目　录

第一章　地磁场模型理论分析与地壳上地幔岩石的磁性 …… 1

§1　正常地磁场的理论分析 …… 1

一、内源稳定磁场的组成及其特点 …… 1

二、正常磁场模型 …… 2

三、全球模型 …… 3

四、地区性地磁场模型 …… 11

§2　变化磁场分析 …… 17

一、正常变化场与异常变化场 …… 17

二、几种典型地电剖面上的变化场异常 …… 19

三、中国几个变化场异常区 …… 20

§3　地壳和上地幔岩石的磁性 …… 23

一、地壳和地幔 …… 23

二、大陆地壳的磁性 …… 24

三、海洋地壳的磁性 …… 26

四、上地幔的磁性 …… 27

五、温度、压力对岩石磁性的影响 …… 28

第二章　位场变换中的随机误差分析与划分区域场和局部场的方法 …… 30

§1　位场波数域变换中的随机误差分析 …… 30

一、随机误差的谱估计 …… 30

二、误差传递系数的一般表达式 …… 32

三、单步变换处理的误差传递系数 …… 33

四、多步变换处理的误差传递系数 …… 39

§2　划分磁异常区域场和局部场的插值切割法 …… 41

一、基本原理 …… 42

二、插值切割算法 …… 44

三、随机误差的传递规律 …… 46

四、理论模型计算与野外实例应用 …… 47

第三章　位场异常反演方法 …… 57

§1　磁异常希尔伯特（Hilbert）变换反演方法 …… 57

一、一维希尔伯特变换基本关系式 …… 57

二、二度体磁场与希尔伯特变换场相互关系分析 …… 61

三、综合利用磁场与希尔伯特变换场化到顺层磁化的方法 …… 62

四、综合利用磁场与希尔伯特变换场反演 i_a（或γ）的方法 …… 63

五、综合利用磁场及其希尔伯特变换场反演磁性体深度方法 …… 64

六、利用一维希尔伯特变换增强弱磁异常 …… 66

§2　二度体磁异常快速自动反演方法 …… 69

一、沃纳反褶积法 ……70
二、磁异常总梯度模反演法 ……76
三、组合函数反演方法 ……82
§3 视磁化强度填图方法 ……85
一、波数域视磁化强度填图方法 ……85
二、空间域视磁化强度填图方法 ……94
三、视磁化强度填图方法评述与实际应用 ……95
§4 波数域位场异常迭代反演及曲面上位场数据的转换 ……98
一、曲面位场异常的快速正演计算 ……98
二、迭代反演方法原理 …… 100
三、双界面及多界面的快速正反演计算 …… 104
四、波数域中曲面上位场异常的转换方法 …… 104
§5 位场异常离散线性反演和B. G. 反演理论及方法 …… 106
一、离散线性反演 …… 107
二、Backus-Gilbert 反演理论 …… 114
三、线性反演在位场异常解释中的应用——求源分布 …… 115
四、非线性反演问题求解 …… 116
§6 神经网络反演法及分形分析简介 …… 118
一、神经网络（neural network）反演法简介 …… 118
二、分形（fractal）分析简介 …… 123
第四章 磁法的某些重要应用及单位制问题 …… 127
§1 岩石磁各向异性、磁异常微磁测量及其地质应用 …… 127
一、岩石磁各向异性 …… 127
二、微磁测 …… 133
三、综合应用磁各向异性与微磁测确定火山口 …… 136
§2 油气田区重、磁资料的应用 …… 141
一、物性界面及物质层的位场异常正演计算方法 …… 142
二、物性界面位场异常约束反演计算 …… 143
三、位场异常的广义线性约束反演方法 …… 146
四、其他方法 …… 148
五、重磁资料的综合解释方法 …… 148
六、磁法直接探测油气问题 …… 151
§3 海陆磁异常特征及分析 …… 153
一、地球表面海洋及大陆的磁异常场特征 …… 153
二、磁卫星高度的地球洋壳陆壳的磁场特征 …… 157
§4 关于磁法勘探单位制换算问题 …… 164
一、国际单位制与高斯制中磁化率的换算 …… 164
二、两种单位制中的正反演问题 …… 166
三、消磁系数与视磁化率 …… 169
参考文献 …… 171

第一章　地磁场模型理论分析与地壳上地幔岩石的磁性

§1　正常地磁场的理论分析[1][2][3]

在地球表面附近任何地点，地球磁场由三个源引起，它们分别位于地核及核幔界面，地壳（或许还包括上地幔的最上部）以及电离层和磁层中。这三个源引起的磁场分别称为地核场、地壳场和外源场。

地核场也叫主磁场（过去称为基本磁场），其幅度最大，它的分布近似于一个偶极子场的分布。地核场随时间的变化是缓慢的，称为长期变化，每年最大的变化约为1％。主磁场的成因问题目前还没有解决，最合理和有希望的一个学说是所谓的“发电机”学说。这个学说认为主磁场是由地球的液态外核和核幔界面上的电流体系引起的，这些电流由地球内部的能源维持。

在磁层边界及磁层内部以及电离层中分布着许多电流系，他们随时间而变化，周期从10^{-4}秒到1年，这些变化引起地面磁场幅度的变化，由$n\times10^{-1}$nT到$n\times10^{3}$nT。上述外部电流系引起的外源场随时间的变化，在地球内部产生感应电流，因而引起感应场，其分布与地壳和地幔的电性结构有关。关于这个问题，在§2中还要较详细地介绍。

地壳场通常称为磁异常（或异常磁场），是由于在地核场作用下，地壳的地质、地球物理特性变化引起的，其幅度由$n\times10^{-1}$nT到$n\times10^{3}$nT或更大。地壳场源的尺度比外源场和地核场的尺度要小，因此其空间梯度一般较大。地壳场的一部分是由感应磁化强度所引起，并依赖于主磁场，另一部分则是由剩余磁化强度引起的。

一般认为，地幔是无磁场源的，这是由于它的温度在一般情况下高于居里点，因而不存在铁磁性和亚铁磁性效应。另一方面，地幔的电导率很小，物质的对流也极其缓慢，与之有关的电流及磁场可忽略不计。以后我们还要从地磁场的空间分布特点来说明这个问题，这里只是从物理上简单地说明地幔无磁场源的原因。

地壳场是磁法勘探的主要研究对象。为了正确有效地从地球磁场中分离出异常场，我们对于另外两种场的特点也应该有较深入的了解。

一、内源稳定磁场的组成及其特点[4]

如果我们不考虑外源变化磁场（和感应磁场）的贡献，或者说可以用适当的方法将变化磁场从观测结果中剔除掉，则将留下地核场和地壳场。地核场还有长期变化，但很缓慢，因而我们可把这两部分磁场当作稳定磁场进行研究，即它们只是空间坐标的函数。

地核场（主磁场）由两部分组成：偶极子场T_0和世界磁异常T_w，T_0+T_w的水平梯度值很小，约为（5—10）nT/km，而且在大范围内基本上是恒定值，在地磁图上，主磁场诸要素的等值线是很光滑的曲线。

地壳场（异常磁场，磁异常）T_A的幅度虽比主磁场的幅度要小很多，但它的水平、垂直梯度很大，就是说空间变化急剧。许多学者对T_A的特点进行了统计分析研究，认为它是分块的平稳随机函数。按照分布范围和幅度，大体上可把T_A分成三部分：大区域场T_{BR}、区域场T_R及局部场T_L。对于T_A进行统计分析的结果，有助于我们了解T_{BR}、T_R及T_L的定量特征。T_A的自相关函数的零相关半径值r_0可近似地看作是正异常的范围，另一特征数量标准偏差σ则可表示异常幅度。对于T_{BR}，$r_0=(300—700)$km和$(900—1000)$km，$\sigma<200$ nT；对于T_R，$r_0=(35—40)$km，$\sigma=400$nT；对于T_L，$r_0=(3—5)$km，$\sigma=500$nT。对于T_L，还可再细分。

由以上分析结果可见，内源稳定磁场T_{IS}由许多部分组成，$T_{IS}=T_0+T_W+T_{BR}+T_R+T_L$。其各组成部分随高度的衰减特性是不相同的，利用这种特性，也可以分离各个组成部分。

某些学者的计算和分析表明，在距地表10km高度上，所有局部异常将消失；在50km高度上，区域异常消失；在500km高度上，大区域异常将消失；最后，在10000km高度上，世界磁异常将消失，只剩下偶极子场。

由此，可列下表说明不同高度上T_{IS}的组成情况，其中h表示距地表的高度。

h (km)	T_{IS}
0	$T_0+T_W+T_{BR}+T_R+T_L$
10	$T_0+T_W+T_{BR}+T_R$
50	$T_0+T_W+T_{BR}$
500	T_0+T_W
10000	T_0

不过需要注意，上述结果只是近似的，我国几个有名的大区域异常，如青藏高原负异常、塔里木、四川正异常等，在飞行高度为400km的磁卫星MAGSAT上仍能测出，只不过其幅度甚小，大约在10nT以内。

二、正常磁场模型

由于地磁场由许多部分组成，它们的幅度、分布范围以及与之相关的地质因素各不相同。在解决地质找矿问题时，我们往往只对某一类磁异常感兴趣，需要将它从其他部分分离出来，为此就要剔除一个背景场或正常磁场。许多学者认为正常磁场是一个相对的概念，视研究对象而定，因此可以建立不同层次的正常场模型。

如果我们把整个地壳场作为研究对象，则需要建立主磁场模型，即全球的正常场模型。一个多世纪以来，由于数学方法（高斯球谐分析方法）的提出和计算方法技术的不断完善，以及全球范围内观测数据的积累这一正常场模型在不断修正。特别是近二十多年来经过地磁学家的努力，现在已建立了一个国际通用的主磁场模型，称为国际地磁参考场（IGRF，International Geomagnetic Reference Field），IGRF在地磁学中还有其他的用途。主磁场系指T_0+T_W，如果我们要研究T_W，则应取地心倾斜偶极子场为正常磁场。例如，当人们研究有名的东亚异常（又名蒙古异常、西伯利亚异常，它对我国境内磁场的分布亦有很大的影响）时，选取T_0作为正常磁场。

其次是大区域的地磁场模型（或国家级地磁场模型），如苏联、加拿大、美国、澳大利亚、中国、欧洲等地区，涉及面积约10^7km^{2}左右。这些大地区地磁场模型与IGRF大体相

同，但可能有一些差异（±200nT）。建立模型的方法一般是根据本地区的观测数据，减去IGRF，对剩余值用矩谐分析方法（如澳大利亚）或球冠谐和分析方法（如加拿大等）建立一个附加的模型，此附加模型与IGRF一起，即是各该地区的正常地磁场模型。另一种方法是根据观测数据用多项式拟合的方法直接建立正常场模型（如我国1950.0年到1980.0年的正常地磁场模型目前即采用这种办法建立）。

再次一级的正常场模型可称为地区性（小国，或大国的一个地区）地磁场模型，涉及的面积约10^6km^2左右。建立模型的方法一般是直接由观测数据用多项式拟合（如德国、日本、蒙古等国）。在存在T_{BR}的地区，要划分出T_R+T_L，建立这种模型特别重要，如我国青藏高原地区，存在着一个十分明显的负背景异常，即负的T_{BR}，为了研究该地区的T_R及T_L，地质矿产部航空物探大队就建立了一个这样的模型。在我国塔里木盆地及四川盆地，也存在明显的T_{BR}，如果要研究这两个地区的T_R+T_L，也应建立地区性正常场模型，它们代表$T_0+T_W+T_{BR}$。

根据需要，还可在更小的范围内建立次一级的地区性地磁场模型。

三、全球模型

（一）球谐分析

球谐分析方法是表示全球范围地磁场分布及其长期变化的一种数学方法，1838年首先由高斯提出。利用高斯理论，可以区分内源场和外源场。经过分析研究认为，在地磁场观测的现有精度范围内，地球稳定磁场几乎全部来源于地球内部。地磁场稳定磁场的位满足拉普拉斯方程，在球心球坐标系中，用分离变量法可解得内源稳定磁场的位

$$V=\frac{a}{\mu_0}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\left[g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda\right]P_n^m(\cos\theta) \qquad (1.1-1)$$

其中，$P_n^m(\cos\theta)$是施密特准归一化n阶m次缔合勒让德函数，a是地球半径(6371.2km)，r是径向距离，θ是地心余纬，λ是由格林尼治起算的经度，g_n^m，h_n^m是球谐系数，又称高斯系数或高斯-施密特系数（以nT为单位），n和m都是正整数，μ_0是真空中的磁导率。$P_n^m(\cos\theta)$的表示式是

$$P_n^m(\cos\theta)=\frac{1}{2^n n!}\left[\frac{\varepsilon_m(n-m)!(1-\cos^2\theta)^m}{(n+m)!}\right]^{1/2}\frac{d^{n+m}(\cos^2\theta-1)^n}{d(\cos\theta)^{n+m}} \qquad (1.1-2)$$

式中

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1 & \text{当}m=0\text{时}\\ 2 & \text{当}m\geqslant 1\text{时}\end{cases}$$

由位V可求出球面上某一点的北向分量、东向分量和垂直分量的表示式

$$X=-\mu_0\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\left[g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda\right]\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta) \qquad (1.1-3)$$

$$Y=-\frac{\mu_0}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial V}{\partial\lambda}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\left[g_n^m\sin m\lambda-h_n^m\cos m\lambda\right]\frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta) \qquad (1.1-4)$$

$$Z = -\mu_0\left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)\left(\frac{a}{r}\right)^{n+2}\left[g_n^m\cos m\lambda + h_n^m\sin m\lambda\right]P_n^m(\cos\theta) \quad (1.1—5)$$

当最高阶数取为N时，则球谐系数总个数为$N(N+2)$，因此只要有$N(N+2)$个独立的方程就可求出全部高斯系数。实际上高斯系数是根据基本上均匀分布于全球的测点上的（包括地面、海洋及空中）大量地磁观测数据，利用最小二乘法求得的。

如果把高斯系数代入式(1.1—3)、(1.1—4)、(1.1—5)即可算出各地的磁场分量值。从这三个式子出发，还可计算出不同高度上主磁场各分量的值，并可推导出这些分量的各种梯度的公式，并用高斯系数计算相应的值。

有一点需要指出，上述公式是假定地球是一圆球得出来的，实际上地球是一个扁球，因此在实际计算工作中，还要作相应的坐标转换。每一组高斯系数及相应的公式，就形成了表示某一时刻稳定磁场分布的数学模型。

（二）国际地磁参考场（IGRF）

在地球物理学的研究工作中，常常建立一些国际通用的标准，用公式或表格等形式概括地表示大量的观测数据，如国际重力公式，地震学中的$J-B$表等。建立地磁场国际标准模型的时间较晚，这是由于地磁场随时间的变化及空间分布都很复杂，而在大片海洋上又难以获得均匀分布的精确度很高的观测数据的缘故。自60年代以来，美、苏发射了一系列磁测卫星，可以在短时间内获得覆盖全球的精确的地磁观测数据，客观上为建立上述模型提供了基础。

国际地磁参考场是地球主磁场的定量描述。主磁场系指由地球内部源产生的磁场，它不包括地壳磁性岩石产生的那一部分磁场，也不包括外部磁场感应产生的内部电流引起的那一部分磁场（这一部分磁场贡献甚小），即如前所述，主磁场是指地核场。

提出国际地磁参考场是为了计算主磁场时有一个约定的标准磁场，以便使各方面的研究工作结果得以统一。

国际地磁参考场是某一时期地球主磁场及其长期变化的数学模型（由于地磁场是随时间变化的，所以有一系列的数学模型），它由球谐（或高斯）系数及相应的公式组成。

自从1968年国际地磁和高空物理协会（IAGA）通过最初的或第一代国际地磁参考场（IGRF 1965）以来，由于地磁观测数据的积累和处理方法的改善，特别是美国于1979年底发射的磁力仪卫星MAGSAT提供了大量均匀分布于全球的数据，IGRF经过了四次修改扩展，逐渐成熟、精确，目前模型已经定型化了，今后随着时间推移只需添加新的模型即可。

考虑到磁测资料整理及编图工作中可能采用了当时的IGRF，其模型后来又会有变动，因此介绍一下IGRF的沿革是很有必要的。

每个模型由一套高斯系数组成，不同的模型，其系数一般也不同。中心倾斜偶极子的磁矩m_0可用该模型的头三个球谐系数算出，即

$$m_0 = \frac{4\pi}{\mu_0}a^3\left[(g_1^0)^2 + (g_1^1)^2 + (h_1^1)^2\right]^{1/2} \quad (1.1—6)$$

其中，$a = 6371.2\text{km}$，为地球近似平均半径，$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\text{H/m}$，在SI单位制中，磁矩的

单位为 $A \cdot m^2$。

我们利用各个模型的系数，算出相应的中心倾斜偶极子的磁矩值，可以了解地磁场长期变化情况以及各个模型间的衔接关系，计算结果列于表1.1—1中。

表 1.1—1 IGRF 的演变

	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990	1995
第一代（1968）			…… 8.0467		8.0052 IGRF1965		…… 7.9638				
第二代（1975）								…… 7.9638 7.9281 IGRF1975			
第三代（1981）					8.0047 7.9731 D D		7.9387 D	7.9061 IGRF1980	…… 7.8730		
第四代（1985）	8.0814	8.0683	8.0498	8.0252	8.0047 D	7.9731 D	7.9387 D	7.9070 D	7.8719 IGRF1985	…… 7.8360	
第五代（1987）	8.0753 D	8.0648 D	8.0507 D	8.0284 D	8.0017 D	7.9731 D	7.9387 D	7.9070 D	7.8719	…… 7.8360	
（1991）					同上						…… ×.×××× ×.×××× ×.×××× D IGRF1990

注：表中数字为地心倾斜偶极子的磁矩，以$10^{22} A \cdot m^2$为单位。

最初的或第一代IGRF包括1965.0的主磁场模型和一个长期变化模型，各有 80 个球谐系数或球谐系数的年变率，即 $n=m=8$。由于有长期变化模型，主磁场模型可以向前和向后扩展或外推，向后扩展到 1955.0，向前外推到 1975.0。用扩展后所得系数算出的磁矩值，在其上用虚线标出。由于主磁场的长期变化很复杂，用一个简单的线性模型只能近似地覆盖几年，因此当用IGRF1965外推十年，到 1975 年时，这个模型在某些地区就很不精确了。

第一次修改或第二代 IGRF 是 1975年通过的，它包括一个 1975.0 年代主磁场模型和 1975—1980 年期间的长期变化模型，两者加在一起，称为 IGRF 1975。主磁场模型是将 IGRF 1965 主磁场模型简单地外推到 1975.0而构成的。因此IGRF 1975是IGRF 1965的接续。长期变化模型是新的，由 80个球谐系数年变率值建立，$n=m=8$。以上情况说明，第一次修改只是修改了长期变化模型，但未校正外推到1975的主磁场系数的误差。

在70年代初就已明白，只是定期地修改长期变化模型，不能保证 IGRF 准确地表示主磁场。1979年IAGA有关单位拟定了IGRF第二次修改或建立第三代 IGRF的方案。根据这一方案，由美国国家航空和航天局（NASA）、英国地质科学院（IGS）以及美国地质调查所（USGS）各提出一组候选模型，由许多专家利用大量地磁观测数据对这些候选模型进行评估，在此基础上，对三个模型的系数作加权平均，形成第三代 IGRF 模型。1981 年

IAGA 采纳了上述第三代 IGRF 模型，确定：①对于1980.0到1985.0，有一国际地磁参考场（IGRF 1980），包括一个1980.0的主磁场模型和一个1980—1985期间的长期变化模型，后者可用来将主磁场模型外推到1985.0；②对于1965.0到1975.0，有一个确定的(Definitive) 国际地磁参考场，包括1965.0，1970.0，1975.0三个主磁场模型，分别记为DGRF 1965、DGRF 1970、DGRF 1975，对于其间的年代的模型则用上述模型系数作线性内插获得。DGRF 在以后不再改变了，因为建立这些模型所依据的数据不会再增加或改进了（在表中磁矩值下方用D标明）；③对于1975.0到1980.0，有一个临时的（Provisional）国际地磁参考场（PGRF），定义为 DGRF 1975 系数和IGRF 1980主磁场系数的线性内插值；④在将来修改 IGRF 时，遵循上述模式。

在1985年IAGA大会上，IAGA 的 I —1工作小组（主磁场和长期变化分析）又考虑了对IGRF的修改，形成第四代IGRF。它对第三代IGRF作了如下的修改和补充：①采用一个新的模型DGRF 1980取代IGRF1980，使DGRF扩展到1980.0；②增加一个从1985.0到1990.0期间的国际地磁参考场（IGRF 1985），包括一个 1985.0 的主磁场模型和一个长期变化的预测模型，用来构制 1985.0 到 1990 期间的主磁场模型；③对1980.0到1985.0期间采用一个临时的国际地磁参考场（PGRF 1980），定义为DGRF 1980 和 IGRF 1985（主磁场）系数的线性内插；④增加1945.0，1950.0，1955.0，1960.0 四个主磁场模型（IGRF 1945，IGRF 1950，IGRF 1955，以上$n=m=8$；IGRF1960，$n=m=10$）。

1987年 8 月在加拿大召开的国际大地测量学和地球物理学联合会（IUGG）第十九次大会上，IAGA的I—1工作小组提出了IGRF的最新修改，形成第五代 IGRF，它用四个新的模型取代 1945.0、1950.0、1955.0 和 1960.0 年的模型，这些新模型记作 DGRF，$n=m=10$。

到目前为止，IGRF包括 8 个DGRF，覆盖1945.0到 1980.0年；一个1985.0主磁场模型和一个预测的长期变化模型，用来调整1985.0到1990年间的主磁场模型；还有一个临时的IGRF（PGRF 1980），由DGRF 1980和IGRF1985（主磁场）系数的线性内插确定。对于各个DGRF之间的某个年代，可用前后模型的系数作线性内插求得该年的系数。

各个DGRF将来不再修改了。将来若采用一个与IGRF 1985不同的 1985.0主磁场确定模型时，目前的PGRF 1980即废除。这计划在1991年 IUGG第二十次大会上进行。同时计划采用一个 1990.0 到 1995.0期间的IGRF（IGRF 1990），包括一个 1990.0年的主磁场模型和一个1990到1995年的预测长期变化模型。

有一点要提醒注意，符号 IGRF是泛指所有的模型，如果指某一个或某几个特定的模型，则必须特别标明，如 IGRF 1980或DGRF 1980。不能简单地写为IGRF。

由以上叙述可见，先后经过二十年时间，几经修改、补充，才形成了 8 个确定的主磁场模型，现在已经稳定下来了，不过，随着时间的推移，还会陆续补充新的近年的模型。而在对这二十年期间取得的磁测资料进行处理或编图时，必须仔细了解 IGRF 的演变过程，采用合适的模型。

表1.1—2列出了第五代的（1987年修订）IGRF系数，其中主磁场模型系数以nT为单位，长期变化（SV）模型系数以nT/年为单位。

其他几代IGRF的系数可参看[5][6][7][8][9]。利用球谐系数计算 IGRF 的方法，可参看[10][11]。

表 1.1—2 第五代的（1987年修订）IGRF系数

			DGRF								IGRF	
	m	n	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	SV
g	0	1	−30594	−30654	−30500	−30421	−30334	−30220	−30100	−29992	−29877	23.2
g	1	1	−2285	−2250	−2215	−2169	−2119	−2068	−2013	−1956	−1903	10.0
h	1	1	5810	5815	5820	5791	5776	5737	5675	5604	5497	−24.5
g	0	2	−1244	−1341	−1440	−1555	−1662	−1781	−1902	−1997	−2073	−13.7
g	1	2	2990	2998	3003	3002	2997	3000	3010	3027	3045	3.4
h	1	2	−1702	−1810	−1898	−1967	−2016	−2047	−2067	−2129	−2191	−11.5
g	2	2	1578	1576	1581	1590	1594	1611	1632	1663	1691	7.0
h	2	2	477	381	291	206	114	25	−68	−200	−309	−20.2
g	0	3	1282	1297	1302	1302	1297	1287	1276	1281	1300	5.1
g	1	3	−1834	−1889	−1941	−1992	−2038	−2091	−2144	−2180	−2208	−4.6
h	1	3	−499	−476	−462	−414	−404	−366	−333	−336	−312	5.3
g	2	3	1255	1274	1288	1289	1292	1278	1260	1251	1244	−0.6
h	2	3	186	206	216	224	240	251	262	271	284	2.3
g	3	3	913	896	882	878	856	838	830	833	835	0.1
h	3	3	−11	−46	−83	−130	−165	−196	−223	−252	−296	−10.8
g	0	4	944	954	958	957	957	952	946	938	937	0.1
g	1	4	776	792	796	800	804	800	791	782	780	−0.6
h	1	4	144	136	133	135	148	167	191	212	233	3.8
g	2	4	544	528	510	504	479	461	438	398	363	−7.8
h	2	4	−276	−278	−274	−278	−269	−266	−265	−257	−250	2.2
g	3	4	−421	−408	−397	−394	−390	−395	−405	−419	−426	−1.4
h	3	4	−55	−37	−23	3	13	26	39	53	68	2.5
g	4	4	304	303	290	269	252	234	216	199	169	−6.8
h	4	4	−178	−210	−230	−255	−269	−279	−288	−297	−298	0.9
g	0	5	−253	−240	−229	−222	−219	−216	−218	−218	−215	1.3
g	1	5	346	349	360	362	358	359	356	357	356	0.1
h	1	5	−12	3	15	16	19	26	31	46	47	0.1
g	2	5	194	211	230	242	254	262	264	261	253	−1.5
h	2	5	95	103	110	125	128	139	148	150	148	−0.2
g	3	5	−20	−20	−23	−26	−31	−42	−59	−74	−94	−3.2
h	3	5	−67	−87	−98	−117	−126	−139	−152	−151	−155	−0.1
g	4	5	−112	−147	−152	−156	−157	−160	−159	−162	−161	0.1
h	4	5	−119	−122	−121	−114	−97	−91	−83	−78	−75	0.6
g	5	5	−82	−76	−69	−63	−62	−56	−49	−48	−48	−0.1
h	5	5	82	80	78	81	81	83	88	92	95	0.0
g	0	6	59	54	47	46	45	43	45	48	52	1.4
g	1	6	57	57	57	58	61	64	66	66	65	−0.3
h	1	6	6	−1	−9	−10	−11	−12	−13	−15	−16	−0.4
g	2	6	6	4	3	1	8	15	28	42	50	1.7
h	2	6	100	99	96	99	100	100	99	93	90	−1.1
g	3	6	−246	−247	−247	−237	−228	−212	−198	−192	−186	0.6
h	3	6	16	33	48	60	68	72	75	71	69	−0.8
g	4	6	−25	−16	−8	−1	4	2	1	4	4	0.0
h	4	6	−9	−12	−16	−20	−32	−37	−41	−43	−50	−2.3
g	5	6	21	12	7	−2	1	3	6	14	17	0.9
h	5	6	−16	−12	−12	−11	−8	−6	−4	−2	−4	−0.5

续表

			DGRF								IGRF	
	m	n	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985	SV
g	6	6	−104	−105	−107	−113	−111	−112	−111	−108	−102	1.2
h	6	6	−39	−30	−24	−17	−7	1	11	17	20	−0.1
g	0	7	70	65	65	67	75	72	71	72	75	0.2
g	1	7	−10	−55	−56	−56	−57	−57	−56	−59	−61	−0.6
h	1	7	−45	−35	−50	−55	−61	−70	−77	−82	−82	0.2
g	2	7	0	2	2	3	4	1	1	2	2	−0.5
h	2	7	−18	−17	−21	−28	−27	−27	−26	−27	−26	1.0
g	3	7	0	1	10	15	13	14	16	21	24	0.8
h	3	7	2	0	−1	−6	−2	−4	−5	−5	−1	1.1
g	4	7	−29	−40	−32	−32	−26	−22	−14	−12	−6	1.0
h	4	7	6	10	8	7	6	8	10	16	23	1.9
g	5	7	−10	−7	−11	−7	−6	−2	0	1	4	0.4
h	5	7	28	36	28	23	26	23	22	18	17	0.3
g	6	7	15	5	9	17	13	13	12	11	9	−0.5
h	6	7	−17	−18	−20	−18	−23	−23	−23	−23	−21	0.2
g	7	7	29	19	18	8	1	−2	−3	−2	0	−0.1
h	7	7	−22	−16	−18	−17	−12	−11	−12	−10	−6	0.9
g	0	8	13	22	11	15	13	14	14	18	21	0.7
g	1	8	7	13	9	6	5	6	6	6	6	0.0
h	1	8	12	5	10	11	7	7	6	7	7	0.1
g	2	8	−8	−4	−6	−4	−4	−2	−1	0	0	0.3
h	2	8	−21	−22	−15	−11	−12	−15	−16	−18	−21	−1.0
g	3	8	−5	−1	−14	−11	−14	−13	−12	−11	−11	0.4
h	3	8	−12	0	5	7	9	6	4	4	5	0.1
g	4	8	9	11	6	2	0	−3	−8	−7	−9	−0.3
h	4	8	−7	−21	−23	−18	−16	−17	−19	−22	−25	−0.8
g	5	8	7	15	10	10	8	5	4	4	2	−0.3
h	5	8	2	−8	3	4	4	6	6	9	11	0.2
g	6	8	−10	−13	−7	−5	−1	0	0	3	4	0.7
h	6	8	18	17	23	23	21	21	18	16	12	−0.8
g	7	8	7	5	6	10	11	11	10	6	4	−0.5
h	7	8	3	−4	−1	1	−3	−6	−10	−13	−16	−0.1
g	8	8	2	−1	9	8	4	3	1	−1	−6	−0.8
h	8	8	−11	−17	−13	−20	−17	−16	−17	−15	−10	1.3
g	0	9	5	3	4	4	8	8	7	5	5	
g	1	9	−21	−7	9	6	10	10	10	10	10	
h	1	9	−27	−24	−11	−18	−22	−21	−21	−21	−21	
g	2	9	1	−1	−4	0	2	2	2	1	1	
h	2	9	17	19	12	12	15	16	16	16	16	
g	3	9	−11	−25	−5	−9	−13	−12	−12	−12	−12	
h	3	9	29	12	7	2	7	6	7	9	9	
g	4	9	3	10	2	1	10	10	10	9	9	
h	4	9	−9	2	6	0	−4	−4	−4	−5	−5	
g	5	9	16	5	4	4	−1	−1	−1	−3	−3	
h	5	9	4	2	−2	−3	−5	−5	−5	−6	−6	
g	6	9	−3	−5	1	−1	−1	0	−1	−1	−1	

续表

			DGRF								IGRF
	m	n	1945	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985 SV
h	6	9	9	8	10	9	10	10	10	9	9
g	7	9	−4	−2	2	−2	5	3	4	7	7
h	7	9	6	8	7	8	10	11	11	10	10
g	8	9	−3	3	2	3	1	1	1	2	2
h	8	9	1	−11	−6	0	−4	−2	−3	−6	−6
g	9	9	−1	8	5	−1	−2	−1	−2	−5	−5
h	9	9	8	−7	5	5	1	1	1	2	2
g	0	10	−3	−8	−3	1	−2	−3	−3	−4	−4
g	1	10	11	4	−5	−3	−3	−3	−3	−4	−4
h	1	10	5	13	−4	4	2	1	1	1	1
g	2	10	1	−1	−1	1	2	2	2	2	2
h	2	10	1	−2	0	1	1	1	1	0	0
g	3	10	2	13	2	0	−5	−5	−5	−5	−5
h	3	10	−20	−10	−8	0	2	3	3	3	3
g	4	10	−5	−4	−3	−1	−2	−1	−2	−2	−2
h	4	10	−1	2	−2	2	6	4	4	6	6
g	5	10	−1	4	7	4	4	6	5	5	5
h	5	10	−6	−3	−4	−5	−4	−4	−4	−4	−4
g	6	10	8	12	4	6	4	4	4	3	3
h	6	10	6	6	1	1	0	0	−1	0	0
g	7	10	−1	3	−2	1	0	1	1	1	1
h	7	10	−4	−3	−3	−1	−2	−1	−1	−1	−1
g	8	10	−3	2	6	−1	2	0	0	2	2
h	8	10	−2	6	7	6	3	3	3	4	4
g	9	10	5	10	−2	2	2	3	3	3	3
h	9	10	0	11	−1	0	0	1	1	0	0
g	10	10	−2	3	0	0	0	−1	−1	0	0
h	10	10	−2	8	−3	−7	−6	−4	−5	−6	−6

（三）其他的全球模型[12]、[13]、[14]

除了IGRF以外，还有其他一些地磁场模型。

R. A. Langel等根据MAGSAT数据和91个地磁台数据建立了一个地磁场模型GSFC (12/83)，适用于1980年，它的特点是阶次较高，$n=m=13$，此外，在建立模型过程中将地磁台所在地的磁异常作为待定参数，与球谐系数及其变化率一并求出，使拟合误差不再是主要反映地磁台所在处的异常场值，而是和实际观测误差相应。在这个模型中还包括外源场及相应的感应内源场的一次项，可据以了解外源场及感应内源场的大小。GSFC (12/83) 经截断，取$n=m=10$，就是DGRF 1980。因此，当我们在工作中需使用DGRF 1980时，为了更精确地描述主磁场，还可使用GSFC(12/83)。

以下我们结合高阶全球模型分析一下地磁场的结构问题。

一个时间序列的功率谱可由其傅里叶成分的振幅平方确定。类似地，有一些学者根据地球某一纬度圈上的磁测结果，作傅里叶分析，以了解地磁场的结构。图1.1—1表示沿北纬20°地磁场的空间谱，从图中可见，在波长为500km到3000km段，频谱曲线有一明显的

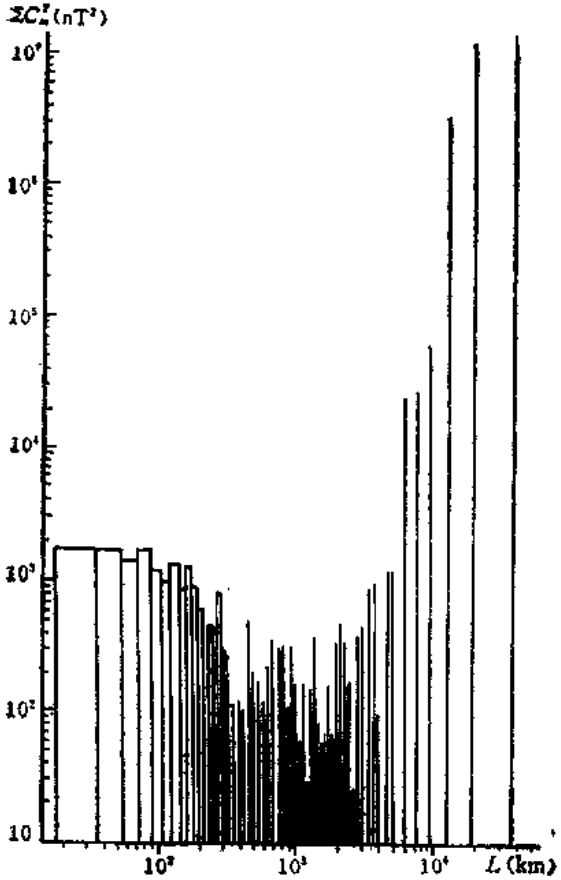


图 1.1—1 沿北纬20°纬圈的磁感应强度的谱密度
（根据Alldredge）

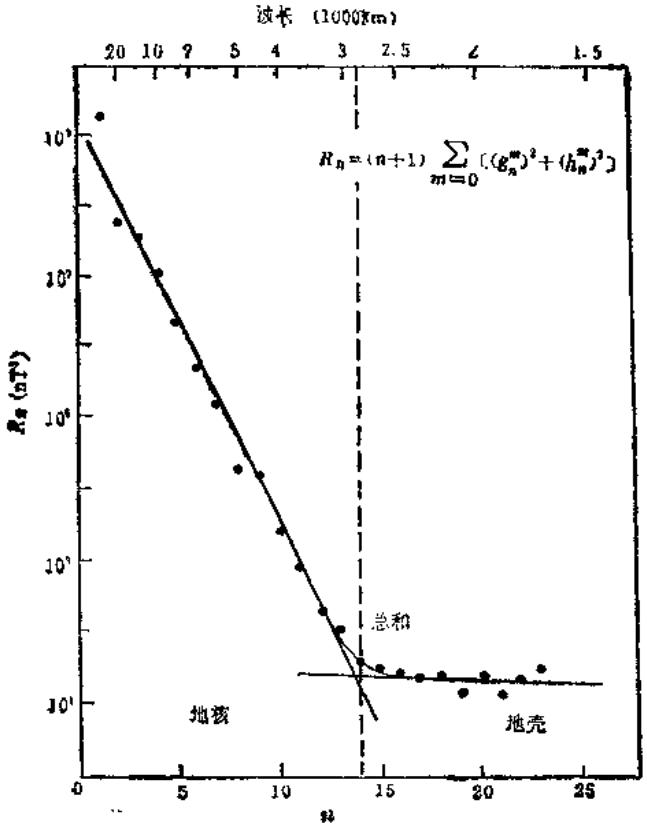


图 1.1—2 地磁场的空间谱
（根据Langel等）

极小值。从地磁场的“能量”来看，它分为两个部分，一部分源来自深部，另一部分源来自浅部，分界比较明显，前者是地核场，而后者则是地壳场，这也间接地说明，地幔是无源的。

我们还可由地磁场的球谐分析的空间谱来说明这个问题。定义幅值A为磁感应矢量$\boldsymbol{B}$在地球表面的均方根值

$$A^2=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}|\boldsymbol{B}(a,\theta,\lambda)|^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda \qquad (1.1-7)$$

上式的积分结果为

$$A^2=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)\sum_{m=0}^{n}[(g_n^m)^2+(h_n^m)^2] \qquad (1.1-8)$$

对于n阶谐和函数的幅值A_n，则有

$$A_n^2=(n+1)\sum_{m=0}^{n}[(g_n^m)^2+(h_n^m)^2] \qquad (1.1-9)$$

在有的文献上，用R_n表示A_n^2。

Langel R. A. 等根据选出的26500个MAGSAT数据，进行阶次较高的球谐分析，取$n=m=23$。他们根据求得的球谐系数，绘出了R_n-n曲线，如图1.1—2所示。这条曲线可用两条直线近似地表示，这两条曲线大约相交于$n=14$处（对应的赤道波长约40000 km/14≈2860km）。目前一般认为，这两条直线分别代表主磁场和地壳场的谱。在$n=12$以下，谱主要受主磁场控制，在$n=16$以上，谱主要受地壳场控制。在中间的一段，谱互相重叠，不能区分上述两种场。一般认为在$n<12$处截断的球谐分析只代表主磁场，实际上仍有一小部分地壳场的贡献。

四、地区性地磁场模型[15]

为了表示某一地区的正常场，需要建立地区性地磁场模型，某些地区的磁测数据密度一般要比全球的大一些，足以更仔细地刻画地磁场的分布特征。

球谐分析（SHA）是分析全球地磁场和编绘全球地磁图的主要数学方法，但由于数据和计算能力的限制，它的分辨能力是有限的，不适宜于处理某一地区磁场或描述空间尺度较小的磁异常。SHA取地球周围长度为基本波长，所揭示的最短波长λ＝周围长度/N。N是SHA中所用的最高阶数。若$N=10$，像IGRF中所采用的那样，则$\lambda\approx4000$ km；如果要分辨100 km的波长，则要求$N=400$，这时有$400(400+2)=160800$个球谐系数，在目前，无论从数据密度、精度、改正方法，或从计算能力来说，要解出这么多的系数显然是不可能的。

因此，建立地区性地磁场模型需要应用另外的方法。方法甚多，包括SHA本身在内，大约有十种左右，目前用得较多的有多项式拟合法、矩谐分析方法（RHA），以及近年发展起来的球冠谐和分析方法（SCHA）等。

（一）多项式拟合法

建立地区性地磁场模型最先采用，现在仍被广泛应用的分析方法是多项式拟合法。将地磁要素以多项式表示为经、纬度的函数，或平面坐标的函数，表示式中不包括径向距离（或垂向距离）的项。这种建模方法简便易行，利用模型计算地磁场诸要素也很快捷。其研究地区可大（数百万km²），可小（数十km²）。多项式的阶数一般选为3左右。模型所

刻画的最小波长与阶数及研究地区的大小有关，可用以下方法估计：一个 n 阶多项式在任何涉及到的区间 L 内最多只有 n 个零点，因此，用一 n 阶多项式近似地表示的最小波长的估计值 $\lambda_{min}=L/[(n-1)/2]$。一般在两个方向上(东西-南北或其他互相垂直的两个方向)采用相同的阶数，但若研究地区两个方向的跨距不同，或考虑到磁场分布特点，采用不同的阶数较合理。这种方法是一种纯数学的方法，没有考虑地磁诸要素间的几何约束（诸要素间应满足的一定关系）以及物理约束（矢量磁场的旋度、散度应为零)。此外，也不能用这个模型求得上部空间的磁场。

澳大利亚、美国、日本和我国以及其他一些国家都采用或曾经采用泰勒多项式建立各自的地磁场模型。

澳大利亚矿产资源、地质和地球物理局（BMR）用三个地磁台和65个一级站的观测数据，建立了 BMR/80（1980.0）模型作为澳大利亚地磁参考场（AGRF)。BMR/80 由每一要素及其长期变化的四次多项式系数（各 15 个）组成。与 IGRF 1980 相比，总场差值在 ±150 nT 以内。

美国也有一些学者用多项式拟合区域磁场，用的阶次较高，为 7—9 次。由于美国本土东西长而南北短，有人在两个方向上用阶次不同的多项式来进行拟合。

日本利用三分量航空磁测结果建立区域磁场模型（1980.0)，并采用经纬度的三阶多项式拟合所得数据。该模型除了大部代表地核场外，还包括一部分地壳场，其总场与IGRF 1980 相差 −60 nT—10 nT。

安振昌等利用我国历年来的地磁观测资料，以及部分国外地磁台站资料、DGRF值，以三阶泰勒多项式拟合方法，建立了中国地区 1950.0、1960.0、1970.0 和 1980.0年的主磁场模型，记为 CHINAMF[16]。

地磁场的某一要素（如磁偏角 D）的地理分布，用地理经度（λ）和地理纬度（ϕ）的泰勒多项式来表示

$$\begin{aligned}D(\phi,\lambda)=&a_0+a_1(\phi-\phi_0)+a_2(\lambda-\lambda_0)+\\&+a_3(\phi-\phi_0)^2+a_4(\phi-\phi_0)(\lambda-\lambda_0)+\\&+a_5(\lambda-\lambda_0)^2+a_6(\phi-\phi_0)^3+\\&+a_7(\phi-\phi_0)^2(\lambda-\lambda_0)+a_8(\phi-\phi_0)(\lambda-\lambda_0)^2+\\&+a_9(\lambda-\lambda_0)^3\end{aligned}\qquad(1.1-10)$$

式中，λ_0、ϕ_0 代表展开原点的经度和纬度，并取 $\phi_0=36°N$，$\lambda_0=106°E$；a_0，$a_1\cdots a_9$ 是待定的系数，用最小二乘法求出。

表1.1—3列出了四个年代中国地区主磁场模型的系数。

中国地区主磁场模型 CHINAMF 1980 与 DGRF 1980 比较的结果表明，在我国新疆北部边境和黑龙江北部边境，两种模型相差较大（如总场强度的差值可达 400 nT)，而在其他边界地区，两种模型吻合较好（总强度的差值为（$n\times10$)nT)；对于中国大陆地区，其精度是高的，但对于中国海域，其精度就要差一些。安振昌等认为，各个年代的主磁场模型可以作为研究中国地区磁异常的正常背景场，但在使用时要注意上述问题。各地的正常磁场值，可用公式（1.1—10）和表示 I、H、F（总场）的类似公式以及表 1.1—3 中列出的系数算出。

（二）矩谐分析（RHA）

为了建立能够反映较短波长的地磁场地区性模型，Alldredge[17]于1981年重新提出采用矩谐分析方法。选用一直角坐标系（x，y，z），令其原点位于研究地区的中央(见图1.1—3)。将地磁台站或测点的坐标及磁场观测值由地理坐标（地心的或大地测量的）转换成直角坐标，然后将磁位或场的分量展成正交的谐和函数级数（正弦、余弦及一个幂函

表 1.1—3　1950.0—1980.0中国地区主磁场模型系数

1950.0 年中国地区主磁场模型的系数

D	I	H	F
-0.211083×10^{1}	0.529309×10^{1}	0.318969×10^{5}	0.529415×10^{1}
-0.104781×10^{0}	0.140710×10^{1}	-0.661482×10^{2}	0.597686×10^{1}
-0.221101×10^{0}	-0.139829×10^{-1}	0.228106×10^{1}	-0.511877×10^{-1}
0.263575×10^{-2}	-0.190750×10^{-1}	-0.858071×10^{1}	-0.347448×10^{1}
-0.151584×10^{-1}	-0.301185×10^{-2}	0.457872×10^{1}	0.194266×10^{1}
-0.677601×10^{-4}	-0.112901×10^{-1}	-0.182590×10^{1}	-0.115330×10^{1}
0.892384×10^{-4}	0.116265×10^{-2}	0.121039×10^{0}	-0.299986×10^{-1}
-0.819042×10^{-4}	0.208439×10^{-2}	-0.620115×10^{-1}	0.886634×10^{-1}
0.155498×10^{-4}	-0.136612×10^{-2}	0.156518×10^{0}	-0.428971×10^{-1}
0.940532×10^{-4}	-0.150366×10^{-2}	0.320996×10^{-2}	-0.588086×10^{-1}

1960.0 年中国地区主磁场模型的系数

D	I	H	F
-0.233664×10^{1}	0.528762×10^{1}	0.319727×10^{5}	0.530188×10^{1}
-0.114188×10^{0}	0.110138×10^{1}	-0.651185×10^{2}	0.607721×10^{1}
-0.219355×10^{0}	-0.101309×10^{-1}	-0.851308×10^{1}	-0.591761×10^{1}
0.166212×10^{-2}	-0.189935×10^{-1}	-0.819088×10^{1}	-0.311683×10^{1}
-0.140175×10^{-1}	-0.262260×10^{-2}	0.419114×10^{1}	0.149971×10^{1}
-0.439476×10^{-4}	-0.117872×10^{-1}	-0.149782×10^{1}	-0.425055×10^{1}
0.442079×10^{-4}	0.152548×10^{-2}	0.112410×10^{0}	-0.302077×10^{-1}
-0.116102×10^{-3}	0.119210×10^{-1}	0.314117×10^{-1}	0.119843×10^{1}
0.149033×10^{-3}	-0.119449×10^{-1}	0.895533×10^{-1}	-0.858458×10^{-1}
0.845326×10^{-4}	-0.270155×10^{-1}	0.201825×10^{-1}	-0.603057×10^{-2}

1970.0 年中国地区主磁场模型的系数

D	I	H	F
-0.241298×10^{1}	0.528816×10^{1}	0.318587×10^{5}	0.528309×10^{1}
-0.120049×10^{0}	0.138640×10^{1}	-0.650446×10^{2}	0.587250×10^{1}
-0.225892×10^{0}	-0.411818×10^{-1}	-0.823057×10^{1}	-0.619201×10^{1}
0.131083×10^{-2}	-0.192817×10^{-1}	-0.789152×10^{1}	-0.336109×10^{1}
-0.134786×10^{-1}	-0.269592×10^{-2}	0.103159×10^{1}	0.107457×10^{1}
-0.183822×10^{-4}	-0.133978×10^{-1}	-0.133612×10^{1}	-0.407082×10^{1}
0.498606×10^{-4}	0.157468×10^{-2}	0.135654×10^{0}	-0.276290×10^{0}
-0.106711×10^{-3}	0.107611×10^{-1}	0.152720×10^{-1}	0.912738×10^{-1}
0.140952×10^{-3}	-0.101330×10^{-1}	0.933005×10^{-2}	-0.708908×10^{-1}
0.925066×10^{-4}	-0.256215×10^{-1}	0.186700×10^{-1}	-0.178261×10^{-2}

1980.0 年中国地区主磁场模型的系数

D	I	H	F
-0.246120×10^{1}	0.529848×10^{0}	0.317176×10^{2}	0.527184×10^{2}
-0.109147×10^{0}	0.137428×10^{1}	-0.649236×10^{2}	0.577500×10^{2}
-0.232607×10^{0}	-0.406925×10^{-1}	-0.167689×10^{1}	-0.512965×10^{2}
0.108085×10^{-1}	-0.191329×10^{-1}	-0.749837×10^{1}	-0.318324×10^{2}
-0.129078×10^{-2}	-0.215241×10^{-1}	0.362646×10^{1}	0.103832×10^{1}
0.663576×10^{-3}	-0.140060×10^{-2}	-0.126306×10^{1}	-0.402189×10^{1}
0.390169×10^{-1}	0.172180×10^{0}	0.123980×10^{0}	-0.277631×10^{0}
-0.113952×10^{-3}	0.801871×10^{-1}	0.931238×10^{-2}	0.751105×10^{-1}
0.114181×10^{-3}	-0.106271×10^{-1}	0.101800×10^{-2}	-0.628348×10^{-1}
0.962222×10^{-1}	-0.268371×10^{-1}	0.149246×10^{-1}	-0.834045×10^{-2}

数），用最小二乘法求出系数。一般是先将观测值减去 IGRF 值，得到残值，利用残值进行 RHA。

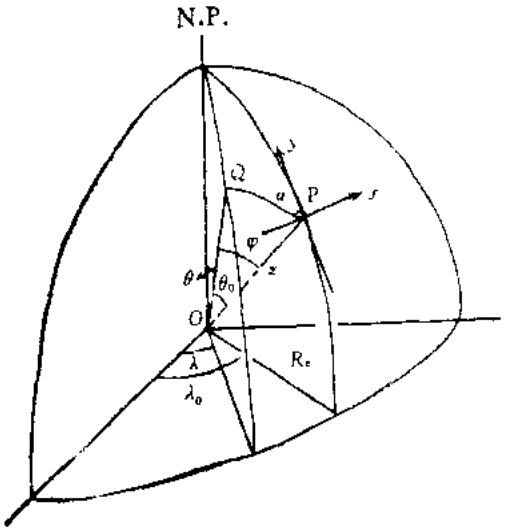


图 1.1—3 矩谐分析法的直角坐标系
（P 点是地面上的一点（余纬 θ，东经 λ），也是平面直角坐标系 x，y，z 的原点；Q 是研究区中的另一点）

在直角坐标系中，磁位应是拉普拉斯方程式的解，可写成

$$V=Ax+By+Cz+\sum_{q=1}^{N_{max}-1}\sum_{i=1}^{q}\{D_{ij}\cos(ivx)\cos(jwy)+E_{ij}\cos(ivx)\sin(jwy)+F_{ij}\sin(ivx)\cos(jwy)+G_{ij}\sin(ivx)\sin(jwy)\}\exp(uz) \qquad (1.1-11)$$

其中，$j=q-i+1$，$v=2\pi/L_x$，$w=2\pi/L_y$，$u=[(iv)^2+(jw)^2]^{1/2}$，L_x、L_y是研究地区的边长，A、B、C 是常数，D_{ij}、E_{ij}、F_{ij}及G_{ij}均为待定常数。磁场的分量可由下式求出

$$\boldsymbol{T}=-\mu_0\nabla V \qquad (1.1-12)$$

由于 RHA 是用一平面近似球面，因此建模的面积不能太大，一般是 3000×3000 km²左右。用此种技术在研究地区的边缘会发生振荡现象，也还有一些理论问题需要探讨，因此，虽然它能刻画较短的波长，但其应用不如多项式拟合方法广泛。

Alldredge 用 RHA 利用 12 个地磁台的数据分析了欧洲的地磁场，研究区为矩形区域，东西长 3600 km，南北宽 2800 km。Barton 也用 RHA 建立澳大利亚地磁参考场（AGRF 1985），他使用了 86 个台站的资料，研究区东西为 4800 km，南北为 5200 km。结果在周边及四角，拟合精度很差，只在澳大利亚大陆、邻近海域和岛屿地区比较精确。徐文耀和朱岗昆也采用 RHA 对我国及邻近地区地磁场进行分析，矩形区域东西长 8000 km，南北 6000 km，使用了 19 个地磁台的数据。

（三）球冠谐和分析（SCHA）[18][19][20][21][22][23]

加拿大的 G. V. Haines于1985年求出了球冠范围边值问题的解析解，用于模拟IGRF。继而还用这种球冠谐和分析（SCHA）技术建立了加拿大地磁参考场AGRF 1985。这个模型包括最短波长为 800 km 的成分，大约相当于 $n=50$ 的 SHA。若将SHA展开将需要2600个系数，而SCHA模型仅需要289个系数。

接着意大利的 A. De Santis 等利用MAGSAT数据和SCHA技术建立了欧洲地壳磁异常模型以及意大利的区域场模型，H. Nevanlinna 等用SCHA建立了斯堪底那维亚地磁场模型（1985.0）。同时，朱文孝等利用SCHA对中国主地磁场模式进行了研究❶。安振昌等利用SCHA和MAGSAT资料计算了中国的卫星磁异常图[22]。这些进展说明，SCHA是一种新的、比较严格的建立区域磁场模型的数学方法。

在前面的公式（1.1—1）给出了地磁学中采用的内源场拉普拉斯方程解的标准形式

$$V=\frac{a}{I^{t}_{0}}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$$

在实际分析中，对 n 的展开式在某一有限阶数 N 处截断，故上式可表示成

$$V=\frac{1}{I^{t}_{0}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}V_n^m$$

$$V_n^m=a\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$$

解 V_n^m 是用分离变量法得到的，这种方法把问题化解为解三个由本征值 m^2 和 $(n+1)n$ 相关联的常微分方程。m 和 n 的允许值取决于边界条件。位的连续性限定 m 是实数和整数，位在 $\theta=0°$ 和 180°时的正则条件限定 n 是实数和整数。当 m 和 n 为整数时，关于 θ 的常微分方程的解是有限多项式，即缔合勒让德多项式 $\mathrm{P}_n^m(\cos\theta)$。

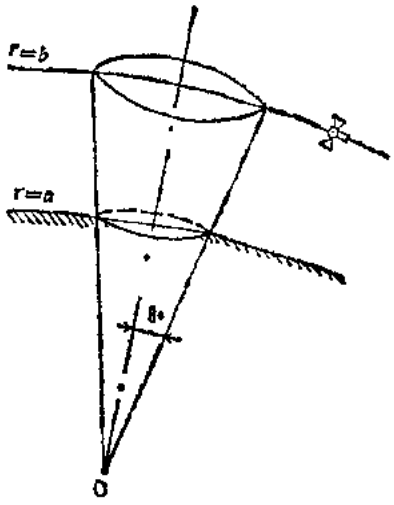


图 1.1—4 由半角 θ_0 及 $r=a$（地面），$r=b$（卫星高度）确定的球冠区域

对于球冠来说，经度的边界条件与全球分析同，因此 m 仍是实数和整数，$\theta=0°$ 的边界条件也与全球分析同，但在 $\theta=\theta_0$ 时，球冠的边界条件则是新的（见图 1.1—4）。位及其对 θ 的导数必须满足

$$V(r,\theta_0,\lambda)=f(r,\lambda)\qquad(1.1—13)$$

以及

$$\partial V(r,\theta_0,\lambda)/\partial\theta=g(r,\lambda)\qquad(1.1—14)$$

其中，f 和 g 是分别满足 V 和 $\partial V/\partial\theta$ 当 $\theta=\theta_0$ 时对 r 和 λ 的函数。

Haines 指出，为满足（1.1—13）式，可按以下条件来选择函数 V_n^m，

$$\partial V_n^m(r,\ \theta_0,\ \lambda)/\partial\theta=0$$

求出下式的根即可达到这一点

$$\mathrm{d}\,\mathrm{P}_n^m(\cos\theta_0)/\mathrm{d}\theta=0\qquad(1.1—15)$$

❶ 朱文孝等，1980，中国基本地磁场的模式，湖北省地球物理学会，地球物理论文集，115—117。

这是n的方程，$m=0$，1，2，……，∞。

相似地，在球冠边界上令$V_n^m=0$即可以满足（1.1—14）式。由下式确定n值即可求出这些函数

$$P_n^m(\cos\theta_0)=0 \qquad (1.1—16)$$

使（1.1—15）和（1.1—16）式成立的n值，一般来说不是整数。对于一个给定的m值，如果由（1.1—15）和（1.1—16）式解出的n值按增大的顺序排列，它们将交替出现，最小的一个是（1.1—15）的根。这一性质对排列每个m值的根（n值）是很方便的。由于m是从零开始，Haines定义符号k也从零开始，因此$k=0$标志对应每个m的n的最小根。因此（1.1—15）的解以$k-m=$偶数来表征，（1.1—16）的解以$k-m=$奇数来表征。两组解构成两组函数，每组函数在球冠上是正交的，如同在普通球谐分析中勒让德多项式在$\theta=0°$到$\theta=180°$范围内是正交的一样。然而$k-m=$偶数的函数与$k-m=$奇数的函数不是正交的。

这样，磁位可写成

$$V=\frac{a}{r_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{k}(g_k^m\cos m\lambda+h_k^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) \qquad (1.1—17)$$

上式与通常SHA的表示式（1.1—1）相似，只不过对（整数）n求和由对新标志k求和来代替。k也用来标记高斯系数，g_k^m、h_k^m称为球冠谐和系数。如果展开式在$k=k_{max}$截断，则若$k=0$项也包括在内，展开式共有$(k_{max}+1)^2$项。

给定m和n值，$P_n^m(\cos\theta)$可用下式计算

$$P_n^m(\cos\theta)=\sum_{j=0}^{\infty}A_j(m,n)\left[\frac{1-\cos\theta}{2}\right]^j \qquad (1.1—18)$$

其中，$A_0(m,n)=K_n^m\sin\theta$，而其他的A_j值可用递推关系来计算

$$A_j(m,n)=\frac{(j+m-1)(j+m)-n(n+1)}{j(j+m)}\cdot A_{j-1}(m,n) \qquad (1.1—19)$$

K_n^m由下式给出

$$\begin{cases} K_n^m=1 & \text{当}m=0 \\ K_n^m=\dfrac{2^{1/2}}{m!2^m}\left[\dfrac{\Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\right]^{1/2} & \text{当}m\neq 0 \end{cases}$$

（1.1—18）式给出的$P_n^m(\cos\theta)$表示式是一个无穷级数，只有当n是整数时，这个级数才是有穷多项式。实际上，收敛的容许限是预先规定的，一旦达到此限，求和即完成。

Haines用Stirling公式推导K_n^m的近似表示式

$$K_n^m=\frac{2^{-m}}{(m\pi)^{1/2}}\left[\frac{n+m}{n-m}\right]^{1/2n+1/4}\cdot p^{1/2m}\cdot\exp(e_1+e_2)$$

其中，$p=(n/m)^2-1$，$e_1=-(1/(12m))(1+1/p)$

$$e_2=(1+3/p^2+4/p^3)/(360m^3)$$

由（1.1—18）式容易看出

$$\frac{dP_n^m}{d\theta}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}A_j(m,n)\frac{j}{2}\sin\theta\left[\frac{1-\cos\theta}{2}\right]^j, & \text{当}m=0 \quad (1.1—20a) \\ \dfrac{m\cos\theta}{\sin\theta}P_n^m+\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}A_j(m,n)\frac{j}{2}\sin\theta\left[\frac{1-\cos\theta}{2}\right]^j, & \text{当}m\neq 0 \quad (1.1—20b)\end{cases}$$

（1.1—18）式和（1.1—20）式可计算缔合勒让德函数及其对 θ 的导数(已知 n，m)，同时，当给定 θ_0 和 m 时，分别提供用数值方法解（1.1—16）和（1.1—15）以求出适合的 n 值的手段。

磁感应的北向、东向和垂直向下三个分量（X，Y，Z）可由（1.1—17）式表示的位的负梯度表示，即 $\boldsymbol{B}(X,Y,Z)=-\mu_0\nabla V$。

有了以上公式，即可进行球冠谐和分析，总括起来，计算步骤如下：

1．对于整数 m、实数 n，由（1.1—18）、（1.1—19）式计算 $P_n^m(\cos\theta)$，由（1.1—20）、（1.1—19）式计算 $\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)/\mathrm{d}\theta$；

2．根据研究地区的大小，选定球冠半角 θ_0，$\theta_0\leqslant 90°$、$180°$，给定 θ_0 及 m，由(1.1—18)、(1.1—20）式计算 $n_k(m)$，根据要求，定出 $n_{k\max}$；

3．坐标及场分量数据的转换：①将大地坐标系转换为地心坐标系；②将球坐标转换为球冠坐标系，新的极点选在研究地区中心，在此过程中场的分量也应作相应的换算，而且一般将观测数据减去一个适当的全球参考场，用剩余值（差值）作球冠谐和分析；

4．用球冠谐和模型拟合数据，用最小二乘法求出球冠谐和系数；

5．若已知球冠谐和系数，计算球冠谐和模型，并作必要的坐标转换。

朱文孝等在《利用航磁资料编制我国地球主磁场图的方法技术及软件研究》中❶，采用球冠谐和分析方法，开发了实现上述全部计算的软件，并利用中国科学院地球物理研究所发表的 1970 年地磁测量分量数据，建立中国主地磁场模型。

考虑到我国地磁台站观测数据少且分布不均匀，目前尚未开展航空三分量测量，而以往航空磁测工作中积累的是大量总场 T 观测数据等情况，他们编制了根据总场 T 的数据用迭代法求球冠谐和系数的计算程序，这对于我国具体情况，是一种比较实用的方法。

§2 变化磁场分析[2]

总场磁异常可按下式计算

$$\Delta T=T_{测量}-(T_n+\delta T_{长期})-\delta T_{变化}$$

其中 $T_{测量}$ 是磁场的瞬时测量值；T_n 是某点的正常磁场；$\delta T_{长期}$ 是正常磁场的长期变化值；$\delta T_{变化}$ 是测定时刻测点处的变化磁场值。为了求得 ΔT，除了应了解 $T_n+\delta T_{长期}$ 的特点外，还必须了解 $\delta T_{变化}$ 的时空分布规律，以便在磁测结果中精确地进行校正或在工作中设法避免其影响。正常磁场 T_n 及其长期变化 $\delta T_{长期}$ 主要是内源场；而 $\delta T_{变化}$ 的场源虽在磁层及电离层中，但它又在地球内部产生感应场，因此比较复杂。感应场与地球的电性结构有关，了解这种关系也为我们利用这一特点解决地质问题开拓思路。在这一节里虽然是讨论变化场，但着重讨论感应场。

一、正常变化场与异常变化场

由于太阳风、辐射和地球磁场的相互作用，在电离层和磁层中分布着许多电流系，它们受太阳活动的影响，经常发生变化。地球本体（地面和海水面以下）有一定导电性，上

---

❶ 朱文孝、屠万生、刘天佑等：1990，《中国基本地磁场模式研究》，"七、五"地矿部科技攻关重点项目(860001—3—3）研究成果报告。

述电流系产生的初始（一次）变化场在地下感应产生电流，这种感应电流产生的变化场，称为感应场或二次磁场。一次场与二次场之和称为总和场，二次场在总和场中占相当大的比例。例如，对于磁静日昼夜变化 S_q 来说，一次场与二次场的比例约为 2.4:1。二次场的形态取决于地壳及地幔电导率分布状态。

通常把具有径向电导率分布 $\sigma=\sigma(r)$ 的地球模型称为正常地电模型，这是一种全球模型。在一个较小范围内，可将地表看作一个平面，当地下介质的电导率只随深度变化时，$\sigma=\sigma(z)$，称之为平面正常地电模型，z 表示垂直方向的距离。

在正常地电模型条件下，由初始场和感应场组成的总和场称为正常变化场。在许多地磁学专著中，都有不同纬度上 S_q 与地方太阳时的关系曲线，它们是根据分布在世界各地地磁台的观测结果用球谐分析方法计算得出的，是一种平均的结果，可以说是正常的 S_q 场。

如果在水平方向上电导率分布不均匀，形成电导率异常（有人简称为 CA），则会使正常场发生畸变，称为变化场异常，在此情况下，变化场由正常场和异常场组成。

变化场异常可分成两种基本类型：①地表异常，这种异常是由地壳表层（如沉积表层、海水层等）电导率不均匀性引起的；②深部异常，这种异常与地壳和上地幔的电导率不均匀性有关。

按分布范围，可将异常分为区域的和局部的。数百乃至上千公里范围内的大规模异常叫区域异常，它可在大规模地质构造上被发现，如由良导沉积层下结晶基底起伏、上地幔高电导率带、海洋的影响等所引起的异常。在区域异常背景上可能观测到局部异常，它可能与褶皱、深断裂、热液带、地壳或地幔物质的熔融源、海岛的影响等有关，其尺度为数十公里。

电磁场异常的形态与电导率异常的几何形状有关，可分为二维的、准二维的和三维的异常。

变化场由周期不同的各种成分组成。当电阻率一定时，长周期电磁波引起的感应电流穿透地层较深；而短周期电磁波穿透地层较浅，感应电流更集中于地表附近。这可用穿透深度 d 来表示为

$$\{d\}_{km}=(10\{\rho\}_{\Omega\cdot m}\{T\}_s)^{1/2}/(2\pi)$$

其中 ρ 是电阻率，以欧姆·米（Ω·m）为单位，T 是周期，以秒（s）为单位，d 以公里（km）为单位。d 表示电磁场衰减为地面值 1/e 的深度。在一般情况下，数公里深度以内的电导率异常引起周期为 1 分钟左右的电磁场畸变，数十公里深度以内的电导率异常会使周期为 1 小时左右的电磁场畸变，而数百公里深度以内的电导率异常，会使周期为一昼夜的电磁场产生畸变。

变化场异常常定性地用感应矢量表示。变化场矢量一般位于一个优势平面内，该平面的方向可用帕金森矢量表示，此矢量是优势平面法线的水平投影，它的方向表示优势平面倾斜的方向，其大小正比于倾角的余弦。短箭头表示优势平面很陡，此时 δZ 甚大。帕金森矢量指向良导体。此外还有韦泽矢量，其定义方法与上类似，但其矢量背离良导体。感应矢量图常能很清楚地显示电导率梯度的方向。

二、几种典型地电剖面上的变化场异常

与变化磁场有关的电磁感应问题，可归纳为解静止介质中的扩散方程，此时，磁场应

满足的边界条件是：磁场的切线分量和磁感应的法线分量在边界上应是连续的，此外还应满足一定的自然边界条件。

对于一些不规则形状导体的电磁感应问题，已有解法，如良导的沉积层下结晶基底（不良导体）的起伏、两种不同导电性的垂直接触面、位于不良导介质中的导电棱柱体、位于良导介质中的不导电的圆盘（模拟海岛）等，读者可参考〔24〕。

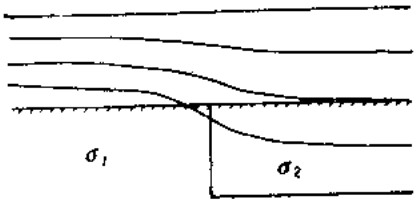


图 1.2—1 随时间变化的水平磁场趋向于避开良导体（σ_2），在两导体接触面附近形成倾斜的磁场

一种常见的情况是，两种导电性不同的岩层具有一近于垂直的分界面，在这种构造上，水平交变磁场的磁力线力图避开良导体而在接触面附近形成倾斜的磁场（见图 1.2—1）。在平面上，帕金森矢量指向良导体，根据其定义，在接触面上该矢量长度最大，往两边则逐渐缩短，矢量指向良导层。

有一些地理单元和大地构造单元与电导率异常有关，最明显的是大陆与海洋的交界线（海岸）。在海岸区，陆上的感应矢量往往垂直于海岸线指向海洋，表明海洋一侧电导率升高，这就是所谓的海岸效应。例如美国加利福尼亚州、澳大利亚、纽芬兰、印度以及非洲、南美某些地区均有这种现象，图 1.2—2 是澳大利亚东南部的感应矢量图。

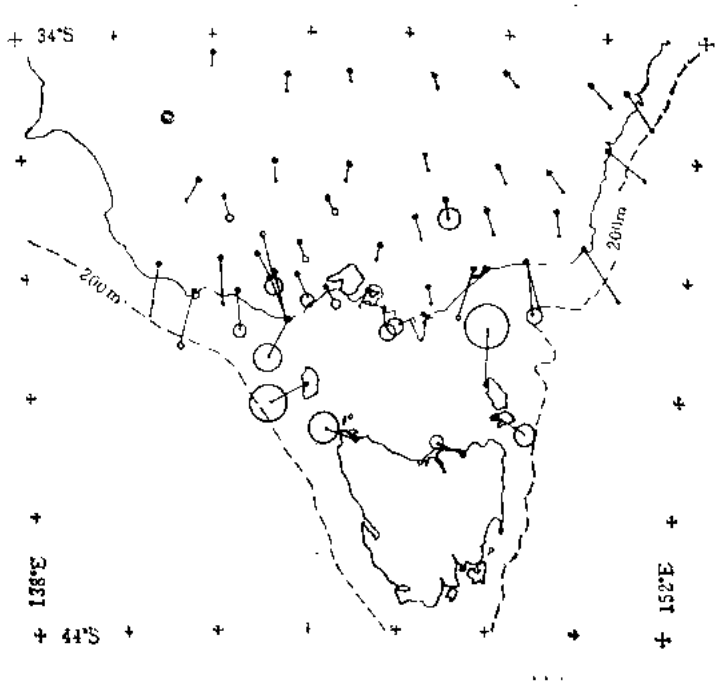


图 1.2—2 澳大利亚东南部的感应矢量图

（海岸线附近矢量较长，指向附近的深海区（良导）；148°E，40°S处的两个小岛上感应矢量的指向几乎相反）

与海洋相接的大陆的性质对海岸效应的形态有影响。当大陆是地盾区（如西澳），海岸效应向内陆延伸很远。比值 $\delta Z/\delta H$（δH 是垂直于海岸线的水平分量）向内陆 300 km 处

减为其极大值的一半。在构造活动区，上述距离小于 150 km。在西加利福尼亚州，发现海岸效应减弱更快。

我国东部是否有海岸效应？其特点如何？至今尚未见有所报导。

海岸效应涉及到周期由 5 分钟到几小时的变化场，但此效应也延伸到日变场的频率，加州海岸即是典型的例子[25][26]。分析美国西海岸的 S_q 曲线表明，由东向西，愈接近海岸线，δZ 幅度愈大，幅度变化率大约为 1 nT/(10km)，见图 1.2—3。对于正常 S_q 来说，在东西方向上，应无多大变化。产生这种畸变的原因，一方面是由于海水电导率高，另一方面是海洋下面高电导率层抬升，大陆下方高电导率层下降。美国西海岸的电导率异常（CA），对湾扰也有影响（见图 1.2—4）。

在海岛上，常发现感应矢量方向在岛的一侧与岛的另一侧方向相反，即使海岛很小也可如此（参见图 1.2—2），此即所谓海岛效应。而在相当大的内海沿岸却往往没有海岸效应。例如，夏威夷阿胡岛上相距 20km 的两个测点，对于周期 24 小时的 δZ 变化，相位相差 30°，而对于周期小于 1 小时的变化，则完全反向，水平分量则变化不大。又如，日本伊豆大岛（东京以南海中的一个小岛）也有明显的海岛效应，在相距不远的两点上，短周期 δZ 反向。

海岛效应是由于作为不良导体的海岛干扰了海洋中大范围内感应电流的分布而引起的。在海岛的某两个相对的地点，电流线密集，可能观测到上述反向变化。力武常次用一种简单的模型（不导电的圆盘置于导电介质中）研究了海岛效应。结果表明，如果在南北方向上有一快速变化的外磁场，则在岛的最北端和最南端处，δZ 符号相反。

在内陆地区，往往也分布有一些电导率异常。澳大利亚和印度等国，利用磁力仪阵列进行了广泛的观测研究，以了解电导率异常分布状态，这一方面为研究地质构造提供资料，另一方面也为进行高精度航空和地面磁测时作变化场改正工作提供参考资料。在澳大利亚，发现有的地方相距不到 30 km，但 δZ 记录完全反向，其变化周期约为 1 小时。

有一类电导率异常，在地壳内延伸很长，在初次场的作用下，沿着良导体形成线状电流通道，变化场在其两侧，有完全不同的表现，下面我们结合中国的例子来阐述这种现象。

三、中国几个变化场异常区

在我国许多地区，发现了与短周期变化相关的电导率异常区。

在陕西，对湾扰和磁扰的分析结果表明[27]，存在着明显的变化场水平异常和垂直异常，短周期 δZ 在渭河南北相位相反，感应矢量指向渭河（见图 1.2—5，图 1.2—6）。这些现象表明，在渭河地堑下存在一条东西向的二维高导电流通道，经粗略估算，高导体位于地壳下部或地幔上部，深度约（10—50)km。这一结果是该文作者根据 Gough D. I. 提出的线电流近似假设估计得出的。他同时还指出，对陕西及其邻近地区湾扰和其他短周期变化的考察表明，上述以垂直分量反相为主要特征的变化场异常带可向东向西延伸很远。图 1.2—7 是近年观测的中国东部磁暴急始和湾扰 δZ 方向统计图及 δZ 变化消失带（在高导体上方 δZ 消失）走向，即推测的高导带走向。其中兰州至郑州段已被两侧台站符号明确确定，其西延长多远，还不确定；向东符号较乱，这可能与东部复杂电性结构有关。此外，上海附近及其他一些地区的短周期变化特点（上海附近的两个负号）值得注意。

祁贵仲等分析了渤海周围 25 个地磁台站（1973—1979)年急始、湾扰等短周期事件[28]

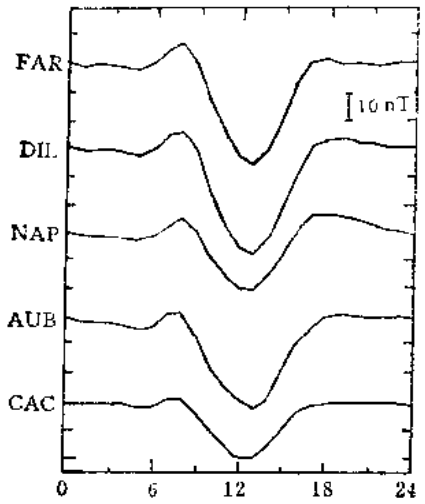


图 1.2—3　接近美国加利福尼亚州海岸处，日变垂直分量幅度增大

FAR 等为地磁台代号，其位置见图 1.2—4，水平轴代表地方时

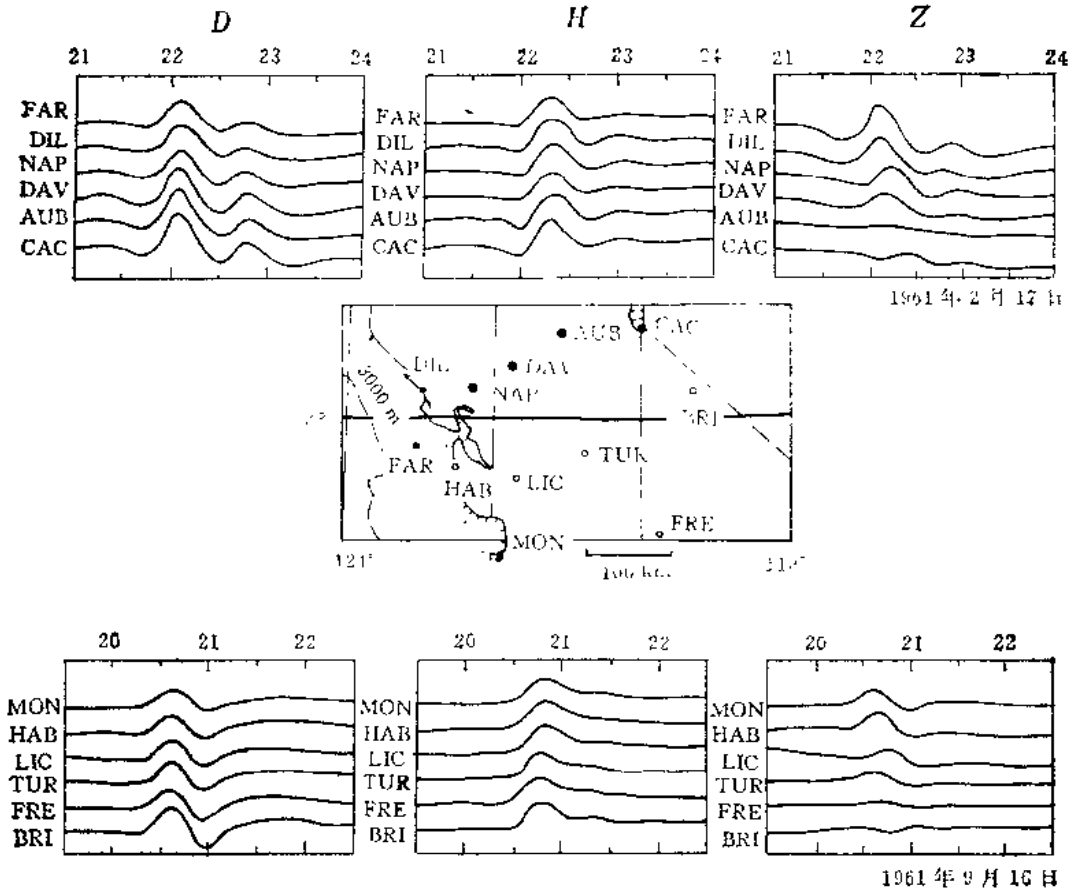


图 1.2—4　美国加利福尼亚州海岸的磁湾扰记录

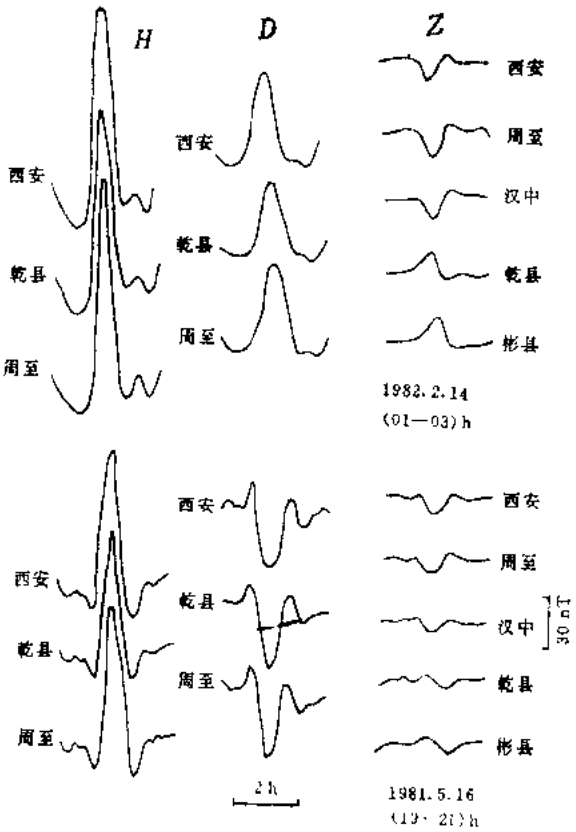


图 1.2—5 陕西西安等地的湾扰记录

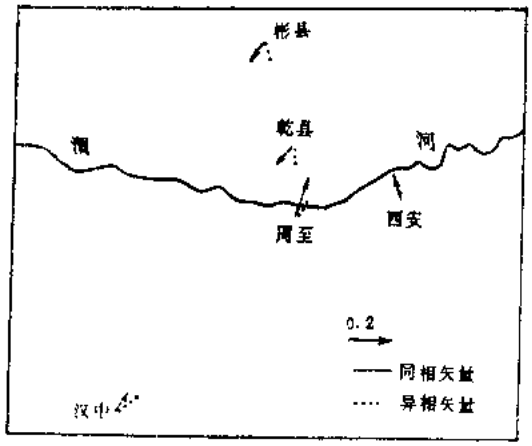


图 1.2—6 77、64、55、48、43 min 周期平均感应矢量

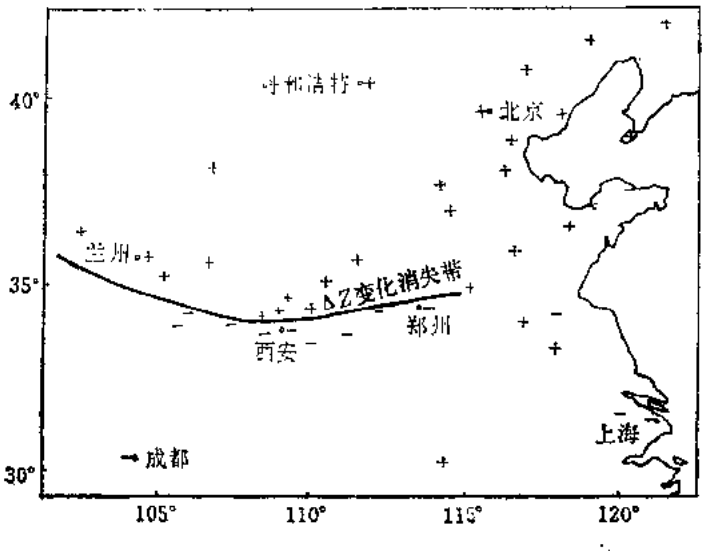


图 1.2—7 中国东部湾扰和磁暴急始ΔZ变化方向

发现，渤海地区存在地磁短周期变化异常。在异常北部昌黎、宁河、宝坻一带 δZ 为正；南部烟台为负（见图 1.2—7）。与异常对应的地下高导体位于渤海之下，模拟结果表明为一高导层隆起，东西长（150—200）km，南北宽（80—120）km，厚 30 km，顶部埋藏深度为 30 km。

