灰色系统理论及其应用

刘思峰

序

刘思峰和郭天榜同志撰写的《灰色系统理论及其应用》一书是一本立足于实际，着眼于开拓，既阐述理论，又兼顾应用的综合性著作，具有广泛的参考价值．本书将“河南省工业系统技术改造研究”、“河南省粮食生产决策支持系统”以及为“科技兴豫”所进行的决策支持研究等成果融汇贯通、升华发展，在运用灰色系统的理论、方法、观点、概念支持决策、咨询实际等方面均具特色．书中有关序列算子等数学思路与方法，属作者独创．

这样一本有理论、有实际，有研究、有应用，有背景、有升华，有继承、有开拓的著作，将为灰色系统理论的发展与软科学的实用化做出贡献．

华中理工大学教授
灰色系统英文杂志主编
邓聚龙
1990.1.15

前　言

1982年，我国著名学者邓聚龙教授创立了灰色系统理论．这一新的学说很快得到国内外众多学者和实际工作者的关注．短短几年中，它不仅在理论上迅速发展，而且在社会、经济、科技、农业、工业、交通、生态、水利、气象、地学、医学、金融、法律、军事等系统的分析、建模、预测、决策、控制中得到日益广泛和深入的应用，取得了一系列的成果．

自1982年起，我们就开始了对灰色系统理论的学习和研究工作．几年后，我们的研究计划获得河南省教委科学基金资助．在刘思峰和郭天榜同志的组织下，大家一方面对灰色系统理论进行了系统的研究和探讨，同时积极开拓应用领域，许多同志成功地将灰色系统理论应用于各自承担的其它科研项目中．在此期间，刘思峰同志为河南农业大学农业工程系87级至89级研究生及部分教师讲授了灰色系统理论选修课．这本书正是我们这个研究集体数年来从事灰色系统理论研究、应用和教学工作的总结．

在本书写作过程中，我们力求遵循理论系统、思路清晰、方法简便、重在实用的宗旨，注意科学性和可读性．因此，本书适宜于用作经济、管理及理、工、农、医、天、地、生各类专业大学生和研究生教材或自学参考书，亦可供政府部门、科研机构、企业及农村的科技、管理人员参阅．

书中吸收了邓聚龙教授《灰色系统理论》(高级班讲义)和另外几部著作中的理论或应用成果；赵理、李秀丽、赵德英、党耀国、王文亮、贾勇、林文、郑国清、杨万才等同志参与了这个项目的研究和部分内容的讨论、写作工作；李秀丽同志编写了附录

I中的计算机程序；邓聚龙、孙荣光、段铁成、赵理四位教授在百忙中担任主审；本书责任编辑程庆同志从内容到叙述形式向作者提出了许多建设性意见，付出了艰苦细致的劳动，在此一并表示衷心的感谢.

编者谦陋，错误在所难免，恳请读者批评指正.

刘思峰

1989年10月

目　　录

序……（5）
前言……（7）
第一章　灰色系统概言……（1）
§1.1　灰色系统理论的产生与发展动态……（1）
§1.2　灰色系统的概念与基本内容……（2）
第二章　灰数及其运算……（7）
§2.1　灰数……（7）
§2.2　灰数白化与灰度……（9）
§2.3　区间灰数的运算……（14）
第三章　灰方程与灰矩阵……（17）
§3.1　灰代数方程与灰微分方程……（17）
§3.2　灰矩阵及其运算……（18）
§3.3　几种特殊的灰矩阵……（21）
§3.4　灰矩阵的奇异性……（23）
§3.5　灰特征值与灰特征向量……（25）
第四章　灰序列生成……（28）
§4.1　灰序列生成概言……（28）
§4.2　均值生成……（29）
§4.3　序列算子……（31）
§4.4　光滑序列……（35）
§4.5　级比与光滑比……（38）
§4.6　累加生成与累减生成……（40）
§4.7　累加生成的灰指数律……（44）
第五章　灰关联分析……（49）
§5.1　灰关联分析概言……（49）
§5.2　灰关联因素与关联算子集……（51）

§5.3 距离空间……（54）
§5.4 灰关联公理与灰色关联度……（57）
§5.5 灰色绝对关联度……（65）
§5.6 灰色相对关联度……（77）
§5.7 灰色综合关联度……（81）
§5.8 关联序……（83）
§5.9 优势分析……（85）
§5.10 应用实例……（97）
第六章 灰色聚类与灰色统计评估……（111）
§6.1 灰色聚类与灰色统计评估概言……（111）
§6.2 灰关联聚类……（112）
§6.3 指标变权聚类……（116）
§6.4 指标定权聚类……（126）
§6.5 灰色统计……（136）
第七章 灰色系统建模……（144）
§7.1 五步建模思想……（144）
§7.2 灰色微分方程……（147）
§7.3 GM(1,1)模型……（150）
§7.4 残差GM(1,1)模型……（163）
§7.5 GM(1,1)模型群……（169）
§7.6 GM(1,N)和GM(0,N)……（174）
§7.7 GM(2,1)和Verhulst模型……（180）
第八章 灰色预测……（189）
§8.1 灰色预测模型的检验……（189）
§8.2 数列预测……（191）
§8.3 区间预测……（195）
§8.4 灾变预测……（207）
§8.5 季节灾变预测……（211）
§8.6 拓扑预测……（216）
§8.7 系统预测……（222）

第九章　灰色决策 …… （229）
§9.1　灰色决策概言 …… （229）
§9.2　灰靶决策 …… （232）
§9.3　灰关联决策 …… （237）
§9.4　灰色发展决策 …… （247）
§9.5　灰色统计决策 …… （252）
§9.6　灰色聚类决策 …… （258）
§9.7　单目标化局势决策 …… （262）
§9.8　灰色层次决策 …… （268）
第十章　灰色规划 …… （276）
§10.1　灰色规划概言 …… （276）
§10.2　灰色预测型线性规划 …… （277）
§10.3　灰色漂移型线性规划 …… （282）
§10.4　灰色线性规划的准优解 …… （291）
§10.5　灰色0-1规划 …… （296）
§10.6　灰色非线性规划 …… （305）
第十一章　灰色控制 …… （313）
§11.1　灰色控制概言 …… （313）
§11.2　灰色线性控制系统 …… （316）
§11.3　灰色传递函数与典型环节 …… （319）
§11.4　灰色传递函数阵 …… （324）
§11.5　去余控制 …… （325）
§11.6　灰关联控制 …… （327）
§11.7　灰色预测控制 …… （327）
§11.8　应用实例 …… （329）
附录Ⅰ　主要模型算法BASIC程序 …… （336）
附录Ⅱ　拉普拉斯变换 …… （384）
参考文献 …… （389）

第一章　灰色系统概言

§1.1　灰色系统理论的产生与发展动态

随着科学技术的高速发展，在现代社会的经济活动、科研活动以及人们的日常生活中，信息的交流已日趋重要，不可或缺．如何有效地提取、筛选、处理信息，已引起人们的普遍关注和高度重视．灰色系统理论正是应运而生的一门新兴学科．

1982年，北荷兰公司(North-Holland Co.)的《系统与控制通讯》(Systems & Control Letters)杂志上发表了我国学者邓聚龙教授的第一篇灰色系统论文《灰色系统的控制问题》(The Control Problems of Grey Systems)．1982年第3期的《华中工学院学报》上发表了邓聚龙教授的第一篇中文灰色系统论文《灰色控制系统》．这标志着灰色系统理论经过其创始人邓聚龙教授多年卓有成效的努力，开始问世．这一新的理论刚一诞生，就受到国内外学术界和广大实际工作者的极大关注．不少著名学者和专家对该理论给予了充分肯定和支持，许多中青年学者纷纷加入灰色系统理论研究行列，以极大的热情开展理论探索及在不同领域中的应用研究工作．美国、西德、日本、瑞士、苏联等很多国家的学者都对灰色系统这门新兴学科产生了浓厚的兴趣．

1985年，国防工业出版社出版了灰色系统理论的第一部专著《灰色系统(社会·经济)》(邓聚龙著)．1985年，1986年，1987年，1988年，华中理工大学出版社先后出版发行了邓聚龙教授的另外四部专著《灰色控制系统》、《灰色预测与决策》、《灰色系统基本方法》、《多维灰色规划》．1989年，海洋出版社出版了英文

版《灰色系统论文集》. 同年，英文版国际性刊物《灰色系统》杂志(Journal of Grey System)正式创刊. 国内不少出版单位如科学出版社、科学普及出版社、解放军出版社、江苏科技出版社、山东科技出版社等编辑出版了灰色系统著作.

1984年以来，共召开了四次全国灰色系统理论学术讨论会，几百篇灰色系统文章在国际、国内各种学术会议上宣读和交流. 到目前为止，国内外70多家杂志发表了200多篇灰色系统文章，100多个县、市和地区运用灰色系统方法制定科技、社会、经济协调发展总体规划，几十所高等院校开设灰色系统课程，数百名博士、硕士研究生运用灰色系统方法撰写学位论文，不少的灰色系统理论研究课题获得国家或省、市各类科学基金资助.

短短几年中，灰色系统理论已以其强大的生命力自立于科学之林，奠定了其作为一门新的交叉学科的学术地位. 它的蓬勃生机和广阔的发展前景正日益广泛地被社会所认识、所重视.

§1.2 灰色系统的概念与基本内容

社会、经济、农业、工业、生态、生物等许多系统，是根据研究对象所属的领域和范围命名的，而灰色系统却是按照颜色来命名的. 在控制理论中，人们常用颜色的深浅来形容信息的明确程度，如艾什比将内部信息未知的对象称为黑箱(Black Box). 这种理解和称谓已为人们普遍接受. 再如在政治生活中，人民群众希望了解决策及其形成过程的有关信息，就提出要增加“透明度”. 我们用“黑”表示信息未知，用“白”表示信息完全明确，用“灰”表示部分信息明确、部分信息不明确. 相应地，我们将信息完全明确的系统称为白色系统，信息未知的系统称为黑色系统，部分信息明确、部分信息不明确的系统称为灰色系统.

在人们的社会、经济活动或科研活动中，信息不完全的情况

会经常遇到. 如在农业生产中，即使是播种面积、种子、化肥、灌溉等信息完全明确，但由于劳动力技术水平、自然环境、气候条件等信息不明确，仍难以准确地预计出产量、产值. 再如生物防治，虽然对害虫与其天敌之间的关系十分明了，但却往往因对害虫与饵料、天敌与饵料、某一种天敌与别的天敌、某一种害虫与别的害虫之间的关联信息了解不够，而难以收到预期的效果. 价格系统的调整或改革，常常因缺乏民众心理承受能力的信息，以及某种商品价格变动对其它商品价格影响的确切信息而举步维艰. 液压系统由于出现测不准的软量而难以控制. 电工系统因电压、电流等参数的随机波动而难以观测，这是由于缺乏运行信息、参数信息. 一般的社会经济系统，由于其没有明确的"内"、"外"关系，系统本身与系统环境，系统内部与系统外部的边界若明若暗，难以分析输入(投入)对输出(产出)的影响，同一个经济变量，有的研究者把它作为内生变量，而另一些研究者却把它作为外生变量，这是缺乏模型信息，找不到适当的系统模型或观测、控制变量.

综上所述，系统信息不完全的情况有以下四种：

1° 元素(参数)信息不完全；

2° 结构信息不完全；

3° 边界信息不完全；

4° 运行行为信息不完全.

"信息不完全"是"灰"的基本含义. 从不同的场合、不同的角度看，还可以将"灰"的含义加以引伸. (详见下页表)

"信息非完全"原理的运用是"少"与"多"的辩证统一，是"局部"与"整体"的转化，也是灰色系统理论研究问题的根本特征. "非唯一性"原理是灰色系统解决问题所遵循的基本思路，它给予你灵活性的法宝，使你处处取得实效.

人们在认识世界与改造世界的过程中常常自觉或不自觉地通

	黑	灰	白
从信息上看	未知	不完全	完全
从表象上看	暗	若明若暗	明朗
在过程上	新	新旧交替	旧
在性质上	混纯	多种成分	纯
在方法上	否定	扬弃	肯定
在态度上	放纵	宽容	严厉
从结果看	无解	非唯一解	唯一解

过已经掌握的部分信息对事物做整体剖析，通过少量已知信息的筛选、加工、延伸和扩展，深化对系统的认识，再经系统改造，系统重组，提高效率.

“非唯一性”原理，在决策上的体现是灰靶思想. 灰靶是目标非唯一与目标可约束的统一，也是目标可接近、信息可补充、方案可完善、关系可协调、思维可多向、认识可深化、途径可优化的具体体现. “非唯一性”使人们处理问题的态度灵活机动，决策多目标，方法多途径，计划能调整，效果也具有可塑性. 在面对许多可能的解时，能够通过定性分析，补充信息，确定出一个或几个满意解. “非唯一性”的求解途径是定性分析与定量分析相结合的求解途径，也是灰色系统和数学科学中常常采用的有效途径.

灰色概念与模糊概念的主要区别在于研究对象的内涵与外延的性质上. 灰色系统着重外延明确、内涵不明确的对象，模糊数学着重外延不明确、内涵明确的对象. 比如说中国到 2000 年要把人口控制在 12 亿左右，或说控制在 11.5 亿到 12.5 亿之间. 这“12 亿左右”或“11.5 亿到 12.5 亿之间”就是灰概念，其外延是非常明确的，但如果确切地问是哪个具体的数值，则并不清楚. “年轻人”这个概念则是个模糊概念，因为人人都知道年

人的 内涵，但要让你划出一个确切的范围；在这个范围之内的是年轻人，范围之外的都不是年轻人，则很难办到，因为年轻人这个概念的外延不明确.

灰概念与随机概念没有本质的区别，灰色系统与随机理论研究问题、解决问题的方法和思路则截然不同.

灰数、灰元、灰关系是灰色系统的主要研究对象. 因此，灰数及其运算、灰色矩阵与灰色方程是灰色系统理论的基础. 工业控制及社会、经济、农业、生态等本征性灰系统的分析、建模、预测、决策和控制是灰色系统的主要研究任务.

对一个问题的研究往往同时需要若干方面综合进行. 如制定一个地区或一个行业的长远发展规划，首先要对现状进行分析、诊断，在此基础上建立系统模型，对未来作出科学、可信的预测，制订计划，选准重点，进行有效地决策与控制，达到少投入、多产出的目的. 再如研究生态系统的食物链，则同时涉及绿色植物、食草动物、食肉动物三个层次. 制订畜牧业发展规划时，要分析这三个层次的量化关系，预测在人的干预下不同层次的发展变化，弄清这种干预需要付出的代价与可能得到的收益，提出减少所需代价，获取更大效益的决策方案，制订实施决策的计划与措施. 上述问题的解决，都同时包括了分析、建模、预测、决策和控制几个方面的内容.

系统分析主要包括灰色关联分析、灰色统计和灰色聚类等方面的内容；系统建模主要通过数的生成或序列算子作用，寻找其规律，然后根据灰色理论的五步建模思想完成系统建模. 五步建模即第一步语言模型，第二步网络模型，第三步量化模型，第四步动态量化模型，第五步优化模型；灰色预测是基于 GM(1,1) 进行的定量预测，按照其功能和特征可分成数列预测、区间预测、灾变预测、季节灾变预测、拓扑预测和系统预测五类；灰色决策包括灰靶决策、灰关联决策、灰色统计、聚类决策、灰色局

势决策、灰色层次决策和灰色规划等；灰色控制的主要内容包括本征性灰系统的控制问题和以灰色系统方法为主构成的控制，如灰关联控制和 GM(1,1) 预测控制等.

第二章　灰数及其运算

§2.1　灰　　数

灰色系统用灰色数、灰色方程、灰色矩阵等来描述，其中灰数是灰系统的基本“单元”或“细胞”.

我们把只知道大概的范围而不知其确切值的数称为灰数. 在应用中，灰数实际上指一个区间或一个一般的数集.

灰数有以下几类：

1°　仅有下界的灰数

有下界而无上界的灰数记为

$$\otimes\in[a,\infty) \quad 或 \quad \otimes(a),$$

其中 a 为灰数$\otimes$的下确界，它是一个确定的数. 我们称$[a,\infty)$为$\otimes$的取数域，简称$\otimes$的灰域.

一棵生长着的大树，其重量便是有下界的灰数，因为大树的重量必大于零，但不可能用一般手段知道其准确的重量，若用$\otimes$表示大树的重量，便有 $\otimes\in[0,\infty)$.

2°　仅有上界的灰数

有上界而无下界的灰数记为

$$\otimes\in(-\infty,\bar{a}] \quad 或 \quad \otimes(\bar{a}),$$

其中 $\bar{a}$ 是灰数$\otimes$的上确界，是确定的数.

一项投资工程，要有个最高投资限额，一件电器设备要有个承受电压或通过电流的最高临界值. 工程投资、电器设备的电压、电流容许值都是有上界的灰数.

3°　区间灰数

既有下界 $\underline{a}$ 又有上界 $\bar{a}$ 的灰数称为区间灰数，记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$.

海豹的重量在 20～25 公斤之间，某人的身高在 1.8～1.9 米之间，可分别记为

$$\otimes_1 \in [20,25],\ \otimes_2 \in [1.8,1.9].$$

4° 连续灰数与离散灰数

在某一区间内取有限个值或可数个值的灰数称为离散灰数，取值连续地充满某一区间的灰数称为连续灰数.

某人的年龄在 30 到 35 岁之间，此人的年龄可能是30，31，32，33，34，35这几个数，因此年龄是离散灰数. 人的身高、体重等是连续灰数.

5° 黑数与白数

当 $\otimes \in (-\infty,\infty)$ 或 $\otimes \in (\otimes_1,\otimes_2)$，即当 $\otimes$ 的上、下界皆为无穷或上、下界都是灰数时，称 $\otimes$ 为黑数.

当 $\otimes \in [\underline{a},\bar{a}]$，且 $\underline{a}=\bar{a}$ 时，称 $\otimes$ 为白数.

为讨论方便，我们将黑数和白数看成特殊的灰数.

6° 本征灰数与非本征灰数

本征灰数是指不能或暂时还不能找到一个白数作为其“代表”的灰数，比如一般的事前预测值、宇宙的总能量、准确到秒或微秒的“年龄”等都是本征灰数.

非本征灰数是指凭先验信息或某种手段，可以找到一个白数作为其“代表”的灰数. 我们称此白数为相应灰数的白化值，记为 $\widetilde{\otimes}$，并用 $\otimes(a)$ 表示以 a 为白化值的灰数. 如托人代买一件价格100元左右的衣服，可将 100 作为预购衣服价格 $\otimes(100)$ 的白化数，记为 $\widetilde{\otimes}(100)=100$.

从本质上看，灰数又可以分为信息型、概念型、三型次层类.

1° 信息型灰数是指因暂时缺乏信息而不能肯定其取值的数. 如：预计某地区今年夏粮产量在 10 万吨以上，$\otimes \in [10,\infty)$，

估计某储蓄所年底居民储蓄存款总额将达 70 万到 90 万元，$\otimes \in [70, 90]$；预计郑州地区 5 月份最高气温不超过 36℃，$\otimes \in [0, 36]$，这些都是信息型灰数. 由于暂时缺乏信息，不能肯定某数的确切取值，而到一定时间后，通过信息补充，灰数可以完全变白. 如上述三个灰数，一旦预言的时间终了，就会变成完全确定的数.

2° 概念型灰数其中有的也称意愿型灰数是指由人们的某种观念、意愿形成的灰数. 如：某人希望至少获得 1 万元科研经费，并且越多越好，$\otimes \in [10\,000, \infty)$；某工厂废品率为 1 %，希望大幅度降低，当然越小越好，$\otimes \in [0, 0.01]$；这些都是概念型灰数.

3° 层次型灰数是由层次改变形成的灰数. 有的数，从系统的高层次，即宏观层次、整体层次或认识的概括层次上看是白的；可到低层上，即到系统的微观层次、分部层次或认识的深化层次则可能是灰的. 例如，一个人的身高，以厘米度量是白的，若精确到万分之一毫米就是灰的了. 还有的数，在某个小范围内是白的，在大范围内就成灰的了. 比如叫张三的人，某个学校只有 1 人；全市大学有 4 ～ 6 人，$\otimes \in [4,6]$ 已是灰数；若在全国范围内考虑，就更加说不清了.

§2.2 灰数白化与灰度

有一类灰数是在某个基本值附近变动的，这类灰数白化比较容易，我们可以其基本值为主要白化值. 以 a 为基本值的灰数可记为

$$\otimes(a) = a + \delta_a \quad 或 \quad \otimes(a) \in (-, a, +),$$

其中 δ_a 为扰动灰元，此灰数的白化值 $\widetilde{\otimes}(a) = a$. 如今年的科研经费在 1 万元左右，可表为

$$\otimes(10\,000)=10\,000+\delta,$$

或
$$\otimes(10\,000)\in(-,10\,000,+),$$

它的白化值为10 000.

对于一般的区间灰数 $\otimes\in[a,b]$，我们将白化值$\widetilde{\otimes}$取为

$$\widetilde{\otimes}=\alpha a+(1-\alpha)b,\ \alpha\in[0,1].$$

定义2.2.1 形如$\widetilde{\otimes}=\alpha a+(1-\alpha)b,\alpha\in[0,1]$ 的白化称为等权白化.

定义2.2.2 在等权白化中，取 $\alpha=\frac{1}{2}$ 而得到的白化值称为等权均值白化.

当区间灰数取值的分布信息缺乏时，常采用等权均值白化.

定义2.2.3 设区间灰数 $\otimes_1\in[a,b]$，$\otimes_2\in[c,d]$，

$$\widetilde{\otimes}_1=\alpha a+(1-\alpha)b,\ \alpha\in[0,1],$$

$$\widetilde{\otimes}_2=\beta c+(1-\beta)d,\ \beta\in[0,1],$$

当 $\alpha=\beta$ 时，我们称 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 取数一致；当 $\alpha\neq\beta$ 时，称 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 取数非一致.

在灰数的分布信息已知时，往往采取非等权白化. 比如某人的年龄可能是 40 岁到 60 岁，$\otimes\in[40,60]$，是个灰数. 根据了解，此人受初、中级教育共12 年，并且是在 50 年代中期考入大学的，故此人年龄在 50 岁左右的可能性较大，或者说在 45 岁到55岁之间的可能性较大. 这样的灰数，如果再作等权白化，显然是不合理的. 为此，我们用白化权函数来描述一个灰数对其取值范围内数值的“偏爱”程度.

例如，土壤中氮、磷、钾含量都是灰数，土壤对速效氮的含量要求为15～40ppm，过多或过少均对农作物生长不利. 为此，我们可用图 2.2.1 所示的白化权函数描述土壤中速效氮的含量.

其中平顶部分表示速氮含量的最佳程度，其权为 1；左边一支表示从 5 至 15ppm，含量越高，效果越佳；右边一支表示从

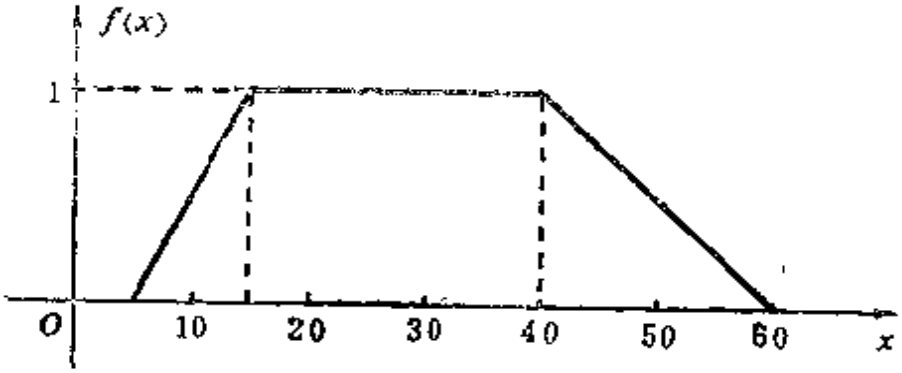


图 2.2.1

〔至 60ppm，含量越高，效果越差．曲线起于 5 止于 60，则说明速效氮含量小于 5ppm 或大于 60ppm 是不允许的．

对概念型灰数中表示意愿的灰数，其白化权函数一般设计为单调增函数．图 2.2.2 中几个白化权函数表示贷款额这一灰数及其受“偏爱”的程度．其中，直线用来表示“正常愿望”，即

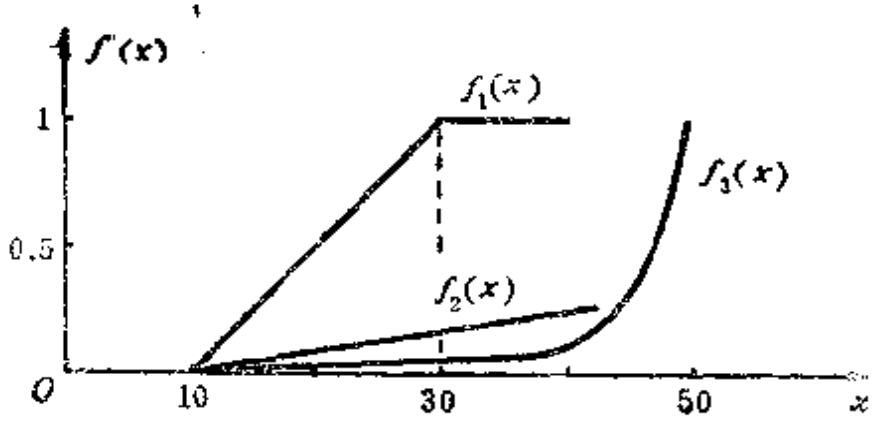


图 2.2.2

“偏爱”程度与资金(万元)成比例增加．不同的斜率表示欲望的强烈程度不同，$f_1(x)$表示较为平缓的愿望，认为给 10 万不行，给 20 万就比较满意，给 30 万就足够了；$f_2(x)$ 表示愿望强烈，给 35 万也只有 20%的满意程度；$f_3(x)$ 表明即使给到 40 万，满意程度才达到 10%，但给到 50 万就行了，即非要接近 50 万不可，几乎没有减少的余地．

一般说来，一个灰数的白化权函数是研究者根据已知信息凭经验设计的，没有固定的程式．函数曲线的起点和终点一般应有其含意．如在外贸谈判中，就有一个由灰变白的过程．开始谈判时，甲方说我的出口额至少要有 5 亿美元，乙方说我的进口额不大于 3 亿．这样，成交额这一灰数将在 3 亿与 5 亿之间取值，其白化权函数可将起点定为 3 亿，终点定为 5 亿．

定义2.2.4 起点、终点确定的左升、右降连续函数称为典型白化权函数．

典型白化权函数一般如图 2.2.3(1)所示．

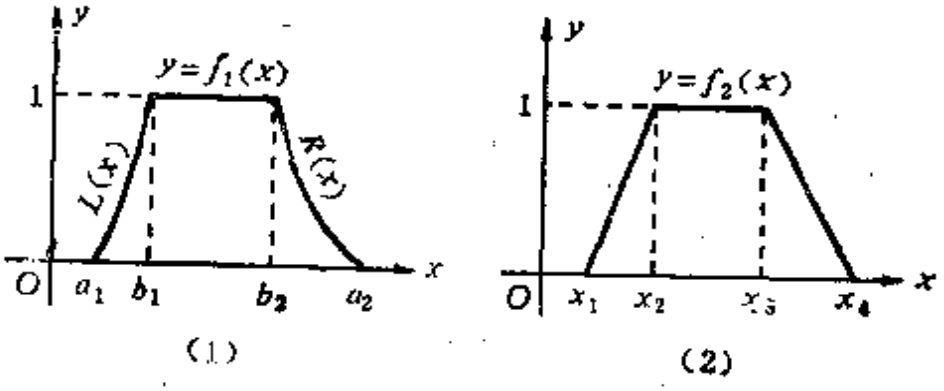


图 2.2.3

其中

$$f_1(x)=\begin{cases}L(x), & x\in[a_1,b_1)\\ 1, & x\in[b_1,b_2]\\ R(x), & x\in(b_2,a_2]\end{cases}$$

我们称 $L(x)$ 为左增函数，$R(x)$ 为右降函数．$[b_1,b_2]$ 为峰区，a_1 为始点，a_2 为终点，b_1,b_2 为转折点．

在实际应用中，为了便于编程和计算，$L(x)$ 和 $R(x)$常简化为直线(图 2.2.3(2))，这样，

$$f(x)=\begin{cases}L(x)=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}, & x\in[x_1,x_2)\\ 1, & x\in[x_2,x_3]\\ R(x)=\dfrac{x_4-x}{x_4-x_3}, & x\in(x_3,x_4]\end{cases}$$

定理2.2.1 设X为**实数空**间，$Y\subseteq[0,1]$，映射f：$X\longrightarrow Y$，$x\mapsto f(x)$满足典型白化权函数的条件，则f具有下述性质：

1° $f(\varnothing)=\varnothing$；

2° $f(X)=Y$；

3° $A,B\subseteq X$，若$A\subseteq B$，则$f(A)\subseteq f(B)$；

4° 若$A\neq\varnothing$，则$f(A)\neq\varnothing$；

5° $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$；

6° $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$.

定义2.2.5 设f为典型白化权函数，$Y\subseteq[0,1]$，$f^{-1}(y)=\{x|f(x)=y,\ y\in Y\}$，称$f^{-1}$为$f$的反函数.

定义2.2.6 设X,Y为拓扑空间，映射

$$f:\ X\longrightarrow Y,\ x\mapsto f(x)$$

是一一到上的. 若f和f^{-1}皆连续，则称f为同胚.

命题2.2.1 灰数的白化权函数是同胚.

定义2.2.7 对如图2.2.1所示的白化权函数，称

$$g^{\circ}=\frac{2|b_1-b_2|}{b_1+b_2}+\max\left\{\frac{|a_1-b_1|}{b_1},\ \frac{|a_2-b_2|}{b_2}\right\}$$

为⊗的灰度.

g°的表达式是两部分的和，其中第一部分代表峰区大小对灰度的影响，第二部分代表$L(x)$和$R(x)$覆盖面大小对灰度的影响. 一般说来，峰区越大，$L(x)$和$R(x)$的覆盖面越大，g°就越大.

当$\max\left\{\frac{|a_1-b_1|}{b_1},\ \frac{|a_2-b_2|}{b_2}\right\}=0$时，$g^{\circ}=\frac{2|b_1-b_2|}{b_1+b_2}$，此时白化权函数为一条水平线.

当$\frac{2|b_1-b_2|}{b_1+b_2}=0$时，灰数⊗为有基本值的灰数，其基本值就是$b=b_1=b_2$.

当 $g^{\circ}=0$ 时，$\otimes$是白数.

§2.3 区间灰数的运算

本节中我们讨论区间灰数的运算.

设有灰数

$$\otimes_1\in[a,b],\quad a<b,$$
$$\otimes_2\in[c,d],\quad c<d,$$

用符号 * 表示 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 间的运算，若

$$\otimes_3=\otimes_1*\otimes_2,$$

则 $\otimes_3$ 亦应为区间灰数，因此应有

$$\otimes_3\in[e,f],\ e<f$$

且对任意的 $\tilde{\otimes}_1,\tilde{\otimes}_2$，$\tilde{\otimes}_1*\tilde{\otimes}_2\in[e,f]$.

法则2.3.1 设 $\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$，$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，则 $\otimes_1$ 与 $\otimes_2$ 的和记为 $\otimes_1+\otimes_2$，且

$$\otimes_1+\otimes_2\in[a+c,b+d].$$

例2.3.1 设 $\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[5,8]$，则

$$\otimes_1+\otimes_2\in[8,12].$$

法则2.3.2 设 $\otimes\in[a,b]$，$a<b$，则

$$-\otimes=[-b,-a].$$

法则2.3.3 设$\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$，$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，则

$$\otimes_1-\otimes_2=\otimes_1+(-\otimes_2)\in[a-d,b-c].$$

例2.3.2 设 $\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[1,2]$，则

$$\otimes_1-\otimes_2\in[3-2,4-1]=[1,3],$$
$$\otimes_2-\otimes_1\in[1-4,2-3]=[-3,-1].$$

法则2.3.4 设 $\otimes\in[a,b]$，$a<b$，$a\neq0$，$b\neq0$，且 $ab>0$，则

$$\otimes^{-1}\in\left[\frac{1}{b},\ \frac{1}{a}\right].$$

例2.3.3 设 $\otimes\in[2,4]$，则 $\otimes^{-1}\in[0.25,0.5]$.

法则2.3.5 设 $\otimes_1\in[a,b]$，$\otimes_2\in[c,d]$，则

$$\otimes_1\cdot\otimes_2\in[\min\{ac,ad,bc,bd\},\ \max\{ac,ad,bc,bd\}].$$

例2.3.4 设 $\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[5,10]$，则

$$\otimes_1\cdot\otimes_2\in[\min\{15,30,20,40\},\max\{15,30,20,40\}]$$
$$=[15,40].$$

法则2.3.6 设 $\otimes_1\in[a,b]$，$a<b$，$\otimes_2\in[c,d]$，$c<d$，且 $c\neq0$，$d\neq0$，$cd>0$，则

$$\otimes_1/\otimes_2=\otimes_1\cdot\otimes_2^{-1},$$

即
$$\otimes_1/\otimes_2=\left[\min\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\},\max\left\{\frac{a}{c},\frac{a}{d},\frac{b}{c},\frac{b}{d}\right\}\right].$$

例2.3.5 设 $\otimes_1\in[3,4]$，$\otimes_2\in[5,10]$，则

$$\otimes_1/\otimes_2\in\left[\min\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{5},\frac{4}{10}\right\},\max\left\{\frac{3}{5},\frac{3}{10},\frac{4}{5},\frac{4}{10}\right\}\right]$$
$$=[0.3,0.8].$$

法则2.3.7 设 $\otimes\in[a,b]$，$a<b$，k 为正实数，则

$$k\cdot\otimes\in[ka,kb].$$

定理2.3.1 区间灰数不能相消、相约.

也就是说，灰数的自差，一般不等于零，仅当减数与被减数取数一致时，灰数的自差才等于零. 灰数自除，情况类似.

例2.3.6 设 $\otimes\in[2,5]$，则

$$\otimes-\otimes\begin{cases}=0, & \text{取数一致;}\\ \in[-3,3], & \text{取数不一致.}\end{cases}$$

$$\frac{\otimes}{\otimes}\begin{cases}=1, & \text{取数一致;}\\ \in\left[\frac{2}{5},\frac{5}{2}\right], & \text{取数不一致.}\end{cases}$$

定义2.3.1 设 $R(\otimes)$ 为一灰数集. 若对任意的 $\otimes_i$, $\otimes_j \in R(\otimes)$, 有 $\otimes_i+\otimes_j$, $\otimes_i-\otimes_j$, $\otimes_i\cdot\otimes_j$, $\otimes_i/\otimes_j$ 均属于 $R(\otimes)$ (商运算时要满足法则 2.3.6 的规定), 则称 $R(\otimes)$ 为一灰数域.

定理2.3.2 区间灰数全体构成灰数域.

定义2.3.2 设 $E(\otimes)$ 为灰数集, 若对于任意 $\otimes_i,\otimes_j,\otimes_k \in E(\otimes)$, 有

1° $\otimes_i+\otimes_j=\otimes_j+\otimes_i$;

2° $(\otimes_i+\otimes_j)+\otimes_k=\otimes_i+(\otimes_j+\otimes_k)$;

3° 存在零元素 $0\in E(\otimes)$, 使 $\otimes_i+0=\otimes_i$;

4° 对任意 $\otimes\in E(\otimes)$, 有 $-\otimes\in E(\otimes)$, 且使得

$$\otimes+(-\otimes)=0;$$

5° $\otimes_i\cdot(\otimes_j\cdot\otimes_k)=(\otimes_i\cdot\otimes_j)\cdot\otimes_k$;

6° 存在单位元 $1\in E(\otimes)$, 使 $1\cdot\otimes_i=\otimes_i\cdot 1=\otimes_i$;

7° $(\otimes_i+\otimes_j)\cdot\otimes_k=\otimes_i\cdot\otimes_k+\otimes_j\cdot\otimes_k$;

8° $\otimes_i\cdot(\otimes_j+\otimes_k)=\otimes_i\cdot\otimes_j+\otimes_i\cdot\otimes_k$,

则称 $E(\otimes)$ 为灰色线性空间.

定理2.3.3 取数一致的区间灰数全体构成灰色线性空间.

第三章　灰方程与灰矩阵

§3.1　灰代数方程与灰微分方程

定义3.1.1　含有灰系数(灰元)的代数方程称为灰代数方程.

定义3.1.2　含有灰元素的 n 维向量称为 n 维灰向量. n维灰向量记为

$$X(\otimes)=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n).$$

不含灰元的白方程，求解较为简单，一般一次白方程的解是实数轴上一个确定的点. 多元白方程组的解也已有明确的表述. 灰方程的解讨论起来较为复杂. 严格说来，灰方程并不是一个方程，而是许多个方程的代表符号. 灰方程代表的方程个数，取决于方程中灰元的取值. 若灰元皆在有界灰域内取有限个值，则灰方程代表有限个白方程；若方程中灰元取无穷多个值，灰方程就代表无穷多个白方程. 比如灰方程

$$\otimes_1 x+\otimes_2=0$$

的解为$x=-\otimes_2\otimes^{-1}$. 当$\otimes_1\in\{1,2,4\},\otimes_2=1$时，解集为

$$X\in\{-0.25,-0.5,-1\};$$

当$\otimes_1\in[1,4],\otimes_2=1$时，解集为

$$X\in[-1,-0.25].$$

灰系数的不同取值，与解集中不同的值相对应. 一般地，一元一次灰方程的解为实数轴上若干个点或灰区间，n 元一次灰方程组的解为 n 维灰向量. 其它类型的灰代数方程的解集的形式也与同类白代数方程类似.

定义3.1.3　含有灰导数或灰微分的方程称为灰微分方程.

定义3.1.4 含有灰系数的微分方程称为灰系数白微分方程

灰导数与灰微分方程是灰色系统建模的基础，其概念及有关问题拟在第七章详细讨论. 灰系数白微分方程可通过积分或通过特征方程转化为灰代数方程求解，此处从略.

§3.2 灰矩阵及其运算

定义3.2.1 含有灰元的矩阵称为灰矩阵，记为$A(\otimes)$，并用$\otimes_{ij}$或$\otimes(i,j)$表示灰矩阵中第i行第j列处的灰数. 如

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix}\otimes_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

即为一个2×2灰矩阵. 其中$\otimes_{11}\in[\underline{a}_{11},\bar{a}_{11}]$，$\underline{a}_{11}<\bar{a}_{11}$，$a_{ij}$为白数，$i,j=1,2$.

定义3.2.2 设$A(\otimes)$为$n\times m$灰矩阵，G为$A(\otimes)$中灰元个数，我们称

$$\theta=\frac{G}{mn-G}$$

为灰矩阵$A(\otimes)$的绝对元灰度，称

$$\omega=\frac{G}{mn}$$

为灰矩阵$A(\otimes)$的相对元灰度.

相对元灰度在[0，1]内取值. 当$\omega=1$时，$A(\otimes)$中无白元；当$\omega=0$时，$A(\otimes)$为白矩阵. 绝对元灰度和相对元灰度均可说明$A(\otimes)$中灰元的多少.

以$G^{m\times n}$记全体m行、n列灰矩阵构成的集合.

以$\otimes_{ij}$为元素的m行、n列的灰矩阵可记作$A(\otimes)=(\otimes_{ij})_{mn}$.

两个满足一定条件的灰矩阵可以进行加、减、乘等运算，以

下设灰矩阵中的灰元均为区间灰数.

定义3.2.3 设$A(\otimes)=(\otimes_{ij})_{mn}$,$B(\otimes)=(\otimes'_{ij})_{mn}$,若$A(\otimes)$与$B(\otimes)$的对应元素都相等，即

$$\otimes_{ij}=\otimes'_{ij}\qquad i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n$$

则称灰矩阵$A(\otimes)$与$B(\otimes)$相等，记作$A(\otimes)=B(\otimes)$.

定义3.2.4 设$A(\otimes)=(\otimes_{ij})_{mn}$,$B(\otimes)=(\otimes'_{ij})_{mn}$，称

$$A(\otimes)+B(\otimes)=(\otimes_{ij}+\otimes'_{ij})_{mn}$$

为$A(\otimes)$与$B(\otimes)$的和；称

$$A(\otimes)-B(\otimes)=(\otimes_{ij}-\otimes'_{ij})_{mn}$$

为$A(\otimes)$与$B(\otimes)$的差. 称$-A(\otimes)=(-\otimes_{ij})_{mn}$为$A(\otimes)$的负灰阵.

命题3.2.1 灰矩阵的加法和减法满足以下规则：

1° $A(\otimes)+B(\otimes)=B(\otimes)+A(\otimes)$；

2° $(A(\otimes)+B(\otimes))+C(\otimes)=A(\otimes)+(B(\otimes)+C(\otimes))$；

3° $A(\otimes)-B(\otimes)=A(\otimes)+(-B(\otimes))$.

定义3.2.5 设$\otimes$为灰数，$A(\otimes)=(\otimes_{ij})$，称

$$\otimes\cdot A(\otimes)=(\otimes\cdot\otimes_{ij})$$

为灰数$\otimes$与灰矩阵$A(\otimes)$的数量乘积.

命题3.2.2 灰数与灰矩阵的数量乘积满足下列运算规律：

1° $(\otimes_1\cdot\otimes_2)\cdot A(\otimes)=\otimes_1(\otimes_2\cdot A(\otimes))=\otimes_2(\otimes_1\cdot A(\otimes))$；

2° $(\otimes_1+\otimes_2)\cdot A(\otimes)=\otimes_1\cdot A(\otimes)+\otimes_2\cdot A(\otimes)$；

3° $\otimes\cdot(A(\otimes)\pm B(\otimes))=\otimes\cdot A(\otimes)\pm\otimes\cdot B(\otimes)$.

当$\otimes=-1$时，$\otimes\cdot A(\otimes)=-A(\otimes)$即为$A(\otimes)$的负灰阵.

定义3.2.6 设$A(\otimes)=(\otimes_{ij})_{ms}$,$B(\otimes)=(\otimes'_{ij})_{sn}$，称

$$A(\otimes)\cdot B(\otimes)=(\otimes''_{ij})_{mn},$$

其中

$$\otimes''_{ij}=\otimes_{i1}\otimes'_{1j}+\otimes_{i2}\otimes'_{2j}+\cdots+\otimes_{is}\otimes'_{sj}$$

$$=\sum_{k=1}^{s}\otimes_{ik}\otimes'_{kj}$$

$$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

为灰矩阵$A(\otimes)$与$B(\otimes)$的乘积. 一个 $m\times s$ 灰矩阵与一个$s\times n$灰矩阵的乘积是一个 $m\times n$ 灰矩阵.

仅当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时，两个矩阵才能相乘. 一个 $1\times s$ 灰矩阵与一个 $s\times 1$ 灰矩阵的乘积是一个灰数. 即使 $A(\otimes)\cdot B(\otimes)$ 与 $B(\otimes)\cdot A(\otimes)$ 都有意义，一般地，$A(\otimes)\cdot B(\otimes)\neq B(\otimes)\cdot A(\otimes)$；也就是说，灰矩阵的乘法不满足交换律.

命题3.2.3 在运算可行时，灰矩阵的乘法满足以下运算规律：

1° $(A(\otimes)\cdot B(\otimes))\cdot C(\otimes)=A(\otimes)\cdot(B(\otimes)\cdot C(\otimes))$；

2° $A(\otimes)\cdot(B(\otimes)+C(\otimes))=A(\otimes)\cdot B(\otimes)+A(\otimes)\cdot C(\otimes)$，

$(A(\otimes)+B(\otimes))\cdot C(\otimes)=A(\otimes)\cdot C(\otimes)+B(\otimes)\cdot C(\otimes)$；

3° $\otimes\cdot(A(\otimes)\cdot B(\otimes))=(\otimes\cdot A(\otimes))\cdot B(\otimes)$

$=A(\otimes)\cdot(\otimes\cdot B(\otimes))$.

定义3.2.7 设$A(\otimes)$为 n 阶灰方阵，称

$$A^k(\otimes)=\underbrace{A(\otimes)\cdot A(\otimes)\cdots A(\otimes)}_{k\text{个}}$$

为灰方阵 $A(\otimes)$的 k 次幂.

命题3.2.4 灰方阵 $A(\otimes)$的幂满足以下运算规律：

1° $A^k(\otimes)\cdot A^l(\otimes)=A^{k+l}(\otimes)$；

2° $(A^k(\otimes))^l=A^{kl}(\otimes)$，

其中 k,l 为正整数.

因灰矩阵乘法不满足交换律，所以对于 $A(\otimes)$，$B(\otimes)\in G^{n\times n}$，一般地

$$(A(\otimes)\cdot B(\otimes))^k\neq A^k(\otimes)\cdot B^k(\otimes).$$

定义3.2.8 设灰矩阵

$$A(\otimes)=\begin{pmatrix}\otimes_{11} & \otimes_{12} & \cdots & \otimes_{1n}\\ \otimes_{21} & \otimes_{22} & \cdots & \otimes_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \otimes_{m1} & \otimes_{m2} & \cdots & \otimes_{mn}\end{pmatrix},$$

称

$$A(\otimes)^T=\begin{pmatrix}\otimes_{11} & \otimes_{21} & \cdots & \otimes_{m1}\\ \otimes_{12} & \otimes_{22} & \cdots & \otimes_{m2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \otimes_{1n} & \otimes_{2n} & \cdots & \otimes_{mn}\end{pmatrix}$$

为 $A(\otimes)$的转置灰矩阵。

转置灰矩阵的第 i 行第 j 列处的元素等于原灰矩阵第j行第i列的元素。

命题3.2.5 在运算可行时，灰矩阵的转置满足下列运算规律：

1° $(A(\otimes)^T)^T=A(\otimes)$；

2° $(A(\otimes)+B(\otimes))^T=A(\otimes)^T+B(\otimes)^T$；

3° $(\otimes\cdot A(\otimes))^T=\otimes\cdot A(\otimes)^T$；

4° $(A(\otimes)\cdot B(\otimes))^T=B(\otimes)^T\cdot A(\otimes)^T$.

§3.3 几种特殊的灰矩阵

定义3.3.1 形如

$$A(\otimes)=\begin{pmatrix}\otimes_{11} & & & \\ & \otimes_{22} & & \\ & & \cdots & \\ & & & \otimes_{nn}\end{pmatrix}$$

的灰矩阵称为对角灰矩阵，其中未标出的元素全为零. 对角灰阵也记为diag[$\otimes_{11}$ $\otimes_{22}$ $\cdots$ $\otimes_{nn}$].

命题3.3.1 对角灰矩阵有以下运算性质：

1° 同阶对角灰阵的和、差仍为对角灰阵；

2° 灰数与对角灰阵的数量乘积仍为对角灰阵；

3° 同阶对角灰阵的乘积仍是对角灰阵，且乘法可交换；

4° 对角灰阵与其转置相等.

定义3.3.2 以 diag[1 1 … 1] 为白化矩阵的对角灰阵称为单位灰阵，记为$E(\otimes)$.

通常的单位矩阵记为 E.

单位灰阵在灰矩阵运算中以其白化矩阵.

$$E=\mathrm{diag}[1\ 1\ \cdots\ 1]$$

的形式出现.

定义3.3.3 diag[⊗ ⊗ … ⊗]称为数量灰矩阵.

定义3.3.4 形如

$$\begin{bmatrix} \otimes_{11} & \otimes_{12} & \cdots & \otimes_{1n} \\ & \otimes_{22} & \cdots & \otimes_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \otimes_{nn} \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} \otimes_{11} & & & \\ \otimes_{21} & \otimes_{22} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots \\ \otimes_{n1} & \otimes_{n2} & \cdots & \otimes_{nn} \end{bmatrix}$$

的灰矩阵称为上三角灰阵和下三角灰阵，统称为三角灰阵.

命题3.3.2 两个同阶上(下)三角灰阵的和、差、积灰阵仍是同阶的上(下)三角灰阵.

定义3.3.5 若 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$ 满足 $A(\otimes)^T=A(\otimes)$，则称$A(\otimes)$为对称灰阵.

对称灰阵的元素满足 $\otimes_{ij}=\otimes_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$.

定义3.3.6 若 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$ 满足 $-A(\otimes)^T=A(\otimes)$，则称$A(\otimes)$为反对称灰阵.

反对称灰阵的元素满足 $\otimes_{ij}=-\otimes_{ji}(i,j=1,\cdots,n)$. 显然，反对称灰阵主对角线上的元素一定为零.

命题3.3.3 对称(反对称)灰阵的和、差与数量乘积仍为对

称(反对称)灰阵.

两个对称(反对称)灰阵的乘积不一定是对称(反对称)灰阵.

定义3.3.7 若灰矩阵 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$ 满足

$$A(\otimes)\cdot A(\otimes)^T=A(\otimes)^T\cdot A(\otimes)=E(\otimes),$$

则称 $A(\otimes)$为正交灰阵.

命题3.3.4 两个正交灰阵的乘积仍为正交灰阵.

§3.4 灰矩阵的奇异性

定义3.4.1 设灰矩阵 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，若存在灰矩阵 $B(\otimes)$，$C(\otimes)\in G^{n\times n}$，使

$$A(\otimes)\cdot B(\otimes)=E(\otimes),\ C(\otimes)\cdot A(\otimes)=E(\otimes),$$

则称 $B(\otimes)$为 $A(\otimes)$的灰色右逆阵，$C(\otimes)$为 $A(\otimes)$ 的灰色左逆阵；当 $B(\otimes)=C(\otimes)$ 时，称 $A(\otimes)$ 为可逆灰矩阵，$B(\otimes)$称为 $A(\otimes)$的灰色逆矩阵，$A(\otimes)$的灰色逆矩阵记为$A(\otimes)^{-1}$.

一般的灰矩阵 $A(\otimes)$，要求出其灰色逆矩阵十分困难，本节我们借助于灰矩阵的白化矩阵来研究灰矩阵的奇异性.

定义3.4.2 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，将 $A(\otimes)$ 的全部灰元分别赋予某个确定的数，所得的矩阵称为 $A(\otimes)$的一个白化矩阵，记为 $\tilde{A}(\otimes)=(\widetilde{\otimes}_{ij})$.

上界矩阵$\bar{A}$与下界矩阵 $\underline{A}$ 为特殊的白化矩阵. $A(\otimes)$的全体白化矩阵所成的集合记为 $\{\tilde{A}\}$.

定义3.4.3 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，

1° 若对任意$\tilde{A}\in\{\tilde{A}\}$，恒有$\det\tilde{A}=0$，则称 $A(\otimes)$是恒降秩灰阵；

2° 若对任意$\tilde{A}\in\{\tilde{A}\}$，恒有$\det\tilde{A}\neq 0$，则称 $A(\otimes)$为恒满秩灰阵.

恒降秩灰阵与恒满秩灰阵都称为奇异性可判定灰阵，否则称

为奇异性不可判定灰阵。

命题3.4.1 设$A(\otimes)\in G^{n\times n}$，则$A(\otimes)$为奇异性不可判定灰阵的充要条件是存在$\bar{A}_1,\bar{A}_2\in\{\bar{A}\}$，使

$$\det\bar{A}_1=0,\quad \det\bar{A}_2\neq 0.$$

例3.4.1 设

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix}\otimes_{11} & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

其中$\otimes_{11}\in[-2,1]$. 取$\otimes_{11}=1$或$\otimes_{11}=-1$，可分别得到

$$\bar{A}_1=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\text{和}\bar{A}_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

易知$\det\bar{A}_1=0,\det\bar{A}_2\neq 0$，故$A(\otimes)$是奇异性不可判定灰阵。

命题3.4.2 设$A(\otimes)$为三角灰阵，若$A(\otimes)$的全体对角元$\otimes_{ii}\in[\underline{a}_{ii},\bar{a}_{ii}](i=1,2,\cdots,n)$满足$\underline{a}_{ii}\cdot\bar{a}_{ii}>0$，则$A(\otimes)$是奇异性可判定灰阵。

命题3.4.3 设$A(\otimes)\in G^{n\times n}$，若$A(\otimes)$中全体灰元的各阶余子式均为零，则$A(\otimes)$是奇异性可判定灰阵。

例3.4.2 判定下述各灰矩阵的奇异性(其中$a_{ij}\neq 0$)：

$$A_1(\otimes)=\begin{bmatrix}\otimes_{11} & 1\\ 1 & \otimes_{22}\end{bmatrix},\quad A_2(\otimes)=\begin{bmatrix}\otimes_{11} & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_3(\otimes)=\begin{bmatrix}a_{11} & \otimes_{12} & 0\\ \otimes_{21} & \otimes_{22} & a_{23}\\ a_{31} & \otimes_{32} & 0\end{bmatrix},\quad A_4(\otimes)=\begin{bmatrix}a_{11} & \otimes_{12} & 0\\ 0 & a_{22} & 0\\ 0 & \otimes_{32} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

解：1° 对于$A_1(\otimes)$，$\otimes_{11}$与$\otimes_{22}$互为余子式，因皆不为零，故不满足命题3.4.3的条件。考虑

$$\det A_1(\otimes)=\begin{vmatrix}\otimes_{11} & 1\\ 1 & \otimes_{22}\end{vmatrix}=\otimes_{11}\cdot\otimes_{22}-1=\otimes-1,$$

当$\otimes_{ii}(i=1,2)$取不同的值时，$\otimes$有不同值，$\det\bar{A}_1$可能为零，也可能不为零，所以$A_1(\otimes)$是奇异性不可判定的。

2° $A_2(\otimes)$ 只有一个灰元 $\otimes_1$，其余子式为零，根据命题 3.4.3，$A_2(\otimes)$ 是奇异性可判定的. 事实上，

$$\det A_2(\otimes)=\begin{vmatrix}\otimes_{11} & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1,$$

对于任意 $\tilde{A}_2\in\{\tilde{A}_2\}$，$\det\tilde{A}_2$ 恒不为零，故 $A_2(\otimes)$ 是恒满秩灰阵.

3° 对于 $A_3(\otimes)$，由于灰元 $\otimes_{12}$ 的余子式

$$\begin{vmatrix}\otimes_{12} & a_{23}\\ a_{31} & 0\end{vmatrix}=-a_{23}a_{31}\neq 0$$

不满足命题 3.4.3 的条件，考虑

$$\det A_3(\otimes)=-a_{23}\begin{vmatrix}a_{11} & \otimes_{12}\\ a_{31} & \otimes_{32}\end{vmatrix}$$

$$=-a_{23}a_{11}\otimes_{32}+a_{23}a_{31}\otimes_{12},$$

所以对不同的 $\tilde{A}_3\in\{\tilde{A}_3\}$，$\det\tilde{A}_3$ 可能等于零，也可能不等于零，故 $A_3(\otimes)$ 是奇异性不可判定的.

4° $A_4(\otimes)$ 有两个灰元 $\otimes_{12}$ 和 $\otimes_{32}$，$\otimes_{12}$ 的余子式

$$\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & a_{33}\end{vmatrix}=0,$$

$\otimes_{32}$ 的余子式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0,$$

因此 $A_4(\otimes)$ 是奇异性可判定灰阵. 事实上，对于任意 $\tilde{A}_4\in\{\tilde{A}_4\}$，都有

$$\det\tilde{A}_4=a_{11}a_{22}a_{33}\neq 0,$$

所以 $A_4(\otimes)$ 是恒满秩灰阵.

§3.5 灰特征值与灰特征向量

定义3.5.1 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，$\lambda(\otimes)$ 为一灰数，若存在非零

灰色向量

$$X(\otimes)=(\otimes_1,\otimes_2,\cdots,\otimes_n)^T,$$

使得 $$A(\otimes)\cdot X(\otimes)=\lambda(\otimes)\cdot X(\otimes)$$

成立，则称 $\lambda(\otimes)$为 $A(\otimes)$的灰特征值，$X(\otimes)$ 称为 $A(\otimes)$的对应于$\lambda(\otimes)$的特征向量。

定义3.5.2 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$,$\lambda(\otimes)$ 为一灰数，称灰矩阵

$$\lambda(\otimes)\cdot E - A(\otimes)$$

为$A(\otimes)$的灰色特征矩阵，称特征矩阵的行列式

$$|\lambda(\otimes)E-A(\otimes)|$$

为 $A(\otimes)$的灰色特征多项式，称行列式方程

$$|\lambda(\otimes)E-A(\otimes)|=0$$

为$A(\otimes)$的灰色特征方程。

命题3.5.1 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，则 $\lambda(\otimes)$是 $A(\otimes)$的灰特征值，$X(\otimes)$ 是 $A(\otimes)$的对应于 $\lambda(\otimes)$的灰色特征向量的充分必要条件是$\lambda(\otimes)$是灰特征方程

$$|\lambda(\otimes)E-A(\otimes)|=0$$

的根，$X(\otimes)$是齐次灰色线性方程组

$$[\lambda(\otimes)E-A(\otimes)]X(\otimes)=0$$

的非零解.

命题3.5.2 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，则转置灰阵 $A(\otimes)^T$与 $A(\otimes)$的特征值相同.

定义3.5.3 设 $A(\otimes)\in G^{n\times n}$，$A(\otimes)=(\otimes_{ij})$，$\otimes_{ij}\in[a_{ij},\overline{a}_{ij}]$,$a_{ij}<\overline{a}_{ij}$. 若

$$|a_{ii}|<\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}| \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

则称 $A(\otimes)$为下界对角强优灰阵；若

$$|a_{ii}|>\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|a_{ij}|\ (i=1,2,\cdots,n)$$

则称 $A(\otimes)$为上界对角强优灰阵。

命题3.5.3 设$A(\otimes)\in G^{n\times n}$，则有

1° 若 $A(\otimes)$为下界对角强优灰阵，则 $A(\otimes)$的下界矩阵 $\underline{A}$ 非奇异；

2° 若 $A(\otimes)$为上界对角强优灰阵，则 $A(\otimes)$的上界矩阵 $\bar{A}$ 非奇异；

3° 若 $A(\otimes)$既是上界对角强优灰阵，又是下界对角强优灰阵，且$a_{ii}\cdot\bar{a}_{ii}>0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则 $A(\otimes)$为恒满秩灰阵(灰元取数一致)。

●

第四章　灰序列生成

§4.1　灰序列生成概言

灰色系统理论的主要任务之一，就是根据社会、经济、生态等系统的行为特征数据，寻找因素之间或因素自身的数学关系与变化规律．灰色系统理论认为任何随机过程都是在一定幅值范围和一定时区变化的灰色量，并把随机过程看成灰色过程．

事实上，研究系统的行为特征，得到的数据往往是一串确定的白数，我们把它看成某个随机过程的一条轨道或现实，或是看成灰色过程的白化值，这并没有本质上的区别．如何通过系统行为特征数据研究其发展规律，不同的方法思路也不一样．

随机过程是以先验规律为出发点，研究数据的统计规律．这种方法是建立在大量数据的基础上的．但有时候，即使有了大量数据也未必一定能找到统计规律．因为概率论或随机过程中研究的典型分布是十分所限的，对于非典型的分布过程（如平稳过程、高斯过程、马尔可夫过程或白噪声过程等以外的分布过程），往往难以处理．

灰色系统是通过原始数据的整理来寻找其变化规律的，这是一种就数据寻找数的现实规律的途径，我们称为灰色序列生成．灰色系统理论认为，尽管客观系统表象复杂，数据离乱，但它总是有整体功能的，因此必然蕴涵某种内在规律．关键在于如何选择适当的方式去挖掘它和利用它．一切灰色序列都能通过某种生成弱化随机性，显现规律性．

比如已给原始数列

$$X^{(0)}=(1,2,1.5,3),$$

它没有明显的规律，将上述数据作图如下：

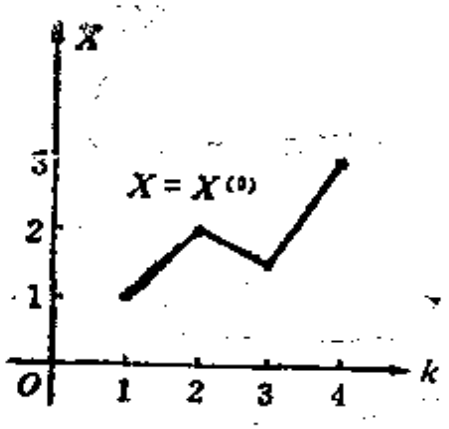


图 4.1.1

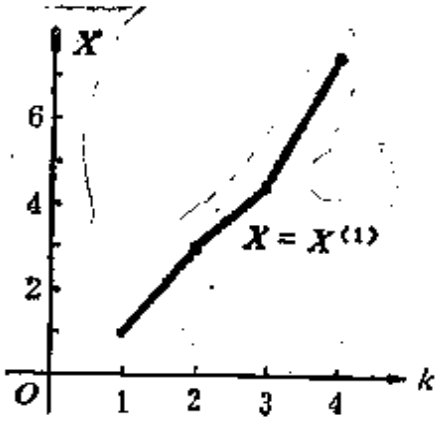


图 4.1.2

由图4.1.1可以看出，$X^{(0)}$的曲线是摆动的，起伏变化幅度较大.

对原始数据作一次累加生成，将所得新序列记为$X^{(1)}$，则

$$X^{(1)}=(1,3,4.5,7.5).$$

$X^{(1)}$已呈现明显的增长规律性，如图4.1.2所示.

§4.2 均值生成

在搜集数据时，常常由于一些不易克服的困难导致数据序列出现空缺（也称空穴）.也有一些数据序列虽然数据完整，但由于系统行为在某个时点上发生突变而形成异常数据，给研究工作带来很大困难，这时如果剔除异常数据，就会留下空穴. 因此，如何有效地填补空穴，自然成为数据处理过程中首先遇到的问题. 均值生成是常用的构造新数据、填补老序列空穴、生成新序列的方法.

定义4.2.1 设序列

$$X=(x(1),x(2),\cdots,x(k),x(k+1),\cdots,x(n)),$$

则称 $x(k)$与 $x(k+1)$为X中的一对紧邻值，$x(k)$称为前值，$x(k+1)$称为后值. 若$x(n)$为新息，则对任意$k\leqslant n-1$，称$x(k)$为老息.

定义4.2.2 设序列X在k处有空穴，记为$\varnothing(k)$，即

$$X=(x(1),x(2),\cdots,x(k-1),\varnothing(k),x(k+1),\cdots,x(n)),$$

则称$x(k-1)$和$x(k+1)$为$\varnothing(k)$的界值，$x(k-1)$称为前界，$x(k+1)$称为后界. 当$\varnothing(k)$由$x(k-1)$与$x(k+1)$生成时，称生成值$x(k)$为$[x(k-1),x(k+1)]$的内点.

定义4.2.3 设$x(k)$和$x(k-1)$为序列X中的一对紧邻值. 若有

1° $x(k-1)$为老息，$x(k)$为新息；

2° $x^*(k)=\alpha x(k)+(1-\alpha)x(k-1),\alpha\in[0,1]$

则称$x^*(k)$为由新息与老息在生成系数(权)α下的生成值. 当$\alpha>0.5$时，称$x^*(k)$的生成是“重新息、轻老息”生成；当$\alpha<0.5$时，称$x^*(k)$的生成是“重老息、轻新息”生成；当$\alpha=0.5$时，称$x^*(k)$的生成是非偏生成.

我们在时间序列预测中经常采用的指数平滑方法，就是一种“重老息、轻新息”的生成. 因其中平滑值

$$s_k^{(1)}=\alpha x_k+(1-\alpha)s_{k-1}^{(1)}$$

为新息与老息平滑值的加权和，且限定α在0.01～0.3之间取值.

定义4.2.4 设

$X=(x(1),x(2),\cdots,x(k-1),\varnothing(k),x(k+1),\cdots,x(n))$为在$k$处有空穴$\varnothing(k)$的序列，称

$$x^*(k)=0.5x(k-1)+0.5x(k+1)$$

为非紧邻均值生成数，用非紧邻均值生成数填补空穴所得的序列称为非紧邻均值生成序列.

当$x(k+1)$为新息时，非紧邻均值生成是新老信息等权的生成. 在信息缺乏、难以衡量新老信息的可靠程度时，往往采用等

权生成.

定义4.2.5 设序列$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$,若

$$x^*(k)=0.5x(k)+0.5x(k-1),$$

则称$x^*(k)$为紧邻均值生成数. 由紧邻均值生成数构成的序列为紧邻均值生成序列.

在GM建模中，常用紧邻信息的均值生成. 它是以原始序列为基础构造新序列的方法.

设$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$为$n$元序列，$Z$是$X$的紧邻均值生成序列，则$Z$为$n-1$元序列，

$$Z=(z(2),z(3),\cdots,z(n)).$$

事实上，我们无法由X生成$z(1)$. 因为按紧邻均值生成的定义，应有

$$z(1)=0.5x(1)+0.5x(0),$$

但$x(0)=\varnothing(0)$为空穴，若不作信息扩充，我们只有以下三种选择：

1° 视$x(0)$为灰数，不赋予确切数值；

2° 赋零或任意赋值；

3° 赋予一个与$x(1)$有关的值.

其中2°没有任何科学依据，而且2°中赋零和1°，3°都已不是等权均值生成的范畴.

§4.3 序列算子

由于某种冲击波的干扰，有时我们收集到的数据会呈现出过猛或过缓的变化趋势，未能反映系统的真实变化规律. 如果用这种数据直接建模、预测，而不事先排除干扰作用，所得结果往往令人难以置信. 序列算子的作用就是排除冲击波的干扰，还数据以本来面目；根据定性分析的结果，强化或弱化原始序列的变化

趋势，提高预测精度。

定义4.3.1 设$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$为原始序列，$D$为作用于$X$的算子，$X$经过算子$D$作用后所得序列记为

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d).$$

我们称D为序列算子，称XD为一次算子缓冲序列。

序列算子的作用可以多次进行。相应地，我们称

$$XD_1\circ D_2=(x(1)d_1d_2,x(2)d_1d_2,\cdots,x(n)d_1d_2)$$

为二次算子缓冲序列，称

$$XD_1\circ D_2\circ D_3=(x(1)d_1d_2d_3,x(2)d_1d_2d_3,\cdots,x(n)d_1d_2d_3)$$

为三次算子缓冲序列，等等。

序列算子D可根据原始序列受冲击波干扰的情况进行适当定义。

定义4.3.2 设序列$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$。

1° 若$x(1)\leqslant x(2)\leqslant\cdots\leqslant x(n)$，则称$X$为增长序列；

2° 若$x(1)\geqslant x(2)\geqslant\cdots\geqslant x(n)$，则称$X$为衰减序列；

3° 若存在i与j，使得$x(i)<x(i+1),x(j)>x(j+1)$，则称X为振荡序列。

定义4.3.3 设序列$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$。若其缓冲序列

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d)$$

比原序列X的增长趋势(或衰减趋势)减缓，我们称序列算子D为弱化算子；若缓冲序列XD比原来的序列X增长(或衰减)的速度更快，则称序列算子D为强化算子。

在定义算子时，应满足以下三条原则：

1° 充分参与原则。要使原始序列中的每一个数据$x(i)$都充分地参与算子作用的全过程，并能体现出其在缓冲序列中的作用。如果抛开原始数据另搞一套，那就成了毫无意义的数字游戏，既没有任何科学依据也没有任何说服力。

2° 承认现实原则，即满足$x(n)d=x(n)$。以客观事实为基

础，坚持尊重现实，承认现实，缓冲序列与原始序列基准期的数据应保持一致. 我们认识到冲击波对数据序列产生影响，导致规律失真. 要使数据呈现出其本来面目，所能做到的只是淡化冲击波对历史的影响. 我们必须以现在为基础往前走.

根据定性分析的结论，亦可使接近基准期的若干个数据在缓冲序列中保持不变，而着重淡化以前数据所受的冲击波干扰. 比如使

$$x(1)d \fallingdotseq x(1),$$
$$x(2)d \fallingdotseq x(2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x(k-1)d \fallingdotseq x(k-1),$$
$$x(k)d = x(k),$$
$$x(k+1)d = x(k+1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x(n)d = x(n).$$

3° 便于实现原则. 序列算子对每个数据的作用程序应当清晰，统一，并尽可能简化，以便于计算缓冲序列和应用计算机.

命题4.3.1 设序列算子D是遵循上述原则2°定义的且X为增长序列，则以下结论成立：

1° 弱化算子有使数据膨胀的作用；

2° 强化算子有使数据萎缩的作用.

换言之，设

$$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n)),$$
$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d).$$

若D为弱化算子，则$x(k)\leqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n.$

若D为强化算子，则$x(k)\geqslant x(k)d, k=1,2,\cdots,n.$

若X为衰减序列，则结论相反.

例4.3.1 定义4.2.5中的紧邻均值生成稍作改动，即可视为

一种序列算子作用。如果我们定义序列算子D为

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d);$$

其中

$$x(n)d=x(n),$$

$$x(n-1)d=0.5x(n)+0.5x(n-1),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(k)d=0.5x(k+1)+0.5x(k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(2)d=0.5x(3)+0.5x(2),$$

$$x(1)d=0.5x(2)+0.5x(1).$$

则D满足序列算子定义的三个原则。

命题4.3.2 设序列$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n))$,令

$$XD=(x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d),$$

其中

$$x(n)d=x(n),$$

$$x(n-1)d=\frac{1}{2}(x(n-1)+x(n)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(k)d=\frac{1}{n-k+1}(x(k)+x(k+1)+\cdots+x(n)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x(2)d=\frac{1}{n-1}(x(2)+x(3)+\cdots+x(n)),$$

$$x(1)d=\frac{1}{n}(x(1)+x(2)+\cdots+x(n)),$$

则D为满足序列算子定义三个原则的弱化算子。当X为单调递增序列时，D可以减缓其增长速度；当X为单调递减序列时，D可以降低其衰减速度。

命题4.3.3 在命题4.3.2的基础上，令

$$XD^2=XD\circ D=(x(1)d^2,x(2)d^2,\cdots,x(n)d^2),$$

其中 $$x(k)d^2=\frac{1}{n-k+1}(x(k)d+x(k+1)d+\cdots+x(n)d),$$

$$k=1,2,\cdots,n$$

则 D^2 为二阶弱化算子.

例4.3.2 河南省长葛县乡镇企业产值数据(1983～1986)为:

$$X=(10155,12588,23480,35388),$$

增长势头很猛. 1983～1986年每年平均递增51.6%，尤其是1984～1986年，平均每年递增67.7%. 参与该县发展规划制定工作的各阶层人士(包括领导层、专家层、群众层)普遍认为该县乡镇企业产值今后不可能一直保持这么高的发展速度. 用现有数据直接建模预测，预测结果人们根本无法接受. 经过认真分析和讨论，大家认识到，增长速度高主要是由于基数低，而基数低的原因则是过去对有利于乡镇企业发展的政策没有能用足、用活、用好. 要弱化序列增长趋势，就需要将对乡镇企业发展比较有利的现行政策因素附加到过去的年份中. 为此引入命题 4.3.3 所示的二阶弱化算子，得到二阶缓冲序列

$$XD^2=(27260,29547,32411,35388).$$

用XD^2建模预测，结果1986～2000年该县乡镇企业产值平均每年递 增 9.4%，人们普遍认为这比较符合该县乡镇企业发展趋势.

§4.4 光 滑 序 列

处处可导是光滑连续函数的特性，而序列是由离散的单个点构成的，根本无导数可言(通常意义下)，因此不能用导数研究序列的光滑性. 我们再从另外的角度去研究光滑连续函数的特性. 若某序列具有与光滑连续函数大致相近的特征，便认为此序列是光滑的.

不妨设 $X(t)$ 为一条单调递增连续曲线，如图4.4.1所示.

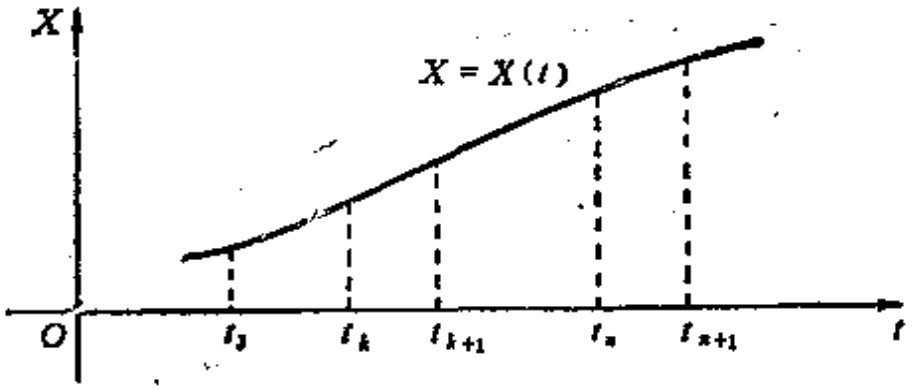


图 4.4.1

将所考虑的时区中置入$n+1$个分点

$$t_1<t_2<\cdots<t_k<t_{k+1}<\cdots<t_{n+1}.$$

记$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$, $k=1,2,\cdots,n$. 相应地得到 $X(t)$ 的 n 个分段，在第 k 段

$$[x(t_k),x(t_{k+1})] \qquad k=1,2,\cdots,n$$

内任取一点，记为 $x(k)$，可得内点序列

$$X=(x(1),x(2),\cdots,x(n)).$$

再将所有的小分段的下边界点取出，可得下边界点序列

$$X_0=(x(t_1),x(t_2),\cdots,x(t_n)).$$

如果 $X(t)$ 为光滑连续函数，则当时区分割得足够细密时，应有

1° 任意两个内点序列充分接近；

2° 任意内点序列与下边界点序列充分接近。

综上所述，可得光滑连续函数的序列化定义。

定义4.4.1 设$[a,b]$为一时区，将$[a,b]$分成n个小时区Δt_k, $k=1,2,\cdots,n$. 若分法满足

1° $\Delta t_k=[t_k,t_{k+1}]$；

2° $\bigcup_{k=1}^{n}\Delta t_k=[a,b]$；

3° 当 $i\neq j$ 时，$\Delta t_i\cap\Delta t_j=\varnothing$.

则称$\Delta t_k(k=1,2,\cdots,n)$为$[a,b]$的一种划分.

定义4.4.2 设$X(t)$是定义在$[a,b]$上的连续函数，在$[a,b]$中插入分点

$$a=t_1<t_2<\cdots<t_n<t_{n+1}=b,$$

得到$[a,\ b]$的一个划分$\Delta t_k=[t_k,\ t_{k+1}]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 我们同时用$\Delta t_k$表示$[t_k,\ t_{k+1}]$的长度，$\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$，$k=1,2,\ \cdots,\ n$. 在$[t_k,\ t_{k+1}]$中任取一点，得$x(k)$，从而有序列]

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)).$$

记

$$X_0=(x(t_1),x(t_2),\ \cdots,\ x(t_n))$$

为下边界点序列. 令$\Delta t=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta t_k\}$，设$d$为$n$维空间中的距离函数，$X^*$为指定可导函数的代表序列. 若当$\Delta t\to 0$时，无论时区$[a,\ b]$如何划分，小时段上的内点如何选取，都有

1° 对任意的内点序列X_i,X_j，$d(X^*,\ X_i)=d(X^*,\ X_j)$;

2° $d(X^*,\ X)=d(X^*,\ X_0)$,

则称$X(t)$为光滑连续函数.

下面我们来定义光滑序列. 在定义光滑连续函数时，我们主要根据其内点是否与下边界点序列重合，内点序列、下边界点序列是否与某个可导函数的代表序列重合. 而序列却只有边界点而无内点，两个点之间是空的. 为解决这一问题，我们采用均值生成方法利用边界点生成内点.

定义4.4.3 设序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,x(n),x(n+1)),$$

Z是X的均值生成序列，

$$Z=(z(1),\ z(2),\ \cdots,\ z(n)),$$

其中$z(k)=0.5x(k)+0.5x(k+1)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. X^*是某一可导函数的代表序列，d为n维空间中的距离函数. 我们将X删去$x(n+1)$后所得序列仍记为X，若X满足：

1° 当 k 充分大时，$x(k)<\sum_{i=1}^{k-1}x(i)$；

2° $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x^*(k)-x(k)|\geqslant\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|x^*(k)-z(k)|$；

则称 X 为光滑序列．1°，2°称为序列光滑条件．

定义4.4.4 设 X 为光滑序列，Z 为 X 的均值生成序列，X^* 是指定可导函数的代表序列，d 为 n 维空间中的距离函数．若存在 $\varepsilon\in[0,\ 1]$，使

$$|d(X^*,\ X)-d(X^*,\ Z)|\leqslant\varepsilon,$$

则称序列 X 的光滑度大于 $\frac{1}{\varepsilon}$，称

$$|d(X^*,X)-d(X^*,Z)|^{-1}$$

为序列 X 的光滑度，记为 $S(d)$．当 $|d(X^*,\ X)-d(X^*,\ Z)|=0$，即 $S(d)=\infty$ 时，我们称 X 为无限光滑序列．

命题4.4.1 若序列 X 中的数据成直线分布，则 X 为无限光滑序列．

§4.5 级比与光滑比

当序列的起点 $x(1)$ 和终点 $x(n)$ 为空穴时，即 $x(1)=\varnothing(1)$，$x(n)=\varnothing(n)$，无法采用均值生成填补空穴，只有转而考虑别的方法．级比生成和光滑比生成就是常用的填补序列端点空穴的方法．

定义4.5.1 设序列 $X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$，我们称

$$\sigma(k)=\frac{x(k)}{x(k-1)},\quad k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

为序列 X 的级比．称

$$\rho(k)=\frac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x(i)},\quad k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$$

为序列X的光滑比.

定义4.5.2　设X为端点是空穴的序列,

$$X=(\varnothing(1),x(2),\cdots,x(n-1),\varnothing(n)).$$

若用$\varnothing(1)$右邻的级比（或光滑比）生成$x(1)$，用$\varnothing(n)$左邻的级比(或光滑比)生成$x(n)$，则称$x(1)$和$x(n)$为级比生成(或光滑比生成)，按级比生成(或光滑比生成)填补空穴所得的序列称为级比生成(或光滑比生成)序列.

命题4.5.1　设X是端点为空穴的序列.

1°　若采用级比生成，则

$$x(1)=x(2)/\sigma(3),\quad x(n)=x(n-1)\sigma(n-1);$$

2°　若采用光滑比生成，则

$$x(1)=\frac{x^2(2)}{x(3)-x(2)},\quad x(n)=x(n-1)(1+\rho(n-1)).$$

命题4.5.2　级比与光滑比有下述关系:

$$\sigma(k+1)=\frac{\rho(k+1)}{\rho(k)}(1+\rho(k)),\quad k=2,\ 3,\ \cdots,\ n.$$

命题4.5.3　若$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$为递增序列，且有

1°　对于$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$，$\sigma(k)<2$;

2°　对于$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$，$\dfrac{\rho(k+1)}{\rho(k)}<1$(即光滑比递减)，

则对指定的实数$\varepsilon\in[0,\ 1]$和$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n$，当$\rho(k)\in[0,\varepsilon]$时，必有$\sigma(k+1)\in[0,\ 1+\varepsilon]$.

例4.5.1　设

$$X=(2.874,\ 3.278,\ 3.337,\ 3.390,\ 3.679),$$

则 $\sigma(2)=\dfrac{x(2)}{x(1)}=\dfrac{3.278}{2.874}=1.14$,

$\sigma(3)=1.017$, $\sigma(4)=1.015$, $\sigma(5)=1.085$,

满足对于$k=2$, 3, 4, 5, $\sigma(k)<2$.

$$\rho(2)=\frac{x(2)}{x(1)}=1.14,$$

$$\rho(3)=\frac{x(3)}{x(1)+x(2)}=0.5425,$$

$$\rho(3)=\frac{x(4)}{x(1)+x(2)+x(3)}=0.3573,$$

$$\rho(4)=\frac{x(5)}{x(1)+x(2)+x(3)+x(4)}=0.2856,$$

满足对于 $k=2$, 3, 4, 5, $\dfrac{\rho(k+1)}{\rho(k)}<1$.

若$\rho(2)$不视为光滑比，则当$k=3$, 4, 5时，

$$\rho(k)\in[0,0.5425]=[0,\ \varepsilon],$$

而$\sigma(k+1)\in[0,\ 1.085]\subset[0,\ 1+\varepsilon]$, $k=2$, 3, 4.

定义4.5.3 若序列满足

1° $\dfrac{\rho(k+1)}{\rho(k)}<1$, $k=2$, 3, …, $n-1$;

2° $\rho(k)\in[0,\ \varepsilon]$, $k=3$, 4, …, n;

3° $\varepsilon<0.5$,

则称X为准光滑序列.

定义4.5.4 设 X 为有空穴的序列，若新序列生成满足准光滑条件，则称此生成为准光滑生成.

§4.6 累加生成与累减生成

累加生成是使灰过程由灰变白的一种方法，它在灰

色系统理论中占有极其重要的地位．通过累加可以看出灰量积累过程的发展态势，使离乱的原始数据中蕴涵的积分特性或规律充分显露．如一个家庭的支出，若按日计算，可能没有什么明显的规律，若按月计算，支出的规律性就可能会显现出来，它大体与月工资收入成某种关系；一种农作物的单粒重，一般说没有什么规律，人们常用千粒重作为农作物品种评估指标；一个生产重型机械设备的厂家，由于产品生产周期长，其产量、产值若按天计算，就没有规律，若按年计，则规律较好．

累减生成是在需要获得增量信息时常用的生成，同时累减生成对累加生成起还原作用．累减生成与累加生成是一对互逆的序列算子．

定义4.6.1 设$X^{(0)}$为原始序列，D为序列算子，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

$$X^{(0)}D=(x^{(0)}(1)d,\ x^{(0)}(2)d,\ \cdots,\ x^{(0)}(n)d),$$

其中 $$x^{(0)}(k)d=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则称 D 为 $X^{(0)}$ 的一次累加生成算子，记为 1-AGO (Acumlated Generating Operator)．称 r 阶算子D^r为$X^{(0)}$的 r 次累加生成算子，记为r-AGO．

习惯上，我们记

$$X^{(0)}D=X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ \cdots,\ x^{(1)}(n)),$$

$$X^{(0)}D^r=X^{(r)}=(X^{(r)}(1),\ x^{(r)}(2),\ \cdots,x^{(r)}(n)),$$

其中 $$x^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(r-1)}(i),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

定义4.6.2 设$X^{(0)}$为原始序列，D为序列算子，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

$$X^{(0)}D=(x^{(0)}(1)d,\ x^{(0)}(2)d,\ \cdots,\ x^{(0)}(n)d),$$

其中 $$x^{(0)}(k)d=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则称D为$X^{(0)}$的一次累减生成算子. r阶算子D^r称为$X^{(0)}$的r次累减生成算子.

习惯上，我们记

$$X^{(0)}D=\alpha^{(1)}X^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(1),\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

$$X^{(0)}D^r=\alpha^{(r)}X^{(0)}=(\alpha^{(r)}x^{(0)}(1),\ \alpha^{(r)}x^{(0)}(2),\cdots,\alpha^{(r)}x^{(0)}(n))$$

其中 $$\alpha^{(r)}x^{(0)}(k)=\alpha^{(r-1)}x^{(0)}(k)-\alpha^{(r-1)}x^{(0)}(k-1),$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

由以上定义，显然有

定理4.6.1 累减算子是累加算子的逆算子，即

$$\alpha^{(r)}X^{(r)}=X^{(0)}.$$

鉴于累减与累加互逆，我们将累减记为IAGO.

例4.6.1 设某灰数按年统计的数据序列为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)).$$

若按年分月统计，则第k年的数据序列为

$$X^{(0)}(k)=(x^{(0)}(1,k),x^{(0)}(2,k),\cdots,x^{(0)}(12,k)),$$

若按年分月逐日统计，则第k年第j月的数据序列为

$$X^{(0)}(j,k)=(x^{(0)}(1,j,k),x^{(0)}(2,j,k),\cdots,x^{(0)}(30,j,k)),$$

若按年分月逐日划时统计，则第k年第j月第i日的数据序列为

$$X^{(0)}(i,j,k)=(x^{(0)}(1,i,j,k),x^{(0)}(2,i,j,k),\cdots,x^{(0)}(24,i,j,k)),$$

其中$x^{(0)}(h,\ i,\ j\ ,k)$，$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ 24)$为第k年第j月第i日第h时的数据.

显然有

$$x^{(0)}(k)=\sum_{j=1}^{12}x^{(0)}(j,\ k),$$

$$x^{(0)}(j,\ k)=\sum_{i=1}^{30}x^{(0)}(i,\ j,\ k),$$

$$x^{(0)}(i,\ j,\ k)=\sum_{h=1}^{24}x^{(0)}(h,\ i,\ j,\ k),$$

$$x^{(0)}(k)=\sum_{j=1}^{12}\sum_{i=1}^{30}\sum_{h=1}^{24}x^{(0)}(h,\ i,\ j,\ k),$$

这是分层累加，而不是我们定义的累加生成(时序累加).

命题4.6.1 设$X^{(0)}$为非负序列，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

其中$x^{(0)}(k)\geqslant 0$且$x^{(0)}(k)\in[a,\ b]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

$$X^{(r)}=(x^{(r)}(1),\ x^{(r)}(2),\ \cdots,\ x^{(r)}(n))$$

为$X^{(0)}$的r次累加生成序列，则当r充分大时，对于任意$\varepsilon>0$，存在N，使对任意k，$N<k\leqslant n$，有下式成立：

$$\frac{x^{(r)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(r)}(i)}<\varepsilon.$$

这就是说，对于有界非负序列，经过多次累加生成后，所得序列可充分光滑，且光滑比$\rho(k)\to 0(k\to\infty)$.

命题4.6.2 设$X^{(0)}$为非负序列，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

其中$x^{(0)}(k)\geqslant 0$且$x^{(0)}(k)\in[a,\ b]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ \cdots,\ x^{(1)}(n))$$

为$X^{(0)}$的一次累加生成序列，

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ \cdots,\ z^{(1)}(n))$$

为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列，则对任意的$\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\in[0,\ 1]$，存在正整数$N=N(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$，使对任意的$k$，$N<k\leqslant n$，有

$$\rho(k)=\frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)}<\varepsilon_1,\quad\frac{x^{(0)}(k)}{z^{(1)}(k)}<\varepsilon_2.$$

证明：只需证 $z^{(1)}(k)\geqslant\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)$，其它显而易见．由定义

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)=x^{(1)}(k-1)=0.5^{(1)}x(k-1)+0.5x^{(1)}(k-1),$$

但
$$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)=\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)+x^{(0)}(k)$$
$$=x^{(1)}(k-1)+x^{(0)}(k)$$

又$x^{(0)}(k)\geqslant 0$，所以

$$z^{(1)}(k)\geqslant\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i).$$ ∎

累加生成与均值生成都能提高序列的光滑度，有时作完累加生成后还可以再作一次均值生成．

§4.7 累加生成的灰指数律

一般的非负准光滑序列经过累加生成之后，都会减少随机性，呈现出近似的指数增长规律．原始序列越光滑，生成后指数规律也越明显．如某市自行车销售量数据序列

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(k)\}_1^6=(50810,\ 46110,\ 51177,$$
$$93775,\ 110574,\ 110524)$$

和其一次累加生成序列

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(k)\}_1^6=(50810,\ 96920,\ 148097,$$
$$241872,\ 352446,\ 462970)$$

的曲线分别如图4.7.1和图4.7.2所示．

图4.7.1的曲线$X=X^{(0)}$，我们很难找到一条简单的曲线来逼近它，而图4.7.2中的曲线$X=X^{(1)}$，已十分接近指数增长曲线，可以用指数函数进行拟合．

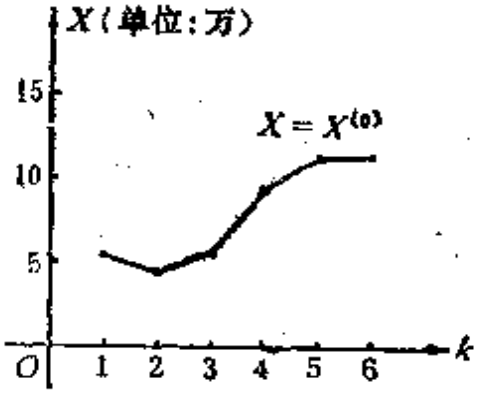


图 4.7.1

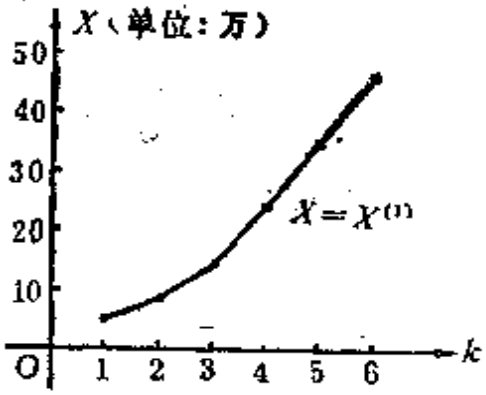


图 4.7.2

定义4.7.1 设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

$$\alpha^{(1)}X^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(1),\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \cdots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n))$$

为$X^{(0)}$的一次累减生成序列，

1° 若有 k，使$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1)>0$，则称序列$X^{(0)}$在第 k 步是增长的，反之，称$X^{(0)}$在第 k 步是衰减的；

2° 若对于$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，恒有 $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)>0$，则称序列$X^{(0)}$为非波动增长序列(或称步步增长序列)；

3° 若对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，恒有 $\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)<0$，则称 $X^{(0)}$为非波动衰减序列；

4° 若存在 $k_1,\ k_2$，使$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k_1)>0$，$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k_2)<0$，则称$X^{(0)}$为随机序列.

定义4.7.2 1° 若 $X^{(0)}$为非波动序列，$\alpha^{(1)}X^{(0)}$为随机序列，则称 $X^{(0)}$为一阶弱随机序列；

2° 若对于 $i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r-1$，$\alpha^{(i)}X^{(0)}$ 皆为非波动序列，而 $\alpha^{(r)}X^{(0)}$为随机序列，则称 $X^{(0)}$为 r 阶弱随机序列；

3° 若对于任意的 r，$r\to\infty$，$\alpha^{(r)}X^{(0)}$ 为非波动序列，则称$X^{(0)}$为非随机序列.

定理4.7.1 设$X^{(0)}$为正序列，即

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

$$x^{(0)}(k)\geqslant 0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

$X^{(r)}$为$X^{(0)}$的 r 次累加生成序列，则 $X^{(r)}$必为 r 阶弱随机序列.

定义4.7.3 设连续函数

$$X(t)=ce^{at}+b,\ c,\ a\neq 0,$$

1° 当 $b=0$时，称$X(t)$为齐次指数函数；

2° 当 $b\neq 0$时，称 $X(t)$ 为非齐次指数函数.

定义4.7.4 设序列$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$.

1° 若对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x(k)=ce^{ak},\ c,\ a\neq 0$，则称 X次齐指为数序列；

2° 若对于 $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x(k)=ce^{ak}+b,\ c,\ a,b\neq 0$，则称$X$为非齐次指数序列.

定理4.7.2 X为齐次指数序列的充分必要条件是，对于$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，恒有$\sigma(k)=\text{const}$成立.

证明：⇒). 设任意 k，$x(k)=ce^{ak}$，$c,\ a\neq 0$，则

$$\sigma(k)=\frac{x(k)}{x(k-1)}=\frac{ce^{ak}}{ce^{a(k-1)}}=e^{a}=\text{const};$$

⇐). 再设任意k，$\sigma(k)=\text{const}=e^{a}$，则

$$x(k)=e^{a}x(k-1)=e^{2a}x(k-2)=\cdots=x(1)e^{a(k-1)}.$$ ∎

定义4.7.5 设序列$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$.

1° 若对任意 k，$\sigma(k)\in(0,\ 1]$，则称序列X具有负的灰指数规律；

2° 若对任意 k，$\sigma(k)\in(1,\ b]$，则称序列X具有正的灰指数规律；

3° 若对任意k，$\sigma(k)\in[a,\ b]$，$b-a=\delta$，则称X具有绝对灰度为 δ 的灰指数规律；

4° 当$\delta<0.5$时，称X具有准指数规律.

