目　录

绪　论 …… 1
第一章　地球的磁场 …… 3
§1.1 地磁要素及其分布特征 …… 3
1.1.1 地磁要素 …… 3
1.1.2 地磁图 …… 4
§1.2 基本磁场及磁异常 …… 9
1.2.1 地磁场的解析表示 …… 9
1.2.2 地磁场的构成及起源 …… 15
1.2.3 正常磁场和磁异常 …… 16
§1.3 变化磁场 …… 17
1.3.1 地磁场的长期变化 …… 17
1.3.2 地磁场的短期变化 …… 18
〔附录〕磁学单位的 CGSM 制与 SI 制对照表 …… 21
第二章　岩石的磁性 …… 22
§2.1 物质磁性及其表示的物理量 …… 22
2.1.1 物质的磁性 …… 22
2.1.2 表示岩、矿石磁性的物理量 …… 27
§2.2 岩石的磁性 …… 27
2.2.1 矿物的磁性 …… 27
2.2.2 各类岩石磁性的一般规律 …… 28
§2.3 岩石的剩余磁性 …… 30
2.3.1 岩石剩余磁性的类型 …… 30
2.3.2 岩石剩余磁性的成因 …… 31
2.3.3 岩石的反转磁化 …… 32
2.3.4 研究岩石剩余磁性的意义 …… 33
§2.4 影响岩、矿石磁性的因素 …… 34
2.4.1 岩石磁性与磁性矿物的关系 …… 34
2.4.2 岩石磁性与磁化场和温度的关系 …… 36
2.4.3 影响岩、矿石磁性的其它因素 …… 37
§2.5 物体磁化的消磁作用 …… 39
2.5.1 消磁作用和视磁化率 …… 39
2.5.2 几种规则形体的消磁系数 …… 40
2.5.3 消磁作用对J_i方向的影响 …… 45
2.5.4 消磁与剩磁的关系 …… 46
第三章　磁力仪 …… 47
§3.1 概述 …… 47

3.1.1 磁力仪的绝对测量和相对测量……47
3.1.2 对磁力仪性能的要求……48
§3.2 机械式磁力仪 ……48
3.2.1 悬丝式垂直磁力仪……48
3.2.2 悬丝式水平磁力仪……56
3.2.3 刃口式垂直磁力仪……58
§3.3 磁通门磁力仪 ……59
3.3.1 坡莫合金的磁化特点及磁灵敏元件的磁化现象……59
3.3.2 偶次谐波法观测磁场的原理……60
3.3.3 地面磁通门磁力仪的工作原理……62
3.3.4 航空磁通门磁力仪……63
§3.4 质子旋进式磁力仪……64
3.4.1 质子旋进现象……64
3.4.2 地面质子旋进磁力仪……65
3.4.3 海空质子旋进磁力仪……66
§3.5 光泵磁力仪和超导磁力仪 ……67
3.5.1 塞曼分裂、能级跃迁和光泵作用……67
3.5.2 跟踪式光泵磁力仪原理……69
3.5.3 自激式光泵磁力仪原理……70
*3.5.4 超导磁力仪简介……70
§3.6 测定岩(矿)石磁参数的磁力仪 ……72
3.6.1 无定向磁力仪……72
3.6.2 旋转磁力仪……73
3.6.3 磁化率仪……74
第四章 磁测工作方法 ……76
§4.1 测网、比例尺及磁测精度 ……76
4.1.1 测网和磁测比例尺……76
4.1.2 磁测精度……78
§4.2 地面磁测 ……81
4.2.1 野外观测……81
4.2.2 磁测数据的整理计算……82
4.2.3 磁异常图的绘制……85
§4.3 航空磁测工作方法和海洋磁测简介 ……87
4.3.1 比例尺、飞行高度和磁测精度……87
4.3.2 磁补偿和偏向飞行……87
4.3.3 测量飞行……88
4.3.4 航空磁测资料的整理和成图……88
4.3.5 航磁异常的地面查证……88
4.3.6 海洋磁测简介……89
§4.4 岩(矿)石磁性的测定和磁性参数的统计 ……89
4.4.1 岩(矿)石标本的采集……89
4.4.2 磁秤法测定标本的磁性……90

4.4.3 磁性参数的统计整理和图示……93
第五章 磁性体的磁场 ……97
§5.1 计算磁性体磁场的意义和条件 ……97
§5.2 计算磁性体磁场的基本公式 ……98
5.2.1 磁性体的磁位和磁场强度的积分公式……98
5.2.2 重磁位场的泊松公式…… 100
5.2.3 磁场各分量间的互算关系式…… 101
5.2.4 磁化强度矢量 J 与 J_s …… 103
§5.3 球体的磁场 …… 104
5.3.1 球体的磁场表达式…… 104
5.3.2 球体磁场表达式的分析…… 106
5.3.3 球体磁场特征的分析…… 108
§5.4 板状体的磁场 …… 112
5.4.1 磁荷面的磁场表达式…… 112
5.4.2 走向无限、延深有限厚板状体的磁场表达式…… 114
5.4.3 走向无限、延深无限厚板状体的磁场…… 116
5.4.4 走向无限、延深无限薄板状体的磁场…… 118
5.4.5 水平薄板状体的磁场…… 121
§5.5 水平圆柱体的磁场…… 122
5.5.1 无限长水平圆柱体的磁场…… 122
5.5.2 有限长水平圆柱体的磁场…… 124
§5.6 其它形状磁性体的磁场 …… 127
5.6.1 台阶的磁场…… 127
5.6.2 背斜的磁场…… 129
5.6.3 长方体的磁场…… 130
§5.7 二度体磁异常的通式 …… 132
5.7.1 任意磁化与沿坐标轴向磁化的磁场关系式…… 132
5.7.2 任意磁化与顺层磁化的磁场关系式…… 135
5.7.3 二度体磁异常的通式及其分析…… 136
§5.8 复杂条件下磁性体磁场的计算 …… 139
5.8.1 任意截面二度体磁场的计算…… 139
5.8.2 任意三度体磁场的计算方法…… 144
5.8.3 非均匀磁化磁性体磁场的计算…… 145
§5.9 磁性体与其磁场对应关系的主要特点 …… 146
5.9.1 磁性体与其磁场平面分布的对应关系…… 146
5.9.2 磁性体与其磁场的剖面对应关系…… 146
5.9.3 磁性体与其磁场空间等值线的对应关系…… 148
第六章 磁性体磁场的反演方法 …… 149
§6.1 概述…… 149
6.1.1 磁性体磁场反演的目的和方法…… 149
6.1.2 磁性体磁场反演的多解性…… 149

§6.2 磁性体形状的判定 …… 150
6.2.1 异常特征的分析法 …… 150
6.2.2 根据T_a异常特征判断倾向 …… 150
6.2.3 Z_a-H_a参量图法 …… 152
6.2.4 利用不同高度上场值的方法 …… 156
§6.3 规则形体磁场的反演计算方法 …… 160
6.3.1 特征点法 …… 160
6.3.2 切线法 …… 170
6.3.3 积分法 …… 173
6.3.4 矢量法 …… 177
*6.3.5 起伏地形条件下磁异常反演计算方法 …… 182
§6.4 不规则形体磁场的反演计算方法 …… 186
6.4.1 选择法的概述 …… 186
6.4.2 量板法 …… 187
6.4.3 剩余异常的计算和解释 …… 191
6.4.4 最优化选择法 …… 192
§6.5 磁异常的频谱及其解释 …… 194
6.5.1 磁异常频谱换算的基本原理 …… 195
6.5.2 几种规则形状磁性体异常的频谱 …… 197
6.5.3 频谱曲线的定性分析 …… 202
6.5.4 磁异常频谱的定量解释 …… 207
第七章 磁异常的处理及转换 …… 212
§7.1 磁异常处理和转换的目的及内容 …… 212
7.1.1 处理和转换的目的 …… 212
7.1.2 处理和转换的内容 …… 213
§7.2 磁异常的圆滑和插值 …… 213
7.2.1 磁异常的最小二乘圆滑 …… 213
7.2.2 磁异常的插值 …… 217
*§7.3 磁异常空间转换的基本理论 …… 218
7.3.1 第一边值问题和泊松积分 …… 218
7.3.2 第二边值问题 …… 222
7.3.3 不适定问题及数学插值模型的建立 …… 223
§7.4 磁异常的空间延拓方法 …… 224
7.4.1 二度异常的向上延拓 …… 224
7.4.2 三度异常的向上延拓 …… 227
7.4.3 二度异常的向下延拓 …… 232
7.4.4 三度异常的向下延拓 …… 234
7.4.5 延拓换算在磁异常解释中的应用 …… 237
§7.5 磁异常各分量间的换算 …… 239
7.5.1 同平面二度异常Z_a与H_{ax}的互算方法 …… 239
7.5.2 同平面三度异常Z_a与H_{ax}的量板互算法 …… 242
7.5.3 Z_a和H_a异常互算的应用 …… 244

7.5.4 三度 ΔT 异常换算成 Z_a、H_{ax} …… 245
§7.6 磁异常导数的换算 …… 246
7.6.1 磁异常水平和垂直导数的物理意义及其计算方法 …… 246
7.6.2 磁异常导数的应用 …… 247
7.6.3 磁异常垂向二阶导数的计算 …… 249
7.6.4 磁异常垂向二阶导数的应用 …… 251
§7.7 三度异常转换为二度异常的方法 …… 253
7.7.1 积分平均法 …… 253
7.7.2 叠加法 …… 255
§7.8 磁异常观测面的曲化平方法 …… 256
7.8.1 磁异常的地形影响及克服途径 …… 256
7.8.2 二度异常的曲化平计算法 …… 257
§7.9 频率域中磁异常的转换及处理 …… 263
7.9.1 磁异常变换中褶积定理的应用 …… 263
7.9.2 磁场的频率域换算 …… 264
7.9.3 几种磁异常变换的频率响应特征 …… 271
7.9.4 磁异常数字滤波综述 …… 271
第八章 磁测资料的地质解释 …… 279
§8.1 磁测资料地质解释的方法和步骤 …… 279
8.1.1 磁测资料地质解释的概念、意义及其与定性和定量解释的关系 …… 279
8.1.2 磁测资料地质解释的内容、方法和步骤 …… 279
§8.2 区域地质测量中磁测资料的地质解释 …… 281
8.2.1 区域地质测量的基本目的和对磁异常解释的基本要求 …… 281
8.2.2 根据磁异常圈定岩体和不同岩性区的依据和方法 …… 282
8.2.3 根据磁异常推断断裂、破碎带以及褶皱等的依据和方法 …… 285
8.2.4 成矿区的圈定与划分 …… 289
§8.3 普查找矿中磁异常的地质解释 …… 290
8.3.1 矿产普查的任务、要求及磁异常解释的任务 …… 290
8.3.2 直接普查磁性铁矿时磁异常的地质解释 …… 291
8.3.3 间接找矿时磁异常的地质解释 …… 295
§8.4 矿产的详查勘探中磁异常的地质解释 …… 297
8.4.1 矿产勘探的目的、任务及其对磁异常地质解释的要求 …… 297
8.4.2 初步勘探中磁异常的地质解释 …… 297
§8.5 应用实例 …… 299
8.5.1 一个重磁异常解释推断实例 …… 299
8.5.2 寻找非铁矿种的实例 …… 304
主要参考文献 …… 307

绪　论

根据岩、矿石的物理性质，通过观测和分析地球物理场，研究地质构造和矿产资源分布等的物理方法，通称为地球物理探矿法（简称物探法），或称之为应用地球物理方法。磁法勘探（简称磁法）是其中的一种方法，它通过分析岩、矿石的磁性差异及磁场特征，研究地质体构造和分布形态，其发展和应用较其它物探方法为早。

两千多年以前，我国就认识并利用了天然磁石的吸铁性和指极性。如《三辅皇图》一书中有："阿房前殿，以木兰为梁，磁石为门，怀刃者止之"。《晋书》马隆传中有："夹道累磁石，贼负铁铠者，不得前"。天然磁石是否有如此大的吸引力固为怀疑，但磁石之吸铁性已被利用则无可置疑。磁偏角的发现也很早，十一世纪前北宋沈括（1031—1095年）的《梦溪笔谈》中指出："方家以磁石磨针锋，则能指南，然常微偏东，不全南也"。北宋宣和元年（1119年），朱彧著《萍洲可谈》中指出："舟师识地理，夜则观星，昼则观日，阴晦观指南针"。北宋时已将指南针用于航海。

我国古代关于磁铁性质的知识传入欧洲后，1600年，英国人威廉·吉尔柏特（William Gilbert），把一个均匀磁化的铁球看作是地球，用一个小磁针在其周围进行试验测量后指出，磁针能指南北，是由于地球本身仿佛象一个稍不规则的大磁铁，地球的北磁极吸引磁针的N极，南磁极吸引磁针的S极；他的结论是：地球的磁场，与一个置于地心并接近于地球旋转轴方向放置的永久磁铁的磁场是等效的。从这时起，人们就开始了对地磁现象的理论研究。

早在十七世纪人们已注意到磁铁矿附近的地磁场特别强。当时用简易的罗盘观测磁场来探寻铁矿。1870年，瑞典的泰朗（Thalen）和铁贝尔（Tiberg）制成了可测定地表不同地点的地磁场相对变化值的磁力仪（亦称万能磁力仪），之后，运用这种磁力仪开展了较广泛的磁法找矿工作。有人认为这是应用地球物理学开始发展的一个重要标志。1915年阿道夫·施密特（Adolf Schmidt）制成刃口式垂直磁秤后，磁法不仅在寻找磁铁矿中，而且在圈定磁性岩体、地质构造以及与油田有关的盐丘中得到应用。本世纪三十年代苏联A. A. 罗加乔夫（A. A. Логачев）试用成功感应式航空磁力仪。磁法在世界范围内得到发展。

我国的磁法工作是本世纪三十年代在云南省开始的，但直到全国解放的前十多年中，磁法工作仅停留在科学试验阶段。全国解放后，我国的物探工作得到了大发展。地面磁测、航空磁测、井中磁测和海洋磁测均已相继展开。磁法的地质效果显著，特别是用于找铁矿是卓有成效的，为举世所公认。

国内外大量实践经验表明，将磁法用于各种比例尺的地质填图，都能得出有意义的地质结论。如小比例尺的磁场图能清晰反映地台区、地槽区、洋底、结晶基底的深拗陷区或其出露区的异常场特征。在中、大比例尺的填图中，大多数情况下，磁异常图能清楚地反映断裂带、巨大岩块的相对隆起与拗陷以及平移断层；根据磁异常往往还可以计算出垂向和水平位移的幅度；能不同程度地显示出与围岩有磁性差异的那些岩石的轮廓；圈定含铁磁性矿物的接触带。在找矿中，除用磁法成功地寻找磁铁矿外，还可利用与磁性矿物的

共生关系，寻找其它金属和非金属矿产。许多情况下，根据大比例尺的磁测结果和精测剖面，可以计算磁性体的埋深和产状要素（厚度、倾角和延深）；在有利条件下，有时能直接指示强磁性矿床的存在。在勘探中，研究剩余磁异常和钻孔中的磁异常，可以发现钻孔附近、钻孔与钻孔之间及其深部的磁性盲矿体。在水文地质和工程地质调查中，磁法主要是配合地质测量进行基岩和断裂的探测工作，条件有利时，应用微磁测可确定岩石的裂隙和节理方向、古河床的流向等。

对岩石天然剩余磁化强度特性的研究，人们发现了地球磁极曾发生倒转和变化；利用这种研究结果，能定量地获得以往时期的地磁极坐标位置与标本形成时期取样产地的古纬度；还可以应用于地层对比及考古年代鉴定等。古地磁的研究，复活了大陆漂移学说，发展了海底扩张和板块构造学说，从而推动了地质学理论的大变革和大发展。

应用地球物理学中的地磁和地磁测量部分包括地磁学、岩石磁学、古地磁学和磁法勘探。本书中只能涉及磁法勘探与前三者有关的一些基本概念。学习本教程的内容，学生应具有地质学、高等数学、物理学和场论等专业基础知识。

随着现代科学技术的发展，磁法勘探的仪器精度越来越高，可将磁力仪装置在人造卫星中进行遥测；可在空中、海上、井中和地面进行磁测。电子计算机在磁测资料处理和解释中的广泛应用，使繁杂的计算自动化，使过去手工无法解决的复杂形体磁场的计算成为可能。仪器精度的提高，方法的改进，解释理论和方法的不断发展和完善，提高了磁测资料地质解释的能力。

为了使磁法勘探在我国四化建设中发挥应有的作用，必须加强我国磁法勘探工作中薄弱环节的研究，并解决实际存在的一些问题。如磁法的理论研究和岩、矿石磁性的实验研究仍较薄弱；如何合理运用磁法，正确对磁测结果进行处理和地质解释等，不断提高磁法的地质效果，充分发挥磁法在综合找矿中的作用，扩大磁法的应用范围，为我国的社会主义建设事业作出更大贡献。

第一章　地球的磁场

地球周围存在着的磁场，称为地磁场。地磁场是一个矢量场。在地球上某一点，悬挂一个磁针，悬丝通过磁针的重心，使磁针可以自由摆动，当磁针静止时，磁针的S极到N极的指向表示这一点地磁场的方向。地磁场的强度和方向依观测点的位置而定，并且随时间变化而发生变化。地磁场的分布范围很广，从地核到磁层边缘到处都有分布。研究地磁场的分布和变化规律，以及地磁场的起源等问题是地磁学研究的范畴。在磁法勘探中，设计测区的磁测工作、对磁测资料的整理和分析解释工作，都必须考虑地磁场的分布特征和变化规律，因而，地磁场的有关知识是磁法勘探的基础。本章的目的是使学生掌握有关地磁场的基本知识。

§1.1　地磁要素及其分布特征

1.1.1　地磁要素

研究地磁场的分布特征，首先要从数量上来表示某一点地磁场强度的大小和方向。设某一点地磁场的总强度为$\boldsymbol{T}$，为了确定$\boldsymbol{T}$的方位，习惯上以该点的地理子午线或地理北极做为参考方向。一般用$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{T}$在直角坐标系的分量和方向角来表示地磁场的大小和方向。

直角坐标系的选取是以观测点为坐标原点，x、y、z三个垂直轴的正向分别指地理北、东和垂直向下，如图1.1.1所示。$\boldsymbol{T}$在z轴上的分量，称为垂直分量，以$\boldsymbol{Z}$表示，指向下为正，指向上为负。$\boldsymbol{T}$在水平面(xoy面)上的分量，称为水平分量，以$\boldsymbol{H}$表示。$\boldsymbol{T}$和水平面之间的夹角表示$\boldsymbol{T}$的倾角，称为磁倾角，以I表示，当$\boldsymbol{T}$向下倾时，I为正，$\boldsymbol{T}$向上倾时，I为负。$\boldsymbol{H}$的指向为磁北方向，磁北方向的延长线，称为磁子午线。观测点的$\boldsymbol{H}$的方位由磁子午线（磁北）和该点地理子午线（地理北）之间的夹角来确定，这个夹角称为磁偏角，以D表示，磁北自地理北向东偏，磁偏角D为正，反之，向西偏时，D为负。水平分量$\boldsymbol{H}$在X和Y轴上的分量，分别称为北向分量和东向分量，并分别以$\boldsymbol{X}$和$\boldsymbol{Y}$表示。$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{H}$、I、D、$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$各量都是表示某点地磁场大小和方向特征的物理量，称为地磁要素。其中$\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{H}$、I都和球面上一点的特征方向——径向方向直接有关，它们是地磁场的固有物理量；D、$\boldsymbol{X}$、$\boldsymbol{Y}$是在所选择的坐标系中用以确定$\boldsymbol{H}$的方位、表示$\boldsymbol{H}$大小的必要的参考量，一般称这三个量为地磁场的相对物理量。综上七个地磁要素之间的关系在式(1.1.1)中列出：

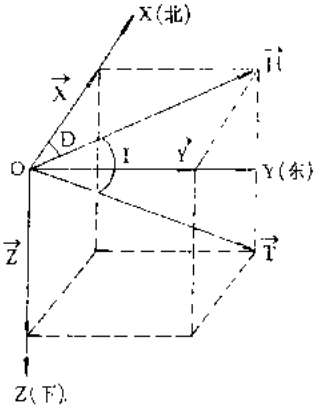


图 1.1.1　地磁要素图

$$\left.\begin{aligned} &H=T\cos I,\ Z=T\sin I=H\mathrm{tg}I,\\ &X=H\cos D,\ Y=H\sin D\\ &X^2+Y^2=H^2,\ X^2+Y^2+Z^2=H^2+Z^2=T^2 \end{aligned}\right\} \qquad (1.1.1)$$

描述地磁场的特征需要已知三个独立要素，如X、Y、Z或H、D、I或T、D、I等。其它要素可按式（1.1.1）求得。

关于地磁场强度的单位，通常以“奥斯特”表示，简写为“奥”，也可以用“O_e”表示。磁场的更小单位用“伽伐”或“γ”表示，它的大小是：1伽伐$=10^{-5}$奥。伽伐是磁法勘探中常用的单位。奥和伽伐属于CGS电磁单位制。目前，国际上统一使用“国际单位制”（简称为“SI”）用“特斯拉”（简称“特”）或以“T”表示磁感应强度(B)的单位。

1特$=10^4$高斯，或　1高斯$=10^{-4}$特。

1纳特(nT)$=10^{-9}$特(T)$=10^{-5}$高斯$=1$伽伐。

高斯和奥斯特分别用以表示介质中的磁感应强度和磁化场强度的单位，同属于CGS电磁单位制，二者有相同量纲，并且在真空、空气和水中的磁感应强度和磁化场强度的数值相等。因此，在表示空气或水中磁场的单位上，高斯和奥斯特可以通用。

1.1.2 地磁图

为了表示地磁场的地理分布特征，可以根据地磁测量的资料，将所测得的地磁要素值按测点的经纬度标在地图上，把数据相同的点连成光滑的曲线，就编绘成了地磁要素的

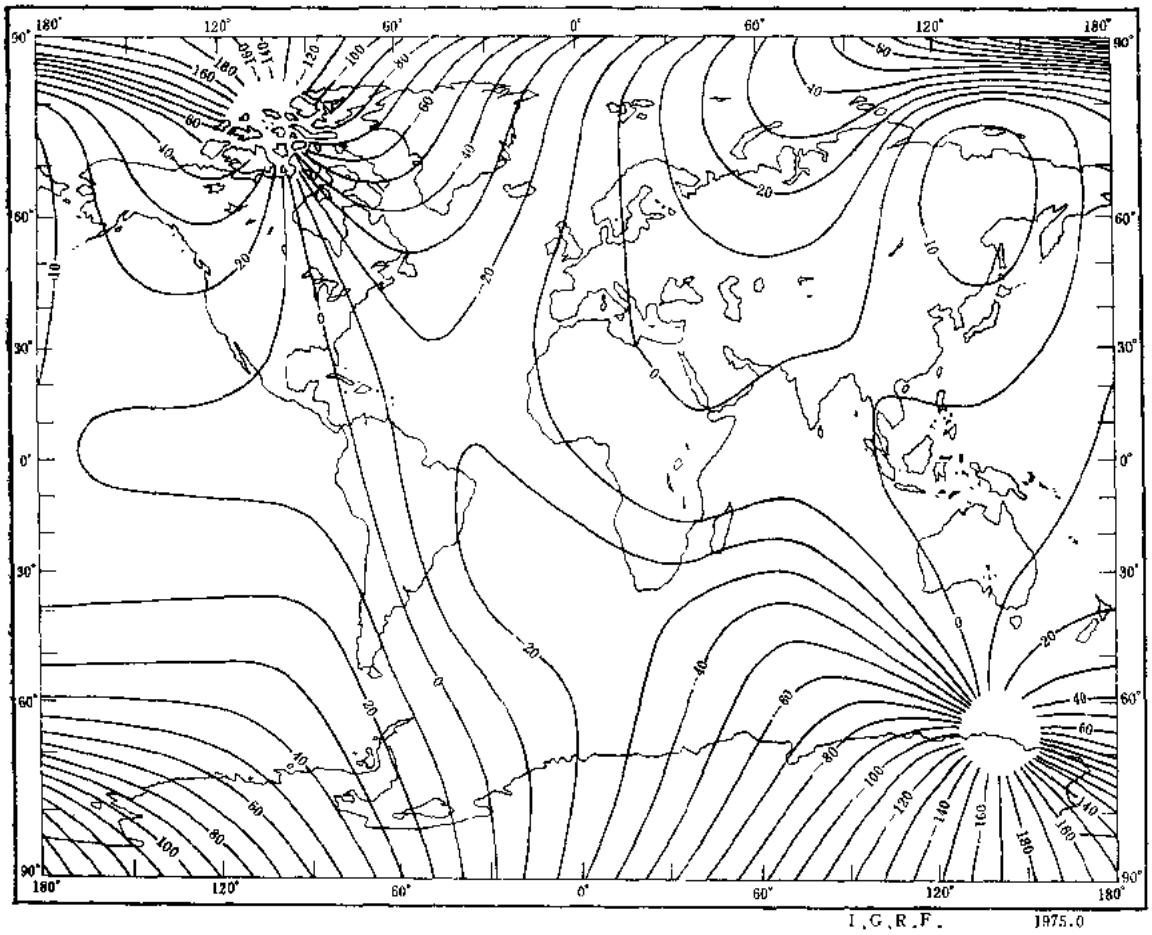


图 1.1.2　等偏线图

（单位：度）

等值线图，这种图称为地磁图。因此，可以按要素D、I、H、Z、T、X、Y分别绘制成等偏线图、等倾线图、等水平强度图、等垂直强度图、等总强度图、等北向分量图和等东向分量图。通常编制各分量的世界地磁图，表示地磁场在全球范围的分布，或编制本国的地磁图。图1.1.2至1.1.5所示为D、I、H、Z的世界地磁图。

因为地磁场随时间发生慢缓变化，各地的地磁测量都是在不同年代和日期进行的，而地磁图应表示地磁场在同一时刻的地理分布，所以要把测量的数据统一归化到某一共同时刻的要素值，这种手续称为地磁资料的通化。共同时刻，一般采用一年的中期，即七月一日零时零分。世界地磁图通常每五年或十年编制一次。各国家也编制本国的地磁图，我国编制的中国地磁图自1950年以来，每十年编制一次。

编制地磁图的方法，一般采用图解法或球谐分析法，图解法方法简单，在已标明要素值的地图上，用直线把等值点依次连接起来，在地磁资料精度范围内把折线进行光滑。球谐分析法可利用全球范围获得的各类型的地磁资料（取自陆地、海洋、航空以及卫星的资料），用选代法建立起表示地磁场在整个地球上分布的球谐表达式，由于场源未知，可称之为地磁场球谐模式表达式。根据这种模式求得的球谐系数，计算各地地磁要素值，编制世界地磁图或某一地区的地磁图。

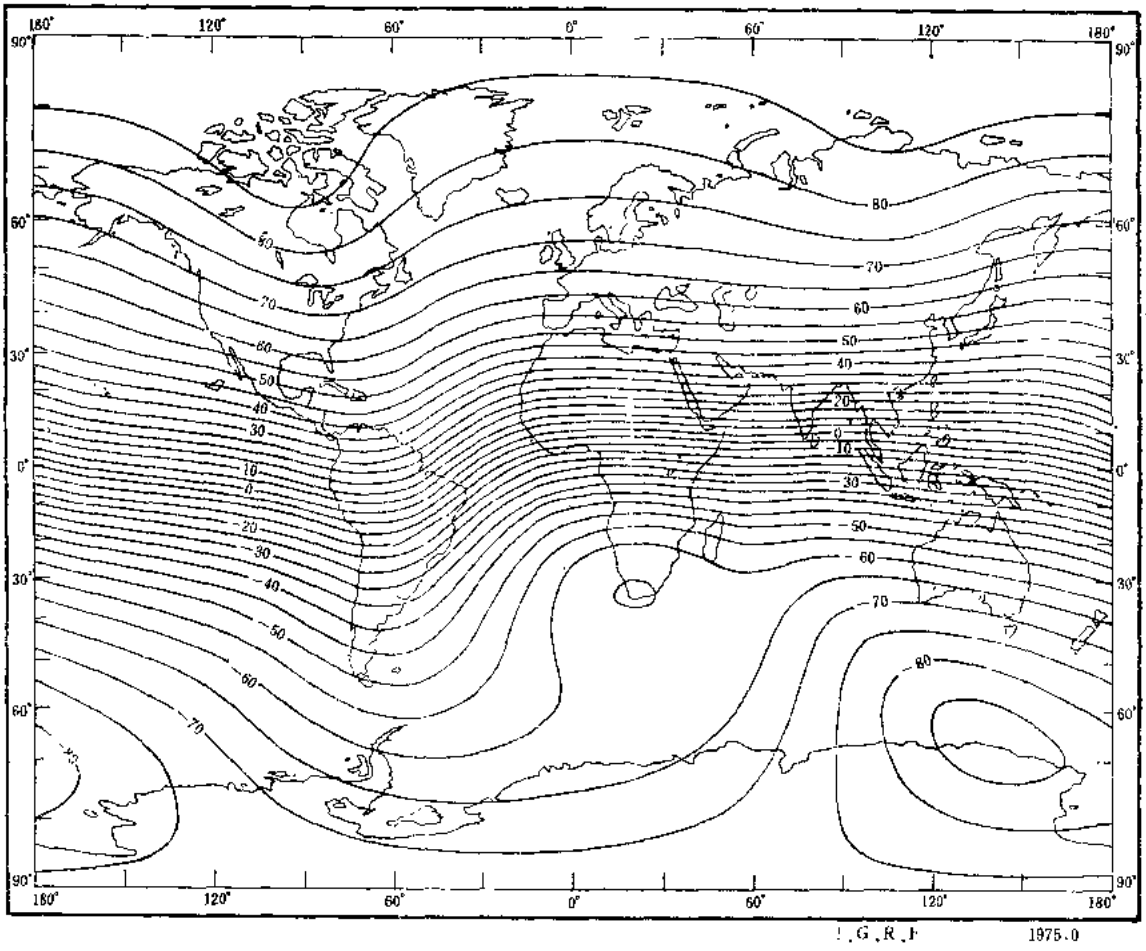


图 1.1.3 等倾线图

（单位：度）

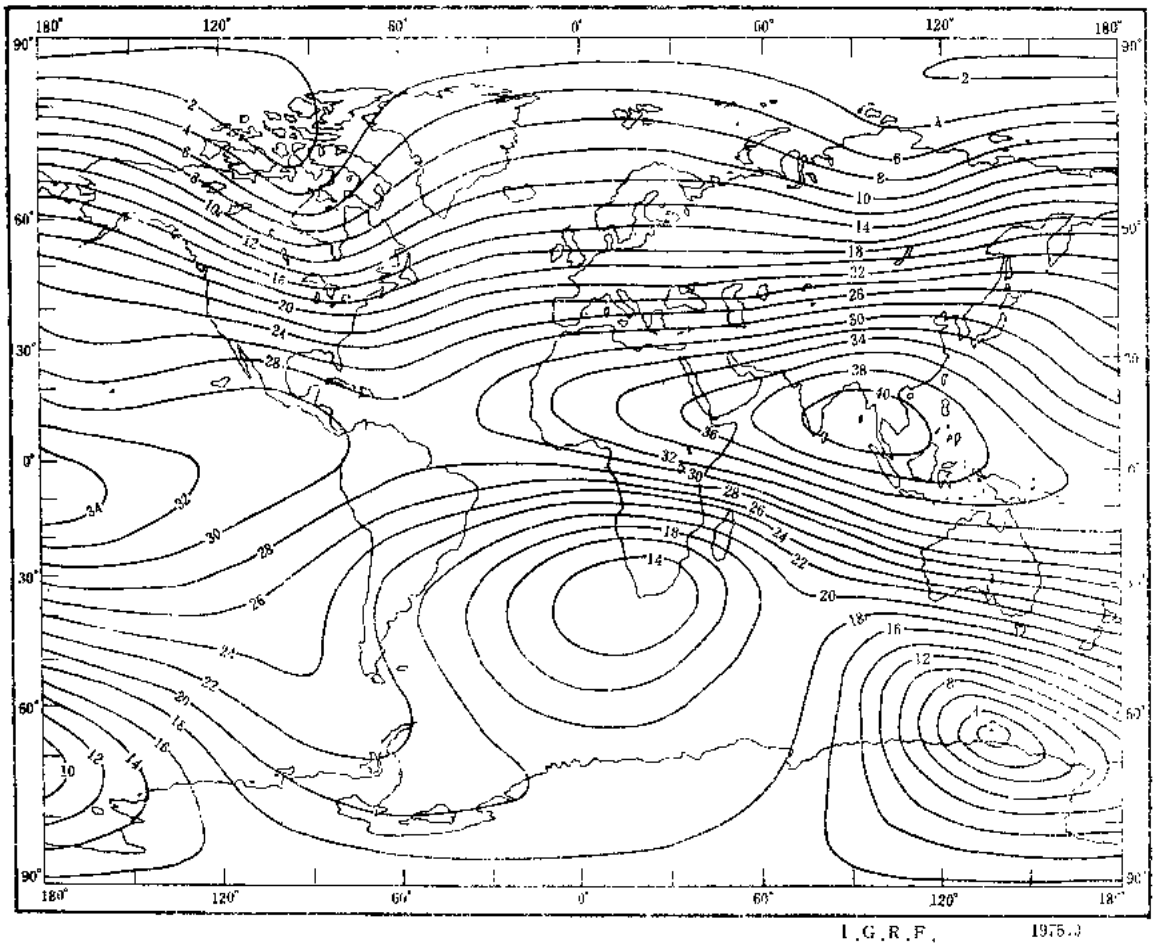


图 1.1.4 等水平强度图
(单位：10^{-2}奥)

根据各地的地磁要素随时间变化的观测资料，可以求出相应要素在各地的年变化平均值，称为地磁要素的年变率。依照地磁图的编图方法，可以编制相应年代的要素年变率等值线图，如图1.1.6所示。通过等年变率图可以了解各地磁要素在地表地理位置上的增减速速和增减趋势。这类图一般可以适用五年，与地磁图合用，可求得五年中某一年代的地磁要素值。

地磁图的比例尺愈大，图的精度愈高。两条等值线间的最小间距一般应为地磁资料精度的10倍。

1. 地磁场地理分布的一般特征

世界地磁图（图1.1.2至1.1.5）基本上反映来自地球核部场源各地磁要素的地理分布。以下列举其分布特征：

从等倾线图可见，等倾线大致和纬度线平行分布。零倾线（$I=0°$）在地理赤道附近，称为磁赤道。在磁赤道以北，磁针的N极向下倾，相应的倾角为正（$I>0°$）；在磁赤道以南，磁针的N极上仰，倾角为负（$I<0°$）；磁倾角随纬度增高而增大，在北半球高纬度区内，出现有一个$I=+90°$的地点，称为北磁极；同样在南半球高纬度地区出现$I=-90°$的地点，称为南磁极。

等偏线在南北半球两个高纬度区分别汇聚在南、北两磁极，在这两点上磁北的方向

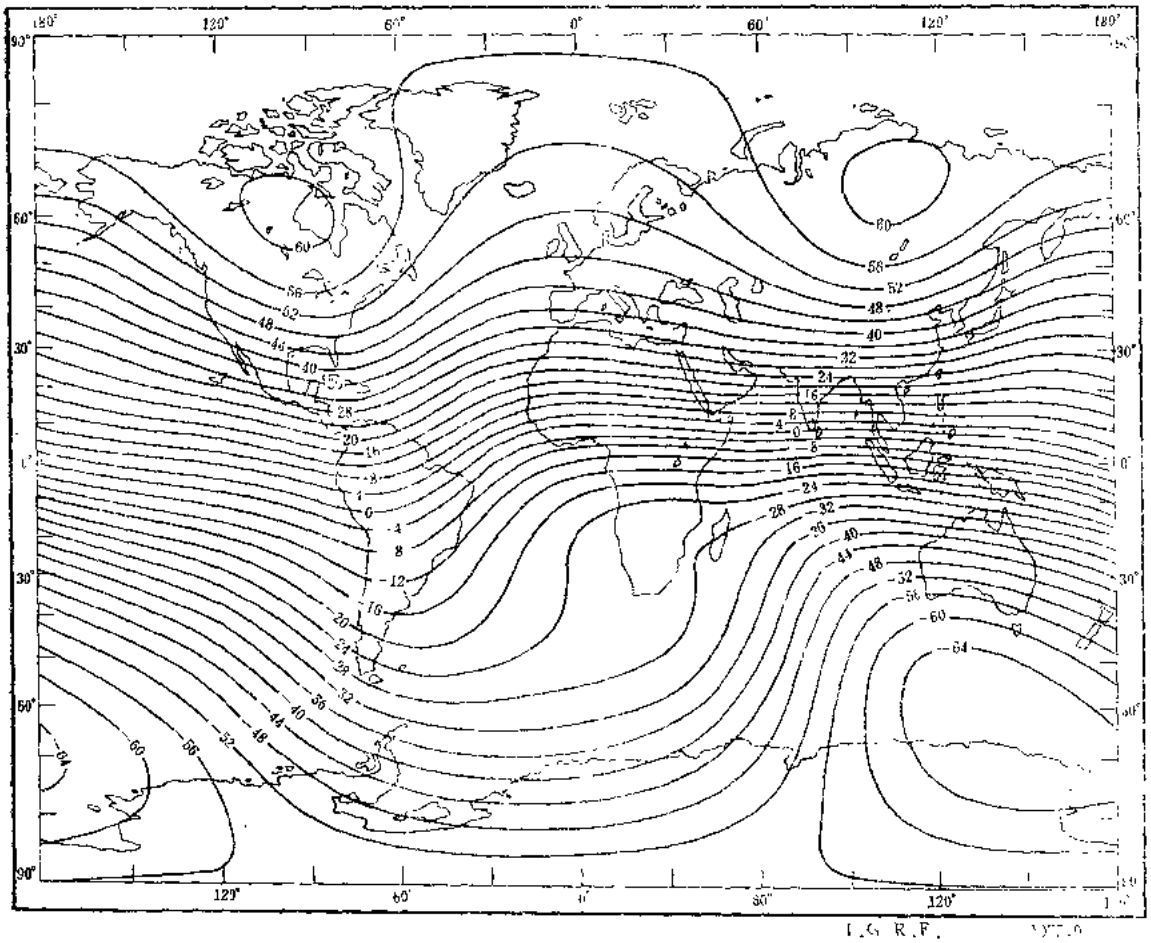


图 1.1.5 等垂直强度图
(单位，10^{-5}奥)

可以从0°变到360°，即没有固定的磁偏角值，可见磁偏角在南、北两磁极处失去意义。全图有两条零偏线($D=0°$)分布，把全球分为负偏角区（向西偏为负，$D<0°$)和正偏角区(向东偏为正，$D>0°$)两个部分。

垂直强度Z的等值线大致和等倾线的分布相似，与纬度线大体平行分布，随纬度增高Z的强度增大，在南北两磁极处Z值最大，约0.6至0.7奥，在磁赤道Z值为零。

水平强度H,在赤道附近最大，约为0.4奥，随纬度向极地逐渐减小，在两磁极处水平强度$H=0$。除南北两磁极区外，全球各点的H都指向北。

归纳上述地磁要素分布特征，得到地磁场的基本规律如下：

(1) 地球有两个磁极,分别位于地理南北两极附近。在1980年的世界地磁图上，北磁极位于78.2°N,102.9°W;南磁极位于65.6°S,139.1°E。在南、北两磁极处，磁倾角I分别为$\mp 90°$、垂直强度Z有最大值、水平强度H为零、磁偏角D没有确定值。

(2) 水平强度(H)在地表上任何一点(除两磁极点外)都指向北。垂直强度(Z)在北半球指向下，为正值；在南半球指向球外（向上)，为负值，说明地球磁极位于北半球的是S极，位于南半球的是N极。

(3) 地球南北两磁极处的总磁场强度为0.6－0.7奥斯特,在磁赤道处的总强度为0.3—0.4奥斯特，前者约为后者的两倍，磁倾角随磁纬度按一定关系变化。这些特征和均匀磁

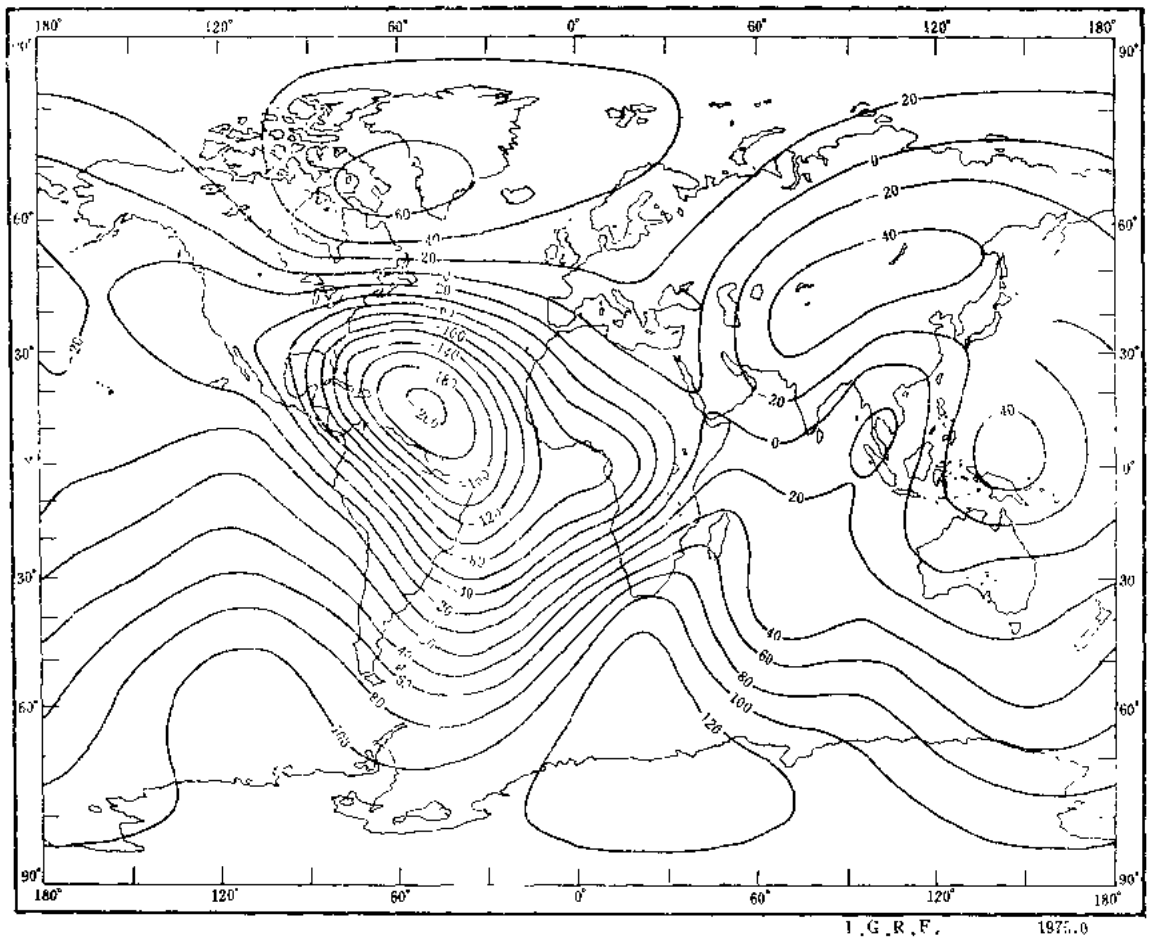


图 1.1.6 垂直强度等年变率图

（单位：γ/年）

化球体或中心偶极子的磁场分布特征基本一致。

（4）南磁极和北磁极与地球的地理南、北两极并不重合，可以认为是地球中心磁偶极子轴与地球转轴相斜交。

根据以上的规律，可以认为地球基本磁场的模式是一个位于地球中心并与地球转轴斜交的磁偶极子的磁场，如图 1.1.7 所示。磁轴和地轴斜交 11.5° 的中心偶极子场与地磁要素分布吻合的最好。

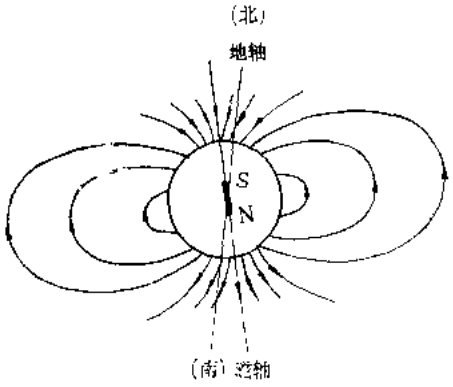


图 1.1.7 斜交中心偶极子场示意图

2．我国境内地磁要素的地理分布

由我国编制的中国地磁图表明有以下特点：

（1）垂直强度由南至北，Z 值由 −0.10奥增至0.56奥，Z 值在我国境内的最大变化在0.6奥以上。

（2）水平强度由南至北，H 值由0.4奥降至0.21奥，H 值最大变化在 0.13 奥以上。

（3）磁倾角由南至北，I 值由 $-10°$ 增至 $+70°$，I 值最大变化在80°以上。

（4）磁偏角的零值线在我国中部偏西由北向南通过，经过甘肃省的安西和西藏自治区的得宗。零偏线以东，偏角度变化由0°至 $-11°$（磁北西偏），零偏线以西，偏角变化由0°至 $+5°$。

根据我国1980年编制的中国地磁图，列举我国各地的地磁要素值，见表1.1.1。

表 1.1.1 我国各地地磁要素值

地名＼分量	H	Z	I	D	地名＼分量	H	Z	I	D
北　京	0.2962	0.4618	57°19′	−5°59′	广　州	0.3809	0.2369	31°51′	−1°25′
石家庄	0.3028	0.4375	55°18′	−4°48′	南　宁	0.3390	0.2323	31°08′	−1°03′
太　原	0.3044	0.4390	55°16′	−4°14′	哈尔滨	0.2556	0.4865	62°18′	−9°55′
呼和浩特	0.2851	0.4751	59°01′	−4°28′	长　春	0.2659	0.4721	60°36′	−8°58′
西　安	0.3281	0.3993	50°37′	−2°34′	沈　阳	0.2798	0.4552	58°25′	−7°49′
兰　州	0.3161	0.4246	53.20′	−1°46′	济　南	0.3122	0.4165	53°12′	−5°10′
西　宁	0.3122	0.4312	54°08′	−1°21′	合　肥	0.3388	0.3565	46°27′	−4°02′
乌鲁木齐	0.2540	0.5617	63°06′	2°37′	上　海	0.3389	0.3420	45°31′	−4°40′
银　川	0.3000	0.4510	56°20′	−2°36′	南　京	0.3390	0.3608	46°48′	−4°12′
成　都	0.3500	0.3525	45°13′	−1°20′	南　昌	0.3552	0.3152	41°33′	−3°02′
昆　明	0.3795	0.2675	35°13′	−1°00′	杭　州	0.3445	0.3290	43°55′	−4°09′
贵　阳	0.3710	0.2925	38°10′	−1°25′	福　州	0.3640	0.2743	36°57′	−2°50′
拉　萨	0.3560	0.3378	43°32′	−0°14′	漠　河	0.1995	0.5700	70°14′	−10°57′
郑　州	0.3232	0.3996	50°58′	−3°54′	台　北	0.3642	0.2576	35°17′	−2°41′
武　汉	0.3474	0.3436	44°41′	−3°07′	曾母暗沙	0.4020	−0.1100	−15°10′	0°25′
长　沙	0.3603	0.3125	40°57′	−2°26′	香　港	0.3827	0.2266	30°37′	−2°33′

§1.2 基本磁场及磁异常

一般把来源于地球深部、占地磁场约80%的主要成分，认为是相对稳定的静磁场，并称这个主要部分为地球的基本磁场。上节所介绍的地磁图即属于基本磁场的地理分布，地磁图从地磁测量的观测结果方面描述了地磁要素的地理分布特征。本节将在均匀磁化球体的假设下，讨论地磁要素与地理经纬度之间的近似关系式，从理论上掌握地磁场的分布特征。

1.2.1 地磁场的解析表示

1．磁偶极子的磁场

由于均匀磁化球体的磁场和中心磁偶极子的磁场等同，因此，从磁偶极子的磁位开始讨论。如图 1.2.1 所示，m 和 $-m$ 表示磁偶极子的两个磁极强度；$2l$ 表示它们之间的距离；P 表示当远的任一空间

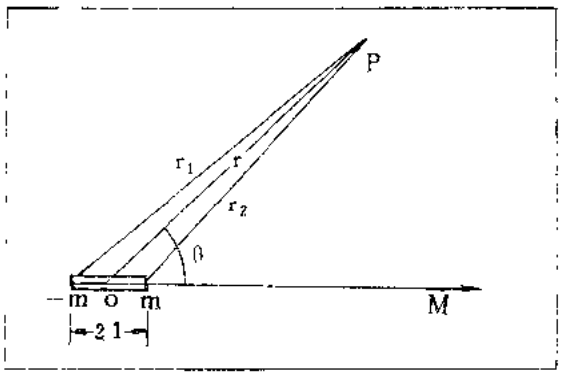


图 1.2.1 计算磁偶极子磁场

点，它与偶极子中心O以及两磁极间的距离分别为r、r_1和r_2，M表示磁偶极子的磁矩，其大小为：$M=2ml$，方向由$-m$指向m。磁偶极子在P点的磁位U等于其正负两磁极分别在该点的磁位U_{+m}及U_{-m}之和，可表示为：

$$U=U_{+m}+U_{-m}=m\left(\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_1}\right)$$

$$=\frac{m}{r-l\cos\theta}-\frac{m}{r+l\cos\theta}$$

$$=\frac{m}{r}\left(1+\frac{l}{r}\cos\theta+\cdots\cdots-1+\frac{l}{r}\cos\theta+\cdots\cdots\right)$$

$$\doteq\frac{2ml}{r^2}\cos\theta$$

$$=\frac{M}{r^2}\cos\theta \qquad (1.2.1)$$

上式表示磁偶极子在空间某一点的磁位，式中的θ表示偶极子磁矩的方向与向径r之间的夹角。地球被近似地视为均匀磁化球体，它在地表任一点产生的磁场和置于球心的磁偶极子磁场相同。现在假设球心磁偶极子的磁轴和地轴相重合、南北两磁极和地理南北两极相重合，如图1.2.2所示，我们来讨论球面上任一点P的磁场表达式。

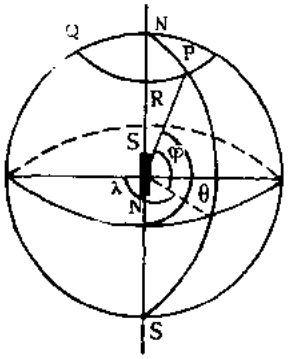


图 1.2.2 地球表面 P点位置坐标示意图

球心磁偶极子在P点的磁位按式（1.2.1）为：

$$U_p=\frac{M}{r^2}\cos\theta$$

从图1.2.2可见：$\theta=90^\circ+\varphi$

角φ为P点的磁纬度（在目前的假设条件下，φ也表示地理纬度）。再将向径r代以地球半径R，从而有：

$$U_p=-\frac{M}{R^2}\sin\varphi \qquad (1.2.2)$$

设$\boldsymbol{T}$为球心磁偶极子在P点的磁场的总强度，根据磁场和磁位的关系，应有：

$$\boldsymbol{T}=-\mathrm{grad}U \qquad (1.2.3)$$

若在地面上以P为原点建立一个直角坐标系，取x轴向北，y轴向东，z轴向下，则可求出$\boldsymbol{T}$沿坐标轴的三个分量：

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=-\frac{\partial U}{\partial z} \qquad (1.2.4)$$

X、Y、Z分别是T的北向分量、东向分量和垂直强度。由图1.2.2可见，弧$\overset{\frown}{NP}$是过P点及地理北极N的大圆弧，即过P点的地理子午线的一段弧长。故$\boldsymbol{T}$在$\overset{\frown}{NP}$切线方向的分量即北向分量X；弧$\overset{\frown}{QP}$为过P的纬度圈，故T在$\overset{\frown}{QP}$切线方向的分量，即东向分量Y；$\boldsymbol{T}$在向径r上的分量即为垂直强度Z，但Z与r的方向相反，即Z增加的方向为r减小的方向。因此，直角坐标系的坐标变量与球坐标变量有以下关系：

$$dx=rd\varphi;\quad dy=r\cos\varphi d\lambda;\quad dz=-dr \qquad (1.2.5)$$

其中λ为P点的经度。由于假设磁轴与地轴重合，磁偶极子在P点产生的磁位与经度无关，仅

决定于纬度，将式（1.2.5）代入式（1.2.4），则对球面上任一点P有$Y=0$，其它分量为：

$$\left.\begin{aligned} X=H&=-\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\varphi}=\frac{M}{R^3}\cos\varphi \\ Z&=\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{2M}{R^3}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \tag{1.2.6}$$

P点的总磁场强度为：

$$T=\sqrt{Z^2+H^2}=\frac{M}{R^3}(1+3\sin^2\varphi)^{1/2} \tag{1.2.7}$$

P点的磁倾角可表示为：

$$\mathrm{tg}I=\frac{Z}{H}=2\mathrm{tg}\varphi \tag{1.2.8}$$

以上（1.2.6），（1.2.7），（1.2.8）三式是有实际应用意义的重要公式。通观这三式可见：一个均匀磁化球体表面上任一点的地磁要素大小都和这一点的磁纬度有密切关系。对以下特殊地区，可推得地磁要素值如下：

在两极处，$\varphi=\pm90^\circ$；$Z=\frac{2M}{R^3}=T$，$H=0$，$I=\pm90^\circ$。

在赤道处，$\varphi=0^\circ$；$Z=0$，$H=\frac{M}{R^3}=T$，$I=0^\circ$。

由以上近似公式计算的结果与实际观测值相比较，大体上是相符合的。例如在两极处的磁场强度大约比在赤道区的磁场强度多一倍（在两极处$Z\doteq0.65$奥，在赤道处$H\doteq0.35$奥）。因此，用均匀磁化球体的磁场（即偶极子的磁场）表示地磁场，可作为其一级近似值。

由于地磁要素是空间坐标的函数，我们可以对（1.2.6）式的H和Z分别沿子午线的方向和高度（向上）的方向求导，即得H和Z沿这两方向上的梯度。

沿子午线方向的梯度：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}&=\frac{\partial H}{R\partial\varphi}=-\frac{M}{R^4}\sin\varphi=-\frac{H}{R}\mathrm{tg}\varphi=-\frac{Z}{2R}, \\ \frac{\partial Z}{\partial x}&=\frac{\partial Z}{R\partial\varphi}=\frac{2M}{R^4}\cos\varphi=\frac{Z}{R}\mathrm{ctg}\varphi=\frac{2H}{R}。 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.9}$$

沿高度方向的梯度：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial R}&=-\frac{6M}{R^4}\sin\varphi=-\frac{3Z}{R}, \\ \frac{\partial Z}{\partial R}&=-\frac{3M}{R^4}\cos\varphi=-\frac{3H}{R}。 \end{aligned}\right\} \tag{1.2.10}$$

例如，北京地区的垂直强度$Z=46194$伽伽，水平强度$H=29884$伽伽，取$R=6370$公里，则其梯度值为：

$\frac{\partial H}{\partial R}=-14.1$ 伽伽/公里，$\frac{\partial H}{\partial x}=-3.6$ 伽伽/公里，

$\frac{\partial Z}{\partial R}=-21.7$ 伽伽/公里，$\frac{\partial Z}{\partial x}=9.4$ 伽伽/公里。

在做大面积磁测工作时，必须消除随纬度变化的影响，对这种影响的校正称为正常梯度改正或纬度改正。改正值一般可通过查地磁图来确定。

2．地磁场的球谐分析

上一节，我们已经求得了近似表达地磁要素和经纬度之间的解析表达式。那是在已知场源为球心偶极子的基础上分析得到的。早在1838年德国数学家高斯只假设地磁场的场源来源于地球的内部，他首次用球谐分析的方法表达了地磁要素的解析式，他的这种分析方法在当代的地磁工作中仍在使用，是地磁学的重要理论基础。本节我们概要地说明高斯的理论，以加深对地磁场的理解。

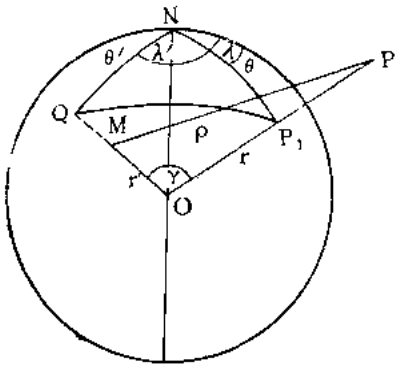


图 1.2.3 计算磁化体磁位时的几何关系

把地球看作为圆球体，球体内部的每一个体积元dv具有磁矩，各体积元之间磁矩的大小和方向都是任意的，从静磁场的观点看，即体内有磁荷分布。因此，对子整个球体来说，在球外空间任一点就产生有磁位，以U表示，则应有：

$$U=\iiint\frac{dm}{\rho}$$

参看图1.2.3，其中dm表示球体内任一点M的元磁量，ρ表示空间任一点P与M点之间的距离。积分是对球体的全部体积进行的。从三角形MPO可知：

$$\rho^2=r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma=r^2\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma\right]$$

其中γ是r和r'之间的夹角，因此：

$$U=\frac{1}{r}\int_V\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma\right]^{-\frac{1}{2}}dm \qquad (1.2.11)$$

由于$r>r'$，若上式中的被积函数用$f(r',r)$表示，则可应用牛顿二项式定理把它展成为$\left(\frac{r'}{r}\right)$的收敛级数，即：

$$f(r',r)=\left\{1+\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r}{r}\right)\cos\gamma\right]\right\}^{-1/2}$$

$$=1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma\right]+\frac{3}{8}\left[\left(\frac{r'}{r}\right)^2-2\left(\frac{r'}{r}\right)\cos\gamma\right]+\cdots \qquad (1.2.12)$$

将上式中$\left(\frac{r'}{r}\right)$的同级项归并，得到：

$$f(r',r)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^nP_n(\cos\gamma)$$

上式中$P_n(\cos\gamma)$是$\cos\gamma$的n次多项式，称为勒让德多项式。从而，式（1.2.11）的磁位可以写成如下的级数形式：

$$U=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\int_V\left(\frac{r'}{r}\right)^nP_n(\cos\gamma)dm$$

上式级数的第一项的级次为$n=0$，已知$P_0(\cos\gamma)=1$，$\int_V dm$表示体内全部磁量的总和（即正负磁量的总和）应为零，所以，n＝0级项是不存在的，上式应为：

$$U=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{V}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}P_n(\cos\gamma)dm \tag{1.2.13}$$

从图1.2.3中的球面三角形QNP_1可见：

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda') \tag{1.2.14}$$

式中(θ,λ)及(θ',λ')分别为P和M两点在球上相应点P_1和Q的余纬度和经度。将$\cos\gamma$的相应关系代入勒让德多项式$P_n(\cos\gamma)$，得到：

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{m=0}^{n}C_n^m P_n^m(\cos\theta)\,P_n^m(\cos\theta')\cos m(\lambda-\lambda') \tag{1.2.15}$$

称$P_n^m(\cos\theta)$为n次m阶缔合勒让德多项式，表示为：

$$P_n^m(\cos\theta)=\sin^m\theta\frac{d^m}{d(\cos\theta)^m}P_n(\cos\theta)\ ;$$

$$P_n^m(\cos\theta')=\sin^m\theta'\frac{d^m}{d(\cos\theta')^m}P_n(\cos\theta')。$$

取$m\leqslant n$。(1.2.15) 式中的C_n^m为常数值，取值为：

当$m=0$时，$C_n=1$；当$m>0$时，$C_n=2$。

将 (1.2.15) 式代入 (1.2.13) 式，磁位U为：

$$U=\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{V}\left(\frac{r'}{r}\right)^{n}\sum_{m=0}^{n}\left[C_n^m P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\cos m(\lambda-\lambda')\right]dm$$

