用可以方便而灵活地对数组进行操作。

find(a)返回由矩阵 a 的所有非零元素的位置标识组成的向量（元素的标识是按列进行的），如果没有非零元素则会返回空值。

例

```
a=[0,1;0,2]
b=zeros(1,5)
find(a),find(b)
```

```
[i,j,v]=find(a)
```

此函数返回矩阵 a 的非零元素的行和列的标识，其中 i 代表行标而 j 代表列标，同时，将相应的非零元素的值放于列向量 v 中。

例

```
a=[0,5;0,7]
[i,j,v]=find(a)
```

例　找出 a 中不等于 7 的元素的位置。

```
a=[0,5;0,7]
find(a~=7)
```

例　将矩阵 a 中等于 7 的元素的值换成矩阵 c 中相应位置上的元素。

```
a=[0,5;0,7]
c=rand(2,2)
a(find(a==7))=c(find(a==7))
```

例　将矩阵 a 中等于 0 的元素删除。

```
a=[1,0,5;0,2,7]
a(find(a==0))=[]
b=reshape(a,[2,2])
b(:,2)=[]
```

3. 流程控制语句

计算机程序通常都是从前到后逐条执行的。但往往也需要根据实际情况，中途改变执行的次序，称为流程控制。Matlab 设有 4 种流程控制的语句结构，即 if 语句、while 语句、for 语句和 switch 语句。

i）if 语句

根据复杂程度，if 语句有 3 种形式

```
if  表达式  语句组 a，  end
if  表达式 1  语句组 a，  else  语句组 b，  end
if  表达式 1  语句组 a，  elseif  表达式 2  语句组 b，else 语句组 c，end
```

ii）while 语句

while 语句的结构形式为

```
while  表达式  语句组，  end
```

例　求 Matlab 中的一个充分大的实数。

设定一个数 x，让它不断增大，直到 Matlab 无法表示它的值，只能表示为 Inf 为止。

```
x=rand;
while x~=Inf
    x1=x;x=2*x;
end
x1
```

iii）for 语句

for 语句的结构形式为

```
for  k=初值：增量：终值  语句组 a，end
```

iv）switch 语句

switch－case－otherwise 语句可用来实现均衡的多分支语句，其基本语句结构可表示为

```
switch  表达式（标量或字符串）
case  值 1
  语句组 1
case  值 2
  语句组 2
```

```
  ……
otherwise
  语句组 n
end
```

例　判断输入数 n 的奇偶性。

```
n=input('n=')
switch mod(n,2)
case 1,a='奇'
case 0,a='偶'
otherwise,a='非整数'
end
```

4. M 文件与 M 函数

由 Matlab 语句构成的程序文件称作 M 文件，它将 m 作为文件的扩展名。M 文件可分为程序文件和函数文件两种。

程序文件一般是由用户为解决特定的问题而编制的程序，函数文件也称为子程序，它必须由 Matlab 程序来调用。函数文件往往具有一定的通用性，并且可以进行递归调用。

i）程序文件

程序文件的格式特征如下：

（1）前面的若干行通常是程序的注释，每行以“%”开始，当然注释可以放在程序的任何部分。注释可以是汉字，注释是对程序的说明，它增加了程序的可读性。在执行程序时，Matlab 将不理会“%”后直到行末的全部文字。

（2）然后是程序的主体。如果文件中有全局变量，即子程序和主程序共用的变量，应在程序的起始部分注明。其语句是

```
global  变量名 1  变量名 2  ……
```

（3）整个程序应按 Matlab 标识符的要求起文件名，文件名不能以数字开始，不允许用汉字。

ii）函数文件

函数文件是用来定义子程序的。它与程序文件的主要区别有 3 点：

（1）由 function 起头，后跟的函数名要与文件名相同。

（2）有输入输出变量，可进行变量传递。

（3）除非用 global 声明，程序中的变量均为局部变量，不保存在工作空间中。

例　编写求阶乘的函数。

```
function y=fac(n);
if n<0
    error('n is smaller than 0,error input.');
    return;
end
if n==0|n==1
    y=1;
else
    y=n*fac(n-1);
end
```

并把上述文件命名为 fac.m，调用函数时实际上是调用文件名。

5. 利用字符串模拟运算式

利用字符串建立表达式后，再用 eval 命令执行它，可以使程序设计更加灵活。但是注意表达式一定要是字符串。其命令格式为：

eval（'字符串'）

例　先定义字符串 t 为平方根运算，再用 eval 求出 1 到 10 的平方根。

```
clear,clc
t='sqrt(i)';
for i=1:10
    s(i)={char(['The square root of  ', int2str(i), '  is  ',...
                num2str(eval(t))])};
    %上面大括号{}代表建立数组
end
s(:)
```

例　如果要输入几十个甚至上百个文件，用手工操作十分繁琐，然而灵活运用 eval 函数可以自动完成这一工作。假设数据文件名从 data1.dat～data10.dat，放在 D:\matlab\chp 目录下，操作如下：

```
for i=1:10
    eval(['load d:\matlab\chp\data',int2str(i),'.dat'])
end
```

函数 feval 用于执行字符串代表的文件或函数。

例

```
fun=['sin';'cos';'log'];
k=input('选择第几个函数:');
x=input('输入数值:');
feval(fun(k,:),x)
```

例　当前 matlab\work 目录下有三个图形文件 hlpstep1.gif～hlpstep3.gif，分别打开这三个文件。

```
clear,clc
fun='imread';
for i=1:3
  str=char(['hlpstep',int2str(i),'.gif']);
  x=feval(fun,str)
end
```

§4　文件

根据数据的组织形式，Matlab 中的文件可分为 ASCII 文件和二进制文件。ASCII 文件又称文本文件，它的每一个字节放一个 ASCII 代码，代表一个字符。二进制文件是把内存中的数据按其在内存中的存储形式原样输出到磁盘上存放。

Matlab 中的关于文件方面的函数和 C 语言相似。

函 数 分 类	函数名	作　用
打开和关闭文件	fopen	打开文件
	fclose	关闭文件
读写二进制文件	fread	读二进制文件
	fwrite	写二进制文件
格式 I/O	fscanf	从文件中读格式数据

	fprintf	写格式数据
	fgetl	从文件中读行,不返回行结束符
	fgets	从文件中读行,返回行结束符
读写字符串	sprintf	把格式数据写入字符串
	sscanf	格式读入字符串
文件定位	feof	检验是否为文件结尾
	fseek	设置文件定位器
	ftell	获取文件定位器
	frewind	返回到文件的开头

1. 文件的打开和关闭

对文件读写之前应该“打开”该文件，在使用结束之后应“关闭”该文件。

函数 fopen 用于打开文件，其调用格式为：

fid=fopen(‘filename’,’permission’)

fid 是文件标识符（file identifier)，fopen 指令执行成功后就会返回一个正的 fid 值，如果 fopen 指令执行失败，fid 就返回-1。

filename 是文件名。

permission 是文件允许操作的类型，可设为以下几个值：

‘r’　　只读

‘w’　　只写

‘a’　　只能追加（append）

‘r+’　　可读可写

与 fopen 对应的指令为 fclose，它用于关闭文件，其指令格式为：

status=fclose(fid)

如果成功关闭文件，status 返回的值就是 0。

2. 读写操作

i）fwrite 的指令格式

fid=fopen(‘filename’,’permission’)

fwrite(fid，要保存的数据矩阵，’精度格式’)

执行 help fread 即可查到精度格式的设定。

ii）fprintf 的指令格式

fprintf(fid，’数据格式’，需要保存的数据矩阵)

例　产生 10 个随机数，并保存到一个纯文本文件 data1.txt 中。

```
clear,clc
a=rand(1,10)
fid=fopen('data1.txt','w');
fprintf(fid,'%8.4f',a);
fclose(fid);
load data1.txt
data1
```

iii）save 的指令格式

　　save　filename　变量 1　变量 2　…

使用 load　filename 即可把变量 1、变量 2、…调出来。

如果要保存为 ASCII 码，就要在后面加上-ascii

save filename 变量1 变量2 … -ascii

对于 save 指令，处理大量数据存取有一个技巧非常有用，即：

save('filename', '变量1', '变量2', …)

由于 filename 是用字符串表示的，所以可以使用程序进行控制，使其每处理完一次就存一个不同的文件名称。

例

```
clear,clc
m=1:10;
for i=1:length(m)
    n=m.^2;
    nf=[m',n'];
    t=char(['nf',int2str(i),'=nf'])
    eval(t)
    save(['data',int2str(i)],['nf',int2str(i)])
end
```

iv) load 纯文本文件

load filename.txt

就建立了变量名为 filename 的数据。

例 现有一纯文本数据文件 caipao.txt，保存了山东省 65 期的福利彩票中奖号码，试对中奖号码给出一些统计，并按一定的规则产生两组彩票号码。

```
clc,clear
load caipiao.txt;
cp=caipiao;
for i=1:30
   b(i)=length(find(cp==i));
end
[b,id]=sort(b);
mai1=sort(id(1:7)), mai2=sort(id(24:30))
fid1=fopen('cpsj.txt','w');
fprintf(fid1,'%6d  %6d  %6d  %6d  %6d  %6d  %6d  %6d\n',caipiao');
fclose(fid1);
```

§5 动画制作

动画制作通常有两种方法：一种是预先将图形制作好，并放到图形缓冲区内，然后一帧一帧地播放。另一种方法是保持整个背景图案不变，只更新运动部分的图案，以便加快每幅图的实时生成速度。

1．简单动画制作

在 getframe 命令下，可以完成动态数据到动态画面的制作。其使用格式及制作步骤一般为：

```
for j=1:n
    plot_command
    M(j) = getframe;
end
movie(M,n)
```

其中 M(j)=getframe 将当前图形窗口中的画面作为第 j 帧存入矩阵 M，movie(M,n)将按

顺序放映矩阵 M 中存储的画面，并重复 n 次。

例
```
x=-3:0.1:3;
[x,y]=meshgrid(x);
z=sin(x.*y).*exp(x.*y/5);
for j=1:30
    mesh(cos(4*pi*j/30)*z,z)
    m(j)=getframe
end
movie(m,10)
```

例　模拟 6 个移动物体
```
x0=[150 85 150 145 130 0];
y0=[140 85 155 50 150 0];
q=[243 236 220.5 159 230 52]*pi/180;
t=0:0.05:2*pi;
for  i=0:280
pause(0.01);
   for j=1:5
      axis([0 160 0 160]);
      fill(x0(j)+0.8*i*cos(q(j))+4*cos(t),y0(j)+0.8*i*sin(q(j))+4*sin(t),'b')
      hold  on;
   end
fill(x0(6)+0.8*i*cos(q(6))+4*cos(t),y0(6)+0.8*i*sin(q(6))+4*sin(t),'r')
hold off;
end
```

2．其它例子

在 Matlab 里利用图形的“EraseMode”属性可以实现显示新对象，擦除旧对象，而又不破坏背景图案。图形的“EraseMode”属性有以下四种：

normal 方式

重绘整个显示区，这种方式产生的图形最准确，但较慢。

none 方式

不做任何擦除，直接在原来图形上绘制。

xor 方式

对象的绘制和擦除由背景颜色和屏幕颜色的异或而定。只擦除和屏幕颜色不一致的旧对象的点，只绘制和屏幕颜色不一致的新对象的点。

background 方式

把旧对象的颜色变为背景色，这种方式影响被擦除对象下面的对象。

当新对象的属性修改后，应刷新屏幕，使新的对象显示出来。Matlab 里屏幕刷新的命令是 drawnow。drawnow 命令使 Matlab 暂停目前的任务而去刷新屏幕。若不使用 drawnow 命令，Matlab 则等到任务序列执行完后才刷新。

例　布朗运动

（1）先确定布朗运动的点数 n 和一个温度 s（或速度）。比如 n=20，s=0.002。达到最好的动画效果的 n、s 与使用的计算机的性能有关。在以原点为中心、边长为 1 的正方形内产生 n 个位置随机分布的点。

（2）在单位正方形里绘制所有的点。设置图形的“EraseMode”属性为异或（xor），即当图形的某个点的位置变化时，不用全部重绘图形，而只绘制不相同的部分，这将大大提高绘图速度。

（3）用 while 循环实现动画效果，在每一次循环中给点的坐标加上一些正态分布的噪声，这样整个图形中只有点的坐标发生变化，而不用全部重绘整个图形。

程序如下：

```
clc,clear
n=20;s=0.002;
axis square
grid off
x=rand(n,1)-0.5;y=rand(n,1)-0.5;
h=plot(x,y,'.');
set(h,'EraseMode','xor','MarkerSize',18)
while 1
    x=x+s*rand(n,1);y=y+s*rand(n,1)
    set(h,'Xdata',x,'Ydata',y)
    if all(x>1) & all(y>1)
        break
    end
    drawnow
end
```

例　制作一幅钻石沿着圆周运动的动画。

程序如下：

```
t=0:pi/200:pi*2;
x=sin(t);y=cos(t);
axis square
plot(x,y,'b')
n=length(t);
h=line('color','red','marker','diamond','erasemode','xor');
i=1;j=1;
while 1
    set(h,'xdata',x(i),'ydata',y(i))
    drawnow
    i=i+1;j=j+1;
    if i>n
        i=1;
    end
    if j>2*n
        break
    end
end
```

习题一

1．存储工作间变量 x,y,z 到文件 data1.mat，再在程序中调用变量 x,y,z。

2．产生 20 个随机数，再把这 20 个随机数存放在纯文本文件中。

附录二　Matlab 在线性代数中的应用

§1 向量组的线性相关性

求列向量组 A 的一个最大线性无关组可用命令 rref(A)将 A 化成阶梯形的行最简形式，其中单位向量对应的列向量即为最大线性无关组所含向量，其它列向量的坐标即为其对应向量用最大线性无关组线性表示的系数。

例 1　求下列矩阵列向量组的一个最大无关组。

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & 6 & -6 \\ 2 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

解　编写 M 文件 ex1.m 如下：

```
format rat
a=[1,-2,-1,0,2;-2,4,2,6,-6;2,-1,0,2,3;3,3,3,3,4];
b=rref(a)
```