定理4.7.3 设 $X^{(0)}$为非负准光滑序列，则$X^{(0)}$的一次累加生

成序列 $X^{(1)}$ 具有准指数规律.

证明：$$\sigma^{(1)}(k)=\frac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}=\frac{x^{(0)}(k)+x^{(1)}(k-1)}{x^{(1)}(k-1)}$$

$$=1+\rho(k),$$

按照准光滑序列的定义，对每个k，有$\rho(k)<0.5$，所以

$$\sigma^{(1)}(k)\in[1,\ 1.5),\ \delta<0.5,$$

即$X^{(1)}$具有准指数规律. ∎

定理 4.7.3 是灰色系统建模的理论基础. 事实上，由于经济系统、生态系统、农业系统等均可视为广义的能量系统，而能量的积存和释放，一般具有指数规律. 因此，灰色系统理论的指数模型具有十分广泛的适应性.

定理4.7.4 设 $X^{(0)}$ 为非负序列，若 $X^{(r)}$ 具有指数规律，且 $X^{(r)}$的级比$\sigma^{(r)}(k)=\sigma$，则有

1° $\sigma^{(r+1)}(k)=\dfrac{1-\sigma^{k}}{1-\sigma^{k-1}}$;

2° 当 $\sigma\in(0,\ 1)$时，$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^{(r+1)}(k)=1$,

对每个k，$\sigma^{(r+1)}(k)\in(1,\ 1+\sigma]$;

3° 当$\sigma>1$时，$\lim\limits_{k\to\infty}\sigma^{(r+1)}(k)=\sigma$,

对每个k，$\sigma^{(r+1)}(k)\in(\sigma,\ 1+\sigma]$.

证明：1° $X^{(r)}$具有指数规律，且对每个k，

$$\sigma^{(r)}(k)=\frac{x^{(r)}(k)}{x^{(r)}(k-1)}=\sigma,$$

则对每个k，$x^{(r)}(k)=\sigma x^{(r)}(k-1)=\sigma^2x^{(r)}(k-2)=\cdots$

$$=\sigma^{k-1}x^{(r)}(1),$$

$$X^{(r)}=(x^{(r)}(1),\ \sigma x^{(r)}(1),\ \sigma^2x^{(r)}(1),\ \cdots,$$

$$\sigma^{n-1}x^{(r)}(1)),$$

$$X^{(r+1)}=(x^{(r)}(1),(1+\sigma)x^{(r)}(1),(1+\sigma+\sigma^2)$$

$$\cdot x^{(r)}(1),\cdots,(1+\sigma+\cdots\sigma^{n-1})x^{(r)}(1)),$$

$$\sigma^{(r+1)}(k)=\frac{x^{(r+1)}(k)}{x^{(r+1)}(k-1)}=\frac{(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{k-1})x^{(r)}(1)}{(1+\sigma+\sigma^2+\cdots+\sigma^{k-2})x^{(r)}(1)}$$

$$=\frac{\dfrac{1-\sigma^k}{1-\sigma}}{\dfrac{1-\sigma_1^{k-1}}{1-\sigma}}=\frac{1-\sigma^k}{1-\sigma^{k-1}}.$$

2° 当 $0<\sigma<1$ 时，$\sigma^{(r+1)}(k)$随k增大而递减.当 $k=2$时，

$$\sigma^{(r+1)}(1)=\frac{x^{(r+1)}(2)}{x^{(r+1)}(1)}=1+\sigma;$$

当 $k\to\infty$ 时，$\sigma^{(r+1)}(k)=\dfrac{1-\sigma^k}{1-\sigma^{k-1}}\longrightarrow 1.$

故对每个k，$\sigma^{(r+1)}(k)\in(1,\ 1+\sigma]$.

3° 当$\sigma>1$时，$\sigma^{(r+1)}(k)$随着 k 的增大而递减.当 $k=2$时，$\sigma^{(r+1)}(2)=1+\sigma$，当$k\to\infty$时，

$$\sigma^{(r+1)}(k)=\frac{1-\sigma^k}{1-\sigma^{k-1}}\longrightarrow\sigma,$$

所以，对每个 k，$\sigma^{(r+1)}(k)\in(\sigma,\ 1+\sigma]$. ∎

上述定理 4.7.4 说明，如果 $X^{(0)}$ 的 r 次累加生成序列已具有明显的指数规律，再作 AGO 生成反而会破坏其规律性，使指数规律变灰. 它告诉我们，累加生成应适可而止. 在实际应用中，如果 $X^{(0)}$ 的 r 次生成序列具有准指数规律，我们一般不再作更高次的生成. 根据 定理 4.7.3，对于非负准光滑序列，只进行一次累加生成即可建立指数模型.

第五章　灰关联分析

§5.1　灰关联分析概言

一般的抽象系统，如社会系统、经济系统、农业系统、生态系统、农机系统、教育系统等都包含有许多种因素，多种因素共同作用的结果决定系统的发展态势．我们常常希望知道在众多的因素中，哪些是主要因素，哪些是次要因素？哪些因素对系统发展影响大，哪些因素对系统发展影响小？哪些因素对系统发展起推动作用，需强化发展，哪些因素对系统发展起阻碍作用，需加以抑制……，这些都是系统分析中人们普遍关心的问题．比如粮食生产系统，我们希望提高粮食总产量，而影响粮食总产的因素是多方面的，有播种面积以及水利、肥料、土壤、种子、劳力、气候、耕作技术和政策环境等．为了达到少投入多产出，并取得良好的经济效益、社会效益和生态效益，就必须进行系统分析．

数理统计中的回归分析、方差分析、主成分分析等都是用来进行系统分析的方法．这些方法都具有下述不足之处：

1°　要求有大量数据，数据量少就难以找到统计规律．

2°　要求样本服从某个典型的概率分布，要求各因素数据与系统特征数据之间呈线性关系．这种要求十分苛刻，难以满足．

3°　计算量大，一般要靠计算机帮助．

4°　可能出现量化结果与定性分析结果不符的现象，导致系统的关系和规律遭到歪曲和颠倒．

尤其是我国统计数据十分有限，而且现有数据灰度较大，再

加上人为的原因，许多数据都出现几次大起大落，没有什么典型的分布规律．因此，采用数理统计方法往往难以奏效。

灰关联分析方法弥补了用数理统计方法作系统分析所导致的缺憾．它对样本量的多少和样本有无规律都同样适用，而且计算量小，十分简便，更不会出现量化结果与定性分析结果不符的情况．

灰关联分析的基本思想是根据序列曲线几何形状的相似程度来判断其联系是否紧密。曲线越接近，相应序列之间的关联度就越大，反之就小。

对一个抽象的系统或现象进行分析，首先要选准反映系统行为特征的数据序列。我们称为找系统行为的映射量，用映射量来间接地表征系统行为。如用国民平均接受教育的年数来反映教育发达程度，用刑事案件的发案率来反映社会治安面貌和社会秩序，用医院挂号次数来反映国民的健康水平等．有了系统行为特征数据和相关因素的数据，可首先作出各个序列的图形，从直观上进行分析．比如我们有某地区农业总产值 X_0、种植业总产值 X_1、畜牧业总产值 X_2 和农村工副业总产值 X_3 从 1982 年到 1987 年共 6 年的统计数据如下：

$$X_0=(18,\ 20,\ 22,\ 35,\ 41,\ 46),$$
$$X_1=(8,\ 11,\ 12,\ 17,\ 24,\ 29),$$
$$X_2=(3,\ 2,\ 7,\ 4,\ 11,\ 6),$$
$$X_3=(5,\ 7,\ 7,\ 11,\ 5,\ 10).$$

各序列 $X_i(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$ 的曲线如图 5.1.1 所示．从直观上看，与农业总产值曲线最相似的是种植业产值曲线，而畜牧业产值曲线和农村工副业产值曲线与农业总产值曲线在几何形状上差别较大．因此，我们可以说该地区的农业仍然是以种植业为主的农业，畜牧业和农村工副业还不够发达．根据实际问题的需要，还可以进一步进行量化研究分析．

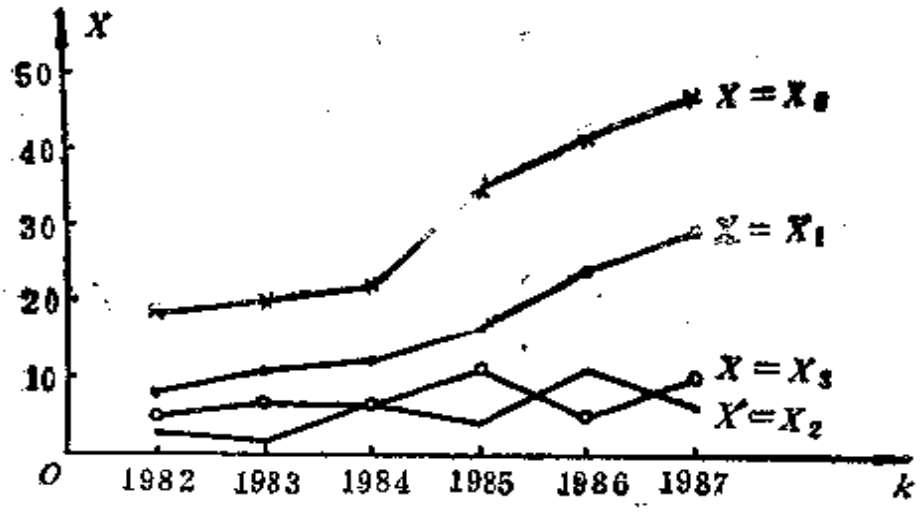


图 6.1.1

§5.2 灰关联因素与关联算子集

进行系统分析，选准系统行为特征的映射量后，还需进一步明确影响系统主行为的有效因素。若要作量化研究分析，则需对系统行为特征映射量和各有效因素进行适当处理，通过算子作用，使之化为数量级大体相近的无量纲数据，并将负相关因素转化为正相关因素。

定义 5.2.1 设 X_i 为系统因素，其在序号 k 上的观测数据为 $x_i(k)$，$k=1, 2, \cdots, n$，则称

$$X_i=(x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(n))$$

为因素 X_i 的行为序列；

若 k 为时间序号，$x_i(k)$ 为因素 X_i 在 k 时刻的观测数据，则称

$$X_i=(x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(n))$$

为因素 X_i 的行为时间序列；

若 k 为指标序号，$x_i(k)$ 为因素 X_i 关于第 k 个指标的观测

数据，则称

$$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$$

为因素 X_i 的行为指标序列；

若 k 为观测对象序号，$x_i(k)$ 为因素 X_i 关于第 k 个对象的观测数据，则称

$$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$$

为因素 X_i 的行为横向序列。

比如，当 X_i 为经济因素时，若 k 为时间，$x_i(k)$ 为因素 X_i 在时刻 k 的观测数据，$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 是经济行为时间序列；若 k 为指标序号，则 $X_i=(x_i(1),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为经济行为指标序列；若 k 为不同经济区域或经济部门的序号，则 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为经济行为横向序列。

无论是时间序列数据、指标序列数据还是横向序列数据，都可以用来作关联分析。

定义 5.2.2 设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为因素 X_i 的行为序列，D_1 为序列算子，

$$X_iD_1=(x_i(1)d_1,\ x_i(2)d_1,\ \cdots,\ x_i(n)d_1),$$

其中 $$x_i(k)d_1=x_i(k)/x_i(1),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称 D_1 为初值化算子，X_i 为原象，X_iD_1 为 X_i 在初值化算子 D_1 下的象，简称初值象。

定义 5.2.3 设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为行为序列，

$$X_iD_2=(x_i(1)d_2,\ x_i(2)d_2,\ \cdots,\ x_i(n)d_2),$$

其中 $$x_i(k)d_2=\frac{x_i(k)}{\overline{X}_i},\quad \overline{X}_i=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i(k),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称 D_2 为均值化算子，称 X_iD_2 为 X_i 在均值化算子 D_2 下的象，简称均值象。

定义 5.2.4 设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为行为序

列，

$$X_iD_3=(x_i(1)d_3,\ x_i(2)d_3,\ \cdots,\ x_i(n)d_3),$$

其中
$$x_i(k)d_3=\frac{x_i(k)-\min\limits_k x_i(k)}{\max\limits_k x_i(k)-\min\limits_k x_i(k)},\quad k=1,2,\cdots,n,$$

则称 D_3 为区间值化算子，称 X_iD_3 为区间值象.

命题 5.2.1 初值化算子 D_1，均值化算子 D_2 和区间值化算子 D_3 皆可使系统行为序列无量纲化，且在数量上规一.

一般地，D_1，D_2，D_3 不宜混合、重叠作用，在进行系统因素分析时，可根据实际情况选用其中的一个.

定义 5.2.5 设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为行为序列，若 $x_i(k)\in[0,\ 1]$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，

$$X_iD_4=(x_i(1)d_4,\ x_i(2)d_4,\ \cdots,\ x_i(n)d_4),$$

其中
$$x_i(k)d_4=1-x_i(k),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称 D_4 为逆化算子，称 X_iD_4 为行为序列 X_i 在逆化算子 D_4 下的象，简称逆化象.

命题 5.2.2 任意行为序列的区间值象有逆化象.

事实上，区间值象中的数据皆属于 [0，1] 区间，故可以定义逆化算子.

定义 5.2.6 设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$ 为行为序列，

$$X_iD_5=(x_i(1)d_5,\ x_i(2)d_5,\ \cdots,\ x_i(n)d_5),$$

其中
$$x_i(k)d_5=1/x_i(k),\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则称 D_5 为倒数化算子，称 X_iD_5 为倒数化象.

命题 5.2.3 若系统因素 X_i 与系统主行为 X_0 呈负相关关系，则 X_i 的逆化算子作用象 X_iD_4 和倒数化算子作用象 X_iD_5 与 X_0 具有正相关关系.

定义 5.2.7 称 $D=\{D_i|i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 为灰关联算子

集.

定义 5.2.8 设X为系统因素集合，D为灰关联算子集，称(X, D)为灰关联因子空间.

§5.3 距离空间

由系统因素集合和灰关联算子集构成的因子空间是灰关联分析的基础，而因素行为之间的比较、评估则是灰关联分析的首要任务.

若将系统因素集合中的各个因素视为空间中的点，将每一因素对于不同时刻或不同指标、不同对象的观测数据视为点的坐标，我们就可以在特定的n维空间中研究各因素之间或因素与系统特征之间的关系，能够依托n维空间中的距离定义灰色关联度.

定义 5.3.1 设X, Y, Z为n维空间中的点. 若实数$d(X, Y)$满足下列条件：

1° $d(X, Y)\geqslant 0$, $d(X, Y)=0\Leftrightarrow X=Y$;

2° $d(X, Y)=d(Y, X)$;

3° $d(X, Z)\leqslant d(X, Y)+d(Y, Z)$.

则称$d(X, Y)$为n维空间中的距离.

命题 5.3.1 设

$$X=(x(1), x(2), \cdots, x(n)),$$

$$Y=(y(1), y(2), \cdots, y(n))$$

为n维空间中的点，定义

$$d_1(X, Y)=|x(1)-y(1)|+|x(2)-y(2)|+\cdots+|x(n)-y(n)|;$$

$$d_2(X, Y)=[|x(1)-y(1)|^2+|x(2)-y(2)|^2+\cdots+|x(n)-y(n)|^2]^{\frac{1}{2}};$$

$$d_3(X, Y)=\frac{d_1(X, Y)}{1+d_1(X, Y)};$$

$$d_p(X,\ Y)=[|x(1)-y(1)|^p+|x(2)-y(2)|^p+\cdots$$
$$+|x(n)-y(n)|^p]^{1/p};$$
$$d_\infty(X,\ Y)=\max_k\{|x(k)-y(k)|\,|k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}.$$

则 $d_1(X,\ Y)$, $d_2(X,\ Y)$, $d_3(X,\ Y)$, $d_p(X,\ Y)$, $d_\infty(X,Y)$ 皆为 n 维空间中的距离.

定义 5.3.2 设 n 维空间中的点

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)),$$
$$O=(0,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$

为 n 维空间的原点，则 X 与原点 O 的距离 $d(X,\ O)$ 称为 X 的范数，记为 $\|X\|$.

相应于命题 5.3.1 中的距离，可得如下常用范数：

1° 1-范数 $\|X\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x(k)|$;

2° 2-范数 $\|X\|_2=\left[\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^2\right]^{1/2}$;

3° p-范数 $\|X\|_p=\left[\sum_{k=1}^{n}|x(k)|^p\right]^{1/p}$;

4° ∞-范数 $\|X\|_\infty=\max_k\{|x(k)|\}$.

定义 5.3.3 设 $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$ 为连续函数，若实数 $d(X(t),\ Y(t))$ 满足下列条件：

1° $d(X(t),\ Y(t))\geqslant 0$,

$d(X(t),\ Y(t))=0\Leftrightarrow\forall t,\ X(t)=Y(t)$;

2° $d(X(t),\ Y(t))=d(Y(t),\ X(t))$;

3° $d(X(t),\ Z(t))\leqslant d(X(t),\ Y(t))+d(Y(t),\ Z(t))$.

则称 $d(X(t),\ Y(t))$ 为函数空间中的距离.

这里，我们将连续函数 $X(t)$, $Y(t)$ 视为函数空间中的两个“点”.

命题 5.3.2 设 $X(t)$，$Y(t)$ 为定义在区间 $[a, b]$ 上的连续函数，定义

$$d_1(X(t), Y(t)) = \int_a^b |X(t) - Y(t)| \mathrm{d}t;$$

$$d_2(X(t), Y(t)) = \left[\int_a^b |X(t) - Y(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2};$$

$$d_3(X(t), Y(t)) = \frac{d_1(X(t), Y(t))}{1 + d_1(X(t), Y(t))};$$

$$d_4(X(t), Y(t)) = \int_a^b \frac{|X(t) - Y(t)|}{1 + |X(t) - Y(t)|} \mathrm{d}t;$$

$$d_p(X(t), Y(t)) = \left[\int_a^b |X(t) - Y(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p};$$

$$d_\infty(X(t), Y(t)) = \max_t \{|X(t) - Y(t)| \mid t \in [a, b]\};$$

则 $d_1(X(t), Y(t))$，$d_2(X(t), Y(t))$，$d_3(X(t), Y(t))$，$d_4(X(t), Y(t))$，$d_p(X(t), Y(t))$，$d_\infty(X(t), Y(t))$ 皆为函数空间上的距离.

同样地，可以定义函数空间上的范数.

定义 5.3.4 设 $X(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上的连续函数，0 为 $[a, b]$ 上的零函数，则 $d(X(t), 0)$ 称为连续函数 $X(t)$ 的范数，记为

$$\|X(t)\| = d(X(t), 0).$$

相应地，可得如下常用范数：

1° $\|X(t)\|_1 = \int_a^b |X(t)| \mathrm{d}t;$

2° $\|X(t)\|_2 = \left[\int_a^b |X(t)|^2 \mathrm{d}t\right]^{1/2};$

3° $\|X(t)\|_p = \left[\int_a^b |X(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{1/p};$

4° $\|X(t)\|_\infty = \max_t \{|X(t)| \mid t \in [a, b]\}.$

另外，$\|X(t)\| = \dfrac{\int_a^b |X(t)|\,\mathrm{d}t}{1+\int_a^b |X(t)|\,\mathrm{d}t}$；

$$\|\|X(t)\|\| = \int_a^b \frac{|X(t)|}{1+|X(t)|}\,\mathrm{d}t$$

是我们导出灰色关联度定义的重要范数.

§5.4 灰关联公理与灰色关联度

定义 5.4.1 设序列 $X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$，称

$$X=\{x(k)+(t-k)(x(k+1)-x(k))|$$
$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1;t\in[k,\ k+1]\}$$

为序列X所对应的折线.

这里，我们对序列和折线采用了相同的记号. 为叙述简便起见，在讨论时，往往对序列和它所对应的折线不加区别.

命题 5.4.1 设系统特征行为序列 X_0 为增长序列，X_i 为相关因素行为序列，则有

1° 当 X_i 为增长序列时，X_i 与 X_0 为正相关关系；

2° 当 X_i 为衰减序列时，X_i 与 X_0 为负相关关系.

因负相关序列可通过 §5.2 中定义的逆化算子或倒数化算子作用转化为正相关序列，故我们重点研究非负的相关关系.

定义 5.4.2 设序列 $X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n))$，

1° 称 $\alpha=x(k)-x(k-1)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，为 X 在区间 $[k-1,\ k]$ 上的斜率；

2° 称 $\alpha=\dfrac{x(s)-x(k)}{s-k}$，$s>k$；$s,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$，为$X$在区间 $[k,\ s]$ 上的斜率；

3° 称 $\alpha=\dfrac{1}{n-1}(x(n)-x(1))$ 为X的平均斜率.

定理 5.4.1 设 X_i，X_j 皆为非负增长序列，$X_j=X_i+c$，c 为非零常数，D_1 为初值化算子，

$$Y_i=X_iD_1,\quad Y_j=X_jD_1$$

分别为 X_i,X_j 的初值象，α_i,α_j 分别为 X_i,X_j 的平均斜率，β_i，β_j 分别为 Y_i,Y_j 的平均斜率，则必有

1° $\alpha_i=\alpha_j$.

2° 当 $c<0$ 时，$\beta_i<\beta_j$；当 $c>0$ 时，$\beta_i>\beta_j$.

证明：1° 设

$$X_i=(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(n)),$$

$$X_j=(x_j(1),x_j(2),\cdots,x_j(n))$$

$$=(x_i(1)+c,x_i(2)+c,\cdots,x_i(n)+c).$$

由定义 5.4.3，

$$\alpha_i=\frac{1}{n-1}(x_i(n)-x_i(1)),$$

$$\alpha_j=\frac{1}{n-1}(x_j(n)-x_j(1))$$

$$=\frac{1}{n-1}(x_i(n)+c-x_i(1)-c)$$

$$=\frac{1}{n-1}(x_i(n)-x_i(1))=\alpha_i.$$

2° $$Y_i=X_iD_1=\left(\frac{x_i(1)}{x_i(1)},\frac{x_i(2)}{x_i(1)},\cdots,\frac{x_i(n)}{x_i(1)}\right),$$

$$Y_j=X_jD_1=\left(\frac{x_j(1)}{x_j(1)},\frac{x_j(2)}{x_j(1)},\cdots,\frac{x_j(n)}{x_j(1)}\right)$$

$$=\left(\frac{x_i(1)+c}{x_i(1)+c},\frac{x_i(2)+c}{x_i(1)+c},\cdots,\frac{x_i(n)+c}{x_i(1)+c}\right),$$

$$\beta_i=\frac{1}{n-1}\left(\frac{x_i(n)}{x_i(1)}-\frac{x_i(1)}{x_i(1)}\right)=\frac{1}{x_i(1)(n-1)}(x_i(n)-x_i(1))$$

$$= \frac{1}{x_i(1)} a_i,$$

$$\beta_j = \frac{1}{n-1}\left(\frac{x_i(n)+c}{x_i(1)+c} - \frac{x_i(1)+c}{x_i(1)+c}\right)$$

$$= \frac{1}{(x_i(1)+c)(n-1)} (x_i(n) - x_i(1)) = \frac{1}{x_i(1)+c} a_i$$

当 $c<0$ 时，$x_i(1) > x_i(1)+c$，$\frac{1}{x_i(1)} < \frac{1}{x_i(1)+c}$，

$\therefore \beta_i < \beta_j$；

当 $c>0$ 时，$x_i(1) < x_i(1)+c$，$\frac{1}{x_i(1)} > \frac{1}{x_i(1)+c}$，

$\therefore \beta_i > \beta_j$. ∎

上述定理反映出序列的增值特性，当两个增长序列的绝对增值量相同时，初值小的序列的相对增长速度要高于初值大的序列．要保持相同的相对增长速度，初值大的序列的绝对增值量必须大于初值小的序列．

定义 5.4.3 设 $X_0 = (x_0(1), x_0(2), \cdots, x_0(n))$ 为系统特征序列，

$$X_1 = (x_1(1), x_1(2), \cdots, x_1(n)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_i = (x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(n)),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_m = (x_m(1), x_m(2), \cdots, x_m(n))$$

为相关因素序列．给定实数 $\gamma(x_0(k), x_i(k))$，若实数

$$\gamma(X_0, X_i) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \gamma(x_0(k), x_i(k))$$

满足

1　规范性

$$0<\gamma(X_0,X_i)\leqslant 1,$$
$$\gamma(X_0,X_i)=1\Leftrightarrow X_0=X_i.$$

2° 整体性

对于 $X_i,X_j\in X=\{X_s|s=0,1,2,\cdots,m;m\geqslant 2\}$，有

$$\gamma(X_i,X_j)\neq\gamma(X_j,X_i).\quad(i\neq j)$$

3° 偶对对称性

对于 $X_i,X_j\in X$，有

$$\gamma(X_i,X_j)=\gamma(X_j,X_i)\Leftrightarrow X=\{X_i,X_j\}.$$

4° 接近性

$|x_0(k)-x_i(k)|$ 越小，$\gamma(x_0(k),x_i(k))$ 越大.

则称 $\gamma(X_0,X_i)$ 为 X_i 对 X_0 的灰色关联度，称 $\gamma(x_0(k),x_i(k))$ 为 X_i 对 X_0 在 k 点的关联系数，并称条件 1°，2°，3°，4° 为灰关联四公理.

在灰关联公理中，

$\gamma(X_0,X_i)\in(0,1]$ 表明系统中任何两个行为序列都不可能是严格无关联的.

整体性则体现了环境对灰关联比较的影响，环境不同，灰色关联度亦随之变化，因此对称原理不一定满足.

偶对对称性表明，当灰关联因子集中只有两个序列时，两两比较满足对称性.

接近性是对关联度量化的约束.

定理 5.4.2 设系统行为序列

$$X_0=(x_0(1),\ x_0(2),\ \cdots,\ x_0(n)),$$
$$X_1=(x_1(1),\ x_1(2),\ \cdots,\ x_1(n)),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n)),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$X_m=(x_m(1),x_m(2),\cdots,x_m(n)).$$

对于 $\zeta\in(0,1)$，令

$$\gamma(x_0(k),x_i(k))=\frac{\min\limits_i\min\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|+\zeta\max\limits_i\max\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|}{|x_0(k)-x_i(k)|+\zeta\max\limits_i\max\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|},$$

$$\gamma(X_0,X_i)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma(x_0(k),x_i(k)),$$

则 $\gamma(X_0,X_i)$ 满足灰关联四公理．其中 ζ 称为分辨系数．

证明：1° 规范性

若 $|x_0(k)-x_i(k)|=\min\limits_i\min\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|$，则

$$\gamma(x_0(k),\ x_i(k))=1;$$

若 $|x_0(k)-x_i(k)|\neq\min\limits_i\min\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|$，则

$$|x_0(k)-x_i(k)|>\min\limits_i\min\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|,$$

从而 $\min\limits_i\min\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|+\zeta\max\limits_i\max\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|$

$$<|x_0(k)-x_i(k)|+\zeta\max\limits_i\max\limits_k|x_0(k)-x_i(k)|,$$

故 $$\gamma(x_0(k),x_i(k))<1.$$

显然对任意 k，$\gamma(x_0(k),x_i(k))>0$，因此

$$0<\gamma(X_0,X_i)\leqslant 1.$$

2° 整体性

若 $X=\{X_s|s=0,1,2,\cdots,m;m\geqslant 2\}$，则对任意 $X_{s_1},X_{s_2}\in X$ 一般地

$$\max\limits_i\max\limits_k|x_{s_1}(k)-x_i(k)|\neq\max\limits_i\max\limits_k|x_{s_2}(k)-x_i(k)|,$$

故整体性成立．

3° 偶对对称性

若 $X=\{X_0,X_1\}$，则

$$|x_0(k)-x_1(k)|=|x_1(k)-x_0(k)|,$$

$$\max_i \max_k |x_0(k) - x_i(k)| = \max_i \max_k |x_1(k) - x_i(k)|,$$

上式左端 $i=1$，上式右端 $i=0$，因此

$$\gamma(X_0, X_1) = \gamma(X_1, X_0).$$

4° 接近性 显然成立. ∎

灰色关联度 $\gamma(X_0, X_i)$ 常简记为 γ_{0i}，k 点关联系数 $\gamma(x_0(k), x_i(k))$ 简记为 $\gamma_{0i}(k)$.

按照定理 5.4.2 中定义的算式可得灰色关联度的计算步骤如下：

第一步：求各序列的初值象（或均值象）. 令

$$X_i' = X_i / x_i(1) = (x_i'(1), x_i'(2), \cdots, x_i'(n)),$$

$$i = 0, 1, 2, \cdots, m.$$

第二步：求差序列. 记

$$\Delta_i(k) = |x_0'(k) - x_i'(k)|,$$

$$\Delta_i = (\Delta_i(1), \Delta_i(2), \cdots, \Delta_i(n)),$$

$$i = 1, 2, \cdots, m.$$

第三步：求两极最大差与最小差. 记

$$M = \max_i \max_k \Delta_i(k), \quad m = \min_i \min_k \Delta_i(k).$$

第四步：求关联系数

$$\gamma_{0i}(k) = \frac{m + \zeta M}{\Delta_i(k) + \zeta M}, \quad \zeta \in (0, 1)$$

$$k = 1, 2, \cdots, n; \quad i = 1, 2 \cdots, m.$$

第五步：计算关联度.

$$\gamma_{0i} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_{0i}(k), \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

例 5.4.1 有工业、农业、运输业、商业各部门的行为数据如下：

工业：$X_1 = (x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_1(4))$

$$= (45.8, 43.4, 42.3, 41.9),$$

农业：$X_2 = (x_2(1), x_2(2), x_2(3), x_2(4))$

$$= (39.1, 41.6, 43.9, 44.9),$$

运输：$X_3 = (x_3(1), x_3(2), x_3(3), x_3(4))$

$$= (3.4, 3.3, 3.5, 3.5),$$

商业：$X_4 = (x_4(1), x_4(2), x_4(3), x_4(4))$

$$= (6.7, 6.8, 5.4, 4.7).$$

分别以 X_1, X_2 为系统特征序列，计算灰色关联度.

解：1° 先以 X_1 为系统特征序列求关联度.

第一步：求初值象.

由 $X_i' = X_i / x_i(1) = (x_i'(1), x_i'(2), x_i'(3), x_i'(4))$，

$i = 1, 2, 3, 4.$

得 $X_1' = (1, 0.9475, 0.9235, 0.9138),$

$X_2' = (1, 1.063, 1.1227, 1.1483),$

$X_3' = (1, 0.97, 1.0294, 1.0294),$

$X_4' = (1, 1.0149, 0.805, 0.7).$

第二步：求差序列. 由

$$\Delta_i(k) = |x_1'(k) - x_i'(k)|, \quad i = 2, 3, 4,$$

得 $\Delta_2 = (0, 0.1155, 0.1992, 0.2335),$

$\Delta_3 = (0, 0\ 0225, 0.1059, 0.1146),$

$\Delta_4 = (0, 0.0674, 0.1185, 0.2148).$

第三步：求两极差.

$$M = \max_i \max_k \Delta_i(k) = 0.2335,$$

$$m = \min_i \min_k \Delta_i(k) = 0.$$

第四步：计算关联系数. 取 $\zeta = 0.5$，有

$$\gamma_{1i}(k) = \frac{0.11675}{\Delta_i(k) + 0.11675}, \quad i = 2, 3, 4$$

从而

$\gamma_{12}(1)=1$，$\gamma_{12}(2)=0.503$，$\gamma_{12}(3)=0.3695$，$\gamma_{12}(4)=0.3333$；

$\gamma_{13}(1)=1$，$\gamma_{13}(2)=0.8384$，$\gamma_{13}(3)=0.5244$，$\gamma_{13}(4)=0.504$；

$\gamma_{14}(1)=1$，$\gamma_{14}(2)=0.634$，$\gamma_{14}(3)=0.4963$，$\gamma_{14}(4)=0.352$.

第五步：求灰色关联度.

$$\gamma_{12}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{12}(k)=0.551,$$

$$\gamma_{13}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{13}(k)=0.717,$$

$$\gamma_{14}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{14}(k)=0.621.$$

2° 对于 X_2 为系统特征的情况，由

$$\Delta_i(k)=|x_2'(k)-x_i'(k)|,\ i=1,\ 3,\ 4.$$

得 $\Delta_1=(0,\ 0.1155,\ 0.1992,\ 0.2335)$，

$\Delta_3=(0,\ 0.093,\ 0.0933,\ 0.1189)$，

$\Delta_4=(0,\ 0.0481,\ 0.3177,\ 0.4483)$.

于是 $M=\max\limits_{i}\max\limits_{k}\Delta_i(k)=0.4483$，

$m=\min\limits_{i}\min\limits_{k}\Delta_i(k)=0$.

取 $\xi=0.5$，得

$$\gamma_{2i}(k)=\frac{0.22415}{\Delta_i(k)+0.22415},$$

从而 $\gamma_{21}(1)=1$，$\gamma_{21}(2)=0.66$，$\gamma_{21}(3)=0.53$，$\gamma_{21}(4)=0.489$；

$\gamma_{23}(1)=1$，$\gamma_{23}(2)=0.706$，$\gamma_{23}(3)=0.706$，$\gamma_{23}(4)=0.653$；

$\gamma_{24}(1)=1$，$\gamma_{24}(2)=0.823$，$\gamma_{24}(3)=0.415$，$\gamma_{24}(4)=0.333$.

$$\gamma_{21}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{21}(k)=0.670,$$

$$\gamma_{23}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{23}(k)=0.766,$$

$$\gamma_{24}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\gamma_{24}(k)=0.643.$$

联系 1° 中结果 $\gamma_{12}=0.551$，显然 $\gamma_{12}\neq\gamma_{21}$，这正是灰关联公理中的整体性.

§5.5 灰色绝对关联度

命题 5.5.1 设行为序列

$$X_i=(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(n)),$$

记折线

$$(x_i(1)-x_i(1),\ x_i(2)-x_i(1),\cdots,x_i(n)-x_i(1))$$

为 $X_i-x_i(1)$，令

$$s_i=\int_1^n (X_i-x_i(1))\,\mathrm{d}t,$$

则 1° 当 X_i 为增长序列时，$s_i\geqslant 0$；

2° 当 X_i 为衰减序列时，$s_i\leqslant 0$；

3° 当 X_i 为振荡序列时，s_i 符号不定.

由增长序列、衰减序列、振荡序列的定义与积分的性质，以上命题的成立是显然的.

定义 5.5.1 设行为序列

$$X_i=(x_i(1),x_i(2),\cdots,x_i(n)),$$

D 为序列算子

$$XD=(x_i(1)d,x_i(2)d,\cdots,x_i(n)d),$$

其中 $$x_i(k)d=x_i(k)-x_i(1),\quad k=1,2,\cdots,n$$

则称 D 为始点零化算子，X_iD 称为 X_i 的始点零化象，记为

$$X_i^0=(x_i^0(1),x_i^0(2),\cdots,x_i^0(n)).$$

命题 5.5.2 设行为序列

$$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n)),$$

$$X_j=(x_j(1),\ x_j(2),\ \cdots,x_j(n))$$

的始点零化象分别为

$$X_i^0=(x_i^0(1),\ x_i^0(2),\ \cdots,\ x_i^0(n)),$$

$$X_j^0=(x_j^0(1),\ x_j^0(2),\ \cdots,\ x_j^0(n)).$$

令
$$s_i-s_j=\int_1^n (X_i^0-X_j^0)\,dt,$$

则 1° 若 X_i^0 恒在 X_j^0 上方，$s_i-s_j\geqslant 0$；

2° 若 X_i^0 恒在 X_j^0 下方，$s_i-s_j\leqslant 0$；

3° 若 X_i^0 与 X_j^0 相交，s_i-s_j 符号不定.

定义 5.5.2 称序列 X_i 各个观测数据间时距之和为 X_i 的长度.

要注意两个长度相同的序列中观测数据的个数不一定一样多. 比如

$X_1=(x_1(1),\ x_1(3),\ x_1(6))$,

$X_2=(x_2(1),\ x_2(3),\ x_2(5),\ x_2(6))$,

$X_3=(x_3(1),\ x_3(2),\ x_3(3),\ x_3(4),\ x_3(5),\ x_3(6))$,

它们的长度都是 6，但各序列中观测数据个数并不一样多.

定义 5.5.3 设序列 X_0 与 X_i 长度相同，s_0, s_i 如命题 5.5.1 中所示，则称

$$\varepsilon_{0i}=\frac{1+|s_0|+|s_i|}{1+|s_0|+|s_i|+|s_i-s_0|}$$

为 X_0 与 X_i 的灰色绝对关联度，简称绝对关联度.

这里仅给出长度相同的序列之灰色绝对关联度的定义，对于长度不同的序列，可采取删去较长序列之过剩数据或用灰色系统的 GM(1,1)① 进行预测，补齐较短序列之不足数据等措施使之化成长度相同的序列，但这样一般会影响灰色绝对关联度的值.

定理 5.5.1 灰色绝对关联度

① 参见本书第七章.

$$e_{0i}=\frac{1+|s_0|+|s_i|}{1+|s_0|+|s_i|+|s_i-s_0|}$$

满足灰关联公理中的规范性、偶对对称性与接近性，但不满足整体性.

证明：1° 规范性：显然，$e_{0i}>0$. 又 $|s_i-s_0|\geqslant 0$，所以 $e_{0i}\leqslant 1$.

2° 偶对对称性：由 $|s_i-s_0|=|s_0-s_i|$ 易知 $e_{0i}=e_{i0}$ 成立.

3° 接近性：显然成立.

4° 由于灰色绝对关联度仅仅是序列 X_0 与 X_i 联系的度量，未考虑其它因素，故这里没有整体性问题. ∎

命题 5.5.3 设序列 X_0 与 X_i 长度相同，令

$$X_0'=X_0-a,\quad X_i'=X_i-b,$$

其中 a,b 为常数. 若 X_0' 与 X_i' 的灰色绝对关联度为 e_{0i}'，则 $e_{0i}'=e_{0i}$.

事实上，对 X_0,X_i 进行平移不会改变 s_0，s_i 和 s_i-s_0 的值，因此也不改变 e_{0i}.

定义 5.5.4 若序列 X 各对相邻观测数据间时距相同，则称 X 为等时距序列.

引理 5.5.1 设 X 为等时距序列，若其时距 $l\neq 1$，则时间轴变换

$$t:\ T\longrightarrow T$$
$$t\mapsto t/l$$

可将 X 化为1-时距序列.

证明：设 $X_i=(x_i(l),\ x_i(2l),\ \cdots,\ x_i(nl))$ 在上述变换下，t 变为 t/l，kl 变为 $kl/l=k$，X_i 变为

$$(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n)),$$

此为1-时距序列. ∎

引理 5.5.2 设 X_0 和 X_i 长度相同，且皆为1-时距序列，

$$X_0^0=(x_0^0(1),\ x_0^0(2),\ \cdots,\ x_0^0(n)),$$
$$X_i^0=(x_i^0(1),\ x_i^0(2),\ \cdots,\ x_i^0(n))$$

分别为 X_0 和 X_i 的始点零化象，则

$$|s_0|=\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_0^0(k)+\frac{1}{2}x_0^0(n)\right|,$$

$$|s_i|=\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_i^0(k)+\frac{1}{2}x_i^0(n)\right|,$$

$$|s_i-s_0|=\left|\sum_{k=2}^{n-1}(x_i^0(k)-x_0^0(k))+\frac{1}{2}(x_i^0(n)-x_0^0(n))\right|.$$

证明：分以下三种情形讨论.

1° X_0，X_i 为增长序列或衰减序列，且折线 X_i^0 与 X_0^0 不相交.

此时，$|s_0|$，$|s_i|$ 和 $|s_i-s_0|$ 分别为由

$$X=0,\ X=X_0^0,\ t=n;$$
$$X=0,\ X=X_i^0,\ t=n;$$
$$X=X_0^0,\ X=X_i^0,\ t=n$$

所围成的曲边三角形的面积，它们都是 $n-1$ 个小梯形① 的面积之和. 这些小梯形的高都是1，$|s_0|$ 中小梯形的底边长依次为：

$$0,|x_0^0(2)|,\ |x_0^0(3)|,\ \cdots,\ |x_0^0(n)|.$$

$|s_i|$ 中小梯形的底边长依次为

$$0,|x_i^0(2)|,\ |x_i^0(3)|,\ \cdots,\ |x_i^0(n)|.$$

$|s_i-s_0|$ 中小梯形的底边长依次为

$$0,\ |x_i^0(2)-x_0^0(2)|,\ |x_i^0(3)-x_0^0(3)|,\ \cdots,\ |x_i^0(n)-x_0^0(n)|.$$

所以 $$|s_0|=\frac{1}{2}|x_0^0(2)|+\frac{1}{2}(|x_0^0(2)|+|x_0^0(3)|)+\cdots$$

① 这里三角形视为退化的梯形。

$$+\frac{1}{2}\left(|x_0^0(n-1)|+|x_0^0(n)|\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n-1}|x_0^0(k)|+\frac{1}{2}|x_0^0(n)|,$$

$$|s_1|=\frac{1}{2}|x_1^0(2)|+\frac{1}{2}\left(|x_1^0(2)|+|x_1^0(3)|\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{2}\left(|x_1^0(n-1)|+|x_1^0(n)|\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n-1}|x_1^0(k)|+\frac{1}{2}|x_1^0(n)|,$$

$$|s_1-s_0|=\frac{1}{2}|x_1^0(2)-x_0^0(2)|+\frac{1}{2}\left(|x_1^0(2)-x_0^0(2)|+|x_1^0(3)-x_0^0(3)|\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}\left(|x_1^0(n-1)-x_0^0(n-1)|+|x_1^0(n)-x_0^0(n)|\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{n-1}|x_1^0(k)-x_0^0(k)|+\frac{1}{2}|x_1^0(n)-x_0^0(n)|.$$

由 X_0，X_1 为增长序列或衰减序列且折线 X_1^0 与 X_0^0 不相交可知，对于 $k=2,3,\cdots,n$，诸 $x_0^0(k)$ 符号相同，诸 $x_1^0(k)$ 符号相同，诸 $x_1^0(k)-x_0^0(k)$ 符号相同，于是有

$$|s_0|=\sum_{k=2}^{n-1}|x_0^0(k)|+\frac{1}{2}|x_0^0(n)|$$

$$=\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_0^0(k)+\frac{1}{2}x_0^0(n)\right|,$$

$$|s_1|=\sum_{k=2}^{n-1}|x_1^0(k)|+\frac{1}{2}|x_1^0(n)|$$

$$=\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_1^0(k)+\frac{1}{2}x_1^0(n)\right|,$$

$$|s_t - s_0| = \sum_{k=2}^{n-1} |x_t^0(k) - x_0^0(k)| + \frac{1}{2}|x_t^0(n) - x_0^0(n)|$$

$$= \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_t^0(k) - x_0^0(k)) + \frac{1}{2}(x_t^0(n) - x_0^0(n)) \right|.$$

2° X_0, X_t 为振荡序列，折线 X_t^0 与 X_0^0 不相交.

因为 X_t^0 与 X_0^0 不相交，由 1° 中的讨论可知，

$$|s_t - s_0| = \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_t^0(k) - x_0^0(k)) + \frac{1}{2}(x_t^0(n) - x_0^0(n)) \right|.$$

下面我们看 $|s_0|$，$|s_t|$.

因 X_0 为振荡序列，此时，s_0 为由 $X=0$，$X=X_0^0$，$t=n$ 所围成的图形之各部分面积的代数和，在 $X=0$ 之上的部分取正号，在 $X=0$ 之下的部分取负号.

设 $x_0^0(k)$ $(k=2, 3, \cdots, n)$ 仅改变一次符号，$(x_0^0(m), x_0^0(m+1))$ 为其中唯一的变号点偶. 设 $x_0^0(m)>0$，$x_0^0(m+1)<0$，于是

对 $k=2,3,\cdots,m-1,m$，$x_0^0(k)>0$；

对 $k=m+1, m+2, \cdots, n$，$x_0^0(k)<0$.

记

$$s_{0m} = \int_m^{m+1} X_0^0 dt,$$

则

$$s_0 = \frac{1}{2}|x_0^0(2)| + \frac{1}{2}(|x_0^0(2)| + |x_0^0(3)| + \cdots$$

$$+ \frac{1}{2}(|x_0^0(m-1)| + |x_0^0(m)|) + s_{0m}$$

$$- \frac{1}{2}(|x_0^0(m+1)| + |x_0^0(m+2)|)$$

$$- \cdots - \frac{1}{2}(|x_0^0(n-1)| + |x_0^0(n)|).$$

现在来计算 s_{0m}. 如图 5.5.1 所示，直线 AB 的方程为

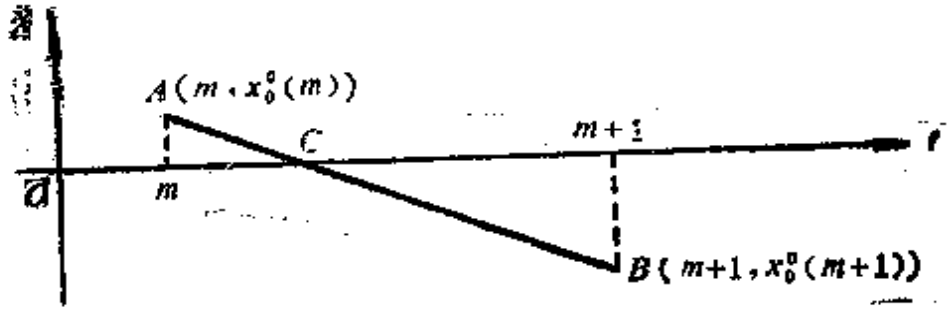


图 5.5.1

$$X = x_0^0(m) + (t-m)(x_0^0(m+1) - x_0^0(m)).$$

由此可得 AB 与 $X=0$ 的交点为

$$C\left(m + \frac{x_0^0(m)}{x_0^0(m+1) - x_0^0(m)},\ 0\right),$$

于是有 $s_{0m} = \frac{1}{2}|x_0^0(m)| \cdot \left|\frac{x_0^0(m)}{x_0^0(m+1) - x_0^0(m)}\right| - \frac{1}{2}|x_0^0(m+1)|$

$$\times \left|1 - \left|\frac{x_0^0(m)}{x_0^0(m+1) - x_0^0(m)}\right|\right|$$

$$= \frac{1}{2}(|x_0^0(m)| + |x_0^0(m+1)|) \cdot \left|\frac{x_0^0(m)}{x_0^0(m+1) - x_0^0(m)}\right|$$

$$- \frac{1}{2}|x_0^0(m+1)|.$$

因为 $x_0^0(m) > 0$，$x_0^0(m+1) < 0$，所以

$$\left|\frac{x_0^0(m)}{x_0^0(m+1) - x_0^0(m)}\right| = \frac{|x_0^0(m)|}{|x_0^0(m+1) - x_0^0(m)|}$$

$$= \frac{|x_0^0(m)|}{|x_0^0(m+1)| + |x_0^0(m)|},$$

从而 $$s_{0m} = \frac{1}{2}|x_0^0(m)| - \frac{1}{2}|x_0^0(m+1)|.$$

考虑到 $$|x_0^0(k)| = x_0^0(k),\ k = 2,\ 3,\ \cdots,\ m.$$

$$|x_0^0(k)| = -x_0^0(k),\quad k = m+1, m+2, \cdots, n$$

即得 $$|s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_0^0(k) + \frac{1}{2}x_0^0(n)\right|.$$

对于 $x_0^0(m)<0$，$x_0^0(m+1)>0$ 的情形，亦可类似讨论.

对于出现多个变号点偶的情形，对各变号点偶分别讨论，亦不难得出

$$|s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_0^0(k) + \frac{1}{2}x_0^0(n)\right|.$$

同理可证，当 X_i 为振荡序列时，亦有

$$|s_i| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_i^0(k) + \frac{1}{2}x_i^0(n)\right|.$$

3° X_0，X_i 为振荡序列，且 X_i^0 与 X_0^0 相交.

由 2° 已有

$$|s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_0^0(k) + \frac{1}{2}x_0^0(n)\right|,$$

$$|s_i| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_i^0(k) + \frac{1}{2}x_i^0(n)\right|.$$

而 $s_i - s_0$ 为由 $X = X_0^0$，$X = X_i^0$，$t = n$ 所围成的图形之各部分面积的代数和，X_i^0 在 X_0^0 之上的部分取正号，X_i^0 在 X_0^0 之下的部分取负号，仿 2° 可证

$$|s_i - s_0| = \left|\sum_{k=2}^{n-1} (x_i^0(k) - x_0^0(k)) + \frac{1}{2}(x_i^0(n) - x_0^0(n))\right|. \quad \blacksquare$$

定理 5.5.2 设序列 X_0 和 X_i 长度相同，时距相同，且皆为等时距序列，则

$$e_{0i} = \left[1 + \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_0^0(k) + \frac{1}{2}x_0^0(n)\right| + \left|\sum_{k=2}^{n-1} x_i^0(k) + \frac{1}{2}x_i^0(n)\right|\right]$$

$$\times\left[1+\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_0^0(k)+\frac{1}{2}x_0^0(n)\right|+\left|\sum_{k=2}^{n-1}x_i^0(k)+\frac{1}{2}x_i^0(n)\right|\right.$$

$$\left.+\left|\sum_{k=2}^{n-1}(x_i^0(k)-x_0^0(k))+\frac{1}{2}(x_i^0(n)-x_0^0(n))\right|\right]^{-1}.$$

证明：由引理 5.5.1，不妨设 X_0，X_i 皆为 1-时距序列，再由引理 5.5.2 和定义 5.5.3，即得结论. ∎

定理 5.5.3 设序列 X_0 与 X_i 长度相同，当它们时距不同或至少有一个为非等时距序列时，若通过均值生成填补相应空穴使之化成时距相同的等时距序列，则此时灰色绝对关联度 ε_{0i} 不变.

证明：分以下几种情形讨论.

1° X_0，X_i 为时距相同的非等时距序列. 不妨设仅有一个相邻点偶间的时距为 2，其它各相邻点偶间的时距皆为 1. 设 X_0，X_i 的始点零化象分别为

$$X_0^0=(x_0^0(1),x_0^0(2),\cdots,x_0^0(m),x_0^0(m+2),\cdots,x_0^0(n)),$$

$$X_i^0=(x_i^0(1),x_i^0(2),\cdots,x_i^0(m),x_i^0(m+2),\cdots,x_i^0(n)).$$

只需填补空穴 $x_0^0(m+1)$，$x_i^0(m+1)$. 令

$$x_0^0(m+1)=\frac{1}{2}(x_0^0(m)+x_0^0(m+2)),$$

$$x_i^0(m+1)=\frac{1}{2}(x_i^0(m)+x_i^0(m+2)),$$

则 X_0^0，X_i^0 已皆化为等时距序列. 令

$$s_{0m}=\int_m^{m+2}X_0^0\mathrm{d}t,\quad s_{im}=\int_m^{m+2}X_i^0\mathrm{d}t,$$

$$s_{im}-s_{0m}=\int_m^{m+2}(X_i^0-X_0^0)\mathrm{d}t.$$

在未置入 $x_0^0(m+1)$，$x_i^0(m+1)$ 时，

$$s_{0m}=x_0^0(m)+x_0^0(m+2),$$

$$s_{im}=x_i^0(m)+x_i^0(m+2),$$

$$s_{im} - s_{0m} = (x_i^0(m) - x_0^0(m)) + (x_i^0(m+2) - x_i^0(m+2)),$$

置入 $x_0^0(m+1)$，$x_i^0(m+1)$ 后，

$$s_{0m} = \frac{1}{2}(x_0^0(m) + x_0^0(m+1)) + \frac{1}{2}(x_0^0(m+1) + x_0^0(m+2))$$

$$= x_0^0(m+1) + \frac{1}{2}(x_0^0(m) + x_0^0(m+2))$$

$$= \frac{1}{2}(x_0^0(m) + x_0^0(m+2)) + \frac{1}{2}(x_0^0(m) + x_0^0(m+2))$$

$$= x_0^0(m) + x_0^0(m+2).$$

同理可证，s_{im}，$s_{im} - s_{0m}$ 亦皆不变，从而，$|s_0|$，$|s_i|$，$|s_i - s_0|$ 不变，故 e_{0i} 不变.

仿引理 5.5.2，不难推知，无论点偶

$$(x_0^0(m),\ x_0^0(m+2)),\ (x_i^0(m),\ x_i^0(m+2))$$

及 $$((x_i^0(m) - x_0^0(m)),\ (x_i^0(m+2) - x_0^0(m+2)))$$

是否为变号点偶，以上结论都成立.

2° X_0，X_i 皆为等时距序列，但它们的时距不同.

我们不妨设 X_0 为 1-时距序列，X_i 为 2-时距序列，设 X_0，X_i 的始点零化象分别为

$$X_0^0 = (x_0^0(1),\ x_0^0(2),\ x_0^0(3),\ \cdots,\ x_0^0(2n+1)),$$

$$X_i^0 = (x_i^0(1),\ x_i^0(3),\ x_i^0(5),\ \cdots,\ x_i^0(2n+1)).$$

只需以 $x_i^0(2k) = \frac{1}{2}(x_i^0(2k-1) + x_i^0(2k+1))$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 填补 X_i^0 中相应的空穴，X_0^0，X_i^0 即化为时距相同的等时距序列，其余讨论同 1°.

3° X_0，X_i 时距不同且至少有一个为非等时距序列.此时可先作 2° 中的均值生成填补数据不足序列的对应空穴，将 X_0^0，X_i^0 化为同时距序列，再作 1° 中的均值生成将 X_0^0，X_i^0 分别化为等时距序列，关于 e_{0i} 不变的证明与 1° 中类似.

对于序列中两个行为数据之间有多个空穴的情形，可采取分层逐次进行均值生成依次填补空穴，亦可通过作图，将空穴左邻第一个数据与右邻第一个数据连成直线，按照时序在直线上依次取点填补空穴，同理可证采取这些措施都不会改变灰色绝对关联度的值. ∎

例 5.5.1 设序列

$$X_0=(x_0(1),\ x_0(2),\ x_0(3),\ x_0(4),\ x_0(5),\ x_0(7))$$
$$=(10,\ 9,\ 15,\ 14,\ 14,\ 16),$$
$$X_1=(x_1(1),x_1(3),\ x_1(7))=(46,\ 70,\ 98).$$

试求其绝对关联度 ε_{01}.

解： 1° 将 X_1 化为与 X_0 时距相同的序列，令

$$x_1(5)=\frac{1}{2}(x_1(3)+x_1(7))=\frac{1}{2}(70+98)=84,$$

$$x_1(2)=\frac{1}{2}(x_1(1)+x_1(3))=\frac{1}{2}(46+70)=58,$$

$$x_1(4)=\frac{1}{2}(x_1(3)+x_1(5))=\frac{1}{2}(70+84)=77,$$

有 $$X_1=(x_1(1),x_1(2),\ x_1(3),\ x_1(4),\ x_1(5),\ x_1(7))$$
$$=(46,\ 58,\ 70,\ 77,\ 84,\ 98).$$

2° 将 X_0,X_1 化为等时距序列，令

$$x_0(6)=\frac{1}{2}(x_0(5)+x_0(7))=\frac{1}{2}(14+16)=15,$$

$$x_1(6)=\frac{1}{2}(x_1(5)+x_1(7))=\frac{1}{2}(84+98)=91,$$

有 $$X_0=(x_0(1),\ x_0(2),\ x_0(3),\ x_0(4),\ x_0(5),\ x_0(6),\ x_0(7))$$
$$=(10,\ 9,\ 15,\ 14,\ 14,\ 15,\ 16),$$
$$X_1=(x_1(1),\ x_1(2),\ x_1(3),\ x_1(4),\ x_1(5),\ x_1(6),\ x_1(7))$$
$$=(46,\ 58,\ 70,\ 77,\ 84,\ 91,\ 98),$$

已皆为1-时距序列.

3° 求始点零化象，得

$$X_0^0=(x_0^0(1),x_0^0(2),x_0^0(3),x_0^0(4),x_0^0(5),x_0^0(6),x_0^0(7))$$
$$=(0,\ -1,\ 5,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6),$$
$$X_1^0=(x_1^0(1),\ x_1^0(2),\ x_1^0(3),\ x_1^0(4),\ x_1^0(5),\ x_1^0(6),\ x_1^0(7))$$
$$=(0,\ 12,\ 24,\ 31,\ 38,\ 45,\ 52).$$

4° 求$|s_0|$，$|s_1|$和$|s_1-s_0|$.

$$|s_0|=\left|\sum_{k=2}^{6}x_0^0(k)+\frac{1}{2}x_0^0(7)\right|$$
$$=\left|(-1)+5+4+4+5+\frac{1}{2}\times 6\right|=20,$$
$$|s_1|=\left|\sum_{k=2}^{6}x_1^0(k)+\frac{1}{2}x_1^0(7)\right|$$
$$=\left|12+24+31+38+45+\frac{1}{2}\times 52\right|=176,$$
$$|s_1-s_0|=\left|\sum_{k=2}^{6}(x_1^0(k)-x_0^0(k))+\frac{1}{2}\cdot(x_1^0(7)-x_0^0(7))\right|$$
$$=13+19+27+34+40+\frac{1}{2}\times 46\Big|=156.$$

5° 计算灰色绝对关联度.

$$\varepsilon_{01}=\frac{1+|s_0|+|s_1|}{1+|s_0|+|s_1|+|s_1-s_0|}=\frac{197}{353}\approx 0.5581.$$

定理 5.5.4 灰色绝对关联度ε_{0i}具有下列性质：

1° $0<\varepsilon_{0i}\leqslant 1$；

2° ε_{0i}只与X_0和X_i的几何形状有关，而与其空间相对位置无关. 或者说，平移不改变绝对关联度的值；

3° 任何两个序列都不是绝对无关的，即ε_{0i}恒不为零；

4° X_i 与 X_0 几何上相似程度越大，ε_{0i} 越大；

5° 当 X_i 与 X_0 平行，或 X_i^0 围绕 X_0^0 摆动，且 X_i^0 在 X_0^0 之上部分的面积与 X_i^0 在 X_0^0 之下部分的面积相等时，$\varepsilon_{0i}=1$；

6° 当 X_0 或 X_i 中任一观测数据变化时，ε_{0i} 将随之变化；

7° X_0，X_i 长度变化，ε_{0i} 亦变；

8° $\varepsilon_{00}=1$，　$s_{ii}=1$；

9° $\varepsilon_{0i}=\varepsilon_{i0}$.

§5.6　灰色相对关联度

定义 5.6.1　设序列 X_0，X_i 长度相同，且初值皆异于零，X_0'，X_i' 分别为 X_0，X_i 的初值象，则称 X_0' 与 X_i' 的灰色绝对关联度为 X_0 与 X_i 的灰色相对关联度，简称相对关联度，记为 r_{0i}.

灰色相对关联度是序列 X_0 与 X_i 相对于始点的变化速率之联系的数量表征. X_0 与 X_i 的变化速率越接近，r_{0i} 越大，反之就越小.

命题 5.6.1　设 X_0，X_i 为长度相同且初值异于零的序列，若 $X_0=cX_i$，其中 $c>0$ 为常数，则 $r_{0i}=1$.

证明：设 $X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n))$，则

$$\begin{aligned}X_0&=(x_0(1),\ x_0(2),\ \cdots,\ x_0(n))\\&=(cx_i(1),\ cx_i(2),\ \cdots,\ cx_i(n)),\end{aligned}$$

其初值象分别为

$$X_i'=X_i/x_i(1)=\left(\frac{x_i(1)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(2)}{x_i(1)},\ \cdots,\ \frac{x_i(n)}{x_i(1)}\right),$$

$$\begin{aligned}X_0'=X_0/x_0(1)&=\left(\frac{x_0(1)}{x_0(1)},\ \frac{x_0(2)}{x_0(1)},\ \cdots,\ \frac{x_0(n)}{x_0(1)}\right)\\&=\left(\frac{cx_i(1)}{cx_i(1)},\ \frac{cx_i(2)}{cx_i(1)},\ \cdots,\ \frac{cx_i(n)}{cx_i(1)}\right)\end{aligned}$$

$$=\left(\frac{x_i(1)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(2)}{x_i(1)},\ \cdots,\ \frac{x_i(n)}{x_i(1)}\right),$$

所以 $X_0'=X_i'$，从而其绝对关联度等于1，因此 X_0 与 X_i 的相对关联度 $r_{0i}=1$. ∎

命题 5.6.2 设 X_0，X_i 为长度相同且初值皆异于零的序列，则其相对关联度 r_{0i} 与绝对关联度 ε_{0i} 的值没有必然联系. 当 ε_{0i} 较大时，r_{0i} 可能很小；ε_{0i} 很小时，r_{0i} 也可能较大.

证明：设 $X_0=(x_0(1),\ x_0(2),\ \cdots,\ x_0(n))$，

$$X_i=(x_i(1),\ x_i(2),\ \cdots,\ x_i(n)),$$

若 $\varepsilon_{0i}\approx 1$，则 $X_0\approx X_i+c$，即

$$X_0\approx(x_i(1)+c,\ x_i(2)+c,\ \cdots,\ x_i(n)+c).$$

X_0，X_i 的初值象分别为

$$X_0'\approx\left(\frac{x_i(1)+c}{x_i(1)+c},\ \frac{x_i(2)+c}{x_i(1)+c},\ \cdots,\ \frac{x_i(n)+c}{x_i(1)+c}\right),$$

$$X_i'=\left(\frac{x_i(1)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(2)}{x_i(1)},\ \cdots,\ \frac{x_i(n)}{x_i(1)}\right),$$

与 X_0'，X_i' 相应的 $|s_i'-s_0'|$ 为

$$|s_i'-s_0'|\approx\left|\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{x_i(k)}{x_i(1)}-\frac{x_i(k)+c}{x_i(1)+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{x_i(n)}{x_i(1)}-\frac{x_i(n)+c}{x_i(1)+c}\right)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=2}^{n-1}\frac{c(x_i(k)-x_i(1))}{x_i(1)(x_i(1)+c)}+\frac{1}{2}\frac{c(x_i(n)-x_i(1))}{x_i(1)(x_i(1)+c)}\right|.$$

易见，只要 c 和 $x_i(k)-x_i(1)$ $(k=2,3,\cdots,n)$ 的绝对值充分大，$|s_i'-s_0'|$ 就充分大，从而 X_0' 与 X_i' 的绝对关联度即 X_0 与 X_i 的相对关联度 r_{0i} 可充分小.

若 $r_{0i}\approx 1$，则 $X_0\approx cX_i$，即

$$X_0\approx(cx_i(1),\ cx_i(2),\ \cdots,\ cx_i(n)).$$

与 X_0，X_i 相应的 $|s_i-s_0|$ 为

$$|s_i - s_0| \approx \left| \sum_{k=2}^{n-1} [(x_i(k) - x_i(1)) - c(x_0(k) - x_0(1))] \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}[(x_i(n) - x_i(1)) - c(x_0(n) - x_0(1)] \right|$$
$$= |1 - c| \cdot \left| \sum_{k=2}^{n-1} (x_i(k) - x_i(1)) + \frac{1}{2}(x_i(n) - x_i(1)) \right|.$$

只要 c 和 $x_i(k) - x_i(1)$ $(k = 2, 3, \cdots, n)$ 的绝对值充分大，$|s_i - s_0|$就充分大，从而 X_0 与 X_i 的绝对关联度 ε_{0i} 可充分小. ■

例 5.6.1 计算例 5.5.1 中 X_0 与 X_1 的相对关联度.

解：1° 同时距化. 令

$$x_1(5) = \frac{1}{2}(x_1(3) + x_1(7)) = \frac{1}{2}(70 + 98) = 84,$$

$$x_1(2) = \frac{1}{2}(x_1(1) + x_1(3)) = \frac{1}{2}(46 + 70) = 58,$$

$$x_1(4) = \frac{1}{2}(x_1(3) + x_1(5)) = \frac{1}{2}(70 + 84) = 77.$$

有 $X_1 = (x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_1(4), x_1(5), x_1(7))$
$= (46, 58, 70, 77, 84, 98).$

2° 等时距化. 令

$$x_0(6) = \frac{1}{2}(x_0(5) + x_0(7)) = \frac{1}{2}(14 + 16) = 15,$$

$$x_1(6) = \frac{1}{2}(x_1(5) + x_1(7)) = \frac{1}{2}(84 + 98) = 91,$$

有 $X_0 = (x_0(1), x_0(2), x_0(3), x_0(4), x_0(5), x_0(6), x_0(7))$
$= (10, 9, 15, 14, 14, 15, 16),$
$X_1 = (x_1(1), x_1(2), x_1(3), x_1(4), x_1(5), x_1(6), x_1(7))$
$= (46, 58, 70, 77, 84, 91, 98),$

皆为1-时距序列.

3° 求 X_0, X_1 的初值象.

$$X_0' = \left(\frac{x_0(1)}{x_0(1)}, \frac{x_0(2)}{x_0(1)}, \frac{x_0(3)}{x_0(1)}, \frac{x_0(4)}{x_0(1)}, \frac{x_0(5)}{x_0(1)}, \frac{x_0(6)}{x_0(1)}, \frac{x_0(7)}{x_0(1)}\right)$$

$$= (1,\ 0.9,\ 1.5,\ 1.4,\ 1.4,\ 1.5,\ 1.6),$$

$$X_1' = \left(\frac{x_1(1)}{x_1(1)}, \frac{x_1(2)}{x_1(1)}, \frac{x_1(3)}{x_1(1)}, \frac{x_1(4)}{x_1(1)}, \frac{x_1(5)}{x_1(1)}, \frac{x_1(6)}{x_1(1)}, \frac{x_1(7)}{x_1(1)}\right)$$

$$= (1,\ 1.26,\ 1.52,\ 1.67,\ 1.83,\ 1.98,\ 2.13).$$

4° 求 X_0', X_1' 的始点零化象.

$$X_0'^0 = (x_0'^0(1), x_0'^0(2), x_0'^0(3), x_0'^0(4), x_0'^0(5), x_0'^0(6), x_0'^0(7))$$

$$= (0,\ -0.1,\ 0.5,\ 0.4,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6),$$

$$X_1'^0 = (x_1'^0(1), x_1'^0(2), x_1'^0(3), x_1'^0(4), x_1'^0(5), x_1'^0(6), x_1'^0(7))$$

$$= (0,\ 0.26,\ 0.52,\ 0.67,\ 0.83,\ 0.98,\ 1.13).$$

5° 计算 $|s_0'|$, $|s_1'|$ 和 $|s_1' - s_0'|$.

$$|s_0'| = \left|\sum_{k=7}^{6} x_0'^0(k) + \frac{1}{2} x_0'^0(7)\right|$$

$$= \left|(-0.1) + 0.5 + 0.4 + 0.4 + 0.5 + \frac{1}{2} \times 0.6\right| = 2,$$

$$|s_1'| = \left|\sum_{k=2}^{5} x_1'^0(k) + \frac{1}{2} x_1'^0(7)\right|$$

$$= \left|0.26 + 0.52 + 0.67 + 0.83 + + 0.98 + \frac{1}{2} \times 1.13\right|$$

$$= 3.825,$$

$$|s_1' - s_0'| = \left|\sum_{k=2}^{6} (x_1'^0(k) - x_0'^0(k)) + \frac{1}{2}(x_1'^0(7) - x_0'^0(7))\right|$$

$$= \left|0.36 + 0.02 + 0.37 + 0.43 + 0.48 + \frac{1}{2} \times 0.53\right|$$

$$= 1.925.$$

6° 计算相对关联度.

$$r_{01}=\frac{1+|s_0'|+|s_1'|}{1+|s_0'|+|s_1'|+|s_1'-s_0'|}=\frac{6.825}{8.75}=0.78.$$

命题 5.6.3 设 X_0, X_i 为长度相同且初值异于零的序列, a, b 为非零常数, aX_0 与 bX_i 的相对关联度为 r'_{0i}, 则 $r'_{0i}=r_{0i}$. 或者说, 数乘不改变相对关联度.

事实上, aX_0, bX_i 的初值象分别等于 X_0, X_i 的初值象, 数乘在初值化算子作用下无效, 故 $r'_{0i}=r_{0i}$.

命题 5.6.4 灰色相对关联度 r_{0i} 具有下列性质:

1° $0<r_{0i}\leqslant 1$;

2° r_{0i} 仅与序列 X_0, X_i 相对于始点的变化速率有关, 而与各观测数据的大小无关. 或者说, 数乘不改变灰色相对关联度;

3° 任何两个序列的变化速度都不是毫无联系的, 即 r_{0i} 恒不为零;

4° X_0, X_i 相对于始点的变化速率越趋于一致, r_{0i} 越大;

5° 当 X_0, X_i 相对于始点的变化速度相同, 即 $X_0=aX_i$; 或 X_0, X_i 之初值象的始点零化象 X_0^0, X_i^0 满足: X_i^0 围绕 X_0^0 摆动, 且 X_i^0 在 X_0^0 之上部分的面积与 X_i^0 在 X_0^0 之下部分的面积相等时, $r_{0i}=1$;

6° 改变 X_0 或 X_i 中的任何观测数据, r_{0i} 将随之变化;

7° 序列长度变化, r_{0i} 亦变;

8° $r_{00}=1$, $r_{ii}=1$;

9° $r_{0i}=r_{i0}$.

§5.7 灰色综合关联度

定义 5.7.1 设序列 X_0, X_i 长度相同, 且初值皆异于零,

ε_{0i}和 r_{0i} 分别为 X_0 与 X_i 的灰色绝对关联度和灰色相对关联度，$\theta\in[0,1]$，则称

$$\rho_{0i}=\theta\varepsilon_{0i}+(1-\theta)r_{0i}$$

为 X_0 与 X_i 的灰色综合关联度，简称综合关联度.

灰色综合关联度既体现了折线 X_0 与 X_i 的相似程度，又可反映出 X_0 与 X_i 相对于始点的变化速率的接近程度，乃是较为全面地表征序列之间联系是否紧密的一个数量指标. 一般地，我们可取 $\theta=0.5$，如果对绝对量之间的关系较为关心，θ 可取得大一些；如果对变化速率看得较重，θ 则可取得小一些.

例 5.7.1　求例 5.5.1 中 X_0 和 X_1 的灰色综合关联度.

解：由例 5.5.1 和例 5.6.1，已得 $\varepsilon_{01}=0.5581$，$r_{01}=0.78$. 取 $\theta=0.5$，得

$$\begin{aligned}\rho_{01}&=\theta\varepsilon_{01}+(1-\theta)r_{01}\\&=0.5\times0.5581+0.5\times0.78\approx0.669.\end{aligned}$$

命题 5.7.1　灰色综合关联度 ρ_{0i} 具有下列性质：

1°　$0<\rho_{0i}\leqslant1$；

2°　ρ_{0i} 既与序列 X_0，X_i 之各观测数据的大小有关，又与各数据相对于始点的变化速率有关；

3°　ρ_{0i} 恒不为零；

4°　改变 X_0，X_i 中的数据，ρ_{0i} 将随之变化；

5°　序列 X_0，X_i 长度变化，ρ_{0i} 亦变；

6°　θ 取值不同，ρ_{0i} 也不同；

7°　$\theta=1$ 时，$\rho_0=\varepsilon_{0i}$，

$\theta=0$ 时，$\rho_{0i}=r_{0i}$；

8°　$\rho_{00}=1$，$\rho_{ii}=1$；

9°　$\rho_{0i}=\rho_{i0}$.

§5.8 关 联 序

我们已讨论的几种灰色关联度都是序列之间联系之紧密程度的数量表征。对于选定的灰关联算子①，灰色关联度以及广义灰色关联度中的灰色绝对关联度和灰色相对关联度的值都是唯一的。当灰关联算子和 θ 皆取定时，灰色综合关联度也是唯一的。这种有条件的唯一性并不影响我们对问题的分析。在进行系统分析时，研究系统特征行为与相关因素行为的关系，我们主要关心的是系统特征行为序列与各相关因素行为序列关联度的大小次序，而不完全是关联度在数值上的大小。

定义 5.8.1 设 X 为任意集合，“$\geqslant$”是 X 上的一个二元关系，若“$\geqslant$”满足反身性、反对称性和传递性，即有

1° 对任意的 $X_i \in X$，有 $X_i \geqslant X_i$；

2° 对任意的 X_i，$X_j \in X$，若 $X_i \geqslant X_j$，$X_j \geqslant X_i$，则 $X_i = X_j$；

3° 对任意的 X_i，X_j，$X_k \in X$，若 $X_i \geqslant X_j$，$X_j \geqslant X_k$，则 $X_i \geqslant X_k$.

我们称“$\geqslant$”为 X 上的一个偏序关系，具有偏序关系“$\geqslant$”的集合 X 称为偏序集，记为$(X, \geqslant)$.

定义 5.8.2 设$(X, \geqslant)$为偏序集．若偏序关系“$\geqslant$”满足：对任意的 X_i，$X_j \in X$，均有 $X_i \geqslant X_j$ 或 $X_j \geqslant X_i$，则称“$\geqslant$”为 X 上的一个顺序关系②，具有顺序关系的集合$(X, \geqslant)$称为有序集.

定义 5.8.3 设 X_0 为系统特征行为序列，X_i，X_j 为相关因

---

① 见 §5.2.

② 顺序关系也称线性次序关系.

素行为序列，γ 为灰色关联度. 若 $\gamma_{0i}\geqslant\gamma_{0j}$，则称因素 X_i 优于因素 X_j，记为 $X_i\succ X_j$. 称"$\succ$"为由灰色关联度导出的灰色关联序. 相应地，由广义灰色关联度导出的关联序称为广义灰色关联序，其中又分为灰色绝对关联序、灰色相对关联序与灰色综合关联序.

定理 5.8.1 设 X_0 为系统特征行为序列，X_1，X_2，…，X_m 为相关因素行为序列，令

$$X=\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\},$$

则在集合 X 上，灰色关联序、灰色绝对关联序、灰色相对关联序、灰色综合关联序皆为偏序关系.

证明：我们只证明灰色绝对关联序为偏序关系，其它类似可证.

1° 反身性. 任意 $X_i\in X$，若 X_i 与 X_0 长度相同，则灰色绝对关联度 ε_{0i} 有定义，由

$$\varepsilon_{0i}=\varepsilon_{0i} \text{ 知 } X_i\succ X_i;$$

2° 反对称性. 设 $X_i\succ X_j$ 且 $X_j\succ X_i$，则有 $\varepsilon_{0i}\geqslant\varepsilon_{0j}$ 且 $\varepsilon_{0j}\geqslant\varepsilon_{0i}$，于是 $\varepsilon_{0i}=\varepsilon_{0j}$，故 $X_i=X_j$;

3° 传递性. 设 $X_i\succ X_j$，$X_j\succ X_k$，则 $\varepsilon_{0i}\geqslant\varepsilon_{0j}$，$\varepsilon_{0j}\geqslant\varepsilon_{0k}$，故 $\varepsilon_{0i}\geqslant\varepsilon_{0k}$，从而 $X_i\succ X_k$. ∎

定理 5.8.2 设 X_0 为系统特征行为序列，X_1，X_2，…，X_m 为与 X_0 长度相同的相关因素行为序列，令集合 $X=\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m\}$，则

1° 灰色关联序与灰色绝对关联序均为 X 上的顺序关系;

2° 若 X_0，X_1，X_2，…，X_m 的初值皆异于零，则灰色相对关联序与灰色综合关联序也为 X 上的顺序关系.

证明：1° 灰色关联序是顺序关系是显然的. 又，因 X_1，X_2，…，X_m 与 X_0 长度相同，故对任意的 X_i，$X_j\in X$，ε_{0i}，ε_{0j} 皆有定义，不等式 $\varepsilon_{0i}\geqslant\varepsilon_{0j}$，$\varepsilon_{0j}\geqslant\varepsilon_{0i}$ 必有一个成立，所以

$X_i \succ X_j$ 与 $X_j \succ X_i$ 也必有一个成立，从而绝对关联序为顺序关系.

2° 若 X_0, X_1, X_2, …, X_m 的初值皆异于零，则任意的 X_i, $X_j \in X$, r_{0i}, r_{0j} 以及 ρ_{0i}, ρ_{0j} 皆有定义，从而无论是灰色相对关联序还是灰色综合关联序都可比较出 $X_i \succ X_j$，或是 $X_j \succ X_i$. ∎

§5.9 优势分析

定义 5.9.1 设 Y_1, Y_2, …, Y_s 为系统特征行为数据序列，X_1, X_2, …, X_m 为相关因素行为序列. 若 Y_1, Y_2, …, Y_s; X_1, X_2, …, X_m 长度相同，γ_{ij} $(i=1, 2, \cdots, s;\ j=1, 2, \cdots, m)$ 为 Y_i 与 X_j 的灰色关联度，则称

$$\Gamma = (\gamma_{ij}) = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \cdots & \gamma_{sm} \end{bmatrix}$$

为灰色关联矩阵.

灰色关联矩阵中第 i 行的元素是系统特征数据序列 $Y_i (i=1, 2, \cdots, s)$ 与相关因素序列 X_1, X_2, …, X_m 的灰色关联度；第 j 列的元素是系统特征数据序列 Y_1, Y_2, …, Y_s 与 X_j $(j=1, 2, \cdots, m)$ 的灰色关联度.

类似地，可以定义广义灰色关联矩阵，如灰色绝对关联矩阵

$$A = (\varepsilon_{ij}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varepsilon_{s1} & \varepsilon_{s2} & \cdots & \varepsilon_{sm} \end{bmatrix}$$

和灰色相对关联矩阵

$$B=(r_{ij})=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \cdots & r_{sm} \end{bmatrix}$$

以及灰色综合关联矩阵

$$C=(\rho_{ij})=\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \cdots & \rho_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \rho_{s1} & \rho_{s2} & \cdots & \rho_{sm} \end{bmatrix}$$

利用灰色关联矩阵，可以对系统特征或相关因素作优势分析。

定义 5.9.2 设 $Y_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 为系统特征行为序列，$X_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 为相关因素行为序列，

$$\Gamma=(\gamma_{ij})=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \cdots & \gamma_{sm} \end{bmatrix}$$

为其灰色关联矩阵。若存在 k，$i\in\{1, 2, \cdots, s\}$，满足

$$\gamma_{kj}\geqslant\gamma_{ij}, \quad j=1, 2, \cdots, m$$

则称系统特征 Y_k 优于系统特征 Y_i，记为 $Y_k\succ Y_i$。

若对任意的 $i=1, 2, \cdots, s$，$i\neq k$，恒有 $Y_k\succ Y_i$，则称 Y_k 为最优特征。

定义 5.9.3 设 $Y_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 为系统特征行为序列，$X_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 为相关因素序列，

$$\Gamma=(\gamma_{ij})=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \cdots & \gamma_{sm} \end{bmatrix}$$

为其灰色关联矩阵。若存在 l，$j\in\{1, 2, \cdots, m\}$，满足

$$\gamma_{il}\geqslant\gamma_{ij}, \quad i=1, 2, \cdots, s$$

则称因素 X_l 优于因素 X_j，记为 $X_l\succ X_j$。

若对任意的 $j=1,2,\cdots,m,\ j\neq l$，恒有 $X_l\succ X_j$，则称 X_l 为最优因素。

定义 5.9.4 设

$$\Gamma=(\gamma_{ij})=\begin{bmatrix}\gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \gamma_{s1} & \gamma_{s2} & \cdots & \gamma_{sm}\end{bmatrix}$$

为灰色关联矩阵。

1° 若存在 k，$i\in\{1,2,\cdots,s\}$，满足

$$\sum_{j=1}^{m}\gamma_{kj}\geqslant\sum_{j=1}^{m}\gamma_{ij},$$

则称系统特征 Y_k 准优于系统特征 Y_i，记为 $Y_k\gtrsim Y_i$。

2° 若存在 l，$j\in\{1,2,\cdots,m\}$，满足

$$\sum_{i=1}^{s}\gamma_{il}\geqslant\sum_{i=1}^{s}\gamma_{ij},$$

则称因素 X_l 准优于因素 X_j，记为 $X_l\gtrsim X_j$。

定义 5.9.5 1° 若存在 $k\in\{1,2,\cdots,s\}$，使得对任意 $i=1,2,\cdots,s$，有 $Y_k\gtrsim Y_i$，则称系统特征 Y_k 为准优特征。

2° 若存在 $l\in\{1,2,\cdots,m\}$，使得对任意 $j=1,2,\cdots,m$，有 $X_l\gtrsim X_j$，则称因素 X_l 为准优因素。

命题 5.9.1 在一个具有 s 个系统特征，m 个相关因素的系统中，未必有最优特征和最优因素，但一定有准优特征和准优因素。

例 5.9.1 设

$Y_1=(170,\ 174,\ 197,\ 216.4,\ 235.8)$,

$Y_2=(57.55,\ 70.74,\ 76.8,\ 80.7,\ 39.85)$,

$Y_3=(68.56,\ 70,\ 85.38,\ 99.83,\ 103.4)$

为系统特征行为序列，

X_1= (308.58, 310, 295, 346, 367),

X_2= (195.4, 189.9, 187.2, 205, 222.7),

X_3= (24.6, 21, 12.2, 15.1, 14.57),

X_4= (20, 25.6, 23.3, 29.2, 30),

X_5= (18.98, 19, 22.3, 23.5, 27.655)

为相关因素行为序列. 试作优势分析.

解: 1° 求绝对关联矩阵.

对各行为序列求始点零化象，得:

Y_1^0= (0, 4, 27, 46.4, 65.8),

Y_2^0= (0, 13.19, 19.25, 23.15, 32.3),

Y_3^0= (0, 1.44, 16.82, 31.27, 34.84),

X_1^0= (0, 1.42, −13.58, 37.42, 58.42),

X_2^0= (0, −5.5, −8.2, 9.6, 27.3),

X_3^0= (0, −3.6, −12.4, −9.5, −10.03),

X_4^0= (0, 5.6, 3.3, 9.2, 10),

X_5^0= (0, 0.02, 3.32, 4.52, 8.675),

对应于系统特征 Y_1,

$$|Ys_1|=\left|\sum_{k=2}^{4} y_1^0(k)+\frac{1}{2}y_1^0(5)\right|$$

$$=\left|4+27+46.4+\frac{1}{2}\times 65.80\right|=110.3,$$

$$|Xs_1|=\left|\sum_{k=2}^{4} x_1^0(k)+\frac{1}{2}x_1^0(5)\right|$$

$$=\left|1.42+(-13.58)+37.42+\frac{1}{2}\times 58.42\right|=54.47,$$

$$|Xs_1-Ys_1|=\left|\sum_{k=2}^{4}(x_1^0(k)-y_1^0(k))+\frac{1}{2}(x_1^0(5)-y_1^0(5))\right|$$

$$= \left| (1.42 - 4) + (-13.58 - 27) + (37.42 - 46.4) + \frac{1}{2}(58.42 - 65.80) \right| = 55.9,$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{1 + |Ys_1| + |Xs_1|}{1 + |Ys_1| + |Xs_1| + |Xs_1 - Ys_1|}$$

$$= \frac{1 + 110.3 + 54.47}{1 + 110.3 + 54.47 + 55.9} = \frac{165.77}{221.67} = 0.748;$$

$$|Xs_2| = \left| \sum_{k=2}^{4} x_2^0(k) + \frac{1}{2} x_2^0(5) \right|$$

$$= \left| (-5.5) + (-8.2) + 9.6 + \frac{1}{2} \times 27.3 \right| = 9.55,$$

$$|Xs_2 - Ys_1| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_2^0(k) - y_1^0(k)) + \frac{1}{2}(x_2^0(5) - y_1^0(5)) \right|$$

$$= \left| (-5.5 - 4) + (8.2 - 27) + (9.6 - 46.4) + \frac{1}{2}(27.3 - 65.8) \right| = 100.75,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1 + |Ys_1| + |Xs_2|}{1 + |Ys_1| + |Xs_2| + |Xs_2 - Ys_1|}$$

$$= \frac{1 + 110.3 + 9.55}{1 + 110.3 + 9.55 + 100.75} = 0.545;$$

$$|Xs_3| = \left| \sum_{k=2}^{4} x_3^0(k) + \frac{1}{2} x_3^0(5) \right|$$

$$= \left| -3.6 - 12.4 - 9.5 - \frac{1}{2} \times 10.03 \right| = 30.515,$$

$$|Xs_3 - Ys_1| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_3^0(k) - y_1^0(k)) + \frac{1}{2}(x_3^0(5) - y_1^0(5)) \right|$$

$$= \Big| (-3.6-4) + (-12.4-27) + (-9.5-46.4) + \frac{1}{2}(-10.03-65.8) \Big| = 140.815,$$

$$e_{13} = \frac{1+|Ys_1|+|Xs_3|}{1+|Ys_1|+|Xs_3|+|Xs_3-Ys_1|}$$

$$= \frac{1+110.3+30.515}{1+110.3+30.515+140.815}$$

$$= \frac{141.815}{282.63} = 0.502,$$

$$|Xs_4| = \left| \sum_{k=2}^{4} x_4^0(k) + \frac{1}{2}x_4^0(5) \right|$$

$$= \left| 5.6+3.3+9.2+\frac{1}{2}\times 10 \right| = 23.1,$$

$$|Xs_4 - Ys_1| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_4^0(k) - y_1^0(k)) + \frac{1}{2}(x_4^0(5) - y_1^0(5)) \right|$$

$$= \Big| (5.6-4) + (3.3-27) + (9.2-46.4) + \frac{1}{2}(10-65.8) \Big| = 87.2,$$

$$e_{14} = \frac{1+|Ys_1|+|Xs_4|}{1+|Ys_1|+|Xs_4|+|Xs_4-Ys_1|}$$

$$= \frac{1+110.3+23.1}{1+110.3+23.1+87.2} = \frac{134.4}{221.6} = 0.606,$$

$$|Xs_5| = \left| \sum_{k=2}^{4} x_5^0(k) + \frac{1}{2}x_5^0(5) \right|$$

$$= \left| 0.02+3.32+4.52+\frac{1}{2}\times 8.675 \right| = 12.1975,$$

$$|Xs_5 - Ys_1| = \left|\sum_{k=2}^{4} (x_5^0(k) - y_1^0(k)) + \frac{1}{2}(x_5^0(5) - y_1^0(5))\right|$$

$$= \quad 02-4) + (3.32-27) + (4.52-46.4)$$

$$+ \frac{1}{2}(8.675-65.8)\Big| = 98.1025,$$

$$\varepsilon_{15} = \frac{1+|Ys_1|+|Xs_5|}{1+|Ys_1|+|Xs_5|+|Xs_5-Ys_1|}$$

$$= \frac{1+110.3+12.1975}{1+110.3+12.1975+98.1025} = \frac{123.4975}{221.6} = 0.557.$$

对应于系统特征Y_2,

$$|Ys_2| = \left|\sum_{k=2}^{4} y_2^0(k) + \frac{1}{2}y_2^0(5)\right|$$

$$= \left|13.19+19.25+23.15+\frac{1}{2}\times 32.3\right| = 71.74,$$

$$|Xs_1 - Ys_2| = \left|\sum_{k=2}^{4} (x_1^0(k) - v_2^0(k)) + \frac{1}{2}(x_1^0(5) - y_1^0(5))\right|$$

$$= \Big|(1.42-13.19) + (-13.58-19.25) + (37.42$$

$$-23.15) + \frac{1}{2}(58.42-32.3)\Big| = 17.27,$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1+|Ys_2|+|Xs_1|}{1+|Ys_2|+|Xs_1|+|Xs_1-Ys_2|}$$

$$= \frac{1+71.74+54.47}{1+71.74+54.47+17.27} = \frac{127.21}{144.48} = 0.880;$$

$$|Xs_2 - Ys_2| = \left|\sum_{k=2}^{4} (x_2^0(k) - y_2^0(k)) + \frac{1}{2}(x_2^0(5) - y_2^0(5))\right|$$

$$= \left| (-5.5-13.19)+(-8.2-19.25)+(9.6-23.15) + \frac{1}{2}(27.3-32.3) \right| = 62.19,$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1+|Ys_2|+|Xs_2|}{1+|YS_2|+|Xs_2|+|Xs_2-Ys_2|}$$

$$= \frac{1+71.74+9.55}{1+71.74+9.55+62.19} = \frac{82.29}{144.48} = 0.570;$$

$$|Xs_3-Ys_2| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_3^0(k)-y_2^0(k)) + \frac{1}{2}(x_3^0(5)-y_2^0(5)) \right|$$

$$= \left| (-3.6-13.19)+(-12.4-19.25) + (-9.5-23.15)+\frac{1}{2}(-10.03-32.3) \right|$$

$$= 102.255,$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1+|Ys_2|+|Xs_3|}{1+|Ys_2|+|Xs_3|+|Xs_3-Ys_2|}$$

$$= \frac{1+71.74+30.515}{1+71.74+30.515+102.255} = \frac{103.255}{205.51} = 0.502;$$

$$|Xs_4-Ys_2| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_4^0(k)-y_2^0(k)) + \frac{1}{2}(x_4^0(5)-y_2^0(5)) \right|$$

$$= \left| (5.6-13.19)+(3.3-19.25)+(9.2-23.15) + \frac{1}{2}(10-32.3) \right| = 48.64,$$

$$\varepsilon_{24} = \frac{1+|Ys_2|+|Xs_4|}{1+|Ys_2|+|Xs_4|+|Xs_4-Ys_2|}$$

$$= \frac{1+71.74+23.1}{1+71.74+23.1+48.64} = \frac{95.84}{144.48} = 0.663$$

$$|Xs_5 - Ys_2| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x_5^0(k) - y_2^0(k)) + \frac{1}{2}(x_5^0(5) - y_2^0(5)) \right|$$

$$= \Big| (0.02 - 13.19) + (3.32 - 19.25) + (4.52 - 23.15) + \frac{1}{2}(8.675 - 32.3) \Big| = 59.5425,$$

$$\varepsilon_{25} = \frac{1+|Ys_2|+|Xs_5|}{1+|Ys_2|+|Xs_5|+|Xs_5 - Ys_2|}$$

$$= \frac{1+71.74+12.1975}{1+71.74+12.1975+59.5425} = \frac{84.9375}{144.48} = 0.588;$$

对应于系统特征 Y_3，同法可得

$$\varepsilon_{31} = 0.907,\ \varepsilon_{32} = 0.574,\ \varepsilon_{33} = 0.503,$$

$$\varepsilon_{34} = 0.675,\ \varepsilon_{35} = 0.594.$$

于是有绝对关联矩阵

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.748 & 0.545 & 0.502 & 0.606 & 0.557 \\ 0.880 & 0.570 & 0.502 & 0.663 & 0.588 \\ 0.907 & 0.574 & 0.503 & 0.675 & 0.594 \end{bmatrix}.$$

2° 求相对关联矩阵.

系统特征行为序列 Y_i ($i = 1, 2, 3$) 和相关因素行为序列 X_j ($j = 1, 2, 3, 4, 5$) 的初值象为

$Y_1' = (1, 1.0235, 1.1588, 1.2729, 1.3871)$,

$Y_2' = (1, 1.2292, 1.3345, 1.4023, 1.5613)$,

$Y_3'=(1,\ 1.0210,\ 1.2398,\ 1.4561,\ 1.5082)$,

$X_1'=(1,\ 1.0046,\ 0.9560,\ 1.1213,\ 1.1893)$,

$X_2'=(1,\ 0.9719,\ 0.9580,\ 1.0491,\ 1.1397)$,

$X_3'=(1,\ 0.8537,\ 0.4959,\ 0.6138,\ 0.5923)$,

$X_4'=(1,\ 1.28,\ 1.165,\ 1.46,\ 1.5)$,

$X_5'=(1,\ 1.0011,\ 1.1749,\ 1.2381,\ 1.4571)$.