由于θ、λ和r在积分中为常数，将$\cos m(\lambda-\lambda')$展开并经整理可得磁位表达式如下：

$$U=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\sum_{m=0}^{n}(A_n^m\cos m\lambda+B_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_n^m&=C_n^m\int_V r'^n P_n^m(\cos\theta')\cos m\lambda' dm\\B_n^m&=C_n^m\int_V r'^n P_n^m(\cos\theta')\sin m\lambda' dm\end{aligned}\right\} \tag{1.2.16}$$

令：$A_n^m=R^{n+2}g_n^m$，$B_n^m=R^{n+2}h_n^m$ (1.2.17)

其中R为地球半径。对位于球面上的各点$r=R$，由此上面求得的磁位表达式可以写成如下形式：

$$U=R\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta) \tag{1.2.18}$$

g_n^m，h_n^m称为球谐系数。分别求磁位沿x、y和z轴的微分，即得地磁场各相应分量的表达式：

$$\left.\begin{aligned}X&=-\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial U}{\partial\theta}=-\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)\frac{d}{d\theta}P_n^m(\cos\theta)\\Y&=-\frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial U}{\partial\lambda}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{m}{\sin\theta}(g_n^m\sin m\lambda-h_n^m\cos m\lambda)P_n^m(\cos\theta)\\Z&=-\frac{\partial U}{\partial r}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}(n+1)(g_n^m\cos m\lambda+h_n^m\sin m\lambda)P_n^m(\cos\theta)\end{aligned}\right\} \tag{1.2.19}$$

上式即地磁场的球谐表达式。通观 (1.2.18) 和 (1.2.19) 两式，有以下几点认识：

（1）地球表面上任一点的磁位，是由两组双重无穷级数的和来表达的，其中每一组都是球谐系数 g_n^m 和 h_n^m 乘以 θ 和 λ 球坐标的函数。

从（1.2.16）、（1.2.17）两式可见，球谐系数 g_n^m 和 h_n^m 可表示为：

$$\left.\begin{aligned} g_n^m &= \frac{C_n^m \int_V r'^n P_n^m(\cos\theta')\cos m\lambda' dm}{R^{n+2}} \\ h_n^m &= \frac{C_n^m \int_V r'^n P_n^m(\cos\theta')\sin m\lambda' dm}{R^{n+2}} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.16)'$$

可见 g_n^m 和 h_n^m 的量纲式为：

$$〔g_n^m〕或〔h_n^m〕=\frac{〔磁极强度〕}{〔距离〕^2}$$

由此可知，球谐系数 g_n^m 和 h_n^m 具有磁场强度的量纲，它们的量值可以用磁场强度的单位来表示。

（2）如仅考虑地磁场球谐表达式的第一级次项，即取 $n=1$，则由（1.2.19）式可得：

$$\left.\begin{aligned} X &= g_1^0\sin\theta - (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)\cos\theta \\ Y &= g_1^1\sin\lambda - h_1^1\cos\lambda \\ Z &= 2[g_1^0\cos\theta - (g_1^1\cos\lambda + h_1^1\sin\lambda)\sin\theta \end{aligned}\right\} \qquad (1.2.20)$$

其中球谐系数 g_1^0、g_1^1 和 h_1^1 通过（1.2.16）′式可以证明为：

$$g_1^0=\frac{4}{3}\pi J\cos\theta',\quad g_1^1=\frac{4}{3}\pi J\sin\theta'\cos\lambda',\quad h_1^1=\frac{4}{3}\pi J\sin\theta'\sin\lambda \qquad (1.2.21)$$

式中 J 为地球的平均磁化强度，地球磁矩为 $M=\frac{4}{3}\pi R^3 J$。现在假设球内磁极轴与地轴相重合，即图1.2.3中的 M 点位于 ON 轴上，相当于地球沿地轴方向磁化，这时 M 点的余纬度 $\theta'=0°$。从式（1.2.21）可得：$g_1^0=\frac{4}{3}\pi J$；$g_1^1=0$；$h_1^1=0$。

因而有：

$$X = g_1^0\sin\theta = \frac{4}{3}\pi J\sin\theta = \frac{M}{R^3}\cos\varphi,\quad (\varphi=90°-\theta)$$

$$Y = 0,$$

$$Z = 2g_1^0\cos\theta = \frac{2M}{R^3}\sin\varphi$$

上式和（1.2.6）式所表达的轴向球心偶极子场的表达式相同，证明了当 $n=1$ 时，其球谐表达式表示球心偶极子场。一般称球心偶极子磁场（即均匀磁化球体磁场）为球谐表达式的一级近似场。计算表明，它约占地磁场的80%。

$n>1$ 各项球谐场代表地球的非偶极子磁场。用除去 $n=1$ 的各项所计算的结果作地磁要素图，则表示某要素的非偶极子场图。如图1.2.4表示 1945 年 Z 强度的非偶极子场等值线图。

（3）计算的球心偶极子磁场，即与地轴斜交的球心偶极子在地面上产生的磁场，可以

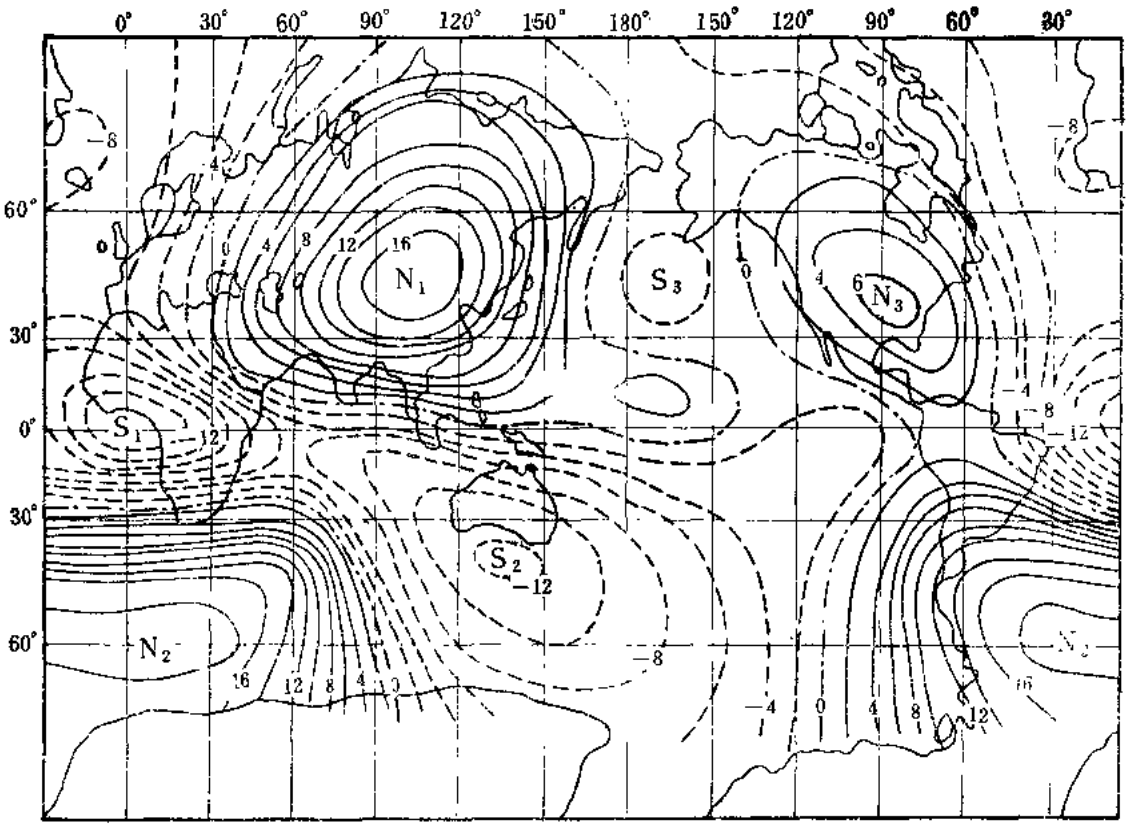


图 1.2.4　Z 强度非偶极子场等值线图

近似地表示地磁场的分布，两轴斜交大约 11.5° 的近似程度最好。球心偶极子轴与地面的交点称为地磁极，靠近北极的交点称为地磁北极，靠近南极的交点称为地磁南极。1975年用参考场的系数计算的地磁北极位于78.7°N，289.5°E，它在南半球的对应极即地磁南极的位置。实测的地磁极是在倾角$I=\pm 90°$的位置上，为了和偶极子相区别，北半球的磁极称为北磁极，位于南半球的称南磁极。南北磁极的连线并不通过球心。1975 年北磁极在 76.1°N，100°W，南磁极在 65.8°S，139.4°E。地磁南极距地理南极为 1280 公里．地磁南极距南磁极为1350公里。

根据用球谐系数表示球心偶极子地磁要素的表达式（1.2.21），可以应用$n=1$的三个球谐系数计算地磁极的位置（纬度φ_c和经度λ_c）及地球磁矩M，表示如下：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_c &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{g_1^0}{[(g_1^1)^2+(h_1^1)^2]^{1/2}}\\ \lambda_c &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{h_1^1}{g_1^1}\\ M &= R^3[(g_1^0)^2+(g_1^1)^2+(h_1^1)^2]^{1/2}\end{aligned}\right\} \tag{1.2.22}$$

R为地球半径。球心偶极子的磁矩$M=7.94\times 10^{25}$高斯·厘米^3。

1.2.2　地磁场的构成及起源

1．构成

分析地磁的现象和它们的来源，可以把地磁场区分为稳定的磁场和变化的磁场两部

分。这两部分都来自球内和球外，稳定部分主要来源于球内，大约占全部场的94%，而来源于外部的只约占6%。来源于内部的稳定磁场是地磁场的主要部分，一般称这部分为基本地磁场。变化磁场分长期变化和短期变化。长期变化来源于地球内部；短期变化主要来源于地球外部的高空电离层，约占短期变化磁场部分的三分之二，其余的三分之一来源于地球内部（实际上，也是由外部电流感应而引起的）。长期变化缓慢，在短期内变化幅度很小，可以不计。因此，说明地磁场构成中的变化磁场，一般不包括长期变化。

基本地磁场一般认为包含有中心偶极子磁场和非偶极子磁场（又称为大陆磁场）。中心偶极子场占这两部分总和的80%，是基本地磁场的主要成分。现在所编制的世界地磁图大多编制的就是基本地磁场分布图。稳定磁场中除去基本地磁场以外的剩余部分，主要是地壳中岩石被磁化而产生的，称之为地壳磁场。由于地壳岩石磁性的差异和分布的不均匀性，因之，地壳磁场在较小的地区内，磁场的分布就可能发生较大的变化，一般较大地区，如数百或数千平方公里内，所引起的磁场起伏称为区域性的磁场，在较小地区内，如几平方公里或数十平方公里内引起的磁场起伏称为局部磁场。一般前者又可称为区域磁异常，后者则称为局部磁异常。磁异常是磁法勘探主要研究的对象，它在全球地磁场分布中都属于局部现象，在编制世界地磁图中一般都被光滑掉了。

在上一节中，图1.2.4表示减去球心偶极子场的Z强度非偶极子场等值线图。这种非偶极子场又称为大陆磁场，这图表明大陆磁场是绕8个中心分布的，有亚洲东部、南太平洋、南印度洋、非洲大陆、北美洲、北太平洋、冰岛及澳大利亚南部。各大陆中心具有不同的极性，在图中用N和S标出。各中心的垂直强度也不相同，最强的约为地磁场平均强度的30—35%，最弱的为地磁场平均强度的6%。1958年以来，人造地球卫星进行的高空磁测结果表明，大陆磁场随着高度的增加衰减缓慢，说明它来源于地球深部。

2．地球磁场的起源

地磁的成因问题是现代地球科学研究的重大问题之一。过去，对地磁成因有过不少假说。起初设想地球内部由铁磁介质或铁磁性的岩石所形成，但这种假说是不能成立的。因为地壳的温度梯度约为30℃/公里，因此在大约25公里的深度上就达到了铁磁质的居里点左右，尽管居里点随压力增大而升高，但其增长率也只是每10^5巴升高1℃，因此即使考虑到压力的因素，上述的假说也是不能成立的。即使设想全部来源于地壳的岩石磁性，按地球磁矩计算，需地壳岩石的磁化强度平均值达6 CGSM，而大多数岩石的磁化强度都远小于或小于10^{-2}CGSM，进一步说明了这种假说不能成立。

当前，一般认为有希望的假说是自激发电机的假说，这种假说认为：（1）地核是由良导电流体形成；（2）地核中原来存在着微弱的磁场；（3）在液态地核中持续发生着差异运动或对流，并产生新的磁场，从而增强了原来的磁场。由于流体的持续运动而不断提供能量，因而引起一种自激发电机效应。由于能量的不断消耗和供应，磁场增强到一定程度就稳定下来，形成现在的基本地磁场。

简而言之，地磁场是由地核内部的电流引起的，这些电流被感生出来，并得以维持，有如一个自激发电机的过程。

1.2.3 正常磁场和磁异常

以上提到，地球的磁场是由均匀磁化球体的磁场、大陆磁场和磁异常这三部分主要磁场叠加形成的。我们总可以按研究地磁场的目的不同，将地磁场分成为正常磁场和磁异常

两部分。正常磁场可以认为是磁异常（所要研究的磁场）的背景场或零值场。如研究大陆磁场，可以把中心偶极子磁场作为正常磁场；如研究地壳磁场，则把中心偶极子场和大陆磁场的叠加场作为正常磁场。可见正常磁场的选择是根据所研究磁异常的要求而确定的。磁法勘探在地质工作中的应用，一般研究分布范围较大的区域性的磁异常，或研究局部地区和地段的磁异常。同样，也应以相应的背景场为正常场。如果以T_a表示磁异常，T表示总磁场，T_0表示正常磁场，则应有：

$$T_a=T-T_0 \tag{1.2.23}$$

在磁法勘探中，应以主要突出反映所研究的地质对象引起的磁场来选定正常磁场。如果在地质工作中所要研究的是具有极弱磁性的岩层，当然，也可以把分布在岩层周围的磁性地层上所反映的磁场做为正常磁场，而把在无磁性岩层上磁场的相对变化称为磁异常。可见，在磁法勘探中正常场和磁异常是相对而言的。

§1.3 变 化 磁 场

地磁场随时间的变化总体上可以分为两大类，一类是主要因地球内部场源引起的缓慢的长期变化；另一类是主要来源于地球外部的场源引起的短期变化。下面对两类变化磁场分别概述。

1.3.1 地磁场的长期变化

基本地磁场随时间的缓慢变化，称为地磁场的长期变化。图1.3.1所示为近几百年来在伦敦观测台观测的磁偏角和磁倾角变化的曲线。

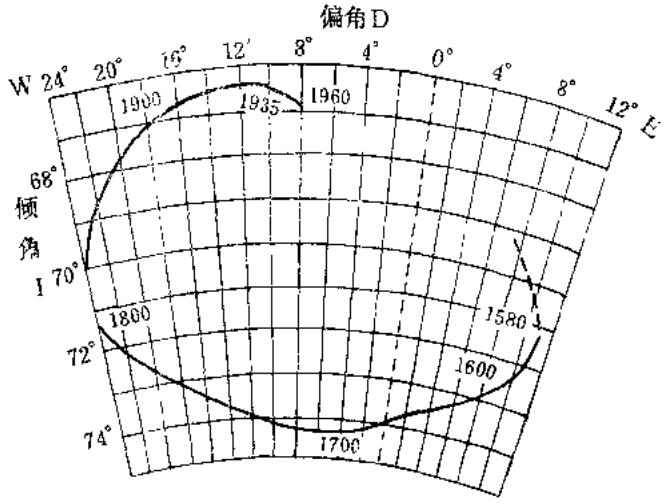


图 1.3.1 伦敦的磁偏角和磁倾角长期变化图

各地磁要素的年平均值在很多年中所起的变化，反映地磁场的长期变化，这种变化只有在连续观测的地磁台上才能得到。

许多地磁台的各地磁要素的年平均值都有显著的年变化。这种变化在相当长的时期（几十年）内为单向增减。如图1.3.1，1600—1700的一百年间磁偏角自$9^\circ E$一直向西偏移到$-4^\circ W$，共向西偏移了13°；磁倾角约共增大2°。而后的一百年间磁偏角继续向西偏移，但磁倾角减小。图中曲线显示出这种长期变化有周期性。此外，通过观测地磁要素和计算地球中心偶极子的磁矩还可以发现，不同年代计算出的地球磁矩值有所变化，1835年高斯计算该值为8.5×10^{25}高斯·厘米^3，而1960年计算该值为8.0×10^{25}高斯·厘米^3。在这期间内地球磁矩以每年0.05%的速率递减。如按这种速率递减，在2000年后，地球磁矩将变为很小。这种现象如果确实继续存在的话，可能是予示地磁极倒转的征兆。因为古地磁学研究发现，在地质历史年代中，地球磁极已多次发生倒转现象，并发现古地磁场强度在地球磁极倒转前发生递减到零而反向的过渡阶段。

从等变线图上（如图1.1.6所示）发现，等变线在地球上的分布是有规则的，所有等变线都绕着几个中心而聚集起来。这些中心称为长期变化的焦点，该处的变化率达到最大值。在垂直强度等变线图上有几个中心处Z是增大的，也有几个中心处Z是减小的。并发现焦点的位置和强度变化率的大小也发生逐年变化。

此外，还发现非偶极子场（如图1.2.4所示）每年约以经度为0.2°的速度向西漂移。科学家们认为地核转动比地球外核慢得多，地核引起磁场向西漂移。

1.3.2 地磁场的短期变化

地磁场的短期变化基本上可以分为两种类型。一类变化是连续出现的、比较有规律并有确定周期的变化；另一类变化则是偶然发生的、短暂而复杂的变化。这两种类型的变化主要来源于地球外部的不同原因。前者称为平静变化，来源于电离层内长期存在着的电流体系的周期性变化。后者称为扰动变化，由于磁层结构、电离层中电流体系、太阳辐射等变化所引起。

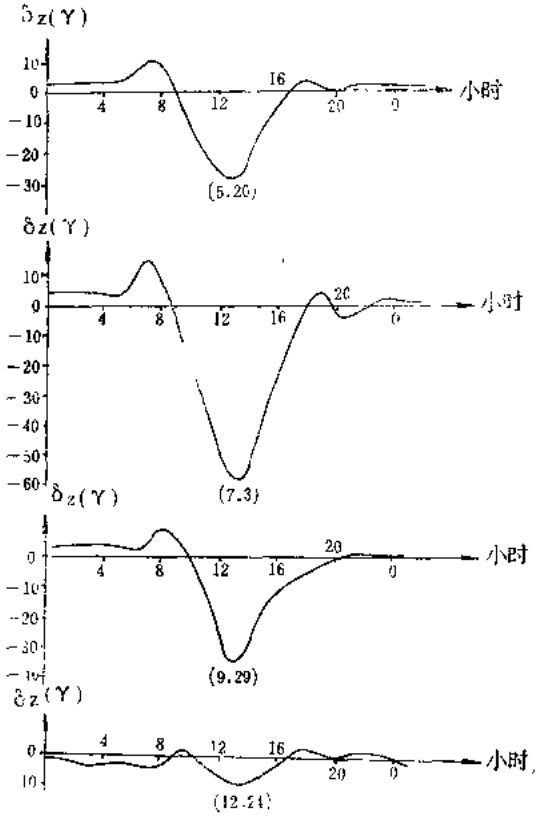


图 1.3.2 不同季节的Z日变曲线图

1．平静变化

平静变化包括太阳静日变化S_q和太阴日变化L。

（1）太阳静日变化

太阳静日变化是由电离层电流所引起的地表磁场的变化，以一个太阳日为周期，这种变化简称为日变。地磁日变的特点是在白天（6—18时）磁场的变化比较大，而夜间较平静；夏季的变化幅度比冬季大。日变的平均幅度为几伽玛到几十伽玛，如图1.3.2所示。该图为我国南方城市的Z值日变曲线。此外，观测结果还表明，同一磁纬度圈的不同地点，地磁日变的形态是一样的。不但变化幅度相同，而且变化的极值也出现在相同的地方时上，说明静日变化是依赖于地方太阳时的变化。如图1.3.3表示地磁要素X、Y、Z在不同纬度上春分、秋分期间的静日变化曲线。

由图1.3.3可见，Z的日变曲线的基本特征是在中午前后有一个明显的极值（北半球为极小，南半球为极大），变幅在磁纬度$\varphi=\pm30°$附近最大，当纬度升高或降低时，变幅均逐渐减少。我国大部分地区，Z的变幅在20—40γ左右。

X（地磁北向分量）的日变特征从图1.3.3上可看出，在$\varphi=\pm30°$附近，变幅最小，赤道附近变幅最大，可达200γ。

由于地磁要素T、Z等的日变幅度一般达数十伽玛，在磁法勘探工作中观测磁异常时会受到影响，因此，需根据日变曲线对观测结果进行校正，称为日变改正。

静日变化来源于电离层中的涡旋电流体系；太阳的紫外线幅射对于高度在60公里以上

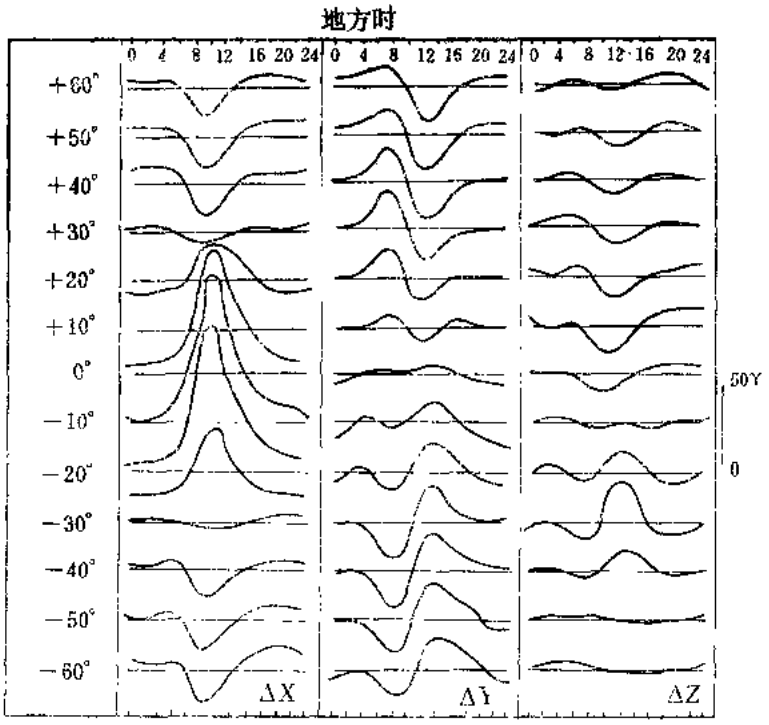


图 1.3.3 要素X、Y、Z在不同纬度上春、秋分静日变化曲线

的地球大气具有强烈的电离作用，从而在高空大气中形成了电离层，在太阳直射的地方，电子和离子的浓度最大，因此，白天浓度大，夜晚浓度小。电离层和整个地球大气在太阳的热力作用下形成大气对流（环流）运动，在日、月的引力作用下形成大气潮汐运动，这些运动是在地球磁场中进行的。由于电离层是导体，在地磁场中运动必然产生感应电流，而形成电流体系。经过观测分析，南北半球在春秋分时期电离层中共有四个涡旋电流体系（其中两个是主要的）。北半球的主要涡旋电流沿逆时针方向流动，中心位置在地方时为11时和北纬40°处。涡旋电流的总强度白天为62000安培，夜晚为32000安培。电流体系相对于太阳的位置是不变的，而地球却相对电流体系旋转着，随着地球的自转，地面各点必然要从电流体系各部位的下方经过，即从0点到24点依次地转过来，于是，地面各点的磁场就出现了一个以太阳日为周期的日变过程。

（2）太阴日变化

这是一种依赖于地方太阴时并以半个太阴日为周期的变化。太阴日是地球相对于月球自转一周的时间。由于它变化幅度很微弱，Z和H的变化只有1—2γ，在磁法勘探工作中已将这种变化包括在日变之内而不单独考虑。

2．扰动变化

（1）磁扰和磁暴

地磁场除每天连续出现周日变化外，往往发生不规则的突然变化，叫做磁扰。磁扰的形态复杂，变化剧烈。强度大的磁扰，称为磁暴。

磁暴是一种全球性效应。磁暴发生时，地磁场水平强度突然增加，垂直强度变化相对较小，磁偏角发生起伏变化，不仅变化小，也无规则形态。通常以水平强度变化来研究磁暴的形态和特征。磁暴可分为中强磁暴、中烈磁暴和强烈磁暴三级。中强磁暴可达数百伽

伽，延续时间常可达数天。

根据统计，小磁暴较多而强磁暴较少。有相当数量的磁暴具有27天重复出现的特征；发生磁暴的次数具有季节性变化（春秋两季磁暴较多）以及约以11年为周期的周期变化。图1.3.4是1959年7月14日—15日佘山台记录的磁暴曲线。

磁暴产生于太阳喷射出来的粒子流。太阳粒子流是由带正电的离子和带负电的电子组成的，在电性上显示为中性的粒子流（等离子体），沿着太阳向径方向喷射出来，其径向速度高达1000—2000公里/秒；这种粒子流可看作导电率很高的导体，当它进入地磁场的有效作用范围（离地球中心约50个地球半径）时，粒子流切割地磁场的磁力线，从而产生感应电流，这种感应电流产生的磁场，扰乱了地磁场，因而引起磁暴。因为太阳喷射粒子流与太阳黑子的暴发有关，所以一般认为磁暴与太阳黑子的出现有关。

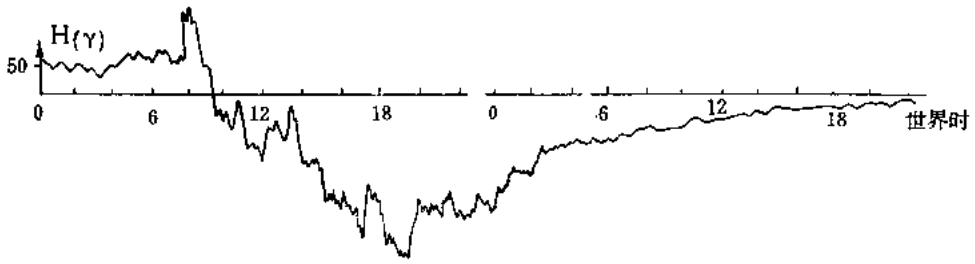


图 1.3.4 1959年7月14日磁暴曲线

（2）地磁场的微脉动

地磁场的扰动变化，包括周期介于0.001秒至600秒之间的短周期变化。这是一种地磁的微扰变化，称为地磁微脉动，其变化范围一般介于千分之几伽伪到几伽伪（甚至几十伽伪）。

地磁场的微脉动，分有两种类型，一种是规则稳定型的连续脉动，另一种是不规则型的或衰减型的瞬时脉动。连续型脉动具有正弦型或近于正弦型的形态，振幅几乎是相等的，持续时间约数小时，如图1.3.5为连续45秒微脉动的实例。

瞬时脉动类似于阻尼振荡，在振动中，振幅是逐步衰减的，持续时间为几分钟到几十分钟。还有一种周期在10秒至80秒范围内、隔一定时间间隔出现的断续微脉动，如图1.3.6所示。

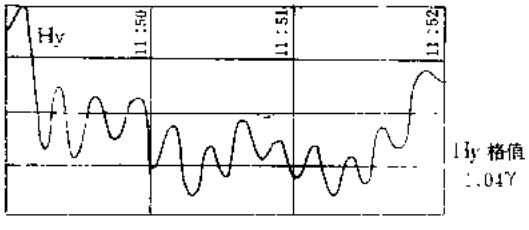


图 1.3.5 45秒连续微脉动

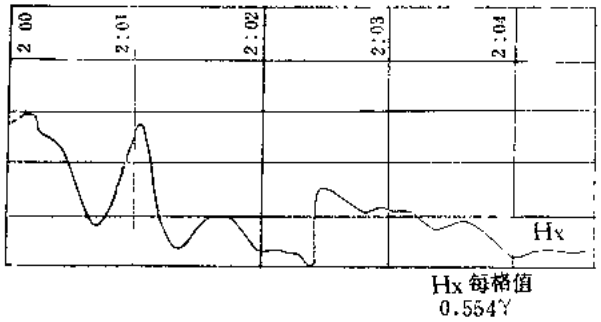


图 1.3.6 1973年11月27日张掖的断续微脉动图

地磁场的微脉动，在地球内产生感应电流，它有助于了解地壳上部电导率的状况以解决某些地质或地球物理问题。它也有可能用来区分矿与非矿的磁异常。

〔附录〕磁学单位的 CGSM 制与 SI 制对照表

在磁法勘探中传统的应用高斯单位制(CGSM)。现在，国外部分书刊已改用国际单位制(SI)，但我国尚未改动。

在本书交稿但尚未付印之时，1983年3月4日公布了国务院《关于在我国实行法定计量单位的命令》。但由于单位制的改变将导致各公式应添加不同的常系数，影响全书版面，故本书未加改动，仅编制了单位对照表作为过渡。

磁 学 单 位

名称及符号	高斯制		国际单位制		关系
	单位	量纲	单位	量纲	
磁感应强度 B	高斯 = 麦克斯韦/厘米^2	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	特斯拉 = 韦伯/米^2	$MT^{-2}I^{-1}$	1韦伯/米^2 = 10^4高斯
	伽玛 = 10^{-5}高斯		纳特 = 10^{-9}特斯拉		1纳特 = 1伽玛
磁通量 Φ_B	麦克斯韦	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	韦伯	$L^2MT^{-2}I^{-1}$	1韦伯 = 10^8麦克斯韦
磁矢位 A	CGSM(A) = 高斯·厘米 = 麦克斯韦/厘米	$L^{1/2}M^{1/2}T^{-1}$	韦伯/米 = 牛顿/安培	$LMT^{-2}I^{-1}$	1韦伯/米 = 10^6CGSM(A)
磁矩 m	CGSM(m)	$L^{5/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培·米^2	L^2I	1安培·米^2 = 10^3CGSM(m)
自感系数 L	CGSM(L) = 厘米	L	亨利	$L^2MT^{-2}I^{-2}$	1亨利 = 10^9 CGSM(L)
磁化强度 J	CGSM(J)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米	$L^{-1}I$	1安培/米 = 10^{-3}CGSM(J)
磁化率 κ	CGSM(κ)	无量纲	SI(κ)	无量纲	1SI(κ) = $1/4\pi$CGSM(κ)
磁场强度 H	奥斯特	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米	$L^{-1}I$	1安培/米 = $4\pi\times10^{-3}$奥斯特
导磁系数 μ	CGSM(μ)（真空的导磁系数 $\mu_0=1$）	无量纲	亨利/米（真空的导磁系数 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}$ 亨利/米）	$LMT^{-2}I^{-2}$	1亨利/米 = $(1/4\pi)\times10^7$ CGSM(μ)
磁位 V_m	吉伯特 = 奥斯特·厘米	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培	I	1安培 = $4\pi\times10^{-1}$吉伯特
磁荷 Q_m	CGSM(Q_m)	$L^{3/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培·米	LI	1安培·米 = 10CGSM(Q_m)
体磁荷密度 ρ_m	CGSM(ρ_m)	$L^{-3/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米^3	$L^{-3}I$	1安培/米^3 = 10^{-5}CGSM(ρ_m)
面磁荷密度 ω_m	CGSM(ω_m)	$L^{-1/2}M^{1/2}T^{-1}$	安培/米	$L^{-1}I$	1安培/米 = 10^{-3}CGSM(ω_m)

第二章　岩石的磁性

研究岩石磁性的特征、成因及其变化规律从以下三个方面来看具有十分重要的意义。首先，由于磁异常正是由铁磁性岩石所引起，所以认识铁磁质在均匀场中的磁化机制和它的性质，在应用和发展磁法勘探理论上具有重要的意义。掌握和研究岩石磁性特征及其规律更是测定和解释磁异常的物理基础。第二，岩石中存在有其形成时期获得的磁性，这种磁性称为岩石的剩磁，这是在磁异常解释中需重视的问题，也是古地磁学的基础。最后，研究包含在岩石中的矿物的磁性，探求这些矿物的成份对岩石生成、演化与经历条件的依赖关系，即通过研究岩石的磁性，进而研究大地构造和演化以及区域地质等问题。

§2.1　物质磁性及其表示的物理量

地壳浅部的岩石和矿体，从它们形成时起，就被地磁场所磁化。岩石和矿石被地磁场磁化的原理和物质的磁化是一样的。所不同的是地磁场对岩、矿石的磁化是长期的、在磁化过程中岩石又可能经历了各种变化，使其磁性变得更复杂。

2.1.1　物质的磁性

由电磁学中可知，任何物质的磁性都是带电粒子运动的结果。不同物质的分子和原子，由于电子壳层中电子的数量及其相互作用的不同，使其具有不同的磁性。由此可见要说明物质磁性的本质，首先必需研究原子的磁性。

原子是由带正电的核和绕核沿一定轨道转动的电子组成。沿一闭合轨道转动的电子和沿一闭合回路流动的电流相似。它产生一磁场，外磁场对它施以取向作用。若假想作一电子轨道的截面，则每当电子转一周，将有电荷 e 通过这一截面。单位时间内通过这截面的电荷为 ne，n 是单位时间内沿轨道转动的周数。因为电流强度 I 的数值等于单位时间内通过单位截面的电荷，所以沿一定轨道转动的电子相当于一强度为

$$I = ne \tag{2.1.1}$$

的电流。

单位时间内电子周转数目 $n = \frac{v}{2\pi r}$，式中 v 为电子运动速度，r 为电子轨道半径，则

$$I = \frac{v}{2\pi r} \cdot e \tag{2.1.2}$$

已知沿轨道转动的电子的磁矩相当于一个环形电流的对应磁矩，其公式为：

$$M = \frac{1}{c} IS \tag{2.1.3}$$

式中 c 为光速，S 为电流所包围的面积，I 为环形电流的强度。把(2.1.2)式代入(2.1.3)式则得电子轨道磁矩为

$$M = \frac{1}{c} \frac{v}{2\pi r} e\pi r^2 = \frac{1}{2c} vre \tag{2.1.4}$$

而电子沿轨道转动的机械动量矩为

$$P=mvr \tag{2.1.5}$$

式中m为电子的静止质量。

比较(2.1.4)和（2.1.5）两式得

$$M=\frac{e}{2mc}P \tag{2.1.6}$$

上式把沿闭合轨道转动的电子磁矩M和它的机械动量矩P直接联系起来了。

如果原子中有若干个沿不同轨道转动的电子，则各个电子的机械动量矩P_i的向量和为合动量矩P，同样，各电子的磁矩M_i的向量和为整个原子的合磁矩M。

实验表明，电子轨道运动所具有的磁矩，只能取一定的数值，其值为玻尔磁子P_0的倍数，P_0是电子具有的最小磁矩

$$P_0=\frac{e}{4\pi mc}h=0.917\times10^{-20}\text{ 尔格/高斯}$$

h为普朗克常数。

电子除绕原子核沿轨道转动外，还有自转或自旋。电子因自旋而具有的磁矩叫自旋磁矩，它的大小等于一个玻尔磁子。自旋也有动量矩。电子自旋磁矩$M_自$与自旋动量矩$P_自$之比为

$$M_自=\frac{e}{mc}P_自 \tag{2.1.7}$$

比较（2.1.6）与（2.1.7）两式，可见电子由自旋引起的磁矩与动量矩之比等于由轨道转动引起的比值的两倍。

原子的总磁矩等于由电子沿闭合轨道转动的磁矩和电子的自旋磁矩的矢量和。其总动量矩也是轨道转动动量矩及自旋动量矩之矢量和。

原子核、包括质子和中子也都有磁矩，但它们的数值很小，所以在原子的总磁矩中可以不计。有了上述原子磁性的概念，我们可以进一步来解释物质的抗磁性和顺磁性。

1. 抗磁性

抗磁性或逆磁性的物质，由于该类原子的各电子壳层中，电子成对出现，自旋方向相反，因而抵消了它的自旋磁矩；其轨道磁矩也因相邻轨道磁场的相互作用而抵消，故这类原子没有净剩磁矩。当有外磁场作用时，运动着的电子将受到罗仑茨力，在该力作用下电子将以角速度

$$\omega=\frac{eH}{2mc}$$

绕外磁场方向旋转，此即拉摩旋进，与力学中转动物体在重力场中的进动（陀螺）相似，此时，原子磁轴对外场的方向不变，ω与外磁场同向，由此旋进而产生的磁场的方向总是与其角速度的方向相反，因而原子在外磁场中由于进动而获得的磁矩ΔM与外磁场方向相反。可见，原子获得和外磁场方向相反的磁矩，亦即物体磁化的方向和外磁场相反，所以抗磁性是所有磁介质都具有的。去掉外磁场时，这种进动磁矩立即消失，并与温度无关。抗磁性物质的磁化率为负值，可用下式表示：

$$\chi_{抗磁}=-N\frac{e^2}{6mc^2}\sum\overline{r_i^2} \tag{2.1.8}$$

式中N为每立方厘米中的原子数，$\overline{r_i^2}$为第i个电子与原子核之间距离的均方值。

2. 顺磁性

物质原子的电子壳层中，含有非成对的电子，其自旋磁矩未被抵消，在外磁场作用下，电子自旋磁矩的方向转向与外磁场平行，这种特性叫顺磁性。在外磁场不存在时，整个磁介质的各个原子磁矩取向是混乱的，故不显磁性。在外磁场的作用下，原子磁矩沿外磁场方向的取向作用是由原子间的碰撞作用而引起，统计力学计算的结果得出，在原子磁矩给定时，碰撞的结果，其磁轴方向靠近外场方向的原子应占优势，因而使物体发生磁化，即产生顺磁效应。一般由于顺磁效应比抗磁效应强，故顺磁效应掩盖了抗磁效应。顺磁物质的磁化率可用下式表示：

$$\kappa_{顺磁}=\frac{N\mu^2}{3kT}=\frac{C}{T} \qquad (2.1.9)$$

式中N为每立方厘米中含有非成对电子的原子数；μ为每个顺磁物质原子的玻尔磁子的平均数（每个非成对电子的自旋所产生的磁矩叫玻尔磁子）；k为波耳兹曼常数；T为绝对温度，C为居里常数。顺磁物质的磁化率与绝对温度成反比，此现象由居里所发现，故称居里定律。抗磁性物质和顺磁性物质的磁性都很小，全是弱磁性，其磁化率一般在10^{-6}高斯·奥斯特$^{-1}$级次。图2.1.1为抗磁性和顺磁性物质的磁化率曲线。

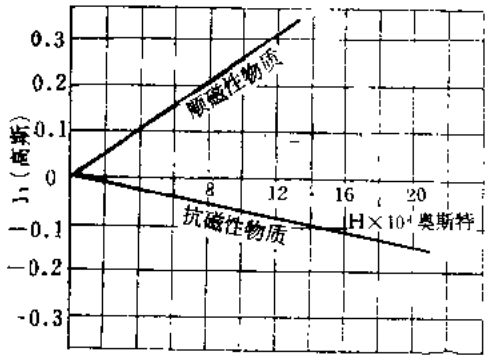


图 2.1.1 抗磁性和顺磁性物质的磁化率曲线

3. 铁磁性

有些物质（如Fe，Co，Ni)含有非成对电子，这些电子由于相邻原子间彼此相互发生交换力的作用，迫使其保持自旋平行。即使没有外磁场作用，因交换能大于原子的热扰动能，而在局部“区域”内产生平行排列，这种磁化叫做自发磁化。这种包括自发磁化介质的小区域称为“磁畴”。在有外磁场作用时，其自发磁化的磁矩，将转向与外磁场一致的方向。一般情况下，铁磁性物体内，包含多个磁畴，每个磁畴内的原子磁矩相互平行。磁畴的体积大约为10^{-6}立方毫米，每个磁畴中包含数百亿甚至数千亿个原子。而磁畴与磁畴之间存在着过渡层，其中原子磁矩由一个磁畴的方向逐渐转到相邻磁畴的方向，这种过渡层称之为畴壁（布洛赫壁）。在没有外磁场时，所有磁畴不规则地排列，整个物体不显磁性，总磁矩为零。在外磁场作用下，磁化有以下三个过程：(1)原来磁化方向和磁场方向接近的磁畴由于畴壁位移逐渐扩大体积；磁化方向和磁场方向相差很大的那些磁畴则减小体积。畴壁位移时，原子磁矩方向发生偏转变化，但其位置不变，这样的变化显然增加了整个物体沿磁场方向的磁矩。(2)若外磁场再增大，各磁畴的磁化方向都进入和磁场接近的方向。(3)磁场继续增大，则磁化方向转向磁场的方向而趋于磁饱和。以后磁场再增大，磁化强度不再增加。如果减小磁场直到零，磁化并不按原来的过程回溯，而落后于外磁场的变化，当外磁场为零时，仍有一部份磁畴滞留在原来磁场的方向，并保留有一定强度，称之为剩余磁化强度。具有以上磁化特性的物质即称为铁磁性物质。由于铁磁性物质的磁性特别强，其磁化率比顺磁性物质大万倍以上，是引起异常磁场的主要原因，因此对铁磁性的认识在磁法勘探中具有重要的意义。现简述其特征如下：

（1）磁滞现象

如图2.1.2所示，设横轴为磁场强度H_0，纵轴为磁化强度J_i，先使磁场强度由零逐渐增加至H_s，这时J_i也很快增大到J_s，当增至H_s后再增大磁场，J_s保持不变，这时铁磁质处于磁化饱和状态，J_s称为饱和磁化强度。当H_0从H_s减小至零时，J_i虽然也随着减小，但却沿AB段变化，并不减至零，而减为J_R，J_R称为等温剩余磁性。为使J_R为零，需加反向磁场。当J_i减小到零时，相应的磁化磁场H_c称为矫顽磁力。继续加强反向磁场，J_i也随之反向增大，并达到负的饱和值$(-J_s)$。再将反向磁场减小到零，然后正向增大，磁化曲线沿$DEFA$变化。J_i随磁化场的变化呈不可逆现象，称为磁滞现象。

（2）磁导率μ和磁化率κ

实验表明，物质的磁化强度J_i是磁化场的函数。对某些物质，在一定的磁场和温度范围内，J和H_0成简单线性关系：

$$\boldsymbol{J}_i=\kappa\boldsymbol{H}_0 \tag{2.1.10}$$

比例系数κ叫做磁化率。$\kappa>0$的物质称为顺磁性物质，$\kappa<0$的物质称为抗磁性物质。

对铁磁性物质而言，其磁化强度不是磁化场的单值线性函数。铁磁质J_i随H_0的变化仍可表示为：

$$\boldsymbol{J}_i=\kappa\boldsymbol{H}_0$$

但应注意，其中κ是随H_0而变化的，当H_0变化很小时，磁化是可逆的，κ可看作常数。当H_0为定值时，κ也是确定的，磁化率κ与磁场H_0的关系如图2.1.3所示。

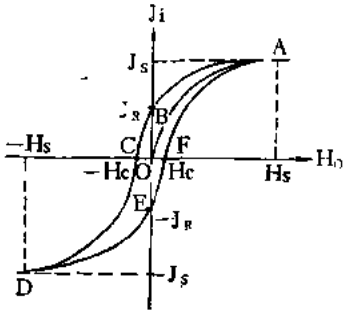


图 2.1.2 铁磁性物质的磁滞迴线

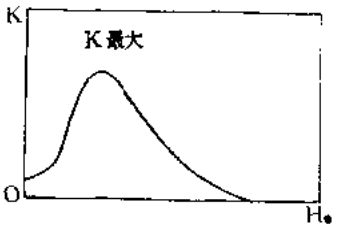


图 2.1.3 铁磁性物质磁化率与磁化场的关系
（注：图中K应为κ）

磁介质内部某点的磁感应强度与磁场强度之比称为介质的磁导率，用μ表示。即：

$$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}_0$$

其中μ与κ的关系为：$\mu=1+4\pi\kappa$，在真空中，$\kappa=0$，$\mu=1$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{H}_0$。由此可见，磁感应强度$\boldsymbol{B}$是比$\boldsymbol{H}_0$更为广泛的一个物理量，它适用于有、无磁介质存在的任何一种情况。磁导率μ是取决于介质性质的一个物理量，它与κ一样是随H_0而变化的。

（3）居里点

对铁磁性介质，当外磁场不变，温度逐渐升高时，磁畴体积的变化及转向等过程都较容易，因而温度升高，磁化率κ也随之增大，当达到某一温度时，磁化率急骤下降而变为极小（趋于零），这时原子间的热扰动能超过它们之间的交换能，由于热运动剧烈，破坏了磁畴，并使原子磁矩排列紊乱。这一温度称为居里温度或居里点。如铁的居里温度为798℃；镍为390℃；钴为1150℃。

在居里温度以上时，物质丧失铁磁性而变为顺磁性。而在丧失铁磁性以前，磁化率获

得最大值。对铁磁性介质，在磁化场增加时，加热或振动，可使磁化增加，在磁化场减弱时，加热或振动，将会使其提前去磁。

（4）铁磁性的类型及其解释

物质的铁磁性一般可分为三种类型：即铁磁性、亚铁磁性（或叫铁淦氧磁性）和反铁磁性。前已指出，铁磁性物质磁畴内原子间存在很强的正交换力，在磁畴内原子磁矩排列在同一方向。在反铁磁性物质中，同样有原子磁矩规则排列的空间，亦可称为“磁畴”，不过原子磁矩的排列不是在同一方向，而是反平行排列，这是因为两个原子之间的交换作用是通过中间原子（如氧）来实现的，这种作用力称为超交换作用力，这种作用力使物质内的磁性离子分为两个磁性次晶格，在每一个次晶格上，所有的电子自旋磁矩平行排列，而两个次晶格的磁矩方向相反。如两个次晶格的磁矩大小相等，则宏观磁矩为零，物质呈反铁磁性。反铁磁性物质也有居里温度（又称奈尔温度），高于居里点时，原子磁矩的整齐反平行排列被破坏，物质由反铁磁性状态转为顺磁性。反铁磁性物质的磁畴在无外磁场时不具磁矩，加上外磁场后，基本上不改变其反平行排列，但可使正反两方向的原子磁矩各扭转一个角度，从而使磁畴具有一定的磁矩。因此反铁磁性物质的磁化率较铁磁性物质要小得多，但具有较大的矫顽磁力。实际上反铁磁性物质往往具有很小的自发磁化强度，这是由于其晶格不完整，有错位、空穴等因素造成的，这种磁性通常称为不完全的反铁磁性或寄生铁磁性。

铁淦氧物质是指化学成分为$MOFe_2O_3$的金属氧化物，此处M指原子价为2的金属物质，诸如Mg、Ni、Co、Mn、Ti、Cu、Zn、Cd……。铁淦氧物质分子中的磁矩，主要由金属离子的磁矩来决定。由于晶胞中氧原子形成的超交换力作用，使两种金属离子（即两价和三价两种金属离子）磁矩彼此逆平行，但两种金属离子的磁矩大小不同，于是从整个晶胞体来看，形成自发磁化，产生剩余磁性，具有与铁磁性物质相同的性质。几乎所有岩石中的铁磁性矿物都是铁淦氧体。如磁铁矿、钛磁铁矿等。上述三类铁磁性物质的原子磁矩在磁畴中的排列如图2.1.4所示。

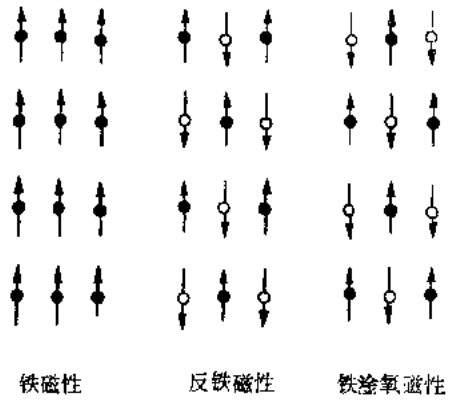


图 2.1.4 铁磁体、反铁磁体及亚铁磁体磁偶排列示意图

综上所述，物质的磁性可归纳成下面几种情况：

1．当原子或分子的磁矩总和为零时，物质显示出抗磁性。

2．当原子具有一定磁矩时，又可分为两种不同情况：

（1）当原子磁矩间没有相互作用力，物质显示出顺磁性。

（2）当原子间有很强的交换力，原子磁矩之间相互作用形成磁畴。由于磁畴内原子间的交换力不同又可分成三种情况：

（A）铁磁性物质：磁畴内原子间存在很强的正交换力，在磁畴内原子磁矩排列在同一方向。

（B）反铁磁性物质：磁畴内磁性离子间存在超交换作用力，磁畴内离子磁矩排列相反，故磁化率很小，但具有很大的矫顽磁力。

（C）铁淦氧磁性：磁畴内离子间存在超交换作用力，磁畴内磁性离子反平行排列，且磁矩互不相等，故每一磁畴仍具有自发磁矩。所以具有较大的磁化率和剩余磁化强度。

以上具有磁畴的物质，我们都称之为铁磁性物质。

2.1.2 表示岩、矿石磁性的物理量

在磁法勘探中，岩、矿石的磁性常用磁化率、感应磁化强度及剩余磁化强度来表示。

1．磁化率和感应磁化强度

岩、矿石被现代地磁场磁化而具有的感应磁化强度，仍可表示为：

$$J_i = \kappa T$$

式中T是地磁场总强度；J_i为感应磁化强度，用以表示岩、矿石被磁化的程度；κ是岩、矿石的磁化率，用以表征物质被磁化的难易程度，其值取决于岩、矿石的性质。

2．剩余磁化强度和总磁化强度

剩余磁化强度J_r与现代地磁场无关，它是岩、矿石形成时，处于一定的条件下，受当时地磁场的磁化所保留下来的磁性。

总磁化强度以J表示，表示岩石总的磁性，它与J_i，J_r的关系为：

$$J = J_i + J_r = \kappa T + J_r \qquad (2.1.11)$$

由磁化强度和磁化场的关系可以看出，二者的量纲是相同的。在实用中，磁化强度的单位常用高斯，而磁化率常表示为10^{-6}高斯·奥斯特$^{-1}$。在磁测中，对κ和J我国常用CGSM表示。在计算中应注意：在真空中和空气中1CGSM 量值与 1 高斯或 1 奥斯特是相等的。

§2.2 岩石的磁性

2.2.1 矿物的磁性

岩石是由矿物组成的，岩石的磁性与矿物的磁性直接有关。大量研究表明，岩石磁性主要决定于所含的铁磁性矿物。绝大多数矿物是抗磁性和顺磁性的，只有少数矿物具有铁磁性。铁磁性矿物种类虽不多，但分布却很广，许多岩石或多或少都含有它。与物质的磁性一样，矿物的磁性也分为：抗磁性、顺磁性和铁磁性。

1．抗磁性和顺磁性矿物

最常见的抗磁性矿物有：岩盐、石膏、石英、方解石、大理石、石墨、石油、金刚石等。这类矿物磁化率都很小，一般为$n \times 10^{-6}$CGSM 量级，在磁法勘探中 常把它们看作是无磁性的。

属于顺磁性矿物，最常见的有黑云母、辉石、角闪石、蛇纹石、堇青石、褐铁矿、石榴子石等。这类矿物的磁化率一般小于 500×10^{-6}CGSM，其变化范围是：0—5000×10^{-6} CGSM。有时因为矿物中掺有磁铁矿，会出现较高的磁性。

2．铁磁性矿物

自然界并不存在纯铁磁性矿物，主要是铁淦氧磁性的矿物，如铁的氧化物和硫化物及其它金属元素的固熔体等。这些矿物虽然数量不多，但它们的磁性很强，对岩石磁性起着决定性作用。主要矿物有：

（1）磁铁矿

纯磁铁矿的分子式为Fe_3O_4，其居里点585℃。在地壳中纯磁铁矿是少见的，绝大多数

情况下，它是由不同比例的铁、钛、氧组成复杂的固熔体。它的磁化率大小，取决于它所含的杂质；一般情况下，杂质增多磁化率减小。磁铁矿的磁化率接近于1 CGSM，其变化范围一般为0.40—2.79CGSM。在一定温度时磁铁矿(Fe_3O_4)与钛铁尖晶石(Fe_2TiO_4)是完全可溶的。因此，常见的磁铁矿往往含有TiO_2等成份。含有大量TiO_2的天然磁铁矿，一般称为钛磁铁矿。在自然界中，大部分的铁淦氧磁体差不多都由FeO、Fe_2O_3及TiO_2三种成分组合而成，称之为FeO-Fe_2O_3-TiO_2三元系。在矿物组合中，由于这三种化合物的成分比例不同，从而组成不同性质的磁性矿物。

（2）磁赤铁矿(γ-Fe_2O_3)

赤铁矿有两种类型，即α型和γ型。γ型赤铁矿也叫磁赤铁矿，具有铁磁性。γ型赤铁矿在高温时是不稳定的，当温度高达300℃时，它自发地变为α型赤铁矿。α型赤铁矿在高温时是稳定的；一般认为不纯的γ型赤铁矿（如含有Na离子）在高温时也是稳定的。α型赤铁矿基本上是反铁磁性的，有很大的矫顽磁力，磁化率不大。α型赤铁矿的一个重要特征是，当其从高温冷却时，会得到很强的温差剩磁，可以比感应磁化强度大很多。

（3）磁黄铁矿

磁黄铁矿是一种非常重要的不含铁氧化合物的磁性矿物，有时在基性岩中出现。它的分子式为FeS_{1+x}，当$x=1$时，它为FeS_2，叫黄铁矿，是顺磁性的。而$Fe_{11}S_{12}$-Fe_8S_7一般带有铁磁性，居里点为300℃—325℃，称为磁黄铁矿。

总结以上情况可以看出，在自然界里最常遇到的是铁和钛的氧化物（铁-钛-氧三元系）和铁-硫系固熔体。

铁磁性矿物不仅有较强的磁化率，还具有较大的剩余磁性。表2.2.1中列出了我国一些地区磁铁矿的磁性数据。大体可以提供磁铁矿磁性的数量概念。由表2.2.1可以看出，同是磁铁矿，由于地区不同，其磁性差别很大；即使是同一地区的磁铁矿，其磁性也在一个相当大的范围内变化。这种变化与其含量的多少、化学组份、所含杂质、磁性颗粒的大小、形状、生成条件及次生作用等因素有关。

表 2.2.1

标本产地	矿石种类	$\kappa(10^{-6}$CGSM)	$J_r(10^{-6}$CGSM)
山东某地	磁铁矿	30000	4000
河北某地	磁铁矿	16000	950
湖北某地	磁铁矿	15000	18000
云南某地	磁铁矿	126000	132000
江苏某地	磁铁矿	47500	5420
安徽某地	磁铁矿	134000	19000
黑龙江某地	磁铁矿（块状）	138700	32300
甘肃某地	磁铁矿	240000	91000

2.2.2 各类岩石磁性的一般规律

岩石中铁磁性矿物的有无、含量的多少、颗粒的大小及其分布情况，与岩石的磁性直接有关。因此，不同种类的岩石具有不同的磁性。一般说来，火成岩磁性最强，沉积岩磁性最弱，变质岩则介于二者之间，其磁性决定于其原来岩石的磁性。从表2.2.2可大致看出各类岩石磁性大小情况。

表 2.2.2

岩石类型	$\kappa(10^{-6}CGSM)$	$Jr(10^{-6}CGSM)$	岩石类型	$\kappa(10^{-6}CGSM)$	$Jr(10^{-6}CGSM)$
超基性岩	10^2—10^4	10^2—10^4	变质岩	10^0—10^3	10^0—10^2
基性岩	10^1—10^4	10^0—10^4	沉积岩	10^0—10^2	10^0—10^2
酸性岩	10^1—10^3	10^1—10^3			

（表中数字表示数量级）

1．沉积岩的磁性

沉积岩的磁性取决于它是否含有铁磁性矿物，若含有随母岩侵蚀而来的磁性颗粒，它将显示磁性，所含铁磁性矿物愈多其磁性愈强。有的沉积岩几乎不含任何铁磁性矿物（如灰岩）基本上是非铁磁性的。

沉积岩的剩余磁性均很小，其量值在10^{-7}—10^{-4}CGSM之间，一般为$n\times10^{-6}$CGSM。沉积岩的磁化率由其所含磁性矿物的情况而定，大多不超过100×10^{-6}CGSM。由于沉积岩磁性很小，在磁测中用磁秤往往不能测定，故常把它们看作非磁性的。

2．火成岩的磁性

由于火成岩一般都不同程度地含有铁磁性矿物，大多显示铁磁性特征。火成岩由酸性到基性，二氧化硅含量渐减，而铁磁性矿物含量渐增，其磁性也有逐渐增强的趋势，见表2.2.3。这说明铁磁性矿物含量的多少，对岩石的磁性有决定性的作用。

表 2.2.3

岩石名称	标本块数	$\kappa(10^{-6}CGSM)$	$Jr(10^{-6}CGSM)$	备注
海西期花岗岩	242	1150	460(97)	括号内为标本块数
燕山期花岗岩	108	340		
闪长岩	103	2000	2000	
辉长岩	444	1000	800	
	200	1000	10000	含磁铁矿较多
橄榄岩	1092	13000	13000	
角闪岩	230	13000	13000	
辉岩	61	13000	13000	
流纹岩	21	500	500	
流纹斑岩	162	2000	2000—2500(78)	
安山岩	84	2000	2000—10300(92)	
玄武岩	115	2000	200—25000(276)	

同一成份的火成岩，其磁性变化也很大，这表明成份不是决定岩石磁性的唯一因素。例如同一成份的侵入岩与喷出岩的磁性不同，喷出岩的磁性变化范围较大，J_r相对地大些。不同时代的同一种火成岩往往具有不同的磁性。例如我国东北某地海西期花岗岩κ常见值为1150×10^{-6}CGSM(242块标本)，而燕山期的κ为340×10^{-6}CGSM(108块标本)。

另外，同一岩体的不同岩相带，往往也表现出不同磁性。花岗岩的中央相与边缘相，基性与超基性岩的不同岩相带，其磁性都有差别。

一般火成岩都具有较大的Q值$\left(Q=\frac{J_r}{J_i}\right)$，所以火成岩一般具有剩磁。并且火成岩的

J_r 方向变化也较大，一般在±10°范围内变化，甚至有的可与现代地磁场反向。

火成岩的磁性不仅与其中磁性矿物的含量、颗粒大小及结构构造有关，还与火成岩中重矿物的分异、排列、冷却特点以及生成后所处条件和所经历的地质过程等复杂因素有关。当研究火成岩磁性时，既要注意κ，也要注意J_r，并应结合地质情况具体分析。表2.2.3所列的是东北某省的火成岩磁性数据，大体可表明上述火成岩的磁性特征。

3．变质岩的磁性

变质岩的磁性一般与其变质前岩石的磁性有关。但也应注意岩石受到高温和高压作用产生物理化学变化使矿物成份发生变化。

在片麻岩中，正片麻岩磁性与花岗岩接近，而负片麻岩磁性很弱，与泥砂岩相近。纯的大理岩和石英岩磁性很弱，千枚岩磁性稍强。如果这些岩石含有铁质矿物，其磁性会显著增强。如含铁石英岩、铁质千枚岩等磁性均较强。例如：松辽平原的千枚岩κ值为1000—3500×10^{-6}CGSM，片麻岩为100—500×10^{-6}CGSM，页岩为 20—70×10^{-6}CGSM，大理岩基本上是非磁性的。

在具有层状结构的变质岩中，其磁性一般随方向不同而异，表现有磁的各向异性，J_r的方向往往近于片理的方向，且沿片理方向上的磁化率数值比垂直片理方向上的要大。

§2.3 岩石的剩余磁性

岩石的剩余磁性也是因其含有铁磁性矿物颗粒造成的。由于造成剩余磁性的磁化历史不同，因而剩磁的类型和特点也不相同。

2.3.1 岩石剩余磁性的类型

1．热剩余磁性(TRM)