求得

```
b = 1    0    1/3    0    16/3
    0    1    2/3    0    -1/9
    0    0     0     1    -1/3
    0    0     0     0      0
```

记矩阵 A 的五个列向量依次为 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5，则 α_1、α_2、α_4 是列向量组的一个最大无关组。且有

$$\alpha_3=\frac{1}{3}\alpha_1+\frac{2}{3}\alpha_2,\qquad \alpha_5=\frac{16}{3}\alpha_1-\frac{1}{9}\alpha_2-\frac{1}{3}\alpha_4.$$

例 2　设 $A=[a_1,a_2,a_3]=\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$，$B=[b_1,b_2]=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$，

验证 a_1,a_2,a_3 是 R^3 的一个基，并把 b_1,b_2 用这个基线性表示。

解　编写 M 文件 ex2.m 如下：

```
format rat
a=[2,2,-1;2,-1,2;-1,2,2];b=[1,4;0,3;-4,2];
c=rref([a,b])
```

求得

```
c= 1    0    0     2/3    4/3
   0    1    0    -2/3     1
   0    0    1     -1      2/3
```

§2　线性方程组

Matlab 中解线性方程组可以使用“\”。虽然表面上只是一个简简单单的符号，而它的内部却包含许许多多的自适应算法，如对超定方程用最小二乘法，对欠定方程它将给出范数最小的一个解，解三对角阵方程组时用追赶法等。

另外欠定方程组可以使用求矩阵 A 的阶梯形行最简形式命令 rref(A)，求出所有的

基础解系。

例 3　求解下列方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

解　编写 M 文件 ex3.m 如下：

```
format rat
a=[2,1,-5,1;1,-3,0,-6;0,2,-1,2;1,4,-7,6];
b=[8;9;-5;0];
solution=a\b
```

求得 solution=[3　-4　-1　1]'。

例 4　求超定方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 11 \\ 3x_1 - 5x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 6 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

解　编写 M 文件 ex4.m 如下：

```
a=[2,4;3,-5;1,2;2,1];
b=[11;3;6;7];
solution=a\b
```

求得 solution=[3.0403　　1.2418]'。

例 5　求解方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

解　编写 M 文件 ex5.m 如下：

```
format rat
a=[1,-1,-1,1,0;1,-1,1,-3,1;1,-1,-2,3,-1/2];
b=rref(a)
```

求得：

```
b=  1    -1     0    -1     1/2
    0     0     1    -2     1/2
    0     0     0     0      0
```

故方程组有解，并有

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + x_4 + \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 2x_4 + \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

§3 相似矩阵及二次型

有时我们需要精确的特征值和特征向量，就须利用 Matlab 的符号运算功能。

在 Matlab 中创建符号矩阵和创建数值矩阵的形式很相似，只不过要用到符号定义函数 sym。下面介绍使用此函数创建符号函数的几种形式。

3.1 使用 sym 函数直接创建符号矩阵

此方法和直接创建数值矩阵的方法几乎完全相同。矩阵元素可以是符号表达式，各符号表达式的长度可以不同，矩阵元素之间可用空格或逗号分隔。

例如：

```
x=sym('[a+sin(d),b;1/c,d]');
y=det(x)
```

求得 y=(d*c*a+d*c*sin(d)-b)/c

3.2 将数值矩阵转化为符号矩阵

在 Matlab 中，数值矩阵不能直接参与符号运算，必须先转化为符号矩阵。

例如：

```
a=[2/3,sqrt(2);3,1]
a= 0.6667    1.4142
   3.0000    1.0000
b=sym(a)
b=[ 2/3, sqrt(2)]
  [   3,       1]
```

3.3 符号矩阵的索引和修改

Matlab 的符号矩阵索引和修改同数值矩阵的索引和修改完全相同。

例如：对上例中的矩阵 b 进行修改

```
b(2,2)='log(9)'
```

3.4 举例

例 6　求一个正交变换 $x = Py$，把二次型

$$f = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$$

化为标准形。

解：二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由

```
A=[0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0];
[P,D]=eig(A)
```

求得

```
P=  0.7887    0.2113    0.5000   -0.2887
    0.2113    0.7887   -0.5000    0.2887
    0.5774   -0.5774   -0.5000    0.2887
         0         0    0.5000    0.8660
D=  1.0000         0         0         0
         0    1.0000         0         0
```

```
    0         0   -3.0000         0
    0         0         0    1.0000
```

P 就是所求的正交矩阵，使得 $P^TAP=D$，令 $X=PY$，其中 $X=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_4\end{bmatrix}^T$，$Y=\begin{bmatrix}y_1 & \cdots & y_4\end{bmatrix}^T$，化简后的二次型为 $g=y_1^2+y_2^2-3y_3^2+y_4^2$。

上面求得的正交矩阵 P 是数值解，下面我们求正交矩阵的精确解。

由

```
a=sym('[0,1,1,-1;1,0,-1,1;1,-1,0,1;-1,1,1,0]');
[v,d]=eig(a)
```

求得

```
v=[  1, -1,  1,  1]      d=[  1,  0,  0,  0]
  [  1,  0,  0, -1]        [  0,  1,  0,  0]
  [  0,  0,  1, -1]        [  0,  0,  1,  0]
  [  0,  1,  0,  1]        [  0,  0,  0, -3]
```

即求得矩阵 A 的特征值为 1、1、1、3，对应的特征向量分别是矩阵 v 的第 1、2、3、4 列。再把对应于特征值 1 的 3 个特征向量正交化、单位化，我们就容易求出正交矩阵 P。

附录三　运筹学的 LINGO 软件

§1　简介

LINGO 软件有多种版本，如 LINDO，GINO 和 LINGO(包括 LINGO NL)软件。

LINDO 是一种专门用于求解数学规划问题的优化计算软件包，版权现在由美国 LINDO 系统公司（Lindo System Inc.）所拥有。LINDO 软件包的特点是程序执行速度快，易于方便地输入、修改、求解和分析一个数学规划（优化问题），因此 LINDO 在教学，科研和工业界得到广泛应用。有关该软件的发行版本，发行价格和其它最新信息都可以从 LINDO 系统公司的 INTERNET 网络站点 http://www.lindo.com 获取，该站点还提供部分 LINDO 软件的演示版本或测试版本。

LINDO 由美国芝加哥大学的 Linus Schrage 教授首先开发，随后又推出了 GINO, LINGO, LINGO NL (又称 LINGO2) 和“what's best!”等优化软件，现在一般仍用 LINDO 作为这些软件的统称。各组件的功能各有侧重，分别简要介绍如下：

（i）LINDO 是 Linear Interactive and Discrete Optimizer 字首的缩写形式，可以用来求解线性规划（LP—Linear Programming），整数规划(IP—Integer Programming)和二次规划(QP—Quadratic Programming)问题。

（ii）GINO 是 General Interactive Optimizer 字首的缩写形式，可以用来求解非线性规划（NLP-----Non-Linear Programming）问题，也可用于求解一些线性和非线性方程（组）以及代数方程求根等。GINO 中包含了各种一般的数学函数（包括大量的概率函数），可供使用者建立问题模型时调用。

（iii）LINGO 可以用来求解线性，非线性和整数规划问题。

（iv）LINGO NL (LINGO2) 可以用来求解线性，非线性和整数规划问题。

与 LINDO 和 GINO 不同的是，LINGO 和 LINGO NL (LINGO2) 包含了内置的建模语言，允许以简练，直观的方式描述较大规模的优化问题，模型中所需的数据可以以一定格式保存在独立的文件中。

（v）“what's best!” 组件主要用于数据文件是由电子表格软件（如 LUTOS1-2-3 和 MS OFFICE 等）生成的情形。

LINDO 软件包有多种版本，但其软件内核和使用方法基本上是类似的。下面介绍 LINGO 组件的基本使用方法。

§2　LINGO 快速入门

当你在 windows 下开始运行 LINGO 系统时，会得到一个窗口：

外层是主框架窗口，包含了所有菜单命令和工具条，其它所有的窗口将被包含在主窗口之下。在主窗口内的标题为 LINGO Model - LINGO1 的窗口是 LINGO 的默认模型窗口，建立的模型都都要在该窗口内编码实现。下面举两个例子。

例 2.1 如何在 LINGO 中求解如下的 LP 问题：

$$\min 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 350 \\ x_1 \geq 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 600 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

由于 LINGO 中已假设所有的变量是非负的，所以非负约束不必再输入到计算机中，

LINGO 也不区分变量中的大小写字符（任何小写字符将被转换为大写字符）；约束条件中的”<=”及”>=”可用”<”及”>”代替。在模型窗口中输入如下代码：

```
min=2*x1+3*x2;
x1+x2>350;
x1>100;
2*x1+x2<600;
```

然后点击工具条上的按钮  即可。

例 2.2 使用 LINGO 软件计算 6 个发点 8 个收点的最小费用运输问题。产销单位运价如下表。

单位运价 销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	产量
A_1	6	2	6	7	4	2	5	9	60
A_2	4	9	5	3	8	5	8	2	55
A_3	5	2	1	9	7	4	3	3	51
A_4	7	6	7	3	9	2	7	1	43
A_5	2	3	9	5	7	2	6	5	41
A_6	5	5	2	2	8	1	4	3	52
销量	35	37	22	32	41	32	43	38	

使用 LINGO 软件，编制程序如下：

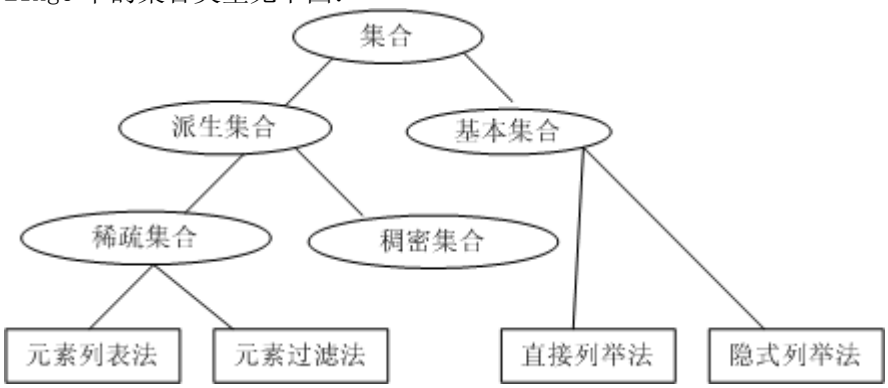
```
model:
!6 发点 8 收点运输问题;
sets:
  warehouses/wh1..wh6/: capacity;
  vendors/v1..v8/: demand;
  links(warehouses,vendors): cost, volume;
endsets
!目标函数;
  min=@sum(links: cost*volume);
!需求约束;
  @for(vendors(J):
    @sum(warehouses(I): volume(I,J))=demand(J));
!产量约束;
  @for(warehouses(I):
    @sum(vendors(J): volume(I,J))<=capacity(I));
 !这里是数据;
data:
  capacity=60 55 51 43 41 52;
  demand=35 37 22 32 41 32 43 38;
  cost=6 2 6 7 4 2 9 5
```

```
      4 9 5 3 8 5 8 2
      5 2 1 9 7 4 3 3
      7 6 7 3 9 2 7 1
      2 3 9 5 7 2 6 5
      5 5 2 2 8 1 4 3;
enddata
end
```

然后点击工具条上的按钮  即可。

Lingo 模型由 4 个部分构成：目标与约束，集合，数据，初始。

Lingo 中的集合类型见下图：



Lingo 中有三类运算符：算术运算符，逻辑运算符和关系运算符。运算符的优先级见下表：

优先级	运算符
最高	#NOT# ，－（负号）
	^
	* ，/
	+，－（减号）
	#EQ#，#NE#，#GE#，#GT#，#LE#，#LT#
	#AND#，#OR#
最低	<，＝，>

注意使用 Lingo 中的四个集合循环函数：FOR，SUM，MAX，MIN。

在 Lingo 中可以使用外部数据文件，有如下几种方法：

（1）复制－粘贴方法（Copy－Paste）；

（2）@FILE 输入数据，@TEXT 输出数据；

（3）@OLE 函数与电子表格软件（如 EXCEL）连接；

（4）@ODBC 函数与数据库连接。

§3 LINGO 中的集

对实际问题建模的时候，总会遇到一群或多群相联系的对象，比如工厂、消费者群体、交通工具和雇工等等。LINGO 允许把这些相联系的对象聚合成**集**（sets）。一旦把对象聚合成集，就可以利用集来最大限度的发挥 LINGO 建模语言的优势。

3.1 什么是集

集是一群相联系的对象，这些对象也称为集的**成员**。一个集可能是一系列产品、卡车或雇员。每个集成员可能有一个或多个与之有关联的特征，我们把这些特征称为**属性**。属性值可以预先给定，也可以是未知的，有待于 LINGO 求解。例如，产品集中的每个产品可以有一个价格属性；卡车集中的每辆卡车可以有一个牵引力属性；雇员集中的每位雇员可以有一个薪水属性，也可以有一个生日属性等等。

LINGO 有两种类型的集：**原始集**(primitive set)和**派生集**(derived set)。

一个原始集是由一些最基本的对象组成的。

一个派生集是用一个或多个其它集来定义的，也就是说，它的成员来自于其它已存在的集。

3.2 模型的集部分

集部分是 LINGO 模型的一个可选部分。在 LINGO 模型中使用集之前，必须在集部分事先定义。集部分以关键字“sets:”开始，以“endsets”结束。一个模型可以没有集部分，或有一个简单的集部分，或有多个集部分。一个集部分可以放置于模型的任何地方，但是一个集及其属性在模型约束中被引用之前必须定义了它们。

3.2.1 定义原始集

为了定义一个原始集，必须详细声明：

- 集的名字
- 可选，集的成员
- 可选，集成员的属性

定义一个原始集，用下面的语法：

setname[/member_list/][:attribute_list];

注意：用“[]”表示该部分内容可选。下同，不再赘述。

Setname 是你选择的来标记集的名字，最好具有较强的可读性。集名字必须严格符合标准命名规则：以拉丁字母或下划线（_）为首字符，其后由拉丁字母（A—Z）、下划线、阿拉伯数字（0，1，…，9）组成的总长度不超过 32 个字符的字符串，且不区分大小写。