诸$Y_i'(i=1,\ 2,\ 3)$和$X_j'(j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$的始点零化象为

$$Y_1'^0=(y_1'^0(1),\ y_1'^0(2),\ y_1'^0(3),\ y_1'^0(4),\ y_1'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.0235,\ 0.1588,\ 0.2729,\ 0.3871),$$
$$Y_2'^0=(y_2'^0(1),\ y_2'^0(2),\ y_2'^0(3),\ y_2'^0(4),\ y_2'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.2292,\ 0.3345,\ 0.4023,\ 0.5613),$$
$$Y_3'^0=(y_3'^0(1),\ y_3'^0(2),\ y_3'^0(3),\ y_3'^0(4),\ y_3'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.0210,\ 0.2398,\ 0.4561,\ 0.5082),$$
$$X_1'^0=(x_1'^0(1),\ x_1'^0(2),\ x_1'^0(3),\ x_1'^0(4),\ x_1'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.0046,\ -0.044,\ 0.1213,\ 0.1893),$$
$$X_2'^0=(x_2'^0(1),\ x_2'^0(2),\ x_2'^0(3),\ x_2'^0(4),\ x_2'^0(5))$$
$$=(0,\ -0.0281,\ -0.042,\ 0.0491,\ 0.1397),$$
$$X_3'^0=(x_3'^0(1),\ x_3'^0(2),\ x_3'^0(3),\ x_3'^0(4),\ x_3'^0(5))$$
$$=(0,\ -0.1463,\ -0.5041,\ -0.3862,\ -0.4077),$$
$$X_4'^0=(x_4'^0(1),\ x_4'^0(2),\ x_4'^0(3),\ x_4'^0(4),\ x_4'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.28,\ 0.165,\ 0.46,\ 0.5),$$
$$X_5'^0=(x_5'^0(1),\ x_5'^0(2),\ x_5'^0(3),\ x_5'^0(4),\ x_5'^0(5))$$
$$=(0,\ 0.0011,\ 0.1749,\ 0.2381,\ 0.4571).$$

由
$$|Ys_i'|=\left|\sum_{k=2}^{4} y_i'^0(k)+\frac{1}{2}y_i'^0(5)\right|,\quad i=1,\ 2,\ 3$$

$$|Xs_j'|=\left|\sum_{k=2}^{4} x_j'^0(k)+\frac{1}{2}x_j'^0(5)\right|,\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

$$|Xs'_j - Ys'_i| = \left| \sum_{k=2}^{4} (x'^0_j(k) - y'^0_i(k)) + \frac{1}{2}(x'^0_j(5) - y'^0_i(5)) \right|,$$

$$i = 1,\ 2,\ 3;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

$$r_{ij} = \frac{1 + |Ys'_i| + |Xs'_j|}{1 + |Ys'_i| + |Xs'_j| + |Xs'_j - Ys'_i|},$$

$$i = 1,\ 2,\ 3;\quad j = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

得 $r_{11} = 0.7945$, $r_{12} = 0.7389$, $r_{13} = 0.6046$,

$r_{14} = 0.8471$, $r_{15} = 0.9973$;

$r_{21} = 0.6937$, $r_{22} = 0.6571$, $r_{23} = 0.5837$,

$r_{24} = 0.9738$, $r_{25} = 0.8271$;

$r_{31} = 0.7300$, $r_{32} = 0.6866$, $r_{33} = 0.6101$,

$r_{34} = 0.9444$, $r_{35} = 0.8884$.

相对关联矩阵

$$B = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7945 & 0.7389 & 0.6046 & 0.8471 & 0.9973 \\ 0.6937 & 0.6571 & 0.5837 & 0.9738 & 0.8271 \\ 0.7300 & 0.6866 & 0.6101 & 0.9444 & 0.8884 \end{bmatrix}$$

3° 求综合关联矩阵 C.

取 $\theta = 0.5$, 则

$$C = \theta A + (1-\theta)B = (\theta\varepsilon_{ij} + (1-\theta)r_{ij})$$

$$= (\rho_{ij}) = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} & \rho_{35} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7713 & 0.6420 & 0.5533 & 0.7266 & 0.7772 \\ 0.7869 & 0.6136 & 0.5429 & 0.8184 & 0.7076 \\ 0.8185 & 0.6303 & 0.5566 & 0.8097 & 0.7412 \end{bmatrix}.$$

4° 结果分析.

从绝对关联矩阵看，由于A中各行元素满足：

$$a_{3j}>a_{2j}\geqslant a_{1j},\quad j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

故有$Y_3\succ Y_2\succ Y_1$. 即Y_3为最优特征，Y_2次之，Y_1最劣. A中各列元素满足：

$$a_{i1}>a_{i4}>a_{i5}>a_{i2}>a_{i3},\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

故有$X_1\succ X_4\succ X_5\succ X_2\succ X_3$，即$X_1$为最优因素，$X_4$次之，$X_5$又次之，$X_2$劣于$X_5$，$X_3$最劣.

从相对关联矩阵B看，B中元素满足：

$$r_{i4}>r_{i1}>r_{i2}>r_{i3},\ i=1,\ 2,\ 3.$$

$$r_{i5}>r_{i1}>r_{i2}>r_{i3},\ i=1,\ 2,\ 3.$$

故有$X_4\succ X_1\succ X_2\succ X_3$，$X_5\succ X_1\succ X_2\succ X_3$，所以$X_3$最劣，进而考虑

$$\sum_{j=1}^{5} r_{1j}=3.9824>\sum_{j=1}^{5} r_{3j}=3.8595>\sum_{j=1}^{5} r_{2j}=3.7354,$$

所以$Y_1\succsim Y_3\succsim Y_2$，故$Y_1$为准优特征.

$$\sum_{i=1}^{8} r_{i4}=2.7653>\sum_{i=1}^{8} r_{i5}=2.7128>\sum_{i=1}^{8} r_{i1}=2.2182$$

$$>\sum_{i=1}^{8} r_{i2}=2.0826>\sum_{i=1}^{8} r_{i3}=1.7984,$$

所以$X_4\succsim X_5\succsim X_1\succsim X_2\succsim X_3$，故$X_4$为准优因素，$X_5$次之，$X_3$最劣.

从综合关联矩阵C看，C中元素满足：

$$\rho_{i1}>\rho_{i2}>\rho_{i3},\quad \rho_{i4}>\rho_{i2}>\rho_{i3},\quad \rho_{i5}>\rho_{i2}>\rho_{i3},$$

$$i=1,\ 2,\ 3.$$

所以$X_1\succ X_2\succ X_3$，$X_4\succ X_2\succ X_3$，$X_5\succ X_2\succ X_3$. 故X_3最劣. 进一步考虑

$$\sum_{j=1}^{5}\rho_{3j}=3.5563>\sum_{j=1}^{5}\rho_{1j}=3.4704>\sum_{j=1}^{5}\rho_{2j}=3.4694,$$

所以 $Y_3\succsim Y_1\succsim Y_2$，故 Y_3 为准优特征.

$$\sum_{i=1}^{5}\rho_{i1}=2.3767>\sum_{i=1}^{5}\rho_{i4}=2.3547>\sum_{i=1}^{5}\rho_{i5}=2.226$$

$$>\sum_{i=1}^{5}\rho_{i2}=1.8859>\sum_{i=1}^{5}\rho_{i3}=1.6528,$$

所以 $X_1\succsim X_4\succsim X_5\succsim X_2\succsim X_3$，故 X_1 为准优因素，X_4 次之，X_5 优于 X_2，X_3 最劣.

三种关联序分析的结果之所以不完全一致，是由于绝对关联序是从绝对量的关系着眼考虑，相对关联序是从各时刻观测数据相对于始点的变化速率着眼，而综合关联序则是综合了绝对量的关系和变化速率的关系之后来考察的. 在实际问题中，可根据具体情况选择其中的一种关联序. 为简便起见，当系统特征行为序列和相关因素序列皆经过特定的灰关联算子作用之后，只考虑其绝对关联序即可.

§5.10 应用实例

例 5.10.1 河南省长葛县乡镇企业经济的灰关联分析.

近年来，长葛县乡镇企业发展比较快，1983 年到 1986 年，平均每年递增 51.6%，乡镇企业经济在全县经济发展中占有重要地位. 1986 年，全县乡镇企业产值达 35388 万元，占工农业总产值的 60%. 如何有效地加速乡镇企业发展，促进经济起飞，是全县上下普遍关心的问题. 据分析，乡镇企业产值主要与固定资产、流动资金、劳动力、企业留利四个因素有关. 长葛县乡镇企业产值及相关因素行为数据如表 5.10.1 所示.

表 5.10.1　长葛县乡镇企业经济行为数据表　　单位：万元

变量 \ 年份	1983	1984	1985	1986
X_0(产值)	10155	12583	23408	35388
X_1(固定资产)	3799	3605	5460	6982
X_2(流动资金)	1752	2160	2213	4753
X_3(劳动力：人)	24186	45590	57685	85540
X_4(企业留利)	1164	1788	3134	4478

1°　求绝对关联度.

令　$X_i^0=(x_i(1)-x_i(1),x_i(2)-x_i(1),x_i(3)-x_i(1),x_i(4)-x_i(1))$

$=(x_i^0(1),\ x_i^0(2),\ x_i^0(3),\ x_i^0(4)),\ i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$

则　$X_0^0=(x_0^0(1),\ x_0^0(2),\ x_0^0(3),\ x_0^0(4))$

$=(0,\ 2433,\ 13325,\ 25233),$

$X_1^0=(x_1^0(1),\ x_1^0(2),\ x_1^0(3),\ x_1^0(4))$

$=(0,\ -194,\ 1661,\ 3183),$

$X_2^0=(x_2^0(1),\ x_2^0(2),\ x_2^0(3),\ x_2^0(4))$

$=(0,\ 408,\ 461,\ 3001),$

$X_3^0=(x_3^0(1),\ x_3^0(2),\ x_3^0(3),\ x_3^0(4))$

$=(0,\ 21404,\ 33499,\ 61354),$

$X_4^0=(x_4^0(1),\ x_4^0(2),\ x_4^0(3),\ x_4^0(4))$

$=(0,\ 624,\ 2030,\ 3314).$

由　$|s_i|=\left|\sum_{k=2}^{3}x_i^0(k)+\frac{1}{2}x_i^0(4)\right|,\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4,$ 得

$$|s_0|=\left|2433+13325+\frac{1}{2}\times 25233\right|=28374.5,$$

$$|s_1|=\left|-194+1661+\frac{1}{2}\times 3183\right|=3058.5,$$

$$|s_2| = \left|408 + 461 + \frac{1}{2} \times 3001\right| = 2369.5,$$

$$|s_3| = \left|21404 + 33499 + \frac{1}{2} \times 61354\right| = 85580,$$

$$|s_4| = \left|624 + 2030 + \frac{1}{2} \times 3314\right| = 4311.$$

由 $$|s_i - s_0| = \left|\sum_{k=2}^{3} (x_i^0(k) - x_0^0(k)) + \frac{1}{2}(x_i^0(4) - x_0^0(4))\right|,$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

得 $|s_1 - s_0| = 25316$, $|s_2 - s_0| = 26005$,

$|s_3 - s_0| = 57205.5$, $|s_4 - s_0| = 24063.5$.

由 $$\varepsilon_{0i} = \frac{1 + |s_0| + |s_i|}{1 + |s_0| + |s_i| + |s_i - s_0|},\quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

得 $\varepsilon_{01} = 0.554$, $\varepsilon_{02} = 0.542$, $\varepsilon_{03} = 0.666$, $\varepsilon_{04} = 0.576$.

2° 求相对关联度.

先求出 $X_i (i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 的初值象. 由

$$X_i' = (x_i'(1),\ x_i'(2),\ x_i'(3),\ x_i'(4))$$

$$= \left(\frac{x_i(1)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(2)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(3)}{x_i(1)},\ \frac{x_i(4)}{x_i(1)}\right),\quad i = 1,2,3,4$$

得 $$X_0' = (x_0'(1),\ x_0'(2),\ x_0'(3),\ x_0'(4))$$

$$= (1,\ 1.2396,\ 2.3051,\ 3.4848),$$

$$X_1' = (x_1'(1),\ x_1'(2),\ x_1'(3),\ x_1'(4))$$

$$= (1,\ 0.9489,\ 1.4372,\ 1.8379),$$

$$X_2' = (x_2'(1),\ x_2'(2),\ x_2'(3),\ x_2'(4))$$

$$= (1,\ 1.2329,\ 1.2631,\ 2.7129),$$

$$X_3' = (x_3'(1),\ x_3'(2),\ x_3'(3),\ x_3'(4))$$

$$= (1,\ 1.8850,\ 2.3851,\ 3.5368),$$

$$X_4' = (x_4'(1),\ x_4'(2),\ x_4'(3),\ x_4'(4))$$

$$= (1,\ 1.5361,\ 2.6924,\ 3.8471).$$

诸 $X_i'(i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$的始点零化象

$$X_i'^0=(x_i'^0(1),\ x_i'^0(2),\ x_i'^0(3),\ x_i'^0(4))$$
$$=(x_i'(1)-x_i'(1),\ x_i'(2)-x_i'(1),\ x_i'(3)-x_i'(1),\ x_i'(4)-x_i'(1)),$$
$$X_0'^0=(x_0'^0(1),\ x_0'^0(2),\ x_0'^0(3),\ x_0'^0(4))$$
$$=(0,\ 0.2396,\ 1.3051,\ 2.4848),$$
$$X_1'^0=(x_1'^0(1),\ x_1'^0(2),\ x_1'^0(3),\ x_1'^0(4))$$
$$=(0,\ -0.0511,\ 0.4372,\ 0.8379),$$
$$X_2'^0=(x_2'^0(1),\ x_2'^0(2),\ x_2'^0(3),\ x_2'^0(4))$$
$$=(0,\ 0.2329,\ 0.2631,\ 1.7129),$$
$$X_3'^0=(x_3'^0(1),\ x_3'^0(2),\ x_3'^0(3),\ x_3'^0(4))$$
$$=(0,\ 0.8850,\ 1.3851,\ 2.5368),$$
$$X_4'^0=(x_4'^0(1),\ x_4'^0(2),\ x_4'^0(3),\ x_4'^0(4))$$
$$=(0,\ 0.5361,\ 1.6924,\ 2.8471).$$

由 $$|s_i'|=\left|\sum_{k=2}^{3}x_i'^0(k)+\frac{1}{2}x_i'^0(4)\right|,\quad i=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$|s_i'-s_0'|=\left|\sum_{k=2}^{3}(x_i'^0(k)-x_0'^0(k))+\frac{1}{2}(x_i'^0(4)-x_0'^0(4))\right|,$$
$$i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

得 $|s_0'|=2.7871,\ |s_1'|=0.80505,\ |s_2'|=1.35245,$
$|s_3'|=3.5385,\ |s_4'|=3.65205,$
$|s_1'-s_0'|=1.98205,\ |s_2'-s_0'|=1.43465,$
$|s_3'-s_0'|=0.7514,\ |s_4'-s_0'|=0.86495.$

由 $$r_{0i}=\frac{1+|s_0'|+|s_i'|}{1+|s_0'|+|s_i'|+|s_i'-s_0'|}$$

得 $r_{01}=0.6985,\ r_{02}=0.7818,\ r_{03}=0.9070,\ r_{04}=0.8958.$

3° 求综合关联度.

取 $\theta=0.5$, 由

$$\rho_{0i}=\theta\varepsilon_{0i}+(1-\theta)r_{0i},\quad i=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

得 $\rho_{01}=0.6263$，$\rho_{02}=0.6619$，$\rho_{03}=0.7865$，$\rho_{04}=0.7359$.

4° 结果分析.

由 $\rho_{03}>\rho_{04}>\rho_{02}>\rho_{01}$，可知

$$X_3\succ X_4\succ X_2\succ X_1,$$

X_3 为最优因素，X_4 次之，X_2 又次之，X_1 最劣. 也就是说，劳动力对乡镇企业产值的影响最大，企业留利对产值的影响仅次于劳动力，固定资产对产值的影响最小. 这一结果与该县实际非常吻合. 这个县的乡镇企业主要是劳动密集型产业，产值的增长在很大程度上是靠增加劳动力实现的. 我国农村有着取之不尽、用之不竭的剩余劳动力资源，充分、有效地挖掘这种资源，是在我国特定国情下，发展商品生产，繁荣经济的唯一途径. 因此，积极发展劳动密集型产业，是乡镇企业的大方向. 企业留利主要用于职工福利和企业技术改造. 福利待遇的提高可以激发职工的劳动积极性，技术改造则能够大大地提高技术水平和经济效益，增强企业发展后劲. 在相当长的一段时间内，我们要坚持给乡镇企业以优惠政策，“将欲取之，必先予之”，在考虑国家利益的同时，适当扩大企业留利的比例，使乡镇企业有更多的自主权，创造适宜的环境，促进乡镇企业不断地成长、发展.

例 5.10.2 河南省经济落后的原因探析①.

人们分析经济建设中的问题，往往偏重于从一个经济系统本身找原因，这样做当然也可以发现一些问题，提出有裨益的见解. 但一个地区，作为全国的一个子系统，其经济发展中的根本问题或症结所在常常是通过横向的分析和研究才能发现. 这里我们从河南、湖北、山东、江苏、上海等省、市 1987 年有关经济数据入手，通过一些主要经济指标及相关因素的横向分析和对比来探求

① 参见文献[35]

河南落后的原因，研究实现河南省经济振兴的启动机制，寻找河南崛起的起步点.

1° 总产值分析.

这里重点考虑人均工农业总产值这一主要经济指标，相关因素分为两大类，一类是经济结构因素，主要有非农业劳动者在全体社会劳动者中所占的比重、轻工业产值在工农业总产值中所占的比重和人均食品工业产值三个指标；另一类反映科技、教育、文化水平，采用平均每万人口中的大学生人数、非文盲在总人口中所占的比重、专业技术人员在全体社会劳动者中的比重、科学研究和综合技术服务人员在全体社会劳动者中所占的比重以及文化教育人员在全体社会劳动者中所占的比重等五个指标. 各有关数据

表 5.10.2 人均工农业总产值与相关因素序列的均值象

项目	代号	均值象				
		河南	湖北	山东	江苏	上海
人均工农业总产值	ZY_1	0.3441	0.5327	0.5431	0.9250	2.6550
非农业劳动者在全体社会劳动者中所占比重	ZX_1	0.3530	0.6851	0.5794	1.2106	2.1719
轻工业产值在工农业总产值中所占的比重	ZX_2	0.7780	0.8956	0.8995	1.1250	1.3018
人均食品工业产值	ZX_3	0.4432	0.7335	0.6918	0.9139	2.2178
平均每万人口中的大学生数	ZX_4	0.9210	0.9952	0.9358	0.9952	1.1527
非文盲在总人口中的比重	ZX_5	0.9543	0.0121	0.9669	0.9669	1.0999
专业技术人员在全体社会劳动者中所占的比重	ZX_6	0.5032	0.8325	0.6619	0.9144	2.0880
科学研究和综合技术服务人员在全体社会劳动者中的比重	ZX_7	0.1351	0.5135	0.4865	0.4865	3.3784
文化教育人员在全体社会劳动者中的比重	ZX_8	0.6245	0.9449	0.8546	0.8546	1.8776

的具体值从略，相应的均值象序列如表 5.10.2 所示.

人均工农业总产值 ZY_1 与 $ZX_j(j=1, 2, \cdots, 8)$ 的关联度分别为：

$$\varepsilon_{11}=0.964,\ \varepsilon_{12}=0.757,\ \varepsilon_{13}=0.957,\ \varepsilon_{14}=0.648,$$

$$\varepsilon_{15}=0.625,\ \varepsilon_{16}=0.918,\ \varepsilon_{17}=0.910,\ \varepsilon_{18}=0.834.$$

由 $\varepsilon_{11}>\varepsilon_{13}>\varepsilon_{16}>\varepsilon_{17}>\varepsilon_{18}>\varepsilon_{12}>\varepsilon_{14}>\varepsilon_{15}$，故有

$$ZX_1>ZX_3>ZX_6>ZX_7>ZX_8>ZX_2>ZX_4>ZX_5.$$

ZX_1 最优，即非农业劳动者在全体社会劳动者中所占的比重对人均工农业总产值的影响最大. 事实上，在目前，我国平均每年每个农业劳动力创造的产值还不及工业劳动力创造产值的十分之一. 这就决定了哪个地区能尽快地把农业劳动力解脱出来，哪个地区就会先富起来. 而河南省的非农业劳动者仅占全部社会劳动者的 14.02%，这是导致其人均工农业总产值低下的一个主要原因. 此外，人均食品工业产值 ZX_8，专业技术人员在全体社会劳动者中所占的比重 ZX_6，科学研究和综合技术服务人员在全体社会劳动者中所占的比重 ZX_7 等与人均工农业总产值的关联度都大于 0.9，说明其间的关系也十分密切. 事实上，食品工业是高增值产业，专业技术人员和科研人员则是科学技术的载体，而科学技术是最活跃的生产力. 河南虽然是一个农业省，但食品工业比较落后，人均食品工业产值仅为江苏的 48.5%，上海的 20%；科技人员也严重缺乏，专业技术人员和科研人员在全体社会劳动者中的比重分别为江苏的 55%，28%；上海的 24%，4%. 人才短缺是制约河南经济发展的瓶颈. 河南的教育比较薄弱，在前述五个省、市中，平均每万人口中的大学生数河南最少，而文盲的比重却是河南最高. 虽然由于这两个数据各省悬殊不大，结果出现 ZX_5，ZX_4 与 ZY_1 的关联度较小，却不能因此而作出教育水平高低对经济发展无关紧要的结论. 教育与科技、经济的发展互为因果. 经济落后，无力支撑科学技术和教育事业，反过

来，科技教育对经济建设的推进作用也会越来越微弱．如果不下决心、花大力气迅速把科技教育提高到新的水平上，振兴经济将是空话．

2° 工业经济分析．

分析工业经济，这里主要考虑全民所有制工业企业全员劳动生产率、每百元资金实现的利税、每百元固定资产原值实现的产值和亿元工业产值能耗四个指标．相关因素分为三类：一类是产业结构因素，包括轻工业企业职工人数、产值在工业职工总数、工业总产值中的比重和非采掘业职工人数、产值在工业职工总数、工业总产值中所占的比重四个指标；一类是工程技术人员在全体职工中所占的比重；另一类是管理人员在全体职工中所占的比重．各指标数据的具体值从略，其灰关联算子作用象如表5.10.3所示．其中除能耗指标为原始数据的倒数化算子作用象的均值象外，其

表5.10.3 工业经济指标及相关因素的均值象

指标	代号	均值象				
		河南	湖北	山东	江苏	上海
工业企业全员劳动生产率	GY_1	0.6391	0.8956	0.8504	1.0351	1.5798
每百元资金实现利税	GY_2	0.7362	0.8908	0.9410	0.9830	1.4490
每百元固定资产原值实现产值	GY_3	0.7259	0.8094	0.8751	1.2432	1.3464
亿元工业产值能耗	GY_4	0.5181	0.7498	0.7631	1.3613	1.6078
轻工业产值占工业总产值的比重	GX_1	0.9330	0.9590	0.9778	1.0824	1.0478
轻工业职工人数占工业职工总数的比重	GX_2	0.8546	0.9801	1.0333	1.0646	1.0673
非采掘业产值占工业总产值的比重	GX_3	0.9711	1.0036	0.9413	1.0346	1.0494
非采掘业职工人数占工业职工总数的比重	GX_4	0.8878	1.0740	0.8905	1.0226	1.1252
工程技术人员占工业职工总数比重	GX_5	0.7265	0.9852	0.7940	1.1201	1.3743
管理人员在职工总数中所占比重	GX_6	0.9877	1.0230	1.0085	0.9750	1.0058

余的皆为原始数据的均值象.

算出 GY_i 与 GX_j 的关联度 ε_{ij}，$i=1,2,3,4$；$j=1,2,3,4,5,6$，得关联矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & \varepsilon_{16}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & \varepsilon_{26}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & \varepsilon_{36}\\ \varepsilon_{41} & \varepsilon_{42} & \varepsilon_{43} & \varepsilon_{44} & \varepsilon_{45} & \varepsilon_{46}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.712 & 0.805 & 0.665 & 0.757 & 0.921 & 0.651\\ 0.766 & 0.883 & 0.707 & 0.822 & 0.974 & 0.689\\ 0.749 & 0.859 & 0.694 & 0.802 & 0.995 & 0.677\\ 0.664 & 0.737 & 0.628 & 0.699 & 0.826 & 0.617\end{bmatrix}$$

由关联矩阵知$\varepsilon_{i5}>\varepsilon_{i2}>\varepsilon_{i4}>\varepsilon_{i1}>\varepsilon_{i3}>\varepsilon_{i6}$，$i=1,2,3,4$. 从而得 $GX_5>GX_2>GX_4>GX_1>GX_3>GX_6$. GX_5 最优，GX_2和GX_4次之，GX_6最劣. 即工程技术人员在职工总数中所占的比重对工业企业全员劳动生产率、每百元资金实现利税、每百元固定资产原值实现产值和亿元工业产值能耗的影响最大. 这又一次证实了科学技术就是生产力. 做为科学技术载体的工程技术人员，在增加产值、降低能耗、提高效益等方面发挥了重要作用. 河南省全民所有制工业企业中，每百名职工中平均只有3.23名工程技术人员，比江苏少1.75人，比上海少2.88人，而且分布极不合理，相对集中在少数行业中，形成了以食品、纺织、服装、精细化工、卷烟、造纸等行业为主的人才稀缺带，严重地影响了全省工业经济效益.

轻工业或非采掘业职工人数在职工总数中的比重对前述四个工业经济指标的影响也很大. 说明投入轻工业或非采掘业的劳动力占的比例越大，工业经济效益就越高. 1987年，我国全民所有制轻工业企业全员劳动生产率为22036元/人·年，重工业企业全员劳动生产率是14003元/人·年，仅为轻工业的63.5%，采掘

工业只有 6186 元/人·年，不足轻工业的三分之一. 从实现利税情况看，1987 年，我国全民所有制工业企业中，轻工业每百元资金实现利税 36.21 元，重工业却只有 15.13 元，还不及轻工业的二分之一. 尤其是煤炭采选业，每百元资金实现的利税为 -1.91 元! 不同行业能耗差别也很大. 1986 年，我国亿元轻工业产值的能耗为 2.19 万吨标准燃料，重工业亿元工业产值能耗为 8.66 万吨标准燃料，几乎是轻工业的四倍，而采掘工业亿元工业产值能耗则高达 10.19 万吨标准燃料，为轻工业的 4.65 倍. 河南全省投入重工业生产的职工占全部工业职工人数的 60%，其中又有三分之一以上从事采掘业生产，而且轻工业本身也大都是偏重型、低增值的轻工业. 这种严重偏重、偏采掘型的工业结构是导致河南省工业企业劳动生产率低、能耗高、效益差的一个主要原因.

管理人员的比重对四个工业经济指标的影响是最小的. 这说明管理人员的数量并不能代表或体现管理水平，单纯地增加管理人员的数量于事无补，明智之举是重点抓好人员更新和知识更新，通过多渠道、多层次的培训，提高管理队伍的素质，逐步地从传统管理过渡到现代化管理.

3° 农村经济分析.

作农村经济分析，重点考虑的是平均每个农村劳动力创造的农村社会总产值、平均每个农业劳动力创造的农业总产值和平均每亩土地产出的农业总产值三个经济指标. 相关因素分为科学技术、产业结构和耕作条件三类，有平均每万名农业劳动者中的农业技术人员数、农村中非农业劳动力在全部农村劳动力中的比例、牧副渔业产值在农业总产值中所占的比重、平均每亩土地拥有的农业机械总动力、平均每亩耕地化肥施用量、有效灌溉面积在耕地总面积中所占的比重六个指标. 各指标具体数据从略，相应的均值象如表 5.10.4 所示.

算出 NY_i 与 NX_j 的关联度 ε_{ij}，$i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,$

表 5.10.4　农村主要经济指标与相关因素数据的均值象

指　标	代号	均值象				
		河南	湖北	山东	江苏	上海
平均每个农村劳动力创造的农村社会总产值	NY_1	0.4833	0.6243	0.6846	1.1456	2.0621
平均每个农业劳动力创造的农业总产值	NY_2	0.5388	0.7918	0.7510	1.0097	1.9087
平均每亩土地产出的农业总产值	NY_3	0.6148	0.9401	0.7904	1.0998	1.5549
农村中非农业劳动力占的比重	NX_1	0.4946	0.6019	0.7420	1.1859	1.9756
牧副渔产值占农业总值的比重	NX_2	0.7176	0.9193	0.7118	1.1066	1.5447
平均每万名农业劳动者中的农技人员	NX_3	0.7903	1.5645	0.9032	1.1290	0.6290
平均每亩耕地拥有的农机总动力	NX_4	0.6274	0.7097	0.8314	1.0105	1.8210
平均每亩耕地的化肥施用量	NX_5	0.5361	0.9379	0.7840	1.0980	1.6440
灌溉面积占耕地总面积的比重	NX_6	0.6663	0.8984	0.9250	1.0982	1.4121

4，5，6．得关联矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} & \varepsilon_{14} & \varepsilon_{15} & \varepsilon_{16}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{24} & \varepsilon_{25} & \varepsilon_{26}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} & \varepsilon_{34} & \varepsilon_{35} & \varepsilon_{36}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.998 & 0.827 & 0.855 & 0.885 & 0.994 & 0.891\\ 0.964 & 0.853 & 0.884 & 0.916 & 0.968 & 0.923\\ 0.928 & 0.883 & 0.916 & 0.951 & 0.932 & 0.959\end{bmatrix}$$

由　$\varepsilon_{i1}>\varepsilon_{i3}>\varepsilon_{i2}$，　$\varepsilon_{i5}>\varepsilon_{i6}>\varepsilon_{i2}$，

$\varepsilon_{i6}>\varepsilon_{i4}>\varepsilon_{i3}>\varepsilon_{i2}$，　$i=1,\ 2,\ 3$．

可见　$NX_1>NX_3>NX_2$，$NX_5>NX_3>NX_2$，

$NX_6>NX_4>NX_3>NX_2$，

即农村中非农业劳动力所占的比重、平均每亩耕地的化肥施用量、灌溉面积占耕地总面积比重以及平均每亩耕地拥有的农机总动力对农村劳动生产率、农业劳动生产率和土地产出率三个农村主要经济指标的影响较大．由于我国人均耕地面积较少，农村

剩余劳动力只有通过向农村工副业转移，才能充分发挥作用，创造出更多的社会财富．大量过剩的劳动力堆积在有限的土地上，不可能使社会财富迅速增加，更难以改变贫穷、落后的面貌．哪里的乡镇企业兴旺发达，哪里的农村就富裕．江苏省农村劳动力转向农村工副业的比例数为河南省的 2.398 倍，而江苏省平均每个农村劳动力创造的社会总产值为河南省的 2.37 倍，二者几乎是一致的．应当说，没有及时地使农村剩余劳动力摆脱土地的束缚，是河南省农村经济落后的一个重要原因．

农业科技人员的比例对农村经济的影响最小，说明我国农业科技人员在农业增产中的作用尚未得到充分、有效的发挥．农业院校培养的学生，80～90％改了行，留下来的少数人也不受重视．人们对科学技术是生产力虽有了一定程度的认识，但对依靠科技软投入放大硬产出的积极性并不高．目前，对小麦、水稻、玉米、棉花、油料等主要农作物，我们都有成熟的稳产高产配套技术，可推广起来十分困难．土地分散经营管理方式的边际效益逐年下降，农业丰收基本上还是靠大自然的恩赐．深化农村改革，依靠科学技术推动农业生产上台阶势在必行．

例 5.10.3 河南省工业技术改造状况的灰关联分析．

1986 年至 1987 年，河南省科委政策研究室组织调查组对全省大、中型工业企业技术改造状况进行了深入调查，这里根据收回的 89 个企业的有关数据作灰关联分析．

系统特征变量有以下 7 个：

Y_1——工业总产值，Y_2——工业净产值，

Y_3——工业销售收入，Y_4——工业利润总额，

Y_5——由技术改造导致的净产值增加额，

Y_6——由技术改造导致的销售收入增加额，

Y_7——由技术改造导致的利税增加额．

相关因素有以下 9 个：

X_1——固定资产原值年末数，X_2——流动资金总额，

X_3——职工人数，X_4——技术人员数，

X_5——主要从事技术改造的人员数，X_6——技术改造投资，

X_7——固定资产投资总额，

X_8——用于开发新产品、更新设备、引进技术的投资，

X_9——X_8 与 X_6 之比.

表 5.10.5　河南省工业技术改造关联矩阵

关联度 / 相关因素 / 经济指标	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
Y_1	0.857	0.912	0.885	0.909	0.577	0.744	0.708	0.760	0.828
Y_2	0.833	0.877	0.925	0.872	0.566	0.732	0.688	0.734	0.832
Y_3	0.898	0.942	0.854	0.947	0.578	0.737	0.724	0.778	0.799
Y_4	0.612	0.624	0.701	0.626	0.501	0.567	0.574	0.569	0.749
Y_5	0.487	0.478	0.576	0.480	0.397	0.539	0.549	0.922	0.431
Y_6	0.368	0.365	0.355	0.367	0.423	0.375	0.395	0.376	0.352
Y_7	0.470	0.458	0.429	0.0463	0.424	0.557	0.519	0.518	0.435

由 $$\sum_{i=1}^{4} \gamma_{i3} = 3.366 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i2} = 3.355 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i4} = 3.354$$

$$> \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i1} = 3.210 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i9} = 3.208 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i8} = 2.841$$

$$> \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i6} = 2.780 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i7} = 2.669 > \sum_{i=1}^{4} \gamma_{i5} = 2.222,$$

故从对整个工业经济效益的影响看，有

$$X_3 \succsim X_2 \succsim X_4 \succsim X_1 \succsim X_9 \succsim X_8 \succsim X_6 \succsim X_7 \succsim X_5,$$

即职工人数 X_3 最优，其次是流动资金 X_2 和工程技术人员数 X_4。

再由

$$\sum_{i=5}^{7} y_{i8}=1.816>\sum_{i=5}^{7} y_{i7}=1.488>\sum_{i=5}^{7} y_{i6}=1.471$$

$$>\sum_{i=5}^{7} y_{i3}=1.36>\sum_{i=5}^{7} y_{i1}=1.325>\sum_{i=5}^{7} y_{i4}=1.31$$

$$>\sum_{i=5}^{7} y_{i2}=1.301>\sum_{i=5}^{7} y_{i5}=1.244>\sum_{i=5}^{7} y_{i9}=1.218,$$

故从对工业技术改造效益的影响看，有

$$X_8 \succsim X_7 \succsim X_6 \succsim X_3 \succsim X_1 \succsim X_4 \succsim X_2 \succsim X_5 \succsim X_9,$$

即用于开发新产品、更新设备、引进技术方面的投资 X_8 最优，其次是固定资产投资 X_7 和技术改造投资 X_6.

第六章　灰色聚类与灰色统计评估

§6.1　灰色聚类与灰色统计评估概言

灰色聚类是基于灰色关联矩阵或灰数的白化权函数将一些观测指标或观测对象聚集成若干个可定义类别的方法．一个聚类可以看作是属于同一类的观测对象的集合．在实际问题中，往往是每个观测对象具有许多个特征指标，难以进行准确地分类．比如"因材施教"是教育界讨论了许多年的一个问题，由于难以区别各个学生到底属于哪一类人才范畴而无法付诸实施．至今我们仍旧沿袭着对一群天赋不同、志趣各异的学生"同堂授业"这种既扼杀天才、又使一般人才感到诸多不便的教育方式．在用人问题上，由于不能准确地对具有不同能力的人进行归类，造成用人失误，给事业带来损失．

灰色聚类按聚类对象划分，可分为灰关联聚类和灰类白化权函数聚类．灰关联聚类主要用于同类因素的归并，以使复杂系统简化．通过灰关联聚类，我们可以检查许多因素中是否有若干个因素关系十分密切，使我们既能够用这些因素综合平均指标或用其中的某一个因素来代表这几个因素，又使信息又不受严重损失．这是属于系统变量的删简问题．在进行大面积调研之前，通过典型抽样数据的灰关联聚类，可以减少不必要变量的收集，以节省经费．灰类白化权函数聚类主要用于检查观测对象是否属于事先设定的不同类别，以便区别对待．具体做起来，灰类白化权函数聚类要比灰关联聚类复杂一些．

灰色统计评估是综合若干个同类观测对象，从整体上看其属

于哪个事先设定的类别的方法。它主要用于生产投资方案、农业经济区划、社会发展规划和教学安排等方面的综合评估，或用于对德尔菲调查表进行统计整理，最后确定最佳方案或满意方案。

§6.2 灰关联聚类

设有 n 个观测对象，每个对象观测 m 个特征数据，得到序列

$$X_1=(x_1(1),\ x_1(2),\ \cdots,\ x_1(n)),$$
$$X_2=(x_2(1),\ x_2(2),\ \cdots,\ x_2(n)),$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$X_m=(x_m(1),\ x_m(2),\ \cdots,\ x_m(n)).$$

对所有的 $i\leqslant j$，$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$，计算出 X_i 与 X_j 的绝对关联度 ε_{ij}，得上三角矩阵

$$A=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m}\\ & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2m}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \varepsilon_{mm}\end{bmatrix}$$

其中 $\varepsilon_{ii}=1$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

定义6.2.1 上述矩阵 A 称为特征变量关联矩阵.

取定临界值 $r\in[0,\ 1]$，一般要求 $r>0.5$. 当 $\varepsilon_{ij}\geqslant r\quad(i\neq j)$ 时，则视 X_j 与 X_i 为同类特征.

定义6.2.2 特征变量在临界值 r 下的分类称为特征变量的 r 灰关联聚类.

r 可根据实际问题的需要确定，r 越接近于 1，分类越细，每一组分中的变量相对地越少；r 越小，分类越粗，这时每一组分中的变量相对地越多.

例6.2.1 评定某一职位的任职资格，评委们提出了 15 个指标：

1° 申请书印象，　　2° 学术能力，

3° 讨人喜欢，　　4° 自信程度，
5° 精明，　　6° 诚实，
7° 推销能力，　　8° 经验，
9° 积极性，　　10° 抱负，
11° 外貌，　　12° 理解能力，
13° 潜力，　　14° 交际能力，
15° 适应性.

大家认为某些指标可能是相关或混同的，希望通过对少数对象的观测结果，将上述指标适当归类，删去一些不必要的指标，简化考查标准. 对上述指标采取打分的办法使之定量化，9 名考察对象各个指标所得的分数如表6.2.1所示.

对所有的 $i \leqslant j$，i，$j=1$，2，…，15，计算出 X_i 与 X_j 的绝对关联度 ε_{ij}，得上三角矩阵表6.2.2.

表 6.2.1　9名考察对象的15个指标得分情况

指标 \ 观测对象	1	2	3	4	5	6	7	8	9
X_1	6	9	7	5	6	7	9	9	9
X_2	2	5	3	3	3	7	3	9	7
X_3	5	8	6	5	8	6	8	8	8
X_4	8	10	9	6	4	8	8	9	8
X_5	7	9	8	5	4	7	8	9	8
X_6	8	9	9	9	9	10	8	8	8
X_7	8	10	7	2	2	5	8	8	5
X_8	8	5	4	8	8	9	10	10	9
X_9	8	9	9	4	5	6	8	9	8
X_{10}	9	9	9	5	5	5	10	10	9
X_{11}	7	10	8	6	6	7	9	9	9
X_{12}	7	8	8	8	8	8	8	9	8
X_{13}	5	8	6	7	8	6	9	9	8
X_{14}	7	8	8	6	7	6	8	9	8
X_{15}	10	10	10	5	7	6	10	10	10

表 6.2.2 指标关联矩阵

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}	X_{15}
X_1	1.00	0.66	0.88	0.52	0.58	0.77	0.51	0.66	0.51	0.51	0.90	0.88	0.80	0.67	0.51
X_2		1.00	0.72	0.51	0.53	0.59	0.50	0.99	0.51	0.51	0.63	0.62	0.77	0.55	0.51
X_3			1.00	0.51	0.56	0.70	0.51	0.72	0.51	0.51	0.80	0.78	0.90	0.63	0.51
X_4				1.00	0.56	0.53	0.68	0.51	0.69	0.62	0.52	0.52	0.51	0.54	0.60
X_5					1.00	0.65	0.51	0.53	0.53	0.52	0.61	0.61	0.55	0.75	0.52
X_6						1.00	0.51	0.59	0.52	0.52	0.84	0.86	0.66	0.81	0.51
X_7							1.00	0.50	0.70	0.83	0.51	0.51	0.51	0.51	0.89
X_8								1.00	0.51	0.51	0.63	0.62	0.77	0.55	0.51
X_9									1.00	0.81	0.52	0.52	0.51	0.53	0.76
X_{10}										1.00	0.51	0.51	0.51	0.52	0.92
X_{11}											1.00	0.97	0.74	0.71	0.51
X_{12}												1.00	0.73	0.72	0.51
X_{13}													1.00	0.60	0.51
X_{14}														1.00	0.52
X_{15}															1.00

利用表6.2.2即可对指标进行聚类。临界值 r 可根据要求取不同的值。

比如令 $r=1$，则上述15个指标各自成为一类。

令 $r=0.80$，我们从第一行开始依次进行检查，挑出大于0.80的 ε_{ij}，有

$\varepsilon_{13}=0.88$，$\varepsilon_{1,11}=0.90$，$\varepsilon_{1,12}=0.88$，$\varepsilon_{1,13}=0.80$；

$\varepsilon_{28}=0.99$；$\varepsilon_{3,11}=0.80$，$\varepsilon_{3,13}=0.90$；

$\varepsilon_{6,11}=0.84$，$\varepsilon_{6,12}=0.86$，$\varepsilon_{6,14}=0.81$；

$\varepsilon_{7,18}=0.83$，$\varepsilon_{7,15}=0.89$；

$\varepsilon_{9,10}=0.81$；$\varepsilon_{10,15}=0.92$；$\varepsilon_{11,12}=0.97$.

从而可知

X_3，X_{11}，X_{12}，X_{13} 应与 X_1 在同一类中；

X_8 与 X_2 在同一类中；

X_{11}，X_{13} 与 X_3 在同一类中；

X_{11}，X_{12}，X_{14} 与 X_6 在同一类中；

X_{10}，X_{15} 与 X_7 在同一类中；

X_{10} 与 X_9 在同一类中；

X_{15} 与 X_{10} 在同一类中；

X_{12} 与 X_{11} 在同一类中.

取标号最小的指标作为各类的代表，并将 X_6 所在类中的指标 X_6，X_{14} 与 X_{11}，X_{12} 一起归入 X_1 所在的类中；将 X_9 与 X_{10} 一起归入 X_7 所在的类中；视未被列出的 X_4，X_5 各自成为一类，就得15个指标的一个聚类：

$$\{X_1,\ X_3,\ X_6,\ X_{11},\ X_{12},\ X_{13},\ X_{14}\},$$
$$\{X_2,\ X_8\},\quad \{X_4\},\quad \{X_5\},$$
$$\{X_7,\ X_9,\ X_{10},\ X_{15}\}.$$

若要进一步归并，可写出0.80聚类后5个代表指标的关联矩阵如表6.2.3所示.

表 6.2.3 0.8聚类后5个代表指标的关联矩阵

	X_1	X_2	X_4	X_5	X_7
X_1	1.00	0.66	0.52	0.58	0.51
X_2		1.00	0.51	0.53	0.50
X_4			1.00	0.56	0.58
X_5				1.00	0.51
X_7					1.00

取临界值 $r=0.58$，则以 X_2，X_5 为代表的两个类可归入 X_1 所在的类中，X_4 可归入 X_7 所在的类中。这样就得到较粗的聚类：

$\{X_1, X_2, X_3, X_5, X_6, X_8, X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14}\}$，

$\{X_4, X_7, X_9, X_{10}, X_{15}\}$。

其中 X_1 所在的类反映了谋职者的品质、性格、经验等内在能力，它包括申请书印象、学术能力、讨人喜欢、精明、诚实、经验、外貌、理解能力、潜力和交际能力几个方面；X_4 所在的类则是谋职者的进取心、创造力和应变能力等外在性格的体现，它包括自信程度、推销能力、积极性、抱负和适应性五个方面。

§6.3 指标变权聚类

定义6.3.1 设有 n 个聚类对象，m 个聚类指标，s 个不同灰类，根据第 i 个对象($i=1, 2, \cdots, n$)关于指标 j($j=1, 2, \cdots,$

表 6.3.1 聚类样本

聚类 样本 对象 / 指标	1	2	…	m
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1m}
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2m}
⋮	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nm}

m)的样本值表(表6.3.1)将第i个对象归入第$k(k\in\{1,2,\cdots,s$个灰类之中,称为灰色聚类.

定义6.3.2 将n个对象关于指标j的取值相应地分为s个灰类,我们称之为j指标子类.

j指标k子类的白化权函数记为$f_j^k(\cdot)$.

定义6.3.3 设j指标k子类的白化权函数$f_j^k(\cdot)$为如图6.3.1所示的典型白化权函数,则称$x_j^k(1)$,$x_j^k(2)$,$x_j^k(3)$,$x_j^k(4)$为$f_j^k(\cdot)$的转折点.

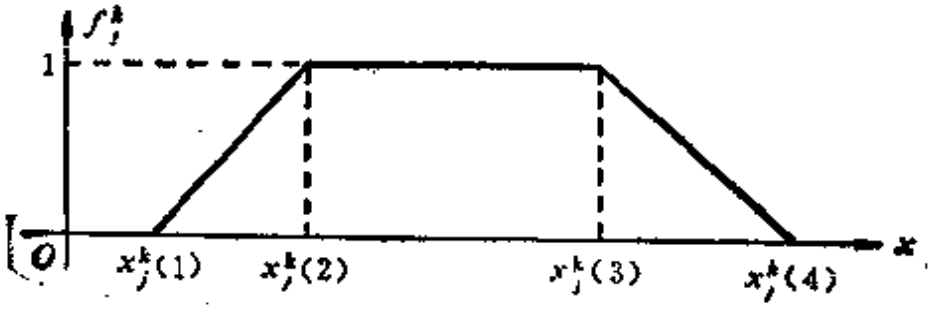


图 6.3.1

定义6.3.4 1° 若白化权函数$f_j^k(\cdot)$无第一和第二个转折点$x_j^k(1)$,$x_j^k(2)$,即如图6.3.2所示,则称$f_j^k(\cdot)$为下限测度白化

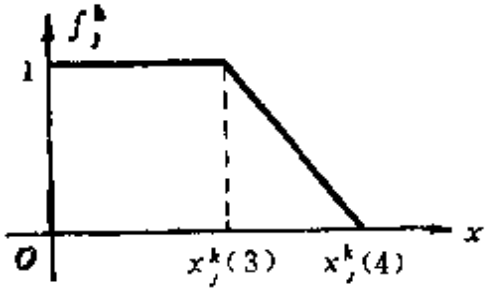


图 6.3.2

权函数.

2° 若白化权函数$f_j^k(\cdot)$的第二和第三个转折点$x_j^k(2)$,$x_j^k(3)$重合,即如图6.3.3所示,则称$f_j^k(\cdot)$为适中测度白化权函数.

3° 若白化权函数$f_j^k(\cdot)$无第三和第四个转折点$x_j^k(3)$,

$x_j^k(4)$，即如图6.3.4所示，则称 $f_j^k(\cdot)$ 为上限测度白化权函数.

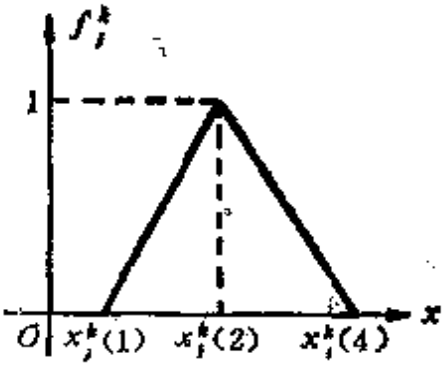


图 6.3.3

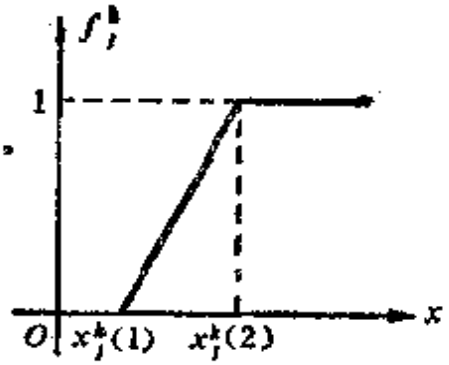


图 6.3.4

命题6.3.1 1° 对于如图6.3.1所示的典型白化权函数

$$f_j^k(x)=\begin{cases}0, & x\in[x_j^k(1),\ x_j^k(4)]\\ \dfrac{x-x_j^k(1)}{x_j^k(2)-x_j^k(1)}, & x\in[x_j^k(1),\ x_j^k(2)]\\ 1, & x\in[x_j^k(2),\ x_j^k(3)]\\ \dfrac{x_j^k(4)-x}{x_j^k(4)-x_j^k(3)}, & x\in[x_j^k(3),\ x_j^k(4)]\end{cases}$$

2° 对于如图6.3.2所示的下限测度白化权函数

$$f_j^k(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\ x_j^k(4)]\\ 1, & x\in[0,\ x_j^k(3)]\\ \dfrac{x_j^k(4)-x}{x_j^k(4)-x_j^k(3)}, & x\in[x_j^k(3),\ x_j^k(4)]\end{cases}$$

3° 对于如图6.3.3所示的适中测度白化权函数

$$f_j^k(x)=\begin{cases}0, & x\in[x_j^k(1),\ x_j^k(4)]\\ \dfrac{x-x_j^k(1)}{x_j^k(2)-x_j^k(1)}, & x\in[x_j^k(1),\ x_j^k(2)]\\ 1, & x=x_j^k(2)\\ \dfrac{x_j^k(4)-x}{x_j^k(4)-x_j^k(2)}, & x\in[x_j^k(2),\ x_j^k(4)]\end{cases}$$

4° 对于如图6.3.4所示的上限测度白化权函数

$$f_j^k(x)=\begin{cases}0, & x<x_j^k(1)\\ \dfrac{x-x_j^k(1)}{x_j^k(2)-x_j^k(1)}, & x\in[x_j^k(1),\ x_j^k(2)]\\ 1, & x\geqslant x_j^k(2)\end{cases}$$

定义6.3.5 1° 对于如图6.3.1所示的 j 指标 k 子类白化权函数，令 $\lambda_j^k=\frac{1}{2}(x_j^k(2)+x_j^k(3))$；

2° 对于如图6.3.2所示的 j 指标 k 子类白化权函数，令$\lambda_j^k=x_j^k(3)$；

3° 对于如图6.3.3和图6.3.4所示的 j 指标 k 子类白化权函数，令 $\lambda_j^k=x_j^k(2)$；

则称 λ_j^k 为 j 指标 k 子类临界值.

定义6.3.6 设 λ_j^k 为 j 指标 k 子类临界值，则称

$$\eta_j^k=\frac{\lambda_j^k}{\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^k}$$

为 j 指标关于 k 子类的权.

定义6.3.7 设 x_{ij} 为对象 i 关于 指标 j 的样本，$f_j^k(\cdot)$ 为 j 指标 k 子类白化权函数，η_j^k 为 j 指标关于 k 子类的权，则称

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j^k$$

为对象 i 属于 k 灰类的指标变权聚类系数.

定义6.3.8 1° 称

$$\sigma_i=(\sigma_i^1,\ \sigma_i^2,\ \cdots,\ \sigma_i^n)$$
$$=\left(\sum_{j=1}^{m}f_j^1(x_{ij})\cdot\eta_j^1,\ \sum_{j=1}^{m}f_j^2(x_{ij})\cdot\eta_j^2,\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{m}f_j^n(x_{ij})\cdot\eta_j^n\right)$$

为对象 i 的聚类系数向量；

2° 称

$$\Sigma = (\sigma_i^k) = \begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^s \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \sigma_n^1 & \sigma_n^2 & \cdots & \sigma_n^s \end{bmatrix}$$

为聚类系数矩阵.

定义6.3.9 设 $\sigma_i^{k^*} = \max\limits_{1\le k\le s}\{\sigma_i^k\}$，则称对象 i 属于灰类 k^*.

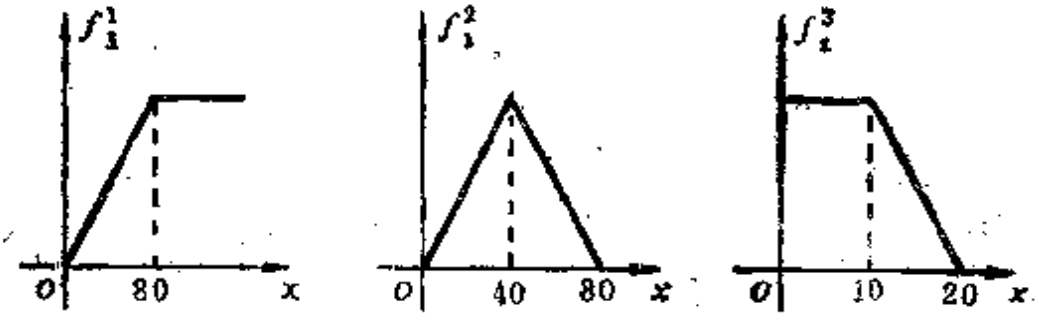
指标变权聚类适用于聚类指标的意义、量纲皆相同的情形. 当聚类指标的意义、量纲不同且不同指标的样本值在数量上悬殊较大时，不宜采用指标变权聚类.

例6.3.1 设有三个经济区，三个聚类指标分别为种植业收入、畜牧业收入、工副业收入. 第 i 个经济区关于第 j 个指标的样本值 $x_{ij}(i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3)$ 如矩阵 A 中所示

$$A = (x_{ij}) = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 & 20 & 100 \\ 40 & 30 & 30 \\ 10 & 90 & 60 \end{bmatrix}$$

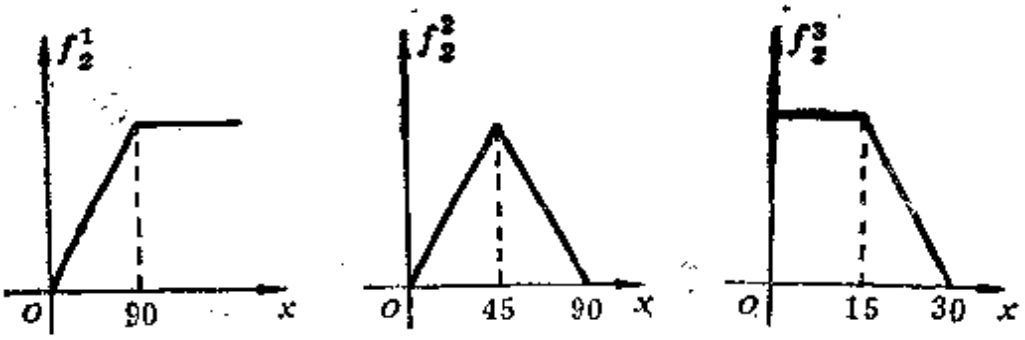
试按高收入、低收入、中收入作综合聚类.

解：设关于指标种植业收入、畜牧业收入和工副业收入的白



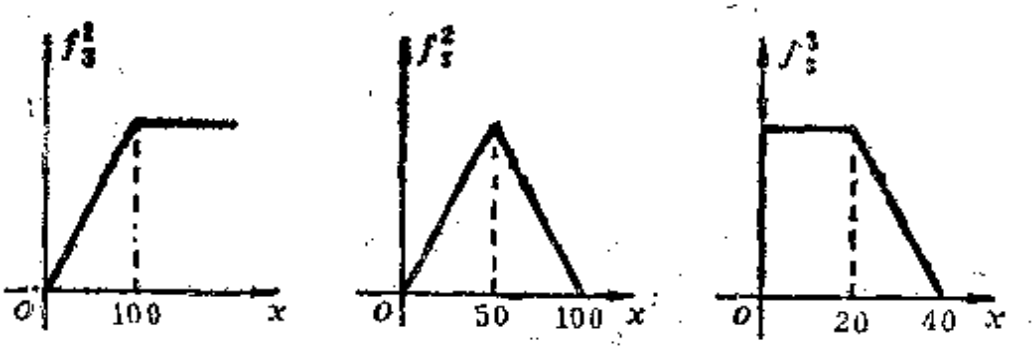
(a)高收入类　　(b)中收入类　　(c)低收入类

图 6.3.5　关于种植业收入的白化权函数



(a)高收入类　　(b)中收入类　　(c)低收入类

图 6.3.6　关于畜牧业收入的白化权函数



(a)高收入类　　(b)中收入类　　(c)低收入类

图 6.3.7　关于工副业收入的白化权函数

化权函数$f_j^k(\cdot)$($j=1,2,3$；$k=1,2,3$)分别如图6.3.5、图6.3.6、图6.3.7所示。

由以上三图和命题6.3.1得

$$f_1^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{80}, & 0\leqslant x<80\\ 1, & x\geqslant 80\end{cases}$$

$$f_1^2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{40}, & 0\leqslant x\leqslant 40\\ \dfrac{80-x}{40}, & 40<x\leqslant 80\\ 0, & x>80\end{cases}$$

$$f_1^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ \dfrac{20-x}{10}, & 10<x\leqslant 20\\ 0, & x>20\end{cases}$$

$$f_2^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{90}, & 0\leqslant x<90\\ 1, & x\geqslant 90\end{cases}$$

$$f_3^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{45}, & 0\leqslant x\leqslant 45\\ \dfrac{90-x}{45}, & 45<x\leqslant 90\\ 0, & x>90\end{cases}$$

$$f_4^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 15\\ \dfrac{30-x}{15}, & 15<x\leqslant 30\\ 0, & x>30\end{cases}$$

$$f_5^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{100}, & 0\leqslant x\leqslant 100\\ 1, & x>100\end{cases}$$

$$f_6^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{50}, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \dfrac{100-x}{50}, & 50<x\leqslant 100\\ 0, & x>100\end{cases}$$

$$f_3^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ \dfrac{40-x}{20}, & 20<x\leqslant 40\\ 0, & x>40\end{cases}$$

$\lambda_1^1=80,\quad \lambda_2^1=90,\quad \lambda_3^1=100;$

$\lambda_1^2=40,\quad \lambda_2^2=45,\quad \lambda_3^2=50;$

$\lambda_1^3=10,\quad \lambda_2^3=15,\quad \lambda_3^3=20.$

于是由 $\eta_j^k=\dfrac{\lambda_j^k}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^k}$ 得

$$\eta_1^1=\frac{\lambda_1^1}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^1}=\frac{80}{270},\qquad \eta_2^1=\frac{\lambda_2^1}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^1}=\frac{90}{270},$$

$$\eta_3^1=\frac{\lambda_3^1}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^1}=\frac{100}{270},\qquad \eta_1^2=\frac{\lambda_1^2}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}=\frac{40}{135},$$

$$\eta_2^2=\frac{\lambda_2^2}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}=\frac{45}{135},\qquad \eta_3^2=\frac{\lambda_3^2}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^2}=\frac{50}{135},$$

$$\eta_1^3=\frac{\lambda_1^3}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^3}=\frac{10}{45},\qquad \eta_2^3=\frac{\lambda_2^3}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^3}=\frac{15}{45},$$

$$\eta_3^3=\frac{\lambda_3^3}{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j^3}=\frac{20}{45}.$$

再由 $\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{3}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j^k,$

当 $i=1$ 时

$$\sigma_1=\sum_{j=1}^{3} f_j^1(x_{1j})\cdot\eta_j^1$$

$$=f_1^1(x_{11})\cdot\eta_1^1+f_2^1(x_{12})\cdot\eta_2^1+f_3^1(x_{13})\cdot\eta_3^1$$

$$=f_1^1(80)\times\frac{80}{270}+f_2^1(20)\times\frac{90}{270}+f_3^1(100)\times\frac{100}{270}$$

$$=1\times\frac{80}{270}+\frac{20}{90}\times\frac{90}{270}+1\times\frac{100}{270}=\frac{200}{270}=0.74,$$

$$\sigma_1^2=\sum_{j=1}^{3} f_j^2(x_{1j})\cdot\eta_j^2$$

$$=f_1^2(x_{11})\cdot\eta_1^2+f_2^2(x_{12})\cdot\eta_2^2+f_3^2(x_{13})\cdot\eta_3^2$$

$$=f_1^2(80)\times\frac{40}{135}+f_2^2(20)\times\frac{45}{135}+f_3^2(100)\times\frac{50}{135}$$

$$=0\times\frac{40}{135}+\frac{20}{45}\times\frac{45}{135}+0\times\frac{50}{135}=\frac{20}{135}=0.15,$$

$$\sigma_1^3=\sum_{j=1}^{3} f_j^3(x_{1j})\cdot\eta_j^3$$

$$=f_1^3(x_{11})\cdot\eta_1^3+f_2^3(x_{12})\cdot\eta_2^3+f_3^3(x_{13})\cdot\eta_3^3$$

$$=f_1^3(80)\times\frac{10}{45}+f_2^3(20)\times\frac{15}{45}+f_3^3(100)\times\frac{20}{45}$$

$$=0\times\frac{10}{45}+\frac{30-20}{30-15}\times\frac{15}{45}+0\times\frac{20}{45}=\frac{10}{45}=0.22,$$

所以 $\sigma_1=(\sigma_1^1,\ \sigma_1^2,\ \sigma_1^3)=(0.74,\ 0.15,\ 0.22)$.

当 $i=2$ 时，同法计算得

$$\sigma_2^1=\sum_{j=1}^{3} f_j^1(x_{2j})\cdot\eta_j^1=0.37,$$

$$\sigma_2^2=\sum_{j=1}^{3} f_j^2(x_{2j})\cdot\eta_j^2=0.74,$$

$$\sigma_2^3=\sum_{j=1}^{3}f_j^3(x_{2j})\cdot\eta_j^3=0.22,$$

所以 $\sigma_2=(\sigma_2^1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2^3)=(0.37,\ 0.74,\ 0.22)$.

当 $i=3$ 时，同法计算得

$$\sigma_3^1=\sum_{j=1}^{3}f_j^1(x_{3j})\cdot\eta_j^1=0.59,$$

$$\sigma_3^2=\sum_{j=1}^{3}f_j^2(x_{3j})\cdot\eta_j^2=0.15,$$

$$\sigma_3^3=\sum_{j=1}^{3}f_j^3(x_{3j})\cdot\eta_j^3=0.22,$$

所以 $\sigma_3=(\sigma_3^1,\ \sigma_3^2,\ \sigma_3^3)=(0.59,\ 0.15,\ 0.22)$.

综合以上所得结果，可得灰色聚类系数矩阵：

$$\Sigma=(\sigma_j^k)=\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3\\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.74 & 0.15 & 0.22\\ 0.37 & 0.74 & 0.22\\ 0.59 & 0.15 & 0.22\end{bmatrix}.$$

由 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_1^k\}=\sigma_1^1=0.74,$

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_2^k\}=\sigma_2^2=0.74,$

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_3^k\}=\sigma_3^1=0.59$

表明，第二经济区属于中收入灰类，第一和第三经济区属于高收入灰类．进一步从聚类系数 $\sigma_1^1=0.74$，$\sigma_3^1=0.59$ 可知，同属于高收入类的第一和第三经济区之间仍存在差别．如果将收入灰类再细分，比如分为高、中偏高、中、中偏低、低五个灰类，则可得出不同的结果．

另外，j 指标 k 子类白化权函数一般是凭经验确定．在解决实

际问题时，可以站在聚类对象的角度确定白化权函数，也可以从整个大环境着眼，根据所有同类对象——而不仅仅是参与聚类的对象——来确定白化仅函数．如在例 6.3.1 中，我们可以不仅仅从参与聚类的三个经济区出发，而是根据一个市、一个省或全国同级经济区的发展状况来确定白化权函数．因此，灰色聚类评估的结果是有一定适用范围的．确定白化权函数时视野所及的范围，即是评估结果适用的范围．

§ 6.4 指标定权聚类

当聚类指标意义不同、量纲不同，且在数量上悬殊很大时，采用指标变权聚类可能导致某些指标参与聚类的作用十分微弱．解决这一问题有两条途径：一条途径是先采用初值化算子或均值化算子将各指标样本值化为无量纲数据，然后再进行聚类．这种方式对所有聚类指标一视同仁，不能反映不同指标在聚类过程中作用的差异性．另一条途径是对各聚类指标事先赋权．本节主要讨论第二种聚类方法．

定义6.4.1 设 $x_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为对象 i 关于指标 j 的样本，$f_j^k(\cdot)(j=1,\ 2,\cdots,m;k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 为 j 指标 k 子类白化权函数．若 j 指标关于 k 子类的权 $\eta_j^k(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 与 k 无关，即对任意的 $k_1,\ k_2\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ s\}$，总有 $\eta_j^{k_1}=\eta_j^{k_2}$，则我们可将 η_j^k 的上标 k 略去，记为 $\eta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$，并称

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j$$

为对象 i 属于 k 灰类的指标定权聚类系数．

定义6.4.2 设 $x_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为对象 i 关于指标 j 的样本，$f_j^k(\cdot)(j=1,2,\cdots,\ m;k=1,\ 2,\ \cdots,s)$

为 j 指标 k 子类白化权函数. 若对任意的 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$, 总有 $\eta_j=\frac{1}{m}$, 则称

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j=\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})$$

为对象 i 属于 k 灰类的指标等权聚类系数.

定义6.4.3 1° 根据指标定权聚类系数的值对聚类对象进行归类称为指标定权聚类;

2° 根据指标等权聚类系数的值对聚类对象进行归类称为指标等权聚类.

指标定权聚类可按下列步骤进行:

第一步: 给出 j 指标 k 子类白化权函数 $f_j^k(\cdot)$, $j=1,\ 2,\cdots,\ m;k=1,\ 2,\ \cdots,\ s$.

第二步: 根据以往经验或定性分析结论给定各指标的聚类权 η_j, $j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$.

第三步: 从第一步和第二步得出的白化权函数 $f_j^k(\cdot)(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$, 聚类权 $\eta_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 以及对象 i 关于 j 指标的样本 $x_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 算出指标定权聚类系数

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;k=1,\ 2,\ \cdots,s.$$

第四步: 若 $\sigma_i^{k^*}=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_i^k\}$, 则断定对象 i 属于 k^* 灰类.

例6.4.1 我国主要造林树种生态适应度的灰色聚类.

我国国土辽阔, 生态环境十分复杂, 不同树种对生态条件的要求也有明显差异. 一个树种目前的生长区域, 在一定程度上反映了该树种对生态环境的适应能力. 我们将生态环境条件分为地理生态值、温度生态值、雨量生态值、干燥生态值四个主要量化

指标．其中地理生态值是衡量树种在地理上分布范围广度的指标，用其分布域之东、西边界经度差与南、北边界纬度差的乘积作为地理生态值的数量指标．温度生态值反映了树种对不同温度条件的适应能力，这里用分布域之南、北边界年平均温度的差值来度量．雨量生态值则是树种对降雨条件的适应性的表征，我们用分布域中不同地区年平均降雨量最大值与最小值之差来测度．干燥生态值是树种对大气干燥度① 的适应能力，这里用分布域中不同地区年平均干燥度最大值与最小值之差来度量．

我国17个主要造林树种的地理生态值、温度生态值、雨量生态值和干燥生态值如表 6.4.1 所示．

表 6.4.1 我国主要造林树种的四种生态值

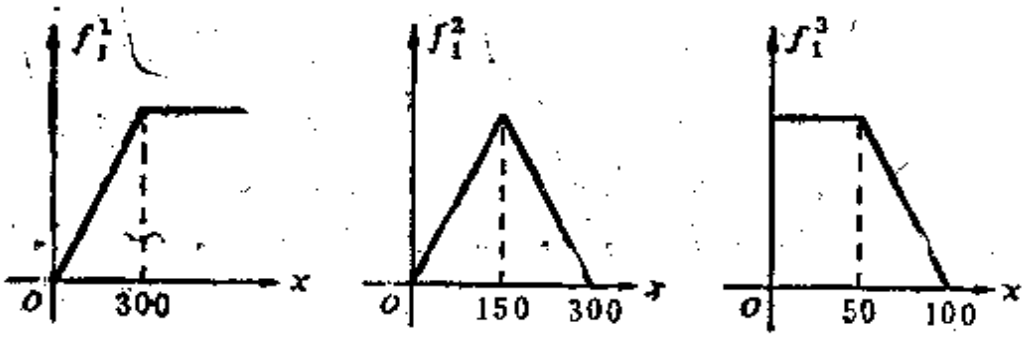
序号	项目 / 树种	地理值	温度值	雨量值	干燥值
1	樟子松	22.50	4	0	0
2	红　松	79.37	6	600	0.75
3	水曲柳	144.00	7	300	0.75
4	胡　杨	300.00	6.1	189	12.00
5	桉　桉	456.00	12	250	12.00
6	油　松	189.00	8	700	1.5
7	侧　柏	369.00	8	1300	2.25
8	白　榆	1127.11	16.2	550	3.00
9	旱　柳	260.00	11	300	1.00
10	毛白杨	200.00	8	600	1.25
11	麻　栎	475.00	10	1000	0.75
12	华山松	314.10	8	900	0.75
13	马尾松	282.80	7.4	1300	0.50
14	杉　木	240.00	8	1200	0.50
15	毛　竹	160.00	5	1000	0.25
16	樟　树	270.00	8	1200	0.25
17	南亚松	9.00	1	200	0

① 干燥度为最大可能蒸发量与降雨量之比

试按广适应性、中度适应性和狭适应性作灰色聚类.

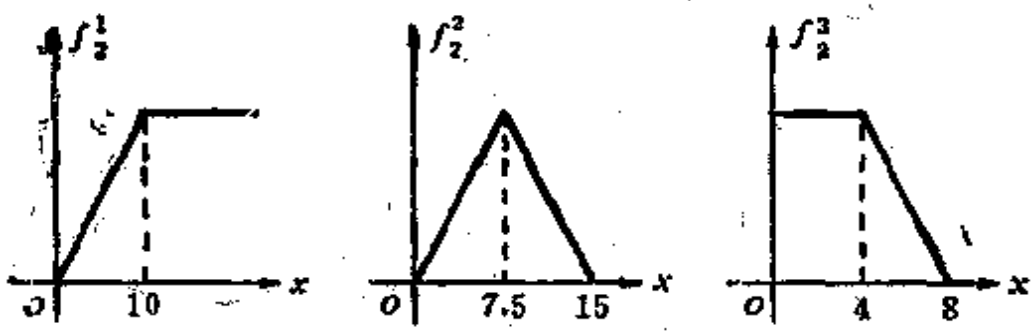
解：由于聚类指标意义不同，且在数量上悬殊很大，故采用指标定权聚类.

第一步：将指标和灰类编号，设 j 指标 k 子类白化权函数



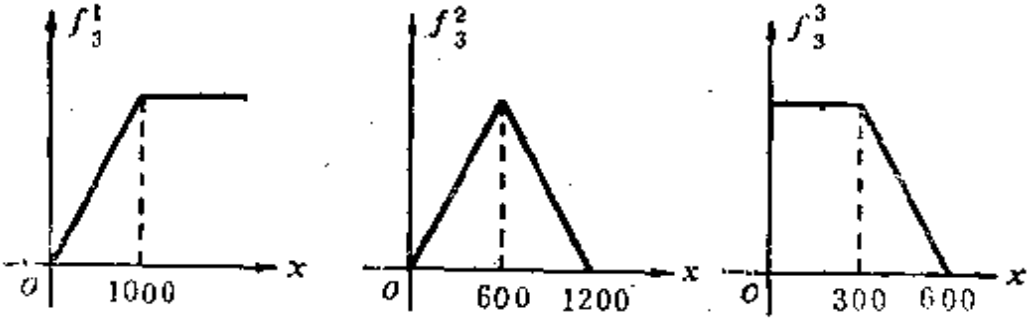
(a)广适应灰类　　(b)中度适应灰类　　(c)狭适应灰类

图 6.4.1　关于地理生态值的白化权函数



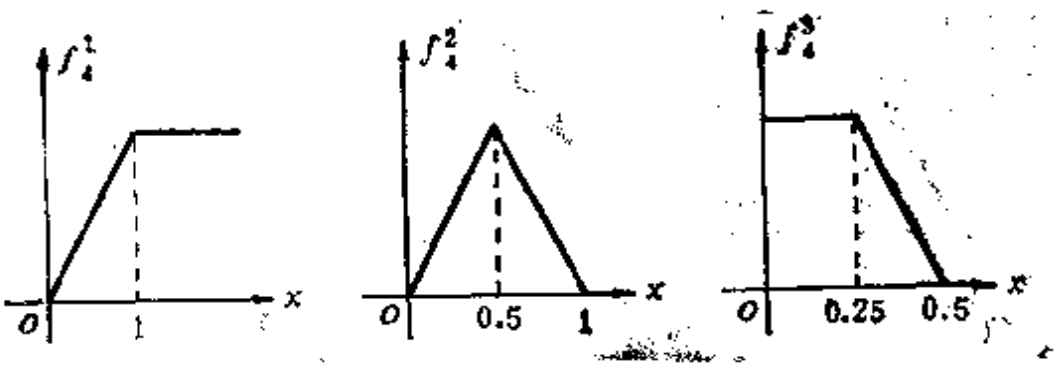
(a)广适应灰类　　(b)中度适应灰类　　(c)狭适应灰类

图 6.4.2　关于温度生态值的白化权函数



(a)广适应灰类　　(b)中度适应灰类　　(c)狭适应灰类

图 6.4.3　关于雨量生态值的白化权函数



(a)广适应灰类　　(b)中度适应灰类　　(c)狭适应灰类

图 6.4.4　关于干燥生态值的白化权函数

$f_j^k(\cdot)$，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4;k=1,\ 2,\ 3$，分别如图6.4.1～图 6.4.4所示.

由命题6.3.1和图6.4.1～图6.4.4可得：

$$f_1^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{300}, & 0\leqslant x\leqslant 300\\ 1, & x>300\end{cases}$$

$$f_1^2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{150}, & 0\leqslant x\leqslant 150\\ \dfrac{300-x}{150}, & 150<x\leqslant 300\\ 0, & x>300\end{cases}$$

$$f_1^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 50\\ \dfrac{100-x}{50}, & 0<x\leqslant 100\\ 0, & x>100\end{cases}$$

$$f_2^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{10}, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ 1, & x>10\end{cases}$$

$$f_3^2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{7.5}, & 0\leqslant x\leqslant 7.5\\ \dfrac{15-x}{7.5}, & 7.5<x\leqslant 15\\ 0, & x>15\end{cases}$$

$$f_2^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 4\\ \dfrac{8-x}{4}, & 4<x\leqslant 8\\ 0, & x>8\end{cases}$$

$$f_3^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{1000}, & 0\leqslant x\leqslant 1000\\ 1, & x>1000\end{cases}$$

$$f_3^2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{600}, & 0\leqslant x\leqslant 600\\ \dfrac{1200-x}{600}, & 600<x\leqslant 1200\\ 0, & x>1200\end{cases}$$

$$f_3^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 300\\ \dfrac{600-x}{300}, & 300<x\leqslant 600\\ 0, & x>600\end{cases}$$

$$f_4^1(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 1, & x>1\end{cases}$$

$$f_i^2(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{x}{0.5}, & 0\leqslant x\leqslant 0.5\\ \dfrac{1-x}{0.5}, & 0.5<x\leqslant 1\\ 0, & x>1\end{cases}$$

$$f_i^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 0.25\\ \dfrac{0.5-x}{0.25}, & 0.25<x\leqslant 0.5\\ 0, & x>0.5\end{cases}$$

第二步：取地理生态值、温度生态值、雨量生态值和干燥生态值的权分别为

$$\eta_1=0.3,\ \eta_2=0.25,\ \eta_3=0.25,\ \eta_4=0.2.$$

第三步：由

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{4}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 17;k=1,\ 2,\ 3$$

及表6.4.1和前两步的结果可得：

当 $i=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sigma_1^1&=\sum_{j=1}^{4}f_j^1(x_{1j})\cdot\eta_j\\&=f_1^1(x_{11})\cdot\eta_1+f_2^1(x_{12})\cdot\eta_2+f_3^1(x_{13})\cdot\eta_3+f_4^1(x_{14})\cdot\eta_4\\&=f_1^1(22.50)\times 0.3+f_2^1(4)\times 0.25+f_3^1(0)\times 0.25\\&\quad+f_4^1(0)\times 0.20\\&=\frac{22.50}{300}\times 0.3+\frac{4}{10}\times 0.25+0+0=0.12,\end{aligned}$$

$$\sigma_1^2=\sum_{j=1}^{4}f_j^2(x_{1j})\cdot\eta_j$$

$$= f_1^2(x_{11}) \cdot \eta_1 + f_2^2(x_{12}) \cdot \eta_2 + f_3^2(x_{13}) \cdot \eta_3 + f_4^2(x_{14}) \cdot \eta_4$$
$$= f_1^2(22.50) \times 0.3 + f_2^2(4) \times 0.25 + f_3^2(0) \times 0.25 + f_4^2(0) \times 0.20$$
$$= \frac{22.50}{150} \times 0.3 + \frac{4}{7.5} \times 0.25 + 0 + 0 = 0.18,$$

$$\sigma_1^3 = \sum_{j=1}^{4} f_j^3(x_{1j}) \cdot \eta_j$$
$$= f_1^3(x_{11}) \cdot \eta_1 + f_2^3(x_{12}) \cdot \eta_2 + f_3^3(x_{13}) \cdot \eta_3 + f_4^3(x_{14}) \cdot \eta_4$$
$$= f_1^3(22.50) \times 0.3 + f_2^3(4) \times 0.25 + f_3^3(0) \times 0.25 + f_4^3(0) \times 0.2$$
$$= 1 \times 0.3 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.25 + 1 \times 0.2 = 1,$$

$\therefore \quad \sigma_1 = (\sigma_1^1, \ \sigma_1^2, \ \sigma_1^3) = (0.12, \ 0.18, \ 1).$

当 $i = 2$ 时，

$$\sigma_2^1 = \sum_{j=1}^{4} f_j^1(x_{2j}) \cdot \eta_j = 0.53,$$

$$\sigma_2^2 = \sum_{j=1}^{4} f_j^2(x_{2j}) \cdot \eta_j = 0.71,$$

$$\sigma_2^3 = \sum_{j=1}^{4} f_j^3(x_{2j}) \cdot \eta_j = 0.25,$$

$\therefore \quad \sigma_2 = (\sigma_2^1, \ \sigma_2^2, \ \sigma_2^3) = (0.53, \ 0.71, \ 0.25).$

当 $i = 3$ 时，

$$\sigma_3^1 = \sum_{j=1}^{4} f_j^1(x_{3j}) \cdot \eta_j = 0.54,$$

$$\sigma_3^2 = \sum_{j=1}^{4} f_j^2(x_{3j}) \cdot \eta_j = 0.75,$$

$$\sigma_3^3 = \sum_{j=1}^{4} f_j^3(x_{3j}) \cdot \eta_j = 0.31,$$

$\therefore$ $\sigma_3 = (\sigma_3^1,\ \sigma_3^2,\ \sigma_3^3) = (0.54,\ 0.75,\ 0.31)$.

当 $i = 4$ 时，

$$\sigma_4^1 = \sum_{j=1}^{4} f_j^1(x_{4j}) \cdot \eta_j = 0.70,$$

$$\sigma_4^2 = \sum_{j=1}^{4} f_j^2(x_{4j}) \cdot \eta_j = 0.28,$$

$$\sigma_4^3 = \sum_{j=1}^{4} f_j^3(x_{4j}) \cdot \eta_j = 0.37,$$

$\therefore$ $\sigma_4 = (\sigma_4^1,\ \sigma_4^2,\ \sigma_4^3) = (0.70,\ 0.28,\ 0.37)$.

类似地可以算出，

$\sigma_5 = (\sigma_5^1,\ \sigma_5^2,\ \sigma_5^3) = (0.81,\ 0.20,\ 0.25)$,
$\sigma_6 = (\sigma_6^1,\ \sigma_6^2,\ \sigma_6^3) = (0.76,\ 0.66,\ 0)$,
$\sigma_7 = (\sigma_7^1,\ \sigma_7^2,\ \sigma_7^3) = (0.95,\ 0.23,\ 0)$,
$\sigma_8 = (\sigma_8^1,\ \sigma_8^2,\ \sigma_8^3) = (0.89,\ 0.23,\ 0.04)$,
$\sigma_9 = (\sigma_9^1,\ \sigma_9^2,\ \sigma_9^3) = (0.86,\ 0.46,\ 0)$,
$\sigma_{10} = (\sigma_{10}^1,\ \sigma_{10}^2,\ \sigma_{10}^3) = (0.75,\ 0.68,\ 0)$,
$\sigma_{11} = (\sigma_{11}^1,\ \sigma_{11}^2,\ \sigma_{11}^3) = (0.99,\ 0.35,\ 0)$,
$\sigma_{12} = (\sigma_{12}^1,\ \sigma_{12}^2,\ \sigma_{12}^3) = (0.91,\ 0.48,\ 0)$,
$\sigma_{13} = (\sigma_{13}^1,\ \sigma_{13}^2,\ \sigma_{13}^3) = (0.82,\ 0.48,\ 0.04)$,
$\sigma_{14} = (\sigma_{14}^1,\ \sigma_{14}^2,\ \sigma_{14}^3) = (0.79,\ 0.55,\ 0)$,
$\sigma_{15} = (\sigma_{15}^1,\ \sigma_{15}^2,\ \sigma_{15}^3) = (0.59,\ 0.63,\ 0.39)$,
$\sigma_{16} = (\sigma_{16}^1,\ \sigma_{16}^2,\ \sigma_{16}^3) = (0.77,\ 0.39,\ 0.20)$,
$\sigma_{17} = (\sigma_{17}^1,\ \sigma_{17}^2,\ \sigma_{17}^3) = (0.08,\ 0.13,\ 1)$.

第四步：指标定权聚类系数矩阵 Σ 为：

$$\Sigma=(\sigma_i^k)=\begin{pmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3\\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3\\ \sigma_4^1 & \sigma_4^2 & \sigma_4^3\\ \sigma_5^1 & \sigma_5^2 & \sigma_5^3\\ \sigma_6^1 & \sigma_6^2 & \sigma_6^3\\ \sigma_7^1 & \sigma_7^2 & \sigma_7^3\\ \sigma_8^1 & \sigma_8^2 & \sigma_8^3\\ \sigma_9^1 & \sigma_9^2 & \sigma_9^3\\ \sigma_{10}^1 & \sigma_{10}^2 & \sigma_{10}^3\\ \sigma_{11}^1 & \sigma_{11}^2 & \sigma_{11}^3\\ \sigma_{12}^1 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{12}^3\\ \sigma_{13}^1 & \sigma_{13}^2 & \sigma_{13}^3\\ \sigma_{14}^1 & \sigma_{14}^2 & \sigma_{14}^3\\ \sigma_{15}^1 & \sigma_{15}^2 & \sigma_{15}^3\\ \sigma_{16}^1 & \sigma_{16}^2 & \sigma_{16}^3\\ \sigma_{17}^1 & \sigma_{17}^2 & \sigma_{17}^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.12 & 0.18 & 1\\ 0.53 & 0.71 & 0.25\\ 0.54 & 0.75 & 0.31\\ 0.70 & 0.28 & 0.37\\ 0.81 & 0.20 & 0.25\\ 0.76 & 0.66 & 0\\ 0.95 & 0.23 & 0\\ 0.89 & 0.23 & 0.04\\ 0.86 & 0.46 & 0\\ 0.75 & 0.68 & 0\\ 0.99 & 0.35 & 0\\ 0.91 & 0.48 & 0\\ 0.82 & 0.48 & 0.04\\ 0.79 & 0.55 & 0\\ 0.59 & 0.63 & 0.39\\ 0.77 & 0.39 & 0.20\\ 0.08 & 0.13 & 1\end{pmatrix}$$

于是 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_1^k\}=1=\sigma_1^3$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_2^k\}=0.71=\sigma_2^2$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_3^k\}=0.75=\sigma_3^2$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_4^k\}=0.70=\sigma_4^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_5^k\}=0.81=\sigma_5^1$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_6^k\}=0.76=\sigma_6^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_7^k\}=0.95=\sigma_7^1$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_8^k\}=0.89=\sigma_8^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_9^k\}=0.86=\sigma_9^1$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{10}^k\}=0.75=\sigma_{10}^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{11}^k\}=0.99=\sigma_{11}^1$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{12}^k\}=0.91=\sigma_{12}^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{13}^k\}=0.82=\sigma_{13}^1$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{14}^k\}=0.79=\sigma_{14}^1$，

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{15}^k\}=0.63=\sigma_{15}^2$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_{16}^k\}=0.77=\sigma_{16}^1$，

$$\max_{1\le k\le 3}\{\sigma_{17}^{k}\}=1=\sigma_{17}^{3},$$

从而可得，编号为4，5，6，7，8，9，10,11,12,13,14，16的胡杨、梭梭、油松、侧柏、白榆、旱柳、毛白杨、麻栎、华山松、马尾松、杉木、樟树属于广适应树种，它们对自然生态环境的适应能力很强，在我国大部分地区都能生长，可以广泛引种；编号为2，3，15的红松、水曲柳、毛竹属于中度适应灰类，可在我国较大范围内引种造林；编号为1，17的樟子松和南亚松属于狭适应灰类，其中樟子松分布在我国北部边缘地带，南亚松分布在南部边缘地带.

§6.5 灰色统计

定义6.5.1 设有 n 个统计对象，m 个统计指标，s 个不同灰类. 根据对象 i $(i=1,2,\cdots,n)$ 关于指标 j $(j=1,2,\cdots,m)$ 的样本值 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$，将指标 j 归入灰类 $k(k=1,2,\cdots,s)$ 之中，称为灰色统计.

定义6.5.2 设 $x_{ij}(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$ 为统计对象 i 关于统计指标 j 的样本值，$f^{k}(\cdot)(k=1,2,\cdots,s)$ 为灰类 k 的白化权函数，$\eta_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为对象 i 的权，

$$\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1.$$

1° 当 $\eta_i=\dfrac{1}{n}(i=1,2,\cdots,n)$ 时，称

$$\sigma_j^k=\frac{\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}{\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}\qquad j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,s$$

为对象等权统计系数；

2° 当存在 i_1, $i_2\in\{1, 2, \cdots, n\}$, 使 $\eta_{i_1}\neq\eta_{i_2}$ 时, 称

$$\sigma_j^k=\frac{\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}{\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}\quad j=1, 2, \cdots, m; k=1, 2, \cdots, s$$

为对象非等权统计系数.

定义6.5.3 σ_j^k 意义如定义6.5.2, 称

$$\sigma_j=(\sigma_j^1, \sigma_j^2, \cdots, \sigma_j^s)\quad j=1, 2, \cdots, m$$

为指标 j 的统计系数向量.

定义6.5.4 称

$$\Sigma=(\sigma_j^k)=\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^s\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^s\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \sigma_m^1 & \sigma_m^2 & \cdots & \sigma_m^s\end{bmatrix}$$

为统计系数矩阵.

定义6.5.5 若 $\sigma_j^{k^*}=\max\limits_{1\leq k\leq s}\{\sigma_j^k\}$, 则称 n 个统计对象从整体上看关于指标 j 属于灰类 k^*.

灰色统计可按下列步骤进行:

第一步, 给出对象 i 关于指标 j 的样本矩阵

$$A=(x_{ij})=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m}\\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm}\end{bmatrix}.$$

第二步, 确定统计灰类, 给出各灰类的白化权函数 $f^k(\cdot)$, $k=1, 2, \cdots, s$.

第三步, 确定对象 i 的灰色统计权 η_i, $i=1, 2, \cdots, n$.

第四步, 计算统计系数.

$$\sigma_j^k=\frac{\sum_{i=1}^{n} f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}{\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n} f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}.$$

第五步，给出统计系数向量

$$\sigma_j=(\sigma_j^1,\ \sigma_j^2,\ \cdots,\ \sigma_j^s)$$

和统计系数矩阵

$$\Sigma=(\sigma_j^k)=\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^s\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^s\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \sigma_m^1 & \sigma_m^2 & \cdots & \sigma_m^s\end{bmatrix}.$$

第六步，判断 n 个统计对象从整体上看关于指标 j 属于哪个灰类.

若 $\sigma_j^{k^*}=\max\limits_{1\le k\le s}\{\sigma_j^k\}$，则 n 个对象关于指标 j 属于灰类 k^*.

当统计对象为不同经济地区或经济部门，统计指标为不同经济门类时，灰色统计可对经济群体关于不同经济门类作出综合评估，选择优先发展门类. 当统计对象为不同决策单元，统计指标为不同决策方案时，灰色统计可综合决策群体的意见，对各决策方案进行评估，选择最佳方案.

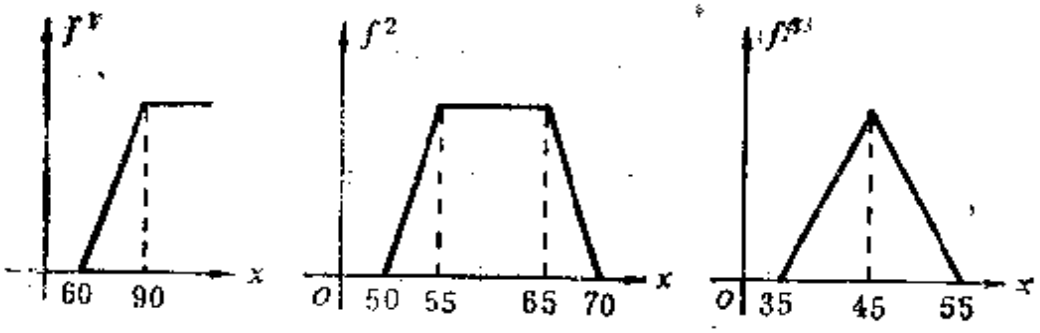
例6.5.1 对例 6.3.1 所示的三个经济区关于种植业、畜牧业、工副业三种收入指标的样本矩阵

$$A=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12} & x_{13}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}80 & 20 & 100\\ 40 & 30 & 30\\ 10 & 90 & 60\end{bmatrix},$$

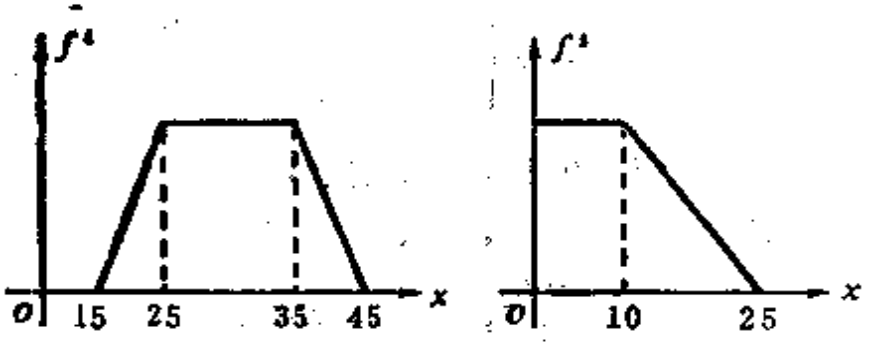
试按高收入类、中偏高收入类、中收入类、中偏低收入类、低收入类对三个经济区的三种收入指标作灰色统计.

解：第一步，样本矩阵 A 已给出.

第二步，设各灰类的白化权函数如图6.5.1所示.



(a)高收入灰类　　(b)中高收入灰类　　(c) 中收入灰类



(d) 中低收入灰类　　(e) 低收入灰类

图 6.5.1

结合图6.5.1和命题6.3.1可得

$$f^1(x)=\begin{cases}0, & x<60\\ \dfrac{x-60}{30}, & 60\leqslant x\leqslant 90\\ 1, & x>90\end{cases}$$

$$f^2(x)=\begin{cases}0, & x\in[50,\ 70]\\ \dfrac{x-50}{5}, & 50\leqslant x<55\\ 1, & 55\leqslant x\leqslant 65\\ \dfrac{70-x}{5}, & 65<x\leqslant 70\end{cases}$$

$$f^3(x)=\begin{cases}0, & x\in[35,\ 55]\\ \dfrac{x-35}{10}, & 35\leqslant x\leqslant 45\\ \dfrac{55-x}{10}, & 45<x\leqslant 55\end{cases}$$

$$f^4(x)=\begin{cases}0, & x\in[15,\ 45]\\ \dfrac{x-15}{10}, & 15\leqslant x<25\\ 1, & 25\leqslant x\leqslant 35\\ \dfrac{45-x}{10}, & 35<x\leqslant 45\end{cases}$$

$$f^5(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\ 25]\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 10\\ \dfrac{25-x}{15}, & 10<x\leqslant 25\end{cases}$$

第三步，按对象等权作灰色统计，即取$\eta_i=\frac{1}{3}$，$i=1,\ 2,3$，

第四步，计算统计系数.