在地磁场中，岩、矿石由炽热的岩浆通过它的居里点冷却到正常地表温度所获得的磁性，称为热剩余磁性。热剩余磁性不仅很强，而且特别稳定。如果在常温下，在强度为一个高斯的磁场中获得的等温剩余磁性，只要环境温度略有增加，或使用1高斯的交变磁场，就可以完全将剩磁退磁。但在1高斯强度的磁场中，经高温冷却所获得的热剩余磁性，就是用几百高斯的交变磁场，往往也不能完全把其剩磁退磁。火成岩的剩余磁性主要是属于热剩磁，比较稳定。

2．沉积（或碎屑）剩余磁性(DRM)

在形成沉积岩的缓慢的沉积过程中，微细的磁性岩石颗粒按当时地磁场的方向呈定向排列，这种颗粒的排列经沉积、压实、脱水后，长期保存在沉积岩中，这样显示出的磁性，称为沉积剩余磁性。沉积岩的剩余磁性是随颗粒的母岩磁性或在沉积过程中因化学变化而形成的。这类剩磁一般也比较稳定。

3．化学剩余磁性(CRM)

在居里点以下的某一温度条件下，因化学作用（如氧化等）结果，使得磁性颗粒直径增大，或是由原来矿物变为新的矿物（如氢氧化铁还原为赤铁矿），在此过程中，受当时地磁场作用获得的剩会磁性称为化学剩余磁性。沉积岩和变质岩剩余磁性的形成常与这种过程有关。它是一种比较稳定的剩磁。

4．等温剩余磁性(IRM)

在温度为常温时，因外磁场的作用而获得的剩余磁性，叫等温剩余磁性。如闪电能使地面小范围的岩石产生剩余磁性，这种剩余磁性是不稳定的，它的大小和方向随着施加外磁场的大小和方向发生变化。

5．粘滞剩余磁性(VRM)

由于长期受某一外磁场作用，且随着时间的延续，愈来愈多的磁畴按所作用磁场的方向排列，使其剩余磁性增强，并固定下来。这种与时间有关的剩余磁性，叫做粘滞剩余磁性。这种剩余磁性随获得的时间愈长而愈稳定，因此，岩石在地质漫长时期中获得的粘滞剩磁是十分稳定的。

2.3.2 岩石剩余磁性的成因

形成岩石的天然剩余磁性的因素是复杂的，不是由单一原因造成的。岩石由形成到现在，可能经过各种地质作用、物理和化学的变化过程，这些都会影响其剩余磁性。就其成岩时形成的原生剩余磁性来说，不同类型的岩石，成因也不相同。

1．火成岩磁剩的成因

火成岩的原生剩余磁性，是由于热剩磁原因形成的。炽热的岩浆在地磁场中从高温冷却时，通常降到800℃就开始凝固，最后达到其铁磁性组分的居里点以下（一般为400℃—580℃）时，岩石中的铁磁性矿物发生自发磁化，形成磁畴，并被地磁场磁化。

在弱磁场中，磁铁矿标本从居里点冷却到室温而产生的剩余磁化强度J_{rt}，比在相应磁化场中在常温条件下产生的剩余磁化强度J_r要大好多倍。图 2.3.1 表示了磁铁矿在常温和高温下在不同磁场中获得的剩磁J_r曲线。由图可见，在弱磁场中高温的 J_{rt}比常温的J_r大几十到几百倍。对火成岩或与火成岩活动有关的磁性矿床来说，高温作用无疑是客观存在的，近年来有足够的事实证明其可能性。例如在本世纪初，日本有两处火山喷发，喷出的熔岩显然是处在现代地磁场作用之下，其中一处的熔岩Q值为27—135，另一处熔岩Q值为16—42。这一事实证明了温度在形成剩余磁化强度时的作用。对近期喷出的火山岩标本J_r值的研究，发现与 J_{rt}值（从实验室中获得）基本相同。因此可以认为，火成岩的天然剩余磁性实际上就是在地磁场中的温差剩磁或热剩磁。

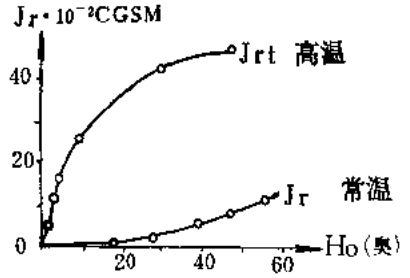


图 2.3.1 温差和等温剩余磁化强度曲线

形成热剩磁的理论解释是：在常温下铁磁性物质在弱磁场中，由于存在着阻止磁畴体积变化和磁矩转向的阻力，故磁化强度并不大。只有加大磁场才能使磁畴发生明显的变化而获得较大的磁化强度。但是在高温情况下，磁畴能获得较高的能量去克服上述阻力，故在弱磁场中也能得到强的磁化强度。例如铁磁性岩石从高于居里点的温度逐渐冷却，当经过居里点后，磁畴都排列在地磁场的方向上，形成很强的磁化强度。当温度继续下降，磁畴的热扰动能量随之减小，从而没有获得外加能量来减小磁畴的体积及使磁畴转向。因此就保留有比较强的剩余磁化强度，即热剩磁。

2．沉积岩剩磁的成因

沉积岩的剩磁成因与火成岩不同，因为它没有高温作用过程。沉积岩的剩余磁性是通过沉积作用和成岩作用两个过程形成的。

沉积岩剩余磁性的大小与磁性颗粒原来保留的剩磁大小及其它因素有关。带有剩磁(如

TRM)的岩矿颗粒大体上沿当时地磁场方向排列，由松散沉积经压实固结变为致密岩石的成岩过程中，把这种剩磁沿当时地磁场方向保存下来，即沉积剩磁或碎屑剩磁。或在沉积岩形成以后，经受氧化和脱水过程，因此能获得化学剩磁。成岩过程可能延续很长时期，因而沉积岩只有很少几种沉积物保留与沉积时密切相关的稳定剩磁。

沉积岩J_r的方向一般与T的方向一致，若J_r与地磁场方向相反时，说明成岩时的地磁场方向转向了。

3．变质岩剩磁的成因

变质作用常伴随有高温高压作用，这样就会使岩石发生物理和化学变化，因而很难保持其原来的剩余磁性。变质作用的主要影响是形成化学剩磁和高温粘滞剩磁，与此同时，矿物因压力作用形成各向异性。

变质岩剩余磁性的大小，可能除与原来矿物有关，还与生成新矿物的性质、变质时的条件等因素有关。其方向与发生变质时的外磁场方向有关。

2.3.3 岩石的反转磁化

与岩、矿石剩余磁化强度有关联的一个问题，就是反转磁化现象，即剩磁比感磁大得多并且两者方向相反。所以与它对应的磁异常是负值比正值强。图 2.3.2 表示了在反转磁化的磁铁矿体上的磁异常。

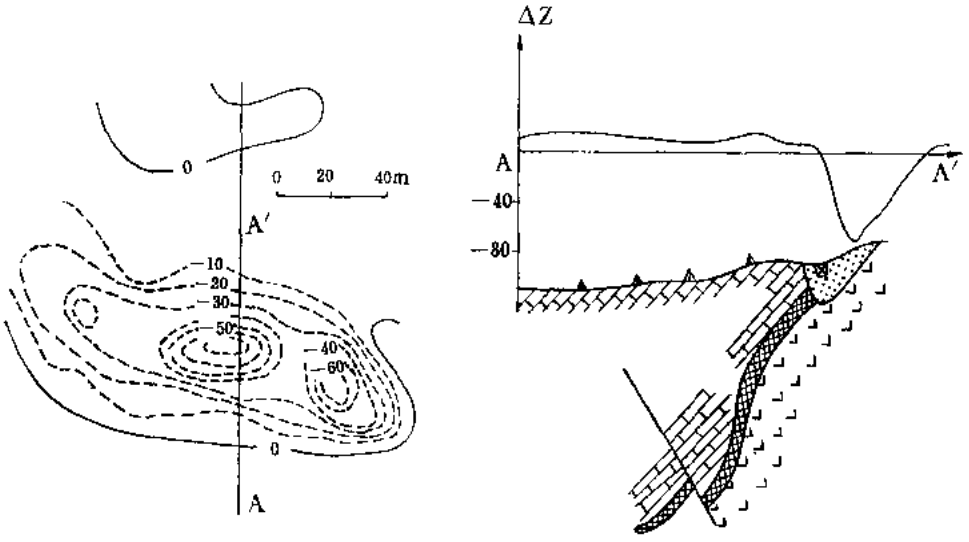


图 2.3.2 在反转磁化情况下某矿体的磁异常平面图和剖面图

(图中－40代表－4000γ)

岩石和矿石的剩余磁化强度的方向，许多都与现代地磁场方向一致或接近一致。但也有一些火成岩、喷出岩和磁性矿体，其剩余磁化强度的方向与现代地磁场方向相反。

关于反转剩余磁化的形成可能有两种解释：

一种认为地磁场本身在过去的地质年代里有周期性的迴返（极性改变），当其极性改变时形成的岩石就具有与现代地磁场反向的J_r，许多沉积岩和一部分火成岩的反转剩余磁化是属于这一类型的。

另一种可能性是认为岩石在“自身反转磁化”中获得与地磁场相反的磁化强度。有关

这方面的解释理论较多，首先考虑的是关于岩石中两种不同磁性组分的理论。这种理论认为，当岩石中存在两种磁性组分A和B时，如果组分A的居里点比组分B的居里点为高，岩石在外磁场作用下从高温冷却时，当温度下降经过A的居里点而高于B的居里点，这时A获得与外磁场相同方向的磁化强度，温度再降到低于B的居里点时，B组分就同时受到A组分的磁场和地磁场的磁化，在A、B组分很近而且A的磁场又远比地磁场强时，B组分主要受A组分磁场的磁化，而获得与地磁场方向相反的磁化强度。如果冷却后B组分的磁化强度大于A或者后来A组分受化学作用消失磁性或有选择地被移走，B组分就表现出明显的反转磁化。

除此之外，还有由于构造变动使原有剩磁反转的情况。

2.3.4 研究岩石剩余磁性的意义

岩（矿）石中因含铁磁性矿物，在成岩时受到当时地磁场的磁化而获得剩余磁性。如果在岩石形成后这种天然剩余磁化强度并未遭受次生作用而被原样地保留下来，则它的方向也就是岩石形成时该处地磁场的方向。据此，若能精确地测出岩石剩磁的方向，即可确定岩石形成时地磁场的方向，根据大量岩石剩磁的倾角和偏角资料还可确定出当时地磁极的位置。如果某些岩石在形成后又叠加了次生的磁性，则必须把它加以清除；这方面的处理方法已有许多研究，从而形成了地球物理学的一个新分支——古地磁学，即根据岩石中天然剩磁的方向，研究地球存在以来各个地质发展阶段上地球磁场发展变化的历史的科学。经研究发现，从前寒武纪到第四纪的各个地质时期内地磁极的位置是变化的，地磁极性并多次倒转，目前已有人初步确定出整个地史时期地磁极极性倒转的大致规律。目前已编出了五百万年的地磁极性表。由于古地磁学的发展，使人们对古地磁场的空间分布及时间上的变化规律等问题有了进一步认识，因而对于地磁起源的研究起着重要作用。它的发展同时对地质科学理论的发展也起了积极的推动作用；如对于无化石的沉积岩与火成岩，可以通过岩石J_r的研究进行区域的对比，还可以用于确定岩石的相对年代，因而解决了地层学和地质年代对比方面的一些问题，因而有人把J_r称为“化石磁性”。又根据对世界各大陆不同地质年代岩层的磁极移动的轨迹（称为极移曲线）研究大陆板块形成的历史等大地构造学问题。如从一个地区的岩石，测定出一个磁极位置，从另一个地区同时代的岩石，又测出一个磁极位置，而同一时期磁极只能有一个。如在北美大陆和欧洲大陆同时代的岩石测出两个磁极位置，若把北美大陆向东退回约30°，并使两极一致，大西洋就不存在了，北美大陆和欧洲大陆就连成一块。这样的研究，复活了大陆漂移学说。从而表明，通过对J_r的研究，可以解决不同构造地块之间的空间关系。此外还可从J_r的偏角和倾角推算出岩石所在地的古纬度，确定古地理极的位置，因而可以进一步研究该地的古地理古气候，分析其沉积环境以预测矿产。还有人根据J_r的结果来研究条带状赤铁矿矿床的成因问题。

在前震旦系沉积变质磁铁矿床上矿石J_r的方向往往与矿区构造线的方向有一定关系，特别与褶皱构造有着密切的关系。图2.3.3表示国外这类矿床上的一个例子。

图中表示一个向斜构造的矿体上，轴部附近矿石的J_r向两侧发散，两翼的J_r分别指向轴部，而且无论在东西还是南北剖面上，J_r的投影几乎都沿着岩层的倾斜方向，偏离不超过 ±15°。这一结果，不仅能用来推断构造，而且还可以用于确定这种磁铁石英岩的产状。

测定岩、矿石的J_r对于磁测结果的正确解释也是必不可少的，尤其当J_r较强并且与现代地磁场方向又不一致时，如果只考虑J_r则可能导致错误结论，例如可能使矿体产状计算错误；在火山岩地区，研究J_r对于区分矿与非矿问题也有着重要意义。

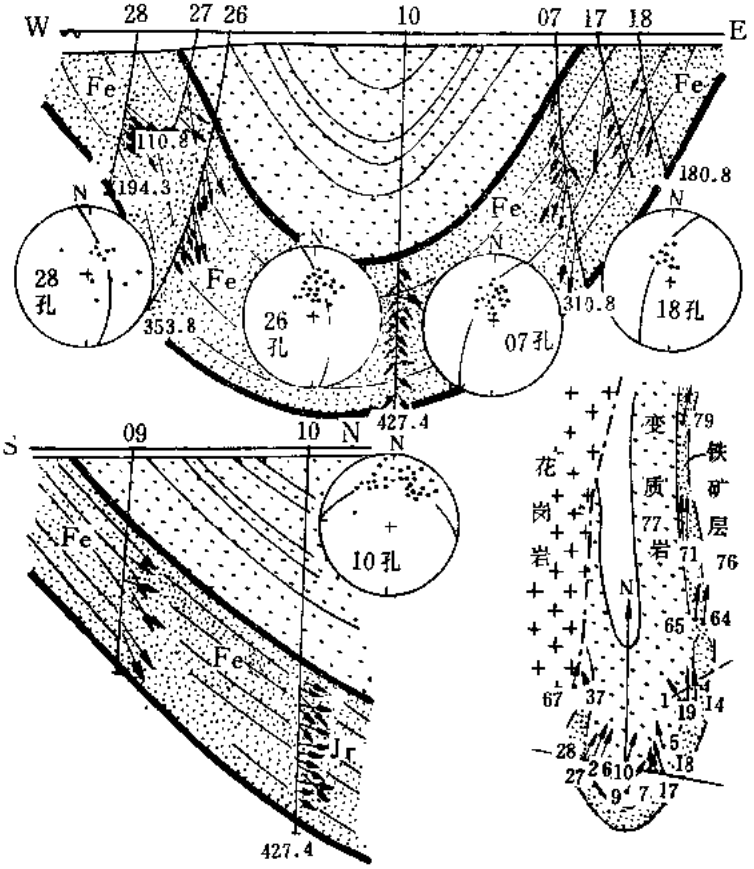


图 2.3.3 一个向斜构造矿体上J_r的方向变化

§2.4 影响岩、矿石磁性的因素

影响岩、矿石磁性的因素很多，可分为内在因素和外部因素两个方面。内因有磁性矿物的成分、含量、颗粒大小、结构等。外因有磁化场、温度、应力等。岩石磁性与各种影响因素之间的关系是复杂的，可查阅有关岩石磁学的书籍，下面仅对它们作一般介绍。

2.4.1 岩石磁性与磁性矿物的关系

岩石中铁磁性矿物的含量对岩石的磁性有决定性的影响，但两者之间的关系比较复杂。一般地讲，铁磁性矿物含量愈多，磁性也愈强。图 2.4.1 是我国湖北某铁矿的磁铁矿含量与磁化率之间的关系图。许多矿区对矿石标本的磁化率及磁铁矿体积百分含量所进行的相关分析统计结果表明：标本磁化率随磁铁矿体积百分含量的增多而增大。尽管如此，但不应从中得出磁化率与磁铁矿体积百分含量之间存在有严格的正比关系的结论。完全想通过研究磁化率来反算矿石的品位，并不是什么情况下都是可行的。因为磁铁矿的体积百

分含量虽然是决定磁化率大小的重要因素，但并不是唯一因素。

图 2.4.2 是不同颗粒度矿石的磁化率与磁铁矿体积百分含量的关系曲线。由图可见，标本磁化率不但受磁铁矿体积百分含量的影响，而且与磁铁矿的颗粒度有关。粗粒者磁化率较大，分布于回归曲线

$$\begin{cases} x = 0.2y + 26.1 \\ y = 2.8x - 17.7 \end{cases}$$

的上部，细粒者分布于回归曲线的下部，不等粒者磁性为中等，分布于两者之间。

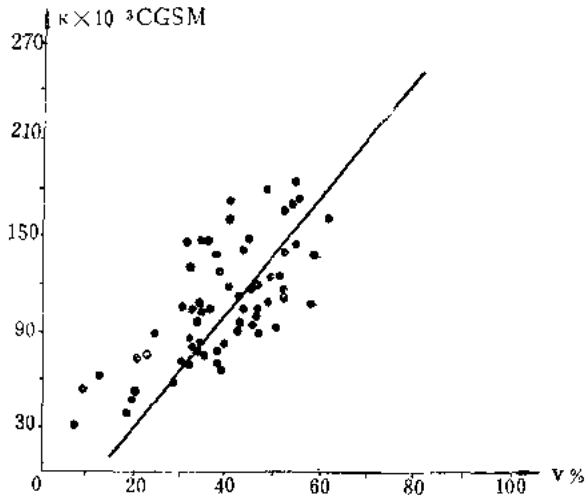


图 2.4.1 磁铁矿含量与磁化率的关系

实验结果还表明：当铁磁性矿物的相对含量不变，仅改变颗粒大小时，岩石中所含铁磁性矿物晶体颗粒愈大，磁化率也就愈大，而矫顽力H_c（可用来衡量剩磁的大小）

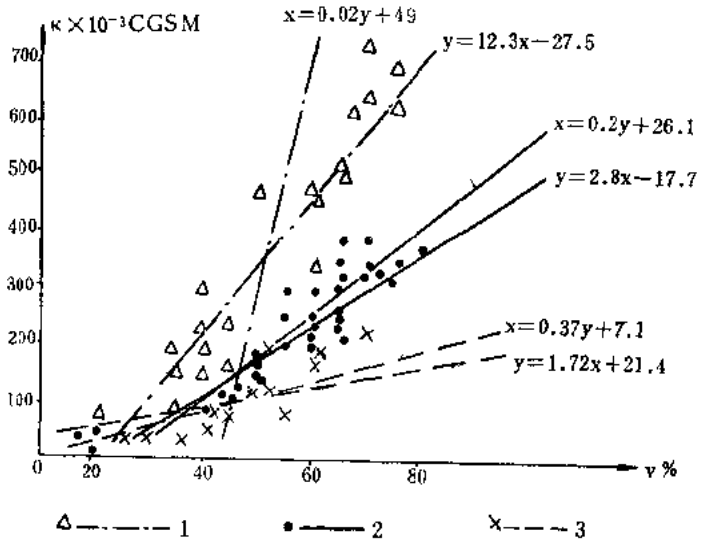


图 2.4.2 不同粒度矿石的磁化率与磁铁矿体积百分含量关系曲线

1—粗粒矿石；2—不等粒矿石；3—细粒矿石

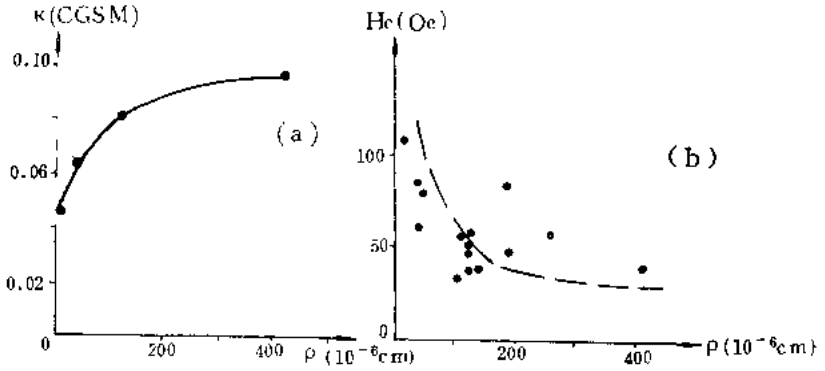


图 2.4.3

（a）磁化率κ与颗粒大小(ρ)的关系曲线（H = 1.35Oe）；（b）矫顽力Hc与颗粒大小(ρ)之间的关系曲线

与颗粒大小的关系恰恰相反，矫顽力随颗粒增大而减小，如图2.4.3所示。

另外，铁磁性矿物的分布状态也影响磁化率的大小。当铁磁性颗粒的相对含量及大小相同时，颗粒彼此孤立分布（包裹体）或相反地颗粒本身呈胶结介质出现，它们的磁化率是不同的。由于不同形状磁化体具有不同程度的消磁作用，当磁性颗粒为胶结介质时，其消磁作用较小，故其磁化强度比彼此孤立分布的情况为大。

以上结果说明，对同一种岩石或矿石，甚至在磁性矿物体积百分含量相同的情况下，也可能具有不同的磁性。

2.4.2 岩石磁性与磁化场和温度的关系

1．与磁化场的关系

当岩（矿）石从未经受外磁场磁化作用时，从宏观上讲它不显示磁性，因此时其分子磁矩或磁畴磁矩都是杂乱排列的。当有外磁场作用时，将逐步转向外场的方向，从宏观上显示出磁性来。因此，磁化场是岩（矿）石具有磁性所不可缺少的外因条件。

对顺磁性物质来说，磁化强度和磁化磁场成正比，磁化率 κ 是个常数。铁磁性岩石不存在这种正比关系，只是在磁化场很弱时，磁化过程才是可逆的，即在强度很弱的磁化场范围内，κ 仍可看作是常数。地磁场是个弱磁场，现在还没有充分的资料证明古地磁场和现代磁场在数值上有较大变化，因此岩石较大的剩余磁性，一般还不能以磁化场的大小变化去解释。

2．与温度的关系

温度对岩石磁性的影响，就其数值大小而言，它比地磁场变化影响要大。对顺磁性介质来讲，一般温度愈高，磁化愈弱，温度愈低，磁化愈强，但也易遭到热运动的破坏，影响分子磁矩的整齐排列。

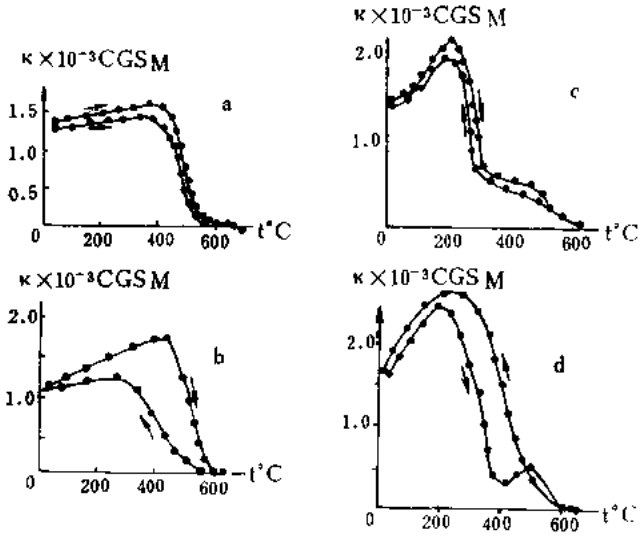


图 2.4.4 岩石磁化率随温度变化曲线

a 普通可逆型；b 普通不可逆型；c 特殊可逆型；d 特殊不可逆型

磁性矿物和含磁性矿物的岩石，一般均具有铁磁性质，铁磁介质与温度的关系，总的来说有四种类型：普通可逆型和普通不可逆型；特殊可逆型与特殊不可逆型。这对于含铁磁性物质的岩石而言也是适用的，如图 2.4.4 所示。测定岩石磁化率与温度的关系曲线是一件有意义的事情。它不仅可以用于确定岩石中铁磁性矿物的成分，而且还可以用于解释剩磁的成因。普通可逆型，可理解为岩石中是由稳定的单一铁磁性矿物所组成，过居里点温度后，磁化率 κ 趋于零。普通不可逆型 κ—t 曲线与普通可逆型相似，所不同的是冷却过程中，不再沿升温过程的曲线返回，它提示我们注意岩石标本中的铁磁性矿物是处于矿物学上的不稳定状态中，而在较短的热扰动情况下，可使其达到一个较稳定的组分。特殊可逆型 κ—t 曲线，可以认为岩石中含有不同居里点的两种以上稳定

的铁磁性矿物。特殊不可逆型反映出了其中有一种铁磁性矿物成分不稳定。

下面我们来看一个通过测定岩矿标本的热磁曲线研究磁化特征的应用实例。图 2.4.5 是河北某铁矿体上的磁异常平面图，在西部矿体上产生了强达 8000γ 的负异常，而在其它矿体上则引起10000γ以上的正异常。采集标本并测定其磁性；（1）、（2）号标本采自正异常区，其J_r的倾角θ分别为34°与65°；（3）、（4）号标本采自负异常区，其J_r的倾角θ分别为－65°与－28°。这四块标本的热磁变化曲线测定结果见图2.4.6。图中J_0是初始磁化强度，J是加热过程中的磁化强度。由图可见，热磁曲线的特点是：

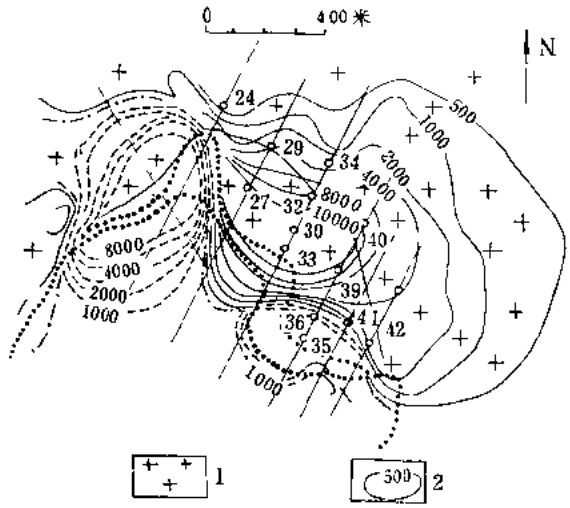


图 2.4.5　河北某铁矿区磁异常平面图
1—闪长岩；2—Z_a等值线

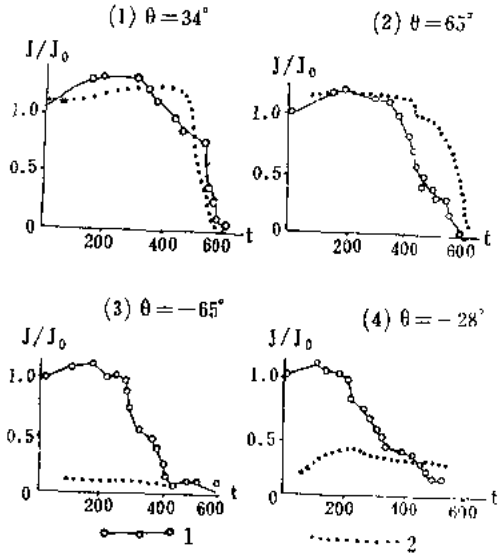


图 2.4.6　磁铁矿标本实测热磁曲线（J/J_0-t℃）
1—升温过程；2—降温过程

（1）所有标本在 560°～600℃ 以上温度时，都失去了磁性，而天然纯磁铁矿的居里点为580℃，故这组矿物组分就是磁铁矿。

（2）(1)、(2)号正常磁化标本，基本上只显示有一个居里点温度（600℃附近），属于可逆型热磁曲线。(3)、(4) 号反磁化标本的J/J_0～t曲线为不可逆型热磁曲线，两者差异很大。

两类标本热处理前后的磁化率与剩余磁化强度J_r，也有明显差异。正常磁化标本κ与J_r变化均不大，而反磁化标本的κ值与J_r值，在热处理后均成倍减小。

上述热磁分析的结果说明：对于不可逆型的反磁化标本而言，它们除含有稳定的磁铁矿物外，还含有另一种不稳定的铁磁性矿物组分，而且它是对标本的天然剩余磁化强度起基本的决定作用，其磁性远大于磁铁矿的磁性且磁化矢量的方向是偏于水平面之上的，从而导致了在矿体上方产生负异常。通过岩矿分析鉴定，确实观察到了两种铁磁性矿物，即稳定的磁铁矿和不稳定的γ-赤铁矿（磁赤铁矿）。

2.4.3　影响岩、矿石磁性的其它因素

岩、矿石在形成过程中或形成之后，经受地质构造运动，势必会受到各种应力的作用，如压力、拉伸力、地震振动等机械作用。在这些机械应力作用下，岩矿石的磁性会起变化。图2.4.7所示是对表2.4.1中的标本，在机械应力作用下磁化率的变化曲线。

这是在弱的交变磁场内，对样品进行单向压缩的试验结果。κ_0 是岩石磁化率的初始值，$\kappa/\kappa_0(/\!/)$表示平行于应力的变化，$\kappa/\kappa_0(\perp)$表示垂直于应力的变化。试验表明同一个岩石标本经单轴压缩，磁化率平行轴向减少，垂直轴向增加。后者磁化率增加的数量约为前者磁化率减小数量的二分之一。

应力对磁化的影响，实质上是磁致伸缩效应的结果。而且有些岩石在压应力去掉后不能恢复到原来的状态。

实验还表明，磁致伸缩效应一般能使岩石的剩磁方向发生改变，图 2.4.8 是单向压缩对磁铁矿剩余磁化强度的影响曲线。曲线 1 所用的磁铁矿标本是未受过变形的，曲线 2 的标本是受过单向压缩的，压缩的程度是标本所能允许的最大限度。很明显，磁铁矿的剩磁效应在压缩时是减小了。反之当施以拉伸力时，从理论上说，剩磁效应是应当增加的。

表 2.4.1

样品号	样品名称	磁铁矿含量 (%)	起始磁化率κ_0 ($\times 10^{-6}$CGSM)	内应力σ_i (kg/cm^2)
4	辉绿岩	5—6	7100	250
17	玄武岩	7—8	3860	520
19	角闪石岩	7—8	4400	200

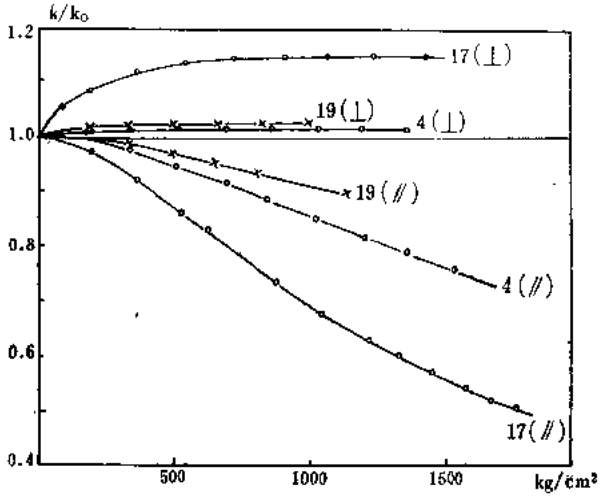


图 2.4.7 岩石磁化率与机械应力的关系曲线

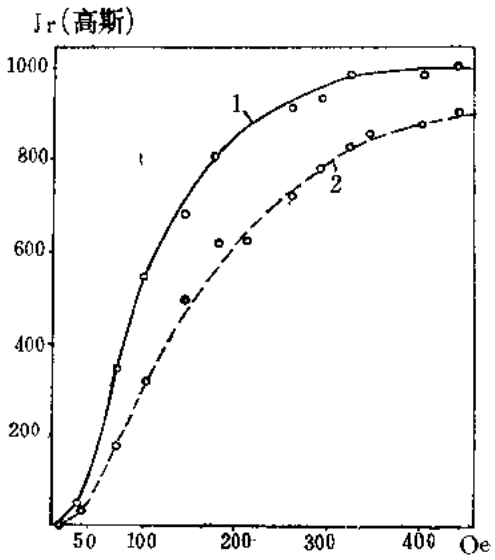


图 2.4.8 单向压缩对磁铁矿剩磁感应的影响
1—标本未受过变形时的磁化曲线；2—标本受过变形时的磁化曲线

此外，其它地质作用如变质和蚀变作用、氧化还原作用等，也会使岩矿石的磁性发生变化。还有，岩石的结构构造对磁化率也有显著影响。如沉积变质铁矿中的磁铁石英岩，铁磁性矿物呈定向排列与矽质浅色矿物相间成层状结构，因此表现有明显的磁各向异性。沿层理方向的磁化率 $\kappa_{/\!/}$ 大于垂直层理方向的磁化率 $\kappa_\perp$。如河北迁安铁矿区磁铁石英岩，其 $\kappa_{/\!/}$ 为 0.103—0.294 CGSM，$\kappa_\perp$ 为 0.063—0.126 CGSM，磁各向异性系数 $\lambda\left(\frac{\kappa_{/\!/}}{\kappa_\perp}\right)$ 为

1.61—3.20。

§2.5 物体磁化的消磁作用

由前述可知，磁化强度J_i与磁化场H_0的关系式为：$J_i=\kappa H_0$。但这个关系式只有当无限介质均匀充满磁化场空间时，才是正确的。对于自然界的岩体、矿体而言，一般都是有限的，对岩、矿石标本来说，更是有限的。有限物体的J_i与物体的形状有关。

2.5.1 消磁作用和视磁化率

1．消磁现象

设均匀介质体积有限，则受外磁场H_0磁化后，物体的表面将有面磁荷分布，因而在物体内部产生了一个与H_0相反的磁场H_e，如图2.5.1所示，从而使物体内部的磁场比外磁场H_0为小。我们称物体内部这个与外场方向相反的磁场为消磁场（或称退磁场），可表示为：

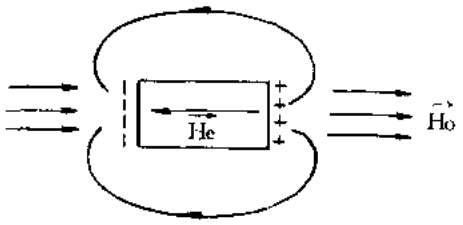


图 2.5.1 物体内消磁场示意图

$$H_e=-NJ \tag{2.5.1}$$

式中N与物体形状有关，称其为消磁系数（或退磁系数），负号表示H_e的方向与J相反，亦即与H_0相反。消磁场的存在，总是使物体的磁化强度减小，减小的程度决定于磁化强度J及消磁系数N。

当存在消磁场H_e时，物体内部的磁场为

$$H=H_0+H_e \tag{2.5.2}$$

物体的感应磁化强度应由下式表示

$$J_i=\kappa H=\kappa(H_0+H_e) \tag{2.5.3}$$

2．视磁化率

由于我们常常只知道外磁场H_0的大小而不知道退磁场H_e的大小，因此仍然希望找到感应磁化强度J_i用H_0表示的形式。

将（2.5.1）式代入（2.5.3）式，当$J_r=0$时有

$$J_i=\kappa(H_0-NJ_i)$$

经移项整理后可得：

$$J_i=\frac{\kappa}{1+N\kappa}H_0=\kappa' H_0 \tag{2.5.4}$$

式中

$$\kappa'=\frac{\kappa}{1+N\kappa},\ \text{或}\ \kappa=\frac{\kappa'}{1-N\kappa'} \tag{2.5.5}$$

κ为真磁化率，而κ'则称为视磁化率。对顺磁性与铁磁性物体，$\kappa>0$，而N总是正数，因此$\kappa'<\kappa$。

κ'反映了某种形状介质体的磁化，但是它不能用来描述介质的磁性，因为它是一个还与形状有关的物理量。相同磁性的介质体其形状不同时，视磁化率κ'也是不同的，所以只能用真磁化率κ来描述介质的磁性。由（2.5.5）式可知，当$N\kappa\ll1$时，$\kappa'=\kappa$，考虑到N值

总是在0—4π之间，若取 $N=10$，如果 $N\kappa<0.01$，则 κ 应小于0.001。由此可见，当 $\kappa<$ 0001CGSM时；可令 $\kappa'=\kappa$，其误差小于1%，也就是说，对于 $\kappa<0.001$CGSM 的物质，其视磁化率 κ' 与真磁化率 κ 可认为相等，即消磁影响可忽略不计。

2.5.2 几种规则形体的消磁系数

1．均匀磁化物体消磁系数 N 的计算

在均匀磁化条件下，$\mathrm{div}\boldsymbol{J}=0$，物体内部无体磁荷而只有表面磁荷分布，因此磁性体内部的磁场仍满足拉普拉斯方程，可通过泊松公式来计算磁性体内部的消磁场 $\boldsymbol{H}_e$。

已知 $\boldsymbol{H}_e=-\mathrm{grad}U_e$，应用泊松公式于体内有 $U_e=-\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V$，则

$$\boldsymbol{H}_e=\mathrm{grad}(\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V) \tag{2.5.6}$$

式中 V 为内部引力位。由于 $\boldsymbol{J}_i=\kappa(\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{H}_e)$，将（2.5.6）式代入后则有

$$\boldsymbol{J}=\kappa[\boldsymbol{H}_0+\mathrm{grad}(\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V)] \tag{2.5.7}$$

$\boldsymbol{J}$ 沿坐标轴的分量为：

$$J_k=\kappa\left[H_{0k}+\sum_{j=x,y,z}N_{kj}J_j\right] \tag{2.5.8}$$

式中 k、j 代表 x，y，z 坐标数，而 N_{kj} 则由（2.5.7）式可知代表 V 按相应坐标数向二次偏微商。

因为 $\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V=J_xV_x+J_yV_y+J_zV_z$

当 $k=x$ 时，$\mathrm{grad}_x(\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V)=J_xV_{xx}+J_yV_{xy}+J_zV_{xz}$

把上式代入（2.5.8）式可得：

$$\begin{aligned}J_x&=\kappa[H_{0x}+(J_xV_{xx}+J_yV_{xy}+J_zV_{xz})]\\&=\kappa\left[H_{0x}+\sum_{j=x,y,z}N_{xj}J_j\right]\end{aligned} \tag{2.5.9}$$

对比可得：

$$N_{xx}=V_{xx};\quad N_{xy}=V_{xy};\quad N_{xz}=V_{xz} \tag{2.5.10}$$

由此可见，在均匀磁化条件下，物体的消磁系数等于体内引力位对坐标变量的二次偏微商。

那么什么情况下才能满足均匀磁化的条件呢？均匀磁化必须要求均匀物体的表面是一个二次曲面。这是因为均匀磁化时，磁化场必须均匀，而磁化场包括两部分：一是磁化外场，二是物体磁化后自身所产生的磁场。要求均匀磁化，也就是除外磁场均匀，还必须自身磁场均匀，即内部消磁场均匀。前已指出消磁场等于 $-\mathrm{grad}U_e$，为使 U_e 的梯度是常量，则 U_e 必须是坐标的线性函数。按照泊松公式 U_e 和 $\mathrm{grad}V$ 成比例，所以体内的引力位必须是坐标的二次函数。只有当物体的表面是二次曲面时，它的引力位才能满足这个条件。二次曲面中只有椭球体是一个有限体。所以，一个有限体要在均匀外磁场中被均匀磁化，必须是一个椭球体。而球体、无限长椭圆柱体、圆柱体及无限延伸薄板状体可视作椭球体的一些特例。对于这些形体的退磁系数，原则上均可由体内引力位的二次偏微商求得。

2．几种规则形体的消磁系数及表达式

略去证明，直接给出几种规则几何形状物体的消磁系数及其表达式如下：

（一）球体：$N=\frac{4}{3}\pi$。

（二）无限长圆柱体：

平行柱轴方向$N=0$；

垂直柱轴方向$N=2\pi$。

（三）椭圆柱体：

设椭圆面的长、短半轴分别为 b 和a，其 c 轴很长。则

$$N_a=\frac{b}{a+b}4\pi$$

$$N_b=\frac{a}{a+b}4\pi$$

$$N_c=0$$

（四）薄板状体：

设薄板延伸很长，则平行板面方向$N=0$，垂直板面方向$N=4\pi$。

以上四种情况示于图2.5.2。

（五）三轴椭球体：

设其三个主轴的半轴长各为a，b，c，沿三个轴向的消磁系数为：

$$N_a=2\pi abc\int_0^\infty\frac{d\theta}{(a^2+\theta)\phi(\theta)}$$

$$N_b=2\pi abc\int_0^\infty\frac{d\theta}{(b^2+\theta)\varphi(\theta)} \qquad (2.5.11)$$

$$N_c=2\pi abc\int_0^\infty\frac{d\theta}{(c^2+\theta)\phi(\theta)}$$

$$\phi(\theta)=\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}$$

$$N_a+N_b+N_c=4\pi$$

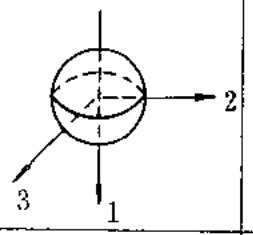
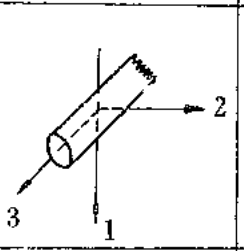
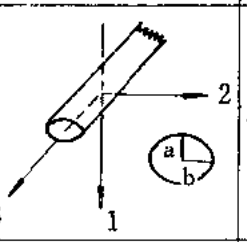
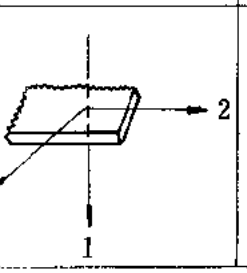
图　形	磁化方向		
	沿1	沿2	沿3
	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$
	2π	2π	0
	$4\pi\frac{b}{a+b}$	$4\pi\frac{a}{a+b}$	0
	4π	0	0

图 2.5.2　各种规则形体及其消磁系数

上述积分为椭圆积分，可由电子计算机用数值积分方法计算。图 2.5.3 是求三轴椭球体消磁系数的诺谟图，根据 a/c 及 b/c 值，由图中查得相应的系数并乘以4π，即得某一轴向的消磁系数。

（六）旋转椭球体：

当椭球体中有二轴长相等时，即为旋转椭球体。可分为：

旋转长椭球体$(a>b=c)$

$$N_a=4\pi\frac{1-e^2}{e^2}\left(\frac{1}{2e}\ln\frac{1+e}{1-e}-1\right)$$

$$N_b=N_c=2\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1-e^2}{2e^3}\ln\frac{1+e}{1-e}\right) \qquad (2.5.12)$$

旋转扁椭球体$(a=b>c)$

$$N_a=N_b=2\pi\left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e-\frac{1-e^2}{e^2}\right) \qquad (2.5.13)$$

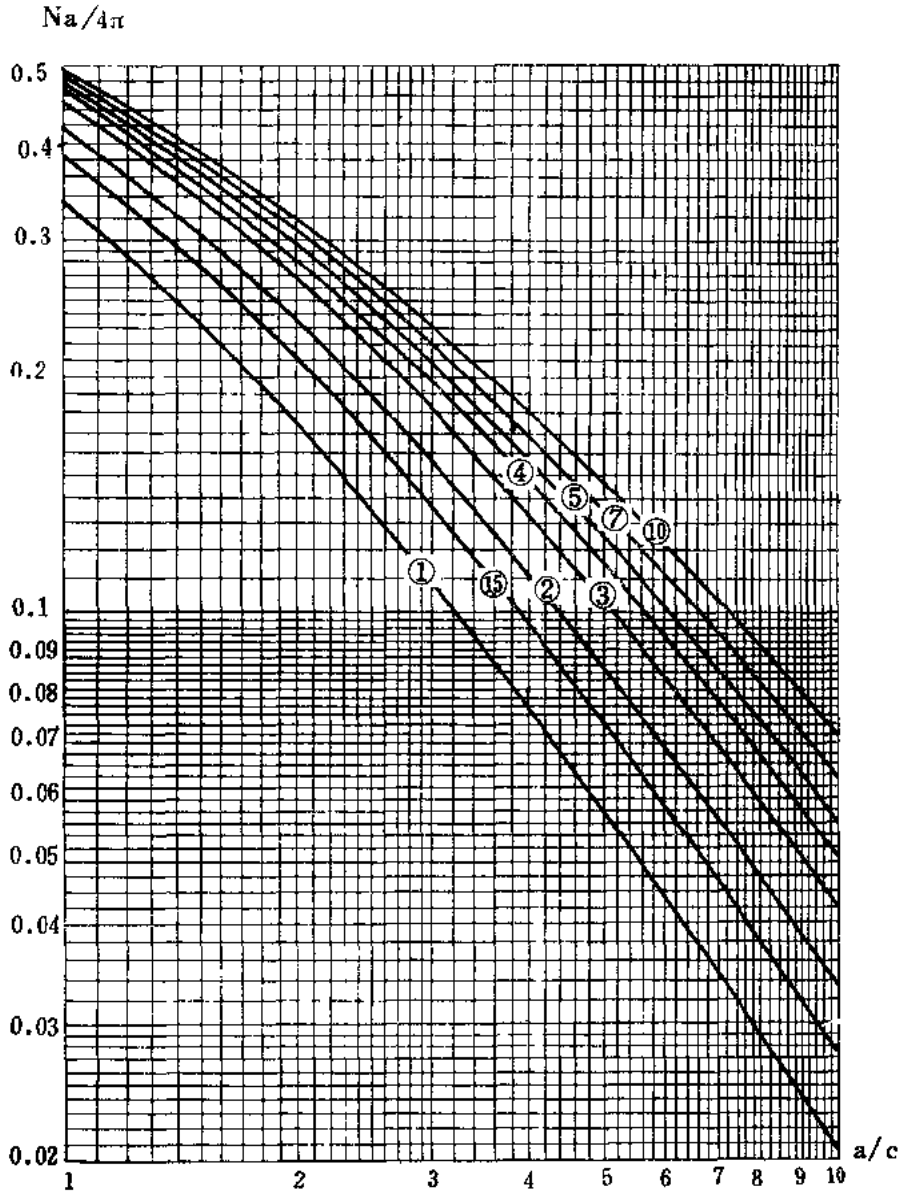


图 2.5.3 三轴椭球体消磁系数诺谟图

（图内数字为参数$\frac{b}{c}$值）

$$N_c=4\pi\left(\frac{1}{e^2}-\frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}\arcsin e\right)$$

式中 e 为椭圆率，$e=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}$。图 2.5.4 是求解旋转椭球体消磁系数的诺谟图，其方法同三轴椭球体。

（3）用实验方法求得的几种形体的消磁系数

对于不是由二次曲面所限定的物体，由于不满足均匀磁化的条件，一般不通过计算的

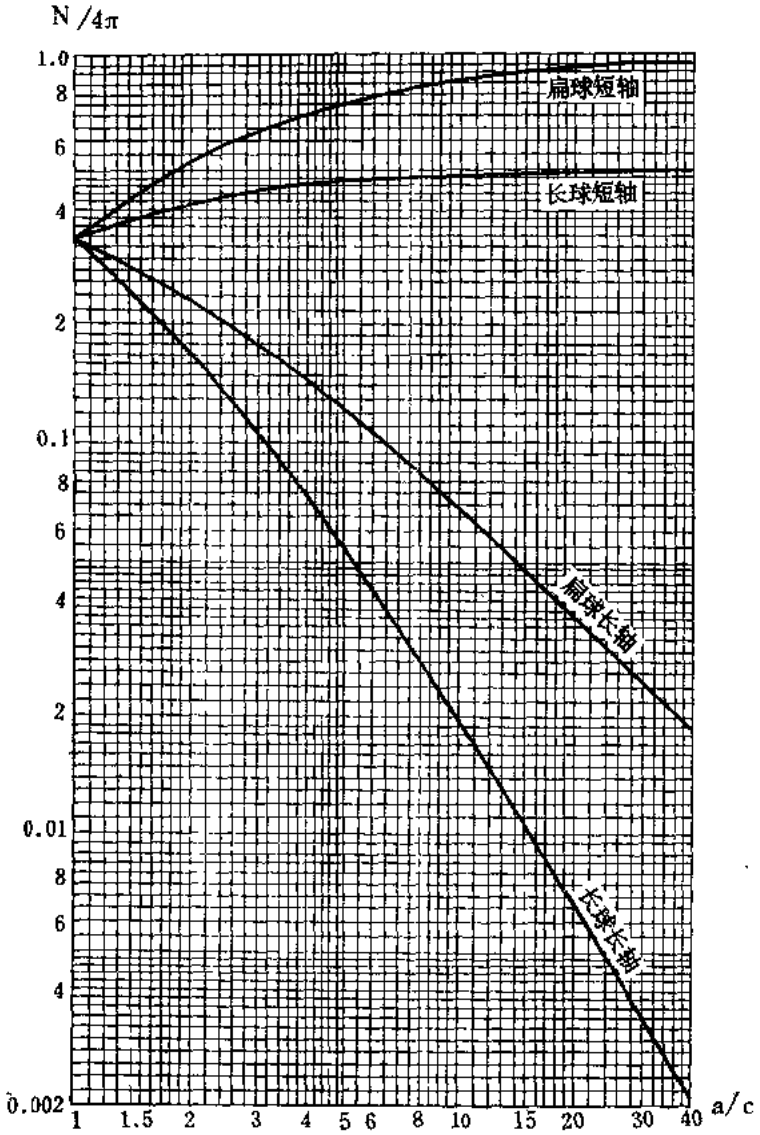


图 2.5.4 旋转椭球体消磁系数诺谟图

办法，而是采用模拟实验的方法以求得消磁系数。即用橡皮泥与铁淦氧磁性粉末混合制作成特定形状的模型体，当已知其真磁化率 κ 并测出标本的视磁化率 κ' 后，则可利用由(2.5.5)式导出的关系式

$$N = \frac{\kappa - \kappa'}{\kappa\kappa'} \tag{2.5.14}$$

求出相应的消磁系数。

现将用实验方法求得的圆柱体、半圆柱体、长方体的求解消磁系数的诺谟图，示于图2.5.5—2.5.7。

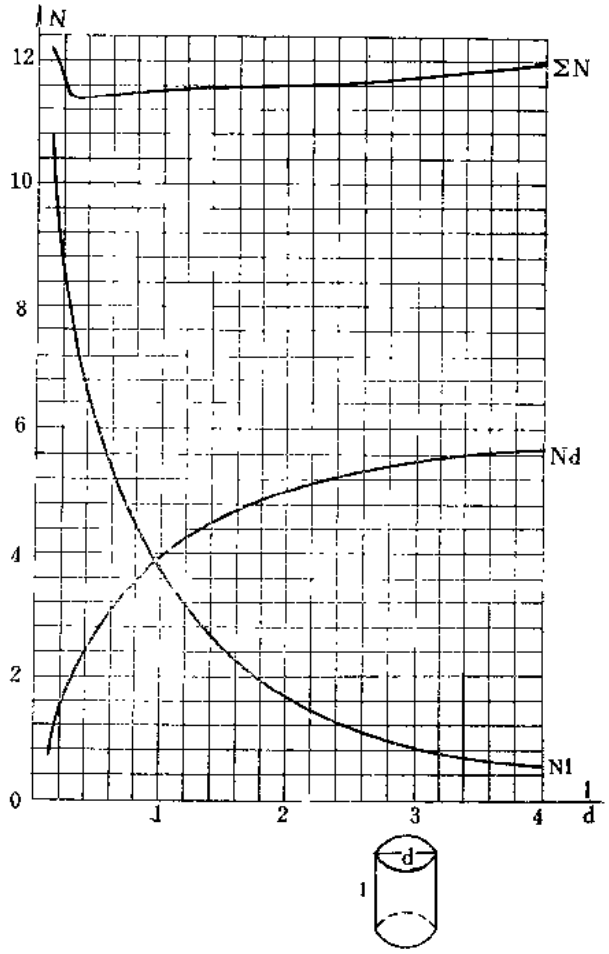


图 2.5.5 圆柱体消磁系数诺谟图

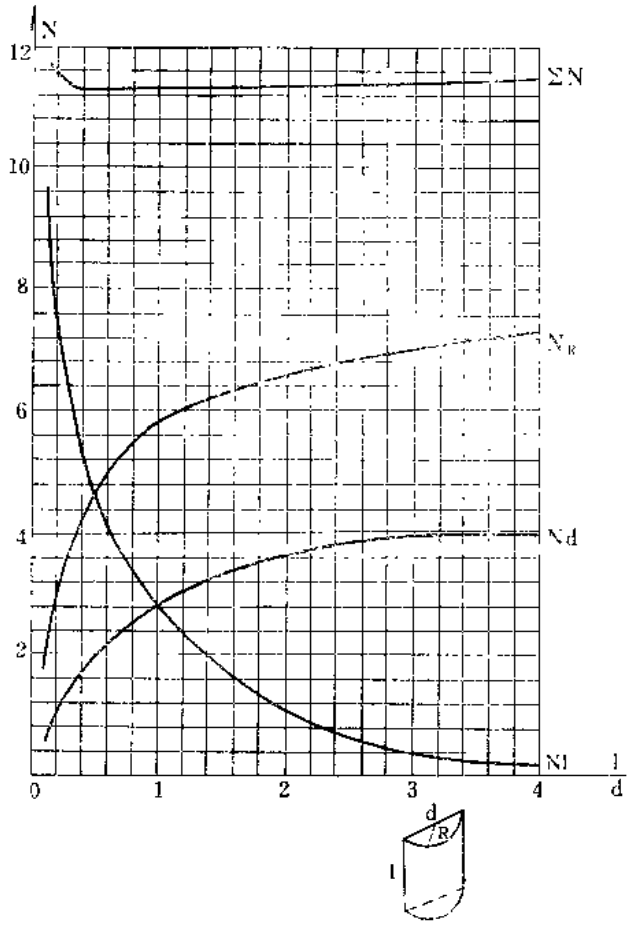


图 2.5.6 半圆柱体消磁系数诺谟图

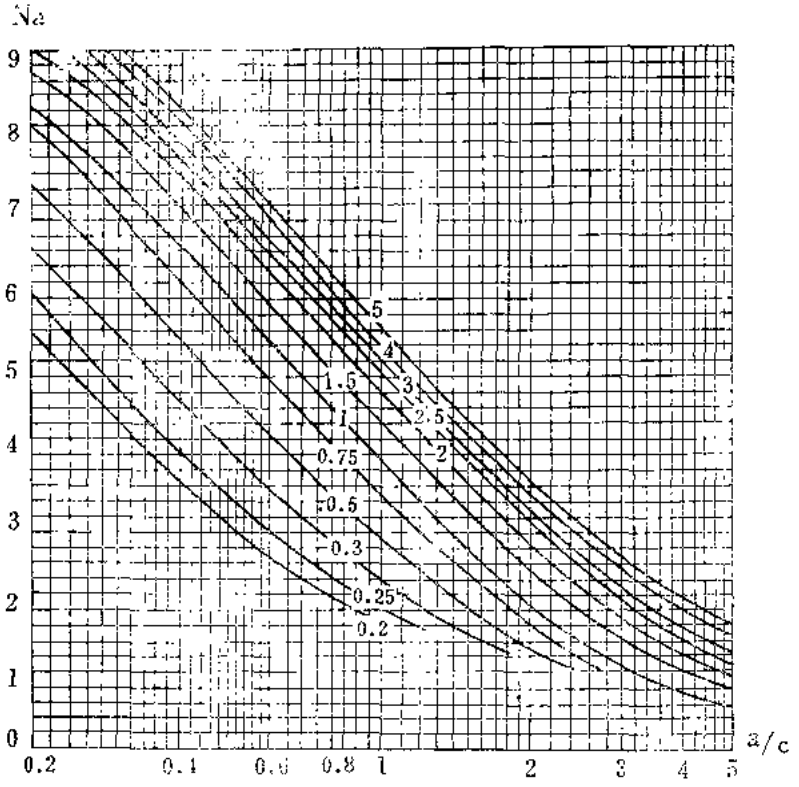


图 2.5.7 长方体消磁系数诺模图($\kappa=0.3$CGSM)

长方体三个方向的长度分别为 a、b、c，曲线中数值为b/c值

2.5.3 消磁作用对J_i方向的影响

由不同形体的N值可以看出，除球体外，同一形体不同方向的消磁系数不同，因此消磁作用不仅会影响J_i的大小，还会影响到J_i的方向。若有一长度很大的水平圆柱体，受到倾角为45°的地磁场T_0的磁化。设矿体$\kappa=0.1$CGSM，看其由消磁作用所引起的J_i大小和方向的变化。由图2.5.8可见，J_i沿x、z轴的分量为：

$$J_{ix}=\frac{\kappa}{1+N_x\kappa}T_{0x}$$

$$J_{iz}=\frac{\kappa}{1+N_z\kappa}T_{0z}$$

由于$N_x=0$，$N_z=2\pi$，则有

$$J_{ix}=\kappa T_0\cos45^\circ;\ J_{iz}=\frac{\kappa}{1+2\pi\kappa}T_0\sin45^\circ$$

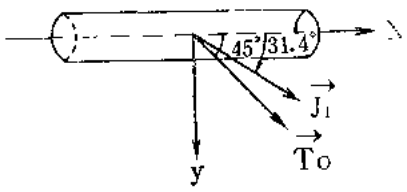


图 2.5.8 N对J_i的影响

J_i的倾角α可由下式求得：

$$\mathrm{tg}\alpha=\frac{J_{iz}}{J_{ix}}=\frac{1}{1+2\pi\kappa}\doteq0.61$$

查表得$\alpha=31^\circ$。由此可见，消磁作用使J_i偏离磁化场T_0的方向达13°多。

一般κ愈大，J_i偏离T_0的方向愈大，而且总是偏向磁性体的长轴方向。当磁性体为非强磁性($\kappa<0.01$CGSM)时，则J_i偏离T_0的方向较小，可不考虑。

2.5.4 消磁与剩磁的关系

在以上讨论中，均未考虑剩余磁性。实际上岩、矿石的剩余磁性是存在的。剩余磁化强度与现代地磁场无关，因此谈不上现代地磁场对它的磁化而引起$\boldsymbol{J}_r$本身的消磁问题。但是当$\boldsymbol{J}_r$存在时，物体的磁化强度为$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_i+\boldsymbol{J}_r$，因而改变了消磁场的大小，也将影响感应磁化强度和总磁化强度。此时，

$$\boldsymbol{H}_e=-N\boldsymbol{J}=-N(\boldsymbol{J}_i+\boldsymbol{J}_r)$$

所以 $$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_0-N(\boldsymbol{J}_i+\boldsymbol{J}_r)=\boldsymbol{H}_0-N(\kappa\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}_r) \tag{2.5.15}$$

$$\boldsymbol{J}_i=\kappa\boldsymbol{H}=\kappa[\boldsymbol{H}_0-N(\kappa\boldsymbol{H}+\boldsymbol{J}_r)] \tag{2.5.16}$$

由上式可得：

$$\boldsymbol{J}_i=\frac{\kappa\boldsymbol{H}_0-\kappa N\boldsymbol{J}_r}{1+N\kappa}$$

$$=\frac{\kappa}{1+N\kappa}\boldsymbol{H}_0-\frac{\kappa}{1+N\kappa}N\boldsymbol{J}_r \tag{2.5.17}$$

由此可见，当有剩磁$\boldsymbol{J}_r$存在时，$\boldsymbol{J}_i$中又增加了一项：$\frac{\kappa}{1+N\kappa}N\boldsymbol{J}_r$，称此项为剩磁改正项。

物体的总磁化强度为：

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_i+\boldsymbol{J}_r=\left(\frac{\kappa\boldsymbol{H}_0}{1+N\kappa}-\frac{N\kappa\boldsymbol{J}_r}{1+N\kappa}\right)+\boldsymbol{J}_r$$

$$=\frac{1}{1+N\kappa}(\kappa\boldsymbol{H}_0)+\frac{1}{1+N\kappa}\boldsymbol{J}_r$$

$$=\frac{1}{1+N\kappa}(\kappa\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{J}_r) \tag{2.5.18}$$