注意：该命名规则同样适用于集成员名和属性名等的命名。

Member_list 是集成员列表。如果集成员放在集定义中，那么对它们可采取显式罗列和隐式罗列两种方式。如果集成员不放在集定义中，那么可以在随后的数据部分定义它们。

① 当显式罗列成员时，必须为每个成员输入一个不同的名字，中间用空格或逗号搁开，允许混合使用。

例 3.1 可以定义一个名为 students 的原始集，它具有成员 John、Jill、Rose 和 Mike，属性有 sex 和 age：

```
sets:
  students/John  Jill, Rose  Mike/: sex, age;
endsets
```

② 当隐式罗列成员时，不必罗列出每个集成员。可采用如下语法：

setname/member1..memberN/[: attribute_list];

这里的 member1 是集的第一个成员名，memberN 是集的最末一个成员名。LINGO 将自动产生中间的所有成员名。LINGO 也接受一些特定的首成员名和末成员名，用于创建一些特殊的集。列表如下：

隐式成员列表格式	示例	所产生集成员

1..n	1..5	1,2,3,4,5
StringM..StringN	Car2..car14	Car2,Car3,Car4,…,Car14
DayM..DayN	Mon..Fri	Mon,Tue,Wed,Thu,Fri
MonthM..MonthN	Oct..Jan	Oct,Nov,Dec,Jan
MonthYearM..MonthYearN	Oct2001..Jan2002	Oct2001,Nov2001,Dec2001,Jan2002

③ 集成员不放在集定义中，而在随后的**数据部分**来定义。

例 3.2

```
!集部分;
sets:students:sex,age;
endsets
!数据部分;
data:
  students,sex,age= John 1 16
                    Jill 0 14
                    Rose 0 17
                    Mike 1 13;
enddata
```

注意：开头用感叹号（!），末尾用分号（;），!表示注释，可跨多行。

在集部分只定义了一个集 students，并未指定成员。在数据部分罗列了集成员 John、Jill、Rose 和 Mike，并对属性 sex 和 age 分别给出了值。

集成员无论用何种字符标记,它的索引都是从 1 开始连续计数。在 attribute_list 可以指定一个或多个集成员的属性，属性之间必须用逗号隔开。

可以把集、集成员和集属性同 C 语言中的结构体作个类比。如下图：

集 ←→ 结构体

集成员 ←→ 结构体的域

集属性 ←→ 结构体实例

LINGO 内置的建模语言是一种描述性语言，用它可以描述现实世界中的一些问题，然后再借助于 LINGO 求解器求解。因此，集属性的值一旦在模型中被确定，就不可能再更改。在 LINGO 中，只有在**初始部分**中给出的集属性值在以后的求解中可更改。这与前面并不矛盾，初始部分是 LINGO 求解器的需要，并不是描述问题所必须的。

3.2.2 定义派生集

为了定义一个派生集，必须详细声明：

- 集的名字
- **父集**的名字
- 可选，集成员
- 可选，集成员的属性

可用下面的语法定义一个派生集：

setname(parent_set_list)[/member_list/][:attribute_list];

setname 是集的名字。parent_set_list 是已定义的集的列表，多个时必须用逗号隔开。如果没有指定成员列表，那么 LINGO 会自动创建父集成员的所有组合作为派生集的成员。派生集的父集既可以是原始集，也可以是其它的派生集。

例 3.3

```
sets:
  product/A B/;
  machine/M N/;
```

```
  week/1..2/;
  allowed(product,machine,week):x;
endsets
```
LINGO 生成了三个父集的所有组合共八组作为 allowed 集的成员。列表如下：

编号	成员
1	(A,M,1)
2	(A,M,2)
3	(A,N,1)
4	(A,N,2)
5	(B,M,1)
6	(B,M,2)
7	(B,N,1)
8	(B,N,2)

成员列表被忽略时，派生集成员由父集成员所有的组合构成，这样的派生集成为**稠密集**。如果限制派生集的成员，使它成为父集成员所有组合构成的集合的一个子集，这样的派生集成为**稀疏集**。同原始集一样，派生集成员的声明也可以放在数据部分。一个派生集的成员列表有两种方式生成：①显式罗列；②设置成员资格过滤器。当采用方式①时，必须显式罗列出所有要包含在派生集中的成员，并且罗列的每个成员必须属于稠密集。使用前面的例子，显式罗列派生集的成员：

```
allowed(product,machine,week)/A M 1,A N 2,B N 1/;
```

如果需要生成一个大的、稀疏的集，那么显式罗列就很讨厌。幸运地是许多稀疏集的成员都满足一些条件以和非成员相区分。我们可以把这些逻辑条件看作过滤器，在 LINGO 生成派生集的成员时把使逻辑条件为假的成员从稠密集中过滤掉。

例 3.4

```
sets:
  !学生集：性别属性 sex，1 表示男性，0 表示女性；年龄属性 age.  ;
  students/John,Jill,Rose,Mike/:sex,age;
  !男学生和女学生的联系集：友好程度属性 friend，[0，1]之间的数。 ;
  linkmf(students,students)|sex(&1) #eq# 1 #and# sex(&2) #eq# 0:
friend;
  !男学生和女学生的友好程度大于 0.5 的集;
  linkmf2(linkmf) | friend(&1,&2) #gt# 0.5 : x;
endsets
data:
  sex,age = 1 16
            0 14
            0 17
            0 13;
  friend = 0.3 0.5 0.6;
enddata
```

用竖线（|）来标记一个成员资格过滤器的开始。#eq#是逻辑运算符，用来判断是否“相等”，可参考§4。 &1 可看作派生集的第 1 个原始父集的索引，它取遍该原始父集的所有成员；&2 可看作派生集的第 2 个原始父集的索引，它取遍该原始父集的所有成员；&3，&4，……，以此类推。注意如果派生集 B 的父集是另外的派生集 A，那么上面所说的原始父集是集 A 向前回溯到最终的原始集，其顺序保持不变，并且派生集 A 的过滤器对派生集 B 仍然有效。因此，派生集的索引个数是最终原始父集的个数，索引的取值是从原始父集到当前派生集所作限制的总和。

总的来说，LINGO 可识别的集只有两种类型：原始集和派生集。

在一个模型中，原始集是基本的对象，不能再被拆分成更小的组分。原始集可以由显式罗列和隐式罗列两种方式来定义。当用显式罗列方式时，需在集成员列表中逐个输入每个成员。当用隐式罗列方式时，只需在集成员列表中输入首成员和末成员，而中间的成员由 LINGO 产生。

另一方面，派生集是由其它的集来创建。这些集被称为该派生集的父集（原始集或其它的派生集）。一个派生集既可以是稀疏的，也可以是稠密的。稠密集包含了父集成员的所有组合（有时也称为父集的笛卡尔乘积）。稀疏集仅包含了父集的笛卡尔乘积的一个子集，可通过显式罗列和成员资格过滤器这两种方式来定义。显式罗列方法就是逐个罗列稀疏集的成员。成员资格过滤器方法通过使用稀疏集成员必须满足的逻辑条件从稠密集成员中过滤出稀疏集的成员。

§4　模型的数据部分和初始部分

在处理模型的数据时，需要为集指派一些成员并且在 LINGO 求解模型之前为集的某些属性指定值。为此，LINGO 为用户提供了两个可选部分：输入集成员和数据的**数据部分**（Data Section）和为决策变量设置初始值的**初始部分**（Init Section）。

4.1 模型的数据部分

4.1.1 数据部分入门

数据部分以关键字“data:”开始，以关键字“enddata”结束。在这里，可以指定集成员、集的属性。其语法如下：

object_list = value_list;

对象列（object_list）包含要指定值的属性名、要设置集成员的集名，用逗号或空格隔开。一个对象列中至多有一个集名，而属性名可以有任意多。如果对象列中有多个属性名，那么它们的类型必须一致。如果对象列中有一个集名，那么对象列中所有的属性的类型就是这个集。

数值列（value_list）包含要分配给对象列中的对象的值，用逗号或空格隔开。注意属性值的个数必须等于集成员的个数。看下面的例子。

例 4.1

```
sets:
  set1/A,B,C/: X,Y;
endsets
data:
  X=1,2,3;
  Y=4,5,6;
enddata
```

在集 set1 中定义了两个属性 X 和 Y。X 的三个值是 1、2 和 3，Y 的三个值是 4、5 和 6。也可采用如下例子中的复合**数据声明**（data statement）实现同样的功能。

例 4.2

```
sets:
  set1/A,B,C/: X,Y;
endsets
data:
  X,Y=1 4
      2 5
      3 6;
enddata
```

看到这个例子，可能会认为 X 被指定了 1、4 和 2 三个值，因为它们是数值列中前

三个，而正确的答案是 1、2 和 3。假设对象列有 n 个对象，LINGO 在为对象指定值时，首先在 n 个对象的第 1 个索引处依次分配数值列中的前 n 个对象，然后在 n 个对象的第 2 个索引处依次分配数值列中紧接着的 n 个对象，……，以此类推。

模型的所有数据——属性值和集成员——被单独放在数据部分，这可能是最规范的数据输入方式。

4.1.2 参数

在数据部分也可以指定一些**标量变量**（scalar variables）。当一个标量变量在数据部分确定时，称之为**参数**。看一例，假设模型中用利率 8.5%作为一个参数，就可以象下面一样输入一个利率作为参数。

例 4.3

```
data:
  interest_rate = .085;
enddata
```

也可以同时指定多个参数。

例 4.4

```
data:
  interest_rate,inflation_rate = .085 .03;
enddata
```

4.1.3 实时数据处理

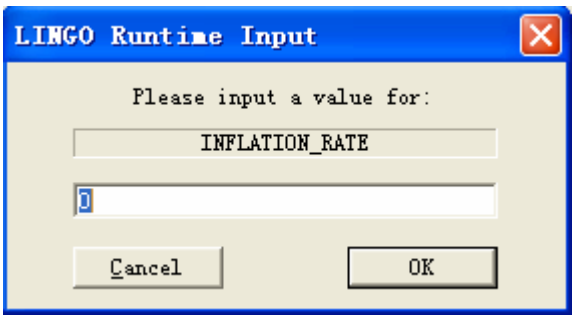
在某些情况，对于模型中的某些数据并不是定值。譬如模型中有一个通货膨胀率的参数，我们想在 2%至 6%范围内，对不同的值求解模型，来观察模型的结果对通货膨胀的依赖有多么敏感。我们把这种情况称为**实时数据处理**（what if analysis）。LINGO 有一个特征可方便地做到这件事。

在本该放数的地方输入一个问号（?）。

例 4.5

```
data:
  interest_rate,inflation_rate = .085  ?;
enddata
```

每一次求解模型时，LINGO 都会提示为参数 inflation_rate 输入一个值。在 WINDOWS 操作系统下，将会接收到一个类似下面的对话框：



直接输入一个值再点击 OK 按钮，LINGO 就会把输入的值指定给 inflation_rate，然后继续求解模型。

除了参数之外，也可以实时输入集的属性值，但不允许实时输入集成员名。

4.1.4 指定属性为一个值

可以在数据声明的右边输入一个值来把所有的成员的该属性指定为一个值。看下面的例子。

例 4.6

```
sets:
  days /MO,TU,WE,TH,FR,SA,SU/:needs;
endsets
data:
  needs = 20;
enddata
```

LINGO 将用 20 指定 days 集的所有成员的 needs 属性。对于多个属性的情形，见下例。

例 4.7

```
sets:
  days /MO,TU,WE,TH,FR,SA,SU/:needs,cost;
endsets
data:
  needs cost = 20 100;
enddata
```

4.1.5 数据部分的未知数值

有时只想为一个集的部分成员的某个属性指定值，而让其余成员的该属性保持未知，以便让 LINGO 去求出它们的最优值。在数据声明中输入两个相连的逗号表示该位置对应的集成员的属性值未知。两个逗号间可以有空格。

例 4.8

```
sets:
  years/1..5/: capacity;
endsets
data:
  capacity = ,34,20,,;
enddata
```

属性 capacity 的第 2 个和第 3 个值分别为 34 和 20，其余的未知。

4.2 模型的初始部分

初始部分是 LINGO 提供的另一个可选部分。在初始部分中，可以输入**初始声明**（initialization statement），和数据部分中的数据声明相同。对实际问题的建模时，初始部分并不起到描述模型的作用，在初始部分输入的值仅被 LINGO 求解器当作初始点来用，并且仅仅对非线性模型有用。和数据部分指定变量的值不同，LINGO 求解器可以自由改变初始部分初始化的变量的值。

一个初始部分以“init:”开始，以“endinit”结束。初始部分的初始声明规则和数据部分的数据声明规则相同。也就是说，我们可以在声明的左边同时初始化多个集属性，可以把集属性初始化为一个值，可以用问号实现实时数据处理，还可以用逗号指定未知数值。

例 4.9

```
init:
  X, Y = 0, .1;
endinit
Y=@log(X);
X^2+Y^2<=1;
```

好的初始点会减少模型的求解时间。

§5 LINGO 函数

有了前几节的基础知识，再加上本节的内容，你就能够借助于 LINGO 建立并求解复

杂的优化模型了。

LINGO 有 9 种类型的函数：

1. 基本运算符：包括算术运算符、逻辑运算符和关系运算符
2. 数学函数：三角函数和常规的数学函数
3. 金融函数：LINGO 提供的两种金融函数
4. 概率函数：LINGO 提供了大量概率相关的函数
5. 变量界定函数：这类函数用来定义变量的取值范围
6. 集操作函数：这类函数为对集的操作提供帮助
7. 集循环函数：遍历集的元素，执行一定的操作的函数
8. 数据输入输出函数：这类函数允许模型和外部数据源相联系，进行数据的输入输出
9. 辅助函数：各种杂类函数