由
$$\sigma_j^k=\frac{\sum_{i=1}^{3}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}{\sum_{k=1}^{6}\sum_{i=1}^{3}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i},$$

当$j=1$时，

$$\sum_{i=1}^{3}f^1(x_{i1})\cdot\eta_i=f^1(x_{11})\cdot\eta_1+f^1(x_{21})\cdot\eta_2+f^1(x_{31})\cdot\eta_3$$

$$=f^1(80)\times\frac{1}{3}+f^1(40)\times\frac{1}{3}+f^1(10)\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{30}\times\frac{1}{3}+0+0=\frac{2}{9},$$

$$\sum_{i=1}^{3} f^2(x_{i1})\cdot\eta_i = f^2(x_{11})\cdot\eta_1 + f^2(x_{21})\cdot\eta_2 + f^2(x_{31})\cdot\eta_3$$

$$= f^2(80)\times\frac{1}{3} + f^2(40)\times\frac{1}{3} + f^2(10)\times\frac{1}{3}$$

$$= 0+0+0=0,$$

$$\sum_{i=1}^{3} f^3(x_{i1})\cdot\eta_i = f^3(x_{11})\cdot\eta_1 + f^3(x_{21})\cdot\eta_2 + f^3(x_{31})\cdot\eta_3$$

$$= f^3(80)\times\frac{1}{3} + f^3(40)\times\frac{1}{3} + f^3(10)\times\frac{1}{3}$$

$$= 0 + \frac{5}{10}\times\frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{3} f^4(x_{i1})\cdot\eta_i = f^4(x_{11})\cdot\eta_1 + f^4(x_{21})\cdot\eta_2 + f^4(x_{31})\cdot\eta_3$$

$$= f^4(80)\times\frac{1}{3} + f^4(40)\times\frac{1}{3} + f^4(10)\times\frac{1}{3}$$

$$= 0+\frac{5}{10}\times\frac{1}{3}+0=\frac{1}{6},$$

$$\sum_{i=1}^{3} f^5(x_{i1})\cdot\eta_i = f^5(x_{11})\cdot\eta_1 + f^5(x_{21})\cdot\eta_2 + f^5(x_{31})\cdot\eta_3$$

$$= f^5(80)\times\frac{1}{3} + f^5(40)\times\frac{1}{3} + f^5(10)\times\frac{1}{3}$$

$$= 0+0+1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

于是 $\sum_{k=}\sum_{i=1} f^k(x_{i1})\cdot\eta_i = \frac{2}{9}+0+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{8}{9},$

$$\sigma_1^1 = \frac{2}{9}\Big/\frac{8}{9} = \frac{1}{4},\quad \sigma_1^2 = 0,\quad \sigma_1^3 = \frac{1}{6}\Big/\frac{8}{9} = \frac{3}{16},$$

$$\sigma_1=\frac{1}{6}\Big/\frac{8}{9}=\frac{3}{16},\qquad \sigma_1^5=\frac{1}{3}\Big/\frac{8}{9}=\frac{3}{8}.$$

$$\therefore\quad \sigma_1=(\sigma_1^1,\ \sigma_1^2,\ \sigma_1^3,\ \sigma_1^4,\ \sigma_1^5)=\left(\frac{1}{4},\ 0,\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{16},\ \frac{3}{8}\right).$$

当 $j=2$ 时，同法计算得：

$$\sum_{i=1}^{8} f^1(x_{i2})\cdot\eta_i=\frac{1}{3},\qquad \sum_{i=1}^{8} f^2(x_{i2})\cdot\eta_i=0,$$

$$\sum_{i=1}^{8} f^3(x_{i2})\cdot\eta_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{8} f^4(x_{i2})\cdot\eta_i=\frac{1}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{8} f^5(x_{i2})\cdot\eta_i=\frac{1}{9},\qquad \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{8} f^k(x_{i2})\cdot\eta_i=\frac{17}{18}.$$

$$\sigma_2^1=\frac{6}{17},\ \sigma_2^2=0,\ \sigma_2^3=0,\ \sigma_2^4=\frac{9}{17},\ \sigma_2^5=\frac{2}{17}.$$

$$\sigma_2=(\sigma_2^1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2^3,\ \sigma_2^4,\ \sigma_2^5)=\left(\frac{6}{17},\ 0,\ 0,\ \frac{9}{17},\ \frac{2}{17}\right).$$

当 $j=3$ 时，同法计算得：

$$\sum_{i=1}^{8} f^1(x_{i3})\cdot\eta_i=\frac{1}{8},\qquad \sum_{i=1}^{8} f^2(x_{i3})\cdot\eta_i=\frac{1}{8},$$

$$\sum_{i=1}^{8} f^3(x_{i3})\cdot\eta_i=0,\qquad \sum_{i=1}^{8} f^4(x_{i3})\cdot\eta_i=\frac{1}{3},$$

$$\sum_{i=1}^{8} f^5(x_{i3})\cdot\eta_i=0,\qquad \sum_{k=1}^{5}\sum_{i=1}^{8} f^k(x_{i3})\cdot\eta_i=1.$$

$$\sigma_3^1=\frac{1}{3},\ \sigma_3^2=\frac{1}{3},\ \sigma_3^3=0,\ \sigma_3^4=\frac{1}{3},\ \sigma_3^5=0,$$

$$\sigma_3=(\sigma_3^1,\sigma_3^2,\sigma_3^3,\sigma_3^4,\ \sigma_3^5)=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0\right).$$

第五步，统计系数矩阵

$$\Sigma=(\sigma_j^k)=\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 & \sigma_1^4 & \sigma_1^5\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 & \sigma_2^4 & \sigma_2^5\\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 & \sigma_3^4 & \sigma_3^5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & \frac{3}{8}\\ \frac{6}{17} & 0 & 0 & \frac{9}{17} & \frac{2}{17}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$$

第六步，判断灰类.

因为 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 5}\{\sigma_1^k\}=\frac{3}{8}=\sigma_1^5$,

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 5}\{\sigma_2^k\}=\frac{9}{17}=\sigma_2^4$,

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant 5}\{\sigma_3^k\}=\frac{1}{3}=\sigma_3^1=\sigma_3^2=\sigma_3^4$,

所以三个经济区从整体上看关于种植业收入属于低收入类，关于畜牧业收入属于中偏低收入灰类，关于工副业收入结果非唯一，进一步考虑

$$\frac{1}{3}(1+2+4)=\frac{7}{3},$$

因为 $\min\left\{\left|1-\frac{7}{3}\right|,\left|2-\frac{7}{3}\right|,\left|4-\frac{7}{3}\right|\right\}=\left|2-\frac{7}{3}\right|$,

所以可取 $k^*=2$，即认为三个经济区的工副业从整体上看 属于中高收入灰类.

第七章　灰色系统建模

§ 7.1　五步建模思想

研究一个抽象系统，建立系统的数学模型，就是对系统的整体功能、协调功能以及系统各因素间的关联关系、因果关系、动态关系进行具体的量化研究．这种研究，必须以定性分析为先导，定量与定性紧密结合．因此，系统模型的建立，一般要经历思想开发、因素分析、量化、动态化、优化五个步骤，故称为五步建模．

第一步：开发思想，形成概念，通过定性分析、研究，明确研究的方向、目标、途径、措施，并将结果用准确简炼的语言加以表达，这便是语言模型．

第二步：对语言模型中的因素及各因素之间的关系进行剖析，找出影响事物发展的前因、后果，并将这种因果关系用框图表示出来(见图7.1.1)．

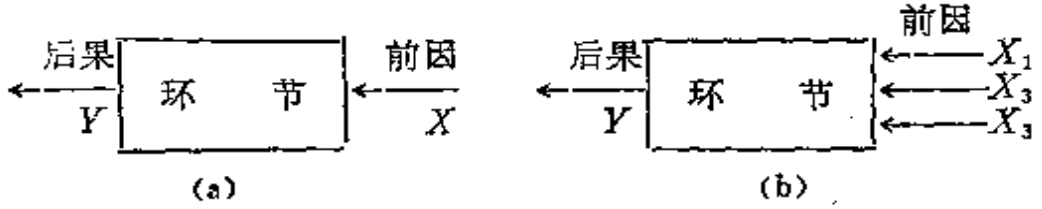


图 7.1.1

一对前因后果(或一组前因与一个后果)构成一个环节．一个系统包含许多个这样的环节．有时，同一个量既是一个环节的前因，又是另一环节的后果．将所有这些关系连接起来，便得到一个

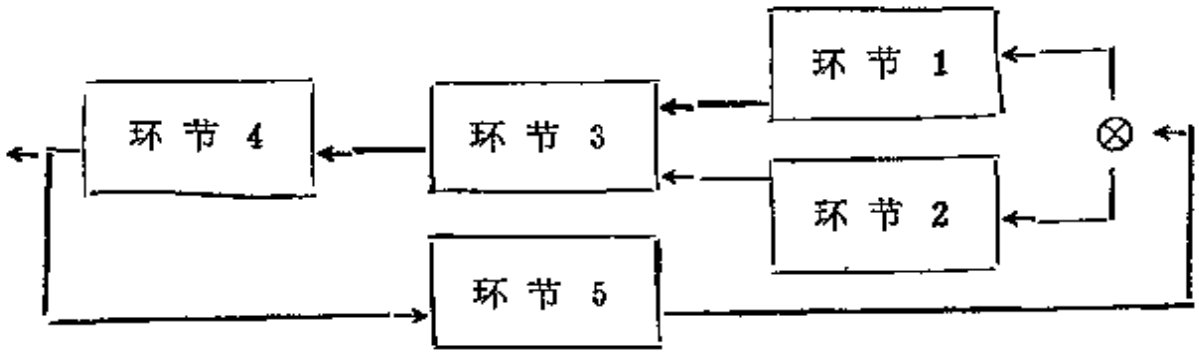


图 7.1.2

相互关联的、由多个环节构成的框图(如图 7.1.2 所示)，即为网络模型.

第三步：对各环节的因果关系进行量化研究，初步得出低层次的概略量化关系，即为量化模型.

第四步：进一步收集各环节输入数据和输出数据，利用所得数据序列，建立动态 GM 模型，即动态模型.

动态模型是高层次的量化模型，它更为深刻地揭示出输入与输出之间的数量关系或转换规律，是系统分析、优化的基础.

第五步：对动态模型进行系统研究和分析，通过结构、机理、参数的调整，进行系统重组，达到优化配置、改善系统动态品质的目的. 这样得到的模型，称为优化模型.

五步建模的全过程，是在五个不同阶段五种模型的建立过程：

语言模型⇒网络模型⇒量化模型

⇒动态模型⇒优化模型

在建模过程中，要不断地将下面阶段中所得的结果向回反馈，经过多次循环往复，使整个模型逐步趋于完善.

五步建模思想在社会科学与自然科学之间架起了一座桥梁，使之相互沟通. 它使社会科学研究数学化、计算机化、自然科学化；同时也使自科学研究高度概括，使之更为精辟，更富于哲理性.

灰色系统建模的基本思路可以概括为以下几点：

1° 定性分析是建模的前提.

2° 定量模型是定性分析的具体化.

3° 定性与定量紧密结合，相互补充.

4° 明确系统因素，弄清因素间的关系及因素与系统的关系是系统研究的核心.

5° 因素分析不应停留在一种状态上，而应考虑到时间推移、状态变化，即系统行为的研究要动态化.

6° 因素间的关系及因素与系统的关系不是绝对的，而是相对的.

7° 为了将控制论中卓有成效的方法和成果推广到社会、经济、农业、生态等研究领域中，系统模型应控制化.

8° 要通过模型了解系统的基本控制性能，如是否可控，变化过程是否可观测等.

9° 要通过模型对系统进行诊断，搞清现状，揭示潜在的问题.

10° 应从模型获得尽可能多的信息，特别是发展变化信息.如系统是能够持续不断发展的，还是有限度的？对于持续发展的系统，它是单调地发展，还是有波动地发展？是迅猛地发展，还是缓慢地发展？对于有一定发展限度的系统，其极限值是多少？它是单调地达到极限，还是有摆动地达到极限？是迅速地达到极限，还是缓慢地达到极限？系统发展过程中有没有冲击等.

11° 建立模型常用的数据有以下几种：

（1）科学实验数据；　　（2）经验数据；

（3）生产数据；　　（4）决策数据.

12° 序列生成是建立灰色模型的基础数据.

13° 对于满足准光滑条件的序列，可以建立GM微分模型.一般非负序列累加生成后，可得到准光滑序列.

14° 模型精度可以通过灰数的不同生成方式、数据的取舍、

序列的调整、修正以及不同级别的残差GM模型补充得到提高。

15° 灰色理论采用三种方法检验、判断模型的精度：

（1）残差大小检验，是对模型值和实际值的误差进行逐点检验；

（2）关联度检验，通过考察模型值曲线与建模序列曲线的相似程度进行检验；

（3）后验差检验，是对残差分布的统计特性进行检验。

§ 7.2 灰色微分方程

许多系统研究学者对微分方程很感兴趣，认为微分方程较深刻地反映了事物发展的本质．而面对离散的数据序列，人们常常感到束手无策．因为只有连续可导函数，才可以考虑其微分方程．灰色系统理论通过对一般微分方程的深刻剖析定义了灰导数，从而使我们能够利用离散数据序列建立近似的微分方程模型．

定义7.2.1 设有微分方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=b,$$

则称$\frac{dx}{dt}$为x的导数，称x为$\frac{dx}{dt}$的背景值，称a，b为参数．

因此，一个一阶微分方程由导数、背景值和参数三部分构成．

定义7.2.2 设$x(t)$为定义在时间集T上的函数，若当$\Delta t\to 0$时，恒有$x(t+\Delta t)-x(t)\neq 0$，则称$x(t)$在T上的信息浓度为无限大．

命题7.2.1 使微分方程

$$\frac{dx}{dt}+ax=b$$

成立的函数$x(t)$满足信息浓度无限大条件。

证明：由导数定义

$$\frac{dx}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$$

可以看出. ∎

定义7.2.3 设 A,B 为集合，R 为 A 与 B 元素之间的一种运算，对于 a_1，$a_2\in A$，$b\in B$，如果

$$a_1Rb=a_2Rb,$$

则称b对a_1，a_2为平射.

定义7.2.4 设R为绝对差运算，即

$$aRb=|a-b|.$$

当 $a_1Rb=a_2Rb$ 亦即 $|a_1-b|=|a_2-b|$ 时，称 R 为算术平射或简单平射.

定义7.2.5 令

$$\frac{dx}{dt}+ax=b$$

为微分方程，$x(t+\Delta t)$，$x(t)$为背景集的元素，

$$X=\{x(t+\Delta t),\ x(t)\}.$$

1° 当$\frac{dx}{dt}R\,x(t+\Delta t)=\frac{dx}{dt}R\,x(t)$时，称导数与背景值元素满足平射关系；

2° 若x为背景值取值，且

$$x\neq x(t+\Delta t),\qquad x(t+\Delta t)\in X$$
$$x\neq x(t),\qquad x(t)\in X$$

设$\delta(t+\Delta t)$，$\delta(t)$为$\frac{dx}{dt}$的成分，当

$$\delta(t+\Delta t)Rx=\delta(t)Rx$$

时，则称背景取值与导数成分满足平射关系.

命题7.2.2 若$x(t)$为正值函数，即对任意t，$x(t)>0$. 则

微分方程$\frac{dx}{dt}+ax=b$中的导数$\frac{dx}{dt}$与背景值中元素满足简单平射关系.

定理7.2.1 微分方程构成的基本条件有以下三条:

1° 信息浓度无限大;

2° 背景值是灰数;

3° 导数与背景值满足平射关系.

定义7.2.6 设I为计时单位的集合. 若

$$I=\{\cdots, \text{年}, \text{月}, \text{日}, \text{时}, \text{分}, \text{秒}, \cdots\},$$

则称I为习惯计时单位集或习惯时间序号集.

定义7.2.7 设1_i和1_j分别为i级计时单位和j级计时单位下的一个时间单位. 若$1_i<1_j$, 则称i级计时单位比j级计时单位密.

定义7.2.8 设

$$X=(x(1_i), x(2_i), \cdots, x(n_i))$$

为i级计时单位时间序列, 则称

$$d^{(1)}=x(k_i)-x(k_i-1_i),\ k_i=1_i, 2_i, \cdots, n_i$$

为i级计时单位下的信息增量.

定义7.2.9 设X为计时单位可无限密化的序列, 1_i为i级计时单位下的一个时间单位. 若当$1_i\to 0$时,

$$d^{(1)}=x(k_i)-x(k_i-1_i)\neq 0,$$

则称X为具有微分方程内涵的序列, 或称灰微分序列, 并称

$$d^{(1)}(k_i)=\lim_{1_i\to 0}(x(k_i)-x(k_i-1_i)),\ k_i=1_i, 2_i, \cdots, n_i.$$

为序列X的灰导数. 一般序列的灰导数记为$d(k)$.

命题7.2.3 设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n)),$$
$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \cdots, x^{(1)}(n)),$$

其中 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为 $X^{(0)}$ 的 1－AGO 序列，则 $X^{(1)}$ 的灰导数为 $d(k)=x^{(0)}(k)$。

证明：计时单位不作进一步密化，

$$d(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)$$
$$=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)-\sum_{i=1}^{k-1}x^{(0)}(i)=x^{(0)}(k).$$ ∎

§7.3 GM(1,1)模型

定义7.3.1 称

$$d^{(1)}(k_1)+ax^{(1)}(k_1)=b$$

为灰微分型方程。

命题7.3.1 对于灰微分型方程

$$x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k)=b,$$

灰导数 $x^{(0)}(k)$ 与背景值 $\{x^{(1)}(k),\ x^{(1)}(k-1)\}$ 中元素不满足平射关系.

证明：$|x^{(0)}(k)-x^{(1)}(k)|=|-x^{(1)}(k-1)|=x^{(1)}(k-1)$，

而 $|x^{(0)}(k)-x^{(1)}(k-1)|=|2x^{(0)}(k)-x^{(1)}(k)|$，

$|x^{(0)}(k)-x^{(1)}(k)|\neq|x^{(0)}(k)-x^{(1)}(k-1)|$。 ∎

命题7.3.2 若背景值取 $X^{(1)}$ 中元素的均值，即令

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),$$

则背景值 $z^{(1)}(k)$ 与灰导数成分 $x^{(1)}(k)$，$x^{(1)}(k-1)$ 具有算术平射关系.

证明：$|z^{(1)}(k)-x^{(1)}(k)|$

$$=|0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)-x^{(1)}(k)|$$
$$=|0.5x^{(1)}(k-1)-0.5x^{(1)}(k)|,$$
$$|z^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)|$$

$$=|0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)-x^{(1)}(k-1)|$$
$$=|0.5x^{(1)}(k)-0.5x^{(1)}(k-1)|,$$

故有 $z^{(1)}(k)Rx^{(1)}(k)=z^{(1)}(k)Rx^{(1)}(k-1)$. ∎

定义7.3.2 若灰微分型方程满足下列条件：

1° 信息浓度无限大；

2° 序列具有灰微分内涵；

3° 背景值到灰导数成分具有平射关系，

则称此灰微分型方程为灰微分方程.

命题7.3.3 方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$，其中

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),$$

为灰微分方程.

定义7.3.3 称

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

为 GM(1，1)模型.

符号 GM(1，1)的含义如下：

G M (1， 1)

↑ ↑ ↑ ↑

Grey Model 1阶方程 1个变量.

(灰) (模型)

定理7.3.1 设$X^{(0)}$为非负序列，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

其中 $x^{(0)}(k)\geqslant 0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$

$X^{(1)}$为$X^{(0)}$的1－AGO序列，

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ \cdots,\ x^{(1)}(n)),$$

其中 $$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

$Z^{(1)}$为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列，

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ \cdots,\ z^{(1)}(n)),$$

其中　　$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)$，　$k=1$，　2，　…，　n.

若$\hat{a}=(a,\ b)^T$为参数列，

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\x^{(0)}(3)\\\vdots\\x^{(0)}(n)\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\-z^{(1)}(3) & 1\\\vdots & \vdots\\-z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},$$

则灰微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$的最小二乘估计参数列满足

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

证明：将数据代入灰微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b,$$

得

$$\begin{aligned}&x^{(0)}(2)+az^{(1)}(2)=b,\\&x^{(0)}(3)+az^{(1)}(3)=b,\\&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\&x^{(0)}(n)+az^{(1)}(n)=b,\end{aligned}$$

此即

$$Y=B\hat{a}.$$

对于a，b的一对估计值，以$-az^{(1)}(k)+b$代替$x^{(0)}(k)$，$k=2$，…，n，可得误差序列

$$e=Y-B\hat{a}.$$

设

$$\begin{aligned}s=e^Te&=(Y-B\hat{a})^T(Y-B\hat{a})\\&=\sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b)^2,\end{aligned}$$

使s最小的a，b应满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial a}=2\sum\limits_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b)\cdot z^{(1)}(k)=0\\[2ex]\dfrac{\partial s}{\partial b}=-2\sum\limits_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b)=0,\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\sum_{k=2}^{n}[x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)+a(z^{(1)}(k))^2-bz^{(1)}(k)]=0\\ \sum_{k=2}^{n}(x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)-b)=0.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} b=\dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)+a\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right]\\ a=\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^{n}(z^{(1)}(k))^2-\frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right)^2}\end{cases}$$

由$Y=B\hat{a}$得

$$B^TB\hat{a}=B^TY,\qquad \hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

但
$$B^TB=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \cdots & \cdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \cdots & \cdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2 & -\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ -\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & n-1\end{bmatrix},$$

$$(B^TB)^{-1}=\frac{1}{(n-1)\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\left[\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right]^2}\cdot\begin{bmatrix}n-1 & \sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k) & \sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\end{bmatrix},$$

$$B^TY=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ \cdots & \cdots\\ -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \cdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)\\ \sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\end{bmatrix},$$

所以

$$a=(B^TB)^{-1}B^TY=\frac{1}{(n-1)\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\left[\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right]^2}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}-(n-1)\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\\ -\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)+\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\dfrac{\frac{1}{n-1}\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)-\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)z^{(1)}(k)}{\sum_{k=2}^{n}[z^{(1)}(k)]^2-\frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right]^2}\\ \dfrac{1}{n-1}\left[\sum_{k=2}^{n}x^{(0)}(k)+a\sum_{k=2}^{n}z^{(1)}(k)\right]\end{pmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}.$$ ∎

定义7.3.4 设$X^{(0)}$为非负序列，$X^{(1)}$为$X^{(0)}$的1－AGO序列，$Z^{(1)}$为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列，

$$[a,\ b]^T=(B^TB)^{-1}B^TY,$$

称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b$$

为灰微分方程

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

的白化方程，也叫影子方程.

定理7.3.2 设 B, Y, a 如定理7.3.1所述，

$$[a,\ b]^T=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

则有：

1° 白化方程 $\dfrac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b$ 的解或称时间响应函数为

$$x^{(1)}(t)=\left(x^{(1)}(0)-\frac{b}{a}\right)e^{-at}+\frac{b}{a}.$$

2° GM(1, 1)灰微分方程 $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$ 的时间响应序列为

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(1)}(0)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

3° 取 $x^{(1)}(0)=x^{(0)}(1)$，则

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

4° 还原值

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\alpha^{(1)}\hat{x}^{(1)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k),$$

$$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

定义7.3.5 称 GM(1, 1)模型中的参数 $-a$ 为发展系数，b 为灰作用量.

$-a$ 反映了 $\hat{X}^{(1)}$ 及 $\hat{X}^{(0)}$ 的发展态势. 一般情况下，系统作用量应是外生的或前定的，而 GM(1, 1)是单序列建模，只用到系统的行为序列（或称输出序列、背景值），而无外作用序列（或称输入序列、驱动量）. GM(1, 1)中的灰作用量是从背景值挖掘出来的数据，它反映出数据变化的关系，其确切内涵是灰的. 灰作用量是内涵外延化的具体体现，它的存在，是区别灰色建模与一般输入输出建模(黑箱建模)的分水岭，也是区分灰系统观点与灰箱观点的试金石.

定理7.3.3 GM(1, 1)模型

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$$

可以转化为

$$x^{(0)}(k)=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1),$$

其中 $$\beta=\frac{b}{1+0.5a},\qquad \alpha=\frac{a}{1+0.5a}.$$

证明：将$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)$代入

$$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b,$$

得
$$\begin{aligned}&x^{(0)}(k)+0.5a(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))\\&=x^{(0)}(k)+0.5a(x^{(1)}(k-1)+x^{(0)}(k)+x^{(1)}(k-1))\\&=(1+0.5a)x^{(0)}(k)+ax^{(1)}(k-1)=b,\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}x^{(0)}(k)&=\frac{b}{1+0.5a}-\frac{a}{1+0.5a}x^{(1)}(k-1)\\&=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1).\end{aligned}$$

定理7.3.4 设$\beta=\dfrac{b}{1+0.5a}$，$\alpha=\dfrac{a}{1+0.5a}$，

$$\hat{X}^{(1)}=(\hat{x}^{(1)}(1),\ \hat{x}^{(1)}(2),\ \cdots,\ \hat{x}^{(1)}(n)),$$

为GM(1，1)模型时间响应序列，其中

$$\hat{x}^{(1)}(k)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)}+\frac{b}{a},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

则
$$x^{(0)}(k)=(\beta-\alpha x^{(0)}(1))e^{-a(k-2)}.$$

证明：由定理7.3.3，

$$x^{(0)}(k)=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1),$$

代入$x^{(1)}(k-1)$的响应值$\hat{x}^{(1)}(k-1)$，有

$$\begin{aligned}x^{(0)}(k)&=\beta-\alpha\left[\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-2)}+\frac{b}{a}\right]\\&=\beta-\alpha\frac{b}{a}+\left(\alpha\cdot\frac{b}{a}-\alpha x^{(0)}(1)\right)e^{-a(k-2)}.\end{aligned}$$

但
$$\alpha\cdot\frac{b}{a}=\frac{a}{1+0.5a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b}{1+0.5a}=\beta,$$

所以
$$x^{(0)}(k)=(\beta-\alpha x^{(0)}(1))e^{-\alpha(k-2)}.$$ ∎

例7.3.1 设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5))$$
$$=(2.874,\ 3.278,\ 3.337,\ 3.390,\ 3.679).$$

试用下列三种GM模型对$X^{(0)}$进行模拟，并比较模拟精度：

1° $x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$；

2° $x^{(0)}(k)=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1)$；

3° $x^{(0)}(k)=(\beta-\alpha x^{(0)}(1))e^{-\alpha(k-2)}$.

解：1° 第一步：对$X^{(0)}$作1－AGO，得

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ x^{(1)}(3),\ x^{(1)}(4),\ x^{(1)}(5))$$
$$=(2.874,\ 6.152,\ 9.489,\ 12.879,\ 16.558),$$

第二步：对$X^{(0)}$进行准光滑性检验：

由$\rho(k)=\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$，得

$$\rho(3)=\frac{x^{(0)}(3)}{x^{(1)}(2)}=\frac{3.337}{6.152}\approx 0.54,$$

$$\rho(4)=\frac{x^{(0)}(4)}{x^{(1)}(3)}=\frac{3.390}{9.489}\approx 0.36<0.5,$$

$$\rho(5)=\frac{x^{(0)}(5)}{x^{(1)}(4)}=\frac{3.679}{12.879}\approx 0.29<0.5.$$

$k>3$时，准光滑条件满足.

第三步：检验$X^{(1)}$是否具有准指数规律：

由 $\sigma^{(1)}(k)=\dfrac{x^{(1)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}$，得

$$\sigma^{(1)}(3)=\frac{x^{(1)}(3)}{x^{(1)}(2)}=\frac{9.489}{6.152}\approx 1.54,$$

$$\sigma^{(1)}(4)=\frac{x^{(1)}(4)}{x^{(1)}(3)}=\frac{12.879}{9.489}\approx 1.36,$$

$$\sigma^{(1)}(5)=\frac{x^{(1)}(5)}{x^{(1)}(4)}=\frac{16.558}{12.379}\approx 1.29.$$

$k>3$时，$\sigma^{(1)}(k)\in[1,\ 1.5]$，$\delta=0.5$，准指数规律满足，故可对$X^{(1)}$建立GM(1, 1)模型.

第四步：对$X^{(1)}$作紧邻均值生成，令

$$z^{(1)}(k)=0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1),$$

得 $$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ z^{(1)}(3),\ z^{(1)}(4),\ z^{(1)}(5))$$
$$=(2.874,\ 4.513,\ 7.820,\ 11.184,\ 14.718).$$

于是 $$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & 1\\ -z^{(1)}(3) & 1\\ -z^{(1)}(4) & 1\\ -z^{(1)}(5) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.513 & 1\\ -7.820 & 1\\ -11.184 & 1\\ -14.718 & 1\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ x^{(0)}(4)\\ x^{(0)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3.278\\ 3.337\\ 3.390\\ 3.679\end{bmatrix},$$

$$B^TB=\begin{bmatrix}-4.513 & -7.820 & -11.184 & -14.718\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4.513 & 1\\ -7.820 & 1\\ -11.184 & 1\\ -14.718 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}423.244 & -38.236\\ -38.236 & 4\end{bmatrix},$$

$$(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}423.244 & -38.236\\ -38.236 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.017317 & 0.165537\\ 0.165537 & 1.83236\end{bmatrix}.$$

第五步：对参数列$\hat{a}=[a,\ b]^T$进行最小二乘估计，得

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

$$= \begin{bmatrix} 0.017317 & 0.165537 \\ 0.165537 & 1.83236 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4.513 & -7.820 & -11.184 & -14.718 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3.278 \\ 3.337 \\ 3.390 \\ 3.679 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.087385 & 0.030118 & -0.028136 & -0.089335 \\ 1.085292 & 0.537861 & -0.019006 & -0.604014 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.278 \\ 3.337 \\ 3.390 \\ 3.679 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.03720 \\ 3.06536 \end{bmatrix}.$$

第六步：确定模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.0372x^{(1)} = 3.06536$$

及时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}$$

$$= 85.276151e^{0.0372k} - 82.402151.$$

第七步：求 $X^{(1)}$ 的模拟值

$$\hat{X}^{(1)} = (\hat{x}^{(1)}(1), \hat{x}^{(1)}(2), \hat{x}^{(1)}(3), \hat{x}^{(1)}(4), \hat{x}^{(1)}(5))$$

$$= (2.8740, 6.1060, 9.4605, 12.9422, 16.5558).$$

第八步：还原求出 $X^{(0)}$ 的模拟值. 由

$$\hat{x}^{(0)}(k) = \alpha^{(1)}\hat{x}^{(1)}(k) = \hat{x}^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k-1)$$

得

$$\hat{X}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \hat{x}^{(0)}(3), \hat{x}^{(0)}(4), \hat{x}^{(0)}(5))$$

$$= (2.8740, 3.2320, 3.3545, 3.4817, 3.6136).$$

第九步：检验误差.

表 7.3.1 误差检验表

序 号	实际数据 $x^{(0)}(k)$	模拟数据 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $\varepsilon(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k=\frac{\lvert\varepsilon(k)\rvert}{x^{(0)}(k)}$
2	3.278	3.2320	0.0460	1.40%
3	3.337	3.3545	-0.0175	0.52%
4	3.390	3.4817	-0.0917	2.71%
5	3.679	3.6136	0.0654	1.78%

由表 7.3.1 可算出残差平方和

$$s=e^Te$$

$$=[\varepsilon(2)\quad\varepsilon(3)\quad\varepsilon(4)\quad\varepsilon(5)]\begin{bmatrix}\varepsilon(2)\\ \varepsilon(3)\\ \varepsilon(4)\\ \varepsilon(5)\end{bmatrix}$$

$$=[0.0460\quad 0.0175\quad 0.0917\quad 0.0654]\begin{bmatrix}0.0460\\ 0.0175\\ 0.0917\\ 0.0654\end{bmatrix}=0.01511,$$

平均相对误差

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=1.6025\%.$$

2° 由1°知$a=-0.03720$，$b=3.06536$，所以

$$\alpha=\frac{a}{1+0.5a}=\frac{-0.0372}{1+0.5\cdot(-0.0372)}=-0.0379,$$

$$\beta=\frac{b}{1+0.5a}=\frac{3.06536}{1+0.5\cdot(-0.0372)}=3.1235,$$

于是得

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1)$$

$$= 3.1235 + 0.0379x^{(1)}(k-1),$$

所以 $\hat{X}^{(0)} = (\hat{x}^{(0)}(1), \hat{x}^{(0)}(2), \hat{x}^{(0)}(3), \hat{x}^{(0)}(4), \hat{x}^{(0)}(5))$

$= (3.2324, 3.2324, 3.3567, 3.4820, 3.6105).$

作误差检验

表 7.3.2 误差检验表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{\lvert\varepsilon(k)\rvert}{x^{(0)}(k)}$
2	3.278	3.2324	0.0456	1.39%
3	3.337	3.3567	-0.0197	0.59%
4	3.390	3.4820	-0.092	2.71%
5	3.679	3.6105	0.0685	1.86%

由表 7.3.2 可得残差平方和

$$s = \varepsilon^T\varepsilon = 0.0156,$$

平均相对误差

$$\Delta = \frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k = 1.6375\%.$$

3° 由2°知$\alpha = -0.0379$, $\beta = 3.1235$, 所以

$$\hat{x}^{(0)}(k) = (\beta - \alpha x^{(0)}(1))e^{-\alpha(k-2)}$$

$$= (3.1235 + 0.0379 \cdot 2.874)e^{0.0372(k-2)}$$

$$= 3.2324246e^{0.0372(k-2)}$$

表 7.3.3 误差检验表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \frac{\lvert\varepsilon(k)\rvert}{x^{(0)}(k)}$
2	3.278	3.2324	0.0456	1.39%
3	3.337	3.3549	-0.0179	0.54%
4	3.390	3.4821	-0.0921	2.72%
5	3.679	3.6141	0.0549	1.76%

于是 $\hat{X}^{(0)}=(\hat{x}^{(0)}(1),\ \hat{x}^{(0)}(2),\ \hat{x}^{(0)}(3),\ \hat{x}^{(0)}(4),\ \hat{x}^{(0)}(5))$

$=(3.1144,\ 3.2324,\ 3.3549,\ 3.4821,\ 3.6141)$.

作误差检验（见表7.3.3）.

由表7.3.3可算出残差平方和

$$s=e^{T}e=0.01509,$$

平均相对误差

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=1.6025\%.$$

4° 由三种模型的残差平方和与平均相对误差可以看出：

指数模型

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k)=\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)}+\dfrac{b}{a}\\ \hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)\end{cases}$$

和 $$\hat{x}^{(0)}(k)=(\beta-\alpha x^{(0)}(1))e^{-\alpha(k-2)}$$

精度较高，差分模型

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\beta-\alpha x^{(1)}(k-1)$$

精度稍低一些.

定理7.3.5 若$X^{(0)}$为准光滑序列，则其1-AGO$X^{(1)}$的GM(1，1)发展系数a可表示为

$$a=\frac{\dfrac{b}{x^{(1)}(k-1)}-\rho(k)}{1+0.5\rho(k)},$$

其中 $$\rho(k)=\frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}.$$

证明：由$x^{(0)}(k)+az^{(1)}(k)=b$，得

$x^{(0)}(k)+a(0.5x^{(1)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1))=b$,

$x^{(0)}(k)+a(0.5x^{(0)}(k)+0.5x^{(1)}(k-1)+0.5x^{(1)}(k-1))=b$,

$x^{(0)}(k)+a(0.5x^{(0)}(k)+x^{(1)}(k-1))=b$,

所以 $$a=\frac{b-x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)+0.5x^{(0)}(k)}$$

$$=\frac{\dfrac{b}{x^{(1)}(k-1)}-\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}}{1+0.5\dfrac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)}}=\frac{\dfrac{b}{x^{(1)}(k-1)}-\rho(k)}{1+0.5\rho(k)}.$$ ∎

由定理7.3.5可知，当b有限，$x^{(1)}(k-1)$足够大时，GM(1，1)发展系数$-a$主要取决于光滑比$\rho(k)$.

§ 7.4 残差GM(1,1)模型

当 GM(1，1)模型的精度不符合要求时，可用残差序列建立GM(1，1) 模型对原来的模型进行修正，以提高精度.

定义7.4.1 设$X^{(0)}$为原始序列，$X^{(1)}$为$X^{(0)}$的1-AGO序列，GM(1，1)时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a},$$

则称

$$d\hat{x}^{(1)}(k+1)=(-a)\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}$$

为导数还原值.

命题7.4.1 设

$$d\hat{x}^{(1)}(k+1)=(-a)\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}$$

为导数还原值，

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$$

为累减还原值，则

$$d\hat{x}^{(1)}(k+1) \neq \hat{x}^{(0)}(k+1).$$

证明： $\hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k)$

$$= \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}$$

$$- \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)} - \frac{b}{a}$$

$$= (1 - e^{a})\left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak},$$

因为 $$e^{a} = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \cdots + \frac{a^m}{m!} + \cdots$$

所以 $$1 - e^{a} = -a - \frac{a^2}{2!} - \frac{a^3}{3!} - \cdots - \frac{a^m}{m!} - \cdots \neq -a,$$

故 $$d\hat{x}^{(1)}(k+1) \neq \hat{x}^{(0)}(k+1).$$ ∎

由命题7.4.1可以看出，GM(1，1)既不是微分方程，又不是差分方程. 但当$|a|$充分小时，$1 - e^{a} \approx -a$，有$d\hat{x}^{(1)}(k+1) \approx \hat{x}^{(0)}(k+1)$，这说明微分与差分的结果十分接近. 因此，GM(1，1)既可以看成灰微分方程，又可以看成灰差分方程.

鉴于导数还原值与累减还原值不完全一致，为减少往复运算造成的误差，往往用$X^{(1)}$的残差修正$X^{(1)}$的模拟值

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \frac{b}{a}\right)e^{-ak} + \frac{b}{a}.$$

定义7.4.2 设

$$\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon^{(0)}(1), \varepsilon^{(0)}(2), \cdots, \varepsilon^{(0)}(n)),$$

其中$\varepsilon^{(0)}(k) = x^{(1)}(k) - \hat{x}^{(1)}(k)$为$X^{(1)}$的残差序列. 若存在$k_0$，满足：

1° 对任意的$k \geqslant k_0$，$\varepsilon^{(0)}(k)$符号一致，

2° $n - k_0 \geqslant 4$，

则称 $$(|\varepsilon^{(0)}(k_0)|, |\varepsilon^{(0)}(k_0+1)|, \cdots, |\varepsilon^{(0)}(n)|)$$

为可建模残差尾段，仍记为

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon^{(0)}(k_0),\ \varepsilon^{(0)}(k_0+1),\ \cdots,\ \varepsilon^{(0)}(n)).$$

命题7.4.2 设

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon^{(0)}(k_0),\ \varepsilon^{(0)}(k_0+1),\ \cdots,\ \varepsilon^{(0)}(n))$$

为可建模残差尾段，其1-AGO序列

$$\varepsilon^{(1)}=(\varepsilon^{(1)}(k_0),\ \varepsilon^{(1)}(k_0+1),\ \cdots,\ \varepsilon^{(1)}(n))$$

的 GM(1, 1)时间响应式为：

$$\hat{\varepsilon}^{(1)}(k+1)=\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)\exp[-a_\varepsilon(k-k_0)]+\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon},\quad k\geqslant k_0.$$

则残差尾段 $\varepsilon^{(0)}$的模拟序列

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}=(\hat{\varepsilon}^{(0)}(k_0),\ \hat{\varepsilon}^{(0)}(k_0+1),\ \cdots,\ \hat{\varepsilon}^{(0)}(n)),$$

其中，$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1)=(-a_\varepsilon)\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)\exp[-a_\varepsilon(k-k_0)],\quad k\geqslant k_0.$

定义7.4.3 若用 $\hat{\varepsilon}^{(0)}$ 修正 $\hat{x}^{(1)}$，我们称修正后的时间响应式：

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\begin{cases}\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}+\dfrac{b}{a}, & k<k_0\\ \left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}+\dfrac{b}{a}\pm a_\varepsilon\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\dfrac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)\\ \quad\times\exp[-a_\varepsilon(k-k_0)], & k\geqslant k_0\end{cases}$$

为残差修正 GM(1, 1) 模型，简称残差 GM(1, 1)．其中残差修正值$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1)=a_\varepsilon\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)\exp[-a_\varepsilon(k-k_0)]$ 的符号应与残差尾段 $\varepsilon^{(0)}$ 的符号保持一致．

若用 $X^{(0)}$与 $\hat{X}^{(0)}$ 的残差尾段

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon^{(0)}(k_0),\ \varepsilon^{(0)}(k_0+1),\ \cdots,\ \varepsilon^{(0)}(n))$$

建模修正$X^{(0)}$的模拟值$\hat{X}^{(0)}$，则根据由$\hat{x}^{(1)}$到$\hat{X}^{(0)}$的不同还原方式，可得到不同的残差修正时间响应式．

定义7.4.4 若

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1)=(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)},$$

则相应的残差修正时间响应式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\begin{cases}(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}, & k<k_0\\ (1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}\pm a_s\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\dfrac{b_s}{a_s}\right)\\ \times\exp[-a_s(k-k_0)], & k\geqslant k_0\end{cases}$$

称为累减还原式的残差修正模型.

定义7.4.5 若$\hat{x}^{(0)}(k+1)=(-a)\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}$，则相应的残差修正时间响应式

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\begin{cases}(-a)\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}, & k<k_0\\ (-a)\left(x^{(0)}(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}\pm a_s\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\dfrac{b_s}{a_s}\right)\\ \times\exp[-a_s(k-k_0)], & k\geqslant k_0\end{cases}$$

称为导数还原式的残差修正模型.

上述各种残差GM(1，1)中的残差模拟项都是取的导数还原式，当然也可以取为累减还原式，即取

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1)=(1-e^{a\varepsilon})\left(\varepsilon^{(0)}(k_0)-\frac{b_s}{a_s}\right)\exp[-a_s(k-k_0)],$$

$$k\geqslant k_0.$$

只要$|a_s|$充分小，取不同的残差还原式对修正值$\hat{x}^{(0)}(k+1)$影响不大.

例7.4.1 湖北省云梦县油菜发病率数据为

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5),$$
$$x^{(0)}(6),\ x^{(0)}(7),\ x^{(0)}(8),\ x^{(0)}(9),\ x^{(0)}(10),$$

$$x^{(0)}(11),\ x^{(0)}(12),\ x_0(13))$$
$$=(6,\ 20,\ 40,\ 25,\ 40,\ 45,\ 35,\ 21,\ 14,\ 18,$$
$$15.5,\ 17,\ 15),$$

建立 GM(1, 1) 模型，得时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=-567.999e^{-0.06480k}+573.999.$$

作累减还原，得：

$$\hat{X}^{(0)}=\{\hat{x}^{(0)}(k)\}_2^{13}$$
$$=(35.6704,\ 33.4303,\ 31.3308,\ 29.3682,$$
$$27.5192,\ 25.7900,\ 24.1719,\ 22.6534,$$
$$21.2307,\ 19.8974,\ 18.6478,\ 17.4768).$$

检验精度，列出精度检验表(见表7.4.1).

由表 7.4.1 可以看出，模拟误差较大. 进一步计算出残差平方和

$$s=\varepsilon^T\varepsilon=957.18,$$

表 7.4.1 误差检验表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k=\left\|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right\|$
2	20	35.6704	-15.6704	78.3540%
3	40	33.4303	6.5697	16.4242%
4	25	31.3308	-6.3308	25.3232%
5	40	29.3682	10.6318	26.5795%
6	45	27.5192	17.4808	38.8642%
7	35	25.7901	9.2099	26.3140%
8	21	24.1719	-3.1719	15.1043%
9	14	22.6534	-8.6534	61.8100%
10	18	21.2307	-3.2307	17.9483%
11	15.5	19.8974	-4.3974	28.3703%
12	17	18.6478	-1.6478	9.6929%
13	15	17.4768	-2.4768	16.5120%

平均相对误差

$$\Delta=\frac{1}{12}\sum_{k=2}^{13}\Delta_k=30.11\%.$$

误差平方和很大，相对精度不到70%，需采用残差模型进行修正. 取 $k_0=9$，得残差尾段

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon^{(0)}(9),\ \varepsilon^{(0)}(10),\ \varepsilon^{(0)}(11),\ \varepsilon^{(0)}(12),\ \varepsilon^{(0)}(13))$$
$$=(-8.6534,\ -3.2307,\ -4.3974,\ -1.6478,$$
$$-2.4768),$$

此为可建模残差尾段，取绝对值，得

$$\varepsilon^{(0)}=(8.6534,\ 3.2307,\ 4.3974,\ 1.6478,\ 2.4768),$$

建立 GM(1, 1)模型，得 $\varepsilon^{(0)}$的 1-AGO 序列 $\varepsilon^{(1)}$ 的时间响应式：

$$\hat{\varepsilon}^{(1)}(k+1)=-24e^{-0.16855(k-9)}+32.7,$$

其导数还原值为：

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1)=(-0.16855)(-24)e^{-0.16855(k-9)}$$
$$=4.0452e^{-0.16855(k-9)}.$$

由
$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$$
$$=(1-e^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}$$
$$=38.0614e^{-0.06486k}$$

可得累减还原式的残差修正模型

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=\begin{cases}38.0614e^{-0.06486k}, & k<9\\ 38.0614e^{-0.06486k}-4.0452e^{-0.16855(k-9)}, & k\geqslant 9\end{cases}$$

其中$\hat{\varepsilon}^{(0)}(k+1)$的符号与原始残差序列的符号一致.

按此模型，可对$k=10$，11，12，13等四个模拟值进行修正，修正后的精度如表 7.4.2 所示.

由表 7.4.2 可以算出残差平方和

$$s=\varepsilon^{T}\varepsilon=3.1611,$$

表 7.4.2 残差GM(1, 1)模拟误差表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	修正后的模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $\varepsilon(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k=\left\|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right\|$
10	18	17.1858	0.8142	4.52%
11	15.5	16.4799	-0.9799	6.32%
12	17	15.7604	1.2396	7.29%
13	15	15.0372	-0.0372	0.25%

平均相对误差

$$\Delta=\frac{1}{4}\sum_{k=10}^{13}\Delta_k=4.595\%.$$

残差修正 GM(1, 1)的模拟精度得到了明显提高. 因此时残差序列已不满足建模要求，若对修正精度仍不满意，就只有考虑采用其它模型或对原始数据序列进行适当取舍.

§7.5 GM(1,1)模型群

在实际建模中，原始数据序列中的数据不一定全部用来建模. 我们在原始数据序列中取出一部分数据，就可以建立一个模型. 一般说来，取不同的数据，建立的模型也不一样. 即使都建立同类的 GM (1, 1) 模型，选择不同的数据，参数a，b 的值也不一样. 这种变化，正是不同情况、不同条件对系统特征的影响在模型中的反映. 比如我国的粮食产量，若用建国以来的数据建立 GM(1, 1) 模型，发展系数 $-a$ 偏小；而舍去1978年以前的数据，用剩余数据建模，发展系数 $-a$ 明显增大.

定义7.5.1 设序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

将 $x^{(0)}(n)$ 取为时间轴的原点，则称 $t<n$ 为过去，$t=n$ 为现在，

$t>n$为未来.

定义7.5.2 设序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

$$\hat{x}^{(0)}(k+1)=(1-\mathrm{e}^{a})\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)\mathrm{e}^{-ak}$$

为其GM(1，1)时间响应式的累减还原值，则

1° 当$t<n$时，称$\hat{x}^{(0)}(t)$为模型模拟值；

2° 当$t=n$时，称$\hat{x}^{(0)}(t)$为模型滤波值；

3° 当$t>n$时，称$\hat{x}^{(0)}(t)$为模型预测值.

建模的主要目的是预测，为提高预测精度，首先要保证有充分高的滤波精度. 因此建模数据一般应取为包括$x^{(0)}(n)$在内的一个等时距序列.

定义7.5.3 设原始数据序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)).$$

1° 用$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n))$建立的GM(1，1)模型称为全数据GM(1，1)；

2° 用$X^{(0)}=(x^{(0)}(k_0),\ x^{(0)}(k_0+1),\ \cdots,\ x^{(0)}(n))$建立的GM(1，1)模型称为部分数据GM(1，1)，其中$k_0>1$；

3° 设$x^{(0)}(n+1)$为最新信息，将$x^{(0)}(n+1)$置入$X^{(0)}$，称用$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n),\ x^{(0)}(n+1))$建立的模型为新息GM(1，1)；

4° 置入最新信息$x^{(0)}(n+1)$，去掉最老信息$x^{(0)}(1)$，称用$X^{(0)}=(x^{(0)}(2),\cdots,x^{(0)}(n),\ x^{(0)}(n+1))$建立的模型为新陈代谢GM(1，1).

例7.5.1 取例7.4.1原始数据序列的最后4个数据建模，

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4))$$

$$=(18,\ 15.5,\ 17,\ 15),$$

其1-AGO序列

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ x^{(1)}(3),\ x^{(1)}(4))$$
$$=(18,\ 33.5,\ 50.5,\ 65.5),$$

$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ z^{(1)}(3),\ z^{(1)}(4))$$
$$=(18,\ 25.75,\ 42,\ 58),$$

$$B=\begin{bmatrix}-25.75 & 1\\ -42 & 1\\ -58 & 1\end{bmatrix},\qquad Y=\begin{bmatrix}15.5\\ 17\\ 15\end{bmatrix},$$

$$(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}5791.0625 & -125.75\\ -125.75 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0.001923 & 0.080603\\ 0.080603 & 3.711922\end{bmatrix},$$

$$B^TY=\begin{bmatrix}-1983.125\\ 47.5\end{bmatrix},$$

所以 $\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}0.015093\\ 16.470470\end{bmatrix}$.

$X^{(1)}$的GM(1, 1)时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\left(x^{(0)}(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}$$
$$=-1073.265487e^{-0.015093k}+1091.265487,$$

模拟序列

$$\hat{X}^{(1)}=(18,\ 34.0772,\ 49.9135,\ 65.5126).$$

令 $\hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)$，得 $X^{(0)}$ 的模拟序列

$$\hat{X}^{(0)}=(18,\ 16.0772,\ 15.8363,\ 15.5991).$$

模拟精度比例 7.4.1 中建立的全数据 GM(1, 1)有明显提高，尤其是滤波值 $\hat{x}^{(0)}(13)$的相对误差 Δ_{13}，全数据GM(1, 1)是部分数据 GM(1, 1)的 4 倍多，说明适当选取建模数据可使滤波精度大大提高.

例7.5.2 对于例7.3.1中的原始数据序列

$$X^{(0)}=(2.874,\ 3.278,\ 3.337,\ 3.39,\ 3.679)$$

补充新信息 $x^{(0)}(6)=3.85$. 试建立新息模型和新陈代谢模型并进行比较.

解：1° 新息 GM(1, 1).

新息序列为

$X^{(0)}=(2.874,\ 3.278,\ 3.337,\ 3.39,\ 3.679,\ 3.85)$,

此时,

$$B=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(x^{(1)}(1)+x^{(1)}(2)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(2)+x^{(1)}(3)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(3)+x^{(1)}(4)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(4)+x^{(1)}(5)) & 1 \\ -\frac{1}{2}(x^{(1)}(5)+x^{(1)}(6)) & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4.513 & 1 \\ -7.82 & 1 \\ -11.184 & 1 \\ -14.7185 & 1 \\ -18.488 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Y=\begin{pmatrix} 3.278 \\ 3.337 \\ 3.39 \\ 3.679 \\ 3.85 \end{pmatrix},$$

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.0428 \\ 3.02 \end{bmatrix},$$

于是得 GM(1, 1)时间响应式

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1)=73.263569e^{0.0428k}-70.3395692 \\ \hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k) \end{cases}$$

滤波值　$\hat{x}^{(0)}(6)=3.8126$,

残差　$\varepsilon(6)=x^{(0)}(6)-\hat{x}^{(0)}(6)=0.0374$,

相对误差 $\Delta_6=\dfrac{0.0374}{3.85}=0.97\%$.

2° 新陈代谢模型.

去掉一个最老的信息$x^{(0)}(1)$，置入一个最新信息$x^{(0)}(6)$，得建模序列

$$X^{(0)}=(3.278,\ 3.337,\ 3.39,\ 3.679,\ 3.85).$$

此时

$$B=\begin{bmatrix}-4.9465 & 1\\ -8.31 & 1\\ -11.8445 & 1\\ -15.609 & 1\end{bmatrix},\qquad Y=\begin{bmatrix}3.337\\ 3.39\\ 3.679\\ 3.85\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.0523\\ 3.0392\end{bmatrix}.$$

GM(1, 1) 时间响应式

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k+1)=61.388899^{0.0515k}-58.110899\\ \hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)\end{cases}$$

滤波值 $\hat{x}^{(0)}(6)=3.856$,

残差 $e(6)=x^{(0)}(6)-\hat{x}^{(0)}(6)=0.006$,

相对误差 $\Delta_6=\dfrac{0.006}{3.85}=0.16\%$.

3° 精度比较.

表 7.5.1 三种模型精度比较表

模型类别	参数		滤波值		残差		相对误差	
	a	b	$\hat{x}^{(0)}(5)$	$\hat{x}^{(0)}(6)$	$e(5)$	$e(6)$	Δ_5	Δ_6
老模型	-0.0372	3.0653	3.6136		0.0654		1.78%	
新息模型	-0.0429	3.02	3.653	3.8126	0.026	0.0374	0.71%	0.97%
新陈代谢模型	-0.0523	3.0392	3.6595	3.856	0.0195	0.006	0.53%	0.16%

由表 7.5.1 可见，对$x^{(0)}(5)$的滤波精度，新息模型和新陈代谢模型都比老模型高．这表明新息 GM(1，1)和新陈代谢 GM(1，1)预测效果会比老模型的预测效果好.事实上,在任何一个灰系统的发展过程中，随着时间的推移，将会不断地有一些随机扰动或驱动因素进入系统，使系统的发展相继地受其影响．因此，用 GM(1，1)模型进行预测，精度较高的仅仅是原点数据$x^{(0)}(n)$以后的 1 到 2 个数据．一般说来，越往未来发展，越是远离时间原点，GM(1，1) 的预测意义越弱．在实际应用中，必须不断地考虑那些随着时间推移相继进入系统的扰动或驱动因素，随时将每一个新得到的数据置入$X^{(0)}$中，建立新息模型．

从对$x^{(0)}(6)$的滤波精度看，新陈代谢模型高于新息模型．从预测角度看，新陈代谢模型是最理想的预测模型．随着系统的发展，老数据的信息意义将逐步降低，在不断补充新信息的同时，及时地去掉老数据，建模序列更能反映系统在目前的特征．尤其是当系统随着量变的积累，发生质的飞跃或突变时，与过去的系统相比，已是面目全非．去掉已根本不能反映系统目前特征的老数据，显然是合理的．此外，不断地进行新陈代谢，还可以避免随着信息的增加，计算机内存不断扩大，建模运算量不断增大的困难．

§7.6 GM(1,N)和GM(0,N)

定义7.6.1 设

$$X_1^{(0)}=(x_1^{(0)}(1),\ x_1^{(0)}(2),\ \cdots,\ x_1^{(0)}(n))$$

为系统特征数据序列，

$$X_2^{(0)}=(x_2^{(0)}(1),\ x_2^{(0)}(2),\ \cdots,\ x_2^{(0)}(n)),$$

$$X_3^{(0)}=(x_3^{(0)}(1),\ x_3^{(0)}(2),\ \cdots,\ x_3^{(0)}(n)),$$

$$\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots\qquad\cdots$$

$$X_N^{(0)} = (x_N^{(0)}(1),\ x_N^{(0)}(2),\ \cdots,\ x_N^{(0)}(n))$$

为相关因素序列，

$X_i^{(1)}$为$X_i^{(0)}$的 1 - AGO序列，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N$，

$Z_1^{(1)}$为$X_1^{(1)}$的紧邻均值生成序列，

则称

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$$

为GM(1，N)灰微分方程.

定义7.6.2 在GM(1，N)灰微分方程中，$-a$称为系统发展系数，$b_i x_i^{(1)}(k)$称为驱动项，b_i称为驱动系数，$\hat{a} = [a,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_N]^T$称为参数列.

定理7.6.1 设$X_1^{(0)}$为系统特征数据，$X_i^{(0)}(i = 2,\ 3,\ \cdots,\ N)$为相关因素数据，$X_i^{(1)}$为诸$X_i^{(0)}$的 1-AGO 序列，$Z_1^{(1)}$为$X_1^{(1)}$的紧邻均值生成序列，

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -z_1^{(1)}(n) & x_2^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(0)}(2) \\ x_1^{(0)}(3) \\ \cdots \\ x_1^{(0)}(n) \end{bmatrix},$$

则参数列$\hat{a} = [a,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_N]^T$的最小二乘估计满足

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

定义7.6.3 设$\hat{a} = [a,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_N]^T$，则称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax^{(1)} = b_2 x_2^{(1)} + b_3 x_3^{(1)} + \cdots + b_N x_N^{(1)}$$

为GM(1，N)灰微分方程

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = b_2 x_2^{(1)}(k) + b_3 x_3^{(1)}(k) + \cdots + b_N x_N^{(1)}(k)$$

的白化方程，也称影子方程.

定理7.6.2 设$X_i^{(0)}$，$X_i^{(1)}(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ N)$，$Z_1^{(1)}$，$B$，$Y$如定理 7 6.1 所述，

$$\hat{a} = [a,\ b_2,\ b_3,\ \cdots,\ b_N]^T = (B^TB)^{-1}B^TY,$$

则有：

1° 白化方程

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + ax^{(1)} = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}$$

的解为

$$x^{(1)}(t) = e^{-at}\left[\sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(t)e^{at}dt + x^{(1)}(0) - \sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(0)\,dt\right]$$

$$= e^{-at}\left[x^{(1)}(0) - t\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(0) + \sum_{i=2}^{N}\int b_i x_i^{(1)}(t)e^{at}dt\right];$$

2° 当诸 $X_i^{(1)}(i=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$ 变化幅度很小时，视 $\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$ 为灰常量，则GM(1，N)灰微分方程

$$x_1^{(0)}(k) + az_1^{(1)}(k) = \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k)$$

的近似时间响应式为

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \left(x_1^{(1)}(0) - \frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k+1)\right)e^{-ak} + \frac{1}{a}\sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(1)}(k+1),$$

其中$x_1^{(1)}(0)$取为$x_1^{(0)}(1)$；

3° 累减还原式

$$\hat{x}_1^{(0)}(k+1) = \alpha^{(1)}\hat{x}_1^{(1)}(k+1) = \hat{x}_1^{(1)}(k+1) - \hat{x}_1^{(1)}(k);$$

4° GM(1，N)差分模拟式

$$\hat{x}_1^{(0)}(k) = -az_1^{(1)}(k) + \sum_{i=2}^{N} b_i x_i^{(0)}(k).$$

定义7.6.4 设 $X_1^{(0)}$ 为系统特征数据序列，$X_i^{(0)}(i=2,\ 3,\ \cdots,\ N)$ 为相关因素序列，$X_i^{(1)}$ 为诸 $X_i^{(0)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 的1-

AGO序列，则称

$$X_1^{(1)} = b_2 X_2^{(1)} + b_3 X_3^{(1)} + \cdots + b_N X_N^{(1)} + a$$

为GM(0，N)模型.

GM(0，N)不含导数，因此为静态模型. 它形似多元线性回归模型而与一般的多元线性回归模型有着本质的区别. 一般的多元线性回归建模以原始数据为基础，GM(0，N)的建模基础则是原始数据的1-AGO序列.

定理7.6.3 设诸$X_i^{(0)}$，$X_i^{(1)}$如定义7.6.4所述，

$$B = \begin{bmatrix} x_2^{(1)}(2) & x_3^{(1)}(2) & \cdots & x_N^{(1)}(2) & 1 \\ x_2^{(1)}(3) & x_3^{(1)}(3) & \cdots & x_N^{(1)}(3) & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_2^{(1)}(n) & x_3^{(1)}(n) & \cdots & x_N^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} x_1^{(1)}(2) \\ x_1^{(1)}(3) \\ \cdots \\ x_1^{(1)}(n) \end{bmatrix},$$

则参数列 $\delta = [b_2, b_3, \cdots, b_N, a]^T$ 的最小二乘估计为：

$$\delta = (B^T B)^{-1} B^T Y.$$

例7.6.1 设系统特征数据序列

$X_1^{(0)} = (2.874, 3.278, 3.307, 3.39, 3.679) = \{x_1^{(0)}(k)\}_1^5$，

相关因素数据序列

$X_2^{(0)} = (7.04, 7.645, 8.075, 8.53, 8.774) = \{x_2^{(0)}(k)\}_1^5$.

试分别建立GM(1，2)和GM(0，2)模型.

解：1° 设GM(1，2)白化方程为

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} + ax_1^{(1)} = bx_2^{(1)}.$$

对$X_1^{(0)}$和$X_2^{(0)}$作1-AGO，得

$$\begin{aligned} X_1^{(1)} &= (x_1^{(1)}(1), x_1^{(1)}(2), x_1^{(1)}(3), x_1^{(1)}(4), x_1^{(1)}(5)) \\ &= (2.874, 6.152, 9.459, 12.849, 16.528), \\ X_2^{(1)} &= (x_2^{(1)}(1), x_2^{(1)}(2), x_2^{(1)}(3), x_2^{(1)}(4), x_2^{(1)}(5)) \\ &= (7.04, 14.685, 22.76, 31.29, 40.064), \end{aligned}$$

$X_1^{(1)}$的紧邻均值生成序列

$$Z_1^{(1)} = (z_1^{(1)}(1),\ z_1^{(1)}(2),\ z_1^{(1)}(3),\ z_1^{(1)}(4),\ z_1^{(1)}(5))$$
$$= (2.874,\ 4.513,\ 7.8055,\ 11.154,\ 14.6885).$$

于是有

$$B = \begin{bmatrix} -z_1^{(1)}(2) & x_2^{(1)}(2) \\ -z_1^{(1)}(3) & x_2^{(1)}(3) \\ -z_1^{(1)}(4) & x_2^{(1)}(4) \\ -z_1^{(1)}(5) & x_2^{(1)}(5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4.513 & 14.685 \\ -7.8055 & 22.76 \\ -11.154 & 31.29 \\ -14.6885 & 40.064 \end{bmatrix},$$

$$Y = [x_1^{(0)}(2)\ \ x_1^{(0)}(3)\ \ x_1^{(0)}(4)\ \ x_1^{(0)}(5)]^T$$
$$= [3.278\ \ 3.307\ \ 3.39\ \ 3.679]^T,$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 421.456748 & -1181.415309 \\ -1181.415309 & 3317.855021 \end{bmatrix},$$

$$(B^TB)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.280899 & 0.456100 \\ 0.456100 & 0.162709 \end{bmatrix},$$

$$B^TY = \begin{bmatrix} -4.513 & -7.8055 & -11.154 & -14.6885 \\ 14.685 & 22.76 & 31.29 & 40.064 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.278 \\ 3.307 \\ 3.39 \\ 3.679 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -132.457454 \\ 376.873306 \end{bmatrix},$$

所以
$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (B^TB)^{-1}B^TY$$

$$= \begin{bmatrix} 1.280899 & 0.456100 \\ 0.456100 & 0.162709 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -132.457454 \\ 376.873306 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2.2273 \\ 0.9068 \end{bmatrix}.$$

得估计模型

$$\frac{dx_1^{(1)}}{dt} + 2.2273x_1^{(1)} = 0.9068x_2^{(1)},$$

近似时间响应式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=\left(x_1^{(0)}(1)-\frac{b}{a}x_2^{(1)}(k+1)\right)e^{-ak}+\frac{b}{a}x_2^{(1)}(k+1)$$

$$=(2.874-0.4071x_2^{(1)}(k+1))e^{-2.2178k}+0.4071x_2^{(1)}(k+1).$$

由此可得：

$$\hat{x}_1^{(1)}(2)=5.6436,\qquad \hat{x}_1^{(1)}(3)=9.1913,$$

$$\hat{x}_1^{(1)}(4)=12.7258,\qquad \hat{x}_1^{(1)}(5)=16.3082.$$

IAGO还原：$\hat{x}_1^{(0)}(k)=\hat{x}_1^{(1)}(k)-\hat{x}_1^{(1)}(k-1)$，

$$\hat{X}_1^{(0)}=(\hat{x}_1^{(0)}(1),\ \hat{x}_1^{(0)}(2),\ \hat{x}_1^{(0)}(3),\ \hat{x}_1^{(0)}(4),\ \hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$=(2.874,\ 2.770,\ 3.548,\ 3.535,\ 3.582).$$

表 7.6.1 误差检验表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模 拟 值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $\varepsilon(k)=x^{(0)}(k)-\hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k=\left\|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right\|$
2	3.278	2.770	0.508	15.5%
3	3.307	3.518	−0.241	7.3%
4	3.390	3.535	−0.145	4.3%
5	3.679	3.582	0.097	2.6%

2° 设GM(0, 2)模型为$X_1^{(1)}=bX_2^{(1)}+a$，由

$$B=\begin{bmatrix}x_2^{(1)}(2) & 1\\ x_2^{(1)}(3) & 1\\ x_2^{(1)}(4) & 1\\ x_2^{(1)}(5) & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14.685 & 1\\ 22.76 & 1\\ 31.29 & 1\\ 40.064 & 1\end{bmatrix},\qquad Y=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}(2)\\ x_1^{(1)}(3)\\ x_1^{(1)}(4)\\ x_1^{(1)}(5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6.152\\ 9.459\\ 12.849\\ 16.528\end{bmatrix},$$

可得$\hat{\delta}=[b,\ a]^T$的最小二乘估计

$$\hat{\delta}=\begin{bmatrix}b\\ a\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY$$

$$= \begin{bmatrix} 3570.455021 & 113.799 \\ 113.799 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1417.146962 \\ 44.988 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.003004 & -0.085460 \\ -0.085460 & 2.681312 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1417.146962 \\ 44.988 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.412435 \\ -0.482515 \end{bmatrix},$$

故有 GM(0,2)估计式

$$\hat{x}_1^{(1)}(k) = 0.412435x_2^{(1)}(k) - 0.482515,$$

$$\hat{x}_1^{(1)}(1) = 2.421,\ \hat{x}_1^{(1)}(2) = 5.574,\ \hat{x}_1^{(1)}(3) = 8.905,$$

$$\hat{x}_1^{(1)}(4) = 12.423,\ \hat{x}_1^{(1)}(5) = 16.042.$$

作IAGO还原：$\hat{x}_1^{(0)}(k) = \hat{x}_1^{(1)}(k) - \hat{x}_1^{(1)}(k-1)$，

$$\hat{X}_1^{(0)} = (\hat{x}_1^{(0)}(1),\ \hat{x}_1^{(0)}(2),\ \hat{x}_1^{(0)}(3),\ \hat{x}_1^{(0)}(4),\ \hat{x}_1^{(0)}(5))$$

$$= (2.421,\ 3.153,\ 3.331,\ 3.518,\ 3.619).$$

表 7.6.2 误差检验表

号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模拟值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残差 $\varepsilon(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \left\|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right\|$
2	3.278	3.153	0.125	3.8%
3	3.307	3.331	-0.024	0.7%
4	3.39	3.518	-0.128	3.8%
5	3.679	3.619	0.06	1.6%

§7.7 GM(2,1)和Verhulst模型

GM(1, 1) 适用于具有较强指数规律的序列，只能描述单调的变化过程. 对于非单调的摆动发展序列或有饱和的S形序列，可以考虑建立GM(2, 1)和Verhulst模型.

定义7.7.1 设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

其 1-AGO 序列 $X^{(1)}$和 1-IAGO 序列 $\alpha^{(1)}X^{(0)}$分别为

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ \cdots,\ x^{(1)}(n)),$$

其中 $$x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

和 $$\alpha^{(1)}X^{(0)}=(\alpha^{(1)}x^{(0)}(1),\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(2),\ \cdots,\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)),$$

其中 $$\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)=x^{(0)}(k)-x^{(0)}(k-1)),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ \cdots,\ z^{(1)}(n)),$$

其中 $$z^{(1)}(k)=\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1)),k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

则称 $$\alpha^{(1)}X^{(0)}+a_1X^{(0)}+a_2Z^{(1)}=b$$

为 GM(2, 1)灰微分方程

定义7.7.2 称

$$\frac{\mathrm{d}^2x^{(1)}}{\mathrm{d}t^2}+a_1\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+a_2x^{(1)}=b$$

为 GM(2, 1)灰微分方程的白化方程.

定理7.7.1 设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $Z^{(1)}$, $\alpha^{(1)}X^{(0)}$如定义7.7.1所述,

$$B=\begin{bmatrix}-x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1\\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -x^{(0)}(n) & -z^{(1)}(n) & 1\end{bmatrix},$$

$$Y=\begin{bmatrix}\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ \alpha^{(1)}x^{(0)}(n)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)-x^{(0)}(1)\\ x^{(0)}(3)-x^{(0)}(2)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)-x^{(0)}(n-1)\end{bmatrix},$$

则GM(2，1)参数列$\hat{a}=[a_1^*\ a_2,\ b]^T$的最小二乘估计

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

定理7.7.2 关于GM(2，1)白化方程的解有以下结论：

1° 若$X^{(1)*}$是

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=b$$

的特解，$X^{(1)}$是对应齐次方程

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+a_1\frac{dx^{(1)}}{dt}+a_2x^{(1)}=0$$

的通解，则$X^{(1)*}+X^{(1)}$是GM(2，1)白化方程的通解；

2° 齐次方程的通解有以下三种情况：

当特征方程$r^2+a_1r+a_2=0$有两个不相等实根r_1，r_2时，

$$X^{(1)}=C_1e^{r_1t}+C_2e^{r_2t};$$

当特征方程有重根r时，

$$X^{(1)}=e^{rt}\ (C_1+C_2t);$$

当特征方程有一对共轭复根$r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$时，

$$X^{(1)}=e^{\alpha t}(C_1\cos\beta t+C_2\sin\beta t).$$

3° 白化方程的特解有以下三种情况：

当零不是特征方程的根时，$X^{(1)*}=C$，

当零是特征方程的单根时，$X^{(1)*}=Cx$，

当零是特征方程的重根时，$X^{(1)*}=Cx^2$.

例7.7.1 设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5))$$
$$=(2.874,\ 3.278,\ 3.337,\ 3.39,\ 3.679),$$

试建立GM(2，1)灰微分方程.

解：$X^{(0)}$的1-AGO序列和1-IAGO序列分别为

$$X^{(1)}=\{x^{(1)}(k)\}_1^5=\left\{\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)\right\}_1^5$$

$$= (2.874,\ 6.152,\ 9.489,\ 12.879,\ 16.558),$$

$$\alpha^{(1)}X^{(0)} = \{\alpha^{(1)}x^{(0)}(k)\}_1^5 = \{x^{(0)}(k) - x^{(0)}(k-1)\}_1^5$$

$$= (0,\ 0.404,\ 0.059,\ 0.053,\ 0.289).$$

$X^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)} = \{z^{(1)}(k)\}_1^5 = \left\{\frac{1}{2}(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1))\right\}_1^5$$

$$= (2.874,\ 4.513,\ 7.82,\ 11.184,\ 14.7185),$$

$$B = \begin{bmatrix} -x^{(0)}(2) & -z^{(1)}(2) & 1 \\ -x^{(0)}(3) & -z^{(1)}(3) & 1 \\ -x^{(0)}(4) & -z^{(1)}(4) & 1 \\ -x^{(0)}(5) & -z^{(1)}(5) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.287 & -4.513 & 1 \\ -3.337 & -7.82 & 1 \\ -3.39 & -11.184 & 1 \\ -3.679 & -14.7185 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y = [\alpha^{(1)}x^{(0)}(2)\ \ \alpha^{(1)}x^{(0)}(3)\ \ \alpha^{(1)}x^{(0)}(4)\ \ \alpha^{(1)}x^{(0)}(5)]^T$$

$$= [0.404\ \ 0.059\ \ 0.053\ \ 0.289]^T,$$

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b \end{bmatrix} = (B^TB)^{-1}B^TY = \begin{bmatrix} 30.48 \\ -1.04 \\ 92.9 \end{bmatrix}.$$

故得 GM(2, 1)白化方程

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2} + 30.48\frac{dx^{(1)}}{dt} - 1.04x^{(1)} = 92.9,$$

特征方程为 $\lambda^2 + 30.48\lambda - 1.04 = 0$，它有两个不相等的实根 $\lambda_1 = 0.0341$，$\lambda_2 = -30.514$，所以白化方程齐次式

$$\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2} + 30.48\frac{dx^{(1)}}{dt} - 1.04x^{(1)} = 0$$

的通解

$$X^{(1)}(t) = C_1e^{0.0341t} + C_2e^{-30.514t},$$

零不是特征方程的根，易得 GM(2, 1)白化方程的一个特解

$$X^{(1)*}(t) = -\frac{92.9}{1.04} = -89.3269,$$

于是有

$$\hat{x}^{(1)}(t) = \overline{X}^{(1)}(t) + X^{(1)*}(t)$$
$$= C_1 e^{0.0341t} + C_2 e^{-30.514t} - 89.3269$$

设有$x^{(0)}(0) = 2.643$，则

$$\left.\frac{dx^{(1)}}{dt}\right|_{t=0} = x^{(0)}(0) = 2.643,$$

将 $x^{(1)}(t)|_{t=0} = x^{(1)}(0) = x^{(0)}(1) = 2.874,$

$$\left.\frac{dx^{(1)}(t)}{dt}\right|_{t=0} = x^{(0)}(t)|_{t=0} = x^{(0)}(0) = 2.643$$

代入 $\hat{X}^{(1)}(t) = C_1 e^{0.0341t} + C_2 e^{-30.514t} - 89.3269$

可得：

$$\begin{cases} 2.874 = C_1 + C_2 - 89.3269 \\ 2.643 = 0.0341C_1 - 30.514C_2 \end{cases}$$

由此可解出 $C_1 = 92.107983$，$C_2 = 2.931917$，所以

$$\hat{x}^{(1)}(t) = 92.107983e^{0.0341t} + 2.931917e^{-30.514t} - 89.3269,$$

于是得 GM(2, 1)时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1) = 92.107983e^{0.0341k} + 2.931917e^{-30.514k} - 89.3269,$$

所以 $\hat{X}^{(1)} = \{\hat{x}^{(1)}(k+1)\}_1^5$

$$= (2.874,\ 5.9761,\ 9.2820,\ 12.7026,\ 16.2418).$$

作IAGO还原：

表 7.7.1 误差检验表

序 号	原始数据 $x^{(0)}(k)$	模 拟 值 $\hat{x}^{(0)}(k)$	残 差 $e(k) = x^{(0)}(k) - \hat{x}^{(0)}(k)$	相对误差 $\Delta_k = \left\|\frac{e(k)}{x^{(0)}(k)}\right\|$
2	3.278	3.1021	0.1759	5.4%
3	3.337	3.3059	0.0311	0.09%
4	3.39	3.4206	−0.0306	0.09%
5	3.679	3.5392	0.1399	3.8%

$$\hat{x}^{(0)}(k)=\hat{x}^{(1)}(k)-\hat{x}^{(1)}(k-1),$$

$$\hat{X}^{(0)}=\{\hat{x}^{(0)}(k)\}_1^5$$

$$=(2.874,\ 3.1021,\ 3.3059,\ 3.4206,\ 3.5392).$$

定义7.7.3 设$X^{(0)}$为原始数据序列，$X^{(1)}$为$X^{(0)}$的1-AGO序列，$Z^{(1)}$为$X^{(1)}$的紧邻均值生成序列，则称

$$X^{(0)}+aZ^{(1)}=b(Z^{(1)})^{\alpha}$$

为 GM(1, 1)幂模型.

定义7.7.4 称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^{\alpha}$$

为 GM(1, 1)幂模型的白化方程.

定理7.7.3 GM(1, 1) 幂模型之白化方程的解为

$$x^{(1)}(t)=\left\{\mathrm{e}^{-(1-\alpha)at}\left[(1-\alpha)\int b\mathrm{e}^{(1-\alpha)at}\mathrm{d}t+C\right]\right\}^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

定理7.7.4 设 $X^{(0)}$, $X^{(1)}$, $Z^{(1)}$如定义 7.7.3 所述，

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^{\alpha}\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^{\alpha}\\ \vdots & \vdots\\ -z^{(1)}(n) & (z^{(1)}(n))^{\alpha}\end{bmatrix},\qquad Y=\begin{bmatrix}x^{(0)}(2)\\ x^{(0)}(3)\\ \vdots\\ x^{(0)}(n)\end{bmatrix},$$

则 GM(1, 1)幂模型参数列$\hat{a}=[a\quad b]^T$的最小二乘估计为

$$\hat{a}=(B^TB)^{-1}B^TY.$$

定义7.7.5 当 $\alpha=2$时，称

$$X^{(0)}+aZ^{(1)}=b(Z^{(1)})^2$$

为灰色Verhulst模型.

定义7.7.6 称

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t}+ax^{(1)}=b(x^{(1)})^2$$

为灰色Verhulst模型的白化方程.

定理7.7.5 1° Verhulst白化方程的解

$$x^{(1)}(t)=\frac{1}{e^{at}\left[\frac{1}{x^{(1)}(0)}-\frac{b}{a}(1-e^{-at})\right]}$$

$$=\frac{ax^{(1)}(0)}{e^{at}[a-bx^{(1)}(0)(1-e^{-at})]}$$

$$=\frac{ax^{(1)}(0)}{bx^{(1)}(0)+(a-bx^{(1)}(0))e^{at}},$$

2° 灰色 Verhulst 模型的时间响应式

$$x^{(1)}(k+1)=\frac{ax^{(1)}(0)}{bx^{(1)}(0)+(a-bx^{(1)}(0))e^{ak}}.$$

Verhulst模型主要用来描述具有饱和状态的过程，即S形过程，常用于人口预测、生物生长、繁殖预测和产品经济寿命预测等. 由 Verhulst 方程的解可以看出，当 $t\to\infty$ 时，若 $a>0$，则 $x^{(1)}(t)\to 0$；若$a<0$，则 $x^{(1)}(t)\to\frac{a}{b}$，即有充分大的 t，对任意的 $k>t$，$x^{(1)}(k+1)$与$x^{(1)}(k)$充分接近，此时，$x^{(0)}(k)=x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)\approx 0$，系统趋于死亡.

在实际问题中，常遇到原始数据本身呈S形的过程. 这时，我们可取原始数据为$X^{(1)}$，其1-IAGO 为$X^{(0)}$，建立 Verhulst 模型直接对 $X^{(1)}$进行模拟.

例7.7.2 研究河南省农用大中型拖拉机拥有量，原始数据如表7.7.2所示.

表 7.7.2 河南省农用大中型拖拉机拥有量（万台）

年　份	1978	1979	1980	1981	1982
数　据	4.1299	5.2382	5.9666	6.4590	6.3160

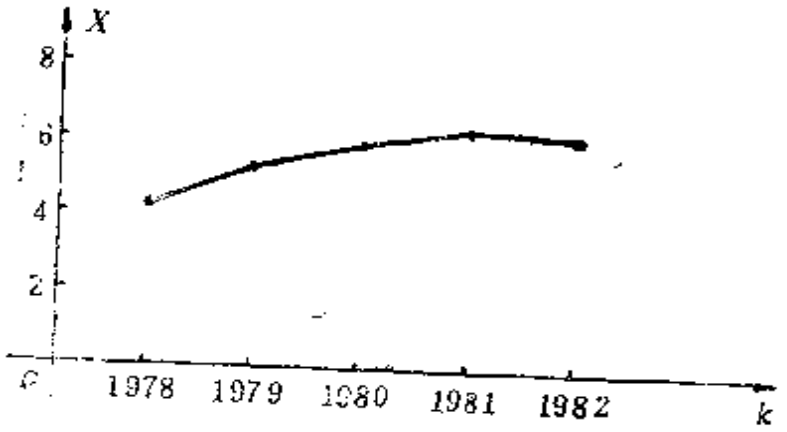


图 7.7.1

由图 7.7.1 可以看出，原始数据曲线近似S形.

取 $X^{(1)}=\{x^{(1)}(k)\}_1^5$

$=(4.1299,\ 5.2382,\ 5.9666,\ 6.4590,\ 6.3160)$,

则 $X^{(1)}$ 的 1-IAGO 序列 $X^{(0)}$ 和紧邻均值生成序列 $Z^{(1)}$ 分别为

$$X^{(0)}=\{x^{(0)}(k)\}_1^5=\{x^{(1)}(k)-x^{(1)}(k-1)\}_1^5$$

$=(4.1299,\ 1.1083,\ 0.7284,\ 0.4924,\ -0.143)$,

$$Z^{(1)}=\{z^{(1)}(k)\}_1^5=\left\{\frac{1}{2}(x^{(1)}(k)+x^{(1)}(k-1))\right\}_1^6$$

$=(4.1299,\ 4.68405,\ 5.6024,\ 6.2128,\ 6.3875)$,

$$B=\begin{bmatrix}-z^{(1)}(2) & (z^{(1)}(2))^2\\ -z^{(1)}(3) & (z^{(1)}(3))^2\\ -z^{(1)}(4) & (z^{(1)}(4))^2\\ -z^{(1)}(5) & (z^{(1)}(5))^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4.68405 & 21.9403\\ -5.6024 & 31.3869\\ -6.2128 & 38.5989\\ -6.3875 & 40.8002\end{bmatrix},$$

$$Y=[x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5)]^T$$

$=[1.1083,\ 0.7284,\ 0.4924,\ -0.143]^T$,

$$(B^TB)^{-1}=\begin{bmatrix}132.7263 & -779.0299\\ -779.0299 & 4621.045657\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0.716807 & 0.120842\\ 0.120842 & 0.020588\end{bmatrix},$$

$$B^TY=\begin{bmatrix}-11.417292\\60.350321\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}-0.891142\\-0.137196\end{bmatrix}.$$

取$x^{(1)}(0)=x^{(1)}(1)=4.1299$，可得 Verhulst时间响应式

$$\hat{x}^{(1)}(k+1)=\frac{ax^{(1)}(1)}{bx^{(1)}(1)+(a-bx^{(1)}(1))e^{ak}}$$

$$=\frac{3.680327}{-0.566606-0.324536e^{-0.891142k}}.$$

由此可对河南省大中型拖拉机拥有量进行模拟、预测.

$$\hat{x}^{(1)}(1)=\frac{3.680327}{0.891142}=4.1299,\quad \hat{x}^{(1)}(2)=\frac{3.680327}{0.699726}=5.2597,$$

$$\hat{x}^{(1)}(3)=\frac{3.680327}{0.621210}=5.9244,\quad \hat{x}^{(1)}(4)=\frac{3.680327}{0.589004}=6.2484,$$

$$\hat{x}^{(1)}(5)=\frac{3.680327}{0.575793}=6.3918,\quad \hat{x}^{(1)}(6)=\frac{3.680327}{0.570375}=6.4525.$$

其中 $\hat{x}^{(1)}(6)$ 为1983年河南省大中型拖拉机拥有量的预测值，而1983年实际数据 $x^{(1)}(6)=6.4389$，残差 $\varepsilon(6)=x^{(1)}(6)-\hat{x}^{(1)}(6)=-0.0136$，相对误差

$$\Delta_6=\left|\frac{\varepsilon(6)}{x^{(1)}(6)}\right|=\frac{0.0136}{6.4389}=0.2\%,$$

预测精度达99.8%. 模拟残差

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon(2),\ \varepsilon(3),\ \varepsilon(4),\ \varepsilon(5))$$

$$=(-0.0215,\ 0.0422,\ 0.2106,\ -0.0758),$$

模拟效果较好.

第八章　灰 色 预 测

§8.1　灰色预测模型的检验

预测就是借助于对过去的探讨去推测、了解未来. 灰色预测通过原始数据的处理和灰色模型的建立发现、掌握系统发展规律，对系统的未来状态作出科学的定量预测. 本书第七章所介绍的所有灰色模型都可以用来作预测模型. 对于一个具体问题，究竟应选择什么样的预测模型，应以充分的定性分析结论为依据. 模型的选择不是一成不变的. 一个模型要经过多种检验才能判定其是否合理，是否合格. 只有通过检验的模型才能用来作预测.

定义 8.1.1　设原始序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

相应的模型模拟序列为

$$\hat{X}^{(0)}=(\hat{x}^{(0)}(1),\ \hat{x}^{(0)}(2),\ \cdots,\ \hat{x}^{(0)}(n)),$$

残差序列

$$\begin{aligned}\varepsilon^{(0)}&=(\varepsilon(1),\ \varepsilon(2),\ \cdots,\ \varepsilon(n))\\&=(x^{(0)}(1)-\hat{x}^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2)-\hat{x}^{(0)}(2),\ \cdots,\\&\qquad x^{(0)}(n)-\hat{x}^{(0)}(n)),\end{aligned}$$

相对误差序列

$$\Delta=\left(\left|\frac{\varepsilon(1)}{x^{(0)}(1)}\right|,\ \left|\frac{\varepsilon(2)}{x^{(0)}(2)}\right|,\ \cdots,\ \left|\frac{\varepsilon(n)}{x^{(0)}(n)}\right|\right)=\{\Delta_k\}_1^n.$$

1° 对于 $k<n$，称 $\Delta_k=\left|\frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)}\right|$ 为 k 点模拟相对误差，称 $\Delta_n=\left|\frac{\varepsilon(n)}{x^{(0)}(n)}\right|$ 为滤波相对误差，称 $\bar{\Delta}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Delta_k$ 为平均模拟相对误差；

2° 称 $1-\bar{\Delta}$ 为平均相对精度，$1-\Delta_n$ 为滤波精度；

3° 给定 α，当 $\bar{\Delta}<\alpha$ 且 $\Delta_n<\alpha$ 成立时，称模型为残差合格模型.

定义 8.1.2 设 $X^{(0)}$ 为原始序列，$\hat{X}^{(0)}$ 为相应的模拟序列，ε 为 $X^{(0)}$ 与 $\hat{X}^{(0)}$ 的绝对关联度. 若对于给定的 $\varepsilon_0>0$，有 $\varepsilon>\varepsilon_0$，则称模型为关联合格模型

定义 8.1.3 设 $X^{(0)}$ 为原始序列，$\hat{X}^{(0)}$ 为模型模拟序列，$e^{(0)}$ 为残差序列，

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x^{(0)}(k)$$

为 $X^{(0)}$ 的均值，

$$S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x^{(0)}(k)-\bar{x})^2$$

为 $X^{(0)}$ 的方差，

$$\bar{e}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varepsilon(k)$$

为残差均值，

$$S_2^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\varepsilon(k)-\bar{e})^2$$

为残差方差.

1° 称 $C=\frac{S_2}{S_1}$ 为均方差比值，对于给定的 $C_0>0$，当 $C<C_0$

时，称模型为均方差比合格模型；

2° 称

$$p=P(|\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon}|<0.6745S_1)$$

为小误差概率，对于给定的 $p_0>0$，当 $p>p_0$ 时，称模型为小误差概率合格模型.

上述三个定义给出了检验模型的三种方法，这三种方法都是通过对残差的考察来判断模型精度的. 其中平均相对误差 $\bar{\Delta}$ 和滤波误差都要求越小越好；关联度 ε 要求越大越好；均方差比值 C 越小越好；（因为 C 小说明 S_2 小，S_1 大，即模拟误差方差小；原始数据方差大.这说明模拟误差比较集中，摆动幅度小；原始数据比较分散，摆动幅度大.所以模拟效果好要求 S_2 与 S_1 相比尽可能小一些.）小误差概率 p 越大越好.给定 α，ε_0，C_0，p_0 的一组取值，就确定了检验模型模拟精度的一个等级. 常用的精度等级有以下几种，可供检验模型参考.

表 8.1.1 精度检验等级参照表

精度等级 \ 指标 临界值	相对误差 α	关联度 ε_0	均方差比值 C_0	小误差概率 p_0
一 级	0.01	0.90	0.35	0.95
二 级	0.05	0.80	0.5	0.80
三 级	0.10	0.70	0.65	0.70
四 级	0.20	0.60	0.80	0.60

一般情况下，最常用的是相对误差检验指标.

§8.2 数 列 预 测

数列预测是对系统变量的未来行为进行预测，常用的数列预测模型是 GM(1，1). 根据实际情况，也可以考虑采用其他灰色

模型．在定性分析的基础上，定义适当的序列算子，对算子作用后的序列建立GM模型，通过精度检验之后，即可用来作预测．

例 8.2.1 河南省长葛县乡镇企业产值预测①．

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4))$$
$$=(10155,\ 12588,\ 23480,\ 35388).$$

引入二阶弱化算子 $D^2$②

$$X^{(0)}D=(x^{(0)}(1)d,\ x^{(0)}(2)d,\ x^{(0)}(3)d,\ x^{(0)}(4)d),$$

其中

$$x^{(0)}(k)d=\frac{1}{4-k+1}(x^{(0)}(k)+x^{(0)}(k+1)+\cdots+x^{(0)}(4))$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

$$X^{(0)}D^2=(x^{(0)}(1)d^2,\ x^{(0)}(2)d^2,\ x^{(0)}(3)d^2,\ x^{(0)}(4)d^2),$$

其中

$$x^{(0)}(k)d^2=\frac{1}{4-k+1}(x^{(0)}(k)d+x^{(0)}(k+1)d+\cdots+x^{(0)}(4)d)$$
$$k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

得
$$X^{(0)}D^2=(27260,\ 29547,\ 32411,\ 35388)$$
$$\triangleq X=(x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4)).$$

X 的 1-AGO 序列

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ x^{(1)}(3),\ x^{(1)}(4))$$
$$=(27260,\ 56807,\ 89218,\ 124606).$$

设
$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b,$$

按最小二乘法求得参数 a，b 的估计值

$$\hat{a}=-0.089995,\ \hat{b}=25790.28,$$

可得 GM(1, 1)模型

①资料来源于长葛县统计局．
②见第四章．

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} - 0.089995x^{(1)} = 25790.28,$$

其时间响应式为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(1)}(k+1) = 313834e^{0.089995k} - 286574 \\ \hat{x}^{(0)}(k+1) = \hat{x}^{(1)}(k+1) - \hat{x}^{(1)}(k) \end{cases}$$

由此得模拟序列

$$\hat{X} = (\hat{x}(1),\ \hat{x}(2),\ \hat{x}(3),\ \hat{x}(4))$$
$$= (27260,\ 29553,\ 32337,\ 35381),$$

残差序列

$$\varepsilon^{(0)} = (\varepsilon^{(0)}(1),\ \varepsilon^{(0)}(2),\ \varepsilon^{(0)}(3),\ \varepsilon^{(0)}(4))$$
$$= (x(1) - \hat{x}(1),\ x(2) - \hat{x}(2),\ x(3) - \hat{x}(3),$$
$$x(4) - \hat{x}(4))$$
$$= (0,\ -6,\ 74,\ 7),$$

相对误差序列

$$\Delta = \left(\left|\frac{\varepsilon^{(0)}(1)}{x(1)}\right|,\ \left|\frac{\varepsilon^{(0)}(2)}{x(2)}\right|,\ \left|\frac{\varepsilon^{(0)}(3)}{x(3)}\right|,\ \left|\frac{\varepsilon^{(0)}(4)}{x(4)}\right|\right)$$
$$= (0,\ 0.0002,\ 0.00228,\ 0.0002)$$
$$\triangleq (\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4),$$

平均相对误差

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\Delta_k = \frac{1}{4}(0 + 0.0002 + 0.00228 + 0.0002)$$
$$= 0.00067 = 0.067\% < 0.01,$$

滤波误差 $\Delta_4 = 0.0002 = 0.02\% < 0.01$，精度为一级.