若令 $$\boldsymbol{J}_i'=\frac{1}{1+N\kappa}\boldsymbol{J}_i\ ,\ \boldsymbol{J}_r'=\frac{1}{1+N\kappa}\boldsymbol{J}_r \tag{2.5.19}$$

则仍有 $$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_i'+\boldsymbol{J}_r' \tag{2.5.20}$$

由式（2.5.20）可以看出，当有剩磁$\boldsymbol{J}_r$存在时，消磁作用既影响$\boldsymbol{J}_i$，也影响了$\boldsymbol{J}_r$及总磁化强度$\boldsymbol{J}$。$\boldsymbol{J}_i'$与$\boldsymbol{J}_r'$，按习惯可看作是经过消磁改正后的感应磁化强度和剩余磁化强度。但它只是一种形式，物理实质上并不存在现代磁场对物体$\boldsymbol{J}_r$的消磁作用。

第三章 磁 力 仪

在磁法勘探中，不论是测量地磁场强度绝对值还是测量其相对值的仪器，统称其为磁力仪。目前的磁力仪种类虽多，但就其工作原理不同，大体上可分为机械式磁力仪和电子式磁力仪两大类。属于电子磁力仪的主要有：磁通门磁力仪、核子旋进磁力仪、光泵磁力仪及超导磁力仪等。机械式磁力仪出现较早，电子磁力仪则是较近代的仪器。由于电子磁力仪性能上的优势，有逐步取代机械式磁力仪的趋势。随着工业技术的进展，磁力仪也在不断完善和更新。本章将重点讨论目前我国广泛应用的主要类型的磁力仪的工作原理和结构。

§3.1 概 述

磁力仪按其测量磁场空间领域的不同，可分为：地面磁力仪、航空磁力仪、海洋磁力仪及井中磁力仪等。以其测量对象的不同，可分为测量地磁场绝对值的磁力仪和测量地磁场随时间变化的磁力仪，即磁力测变仪；以及测量空间中地磁要素相对变化的磁力仪。

3.1.1 磁力仪的绝对测量和相对测量

不论用磁法研究地质构造还是普查某些矿产，我们要直接研究的是磁异常。由于磁异常$\boldsymbol{T}_a$是空间矢量，直接测量$\boldsymbol{T}_a$比较困难。实际工作中常测量$\boldsymbol{T}_a$的分量，如垂直分量$\boldsymbol{Z}_a$，水平分量$\boldsymbol{H}_a$，以及地磁场总强度的模量差$\Delta\boldsymbol{T}$。$\Delta\boldsymbol{T}$习惯上称为总强度磁异常。

由于$\boldsymbol{T}_a=\boldsymbol{Z}_a+\boldsymbol{H}_a=\boldsymbol{Z}_a+\boldsymbol{H}_{ax}+\boldsymbol{H}_{ay}$，其中$\boldsymbol{H}_{ax}$、$\boldsymbol{H}_{ay}$分别为$\boldsymbol{H}_a$的x轴向和y轴向的分量，$\boldsymbol{Z}_a$是$\boldsymbol{T}_a$的垂直分量，$\boldsymbol{Z}_a$总是在地平面的垂直方向变化，所以可将$\boldsymbol{Z}_a$看作标量$Z_a$。$\boldsymbol{H}_a$为平面矢量，因其方向是逐点变化的，不易测量，它可通过测量H_{ax}和H_{ay}而后合成求出$\boldsymbol{H}_a$。

以解决地质问题的可能性来讲，测量磁异常的任一分量，在理论上解决地质问题的可能性是相同的。

为要求得异常值，可以采用两种办法，即相对测量和绝对测量。相对测量无需知道测点磁场的实际数值，只要测出测点磁场值相对于正常场中某一固定点的相对值即可。绝对测量要测出各点的实际磁场值，而后，即可得两点间的磁场差值，分别以ΔH_x、ΔH_y、ΔZ表示，即有：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta H_x=H_x-H_{ox},\quad \Delta H_y=H_y-H_{oy}\\&\Delta Z=Z-Z_o,\end{aligned}\right\}\tag{3.1.1}$$

式中H_{ox}、H_{oy}、Z_o为正常场中基点上的磁场值，而H_x、H_y、Z为测点上的磁场值。

在磁法勘探中，上述磁场差值包含了异常值和正常值之差两部分，通过改正计算，可得测点上的磁异常值。磁异常一般相应地以H_{ax}、H_{ay}、Z_a表示，它们和总磁异常$\boldsymbol{T}_a$的关系如下：

$$T_a=(H_{ax}^2+H_{ay}^2+Z_a^2)^{\frac{1}{2}}\tag{3.1.2}$$

机械式磁力仪，磁通门磁力仪都是相对测量仪器，一般测ΔZ及ΔT，有时测ΔH_x、ΔH_y。前者精度一般为±5—±10γ，后者为±1—±10γ。

质子旋进式磁力仪，光泵磁力仪及最新的超导磁力仪，多为绝对测量仪器，主要测定T值。其精度各为±0.1γ、±(0.01～0.005)γ及(10^{-3}—10^{-6})γ。这类仪器不仅可用于磁法勘探，还用于国防磁探测，宇宙磁探测以及地磁绝对测量。

3.1.2 对磁力仪性能的要求

原则上讲，凡是物理学中能用来发现磁场存在和变化的有关原理和方法，都可用来设计磁测仪器。不论用何种原理设计磁力仪，从适应磁法勘探工作的要求来讲，磁力仪一般应满足以下要求：

（1）仪器应能准确测量所选择的要素值或其相对变化，而不受（或少受）其它要素的影响。如要测ΔZ，就应消除H的影响。

（2）为能测得强弱不等的磁异常，磁力仪应有较高的灵敏度和稳定性，还应有较大的测程。

（3）为保证磁力仪的精度，磁力仪应具有一定抗干扰能力，或能消除非测量对象和条件变化的影响，如温度、磁性材料和地磁纬度等变化的影响。

（4）磁力仪应适于观测条件的要求。如地面磁力仪要具有体积小、重量轻、便于操作、便于携带、耗电量小及便于野外使用的特点。而航空磁力仪应适于运动状态下观测磁场。

下面除介绍测量磁场强度的磁力仪外，还将介绍测定岩（矿）石标本磁性的磁力仪。

§3.2 机械式磁力仪

机械式磁力仪是一种应用最早的磁测仪器。最初仅是一种由矿山罗盘改造而成的灵敏度很低的仪器。1915年阿道夫·施密特的刃口式磁力仪出现后，机械式磁力仪才广泛用于磁法勘探工作中。这类仪器都是相对测量仪器，其直接反映磁场变化的部份叫磁系，它的主要部分是由一块精密的永久磁铁做成的，利用力矩平衡原理来观测磁场，对磁场的测量类似于秤的原理，故又名磁秤。

目前使用的机械式磁力仪，因磁系旋转轴的不同，又有悬丝式和刃口式磁力仪之分。悬丝式磁力仪在本世纪卅年代才出现，至今仍是我国的常用仪器。

磁力仪因其测量要素的不同，又分为垂直磁力仪和水平磁力仪。不管这类仪器有多少变种，其测量原理基本是类同的。本节重点介绍常用的悬丝式垂直磁力仪。

3.2.1 悬丝式垂直磁力仪

1．悬丝式垂直磁力仪的工作原理

悬丝式磁秤的核心部分是磁系，它相当于一个可绕水平轴转动的磁针。由磁系的结构特点所决定，整个磁系的质量中心不在悬丝所通过的旋转轴上，而是在悬丝的下方且偏向S极一边。因此可简化为图3.2.1。磁棒S、N极的连线为磁轴，以O'表示磁系的重心，O表示悬丝通过的位置，即磁系的旋转轴。

为了测量地磁场垂直分量的相对值，使转轴（悬丝）水平地位于磁南北方位，以便磁系能在磁东西方位的铅垂面内摆动，此时水平磁场H在磁系转动面上的分量为零，对磁系不

产生转动磁力矩。并且，为了观测垂直磁异常具有较高的灵敏度，磁棒近于水平放置，使垂直磁场产生转动磁力矩最大。

在图3.2.1中，设OO'的长度为d，OO'与磁轴夹角为β，磁系的质量为m，重力加速度为g，地磁场的垂直强度为Z，磁轴倾角为i。磁系两极的磁荷量为m_c。

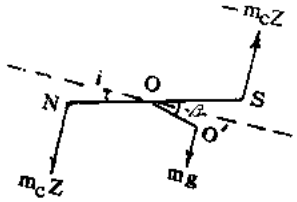


图 3.2.1 垂直磁秤磁系工作原理图

磁系将受三个力矩的作用：

(*A*)磁力矩

磁棒受到一力偶的作用，力偶矩即磁力矩，其大小为$ZM\cos i$。M为磁棒磁矩。

(*B*)重力矩

磁系受到的重力为mg，重力矩为$mgd\cos(\beta-i)$。

(*C*)扭力矩

当磁轴的倾角为i时，悬丝对磁系发生i角的扭转，以τ表示悬丝的扭力系数，则悬丝对磁系产生的扭力矩为$2\tau i$，它的方向与磁矩方向相反。

磁棒平衡时，各力矩的总和应为零，即

$$ZM\cos i=mgd\cos(\beta-i)+2\tau i \tag{3.2.1}$$

(3.2.1) 式经整理，并且$M\cos i$除全式得

$$Z=\frac{mgd\cos\beta}{M}+\frac{mgd\sin\beta}{M}\mathrm{tg}i+\frac{2\tau i}{M\cos i} \tag{3.2.2}$$

上式对任意大小的i值都是满足的，但实际设计将磁系倾角范围限制在$\pm2^\circ$以内。

当i角如此小时，肉眼很难观察，为此磁秤采用光学系统进行观测，称为光系。光系读数原理如图3.2.2，光线由刻度尺上S'处垂直向下射到磁系的反光镜上(镜面与磁轴平行)，经反射后到刻度尺上S_0处，当磁系倾角为i时，入射光线与反射光线的夹角为$2i$，由图知：

$$\mathrm{tg}2i=(s_0-s')/f$$

式中f为光臂（光系物镜的焦距）。因i很小，则有$\mathrm{tg}2i\doteq2\mathrm{tg}i$，故

$$\mathrm{tg}i=\frac{s_0-s'}{2f}$$

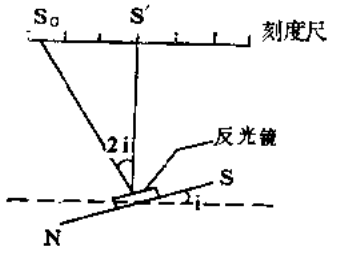


图 3.2.2 磁秤光系读数原理图

代入3.2.2式得：

$$Z=\frac{mgd\cos\beta}{M}+\frac{mgd\sin\beta+2\tau}{2fM}(s_0-s') \tag{3.2.3}$$

因M、m、g、d、β、τ、f等在仪器调好后均为常数，可令

$$A=\frac{mgd\cos\beta}{M},\quad \varepsilon=\frac{mgd\sin\beta+2\tau}{2fM}$$

则上式可写成：

$$Z=A+\varepsilon(s_0-s') \tag{3.2.4}$$

如磁轴水平，$i=0$，则$s_0=s'$，故s'是磁轴水平时的读数，称为仪器的零点。

设在正常场上（即基点上），地磁场垂直分量为Z_0，磁秤光系读数为s_0，在任一测点上垂直分量为Z_i，读数为s_i，则应有：

$$\left.\begin{aligned} Z_0 &= A + \varepsilon(s_0 - s') \\ Z_i &= A + \varepsilon(s_i - s') \end{aligned}\right\} \qquad (3.2.5)$$

上式求差，即得 $\Delta Z_i = Z_i - Z_0 = \varepsilon(s_i - \varepsilon_0)$ (3.2.6)

ΔZ_i表示任一测点相对于基点的地磁场垂直分量的差值，式中ε为常数，称为磁秤的格值。垂直磁秤即是按（3.2.6）式测量两点间垂直磁场强度之差值的。这一差值经消除干扰后，即为测点的磁异常值。在求ΔZ_i时不必测定Z_i及Z_0的绝对值，故磁秤仅作相对测定。

2．悬丝式磁力仪的结构

悬丝式磁力仪种类繁多，这里仅以我国生产并在国内通用的CS_2-61型磁力仪加以讨论。其外形见图3.2.3。磁力仪由磁秤的主体、确定磁秤放置方位的罗盘及安放磁秤主体的脚架组成。磁秤上有读数镜筒（光系）、铝制外壳、开关旋扭、扭鼓刻度旋扭、温度计及底盘等。脚架由木质三角架及架头组成。架头有固定仪器位置及调节仪器水平的装置，有固定部分和转动部分，转动部分与仪器的底盘密合，可绕垂直轴转动。

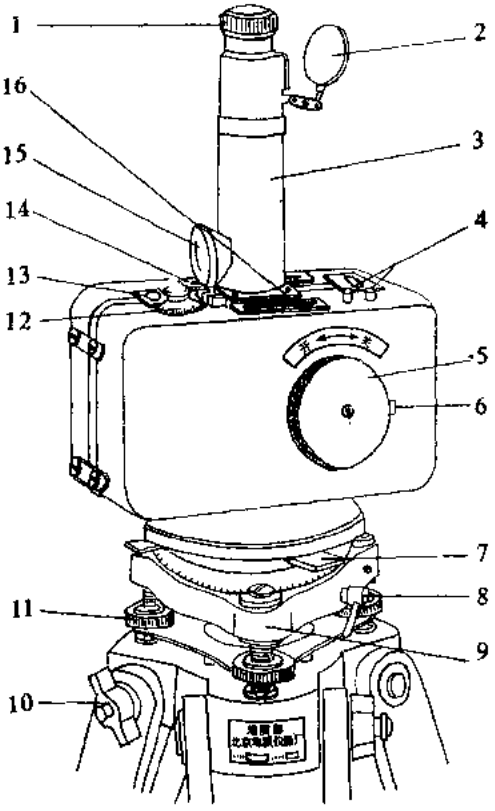


图 3.2.3 悬丝式垂直磁秤外貌图

1—目镜；2—光源反射镜；3—镜筒；4—调节水泡孔遮盖；5—开关旋扭；6—开关按扭；7—三脚架锁盘；8—架头锁紧把手；9—三脚架底盘；10—三脚架木腿紧锁螺丝；11—架头调平螺丝；12—扭鼓刻度旋扭；13—扭鼓度盘放大镜；14—温度计读数窗；15—扭鼓盖；16—水准器

磁秤的内部结构如图3.2.4所示，可分为四部分，即（1）磁系，（2）光系，（3）扭鼓和弹簧，（4）夹固开关。分述如下：

（1）磁系

磁系包括磁棒、灵敏度螺丝、温度螺丝、

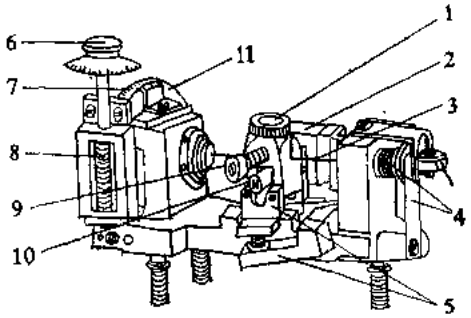


图 3.2.4 悬丝式垂直磁秤内部构造图

1—反光镜；2—阻尼框；3—悬丝；4—弹簧；5—夹固装置；6—扭鼓刻度旋扭；7—扭鼓刻度盘；8—扭鼓螺杆；9—温度螺丝；10—磁棒；11—扭鼓蜗轮

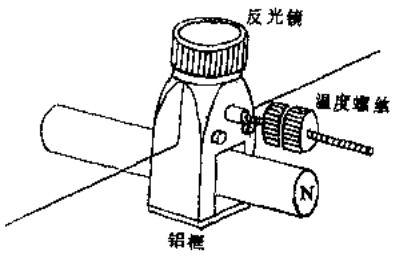


图 3.2.5 悬丝式垂直磁秤磁系图

悬丝、反光镜和铝框，如图3.2.5所示。

磁棒固定在铝框上，它的两端距悬丝的长度是不相等的，N极一端短，S极一端长。悬挂磁系的悬丝是扁平的，其两端水平地固定在与仪器外壳相连的支架上。工作时磁系绕悬丝并以其为水平轴转动。下面着重介绍灵敏度螺丝和温度螺丝的作用。

（A）灵敏度螺丝和格值

已知磁秤的灵敏度为$\Delta i/\Delta Z$，也可写为$\Delta s/\Delta Z$，，其单位为（格/伽伪）。由（3.2.6）式可知$\frac{\Delta s}{\Delta Z}=\frac{1}{\epsilon}$，即格值和灵敏度互为倒数。观测弱磁异常时，仪器的灵敏度要高，即格值要调小、反之，观测强磁异常时格值要调大。CS_2-61 型悬丝式磁秤的格值可在 8—12γ/格范围内变动。

在磁系反光镜下面，铝框的空腔内，装有一个灵敏度螺丝，当转动该螺丝使之上下转动时，磁系的重心发生上下位移。由（3.2.4）式知，格值ϵ的公式为：

$$\epsilon=\frac{mgd\sin\beta+2\tau}{2fM}$$

结合图3.2.1可知，重心O'沿垂直磁轴方向移动时，相当于上式中$d\sin\beta$的数值在改变，故格值也随之变化。灵敏度螺丝向下移动时，$d\sin\beta$加大格值也变大；反之，灵敏度螺丝向上调时，$d\sin\beta$减小，格值也变小。磁秤的格值可用格值仪测定，格值仪如图3.2.6所示。

测定格值时，正向通电时读数为s_1，反向通电时读数为s_2，线圈常数为C，则有

$$\epsilon=2CI/(s_1-s_2) \qquad (3.2.7)$$

(B)温度螺丝和温度系数

磁系磁棒的温度变化时，由分子动能的改变而使其磁矩变化，这将影响磁系的平衡，使读数发生变化。为了抵消此影响，在磁棒上方靠N极一端装置一温度螺杆和温度螺丝。当温度升高时，螺杆由于受热膨胀而伸长，带动温度螺丝向外移动，而使磁系重心向里移动，使重力矩减小。显然，如果由于温度引起的磁力矩变化与重力矩的变化相等，磁秤读数就不受温度影响了，但是要调节到这样的程度不十分容易。通常温度系数不为零。温度系数表示温度每变化 1℃ 时所相当的外磁场变化值。单位为：γ/℃。温度螺丝由于铝杆膨胀向外移动的距离与温度螺丝中心到铝框之间铝杆的长度L_0成正比。当温度系数为正时，应减小L_0，减少重力矩的补偿作用，即向里移动温度螺丝。反之，温度系数为负时，说明重力矩补偿不够，则应向外移动温度螺丝。

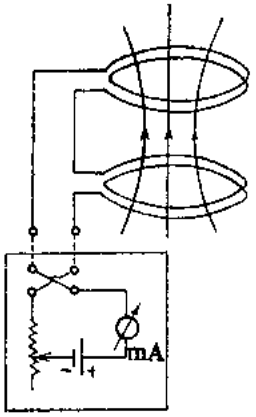


图 3.2.6 磁秤格值仪线路图

还要说明一点，磁系平衡时，磁力矩为$P=MZ\cos i$。若由温度变化引起的磁矩变化为ΔM，则磁力矩变化为$\Delta P=\Delta MZ\cos i$。若垂直强度Z发生变化，已调好的被补偿的磁力矩将发生变化。因此同一台仪器在不同的纬度地区由于Z值不同而具有不同的温度系数。例如在北方已调好的温度系数近于零的仪器迁到南方工作时，由于Z值的减小温度系数加大，故应重新调节温度螺丝。

（2）光系部分及作用

为测量磁系倾角的微小变化，采用光系读数，光系的结构如图 3.2.7。它由镜筒及磁系上的反光镜组成。镜筒内有物镜组、目镜组、三棱镜、刻度尺和标线尺。物镜焦距 $2f=3333$格。磁系水平时，光系轴垂直于磁系的平面反光镜。

光线经过的路程如下：

光线由镜筒外的平面采光镜②反射到三棱镜③上，然后向下反射，通过标线尺④，经过物镜组⑤、⑥折射后变为平行光落在磁系反光镜⑦上，反射后再经过物镜组聚焦于刻度尺上，从目镜①的上方，向下可看见被放大了的刻度尺和重合在刻度

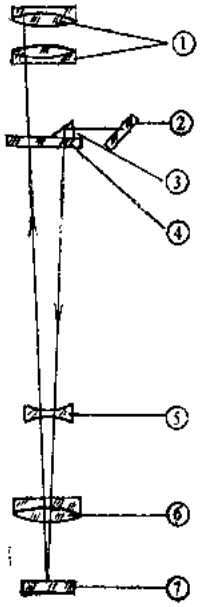


图 3.2.7 磁秤光系结构图

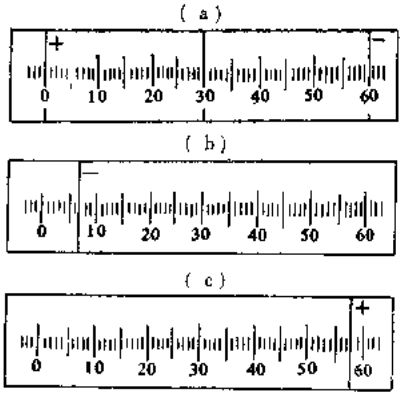


图 3.2.8 磁秤光系刻度尺读数方法示意图

尺上的三条标线的象。刻度尺上的刻度由0到60，当磁系水平时，三条标线的象恰好与0、30、60刻度线重合，如图3.2.8中(a)所示。磁系倾斜时，标线的象在刻度尺上移动，移动的刻度数值即表示倾角的大小。一般记录中间标线的读数。当中间标线偏出刻度尺以外时，则以标有“+”或“−”号的标线的读数加30或减30的办法间接读出中间标线的读数，如图3.2.8中的(b)及(c)，前者读数应为−23.0，后者读数为88.0。磁秤读数的范围为−30到+90。

(3) 扭鼓和扭鼓常数

在强磁异常区工作时，光系中三条标线的像全部落在刻度尺以外而无法读数时，称为“超格”，标线向读数大的一方消失称为“正超格”，向读数小的一方消失称为“负超格”。超格时，利用扭鼓装置可扩大磁秤的测程。

扭鼓由扭鼓旋扭，蜗杆和蜗轮三部分组成。如图 3.2.4。当转动扭鼓旋扭时，蜗杆带动蜗轮转动，当蜗轮转动时，悬丝发生扭转。于是在扭鼓一端的悬丝就使磁系增加一个扭力矩，使磁系倾角变小到能够重新读数。CS_2-61型悬丝式磁秤，当“正超”时，要顺时针扭动旋扭，“负超”时，要逆时针扭动旋扭（注意，有些仪器正好相反）。扭鼓蜗轮可扭转的角度为±40°，约能补偿磁场±20,000γ。

设扭动扭鼓时在扭鼓一端的悬丝被扭动的角度为φ，对磁系产生一扭力矩$\tau\varphi$，则在磁系平衡方程式 (3.2.2) 中应增加一项$\frac{\tau\varphi}{M\cos i}$。因 i 角很小，$\cos i\doteq 1$，而$\frac{\tau}{M}$为常数（即扭鼓常数，用K表示），故该项可写为$K\varphi$，因此 (3.2.6) 式变为：

$$\Delta Z_i=\varepsilon(s_i-s_0)+K(\varphi_i-\varphi_0) \qquad (3.2.8)$$

式中s_0，φ_0是基点上的读数和扭鼓度数，s_i、φ_i是测点上的读数和扭鼓度数，$K(\varphi_i-\varphi_0)$称

扭为鼓改正值，在求出K后就可计算扭鼓改正值。扭鼓常数即扭鼓蜗轮每转动一度所相当的磁场变化值，其单位为γ/度。

（4）夹固开关

由磁秤外壳上的开关按扭、旋扭以及仪器内部的翘板和磁系夹子所组成。夹固的作用是保护磁系的悬丝和磁棒。在观测时转动开关至开的位置，磁系才能处于工作状态。不观测时磁系被夹固不动。

3．磁秤观测误差的来源及消除办法

磁秤观测时，悬丝必须水平地位于磁南北方向，磁棒必须在磁东西方向的铅垂面内摆动，并且要求观测时没有外界因素的影响。在实际工作中，这些条件往往很难严格办到，因而观测时就有一定的误差。这些误差的来源可分为：磁秤本身的毛病，操作不精确，日变和温度等外界因素的影响。下面着重讨论前两方面原因引起的误差及消除办法。外界因素的影响及消除办法在下章讨论。

（1）悬丝不水平

因悬丝与磁秤底盘面不平行，故磁秤底盘调平后，悬丝并不水平，如图3.2.9所示，磁秤底盘面已调平，但磁棒N极指东时，悬丝（ab线）北端高，倾角为i_e。这时作用在磁系上的地磁场水平分量$\boldsymbol{H}$可分解为两个分量，平行悬丝的分量为$H\cos i_e$，对磁棒绕悬丝转动不产生力矩作用；垂直悬丝的分量为$H\sin i_e$，对磁系绕悬丝转动产生力矩作用，这时磁秤的平衡位置受它的影响而改变，使读数产生误差。当N极指东时，在悬丝北高南低的情况下，磁系力矩的平衡方程式为：

$$MZ\cos i_e\cos i_1+MH\sin i_e\cos i_1=mgd\cos(\beta-i_1)\cos i_e+2\tau i_1 \qquad (3.2.9)$$

式中i_1为磁系N极指东时的倾角。

该式经整理并与（3.2.1）式比较，可知悬丝不水平产生的误差为$H\,\mathrm{tg}\,i_e$，使读数增加，而读数误差为$\Delta S_{误}=\frac{H}{\varepsilon}\mathrm{tg}i_e$。若将磁秤绕Ⅰ—Ⅱ轴旋转180°，如图3.2.10所示，这时地磁场水平分量$\boldsymbol{H}$作用于磁系的有效分量$H\sin i_e$是向上的，其作用是使磁棒N极向上，因而读

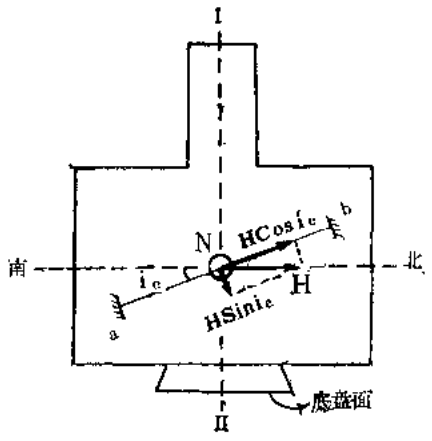


图 3.2.9 悬丝不水平误差分析图

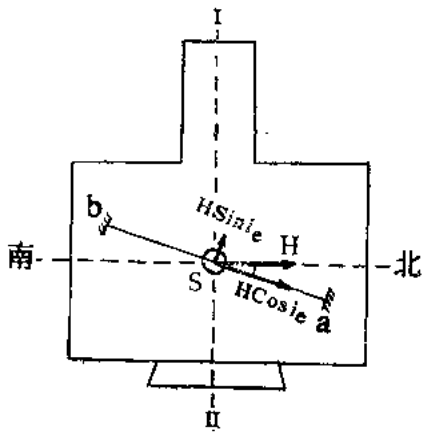


图 3.2.10 悬丝不水平误差分析图

数减小。此时仪器的读数误差 $\Delta s=-\frac{H}{\varepsilon}\mathrm{tg}i_e$。与$N$极指东时相比较可知，两种情况误差绝对值相等符号相反。所以这种悬丝不平引起的误差可通过取转向前后磁秤读数的平均值来

消除。如磁系指东时，读数以$s_{东}$表示，N极指西时以$s_{西}$表示，则读数之差可写为：

$$\Delta s = s_{东} - s_{西}$$

Δs 定义为转向差。在前述N极指东时悬丝北侧高的情况下，转向差$\Delta s = 2\Delta S_{悬} = \frac{2H}{\varepsilon}\mathrm{tg}i_e$。

反之，如N极指东时悬丝南侧高，则转向差为负值。

由上可知，因磁秤内部悬丝安装不水平而引起的转向差与磁秤读数的大小无关，为一常数。故将这种转向差称为常差，如图3.2.11所示。若Δs为正，表示磁棒N极指东时，悬丝北端高（即弹簧端高），若Δs为负，则悬丝南端高（即扭鼓端高）。

如磁秤内部悬丝安装准确，但由于操作时南北方向水泡调节不准确而使磁秤南北向倾斜，悬丝也即因之倾斜，读数也会产生误差。其值为 $\Delta s = \pm\frac{H}{\varepsilon}\mathrm{tg}i_e$。磁秤旋转180°后，$N$极转向，但由于底盘和架头限定磁秤倾斜方向不变，悬丝倾斜也不变，观测误差也不变。因此这种误差不能用转向取平均读数的办法来消除（见图3.2.12），只能要求操作人员调节南北向水泡时倍加谨慎。

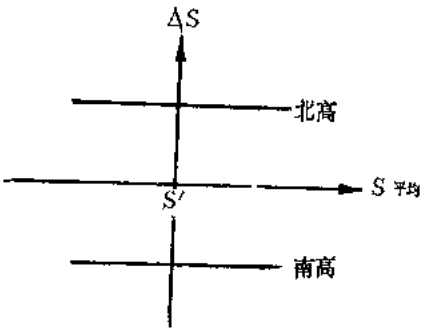


图 3.2.11 垂直磁秤常差曲线

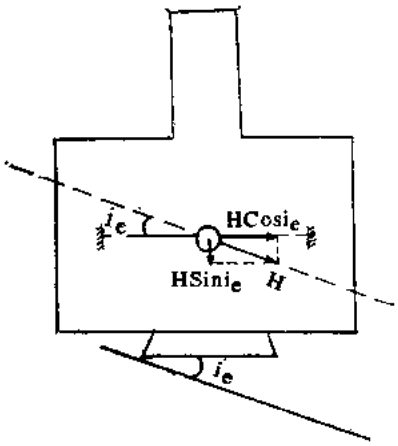


图 3.2.12 磁秤南北向倾斜的误差分析图

（2）磁系的摆动面不在东西方位（或称方位不准）

安装时悬丝与磁秤底盘上控制方向的两个螺丝钉的联线不平行，因此，虽然用罗盘将螺丝钉联线固定在南北方位上，但悬丝并不在南北方位，则磁棒的摆动面也就不在东西方位。图3.2.13为一俯视图，表示磁棒摆动面A—B不在东西方位，由东偏北 δ_a 角。此时，由于$H\sin\delta_a$对磁棒产生力矩作用，磁系的平衡方程式将变为如下形式（参看图3.2.14）：

N极指东时为

$$MZ\cos i_1 - MH\sin\delta_a\sin i_1 = mgd\cos(\beta - i_1) + 2\tau i_1$$

N极指西时为

$$MZ\cos i_2 + MH\sin\delta_a\sin i_2 = mgd\cos(\beta - i_2) + 2\tau i_2$$

将上二式整理并与（3.2.1）式比较，可知由悬丝方位不准所产生的误差为 $-H\sin\delta_a\mathrm{tg}i_1$或 $H\sin\delta_a\mathrm{tg}i_2$ 的读数误差为 $\Delta s_{悬} = -\frac{H}{\varepsilon}\sin\delta_a\mathrm{tg}i$ 或 $\frac{H}{\varepsilon}\sin\delta_a\mathrm{tg}i_2$，转向差则为：

$$\Delta s = -\frac{H}{\varepsilon}\sin\delta_a(\mathrm{tg}i_1 + \mathrm{tg}i_2) = -\frac{2H}{\varepsilon}\sin\delta_a\mathrm{tg}i$$

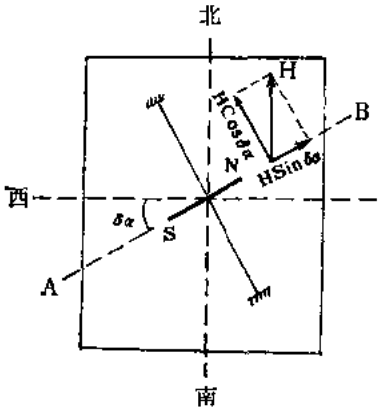


图 3.2.13 磁系方位不准误差分析

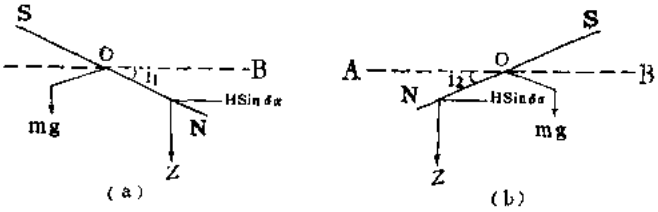


图 3.2.14 方位不准时力的分析图

$$=-\frac{2H\sin\delta_\alpha(\bar{s}-s')}{2f\varepsilon} \qquad (3.2.10)$$

式中$\bar{s}$为N极指东时磁秤的读数与N极指西时磁秤的读数的平均值，即$\bar{s}=\frac{1}{2}(s_{东}+s_{西})$。$s'$为仪器的机械零点，即磁棒水平时磁秤的读数。

若某地地磁场水平强度$H=2700\gamma$，一台磁秤的悬丝方位角偏30′，当$\bar{s}=90$格，$s'=30$格，$2f=3333$格，$\varepsilon=10\gamma$/格，则所产生的误差为0.4格，转向差为0.8格。

由上分析可知：在磁系N极偏离磁东西向时，转向前后读数误差符号相反，致使磁系倾角偏小或偏大。但误差相对于垂直分量的作用毕竟很小，所以两种情况下磁系的倾角相近，即$i_1\approx i_2$。因此，由误差公式可以得出结论：取磁力仪转向前后读数的平均值可以基本上消除磁系方位不准引起的误差。但毕竟二者不等，即$i_1\neq i_2$，所以误差不可能通过转向取平均值而完全消除，但所余部分误差很小，可忽略不计。

由（3.2.10）式可知，由于磁系摆动面不在东西方位引起的转向差，随读数而变化，称之为变差。因为磁系的倾角限制在±2°范围内，所以，以转向差Δs为纵轴、磁秤平均读数为横轴的转向差曲线，可视为一直线，当磁秤的平均读数等于机械零点时，转向差为零。如读数偏离零点时，偏离越大，转向差的绝对值也越大。当摆动面由东偏北时，该直线斜率为负，由东偏南时，直线的斜率为正，见图3.2.15。因此，当测定出转向差曲线后，可以判断磁系摆动面偏离的方向。

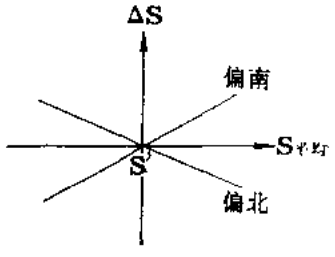


图 3.2.15 垂直磁秤方位不准时的转向差曲线（变差）

由于操作时，罗盘定向不准，磁系的摆动面也会偏离磁东西方位，引起与上述性质相同的误差和转向差，其误差也基本上可以通过转向取读数平均值加以消除。

实际上，悬丝不水平和摆动面不在东西方位的情况同时存在，这时转向差曲线由图3.2.11和图3.2.15组合而成，如图3.2.16。这种情况下的转向差曲线的具体原因，则应根据磁秤的机械零点处转向差的数值来判断。机械零点处变差为零，其转向差为悬丝不水平引起的常差。

（3）磁秤东西方向不水平

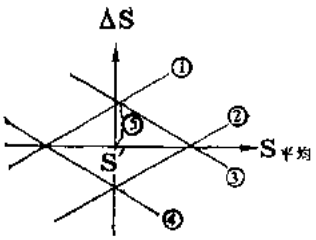


图 3.2.16 综合影响的转向差曲线

1—悬丝北端高，磁系方位东偏南；2—悬丝南端高，磁系方位东偏南；3—悬丝北端高，磁系方位东偏北；4—悬丝南端高，磁系方位东偏北；5—常差值

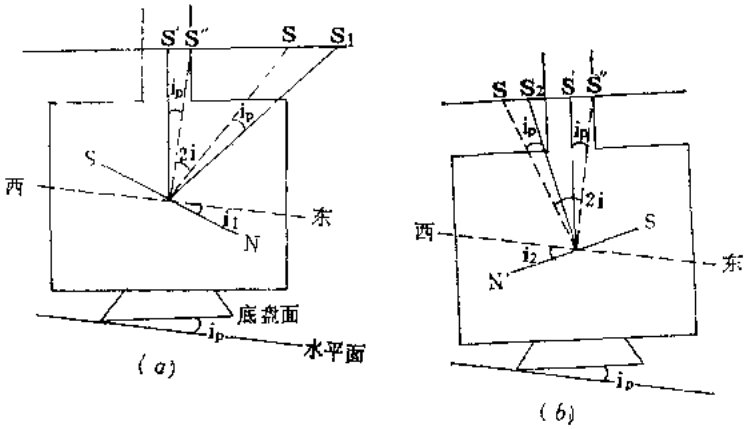


图 3.2.17 磁秤底盘东西不水平误差分析图

如图3.2.17所示，磁秤底盘东高西低，如其倾角为i_p，则光系轴发生倾斜，与铅垂线的夹角为i_p。设磁系的倾角为i_1，此时悬丝的扭力矩$2\tau(i_1+i_p)$，则磁系的力矩平衡方程式应为：

$$MZ\cos i_1 = mgd\cos(\beta - i_1) + 2\tau(i_1 + i_p) \qquad (3.2.11)$$

转向180°后，磁系倾角为i_2，扭力矩减小为$2\tau(i_2 - i_p)$，其平衡方程式为：

$$MZ\cos i_2 = mgd\cos(\beta - i_2) + 2\tau(i_2 - i_p) \qquad (3.2.12)$$

将（3.2.11）和（3.2.12）式整理，同时考虑由于光系倾斜，$i_1 = \frac{s_1 - s'}{2f} - i_p$，$i_2 = \frac{s_2 - s'}{2f} + i_p$，则磁秤的转向差$\Delta s$应为：

$$\Delta s = s_1 - s_2 = \frac{-4\tau i_p}{\varepsilon M} + 4 f i_p \qquad (3.2.13)$$

式中i_p的单位若以度表示，则$\frac{\tau}{M} = K$，为扭鼓常数，单位为伽伐/度。（3.2.13）式则可写成：

$$\Delta s = -\frac{4Ki_p}{\varepsilon} + 4 f i_p \frac{\pi}{180} \qquad (3.2.14)$$

由（3.2.14）式可知，因式中第一项为负值，故当K值较小时，转向差与i_p角成正比，当K值较大时，转向差与i_p角成反比。若$K=600$伽伐/度，$\varepsilon=10$伽伐/格，$i_p=30''=0.0083$度$=0.00015$弧度，则$\Delta s=-1$格。若$K<290$伽伐/度，则转向差为正值。这种由于东西水泡不平引起的误差通过取转向前后的平均值基本上可以消除。

上述误差和转向差是操作时由于东西向水泡不水平而导致光系倾斜和扭力矩变化而造成的。如果仪器结构本身光系与底盘并不垂直，仪器转向前后光系倾斜方向相反，作用于磁系的扭力矩也不变，所以不引起转向差，读数虽有误差，但因相对测量亦可消除。

3.2.2 悬丝式水平磁力仪

1．悬丝式水平磁力仪的工作原理

磁力仪的磁系部分的结构与悬丝式垂直磁力仪相似，但磁棒是近于垂直的，在北半球使用的仪器磁棒N极向下。在垂直磁棒方向的北侧装有使磁系整体重心偏北的纬度螺丝，南侧装有温度补尝螺丝。其结构可简化为图3.2.18形式。

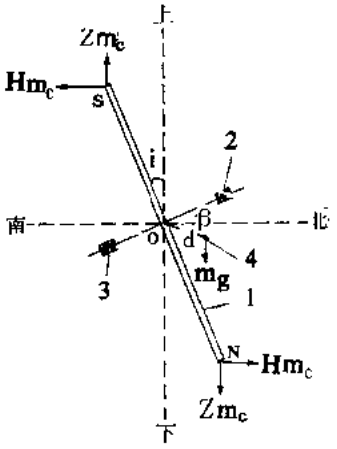


图 3.2.18 水平磁系工作原理图

1—磁轴；2—纬度螺丝；3—温度螺丝；4—磁系质心

水平磁力仪测定外磁场，是通过磁系的磁力矩与重力矩和扭力矩的平衡关系来实现的。

（1）磁力矩：设磁系摆动面为磁南北方向的铅垂面，磁系平衡时磁轴线与垂直方向夹角为i（即平面反光镜的倾角）。由地磁场水平分量的作用，力矩的大小为$MH\cos i$，由地磁场垂直分量的作用，此磁力矩的大小为$MZ\sin i$，二者符号相反，见图3.2.18。

（2）重力矩：由于纬度螺丝的作用，使磁系的重心不通过磁轴及支点，而在支点的北侧下方，设重心与支点O（磁系旋转轴）距离为d，两者连线（即图中d）与磁轴中垂线夹角为β，则作用在磁系上的重力矩为$mgd\cos(\beta-i)$，m为磁系的质量，g为重力加速度。当纬度螺丝向北时，重力矩方向与水平磁力矩相反。

（3）扭力矩：如仪器的扭鼓度为φ，则悬丝对磁系产生的扭力矩为$\tau(2i+\varphi)$，与水平磁力矩方向相反。

当磁系平衡时，即

$$MH\cos i = MZ\sin i + mgd\cos(\beta-i) + \tau(2i+\varphi) \tag{3.2.15}$$

等式两边同除以$M\cos i$，得

$$H = Z\operatorname{tg}i + \frac{mgd\cos\beta}{M} + \frac{mgd\sin\beta}{M}\operatorname{tg}i + \frac{2\tau i}{M\cos i} + \frac{\tau\varphi}{M\cos i}$$

野外实际上测水平磁场相对值，设在基点处水平分量为H_0，垂直分量为Z_0，测点的水平磁场为H，垂直磁场为Z，$Z=Z_0+Z_a$，若基点处磁系与垂线的偏角为i_0，则有

$$H_0 = Z_0\operatorname{tg}i_0 + \frac{mgd\cos\beta}{M} + \frac{mgd\sin\beta}{M}\operatorname{tg}i_0 + \frac{2\tau i_0}{M\cos i_0} + \frac{\tau\varphi_0}{M\cos i_0} \tag{3.2.16}$$

上两式相减得

$$H-H_0 = Z_0(\operatorname{tg}i-\operatorname{tg}i_0) + Z_a\operatorname{tg}i + K'(\operatorname{tg}i-\operatorname{tg}i_0) + \frac{\tau}{M}(\varphi-\varphi_0+i-i_0) \tag{3.2.17}$$

式中$K'=mgd\sin\beta/M$。

若$2f=5320$格，则$|i|<1.5°$，$\cos i\doteq 1$，$\operatorname{tg}i=(s-s')/2f$，$\operatorname{tg}i_0=(s_0-s')/2f$，代入（3.2.17）式，经整理有：

$$H-H_0 = \varepsilon_H(s-s_0) + \frac{Z_a(s-s')}{2f} + \frac{\tau}{M}(\varphi-\varphi_0) \tag{3.2.18}$$

式中$\varepsilon_H=\dfrac{1}{2f}\left(Z_0+\dfrac{mgd\sin\beta+2\tau}{M}\right)$是水平磁秤的格值，它与地磁场垂直分量$Z_0$有关。

当Z_0有变化时，ϵ_H也将变化。此外，与垂直磁秤相似，ϵ_H与$d\sin\beta$成正比，也可通过灵敏度螺丝的上下移动改变$d\sin\beta$的大小来调节格值。式中$\frac{Z_a}{2f}(s-s')$称为水平磁测的垂直改正项，它与测点上的Z_a值有关，故在计算测点的$(H-H_0)$值时必须有各测点相对于水平磁测基点的Z_a数据。式中f为光系焦距，CSS-1型仪器约等于$\frac{1}{2}$（5320）格。s最大为90格，最小为－30格，设$s'=30$格（s'是磁系磁轴垂直时的读数，即$i=0°$时的读数）。故$(s-s')/2f$常为在0.11以下的小数，当Z_a在100γ以内时．则垂直改正值仅在1γ左右，可略去不计。但当$Z_a>100\gamma$时，此项改正不可忽略。式中$\frac{\tau}{M}$称为扭鼓常数，用K表示。故（3.2.18）式可写为：

$$\Delta H=H-H_0=\epsilon_H(s-s_0)+\frac{Z_a}{2f}(s-s')+K(\varphi-\varphi_0) \qquad (3.2.19)$$

当磁系摆动面在各点上都保持固定的方位，设为x方位，则上式中的ΔH变为$\Delta H_x=H_x-H_{0x}=H_{ax}$，表示水平磁异常沿$x$方向的分量。

使用水平磁秤时，须注意磁系的纬度螺丝必须保持在北或偏北的相对位置，才能使磁系的重力矩与水平磁力矩近于平衡，按照上述公式求得ΔH。否则重力矩与水平磁力矩方向一致，磁系的平衡遭到破坏，久之磁系性能可能受到损坏。因此水平磁测只能在固定方位读数，不允许像垂直磁秤那样使方位相差180°取两次读数的平均值。

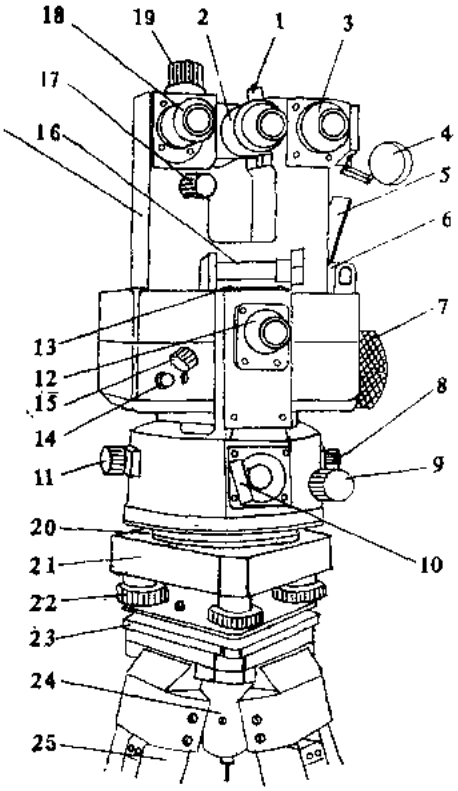


图3.2.19 CSS-1型悬丝式水平磁力仪外貌图

1—望远镜筒；2—望远镜调焦距螺丝；3—磁秤读数目镜；4—采光镜；5—水泡反光镜；6—纵水泡；7—磁秤开关旋扭；8—锁紧机构旋扭；9—微调旋扭；10—水平度盘外光源反光镜；11—水平度盘卡紧旋扭；12—水平度盘目镜；13—地区牌；14—扭鼓刻度旋扭；15—扭鼓盖；16—横水泡；17—望远镜微调旋扭；18—扭鼓读数目镜；19—望远镜筒制动螺旋；20—三齿锁盘；21—基座；22—整平螺丝；23—脚架；24—连接螺杆及垂球挂钩；25—脚架腿。

2．仪器的基本结构

此仪器由磁秤、定向装置及脚架三部分组成。定向装置实际就是一个经纬仪，只不过是磁秤和经纬仪连在一起，它们具有共同的转轴。见图3.2.19。

3.2.3 刃口式垂直磁力仪

刃口式垂直磁秤与悬丝式垂直磁秤的工作原理相近，仅在磁系的结构上有所差别。一般其磁系结构如图3.2.20及图3.2.21。与悬丝式磁秤磁系的差别在于：

（1）磁钢片中心贯穿一个石英磨制的三棱柱形的刃口，其尖端向下，尖端磨制成曲率半径非常小的圆柱面。在测定磁场时扭动外壳上的开关旋扭使磁系下降，刃口两端落在磁系两侧的石英刀座上。刃口与刀座的接触点的联线是水平的。磁系由于磁力矩及重力矩的作用绕此水平线转动。

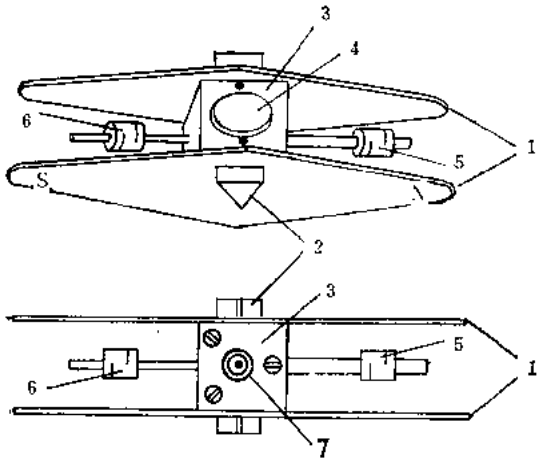


图 3.2.20 刃口式磁系结构图

1—磁钢片；2—石英刃口；3—铝框；4—反光镜；5—温度螺丝；6—纬度螺丝；7—灵敏度螺丝

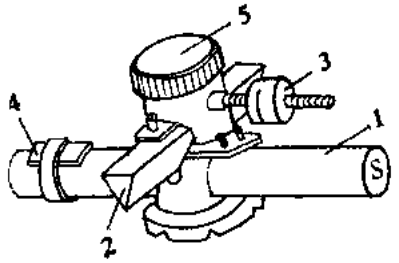


图 3.2.21 CR_2-69型刃口式磁系结构图

1—磁棒；2—石英刃口；3—纬度螺丝；4—温度补偿高导磁合金片；5—平面反光镜。

（2）因刃口式磁秤不用悬丝悬挂，无扭力矩作用，在读数超格时，使用辅助磁铁的磁场来抵消一部分外磁场，以此来扩大测程。因此它在脚架上部装有安置辅助磁铁的设备。使用时以辅磁改正代替扭丝改正，并预先测定辅助磁铁的辅磁改正值。

（3）图3.2.20中，磁钢片N极和S极两端长度对称于刃口，为使重心偏向S极，在S极一端装置一个重荷——纬度螺丝。调节它可使磁系保持在$i \leqslant \pm 2^{\circ}$的位置，使磁系在地磁场不同纬度地区可以进行工作，故称它为纬度螺丝。

顺便说明，我国出产的CR_2-69型刃口式磁力仪，其磁系形状如图3.2.21。它的温度补偿不用温度补偿螺丝，而是用一高导磁率的热磁合金片。此合金片与磁棒联在一起，受磁棒感应磁化，形成与磁棒相反的感应磁矩。由于它的导磁率极高，温度升高磁棒磁矩减小时，它的磁矩随之减小，如选择合适位置，使合金片磁矩的减小量与磁棒磁矩的减小量相符，则二者合磁矩不变。以此来补偿磁棒磁矩值受温度的影响。显然用这种补偿法，仪器温度系数不受正常场影响。

由于石英刃口性能稳定，不受温度影响，因此刃口式磁秤一般零点飘移值小，精度较高(CR_2-69型磁力仪精度可达± 2伽)，适于弱磁测量。但石英性质脆，易碰损，故目前野外多用于测定地磁日变及岩石标本的磁性等。

§3.3 磁通门磁力仪（磁饱和式磁力仪）

磁通门磁力仪又称磁饱和式磁力仪，它是利用具有高导磁率的软磁铁芯在外磁场作用下的电磁感应现象测定外磁场的仪器。磁通门磁力仪种类很多，本节仅介绍目前常见的偶次谐波电压型磁通门磁力仪的原理，并着重讨论我国生产并广泛应用的CCM-2型磁力仪的结构原理。

3.3.1 坡莫合金的磁化特点及磁灵敏元件的磁化现象

坡莫合金与一般的铁磁性物质比较，具有很高的导磁率$\left(\mu=\frac{dB}{dH}\right)$，如国产1J86型坡

莫合金，起始导磁率μ_0=150000CGSM单位。矫顽力(H_c)和饱和磁场(H_s)均很小，因此坡莫合金的磁滞回线窄而陡，与一般的铁磁性物质宽而缓的磁滞回线有明显的差别，见图3.3.1。

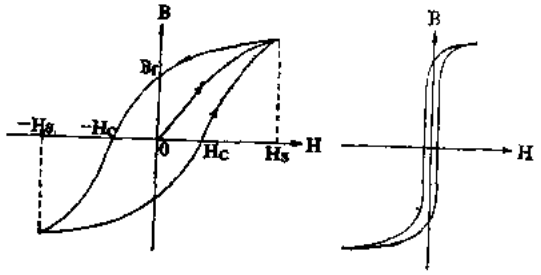


图 3.3.1 坡莫合金的磁滞回线

分析坡莫合金的磁滞回线可知，当外磁场有微弱变化时，就会引起磁感B的显著变化，可以说磁感B对外磁场H的变化有放大作用，或者说坡莫合金对外磁场感觉灵敏。由于坡莫合金的磁滞回线所包围的面积很小，可近似地看成一条曲线。

仪器探头结构如图3.3.2，在一扁椭圆环状坡莫合金上绕上两个绕向相反、匝数相等的线圈，串连在一起作为初级线圈。在整个椭圆环外绕一输出线圈。在无外磁场状况下，当初级线圈中供一交流电压$E=E_m\cos\omega t$时，则在坡莫合金中将产生一个交变磁场$H=H_m\cos\omega t$，其中$H_m>H_s$。

由于H随时间变化将引起B随时间变化，当$-H_s<H<H_s$时$B\sim H$曲线可近似看作直线，故在这一段B随时间的变化是正弦波形。当$|H|>|H_s|$时，B达到饱和值B_m，保持一常值，故曲线顶部是平的，并且正负半周的振幅相等，保持$B>B_m$的一段时间也相等。从B曲线来看，相当于一段削掉正负峰值的正弦曲线。如图3.3.3。

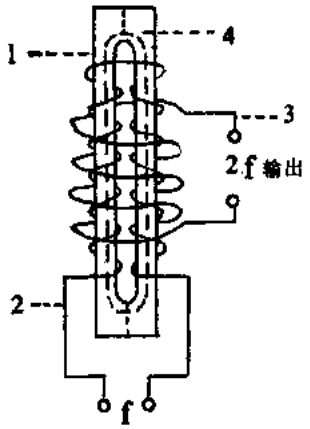


图 3.3.2 探头结构示意图

1—灵敏元件架；2—初级线圈；3—输出线圈；4—坡莫合金环

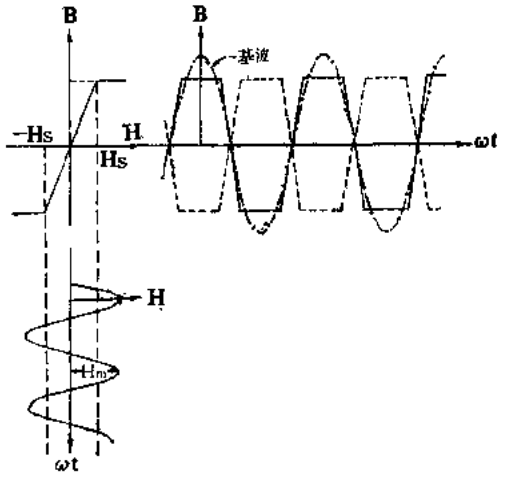


图 3.3.3 $H_0=0$时，探头中B的图形

因为两个初级线圈匝数相等，绕向相反，这样通过输出绕组的总磁通量变化为零，故没有电压输出。

3.3.2 偶次谐波法观测磁场的原理

当有外磁场H_0存在时，作用在坡莫合金片上的总磁场为：

$$H=H_0+H_m\cos\theta$$

其中 $|H_0\pm H_m|>H_s$

同样在$-H_s<H<H_s$时，$B\sim H$曲线近于直线，这一段B随时间变化是正弦形的。当$H>H_s$时，B达到饱和值。由于磁场的变化是在外磁场H_0的基础上变化，所以在H与H_0同向

时，B先达到饱和，保持在常值B_m的时间长；当H与H_0反向时，B保持在常值B_m的时间短。这时B随时间变化的曲线极值处是平的，但其正负半周不对称，不对称程度与外磁场的强度有关，如图3.3.4。

由于两个初级线圈匝数相等，绕向相反，两个半芯中的磁感应强度方向相反但波形不等，通过输出绕组的总磁通量的变化率不为零，在输出绕组中有电压输出。输出电压的波形如图3.3.4所示，不难看出输出电压讯号的频率近于输入电压频率的二倍，是以偶次谐波成分为主的电压信号。测定这种二次谐波的电压大小和相位，就可以确定外磁场的强度和方向。

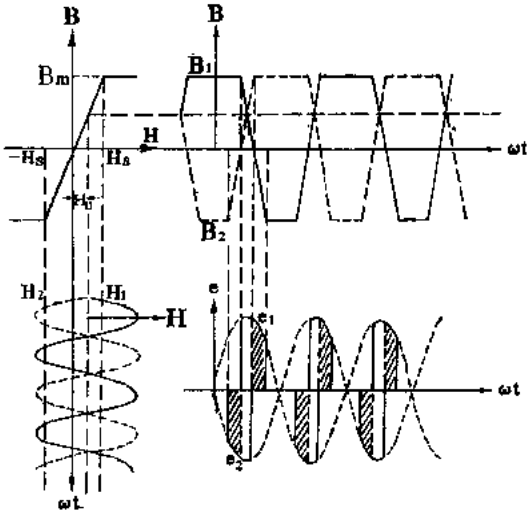


图 3.3.4 $H_0\approx0$时，探头中B与e的图形

在半芯中，这个电压按电磁感应定律应为：

$$e=-KSn\frac{dB}{dt}$$

其中K为常数，S为线圈截面积，n为线圈匝数。当$-H_r<H<H_r$时，即$-\theta_2<\theta<-\theta_1$和$\theta_1<\theta<\theta_2$时（见图3.3.4）

$$B=\mu H_m\cos\theta=\mu H_m\cos\omega t$$

则 $$e=-KSn\frac{d(\mu H_m\cos\omega t)}{dt}=KSn\mu H_m\omega\sin\theta$$

当$H<-H_r$，$H>H_r$时，即$-\theta_1<\theta<\theta_1$，$\theta<-\theta_2$，$\theta>\theta_2$时，$B=B_m=\mu H_r$，则

$$e=-KSn\mu\frac{dH_r}{dt}=0$$

显然这是一个非正弦波形的周期函数，按富氏级数公式，任意一个周期函数可展成：

$$f(\theta)=\frac{a_0}{2}+a_1\cos\theta+a_2\cos2\theta+\cdots\cdots+a_n\cos n\theta+$$
$$+b_1\sin\theta+b_2\sin2\theta+\cdots\cdots+b_n\sin n\theta$$

其中

$$a_K=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos K\theta d\theta$$

$$b_K=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin K\theta d\theta$$

由以上讨论可知输出的电压是二次谐波电压，故只需求出二次谐波的振幅即可。

$$a_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e(\theta)\cos2\theta d\theta$$

$$=\frac{\omega KSn\mu H_m}{\pi}\left[\int_{-\theta_2}^{-\theta_1}\sin\theta\cos2\theta d\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\cos2\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{-\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\int_{-\theta_2}^{-\theta_1}(2\cos^2\theta-1)d\cos\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}(2\cos^2\theta-1)d\cos\theta\right]$$

$$=\frac{-\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\left(\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)_{-\theta_2}^{-\theta_1}-(\cos\theta)_{-\theta_2}^{-\theta_1}+\left(\frac{2}{3}\cos^3\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2}-(\cos\theta)_{\theta_1}^{\theta_2}\right]$$

$$=0$$

$$b_2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e(\theta)\sin 2\theta d\theta$$

$$=\frac{K\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\int_{-\theta_2}^{-\theta_1}\sin\theta\sin 2\theta d\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\sin 2\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{K\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\int_{-\theta_2}^{-\theta_1}2\sin^2\theta\cos\theta d\theta+\int_{\theta_1}^{\theta_2}2\sin^2\theta\cos\theta d\theta\right]$$

$$=\frac{K\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\left(\frac{2}{3}\sin^3\theta\right)_{-\theta_2}^{-\theta_1}+\left(\frac{2}{3}\sin^3\theta\right)_{\theta_1}^{\theta_2}\right]$$

$$=\frac{K\omega Sn\mu H_m}{\pi}\left[\frac{2}{3}\sin^3(-\theta_1)-\frac{2}{3}\sin^3(-\theta_2)+\frac{2}{3}\sin^3\theta_2-\frac{2}{3}\sin^3\theta_1\right]$$

$$=\frac{4\omega SnK\mu H_m}{3\pi}(\sin^3\theta_2-\sin^3\theta_1)$$

$$=\frac{4\omega SnK\mu H_m}{3\pi}\left[\left(\frac{\sqrt{H_m^2-(H_r+H_0)^2}}{H_m}\right)^3-\left(\frac{\sqrt{H_m^2-(H_r-H_0)^2}}{H_m}\right)^3\right]$$