侯作中分析了云南九个地磁台站记录[29]发现云南地区也存在地磁短周期变化异常。并根据 1980 年（1—3）月持续时间（3—10）分钟的 19 个急始型变化和 20 个持续时间为（30—180）分钟的湾扰型变化，作出了韦泽矢量图。结果发现，昆明、通海、下关、丽江、巧家的韦泽矢量指向北，而云县、腾冲的则指向南，大体上以下关以西之永平到个旧这条直线为界。由于韦泽矢量是背离良导体的，因此推断沿上述直线有一条高电导率异常带。在地磁变化的急始与湾扰期间，该导电带内感应电流集中，致使该带北东地区各台站 δZ 为正，南西地区各台站 δZ 为负。

对于我国其余广大地区地电结构特点则尚需进一步研究、总结。

§3 地壳和上地幔岩石的磁性

为了研究地壳和上地幔的构造，许多学者十分注意对大区域磁异常或长波长磁异常的研究。为了解决解释中的非唯一性问题，了解地壳和上地幔岩石的磁性是很重要的。由于人们对上地壳岩石的磁性已有较多了解，这里我们将着重阐述下地壳和上地幔岩石的磁性。

一、地壳和地幔[30]

地壳可用几种方法来定义，目前地震学定义是最为明确的一种定义。1909年，南斯拉夫地震学家莫霍洛维奇研究一个巴尔干地震记录时注意到，在几十公里深处存在着一个地震波速的间断面，其下纵波速度突然增加。这个间断面以后就被称为莫霍洛维奇间断面，或简称为莫霍面(Moho)，这个面以上部分被称为地壳，以下称为地幔。根据大量的地震波速数据，可给出地壳的地震学定义为：地壳是地球的外壳，其中 V_P 小于7.6km/s，或 V_S 小于4.4km/s。还可根据精密重力测量和地壳岩石密度测定，引出地壳的密度定义：地壳是地球的外壳，其中岩石密度小于3.1g/cm^3。由于地壳和地幔岩石波速和密度有相关关系，以上两个定义是一致的。

大家知道，大陆和海洋的许多部分被沉积岩覆盖，其中页岩发育最广泛，其次是灰岩和砂岩。沉积岩之下是结晶基底，它在大陆区是花岗岩类和片麻岩类，在海洋之下是玄武岩类。陆壳主要由沉积岩、片麻岩、花岗岩、花岗闪长岩、辉长岩、角闪岩、麻粒岩组成，部分陆壳由火山物质（玄武岩或酸性岩浆岩）组成。

陆壳不仅含有较多的轻质花岗岩和片麻岩以及较多的硅质物质，而且比洋壳厚很多，其厚度在陆棚区小于20km，而在珠峰、西藏高原以及秘鲁地区厚度约为70km。与洋壳厚度(6—7km)相比，陆壳厚度大而且变化很剧烈，也很不均匀，与地幔有复杂的相互作用。在大陆的稳定地区，地壳厚约(35—45)km，一般分为两层，上层 $V_P=(5.8—6.4)$ km/s，向下逐渐增大；下层 $V_P=(6.5—7.6)$km/s。有些地区上、下层之间存在一速度间断面，叫康拉德面或康氏面。在另一些地区，速度是连续变化的。从岩石学观点看，上层岩石化学成分介于酸性和基性岩浆之间（沉积岩除外），更近于花岗闪长岩；下层岩石可能是一种酸性到中性岩石的高压形式，即麻粒岩。这里所指的下地壳是指地表（10—15)km以下到莫

霍面的这一层。

洋壳较陆壳薄，厚度稳定，除海水外，海底地壳分为三层，第一层是未凝结的沉积层，厚度变化很大，约(0—2)km，V_P＝2 km/s；第二层厚约（0.5—2.5)km，V_P＝(4.6—6.0)km/s，又分为2 A层（主要是细粒枕状玄武岩，其次是粗玄岩）及2 B层（为块状玄武岩席)；第三层是洋壳的主要一层，厚度约4.5km，V_P＝6.7 km/s，是辉长岩。其下是地幔，为橄榄岩或纯橄榄岩。

还可由矿物学观点或化学成分的观点来定义地壳。

根据地壳的定义，可以定义：上地幔是地壳以下的带，其中V_P大于7.6km/s，V_S大于4.4km/s，密度大于3.1g/cm^3。或按岩石学观点定义上地幔是：主要由超基性岩石，如橄榄岩（甚至是纯橄榄岩）以及含石榴子石的榴辉岩组成的带。

由上所述可见，地壳-地幔分界面是地球的一个最重要的分界面，是一个弹性、密度、岩石学、矿物学和化学分界面。

二、大陆地壳的磁性[31]

由于可从地表露头和钻孔获得岩石标本以测定其磁性，因此对于上地壳岩石已经进行了大量的磁性测定研究，其磁性特点也已是众所周知的。在这里只介绍下地壳岩石的磁性特征。

研究下地壳岩石的磁性可用两类方法，第一类方法是根据航空和卫星磁测结果作解释或正演模拟，以估算出岩体的磁化强度；第二类方法是直接测定下地壳岩石标本的磁性。

第一类方法又分为两种，其一是解释大范围长波长磁异常，与之相应的磁性体的水平延伸在几十到一百公里以上，厚度应在（10—30)km以上，才可能包含下地壳的岩石。利用航空磁测结果，由于接近地面，其垂向分辨力要好一些，而若使用卫星磁测结果，则由于飞行高度很大，很难分辨磁异常是由上地壳岩石还是下地壳岩石引起。根据70年代到80年代众多的研究成果，A. G. Hahn编制了一张某些地区下地壳磁化强度估算值表（表1.3—1)，表中列出了世界各地范围内，代表下地壳强磁性地层磁性的上限值。由此表概括来说，下地壳岩石的磁化强度，一般在(0—3)A/m，个别地区磁化强度值可达6 A/m。

估算下地壳岩石磁性的第二种方法称为拟合法。A. G. Hahn将全球地壳分为2°×2°的块体，总共设计了16种地壳类型，如地盾、沉积盆地，折皱山链等，每一类地壳又根据地震结果分为两三层（盖层、上地壳、下地壳)，并给予各层一定的磁性值，模型的磁化强度值范围是（0—2.0)A/m[其中上地壳为（0—1.3)A/m]。然后算出这一模型的磁场，并用一系列球谐系数代表。另一方面，由磁卫星MAGSAT的数据算出的球谐系数序列中，$n>14$的球谐系数代表真实地壳产生的磁场。将模型的球谐系数谱与MAGSAT球谐系数谱（$n>14$）进行比较后发现，如果将地壳各层磁化强度值乘以因子1.25，则两个谱就符合了。由此，2°×2°块体下地壳的磁化强度平均值约为（0—2.5)A/m。而上地壳的磁化强度要弱一些，约为（0—1.6)A/m，(0—2.5)A/m范围的上限值比表1.3—1中列出的值要小一些，可能是由于块体范围（2°×2°）较一般的局部异常范围要大的缘故。

研究下地壳岩石磁性的第二类方法是直接测定下地壳岩石标本的磁性。下地壳岩石标本可以从包裹体中获得，也可从下地壳的上升块体中获得，或者由古老地盾的深剥蚀地区获得。

根据对下地壳经剥蚀后面出露的地区的研究结果，岩石学家们一般认为下地壳最常见

表 1.3—1 某些地区下地壳磁化强度估算值

序　号	地　区	磁化强度值(A/m)	磁测方式	作　者
1	乌克兰地盾	0.5—2.3	航　空	Hahn和Bosum
2	安大略省曼尼托巴	5	航　空	Hall
3	德国西北部	2	航　空	Hahn等
4	芬兰斯堪的亚	2	地　面	Elming和Thorne
5	美　国	3.5	卫　星	Schnetzler
6	犹他州	3	航　空	Shuey等
7	肯塔基州	4	航　空	Mayhew等
8	瑞　典	3—1	航　空	Riddihough
9	不列颠哥伦比亚	3—5	航　空	Coles 和Currie
10	不列颠哥伦比亚	5	航　空	Coles
11	中非共和国	3.5	卫星、航空	Regan和Marsh
12	布罗肯脊	6	卫　星	Johnson
13	阿尔法脊	3	卫星、航空	Taylor
14	洛德霍隆起	5	卫　星	Frey
		5	海　洋	Roeser
15	罗斯海	2.6	航　空	Bosum
16	美国东南部	3—4	卫　星	Ruder和Alexander

的岩石为：（a）花岗岩岩类和片麻岩类；（b）在最底部（3—10)km是基性到中性变质岩和岩浆岩。

在乌克兰地盾区，测量了77000块标本的磁化率，其中45300块标本可能是下地壳岩石。将上述岩石分为a和b类，其磁化强度值列于表1.3—2中。

表 1.3—2 下地壳各类岩石磁化强度实测值

岩　石　类　型	感应磁化强度(A/m) (T=50000nT)	标本块数
(a)组—长英质岩石		
花岗岩	0.0—0.7	18200
(b)组—镁铁质岩石		
基性片麻岩	0.2—0.6	13200
角闪岩	0.4—1.3	4500
基性岩浆岩	0.7—3.1	3600
超基性岩	0.8—2.5	5800
(b)组总计	0.2—3.1	27100

在挪威一个地区测定了4435块标本，结果发现平均感应磁化强度为1.4 A/m，其中麻粒岩相片麻岩为1.9A/m，基性、超基性岩为2.7A/m。

斯堪底那维亚地区的50000块岩石标本（包括上述4435块在内）的磁性测定结果比表1.3—2中所列数值稍小。

在加拿大某地区，少量标本（56块）磁性测定的结果是，80%的硅质深成岩平均感应磁化强度为0.4A/m，而镁铁质岩石的磁性则小得多，这也许表明，镁铁质岩石的磁性不一定总是比硅质岩石的强。

总结以上数据，下地壳岩石的磁化强度变化范围为

(a) M=(0—0.7)A/m

(b) $M=(0-3.1)$A/m

在下地壳，由于高温条件，可能有两个因素使岩石的磁化强度增加，一是所谓的霍普金森效应；一是粘滞磁化。根据实验结果，该类岩石的霍普金森效应甚弱，而粘滞剩磁则可达到感应磁化强度的（30—50）%，如果考虑这一因素，则下地壳岩石的磁化强度可能的变化范围是

(a) $M=(0-1.0)$ A/m

(b) $M=(0-4.6)$ A/m

在有些地区，下地壳主要由(a)类岩石组成，其磁化强度较小；在少数地区，下地壳主要由（b）类岩石组成，其磁化强度可能达4.6A/m；而大部分地区，下地壳由(a)、(b)两类岩石按一定比例组成。总之，从磁性观点来看，陆壳无论横向分块，或纵向分层，都是很不均匀的，从而构成了复杂的长波长磁异常图景。

三、海洋地壳的磁性[15]

基本上是通过标本测定对海洋地壳的磁性进行研究。下部洋壳的标本采自第3层，是从接近中洋脊附近的断层陡坡上采集的，其磁性可能与远离断层的第3层岩石的磁性有些差异，尽管如此，仍然可以利用大量测定结果建立起海洋地壳的磁性模型。

在表1.3—3中列出了某些平均结果。由表可见，除辉长岩外，氧化或变质作用可急剧降低各类岩石的剩余磁性，并使其感应磁化强度也有所降低。另一事实是，剩余磁化强度比感应磁化强度大，这是解释条带状海洋磁异常的前提。根据这些测定结果以及由地震测量提供的分层厚度及岩性分布，可建立起海洋地壳的磁模型。其中一种模型如表1.3—4所

表 1.3—3 海洋地壳岩石的磁化强度

岩石类型	NRM(A/m)	感应磁化强度(A/m, $T=50000$nT)
未氧化的枕状玄武岩	21	1.75
氧化的枕状玄武岩	0.86	0.172
未氧化的致密岩流	6.5	0.119
氧化的致密岩流	1.2	0.065
未变质的辉长岩	0.84	0.168
变质的辉长岩	0.90	0.095
蛇纹岩	1.76	0.312

表 1.3—4 海洋地壳的磁模型

分层	厚度(km)	剩余磁化强度(A/m)	感应磁化强度(A/m)
2 A	0.5	0.86—21	0.172—1.75
2 B	1.0	1.20—6.5	0.065—0.119
3	4.5	0.84	0.168
平均垂向积分磁化强度	6.0	0.90—3.71	0.15—0.34

示，假定第2层由0.5km的枕状玄武岩及1km的致密岩流组成，第3层由4.5km厚的辉长岩组成。极大值和极小值是根据不同的氧化、变质状态推定的。最后一行平均垂直积分磁化强度系按各层厚度用加权平均的办法求得。其他一些学者取的数据可能稍有不同，如有取

2 A的剩磁为 5 A/m，取 2 B及第 3 层的剩余磁化强度为 1 A/m，而取整个洋壳的磁性为1.14A/m。有的认为 2 A、2 B磁化强度为 3 A/m，而第 3 层磁化强度为1.3 A/m。表1.3—3 中所列数据，除 2 A层的极大剩磁24A/m似乎偏离过大外，其他数据还是具有代表性的。

四、上地幔的磁性

关于地幔岩石的磁性研究工作开展得很晚，因而数据也很少。70年代末80年代初，美国发射了磁力仪卫星MAGSAT，为了解释卫星磁异常，需要有一个约束，于是提出了一个问题：大陆地壳的磁性底界面究竟位于何处？从此才开始探讨地幔岩石的磁性特点问题〔32〕。

可以通过几种方法了解地幔岩的磁性，一是根据地幔岩的成分及所处的物理条件，由有关的物理定律计算得出。在大陆下方，地壳较厚，地幔岩石所处的压力-温度-氧挥发度条件，尚不足以产生岩石磁性的主要载体——磁铁矿，因此可运用表示顺磁性物质磁化率的居里定律。我们根据关于地幔岩平均成分的数据，以及Fe^{2+}、Fe^{3+}等离子的有效玻耳磁子数，由居里定律算得地幔岩的顺磁磁化率为5.25×10^{-4}SI。而洋壳则很薄，一般为(6—7)km，其下的地幔岩所处的条件与上述不同，可能有磁铁矿存在（如由橄榄岩受到蛇纹石化作用产生），就不一定能用这种方法来估算。

另一种研究地幔岩磁性的方法是直接测定标本的磁性。目前所能获得的地幔岩标本，是由深源熔岩流带到地表的地幔岩包裹体。这种包裹体在上升过程中是否遭受有什么改变等，虽还值得怀疑，但又没有更理想的标本可供研究，因此使用这种标本时，应注意与其他资料结合，以判明在上升过程中，包裹体是否遭受改变。美国哥达德宇航中心的科学家测定了这类地幔岩标本的磁性（14块），其磁化率平均值为4.09×10^{-4}SI〔32〕。我们在用上述方法进行计算的同时，还测定了我国部分地区地幔岩包裹体（10块）的磁性及密度，结果磁化率平均值为3.11×10^{-4}SI，密度平均值为3.20g/cm³❶。

有人在为解释西非克拉通MAGSAT异常而建立的磁性模型中，取距地面（100—180）km深处的岩石的顺磁磁化率为2.80×10^{-4}SI，其根据不详。

刘庆生等对分布于我国各地的地幔岩捕虏体作了较深入的测试研究〔33〕〔34〕。根据化学分析结果，计算了顺磁磁化率，其平均值均为6.4×10^{-4}SI，并对个别样品作了较全面的磁性测定研究，其磁化率约为5.22×10^{-4}SI。

综上所述，可以认为大陆地区上地幔岩石主要呈顺磁性，其磁化率约为$n\times10^{-4}$SI。

还有一种了解地幔岩磁性的方法是由磁异常进行估算。人们在解释海洋上方的磁异常时发现，按照前述海洋地壳磁模型，常常难以得到满意结果。加拿大学者在解释库页岛一堪察加俯冲带的MAGSAT异常时，推算海洋上地幔35km以上应具有有效磁化率0.0085SI时，由正演得到的磁异常才能与观测到的MAGSAT异常相吻合，这相当于上地幔顶部具有0.34A/m的感应磁化强度（假定地磁场为50000nT）。另一位加拿大学者认为海洋上地幔可能有铁磁性矿物，当岩石圈冷却到居里点以下时，就获得了热剩磁，其值约为0.5 A/m，这样便可以解释海上磁异常的一些现象〔35〕〔36〕。

---

❶ 张昌达、李大明，我国两处地幔岩捕虏体磁性初步测定结果，科研报告会论文摘要汇编，中国地质大学应用地球物理系，1987年11月。

我们曾经介绍过，大陆地壳与海洋地壳无论厚度和岩石成分都有很大差别。从仅有的一些关于上地幔岩石磁性特点的资料以及大陆及海洋下上地幔顶部所处的条件来看，大陆及海洋的上地幔岩石在磁性上可能是有差别的。

现在我们再回到最初提出的问题上来，即大陆地壳的磁性底界面位于何处。如果大陆地壳岩石的磁性是由其中的磁铁矿引起的，而且在相应莫霍面深度处，温度低于580℃，则莫霍界面可能是磁性底界面；如果相应莫霍面深度处，温度高于580℃，则磁性底界面可能在莫霍面以上，地温为580℃的深度处。在海洋地壳以下，这个问题比较复杂，目前还不能作出概括性的判断。

五、温度、压力对岩石磁性的影响

随着深度的增加，地温升高，岩石圈的(静)压力也加大，二者对岩石磁性有很大的影响，在估计岩石磁性，解释磁异常时都必须考虑。

在不同的大地构造单元，地温梯度是不同的，如在古老地盾区，地温梯度约为10℃/km；而在海洋区，地温梯度约为17℃/km。因此在地壳某一深度上，地温可能有所不同。在10km深处，地温可能在(80—230)℃之间，岩石的静压力约为320MPa。在20km深处，地温可能在(140—520)℃之间，即在地温梯度大的地方，地温已接近于磁铁矿的居里点，在此深度处，岩石的静压力约为640 MPa。在30 km深处，地温可能在(210—720)℃之间，即在地温梯度大的地方，地温已超过磁铁矿的居里点，而岩石的静压力接近1000 MPa。

这里，首先讨论温度对岩石磁性的影响。顺磁性岩石的磁化率遵循居里定律，磁化率与温度成反比，即随着温度升高磁化率减小。在一般情况下，岩石中含有亚铁磁性矿物，因此岩石磁化率随温度的变化比较复杂。一般是岩石磁化率随着温度的升高而单调地增大，最大的增大值约为10—60%，在临近岩石中亚铁磁性矿物的居里点时，磁化率急剧降低，超过居里点后，其磁化率降到可以忽略不计的大小。在临近居里点时，磁化率达到极大值的现象即所谓的霍普金森效应，但是从以上数据可见，对于自然界的亚铁磁性矿物来说，这种效应并不十分突出。

温度对剩余磁化强度的影响很大，总的说来，随着温度的升高，剩余磁化强度减弱。无论什么类型的剩磁，均取决于岩石中亚铁磁性矿物的饱和磁化强度。饱和磁化强度随着温度的升高，先是逐渐减弱，临近居里点时急剧减小，到达居里点时，随着磁畴的解体而降为零。

现在讨论压力对岩石磁性的影响。从五十年代起，这个问题即引起地球物理学家的注意，因为岩石磁性与压力的依赖关系，是利用高精度磁测预报地震的物理基础。

许多实验结果表明[38][39]，含有亚铁磁性矿物的岩石，其磁化率及剩磁随着压力的增大而线性地降低，在100MPa时，可降低(10—20)%，在1000MPa时，可降低50%。

F. D. Stacey等和Н. Ф. Нознанская从理论上推导了岩石磁性与压力的依赖关系[37][38]。在压力的作用下，在压应力σ方向上，磁化率$\kappa(\sigma)$与压(应)力σ的关系为

$$\frac{\kappa_{\sigma}(\sigma)}{\kappa(0)}=\frac{1}{1+S_{\kappa}\sigma} \tag{1.3—1}$$

其中，$\kappa(0)$是没有施加压力时岩石的磁化率，S_{κ}是一物理常数(可能也与温度、压力有关)。在压力小时，可近似写成

$$\kappa\ (\sigma)=\kappa(0)(1-S_\kappa\sigma) \tag{1.3—2}$$

在垂直于压力方向上，磁化率增大，有

$$\frac{\kappa_\perp(\sigma)}{\kappa(0)}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}S_\kappa\sigma} \tag{1.3—3}$$

或近似地有

$$\kappa_\perp(\sigma)=\kappa(0)\left(1+\frac{1}{2}S_\kappa\sigma\right) \tag{1.3—4}$$

对于磁铁矿来说，S_κ的理论值为1.11×10^{-3} $(MPa)^{-1}$，而 S. P. Kapitsa 的实测值为$(0.8—1.3)\times10^{-3}(MPa)^{-1}$。

岩石的剩余磁化强度与压力的依赖关系与上相似，实验结果表明，当压力为 100 MPa 时，许多岩石的剩磁可减小 (10—20)%，当压力再增大时，仍有减小的趋势。理论推导的结果是，当顺着岩石磁化方向施加一压力时，磁化强度将随着压力的增大而减小，

$$M_{//}(\sigma)=M_0(1-S_M\sigma) \tag{1.3—5}$$

如果压力方向与磁化强度方向垂直，则有

$$M_\perp(\sigma)=M_0\left(1+\frac{1}{2}S_M\sigma\right) \tag{1.3—6}$$

其中系数S_M约为$1\times10^{-3}(MPa)^{-1}$。

地壳内岩石所受的应力是很复杂的，不仅仅有静应力，这一点在估计压力对磁性的影响时应当考虑到。

另一个比较重要的问题是含亚铁磁性矿物的岩石的居里点T_c与压力的关系。这是一个复杂的物理问题，目前在理论上尚未解决，为数不多的一些实验结果也不一致。根据R. Carmichael 收集的实验结果[40]，磁铁矿及钛磁铁矿T_c与压力P的关系为 $dT_c/dP=2.0\times10^{-2}$℃$(MPa)^{-1}$。根据这一结果，在 30km深度上，T_c 大约升高 20℃。似乎可以说，压力对T_c影响不大。

值得注意的是磁铁矿—钛铁尖晶石固溶体系列$xFe_2TiO_4\cdot(1-x)Fe_3O_4$中，Ti 的含量对$T_c$的影响 ($x=0$，磁铁矿；$x=1$，钛铁尖晶石)。$T_c$ 与代表 Ti 含量的x之间有关系式

$$T_c=\{575-725x+600(1/2-x)(1-x)\}℃ \tag{1.3—7}$$

当Ti含量增加，T_c迅速降低，这一因素往往被人们忽略。

此外，Ti含量增加，饱和磁化强度也降低。

第二章　位场变换中的随机误差分析与划分区域场和局部场的方法

§1　位场波数域变换中的随机误差分析

随着普查条件日益复杂，要提高普查效果，必须更全面地利用物探方法所取得的数据。为此目标，国内外许多物探工作者对重磁资料的处理解释，进行了大量的研究和实际应用。Н. Н. Боровко（1979）指出[1]："在多数情况下，按各种变换结果建立的二次标志实际上完全决定了预测的效果。所以那些忽视或不充分重视这一阶段的研究人员，不可能充分利用已有的信息，因而降低了预测图的质量。……不充分分析二次标志（各种变换）的信息量，就不能正确地评价这种或那种方法的信息及其在综合中应用的合理性"。因此各种异常变换、滤波等数据处理过程在重磁资料的推断解释中已成为不可缺少的环节。众所周知，向上延拓等低通滤波处理方法，可以压制浅层等随机干扰，提高处理结果的精度。而求导、下延等高通滤波处理方法，则突出浅层效应及放大随机干扰，使处理结果的精度降低。以往国内外对各种波数域位场处理方法的随机误差传递问题缺乏定量分析手段。为了充分利用实际资料中的各种信息，合理解释各种变换结果，提高地质效果，需要对各种变换处理的数据精度（随机误差传递情况）作出定量估计。

本节只讨论随机误差在数据处理过程中的传递问题，估算处理结果的精度，以便合理地评价处理结果的可靠程度。对于各种处理过程本身的方法误差，也就是各种处理方法的理论假设与实际条件不相符所引起的误差，则需另作专门研究。例如为分离区域场与局部场，常用的方法有空间域的圆周平均法、波数域的维纳滤波和匹配滤波法。这些方法各有不同的假定前提。圆周平均法假定区域场为线性，维纳滤波假定区域场与局部场的波谱不相关，匹配滤波假定区域场与局部场为平均埋深相差较大的两组地质体产生。实际情况与这些假定前提经常存在各种各样的差异。不了解这种差异引起的方法误差，也就难于对处理结果作出恰当的解释评价。

一、随机误差的谱估计[2]

为了讨论位场波数域变换中随机误差的传递情况，首先要对随机观测误差作出谱估计。直接计算重磁场观测误差的谱函数是困难的，因为在全部实测数据中只有百分之几经过检查观测，这虽然足以控制野外观测质量，却无法计算全测区观测误差的谱函数。但若根据随机观测误差的一个最重要的统计性质，便可以对其作出适当的谱估计。Страхов（1964）曾假定重磁野外数据的观测误差是具有有限方差并与步长 Δx（测点距）不相关的随机函数 $n(x)$[3]，即有

$$R_n(\xi)=\begin{cases}R_n(\xi)\neq 0 & |\xi|<\Delta x\\ 0 & |\xi|\geqslant\Delta x\end{cases} \qquad (2.1-1)$$

这里 $R_n(\xi)$ 表示随机函数 $n(x)$ 的自相关函数

$$R_n(\xi)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}n(x)\,n(x+\xi)\,\mathrm{d}x$$

根据自相关函数的性质，$R_n(\xi)$ 为偶函数，在 $\xi=0$ 时达极大值并等于 $n(x)$ 的方差 D_n，即

$$R_n(0)=D_n=\varepsilon^2 \qquad (2.1-2)$$

这里 ε 表示野外观测的均方根误差。

利用（2.1—2）式，可根据重磁实测数据的均方误差 ε 求得随机误差函数 $n(x)$ 的自相关函数 $R_n(\xi)$ 的极大值 $R_n(0)$。为了导出随机误差的谱函数，还须要对其自相关函数作出某些补充假定，例如，假设 $R_n(\xi)$ 是宽度小于 $2\Delta x$ 的矩形函数。

$$R_n(\xi)=\begin{cases}R_n(0)=\varepsilon^2 & |\xi|<k\Delta x,\quad k<1\\ 0 & |\xi|\geqslant k\Delta x\end{cases} \qquad (2.1-3)$$

其中 k 为小于 1 的正数。根据维纳-辛钦（Wiener-Khintchine）定理，自相关函数 $R_n(\xi)$ 的傅里叶变换就是 $n(x)$ 的功率谱 $P_n(\omega)$

$$P_n(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_n(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi=\int_{-k\Delta x}^{k\Delta x}\varepsilon^2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

$$=2\varepsilon^2k\Delta x\frac{\sin(\omega k\Delta x)}{\omega k\Delta x}. \qquad (2.1-4)$$

其中，ω 是沿剖面的角波数。$P_n(\omega)$ 在 $\omega=0$ 时达到极大值

$$P_n(0)=2\varepsilon^2k\Delta x \qquad (2.1-5)$$

这一极大值随 k 的减小而减小。按照采样定理，离散傅里叶变换 DFT 只须计算折叠波数 ω_N 以内的谱函数，折叠波数 ω_N 为

$$\omega_N=\pi/\Delta x \qquad (2.1-6)$$

将 ω_N 代入（2.1—4）式，并考虑（2.1—5）式可得

$$P_n(\omega_N)=P_n(0)\frac{\sin k\pi}{k\pi} \qquad (2.1-7)$$

如 $0\leqslant k<1$，则 $\frac{\sin k\pi}{k\pi}$ 的值随 k 的减小而增大。当 k 趋近于零时，$\frac{\sin k\pi}{k\pi}$ 趋近于 1。由（2.1—7）式可见，当 k 很小时，随机误差的功率谱在折叠波数范围内近似为一常数。与此同时，极大值 $P_n(0)$ 将随 k 的减小而减小。

某些文献将随机误差称为“白噪声”这应在上述意义下来理解。实际上，随机误差与无线电通讯中所说的白噪声并不完全相同。平稳白噪声的自相关函数 $R(t,\tau)$ 为一 δ 函数[1]

$$R(t,\tau)=R(\tau)=I\,\delta(\tau)$$

其中 I 为一常数，表示白噪声的强度。当 $\tau=0$ 时，自相关函数 $R(t,\tau)$ 趋于无穷，由维纳-辛钦定理，平稳白噪声的功率谱为一常数。重磁数据随机误差的自相关函数则取有限值，自相关函数在原点的值 $R_n(0)$ 就是重磁数据随机误差的方差。

可以假设自相关函数 $R_n(\xi)$ 在区间 $(-\Delta x,\Delta x)$ 内有不同的函数形式，例如为一三角波或其他形式的窗函数，由其傅氏变换不难求出其功率谱。尽管功率谱的形式有所不同，但以上讨论得出的结论，即在折叠波数范围内，随机误差的功率谱近似为一常数仍然成立。

上述结论可推广到二维情况。与（2.1—3）式（2.1—4）式对应的式子为

$$R(\xi,\eta)=\begin{cases}\varepsilon^2 & |\xi|<k\Delta x,\ |\eta|<k\Delta y,\ k<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \qquad (2.1-3')$$

$$P_n(\omega,\nu)=\varepsilon^2\cdot 2k\Delta x\cdot 2k\Delta y\cdot\frac{\sin(\omega k\Delta x)}{\omega k\Delta x}\cdot\frac{\sin(\nu k\Delta y)}{\nu k\Delta y}$$

$$=P_n(0,0)\ \frac{\sin(\omega k\Delta x)}{\omega k\Delta x}\cdot\frac{\sin(\nu k\Delta y)}{\nu k\Delta y} \qquad (2.1-4')$$

其中 Δy 为剖面线间距，ν为沿基线的波数。重复以上讨论，可知重磁数据随机误差的二维功率谱在折叠波数 ω_N、ν_N 范围内也可近似看作为一常数。

二、误差传递系数的一般表达式

如果对重磁数据随机误差的功率谱作出了谱估计，就可导出波数域不同变换误差传递系数的一般表达式。令 $H(\omega,\nu)$为波数域的变换算子，则 $P_n(\omega,\nu)\cdot|H(\omega,\nu)|^2$ 为随机观测误差经变换后的功率谱。由反傅里叶变换可求出随机观测误差经变换后的自相关函数 $R_{n_p}(\xi,\eta)$

$$R_{n_p}(\xi,\eta)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\omega,\nu)|H(\omega,\nu)|^2e^{i\omega\xi}\,e^{i\nu\eta}\,d\omega d\nu \qquad (2.1-8)$$

变换后的随机观测误差的方差 D_{n_p} 为

$$D_{n_p}=R_{n_p}(0,0)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}P_n(\omega,\nu)\,|H(\omega,\nu)|^2d\omega d\nu$$

$$\approx\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_n(\omega,\nu)\,|H(\omega,\nu)|^2d\omega d\nu \qquad (2.1-9)$$

未经处理的原始观测误差的方差 D_n 可表示为

$$D_n\approx\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_n(\omega,\nu)d\omega d\nu \qquad (2.1-10)$$

定义误差传递系数K为重磁数据经处理后的均方误差 ε_p 与原始观测均方误差 ε 之比，则由（2.1—9）及（2.1—10）式可得二维变换的K为

$$K=\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon}=\left[\frac{D_{n_p}}{D_n}\right]^{1/2}$$

$$\approx\left[\frac{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_n(\omega,\nu)\,|H(\omega,\nu)|^2d\omega d\nu}{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_n(\omega,\nu)d\omega d\nu}\right]^{1/2} \qquad (2.1-11)$$

其中 ω_N 及 ν_N 分别表示沿测线及基线的折叠波数，$P_n(\omega,\nu)$为原始数据随机误差的功率谱，$H(\omega,\nu)$为变换算子。

理论模型计算表明，可以一级近似地认为随机观测误差的功率谱 $P_n(\omega,\nu)$ 在折叠波数范围内（$|\omega|<\omega_N$，$|\nu|<\nu_N$）是一常数，则（2.1—11）式可简化为

$$K\approx\left[\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H(\omega,\nu)|^2d\omega d\nu\right]^{1/2} \qquad (2.1-12)$$

对于一维变换相应地有

$$K\approx\left[\frac{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}P_n(\omega)\,|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega}{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}P_n(\omega)\mathrm{d}\omega}\right]^{1/2}\qquad(2.1-13)$$

$$K\approx\left[\frac{1}{2\omega_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}|H(\omega)|^2\mathrm{d}\omega\right]^{1/2}\qquad(2.1-14)$$

由（2.1—11）—(2.1—14）式便可算出波数域各种位场变换处理的误差传递系数，消除由随机干扰经变换处理后形成的假异常，从而可以恰当地评价经变换处理后所得结果的精度，提高地质应用效果。

需要注意上述四个公式的使用范围。(2.1—12)、(2.1—14）两式仅适用于对原始观测数据作单步变换处理的情况。(2.1—11)、(2.1—13）两式则适用于一般情况，例如多步变换的情况。也就是说，在经过变换处理所获得数据基础上再作变换时，必须使用(2.1—11）或（2.1—13）式计算其误差传递系数。

三、单步变换处理的误差传递系数

大家知道二维数据上下延拓的波谱变换算子为

$$H(\omega,\nu)=\exp(\mp\sqrt{\omega^2+\nu^2})h$$

向上延拓时取负号，向下延拓时取正号，h为延拓高度。另一类常用的变换是作上延加n阶垂直导数处理，其波谱算子为

$$H(\omega,\nu)=(\omega^2+\nu^2)^{\frac{n}{2}}\exp(-\sqrt{\omega^2+\nu^2}h)$$

由（2.1—12）式及上述波谱算子，经适当变量代换，可求得二维上下延拓误差传递系数K的表达式为

$$K=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\exp(\mp 2b\sqrt{\theta^2+\varphi^2/a^2})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right]^{1/2}\qquad(2.1-15)$$

二维上延加n阶垂直导数处理的误差传递系数K的表达式为

$$K=\frac{1}{\pi a^2 s_x^2}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}(a^2\theta^2+\varphi^2)^n\exp(-2b\sqrt{\theta^2+\varphi^2/a^2})\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\right]^{1/2}\qquad(2.1-16)$$

以上二式中s_x为点距，$a=s_y/s_x$(s_y为线距)，$b=h/s_x$，n为求导次数。

令$b\approx 0$，由（2.1—16）式可得观测平面各阶垂直导数处理的K表达式

$$K=\frac{\pi^n}{a^n s_x^n}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{C_n^k a^{2(n-k)}}{[2(n-k)+1](2k+1)}\right]^{1/2}\qquad(2.1-17)$$

在（2.1—15)、(2.1—16)、(2.1—17）式中，令$a\to\infty$，即线距无限增大，则二维数据化为一维数据。由（2.1—15）式可得剖面数据上下延拓的误差传递系数为

$$K=\begin{cases}\left[\dfrac{1}{2b\pi}(1-\mathrm{e}^{-2b\pi})\right]^{1/2} & \text{（向上延拓）}\\ \left[\dfrac{1}{2b\pi}(\mathrm{e}^{2b\pi}-1)\right]^{1/2} & \text{（向下延拓）}\end{cases}\qquad(2.1-18)$$

由（2.1—16）式可得剖面数据的上延加垂直n阶导数的误差传递系数为

$$K=\frac{1}{\sqrt{\pi}\,s_x^n}\left\{\frac{(2n)!}{(2b)^{2n+1}}-\frac{e^{-2b\pi}}{(2b)^{2n+1}}\left[(2b\pi)^{2n}+2n(2b\pi)^{2n-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+2n(2n-1)(2b\pi)^{2n-2}+\cdots+(2n)!\right]\right\}^{1/2} \qquad (2.1-19)$$

由（2.1—17）式可得剖面数据的同平面 n 阶垂直导数的误差传递系数为

$$K=\frac{\pi^n}{s_x^n}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^{1/2} \qquad (2.1-20)$$

直接由（2.1—14）式出发，同样可推导出（2.1—18）、（2.1—19）、（2.1—20）式。由重磁位场波谱理论，一维数据的垂直及水平 n 阶导数的波谱算子振幅谱相同，均为

$$|H(\omega)|=\omega^n$$

因此（2.1—19）、（2.1—20）式同样适用于计算相应的水平 n 阶导数的误差传递系数，即上延加 n 阶水平导数的误差传递系数为（2.1—19）式，同平面 n 阶水平导数的误差传递系数为（2.1—20）式。

表 2.1—1 列出对方形测网作各种常用变换时，由上述公式计算出的误差传递系数 K 及由蒙特卡罗模型求得的 K'。可见，K' 与 K 的最大相对误差为3.53%，证实了前面提出的位场波数域处理随机误差传递系数的理论模型及计算公式是正确的。

航磁异常化向磁极（以下简称化极）也是常用的一种变换。对于地面磁倾角绝对值小于15°～20°的低磁纬地区，若对航磁异常的波数域化极，由于其波谱算子在低磁纬时是不稳定的，使原始数据中的干扰噪声成分被放大，导致变换结果产生严重畸变[5]。

航磁化极的波谱算子为[6]

$$H(\omega,\nu)=\frac{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}{i\omega P+i\nu Q+\sqrt{\omega^2+\nu^2}R}\cdot\frac{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}{i\omega P'+i\nu Q'+\sqrt{\omega^2+\nu^2}R'}$$

上式中 P、Q、R 分别为磁化方向沿坐标轴 x、y、z 的方向余弦，P'、Q'、R' 为正常地磁场方向沿相应坐标轴的方向余弦。为便于讨论，假设磁化方向与正常地磁场方向重合，此时化极波谱算子简化为

$$H(\omega,\nu)=\frac{\omega^2+\nu^2}{(i\omega P+i\nu Q+\sqrt{\omega^2+\nu^2}R)^2} \qquad (2.1-21)$$

由此可写出

$$|H(\omega,\nu)|^2=\left[\frac{\omega^2+\nu^2}{(i\omega P+i\nu Q+\sqrt{\omega^2+\nu^2}R)^2}\right]\left[\frac{\omega^2+\nu^2}{(i\omega P+i\nu Q-\sqrt{\omega^2+\nu^2}R)^2}\right] \qquad (2.1-22)$$

如取 x 轴沿磁北方向，则 $Q=0$，（2.1—22）式可进一步简化为

$$|H(\omega,\nu)|^2=\frac{(\omega^2+\nu^2)^2}{[\omega^2P^2+(\omega^2+\nu^2)R^2]^2} \qquad (2.1-23)$$

由（2.1—12）式，相应的误差传递系数

$$K=\left\{\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}\frac{(\omega^2+\nu^2)^2}{[\omega^2P^2+(\omega^2+\nu^2)R^2]^2}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right\}^{1/2} \qquad (2.1-24)$$

取方形测网的网格距为一单位（或作适当坐标变换），上式可写成

$$K=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\omega^2+\nu^2)^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}{[\omega^2P^2+(\omega^2+\nu^2)R^2]^2}\right]^{1/2} \qquad (2.1-25)$$

表 2.1—1 单步变换的误差传递系数

单步变换种类	K（公式）	K'（模型）	$\left\|\frac{K-K'}{K'}\right\|\times 100\%$
向上延拓 0.5 s	0.372	0.371	0.27
向上延拓 1 s	0.196	0.195	0.51
向上延拓 1.5 s	0.130	0.129	0.78
向上延拓 2 s	0.096	0.097	1.04
向下延拓 0.5 s	3.984	3.988	0.1
向下延拓 1 s	20.647	20.832	0.89
向下延拓 1.5 s	126.162	129.576	2.63
向下延拓 2 s	857.226	888.576	3.53
沿 x 方向水平一阶导数	1.814/ s	1.783/ s	1.74
沿 x 方向水平二阶导数	4.414/ s^2	4.356/ s^2	1.33
垂直一阶导数	2.564/ s	2.563/ s	0.04
垂直二阶导数	7.785/ s^2	7.825/ s^2	0.51
上延 0.5 s 之垂向一阶导数	0.667/ s	0.668/ s	0.15
上延 1 s 之垂向一阶导数	0.234/ s	0.236/ s	0.85
上延 1.5 s 之垂向一阶导数	0.109/ s	0.108/ s	0.93
上延 2 s 之垂向一阶导数	0.062/ s	0.061/ s	1.67
上延 0.5 s 之垂向二阶导数	1.693/ s^2	1.682/ s^2	0.65
上延 1 s 之垂向二阶导数	0.456/ s^2	0.457/ s^2	0.22
上延 1.5 s 之垂向二阶导数	0.157/ s^2	0.159/ s^2	1.26
上延 2 s 之垂向二阶导数	0.068/ s^2	0.070/ s^2	2.86
上延 0.5 s 沿 x 方向水平一阶导数	0.474/ s	0.467/ s	1.50
上延 1 s 沿 x 方向水平一阶导数	0.166/ s	0.169/ s	1.78
上延 1.5 s 沿 x 方向水平一阶导数	0.077/ s	0.079/ s	2.53
上延 2 s 沿 x 方向水平一阶导数	0.043/ s	0.044/ s	2.27
上延 0.5 s 沿 x 方向水平二阶导数	0.999/ s^2	0.989/ s^2	1.0
上延 1 s 沿 x 方向水平二阶导数	0.277/ s^2	0.278/ s^2	0.36
上延 1.5 s 沿 x 方向水平二阶导数	0.096/ s^2	0.099/ s^2	3.03
上延 2 s 沿 x 方向水平二阶导数	0.042/ s^2	0.043/ s^2	2.28

表中 s 为方形测网的网格距。全部数据由李正荣计算。

可分三种情况讨论上式：

1．在磁极区有磁纬 $\phi\approx 90°$，此时

$$P\approx 0,\quad R\approx 1$$

由（2.1—25）式可得

$$K\approx\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right]^{1/2}=1$$

显然，此时化极算子 $H(\omega,\nu)$ 退化为 1，意味着变换前后的数据相同，因此误差传递系数为 1。

2．在磁赤道区有磁纬 $\phi\approx 0°$，此时

$$P\approx 1,\quad R\approx 0$$

由（2.1—23）式有

$$|H(\omega,\nu)|^2=\frac{(\omega^2+\nu^2)^2}{\omega^4}$$

当 $\omega\to 0$，即沿（2.1—25）式积分区域内的 ν 轴时，积分核无界，因而 $K\to\infty$。这意味着磁赤道区的航磁异常化极是极不稳定的。

3．在磁纬小于 15°—20°的低磁纬区。令 $\omega=k\nu$，代入（2.1—23）式有

$$|H(\omega,\nu)|^2=\frac{(k^2\nu^2+\nu^2)^2}{[k^2\nu^2P^2+(k^2\nu^2+\nu^2)R^2]^2}=\frac{(k^2+1)^2}{[k^2+R^2]^2} \tag{2.1—26}$$

当 $k=0$，即 $\omega=0$，沿（2.1—25）式积分区域内的 ν 轴有

$$|H(0,\nu)|^2=\frac{1}{R^4} \tag{2.1—27}$$

当 $k\to\infty$，此时相当于沿（2.1—25）式积分区域内的 ω 轴，有

$$|H(\omega,0)|^2=1 \tag{2.1—28}$$

事实上，当 $|k|\geqslant 4$ 时，即有

$$|H(k\nu,\nu)^2|^2\approx 1$$

由以上讨论可见(2.1—25)式中的积分核 $|H(\omega,\nu)|^2$ 随 k 值的减小，也即随直线 $\omega=k\nu$ 由 ω 轴向 ν 轴转动而不断增大，在 ν 轴上达到极大值。这一极大值随 R 的减小，即随磁纬 ϕ 的减小而迅速增大，因而误差传递系数 K 也随磁纬 ϕ 的减小而迅速增大，如表 2.1—2 所示。

表 2.1—2　航磁化极算子的误差传递系数

ϕ	45°	30°	20°	15°	10°	5°
$\|H(0,\nu)\|^2$	4	16	73.1	223	1101	17424
K	1.439	2.146	3.471	5.056	8.878	24.25

由上表可见，当磁纬为5°时，航磁化极的误差传递系数 K 已超过向下延拓一个网格距的误差传递系数。为了压制干扰，可对化极算子乘以扇形误差压制因子

$$G(\omega,\nu)=\begin{cases}1 & \text{当}\omega>\nu\\ \dfrac{\omega^2R^2}{\nu^2} & \text{当}\omega\leqslant\nu\end{cases} \tag{2.1—29}$$

即取 $H(\omega,\nu)\cdot G(\omega,\nu)$ 作为化极算子，这样可有效地压制数据中的干扰噪声，但同时原有数据中的异常信息也将有一定程度畸变。此时（2.1—25）式应改写为

$$K=\frac{1}{\pi}\left\{\int_{\omega=0}^{\pi}\int_{\nu=0}^{\nu=\omega}\frac{(\omega^2+\nu^2)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}{[\omega^2P^2+(\omega^2+\nu^2)R^2]^2}+\right.$$
$$\left.+\int_{\omega=0}^{\pi}\int_{\nu=\omega}^{\nu=\pi}\frac{\omega^2R^2(\omega^2+\nu^2)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}{\nu^2[\omega^2P^2+(\omega^2+\nu^2)R^2]^2}\right\}^{1/2} \tag{2.1—30}$$

采用（2.1—30）式计算的误差传递系数 K 见表2.1—3。

表 2.1—3　加滤波窗后化极算子的误差传递系数

ϕ	45°	30°	20°	15°	10°	5°
K	0.912	0.968	0.993	0.998	0.995	0.986

下面介绍理论模型计算结果。图2.1—1（a）是由一球体的理论重力异常与某地一区域异常叠加，向上延拓20m后计算出的重力垂向二阶导数异常Δg_{zz}（或重力位三阶导数W_{zzz}异常）。该地所用点距为10m，线距为40m，区域场系由实测重力资料用趋势分析法求得。球体中心位置在图中“×”号处，中心埋深30m，剩余质量为4×10^4t，图中数值以10^{-10}SI（W_{zzz}）为单位[1]。在图（a）中，除在球体模型上有一明显的重力垂向二阶

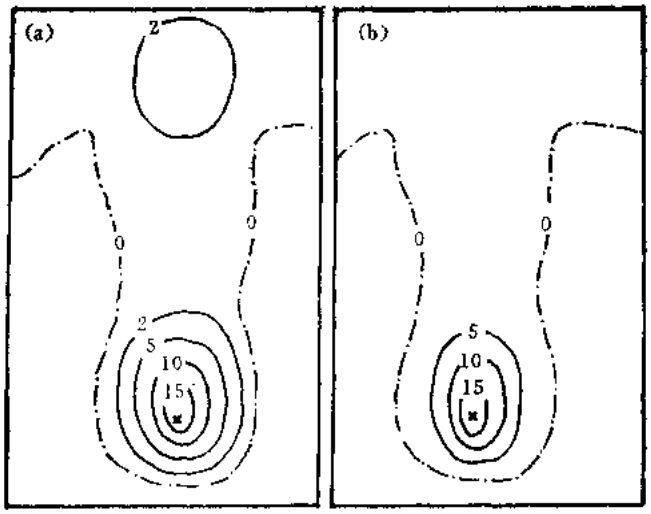


图 2.1—1 由模型的叠加重力异常上延后计算的Δg_{zz}异常

导数异常外，在图的上半部还出现一个重力垂向二阶导数弱异常，其极大值为4×10^{-10}SI（W_{zzz}）。显然这个弱异常是由于原始数据中的随机误差经过向上延拓，再加垂向二阶导数的处理后形成的假象。

为了识别这类由原始数据中随机误差在高通类数据处理过程中形成的假异常，可以由（2.1—12）式计算所用波数域算子的误差传递系数K，再由

$$\varepsilon_p=K\varepsilon$$

估算处理后的精度，从而确定判别这类假异常的标准。

在图2.1—1（a）的计算中，重力区域场是由实测资料经趋势分析的拟合公式计算的，其取数均方误差约为0.5μm/s²。由（2.1—12）式求得图中所用向上延拓加垂向二阶导数计算的误差传递系数为

$$K=\frac{1.46}{\Delta y^2}$$

其中Δy为线距。

由以上计算可求得图2.1—1（a）中处理结果的均方误差约为4.5×10^{-10}SI(W_{zzz})，因此等值线的间距最小不应小于5×10^{-10}SI单位。图上部的弱异常极大值仅为4×10^{-10}SI（W_{zzz}），由此可以判断其为假异常。图2.1—1（b）为按以上标准重新绘制的等值线图，只保留了与模型球体有关的重力垂向二阶导数异常。由以上讨论可以看出，利用（2.1—

[1] 1 SI(W_{zzz}) = 1 $m^{-1}\cdot s^{-2}$。

12）式计算出波数域算子的误差传递系数K及ε_p，可以判别出由原始数据中的随机误差在高通类数据处理过程中形成的假异常，从而提高处理结果的可信度和地质效果。

所用计算模型为球体，而处理后得到的重力垂向二阶导数异常为沿测线拉长的椭圆形，异常中心与球体模型中心也略有偏移。球体理论重力异常极大值为107 μm/s²，理论重力垂向二阶导数异常的极大值为25.6×10^{-10}SI（W_{zzz}）。经上述处理后得到的重力垂向二阶导数异常的极大值为20×10^{-10}SI（W_{zzz}），与理论值有一定差异，这主要是由于测网间距与球体埋深相比还不够小。尽管如此由图（b）的结果仍然可以正确地判断只有一个近似等轴状的场源，还可以大致确定引起异常的场源体中心的位置。此外若由近似公式

$$h\approx1.25\,d_{1/2}$$

还可以粗略估算场源中心埋深，其中$d_{1/2}$为主剖面（经过异常中心的剖面）上重力垂向二阶导数异常曲线半极大值点间的距离。依此估算出异常的场源中心埋深约43m，而模型球体中心实际埋深为50m。

图2.1—2为另一球体模型计算结果，球体中心埋深20m，剩余质量为5000 t，其余条条与模型1相同。由图（a）可见，除在模型球体上方有一较明显的重力垂向二阶导数异常外，在图的上半部也有一弱异常，其极大值为1.3×10^{-10}SI（W_{zzz}）。因图2.1—2与图2.1—1所用处理方法相同，即上延20m后再计算垂向二阶导数，故图2.1—2的ε_p与图2.1—2相同，也可定为4.5×10^{-10}SI(W_{zzz})。取5×10^{-10}SI(W_{zzz})为等值线间距重新勾绘等值线图，见图（b），仍保留了与模型球体有关的重力垂向二阶导数异常。此模型球在该

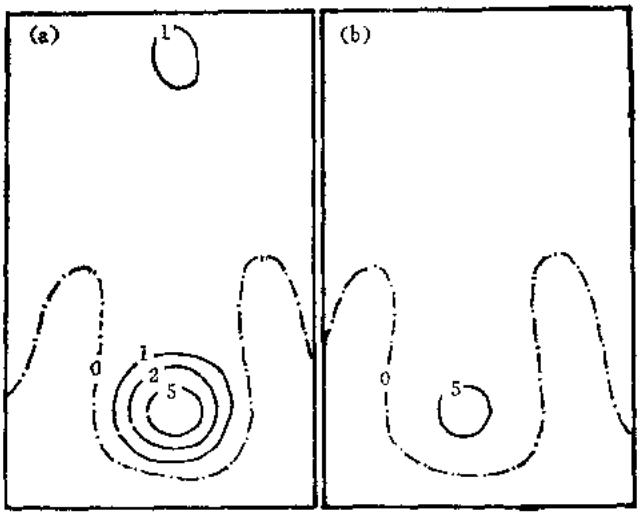


图 2.1—2 由另一模型计算的Δg_{zz}异常

平面上产生的重力异常极大值仅为0.21 μm/s²，垂向二阶导数异常极大值为7.8×10^{-10}SI（W_{zzz}）。图（b）在5×10^{-10}SI(W_{zzz})等值线范围内有两个测点算得的重力垂向二阶导数值为7.8及6.4×10^{-10}SI(W_{zzz})，分别相当于1.3 ε_p及1.45 ε_p。由于图中仅有两个点的异常值略大于处理后的均方误差，因此需按正态分布函数概率值估算其可信程度。由概率理论可知，对于正态分布的随机误差，可按下式计算异常的可信程度[5]

$$P_r\{>u\varepsilon\}=2[1-\Phi(u)]$$

上式中 $P_s\{>u\varepsilon\}$ 表示大于 $u\varepsilon$ 的异常值属于随机误差的概率，$\Phi(u)$ 为正态分布函数，可由正态分布表查出。由上式可求得

$$P_s\{>1.3\,\varepsilon\}=2[1-\Phi(1.3)]=2(1-0.9032)=0.194$$

$$P_s\{>1.45\,\varepsilon\}=2[1-\Phi(1.45)]=2(1-0.9264)=0.147$$

由此可求得这两个点的异常值同时属于随机误差的概率为

$$P_s\{>1.3\,\varepsilon\}\cdot P_s\{>1.45\,\varepsilon\}=0.194\times 0.147=0.029$$

$$\approx P_s\{>2.18\,\varepsilon\}$$

这表明图 2.1—2（b）中的异常属于随机误差引起的概率仅为2.9%，与一个异常值为 $2.18\,\varepsilon$ 的点异常的可靠程度相当，可以认为这一异常是可信的。

四、多步变换处理的误差传递系数

设观测误差功率谱为 $P_n(\omega,\nu)\approx C$，第一种变换的波谱算子为 $H_1(\omega,\nu)$，第二种变换的波谱算子为 $H_2(\omega,\nu)$。由（2.1—12）式可写出单独作第一种变换的误差传递系数 K_1 为

$$K_1=\left[\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_1(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right]^{1/2} \qquad (2.1—31)$$

单独作第二种变换的 K_2 为

$$K_2=\left[\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_2(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right]^{1/2} \qquad (2.1—32)$$

同时作此两种变换的 $K_{(1+2)}$ 为

$$K_{(1+2)}=\left[\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_1(\omega,\nu)|^2\cdot|H_2(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right]^{1/2} \qquad (2.1—33)$$

由以上三式可见，在一般情况下

$$K_{(1+2)}\neq K_1\cdot K_2$$

由表 2.1—1 中的数据也可看出这一点。如果以 K_1 表示上延 0.5 s 的误差传递系数，以 K_2 表示上延1 s 的误差传递系数，则上延1.5 s 的误差传递系数并不等于它们的乘积。这是因为如果将两种变换分两步完成，则对第二步变换已不能用（2.1—12）式来计算误差传递系数了。例如第一步先作第一种变换，此时可用（2.1—31）式计算其误差传递系数 K_1。第二步是在经过第一种变换后再作第二种变换，后者的误差传递系数以 K_{12} 表示，已不能用（2.1—32）式计算，也就是不能用（2.1—12）式计算。因为在第一步实现第一种变换以后，数据误差功率谱 $P_{n1}(\omega,\nu)$ 已成为

$$P_{n1}(\omega,\nu)=P_n(\omega,\nu)\cdot|H_1(\omega,\nu)|^2\approx C\cdot|H_1(\omega,\nu)|^2$$

此时 K_{12} 应由（2.1—11）式计算为

$$K_{12}=\left[\frac{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_{n1}(\omega,\nu)\,|H_2(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}P_{n1}(\omega,\nu)\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}\right]^{1/2}$$

表 2.1—4 多步变换的误差传递系数

序号	各步变换种类	K（公式）	K'（模型）	$\left\|\frac{K-K'}{K'}\right\|\times100\%$
1	第一步向上延拓 0.5 s K_1	0.372	0.371	0.27
	第二步向上延拓 0.5 s K_{12}	0.527	0.529	0.38
	单步向上延拓 1 s $K_{(1+2)}$	0.196	0.195	0.51
2	第一步向下延拓 0.5 s K_1	3.984	3.988	0.10
	第二步向下延拓 0.5 s K_{12}	5.182	5.224	0.80
	单步向下延拓 1 s $K_{(1+2)}$	20.647	20.832	0.89
3	第一步求垂向一阶导数 K_1	2.564/ s	2.563/ s	0.04
	第二步求垂向一阶导数 K_{12}	3.036/ s	3.053/ s	0.56
	单步求垂向二阶导数 $K_{(1+2)}$	7.785/ s^2	7.825/ s^2	0.51
4	第一步求垂向一阶导数 K_1	2.564/ s	2.563/ s	0.04
	第二步向上延拓 1 s K_{12}	0.091	0.092	1.10
	第三步向上延拓 1 s K_{123}	0.245	0.262	1.15
	单步上延 2 s 求垂向一导 $K_{(1+2+3)}$	0.062/ s	0.061/ s	1.67
5	第一步求垂向二阶导数 K_1	7.785/ s^2	7.825/ s^2	0.51
	第二步向上延拓 1 s K_{12}	0.059	0.058	1.72
	第三步向上延拓 1 s K_{123}	0.119	0.153	2.61
	单步上延 2 s 求垂向二导 $K_{(1+2+3)}$	0.068/ s^2	0.070/ s^2	2.86
6	第一步向上延拓 1 s K_1	0.196	0.195	0.51
	第二步向上延拓 0.5 s K_{12}	0.663	0.655	1.22
	第三步向上延拓 0.5 s K_{123}	0.738	0.755	2.25
	单步向上延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	0.096	0.097	1.04
7	第一步向上延拓 0.5 s K_1	0.372	0.371	0.27
	第二步向上延拓 1 s K_{12}	0.349	0.346	0.87
	第三步向上延拓 0.5 s K_{123}	0.738	0.755	2.25
	单步向上延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	0.096	0.097	1.04
8	第一步向上延拓 0.5 s K_1	0.372	0.371	0.27
	第二步向上延拓 0.5 s K_{12}	0.527	0.529	0.38
	第三步向上延拓 1 s K_{123}	0.489	0.495	1.21
	单步向上延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	0.096	0.097	1.04
9	第一步向下延拓 1 s K_1	20.647	20.832	0.89
	第二步向下延拓 0.5 s K_{12}	6.110	6.220	1.77
	第三步向下延拓 0.5 s K_{123}	6.795	6.858	0.92
	单步向下延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	857.226	888.576	3.53
10	第一步向下延拓 0.5 s K_1	3.981	3.988	0.10
	第二步向下延拓 1 s K_{12}	31.662	32.493	2.56
	第三步向下延拓 0.5 s K_{123}	6.795	6.858	0.92
	单步向下延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	857.226	888.576	3.53
11	第一步向下延拓 0.5 s K_1	3.984	3.988	0.10
	第二步向下延拓 0.5 s K_{12}	5.182	5.224	0.80
	第三步向下延拓 1 s K_{123}	41.517	42.657	2.67
	单步向下延拓 2 s $K_{(1+2+3)}$	857.226	888.576	3.53

表中 s 为方形测网的网格距；数据系根据李正荣的计算结果改算。

$$\approx\left[\frac{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_1(\omega,\nu)|^2\cdot|H_2(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}{\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_1(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu}\right]^{1/2} \tag{2.1—34}$$

以 $K_{\varepsilon 1\varepsilon 12}$ 表示先作第一种变换再作第二种变换后的总误差传递系数，则有

$$K_{\varepsilon 1\varepsilon 12}=K_1\cdot K_{12}$$

以（2.1—31）及（2.1—34）式代入上式可得

$$K_{\varepsilon 1\varepsilon 12}=\left[\frac{1}{2\omega_N}\cdot\frac{1}{2\nu_N}\int_{-\omega_N}^{\omega_N}\int_{-\nu_N}^{\nu_N}|H_1(\omega,\nu)|^2\cdot|H_2(\omega,\nu)|^2\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\nu\right]^{1/2}$$
$$=K_{(1+2)} \tag{2.1—35}$$

不难证明有

$$K_{\varepsilon 2\varepsilon 21}=K_2\cdot K_{21}=K_{(1+2)}=K_{\varepsilon 1\varepsilon 12} \tag{2.1—36}$$

上式中 $K_{\varepsilon 2\varepsilon 21}$ 为先作第二种变换，然后再作第一种变换的总误差传递系数；K_{21} 为经过第二种变换后再作第一种变换时，后一变换的误差传递系数。(2.1—36) 式表明对多次变换时应采用（2.1—11）式或（2.1—13）式计算其误差传递系数。这时总误差传递系数即为各次变换的误差传递系数之乘积，并且多次变换的总误差传递系数与变换的次序无关。用相应的公式及蒙特卡罗模型进行计算检验、证实上述结论是正确的，两组系数之间的差别很小，见表2.1—4。

由表 2.1—4 看出，按三种不同方式以三步变换实现向上延拓 2 s 及向下延拓 2 s 的总误差传递系数与单步变换的误差传递系数符合很好。例如单步向下延拓 2 s 的误差传递系数 K（公式）与 K'（模型）相差较大，达到 3.53%。用三种不同的三步变换实现向下延拓 2 s 的 9、10、11 号多步模型变换的总误差传递系数 $K'_{\varepsilon 1\varepsilon 12\varepsilon 123}$ 分别为：

9 号多步变换　$K'_{\varepsilon 1\varepsilon 12\varepsilon 123}=20.832\times 6.220\times 6.858=888.626$；

10号多步变换　$K'_{\varepsilon 1\varepsilon 12\varepsilon 123}=3.988\times 32.493\times 6.858=888.674$；

11号多步变换　$K'_{\varepsilon 1\varepsilon 12\varepsilon 123}=3.988\times 5.224\times 42.657=888.631$。

这一结果说明，按不同次序实现的多步变换的总误差传递系数是相同的。

由表2.1—4还可以看出，基于不同的变换的同一种变换，其误差传递系数不同，例如向下延拓 1 s，在 9、10、11 号多步变换中，由于变换次序不同，由理论公式计算的误差传递系数分别为20.647，31.662，41.517。

文献〔8〕指出："布格异常中包含了丰富的下半空间的场源信息，求导和延拓都是为了能直接从重力图中判读构造，这些古典方法具有结果直观、信息量丰富的优点，但也容易引起虚假异常。……在对比了华北地区实测的沉积层资料后发现，简单构制的垂直导数图中含有大量高频的实际上属于噪声的虚假异常。"利用以上讨论的方法，由所用变换的误差传递系数估算变换后的误差，能有效地消除变换引起的虚假异常，提高重磁数据处理的地质效果。

§2　划分磁异常区域场和局部场的插值切割法

正确划分不同规模的区域场（背景场）与局部场，是面积性磁测资料解释能否获得良

好地质效果的一个重要因素。多年来国内外对此进行过大量研究，发表了许多文献。但已有的划分区域场和局部场的方法，仍存在各种各样的缺陷，主要是分离效果差，畸变大，难于进一步作定量研究。

划分磁异常区域场和局部场常用的方法在空间域中有多项式拟合、位变滤波、圆周平均、徒手圆滑等方法；在波数域中有维纳滤波、匹配滤波和最佳线性滤波等方法。

多年来重磁数据处理的实践表明，由于测区范围有限、数据离散化，以及不同埋深、不同位置场源体的磁异常频谱特征部分重叠等诸多影响，在波数域变换过程中产生了明显的误差和畸变，只能用作初步的定性估计。著名勘查地球物理学家 A. Spector 认为，这类方法只能对深源（区域场）和浅源（局部场）磁异常作定性的划分，不能用于定量研究，因此无法取代空间域中异常曲线拟合一类的方法[9]。

在空间域方法中，多项式拟合法是一种常用方法。但在重磁异常的区域场和局部场划分中，选择多项式系数受操作者的主观影响大。尽管 E. M. Abdelrahman 等人提出了较客观的选择多项式系数的法则[10]，但仍然受较大局部场影响，而且这种方法对于复杂磁异常需选择较高阶数的多项式，这时拟合程度虽高，但分离的区域场和局部场中往往会产生假异常。位变滤波法处理异常明显、点数较少的磁异常有较好的效果，这种非线性滤波方法与其他线性滤波方法可相互补充，不过它在线性滤波方法处理效果好的位置上往往畸变很大[11]。圆周平均法使用方便，但分离场的效果与半径大小选择有关，并且异常两侧伴生假异常。徒手圆滑法简便易行，但仅适用于数据量较少，区域场与局部场有较大差别的情况，而且具有较多的主观因素。还有一些其他的粗略方法，如向上延拓法等，则只限于对区域场、局部场作定性了解。

在考察了上述方法特点的基础上，我们提出一种划分磁异常区域场和局部场的新方法——插值切割法。这一方法对滤除局部似随机性强干扰也有很好效果。

一、基本原理

与重力场相比，磁场随至场源体的距离增大衰减较快，磁性体的磁性差异变化范围较大，且正负极同时存在。因此，磁异常具有区域场复杂，局部场幅值变化大，异常范围有限，正负异常伴生等特点。

在理论模型和实例研究中，作者通过应用多次切割法[12]成功地解决了复杂重力异常区域场和局部场的划分问题，证实了该方法具有计算速度快、分辨率和精度较高的特点。理论模型计算还表明，对于正负剩余密度体伴生的重力异常，多次切割处理中产生了切割发散效应●，即产生伴生的假异常。由于磁异常一般为正负异常伴生，故试图利用划分重力区域场与局部场的多次切割法解决磁异常区域场与局部场的划分问题，也不可能取得良好效果。但若能改进多次切割法中四点圆周平均的切割方式，压制切割发散效应，并能按照区域场的复杂程度（非线性度）自动调整切割量，原则上应可找到一种快速、分辨率和精度都高的划分磁异常区域场和局部场的新方法。

根据上述思路，采用连续切割方式，提出如下算法原理[13]：设测区 D 内叠加磁异常 $Z_a(x, y)$（也可以是叠加航磁异常 $\Delta T(x, y)$）由区域场 $R(x, y)$ 和局部场 $L(x, y)$ 组成，局部场区域为 D_1，$D_1 \subset D$，则有

● 文百红，中南工业大学地质系硕士学位论文，1988 年。

$$\begin{cases} Z_a(x,y)=R(x,y)+L(x,y) & (x,y\in D) \\ Z_{a\min}\leqslant Z_a(x,y)\leqslant Z_{a\max} & (x,y\in D_1) \\ L(x,y)=0 & (x,y\in(D-D_1)) \end{cases} \tag{2.2—1}$$

式中 $Z_{a\min}$ 和 $Z_{a\max}$ 为局部场范围内观测场的最小值和最大值。用四点圆周平均改进型算子A作用于 $Z_a(x,y)$ 得第一次切割区域场 $R_1(x,y)$

$$R_1(x,y)=\mathrm{A}\{Z_a(x,y)\},\quad (x,y\in D) \tag{2.2—2}$$

切割算子A应使切割区域场 $R_1(x,y)$ 满足以下条件

$$\begin{cases} Z_{a\min}<R_1(x,y)<Z_{a\max} & (x,y\in D_1) \\ R_1(x,y)=Z_a(x,y) & (x,y\in(D-D_1)) \end{cases} \tag{2.2—3}$$

不难看出，由（2.2—1）中第二式及（2.2—3）中第一式，有以下关系成立

$$\begin{cases} |Z_a(x,y)-R_1(x,y)|<Z_{a\max}-Z_{a\min} & (x,y\in D_1) \\ Z_a(x,y)-R_1(x,y)=0 & (x,y\in(D-D_1)) \end{cases} \tag{2.2—4}$$

（2.2—4）式可以简化合并为

$$|Z_a(x,y)-R_1(x,y)|<K_1(Z_{a\max}-Z_{a\min})\quad (x,y\in D),\ (0\leqslant K_1<1) \tag{2.2—5}$$

由（2.2—1）第二式及（2.2—3）第一式还可看出，有以下关系成立

$$\max R_1(x,y)-\min R_1(x,y)<K_1(Z_{a\max}-Z_{a\min})$$
$$(x,y\in D),\ (0\leqslant K_1<1) \tag{2.2—6}$$

对 $R(x,y)$ 重复使用切割算子A得第二次切割区域场 $R_2(x,y)$

$$R_2(x,y)=\mathrm{A}\{R_1(x,y)\}=\mathrm{A}^2\{Z_a(x,y)\}\quad (x,y\in D)$$

根据算子A的性质，类似（2.2—3）式及（2.2—5）式有

$$\begin{cases} \min R_1(x,y)<R_2(x,y)<\max R_1(x,y) & (x,y\in D_1) \\ R_2(x,y)=R_1(x,y) & (x,y\in(D-D_1)) \end{cases} \tag{2.2—7}$$

及

$$|R_1(x,y)-R_2(x,y)|<K_2[\max R_1(x,y)-\min R_1(x,y)]$$
$$(0<K_2<1),\ (x,y\in D) \tag{2.2—8}$$

将（2.2—6）式代入上式得

$$|R_1(x,y)-R_2(x,y)|<K\cdot K_2(Z_{a\max}-Z_{a\min})$$
$$(0\leqslant K_1,K_2<1),\ (x,y\in D) \tag{2.2—9}$$

不难证明，一般地对第 i 次切割区域场 $R_i(x,y)$ 有

$$|R_{i-1}(x,y)-R_i(x,y)|<K_1\cdot K_2\cdots K_{i-1}\cdot K_i(Z_{a\max}-Z_{a\min})$$
$$(0\leqslant K_1,K_2,\cdots K_{i-1},K_i<1),\ (x,y\in D) \tag{2.2—10}$$

当切割次数不断增加时，最终有

$$\lim_{n\to\infty}|R_{n-1}(x,y)-R_n(x,y)|<(Z_{a\max}-Z_{a\min})\lim_{n\to\infty}(K_1K_2\cdots K_{n-1}K_n)=0$$

$$(0\leqslant K_1,K_2,\cdots K_{n-1},K_n<1),\ (x,y\in D) \tag{2.2—11}$$

可见，满足（2.2—3）式条件的切割算子A，其切割数列是收敛的。这表明，随着切割次数增大，每次切割量减小，切割区域场光滑性越好。在实际工作中，通过估计观测场中区域场的非线性度可确定合适的切割次数 n，经过 n 次连续切割后所得切割区域场

$R_n(x, y)$可作为所求区域场的近似值，即

$$R(x, y) \approx R_n(x, y) \qquad (x, y \in D) \tag{2.2—12}$$

从观测场中减去切割区域场即得所求局部场的近似值

$$L(x, y) \approx Z_s(x, y) - R_n(x, y) \qquad (x, y \in D) \tag{2.2—13}$$

二、插值切割算法

依据上述原理，通过模型试算，提出了如下的四点圆周平均改进型切割算子A，其构造如下：在切割半径为R时，设

$$B = Z_s(x, y)$$

$$\bar{B} = \frac{1}{4}[Z_s(x+R, y) + Z_s(x-R, y) + Z_s(x, y+R) + Z_s(x, y-R)]$$

$$\overline{\Delta B_x} = Z_s(x, y) - \frac{1}{2}[Z_s(x+R, y) + Z_s(x-R, y)]$$

$$\overline{\Delta B_y} = Z_s(x, y) - \frac{1}{2}[Z_s(x, y+R) + Z_s(x, y-R)]$$

$$\Delta B_x = Z_s(x+R, y) - Z_s(x-R, y)$$

$$\Delta B_y = Z_s(x, y+R) - Z_s(x, y-R)$$

$$b = \frac{(\Delta B_x)^2}{(\overline{\Delta B_x})^2 + (\Delta B_x)^2} \qquad (0 < b \leqslant 1;\ \text{当 } \Delta B_x = \overline{\Delta B_x} = 0 \text{ 时则 } b = 1)$$

$$c = \frac{(\Delta B_y)^2}{(\overline{\Delta B_y})^2 + (\Delta B_y)^2} \qquad (0 \leqslant c \leqslant 1;\ \text{当 } \Delta B_y = \overline{\Delta B_y} = 0 \text{ 时则 } c = 1)$$

$$a = b + c \qquad (0 \leqslant a \leqslant 2)$$

则以下式

$$Q = A\{\bar{B} + \frac{1}{2}a(B - \bar{B})\} \tag{2.2—14}$$

作为分离区域场的切割算子A，其中Q表示切割区域场。它与四点圆周平均法的差别在于，增加了一项改正项，其改正值可随场的特点而自动调整。(2.2—14)式可改写为

$$Q = d\bar{B} + eB \tag{2.2—15}$$

其中，$d = 1 - \frac{1}{2}a$，$e = \frac{1}{2}a$，并且有　$d + e = 1$。

可见，所求切割区域场是计算点场值与四点圆周平均值的变系数加权平均值，也就是一种变系数的插值关系。因此，用该算子构造的划分磁异常区域场与局部场的方法称为插值切割法。

理论分析和试算结果表明，由于区域场为线性或近似为线性，在局部异常主体范围之外有

$$\overline{\Delta B_x} \to 0,\ \overline{\Delta B_y} \to 0,\ a \to 2,$$

因而切割区域场趋于观测场B。在局部异常的极值点附近，由于

$$\Delta B_x \to 0,\ \Delta B_y \to 0,\ a \to 0$$

切割区域场有最大切割量，从而能有效地分离区域与局部成分。在局部场的两翼上，由于$\overline{\Delta B_x}$和$\overline{\Delta B_y}$以及ΔB_x和ΔB_y均较大，切割区域场介于四点圆周平均值和该点场值之间。

我们定义场沿 x 及 y 方向的非线性度 F_{lx} 及 F_{ly} 为

$$F_{lx}=\frac{\overline{\Delta B_x}}{\Delta B},\quad F_{ly}=\frac{\overline{\Delta B_y}}{\Delta B_y}。$$

当场为线性变化时，有

$$\overline{\Delta B_x}=0,\ \overline{\Delta B_y}=0,$$

因而

$$F_{lx}=0,\ F_{ly}=0$$

此时场的非线性度为零，即场是完全线性的。当 ΔB_x，ΔB_y 为定值时，场的非线性度 F_{lx}、F_{ly} 随 $\overline{\Delta B_x}$，$\overline{\Delta B_y}$ 的增大而增大。

由前述 b 及 c 的定义，可见有

$$b=\frac{1}{F_{lx}^2+1},\quad c=\frac{1}{F_{ly}^2+1}$$

因而 b、c 可作为表示场的线性度的参数。当 $F_{lx}=0$，$F_{ly}=0$，即场的非线性度为零，场是完全线性时，$b=1$，$c=1$。随着场的非线性度增大，即 F_{lx}、F_{ly} 增大时，b 及 c 减小，即场的线性度减小。当 F_{lx} 及 F_{ly} 无限增大时，b 及 c 趋于零。