计算X与$\hat{X}$的灰色绝对关联度 ε：

$$|s| = \left|\sum_{k=2}^{3}(x(k) - x(1)) + \frac{1}{2}(x(4) - x(1))\right|$$

$$= \left|2287 + 5151 + \frac{8128}{2}\right| = 11502,$$

$$|s| = \left|\sum_{k=2}^{8} (\hat{x}(k) - \hat{x}(1)) + \frac{1}{2}(\hat{x}(4) - \hat{x}(1))\right|$$

$$= \left|2293 + 5077 + \frac{8121}{2}\right| = 11430.5,$$

$$|s - s| = \left|\sum_{k=2}^{8}[(x(k) - x(1)) - (\hat{x}(k) - \hat{x}(1))] + \frac{1}{2}[(x(4) - x(1)) - (\hat{x}(4) - \hat{x}(1))]\right|$$

$$= \left|[2287 - 2293] + [5151 - 5077] + \frac{1}{2}[8128 - 8121]\right|$$

$$= \left|-6 + 74 + \frac{7}{2}\right| = 71.5,$$

从而 $$\varepsilon = \frac{1 + |s| + |s|}{1 + |s| + |s| + |s - s|}$$

$$= \frac{1 + 11502 + 11430.5}{1 + 11502 + 11430.5 + 71.5} = 0.997 > 0.90,$$

关联度为一级.

计算均方差比 C:

$$\bar{x} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x(k) = 31151.5,$$

$$S_1^2 = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} (x(k) - \bar{x})^2 = 37252465,$$

$$S_1 = 6103.48,$$

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}\varepsilon(k)=18.75,$$

$$S_2^2=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4}(\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon})^2=4154.75,$$

$$S_2=64.46,$$

所以
$$C=\frac{S_2}{S_1}=\frac{64.46}{6103.48}=0.01<0.35,$$

均方差比值为一级.

计算小误差概率:

$$0.6745S_1=4116.80,$$

$$|\varepsilon(1)-\bar{\varepsilon}|=18.75,\quad |\varepsilon(2)-\bar{\varepsilon}|=24.75,$$

$$|\varepsilon(3)-\bar{\varepsilon}|=55.25,\quad |\varepsilon(4)-\bar{\varepsilon}|=11.75,$$

所以
$$P(|\varepsilon(k)-\bar{\varepsilon}|<0.6745S_1)=1>0.95,$$

小误差概率为一级.

故可用
$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}(k+1)=313834e^{0.089995k}-286574\\ \hat{x}^{(0)}(k+1)=\hat{x}^{(1)}(k+1)-\hat{x}^{(1)}(k)\end{cases}$$

进行预测. 这里我们给出5个预测值如下:

$$\hat{X}^{(0)}=(\hat{x}^{(0)}(5),\ \hat{x}^{(0)}(6),\ \hat{x}^{(0)}(7),\ \hat{x}^{(0)}(8),\ \hat{x}^{(0)}(9))$$
$$=(38714,\ 42359,\ 46348,\ 50712,\ 55488).$$

§8.3 区间预测

对于原始数据非常离乱，用什么模型模拟都难以通过精度检验的序列，我们无法给出其确切的预测值. 这时，可以考虑给出其未来变化的范围，预测出它的取值区间.

定义 8.3.1 设 $X(t)$ 为序列折线，$f_u(t)$ 和 $f_s(t)$ 为光滑连续曲线. 若对任意 t，恒有

$$f_u(t) \leqslant X(t) \leqslant f_o(t),$$

则称 $f_u(t)$ 为 $X(t)$ 的下界函数，$f_o(t)$ 为 $X(t)$ 的上界函数；称

$$S = \{(t,\ X(t)) \mid X(t) \in [f_u(t),\ f_o(t)]\}$$

为 $X(t)$ 的取值带.

定义 8.3.2　1°　若 $X(t)$ 取值带的上、下边界函数为同种函数，则称 S 为一致带；

2°　当 S 为一致带且下界函数 $f_u(t)$ 与上界函数 $f_o(t)$ 皆为指数函数时，称 S 为一致指数带，简称指数带；

3°　当 S 为一致带且下界函数 $f_u(t)$ 与上界函数 $f_o(t)$ 皆为线性函数时，称 S 为一致直线带，简称直线带；

4°　若当 $t_1 < t_2$ 时，恒有

$$f_o(t_1) - f_u(t_1) < f_o(t_2) - f_u(t_2),$$

则称 S 为喇叭带.

定义 8.3.3　设原始序列

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ \cdots,\ x^{(0)}(n)),$$

其 1-AGO 序列

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ \cdots,\ x^{(1)}(n)).$$

令　$\sigma_{\max} = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x^{(0)}(k)\},\ \sigma_{\min} = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{x^{(0)}(k)\},$

取 $X^{(1)}$ 的下界函数 $f_u(n+t)$ 和上界函数 $f_o(n+t)$ 分别为

$$f_u(n+t) = x^{(1)}(n) + t\sigma_{\min},$$

$$f_o(n+t) = x^{(1)}(n) + t\sigma_{\max}.$$

称

$$S = \{(t,\ X(t)) \mid t > n,\ X(t) \in [f_u(t),\ f_o(t)]\}$$

为比例带.

命题 8.3.1　比例带为直线喇叭带.

事实上，比例带的下界函数和上界函数都是与时间成比例增长的直线，斜率分别为 $\sigma_{\min}$ 和 $\sigma_{\max}$，$X^{(1)}$ 的预测区域如图 8.3.1 所示.

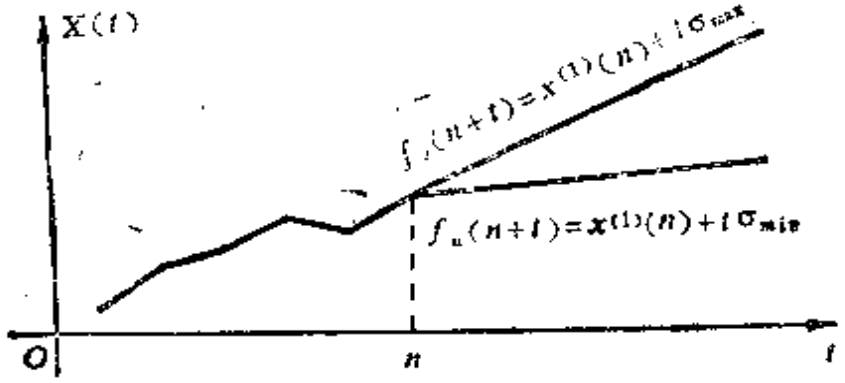


图 8.3.1

定义 8.3.4 设 $X^{(0)}$ 为原始序列，$X_u^{(0)}$ 是 $X^{(0)}$ 的下缘点联线所对应的序列，$X_s^{(0)}$ 是 $X^{(0)}$ 上缘点联线所对应的序列，

$$\hat{X}_u^{(1)}(k+1)=\left(x_u^{(0)}(1)-\frac{b_u}{a_u}\right)\exp(-a_uk)+\frac{b_u}{a_u},$$

和

$$\hat{X}_s^{(1)}(k+1)=\left(x_s^{(0)}(1)-\frac{b_s}{a_s}\right)\exp(-a_sk)+\frac{b_s}{a_s}$$

分别为 $X_u^{(0)}$ 和 $X_s^{(0)}$ 对应的 GM(1，1)时间响应式，则称

$$S=\{(t,\ X(t))\,|X(t)\in[\hat{X}_u^{(1)}(t),\ \hat{X}_s^{(1)}(t)]\}$$

为包络带.

包络带如图 8.3.2 所示.

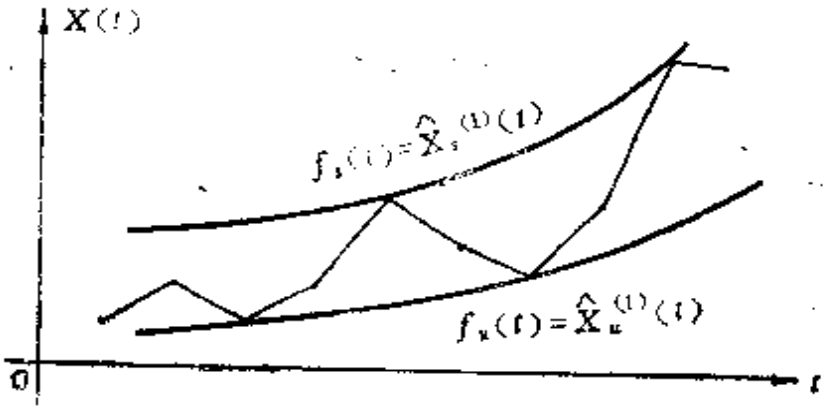


图 8.3.2

定义 8.3.5 设 $X^{(0)}$ 为原始数据序列，取 $X^{(0)}$ 中 m 个不同

的数据序列可建立m个不同的GM(1, 1)模型，对应参数为$\hat{a}_i = [a_i \quad b_i]^T$, $i=1, 2, \cdots, m$. 令

$$-a_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant m}\{-a_i\}, \quad -a_{\min} = \min_{1\leqslant i\leqslant m}\{-a_i\},$$

$$\hat{X}_u^{(1)}(k+1) = \left(x_u^{(0)}(1) - \frac{b_{\min}}{a_{\min}}\right)\exp(-a_{\min}k) + \frac{b_{\min}}{a_{\min}},$$

$$\hat{X}_v^{(1)}(k+1) = \left(x_v^{(0)}(1) - \frac{b_{\max}}{a_{\max}}\right)\exp(-a_{\max}k) + \frac{b_{\max}}{a_{\max}},$$

则称

$$S = \{(t, X(t)) | X(t) \in [\hat{X}_u^{(1)}(t), \hat{X}_v^{(1)}(t)]\}$$

为发展带.

命题 8.3.2 包络带和发展带皆为指数带.

定义 8.3.6 设 $X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \cdots, x^{(0)}(n))$ 为原始序列，$f_u(t)$和$f_v(t)$为其1-AGO序列$X^{(1)}$的下界函数和上界函数，则对于任意$k>0$，称

$$\hat{x}^{(0)}(n+k) = \frac{1}{2}(f_u(n+k) + f_v(n+k))$$

为基本预测值，称

$$\hat{x}_u^{(1)}(n+k) = f_u(n+k)$$

为最低预测值，称

$$\hat{x}_v^{(1)}(n+k) = f_v(n+k)$$

为最高预测值.

例 8.3.1 河南省棉布零售量数据序列

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), x^{(0)}(3), x^{(0)}(4), x^{(0)}(5), x^{(0)}(6))$$
$$= (4.9445, 5.5828, 5.3441, 5.2669, 4.5640, 3.6524),$$

其中$x^{(0)}(k)$的单位为亿米，$x^{(0)}(1) = 4.9445$是1978年的数据，$x^{(0)}(2) = 5.5828$是1979年的数据，…，试作比例带预测.

解： $$\sigma_{\max} = \max_{1\leqslant k\leqslant 6}\{x^{(0)}(k)\} = 5.5828,$$

$$\sigma_{\min}=\min_{1\leqslant k\leqslant 6}\{x^{(0)}(k)\}=3.6524.$$

由 $x^{(1)}(k)=\sum_{i=1}^{k}x^{(0)}(i)$，得 $X^{(0)}$ 的1-AGO序列

$$X^{(1)}=(x^{(1)}(1),\ x^{(1)}(2),\ x^{(1)}(3),\ x^{(1)}(4),\ x^{(1)}(5),\ x^{(1)}(6))$$
$$=(4.9445,\ 10.5273,\ 15.8714,\ 21.1383,\ 25.7023,\ 29.3547),$$

所以 $f_s(6+k)=x^{(1)}(6)+k\sigma_{\max}=29.3547+5.5828k,$

$f_u(6+k)=x^{(1)}(6)+k\sigma_{\min}=29.3547+3.6524k.$

当 $k=1,\ 2,\ 3$ 时，得最高预测值：

$\hat{x}_s^{(1)}(7)=f_s(6+1)=x^{(1)}(6)+1\cdot\sigma_{\max}=34.9375,$

$\hat{x}_s^{(1)}(8)=f_s(6+2)=x^{(1)}(6)+2\cdot\sigma_{\max}=40.5203,$

$\hat{x}_s^{(1)}(9)=f_s(6+3)=x^{(1)}(6)+3\cdot\sigma_{\max}=46.1031;$

最低预测值：

$\hat{x}_u^{(1)}(7)=f_u(6+1)=x^{(1)}(6)+1\cdot\sigma_{\min}=33.0071,$

$\hat{x}_u^{(1)}(8)=f_u(6+2)=x^{(1)}(6)+2\cdot\sigma_{\min}=36.6595,$

$\hat{x}_u^{(1)}(9)=f_u(6+3)=x^{(1)}(6)+3\cdot\sigma_{\min}=40.3119;$

基本预测值：

$$\hat{x}^{(1)}(7)=\frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(1)}(7)+\hat{x}_u^{(1)}(7))=33.9723,$$

$$\hat{x}^{(1)}(8)=\frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(1)}(8)+\hat{x}_u^{(1)}(8))=38.5899,$$

$$\hat{x}^{(1)}(9)=\frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(1)}(9)+\hat{x}_u^{(1)}(9))=43.2075.$$

例 8.3.2 河南省农民家庭平均每人每年棉布消费量数据序列

$$X^{(0)}=(x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5),\ x^{(0)}(6))$$
$$=(5.43,\ 3.90,\ 3.93,\ 4.43,\ 3.97,\ 2.77),$$

其中 $x^{(0)}(k)\ (k=1,2,\cdots,6)$ 的单位为米，$x^{(0)}(1)=5.43$ 是1978年的数据，$x^{(0)}(2)=3.90$ 是1979年的数据，…，$x^{(0)}(6)=2.77$ 是1983年的数据．试作包络带预测．

解： 折线 $X^{(0)}$ 及其上包络曲线 $f_u(t)$ 和下包络曲线 $f_u(t)$ 如图 8.3.3 所示．

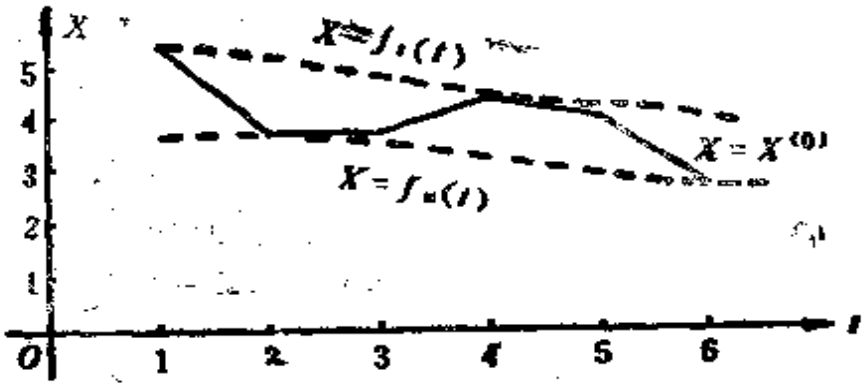


图 8.3.3

$f_u(t)$ 所对应的上包络序列

$$X_u^{(0)}=(x_u^{(0)}(1),\ x_u^{(0)}(2),\ x_u^{(0)}(3),\ x_u^{(0)}(4),\ x_u^{(0)}(5),\ x_u^{(0)}(6))$$
$$=(5.53,\ 4.97,\ 4.67,\ 4.43,\ 3.33,\ 3.90),$$

其 1-AGO 序列

$$X_u^{(1)}=(x_u^{(1)}(1),\ x_u^{(1)}(2),\ x_u^{(1)}(3),\ x_u^{(1)}(4),\ x_u^{(1)}(5),\ x_u^{(1)}(6))$$
$$=(5.43,\ 10.40,\ 15.06,\ 91.50,\ 23.63,\ 27.53).$$

$X_u^{(1)}$ 的 GM(1, 1)时间响应式为

$$\hat{x}_u^{(1)}(k+1)=-84.83e^{-0.06k}+90.26,$$

由此可得 $X_u^{(0)}$ 的累减还原式

$$\hat{x}_u^{(0)}(k+1)=\hat{x}_u^{(1)}(k+1)-\hat{x}_u^{(1)}(k)$$
$$=-84.83e^{-0.06k}+84.83e^{-0.06k+0.06}$$
$$=84.83(e^{0.06}-1)e^{-0.06k}$$
$$=5.254e^{-0.06k},$$

从而有最高预测值

$$\hat{x}_u^{(0)}(7)=3.66,\quad \hat{x}_u^{(0)}(8)=3.45,\quad \hat{x}_u^{(0)}(9)=3.25.$$

$f_u(t)$所对应的下包络序列

$$X_u^{(0)}=(x_u^{(0)}(1),\ x_u^{(0)}(2),\ x_u^{(0)}(3),\ x_u^{(0)}(4),\ x_u^{(0)}(5),\ x_u^{(0)}(6))$$
$$=(3.87,\ 3.90,\ 3.53,\ 3.33,\ 3.07,\ 3.77),$$

其1-AGO序列

$$X_u^{(1)}=(x_u^{(1)}(1),\ x_u^{(1)}(2),\ x_u^{(1)}(3),\ x_u^{(1)}(4),\ x_u^{(1)}(5),\ x_u^{(1)}(6))$$
$$=(3.47,\ 7.77,\ 11.30,\ 14.83,\ 17.70,\ 20.47),$$

GM(1, 1)时间响应式为

$$\begin{cases}\hat{x}_u^{(1)}(k+1)=-48.33e^{-0.084k}+52.20\\ \hat{x}_u^{(0)}(k+1)=\hat{x}_u^{(1)}(k+1)-\hat{x}_u^{(1)}(k)\end{cases}$$

即
$$\hat{x}_u^{(0)}(k+1)=4.24e^{-0.084k},$$

由此可得最低预测值：

$$\hat{x}_u^{(0)}(7)=2.56,\quad \hat{x}_u^{(0)}(8)=2.35,\quad \hat{x}_u^{(0)}(9)=2.16.$$

于是有基本预测值：

$$\hat{x}^{(0)}(7)=\frac{1}{2}(\hat{x}_d^{(0)}(7)+\hat{x}_u^{(0)}(7))=3.112,$$

$$\hat{x}^{(0)}(8)=\frac{1}{2}(\hat{x}_d^{(0)}(8)+\hat{x}_u^{(0)}(8))=2.90,$$

$$\hat{x}^{(0)}(9)=\frac{1}{2}(\hat{x}_d^{(0)}(9)+\hat{x}_u^{(0)}(9))=2.705.$$

例 8.3.3 河南农业大学二十种主要实验用品出库额的包络GM(1, 1)预测[①].

根据下表中二十种主要实验用品1981～1987年各个季度出库额的数据序列

$$X_{ij}^{(0)}=(x_{ij}^{(0)}(1),\ x_{ij}^{(0)}(2),\ x_{ij}^{(0)}(3),\ x_{ij}^{(0)}(4),$$
$$x_{ij}^{(0)}(5),\ x_{ij}^{(0)}(6),\ x_{ij}^{(0)}(7))$$

① 参见文献[69].

表 8.3.1 河南农业大学二十种主要试验用品

名称	氢氧化钠	氯化钠	盐酸	硫酸	琼脂	四氯化碳	二甲苯
单位	瓶	瓶	瓶	瓶	公斤	瓶	瓶
代号	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7
名称	无水乙醇	pH试纸	氢氧化钾	100ml 烧杯	250ml 烧杯	500ml 烧杯	2000ml 烧杯
单位	瓶	盒	瓶	个	个	个	个
代号	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{14}
名称	100ml 三角烧瓶	125ml 试剂瓶	500ml 试剂瓶	60ml 广口瓶	60ml 滴瓶	9cm 培养皿	
单位	个	个	个	个	个	个	
代号	X_{15}	X_{16}	X_{17}	X_{18}	X_{19}	X_{20}	

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$

找出相应的上包络序列

$$X^{(0)}_{ij_e}=(x^{(0)}_{ij_e}(1),\ x^{(0)}_{ij_e}(2),\ x^{(0)}_{ij_e}(3),\ x^{(0)}_{ij_e}(4),\ x^{(0)}_{ij_e}(5),\ x^{(0)}_{ij_e}(6),\ x^{(0)}_{ij_e}(7))$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

和下包络序列

$$X^{(0)}_{ij_u}=(x^{(0)}_{ij_u}(1),\ x^{(0)}_{ij_u}(2),\ x^{(0)}_{ij_u}(3),\ x^{(0)}_{ij_u}(4),\ x^{(0)}_{ij_u}(5),\ x^{(0)}_{ij_u}(6),\ x^{(0)}_{ij_u}(7)),$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4$

建立上包络 GM(1, 1)

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}_{ij_e}(k+1)=\left(x^{(0)}_{ij_e}(1)-\dfrac{b_{ij_e}}{a_{ij_e}}\right)\exp(-a_{ij_e}k)+\dfrac{b_{ij_e}}{a_{ij_e}}\\ \hat{x}^{(0)}_{ij_e}(k+1)=\hat{x}^{(1)}_{ij_e}(k+1)-\hat{x}^{(1)}_{ij_e}(k)\end{cases}$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$

和下包络 GM(1, 1)

$$\begin{cases}\hat{x}^{(1)}_{ij_u}(k+1)=\left(x^{(0)}_{ij_u}(1)-\dfrac{b_{ij_u}}{a_{ij_u}}\right)\exp(-a_{ij_u}k)+\dfrac{b_{ij_u}}{a_{ij_u}}\\ \hat{x}^{(0)}_{ij_u}(k+1)=\hat{x}^{(1)}_{ij_u}(k+1)-\hat{x}^{(1)}_{ij_u}(k)\end{cases}$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4.$

这里共有160个不同的模型，为节省篇幅计，具体模型及二十种实验用品各季度出库额序列和上包络序列、下包络序列数据皆从略．又由于基本预测值

$$\hat{x}_{ij}^{(0)}(k)=\frac{1}{2}(\hat{x}_{ij_u}^{(0)}(k)+\hat{x}_{ij_d}^{(0)}(k))$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 20;j=1,\ 2,\ 3,\ 4$$

是从 $\hat{x}_{ij_u}^{(0)}(k)$和 $\hat{x}_{ij_d}^{(0)}(k)$算出的，故亦略去．我们仅给出二十种实验用品1988年、1989年、1990年各季度出库额的最高预测值和最低预测值，结果如表8.3.2、表8.3.3和表8.3.4所示．

表8.3.2　1988年出库额预测结果

季度 / 变量	1		2		3		4	
	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值
X_1	20	85	32	70	32	101	15	89
X_2	20	45	10	64	6	45	20	60
X_3	32	190	61	180	20	200	40	150
X_4	112	190	60	160	15	124	18	218
X_5	12	76	20	55	5	39	6	89
X_6	15	75	8	65	16	60	20	65
X_7	12	130	25	110	9	89	12	74
X_8	8	48	20	220	32	140	20	132
X_9	132	398	126	658	112	626	198	598
X_{10}	6	40	10	38	10	47	5	50
X_{11}	18	331	11	172	36	200	18	126
X_{12}	76	388	35	230	25	74	15	634
X_{13}	94	277	21	215	24	680	30	225
X_{14}	34	81	5	64	10	132	20	61
X_{15}	30	320	27	289	50	250	55	480
X_{16}	11	205	15	238	10	160	8	200
X_{17}	9	366	10	230	8	321	25	227
X_{18}	10	204	12	216	25	362	12	229
X_{19}	12	981	84	1123	71	1411	91	1771
X_{20}	61	500	25	426	22	386	11	72

表 8.3.3. 1989 年出库额预测结果

变量 \ 季度	1		2		3		4	
	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值
X_1	21	89	33	74	30	121	18	92
X_2	20	48	12	71	8	51	13	64
X_3	35	201	70	191	22	212	43	158
X_4	110	198	61	174	18	131	22	227
X_5	14	82	21	60	6	40	5	90
X_6	15	79	10	72	16	65	21	74
X_7	15	141	28	120	12	94	15	86
X_8	11	53	24	231	36	152	24	144
X_9	141	412	139	666	133	648	201	612
X_{10}	9	48	13	37	12	51	8	62
X_{11}	22	392	15	181	40	212	21	133
X_{12}	81	396	44	241	28	82	20	641
X_{13}	99	286	26	223	31	691	34	238
X_{14}	38	90	8	72	13	139	24	73
X_{15}	32	332	28	297	65	272	67	491
X_{16}	15	215	18	244	12	173	11	211
X_{17}	14	381	15	241	13	330	30	238
X_{18}	13	211	15	224	29	371	16	242
X_{19}	17	997	97	1146	87	1461	109	1797
X_{20}	71	522	32	439	28	399	12	89

表 8.3.4 1990 年出库额预测结果

变量 \ 季度	1		2		3		4	
	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值
X_1	23	94	33	99	29	136	12	97
X_2	21	52	14	75	11	56	18	69
X_3	37	212	78	203	23	219	47	166
X_4	110	206	62	181	21	137	23	234
X_5	16	89	23	66	7	44	7	92

续表 8.3.4

变量 \ 季度	1		2		3		4	
	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值	最低值	最高值
X_6	16	83	11	80	17	71	22	82
X_7	18	150	34	131	14	103	17	97
X_8	13	58	26	245	39	161	37	152
X_9	147	426	162	673	145	670	212	624
X_{10}	13	57	15	46	14	55	11	69
X_{11}	27	407	21	195	48	230	24	141
X_{12}	92	405	47	255	31	91	26	652
X_{13}	111	299	33	236	39	701	42	250
X_{14}	44	101	11	80	15	147	29	85
X_{15}	33	343	30	305	74	291	81	512
X_{16}	19	226	22	251	15	184	14	227
X_{17}	19	397	21	253	16	344	37	249
X_{18}	17	224	18	238	35	388	18	254
X_{19}	23	1119	103	1168	98	1494	121	1817
X_{20}	84	548	39	451	39	410	14	102

例 8.3.4 某市自行车销售量数据序列

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5),\ x^{(0)}(6))$$
$$= (5.081,\ 4.611,\ 5.1177,\ 9.3775,\ 11.0574, 11.3524),$$

其中 $x^{(0)}(k)$的单位为万辆，$x^{(0)}(1) = 5.081$ 是1978年的数据，…，$x^{(0)}(6) = 11.3524$ 是1983年的数据，试作发展带预测.

解：取

$$X_1^{(0)} = X^{(0)} = (x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5), x^{(0)}(6))$$
$$= (5.081,\ 4.611,\ 5.1177,\ 9.3775,\ 11.0574,\ 11.3524),$$
$$X_2^{(0)} = (x^{(0)}(1),\ x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5))$$
$$= (5.081,\ 4.611,\ 5.1177,\ 9.3775,\ 11.0574),$$
$$X_3^{(0)} = (x^{(0)}(2),\ x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5),\ x^{(0)}(6))$$
$$= (4.611,\ 5.1177,\ 9.3775,\ 11.0574,\ 11.3524),$$

$$X_4^{(0)} = (x^{(0)}(3),\ x^{(0)}(4),\ x^{(0)}(5),\ x^{(0)}(6))$$
$$= (5.1177,\ 9.3775,\ 11.0574,\ 11.3524).$$

建立 GM(1, 1)模型群：

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + a_1x^{(1)} = b_1,\ \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_2x^{(1)} = b_2,$$

$$\frac{dx^{(1)}}{dt} + a_3x^{(1)} = b_3,\ \frac{dx^{(1)}}{dt} + a_4x^{(1)} = b_4.$$

分别估计参数序列 $\hat{a}_i = [a_i,\ b_i]^T$, $i = 1, 2, 3, 4$, 得

$$\hat{a}_1 = [a_1,\ b_1]^T = [-0.2202,\ 3.4689]^T,$$
$$\hat{a}_2 = [a_2,\ b_2]^T = [-0.3147,\ 2.1237]^T,$$
$$\hat{a}_3 = [a_3,\ b_3]^T = [-0.2013,\ 5.0961]^T,$$
$$\hat{a}_4 = [a_4,\ b_4]^T = [-0.0911,\ 8.741]^T.$$

因为 $$-a_{\min} = \min_{1\leqslant i\leqslant 4}\{-a_i\}$$
$$= \min\{0.2202,\ 0.3147,\ 0.2013,\ 0.0911\}$$
$$= 0.0911 = -a_4,$$
$$-a_{\max} = \max_{1\leqslant i\leqslant 4}\{-a_i\} = 0.3147 = -a_2,$$

故有发展上界序列响应式

$$\begin{cases} \hat{x}_s^{(1)}(k+1) = \left(x^{(0)}(1) - \dfrac{b_2}{a_2}\right)e^{-a_2k} + \dfrac{b_2}{a_2} \\ \qquad\qquad = (5.081 + 6.7483)e^{0.3147k} - 6.7483 \\ \qquad\qquad = 11.8293e^{0.3147k} - 6.7483 \\ \hat{x}_s^{(0)}(k+1) = \hat{x}_s^{(1)}(k+1) - \hat{x}_s^{(1)}(k) \end{cases}$$

即 $$\hat{x}_s^{(0)}(k+1) = 11.8293e^{0.3147k} - 11.8293e^{0.3147k-0.3147}$$
$$= 11.8293(1 - e^{-0.3147})e^{0.3147k}$$
$$= 3.1938e^{0.3147k},$$

由此得最高预测值

$$\hat{x}_s^{(0)}(7) = 21.1029,\ \hat{x}_s^{(0)}(8) = 28.9078,\ \hat{x}_s^{(0)}(9) = 39.5993.$$

因 $X_4^{(0)}$ 的起点为 $x^{(0)}(3)$，故发展下界序列时间响应式为：

$$\begin{cases} \hat{x}_u^{(1)}(k+3) = \left(x^{(0)}(3) - \dfrac{b_4}{a_4}\right)e^{-a_4 k} + \dfrac{b_4}{a_4} \\ \qquad\qquad = 101.0672e^{0.0911k} - 95.9495 \\ \hat{x}_u^{(0)}(k+3) = \hat{x}_u^{(1)}(k+3) - \hat{x}_u^{(1)}(k+2) \end{cases}$$

即
$$\begin{aligned} \hat{x}_u^{(0)}(k+3) &= 101.0672e^{0.0911k} - 101.0672e^{0.0911k-0.0911} \\ &= 101.0672(1-e^{-0.0911})e^{0.0911k} \\ &= 8.8003e^{0.0911k}, \end{aligned}$$

由此得最低预测值

$\hat{x}_u^{(0)}(7) = 12.6694$，$\hat{x}_u^{(0)}(8) = 13.8777$，$\hat{x}_u^{(0)}(9) = 15.2014$.

由最高值和最低值可得基本预测值

$$\hat{x}^{(0)}(7) = \frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(0)}(7) + \hat{x}_u^{(0)}(7)) = 16.8862,$$

$$\hat{x}^{(0)}(8) = \frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(0)}(8) + \hat{x}_u^{(0)}(8)) = 21.3928,$$

$$\hat{x}^{(0)}(9) = \frac{1}{2}(\hat{x}_s^{(0)}(9) + \hat{x}_u^{(0)}(9)) = 27.4004.$$

根据该市目前的自行车占有量和公共交通状况最近将有明显改善进行定性分析，认为最低预测值较为可信.

§8.4 灾 变 预 测

灾变预测实质上是异常值预测. 什么样的值算作异常值，往往是人们凭经验主观确定的. 灾变预测的任务是给出下一个或几个异常值出现的时刻，以便人们提前准备，采取有效的对策.

定义 8.4.1 设原始序列

$$X = (x(1), x(2), \cdots, x(n)).$$

给定上限异常值(灾变值)ξ，称 X 的子序列

$$X_\xi = (x[q(1)],\ x[q(2)],\ \cdots,\ x[q(m)])$$
$$= \{x[q(i)] \mid x[q(i)] \geqslant \xi,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$$

为上灾变序列.

定义 8.4.2 设原始序列

$$X = (x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)).$$

给定下限异常值(灾变值)ξ，称 X 的子序列

$$X_\xi = (x[q(1)],\ x[q(2)],\ \cdots,\ x[q(l)])$$
$$= \{x[q(i)] \mid x[q(i)] \leqslant \xi,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ l\}$$

为下灾变序列.

上灾变序列与下灾变序列统称灾变序列. 由于对不同的灾变序列研究思路完全一样，在以下的讨论中，我们对上灾变序列和下灾变序列不加区别.

定义 8.4.3 设X为原始序列，

$$X_\xi = (x[q(1)],\ x[q(2)],\ \cdots,\ x[q(m)]) \subset X$$

为灾变序列，则称

$$Q^{(0)} = (q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(m))$$

为灾变日期序列.

灾变预测就是要通过对灾变日期序列的研究，寻找其规律性，预测以后若干次灾变发生的日期. 灰色系统的灾变预测是通过对灾变日期序列建立 GM(1，1)模型实现的.

定义 8.4.4 设

$$Q^{(0)} = (q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(m))$$

为灾变日期序列，其 1-AGO 序列

$$Q^{(1)} = (q^{(1)}(1),\ q^{(1)}(2),\ \cdots,\ q^{(1)}(m)),$$

其中

$$q^{(1)}(i) = \sum_{j=1}^{i} q(j),\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

$Q^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ \cdots,\ z^{(1)}(m)),$$

其中 $$z^{(1)}(i)=\frac{1}{2}(q^{(1)}(i)+q^{(1)}(i-1)),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

则称 $Q^{(0)}+aZ^{(1)}=b$ 为灾变 GM(1, 1).

命题 8.4.1 设 $\hat{a}=[a\quad b]^T$ 为灾变 GM(1, 1)参数序列的最小二乘估计，则灾变日期序列的 GM(1, 1)序号响应式为

$$\begin{cases}\hat{q}^{(1)}(k+1)=\left(q(1)-\dfrac{b}{a}\right)e^{-ak}+\dfrac{b}{a}\\ \hat{q}(k+1)=\hat{q}^{(1)}(k+1)-\hat{q}^{(1)}(k)\end{cases}$$

即
$$\hat{q}(k+1)=\left(q(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}-\left(q(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-a(k-1)}$$

$$=(1-e^{a})\left(q(1)-\frac{b}{a}\right)e^{-ak}.$$

定义 8.4.5 设原始序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)).$$

n 为现在，给定异常值 ξ，相应的灾变日期序列

$$Q^{(0)}=(q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(m)),$$

其中 $q(m)(\leqslant n)$ 为最近一次灾变发生的日期，则称 $\hat{q}(m+1)$ 为下一次灾变的预测日期；对任意 $k>0$，称 $\hat{q}(m+k)$ 为未来第 k 次灾变的预测日期.

例 8.4.1 某地区年平均降雨量数据(单位：mm)序列

$$\begin{aligned}X=&(x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4),\ x(5),\ x(6),\ x(7),\ x(8),\\ &x(9),\ x(10),\ x(11),\ x(12),\ x(13),\ x(14),\ x(15),\\ &x(16),\ x(17))\\ =&(390.6,\ 412,\ 320,\ 559.2,\ 380.8,\ 542.4,\ 553,\ 310,\\ &561,\ 300,\ 632,\ 540,\ 406.2,\ 313.8,\ 576,\ 587.6,\\ &318.5),\end{aligned}$$

其中 $x(1)$, $x(2)$, …, $x(17)$分别是1971, 1972, …,1987 年的

数据，单位均为毫米.

取 $\xi=320$mm 为下限异常值(旱灾)，试作旱灾预测.

解：令 $\xi=320$，得下灾变序列

$$X_\xi=(x(3),\ x(8),\ x(10),\ x(14),\ x(17))$$
$$=(320,\ 310,\ 300,\ 313.8,\ 318.5),$$

与之对应的灾变日期序列

$$Q^{(0)}=(q(1),\ q(2),\ q(3),\ q(4),\ q(5))$$
$$=(3,\ 8,\ 10,\ 14,\ 17),$$

其 1-AGO 序列

$$Q^{(1)}=(q^{(1)}(1),\ q^{(1)}(2),\ q^{(1)}(3),\ q^{(1)}(4),\ q^{(1)}(5))$$
$$=(3,\ 11,\ 21,\ 35,\ 52),$$

$Q^{(1)}$ 的紧邻均值生成序列

$$Z^{(1)}=(z^{(1)}(1),\ z^{(1)}(2),\ z^{(1)}(3),\ z^{(1)}(4),\ z^{(1)}(5))$$
$$=(3,\ 7,\ 16,\ 28,\ 43.5).$$

设 $Q^{(0)}+aZ^{(1)}=b$，由

$$B=\begin{bmatrix}-7 & 1\\ -16 & 1\\ -28 & 1\\ -43.5 & 1\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}8\\10\\14\\17\end{bmatrix},$$

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}-0.25361\\6.258339\end{bmatrix},$$

可得灾变日期序列的 GM(1, 1)序号响应式

$$\begin{cases}\hat{q}^{(1)}(k+1)=27.677e^{0.25361k}-24.677\\ \hat{q}(k+1)=\hat{q}^{(1)}(k+1)-\hat{q}^{(1)}(k)\end{cases}$$

即
$$\hat{q}(k+1)=27.677e^{0.25361k}-27.677e^{0.25361(k-1)}$$
$$=27.677(1-e^{-0.25361})e^{0.25361k}$$
$$=6.1998e^{0.25361k}.$$

由此可得 $Q^{(0)}$ 的模拟序列

$$\hat{Q}^{(0)}=(\hat{q}(1),\ \hat{q}(2),\ \hat{q}(3),\ \hat{q}(4),\ \hat{q}(5))$$
$$=(6.1998,\ 7.989,\ 10.296,\ 13.268,\ 17.098).$$

由 $\varepsilon(k)=q(k)-\hat{q}(k),\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

得残差序列

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon(1),\ \varepsilon(2),\ \varepsilon(3),\ \varepsilon(4),\ \varepsilon(5))$$
$$=(-3.1998,\ 0.011,\ -0.296,\ 0.732,\ -0.098).$$

再由 $\Delta_k=\left|\dfrac{\varepsilon(k)}{q(k)}\right|,\ k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

得相对误差序列

$\Delta=(\Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ \Delta_5)=(0.1\%,\ 2.96\%,\ 5.1\%,\ 0.6\%)$，这里未考虑 Δ_1，由此可计算出平均相对误差，

$$\bar{\Delta}=\frac{1}{4}\sum_{k=2}^{5}\Delta_k=2.19\%,$$

平均相对精度为 $1-\bar{\Delta}=97.81\%$，滤波精度为 $1-\Delta_5=99.4\%$，故可用

$$\hat{q}(k+1)=6.1998e^{0.25361k}$$

进行预测.

$$\hat{q}(5+1)=\hat{q}(6)\approx 22,$$
$$\hat{q}(6)-\hat{q}(5)\approx 22-17=5,$$

即从最近一次旱灾发生的时间算起，四年之后，到1992年可能发生旱灾. 为提高预测的可靠程度，可以取若干个不同的异常值，建立多个模型进行预测.

§8.5 季节灾变预测

定义 8.5.1 设 $\Omega=[a,\ b]$ 为总时区，若

$$\omega_i=[a_i,\ b_i]\subset\Omega=[a,\ b],\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

满足　　1°　$\Omega=\dot{\bigcup_{i=1}^{s}}\omega_i$;

2°　$\omega_i\cap\omega_j=\varnothing$，任意的 $j\neq i$，

则称 $\omega_i(i=1, 2, \cdots, s)$ 为 Ω 中的季节，也称时段或分时区.

比如当 $\Omega=[1, 365]$ 为一年时，若其中起点 1 为 2 月 1 日，则 $\omega_1=[1, 89]$，$\omega_2=[90, 181]$，$\omega_3=[182, 273]$，$\omega_4=[274, 365]$ 是人们习惯上称为春、夏、秋、冬的四个季节；若其中起点 1 为 1 月 1 日，则 $\omega_1=[1, 31]$，$\omega_2=[32, 59]$，$\omega_3=[60, 90]$，$\omega_4=[91, 120]$，$\omega_5=[121, 151]$，$\omega_6=[152, 181]$，$\omega_7=[182, 212]$，$\omega_8=[213, 243]$，$\omega_9=[244, 273]$，$\omega_{10}=[274, 304]$，$\omega_{11}=[305, 334]$，$\omega_{12}=[335, 365]$ 就是一年中的 12 个月.

定义 8.5.2　设 $\omega_i\subset\Omega$ 为一个季节，原始序列

$$X=(x(1), x(2), \cdots, x(n))\subset\omega_i.$$

对给定的异常值 ξ，称与之对应的灾变序列

$$X_\xi=(x[q(1)], x[q(2)], \cdots, x[q(m)])$$

为季节灾变序列. 相应地，称

$$Q^{(\omega)}=(q(1), q(2), \cdots, q(m))$$

为季节灾变日期序列.

命题 8.5.1　设 $\omega_i=[a_i, b_i]\subset\Omega$，且 $a_i>0$，原始序列

$$X=(x(1), x(2), \cdots, x(n))\subset\omega_i=[a_i, b_i],$$

令　　$y(k)=x(k)-a_i$，$k=1, 2, \cdots, n$,

则序列 $Y=(y(1), y(2), \cdots, y(n))$ 中数据的分辨率高于原始序列 X 中数据的分辨率.

证明：设 $x(k)$，$x(k+1)$ 为 X 中一对相邻数据，$y(k)$，$y(k+1)$ 是 Y 中的对应数据，则有

$$\left|\frac{y(k+1)-y(k)}{y(k)}\right|=\left|\frac{x(k+1)-a_i-x(k)+a_i}{x(k)-a_i}\right|=\left|\frac{x(k+1)-x(k)}{x(k)-a_i}\right|$$

因为 $$a_t>0,\ x(k)-a_t<x(k),$$

所以 $$\left|\frac{y(k+1)-y(k)}{y(k)}\right|=\left|\frac{x(k+1)-x(k)}{x(k)-a_t}\right|>\left|\frac{x(k+1)-x(k)}{x(k)}\right|.$$

即 Y 中数据间的相对差大于 X 中数据间的相对差，分辨率得到提高.

比如 $\omega_t=[500,\ 520]$，原始序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4),\ x(5))$$
$$=(502,\ 506,\ 509,\ 514,\ 518),$$
$$Y=(y(1),\ y(2),\ y(3),\ y(4),\ y(5))$$
$$=(2,\ 6,\ 9,\ 14,\ 18),$$

则 $$\left|\frac{x(3)-x(2)}{x(2)}\right|=\left|\frac{509-506}{506}\right|=0.0059,$$

$$\left|\frac{y(3)-y(2)}{y(2)}\right|=\left|\frac{9-6}{6}\right|=0.5.$$

同样可以讨论其它数据间的相对差. ∎

季节灾变预测研究在特定时区内的异常值，可根据命题 8.5.1 将季节起点化为零点，转而研究分辨率提高后的数据 Y.

季节灾变预测可按以下步骤进行：

第一步：给出原始序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)).$$

第二步：研究原始序列数据的变化范围，确定季节 $\omega_t=[a_t,\ b_t]$.

第三步：令 $y(k)=x(k)-a_t$，化原始序列为

$$Y=(y(1),\ y(2),\ \cdots,\ y(n))$$

以提高数据分辨率.

第四步：给定异常值 ξ，找出季节灾变序列

$$Y_t=(y[q(1)],\ y[q(2)],\ \cdots,\ y[q(m)])$$

及季节灾变日期序列

$$Q^{(0)}=(q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(m)).$$

第五步：建立灾变 GM(1, 1)：$Q^{(0)}+aZ^{(1)}=b$.

第六步：检验模拟精度，进行预测.

季节灾变预测可用来研究发生在一年某一特定季节中的灾害.如云南春雨，发生在春季；山西旱霜和广西桂北地区的寒露风，发生在秋、冬之交；河南的小麦干热风，发生在5月底6月初；河南的棉蛉虫，一般出现在6月份；豫南的洪涝，则多发生在夏季.这里应注意的是，许多灾害预测中的原始序列是普通意义下的日期，而相应的灾变日期序列则是异常日期出现的年份.

例 8.5.1 河南省平舆县东部地区小麦干热风预测.

干热风是小麦接近成熟期的一种严重自然灾害，可引起小麦过早枯死，导致大面积减产 2～4 成. 若能提前预测干热风发生，就可以采取一些补救措施，如种植早熟品种，或提前喷施抗风、催熟农药等，以减少损失.

平舆县东部地区包括杨埠、双庙、高杨店、和店四个乡，历年干热风发生的日期如表 8.5.1 所示.

表 8.5.1 平舆县东部小麦干热风日期

年	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
月	6	5	6	6	5	5	6
日	3	25	7	1	29	26	5
年	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
月	5	6	5	5	5	5	5
日	27	4	24	31	28	25	25

若干热风发生在5月29日以前成灾，试根据表 8.5.1 进行预测.

解：第一步：以1月1日为起点，由表 8.5.1 可得原始数据序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ x(3),\ x(4),\ x(5),\ x(6),\ x(7),$$
$$x(8),\ x(9),\ x(10),\ x(11),\ x(12),\ x(13),\ x(14))$$

$=(185, 176, 189, 183, 180, 177, 187, 178,$
$186, 175, 182, 179, 176, 176)$.

第二步：取 $\omega=$[5月20日，6月10日]$=[171, 192]$，则 $X\subset\omega$.

第三步：令 $y(k)=x(k)-171$，$k=1, 2, \cdots, 14$，将 X 化为

$$Y=\{y(k)\}_1^{14}$$
$$=(14, 5, 18, 12, 9, 6, 16, 7, 15, 4, 11, 8, 5, 5).$$

第四步：取下限异常值 $\xi=$ 5月29－5月20$=180-171=9$，得季节灾变序列

$$Y_\xi=(y[q(1)], y[q(2)], \cdots, y[q(8)])$$
$$=\{y[q(k)]\mid y[q(k)]\leqslant 9\}$$
$$=(y(2), y(5), y(6), y(8), y(10), y(12), y(13), y(14)),$$

于是 $$Q^{(0)}=(q(1), q(2), q(3), q(4), q(5), q(6), q(7), q(8))$$
$$=(2, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 14).$$

第五步：设 $Q^{(0)}+aZ^{(1)}=b$，则

$$\hat{a}=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}=(B^TB)^{-1}B^TY=\begin{bmatrix}-0.1588\\5.017\end{bmatrix},$$

由此得灾变 GM(1, 1)序号响应式

$$\begin{cases}\hat{Q}^{(1)}(k+1)=33.59e^{0.1588k}-31.59\\ \hat{q}(k+1)=\hat{Q}^{(1)}(k+1)-\hat{Q}^{(1)}(k)\end{cases}$$

即
$$\hat{q}(k+1)=33.59(1-e^{-0.1588})e^{0.1588k}$$
$$=4.93e^{0.1588k}.$$

第六步：由 $\hat{q}(k+1)=4.93e^{0.1588k}$ 得 $Q^{(0)}$ 的模拟序列

$$\hat{Q}^{(0)}=(\hat{q}(1), \hat{q}(2), \hat{q}(3), \hat{q}(4), \hat{q}(5), \hat{q}(6), \hat{q}(7), \hat{q}(8))$$
$$=(4.93, 5.77, 6.77, 7.93, 9.30, 10.91, 12.78, 14.98).$$

由 $\varepsilon(k)=q(k)-\hat{q}(k)$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 8$，得

$$\varepsilon^{(0)}=(\varepsilon(1),\ \varepsilon(2),\ \varepsilon(3),\ \varepsilon(4),\ \varepsilon(5),\ \varepsilon(6),\ \varepsilon(7),\ \varepsilon(8))$$
$$=(-2.93,\ -0.77,\ -0.77,\ 0.07,\ 0.70,\ 1.09,\ 0.22,\ -0.98).$$

再由 $\Delta_k=\left|\dfrac{\varepsilon(k)}{q(k)}\right|$，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ 8$，得

$$\Delta=(\Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ \Delta_5,\ \Delta_6,\ \Delta_7,\ \Delta_8)$$
$$=(0.154,\ 0.128,\ 0.009,\ 0.07,\ 0.091,\ 0.017,\ 0.07),$$

平均相对误差 $\bar{\Delta}=\dfrac{1}{7}\sum_{k=2}^{8}\Delta_k=0.077$，

平均相对精度 $1-\bar{\Delta}=92.3\%$，

滤波精度 $1-\Delta_8=93\%$.

精度接近二级，可作预测模型.

$$\hat{q}(9)\approx 17,\quad \hat{q}(10)\approx 20,$$
$$\hat{q}(9)-q(8)\approx 17-14=3,$$
$$\hat{q}(10)-\hat{q}(9)\approx 20-17=3,$$
$$1988+3=1991,\ 1991+3=1994.$$

即到 1991 年、1994 年干热风可能成灾. 预测结果表明 1989 年 5 月 29 日以前不发生干热风，事实上 1989 年的干热风发生在 6 月 2 日.

灰色系统的灾变预测方法若能与气象学、气候学研究相互结合，相互补充，预测结果的可靠性会大大提高.

§8.6 拓扑预测

当原始数据频频波动且摆动幅度较大时，往往难以找到适当的模拟模型. 这时，若 §8.3 所述的变化范围的预测不能满足需

要，可考虑根据原始数据的波形预测未来行为数据发展变化的波形。这种预测称为拓扑预测.

定义 8.6.1　设原始序列

$$X=(x(1),\ x(2),\ \cdots,\ x(n)),$$

则称

$$x_t=x(k)+(t-k)(x(k+1)-x(k))$$

为序列X的k段折线图形；称

$$\{x_k=x(k)+(t-k)(x(k+1)-x(k))\mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$$

为序列X的折线，仍记为 X，即

$$X=\{x_k=x(k)+(t-k)(x(k+1)-x(k))\mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}.$$

定义 8.6.2　设

$$\sigma_{\max}=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\},\quad \sigma_{\min}=\min_{1\leqslant k\leqslant n}\{x(k)\}.$$

1°　对于任意$\xi\in[\sigma_{\min},\ \sigma_{\max}]$，称 $X=\xi$ 为 ξ-等高线；

2°　称方程组

$$\begin{cases}X=\{x(k)+(t-k)(x(k+1)-x(k))\mid k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}\\ X=\xi\end{cases}$$

的解$(t_i,\ x(t_i))$　$(i=1,\ 2,\ \cdots)$为 ξ-等高点.

ξ-等高点是折线X与ξ-等高线的交点.

命题 8.6.1　若X的i段折线上有ξ-等高点，则其坐标为

$$\left(i+\frac{\xi-x(i)}{x(i+1)-x(i)},\ \xi\right).$$

证明：i段折线方程为

$$X=x(i)+(t_i-i)(x(i+1)-x(i)),$$

联立

$$\begin{cases}X=x(i)+(t_i-i)(x(i+1)-x(i))\\ X=\xi\end{cases}$$

可解得

$$t_i=i+\frac{\xi-x(i)}{x(i+1)-x(i)}.$$

定义 8.6.3 设

$$X_\xi = (P_1,\ P_2,\ \cdots,\ P_m)$$

为 ξ-等高点序列，其中 P_i 位于第 t_i 段折线上，其坐标为

$$\left(t_i + \frac{\xi - x(t_i)}{x(t_i+1) - x(t_i)},\ \xi\right).$$

令 $$q(i) = t_i + \frac{\xi - x(t_i)}{x(t_i+1) - x(t_i)},\quad i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

则称 $Q^{(0)} = (q(1),\ q(2),\ \cdots,\ q(m))$ 为 ξ-等高时刻序列.

建立 ξ-等高时刻序列 GM(1, 1)，可得 ξ-等高时刻的预测值

$$q(m+1),\ q(m+2),\ \cdots,\ q(m+k).$$

定义 8.6.4 设

$$\xi_0 = \sigma_{\min},\ \xi_1 = \frac{1}{s}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \sigma_{\min},\ \cdots,$$

$$\xi_i = \frac{i}{s}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \sigma_{\min},\ \cdots$$

$$\xi_{s-1} = \frac{s-1}{s}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) + \sigma_{\min},\ \xi_s = \sigma_{\max}.$$

则称 $X = \xi_i (i = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 为 $s+1$ 条等间隔的等高线，否则称为非等间隔的等高线.

取等高线时应注意使对应的等高时刻序列满足 GM(1, 1)建模条件. 一般可取成等间隔的等高线，亦可取成非等间隔的等高线.

定义 8.6.5 设 $X = \xi_i (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 为 s 条不同的等高线，

$$Q_i^{(0)} = (q_i(1),\ q_i(2),\ \cdots,\ q_i(m_i)),\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

为 ξ_i-等高时刻序列，

$$q_i(m_i+1),\ q_i(m_i+2),\ \cdots,\ q_i(m_i+k_i),\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

为 ξ_t-等高时刻的 GM(1, 1)预测值. 若存在 $i \neq j$, 使

$$\hat{q}_i(m_i + l_i) = \hat{q}_j(m_j + l_j),$$

则称 $\hat{q}_i(m_i + l_i)$ 和 $\hat{q}_j(m_j + l_j)$ 为一对无效的预测时刻.

命题 8.6.2 设

$$\hat{q}_i(m_i + 1),\ \hat{q}_i(m_i + 2),\ \cdots,\ \hat{q}_i(m_i + k_i),\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ s$$

为 ξ_t-等高时刻的 GM(1, 1)预测值, 删去

$$\hat{q}_1(m_1 + 1),\ \hat{q}_1(m_1 + 2),\ \cdots,\ \hat{q}_1(m_1 + k_1);$$

$$\hat{q}_2(m_2 + 1),\ \hat{q}_2(m_2 + 2),\ \cdots,\ \hat{q}_2(m_2 + k_2);$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\hat{q}_t(m_t + 1),\ \hat{q}_t(m_t + 2),\ \cdots,\ \hat{q}_t(m_t + k_t);$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\hat{q}_s(m_s + 1),\ \hat{q}_s(m_s + 2),\ \cdots,\ \hat{q}_s(m_s + k_s)$$

中的无效时刻, 将其余的预测值从小到大重新排序, 设为

$$\hat{q}(1) < \hat{q}(2) < \cdots < \hat{q}(n_s),$$

其中 $n_s \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_s$. 若 $X = \xi_{\hat{q}(k)}$ 为 $\hat{q}(k)$ 所对应的等高线, 则 $X^{(0)}$ 的预测波形为

$$X = X^{(0)} = \{\xi_{\hat{q}(k)} + (t - \hat{q}(k))(\xi_{\hat{q}(k+1)} - \xi_{\hat{q}(k)}) \mid k = 1,\ 2, \cdots,\ n_s\}.$$

例 8.6.1 山西省汾河水库上游年径流量的拓扑预测.

1958 年兴建的汾河水库总库容为 7.2 亿立方米, 其上游包括宁武、静乐、岚县、娄烦四县, 总流域面积 5.268 万平方公里, 从 1951 年至 1980 年历年径流量数据曲线如图 8.6.1 所示.

取 $\xi_1 = 2$, $\xi_2 = 2.5$, $\xi_3 = 3$, $\xi_4 = 4$, $\xi_5 = 5$,

$\xi_6 = 6$, $\xi_7 = 7$, $\xi_8 = 8$, $\xi_9 = 8.5$(单位: 亿立方米)

ξ_t-等高时刻序列分别为:

对应于 $\xi_1 = 2$,

$$Q_1^{(0)} = \{q_1(k)\}_1^5 = (15,\ 21.5,\ 22.1,\ 24.4,\ 25.2),$$

对应于 $\xi_2 = 2.5$,

$$Q_2^{(0)} = \{q_2(k)\}_1^9$$

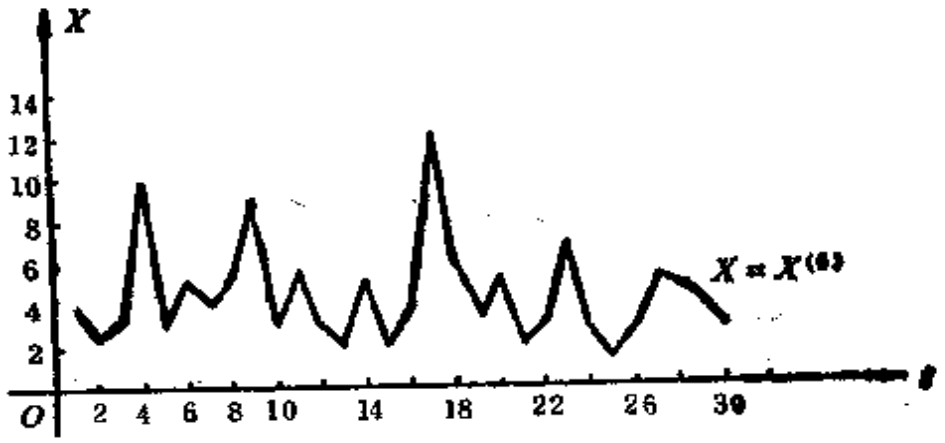


图 8.6.1

$= (13, 14.8, 15.2, 22.1, 22.2, 23.9, 25.6, 29.9)$,

对应于 $\xi_3 = 3$,

$Q_3^{(9)} = \{q_3(k)\}_1^{13}$

$= (1.7, 2.2, 5, 7.1, 12.4, 13.1, 14.7, 15.5, 20.7,$
$22.3, 23.7, 26, 29.6)$,

对应于 $\xi_4 = 4$,

$Q_4^{(9)} = \{q_4(k)\}_1^{19}$

$= (1, 2.6, 4.8, 5.5, 6.4, 7.4, 9.8, 10.7,$
$11.4, 13.5, 14.4, 16.1, 17.9, 18.1, 19.9,$
$22.6, 23.4, 26.4, 29.1)$,

对应于 $\xi_5 = 5$,

$Q_5^{(9)} = \{q_5(k)\}_1^{19}$

$= (3, 4.6, 7.8, 9.6, 13.9, 14.1, 16.1, 17.8,$
$19, 22.8, 23.1, 26.7, 28.4)$,

对应于 $\xi_6 = 6$,

$Q_6^{(9)} = \{q_6(k)\}_1^6 = (3.3, 4.5, 8.1, 9.4, 16.2, 17.7)$,

对应于 $\xi_7 = 7$,

$Q_7^{(9)} = \{q_7(k)\}_1^6 = (3.5, 4.3, 8.5, 9.3, 16.3, 17.6)$,

对应于 $\xi_8 = 8$,

$Q_8^{(0)}=\{q_8(k)\}_1^6=(3.7,\ 4.2,\ 8.8,\ 9,\ 16.5,\ 17.5)$，

对应于 $\xi_0=8.5$，

$$Q_9^{(0)}=\{q_9(k)\}_1^5=(3.8,\ 4.1,\ 9.1,\ 16.6,\ 17.4).$$

对 $Q_i^{(0)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$作一次累加生成，诸 $Q_i^{(1)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$的 GM(1, 1)响应式分别为：

$$\hat{Q}_1^{(1)}(k+1)=359.86e^{0.05k}-344.86,$$
$$\hat{Q}_2^{(1)}(k+1)=128e^{0.11k}-115.7,$$
$$\hat{Q}_3^{(1)}(k+1)=45.65e^{0.18k}-43.95,$$
$$\hat{Q}_4^{(1)}(k+1)=54.15e^{0.1k}-53.15,$$
$$\hat{Q}_5^{(1)}(k+1)=68.68e^{0.12k}-65.98,$$
$$\hat{Q}_6^{(1)}(k+1)=16.1e^{0.3k}-12.8,$$
$$\hat{Q}_7^{(1)}(k+1)=15.52e^{0.3k}-13.02,$$
$$\hat{Q}_8^{(1)}(k+1)=16.7e^{0.3k}-13,$$
$$\hat{Q}_9^{(1)}(k+1)=14.59e^{0.37k}-10.79.$$

令 $\hat{q}_i(k+1)=\hat{Q}_i^{(1)}(k+1)-\hat{Q}_i^{(1)}(k)$，可得 ξ_i-等高时刻预测序列，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ 9$.

$$\hat{Q}_1^{(0)}=(\hat{q}_1(6),\ \hat{q}_1(7),\ \hat{q}_1(8),\ \hat{q}_1(9))$$
$$=(33.79,\ 35.79,\ 37.92,\ 40.16),$$
$$\hat{Q}_2^{(0)}=(\hat{q}_2(8),\ \hat{q}_2(9),\ \hat{q}_2(10),\ \hat{q}_2(11))$$
$$=(33.26,\ 37.2,\ 41.6,\ 46.52).$$
$$\hat{Q}_3^{(0)}=(\hat{q}_3(14),\ \hat{q}_3(15),\ \hat{q}_3(16))$$
$$=(36.91,\ 42.17,\ 48.19),$$
$$\hat{Q}_4^{(0)}=(\hat{q}_4(20),\ \hat{q}_4(21),\ \hat{q}_4(22),\ \hat{q}_4(23))$$
$$=(34.02,\ 37.59,\ 41.52,\ 45.87),$$
$$\hat{Q}_5^{(0)}=(\hat{q}_5(14),\ \hat{q}_5(15),\ \hat{q}_5(16),\ \hat{q}_5(17))$$
$$=(34.17,\ 38.38,\ 43.11,\ 48.42)),$$
$$\hat{Q}_6^{(0)}=(\hat{q}_6(7),\ \hat{q}_6(8))=(34.39,\ 46.47),$$
$$\hat{Q}_7^{(0)}=(\hat{q}_7(7),\ \hat{q}_7(8))=(34.13,\ 45.96),$$

$$\hat{Q}_8^{(0)} = (\hat{q}_8(6),\ \hat{q}_8(7)) = (33.97,\ 45.68),$$

$$\hat{Q}_9^{(0)} = (\hat{q}_9(6)) = (40.17).$$

据此可绘出汾河水库上游径流量的预测图形如图 8.6.2 所示.

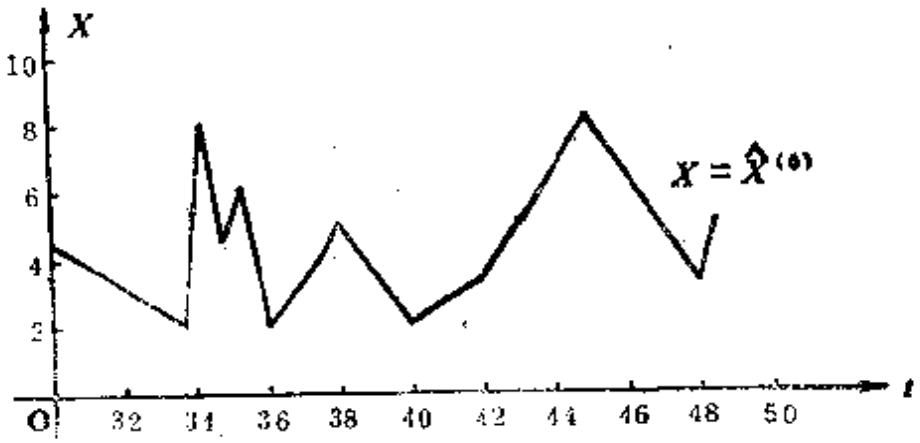


图 8.6.2

§8.7 系 统 预 测

对于含有多个相互关联的因素与多个自主控制变量的复杂系统，任何单个模型都不能反映系统发展变化，必须考虑建立系统模型才能进行有效的预测.

定义 8.7.1 设 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$, …, $X_m^{(0)}$ 为系统状态变量数据序列，$U_1^{(0)}$, $U_2^{(0)}$, …, $U_s^{(0)}$ 为系统控制变量数据序列，则称

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} = a_{11}x_1^{(1)} + a_{12}x_2^{(1)} + \cdots + a_{1m}x_m^{(1)} + b_{11}u_1^{(1)} + b_{12}u_2^{(1)} + \cdots + b_{1s}u_s^{(1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} = a_{21}x_1^{(1)} + a_{22}x_2^{(1)} + \cdots + a_{2m}x_m^{(1)} + b_{21}u_1^{(1)} + b_{22}u_2^{(1)} + \cdots + b_{2s}u_s^{(1)}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}x_m^{(1)}}{\mathrm{d}t} = a_{m1}x_1^{(1)} + a_{m2}x_2^{(1)} + \cdots + a_{mm}x_m^{(1)} + b_{m1}u_1^{(1)} + b_{m2}u_2^{(1)} + \cdots + b_{ms}u_s^{(1)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} = c_1u_1^{(1)} + d_1$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} = c_2u_2^{(1)} + d_2$$

$$\cdots \quad \cdots$$

$$\frac{\mathrm{d}u_s^{(1)}}{\mathrm{d}t} = c_su_s^{(1)} + d_s$$

为系统预测模型.

系统预测模型事实上是由 m 个 GM(1, $m+s$)和 s 个 GM(1, 1)构成的微分方程组.

定义 8.7.2 系统预测模型的矩阵形式为

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ \dot{U} = CU + D \end{cases}$$

其中 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_m)^T$, $U = (u_1, u_2, \cdots, u_s)^T$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} c_1 & & & 0 \\ & c_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_s \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_s \end{bmatrix}.$$

称 X 为状态向量，U 为控制向量，A 为状态矩阵，B 为控制矩阵，C 为发展矩阵，D 为灰作用向量.

命题 8.7.1 系统预测模型的时间响应式为：

$$\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=\left\{x_1^{(1)}(0)+\frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j=2}^{m}a_{1j}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{1i}u_i^{(1)}(k+1)\right]\right\}\exp(a_{11}k)-\frac{1}{a_{11}}\left[\sum_{j=2}^{m}a_{1j}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{1i}u_i^{(1)}(k+1)\right],$$

$$\hat{x}_2^{(1)}(k+1)=\left\{x_2^{(1)}(0)+\frac{1}{a_{22}}\left[\sum_{j\neq 2}a_{2j}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{2i}u_i^{(1)}(k+1)\right]\right\}\exp(a_{22}k)-\frac{1}{a_{22}}\left[\sum_{j\neq 2}a_{2j}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{2i}u_i^{(1)}(k+1)\right],$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\hat{x}_m^{(1)}(k+1)=\left\{x_m^{(1)}(0)+\frac{1}{a_{mm}}\left[\sum_{j\neq m}a_{mj}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{mi}u_i^{(1)}(k+1)\right]\right\}\exp(a_{mm}k)-\frac{1}{a_{mm}}\left[\sum_{j\neq m}a_{mj}x_j^{(1)}(k+1)+\sum_{i=1}^{r}b_{mi}u_i^{(1)}(k+1)\right],$$

$$\hat{u}_1^{(1)}(k+1)=\left(u_1^{(1)}(0)+\frac{d_1}{c_1}\right)\exp(c_1k)-\frac{d_1}{c_1},$$

$$\hat{u}_2^{(1)}(k+1)=\left(u_2^{(1)}(0)+\frac{d_2}{c_2}\right)\exp(c_2k)-\frac{d_2}{c_2},$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$\hat{u}_s^{(1)}(k+1)=\left(u_s^{(1)}(0)+\frac{d_s}{c_s}\right)\exp(c_sk)-\frac{d_s}{c_s}.$$

其中状态变量的响应式为近似响应式.

例 8.7.1 山西省粮食生产系统预测模型.

系统状态变量:

x_1: 山西省粮食总产量(单位: 亿公斤),

x_2: 山西省粮食平均亩产量(单位: 公斤).

系统控制变量:

u_1: 山西省粮食播种面积(单位: 万亩),

u_2: 山西省平均每亩耕地化肥施用量(单位: 公斤),

u_3: 水浇地面积占耕地总面积的比重(%).

根据分析, 粮食总产量与播种面积和粮食平均亩产量有关; 而粮食平均亩产量与平均每亩耕地化肥施用量和水浇地面积占耕地总积的比重有关, 故得系统预测模型:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1^{(1)}}{dt}=a_{11}x_1^{(1)}+a_{12}x_2^{(1)}+b_{11}u_1^{(1)}\\[2ex]\dfrac{dx_2^{(1)}}{dt}=\qquad a_{22}x_2^{(1)}+\qquad b_{22}u_2^{(1)}+b_{23}u_3^{(1)}\\[2ex]\dfrac{du_1^{(1)}}{dt}=c_1u_1^{(1)}+d_1\\[2ex]\dfrac{du_2^{(1)}}{dt}=c_2u_2^{(1)}+d_2\\[2ex]\dfrac{du_3^{(1)}}{dt}=c_3u_3^{(1)}+d_3\end{cases}$$

从 x_1, x_2 和 u_1, u_2, u_3 的历史数据, 可得系统状态矩阵 A, 控制矩阵 B, 发展矩阵 C 和灰作用向量 D 的最小二乘估计:

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}-1.97209 & 0.8118\\ 0 & -1.52385\end{bmatrix},\quad \hat{B}=\begin{bmatrix}0.0033 & 0 & 0\\ 0 & 2.09693 & 8.0016\end{bmatrix},$$

$$\hat{C}=\begin{bmatrix}-0.0058 & 0 & 0\\ 0 & 0.0819 & 0\\ 0 & 0 & 0.0014\end{bmatrix},\quad \hat{D}=\begin{bmatrix}5000.7174\\ 10.1785\\ 28.2795\end{bmatrix}.$$

系统模型为

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1^{(1)}}{dt}=-1.97209x_1^{(1)}+0.8118x_2^{(1)}+0.0033u_1^{(1)}\\ \dfrac{dx_2^{(1)}}{dt}=-1.52385x_2^{(1)}+2.09693u_2^{(1)}+8.0016u_3^{(1)}\\ \dfrac{du_1^{(1)}}{dt}=-0.0058u_1^{(1)}+5000.7174\\ \dfrac{du_2^{(1)}}{dt}=0.0819u_2^{(1)}+10.1785\\ \dfrac{du_3^{(1)}}{dt}=0.0014u_3^{(1)}+28.2795\end{cases}$$

系统预测模型响应式

$$\begin{aligned}\hat{x}_1^{(1)}(k+1)=&\left\{x_1^{(1)}(0)-\frac{1}{1.97209}[0.8118x_2^{(1)}(k+1)\right.\\ &\left.+0.0033u_1^{(1)}(k+1)]\right\}e^{-1.97209k}\\ &+\frac{1}{1.97209}[0.8118x_2^{(1)}(k+1)\\ &+0.0033u_1^{(1)}(k+1)],\\ \hat{x}_2^{(1)}(k+1)=&\left(x_2^{(1)}(0)-\frac{1}{1.52385}[2.09693u_2^{(1)}(k+1)\right.\\ &\left.+8.0016u_3^{(1)}(k+1)]\right)e^{-1.52385k}\\ &+\frac{1}{1.52385}[2.09693u_2^{(1)}(k+1)\end{aligned}$$

$$+8.0016u_3^{(1)}(k+1)],$$

$$\hat{u}_1^{(1)}(k+1)=\left(u_1^{(1)}(0)-\frac{5000.7174}{0.0058}\right)e^{-0.0058k}$$

$$+\frac{5000.7174}{0.0058},$$

$$\hat{u}_2^{(1)}(k+1)=\left(u_2^{(1)}(0)+\frac{10.1785}{0.0819}\right)e^{0.0819k}$$

$$-\frac{10.1785}{0.0819},$$

$$\hat{u}_3^{(1)}(k+1)=\left(u_3^{(1)}(0)+\frac{28.2795}{0.0014}\right)e^{0.0014k}$$

$$-\frac{28.2795}{0.0014}.$$

系统预测值如表 8.7.1 所示.

表 8.7.1 状态变量与控制变量预测值

变量 \ 年份	1990	1995	2000
x_1	98.98	113.72	136.5
x_2	225.38	263.19	319.6
u_1	4492	4301.15	4178
u_2	55.62	83.76	126
u_3	29.1	29.3	29.5

当控制变量取不同的值时，可得到不同的系统预测值. 如取 u_1 为 4492 万亩，u_2 为 32 公斤，u_3 为 28.6%，或取 u_1 分别为 4000 万亩、4250 万亩、4500 万亩，u_2 分别为50公斤、75公斤，u_3 为 29%，则相应的粮食总产预测值如表 8.7.2 所示.

表 8.7.2　不同控制条件下的粮食产量

控制变量			状态变量			
			x_1			x_2
u_1	u_2	u_3	1990	1995	2000	
4492	32	28.6	87.6	87.45	87.45	194.5
4000			97.77	97.7	97.7	
4250	50	39	83.18	98.12	98.12	221
4500			98.6	98.53	98.53	
4000			111.94	111.86	111.86	
4250	75	29	112.35	112.28	112.275	255
4500			112.77	112.70	112.70	

由表 8.7.2 可以看出，若控制粮食播种面积 u_1 在 4000 万亩至 4500 万亩之间，亩均化肥施用量 u_2 在 50公斤至 75 公斤之间，水浇地比例为 29%，则 1990 年以后的粮食总产量将稳定在97.7亿公斤至 112 亿公斤之间.

第九章　灰色决策

§9.1　灰色决策概言

根据实际情况和预定目标来确定应采取的行动，这便是决策．决策的本质含义就是“作出决定”或“决定对策”．决策活动不仅是各级各类管理活动的重要组成部分，而且贯穿于每个人工作、学习和生活过程的始终．对决策的理解有广义、狭义之分．从广义上讲，决策指提出问题、搜集资料、确定目标、拟定方案、分析评估、选择方案以及实施、反馈、修正等一系列活动的全过程；决策的狭义理解则仅指决策全过程中选择方案这一环节，习惯上称为“拍板”．也有人仅仅把决策理解为在不确定条件下选择方案，即作出抉择，这在很大程度上要依赖决策者个人的经验、态度和决心，要承担一定的风险．灰色决策是在决策模型中含灰元或一般决策模型与灰色模型相结合的情况下进行的决策，它重点研究的是方案选择问题．

在以下的讨论中，我们将需要研究、解决的问题或需要处理的事物以及一个系统行为的现状等统称为事件．事件是我们进行决策的起点．

定义9.1.1　事件、对策、目标、效果称为决策四要素．

定义9.1.2　某一研究范围内的事件全体称为该研究范围内的事件集，记为

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\},$$

其中 $a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为第 i 个事件．相应的所有可能的对策全体称为对策集，记为

$$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\},$$

其中 $b_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$为第 j 种对策.

定义9.1.3 事件集 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 与对策集 $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$ 的笛卡尔积

$$A\times B=\{(a_i,\ b_j)\mid a_i\in A,\ b_j\in B\}$$

称为局势集，记作 $S=A\times B$. 对于任意的 $a_i\in A$，$b_j\in B$，称 $(a_i,\ b_j)$为局势，记作 $s_{ij}=(a_i,\ b_j)$.

比如在农业种植决策中，可把气候条件作为事件集，记平年为 a_1，旱年为 a_2，涝年为 a_3，则事件集

$$A=\{\text{平年，旱年，涝年}\}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}.$$

将不同作物品种看作不同对策，记玉米为 b_1，高粱为 b_2，大豆为 b_3，芝麻为 b_4，红薯为 b_5，…，则对策集

$$\begin{aligned}B&=\{\text{玉米，高粱，大豆，芝麻，红薯，}\cdots\}\\&=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ \cdots\},\end{aligned}$$

于是局势集

$$\begin{aligned}S&=A\times B\\&=\{s_{11},\ s_{12},\ s_{13},\ s_{14},\ s_{15},\ \cdots;s_{21},\\&\quad s_{22},\ s_{23},\ s_{24},\ s_{25},\ \cdots;s_{31},\ s_{32},\\&\quad s_{33},\ s_{34},\ s_{35},\ \cdots\}\end{aligned}$$

其中 $s_{ij}=(a_i,\ b_j)$，如

$s_{11}=(a_1,\ b_1)=$(平年，玉米)，

$s_{21}=(a_2,\ b_1)=$(旱年，玉米)，

$s_{31}=(a_3,\ b_1)=$(涝年，玉米)，

$s_{12}=(a_1,\ b_2)=$(平年，高粱).

这里的事件和对策都比较单纯，构成的局势比较简单. 在实际决策中，遇到的事件往往是由多种简单事件复合而成的复杂事件，对策也不那么单纯，而是十分复杂的，因而构成的局势也相当复杂.

我们仍以种植决策为例.

事件集实际上是由气候、土壤、水利、肥料、农药、劳动力、技术等构成的复合体. 对策也不是单纯的某一种作物，而是多种作物按不同比例搭配复合而成的. 记

"平年、壤土、有效灌溉面积占50%、肥料和农药基本满足需要、劳动力充足、技术中等" 为 a_1,

"旱年、黑土、有效灌溉面积占50%、肥料和劳动力充足、农药缺乏、技术中等" 为 a_2,

… …

则事件集 $A=\{a_1, a_2, \cdots\}$. 记

"30%玉米+10%高粱+20%大豆+15%芝麻+15% 红薯+10%其它"为b_1,

"10%玉米+20%高粱+30%大豆+30%芝麻+10%其它" 为 b_2, … …

则对策集 $B=\{b_1, b_2, \cdots\}$.

局势 $s_{11}=(a_1, b_1)$就是在平年、壤土、有效灌溉面积50%、肥料和农药基本满足需要、劳动力充足、技术中等的条件下种植30%玉米、10%高粱、20%大豆、15%芝麻、15%红薯和10%其它作物.

再如在教学计划安排中，可把某学校某学期开设的全部课程作为事件集，把该校的专职和兼职教师以及实习、实验、电化教学等手段作为对策集. 当然根据情况可以是一位教师同时开设几门课程，也可以几位教师协作开设一门课程. 课程教学可以是100%讲授，也可以是60%讲授、20%实验、10%实习、10%看教学录像等.

给定局势 $s_{ij}\in S$，在预定目标下对其效果进行评估，根据评估结果决定取舍，这就是决策. 以下各节中，我们将分别讨论几种不同的灰色决策方法.

§9.2 灰靶决策

定义9.2.1 设 $S=\{s_{ij}=(a_i, b_j)\mid a_i\in A, b_j\in B\}$ 为局势集，$u_{ij}^{(k)}$ 为局势 s_{ij} 在 k 目标下的效果值，R为实数集，则称

$$u^{(k)}: S\longrightarrow R$$
$$s_{ij}\longmapsto u_{ij}^{(k)}$$

为 S 在 k 目标下的效果映射.

定义9.2.2 1° 若 $u_{ij}^{(k)}=u_{ih}^{(k)}$，则称对策 b_j 与 b_h 关于事件 a_i 在目标 k 下等价，记作 $b_j\cong b_h$，称集合

$$B_{ih}^{(k)}=\{b\mid b\in B,\ b\cong b_h\}$$

为 k 目标下关于事件 a_i 的对策 b_h 的效果等价类

2° 设 k 目标是效果值越大越好的目标. 若 $u_{ij}^{(k)}>u_{ih}^{(k)}$，则称 k 目标下关于事件 a_i 对策 b_j 优于 b_h，记作 $b_j\succ b_h$，称集合

$$B_{ih}^{(k)}=\{b\mid b\in B,\ b\succ b_h\}$$

为 k 目标下关于事件 a_i 对策 b_h 的优势类.

类似地，可以定义效果值适中为好或越小越好情况下的对策优势类.

定义9.2.3 1° 若 $u_{ih}^{(k)}=u_{jh}^{(k)}$，则称事件 a_i 与 a_j 关于对策 b_h 在 k 目标下等价，记作 $a_i\cong a_j$，称集合

$$A_{ih}^{(k)}=\{a\mid a\in A,\ a\cong a_i\}$$

为 k 目标下关于对策 b_h 的事件 a_i 的效果等价类.

2° 设 k 目标是效果值越大越好的目标. 若 $u_{ih}^{(k)}>u_{jh}^{(k)}$，则称 k 目标下关于对策 b_h 事件 a_i 优于事件 a_j，记作 $a_i\succ a_j$，称集合

$$A_{jh}^{(k)}=\{a\mid a\in A,\ a\succ a_j\}$$

为 k 目标下关于对策 b_h 事件 a_j 的优势类.

类似地，可以定义效果值适中为好或越小越好情况下的事件优势类.

定义9.2.4 1° 若 $u_{ij}^{(k)}=u_{hl}^{(k)}$，则称局势 s_{ij} 在 k 目标下等价于局势 s_{hl}，记作 $s_{ij}\cong s_{hl}$，称集合

$$S^{(k)}=\{s\mid s\in S,\ s\cong s_{hl}\}$$

为 k 目标下局势 s_{hl} 的效果等价类.

2° 设 k 目标为效果值越大越好的目标. 若 $u_{ij}^{(k)}>u_{hl}^{(k)}$，则称局势 s_{ij} 在 k 目标下优于局势 s_{hl}，记作 $s_{ij}\succ s_{hl}$，称集合

$$S_{hl}^{(k)}=\{s\mid s\in S,\ s\succ s_{hl}\}$$

为 k 目标下局势 s_{hl} 的效果优势类.

类似地可以定义效果值适中为好或越小越好情况下的局势优势类.

命题9.2.1 设

$$S=\{s_{ij}\mid a_i\in A,\ b_j\in B\}\neq\varnothing,$$

$$U^{(k)}=\{u_{ij}^{(k)}\mid a_i\in A,\ b_j\in B\}$$

为 k 目标下的效果集，$\{S^{(k)}\}$ 为 k 目标下的局势效果等价类所成之集，则映射

$$u^{(k)}:\ \{S^{(k)}\}\to U^{(k)}$$

$$S^{(k)}\mapsto u_{ij}^{(k)}$$

是 1-1 到上的.

定义9.2.5 设 $d_1^{(k)}$，$d_2^{(k)}$ 为 k 目标下的局势效果的上、下临界值，则称 $S^1=\{r\mid d_1^{(k)}\leqslant r\leqslant d_2^{(k)}\}$ 为 k 目标下的一维决策灰靶，并称 $u_{ij}^{(k)}\in[d_1^{(k)},\ d_2^{(k)}]$ 为 k 目标下的满意效果，称相应的 s_{ij} 为 k 目标下的可取局势，b_j 为 k 目标下关于事件 a_i 的可取对策.

命题9.2.2 设 $u_{ij}^{(k)}$ 为局势 s_{ij} 在 k 目标下的效果值. 若 $u_{ij}^{(k)}\in S^1$，即 s_{ij} 为 k 目标下的可取局势，则对任意的 $s\in S_{ij}^{(k)}$，s 亦为可取局势，即当 s_{ij} 可取时，其效果优势类中的局势皆为可取局势.

以上是单目标的情况，类似地，可以讨论多目标局势的决策灰靶.

定义9.2.6 设 $d_1^{(1)}$，$d_2^{(1)}$ 为目标 1 的局势效果临界值，$d_1^{(2)}$，$d_2^{(2)}$ 为目标 2 的局势效果临界值，则称

$$S^2=\{(r^{(1)},\ r^{(2)})\mid d_1^{(1)}\leqslant r^{(1)}\leqslant d_2^{(1)},\ d_1^{(2)}\leqslant r^{(2)}\leqslant d_2^{(2)}\}$$

为二维决策灰靶. 若局势 s_{ij} 的效果向量 $u_{ij}=(u_{ij}^{(1)},\ u_{ij}^{(2)})\in S^2$，则称 s_{ij} 为目标 1 和目标 2 下的可取局势，b_j 为事件 a_i 在目标1，2 下的可取对策.

定义9.2.7 设 $d_1^{(1)}$，$d_2^{(1)}$；$d_1^{(2)}$，$d_2^{(2)}$；…；$d_1^{(s)}$，$d_2^{(s)}$ 为目标 1，2，…，s 下的局势效果临界值，则称 s 维超平面区域

$$S^s=\{(r^{(1)},\ r^{(2)},\ \cdots,\ r^{(s)})\mid d_1^{(1)}\leqslant r^{(1)}\leqslant d_2^{(1)},\ d_1^{(2)}\leqslant r^{(2)}\leqslant d_2^{(2)},\ \cdots,\ d_1^{(s)}\leqslant r^{(s)}\leqslant d_2^{(s)}\}$$

为 s 维决策灰靶. 若局势 s_{ij} 的效果向量

$$u_{ij}=(u_{ij}^{(1)},\ u_{ij}^{(2)},\ \cdots,\ u_{ij}^{(s)})\in S^s,$$

其中 $u_{ij}^{(k)}(k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 为局势 s_{ij} 在 k 目标下的效果值，则称 s_{ij} 为目标 1，2，…，s 下的可取局势，b_j 为事件 a_i 在目标 1，2，…，s 下的可取对策.

决策灰靶实质上是相对优化意义下满意效果所在的区域. 在许多场合下，要取得绝对的最优往往是不可能的，因而人们常退而求其次，要求有个满意的结果也就行了. 当然，根据需要，可将决策灰靶逐步收缩，最后蜕化为一点，即是最优效果，与之对应的局势就是最优局势，相应的对策即最优对策. 为此，我们以下讨论有心球形靶.

定义9.2.8 称

$$R^s=\{(r^{(1)},\ r^{(2)},\ \cdots,\ r^{(s)})\mid (r^{(1)}-r_0^{(1)})^2+(r^{(2)}-r_0^{(2)})^2+\cdots+(r^{(s)}-r_0^{(s)})^2\leqslant R^2\}$$

为以 $r_0=(r_0^{(1)},\ r_0^{(2)},\ \cdots,\ r_0^{(s)})$ 为靶心，以 R 为半径的 s 维球形灰靶，称 $r_0=(r_0^{(1)},\ r_0^{(2)},\ \cdots,\ r_0^{(s)})$ 为最优效果向量.

定义9.2.9 设 $r_1=(r_1^{(1)},\ r_1^{(2)},\ \cdots,\ r_1^{(s)})\in R^s$，称

$$|r_1 - r_0| = [(r_1^{(1)} - r_0^{(1)})^2 + (r_1^{(2)} - r_0^{(2)})^2 + \cdots + (r_1^{(s)} - r_0^{(s)})^2]^{1/2}$$

为向量 r_1 的靶心距.

靶心距的数值反映了效果向量的优劣.

定义9.2.10 设 s_{ij}, s_{kl} 为不同局势,

$$u_{ij} = (u_{ij}^{(1)}, u_{ij}^{(2)}, \cdots, u_{ij}^{(s)}),$$

$$u_{kl} = (u_{kl}^{(1)}, u_{kl}^{(2)}, \cdots, u_{kl}^{(s)})$$

分别为 s_{ij} 与 s_{kl} 的效果向量. 若

$$|u_{ij} - r_0| \geqslant |u_{kl} - r_0|,$$

则称局势 s_{kl} 优于 s_{ij}, 记作 $s_{kl} \succ s_{ij}$. 当式中等号成立时, 亦称 s_{ij} 与 s_{kl} 等价, 记作 $s_{ij} \cong s_{kl}$.

定义9.2.11 若对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 与 $j = 1, 2, \cdots, m$, 恒有 $u_{ij} \neq r_0$, 则称最优局势不存在, 或称事件无最优对策.

定义9.2.12 若最优局势不存在, 但存在 h, l, 使任意 $i = 1, 2, \cdots, n$ 与 $j = 1, 2, \cdots, m$, 都有

$$|u_{kl} - r_0| \leqslant |u_{ij} - r_0|,$$

即任意 $s_{ij} \in S$, 有 $s_{kl} \succ s_{ij}$, 则称 s_{kl} 为次优局势, 并称 a_k 为次优事件, b_l 为次优对策.

为讨论问题方便起见, 我们可将靶心取为原点, 这只需对决策效果向量进行适当变换即可. 此时靶心距则转化为决策效果向量的2-范数.

定理9.2.1 设 $S = \{s_{ij} | a_i \in A, b_j \in B\}$ 为局势集,

$$R^s = \{(r^{(1)}, r^{(2)}, \cdots, r^{(s)}) |$$

$$(r^{(1)} - r_0^{(1)})^2 + \cdots + (r^{(s)} - r_0^{(s)})^2 \leqslant R^2\}$$

为 s 维球形灰靶, 则 S 在 "优于" 关系下构成有序集.

定理9.2.2 局势集 $(S, \succ)$ 中必有次优局势.

证明: 此为 Zorn 引理.

例9.2.1 设 "下雨" 为事件 a_1, "打伞" 、"穿雨衣" 、"戴斗笠" 分别为对策 b_1, b_2, b_3. 试按效能、经济、轻便三个目标作灰靶

决策.

解：记效能为目标1，经济为目标2，轻便为目标3．三种局势

$$s_{11}=(a_1,\ b_1)=(\text{下雨},\ \text{打伞}),$$
$$s_{12}=(a_1,\ b_2)=(\text{下雨},\ \text{穿雨衣}),$$
$$s_{13}=(a_1,\ b_3)=(\text{下雨},\ \text{戴斗笠})$$

在不同目标下效果不同.

对于目标1，即从防雨效能看，伞最好，雨衣次之，斗笠最差．我们以效能最好的为一级，标为 $u_{11}^{(1)}=1$，类似可有 $u_{12}^{(1)}=2$，$u_{13}^{(1)}=3$.

对于目标2，则斗笠最经济，伞次之，雨衣最不经济，于是有 $u_{11}^{(2)}=2$，$u_{12}^{(2)}=3$，$u_{13}^{(2)}=1$.

对于目标3，则斗笠最轻便，伞次之，雨衣最不轻便，于是有 $u_{11}^{(3)}=2$，$u_{12}^{(3)}=3$，$u_{13}^{(3)}=1$.

从而得三种局势的效果向量：

$$u_{11}=(u_{11}^{(1)},\ u_{11}^{(2)},\ u_{11}^{(3)})=(1,\ 2,\ 2),$$
$$u_{12}=(u_{12}^{(1)},\ u_{12}^{(2)},\ u_{12}^{(3)})=(2,\ 3,\ 3),$$
$$u_{13}=(u_{13}^{(1)},\ u_{13}^{(2)},\ u_{13}^{(3)})=(3,\ 1,\ 1).$$

取球心为 $r_0=(1,\ 1,\ 1)$，半径为 $\sqrt{2}$ 的灰靶，即

$$R^3=\{(r^{(1)},\ r^{(2)},\ r^{(3)})\,|\,(r^{(1)}-1)^2+(r^{(2)}-1)^2+(r^{(3)}-1)^2\leqslant 2\},$$

则 $u_{11}\in R^3$，故 u_{11} 为满意效果向量，对应 s_{11} 为可取局势，即对事件下雨，打伞是可取对策.

进一步还可以计算靶心距

$$|u_{11}-r_0|=[(u_{11}^{(1)}-r_0^{(1)})^2+(u_{11}^{(2)}-r_0^{(2)})^2+(u_{11}^{(3)}-r_0^{(3)})^2]^{1/2}$$
$$=[(1-1)^2+(2-1)^2+(2-1)^2]^{1/2}=\sqrt{2},$$
$$|u_{12}-r_0|=[(u_{12}^{(1)}-r_0^{(1)})^2+(u_{12}^{(2)}-r_0^{(2)})^2+(u_{12}^{(3)}-r_0^{(3)})^2]^{1/2}$$
$$=[(2-1)^2+(3-1)^2+(3-1)^2]^{1/2}=3,$$
$$|u_{13}-r_0|=[(u_{13}^{(1)}-r_0^{(1)})^2+(u_{13}^{(2)}-r_0^{(2)})^2+(u_{13}^{(3)}-r_0^{(3)})^2]^{1/2}$$

$$=[(3-1)^2+(1-1)^2+(1-1)^2]^{1/2}=2.$$

因为$\sqrt{2}<2<3$，所以$s_{11}\succ s_{13}\succ s_{12}$，$s_{11}$亦为次优局势.

如果我们将各个目标的一级效果取为0，二级效果取为1，三级效果取为2，则可得到靶心在原点的球形灰靶.

如果将事件a_1改为下雨、骑自行车或是下雨、携带重物等复合事件，则局势效果向量将随之变化. 相应地，可取局势、次优局势亦可能发生变化.

在例9.2.1中，虽然确实不存在最优局势，但我们却找到了可取的次优局势. 这就是灰靶决策的智能含义或叫灵活性. 比如某公司指派一位代表去外地洽谈订货业务，可以交待他说："订货金额5万元左右，质量品种规格及价格合适，就可以成交."也可以告诉他："订货金额5万元，优质名牌产品，单价××元，方可成交."前一种说法就是给了一个灰靶，业务代表有一定的自主权，谈判较容易获得成功. 而后一种说法则仅仅给了一个靶心，谈判代表没有任何回旋余地，很难成交. 如果下雨非要有防雨效能、经济、轻便都达到一级的雨具不行，那就只好呆在家里别出门.

§9.3 灰关联决策

局势效果向量的靶心距是衡量局势优劣的一个标准，而局势效果向量与最优效果向量的关联度则是评价局势优劣的另一个准则.