括弧内由于$H_m>(H_r\pm H_0)$，按二项式定理展开，并略去$(H_r\pm H_0)/H_m$的四次方以上的高次项，经整理后得：

$$b_2=\frac{-8\omega SnK\mu H_r}{H_m}\cdot H_0$$

此即二次谐波输出电压（半芯）的振幅。由于两个半芯的二次谐波电压的频率，振幅和相位相同，故灵敏元件的总输出振幅电压为$2b_2$，即：

$$E_m=2e_m=2b_2=-\frac{16\omega SnK\mu H_r}{H_m}\cdot H_0 \qquad (3.3.1)$$

式中右端除H_0外皆为与灵敏元件及绕制等有关的常数，可见输出电压的振幅与外磁场H^0成正比。

3.3.3 地面磁通门磁力仪的工作原理

本节以我国生产和通用的CCM-2型磁通门磁力仪为例，讨论磁力仪的结构及工作原理。

该仪器最高灵敏度±2伽玛，精度为±10伽玛，测程为±100000伽玛。仪器设有电子温度计，温度系数低于1γ/℃。该仪器工作原理框图见图3.3.5。现就其各部分的作用原理分述如下：

1．探头

如前所述，当有外磁场作用时，输出线圈产生频率为激励探头的交变电流频率的二倍的感应电压讯号，其强度与外磁场大小成正比，当外磁场反向时，此电压讯号位相也改变

180°。因用于测定Z_a，其长轴方向必须垂直向下，一般用重锤的重力作用使探头长轴保持铅垂。

2．晶体振荡器、分频器、功率放大器及延时器

晶体振荡器产生一频率为20 kHz稳定的电讯号，该讯号经过一次二分频变为10kHz的电讯号，一路送入相敏检波器作参考讯号，同时另一路再经一级二分频变为5kHz电讯号，经选频功率放大器进行功率放大，送入探头初级线圈W_2，作为探头的激励电流。延时器的作用是保证相敏检波器中的参考讯号与探头输入的偶次谐波讯号方向相反。

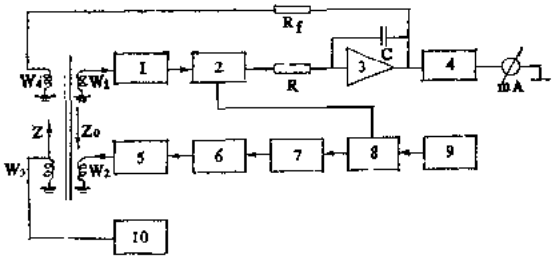


图 3.3.5 磁通门磁力仪的方框图

1—选频放大器；2—相敏检波；3—积分器；4—低频滤波器；5—功率放大器；6—二分频器；7—延时器；8—二分频器；9—晶体振荡器；10—稳流器

3．选频放大器

选频放大器对二次谐波成分加以放大、而对基波和三次谐波成分却起抑制作用，经放大的偶次谐波讯号送入相敏检波器，提供一个与参考讯号相位相反的电讯号。

4．相敏检波器

将送进的参考讯号与放大器放大的偶次谐波反相交流电讯号进行比较，并输出一直流电压，经积分器后输出电压经反馈电阻R_f产生反馈电流I_f送入探头绕组W_4，若W_4的线圈常数为A，则反馈磁场$\Delta Z=AI_f$。在野外均作相对测量$\Delta Z=Z-Z_0$，其中Z_0是在基点上被稳流器产生的标准电压通过W_3补偿掉的正常场。故ΔZ即为测点上的磁异常值。该异常值实际上是以直流电压形式输出，所以输出电压e_0反映了ΔZ的大小。

5．读数装置

由积分器输出讯号的另一路，经低通滤波器，作模拟被测磁场的电压送入电压表测量。

6．稳流器和稳压器

稳流器产生一个可控恒流源通过探头补偿线圈W_3，以便在基点上补偿正常地磁场。

稳压器保证仪器工作不受电池电压变化(±15 V—±10 V)的影响，仪器采用两组相同的稳压器。

3.3.4 航空磁通门磁力仪

我国生产和使用的CCK-1型航空磁力仪，也是一种偶次谐波型磁通门磁力仪。是测量ΔT异常的仪器。其最高灵敏度为1伽玛/字。噪声水平不大于1伽玛，每8小时零点飘移小于10伽玛。仪器用5位萤光数码管直读地磁场总向量的绝对值。仪器可以模拟记录，也可以用十进位、二进位制编码输出供磁带机记录。

仪器基本原理与地面磁通门磁力仪相同，这里不加赘述。但由于两者的应用条件不同，CCK-1型航空磁力仪又具有以下一些特点：

（1）航空磁测系在运动状态下测量，探头不能利用重力定向，而是自动定向于地磁场T的方向，观测总磁场强度T的模的增量ΔT。

（2）因为在飞行状态下观测，作用于探头的磁场是随时间变化的磁场，为了不漏掉某些有成矿远景的异常，除了控制飞行速度和飞行高度之外，仪器本身还必须具有较高的

频率响应。

（3）航空磁力仪不能采用人工补偿法补偿正常地磁场，而是采用数字反馈系统实现正常地磁场的自动补偿。

（4）航空磁通门磁力仪探头一般安装在飞机上，因此机身的恒定磁场及感应场和涡流场对观测场均有影响，因此必须对上述干扰进行磁补偿。一般用三组赫姆霍茨线圈来完成。

CCK-1 型仪器探头的自动定向系统与测量系统相类似，也采用二次谐波法系统。定向探头的磁芯为圆环状。在磁芯上密绕一层公用的激励线圈。在环形探头的外面绕以X、Y两组互相垂直的次级线圈。见图 3.3.6，实际测量时，测量探头位于定向圆环探头的中心，并与圆环探头的平面相垂直。若测量探头与地磁场方向不一致，则定向探头与地磁场不垂直，X、Y的输出讯号将具有偶次谐波成分，二次谐波经过处理，将带动定向马达转动，并带动圆环探头的平面转动，直至平面与地磁场垂直为止。这时测量探头将定向于地磁场T方向，从而实现了测量探头自动跟踪T的方向。这种定向系统定向误差小于 15′。

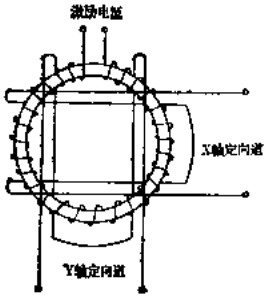


图 3.3.6 CCK-1型航空磁力仪定向磁灵敏元件

目前我国使用的 JSZ-1和 2 型井中三分量磁力仪，也是按偶次谐波型磁力仪原理设计的。其探头由互相垂直的三个元件组成，探头靠重锤定向。探头用无磁性金属密封容器置于井下，用电缆与井上的操作仪器相连。

磁通门磁力仪目前已广泛地应用于各种磁法勘探工作。它是很有前途的一种仪器。首先，这类仪器既可测定ΔT，也可测ΔZ或ΔH，探头剩磁较小的仪器还可作绝对测量。另外，仪器还适用于零磁场附近观测，并具有较高的精度，适合于弱磁测量，因此这类仪器首先用于太空磁场的测定。此外与其它电子磁力仪相比，其功耗小，一般均可用干电池供电，适于野外磁测用。磁通门磁力仪操作简单，仪器轻便，特别适用于地面野外磁测工作。

§3.4 质子旋进式磁力仪

质子旋进磁力仪是根据煤油、水、酒精等含氢原子溶液中氢原子核（质子）在地磁场中产生一定频率的旋进作用制成的。它在航空、海洋和地面等磁测工作中均有应用。本节侧重介绍我国通用的地面核子旋进式磁力仪的工作原理和结构。

3.4.1 质子旋进现象

构成各种物质分子的原子都是由带正电的原子核和绕核旋转带负电的电子组成。原子核又由带正电的质子和不带电的中子组成，氢的原子核最简单，只有一个质子。煤油、蒸馏水等达些含氢原子的物质，其分子的电子轨道磁矩和自旋磁矩都成对地彼此抵消了，除氢以外的原子核自旋磁矩也都互相抵消，只有氢原子核的自旋磁矩没有抵消。故该原子显出微弱的磁矩。在溶液中氢的原子磁矩，在无外磁场作用时，它们任意指向。当氢溶液处于地磁场T中时，这些原子磁矩在T的作用下，将各自沿着T的方向排列。当在近于垂直地磁场T的方向施加约50奥斯特的人工磁场时，由于这一磁场远远大于地磁场，则原沿地磁场方向的质子自旋轴都转至磁化磁场方向。当切断电流，使人工磁场突然消失，氢质子

则在原有的自旋惯性力及地磁场力的共同作用下，各以相同的相位绕地磁场方向进动，如图 3.4.1。这种现象称为质子旋进，也称核子旋进。在质子旋进的初始，由于相位一致，显现出宏观磁矩，它周期地切割在容器外的线圈，产生电感应讯号，其频率与质子旋进频率相同。质子的旋进现象由于热扰动等作用，会很快地衰减消失，电感应讯号也就随时间按指数函数衰减。

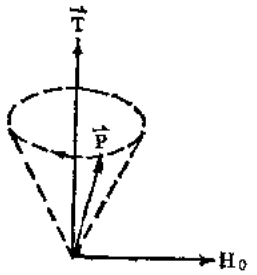


图 3.4.1 质子磁矩进动示意图

实验及理论计算表明，氢质子旋进的角速度是和外磁场 T 的大小成正比的，其关系为：

$$\omega=\gamma_p T$$

式中 γ_p 为质子磁旋比（即质子磁矩与动量矩之比），是一常数，据精密测定为

$$\gamma_p=(2.67513\pm 2\times 10^{-5})\times 10^4(\mathrm{CGSM})$$

因 $\omega=2\pi f$，f 为旋进频率，则

$$T=\frac{2\pi}{\gamma_p}\cdot f$$

其中 $2\pi/\gamma_p=23.4874$ 秒·伽玛，故有：

$$T=23.4874f \qquad (3.4.1)$$

由上式可知，地磁场的大小与质子在其中发生旋进的频率 f 成正比。这样就把对地磁场的测量变为对旋进讯号的频率的测定。

为了测定旋进讯号还应注意：

（1）必须用较大的人工磁化磁场使质子自旋磁矩指向垂直于地磁场的方向，其大小约50奥斯特，并须保持 3 秒钟左右。

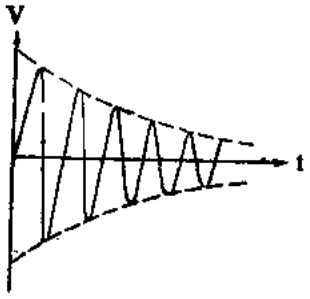


图 3.4.2 电感应讯号随 t 的衰减

（2）必须用较快的速度切断人工磁场，使质子磁矩绕地磁场方向发生旋进，此旋进运动由于原子核本身的热运动和核磁矩的相互作用以及磁场不均匀等原因，核磁矩旋进的相位很快发生差异，使电感应讯号随时间按指数函数规律迅速衰减，如图 3.4.2，在 2—3秒内即消失为零。故讯号的测定要快，一般须在磁化电流切断后一秒钟时间内完成频率测定。

（3）旋进运动或旋进电感应讯号衰减的快慢，与被测地点地磁场的均匀程度有关，当地磁场梯度大于 10γ/cm 时，感应电压消失极快而使得无法测定频率，故这种仪器不适合子异常梯度大的强磁区工作。

（4）当人工磁化场与地磁场方向的夹角 $\theta=90^\circ$ 时信号强度最强，$\theta=0^\circ$ 时讯号强度为零。但讯号频率值并不随 θ 的变化而变化，故只须使磁化场方向大致定在东西方位即可。

3.4.2 地面质子旋进磁力仪

我国生产并在国内通用的CHD 型地面质子旋进磁力仪，其最高灵敏度为 0.25 伽玛，精度≤±2伽玛。仪器稳定，没有零点掉格和温度影响。现以该型仪器为例说明仪器的工作原理。

为了使测量的读数表示为地磁场的伽玛值，采用将旋进讯号倍频的方法。设旋进讯号

的频率为f，倍频数为n，仪器记录的周期数目（即振荡次数）为N，记录N个周期所用的时间为t，则有：

$$T=23.4874f=23.4874\frac{N}{nt} \tag{3.4.2}$$

当选定：$n=128$，$t=0.734$秒，则上式为

$$T=23.4874\frac{1}{128\times0.734}N=0.25N \tag{3.4.3}$$

即记录每一次倍频后的振荡相当于0.25γ的磁场，如采用十进位计数器记录周期数，并在它的前面加上两级二进位计数器，则十进位计数器每计一数相当于倍频后的讯号的四个周期数，即相当于1伽玛的磁场。而两级二进位计数器每计一个数分别表示0.25和0.5伽玛（6型仪器加一级二进位计数器）。仪器共采用五级十进位计数器，故仪器测程为数万伽玛，仪器的最小读数为0.25伽玛。

仪器的方框图如下：

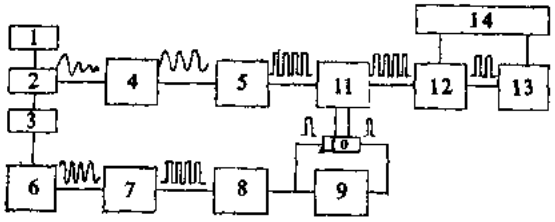


图 3.4.3 CH型-70型质子旋进磁力仪方框图

1—探头；2—磁化、接收继电器；3—电源；4—放大器；5—倍频器；6—晶体振荡器；7—正形器；8、9—二进位分频器；10—闸门电路；11—电子门；12、13—计数器；14—显示器。

3.4.3 海空质子旋进磁力仪

我国CHHK型海空核子旋进磁力仪可用于空中和海上的地磁场总强度的测量。航空磁测时，为克服机身对磁测的影响，探头悬吊于机身下30米左右；海洋磁测时，为克服船体影响，探头需拖曳于船后250米左右。仪器性能稳定，测量精度可达±1伽玛。仪器由探头、仪器主体、电源和记录器以及电缆、绞车等组成。体积大，总重量100—200公斤。该仪器工作原理与地面核旋相同不再赘述，这里仅就为适应海空磁测仪器应具有的主要特点介绍如下：

① 航空磁测和海洋磁测均在运动状态下测量，为尽量减少因吊仓方向变化和探头摆动而导致的输出讯号幅度变化的影响，采用多个探头。航空磁测时吊仓中有二个互相垂直的探头，海洋磁测时采用三个线圈轴向互成120°的吊头组成。

② 航空和海洋磁测均在运动状态下观测，为了磁测资料的连续性，必需快速测量，磁化和测频时间均要缩短。该仪器的观测速度为0.7秒—2.5秒，连续可调。

③ 因测量速度较快，仪器探头的磁化、测频、显示和记录等，均由自动化的程序控制器控制。仪器设有数字显示装置，以便监视磁测状态。

④ 仪器具有0.25γ、0.5γ、1γ、2γ和4γ五种灵敏度，为了保证仪器观测数据稳定可靠，倍频器采用锁相倍频装置，倍频性能稳定可靠。

核子旋进磁力仪是本世纪五十年代初发展起来的。它在各种磁测工作中均得到了广泛

的应用。这类仪器具有很多优点：由于测频技术的发展，核旋磁力仪的观测精度远高于任何一种机械式磁力仪。仪器观测结果只与地磁场中质子的旋进频率有关，因此仪器不受外界因素的影响，仪器没有零点飘移，不受温度影响，稳定性好。仪器测量的参数是频率值，因此也有利于实现观测技术的自动化。仪器观测地磁场总强度的绝对值，并且是直接读磁场值，因此观测结果除不作校正外，计算也十分方便。此外，仪器效率高，地面磁测每观测一个测点的场值，一般仅需几秒钟。目前，这类仪器的不足是：一般磁力仪为点测，不能连续测量。目前出现的动态磁化的双共振核旋磁力仪，可以实现连续测量。一般磁力仪只能在磁场梯度小于3—5γ/cm场中进行测量。梯度大，旋进讯号衰减很快，讯号来不及测量已衰减。为此，设计核子旋进磁力仪应提高接收讯号的放大倍数和减小仪器探头的体积。

§3.5 光泵磁力仪和超导磁力仪

光泵磁力仪是利用近二十多年来新发展起来的光泵技术制成的高灵敏度磁力仪。可用于宇宙磁探测、国防磁探测、地磁绝对测量及磁法勘探等方面。我国自1964年开始研制、已研制成功CBG-1型跟踪式光泵磁力仪（利用氦蒸汽He^4）、CSZ-1型数字（铯Cs^{133}蒸汽）磁力仪等。

3.5.1 塞曼分裂、能级跃迁和光泵作用

围绕原子核运动的电子都有一定的动能，它和原子核之间有一定的势能，电子和电子之间也有相互作用的势能等等。这些能量的总和称为原子的内能或总能量。

电子在原子内的总能量并不是可以任意取值的，它不能连续地变化，只能取一些分立的数值。这个现象称为原子能量的量子化。每一个分立值称为一个能级。以轨道来讲，一定的轨道对应一定的能量，故电子绕原子核运动只能沿一些确定的轨道。

原子能级见示意图3.5.1。不同元素的原子能级不同。原子的能级分布依次与主量子数n，角量子数L，内量子数J（与L和电子自旋量子数S有关）及总角量子数F（与J和原子核自旋量子数I有关）等有关。

在原子物理学研究中建立了完整的原子能级分布理论，并已为原子光谱学研究的实践所证明，这里不做详细的讨论。

电子轨道运动、电子自旋及原子核自旋等都具有一定的磁矩，原子的磁矩即它们的综合反映。原子物理学研究证明，原子磁矩与原子的总量子数F有关。原子磁矩在磁场的作用下，产生了新的能量。在磁场中附加的能量也是量子化的，与磁量子数m_F有关，m_F取$(2F+1)$个值。故原子在外磁场的作用下，同一个F值的超精细能级将分裂为$(2F+1)$个磁次能级。这种分裂称为塞曼分裂。因塞曼分裂与磁场强度有关，因此，相邻磁次能级间的能量差与外磁场成正比。

原子中所有电子的能量之和越小，原子越稳定，这时原子的状态称为基态。

铯原子最外面壳层有一个电子（称为价电子），其余$(Z-1)$个电子离核较近，状态不易变化，与原子核组成一个比较稳定的集团，称之为原子实。原子的能量状况与此外层电子的运动有关。

当电子从外界得到或向外界放出适当的能量时，即可从一个能级跃迁到另一个能级，

原子的能量级发生变化，这种现象称为原子的能级跃迁。其能量为 $\Delta E_{mn}=E_m-E_n$，即两能级能量之差。如果是吸收或放出电磁波形式的能量而跃迁称辐射跃迁，其他形式者为非辐射跃迁。

辐射跃迁时电磁波的频率 f 应满足玻尔频率条件，即：

$$f=\frac{E_m-E_n}{h} \tag{3.5.1}$$

式中 h 为普朗克常数。

辐射跃迁有自发及受激两种。不受外界影响自动从高能级向低能级跃迁，称为自发跃迁。原子受到外来的满足玻尔频率条件的电磁波（包括光波）激励而发生跃迁，称为受激跃迁。

并不是任意能级间都可跃迁，只有满足量子数变化条件的能级之间才能发生跃迁，这就是跃迁选择定则。

经过一定条件的光照射，使原子的轨道电子吸收能量，按选择定则跃迁，使得各原子的外层电子都处在某同一能级上，这种技术称为光泵技术。

以Rb^{87}的原子为例；Rb^{87}的外层电子的基态为$5s_{1/2}$（即n=5，$L=0$，$s=\frac{1}{2}$，$J=\frac{1}{2}$），称$5s_{1/2}$态。其第一激态（即稍高的一个能级）为$5p_{1/2}$态，（即n=5，$L=1$，$s=-\frac{1}{2}$，$J=\frac{1}{2}$）。这两个能级间相应的玻尔频率为 $f=3.7725\times10^{14}$赫，波长为 $\lambda=7948$ Å，称D_1线。（Å称为埃，1 埃$=10^{-8}$厘米）。因 Rb^{87} 的原子总角量子数F有两个值，即具有两个超精细能级结构。在外磁场中又各分裂为 $2F+1$个塞曼磁次能级，见图 3.5.1。

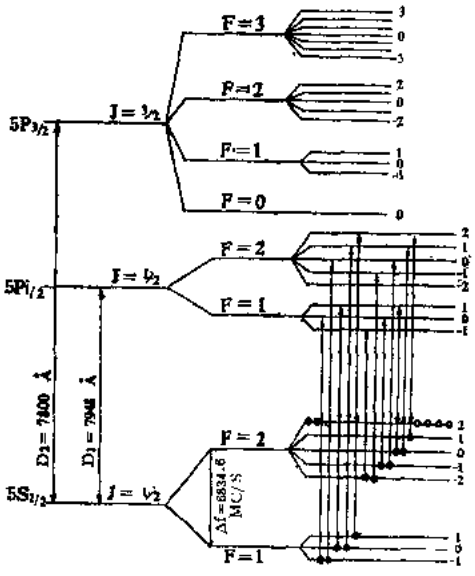


图 3.5.1 Rb^{87} 原子能级及光学取向示意图

原子物理学研究指出，能级跃迁如用右旋圆偏振光进行激发（用圆偏振片一红外启偏片及1/4波长片来实现），则原子从基态跃迁到$5p_{1/2}$级时应满足$\Delta m_F=+1$的选择条件。由此可知，基态 $5s_{1/2}$ 中 $F=2$，$m_F=2$ 的塞曼次能级因不满足选择定则，这一次能级上的原子不能被激发。而基态中$F=1$中，$m_F=\pm1$，0以及$F=2$中，$m_F=-2$，±1，0等各次能级上的原子因符合选择定则，故被激发到$5p_{1/2}$中各相应的次能级上。但它们仅能在激发态仃留 10^{-8}秒后又以与激发相等的几率按$\Delta m_F=0$，±1的选择定则产生自发跃迁，返回基态的各次能级上，其中亦包括$=2$，$m_F=2$的次能级。基态$5s_{1/2}$中$F=2$，$m_F=2$的次能级上，原子不但不能被激发，相反地又以同其他次能级相同的几率获得由$5p_{1/2}$激发态辐射回来的电子。不难设想，经过一定时间 τ_p（光泵时间）之后，就会使基态各次能级上的

原子全部集中到 $F=2$，$m_F=2$ 的能级上，形成反常分布，这种现象叫做原子的取向或整列。而这种利用光能使原子的能态集中到一定能级上的过程叫光泵。

对氦He^4来说，基态是$^1S_0$。利用高频放电使其由基态过渡到最低状态的激发态2^3S_1以后，再自发地过渡到任何更低的能级是不可能的，这种状态叫做亚稳态。对 He^4而言，因$I=0$，故$F=J$，无超精细分裂。当He^4处于亚稳态2^3S_1后，利用波长 $\lambda=10830.75$ Å（相当于从$2^3S_1\rightarrow 2^3P_1$的辐射频率）的D_1线的右旋圆偏振光照射，使之激发跃进，则2^3S_1中的$m_J=m+1$的磁次能级上的原子因不满足跃迁选择定则，不能吸收此偏振光激发到2^3P_1的任何能级上去，而2^3S_1的其它磁次能级（$m_J=0,-1$）的原子则可激发跃迁到2^3P_1（$m_J=1$，0）的能级上。但仅停留10^{-8}秒后又以等几率（按$\Delta m_J=0$，±1选择定则）跃回2^3S_1的各次能级（包括2^3S_1的$m_F=\pm1$能级），经过τ_p时间后，则亚稳态2^3S_1中原子可能全部集中于$m_F=1$的磁次能级上，相当子原子磁矩在光的作用下定向排列，故称为光学取向。见图3.5.2。

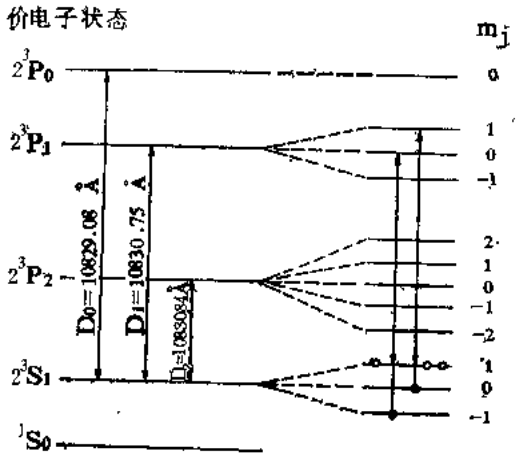


图 3.5.2 He^4（正氦）能级及光学取向示意图

3.5.2 跟踪式光泵磁力仪原理

跟踪式光泵磁力仪，其探头的装置示意图如图3.5.3。

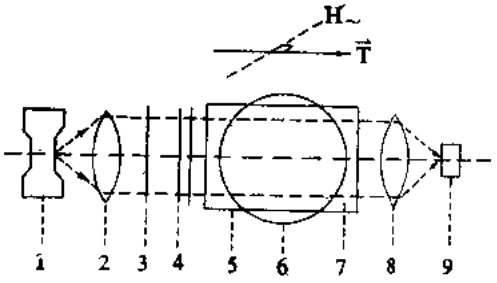


图 3.5.3 跟踪式光泵磁力仪探头的工作原理图

1—氦灯；2—透镜；3—干涉滤波器；4—1/4波长片；5—吸收室；6—射频线圈；7—He^4气室；8—透镜；9—光敏元件

从氦灯①发出的10830.75 Å的单色光（称D_1线），经透镜②变成平行光，再经干涉滤波器③变成 $\lambda=10830.75$ Å的偏振光，又经1/4波长片④变成右旋圆偏振光，射向吸收室⑤，其内充有He^4气⑦，经过高频放电使其达到亚稳态2^3S_1。光线通过吸收室后再经透镜⑧聚焦于光敏元件⑨上，再经放大器检测其光电流的变化达到测定地磁场T的目的。光学系统的光轴大致平行于被测磁场（应置于南北向）。在吸收室上绕有通以射频电流的线圈⑥，其轴向与T垂直。

在达到光学取向以前，由于亚稳态2^3S_1的氦原子吸收D_1线向2^3P_1态跃迁，通过吸收室的光就弱。经过τ_p时间后，原子集中在2^3S_1的$m_J=+1$的磁次能级上，不再吸收D_1线，则透过吸收室的光最强，故通过吸收室的光线的强度是原子取向的函数。

此时若垂直外磁场方向加入一个射频电磁场，与已取向的原子磁矩间相互作用，产生去取向效应，即共振吸收作用，使透过吸收室的光强减弱。当外加交变磁场的频率等于两相邻次能级之间的塞曼跃迁频率时，此时去取向作用最强，透过吸收室的光最弱，继续吸收D_1线。

此射频频率即相邻次能级间的塞曼跃迁频率，实际上是原子在磁场中的进动频率。有

$$f_0=\frac{4E}{h}=\gamma_p\cdot\frac{T}{2\pi} \tag{3.5.2}$$

式中γ_p为原子总磁矩与总动量矩的比值，称原子磁旋比率。

对He^4来说有：
$$f_0=\frac{\gamma_p}{2\pi}T=(2.802356\pm0.00003)\times10^6\ (\text{赫芝/奥斯特})\cdot T \tag{3.5.3}$$

对Rb^{87}来说为：
$$f_0=\frac{\gamma_p}{2\pi}T=(6.99586\pm0.0000\text{n})\times10^5\ (\text{赫芝/奥斯特})\cdot T \tag{3.5.4}$$

这样可以通过测量光敏元件上光强度最弱时的射频f_0来测定外磁场T，即：

$$T=\frac{2\pi}{\gamma_p}\cdot f_0$$

当磁场T变化时，改变射频场的频率，使之始终维持透过吸收室的光线最弱，即使射频场的频率自动跟踪着外磁场T的变化而变化。

3.5.3 自激式光泵磁力仪原理

自激式铷蒸气磁力仪探头装置的示意图和仪器工作的方框图如图3.5.4所示。

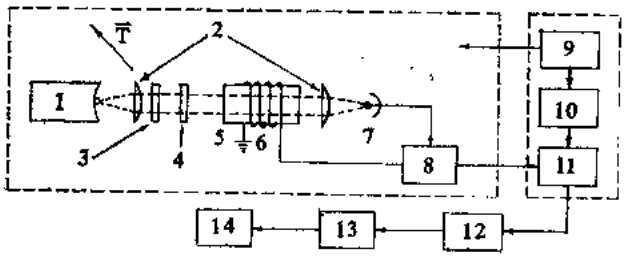


图 3.5.4 自激式光泵磁力仪方框图

1—铷灯；2—透镜；3—干涉滤波器；4—圆偏振光启偏器；5—铷蒸汽吸收室；6—射频反馈线圈；7—光电池；8—放大器；9—电源；19—晶体振荡器；11—混波器；12—频率计；13—偏置分档器；14—记录器

铷灯经干涉滤波器和启偏器产生圆偏振光，照射铷蒸汽吸收室之后，光线在光电管上聚焦。由于光泵作用原子磁矩实现取向排列，并将围绕地磁场发生拉莫进动。如前所述，透过吸收室的光强与取向程度有关，因此光强将受进动频率的调制。因为原子在磁场中的进动频率就等于相邻次能级间的塞曼跃进频率，所以透过吸收室的光强受跃迁频率调制。因此光电讯号被放大器（8）放大后，经相移再反馈到射频线圈（6）上，只要系统的放大倍数大于或等于1，则系统发生自激振荡，其频率即为原于塞曼次能级之间的电子跃迁频率。放大器的另一部分讯号与晶体振荡器（10）的标准讯号混频（11）后之差频由频率计记录。记录的频率由（3.5.2）式计算地磁场T值。

上述二种类型的光泵磁力仪观测磁场的精度取决于测定共振吸收频率的精度。在地磁场中共振频率一般为数十万或百万赫兹，而迴旋磁比率已精确到$1/10^7$，如果f_0测准至0.01赫兹，则地磁场T的测定精度准至0.01γ是不成问题的。光泵磁力仪是测频式磁力仪，因此也具有核子旋进磁力仪的特点，没有温度和零点飘移的影响。因利用共振吸收现象测量，故可连续测定磁场。因共振吸收频率高，因而光泵磁力仪对磁场变化的响应频率较高。另外，与核旋磁力仪相比，对磁场梯度的要求不严格。仪器不需严格定向，能在运动状态下测量。因此光泵磁力仪已经开始广泛地应用于磁测工作。

*3.5.4 超导磁力仪简介

超导磁力仪是本世纪六十年代中期开始利用超导技术而发展起来的一类新型磁力仪。

某些金属如铌、锡、铅等，当温度降到绝对零度附近某一温度时，其电阻突然降到零值，这一温度称为临界温度T_c，其值一般从3.4K 到 18K。这种在低温条件下电阻突然消失的现象称为超导电性，具有这样性质的物体称为超导体。

超导隧道结，又称约瑟夫逊结。它是两块超导体中间隔着一厚度只有10—30埃的绝缘介质层。形成“超导体—绝缘体—超导体”的结构，如图3.5.5所示。中间的薄层区域称为结区。隧道结的绝缘层只有10—30埃厚时，超导电子能通过绝缘介质层。表现为电流能够无阻地流过，在介质层两端没有电压。绝缘介质层能够承受的超导电流一般是几十微安到几十毫安，超过了就会出现电压。约瑟夫逊结能通过很小的超导电流现象，称为超导隧道结的直流约瑟夫逊效应，所能承受的最大超导电流，称为超导结的临界电流I_c。

临界电流I_c对磁场很敏感。图3.5.6是典型超导隧道结的I_c-H关系图（H的方向与结面平行）。临界电流I_c随外磁场H的大小而周期地起伏。没有磁场时，超导结的临界电流I_c最大随着外磁场增加，结的临界电流周期地下降到零；H越大，I_c起伏的次数越多，幅值也越来越小。

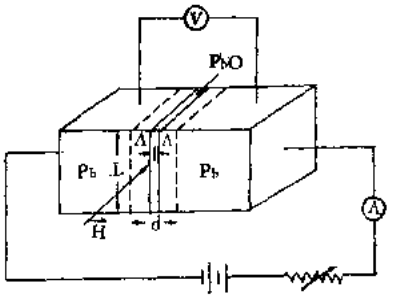


图 3.5.5 超导隧道结构图

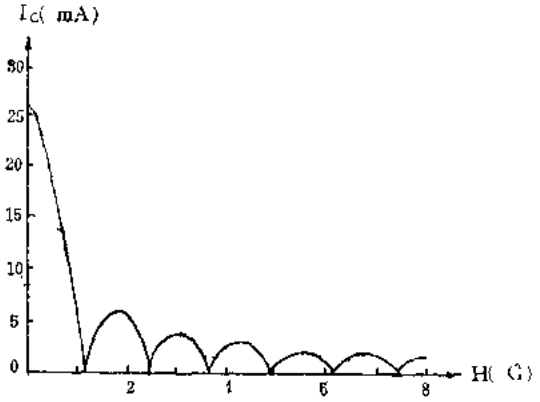


图 3.5.6 超导隧道结的I_c-H曲线

临界电流随磁场周期起伏的现象能够用于测量磁场：图3.5.5中在超导结两端接电源，电压计V无显示时，电流计A显示的电流为超导电流，电压计开始有电压显示时，电流表所显示的电流为临界电流I_c。当加入磁场时，临界电流将有周期性起伏，其极大值并逐渐衰减。理论研究表明，临界电流I_c是透入超导结的磁通量Φ的周期函数，Φ与磁场H成正比，所以通过超导结的临界电流可测定出Φ即可计算出磁场的大小。

因为磁场在介质层及其两侧超导体中透入的深度甚少（超导体内部磁场为零），透过磁场的有效面积很小，故Φ很小，所以测定磁场的灵敏度很低。要使灵敏度提高。必须设法扩大磁场有效作用面积，即增大实际检测的磁通量。利用包含超导结的超导环（又称超导量子干涉器）能够扩大检测的磁通量。

超导磁力仪具有灵敏度高测程大（0—n×1000奥斯特）、磁场的响应频率高（0—1000赫）和观测数据稳定可靠的特点。仪器主要弱点是为了实现超导，必须有低温条件。目前常用装于杜瓦瓶的液氦为制冷材料，这给超导磁力仪的使用带来许多不便。目前这种仪器主要用于磁变测量和岩石磁学研究。

§3.6 测定岩（矿）石磁参数的磁力仪

岩（矿）石的磁参数一般情况下是通过测定标本的磁场获得的。因此，前述各种测定磁场的仪器原则上均可用于磁参数测定。但其中某些仪器因灵敏度低，而标本磁场又很弱，因此用于磁参数测定并不理想。本节补充讨论几种专门用于测定磁参数的仪器。

3.6.1 无定向磁力仪

无定向磁力仪的磁系是由两个磁矩相等极性相反的磁棒固定在一个金属杆上构成的。如果用悬丝在杆的一端将磁系吊装起来，因其总磁矩为零，所以不受均匀磁场的影响。假如悬丝的扭力系数为零，则磁系可在任意方位上静止，故称为“无定向磁系”。见示意图3.6.1。

无定向磁系最大的特点是不受均匀磁场作用，但是对不均匀场却很灵敏。

如图3.6.2所示，无定向磁系下部磁棒受到一个弱磁场 h 作用后，其平衡方程式应为：

$$M_2 h\cos\theta = \tau\theta$$

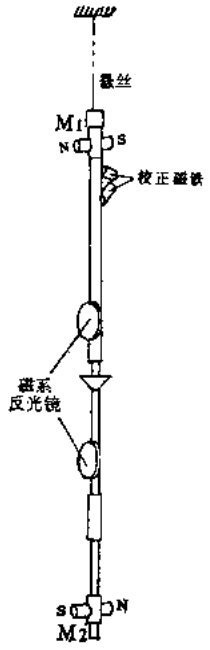


图 3.6.1 无定向磁系示意图

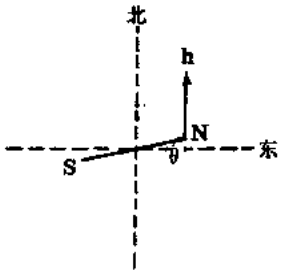


图 3.6.2 无定向磁系受磁场作用力图

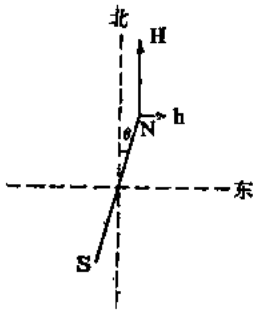


图 3.6.3 磁针在地磁场中受力作用图

其中M_2为磁棒的磁矩，θ为磁系偏转的角度，τ为悬丝的扭力系数。当θ角很小时，其灵敏度为：

$$\frac{\partial\theta}{\partial h} = \frac{M_2}{\tau} \tag{3.6.1}$$

一般情况下M_2比较大（35—45高斯·立方厘米）。而τ是很小的，所以灵敏度比较高。

如果是一个具有同样磁矩的磁针，在地磁场中受一弱磁场h作用，如图3.6.3所示，这时是 h 的力矩和地磁场H的力矩相平衡。其平衡方程式为：

$$HM_2\sin\theta + \tau\theta = M_2 h\cos\theta$$

将上式分别对θ和对h微分，则当θ很小（$\cos\theta\to1$，$\sin\theta\to0$）时有：

$$\frac{\partial\theta}{\partial h}=\frac{M_2}{HM_2+\tau} \tag{3.6.2}$$

（3.6.1）式和（3.6.2）式比较可看出，因M_2H比τ大得多，故单一磁针的灵敏度比无定向磁系的灵敏度低得多。

我国生产的WCW_1-63型无定向磁力仪，利用地磁场磁化标本，仪器的格值为0.3——0.5γ/格，上下两磁棒相距15厘米，测定的磁化率范围是20—5000$\times10^{-6}$CGSM。磁力仪的外貌如图3.6.4所示。

我国生产的WSW-1型无定向磁力仪，主要用于古地磁标本的测定。仪器采用两种方式观测，一种是利用位于仪器5米远的反射标尺上的光点的偏移观测。一种是利用光电池控制电源负反馈系统，适当选择反馈电路的元件、利用数字电压表测定负反馈的电压。这种仪器当光臂5米时灵敏度为5×10^{-8}奥斯特/毫米。为了保证上述灵敏度，仪器设计十分考究：选择合适的吊丝，设计磁系的形状，控制磁系的转动惯量，使磁系固有机械振动的周期小于20秒。

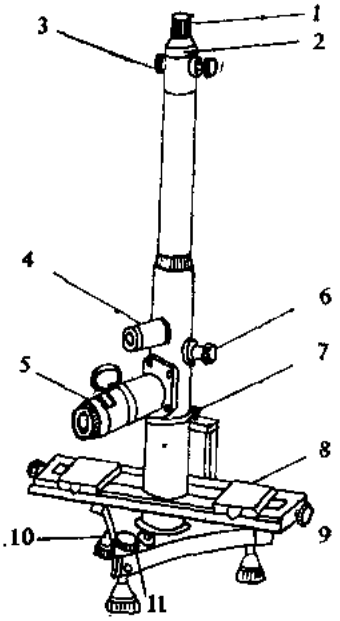


图 3.6.4 WCW_1-63型无定向磁力仪外貌图

1—悬丝升降调节手钉；2—扭头；3—旋扭；4—粗读镜筒；5—精读镜筒；6—开关；7—标本架升降手钉；8—标本平台；9—标本台移动手钉；10—水平调节螺丝座；11—水平调平螺丝。

利用无定向磁力仪测定标本磁化率时，一般是利用地磁场磁化标本。高精度仪器则将地磁场补偿为零，用线圈的人工磁场来磁化标本。

3.6.2 旋转磁力仪

旋转磁力仪的工作原理是将岩石标本绕某个轴匀速转动，用感应线圈作探头，测定该标本磁场所产生的电动势之振幅与相位。因此对这种装置有人称之为岩石发电机。

旋转磁力仪的方框图见图3.6.5。

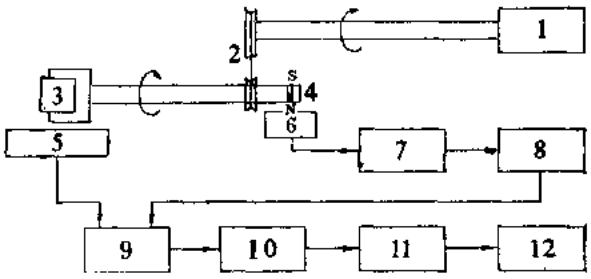


图 3.6.5 旋转磁力仪方框图

1—驱动马达；2—传动皮带；3—标本；4—参考磁铁；5—信号线圈；6—参考线圈；7—移相器；8—衰减器；9—混合电路；10—放大器；11—带通滤波器；12—阴极射线示波器

当驱动马达以一定频率转动时，带动轴两端的标本③与参考磁铁④也以相同频率旋转。它们分别在线圈⑤、⑥中感应出同频率的信号，⑥中的信号首先经过移相器⑦以改变其相位角，再经过电压衰减器⑧以改变其振幅的大小。然后输入一混合电路⑨中与标本在⑤中产生的信号相加，其和最后被放大器⑩放大。经过滤波器⑪输入到示波器⑫。工作时

调节移相器⑦和衰减器⑧使混合电路(9)中的总和为零。则从⑦与⑧度盘上可直接读出该磁矩的方向与大小。

目前旋转磁力仪多采用磁通门灵敏元件做探头。探头形状为圆环形，标本在圆环探头的中心旋转。为了研究磁性的温度特点，围绕标本周围设有电炉，这标本进行加温，标本常需加温至6～700℃，为了防止磁通门探头烧毁，在电炉与探头上面设计有冷却用水套。为了避免观测时外界变化磁场对标本的影响，探头和电炉等均放在一个高导磁率坡莫合金制成的磁屏蔽筒内。屏蔽筒一般为多层屏蔽筒，筒内磁场一般可达外界磁场的万分之一左右，即几个伽玛。美国的 DSM-1 型旋转磁力仪和英国的 DIGICO 旋转磁力仪均属这种类型。

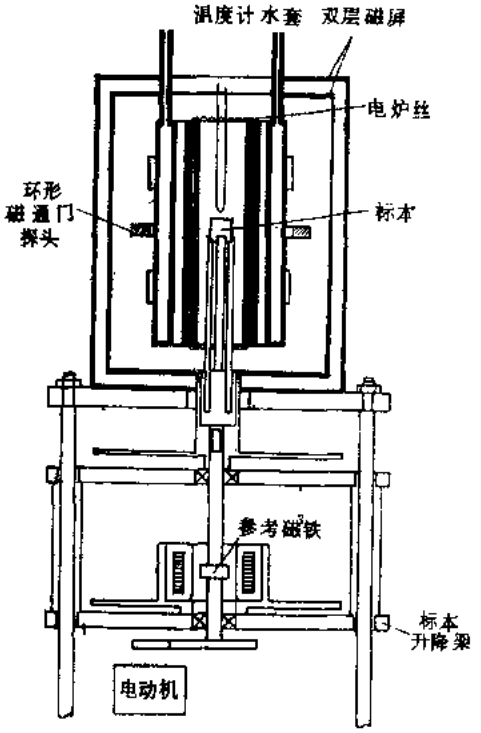


图 3.6.6 磁通门旋转磁力仪探头结构示意图

测定时，使标本分别绕三个坐标轴旋转。当标本绕Z轴旋转时，可测得标本总磁矩M

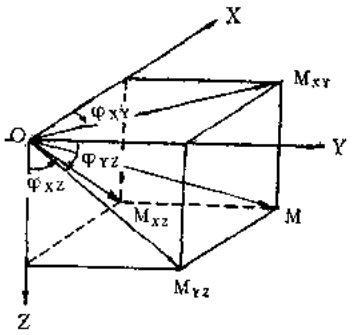


图 3.6.7 旋转磁力仪测定标本磁矩的分量图

在xoy平面上的投影M_{xy}的大小及与x轴的夹角φ_{xy}。同样当标本相继绕x、y轴旋转时，则可分别测得M_{yz}与M_{zx}、φ_{yz}与φ_{zx}，见图3.6.7。由于

$$\left.\begin{aligned} M_{xy} &= (M_x^2 + M_y^2)^{1/2} \\ M_{zx} &= (M_z^2 + M_x^2)^{1/2} \\ M_{yz} &= (M_y^2 + M_z^2)^{1/2} \end{aligned}\right\} \qquad (3.6.3)$$

故：$M_r = \sqrt{\dfrac{M_{xy}^2 + M_{yz}^2 + M_{zx}^2}{2}}$；

$$J_r = \frac{M_r}{V} = \frac{1}{\sqrt{2}V}(M_{xy}^2 + M_{yz}^2 + M_{zx}^2)^{1/2}$$

由图看出由上述振幅的数据，可测得相位角，可计算J_r的偏角和倾角。

3.6.3 磁化率仪

磁化率仪是测定岩（矿）石露头、标本及土壤样品磁化率的仪器。仪器的探头是一个线圈绕制成的电感元件。测定时将探头放置在露头或样品上，则相当于在线圈中充填了视磁化率为K'的磁介质，这时元件的电感量与介质的视磁化率有关。在均匀磁路的情况下，其电感L与视磁化率成正比，即：

$$L=\frac{N^2s}{l}\cdot\mu=\frac{N^2s}{l}(1+4\pi\kappa') \tag{3.6.5}$$

其中：N——线圈匝数，

s——线圈的截面积；

l——磁路路径；

μ——介质的导磁率；

κ'——介质的视磁化率。

仪器一般用交流电桥观测探头的电感变化（如图3.6.8）。仪器探头为电桥的一个臂，其他各臂则由电阻和电容元件组成。电桥各元件主值的选择原则是：若电桥 AB 端输入频率固定的正弦激励电压U_0，当探头在空气中测量（充填介质的磁化率为零）时，电桥CD端输出为零，即电桥处于平衡状态。为了保证仪器工作稳定，激励电压U_0的幅度和频率要稳定，波形失真度要小。当探头观测样品时，因介质磁化率不为零，探头电感增加，电桥失衡。CD端输出交变电压ΔU，它与介质的磁化率有关。但这类仪器不能直接测定磁化率值，一般均需用磁化率已知的标准标本来标定仪器的格值。

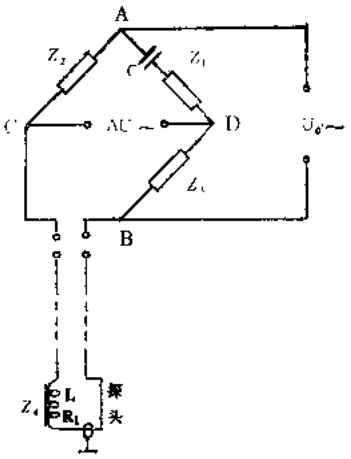


图 3.6.8　磁化率仪的交流电桥

第四章　磁测工作方法

磁测工作按其观测磁异常的空间领域不同，分为地面磁测、航空磁测、海洋磁测和井中磁测等。任何磁测工作只有采用正确的工作方法，才能获得完整而又可靠的磁异常，从而才有可能通过对异常的分析研究，得出可靠的地质结论。因此注重野外工作方法和技术是获得可靠地质结论的基础。

磁法勘探工作一般包括以下几个阶段：

设计阶段：接受任务后，应着手收集与工作区有关的地质、物性（主要是岩、矿石的磁性）及前人的物探、地形、地物资料，并到施工现场踏勘。在此基础上编写磁测工作设计。对工作任务、测区、测网、比例尺、方法技术、磁测精度及人员编制、仪器设备、工作进度、施工顺序及经费予算等问题按磁测规范的要求做出设计，报上级审批。

野外施工阶段：包括磁测仪器的调节和常数测定、基点网建立、观测磁异常、室内整理计算、编绘异常图和成果图、进行质量检查、采集物性标本并进行测定和整理及室内外资料的验收等等。

最后是异常解释推断及编写成果报告阶段。

上述每一阶段的具体内容和技术要求，在磁测规范（地面及航空）中都有详细规定。本章不过多地重复规范中的内容，仅对磁测野外工作的一些基本问题作简要介绍，详细内容请读者参阅磁测（地面与航空）规范。

§4.1　测网、比例尺及磁测精度

4.1.1　测网和磁测比例尺

磁测比例尺是延用了地质测量的中小比例尺的概念（大比例尺的地质测量属于勘探）。与地质比例尺相联系并考虑到磁法中的点测和连续测量两种情况，磁测比例尺的大小以单位面积上的路线长度来衡量。比例尺取决于线距，线距定了，比例尺也就确定了。因此，把测线间的实际距离在图中缩成一厘米的缩尺，称作相应的磁测比例尺。例如，1:10万比例尺的线距为一公里，1:5万比例尺的线距为500米等等。

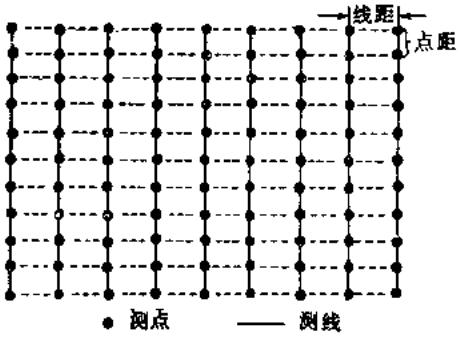


图 4.1.1　测网示意图

点距一般为线距的五分之一。这主要是考虑了同比例尺地质测量确定地质界线的精度。如 1:10 万比例尺，确定地质界线的精度为100—250米。

磁测比例尺不仅表示对测区磁场研究的详细程度，也反映了图的准确性。因此，我们认为在点测的情况下，单位面积上的测点数，可表示对磁场的研究程度。

测网一般是由相互平行的等间距的测线和在测线上分布的等间距的测点所组成，如图4.1.1所示。测网形状有两种，线距大于点距时为长方形测网，线距等于点距时为正方形测网。一般用线距与点距的乘积（线距×点距）表示测网的密度。如线距为50米点距为20米，测网密度为50×20(米²)。

比例尺与测网密度的对应关系如表4.1.1。

表 4.1.1

磁测比例尺	长方形测网			正方形测网	
	线距（米）	点距（米）	每平方公里测点数	线距=点距（米）	每平方公里测点数
1:50000	500	50—250	40—8	500	4
1:25000	250	25—100	160—40	250	16
1:10000	100	10—50	1000—200	100	100
1:5000	50	5—20	4000—1000	50	400
1:2000	20	4—10	12500—5000	20	2500
1:1000	10	2—5	50000—20000	10	10000
1:500	5	1—2	200000—100000	5	40000

为了使用方便，表中列出了不同磁测比例尺每平方公里内观测点的数目。

同一个异常用不同的测网密度，对异常的反映往往是不一样的。

如图4.1.2是我国某镍矿区不同测网所获得的磁异常结果。图(a)用50×10(米²)的测网，图(b)是50×20（米²）的测网，图(c)是100×40（米²）的测网。将图(a)和图(b)比较可以看出异常形态基本一致，而同图(c)比较则发生很大变化。图(c)的测网显然没有控

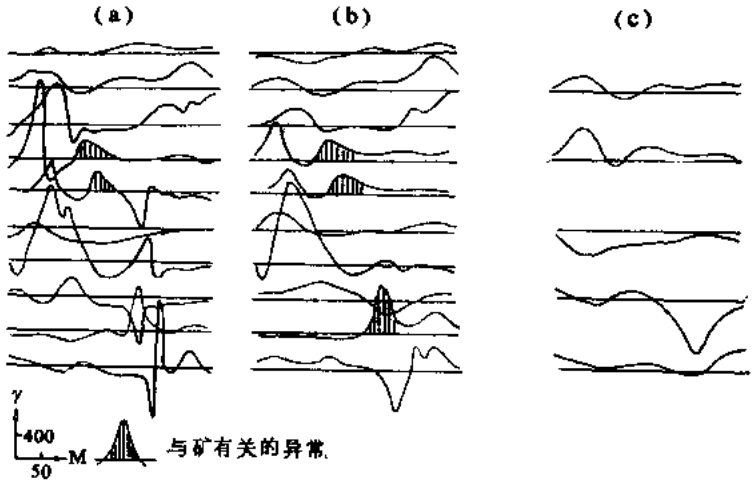


图 4.1.2 不同测网密度的磁测结果

制住异常形态。很明显，在该区采用50×20(米²)的测网是适宜的。

为了正确选择测网形状和密度，通常要考虑以下两个因素：

1．异常研究程度

当普查找矿时，线距应不大于要找的范围最小异常的长度，点距应保证测线穿过异常时，有三个测点落在异常的范围之内，以便异常与磁测中产生的较大的偶然误差、观测或计算造成的孤立点“异常”相区别。有时也用“点距小于有效异常宽度之半”的提法。按

误差理论，大于三倍均方误差（磁测精度）的异常值的范围称为有效异常宽度，若点距小于有效异常宽度之半，那么一般2—3个测点会落在有效异常宽度之内。当详查时，应在普查结果的基础上加密测网，使异常的形态特征能反映出来。按经验一般至少要有5—7条测线穿过异常，点距应保证异常曲线连续，使得再加密测网时异常形态无变化。

2．异常的形态和规模

当根据实际踏勘或小比例尺磁测资料已掌握异常具有一定走向时，应采用长方形测网，测线方向与异常走向垂直。当异常走向不明显时，则采用方形测网。测网密度还要考虑异常规模大小。如果异常规模很大，较小的比例尺即可满足掌握异常特征的需要，这时增大比例尺则是无益的。实际异常经常是很复杂的，因此在观测异常的过程中，根据对异常的进一步认识，应适当的修改测网，使其更符合客观实际的要求。

4.1.2 磁测精度

磁测精度是衡量异常观测质量的主要标志，是确定磁测工作方法技术的依据，同时也是决定工作效率和成本的重要因素。因此，正确的确定磁测精度，并依此确定磁测工作的方法和技术，是磁法勘探工作设计和施工的一个十分重要的环节。

1．磁测均方误差

精度是反映观测的异常值与实际值差别的指标，一般用观测误差来表示。观测误差包括：偶然误差、系统误差和过失误差三种。过失误差是由于操作和计算等疏忽大意造成的，是在一般观测条件下，比予期的误差大得多的误差，认真工作可以避免。大的过失误差在成果中也是不难分辨的。系统误差是一种有规律的误差。仪器性能校准不当，日变、温度、仪器零点等有规律的干扰因素的影响及操作者的习惯性错误等原因都可造成系统误差。采取适当措施后，系统误差可以减少和消除。偶然误差是一种符合统计规律的误差，它是由操作、仪器性能变化等不可避免的偶然因素造成的。采取适当措施后，偶然误差可以降低，但是不可避免。偶然误差的大小反映了磁异常观测的质量。偶然误差的大小常用均方误差来衡量。均方误差又称均方根误差、标准误差和中误差等。在若干个观测点(n)上，某点的观测绝对误差(Δ_i)为该点之真值Z_{i0}与观测值Z_i之差，绝对误差的平方和的平均值之方根，称之均方误差(m)，公式为：

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum(\Delta_i)^2}{n}}$$

均方误差就其数值而言，与绝对误差和相对误差相比，它的特点是计算时与观测中个别误差的正、负号无关，它能比较明显的反映出个别较大的偶然误差。

在实际观测中，磁场的真值是不能得到的，绝对误差也无法确定。故只能间接确定均方误差值。在若干测点(n)上，原始观测值为：$\Delta Z'_1$，$\Delta Z'_2$，$\Delta Z'_3\cdots$，$\Delta Z'_n$；重复观测值为$\Delta Z''_1$，$\Delta Z''_2$，$\Delta Z''_3\cdots$，$\Delta Z''_n$；原始与重复观测的偏差为：$\delta_1=\Delta Z'_1-\Delta Z''_1$，$\delta_2=\Delta Z'_2-\Delta Z''_2$，$\delta_3=\Delta Z'_3-\Delta Z''_3$，$\cdots$，$\delta_n=\Delta Z'_n-\Delta Z''_n$。差值$\delta$的均方误差($m_\delta$)应为：

$$m_\delta=\pm\sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{n}}$$

由误差理论可知，几种观测值的代数和的均方误差的平方，等于各种观测值均方误差的平方和，原始观测和重复观测精度相同，均方误差为m，则有：

$$m_\delta^2=m^2+m^2=2m^2$$

所以观测的均方误差：

$$m=\frac{m_{\delta}}{\sqrt{2}}=\pm\sqrt{\frac{\sum\delta_i^2}{2n}} \tag{4.1.1}$$

注意这里的$\sum\delta_i^2$表示二次等精度重复观测的差值的平方的总和。这是磁测中评价磁异常观测质量的常用公式。

磁测精度不同，地质效果亦不同。当观测强磁异常时，均方误差可以大一些（精度低一些）。而观测弱磁异常则要求均方误差小些（精度高一些），否则异常的可靠性就差，甚至会漏掉有意义的异常。

图4.1.3为我国山东某地不同磁测精度的磁测结果对比。图中曲线为异常等值线，1957年在这个地区进行磁测，均方误差为±33γ，精度较低，异常形态受到歪曲，等值线分布不规律，因而当时这个异常被忽略了。1966年重新工作，磁测均方误差为±7γ，精度较高，等值线的分布很有规律，明显地存在一个与公路平行的规则异常。经钻孔$CK211$验证，该异常为磁铁矿引起。在充分说明磁测精度不同、地质效果也不同。故在观测弱异常时需用较高的精度。图中所示两次观测的磁异常数值不同，是两次工作选用了不同基点所致。

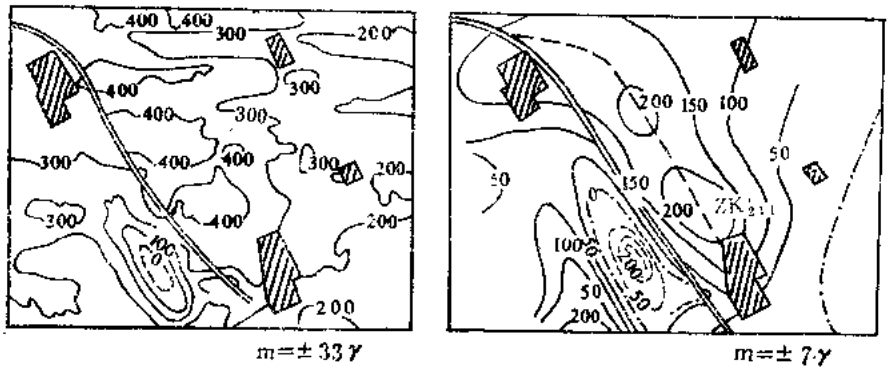


图 4.1.3 不同磁测精度的磁测结果

2．磁测精度的确定

磁测工作所采用的仪器类型不同，其磁测精度也不同。目前我国使用悬丝式磁力仪，根据仪器的实际情况，将磁测分为三个等级：

高精度　均方误差＜±10γ

中精度　均方误差±10γ—±20γ

低精度　均方误差±20γ—±40γ

使用其它类型仪器目前尚无通用精度标准。确定磁测采用何种精度标准，通常考虑如下几个因素：

（1）磁测任务和磁异常强度

磁测精度的选择取决于研究对象的磁异常强度。

普查时，磁测的目的在于发现异常，其精度主要取决于最低有意义异常的强度。由误差理论可知，一般将大于三倍均方误差的观测值视为可信值。用异常等值线圈定异常时，其间隔一般也要大于均方误差的三倍，才能保证所圈定的异常准确可靠。圈定异常时，为了方便与较大的偶然误差相区别，一般规定圈定最低有意义异常要有两条等值线。因此，

观测异常的均方误差（m）应低于或等于最低有意义异常极值($Z_{a\min}$)的1/5—1/6。即$m \leqslant \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)\cdot Z_{a\min}$。有意义的最低异常的极值则应根据踏勘的实际异常资料确定，或者根据收集的磁性资料和最小有工业价值矿体的规模来估算。