由以上讨论可以看出，场的非线性度越高，即 $\overline{\Delta B_x}$ 和 $\overline{\Delta B_y}$ 相对于 ΔB_x 和 ΔB_y 越大时，切割量越大；相反则切割量小。正是这种作用使插值切割法具有良好的分离区域场与局部场的能力。

图 2.2—1 及图 2.2—2 分别为简单磁异常经四点圆周平均和插值切割（单次切割）处理所得区域场，其中理论区域场为 20 nT 的常值。由图 2.2—1 看出，由四点圆周平均所得区域场存在明显的振动扩散现象，这是该法的固有弱点所致。插值切割法由于采用了改进型四点圆周平均切割算子，尽管只进行了一次切割，所得区域场已具有良好的收敛性，振动幅度明显减小，在切割半径较为合适，$R=60$ m 时，区域场振动幅度已减小至圆周平均法的约八分之一，从而压制了切割发散效应，见图 2.2—2。在连续切割之后，对切割

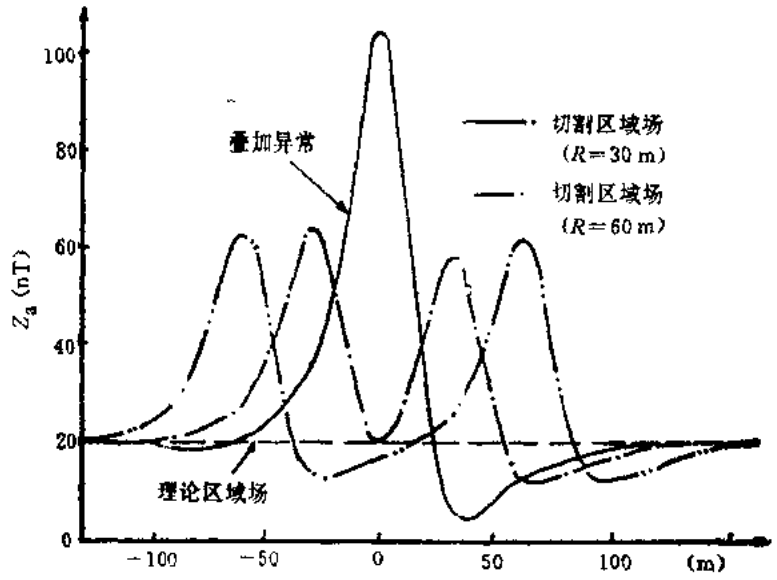


图 2.2—1　简单磁异常经四点圆周平均处理所得区域场

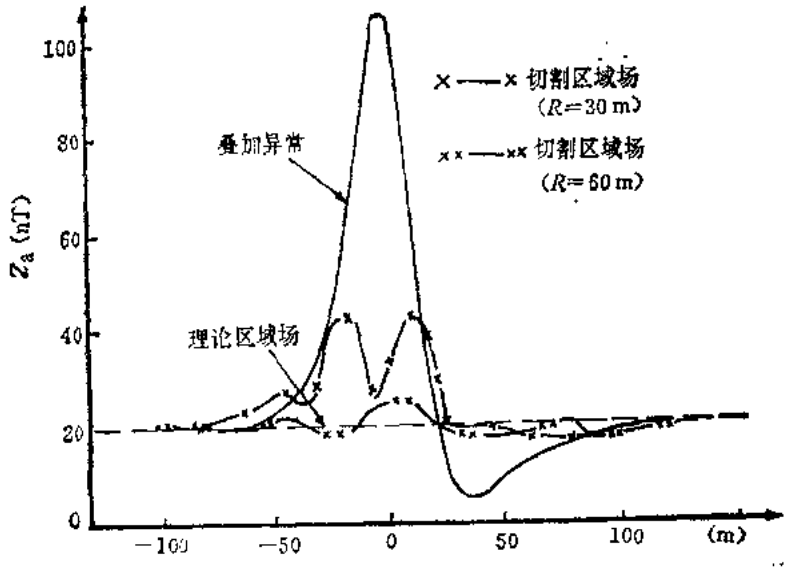


图 2.2—2 简单磁异常单次插值切割区域场

区域场再作适当的圆滑处理，将能消除切割发散效应，并可压制随机误差的影响。

以 b 代替（2.2—14）式中的 $\frac{1}{2}a$，同时将 $\bar{B}$ 改为

$$\bar{B}=\frac{1}{2}[Z_a(x+R, y)+Z_a(x-R, y)]$$

即可用于剖面计算。

经理论模型试算，插值切割法的收敛速度较快，一般只需几次即可达到预定精度要求。由于采用多次切割算法，对切割半径 R 的依赖性也较小。切割半径 R 一般可选为待划分局部场半极值点间距的 1—2 倍，即可获得满意的分离效果。

三、随机误差的传递规律

磁测数据中不可避免地存在观测误差，可以认为是属于正态分布的随机误差，因此在插值切割过程中存在误差传递。设测区 D 上磁测数据的均方误差为 ε_0，第 i 次插值切割区域场和最后分离出的局部场的误差传递系数分别为 K_i 和 K_r，由误差传递公式[11]导出(2.2—14）式的误差传递关系为

$$\delta Q=\delta\bar{B}+\frac{1}{2}a(\delta B-\delta\bar{B})+\frac{1}{2}(B-\bar{B})\delta a \qquad (2.2-16)$$

其中

$$a=\frac{(\Delta B_x)^2}{(\overline{\Delta B_x})^2+(\Delta B_x)^2}+\frac{(\Delta B_y)^2}{(\overline{\Delta B_y})^2+(\Delta B_y)^2}$$

影响随机误差传递的因素是计算点场值、四点圆周平均值、系数 a 以及与上述各值相应的随机误差值。可以证明，(2.2—16）式右边第三项在测区 D 内的值远小于第一、二项，因此，插值切割区域场的均方误差传递关系可表示为

$$\varepsilon=\left[\left(\frac{1}{2}a\right)^2\delta^2 Z_a(x, y)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}a\right)^2\delta^2 Z_a(x+R, y)+\right.$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}a\right)^2\delta^2 Z_a(x-R,y)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}a\right)^2\delta^2 Z_a(x,y+R)$$

$$+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}a\right)^2\delta^2 Z_a(x,y-R)\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (2.2-17)$$

由于各测点的均方误差均为 ε_0，即

$$\begin{aligned}\delta Z_a(x,y)&=\delta Z_a(x+R,y)=\delta Z_a(x-R,y)\\&=\delta Z_a(x,y+R)=\delta Z_a(x,y-R)\\&=\varepsilon_0,\end{aligned}$$

由 $K=\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ 求出首次插值切割的误差传递系数 K_1 为

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\leqslant K_1\leqslant 1 \qquad (2.2-18)$$

可见插值切割运算求区域场的误差传递系数小于 1，不会放大随机误差。

不难看出，经过 i 次插值切割运算后，误差传递系数 K_i 为

$$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^i\leqslant K_i\leqslant 1。 \qquad (2.2-19)$$

若以与切割半径相同的圆滑窗口，对上述结果进行圆滑处理，则经 i 次插值切割并作圆滑处理后所得区域场的误差传递系数为

$$K_i'=\frac{K_i}{2r+1} \qquad (2.2-20)$$

其中 r 为切割半径 R 所对应的点数，圆滑窗口为 $(2r+1)\times(2r+1)$。由 (2.2—20) 式可见，所得切割区域场中随机误差被进一步压制，切割发散效应亦基本消除。

由求局部场的 (2.2—13) 式，可得所求局部场的误差传递系数 K_t 为

$$\begin{aligned}K_t&=\sqrt{1+(K_i')^2}\\&=\frac{\sqrt{(2r+1)^2+K_i^2}}{2r+1}\end{aligned} \qquad (2.2-21)$$

由 (2.2—21) 式可见：当 $r=1$ 时，所得局部场有最大的误差传递系数 $\frac{\sqrt{10}}{3}$（假设 K_i 取最大可能值 1）；当 r 较大时，$K_t\to 1$。因此，由插值切割法求得的局部场中，随机误差不会有明显的放大。这样，用插值切割法划分的区域场和局部场，其平面等值线可采用与原始图件相同精度的等值线间距。

四、理论模型计算与野外实例应用

图 2.2—3 至图 2.2—5 为在区域场非线性度不同的情况下，插值切割法划分的磁异常局部场与理论值的对比。切割半径 $R=30$m，切割次数 $n=2$。

图 2.2—3 是区域场近于线性的模型计算结果。用插值切割分离的局部场与理论值很接近，处理结果的精度很高。

图 2.2—4 是局部场位于区域场高值区（垂直叠加异常）的模型计算结果。虽然区域场非线性度很大，但所分离的局部场与理论值在异常极大值点附近很接近，仅两翼部还存在一定差别。由于分离出的局部场在极大值点附近保持了理论曲线的基本特征，可利用这部分曲线作定量计算，例如采用蔡家雄提出的特征三角形法[15]。

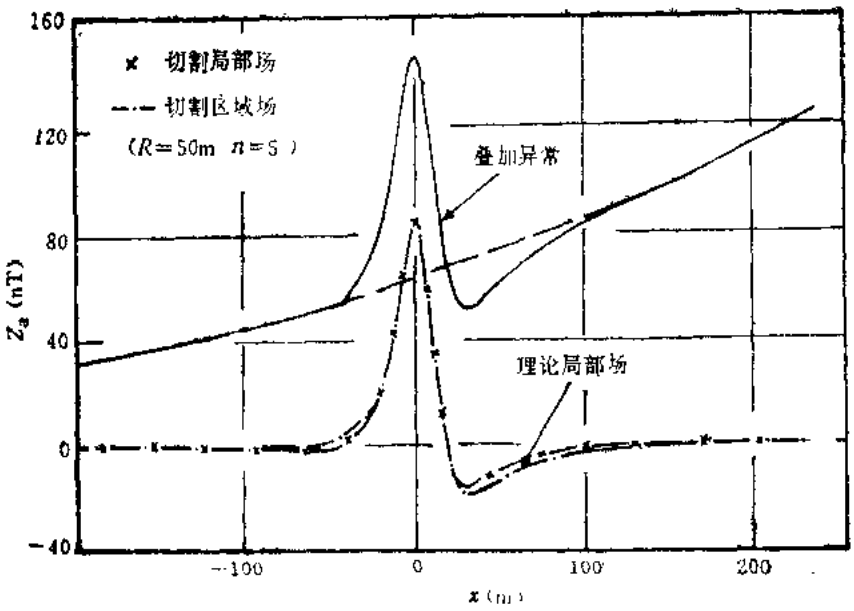


图 2.2—3 区域场近于线性时插值切割法所得局部场与理论值的对比

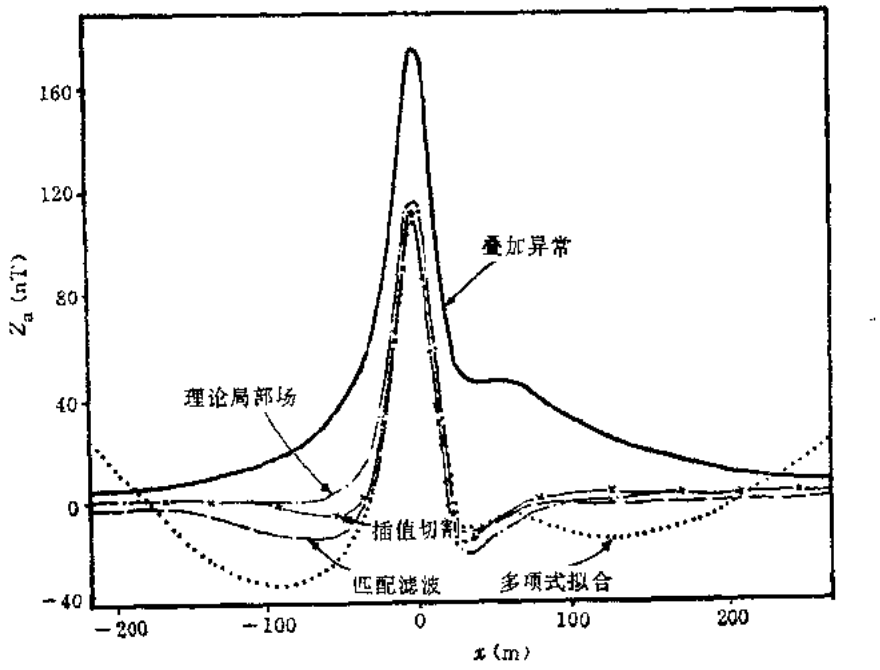


图 2.2—4 局部场位于区域场高值区时用插值切割、匹配滤波、多项式拟合划分的局部场与理论值的对比

图 2.2—5 是局部场位于区域场低值区的模型计算结果。由于局部场与区域场非线性部分正负相消，插值切割分离的局部场在主要异常位置普遍低于理论值。在这种情况下，计算值与理论值有一定的差别，但基本上保持了理论曲线的形态特征。特别是由于特征点 x_{max}（极大值点坐标）、x_{min}（极小值点坐标）、$B_{z\,max}-B_{z\,min}$（磁异常垂直分量极大值与

极小值之差），以及 $(x_{1/2}-x_{max})/(x_{max}-x'_{1/2})$（$x_{1/2}$ 与 $x'_{1/2}$ 为半极大值点坐标）的数值与理论值一致，可用于定量解释。

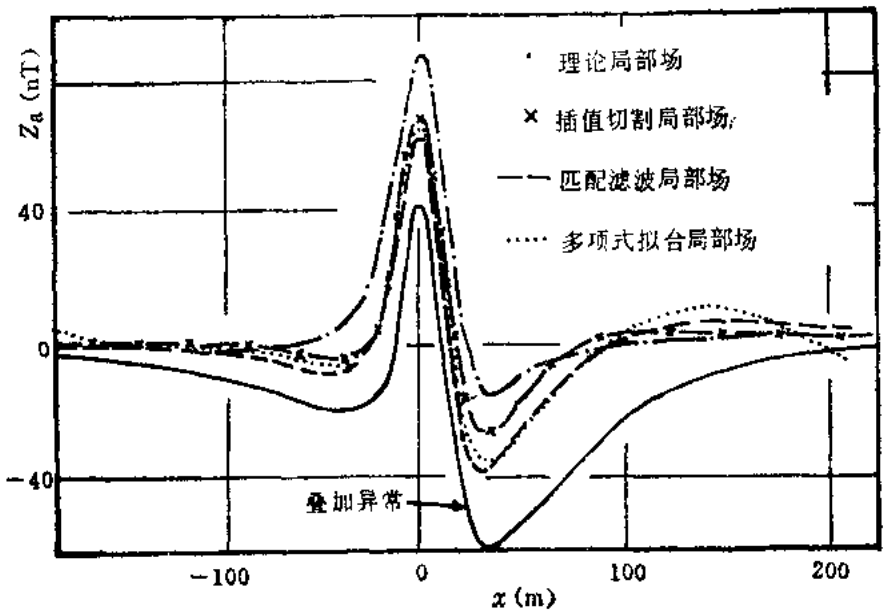


图 2.2—5　局部场位于区域场低值区时，用插值切割、匹配滤波、多项式拟合划分的局部场与理论值的对比

图 2.2—4 及图 2.2—5 还给出了用匹配滤波和最小二乘多项式拟合划分的局部异常。匹配滤波选用的最佳参数为 $A/B=15$，深源深度 $H=100$m，浅源深度 $h=30$m。图 2.2—4 的最小二乘拟合多项式为

$$Z_a=40.48-1.12\times10^{-1}(x-267.43)-9.13\times10^{-4}(x-267.43)^2$$
$$+1.19\times10^{-6}(x-267.43)^3$$

图 2.2—5 的最小二乘拟合多项式为

$$Z_a=-22.52+2.45\times10^{-1}(x-322.78)+2.19\times10^{-3}(x-322.78)^2$$
$$+3.97\times10^{-6}(x-322.78)^3$$

对比不同方法划分的局部异常与理论值，插值切割法具有畸变较小，分离精度较高的特点。

下面是对一个复杂的叠加磁异常，用插值切割法作二维划分的结果。图 2.2—6 是叠加磁异常的理论模型，其区域场为梯度较大的鞍状场，其上叠加有两个幅值较大的球体异常和两个不易分辨的很弱的球体异常。规模最大的球体异常的半极大值间距约为 400 m。图 2.2—7 是用插值切割法对图 2.2—6 数据划分出的目标异常，切割半径为 $R=900$m（相当于 9 倍点距），切割次数 $n=4$。四个模型球的理论异常见图 2.2—8。对比图 2.2—7 及图 2.2—8，可见插值切割法划分出的球体局部异常再现了理论异常的细节，只是零值线在图的下半部略有不同，最大相对误差只有 4 %。

区域场与局部场是一个相对概念。对于浅层磁性不均匀引起的干扰异常，相对于有意义的目标异常来说，也可看成是局部场，而将有意义的目标异常作为区域场。特别是在高精度磁测数据中，浅层干扰具有波长短，幅值变化大，呈不规则突变点出现等特点。由于

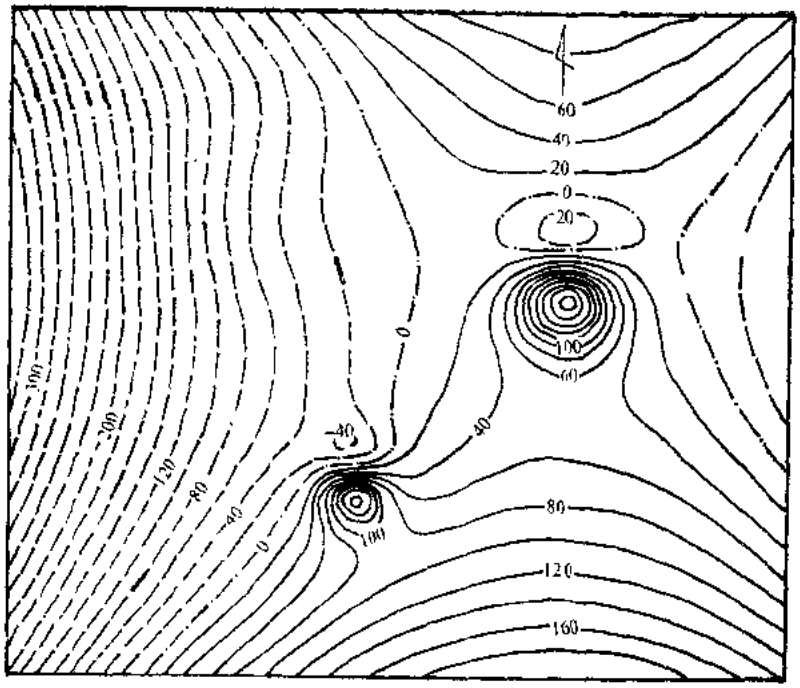


图 2.2—6 复杂磁异常理论模型
（等值线距 20 nT）

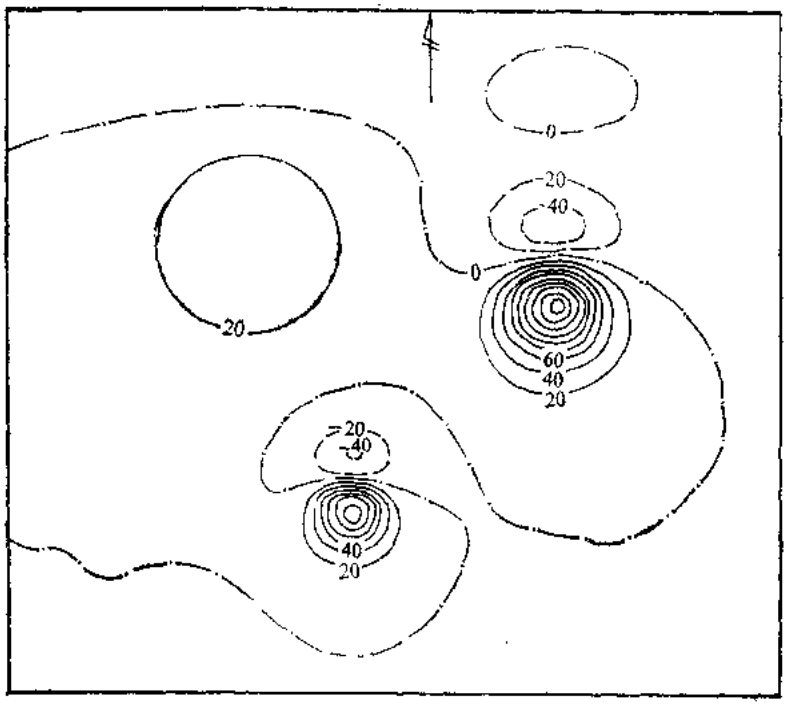


图 2.2—7 插值切割对图 2.2—6 数据处理所得目标异常
（等值线距 20 nT）

信噪比低、形态复杂，这类浅层干扰往往使有用异常的形态特征产生很大的畸变。只有大幅度压制这类干扰，才有可能得出正确的地质解释，充分发挥高精度磁测的作用。

模型试算表明，插值切割法分离这类浅层强干扰也有很好效果。和划分深层区域场与局部场一样，分离效果好坏的关键也是要选择合适的切割半径。选取最佳切割半径，就能

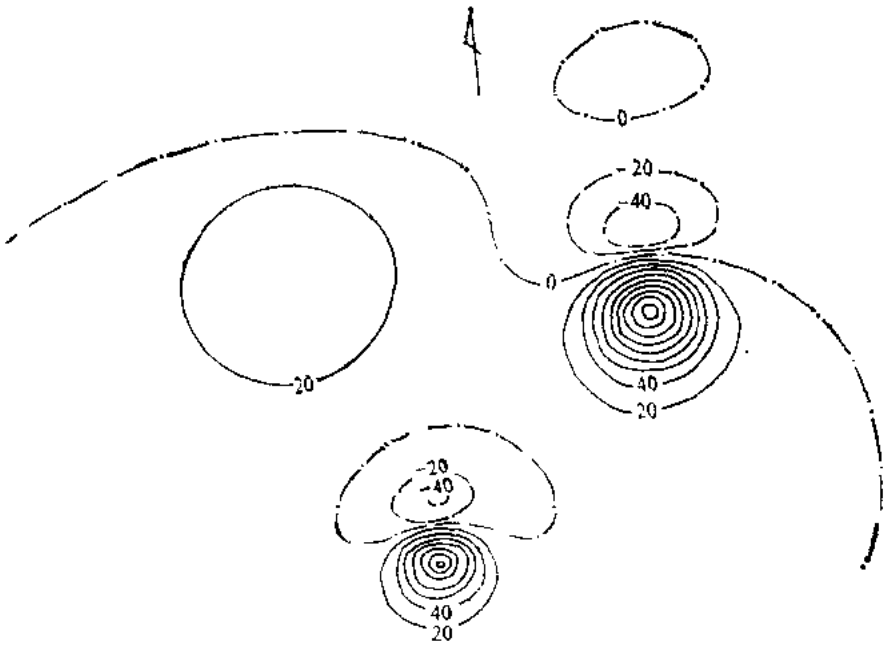


图 2.2—8 目标异常的理论值
（等值线距 20 nT）

取得最佳的分离效果。通过大量模型试算，总结出不同信息密度（磁异常半极大值距离 $d_{1/2}$ 与测点距 Δx 之比）和不同信噪比（磁异常幅度 S_m 与干扰幅度 N_m 之比）与最佳切割半径的关系，如表 2.2—1[16]。

表 2.2—1 信噪比、信息密度与最佳切割半径的关系表

信噪比 $S_n=S_m/N_m$	N_m(nT)	信息密度 $S_d=d_{1/2}/\Delta x$					
		2*	3.75*	7.5*	15**	30**	60**
8.6	10	1 / 7.8	1 / 3.9	1 / 1.6	1 / 0.85	2 / 0.44	2 / 0.39
4.3	20	1 / 7.9	1 / 4.1	1 / 2.1	2 / 0.82	2 / 0.71	3 / 0.76
1.72	50	1 / 8.5	1 / 5.0	1 / 3.5	2 / 1.42	2 / 1.16	5 / 1.42
0.86	100	1 / 9.4	1 / 7.3	1 / 6.5	2 / 2.66	5 / 2.61	5 / 2.14
0.43	200	1 / 11.7	2 / 11.0	2 / 10.6	2 / 5.22	5 / 3.90	5 / 3.70
0.29	300	2 / 12.8	2 / 12.2	2 / 11.8	5 / 5.99	5 / 5.46	6 / 5.50

注：①斜线上方为最佳切割半径（以点距为单位）；②斜线下方为划分出的磁异常的均方误差(nT)；③*为剖面点数=100；④**为剖面点数=300；⑤模型异常幅值86nT，半极大值间距300m，切割次数为2。

上表给出了不同信噪比及不同信息密度条件下选取最佳切割半径时的均方差。由表中数据可看出如下几点：

1．划分出的目标异常的均方差随信息密度的加大，即随点距的减小而减小；

2．信息密度增大到一定程度后，最佳切割半径划分出的目标异常的均方差出现饱和现象，即不再随信息密度的增大而减小；

3．当信噪比较大，即干扰相对较小，信息密度为 30 时，均方差出现饱和，接近于渐

近值；当信噪比较小，即干扰增强时，在信息密度为15时已出现饱和；

4．插值切割能显著压制干扰，信息密度足够大，例如$S_d=15$时，用最佳切割半径分离似随机的浅层干扰已有很好效果，这一点可作为地面高精度磁测选择剖面点距的参考准则；

5．在信息密度足够大时，一般取切割半径为2—3倍点距，即可获得较佳分离效果；在强干扰低信噪比的情况下，可适当加大切割半径。

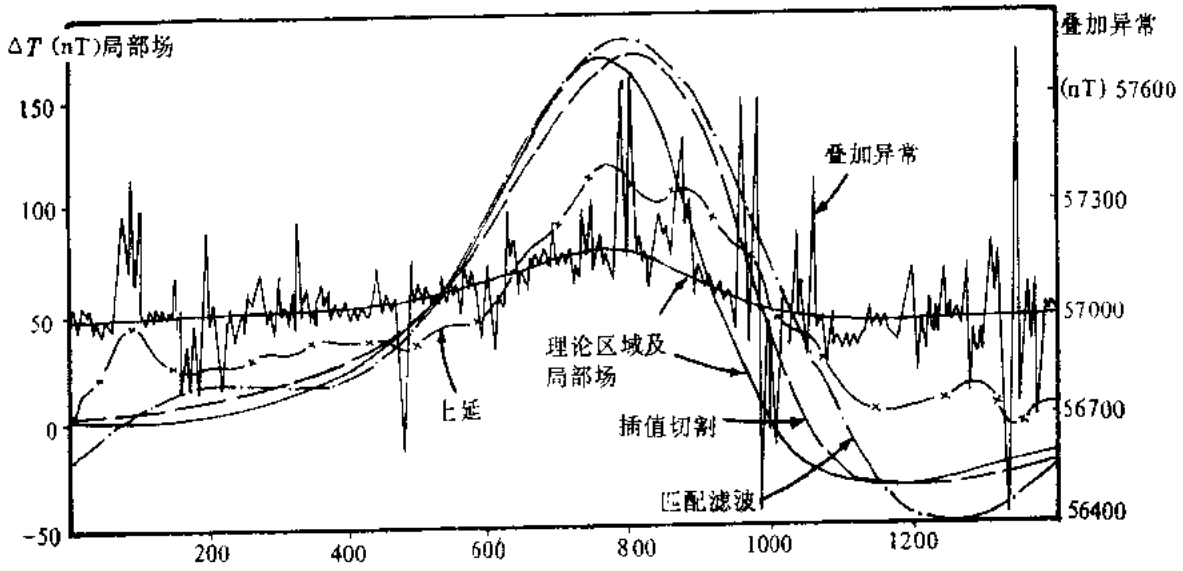


图 2.2—9 插值切割、匹配滤波与向上延拓分离浅层强干扰的对比

图2.2—9是对澳大利亚一金属矿区高精度磁测剖面的模拟结果。背景场为57000 nT，球体异常半极大值间距300 m，点距5 m，该地浅层干扰极强，信噪比为0.1。经试验选用的最佳切割半径R为15倍点距，切割次数为4。图中同时给出了向上延拓和匹配滤波的结果。向上延拓高度为5倍点距，匹配滤波参数为$A/B=1000$，深源深度$H=300$ m，浅源深度$h=0.1$ m。与模型理论值对比可知，插值切割法的处理结果最好，而向上延拓的结果最差。

图2.2—10为用插值切割法对黄沙坪矿区5号勘探线ΔT高精度磁测剖面（均方差<2 nT）的处理结果与地质剖面对比图。从原始ΔT异常曲线可以估计出磁干扰幅度约为170 nT，磁异常幅值约为60 nT，磁异常半极大值间距约为10倍点距。参照表2.2—1，选取最佳切割半径为3倍点据，切割次数为4。切割分离出的磁异常与铅锌硫化矿群有良好的对应关系。切割分离出的磁干扰，在剖面左半段对应于弱磁性地层的随机干扰，右半段对应于浅部不均匀矿化蚀变带的非随机性干扰。

图2.2—11为用插值切割法对锡矿山锑矿区4号踏勘剖面ΔT高精度磁测（均方误差为0.35 nT）的处理结果与地质剖面对比图。从实测曲线估计该剖面上磁干扰水平为20 nT（不包括剖面右端的强干扰），ΔT异常幅值约15 nT，半极大值间距约15倍点距（点距为25 m）。参照表2.2—1，选取切割半径为2，切割4次，对整条剖面包括右端的强磁干扰均有很好的分离效果。分离出的磁异常正好位于矿体上方，两侧均显示出次一级的弱异常，左侧异常对应于较深的锑矿体，右侧异常可能是受断层错动后的矿体所引起，值得

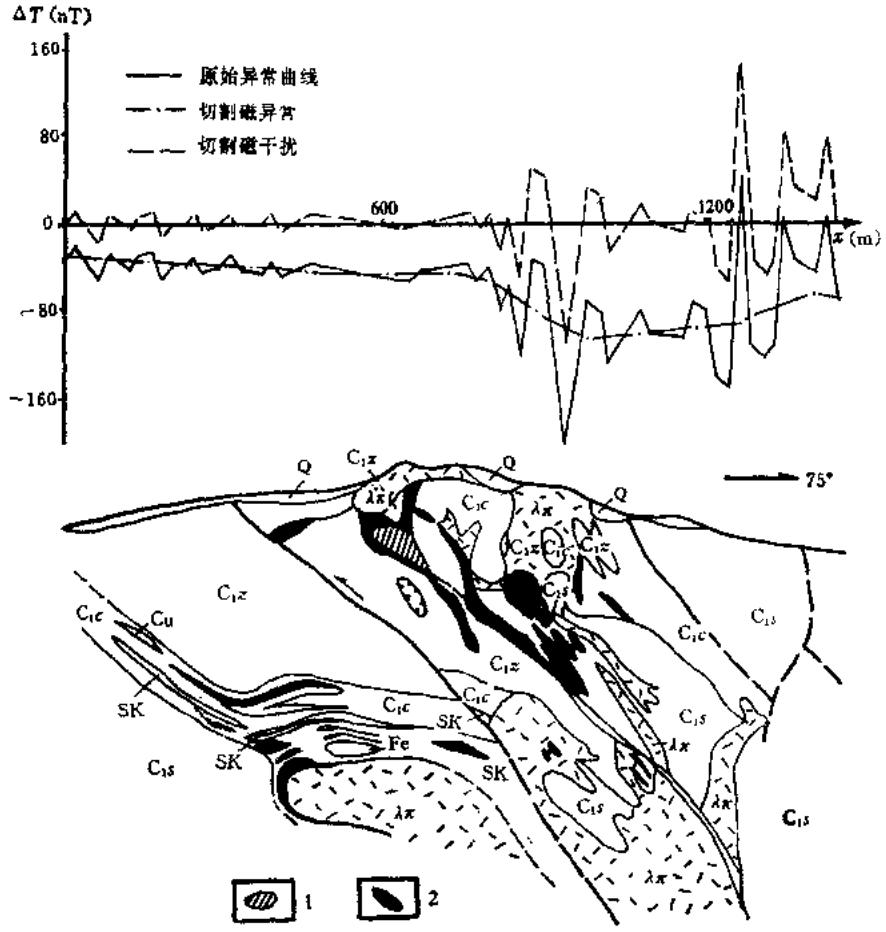


图 2.2—10　消除强磁干扰的野外实例

1—矿化围岩；2—铅锌矿体；$\lambda\pi$—石英斑岩；SK—矽卡岩；C_1z—梓门桥段灰岩；C_1c—测水段砂岩；C_1s—石磴子段灰岩

进一步工作。

下面是几个划分航磁区域场与局部场的实例。图 2.2—12 为甘肃白银地区航磁化极异常，等值线间距 20 nT，观测均方误差 5 nT。用 500 m × 500 m 方格网取数，选取 5 倍点距的切割半径，切割 3 次，划分出图 2.2—13 的航磁区域场与图 2.2—14 的航磁局部场。与该区地质构造和磁性特征对比，划分出的区域场反映出与成矿有关的火山穹窿构造，四个局部异常均与已知矿体对应。

在湘南地区，用插值切割法于航磁、重力资料的研究中，成功地分离了不同层次不同规模的重磁场。对划分出的不同幅值、不同规模的航磁局部异常，经地面检查了 16 处，证实分离结果是可靠的，获得了比国内外现有方法都好的分离效果。对分离出的重磁区域异常与局部异常进行三维物性立体填图，得到了许多有价值的地质成果。

插值切割法在桩基球击法动测响应数据处理中也获得了很好的效果。

归纳以上讨论，可得出如下结论：

1．插值切割法既能消除浅层强磁干扰，又能划分不同层次的区域场与局部场；

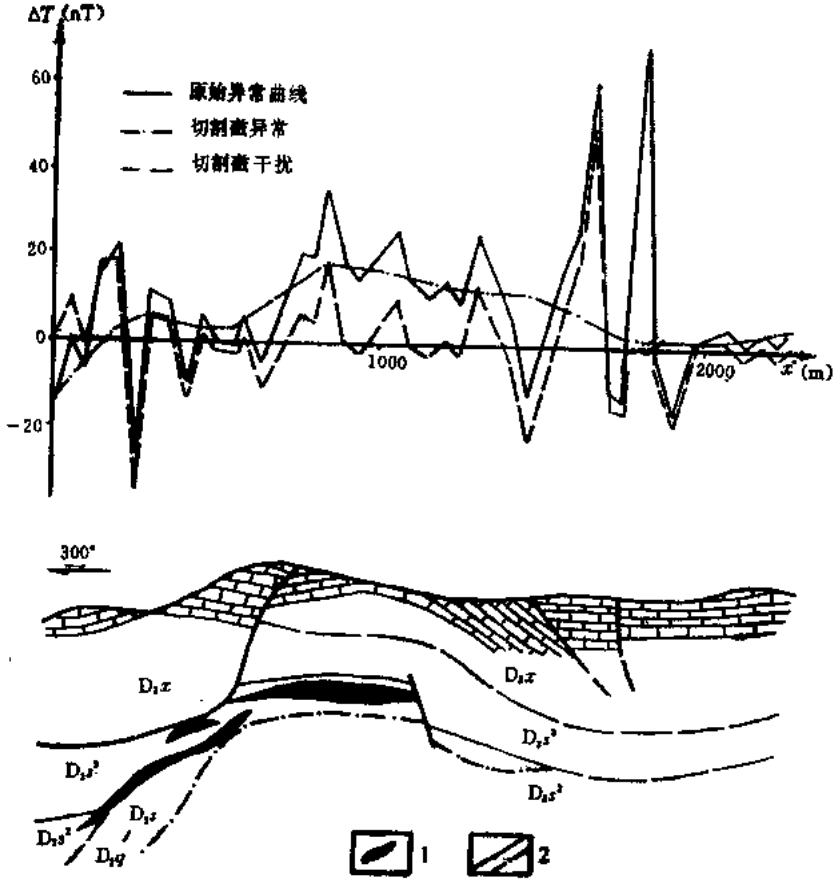


图 2.2—11 消除强磁干扰的实例

1—铅矿体；2—地质界线；D_3x—锡矿山组砂页岩、灰岩，D_3s—余田桥组灰岩与页岩互层，D_3q—硅化岩

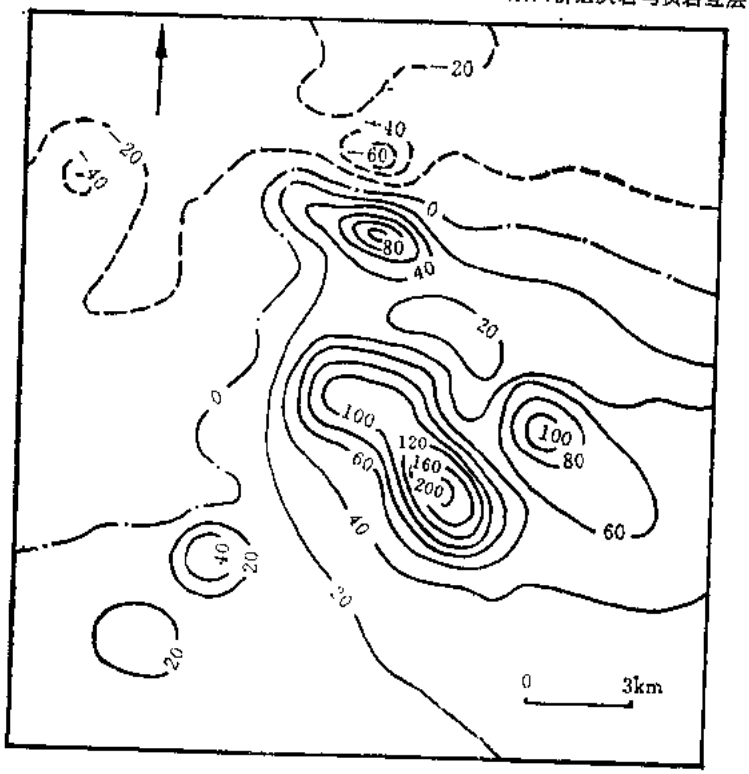


图 2.2—12 甘肃白银地区航磁化极异常

（等值线距 20 nT）

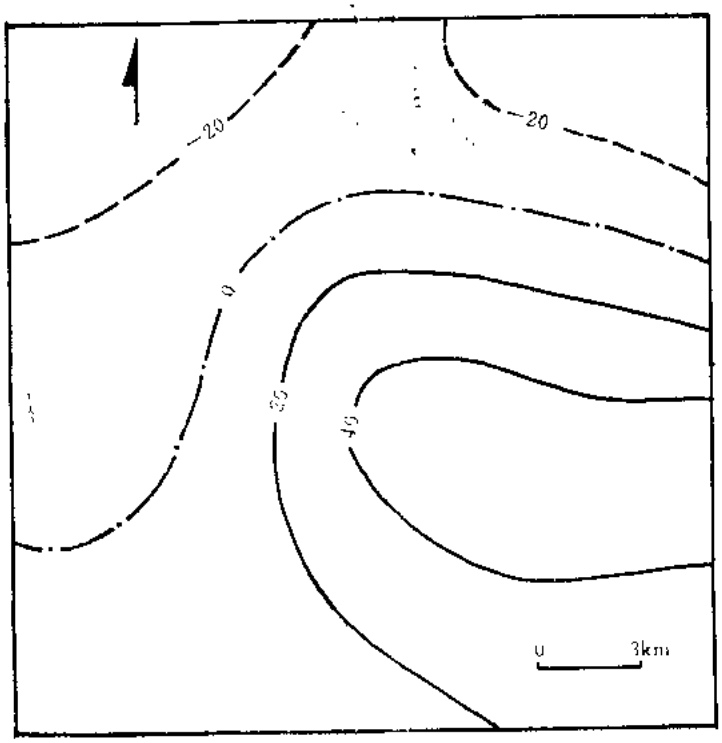


图 2.2—13　甘肃白银地区插值切割航磁区域场（等值线距 20 nT）
（等值线距 20 nT）

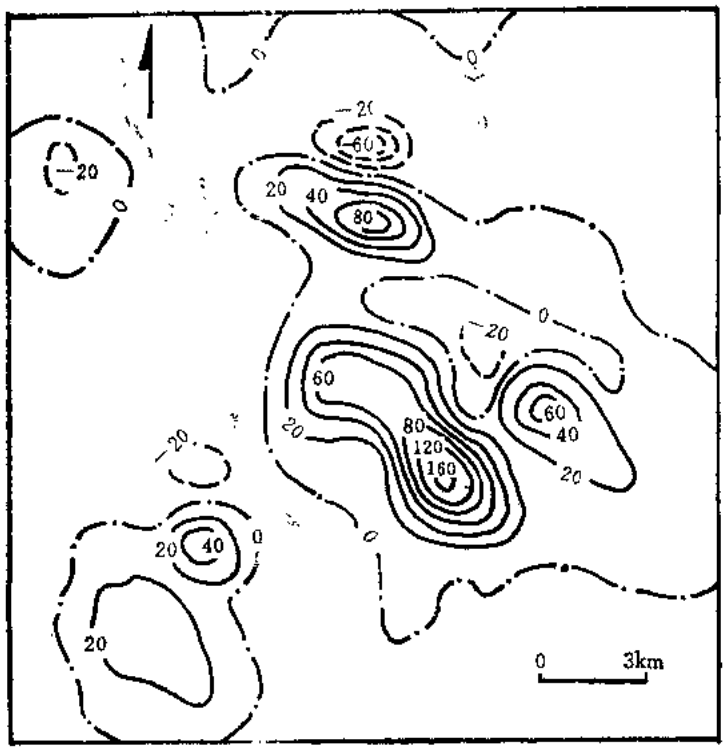


图 2.2—14　甘肃白银地区插值切割航磁局部场（等值线距 20 nT）
（等值线距 20 nT）

2．计算速度快，分离场的精度高，可用于定量解释；

3．划分出的区域场能有效压制随机干扰，划分出的局部场也没有明显放大随机误差；

4．根据场的空间变化特点，选取恰当的切割半径，是取得良好结果的关键；

5．插值切割法不仅能成功地分离各种层次的重磁场，还能用于动测法桩基检测数据处理等其他领域。

第三章　位场异常反演方法

§1　磁异常希尔伯特(Hilbert)变换反演方法

希尔伯特变换首先应用于通讯理论，70年代才引入重磁解释领域。对一些二度规则磁性体，利用磁异常及其一维希尔伯特变换曲线的交点可反演磁性体深度参数[1]，具有简便快速的特点。80年代开始把二维希尔伯特变换用于三维位场的导数换算[2]、一维希尔伯特变换用于弱磁异常的增强[3]等工作，取得了一定效果。本节重点研究综合利用磁异常及其一维希尔伯特变换场反演的方法[4]，这种方法特别有利于化到顺层磁化及确定磁化特征角。

一、一维希尔伯特变换基本关系式

（一）一般关系式

设实连续信号$x(t)$的波谱为$x(f)$、f为波数，则$x(f)$满足关系式 $x(-f)=\overline{x(f)}$，$\overline{x(f)}$ 表示**共轭**。$x(t)$可表示为

$$x(t)=\int_0^\infty x(f)e^{i2\pi ft}\,df+\int_0^\infty x(-f)e^{-i2\pi ft}df \qquad (3.1-1)$$

由于 $x(-f)=\overline{x(f)}$，可把实信号$x(t)$表示成仅含正波数成分的复信号的实部

$$x(t)=\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty 2x(f)e^{i2\pi ft}\,df\right] \qquad (3.1-2)$$

令

$$q(t)=\int_0^\infty 2x(f)e^{i2\pi ft}df \qquad (3.1-3)$$

称$q(t)$为$x(t)$的复信号。设$q(t)$的波谱为$Q(f)$，则由（3.1—3）式可知

$$Q(f)=\begin{cases}2x(f) & f>0\\ 0 & f<0\end{cases} \qquad (3.1-4)$$

由（3.1—4）式可知，$Q(f)$可视为由$x(f)$滤波得到，其滤波因子的波谱$H_1(f)$为

$$H_1(f)=\begin{cases}2 & f>0\\ 0 & f<0\end{cases} \qquad (3.1-5)$$

由（3.1—4）和（3.1—5）式可得

$$Q(f)=H_1(f)\,x(f) \qquad (3.1-6)$$

根据单位阶跃信号波谱关系，有

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{sgn}t\longleftrightarrow\frac{1}{2}\,\delta(f)+\frac{1}{i2\pi f}$$

其中sgn$t$是符号函数

$$\mathrm{sgn}t=\begin{cases}1 & t>0\\ 0 & t=0\\ -1 & t<0\end{cases}$$

$H_1(f)$对应的函数$h_1(t)$为

$$h_1(t)=\delta(t)+\frac{\mathrm{i}}{\pi t} \tag{3.1—7}$$

由（3.1—6）和（3.1—7）式可知，实信号$x(t)$的复信号$q(t)$为

$$q(t)=h_1(t)*x(t)=\left(\delta(t)+\frac{\mathrm{i}}{\pi t}\right)*x(t)$$

$$=x(t)+\mathrm{i}\frac{1}{\pi t}*x(t) \tag{3.1—8}$$

令

$$x_{\mathrm{H}}(t)=\frac{1}{\pi t}*x(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3.1—9}$$

*为褶积符号，称$x_{\mathrm{H}}(t)$为$x(t)$的**希尔伯特变换**。

从（3.1—9)可见，对一个信号作希尔伯特变换，相当于作一次滤波，滤波因子$h(t)$为$\frac{1}{\pi t}$，$h(t)$即$\frac{1}{\pi t}$的波谱$H(f)$为

$$H(f)=\begin{cases}-\mathrm{i} & f>0\\ \mathrm{i} & f<0\end{cases} \tag{3.1—10}$$

$H(f)$还可表示为

$$H(f)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi(f)}$$

其中

$$\phi(f)=\begin{cases}-\frac{\pi}{2} & f<0\\ \\ \frac{\pi}{2} & f<0\end{cases}$$

由上式可知，一个信号经希尔伯特变换后，振幅不变，相位谱要做90°相移，故称为90°相移滤波。

现在讨论由$x_{\mathrm{H}}(t)$求$x(t)$的公式，即希尔伯特反变换公式。设$x_{\mathrm{H}}(t)$的波谱为$x_{\mathrm{H}}(f)$，由（3.1—9）式可知

$$x_{\mathrm{H}}(f)=H(f)\ x(f)$$

其中$H(f)$由(3.1—10）确定，由于$H^2(f)=-1$，所以有

$$x(f)=-H(f)\ x_{\mathrm{H}}(f) \tag{3.1—11}$$

由此可得

$$x(t)=-\frac{1}{\pi t}*x_{\mathrm{H}}(t)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x_{\mathrm{H}}(\tau)}{t-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3.1—12}$$

（3.1—12）式即为**希尔伯特反变换**公式，通常把（3.1—9）和（3.1—12）式统称为希尔伯特变换公式。

（二）二度体（重）磁场希尔伯特变换基本关系式

设位场函数为$f(x)$，引用上述定义其希尔伯特变换为

$$f_{\mathrm{H}}(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{x-\tau}\mathrm{d}\tau \tag{3.1—13}$$

希尔伯特反变换为

$$f(x)=\frac{-1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f_H(\tau)}{x-\tau}d\tau \qquad (3.1-14)$$

把（3.1—13)写成褶积形式

$$f_H(x)=\frac{1}{\pi x}*f(x) \qquad (3.1-15)$$

为了讨论方便，以角波数$\omega=2\pi f$代替f，故有

$$f_H(\omega)=h(\omega)\ \ f(\omega) \qquad (3.1-16)$$

$f_H(\omega)$、$f(\omega)$分别为$f_H(x)$、$f(x)$的波谱，$h(\omega)$为$\frac{1}{\pi x}$的波谱。设$f(x)$的傅里叶变换为

$$f(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}\,dx$$

因

$$h(\omega)=\begin{cases}-i & \omega>0\\ i & \omega<0\end{cases}$$

则（3.1—16）式变为

$$f_H(\omega)=\begin{cases}-if(\omega) & \omega>0\\ if(\omega) & \omega<0\end{cases} \qquad (3.1-17)$$

令

$$f_1(\omega)=f_R(\omega)+if_I(\omega) \qquad (3.1-18)$$

考虑到（3.1—17）式可得$f_1(\omega)$的希尔伯特变换式为

$$f_{H_1}(\omega)=\begin{cases}f_1(\omega)-if_R(\omega) & \omega>0\\ -f_1(\omega)+if_R(\omega) & \omega<0\end{cases} \qquad (3.1-19)$$

f_{H_1}的傅里叶反变换为

$$f_{H_1}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}h(\omega)\ \ f_1(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\infty}if_1(-\omega)e^{-i\omega x}\,d\omega-\int_0^{\infty}if_1(\omega)e^{i\omega x}\,d\omega\right] \qquad (3.1-20)$$

考虑到实函数傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数，故有

$$f_1(-\omega)=f_R(\omega)-if_I(\omega) \qquad (3.1-21)$$

将（3.1—18)和（3.1—21)式代入(3.1—20）式，可得

$$f_{H_1}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[f_R(\omega)\sin\omega x+f_1(\omega)\cos\omega x]d\omega \qquad (3.1-22)$$

若令$f_2(\omega)=-f_R(\omega)+if_I(\omega)$ (3.1—23)

则根据（3.1—17)式有

$$f_{H_2}(\omega)=\begin{cases}f_1(\omega)+if_R(\omega) & \omega>0\\ -f_1(\omega)-if_R(\omega) & \omega<0\end{cases}$$

经与求(3.1—20）式类似的推导，可得$f_{H_2}(x)$

$$f_{H_2}(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[-f_R(\omega)\sin\omega x+f_1(\omega)\cos\omega x]d\omega \qquad (3.1-24)$$

由此可见，对希尔伯特变换可给出两种不同的定义式

① (3.1—18)式的希尔伯特变换为 (3.1—22) 式；

② (3.1—23)式的希尔伯特变换为 (3.1—24) 式。

通过以上分析，若采用 (3.1—24)式的定义即可得到二度体垂直磁异常 $Z_a(x)$ 的希尔伯特变换 $Z_H(x)$

$$Z_H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Im}Z_a(\omega)\cos\omega x-\mathrm{Re}Z_a(\omega)\sin\omega x)\mathrm{d}\omega \qquad (3.1—25)$$

推广到水平磁异常 $H_a(x)$，定义其希尔伯特变换 $H_H(x)$ 为

$$H_H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Im}H_a(\omega)\cos\omega x-\mathrm{Re}H_a(\omega)\sin\omega x)\mathrm{d}\omega \qquad (3.1—26)$$

其中 $Z_a(\omega)$、$H_a(\omega)$ 分别为 $Z_a(x)$、$H_a(x)$ 的傅里叶变换谱。

将上面连续傅里叶变换离散化，以 Z_a 为例 (H_a 相同) 有

$$\mathrm{Re}Z_a(n\omega_0)=\sum_{l=0}^{N-1}Z_a(l\Delta x)\cos(n\omega_0 l\Delta x) \qquad (3.1—27)$$

$$\mathrm{Im}Z_a(n\omega_0)=\sum_{l=0}^{N-1}Z_a(l\Delta x)\sin(n\omega_0 l\Delta x) \qquad (3.1—28)$$

式中，N 是数字化数据的总个数，Δx 是测点距，$\omega_0=\frac{2\pi}{N\Delta x}$。**离散希尔伯特变换**(DHT) 定义为

$$Z_H(l\Delta x)=\frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=0}^{N/2-1}\mathrm{Im}Z_a(n\omega_0)\cos(n\omega_0 l\Delta x)-\sum_{n=0}^{N/2-1}\mathrm{Re}Z_a(n\omega_0)\sin(n\omega_0 l\Delta x)\right] \qquad (3.1—29)$$

把 (3.1—27)、(3.1—28) 代入 (3.1—29)式，即可由给出的 $Z_a(x)$ 或 $H_a(x)$ 计算出相应的希尔伯特变换 $Z_H(x)$ 和 $H_H(x)$。还可进一步推论出：由 Z_a 求 H_a 的变换实为 (3.1—22)式定义的第一类希尔伯特变换，故在有些文献中也称由 Z_a 求 H_a 的变换为希尔伯特变换。

为了对比 $Z_a(x)$、$H_a(x)$ 和 $Z_H(x)$、$H_H(x)$，我们把它们都用 $\mathrm{Re}Z_a(\omega)$、$\mathrm{Im}Z_a(\omega)$ 来表示。由 $Z_a(\omega)$ 的傅里叶反变换得到

$$Z_a(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Re}Z_a(\omega)\cos\omega x-\mathrm{Im}Z_a(\omega)\sin\omega x)\mathrm{d}\omega$$

利用 $H_a(\omega)=\mathrm{i}Z_a(\omega)$ 关系，有

$$\mathrm{Re}H_a(\omega)=-\mathrm{Im}Z_a,\qquad \mathrm{Im}H_a(\omega)=\mathrm{Re}Z_a(\omega)$$

把上述关系代入 $H_a(\omega)$ 的傅里叶反变换式可得

$$H_a(x)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Im}Z_a(\omega)\cos\omega x+\mathrm{Re}Z_a(\omega)\sin\omega x)\mathrm{d}\omega$$

同理把 (3.1—26) 式中的 $\mathrm{Im}H_a(\omega)$ 和 $\mathrm{Re}H_a(\omega)$ 分别用 $\mathrm{Re}Z_a(\omega)$ 和 $-\mathrm{Im}Z_a(\omega)$ 替换，则有

$$H_H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Re}Z_a(\omega)\cos\omega x+\mathrm{Im}Z_a(\omega)\sin\omega x)\mathrm{d}\omega$$

为了便于对比，列出 (3.1—25)式

$$Z_H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(\mathrm{Im}Z_a(\omega)\cos\omega x-\mathrm{Re}Z_a(\omega)\sin\omega x)\,d\omega$$

对比$Z_a(x)$、$H_a(x)$、$Z_H(x)$和$H_H(x)$可得如下关系式

$$Z_H(x)=-H_a(-x) \qquad (3.1—30)$$

$$H_H(x)=Z_a(-x) \qquad (3.1—31)$$

当$x=0$处，有$H_H(0)=Z_a(0)$，$Z_H(0)=-H_a(0)$，故可借助这些关系确定坐标原点。

二、二度体磁场与希尔伯特变换场相互关系分析

对于二度体磁异常$Z_a(x)$、$H_a(x)$，利用（3.1—30）、（3.1—31）式可以方便地列出其相应的希尔伯特变换场$Z_H(x)$、$H_H(x)$表达式，例如已知水平圆柱体磁场表达式为

$$Z_a(x)=\frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\sin i_s-2Rx\cos i_s] \qquad (3.1—32)$$

$$H_a(x)=\frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{(x^2+R^2)^2}[-2Rx\sin i_s-(R^2-x^2)\cos i_s] \qquad (3.1—33)$$

式中，m_s为单位长度的有效磁矩，i_s为有效磁化倾角，R为圆柱体中心深度。若将$-x$替换（3.1—33）中的x并把结果冠以负号则得

$$Z_H(x)=\frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\cos i_s-2Rx\sin i_s] \qquad (3.1—34)$$

若将$-x$替换（3.1—32）中的x，则得

$$H_H(x)=\frac{\mu_0 m_s}{2\pi}\frac{1}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\sin i_s+2Rx\cos i_s] \qquad (3.1—35)$$

对于二度体磁场，若由奇、偶函数组合时还可列出如下Z_a、H_a与H_H、Z_H的关系式，已知二度体磁场由引力位二次导数表达的一般式为

$$Z_a(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}[\cos i_s V_{xz}(x)+\sin i_s V_{zz}(x)] \qquad (3.1—36)$$

$$H_a(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}[-\cos i_s V_{zz}(x)+\sin i_s V_{xz}(x)] \qquad (3.1—37)$$

式中，G为引力常数，σ为密度。对于一些规则形体V_{zz}为偶函数、V_{xz}为奇函数即$V_{zz}(-x)=V_{zz}(x)$、$V_{xz}(-x)=-V_{xz}(x)$，由此利用（3.1—30）、（3.1—31）式列出其相应的希尔伯特变换式为

$$Z_H(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}[\cos i_s V_{zz}(x)+\sin i_s V_{xz}(x)] \qquad (3.1—38)$$

$$H_H(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}[-\cos i_s V_{xz}(x)+\sin i_s V_{zz}(x)] \qquad (3.1—39)$$

式中M_s为有效磁化强度，V_{xz}、V_{zz}为磁性体引力位对x、z的二阶导数。

若令 $Z_{a\perp}(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}V_{zz}(x)$，$H_{a\perp}(x)=\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}V_{xz}(x)$

则有：

$$Z_H(x)=\cos i_s Z_{a\perp}(x)+\sin i_s H_{a\perp}(x) \qquad (3.1—40)$$

已知斜磁化场与垂直磁化场的转换关系式

$$Z_{a\perp}(x)=Z_a(x)\sin i_s-H_a(x)\cos i_s \qquad (3.1—41)$$

$$H_{a\perp}(x)=Z_a(x)\cos i_s+H_a(x)\sin i_s \qquad (3.1—42)$$

把（3.1—41）、（3.1—42）式代入（3.1—40）式得

$$Z_H(x)=Z_a(x)\sin 2i_s-H_a(x)\cos 2i_s \qquad (3.1-43)$$

类似的推导，可得

$$H_H(x)=-Z_a(x)\cos 2i_s-H_a(x)\sin 2i_s \qquad (3.1-44)$$

（3.1—43）、（3.1—44）两式即为在已知i_s情况下，当一些规则形体产生由奇、偶函数组合而成的Z_a、H_a场时直接求H_H、Z_H的关系式。

对一些以磁化方向与磁性体倾向夹角γ表征的形体则有

$$Z_H(x)=Z_a(x)\sin 2\gamma+H_a(x)\cos 2\gamma \qquad (3.1-45)$$

$$H_H(x)=Z_a(x)\cos 2\gamma-H_a(x)\sin 2\gamma \qquad (3.1-46)$$

分析（3.1—45）—（3.1—46）式可得如下规律

① 当$i_s=0°(\gamma=90°)$时

$Z_H=-H_a$，$H_H=-Z_a$

② 当$i_s=45°(\gamma=45°)$时

$Z_H=Z_a$，$H_H=-H_a$

③ 当$i_s=90°(\gamma=0°)$时

$Z_H=H_a$，$H_H=Z_a$

上列情况表明：i_s从0°经45°变到90°时，Z_H从$-H_a$经Z_a变到H_a；H_H从$-Z_a$经$-H_a$变到Z_a。

图3.1—1(a)(b)(c)(d)给出了直立无限延深厚板体不同γ角时的Z_a、H_a及Z_H曲线，可以看出，当$\gamma=15°$时，相当于i_s接近于90°情况，此时Z_H接近于H_a；当$\gamma=75°$时（相当$i_s=15°$），此时Z_H接近于$-H_a$；当$\gamma=60°$时，Z_H接近于Z_a。表明了上列规律的正确。

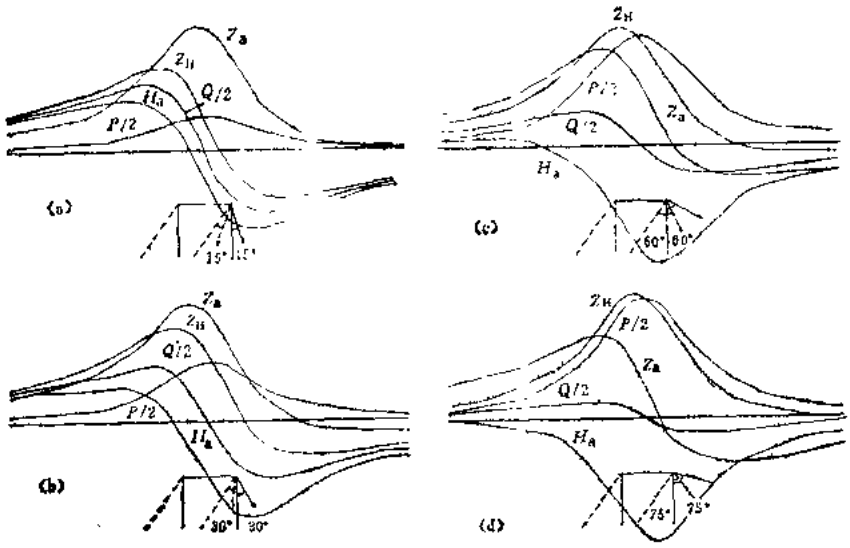


图 3.1—1 直立无限延深厚板体不同γ角时Z_a、H_a、Z_H曲线

三、综合利用磁场与希尔伯特变换场化到顺层磁化的方法

设$P=Z_H-H_a$，$Q=H_a+Z_H$；$P'=Z_a-H_H$，$Q'=Z_a+H_H$，则由（3.1—38）减(3.1—37）式可得

$$P = 2\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}\cos i_s V_{zz} \qquad (3.1—47)$$

再由（3.1—38)加（3.7—31)式可得

$$Q = 2\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}\sin i_s V_{zz} \qquad (3.1—48)$$

同理，把（3.1—36)－(3.1—39)，(3.1—36)＋(3.1—39) 则得

$$P' = 2\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}\cos i_s V_{zz} \qquad (3.1—49)$$

$$Q' = 2\frac{\mu_0 M_s}{4\pi G\sigma}\sin i_s V_{zz} \qquad (3.1—50)$$

可见$P/2$、$Q'/2$和$Q/2$、$P'/2$曲线，在无限延深倾斜板情况下，相当于顺层磁化时的$Z_{a//}$与$H_{a//}$曲线。此时$P/2$、$Q/2$具有对称于纵轴和对称于原点的特性，见图3.1—1所示。若板状体呈缓倾斜，当磁化方向与倾向之间的夹角较大时，即使采用化到磁极来简化异常，但仍可能是斜磁化，从这个意义上讲，本节提供的化到顺层磁化的方法有其一定优点。

四、综合利用磁场与希尔伯特变换场反演i_s(或γ)的方法

当直立板体或水平圆柱体时，利用下列方法可以反演出有效磁化倾角i_s，当无限延深倾斜板时反演出的$i_s=90°-\gamma$，γ角为磁化方向与倾向夹角。

（一）任意点法

1．由$\frac{(3.1—48)}{(3.1—49)}$和$\frac{(3.1—50)}{(3.1—47)}$可得

$$i_s=\operatorname{arctg}\frac{Q}{P'} \quad 和 \quad i_s=\operatorname{arctg}\frac{Q'}{P} \qquad (3.1—51)$$

即

$$i_s=\operatorname{arctg}\frac{Z_H+H_a}{Z_a-H_H} \quad 和 \quad i_s=\operatorname{arctg}\frac{Z_a+H_H}{Z_H-H_a}$$

2．由（3.1—47)、(3.1—48) 和 (3.1—36) 式得

$$i_s=\operatorname{arctg}\left[\frac{Z_a\pm\sqrt{Z_a^2-PQ}}{P}\right] \qquad (3.1—52)$$

类似地可得

$$i_s=\operatorname{arctg}\left[\frac{H_a\pm\sqrt{H_a^2-P'Q'}}{P'}\right] \qquad (除P'=0点外) \qquad (3.1—53)$$

（二）特殊点法

由（3.1—36)、(3.1—38) 式，当$x=0$时，V_{zz}为零值点，故有$i_s=\operatorname{arctg}\frac{Z(0)}{Z_H(0)}$，利用$Z_a(0)=H_H(0)$关系找出$x=0$点。

当Z_a与Z_H相交时有下式成立

$$\left(\frac{Q}{P}\right)_{Z_a=Z_H}=\left(\frac{Q'}{P'}\right)_{Z_a=Z_H}=\operatorname{tg}i_s \qquad (3.1—54)$$

上式表明，当找到Z_a与Z_H交点上对应的P、Q和P'、Q'值，然后利用（3.1—54）式即可求出i_s（或γ角)。

当Z_a与Z_H相交时还可得到

$$i_s \approx \operatorname{arctg}\left[\frac{Z_a+H_a}{Z_a-H_a}\right]_{Z_a=Z_H} \qquad (3.1-55)$$

利用$Z_a=Z_H$点的Z_a、H_a值代入（3.1—55）式即可求出i_s角。当$i_s=45°$时Z_a、Z_H整条曲线重合，故发现Z_H与Z_a接近重合时即可判断此时i_s接近45°。最后指出，上列方法，仅适用于由奇、偶函数组合的磁异常曲线。

五、综合利用磁场及其希尔伯特变换场反演磁性体深度方法

（一）有限延深直立板状体

已知其磁场垂直分量与水平分量表达式为

$$\begin{cases} Z_a(x)=A\left[\dfrac{x\sin\gamma-h_2\cos\gamma}{x^2+h_2^2}-\dfrac{x\sin\gamma-h_1\cos\gamma}{x^2+h_1^2}\right] \\ H_a(x)=-A\left[\dfrac{-x\cos\gamma-h_2\sin\gamma}{x^2+h_2^2}+\dfrac{x\cos\gamma+h_1\sin\gamma}{x^2+h_1^2}\right] \end{cases} \qquad (3.1-56)$$

式中，h_1、h_2分别为直立板的上顶与下底深度，γ是磁化方向与垂向的夹角，A是与磁性体有关的常数。$Z_a(x)$傅里叶变换的实、虚部为

$$\mathrm{Re}Z_a(\omega)=A\pi\cos\gamma(e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}) \qquad (3.1-57)$$

$$\mathrm{Im}Z_a(\omega)=A\pi\sin\gamma(e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}) \qquad (3.1-58)$$

将（3.1—57）、（3.1—58）式代入（3.1—25）式得$Z_a(x)$的希尔伯特变换

$$Z_H(x)=A\int_0^\infty(e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2})(\cos\omega x\sin\gamma-\sin\omega x\cos\gamma)\mathrm{d}\omega$$

积分后得

$$Z_H(x)=A\left[\frac{h_1\sin\gamma-x\cos\gamma}{x^2+h_1^2}+\frac{x\cos\gamma-h_2\sin\gamma}{x^2+h_2^2}\right] \qquad (3.1-59)$$

类似地可由$H_a(x)$求$H_H(x)$。已知

$$H_H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty[\mathrm{Re}Z_a(\omega)\cos\omega x+\mathrm{Im}Z_a(\omega)\sin\omega x]\mathrm{d}\omega$$

将（3.1—57）、（3.1—58）式代入上式，经积分得

$$H_H(x)=A\left(\frac{h_1\cos\gamma+x\sin\gamma}{x^2+h_1^2}-\frac{h_2\cos\gamma+x\sin\gamma}{x^2+h_2^2}\right) \qquad (3.1-60)$$

我们还可引用由（3.1—30）、（3.1—31）得到的规律，直接改变（3.1—56）式中x的符号而得到（3.1—59）、（3.1—60）式。显然改变符号的方法要简便得多。

已令　　$P=Z_H-H_a$，　$Q=H_a+Z_H$

用（3.1—56）的H_a加（3.1—59）式得

$$Q=2A\left[\frac{x\cos\gamma}{x^2+h_2^2}-\frac{x\cos\gamma}{x^2+h_1^2}\right] \qquad (3.1-61)$$

用（3.1—59）减（3.1—56）的H_a式得

$$P=2A\left[\frac{h_1\sin\gamma}{x^2+h_1^2}-\frac{h_2\sin\gamma}{x^2+h_2^2}\right] \qquad (3.1-62)$$

$P/2$、$Q/2$为Z_a的分解曲线，$Q/2$对称于原点，$P/2$对称于纵轴，$Q/2$的零值点即为坐标原点。这一结果与（3.1—49）、（3.1—50）式相一致。

若令$x_{1,2}$、$x_{3,4}$、$x_{5,6}$分别为$P/2$曲线的零值点、极小值点、$\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2}\right)_{\max}$值点的坐标；

$x_{7,8}$，$x_{9,10}$分别为$Q/2=P/2$及$P/2=-Q/2$点的坐标，见图3.1—2，则得

$$\begin{cases} h_c=\dfrac{(x_8^2-x_1^2)}{2x_1}, \qquad h_c=\sqrt{(x_1^4-x_8^4)/4x_8^2} \\ h_c=\dfrac{(x_1^2-x_8^2)}{2x_8}=\dfrac{(x_7^2-x_1^2)}{2x_7}=\dfrac{\sqrt{(x_7-x_8)^2-4x_1^2}}{2} \\ h_c=\dfrac{(x_7-x_9)}{2} \qquad (h_c\text{为中心埋深}) \\ l=\sqrt{h_c^2-x_1^2} \qquad (l\text{为薄板半延深长度}) \end{cases} \tag{3.1—63}$$

图3.1—3是上顶埋深$h_1=1$，下底埋深$h_2=2$，$\gamma=50°$直立板的$Z_a(x)$及其希尔伯特变换场$Z_H(x)$。若$Z_a(x)$与$Z_H(x)$的交点坐标为x_1，x_2，则有

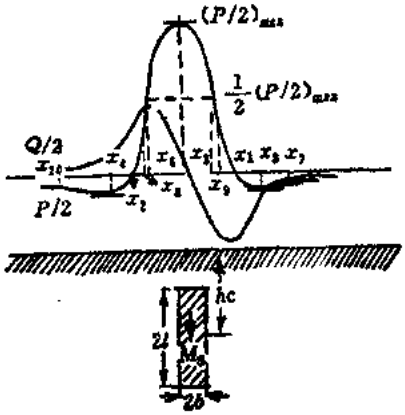


图 3.1—2 $P/2$、$Q/2$曲线特征点示意图

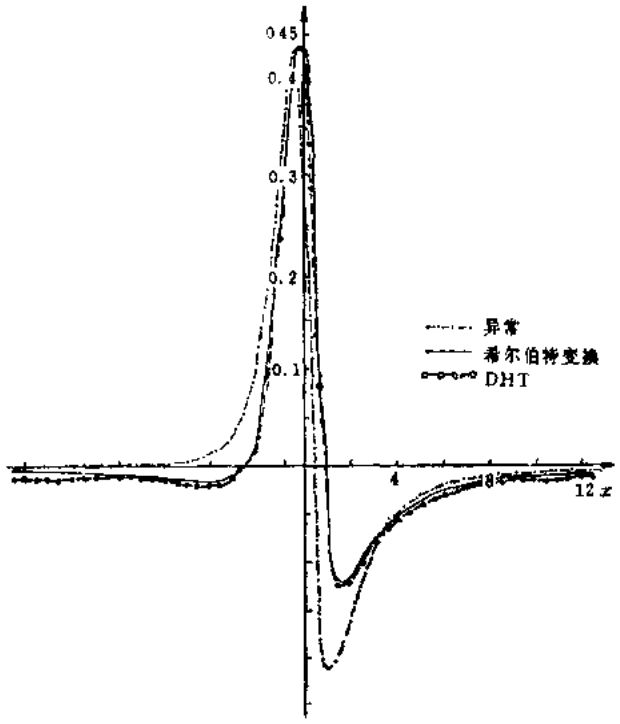


图 3.1—3 直立板状体（有限延深）垂直磁异常场$Z_a(x)$和希尔伯特变换场$Z_H(x)$

$$Z_a(x_1)=Z_H(x_1), \qquad Z_a(x_2)=Z_H(x_2)$$

于是由（3.1—56），（3.1—59）式得

$$x_1^2-x_1(h_1+h_2)-h_1h_2=0, \qquad x_2^2-x_2(h_1+h_2)-h_1h_2=0$$

因此有

$$h_1=\frac{(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2+4x_1x_2}}{2} \tag{3.1—64}$$

$$h_2=\frac{2x_1x_2}{(x_1+x_2)\pm\sqrt{(x_1+x_2)^2+4x_1x_2}} \tag{3.1—65}$$

$$\gamma=\operatorname{arctg}\left[\frac{x^2Z_H(x)-h_1h_2Z_H(x)-xZ_a(x)(h_1+h_2)}{x^2Z_a(x)-h_1h_2Z_a(x)-xZ_H(x)(h_1+h_2)}\right] \tag{3.1—66}$$

当应用（3.1—64）、（3.1—65）作反演时，由于$\gamma=45°$时使（3.1—56）式与（3.1—59）式

相等，即$Z_{a45^\circ}=Z_{H45^\circ}$。此时找不到$x_1$、$x_2$点，故在此特殊情况下不能用此法做反演。除此情况外，为了提高求γ的精度，可以在极大值附近选取不同的x及其对应的Z_a、Z_H值，分别求γ然后再平均。

（二）无限延深薄板、厚板、水平圆柱体和水平薄板

利用这些形体的磁场垂直分量Z_a和水平分量H_a的表达式，再运用（3.1—30）、（3.1—31）式的变换规律，即可方便地把其相应的希尔伯特变换场Z_H和H_H列出，仿照上面的推导得到相应的反演公式，列出于下表3.1—1。

六、利用一维希尔伯特变换增强弱磁异常

在弱磁场区由于各种地质干扰使磁场复杂化，有用异常难于分辨。这时需要采用提高信噪比的办法增强有用的弱异常，这种情况在弱磁区填图会经常遇到。

基于地震信号增强的一种滤波技术，是把不同数据窗口的纵波的水平分量和垂直分量相乘的方法来增强弱信号。文献〔3〕类似地把这种做法用到弱磁异常的增强，在数据窗内将磁场或其一阶导数与其相应的希尔伯特变换场相乘，也就是磁场的垂直分量与水平分量相乘或磁场的垂直导数与水平导数相乘构成一滤波器M_j

$$M_j=\sum_{i=-n}^{n}F_{i+j}\cdot H_{i+j} \tag{3.1—67}$$

其中：j为测点号，i为窗口内的点号，F为磁场（Z_a,ΔT）或其一阶导数，H为F的希尔伯特变换值。窗口长为$2n+1$，由试验确定，M_j为总信号功率的一种量度。

将（3.1—67）式滤波器沿剖面滑动，在窗内将滤波系数分别与异常（或其一阶导数）及其希尔伯特变换场进行褶积，并求积分

$$\begin{cases} M*F=\sum_{i=-n}^{n}M_{j+i}\cdot F_{j-i} \\ M*H=\sum_{i=-n}^{n}M_{j+i}\cdot H_{j-i} \end{cases} \tag{3.1—68}$$

我们还作了试验将M直接与F、H相乘，并求积分

$$\begin{cases} M\cdot F=\sum_{i=-n}^{n}M_{j+i}\cdot F_{j-i} \\ M\cdot H=\sum_{i=-n}^{n}M_{j+i}\cdot H_{j+i} \end{cases} \tag{3.1—69}$$

我们对胶东地区航磁ΔT_a异常的某测线用希尔伯特变换增强弱异常来说明方法的效果。图3.1—4给出了实测航磁ΔT_a剖面曲线，异常弱而不规则，无法识别有用异常，对该剖面用褶积公式（3.1—68）和乘积公式（3.1—69）分别作希尔伯特弱信号的增强，结果示于图3.1—5和3.1—6，对比后可以看出，两者大体一致，褶积公式反映高频成分较明显，乘积公式反映低频成分较明显。经二次希尔伯特对弱信号的增强试验，结果示于图3.1—7，表明突出有用信号的作用得到进一步增强。在利用（3.1—68）、（3.1—69）式时均要选择窗口，为此作了窗口大小的试验，分别取3点、5点和7点三个窗对实测ΔT_a剖面作突出弱信号的处理，结果示于图3.1—8。从图可见窗口大小对被突出的异常总体形态基本一致，大窗口反映低频成分多些，曲线较光滑，小窗口反映高频成分明显，突出了一些细节。目

表 3.1—1

形体	磁异常	希尔伯特变换场	反演公式
无限延板薄	$Z_a = A\left[\frac{h\cos\gamma - x\sin\gamma}{x^2+h^2}\right]$ $H_a = A\left[\frac{-h\sin\gamma - x\cos\gamma}{x^2+h^2}\right]$ A为与有效磁化强度M_s、板宽和倾角有关的常数，γ为M_s与板的夹角，h为埋深	$Z_H = A\left[\frac{h\sin\gamma - x\cos\gamma}{x^2+h^2}\right]$ $H_H = A\left[\frac{h\cos\gamma + x\sin\gamma}{x^2+h^2}\right]$ $P = 2A\sin\gamma\frac{h}{x^2+h^2}$ $Q = -2A\cos\gamma\frac{x}{x^2+h^2}$	$h = -x_1$ $\gamma = \operatorname{arctg}\left[\frac{h Z_H + x Z_a}{h Z_a + x Z_H}\right]$ x_1为Z_H与Z_a交点横坐标。对P、Q可用顺板磁化的反演公式求h、γ
无限延板厚	$Z_a = A\sin\alpha\left[\cos\gamma\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x+b}{h} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x-b}{h}\right) + \frac{1}{2}\sin\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right]$ $H_a = A\sin\alpha\left[-\sin\gamma\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{x+b}{h} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x-b}{h}\right) + \frac{1}{2}\cos\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right]$ A为$\frac{M_s\mu_0}{2\pi}$；b为板半宽；α为板倾角；γ为M_s与板的夹角；h为埋深	$Z_H = A\sin\alpha\left\{\sin\gamma\left(\operatorname{arctg}\frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{h}\right) + \frac{1}{2}\cos\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right\}$ $H_H = A\sin\alpha\left[\cos\gamma\left(\operatorname{arctg}\frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{h}\right) - \frac{1}{2}\sin\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right]$ $P = 2A\sin\alpha\sin\gamma\left(\operatorname{arctg}\frac{x+b}{h} - \operatorname{arctg}\frac{x-b}{h}\right)$ $Q = 2A\sin\alpha\cos\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}$	$h = \frac{x_1+x_2}{2}$ $b = \left\{\frac{(x_1-x_2)^2 - 2(x_1+x_2)^2}{4}\right\}^{\frac{1}{2}}$ $\gamma = \operatorname{arctg}\left[\frac{(h^2+b^2-x^2)Z'_{ax} + 2xhZ'_{Hx}(x)}{(h^2+b^2-x^2)Z'_{Hx} + 2xhZ'_{ax}(x)}\right]$ Z'_{ax}、Z'_{Hx}为Z_a、Z_H对x的一次导数；x_1、x_2为Z'_{ax}、Z'_{Hx}交点的横坐标。 对P、Q可用顺板磁化时的反演公式求h、b