定义9.3.1 设$S=\{s_{ij}|a_i\in A,\ b_j\in B\}$为局势集，$u_{i_0j_0}=(u_{i_0j_0}^{(1)},\ u_{i_0j_0}^{(2)},\ \cdots,\ u_{i_0j_0}^{(s)})$为最优效果向量. 若$u_{i_0j_0}$所对应的局势$s_{i_0j_0}\in S$，则称$u_{i_0j_0}$为理想最优效果向量，相应的$s_{i_0j_0}$称为理想最优局势.

命题9.3.1 设$S=\{s_{ij}|a_i\in A,\ b_j\in B\}$为局势集，局势$s_{ij}$

对应的效果向量为

$$u_{ij}=(u_{ij}^{(1)},\ u_{ij}^{(2)},\ \cdots,\ u_{ij}^{(s)}),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

1° 当 k 目标效果值越大越好时，取

$$u_{i_0j_0}^{(k)}=\max_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\{u_{ij}^{(k)}\};$$

2° 当 k 目标效果值接近某一适中值 u_0 为好时，取 $u_{i_0j_0}^{(k)}=u_0$；

3° 当 k 目标效果值越小越好时，取

$$u_{i_0j_0}^{(k)}=\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}\{u_{ij}^{(k)}\},$$

则 $u_{i_0j_0}=(u_{i_0j_0}^{(1)},\ u_{i_0j_0}^{(2)},\ \cdots,\ u_{i_0j_0}^{(s)})$ 为理想最优效果向量.

命题9.3.2 设 $S=\{s_{ij}|a_i\in A,\ b_j\in B\}$ 为局势集，

$$u_{ij}=(u_{ij}^{(1)},\ u_{ij}^{(2)},\ \cdots,\ u_{ij}^{(s)}),$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

为局势 s_{ij} 的效果向量，

$$u_{i_0j_0}=(u_{i_0j_0}^{(1)},\ u_{i_0j_0}^{(2)},\ \cdots,\ u_{i_0j_0}^{(s)})$$

为理想最优效果向量，$\varepsilon_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为 u_{ij} 与 $u_{i_0j_0}$ 的灰色绝对关联度. 若 $\varepsilon_{i_1j_1}$ 满足对任意 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 且 $i\neq i_1$ 和任意 $j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$ 且 $j\neq j_1$，恒有 $\varepsilon_{i_1j_1}\geqslant\varepsilon_{ij}$，则 $u_{i_1j_1}$ 为次优效果向量，$s_{i_1j_1}$ 为次优局势.

灰关联决策可按下列步骤进行.

第一步：确定事件集 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 和对策集 $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$，构造局势集

$$S=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)\,|\,a_i\in A,\ b_j\in B\}.$$

第二步 确立决策目标1，2，…，s.

第三步：求不同局势 $s_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 在 k 目标下的效果值 $u_{ij}^{(k)}$，得

$$u^{(k)}=(u_{11}^{(k)},\ u_{12}^{(k)},\ \cdots,\ u_{1m}^{(k)};\ u_{21}^{(k)},\ u_{22}^{(k)},\ \cdots,\ u_{2m}^{(k)};\cdots;$$

$$u_{n1}^{(k)},\ u_{n2}^{(k)},\ \cdots,\ u_{nm}^{(k)}),$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$

第四步：求 k 目标下局势效果序列 $u^{(k)}$ 的均值象，不妨仍记为

$$u^{(k)}=(u_{11}^{(k)},\ u_{12}^{(k)},\ \cdots,\ u_{1m}^{(k)};\ u_{21}^{(k)},\ u_{22}^{(k)},\ \cdots,\ u_{2m}^{(k)};$$
$$\cdots;\ u_{n1}^{(k)},\ u_{n2}^{(k)},\ \cdots,\ u_{nm}^{(k)}),$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$

第五步：由第四步结果写出局势 s_{ij} 的效果向量

$$u_{ij}=(u_{ij}^{(1)},\ u_{ij}^{(2)},\ \cdots,\ u_{ij}^{(s)}),$$

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$

第六步：求理想最优效果向量

$$u_{i_0j_0}=(u_{i_0j_0}^{(1)},\ u_{i_0j_0}^{(2)},\ \cdots,\ u_{i_0j_0}^{(s)}).$$

第七步：计算 u_{ij} 与 $u_{i_0j_0}$ 的灰色绝对关联度 ε_{ij}，

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$

第八步：由 $\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\{\varepsilon_{ij}\}=\varepsilon_{i_0j_0}$，得次优效果向量 $u_{i_0j_0}$ 和次优局势 $s_{i_0j_0}$.

例9.3.1 某城市改建主干道工程方案的灰关联决策.

解：第一步：记改建干道为事件 a_1，则事件集 $A=\{a_1\}$；记

分车道方案为对策 b_1，

快速轨道方案为对策 b_2，

混行双层方案为对策 b_3，

地铁方案为对策 b_4，

现有道路架设轨道方案为对策 b_5，

高架桥分层方案为对策 b_6.

则对策集 $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6\}$.

于是有局势集

$$S=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)\,|\,a_i\in A,\ b_j\in B\}$$

$$= \{s_{11},\ s_{12},\ s_{13},\ s_{14},\ s_{15},\ s_{16}\}.$$

第二步：确定 10 个不同的目标，记

交通功能(%)为目标 1，

工程造价(万元)为目标 2，

拆迁费(万元)为目标 3，

交通量(辆/小时)为目标 4，

车速(公里/小时)为目标 5，

线路标准(%)为目标 6，

公害大小(定性)为目标 7，

安全与否(定性)为目标 8，

综合系数(无量纲)为目标 9，

施工难易(定性)为目标10.

第三步：求 k 目标下的局势效果序列 $u^{(k)}$，$k=1,\ 2,\ \cdots,10$.

关于交通功能目标的局势效果序列

$$u^{(1)} = (u_{11}^{(1)},\ u_{12}^{(1)},\ u_{13}^{(1)},\ u_{14}^{(1)},\ u_{15}^{(1)},\ u_{16}^{(1)})$$
$$= (88,\ 36,\ 62,\ 36,\ 36,\ 62),$$

关于工程造价目标的局势效果序列

$$u^{(2)} = (u_{11}^{(2)},\ u_{12}^{(2)},\ u_{13}^{(2)},\ u_{14}^{(2)},\ u_{15}^{(2)},\ u_{16}^{(2)})$$
$$= (26550,\ 46880,\ 33430,\ 46160,\ 44760,\ 25490),$$

关于拆迁费目标的局势效果序列

$$u^{(3)} = (u_{11}^{(3)},\ u_{12}^{(3)},\ u_{13}^{(3)},\ u_{14}^{(3)},\ u_{15}^{(3)},\ u_{16}^{(3)})$$
$$= (17700,\ 2620,\ 11880,\ 495,\ 495,\ 11800),$$

关于交通量目标的局势效果序列

$$u^{(4)} = (u_{11}^{(4)},\ u_{12}^{(4)},\ u_{13}^{(4)},\ u_{14}^{(4)},\ u_{15}^{(4)},\ u_{16}^{(4)})$$
$$= (2200,\ 800,\ 2000,\ 800,\ 800,\ 3500),$$

关于车速目标的局势效果序列

$$u^{(5)} = (u_{11}^{(5)},\ u_{12}^{(5)},\ u_{13}^{(5)},\ u_{14}^{(5)},\ u_{15}^{(5)},\ u_{16}^{(5)})$$
$$= (25,\ 60,\ 30,\ 80,\ 60,\ 50),$$

关于线路标准目标的局势效果序列

$$u^{(6)}=(u_{11}^{(6)},\ u_{12}^{(6)},\ u_{13}^{(6)},\ u_{14}^{(6)},\ u_{15}^{(6)},\ u_{16}^{(6)})$$
$$=(0.51,\ 0.75,\ 0.58,\ 0.7,\ 0.75,\ 0.63),$$

关于公害大小目标的局势效果序列

$$u^{(7)}=(u_{11}^{(7)},\ u_{12}^{(7)},\ u_{13}^{(7)},\ u_{14}^{(7)},\ u_{15}^{(7)},\ u_{16}^{(7)})$$
$$=(\text{大},\ \text{小},\ \text{很大},\ \text{很大},\ \text{很大},\ \text{大}),$$

关于安全目标的局势效果序列

$$u^{(8)}=(u_{11}^{(8)},\ u_{12}^{(8)},\ u_{13}^{(8)},\ u_{14}^{(8)},\ u_{15}^{(8)},\ u_{16}^{(8)})$$
$$=(\text{很差},\ \text{好},\ \text{差},\ \text{很好},\ \text{差},\ \text{好}),$$

关于综合系数目标的局势效果序列

$$u^{(9)}=(u_{11}^{(9)},\ u_{12}^{(9)},\ u_{13}^{(9)},\ u_{14}^{(9)},\ u_{15}^{(9)},\ u_{16}^{(9)})$$
$$=(2.25,\ 3,\ 2.5,\ 3.25,\ 3,\ 3),$$

关于施工难易目标的局势效果序列

$$u^{(10)}=(u_{11}^{(10)},\ u_{12}^{(10)},\ u_{13}^{(10)},\ u_{14}^{(10)},\ u_{15}^{(10)},\ u_{16}^{(10)})$$
$$=(\text{一般},\ \text{很难},\ \text{难},\ \text{最难},\ \text{很难},\ \text{难}).$$

将三个定性目标 7，8，10化为定量目标，取

$$u^{(7)}=(0.5,\ 0.33,\ 0.67,\ 0.67,\ 0.67,\ 0.5),$$
$$u^{(8)}=(0.67,\ 0.33,\ 0.5,\ 0.20,\ 0.5,\ 0.33),$$
$$u^{(10)}=(0.2,\ 0.6,\ 0.4,\ 0.85,\ 0.6,\ 0.4).$$

第四步：求 k 目标下局势效果序列的均值象，仍采用原来的记号，得

$$u^{(1)}=(1.66,\ 0.68,\ 1.17,\ 0.68,\ 0.68,\ 1.17),$$
$$u^{(2)}=(0.71,\ 1.26,\ 0.90,\ 1.24,\ 1.20,\ 0.69),$$
$$u^{(3)}=(2.36,\ 0.35,\ 1.58,\ 0.07,\ 0.07,\ 1.57),$$
$$u^{(4)}=(1.31,\ 0.48,\ 1.19,\ 0.48,\ 0.48,\ 2.08),$$
$$u^{(5)}=(0.49,\ 1.18,\ 0.59,\ 1.57,\ 1.18,\ 0.98),$$
$$u^{(6)}=(0.78,\ 1.15,\ 0.89,\ 1.08,\ 1.15,\ 0.97),$$
$$u^{(7)}=(0.89,\ 0.59,\ 1.20,\ 1.20,\ 1.20,\ 0.89),$$

$u^{(8)} = (1.60,\ 0.79,\ 1.19,\ 0.48,\ 1.19,\ 0.79)$,

$u^{(9)} = (0.80,\ 1.06,\ 0.88,\ 1.15,\ 1.06,\ 1.06)$,

$u^{(10)} = (0.39,\ 1.18,\ 0.79,\ 1.67,\ 1.18,\ 0.79)$.

第五步：由第四步结果，可得局势 s_{ij} 的效果向量 u_{ij}，$i=1$；$j=1,\ 2,\ \cdots,\ 6$.

$$u_{11} = (u_{11}^{(1)},\ u_{11}^{(2)},\ u_{11}^{(3)},\ u_{11}^{(4)},\ u_{11}^{(5)},\ u_{11}^{(6)},\ u_{11}^{(7)},\ u_{11}^{(8)},\ u_{11}^{(9)},\ u_{11}^{(10)})$$
$$= (1.66,\ 0.71,\ 2.36,\ 1.31,\ 0.49,\ 0.78,\ 0.89,\ 1.60,\ 0.80,\ 0.39),$$

$$u_{12} = (u_{12}^{(1)},\ u_{12}^{(2)},\ u_{12}^{(3)},\ u_{12}^{(4)},\ u_{12}^{(5)},\ u_{12}^{(6)},\ u_{12}^{(7)},\ u_{12}^{(8)},\ u_{12}^{(9)},\ u_{12}^{(10)})$$
$$= (0.68,\ 1.26,\ 0.35,\ 0.48,\ 1.18,\ 1.15,\ 0.59,\ 0.79,\ 1.06,\ 1.18),$$

$$u_{13} = (u_{13}^{(1)},\ u_{13}^{(2)},\ u_{13}^{(3)},\ u_{13}^{(4)},\ u_{13}^{(5)},\ u_{13}^{(6)},\ u_{13}^{(7)},\ u_{13}^{(8)},\ u_{13}^{(9)},\ u_{13}^{(10)})$$
$$= (1.17,\ 0.90,\ 1.58,\ 1.19,\ 0.59,\ 0.89,\ 1.20,\ 1.19,\ 0.88,\ 0.79),$$

$$u_{14} = (u_{14}^{(1)},\ u_{14}^{(2)},\ u_{14}^{(3)},\ u_{14}^{(4)},\ u_{14}^{(5)},\ u_{14}^{(6)},\ u_{14}^{(7)},\ u_{14}^{(8)},\ u_{14}^{(9)},\ u_{14}^{(10)})$$
$$= (0.68,\ 1.24,\ 0.07,\ 0.48,\ 1.57,\ 1.08,\ 1.20,\ 0.48,\ 1.15,\ 1.67),$$

$$u_{15} = (u_{15}^{(1)},\ u_{15}^{(2)},\ u_{15}^{(3)},\ u_{15}^{(4)},\ u_{15}^{(6)},\ u_{15}^{(5)},\ u_{15}^{(7)},\ u_{15}^{(8)},\ u_{15}^{(9)},\ u_{15}^{(10)})$$
$$= (0.68,\ 1.20,\ 0.07,\ 0.48,\ 1.18,\ 1.15,\ 1.20,\ 1.19,\ 1.06,\ 1.18),$$

$$u_{16} = (u_{16}^{(1)},\ u_{16}^{(2)},\ u_{16}^{(3)},\ u_{16}^{(4)},\ u_{16}^{(5)},\ u_{16}^{(6)},\ u_{16}^{(7)},\ u_{16}^{(8)},\ u_{16}^{(9)},\ u_{16}^{(10)})$$
$$= (1.17,\ 0.69,\ 1.57,\ 2.08,\ 0.98,\ 0.97,\ 0.89,\ 0.79,\ 1.06,\ 0.79).$$

第六步：求理想最优效果向量.

因为交通功能目标越强越好，所以

$$u_{i,j_0}^{(1)} = \max_{\substack{i=1\\ 1\leqslant j\leqslant 6}} \{u_{ij}^{(1)}\} = u_{11}^{(1)} = 1.66.$$

工程造价目标越低越好，所以

$$u_{i,j_4}^{(2)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(2)}\}=u_{16}^{(2)}=0.69.$$

拆迁费越少越好，所以

$$u_{i,j_5}^{(3)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(3)}\}=u_{11}^{(3)}=u_{15}^{(3)}=0.07.$$

交通量越大越好，所以

$$u_{i,j_6}^{(4)}=\max_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(4)}\}=u_{16}^{(4)}=2.08.$$

车速越高越好，所以

$$u_{i,j_7}^{(5)}=\max_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(5)}\}=u_{14}^{(5)}=1.57.$$

线路标准越高越好，所以

$$u_{i,j_8}^{(6)}=\max_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(6)}\}=u_{12}^{(6)}=u_{15}^{(6)}=1.15.$$

公害越小越好，所以

$$u_{i,j_9}^{(7)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(7)}\}=u_{12}^{(7)}=0.59.$$

越安全越好，所以

$$u_{i,j_{10}}^{(8)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(8)}\}=u_{14}^{(8)}=0.48.$$

综合系数越大越好，所以

$$u_{i,j_{11}}^{(9)}=\max_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(9)}\}=u_{14}^{(9)}=1.15.$$

施工越容易越好，所以

$$u_{i,j_{12}}^{(10)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{u_{ij}^{(10)}\}=u_{11}^{(10)}=0.39.$$

从而有想理最优效果向量

$$u_{i,j_*}=(u_{i,j_1}^{(1)},\ u_{i,j_2}^{(2)},\ u_{i,j_3}^{(3)},\ u_{i,j_4}^{(4)},\ u_{i,j_5}^{(5)},\ u_{i,j_6}^{(6)},\ u_{i,j_7}^{(7)},\ u_{i,j_8}^{(8)},\ u_{i,j_9}^{(9)},\ u_{i,j_{10}}^{(10)})$$

$$=(1.66,\ 0.69,\ 0.07,\ 2.08,\ 1.57,\ 1.15,\ 0.59,\ 0.48,\ 1.15,\ 0.39).$$

第七步：计算 u_{ij} 与 u_{i,j_1} 的灰色绝对关联度 ε_{ij}，$i=1$；$j=1,2,3,4,5,6$，得：

$$\varepsilon_{11}=0.91,\quad \varepsilon_{12}=0.53,\quad \varepsilon_{13}=0.62,$$
$$\varepsilon_{14}=0.53,\quad \varepsilon_{15}=0.53,\quad \varepsilon_{16}=0.58.$$

第八步：由 $\max\limits_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{\varepsilon_{ij}\}=\varepsilon_{11}=0.91$ 可知，u_{11}为次优效果向量，s_{11}为次优局势。即对于改建干道工程，分车道方案为可取的次优对策。

在例 9.3.1 中，我们对10个不同的决策目标是一视同仁的。而许多实际问题往往是对决策目标的重视程度不完全一样，也就是把其中的某些目标看得较为重，另一些目标的重要性相对低一些。这就需要在决策过程中对决策者个人的主观意愿进行适当考虑，使定量分析的结论与定性研究的意见形成互补，减少决策失误。

例9.3.2 对例 9.3.1 的改建干道工程，取目标 k 的权 η_k $(k=1,2,\cdots,10)$分别为

$$\eta_1=0.15,\quad \eta_2=0.15,\quad \eta_3=0.1,\quad \eta_4=0.1,\quad \eta_5=0.08,$$
$$\eta_6=0.08,\quad \eta_7=0.1,\quad \eta_8=0.08,\quad \eta_9=0.08,\quad \eta_{10}=0.08.$$

以 $\eta_k\cdot u^{(k)}$ 作为 k 目标下的局势效果序列，有

$$\eta_1\cdot u^{(1)}=0.15\cdot u^{(1)}=(0.249,\ 0.102,\ 0.1755,\ 0.102,\ 0.102,\ 0.1755),$$

$$\eta_2\cdot u^{(2)}=0.15\cdot u^{(2)}=(0.1065,\ 0.189,\ 0.135,\ 0.186,\ 0.18,\ 0.1035),$$

$$\eta_3\cdot u^{(3)}=0.1\cdot u^{(3)}=(0.236,\ 0.035,\ 0.158,\ 0.007,\ 0.007,\ 0.157),$$

$$\eta_4\cdot u^{(4)}=0.1\cdot u^{(4)}=(0.131,0.048,\ 0.119,0.048,\ 0.048,\ 0.208),$$

$$\eta_5\cdot u^{(5)}=0.08\cdot u^{(5)}=(0\ 0392,\ 0.0944,\ 0.0472,\ 0.1256,$$

$$0.0944,\ 0.0784),$$

$$\eta_6 \cdot u^{(6)} = 0.08 \cdot u^{(6)} = (0.0624,\ 0.092,\ 0.0712,\ 0.0864,\ 0.092,\ 0.0776),$$

$$\eta_7 \cdot u^{(7)} = 0.1 \cdot u^{(7)} = (0.089,\ 0.059,\ 0.12,\ 0.12,\ 0.12,\ 0.089),$$

$$\eta_8 \cdot u^{(8)} = 0.08 \cdot u^{(8)} = (0.128,\ 0.0632,\ 0.0952,\ 0.0384,\ 0.0952,\ 0.0632),$$

$$\eta_9 \cdot u^{(9)} = 0.08 \cdot u^{(9)} = (0.064,\ 0.0848,\ 0.0704,\ 0.092,\ 0.0848,\ 0.0848),$$

$$\eta_{10} \cdot u^{(10)} = 0.08 \cdot u^{(10)} = (0.0312,\ 0.0944,\ 0.0632,\ 0.1336,\ 0.0944,\ 0.0632).$$

类似于例9.3.1，取

$$\eta_1 \cdot u^{(1)}_{i \cdot j_1} = \max_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_1 \cdot u^{(1)}_{ij}\} = \eta_1 \cdot u^{(1)}_{11} = 0.249,$$

$$\eta_2 \cdot u^{(2)}_{i \cdot j_2} = \min_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_2 \cdot u^{(2)}_{ij}\} = \eta_2 \cdot u^{(2)}_{16} = 0.1035,$$

$$\eta_3 \cdot u^{(3)}_{i \cdot j_3} = \min_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_3 \cdot u^{(3)}_{ij}\} = \eta_3 \cdot u^{(3)}_{14} = \eta_3 \cdot u^{(3)}_{15} = 0.007,$$

$$\eta_4 \cdot u^{(4)}_{i \cdot j_4} = \max_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_4 \cdot u^{(4)}_{ij}\} = \eta_4 \cdot u^{(4)}_{16} = 0.208,$$

$$\eta_5 \cdot u^{(5)}_{i \cdot j_5} = \max_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_5 \cdot u^{(5)}_{ij}\} = \eta_5 \cdot u^{(5)}_{14} = 0.1256,$$

$$\eta_6 \cdot u^{(6)}_{i \cdot j_6} = \max_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_6 \cdot u^{(6)}_{ij}\} = \eta_6 \cdot u^{(6)}_{12} = \eta_6 \cdot u^{(6)}_{15} = 0.092,$$

$$\eta_7 \cdot u^{(7)}_{i \cdot j_7} = \min_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_7 \cdot u^{(7)}_{ij}\} = \eta_7 \cdot u^{(7)}_{12} = 0.059,$$

$$\eta_8 \cdot u^{(8)}_{i \cdot j_8} = \min_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_8 \cdot u^{(8)}_{ij}\} = \eta_8 \cdot u^{(8)}_{14} = 0.0384,$$

$$\eta_9 \cdot u^{(9)}_{i \cdot j_9} = \max_{\substack{i=1 \\ 1 \le j \le 6}} \{\eta_9 \cdot u^{(9)}_{ij}\} = \eta_9 \cdot u^{(9)}_{14} = 0.092,$$

$$\eta_{10}\cdot u_{i,j_*}^{(10)}=\min_{\substack{i=1\\1\leqslant j\leqslant 6}}\{\eta_{10}\cdot u_{ij}^{(10)}\}=\eta_{10}\cdot u_{11}^{(10)}=0.0312,$$

于是得目标加权理想局势效果向量

$$\begin{aligned}u_{i,j_*}&=(\eta_1u_{i,j_*}^{(1)},\ \eta_2u_{i,j_*}^{(2)},\eta_3u_{i,j_*}^{(3)},\ \eta_4u_{i,j_*}^{(4)},\ \eta_5u_{i,j_*}^{(5)},\ \eta_6u_{i,j_*}^{(6)},\\&\quad\eta_7u_{i,j_*}^{(7)},\ \eta_8u_{i,j_*}^{(8)},\ \eta_9u_{i,j_*}^{(9)},\ \eta_{10}u_{i,j_*}^{(10)})\\&=(0.249,\ 0.1035,\ 0.007,\ 0.208,\ 0.1256,\ 0.092,\\&\quad 0.059,\ 0.0384,\ 0.092,\ 0.0312).\end{aligned}$$

对应于局势$s_{ij}(i=1;j=1,\ 2,\ \cdots,6)$的目标加权局势效果向量分别为

$$\begin{aligned}u_{11}&=(\eta_1u_{11}^{(1)},\ \eta_2u_{11}^{(2)},\ \eta_3u_{11}^{(3)},\ \eta_4u_{11}^{(4)},\ \eta_5u_{11}^{(5)},\ \eta_6u_{11}^{(6)},\ \eta_7u_{11}^{(7)},\\&\quad\eta_8u_{11}^{(8)},\ \eta_9u_{11}^{(9)},\ \eta_{10}u_{11}^{(10)})\\&=(0.249,\ 0.1065,\ 0.236,\ 0.131,\ 0.0392,\ 0.0624,\\&\quad 0.089,\ 0.128,\ 0.064,\ 0.0312),\\u_{12}&=(\eta_1u_{12}^{(1)},\ \eta_2u_{12}^{(2)},\ \eta_3u_{12}^{(3)},\ \eta_4u_{12}^{(4)},\ \eta_5u_{12}^{(5)},\ \eta_6u_{12}^{(6)},\ \eta_7u_{12}^{(7)},\\&\quad\eta_8u_{12}^{(8)},\ \eta_9u_{12}^{(9)},\ \eta_{10}u_{12}^{(10)})\\&=(0.102,\ 0.189,\ 0.035,\ 0.048,\ 0.0944,\ 0.092,\\&\quad 0.059,\ 0.0632,\ 0.0848,\ 0.0944),\\u_{13}&=(\eta_1u_{13}^{(1)},\ \eta_2u_{13}^{(2)},\ \eta_3u_{13}^{(3)},\ \eta_4u_{13}^{(4)},\ \eta_5u_{13}^{(5)},\ \eta_6u_{13}^{(6)},\ \eta_7u_{13}^{(7)},\\&\quad\eta_8u_{13}^{(8)},\ \eta_9u_{13}^{(9)},\ \eta_{10}u_{13}^{(10)})\\&=(0.1755,\ 0.135,\ 0.158,\ 0.119,\ 0.0472,\ 0.0712,\\&\quad 0.12,\ 0.0952,\ 0.0704,\ 0.0632),\\u_{14}&=(\eta_1u_{14}^{(1)},\ \eta_2u_{14}^{(2)},\ \eta_3u_{14}^{(3)},\ \eta_4u_{14}^{(4)},\ \eta_5u_{14}^{(5)},\ \eta_6u_{14}^{(6)},\ \eta_7u_{14}^{(7)},\\&\quad\eta_8u_{14}^{(8)},\ \eta_9u_{14}^{(9)},\ \eta_{10}u_{14}^{(10)})\\&=(0.102,\ 0.186,\ 0.007,\ 0.048,\ 0.1256,\ 0.0864,\\&\quad 0.12,\ 0.0384,\ 0.092,\ 0.1336),\\u_{15}&=(\eta_1u_{15}^{(1)},\ \eta_2u_{15}^{(2)},\ \eta_3u_{15}^{(3)},\ \eta_4u_{15}^{(4)},\ \eta_5u_{15}^{(5)},\ \eta_6u_{15}^{(6)},\ \eta_7u_{15}^{(7)},\\&\quad\eta_8u_{15}^{(8)},\ \eta_9u_{15}^{(9)},\ \eta_{10}u_{15}^{(10)})\\&=(0.102,\ 0.18,\ 0.007,\ 0.048,\ 0.0944,\ 0.092,\end{aligned}$$

$$0.12,\ 0.0952,\ 0.0848,\ 0.0944),$$

$$u_{16}=(\eta_1u_{16}^{(1)},\ \eta_2u_{16}^{(2)},\ \eta_3u_{16}^{(3)},\ \eta_4u_{16}^{(4)},\ \eta_5u_{16}^{(5)},\ \eta_6u_{16}^{(6)},\ \eta_7u_{16}^{(7)},$$
$$\eta_8u_{16}^{(8)},\ \eta_9u_{16}^{(9)},\ \eta_{10}u_{16}^{(10)})$$
$$=(0.1755,\ 0.1035,\ 0.157,\ 0.208,\ 0.0784,\ 0.0776,$$
$$0.089,\ 0.0632,\ 0.0848,\ 0.0632).$$

计算 u_{1j} 与 $u_{i,j}$ 的灰色绝对关联度 ε_{ij}，$i=1$；$j=1$，2，3，4，5，6，得：

$$\varepsilon_{11}=0.97,\quad \varepsilon_{12}=0.67,\quad \varepsilon_{13}=0.73,$$
$$\varepsilon_{14}=0.66,\quad \varepsilon_{15}=0.66,\quad \varepsilon_{16}=0.79.$$

由 $\max\limits_{1<j<6}\{\varepsilon_{1j}\}=\varepsilon_{11}=0.97$，可知 u_{11} 为次优效果向量，s_{11} 为次优局势.结论仍是分车道方案为改建干道工程的可取次优对策.

§9.4 灰色发展决策

灰色发展决策根据局势的发展趋势或未来行为作决定. 它并不特别看重某一局势在目前的效果，而注重随着时间推移局势效果的变化情况. 灰色发展决策可用于科技、教育、经济、社会、人口、自然生态等中、长期发展规划以及重大工程项目的决策和城市建设规划决策. 用发展的眼光看问题，合理布局，可避免世界上许多城市建筑群今天建、明天拆、反复拆迁所造成的人力、物力上的巨大浪费.

定义9.4.1 设 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 为事件集，$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$ 为对策集，

$$S=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)\,|\,a_i\in A,\ b_j\in B\}$$

为局势集，则称

$$u_{ij}^{(k)}=(u_{ij}^{(k)}(1),\ u_{ij}^{(k)}(2),\ \cdots,\ u_{ij}^{(k)}(h))$$

为 s_{ij} 在 k 目标下的局势效果时间序列.

在此之前，我们讨论的都是某一固定时刻的静止的局势．在定义9.4.1中，则是随着时间推移，局势效果不断变化的情形．

命题9.4.1 设 s_{ij} 在 k 目标下的局势效果时间序列为

$$u_{ij}^{(k)}=(u_{ij}^{(k)}(1),\ u_{ij}^{(k)}(2),\ \cdots,\ u_{ij}^{(k)}(l)),$$

$\hat{a}_{ij}^{(k)}=[a_{ij}^{(k)}\quad b_{ij}^{(k)}]^T$ 为 $u_{ij}^{(k)}$ 之 GM(1,1)模型参数的最小二乘估计，则 $u_{ij}^{(k)}$ 之 GM(1，1)时间响应累减还原式为

$$\hat{a}_{ij}^{(k)}(l+1)=[1-\exp(a_{ij}^{(k)})]\left[u_{ij}^{(k)}(1)-\frac{b_{ij}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}\right]\exp(-a_{ij}^{(k)}\cdot l).$$

定义9.4.2 设 k 目标下对应于局势 s_{ij} 的局势效果时间序列 $u_{ij}^{(k)}$ 之 GM(1，1)时间响应累减还原式为

$$\hat{a}_{ij}^{(k)}(l+1)=[1-\exp(a_{ij}^{(k)})]\left[u_{ij}^{(k)}(1)-\frac{b_{ij}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}\right]\exp(-a_{ij}^{(k)}\cdot l),$$

当 k 目标为效果值越大越好的目标时，

1° 若 $\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ i<j\le m}}\{-a_{ij}^{(k)}\}=-a_{i_0j_0}^{(k)}$，

则称 $s_{i_0j_0}$ 为 k 目标下的发展系数最优局势；

2° 若 $\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ i<j\le m}}\{\hat{a}_{ij}^{(k)}(h+l)\}=\hat{a}_{i_0j_0}^{(k)}(h+l)$，

则称 $s_{i_0j_0}$ 为 k 目标下的预测最优局势．

类似地，可以定义效果值越小越好或适中为好之目标的发展系数最优局势和预测最优局势．对于效果值越小越好的目标，只需将定义 9.4.2 之 1° 和 2° 中的“max”换成“min”；当 k 目标为效果值适中为好的目标，可先取发展系数和预测值的平均值，然后按发展系数或预测值与相应平均值的接近程度来定义最优局势．

定义9.4.3 条件如定义 9.4.2，若 k 目标为效果值适中为好的目标，

1° 当

$$\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\left\{\frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(k)}-a_{ij}^{(k)}\right\}$$

$$=\frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(k)}-a_{i_0j_0}^{(k)}$$

时，称 $s_{i_0j_0}$ 为 k 目标下的发展系数最优局势；

2° 当

$$\min_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\left\{a_{ij}^{(k)}(h+l)-\frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(h+l)\right\}$$

$$=a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l)-\frac{1}{n+m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^{(k)}(h+l)$$

时，称 $s_{i_0j_0}$ 为 k 目标下的预测最优局势。

例9.4.1 某工业企业技术改造方案的灰色发展决策.

解：设技术改造为事件 a_1，则事件集 $A=\{a_1\}$；逐年局部改造为决策 b_1，分阶段改造为决策 b_2，一次性改造为决策 b_3，则对策集 $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，于是有局势集

$$S=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)\mid a_i\in A,\ b_j\in B\}=\{s_{11},\ s_{12},\ s_{13}\}.$$

目标 1 为提高企业效益，效果值为利税，单位为万元. 在目标 1 下，对应于 s_{ij} 的局势效果时间序列为

$$u_{11}^{(1)}=(u_{11}^{(1)}(1),\ u_{11}^{(1)}(2),\ u_{11}^{(1)}(3),\ u_{11}^{(1)}(4))$$
$$=(32,\ 43.5,\ 58.1,\ 70.20),$$
$$u_{12}^{(1)}=(u_{12}^{(1)}(1),\ u_{12}^{(1)}(2),\ u_{12}^{(1)}(3),\ u_{12}^{(1)}(4))$$
$$=(23.2,\ 39,\ 69.4,\ 82.6),$$
$$u_{13}^{(1)}=(u_{13}^{(1)}(1),\ u_{13}^{(1)}(2),\ u_{13}^{(1)}(3),\ u_{13}^{(1)}(4))$$
$$=(12,\ 13.5,\ 81,\ 102.1).$$

$u_{ij}^{(1)}$ 的 GM(1, 1)模型参数序列 $\hat{a}_{ij}^{(1)}=[a_{ij}^{(1)}\quad b_{ij}^{(1)}]^T$ $(i=1;j=1,2,3)$的最小二乘估计分别为

$$\hat{a}_{11}^{(1)} = [a_{11}^{(1)} \quad b_{11}^{(1)}]^T = [-0.23 \quad 32.15]^T,$$
$$\hat{a}_{12}^{(1)} = [a_{12}^{(1)} \quad b_{12}^{(1)}]^T = [-0.32 \quad 29.87]^T,$$
$$\hat{a}_{13}^{(1)} = [a_{13}^{(1)} \quad b_{13}^{(1)}]^T = [-0.58 \quad 18.45]^T.$$

目标 1 是效果值越大越好的目标，因为

$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{-a_{1j}^{(1)}\} = 0.58 = -a_{13}^{(1)},$$

所以 s_{13} 为目标 1 下的发展系数最优局势.

若要进一步考虑预测值，由

$$\hat{x}_{11}^{(1)}(4+l) = [1-\exp(a_{11}^{(1)})]\left[x_{11}^{(1)}(1) - \frac{b_{11}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}}\right]\exp[-a_{11}^{(1)}(4+l-1)]$$
$$\approx 35.296\, e^{0.23(4+l-1)},$$
$$\hat{x}_{12}^{(1)}(4+l) = [1-\exp(a_{12}^{(1)})]\left[x_{12}^{(1)}(1) - \frac{b_{12}^{(1)}}{a_{12}^{(1)}}\right]\exp[-a_{12}^{(1)}(4+l-1)]$$
$$= 31.916 e^{0.32(4+l-1)},$$
$$\hat{x}_{13}^{(1)}(4+l) = [1-\exp(a_{13}^{(1)})]\left[x_{13}^{(1)}(1) - \frac{b_{13}^{(1)}}{a_{13}^{(1)}}\right]\exp[-a_{13}^{(1)}(4+l-1)]$$
$$= 19.281 e^{0.58(4+l-1)}.$$

取 $l=1$，得

$$\hat{x}_{11}^{(1)}(5) = 88.57, \quad \hat{x}_{12}^{(1)}(5) = 114.79, \quad \hat{x}_{13}^{(1)}(5) = 196.20,$$
$$\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{\hat{x}_{1j}^{(1)}(5)\} = 196.20 = \hat{x}_{13}^{(1)}(5),$$

所以 s_{13} 为目标 1 的预测最优局势. 从长远的、发展的观点出发，该企业应进行一次性改造.

在例 9.4.1中，我们得到的发展系数最优局势与预测最优局势是一致的. 有时，也可能出现发展系数最优局势与预测最优局势不一致的情形，但定理 9.4.1 告诉我们，发展系数最优局势与预测最优局势最终必趋于一致.

定理9.4.1 设 k 目标为效果值越大越好的目标，$s_{t_0 j_0}$ 为 k 目标下的发展系数最优局势，即

$$-a_{i_0j_0}^{(k)} = \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \{-a_{ij}^{(k)}\},$$

$a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l+1)$ 为 $s_{i_0j_0}$ 所对应的局势效果预测值，则必存在 $l_0>0$，使

$$a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l_0+1) = \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \{a_{ij}^{(k)}(h+l_0+1)\},$$

即在充分远的将来，$s_{i_0j_0}$ 为预测最优局势.

证明：1° 当 k 目标下的局势效果时间序列皆为增长序列时，则任意 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$j\in\{1, 2, \cdots, m\}$，有 $-a_{ij}^{(k)}>0$. 当 $i\neq i_0$，$j\neq j_0$ 至少有一个成立时，$-a_{i_0j_0}^{(k)}>-a_{ij}^{(k)}$，故存在 $\delta_{ij}^{(k)}>0$，使

$$-a_{i_0j_0}^{(k)} = -a_{ij}^{(k)} + \delta_{ij}^{(k)},$$

令 $$c_{ij}^{(k)} = [1-\exp(a_{ij}^{(k)})]\left[a_{ij}^{(k)}(1) - \frac{b_{ij}^{(k)}}{a_{ij}^{(k)}}\right],$$

于是
$$\begin{aligned} a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l+1) &= c_{i_0j_0}^{(k)}\exp[-a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l)] \\ &= c_{i_0j_0}^{(k)}\exp[-a_{ij}^{(k)}(h+l)+\delta_{ij}^{(k)}(h+l)] \\ &= c_{ij}^{(k)}\exp[-a_{ij}^{(k)}(h+l)]\cdot\frac{c_{i_0j_0}^{(k)}}{c_{ij}^{(k)}} \\ &\quad\cdot\exp[\delta_{ij}^{(k)}(h+l)] \\ &= a_{ij}^{(k)}(h+l+1)\cdot\frac{c_{i_0j_0}^{(k)}}{c_{ij}^{(k)}}\cdot\exp[\delta_{ij}^{(k)}(h+l)], \end{aligned}$$

因为 $\delta_{ij}^{(k)}>0$，所以存在 l_0，使

$$\frac{c_{i_0j_0}^{(k)}}{c_{ij}^{(k)}}\cdot\exp[\delta_{ij}^{(k)}(h+l_0)]>1,$$

从而 $$a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l_0+1)>a_{ij}^{(k)}(h+l_0+1).$$

由 $i\in\{1, 2, \cdots, n\}$，$j\in\{1, 2, \cdots, m\}$ 的任意性，得

$$a_{i_0j_0}^{(k)}(h+l_0+1) = \max_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \{a_{ij}^{(k)}(h+l_0+1)\}.$$

2° 当 k 目标下的局势效果时间序列皆为衰减序列时，则任

意 $i\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 和 $j\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}$，有 $-a_{ij}^{(k)}<\eta$，同样由 $-a_{i_1j}^{(k)}>-a_{ij}^{(k)}$，有 $\delta_{ij}^{(k)}>0$，使

$$-a_{i_1j}^{(k)}=-a_{ij}^{(k)}+\delta_{ij}^{(k)},$$

其余讨论同1°. ∎

对于效果值越小越好或适中为好的目标，可以证明定理9.4.1的结论同样成立. 细心的读者可能会发现，定理中并未述及局势效果时间序列中既有增长序列又有衰减序列的情形. 事实上，对于效果值越大越好的目标，衰减的局势效果时间序列是无需考虑的；对于效果值越小越好的目标，讨论中应先排除增长的局势效果时间序列；而对于效果值适中为好的目标，亦可根据情况仅讨论其中增长或衰减局势效果时间序列中的一种.

§9.5 灰色统计决策

灰色统计决策适用于由多个决策单元——不同的部门、单位或个人——进行集体决策的情形，其作用是综合各决策单元的意见对不同决策方案进行评估，作出决择.

定义9.5.1 设 $a_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为决策单元，$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 为决策群体，$b_j(j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为决策方案，$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$ 为决策方案集，$x_{ij}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为 i 决策单元对 j 方案的量化评价值，$f^k(\cdot)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ s)$ 为 k 灰类的白化权函数，$\eta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 为 i 决策单元的决策权，$\sum_{i=1}^{n}\eta_i=1$，则称

$$\sigma_j^k=\frac{\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i}{\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{n}f^k(x_{ij})\cdot\eta_i},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ m;\ k=1,2,\cdots,s$$

为 j 方案属于 k 灰类的决策系数.

这里，各决策单元的决策权可能相等，即 $\eta_i=\frac{1}{n}$，$i=1, 2, \cdots, n$，也可能不相等.

定义9.5.2 称

$$\sigma_j=(\sigma_j^1, \sigma_j^2, \cdots, \sigma_j^s), \quad j=1, 2, \cdots, m$$

为 j 方案的决策系数向量.

定义9.5.3 若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_j^k\}=\sigma_j^{k^*}$，则称 j 方案属于灰类 k^*.

灰色统计决策可按与§6.5类似的步骤进行.

例9.5.1 某城市"科技兴市"方案的灰色统计决策.

某城市组织有关专家拟订了三个各具特色的"依靠科技进步，振兴×××市"的实施方案，记为 b_1，b_2，b_3，于是，决策方案集 $B=\{b_1, b_2, b_3\}$. 现组织五个专家小组对已拟订出的三个方案进行评估，即有决策单元 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，决策群体 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$，决策群体 A 对决策方案 B 的量化评价矩阵

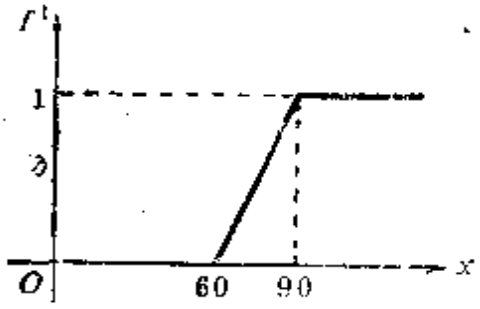
$$C=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 & 60 & 40 \\ 60 & 50 & 50 \\ 75 & 70 & 60 \\ 90 & 80 & 80 \\ 50 & 70 & 60 \end{pmatrix}.$$

试按优、可行、基本可行、不可行四个灰类作统计评估决策.

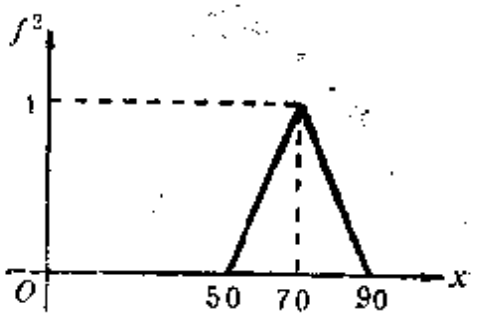
解：灰类 k 的白化权函数 $f^k(\cdot)$，$k=1, 2, 3, 4$，如图9.5.1所示.

由图9.5.1可得：

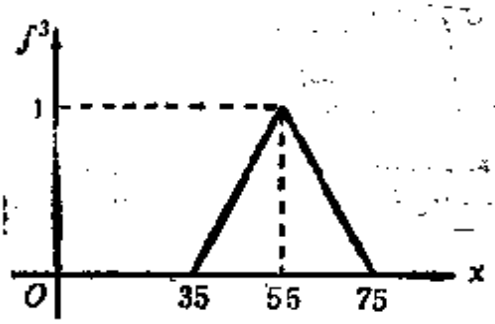
$$f^1(x)=\begin{cases} 0, & x<60 \\ \dfrac{x-60}{30}, & 60\leqslant x\leqslant 90 \\ 1, & x>90 \end{cases};$$



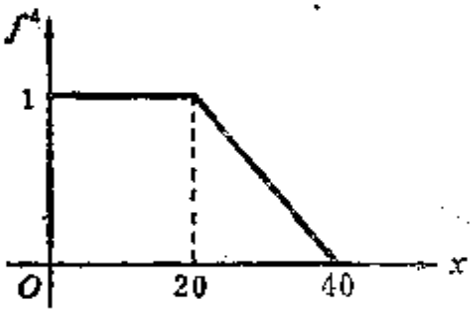
(a) 优方案灰类



(b) 可行方案灰类



(c) 基本可行方案灰类



(d) 不可行方案灰类

图 9.5.1

$$f^2(x)=\begin{cases}0, & x<50\\ \dfrac{x-50}{20}, & 50\leqslant x\leqslant 70\\ \dfrac{90-x}{20}, & 70<x\leqslant 90\\ 0, & x>90\end{cases};$$

$$f^3(x)=\begin{cases}0, & x<35\\ \dfrac{x-35}{20}, & 35\leqslant x\leqslant 55\\ \dfrac{75-x}{20}, & 55<x\leqslant 75\\ 0, & x>75\end{cases};$$

$$f^4(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ \dfrac{40-x}{20}, & 20<x\leqslant 40\\ 0, & x>40\end{cases}.$$

设决策单元 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 的决策权分别为 $\eta_1=0.25$，$\eta_2=0.25$，$\eta_3=0.2$，$\eta_4=0.2$，$\eta_5=0.1$.

则对于方案1，

当 $k=1$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f^1(x_{i1})\eta_i &= f^1(x_{11})\eta_1+f^1(x_{21})\eta_2+f^1(x_{31})\eta_3\\ &\quad +f^1(x_{41})\eta_4+f^1(x_{51})\eta_5\\ &=f^1(80)\times 0.25+f^1(60)\times 0.25+f^1(75)\\ &\quad \times 0.2+f^1(90)\times 0.2+f^1(50)\times 0.1\\ &=\frac{20}{30}\times 0.25+0\times 0.25+\frac{15}{30}\times 0.2+1\\ &\quad \times 0.2+0\times 0.1=0.47.\end{aligned}$$

当 $k=2$ 时，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} f^2(x_{i1})\eta_i &= f^2(x_{11})\eta_1+f^2(x_{21})\eta_2+f^2(x_{31})\eta_3+f^2(x_{41})\eta_4\\ &\quad +f^2(x_{51})\eta_5\\ &=f^2(80)\times 0.25+f^2(60)\times 0.25+f^2(75)\\ &\quad \times 0.2+f^2(90)\times 0.2+f^2(50)\times 0.1\\ &=\frac{10}{20}\times 0.25+\frac{10}{20}\times 0.25+\frac{15}{20}\times 0.2+0\times 0.2\\ &\quad +0\times 0.1=0.4.\end{aligned}$$

当 $k=3$ 时，

$$\sum_{i=1}^{5} f^3(x_{i1})\eta_i = f^3(x_{11})\eta_1 + f^3(x_{21})\eta_2 + f^3(x_{31})\eta_3 + f^3(x_{41})\eta_4 + f^3(x_{61})\eta_5$$

$$= f^3(80)\times 0.25 + f^3(60)\times 0.25 + f^3(75)\times 0.2 + f^3(90)\times 0.2 + f^3(50)\times 0.1$$

$$= 0\times 0.25 + \frac{15}{20}\times 0.25 + 0\times 0.2 + 0\times 0.2 + \frac{15}{20}\times 0.1 = 0.2625.$$

当 $k=4$ 时，

$$\sum_{i=1}^{5} f^4(x_{i1})\eta_i = f^4(x_{11})\eta_1 + f^4(x_{21})\eta_2 + f^4(x_{31})\eta_3 + f^4(x_{41})\eta_4 + f^4(x_{61})\eta_6$$

$$= f^4(80)\times 0.25 + f^4(60)\times 0.25 + f^4(75)\times 0.2 + f^4(90)\times 0.2 + f^4(50)\times 0.1$$

$$= 0\times 0.25 + 0\times 0.25 + 0\times 0.2 + 0\times 0.2 + 0\times 0.1 = 0.$$

故有 $\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i1})\eta_i = 0.47 + 0.4 + 0.2625 + 0 = 1.1325.$

$$\sigma_1 = (\sigma_1^1,\ \sigma_1^2,\ \sigma_1^3,\ \sigma_1^4)$$

$$= \left(\frac{\sum_{i=1}^{5} f^1(x_{i1})\eta_i}{\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i1})\eta_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{5} f^2(x_{i1})\eta_i}{\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i1})\eta_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{5} f^3(x_{i1})\eta_i}{\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i1})\eta_i},\ \frac{\sum_{i=1}^{5} f^4(x_{i1})\eta_i}{\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i1})\eta_i} \right)$$

$= (0.42,\ 0.35,\ 0.23,\ 0)$.

对于方案2，同法计算得：

$$\sum_{i=1}^{5} f^1(x_{i2})\eta_i = 0.23, \qquad \sum_{i=1}^{5} f^2(x_{i2})\eta_i = 0.525,$$

$$\sum_{i=1}^{5} f^3(x_{i2})\eta_i = 0.45, \qquad \sum_{i=1}^{5} f^4(x_{i2})\eta_i = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i2})\eta_i = 1.205,$$

$$\sigma_2 = (\sigma_2^1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2^3,\ \sigma_2^4) = (0.19,\ 0.44,\ 0.37,\ 0).$$

对于方案3，同法计算得：

$$\sum_{i=1}^{5} f^1(x_{i3})\eta_i = 0.13, \qquad \sum_{i=1}^{5} f^2(x_{i3})\eta_i = 0.25,$$

$$\sum_{i=1}^{5} f^3(x_{i3})\eta_i = 0.475, \qquad \sum_{i=1}^{5} f^4(x_{i3})\eta_i = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{5} f^k(x_{i3})\eta_i = 0.855,$$

$$\sigma_3 = (\sigma_3^1,\ \sigma_3^2,\ \sigma_3^3,\ \sigma_3^4) = (0.15,\ 0.29,\ 0.56,\ 0).$$

因为

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 4}\{\sigma_1^k\} = 0.42 = \sigma_1^1,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 4}\{\sigma_2^k\} = 0.44 = \sigma_2^2,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 4}\{\sigma_3^k\} = 0.56 = \sigma_3^3,$$

所以方案1为优方案，方案2为可行方案，方案3为基本可行方案．因三个“科技兴市”方案皆非不可行方案，大家建议，以方案1为基础，将方案2和方案3的可取之处融入方案1，制订出更为满意的“科技兴市”方案．

在统计决策中，根据具体场合，可赋于决策群体、决策方案

和决策灰类以不同的意义. 如企业进行产品决策，决策群体为企业各有关单位，即不同的科、室、车间等；决策方案指不同的产品；决策灰类表示不同的投资强度. 在教学决策中，决策群体可以是各有关班级或教研室及教学管理机构；决策方案指不同课程；决策灰类表示不同的学时. 在农业生产决策中，决策群体可以是村民小组、农业技术推广组织或农业生产管理机构；决策方案指不同的作物；决策灰类表示不同的播种面积，等等.

§9.6 灰色聚类决策

灰色聚类决策用于按照多个不同的决策指标对决策对象进行综合评价，以确定决策对象是否满足给定的取舍准则. 灰色聚类决策常用于人的分类决策. 如按照接受能力、理解能力以及发展潜力将学生分类，以便于因材施教；按照不同的标准对职工、技术干部和管理干部进行综合考评，以确定其是否符合某种职位的聘任或晋升条件等等.

定义9.6.1 设有 n 个决策对象，m 个决策指标，s 个不同的灰类，x_{ij} $(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m)$ 为决策对象 i 关于决策指标 j 的量化评价值，$f_j^k(\cdot)(j=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, s)$ 为 j 指标 k 子类白化权函数，$\eta_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 为决策指标 j 的综合决策权，$\sum_{j=1}^{m}\eta_j=1$，则称

$$\sigma_i^k=\sum_{j=1}^{m}f_j^k(x_{ij})\cdot\eta_j$$

为决策对象 i 属于 k 灰类的决策系数.

定义9.6.2 称

$$\sigma_i=(\sigma_i^1,\ \sigma_i^2,\ \cdots,\ \sigma_i^s),\ i=1,\ 2,\ \cdots,m$$

为决策对象 i 的决策系数向量.

定义9.6.3 若 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_i^k\}=\sigma_i^{k^*}$，则称决策对象 i 属于灰类 k^*.

在实际问题中，常常会遇到多个决策对象同属于某一个决策灰类，而该灰类所能容纳的对象个数又有一定限额的情况，此时可根据决策系数的大小决定取舍.

定义9.6.4 设 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_{i_1}^k\}=\sigma_{i_1}^{k^*}$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_{i_2}^k\}=\sigma_{i_2}^{k^*}$，$\sigma_{i_1}^{k^*}>\sigma_{i_2}^{k^*}$，则称在灰类 k^* 中，决策对象 i_1 优于决策对象 i_2.

定义9.6.5 设 $\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_{i_1}^k\}=\sigma_{i_1}^{k^*}$，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_{i_1}^k\}=\sigma_{i_2}^{k^*}$，…，$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\{\sigma_{i_1}^k\}=\sigma_{i_l}^{k^*}$，且

$$\sigma_{i_1}^{k^*}>\sigma_{i_2}^{k^*}>\cdots>\sigma_{i_l}^{k^*}.$$

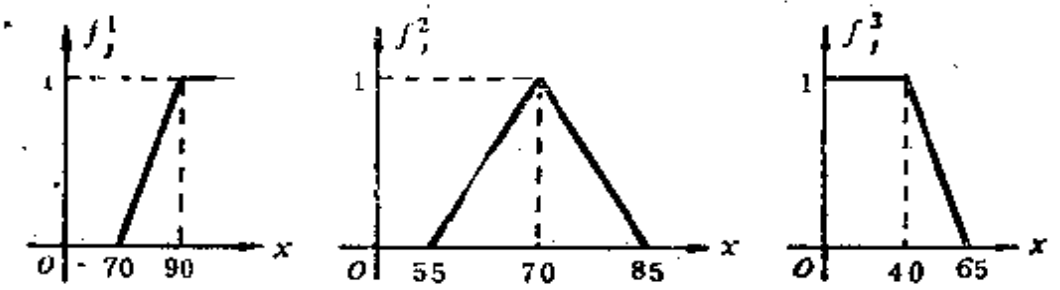
若决策灰类 k^* 容纳的对象个数为 l_1，则称 i_1，i_2，…，i_{l_1} 为 k^* 灰类的取入对象，称 i_{l_1+1}，i_{l_1+2}，…，i_l 为 k^* 灰类的候补对象.

例9.6.1 某单位现有具备中级职称的科技人员6人. 他们关于思想品德、工作量、业务水平、科研成果与论著、外文 5 个评价指标的量化评价值 $x_{ij}(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6;\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ 如矩阵 C 中所示.

$$C=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25}\\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35}\\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} & x_{45}\\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & x_{55}\\ x_{61} & x_{62} & x_{63} & x_{64} & x_{65} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 85 & 100 & 98 & 100 & 90\\ 88 & 100 & 60 & 10 & 74\\ 90 & 68 & 63 & 10 & 45\\ 87 & 89 & 63 & 15 & 56\\ 70 & 80 & 79 & 40 & 82\\ 75 & 76 & 77 & 32 & 79 \end{pmatrix}$$

试按胜任、基本称职、不称职作聚类决策. 若上级下达两个晋职指标，确定应晋升职称的人员.

解：设 5 个决策指标关于 3 个灰类的白化权函数如图 9.6.1 所示.



(a) 胜任灰类　　(b) 基本称职灰类　　(c) 不称职灰类

图 9.6.1

由图 9.6.1 可知

$$f_j^1(x)=\begin{cases}0, & x<70\\ \dfrac{x-70}{20}, & 70\leqslant x\leqslant 90\\ 1, & x>90\end{cases}$$

$$f_j^2(x)=\begin{cases}0, & x<55\\ \dfrac{x-55}{15}, & 55\leqslant x\leqslant 70\\ \dfrac{85-x}{15}, & 70<x\leqslant 85\\ 0, & x>85\end{cases}$$

$$f_j^3(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 40\\ \dfrac{65-x}{25}, & 40<x\leqslant 65\\ 0, & x>65\end{cases}$$

这里 $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$，即不同指标的白化权函数完全相同.

再设各个指标的决策权分别为

$\eta_1=0.22,\ \eta_2=0.22,\ \eta_3=0.22,\ \eta_4=0.20,\ \eta_5=0.14.$

则有

$$\sigma_1^1 = \sum_{j=1}^{5} f_j^1(x_{1j}) \cdot \eta_j$$

$$= f_1^1(x_{11}) \cdot \eta_1 + f_2^1(x_{12}) \cdot \eta_2 + f_3^1(x_{13}) \cdot \eta_3 + f_4^1(x_{14}) \cdot \eta_4 + f_5^1(x_{15}) \cdot \eta_5$$

$$= f_1^1(85) \times 0.22 + f_2^1(100) \times 0.22 + f_3^1(98) \times 0.22 + f_4^1(100) \times 0.20 + f_5^1(90) \times 0.14$$

$$= \frac{15}{20} \times 0.22 + 1 < 0.22 + 1 \times 22 + 1 \times 0.20 + 1 \times 0.14$$

$$= 0.945,$$

$$\sigma_1^2 = \sum_{j=1}^{5} f_j^2(x_{1j}) \cdot \eta_j$$

$$= f_1^2(x_{11}) \cdot \eta_1 + f_2^2(x_{12}) \cdot \eta_2 + f_3^2(x_{13}) \cdot \eta_3 + f_4^2(x_{14}) \cdot \eta_4 + f_5^2(x_{15}) \cdot \eta_5$$

$$= f_1^2(85) \times 0.22 + f_2^2(100) \times 0.22 + f_3^2(98) \times 0.22 + f_4^2(100) \times 0.20 + f_5^2(90) \times 0.14 = 0,$$

$$\sigma_1^3 = \sum_{j=1}^{5} f_j^3(x_{1j}) \cdot \eta_j$$

$$= f_1^3(x_{11}) \cdot \eta_1 + f_2^3(x_{12}) \cdot \eta_2 + f_3^3(x_{13}) \cdot \eta_3 + f_4^3(x_{14}) \cdot \eta_4 + f_5^3(x_{15}) \cdot \eta_5$$

$$= f_1^3(85) \times 0.22 + f_2^3(100) \times 0.22 + f_3^3(98) \times 0.22 + f_4^3(100) \times 0.20 + f_5^3(90) \times 0.14 = 0,$$

$$\therefore \quad \sigma_1 = (\sigma_1^1, \ \sigma_1^2, \ \sigma_1^3) = (0.945, \ 0, \ 0).$$

类似地，可以算出

$$\sigma_2 = (\sigma_2^1, \ \sigma_2^2, \ \sigma_2^3) = (0.446, \ 0.176, \ 0.244),$$

$$\sigma_3 = (\sigma_3^1, \ \sigma_3^2, \ \sigma_3^3) = (0.22, \ 0.308, \ 0.312),$$

$$\sigma_4 = (\sigma_4^1, \ \sigma_4^2, \ \sigma_4^3) = (0.396, \ 0.127, \ 0.268),$$

$$\sigma_5 = (\sigma_5^1, \ \sigma_5^2, \ \sigma_5^3) = (0.293, \ 0.409, \ 0.20),$$

$$\sigma_0 = (\sigma_0^1,\ \sigma_0^2,\ \sigma_0^3) = (0.297,\ 0.452,\ 0.20).$$

由

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_1^k\} = 0.945 = \sigma_1^1,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_2^k\} = 0.446 = \sigma_2^1,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_3^k\} = 0.312 = \sigma_3^3,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_4^k\} = 0.396 = \sigma_4^1,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_5^k\} = 0.409 = \sigma_5^2,$$

$$\max_{1\leqslant k\leqslant 3}\{\sigma_6^k\} = 0.452 = \sigma_6^2,$$

知，编号为1，2，4的科技人员属于胜任灰类；编号为5，6者属于基本称职灰类；编号3的不称职.

又由于$\sigma_1^1 = 0.945 > \sigma_2^1 = 0.446 > \sigma_4^1 = 0.396$，所以若只有两个晋职名额，应晋升职称的是编号为1，2的人员，4号虽属于胜任灰类，可以考虑晋职，但因名额有限，只能作为候补.

§9.7 单目标化局势决策

定义9.7.1 设 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$ 为事件集，$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m\}$ 为对策集，

$$S = A\times B = \{s_{ij} = (a_i,\ b_j) \mid a_i\in A,\ b_j\in B\}$$

为局势集，$u_{ij}^{(k)}(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为局势 $s_{ij}\in S$ 在目标 k 下的效果样本值，则

1° 称

$$r_{ij}^{(k)} = \frac{u_{ij}^{(k)}}{\max\limits_i \max\limits_j\{u_{ij}^{(k)}\}}$$

为上限效果测度；

2° 称

$$r_{ij}^{(k)}=\frac{\min_i \min_j\{u_{ij}^{(k)}\}}{u_{ij}^{(k)}}$$

为下限效果测度；

3° 称

$$r_{ij}^{(k)}=\frac{u_{i,j_0}^{(k)}}{u_{i,j_0}^{(k)}+\left|u_{ij}^{(k)}-u_{i,j_0}^{(k)}\right|}$$

为适中效果测度，其中 $u_{i,j_0}^{(k)}$ 为 k 目标下指定的效果适中值.

上限效果测度反映效果样本值与最大效果样本值的偏离程度，下限效果测度反映效果样本值与最小效果样本值的偏离程度，适中效果测度反映效果样本值与指定的效果适中值的偏离程度. 在单目标化局势决策中，对于希望效果样本值“越大越好”、“越多越好”一类的目标，可采用上限效果测度；对于希望效果样本值“越小越好”、“越少越好”一类目标，可采用下限效果测度；对于希望效果样本值“既不太大又不太小”、“既不太多又不太少”这一类目标，可采用适中效果测度.

命题9.7.1 定义 9.7.1 中给出的三种效果测度 $r_{ij}^{(k)}(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m;\ k=1, 2, \cdots, s)$ 满足以下条件：

1° $r_{ij}^{(k)}$ 无量纲；

2° $r_{ij}^{(k)} \in [0, 1]$；

3° 效果越理想，$r_{ij}^{(k)}$ 越大.

定义9.7.2 称

$$R^{(k)}=(r_{ij}^{(k)})=\begin{bmatrix} r_{11}^{(k)} & r_{12}^{(k)} & \cdots & r_{1m}^{(k)} \\ r_{21}^{(k)} & r_{22}^{(k)} & \cdots & r_{2m}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1}^{(k)} & r_{n2}^{(k)} & \cdots & r_{nm}^{(k)} \end{bmatrix}$$

为局势集 S 在 k 目标下的一致效果测度矩阵.

定义9.7.3 设 $s_{ij} \in S$，称

$$r_{ij}=(r_{ij}^{(1)}, r_{ij}^{(2)}, \cdots, r_{ij}^{(s)})$$

为局势 s_{ij} 的一致效果测度向量.

定义9.7.4 设 $\eta_k(k=1, 2, \cdots, s)$ 为目标 k 的决策权，$\sum_{k=1}^{s}\eta_k=1$，则称 $\sum_{k=1}^{s}\eta_k\cdot r_{ij}^{(k)}$ 为局势 s_{ij} 的综合效果测度，仍记为 r_{ij}，即

$$r_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\cdot r_{ij}^{(k)}.$$

定义9.7.5 称

$$R=(r_{ij})=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

为综合效果测度矩阵.

定义9.7.6 若 $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{r_{ij}\}=r_{ij_1}$，则称 b_{j_1} 为事件 a_i 的最优对策；

若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{r_{ij}\}=r_{i_1j}$，则称 a_{i_1} 为与对策 b_j 相应的最优事件；

若 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\{r_{ij}\}=r_{i_1j_1}$，则称 $s_{i_1j_1}$ 为最优局势.

单目标化局势决策可按下列步骤进行：

第一步：根据事件集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 和对策集 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 构造局势集

$$S=\{s_{ij}=(a_i, b_j)\mid a_i\in A, b_j\in B\};$$

第二步：确定决策目标 $k=1, 2, \cdots, s$；

第三步：对目标 $k=1, 2, \cdots, s$，求相应的效果样本矩阵

$$U^{(k)}=(u_{ij}^{(k)})=\begin{bmatrix} u_{11}^{(k)} & u_{12}^{(k)} & \cdots & u_{1m}^{(k)} \\ u_{21}^{(k)} & u_{22}^{(k)} & \cdots & u_{2m}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ u_{n1}^{(k)} & u_{n2}^{(k)} & \cdots & u_{nm}^{(k)} \end{bmatrix}$$

第四步：求 k 目标下的一致效果测度矩阵

$$R^{(k)}=(r_{ij}^{(k)})=\begin{bmatrix} r_{11}^{(k)} & r_{12}^{(k)} & \cdots & r_{1m}^{(k)} \\ r_{21}^{(k)} & r_{22}^{(k)} & \cdots & r_{2m}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r_{n1}^{(k)} & r_{n2}^{(k)} & \cdots & r_{nm}^{(k)} \end{bmatrix}$$

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ s$；

第五步：确定各目标的决策权 $\eta_1,\ \eta_2,\ \cdots,\ \eta_s$；

第六步：由 $r_{ij}=\sum_{k=1}^{s}\eta_k\cdot r_{ij}^{(k)}$ 得综合效果测度矩阵

$$R=(r_{ij})=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nm} \end{bmatrix}$$

第七步：确定最优局势 $s_{i_0j_0}$。

例9.7.1 有三个经济区，除每个经济区都要考虑发展种植业外，拟在“林业”、“畜牧业”、“工副业”几个方面进行适当分工，使各有发展的侧重点，以达到最优效果。主要决策目标有3个：目标1为人均收入；目标2是每百元收入占用资金；目标3是每百元收入占用的劳动力。

我们用 $a_i(i=1,\ 2,\ 3)$ 表示不同的经济区，$a_1=1$ 区，$a_2=2$ 区，$a_3=3$ 区；用 $b_j(j=1,\ 2,\ 3)$ 表示不同的作业项目，$b_1=$ 林业，$b_2=$ 畜牧业，$b_3=$ 工副业，则有事件集 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，对策集 $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，局势集

$$S=A\times B=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)\mid a_i\in A,\ b_j\in B\}.$$

设 $u_{ij}^{(k)}$ 为局势 s_{ij} 在目标 k 下的效果样本值，$i=1,\ 2,\ 3$；$j=1,\ 2,\ 3$；$k=1,\ 2,\ 3$.

关于目标1的效果样本矩阵

$$U^{(1)}=(u_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix} u_{11}^{(1)} & u_{12}^{(1)} & u_{13}^{(1)} \\ u_{21}^{(1)} & u_{22}^{(1)} & u_{23}^{(2)} \\ u_{31}^{(1)} & u_{32}^{(1)} & u_{33}^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.55 & 22.4 & 3.9 \\ 0.9 & 4.4 & 14 \\ 1.14 & 5.3 & 4.9 \end{bmatrix},$$

其中单位为百元；

关于目标 2 的效果样本矩阵

$$U^{(2)}=(u_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix} u_{11}^{(2)} & u_{12}^{(2)} & u_{13}^{(2)} \\ u_{21}^{(2)} & u_{22}^{(2)} & u_{23}^{(2)} \\ u_{31}^{(2)} & u_{32}^{(2)} & u_{33}^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 3 & 3.5 \\ 0.6 & 2 & 4 \\ 0.1 & 0.9 & 5 \end{bmatrix},$$

其中单位为百元；

关于目标 3 的效果样本矩阵

$$U^{(3)}=(u_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix} u_{11}^{(3)} & u_{12}^{(3)} & u_{13}^{(3)} \\ u_{21}^{(3)} & u_{22}^{(3)} & u_{23}^{(3)} \\ u_{31}^{(3)} & u_{32}^{(3)} & u_{33}^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.3 & 1.8 & 1 \\ 0.7 & 1 & 1.4 \\ 0.9 & 1.4 & 0.8 \end{bmatrix},$$

其中单位为人.

由于目标 1 是人均收入，希望越大越好，故采用上限效果测度，因

$$u_{i,j_0}^{(1)}=\max_{1\leqslant i\leqslant 3}\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\{u_{ij}^{(1)}\}=22.4,$$

由 $r_{ij}^{(1)}=u_{ij}^{(1)}/u_{i,j_0}^{(1)}=u_{ij}^{(1)}/22.4$，可得目标 1 下的一致效果测度矩阵

$$R^{(1)}=(r_{ij}^{(1)})=\begin{bmatrix} r_{11}^{(1)} & r_{12}^{(1)} & r_{13}^{(1)} \\ r_{21}^{(1)} & r_{22}^{(1)} & r_{23}^{(1)} \\ r_{31}^{(1)} & r_{32}^{(1)} & r_{33}^{(1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.025 & 1 & 0.174 \\ 0.040 & 0.196 & 0.625 \\ 0.051 & 0.237 & 0.219 \end{bmatrix}.$$

目标 2 是每百元收入占用的流动资金，希望越少越好，故采用下限效果测度，因

$$u_{i,j_0}^{(2)}=\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\min_{1\leqslant j\leqslant 3}\{u_{ij}^{(2)}\}=0.1,$$

由 $r_{ij}^{(2)}=u_{i,j_0}^{(2)}/u_{ij}^{(2)}=0.1/u_{ij}^{(2)}$，可得目标 2 下的一致效果测度矩阵

$$R^{(2)}=(r_{ij}^{(2)})=\begin{bmatrix} r_{11}^{(2)} & r_{12}^{(2)} & r_{13}^{(2)} \\ r_{21}^{(2)} & r_{22}^{(2)} & r_{23}^{(2)} \\ r_{31}^{(2)} & r_{32}^{(2)} & r_{33}^{(2)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.125 & 0.033 & 0.029 \\ 0.167 & 0.050 & 0.025 \\ 1 & 0.111 & 0.020 \end{bmatrix}.$$

目标3是每百元收入占用的劳动力，根据我国有关政策和当地实际情况，要求适当安排劳动就业，故采用适中效果测度，取适中值 $u_{i,j_0}^{(3)}=1$，由

$$r_{ij}^{(3)}=\frac{u_{ij_0}^{(3)}}{u_{i,j_0}^{(3)}+|u_{ij}^{(3)}-u_{ij_0}^{(3)}|}=\frac{1}{1+|u_{ij}^{(3)}-1|}$$

可得目标3下的一致效果测度矩阵

$$R^{(3)}=(r_{ij}^{(3)})=\begin{bmatrix} r_{11}^{(3)} & r_{12}^{(3)} & r_{13}^{(3)} \\ r_{21}^{(3)} & r_{22}^{(3)} & r_{23}^{(3)} \\ r_{31}^{(3)} & r_{32}^{(3)} & r_{33}^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.588 & 0.556 & 1 \\ 0.769 & 1 & 0.714 \\ 0.909 & 0.714 & 0.833 \end{bmatrix}.$$

取目标1，2，3的决策权分别为 $\eta_1=0.5$，$\eta_2=0.35$，$\eta_3=0.15$，由 $r_{ij}=\sum_{k=1}^{3}\eta_k\cdot r_{ij}^{(k)}$ 可得综合效果测度矩阵

$$R=(r_{ij})=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.144 & 0.595 & 0.247 \\ 0.194 & 0.266 & 0.428 \\ 0.512 & 0.264 & 0.241 \end{bmatrix}.$$

对于 $i=1$，$\max\limits_{1\le j\le 3}\{r_{1j}\}=0.595=r_{12}$，对应局势

$$s_{12}=(a_1,\ b_2)=(1\text{区，畜牧业}),$$

即1区应着重发展畜牧业.

对于 $i=2$，$\max\limits_{1\le j\le 3}\{r_{2j}\}=0.428=r_{23}$，对应局势

$$s_{23}=(a_2,\ b_3)=(2\text{区，工副业}),$$

即2区应着重发展工副业.

对于 $i=3$，$\max\limits_{1\le j\le 3}\{r_{3j}\}=0.512=r_{31}$，对应局势

$$s_{31}=(a_3,\ b_1)=(3\text{区，林业}),$$

即3区应着重于发展林业.

进一步由 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}\{r_{ij}\}=0.595=r_{12}$ 知,

$$s_{12}=(a_1,\ b_2)=(1\text{区},\ \text{畜牧})$$

为最优局势，即在三个经济区的三种作业项目中，应优先在1区发展畜牧业.

§9.8 灰色层次决策

定义9.8.1 称具有相近决策意向的群体为一个决策层.

一般将参与决策的人群分为群众层、专家层、领导层，分别记为 L_1，L_2，L_3.

定义9.8.2 1° 职责范围较小、决策信息较分散、人数较多的人群称为群众层;

2° 担负技术责任和掌握决策信息相对集中、人数中等的层次称为专家层;

3° 负有立法职责、决策信息较为一致、人数较少的层次称为领导层.

定义9.8.3 综合不同层次的决策意向而获得最优决策的过程称为灰色层次决策;按照定义9.8.2将参与决策的人群分为L_1，L_2，L_3三个层次进行决策称为三级灰色层次决策.

在三级灰色层次决策中，常用灰色统计来反映群众层的决策意向，故亦称 L_1 为灰色统计决策层;专家则习惯于以发展的眼光看问题，其决策意向往往用 GM(1，1)预测值或 GM(1，1) 发展系数来反映，所以称 L_2 为灰色发展决策层;领导层通常要全面权衡现有条件与法定条件，采用灰色聚类作为决策手段,因此 L_3 也称为灰色聚类决策层.

三级灰色层次决策可按下列步骤进行:

第一步: 将局势集 $S=\{s_{ij}=(a_i,\ b_j)|a_i\in A,\ b_j\in B\}$ 中元

素按字典式排序.若 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$, 则

$$S=\{s_d \mid d=1, 2, \cdots, nm\}.$$

第三步：按§9.5所述方法，求出局势 s_d 属于 k 灰类的统计决策系数 σ_d^k ($d=1, 2, \cdots, nm$; $k=1, 2, \cdots, s$)，从而有统计决策系数向量

$$\sigma_d=(\sigma_d^1, \sigma_d^2, \cdots, \sigma_d^s), \quad d=1, 2, \cdots, nm.$$

第三步：对局势 s_d 在不同目标下的效果样本时间序列作一致化处理①，进而求出综合效果测度时间序列

$$r_d=(r_d(1), r_d(2), \cdots, r_d(n_0)), \quad d=1, 2, \cdots, nm$$

用最小二乘法估计出相应的 GM(1, 1) 发展系数 $-a_d$, $d=1, 2, \cdots, nm$.

第四步：按§9.6所述方法② 及与第二步中相同的灰类划分，求出局势 s_d 属于 k 灰类的灰色聚类决策系数 δ_d^k, $d=1, 2, \cdots, nm$; $k=1, 2, \cdots, s$，得灰色聚类决策系数向量

$$\delta_d=(\delta_d^1, \delta_d^2, \cdots, \delta_d^s), \quad d=1, 2, \cdots, nm.$$

第五步：求 L_1, L_2 的联合决策，令

$$\omega=(\omega^1, \omega^2, \cdots, \omega^s)$$

$$=(-a_1, -a_2, \cdots, -a_{nm})\times\begin{bmatrix} \sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \cdots & \sigma_1^s \\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_2^s \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{nm}^1 & \sigma_{nm}^2 & \cdots & \sigma_{nm}^s \end{bmatrix},$$

ω 为 L_1, L_2 的联合决策向量.

第六步：求 L_1, L_2 与 L_3 的联合决策，对于 $d=1, 2, \cdots, nm$，计算 δ_d 与 ω 的灰色关联度 $\gamma(\omega, \delta_d)$. 设

① 参照§9.7

② 这里应将局势 s_{ij} 作为§9.6中的决策对象，把第三步中的目标看作§9.6中的决策指标。

$$\max\{\gamma(\omega,\ \delta_d)\}=\gamma(\omega,\ \delta_{d^*}),$$

则 s_{d^*} 即为由三级灰色层次决策所得的最优局势.

例9.8.1 某工业企业技术改造方案的三级灰色层次决策.

第一步：局势集 S 如例 9.4.1 所示，即

$$S=\{s_{11},\ s_{12},\ s_{13}\},$$

按字典式排序有

$$S=\{s_1,\ s_2,\ s_3\},$$

此处，$n=1$，$m=3$，$nm=3$.

第二步：设灰色统计决策层由五个车间组成，按照人数多少，五个车间的决策权分别为 $\eta_1=0.25$，$\eta_2=0.25$，$\eta_3=0.2$，$\eta_4=0.2$，$\eta_5=0.1$. 各车间对不同局势 $s_d(d=1,\ 2,\ 3)$ 的量化评价矩阵

$$C=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 80 & 60 & 40 \\ 60 & 50 & 50 \\ 75 & 70 & 60 \\ 90 & 80 & 80 \\ 50 & 70 & 60 \end{pmatrix}.$$

四个评估灰类优、可行、基本可行、不可行之白化权函数分别为①：

$$f^1(x)=\begin{cases} 0, & x<60 \\ \dfrac{x-60}{30}, & 60\leqslant x\leqslant 90 \\ 1, & x>90 \end{cases};$$

$$f^2(x)=\begin{cases} 0, & x<50 \\ \dfrac{x-50}{20}, & 50\leqslant x\leqslant 70 \\ \dfrac{90-x}{20}, & 70<x\leqslant 90 \\ 0, & x>90 \end{cases};$$

① 参见图9.5.1.

$$f^3(x)=\begin{cases}0, & x<35\\ \dfrac{x-35}{20}, & 35\leqslant x\leqslant 55\\ \dfrac{75-x}{20}, & 55<x\leqslant 75\\ 0, & x>75\end{cases};$$

$$f^4(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\leqslant x\leqslant 20\\ \dfrac{40-x}{20}, & 20<x\leqslant 40\\ 0, & x>40\end{cases}$$

由 $$\sigma_d^k=\frac{\sum_{t=1}^{5} f^k(x_{td})\cdot\eta_t}{\sum_{k=1}^{4}\sum_{t=1}^{5} f^k(x_{td})\cdot\eta_t},\quad d=1,2,3;\ k=1,2,3,4$$

得 $\sigma_1=(\sigma_1^1,\ \sigma_1^2,\ \sigma_1^3,\ \sigma_1^4)=(0.42,\ 0.35,\ 0.23,\ 0)$,

$\sigma_2=(\sigma_2^1,\ \sigma_2^2,\ \sigma_2^3,\ \sigma_2^4)=(0.19,\ 0.44,\ 0.37,\ 0)$,

$\sigma_3=(\sigma_3^1,\ \sigma_3^2,\ \sigma_3^3,\ \sigma_3^4)=(0.15,\ 0.29,\ 0.56,\ 0)$.

第三步：设有产值、利税、改造投资、生产成本四个目标，局势 $s_d(d=1,\ 2,\ 3)$ 关于上述四个目标的综合效果测度时间序列分别为

$$\begin{aligned}r_1&=(r_1(1),\ r_1(2),\ r_1(3),\ r_1(4))\\&=(0.32,\ 0.44,\ 0.58,\ 0.70),\\ r_2&=(r_2(1),\ r_2(2),\ r_2(3),\ r_2(4))\\&=(0.23,\ 0.39,\ 0.69,\ 0.83),\\ r_3&=(r_3(1),\ r_3(2),\ r_3(3),\ r_3(4))\\&=(0.12,\ 0.14,\ 0.81,\ 0.96).\end{aligned}$$

$r_d(d=1,2,3)$ 的 GM(1, 1) 参数序列的最小二乘估计分别为

$$\hat{a}_1=[a_1 \quad b_1]^T=[-0.23 \quad 0.3215]^T,$$
$$\hat{a}_2=[a_2 \quad b_2]^T=[-0.32 \quad 0.2987]^T,$$
$$\hat{a}_3=[a_3 \quad b_3]^T=[-0.55 \quad 0.1974]^T,$$

相应的发展系数为

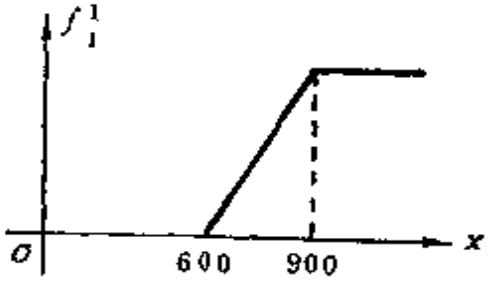
$$-a_1=0.23, \quad -a_2=0.32, \quad -a_3=0.55.$$

第四步：取局势 s_1，s_2，s_3 为决策对象，将第三步中的目标产值、利税、改造投资、生产成本作为这里的决策指标。

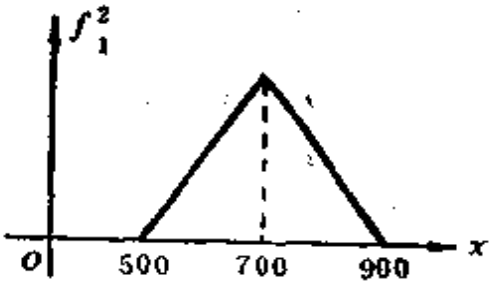
设局势 s_1，s_2，s_3 关于上述四个指标的量化评价值矩阵为

$$D=\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 420 & 51 & 26 & 0.67 \\ 874 & 93 & 30 & 0.61 \\ 1035 & 124 & 38 & 0.58 \end{bmatrix}.$$

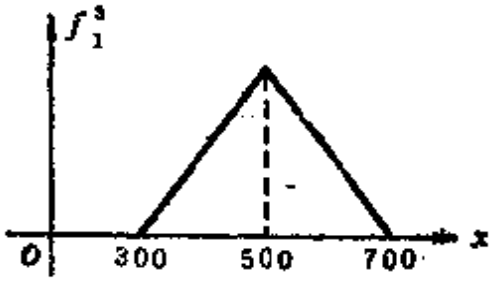
j 指标 k 子类白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ $(j=1, 2, 3, 4;\ k=1, 2, 3, 4)$ 如图 9.8.1～图 9.8.4 所示。



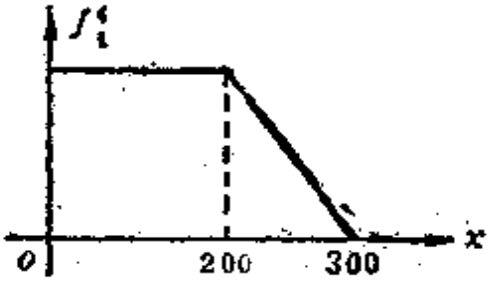
(a) 优灰类



(b) 可行灰类

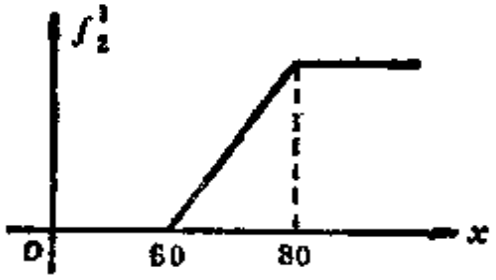


(c) 基本可行灰类

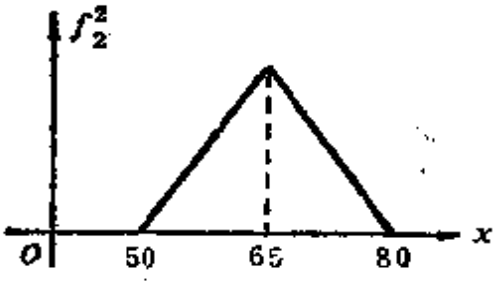


(d) 不可行灰类

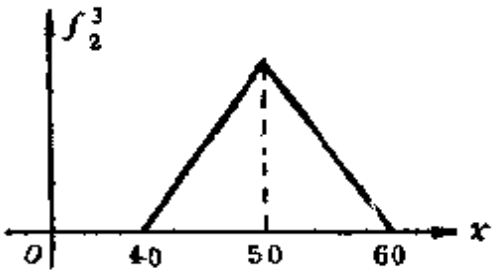
图 9.8.1 关于产值指标的白化权函数



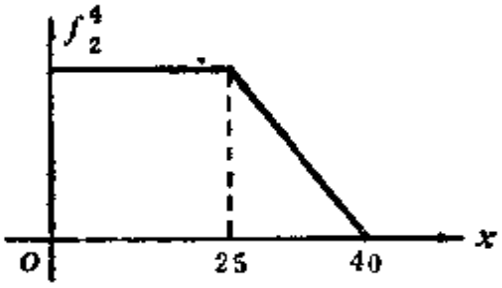
(a) 优灰类



(b) 可行灰类

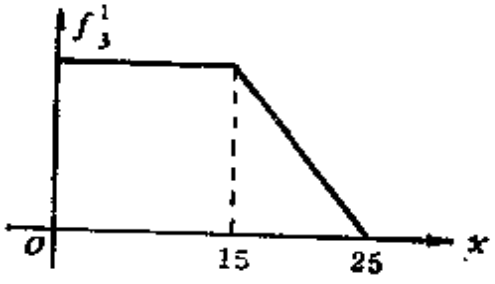


(c) 基本可行灰类

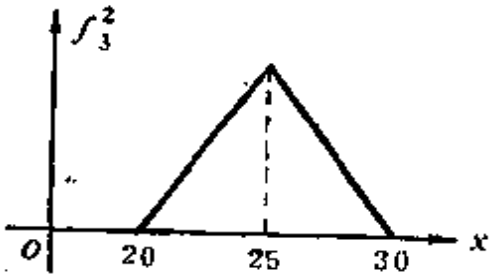


(d) 不可行灰类

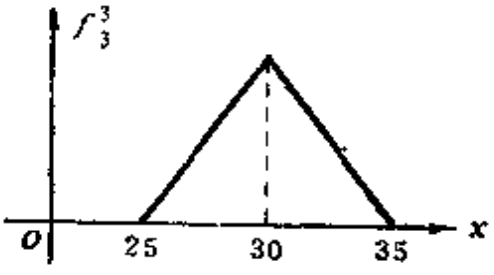
图 9.8.2 关于利税指标的白化权函数



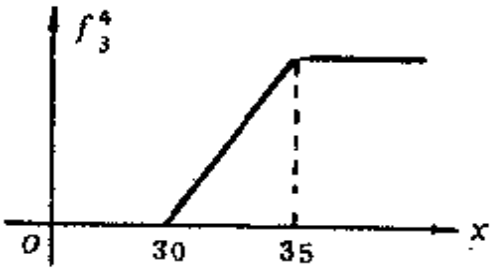
(a) 优灰类



(b) 可行灰类

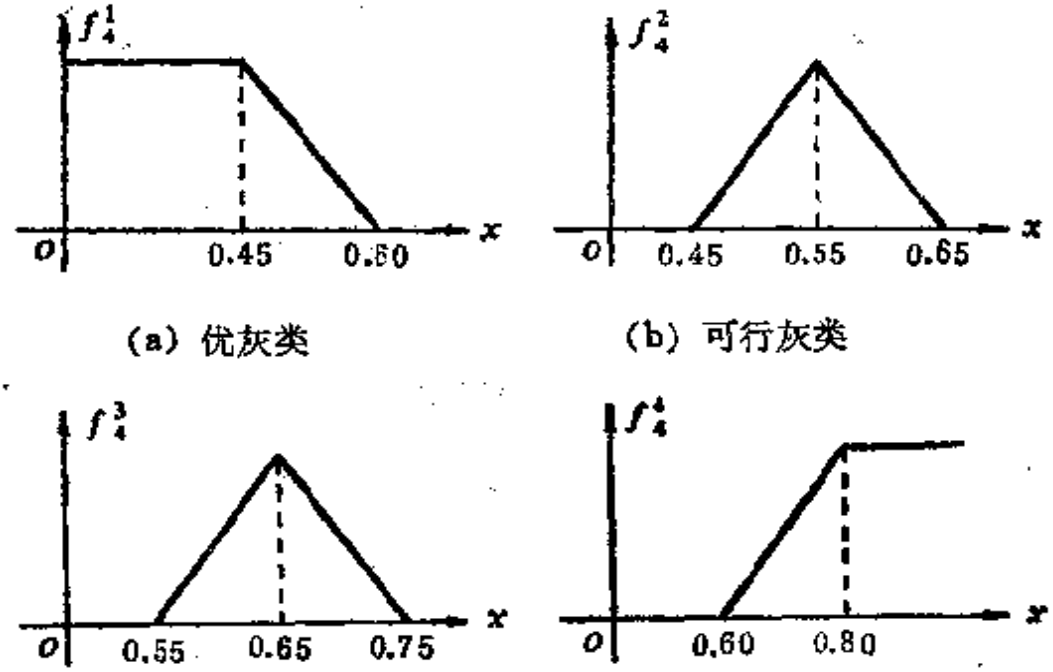


(c) 基本可行灰类



(d) 不可行灰类

图 9.8.3 关于改造投资指标的白化权函数



(a) 优灰类　　(b) 可行灰类

(c) 基本可行灰类　　(d) 不可行灰类

图 9.8.4　关于生产成本指标的白化权函数

由以上四图不难写出 j 指标 k 子类白化权函数 $f_j^k(\cdot)$ $(j=1, 2, 3, 4;\ k=1, 2, 3, 4)$的分段表达式，再设产值、利税、改造投资、生产成本四个指标的决策权分别为

$$\xi_1=0.3,\quad \xi_2=0.3,\quad \xi_3=0.2,\quad \xi_4=0.2,$$

从而可求出灰色聚类决策系数

$$\delta_d^k=\sum_{j=1}^{4} f_j^k(y_{dj})\cdot\xi_j,\quad d=1, 2, 3;\ k=1, 2, 3, 4$$

$$\delta_1=(\delta_1^1, \delta_1^2, \delta_1^3, \delta_1^4)=(0, 0.18, 0.65, 0.07),$$

$$\delta_2=(\delta_2^1, \delta_2^2, \delta_2^3, \delta_2^4)=(0.57, 0.12, 0.32, 0.01),$$

$$\delta_3=(\delta_3^1, \delta_3^2, \delta_3^3, \delta_3^4)=(0.63, 0.14, 0.06, 0.2).$$

第五步：求群众层 L_1 与专家层 L_2 的联合决策向量.

$$(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)\times\begin{bmatrix}\sigma_1^1 & \sigma_1^2 & \sigma_1^3 & \sigma_1^4\\ \sigma_2^1 & \sigma_2^2 & \sigma_2^3 & \sigma_2^4\\ \sigma_3^1 & \sigma_3^2 & \sigma_3^3 & \sigma_3^4\end{bmatrix}$$

$$= (0.23,\ 0.32,\ 0.55) \times \begin{bmatrix} 0.42 & 0.35 & 0.23 & 0 \\ 0.19 & 0.44 & 0.37 & 0 \\ 0.15 & 0.29 & 0.56 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= (0.2399,\ 0.3808,\ 0.4793,\ 0),$$

$$\therefore\quad \omega = (\omega^1,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \omega^4) = (0.2399,\ 0.3808,\ 0.4793,\ 0).$$

第六步：求 L_1，L_2 与 L_3 的联合决策. 计算 $\delta_d (d = 1,\ 2,\ 3)$ 与 ω 的灰色关联度，得

$$\gamma(\omega,\ \delta_1) = 0.59672,$$

$$\gamma(\omega,\ \delta_2) = 0.61725,$$

$$\gamma(\omega,\ \delta_3) = 0.43475.$$

由 $\max\{\gamma(\omega,\ \delta_d)\} = 0.61725 = \gamma(\omega,\ \delta_2)$ 知，s_2 为三级层次决策最优局势，故应进行分阶段改造. 这是综合了 L_1，L_2，L_3 三个层次的意见之后所得的结果. 如果仅从某一层次的角度去看，它不一定是最优的. 比如从群众层的决策向量看，s_2 为可行方案；从专家层的决策系数看，s_2 的发展系数居中，也不是最优方案；只有领导层认为分阶段改造是最优方案.

第十章　灰色规划

§10.1　灰色规划概言

规划实质上属于决策范畴，主要研究在一定约束条件下，如何使目标达到最优．规划理论所研究的问题，概括起来主要有以下几种：

1°　生产安排问题：在有限资源条件下，确定生产产品的品种、数量，使产值或利润最大；

2°　科研管理问题：在经费一定的条件下，如何分配各类课题的经费额度，各个课题应由哪些人员承担，使科研效率、效益最高；

3°　军事指挥问题：有限的作战部队，如何部署，才能最有效地打击、消灭敌人，取得战争的胜利；

4°　农业区划问题：对于不同的土壤、气候、资源条件，如何选择不同的经济模式，确定各种作物的种植面积，使总的效益最大；

5°　工业布局、城市规划问题：工业如何分布，城市如何发展，对整个国民经济最为有利；

6°　运输问题：在物资调配网点中，如何决定产地和销地之间的运输量，既满足需要，又使得运费最少；

7°　库存问题：在一定库存条件下，确定存储物资的品种、数量、期限，使存储效益最高；

8°　配料问题：在既定的工艺、质量等指标下，确定各种原料

的用量，使成本最小；

9° 落料问题：整材下料时，如何使废料最少、材料利用率最高或配套数最大；

10° 其它问题：如怎样分配广告投资，确定宣传手段，使宣传效果最佳；在一定要求下，如何安排各班次值班人数，用人最少等等.