详查时异常是已知的，磁测目的在于准确的反映磁异常的特征。因此除了加密测网外，还必须有较高的磁测精度。均方误差应低于等值线间隔的1/2.5—1/3。如等值线间隔取为±100γ，均方误差应取小于±30γ。等值线间隔的选取应以能完整反映异常特征为原则。当缩小等值线间隔时，异常特征基本不变，则可认为所选间隔是合适的。这项工作可在最小的有工业价值的矿体的理论模型上进行。

在进行典型剖面和精测剖面观测时，因观测结果直接为定量推断提供数据，因此，均方误差应更小。特别是有时负异常的绝对值甚小，有时则相反，负异常绝对值较大，而正值甚小。在定量解释推断时，这样一些弱异常的分布规律和特征是很重要的，因此磁测均方误差应至少小于这些弱值部分异常极值的1/3。

（2）磁测资料的综合利用

矿体异常有强有弱，因此确定观测精度时，要防止只圈定强磁异常而忽略了弱异常。当可能出现强弱异常叠加的情形时，则应以弱磁异常为选择精度的依据。某些地区可能赋存多种类型的矿产资源，因其磁性相差很大，其异常的差别也会很大，确定精度时必须考虑综合找矿的需要，既有利于找强磁性矿床又有利于寻找弱磁性矿床。磁法勘探本身是一种综合研究性质的工作，所以磁测精度也应满足与找矿有关的地质任务的需要。如在找矿的同时尽量解决地质填图、圈定地质构造等，这就应在不影响主要任务的前提下尽量提高精度，以求解决更多的地质问题。

（3）磁测效率和地质效果

一般说来，磁测精度越高，地质效果越好，但精度提高的同时会使效率降低，成本提高。故盲目提高精度常常造成浪费。应结合测区的实际情况作具体分析，选择合适的精度。

3．影响磁测精度的因素

磁测施工的各环节都将影响磁测精度，通常主要考虑如下几方面：

（1）仪器的选择和调节的均方差(m_1)；

（2）基点的选择、连测及基点网建立的均方差(m_2)；

（3）野外观测的均方差(m_3)；

（4）消除干扰的各项改正的均方差(m_4)；

（5）整理计算的均方差(m_5)；

磁测的这些主要环节都是独立进行的。由误差理论可知，总均方误差的平方，应等于独立原因的均方误差的平方总和。总均方误差为m，为了保证总的磁测精度要求，则应有：

$$m^2 \geqslant m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + m_5^2 + m_6^2 \qquad (4.1.2)$$

式中m_6为其它原因的均方差。

上式说明磁测各环节的均方误差的平方和要小于和等于磁测总均方误差的平方，也就是说总精度要求确定之后，各环节的精度数量上要满足上述公式要求。设计磁测各主要环节的精度则应按公式作适当的分配。磁测工作各环节的精度确定之后，即可确定相应的工作方法。这项工作是磁法勘探设计的重要环节。

§4.2 地 面 磁 测

目前我国的地面磁测主要是测量地磁场垂直分量的相对变化ΔZ，而对ΔH很少测量，考虑到ΔH可由ΔZ换算得到，因此下面主要介绍地面垂直分量的磁测方法（以下简称为垂直磁测）。

4.2.1 野外观测

1．基点和基点网

地面垂直磁测工作必须先建立基点。基点可分为：总基点、主基点、分基点。见图4.2.1。

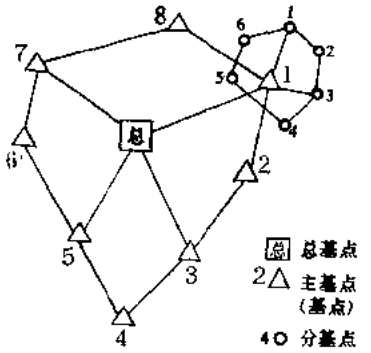


图 4.2.1 基点布置图

总基点：是全区磁异常的起算点，是整个测区的零点，所以总基点应设在正常磁场区。测区的正常场可以根据小比例尺的磁测成果图选定。在没有磁测资料的情况下可以根据地质情况在弱磁性岩石分布区实测磁法长剖面，由实测磁场选择正常场。这些条件都不具备时也可以在野外工作进行一段以后，根据磁测成果来确定，

主基点：测区面积比较大时，为了检查、校正仪器的性能，全测区应设置若干个主基点，作为分区异常的起算点，主基点一般设在驻地附近或出工、收工必经之处以便于早晚观测早基和晚基。

分基点：当分测区面积较大时，往返于基、测点之间进行观测，将影响磁测效率，并为了在较短的时间（2—3 小时）内测量仪器的零点位移值（这期间可认为线性变化），以便较精确地校正掉它的影响，因此在分测区内可设立若干个分基点。分基点应选在无异常的平稳磁场处，并且要便于使用。

总基点、主基点和分基点之间即构成基点网。基点网连测时，要选取高精度的仪器。仪器应进行全面检查和调节，准确测定各项常数。连测时要精确地进行各项改正。为了提高改正精度，一般连测工作最好在日变幅度小和温度梯度小的早晨和晚上进行，连测的时间间隔也应尽量短。另外应增加观测次数，从而提高精度。连测时一般采用多台仪器进行往返观测，或用一台仪器进行多次往返观测，一般采用闭合观测，提高连测精度。

连测结果不进行平差时，可采用贝塞尔公式计算均方误差，见4.2.2式。

连测时一般将总基点和基点（或主基点和分基点）组成若干个闭合环进行观测。如为一个独立的闭合环时，应将闭合差值按闭合环的边数平均分配到各基点上。如果是几个闭合环，精度要求较高时，则应进行平差。均方误差可按下列公式计算：

$$m = \pm\sqrt{\frac{\sum \delta^2}{r}}$$

式中 m——基点网连测均方误差；

δ——每边上的改正值；

r——闭合圈数。

基点网连测均方误差计算的结果应满足表4.2.1的要求。

由表可见基点网或分基点网的连测精度以均方误差的平方值计算，仅为总精度的平方

表 4.2.1

基点网形式	只设单一基点网		同时设基点、分基点网		
均方差类别(平方差)	m^2（测点）	m^2（基点）	m^2（测点）	m^2（分基点）	m^2（基点）
在总磁场方差中所占（平方值）比例	$2/3M^2$	$1/3M^2$	$2/4M^2$	$1/4M^2$	$1/4M^2$

值的1/3——1/4，即连测均方差约为总均方差的0.6—0.5倍。因此，基点连测必须具有较高的精度。

2．野外基、测点观测

磁测精度不同，野外基、测点的观测要求也不相同。为了保证消除干扰因素的各项改正的准确性，在磁测精度相同的条件下，基点观测精度要高于测点观测精度。

在野外观测中为了使数据准确，操作时，操作员不能携带磁性物品。观测时要避开工业建筑、矿石堆及开采场等的影响。在观测过程中，操作人员应注意观察地质现象、并随时检查露头岩石标本的磁性，作好记录，为异常解释推断积累资料。观测到磁异常时，应随时加密测线和测点．以便准确地确定异常的形态。

3．质量检查

磁测结果的质量检查目的是在于了解通过野外工作获得的磁异常数据的质量。它是磁测野外工作的一个重要组成部分。

评价磁异常的偶然误差一般利用重复观测（或称检查观测）的方法。在磁场平静处一般应抽出3%—5%的测点进行重复观测，测点较少时检查观测点不能少于30个。普查时异常区检查数量应不少于总检查数量的5%，详查时不能少于总检查数量的30%。剖面磁测的检查观测数量一般必须大于总观测量的10%。其最少的绝对点数不限。检查观测的测点应比较均匀地分布在整个测区。检查点才具有代表性。

检查观测应与原始观测工作精度要求相同。检查观测一般要符合“一同三不同”的原则，即检查观测与原始观测必须在不同日期、由不同操作员、用不同仪器，在同一点位进行。当然只有一台仪器工作时例外。检查工作一般应该在磁测工作开始后随时进行，这样对磁测工作可以起到随时检查工作质量的作用。不允许在一个阶段野外工作完成之后或全部野外工作完成之后进行突击性质量检查。

4.2.2 磁测数据的整理计算

1．磁测结果的各项改正

（1）日变观测及其改正

在目前我国常用的三种磁测精度情况下，在数十公里到一百公里的范围之内，日变可以认为是相同的。所以工作地区的日变资料可以向附近的地磁观测台索取，但地磁台距离工区较远时，则必须进行日变观测，并绘制日变曲线。日变改正值从日变曲线上查得。在日变曲线上量得某时刻相对早基时间的日变值并取反号，即为该时刻的日变改正值。

（2）温度改正

磁秤虽然有温度补偿装置，但一般温度系数并不为零，因此，观测测点时仪器的温度如与基点观测时温度不同，观测数据必须进行温度改正。

仪器的温度系数为α，早基起始温度为t_0，测点观测时的温度为t，则改正值为$-\alpha(t$

$-t_0$)。若温度影响值小于磁测均方差的1/10，则可忽略不计。

（3）零点改正

仪器的零点掉格大致呈线性变化，即零点掉格的绝对值随观测时间增长而增加。仪器间隔一定时间到基点重复观测，求出此时基点磁场的变化值，从中减去日变值和温度影响值，即得到各重复观测时的零点掉格数值，取其反号值为零点改正值。见图4.2.2。

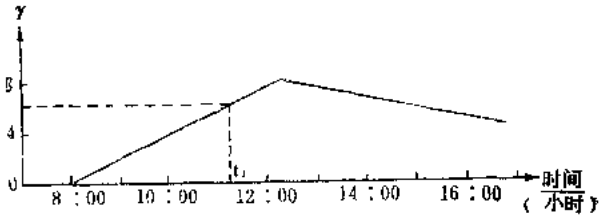


图 4.2.2 零点改正曲线

如果重复观测的不是早基点，而是分基点网中的分基点或其它基点时，则按下式计算：

$$m_{零}=\Delta Z_{观测}-\Delta Z_{连测} \tag{4.2.1}$$

式中$m_{零}$——观测某基点时零点掉格值；

$\Delta Z_{观测}$——观测时求得的该基点相对于早基点经过日变和温度改正的磁场差值。

$\Delta Z_{连测}$——经过基点网连测和平差计算得到的该基点相对于早基点的磁场差值。

每天早晚若零点掉格值小于设计规定的磁测均方误差的1/5时，可以不作改正。若大于均方误差的2倍时，则难以保证磁测精度，该日磁测结果必须报废重测。

（4）正常梯度改正

测区面积较大时，还需作正常梯度改正。正常梯度值的计算方法如下：

①利用全国地磁图，查到工作地区的磁场水平梯度（由相邻两等值线的磁场差除以两等值线的南北向距离即得）。

②利用正常梯度公式：$\frac{\partial Z_0}{R\partial\varphi}=\frac{2H_0}{R}$，可算出不同纬度地区的垂直磁场正常梯度值。式中$R$是地球的半径，以公里为单位，$H_0$是根据地磁图查得的地磁场水平分量，$\varphi$为纬度。正常梯度值的单位为伽玛/公里。

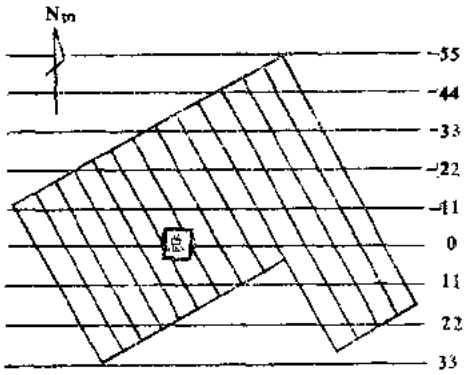


图 4.2.3 正常梯度改正图

进行正常梯度改正时，一般以总基点为标准，由测量成果图中量出各测点相距总基点的南北向距离的公里数，乘以梯度值，即得到各测点的正常梯度改正值。我国范围内当垂直磁测时测点若在总基点以北，改正值为负，反之为正。

为了计算方便，可在测网分布图上，以总基点为零，南北向每隔一公里画一条东西向公里线，并标明相应的改正值，见图4.2.3。则各测点的正常梯度改正值可以从图上按公里线的改正值内插求得。这种方法较前述计算法方便快速，并能保证精度要求。

（5）基点改正

在设置基点网的大面积磁测工作中，应将利用各基点起算的磁测结果统一为相对于总基点的异常值，这项工作称为基点改正。如某工区基点磁场比总基点高150γ，那么工区

内异常值都相对减小了150γ，因此工区的基点改正值应是＋150γ。

此外，在整理计算中，习惯将测点扭鼓度数值对于基点扭鼓度数的差值的计算，称为扭鼓改正。

（6）混合改正

由于日变、温度及零点掉格这三种影响是混在一起反映在观测数据中的。为了提高工作效率，也可以不进行前述分项改正，而把日变、温度及零点位移三项影响看成是一种综合影响，一次消除这种变化的影响称为混合改正。

在某一时间间隔内，对同一基点重复观测获得的磁场差值，即是该时刻的混合变化值。以横轴代表时间，纵轴代表混合变化值，绘成混合变化曲线。从曲线上可查出观测某测点的混合变化值，将其反号即为混合改正值。如在某一时间间隔内，对的是不同的基点，则两相临基点的磁场差值虽含有两点间基差和混合变化值。此时作混合改正，必须先要消去基差。

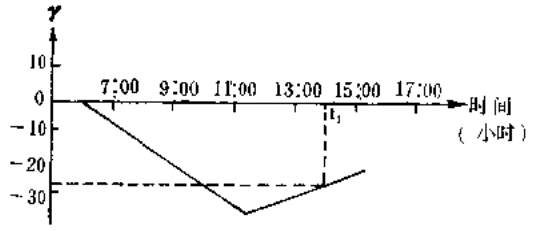


图 4.2.4 混合变化曲线图

混合改正的精度，取决于对基点观测的时间间隔及基点观测的精度。如图 4.2.4 的混合变化曲线是在同一基点上重复观测两次，即每日早、中、晚各在该基点观测一次的混合变化值绘出来的。

时间间隔长时，混合变化是非线性的。如为高精度磁测，则需将重复观测的时间间隔缩短至 2 个小时之内，这时混合变化可看作是线性的。

2．磁测数据的整理计算

磁测数据的计算表格一般印在野外记录本上，形式如表4.2.3。

如进行混合改正时，计算表格如表4.2.4。

表4.2.3及表4.2.4中：Δ为测点平均读数与基点平均误数之差，γ为Δ与仪器格值之乘积。表4.2.3中总改为（4），（5），（6），（7）四项改正之和。

表 4.2.3

平均读数	Δ	γ	改正项目					正常梯度改正	基点改正	Z_a	备注
			扭鼓	日变	温度	零点	总改				
（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）	（9）	（10）	（11）	

表 4.2.4

平均读数	Δ	γ	扭鼓改正	混合改正	正常梯度改正	基点改正	Z_a
（1）	（2）	（3）	（4）	（5）	（6）	（7）	（8）

3．质量检查结果的统计计算

质量检查观测，平稳磁场区和异常区分别统计其均方误差和平均相对误差。

对平稳磁场区，两次观测结果计算均方误差用（4.1.1）式。

当同一观测点的观测次数多于二次时，可利用贝塞尔公式计算均方误差，即

$$\delta=\pm\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}(\Delta Z_{ij}-\Delta\bar{Z}_{ij})^2}{m-n}}$$

式中：i=1，2，3，…，n表示检查点的序号；

j=1，2，3，…，k表示某检查多次观测的序号；

ΔZ_{ij} 表示第 i 个观测点上的第 j 次观测值；

$\Delta\bar{Z}_{ij}$ 表示第 i 个观测点上 k 次观测值的平均值；

m 为全部检查点的总观测次数；

n 为检查点数。

在异常区进行检查观测时，因为异常区磁场变化梯度较大，两次观测因定点不准而造成的磁场差别很大，所以均方误差将偏大，故一般改为将两次观测结果绘成剖面图进行对比，并计算平均相对误差。计算方法如下：

每个检查的相对误差为：

$$\eta_i=\frac{|\Delta Z'_i-\Delta Z_i|}{|\Delta Z'_i+\Delta Z_i|}\times 100\% \qquad (4.2.3)$$

式中ΔZ_i和 $\Delta Z'_i$ 分别为异常区某检查点的原始观测值和检查观测值；η_i 为该点的相对误差。

平均相对误差为：

$$\bar{\eta}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\eta_i \qquad (4.2.4)$$

式中 η_i——异常区某检查点的相对误差。

n——异常区检查点数。

$\bar{\eta}$——平均相对误差。

如果均方误差及平均相对误差的统计计算结果超过了设计的规定，并且这样的精度确实不能满足地质任务的要求时，磁测工作应报废并重新进行。

4.2.3 磁异常图的绘制

地面垂直磁测通常绘制三种磁异常图：磁异常剖面图；磁异常剖面平面图；磁异常平面等值线图。

1．磁异常剖面图

剖面图是表示沿某一测线或某一特定剖面上异常变化特点的磁异常图。绘图时，以横坐标表示距离或测点位置，以纵坐标表示磁场的伽玛值，连成折线，即构成异常剖面图，如图4.2.5所示。纵坐标上每毫米代表的异常值不能小于磁测精度（即磁测均方误差），否则就会把精度范围内的偶然误差放大，另一方面要求尽可能将异常的有效信息反映出来，每毫米代表的异常值又不能过大。

图4.2.5为我国河北南部某铁矿的垂直磁异常剖面图。这个异常经过钻探验证为接触交代型磁铁矿体引起。异常曲线下面附有根据钻孔资料推断绘制的地质剖面。

2．磁异常剖面平面图

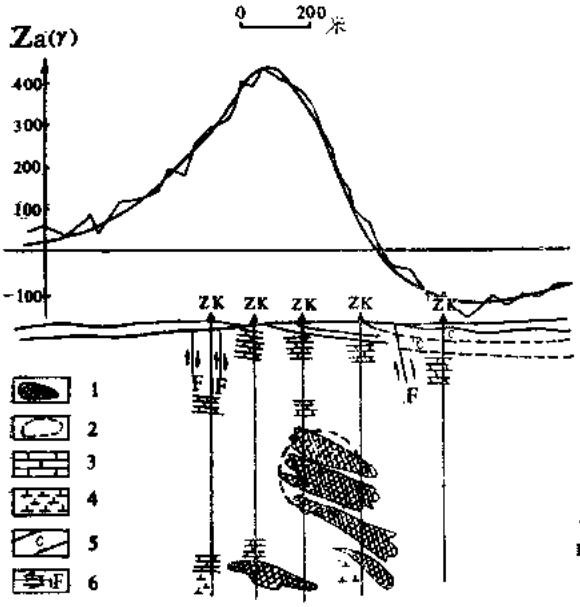


图 4.2.5 磁异常剖面图

1—铁矿；2—推断矿体位置；3—灰岩；4—闪长岩；5—第四纪覆盖层；6—断层

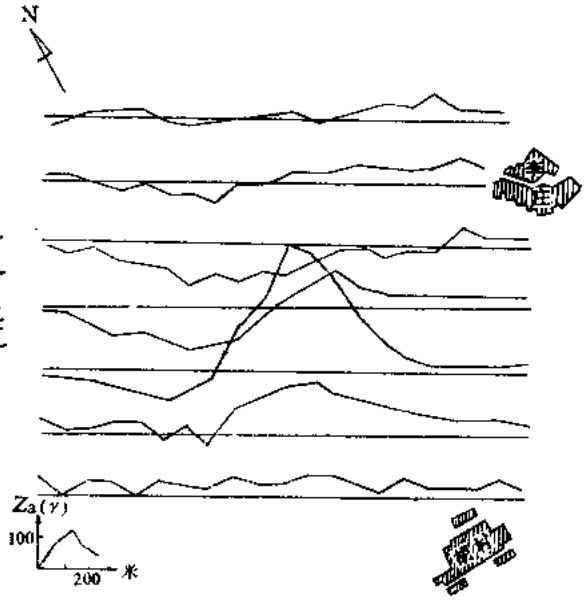


图 4.2.6 磁异常剖面平面图

剖面平面图是一种反映磁异常平面分布特征的图件。它是按工作比例尺绘出测区的全部测线，并绘出各测线的磁异常剖面图而构成的。剖面平面图的纵比例尺要求与剖面图相同。但比例尺不能过大，以免异常曲线相互穿插难以认别辨认。

图 4.2.6 为剖面图4.2.5同一铁矿的垂直异常剖面平面图。

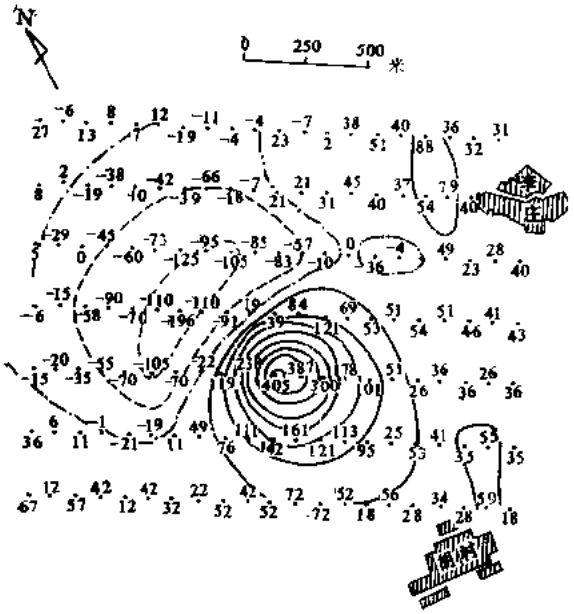


图 4.2.7 磁异常平面等值线图

3．磁异常平面等值线图

它是利用磁异常等值线来表示磁异常平面分布特征的图件。按测网形状和磁测比例尺将全部观测点展绘到地形底图上，每个测点均注记出磁异常值，根据异常值勾绘出异常等值线，即构成异常平面等值线图，见图4.2.7。

等值线间隔一般多采用等间隔，但在强弱异常相差悬殊时可采用不等间隔，一般为近等比间隔。起始等值线的数值一般为磁测均方差的2.5—3倍。

勾绘等值线原则上采用线性的内插法，但在观测精度范围内可以适当变动，以保持等值线的圆滑。某些具有特殊值的个别点在勾绘等值线时可以舍去，但应查明原因。因此平面等值线图具有一定的人为因素。

图4.2.7是图4.2.5的同一异常的垂直异常平面等值线图，比例尺如图所示。正等值线

用实线，负等值线用虚线表示，零等值线用点划线表示。等值线间隔为±50γ。

以上两种平面图是在面积性磁测工作中经常使用的，是面积性异常解释的基本资料。平面等值线图能明显反映异常在平面上分布的总体形态及轮廓，剖面平面图除反映总的特征外，异常局部特征和细节也十分明显，而且相邻剖面之间便于对比，作图时很少掺有人的主观因素，二者各有特点。

§4.3 航空磁测工作方法和海洋磁测简介

航空磁测是一种快速普查找矿方法，与地面磁测相比，不受水域、水系、森林、沼泽、高山的限制。由于飞行距地面有一定的高度，这就减弱了地表磁性不均匀的影响，所以能够更清楚地反映深部地质体的磁场。同时航空磁测还可以进行不同高度的测量飞行，了解磁异常的空间分布特征。这里仅介绍航空磁测与地面磁测不同的一些特殊问题。

4.3.1 比例尺、飞行高度和磁测精度

航空磁测的比例尺应根据地质任务、探测对象的大小，并结合地质、地球物理、地形和航空定位技术来确定。目前，金属矿航空磁测比例尺为1:10万、1:5万。对于磁场复杂且有找矿远景的地区，局部可采用1:2.5万的比例尺。构造航磁的测量比例尺一般为1:100万，1:50万和1:20万等。航磁测线方向应与成矿带和主要地质构造及矿体相垂直。

飞行高度应根据磁测比例尺，仪器测量精度、定位技术、地形切割程度和飞机类型与飞行技术等因素来确定。一般比例尺越小，飞行高度越大，反之比例尺越大飞行高度越小。为压制局部异常突出区域异常应增加飞行高度，但受仪器精度的限制。为了提高找矿效果，要降低飞行高度，但要受到飞行速度和飞行技术及地形切割状况的限制。山区可采用分段飞行，以保证最低的飞行高度。

4.3.2 磁补偿和偏向飞行

飞机本身的磁场对测量结果产生很大的影响，称为飞机的磁干扰。消除或减弱其影响的方法之一是用30—60米的电缆线把探头悬吊在机身下面拖着进行飞行测量（简称飞测）。另一种方法是将探头安装在机身、机翼、机尾上，再人为地产生一种磁场，使其与飞机干扰磁场大小相等方向相反且变化规律近于相同，这种消除干扰的方法称为磁补偿。这种人为产生的磁场称为补偿磁场。它是由探头周围贴的坡莫合金片或安装由可调恒流源控制的赫姆霍茨线圈产生的。飞机的磁干扰场是随飞机

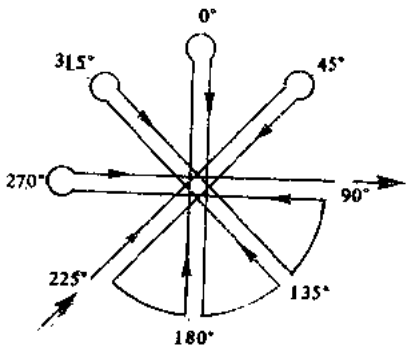


图 4.3.1 偏向飞行路线图

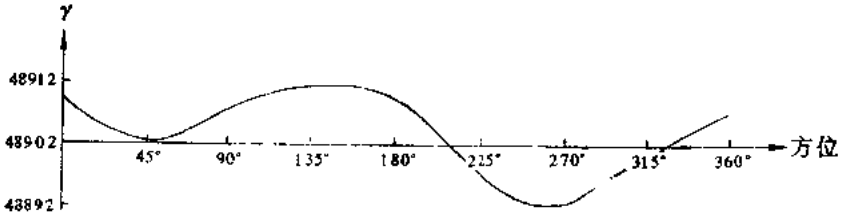


图 4.3.2 偏向曲线图

的航向及飞行姿态的变化而改变的。通过“米”字形飞行测量，也称偏向飞行测量，来了解不同方位磁干扰的特点和检查磁干扰在不同方位的补偿效果。飞行的路线如图4.3.1所示。

飞行后可整理出偏向曲线如图 4.3.2，按偏向曲线作磁补偿，直至补偿到偏向曲线 的波动合乎要求为止。

4.3.3 测量飞行

测量飞行分为基线飞行测量、测线飞行测量和辅助飞行测量。基线测量相当于地面磁测的基点观测，其作用是起算磁异常，发现仪器的零点位移并进行改正。测线飞行测量相当于地面磁测的测点观测。

辅助测量包括视察飞行、重复线测量和切割线测量。视察飞行相当于地面 磁 测 的 踏勘，其目的是了解测区情况、飞行条件和仪器的工作状态等。重复检查线测量则是为了评价航磁异常观测的质量。

切割线飞行是为了联系检查不同飞行架次观测磁异常的磁场水平。应在测区内均匀布置切割线框。切割线分布在比较平静的磁场上，它的方向应与测线基本上垂直，在与工作比例尺相同的图上，相隔40—60厘米布置一条。切割线之间通过联络线联系最后闭合。切割线框的测量路线如图4.3.3所示。

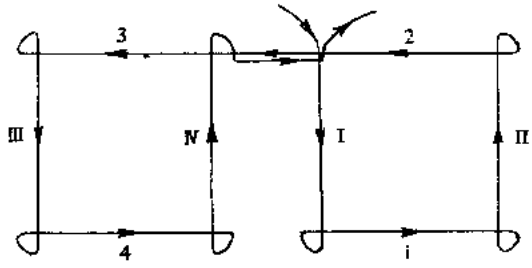


图 4.3.3 切割线框的测量路线图

4.3.4 航空磁测资料的整理和成图

与地面磁测相似，航磁观测结果也要进行日变、温度、零点及正常梯度改正。因为磁干扰场不可能完全消除及磁测时飞行高度不等，航空磁测结果还要进行偏向改正和高度改正。这些改正统起来直接在记录纸卷上进行。按改正后的记录在相邻二方位标之间，利用公里数，按一定间隔读取异常值并绘成剖面图，这样可以消除飞机速度不均匀的影响。在剖面平面草图上，根据切割线观测结果，调整不同飞行架次观测结果的磁场水平。以调整好的剖面平面图为基础，编绘磁异常剖面平面图和平面等值线图。

随着电子计算技术的发展及其在地球物理勘探工作中的广泛应用，航磁数 据 整 理 成图，磁场资料的数据处理，磁异常的解释推断等均可以实现自动化。

4.3.5 航磁异常的地面查证

航磁异常的地面检查简称航检。航磁异常地面查证的任务是，查明引起航磁异常的地质原因，提出进一步工作的建议，从而达到快速找矿的目的。航磁异常的地面查证工作程度分为三级：

踏勘探查：称三级查证。查证工作通过在待查航磁异常区布置检查剖面来实现。在一个异常上要布置3—5条剖面，并且要有十字剖面，以便圈定异常范围。

踏勘探查工作的目的要求有三：一是确定异常位置；二是圈定异常范围；其次是室内岩矿石标本物性测定，资料整理成图并在分析异常的基础上对引起异常的原因作出初步的判断。

详细检查：也称二级查证。是在踏勘检查的基础上，对成矿有利的地区开展面积性的地面磁测工作。其任务是准确地圈定异常范围，了解异常形态、特征、进而判断异常性质及确定其找矿的意义。

工程验证：也称一级查证。其任务是在二级查证的基础上对认为有意义的隐伏磁性体进行揭露，查明异常性质。要求用钻探或其它探矿工程验证，在验证中及时测定钻孔岩芯的磁性，开展井中物化探工作，根据最新的地质、物化探资料，重新解释和研究引起异常的地质原因。

4.3.6 海洋磁测简介

海洋磁测分为路线测量和面积测量两种。路线测量是沿布设的剖面进行。面积测量比例尺一般采用1:50万或1:100万两种。目前我国海洋磁测采用我国生产的 CHHC-1 型海空核子旋进磁力仪。磁测时仪器探头拖在船后进行拖曳测量。目前我国主要采用无线电导航，但一般受岸台区及海上作业区的气候及日出和日落时天电的影响，不能保证连续工作。应用卫星导航系统，可在任何海域内准确定位。不受气候和风浪影响，能昼夜连续施工。

海洋磁测与航空磁测有许多相似之处。但因磁测环境不同，海洋磁测需进行一些特有的试验测量。

方位测量：在平静磁场区，抛设无磁性浮标，考查船沿相间 45° 的八个方位通过浮标的磁测记录。当探头经过浮标时，记录磁场数据，经过各项改正后，绘出方位曲线。它反映了船体在不同方位时观测结果的影响。观测结果要进行船体影响改正。它相当于航磁之偏向改正。当电缆长度大于船体影响范围时，可不考虑方位影响。

拖曳距离试验：考查船沿子午线方向往返拖曳测量，当增加拖曳距离，噪声和记录抖动度不变，这个距离称为最小（最佳）拖曳距离。它反映了在一定磁测精度条件下船体影响的最大距离。

探头沉放深度试验：为了避免探头激起浪花及涌波浮动对磁测的影响，探头必须沉于水面以下一定深度。根据船速选择最佳配重，使探头位于最佳沉放探度。配重金属必须无磁性。

§4.4 岩(矿)石磁性的测定和磁性参数的统计

岩（矿）石的磁性数据可以通过磁异常的研究、野外露头测定及采集标本室内测定等方法获得。本节主要介绍标本磁性测定及测定数据的统计整理。其它方法将在以后各章陆续介绍。

4.4.1 岩（矿）石标本的采集

磁性标本可采自野外天然和人工露头、勘探工程场地和钻井的岩芯等。采集标本的岩性种类根据磁测工作的需要确定。为了使磁性测定数据有代表性，标本应采自同一岩性的不同露头，在每一露头上也应均匀分布。如果不是专门研究岩（矿）石风化物的磁性，一般在可能条件下，标本都应采自基岩。为了防止雷电影响岩石的天然剩磁，一般不在地形制高点采集标本。在钻井和勘探场地采集标本时，应将可能带有磁性物质的污染物（如泥浆铁屑、钻砂等）清洗干净。

每种岩（矿）石标本采集的数量，应满足测定数据统计计算的要求。一般不能低于30块。踏勘时可适当减少，但不能低于10块。配合勘探的磁测工作可按地质体磁性变化情况适当增加采集标本的数量。标本应修成等轴形状或立方体形状。弱磁性标本的体积应为

1000立方厘米左右，磁性较强也不应低于400立方厘米。并留有切割加工的余地。

为了测定剩磁方向，要采取定向标本。定向标本必须采自基岩。为了定向准确，当选定采集标本位置后，首先在标本上画出定向标志，再行采集。否则标本在原露头上的位置不能准确的恢复，将增加定向误差，甚至可能无法定向。标本的定向标志没有统一规定。对于形状不规则的露头，可利用三种定向标志：水平线（标本表面与某一水平面的交线）；上下标志（用文字符号表示标本的哪一部分在水平线以上）；北方位线（子午面与标本表面的交线）。当标本形状规则，表面近于平面时，水平线可以用罗盘绘制，若表面形状复杂，可以用特制折尺描绘，见图4.4.1。

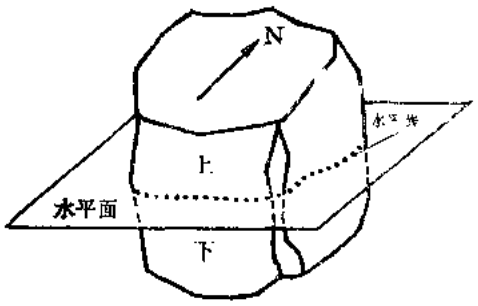


图 4.4.1 定向标本的定向标志示意图

采集弱磁性标本确定北方位可以用罗盘；采集强磁性岩（矿）石（如磁铁矿）标本时，则应用日晷，也可用定时表粗略定向。

采集的标本应准确地定名，标本应贴上标签，注明岩（矿）石名称、标本编号及采集地点等。采集标本时应有标本采集的记录。标本的采集位置也应标绘在地质图上，以供异常解释推断时参考。

4.4.2 磁秤法测定标本的磁性

磁秤法是野外生产部门广泛采用的方法，它适于测定磁化强度在400×10^{-6}CGSM以上的标本。它分为高斯第一位置和高斯第二位置两种方法。

1．高斯第一位置测定标本的 κ 和 J_r

高斯第一位置，是将标本放在磁系中心的正下方，磁系的中心正好处在标本磁化强度垂直分量的高斯第一位置上。如图4.4.2所示。磁系中心点的磁场为：

$$\Delta Z=\frac{2M_z}{R^3}$$

M_z为图4.4.2中标本总磁矩M在Z轴上的分量，应有：

$$M_z=(J_{iz}+J_{rz})V$$

J_{iz}、J_{rz}分别为标本的感磁J_i和剩磁J_r在Z轴上的分量。V为标本的体积。

假定在放标本前磁秤读数为S_0，放标本后读数为S_1，则应有：

$$\varepsilon(S_1-S_0)\cdot10^{-5}=\frac{2(J_{iz}+J_{rz})V}{R^3}$$

式中ε为磁秤格值，以伽伽/格为单位。

可整理成：

$$J_{iz}+J_{rz}=\frac{\varepsilon(S_1-S_0)R^3\cdot10}{2V}\cdot10^{-6}\text{CGSM} \qquad (4.4.1)$$

将Z轴向上，设读数为S_2，则有：

$$J_{iz}-J_{rz}=\frac{\varepsilon(S_2-S_0)R^3 10}{2V}\cdot10^{-6}\text{CGSM} \qquad (4.4.2)$$

将（4.4.1）式与（4.4.2）式相加，并以$J_{iz}=\kappa'_1Z_0$代入，可得：

$$\kappa_1' = \frac{\varepsilon\left(\frac{S_1+S_2}{2}-S_0\right)\cdot R^3\cdot 10}{2Z_0V}\cdot 10^{-6}\text{CGSM} \tag{4.4.3}$$

将（4.4.1）式与（4.4.2）式相减则得：

$$J_{rz} = \frac{\varepsilon\left(\frac{S_1-S_2}{2}\right)\cdot R^3\cdot 10}{2V}\cdot 10^{-6}\text{CGSM} \tag{4.4.4}$$

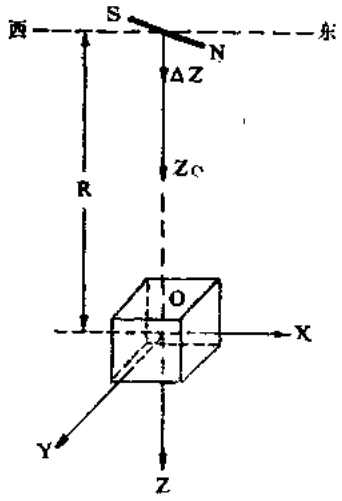


图 4.4.2 磁秤法的高斯第一位置

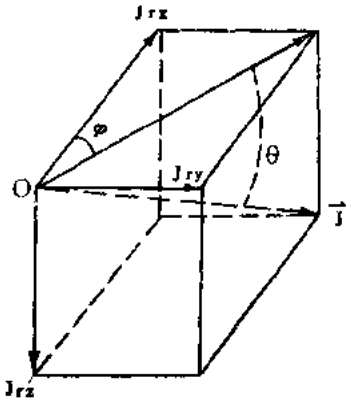


图 4.4.3 J_r 及其在各坐标轴上的分量

同样，以x轴向下和向上得 S_3、S_4，以y轴向下和向上得 S_5、S_6，相应地得到 κ_2'、J_{rx} 和 κ_3'、J_{ry}。因标本为等轴状，若标本磁性均匀，各轴测得的应相等，故取平均值：

$$\kappa' = \frac{1}{3}(\kappa_1' + \kappa_2' + \kappa_3') \tag{4.4.5}$$

J_r 的大小和方向见图4.4.3，故有

$$J_r = \sqrt{J_{rx}^2 + J_{ry}^2 + J_{rz}^2} \tag{4.4.6}$$

方位角：

$$\varphi = \text{tg}^{-1}\frac{J_{ry}}{J_{rx}} \tag{4.4.7}$$

倾角：

$$\theta = \text{tg}^{-1}\frac{J_{rz}}{\sqrt{J_{rx}^2 + J_{ry}^2}} \tag{4.4.8}$$

当测定过程中保持 R 不变时，可把 κ_1'、κ_2'、κ_3' 及 J_{rz}、J_{rx}、J_{ry} 计算式直接代入（4.4.5）—（4.4.8）式求 κ' 及 J_r：

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa'=\frac{5R^3\varepsilon}{3Z_0V}\left[\left(\frac{S_1+S_2}{2}-S_0\right)+\left(\frac{S_3+S_4}{2}-S_0\right)+\left(\frac{S_5+S_6}{2}-S_0\right)\right]\cdot10^{-6}\text{CGSM}\\
&J_r=\frac{5R^3\varepsilon}{2V}\sqrt{(S_1-S_2)^2+(S_3-S_4)^2+(S_5-S_6)^2}\cdot10^{-6}\text{CGSM}\\
&\varphi=\text{tg}^{-1}\frac{S_5-S_6}{S_3-S_4}\\
&\theta=\text{tg}^{-1}\frac{S_1-S_2}{\sqrt{(S_3-S_4)^2+(S_5-S_6)^2}}
\end{aligned}\right\}\quad(4.4.9)$$

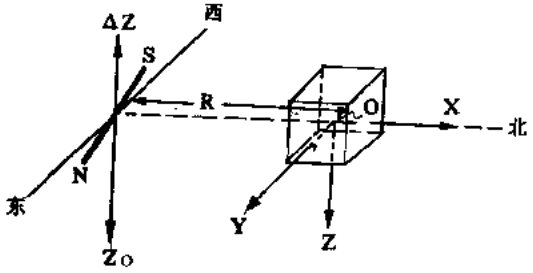


图 4.4.4 磁秤法的高斯第二位置图

高斯第一位置由于磁秤结构上的原因，R只能大于25厘米。所以它只适应于测定强磁性标本($J>1500\times10^{-6}$CGSM)。

2．高斯第二位置测定标本的 κ 和 J_r

高斯第二位置是使标本的中心与磁系的中心位于同一水平面上，标本的中心处在磁系旋转轴的延长线上，如图 4.4.4 所示。这时磁系中心所在的位置正好是标本磁化强度垂直分量的高斯第二位置。磁系中心处的磁场为：

$$\Delta Z=\frac{M_z}{R^3}=\frac{(J_{iz}+J_{rz})V}{R^3}$$

M_z为标本磁矩的垂直分量($M_z=J_zV$，V 为标本体积)。设未放标本前磁秤读数为 S_0，当 z 轴向下时读数为 S_1，z 轴向上时读数为 S_2，考虑到磁化强度沿 z 轴向下，在磁系处产生的磁场为负值，利用与第一位置相同的办法，并作 $J_{iz}=\kappa'Z_0$，代入可得：

$$\kappa'_z=\frac{\varepsilon\left(S_0-\frac{S_1+S_2}{2}\right)\cdot R^3\cdot10}{Z_0V}\cdot10^{-6}\text{CGSM}\qquad(4.4.10)$$

$$J_{rz}=\frac{\varepsilon\left(\frac{S_2-S_1}{2}\right)\cdot R^3\cdot10}{V}\cdot10^{-6}\text{CGSM}\qquad(4.4.11)$$

同样以 x 轴向下和向上得 S_3 和 S_4，y 轴向下和向上得 S_4 和 S_5，相应得到 κ'_x、J_{rx}和 κ'_y、J_{ry}。因标本为等轴状，并且磁性均匀，当R不变时，同样可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\kappa'=\frac{10R^3\varepsilon}{3Z_0V}\left[\left(S_0-\frac{S_1+S_2}{2}\right)+\left(S_0-\frac{S_3+S_4}{2}\right)+\left(S_0-\frac{S_5+S_6}{2}\right)\right]\cdot10^{-6}\text{CGSM}\\
&J_r=\frac{5R^3\varepsilon}{V}\sqrt{(S_2-S_1)^2+(S_4-S_3)^2+(S_6-S_5)^2}\cdot10^{-6}\text{CGSM}\\
&\varphi=\text{tg}^{-1}\frac{S_6-S_5}{S_4-S_3}\\
&\theta=\text{tg}^{-1}\frac{S_2-S_1}{\sqrt{(S_4-S_3)^2+(S_6-S_5)^2}}
\end{aligned}\right\}\quad(4.4.12)$$

以上求得的 κ' 是标本的视磁化率，为计算出标本的真磁化率 κ，可利用近似球形标本的换算公式：

$$\kappa=\frac{\kappa'}{1-\frac{4}{3}\pi\kappa} \tag{4.4.13}$$

第二位置因标本与磁系的距离比第一位置小，所以测量磁性的灵敏度较高。但距离过小，标本的磁场不能视为偶极子场，观测将产生误差。为了消除影响，可将计算结果乘以改正系数，系数见表4.4.1。

表 4.4.1

R (cm)	10	12	15	20	25
改 正 系 数	1.15	1.09	1.04	1.01	1.00

利用高斯第二位置测定标本时，标本中心与磁系中心在同一水平面内。磁系应在东西方位，标本放在磁系的垂直平分线的南北方向上称为第一方位，当标本的磁性弱时，也可以放在磁系所在的东西方向上，称为第二方位。但因标本靠近磁系，标本在磁系上的磁场不均匀，不满足偶极子场条件，同时磁系也将磁化标本，所以观测的相对误差要明显增大。当N极指向南时，加入了地磁场水平分量的作用，磁秤的灵敏度提高，其格值应为：

$$\varepsilon=\frac{mgd\sin\beta}{2fM}-\frac{H}{2f}=\varepsilon_z-\frac{H}{2f} \tag{4.4.14}$$

这种测定位置称为第三方位。

为了保证磁性测定的精度，测定时将标本放在正方形的无磁性标本盒内，并使标本的中心与标本盒的中心重合。为了消除误差，可采用每个轴正向和反向分别读取 4 次读数，即每块标本取24次读数的办法。

无定向磁力仪灵敏度高，测量磁性的精度也高。为了保证测定的精度，标本应切割加工成规则形状。

利用无定向磁力仪测定磁性，相当于磁秤法第一位置，整理计算方法也相近，这里不加赘述，请见第3.6节。

4.4.3 磁性参数的统计整理和图示

1．磁参数的统计特征值的计算

磁参数是受复杂地质因素制约的一个随机变量，一般满足算术正态分布或对数正态分布规律。其统计特征值分为两类：一类是表示数据的规律性特征，反映数据的平均趋势，这类特征值有算术平均值、几何平均值等。另一类是表示数据的波动性特征，反映数据的集中和离散程度。这类特征值有极差、均方差（标准差）、常见变化范围等。磁参数统计中常用的几种统计特征值的函义及计算公式以磁化率 κ 为例，表述如下：

（1）平均值：

（A）算术平均值：

$$\bar{\kappa}_t=\frac{\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3+\cdots+\kappa_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\kappa_i \tag{4.4.15}$$

（B）几何平均值：

$$\bar{\kappa}_g = \sqrt[n]{\kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \kappa_3 \cdots\cdots \kappa_n} = \left(\prod_{i=1}^{n} \kappa_i\right)^{1/n} \tag{4.4.16}$$

式中 $\prod_{i=1}^{n}$ 表示从 κ_1 至 κ_n 的连乘积。

（C）加权平均值：若为算术正态分布，在多组数据参加平均时，其均值为

$$\kappa_i = \frac{m_1\bar{\kappa}_1 + m_2\bar{\kappa}_2 + m_3\bar{\kappa}_3 + \cdots + m_n\bar{\kappa}_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n} \tag{4.4.17}$$

式中 m_1、m_2，…，m_n 为参加平均的各组数据个数，为权系数。$\bar{\kappa}_1$，$\bar{\kappa}_2$，…$\bar{\kappa}_n$ 为各组数据的平均值。m 值最大的一组数据中的中值，称为该批数据的常见值。如数据满足正态分布规律，而且观测数据很多时，平均值和常见值相等，可以用平均值代替常见值。

（2）离散特征值

（A）极差

在一批数据中最大值 κ_{max} 和最小值 κ_{min} 之差称为极差，表明这批数据的极限变化范围。

$$\Delta\kappa = \kappa_{max} - \kappa_{min} \tag{4.4.18}$$

（B）均方差（标准差）

一批数据中各数据 κ_i 与平均值 $\bar{\kappa}_i$（或常见值 κ_c）之差的平方和的均方根称为均方差。按所用平均值之不同，方差又分为：

算术均方差：

$$\sigma_s = \pm\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\kappa_i - \bar{\kappa})^2} \tag{4.4.19}$$

几何均方差：

$$\log\sigma_g = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\log\kappa_i - \overline{\log\kappa_g})^2} \tag{4.4.20}$$

式中 $\overline{\log\kappa_g}$ 为 $\log\kappa_i$ 的平均值。

均方差越大，数据越离散；均方差越小，数据越集中于平均值附近。

（C）常见变化范围

经验上以常见值加减0.5—2倍均方差作为参数的常见变化范围。

$$\text{常见变化范围} = \kappa_c \pm (0.5\text{—}2)\sigma \tag{4.4.21}$$

如果磁参数满足正态分布，磁参数落在 $(\kappa_c \pm \sigma)$ 范围内的标本数为总标本数的 68.3%。所以一般情况下常以 $(\kappa_c \pm \sigma)$ 表示常见变化范围。

2．磁参数的统计图示

为了求取岩矿石的统计特征数，一般步骤是：统计分组，编制统计表，绘制直方图及实测频率曲线，在此基础上确定统计特征数值。这里介绍一般步骤和方法。

（1）统计分组

将实测数据按数据变化范围，根据数据的多少，划分成若干组。组的间隔长度称为组距，一般按等组距分组。选择组数的经验曲线，如图 4.4.5，根据标本块数由曲线中可以

查得应划分的组数。统计各组的标本数目，称为该组的频数，频数与数据总数之比称为落入该组的频率，并算出每组的中值及累积频率。第K组的累积频率，就是前$K-1$组各组的频率与第K组的频率的总和，显然最后一组的累积频率应为1。

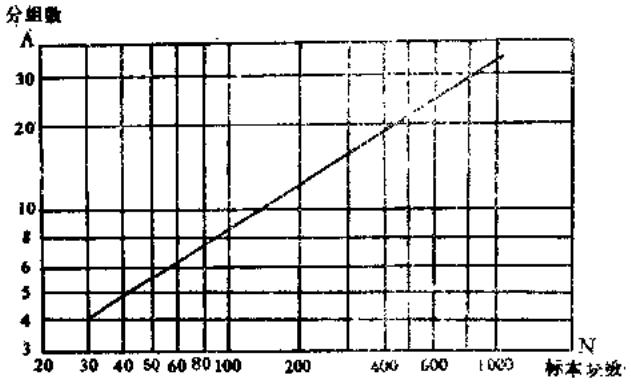


图 4.4.5 确定统计组数的经验曲线

（2）频率直方图和频率分布曲线

以磁化率分组值为横坐标，以频率为纵坐标，即可做出磁化率的频率直方图。图4.4.6为一铁矿区$ZK16$钻孔中某矿体52块岩芯标本的统计直方图。

直方图较直观地反映出这批观测数据的分布情况。常见值可用加权平均值的公式计算。也可用作图法确定之，如图4.4.6中所示，连接直线SQ及PT相交于一点，交点之横坐标值即为常见值，图中$\kappa_c=0.137$CGSM。

连接各组之中值构成一曲线，称为实测频率分布曲线。见图4.4.6中的点线。利用频率分布曲线直接地求出统计特征值。此时取极大值横坐标为常见值。曲线上0.6倍极大值（即拐点）之间的距离即为均方差的2倍。并直接用0.6倍极大值所对应的横坐标范围称为常见变化范围。标本数量很多时，用频率分布曲线统计是很方便的。

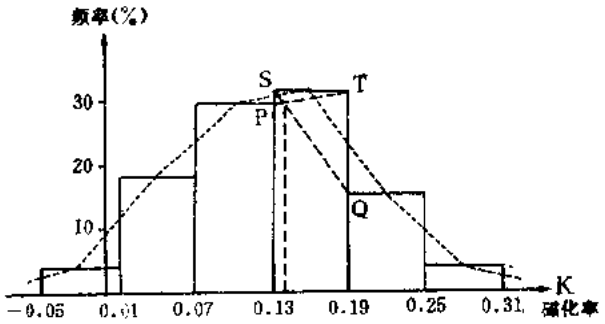


图 4.4.6 磁化率的频率直方图

（3）累积频率曲线

频率分布曲线及其统计特征值受标本数目和分组分段影响很大，有时也很难判断是否满足正态分布。利用概率纸累积频率曲线可以克服这些问题。对于判断是否满足正态分布和确定常见值，均方差和常见变化范围等都很便利。

累积频率用直方图形式表示即为累积频率直方图。如将直方图上每组右端点连成曲线，即为累积频率曲线。通常累积频率曲线用正态概率格纸绘制。见图4.4.7。概率格纸的纵轴表示累积频率数，横轴为磁化率的组段值。按统计的累积频率值和各组右端值展绘在概率格纸上，并连成曲线，如果是正态分布，曲线为一直线。但是由于各种误差的影响，所得曲线与直线有些偏差，这是允许的，但偏差太大，就不能认为是正态分布。一般而言，中间点偏差不能太大，而两边允许大一点。在概率格纸的累积频率直线上，对应纵坐标50%，处之横坐标就是磁化率的近似平均值。图4.4.7的近似平均值为0.130CGSM。纵坐标15.9%—84.1%所对应的横坐标区间即为磁化率的常见变化范围，图中常见变化范围为0.058CGSM—0.202CGSM。常见值变化范围之半，即为均方差：$\sigma_\kappa=0.072$CGSM。

如果磁参数满足对数正态分布，则统计分组分段以及直方图和概率格纸的横轴均应取磁参数的对数值。

（4）剩余磁化强度的角度统计

剩余磁化强度矢量的方位角 φ 和倾角 θ 和其它磁参数一样，也是一种随机变量。其统计方法有两种：一种是将定向标本的 J_{rx}、J_{ry} 和 J_{rz} 三个分量分别进行统计计算。根据统计出来的三个分量的常见值再计算剩磁的方位角 φ 和倾角 θ。另一种是直接对 θ 和 φ 角进行统计，求出角度的平均值和方差值。

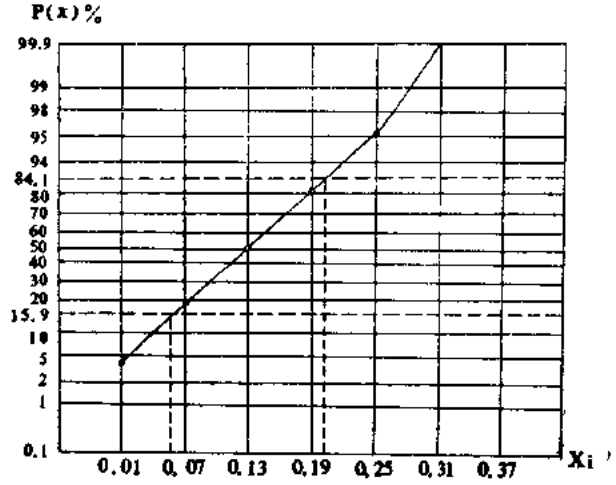


图 4.4.7 累积频率曲线

剩磁方向的统计结果一般用极坐标图示法：

（A）玫瑰图

极坐标的射线表示角度，等间距的同心圆表示频率。统计方位角 φ 用全圆，射线自0°—360°，统计剩磁倾角用半圆，射线自 $-90°$—$+90°$。将 φ 和 θ 进行统计分组，其组距为角度。根据统计结果，将各组中值及其频率值点到极坐标纸上，然后依次连接各点即成玫瑰图。见图4.4.8。玫瑰图的长轴方向即为 φ 和 θ 的常见值。

（B）球面分布图（投影图）

目前常用球面分布图统计 φ 和 θ。在极坐标纸上用辐射线查出方位角 φ，以等距同心圆表示倾角 θ，同心圆由内向外取九个，表示倾角 90°—0°。这样每块标本在图上有一个对应点。倾角为负时用“·”表示，倾角为正时用“+”表示。图中点位密集处即为 φ 和 θ 的常见值。有时标本块数不多，也可用球面分布图表示，但需计算 φ 和 θ 的平均值。图4.4.9中磁参数的平均值 $\bar{\varphi}=-99°10'$，$\theta=34°20'$。

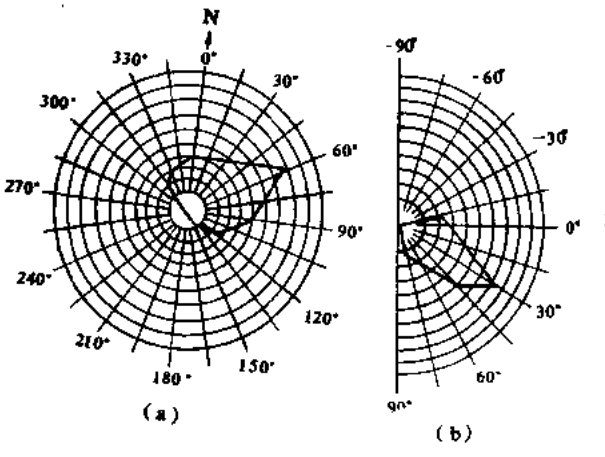


图 4.4.8 表示剩磁方向的玫瑰图

(a) φ 角的玫瑰图；(b) θ 角的玫瑰图

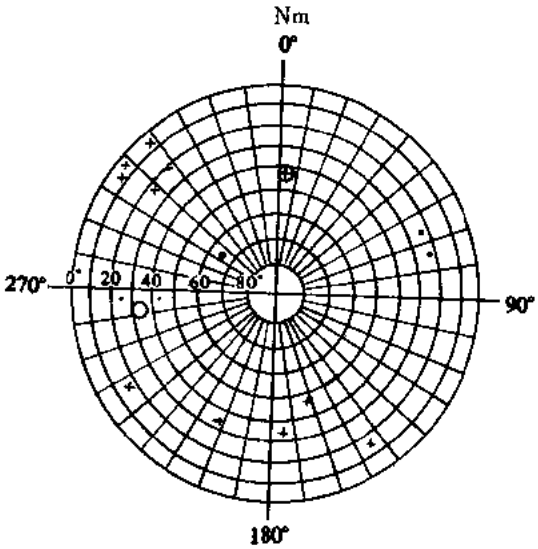


图 4.4.9 φ 和 θ 角的球面投影图

· 表示上倾；+ 表示下倾；⊕表示现代磁场方向；○表示平均 J_r 方向

第五章　磁性体的磁场

磁测的根本任务是解决地质问题。要对观测到的磁场分布和变化规律给以正确的地质解释，必须先了解各种地质现象与磁异常的对应规律和本质联系及磁异常形态特征与各种磁性地质体形状、产状间的定性和定量关系，以便从测得的磁异常推断出地下的地质情况。

在本章的讨论中，我们将不涉及具体的地质问题，仅是从磁性体磁场的数学物理的解析中，寻找其间的规律，以作为地质解释推断的数理依据。根据已知磁性体计算其磁场分布，在场论或数学中，称其为正演问题；而根据已知的磁场分布确定磁性体的磁性参量和几何参量，叫做反演问题。显然，正演问题是反演问题的基础。本章主要讨论正演问题。

§5.1　计算磁性体磁场的意义和条件

地壳中的岩层、岩体和矿产由于其矿物成份的不同，它们具有强、弱程度不同的磁性。其中磁性很弱的如某些灰岩、大理岩、页岩等我们常认为其是无磁性的，而其它磁性较强的岩层、岩体统称其为磁性地质体。

磁法勘探中研究的磁异常场，大都属于地壳中局部的磁异常，即磁性地质体的磁场。这种磁性地质体的磁场在地表上空间分布的形态特征，直接受局部磁性地质体形状、大小、产状和磁化强度等因素的控制。因此，为了了解地下岩层、岩体分布特征、构造特征和矿产分布的特征，磁法工作者是根据测得的磁异常分布特征进行分析，做出判断的。为此，就要研究不同形状、大小、产状和磁化特点的地质体的磁场，从定性和定量两方面，研究磁性体与其磁场的关系，了解磁性体特征和磁异常特征间的对应规律。这样我们才能根据已有的理论和规律去分析和研究实测的磁异常。这就是计算磁性体磁场的意义。

自然界的岩体或矿体，形状是复杂的，磁性是不均匀的，因此，难于用数学方法直接计算这种磁性体的磁场分布。为了解磁性体磁场的基本特征，在直接计算磁性体的磁场中，一般作如下假设：

（1）磁性体为简单的规则几何形体；

（2）磁性体是均匀磁化的；

（3）只研究单个磁性体；

（4）观测面是水平的；

（5）不考虑剩磁影响（或认为$\boldsymbol{J}_i$与$\boldsymbol{J}_r$方向一致）；

除少数情况外，实际地质条件并不符合上述假设条件，由于磁法主要是研究被掩盖的地质现象和磁性地质体，当其有一定埋深时，形态不规则和磁性不均匀的地质体引起的磁场，可近似视为均匀磁化规则形体引起的磁场，这些假设条件并不失实际意义。

对于后三个假设条件，在原则上并不是必须的，只是为了分析的方便。另外，简单情况是我们认识复杂情况的基础，对于多个磁性体的叠加磁异常，目前也有许多分析处理方

法，这些将在第六、七章介绍。

当地质体埋藏不深时，将使假设的近似程度降低。这时仍可利用磁异常的形态特征来区分不同的磁性体，或将磁异常做一定的处理后再进行理论计算，上述假设仍能成立。

在讨论各种地质体磁场时，我们选用右手直角坐标系，xoy面为观测平面；y轴沿地质体走向方向，x轴垂直走向，为测线方向，z轴垂直向下，坐标原点选在磁性体中心或其顶面中心在地面上的投影点。我们还规定磁性体以外的计算点以P表示，该点坐标以x、y、z表示；磁性体内的体元点以Q表示，其坐标为ξ、η、ζ。