续表

形体	磁异常	希尔伯特变换场	反演公式
水平圆柱	$Z_a = A\left[\frac{(R^2-x^2)\sin i_s}{(x^2+R^2)^2} - \frac{2xR\cos i_s}{(x^2+R^2)^2}\right]$ $H_a = A\left[\frac{-2xR\sin i_s}{(x^2+R^2)^2} - \frac{(R^2-x^2)\cos i_s}{(x^2+R^2)^2}\right]$ A为与有效磁矩有关的常数；i_s有效磁化倾角；R为中心深度	$Z_H = A\left[\frac{(R^2-x^2)\cos i_s}{(x^2+R^2)^2} - \frac{2Rx\sin i_s}{(x^2+R^2)^2}\right]$ $H_H = A\left[\frac{(R^2-x^2)\sin i_s}{(x^2+R^2)^2} + \frac{2Rx\cos i_s}{(x^2+R^2)^2}\right]$ $P = 2A\frac{(R^2-x^2)\cos i_s}{(x^2+R^2)^2}$ $Q = -2A\frac{2Rx\sin i_s}{(x^2+R^2)^2}$	$R = \frac{x_1+x_2}{2}$ $i_s = \operatorname{arctg}\left[\frac{(R^2-x^2)Z_a + 2xRZ_H}{(R^2-x^2)Z_H - 2xRZ_a}\right]$ 对P、Q可用垂直磁化时的反演公式求R
水平薄板	$Z_a = A\left\{\frac{(h^2+b^2-x^2)\sin i_s - 2hx\cos i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$ $H_a = A\left\{\frac{-(h^2+b^2-x^2)\cos i_s - 2hx\sin i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$ A与有效磁化强度等有关的常数。i_s有效磁化倾角，h为埋深，b为半宽度	$Z_H = A\left\{\frac{(h^2+b^2-x^2)\cos i_s - 2hx\sin i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$ $H_H = A\left\{\frac{(h^2+b^2-x^2)\sin i_s + 2hx\cos i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$ $P = 2A\left\{\frac{(h^2+b^2-x^2)\cos i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$ $Q = 2A\left\{\frac{-2hx\sin i_s}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right\}$	$h = \frac{x_1+x_2}{2}$ $b = \left[\frac{(x_1-x_2)^2 - 2(x_1+x_2)^2}{4}\right]^{1/2}$ $i_s = \operatorname{arctg}\left[\frac{(h^2+b^2-x^2)Z_a + 2xhZ_H}{(h^2+b^2-x^2)Z_H - 2xhZ_a}\right]$ x_1、x_2为Z_a与Z_H交点横坐标。 对P、Q可用垂直磁化时的反演公式求h、b
注	有限延深直立板的Z_a、H_a、Z_H、H_H见上节	上列各式中： $P = Z_H - H_a$ $Q = H_a + Z_H$	当γ或i_s等于45°时Z_a与Z_H重合，故不宜用交点横坐标反演

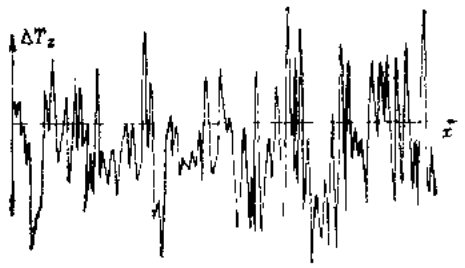


图 3.1—4 胶东某航磁剖面ΔT_z

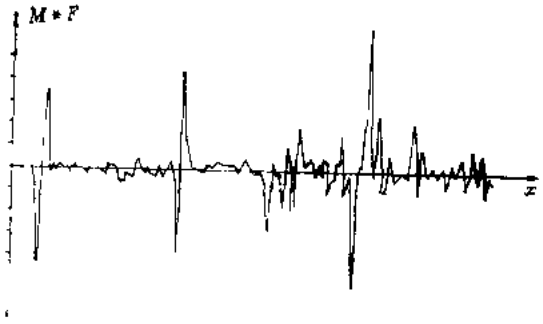


图 3.1—5 胶东某航磁剖面ΔT_z褶积公式增强弱信号

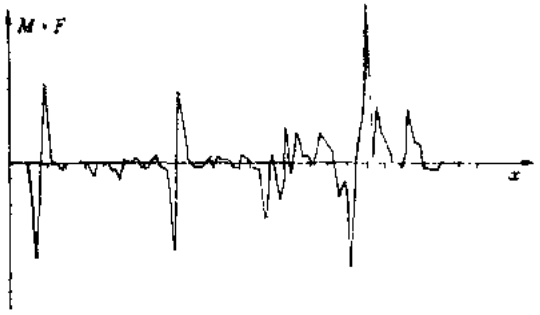


图 3.1—6 胶东ΔT_z剖面乘积公式增强弱信号

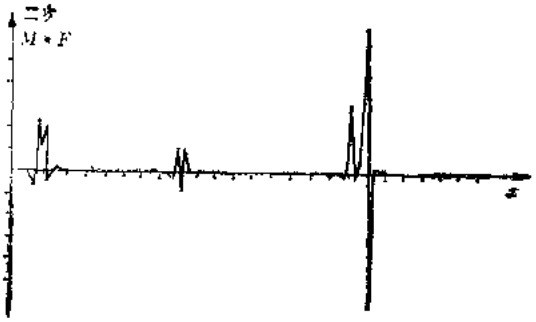


图 3.1—7 胶东ΔT_z剖面二次希尔伯特增强弱信号

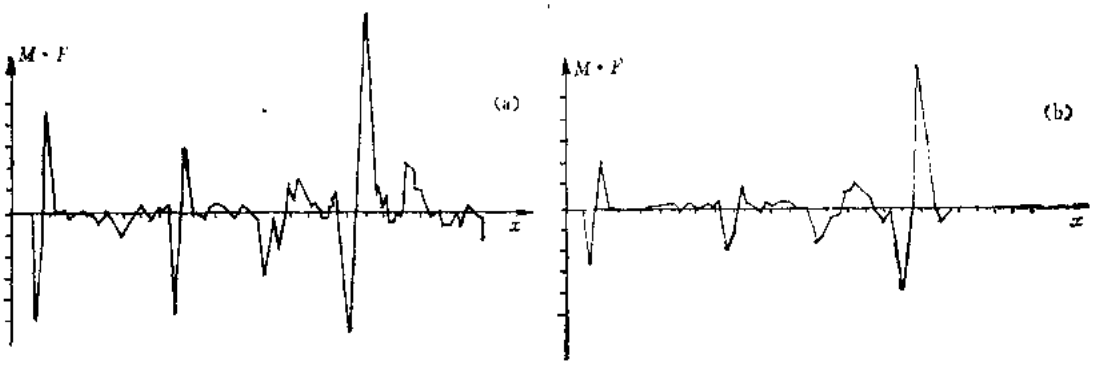


图 3.1—8 不同窗口大小的希尔伯特增强弱信号
（a）5点窗、（b）7点窗

前，应用希尔伯特变换增强弱磁异常的工作还只停留在定性分析阶段，如何使其能定量化还有待进一步研究。

§2 二度体磁异常快速自动反演方法

大面积航磁资料解释需要大量反演深度参数，以此来确定磁性基底、磁性岩体和构造位置。近年来开始发展了应用微机对磁异常剖面自动反演深度的技术，可反演出剖面内一系列深度点，再结合地质或其它地球物理资料勾绘地质断面；也可用此深度资料作初值，

提供最优化反演作初始模型之用。磁异常剖面自动反演方法有沃纳（Werner）反褶积法、总梯度模法以及利用磁异常各参量不同组合的反演方法等。这些方法已开始在我国油气航磁确定构造和磁性基底深度中应用，并取得了较好的效果。

一、沃纳反褶积法

该方法最早由Werner（1953）提出[6]，后经Hartman（1971）、Jain(1976)、Stanly（1977）等的进一步工作使之能用于实际解释。近年来由Chao C. Ku和John A. Sharp进一步把该方法与马奎特最优化反演方法相结合用计算机自动反演使之更加完善[5]。

（一）基本原理

已知直立无限延深薄脉磁异常Z_a、H_a和ΔT的表达式为

$$Z_a=2b\frac{M_z h-M_x x}{x^2+h^2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \tag{3.2—1}$$

$$H_a=-2b\frac{M_x h+M_z x}{x^2+h^2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \tag{3.2—2}$$

$$\Delta T=\frac{Ax+Bh}{x^2+h^2} \tag{3.2—3}$$

式中，b为脉宽，h为薄脉埋深，M_x为磁化强度M的x分量，M_z为M的z分量，

$$A=-2b(M_x\sin I+M_z\cos I\sin\alpha)\frac{\mu_0}{4\pi} \tag{3.2—4}$$

$$B=2b(-M_x\cos I\sin\alpha+M_z\sin I)\frac{\mu_0}{4\pi} \tag{3.2—5}$$

I为正常地磁倾角，α为薄脉走向与磁北夹角。解（3.2—4）、（3.2—5）式可得

$$M_z=\frac{-BP-AQ}{2b(P^2+Q^2)} \tag{3.2—6}$$

$$M_x=\frac{-AP+BQ}{2b(P^2+Q^2)} \tag{3.2—7}$$

其中 $P=\cos I\sin\alpha\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)$；$Q=\sin I\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)$。

现以ΔT异常为例讨论反褶积方法。若坐标原点有任意横坐标x_0，则（3.2—3）式可改写为

$$\Delta T=\frac{A(x-x_0)+Bh}{(x-x_0)^2+h^2} \tag{3.2—8}$$

经运算后可得

$$a_0+a_1x+b_0\Delta T+b_1x\Delta T=x^2\Delta T \tag{3.2—9}$$

式中 $$a_0=-Ax_0+Bh,\ a_1=A,\ b_0=-x_0^2-h^2,\ b_1=2x_0 \tag{3.2—10}$$

若有一个等间隔的四点沃纳算子，选其中第二点作为参考点，则有

$$\Delta T_1=\Delta T(x-\Delta x,\ 0),\qquad \Delta T_2=\Delta T(x,\ 0),$$

$$\Delta T_3=\Delta T(x+\Delta x,\ 0),\qquad \Delta T_4=\Delta T(x+2\Delta x,\ 0)$$

其中，x是算子第二点的横坐标，Δx是算子中相邻两点的距离。若把ΔT_1—ΔT_4分别代入（3.2—9）式，可得一个四阶线性方程组，则有关系式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & \Delta T_1 & -\Delta T_1 \\ 1 & 0 & \Delta T_2 & 0 \\ 1 & 1 & \Delta T_3 & \Delta T_3 \\ 1 & 2 & \Delta T_4 & 2\Delta T_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta T_1 \\ 0 \\ \Delta T_3 \\ 4\Delta T_4 \end{bmatrix} \tag{3.2—11}$$

由于以第二点为参考点，且Δx为一个单位，故上式无长度量纲。(3.2—11) 式中a_0、a_1、b_0、b_1是未知数，若已知ΔT_1—ΔT_4，则解此式即可求出a_0、a_1和b_0、b_1。进一步用下式便可求出所需参数x_0、h和M_x、M_z等

$$\begin{cases} x_0 = 0.5 b_1 \\ h = \sqrt{-b_0 - 0.25 b_1^2} \end{cases} \tag{3.2—12}$$

又因$A = a_1$，$B = \frac{1}{h}(a_0 + 0.5 a_1 b_1)$，将其代入 (3.2—6)、(3.2—7) 可得

$$\begin{cases} M_z = \dfrac{(2a_0 + a_1 b_1) Q - 2 a_1 h P}{4bh(P^2 + Q^2)} \\ M_x = -\dfrac{(2a_0 + a_1 b_1) P + 2 a_1 h Q}{4bh(P^2 + Q^2)} \end{cases} \tag{3.2—13}$$

最后换算得到以实际长度表示Δx后的几何参数和磁性参数计算式

$$\text{(脉水平位置)} x_0 = 0.5 b_1 \Delta x + x \tag{3.2—14}$$

$$\text{(脉埋深)} \quad h = \sqrt{-b_0 - 0.25 b_1^2}\ \Delta x \tag{3.2—15}$$

$$\text{(磁化率)} \quad \kappa = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_z^2}}{|T_0|}, \ |T_0| \text{为正常磁场模} \tag{3.2—16}$$

其中M_x、M_z是由 (3.2—15) 表达的h代入 (3.2—13) 计算而得，下同。

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{M_x}{M_z}\right) \tag{3.2—17}$$

有几点需要指出，①h为实数，必需满足条件$-b_0 - 0.25 b_1^2 > 0$，该条件与沃纳算子的尺度有关，若算子选得太小，使得决定算子尺度的四点位于异常的线性段，则由此计算的深度偏大；反之若算子取得太大，则包含了相邻异常影响，致使计算结果不正确甚至不满足实数条件。沃纳算子尺度的最佳选择应在单峰异常以内并且足够小，但又要充分覆盖异常的斜率变化段及曲线的弯曲部分，使之满足h为实数的条件，其选择要视异常的实际情况而定。②由 (3.2—6)、(3.2—7) 和 (3.2—16) 式可见，要求出磁化率必须已知脉宽b；反之，要求出脉宽必须已知磁化率。③ (3.2—17) 式给出的是有效磁化强度与垂直方向(直立脉)的夹角，对于倾斜脉则有$\gamma = \operatorname{arctg}\left(\frac{M_\perp}{M_{/\!/}}\right)$，式中$M_\perp$为垂直于脉体倾向的有效磁化强度分量，$M_{/\!/}$为平行于脉体倾向的分量，故$\gamma$角为有效磁化强度方向与倾向之间的夹角。若已知有效磁化倾角I_0，则可求出脉体倾角$\alpha' = \gamma + I_0$。④在倾斜脉情况下，脉的顶宽b'与真宽b有关系$b = b' \sin\alpha'$，在计算磁化率时需给定b。

考虑到接触带的$\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$曲线相当于接触面处存在一产状和埋深与接触面相同的薄脉体的ΔT曲线，故可把无限延深接触带的$\frac{\partial \Delta T}{\partial x}$曲线当作薄脉的$\Delta T$曲线用上述方法作反演，其过

程完全相同。

为了计算水平梯度异常，可以采用7点拉格朗日插值公式，若顺序取 x_1、x_2、…、x_7 点，相应的异常值为ΔT_1、ΔT_2、…、ΔT_7，取等间隔$\Delta x=(x_7-x_6)=(x_6-x_5)=\cdots=(x_2-x_1)=1$，则可得$x=x_4$时的水平梯度值为[5]

$$\frac{d\Delta T(x_4)}{dx}=0.0166667(\Delta T_7-\Delta T_1)-0.15(\Delta T_6-\Delta T_2)+0.75(\Delta T_5-\Delta T_3) \qquad (3.2-18)$$

利用上述7点公式即可计算出$\Delta T(x)$的水平导数异常。

（二）多项式干扰背景的消除

在薄脉情况下而又存在多项式干扰背景时，仍可采用沃纳反褶积方法使非线性磁异常化为线性方程组，以简化反演问题。若设干扰背景为二次多项式 $C_0+C_1x+C_2x^2$，则有

$$\Delta T=\frac{A(x-x_0)+Bh}{(x-x_0)^2+h^2}+C_0+C_1x+C_2x^2 \qquad (3.2-19)$$

经整理后有

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+b_0\Delta T+b_1x\Delta T=x^2\Delta T \qquad (3.2-20)$$

式中 $a_0=-Ax_0+Bh+C_0h^2+C_0x_0^2$；$a_1=A-2C_1x_0+C_1h^2+C_1x_0^2$；

$a_2=C_0-2C_1x_0+C_2x_0^2+C_2h^2$　$a_3=C_1-2C_2x_0$；　$a_4=C_2$；

$b_0=-x_0^2-h^2$；　$b_1=2x_0$

（3.2—20）式表示含有七个未知数的线性方程，若代入七个已知的ΔT值及其相应的横坐标x，则可列出线性方程组，并解出下列未知数

$$\begin{cases} x_0=0.5b_1,\ h=\sqrt{-b_0-x_0^2} \\ C_2=a_4,\quad C_1=a_3+2x_0C_2=a_3+2a_4x_0 \\ C_0=a_2+2C_1x_0-C_2x_0^2-C_2h^2 \\ A=a_1+2C_0x_0-C_1h^2-C_1x_0^2 \\ B=\dfrac{1}{h}[a_0+Ax_0-C_0h^2-C_0x_0^2] \end{cases} \qquad (3.2-21)$$

当求出A、B后，便可利用（3.2—6）、（3.2—7）式计算M_x、M_z。

下面进一步讨论消除干扰背景。首先用（3.2—21）式计算出C_0、C_1、C_2，然后代入干扰多项式$C_0+C_1x+C_2x^2$，计算出干扰背景近似值，并由ΔT值中减去该值得到第一次消除干扰背景后的异常值，再用这个一次值作七点沃纳反褶积反演计算出新的C_0、C_1、C_2，由此，再算出新的干扰背景值，并由第一次消除干扰的异常值中减去新的干扰背景，得到第二次消除干扰后的异常值，如此不断迭代直至C_0、C_1、C_2接近于零为止。

为检验七点反褶积方法的效果，引用文献[5]的例子，取一直立薄脉理论模型示于图3.2—1脉深1829m、宽914m，取样间隔46m，薄脉ΔT异常范围约120个取样间隔，沃纳算子的间距为6个取样间隔，故沃纳七点算子的总尺度为$(7-1)\times6=36$个取样间隔，约为异常宽度的0.3倍。在反演时自左至右顺序滑动沃纳算子，每滑动一次得到一组反演参数，其结果分别示于图3.2—1(a)、(b)、(c)，图中十字线交点表示脉顶位置，直线段方向表示脉的倾向，长度表示磁化率大小。由图可见多组反演结果重合较好，特别是存在线性背景干扰情况下，用七点沃纳算子作迭代计算得到的结果更为精确。

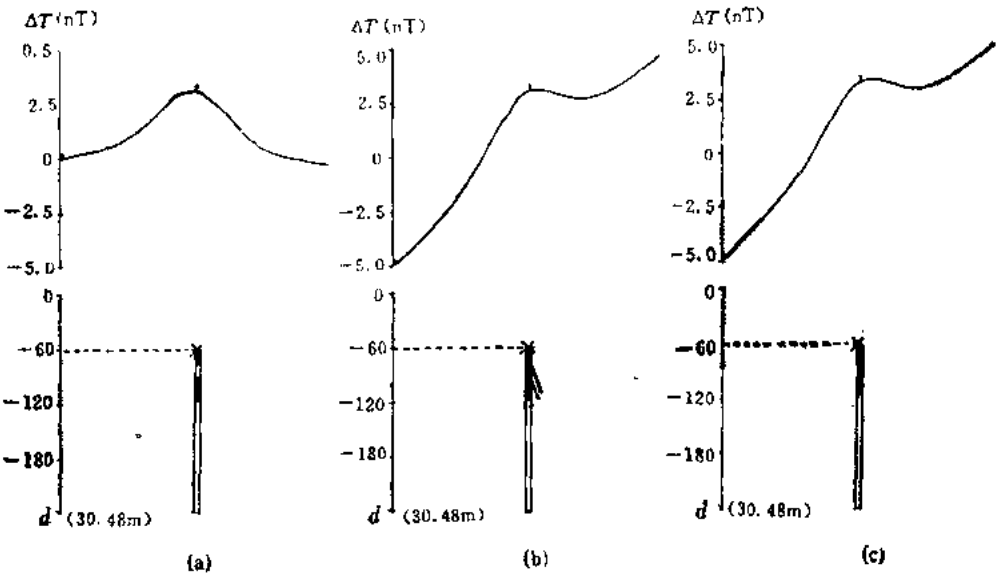


图 3.2—1 (a)应用七点沃纳算子于直立薄脉磁异常，(b)应用七点沃纳算子于存在线性背景场的薄脉磁异常（未作数值迭代），(c)相当于图(b)情况作二次迭代

若在（3.2—19）式中以 n 次干扰背景多项式代替二次多项式，则可得到更一般的情况，但随着次数的增加，反演的参数将增加因而可能降低解的精度，因此一般还是取二次多项式即可。

（三）起伏地形情况的反演

文献● 把沃纳法推广到起伏地形情况。通过地形最高点作一水平线，设为深度参数线，见图3.2—2。薄脉相对参考线的埋深为 h_0，地形上任意点相对参考线降低的高度为 Δh_i，则薄脉相对地形点的埋深为 $h_0-\Delta h_i$，其中 Δh_i 随地形起伏而变化。由此可列出薄脉体在起伏地形上产生的磁场表达式为

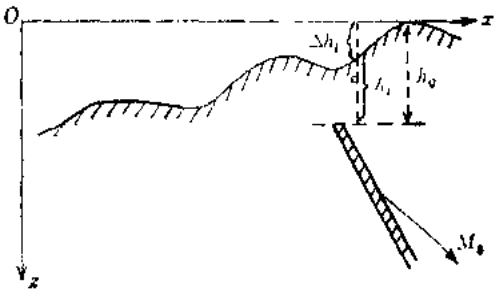


图 3.2—2 起伏地形深度参数示意图

$$\Delta T=\frac{A(x-x_0)+B(h_0-\Delta h_i)}{(x-x_0)^2+(h_0-\Delta h_i)^2}+C_0+C_1x+C_2x^2 \qquad (3.2—22)$$

式中 A、B、C_0、C_1、C_2 含义与（3.2—19）式相同。

对上式可作类似于（3.2—20）、（3.2—21）式的运算，反演出 x_0、h_0 等参数。由于干扰背景存在，需要解14阶线性方程组，要求有较长的、合适的剖面段参加反演，这在实际工作中往往难于满足。

比较简单的情况是，当不存在干扰背景时，（3.2—22）式中 $C_0=C_1=C_2=0$，则经整理后（3.2—22）式变为

$$a_1+a_2\Delta h_i+a_3x+a_4\Delta T+a_5\Delta Tx+a_6\Delta T\,\Delta h_i=\Delta Tx^2+\Delta T\,\Delta h_i^2 \qquad (3.2—23)$$

● 郭绍雍等，《航磁剖面组合函数及非水平测线上ΔT自动解释方法及软件研究》，1989。

式中 $a_1=Bh_0-Ax_0$，　$a_2=-B$，　$a_3=A$，

$a_4=-(h_0^2+x_0^2)$，$a_5=2x_0$，　$a_6=2h_0$

由此得 $x_0=0.5a_5$，$h_0=\sqrt{-a_4-0.25a_5^2}$，$h_0=a_6/2$，

$A=a_3$，$B=\dfrac{1}{h_0}(a_1+0.5a_3a_5)$

其中，a_1、a_3、a_4、a_5等值，可在（3.2—23）式中代入已知的x_i、ΔT_i、Δh_i（$i=1, 2, \cdots, m$）用最小二乘法解线性方程组得到。

（四）沃纳反演与最优化反演的联合应用

沃纳反演法对于复杂异常只能提供上顶位置的近似解，实际应用有其局限性。为此，可以采用沃纳法反演结果作初值，构制初始模型，再应用最优化方法得到详细解，这种反演方法的联合应用将提高最优化方法的效率和效果，有利于实际应用。

例如有一北东，南西理论模型剖面，由三个相邻矩形截面磁性体组成，地磁磁化场的倾角为59°，磁偏角为东偏14°，地磁场强度为50000nT，模型的ΔT及ΔT_x示于图3.2—3。首先用沃纳反演法，取3、5、8个取样间隔，每个间距为3.5的沃纳算子作反演，结果示于图3.2—3(a)，它反映了理论模型的上顶位置。图3.2—3(b)表示马奎特最优化反演结果，其中由沃纳法反演建立的初始模型的角点用“·”表示（下角点由其它资料估计给出），由初始模型正演的ΔT场用小圆圈点表示，马奎特最优化反演结果用“×”号表示。仅用四次迭代即收敛于理论值，对比图3.2—3(a)和(b)中的模型体可见两者较一致，表明这种联合应用的有效性。

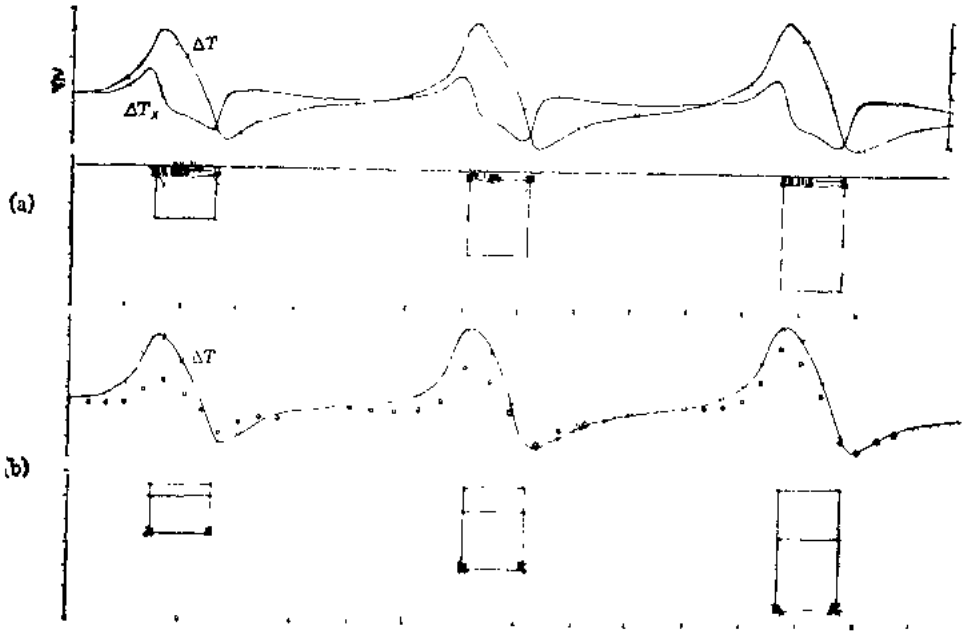


图 3.2—3 (a)由三个模型体叠加磁异常ΔT的沃纳反演，并用ΔT_x反演解来改善模型源的水平位置和磁化率；(b)用沃纳法建立初始模型，再用马奎特最优化法使模型精确化。初始模型角点用“·”表示，精确化模型用“×”表示

（五）垂直梯度磁异常的沃纳反演方法

文献[7]把沃纳反演法推广用于垂直梯度磁异常 ΔT_z。无限延深二度厚板状体的 ΔT_z 表达式为

$$\Delta T_z=-2\frac{\mu_0 M}{4\pi}cd\sin\alpha\left[\frac{(x-x_0-b)\sin\theta+h\cos\theta}{(x-x_0-b)^2+h^2}\right.$$
$$\left.-\frac{(x-x_0+b)\sin\theta+h\cos\theta}{(x-x_0+b)^2+h^2}\right] \qquad (3.2—24)$$

其中，M为总磁化强度，α为脉体倾角，h为顶面埋深，x_0为脉体顶面中心横坐标，b为脉半宽度，$\theta=i_s+I_s-\alpha$，（i_s为M在剖面内投影M_s的倾角，I_s为正常地磁场T在剖面内投影T_s的倾角）。i为总磁化强度倾角，I为地磁场倾角，λ为M水平投影与x轴的偏角，A为磁北与x轴的磁偏角。各参量见图3.2—4所示。

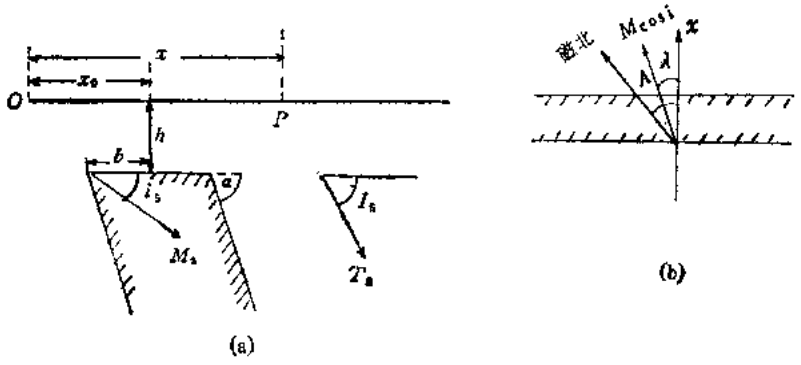


图 3.2—4 厚脉状体示意图

(a)剖面图；(b)平面图

由图可知 $$\mathrm{tg}i_s=\mathrm{tg}i/\cos\lambda$$

$$c^2=(\sin^2 i+\cos^2 i\cos^2\lambda),\quad d^2=(\sin^2 I+\cos^2 I\cos^2 A)$$

（3.2—24）式可改写为

$$\Delta T_z=-2bK'\frac{\{[(x-x_0)^2-h^2-b^2]\sin\theta+2h\cos\theta(x-x_0)\}}{[h^2+(x-x_0+b)^2][h^2+(x-x_0-b)^2]} \qquad (3.2—25)$$

式中 $K'=2\frac{\mu_0 M}{4\pi}cd\sin\alpha$，经移项运算后可得

$$x^4\Delta T_z+C_1x^3\Delta T_z+C_2x^2\Delta T_z+C_3x\Delta T_z+C_4\Delta T_z+C_5x^2+C_6x+C_7=0 \qquad (3.2—26)$$

其中
$$\begin{cases}C_1=-4x_0, & C_2=2h^2+6x_0^2-2b^2\\ C_3=4x_0(b^2-h^2-x_0^2), & C_4=(h^2+x_0^2+b^2)^2-4x_0^2b^2\\ C_5=-Pb, & C_6=2b(-Px_0+Qh)\\ C_7=Pbx_0^2-Pbh^2-Pb^3-2Qbhx_0\end{cases} \qquad (3.2—27)$$

同时有： $$P=2K'\sin\theta,\quad Q=2K'\cos\theta$$

利用剖面上 7 个测得的ΔT_{zi}值及其坐标 x_i 代入（3.2—26）式列出线性方程组可以解出C_1—C_7。由（3.2—27）式求出

$$x_0=-C_1/4$$

由（3.2—27）式的C_2与C_4式得

$$4h^4+2h^2(6x_0^2-C_2)+2x_0^2(2x_0^2-C_2)+C_2^2/4-C_4=0 \qquad (3.2—28)$$

C_2、C_1、x_0已知，解出h，再利用（3.2—27）的C_2式求b

$$b=[(2h^2+6x_0^2-C_2)/2]^{1/2} \tag{3.2—29}$$

由（3.2—27）的C_5和C_6式得

$$P=-C_5/b,\quad Q=(2bPx_0+C_6)/2bh$$

故可求出

$$\theta=\operatorname{arctg}(P/Q) \tag{3.2—30}$$

若已知i_s和I_s则可求$\alpha=I_s+i_s-\theta$，利用i、λ和I、A表达的c、d式计算出c、d值，并考虑正常地磁场强度T后可求磁化率：$\kappa=\dfrac{4\pi}{I'_0}[P/(4cd\sin\alpha\sin\theta T)]$

当存在线性变化的区域垂直梯度背景场G_1+G_0时，若局部垂直梯度场为G，则观测的综合梯度场为G_m有

$$G_m=G+G_1x+G_0$$

且可对G_m作类似于（3.2—26）式的运算并利用其解出的C_1—C_7个系数作区域场改正与反演。

二、磁异常总梯度模反演法

设二度磁异常总梯度模$\Delta F_G=(\Delta F_z^2+\Delta F_x^2)^{1/2}$，这里以$\Delta F$泛指$\Delta T$、$Z_a$、$H_a$。由于$\Delta F_G$特征与磁化方向无关，其表达式较$\Delta F$简单，故便于用来对规则形体作反演。本节以文献[8]提出的剖面ΔT_G^2自动反演方法为重点进行讨论。

（一）总梯度模自动反演法

1．磁异常总梯度模特征与磁化方向无关

已知任意截面S的均匀磁化二度体，在体外任意点沿t方向的磁场为

$$T_t=\frac{I'_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[M\left(L\iint_S\frac{\partial}{\partial x}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS+N\iint_S\frac{\partial}{\partial z}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right)\right] \tag{3.2—31}$$

式中，M为磁化强度，$L=\cos I\cos A$，$N=\sin I$，I为$\boldsymbol{M}$的倾角，A为$\boldsymbol{M}$的水平投影与x轴的夹角，r为剖面内观测点到磁性体内点的距离，在（3.2—31）式中令t为x、z方向则可得

$$H_a=\frac{I'_0}{4\pi}M\left(L\iint_S\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS+N\iint_S\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right) \tag{3.2—32}$$

$$Z_a=\frac{I'_0}{4\pi}M\left(L\iint_S\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS+N\iint_S\frac{\partial^2}{\partial z^2}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right) \tag{3.2—33}$$

又知在地磁场中，总强度磁异常与Z_a、H_a关系式为

$$\Delta T=lH_a+nZ_a$$

$$\Delta T_x=l\frac{\partial}{\partial x}H_a+n\frac{\partial}{\partial x}Z_a \tag{3.2—34}$$

$$\Delta T_z=l\frac{\partial}{\partial z}H_a+n\frac{\partial}{\partial z}Z_a \tag{3.2—35}$$

式中，l、n为地磁场T_0分别对x，z轴的方向余弦。将（3.2—32）、（3.2—33）式代入（3.2—34）、（3.2—35）式得

$$\Delta T_x=\frac{\mu_0}{4\pi}M\left\{(Ll-Nn)\iint_S\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS-(ln+Nl)\iint_S\frac{\partial^3}{\partial z^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right\}$$

$$\Delta T_z=\frac{\mu_0}{4\pi}M\left\{-(Ll-Nn)\iint_S\frac{\partial^3}{\partial z^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS-(Ln+Nl)\iint_S\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right\}$$

$$\Delta T_G^2=\Delta T_x^2+\Delta T_z^2=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2M^2C^2\left\{\left[\iint_S\frac{\partial^3}{\partial x^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right]^2+\left[\iint_S\frac{\partial^3}{\partial z^3}\ln\left(\frac{1}{r}\right)dS\right]^2\right\}\qquad(3.2-36)$$

式中 $C=\sqrt{(l^2+n^2)(L^2+N^2)}=\sqrt{(\cos^2I\cos^2A+\sin^2I)(\cos^2I_0\cos^2A_0+\sin I_0)}$

其中，I_0为T_0的倾角、A_0为T_0的水平投影与x轴的夹角。由（3.2—36）式可见，ΔT_G^2与磁化强度及其方向仅是乘系数的关系，只影响ΔT_G^2的幅值，而不影响其形态，故可以认为ΔT_G^2的特性与磁化方向无关。

2．几种规则形体的反演公式

（1）岩脉

设x_0为脉体顶面中心在x轴上的投影，$2b$为脉宽，h为脉顶埋深，M_s为有效磁化强度，i为有效磁化倾角，I_0为地磁倾角，则在$P(x,\ 0)$点的磁场为

$$\Delta F=C_F\left[\left(\operatorname{arctg}\frac{(x-x_0+b)}{h}-\operatorname{arctg}\frac{(x-x_0-b)}{h}\right)\cos\theta_F+\left(\frac{1}{2}\ln\frac{(x-x_0+b)^2+h^2}{(x-x_0-b)^2+h^2}\right)\sin\theta_F\right]\qquad(3.2-37)$$

其中C_F、θ_F与不同分量场的对应值见表3.2—1，表中α为脉体倾角。

表 3.2—1

ΔF	θ_F	C_F
Z_a	$-(\alpha-i)$	$2M_s\sin\alpha\frac{\mu_0}{4\pi}$
H_a	$270°-(\alpha-i)$	$2M_s\sin\alpha\frac{\mu_0}{4\pi}$
ΔT	$270°-(\alpha-2i)$	$2M_s\sin\alpha\frac{\sin I}{\sin i}\frac{\mu_0}{4\pi}$

前已指出$\Delta F_G^2=\Delta F_x^2+\Delta F_z^2$，$\Delta F_x$、$\Delta F_z$为$\Delta F$的水平导数和垂直导数，经对（3.2—37）式运算后可得

$$\Delta F_G^2=C_F^2\cdot4b^2/[(x-x_0+b)^2+h^2][(x-x_0-b)^2+h^2]\qquad(3.2-38)$$

分母相乘并移项整理后可得

$$C_1\Delta F_G^2+C_2\Delta F_G^2x^2+C_3+\Delta F_G^2x^4+C_4\Delta F_G^2x+C_5\Delta F_G^2x^3=0\qquad(3.2-39)$$

式中

$$C_1=x_0^4-2x_0^2b^2+b^4+2h^2x_0^2+2h^2b^2+h^4,$$

$$C_2=6x_0^2-2b^2+2h^2,\quad C_3=-4C_F^2b^2,$$

$$C_4=-4x_0^3+4x_0b^2-4h^2x_0,\quad C_5=-4x_0$$

由C_1—C_5方程组可解出

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{C_5}{4} \\ h = \sqrt{\dfrac{(C_1+5x_0^4-C_2x_0^2)^{1/2}+\dfrac{C_2}{2}-3x_0^2}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{(C_1+5x_0^4-C_2x_0^2)^{1/2}-\dfrac{C_2}{2}+3x_0^2}{2}} \\ C_F = \sqrt{\dfrac{-C_3}{4b^2}} \end{cases} \tag{3.2—40}$$

对于脉体来说，ΔF_G^2极大值点横坐标即为x_0，若用此准则先找出ΔF_G^2极大值点的坐标x_0，再以x_0为坐标原点，即$x_0=0$，以此为起算点，则（3.2—39）式可变为

$$C_1\Delta F_G^2 + C_2\Delta F_G^2 x^2 + C_3 + \Delta F_G^2 x^4 = 0 \tag{3.2—41}$$

其中 $C_1=(b^2+h^2)^2$、 $C_2=-2b^2+2h^2$， $C_3=-4C_F^2b^2$

由此可以解出

$$\begin{cases} h = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{C_1}+C_2/2)}{2}} \\ b = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{C_1}-C_2/2)}{2}} \\ C_F = \sqrt{\dfrac{-C_3}{4b^2}} \end{cases} \tag{3.2—42}$$

至此可知，由实测ΔF计算出ΔF_G^2，从ΔF_G^2曲线任取5点值代入（3.2—39）式解得C_1—C_5，再由（3.2—40）式求解出x_0、h、b、C_F等参数。若已求出x_0，则可用（3.2—41）式求C_1、C_2、C_3，再由（3.2—42）式求h、b、C_F参数。后者仅需利用3个点上的ΔF_G^2求解，故较前者简便。

（2）接触带

如图3.2—5所示，x_0为接触带上顶点在测线上的投影坐标，H为下底面深度，h为上顶面深度，它在地面产生的磁场为

$$\Delta F = C_F[(\phi_A-\phi_B)\cos\theta_F + \ln(r_B/r_A)\sin\theta_F] \tag{3.2—43}$$

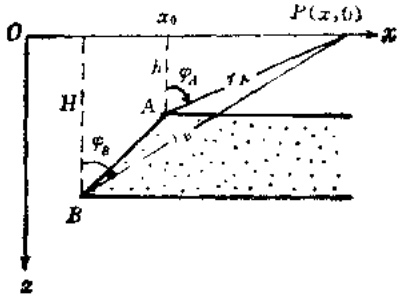


图 3.2—5 有限延深接触带

表 3.2—2

ΔF	θ_F	C_F
Z_a	$\alpha-i$	$2M_a\sin\alpha\dfrac{\mu_0}{4\pi}$
H_a	$90°+\alpha+i$	$2M_a\sin\alpha\dfrac{\mu_0}{4\pi}$
ΔT	$90°+\alpha-2i$	$2M_a\sin\alpha\dfrac{\sin I}{\sin i}\dfrac{\mu_0}{4\pi}$

式中：$\phi_A=\text{arctg}[(x-x_0)/h]$，　$\phi_B=\text{arctg}\{[(x-x_0)-(H-h)\text{ctg}\alpha]/H\}$，

$$r_B^2=[(x-x_0)-(H-h)\text{ctg}\alpha]^2+H^2,\quad r_A^2=(x-x_0)^2+h^2,$$

其中C_F、θ_F与不同分量的对应值见表3.2—2。

当$\alpha=90°$时，变为垂直接触带如图 3.2—6所示，这时

$$\phi_A=\text{arctg}[(x-x_0)/h],$$

$$\phi_B=\text{arctg}[(x-x_0)/H],$$

$$r_A^2=(x-x_0)^2+h^2,$$

$$r_B^2=(x-x_0)^2+H^2,$$

以$H=h'+l$、$h=h'-l$代入ΔF表达式（3.2—43），则有

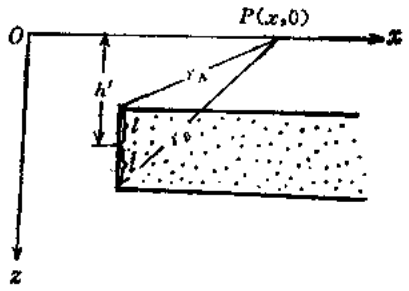


图 3.2—6　垂直接触带

$$\Delta F_G^2=\Delta F_x^2+\Delta F_z^2=\frac{4C_F^2l^2}{[(x-x_0)^2+(h'+l)^2][(x-x_0)^2+(h'-l)^2]}\qquad(3.2—44)$$

若用ΔF_G^2极大值的横坐标点找出x_0，以x_0为原点，则（3.2—44）式可化成

$$C_1\Delta F_G^2+C_2\Delta F_G^2x^2+C_3+\Delta F_G^2x^4=0\qquad(3.2—45)$$

其中　　$C_1=(h'^2-l^2)^2$，$C_2=2(h'^2+l^2)$，$C_3=-4C_F^2l^2$

由C_1—C_3解得

$$\begin{cases}h'=\sqrt{(\sqrt{C_1}+C_2/2)\ 2}\\ l=\sqrt{(C_2/2-\sqrt{C_1})\ /2}\\ C_F=\sqrt{-C_3/4l^2}\end{cases}\qquad(3.2—46)$$

当$H\to\infty$，变为无限延深接触带，这时有

$$\Delta F_G^2=\Delta F_x^2+\Delta F_z^2=\frac{C_F^2}{(x-x_0)^2+h^2}\qquad(3.2—47)$$

将（3.2—47）式化成

$$C_1\Delta F_G^2+C_2\Delta F_G^2x+C_3+\Delta F_G^2x^2=0\qquad(3.2—48)$$

其中　　$C_1=x_0^2+h^2$，$C_2=-2x_0$，$C_3=-C_F^2$

求解得：$x_0=-C_2/2$，　$h=\sqrt{C_1-C_2^2/4}$，　$C_F=\sqrt{-C_3}$　　(3.2—49)

3．反演步骤

（1）计算ΔF_G^2函数

由实测磁异常ΔF，通过三次样条求一阶水平导数ΔF_x，再由ΔF_x通过希尔伯特变换求取垂直导数ΔF_z，利用$\Delta F_G^2=\Delta F_x^2+\Delta F_z^2$计算出$\Delta F_G^2$曲线。也可由实测梯度异常$\Delta F_z$（或$\Delta F_x$）直接经过希尔伯特变换求取$\Delta F_x$（或$\Delta F_z$），再构成$\Delta F_G^2$。

（2）消除干扰峰值

在利用ΔF_G^2求取磁性体有关参数时，必须先消除干扰峰值，否则将导致反演结果不合理。为消除干扰峰值而引入两个关系量

$$x_{0k}=|x_0'-x_k'|\quad 及\quad Z_k=-\frac{p_0}{p_k}$$

式中$k=1$，2，其符号如图3.2—7所示。满足如下条件的峰值，视为干扰峰值，即

$$x_{0k}<x_0 \quad 及 \quad Z_k<Z_0$$

式中，x_0、Z_0为给定的干扰水平。

（3）选取合适的窗口

由（3.2—41）、（3.2—45）、（3.2—48）式可知，一般情况下，只需三个 ΔF_G^a 值就能

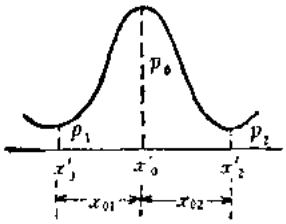


图 3.2—7 干扰水平定义

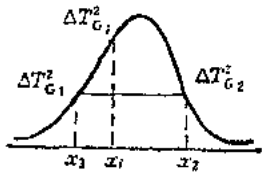


图 3.2—8 窗口的定义

解出 C_1、C_2、C_3。但这里为了提高解的精度采用多点最小二乘求解。为了减少相邻源影响，选择合适的窗口，使窗口内的点受相邻源的影响小并参加反演，如图3.2—8所示，选 x_1—x_2范围，使ΔF^a_{Gk}（x_k，0）$=T\cdot\Delta F^a_{G_{max}}$，$T$为一分数，$k=1$，2，选取 $\Delta F^a_{Gi}(x_i, 0)\geqslant \Delta F^a_{Gk}$（$x_k$，0）的点作反演，用最小二乘法、求解矛盾方程组，从而得到C_1、C_2、C_3的最小二乘解。

（4）确定磁性体深度及位置

求出C_1、C_2、C_3的最小二乘解后，再分别代入（3.2—42）、（3.2—46）、（3.2—49）式即可求出不同形体的深度及位置参数。

上述过程可对磁测剖面逐条在微机上自动进行，反演得到的剖面内深度点分布图可供进一步解释用。

4．理论模型验证

对薄板、厚板、组合板和垂直接触带等四种模型进行了ΔT^a_G曲线的正演，结果示于图3.2—9中，其中板顶埋深h、板半宽度b、延深L、板顶中心投影x_0的单位均为m，板的倾角α，地磁倾角I，有效磁化倾角i的单位为度，磁化强度M的单位为10^{-2}A/m。

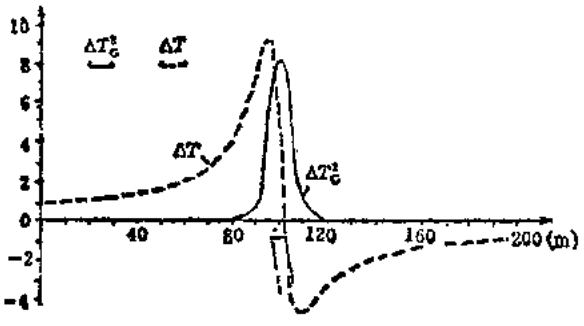


图 3.2—9 薄板（$h=6$、$b=3$、$\alpha=80°$、$x_0=100$、$M=200\cdot10^{-2}$A/m、$I=57°$）

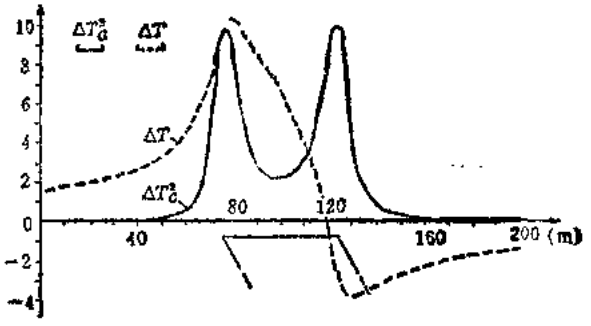


图 3.2—10 厚板（$h=6$、$b=24$、$\alpha=60°$、$x_0=100$、$M=200\cdot10^{-2}$A/m、$I=57°$）

由图3.2—9、3.2—10、3.2—12可见ΔT^a_G曲线呈单峰，极大值对应于脉顶的中心或垂直接触面位置。当$b>h$时ΔT^a_G由单峰变为双峰，两峰位于厚板顶部边缘。无论是$b>h$或

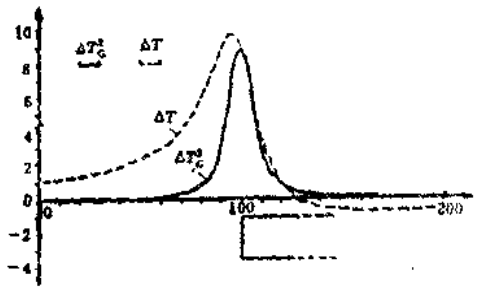


图 3.2—11 垂直接触带

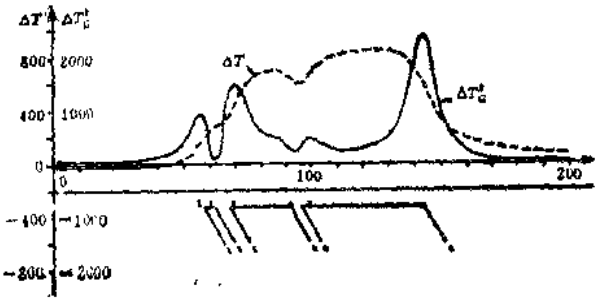


图 3.2—12 组合板

是$\delta \leqslant h$，ΔT_G^z曲线总是对称于板顶中心投影位置，在距板边缘约3h处，ΔT_G^z值只有峰值的1%，而ΔT值约为峰值的25—30%，表明ΔT_G^z曲线的横向分辨比ΔT曲线高，这点为解决横向组合模型的反演提供了有利条件。由图3.2—11可见，当三个模型横向叠加时，ΔT曲线非常复杂，而ΔT_G^z曲线则分离得较好，各峰值与模型角点基本对应。

我们以板体组合模型（图3.2—11）为例说明反演的效果。从图可见，ΔT曲线难以分清组合模型的边界，但ΔT_G^z曲线则较清楚地反映出各板体的位置。把总梯度模自动反演的深度点绘于图3.2—11中（即板体角点附近的小黑点簇）后，可以看出，反演的深度点与板体角点吻合较好。当两个相邻板体间距为h时，经反演后得到的x_0的最大误差<1.4%，半宽度的最大误差<8.8%，深度误差<13.3%，随着两模型间距增加，误差迅速减小，当间距为2h时，反演结果中的最大误差<10%，当间距为4h时，反演结果的误差<1%。

5．实例

现以塔里木东部某测线航磁异常为例，测线长540km，(0—400)km测线示于图3.2—13中，(400—540)km测线示于图3.2—14，测线近南北向。图3.2—13所示异常比较宽缓，以2km的点距进行反演，其结果在图中以“+”号点表示，在(400—540)km之间异常范围窄，以500m的点距进行反演，结果示于图3.2—13。为了评价反演结果，还列出了快速反演、沃纳反演与切线法反演结果的对比表，从表3.2—3可以看出：三者反演的深度点沿剖面总的变化一致。

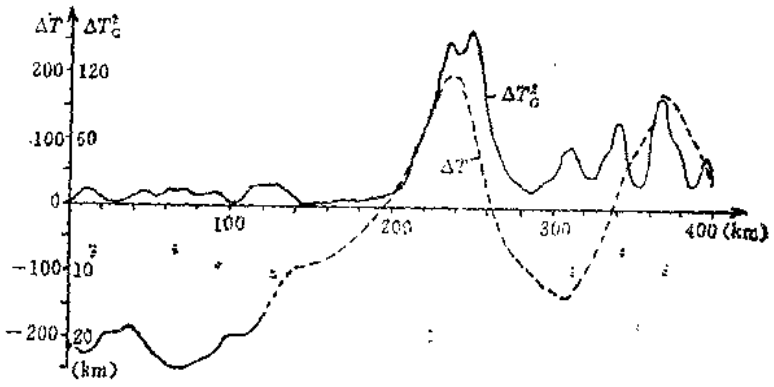


图 3.2—13 实测剖面（0—400km）ΔT、ΔT_G^z曲线及反演深度点
“·”为反演深度点的位置

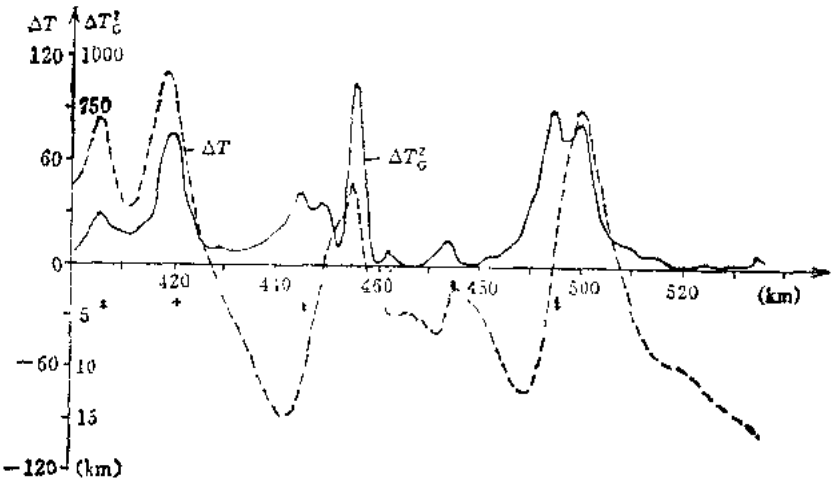


图 3.2—14　实测剖面（400—540km）ΔT、ΔT_G^z曲线及反演深度点

"+"为反演深度点的位置

表 3.2—3　三种反演方法结果对比

位置 / 深度 / 方法	14	64	92	124	250	312	342	368	406	420	446	456	462	474	495	535
沃纳	6.8		3.8 8.8		16.5 19.0	10.0	9.0	7.0 10.0	3.8	4.0	4.2	0.7	1.0	1.2	2.0 4.0	
切线法	7.6	6.8 8.0	7.8	6.0 8.6	18.0	8.0	6.4	10.2	4.5	4.4	5.0	1.2	1.6	2.0	4.0	2.6
快速反演	7.4	6.8	9.7	10.8	19.1	9.7	6.7	9.2	4.5	4.1	4.6	1.6	1.3	2.3	3.7	3.1

三、组合函数反演方法

利用磁异常Z_a、H_a、ΔT及其各阶导数的各种组合构成的新函数而进行的反演方法统称其为组合函数法。例如利用Z_a/H_a、$\Delta T_z/\Delta T$、$\Delta T_x/\Delta T$、T_a^2/Z_{aG}、$T_a^{*2}/\Delta T_G$等的组合函数，其表达式与原异常表达式相比较简单，有利于异常反演。其中$T_a=(Z_a^2+H_a^2)^{1/2}$，$Z_{aG}=(Z_{ax}^2+Z_{az}^2)^{1/2}$，$\Delta T_G=(\Delta T_z^2+\Delta T_x^2)^{1/2}$，$T_a^*=\sqrt{\Delta T^2+\Delta T_a^2}$。下面以$T_a^{*2}/\Delta T_G$为例说明其在确定薄板体中心深度时的特殊作用。

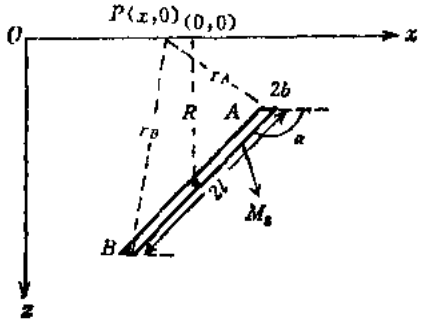


图 3.2—15　薄板体参量示意

（一）二度有限延深薄板T_a^{*2}及ΔT_G表达式

设薄板位于图3.2—15所示坐标系中，则可列出其T_a、Z_{aG}表达式

$$T_a=\frac{2C}{r_A r_B}=\frac{2C}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2(x\cos\alpha-R\sin\alpha)^2]^{1/2}} \qquad (3.2—50)$$

$$Z_{aG}=\sqrt{Z_{ax}^2+Z_{az}^2}=\frac{4C(R^2+x^2)^{1/2}}{r_A^2r_B^2}$$

$$=\frac{4C(R^2+x^2)^{1/2}}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2(x\cos\alpha-R\sin\alpha)^2]} \qquad (3.2—51)$$

式中，$C=\frac{\mu_0}{4\pi}M_s\cdot 2b\cdot 2l\sin\alpha$

设与ΔT正交的量为$\Delta T_{\blacktriangle}$，即对$\Delta T$用由$Z_a$求$H_a$的方法求出的$\Delta T_{\blacktriangle}$，则有

$T_a^*=\sqrt{\Delta T^2+\Delta T_{\blacktriangle}^2}$，$T_a(=\sqrt{Z_a^2+H_a^2})$与$T_a^*$仅差一乘系数。

则有：$$T_a^*=\frac{2C'}{r_Ar_B}=\frac{2C'}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2(x\cos\alpha-R\sin\alpha)^2]^{1/2}} \qquad (3.2—52)$$

$$\Delta T_G=\sqrt{\Delta T_x^2+\Delta T_z^2}=\frac{4C'(R^2+x^2)^{1/2}}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2(x\cos\alpha-R\sin\alpha)^2]} \qquad (3.2—53)$$

式中 $$C'=\frac{\mu_0}{4\pi}M_s\cdot 2b\cdot 2l\sin\alpha\frac{\sin I}{\sin i}$$

若令（3.2—50）、（3.2—53）式中$\alpha=0°$，并将l以b_0表示，则可得水平薄板的表达式

$$T_a=\frac{2C}{[(R^2+b_0^2+x^2)^2-4b_0^2x^2]^{1/2}} \qquad (3.2—54)$$

$$Z_{aG}=\frac{4C(R^2+x^2)^{1/2}}{[(R^2+b_0^2+x^2)^2-4b_0^2x^2]} \qquad (3.2—55)$$

$$T_a^*=\frac{2C'}{[(R^2+b_0^2+x^2)^2-4b_0^2x^2]^{1/2}} \qquad (3.2—56)$$

$$\Delta T_G=\frac{4C'(R^2+x^2)^{1/2}}{[(R^2+b_0^2+x^2)^2-4b_0^2x^2]} \qquad (3.2—57)$$

若令（3.2—50）—（3.2—53）式$\alpha=90°$，则得直立有限延深薄板表达式，例如，（3.2—52）与（3.2—53）成为

$$T_a^*=\frac{2C'}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2R^2]^{1/2}} \qquad (3.2—58)$$

$$\Delta T_G=\frac{4C'(R^2+x^2)^{1/2}}{[(R^2+l^2+x^2)^2-4l^2R^2]} \qquad (3.2—59)$$

若令（3.2—50）—（3.2—53）式中$l\to 0$，则得水平圆柱体表达式，后两式成为

$$T_a^*=\frac{2C'}{(R^2+x^2)} \qquad (3.2—60)$$

$$\Delta T_G=\frac{4C'}{(R^2+x^2)^{3/2}} \qquad (3.2—61)$$

（二）T_a^2/Z_{aG}、$T_a^{*2}/\Delta T_G$反演方法●

1．方法一

令$k=\frac{T_a^2}{Z_{aG}}$，$k^*=\frac{T_a^{*2}}{\Delta T_G}$，则由（3.2—50）—（3.2—53）式可得：$k=C/(R^2+x^2)^{1/2}$，$k^*=C/(R^2+x^2)^{1/2}$。

● 严尧基提出，这里推广到ΔT_a^*、ΔT_G。

设$r=(R^2+x^2)^{1/2}$，则有$k=C/r$，$k^*=C'/r$，在水平测线时，k、k^*为对称于纵轴的曲线，因此由曲线的极大点可以确定薄板中心在测线上的投影点位置，即坐标原点。在原点处r、k、k^*分别设为R、k_{max}、k^*_{max}，在P点处分别设为r_P、k_P、k^*_P，则有

$$k_{max}=\frac{C}{R};\qquad k^*_{max}=\frac{C'}{R} \tag{3.2—62}$$

$$k_P=\frac{C}{r_P};\qquad k^*_P=\frac{C'}{r_P} \tag{3.2—63}$$

由（3.2—62）、（3.2—63）式得

$$\frac{k_P}{k_{max}}=\frac{R}{r_P};\qquad \frac{k^*_P}{k^*_{max}}=\frac{R}{r_P} \tag{3.2—64}$$

若令$PO=d$，PO与r_P的夹角为β，见图3.2—16所示，

则有

$$\sin\beta=\frac{R}{r_P}=\frac{k_P}{k_{max}}=\frac{k^*_P}{k^*_{max}} \tag{3.2—65}$$

进一步得

$$R=d\,\mathrm{tg}\beta \tag{3.2—66}$$

由k^*_P/k^*_{max}（或k_P/k_{max}）求出β，测线上找出d代入（3.2—66）式即可求出中心深度R。

当地伏地形时，由（3.2—63）式可知，等k^*（或k）值点必有等r值，故推知起伏地形上任意两个等k^*值的测点必位于以磁性体中心为圆心的同一圆上，该圆心必位于以此二测点连线的垂直平分线上。故只需任取两对等k^*值测点的联线，分别作垂直平分线，交点即为薄板中心。

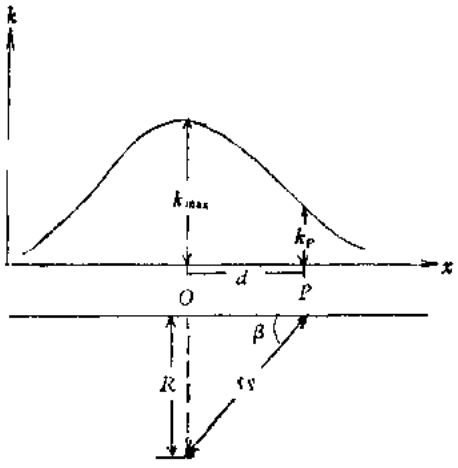


图 3.2—16 薄板参量与k^*_P的关系

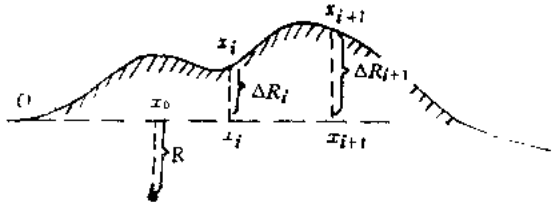


图 3.2—17 起伏地形薄板R、x_0示意图

2．方法二

在水平测线上任取x_i、k_i^*与x_{i+1}、k^*_{i+1}两点，分别代入（3.2—63）式相除得

$$k^*_{i+1}/k^*_i=(x_i^2+R^2)^{1/2}/(x^2_{i+1}+R^2)^{1/2}$$

解得

$$R=\sqrt{\frac{x_i^2k_i^{*2}-x^2_{i+1}k^{*2}_{i+1}}{k^{*2}_{i+1}-k_i^{*2}}} \tag{3.2—67}$$

当取$x_i=0$时有

$$R=\sqrt{\frac{x^2_{i+1}k^{*2}_{i+1}}{k^{*2}_{max}-k^2_{i+1}}} \tag{3.2—68}$$

当地形起伏时，如图3.2—17所示情况下，可列出如下关系式

$$\left(\frac{k_{i+1}^{*}}{k_i^{*}}\right)^2=\frac{(x_i-x_0)^2+(R+\Delta R_i)^2}{(x_{i+1}-x_0)^2+(R+\Delta R_{i+1})^2}$$

移项整理得

$$(x_0^2+R^2)(k_{i+1}^{*2}-k_i^{*2})+R[2(k_{i+1}^{*2}\Delta R_{i+1}-k_i^{*2}\Delta R_i)]-x_0[2(k_{i+1}^{*2}x_{i+1}-k_i^{*2}x_i)]$$
$$+[(k_{i+1}^{*2}x_{i+1}^2-k_i^{*2}x_i^2)+(\Delta R_{i+1}^2k_{i+1}^{*2}-\Delta R_i^2k_i^{*2})]=0$$

改写为

$$C_1(k_{i+1}^{*2}-k_i^{*2})+C_2(k_{i+1}^{*2}\Delta R_{i+1}-k_i^{*2}\Delta R_i)+C_3(k_{i+1}^{*2}x_{i+1}-k_i^{*2}x_i)$$
$$+[(k_{i+1}^{*2}x_{i+1}^2-k_i^{*2}x_i^2)+(\Delta R_{i+1}^2k_{i+1}^{*2}-\Delta R_i^2k_i^{*2})]=0 \qquad (3.2\text{—}69)$$

其中 $C_1=(x_0^2+R^2)$， $C_2=2R$， $C_3=-2x_0$

解（3.2—69）式求出C_1、C_2、C_3，最后求得x_0、R。

§3 视磁化强度填图方法

利用大面积磁测资料进行视磁化强度（或视磁化率）填图，是本世纪80年代发展起来的一种区域磁测资料解释方法。它把地质体的磁场信息转化为磁性信息，从而能更好地反映地质特征，更有效地解决地质填图中的有关问题。利用视磁化强度图（或视磁化率图）可以划分磁性岩层，确定磁性岩体的边界，突出地质构造单元界线及解决有关地质构造和找矿问题。

根据磁异常换算磁性资料，只有在磁源的几何形状和位置已知情况下，而且磁化强度仅仅是水平坐标的函数，或沿深度呈指数函数变化时才有可能得到真实的结果。实际工作中，这些要求往往难以满足，一般只能估计一个平均深度，并对源体作一定限制，计算在平均深度上的等效磁性分布，因其并不一定反映真实磁性，故称之为视磁化强度（或视磁化率）。

视磁化强度填图可以在频率域和空间域中进行。三维磁性层波谱法是目前适用范围较广的一种方法[11][12]（当三维磁性层的下界面趋于无限即变为单界面，上下界面水平即变为水平层），我们在重点研究该方法的基础上同时介绍反映其发展过程的棱柱体组合单界面波谱法[9]和水平层波谱法[10]，这两种方法实质上可以从三维磁性层波谱法得到。

一、波数域视磁化强度填图方法

（一）棱柱体组合磁性单界面波谱法

Letros(1980)、Urquhart和West等(1979)从直立无限延深棱柱体组合成磁性单界面的观点出发，研究了适用于该情况的视磁化率填图方法。假设观测磁场是由横断面为矩形的磁性体组合产生，每个矩形体侧面垂直且无限延深，只有感应磁化强度，在线度上占一个网格单位，且其中心位于网格点上。设每个棱柱体在测量平面上任一点产生的磁场为$T_i(x,y)$，则该点磁场为所有棱柱体磁场之和，有

$$T(x,y)=\sum_{i=1}^{N}T_i(x,y) \qquad (3.3\text{—}1)$$

式中N为棱柱体个数，即测区网格点数。

在波数域中有

$$T(u,v)=\sum_{i=1}^{N}T_i(u,v) \qquad (3.3\text{—}2)$$

式中，u, v 为 x, y 方向的波数，而 $\omega = 2\pi u$，$\nu = 2\pi v$，ω、ν 称为角波数。由〔9〕可列出第 i 个直立无限延深棱柱体的波谱公式为

$$T_i(u,v) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi\kappa_i T_0 \cdot P_i(u,v;l,m,n;l_0,m_0,n_0) \cdot S_i(u,v;\Delta x,\Delta y) \cdot D_i(u,v;\xi,\eta) \cdot H_i(u,v,h) \tag{3.3—3}$$

式中，$P_i = [\mathrm{i}\,2\pi ul + \mathrm{i}\,2\pi vm + 2\pi(u^2+v^2)^{1/2}n] \cdot [\mathrm{i}\,2\pi ul_0 + \mathrm{i}\,2\pi vm_0 + 2\pi(u^2+v^2)^{1/2}n_0]$ 与磁性体磁化方向和地磁场方向有关，称之为磁化方向因子；$S_i = \frac{\sin(\pi u\Delta x)}{\pi u\Delta x} \cdot \frac{\sin(\pi v\Delta y)}{\pi v\Delta y} \cdot \Delta x \cdot \Delta y$，其中 Δx、Δy 为点线距，亦即棱柱体水平尺寸，故称 S_i 为水平尺寸因子；$D_i = \exp^{[-\mathrm{i}\,2\pi(u\xi+v\eta)]}$ 仅与棱柱体所在位置有关，称为位移因子；$H_i = \frac{1}{4\pi^2(u^2+v^2)} \cdot \exp[-h \cdot 2\pi(u^2+v^2)^{1/2}]$ 称为深度因子；T_0 为地磁场强度（注意，这里规定磁化磁性体的外磁场为磁场强度）；κ_i 为第 i 个棱柱体的磁化率。将（3.3—3）代入（3.3—2）式得

$$T(u,v) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi\kappa_i T_0 \cdot P_i(u,v;l,m,n;l_0,m_0,n_0) \cdot S_i(u,v;\Delta x,\Delta y) \cdot D_i(u,v;\xi,\eta) \cdot H_i(u,v,h) \tag{3.3—4}$$

由于按相同点线距划分棱柱体，又假定它们位于同平面，有相同的 h，且沿同一地磁场方向磁化，因此（3.3—4）式可改写为

$$T(u,v) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 2\pi T_0 \cdot P(u,v;l,m,n;l_0,m_0,n_0) \cdot S(u,v;\Delta x,\Delta y) \cdot H(u,v,h) \sum_{i=1}^{N} \kappa_i \cdot D_i(u,v;\xi,\eta) \tag{3.3—5}$$

若用 $T(u,v)$ 除以 P、S、H，即作化磁极处理、水平尺寸因子改正和向下延拓到棱柱体顶面的处理，则有

$$T_n(u,v) = 2\pi T_0\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\sum_{i=1}^{N} \kappa_i \cdot D_i(u,v;\xi,\eta) \tag{3.3—6}$$

ξ、η 与 x、y 取值相同，以 Δx、Δy 为单位。对（3.3—6）式进行傅里叶反变换得

$$T_n(x,y) = 2\pi T_0\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\sum_{i=1}^{N} \kappa_i \cdot D_i(x,y) \tag{3.3—7}$$

由于进行了向下延拓，可以认为每一点的场仅由该点所对应的棱柱体产生，从而可忽略周围棱柱体对该点的影响。于是有

$$T_n(x,y) = 2\pi T_0\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\kappa_i(x,y) \tag{3.3—8}$$

$$\kappa_i(x,y) = \frac{T_n(x,y)}{2\pi T_0}\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right) \tag{3.3—9}$$

$\kappa_i(x,y)$ 即为 (x,y) 点处棱柱体的磁化率。需指出上述方法是假定在某一深度平面上等效分布多个下端无限延深的矩形棱柱体沿 T_0 方向磁化条件下完成的。实际情况是地层往往有倾斜，因而需要考虑地层倾角影响（参见〔11〕）。为了符合单界面模型的假设，还需把深浅源叠加磁场加以分离，如果是作近地表填图，则需滤掉区域场，若需研究深部磁性分

布，则需滤掉浅部场。因此在计算视磁化率之前需要对实测资料的能谱曲线进行分析研究，从中确定滤掉“干扰”磁性层的范围。滤波方法可采用正则化方法、补偿圆滑法和插值切割法等。

（二）磁性水平层波谱法

由〔15〕已知磁异常 ΔT 的一般波谱表达式为

$$\Delta T(u,v)=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\cdot P(u,v;l,m,n;l_0,m_0,n_0)\cdot\int_0^{\infty}M(u,v,\zeta)\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{u^2+v^2}\zeta}\mathrm{d}\zeta \qquad (3.3-10)$$

式中，P 为磁化方向因子，$M(u,v,\zeta)$ 为磁化强度波谱。设 $M(u,v,\zeta)$ 满足条件

$$M(u,v,\zeta)=\begin{cases}M(u,v) & h_1<\zeta<h_2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

则

$$\Delta T(u,v)=\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{P}{2\pi(u^2+v^2)}\cdot M(u,v)\left[\exp(-2\pi\sqrt{u^2+v^2}\,h_1)-\exp(-2\pi\sqrt{u^2+v^2}\,h_2)\right]$$

故有

$$M(u,v)=\left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right)\frac{2\pi(u^2+v^2)}{P}\Delta T(u,v)\frac{\exp(2\pi\sqrt{u^2+v^2}\,h_1)}{1-\exp(-2\pi\sqrt{u^2+v^2}\,\Delta h)} \qquad (3.3-11)$$

式中 $\Delta h=h_2-h_1$。

不难分析（3.3—11）式各项的意义，$\frac{4\pi^2(u^2+v^2)}{P}$ 是将 ΔT 谱转化为垂直磁化垂直分量 Z_{Δ} 的转换因子；$\exp(2\pi\sqrt{u^2+v^2}\,h_1)$ 是将磁异常下延到水平层顶面的下延因子。至于因子 $\frac{1}{1-\exp(-2\pi\sqrt{u^2+v^2}\Delta h)}$，就是层为有限厚 Δh 应引入的改正项。

上述模型适用于地质体直立，且沿垂向磁性均匀，各地质体顶面埋深及下延近于相同的情形。若地质体倾斜且倾向相同，则（3.3—11）式还需经过倾角改正才能用于实际填图（参看文献〔10〕）。

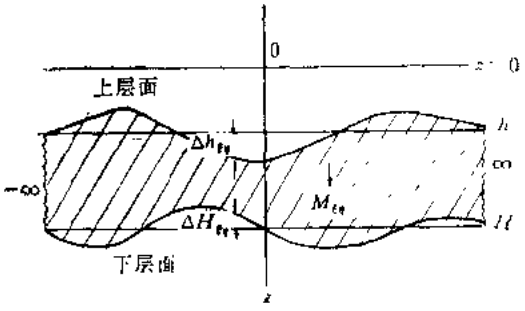


图 3.3—1 磁性层示意图

（三）三维起伏磁性层波谱法[13]

1．三维磁性层磁场的波谱表达式

设磁性层如图3.3—1所示，则其磁场可由层内元磁偶极产生的磁场对层作体积分而得到。假定磁性层的磁化强度 $\boldsymbol{M}=M(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{s}$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的单位矢量，其方向余弦为 l、m、n，令其在层内不变。M 的大小由 $M(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$ 确定，λ 为磁性纵向不均匀因子。简记为 $M_0=M(\xi,\eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$。已知磁偶极子的磁位 U_0 表达式为

$$U_0=-\frac{1}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}\mathrm{d}V=-\frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{M}\cdot\nabla)\frac{\mathrm{d}V}{r}=-\frac{1}{4\pi}M_0\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{s}}\left(\frac{\mathrm{d}V}{r}\right) \qquad (3.3-12)$$

式中 $r=[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}$；$\boldsymbol{M}\cdot\nabla=M_0\left(l\frac{\partial}{\partial x}+m\frac{\partial}{\partial y}+n\frac{\partial}{\partial z}\right)$

设磁场的单位矢量为 $\boldsymbol{t}$，其方向余弦为l_0、m_0、n_0，则磁偶极磁场 $T_0(x, y, z)$ 为

$$T_0(x, y, z) = -\mu_0 \frac{\partial U_0}{\partial \boldsymbol{t}} = -\mu_0(\boldsymbol{t}\cdot\nabla)U_0 \qquad (3.3-13)$$

式中 $$\boldsymbol{t}\cdot\nabla = l_0\frac{\partial}{\partial x} + m_0\frac{\partial}{\partial y} + n_0\frac{\partial}{\partial z}$$

把（3.3—12）代入（3.3—13）式得

$$T_0(x, y, z) = \frac{\mu_0 M_0}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}\partial \boldsymbol{t}}\left(\frac{\mathrm{d}V}{r}\right) \qquad (3.3-14)$$

对磁性层域V积分得磁性层磁场

$$T(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}\partial \boldsymbol{t}}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V \qquad (3.3-15)$$

对上式两边作傅里叶变换，并以$T(u, v, z)$表示$T(x, y, z)$的波谱，得

$$T(u, v, z) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_V M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}\left\{\iint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}\partial \boldsymbol{t}}\left(\frac{1}{r}\right)\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

由[15]已知

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}\,2\,\pi(ux+vy)]}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{1/2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{k}\exp[-2\pi(\zeta-z)k]\cdot\exp[-2\pi\mathrm{i}(u\xi+v\eta)]$$

式中，$k = \sqrt{u^2+v^2}$。同时应用波谱微分定理可得

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial \boldsymbol{s}\partial \boldsymbol{t}}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi(ux+vy)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = P\cdot\frac{1}{k}\mathrm{e}^{-2\pi(\zeta-z)k}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}$$

式中 $$P = [\mathrm{i}\,2\,\pi(ul+vm)+2\,\pi kn][\mathrm{i}\,2\,\pi(ul_0+vm_0)+2\,\pi kn_0]$$

观测平面上 $z=0$，则有

$$T(u, v) = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)\frac{P}{k}\iiint_V M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi\zeta k}\cdot\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

考虑到磁性层上顶深度 $h+\Delta h_{\xi\eta}$，下底深度 $H+\Delta H_{\xi\eta}$，则有

$$T(u, v) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{P}{k}\iint_{-\infty}^{\infty}M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}(u\xi+v\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\int_{h+\Delta h\xi\eta}^{H+\Delta H\xi\eta}\mathrm{e}^{-(2\pi k-\lambda)\zeta}\,\mathrm{d}\zeta \qquad (3.3-16)$$

（3.3—16）式积分限中 h、H分别为上、下层面的平均深度，$\Delta h_{\xi\eta}$、$\Delta H_{\xi\eta}$为相对平均深度而言上、下层面的起伏变化。经对 ζ 积分，并考虑到

$$\exp[-(2\pi k-\lambda)\Delta H_{\xi\eta}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(2\pi k-\lambda)]^n}{n!}\Delta H_{\xi\eta}^n$$

$$\exp[-(2\pi k-\lambda)\Delta h_{\xi\eta}] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(2\pi k-\lambda)]^n}{n!}\Delta h_{\xi\eta}$$

则对（3.3—16）式运算后得

$$T(u, v) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{P}{k}\frac{1}{(2\pi k-\lambda)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(2\pi k-\lambda)]^n}{n!}\{[M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^n]_{uv}$$

$$\cdot e^{-(2\pi k-\lambda)h}-[M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_{uv}e^{-(2\pi k-\lambda)H}\} \qquad (3.3\text{—}17)$$

式中，$[M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta}]_{uv}$、$[M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_{uv}$ 为$M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta}$、$M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}$对应的波谱。

当P中的 $l=m=0$；$l_0=m_0=0$；$n=n_0=1$ 时，有 $P=4\pi^2k^2$，得化磁极场的波谱

$$Z_\perp(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{4\pi^2k}{2\pi k-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-(2\pi k-\lambda)]^n}{n!}\{(M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta})_{uv}e^{-(2\pi k-\lambda)h}$$

$$-[M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_{uv}e^{-(2\pi k-\lambda)H}\} \qquad (3.3\text{—}18)$$

当 $\lambda=0$，得纵向磁性均匀时的表达式

$$Z_\perp(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}\{[M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta}]_{uv}e^{-2\pi kh}$$

$$-[M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_{uv}e^{-2\pi kH}\} \qquad (3.3\text{—}19)$$