在上述问题中，如果约束条件与目标函数都是线性的，就称该问题为线性规划问题. 当目标函数或约束条件为任何非线性函数时，相应的问题则称为非线性规划问题. 如果是解决某件事"做"还是"不做"或是约束条件中出现"或者这样、或者那样"之类的条件，我们将"做"、"或者这样"记为1，将"不做"、"或者那样"记为0，则此类问题中仅用到0和1两个变量，故称为0－1规划. 其中线性规划是运筹学中研究较早、发展较快、应用较广、方法较为成熟的一个重要分支. 但是，普通的线性规划、非线性规划和0－1规划都存在如下的问题：

1° 皆是静态规划，不能反映约束条件随时间变化的情况；

2° 当规划模型或约束条件中出现灰数时，处理不便；

3° 从理论上讲定义在凸集上的凸函数是有解的，而实际计算中往往因技巧、技术问题使求解过程难以进行下去.

灰色系统的思想和建模方法，可使上述问题得到一定程度的解决. 本章主要研究灰色线性规划、灰色0－1规划和灰色非线性规划.

§10.2 灰色预测型线性规划

定义10.2.1 设a_{ij}，b_i，$c_j(i=1, 2, \cdots, n;\ j=1, 2, \cdots, m)$均为常数，$x_j(j=1, 2, \cdots, m)$为未知变量，称

$$\max(\min)S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_n \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots,\ x_m \geqslant 0 \end{cases}$$

为线性规划问题的一般数学模型，其中

$$S = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m$$

称为目标函数，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_2 \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \leqslant (=,\ \geqslant) b_n \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ \cdots,\ x_m \geqslant 0 \end{cases}$$

称为约束条件.

定义10.2.2 称

$$\max S = CX,$$
$$\begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为线性规划问题的标准形式. 其中

$$C = (c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_m),$$
$$X = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_m)^T,$$
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

$b = (b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)^T$ 且 $b_i \geqslant 0,\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$.

定义10.2.3 称

$$\max\ S = C(\otimes)X,$$

$$\begin{cases} A(\otimes)X = b(\otimes) \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为灰色线性规划问题.

定义10.2.4 对于定义10.2.3中的灰色线性规划问题，将其中的$C(\otimes)$，$A(\otimes)$先行白化，设

$$\bar{C} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_m),$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}, & \cdots & \bar{a}_{1m} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}, & \cdots & \bar{a}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2}, & \cdots & \bar{a}_{nm} \end{bmatrix},$$

并根据$b_i(\otimes)$$(i = 1, 2, \cdots, n)$的历史资料

$$(b_i(1), b_i(2), \cdots, b_i(s)),$$

建立GM(1，1)模型，求出其在$s+k$时的预测值$\hat{b}_i(s+k)$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 记

$$\hat{b} = (\hat{b}_1(s+k), \hat{b}_2(s+k), \cdots, \hat{b}_n(s+k)).$$

称

$$\max S = \bar{C}X,$$

$$\begin{cases} \bar{A}X = \hat{b} \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为灰色预测型线性规划问题.

对于灰色预测型线性规划问题，可以按照一般线性规划方法进行求解.

例10.2.1 某厂生产甲、乙两种产品. 甲产品每件需用2.5～3.5个劳动日，耗电3～5千瓦时，煤7～11吨；乙产品每件需用8～12个劳动日，耗电3.5～6.5千瓦时，煤3～5吨. 甲产品每件可获利润600～800元，乙产品每件可获利润900～1500元. 该厂有可调配动劳力300人，日供煤计划360吨，日供电数据如下表所示：

年份	1986	1987	1988	1989
日供电量(千瓦时)	168	174	180	190

问1990年、1991年应如何安排甲、乙两种产品的日产量，使利润最大？

解：设甲、乙两种产品的产量分别为 x_1，x_2，则有灰色线性规划问题如下：

$$\max S = c_1(\otimes)x_1 + c_2(\otimes)x_2,$$

$$\begin{cases} \otimes_{11}x_1 + \otimes_{12}x_2 \leqslant b_1(\otimes) \\ \otimes_{21}x_1 + \otimes_{22}x_2 \leqslant b_2 = 360 \\ \otimes_{31}x_1 + \otimes_{32}x_2 \leqslant b_3 = 300 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

其中 $c_1(\otimes) \in [600,\ 800]$，$c_2(\otimes) \in [900,\ 1500]$，

$\otimes_{11} \in [3,\ 5]$，$\otimes_{12} \in [3.5,\ 6.5]$，

$\otimes_{21} \in [7,\ 11]$，$\otimes_{22} \in [3,\ 5]$，

$\otimes_{31} \in [2.5,\ 3.5]$，$\otimes_{32} \in [8,\ 12]$.

将目标函数和约束条件中的灰元作均值白化，得

$$\bar{C} = (\bar{c}_1,\ \bar{c}_2) = (700,\ 1200),$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 9 & 4 \\ 3 & 10 \end{bmatrix},$$

$$(b_1(1),\ b_1(2),\ b_1(3),\ b_1(4)) = (168,\ 174,\ 180,\ 190)$$

的 GM(1，1)时间响应式为

$$\begin{cases} \hat{b}_1^{(1)}(k+1) = 3829.125e^{0.0442k} - 3661.125 \\ \hat{b}_1(k+1) = \hat{b}_1^{(1)}(k+1) - \hat{b}_1^{(1)}(k). \end{cases}$$

由此可得

$$\hat{b}_1(5) \approx 198 \quad (1990年),$$

$$\hat{b}_1(6) \approx 207 \quad (1991年),$$

从而可写出1990年规划模型

$$\max S = 700x_1 + 1200x_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leqslant 198 \\ 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

此为两个变量的线性规划问题，可用图解法求其最优解. 该问题的可行域如图10.2.1所示.

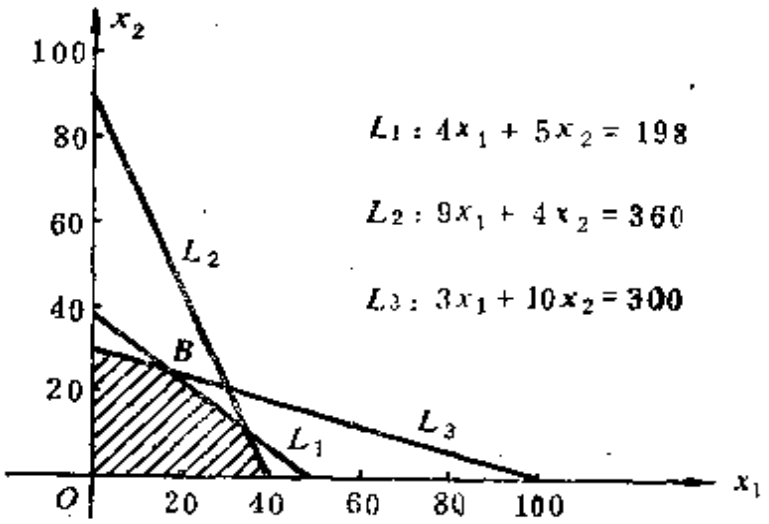


图 10.2.1

目标函数 $S = 700x_1 + 1200x_2$ 所代表的具有相同斜率 $-\frac{7}{12}$ 的平行直线族与可行域右上方的最后一个交点为 B，此即最优点. 联立

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 198 \\ 3x_1 + 10x_2 = 300, \end{cases}$$

解得 $x_1 = 19.2$，$x_2 = 24.24$ 即为最优解. 因此，1990年应安排甲产品日产19.2件，乙产品日产24.24件，利润最大. 最大利润

$$\max S = 700 \times 19.2 + 1200 \times 24.24 = 42528(\text{元}),$$

年利润为1552.272万元. 此问题亦可以通过引进松驰变量，化成标准形式，利用单纯形方法求解.

1991年规划模型为

$$\max S = 700x_1 + 1200x_2,$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leqslant 207 \\ 9x_1 + 4x_2 \leqslant 360 \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300 \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

同前可求出最优解为$x_1 = 22.8$，$x_2 = 23.16$，最大利润

$$\max S = 700 \times 22.8 + 1200 \times 23.16 = 43752(\text{元}),$$

年利润为1596.948万元.

1991年规划与1990年规划相比，日供电量增加9千瓦时，每天利润可增加1224元，而供煤则有一定富裕. 1990年日耗煤量为

$$9 \times 19.2 + 4 \times 24.24 = 269.76(\text{吨}),$$

比供应计划少用90.24吨，1991年日耗煤量为

$$9 \times 22.8 + 4 \times 23.16 = 297.84(\text{吨}),$$

比供应计划少用62.16吨. 如果不打算进一步增加人力和电力，供煤计划可以适当核减.

§10.3 灰色漂移型线性规划

定义10.3.1 设$C(\otimes) = (c_1(\otimes), c_2(\otimes), \cdots, c_m(\otimes))$，

$$A(\otimes) = \begin{bmatrix} \otimes_{11} & \otimes_{12} \cdots \otimes_{1m} \\ \otimes_{21} & \otimes_{22} \cdots \otimes_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \otimes_{n1} & \otimes_{n2} \cdots \otimes_{nm} \end{bmatrix},$$

$$b(\otimes) = (b_1(\otimes), b_2(\otimes), \cdots, b_n(\otimes))^T,$$

其中 $c_j(\otimes) \in [\underline{c}_j, \bar{c}_j]$，$\otimes_{ij} \in [\underline{a}_{ij}, \bar{a}_{ij}]$，

$b_i(\otimes) \in [\underline{b}_i, \bar{b}_i]$，$i = 1, 2, \cdots, n$; $j = 1, 2, \cdots, m$

皆为区间灰数. 称

$$\max S = C(\otimes)X,$$
$$\begin{cases} A(\otimes)X \leqslant b(\otimes) \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为灰色漂移型线性规划问题.

定义10.3.2 设 $\alpha \in [0, 1]$，令灰元白化值

$$\tilde{c}_j(\otimes) = \alpha \bar{c}_j + (1-\alpha)\underline{c}_j,$$
$$\tilde{\otimes}_{ij} = \alpha \bar{a}_{ij} + (1-\alpha)\underline{a}_{ij},$$
$$\tilde{b}_i(\otimes) = \alpha \bar{b}_i + (1-\alpha)\underline{b}_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n; \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

则称 α 为漂移系数.

命题10.3.1

1° 当$0<\alpha<1$时，有

$$\underline{c}_j < \tilde{c}_j(\otimes) < \bar{c}_j, \quad \underline{a}_{ij} < \tilde{\otimes}_{ij} < \bar{a}_{ij}, \quad \underline{b}_i < \tilde{b}_i(\otimes) < \bar{b}_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m.$$

2° 当 $\alpha = 0$ 时，有

$$\tilde{c}_j(\otimes) = \underline{c}_j, \quad \tilde{\otimes}_{ij} = \underline{a}_{ij}, \quad \tilde{b}_i(\otimes) = \underline{b}_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n; j = 1, 2, \cdots, m.$$

3° 当 $\alpha = 1$ 时，有

$$\tilde{c}_j(\otimes) = \bar{c}_j, \quad \tilde{\otimes}_{ij} = \bar{a}_{ij}, \quad \tilde{b}_i(\otimes) = \bar{b}_i,$$
$$i = 1, 2, \cdots, n; \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

定义10.3.3 设

$$\bar{C} = (\bar{c}_1, \bar{c}_2, \cdots, \bar{c}_m),$$
$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{11} & \underline{a}_{12} \cdots \underline{a}_{1m} \\ \underline{a}_{21} & \underline{a}_{22} \cdots \underline{a}_{2m} \\ \cdots & \cdots \cdots \\ \underline{a}_{n1} & \underline{a}_{n2} \cdots \underline{a}_{nm} \end{bmatrix},$$
$$\underline{b} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \cdots, \underline{b}_n)^T,$$

则称

$$\max S = \bar{C}X,$$

$$\begin{cases} \underline{A}X \leqslant \underline{b} \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为灰色漂移型线性规划的理想模型，并称相应的最优解为理想最优解，与之对应的规划最优值称为理想最优值，记为$\max\bar{S}$.

定义10.3.4 取灰色漂移系数$\alpha \in [0, 1]$，设

$$\tilde{C}(\otimes) = (\tilde{c}_1(\otimes), \tilde{c}_2(\otimes), \cdots, \tilde{c}_m(\otimes)),$$

$$\tilde{A}(\otimes) = \begin{bmatrix} \tilde{\otimes}_{11} & \tilde{\otimes}_{12} \cdots \tilde{\otimes}_{1m} \\ \tilde{\otimes}_{21} & \tilde{\otimes}_{22} \cdots \tilde{\otimes}_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tilde{\otimes}_{n1} & \tilde{\otimes}_{n2} \cdots \tilde{\otimes}_{nm} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{b}(\otimes) = (\tilde{b}_1(\otimes), \tilde{b}_2(\otimes), \cdots, \tilde{b}_n(\otimes))^T,$$

其中 $\tilde{c}_j(\otimes) = \alpha\bar{c}_j + (1-\alpha)\underline{c}_j$,

$\tilde{\otimes}_{ij} = \alpha\bar{a}_{ij} + (1-\alpha)\underline{a}_{ij}$,

$\tilde{b}_i(\otimes) = \alpha\bar{b}_i + (1-\alpha)\underline{b}_i$,

$i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m$

则称

$$\max S = \tilde{C}(\otimes)X,$$

$$\begin{cases} \tilde{A}(\otimes)X \leqslant \tilde{b}(\otimes) \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

为灰色漂移型线性规划的α-定位规划，相应的最优解称为α-定位最优解，与之对应的最优值称为α-定位最优值，记为$\max S(\alpha)$.

命题10.3.2 对任意的$\alpha \in [0, 1]$，有

$$\max S(\alpha) \leqslant \max\bar{S}.$$

事实上，理想模型

$$\max S = \bar{C}X,$$

$$\begin{cases} \underline{A}X \leqslant \underline{b} \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

是灰色漂移型线性规划对价格灰参数取上界，消耗灰参数取下界，约束灰参数取上界而得到的，它所体现的是价格最高、消耗最低、

资源最充足这样一种理想境界，只要价格、消耗或资源的任何一项达不到这种理想境界，都可能使规划最优值受到影响.

定义10.3.5 设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\in[0,\ 1]$，

$$\bar{c}_j(\otimes)=\alpha_1\bar{c}_j+(1-\alpha_1)\underline{c}_j,$$

$$\bar{\otimes}_{ij}=\alpha_2\bar{a}_{ij}+(1-\alpha_2)\underline{a}_{ij},$$

$$\bar{b}_i(\otimes)=\alpha_3\bar{b}_i+(1-\alpha_3)\underline{b}_i,$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ \ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m$$

则称 α_1 为价格漂移系数，α_2 为消耗漂移系数，α_3 为资源漂移系数.当$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ 取不同的值时，相应的规划最优值记为

$$\max\ S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3).$$

命题10.3.3 1° 对于固定的 $\alpha_2,\ \alpha_3\in[0,\ 1]$，当 $\alpha_1,\alpha_1'\in[0,\ 1]$且 $\alpha_1\leqslant\alpha_1'$ 时，有

$$\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\leqslant\max S(\alpha_1',\ \alpha_2,\ \alpha_3).$$

2° 对于固定的 $\alpha_1,\ \alpha_3\in[0,\ 1]$，当 $\alpha_2,\ \alpha_2'\in[0,\ 1]$且$\alpha_2\leqslant\alpha_2'$时，有

$$\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\geqslant\max S(\alpha_1,\ \alpha_2',\ \alpha_3).$$

3° 对于固定的 $\alpha_1,\ \alpha_2\in[0,\ 1]$，当 $\alpha_3,\ \alpha_3'\in[0,1]$且 $\alpha_3\leqslant\alpha_3'$时，有

$$\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\leqslant\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3').$$

即 $\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$为关于 α_1,α_3 的增函数，关于 α_2 的减函数.

定义10.3.6 设 $\alpha_1=0,\ \alpha_2=1,\ \alpha_3=0$，相应地，记 $C=(\underline{c}_1,\ \underline{c}_2,\ \cdots,\ \underline{c}_m)$，

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}\cdots\bar{a}_{1m}\\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}\cdots\bar{a}_{2m}\\ \cdots & \cdots\ \cdots\\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2}\cdots\bar{a}_{nm}\end{bmatrix},$$

$$\underline{b}=(\underline{b}_1,\ \underline{b}_2,\ \cdots,\ \underline{b}_n)^T,$$

则称

$$\max S=\underline{C}X,$$

$$\begin{cases}\bar{A}X\leqslant\underline{b}\\X\geqslant 0\end{cases}$$

为灰色漂移型线性规划的临界模型，相应的最优解称为临界解，与之对应的最优值称为警戒值，记为 $\max\underline{S}$.

命题10.3.4 对于任意的α_1，α_2，$\alpha_3\in[0,\ 1]$，有

$$\max\underline{S}\leqslant\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\leqslant\max\bar{S}.$$

定义10.3.7 对于给定的 α_1，α_2，$\alpha_3\in[0,\ 1]$，称

$$\mu=\frac{\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)}{\max\bar{S}}$$

为 α_1，α_2，α_3-定位规划的满意度.

显然，对于任意 的 α_1，α_2，$\alpha_3\in[0,\ 1]$，当 $\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)\geqslant 0$，有 $0\leqslant\mu\leqslant 1$.

定义10.3.8 给定临界值 μ_0，若 $\mu\geqslant\mu_0$，则称 与 $\max S(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$对应的最优解为灰色漂移型线性规划的满意解.

例10.3.1 对于例10.2.1所示的灰色线性 规划 问题，若日供电计划$b_1(\otimes)\in[150,\ 235]$，日供煤计划 $b_2(\otimes)\in[280,\ 360]$，可调配劳动力 $b_3(\otimes)\in[270,\ 330]$，试求灰色漂移型线性规划

$$\max S=C(\otimes)X,$$

$$\begin{cases}A(\otimes)X\leqslant b(\otimes)\\X\geqslant 0\end{cases}$$

的理想最优值 $\max\bar{S}$，警戒值 $\max\underline{S}$ 以及 $\alpha=0.6$时的 α-定位最优值和 $\alpha_1=0.7$，$\alpha_2=0.5$，$\alpha_3=0.9$时的 α_1，α_2，α_3-定位最优值，并研究其满意度.

解： 1° 求理想最优值 $\max\bar{S}$.

取 $\alpha_1=1$，$\alpha_2=0$，$\alpha_3=1$，则

$$\bar{C}=(\bar{c}_1,\ \bar{c}_2)=(800,\ 1500),$$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 3.5 \\ 7 & 3 \\ 2.5 & 8 \end{bmatrix},$$

$$b=(b_1,\ b_2,\ b_3)^T=(235,\ 360,\ 330)^T,$$

于是得理想模型

$$\max S=800x_1+1500x_2,$$

$$\begin{cases} 3x_1+3.5x_2\leqslant 235 \\ 7x_1+3x_2\leqslant 360 \\ 2.5x_1+8x_2\leqslant 330 \\ x_1\geqslant 0,\ \ x_2\geqslant 0. \end{cases}$$

其可行域如图10.3.1所示.

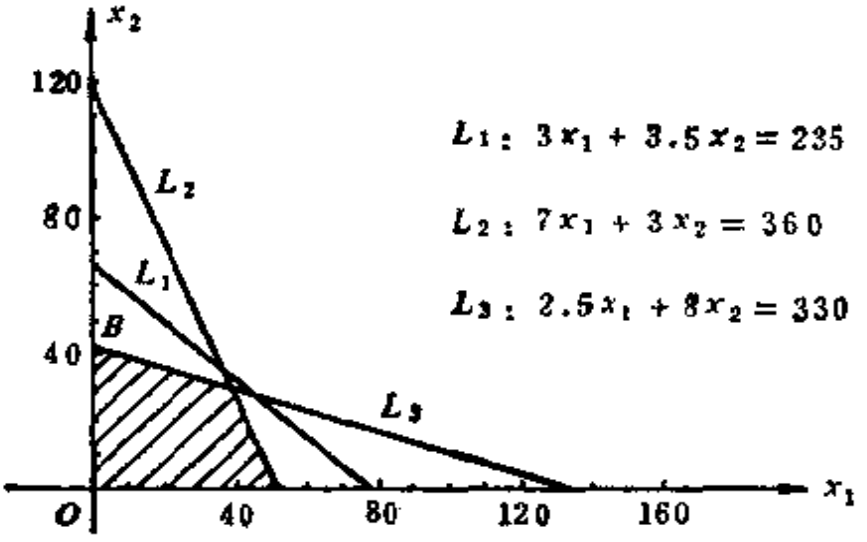


图 10.3.1

目标函数 $S=800x_1+1500x_2$ 所代表的具有相同斜率 $-\frac{8}{15}$ 的平行直线族与可行域右上方的最后一个交点为 B，B 是最优点. 由

$$\begin{cases} 2.5x_1+8x_2=330 \\ x_1=0 \end{cases}$$

解得 $x_1=0$，$x_2=41.25$ 就是理想最优解，理想最优值

$$\max\bar{S} = 800 \times 0 + 1500 \times 41.25 = 61875.$$

2° 求警戒值 $\max\underline{S}$.

取 $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 0$, 则

$$\underline{C} = (\underline{c}_1, \underline{c}_2) = (600, 900),$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6.5 \\ 11 & 5 \\ 3.5 & 12 \end{bmatrix},$$

$$\underline{b} = (\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3)^T = (150, 280, 270)^T,$$

于是有临界模型

$$\max S = 600x_1 + 900x_2,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 6.5x_2 \leqslant 150 \\ 11x_1 + 5x_2 \leqslant 280 \\ 3.5x_1 + 12x_2 \leqslant 270 \\ x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \end{cases}$$

类似地可以知道，其最优解为联立方程组

$$\begin{cases} 3.5x_1 + 12x_2 = 270 \\ 5x_1 + 6.5x_2 = 150 \end{cases}$$

的解，即 $x_1 = 1.2$, $x_2 = 22.15$, ，于是得警戒值

$$\max\underline{S} = 600 \times 1.2 + 900 \times 22.15 = 20655.$$

3° 求 $\alpha = 0.6$时的 α-定位最优值 $\max S(0.6)$.

取 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.6$, 则

$$\tilde{c}_1(\otimes) = 0.6\bar{c}_1 + 0.4\underline{c}_1 = 0.6 \times 800 + 0.4 \times 600 = 720,$$

$$\tilde{c}_2(\otimes) = 0.6\bar{c}_2 + 0.4\underline{c}_2 = 0.6 \times 1500 + 0.4 \times 900 = 1260,$$

$$\tilde{c}(\otimes) = (\tilde{c}_1(\otimes), \tilde{c}_2(\otimes)) = (720, 1260),$$

$$\tilde{\otimes}_{11} = 0.6\bar{a}_{11} + 0.4\underline{a}_{11} = 0.6 \times 5 + 0.4 \times 3 = 4.2,$$

$$\tilde{\otimes}_{12} = 0.6\bar{a}_{12} + 0.4\underline{a}_{12} = 0.6 \times 6.5 + 0.4 \times 3.5 = 5.3.$$

同样可得

$$\tilde{\otimes}_{21} = 0.6 \times 11 + 0.4 \times 7 = 9.4,$$

$$\tilde{\otimes}_{22}=0.6\times5+0.4\times3=4.2,$$

$$\tilde{\otimes}_{31}=0.6\times3.5+0.4\times2.5=3.1,$$

$$\tilde{\otimes}_{32}=0.6\times12+0.4\times8=10.4,$$

$$\delta_1(\otimes)=0.6\times235+0.4\times150=201,$$

$$\delta_2(\otimes)=0.6\times360+0.4\times280=328,$$

$$\delta_3(\otimes)=0.6\times330+0.4\times270=306.$$

于是有0.6-定位模型

$$\max S=720x_1+1260x_2,$$

$$\begin{cases}4.2x_1+5.3x_2\leqslant201\\9.4x_1+4.2x_2\leqslant328\\3.1x_1+10.4x_2\leqslant306\\x_1\geqslant0,\ x_2\geqslant0,\end{cases}$$

其最优解为方程组

$$\begin{cases}3.1x_1+10.4x_2=306\\4.2x_1+5.3x_2=201\end{cases}$$

的解，即 $x_1=17.19$，$x_2=24.30$，相应的 0.6- 定位最优值

$$\max S(0.6)=720\times17.19+1260\times24.30=42994.8.$$

4° 求 $\alpha_1=0.7$，$\alpha_2=0.5$，$\alpha_3=0.9$时 α_1，α_2，α_3- 定位最优值 $\max S(0.7,\ 0.5,\ 0.9)$.

$\because$ $\alpha_1=0.7$,

$\therefore$ $\tilde{c}_1(\otimes)=\alpha_1\bar{c}_1+(1-\alpha_1)\underline{c}_1=0.7\times800+0.3\times600$

$=740,$

$\tilde{c}_2(\otimes)=0.7\bar{c}_2+0.3\underline{c}_2=0.7\times1500+0.3\times900=1320,$

$\tilde{c}(\otimes)=(\tilde{c}_1(\otimes),\ \tilde{c}_2(\otimes))=(740,\ 1320).$

$\because$ $\alpha_2=0.5$,

$\therefore$ $\tilde{\otimes}_{11}=\alpha_2\bar{a}_{11}+(1-\alpha_2)\underline{a}_{11}=0.5\times5+0.5\times3=4,$

$\tilde{\otimes}_{12}=0.5\bar{a}_{12}+0.5\underline{a}_{12}=0.5\times6.5+0.5\times3.5=5,$

$\tilde{\otimes}_{21}=0.5\bar{a}_{21}+0.5\underline{a}_{21}=0.5\times11+0.5\times7=9,$

$$\tilde{\otimes}_{22}=0.5\bar{a}_{22}+0.5\underline{a}_{22}=0.5\times5+0.5\times3=4,$$
$$\tilde{\otimes}_{31}=0.5\bar{a}_{31}+0.5\underline{a}_{31}=0.5\times3.5+0.5\times2.5=3,$$
$$\tilde{\otimes}_{32}=0.5\bar{a}_{32}+0.5\underline{a}_{32}=0.5\times12+0.5\times8=10,$$
$$\tilde{A}(\otimes)=\begin{bmatrix}\tilde{\otimes}_{11} & \tilde{\otimes}_{12}\\ \tilde{\otimes}_{21} & \tilde{\otimes}_{22}\\ \tilde{\otimes}_{31} & \tilde{\otimes}_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 9 & 4\\ 3 & 10\end{bmatrix}.$$

$\because$ $\alpha_3=0.9,$

$\therefore$ $\tilde{b}_1(\otimes)=\alpha_3\bar{b}_1+(1-\alpha_3)\underline{b}_1=0.9\times235+0.1\times150$
$=226.5,$
$\tilde{b}_2(\otimes)=0.9\bar{b}_2+0.1\underline{b}_2=0.9\times360+0.1\times280=352,$
$\tilde{b}_3(\otimes)=0.9\bar{b}_3+0.1\underline{b}_3=0.9\times330+0.1\times270=324,$
$\tilde{b}(\otimes)=(\tilde{b}_1(\otimes),\ \tilde{b}_2(\otimes),\ \tilde{b}_3(\otimes))^T$
$=(226.5,\ 352,\ 324)^T.$

故得 α_1, α_2, α_3-定位模型

$$\max S=740x_1+1320x_2,$$
$$\begin{cases}4x_1+5x_2\leqslant226.5\\ 9x_1+4x_2\leqslant352\\ 3x_1+10x_2\leqslant324\\ x_1\geqslant0,\ \ x_2\geqslant0.\end{cases}$$

研究其可行域与目标函数，可知最优解为

$$\begin{cases}4x_1+5x_2=226.5\\ 3x_1+10x_2=324\end{cases}$$

的解，即 $x_1=25.8$, $x_2=24.66$, 相应的 α_1, α_2, α_3-定位最优值

$$\max S(0.7,\ 0.5,\ 0.9)=\tilde{c}_1(\otimes)\cdot x_1+\tilde{c}_2(\otimes)\cdot x_2$$
$$=740\times25.8+1320\times24.66=51643.2.$$

5° 取 $\mu_0=0.5$. 对0.6-定位模型，有

$$\mu=\frac{\max S(0.6)}{\max\bar{S}}=\frac{42994.8}{61875}\approx0.69>\mu_0,$$

故与 $\max S(0.6)$ 对应的最优解 $x_1=17.19$，$x_2=24.30$ 是灰色漂移型线性规划的满意解.

对于 $\alpha_1=0.7$，$\alpha_2=0.5$，$\alpha_3=0.9$ 时的 α_1，α_2，α_3-定位模型

$$\mu=\frac{\max S(0.7,\ 0.5,\ 0.9)}{\max \bar{S}}=\frac{51643.2}{61875}=0.83>\mu_0,$$

因此与 $\max S(0.7,\ 0.5,\ 0.9)$ 对应的最优解 $x_1=25.8$，$x_2=24.66$ 是灰色漂移型线性规划的满意解.

§10.4 灰色线性规划的准优解

在线性规划问题的求解过程中，常常遇到得不出最优解的情形，此时可以考虑采用其它方法去寻求近似的最优解. 本节主要研究决策变量交替寻优法，其步骤如下：

第一步：确定灰色线性规划

$$\max S=C(\otimes)X,$$
$$\begin{cases}A(\otimes)X\leqslant b(\otimes)\\ X\geqslant 0\end{cases}$$

的 α-定位规划

$$\max S=\tilde{C}(\otimes)X,$$
$$\begin{cases}\tilde{A}(\otimes)X\leqslant \tilde{b}(\otimes)\\ X\geqslant 0.\end{cases}$$

第二步：按照常规的线性规划方法求解，直到计算不能继续进行，设最后一个可行解为

$$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_m^{(0)}).$$

第三步：以 $X^{(0)}$ 为起点对固定的 $x_2^{(0)}$，$x_3^{(0)},\cdots,x_m^{(0)}$，求 $x_1^{(1)}$. 设

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(0)},\ \cdots,\ x_m^{(0)})$$

为 $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$, …, $x_m^{(0)}$ 固定时的最优解. 然后以 $X^{(1)}$ 为起点，对 x_2 优化. 设

$$X^{(2)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(0)},\ \cdots,\ x_m^{(0)})$$

为 $x_1^{(1)}$, $x_3^{(0)}$, $x_4^{(0)}$, …, $x_m^{(0)}$ 固定时的最优解. 再以 $X^{(2)}$ 为起点对 x_3 进行优化，如此等等，直到求出

$$X^{(m)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ \cdots,\ x_m^{(1)}).$$

第四步：以 $X^{(m)}$ 为新的起点，重复第三步中的探索，得

$$X^{(2m)}=(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)},\ \cdots,\ x_m^{(2)}),$$

$$X^{(3m)}=(x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ \cdots,\ x_m^{(3)}),$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$X^{(km)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_m^{(k)}),$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

直到 $X^{(km)}=X^{((k-1)m)}$ 或 $X^{(km)}$ 与 $X^{((k-1)m)}$ 充分接近，且对应的目标函数值充分接近为止.

定义10.4.1 称交替寻优法所得的最终解

$$X^{(km)}=(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)},\ \cdots,\ x_m^{(k)})$$

为灰色线性规划的准优解，与之相应的目标函数值称为准优值.

例10.4.1 设某灰色线性规划的 a-定位规划为

$$\max S=\frac{5}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2+2x_3+2x_4,$$

$$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3\leqslant 100\\ x_1+x_3+2x_4\leqslant 80\\ \dfrac{1}{2}x_1+x_3+2x_4\leqslant 60\\ 0\leqslant x_j\leqslant 15,\ \ j=1,\ 2,\ 3,\ 4\end{cases}$$

试求其准优解.

解：假定在单纯形法求解过程中所得的最后一个可行解为

$$X^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)})=(12,\ 10,\ 10,\ 5),$$

与之对应的目标函数值

$$S^{(0)}=\frac{5}{2}x_1^{(0)}+\frac{1}{2}x_2^{(0)}+2x_3^{(0)}+2x_4^{(0)}$$

$$=\frac{5}{2}\times 12+\frac{1}{2}\times 10+2\times 10+2\times 5=65$$

以 $X^{(0)}$为起点，进行第一轮交替寻优.

首先对固定的 $x_2^{(0)}$，$x_3^{(0)}$，$x_4^{(0)}$，优化 x_1.

将 $x_2^{(0)}=10$，$x_3^{(0)}=10$，$x_4^{(0)}=5$代入约束不等式，有

$$\begin{cases}4x_1+x_2^{(0)}+2x_3^{(0)}\leqslant 100\\ x_1+x_3^{(0)}+2x_4^{(0)}\leqslant 80\\ \frac{1}{2}x_1+x_3^{(0)}+2x_4^{(0)}\leqslant 60\\ 0\leqslant x_1\leqslant 15,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}4x_1\leqslant 100-10-20=70\\ x_1\leqslant 80-10-10=60\\ \frac{1}{2}x_1\leqslant 60-10-10=40\\ 0\leqslant x_1\leqslant 15,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x_1\leqslant 17.5\\ x_1\leqslant 60\\ x_1\leqslant 80\\ 0\leqslant x_1\leqslant 15.\end{cases}$$

易见 $x_1^{(1)}=15$最优. 以

$$X^{(1)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(0)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)})=(15,\ 10,\ 10,\ 5)$$

为起点，对固定的 $x_1^{(1)}$，$x_3^{(0)}$，$x_4^{(0)}$，优化 x_2. 将 $x_1^{(1)}=15$，$x_3^{(0)}=10$，$x_4^{(0)}=5$ 代入约束不等式，有

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 100 - 4x_1^{(1)} - 2x_3^{(0)} = 100 - 60 - 20 = 20 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 15, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 20 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 15. \end{cases}$$

故 $x_2^{(1)} = 15$ 最优. 以

$$X^{(2)} = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(0)},\ x_4^{(0)}) = (15,\ 15,\ 10,\ 5)$$

为起点，对于固定的 $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_4^{(0)}$, 优化 x_3. 将 $x_1^{(1)} = 15$, $x_2^{(1)} = 15$, $x_4^{(0)} = 5$代入约束不等式，有

$$\begin{cases} 2x_3 \leqslant 100 - 4x_1^{(1)} - x_2^{(1)} = 100 - 60 - 15 = 25 \\ x_3 \leqslant 80 - x_1^{(1)} - 2x_4^{(0)} = 80 - 15 - 10 = 55 \\ x_3 \leqslant 60 - \dfrac{1}{2}x_1^{(1)} - 2x_4^{(0)} = 60 - 7.5 - 10 = 42.5 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 15, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_3 \leqslant 12.5 \\ x_3 \leqslant 55 \\ x_3 \leqslant 42.5 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 15. \end{cases}$$

故 $x_3^{(1)} = 12.5$ 最优. 以

$$X^{(3)} = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ x_4^{(0)}) = (15,\ 15,\ 12.5,\ 5)$$

为起点，对于固定的 $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, $x_3^{(1)}$, 优化 x_4. 将 $x_1^{(1)} = 15$, $x_2^{(1)} = 15$, $x_3^{(1)} = 12.5$代入约束不等式，有

$$\begin{cases} 2x_4 \leqslant 80 - x_1^{(1)} - x_3^{(1)} = 80 - 15 - 12.5 = 52.5 \\ 2x_4 \leqslant 60 - \dfrac{1}{2}x_1^{(1)} - x_3^{(1)} = 60 - 7.5 - 12.5 = 40 \\ 0 \leqslant x_4 \leqslant 15, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_4 \leqslant 26.25 \\ x_4 \leqslant 20 \\ x_4 \leqslant 15. \end{cases}$$

故 $x_4^{(1)} = 15$最优. 于是有第一轮交替寻优结果

$$X^{(4)} = (x_1^{(1)},\ x_2^{(1)},\ x_3^{(1)},\ x_4^{(1)}) = (15,\ 15,\ 12.5,\ 15),$$

与之对应的目标函数值

$$S^{(4)} = \frac{5}{2}x_1^{(1)} + \frac{1}{2}x_2^{(1)} + 2x_3^{(1)} + 2x_4^{(1)}$$

$$= \frac{5}{2} \times 15 + \frac{1}{2} \times 15 + 2 \times 12.5 + 2 \times 15 = 100,$$

$S^{(4)} > S^{(0)}$，故 $X^{(4)}$ 优于 $X^{(0)}$. 再以 $X^{(4)}$为起点进行第二轮交替寻优. 因四个决策变量中有三个已达到上界，而未达到上界的x_3在其它变量不变的情况下亦为最优，故有第二轮交替寻优结果 $X^{(8)} = X^{(4)}$，于是 $X^{(4)} = (15,\ 15,\ 12.5,\ 15)$ 即为准优解，$S^{(4)} = 100$ 为准优值.

如果对准优解仍不满意，则可根据目标函数中各决策变量的系数的大小进一步进行优化. 在例10.4.1中，由于

$$\tilde{c}(\otimes) = (\tilde{c}_1(\otimes),\ \tilde{c}_2(\otimes),\ \tilde{c}_3(\otimes),\ \tilde{c}_4(\otimes))$$

$$= \left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ 2,\ 2\right),$$

其中 $\tilde{c}_2(\otimes) = \frac{1}{2} < \tilde{c}_3(\otimes) = 2$，因此上 $x_3^{(1)} = 15 > x_3^{(1)} = 12.5$ 是不尽合理的. 若约束条件许可，我们可以通过降低x_2，提高x_3使目标函数值进一步增大. 将 $x_1^{(1)} = 15$，$x_4^{(1)} = 15$代入约束不等式，有

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 \leqslant 100 - 4x_1^{(1)} = 100 - 60 = 40 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 15 \\ 0 \leqslant x_3 \leqslant 15. \end{cases}$$

取 $x_2^{(2)} = 15$，有

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 40-30=10 \\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 15. \end{cases}$$

$x_2^{(2)}=10$最优，从而得

$$X^{(5)}=(x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ x_3^{(3)},\ x_4^{(1)})=(15,\ 10,\ 15,\ 15).$$

与之对应的目标函数值$S^{(5)}=102.5>S^{(4)}=100$，$X^{(5)}$优于$X^{(4)}$.

§10.5 灰色0-1规划

0-1规划中最典型的是分配问题．本节着重讨论灰色预测型分配问题的求解.

定义10.5.1 将n项任务分配给m个承担者，约定每个承担者只完成一项任务，当$n=m$时，称此类分配为平衡分配问题.

定义10.5.2 在平衡分配问题中，令

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{若第 } i \text{ 项任务分配给第 } j \text{ 个承担者} \\ 0, & \text{若第 } i \text{ 项任务未分配给第 } j \text{ 个承担者} \end{cases}$$

设c_{ij}为第j个承担者完成第i项任务所需费用，$i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 则称

$$\min S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ x_{ij} \text{ 取 } 0 \text{ 或 } 1 \quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \end{cases}$$

为分配问题的数学模型.

其中约束条件$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1\ (i=1,2,\cdots,n)$表示一项任务仅指

派一位承担者，而约束条件 $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$ 则表示每个承担者只完成一项任务.

定义10.5.3 称方阵

$$C = (c_{ij}) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

为效率矩阵.

定理10.5.1 对效率矩阵 C 之各行或各列的元素分别加上或减去一个常数，新的效率矩阵解得的最优分配与从 C 解得的最优分配相同.

证明： 设 e_i, t_j 为常数，$d_{ij} = c_{ij} + e_i + t_j$, i, $j = 1, 2, \cdots, n$. 则新的目标函数

$$\begin{aligned} S' &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + e_i + t_j)x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} e_i x_{ij} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_j x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} e_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} t_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{j=1}^{n} t_j. \end{aligned}$$

因 $\sum_{i=1}^{n} e_i + \sum_{j=1}^{n} t_j$ 为常数，故 S' 与 S 同时取最小值. ∎

定义10.5.4 当效率矩阵中的元素为效率序列的灰色预测值或灰色发展系数时，称相应的 0－1 规划为灰色0–1规划.

当原问题中 c_{ij} 为效益值，目标函数为

$$\max S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

时，可取

$$c_{i_0j_0} = \max_{1\le i\le n \atop 1\le j\le n}\{c_{ij}\},$$

令　　$c'_{ij} = c_{i_0j_0} - c_{ij}$，$i$，$j = 1$，$2$，…，$n$

则将目标函数化为

$$\min S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(c_{i_0j_0} - c_{ij})x_{ij}.$$

灰色0-1规划的求解步骤如下：

第一步：给出效益时间序列

$$a_{ij}^{(0)} = (a_{ij}^{(0)}(1),\ a_{ij}^{(0)}(2),\ \cdots,\ a_{ij}^{(0)}(h)),$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

第二步：建立 $a_{ij}^{(0)} = (a_{ij}^{(0)}(1),\ a_{ij}^{(0)}(2),\ \cdots,\ a_{ij}^{(0)}(h))$ 的GM(1，1)时间响应式

$$\begin{cases} a_{ij}^{(1)}(k+1) = \omega_{ij}\exp(-a_{ij}k) - w_{ij} \\ a_{ij}^{(0)}(k+1) = a_{ij}^{(1)}(k+1) - a_{ij}^{(1)}(k). \end{cases}$$

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

第三步：写出效益矩阵 $C = (c_{ij})$.

可令　$c_{ij} = a_{ij}^{(0)}(h+s)$，亦可令 $c_{ij} = -a_{ij}$，

$$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n;\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

第四步：求 $c_{i_0j_0} - \max\limits_{1\le i\le n \atop 1\le j\le n}\{c_{ij}\}$.

第五步：令 $c'_{ij} = c_{i_0j_0} - c_{ij}$，$i$，$j = 1$，$2$，…，$n$. 得灰色0-1规划模型

$$\min S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij},$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\\ x_{ij}\text{取 1 或 0 } (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\end{cases}$$

第六步：变换效率矩阵 $C'=(c'_{ij})=\begin{bmatrix} c'_{11} & c'_{12} & \cdots & c'_{1n}\\ c'_{21} & c'_{22} & \cdots & c'_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \cdots & c'_{nn}\end{bmatrix}$.

在效率矩阵 C' 之各行、各列中分别减去其最小元，使得每行、每列至少有一个零元素．若不同行、不同列的零元素个数等于效率矩阵的阶数 n，则变换停止；否则反复进行上述变换，直到不同行、不同列的零元素个数等于效率矩阵的阶数 n 为止．

第七步：对不同行、不同列的 n 个零元素加上“（ ）”，并称之为独立零，令

$$x_{ij}=\begin{cases}1, \text{若第 } i \text{ 行第 } j \text{ 列有独立零}\\ 0, \text{其余}\end{cases}$$

则 $X=\{x_{ij}\mid i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 即为所求的最优解．

例10.5.1 有三个经济区，除各区都必须发展种植业外，要在工副业、畜牧业、林业三种发展方向中使每区各有一个侧重点，以使总体效益达到最大。试作灰色 0－1 规划。

先按预测值求解。

第一步：根据统计资料得到第 i 区发展第 j 种产业的效益时间序列

$$u_{ij}^{(0)}=(u_{ij}^{(0)}(1),\ u_{ij}^{(0)}(2),\ u_{ij}^{(0)}(3),\ u_{ij}^{(0)}(4)),$$
$$i=1,\ 2,\ 3;\ j=1,\ 2,\ 3,$$

其中 $u_{ij}^{(0)}(1)$，$u_{ij}^{(0)}(2)$，$u_{ij}^{(0)}(3)$，$u_{ij}^{(0)}(4)$ 分别为 1986 年、1987 年、

1988年、1989年的效益值．具体为

$$u_{11}^{(0)}=(u_{11}^{(0)}(1),\ u_{11}^{(0)}(2),\ u_{11}^{(0)}(3),\ u_{11}^{(0)}(4))$$
$$=(4,\ 4.2,\ 4.4,\ 5),$$
$$u_{12}^{(0)}=(u_{12}^{(0)}(1),\ u_{12}^{(0)}(2),\ u_{12}^{(0)}(3),\ u_{12}^{(0)}(4))$$
$$=(5,\ 6,\ 8,\ 12),$$
$$u_{13}^{(0)}=(u_{13}^{(0)}(1),\ u_{13}^{(0)}(2),\ u_{13}^{(0)}(3),\ u_{13}^{(0)}(4))$$
$$=(0.9,\ 0.8,\ 2,\ 3),$$
$$u_{21}^{(0)}=(u_{21}^{(0)}(1),\ u_{21}^{(0)}(2),\ u_{21}^{(0)}(3),\ u_{21}^{(0)}(4))$$
$$=(3,\ 4,\ 4.2,\ 6),$$
$$u_{22}^{(0)}=(u_{22}^{(0)}(1),\ u_{22}^{(0)}(2),\ u_{22}^{(0)}(3),\ u_{22}^{(0)}(4))$$
$$=(7,\ 9,\ 10,\ 12),$$
$$u_{23}^{(0)}=(u_{23}^{(0)}(1),\ u_{23}^{(0)}(2),\ u_{23}^{(0)}(3),\ u_{23}^{(0)}(4))$$
$$=(0.1,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.7),$$
$$u_{31}^{(0)}=(u_{31}^{(0)}(1),\ u_{31}^{(0)}(2),\ u_{31}^{(0)}(3),\ u_{31}^{(0)}(4))$$
$$=(1,\ 2,\ 2.5,\ 3),$$
$$u_{32}^{(0)}=(u_{32}^{(0)}(1),\ u_{32}^{(0)}(2),\ u_{32}^{(0)}(3),\ u_{32}^{(0)}(4))$$
$$=(3,\ 4.5,\ 5,\ 5.8),$$
$$u_{33}^{(0)}=(u_{33}^{(0)}(1),\ u_{33}^{(0)}(2),\ u_{33}^{(0)}(3),\ u_{33}^{(0)}(4))$$
$$=(2,\ 3,\ 4,\ 6).$$

第二步，对 $i=1,2,3$；$j=1,2,3$，求GM(1,1)时间响应式

$$\begin{cases}\hat{u}_{ij}^{(1)}(k+1)=\omega_{ij}\exp(-a_{ij}k)-w_{ij},\\ \hat{u}_{ij}^{(0)}(k+1)=\hat{u}_{ij}^{(1)}(k+1)-\hat{u}_{ij}^{(1)}(k),\end{cases}$$

即 $\hat{u}_{ij}^{(0)}(k+1)=(1-\exp(a_{ij}))\omega_{ij}\exp(-a_{ij}k)$，

得 $\hat{u}_{11}^{(0)}(k+1)=3.7736e^{0.0894k}$，$\hat{u}_{12}^{(0)}(k+1)=3.9936e^{0.8561k}$，

$\hat{u}_{13}^{(0)}(k+1)=0.5797e^{0.5448k}$，$\hat{u}_{21}^{(0)}(k+1)=2.9559e^{0.2228k}$，

$\hat{u}_{22}^{(0)}(k+1)=7.62e^{0.1472k}$，$\hat{u}_{23}^{(0)}(k+1)=0.288e^{0.2883k}$，

$\hat{u}_{31}^{(0)}(k+1)=1.6489e^{0.1993k}$，$\hat{u}_{32}^{(0)}(k+1)=3.9142e^{0.1285k}$，

$$\hat{a}_{13}^{(0)}(k+1)=1.9983e^{0.3561k}.$$

第三步：按1990年的预测值

$$\hat{a}_{11}^{(0)}(5)=5.3958,\qquad \hat{a}_{12}^{(0)}(5)=16.5949,$$
$$\hat{a}_{13}^{(0)}(5)=5.1241,\qquad \hat{a}_{21}^{(0)}(5)=7.2066,$$
$$\hat{a}_{22}^{(0)}(5)=13.7299,\qquad \hat{a}_{23}^{(0)}(5)=0.9125,$$
$$\hat{a}_{31}^{(0)}(5)=3.6594,\qquad \hat{a}_{32}^{(0)}(5)=6.5444,$$
$$\hat{a}_{33}^{(0)}(5)=8.3037,$$

取 $c_{ij}=\hat{a}_{ij}^{(0)}(5)$，$i=1,\ 2,\ 3;j=1,\ 2,\ 3$，得效益矩阵

$$C=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.3958 & 16.5949 & 5.1241\\ 7.2066 & 13.7299 & 0.9125\\ 3.6594 & 6.5444 & 8.3037\end{bmatrix}.$$

第四步：$\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 3}}\{c_{ij}\}=16.5949=c_{12}.$

第五步：令 $c_{ij}^{(0)}=16.5949-c_{ij}$，$i,\ j=1,\ 2,\ 3$，得效率矩阵

$$C^{(0)}=\begin{bmatrix}c_{11}^{(0)} & c_{12}^{(0)} & c_{13}^{(0)}\\ c_{21}^{(0)} & c_{22}^{(0)} & c_{23}^{(0)}\\ c_{31}^{(0)} & c_{32}^{(0)} & c_{33}^{(0)}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}11.1991 & 0 & 11.4708\\ 9.3883 & 2.865 & 15.6824\\ 12.9355 & 10.0505 & 8.2912\end{bmatrix}.$$

第六步：对效率矩阵进行变换，各列减去其最小元，有

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i1}^{(0)}\}=c_{21}^{(0)}=9.3883,$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i2}^{(0)}\}=c_{13}^{(0)}=0,$$
$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i3}^{(0)}\}=c_{33}^{(0)}=8.2912,$$

$$C^{(1)}=\begin{bmatrix}c_{11}^{(0)}-c_{21}^{(0)} & c_{12}^{(0)}-c_{12}^{(0)} & c_{13}^{(0)}-c_{33}^{(0)}\\ c_{21}^{(0)}-c_{21}^{(0)} & c_{22}^{(0)}-c_{12}^{(0)} & c_{23}^{(0)}-c_{33}^{(0)}\\ c_{31}^{(0)}-c_{21}^{(0)} & c_{32}^{(0)}-c_{12}^{(0)} & c_{33}^{(0)}-c_{33}^{(0)}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.8108 & (0) & 3.1796 \\ (0) & 2.865 & 7.3912 \\ 3.5472 & 10.0505 & (0) \end{bmatrix}$$

$C^{(1)}$ 中已有三个不同行、不同列的零元素.

第七步：令与独立零对应的 $x_{12}=1$，$x_{21}=1$，$x_{33}=1$，其余 $x_{ij}=0$，得最优解

$$X=(x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33})$$
$$=(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1),$$

即一区应着重发展畜牧业，二区重点发展工副业，三区侧重于发展林业，总效益最大.

下面我们按发展系数求解.

由 GM(1, 1)响应式，有发展系数

$-a_{11}=0.0894$，$-a_{12}=0.3561$，$-a_{13}=0.5448$，

$-a_{21}=0.2228$，$-a_{22}=0.1472$，$-a_{23}=0.2883$，

$-a_{31}=0.1993$，$-a_{32}=0.1285$，$-a_{33}=0.3561$.

取 $c_{ij}=-a_{ij}$，i，$j=1$，2，3，得效益矩阵

$$C=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0894 & 0.3561 & 0.5448 \\ 0.2228 & 0.1472 & 0.2883 \\ 0.1993 & 0.1285 & 0.3561 \end{bmatrix},$$

$$\max_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}\{c_{ij}\}=0.5448=c_{13}.$$

令 $c_{ij}^{(0)}=c_{13}-c_{ij}=0.5448-c_{ij}$，得效率矩阵

$$C^{(0)}=\begin{bmatrix} c_{11}^{(0)} & c_{12}^{(0)} & c_{13}^{(0)} \\ c_{21}^{(0)} & c_{22}^{(0)} & c_{23}^{(0)} \\ c_{31}^{(0)} & c_{32}^{(0)} & c_{33}^{(0)} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0.4554 & 0.1887 & 0 \\ 0.3220 & 0.3976 & 0.2565 \\ 0.3455 & 0.4163 & 0.1887 \end{bmatrix}.$$

从 $C^{(0)}$ 中减去各列最小元．由

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i1}^{(0)}\}=c_{21}^{(0)}=0.322,$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i2}^{(0)}\}=0.1887=c_{12}^{(0)},$$

$$\min_{1\leqslant i\leqslant 3}\{c_{i3}^{(0)}\}=c_{13}^{(0)}=0.$$

令 $c_{i1}^{(1)}=c_{i1}^{(0)}-c_{21}^{(0)}=c_{i1}^{(0)}-0.322,$

$c_{i2}^{(1)}=c_{i2}^{(0)}-c_{12}^{(0)}=c_{i2}^{(0)}-0.1887,$

$c_{i3}^{(1)}=c_{i3}^{(0)}-c_{13}^{(0)}=c_{i3}^{(0)},$

得

$$C^{(1)}=\begin{bmatrix}c_{11}^{(1)} & c_{12}^{(1)} & c_{13}^{(1)}\\ c_{21}^{(1)} & c_{22}^{(1)} & c_{23}^{(1)}\\ c_{31}^{(1)} & c_{32}^{(1)} & c_{33}^{(1)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1334 & 0 & 0\\ 0 & 0.2089 & 0.2565\\ 0.0235 & 0.2276 & 0.1887\end{bmatrix},$$

从 $C^{(1)}$ 中减去各行最小元，得

$$C^{(2)}=\begin{bmatrix}c_{11}^{(2)} & c_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)}\\ c_{21}^{(2)} & c_{22}^{(2)} & c_{23}^{(2)}\\ c_{31}^{(2)} & c_{32}^{(2)} & c_{33}^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1334 & 0 & 0\\ 0 & 0.2089 & 0.2565\\ 0 & 0.2041 & 0.1652\end{bmatrix}.$$

$C^{(2)}$ 中仍未出现 3 个不同行不同列的零元素，而各行、各列的最小元又皆是零．遇到这种情况，可按下列步骤进行：

1° 从 $C^{(2)}$ 中含零元素最少的行或列开始，依次选出一个零元素为独立零，用“（ ）”括起来；

2° 在 $C^{(2)}$ 中没有独立零的行右边打“√”；

3° 对打“√”的行中各零元素所在列的下方打“√”；

4° 再对打“√”的列中有独立零的行右边打“√”；

5° 对没有打“√”的行画上横线，打有“√”的列画上竖线；

6° 在未被直线划去的元素中，找出一个最小元；

7° 所有未被直线划去的元素都减去该最小元，所有被直线画两次的元素都加上这个最小元，其余元素不变，得矩阵 $C^{(3)}$；

8° 若 $C^{(3)}$ 中不同行、不同列的零元素个数等于其阶数，计算停止，否则转回1°.

对于例中的

$$C^{(2)}=\begin{pmatrix} -0.1334 & (0) & 0 \\ (0) & 0.2089 & 0.2565 \\ 0 & 0.2041 & 0.1652 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \checkmark \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \\ \checkmark \end{matrix}$$

我们取 $c_{12}^{(2)}$，$C_{21}^{(2)}$ 为独立零，在第3行右边打上“$\checkmark$”，第3行第1列有零元，故在第1列下方打“$\checkmark$”；第1列第2行有独立零，故在第2行右边打“$\checkmark$”. 对未打“$\checkmark$”的第1行画横线，打有“$\checkmark$”的第1列画竖线；未被直线划去的元素是 $c_{22}^{(2)}$，$c_{23}^{(2)}$，$c_{32}^{(2)}$，$c_{33}^{(2)}$.

$$\min\{c_{22}^{(2)},\ c_{23}^{(2)},\ c_{32}^{(2)},\ c_{33}^{(2)}\}=c_{32}^{(2)}=0.1652.$$

未被直线划去的元素 $c_{22}^{(2)}$，$c_{23}^{(2)}$，$c_{32}^{(2)}$，$c_{33}^{(2)}$ 皆减去 $c_{32}^{(2)}$，被直线划两次的 $c_{11}^{(2)}$ 加上 $c_{32}^{(2)}$，其余元素不变，得

$$C^{(3)}=\begin{bmatrix} c_{11}^{(3)} & c_{12}^{(3)} & c_{13}^{(3)} \\ c_{21}^{(3)} & c_{22}^{(3)} & c_{23}^{(3)} \\ c_{31}^{(3)} & c_{32}^{(3)} & c_{33}^{(3)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11}^{(2)}+c_{32}^{(2)} & c_{12}^{(2)} & c_{13}^{(2)} \\ c_{21}^{(2)} & c_{22}^{(2)}-c_{32}^{(2)} & c_{23}^{(2)}-c_{32}^{(2)} \\ c_{31}^{(2)} & c_{32}^{(2)}-c_{32}^{(2)} & c_{33}^{(2)}-c_{32}^{(2)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.2986 & (0) & 0 \\ (0) & 0.0437 & 0.0913 \\ 0 & 0.0389 & (0) \end{bmatrix}.$$

$C^{(3)}$ 中已有3个不同行、不同列的零元素，与之对应的最优解为

$$X=(x_{11},\ x_{12},\ x_{13},\ x_{21},\ x_{22},\ x_{23},\ x_{31},\ x_{32},\ x_{33})$$
$$=(0,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1),$$

这恰与预测型解一致.

§10.6 灰色非线性规划

定义10.6.1 设 $X=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为决策向量，$\otimes$为灰参数集，则称

$$\max(\min)S=f(X, \otimes)$$

为灰色无约束非线性规划问题，其中 $f(X, \otimes)$ 为灰色价格或消耗泛函.

定义10.6.2 白化 $f(X, \otimes)$中的灰元，称所得规划问题为 $\max(\min)S=f(X, \otimes)$的白化规划，记为 $\max(\min)S=f(X)$.

对于灰色无约束非线性规划问题，可先行白化，然后求解.

定义10.6.3 设 $f(X)$为可微函数，则称梯度向量

$$\mathrm{grad}f(X)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=0$$

的解为 $f(X)$的驻点.

定理10.6.1 设 $f(X)$二阶可微，海赛(Hesse)矩阵

$$H(X)=\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}.$$

若 X^0 为 $f(X)$的驻点，则

1° 当 $H(X^0)$为正定矩阵时，X^0 为极小值点；

2° 当 $H(X^0)$为负定矩阵时，X^0 为极大值点；

3° 当 $H(X^0)$为半正定矩阵时，若存在 X^0 的邻域 $U(X^0, \delta)$，使对任意的 $X\in U(X^0, \delta)$，$H(X)$为半正定矩阵，则 X^0 为极小值点；

4° 当 $H(X^0)$为半负定矩阵时，若存在 X^0 的邻域$U(X^0, \delta)$，使对任意的 $X \in U(X^0, \delta)$，$H(X)$为半负定矩阵，则 X^0 为极大值点；

5° 当 $H(X^0)$为非定矩阵时，X^0 不是 $f(X)$的极值点.

例10.6.1 求解灰色非线性规划

$$\max S = f(X, \otimes) = \otimes_1 x_1 + \otimes_2 x_3 + \otimes_3 x_2 x_3 - x_1^2 - x_2^2 + \otimes_4 x_3^2,$$

其中 $\otimes_1 \in [0, 2]$，$\otimes_2 \in [1.5, 2.5]$，$\otimes_3 \in [0.5, 1.5]$，$\otimes_4 \in [-2, 0]$.

解：第一步：对灰元 $\otimes_i (i = 1, 2, 3, 4)$进行均值白化，得 $\widetilde{\otimes}_1 = 1$，$\widetilde{\otimes}_2 = 2$，$\widetilde{\otimes}_3 = 1$，$\widetilde{\otimes}_4 = -1$，故有白化规划

$$\max S = f(X) = x_1 + 2x_3 + x_2 x_3 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2.$$

第二步：求梯度向量

$$\operatorname{grad} f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$

$$= (1 - 2x_1, x_3 - 2x_2, 2 + x_2 - 2x_3).$$

第三步：令 $\operatorname{grad} f(X) = 0$，由

$$\begin{cases} 1 - 2x_1 = 0 \\ x_3 - 2x_2 = 0 \\ 2 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

解得驻点 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

第四步：求出海赛矩阵 $H(X)$.

由

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_3} = 1,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = -2,$$

得

$$H(X) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

第五步：将驻点 $X^0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 代入 $H(X)$，得

$$H(X^0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

第六步：计算 $H(X^0)$ 的各阶主子式，有

一阶主子式 $= -2 < 0$，

二阶主子式 $= \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0$，

三阶主子式 $= |H(X^0)| = -6 < 0$.

因其奇数阶主子式 < 0，偶数阶主子式 > 0，故 $H(X^0)$ 为负定矩阵，从而 X^0 为极大值点。

第七步：计算极大值。

$$\max S = \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{19}{12}.$$

下面我们来讨论灰色约束非线性规划问题。

定义10.6.4 设 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为决策变量，$\otimes^{(\omega)}$，$\otimes^{(s)}$，$\otimes^{(i)}$，$j = 1, 2, \cdots, m; i = 1, 2, \cdots, s$，皆为灰参数集，则称

$$\min S = f(X, \otimes^{(\omega)}),$$

$$\begin{cases} g_j(X,\ \otimes^{(j)}) \geqslant 0,\ j \in J = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \\ h_i(X,\ \otimes^{(i)}) = 0,\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ s\} \end{cases}$$

为灰色约束非线性规划问题，其中$f(X,\otimes^{(1)})$为灰色消耗泛函，$g_j(X,\otimes^{(j)})$，$h_i(X,\ \otimes^{(i)})$为灰色约束泛函.

灰色非线性规划的白化规划

$$\min S = f(X),$$

$$\begin{cases} g_j(X) \geqslant 0,\ j \in J = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} \\ h_i(X) = 0,\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ s\} \end{cases}$$

可按下列步骤求解：

1° 若$I \neq \varnothing$，直接转向2°. 当$I = \varnothing$，即无等式约束时，求解无约束子规划 $\min S = f(X)$. 设最优解为$X^{(0)}$，令$k = 0$，转向3°.

2° 求解等式约束子规划：

$$\min S = f(X),$$

$$h_i(X) = 0,\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ s\}.$$

设最优解为$X^{(0)}$，令$k = 0$.

3° 将$X^{(k)}$代入不等式约束，求未满足不等式约束的指标集

$$J_k = \{p \mid g_p(X^{(k)}) < 0,\ p \in J = \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\}\}.$$

若$J_k = \varnothing$时，$X^{(k)}$即为原规划的最优解，运算停止；若$J_k \neq \varnothing$，则进入下一步.

4° 从J_k中任取一个元素p，引进非负松驰变量y_p^2，将对应的不等式约束化为等式约束，求解扩充的等式约束子规划问题：

$$\min S = f(X),$$

$$\begin{cases} g_p(X) - y_p^2 = 0,\ p \in J_k \\ h_i(X) = 0,\ i \in I = \{1,\ 2,\ \cdots,\ s\} \end{cases}$$

设最优解为$X^{(k+1)}\ (y_p^2)$.

① 可按 Lagrange 乘数法求解.

5° 求解无约束子规划问题

$$\min S = f(X^{(k+1)}(y_p^2)).$$

设最优解为 $X^{(k+1)}$，将 $k+1$ 换为 k，转回3°.

例10.6.2 求解灰色非线性规划问题

$$\min S = f(X, \otimes^{(1)}) = \otimes_1 x_1 + \otimes_2 x_2^2,$$

$$\begin{cases} g_1(X, \otimes^{(2)}) = \otimes_3 - (x_1-4)^2 + \otimes_4 x_2^2 \geqslant 0 \\ h_1(X, \otimes^{(3)}) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 + \otimes_5 = 0. \end{cases}$$

其中 $\otimes_1 \in [0.8, 1.2]$, $\otimes_2 \in [-0.15, 0.15]$, $\otimes_3 \in [12, 17]$

$\otimes_4 \in [-1.1, -0.6]$, $\otimes_5 \in [9, 14]$.

解：第一步：对目标泛函中的灰元作均值白化，约束泛函中灰元作0.8-定位白化，有

$$\tilde{\otimes}_1 = 1, \ \tilde{\otimes}_2 = 0, \ \tilde{\otimes}_3 = 16, \ \tilde{\otimes}_4 = -1, \ \tilde{\otimes}_5 = 13.$$

于是有白化规划

$$\min S = f(X) = x_1,$$

$$\begin{cases} g_1(X) = 16 - (x_1-4)^2 - x_2^2 \geqslant 0 \\ h_1(X) = (x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0. \end{cases}$$

第二步：求解等式约束子规划

$$\min S = x_1,$$

$$(x_1-3)^2 + (x_2-2)^2 - 13 = 0.$$

得最优解 $X^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}) = (3-\sqrt{13}, 2)$.

第三步：将 $X^{(0)} = (3-\sqrt{13}, 2)$ 代入不等式约束，得 $g_1(X^{(0)}) = -2(1+\sqrt{13}) < 0$，不等式约束不满足.

第四步：引进非负松驰变量 y^2，求解扩充的等式约束子规划：

$$\min S = x_1,$$

$$\begin{cases} (x_1-3)^2 - (x_2-2)^2 - 13 = 0 \\ (x_1-4)^2 + x_2^2 - 16 - y^2 = 0. \end{cases}$$

得最优解

$$X^{(1)}(y^2)=(x_1^{(1)},\ x_2^{(1)})$$

$$=\left(\frac{2}{5}(8\pm\sqrt{64-5y^2}\ ,\ \frac{1}{5}(8\pm\sqrt{64-5y^2}\right).$$

第五步：求解无约束子规划

$$\min S=f(X^{(1)}(y^2))=x_1^{(1)}=\frac{2}{5}(8\pm\sqrt{64-5y^2}),$$

得 $y=0$，相应的最优解

$$X^{(2)}=(x_1^{(2)},\ x_2^{(2)})=(0,\ 0).$$

第六步：将 $X^{(2)}$代入不等式约束，不等式满足，$J_2=\varnothing$，运算停止．$X^{(2)}=(0,\ 0)$即为原白化规划的最优解，最优值

$$\min S=f(X^{(2)})=0.$$

如果对灰色非线性规划问题不先行白化而直接求解，则最优解中一般含有灰参数．我们可以根据灰参数的取数域来研究最优解和最优值的变化情况．

例10.6.3 求解灰色非线性规划问题：

$$\min S=f(X,\ \otimes^{(1)})=x_1^2+\otimes_1 x_2,$$

$$\begin{cases}g_1(X)=1-(x_1+x_2^2)\geqslant 0\\ g_2(X,\ \otimes^{(2)})=\otimes_2-x_1-x_2\geqslant 0\\ h_1(X,\ \otimes^{(3)})=x_1^2+x_2^2-\otimes_3^2=0.\end{cases}$$

其中 $\otimes_1\in[0.9,\ 1.2]$，$\otimes_2\in[0.8,\ 1.4]$，$\otimes_3\in[2.5,\ 3.5]$。

解：第一步：求解等式约束子规划：

$$\min S=x_1^2+\otimes_1 x_2,$$

$$x_1^2+x_2^2-\otimes_3^2=0.$$

得最优解 $X^{(0)}=(x_1^{(0)},\ x_2^{(0)})=(0,\ -\otimes_3)$.

第二步：将 $X^{(0)}=(0,\ -\otimes_3)$代入约束不等式，有

$$g_1(X^{(0)})=1-\otimes_3^2.$$

因为　　$\widetilde{\otimes}_3 \geqslant 2.5$，$\widetilde{\otimes}_3^2 \geqslant 6.25$，

所以　　$g_1(X^{(0)}) \leqslant 1-6.25=-5.25<0$，

不满足　$g_1(X^{(0)}) \geqslant 0$. 类似地讨论可知 $g_2(X^{(0)}, \otimes^{(2)}) \geqslant 0$满足，故有 $J_0=\{1\}$.

第三步：引进非负松驰变量 y_1^2，求解扩充的等式约束子规划

$$\min S = x_1^2 + \otimes_1 x_2,$$

$$\begin{cases} g_1(X) - y_1^2 = 1-(x_1+x_2^2) - y_1^2 = 0 \\ h_1(X, \otimes^{(3)}) = x_1^2 + x_2^2 - \otimes_3^2 = 0. \end{cases}$$

得最优解：

$$X^{(1)}(y_1^2) = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{4y_1^2+4\otimes_3^2-3}), \right.$$

$$\left. -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2y_1^2+\sqrt{4y_1^2+4\otimes_3^2-3}} \right).$$

第四步：求解无约束子规划

$$\min S = f(X^{(1)}(y_1^2)) = [x_1^{(1)}]^2 + \otimes_1 x_2^{(1)}$$

$$= \left[\frac{1}{2}(1-\sqrt{4y_1^2+4\otimes_3^2-3}) \right]^2$$

$$-\otimes_1 \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-2y_1^2+\sqrt{4y_1^2+4\otimes_3^2-3}},$$

得　$y_1^2=0$，相应的最优解为

$$X^{(2)} = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$$

$$= \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{4\otimes_3^2-3}), -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sqrt{4\otimes_3^2-3}} \right).$$

第五步：将$X^{(2)}$代入约束不等式，有

$$g_1(X^{(2)},\otimes^{(2)})=1-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4\otimes_3^2-3})-\frac{1}{2}(1+\sqrt{4\otimes_3^2-3})=0,$$

$$g_2(X^{(2)},\ \otimes^{(2)})=\otimes_2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{4\otimes_3^2-3})+\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sqrt{4\otimes_3^2-3}}.$$

由$\otimes_2,\otimes_3$的取数域可知$g_2(X^{(2)},\ \otimes^{(2)})\geqslant 0$，即不等式约束皆满足，$J_2=\varnothing$，运算停止.

$$X^{(2)}=\left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{4\otimes_3^2-3}),\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1+\sqrt{4\otimes_3^2-3}}\right)$$

为原灰色非线性规划的最优解，与之对应的最优值

$$\min S=f(X^{(2)},\ \otimes^{(1)})=[x_1^{(2)}]^2+\otimes_1 x_2^{(2)}$$

$$=\frac{1}{4}(1-\sqrt{4\otimes_3^2-3})^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\otimes_1\sqrt{1+\sqrt{4\otimes_3^2-3}}.$$

当$\otimes_1$取上界，$\otimes_3$取下界时，可得理想最优值

$$\min S\approx 1.381.$$

第十一章　灰色控制

§11.1　灰色控制概言

作为一种科学概念，控制就是施控装置对受控装置所施加的一种特定的作用，是一种有目的、有选择的能动作用．一个控制系统，至少要有施控装置、受控装置和信息通道三个组成部分．仅含上述三个组成部分的控制系统称为开环控制系统，如图 11.1.1 所



图 11.1.1

示．开环控制系统较为简单，由输入直接控制输出，其致命的弱点是抗干扰能力差．带有反馈回路的控制系统称为闭环控制系统，如图 11.1.2 所示．闭环控制系统通过输入以及输出的回输共同作用来实现控制．

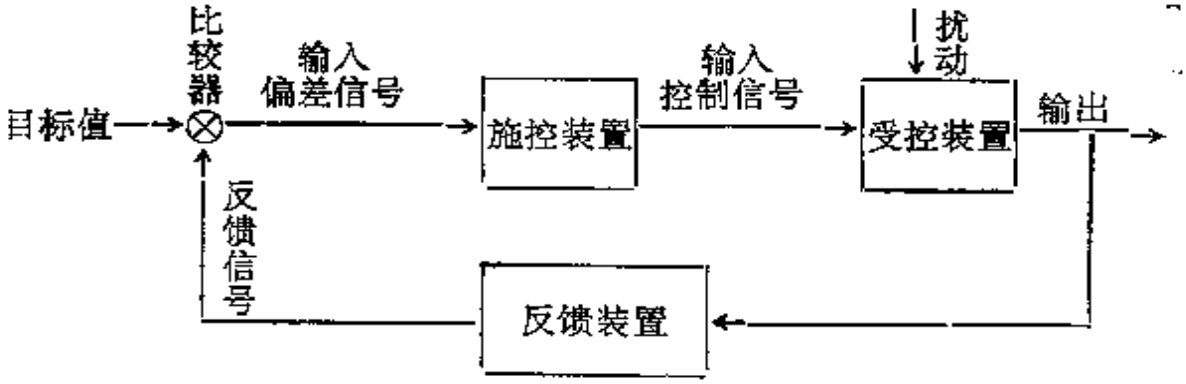


图 11.1.2

闭环控制系统的突出优点是抗干扰能力强，其输出能够始终围绕预定目标摆动．因此，闭环控制系统具有某种稳定性．

所谓灰色控制指的是本征性灰系统的控制，也包括一般控制系统含有灰参数的情形以及运用灰色系统的分析、建模、预测、决策思路构造的控制. 灰色控制的思想能够更深刻地揭示问题的本质，更有利于控制目的的实现. 人类的认识，实际上是一个逐步积累、不断深化的过程. 人们必须在接受前人经验和知识的前提下，研究新的课题或新的对象. 也就是说，我们面对的往往是对其已有某种程度的了解的灰色系统，对系统实现输入—输出关系的结构和功能已经有了一定的知识. 要按照某个既定的目标控制输出，这就是本征性灰系统的控制问题. 另外，要建立系统的数学模型，必须首先对该系统进行认识、辨别、测量，通过对输入、输出数据的测定，来研究系统结构，辨识系统参数. 由于认识偏差和测量误差的存在，使得结构和参数都具有一定的灰度. 在不同时区内选取输入、输出数据，也可能对参数产生一定的影响. 比如根据河

表 11.1.1 河南省粮食总产量①　　单位：万吨

年　份	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
总产量$x^{(0)}(k)$	713.5	842.0	1052.5	1007.0	1091.0	1142.5	1250.0	1211.0
年　份	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964
$x^{(0)}(k)$	1180.0	1264.5	974.5	887.0	684.5	903.0	788.0	950.0
年　份	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972
$x^{(0)}(k)$	1166.0	1227.5	1382.0	1330.5	1321.5	1555.5	1646.5	1627.0
年　份	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
$x^{(0)}(k)$	1872.0	1861.5	1941.5	2122.0	1947.5	2097.5	2134.5	2148.5
年　份	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
$x^{(0)}(k)$	2314.5	2217.1	2904.0	2893.5	2710.5	2545.7	2948.4	2663.0

① 资料来源于河南省统计局。

南省1949年到1988年的粮食总产量数据表11.1.1建立GM(1，1)模型

$$\frac{dx^{(1)}}{dt}+ax^{(1)}=b.$$

选取不同时段的数据建模，会得到参数 a，b 的不同估计值.

取1949～1952年的数据建模，得

$$a=-0.0816,\qquad b=795.0283.$$

取1949～1956年的数据建模，得

$$a=-0.0498,\qquad b=879.8842.$$

取1949～1960年的数据建模，得

$$a=-0.0055,\qquad b=1051.988.$$

取1949～1966年的数据建模，得

$$a=-0.0044,\qquad b=1083.621.$$

取1949～1969年的数据建模，得

$$a=-0.0084,\qquad b=991.1538.$$

取1949～1977年的数据建模，得

$$a=-0.0319,\qquad b=772.1509.$$

取1949～1982年的数据建模，得

$$a=-0.0329,\qquad b=759.8184.$$

取1949～1988年的数据建模，得

$$a=-0.0348,\qquad b=735.3096.$$

再分别取1971～1978，1971～1983，1971～1988，1979～1983，1979～1988和1984～1988各时段的数据建模，又分别得到

$$a=-0.0331,\qquad b=1655.061.$$

$$a=-0.0367,\qquad b=1609.544.$$

$$a=-0.0319,\qquad b=1673.111.$$

$$a=-0.0945,\qquad b=1767.133.$$

$$a=-0.0272,\qquad b=2231.559.$$

$$a = -0.0095, \qquad b = 2638.18.$$

因此，GM(1，1)模型参数是灰的，即有

$$\frac{\mathrm{d}x^{(1)}}{\mathrm{d}t} + a(\otimes)x^{(1)} = b(\otimes),$$

其中 $a(\otimes) \in [-0.0945, 0.004]$，

$b(\otimes) \in [772.1509, 2638.18]$.

在实际问题中，灰参数系统随处可见.

灰色控制的内容包括灰色线性系统、灰色传递函数、典型环节、灰关联控制、去余控制和灰色预测控制等，分别在以下各节中进行讨论.

§11.2 灰色线性控制系统

定义 11.2.1 设

$$U = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T$$

为控制向量，

$$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$$

为状态向量，

$$Y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$$

为输出向量，称

$$\begin{cases} \dot{X} = A(\otimes)X + B(\otimes)U \\ Y = C(\otimes)X \end{cases}$$

为灰色线性控制系统的数学模型. 其中 $A(\otimes) \in G^{n\times n}$，$B(\otimes) \in G^{n\times s}$，$C(\otimes) \in G^{m\times n}$. 相应地，称 $A(\otimes)$ 为状态灰阵，$B(\otimes)$ 为控制灰阵，$C(\otimes)$ 为输出灰阵.

有时候，为特别强调 U，X，Y 的时变性，即系统的动态特征，亦将控制向量、状态向量、输出向量分别记为 $U(t)$，$X(t)$，$Y(t)$.

灰色线性控制系统数学模型中的第一组方程

$$\dot{X}(t) = A(\otimes)X(t) + B(\otimes)U(t)$$

称为状态方程，第二组方程

$$Y(t) = C(\otimes)X(t)$$

称为输出方程.

定义 11.2.2 对于给定的时刻 t_0 和预定精度，若存在 $t_1 \in (t_0, \infty)$，根据系统在 $[t_0, t_1]$ 之间的输出 $Y(t)$，$t \in [t_0, t_1]$，能够按所需的精度测定系统状态 $X(t)$，则称系统在 $[t_0, t_1]$ 内是可观测的；若对任意的 t_0，t_1，系统在 $[t_0, t_1]$ 内可观测，则称系统可观测.

定义 11.2.3 对于给定的精度和目标向量

$$J = (j_1, j_2, \cdots, j_m)^T,$$

若有施控装置及控制向量 $U(t)$，通过控制输入可使系统输出 $Y(t)$ 按所要求的精度达到目标 J，则称系统为可控的.

定义 11.2.4 当对系统的初始值施加一个扰动时，

1° 若其响应(输出)的幅值有界，则称该系统是稳定的；

2° 若其响应经过一段时间后能最终回到初始状态，则称该系统为渐近稳定的；

3° 若其响应的幅值无界，则称该系统为不稳定的.

通常所说的系统稳定性，都是指渐近稳定性.

定理 11.2.1 对于系统

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = A(\otimes)X(t) + B(\otimes)U(t) \\ Y(t) = C(\otimes)X(t) \end{cases}$$

其中 $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))^T$,

$U(t) = (u_1(t), u_2(t), \cdots, u_r(t))^T$,

$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), \cdots, y_m(t))^T$,

$A(\otimes) \in G^{n\times n}$, $B(\otimes) \in G^{n\times r}$, $C(\otimes) \in G^{m\times n}$,

令

$$D(\otimes)=\begin{bmatrix} C(\otimes) \\ C(\otimes)A(\otimes) \\ C(\otimes)A^2(\otimes) \\ \vdots \\ C(\otimes)A^{n-1}(\otimes) \end{bmatrix}$$

$$L(\otimes)=[B(\otimes)\ \ A(\otimes)B(\otimes)\ \ A^2(\otimes)B(\otimes)\cdots A^{n-1}(\otimes)B(\otimes)]$$

则有：

1° 当 $\operatorname{rank}(D(\otimes))=n$ 时，系统可测观；

2° 当 $\operatorname{rank}(L(\otimes))=n$ 时，系统可控；

3° 系统渐近稳定的充分必要条件是状态灰阵 $A(\otimes)$ 的灰特征根之实部灰元的上界皆小于零.

例 11.2.1 设灰色线性系统为

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1(t)}{dt}=\otimes_1 x_1(t)+\otimes_2 u_1(t)+\otimes_3 u_2(t) \\ \dfrac{dx_2(t)}{dt}=\otimes_4 x_1(t) \\ y(t)=\otimes_5 x_2(t) \end{cases}$$

其中 $\otimes_1\in[2,\ 4]$，$\otimes_2\in[0.8,\ 1.2]$，$\otimes_3\in[1,\ 3]$，

$\otimes_4\in[0.8,\ 1.2]$，$\otimes_5\in[0.8,\ 1.2]$.

试讨论其可控性、可观测性和稳定性.

解：写成矩阵形式

$$\begin{cases} \dot{X}(t)=A(\otimes)X(t)+B(\otimes)U(t) \\ Y(t)=C(\otimes)X(t) \end{cases}$$

其中 $X(t)=(x_1(t),\ x_2(t))^T$，$U(t)=(u_1(t),\ u_2(t))^T$，

$Y(t)=y(t)$，

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix} \otimes_1 & 0 \\ \otimes_4 & 0 \end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix} \otimes_2 & \otimes_3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C(\otimes)=(0,\ \otimes_5).$$

1° $L(\otimes)=[B(\otimes)\ \ A(\otimes)B(\otimes)]$

$$= \begin{bmatrix} \otimes_2 & \otimes_3 & \otimes_1 \cdot \otimes_2 & \otimes_1 \cdot \otimes_3 \\ 0 & 0 & \otimes_4 \cdot \otimes_2 & \otimes_4 \cdot \otimes_3 \end{bmatrix},$$

因 $\otimes_1 \cdot \otimes_2 = [2, 4] \cdot [0.8, 1.2] = [1.6, 4.8]$,

$\otimes_1 \cdot \otimes_3 = [2, 4] \cdot [1, 3] = [2, 12]$,

$\otimes_4 \cdot \otimes_2 = [0.8, 1.2] \cdot [0.8, 1.2] = [0.64, 1.44]$,

$\otimes_4 \cdot \otimes_3 = [0.8, 1.2] \cdot [1, 3] = [0.8, 3.6]$,

子式的行列式

$$\det \begin{bmatrix} \otimes_3 & \otimes_1 \cdot \otimes_2 \\ 0 & \otimes_4 \cdot \otimes_2 \end{bmatrix} = \otimes_3 \cdot \otimes_4 \cdot \otimes_2$$

$$= [1, 3] \cdot [0.64, 1.44] = [0.64, 4.32],$$

无零白化值，故 $\operatorname{rank}(L(\otimes)) = 2$，由定理 11.2.1 知系统可控.

2° $$D(\otimes) = \begin{bmatrix} C(\otimes) \\ C(\otimes) \cdot A(\otimes) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \otimes_5 \\ \otimes_5 \cdot \otimes_4 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\det D(\otimes) = -\otimes_5 \cdot \otimes_5 \cdot \otimes_4 = [-1.728, -0.512],$$

无零白化值，所以 $\operatorname{rank}(D(\otimes)) = 2$. 由定理 11.2.1 知系统可观测.

3° $$\det(\lambda(\otimes)E - A(\otimes)) = \det \begin{bmatrix} \lambda(\otimes) - \otimes_1 & 0 \\ -\otimes_4 & \lambda(\otimes) \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda(\otimes) - \otimes_1)\lambda(\otimes),$$

令 $\det(\lambda(\otimes)E - A(\otimes)) = 0$，得

$$\lambda_1(\otimes) = \otimes_1, \quad \lambda_2(\otimes) = 0.$$

因 $\otimes_1$，0 皆为实的灰特征根，且 $\otimes_1$ 的下界为 2，大于零，故系统不稳定.

§11.3 灰色传递函数与典型环节

定义 11.3.1 设 n 阶灰参数线性系统的数学模型为

$$\otimes_n \frac{d^n x}{dt^n} + \otimes_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + \otimes_0 x = \otimes \cdot u(t),$$

对等式两端进行拉普拉斯变换，记 $L(x(t))=X(s)$，$L[u(t)]=U(s)$，称

$$G(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\otimes}{\otimes_n s^n+\otimes_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\otimes_1 s+\otimes_0}$$

为灰色传递函数.

灰色传递函数是 n 阶线性灰系统的响应 $x(t)$ 的拉氏变换与驱动项 $u(t)$ 的拉氏变换之比. 用一个方程表示的灰系统亦称灰色环节. 当某一环节的传递函数已知时，可由驱动项的拉氏变换通过关系 $X(s)=G(s)\cdot U(s)$ 求出其响应的拉氏变换，然后求逆变换即可得到其响应 $x(t)$. 驱动与响应的关系如图 11.3.1 所示.

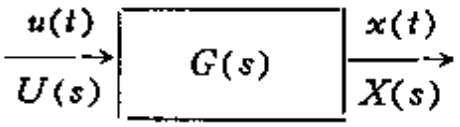


图 11.3.1

下面我们来讨论几个典型环节的传递函数.

定义 11.3.2 驱动项 $u(t)$ 与响应 $x(t)$ 具有关系

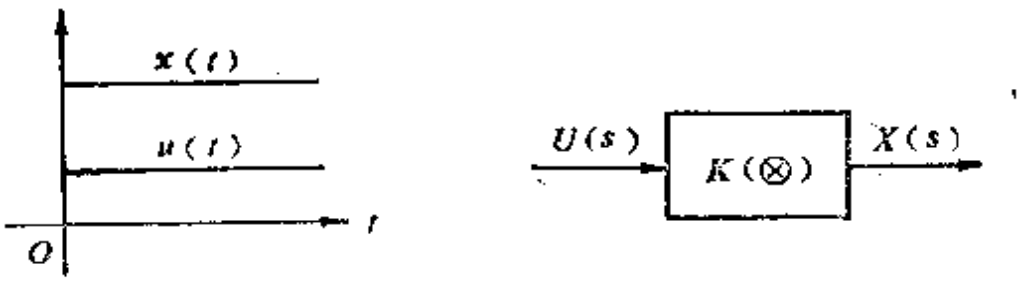
$$x(t)=K(\otimes)u(t)$$

的环节称为灰色比例环节，其中 $K(\otimes)$ 为环节的灰色放大系数.

命题 11.3.1 灰比例环节的传递函数为

$$G(s)=K(\otimes).$$

灰色比例环节的特点是当驱动量发生阶跃变化时，响应值成



(a) (b)

图 11.3.2

比例变化. 其变化关系以及驱动与响应的关系如图11.3.2所示.

定义 11.3.3　在单位阶跃驱动下，若响应

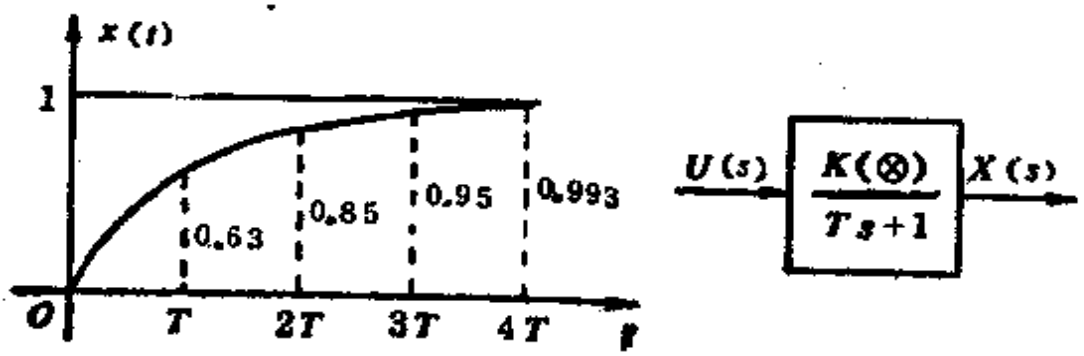
$$x(t) = K(\otimes)(1-e^{-t/T}),$$

则称该环节为灰色惯性环节，其中 T 为环节的时间常数.

命题 11.3.2　灰色惯性环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{K(\otimes)}{Ts+1}.$$

灰色惯性环节的特点是当驱动量发生阶跃变化时，响应要经过一定的时间方能达到新的平衡状态. 图 11.3.3 给出了灰色惯性环节当 $K(\otimes) = 1$ 时响应的变化曲线和环节框图.



(a)　　(b)

图 11.3.3

定义 11.3.4　驱动与响应具有关系

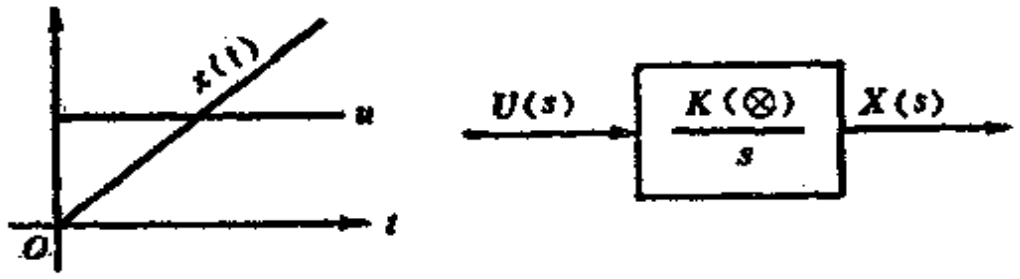
$$x(t) = \int K(\otimes)u(t)\,dt$$

时，称该环节为灰色积分环节.

命题 11.3.3　灰色积分环节的传递函数为

$$G(s) = \frac{K(\otimes)}{s}.$$

对于灰色积分环节，当驱动为阶跃函数时，其响应为 $x(t) = K(\otimes)\cdot u\cdot t$，如图11.3.4 所示.



(a) (b)

图 11.3.4

定义 11.3.5 响应与驱动具有关系

$$x(t)=K(\otimes)\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}$$

的环节称为灰色微分环节.

命题 11.3.4 灰色微分环节的传递函数为

$$G(s)=K(\otimes)\cdot s.$$

灰色微分环节的特点是当驱动发生阶跃变化时，响应为一振幅无穷大的脉冲.

定义 11.3.6 响应与驱动具有关系

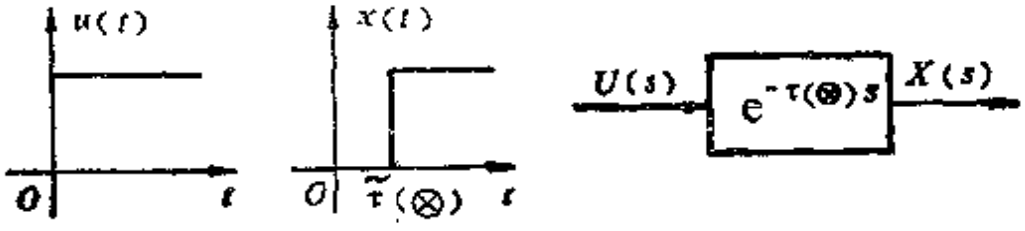
$$x(t)=u(t-\tau(\otimes))$$

的环节称为灰色时滞环节，其中 $\tau(\otimes)$ 为常数.

命题 11.3.5 灰色时滞环节的传递函数为

$$G(s)=\mathrm{e}^{-\tau(\otimes)\cdot s}.$$

对于灰色时滞环节，当驱动为阶跃函数时，响应要经过一段时间之后才发生相应变化. 见图 11.3.5.



(a) (b)

图 11.3.5

上面所列举的只是一些典型的基本环节，许多复杂的元件或系统可以看作是某些典型环节的组合. 如灰色比例环节与灰色微分环节组合，可得灰色比例微分环节；灰色积分环节与灰色时滞环节组合，可得灰色积分时滞环节；再进行下一层次的组合，还可得到灰色比例微分积分时滞环节等等.

我们可以通过对灰色传递函数之极点的研究来讨论系统的稳定性等问题. 而由下面的定理 11.3.1 可知，任何一个 n 阶灰色线性系统，可化为一个与之等价的一阶灰色线性系统. 故可利用 §11.2 的结果讨论 n 阶灰色线性系统的问题.

定理 11.3.1 对于定义 11.3.1 中所示的 n 阶灰色线性系统，存在一个与之等价的一阶灰色线性系统.