§5.2 计算磁性体磁场的基本公式

5.2.1 磁性体的磁位和磁场强度的积分公式

本节计算磁性体的磁位，再利用磁位梯度求磁性体磁场的表达式。

一个体积为v的磁性体，可将其看作是由无数个紧密排列的磁体元所组成的，而每一个磁体元相当于一个磁偶极子。根据第一章，磁偶极子的磁位dU，可表示为：

$$dU=\frac{|d\boldsymbol{M}|}{r^2}\cos\theta=\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}dv$$

这里$d\boldsymbol{M}$是偶极子的磁距，$d\boldsymbol{M}=\boldsymbol{J}\cdot dv$；$r$是由偶极中心到计算点的距离；$\theta$是矢径$r$和磁化强度矢量$\boldsymbol{J}$之间的夹角。

体积为v的磁性体的磁位，当均匀磁化时，可写为：

$$U=J\iiint_v\frac{\cos\theta}{r^2}dv \tag{5.2.1}$$

据两个矢量间夹角的公式，有

$$\cos\theta=\cos(J,x)\cos(r,x)+\cos(J,y)\cos(r,y)+\cos(J,z)\cos(r,z)$$

磁化强度$\boldsymbol{J}$在三个坐标轴上的分量为：

$$J_x=J\cos(J,x);\quad J_y=J\cos(J,y);\quad J_z=J\cos(J,z)。$$

从面表达式（5.2.1）可写成以下形式：

$$U=J_x\iiint_v\frac{\cos(r,x)}{r^2}dv+J_y\iiint_v\frac{\cos(r,y)}{r^2}dv+J_z\iiint_v\frac{\cos(r,z)}{r^2}dv \tag{5.2.2}$$

当磁性体被沿着某一特定方向磁化时，磁位的解析表达式可以简化。例如，当磁化强度方向沿OZ轴方向呈垂直磁化时，磁位用U_z表示，可得：

$$\left.\begin{aligned}&U_z=J\iiint_v\frac{\cos(r,z)}{r^2}dv\\&\text{当水平磁化时，类似有：}\\&U_x=J\iiint_v\frac{\cos(r,x)}{r^2}dv\\&U_y=J\iiint_v\frac{\cos(r,y)}{r^2}dv\end{aligned}\right\} \tag{5.2.3}$$

由于磁场强度分量是磁位沿相应分量方向的导数并取反号，因此，磁场强度的分量表达式为：

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax}&=-\frac{\partial U}{\partial x}=-J_x\frac{\partial}{\partial x}\iiint_v\frac{\cos(r,x)}{r^2}dv-J_y\frac{\partial}{\partial x}\iiint_v\frac{\cos(r,y)}{r^2}dv\\
&\quad -J_z\frac{\partial}{\partial x}\iiint_v\frac{\cos(r,z)}{r^2}dv\\
H_{ay}&=-\frac{\partial U}{\partial y}=-J_x\frac{\partial}{\partial y}\iiint_v\frac{\cos(r,x)}{r^2}dv-J_y\frac{\partial}{\partial y}\iiint_v\frac{\cos(r,y)}{r^2}dv\\
&\quad -J_z\frac{\partial}{\partial y}\iiint_v\frac{\cos(r,z)}{r^2}dv\\
Z_a&=-\frac{\partial U}{\partial z}=-J_x\frac{\partial}{\partial z}\iiint_v\frac{\cos(r,x)}{r^2}dv-J_y\frac{\partial}{\partial z}\iiint_v\frac{\cos(r,y)}{r^2}dv\\
&\quad -J_z\frac{\partial}{\partial z}\iiint_v\frac{\cos(r,z)}{r^2}dv
\end{aligned}\right\}\quad(5.2.4)$$

在（5.2.4）式中，微分是对观测点坐标（x、y、z）进行的，而积分是对磁性体内体元点的坐标（ξ、η、ζ）进行的，微分可在积分号下完成。考虑到上式中 $\cos(r,x)=(x-\xi)/r$，$\cos(r,y)=(y-\eta)/r$，$\cos(r,z)=(z-\zeta)/r$，且 $r=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$，完成以上微分后，可得：

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax}&=J_x\iiint_v\frac{2(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2}{r^5}dv+J_y\iiint_v\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}vd\\
&\quad +J_z\iiint_v\frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}dv\\
H_{ay}&=J_x\iiint_v\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}dv+J_y\iiint_v\frac{2(y-\eta)^2-(x-\xi)^2-(z-\zeta)^2}{r^5}dv\\
&\quad +J_z\iiint_v\frac{3(y-\eta)(z-\zeta)}{r^5}dv\\
Z_a&=J_x\iiint_v\frac{-3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}dv+J_y\iiint_v\frac{3(y-\eta)(z-\zeta)}{r^5}\\
&\quad +J_z\iiint\frac{2(z-\zeta)^2+(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{r^5}dv
\end{aligned}\right\}(5.2.5)$$

（5.2.5）式是计算均匀磁化磁性体磁场的体积分表达式。

在实际计算中，有些是由一些平表面围成的形体，如各种板状体。对于这类形体，有时用面磁荷积分公式较方便。

根据（5.2.1）式，磁性体的磁位可表示为：

$$U=\iiint_v\frac{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}dv$$

由于

$$\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)=-\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)$$

因此，上式可写为：

$$U=-\iiint_v \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}_P\left(\frac{1}{r}\right)dv \tag{5.2.6}$$

已知散度公式有：

$$\mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{J}}{r}\right)=\frac{1}{r}\,\mathrm{div}_Q\boldsymbol{J}+\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)$$

移项后为：

$$\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}_Q\left(\frac{1}{r}\right)=\mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{J}}{r}\right)-\frac{1}{r}\mathrm{div}_Q\boldsymbol{J}$$

将以上关系代入（5.2.6）式得：

$$U=\iiint_v \mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{J}}{r}\right)dv-\iiint_v \mathrm{div}_Q\,\boldsymbol{J}\frac{dv}{r} \tag{5.2.7}$$

根据矢量积分中的高斯公式：

$$\iiint_v \mathrm{div}_Q\left(\frac{\boldsymbol{J}}{r}\right)dv=\iint_s \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\frac{dS}{r}$$

式中$\boldsymbol{n}$是磁性体边界面S的外法线方向。因此（5.2.6）式可写为：

$$U=\iint_s \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\frac{ds}{r}+\iiint_v -\mathrm{div}_Q\,\boldsymbol{J}\frac{dv}{r} \tag{5.2.8}$$

该式表明，磁性体在P点的磁位，相当于面磁荷密度为$\sigma=\boldsymbol{J}\cdot\mathbf{n}=J\cos\varphi=J_n$的表面和体磁荷密度为$\rho=-\mathrm{div}_Q\boldsymbol{J}$的磁体在$P$点引起的磁位的和。

当为均匀磁化时，$\boldsymbol{J}$为常量，$\mathrm{div}_Q\boldsymbol{J}=0$，因此有：

$$U=\iint_s \frac{J_n}{r}ds \tag{5.2.9}$$

上式表示，均匀磁化体在P点的磁位，等于该磁性体外表面磁荷在该点磁位的总和。

根据场与位的关系式，磁场各分量分别为：

$$\left.\begin{aligned}H_{ax}&=-\frac{\partial U}{\partial x}=\iint_s \frac{J_n}{r^2}\cos(r,x)ds\\H_{ay}&=-\frac{\partial U}{\partial y}=\iint_s \frac{J_n}{r^2}\cos(r,y)ds\\Z_a&=-\frac{\partial U}{\partial z}=\iint_s \frac{J_n}{r^2}\cos(r,z)ds\end{aligned}\right\} \tag{5.2.10}$$

上式中$\cos(r,x)$、$\cos(r,y)$、$\cos(r,z)$为r的方向余弦。（5.2.10）式即为计算磁性体磁场分量的磁荷面积分公式。

5.2.2 重磁位场的泊松公式

本节通过磁性体的磁位与引力位的关系，求磁性体磁场的一般表达式。

一个磁性体不仅有磁性，还有密度。因其有磁性，就存在磁场；因其有密度（剩余密度），就存在引力场。泊松公式给出同一物体磁位和引力位之间的关系式。

一个体积为v，密度均匀物体之引力位为

$$V=G\delta\iiint_{v}\frac{1}{r}dv \tag{5.2.11}$$

上式中G为引力常数，δ为密度。同一均匀磁化物体之磁位为：

$$U=-\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}_P\iiint_{v}\frac{1}{r}dv \tag{5.2.12}$$

将（5.2.11）式代入（5.2.12）式，可得：

$$U=-\frac{\boldsymbol{J}}{G\delta}\cdot\mathrm{grad}_P V \tag{5.2.13}$$

（5.2.13）式即为磁位和引力位间的泊松公式。该式表明，同一个均匀磁化且密度均匀物体的磁位，可以由其引力位来计算。

若已知物体的引力位，利用泊松公式可求得计算磁场各分量的表达式：

$$\left.\begin{aligned}H_{ax}&=-\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{xx}+J_yV_{xy}+J_zV_{xz})\\H_{ay}&=-\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{yx}+J_yV_{yy}+J_zV_{yz})\\Z_a&=-\frac{\partial U}{\partial z}=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{zx}+J_yV_{zy}+J_zV_{zz})\end{aligned}\right\} \tag{5.2.14}$$

在磁性体磁场的理论计算中，球体、水平圆柱体、椭球体等二次曲面所包围的形体，其引力位较易计算，因此利用泊松公式求其磁场表达式是方便的。

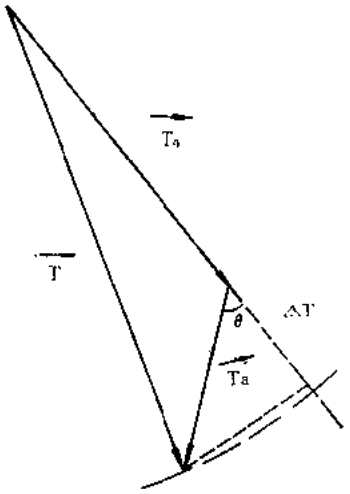


图 5.2.1 ΔT与T_a的关系图

在导出泊松公式时，曾作了如下假设：1.密度均匀；2.均匀磁化；3.同一物体。自然界的地质体很难同时满足这三个条件。一般前两个条件常可近似满足，第三条会有困难。如果三条都可满足时，当知道物性参数，重磁异常是可以互算的。

严格来讲，只有二次曲面所包围的形体，才满足均匀磁化的条件，其它形体是不满足的。当磁性体有一定埋深时，形体边角部位不均匀磁化的影响常可忽略。因此，均匀磁化的假设仍是有实用意义的。

5.2.3 磁场各分量间的互算关系式

由第三章的讨论可知，不同类型的磁力仪可测得磁异常的不同分量。我们已知，Z_a和H_a是磁异常总强度矢量$\boldsymbol{T}_a$的垂直和水平分量。总磁场异常ΔT与$\boldsymbol{T}_a$、Z_a和H_a是什么关系，则未加说明。为了全面地分析研究磁异常，进一步掌握其规律性特征，就需研究它们之间的关系。

1．ΔT的物理意义

磁异常总强度矢量$\boldsymbol{T}_a$是地磁场总强度$\boldsymbol{T}$与正常场$\boldsymbol{T}_0$的矢量差，即

$$\boldsymbol{T}_a=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{T}_0 \tag{5.2.15}$$

而ΔT是$\boldsymbol{T}$与$\boldsymbol{T}_0$的模量差，即：

$$\Delta T=|\boldsymbol{T}|-|\boldsymbol{T}_0| \tag{5.2.16}$$

ΔT既不是$\boldsymbol{T}_a$的模量，也不是$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的投影，如图5.2.1所示。

根据三角形的余弦定理：

$$T=\sqrt{T_0^2+T_a^2+2T_0T_a\cos\theta}$$

上式中θ是$\boldsymbol{T}_a$与$\boldsymbol{T}_0$之间的夹角。根据（5.2.16）式，上式可写为：

$$T_0+\Delta T=\sqrt{T_0^2+T_a^2+2T_0T_a\cos\theta}$$

对上式两端取平方，并除以T_0^2，则得：

$$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2+2\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)=\left(\frac{T_a}{T_0}\right)^2+2\left(\frac{T_a}{T_0}\right)\cos\theta \tag{5.2.17}$$

当T_a比T_0小很多时，上式中其平方项可以略去。例如，在中纬度地区，$T_0=50000\gamma$，若$T_a\leqslant 2000\gamma$时，则：

$$\left(\frac{T_a}{T_0}\right)^2\leqslant 0.0016$$

又因$\Delta T\leqslant T_a$，故$\left(\frac{\Delta T}{T_0}\right)^2$也可略去。因此，（5.2.17）式可简化为：

$$\Delta T\doteq T_a\cos\theta=T_a\cos(\boldsymbol{T}_a,\ \boldsymbol{T}_0) \tag{5.2.18}$$

上式表明在一般情况下，当磁异常强度$|\boldsymbol{T}_a|$不十分强时（为T_0的数十分之一以下时），可近似把ΔT看作是$\boldsymbol{T}_a$在$\boldsymbol{T}_0$方向的投影。由于$\boldsymbol{T}_0$方向在相当大区域内可以认为是不变的（一万平方公里内变化1°左右），因此，ΔT可看作$\boldsymbol{T}_a$在固定方向的投影。即相当于$\boldsymbol{T}_a$在固定方向的分量。这样，ΔT的物理意义与Z_a、H_a类似，都是$\boldsymbol{T}_a$在固定方向的分量。在航空磁测中，磁异常通常在数百至一千伽玛之间，以上关系的近似程度比较高。

当磁异常强度很大时，ΔT仍应以（5.2.17）式表示。

2．ΔT与Z_a、H_a的关系

由以上讨论可知，ΔT和Z_a、H_a都是磁位沿某一固定方向的微商，找出ΔT与Z_a、H_a的关系，有利于了解ΔT的特征。

令t_0表示$\boldsymbol{T}_0$方向的单位矢量，则（5.2.18）式可写为：

$$\Delta T=-\frac{dU}{dt_0}$$

U沿t_0方向的微商，在直角坐标系中可通过沿x、y、z三个坐标轴向的微商来表示，即：

$$\frac{dU}{dt_0}=\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt_0}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt_0}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt_0}$$

由于

$$H_{ax}=-\frac{\partial U}{\partial x},\quad H_{ay}=-\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z_a=-\frac{\partial U}{\partial z},$$

同时，因t_0的三个方向余弦为：

$$\frac{dx}{dt_0}=\cos(x,t_0)=\cos\alpha,$$

$$\frac{dy}{dt_0}=\cos(y,t_0)=\cos\beta,$$

$$\frac{dz}{dt_0}=\cos(z,t_0)=\cos\gamma$$

考虑到以上关系，故：

$$\Delta T=H_{ax}\cos\alpha+H_{ay}\cos\beta+Z_a\cos\gamma \tag{5.2.19}$$

上式表明，ΔT是$\boldsymbol{T}_a$的三个分量分别投影到T_0方向之和。

如图5.2.2所示，设$\boldsymbol{T}_0$在xoy面的投影为$\boldsymbol{H}_0$，$\boldsymbol{T}_0$与$\boldsymbol{H}_0$的夹角为I，测线方向x 轴与$\boldsymbol{H}_0$的夹角为A'，则有：

$$\cos\alpha=\cos I\cos A',\quad \cos\beta=\cos I\sin A',\quad \cos\gamma=\sin I$$

因有以上关系，故（5.2.18）式可写为：

$$\Delta T=H_{ax}\cos I\cos A'+H_{ay}\cos I\sin A'+Z_a\sin I \tag{5.2.20}$$

上式即为ΔT与Z_a、H_{ax}、H_{ay}的基本关系式。只要已知Z_a、H_{ax}、H_{ay}，就可求出ΔT。

对于二度体，磁性体沿y方向无限伸长，磁位沿y方向无变化，即$\frac{\partial U}{\partial y}=0$，$H_{ay}=0$，故：$H_{ax}=H_a$。这时（5.2.20）式可简化为：

$$\Delta T=Z_a\sin I+H_a\cos I\cos A \tag{5.2.21}$$

（5.2.20）式对任何形体都适用，而（5.2.21）式只适用于测线垂直走向的水平二度体。

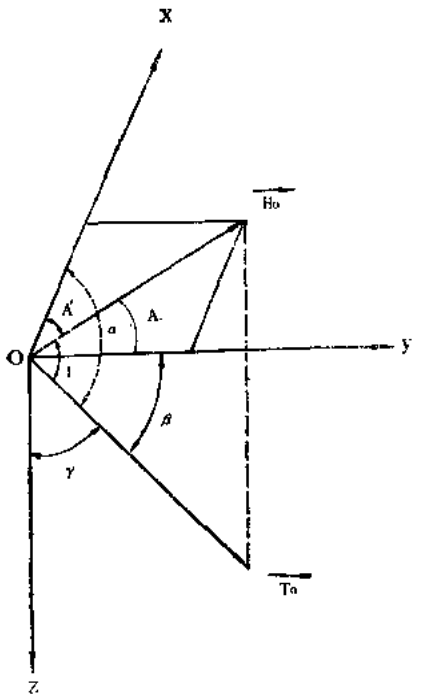


图 5.2.2 α、β、γ与I、A'角的关系图

5.2.4 磁化强度矢量J与J

根据前面对磁性体所做的均匀磁化和不考虑剩磁和退磁影响的假设，磁化强度矢量J

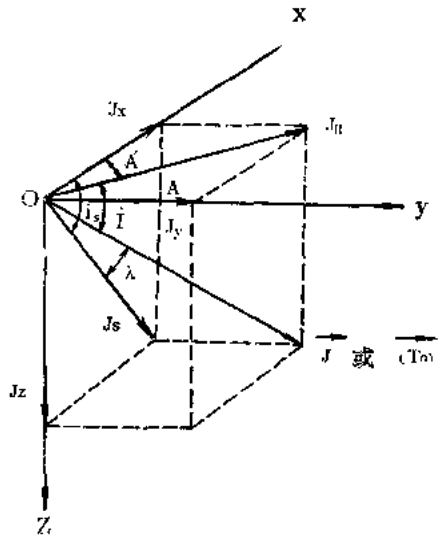


图 5.2.3 磁化强度矢量的空间分布图

的空间分布如图5.2.3所示。在图中，J为总磁化强度矢量；J_s为J在xoz面（即观测剖面）的投影（分量），称其为有效磁化强度矢量；J_H为J在xoy面内的投影，叫水平磁化强度矢量；I表示J的倾角，即磁化倾角；i_s为J_s的倾角，即J_s与ox轴间的夹角，称其为有效磁

化倾角；A'为J_x与J_H间的夹角，A为磁性体走向与磁北的夹角。

由图可以看出：

$$\left.\begin{aligned} J_x &= J\cos I\cos A' = J_r\cos i_r = J\cos I\sin A \\ J_y &= J\cos I\sin A' = J\cos I\cos A \\ J_z &= J\sin I = J_r\sin i_r \end{aligned}\right\} \tag{5.2.22}$$

由上式可知：

$$\left.\begin{aligned} J &= \sqrt{J_x^2+J_y^2+J_z^2} \\ J_r &= \sqrt{J_x^2+J_z^2} = J\sqrt{\cos^2 I\cos^2 A_r+\sin^2 I} \end{aligned}\right\} \tag{5.2.23}$$

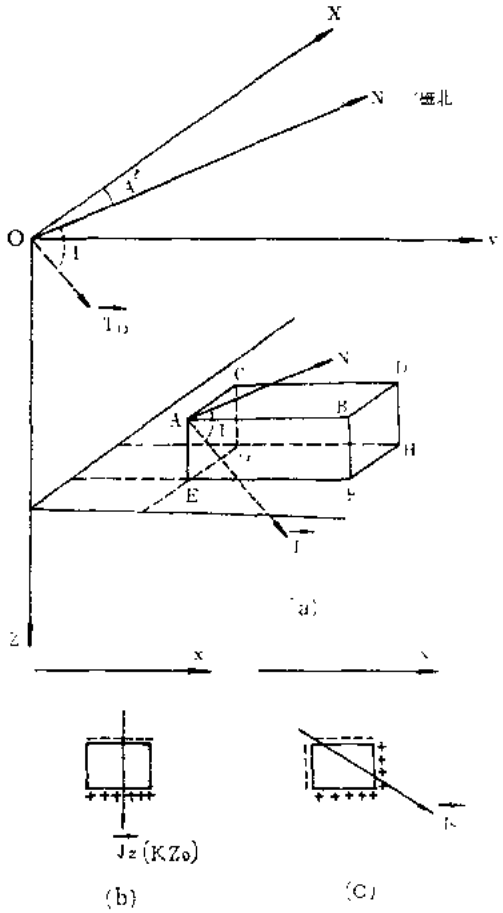


图 5.2.4 磁性体走向与磁化方向关系图

a：任意走向长方体；b：南北走向长方体垂直走向剖面；c：东西走向长方体垂直走向剖面

$$\left.\begin{aligned} \frac{J_x}{J} &= \cos I\cos A' = \cos I\sin A \\ \frac{J_y}{J} &= \cos I\sin A' = \cos I\cos A \\ \frac{J_z}{J} &= \sin I \\ \operatorname{tg} i_r &= \operatorname{tg} I\sec A' = \operatorname{tg} I\csc A \end{aligned}\right\} \tag{5.2.24}$$

以上关系式表明，磁性体的磁化强度与磁性体的走向有关系，走向不同，被磁化的情况也不同。这是因为在一个局部地区，地磁场的方向是一定的，而磁性体的走向可能是在各个方向上，走向不同，地磁场对它的磁化特点也不同。例如一个板状体，当它走向不同时，板状体表面的磁荷分布也不同，如图5.2.4所示。

由以上讨论可知，当不考虑退磁和剩磁时，磁性体被磁化的情况，不仅与当地地磁场的大小和方向及其自身磁化率有关，还与磁性体的走向有关系。

在影响磁性体磁场特征的诸因素中，磁化强度的方向是重要因素。因为磁化强度的方向决定了磁性体磁荷的分布特征，磁荷的分布与磁性体磁场的分布特征直接有关。

§5.3 球体的磁场

在自然界虽然很难找到标准的球形地质体，但一些有限大小的地质体，当埋藏较深时，在地表上其磁场的分布特征与球体的磁场分布是相似的。因此，讨论球体的磁场既有实际意义，也有代表性。

5.3.1 球体的磁场表达式

如图5.3.1所示，设球体的中心埋深为R，磁化强度为J，体积为v，磁矩 $M=J\cdot v$，球心坐标为$Q(0,0,\zeta)$，球心到空间任一点$P(x,y,z)$的距离为：$r=\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}$。我们的目的是：根据给定条件，求出其磁场分量的表达式。

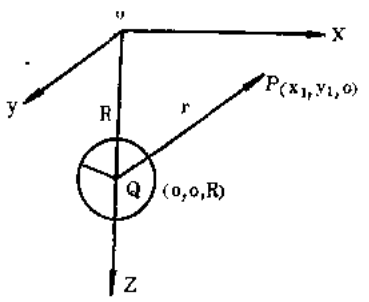


图 5.3.1 球体与坐标的关系

球体的磁场表达式可由多种方法导出，因球体的引力位函数形式简单，故用泊松公式求其磁场表达式较为方便。

球体的引力位V按式（5.2.11）可写为：

$$V=G\delta\frac{v}{r}=\frac{G\delta v}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\zeta)^2}} \quad (5.3.1)$$

上式中的v为球体的体积。对上式求其二阶导数，并考虑到z=0，即计算点位于xoy面内，令$R=\zeta$，可得：

$$\left.\begin{aligned}
V_{xx}&=G\delta v\frac{2x^2-y^2-R^2}{r^5}\\
V_{yy}&=G\delta v\frac{2y^2-x^2-R^2}{r^5}\\
V_{zz}&=G\delta v\frac{2R^2-x^2-y^2}{r^5}\\
V_{xy}&=G\delta v\frac{3xy}{r^5}\\
V_{xz}&=G\delta v\frac{-3xR}{r^5}\\
V_{yz}&=G\delta v\frac{-3yR}{r^5}
\end{aligned}\right\} \quad (5.3.2)$$

将（5.3.2）式代入（5.2.14）式，可得：

$$Z_a=\frac{[J_z(2R^2-x^2-y^2)-J_x3xR-J_y3yR]v}{(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}$$

由于$J_x=J\cos I\cos A'$，$J_y=J\cos I\sin A'$，$J_z=J\sin I$，则上式可写为：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a=&\frac{M}{(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2-y^2)\sin I-3Rx\cos I\cos A'\\
&-3Ry\cos I\sin A']\\
\text{同理：}&\\
H_{ax}=&\frac{M}{(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2x^2-y^2-R^2)\cos I\cos A'\\
&+3xy\cos I\sin A'-3xR\sin I]\\
H_{ay}=&\frac{M}{(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2y^2-x^2-R^2)\cos I\sin A'\\
&+3xy\cos I\cos A'-3yR\sin I
\end{aligned}\right\} \quad (5.3.3)$$

将（5.3.3）式代入（5.2.20）式，化简后可得：

$$\Delta T=\frac{M}{(x^2+y^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2-y^2)\sin^2 I+(2x^2-y^2-R^2)\cos^2 I\cos^2 A'$$
$$+(2y^2-x^2-R^2)\cos^2 I\sin^2 A'-3xR\sin 2I\cos A'$$
$$+3xy\cos^2 I\sin 2A'-3yR\sin 2I\sin A'] \qquad (5.3.4)$$

(5.3.3) 和 (5.3.4) 式为剖面方向和球体位置都是任意时的剖面磁场表达式。当剖面方向与J在地面的投影方向一致时，这时$A'=0$，$I=i_z$，$J_y=0$，上式还可简化。

当我们只讨论通过原点的中心剖面（或称主剖面）时，因$y=0$，$J_t=J\cos\lambda$，此处λ为J_t与J之间的夹角，见图 5.2.3，并可求得$\cos\lambda=\sin I/\sin i_t$，$\operatorname{ctg} i_t=\operatorname{ctg} I\cos A'$；令$M_t=J_t\cdot v$，则球体在中心剖面上的磁场各分量为：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=\frac{M_t}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i_t-3Rx\cos i_t]\\
H_{ax}&=\frac{M_t}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2x^2-R^2)\cos i_t-3Rx\sin i_t]\\
H_{ay}&=\frac{-M_t}{(x^2+R^2)^{5/2}}(x^2+R^2)\sin i_t\operatorname{ctg} I\sin A\\
\Delta T&=\frac{M_t}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i_t\sin I+(2x^2\\
&-R^2)\cos i_t\cos I\cos A'-(x^2+R^2)\sin i_t\operatorname{ctg} I\cos I\sin^2 A'\\
&-3xR2\sin i_t\cos I\cos A']
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.5)$$

当剖面为磁南北方向时，因$A'=0$，则$i_t=I$，且$M_t=M$，故上式中$H_{ay}=0$；这时有

$$Z_a=\frac{M}{(x^2+R^2)^{5/2}}[2R^2-x^2)\sin I-3Rx\cos I]$$

$$H_{ax}=\frac{M}{(x^2+R^2)^{5/2}}[2x^2-R^2)\cos I-3Rx\sin I]$$

$$\Delta T=\frac{M_t}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin^2 i_t+(2x^2-R^2)\cos^2 i_t-3Rx\sin 2i_t] \qquad (5.3.6)$$

若为东西方向剖面，则$A'=90^\circ$，此时$i_t=90^\circ$，对东西方向剖面而言，相当于垂直磁化，以上表达式可进一步简化，其表达式可写为：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=M_t\frac{2R^2-x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}=M\frac{2R^2-x^2}{(x^2+R^2)^{5/2}}\sin I\\
H_{ax}&=M_t\frac{-3Rx}{(x^2+R^2)^{5/2}}=M\frac{-3Rx}{(x^2+R^2)^{5/2}}\sin I\\
H_{ay}&=M_t\frac{-1}{(x^2+R^2)^{3/2}}\cot I=M\frac{-1}{(x^2+R^2)^{3/2}}\cos I\\
\Delta T&=Z_a\sin I+H_{ax}\cos I
\end{aligned}\right\} \qquad (5.3.7)$$

若$i_t=I=90^\circ$，则$\Delta T=Z_a$

5.3.2 球体磁场表达式的分析

1．由球体的磁场表达式可以看出：球体的磁场不仅与其位置、体积、磁化强度的大小和方向有关系，而且与计算剖面的方向和位置、计算点坐标有关系。因此，磁异常可看

作是以v、R、J、i_r、A'等为参变量和测点坐标x、y、z为自变量的函数，可表示为：

磁异常$F_a=f(x,y,z,v,R,J,i_r,A')$

当参变量（几何参量和磁性参量）一定时，磁场值仅是测点坐标的函数，因观测面水平，且$Z=0$，故磁异常仅随x,y的不同而变化。如只分析$y=0$的剖面，则磁异常仅随x而变化。

根据磁场表达式的结构，可将其分为三部分：常系数部分，以M表示；$\frac{1}{r^m}$部分；分子部分。

系数部分，只影响场的强弱；$\frac{1}{r^m}$部分只影响场的衰减特征；分子部分决定磁场形态的变化特征。因此，我们称系数部分为幅度因子，$\frac{1}{r^m}$部分称为距离衰减因子，分子部分称为形态因子。因此，

磁异常＝幅度因子×衰减因子×形态因子

由（5.3.5）——(5.3.7）式可以看出，其幅度因子和衰减因子都是相同的，仅是形态因子不同。以Z_a表达式看，当$i_r=90°$时，形态因子$G_{i_r}=(2R^2-x^2)$；当i_r任意时，形态因子$G_{i_r}=(2R^2-x^2)\sin i_r-3Rx\cos i_r$。因为$i_r=90°$时$G_{i_r}(x)$为偶函数，故$Z_a$剖面曲线对称于z轴；而$i_r\neq 90°$时，$G_{i_r}(x)$既非偶函数，也非奇函数，而是奇、偶函数的组合，因此，Z_a为非对称曲线。可见Z_a剖面曲线的对称与不对称，直接与有效磁化倾角i_r有关系。图5.3.2是不同i_r角的Z_a剖面曲线。

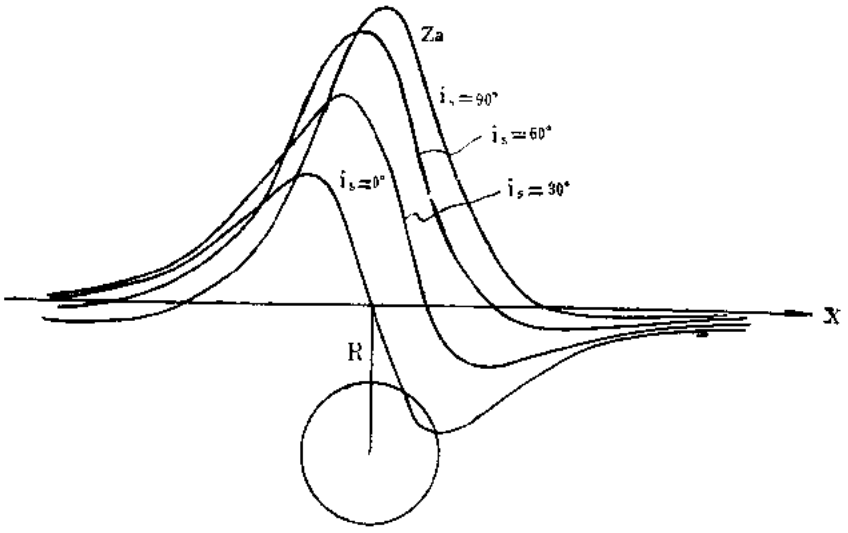


图 5.3.2 球体不同磁化倾角i_a的Z_a剖面曲线

2．令$Z_a=0$，由（5.3.7）式可得$x_0=\pm\sqrt{2}R$，由（5.3.5）式可解得：$x_0=\frac{1}{2}(-3\mathrm{ctg}i_r\pm\sqrt{9\mathrm{ctg}^2i_r+8})R$。由此可见，垂直磁化时，$Z_a$零值点的位置与球体的埋深有关系，埋深愈深，两零值点间的距离愈大，且有$x_{0左}=x_{0右}$；斜磁化时，Z_a零值点的

位置不仅与R有关，还与is角有关系，且$x_{0左} \neq x_{0右}$。

3．令$Z'_a=0$，由（5.3.7）式解得：$x_{max}=0$，$x_{min}=\pm 2R$。将其代入（5.3.7）式，则有：

$$Z_{amax}=\frac{2M}{R^3}; \quad |Z_{amin}|=\frac{1}{56}Z_{amax}$$

因此可见，当$x=0$时Z_a为极大，随着$|x|$增大，Z_a减小，其减小的速度由距离衰减因子中r的方次决定。当$|x|=\sqrt{2}R$时，Z_a为零值，$|x|>\sqrt{2}R$时，Z_a为负值，$|x|=2R$时，Z_a为极小，且左右对称。

同理，令$H_{ax}=0$，解得$x_0^{(H)}=0$；令$H'_{ax}=0$，解得$x_{max}^{(H)}=-\frac{R}{2}$，$x_{min}^{(H)}=\frac{R}{2}$。与$Z_a$相比较，$H_{amax}=0.43Z_{amax}$，可见$H_{ax}$曲线对称于原点。图5.3.3是垂直磁化时的$Z_a$、$H_a$剖面曲线。

若为斜磁化，由(5.3.5)式，令$Z'_a=0$，解得：

$$\left.\begin{aligned} x_{max}&=\left[2\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\mathrm{ctg}^2 i_s}\cos\left(60^\circ+\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{4}{3}\mathrm{ctg}\,i_s\right]\cdot R \\ x_{min}&=\left[2\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\mathrm{ctg}^2 i_s}\cos\left(60^\circ-\frac{\varphi}{3}\right)-\frac{4}{3}\mathrm{ctg}\,i_s\right]\cdot R \end{aligned}\right\} \qquad (5.3.8)$$

其中：

$$\varphi=\arccos\left[\left(\frac{64}{27}\mathrm{ctg}^3 i_s+\frac{13}{6}\mathrm{ctg}\,i_s\right)\left(\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\mathrm{ctg}^2 i_s\right)^{-3/2}\right]$$

由上式可见，斜磁化时Z_a曲线的极值点位置除与R有关系外，与有效磁化倾角i_s也存在复杂的函数关系。根据（5.3.8）式计算了$|Z_{amin}|/Z_{amax}$随i_s角的变化值，见表5.3.1。由表中数值可看出：当i_s角由90°逐渐变为0°时，Z_a曲线由轴对称逐渐变为点对称。

表 5.3.1

i_s	0°	15°	30°	45°
$\frac{\lvert Z_{amin}\rvert}{Z_{amax}}$	1.00	0.53	0.29	0.15
i_s	60°	75°	90°	
$\frac{\lvert Z_{amin}\rvert}{Z_{amax}}$	0.08	0.04	0.02	

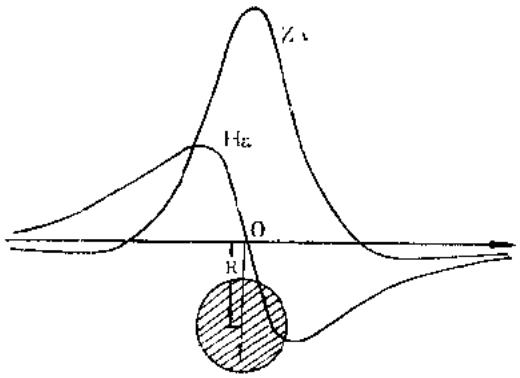


图 5.3.3 垂直磁化球体Z_a、H_a剖面图

5.3.3 球体磁场特征的分析

1．Z_a的特征

对磁性体的磁场特征，既应注意其平面特征，也应注意其剖面特征和空间特征。只有这样，才便于掌握一种磁性体与另一种磁性体磁场特征的区别。

（1）Z_a的平面特征

利用（5.3.3）式，根据给定的参量值可计算出平面上各点的Z_a值。图5.3.4就是根据

计算出的理论场值绘制的平面等值线图。由图可见Z_a等值线呈等轴状，负异常包围着正异常；极大值和极小值的连线(即异常的极轴)对应磁化强度矢量J在平面上的投影方向；极小值位于正异常的北侧，极大值位于坐标原点之南侧，极大值并不对应球体中心在平面上的投影点；整个异常对称于J在平面上的投影轴。除$I=90°$时，Z_{amax}点位于球心在水平面投影点即对应于原点，以及$i_r=0°$时，$Z_a=0$对应于原点外，对其它条件，上述特征基本不变。

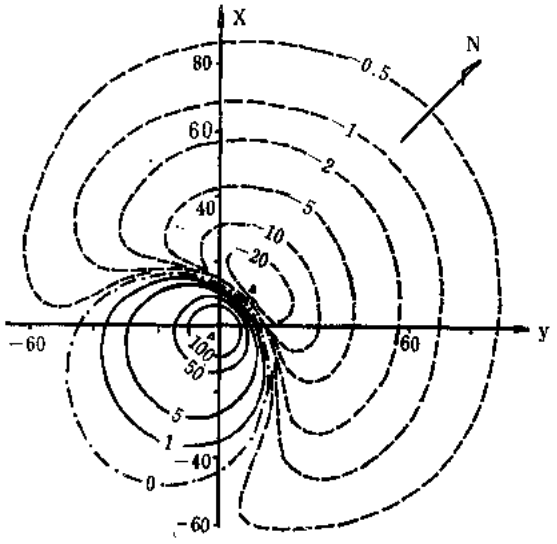


图 5.3.4 球体Z_a平面等值线图
$A'=I=45°$，$R=15$，Δ为极值位置

（2）Z_a的剖面特征

由前面的分析可知，Z_a剖面为两边有负值的曲线。$i_r=90°$时，曲线为轴对称。当J，偏离90°方向时，若$0°<i_r<90°$，则右侧负值大，左侧负值小；当$90°<i_r<180°$时，左侧负值大，右侧负值小；当$i_r=0°$或180°时，Z_a曲线对称于原点；如$0°>i_r>-180°$，Z_a负值的绝对值大于正值。参见图5·3.2。

（3）Z_a的空间特征

现在取$y=0$的垂直断面来研究球体的磁场空间特征。为便于研究，将坐标原点移至球心，并改用极坐标令极轴向上，则$r^2=x^2+R^2$，$x=r\cos\theta$，$R=r\sin\theta$，将此关系代入(5.3.5)式，化简可得：

$$Z_a=\frac{M}{2r^3}[\sin i_r-3\sin(2\theta+i_r)] \tag{5.3.9}$$

当$i_r=90°$时，则

$$Z_a=\frac{M}{2r^3}(1-3\cos 2\theta) \tag{5.3.10}$$

可见，Z_a异常的空间等值线是一系列以球心为对称点的两组变形的双纽线簇，见图5.3.5。

由图可见，Z_a的零值线都是直线，且相交于球心；Z_a的正值区比负值区大；正值区和负值区等值线的对称轴正交于原点。同时还可以看出，随R增大，Z_a场值减小，正负异常范围增大，且Z_{amax}发生位移。这与前面的分析是一致的。

利用(5.3.9)式，研究空间等值线中特征线的分布规律，有利于找出利用空间等值线的反演方法。

2．H_{ax}的特征

图5.3.6是H_{ax}的平面等值线图。由图可见H_{ax}为正负伴生的异常。当$0°<I<90°$时，其$|H_{axmin}|>|H_{axmax}|$；由于我们规定H_{ax}与x轴同向为正，反向为负，故负异常主要分布于$x>0$的一侧，而正异常主要分布在$x<0$的一侧，原点位于负值区。

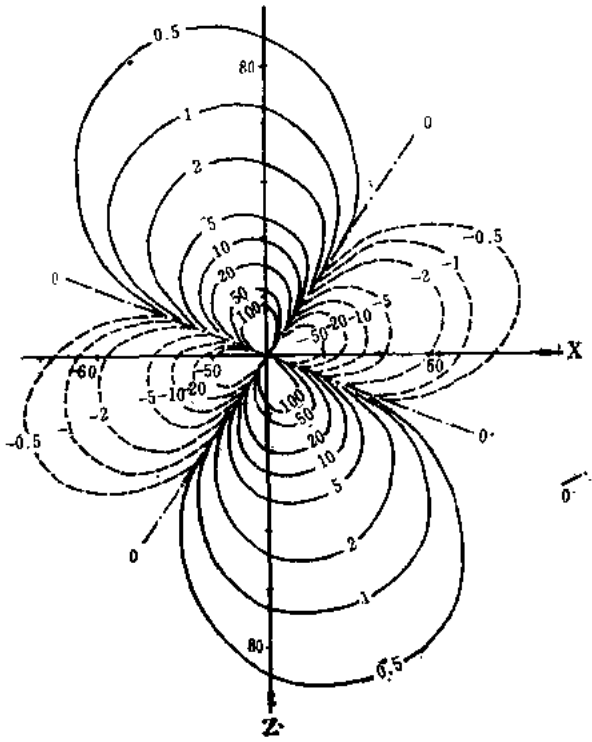


图 5.3.5 球体Z_a空间等值线图

$A'=I=45°$，$y=0$

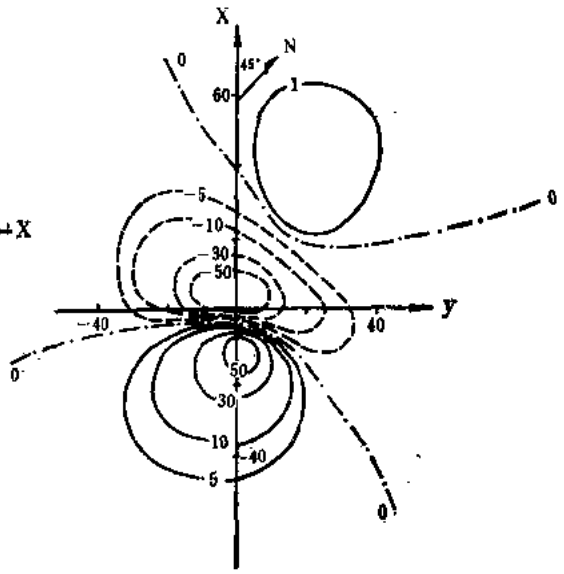


图 5.3.6 球体的H_{ax}平面等值线图

$A'=I=45°$，$R=15$

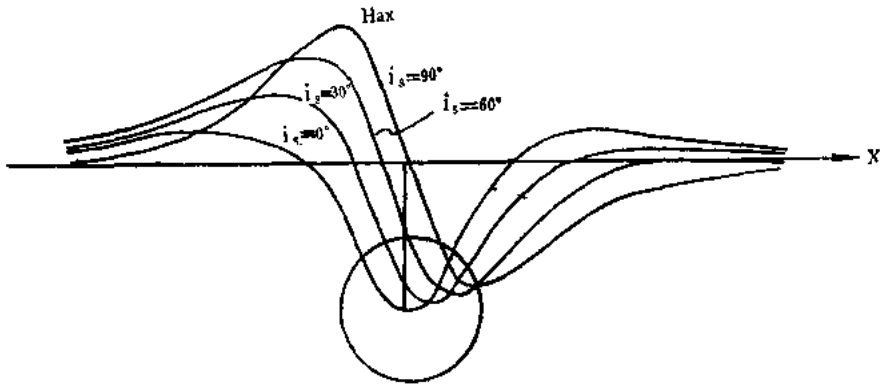


图 5.3.7 球体H_{ax}剖面图

由式(5.3.5)可知，当$i_s=90°$时，H_{ax}为奇函数，故H_{ax}曲线对称于原点，见图5.3.7。当$i_s=0°$时，H_{ax}为偶函数，H_{ax}曲线对称于z轴；当$0°<i_s<90°$时，H_{ax}为非对称曲线，且$|H_{ax\min}|>H_{ax\max}$，仍见图5.3.7。

由（5.3.3）式可以看出，若x、y互换，并以$90°-A'$代替A'，则H_{ax}表达式变为H_{ay}表达式，因此可用类似的方法分析H_{ay}的磁场特征。

3．ΔT的特征

由ΔT的表达式可知，当为垂直磁化时，即$I=i_s=90°$时，ΔT与Z_a相同。若为斜磁化，ΔT受磁化倾角的影响比Z_a更大。当为水平磁化时，即当$I=i_s=0°$时，ΔT与H_{ax}相同。因此，ΔT的特征与Z_a类似，只是ΔT受磁化倾角的影响比Z_a更大，对相同的磁化倾角，

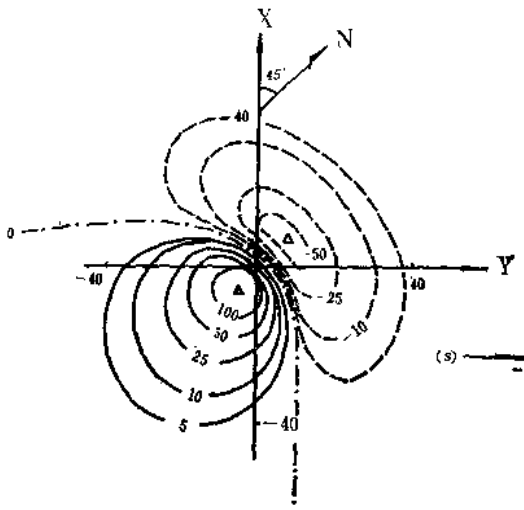


图 5.3.8 球体的ΔT平面等值线图

$A'=I=45°$ $R=15$

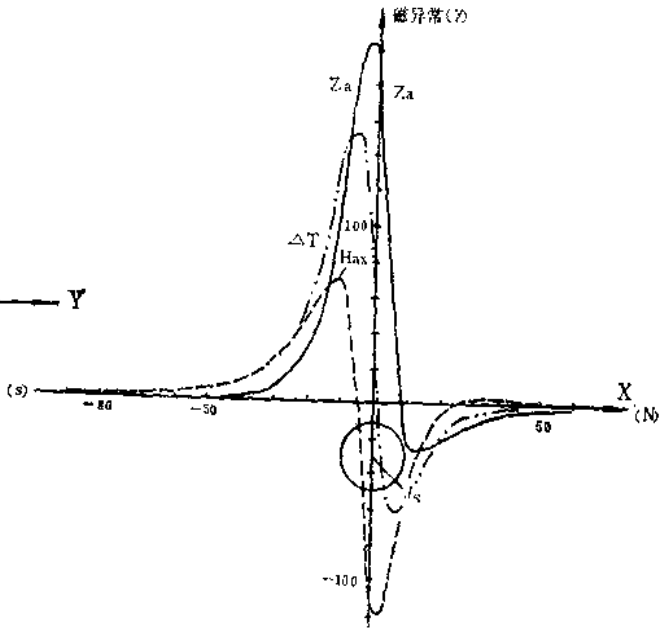


图 5.3.9 球体磁场剖面图

$\gamma=0$, $A'=0$, $I=45°$, $R=15$,

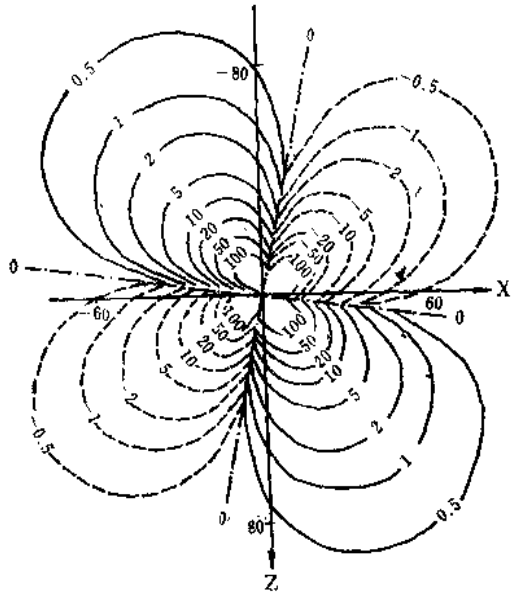


图 5.3.10 球体磁场ΔT空间等值线图

$A'=I=45°$ $\gamma=0$

$|\Delta T_{min}|>|Z_{amin}|$。球体的$\Delta T$平面等值线图、$\Delta T$与$Z_a$、$H_{as}$剖面曲线图及其$\Delta T$空间等值线图分别见图5.3.8，图5.3.9及图5.3.10。对比图5.3.10与图5.3.5可见ΔT与Z_a的空间等值线形态类似，但两条零值线之间的夹角不等，Z_a的正值区比ΔT的要大。由剖面曲线图5.3.9可以看出，ΔT的曲线形态与Z_a的类似，但ΔT因受磁化倾角影响大，其负幅值比Z_a的要大，而其正幅值则比Z_a的要小。

§5.4 板状体的磁场

在自然界里，许多侵入岩墙、岩脉、沉积变质的含铁石英岩系，地台基底中的变质岩系和杂岩系，各种磁性矿脉等，只要它们沿走向长度较大，都可看作厚度不同的板状体。

板状体被均匀磁化时，仅有面磁荷分布，且同一磁荷面的磁荷密度相同。板状体在地面任一点P产生的磁场，是各个磁荷面在该点产生的磁场的总和。因此，计算板状体的磁场，只要计算不同磁荷面的磁场而后求和即可。

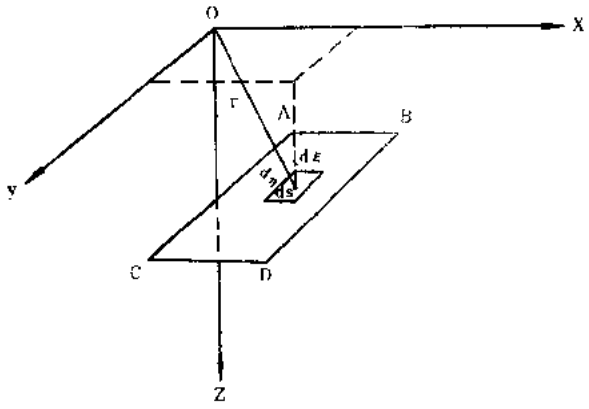


图 5.4.1 磁荷面坐标示意图

5.4.1 磁荷面的磁场表达式

1．水平磁荷面的磁场表达式

单个的磁荷面是不存在的。一个向下延深很大的磁性厚岩脉，当它被顺层均匀磁化时，仅上下两个端面有磁荷分布，下端面因埋深很大，故在地面引起的磁场可以忽略，可仅考虑上顶面在地面上引起的磁场，这种岩脉的磁场则为水平磁荷面的磁场。

设有一个与观测面xoy平行的、具有负磁荷分布的磁荷面$ABCD$，其磁荷密度为$\sigma=J_n$，求测线上任一点P(x)的磁场分量。

如图5.4.1所示，磁荷面$ABCD$的边长分别与x、y轴平行；面积元$ds=d\eta d\xi$，其磁荷量为$dm=\sigma d\xi d\eta$。。根据前面的磁荷面积分公式（5.2.10），则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\iint_S \frac{J_n(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\xi d\eta \\ H_{ay}&=\iint_S \frac{J_n(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\xi d\eta \\ Z_a&=\iint_S \frac{J_n(Z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\xi d\eta \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.1)$$

设磁荷面四个角点坐标分别为：(x_A, y_A, z_A)，(x_B, y_B, z_B)，(x_C, y_C, z_C)，(x_D, y_D, z_D)。将二重积分定限化为二次积分，则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\int_{x_A}^{x_B} d\xi \int_{y_A}^{y_C} \frac{J_n(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\eta \\ H_{ay}&=\int_{x_A}^{x_B} d\xi \int_{y_A}^{y_C} \frac{J_n(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\eta \\ Z_a&=\int_{x_A}^{x_B} d\xi \int_{y_A}^{y_C} \frac{J_n(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2]^{3/2}}\,d\eta \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.2)$$

若角点坐标已知，完成以上积分即可得其磁场表达式。

若磁荷面沿走向可看作是无限伸长的，即$y_A\to-\infty$，$y_C\to-\infty$。设水平磁荷面的埋深

为h，即$\zeta=h$。则在测线x上任一点$P(x)$的磁场各分量，按（5.4.2）式，应为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\int_{x_A}^{x_B}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{J_n(x-\zeta)}{[(x-\xi)^2+\eta^2+h^2]^{3/2}}\,d\eta\\ H_{ay}&=\int_{x_A}^{x_B}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-J_n\eta}{[(x-\xi)^2+\eta^2+h^2]^{3/2}}\,d\eta\\ Z_a&=\int_{x_A}^{x_B}d\xi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-J_nh}{[(x-\xi)^2+\eta^2+h^2]^{3/2}}\,d\eta \end{aligned}\right\}\qquad(5.4.3)$$

上面的积分中，里层为无穷限的广义积分，且H_{ax}和Z_a的里层积分形式相同，计算时应用积分公式：

$$\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}}=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+c$$

完成里层积分后，则有

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\int_{x_A}^{x_B}\frac{2J_n(x-\xi)}{(x-\xi)^2+h^2}\,d\xi\\ H_{ay}&=0\\ Z_a&=\int_{x_A}^{x_B}\frac{-2J_nh}{(x-\xi)^2+h^2}\,d\xi \end{aligned}\right\}\qquad(5.4.4)$$

根据（5.4.4）式：

$$H_{ax}=\int_{x_A}^{x_B}\frac{-J_n}{(x-\xi)^2+h^2}d[(x-\xi)^2+h^2]=-J_n\ln[(x-\xi)^2+h^2]\Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$=-J_n\ln\frac{(x-x_B)^2+h^2}{(x-x_A)^2+h^2}$$

$$Z_a=\int_{x_A}^{x_B}\frac{2J_nh}{(x-\xi)^2+h^2}d(x-\xi)=2J_n\mathrm{tg}^{-1}\frac{(x-\xi)}{h}\Big|_{x_A}^{x_B}$$

$$=2J_n\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-x_B}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-x_A}{h}\right)$$

为方便起见，我们取xoz剖面内磁荷面的两端点为A、B，见图5.4.2，其间的宽度设为$2b$，坐标原点取在AB中点在地面的投影点。AB端的横坐标：$x_A=-b$，$x_B=b$；对于顺层磁化，即$i_s=\alpha$；$J_n=\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$，故$J_n=-J_s\sin\alpha$；考虑到$H_{ax}$正方向与x轴同向的规定，则有：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=J_s\sin\alpha\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\\ Z_a&=2J_s\sin\alpha\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right) \end{aligned}\right\}\qquad(5.4.5)$$

由于$(x-b)^2+h^2=r_B^2$，$(x+b)^2+h^2=r_A^2$，设r_A与垂线的夹角为φ_A，r_B与垂线的夹角为φ_B，因此有：$\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}=\varphi_A$，$\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}=\varphi_B$，则（5.4.5）式可写为

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=2J_s\sin\alpha\ln\frac{r_B}{r_A}=2\sigma\ln\frac{r_B}{r_A}\\ Z_a&=2J_s\sin\alpha(\varphi_A-\varphi_B)=2\sigma\Delta\varphi \end{aligned}\right\}\qquad(5.4.6)$$

上式中$\Delta\varphi$为磁荷面两端点对P点的张角。

2．倾斜磁荷面的磁场表达式

有了水平磁荷面的磁场表达式，利用转轴的方法很容易求得倾斜磁荷面的磁场表达式。

如图5.4.3所示，设磁荷面与XOY面夹角为δ，为计算P点的磁场，过P点作新的辅助

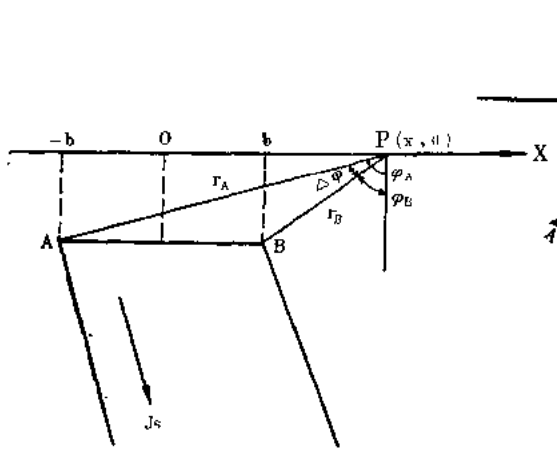


图 5.4.2 二度水平磁荷面坐标示意图

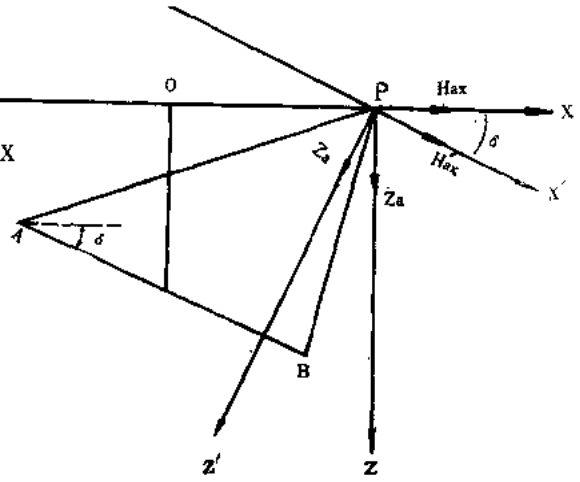


图 5.4.3 倾斜磁荷面示意图

坐标PX'、PZ'，分别与倾斜磁荷面平行和垂直。对新坐标系，有 $Z'_a=2\sigma\Delta\varphi$，$H'_{ax}=2\sigma\ln\frac{r_B}{r_A}$，对原坐标系则有：

$$\left.\begin{aligned}H_{ax}&=H'_{ax}\cos\delta-Z'_a\sin\delta\\Z_a&=H'_{ax}\sin\delta+Z'_a\cos\delta\end{aligned}\right\}\tag{5.4.7}$$

将H'_{ax}、Z'_a代入上式，可得

$$\left.\begin{aligned}H_{ax}&=2\sigma\left(\cos\delta\ln\frac{r_B}{r_A}-\sin\delta\Delta\varphi\right)\\Z_a&=2\sigma\left(\Delta\varphi\cos\delta+\sin\delta\ln\frac{r_B}{r_A}\right)\end{aligned}\right\}\tag{5.4.8}$$

由上式可以看出，当$\delta=0$，即磁荷面水平时，该式变回为（5.4.6）式；当$\delta=90^\circ$时，该式变为：

$$H_{ax}=-2\sigma\Delta\varphi$$

$$Z_a=2\sigma\ln\frac{r_B}{r_A}$$

5.4.2 走向无限、延深有限厚板状体的磁场表达式

在自然界是不存在无限延长或无限延深的地质体，仅是为了研究和解释方便，在一定误差限度内，我们把有限延长（或延深）的地质体，看作是无限延长（或延深）的地质体。根据理论计算，当磁性体长度$2L$与磁性体埋深h之比$\frac{2L}{h}>10$时，$Z_{a\infty}$与Z_{aL}的差别不大

于6％。这种条件常因形体的不同而变化，通常把Z_a等值线的长轴/短轴≥3的情况，当作地质体沿走向无限伸长的情况。可见，在磁法勘探中，有限和无限是一个相对概念。

假设有一个沿走向无限长、横截面如图5.4.4所示的斜磁化厚板状体。由图可见：$\alpha=i_s+\gamma$即$\gamma=\alpha-i_s$；$|\sigma_{AB}|=\sigma_{CD}=J_s\cdot\sin i_s$，$|\sigma_{AC}|=\sigma_{BD}=J_s\sin\gamma$。该板状体在$P$点的磁场是六个磁荷面分别在$P$点所产生的磁场之和。由于其走向端面位于无限远，这两端面在P点产生的磁场视为零。因此，板状体的磁场为四个磁荷面磁场之和，可表示为：

$$Z_a=Z_{aAB}+Z_{aCD}+Z_{aAC}+Z_{aBD}$$

$$H_{ax}=H_{axAB}+H_{axCD}+H_{axAC}+H_{axBD}$$

将（5.4.6）和（5.4.8）式代入上式，并考虑到磁荷面的正、负以及磁荷密度的对应关系，利用三角公式：$\sin i_s=\sin(\alpha-\gamma)=\sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma$，代入后经整理合并，得下式：