当磁性层在特殊情况下其简化式为

① $\Delta H_{\xi\eta}=\Delta h_{\xi\eta}$ 的同起伏层，有

$$Z_\perp(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}(M_{\xi\eta}\Delta h^n_{\xi\eta})_{uv} \qquad (3.3\text{—}20)$$

② $H\to\infty$的磁性单界面，有

$$Z_\perp(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi e^{-2\pi kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}(M_{\xi\eta}\Delta h^n_{\xi\eta})_{uv} \qquad (3.3\text{—}21)$$

③ 垂向等厚磁性薄层，由（3.3—21）式对 h 求导取负号，并令其厚度为D，则得

$$Z_\perp(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}4\pi^2kDe^{-2\pi kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}(M_{\xi\eta}\Delta h^n_{\xi\eta})_{uv} \qquad (3.3\text{—}22)$$

实际工作中常常对化极后的磁场作磁化强度填图，为此，我们讨论（3.3—19）式的等价形式。在化磁极情况下，$z=0$ 时（3.3—15）式可写为

$$Z_\perp(x,y)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int\left\{\int_{h+\Delta h_{\xi\eta}}^{H+\Delta H_{\xi\eta}}M(\xi\eta)e^{\lambda\zeta}K(x-\xi,y-\eta,\zeta)d\zeta\right\}d\xi d\eta \qquad (3.3\text{—}23)$$

式中
$$K(x-\xi,y-\eta,\zeta)=\frac{2\zeta^2-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}$$

再假设

$$\begin{cases}\mathrm{I}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int\left\{\int_{h+\Delta h_{\xi\eta}}^{h}M(\xi,\eta)e^{\lambda\zeta}K(x-\xi,y-\eta,\zeta)d\zeta\right\}d\xi d\eta\\ \mathrm{II}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int\left\{\int_{h}^{H}M(\xi,\eta)e^{\lambda\zeta}K(x-\xi,y-\eta,\zeta)d\zeta\right\}d\xi d\eta\\ \mathrm{III}=\dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int\left\{\int_{H}^{H+\Delta H_{\xi\eta}}M(\xi,\eta)e^{\lambda\zeta}K(x-\xi,y-\eta,\zeta)d\zeta\right\}d\xi d\eta\end{cases} \qquad (3.3\text{—}24)$$

则（3.3—23）式可写成

$$Z_{\perp}(x, y) = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III}$$

注意，若把 $M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta} = [M + \Delta M(\xi, \eta)]\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$ 代入Ⅱ式，其中M为$M(\xi, \eta)$的平均值，则有

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_{h}^{H} M\mathrm{e}^{\lambda\zeta}K(x-\xi, y-\eta, \zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_{h}^{H}\left\{M\mathrm{e}^{\lambda\zeta}\iint_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi, y-\eta, \zeta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\zeta = 0 \qquad (3.3\text{—}25)$$

故Ⅱ式变为

$$\mathrm{II} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int_{h}^{H}\Delta M(\xi, \eta)\mathrm{e}^{\lambda\zeta}K(x-\xi, y-\eta, \zeta)\mathrm{d}\zeta\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \qquad (3.3\text{—}26)$$

这表明（3.3—24）式中的Ⅱ与（3.3—26）式等价，由于这种等价性可以得到(3.3—18)式的等价形式为

$$Z_{\perp}(u, v) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{4\pi^2 k}{(2\pi k-\lambda)}\{\Delta M(u, v)[\mathrm{e}^{-(2\pi k-\lambda)h} - \mathrm{e}^{-(2\pi k-\lambda)H}]$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{[-(2\pi k-\lambda)]^n}{n!}[(M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n})_{uv}\mathrm{e}^{-(2\pi k-\lambda)h}$$
$$-(M(\xi, \eta)\Delta H_{\xi\eta}^{n})_{uv}\mathrm{e}^{-(2\pi k-\lambda)H}]\} \qquad (3.3\text{—}27)$$

(3.3—27)式实际上表示了磁化强度为$M\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$，厚度为$H-h$的水平层磁场，当$M\mathrm{e}^{\lambda\zeta}$沿水平方向不变，而层沿水平方向无限延展，则其外部磁场显然应为零，Ⅱ式由（3.3—24）变到（3.3—26），而（3.3—26）式仅与$\Delta M(\xi, \eta)$有关而与M无关，这就隐含着由M引起的多解性，在磁化强度的反演中应予以注意。

2．反演磁化强度的多解性及定解条件

我们着眼于考虑$M(\xi, \eta)$、$\Delta M(\xi, \eta)$，则积分式（3.3—23）可简写成

$$Z_{\perp}(x, y) = \mathrm{I}[M(\xi, \eta)] + \mathrm{II}[\Delta M(\xi, \eta)] + \mathrm{III}[M(\xi, \eta)]$$
$$= \mathrm{I}[M, \Delta M(\xi, \eta)] + \mathrm{II}[\Delta M(\xi, \eta)] + \mathrm{III}[M, \Delta M(\xi, \eta)] \qquad (3.3\text{—}28)$$

磁化强度的反演问题是由$Z_{\perp}(x, y)$求给定的三维磁性层内$M(\xi, \eta)$的分布。由(3.3—28)式可以看出，已知数是函数$Z_{\perp}(x, y)$，而未知数除函数$\Delta M(\xi, \eta)$外，还有一个常数M。这就是说，未知数比已知数多了一个，故（3.3—28）式有多解。

为了求得唯一解，需要给定一个值作为定解条件。而对反演过程来说，最方便的是给定M值。此时，每给定一个M_i（$i=1,2,\cdots$），就可反演求得一个$\Delta M^i(\xi, \eta)$，从而得到一个反演结果

$$M^i(\xi, \eta) = M_i + \Delta M^i(\xi, \eta) \qquad (i=1,2,\cdots)$$

由上分析可得到结论：磁化强度反演问题具有多解性，而获得唯一解的定解条件是先验给定磁化强度平均值。

给定定解条件M后，(3.3—28）代可以写为

$$Z_{\perp}(x, y) = \{\mathrm{I}(M) + \mathrm{III}(M)\} + \{\mathrm{I}[\Delta M(\xi, \eta)] + \mathrm{II}[\Delta M(\xi, \eta)] + \mathrm{III}[\Delta M(\xi, \eta)]\}$$
$$= Z_{\perp}^{0}(x, y) + \Delta Z(x, y) \qquad (3.3\text{—}29)$$

其中 $Z_{\perp}^{0}(x, y)$仅与M有关，给定M后，$Z_{\perp}^{0}(x, y)$是已知函数；而 $\Delta Z(x, y)$与$\Delta M(\xi, \eta)$有关，是用于反演 $\Delta M(\xi, \eta)$的场。

由已知函数值 $Z_{\perp}(x, y)$去掉函数值 $Z_{\perp}^{0}(x, y)$求得 $\Delta Z(x, y)$ 的过程，称为“场的提取”，即

$$\Delta Z(x, y)=Z_{\perp}(x, y)-Z_{\perp}^{0}(x, y) \tag{3.3—30}$$

此时，反演问题变为：已知 $\Delta Z(x, y)$，求给定三维磁性层内 $\Delta M(\xi, \eta)$的分布。

以往反演磁化强度的方法，由于在反演前没有作场的提取，等效于认为 $Z_{\perp}^{0}(x, y)=0$，$\Delta Z(x, y)=Z_{\perp}(x, y)$，反演出的是平均值为 0 的 $\Delta M(\xi, \eta)$，因此出现不合理的负磁化强度值，且负值总和接近于正值总和。为了得到正确的结果，首先必须给定平均磁化强度M，然后利用已知磁性层位置参数，正演出 $Z_{\perp}^{0}(x, y)$值，再利用 (3.3—30) 式作场的提取，求出 $\Delta Z(x, y)$值，再对 $\Delta Z(x, y)$作反演求出 $\Delta M(\xi, \eta)$，把求出的 $\Delta M(\xi, \eta)$ 加上平均值M即得到消除了负值的正确解。

3．反演方法

由三维磁性层化磁极场波谱 $Z_{\perp}(u, v)$的等价表达式 (3.3—27)，当 $\lambda=0$ 时，即

$$Z_{\perp}(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\Delta M(u, v)\left(\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right)+\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}$$

$$\cdot\left\{\left[M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\left[M(\xi, \eta)\Delta H_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right\}$$

可以写出 $Z_{\perp}^{0}(x, y)$ 与 $\Delta Z(x, y)$对应的波谱公式 $Z_{\perp}^{0}(u, v)$与 $\Delta Z(u, v)$

$$Z_{\perp}^{0}(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}\left\{\left(\Delta h_{\xi\eta}^{n}\right)_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\left(\Delta H_{\xi\eta}^{n}\right)_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right\} \tag{3.3—31}$$

$$\Delta Z(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\Delta M(u, v)\left(\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right)+\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}$$

$$\cdot\left\{\left[\Delta M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\left[\Delta M(\xi, \eta)\Delta H_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv}\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right\} \tag{3.3—32}$$

在特殊情况下：

① 同起伏层($\Delta h_{\xi\eta}=\Delta H_{\xi\eta}$)

$$Z_{\perp}^{0}(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi M\left(\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}\Delta h_{uv}^{n} \tag{3.3—33}$$

$$\Delta Z(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\left(\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right)\left\{\Delta M(u, v)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}\left[\Delta M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv}\right\} \tag{3.3—34}$$

② 下延为H的顶面起伏层 ($\Delta H_{\xi\eta}=0$)

$$Z_{\perp}^{0}(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi M\mathrm{e}^{-2\pi kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}\Delta h_{uv}^{n} \tag{3.3—35}$$

$$\Delta Z(u, v)=\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\Delta M(u, v)\left(\mathrm{e}^{-2\pi kh}-\mathrm{e}^{-2\pi kH}\right)$$

$$+\frac{I_{0}}{4\pi}2\pi\mathrm{e}^{-2\pi kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^{n}}{n!}\left[\Delta M(\xi, \eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}\right]_{uv} \tag{3.3—36}$$

③ 下延无限的单界面 ($H\to\infty$)

$$Z_{\perp}^{0}(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi M e^{-2\pi kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}\Delta h_{uv}^{n} \tag{3.3—37}$$

$$\Delta Z(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi e^{-2\pi kh}\left\{\Delta M(u,v)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}[\Delta M(\xi,\eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}]_{uv}\right\} \tag{3.3—38}$$

④ 水平磁性层（$\Delta h_{\xi\eta}=\Delta H_{\xi\eta}=0$）

$$Z_{\perp}^{0}(u,v)=0$$

$$\Delta Z(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi\Delta M(u,v)(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH}) \tag{3.3—39}$$

⑤ 顶面水平、下界面起伏层（$\Delta h_{\xi\eta}=0$）

$$Z_{\perp}^{0}(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi M e^{-2\pi kH}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}\Delta H_{uv}^{n} \tag{3.3—40}$$

$$\Delta Z(u,v)=\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi\Delta M(u,v)(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})-\frac{\mu_0}{4\pi}2\pi e^{-2\pi kH}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}[\Delta M(\xi,\eta)\Delta H_{\xi\eta}^{n}]_{uv} \tag{3.3—41}$$

利用上述 $\Delta Z(u,v)$表达式即可写出反演 $\Delta M(u,v)$的表达式，现以任意起伏层为例可写出

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}-\frac{1}{(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}\{[\Delta M(\xi\eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}]_{uv}e^{-2\pi kh}-[\Delta M(\xi,\eta)\Delta H_{\xi\eta}^{n}]_{uv}e^{-2\pi kH}\} \tag{3.3—42}$$

同理可对（3.3—34）、（3.3—36）、（3.3—38）、（3.3—39）、（3.3—41）式求出相应反演 $\Delta M(u,v)$的表达式：

① 同起伏层

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}[\Delta M(\xi,\eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}]_{uv} \tag{3.3—43}$$

② 下延为H的顶面起伏层

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}-\frac{e^{-2\pi kh}}{(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}\cdot[\Delta M(\xi,\eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}]_{uv} \tag{3.3—44}$$

③ 下延无限的磁性单界面

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi}\cdot e^{2\pi kh}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}[\Delta M(\xi,\eta)\Delta h_{\xi\eta}^{n}]_{uv} \tag{3.3—45}$$

④ 水平磁性层

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{\mu_0}\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})} \tag{3.3—46}$$

⑤ 顶面水平、下界面起伏层（$\Delta h_{\xi\eta}=0$）

$$\Delta M(u,v)=\frac{4\pi}{I'_0}\cdot\frac{\Delta Z(u,v)}{2\pi(e^{-2\pi k}-e^{-2\pi kH})}+\frac{e^{-2\pi kH}}{(e^{-2\pi kh}-e^{-2\pi kH})}$$

$$\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k)^n}{n!}[\Delta M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_w \qquad (3.3-47)$$

利用（3.3—43）—（3.3—47）式即可反演出不同情况的 $\Delta M(u,v)$。作为 $\Delta M(u,v)$ 的近似解，可以仅取上列公式右端第一项作为初始近似解 $\Delta M^{(0)}(u,v)$ 进行反演，称为直接反演。为了得到更精确解可采取迭代法，其过程是：先用直接反演，即对 $\Delta M^{(0)}(u,v)$ 作傅里叶反变换得 $\Delta M^{(0)}(\xi,\eta)$ 并代入（3.3—43）—（3.3—47）式中的级数项，其结果取相反号加上 $\Delta M^{(0)}(u,v)$，得 $\Delta M^{(1)}(u,v)$；对此一级近似结果再作傅里叶反变换得 $\Delta M^{(1)}(\xi,\eta)$，代入级数项，其结果取相反号加上 $\Delta M^{(1)}(u,v)$，得 $\Delta M^{(2)}(u,v)$；如此不断迭代直至收敛。

上述反演对高频成分来说是不稳定的，为了获得稳定反演结果，在反演过程中引入正则化稳定因子 f^{uv}_{α}

$$f^{uv}_{\alpha}=\frac{1}{[1+\alpha e^{\beta(k-k_0)\lambda_x}]} \qquad (3.3-48)$$

式中：$\beta\geqslant 2$；k_0 是压制高频成分的最小波数，等于其最大水平尺寸 λ_0 的倒数；λ_x，λ_y 是 x、y 方向的基波长度；$k=\sqrt{m^2+n^2(\lambda_x/\lambda_y)^2}/\lambda_x$；$\alpha$ 是正则参数，一般根据实际资料确定，可取 2.5—3.0。

对于磁化强度为 $M(\xi,\eta)e^{\lambda\zeta}$● 型的三维磁性层，其磁化强度反演可借用上述方法来完成，只需令：$k^*=k-\frac{\lambda}{2\pi}$，$Z^*_{\perp}(u,v)=Z_{\perp}(u,v)\frac{k^*}{k}$

此时（3.3—27）式变为

$$Z^*_{\perp}(u,v)=\frac{I'_0}{1\pi}2\pi\left\{\Delta M(u,v)(e^{-2\pi k^*h}-e^{-2\pi k^*H})+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2\pi k^*)^n}{n!}\right.$$

$$\left.\cdot[(M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta})_w e^{-2\pi k^*h}-(M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta})_w e^{-2\pi k^*H}]\right\} \qquad (3.3-49)$$

它与（3.3—27）式相同，若用前述反演公式反演 $M(\xi,\eta)$ 时，只需用 $Z^{0*}_{\perp}(u,v)$、$\Delta Z^*(u,v)$、k^* 代替 $\Delta Z^0_{\perp}(u,v)$、$\Delta Z(u,v)$、k，而 $[M(\xi,\eta)\Delta h^n_{\xi\eta}]_w$、$[M(\xi,\eta)\Delta H^n_{\xi\eta}]_w$、$f^{uv}_{\alpha}$ 保持不变。

4．理论模型检验

这里给出两张磁化强度反演图来说明给定平均磁化强度值，作场提取以消除大量负磁化强度值的重要性。图 3.3—2 是在平均值 $M=200\times10^{-2}$A/m 的理论模型场情况下，把其当作 $M=0$ 时反演得到的磁化强度等值线图，可以看出图中存在大量负值，而且与图3.3—3有差别。图3.3—3是在正确的 $M=200\times10^{-2}$A/m 时反演得到的磁化强度等值线图，它与模型磁化强度非常接近。

● λ 为磁性纵向不均匀因子，不要与波长 λ、λ_x、λ_y 混淆。

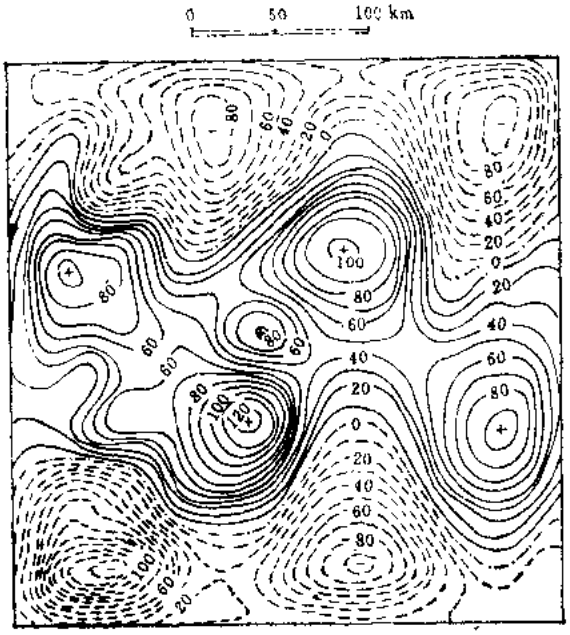


图 3.3—2 给定$M=0$时反演得到的$M(\xi,\eta)$等值线图
（单位10^{-2}A/m）

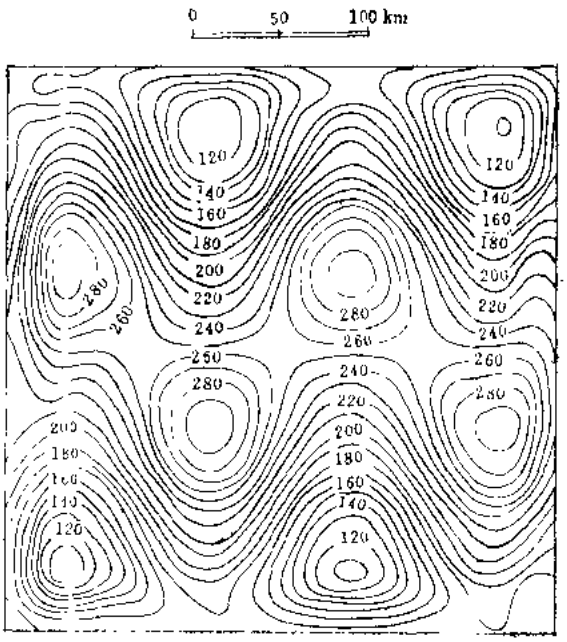


图 3.3—3 给定$M=200\times10^{-2}$A/m时反演得到的$M(\xi,\eta)$等值线图
（单位10^{-2}A/m）

二、空间域视磁化强度填图方法

矩阵法是空间域视磁化强度填图较常采用的方法，其基本思想是把磁性体划分成等间距的直立棱柱体，对每个柱体在均匀垂直磁化条件下可以用顶底面分布正负磁荷的磁极柱来代替，计算由这些柱体组合成磁性体的磁场，其磁场和磁化强度可列成矩阵，根据磁场求解矩阵即可得磁化强度[14]。

若将磁性体按$\Delta x_j'$、$\Delta y_j'$划分成L个直立柱体，柱体的顶深为$h(x_j', y_j')$，下端深度为$H(x_j', y_j')$，磁化强度为$M(x_j', y_j', h)$，则磁性体化向磁极磁场的离散表达式为

$$Z_{\perp}(x_i, y_i, z_i)=\sum_{j=1}^{L}\left\{\frac{h(x_j'-y_j')-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-h(x_j', y_j'))^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{H(x_j', y_j')-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-H(x_j', y_j'))^2]^{3/2}}\right\}\Delta x_j\Delta y_j M(x_j', y_j', h) \qquad (3.3-50)$$

式中，$i=1,2,\cdots N$，（N为测总数）；$j=1,2,\cdots,L$，（L为按顺序划分的柱体个数）。上式用矩阵表示为

$$\boldsymbol{t}=\mathbf{A}\boldsymbol{M}$$

$\boldsymbol{t}$是N个化磁极场组成的N维列向量，$\boldsymbol{M}$是L个磁化强度组成的L维列向量，$\mathbf{A}$是一个$N\times L$阶矩阵，其元素为

$$a_{ij}=\left\{\frac{h(x_j', y_j')-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-h(x_j', y_j')^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{H(x_j', y_j')-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-h(x_j', y_j'))^2]^{3/2}}\right\}\Delta x_j'\Delta y_j' \qquad (3.3-51)$$

由（3.3—51）式解得

$$\boldsymbol{M}=\mathbf{A}^{+}\boldsymbol{t} \tag{3.3—52}$$

$\mathbf{A}^{+}$是$\mathbf{A}$的广义逆矩阵。

当测区面积很大时，系数矩阵$\mathbf{A}$将会超过机器内存或需要很长计算时间，所以需要采用小窗口滑动的办法进行处理，即采用分块处理的形式。但这时又会存在窗口外磁性体的影响使反演结果不稳定，为此需增大系数矩阵$\mathbf{A}$的每个对角元素以提高反演的稳定性，这时（3.3—52）式改为

$$\boldsymbol{M}^{*}=(\mathbf{A}+\lambda\mathbf{D}^{*})^{-1}\boldsymbol{t} \tag{3.3—53}$$

式中$\mathbf{D}^{*}$为对角矩阵，其元素为$d_{ii}^{*}=a_{ii}$，λ为稳定因子，（3.3—53）式等价于

$$\boldsymbol{M}^{*}=\mathbf{D}(\mathbf{DAD}+\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{t} \tag{3.3—54}$$

式中对角矩阵$\mathbf{D}$的元素$d_{ii}=(a_{ii})^{-1/2}$，$\mathbf{I}$为单位矩阵。

当下界无限延深且顶面水平时，则（3.3—50）式简化为

$$Z_{\perp}(x_i,y_i,z_i)=\sum_{j=1}^{L}\frac{h-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-h)^2]^{3/2}}\Delta x_j\Delta y_jM(x_j',y_j',h) \tag{3.3—55}$$

$$a_{ij}=\frac{h-z_i}{[(x_i-x_j')^2+(y_i-y_j')^2+(z_i-h)^2]^{3/2}} \tag{3.3—56}$$

这时当测点与所划分柱体一一对应，即$L=N$时，矩阵$\mathbf{A}$变为一个方阵；当观测面水平（$z_i=0$）时，$\mathbf{A}$为一对称矩阵，则有$\mathbf{A}^{+}=\mathbf{A}^{-}$。

上述算法，只有当磁性界面及观测面皆水平且两者网格划分一致时，滑动窗口的系数矩阵$\mathbf{A}$的值才不随窗口移动而变化。此时在整个测区的反演过程中，$\mathbf{A}$阵的形成及求$\mathbf{A}^{-1}$只需进行一次。但在起伏界面情况，系数矩阵$\mathbf{A}$为非对称，将随着窗口的移动而变化，故每移动一次都要计算一次$\mathbf{A}$及$\mathbf{A}^{-1}$，需要很大的计算机内存容量及计算量，所以不便在起伏界面时用。

为了克服上述困难，可以采用带立体角滑动窗的迭代拟合反演方法[12]。其基本思想是在每一测点上，在空间域中计算组合棱柱体的正演场，然后与实测场比较，根据其差值，修改柱体的磁化强度，反复迭代修改，直到计算场与实测场拟合度符合要求为止。

为了减少正演工作量并保证精度，采用了立体角滑动窗，即采用由计算点对界面所张的立体角与界面的交线所围的范围大小作为窗口的大小。这样，对于固定的立体角，不同埋深的界面有不同的窗口，从而使正演精度保持一致。

计算中，每移动一次窗口，仅修改一个柱体的磁化强度。置窗口中心子欲修改磁化强度柱体顶上，将窗内柱体的正演场记在窗口中心点上，然后与这一点的观测场值相减，得到“拟合差”。由于中心柱体并非对窗口正演场值有贡献的唯一柱体，因此需将拟合差乘以中心柱体的“贡献系数”，即中心柱体的场值与窗口内所有柱体产生的场值之比，并经中心柱体几何参数改正即得磁化强度修改值。将此修改值与中心柱体的磁化强度初值相加，即得到新的磁化强度值。依次滑动，逐个修改，直到区域内所有“拟合差”皆小于要求的精度为止。迭代修改公式可参见文献[12]。

三、视磁化强度填图方法评述与实际应用

（一）方法评述

视磁化强度填图实质上是反演磁化强度，属于位场的反演问题之列。由于位场中等效原理的存在：即场源外空间给定的一种位场分布，可以由多种不同的场源所引起，从而导致位场反演的多解性，视磁化强度填图也不例外。反演结果的成败关键之一，决定于初始模型集合，若其中不包括所求解，则不可能求得所求解。例如给定的初始模型是无限延深的单界面，而实际情况是有限延深的磁性层，采用单界面的磁化强度填图方法就得不到磁性层磁化强度的分布，即使给定磁性层模型但没有合理地给定平均磁化强度也可能得不到所要求的结果。所以必须建立符合实际情况的初始模型，并选用与之适合的视磁化强度填图方法。

目前所提供的方法还不能直接用于多层叠加的复杂情况。在实际工作中常常需要将复杂异常加以分离使之符合反演方法的条件，故有效地分离叠加异常的技术也是关系到视磁化强度填图效果好坏的一个重要问题。目前使用的各种滤波方法有其各自应用条件和局限性，需要进一步提高和改进。

前述视磁化强度填图方法，按处理方式不同可以分为整体反演与分块反演两类。频率域三维磁性层属整体反演，即整个测区同时反演出磁化强度分布；空间域矩阵法属分块反演。后者不可避免地会出现合理选择窗口与有效消除窗外影响的问题；而前者虽然没有窗口选择问题，但在反演中引入了类似于向下延拓的因子，故放大了高频成分，需采用有效压制高频成分的滤波因子。不同方法存在的不同问题，都需要在应用中加以注意与克服。

一般来说，对于大区域连续展布的磁性层采用波数域方法较好，对于顶面水平，离散分布的磁性面采用矩阵法较好。

（二）方法应用实例

我们以秦巴地区航磁资料的视磁化率和视磁化强度填图为例说明方法的效果。秦巴地区广泛存在火山岩、岩浆岩和前震旦纪变质岩，他们大都具有一定磁性，从而为视磁化强度填图提供了必要的物理前提。利用地矿部航测总队百万分之一航磁图，在东经102°—114°、北纬28°—36°之间约100万平方公里的秦巴地区，采用频率域棱柱体组合单界面的方法，进行浅层视磁化率填图，把磁化率按大小划分为四个级次，结果示于图3.3—4中。从图可见，秦岭造山带及其北侧反映出的火山岩及岩体呈S形分布，在其中间地区有规律地分布了相互平行排列的东西向火山岩及岩浆岩带约7—8条，这些岩带虽中部收缩间断，但东西两侧可以对比，且分别被北东、近南北和北西向构造所分割成断续分布的块体。特别是在东段北部，以凤陵渡、三门峡附近的弧形构造线为起点，出现了向东南展开的放射状构造线；在东段南部以房县、襄樊弧形构造线为起始，出现向北东展开的放射状构造线，使东西分布的火山岩及岩浆岩带复杂化。利用该图还可确定隐伏岩体的分布，如①在郧县一带，视磁化率图上有一北西向较强的磁性带，而该区分布了震旦系、二叠系的沉积岩层，近于无磁性，显然在深部还应存在隐伏磁性岩体，可以用这个较强磁性带来圈定。②在商南—南阳以南一带，地表大部分分布为近于无磁性的沉积岩，仅在商南东南出现不大规模的花岗岩和花岗闪长岩，但在图3.3—4上则有一北西方向的磁性带，东西方向延展远大于出露岩体，表明可以用视磁化率图来分析岩体深部延展范围。③汉中一带地表分布少量分散的花岗岩体，主要为沉积岩区，但在图3.3—4上表现为中等磁性区，可能是这些分散岩体在深部相连。显然这些推测对进一步研究与岩浆活动有关的内生矿床的分布规律及深部成矿预测有一定意义。

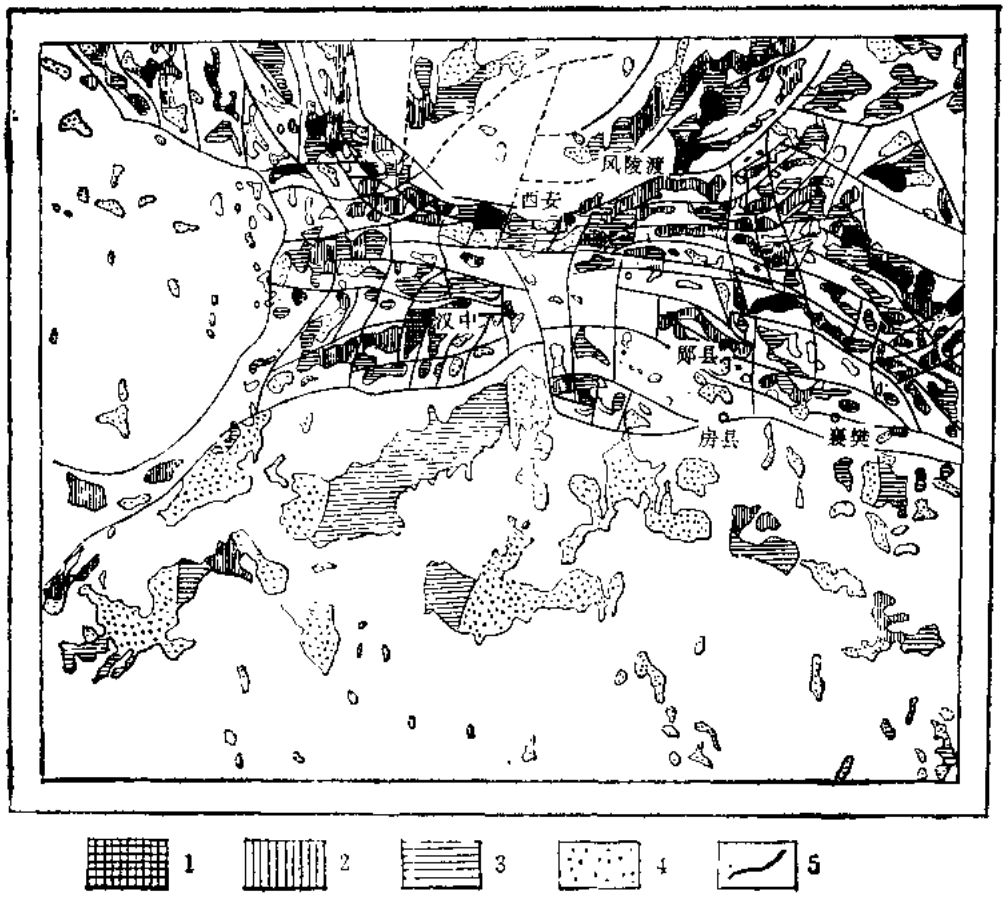


图 3.3—4 秦巴地区航磁异常的视磁化率填图

1—较强磁性（$>4\pi\cdot3000\times10^{-6}$SI）；2—中等磁性[$4\pi(2000-3000)\times10^{-6}$SI]；3—较弱磁性（$4\pi(1000-2000)\times10^{-6}$SI）；4—弱磁性（$<4\pi\cdot1000\times10^{-6}$SI）；5—分区界线

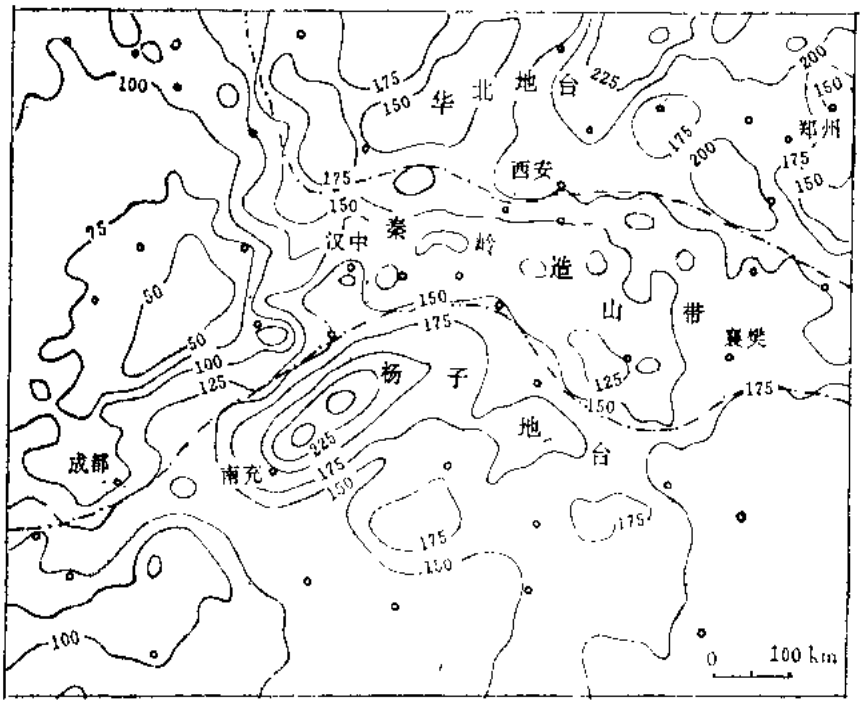


图 3.3—5 秦巴地区深层视磁化强度等值线

（单位10^{-3}A/m）

我们进一步采用正则化滤波提取了深部场，设定（6—26)km厚的磁性层模型作深层视磁化强度填图，见图3.3—5。该图展示了深部地质体的磁性特征，秦岭造山带深部磁性较南北两侧为低，形成明显的分界线。按视磁化强度突变带可以划分华北地台、扬子地台和秦岭造山带等三个大地构造区，这些分区界线反映的深度大于6 km，与地表不一定一致。

由图3.3—5还可看出，华北地台与扬子地台深部具有类似的磁性特征，都是高磁性块体，而且明显地位于同一北东向展布线上，中间被东西向的秦岭造山带所隔开。由此推断：华北地台、扬子地台在形成秦岭造山带以前可能为统一的构造单元，后经复杂的开合运动形成独特的秦岭造山带。

§4 波数域位场异常迭代反演及曲面上位场数据的转换

自1972—1974年美国Parker R.L.提出波数域界面位场异常的快速计算公式以来，由于它可计算任意起伏（幅度不超过其平均深度）的物性界面的位场异常，并有速度快、精度高，可在较短时间内完成大片面积数据处理等优点，引起了地球物理工作者的重视。近二十年来，该方法不断有所发展，在其基础上，导出了迭代反演算法，具有较好的应用效果。在1991年的SEG会议上，Xia Jianghai提出一种与Parker公式相似的曲面上位场异常的转换计算公式，也具有实用意义。本节将对这些内容作简要而较系统的介绍。

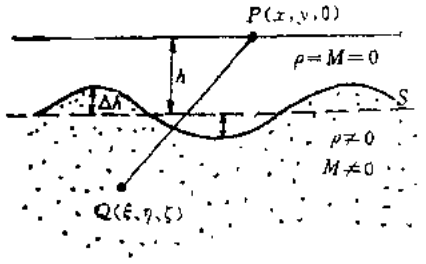


图 3.4—1 地下界面示意图

一、曲面位场异常的快速正演计算

设地下有界面S，如图3.4—1，其上物质的剩余密度ρ及磁化强度M设为零，其下的ρ、M不为零。设M的磁化方向垂直向下（也可为斜磁化，但其计算稍复杂)。S面下某点$Q(\xi,\eta,\zeta)$处体积元dV对地表测点$P(x,y,0)$所产生的垂直引力场及垂向磁感应场分别为$d\Delta g$及dZ_a，设直角坐标系z轴垂直向下，则有

$$\left.\begin{aligned} d\Delta g &= A\cdot G\rho dV \\ dZ_a &= B\cdot\frac{\mu_0 M}{4\pi}dV \end{aligned}\right\} \qquad (3.4-1)$$

上式中G为引力常数（$G=6.67\times10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$)；$A$为格林函数

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}} \\ B &= -\frac{\partial A}{\partial\zeta} \end{aligned}\right\} \qquad (3.4-2)$$

也可写成

$$A(r_0-r,\zeta)=\frac{\zeta}{[(r_0-r)^2+\zeta^2]^{3/2}} \qquad (3.4-3)$$

式中，r_0 为 $z=0$ 的观测面上 P 点的水平坐标矢量，r 为 S 面以下物质层中 Q 点的水平坐标矢量。设 S 面的平均深度为 h，将 A 函数在 $\zeta=h$ 处用泰勒级数展开，有

$$A(r_0-r,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{(n)}(r_0-r,\zeta)}{n!}\cdot(\zeta-h)^n \tag{3.4—4}$$

式中，$A^{(n)}(r_0-r,\zeta)$ 是在 $\zeta=h$ 处 A 对 ζ 的 n 阶导数。将 A 对 ζ 从 $(h+\Delta h)\to h$ 积分，其中 Δh 是 S 相对 h 的距离，在 $\zeta=h$ 以上的 Δh 为负，在其下者为正。Δh 是 (ξ,η) 或 (r) 的函数，有

$$\begin{aligned}\int_{h+\Delta h}^{h}A(r_0-r,\zeta)\mathrm{d}\zeta&=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{h+\Delta h}^{h}\frac{A^{(n)}(r_0-r,\zeta)}{n!}\cdot(\zeta-h)^n\mathrm{d}\zeta\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}A^{(n-1)}(r_0-r,h)\cdot\Delta h^n(r)/n!\end{aligned} \tag{3.4—5}$$

由 (3.4—2)—(3.4—5)，可导出

$$\int_{h+\Delta h}^{h}B(r_0-r,\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^{(n)}(r_0-r,h)\cdot\Delta h^n(r)}{n!} \tag{3.4—6}$$

设 ρ 及 M 在 S 面下只是 (ξ,η) 的函数，则 S 以下全部物质对 P 点产生的 Δg 及 Z_a 分别为

$$\begin{aligned}\Delta g(r_0)&=\iint_{-\infty}^{\infty}G\cdot\rho(r)\left(\int_{h+\Delta h}^{h}+\int_{h}^{\infty}\right)A(r_0-r,\zeta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\zeta\\&=-G\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{(n-1)}(r_0-r,h)}{n!}\Delta h^n(r)\rho(r)-\frac{\rho(r)}{[(r_0-r)^2+h^2]^{1/2}}\right\}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{3.4—7}$$

$$Z_a(r_0)=\frac{f'_0}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^{(n)}(r_0-r,h)\Delta h^n(r)M(r)}{n!}+\frac{h\cdot M(r)}{[(r_0-r)^2+h^2]^{3/2}}\right\}\mathrm{d}r \tag{3.4—8}$$

由 (3.4—7) 及 (3.4—8) 式可知，Δg 和 Z_a 为 A 函数在 $\zeta=h$ 处的各阶垂向导数等函数与 $\Delta h^n(r)\cdot\rho(r)$ 或 $\Delta h^n(r)M(r)$ $(n=0,1,2\cdots)$ 在 $\xi\eta$ 平面内的褶积式之和。按照傅里叶变换理论，可导出 Δg 及 Z_a 的傅里叶变换式 $\Delta g(\omega,\nu)$ 及 $Z_a(\omega,\nu)$。先求 A 函数及其各阶导数的傅里叶变换，有

$$A(\omega,\nu)=F[A(r_0,h)]=2\pi\exp(-hk) \tag{3.4—9}$$

其中，$k=(\omega^2+\nu^2)^{1/2}$，ω,ν 各为 A 函数沿 x 及 y 方向的角波数，k 称径向角波数。

$A^{(n)}(r,h)$ 的傅里叶变换为

$$A^{(n)}(\omega,\nu)=F[A^{(n)}(r_0,h)]=(-k)^n\cdot2\pi\exp(-hk) \tag{3.4—10}$$

A 函数的垂向积分为

$$A^{(-1)}(r_0-r,h)=1/[(r_0-r)^2+h^2]^{1/2}$$

其傅里叶变换为

$$A^{(-1)}(\omega,\nu)=F[A^{(-1)}(r_0,h)]=2\pi\exp(-hk)/(-k) \tag{3.4—11}$$

由 (3.4—7)—(3.4—11)，求得 $\Delta g(\omega,\nu)$ 及 $Z_a(\omega,\nu)$ 的表达式为

$$\left.\begin{aligned}\Delta g(\omega,\nu)&=-2\pi G\exp(-hk)\sum_{n=0}^{\infty}[(\Delta h)^n\rho](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}\\Z_a(\omega,\nu)&=2\pi\frac{f'_0}{4\pi}\exp(-hk)\sum_{n=0}^{\infty}[(\Delta h)^nM](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}\end{aligned}\right\} \tag{3.4—12}$$

(3.4—12) 式即波数域中地下物性界面位场异常的正演计算公式。其中 $[(\Delta h)^n\rho](\omega,\nu)$ 或 $[(\Delta h)^n M](\omega,\nu)$ 为S界面下物性参数$\rho(r)$或$M(r)$与$\Delta h^n(r)$函数（S界面在r处的Δh的n次幂）乘积的傅里叶变换。如果S界面下还有另一界面S'存在，其下的M，ρ为零。设S'的平均深度为H，相对H的起伏为ΔH，如图3.4—2，则S与S'界面间物质所产生的$\Delta g(\omega,\nu)$及$Z_a(\omega,\nu)$为

$$\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\{\rho(\omega,\nu)[\exp(-hk)-\exp(-Hk)]/(-k)+$$
$$+\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}-$$
$$-\exp(-Hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\rho(\Delta H)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}\} \qquad (3.4—13)$$

$$Z_a(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\{M(\omega,\nu)[\exp(-hk)-\exp(-Hk)]+$$
$$+\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}-$$
$$-\exp(-Hk)\sum_{n=1}^{\infty}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}\} \qquad (3.4—14)$$

如果还有其它界面或物质层存在，可仿照上式进行叠加，求得多重界面的$\Delta g(\omega,\nu)$及$Z_a(\omega,\nu)$，将其进行逆傅里叶变换，便得空间域的$\Delta g(r_0)$及$Z_a(r_0)$。如果在S及S'之间的ρ及M为常数，则以上各式中的ρ及M可提到求和式之外，大括弧中的第一项在空间域中为常数项，可以略去。又设S'界面较深，$H\gg h$，其影响可以忽略，成为单界面情况，此时的$\Delta g(\omega,\nu)$及$Z_a(\omega,\nu)$为

$$\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\rho\left\{\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\Delta h^n(\omega,\nu)]\frac{(-k)^{n-1}}{n!}\right\} \qquad (3.4—15)$$

$$Z_a(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}M\left\{\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\Delta h^n(\omega,\nu)]\frac{(-k)^n}{n!}\right\} \qquad (3.4—16)$$

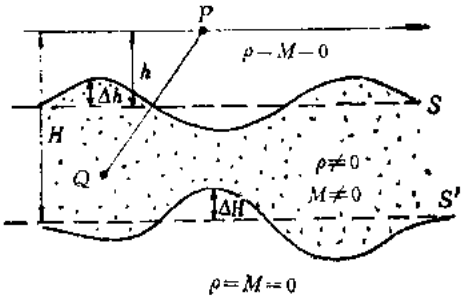


图 3.4—2　S及S'界面示意图

与Parker公式相比，以上各正演公式所有径向波数k的幂次项均为$(-k)$的幂次项，面前者均为(k)的幂次项；除此处外，其他各处二者符号均相同。按照通常的符号及傅里叶变换的定义，本文公式的推导是正确的。

由于公式中各傅里叶变换都可采用快速傅里叶变换（FFT）技术，故本方法的计算速度快，可计算大数据量，且精度较高。

二、迭代反演方法原理

（一）利用（3.4—15）及（3.4—16）式反演单界面起伏$\Delta h(r)$

可将界面起伏$\Delta h(r)$的公式写为

$$\Delta h(\omega,\nu)=[\exp(hk)/(-2\pi G\rho)]\Delta g(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}[(\Delta h)^n(\omega,\nu)(-k)^{n-1}/n!] \tag{3.4—17}$$

$$\Delta h(\omega,\nu)=\left[\exp(hk)\Big/\left(-\frac{\mu_0}{2}M\right)\right]Z_a(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}[(\Delta h)^n(\omega,\nu)(-k)^n/n!] \tag{3.4—18}$$

以上二式是将（3.4—15）及（3.4—16）式中求和项中分出的 $\Delta h(\omega,\nu)$ 项移项而得。这就是通常根据Parker公式提出的迭代反演公式。等式左端可看为是$\Delta h(r)$的波谱 $\Delta h(\omega,\nu)$ 的第 i 次近似值，等式右端的各 $\Delta h(\omega,\nu)$ 则为其第（$i-1$）次近似值。给定$\Delta h(r)$ 的初始值（一般可设为零），代入上式右端，求得 $\Delta h(\omega,\nu)$ 的一级近似值 $\Delta h_1(\omega,\nu)$，再代入等式右端，求$\Delta h(\omega,\nu)$ 的二级近似值 $\Delta h_2(\omega,\nu)$，如此反复下去，直至 $\Delta h_n(\omega,\nu)$ 的前后差值满足精度要求为止。为使迭代收敛，防止等式右端的因子 $\exp(hk)$高频扩散，须乘以正则化因子$E(k)$以压制高频，即

$$\Delta h_i(\omega,\nu)=E(k)\left\{[\exp(hk)/(-2\pi G\rho)]\Delta g(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}[(\Delta h_{i-1})^n(\omega,\nu)(-k)^{n-1}/n!\right\} \tag{3.4—19}$$

$$\Delta h_i(\omega,\nu)=E(k)\left\{\left[\exp(hk)\Big/\left(-\frac{\mu_0}{2}M\right)\right]Z_a(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}(\Delta h_{i-1})^n(\omega,\nu)(-k)^n/n!\right\} \tag{3.4—20}$$

以上迭代仍难保证收敛。在已发表的著作中，曾详细地分析了等式右端求和项的收敛性质，在$|\Delta h|<h$ 的情况下，求和项是有限的和收敛的。正则化因子 $E(k)$ 的选择，在理论分析上则较复杂和有待解决。这里介绍两种改进迭代效果的方法：

1．逐次求差滤波法

在用（3.4—19）或（3.4—20）进行迭代时，先略去 Δh 的高次项，并用计算所得 Δg (ω,ν) 与实测所得$\Delta g(\omega,\nu)$ 的差值代替等式右端的$\Delta g(\omega,\nu)$，求Δh的修正值 δh，其式如下（此处仅以Δg的有关计算为例，对Z_a的迭代反演可仿此进行）：

$$\delta h^i(\omega,\nu)=[\exp(hk)/(-2\pi G\rho)][\Delta g(\omega,\nu)-\Delta g^{i-1}(\omega,\nu)]E(k) \tag{3.4—21}$$

为了区分一般的迭代方法，此处用右上角标表示迭代次数，$\delta h^i(\omega,\nu)$代表第 i 次迭代所得 Δh的修正值；$\Delta g^{i-1}(\omega,\nu)$ 为第（$i-1$）次迭代求得的$\Delta h^{i-1}(\omega,\nu)$ 代入（3.4—15）式计算所得$\Delta g(\omega,\nu)$ 值，有

$$\Delta g^{i-1}(\omega,\nu)=-2\pi G\rho\left\{\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[(\Delta h^{i-1})^n(\omega,\nu)](-k)^{n-1}/n!\right\}$$

其中

$$\Delta h^{i-1}=\sum_{j=1}^{i-1}\delta h^j \tag{3.4—22}$$

如此继续下去，求得最终$\Delta h(r)$为

$$\Delta h(r)=\sum_{n=1}^{N}\delta h^n(r) \tag{3.4—23}$$

经比较可知这种每次求Δh的修正值δh 的迭代反演算法与一般的 Parker 迭代反演算法并无本质的区别，只是在求$\Delta h^n(\omega,\nu)$时多了一项 $(1-E(k))\Delta h^{n-1}(\omega,\nu)$。此项是$\Delta h^{n-1}(\omega,\nu)$的高通项。它使正则化因子所压制的$\Delta h^{n-1}\Delta h^{n-1}(\omega,\nu)(\omega,\nu)$ 部分得以补偿，使Δh^n 较快接近真值，因而提高了Δh 的反演精度，加快了迭代收敛。其效果已为多种模型计算所证

实。

类似于（3.3—48）正则化因子还可选用形式

$$E(h)=\frac{\alpha}{\alpha+\exp(\beta h)} \qquad (3.4-24)$$

其中α、β为待定常数，由试验求得，一般（$\alpha\leqslant 1$，$\beta\leqslant 1$）

2．由重磁场理论公式求近似迭代式

Xia Jianghai（1991，SEG）提出用水平层重力场公式及垂直板体磁场公式来求近似迭代反演式[30]。

（1）对重力异常有

$$\delta h_i^j=(\Delta g_i-\Delta g_i^{j-1})/2\pi G\rho \qquad i=1,2,3,\cdots,N \qquad (3.4-25)$$

式中，i为测点号，j为迭代次数，δh_i^j为第i点对应的Δh的第j次修正值，Δg_i为第i点的实测重力异常，Δg_i^{j-1}为经（$j-1$）次修正求得Δh代入（3.4—15）式计算得到的重力异常值，N为测点总数。

由于这种迭代公式不含高频发散因子，且符合重力异常变化规律，迭代收敛快，也较准确。

在计算Δg_i^{j-1}时，仍用Parker公式。

（2）对磁异常有

$$\delta h_i^j=2[\tan(\pi Z_{ai}^{j-1}/\mu_0\vec{M})-\tan(\pi Z_{ai}/\mu_0\vec{M})](h+\Delta h_i^{j-1})^2/\Delta L$$
$$i=1,2,3,\cdots\cdots,N \qquad (3.4-26)$$

式中，i，j，N意义同前；Z_{ai}^{j-1}为第（$j-1$）次迭代求得Δh_i^{j-1}代入（3.4—16）式求得的磁感应场值；$\vec{M}$为有效磁化强度，可用M的垂直分量代替（在本节讨论中，$\vec{M}=M$）；ΔL为平均点距。

$$\Delta h_i^{j-1}=\sum_{m=1}^{j-1}\delta h_i^m \qquad (3.4-27)$$

同样，由于迭代式中不包含高频发散因子，且在一定条件下符合磁感应场变化规律（见下面附a的证明），迭代较易收敛且较准确。在计算Z_{ai}^{j-1}时，仍用Parker公式。

〔附〕：迭代反演公式（3.4—26）和（3.4—25）的证明（编者）

a．由垂直磁化垂直板体的磁场公式出发，证明（3.4—26）式

设板体顶面深为h_i，底深→∞，宽度为ΔL，磁化强度为M，板体顶面中心在地面投影点为i，则板体在i点产生的垂直磁感应场Z_{ai}为

$$Z_{ai}=2M\Phi\mu_0/4\pi \qquad (3.4-28)$$

Φ角为顶面水平宽度对i点所张的角度，并有

$$\Phi=2\arctan\left(\frac{\Delta L/2}{h_i}\right) \qquad (3.4-29)$$

代入前式得

$$Z_{ai}=-\frac{\mu_0}{2\pi}M\cdot 2\arctan\left(\frac{\Delta L/2}{h_i}\right) \qquad (3.4-30)$$

若将向下无限延深的磁性体划分为一系列垂直板，则可将上式用于求其上界面起伏$\Delta h(r)$的迭代反演计算中，ΔL相当于平均点距，且设每个测点下方对应有一垂直板体存在，其顶深为$h_i=h+\Delta h_i$。

将上式移项得

$$\Delta L/2h_i=\tan\left(\frac{\pi Z_{ai}}{\mu_0 M}\right) \tag{3.4—31}$$

将第 j 次迭代求得的 h_i^j 及 Z_{ai}^j 与实际的 h_i 及 Z_{ai} 代入上式求差，有

$$\frac{\Delta L}{2}\left(\frac{1}{h_i^j}-\frac{1}{h_i}\right)=\tan\left(\frac{\pi Z_{ai}^j}{\mu_0 M}\right)-\tan\left(\frac{\pi Z_{ai}}{\mu_0 M}\right)$$

$$\approx\frac{\Delta L\delta h^j}{2h_i^{j2}} \tag{3.4—32}$$

由此求得迭代式（3.4—26）。

b．水平物质层的重力场公式

设地下有一系列并列的垂直板体，其顶深为 $h+\Delta h$，底深为 H 不大而且不变。这样可将这些板体看成水平质量线，其线密度 $\lambda=\rho\cdot$（底深－顶深），ρ 为板体密度。质量线在地表产生的重力异常为 $\Delta g=2\pi G\lambda=2\pi G\rho\cdot[H-(h+\Delta h)]$。每一质量线在其顶上地表处所产生的重力异常为

$$\Delta g_i=2\pi G\rho[H-(h+\Delta h_i)] \tag{3.4—33}$$

由此式求得迭代反演公式（3.4—25）。　（〔附〕结束）

（二）利用（3.4—15）及（3.4—16）式反演界面 S 下物质的物性参数 $\rho(r)$ 及 $M(r)$

由（3.4—15）式及（3.4—16）式经展开和移项，得

$$\rho(\omega,\nu)=k\Delta g(\omega,\nu)\exp(hk)E(k)/2\pi G-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu)-\frac{(-k)^{n-1}}{n!}\right\} \tag{3.4—34}$$

$$M(\omega,\nu)=2Z_a(\omega,\nu)\exp(hk)F(k)/\mu_0-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\left\{[M(\Delta h)^n](\omega,\nu)-\frac{(-k)^n}{n!}\right\} \tag{3.4—35}$$

以上等式右端的 ρ 及 M 若为第 i 次迭代求得的近似值，等式左端的 ρ 及 M 则为第（$i+1$）次迭代近似值。此式在实际计算中较复杂，正则化因子 $E(k)$ 不易确定，不易保证迭代收敛。为此，与前相似利用 Xia Jianghai 所提出的迭代公式，对有一定走向的二度体较适用。

1．由（3.4—33）式，可得

$$\rho_i=(\Delta g_i-\Delta g_i^j)/2\pi G[H-(h+\Delta h_i)]\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots \tag{3.4—36}$$

式中 j 为迭代次数，i 为测点号，h 为界面 S 的平均深度，Δh 为界面相对 h 的距离（为已知），底深 H 亦为已知，Δg_i 为第 i 点的重力异常值，ρ_i 为第 i 点的 S 界面下物质层的密度。利用（3.4—36）式计算 ρ_i（$i=1,2,3,\cdots\cdots$），求得 $\rho(r)$。由于迭代式简单易算，也易收敛，勿需乘正则化因子。对 Δg_i^j 的计算，仍用 Parker 公式。

2．由（3.4—31）式可得

$$M_i=\frac{\pi Z_{ai}}{\mu_0\arctan[\Delta L/2(h+\Delta h_i)]}\qquad(i=1,2,3,,\cdots\cdots)$$

因此时磁化强度 M 并非常数，而是随测点位置变化，故有 M_i。Z_{ai} 为第 i 个测点上的实测磁感强度。设 M_i^j 及 Z_{ai}^j 为第 i 点上第 j 次迭代求得的磁化强度及计算得到的磁感强度，有

$$M_i^j=\frac{\pi Z_{ai}^j}{\mu_0\arctan[\Delta L/2(h+\Delta h_i)]}$$

由上二式可得

$$\delta M_i^j=\frac{\pi(Z_{ai}^j-Z_{ai})}{\rho_0\arctan[\Delta L/2(h+\Delta h_i)]}\qquad i=1,2,3,\cdots\cdots \qquad (3.4-37)$$

(3.4—37) 即求 $M(r)$的迭代反演计算公式，式中 $(h+\Delta h_i)$ 及 Z_{ai} 均为已知，Z_{ai}^j 的计算，仍用Parker公式。

反演界面 S 下物质的物性参数 $\rho(r)$及 $M(r)$时，所需给定的条件为：

① 界面的平均深度 h 为已知；

② 界面 S 相对于 h 的起伏值 $\Delta h(r)$为已知；

③ 地表重、磁异常$\Delta g(r_0)$及 $Z_a(r_0)$ 的观测值为已知；

④ $\rho(r)$及$M(r)$的迭代初始值为已知，一般可取其估计平均值为初始值。

以上 4 条件除②外都较易满足，而条件②可借助其他地球物理资料，如地震勘探及测井资料等获得。由此方法所得到的界面下的物性参数分布，对地区的地质情况的综合分析，是很有益的。

三、双界面及多界面的快速正反演计算

（一）正演计算：本方法对双层及多层界面物性差异所产生的重、磁场的正演计算易于实现且快速可靠。它只需将各界面的平均深度值、各点的相对起伏值及物性参数（界面上下物性参数之差）分别代入（3.4—15）及（3.4—16）式，进行各界面的 $\Delta g(\omega,\nu)$ 或 $Z_a(\omega,\nu)$ 计算，将其迭加求和即得，如双界面的计算公式（3.4—13）及（3.4—14）式。仿此可得多界面或多物质层的重磁场正演计算结果。

（二）反演计算：本方法对多界面的重磁场作反演计算时，只能反演其中一个界面的起伏变化或物性参数值及其变化，其他各界面的深度及起伏和物性参数分布应为已知。其反演计算步骤与单界面相似，区别仅在于用（3.4—19）—（3.4—21）等式求各 $\delta h^n(n=1,2,\cdots)$ 或用（3.4—34）—（3.4—37）等式求$M(r)$及$\rho(r)$时，等式右端的Δg^j及 Z_i^j 应为多重界面的重、磁场值（或其波谱值）。

四、波数域中曲面上位场异常的转换方法

迄今为止曲面上位场异常的转换都采用等效源方法或逼近函数法，大多在空间域进行，需解大数据量的线性代数方程，耗费机时，且每次能处理的范围都有限。由于一般计算机所能容纳运算矩阵的维数并不大，不超过数百。而位场数据常以万计，故在空间域作位场数据的曲面转换，其应用很受限制。Xia Jianghai(1991) 提出一种波数域中等效源的计算方法，可用于曲面上位场异常的数据转换，其原理如下：

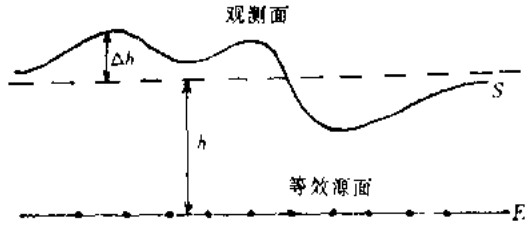


图 3.4—3 观测曲面及等效源层示意图

设位场观测面是曲面，如图 3.4—3 中的S面。为使S面上的位场异常能转换到空中任意点，达到延拓的目的（或称曲化平），或使位场数据能转换成其各阶导数或不同方向的分量，设S面下存在一分布在E水平面上的等效源层，S面上观测到的重磁场即由此等效源层所引起。先计算S面上的重力场，为此，设E平面上等效物质层的面密度为$\sigma(r)$，r为xy平面上的坐标矢量，$(r=xe_x+ye_y$，e_x及e_y为x，y方向的单位矢量)，在E平面上的重力异常$\overline{\Delta g}(r)$ 应为

$$\overline{\Delta g}(\boldsymbol{r})=2\pi G\sigma(\boldsymbol{r}) \tag{3.4—38}$$

在波数域中有

$$\overline{\Delta g}\ (\boldsymbol{k})=2\pi G\sigma(\boldsymbol{k}) \tag{3.4—39}$$

或 $$\overline{\Delta g}(\omega,\nu)=2\pi G\sigma(\omega,\nu)$$

其中$\boldsymbol{k}=\omega\boldsymbol{e}_x+\nu\boldsymbol{e}_y$，$k=\sqrt{\omega^2+\nu^2}$。

将 $\overline{\Delta g}(\boldsymbol{k})$ 向上延拓至S面上任一点，设其到E平面的垂向距离为$h+\Delta h(\boldsymbol{r})$，其中$h$为$S$面相对$E$平面的平均高度，$\Delta h$为$S$面相对$h$的高度，$S$面上的重力异常在波数域中为$\Delta g(\boldsymbol{k})$，则有

$$\begin{aligned}\Delta g(\boldsymbol{k})&=\overline{\Delta g}(\boldsymbol{k})\exp[-k(h+\Delta h(\boldsymbol{r}))]\\&=\overline{\Delta g}(\boldsymbol{k})\exp(-kh)\{\exp[-k\Delta h(\boldsymbol{r})]\}\end{aligned} \tag{3.4—40}$$

用泰勒级数将上式大括号项展开，并将（3.4—38）式代入上式，则有

$$\Delta g(\boldsymbol{k})=2\pi G\sigma(\boldsymbol{k})\exp(-kh)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-k\Delta h(\boldsymbol{r})]^n}{n!} \tag{3.4—41}$$

（3.4—41）式是基本计算公式，它与 Parker 公式有相似的形式，但其中$\Delta h(\boldsymbol{r})$具有空间长度量纲，而在Parker公式中是$\Delta h(\omega,\nu)$ 或 $\Delta h(\boldsymbol{k})$。（3.4—41）式中的级数如果收敛，就可进行迭代计算，求$\sigma(\boldsymbol{k})$。为此，应证明其收敛：

令 $B=\max|\sigma(\boldsymbol{r})|$，则$|\sigma(\boldsymbol{k})|\leqslant BA$，$A$为观测数据覆盖的面积。

有

$$\begin{aligned}\Delta g(\boldsymbol{k})&=2\pi G\sigma(\boldsymbol{k})\exp(-kh)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-k\Delta h(\boldsymbol{r})]^n}{n!}\\&\leqslant 2\pi GBA\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Bk)^n}{n!}\exp(-kh)\\&=2\pi GAB\sum_{n=0}^{\infty}L_n\end{aligned} \tag{3.4—42}$$

其中

$$L_n=\frac{(Bk)^n}{n!}\exp(-kh)=\frac{(Bk)^n/n!}{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(kh)^j}{j!}}<\left(\frac{B}{h}\right)^n$$

L_n小于量$(B/h)^n$，它与k无关。由于$|\Delta h(\boldsymbol{r})|<h$，即$B<h$，故$L_n$趋于无穷小，因此（3.4—41）式中级数一致收敛，此性质与前Parker公式的收敛是相似的。故（3.4—41）式可作为迭代求解的公式。

利用波数域中的重磁位关系式——泊松公式，可由$\Delta g(\boldsymbol{k})$求得 $\Delta T(\boldsymbol{k})$，这里ΔT是地磁场总场的标量异常。在空间域有

$$\Delta T(\boldsymbol{r},z)=\int\frac{\partial\Delta g(\boldsymbol{r},z)}{\partial t\partial m}\cdot\frac{\mu_0 M(\boldsymbol{r})}{4\pi G\sigma(\boldsymbol{r})}\mathrm{d}z \tag{3.4—43}$$

式中，M为等效源层的磁化强度。

在波数域则有

$$\Delta T(\boldsymbol{k})=\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{t})\ (\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{m})}{k}\ \frac{\mu_0 M(\boldsymbol{k})}{4\pi G\sigma(\boldsymbol{k})}\Delta g(\boldsymbol{k}) \tag{3.4—44}$$

由于是水平等效源层，M，σ与z无关。其中$\boldsymbol{R}=\mathrm{i}(\omega\boldsymbol{e}_x+\nu\boldsymbol{e}_y)+k\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{t}$为地磁总场方向的单位矢量，$\boldsymbol{m}$为地下磁性体磁化强度方向的单位矢量，$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$代表$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$的标量积。将

$\Delta g(\boldsymbol{k})$值及（3.1—41）式代入（3.1—44）式得

$$\Delta T(\boldsymbol{k})=\frac{(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{t})(\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{m})}{k}\frac{\mu_0}{2}M(\boldsymbol{k})\exp(-kh)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[-k\Delta h(\boldsymbol{r})]^n}{n!} \qquad (3.4-45)$$

基于（3.1—41）及（3.1—45）式，可用迭代方法从观测面S上的ΔT及Δg值来估算E平面上的等效源强度$\sigma(\boldsymbol{r})$及$M(\boldsymbol{r})$，其步骤为：

1．给$\sigma(\boldsymbol{r})$及$M(\boldsymbol{r})$的初始化值（凭经验及重磁异常变化特征），计算$\sigma(\boldsymbol{k})$及$M(\boldsymbol{k})$，并选择深度h，（$\Delta h(\boldsymbol{r})$为已知）。

2．将$\sigma(\boldsymbol{k})$及$M(\boldsymbol{k})$代入（3.1—41）式及（3.1—45）式，计算S曲面上各点的模拟$\Delta g(\boldsymbol{k},z)$及$\Delta T(\boldsymbol{k},z)$值，经逆傅里叶变换求得$S$曲面上各点的$\Delta g_i^j$及$\Delta T_i^j$值，（$j$代表迭代次数，$i$代表测点号）。

3．估算均方根误差 $\mathrm{RMs}(j)=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(s_i-s_i^j)^2}$

s_i为测点i上的ΔT_i或Δg_i的实测值；s_i^j为测点i上的第j次迭代求得$\sigma(\boldsymbol{k})$或$M(\boldsymbol{k})$再经（3.1—41）或（3.1—45）式计算所得Δg_i或ΔT_i值。N为总测点数。如在迭代过程中，$\mathrm{RMs}(j)$不减少或达到所要求的精度，迭代终止，否则继续下一步骤。

4．修正$\sigma(\boldsymbol{r})$或$M(\boldsymbol{r})$，用公式

$$\left.\begin{aligned}\sigma_i^{j+1}&=\sigma_i^j+C(\Delta g_i-\Delta g_i^j)/2\pi G\\ M_i^{j+1}&=M_i^j+4\pi C(\Delta T_i-\Delta T_i^j)/\mu_0\end{aligned}\right\} \qquad (3.4-46)$$

或

上式中C为常数，可选择，以控制迭代收敛，一般C选为小于1的常数。此修正式简单、有效且省时。

当E上等效源确定后，可按（3.1—41）及（3.1—45）式计算空间任一点的重磁场，当这些点在同一平面时，即达到曲化平的目的了。

（3.1—41）及（3.1—45）式是波数域的$\Delta g(\boldsymbol{k})$及$\Delta T(\boldsymbol{k})$计算公式，对波数域中Δg及ΔT求各阶导数或积分等运算都很方便。若对（3.1—45）式两端乘以ΔT的化极因子还可以达到使ΔT化极的目的。因此当利用上述迭代反演计算一旦确定了等效源强度$\sigma(\boldsymbol{r})$及$M(\boldsymbol{r})$，便可由基本计算公式（3.1—41）及（3.1—45）演化出空中任一点（不包括S曲面下真位场源以下的空间）的Δg，ΔT及其各向各阶导数（包括ΔT的化向地磁极）的计算公式，达到曲面上位场数据转换的目的。由于计算是在波数域中进行，可利用快速傅里叶变换（FFT）计算技术，虽然计算空间每一点的位场值时，对全部数据都须作一次以上的傅里叶变换，要耗费一定机时，但较之空间域等效源法，仍然省时。不过该方法经试用，迭代效果并非全佳，其思路可供借鉴（编者）。

§5 位场异常离散线性反演和B.G.反演理论及方法

根据地面的地球物理观测数据来反推地下的地球物理及地质参数，属地球物理反演问题。由于地面观测条件及地下情况的复杂多变，反演往往受到限制，其反演过程包括以下步骤：

① 对所解问题，根据物理原理作某些简化之后再作出数学抽象，提出初始模型，建立

理论公式；

② 通过正演，明确一些规律法则，提出地球物理泛函，根据初始模型给出计算值；

③ 给出稳定可行的反演方法；

④ 在已知明显的或隐含的约束下，调整模型参数，使之符合观测数据的最佳地球物理模型。

近二十年来，观测和计算技术的发展对地球物理反演问题有很大的推动，Backus和Gilbert发展了一系列有关的研究成果，着重对反演问题解的存在性、稳定性、唯一性、分辨率、方差和求解方法及约束求解等问题作了系统研究。以后William Menke等对离散反演理论用于地球物理数据分析也作了系统研究。这里将对他们的有关理论及方法作简单介绍。以线性反演问题为主，非线性问题只介绍其线性化过程，并同时介绍其在重磁异常反演中的应用。

一、离散线性反演

物理观测量与地下的某种物理特性模型之间可以通过数学抽象来联系。一般地可表示为第一类Fredholm积分方程，此为一种线性泛函关系式，即

$$d_j=(G_j,m)=\int_a^b G_j(x)m(x)\,\mathrm{d}x$$
$$j=1,2,3,\cdots,N \qquad (3.5\text{—}1)$$

式中：$G(x)$是由物理问题所确定的**核函数**，对于给定的物理问题是可计算的已知量，在位场异常的反问题中则通常为**格林函数**；$m(x)$是待求的**模型函数**；(G_j,m)为该二函数的**内积**，并由右方的积分来定义；N为观测数据个数；$[a,b]$为模型函数的定义域。当把定义域范围划分为M个区间，每个区间内模型函数$m(x)$值近似不变并以常数m_i表示时，(3.5—1)式可写为

$$d_j=\sum_{i=1}^{M}\int_{\Delta i} G_j(x)\,\mathrm{d}x\cdot m_i \quad i=1,2,\cdots,M;\quad j=1,2,\cdots,N$$

式中，Δi为第i个积分区间。$\int_{\Delta i} G_j(x)\,\mathrm{d}x$是可积的，设积分值为$G_{ij}$（仅与$j$及$i$有关），即$G_{ij}$仅是空间坐标$i$及$j$的函数，为已知值。则上式成为

$$d_j=\sum_{i=1}^{M}G_{ij}m_i \qquad i=1,2,\cdots,M;\ j=1,2,\cdots,N \qquad (3.5\text{—}2)$$

写成矩阵式

$$\boldsymbol{d}=\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{m} \qquad (3.5\text{—}2)'$$

式中模型函数$m(x)$已**离散化**成为模型参数，反问题由求积分方程解变为求线性代数方程解。

由数据参数N维矢量$\boldsymbol{d}$及$(M\times N)$阶核函数矩阵$\mathbf{G}$，通过(3.5—2)′式反演出M维矢量模型参数$\boldsymbol{m}$，这是一个离散线性反演问题。

方程$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$能否提供足够的信息来唯一确定所有的模型参数，成为划分反演问题类型的基础。设$\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}$为估计的**模型参数**，$\boldsymbol{d}^{\mathrm{pre}}$为**预测数据**，有

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{pre}}=\mathbf{G}\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}$$

求解时应该预测数据尽可能接近**观测数据**$\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$，使**预测误差**$e_i=d_i^{\mathrm{obs}}-d_i^{\mathrm{pre}}$为最小。

即应使求解所得的模型参数导致的观测值的预测误差最小。

（一）超定反演问题的最小二乘解

在$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$中提供的信息太多，即$N>M$，致使不具$\boldsymbol{m}$的精确解，只能求最佳近似解。为使$d^{\text{obs}}$与$d^{\text{pre}}$之间的预测误差最小，即应使$d^{\text{obs}}$与$d^{\text{pre}}$的欧几里德距离最小，范数经常作为此种距离长度的一种度量：

$$\left.\begin{aligned}
&L_1=\|e\|_1=\left[\sum_{i=1}^{N}|e_i|^1\right]\\
&L_2=\|e\|_2=\left[\sum_{i=1}^{N}|e_i|^2\right]^{1/2}\\
&\vdots\\
&L_n=\|e\|_n=\left[\sum_{i=1}^{N}|e_i|^n\right]^{1/n}\\
&\vdots\\
&L_\infty=\|e\|_\infty=\max|e_i|
\end{aligned}\right\}\qquad(3.5-3)$$

随着范数阶数的逐步提高，e的最大元素的权也逐步增大，在$n\to\infty$时，只有最大元素才有非零权。一般根据数据分布的特点来选择L。如果每次测定很精确，即使是远离e的均值也是可信的，则加权应大，所取范数的阶次应高。对范数的选择应根据数据服从的统计规律。选二阶范数意味着观测误差服从高斯分布，这种解称最小二乘解。

线性反演问题的最小二乘解为

$$E=\sum_{i=1}^{N}e_i^2=\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{e}=(\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\boldsymbol{m})$$

令E最小，有

$$\frac{\partial E}{\partial m_q}=0\qquad q=1,2,\cdots,M$$

得

$$\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}=0$$

即

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}\qquad(3.5-4)$$

为$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$的最小二乘解。

即使是超定问题，由上式可知当$[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]$为奇异矩阵而不可逆时则无解。

（二）亚定反演问题的最小长度解

当$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$不能提供足够的信息来唯一地确定所有的模型参数时，如$M>N$即此类问题。此时数据参数常能唯一地确定模型参数中的一部分，却不能唯一地确定其余部分。在矩阵G中可能有相容的矢量，还有一个以上的预测误差为零的解。

求解此类问题首先应将未包含在$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$中的信息附加到该问题中，这些信息称先验信息。求解时应使关于解的特征之期望值以定量的形式出现，该期望不依赖于实际数据，而来自实际的地质及地球物理环境所遵从的规律。先验信息具体从何而来？其可靠程度如何？对这些问题并没有严格的回答，在某些情况下可能确定一个合理的先验假设，在另外一些情况下却不可能。使用先验信息主要是在估计模型参数时候。如果只想得到对问题解的一个范例，那么选取先验信息并不重要。如果想要给出取决于此估计值的唯一性论证，则先验假设的正确性便非常重要。

在求解亚定问题时的第一类先验假设是反问题的解是“单纯的”这一期望，这一概念

用“解”的长度的某些度量来定量表示，“解”的欧几里德长度 $L=\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}=\sum m_i^2$ 就是这种度量。于是，在模型参数的 L_2 范数度量下，如果长度 L_2 很小，所得到的解就是“单纯的”，尽管并非一个很实际的度量，但一般情况下可用它来求解。下面介绍这种解法——模型参数的最小长度法。

“最小长度法”的数学表达是：求在 $\boldsymbol{e}=\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\boldsymbol{m}=0$ 约束下使 $L=\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}=\sum m_i^2$ 极小的 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{cst}}$。

利用拉格朗日乘子法很容易求解这一问题。取目标函数

$$\Phi(\boldsymbol{m})=L+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i e_i=\sum_{i=1}^{M}m_i^2+\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[d_i-\sum_{j=1}^{M}G_{ij}m_i\right] \tag{3.5—5}$$

其中，λ_i 是拉格朗日乘子；其它符号同（3.5—2）式。取上式对 m_i 的偏导数，得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi(\boldsymbol{m})}{\partial m_q}&=\sum_{i=1}^{M}2\frac{\partial m_i}{\partial m_q}m_i-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\sum_{i=1}^{M}G_{ij}\frac{\partial m_i}{\partial m_q}\\&=2m_q-\sum_{i=1}^{N}\lambda_i G_{iq}\end{aligned} \tag{3.5—6}$$

令（3.5—6）式等于零，再写成矩阵形式得到

$$2\boldsymbol{m}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$$

此方程必须与约束方程 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$ 一同求解。把 $2\boldsymbol{m}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$ 代入 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$，得

$$\boldsymbol{d}=\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\mathbf{G}[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}/2]$$

矩阵 $\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$ 是一个 $N\times N$ 阶的方阵，如果它的逆矩阵存在，就能解此方程求出拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}=2[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{d}$，然后把 $\boldsymbol{\lambda}$ 的表达式代入 $2\boldsymbol{m}=G^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}$，得到的解

$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{cs1}}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{d} \tag{3.5—7}$$

是亚定问题中模型参数的最小长度解。

（三）混定反演问题

在实践中出现的大多数问题既非完全超定的也非完全亚定的。理想的是把未知的模型参数分成超定的和亚定的两组，形成一组新的模型参数，它们是原有模型参数的线性组合，即 $\boldsymbol{m}=\boldsymbol{m}^{\mathrm{O}}+\boldsymbol{m}^{\mathrm{U}}$，相应的 $\mathbf{G}$ 及 $\boldsymbol{d}$ 也分解成 $\mathbf{G}^{\mathrm{O}}$ 及 $\mathbf{G}^{\mathrm{U}}$ 和 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{O}}$ 及 $\boldsymbol{d}^{\mathrm{U}}$，有 $\mathbf{G}^{\mathrm{O}}\boldsymbol{m}^{\mathrm{O}}+\mathbf{G}^{\mathrm{U}}\boldsymbol{m}^{\mathrm{U}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{O}}+\boldsymbol{d}^{\mathrm{U}}$，写成矩阵式为

$$\begin{bmatrix}\mathbf{G}^{\mathrm{O}} & 0\\ 0 & \mathbf{G}^{\mathrm{U}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{m}^{\mathrm{O}}\\ \boldsymbol{m}^{\mathrm{U}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{d}^{\mathrm{O}}\\ \boldsymbol{d}^{\mathrm{U}}\end{bmatrix} \tag{3.5—8}$$

如能做到这一点，就可以在最小二乘意义下解上部方程来确定超定模型参数，并且通过找出有最小长度 L_2 的解来确定亚定模型参数。此外，尽可能对反问题附加一些先验信息，以便确定有效解或改进解的可靠性。上述划分过程可通过核函数矩阵的奇异值分解来完成（将在后面介绍）。因为这一过程相对而言比较费时间，因此当反问题不太亚定时，可试验近似方法。

这种方法不去划分 $\boldsymbol{m}$，而假设要对未划定的模型参数确定一个使其预测误差 E 和解的长度 L 的某一线性组合 Φ 取极小值的解：

$$\Phi(\boldsymbol{m})=E+\varepsilon^2L=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}+\varepsilon^2\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m} \tag{3.5—9}$$

式中的加权因子 ε^2 用以确定 E 和 L 的相对重要性。通过测试法，有可能找出 ε 的某一折衷值，在使亚定部分解的长度近似取极小的同时使 E 也近似达到极小。用类似于导出最小二

乘法的方式求$\Phi(\boldsymbol{m})$对模型参数的极小，便得到

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}+\varepsilon^{2}\mathbf{I}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \tag{3.5—10}$$