证明：设 n 阶灰色线性系统为

$$\otimes_n\frac{d^nx}{dt^n}+\otimes_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+\otimes_1\frac{dx}{dt}+\otimes_0x=\otimes\cdot u(t).$$

令
$$x=x_1,\quad \frac{dx}{dt}=\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dx_2}{dt}=x_3,$$
$$\cdots,\quad \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}=\frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n,$$

有
$$\frac{dx_n}{dt}=-\frac{\otimes_0}{\otimes_n}x_1-\frac{\otimes_1}{\otimes_n}x_2-\frac{\otimes_2}{\otimes_n}x_3-\cdots-\frac{\otimes_{n-1}}{\otimes_n}x_n+\frac{1}{\otimes_n}u(t),$$

从而 n 阶系统化为一阶系统.

$$\dot{X}(t)=A(\otimes)X(t)+B(\otimes)U(t),$$

其中 $X(t)=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$, $U(t)=u(t)$,

$$A(\otimes)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1\\ -\frac{\otimes_0}{\otimes_n} & -\frac{\otimes_1}{\otimes_n} & \cdots & \cdots & -\frac{\otimes_{n-1}}{\otimes_n}\end{bmatrix},\quad B(\otimes)=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{\otimes_n}\end{bmatrix}.$$ ■

§11.4 灰色传递函数阵

设灰色线性控制系统为

$$\begin{cases}\dot{X}(t)=A(\otimes)X(t)+B(\otimes)U(t)\\ Y(t)=C(\otimes)X(t)\end{cases}$$

作拉普拉斯变换，得

$$\begin{cases}sX(s)=A(\otimes)X(s)+B(\otimes)U(s)\\ Y(s)=C(\otimes)X(s)\end{cases}$$

从而

$$\begin{cases}(sE-A(\otimes))X(s)=B(\otimes)U(s)\\ Y(s)=C(\otimes)X(s)\end{cases}$$

若 $(sE-A(\otimes))$ 可逆，则进一步有

$$\begin{cases}X(s)=(sE-A(\otimes))^{-1}B(\otimes)U(s)\\ Y(s)=C(\otimes)X(s)\end{cases}$$

即 $$Y(s)=C(\otimes)(sE-A(\otimes))^{-1}B(\otimes)U(s).$$

定义 11.4.1 称 m 行 s 列矩阵

$$G(s)=C(\otimes)(sE-A(\otimes))^{-1}B(\otimes)$$

为灰色线性系统的传递函数矩阵，简称灰色传递函数阵.

定义 11.4.2 对于 n 阶灰色线性系统，当与之相应的一阶系统的状态灰阵 $A(\otimes)$ 非奇异时，称

$$\lim_{s\to 0}G(s)=-C(\otimes)A(\otimes)^{-1}B(\otimes)$$

为灰色增益阵.

若以灰色增益阵 $-C(\otimes)A(\otimes)^{-1}B(\otimes)$ 近似地代替传递函数阵 $G(s)$，则系统简化为比例环节.

由 $Y(s)=G(s)U(s)$，当 $m=s=n$ 时，若 $G(s)$ 非奇异，又可得到

$$U(s)=G(s)^{-1}Y(s).$$

定义 11.4.3　称

$$G(s)^{-1}=B(\otimes)^{-1}(sE-A(\otimes))C(\otimes)^{-1}$$

为灰色结构矩阵.

在灰色结构矩阵已知的条件下，要使输出向量 $Y(s)$ 达到或接近某一预定目标 $J(s)$，可通过 $G^{-1}(s)\cdot J(s)$ 来确定系统控制向量 $U(s)$.

我们还可以利用灰色传递函数矩阵来讨论系统的可控性与可观测性.

§11 5　去 余 控 制

灰系统的动态特性，主要取决于灰色传递函数矩阵 $G(s)$.因此，要实现系统动态特性的有效控制，可行的途径是改变和校正传递函数矩阵或结构矩阵.

定义 11.5.1　设 $G^{-1}(s)$ 为系统结构矩阵，$G_*^{-1}(s)$ 为目标结构矩阵，称

$$\Delta^{-1}=G^{-1}(s)-G^{-1}(s)$$

为结构偏差矩阵.

由　　$G^{-1}(s)Y(s)=U(s)$

和　　$G_*^{-1}(s)=G^{-1}(s)+\Delta^{-1}$,

得　　$(G_*^{-1}(s)-\Delta^{-1})Y(s)=U(s)$,

即　　$G_*^{-1}(s)Y(s)-\Delta^{-1}Y(s)=U(S)$.

定义 11.5.2　称 $-\Delta^{-1}Y(s)$ 为多余项. 通过反馈 $\Delta^{-1}Y(s)$ 作用抵消多余项的控制称为去余控制.

对于系统 $G^{-1}(s)Y(s)=U(s)$，经反馈 $\Delta^{-1}Y(s)$ 作用化为

$$G^{-1}(s)Y(s)+\Delta^{-1}Y(s)=U(s),$$

$$(G^{-1}(s)+\Delta^{-1})Y(s)=U(s),$$

此即　　$G_*^{-1}(s)Y(s)=U(s)$，

已具有预期的目标结构.

去余控制中结构偏差矩阵 Δ^{-1} 中的元素数目，直接影响控制器的元件数目. 从经济、可靠、技术上容易实现等角度考虑问题，在保证系统具有良好的动态品质的前提下，总希望偏差矩阵 Δ^{-1} 中的元素尽可能地少. 也就是说，在目标结构矩阵中，应尽量地保留原结构矩阵中的对应元素.

去余控制的思路可用以下框图说明：

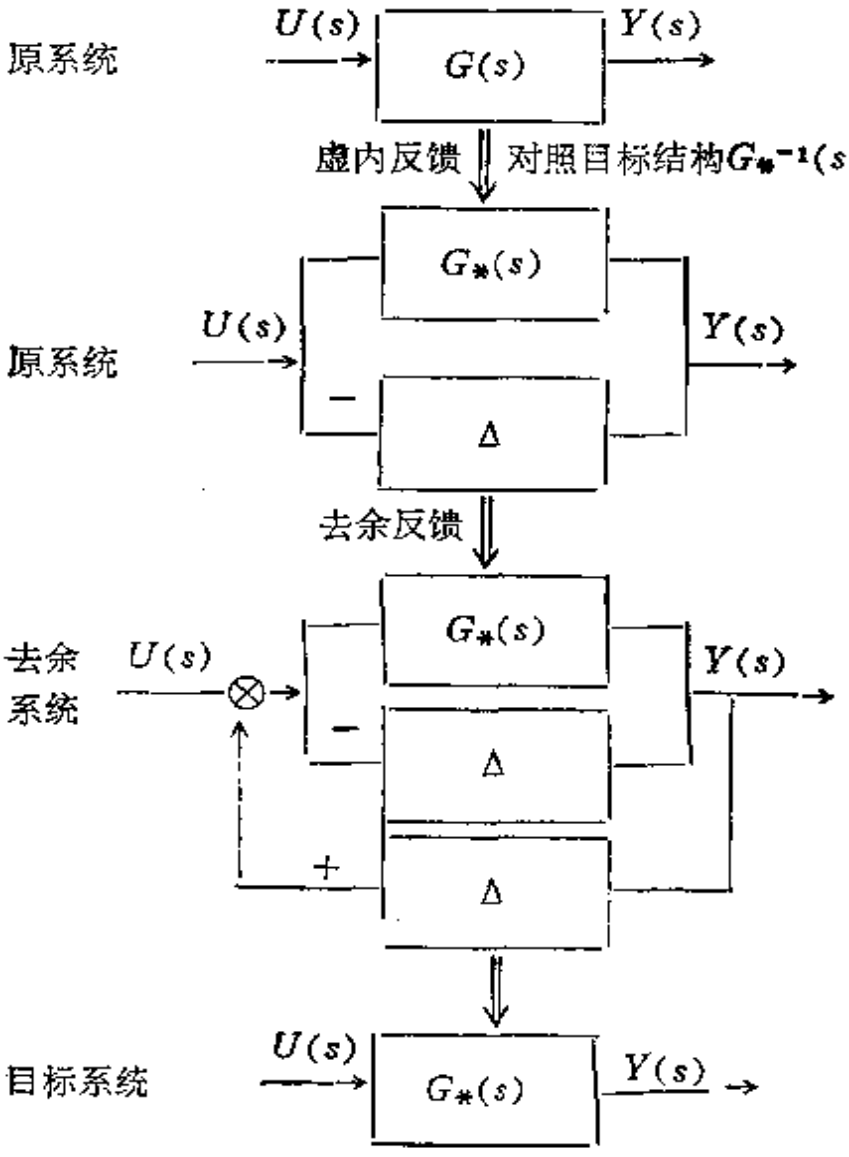


图 11.5.1

§11.6 灰关联控制

定义 11.6.1 设 $Y=(y_1, y_2, \cdots, y_m)^T$ 为输出向量，$J=(j_1, j_2, \cdots, j_m)^T$ 为目标向量. 若控制向量 $U=(u_1, u_2, \cdots, u_s)$ 中元素满足

$$u_k = f_k(\gamma(J, Y)), \quad k=1, 2, \cdots, s.$$

其中 $\gamma(J, Y)$ 为输出向量 Y 与目标向量 J 的灰色关联度，则称系统控制为灰关联控制.

灰关联控制系统是对一般控制系统附加灰关联控制器而得的. 它通过灰色关联度 $\gamma(J, Y)$ 确定控制向量 U，从而使输出向量与目标向量的关联度不超出某一预定的范围.

灰关联控制系统如图 11.6.1 所示.

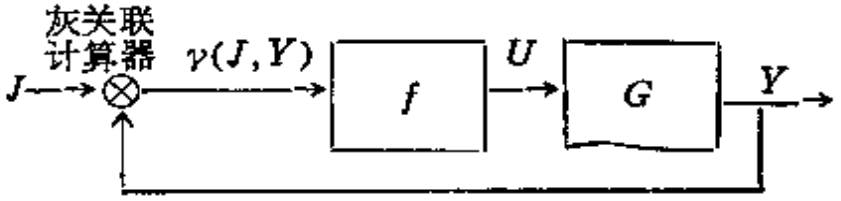


图 11.6.1

§11.7 灰色预测控制

前述的几种控制，都是通过判断系统行为序列是否符合预定的要求，而后进行控制. 这种事后控制明显地有以下不足：

1° 不能防患于未然；

2° 无法做到即时控制；

3° 适应性不强.

灰色预测控制是通过系统行为数据序列的提取，寻求系统发展规律，从而按照规律预测系统未来的行为，并根据系统未来的

行为趋势，确定相应的控制决策进行预控制．这样可以做到防患于未然，控制及时，具有较强的适应能力．

灰色预测控制系统如图 11.7.1 所示．

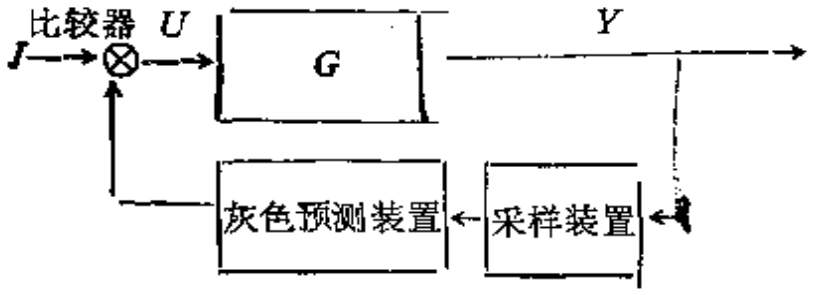


图 11.7.1

其工作原理是：首先通过采样装置对输出向量 Y 的行为数据进行采集、整理；再由预测装置建模，计算出以后若干步的预测值；最后比较目标，确定控制向量 U，使未来的输出向量 Y 尽量接近目标 J．

定义 11.7.1　设 $j_i(k)$，$y_i(k)$，$u_i(k)$ $(i=1, 2, \cdots, m)$ 分别为目标分量、输出分量、控制分量在 k 时刻的值．对于 $i=1, 2, \cdots, m$，令

$$j_i=(j_i(1),\ j_i(2),\ \cdots,\ j_i(n)),$$
$$y_i=(y_i(1),\ y_i(2),\ \cdots,\ y_i(n)),$$
$$u_i=(u_i(1),\ u_i(2),\ \cdots,\ u_i(n)),$$

对于控制算子 f：$(j_i(\lambda),\ y_i(\lambda))\longrightarrow u_i(k)$，即

$$u_i(k)=f(j_i(\lambda),\ y_i(\lambda)),$$

1°　当 $k>\lambda$ 时，称系统为事后控制；

2°　当 $k=\lambda$ 时，称系统为即时控制；

3°　当 $k<\lambda$ 时，称系统为预测控制．

定义11.7.2　若控制算子 f 满足

$$f(j_i(\lambda),\ y_i(\lambda))=j_i(\lambda)-y_i(\lambda),$$

即

$$u_i(k)=j_i(\lambda)-y_i(\lambda),$$

1° 当 $k>\lambda$ 时，称为偏差事后控制；

2° 当 $k=\lambda$ 时，称为偏差即时控制；

3° 当 $k<\lambda$ 时，称为偏差预测控制.

定义 11.7.3 设 $y_i=(y_i(1),\ y_i(2),\ \cdots,\ y_i(n))$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$ 为输出分量的采样序列，其 GM(1, 1) 响应式为

$$\begin{cases}\hat{y}_i^{(1)}(k+1)=\left(y_i(1)-\dfrac{b_i}{a_i}\right)\exp(-a_ik)+\dfrac{b_i}{a_i}\\ \hat{y}_i^{(0)}(k+1)=\hat{y}_i^{(1)}(k+1)-\hat{y}_i^{(1)}(k)\end{cases}$$

若控制算子 f 满足

$$u_i(n+k_0)=f(j_i(k),\ \hat{y}_i^{(0)}(k)),$$

$$n+k_0<k,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m.$$

则称系统控制为灰色预测控制.

在灰色预测控制系统中，常采用新陈代谢模型进行预测. 因此预测装置的参数是随时间变化的. 每当一个新的数据输出并被采样装置吸收时，就有一个老数据被去掉，从而便有一个新的模型出现，相应地会得到一系列新的预测值. 这就保证了系统具有较强的适应能力.

§11.8 应用实例

例 11.8.1 镗床灰色去余控制.

T618B 卧式精密镗床进给系统框图如图 11.8.1 所示，系统动态框图如图 11.8.2 所示.

按镗床的工作要求与技术条件，给定可容极点区为

$$S^*=\{(u,\ v)\mid -\infty<u<-\delta,\ -\rho<v<+\rho\},$$

其中 $|\delta|=0.2$，$|\rho|=3$.

系统未加校正环节前，特征方程为

$$f(s)=s^3+2.42\times10^2s^2+5.1\times10^3s+1.3\times10^5=0,$$

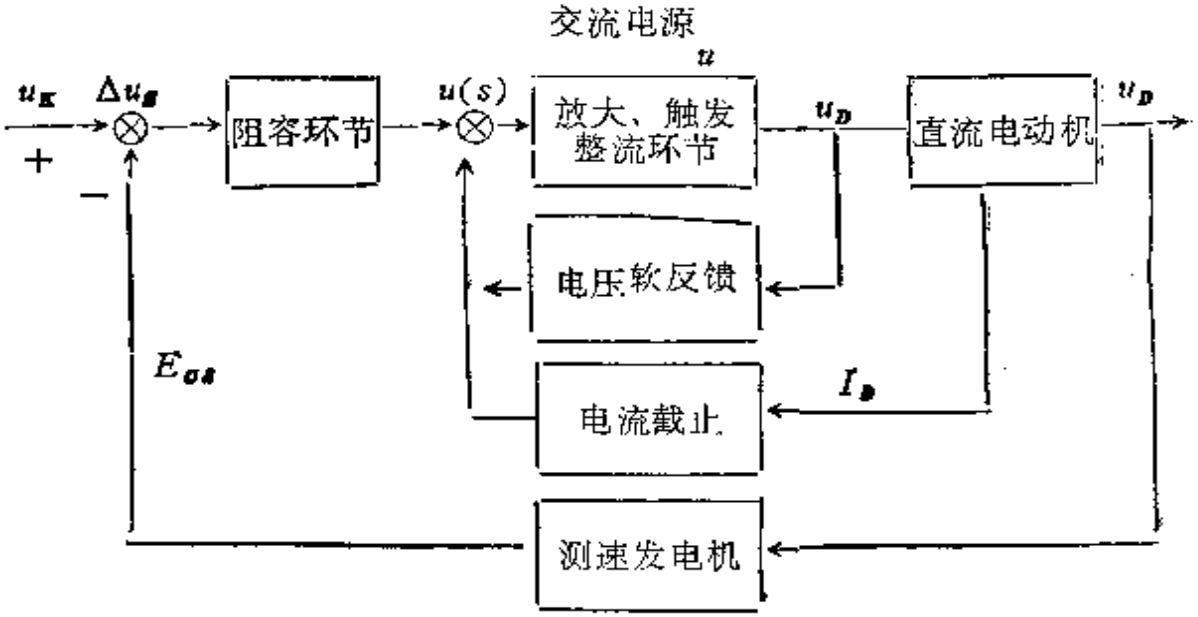


图 11.8.1

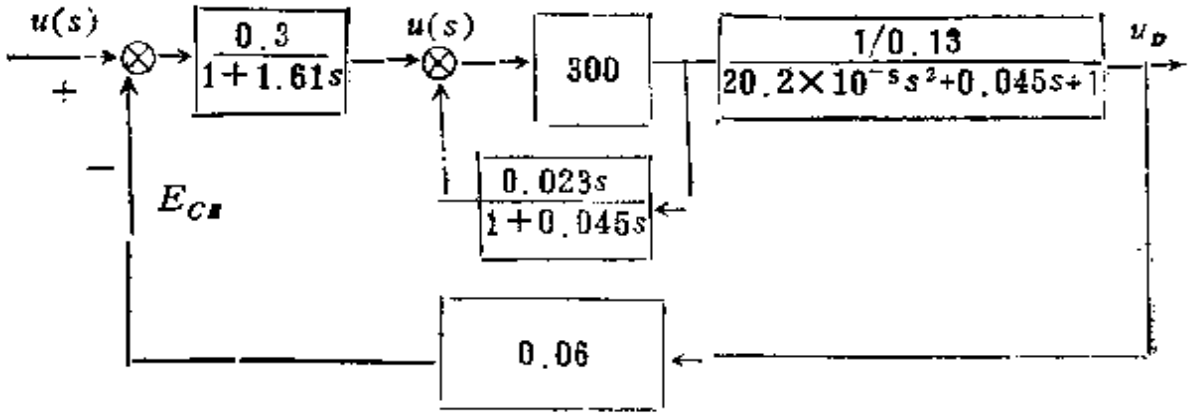


图 11.8.2

特征根为

$$s_1 = -10.1821 + 21.9743\mathrm{i},$$

$$s_2 = -10.1821 - 21.9743\mathrm{i},$$

$$s_3 = -221.6357.$$

显然，对于 $j=1$，2，3，$s_j \in S^*$.

若给定符合 S^* 要求的预期闭环传递函数

$$G_*(s) = \frac{21.2\times10^5}{s^3+3.4\times10^4 s^2+2.6\times10^4 s+1.3\times10^5},$$

按去余控制原理，得处理后的去余控制为

$$\frac{0.023s}{1+0.045s}=\frac{u_g}{u_p},$$

加入去余项后，系统特征方程化为

$$f^*(s)=s^4+0.2\times10^3s^3+5\times10^3s^2+5.2\times10^3s+27.5\times10^3=0,$$

特征根

$$s_1^*=-0.42+2.35\mathrm{i},\quad s_2^*=-0.42-2.35\mathrm{i},$$

$$s_3^*=-170.92,\qquad s_4^*=-28.24.$$

显然，对于 $j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ s_j^*\in S^*$. 故系统已具有满意的品质.

现在来看主轴旋转系统，其参数与进给系统有较大差别（见表 11.8.1）.

表 11.8.1　主轴旋转系统与进给系统参数

	电机型号	容　量（千瓦）	转　速（转/分）	电　流（安）	电　阻（欧）	电磁时间常数（秒）	机电时间常数（秒）
主轴旋转系统	Z_2-52	7.5	1500	41	0.78	0.006	0.065
进给系统	Z_2-32	2.2	1500	12.6	1.8	0.0045	0.045

未作去余控制前，主轴系统特征多项式为

$$f(s)=s^3+167.2878s^2+2667.6s+70393.37=0,$$

特征根

$$s_1=-7.2198+20.209\mathrm{i},$$

$$s_2=-7.298-20.209\mathrm{i},$$

$$s_3=-152.848.$$

采用与进给系统完全相同的去余控制器传递函数$\frac{0.023s}{1+0.045s}$，

加入去余控制后，特征方程化为

$$f^*(s)=s^4+0.1674\times10^3s^3+2.6916\times10^3s^2+2.4224\times10^3s+10.1353\times10^3=0,$$

特征根

$$s_1^* = -0.343 + 1.9547i,\quad s_2^* = -0.343 - 1.9547i,$$
$$s_3^* = -149.5,\qquad s_4^* = -17.2.$$

显然，对于 $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$，$s_j^* \in S^*$.

主轴系统虽然与进给系统参数不同，但在相同的去余控制器作用下，却同时获得了满意的品质. 其动态响应如图 11.8.3 所示.

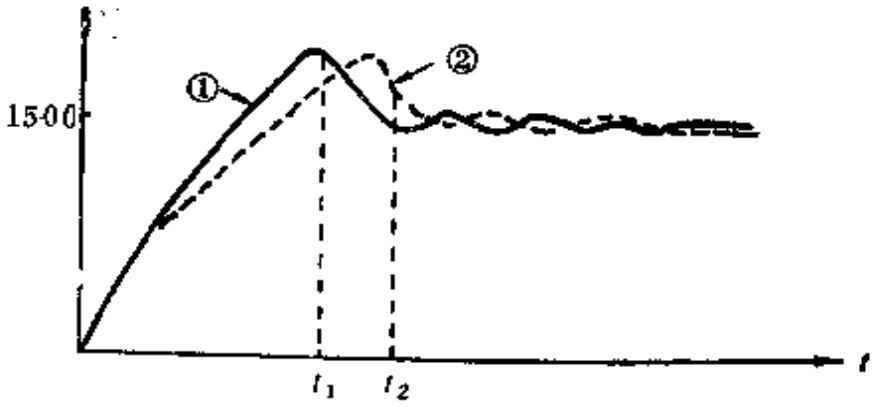


图 11.8.3

在图 11.8.3 中，①为进给系统，超调量约为 150 转/分，调整时间 t_1 约 0.8 秒；②为主轴系统，超调量约为 140 转/分，调整时间 t_2 约 0.9 秒.

例 11.8.2 棉蚜虫生物防治系统控制.

棉蚜虫是棉花的害虫，瓢虫则是棉蚜虫的天敌. 采取棉田中栽油菜的生物措施，能够对棉蚜虫生物防治系统进行有效的控制.

瓢虫不但吃棉蚜虫，同时也吃菜蚜虫. 先在棉田栽油菜，在油菜生长过程中，菜蚜虫繁殖. 这样便招致瓢虫飞向油菜，并以菜蚜虫为食而得到发展繁殖. 当瓢虫在油菜上繁殖到一定程度时，棉花长起来，棉蚜虫滋生。这时砍去油菜，迫使瓢虫转向棉花，达到消灭棉蚜虫的目的.

设 k 阶段的瓢虫数、菜蚜虫数和棉蚜虫数分别为 $x_1(k)$，$x_2(k)$，

$x_3(k)$. 三者之间的关系如下：

$$\begin{cases} x_1(k+1) = a_{11}x_1(k) + a_{12}x_2(k) \\ x_2(k+1) = -a_{21}x_1(k) + a_{22}x_2(k) + \otimes_{23}x_3(k) \\ x_3(k+1) = -a_{31}x_1(k) + \otimes_{32}x_2(k) + a_{33}x_3(k) \end{cases}$$

即 $$X(k+1) = A(\otimes)X(k),$$

其中 $$X(k+1) = \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix}, \quad X(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix},$$

$$A(\otimes) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ -a_{21} & a_{22} & \otimes_{23} \\ -a_{31} & \otimes_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

取 $k=0$，有

$$X(1) = A(\otimes)X(0),$$

进而当 $k=1$ 时，

$$X(2) = A(\otimes)X(1) = A^2(\otimes)X(0).$$

若要在第二阶段消灭棉蚜虫，可令 $x_3(2)=0$. 由前式

$$x_3(2) = -(a_{31}a_{11} + a_{21}\otimes_{32} + a_{31}a_{33})x_1(0) + (-a_{31}a_{12} + a_{22}\otimes_{32} + a_{33}\otimes_{32})x_2(0) + (\otimes_{32}\otimes_{23} + a_{33}^2)x_3(0)$$

从而

$$-(a_{31}a_{11} + a_{21}\otimes_{32} + a_{31}a_{33})x_1(0) + (-a_{31}a_{12} + a_{22}\otimes_{32} + a_{33}\otimes_{32})x_2(0) + (\otimes_{32}\otimes_{23} + a_{33}^2)x_3(0) = 0.$$

令 $$\lambda_{13}(0) = \frac{x_1(0)}{x_3(0)}, \quad \lambda_{23}(0) = \frac{x_2(0)}{x_3(0)},$$

并取 $\otimes_{32}=0$，可得

$$\lambda_{13}(0) = \frac{a_{33}^2}{a_{31}(a_{11}+a_{33})} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{31}(a_{11}+a_{33})}\lambda_{23}(0).$$

因此可选取瓢虫与棉蚜虫的比例

$$\lambda_{13} \in \left[\frac{a_{33}^2 - a_{31}a_{12}\lambda_{23}(0)}{a_{31}(a_{11}+a_{33})}, \frac{a_{33}^2}{a_{31}(a_{11}+a_{33})} \right].$$

λ_{13} 为棉蚜虫生物防治系统的控制量. 它是一个灰数，下界

$$\underline{\lambda}_{13}=\frac{a_{33}^{2}-a_{31}a_{12}\lambda_{23}^{(0)}}{a_{31}(a_{11}+a_{33})},$$

上界

$$\overline{\lambda}_{13}=\frac{a_{33}^{2}}{a_{31}(a_{11}+a_{33})}.$$

若令 μ 为瓢虫繁殖能力与棉蚜虫繁殖能力之比，即 $\mu=\frac{a_{11}}{a_{33}}$，则

$$\overline{\lambda}_{13}=\frac{a_{33}}{a_{31}(1+\mu)}.$$

显然，μ越大，$\overline{\lambda}_{13}$ 越小；当 μ 一定时，a_{33} 越大，$\overline{\lambda}_{13}$ 越大；当 a_{33} 和 μ 皆一定时，a_{31} 越大，$\overline{\lambda}_{13}$ 越小. 一般地，取 $\lambda_{13}=\overline{\lambda}_{13}$，则在第二阶段消灭棉蚜虫是有把握的.

例 11.8.3 锅炉给水系统灰色预测控制.

系统控制框图如图 11.8.4，其中流量控制器和水位控制器皆

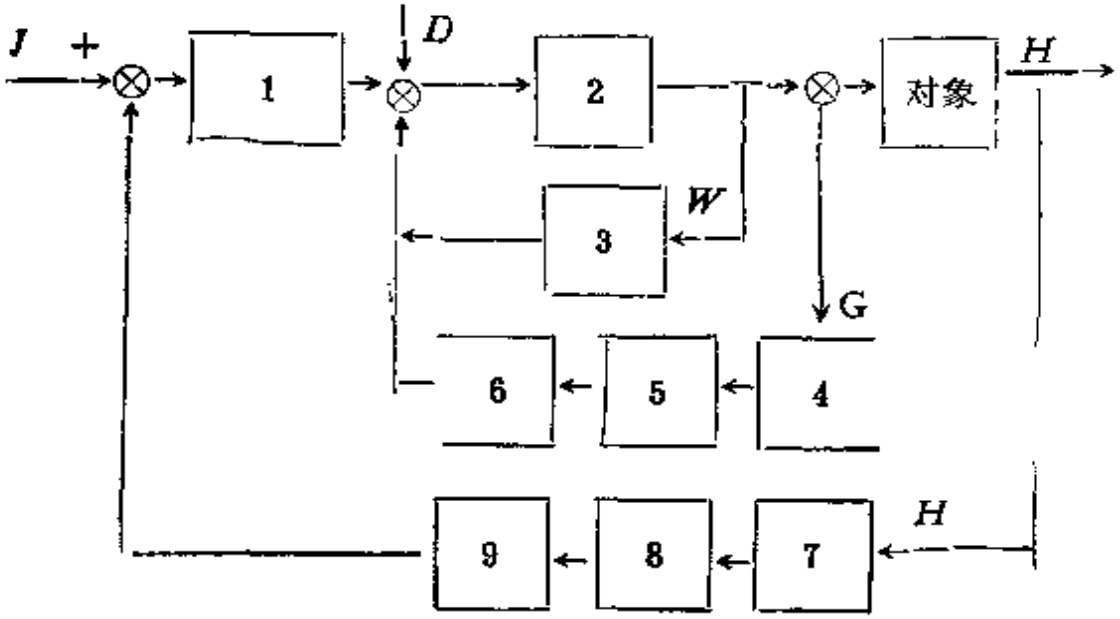


图 11.8.4

采用了灰色预测控制环节. 其特点是建模迅速，对环境、参数的随机扰动反应灵敏，自适应能力强.

在图 11.8.4 中，

W——位置信号，　　D——蒸汽流量，

H——水位，　　G——给水流量，

1——电位变换器，　　2——执行环节，

3——位置变换器，　　4——流量变换器，

5——GM(1，1)控制器，　　6——比例决策器，

7——水位变换器，　　8——GM(1，1)控制器，

9——比例决策器，　　J——目标.

上述系统的品质、性能显著地优于 1985 年湖北省电力系统评比第一名的 PID 系统，见表 11.8.2.

表 11.8.2　调整时间对照

扰　动　量		PID 控制调整时间（秒）	灰色控制调整时间（秒）
内扰	+40%	60	3
	−40%	63	4
外扰	±10%	120～130	40

附录I　主要模型算法BASIC程序

一、GM（1，1）

程序说明：

M——数据个数　　T0——起始年份　　K——预测年数

输出内容：

1．原始时间数据列；
2．系数向量；
3．数学模型；
4．生成数计算值及其误差；
5．生成数计算值实际值的曲线图；
6．原始数据的还原及其误差；
7．还原值和实际值的曲线图；
8．后验差检验结果；
9．关联度图及关联度；
10．求出的预测结果．

上机操作说明：

1．调出 A1启动，键入 RUN，显示 “M＝”，询问数据样本个数；
2．回答数据后，显示“T0＝”，询问时间数据列起始年份；
3．回答数据后，运行至显示 “K＝”，询问预测年数；
4．回答数据后，运行至输出预测值，显示“BREAK IN 72”，检查计算结果；
5．如计算过程有问题，用GOTO语句转向错误处重新计算；如无误，键入CONT，运行结束．

程序清单：

```
1 LPRINT "****** GM(1,1) ******"
5 INPUT "the number of figures M=", M
6 INPUT "the initial year T0=", T0
```

```
12 LPRINT "T0--Tm"; T0; "--"; T0+M-1
14 DIM X0(M), X1(M), A(M-1,2), B(2,M1),-
   C(2,4), D(2,4), E(2,1), Y(M-1,1), Z(2)
16 DIM G(M), F(M), X(M), Q(M), L(M)
20 GOSUB 120
22 GOSUB 150
30 GOSUB 200
32 GOSUB 250
34 GOSUB 300
36 GOSUB 400
38 GOSUB 450
40 GOSUB 500
42 GOSUB 550
43 GOSUB 600
46 GOSUB 650
47 GOSUB 700
48 GOSUB 800
52 GOSUB 900
53 STOP
90 LPRINT "****** END ******"
99 END
120 LPRINT "-------- X0(i) --------"
122 FOR I=1 TO M
124 READ X0(I)
126 LPRINT X0(I);"    ";
128 NEXT I
140 RETURN
150 PRINT "-------- X1(i) -------"
```

```
152 T = 0
154 FOR I = 1 TO M
156 T = T + X0(I)
158 X1(I) = T
162 NEXT I
169 RETURN
200 FOR J = 1 TO M-1
202 Y = 0
204 B(1,J) = - (X1(J + 1) + X1(J))/2
206 B(2,J) = 1
208 NEXT J
240 RETURN
250 PRINT "-------- A(i,j) ---------"
251 FOR I = 1 TO 2
252 FOR J = 1 TO M - 1
254 A(J,I) = B(I,J)
256 NEXT J
258 NEXT I
272 RETURN
300 FOR I = 1 TO 2
304 FOR K = 1 TO 2
306 C(I,K) = 0
308 FOR J = 1 TO M - 1
310 C(I,K) = C(I,K) + B(I,J)*A(J,K)
312 NEXT J
316 IF I = K THEN 322
318 C(I,K + 2) = 0
320 GOTO 324
```

```
322 C(I,K+2)=1
324 NEXT K
328 NEXT I
336 FOR J=2 TO 4
338 C(2,J)=C(2,J)-C(1,J)/C(1,1)*C(2,1)
340 NEXT J
346 FOR I=1 TO 2
348 FOR J=1 TO 4
350 D(I,J)=C(I,J)/C(I,I)
352 NEXT J
354 NEXT I
358 K=1
359 I=2
360 FOR J=4 TO 2 STEP -1
362 D(K,J)=D(K,J)-D(I,J)/D(I,I)*D(K,I)
364 NEXT J
390 RETURN
400 PRINT "---------- yn ----------"
402 FOR I=1 TO M-1
404 Y(I,1)=X0(I+1)
408 NEXT I
420 RETURN
450 FOR I=1 TO 2
454 E(I,1)=0
456 FOR J=1 TO M-1
458 E(I,1)=E(I,1)+B(I,J)*Y(J,1)
460 NEXT J
464 NEXT I
```

```
466 LPRINT "  "
480 RETURN
500 LPRINT "--------- Λa(i) --------"
502 FOR I=1 TO 2
504 Z(I)=0
506 FOR J=3 TO 4
508 Z(I)=Z(I)+D(I,J)*E(J-2,1)
510 NEXT J
512 NEXT I
516 LPRINT "Λa=", Z(1)
518 LPRINT "Λb=", Z(2)
540 RETURN
550 LPRINT "--------"
554 X0=X0(1)
558 LPRINT "Λx(t+1)=", (X0-Z(2)/Z(1)); "e"; -
    Z(1); "t+"; Z(2)/Z(1)
560 RETURN
600 LPRINT "----- Λx1(i) --------"
602 FOR T=1 TO M-1
604 G(T)=(X0-Z(2)/Z(1))/EXP(Z(1)*T)+Z(2)/Z(1)
606 LPRINT"ΛX1(";T+T0;")=";G(T);"-----"X1(T+1)
608 F(T)=X1(T+1)-G(T)
618 NEXT T
630 RETURN
650 LPRINT "------- ΛX0 4------ e -------- %
    -------"
652 G(0)=X1(1), X(1)=X0(1)
654 FOR T=1 TO M-1
```

```
656 X(T+1)=G(T)-G(0)
658 G(0)=G(T)
660 Q(T+1)=X0(T+1)-X(T+1)
664 P=Q(T+1)/X0(T+1)
666 LPRINT "X0(";T+T0;")=";  X(T+1);  "----";
    X0(T+1);
670 LPRINT    "    e=";  Q(T+1);    " q=";  P*
    100;  "%"
672 NEXT T
680 RETURN
700 LPRINT "-------- Jean Ye ----------"
702 X1=X1(M)/M
703 S1=0
704 FOR I=1 TO M
706 W=(X0(I)-X1)^2+S1
708 S1=W
710 NEXT I
712 S1=SQR(W/(M-1))
724 Q1=0
728 FOR K=1 TO M
730 Q0=Q1+ABS(Q(K))
732 Q1=Q0
734 NEXT K
736 Y1=Q1/M
738 S2=0
740 FOR K=1 TO M
742 V=(ABS(Q(K))-Y1)^2+S2
744 S2=V
```

```
746 NEXT K
747 S2=SQR(V/(M-1))
748 C=S2/S1
750 IF C<. 35 THEN 754
751 IF C<. 5 THEN 755
752 IF C<.65 THEN 756
753 IF C>=. 65 THEN 758
754 LPRINT "C=", C, "(GOOD)", GOTO 761
755 LPRINT "C=", C, "(QUALIED)", GOTO 761
756 LPRINT "C=";C, "(JUST THE MARK)";GOTO
    761
758 LPRINT "C=", C, "(BELOW THE MARK)",
    GOTO 761
761 U=0
762 FOR I=1 TO M
764 IF (ABS(Q(I))-Y1)<=.6745*S1 THEN 770
766 NEXT I
768 GOTO 774
770 U=U+1
771 IF I=M THEN 774
772 GOTO 766
774 P=U/M
776 IF P>.95 THEN 780
777 IF P>.8 THEN 781
778 IF P>.7 THEN 782
779 IF P<=. 7 THEN 784
780 LPRINT "P=", P, "(GOOD)", GOTO 790
781 LPRINT "P=", P, "(QUALIED)", GOTO 790
```

```
782 LPRINT "P="; P;"(JUST THE MARK)",GOTO
    790
784 LPRINT "P="; P;"(BELOW THE MARK)"
790 RETURN
800 LPRINT "-------- GUANLIANDU ----------"
806 S=ABS(F(1))
808 B=F(1)
810 FOR I=1 TO M-1
814 IF S<=ABS(F(I+1)) GOTO 818
816 S=ABS(F(I+1))
818 IF B>=ABS(F(I+1)) GOTO 822
820 B=ABS(F(I+1))
822 NFXT I
824 PRINT "max e="; B
826 PRINT "min e="; S
830 FOR I=1 TO M
832 L(I)=(S+B)/(ABS(F(I))+B)
836 NEXT I
842 T1=0
844 FOR I=1 TO M-1
846 A=T1+L(I)
848 T1=A
850 NEXT I
852 S=A/(M-1)
854 LPRINT "S=",S
890 RETURN
900 LPRINT " $ $ $ $ $ $ $ $ Yu Ce $ $ $ $ $ $
     $ $"
```

```
902 INPUT "the number of forecasting numbers k=";
    K
904 G0=G(M-1)
906 FOR T=1 TO K
910 G=(X0-Z(2)/Z(1))*EXP(-(Z(1)*(M-1+T)))
    +Z(2)/Z(1)
916 LPRINT "ΔX1(";M+T-1+T0;")=";G;
918 G1=G-G0
920 LPRINT "    ΔX0(";M+T-1+T0;")=";G1
922 G0=G
924 NEXT T
930 LPRINT "$ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ $"
950 RETURN
1000 DATA 2674, 3971, 4382, 6626, 8340, 10498
```

二、GM(1,N)

程序说明：

N——变量个数

M——数据个数

输出内容：

1. 原始数据矩阵；
2. 一次累加生成数据矩阵；
3. 矩阵X(A, B)；
4. 常数项列向量；
5. 系数向量a；
6. 微分方程模型；
7. $X^{(1)}$累加生成数计算值；
8. 原始数据还原值$X^{(0)}$及误差.

上机操作说明：

1. 引入程序，键入 RUN↵启动，显示“N=”，询问变量

数；

2．回答变量数后，显示“M＝”询问数据个数；

3．回答后，机器运行直到结束，输出全部结果．

程序清单：

```
4 LPRINT "******** GM(1,N) ********"
6 INPUT "N=", N
8 LPRINT "N=";N
9 INPUT "M=", M
10 LPRINT "M=", M
14 DIM A(M,N),B(N,M),C(N,N*2),D(N,N*2),E(N,
   1), Y(M,1), X(N), X0(N,M), X1(N,M), G(M)
15 GOSUB 300
16 FOR I=1 TO N
18 FOR J=1 TO M-1
20 A(J,I)=B(I,J)
24 NEXT J
26 NEXT I
28 PRINT "-------- A(i,j) -------"
30 FOR I=1 TO M-1
32 FOR J=1 TO N
34 PRINT A(I,J); "    ";
36 NEXT J
38 PRINT
40 NEXT I
49 PRINT "---------- AtA --------"
51 FOR I=1 TO N
52 FOR K=1 TO N
53 C(I,K)=0
```

```
54 FOR J=1 TO M-1
55 C(I,K)=C(I,K)+B(I,J)*A(J,K)
56 NEXT J
57 PRINT C(I,K); "    ";
58 IF I=K THEN 62
59 C(I,K+N)=0
60 GOTO 64
62 C(I,K+N)=1
64 NEXT K
66 PRINT
68 NEXT I
72 PRINT "-------- (AtA)-1 ------"
74 FOR I=1 TO N-1
76 FOR K=I+1 TO N
78 FOR J=1+I TO 2*N
80 C(K,J)=C(K,J)-C(I,J)/C(I,I)*C(K,I)
82 NEXT J
84 NEXT K
86 NEXT I
88 FOR I=1 TO M
90 FOR J=1 TO N*2
92 D(I,J)=C(I,J)/C(I,I)
94 NEXT J
96 NEXT I
98 FOR I=N TO 2 STEP -1
100 FOR K=I-1 TO 1 STEP -1
101 FOR J=N*2 TO I STEP -1
102 D(K,J)=D(K,J)-D(I,J)/D(I,I)*D(K,I)
```

```
106 NEXT J
108 NEXT K
110 NEXT I
112 FOR I=1 TO N
114 FOR J=N+1 TO N*2
116 PRINT D(I,J); "    ";
118 NEXT J
120 PRINT
122 NEXT I
124 PRINT "-------- Yn -------"
126 FOR I=1 TO M-1
128 Y(I,1)=X0(1, I+1)
129 PRINT Y(I,1); "    ";
130 NEXT I
131 PRINT
132 PRINT "------ AtYn------"
134 FOR I=1 TO N
135 E(I,1)=0
136 FOR J=1 TO M-1
138 E(I,1)=E(I,1)+B(I,J)*Y(J,1)
140 NEXT J
142 PRINT E(I,1)
144 NEXT I
146 LPRINT "---------- ∧a(I) -------"
148 FOR I=1 TO N
150 X(I)=0
152 FOR J=N+1 TO N*2
154 X(I)=X(I)+D(I,J)*E(J-N,1)
```

```
155 NEXT J
156 IF I>1 THEN 159
157 LPRINT "∧a="; X(I)
158 GOTO 161
159 LPRINT "∧b"; I-1; "="; X(I)
161 NEXT I
162 LPRINT "-------------------------"
163 LPRINT "∧X1(t+1) = (";X0(1,1);
164 FOR I=2 TO N
165 LPRINT "-"; X(I)/X(1); "X"; I;
166 NEXT I
167 LPRINT ") e "; -X(1); "t"
174 FOR I=2 TO N
176 LPRINT "+"; X(I)/X(1); "X"; I; "  ";
178 NEXT I
179 LPRINT
180 LPRINT "------- ∧x1(i) -------"
182 FOR J=1 TO M
183 GOSUB 400
184 G=S*EXP(-X(1)*(J-1))
186 FOR I=2 TO N
188 G(J)=G+(X(I)/X(1))*X1(I,J)
190 G=G(J)
192 NEXT I
194 LPRINT "∧X1("; J;") =";G(J);"-------"; X1
    (1,J)
196 NEXT J
198 LPRINT "------ ∧X0 ----- e ------ %-----"
```

```
204 FOR T=1 TO M-1
206 X=G(T+1)-G(T)
207 E=X0(1,T+1)-X
208 P=E/X0(1,T+1)
210 LPRINT "∧x0("; T+1") =";  X;------";  X0(1,T
    +1);
211 LPRINT "   e=";E;  "   q=";  P*100;  "%"
214 NEXT T
220 GOTO 990
300 LPRINT "--------- X0(i,j)----------"
302 FOR I=1  TO N
304 FOR J=1  TO M
306 READ X0(I,J)
308 LPRINT X0(I,J);  "   ";
310 NEXT J
312 LPRINT
314 NEXT I
318 FOR I=1 TO N
320 T=0
322 FOR J=1 TO M
324 T=T+X0(I,J)
326 X1(I,J)=T
330 NEXT J
334 NEXT I
336 FOR I=1 TO N
338 FOR J=1 TO M-1
340 IF I<>1 THEN 344
342 B(I,J)=-(X1(I,J+1)+X1(I,J))/2
```

```
343 GOTO 346
344 B(I,I) = X1(I,J+1)
346 NEXT I
348 NEXT I
350 RETURN
400 S0 = X0(1,1)
410 FOR I = 2 TO N
420 S = S0 - X1(I,J)*X(I)/X(1)
425 S0 = S
430 NEXT I
440 RETURN
500 DATA 4799, 5003, 4810, 5299, 5505, 5690, 5726,
    5655, 6095, 6642, 6411, 6500, 7090, 7746
510 DATA 178901, 181269, 181814, 181734, 181464,
    181593, 181115, 180600, 180881, 178894, 175852,
    172437, 170194, 171071
520 DATA 351, 365, 421, 511, 486, 537, 583, 648,
    884, 1086, 1269, 1335, 1513, 1660
530 DATA 96, 105, 133, 140, 156, 183, 205, 222,
    253, 283, 321, 370, 397, 435
540 DATA 18, 20.6, 21.8, 26.4, 28.5, 33.3, 35.1,
    38.7, 40.9, 42.4, 41.3, 36.8, 35.6, 34.1
550 DATA 35.6, 36.2, 37.8, 39.1, 41.3, 43.4,
    45.3, 45.3, 45.2, 45.2, 45.2, 45, 44.8, 45.4
990 LPRINT "***** END *****"
999 END
```

三、GM(0,N)

程序说明：

N——变量数　　M——数据个数　　K——预测年数

输出内容：

1．原始数据矩阵X(ij)；　　2．转置矩阵A(ij)；

3．常数项系数Ym；　　4．系数向量a；

5．线性方程模型；　　6．原始数据计算值与误差；

7．如果为序列数据，预测计算值.

上机操作说明：

1．引入程序，键入RUN←启动，显示“N=”，询问变量数；

2．回答变量数后，显示“M=”，询问样本数；

3．回答后，机器运行至全部结果输出结束；

4．如样本为时间序列数据(即N=2)，则显示“K=”，询问预测年数，回答后，机器运行至输出预测值结束.

程序清单：

```
1 LPRINT "***** GM(0,N) ******"
6 INPUT "N="; N
8 LPRINT "N="; N
9 INPUT "M="; M
10 LPRINT "M="; M
14 DIM A(M,N), B(N,M), C(N,2*N), D(N,2*N),
   E(N,1), Y(M,1), X(N), X0(N,M+1)
15 GOSUB 300
16 FOR I=1 TO N
18 FOR J=1 TO M
```

```
22 A(J,I) = B(I,J)
24 NEXT J
26 NEET I
28 LPRINT "------- A(i,j) ---------"
30 FOR I=1 TO M
32 FOR J=1 TO N
34 LPRINT A(I,J); "  ";
36 NEXT J
38 LPRINT
40 NEXT I
48 PRINT "---------- AtA ---------"
50 FOR I=1 TO N
51 FOR K=1 TO N
52 C(I,K)=0
53 FOR J=1 TOM
54 C(I,K)=C(I,K)+B(I,J)*A(J,K)
55 NEXT J
57 IF I=K THEN 62
58 C(I,K+N)=0
60 GOTO 64
62 C(I,K+N)=1
64 NEXT K
68 NEXT I
72 PRINT "--------(AtA)-1----------"
74 FOR I=1 TO N-1
76 FOR K=I+1 TO N
78 FOR J=I+1 TO N*2
80 C(K,J)=C(K,J)-C(I,J)/C(I,I)*C(K,I)
```

```
82 NEXT J
84 NEXT K
86 NEXT I
88 FOR I=1 TO N
90 FOR J=1 TO N*2
92 D(I,J)=C(I,J)/C(I,I)
94 NEXT J
96 NEXT I
98 FOR I=N TO 2 STEP -1
100 FOR K=I-1 TO 1 STEP -1
101 FOR J=2*N TO I STEP-1
102 D(K,J)=D(K,J)-D(I,J)/D(I,I)*D(K,I)
106 NEXT J
108 NEXT K
110 NEXT I
112 FOR I=1 TO N
114 FOR J=N+1 TO 2*N
118 NEXT J
122 NEXT I
124 LPRINT "---------Yn---------"
126 FOR I=1 TO M
128 READ Y(I,1)
129 LRPINT Y(I,1); "  ";
130 NEXT I
131 LPRINT
132 PRINT "---------AtYn--------"
134 FOR I=1 TO N
135 E(I,1)=0
```

```
136 FOR J=1 TO M
138 E(I,1)=E(I,1)+B(I,J)*Y(J,1)
140 NEXT J
144 NEXT I
145 PRINT
146 LPRINT "————————∧a(i) ————————"
148 FOR I=1 TO N
150 X(I)=0
152 FOR J=N+1 TO 2*N
154 X(I)=X(I)+D(I,J)*E(J-N,1)
155 NEXT J
156 IF I()N THEN 159
157 LPRINT "∧a=", X(N)
158 GOTO 161
159 LPRINT "∧b", I, "=",X(I)
161 NEXT I
162 LPRINT "**********************"
170 LPRINT "∧X1=", X(N);
172 FOR I=1 TO N-1
174 LPRINT "+", X(I); "X", I+1;
176 NEXT I
179 LPRINT
180 LPRINT "———————— ∧X1 ——————————e————————
    q————————"
182 FOR J=1 TO M
183 G=X(N)
184 FOR I=1 TO N--1
186 G1=G+X(I)*B(I,J)
```

```
187 G = G1
188 NEXT I
190 E = G1 - Y(J,1)
192 P = (G1 - Y(J,1))/Y(J,1)
194 LPRINT "∧X1(";J;") =";G1; "-------"; Y(J,1);
196 LPRINT "  e=";  E; "  q=";  P*100; "%"
198 NEXT J
199 IF N>2 THEN 999
200 LPRINT
201 LPRINT " $ $ $ $ $ $Yu Ce  $ $ $ $ $ $ $ $ $"
202 INPUT "K =", K
204 FOR T = 1 TO K
206 X = X(N) + X(1)*(K + T)
208 LPRINT "∧X1(", M + T, ") =";X
210 NEXT T
219 LPRINT
220 GOTO 990
300 LPRINT "------------------ X0(i,j)--------
    --------"
302 FOR I = 1 TO N - 1
304 FOR J = 1 TO M
306 READ B(I,J)
308 LPRINT B(I,J); "  ";
310 NEXT J
312 LPRINT
314 NEXT I
316 FOR J = 1 TO M
318 B(N,J) = 1
```

```
319 LPRINT B(N,J); "    ";
320 NEXT J
322 LPRINT
350 RETURN
500 DATA 1, 2, 3, 4, 5, 1279.8, 1466.7, 1688.8,
    1839.7, 1774.7
990 LPRINT "******** END ********"
999 END
```

四、Verhulst模型

程序说明：

M——数据个数　　K——预测年数

输出内容：

1. 原始数据列；　　2. 累加生成数据列；
3. B矩阵；　　4. 常数项系数；
5. 系数向量a；　　6. 数学模型；
7. 累加生成数计算值　　8. 还原原始数据计算值；
9. 预测计算值.

上机操作说明：

1. 引入程序，键入RUN←┘启动，显示"M＝"询问数据个数；
2. 回答数据后，运行至输出还原数据计算值，显示"M＝"，询问预测年数；
3. 回答数据后，运行至结束.

程序清单：

```
1 LPRINT "***** Verhulst *****"
10 INPUT "M="; M
```

```
12 LPRINT "M=";  M
14 DIM A(M-1,2), B(2,M-1), C(2,4), D(2,4),
   E(2,1), Y(M-1,1),X(2), X0(M), X1(M), G(M)
15 GOSUB 300
16 FOR J=1 TO 2
18 FOR J=1 TO M-1
22 A(J,I)=B(I,J)
24 NEXT J
26 NEXT I
28 LPRINT "-------- A(i,j) -------"
30 FOR I=1 TO M-1
32 FOR J=1 TO 2
34 LPRINT A(I,J);"    ";
36 NEXT J
38 LPRINT
40 NEXT I
48 PRINT "------- AtA ------"
50 FOR I=1 TO 2
51 FOR K=1 TO 2
52 C(I,K)=0
53 FOR J=1 TO M-1
54 C(I,K)=C(I,K)+B(I,J)*A(J,K)
56 NEXT J
57 IF I=K THEN 62
58 C(I,K+2)=0
60 GOTO 64
62 C(I,K+2)=1
64 NEXT K
```

```
68 NEXT I
72 PRINT "------(AtA)-1 ------"
78 FOR J=2 TO 4
80 C(2,J)=C(2,J)-C(1,J)/C(1,1)*C(2,1)
82 NEXT J
88 FOR I=1 TO 2
90 FOR J=1 TO 4
92 D(I,J)=C(I,J)/C(I,I)
94 NEXT J
96 NEXT I
101 FOR J=4 TO 2 STEP -1
102 D(1,J)=D(1,J)-D(2,J)/D(2,2)*D(1,2)
106 NEXT J
124 PRINT "-------- Yn --------"
126 FOR I=1 TO M-1
128 Y(I,1)=X0(I+1)
129 PRINT Y(I,1); "    ";
130 NEXT I
131 PRINT
134 FOR I=1 TO 2
135 E(I,1)=0
136 FOR J=1 TO M-1
138 E(I,1)=E(I,1)+B(I,J)*Y(J,1)
140 NEXT J
144 NEXT I
145 LPRINT "-------- ∧a(i) --------"
148 FOR I=1 TO 2
150 X(I)=0
```

```
152 FOR J=3 TO 4
154 X(I)=X(I)+D(I,J)*E(J-2, 1)
156 NEXT J
158 NEXT I
160 LPRINT "∧a=", X(1)
161 LPRINT "∧b=", X(2)
162 LPRINT "***************"
164 X0=X0(1)
166 PRINT "X0=", X0
170 LPRINT "X(t+1)=", X(1)/X(2), "/(1+", (X(1)
    /X(2)*(1/X0)=1), "e", -X(1), "t)"
172 PRINT "--------- ∧X(i)--------"
174 FOR T=1 TO M-1
176 G(T+1)=(X(1)/X(2))/(1+((X(1)/X(2))*(1/X0)
    -1)*EXP(-X(1)*T))
177 PRINT "∧X1(", T+1, ")", G(T+1), "----", X1(T
    +1)
178 NEXT T
180 LPRINT "--------- ∧X0 ------ e --------%
    --------"
181 LPRINT "∧X0(2)=", G(2)-X0(1), "     ",
    X0(2),
182 LPRINT "     e=", X0(2)-G(2)+X0(1), "  q=",
    ((X0(2)-G(2)+X0(1))/X0(2))*100, "%"
183 FOR T=2 TO M-1
184 X=G(T+1)-G(T)
186 E=X0(T+1)-X
188 P=E/X0(T+1)
```

```
190 LPRINT "∧X0(";T+1;") =";X;"----".X0(T+1);
191 LPRINT "    e=";  E;  "  q=";  P*100;"%"
192 NEXT T
194 LPRINT " $ $ $ $ $ $ $ $ $ $ Yu Ce  $ $ $ $ $
    $ $ $"
195 INPUT "K=";  K
196 G0=X1(M)
197 FOR T=1 TO K
198 G=((X(1)/X(2))/(1+((X(1)/X(2))*(1/X0)-1)
    *EXT(-X(1)*(T+M)))
199 G1=G-G0
200 G0=G
201 LPRINT "∧X1(";M+T;  ")=";G;
203 LPRINT "    ∧X0(";  M+T;");=";  G1
204 NEXT T
206 GOTO 990
300 LPRINT "--------X0(i)--------"
302 FOR I=1 TO M
304 READ X0(I)
306 LPRINT X0 (I);  "    ";
308 NEXT I
310 LPRINT
311 PRINT "-------- X1(i) ----------"
312 T=0
314 FOR I=1 TO M
316 T=T+X0(I)
318 X1(I)=T
320 PRINT X1(I);  "    ";
```

```
322 NEXT I
324 PRINT
326 FOR J=1 TO M-1
328 B(1,J)=(X1(J+1)+X1(J))/2
330 B(2,J)=-(B(1,J)*B(1,J))
332 NEXT J
334 RETURN
500 DATA 7197, 9274, 12517, 8293
990 LPRINT "********** END ********"
999 END
```

五、灰色聚类

程序说明：

1．本程序从计算步骤中第2步定标准权开始计算；

2．DATA语句说明

(1)先排列λkj(2)

(2)再排实际值经查功效函数确定的Ykj(dkj)值.

输出内容：

1．聚类指标，聚类类别的个数；　2．原始λkj(2)；

3．ηkj值；　4．聚类元素个数；

5．各元素功效函数向量；　6．决策聚类结果.

上机操作说明：

1．引入程序，键入RUN←┘启动，显示"M=”，询问典型类别个数(K)；

2．回答数据后，显示"N=”,询问聚类指标个数(j)；

3．回答数据后，运行至输出 λkj(2)及ηkj，显示"P=”，询问聚类元素(i)；

4．回答数据后，运行至输出全部结果。

程序清单：

```
2 LPRINT "***** Huise Junle *****"
10 INPUT "M=", N
12 LPRINT "M=", N;
15 INPUT "N=", M
17 LPRINT "    N=";M
20 DIM X0(N,M),X1(N,M+1), R(N,M), X3(N,M),
   B(M+N), Q(N)
25 LPRINT "-------- X0(I,J) -------"
30 FOR I=1 TO N
32 FOR J=1 TO M
34 READ X0(I,J)
36 LPRINT X0(I,J);
38 NEXT J
40 LPRINT
42 NEXT I
45 LPRINT "------ A(i,j)------"
50 FOR I=1 TO N
51 X1(I,1)=X0(I,1)
53 FOR J=1 TO M-1
54 X1(I,J+1)=X1(I,J)+X0(I,J+1)
56 Q=X1(I,J+1)
58 NEXT J
60 FOR K=1 TO M
61 A=X0(I,K)
62 R(I,K)=A/Q
64 LPRINT R(I,K);
```

```
66 NEXT K
67 LPRINT
68 NEXT I
69 LPRINT "----------"
70 INPUT "P=";P, LPRINT"P=";P
72 FOR K=1 TO P
74 I2=K
78 FOR I=1 TO N
80 FOR J=1 TO M
82 READ X3(I,J)
86 NEXT J
90 NEXT I
92 LPRINT"------q(i,j)------"
100 FOR I=1 TO N
110 B(I)=0
112 FOR J=1 TO M
114 B(I)=B(I)+R(I,J)*X3(I,J)
140 NEXT J
141 LPRINT B(I)
142 NEXT I, D=0
144 LPRINT "**********"
146 FOR I=1 TO N
148 IF D>B (I) THEN 160
150 IF D<=B(I) THEN GOTO 155
155 D=B(I)
156 J2=I
160 NEXT I
170 LPRINT "max is D(";I2;J2;")=";D
```

```
175 NEXT K
176 LPRINT"****** END ******"
200 END
210 DATA 500,200,300,100,100,50,50,20
220 DATA .7,.5,.84,.98,0,0,0,0
```

六、定权聚类

程序说明：

1. X为矩阵的行数，Y为矩阵的列数，Z为类型数；
2. N(1)，N(2)，…，N(r)为系数；
3. L. DAT为库文件*(库文件按取值范围所需要的值的先后顺序依次装入).

*：例：有17行数据，每一行都使用同一取值范围，所以只需输入一次值，放在库文件内，程序每次自动调用库文件，并计算出结果.（参见书中例6.4.1）

输出内容：

1. 原始数据矩阵；
2. 灰色聚类矩阵；
3. 决策聚类结果.

上机操作说明：

1. 引入程序，键入RUN<一启动，显示“X,Y”询问行列数及类型数Z；
2. 回答数据后，显示“N(1)，N(2)，…，N(r)”，询问聚类系数；
3. 回答数据后，运行至输出全部结果.

程序清单：

```
10 LPRINT"****** DING QUAN JU LEI ******"
20 OPEN"I", #1, "L. DAT"
```

```
30 LPRINT "X","Y","Z"
40 PRINT"X", "Y", "Z"
45 INPUT X, Y, Z
50 LPRINT X,Y,Z
60 DIM A(X,Y),F(X,Y),M(X,Y),N(Y),B(X,Y-1)
70 FOR I=1 TO r
75 LPRINT "N(",I;")"
80 PRINT N(I)
85 INPUT N(I)
90 LPRINT N(I)
95 NEXT I
100 FOR I=1 TO X
110 FOR J=1 TO Y
120 READ A(I,J)
130 LPRINT USING"****, **";A(I,J);
140 NEXT J
150 LPRINT
160 NEXT I
170 LPRINT
180 LPRINT
190 FOR X=1 TO X
200 S=0
210 FOR K=1 TO Y
220 IF A(X,K)>=0 THEN 250
230 F(X,K)=0
240 GOTO 300
250 INPUT#1, M
260 IF A(X,K)>M THEN 290
```

```
270 F(X,K)=A(X,K)/M
280 GOTO 300
290 F(X,K)=1
300 S=S+(F(X,K)*N(K))
310 NEXT K
320 M(X,1)=S
330 S=0
340 FOR H=1 TO Y
350 IF A(X,H)>=0 THEN 380
360 F(X,H)=0
370 GOTO 420
380 INPUT#1,M,N
390 IF A(X,H)<=M THEN F(X,H)=A(X,H)/M
    :GOTO 420
400 IF A(X,H)<=N THEN F(X,H)=(N-A(X,H))
    /M: GOTO 420
410 F(X,H)=0
420 S=S+(F(X,H)*N(H))
430 NEXT H
440 M(X,2)=S
450 S=0
460 FOR P=1 TO Y
470 IF A(X,P)>=0 THEN 500
480 F(X,P)=0
490 GOTO 540
500 INPUT#1,M,N
510 IF A(X,P)<=M THEN F(X,P)=1: GOTO 540
520 IF A(X,P)<=N THEN F(X,P)=(N-A(X,P))/
```

```
    M : GOTO 540
530 F(X,P) = 0
540 S = S + (F(X,P)*N(P))
550 NEXT P
560 M(X,3) = S
570 LPRINT"| (";X;",";"1)  ";"(";X;",";"2)";"(";X
    ;",";"3 | ) ",
580 LPRINT"| " USING "**. **"; M(X,1);M(X,2);
    M(X,3);: LPRINT"| "
590 NEXT X
600 CLOSE*1
610 LPRINT
620 LPRINT
630 FOR I = 1 TO X
640 BB = -1
650 FOR J = 1 TO Z
660 IF M(I,J) <= BB THEN 680
670 BB = M(I,J): N1 = J
680 NEXT J
690 LPRINT "MAX Q(";I;",";N1;") = ";USING"**.
    **";BB
700 NEXT I
710 LPRINT"****** END ******"
720 END
730 DATA 22.5,4,0,0,79.37,6,600,. 75,144,7,300,.
    75,300,6.1,189,12,456,12,250,12,189,8,700,1.5,
    369,8,1300,2.25,1127.11,16.2,550,3,260,11,600,
    1,200,8,600,1.25
```

```
740 DATA 475,10,1000,.75,314.1,8,900,.75,282.8,
    7.4,1300,.5,240,8,1200,.5,160,5,1000,.25,270,
    8,1200,.25,9,1,200,0
```

七、灰关联分析

程序说明： X——行数　Y——列数　O——系数

输出内容：

1.相对关联度；2.绝对关联度；3.综合关联度；4.关联序.

上机操作说明：

1. 引入程序，键入 RUN ←┘启动，机器显示“X,Y”，询问行列数；
2. 回答数据后，运行程序，再出现“? ”询问系数；
3. 回答数据后，运行至输出全部结果.

程序清单：

```
10 LPRINT "****** Guan Lian Fen Xi ******"
20 LPRINT"X","Y"
30 PRINT"X","Y"
35 INPUT X,Y
40 LPRINT X,Y
50 DIM A(X,Y),B(X,1),C(X,Y),D(X,Y),S(X),
   E(X),S2(X),M(X),P(X),K(X)
60 FOR I=1 TO X
70 FOR J=1 TO Y
80 READ A(I,J)
90 LPRINT A(I,J);"  ";
100 NEXT J
110 LPRINT
120 NEXT I
```

```
130 LPRINT
140 FOR S=1 TO X
150 READ B(S,1)
160 LPRINT B(S,1)
170 NEXT S
180 LPRINT
190 GOSUB 640
200 GOSUB 730
210 FOR I=1 TO X
220 M(I)=E(I)
230 NEXT I
240 LPRINT
250 FOR I=1 TO X
260 FOR J=1 TO Y
270 D(I,J)=A(I,J)/B(I,1)
280 NEXT J
290 LPRINT
300 NEXT I
310 FOR I=1 TO X
320 FOR J=1 TO Y
330 C(I,J)=D(I,J)-1
340 LPRINT C(I,J);
350 NEXT J
360 LPRINT
370 NEXT I
380 LPRINT
390 GOSUB 730
400 INPUT O
```

```
410 FOR I=2 TO X
420 P(I)=O*M(I)+(1-O)*E(I)
430 LPRINT P(I);
440 NEXT I
450 LPRINT
460 LPRINT
470 FOR I=2 TO X
480 K(I)=I-1
490 NEXT I
500 FOR I=2 TO X
510 FOR J=I+1 TO X
520 IF P(I)>=P(J) THEN 590
530 T=P(J)
540 P(J)=P(I)
550 P(I)=T
560 T=K(J)
570 K(J)=K(I)
580 K(I)=T
590 NEXT J
600 LPRINT"P(";K(I);")=";P(I);">";
610 NEXT I
620 LPRINT
625 LPRINT"****** END ******"
630 END
640 FOR I=1 TO X
650 FOR J=1 TO Y
660 C(I,J)=A(I,J)-B(I,1)
670 LPRINT C(I,J);
```

```
680 NEXT J
690 LPRINT
700 NEXT I
710 LPRINT
720 RETURN
730 FOR I=1 TO X
740 E=0
750 FOR J=1 TO Y-1
760 E=E+C(I,J)
770 NEXT J
780 S(I)=ABS(E+1/2*C(I,Y))
790 LPRINT S(I);
800 NEXT I
810 LPRINT
820 LPRINT
830 FOR I=2 TO X
840 E=0
850 FOR J=2 TO Y
860 IF J>Y-1 THEN 890
870 E=E+(C(I,J)-C(1,J))
880 COTO 900
890 S2=ABS(E+1/2*(C(I,Y)-C(1,Y))
900 NEXT J
910 S2(I)=S2
920 LPRINT S2(I);
930 NEXT I
940 LPRINT
950 LPRINT
```

```
960 S0=S(1)
970 FOR I=2 TO X
980 E(I)=(1+ABS(S0)+ABS(S(I)))/(1+ABS(S0)+
    ABS(S(I))+ABS(S2(I)))
990 LPRINT;E(I)"  ";
1000 NEXT I
1010 LPRINT
1020 LPRINT
1030 RETURN
1040 DATA 10155, 12588, 23408, 35388, 3799, 3605,
     5460, 6982, 1752, 2160, 2213, 4753, 24186,
     45590, 57685, 85540, 1164, 1788, 3184, 4478
1050 DATA 10155, 3799, 1752, 24186, 1164
```

八、灰关联聚类

程序说明：

X——行数　　Y——列数

输出内容：

1．原始数据矩阵；　　2．初值序列；

3．初始化；　　4．灰关联矩阵；

5．灰关联聚类矩阵．

上机操作说明：

1.引入程序，键入RUN←启动，机器显示“X,Y”,询问行列数；

2．回答数据后，运行至输出全部结果．

程序清单：

```
10 LPRINT"****** GUAN LIAN JU LEI ******"
```

```
20 LPRINT"X","Y"
30 PRINT"X","Y"
35 INPUT X,Y
40 LPRINT X,Y
50 DIM A(X,Y),B(X,1),C(X,Y),D(X,Y),S(X),S2
   (X),E(X,X),M(X,X)
60 FOR I=1 TO X
70 FOR J=1 TO Y
80 READ A(I,J)
90 LPRINT A(I,J);" ";
100 NEXT J
110 LPRINT
120 NEXT I
130 LPRINT
140 FOR S=1 TO X
150 READ B(S,1)
160 LPRINT B(S,1)
170 NEXT S
180 FOR I=1 TO X
190 FOR J=1 TO Y
200 C(I,J)=A(I,J)-B(I,1)
210 LPRINT C(I,J);
220 NEXT J
230 LPRINT
240 LPRINT
250 NEXT I
260 FOR I=1 TO X
270 E=0
```

```
280 FOR J=1 TO Y-1
290 E=E+C(I,J)
300 NEXT J
310 S(I)=(E+1/2*C(I,Y))
320 LPRINT S(I);
330 NEXT I
340 LPRINT
350 LPRINT
360 FOR I=1 TO X
370 LPRINT TAB((I)*5-5);
380 FOR J=I TO X
390 E(I,J)=(1+ABS(S(I))+ABS(S(J)))/(1+ABS(S
    (I))+ABS(S(J))+ABS(S(J)-S(I)))
400 LPRINT USING"**. **";E(I,J);
410 NEXT J
420 LPRINT
430 LPRINT
440 LPRINT
450 NEXT I
460 FOR I=1 TO X
470 FOR J=I TO X
480 IF(E(I,J)<=.8 AND E(I,J)<>I) OR
    E(I,J)=1 THEN 500
490 LPRINT "E(";I",";J;")=";E(I,J);: M(I,J)
    =E(I,J)
500 NEXT J
510 LPRINT
520 NEXT I
```

```
530 FOR I=1 TO X
540 IF M(I,0)=1 THEN 730
550 FOR K=1 TO X
560 IF M(I,K)=0 THEN 580
570 LPRINT"F(";I;",";K")";
580 NEXT K
590 FOR J=I+1 TO X
600 IF M(J,0)=1 THEN 710
610 FOR K=1 TO X
620 IF M(J,K)=0 THEN 640
630 IF M(I,K)<>0 THEN 660
640 NEXT K
650 GOTO 710
660 FOR L=1 TO X
670 IF M(J,L)=0 THEN 690
680 LPRINT"E(";J;",";L")";
690 NEXT L
700 M(J,0)=1
710 NEXT J
720 LPRINT
730 NEXT I
740 LPRINT"****** END ******"
750 END
760 DATA 6,9,7,5,6,7,9,9,9,2,5,3,8,8,7,8,9,7,5,8,
    6,5,8,6,8,8,8,8,10,9,6,4,8,8,9,8,7,9,8,5,4,7,8,
    9,8,8,9,9,9,9,10,8,8,8,8,10,7,2,2,5,8,8,5,3,5,4,
    8,8,9,10,10,9,8
770 DATA 9,9,4,5,6,8,9,8,9,9,9,5,5,5,10,10,9,7,10,
```

```
    8,6,8,7,9,9,9,7,8,8,8,8,8,9,8,5,6,7,8,6,9,9,8,
    7,8,8,6,7,6,8,9,8,10,10,10,5,7,6,10,10,10
780 DATA 6,2,5,8,7,8,8,3,8,9,7,7,5,7,10
```

九、优势分析

程序说明：

1．X——一行母序列＋子序列数

2．Y——矩阵列数

3．Z——矩阵总行数

4．W——母序列数

输出内容：

1．相对关联矩阵；　　2．绝对关联矩阵；

3．综合关联矩阵；　　4．优势分析结果．

上机操作说明：

1．引入程序，键入RUN←┘启动，机器显示“X，Y，Z，W”，询问行列数；

2．回答数据后，运行程序，再出现“？”询问系数；

3．回答数据后，运行至输出全部结果．

程序清单：

```
10 LPRINT"****** YOU SHI FEN XI ******"
20 LPRINT"X","Y","Z","W"
30 PRINT "X","Y","Z","W"
50 INPUT X,Y,Z,W
60 LPRINT X,Y,Z,W
70 DIM A(Z,Y),B(X,1),C(X,Y),D(X,Y),S(X),E
   (X)
80 DIM G(X,X),S3(W),S2(X),M(X),P(X),K(X)
```

```
   F(X,X),Q(Z,Y)
90 FOR I=1 TO Z
100 FOR J=1 TO Y
110 READ Q(I,J)
120 NEXT J
130 NEXT I
140 FOR L=1 TO Z
150 FOR J=1 TO Y
160 A(1,J)=Q(L,J)
170 NEXT J
180 FOR M=4 TO X+2
190 FOR J=1 TO Y
200 A(M-2,J)=Q(M,J)
210 NEXT J
220 NEXT M
230 FOR I=1 TO X
240 FOR J=1 TO Y
250 LPRINT USING "****.**"; A(I,J);
260 NEXT J
270 LPRINT
280 NEXT I
290 LPRINT
300 GOSUB 650
310 GOSUB 730
320 FOR I=2 TO X
330 M(I)=E(I)
340 NEXT I
350 LPRINT
```

```
360 FOR I=1 TO X
370 FOR J=1 TO Y
380 D(I,J) = A(I,J)/A(I,1)
390 NEXT J
400 LPRINT
410 NEXT I
420 FOR I=1 TO X
430 FOR J=1 TO Y
440 C(I,J) = D(I,J) - 1
450 LPRINT USING "*** ****"; C(I,J);
460 NEXT J
470 LPRINT
480 NEXT I
490 GOSUB 730
500 INPUT O
510 FOR I=2 TO X
520 P(I) = O*M(I) + (1 - O)*E(I)
530 LPRINT P(I),
540 NEXT I
550 LPRINT
560 FOR I=2 TO X
570 F(L,I) = P(I)
580 NEXT I
590 LPRINT
600 LPRINT
610 NEXT L
620 LPRINT
630 GOSUB 1020
```

```
635 LPRINT"****** END ******"
640 END
650 FOR I=1 TO X
660 FOR J=1 TO Y
670 C(I,J)=A(I,J)-A(I,1)
680 LPRINT USING"**:.****",C(I,J);
690 NEXT J
700 LPRINT
710 NEXT I
720 RETURN
730 FOR I=1 TO X
740 E=0
750 FOR J=1 TO Y-1
760 E=E+C(I,J)
770 NEXT J
780 S(I)=ABS(E+1/2*C(I,Y))
790 LPRINT S(I);
800 NEXT I
810 LPRINT
820 LPRINT
830 FOR I=2 TO X
840 E=0
850 FOR J=2 TO Y
860 IF J>Y-1 THEN 890
870 E=E+(C(I,J)-C(1,J))
880 GOTO 900
890 S2=ABS(E+1/2*(C(I,Y)-C(1,Y)))
900 NEXT J
```

```
910 (   ) = S2
920    INT S2(I);
930    T I
940    INT
950       S(1)
960 FOR I = 2 TO X
970 E(I) = (1 + ABS(S0) + ABS(S(I)))/(1 + ABS(S0)
          + ABS(S(I)) + ABS(S2(I)))
980 LPRINT; E(I)"  ";
990 NEXT I
1000 LPRINT
1010 RETURN
1020 FOR I = 1 TO W
1030 FOR J = 2 TO X
1040 LPRINT USING"*.****"; F(I,J);
1050 NEXT J
1060 LPRINT
1070 NEXT I
1080 LPRINT
1090 LPRINT"***** ROW COMPARE *****"
1100 LPRINT
1110 FOR I = 1 TO W-1
1120 FOR J = I + 1 TO W
1130 FOR K = 2 TO X
1140 IF F(I,K)>F(J,K) THEN 1170
1150 IF K◇1 THEN 1300
1160 GOTO 1190
1170 NEXT K
```

```
1180 GOTO 1230
1190 FOR K=1 TO Y
1200 IF F(I,K)<F(J,K) THEN 1220
1210 GOTO 1300
1220 NEXT K
1230 FOR M=1 TO Y
1240 IF F(I,K)>F(J,K) THEN 1270
1250 LPRINT"F(";I;K;")<F(";J;K;")";
1260 GOTO 1280
1270 LPRINT"F(";I;K;")>F(";J;K;")";
1280 NEXT M
1290 GOTO 1410
1300 SUM1=0
1310 SUM2=0
1320 FOR K=2 TO X
1330 SUM1=F(I,K)+SUM1
1340 SUM2=F(J,K)+SUM2
1350 NEXT K
1360 IF SUM1>SUM2 THEN 1390
1370 LPRINT"ROW";I;"<ROW";J,
1380 GOTO 1400
1390 LPRINT"ROW"J;"<ROW";I,
1400 NEXT J
1410 NEXT I
1420 LPRINT
1430 LPRINT"***** COLUMN COMPARE*****"
1440 LPRINT
1450 FOR J=2 TO X
```

```
1460 IF J=X THEN H=2: GOTO 1480
1470 H=J+1
1480 FOR I=1 TO W
1490 IF F(I,J)>F(I,H) THEN 1520
1500 IF I<>1 THEN 1650
1510 GOTO 1540
1520 NEXT I
1530 GOTO 1580
1540 FOR I=1 TO W
1550 IF F(I,J)<F(I,H) THEN 1570
1560 GOTO 1650
1570 NEXT I
1580 FOR I=1 TO W
1590 IF F(I,J)>F(I,H) THEN 1620
1600 LPRINT"F("I;",";J-1;")<
     F(";I;",";H-1;")",
1610 GOTO 1630
1620 LPRINT"F(";I;",";J-1;")>
     F(";I;",";H-1;")",
1630 NEXT I
1640 GOTO 1780
1650 SUM1=0
1660 SUM2=0
1670 FOR I=1 TO W
1680 SUM1=F(I,J)+SUM1
1690 SUM2=F(I,H)+SUM2
1700 NEXT I
1710 LPRINT
```

```
1720 IF SUM1 < SUM2 THEN 1760
1730 LPRINT"COL";J-1;">COL";H-1:
1740 LPRINT
1750 GOTO 1780
1760 LPRINT "COL";H-1;">COL";J-1:
1770 LPRINT
1780 NEXT J
1790 RETURN
1800 DATA 170,174,197, 216.4,235.8
1810 DATA 57.55,70.74,76.8,80.7,89.85
1820 DATA 68.56, 70,85.38,99.83,103,4
1830 DATA 308,58,310,295,346,367,195.4,189.9,
     187.2,205,222.7,24.6,21,12.2,15.1,14.57,20,
     25.6,23.3,29,2,30,18.98,19,22.3,23.5,27.655
```

附录Ⅱ　拉普拉斯变换

在很多研究领域中，我们常遇到这样的函数：

$$F(t) \quad (\text{限于 } 0 \leqslant t < \infty) \tag{1}$$

或者约定

$$F(t) = 0 \quad (t < 0) \tag{2}$$

即我们只研究函数 $F(t)$ 在 $t \geqslant 0$ 的变化情况.

设已给某个符合(1)或(2)的函数 $F(t)$，

$$\int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt$$

在复数 s 平面上的某一个区域上是收敛的，我们就把它解析延拓到全平面，并称它为 $F(t)$ 的拉普拉斯变换(或拉普拉斯变换的)像函数. 记为 $f(s)$ 或 $L(F(t))$，即

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t)\,dt = L(F(t)) \tag{3}$$

$F(t)$ 则称为 $f(s)$ 的(拉普拉斯变换的)原函数，常记为

$$F(t) = L^{-1}(f(s)).$$

容易验证，在 $t \to \infty$ 的过程中，只要 $F(t)$ 的增长速度不超过某一个指数型函数，亦即存在常数 M 及 s_0，使

$$|F(t)| \leqslant M e^{s_0 t} \qquad (0 < t < \infty)$$

就总可以选 s 为足够大的正数(或选取 $\mathrm{Re}\,s$ 为足够大的正数)，使(3)的积分收敛，从而存在像函数 $f(s)$.

例如原函数 $F(t) = 1$，当 $s > 0$ 时，有

$$\int_0^\infty e^{-st}\cdot 1dt=\frac{1}{s},$$

所以
$$f(s)=L(1)=\frac{1}{s}.$$

又如 $F(t)=t$，当 $s>0$ 时，

$$f(s)=L(t)=\int_0^\infty e^{-st}tdt=-\frac{1}{s}\int_0^\infty tde^{-st}$$

$$=\left[-\frac{1}{s}te^{-st}\right]_0^\infty+\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt$$

$$=\frac{1}{s^2}.$$

同理 $f(s)=L(t^n)=n!\frac{1}{s^{n+1}}$.

对 $F(t)=te^{pt}$，在 $\mathrm{Re}s>p$ 的半平面上，

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}e^{pt}dt=\frac{1}{(s-p)^2}.$$

拉普拉斯变换的定义(3)对于 $F(t)$ 是线性的，所以

$$L(AF_1(t)+BF_2(t))=AL(F_1(t))+BL(F_2(t)).$$

由此可得

$$L(\sin\omega t)=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega}\right)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

$$L(\cos\omega t)=\frac{s}{s^2+\omega^2}.$$

拉普拉斯变换还有其它一些性质，如相似定理、延迟定理、位移定理、卷积定理及关于原函数的导数的像函数的关系式等等，兹不赘述．利用上述性质，经过运算可得下面的拉普拉斯函数简表，读者还可以找到专门的拉普拉斯变换函数手册（如 B. A. 季特金等《运算微积手册》，张燮译，科学出版社，1958）．在这些

表格中，由原函数查找像函数，或由像函数查找原函数都很方便.

拉普拉斯变换函数表

原函数 $F(t)$	像函数 $f(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t^n（n 为整数）	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
$t^a(a>-1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{s-\lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\mathrm{sh}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
$\mathrm{ch}\omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\cos\omega t$	$\frac{s+\lambda}{(s+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}t^a$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s+\lambda)^{a+1}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$

原函数$F(t)$	像函数$f(s)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-a^2/4t}$	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-2a\sqrt{t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{\frac{a^2}{s}}\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{\sqrt{s}}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{s\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{at}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\frac{a}{s}}$
$\operatorname{erf}(\sqrt{at})$	$\frac{\sqrt{a}}{s\sqrt{(s+a)}}$
$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	$\frac{1}{s}e^{-a\sqrt{s}}$
$e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{s+\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-e^t\operatorname{erfc}(\sqrt{t})$	$\frac{1}{1+\sqrt{s}}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-at}+\sqrt{a}\operatorname{erfc}\sqrt{at}$	$\frac{\sqrt{s+a}}{s}$
$J_0(t)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$
$J_n(t)$	$\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}}$
$\frac{J_n(at)}{t^n}$	$\frac{1}{na^n}(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n$
$e^{-at}I_0(bt)$	$\frac{1}{\sqrt{(s+a)^2-b^2}}$

原函数 $F(t)$	像函数 $f(s)$
$\lambda^n e^{-\lambda t} I_n(\lambda t)$	$\frac{[\sqrt{s+2\lambda s}-(\lambda+s)]^n}{\sqrt{s^2+2\lambda s}}$
$t^n J_n(t)\left(n>-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2^n\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{(s^2+1)^{n+\frac{1}{2}}}$
$J_0(2\sqrt{t})$	$\frac{2}{s}e^{-\frac{1}{s}}$
$t^{\frac{n}{2}}J_n(2\sqrt{t})$	$\frac{1}{s^{n+1}}e^{-\frac{1}{s}}$
$J_0(a\sqrt{t^2-\tau^2})H(t-\tau)$	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}e^{-\tau\sqrt{s^2+a^2}}$
$\frac{J_1(a\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}H(-\tau)$	$\frac{e^{-\tau s}-e^{-\tau\sqrt{s^2+a^2}}}{a\tau}$
$\int_t^\infty \frac{J_0(t)}{t}dt$	$\frac{1}{s}\ln(s+\sqrt{1+s^2})$
$\frac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\frac{s-a}{s-b}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\sin\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}\sin\sqrt{s}$
$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos\frac{1}{2t}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\sqrt{s}}\cos\sqrt{s}$
$-ei(-t)$ 即 $\int_t^\infty \frac{e^{-\tau}}{\tau}d\tau$	$\frac{1}{s}\ln(1+s)$

参 考 文 献

1 邓聚龙. 灰色系统（社会·经济）. 北京：国防工业出版社，1985

2 邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉：华中工学院出版社，1985

3 邓聚龙. 灰色预测与决策. 武汉：华中工学院出版社，1986

4 邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉：华中工学院出版社，1987

5 邓聚龙. 灰色多维规划. 武汉：华中理工大学出版社，1988

6 邓聚龙. 灰色系统论文选. 北京：海洋出版社，1989

7 邓聚龙. 灰色动态模型及其在粮食长期预测中的应用. 大自然探索，1984(3)

8 邓聚龙. 灰色系统关联空间. 模糊数学，1985(2)

9 邓聚龙. 灰色系统生成函数. 模糊数学，1985(2)

10 邓聚龙. 灰色系统理论的GM模型. 模糊数学，1985(2)

11 邓聚龙. 五种灰色预测. 模糊数学，1985(2)

12 邓聚龙. 灰色局势决策. 模糊数学，1985(2)

13 邓聚龙. 累加生成灰指数律——灰色控制系统的优化信息处理问题. 华中工学院学报，1987(5)

14 邓聚龙. 灰色系统综述. 世界科学，1983(7)

15 Deng Julong. Control Problems of Grey Systems. Systems and Control Letters, Vol. 1, No. 6, March 1982.

16 Deng Julong. Grey Systems, China's Future and Development, No, 4, September 1984

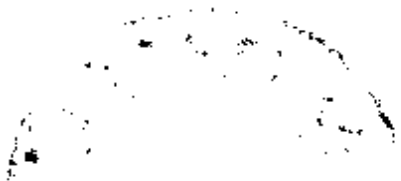
17 马咸尧、郑萍. 低合金钢铸件蠕变性能预测. 模糊数学，1985(2)

18 王清印. 邯郸市机械工业发展态势分析. 系统工程理论与实

践，1987(2)
19 王学萌．农业区划中的多目标灰色局势决策．模糊数学，1985(2)
20 王学萌、罗建军．灰色系统预测决策建模程序集．北京：科学普及出版社，1986
21 王亭．灰函数及其关联度，模糊数学，1985(2)
22 王明星、刘万．初霜灰色灾变超长期预测．模糊数学，1985(2)
23 邓琦、冯清玺、邓聚龙．地下水位控制系统及最优灰色决策．自动化学报，No. 2，1985
24 冯宛平．灰色系统理论的研究与应用．科普田园，1985(2)
25 刘凯．灰色随动系统结构分析．华中工学院学报，Vol.10，No.3，1982
26 刘凯.灰色集合与灰系统的稳定性.华中工学院学报，Vol.10，No. 3，1982
27 刘建国．灰色控制系统的灰度及其稳定性分析．华中工学院研究生学报，Vol. 2，1982
28 刘建国．灰色矩阵的代数特性.华中工学院研究生学报，Vol. 2，1982
29 刘思峰．灰色非负矩阵的P-F定理.河南农业大学学报,1987.4
30 刘思峰．高等学校教师职务评审的定量方法．高教研究，1989.1—2
31 刘思峰．科技成果评定的定量方法(《现代中国科技管理》第八章)．河南科技出版社，1988
32 刘思峰．Groves机制及其应用．中国数学会全国第二次复杂系统的数学理论与应用学术讨论会论文集，1987.5
33 刘思峰、赵理．灰色综合关联度及其应用．河南农业大学学报，1988．4
34 刘思峰、赵理等．河南省工业系统技术改造的灰关联分析．河南经济(特刊)，1988．9
35 刘思峰、杨润山．经济振兴与启动机制探讨．调研与探索，

1989.10;河南日报，1989.9.5
36 刘思峰、赵理．中国经济增长的冯·诺依曼大道．调研与探索，1989.11
37 刘思峰、赵理、赵德英．河南省人才结构分析．科技兴豫论坛，1989.10;河南日报，1989.5.9;科技日报，1989.9.28
38 刘思峰、赵理、贾勇、郭学来．河南经济落后的原因探析．学术资料，1984.20;河南经济，1985.1;战略与对策，1985
39 Liu Sifeng. On Perron-Frobenius Theorem of Grey Nonnegative Matrix. J. G. S. Vol. 1, No. 2, 1989
40 Liu Sifeng. Study on the Degree of Grey Incidence, 中国数学会全国第三届系统与控制学术讨论会论文集,1989.10
41 陈绵云．镗床灰色动态控制．华中工学院学报,Vol. 10. No. 3 1982
42 陈绵云，灰色系统的稳定性与镇定问题，模糊数学，1985.2
43 陈绵云．灰色移植概率矩阵与马氏实用预测决策．未来学论文集，1984
44 陈绵云．未来学与系统学．未来学论文集，1984
45 吴世宦、周朝顺．灰色系统理论应用于经济法系统工程的可行性．学术界动态，1986，27
46 吴少华．转移概率预测与灰色转移概率模型的白化．未来学论文集，1984
47 吴守治．灰色系统恒可观性判据．华中工学院学报，Vol.12, No. 3, 1984
48 李宝林．生态农业灰色灾变模型群．农业系统科学与综合研究，1987
49 李宝林、邓聚龙．棉蚜虫生物防治系统的灰色模型．大自然探索，No, 3, 1984,
50 李百炼．害虫种群动态及最优控制，未来学论文集，1984
51 李学平．机动目标的灰色建模与自适应预测．空军工程学院学报，1987.1
52 李学平、陈少华．线性系统灰色自适应控制．学术研究,1987.4

53 李先煜. 铁路装车灰色预测. 襄樊大学学报, 1986.1
54 李仲谋. 灰色系统理论在地震预报研究中的初步应用. 地震学刊, 1986.4
55 汪民、焦赳赳. 灰色系统理论在水文地质学中的应用初探. 地学之光, 1987.1
56 杨韵华、王亭. 灰色概念的度量及运算. 模糊数学, 1985.2
57 周强. 郑州市供水灰色决策. 郑州水利与系统工程, 1987. 2
58 周俊然. 灰色决策与农业区划. 全国第三届农业系统工程年会论文集, 1989.8
59 易德生. 灰色模型与人才预测. 大自然探索, 1984.4
60 张冠中. 农民收入及其构成的灰色分析与预测. 农业系统科学与综合研究, 1987.1
61 张炳祥、罗建军. 灰色动态模型在粮食预测中的应用. 系统工程, 1985.4
62 张绮帆. 灰色系统白化初探. 华中工学院学报, Vol, 10, No, 3 1982
63 胡庆贺. 河南省科技投入. 河南经济, 1989(增刊)
64 胡斌武. 小水电站管理决策. 全国第三次灰色系统理论学术讨讨会论文集, 1987.5
65 胡从武. 光山县旱涝灾害与粮食产量增减趋势. 农业系统科学与综合研究, 1987.1
66 赵理、刘思峰. 弱化算子与灰色预测. 河南农业大学学报, 1988.4
67 赵理、刘思峰、贾勇. 科技经济相关分析. 河南经济, 1987.6
68 赵理、刘思峰等. 河南省工业系统技术改造的数学模型. 河南经济(特刊), 1988. 9
69 赵德英. 河南农业大学主要实验用品的灰包络GM(1, 1)预测. 全国第三届农业系统工程年会论文集, 1989. 8
70 赵云胜. 通风参数灰色模型设计. 有色金属, 1987.11
71 夏军. 水资源开发中环境影响评价的灰色系统研究思想. 武汉水电学院学报, 1987. 1
72 郭洪. 灰色关联度分辨系数. 模糊数学, 1985. 2



73 郭洪. 灰色控制系统探讨. 襄樊大学学报，1986. 1

74 郭洪、马淑惠、肖克军. 医学灰色聚类诊断. 大自然探索，Vol. 5，No. 4 1986

75 黄际民. 江西省粮食产量灰色预测. 江西师大学报，1985. 3

76 龚一鸣. 岩石薄片资料的有序和无序模糊聚类及其沉积学意义. 地学之光，1987.1

77 龚国清. 水位降深的灰色模型计算. 地学之光，1987. 1

78 曹艳英. 地理灰色灾变预测的建模方法. 青年地理学家，1987. 2

79 曾国宁. 企业经济效益的灰色评估. 发展研究，1987. 4

80 程志斌. 灰色区间函数的残差递推辨识. 华中工学院学报，Vol，12，No，1，1984

81 程志斌、刘建国，灰色系统状态反馈的极点漂移，华中工学院学报，Vol，12，No，3 1984

82 裘小松. 环境质量评价中的数学模型. 环境污染与防治. 1986. 5

83 詹一辉. 灰色系统的几个定理. 华中工学院研究生学报，Vol. 2 1982

84 詹一辉. 灰色系统的综合可控性. 华中工学院学报，Vol. 10，No. 6，1982

85 詹一辉. 灰色系统的几个问题. 华中工学院研究生学报，No. 1 1983

86 蒙万融. 湖北省全民所有制工业技术进步的灰色预测. 模糊数学. 1985. 2

87 谭承业 强震前兆的灰关联及模糊聚类分析. 地震研究，Vol. 9，No.4，1986

88 谭承业、阮圣娜、杨桂芬. 灰色地震模型的建立与讨论. 地震研究，Vol. 9，No. 6，1986

89 霍俊江. 灰色系统方法与历史考证. 求索，1986