5.1 基本运算符

这些运算符是非常基本的，甚至可以不认为它们是一类函数。事实上，在 LINGO 中它们是非常重要的。

5.1.1 算术运算符

算术运算符是针对数值进行操作的。LINGO 提供了 5 种二元运算符：

^ 乘方
* 乘
/ 除
+ 加
- 减

LINGO 唯一的一元算术运算符是取反函数“ - ”。

这些运算符的优先级由高到底为：

高 - （取反）
^
* /
低 + -

运算符的运算次序为从左到右按优先级高低来执行。运算的次序可以用圆括号“()”来改变。

例 5.1 算术运算符示例。

2 - 5 / 3，(2 + 4) / 5 等等。

5.1.2 逻辑运算符

在 LINGO 中，逻辑运算符主要用于集循环函数的条件表达式中，来控制在函数中哪些集成员被包含，哪些被排斥。在创建稀疏集时用在成员资格过滤器中。

LINGO 具有 9 种逻辑运算符：

#not# 否定该操作数的逻辑值，＃not＃是一个一元运算符
#eq# 若两个运算数相等，则为 true；否则为 flase
#ne# 若两个运算符不相等，则为 true；否则为 flase
#gt# 若左边的运算符严格大于右边的运算符，则为 true；否则为 flase
#ge# 若左边的运算符大于或等于右边的运算符，则为 true；否则为 flase
#lt# 若左边的运算符严格小于右边的运算符，则为 true；否则为 flase
#le# 若左边的运算符小于或等于右边的运算符，则为 true；否则为 flase
#and# 仅当两个参数都为 true 时，结果为 true；否则为 flase

#or#　　仅当两个参数都为 false 时，结果为 false；否则为 true

这些运算符的优先级由高到低为：

高　#not#

　　#eq#　#ne#　#gt#　#ge#　#lt#　#le#

低　#and#　#or#

例 5.2 逻辑运算符示例

2 #gt# 3 #and# 4 #gt# 2，其结果为假（0）。

5.1.3 关系运算符

在 LINGO 中，关系运算符主要是被用在模型中，来指定一个表达式的左边是否等于、小于等于、或者大于等于右边，形成模型的一个约束条件。关系运算符与逻辑运算符#eq#、#le#、#ge#截然不同，前者是模型中该关系运算符所指定关系的为真描述，而后者仅仅判断一个该关系是否被满足：满足为真，不满足为假。

LINGO 有三种关系运算符：“=”、“<=”和“>=”。LINGO 中还能用“<”表示小于等于关系，“>”表示大于等于关系。LINGO 并不支持严格小于和严格大于关系运算符。然而，如果需要严格小于和严格大于关系，比如让 A 严格小于 B：

$$A<B,$$

那么可以把它变成如下的小于等于表达式：

$$A+\varepsilon<=B,$$

这里 ε 是一个小的正数，它的值依赖于模型中 A 小于 B 多少才算不等。

下面给出以上三类操作符的优先级：

高　#not#　　-（取反）

　　^

　　*　/

　　+ -

　　#eq#　#ne#　#gt#　#ge#　#lt#　#le#

　　#and#　#or#

低　<=　=　>=

5.2 数学函数

LINGO 提供了大量的标准数学函数：

@abs(x)：返回 x 的绝对值。

@sin(x)：返回 x 的正弦值，x 采用弧度制。

@cos(x)：返回 x 的余弦值。

@tan(x)	返回 x 的正切值
@exp(x)	返回常数 e 的 x 次方
@log(x)	返回 x 的自然对数
@lgm(x)	返回 x 的 gamma 函数的自然对数
@mod(x)	
@sign(x)	如果 x<0 返回-1；否则，返回 1
@floor(x)	返回 x 的整数部分。当 x>=0 时，返回不超过 x 的最大整数；当 x<0 时，返回不低于 x 的最大整数。
@smax(x1,x2,…,xn)	返回 x1，x2，…，xn 中的最大值
@smin(x1,x2,…,xn)	返回 x1，x2，…，xn 中的最小值

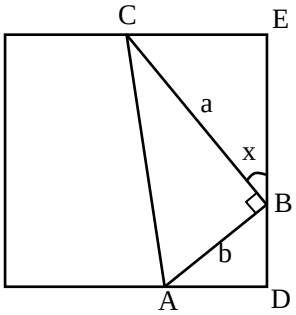
例 5.3 给定一个直角三角形，求包含该三角形的最小正方形。

解：如图所示。

$$CE = a\sin x, \quad AD = b\cos x, \quad DE = a\cos x + b\sin x,$$

求最小的正方形就相当于求如下的最优化问题：

$$\min_{0\le x\le\frac{\pi}{2}} \max\{CE, AD, DE\}$$



LINGO 代码如下：

```
model:
sets:
  object/1..3/: f;
endsets
data:
  a, b = 3, 4; !两个直角边长，修改很方便;
enddata
  f(1) = a * @sin(x);
  f(2) = b * @cos(x);
  f(3) = a * @cos(x) + b * @sin(x);
  min = @smax(f(1),f(2),f(3));
  @bnd(0,x,1.57);
end
```

在上面的代码中用到了函数@bnd，详情请见 4.5 节。

5.3 金融函数

目前 LINGO 提供了两个金融函数。

1．@fpa(I,n)

返回如下情形的净现值：单位时段利率为 I，连续 n 个时段支付，每个时段支付单位费用。若每个时段支付 x 单位的费用，则净现值可用 x 乘以@fpa(I,n)算得。@fpa 的计算公式为

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+I)^k} = \frac{1-(1+I)^{-n}}{I}$$

。

净现值就是在一定时期内为了获得一定收益在该时期初所支付的实际费用。

例 5.4 贷款买房问题 贷款金额 50000 元，贷款年利率 5.31%，采取分期付款方式（每年年末还固定金额，直至还清）。问拟贷款 10 年，每年需偿还多少元？

LINGO 代码如下：

```
50000 = x * @fpa(.0531,10);
```

答案是 x=6573.069 元。

2．@fpl(I,n)

返回如下情形的净现值：单位时段利率为 I，第 n 个时段支付单位费用。@fpl(I,n)的计算公式为

$$(1+I)^{-n}$$

。

细心的读者可以发现这两个函数间的关系：

$$@\text{fpa}(I,n) = \sum_{k=1}^{n} @\text{fpl}(I,k)$$

。

5.4 概率函数

1．@pbn(p,n,x)

二项分布的累积分布函数。当 n 和（或）x 不是整数时，用线性插值法进行计算。

2．@pcx(n,x)

自由度为 n 的 x^2 分布的累积分布函数。

3．@peb(a,x)

当到达负荷为 a，服务系统有 x 个服务器且允许无穷排队时的 Erlang 繁忙概率。

4．@pel(a,x)

当到达负荷为 a，服务系统有 x 个服务器且不允许排队时的 Erlang 繁忙概率。

5．@pfd(n,d,x)

自由度为 n 和 d 的 F 分布的累积分布函数。

6．@pfs(a,x,c)

当负荷上限为 a，顾客数为 c，平行服务器数量为 x 时，有限源的 Poisson 服务系统的等待或返修顾客数的期望值。a 是顾客数乘以平均服务时间，再除以平均返修时间。当 c 和（或）x 不是整数时，采用线性插值进行计算。

7．@phg(pop,g,n,x)

超几何（Hypergeometric）分布的累积分布函数。pop 表示产品总数，g 是正品数。从所有产品中任意取出 n（n≤pop）件。pop，g，n 和 x 都可以是非整数，这时采用线性插值进行计算。

8．@ppl(a,x)

Poisson 分布的线性损失函数，即返回 max(0,z-x)的期望值，其中随机变量 z 服从均值为 a 的 Poisson 分布。

9．@pps(a,x)

均值为 a 的 Poisson 分布的累积分布函数。当 x 不是整数时，采用线性插值进行计算。

10．@psl(x)

单位正态线性损失函数，即返回 max(0,z-x)的期望值，其中随机变量 z 服从标准正态分布。

11．@psn(x)

标准正态分布的累积分布函数。

12．@ptd(n,x)

自由度为 n 的 t 分布的累积分布函数。

13．@qrand(seed)

产生服从(0,1)区间的拟随机数。@qrand 只允许在模型的数据部分使用，它将用拟随机数填满集属性。通常，声明一个 m×n 的二维表，m 表示运行实验的次数，n 表示每次实验所需的随机数的个数。在行内，随机数是独立分布的；在行间，随机数是非常均匀的。这些随机数是用“分层取样”的方法产生的。

例 5.5

```
model:
data:
  M=4; N=2; seed=1234567;
enddata
sets:
  rows/1..M/;
  cols/1..N/;
  table(rows,cols): x;
endsets
data:
  X=@qrand(seed);
enddata
```

```
end
```

如果没有为函数指定种子，那么 LINGO 将用系统时间构造种子。

14. @rand(seed)

返回 0 和 1 间的伪随机数，依赖于指定的种子。典型用法是 U(I+1)=@rand(U(I))。注意如果 seed 不变，那么产生的随机数也不变。

例 5.6 利用@rand 产生 15 个标准正态分布的随机数和自由度为 2 的 t 分布的随机数。

```
model:
!产生一列正态分布和 t 分布的随机数;
sets:
  series/1..15/: u, znorm, zt;
endsets

  !第一个均匀分布随机数是任意的;
  u( 1) = @rand( .1234);

  !产生其余的均匀分布的随机数;
  @for(series( I)| I #GT# 1:
    u( I) = @rand( u( I - 1))
  );

  @for( series( I):
    !正态分布随机数;
    @psn( znorm( I)) = u( I);
    !和自由度为 2 的 t 分布随机数;
    @ptd( 2, zt( I)) = u( I);
    !ZNORM 和 ZT 可以是负数;
    @free( znorm( I)); @free( zt( I));
  );
end
```

5.5 变量界定函数

变量界定函数实现对变量取值范围的附加限制，共 4 种：

@bin(x)	限制 x 为 0 或 1
@bnd(L,x,U)	限制 L≤x≤U
@free(x)	取消对变量 x 的默认下界为 0 的限制，即 x 可以取任意实数
@gin(x)	限制 x 为整数

在默认情况下，LINGO 规定变量是非负的，也就是说下界为 0，上界为+∞。@free 取消了默认的下界为 0 的限制，使变量也可以取负值。@bnd 用于设定一个变量的上下界,它也可以取消默认下界为 0 的约束。

5.6 集操作函数

LINGO 提供了几个函数帮助处理集。

1. @in(set_name,primitive_index_1 [,primitive_index_2,…])

如果元素在指定集中，返回 1；否则返回 0。

例 5.7 全集为 I，B 是 I 的一个子集，C 是 B 的补集。

```
sets:
  I/x1..x4/;
```

```
  B(I)/x2/;
  C(I)|#not#@in(B,&1):;
endsets
```

2. @index([set_name,] primitive_set_element)

该函数返回在集 set_name 中原始集成员 primitive_set_element 的索引。如果 set_name 被忽略，那么 LINGO 将返回与 primitive_set_element 匹配的第一个原始集成员的索引。如果找不到，则产生一个错误。

例 5.8 如何确定集成员(B,Y)属于派生集 S3。

```
sets:
  S1/A B C/;
  S2/X Y Z/;
  S3(S1,S2)/A X, A Z, B Y, C X/;
endsets
    X=@in(S3,@index(S1,B),@index(S2,Y));
```

看下面的例子，表明有时为@index 指定集是必要的。

例 5.9

```
sets:
  girls/debble,sue,alice/;
  boys/bob,joe,sue,fred/;
endsets
I1=@index(sue);
I2=@index(boys,sue);
```

I1 的值是 2，I2 的值是 3。我们建议在使用@index 函数时最好指定集。

3. @wrap(index,limit)

该函数返回 j=index-k*limit，其中 k 是一个整数，取适当值保证 j 落在区间[1，limit]内。该函数在循环、多阶段计划编制中特别有用。

4. @size(set_name)

该函数返回集 set_name 的成员个数。在模型中明确给出集大小时最好使用该函数。它的使用使模型更加数据中立，集大小改变时也更易维护。

5.7 集循环函数

集循环函数遍历整个集进行操作。其语法为

```
@function(setname[(set_index_list)[|conditional_qualifier]]:
          expression_list);
```

@function 相应于下面罗列的四个集循环函数之一；setname 是要遍历的集；set_index_list 是集索引列表；conditional_qualifier 是用来限制集循环函数的范围，当集循环函数遍历集的每个成员时，LINGO 都要对 conditional_qualifier 进行评价，若结果为真，则对该成员执行@function 操作，否则跳过，继续执行下一次循环。expression_list 是被应用到每个集成员的表达式列表，当用的是@for 函数时，expression_list 可以包含多个表达式，其间用逗号隔开。这些表达式将被作为约束加到模型中。当使用其余的三个集循环函数时，expression_list 只能有一个表达式。如果省略 set_index_list，那么在 expression_list 中引用的所有属性的类型都是 setname 集。

1. @for

该函数用来产生对集成员的约束。基于建模语言的标量需要显式输入每个约束，不过@for 函数允许只输入一个约束，然后 LINGO 自动产生每个集成员的约束。

例 5.10 产生序列{1,4,9,16,25}

```
model:
sets:
  number/1..5/:x;
endsets
  @for(number(I): x(I)=I^2);
end
```

2. @sum

该函数返回遍历指定的集成员的一个表达式的和。

例 5.11 求向量[5，1，3，4，6，10]前 5 个数的和。

```
model:
data:
  N=6;
enddata
sets:
  number/1..N/:x;
endsets
data:
  x = 5 1 3 4 6 10;
enddata
  s=@sum(number(I) | I #le# 5: x);
end
```

3. @min 和@max

返回指定的集成员的一个表达式的最小值或最大值。

例 5.12 求向量[5，1，3，4，6，10]前 5 个数的最小值，后 3 个数的最大值。

```
model:
data:
  N=6;
enddata
sets:
  number/1..N/:x;
endsets
data:
  x = 5 1 3 4 6 10;
enddata
  minv=@min(number(I) | I #le# 5: x);
  maxv=@max(number(I) | I #ge# N-2: x);
end
```

下面看一个稍微复杂一点儿的例子。

例 5.13 职员时序安排模型 一项工作一周 7 天都需要有人（比如护士工作），每天（周一至周日）所需的最少职员数为 20、16、13、16、19、14 和 12，并要求每个职员一周连续工作 5 天，试求每周所需最少职员数，并给出安排。注意这里我们考虑稳定后的情况。

```
model:
sets:
  days/mon..sun/: required,start;
endsets
data:
  !每天所需的最少职员数;
  required = 20 16 13 16 19 14 12;
enddata
!最小化每周所需职员数;
```

```
  min=@sum(days: start);
  @for(days(J):@sum(days(I) | I #le# 5:
     start(@wrap(J+I-5,7))) >= required(J));
end
```