这一模型参数估计值称为阻尼最小二乘解。误差的概念已经外推到不仅包括预测误差而且还包括解（如解的长度）的误差。可以说，这使反问题的亚定性得到了阻尼。

（四）加权度量——先验信息的一种类型

在许多情形中，长度$L=\boldsymbol{m}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m}$并不是一个非常好的对解的单纯性的度量。利用加权矩阵$\mathbf{W}_m$，使解的单纯性的度量推广为

$$L=[\boldsymbol{m}-\langle\boldsymbol{m}\rangle]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m[\boldsymbol{m}-\langle\boldsymbol{m}\rangle] \tag{3.5—11}$$

式中的$\langle\boldsymbol{m}\rangle$是模型参数的先验值。通过适当地选择先验模型向量$\langle m\rangle$和加权矩阵$\mathbf{W}_m$，可以使解的单纯性得到改进并达到定量评价。

预测误差E的加权度量也是常用的，经常有某些观测值的精度比另一些高的情况发生，在这种情况下，一般在E的定量表示中，对比较精确的观测值，其预测误差e_i上所加的权大于不精确的观测值的权。定义广义预测误差为

$$E=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e\boldsymbol{e} \tag{3.5—12}$$

其中的权矩阵$\mathbf{W}_e$确定了每个单独的误差对总预测误差的贡献。

1．加权最小二乘估计解

如果方程$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$是完全超定的，可通过使广义预测误差$E=\boldsymbol{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e\boldsymbol{e}$极小来计算模型参数，由此所得到的解为

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e\boldsymbol{d} \tag{3.5—13}$$

2．加权最小长度估计解

如果方程$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$是完全亚定的，则可通过选取最单纯的解来估计模型参数，其单纯性是由广义长度$L=[\boldsymbol{m}-\langle\boldsymbol{m}\rangle]^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_m[\boldsymbol{m}-\langle\boldsymbol{m}\rangle]$确定的，由此所得到的解的估计值为

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=\langle\boldsymbol{m}\rangle+\mathbf{W}_m^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{W}_m^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}[\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\langle\boldsymbol{m}\rangle] \tag{3.5—14}$$

3．混定反演问题加权阻尼最小二乘估计解

如果方程是稍亚定的，则可通过使预测误差和解的长度的组合$E+\varepsilon^{2}L$的极小来求解，由测试法求ε^{2}，使产生的解具有适当小的预测误差。解的估计值为

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=\langle\boldsymbol{m}\rangle+[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e\mathbf{G}+\varepsilon^{2}\mathbf{W}_m]^{-}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_e[\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\langle\boldsymbol{m}\rangle] \tag{3.5—15}$$

它等价于

$$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=\langle\boldsymbol{m}\rangle+\mathbf{W}_m^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{W}_m^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{2}\mathbf{W}_e^{-1}]^{-1}[\boldsymbol{d}-\mathbf{G}\langle\boldsymbol{m}\rangle] \tag{3.5—16}$$

（3.5—16）的证明可从（3.5—10）及（3.5—14）式对比而得。（3.5—15）式的证明从略。

以上求解时都必须弄清矩阵的逆是否存在。是否有可能对问题附加先验信息来抑制其亚定性常取决于加权矩阵的选取。

（五）模型参数估计值的方差

数据中不可避免的噪音给模型参数的估计值带来误差。由于上述所有有关模型参数估计值的推导公式都是数据参数的线性函数，其形式如$\boldsymbol{m}^{\text{est}}=\mathbf{M}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{v}$，式中的$\mathbf{M}$是某一矩阵，$\boldsymbol{v}$是某一向量，这样就可推测观测误差是如何“映入”$\boldsymbol{m}^{\text{est}}$的误差之中。如果数据的分布可用某一协方差矩阵$[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]$来表示，那么模型参数估计值的分布就能用协方差矩阵$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]$来描述，有$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]=\mathbf{M}[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$。于是解的协方差就可以用简明的方法来计算。

如果数据间是不相关的，并且都有相同的方差 σ_d^2，那么数据协方差为 $[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]=\sigma_d^2\mathbf{I}$，$\mathbf{I}$为单位矩阵。对于某些较为简单的反问题的解的协方差来说，所得到的公式是非常简明的。

超定问题的最小二乘解 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d}$ 的协方差为

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]=[[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]\sigma_d^2\mathbf{I}[[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}=$$

$$=\sigma_d^2[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}][[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{\mathrm{T}}]^{-1}=\sigma_d^2[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1} \qquad (3.5\text{—}17)$$

亚定问题的最小长度解 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}\boldsymbol{d}$ 的协方差为

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}]\sigma_d^2\mathbf{I}[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}]^{\mathrm{T}}$$

$$=\sigma_d^2\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-2}\mathbf{G} \qquad (3.5\text{—}18)$$

（六）广义逆及其分辨率和协方差

1．广义逆

前述求解线性反问题$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$的方法是建立在预测误差和解的单纯性的检验基础上，这些解都与数据成线性关系，可表示为

$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{M}\boldsymbol{d}+\boldsymbol{v}$$

其中$\mathbf{M}$是某一矩阵，$\boldsymbol{v}$是某一向量，两者都与数据无关。这方程表明，模型参数的估计值是由与数据进行运算的某一矩阵$\mathbf{M}$控制的，因此对$\mathbf{M}$进行研究能够了解更多的有关反问题的性质。由矩阵$\mathbf{M}$求 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}$，也称为反问题 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$ 的变换，一般称之为**广义逆**，用符号 $\mathbf{G}^{-g}$ 表示，其具体形式取决于要解决的问题。

超定最小二乘问题的广义逆为 $\mathbf{G}^{-g}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$。

亚定最小长度解的广义逆为 $\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}$。应注意的是，在某些方面，广义逆类似于普通矩阵的逆，如方阵方程（常定的）$\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$的解为 $\boldsymbol{x}=\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{y}$，而反问题 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$ 的解为 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$（可能会加上某一向量），不过，这种相似性是非常有限的。通常，广义逆并不就是矩阵的逆，它不是方阵，并且不须使 $\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}$ 或 $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}$ 等于一个单位矩阵。

2．数据分辨矩阵

如果已经找到了一个在某种意义下能够求解反问题 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$ 的广义逆，这样就得到模型参数的一个估计值 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}$（为简单起见，设不存在一个附加向量）。但这一估计值对数据的拟合程度如何呢？为此把该估计值代入方程 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}$，得

$$\boldsymbol{d}^{\mathrm{pre}}=\mathbf{G}\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}[\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}]=[\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}]\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}=\mathbf{N}\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}} \qquad (3.5\text{—}19)$$

上式中“pre”及“obs”上标分别表示预测值和观测值。$N\times N$阶方阵$\mathbf{N}=\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}$称数据分辨矩阵，可用以描述预测值与数据的拟合程度。如果$\mathbf{N}=\mathbf{I}$，则$\boldsymbol{d}^{\mathrm{pre}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$，因而预测误差等于零。反之，如果$\mathbf{N}\neq\mathbf{I}$，预测误差不为零。数据分辨矩阵不是数据的函数，而仅仅是数据核$\mathbf{G}$以及对问题所施加的先验信息的函数。它可用来检验反问题的解所得预测数据对观测数据的拟合程度，可以作为实验设计的重要工具。

3．模型分辨矩阵

数据分辨矩阵表明了数据能否被独立地预测或分辨，模型参数也能提出相同的问题。可以想像存在一个真实的、但未知的满足 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$ 的模型参数向量 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}}$。那么，该模型参数的某一特定估计值 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}$ 与这一真实解的逼近程度如何？将观测数据的表达式 $\mathbf{G}\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}}=\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$ 代入估计的模型参数表达式 $\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}$ 中，得到

$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{G}^{-g}\boldsymbol{d}^{\mathrm{obs}}=\mathbf{G}^{-g}[\mathbf{G}\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}}]=[\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}]\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}}=\mathbf{R}\boldsymbol{m}^{\mathrm{true}} \qquad (3.5\text{—}20)$$

其中的 $\mathbf{R}$ 是$M\times M$阶的模型分辨矩阵 $\mathbf{R}=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}$。如果$\mathbf{R}$不是一个单位矩阵，则模型参数的估计值就是真实模型参数的加权平均值。模型分辨矩阵也是数据核和对问题所附加的先验信息的函数，它可用来检验反问题的估计解与满足观测数据的解的拟合程度，也是实验设计的重要工具。

4．单位协方差矩阵

前述模型参数的协方差取决于数据的协方差及由数据误差映射成模型参数误差的方式((五))。其映射只是数据核和其广义逆的函数。为了描述映射中误差放大的程度，定义一个单位协方差是很有用的。假定数据是不相关的，并且所有的数据具有相同的方差σ_d^2，则数据协方差为$[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]=\sigma_d^2\mathbf{I}$，那么单位模型参数协方差矩阵为

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]_u=\mathbf{G}^{-g}[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}}/\sigma_d^2=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}} \qquad (3.5\text{—}21)$$

甚至当数据是相关的，也常能找到数据协方差矩阵的某种归一化，这样就能定义一个与模型协方差矩阵有关的单位数据协方差矩阵$[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]_u$，它与$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]_u$的关系为（由上式）

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]_u=\mathbf{G}^{-g}[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]_u\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}} \qquad (3.5\text{—}21)'$$

5．某些广义逆的分辨率和协方差

数据和模型的分辨矩阵及单位协方差矩阵描述了反问题解的许多有意义的性质，现在来计算较为简单的广义逆的数据和模型分辨矩阵及单位协方差矩阵，（设$[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]_u=\mathbf{I}$）。

（1）最小二乘广义逆

$$\mathbf{G}^{-g}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{G}[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}=\mathbf{I}$$

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]_u=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1}=[\mathbf{G}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}]^{-1} \qquad (3.5\text{—}22)$$

（2）最小长度广义逆

$$\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}=\mathbf{I}$$

$$\mathbf{R}=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}\mathbf{G}$$

$$[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}]_u=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-1}\mathbf{G}=\mathbf{G}^{\mathrm{T}}[\mathbf{G}\mathbf{G}^{\mathrm{T}}]^{-2}\mathbf{G} \qquad (3.5\text{—}23)$$

可以看出，最小二乘和最小长度解之间存在许多对称性。最小二乘求解完全超定问题，具有完好的模型分辨率，最小长度求解完全亚定问题，也具有完好的数据分辨率。

（七）数据核的奇异值分解及本征广义逆

利用数据核的奇异值分解（或称特征值分解或谱分解）可以很容易地确定线性问题的P空间和零空间这两个子空间，关于其推导可参见线性代数等教科书。这里仅给出其结果，说明其用途。

任何一个$N\times M$阶矩阵都能写成三个矩阵的乘积形式

$$\mathbf{G}=\mathbf{U}\Lambda\mathbf{V}^{\mathrm{T}} \qquad (3.5\text{—}24)$$

矩阵$\mathbf{U}$是一个由特征向量组成的$N\times N$阶矩阵，这些特征向量张成数据空间$S(\boldsymbol{d})$，$\mathbf{U}=(\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\cdots,\boldsymbol{u}_N)$，式中$\boldsymbol{u}_i$都是单个矢量。这些矢量互相正交并且可以选为单位长度，以使$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}=\mathbf{U}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$，（$N\times N$阶）。与此类似，$\mathbf{V}$也是一个由特征向量组成的$M\times M$阶矩阵，这些参量张成模型参数空间$S(\boldsymbol{m})$，$\mathbf{V}=(\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\cdots,\boldsymbol{v}_M)$，这里$\boldsymbol{v}_i$都是正交向量，因此$\mathbf{V}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}=$

$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}=\mathbf{I}$($M\times M$阶)。矩阵$\mathbf{\Lambda}$是由特征值组成的$N\times M$阶对角阵，它的对角元素是非负的并称之为奇异值。当$N=4$，$M=3$时，

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.5—25}$$

奇异值一般由大到小顺序排列，其中有些可能为零。这样就可以把$\mathbf{\Lambda}$分成一个由P个非零奇异值组成的子矩阵$\mathbf{\Lambda}_P$和几个零矩阵，即

$$\mathbf{\Lambda}=\begin{bmatrix}\mathbf{\Lambda}_P & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.5—26}$$

其中$\mathbf{\Lambda}_P$是一个$P\times P$阶对角矩阵。因而分解$\mathbf{G}=\mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{\mathrm{T}}$变成$\mathbf{G}=\mathbf{U}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}$，$\mathbf{U}_P$和$\mathbf{V}_P$分别由$\mathbf{U}$及$\mathbf{V}$的前$P$列组成；$\mathbf{U}$和$\mathbf{V}$中的其它部分被$\mathbf{\Lambda}$中的零消去了，因此矩阵$\mathbf{G}$没有包含任何有关这部分数据和模型特征向量张成的子空间的信息，把这些向量分别称之为$\mathbf{V}_0$及$\mathbf{U}_0$。

因为数据核不是零特征向量$\mathbf{V}_0$和$\mathbf{U}_0$的函数，再加上模型参数$\boldsymbol{m}$与$\mathbf{V}_P$相乘，$\mathbf{V}_P$与所有的$\mathbf{V}_0$正交，所以

$$\mathbf{G}\boldsymbol{m}=\boldsymbol{d}=\mathbf{U}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{m} \tag{3.5—27}$$

反问题的本征解为

$$\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}=\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\boldsymbol{d} \tag{3.5—28}$$

因此对于混定或亚定问题可以定义一个广义逆算子——本征广义逆

$$\mathbf{G}^{-g}=\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}} \tag{3.5—29}$$

这种广义逆是很有用的，以致有时就把它当作一般广义逆。

本征广义逆的模型分辨矩阵为

$$\mathbf{R}=\mathbf{G}^{-g}\mathbf{G}=\{\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\}\{\mathbf{U}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}\}=\mathbf{V}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}} \tag{3.5—29$'$}$$

仅当$\mathbf{V}_P$张成整个模型参数空间时，也就是当不存在零特征值且$P\geqslant M$时，才有$\mathbf{V}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$，模型参数才能得到很好的分辨。

本征广义逆的数据分辨矩阵为

$$\mathbf{N}=\mathbf{G}\mathbf{G}^{-g}=\{\mathbf{U}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}\}\{\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\}=\mathbf{U}_P\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}} \tag{3.5—30}$$

仅当$\mathbf{U}_P$张成整个数据空间且$P=N$时，才有$\mathbf{U}_P\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}=\mathbf{I}$，数据才能得到很好的分辨。

本征广义逆的模型协方差

当数据是具有一致方差且互不相关的数据时，$[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]=\sigma_d^2\mathbf{I}$，本征广义逆的模型协方差为

$$\begin{aligned}[\mathrm{cov}\boldsymbol{m}^{\mathrm{est}}]&=\mathbf{G}^{-g}[\mathrm{cov}\boldsymbol{d}]\mathbf{G}^{-g\mathrm{T}}=\sigma_d^2\{\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\}\{\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\}^{\mathrm{T}}\\&=\sigma_d^2\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-2}\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{3.5—31}$$

由上式可知，估计的模型参数的协方差对最小的非零特征值非常灵敏。

为了使用本征广义逆，必须能够确定P的值，也就是计算非零奇异值的个数。在计算过程中画出奇异值大小（数据核的谱）与其指标的关系图是比较有用的。如果把所有奇异值分成明显可以区别开的两组，就很容易确定P值，见图（3.5—1）（a）。然而，在实际反问题中出现图（3.5—1）（b）所示的曲线是更典型的。奇异值平滑地减小，这就难以把确实非零的奇异值与本来为零但由于计算机舍入误差而变为非零的奇异值区分开来。不仅如此，如果所选取的P使之包含了那些非常小的奇异值，则解的方差会特别大，因为解的

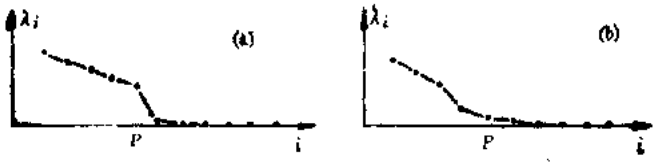


图 3.5—1 奇异值分布图

方差与$\mathbf{A}_P^{-2}$成比例。解决此问题的一个办法是选择一个奇异值截断值，然后把任何小于该值的作零处理。这样就人为地减小了包含在广义逆中的$\mathbf{V}_P$及$\mathbf{U}_P$的维数，因而模型参数的最终估计值就不再刚好是本征解。但如果仅把比较小的奇异值排除在外，那么其解一般接近于本征解并具有更小的方差，不过它的模型和数据分辨却变得更差。因而需有一合适的折衷选择，这种方法又称**谱截断法**。

如果不选择一个锐截止的奇异值分布，那么在对较小的奇异值进行阻尼，就可把所有的奇异值都包括进去。因而令$P=M$,但是用$1/(\varepsilon^2+\lambda_i)$代替$1/\lambda_i$。其中$\varepsilon$是一个较小的数。这一改变对较大的奇异值影响很小，却能防止较小的奇异值产生大的方差。这时的解也不再是本征解，虽然其方差得到了改进，但是其模型和数据分辨率却下降了。实际上，这时的解刚好就是前面所讨论的阻尼最小二乘解。对奇异值加阻尼因子，相当于附加“模型参数都比较小”这一先验信息。准确的谱截断值或阻尼参数都必须用测试法来选取。

二、Backus-Gilbert 反演理论

Backus-Gilbert反演理论的本质和上述线性离散反演理论是一致的，只是其模型参数$m(x)$是连续函数，而非离散值，故有其优越性。

（一）模型构制

由前述（3.5—1）式，观测数据和模型函数之间存在如下的线性泛函式

$$e_j=(G_j,m)=\int_a^b G_j(x)m(x)\mathrm{d}x$$

$$j=1,2,3,\cdots,N$$

各符号意义同前。方程（3.5—1）式是亚定的，须加先验信息才能求解。如同构制前述模型参数的欧几里德长度最小的模型一样，这里构组能量最小模型，在约束条件（3.5—1）约束下，求泛函

$$\Phi=\frac{1}{2}\int_a^b m^2(x)\mathrm{d}x \qquad (3.5—32)$$

的极小。引入拉格朗日乘子α_j，将上述条件值问题化为求泛函

$$\Phi=\frac{1}{2}\int_a^b m^2(x)\mathrm{d}x-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j\int_a^b G_j(x)m(x)\mathrm{d}x \qquad (3.5—33)$$

的极小的无条件极值问题。由变分原理得到上式的欧拉方程

$$\partial\left\{\frac{1}{2}m^2(x)-\sum_{j=1}^{N}\alpha_jG_j(x)m(x)\right\}/\partial m(x)=0$$

因为α_j相互独立，上式的解为

$$m(x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_j(x) \tag{3.5—34}$$

将（3.5—34）代入（3.5—1）式有

$$e_j=\int_a^b G_j\sum_{i=1}^{N}\alpha_i G_i\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_a^b G_i G_j\mathrm{d}x$$

令 $\Gamma_{ji}=\int_a^b G_i G_j\mathrm{d}x$，有 $e_j=\sum_{i=1}^{N}\Gamma_{ji}\alpha_i \quad j=1,2,\cdots,N$ (3.5—35)

由方程（3.5—35）解出α_i并将其代入（3.5—34）就求得能量最小模型。

为了改善解，尽可能加入先验信息，如已知的分布范围等。通过加权来实现。设权函数为$W(x)$，使（3.5—32）式由下式来代替

$$\Phi=\frac{1}{2}\int_a^b W^2(x)m^2(x)\mathrm{d}x$$

则可得出加权最小模型

$$m(x)=\frac{1}{W^2(x)}\sum_{j=1}^{N}\alpha_j G_j(x) \tag{3.5—36}$$

将上式代入（3.5—1）式得

$$e_j=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\int_a^b\frac{G_i(x)G_j(x)}{W(x)W(x)}\mathrm{d}x$$

令

$$\tilde{\Gamma}_{ji}=\int_a^b\frac{G_j(x)G_i(x)}{W^2(x)}\mathrm{d}x,$$

则有

$$e_j=\sum_{i=1}^{N}\tilde{\Gamma}_{ij}\alpha_i \qquad j=1,2,\cdots,N \tag{3.5—37}$$

由上式解出α_i并将其代入（3.5—36）即得加权最小模型。

（二）构解中的不适定分析

（3.5—35）式写成矩阵形式

$$\boldsymbol{\Gamma\alpha}=\boldsymbol{e}$$

$\boldsymbol{\alpha}$为N维向量，$\boldsymbol{e}$亦为N维向量。$\boldsymbol{\Gamma}$是对称正定矩阵，其特征值分解有

$$\boldsymbol{\Gamma}=\mathbf{R\Lambda R}^{\mathrm{T}} \tag{3.5—38}$$

其中$\boldsymbol{\Lambda}$为$\boldsymbol{\Gamma}$的特征值对角矩阵，有

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_N) \qquad \lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\lambda_i\cdots\geqslant\lambda_N>0$$

$\mathbf{R}$为N阶三角阵。（3.5—37）式中的$\boldsymbol{\alpha}$的解为：

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{R\Lambda}^{-1}\mathbf{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e} \tag{3.5—39}$$

可见小的特征值λ_i将使$\boldsymbol{\alpha}$的误差增大，故（3.5—38）是一个不适定方程。可采取前述“谱截断”（即奇异值截断）或奇异值阻尼法求解，使模型函数的误差或解的不适定性得到遏制。

三、线性反演在位场异常解释中的应用——求源分布

1．磁模型线性方程的建立

如图3.5—2，将地下空间划分为m个单元，每个单元内物质的磁化强度可视为常数（只

要划分得足够细或符合客观的已知条件就可做到)。设地表测点以 i 表示,地下单元位置以 j 表示，则在测点 i 上的磁场 $\Delta T(i)$ 可写为

$$\Delta T(i)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_0}{4\pi}M_j\int_{V_j}\frac{\partial^2}{\partial t\partial f}\left(\frac{1}{r_{ij}}\right)\mathrm{d}V \qquad (3.5-40)$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

式中，$\mathrm{d}V$ 表示体积元，V_j 表示第 j 个单元的体积，r_{ij} 表示 V_j 内各点到 i 点的距离，是空间坐标的函数，($1/r$ 为牛顿位函数)，M_j 为第 j 单元内物质的磁化强度，t 为地磁场方向的单位矢量，f 为磁化强度 M 方向的单位矢量，n 为观测点数。(3.5—40) 式中的积分式是可积的，可计算出具体数值，其值与 i、j 有关，用 G_{ij} 表示，则上式变为

$$\Delta T_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\mu_0}{4\pi}G_{ij}M_j \qquad (3.5-41)$$

$$i=1,2,\cdots,n$$

写成矩阵式有

$$\Delta T=\mathbf{G}M \qquad (3.5-42)$$

可用离散线性反演的方法解此方程求 M_j，($j=1,2,\cdots,m$)。

2．反演求解过程

（1）计算数据核 G_{ij}，求其矩阵 $\mathbf{G}$；

（2）对 $\mathbf{G}$ 作奇异值分解，$\mathbf{G}=\mathbf{U}_P\mathbf{\Lambda}_P\mathbf{V}_P^{\mathrm{T}}$，作奇异值分布图，确定 P 值；

（3）采用谱截断法或奇异值阻尼法求本征广义逆

$$M^{\mathrm{cst}}=\mathbf{V}_P\mathbf{\Lambda}_P^{-1}\mathbf{U}_P^{\mathrm{T}}\Delta T \quad (P\leqslant m)$$

（4）M^{cst} 求得后，计算模型分辨矩阵 $\mathbf{R}$ 及模型协方差矩阵〔cov$M$〕以考查其分布的精确性；

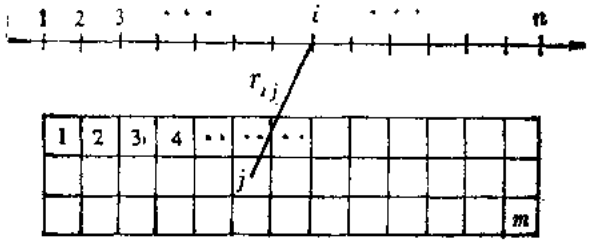


图 3.5—2 线性反演求源分布示意图

（5）在明确 $n<$，$=$ 或 $>m$ 的情况后，也可采用最小二乘法或最小长度法求解；

（6）在 $n<m$ 的情况下，还可采用上述 B. G. 方法反演求 M 的分布。(实例略)

四、非线性反演问题求解

(一) 模型构制

许多地球物理问题都是非线性的，即观测的物理量与所求的模型函数不能以线性泛函来表示。不过在一定条件可将非线性问题局部线性化，采用线性反演理论来求解非线性问题。

设第 i 个观测值 e_i 通过非线性泛函 F_i 与模型 $m(x)$ 相连，即

$$e_i=F_i[m(x)] \qquad i=1,2,\cdots,N \qquad (3.5-43)$$

一般地球物理学中非线性问题均是 Frechet 可微的。即对任一模型 $m(x)$，存在函数 D_i，若 $m'(x)$ 是另一模型，则有

$$e_i(m')=e_i(m)+\int_a^b D_i(m,x)[m'(x)-m(x)]\mathrm{d}x+O\int_a^b(m'-m)^2\mathrm{d}x$$

(3.5—44)

式中$[a,b]$为模型函数$m(x)$的定义域，$O\int_a^b(\cdots)^2\mathrm{d}x$为高阶项。$D_i$叫泛函$e$在$m(x)$处的Frechet导数或灵敏函数。上式可写成

$$e_i(m')-e_i(m)=\int_a^b D_i(m(x),x)[m'(x)-m(x)]\mathrm{d}x+$$
$$+O\int_a^b(m'-m)^2\mathrm{d}x$$

或
$$\delta e_i=\int_a^b D_i\delta m(x)\mathrm{d}x+O\int_a^b\delta m^2\mathrm{d}x \qquad (3.5—45)$$

当高阶项可以忽略时，上式变为

$$\delta e_i=(D_i(m,x),\delta m) \qquad (3.5—46)$$

此式与（3.5—1)式完全类似，这时Frechet导数核D_i起核函数G_i的作用。未知函数$m(x)$由摄动$\delta m(x)$代替，而不是模型函数本身。观测数据则是由观测值与理论值之差来代替。

（二）解模型构制

由上可知，(3.5—46）式完全类似线性问题（3.5—1）式，故可采用迭代法。首先，给定一初始模型$m_0(x)$，并计算其对应的Frechet导数（一般即D对m的导数），由(3.5—46）式用线性问题的解法，解出未知函数与起始模型$m_0(x)$的扰动$\delta m(x)$，加$\delta m(x)$于$m_0(x)$，产生一新模型，由它可以计算出一组新的观测响应。由于方程是由非线性方程经线性化而产生的，故新模型不一定能拟合观测值，即δe_i不一定为零。因此，上述过程要重复直到δe_i值足够小。迭代收敛完成与否由均方根相对误差ε或均方根绝对误差δE

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon&=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i(\delta e_i/e_i)^2}\\ \delta E&=\sqrt{\frac{1}{N}\sum_i\delta e_i^2}\end{aligned}\right\} \qquad (3.5—46)'$$

来检查。当ε或δE达到可接受的某一小数时，迭代过程停止。

（三）由位场异常确定物性界面（非线性反演举例）

在反演问题中，求界面问题是非线性的，即反问题的解，在模型空间不能以泛函形式来表示，但可把非线性问题局部线性化，从而用线性反演理论来解决非线性问题。

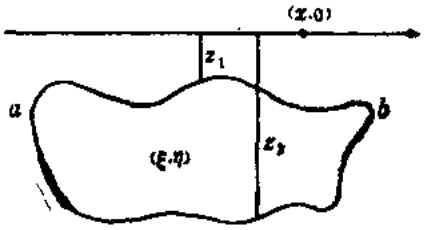


图 3.5—3　连续界面模型示意图

设有上下两层界面，它们的横向延展范围有限，在a，b之间。界面间物性参数w仅随横向位置变化，不随纵向位置变化，且为已知。可以建立非线性连续界面模型，如图3.5—3。

磁异常（空气中的磁感应强度）的正问题方程为

$$A(x_i,0)=\int_a^b\frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{\alpha z_1(\xi)-\beta(\xi-x_i)}{(\xi-x_i)^2+z_1^2(\xi)}-\frac{\alpha z_2(\xi)-\beta(\xi-x_i)}{(\xi-x_i)^2+z_2^2(\xi)}\right\}\mathrm{d}\xi$$

(3.5—47)

其中α，β为与磁化强度向量有关的参数，为已知。$z_1(\xi)$为上界面深度，$z_2(\xi)$为下界面深度。设（3.5—47）式{…}内是Frechet可微的，若已知$z_1(\xi)$，要求底界$z_2(\xi)$时，此问题的Frechet导数为

$$F[z_2,\xi,x_i]=\frac{\alpha[(\xi-x_i)^2+z_2^2(\xi)]+2\beta(\xi-x_i)z_2(\xi)}{[(\xi-x_i)^2+z_2^2(\xi)]^2} \tag{3.5—48}$$

重力异常的正问题方程为

$$A(x_i,0)=G\int_a^b \rho\ln\frac{(\xi-x_i)^2+z_2^2(\xi)}{(\xi-x_i)^2+z_1^2(\xi)}\mathrm{d}\xi \tag{3.5—49}$$

式中，G为引力常数，ρ是层间物质剩余密度。若已知顶界，要求底界$z_2(\xi)$时，问题的Frechet导数为

$$F[z_2,\xi,x_i]=2G\rho\frac{z_2(\xi)}{(\xi-x_i)^2+z_2^2(\xi)} \tag{3.5—50}$$

对上述重磁两种情况，当忽略了底界扰动量$\delta z_2(\xi)$的高阶项后，得到线性化扰动数据方程为

$$\begin{aligned}\delta A(x_i)&=(F[z_2,\xi,x_i],\delta z_2(\xi))\\&=\int_a^b F[z_2,\xi,x_i]\cdot\delta z_2(\xi)\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{3.5—51}$$

此式与（3.5—1）式完全类似，此时Frechet导数$F[z_2,\xi,x_i]$起核函数作用，而未知函数$z_2(\xi)$和观测数据$A(x_i)$则均由各自的扰动所代替。

反演求解时采用迭代法，首先给定初值模型$z_2^0(\xi)$，计算其对应的Frechet导数$F[z_2,\xi,x_i]$及$\delta A(x_i)=A(x_i)-A^0(x_i)$，$A(x_i)$为观测到的位场异常，$A^0(x_i)$为将初始值代入（3.5—47）或（3.5—49）中计算所得的$A(x_i)$值。将$F[z_2,\xi,x_i]$及$\delta A(x_i)$代入（3.5—51）式中，求解$\delta z_2(\xi)$值。加$\delta z_2(\xi)$于$z_2^0(\xi)$之上产生新的模型，并由它可以计算出一组新的观测响应。如此继续下去，由于（3.5—51）式是对非线性方程进行线性化而产生的，故新模型不一定很快拟合观测值，即$\delta A(x_i)$不一定很快达到零。因此上述迭代过程要重复到$\delta A(x_i)$值足够小。由均方根相对误差(ε)准则或平均绝对误差准则(δE)来检查，当ε或δE达到可接受的某一小数时，迭代过程停止。

为防止迭代过程中的不适定性（迭代不收敛），可采用如（3.5—38）～(3.5—39)式的谱截断或奇异值阻尼法来改善。计算实例略。

§6 神经网络反演法及分形分析简介

一、神经网络（neural network）反演法简介

地球物理反演是根据各种地球物理方法的观测结果定量估算地下的物理性质。在原理上，能根据大地对电磁波、电流及地震波的响应，以及地球重力场和磁场数据来估算地下断面的电导率、地震波速度、密度及磁化强度的分布。这是一个主观过程，因为反演模型是实际地下断面的高度理想化模型。而且，即使能准确计算反映这些观测资料的物理参

数，也很可能出现各种方法描述的构造彼此不一致。在试图用不同地球物理方法的综合数据来克服多解性和不一致时，在很大程度上取决于对每种数据主观确定的权。实际上要由单一地球物理方法准确估算相应的参数是非常困难的问题。多解性是位场固有的物理本性。对于地震和电磁法测量数据，多解性来源于数据不充分、有干扰和选用的模型不恰当。此外非线性反演过程本身也会造成多解性。

自适应模式识别（adaptive pattern recognition，以下简称APR）已被证明在语音识别、手书识别及军事目标判定等领域是有效的。这些成功部分地是由于其目标输出集合比地球物理反演所要求的要小得多。为开发对一般地球物理反演有效的模式识别方法，需要对输入空间的不同表示方法和神经网络（以下简称NN）结构作出重大努力。为此，下面先考察现行自动反演方法所遇到的困难。

现行自动地球物理反演方法实际上是等权拟合，忽略了数据集合的某些部分可能比其他部分更重要。在用不同地球物理方法获得的数据作联合反演以消除由单一方法反演出现的多解性时，有另一种类型的赋权问题。给予各种数据的权重将强烈影响反演结果。

最常用的自动反演方法都基于某种阻尼线性最小二乘法，也就是都基于某种形式的梯度下降过程，导致所得的解是处于离初值最近的极小点而并非总体极小。此外求解的维数（变量数）也受到限制。最小二乘法的另一问题是非高斯型干扰引起的麻烦，即方法的健全性差。还有一个问题是，现有的反演方法没有保留经验而浪费了大量时间。

NN系统将成为一般地球物理反演系统的一个组成部分。自然这还需要积累经验才能开发合适的NN系统和APR方法，从而使地球物理反演出现真正的革新。

（一）NN系统概述

人脑有10^{11}量级的神经原。每一神经原可从其他几十至几千个神经原通过叫作突触的特殊机构接受输入。神经原是一种复杂的电化学机构，具有连续的内膜位。它的作用类似一个按输入电位非线性积分工作的电位频率变换器。当膜电位超过某定值，神经原就产生一沿突轴的脉冲，这一脉冲通过分枝与其他神经原连接。突轴可按其增大或减小神经原点火的概率分为激励的或抑制的。实现一个周期的时间为毫秒级，大约比硅逻辑门慢10^5倍。

一般认为大脑不可思议的计算能力是由于有庞大的并行结构。大脑与串行计算机在几个基本方面有所不同，它是分布式的而不是集中控制的，这里没有中央执行器监控处理流程。对脑伤患者进行的神经生理研究表明，没有任何一部分大脑皮层能控制其他部分的全部操作，而且也没有中央存储器。知识看来是保存在神经原相互连接的通道上，学习过程就是改变连接强度。

第一个明确指出这一学习规则的是Denald Hebb(1949)："当细胞A的轴突接近于激发细胞B并重复或持续对其点火时，将在一个或几个细胞中发生生长过程或代谢作用，从而使A的效率增大，使这些细胞之一点燃了细胞B。"这段话称为"Hebb准则"，已成为人工NN系统的重要基础之一。

图3.6—1和图3.6—2表示两种不同类型NN系统的示意图，它们都是分布式计算系统，具有如下特征：

1．神经原即处理单元（PE），实质上是模拟积分器，将"各输入的加权和"输入一非线性门，参看图3.6—4（在下面逆传播法中再作进一步讨论）。

2．激发规则确定神经原对加权输入和的响应方式。非线性活化函数有三种常见类型，

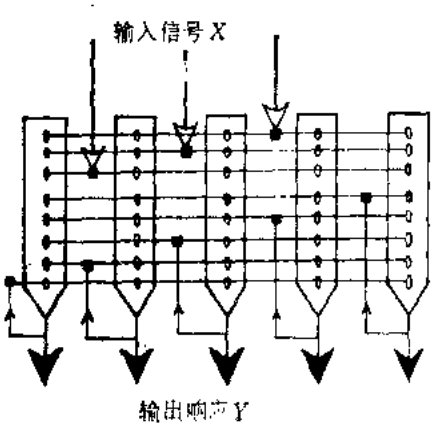


图 3.6—1 带负反馈的内部全连接网络示意图

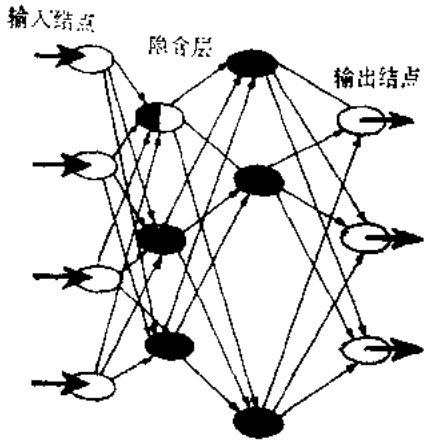
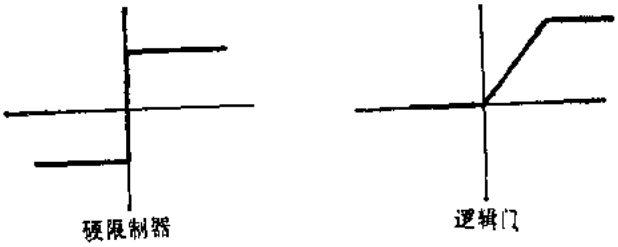


图 3.6—2 四层正反馈网络



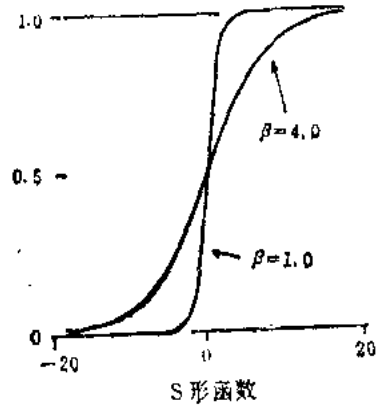


图 3.6—3 活化函数

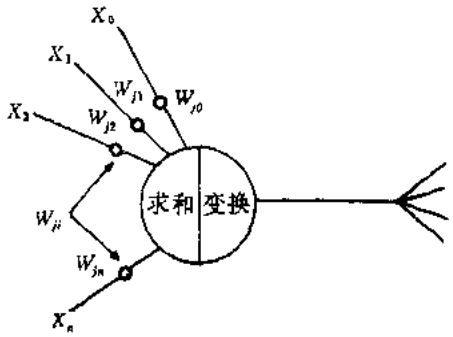


图 3.6—4 神经处理单元

即硬限制器、逻辑门及 S 形函数，见图3.6—3。不同的活化函数以其形状和阈值为特征，对低于阈值的输入不作出响应。文献〔31〕中介绍的 S 形函数 $\sigma(z)$ 定义为

$$\sigma(z)=\frac{1}{1+e^{-z}}$$

$$z=\frac{p_i-\theta_i}{\beta_i}$$

其中，p_i为输出函数，θ_i为阈值，β_i为表示活化特性的参数。

3．结构。这是指一事物与另一事物连接方式的拓朴结构。可以从图 3.6—1 全连接负反馈改变到图3.6—2的正反馈。图3.6—2中的网络有四层，即输入层、输出层、两个隐含层。

4．学习规则。这些规则构成网络参数（权和阈值）在训练学习中的变化方式。

人工神经网络更接近人脑而不像常规计算机，因而吸引了许多人。但生物神经原比现有任何NN系统要复杂得多，那种认为只要装配出足够复杂的NN系统就能建造真正的智能识别机是不现实的。不管NN系统是否真能模拟哺乳动物的脑功能，关键是NN方法比传统的模式识别或专家系统能更有效地完成特定的计算工作，主要是它的速度和灵敏性。一旦建立起来并经过训练之后，NN 算法是非常快的。只要改动一些连接方式和训练规则，它就可以适应不同的需要。

NN系统是多种多样的。由以上讨论可看出NN系统有三个基本部分，它们是处理单元（PE）、单元层、连接机构。通用的NN结构模型有 Kohonen 自编组网络、感觉原、广义非线性感觉原、Hopfield 网络、Hamming 网络、ART (adaptive resonance theory) 网络、RCE(restricted coulomb energy)方法、泛函链方法等。从现有的文献看[32][33][34]，应用 NN 系统进行地球物理反演均采用包含逆传播算法 (backpropagation) 的广义 非线性感觉原结构组成的 NN 系统。下面对逆传播算法作扼要介绍。

（二）逆传播算法[32]

自从1986年Rumelhart等提出最初的逆传播算法以来，目前已有多种逆传播算法。下面介绍文献[32]所用的逆传播算法。

NN 最基本的元件是处理单元 (PE)，这是模拟生物神经原的一种元 件。一般 说 来，PE可有许多输入通道，第 j 个单元的输入值 I_j 为各通道输入值 X_i 与相应的连接权系数 W_{ji} 乘积之和，见图3.6—4。

$$I_j=\Sigma W_{ji}X_i \tag{3.6—1}$$

其中 I_j 称为第 j 个处理单元的内活度。连接权系数 W_{ji} 的初值随机给定，在训练学习中不断修改，第一个下标 j 表示后一层的单元编号，第二个下标 i 表示前一层的单元编号。对处理单元的内活度 I 在单元内按下式作非线性变换

$$F(I)=\frac{e^{I}-e^{-I}}{e^{I}+e^{-I}} \tag{3.6—2}$$

变换后的函数值 $F_j(I)$ 作为该处理单元的输出 Y_j，输入到下一层的各处理单元。这 里的 $F(I)$ 也就是前面提到的活化函数。

NN 系统的许多处理单元组成不同的层，各相邻层的处理单元可以是完全地或 部分地彼此连接。接受输人的各单元组成输入层，输出网络响应的各单元组成输出层。在输入和输出层之间的是隐含层，其作用类似于连接刺激源和输出层之间的触突。隐含层的触突效率（连接强度）在网络学习过程中不断修改。用已知样本训练 NN 系统，对每一输人均有一预期输出。网络能自适应进行学习，修改单元间连接权，使网络权矩阵能将输入映射为期望输出。这种学习算法是一种有指导的学习或逆传播算法。根据网络对输人的响应（即输出）来调整或确定权矩阵的方法称为学习规则或“Delta规则”。在逆传播算法中，减小输出误差的任务由所有的连接权共同承担。首先在输出层计算实际输出与期望输出之差，再将这一误差乘以处理单元变换函数的导数，求得第 k 个处理单元的输出误差 E_k

$$E_k^{(out)}=F'(I_k^{(out)})\cdot(D_k-O_k) \tag{3.6—3}$$

$$F'(I_k^{(out)})=1-F^2(I_k^{(out)})$$

上式中上标(out)表示输出层，下标 k 为单元编号，O_k 为单元实际输出，D_k 为期望输出。

求得 s 层各单元的误差 $E_j^{(s)}$ 后，由下式求该层与前一层连接权系数 $W_{ji}^{(s)}$ 的修正值 $\Delta W_{ji}^{(s)}$

$$\Delta W_{ji}^{(s)} = l_{coef} \cdot E_j^{(s)} \cdot X_i^{(s-1)} \qquad (3.6-4)$$

上式中 l_{coef} 为学习系数，它确定了学习规则，由网络设计者给定。

由 s 层的误差 $E_k^{(s)}$ 及连接权系数 $W_{kj}^{(s)}$ 反推 $s-1$ 层的误差 $E_j^{(s-1)}$ 的公式为

$$E_j^{(s-1)} = F'(I_j^{(s-1)}) \cdot \sum_k (E_k^{(s)} \cdot W_{kj}^{(s)}) \qquad (3.6-5)$$

文献[31]、[34]介绍了与此不同的逆传播算法。这些逆传播算法获得了某些突出进展，例如Sejnowski和Rosenberg 1987 年开发的NETtalk，可以朗读课文。但逆传播算法也有许多不足之处：①网络不能保证在有限迭代次数内收敛；②除非选用小步长，否则连接权出现大的负值时将停止学习，而小步长又要增加训练时间；③逆传播网络也可能落入局部极小；④逆传播网络不适于暂态问题；⑤复杂的问题需要数目巨大的隐含层结点。可见，为了进一步改善逆传播算法还要作许多工作。

（三）应用实例

1．用NN解释航磁结构[32]

1987年在美国科罗拉多州与内布拉斯加州交界处的Denver-Julesberg盆地进行了勘查油气的高精度航空磁测。测线沿东西方向，连络线沿南北方向，平均飞行高度 91.44m，调平后精度2.3nT。横贯大陆的弧形构造沿北东向穿过盆地北部，盆地内有厚层古生代碳酸岩及石炭纪砂岩、页岩，被古生代以来周期性活动的构造活动划分为不同的构造单元。航空磁测是勘查盆地内二叠纪宾夕法尼亚层隆起圈闭油储的重要方法。在盆地内已发现许多储量可观的油田。在两处开采油田上有微弱而完整的航磁异常，其中之一的异常幅值约10nT，剖面上异常宽度约10km。

设计了三层NN系统研究航磁显示的构造异常。网络包括 10 个输入单元，10个隐含单元，2 个输出单元，以划分基底之上的盖层异常与基底内部的异常。用多元统计分析选择输入参数，主成分分析对压缩数据的作用最明显。用组合模型异常对网络进行训练，目的是使它能在有人文异常和基底内部异常的干扰下识别出各种可能的盖层构造。完成上述网络训练的迭代次数不超过30万次。

用实际数据及人工合成数据对训练过的网络进行了严格检验。由航磁剖面辨认出的盖层异常与共深度点地震数据及钻孔控制的构造对比，NN 系统圈定构造的平均准确度为80%。网络对人工数据圈定盖层构造的准确度为95%。

在本次研究中，由高精度航磁剖面准确圈定了Bird和Amazon两处油田。此外网络还发现了在航空磁测初步解释中被忽略的一些盖层磁异常。

2．电磁法地下影像的NN模式识别

文献[34]探讨了用逆传播算法的人工NN系统解释地下目标在极化磁场(椭圆极化)中的影像的能力。这一问题在两方面与大多数 NN 模式识别的应用不同。第一，它不是按模式识别的离散网络输出而是用连续参数输出。第二，只用纯理论模型训练网络而用野外数据作检验。对近于要求作适时解释的地球物理应用来说，这些差别是重要的。

由于 NN 系统不是作精确计算的工具，增加了作参数估计的困难。S 形函数渐近地趋近于 0 和 1，为达到达两个值需要无穷多次的训练。对大多数分类问题来说，可以用 0.1

及0.9代替 0 和 1 。在参数估计中，由于实际输出值要压缩到0.1至 0.9 的范围内，要求本项研究的精度为三位有效数。

模型试验用Sternberg 1989年研制的高精度EM地下成像系统。在 150Hz至6814Hz的11个频道上进行比例模拟。整个图像有660个像素，在 PC机上这个数字太大，难于实现。要在PC机上实现大网络训练，常需要几天至几周的时间，在 286和386PC 机上用软件模拟的NN系统，能对约300 个分量的向量以合理的时间进行学习训练。研究表明，网络在训练组合以外的空间范围内有一定的外推能力。研究还表明，网络也不能训练过头，否则会受到野外数据噪声的干扰。

表3.6—1总结了不同数据表示方法（不同的网络规模）所需的训练迭代次数，以及解释野外数据、试验资料和外推模型的平均误差。其中的训练次数是指获得最小平均误差的迭代次数。网络规模指输入层、隐含层及输出层的处理单元数。由表看出，用频率域表达的效果最好，其网络规模小，训练迭代次数少，解释精度高。对于同一种数据表达方式，使用最高频数据比使用全部频道数据的效果好。这对于子样及峰值两种数据表示方法都是如此。

表 3.6—1　不同数据表示方法的平均误差

表示方法	网络规模	训练次数	平均误差（%）			
			野外资料	试验资料	外推模型	
全图像	660×100×15×2	20k	4.0	5.5	20.7	水平距
			18.8	1.6	6.5	深度
子集	176×20×2	10k	27.3	5.0	11.0	水平距
			0.3	5.1	6.0	深度
子集*	88×44×2	5k	0.0	5.2	15.3	水平距
			2.5	2.9	4.9	深度
谷—峰—谷	90×45×2	5k	35.0	6.1	9.7	水平距
			1.1	4.0	8.4	深度
峰	20×10×2	3k	15.0	8.6	16.1	水平距
			2.1	2.8	6.1	深度
峰*	14×7×2	3k	3.3	7.8	16.8	水平距
			2.2	2.7	5.4	深度
频率域	1×8×2	3k	0.4	4.1	3.8	水平距
			1.5	2.7	4.1	深度

* 只用最高频道数据。

二、分形（fractal）分析简介

（一）两种分形概念[35]

分形概念最初是 Mandelbrot 于1967 年提出的，他研究了英国海岸线的长度，这种长度用不同的尺度表示是不同的。他提出用一种统计特性来描述海岸线长度。并称这种统计性质为分形维（fractal dimension），具有分形维的事物称为分形的，表示其空间自相似性。令海岸线总长度为L，丈量单位为y，不足 1 单位的尾数为c，则

$$L=Ny+c=y\left(N+\frac{c}{y}\right) \tag{3.6—6}$$

用不同的丈量单位，得到的海岸线长度不同。为保持总长度的一致性，将（3.6—6）改写

为

$$L=y^{D}\left(N+\frac{c}{y}\right) \tag{3.6—7}$$

或

$$\lg\left(N+\frac{c}{y}\right)=-D\lg y+\lg L \tag{3.6—8}$$

在双对数坐标中，上式为一直线，由其斜率可求得D，这就是 Mandelbrot 1967 年定义的分形维，也叫作 Hausdorff-Besicovitch 维。上述求分形维的方法称为划分法。文献〔36〕就是用划分法求日本北海道 Toyoha 矿的裂隙特征

另一种分形概念是以后根据随机现象提出的。对随机现象的分形维有两种求法，即谱法和方差图法。对于随机布朗噪声，应满足方程

$$E[(Y(x_1)-Y(x_2))^2]=k(d_{12})^{2H} \tag{3.6—9}$$

其中，$Y(x_1)$及$Y(x_2)$分别为x_1及x_2两点的布朗噪声函数；d_{12}为x_1及x_2两点间距离；$E[\cdots]$表示求均值；H可用功率谱或方差图来求得。文献〔35〕证明，这类随机现象的分形维D可由下式推算

$$D=2-H \tag{3.6—10}$$

两种分形概念的出发点不同，因此也不能指望用不同方法计算的分形维D相同。文献〔35〕对不同地区海岸线用两种概念计算了分形维，见表3.6—2。由表可以看出用划分法计算的 Hausdorff 维与用方差图计算的随机分形维有很大区别，二者间的相关性很差。表中由划分法求出的分形维数据按递减次序排列，而用方差图法估算的随机分形维则无这种规律。

表 3.6—2 对海岸线分形维的估算

海岸线	分形维估算结果	
	划分法	方差图法
英国西海岸	1.27	1.67
澳大利亚北海岸	1.19	1.50
美国西海岸	1.19	1.86
美国东海岸	1.15	1.70
澳大利亚南海岸	1.13	1.30
美国东海岸 Hood 运河	1.08	1.77
墨西哥加利福利亚湾西海岸	1.03	1.33
墨西哥加利福利亚湾东海岸	1.02	1.22

如果分形分析的目的是判别几何形态，Hausdorff-Besicovitch 维是有用的。随机分形维则有助于了解变量y随变量x的变化特征（也可用于二维、三维情况）。分形分析在地球物理中的应用多采用随机分形维。

（二）应用实例

1．航磁数据的随机分形模拟〔37〕

地球物理模型通常由几何因子与物性参数两部分组成，前者一般是确定性的，后者则有随机变化。通常采用线性模型，数据可表示为模型系统的确定性函数与随机物理性质的褶积

$$r(x,\ y)=c(x,\ y)*p(x,\ y) \qquad (3.6-11)$$

上式中$r(x,\ y)$为磁场观测值，$c\ (x,\ y)$为反映当地特征的系统函数，$p\ (x,\ y)$为随机的磁化率函数。Spector 和 Grant (1970)[38]及Naidu (1970)[39]等曾致力于用功率谱或自相关函数对航磁数据进行统计分析。在不同的空间尺度上出现类似的磁异常模式，这一情况表明磁化率具有自相似性或分形特征。Mandelbrot (1983) 指出，高斯随机过程可看作一组分形噪声，并以具有$1/f^{\beta}$的谱为特征。因而可用分形概念来描述航磁异常。

加拿大两个地区的航磁功率谱证实了磁化率的分形随机特性：第一个地区位于Alberta省及Saskatchewan省北部，有六组128×128航磁数据（1981），取样间距812.8m，飞行高度300m；第二个地区位于安大略省东北部，有两组200×200（1983）航磁数据，取样间距62.5m，飞行高度305m。对200×200数据用余弦函数扩边20点至零，对128×128数据扩边12点至零。然后均补零为256×256数据组，经傅里叶变换下延至地表，再求平均径向功率谱。下延到地面的化极航磁功率谱近似于地面磁化率分布的功率谱。由上述各组数据求出的功率谱均有$1/k_r^{\beta}$的形式，这里k_r为径向波数。由对数平均径向功率谱斜率求得的β比Mandelbrot用于剖面数据的同一参数要大1。在航磁数据下延至磁性基岩表面后，由各组数据的平均径向功率谱求得的β值在(2.8—3.4)之间。由于确定斜率的精度不高，可以认为这些数据组均属于$\beta=3$这一类。文献[37]采用自回归 (autoregressive) 递推滤波以反演 (3.6—11) 式中的$p\ (x,\ y)$，即反映磁性基底表面磁化率变化特性的分形随机面，可以和孙运生等 (1985) 的视磁化率填图对比[40]。但分形随机反褶积方法在原理上和视磁化率填图不同。文献[37]给出了上述两个地区用自回归滤波作出的磁性图(magnetic map)，其分辨率比总场图 (total field map) 高，显示出一些在总场图上看不出的异常，可供进一步调查●。

2．用分形分析确定布格密度[41]

为计算布格重力异常首先需求出作地形改正的平均密度（布格密度）。通常是由使布格重力异常与地形的相关最小来估算这一密度。这种作法是假定地形由刚性地壳支持而不是依靠均衡补偿。冰岛西南部的地壳厚度一般认为仅（9—14）km，因此上述由地形与布格重力异常相关最小来估算密度的作法值得怀疑。文献[41]假定重力场的粗糙度比地形小，因此可使布格异常面的粗糙度极小来确定布格密度。

在冰岛西南部研究了两组重力数据。一组数据有291个测点，平均测点距为8km，覆盖面积的直径大于100km。另一组数据有313个测点（Hengill火山地区），平均点距略小于1km。按（3.6—9）式求布格重力异常面的分形维。具体作法是将测区各点的最大距离划分为50等分（形成50个不同距离的子类）。对属于每一类距离的各对测点求异常面差值的方差。将大于32个差值的各类求得的方差与各类的距离按双对数坐标作图，即可由斜率求出H，再由下式求分形维

$$D=3-H \qquad (3.6-12)$$

此式比按（3.6—10）式计算的分形维大1。

选取某一密度作地改，求出布格异常，再由（3.6—12）式求出相应的分形维，这样可求得布格重力异常分形维与地改密度间的函数关系，见图3.6—5。在地表地形由地壳支

● 说明：[37]中两幅总场图和两幅磁性图均用色阶表示，无法复制，从略。

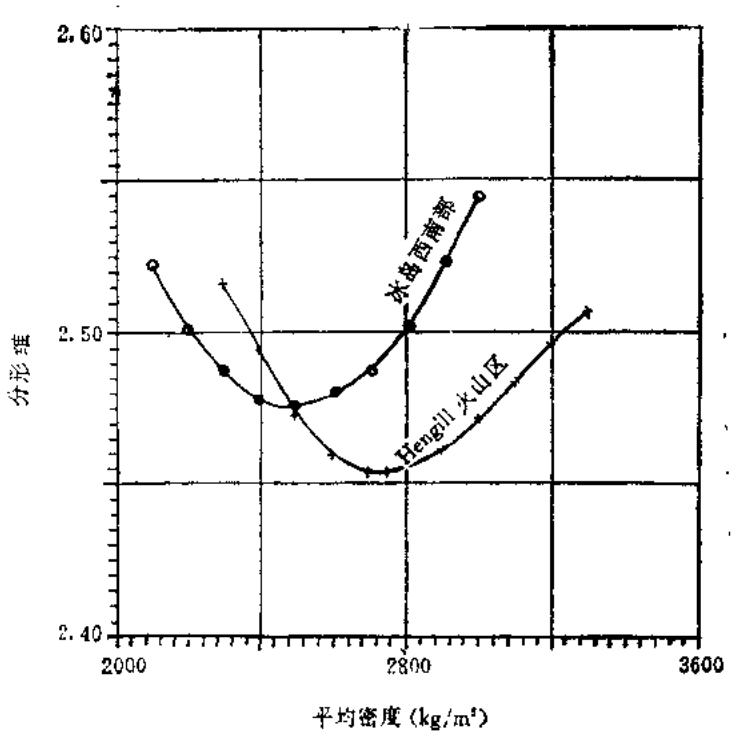


图 3.6—5　布格异常分形维与地改密度的关系

持的范围内，使布格重力异常分形维极小的密度值即为最合适的地改密度。由图3.6—5可以看出，对范围较大的冰岛西南部地区，地改平均密度应为 2490 kg/m³，对范围较小的 Hengill 火山地区，地改平均密度应为 2730 kg/m³。

第四章　磁法的某些重要应用及单位制问题

§1　岩石磁各向异性、磁异常微磁测量及其地质应用

磁化率各向异性是磁参数研究中的一个重要内容，由于它在地学中应用范围的拓宽及其效果明显，越来越受到人们的重视。总起来讲，在沉积岩中，它可以研究岩石的沉积、搬运、充填方式；在岩浆岩中，它可以研究熔岩流的流动构造及与围岩的相互作用关系，从而可以分析岩体的形成及产出状况；变质岩中，可以分析变质岩的类型及变质程度。目前，把岩石磁各向异性与有限应变测量、岩组分析相结合来解决地质构造问题也取得了明显的效果。

微磁测量通过观测浅层岩石的微磁异常来研究岩石的微磁结构，以便用来划分岩性、确定流线方向等，也受到了人们的注意。本节在介绍一般概念的基础上，重点结合陕西地区综合应用磁各向异性与微磁测确定火山口的实际效果来说明方法的有效性与综合方法应用的重要性。

一、岩石磁各向异性

岩石的磁各向异性一般是指岩石的磁化强度随方向变化的性质。磁各向异性一般分为三种：①给岩石样品沿一定方向加上弱磁场，使之磁化，并测量沿该方向的磁化率，则发现，磁化率会随方向的不同而改变，这种性质称为磁化率各向异性或低场各向异性；②岩石的饱和磁化强度的能量随方向而变化，称这种磁各向异性为强场各向异性或饱和磁化强度各向异性；③若对岩石样品的不同方向进行磁化，然后测量其剩余磁化强度，则它也会随方向而变化，称这种性质为剩磁各向异性。目前主要研究岩石的磁化率各向异性。

（一）岩石磁各向异性的成因❶

1．形状各向异性

岩石磁性矿物颗粒的几何形状一般可用三轴椭球近似表示，当颗粒被磁化时，其内部产生退磁场，由于退磁系数与磁性颗粒的形状有关，如椭球长轴方向退磁系数较短轴方向小，故内部退磁场较短轴方向的为小，所以总磁化强度随形状不同而异，从而产生与形状有关的各向异性。

2．磁晶各向异性

在测量单晶体的磁化曲线时发现，在不同晶轴方向上磁化曲线不同，这种现象存在于任何铁磁性晶体中，称为磁晶各向异性。

---

❶ 孟小红：《中国东部鲁西、辽南金伯利岩的岩石磁学研究》1991.11，博士论文，中国地质大学（北京）。

在铁磁晶体中，分布在晶格上的原子或离子，由于受邻近原子的作用，其电子轨道矩失去了空间各向对称性，因而电子云的分布变为各向异性的形态。通过电子自旋矩与轨道矩之间的相互耦合作用，产生了电子自旋间各向异性的相互作用能，从而产生了磁晶各向异性。

3．应力诱导的各向异性

当铁磁体磁化强度发生变化时，其大小尺寸也会发生变化，把反映磁晶各向异性能与形变相应变化的效应称为磁致伸缩。反之，若对铁磁体施加压力，使其长度发生变化，从而内部的磁化状态也随之变化，这是磁致伸缩的逆效应，称为压磁效应。磁性矿物被磁化时要发生磁致伸缩，如果受到限制而不能自由伸缩，体内就会产生应力和磁弹性能，后者的大小与磁致伸缩系数和应力的乘积成正比，与磁化方向和应力方向之间的夹角有关。磁弹性能随方向的变化导致了磁各向异性。

由于应力诱导的磁各向异性与岩石所受外力（压力或拉力）和所发生的应变有密切联系，因而可以通过磁各向异性来研究应力的变化，并提出利用磁化率对应力的依赖关系研究地震的可能性。

以上三种成因是控制天然岩石磁化率各向异性的主要因素，除此之外还有磁畴定向排列、磁性颗粒串行排列（形状各向异性的特例）、交换作用引起的磁各向异性（铁磁性矿物和反铁磁性矿物之间的交换作用）等。

（二）主要磁性矿物的磁各向异性特征

最常见的磁性载体为磁铁矿、赤铁矿和磁黄铁矿以及它们的固溶体系列。

1．磁铁矿的磁各向异性特征

磁铁矿（Fe_3O_4）是钛磁铁矿系列的端员，具有倒向尖晶石结构，在弱场中是固有各向同性的。其磁化率各向异性主要是形状各向异性，磁晶各向异性可以忽略。在强场作用下，出现磁晶各向异性，易磁化轴在〈111〉方向，难磁化轴在〈100〉方向。此时磁化率各向异性既有磁晶各向异性也有形状各向异性。

当尖晶石结构的钛磁铁矿系列矿物具有一定磁性时，磁化率各向异性主要是形状各向异性。

2．赤铁矿的磁各向异性特征

赤铁矿（γFe_2O_3）是钛赤铁矿系列的端员，具有菱形结构，晶格的底面是易磁化面，晶格的 c 轴是难磁化方向。在弱场情况下，底面（即a、b轴所在平面上的磁化率是各向同性的，而且其磁化率值至少比沿晶格 c 轴方向上的磁化率高两个数量级，显示出很强的磁晶各向异性。对于赤铁矿而言，由于磁性弱，形状各向异性与磁晶各向异性相比很小，因此，磁化率各向异性主要是磁晶各向异性，即磁性面理也就是赤铁矿晶格底面的优选排列。

具有菱形结构的钛赤铁矿系列的岩石与赤铁矿的磁各向异性特征相类似，磁化率各向异性主要是磁晶各向异性。

3．磁黄铁矿的磁各向异性特征

常见的铁的硫化物有硫铁矿、黄铁矿和磁黄铁矿，其中只有磁黄铁矿具有磁学意义。

在铁的硫化物FeS_{1+x}中，磁黄铁矿的成分限制在 $0<x<\frac{1}{7}$，$x=0$ 为硫铁矿，$x>$

$\frac{1}{7}$为黄铁矿，磁黄铁矿的磁性特征与成分 x 的大小有关，可分为三个区域：① $0<x<0.1$，在室温下为反铁磁性；② $0.1<x<\frac{1}{7}$，在室温下为亚铁磁性；③ $x\approx0.1$在一定的温度区间为亚铁磁性。具有亚铁磁性的磁黄铁矿，晶格底面是易磁化面，晶格 c 轴是难磁化轴，在弱场情况下，底面上的磁化率是各向同性的，磁化率的大小比沿晶格 c 轴的磁化率大三个数量级，磁各向异性特征与赤铁矿类似。

至于岩石的磁各向异性特征，则由其中所含磁性矿物特征决定。

（三）磁各向异性的描述方法

在磁各向异性介质中，磁化率表现为一个二阶实对称张量

$$K_{ij}=K_{ji}\qquad(i、j=1，2，3)$$

若转动坐标系，可以将磁化率张量表示成为一个主对角矩阵，其主对角元素 κ_1、κ_2、κ_3 称为主磁化率或磁化率张量的主值，一般定义为最大、中间和最小磁化率，它们的方向称为主方向，其相应的坐标轴为 x_1、x_2、x_3。形象地描述磁各向异性的最完备方法是用一个磁各向异性椭球，椭球参数由磁各向异性三个主方向矢量确定。有两种表示方式，一种是磁化率椭球，另一种是磁化率数值椭球，它们的方程分别为

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{1}{\kappa_1}\right)}+\frac{x_2^2}{\left(\frac{1}{\kappa_2}\right)}+\frac{x_3^2}{\left(\frac{1}{\kappa_3}\right)}=1 \qquad (4.1—1)$$

和

$$\frac{x_1^2}{\kappa_1^2}+\frac{x_2^2}{\kappa_2^2}+\frac{x_3^2}{\kappa_3^2}=1 \qquad (4.1—2)$$

一般在实际中很少应用磁化率椭球，而常用比较直观的磁化率数值椭球，并且习惯将它简称为磁化率椭球。故应注意：一般文献中所给出的磁化率椭球实指磁化率数值椭球。

三个磁各向异性主值的不同组合，可给出许多描述磁各向异性特征的参数。1985年国际地磁和空间测量会上，曾就磁各向异性的描述方法提出如下一套标准参数：

① 各向异性度 P

$$P=\frac{\kappa_1}{\kappa_3} \qquad (4.1—3)$$

或

$$H=\frac{(\kappa_1-\kappa_3)}{\bar{\kappa}} \qquad (4.1—4)$$

$$\left(\bar{\kappa}=\frac{1}{3}(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\right)$$

② 磁性线理度 L

$$L=\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \qquad (4.1—5)$$

或

$$l=\frac{(\kappa_1-\kappa_2)}{\bar{\kappa}} \qquad (4.1—6)$$

③ 磁性面理度 F

$$F=\frac{\kappa_2}{\kappa_3} \qquad (4.1—7)$$

或

$$f=\frac{(\kappa_2-\kappa_3)}{\bar{\kappa}} \qquad (4.1—8)$$

④ 磁各向异性椭球形状参数 E 和 T

$$E=\frac{L}{F}=\frac{\kappa_1\kappa_3}{(\kappa_2)^2} \qquad (4.1—9)$$

或

$$T=\frac{2(\eta_2-\eta_3)}{(\eta_1-\eta_3)}-1 \qquad (4.1—10)$$

$$(\eta_1=\ln\kappa_1，\ \eta_2=\ln\kappa_2，\ \eta_3=\ln\kappa_3)$$

当$\kappa_1\kappa_3>(\kappa_2)^2$时，$E>1$或$0<T<1$，椭球形状或磁性颗粒以面平行排列为主要特征，此时$E$或$T$越大，椭球越扁；$T=1$时，则磁性组构完全是平面或旋转扁椭球。当$\kappa_1\kappa_3<(\kappa_2)^2$时，$E<1$或$-1<T<0$，椭球形状以拉长或磁性颗粒以线性平行排列为主要特征，此时E或T越小，椭球形状越长；$T=-1$时，则椭球呈线状或旋转拉长椭球。当$\kappa_1\kappa_3=(\kappa_2)^2$即$E=1$，或$T=0$时，线状和面状平行排列的程度相当，椭球变为球，表示各向同性。

（四）磁组构

磁组构（magnetic fabric）一词来源于“岩组学”。岩组学是研究岩石中矿物的晶体或矿物颗粒的大小、形状、均一性、疏密性以及其方向性的排列，特别研究形变时产生的矿物优选方向。岩石由于形变、生长或沉积等过程中得到方向性分别称之为形变组构、生长组构和沉积组构。

岩石内矿物颗粒的定向性，也反映到磁性颗粒上。磁组构就是磁性颗粒或晶格的定向，或者是二者的组合。其物理实质是磁化率各向异性，它表现在磁化率数值椭球的形状和方向等。表示磁组构的常用图件有以下四种。

1．L-F图

以线理度为纵轴，面理度为横轴作L-F图，当实测值位于斜率为45°的直线以上区域时，磁线理发育，磁化率数值椭球呈拉长状；当实测值位于45°线以下区域时，磁面理发育，数值椭球为压扁椭球。

2．T-P图

以T参数为纵坐标，各向异性度P为横坐标作图，若实测值位于上半部分，则磁面理发育，磁化率数值椭球为压扁椭球；否则磁线理发育，磁化率椭球为拉长形。

3．P参数频谱图

该图以P为横坐标，P的频数为纵坐标，主要用来描述区域P值的大小变化及其变化趋势，可用以说明不同岩石的磁组特征。

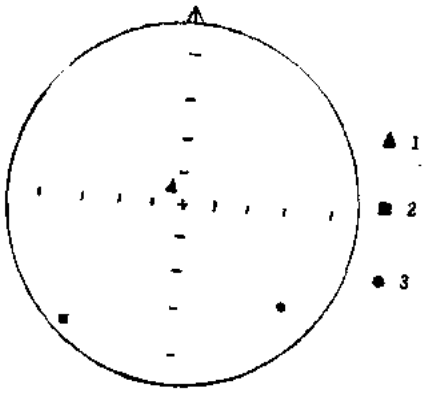


图 4.1—1 磁化率张量主轴方向赤平投影

1—最大磁化率主方向；2—中间磁化率主方向；3—最小磁化率主方向

4．磁化率张量主方向的赤平投影图

这种图与构造地质学、古地磁学中的赤平投影图相同，它有两种形式，即乌氏网和施密特网，前者是等角度投影，后者是等面积投影。赤平投影图主要是用来表示磁化率数值椭球的方向特征。三个正交的主磁化率主方向在任何坐标中可分别用偏角和倾角表示出来，故用一般矢量的赤平投影方法即可把三个磁化率主方向在赤平投影网中表示出来。投影网都以圆周上的角度代表偏角，从0到360°，与圆心的距离代表倾角0°到90°，中心为90°；倾角向下（正）用实点表示，向上（负）用空圈表示。图4.1—1为一个磁化率张量主轴方向赤平投影图。

（五）磁化率各向异性的地质应用❶

❶ 郑敏：《磁化率各向异性及其在河北省迁安矿区的应用》1988.3，硕士论文中国地质大学（北京）。

1．在沉积岩中的应用

经实验表明，在沉积岩中，磁性矿物的优选定向主要受水动力学因素的控制，地磁场仅能影响<0.3mm 的磁性矿物颗粒，而且在所有的沉积方式下，最小磁化率方向都垂直于层面。如果沉积岩的磁性载体是磁铁矿，则磁线理通常平行于水流方向，磁面理一般平行于层理，但如果水流很强，由于颗粒的滚动效应，有可能会导致磁线理垂直于水流方向。



图 4.1—2 确定古水流方向的磁线理示意图
（引自Hrouda，1982）

磁化率各向异性在沉积岩中的应用主要是根据磁性颗粒在岩石沉积、压实过程中的定向排列特征来研究沉积岩的形成方式，查明沉积盆地中古水流的流向，以及沉积层面的特征。下面给出一个用磁组构确定古水流方向的实例。图 4.1—2 位于美国加里福尼亚州中部，该地区发育有从晚侏罗纪到晚石炭纪的沉积岩。图中表示出了各采点的磁线理方向，其中粗线表示原生沉积磁组构的磁线理，细线表示受韧性变形影响的磁线理。由图可见，沉积磁组构的磁线理方向为NEE—SWW 向或 SEE—NWW向。它反映了沉积岩在沉积过程中，沉积槽地被充填时的搬运方向。其结论与地质研究结果一致。

2．在岩浆岩中的应用

岩浆岩中火山岩的磁各向异性反映了钛磁铁矿颗粒的定向，这种定向是熔岩流动时产生的。众多的研究结果表明，火山岩的磁面理通常近似平行于熔岩流表面，磁线理平行于熔岩流动的方向。利用这种特征可以有效地确定火山口位置，（我们将在下面说明其应用效果）。利用磁组构分析还可确定火山岩的成因方式，例如利用粗玄武岩的磁面理是接近水平还是垂直来判断它是岩床的残余还是岩脉产出，Halvorsen（1974）给出了这方面的实例。

侵入岩的主磁化率方向与岩石组构单元之间的关系为：具有流动磁组构的岩石中，主磁化率方向与熔岩流的方向有关；具有韧性变形的岩石中，主磁化率方向与形变的组构单元有关；具有后期磁铁矿充填的次生磁组构的岩石中，主磁化率与被磁铁矿所充填的那些组构单元的方向有关。

利用磁线理方向来判断岩浆流动方向有较好效果，在法国西部某花岗岩体上，熔岩流动方向与磁线理方向间很好的一致性（Guillet 1983）就是这方面的例子。

火成岩的磁组构分析可以用来研究岩体成因等问题。现以波希米亚（Bohemia）西部的Cista-Jesenice 地块为例可说明其效果。该地块由岩浆岩组成，被古生代变质岩和二叠纪沉积岩所围（图4.1—3）。对该地块的地质成因有不同认识：一种认为东部和西部岩体为同一岩浆体，东部 Cista 花岗闪长岩由岩浆重力分异形成；另一种认为地块由东部的Cista花岗闪长岩体和西部的 Tis花岗岩体两个各自独立的地质单元组成，花岗闪长岩从深层呈塑性状态向上挤入穿透到上层形成。图4.1—4表示了Tis 花岗岩的西边和东北边岩体的主磁化率取向，从图中可见，单个样品的磁线理和磁面理较为分散，只能在大范围内确

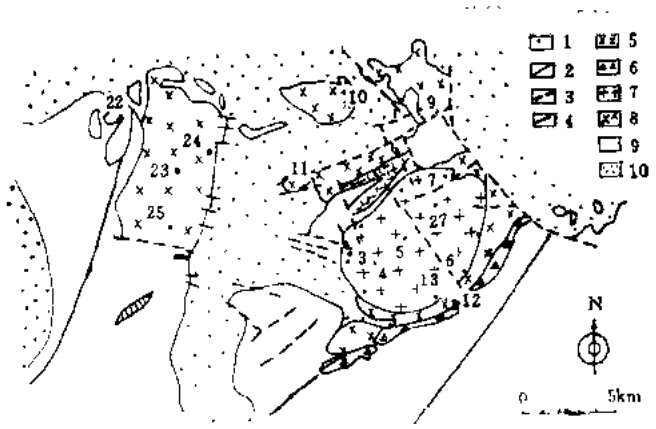


图 4.1—3 Cista-Jesenice地块地质略图

1—采样点；2—岩体边界；3—断层；4—元古代构造线；5、6—Tis花岗岩；7—Cista花岗闪长岩；8—火山岩；9—元古界；10—石炭—二叠系（引自Hrouda，1982）

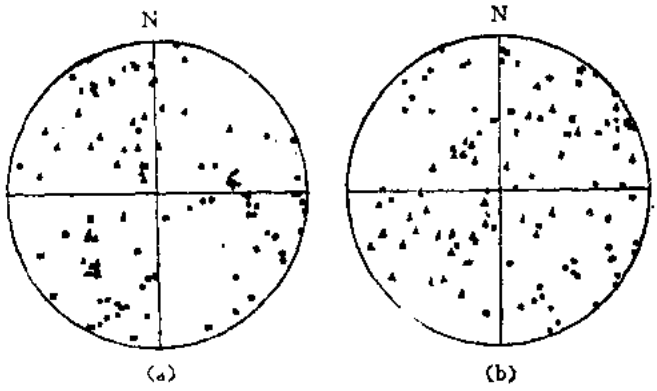


图 4.1—4 Tis花岗岩磁化率主方向的赤平投影

（引自Hrouda，1982）

(a)西边花岗岩体；(b)东北边花岗岩体

定平均磁面理：在西边的Tis岩体，平均磁面理走向NNE—SSW；东北边的Tis岩体，平均磁面理走向NE—SW。而Cista岩体上不同采点平均主磁率的方向有一定取向，如图4.1—5所示，除该岩体西边外，其余部分磁面理接近垂直。磁线理接近水平。

上述结果说明，花岗闪长岩的磁组构并不起源于岩浆的重力分异作用，因该作用会使花岗闪长岩中心部的磁面理近似水平，而实际情况是磁面理并不近似水平，从而支持了花岗闪长岩块向上穿过上部岩石的观点。再结合Tis岩体与Cista岩体磁化率值的不同（前者的磁化率在10^{-4}数量级，磁各向异性低、变化范围1.01～1.05；而后者磁化率较高，为10^{-2}数量级，磁各向异性较强，在1.2—1.6之间）可以认为，Tis岩体与Cista岩体是两个独立岩体。

3．磁化率各向异性在构造地质学中的应用

在应力作用下岩石内磁性矿物产生定向排列、韧性变形或定向重结晶，其结果导致岩石产生很强的磁化率各向异性。岩石磁化率椭球的形状和定向与应力作用的方式有密切联

系，因而它可以作为应力作用的显示器，使采用磁化率椭球来分析应力作用形成的构造单元成为可能。

在构造地质学中用“应变椭球”这一概念来研究受应力作用发生变形的特征，应变椭球体中最长轴相当于最大应变轴，与最大拉伸或最小压缩方向一致；最短轴相当于最小应变轴，与最大压缩或最小拉伸方向一致；而中等轴则相当于中间应变轴，它反映了拉伸或压缩程度在最大与最小之间，或保持不变。大量研究表明，磁化率椭球的三个轴与应变椭球的三个轴相互平行，并具有一定的共轴关系。研究还表明，磁化率椭球的主轴与“应变椭球”的主轴，除了存在方向上的一致性外，在长度上还存在一定的数量关系（Kheen 1976，Rathore 1979），可表示为

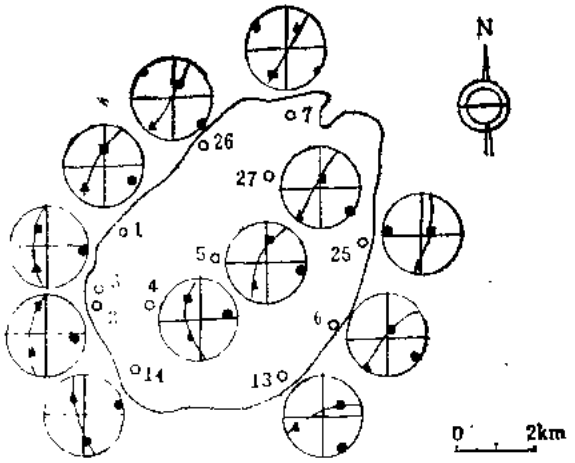


图 4.1-5 Cista花岗闪长岩体上，各采点主磁化率平均方向的赤平投影，圆弧为磁面理
（引自Hrouda，1982）
（三角、方块、圆点分别代表最大、中间、最小磁化率方向）

$$\left(\frac{\kappa_i}{\kappa_j}\right)=\left(\frac{l_i}{l_j}\right)^{\alpha} \qquad (i、j=1，2，3，i\neq j)$$