计算的部分结果为

```
Global optimal solution found at iteration:           0
  Objective value:                                22.00000
                      Variable         Value        Reduced Cost
                REQUIRED( MON)       20.00000           0.000000
                REQUIRED( TUE)       16.00000           0.000000
                REQUIRED( WED)       13.00000           0.000000
                REQUIRED( THU)       16.00000           0.000000
                REQUIRED( FRI)       19.00000           0.000000
                REQUIRED( SAT)       14.00000           0.000000
                REQUIRED( SUN)       12.00000           0.000000
                   START( MON)       8.000000           0.000000
                   START( TUE)       2.000000           0.000000
                   START( WED)       0.000000          0.3333333
                   START( THU)       6.000000           0.000000
                   START( FRI)       3.000000           0.000000
                   START( SAT)       3.000000           0.000000
                   START( SUN)       0.000000           0.000000
```

从而解决方案是：每周最少需要 22 个职员，周一安排 8 人，周二安排 2 人，周三无需安排人，周四安排 6 人，周五和周六都安排 3 人，周日无需安排人。

5.8 输入和输出函数

输入和输出函数可以把模型和外部数据比如文本文件、数据库和电子表格等连接起来。

1. @file 函数

该函数用从外部文件中输入数据，可以放在模型中任何地方。该函数的语法格式为 @file(' filename')。这里 filename 是文件名，可以采用相对路径和绝对路径两种表示方式。@file 函数对同一文件的两种表示方式的处理和对两个不同的文件处理是一样的，这一点必须注意。

例 5.14 以例 2.2 来讲解@file 函数的用法。

注意到在例 2.2 的编码中有两处涉及到数据。第一个地方是集部分的 6 个 warehouses 集成员和 8 个 vendors 集成员;第二个地方是数据部分的 capacity,demand 和 cost 数据。

为了使数据和我们的模型完全分开，我们把它们移到外部的文本文件中。修改模型代码以便于用@file 函数把数据从文本文件中拖到模型中来。修改后（修改处代码黑体加粗）的模型代码如下：

```
model:
!6 发点 8 收点运输问题;
sets:
  warehouses/ @file('1_2.txt') /: capacity;
  vendors/ @file('1_2.txt') /: demand;
  links(warehouses,vendors): cost, volume;
endsets
!目标函数;
  min=@sum(links: cost*volume);
```

```
!需求约束;
  @for(vendors(J):
    @sum(warehouses(I): volume(I,J))=demand(J));
!产量约束;
  @for(warehouses(I):
    @sum(vendors(J): volume(I,J))<=capacity(I));

!这里是数据;
data:
  capacity = @file('1_2.txt') ;
  demand = @file('1_2.txt') ;
  cost = @file('1_2.txt') ;
enddata
end
```

模型的所有数据来自于 1_2.txt 文件。其内容如下：

```
!warehouses 成员;
WH1 WH2 WH3 WH4 WH5 WH6 ~

!vendors 成员;
V1 V2 V3 V4 V5 V6 V7 V8 ~

!产量;
60 55 51 43 41 52 ~

!销量;
35 37 22 32 41 32 43 38 ~

!单位运输费用矩阵;
6 2 6 7 4 2 5 9
4 9 5 3 8 5 8 2
5 2 1 9 7 4 3 3
7 6 7 3 9 2 7 1
2 3 9 5 7 2 6 5
5 5 2 2 8 1 4 3
```

把记录结束标记（~）之间的数据文件部分称为**记录**。如果数据文件中没有记录结束标记，那么整个文件被看作单个记录。注意到除了记录结束标记外，模型的文本和数据同它们直接放在模型里是一样的。

我们来看一下在数据文件中的记录结束标记连同模型中@file 函数调用是如何工作的。当在模型中第一次调用@file 函数时，LINGO 打开数据文件，然后读取第一个记录；第二次调用@file 函数时，LINGO 读取第二个记录等等。文件的最后一条记录可以没有记录结束标记，当遇到文件结束标记时，LINGO 会读取最后一条记录，然后关闭文件。如果最后一条记录没有记录结束标记，那么直到 LINGO 求解完当前模型后才关闭该文件。如果多个文件保持打开状态，可能就会导致一些问题，因为这会使同时打开的文件总数超过允许同时打开文件的上限 16。

当使用@file 函数时，可把记录的内容（除了一些记录结束标记外）看作是替代模型中@file(' filename')位置的文本。这也就是说，一条记录可以是声明的一部分，

整个声明，或一系列声明。在数据文件中注释被忽略。注意在 LINGO 中不允许嵌套调用 @file 函数。

2. @text 函数

该函数被用在数据部分用来把解输出至文本文件中。它可以输出集成员和集属性值。其语法为

@text([' filename'])

这里 filename 是文件名，可以采用相对路径和绝对路径两种表示方式。如果忽略 filename，那么数据就被输出到标准输出设备（大多数情形都是屏幕）。@text 函数仅能出现在模型数据部分的一条语句的左边，右边是集名（用来输出该集的所有成员名）或集属性名（用来输出该集属性的值）。

我们把用接口函数产生输出的数据声明称为**输出操作**。输出操作仅当求解器求解完模型后才执行，执行次序取决于其在模型中出现的先后。

例 5.15 借用例 5.12，说明@text 的用法。

```
model:
sets:
  days/mon..sun/: required,start;
endsets
data:
  !每天所需的最少职员数;
  required = 20 16 13 16 19 14 12;
  @text('d:\out.txt')=days '至少需要的职员数为' start;
enddata
!最小化每周所需职员数;
  min=@sum(days: start);
  @for(days(J):
    @sum(days(I) | I #le# 5:
      start(@wrap(J+I+2,7))) >= required(J));
end
```

3. @ole 函数

@OLE 是从 EXCEL 中引入或输出数据的接口函数，它是基于传输的 OLE 技术。OLE 传输直接在内存中传输数据，并不借助于中间文件。当使用@OLE 时，LINGO 先装载 EXCEL，再通知 EXCEL 装载指定的电子数据表，最后从电子数据表中获得 Ranges。为了使用 OLE 函数，必须有 EXCEL5 及其以上版本。OLE 函数可在数据部分和初始部分引入数据。

@OLE 可以同时读集成员和集属性，集成员最好用文本格式，集属性最好用数值格式。原始集每个集成员需要一个单元(cell)，而对于 n 元的派生集每个集成员需要 n 个单元，这里第一行的 n 个单元对应派生集的第一个集成员，第二行的 n 个单元对应派生集的第二个集成员，依此类推。

@OLE 只能读一维或二维的 Ranges（在单个的 EXCEL 工作表(sheet)中），但不能读间断的或三维的 Ranges。Ranges 是自左而右、自上而下来读。

例 5.16

```
sets:
   PRODUCT;  !产品;
   MACHINE;  !机器;
   WEEK;     !周;
   ALLOWED(PRODUCT,MACHINE,WEEK):x,y;   !允许组合及属性;
endsets
data:
   rate=0.01;
```

```
   PRODUCT,MACHINE,WEEK,ALLOWED,x,y=@OLE('D:\IMPORT.XLS');
   @OLE('D:\IMPORT.XLS')=rate;
enddata
```

代替在代码文本的数据部分显式输入形式，我们把相关数据全部放在如下电子数据表中来输入。下面是 D:\IMPORT.XLS 的图表。

除了输入数据之外，我们也必须定义 Ranges 名：PRODUCT，MACHINE，WEEK，ALLOWED，x，y. 明确的，我们需要定义如下的 Ranges 名：

Name	Range
PRODUCT	B3:B4
MACHINE	C3:C4
WEEK	D3:D5
ALLOWED	B8:D10
X	F8:F10
Y	G8:G10
rate	C13

为了在 EXCEL 中定义 Ranges 名：

① 按鼠标左键拖曳选择 Range，

② 释放鼠标按钮，

③ 选择“插入|名称|定义”，

④ 输入希望的名字，

⑤ 点击“确定”按钮。

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		产品	机器	周				
3		A	M	1				
4		B	N	2				
5				3				
6						集ALLOWED的属性x和y的值		
7	允许的组合（ALLOWED集成员）					x	y	
8		A	M	1		1	22	
9		A	N	2		2	10	
10		B	N	1		0	14	
11								
12	输出结果							
13		RATE	0.01					

我们在模型的数据部分用如下代码从 EXECL 中引入数据：

```
PRODUCT,MACHINE,WEEK,ALLOWED,x,y=@OLE('D:\IMPORT.XLS');
@OLE('D:\IMPORT.XLS')=rate;
```

等价的描述为

```
PRODUCT,MACHINE,WEEK,ALLOWED,x,y
    =@OLE('D:\IMPORT.XLS', PRODUCT,MACHINE,WEEK,ALLOWED,x,y);
@OLE('D:\IMPORT.XLS',rate)=rate;
```

这一等价描述使得变量名和 Ranges 不同亦可。

4. @ranged(variable_or_row_name)

为了保持最优基不变，变量的费用系数或约束行的右端项允许减少的量。

5. @rangeu(variable_or_row_name)

为了保持最优基不变，变量的费用系数或约束行的右端项允许增加的量。

6. @status()

返回 LINGO 求解模型结束后的状态：

0　Global Optimum（全局最优）

1　Infeasible（不可行）

2　Unbounded（无界）

3　Undetermined（不确定）

4　Feasible（可行）

5　Infeasible or Unbounded（通常需要关闭“预处理”选项后重新求解模型，以确定模型究竟是不可行还是无界）

6　Local Optimum（局部最优）

7　Locally Infeasible（局部不可行，尽管可行解可能存在，但是 LINGO 并没有找到一个）

8　Cutoff（目标函数的截断值被达到）

9　Numeric Error（求解器因在某约束中遇到无定义的算术运算而停止）

通常，如果返回值不是 0、4 或 6 时，那么解将不可信，几乎不能用。该函数仅被用在模型的数据部分来输出数据。

例 5.17

```
model:
min=@sin(x);
data:
  @text()=@status();
enddata
end
```

部分计算结果为：

```
  Local optimal solution found at iteration:           33
  Objective value:                              -1.000000

                       6

                     Variable           Value        Reduced Cost
                            X        4.712388            0.000000
```

结果中的 6 就是@status()返回的结果，表明最终解是局部最优的。

7. @dual

@dual(variable_or_row_name)返回变量的判别数（检验数）或约束行的对偶（影子）价格（dual prices）。

5.9 辅助函数

1. @if(logical_condition,true_result,false_result)

@if 函数将评价一个逻辑表达式 logical_condition，如果为真，返回 true_result，否则返回 false_result。

例 5.18 求解最优化问题

$$\min\ f(x)+g(y)$$

$$\text{s.t.}\quad f(x)=\begin{cases}100+2x, & x>0\\ 2x, & x\le 0\end{cases}$$

$$g(y)=\begin{cases}60+3y, & y>0\\ 2y, & y\le 0\end{cases}$$

$$x+y\ge 30$$

$$x,y\ge 0$$

其 LINGO 代码如下：

```
model:
  min=fx+fy;
  fx=@if(x #gt# 0, 100,0)+2*x;
  fy=@if(y #gt# 0,60,-y)+3*y;
  x+y>=30;
end
```

2. @warn(' text' ,logical_condition)

如果逻辑条件 logical_condition 为真，则产生一个内容为' text' 的信息框。

例 5.19 示例。

```
model:
  x=1;
  @warn('x 是正数',x #gt# 0);
end
```

§6 LINGO 的命令行命令

以下将按类型列出在 LINGO 命令行窗口中使用的命令，每条命令后都附有简要的描述说明。

在平台中，从的窗口菜单中选用“Command Window”命令或直接按 Ctrl+1 可以打开 LINGO 的命令行窗口，便可以在命令提示符“:”后输入以下命令。

如果需要以下命令的详细描述说明，可以查阅 LINGO 的帮助。

1. LINGO 信息

Cat	显示所有命令类型
Com	按类型显示所用 LINGO 命令
Help	显示所需命令的简要帮助信息
Mem	显示内存变量的信息

2. 输入(Input)

model	以命令行方式输入一个模型
take	执行一个文件的命令正本或从磁盘中读取某个模型文件

3. 显示(Display)

look	显示当前模型的内容
genl	产生 LINGO 兼容的模型
gen	生成并显示整个模型
hide	为模型设置密码保护
pause	暂停屏幕输出直至再次使用此命令

4. 文件输出(File Ouput)

div	将模型结果输出到文件
svrt	将模型结果输出到屏幕
save	将当前模型保存到文件
smps	将当前模型保存为 MPS 文件

5. 求解模型(Solution)

go　　求解当前模型
solu　　显示当前模型的求解结果

6. 编辑模型(Problem Editing)

del　　从当前模型中删除指定的某一行或某两行之间(包括这两行)的所有行
ext　　在当前模型中添加几行
alt　　用新字符串替换掉某一行中、或某两行之间的所有行中的旧字符串

7. 退出系统(Quit)

quit　　退出 LINGO 系统

8. 系统参数(System Parameters)

page　　以“行”为单位设置每页长度
ter　　以简略方式输出结果
ver　　以详细方式输出结果
wid　　以“字符”为单位设置显示和输出宽度
set　　重新设置默认参数
freeze　保存当前参数设置，以备下一次重新启动 LINGO 系统时还是这样的设置
time　　显示本次系统的运行时间

这里详细说明 SET 指令。凡是用户能够控制的 LINGO 系统参数，SET 命令都能够对它进行设置。SET 命令的使用格式为：

SET parameter_name | parameter_index [parameter_value],

其中 parameter_name 是参数名，parameter_index 是参数索引（编号），parameter_value 是参数值。当不写出参数值时，则 SET 命令的功能是显示该参数当前的值。此外，“setdefault”命令用于将所有参数恢复为系统的默认值（缺省值）。这些设置如果不用“freeze”命令保存到配置文件 lingo.cnf 中,则退出 LINGO 系统后这些设置就无效了。

索引	参数名	缺省值	简要说明
1	ILFTOL	0.3e-5	初始线性可行误差限
2	FLFTOL	0.1e-6	最终线性可行误差限
3	INFTOL	0.1e-2	初始非线性可行误差限
4	FNFTOL	0.1e-5	最终非线性可行误差限
5	RELINT	0.8e-5	相对整性误差限
6	NOPTOL	0.2e-6	非线性规划（NLP）的最优性误差限
7	ITRSLW	5	缓慢改进的迭代次数的上限
8	DERCMP	0	导数 (0:数值导数, 1:解析导数)
9	ITRLTM	0	迭代次数上限 (0:无限制)
10	TIMLIM	0	求解时间的上限（秒） (0:无限制)
11	OBJCTS	1	是否采用目标割平面法 (1:是, 0:否)
12	MXMEMB	32	模型生成器的内存上限（兆字节）(对某些机器，可能无意义)
13	CUTAPP	2	割平面法的应用范围(0:根节点, 1:所有节点, 2:LINGO 自动决定)
14	ABSINT	.000001	整性绝对误差限
15	HEURIS	3	整数规划（IP）启发式求解次数 (0:无, 可设定为 0~100)

16	HURDLE	none	整数规划（IP）的“篱笆”值(none:无，可设定为任意实数值)
17	IPTOLA	.8e-7	整数规划（IP）的绝对最优性误差限
18	IPTOLR	.5e-7	整数规划（IP）的相对最优性误差限
19	TIM2RL	100	采用 IPTOLR 作为判断标准之前，程序必须求解的时间（秒）
20	NODESL	0	分枝节点的选择策略（0： LINGO 自动选择；1：深度优先；2: 最坏界的节点优先；3: 最好界的节点优先）
21	LENPAG	0	终端的页长限制 (0:没有限制；可设定任意非负整数)
22	LINLEN	76	终端的行宽限制(0:没有限制；可设定为 64-200)
23	TERSEO	0	输出级别 (0:详细型，1:简洁型)
24	STAWIN	1	是否显示状态窗口 (1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
25	SPLASH	1	弹出版本和版权信息 (1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
26	OROUTE	0	将输出定向到命令窗口 (1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
27	WNLINE	800	命令窗口的最大显示行数(Windows 系统才能使用)
28	WNTRIM	400	每次从命令窗口滚动删除的最小行数 (Windows 系统才能使用)
29	STABAR	1	显示状态栏(1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
30	FILFMT	1	文件格式(0:lng 格式，1:lg4 格式，Windows 系统才能使用)
31	TOOLBR	1	显示工具栏(1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
32	CHKDUP	0	检查数据与模型中变量是否重名 (1:是，0:否)
33	ECHOIN	0	脚本命令反馈到命令窗口(1:是，0:否)
34	ERRDLG	1	错误信息以对话框显示 (1:是，0:否，Windows 系统才能使用)
35	USEPNM	0	允许无限制地使用基本集合的成员名(1:是，0:否)
36	NSTEEP	0	在非线性求解程序中使用最陡边策略选择变量(1:是，0:否)
37	NCRASH	0	在非线性求解程序中使用启发式方法生成初始解(1:是，0:否)
38	NSLPDR	1	在非线性求解程序中用 SLP 法寻找搜索方向 (1:是，0:否)
39	SELCON	0	在非线性求解程序中有选择地检查约束(1:是，0:否)
40	PRBLVL	0	对混合整数线性规划（MILP）模型，采用探测（Probing）技术的级别(0:LINGO 自动决定；1:无；2-7：探测级别逐步升高)
41	SOLVEL	0	线性求解程序(0: LINGO 自动选择，1: 原始单纯形法，2: 对偶单纯形法，3: 障碍法 (即内点法))
42	REDUCE	2	模型降维(2:LINGO 决定，1:是，0:否)

43	SCALEM	1	变换模型中的数据的尺度（1:是，0:否）
44	PRIMPR	0	原始单纯形法决定出基变量的策略(0：LINGO 自动决定，1：对部分出基变量尝试，2：用最陡边法对所有变量进行尝试)
45	DUALPR	0	对偶单纯形法决定出基变量的策略(0：LINGO 自动决定，1:按最大下降比例法确定，2：用最陡边法对所有变量进行尝试)
46	DUALCO	1	指定对偶计算的级别（0：不计算任何对偶信息；1：计算对偶价格；2：计算对偶价格并分析敏感性）
47	RCMPSN	0	Use RC format names for MPS I/O (1:yes, 0:no)
48	MREGEN	1	重新生成模型的频率（0：当模型的文本修改后;1：当模型的文本修改或模型含有外部引用时；3:每当有需要时）
49	BRANDR	0	分枝时对变量取整的优先方向(0：LINGO 自动决定;1:向上取整优先;2：向下取整优先）
50	BRANPR	0	分枝时变量的优先级（0:LINGO 自动决定，1:二进制（0-1）变量）
51	CUTOFF	.1e-8	解的截断误差限
52	STRONG	10	指定强分枝的层次级别
53	REOPTB	0	IP 热启动时的 LP 算法（0：LINGO 自动选择；1：障碍法（即内点法）；2：原始单纯形法；3：对偶单纯形法）
54	REOPTX	0	IP 冷启动时的 LP 算法（选项同上）
55	MAXCTP	200	分枝中根节点增加割平面时，最大迭代检查的次数
56	RCTLIM	.75	割(平面)的个数相对于原问题的约束个数的上限(比值）
57	GUBCTS	1	是否使用广义上界（GUB）割（1:是，0:否）
58	FLWCTS	1	是否使用流（Flow）割（1:是，0:否）
59	LFTCTS	1	是否使用 Lift 割（1:是，0:否）
60	PLOCTS	1	是否使用选址问题的割（1:是，0:否）
61	DISCTS	1	是否使用分解割（1:是，0:否）
62	KNPCTS	1	是否使用背包覆盖割（1:是，0:否）
63	LATCTS	1	是否使用格（Lattice）割（1:是，0:否）
64	GOMCTS	1	是否使用 Gomory 割(1:是，0:否）
65	COFCTS	1	是否使用系数归约割（1:是，0:否）
66	GCDCTS	1	是否使用最大公因子割（1:是，0:否）
67	SCLRLM	1000	语法配色的最大行数（仅 Windows 系统使用）
68	SCLRDL	0	语法配色的延时（秒）（仅 Windows 系统使用）
69	PRNCLR	1	括号匹配配色（1:是，0:否，仅 Windows 系统使用）
70	MULTIS	0	NLP 多点求解的次数（0:无，可设为任意非负整数）
71	USEQPR	0	是否识别二次规划（1:是，0:否）
72	GLOBAL	0	是否对 NLP 采用全局最优求解程序（1:是，0:否）
73	LNRISE	0	线性化级别（0:LINGO 自动决定，1:无，2:低，3:高）

74	LNBIGM	100,000	线性化的大 M 系数
75	LNDLTA	.1e-5	线性化的 Delta 误差系数
76	BASCTS	0	是否使用基本（Basis） 割 (1:是, 0:否)
77	MAXCTR	2	分枝中非根节点增加割平面时，最大迭代检查的次数
78	HUMNTM	0	分枝中每个节点使用启发式搜索的最小时间（秒）
79	DECOMP	0	是否使用矩阵分解技术 (1:是, 0:否)
80	GLBOPT	.1e-5	全局最优求解程序的最优性误差限
81	GLBDLT	.1e-6	全局最优求解程序在凸化过程中增加的约束的误差限
82	GLBVBD	.1e+11	全局最优求解程序中变量的上界
83	GLBUBD	2	全局最优求解程序中变量的上界的应用范围(0: 所有变量都不使用上界; 1: 所有变量都使用上界; 2: 部分使用)
84	GLBBRN	5	全局最优求解程序中第 1 次对变量分枝时使用的分枝策略（0：绝对宽度；1：局部宽度；2：全局宽度；3：全局距离；4：绝对冲突；5：相对冲突）
85	GLBBXS	1	全局最优求解程序选择活跃分枝节点的方法（0：深度优先；1：具有最坏界的分枝优先）
86	GLBREF	3	全局最优求解程序中模型重整的级别：（0：不进行重整；1：低；2：中；3：高）

§7 综合举例

例 7.1 求解非线性方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x^2+x+y^2+y=4 \end{cases}$$

其 LINGO 代码如下：

```
model:
INIT:
x=1;y=1;
ENDINIT
  x^2+y^2=2;
  2*x^2+x+y^2+y=4;
end
```

例 7.2 装配线平衡模型 一条装配线含有一系列的工作站，在最终产品的加工过程中每个工作站执行一种或几种特定的任务。装配线周期是指所有工作站完成分配给它们各自的任务所化费时间中的最大值。平衡装配线的目标是为每个工作站分配加工任务，尽可能使每个工作站执行相同数量的任务，其最终标准是装配线周期最短。不适当的平衡装配线将会产生瓶颈——有较少任务的工作站将被迫等待其前面分配了较多任务的工作站。

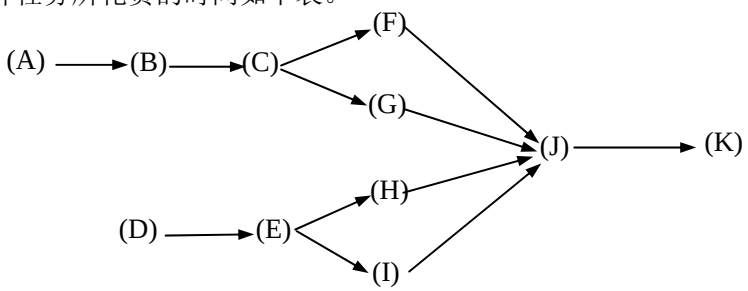
问题会因为众多任务间存在优先关系而变得更复杂，任务的分配必须服从这种优先关系。

这个模型的目标是最小化装配线周期。有 2 类约束：

① 要保证每件任务只能也必须分配至一个工作站来加工；

② 要保证满足任务间的所有优先关系。

例　有 11 件任务（A—K）分配到 4 个工作站（1—4），任务的优先次序如下图。每件任务所花费的时间如下表。



任务	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
时间	45	11	9	50	15	12	12	12	12	8	9

```
MODEL:
  !装配线平衡模型;
SETS:
  !任务集合，有一个完成时间属性 T;
  TASK/ A B C D E F G H I J K/: T;
  !任务之间的优先关系集合（A 必须完成才能开始 B，等等）;
  PRED( TASK, TASK)/ A,B  B,C  C,F  C,G  F,J  G,J
    J,K  D,E  E,H  E,I  H,J  I,J /;
  ! 工作站集合;
  STATION/1..4/;
  TXS( TASK, STATION): X;
  ! X 是派生集合 TXS 的一个属性。如果 X（I，K）＝1，则表示第 I 个任务
    指派给第 K 个工作站完成;
ENDSETS
DATA:
  !任务 A   B  C  D   E   F  G   H  I   J  K 的完成时间估计如下;
  T =  45  11  9  50  15  12  12  12  12  8  9;
ENDDATA
  ! 当任务超过 15 个时，模型的求解将变得很慢;
  !每一个作业必须指派到一个工作站，即满足约束①;
  @FOR( TASK( I): @SUM( STATION( K): X( I, K)) = 1);
  !对于每一个存在优先关系的作业对来说，前者对应的工作站 I 必须小于后
  者对应的工作站 J，即满足约束②;
  @FOR( PRED( I, J): @SUM( STATION( K): X(I, K) - X(J, K)) >= 0);
  !对于每一个工作站来说，其花费时间必须不大于装配线周期;
  @FOR(STATION( K):
  @SUM(TXS(I,K):T(I)*X(I,K))<= CYCTIME);
  !目标函数是最小化转配线周期;
  MIN = CYCTIME;
  !指定 X(I,J) 为 0/1 变量;
```

```
  @FOR( TXS: @BIN( X));
END
```

例 7.3 旅行售货员问题（又称货郎担问题，Traveling Salesman Problem）

有一个推销员，从城市 1 出发，要遍访城市 2，3，…，n 各一次，最后返回城市 1。已知从城市 i 到 j 的旅费为 c_{ij}，问他应按怎样的次序访问这些城市，使得总旅费最少？

可以用多种方法把 TSP 表示成整数规划模型。这里介绍的一种建立模型的方法，是把该问题的每个解（不一定是最优的）看作是一次“巡回”。

在下述意义下，引入一些 0-1 整数变量：

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{巡回路线是从}i\text{到}j\text{,且}i\neq j\\ 0, & \text{其它情况}\end{cases}$$

其目标只是使 $\sum_{i\neq j}c_{ij}x_{ij}$ 为最小。

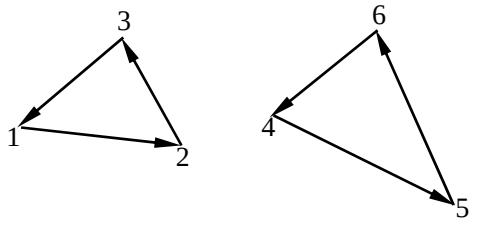
这里有两个明显的必须满足的条件：

访问城市 i 后必须要有一个即将访问的确切城市；访问城市 j 前必须要有一个刚刚访问过的确切城市。用下面的两组约束分别实现上面的两个条件。

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n$$

到此我们得到了一个模型，它是一个指派问题的整数规划模型。但以上两个条件对于 TSP 来说并不充分，仅仅是必要条件。例如：



以上两个条件都满足，但它显然不是 TSP 的解，它存在两个子巡回。

这里，我们将叙述一种在原模型上附加充分的约束条件以避免产生子巡回的方法。把额外变量 $u_i(i=2,3,\cdots,n)$ 附加到问题中。可把这些变量看作是连续的（最然这些变量在最优解中取普通的整数值）。现在附加下面形式的约束条件

$$u_i-u_j+nx_{ij}\leq n-1,\quad 2\leq i\neq j\leq n。$$

为了证明该约束条件有预期的效果，必须证明：（1）任何含子巡回的路线都不满足该约束条件；（2）全部巡回都满足该约束条件。

首先证明（1），用反证法。假设还存在子巡回，也就是说至少有两个子巡回。那么至少存在一个子巡回中不含城市 1。把该子巡回记为 $i_1i_2\cdots i_ki_1$，则必有

$$u_{i_1}-u_{i_2}+n\le n-1$$
$$u_{i_{21}}-u_{i_3}+n\le n-1$$
$$\cdots$$
$$u_{i_k}-u_{i_1}+n\le n-1$$