式中l_i，l_j为相互垂直的主应变长度，κ_i，κ_j为相应的主磁化率值。在不同变形地区及不同变形岩石上，幂指数α值不同。

综上所述，磁化率椭球与应变椭球，不仅在形态上，而且在空间定向上均具有一致性，所以可以通过磁组构分析来解决与应力有关的地质问题，特别是在缺少应变标志，难以确定应变椭球的地区，则更有意义。

由于韧性剪切带的应变强度自剪切带边界向带中心迅速增强，而且带中普遍发育片理构造，且自边界向中心渐趋强烈，同时相应具有与之匹配的磁各向异性特征，因此可以测定剪切带岩石的磁各向异性来解决以下问题：①确定剪切带的性质，如果是韧性剪切带或是韧性变形为主的韧-脆剪切带，则带的中心为强烈变形带，与之对应的是强的磁各向异性，远离中心部位则磁各向异性程度明显减弱；②若通过剪切带横剖面采样，则根据磁化率各向异性度的变化曲线还可确定带的中心位置及宽度；③分析韧性剪切带的延伸方向及剪切带两盘相对位移的方向，这是因为在带中心部位变形强烈，可用磁线理即最大主应变方向来确定剪切带方向；进而可以分析应力作用性质及两盘相对位移的方向（Rathore，1983）。

二、微磁测

微磁测● 是在特定小区或小带对磁场作精细测量，以研究其微细结构的一种专门性磁测工作，用以配合地质填图，研究构造，确定岩石隐伏矿化的地表标志，研究接触带热作用过程以及浮土磁不均匀性等地质问题。

● 在油气勘查中特指油气藏上方次生磁性矿物磁异常的检测方法。

（一）基本方法

一般情况下，微磁测是在测区内选择一些分散的小区进行。在布置测区时，既要包括需要研究解决地质问题的地段，也应包括已知情况较多的典型地段。测区数量和面积大小视需要而定。微磁测小区一般取正方形，彼此平行排列。在研究有明显走向的杂岩时也可采用垂直于走向的矩形面积。当基岩埋深为(10—15)m，为研究地表不均匀性对高精度磁测结果的影响时，这些小区的边长应小于基岩埋深，以便减弱基岩不均匀性的影响，突出近地表地质体的影响。微磁测区必须使用较密的测网，才能使观测结果反映磁场的精细结构及其统计特征量。一个微磁测区一般要有100个以上测点。应根据所提出的任务、研究对象的规模及埋深，由试验选定测区大小及测网密度。例如当覆盖较薄时，测区范围为10m×10m，测网1m×1m；当盖层厚达15m以上时，测区大小可为20m×20m或30m×30m，测网用2m×2m或3m×3m。文献[2]提出按小带进行微磁测的方法，在选择带长时要考虑到被研究的局部构造或构造单元沿走向方向与出露的毗邻构造相交的范围，而带宽则与被研究地质构造单元的横截面有关，并应超过截面范围（2—4）倍，以保证即使在走向发生变化的情况下也能进行追踪。在微磁测小带工作中采用矩形网。

为保证微磁测的高精度应选择最佳观测高度，而且在测区内观测高度应保持一致。选择观测高度时应考虑消除或尽可能减小干扰体不均匀磁化影响，在10m×10m和20m×20m大小的微磁测小区内，最好在3—4个（0.2、1、2、4m）高度上进行观测，然后对比结果加以选择。在弱磁性地表不均匀条件下，微磁测高度一般应不小于2m。

为了保证微磁测精度，除使用精度达0.1nT的磁力仪外，还应建立高精度日变站以便作日变改正，或建立控制点，以便于在短时间内校对仪器零点。

对测得的微磁异常，要用统计整理方法构制磁异常走向的方向玫瑰图，其作法是把实测磁异常用间隔为5nT（测量精度高而异常幅度不大时间隔可减小，反之则间隔可增大）的平面等值线图，将每条等值线划分为5或10mm（依比例尺而定）的一些线段，确定每一线段的方位角（用线段中点的切线的方位角表示），数出相同方位角的线段数目。然后在一个圆平面上每5度画一条半径，按规定的比例尺使其长度与所对应方位角的线段数目成正比，再以直线连各线段的端点，得方向玫瑰图。为保证方向玫瑰图能客观反映磁异常的主要走向，必须要有足够密的测网，使异常的等值线能反映测点间磁场的真实分布，并排除在勾绘等值线时的多解性。

（二）微磁测的地质应用

图4.1—6给出了国外某地区微磁测结果的Z_a等值线图及剖面图。由图可见，西北部的砂岩和东南部的厚层红色砂岩、粘土层上的微磁异常轴向不同，在红色砂岩上异常走向主要为北东及东西向，而在砂岩上异常走向有多种方向，据此即可确定红色砂岩和砂岩的接触界限。图4.1—6(B)表示了不同测点距在同一剖面的对比。可以看出这些剖面微磁异常的平均值大体相同，但随着点距的加密，即由(a)—(c)剖面，微磁异常的特征却愈来愈明显，(c)剖面在砂岩上方表现为剧烈变化的异常，在红色砂岩、粘土层上方则表现为平缓变化的异常。而在(a)、(b)剖面中这些特征反映不明显，故无法在(a)、(b)剖面中划分出接触界限，这充分说明了足够的测点密度的重要性。

图4.1—7(a)是千枚岩上面积为25m×25m，测网为5m×5m的Z_a平面等值线图。图4.1—7(c)是Z_a异常轴方向玫瑰图，图1.1—7(d)是流纹构造玫瑰图，图4.1—7(b)是在相

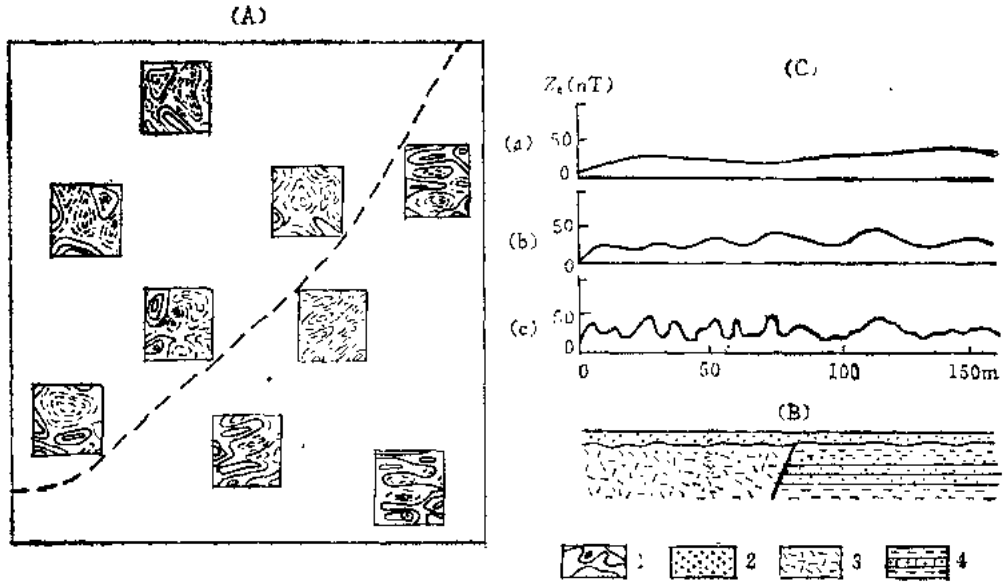


图 4.1—6　应用微磁测资料划分砂岩和红色砂岩接触线的平面图(A)和剖面图(B)
(据P. Лаутербах)
(a)、(b)—稀测点；(c)—密测点；1—Z_a等值线；2—浮土；3—砂岩；4—红色砂岩、粘土层

邻出露区地质测量得到的千枚岩节理玫瑰图。对比这些图可见，微磁异常轴玫瑰图和节理方向玫瑰图和流纹构造玫瑰图之间有明显的相关性。

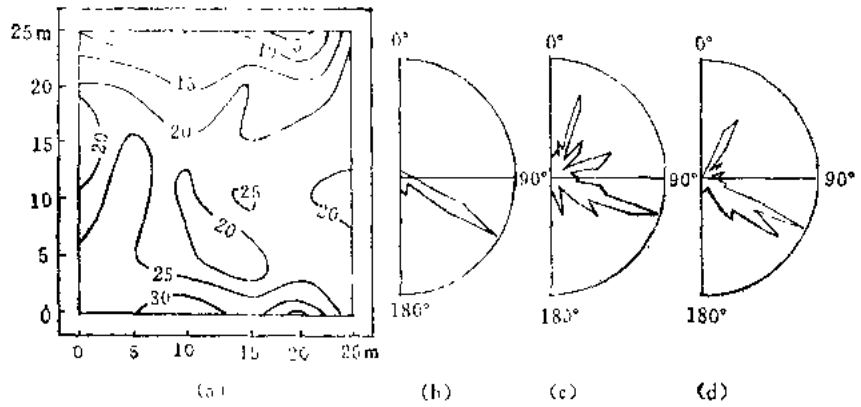


图 4.1—7　千枚岩上的微磁异常 Z_a 等值线图(a)；邻区千枚岩节理玫瑰图(b)；Z_a 异常轴方向玫瑰图(c)；千枚岩流纹构造玫瑰图(d)
(引自P. Лаутербах等)

基于物质在搬运过程中有沿运动方向或垂直于运动方向按某种规律分异和分布的特征，可以用微磁测在新沉积层上确定其侧向顺序。

微磁测在查明被厚度不大的疏松沉积物覆盖的喷出岩的流纹构造方面取得了肯定的效果。图4.1—8(a)为喷出岩上的 Z_a 微磁异常等值线平面图，图4.1—8(c)、(d)分别为微磁异常轴方向玫瑰图和流纹构造玫瑰图，可以看出，两者具有很好的相关性。图 4.1—8(b)表示地质测量的喷出岩的节理玫瑰图，表现出节理方向和流纹构造方向不一致，这种现象说明喷出岩沿节理的成分没有变化。

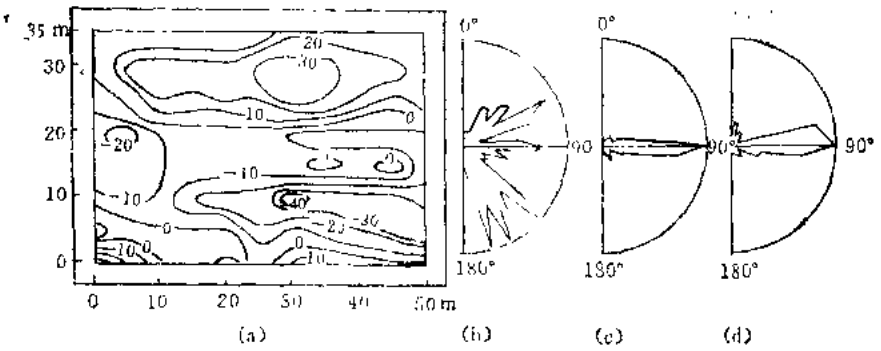


图 4.1—8　根据微磁测资料确定喷出岩流纹构造的实例

(a)—Z_a等值线图；(b)—地质测量的古理玫瑰图；(c)—Z_a等值线方向玫瑰图；(d)—流纹构造玫瑰图

利用微磁异常Z_a的正、负和磁化场方向间的相互关系确定出的磁偶极轴方向，可以研究火成岩的磁性特征，若偶极轴相互平行表明其为均匀磁化，若偶极轴总的取向线和磁化场方向吻合则表明可能不存在剩余磁性。这种根据微磁异常所确定的偶极轴分布作出的有关岩石磁性的某些结论是十分有意义的。

在疏松沉积物覆盖的岩层上，微弱磁异常可能是不同源的叠加场，在作微磁测时，应测定包括土壤覆盖层在内的疏松沉积物的磁性。

三、综合应用磁各向异性与微磁测确定火山口

（一）利用岩石磁各向异性确定火山口的依据

目前对火山口的磁各向异性的研究集中在探讨磁化率主轴方向与流动熔岩所决定的组构单元（流纹构造等）之间以及火山岩体形状间的关系。研究结果认为：磁线理平行于流动方向（实验室模拟，Wing-Fatt和Stacey，1966；岩床上磁测，Halluosen，1974；熔岩流上磁测，Koofikoua，1976）；磁面理接近或平行于熔岩流、岩床、岩墙及实验室模拟岩浆流的流面（Khan，1962；Ellwood，1978）。上述规律已被下列实际工作所证实。

在捷克斯洛伐克摩拉维亚北部的熔岩流中能清楚地看出磁线理同熔岩流方向的关系：磁线理平行于熔岩体的长轴及熔岩流动方向，而磁面理则大致平行于流面，仅稍有倾斜。Ellwood（1982）的工作更有说服力地表明利用凝灰岩纹理延长线的相交处确定火山口的事例，是对科罗拉多州南部的San Juan山的四个凝灰岩单元上的18个采点上采集了106块标本，根据磁组构测量结果估计了熔岩流的流动方向。在估计时，假设凝灰岩自喷出口直接向外流开，凝灰岩内磁性颗粒的线理代表了每个采点上的流动方向。因此，利用测定凝灰岩的线理就可以确定熔岩流动方向，而这些方向的交汇处就应该是火山口的位置，也即熔岩流的源处。基于这一认识，Ellwood在San Juan山的凝灰岩地段，用磁线理指向的延长线交会处确定了四个局部火山口，其位置与已知火山口相吻合。

根据上述实验室研究工作和野外实际资料的研究结果可以认为，利用火山岩地区的岩石磁各向异性特征，特别是利用主磁化率最大值所代表的磁线理的指向，可以大致确定火山口的位置。当然，在实际应用时，还受到各种复杂因素的影响，如多次喷发、凝灰岩内的流变作用以及后期构造运动等，这就需要结合地质资料加以分析才能得到可靠的结果。

（二）陕西西乡地区综合应用磁各向异性、微磁测确定火山口的实例●

陕西西乡地区广泛分布上元古代西乡群火山岩，在其火山岩层中已发现一些金矿点。为了研究金矿的成因并评价金矿点的远景，需要了解该区是否存在火山口。因此中国地质大学（北京）和陕西地矿局物化探大队合作研究在该区利用微磁结构特征来确定火山口的可能性。

1．地质概况及采点布置

该区火山岩为上元古代西乡群，其岩性为各种安山岩、玄武岩和流纹岩，但仅能划分出近火山口相及喷溢相。近火山口相岩性主要为集块岩、火山角砾岩、角砾熔岩等；喷溢相岩性为各类熔岩，如流纹岩、玄武岩、安山岩等。该区主要受南北向挤压应力场作用，形成了近东西向逆断层及北西向正断层和北西向平移断层。近东西逆断层旁侧出现次级雁行构造，前者为导矿构造，后者为储矿构造。金矿化体一般呈脉状、透镜状，并沿挤压破碎带中岩层的片理面分布。

根据1:2万地质图，在可能存在火山口的地区，在不同层位按9个岩性段自西向东布置三条剖面（见图4.1—9），Ⅰ剖面三个采样点，Ⅱ剖面7个采样点，Ⅲ剖面7个采样点，

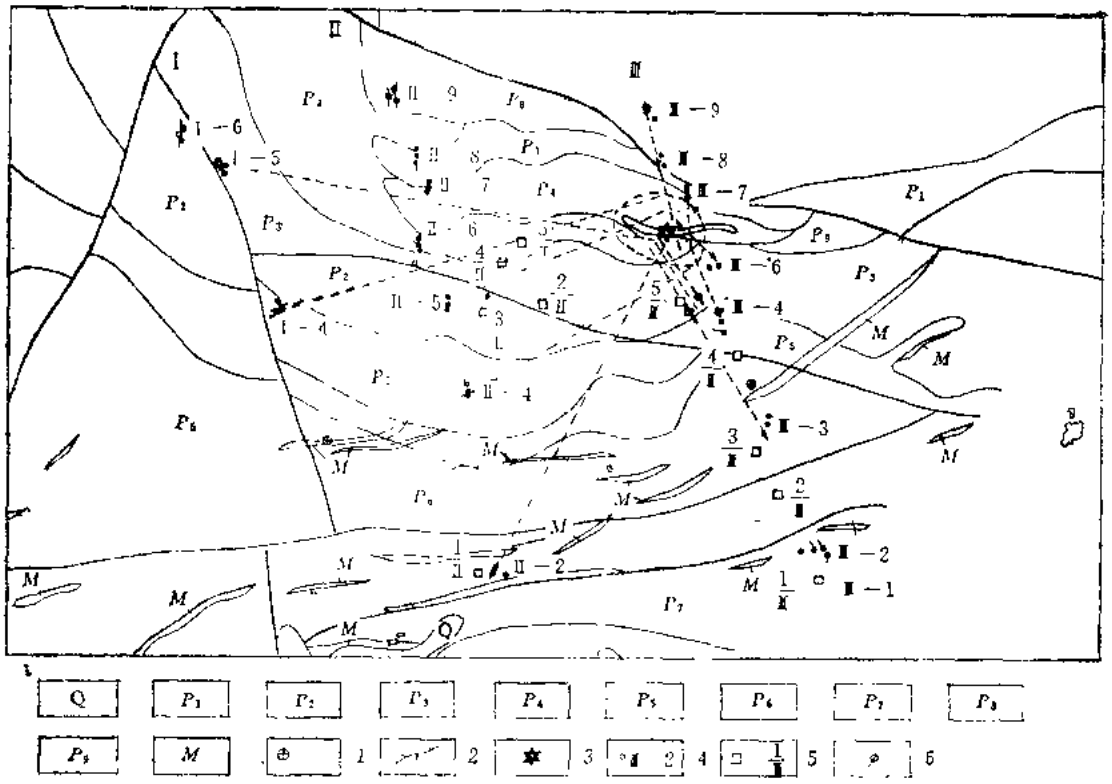


图 4.1—9 陕西西乡某地区微磁测测区、标晶采样点、κ_{max}轴向和地质综合图

Q—第四系；P_1—上部玄武岩、中部安山岩、底部角砾熔岩；P_2—玄武岩夹安山岩；P_3—杏仁（气孔）玄武岩；P_4—流纹岩；P_5—上部玄武岩底部流纹岩；P_6—玄武岩夹薄层流纹岩；P_7—流纹岩；P_8—火山角砾岩；P_9—含集块角砾岩；M—挤压蚀变带；1—金矿化点；2—断层；3—火山口；4—采样点；5—微磁测区；6—κ_{max}轴向

● 管志宁、宋杰等：陕西省西乡县柳树店地区微磁结构研究报告，1989。

每个采样点3块标本，按任意产状定向取（6×6×10）cm^3样品。为了在室内钻取岩芯样品，对一些易破碎的标本进行了煮胶处理，然后再钻取成直径2cm，高2.2cm的岩心样品。

2．样品测试及数据整理

采用Minsep仪器进行样品的磁各向异性测定，测得对样品坐标系而言的磁化率张量的主值和主方向，由于采样是按任意产状定向的，所以需把任意产状换算到层面坐标方向，从而求出在层面坐标系中的磁化率主轴和主方向。把由每块标本钻切出的3—4个样品的测定结果加以平均，便得到该标本的最大主磁化率值及其方向，最后利用κ_1（即κ_{max}）的方向交会出火山口位置。

同时应用Digico旋转磁力仪测定了样品的天然剩余磁化强度的大小和方向，考虑到取自同一块标本各个样品的结果比较接近，故采取各样品剩磁平均值作为该标本的剩磁值。在求平均值以前同样对样品作了层面产状改正。

3．微磁测工作

本区微磁测工作的目的是研究火山岩流纹构造及与磁线理有关的微磁异常来确定火山口的位置。

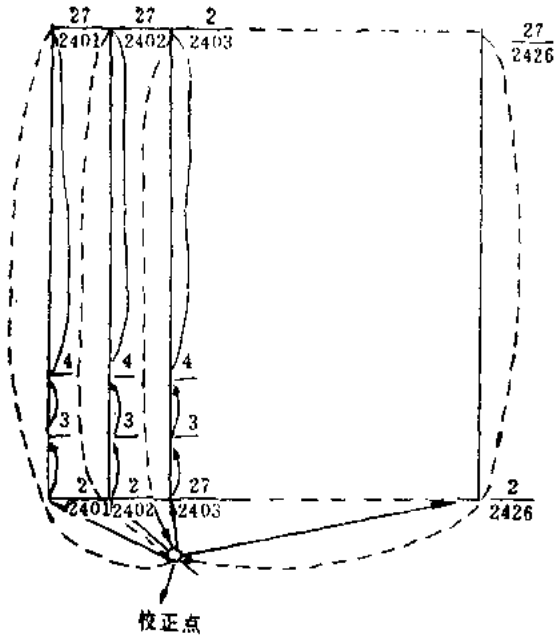


图 4.1—10 微磁测观测方式

微磁测工作采用1GS-2/MP-4型微机质子磁力仪，测区布设于物性标本采集剖面Ⅱ、Ⅲ剖面上，每条剖面布设5块微磁测面积，分布在不同岩性段上，见图4.1—9。微磁测区范围为（25×25）m^2，测网为1m×1m，测线布设方向均为南北向。测量中采用单一校正点小循环闭合方式进行，每条测线的开始或结束均在校正点上观测，校正点两次观测经日变改正后之差值小于2nT。其观测路线见图4.1—10，在测量过程中探头高度保持2m。

对于每个微磁测区的676个测点用微机绘制了ΔT异常等值线图，（见图4.1—11所示例子）等值线间隔2nT或更小图上等值线很有规律，由此可以认为观测质量是高的，得到的微磁异常是可靠的。为了研究火山岩的流线方向，我们也作了微磁异常的等值线方向玫瑰图。对每个测区按一定网格划分，统计网格中的等值线方向。把得到的方向角度数按一定间隔分组，然后统计每个角度间隔中出现的角度个数，求出它们相对微磁测区中总角度数的百分数，并据此绘成相应的方向玫瑰图。为了便于解释可把这些玫瑰图放到每个微磁测区上。

4．磁各向异性及微磁异常的综合应用

为便于解释，把κ_{max}和天然剩余磁化强度水平投影方向分别画在相应的采样点上，见图4.1—9、4.1—12。由于κ_{max}的方向反映了火山熔岩流动方向，分析图4.1—9可以看出

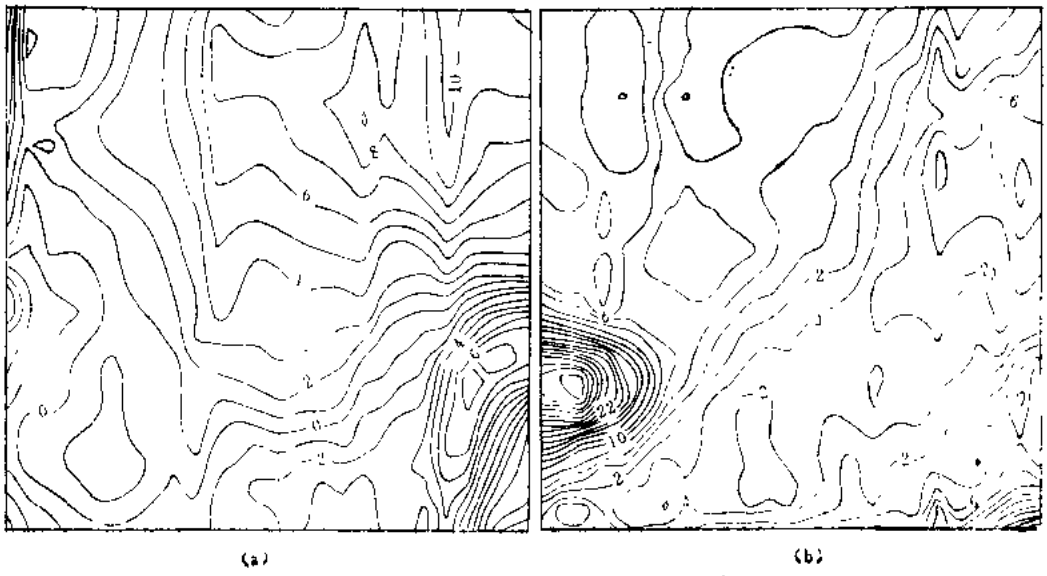


图 4.1—11 微磁异常图

(a)2/Ⅱ区微磁异常；(b)4/Ⅲ区微磁异常

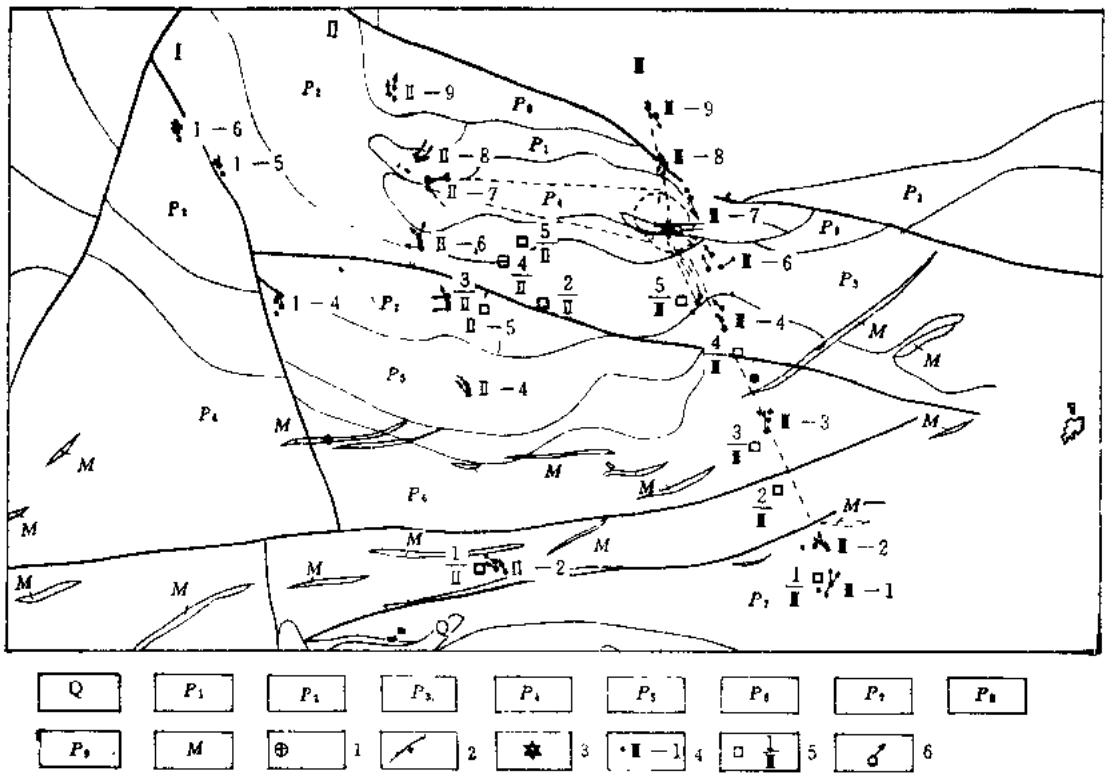


图 4.1—12 剩磁水平投影指向交会于火山口

图例5页前均同图4.1—9；6—剩磁水平投影指向

在西乡某地区存在两组明显不同方向的磁线理，一组呈北北西方向，具有区域展布的特征，这可能与区域范围火山岩的喷发或区域构造有关；另一组磁线理方向基本呈北东，北东东方向分布，与北西方向区域线理方向间有明显的夹角。利用局部性的北东方向磁线理的延长线相交所确定的火山口大致与地质上推测的火山口相吻合，见图4.1—9所示，于是从磁各向异性的角度提供了在该区存在火山口的依据。

分析本区168个样品的剩磁测定结果可得到如下规律：杏仁气孔玄武岩的天然剩余磁化强度数值最大，其次是玄武岩，再其次是流纹岩、火山角砾岩、安山岩；火山岩剩磁方向比较稳定，其中除玄武岩和杏仁气孔玄武岩在一些采点表现有两组不同的剩磁水平指向外，都显示了较好的一致性。其中Ⅰ剖面具有明显的北北西指向，Ⅱ剖面在Ⅱ—6采点以南表现为北西指向，Ⅱ—6以北表现为北东指向，特别是在Ⅱ—7表现为东西甚至南东指向，Ⅲ—6和Ⅲ—7采点之间剩磁水平指向发生明显的反向，显然从Ⅲ—4到Ⅲ—9等6个采点的剩磁水平指向呈交会于推测的火山口位置。见图4.1—12。推测产生这种特殊剩磁指向的原因，可能是不同时期喷发形成特殊磁化环境所致，若先期火山口喷发取得剩磁，由剩磁产生的火山口磁场不同于地磁场，该磁场呈向火山口指向分布。此后火山口再次喷发形成火山岩盖层，此盖层在先期火山口指向性磁场磁化下，也形成指向火山口的剩磁分布并使之得到加强，即具有如图4.1—12所示的剩磁交会特征。为了检验上述假说，还需要在Ⅱ、Ⅲ剖面之间以及Ⅲ剖面以东增加采点，以便取得更为详细的实际资料，同时进行模型实验研究，若证明确有上述规律存在，就可以提供一种利用天然剩磁确定火山口位置的

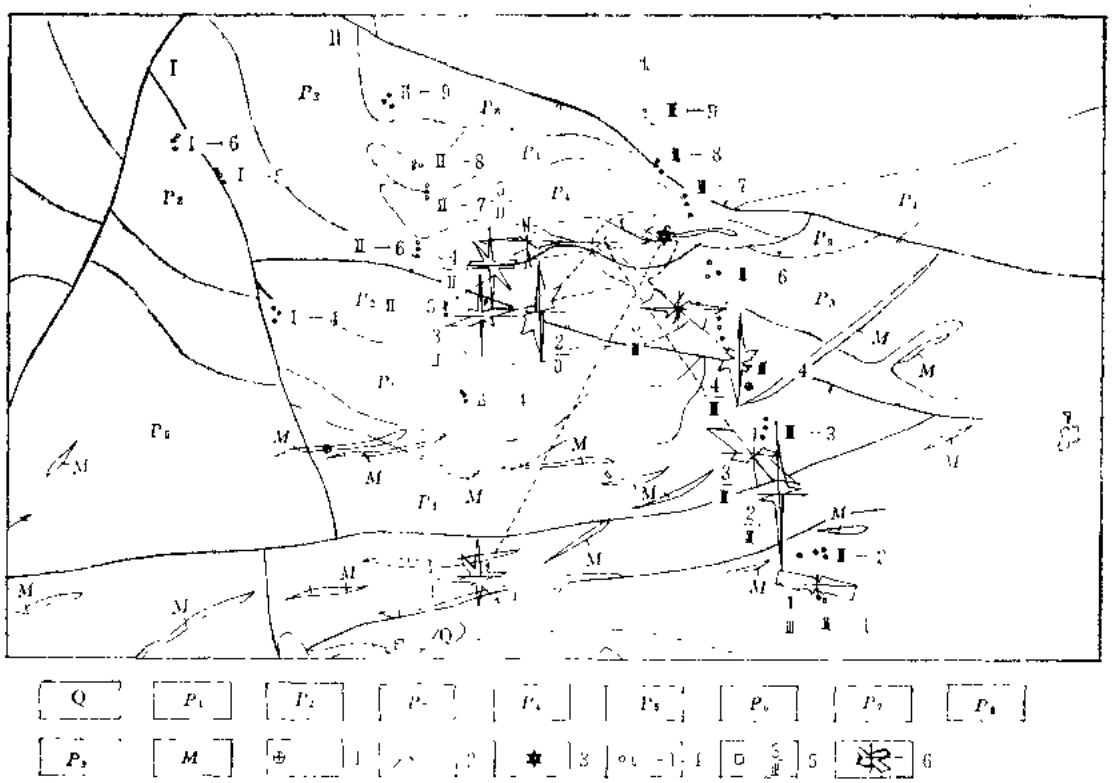


图 4.1—13 微磁异常方向玫瑰图

图例5以前均同图4.1—9；6—微磁异常方向玫瑰图

方法。

下边分析微磁异常方向玫瑰图的特征，见图1.1—13中所示。由图可见，该区存在南北、东西、北西和北东等多组构造线方向，其中南北、近东西向构造在本区占主要地位，而北东、北西向构造虽不如上述两者明显，但也有一定显示，与火山岩有关的流纹构造叠加在这些构造之上形成复杂的构造格局。要区别与火山岩有关的构造线方向需要把微磁异常与火山岩岩性结构的研究相结合才能得到可靠的结果。但就现有资料看，若把Ⅲ剖面玫瑰图（3、4、5）的北西方向延长，Ⅱ剖面玫瑰图（1—5）的北东、东西方向延长则也可大致交会在推测的火山口位置。由于该区微磁异常玫瑰图呈多组方向复杂状态，所以需要结合磁各向异性及剩磁方向特征综合研究才能得出较确切的结论。

综上所述，综合利用κ_{max}的方向、天然剩磁水平投影的指向以及方向玫瑰图的指向等，可以在该区确定火山口的位置。

§2 油气田区重、磁资料的应用

油气藏分布区多为地表由第四纪覆盖的盆地区，其内的地质情况主要依据盆地周边岩石出露情况及盆地内的地球物理资料及钻探岩心和测井资料来分析了解。这里地球物理工作是必不可少的手段，因它的成本比钻探要低得多，了解的范围又比钻探大得多。尤其是重、磁勘探，可在较短时间内完成大范围的扫面探测，尽快地获得全区的重、磁异常数据。近年来，重、磁勘探仪器的精度不断提高，其中重力仪精度可达0.1g. u.（10微伽）以上，磁力仪精度可达0.1nT以上。用高精度重、磁仪器测定的结果，在没有干扰的情况下，可反映许多异常细节及微弱的异常特征和信息。

重、磁异常往往是地下各层及基底密度或磁性变化的综合叠加的反映，通过数字滤波，可大体区分浅源异常（局部剩余场）和深源异常（区域场），但其结果并不十分清晰，且在反演求源分布时往往有多解性。如能借助已知的密度或磁性界面数据加以约束控制，则能提高反演精度，减少解的非唯一性，获得质量较高的解释结果。此外，高精度的重磁异常还能显示由于地下深处油气运移，烃分子向上扩散所形成的“烟筒效应”产物产生的异常，以辨别油气藏的存在与否。

尽管地震勘探在发现和确定地下地层位置、深度、厚度及构造特征等重要地质因素方面，有其特殊优越的作用，因而成了石油物探中的重要方法，但仍有各种困难。自然界地质情况很复杂，某些重要的地层界面并不一定就是弹性波阻抗界面，在地震勘探结果中并无清楚的显示。目前较突出的问题有两个：一是当盖层中存在有高波阻抗界面，如玄武岩覆盖层时，地震波的穿透力减弱，其下的各地震反射界面在资料中失去显示；另一是盖层下面的基岩顶面，由于岩性不均匀和起伏较剧烈复杂，其表面深度及起伏特征和弹性波速度特征等在地震勘探资料中往往混杂不清，难以判断。为了解决此类问题，必须借助多种方法，进行综合分析解释。

近年来国内外都重视在油气藏区用多种物化探资料进行综合分析，互相验证，取长补短，以提高资料地质解释的可靠性。因此，各种地球物理方法资料的联合反演方法，是当今的重点研究课题之一。

联合反演方法，按其定义，应该是以各种地球物理方法的观测数据或中间处理数据为

基础资料、结合必要的已知信息，如岩石物性参数、钻探岩心资料及测井曲线等，根据各方法的基本原理和彼此的相关性，构成一个统一的反演计算流程，相互补充，相互约束，以提高反演的可靠程度和完善程度，形成软件系统。目前，这种联合反演方法，还处于探索研究阶段。由于各种地球物理方法的原理和物理机制各不相同，要建立一个统一通用、客观、严格的联合反演计算公式系列，并加以实施，实非短期内所能实现。何况各地区的勘查资料是多年积累所形成，很难将以前的原始数据重新组织，并作大规模的统一反演计算。因此，从客观实际出发，利用已有的资料及其解释成果进行补充解释，提高效果，逐步改进和完善，在当前才是可行的。

将已有的地震勘探资料的解释结果及钻井资料作为已知信息，对重、磁数据的反演计算进行约束，以减少多解性；或利用已知信息来分解重磁异常，缩小其源的范围，减少叠加性，使反演结果接近客观实际。另一方面，还可利用重、磁异常地质解释结果，来弥补地震勘探解释结果的不足，如补充基底构造及其岩性等有关信息。这种解释方法，可称之为重磁（震井）约束反演方法。可采取的具体方法如下：

一、物性界面及物质层的位场异常正演计算方法

利用第三章§4的界面位场异常快速计算方法可计算单界面，也可计算具有顶、底界面的物质层的重、磁异常，还可利用它计算出盆地区各地震反射界面间物质所产生的重、磁异常。层间物质的密度及磁化强度为已知（根据区域内岩石标本物性参数测定结果的统计值、钻孔岩心测定结果及测井资料），有时它们并非常数，而是沿水平方向变化的坐标的函数。每层物质的顶底界面深度值及其起伏变化的数据由地震反射界面上取得，计算公式为（3.4—13）及（3.4—14）式，即

$$\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\left\{\rho(\omega,\nu)[\exp(-hk)-\exp(Hk)]/(-k)+\right.$$

$$\left.\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}-\exp(-Hk)\sum_{n=1}^{\infty}[\rho(\Delta H)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}\right\}$$

及

$$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\left\{M(\omega,\nu)[\exp(-hk)-\exp(-Hk)]\right.$$

$$+\exp(-hk)\sum_{n=1}^{\infty}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}$$

$$\left.-\exp(-Hk)\sum_{n=1}^{\infty}[M(\Delta H)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}\right\}$$

上二式中$\Delta g(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$分别是重力异常及化极后标量磁异常的波谱，$\rho$是层间物质相对层外物质的密度差（设层外物质密度为常数），是水平坐标（x，y）的函数，M是层间物质的磁化强度值（设层外物质磁化强度值为零），也是（x，y）的函数，G及μ_0分别为引力常数及空气中的磁导数，h及H分别为物质层上顶界面及下底界面的平均深度，Δh及ΔH分别为上顶面相对h及下底面相对H的深度差值，它们也是（x，y）的函数。ω，ν分别是（ω，ν）前的物理量沿x及y方向的角波数，$k=\sqrt{\omega^2+\nu^2}$为径向角波数。

根据工作区地震勘探、钻井和岩石物性参数资料，可事先得到h、H、Δh、ΔH、$\rho(x,y)$及$M(x,y)$，代入上二式，便可求得某物质层（相当于两个相邻的地震主要反射界面之间的物质层）在地表所产生的$\Delta g(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$，再作逆傅里叶变换，即可求得$\Delta g(x,y,0$

及$\Delta T_\perp(x, y, 0)$值。如果还有其他物质层存在，则可仿照上式进行叠加，求得各物质层产生Δg及$\Delta T_\perp$值的总和。

以上的计算也可按单界面来计算Δg及$\Delta T_\perp$，再求各界面的重磁异常总和，这只需将各界面产生的Δg及$\Delta T_\perp$进行叠加即可，如

$$\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\sum_{i=1}^{j}\exp(-kh_i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\rho_i(\Delta h_i)^n](\omega,\nu)$$

$$\Delta T_\perp(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\sum_{i=1}^{j}\exp(-kh_i)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[M_i(\Delta h_i)^n](\omega,\nu) \qquad (4.2-1)$$

式中，i为界面的顺序，h_i为i界面的平均深度，Δh_i为该界面的起伏深度，ρ_i及M_i为该界面上下介质的密度差及磁化强度差，其他符号同前。

物质层或磁性层的Δg及$\Delta T_\perp$值计算过程如下：

① 输入h、H、$\Delta h(\xi,\eta)$、$\Delta H(\xi,\eta)$、$\rho(\xi,\eta)$及$M(\xi,\eta)$；

② 对①中各量作傅里叶变换，即计算其波谱；

③ 计算$\rho(\Delta h)^n$、$\rho(\Delta H)^n$、$M(\Delta h)^n$、$M(\Delta H)^n$的波谱，其中$n=0, 1, 2, \cdots, S$（S一般取5—10）。

④ 计算

$$A(\omega,\nu)=\sum_{n=0}^{S}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}$$

$$B(\omega,\nu)=\sum_{n=0}^{S}[\rho(\Delta H)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^{n-1}}{n!}$$

$$C(\omega,\nu)=\sum_{n=0}^{S}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}$$

$$D(\omega,\nu)=\sum_{n=0}^{S}[M(\Delta H)^n](\omega,\nu)\frac{(-k)^n}{n!}$$

⑤ 计算

$$-2\pi G[e^{-hk}A-e^{-Hk}B]=Q(\omega,\nu)$$

$$\frac{\mu_0}{2}[e^{-hk}C-e^{-Hk}D]=R(\omega,\nu)$$

⑥ 计算

$$\Delta g(x,y,0)=\mathrm{FFT}^{-1}Q$$

$$\Delta T_\perp(x,y,x)=\mathrm{FFT}^{-1}R$$

⑦ 打印Δg及$\Delta T_\perp$，并绘图。

由于计算波谱时可利用快速傅里叶变换，计算速度较快。在各种物理参数较完备的情况下，可计算出各盖层的重、磁场。从实测异常中减去各盖层异常之和，剩余异常只与基底有关。利用剩余异常作反演计算，则可求得基底的深度起伏（当基底的物性参数为已知时），或求得其物性参数的分布（当基底的深度起伏为已知时），即

$$\Delta g(\text{剩余})\doteq\Delta g(\text{基底})=\Delta g(\text{实测})-\Sigma\Delta g(\text{盖层})$$

$$\Delta T_\perp(\text{剩余})=\Delta T_\perp(\text{基底})=\Delta T_\perp(\text{实测})-\Sigma\Delta T_\perp(\text{盖层}) \qquad (4.2-2)$$

二、物性界面位场异常约束反演计算

利用第三章第四节的(3.4—21)—(3.4—23)或(3.4—25)—(3.4—27)式、(3.1—36)—

(3.4—37)等公式，对区内剩余重、磁异常作反演计算，求基底深度起伏或物性分布。在求基底的深度时，可利用地震勘探所求得的基底平均深度值作为约束。在求基底的岩石密度或磁化强度值分布时，则利用地震勘探所求得的基底面深度及其起伏作为约束条件。

（一）界面下岩石物性参数为常数时，由重、磁异常反演界面起伏

可利用（3.4—21)—(3.4—23)式，其步骤如下：

① 令$\delta h^0=\Delta h^0=0$，求Δh^1：

$$\Delta h^1(\omega,\nu)=\delta h^1(\omega,\nu)=[e^{hk}/(-2\pi G\rho)]\Delta g(\omega,\nu)\cdot E(k)$$

其中h为界面的平均深度，ρ为界面下物质的密度，$\Delta g(\omega,\nu)$为观测重力异常的波谱，$E(k)$为防止高频发散的正则化因子，见（3.4—24)；

② 将$\Delta h^1(\omega,\nu)$作逆傅里叶变换，求得$\Delta h^1(x,y,0)$，再求$(\Delta h^1)^n(\omega,\nu)$，代入(3.4—22)式求得

$$\Delta g^1(\omega,\nu)=-2\pi G\rho\left\{e^{-hk}\sum_{n=1}^{S}(\Delta h^1)^n(\omega,\nu)\ (-k)^{n-1}/n!\right\}$$

其中S为一有限数，一般取5—10。

③ 计算$\delta h^2(\omega,\nu)$：

$$\delta h^2(\omega,\nu)=[e^{hk}/(-2\pi G\rho)][\Delta g(\omega,\nu)-\Delta g^1(\omega,\nu)]E(k)$$

④ 计算$\Delta h^2(\omega,\nu)$及$\Delta h^2(x,y,0)$：

$$\Delta h^2(\omega,\nu)=\delta h^1(\omega,\nu)+\delta h^2(\omega,\nu)$$

$$\Delta h^2(x,y,0)=\mathrm{FFT}^{-1}[\Delta h^2(\omega,\nu)]$$

⑤ 计算$\Delta g^2(\omega,\nu)$：

$$\Delta g^2(\omega,\nu)=-2\pi G\rho\cdot\left\{e^{-hk}\sum_{n=1}^{S}(\Delta h^2)^n(\omega,\nu)(-k)^{n-1}/n!\right\}$$

⑥ 计算$\delta h^3(\omega,\nu)$：

$$\delta h^3(\omega,\nu)=[e^{hk}/(-2\pi G\rho)][\Delta g(\omega,\nu)-\Delta g^2(\omega,\nu)]E(k)$$

⑦ 计算$\Delta h^3(\omega,\nu)$及$\Delta h^3(x,y,0)$：

$$\Delta h^3(\omega,\nu)=\delta h^1(\omega,\nu)+\delta h^2(\omega,\nu)+\delta h^3(\omega,\nu)$$

$$=\Delta h^2(\omega,\nu)+\delta h^3(\omega,\nu)$$

$$\Delta h^3(x,y,0)=\mathrm{FFT}^{-1}[\Delta h^3(\omega,\nu)]$$

⑧ 继续以上步骤，求$\Delta h^4(\omega,\nu)\cdots\cdots\Delta h^N(\omega,\nu)$，直至$\delta h^N(\omega,\nu)$减至一可以忽略的值为止，则

$$\Delta h^N(\omega,\nu)=\sum_{n=1}^{N}\delta h^n(\omega,\nu)$$

$$\Delta h^N(x,y,0)=\mathrm{FFT}^{-1}[\Delta h^N(\omega,\nu)]$$

即为所求解。

注意，若将以上各式中的Δg变为$\Delta T_\perp$，$G\rho$变为$\frac{J_0}{4\pi}M$，$(-k)^{n-1}/n!$变为$(-k)^n/n!$，即是磁异常的反演步骤。

也可利用（3.4—25)～(3.4—27）式进行迭代反演，其步骤更为简单。

（二）界面下岩石物性参数为变量（水平面坐标（xy)的函数）时，利用重、磁异常

反演求界面起伏的方法

当界面下岩石物性参数随水平坐标改变而变化，且其量为已知时，利用（3.4—13)及（3.4—14）式反演计算 $\Delta h(\xi,\eta)$，令（3.4—13)及（3.4—14）中$H\to\infty$，成为单界面情况，有：

$$\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—3}$$

$$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—4}$$

上二式也可写为

$$\Delta g(\omega,\nu)=\Delta g_0(\omega,\nu)+\delta\Delta g(\omega,\nu)$$
$$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)=\Delta T_0(\omega,\nu)+\delta\Delta T(\omega,\nu)$$

其中
$$\Delta g_0(\omega,\nu)=\frac{2\pi G}{k}\mathrm{e}^{-kh}\rho(\omega,\nu) \tag{4.2—5}$$

$$\delta\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—6}$$

$$\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\mathrm{e}^{-kh}M(\omega,\nu) \tag{4.2—7}$$

$$\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—8}$$

式中 $\Delta g_0(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)$为可以计算的已知值，与 Δh 变量无关，从异常波谱中将它们除去，便得到$\delta\Delta g(\omega,\nu)$及$\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$。利用（4.2—6）及（4.2—8）式，可导出迭代反演式

$$[\rho\Delta h](\omega,\nu)=\frac{E(k)\mathrm{e}^{kh}}{2\pi G}\delta\Delta g(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—9}$$

$$[M\Delta h](\omega,\nu)=\frac{2E(k)\mathrm{e}^{kh}}{\mu_0}\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[M(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—10}$$

等式右边的Δh为前一次迭代值，左边则为本次迭代结果，因 ρ 及 M 为已知，故经迭代求得的$(\rho\Delta h)(\omega,\nu)$及$(M\Delta h)(\omega,\nu)$，可计算出$\Delta h(\xi,\eta)$。$E(k)$ 为防止高频发散的正则化因子。迭代步骤与前相类似，此处不再重复。

（三）利用重磁异常反演求起伏界面下岩石物性参数分布的方法

设界面下岩石物性参数的平均值 ρ_0 及M_0 为已知（一般可估算给定），则 $\rho(\xi,\eta)=\rho_0+\Delta\rho(\xi,\eta)$，$M(\xi,\eta)=M_0+\Delta M(\xi,\eta)$，将物性平均值与其变化部分所产生的异常分开，将（4.2—3）及（4.2—4）写成

$$\left.\begin{aligned}\Delta g(\omega,\nu)&=\Delta g_0(\omega,\nu)+\delta\Delta g(\omega,\nu)\\ \Delta T_{\perp}(\omega,\nu)&=\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)+\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)\end{aligned}\right\} \tag{4.2—11}$$

其中
$$\Delta g_0(\omega,\nu)=-2\pi G\rho_0\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}(\Delta h)^n(\omega,\nu) \tag{4.2—12}$$

$$\delta\Delta g(\omega,\nu)=-2\pi G\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\Delta\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—13}$$

$$\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}M\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}(\Delta h)^n(\omega,\nu) \tag{4.2—14}$$

$$\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)=\frac{\mu_0}{2}\mathrm{e}^{-kh}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[\Delta M(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—15}$$

$\Delta g_0(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)$是界面起伏变化且界面下岩石物性参数为常数时的重力、磁力异常的波数谱，它们与$\Delta M(\xi,\eta)$及$\Delta\rho(\xi,\eta)$无关，是固定值，可以计算出来。从$\Delta g(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$中将其除去，而求得$\delta\Delta g$及$\delta\Delta T_{\perp}$。

利用(4.2—12)及(4.2—13)式，得到计算$\Delta\rho$及ΔM的迭代反演式为

$$\Delta\rho(\omega,\nu)=\frac{\mathrm{e}^{kh}E(k)}{2\pi G}k\delta\Delta g(\omega,\nu)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-k)^{n-1}}{n!}[\Delta\rho(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—16}$$

$$\Delta M(\omega,\nu)=\frac{2\,\mathrm{e}^{kh}E(k)}{\mu_0}\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-k)^n}{n!}[\Delta M(\Delta h)^n](\omega,\nu) \tag{4.2—17}$$

等式右边的h,$\delta\Delta g(\omega,\nu)$、$\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$、$\Delta h$为已知，$\Delta\rho$、$\Delta M$为前一次的迭代值，等式左边的$\Delta\rho$及$\Delta M$为本次迭代值，$E(k)$为防止高频发散的正则化因子。

其计算步骤是：

① 由h、Δh、ρ_0及M_0（按(4.2—12)及(4.2—14式)）计算$\Delta g_0(\omega,\nu)$及$\Delta T_{\perp 0}(\omega,\nu)$；

② 按(4.2—11)式计算$\delta\Delta g(\omega,\nu)$及$\delta\Delta T_{\perp}(\omega,\nu)$；

③ 给定$\Delta\rho$及ΔM的初始值（可设为零）代入(4.2—16)及(4.2—17)式的右端，求得$\Delta\rho(\omega,\nu)$及$\Delta M(\omega,\nu)$，进行反傅里叶变换，求得$\Delta\rho$及ΔM的一级近似值；

④ 将$\Delta\rho$及ΔM的一级近似值代入(4.2—16)或(4.2—17)式左端，仿上求$\Delta\rho$及ΔM的二级近似值；

⑤ 仿步骤④求得$\Delta\rho$及ΔM的高级近似值，即直至$\Delta\rho$及ΔM的各次迭代值变化不大为止。

三、位场异常的广义线性约束反演方法

Backus和Gilbert建立的较为系统的广义线性反演理论在地理物理反演中得到广泛应用，在重磁异常反演中包括：①将B. G. 理论与吉洪诺夫正则化方法相结合来求解地下密度源或磁源分布及质心或磁质心位置；②在重磁异常的非线性反演中，结合应用正则化方法确定地下密度或磁性界面。已知信息的加入是通过权系数的人为给定来实现，以使反演求解受到约束，减少不适定性。

（一）位场源分布及其质心的计算

用第三章§5的方法，简化如下：

在地面上坐标为x_i的测点上的重磁异常可写为（以二度空间情况为例）

$$A(x_i,o)=\sum_{l=1}^{N_z}\sum_{k=1}^{N_x}m_{kl}G(x_i,x_k,z_l) \tag{4.2—18}$$

$$i=1,2,\cdots\cdots,M$$

式中，A为异常值，m_{kl}为地下坐标(x_k,z_l)处的位场源强度（密度或磁化强度），$G(x_i,x_k,z_l)$为与坐标有关的格林函数，又称为数据核函数或Frechet核函数，可通过位场理论

计算求得。M为测点数，N_x为划分的地下子空间（每个子空间内源强度可被视为常数）沿x方向的间隔数，N_z为其沿z方向的间隔数。

构制线性反演理论中能量最小模型（使模型参数的二阶范数为最小），得到

$$m_{kl}=\sum_{i=1}^{M}G(x_i,x_k,z_l)\alpha_i \qquad (4.2—19)$$

其中$\boldsymbol{\alpha}$是方程 $\boldsymbol{\Gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{A}$的解向量（见3.5—37）。$\boldsymbol{\Gamma}$为内积矩阵，即

$$\Gamma_{ij}=[G_i,G_j]=\sum_{k=1}^{N_x}\sum_{l=1}^{N_z}G(x_i,x_k,z_l)\,G(x_j,x_k,z_l) \qquad (4.2—20)$$

$$i=1,2,\cdots,M;\qquad j=1,2,\cdots,M$$

反演求解的过程如下：

① 根据已有信息，将地下空间划分为单元M个；

② 计算 Frechet 核 $G(x_i,x_k,z_l)$；

③ 按（4.2—20）式计算内积矩阵 $\boldsymbol{\Gamma}$；

④ 用正则化方法解不适定方程$\boldsymbol{\Gamma\alpha}=\boldsymbol{A}$，求得系数向量 $\boldsymbol{\alpha}$；

⑤ 利用（4.2—19）式计算场源分布 m_{kl}；

⑥ 计算反演求得的源分布所产生的理论位场异常值

$$\Delta T(x_i,0)=\sum_{k,l}G(x_i,x_k,z_l)m_{kl}$$

以便判断与实际观测值的拟合程度。

⑦ 计算场源分布的质心坐标

$$x_c=\sum_{k,l}x_k m_{kl}/\sum_{k,l}m_{kl}$$

$$z_c=\sum_{k,l}z_l m_{kl}/\sum_{k,l}m_{kl}$$

已知场源的某些局部分布值或其较确切的分布范围时，在（4.2—19）式中可令 $m_{kl}=m_{kl}/W_{kl}$，W_{kl}为给定的权系数因子，m_{kl}存在的位置越可靠，W_{kl}值越小，以便在反演求m_{kl}时，减少非唯一性。

（二）根据位场异常确定物性界面

在反演理论中，求界面起伏的解常为非线性的，然而可将其局部线性化，以利用线性反演理论求解，其原理见第三章§5第四部分，可利用（3.5—47）—(3.5—51)式。计算过程中设地表测定位场$A(x)$、地下地层岩石的物性参数$m(\xi)$、顶界面深度$z_1(\xi)$为已知，待求量是底界深度$z_2(\xi)$。其步骤为：

① 输入位场$A(x)$、物性参数$m(\xi)$，顶深$z_1(\xi)$及底深$z_2(\xi)$的初始模型$z_2^0(\xi)$，并输入给定迭代精度ϵ，δE。

② 由公式（3.5—47）或（3.5—49）计算初始模型产生的位场$A^0(x)$，求其与观测场的差$\delta A(x)=A(x)-A^0(x)$；

③ 按公式（3.5—51)计算内积矩阵，求解扰动方程，得$\delta z_2(\xi)$；

④ 计算$z_2^1(\xi)=z_2^0(\xi)+\delta z_2(\xi)$，将$z_2^1(\xi)$代入（3.5—47）或(3.5—49)式，求$A^1(x)$，并由公式（3.5—46)′计算$\epsilon^1$及$\delta E^1$；

⑤ 检查 $\varepsilon^1<\varepsilon$ 否？$\delta E^1<\delta E$ 否？如“是”，则 $z_2^1(\xi)$ 即为所求，可输出 $z_2^1(\xi)$，作图或打印。如“否”，则令 $A^0(x)=A^1(x)$，$z_2^0(\xi)=z_2^1(\xi)$，重复②—⑤，直至 $\varepsilon^1<\varepsilon$，$\delta E^1<\delta E$ 为止。

⑥ 对所得解进行评价。

四、其他方法

其他位场异常的处理及数字滤波方法等都是不可缺少需综合应用。将位场异常数据与区内各种资料（地震勘探，钻探、测井及地质资料等）进行综合对比及定性定量分析。常用的方法如①重磁对应分析，以判断重磁异常是否同源，如同源则二者可联合反演以提高反演的精度；如不同源则作顺序反演，互相约束补充，发挥多种信息的作用。②位场异常的数字滤波如延拓、求导、匹配滤波等方法，可用以了解深源场与浅源场的不同特征，区分区域场及局部场，将它们分别与区内的深浅构造特征对比。水平导数能起方向滤波作用，可突出不同方位的构造线特征，对区内的主要断裂带等有识别划分的作用。③多边形拟合的人机联作反演方法，利用较简便的多边形二度体组合，模拟区内的有关断面，是较直观地显示剖面地质构造特征的反演方法。对已经肯定的由地震勘探反射界面及其解释剖面所构成的地质断面图形用与之符合的固定不变的多边形去模拟，多边形内给定已知的物性参数。不肯定或不清晰的界面则用可变多边形模拟，修改其角点位置及物性参数，直到由多边形组合产生的位场异常与实测异常完全符合为止。通过人机联作，可以较快地达到拟合。拟合后的剖面图形即反映地质断面的构造特征。这种方法，由于剖面图形较直观，是受欢迎的方法。多边形模拟的人机联作方法已有通用软件，应用方便。

五、重磁资料的综合解释方法

在油气藏区，重磁资料的分析及反演方法可大体分为：

（一）一般区域性重、磁图件及数据的分析方法

1．重、磁对应分析

重力异常Δg→求垂向导数$\Delta g'$；

磁力异常ΔT→化极得$\Delta T_\perp$。

将$\Delta g'$与$\Delta T_\perp$作相关分析，求相关系数分布图及广义泊松比$4\pi G\rho/\mu_0 M$。分析Δg与ΔT是否同源。

2．重磁异常数字滤波

延拓、求导、匹配滤波、带通滤波——区分深源、浅源场，划分区域背景场及局部场。其中向上延拓或深源匹配滤波，可压制浅部干扰，（如玄武岩盖层）突出下部地质构造所产生的异常场。不同方向的水平导数转换可突出不同方向的构造线，分析区内断裂带等构造分布特征。

3．计算地下已知界面异常，求剩余异常

利用地震勘探及钻探等资料，给出地下已知界面的深度，并应用已知的岩石物性参数，计算地下各已知界面产生的重磁异常。从实测异常中减去已知界面异常，便得剩余异常。

4．反演剩余异常，求未知界面（一般为基底界面）的起伏及其深度或岩石物性参数分布

对剩余异常采用波数域界面反演方法、广义线性反演方法或其他方法，求未知界面的

起伏或岩石物性参数分布。利用某些已知结果作先验信息，对反演作约束，以提高反演的可靠性。

5．人机联作对剖面图作综合反演

剖面图由已知的地震勘探解释剖面为基础，在其上构组多边形（二度体）组合，用人机联作方法修正可疑的界面形状（多边形顶点位置）或多边形内物性参数，使多边形组合的计算所得位场异常与实测异常相符合为止。

6．综合分析

结合已有资料分析反演结果的地质意义，将界面转换地质界面，将岩石物理参数转化为对应的岩石类别及地质时代等，形成较系统完整的地质解释结论。

（二）高精度重磁异常分析

对高精度重磁异常的分析方法，除与一般区域重磁资料的分析方法相类似外，还应注意其细节的精细变化，包括

1．烃气运移效应显示

地下油气藏形成后，烃气从较深的油气储集处沿着细微的岩石孔隙裂隙向上运移扩散。在其渗漏影响的浅部（离地表数百米深处）环境中，由于微生物作用及化学作用，使岩层或土壤中的硫铁矿颗粒成为磁黄铁矿颗粒，赤铁矿颗粒变为磁铁矿颗粒，因而在地表形成可由高精度磁测发现的磁异常，其特征是有幅度小（数 nT 以内）而不规则的峰值分布。对此应注意考察并与地表的其他干扰异常相区分。

2．精细构造特征分析

地下的某些有规律的次级构造线在高精度重磁异常中有所显示，如某些裂隙带或构造起伏带等可形成细微的线性异常带分布，其特征是异常形状有规律地沿一定方向扭变，或封闭等值线呈串珠状的线状分布等。

（三）某区实例

图 4.2—1 是某含油气区的布格重力异常图，图 4.2—2 是航磁异常图，它们的特征不相似，与区内的盖层构造（图4.2—3）及基底构造（图4.2—4）也无相似处。说明该区重磁异常不同源，重磁异常分别是地下盖层构造和基底构造的密度不均匀及磁性不均匀的叠

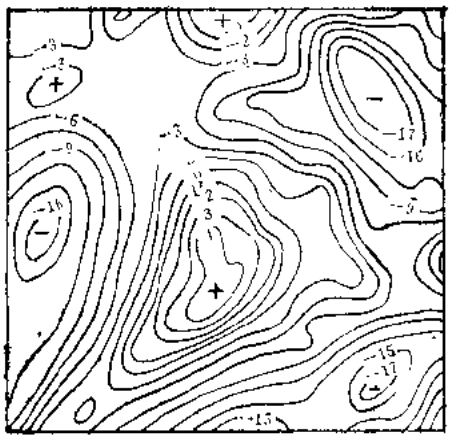


图 4.2—1 某区地表布格重力异常图
（等值线数值以 10g.u. 为单位）

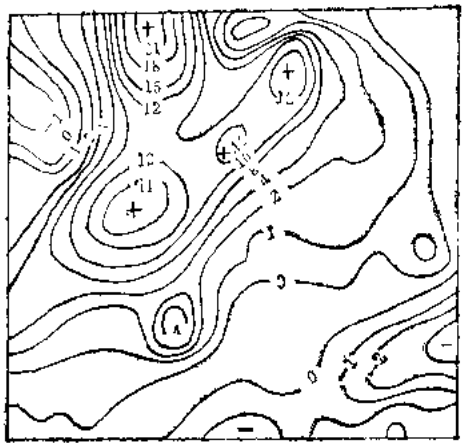


图 4.2—2 某区航磁异常等值线图
（等值线数值以 10nT 为单位）

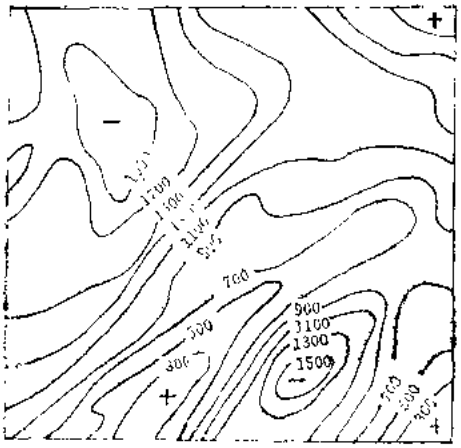


图 4.2—3 某区盖层 T_2 反射界面等深线图
（图中等深线数值以m为单位）

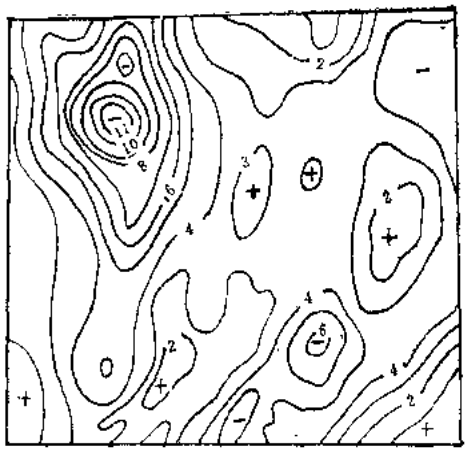


图 4.2—4 某区基底界面等深线图
（等深线数值以 km 为单位）

加异常。

经正演计算区内各盖层（共4层）的重力异常后，从实测重力异常中将他们减去，便得剩余重力异常，如图4.2—5。

剩余重力异常与基底等深线在形态上比较相关，说明它是由基底引起。在基底界面的深度并不十分可靠的情况下，可利用剩余重力异常反演基底界面深度（设基底密度为常数 2.67 t/m³），如图4.2—6 所示；如已知基底深度比较可靠，则用剩余重力异常反演基底密

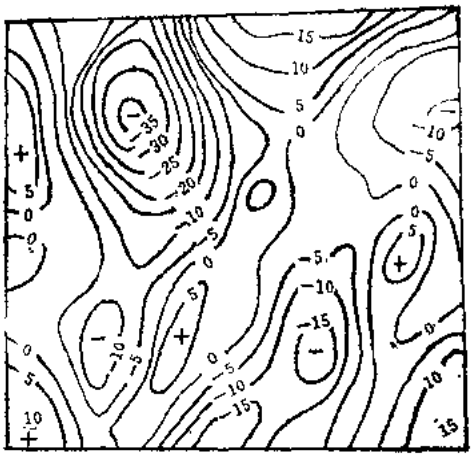


图 4.2—5 某区剩余重力异常图
（图中等值线数据以10g.u.为单位）

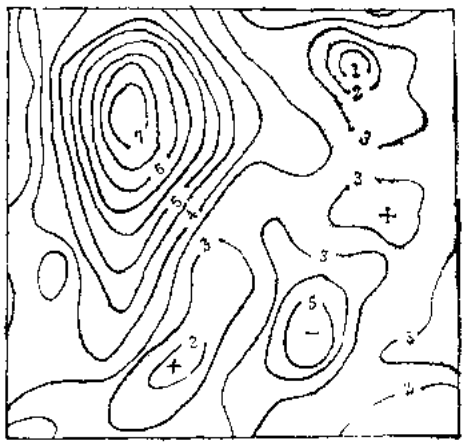


图 4.2—6 由剩余重力异常反演的基底深度图
（等深线数值单位为 km）

度分布，如图4.2—7，其密度值为 (2.5—2.7)t/m³，说明基底密度变化较稳定。区内盖层的磁化强度都较微弱，因此磁异常主要由基底的磁化强度不均匀引起。将磁异常经化极处理后，利用已知基底起伏深度作约束，反演出基底磁化强度分布，如图4.2—8。由图可见，区内西北部基底凹陷处，磁化强度最强，对应于前古生界的变质岩；东南部及中央，基底磁性较弱，对应古生界的浅变质岩。本区基底由前古生界及古生界岩石组成，其分布及构造控制了盖层构造的演化。

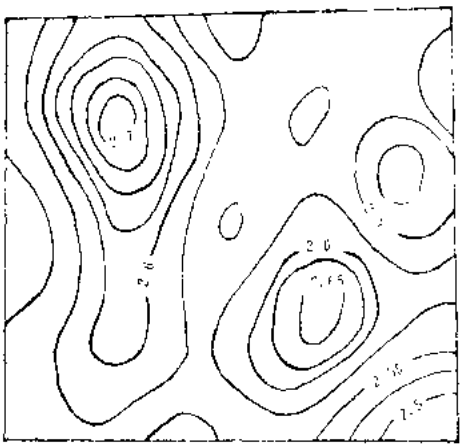


图 4.2—7 由剩余重力异常反演的基底密度变化图
（等值线数值单位为 t/m³）

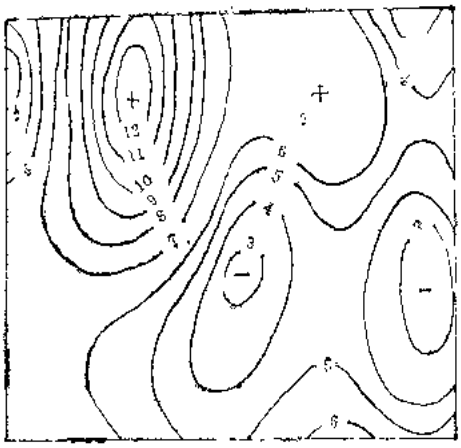


图 4.2—8 由剩余磁异常反演基底的磁化强度分布图
（等值线数值单位为 A/m）

六、磁法直接探测油气问题

（一）常规勘探方法与非常规勘探方法[16][17]

直接探测油气藏是利用地球物理、地球化学和其他方法获得油气藏存在与否（空间位置）的一种工作程序，也可称之为非常规勘探技术（非传统的）。由油气藏本身产生的物理化学不均匀性（一级模型）和由于油气藏存在而在油气藏周围岩石中引起的复杂的次生不均匀性（二级模型）是直接探测的目标。上述不均匀性可以引起异常的地球物理场，这种异常就是物探方法的直接探测目标。

在很长时间内，在油气勘探工作中，使用的是常规勘探技术。所谓常规勘探技术（传统的），是指以地震方法为主寻找有利于油气聚集构造（主要是背斜构造）的一种勘探程序，也可称之为间接探测方法。

由于常规勘探方法费用高（且日趋上升），地表条件和地下条件复杂，使之常常难以进行或使其效果降低，以及由于寻找岩性圈闭油气藏的需要等原因，近年来非常规勘探方法受到重视，研究工作也很活跃。

直接探测油气藏的物探方法包括地震法、电法（激电法、氧化还原电位法等）、磁法、重力法、放射性法、地温法等。最近，美国石油地质工作者 R. Tompkins 将直接探测油气藏的方法称为直接圈定技术（Direct Location Technologies，简称 DLT），它包括物探、化探以及空间航空遥感等方法。他认为在所有的直接圈定技术中，有六种方法比较可靠，其中又有两种方法可以提供更准确的井位信息，称为准确的方法，其中之一就是磁法。

（二）油气田上方成岩作用磁铁矿引起的磁异常[18][19][20][21][22][26]

美国地质调查所的 T. J. Donovan 博士，多年从事油田渗漏证据和机理，以及隐伏油气田的后生成岩作用标志的研究。1979年在AAPG Bulletin上发表题为“油田上方成岩作用磁铁矿的航空磁测探测”的报导，提出：在俄克拉荷马州西蒙特油田上的航空磁测剖面上观测到与近地表的成岩作用有关的高波数航磁异常，异常的特征是短波长（小于0.5km），低幅度（最大 60nT）。他认为这些异常是由磁铁矿引起，而磁铁矿则是下伏油藏烃类渗漏的直接结果。他同时还给出了几个钻孔的磁性数据，有人根据这些数据设计了理论模型，

并计算出了与实测航磁异常特征相近的理论曲线。后来 Boardman 指出，上述异常可能是油田地面设施引起的。对此，T. J. Donovan 等又对磁异常进行处理，消除了地面设施和区域异常的影响，得到12nT 的异常。R. L. Reynolds 等人仔细研究了西蒙特油田的地质环境后提出，以上提到的磁铁矿并不是自生的而是在钻探工作中的污染造成。他们提出有力的证据，证实磁异常的天然源可能是磁黄铁矿，经计算，由于烃类渗漏生成的磁黄铁矿可以引起 (1—7)nT 的磁异常。他们还计算出了剖面上和平面的磁异常理论曲线。可以说，他们的工作间接地证明了磁异常与油气藏之间的关系。

自 Donovan 的报导发表后，美国一些从事航空磁测的地球物理公司，又纷纷对他们过去的航空磁测资料进行了许多重新研究。其中，D. F. Saunders 和 S. T. Terry 的工作做得较多、较深入。他们在东得克萨斯州和俄克拉荷马州的几个油田上，经过数据处理后得到与油田有关的航磁异常，其幅度在±(5—10)nT 以内。为了证实这些异常是由自生亚铁磁性矿物引起的，又对浅部介质的磁性作了大量的测定和研究。比较有说服力的例子是亚拉巴马州费里油田，这是一个大型的地层圈闭油田，深(2652—3200)m，面积约181km²、估计石油储量约55MMbbl，天然气储量约200bcf。该油气田于1983年发现，美国国家铀矿资源评估 (NURE) 计划于 1979 年在本区进行了航磁测量，当时不存在油田地面设施干扰。NURE 航磁数据的噪声水平为±1.5 nT，在三条剖面上，在油田上方有明显的超过±1.5nT 的微磁异常存在。通过油田进行了土壤磁化率测量，发现在油田上方存在土壤磁化率异常。他们提出，普查油气时应先作航空磁测探测弱小磁异常，然后研究壤中气中是否有碳氢化合物存在，以确认有碳氢化合物渗漏存在的有利构造部位，最后再作地震勘探。

我国地质矿产部航空物探总队1981年在柴达木盆地中部进行航空磁测，在涩北气田上也发现了微磁异常，其幅度为 (5—15)nT，磁场水平梯度值为 (5—70)nT/km。涩北构造天然气产于第四系更新统七个泉组黑色泥岩、粉砂岩及泥粉砂岩中，储气层深度大约在(560—1300)m之间，含气区正好与剧烈变化的水平梯度异常区对应，其值达 (50—70)nT/km。

测定九口井的岩心磁性结果表明，凡是气田或含气构造的第四系七个泉组灰黑色泥岩及黑色碳质泥岩均有一定磁性，其磁化率一般为 $4\pi\times(116—142)\times10^{-5}$SI，最高达 $4\pi\times400\times10^{-5}$SI。这些泥岩中含有较多的磁铁矿微粒，其含量达 (2—15)%。在气田区泥岩的磁性较强，有弱小磁异常出现，在远离气田区，泥岩磁性减弱，微磁异常出现的程度也随之减弱。有的物探工作者认为，柴达木盆地中部气田上的微磁异常与上述美国西蒙特油田上方磁异常成因类似。不过，我们觉得可能二者的成因不同，后者是由于油藏上方次生铁磁性矿物引起，而前者则是由于储气层本身的磁铁矿引起的。

因此，我们可以设想，油田上方微磁异常可能由两种原因引起，一是由下伏油藏烃类微渗漏产生的次生铁磁性矿物引起，这属于前面我们提到过的二级模型；一是由于储油（气）层本身的磁铁矿引起，属于一级模型，柴达木涩北气田上的微磁异常，可能便属于这一类。

（三）土壤磁化率测量[21][24][25][26]

由已知油气田与高精度航磁数据的对比可知，航磁数据经特殊处理消除地面设施及区域场影响后，在许多油田上方均呈现微磁异常。为了要直接证实这些微磁异常的确与油气

田相关，即是由于烃类微渗漏在油气田上方形成成岩作用铁磁性矿物产生的磁异常，并由此确立高精度航磁和地面磁测在直接圈定油气田位置方面的有效性，人们对油气田及外围地层（400—500）m以上的磁性进行了大量的测定与研究。

通常，钻孔在浅部是不取心的或无法取心，而为了研究浅层介质的磁性而专门打钻取心又不现实，因此人们自然选定土壤作为研究介质。在最近五、六年时间内，在这方面所取得的成果，使土壤磁化率测量可能成为直接圈定油气田的有效方法之一。80年代后期，R. S. Foote 和 D. F. Saunders 等测定了45个油气田（包括一些地层圈闭油气田）土壤或浅孔样品的磁化率，在大多数油气田开发区地面上均呈现有统计学意义上的土壤磁化率异常。成岩作用磁性矿物为磁赤铁矿（γ-Fe_2O_3）、磁铁矿、磁黄铁矿、硫复铁矿（Fe_3S_4）。最常见的是磁赤铁矿。上述矿物中的一种或几种可引起磁化率增高。

土壤磁化率是一个随机量，因此 D. F. Saunders 采用统计方法表示测量结果。例如上述费里油气田上所得结果为，油气田外围背景样品共 34 个，其磁化率平均值为 $4\pi\times37.1\times10^{-6}$ SI，标准偏差 $4\pi\times24.6\times10^{-6}$ SI。在油气田上方的 40 个样品，其磁化率平均值为 $4\pi\times88.0\times10^{-6}$ SI，它比背景样品平均值高很多，若以背景样品的标准偏差为单位，则高于2.07倍。无论从样品的数量或高出的数值来看，油气田上方磁化率升高是比较可靠的事实。

中国地质大学（武汉）磁法教研室在鄂尔多斯盆地等处油气田上，也独立地、平行地进行了类似的研究工作，测量了土壤的磁化率，得到了同样的结果。文献[25]报导了在含气构造岩石中发现典型球状磁铁矿，是在烃聚集的地球化学环境中形成的自生磁铁矿，具有生物降解作用形成的细菌磁铁矿的特殊形貌，从磁性测定结果推断，这些磁铁矿颗粒具有化学剩磁。在鄂尔多斯及其他油气田上方，发现了土壤磁化率异常，这些异常有的分布在油气藏正上方，有的分布在周围，与土壤烃类异常具有一定的相关性。

可以说，在油气田上方由于烃类微渗漏形成磁性矿物致使土壤磁化率升高，是一个比较普遍的现象，可以用作一种有效的、经济的普查油气田（包括地层圈闭油气藏）的方法。

从另一方面说，既然已经证实在许多油气田上方均有成岩作用磁性矿物含量增高的现象，就可以用飞行高度低的高精度航磁测量去发现它们所引起的微磁异常，也可用点距小的地面高精度磁测（测量磁场和磁场梯度）去发现这种微磁异常。

采用包括磁法在内的综合物化探和其他方法直接圈定油气田，是油气普查的一个重要发展方向，努力进行这方面的研究工作和实际运用探索，必将加快油气田普查的步伐，取得良好的经济效益。

§3 海陆磁异常特征及分析

一、地球表面海洋及大陆的磁异常场特征

随着技术的发展，对地球表面磁场测定的精度及导航定位的精度不断提高，覆盖面积越来越广，有的图件上，大陆及大洋磁场都已经连成一片。陆地及海域之间由于地壳结构不同，磁异常有明显的不同特征，根据此特征分析，可有助于人们对地壳结构的认识。(1955—1960)年开始，西方国家对全球大部分海域进行磁测，首先在美国西海岸外海发现

了条带磁异常，以后又在整个东太平洋、印度洋及大西洋海域都测出了有规律的条带磁异常系列。条带虽然宽窄、间距不一致，但都有一定规律，可以对比。这些条带磁异常在海域中都与洋中脊轴部平行，其两侧具有对称性，可以说明洋壳中地幔内的超基性岩浆通过狭窄地带（宽度小于10 km）内的垂直裂缝源源不断地贯入洋中脊轴部。这些熔岩在固结时，持续冷却，从高温冷却到居里点温度以下，取得与当时地球磁场方向一致的热剩余磁化，其Q值（剩余磁化强度/感应磁化强度）常大于1。海底就象盒式磁带一样记录下了地球磁极相继倒转的现象。这种有着交替方向的热剩余磁化，随着洋中脊岩浆的不断涌出及物质向洋中脊两侧不断扩张，形成了海水表面或其上空中可以测出的条带状磁异常，这现象多年来已为地学界所周知。图4.3—1为冰岛南部的雷克雅内斯洋中脊上的条带磁异常。可根据洋中脊两侧熔岩岩层的年龄及距离计算中洋中脊的扩张速率为1 cm/a（每年1cm）。磁化强度在中央段块部分为30 SI，其它段块为12 SI。磁性层的平均厚度为400m。