把这k个式子相加，有

$$n\le n-1\text{，矛盾！}$$

故假设不正确，结论（1）得证。

下面证明（2），采用构造法。对于任意的总巡回$1i_1\cdots i_{n-1}1$，可取

$$u_i=\text{访问城市}i\text{的顺序数，取值范围为}\{0,1,\cdots,n-2\}\text{。}$$

因此，$u_i-u_j\le n-2$，$2\le i\ne j\le n$。下面来证明总巡回满足该约束条件。

（ｉ）总巡回上的边

$$\begin{cases}u_{i_1}-u_{i_2}+n=n-1\le n-1\\ u_{i_2}-u_{i_3}+n=n-1\le n-1\\ \qquad\cdots\\ u_{i_{n-2}}-u_{i_{n-1}}+n=n-1\le n-1\end{cases}$$

（ii）非总巡回上的边

$$\begin{cases}u_{i_r}-u_j\le n-2\le n-1, & r=1,2,\cdots,n-2,\quad j\in\{2,3,\cdots,n\}-\{i_r,i_{r+1}\}\\ u_{i_{n-1}}-u_j\le n-2\le n-1, & j\in\{2,3,\cdots,n\}-\{i_r\}\end{cases}$$

从而结论（2）得证。

这样我们把 TSP 转化成了一个混合整数线性规划问题。

$$\min\ z=\sum_{i\ne j}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\quad i=1,2,\cdots,n$$
$$\sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1,\quad j=1,2,\cdots,n$$
$$u_i-u_j+nx_{ij}\le n-1,\quad 2\le i\ne j\le n$$
$$x_{ij}=0,1,\quad i,j=1,2,\cdots,n$$
$$u_i\ge 0,\quad i=2,3,\cdots,n$$

显然，当城市个数较大（大于 30）时，该混合整数线性规划问题的规模会很大，从而给求解带来很大问题。TSP 已被证明是 NP 难问题，目前还没有发现多项式时间的算法。对于小规模问题，我们求解这个混合整数线性规划问题的方式还是有效的。

TSP 是一个重要的组合优化问题，除了有直观的应用外，许多其它看似无联系的优化问题也可转化为 TSP。例如：

问题 1 现需在一台机器上加工n个零件（如烧瓷器），这些零件可按任意先后顺序

在机器上加工。我们希望加工完成所有零件的总时间尽可能少。由于加工工艺的要求，加工零件 j 时机器必须处于相应状态 s_j（如炉温）。设起始未加工任何零件时机器处于状态 s_0，且当所有零件加工完成后需恢复到 s_0 状态。已知从状态 s_i 调整到状态 $s_j(j \neq i)$ 需要时间 c_{ij}。零件 j 本身加工时间为 p_j。为方便起见，引入一个虚零件 0，其加工时间为 0，要求状态为 s_0，则 $\{0,1,2,\cdots,n\}$ 的一个圈置换 π 就表示对所有零件的一个加工顺序，在此置换下，完成所有加工所需要的总时间为

$$\sum_{i=0}^{n}(c_{i\pi(i)}+p_{\pi(i)})=\sum_{i=0}^{n}c_{i\pi(i)}+\sum_{j=0}^{n}p_j$$

由于 $\sum_{j=0}^{n}p_j$ 是一个常数，故该零件的加工顺序问题变成 TSP。

```
!旅行售货员问题;
model:
sets:
  city / 1.. 5/: u;
  link( city, city):
      dist,  ! 距离矩阵;
        x;
endsets
   n = @size( city);
data:   !距离矩阵，它并不需要是对称的;
  dist = @qrand(1);  !随机产生，这里可改为你要解决的问题的数据;
enddata
  !目标函数;
  min = @sum( link: dist * x);

  @FOR( city( K):
    !进入城市 K;
    @sum( city( I)| I #ne# K: x( I, K)) = 1;
    !离开城市 K;
    @sum( city( J)| J #ne# K: x( K, J)) = 1;
  );
  !保证不出现子圈;
  @for(city(I)|I #gt# 1:
    @for( city( J)| J#gt#1 #and# I #ne# J:
      u(I)-u(J)+n*x(I,J)<=n-1);
  );
  !限制 u 的范围以加速模型的求解，保证所加限制并不排除掉 TSP 问题的最优解;
  @for(city(I) | I #gt# 1: u(I)<=n-2 );
  !定义 X 为 0\1 变量;
  @for( link: @bin( x));
end
```

例 7.4 最短路问题 给定 N 个点 $p_i(i=1,2,\cdots,N)$ 组成集合 $\{p_i\}$，由集合中任一

点 p_i 到另一点 p_j 的距离用 c_{ij} 表示，如果 p_i 到 p_j 没有弧联结，则规定 $c_{ij}=+\infty$，又规定 $c_{ii}=0(1\le i\le N)$，指定一个终点 p_N，要求从 p_i 点出发到 p_N 的最短路线。这里我们用动态规划方法来做。用所在的点 p_i 表示状态，决策集合就是除 p_i 以外的点，选定一个点 p_j 以后，得到效益 c_{ij} 并转入新状态 p_j，当状态是 p_N 时，过程停止。显然这是一个不定期多阶段决策过程。

定义 $f(i)$ 是由 p_i 点出发至终点 p_N 的最短路程，由最优化原理可得

$$\begin{cases} f(i)=\min\limits_j\{c_{ij}+f(j)\}, & i=1,2,\cdots,N-1 \\ f(N)=0 \end{cases}$$

这是一个函数方程，用 LINGO 可以方便的解决。

```
!最短路问题;
model:
data:
  n=10;
enddata
sets:
  cities/1..n/: F;  !10 个城市;
  roads(cities,cities)/
    1,2  1,3  2,4  2,5  2,6  3,4  3,5  3,6
    4,7  4,8  5,7  5,8  5,9  6,8  6,9 7,10
    8,10  9,10
  /: D, P;
endsets
data:
  D=
    6  5  3  6  9 7  5  11  9  1   8  7  5
    4  10 5 7  9;
enddata
  F(n)=0;
  @for(cities(i) | i #lt# n:
    F(i)=@min(roads(i,j): D(i,j)+F(j));
  );
  !显然，如果 P(i,j)=1,则点 i 到点 n 的最短路径的第一步是 i --> j，否则就不是。
   由此，我们就可方便的确定出最短路径;
  @for(roads(i,j):
    P(i,j)=@if(F(i) #eq# D(i,j)+F(j),1,0)
  );
end
```

例 7.5 露天矿生产的车辆安排（CMCM2003B）

钢铁工业是国家工业的基础之一，铁矿是钢铁工业的主要原料基地。许多现代化铁矿是露天开采的，它的生产主要是由电动铲车（以下简称电铲）装车、电动轮自卸卡车（以下简称卡车）运输来完成。提高这些大型设备的利用率是增加露天矿经济效益的首要任务。

露天矿里有若干个爆破生成的石料堆，每堆称为一个铲位，每个铲位已预先根据铁含量将石料分成矿石和岩石。一般来说，平均铁含量不低于 25%的为矿石，否则为岩石。

每个铲位的矿石、岩石数量，以及矿石的平均铁含量（称为品位）都是已知的。每个铲位至多能安置一台电铲，电铲的平均装车时间为 5 分钟。

卸货地点（以下简称卸点）有卸矿石的矿石漏、2 个铁路倒装场（以下简称倒装场）和卸岩石的岩石漏、岩场等，每个卸点都有各自的产量要求。从保护国家资源的角度及矿山的经济效益考虑，应该尽量把矿石按矿石卸点需要的铁含量（假设要求都为 29.5%±1%，称为品位限制）搭配起来送到卸点，搭配的量在一个班次（8 小时）内满足品位限制即可。从长远看，卸点可以移动，但一个班次内不变。卡车的平均卸车时间为 3 分钟。

所用卡车载重量为 154 吨，平均时速 $28\,km/h$。卡车的耗油量很大，每个班次每台车消耗近 1 吨柴油。发动机点火时需要消耗相当多的电瓶能量，故一个班次中只在开始工作时点火一次。卡车在等待时所耗费的能量也是相当可观的，原则上在安排时不应发生卡车等待的情况。电铲和卸点都不能同时为两辆及两辆以上卡车服务。卡车每次都是满载运输。

每个铲位到每个卸点的道路都是专用的宽 $60\,m$ 的双向车道，不会出现堵车现象，每段道路的里程都是已知的。

一个班次的生产计划应该包含以下内容：出动几台电铲，分别在哪些铲位上；出动几辆卡车，分别在哪些路线上各运输多少次（因为随机因素影响，装卸时间与运输时间都不精确，所以排时计划无效，只求出各条路线上的卡车数及安排即可）。一个合格的计划要在卡车不等待条件下满足产量和质量（品位）要求，而一个好的计划还应该考虑下面两条原则之一：

1.总运量（吨公里）最小，同时出动最少的卡车，从而运输成本最小；

2.利用现有车辆运输，获得最大的产量（岩石产量优先；在产量相同的情况下，取总运量最小的解）。

请你就两条原则分别建立数学模型，并给出一个班次生产计划的快速算法。针对下面的实例，给出具体的生产计划、相应的总运量及岩石和矿石产量。

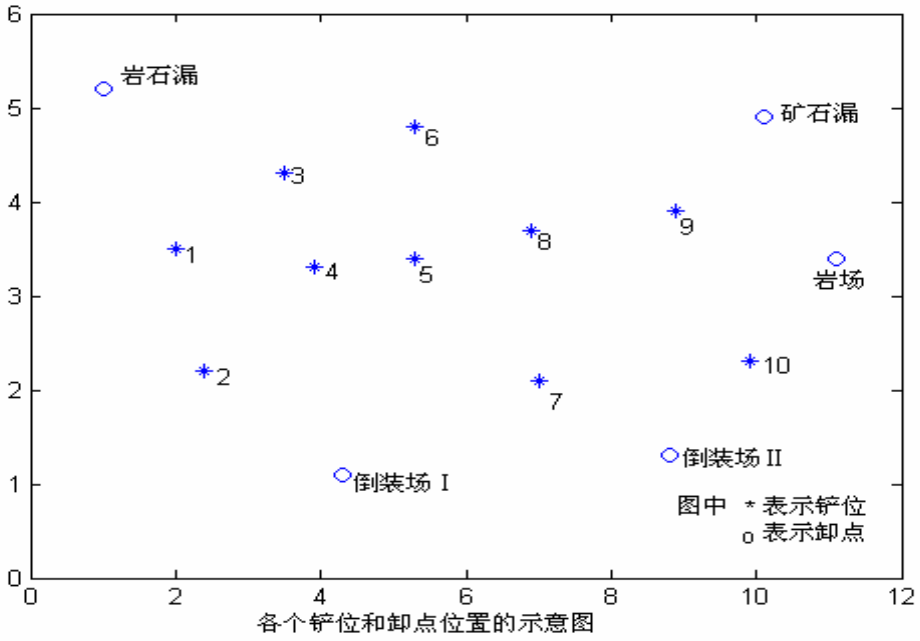
某露天矿有铲位 10 个，卸点 5 个，现有铲车 7 台，卡车 20 辆。各卸点一个班次的产量要求：矿石漏 1.2 万吨、倒装场Ⅰ1.3 万吨、倒装场Ⅱ1.3 万吨、岩石漏 1.9 万吨、岩场 1.3 万吨。

铲位和卸点位置二维示意图如下，各铲位和各卸点之间的距离（公里）如下表：

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石漏	5.26	5.19	4.21	4.00	2.95	2.74	2.46	1.90	0.64	1.27
倒装场Ⅰ	1.90	0.99	1.90	1.13	1.27	2.25	1.48	2.04	3.09	3.51
岩场	5.89	5.61	5.61	4.56	3.51	3.65	2.46	2.46	1.06	0.57
岩石漏	0.64	1.76	1.27	1.83	2.74	2.60	4.21	3.72	5.05	6.10
倒装场Ⅱ	4.42	3.86	3.72	3.16	2.25	2.81	0.78	1.62	1.27	0.50

各铲位矿石、岩石数量(万吨)和矿石的平均铁含量如下表：

	铲位 1	铲位 2	铲位 3	铲位 4	铲位 5	铲位 6	铲位 7	铲位 8	铲位 9	铲位 10
矿石量	0. 95	1. 05	1. 00	1. 05	1. 10	1. 25	1. 05	1. 30	1. 35	1. 25
岩石量	1. 25	1. 10	1. 35	1. 05	1. 15	1. 35	1. 05	1. 15	1. 35	1. 25
铁含量	30%	28%	29%	32%	31%	33%	32%	31%	33%	31%



各种符号及单位说明如下：

x_{ij}：从 i 号铲位到 j 号卸点的石料运量，单位：车·次；

c_{ij}：从 i 号铲位到 j 号卸点的距离，单位：公里；

T_{ij}：在 i 号铲位到 j 号卸点路线上运行一个周期平均所需时间，单位：分；

A_{ij}：从 i 号铲位到 j 号卸点最多能同时运行的卡车数，单位：辆；

B_{ij}：从 i 号铲位到 j 号卸点，一辆车一个班次中最多可以运行次数，单位：次；

p_i：i 号铲位的矿石铁含量乘以 100，

$P=(p_1,\cdots,p_{10})=(30,28,29,32,31,33,32,31,33,31)$；

q_i：j 号卸点任务需求，

$Q=(q_1,\cdots,q_5)=(1.2,1.3,1.3,1.9,1.3)\times 1000/154$，单位：车·次；

ck_i：i 号铲位的铁矿石储量，单位：万吨；

cy_i：i 号铲位的岩石储量，单位：万吨；

f_i：描述第 i 号铲位是否使用的 $0-1$ 变量，$f_i=\begin{cases}1, & \text{使用第}i\text{号铲位}\\ 0, & \text{不使用第}i\text{号铲位}\end{cases}$。

模型之一：

$$\min \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{5} 154c_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad x_{ij}\le A_{ij}\cdot B_{ij},\ i=1,\cdots,10,\ j=1,\cdots,5$$

$$\sum_{j=1}^{5} x_{ij} \le 96 f_i \text{，} \quad i = 1,\cdots,10$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \le 160 \text{，} \quad j = 1,\cdots,5$$

$$\left.\begin{array}{l} x_{i1} + x_{i2} + x_{i5} \le ck_i \times 10000/154 \\ x_{i3} + x_{i4} \le cy_i \times 10000/154 \end{array}\right\} \text{，} \quad i = 1,\cdots,10$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_{ij} \ge q_j \text{，} \quad j = 1,\cdots,5$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{10} x_{ij} \times (p_i - 30.5) \le 0 \\ \sum_{i=1}^{10} x_{ij} (p_i - 28.5) \ge 0 \end{array}\right\} \text{，} \quad j = 1,2,5$$

$$\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=1}^{5} \frac{x_{ij}}{B_{ij}} \le 20$$

$$\sum_{i=1}^{10} f_i \le 7$$

x_{ij} 为整数，$i = 1,\cdots,10$，$j = 1,\cdots,5$

f_i 为 $0-1$ 变量，$i = 1,\cdots,10$

```
model:
title CUMCM-2003B;
sets:
cai / 1..10 /:p,cy,ck,f;
xie / 1 .. 5 /:q;
link(cai,xie):a,b,c,t,x;
endsets
data:
v=28;
p=30 28 29 32 31 33 32 31 33 31;
q= 1.2 1.3 1.3 1.9 1.3 ;
c=5.2600   1.9000   5.8900   0.6400   4.4200
   5.1900   0.9900   5.6100   1.7600   3.8600
   4.2100   1.9000   5.6100   1.2700   3.7200
   4.0000   1.1300   4.5600   1.8300   3.1600
   2.9500   1.2700   3.5100   2.7400   2.2500
   2.7400   2.2500   3.6500   2.6000   2.8100
   2.4600   1.4800   2.4600   4.2100   0.7800
   1.9000   2.0400   2.4600   3.7200   1.6200
   0.6400   3.0900   1.0600   5.0500   1.2700
   1.2700   3.5100   0.5700   6.1000   0.5000;
cy = 1.25 1.10 1.35 1.05 1.15 1.35 1.05 1.15 1.35 1.25;
ck = 0.95 1.05 1.00 1.05 1.10 1.25 1.05 1.30 1.35 1.25;
enddata
```

```
@for(link:t=120*c/v+8;a=@floor(t/5);b=@floor((485-5*a)/t));
!目标函数;
min=@sum( link:x*154*c);
@for (link: x<=a*b);
!电铲能力约束;
@for (cai(i): @sum(xie(j):x(i,j))<=f(i)*96);
!卸点能力约束;
@for (xie(j):@sum(cai(i):x(i,j))<=160);
!铲位产量约束;
@for (cai(i): x(i,1)+x(i,2)+x(i,5)<=ck(i)*10000/154);
@for (cai(i): x(i,3)+x(i,4)<=cy(i)*10000/154);
!产量任务约束;
@for (xie(j) : @sum(cai(i):x(i,j)) >= q(j)*10000/154);
!铁含量约束;
@sum(cai(i): x(i,1)*(p(i)-30.5) )<=0;
@sum(cai(i): x(i,2)*(p(i)-30.5) )<=0;
@sum(cai(i): x(i,5)*(p(i)-30.5) )<=0;
@sum(cai(i): x(i,1)*(p(i)-28.5) )>=0;
@sum(cai(i): x(i,2)*(p(i)-28.5) )>=0;
@sum(cai(i): x(i,5)*(p(i)-28.5) )>=0;
!车辆能力约束;
@sum(link:x/b)<=20;
!电铲数量约束;
@sum(cai: f)<=7;
!整数约束;
@for(link : @gin(x));
@for(cai: @bin(f));
end
```

例 7.6 分配问题（指派问题，Assignment Problem）

这是个给 n 个人分配 n 项工作以获得某个最高总效果的问题。第 i 个人完成第 j 项工作需要平均时间 c_{ij}。要求给每个人分配一项工作，并要求分配完这些工作，以使完成全部任务的总时间为最小。该问题可表示如下：

$$\min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\quad j = 1,2,\cdots,n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\quad i = 1,2,\cdots,n$$

$$x_{ij} = 0,1,\quad i = 1,2,\cdots,n,\quad j = 1,2,\cdots,n$$

显然，此问题可看作是运输问题的特殊情况。可将此问题看作具有 n 个源和 n 个汇的问题，每个源有 1 单位的可获量，而每个汇有 1 单位的需要量。从表面看，这问题要求用整数规划以保证 x_{ij} 能取 0 或 1。然而，幸运的是，此问题是运输问题的特例，因此即使不限制 x_{ij} 取 0 或 1，最优解也将取 0 或 1。如果把婚姻看作分配问题，丹茨证明，整数性质证明一夫一妻会带来最美满幸福的生活！显然，分配问题可以作为线性规划问题

来求解，尽管模型可能很大。例如，给 100 人分配 100 项工作将使所得的模型具有 10000 个变量。这时，如采用专门算法效果会更好。时间复杂度为 $O(n^3)$ 的匈牙利算法便是好选择，这是由 Kuhu（1955）提出的。

```
model:
  !7 个工人，7 个工作的分配问题;
sets:
  workers/w1..w7/;
  jobs/j1..j7/;
  links(workers,jobs): cost,volume;
endsets
  !目标函数;
  min=@sum(links: cost*volume);
  !每个工人只能有一份工作;
  @for(workers(I):
    @sum(jobs(J): volume(I,J))=1;
  );
  !每份工作只能有一个工人;
  @for(jobs(J):
    @sum(workers(I): volume(I,J))=1;
  );
data:
  cost= 6  2  6  7  4  2  5
        4  9  5  3  8  5  8
        5  2  1  9  7  4  3
        7  6  7  3  9  2  7
        2  3  9  5  7  2  6
        5  5  2  2  8  11 4
        9  2  3  12 4  5  10;
enddata
end
```

附录四　判别分析

在生产、科学研究和日常生活中，经常会遇到对某一研究对象属于哪种情况作出判断。例如要根据这两天天气情况判断明天是否会下雨；医生要根据病人的体温、白血球数目及其它症状判断此病人是否会患某种疾病等等。

从概率论的角度看，可把判别问题归结为如下模型。设共有 n 个总体：

$$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$$

其中 ξ_i 是 m 维随机变量，其分布函数为

$$F_i(x_1,\cdots,x_m)，\ i=1,2,\cdots,n$$

而 $(x_1,\cdots,x_m)$ 是表征总体特性的 m 个随机变量的取值。在判别分析中称这 m 个变量为判别因子。现有一个新的样本点 $x=(x_1,\cdots,x_m)^T$，要判断此样本点属于哪一个总体。

Matlab 的统计工具箱提供了判别函数 classify。

函数的调用格式为：

[CLASS,ERR] = CLASSIFY(SAMPLE,TRAINING,GROUP, TYPE)

其中 SAMPLE 为未知待分类的样本矩阵，TRAINING 为已知分类的样本矩阵，它们有相同的列数 m，设待分类的样本点的个数，即 SAMPLE 的行数为 s，已知样本点的个数，即 TRAINING 的行数为 t，则 GROUP 为 t 维列向量，若 TRAINING 的第 i 行属于总体 ξ_i，则

GROUP 对应位置的元素可以记为 i，TYPE 为分类方法，缺省值为'linear'，即线性分类，TYPE 还可取值'quadratic'，'mahalanobis'（mahalanobis 距离）。返回值 CLASS 为 s 维列向量，给出了 SAMPLE 中样本的分类，ERR 给出了分类误判率的估计值。

例　已知 8 个乳房肿瘤病灶组织的样本，其中前 3 个为良性肿瘤，后 5 个为恶性肿瘤。数据为细胞核显微图像的 10 个量化特征：细胞核直径，质地，周长，面积，光滑度。根据已知样本对未知的三个样本进行分类。已知样本的数据为：

13. 54, 14. 36, 87. 46, 566. 3, 0. 09779
13. 08, 15. 71, 85. 63, 520, 0. 1075
9. 504, 12. 44, 60. 34, 273. 9, 0. 1024
17. 99, 10. 38, 122. 8, 1001, 0. 1184
20. 57, 17. 77, 132. 9, 1326, 0. 08474
19. 69, 21. 25, 130, 1203, 0. 1096
11. 42, 20. 38, 77. 58, 386. 1, 0. 1425
20. 29, 14. 34, 135. 1, 1297, 0. 1003

待分类的数据为：

16.6, 28.08, 108.3, 858.1, 0.08455

20.6, 29.33, 140.1, 1265, 0.1178

7.76, 24.54, 47.92, 181, 0.05263

解：编写程序如下：

```
a=[13.54,14.36,87.46,566.3,0.09779
13.08,15.71,85.63,520,0.1075
9.504,12.44,60.34,273.9,0.1024
17.99,10.38,122.8,1001,0.1184
20.57,17.77,132.9,1326,0.08474
19.69,21.25,130,1203,0.1096
11.42,20.38,77.58,386.1,0.1425
20.29,14.34,135.1,1297,0.1003]
x=[16.6,28.08,108.3,858.1,0.08455
20.6,29.33,140.1,1265,0.1178
7.76,24.54,47.92,181,0.05263]
g=[ones(3,1);2*ones(5,1)];
[class,err]=classify(x,a,g)
```

参考文献

1. 《运筹学》教材编写组，运筹学（修订版），北京：清华大学出版社，1990。
2. 萧树铁主编，数学实验，北京：高等教育出版社，1999。
3. 杨启帆，方道元，数学建模，杭州：浙江大学出版社，1999。
4. 叶其孝主编，大学生数学建模竞赛辅导教材（一），长沙：湖南教育出版社，1993。
5. 叶其孝主编，大学生数学建模竞赛辅导教材（二），长沙：湖南教育出版社，1997。
6. 叶其孝主编，大学生数学建模竞赛辅导教材（三），长沙：湖南教育出版社，1998。
7. 姜启源，数学模型（第二版），北京：高等教育出版社，1993。
8. 赵静，但琦主编，数学建模与数学实验，北京：高等教育出版社；施普林格（Springer）出版社，2000。
9. 王沫然，MATLAB 5.X 与科学计算，北京：清华大学出版社，2000。
10. 李涛，贺勇军，刘志俭等编著，Matlab 工具箱应用指南—应用数学篇，北京：电子工业出版社，2000。
11. 胡运权主编，运筹学习题集（第三版），北京：清华大学出版社，2003。
12. 雷功炎，数学模型讲义，北京：北京大学出版社，1999。
13. 谢金星，刑文训，网络优化，北京：清华大学出版社，2000。
14. 《现代应用数学手册》编委会，现代应用数学手册—运筹学与最优化理论卷，北京：清华大学出版社，1998。
15. 白其峥主编，数学建模案例分析，北京：海洋出版社，2000。
16. 李火林等主编，数学模型及方法，江西：江西高校出版社，1997。
17. 陈理荣主编，数学建模导论，北京：北京邮电大学出版社，1999。
18. 丁丽娟，数值计算方法，北京：北京理工大学出版社，1997。
19. 李哲岩，张永曙，变分法及其应用，西安：西北工业大学出版社，1989。
20. 盛骤，谢式千，潘承毅，概率论与数理统计（第二版），北京：高等教育出版社，1989。
21. 飞思科技产品研发中心编著，MATLAB6.5 辅助优化计算与设计，北京：电子工业出版社，2003。
22. 谢云荪，张志让主编，数学实验，北京：科学出版社，2000。
23. 蔡锁章主编，数学建模原理与方法，北京：海洋出版社，2000。
24. 陈桂明，戚红雨，潘伟编著，Matlab 数理统计（6.X），北京：科学出版社，2002。
25. 陆君安，尚涛，谢进，谷平编著，偏微分方程的 Matlab 解法，武汉：武汉大学出版社，2001。
26. 边肇祺，张学工等编著，模式识别（第二版），北京：清华大学出版社，2001。
27. 吴翊，吴梦达，成礼智编著，数学建模的理论与实践，长沙：国防科技大学出版社，1999。
28. 王振龙主编，时间序列分析，北京：中国统计出版社，2000。
29. 唐焕文，贺明峰编，数学模型引论（第二版），北京：高等教育出版社，2002。
30. 范金城，梅长林编著，数据分析，北京：科学出版社，2002。
31. 张宜华编写，精通 MATLAB5，北京：清华大学出版社，2000。
32. 黎锁平，张秀媛，杨海波，人工蚁群算法理论及其在经典 TSP 问题中的实现，交通运输系统工程与信息，Vol. 2, No. 1, (2002)，54～57。
33. 谢金星，薛毅编著，优化建模与 LINDO/LINGO 软件，北京：清华大学出版社，2005。

34. 韩中庚编著，数学建模方法及其应用，北京：高等教育出版社，2005。
35. 王志良，田景环，邱林，城市供水绩效的数据包络分析，水利学报，第 36 卷，第 12 期，（2005），1486～1491。
36. 杨文鹏，贺兴时，杨选良编著，新编运筹学教程－模型、解法及计算机实现，西安：陕西科学技术出版社，2005。
37. 沈继红，施久玉，高振滨，张晓威编著，数学建模，哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2002。
38. 杨虎，刘琼荪，钟波编著，数理统计，北京：高等教育出版社，2004。
39．高惠璇，两个多重相关变量组的统计分析（3），数理统计与管理，第 21 卷，第 2 期，（2003），58～64。
40．王惠文著，偏最小二乘回归方法及其应用，北京：国防工业出版社，2000。
41．宁宣熙，刘思峰编著，管理预测与决策方法，北京：科学出版社，2003。
42．刘思峰，党耀国，方志耕等著，灰色系统理论及其应用，北京：科学出版社，2005。
43．王福建，李铁强，俞传正，道路交通事故灰色 Verhulst 预测模型，交通运输工程学报，第 6 卷，第 1 期，（2003），122～126。
44．谭永基，蔡志杰，俞文刺编著，数学模型，上海：复旦大学出版社，2004。