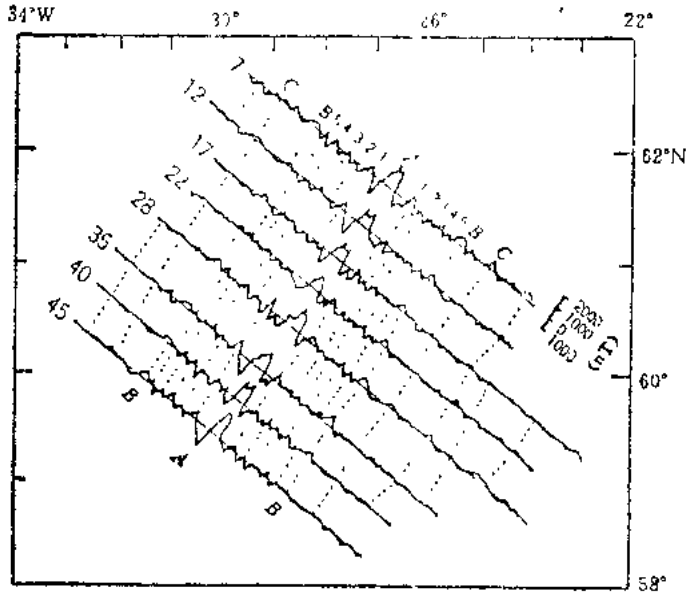


图 4.3—1　冰岛以南 Reykjanes 洋脊上的磁异常图
（摘自 Earth一书，Frank Press & Raymond Siever 著）

图4.3—2是由条带磁异常及古地磁测定所确定的海底时代所表示的全球海底扩张图。洋中脊是新的海底喷发处，对应最年轻的海底。沿着条带磁异常可以建立起等时线（用不同的颜色和符号表示），由此给出自洋中脊产生后以Ma为单位的海底的年龄。大西洋的海底对大西洋中脊是对称的，而太平洋海底却对洋中脊并不对称，部分原因是由于其东部俯冲入阿拉斯加以南的阿留申（Alentian）海槽和沿南美洲西海岸的秘鲁智利海槽所致。西部也俯冲入西太平洋的许多深海槽之中。两方相距甚远，力的影响有所不同。

条带磁异常的偏移是转换断层所引起。海洋磁测资料给研究洋壳结构及其磁性特征提供了丰富的信息，是了解海底扩张机制和其发展过程的关键。Vine和Matthews用海底记录到的地磁场倒转（根据部分岩心取样作古磁测定加以证实）来解释条带磁异常。洋壳的下层岩石为超基性玄武岩，有如磁带的作用，洋壳由洋中脊向两侧运移，像传送带一样，记录了地球磁场的极性反转。利用这个潜在的走带机构，可确定海洋传送带（海底扩张移动）的速率。全球的研究发现了地磁倒转在全球的一致性，确定了准确的地磁极性倒

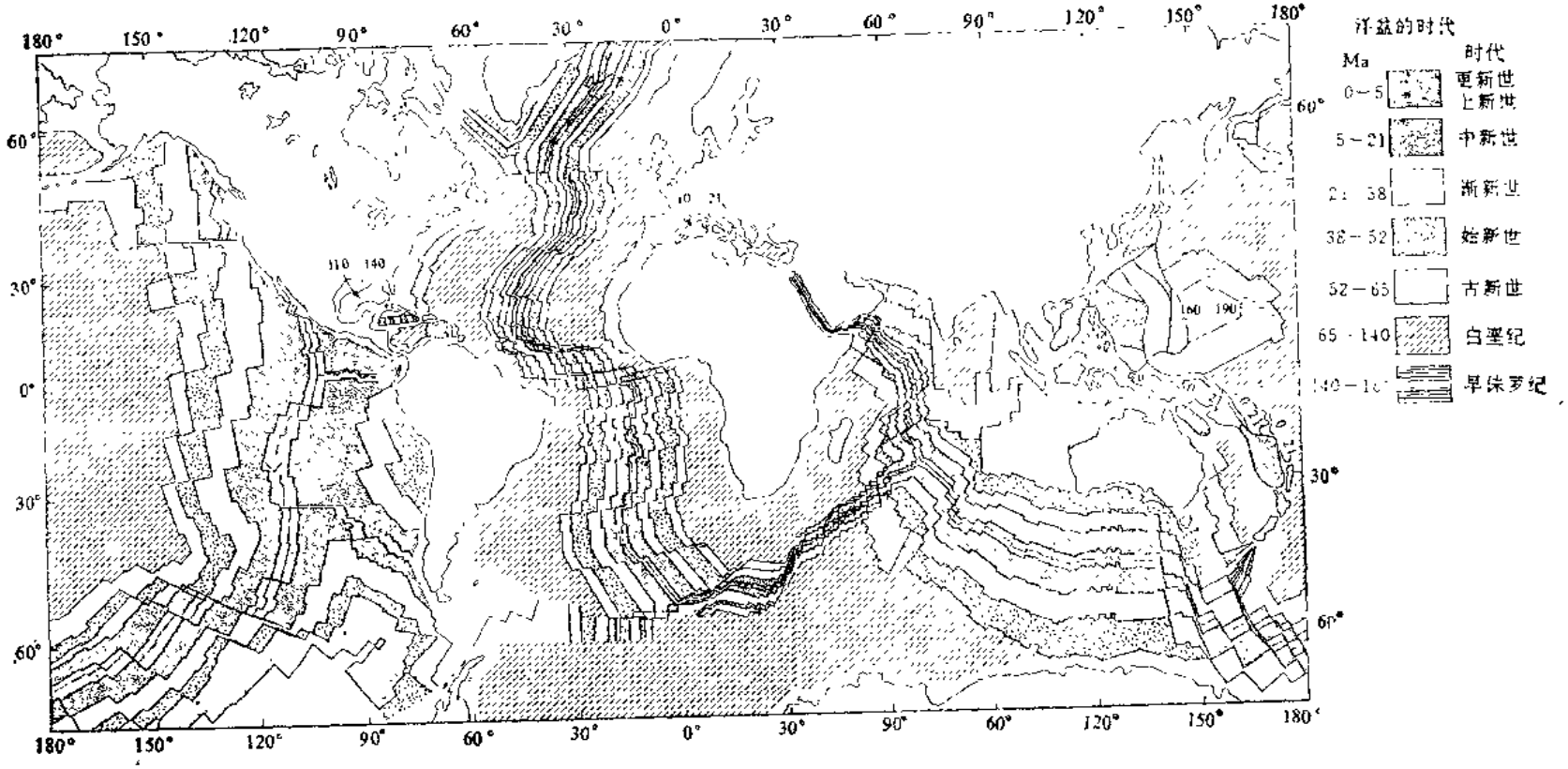


图 4.3—2　根据海域条带磁异常编制的全球海底等时线图

（此图来源同上图）

转时间表（极性年表），由此导出海底扩张速率。有些特殊地区，如南大西洋，那里的海底扩张未见过有明显的间断，扩张速率明显不变，在洋脊两边都是2 cm/a，并可一直追溯到晚白垩纪（8000 Ma以前）。Heirtzler(1968)及后来的Larson和Pitman(1972)还把这种扩张回溯到上侏罗纪初（162 Ma）。全球采用的极性年表如图4.3—3。全球的条带磁异常就按此极性年表编号。

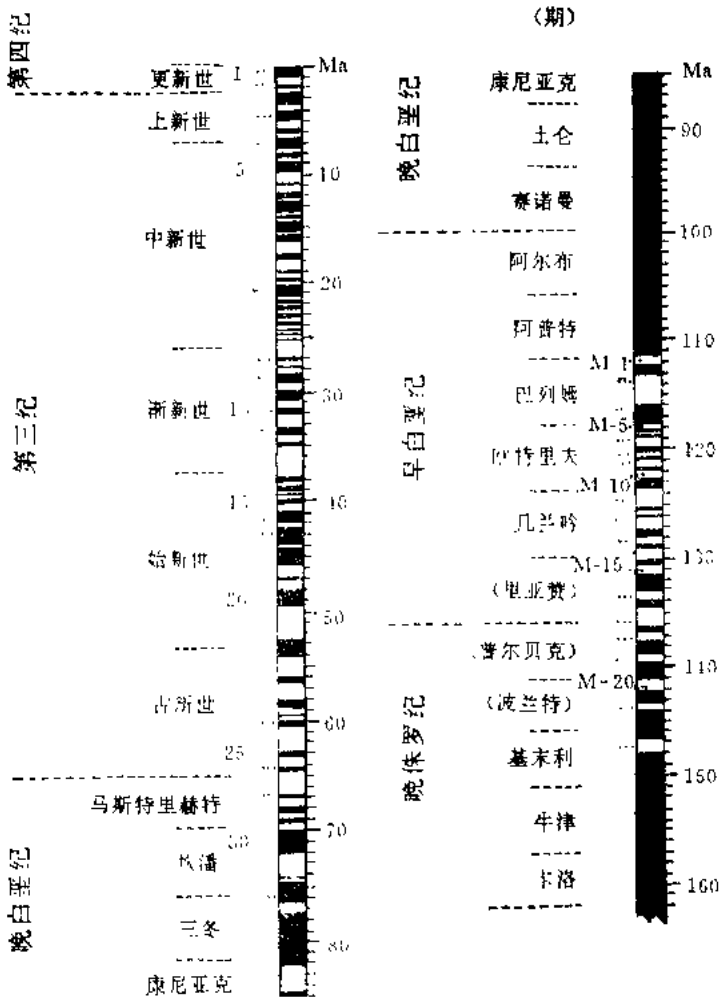


图 4.3—3　从海洋磁异常导出的地磁极性时间表

自今至80 Ma前引自Heirtzler等（1968），从（80—160）Ma以前引自Larson和Pitman(1972)。黑色表正常极性带；白色表倒转带；左侧指出了地质时代；中间是给突出的磁异常指定的号数

国际对比计划(DSDP)—深海钻探计划研究了几百个钻孔岩心，积累了大量的地质地球物理数据。结果发现，在海洋玄武岩层上迄今所见最老的沉积岩层是上侏罗纪中期的沉积岩层。DSDP取得的岩心资料倾向于证实海底扩张理论。现有50%以上的海底似乎是在过去70 Ma内形成的。

更精确地观察磁异常能从有没有明显的中心磁异常带来区分活洋脊和死洋脊。还有许多海洋区在磁性上是平静的无异常区（寂静区），如西太平洋、赤道大西洋、东北印度洋等区那里没有条带状磁异常。

我国东部海域基本是大陆架区，无条带磁异带，其磁异常特征与大陆相似，与大陆间分不出明显界线。由于海水有一定深度，在海面上测得的磁异常较大陆的要平缓圆滑。但我国南海海域的中央海盆区却有几千万年及一亿多年前形成的较老的条带磁异常，如图4.3—4。地矿部第二海洋物探大队陈圣源等根据国际地质年表，通过理论模式计算的理论扩张磁异常与实测磁异常曲线对比发现，南海中央海盆有东西向条带磁异常，中央轴大致位于北纬15°左右，条带呈南北对称分布。在北部辨认出5D-7-11序列，5D-7近东西向，7a-11呈北东东向展布。15°N以南识别出5D-9序列。这磁异常被认为与海底喷发的玄武岩有关。海底扩张的时期距今（32—17）Ma，为第三纪的渐新世到中新世时期（见图4.3—3中条带磁异常编号与年代的对应关系）。

南海中央海盆的西南区，在北纬12°—15°和东经112°—115°之间，也有正负交替、波状起伏、相互平行的条带磁异常。陈圣源等根据地质考察及与国际地质年表对比，辨认确定了M_7—M_{11}序列条带磁异常，属白垩纪早期扩张形成，距今约（126—119）Ma。

两区的条带磁异常在多处有南北错移现象，这与转换断层有关。

由地壳岩石磁性可知，沉积岩的磁化率及剩余磁性都很弱，无论在大陆还是海洋，所观测到的磁异常实际上都由火成岩和变质岩所引起。海洋区地壳的磁性特征主要受洋壳玄武岩层的剩余磁化强度所控制，其情况已如上述。而大陆上主要的火成岩和变质岩区，岩石年代大多较海域的古老。中生界、古生界、元古及太古界的岩石，其剩余磁性常比感应磁性为小（Q值常<1）。即使在剩磁和感磁可以相比的岩石内，由于剩余磁化强度$\boldsymbol{M}_r$的方向变化很不规则，故大块岩石的总剩余磁化强度并不大。故可认为，大陆上的磁异常受感磁控制。在中纬地区的磁异常图上常可见孤立的磁异常北部伴生负的异常。正负异常的比值与地磁纬度的高低有关。也有个别例外的情况，如有些火山岩有很强的剩磁（$Q>1$），其异常显出特殊的现象，如反转磁化的孤立磁异常。一般说来，大陆磁异常呈封闭的等值线形状，以椭圆或圆形为主，其分布特征受大地构造控制。

图4.3—5为我国东部部分陆缘区磁异常（ΔT）图。由于我国渤海、黄海及东海的大部分海域均属大陆架范围，其地壳属大陆架地壳结构，故磁异常与大陆磁异常无明显区别。只在近冲绳海槽及琉球群岛区，呈现出明显的陆洋壳交界的磁场变化特征。图4.3—6为我国东部部分陆缘区布格重力异常图，它与磁异常图可以相对照。

二、磁卫星高度的地球洋壳陆壳的磁场特征

近廿年来，根据围绕地球的磁卫星的观测数据，求得了全球的卫星高度的磁异常图，为研究地壳及上地幔的区域性岩石变化、地壳厚度及地热扰动等问题提供了宝贵资料。卫星测得的磁异常可与地面上空测得的航磁异常进行定性定量对比。

地面上磁测的地质目的是反演磁异常来确定岩石圈内的磁源分布以探求其组成结构和演化过程。由于观测点到源的距离不大，例如航空磁测的一般高度为数十米至千余米。对这样高度所测到的磁异常反演磁源强度及其几何分布都是可能的。而磁卫星飞行的平均高度约400 km，在这么大的距离上，所能反映的是地壳总的垂向磁化强度与壳厚度乘积所形成的磁矩强度的分布。一般认为地壳中存在长波长磁异常的磁源是深源，位于下地壳内。但在海洋区，由于地壳很薄，只有几公里，故磁异常源也可能位于地幔中，那里有超基性岩浆，其铁磁性物质丰富。由于洋壳中海洋沉积物的低热导率，洋壳的温度梯度值并不高，因此居里面有可能在莫霍面之下，而使上地幔的顶层具铁磁性。陆壳中的磁性物质

南海磁条带分布示意图

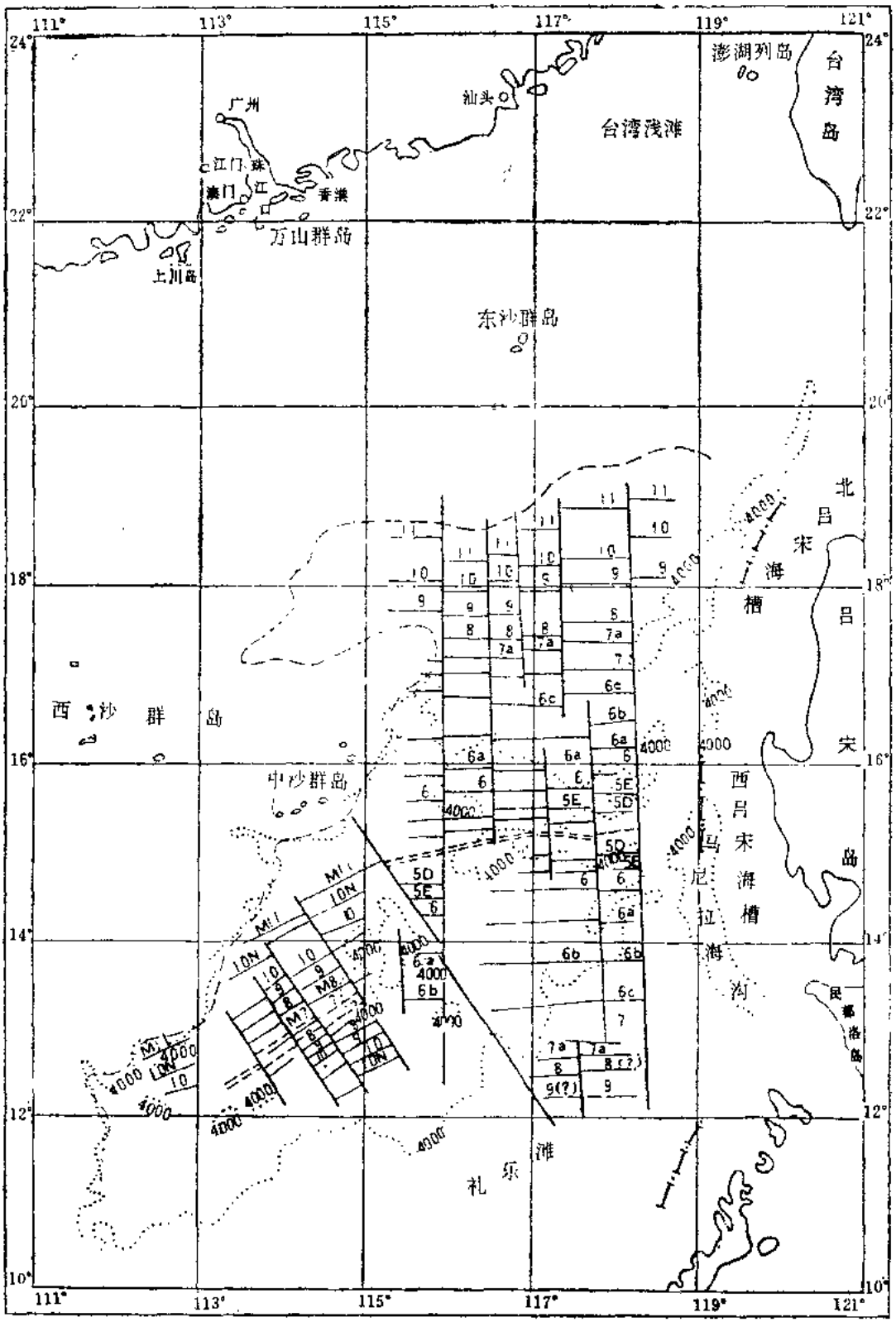


图 4.3—4　我国南海海域条带磁异常示意图

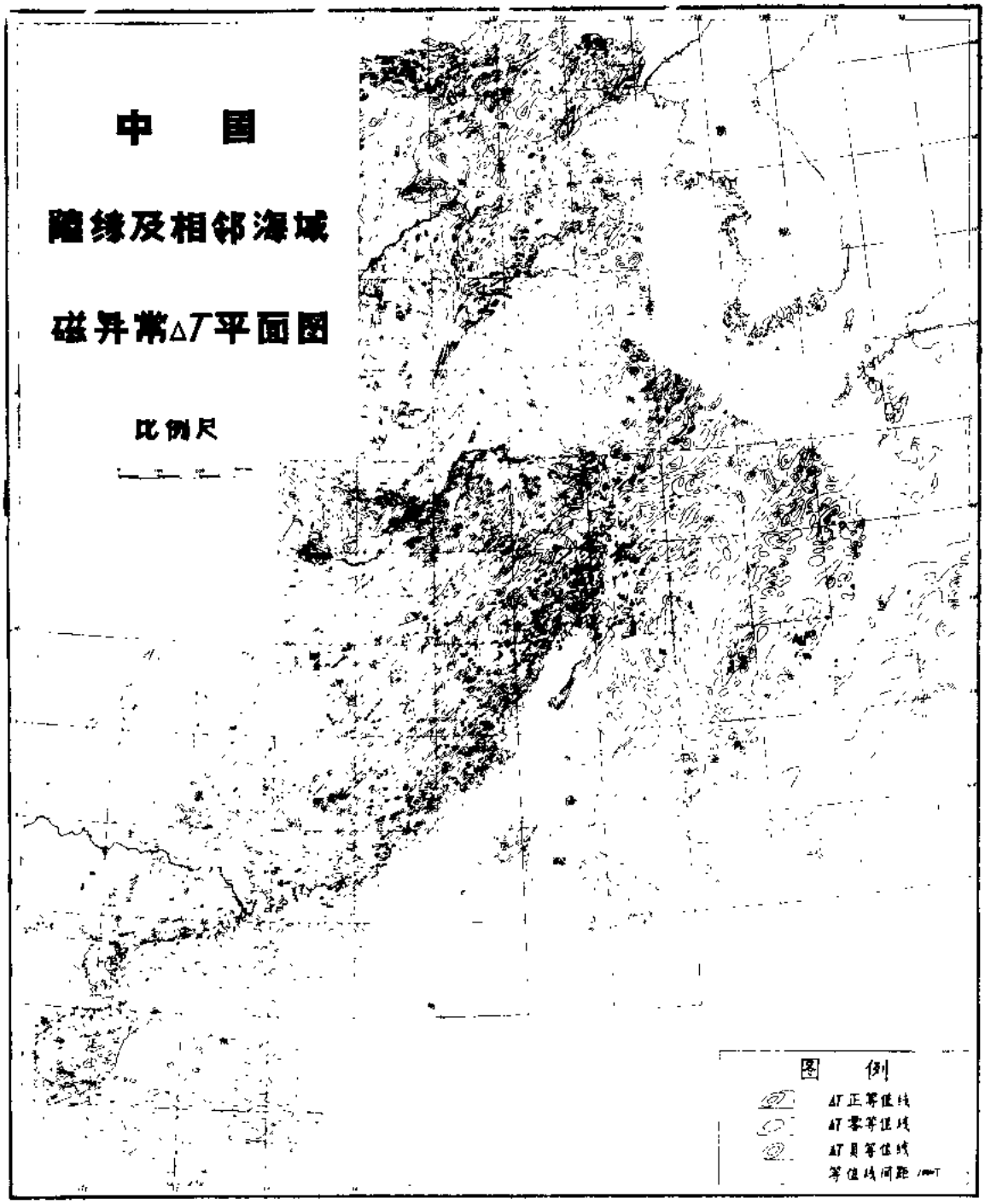


图 4.3—5 我国东部部分陆缘区磁异常（ΔT）图

与侵入岩浆活动、地球化学作用及构造变化特征等有密切关系。陆壳一般有数十公里厚。根据地下温度变化情况，居里面可能在莫霍面之上或与之相当，也有可能在莫霍面之下，如图43—7。洋壳与陆壳的区域岩石学、地球化学及地热活动等都有各自的特点，利用卫



图 4.3—6　我国东部部分陆缘区布格重力异常图



图 4.3—7　大陆及海洋区可能的区域磁异常源的分布示意图

（M为莫霍边界，右边洋壳中的黑块表示反转磁化岩石）

星磁异常，作出全球的磁壳磁性特征图，对了解地壳主要单元的性质及其演化，是很有意义的。

用磁卫星资料研究海陆区磁性变化时应注意：第一，磁异常只能检测出地壳的总的垂向磁化强度分布；第二，热剩磁效应主要反映在短波长磁异常中，其方向不规则，在卫星高度处无显示；第三，卫星所能测出的有效磁性差包括感磁及粘滞剩磁，后者的方向与感磁方向一致；第四，卫星磁异常主要来自感磁效应，为了消除从赤道到两极磁化磁场随纬度变化的影响，应对卫星磁异常进行化向垂直方向的处理（即化向地磁极）。

现介绍一些卫星磁异常图及其用于研究陆海区地壳磁性的情况。

用美国 Langel 等人（1982）从 MAGSAT 磁卫星测量数据导出了全球范围的标量磁异常 ΔT 图。图上的数据来自地磁平静日的测量值，地核磁场用 Gaddard 飞行中心研制的 NASA 模型加以剔除。外源磁场由多次轨道磁剖面用最小二乘法来消除。图 4.3—8 是地球 2°×2°的磁异常（ΔT）图，其范围为 50°S—72°N，140°W—62°E。由此图可看出磁异常的分布特征，但因受纬度变化的影响，不便用它来反演岩石圈的磁化强度及磁源的几何特点。虽然剔除了地核磁场，但异常还受地核磁场的倾角、偏角及强度的干扰而改变自己的面貌。地核场强度从大于 60000 nT（磁极附近）减至近 20000 nT（磁赤道附近），磁倾角由两极至磁赤道，从 90°减至 0°岩石圈磁异常受此影响，其幅度及形状从赤道到两极发生连续变化。利用最小二乘矩阵方法（Von Frese 等人，1981，1982）及 MAGSAT（4/81）的地磁参考场（Langel 等人，1981），对地壳磁化率按4°×4°的间隔作磁偶极子排列，求得拟合于图4.3—8磁场的等效磁偶子源。再计算这些等效磁偶极子源（当地核场都是径向的、强度都为 60000 nT 的情况下）在400km固定高度所产生的磁场，如图4.3—9。

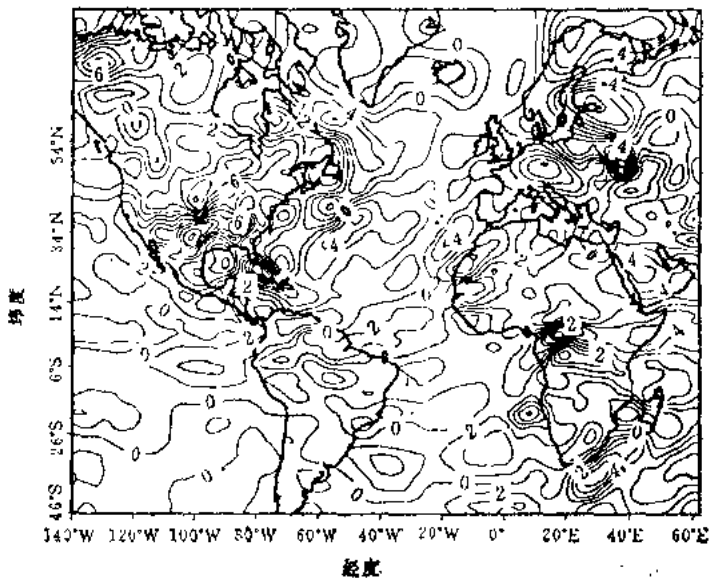


图 4.3—8 MAGSAT(2°)标量磁异常图

（等值线间隔为 2 nT；数据的近似高度为400 km）

岩石圈的磁源可设为受地磁场感应磁化而形成。图4.3—9中的磁场只与岩石圈的磁源有关，源的几何形状及磁化强度等可由图中异常反演求得。由于对卫星磁异常的地质分析经验不足，可认为这种设想在目前是合理的。在卫星高度上的大陆及海洋区的磁异常主要

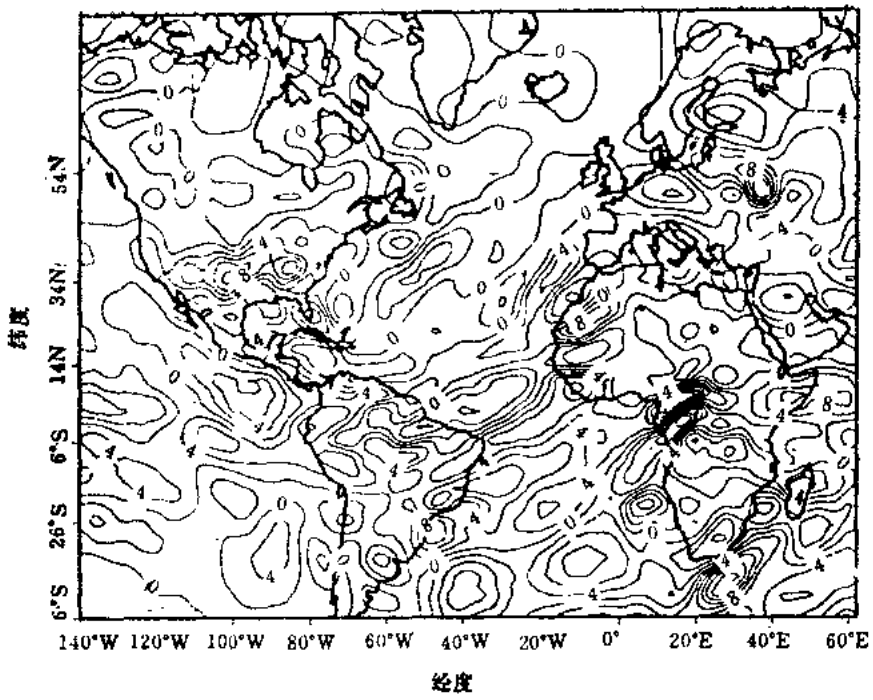


图 4.3—9 垂直极化的MAGSAT(2°)标量磁异常图
(等值线间隔为4 nT；异常高度约400 km)

反映感磁和粘滞剩磁，洋壳的条带磁异常已显示不出来了。

为了研究海陆磁异常的区别，W. J. Hinze(1991)等人对垂直极化的卫星磁异常作了统计，如图4.3—10。其中A是天陆磁异常的统计值，B是大西洋及太平洋海域的磁异常统计值。μ代表平均磁异常强度，σ是异常强度的偏差（均方根偏差），N是统计异常的数目。陆地的平均值为0.18 nT，海域则为−0.51 nT，这样小的数值是符合磁场的高斯定理的（封闭面积上的磁通量应为零）。海域的μ值为负，说明其负异常较多。磁异常的均方根偏差σ，陆地比海域大15%，说明大陆与海域有不同的构造演化历史。

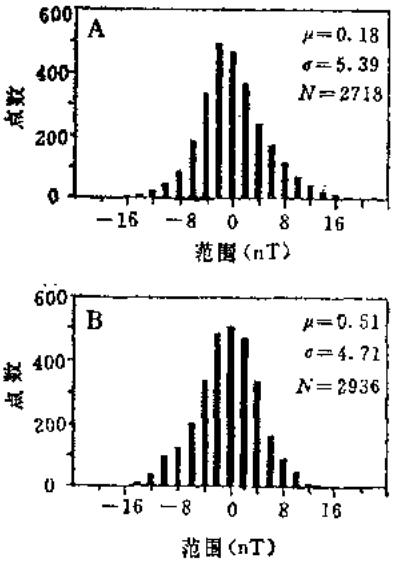


图 4.3—10 垂直极化的MAGSAT磁异常图上海(B)陆(A)异常的统计结果

可以将图4.3—9上的磁异常转换为有效磁化率。设陆壳平均厚度为40km，洋壳厚度为6 km，用不太复杂的方法求出地球4°×4°壳块的有效磁化率分布图（如图4.3—11）。同样也可将地质上已知的洋陆地壳的平均有效磁化率代入反演计算，求每个壳块的厚度，以大体确定洋壳及陆壳的厚度。经Harrison(1987)分析洋壳和陆壳的区域磁化强度模型发现，洋壳具有较陆壳很不相同的磁化强度特征。实际观测到的，从洋底取得的有限块岩石标本的平均磁化强度(在6km厚的洋壳内)值为(0.7—1.5)A/m。根据卫星异常模拟海洋地壳结果，得出的磁化强度结果接近其高限。此高限属下地壳上地幔的蛇纹石化

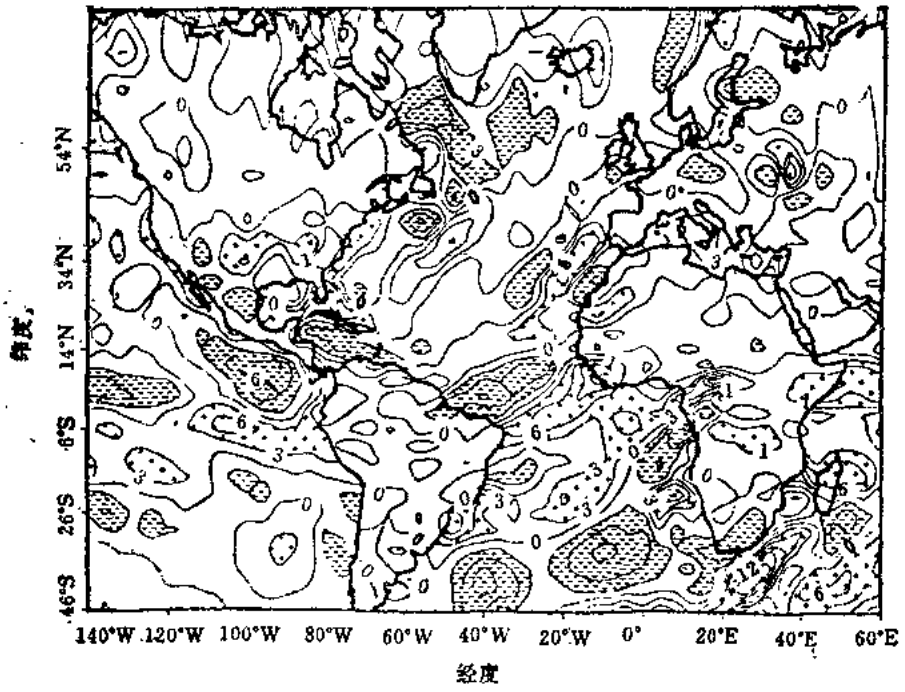


图 4.3—11 地球4°×4°壳块的有效磁化率分布图
（等值线数值以SI为单位）

区，具有与地磁场方向相一致的粘滞剩磁。对应于上述洋壳的平均磁化强度的有效磁化率应为（0.018—0.038）SI（设施加的磁场即地磁场，强度为5000 nT）。重要的是应注意到，大西洋和东太平洋的磁化率有效标准偏差 σ（是洋壳的平均磁性）分别为0.043 SI及0.03 SI，都接近有效磁化率的高限0.038 SI。这支持了在接近洋壳底部处分布有粘滞剩磁物质可能性的看法。

陆区及洋区的有效磁化率的统计比较如图4.3—12。洋区的平均磁化率小于陆区的，其置信度为99.9%。洋区的有效磁化率的均方根RMS（用 σ 表示）值约5倍于陆地者。

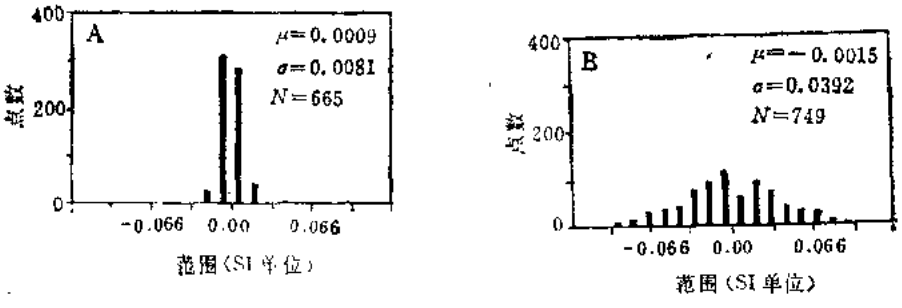


图 4.3—12 大陆与海域有效磁化率的统计结果比较图

图4.3—13是我国大陆上空100 km高度处由MAGSAT磁卫星测得的标量磁异常图。可见，西藏有明显的负异常，东南沿海区也是负异常分布区。新疆、华北、东北和华南为正异常图。此图虽较粗略，但在一定程度上表现了地壳物质结构的差异。



图 4.3—13 我国大陆上空卫星磁异常图
（等值线间距为 2 nT）

§4 关于磁法勘探单位制换算问题

当前我国要实行的计量单位国家标准，与国际单位制（SI）是一致的。地球物理勘查的教学、科研、野外工作也要尽快适应这种转变。建国以来，我国在有关的专业活动和各种文献资料中，都是采用以CGS制为基础的单位制。在力学（重力学）领域，各种物理量的量纲在CGS单位制与国际单位制中均相同，各种公式的表达形式也相同，实现两种单位制的转换较为容易。而在磁法勘探领域以往采用的以 CGS 制为基础的高斯单位制，各种电磁学物理量的量纲与国际单位制中有很大差别，许多公式的表达形式也不相同。因而在对照参考不同单位制的文献资料时容易产生混淆，在实际工作中稍有疏忽就会得出错误结果。本节首先从物理学的角度说明磁化率在两种单位制中的相互转换；再讨论两种单位制中的正反演问题；最后讨论与视磁化率、消磁系数有关的问题。

一、国际单位制与高斯制中磁化率的换算

在力学领域，CGS单位制和国际单位制都采用三个基本物理量，即长度、质量、时间，分别以L、M、T表示其量纲。例如重力加速度g的单位在CGS制中为cm/s²（厘米/秒²），叫做Gal（伽），在SI制中为m/s²（米/秒²），二者的量纲相同，均为LT^{-2}。二者的关系为 1 Gal$=10^{-2}$m/s²。

在电磁学领域，以CGS制为基础的高斯制同样采用质量、长度、时间三个基本物理量。在SI制中，除这三个基本物理量外，还采用电流（I）作为基本物理量，即共有四个

基本物理量，因此磁法勘探中的各种物理量在这两种单位制中就有不同的量纲。为了避免在一些常用公式中出现4π（或$1/4\pi$）这一常数因子，在国际单位制中对有关公式采用了合理化写法。这样一来，某些磁法勘探中的物理量在两种单位制的换算中就出现了4π或$1/4\pi$的因子。

长期以来在磁法勘探文献资料中均采用高斯单位制。在高斯制中磁导率μ为无量纲的纯数，真空的磁导率$\mu_0=1$。在磁法勘探中通常忽略空气或水与真空磁导率的差别，即认为空气或水的磁导率$\mu=1$。由基本关系式$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，可见空气中的磁感应强度$\boldsymbol{B}$（单位为高斯）与磁场强度$\boldsymbol{H}$（单位为奥斯特）的数值相等。即在高斯单位制中，空气中1高斯的磁感应强度相当于1奥斯特的磁场强度，二者的量纲也相同，均为$L^{-\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$。这里要指出，在磁法工作中用各种磁力仪测得的场值都是磁感应强度$\boldsymbol{B}$。只是由于在高斯单位制中磁感应强度$\boldsymbol{B}$与磁场强度$\boldsymbol{H}$在数值上相等，量纲相同，在采用高斯单位制的磁法文献中，对空气或水中的磁感应强度和磁场强度未作严格区分。在表示空气和水中磁场的单位上，Gs（高斯）和Oe（奥斯特）可以通用[33]。在国际单位制中，磁感应强度$\boldsymbol{B}$和磁场强度$\boldsymbol{H}$有不同的量纲，$\boldsymbol{B}$的量纲为$MT^{-2}I^{-1}$，$\boldsymbol{H}$的量纲为$L^{-1}I$，无论是在介质中还是在真空中，$\boldsymbol{B}$和$\boldsymbol{H}$的数值都不相同。在由高斯制改为国际单位制时就必须明确各种磁法实测资料都是地磁场的磁感应强度$\boldsymbol{B}$，还要注意相应的公式在两种单位制中也不相同。在进行两种单位制相应单位的换算时，采用参考文献[37]中的换算系数就可得出正确的结果。

下面讨论两种单位制中磁化率κ的换算关系。介质中的磁感应强度$\boldsymbol{B}$与磁场强度$\boldsymbol{H}$之间有复杂的函数关系。在一般情况下，磁导率及磁化率都是张量。为了便于对比磁化率在两种单位制中的换算关系，下面仅就各向同性、线性介质进行讨论。对各向同性、线性的磁介质，大家熟知有关系式

$$\kappa=\boldsymbol{M}/\boldsymbol{H} \tag{4.4—1}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{4.4—2}$$

$$\boldsymbol{B}_0=\mu_0\boldsymbol{H} \tag{4.4—3}$$

$$\mu=\mu_r\mu_0 \tag{4.4—4}$$

$$\boldsymbol{B}=\mu_r\mu_0\boldsymbol{H}=\mu_r\boldsymbol{B}_0 \tag{4.4—5}$$

以上各式中的$\boldsymbol{M}$为感应磁化强度，μ_0为真空中的磁导率，μ_r为相对磁导率，$\boldsymbol{B}_0$为真空中的磁感应强度，κ为磁化率。(4.4—1)—(4.4—5)式对两种单位制都适用。公式中出现的物理量的量纲及系数在两种单位制中是不同的。在高斯单位制（CGSM制）中，$\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{B}$具有相同的量纲，由(4.4—1)及(4.4—2)式可见κ及μ均为无量纲的纯数，并且取真空中的$\mu_0=1$。在国际单位制中，$\boldsymbol{M}$与$\boldsymbol{H}$有相同的量纲，因而κ也是无量纲的纯数；$\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{H}$有不同的量纲，因而μ及μ_0是有量纲的，其量纲为$LMT^{-2}I^{-2}$。从(4.4—5)式可以看出，相对磁导率μ_r在两种单位制中都是无量纲的纯数，并且其数值相等。μ_r是与所采用的单位制无关的不变量，也就是说μ_r是与广义坐标变换无关的不变量。这从物理学的角度看是明显的，因为不同介质的任何一种物理属性的相对比值（对比度）显然不会随单位制的不同而改变。相对磁导率μ_r在不同单位制中的不变性是以下讨论磁化率κ在两种单位制中变换关系的出发点。

磁化率κ与磁导率μ之间的关系，在两种单位制中的表达方式是不同的。在高斯制中有[34]

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-4\pi\boldsymbol{M} \tag{4.4—6}$$

将(4.1—1)、(4.4—2)式代入(4.4—6)式可得

$$\mu_s=1+4\pi\kappa_s=\mu_r \tag{4.4—7}$$

式中用加了下标s的κ_s和μ_s表示高斯单位制中的磁化率和磁导率。

在国际单位制中，磁场强度$\boldsymbol{H}$为[35]

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M} \tag{4.4—8}$$

将(4.1—1)、(4.1—2)式代入(4.4—8)式可得

$$\mu=\mu_0(1+\kappa) \tag{4.4—9}$$

$$\mu_r=1+\kappa \tag{4.4—10}$$

(4.4—9)及(4.4—10)二式中用不加下标的κ与μ表示国际单位制中的磁化率和磁导率。

(4.4—7)式是高斯单位制中μ_r与磁化率的关系式，(4.4—10)式是国际单位制中μ_r与磁化率的关系式，二者是不同的。但如前所述，相对磁导率μ_r在两种单位制中却是相同的，即对同一种磁介质而言，(4.4—7)式中的μ_r与(4.4—10)式中的μ_r相等，由此得出[36]

$$4\pi\kappa_s=\kappa \tag{4.4—11}$$

或

$$\kappa_s=\frac{1}{4\pi}\kappa \tag{4.4—11'}$$

这就是两种单位制中磁化率的换算关系，称为**量换算式**[37]。(4.4—11)的含意是，如果某一种磁介质的磁化率用高斯单位制表示为$\{\kappa_s\}$CGSM(κ)，(其中$\{\kappa_s\}$代表其数值，CGSM(κ)代表其单位)，则该介质的磁化率用国际单位制表示时为$\kappa=4\pi\{\kappa_s\}$SI(κ)。在一些有关公式中要采用(4.4—11)进行换算，例如由(4.4—10)式到(4.4—7)式就是如此。正如某一长度用SI制表示为$\{L_1\}$米，则用市用制表示为$L_{市}=3\{L_1\}$市尺，即一物体长度的"市尺"数等于其"米"数乘3，$L_{市}=3L_1$是量换算式。而一市尺则等于一米的1/3，即1市尺$=\frac{1}{3}$米，这是**单位换算式**。类似地有

$$1\,\mathrm{SI}(\kappa)=\frac{1}{4\pi}\mathrm{CGSM}(\kappa) \tag{4.4—12}$$

$$1\,\mathrm{CGSM}(\kappa)=4\pi\mathrm{SI}(\kappa) \tag{4.4—12'}$$

(4.4—11)及(4.4—12)式从不同角度表示出磁化率在两种单位制中的换算关系。事实上任一物理量在两种单位制中都有这两种换算关系表达方式。当前一些从事磁法勘探工作的同志，对于磁化率在高斯单位制与国际单位制中的换算关系产生的含混，如借助于长度单位在市用制与米制中换算关系的联想，将易于得出正确的结论。

二、两种单位制中的正反演问题

下面分别用两种单位制对球体的垂直磁异常Z_a进行计算，以对比方式说明磁异常正演计算中两种单位制的换算关系。球体上中心剖面内垂直磁异常Z_a在高斯单位制中的表达式为

$$Z_a=\frac{m_s}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i-3Rx\cos i]$$

$$= m_s f_1(R,x,i) = M_s V f_1(R,x,i) = M_s f(V,R,x,i) \qquad (4.4\text{—}13)$$

上式中

$$f(V,R,x,i) = V f_1(R,x,i)$$

$$= \frac{V}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i - 3Rx\cos i] \qquad (4.4\text{—}14)$$

在以上二式中m_s为球体用高斯单位制表示的总磁矩，M_s为用高斯制表示的磁化强度，V为球的体积，R为球心埋深，x为剖面上观测点的坐标，i为磁化倾角。由（4.4—14)式可见函数$f(V,R,x,i)$为一无量纲的纯数，其数值与单位制的选择无关。即，对于选定的V、R、x、i，无论是采用高斯单位制还是国际单位制，函数$f(V,R,x,i)$均有相同的值。对于其他各种形体的磁异常，均可求出相应的f函数。对于球体，函数$f_1(R,x,i)$的量纲则为L^{-3}。由（4.4—13）式看出Z_a与磁化强度M_s有相同的量纲。在高斯单位制中，可以认为空气及水中的$\mu=1$，因此可以将Z_a理解为磁感应强度或磁场强度。这里要再次提醒，用各种磁力仪，包括机械式磁力仪测定的磁异常都是磁感应强度。只不过由于在高斯单位制中，空气及水中的磁感应强度和磁场强度在数值和量纲上均相等，长期以来在磁法勘探中对二者未作区分。从物理学的角度，必须明确无论高斯制还是国际单位制都是以安培-毕奥-沙伐尔定律为基础，能直接用实验方法测定的只是磁感应强度，而磁场强度则是一种导出物理量。

为简化讨论，不考虑剩余磁化强度。以T_s表示在高斯单位制中的地磁场的磁感应强度●，而磁场强度也是T_s，由（4.4—1）式可求得高斯单位制中的感应磁化强度M_s为

$$\boldsymbol{M}_s = \kappa_s \boldsymbol{H} = \kappa_s \boldsymbol{T}_s \qquad (4.4\text{—}15)$$

上式中κ_s表示磁性球体在高斯单位制中的磁化率值。将此$\boldsymbol{M}_s$值代入（4.4—13）式求得球体Z_a的表达式为

$$Z_{a_s} = \kappa_s T_s f(V,R,x,i) = \kappa_s T_s V f_1(R,x,i) \qquad (4.4\text{—}16)$$

上式中的Z_{a_s}、κ_s、T_s均表采用高斯单位制，Z_{a_s}表示磁异常的垂直磁感应强度，T_s表示地磁场的磁感应强度（也可理解为磁场强度)。

在国际单位制中，若磁化强度以M表示，则磁异常表达式只需将高斯单位制中相应的表达式（4.4—13)右方乘以$\frac{\mu_0}{4\pi}$即可，此时有

$$Z_a = \frac{\mu_0}{4\pi} M f(V,R,x,i) = \frac{\mu_0}{4\pi} M V f_1(R,x,i) \qquad (4.4\text{—}17)$$

可见，垂直磁感应强度异常Z_a与M的量纲是不同的，前者的量纲等于后者的量纲乘μ_0的量纲。在国际单位制中，磁感应强度与磁场强度的量纲也不同，由（4.4—1)及（4.4—2)两式可求得M为

$$M = \kappa H = \kappa \frac{T}{\mu_0} \qquad (4.4\text{—}18)$$

上式中κ为磁性球体在国际单位制中的磁化率值，T为地磁场的磁感应强度。将此式中的M代入（4.4—17）式得到国际单位制中磁性球体垂直磁感应强度异常Z_a的表达式为

● 以下标s代表高斯制。

$$Z_a=\frac{\kappa}{4\pi}Tf(V,R,x,i)=\frac{\kappa}{4\pi}TVf_1(R,x,i) \qquad (4.4-19)$$

（1.4—19）式中Z_a、κ、T均用国际单位制，这里的T表示地磁场的磁感应强度，而不能理解为地磁场的磁场强度，这是（1.4—19）式与（1.4—16）式的重大差别。为了在采用高斯单位制的（4.4—16)式与国际单位制的（1.4—19)式之间进行变换，利用（4.4—11）或（1.4—11′）式即可实现。

下面进行一些简单的数值计算。设磁性球体的$\kappa_s=0.2\mathrm{CGSM}(\kappa)$，地磁场$T_s=0.5\ \mathrm{Gs}=0.5\mathrm{Oe}$，由（4.4—16)式有

$$Z_a=0.2\mathrm{CGSM}(\kappa)\times 0.5\mathrm{Oe}\times f$$
$$=0.1f\ \mathrm{Oe}=0.1f\ \mathrm{Gs}$$

由（4.4—11)式可求得上述磁性球体在国际单位制中的磁化率κ为

$$\kappa=0.2\times 4\pi\mathrm{SI}(\kappa)$$

国际单位制中磁感应强度的单位为T（特斯拉)。特斯拉与高斯的换算关系为

T　　Gs

1特斯拉$=10^4$高斯　或　$1\ \mathrm{Gs}=10^{-4}\mathrm{T}$

由以上换算关系求出地磁场$T=0.5\times10^{-4}\mathrm{T}$。将以上$\kappa$及$T$的值代入（4.4—19)式即可求得同一磁性球体在国际单位制中的垂直磁感应强度异常Z_a为

$$Z_a=\frac{1}{4\pi}\times0.2\times4\pi\mathrm{SI}(\kappa)\times0.5\times10^{-4}\mathrm{T}\times f$$
$$=10^{-5}f\ \mathrm{T}$$

由以上计算结果可见，在两种单位制中分别用相应公式求得的球体Z_a异常值是相等的，这是意料中的事。

下面来讨论反演问题。设实测得到上述磁性球体中心剖面上的$Z_a(x)$曲线，由特征点或任意点等方法已求得球体中心埋深R，磁化倾角i，由（4.4—16)式可求得磁性球体的体积V的表达式为

$$V=\frac{fZ_{a_1}}{\kappa_s T_s f_1(R,x,i)} \qquad (4.4-20)$$

设剖面上某一点x测得的$Z_{a_1}=10^{2}\gamma=10^{-2}\mathrm{Gs}$，由以上反演得出的$R$，$i$求得该点的$f_1(R,x,i)=10^{-8}\mathrm{m}^{-3}$，以$\kappa_s=0.2\mathrm{CGSM}(\kappa)$，$T_s=0.5\mathrm{Gs}$代入（4.4—20）式，可求得球体体积为

$$V=\frac{10^{-2}\mathrm{Gs}}{0.2\mathrm{CGSM}(\kappa)\times0.5\mathrm{Gs}\times10^{-8}\ \mathrm{m}^{-3}}=10^7\mathrm{m}^3$$

在国际单位制中要用(4.4—19）式来反算球体体积V，其表达式为

$$V=\frac{4\pi Z_a}{\kappa T f_1(R,x,i)} \qquad (4.4-21)$$

在同一测点上$Z_a=10^{-2}\mathrm{Gs}=10^{-6}\mathrm{T}$，$f_1(R,x,i)=10^{-8}\ \mathrm{m}^{-3}$，$\kappa=0.2\times4\pi\mathrm{SI}(\kappa)$，$T=0.5\ \mathrm{Gs}=0.5\times10^{-4}\mathrm{T}$，将这些数据代入（1.4—21)式求得球体体积$V$为

$$V=\frac{4\pi\times10^{-6}\mathrm{T}}{0.2\times4\pi\mathrm{SI}(\kappa)\times0.5\times10^{-4}\mathrm{T}\times10^{-8}\ \mathrm{m}^{-3}}=10^7\mathrm{m}^3$$

和前面的计算结果相同。显然，两种单位制的反演应该得出同样的结果。以上的讨论均未

考虑剩余磁化强度。如磁性体的剩余磁化强度不能忽略，则M为感应磁化强度M_i与剩余磁化强度M_r之和。这时在两种单位制中球体垂直磁异常Z_a的公式仍然是分别采用（4.4—13）及（4.4—17)式。归纳以上讨论，需要强调指出，无论用那一种单位制进行磁异常的正反演计算，只要注意选用的公式和使用的单位制一致，就可得出正确的结果。

三、消磁系数与视磁化率

由于历史上的原因，表征物质磁化能力的磁化率κ和磁化强度M是与磁场强度H相联系的，而磁场强度H又是建立在磁荷的基础上。在高斯单位制中与安培-毕奥-沙伐尔定律等价的公式为[38]

$$F=\frac{Q_{m0}Q_m}{\mu r^2}=\frac{Q_{m0}Q_m}{\mu_r r^2} \tag{4.4—22}$$

式中F为两个点磁荷Q_m及Q_{m0}间的作用力；r为二磁荷间的距离；μ为介质的磁导率，在高斯单位制中为一纯数。（4.4—22）式的物理含意是，由于受磁荷磁场作用使介质磁化产生消磁作用，因而其相互作用力较之在真空中的相互作用力减少了$1/\mu_r$。由此可确定高斯单位制中磁荷Q_m的量纲$\dim Q_m$为

$$\dim Q_m=[\dim F\cdot L^2]^{\frac{1}{2}}=L^{3/2}M^{\frac{1}{2}}T^{-1}$$

在国际单位制中与（4.4—22)式相应的公式为[39]

$$F=\frac{1}{4\pi\mu}\frac{Q_{m0}Q_m}{r^2}=\frac{1}{4\pi\mu_0\mu_r}\frac{Q_{m0}Q_m}{r^2} \tag{4.4—23}$$

这里的比例系数规定为$\frac{1}{4\pi\mu}$，且μ的量纲$\dim\mu$为

$$\dim\mu=LMT^{-2}I^{-2}$$

由（4.4—23)式可确定国际单位制中磁荷的量纲为

$$\dim Q_m=[\dim F\cdot\dim\mu\cdot L^2]^{\frac{1}{2}}=L^2MT^{-2}I^{-1}$$

磁场强度H在两种单位制中均定义为单位磁荷在真空中所受的磁力，即

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{F}}{Q_{m0}}$$

在高斯单位制中，真空中的磁场强度$\boldsymbol{H}$与磁感应强度$\boldsymbol{B}$数值相等，量纲相同，由(4.4—24）式有

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{F}}{Q_{m0}}=\frac{Q_m}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.4—24}$$

在国际单位制中，由（4.4—23）式可得真空中磁场强度$\boldsymbol{H}$为

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{F}}{Q_{m0}}=\frac{1}{4\pi\mu_0}\frac{Q_m}{r^3}\boldsymbol{r} \tag{4.4—25}$$

对比（4.4—24）及（4.4—25）式，可见用磁荷表示磁场强度的表达式，在两种单位制中相差一因子$\frac{1}{4\pi\mu_0}$。

由（4.4—1）式，在两种单位制中均有

$$\boldsymbol{M}=\kappa\boldsymbol{H} \tag{4.4—26}$$

对一般顺磁性及铁磁性物质，在外磁场$\boldsymbol{H}$中磁化后，内部将产生一反向的消磁磁场，其大小与该物质被外磁场磁化后形成的磁化强度$\boldsymbol{M}$成正比，记为$N\boldsymbol{M}$，这里N称为**消磁系数**。考虑到消磁磁场的作用，(4.4—26)式应改写为

$$\boldsymbol{M}=\kappa(\boldsymbol{H}-N\boldsymbol{M}) \tag{4.4—27}$$

此时将磁化强度$\boldsymbol{M}$与外磁场强度$\boldsymbol{H}$之比称为视磁化率κ'，由（4.4—27）式可得

$$\kappa'=\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}}=\frac{\kappa}{1+\kappa N} \tag{4.4—28}$$

从以上的讨论可见（4.4—28)式对两种单位制都适用。

下面讨论两种单位制中消磁系数N的换算关系。与磁化率相似，以N_s表示高斯单位制中的消磁系数，以N表示国际单位制中的消磁系数。(4.4—28)式有

$$\kappa'_s=\frac{\kappa_s}{1+\kappa_s N_s} \tag{4.4—29}$$

$$\kappa'=\frac{\kappa}{1+\kappa N} \tag{4.4—30}$$

为了对上述两个包含磁化率的表达式之间进行变换，可利用(4.4—11)及（4.4—11′）式。由（4.4—11′）式有

$$\kappa_s=\frac{\kappa}{4\pi}$$

$$\kappa'_s=\frac{\kappa'}{4\pi}$$

将以上二式代入（4.4—29)式有

$$\frac{\kappa'}{4\pi}=\frac{\kappa/4\pi}{1+(\kappa/4\pi)N_s}$$

化简可得

$$\kappa'=\frac{\kappa}{1+\kappa(N_s/4\pi)} \tag{4.4—31}$$

对比（4.4—30)与（4.4—31)式，可见有

$$N=N_s/4\pi \tag{4.4—32}$$

这就是消磁系数N在两种单位制公式中的量换算式。大家知道，在高斯单位制中，消磁系数N_s的最大值为4π。因此在国际单位制中，消磁系数N的最大值为1。如已知磁性体在高斯制中的消磁系数，由（4.4—32)式即可求出该磁性体在国际单位制中的消磁系数。

参 考 文 献

第 一 章

〔1〕 Jacobs, J. A. (ed), 1987, Geomagnetism, Volume 1, Academic Press.

〔2〕 Parkinson, W. D., 1983, Introduction to Geomagnetism, Scottich Academic Press.

〔3〕 扬诺夫斯基，Б. М.，1982，地磁学，地质出版社，（原书1978年出版）。

〔4〕 Почтарев, В. И., 1984, Нормальное магнитное поле Земли, ‹НАУКА›.

〔5〕 IAGA Commission 2 Working Group 4, 1969, IGRF 1965.0, JGR, Vol, 74, 4407—4408.

〔6〕 IAGA Division 1 Study Group on GRF, 1976, IGRF 1975, JGR, Vol. 81, 5163—5164.

〔7〕 Peddie, N. W., 1982, IGRF 1980: A Report by IAGA Division 1 Working Group 1, Geophys. J. R. Astr. Soc., Vol. 68, 265—268.

〔8〕 IAGA, Division 1, Working Group 1, 1986, IGRF Revision, 1985, Geophysics, Vol. 51, No. 4, 1020—1023.

〔9〕 IAGA Division 1 Working Group 1, 1988, IGRF Revision, 1987, Geophysics, Vol. 53, 576—578.

〔10〕 朱文孝、屠万生、刘天佑，1989，重磁资料电算处理与解释方法，中国地质大学出版社。

〔11〕 吴冲龙、刘天佑，1987，PC—1500袖珍计算机常用程序，武汉地质出版社。

〔12〕 Langel, R. A., et al., 1985, The Near-Earth Magnetic Field at 1980 Determined from MAGSAT Data, JGR, Vol. 90, No. B3, 2495—2509.

〔13〕 Alldredge, L. R., 1965, Analysis of Long Magnetic Profiles, J. Geomagn. and Geoelectr., Vol. 17, No. 3—4, 173—185.

〔14〕 Langel, R. A., et al., 1982, A Geomagnetic Field Spectrum, Geophys. Res. Lett., Vol. 9, 250—253.

〔15〕 Haines, G. V., 1990, Regional Magnetic Field Modelling: A Review, J. Geomag. and Geoelectr., Vol. 42, 1001—1018.

〔16〕 安振昌等，1991，1950—1980年中国地区主磁场模型的建立及分析，地球物理学报，Vol. 34, No. 5, 585—593。

〔17〕 Alldredge, L. R., 1981, Rectangular Harmonic Analysis Applied to the Geomagnetic Field, JGR, Vol. 86, No. B4, 3021—3026.

〔18〕 Haines, G. V., 1985, Spherical Cap Harmonic Analysis, JGR, Vol. 90, No. B3, 2583—2591.

〔19〕 De Santis, A. et al., 1989, A Spheric Cap Model of the Crustal Magnetic Anomaly Field in Europe Observed by MAGSAT, in Geomagnetism and Palomagnetism, edited by F. J. Lowes et al., 1—17, Kluwer, Dordrecht.

〔20〕 De Santis, A., 1991, Translated Origin Spherical Cap Harmonic Analysis, Geophys. J. Int., Vol. 106, No. 1, 253—263.

〔21〕 Zhu Wenxiao and Zhang Changda, 1992, Spherical Cap Model of Chinese Geomagnetic Reference Field, Earth Sciences-Journal of China University of Geosciences, Vol. 17, Supplement.

〔22〕 安振昌等，1991，中国及邻近地区卫星磁异常的球冠谐和分析，中国地球物理学会年刊（1991），40，地震出版社。

〔23〕 Haines, G. V., 1988, Computer Programs for Spherical Cap Harmonic Analysis of Potential and General Fields, Computers and Geosciences, Vol. 14, 413—447.

〔24〕 T. Rikitake(ed.), 1987, Applied Mathematics for Earth Scientists, TERRAPUB.

〔25〕 Hobbs, B. A. et al., 1979, The Effect of a Simple Model of the Pacific Ocean on Sq Variations, in ‹Tectonomagnetics and Local Geomagnetic Field Variation›, edited by M. Fuller et al., Center for

Academic Publications.
〔26〕 傅承义等著，1985，地球物理学基础，科学出版社。
〔27〕 杜兴信等，1987，陕西地区地磁湾扰异常，地球物理学报，Vol, 30, No. 1, 52—60。
〔28〕 祁贵仲等，1981，渤海地区地磁短周期变化异常，中国科学，1981年第7期，869—879。
〔29〕 侯作中，1986，云南省的地磁测深，载于《中国地壳上地幔地球物理探测成果》，315—318，地震出版社。
〔30〕 Meissner, R., 1986, The Continental Crust: a Geophysical Approach, Academic Press.
〔31〕 Hahn, A. G. and Roeser, H. A., 1989, The Magnetisation of the Lower Continental Crust, *in* «Properties and Processes of Earth's Lower Crust»(Eds., Mereu, R. F. et al.)AGU.
〔32〕 Wasilewski, P. J., 1987, Magnetic Properties of Mantle Xenoliths and the Magnetic Character of the Crust-Mantle Boundary, in «Mantle Xenoliths»(Ed. Nixon, P. H.) John Wiley and Son Ltd.
〔33〕 刘庆生、张昌达：1990，我国部分地区上地幔捕虏体磁性研究的初步结果，地球科学，Vol. 15, No. 6, 666, 674, 680。
〔34〕 刘庆生、路凤香：1991，吉林辉南大龙湾超镁铁质包体的磁性岩石学研究，科学通报，Vol. 36, No. 15, 1165—1168。
〔35〕 Arkani-Hamed, J. and D. W. Strangway, 1986, Effective Magnetic Susceptibility of the Oceanic Upper Mantle Derived from MAGSAT Data, Geophys. Res. Letters, Vol. 13, 999—1002.
〔36〕 Arkani-Hamed, J. 1988, Remanent Magnetization of the Oceanic Upper Mantle, Geophys. Res. Letters, Vol. 15, 48—51.
〔37〕 Stacey, F. D., et al., 1974, the Physical Principles of Rock Magnetism, Elsevier Scientific Publishing Company.
〔38〕 Познанская, Н. Ф., 1984, Магнитные параметры вещества глубинных зон земной коры, Киев Наукова Думка.
〔39〕 Дортман, Н. Б., 1984, Физические свойства горных пород и полезных ископаемых, «Недра», Москва.
〔40〕 Carmichael, R. S. (ed.), 1982, CRC Hand Book of Physical Properties of Rocks, Vol. 2.

第 二 章

〔1〕 Н. Н. 波罗夫柯，金属矿床普查中物探工作的最优化，1985，地质出版社。
〔2〕 程方道，Spectrum Estimate of Stochastic Noise and its Application in Magnetic and Gravity Data Processing，中南矿冶学院报，1986，No. 4, 10—16。
〔3〕 Страхов, В. Н., О сглаживании наблюденных значений потенциальных полей, I, ИЗВ. АН СССР, Сер. Геофиз., No. 10, 1479—1493.
〔4〕 A. 帕普里斯，1981，《信号分析》，科学出版社，335。
〔5〕 Hansen, R. O. and Powlowski, R. S., 1989, Reduction to the Pole at Low Latitude by Wiener Filtering, Geophysics, Vol. 54, No. 12, 1607—1613.
〔6〕 程方道、黄国祥，1987，《重磁位场波谱理论及其应用》，23页，中南工业大学出版社。
〔7〕 南京大学数学系计算数学专业编，1979，《概率统计基础和概率统计方法》，29～30，科学出版社。
〔8〕 冯锐等，1989，华北地区重力场与沉积层构造，地球物理学报，Vol. 32, No. 4, 385—397。
〔9〕 Spector, A., 1985, Comments and Errata to Classic Papers, Geophysics, Vol. 50, No. 11, P. 2278.
〔10〕 Abdelrahman, E. M., et al, 1985, ON the Least-Squares Residual Anomaly Determination, Geophysics, Vol. 50, No. 3, 473—480.
〔11〕 熊光楚，1981，位变滤波器，物探与化探，Vol. 5, No. 4, 205—213。
〔12〕 程方道等，1987，划分重力区域场与局部场的研究，物探化探计算技术，Vol. 9, No. 1, 1—9。
〔13〕 文百红、程方道，1990，用于划分磁异常的新方法——插值切割法，中南矿冶学院学报 Vol. 21, No. 3, 229—235。
〔14〕 费业豪，1987，《误差理论与数据处理》，机械工业出版社，60页。

〔15〕 蔡家雄，1989，《磁异常三角形解释系》，地质出版社。
〔16〕 文百红，1991，插值切割法在消除磁异常干扰中的应用，地质与勘探，No.2，40—45。

第 三 章

〔1〕 N. L. Mohan, 1980, Interpretation of some Two-dimensional Magnetic Bodies using Hilbert Transforms, Geophysics V. 45, No. 3.
〔2〕 Misac. N. Nabighian, 1984, Toward a Three-dimensional Automatic Interpretation of Potential Field Data Via Generalized Hilbert Transforms: Fundamental Relations, Geophysics, Vol. 49, No, 6.
〔3〕 G. Rama Dass, S. M. Varaprasada Rao, N. L. Mohan, 1988，希尔伯特变换在分辨磁异常信号中的应用——一种新的数据处理技术，物化探译丛，No.1。
〔4〕 管志宁、阳明，1987，希尔伯特变换及其新应用，勘探地球物理西安（87）国际讨论会论文（摘要）集。
〔5〕 Chao C. Ku and John A. Sharp, 1983, Werner Deconvolution for Automated Magnetic Interpretation and its Refinement using Marquardt's inverse modeling, Geophysics, Vol. 48, No. 6.
〔6〕 Werner, S., 1953, Interpretation of Magnetic Anomalies at Sheet-like Bodies: Sveriges Geol. Undersok., Ser. C, Arsbok. 43(1949), No. 6.
〔7〕 Pierre B. Keating and Mark Pilkington 1990, An Automated Method for the Interpretation of Magnetic Vertical Gradient Anomalies, Geophysics, Vol. 55, No. 3.
〔8〕 陈国新、管志宁，1989，二度体磁异常快速反演方法，物探化探计算技术，No.4。
〔9〕 Bambrick, J., Letros, s., and Geissman, J., 1982, Apparent Magnetic Susceptibility (SUSC) Mapping in Theory and Practice (abstr.): 52nd Annu. Int. SEG Meet., Oct, 17—21, Dallas, Tex..
〔10〕 吴宜志、刘光海、薛光琦，1987，富里叶变换和位场谱分析方法及其应用，测绘出版社。
〔11〕 穆石敏、申宁华、孙运生著，1990，区域地球物理数据处理方法及其应用，吉林科学技术出版社。
〔12〕 管志宁、阳明、安玉林，1990，视磁化强度填图方法及应用，物探与化探 No.3。
〔13〕 管志宁、安玉林著，1991，区域磁异常定量解释，地质出版社。
〔14〕 Joao B. C. Silva, Gerald W. Hohman, 1984, Airborne Magnetic Susceptibility Mapping, Exploration Geophysics, 15, 1—13.
〔15〕 成都地质学院、武汉地质学院、河北地质学院、合肥工业大学，1980，应用地球物理学——磁法教程，地质出版社。
〔16〕 William Menke,（王明光，楼海译），1989，地球物理数据分析——离散反演理论，地质出版社。
〔17〕 刘福田，1987，地球物理学中的反演问题，中国科学院地球物理研究所。
〔18〕 杨文采，1985，地球物理反演方法，北京大学地球物理研究生教材。
〔19〕 王华啸，1985，广义线性反演理论及其在磁异常解释中的应用，长春地质学院研究生论文集。
〔20〕 D.欧登伯格，三家映，1981，在地球物理学中的线性反演理论，武汉地质学院学报，No.3。
〔21〕 申宁华，1990，界面位场异常的快速正反演计算及其应用，物化探计算技术，Vol.12，No.1。
〔22〕 R. L. Parker, 1975, The Theory of Ideal Bodies for Gravity Interpretation, Geophys. J. R. Astr Soc..
〔23〕 P. C. Sabatica, 1977, Positivity Constraints in Linear Inverse Problems-1, General Theory, Geophys. J. R. Astr. Soc..
〔24〕 J. W. D. Leao & Joao B. C. Silva, 1989, Discrete Linear Transformations of Potential Field Data, Geophysics, Vol. 53, No. 4.
〔25〕 Joao B. C. Silva, 1989, Tranformation of Nonlinear Problems into Linear one's Applied to the Magnetic field of a 2-D Prism, Geophysics, Vol. 53, No. 1.
〔26〕 F. Thorarinsson et al, 1988, Directional Spectra Analysis and Filtering of Geophysical Map, Geophysics, Vol. 53, No. 12.
〔27〕 Sharon K. R. & John F. F., 1989, Regularized Two-dimensional Fourier Gravity Inversion Method

with Application to the Silent Canyon Caldera, Nevada, Geophysics, Vol. 54, No. 1.

〔28〕 R. R. B. Von Frese et al, 1988, Improved Inversion of Geopotential Field Anomalies for Lithosphere Investigation, Geophysics, Vol. 53, No. 3.

〔29〕 Jianghai Xia, 1990, Inversion of Potential Field Data by Iterative Forward Modeling in the Wave Number Domain, Abstract from 60th SEG, pp. 635- 658.

〔30〕 Jianghai Xia, 1991, A Fast and Accurate Approach; Correction of Topographic Distortions in Potential Field Data, Abstract from 61th SEG, pp. 626—629.

〔31〕 Raiche A., 1991, Pattern Recognition Approach to Geophysical Inversion Using Neural Nets, Geophys. J. Int. 105, 629—648.

〔32〕 Pearson W. C. et al, 1990, Aeromagnetic Structural Interpretation Using Neural Networks; A Case Study from the Northern Denver-Julesberg Basin, 60th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 587—590.

〔33〕 Taylor C. L. et al., 1990, Inversion of Gravity Gradiometry Data Using Neural Network, 60th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 591—593.

〔34〕 Poulton M. M. et al., 1992, Neural Network Pattern Recongition of Subsurface EM Images, J. Appl. Geophys. 29—38.

〔35〕 Carr J. R. and Benzer W. B., 1991, On the Practice of Estimating Fractal Dimension, Mathematical Geology, Vol. 23, No. 7, 945—958.

〔36〕 Mercerou T. et al., 1991, Application of Cantor's Method for Fractal Analysis of Fractures in the Toyoha Mine, Hokkaido, Japan, Journal of Geophysical Research, V. 96, B10, 16641—16650.

〔37〕 Gregotski M. E. et al., 1991, Fractal Stochastic Modeling of Aeromagnetic Data, Geophysics, 56, 1706—1715.

〔38〕 Spector A. and Grant F. S., 1970, Statistical Models for Interpreting Aeromagnetic Data, Geophysics, 35, 293—302.

〔39〕 Naidu P. S., 1970, Statistical Structure of Aeromagnetic Field, Geophysics, 35, 279—292.

〔40〕 Yunsheng S. et al., 1985, Geological Interpretation of a Highresolution Aeromagnetic Survey in the Amos-Barraute Area of Quebec, in Hinze W. J. Ed. "The Utility of Regional Gravity and Magnetic Anomaly Maps", Soc. Expl. Geophysists, 413—425.

〔41〕 Thorarinsson F. et al., 1990, Bouguer Density Determination by Fractal Analysis, Geophysics, 55, 932—935.

第 四 章

〔1〕 贾绍英、孙世伟、杨辟元、李岩编著，1986，岩石磁化率各向异性，地质出版社。

〔2〕 Ш. С. 列维亚金，В. В. 勃罗多沃伊，Э. А. 列维亚金娜著，1991，高精度磁法勘探，地质出版社。

〔3〕 中华人民共和国地质矿产部，地面高精度磁测技术规定，1988，《中华人民共和国专业标准 DZ56—87》。

〔4〕 В. Е. Некетский, Ю. С. Глебовский, 1980, Магниторазведка Справочник Геофизика, Москва, НЕДРА.

〔5〕 谭承泽，郭绍雍等，1984，磁法勘探教程，地质出版社。

〔6〕 陈善等，1986，重力勘探，地质出版社。

〔7〕 申宁华，管志宁等，1985，磁法勘探问题，地质出版社。

〔8〕 申宁华，徐宝慈等，1989，辽东湾海域磁测资料处理及解释，渤海石油公司。

〔9〕 张少泉，1988，地球物理学概论，地震出版社。

〔10〕 申宁华，1990，对中国大陆区域地磁异常提取的认识，长春地质学院学报，No. 4。

〔11〕 申宁华，张贵宾等，1989，某地区重磁异常联合反演研究报告，地矿部石油物探研究所。

〔12〕 冯锐，1986，三维物性分布的位场计算，地球物理学报，No. 2。

〔13〕 申宁华，1992，国外磁法勘探科技进展概况，物化探译丛，No. 3。

〔14〕 张贵宾等，1989，某含油气构造区重磁异常解释，勘探地球物理北京（89）国际讨论会论文集。
〔15〕〔美〕L. L. 内特尔顿，1987，石油勘探中的重力法和磁法（苏盛甫、高明远译），石油工业出版社。
〔16〕 Mikhal' tsev, A. V., et al., 1984, Direct Detection of Oil and Gas Reservoirs by Application of Geophysical and Geochemical Method, in《Proceedings of the 27th International Geological Congress》, Geophysics, Vol. 8, 303—342.
〔17〕 Tompkins, R., 1990, Direct Location Technologies: A Unified Theory, Oil and Gas Journal, Vol. 88, No. 39, 126—134.
〔18〕 Reynolds, R. L., et al., 1991, Sources of Aeromagnetic Anomalies over Oil Field, Geophysics, Vol. 56, No. 5, 606—617.
〔19〕 Foote, R. S., 1984, Significance of Near-surface Magnetic Anomalies, in《Unconventional Methods in Exploration for Petroleum and Natural Gas Ⅲ》(Davidson, M. J., et al. eds.), 12—24.
〔20〕 Saunders, D. F., Terry, S. A., 1985, Onshore Exploration Using the New Geochemistry and Geomorphology, Oil and Gas Journal, Vol. 16, 126—130.
〔21〕 Saunders, D. F. et al., Alabama Ferry Field-2, Oil and Gas Journal, Vol. 87, No. 45, 53—55, Alabama Ferry Field-2, *ibid*, Vol. 87, No. 46, 108—110.
〔22〕 李卢玲、张用夏、周伏洪，1987，柴达木盆地航磁直接找气的地质效果，石油地球物理勘探，Vol. 22, No. 2, 163—168。
〔23〕 Saunders, D. F., et al., 1991, Soil MS and Soil GHC Analysis, AAPG Bulletin, Vol. 75, No. 3, 389—408.
〔24〕 Machel, H. G. et al., 1991, Anomalous Magnetization, AAPG Bulletin, Vol. 75, No. 12, 1864—1876.
〔25〕 刘庆生、张昌达等，1991，自生磁铁矿与烃的富集及运移之间相互关系的研究，地球科学，Vol. 16, No. 5, 565—571。
〔26〕 刘庆生，1991，磁法直接找油气研究的现状和进展，地质科技情报，Vol. 10, No. 4, 89—95。
〔27〕 申宁华等，1988，中国陆缘区及相邻海域重磁异常特征及其与大地构造的关系，世界地质（第三届全国构造学会议专辑）。
〔28〕〔丹〕R. V. 莎玛，1983，地质研究中的地球物理方法，（王恕铭，丁绪荣等译），地质出版社。
〔29〕〔美〕Frank Press, Raymond Siever, 1982, Earth, W. H. Freeman and Company, New York.
〔30〕 W. J. Hinze et al., 1991, Mean Magnetic Contrasts between Oceans and Continents, Technophysics, Vol. 192, No. 1—2.
〔31〕 H. G. Machel & D. A. Burtion, 1991, Chemical and Microbial Processes Causing anomalous Magnetization in Environments Affected by Hydrocarbon Seepage, Geophysics, Vol. 56, No. 5.
〔32〕 Joe C. Ku et al., 1990, Integrated Basement Interpretation of Magnetics with Subsurface and Seismic Data, 60th SEG.
〔33〕 谭承泽、郭绍雍等，1984，磁法勘探教程，4页，地质出版社。
〔34〕 薛琴访，场论，1965，205页，中国工业出版社。
〔35〕 P. 劳兰，D. R. 考森〔美〕，1981，电磁场与电磁波，273页，人民教育出版社。
〔36〕 S. H. 沃德〔美〕，1978，地球物理用电磁理论，76页，地质出版社。
〔37〕 袁方，1990，物理量 单位及公式——单位制变换指南，地质出版社。
〔38〕 H. E. 塔姆著〔苏〕，1953，电学原理（下册），323页，商务印书馆。
〔39〕 赵凯华、陈熙谋，1978，电磁学（下册），95页，人民教育出版社。