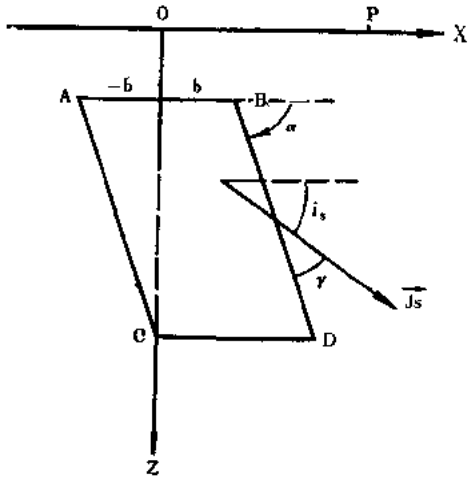


图 5.4.4 有限延深厚板状体坐标示意图

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=2J_s\sin\alpha\left\{\sin\gamma\ln\frac{r_Cr_B}{r_Dr_A}+\cos\gamma[(\varphi_A-\varphi_B)-(\varphi_C-\varphi_D)]\right\}\\H_{ax}&=2J_s\sin\alpha\left\{\cos\gamma\ln\frac{r_Cr_B}{r_Dr_A}-\sin\gamma[(\varphi_A-\varphi_B)-(\varphi_C-\varphi_D)]\right\}\end{aligned}\right\}\quad(5.4.9)$$

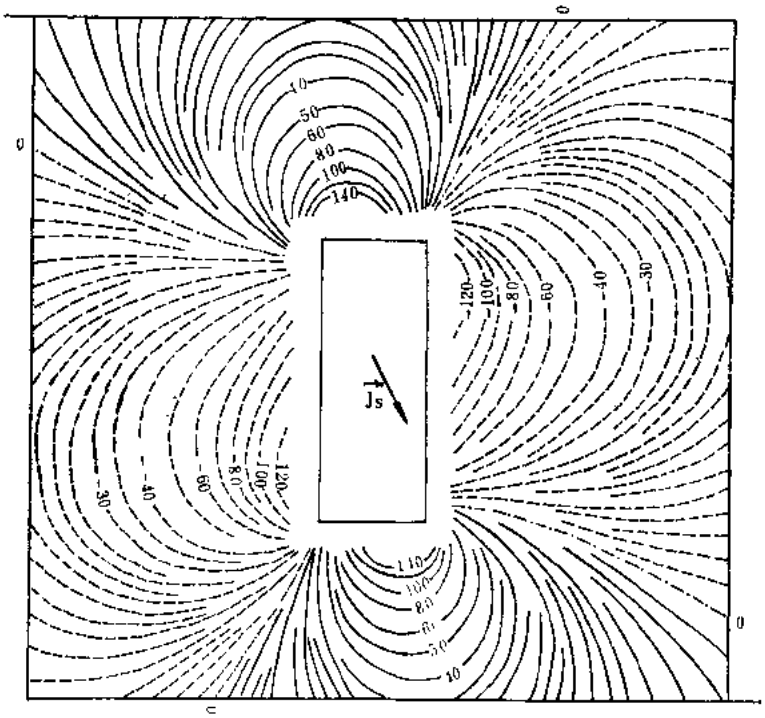


图 5.4.5 有限延深二度厚板Z_a空间等值线图

宽度：2b＝4，上下底面间的距离：2l＝10，埋深：h＝1，厚板的倾角：$\alpha=90°$，磁化倾角：i＝60°

(5.4.9) 式是二度板状体的一般磁场表达式。当板状体向下无限延深，或是沿一侧无限变宽时，其磁场表达式都可由上式简化得出。图5.4.5是其Z_a空间等值线图，由图可见，当板状体向下有限延深时，剖面两侧都将出现负值。

5.4.3 走向无限、延深无限厚板状体的磁场

当厚板状体向下无限延深时，则$r_C \doteq r_D$，$\varphi_C \doteq \varphi_D$，这时（5.4.9）式可简化为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= 2J_t\sin\alpha\left[\sin\gamma\ln\frac{r_B}{r_A}+\cos\gamma\cdot(\varphi_A-\varphi_B)\right] \\ H_{ax} &= 2J_t\sin\alpha\left[\cos\gamma\ln\frac{r_B}{r_A}-\sin\gamma(\varphi_A-\varphi_B)\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.4.10}$$

用直角坐标，上式可写为：

$$Z_a=2J_t\sin\alpha\left[\frac{1}{2}\sin\gamma\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}+\cos\gamma\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\right] \tag{5.4.11}$$

$$H_{ax}=2J_t\sin\alpha\left[\frac{1}{2}\cos\gamma\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}-\sin\gamma\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\right]$$

将（5.4.10）式代入（5.2.21）式，则有：

$$\Delta T=2J_t\sin\alpha\frac{\sin I}{\sin i_t}\left[\cos(\alpha-2i_t)\ln\frac{r_B}{r_A}-\sin(\alpha-2i_t)(\varphi_A-\varphi_B)\right]$$

导出上式时，要利用关系式：$\mathrm{ctg}i_t=\mathrm{ctg}I\cdot\cos A'$，$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$，$\sin(A-B)=\sin A\cdot\cos B-\cos A\sin B$。

若用直角坐标，上式可写为：

$$\begin{aligned}\Delta T=2J_t\sin\alpha\frac{\sin I}{\sin i_t}\Big[&\frac{1}{2}\cos(\alpha-2i_t)\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\\&-\sin(\alpha-2i_t)\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\Big]\end{aligned} \tag{5.4.12}$$

由Z_a和ΔT的表达式可看出，二者形式相同，仅是常系数和角系数不同。Z_a和H_{ax}除系数角函数不同外，它们都是对数函数和反正切函数的合成。下面重点分析Z_a特征。

当表达式中$\gamma=0$，即为顺层磁化时，上式简化为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= 2J_t\sin\alpha\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right)=2J_t\sin\alpha\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2} \\ H_{ax} &= J_t\cdot\sin\alpha\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} \\ \Delta T &= 2J_t\sin\alpha\frac{\sin I}{\sin i_t}\left[\frac{1}{2}\cos i_t\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}+\sin i_t\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2}\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.4.13}$$

当x=0时，$Z_a=Z_{a\max}=4J_t\sin\alpha\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{h}$，$H_{ax}=0$；$Z_a(x)=Z_a(-x)$，$H_{ax}(x)=-H_{ax}(-x)$。

因此，Z_a剖面曲线对称于z轴，H_{ax}剖面曲线对称于原点；ΔT曲线相当于Z_a曲线和H_{ax}曲线分别乘以不同角函数后的合成。其剖面曲线参见图5.4.6。

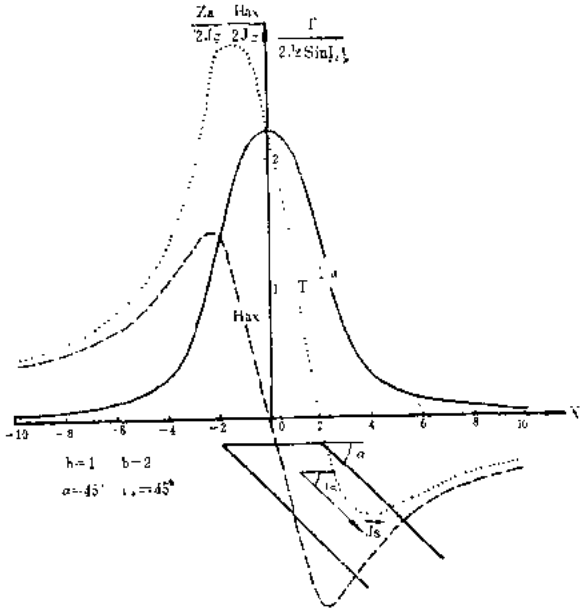


图 5.4.6 顺层磁化厚板Z_{ax}、H_{ax}、ΔT剖面曲线

取$Z_a=\frac{1}{2}Z_{amax}$，可解得Z_a半值点坐标$X_{1/2}=\pm\sqrt{h^2+b^2}$，当$b\gg h$时，则$x_{1/2}\approx b$。当$2b$很大时，$\varphi_A-\varphi_B\to\pi$，这时$Z_a=2\pi J_s$。在岩体露头上测量可用此式估计岩体的磁化强度$J_s$。

当$\alpha-i=\gamma=90^\circ$时，则：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=J_s\sin\alpha\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\\H_{ax}&=-2J_s\sin\alpha\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right)\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.14)$$

上式说明，当γ角由0°变为90°，Z_a曲线由轴对称变为点对称，而H_{ax}由点对称变为反向轴对称。

当$0<\gamma<90^\circ$时，Z_a为非对称曲线，其不对称性随γ角增大而增强，但$Z_{amax}>|Z_{amin}|$。当$\gamma>90^\circ$时，$|Z_{amin}|>Z_{amax}$。

若把顺层磁化时的Z_a、H_{ax}表示为$Z_{a//}$，$H_{ax//}$则（5.4.11）式可写为以下形式：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=Z_{a//}\cos\gamma+H_{ax//}\sin\gamma\\H_{ax}&=H_{ax//}\cos\gamma-Z_{a//}\sin\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(5.4.15)$$

由于$Z_{a//}$和$H_{ax//}$的曲线形态简单，利用上式更易分析Z_a、H_{ax}的曲线特征。

由磁场表达式还可看出：$J_s\cdot\sin\alpha$以系数形式出现，它只影响异常的幅值；$\gamma=\alpha-i_s$，只要保持γ角不变，对不同的α和i_s，Z_a曲线形态不变。

b和h不仅影响异常的幅度，还与异常的宽度有关。由（5.4.11）式求得Z_a极值点的坐标为：

$$\left.\begin{aligned} x_{max} &= h\mathrm{ctg}\gamma - \sqrt{h^2\csc^2\gamma + b^2} \\ x_{min} &= h\mathrm{ctg}\gamma + \sqrt{h^2\csc^2\gamma + b^2} \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.16)$$

由上式可以看出，当b/h值增大，则Z_a极值点间的距离将加宽。Z_a随 b 的变化曲线见图5.4.7。

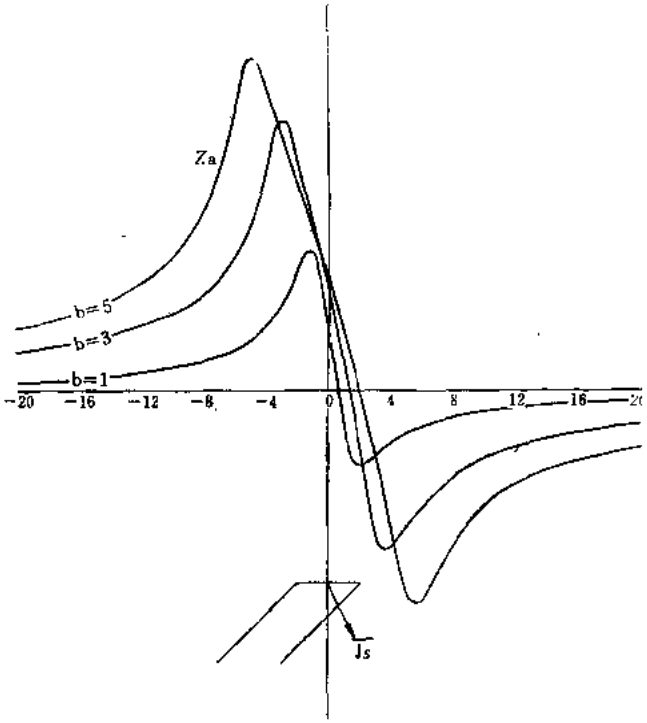


图 5.4.7　不同宽度b的极状体Z_a曲线
（任意比例尺）

5.4.4 走向无限、延深无限薄板状体的磁场

1．薄板磁场的表达式和分布特征

薄板可看作是厚板的特殊情况。在磁法中“厚”与“薄”也是一个相对概念。一般当板状体的 $2b<h$ 时，我们称其为薄板，反之为厚板。薄板状体的磁场表达式可从厚板的磁场表达式简化导出。可将（5.4.11）式中的反正切项和对数项展成b/h的级数，然后略去b/h的高次项，即可得薄板的磁场表达式。

根据级数展开式：

$$\mathrm{tg}^{-1}x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots\cdots; \qquad (|x|<1)$$

$$\ln x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\cdots\right] \quad (x>0))$$

则有：

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2} \doteq \frac{2bh}{x^2+h^2}$$

$$\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2} \doteq 2\frac{-2bx}{h^2+x^2}$$

将以上关系式代入（5.4.11）式，即得到薄板状体的磁场表达式：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= 2J_s 2b\sin\alpha\,\frac{h\cos\gamma - x\sin\gamma}{x^2+h^2} \\ H_{ax} &= 2J_s 2b\sin\alpha\,\frac{-h\sin\gamma - x\cos\gamma}{x^2+h^2} \\ \Delta T &= \frac{2J_s 2b\sin\alpha}{x^2+h^2}\,\frac{\sin I}{\sin i_s}\left[h\sin(2i_s-\alpha(-x\cos(2i_s-\alpha)\right] \end{aligned}\right\} \qquad (5.4.17)$$

以上关系式与（5.4.11）和（5.4.12）式相比较，其函数关系简化了，其表达式的形式基本类似，仅是反正切函数、对数函数和偶函数与奇函数的不同。因此，由上式决定的磁场特征，与厚板相似。例如：

当$\gamma=0$，即$\alpha=i_s$，为顺层磁化时，

$$Z_a = \frac{2J_z \cdot 2b \cdot \sin\alpha \cdot h}{x^2 + h^2}$$

$$H_{ax} = -\frac{2J_z 2b \cdot \sin\alpha \cdot x}{x^2 + h^2} \tag{5.4.18}$$

Z_a为轴对称曲线，H_{ax}为点对称曲线。

当$\gamma \neq 0$时，由（5.1.17）式可以看出，γ角由0°变为90°时，Z_a曲线由轴对称变为点对称，而H_{ax}曲线将由点对称变为反向轴对称。当$0° < \gamma < 90°$时，Z_a为非对称曲线，其不对称性随γ角增大而增强，但$Z_{amax} > |Z_{amin}|$；当$\gamma > 90°$时，$|Z_{amin}| > Z_{amax}$，这些特征与厚板的情况类似。图5.4.8是薄板状体的Z_a随γ的变化曲线。

在磁场表达式中，分母中的h比分子中的h方次高，因此，h增大时Z_a幅值将减小，图5.4.9是薄板的Z_a随h的变化曲线。

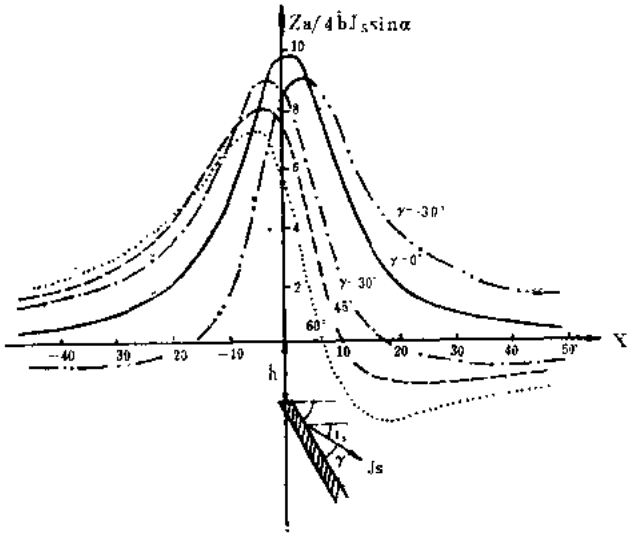


图 5.4.8　不同γ角时薄板磁场剖面图

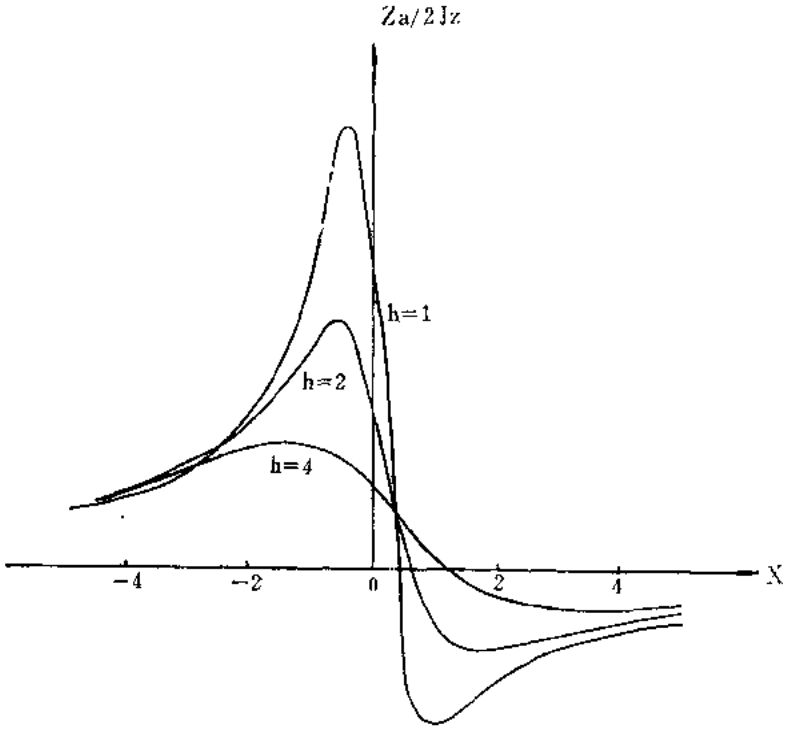


图 5.4.9　薄板的Z_a随h的变化剖面图

$2b=1$，$\gamma=60°$，纵比例尺注意

与厚板状体的情况一样，斜磁化薄板的Z_a和H_{ax}同样可用顺层磁化的$Z_{a//}$、$H_{ax//}$。它们之间的关系式可表示为：

$$Z_a = Z_{a//}\cos\gamma + H_{ax//}\sin\gamma$$
$$H_{ax} = H_{ax//}\cos\gamma - Z_{a//}\sin\gamma$$

由（5.4.17）式，令$\partial Z_a/\partial x = 0$，求得薄板磁场的极值点坐标为：

$$x_{max} = h(\mathrm{ctg}\gamma - \mathrm{csc}\gamma)$$
$$x_{min} = h(\mathrm{ctg}\gamma + \mathrm{csc}\gamma) \qquad (5.4.19)$$

令$Z_a = 0$，求得其零值点的坐标为：

$$x_0 = h\mathrm{ctg}\gamma \qquad (5.4.20)$$

由（5.4.19）和（5.4.20）式，有：$x_0 - x_{max} = x_{min} - x_0$，即$d_m = 2d_{m0}$，$d_m$为极值点间的坐标距离，$d_{m0}$为极值点与零值点间的坐标距离。这一关系表明，关系式$x_0 - x_{max} = x_{min} - x_0$可作为正常场选择是否正确的判定标志。

还可以证明，根据关系式$Z_{amax} + Z_{amin} = Z_a(0)$来确定坐标原点的位置。

当$i_s = 90°$时，Z_a曲线特征主要与薄板倾角α有关，这种条件下，可根据Z_a曲线特征判定薄板倾向，如图5.4.10所示。若$i_s \neq 90°$，则：$\gamma = \alpha - i_s$，仅根据曲线形态判定α会出现多解。

若上述薄板状体为有限延深时，如图5.4.11所示，其磁场表达式可由一个以其上顶为上界的沿薄板倾斜线方向向下无限延深薄板的磁场，减去以其下底为上界的另一个无限延深薄板的磁场而求得。设$2l$为有限延深薄板顶底之间沿其倾斜方向的距离，其顶底面的坐标分别为$(0,h)$和$(2l\cos\alpha,\ h+2l\sin\alpha)$。有限延深薄板的磁场表达式为：

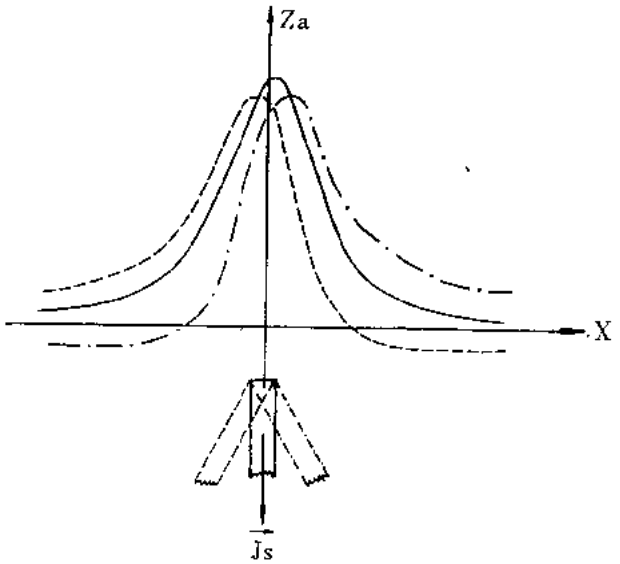


图 5.4.10 $i_s = 90°$时α角与Z_a关系示意图

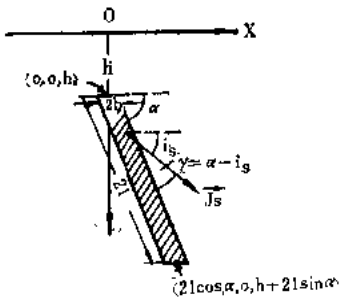


图 5.4.11 有限延深薄板示意图

$$Z_a = 2J_s \cdot 2b\left[\frac{h\cos\gamma - x\sin\gamma}{x^2+h^2} - \frac{(h+2l\sin\alpha)\cos\gamma - (x-2l\cos\alpha)\sin\gamma}{(x-2l\cos\alpha)^2+(h+2l\sin\alpha)^2}\right]$$

$$H_a = -2J_s \cdot 2b\left[\frac{h\sin\gamma + x\cos\gamma}{x^2+h^2} - \frac{(h+2l\sin\alpha)\sin\gamma + (x+2l\cos\alpha)\cos\gamma}{(x-2l\cos\alpha)^2+(h+2l\sin\alpha)^2}\right]$$

$$\Delta T=2J_r\cdot 2b\frac{\sin I}{\sin i_r}\left[\frac{h\sin(2i-\alpha)-x\cos(2i-\alpha)}{x^2+h^2}\right.$$

$$\left.-\frac{(h+2l\sin\alpha)\sin(2i-\alpha)-(x-2l\cos\alpha)\cos(2i-\alpha)}{(x-2l\cos\alpha)^2+(h+2l\sin\alpha)^2}\right] \tag{5.4.21}$$

5.4.5 水平薄板状体的磁场

若有一横截面如图5.4.12所示的斜磁化水平薄板状体，这种形体可看作是向下有限延深薄板状体其倾角$\alpha=0$时的特例。因此，在（5.4.21）式中令$\alpha=0$，且以2b代表宽度，2l表示厚度，并将坐标原点取在薄板顶面中心在地面的投影点处，并令$M_r=J_r\cdot 2b\cdot 2l$，则可求得其磁场表达式。

水平薄板的磁场表达式，也可利用（5.4.11）式求得。令（5.4.11）式中$\alpha=90^\circ$，由顶面埋深分别为h和h＋Δh的两个厚板状体磁场表达式相减得到。可表示为：

$$Z_a=Z_a(h)-Z_a(h+\Delta h)$$

当$\Delta h\ll h$时，上式可写为：

$$Z_a=\frac{\partial Z_a(h)}{\partial h}\Delta h$$

可见，由（5.4.11）式对h取一次微商也可得水平薄板的磁场表达式。其磁场表达式为：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=2M_r\frac{(h^2+b^2-x^2)\sin i_r-2hx\cos i_r}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\\
H_a&=2M_r\frac{-2hx\sin i_r-(h^2+b^2-x^2)\cos i_r}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\\
\Delta T&=-2M_r\frac{\sin I}{\sin i_r}\left[\frac{2hx\sin 2i_r+(h^2+b^2-x^2)\cos 2i_r}{[(x-b)^2+h^2][(x+b)^2+h^2]}\right]
\end{aligned}\right\} \tag{5.4.22}$$

当$i_r=90^\circ$时，（5.4.22）式可进一步简化。图5.4.13是水平薄板的磁场强度分量曲线。

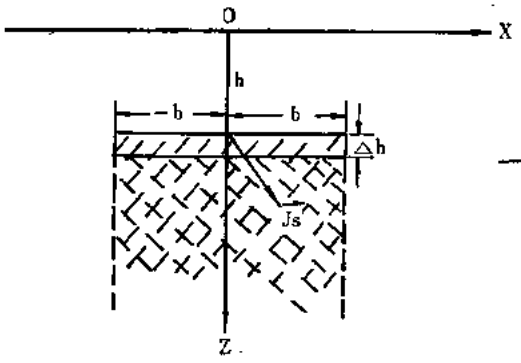


图 5.4.2　水平薄板横截面示意图

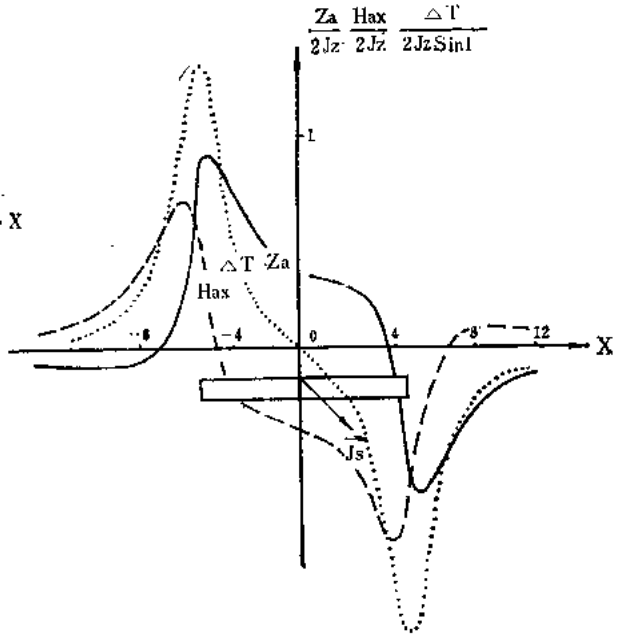


图 5.4.13　水平薄板磁异常剖面曲线

h=1　2b=10　Δh=1　α=90°

§5.5 水平圆柱体的磁场

5.5.1 无限长水平圆柱体的磁场

设一个水平圆柱体沿走向方向无限伸长，横截面为S，中心埋深为R，有效磁化强度为J_s，如图5.5.1所示。

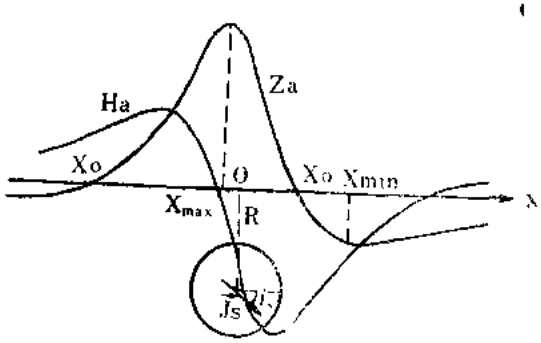


图 5.5.1 水平圆柱体的剖面异常图

由场论可知，一个密度均匀的无限长水平圆柱体在某点的引力位等于其质量集中于柱轴时在该点的引力位。一条线密度为λ的无限长质量线在P点的引力位为：

$$V=-2G\lambda\ln r$$

以δ表示无限长水平圆柱体的密度，该柱体的引力位可写为：

$$V=-2G\delta S\ln r \qquad (5.5.1)$$

上式中 $r=[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]$。

利用泊松公式导出其磁场表达式。对于二度体，其引力位沿轴向Y的方向保持不变，其导数为零，因此，根据（5.2.14）式，其磁场分量可写为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{xx}+J_zV_{xz})\\ H_{ay}&=0\\ Z_a&=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{xz}+J_zV_{zz}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.2)$$

因为二度体的$V_{xx}=-V_{zz}$，故上式可写为：

$$\left.\begin{aligned} H_a&=\frac{1}{G\delta}(-J_xV_{xz}+J_zV_{xx})\\ Z_a&=\frac{1}{G\delta}(J_xV_{xz}+J_zV_{zz}) \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.3)$$

将（5.5.1）式求导后代入（5.5.3）式，并令$\xi=0$，$Z=0$，以及$J_x=J_t\cos i_t$，$J_z=J_t\sin i_t$，$M_t=J_t\cdot S$，化简后可得：

$$\left.\begin{aligned} Z_a&=\frac{2M_t}{(R^2+x^2)^2}[(R^2-x^2)\sin i_t-2Rx\cos i_t]\\ H_a&=\frac{-2M_t}{(R^2+x^2)^2}[(R^2-x^2)\cos i_t+2Rx\sin i_t] \end{aligned}\right\} \qquad (5.5.4)$$

上式即为无限长水平圆柱体在地面（xoy面）垂直走向剖面上的磁场表达式。由上式可求得：

$$\Delta T=-\frac{2M_t}{(x^2+R^2)^2}\frac{\sin I}{\sin i_t}[(R^2-x^2)\cos 2i_t+2Rx\cdot\sin 2i_t] \qquad (5.5.5)$$

当有效磁化强度倾角$i_t=90^\circ$，即柱体为南北走向，$A'=90^\circ$时，上式可简化为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= 2M_s \frac{R^2-x^2}{(R^2+x^2)^2} \\ H_a &= -2M_s \frac{2Rx}{(R^2+x^2)^2} \\ \Delta T &= 2M_s \sin I \frac{R^2-x^2}{(R^2+x^2)^2} \end{aligned}\right\} \tag{5.5.6}$$

由以上表达式可以看出，当$i_s=90°$时，Z_a和ΔT极大值对应柱体横截面中心在地面上的投影点，即坐标原点；在$|x|<R$的区间内Z_a和ΔT为正值，在$|x|>R$范围内，Z_a和ΔT为负值；$|Z_{amin}|=\frac{1}{8}Z_{amax}$；$Z_a$和$\Delta T$都是偶函数，曲线对称于z轴。$Z_a$和$\Delta T$形态相同，仅是幅值不同。当$i_s\neq 90°$时，$Z_a$和$\Delta T$为非对称曲线，且$\Delta T$受$i_s$角影响更大。当$i_s=90°$时，$H_a$曲线对称于原点，当$i_s\neq 90°$时，$H_a$亦为非对称曲线。图5.5.2是不同$i_s$角的$Z_a$、$H_a$理论曲线。

由（5.5.6）式，令$\partial Z_a/\partial x=0$，解得$x$的三个极值点坐标分别为：$x_{max}=0$，$x_{min}=\pm\sqrt{3}R$；令$Z_a=0$，解得$x_0=\pm R$。

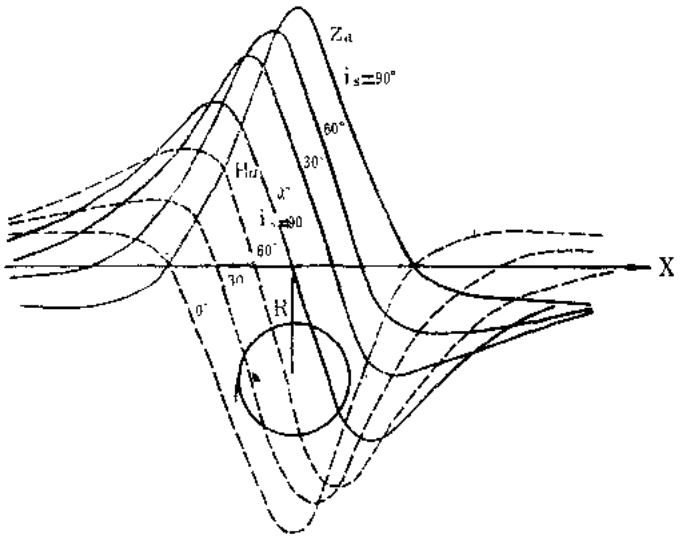


图 5.5.2 水平圆柱体不同i_s时的Z_a、H_a理论曲线

由（5.5.4）式，令$\partial Z_a/\partial x=0$，可得方程：

$$x^3+3Rx^2\mathrm{ctg}i_s-3R^2x-R^3\mathrm{ctg}i_s=0$$

解方程得：

$$\left.\begin{aligned} x_{max} &= R\left[2\csc i_s\cdot\cos\left(60°+\frac{i_s}{3}\right)-\mathrm{ctg}i_s\right] \\ x_{min1} &= -R\left[2\csc i_s\cdot\cos\frac{i}{3}+\mathrm{ctg}i_s\right] \\ x_{min2} &= R\left[2\csc i_s\cdot\cos\left(60°-\frac{i_s}{3}\right)-\mathrm{ctg}i_s\right] \end{aligned}\right\} \tag{5.5.7}$$

利用以上Z_a特征点坐标与R和i_z的关系式，不难找出根据Z_a曲线计算R的方法。

5.5.2 有限长水平圆柱体的磁场

设有一横截面为S，长为$2L$，中心埋深为R的均匀磁化水平圆柱体，如图5.5.3所示。该水平圆柱体的磁场，可看作是许多个沿走向紧密排列的磁偶极子磁场之和。其磁场计算，应用（5.2.5）体积分公式较方便。

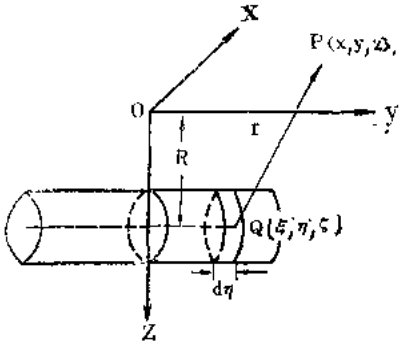


图 5.5.3 有限长水平圆柱体坐标关系图

在该水平圆柱体上取长为$d\eta$的一小段作为磁体元，根据（5.2.2）式：则有：

$$
\begin{aligned}
Z_a=&J_x\int_s ds\int_{-L}^{L}\frac{-3Rx}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d\eta+J_y\int_s ds\int_{-L}^{L}\frac{-3R(y-\eta)}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d\eta\\
&+J_z\int_s ds\int_{-L}^{L}\frac{[2R^2-x^2-(y-\eta)^2]}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d\eta\\
=&M_x\int_{-L}^{L}\frac{3Rx}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d(y-\eta)+M_y\int_{-L}^{L}\frac{3R}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d(y-\eta)\\
&+M_z\int_{-L}^{L}\frac{-[2R^2-x^2-(y-\eta)^2]}{[x^2+(y-\eta)^2+R^2]^{5/2}}d(y-\eta)
\end{aligned}
\tag{5.5.8}
$$

上式中，
$$
\begin{aligned}
M_x&=J_x\cdot S=S\cdot J\cos I\cos A'=M\cos I\cos A'\\
M_y&=J_y\cdot S=S\cdot J\cos I\cdot\sin A'=M\cos I\cdot\sin A'\\
M_z&=J_z\cdot S=S\cdot J\cdot\sin I=M\cdot\sin I
\end{aligned}
$$

$M=J\cdot S$为沿走向单位长度的磁矩，A'为x轴与磁北的夹角。

由上式可以看出，完成以上积分要用到以下几个积分公式：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\int\frac{du}{(a^2+u^2)^{5/2}}=\frac{1}{a^4}\left[\frac{u}{(a^2+u^2)^{1/2}}-\frac{u^3}{3(a^2+u^2)^{3/2}}\right]\\
&\int\frac{udu}{(a^2+u^2)^{5/2}}=-\frac{1}{3(a^2+u^2)^{3/2}}\\
&\int\frac{u^2du}{(a^2+u^2)^{5/2}}=\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{u^3}{(a^2+u^2)^{3/2}}
\end{aligned}
\right\}
\tag{5.5.9}
$$

将积分结果整理后可得：

$$
\begin{aligned}
Z_a=&M_x\frac{xR}{(x^2+R^2)^2}\left\{\frac{(y-L)[3(x^2+R^2)+2(y-L)^2]}{[x^2+R^2+(y-L)^2]^{3/2}}\right.\\
&\left.-\frac{(y+L)[3(x^2+R^2)+2(y+L)^2]}{[x^2+R^2+(y+L)^2]^{3/2}}\right\}\\
&-M_yR\left\{\frac{1}{[x^2+R^2+(y-L)^2]^{3/2}}-\frac{1}{[x^2+R^2+(y+L)^2]^{3/2}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{M_z}{(x^2+R^2)^2}\left\{\frac{(y-L)[(y-L)^2(x^2-R^2)-(x^2+R^2)(2R^2-x^2)]}{[x^2+R^2+(y-L)^2]^{3/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{(y+L)[(y+L)^2(x^2-R^2)-(x^2+R^2)(2R^2-x^2)]}{[x^2+R^2+(y+L)^2]^{3/2}}\right\} \tag{5.5.10}$$

在上式中，令 $y=0$，即得中心剖面的磁场表达式：

$$Z_a=M_x\frac{2L}{(x^2+R^2)^2}\cdot\frac{(x^2+R^2)(2R^2-x^2)-L^2(x^2-R^2)}{(x^2+R^2+L^2)^{3/2}}$$

$$-M_x\frac{2L}{(x^2+R^2)^2}\cdot\frac{xR(3x^2+3R^2+2L^2)}{(x^2+R^2+L^2)^{3/2}}$$

$$=\frac{2M_tL}{(x^2+R^2)^2(x^2+R^2+L^2)^{3/2}}\{[(R^2-x^2)L^2+(x^2+R^2)(2R^2-x^2)]\sin i_t$$

$$-xR(3x^2+3R^2+2L^2)\cos i_t\} \tag{5.5.11}$$

上式中，$M_x=M_t\cdot\cos i_t$，$M_z=M_t\cdot\sin i_t$，$M_t=J_t\cdot S$。此处，M_t为单位长度的有效磁矩。

当水平圆柱体为南北走向时，剖面为东西方向，这时$i_t=90°$，(5.5.11) 式变为：

$$Z_a=2LM_t\frac{(R^2-x^2)L^2+(x^2+R^2)(2R^2-x^2)}{(x^2+R^2)^2(x^2+R^2+L^2)^{3/2}} \tag{5.5.12}$$

由上式可见Z_a是偶函数，Z_a曲线对称于z轴。

由(5.5.6) 和 (5.5.12) 式，当$x=0$时，其极大值之比值为：

$$\frac{Z^L_{a\max}}{Z^\infty_{a\max}}=\frac{L(2R^2+L^2)}{(R^2+L^2)^{3/2}} \tag{5.5.13}$$

按 (5.5.13) 式对L与R的不同比值，计算得其极值比列于表5.5.1。

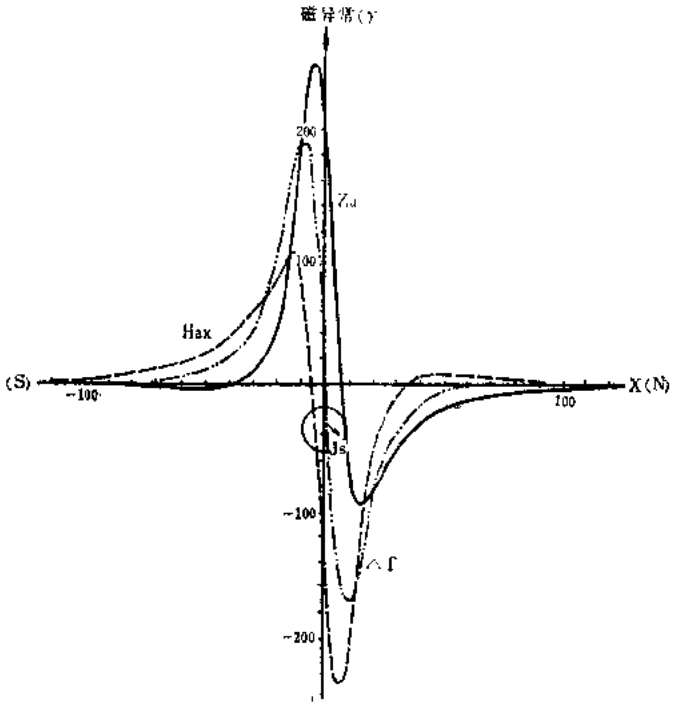


图 5.5.4 水平圆柱体磁异常剖面图

$I=45°$ $L=60$ $R=15$ $y=0$

表 5.5.1

L/R	0.5	0.75	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0
Z^L_{max}/Z^∞_{max}	0.402	0.981	1.061	1.088	1.073	1.044	1.027	1.018

由上表可以看出，当$L\geqslant 0.75\,R$时，有限长柱体与无限长柱体的极值很相近，将有限长柱体当作无限长柱体，其极值误差小于10%。

由（5.5.12）式，令$Z_a=0$，可得方程：

$$R^2(x^2+R^2)+(R^2-x^2)(x^2+R^2+L^2)=0$$

解此方程，去掉虚根得零值点坐标x_0：

$$x_0=\pm\sqrt{\frac{R^2-L^2+\sqrt{9R^4+2L^2R^2+L^4}}{2}} \tag{5.5.14}$$

当为无限长水平圆柱体时，$x_0^\infty=\pm R$。

若令Δx_0表示二度与三度体Z_a正异常半宽度之差，则有：

$$\Delta=\frac{\Delta x_0}{x_0^\infty}=\frac{x_0-x_0^\infty}{x_0^\infty}=\frac{x_0-R}{R}=\sqrt{\frac{\sqrt{9+2\left(\frac{L}{R}\right)^2+\left(\frac{L}{R}\right)^4}+1-\left(\frac{L}{R}\right)^2}{2}}-1$$

由上式对不同L/R值计算之Δ%值列于表5.5.2。

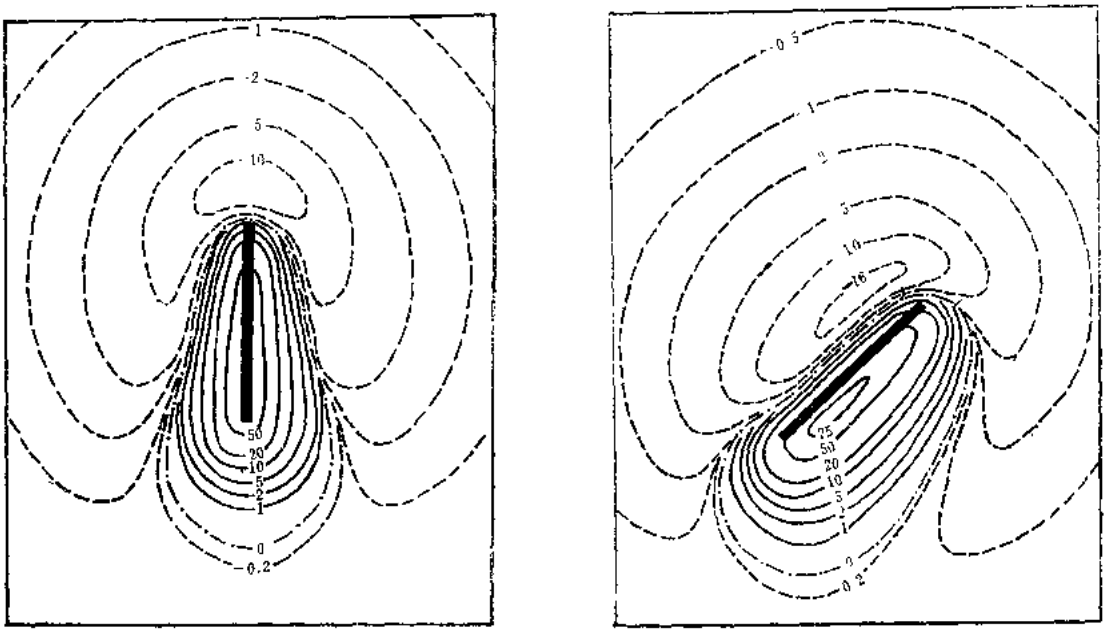
表 5.5.2

L/R	0.1	0.5	0.75	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0	10.0
Δ%	41.31	38.64	35.44	31.11	17.14	9.37	2.68	2.66	1.98

由上表可以看出，当$L\geqslant 3R$时，其零值点坐标与无限长水平圆柱体零值点坐标很接近，这时把有限长水平圆柱体当作无限长水平圆柱体，其零值点坐标误差小于10%。

由（5.5.10）式可以看出，有限长水平圆柱体的磁场由三部分组成。一部分是沿走向方向磁化（J_y）引起的磁场，另一部分是垂直走向沿x和z轴磁化（J_x、J_z）引起的磁场。由函数关系来看，它比无限长水平圆柱体除增加了J_y的影响外，其磁场表达式中还增加了L、y等参量。若只讨论中心剖面，这时$y=0$，J_y虽不为零，但包含了J_y的函数项为零，因此（5.5.10）式变为（5.5.11）式，可见，对中心剖面上的Z_a而言，两端面磁荷引起的磁场相互抵消。面对$y\neq 0$的剖面都有J_y的影响，通常把J_y的影响称为端面影响或称为“末端效应”。

当有端面影响存在时，Z_a平面等值线图常表现为：北侧负值强，范围大，等值线密集且正值范围变窄；面南侧则正等值线范围逐渐扩大，如图5.5.5所示。其中（a）和（b）有端面影响，面（c）无端面影响。



(a) $2L/R=5$, $A=0$, $i=45°$

(b) $2L/R=5$, $A=45°$, $i=45°$

(c) $2L/R=5$, $A=90°$, $i=45°$

图 5.5.5 水平圆柱体z_a平面等值线图

§5.6 其它形状磁性体的磁场

除前面讨论的规则形体外，磁性火成岩的接触带，磁性地层的褶皱，常可将其简化为台阶，背、向斜磁性层等。

5.6.1 台阶的磁场

如图 5.6.1 所示的接触带磁性台阶，可将其看作是有限延深二度厚板的特例，即一个层面趋于无穷远时的情况。当BD面趋于无穷远时，$r_D \doteqdot r_B$，$\varphi_D \doteqdot \varphi_B = \frac{\pi}{2}$，因此，由(5.4.9)式可得台阶的磁场表达式：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \pm 2J_z \sin\beta \left[\cos\gamma(\varphi_A - \varphi_C) + \sin\gamma \cdot \ln\frac{r_C}{r_A} \right] \\ H_a &= \pm 2J_z \cdot \sin\beta \left[\cos\gamma \cdot \ln\frac{r_C}{r_A} - \sin\gamma(\varphi_A - \varphi_C) \right] \\ \Delta T &= \pm 2J_z \cdot \sin\beta \frac{\sin I}{\sin i_z} \left[\cos(\beta - 2i_z)\ln\frac{r_C}{r_A} - \sin(\beta - 2i_z)(\varphi_A - \varphi_C) \right] \end{aligned}\right\} \quad (5.6.1)$$

上式中当磁性层沿 x 轴正方向延伸时取正号，反之取负号。

由上式可以看出，台阶的磁场取决于观测点到角点A、C的距离比值的对数与AC面相对观测点的张角以及磁化强度J_z方向与层面间的夹角（$\beta - i_z$）或（$\beta - 2i_z$），此处 β 角为台阶接触面的倾角。

当台阶接触面倾角$\beta = i_z = 90°$时，(5.6.1) 式简化为：

$$\left.\begin{aligned} Z_a &= \pm 2J_z \mathrm{tg}^{-1}\frac{lx}{x^2 + h^2 + hl} \\ H_a &= \pm J_z \ln\frac{x^2 + (h+l)^2}{x^2 + h^2} \\ \Delta T &= \pm Z_a \cdot \sin I = 2J_z \mathrm{tg}^{-1}\frac{lx}{x^2 + h^2 + hl} \cdot \sin I \end{aligned}\right\} \quad (5.6.2)$$

式中h为台阶上顶面埋深（$h+l$）为下底面埋深。

一般斜接触面台阶的磁异常用（5.6.1）式计算，异常曲线是不对称的，如图5.6.2所示。而垂直接触面台阶由（5.6.2）式算出来的磁场曲线是对称的，如图5.6.3所示。

由（5.6.2）式，当$x=0$时，$Z_a=0$；若令 $Z'_a=0$，可解得：$x_m = \pm\sqrt{h(h+l)}$。可见

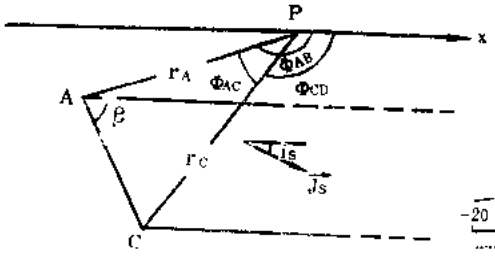


图 5.6.1 台阶示意图

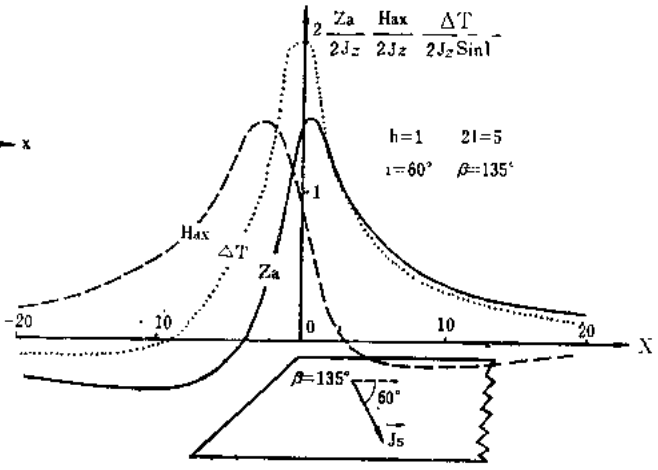


图 5.6.2 台阶磁异常剖面图

$h=1$，$i_z=60°$，$l=5$，$\beta=135°$

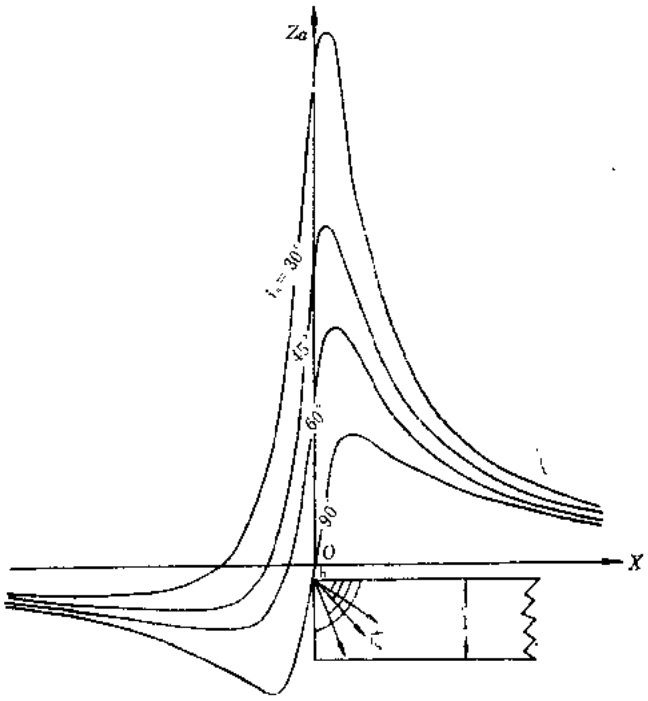


图 5.6.3　不同i_s的垂直接触带Z_a理论曲线

$\beta=90°$　$l=5$　$h=1$

极值点位置与台阶埋深及其厚度有关。

5.6.2　背斜的磁场

若有一两翼对称的背斜岩层，且向下无限延深。设h是背斜顶点的埋藏深度；H是背斜顶点的下缘深度；θ是该对称背斜的倾角；如图5.6.4所示。现求该背斜层被斜磁化时的磁场表达式。

由图5.6.4可以看出，背斜层实际由四个磁荷面所组成，每个磁荷面的磁荷密度为$|\sigma|=J_s\cdot\sin(\theta-i_s)$，$J_s$为剖面内的有效磁化强度，$i_s$为有效磁化倾角。因此，利用（5.4.8）式求出每个倾斜磁荷面的磁场，而后求和即可得背斜层的磁场表达式。在计算时考虑到无限延深的假设，即注意到$r_B\doteqdot r_D$，$r_E\doteqdot r_F$，以及$\varphi_B\doteqdot\varphi_D$，$\varphi_E\doteqdot\varphi_F$，则可推得以下磁场表达式：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=-2J_s\cdot\sin2\theta\left[\cos i_s\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+hH}+\frac{1}{2}\sin i_s\cdot\ln\frac{x^2+h^2}{H^2+x^2}\right]\\
H_a&=2J_s\cdot\sin2\theta\left[-\sin i_s\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+hH}+\frac{1}{2}\cos i_s\ln\frac{x^2+h^2}{x^2+H^2}\right]\\
\Delta T&=2T_s\cdot\sin I\cdot\sin2\theta\left[-2\cos i_s\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+hH}+\frac{1}{2}\cos2i_s\cdot\csc i_s\cdot\ln\frac{x^2+h^2}{x^2+H^2}\right]
\end{aligned}\right\}\qquad(5.6.3)$$

若背斜两翼不对称，用类似的方法同样可导出其磁场表达式。

由（5.6.3）式可以看出，背斜层的磁场特征与i_s，θ角以及h、H等参量有关。图5.6.4表示对称背斜的理论曲线图。

由上图可见，仅根据曲线形态，是难于区别板状体和背斜的。从正演角度来看，给出的表达式是有实用意义的。

5.6.3 长方体的磁场

设有一沿走向长为$2L$，厚为$2l$，宽为2b的长方体，如图5.6.5所示。取坐标原点O位于长方体中心在观测面上的投影点，y轴与其走向一致，走向与磁北的夹角为A，x轴垂直走向，z轴垂直向下，长方体顶面埋深为h，下面求其磁场表达式。

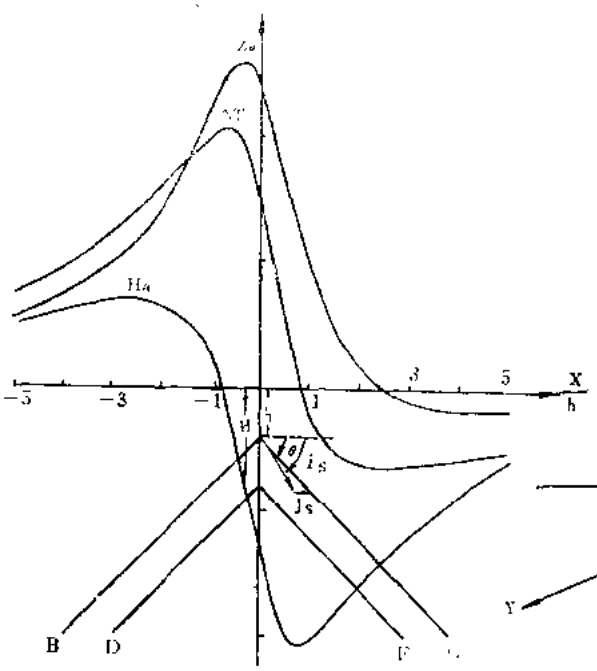


图 5.^ 1 对称背斜的埋论曲线

$i_s=60°$ $\theta=45°$ $H/h=2$

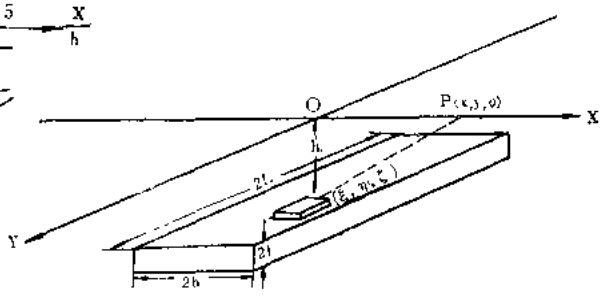


图 5.6.5 长方体示意图

对上图所示的长方体，通过求得其引力位，再用泊松公式求出其磁场表达式。

取长方体内体积元Q的坐标为(ξ,η,ζ)，其体积为$d\xi d\eta d\zeta$，则该长方体在观测点的引力位及其二阶导数为：（为了方便下式中令 $G\delta=1$）

$$V=\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{1/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{-(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial V}{\partial z}=\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta)^{3/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(y-\eta)^2+\zeta^2-2(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)^2+\zeta^2-2(y-\eta)^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-2\zeta^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}}d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{(x-\xi)(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = 3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{-(x-\xi)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = 3\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{-(y-\eta)\zeta}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

考虑到关系式：$J_x = J\cdot\cos I\cdot\sin A$，$J_y = J\cdot\cos I\cdot\cos A$，$J_z = J\cdot\sin I$，将上列各式代入泊松公式。可得：

$$Z_a = 3J\cdot\cos I\cdot\sin A\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{-\zeta(x-\xi)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$+3J\cdot\cos I\cdot\cos A\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{-\zeta(y-\eta)}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

$$-J\cdot\sin I\cdot\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}\int_{h}^{h+2l} \frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2-2\varphi^2}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2]^{5/2}} d\xi d\eta d\zeta$$

对上式积分后得：

$$Z_a = -J\cdot\sin I\Big\{\operatorname{ctg} I\cdot\sin A\Big|\Big|\Big|\ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}$$

$$+(y-\eta)]\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l} + \operatorname{ctg} I\cdot\cos A\Big|\Big|\Big|\ln[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}$$

$$-(\xi-x)\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l} + \Big|\Big|\Big|\operatorname{tg}^{-1}\frac{(\eta-y)(\xi-x)}{\zeta\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+\zeta^2}}\Big|_{-b}^{b}\Big|_{-L}^{L}\Big|_{h}^{h+2l}\Big\} \tag{5.6.4}$$

上式中将上下限代入后，即可得测点（x、y、0）的Z_a表达式。

用同样的方法，可求出H_{ax}、H_{ay}的磁场表达式。利用关系式：

$$\Delta T = H_{ax}\cdot\cos I\cdot\sin A + H_{ay}\cdot\cos I\cdot\cos A + Z_a\cdot\sin I$$

求得 ΔT 的表达式，由于表达式书写繁杂，不再一一列出。

由公式可见，利用公式手算其磁场场值是相当复杂的，可以利用电子计算机，编好程序进行计算。计算时，可对不同参量I、A、J、L、l、b的长方体，算出大量磁场值，绘制出剖面曲线及平面等值线图，了解其磁场在平面、剖面中的分布特征与各参量的关系，以供实际工作需要。图 5.6.6 是一长方体的Z_a平面等值线图。

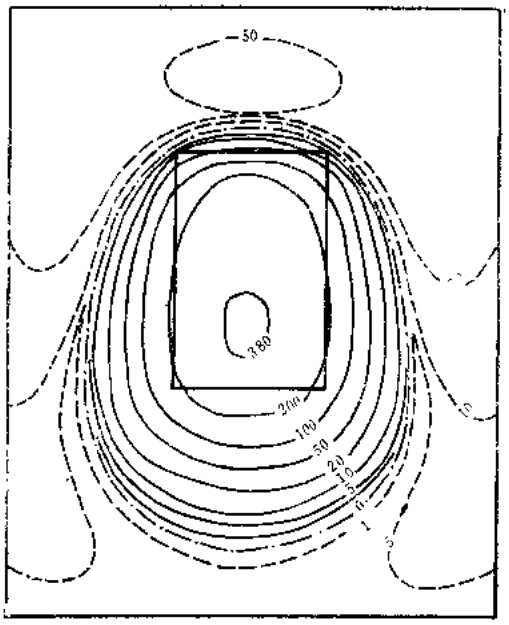


图 5.6.6 长方体 Z_a 平面等值线图

$2b/h=0.2$ $2L/h=3$ $2l/h=2$ $i_a=60°$ $\alpha=90°$ $A=0°$

三度板状体的磁场表达式，比二度板状体的磁场表达式复杂得多。因影响其磁场特征的因素增多了，如三度板状体磁场的表达式中引入了J_y项（$J_y=J\cdot\cos I\cdot\cos A$）和$L$，显然它的表达式比二度板状体的表达式复杂，因此，由公式对三度板状体磁场特征进行直接的分析讨论是比较困难的。要掌握三度板状体的磁场特征，需对其磁场进行大量的计算、统计分析和归纳。一般在三度异常的解释中，应特别注意分析两个末端磁荷面的可能影响。

§5.7 二度体磁异常的通式

由前面几节的讨论可知，当磁性体沿特定方向被磁化时，如垂直磁化、顺层磁化等，磁异常不仅有简单的形态，有时还便于判定磁性体的倾向。

沿特定方向磁化的磁性体的磁异常之间及任意磁化与特定方向磁化的磁异常之间存在一定的关系，通过这种关系，对二度体的磁异常Z_a、H_a和ΔT，可整理出相似的表达式，我们可以称之为二度体磁异常的通式（也可称之为规格化公式）。利用磁异常通式，可使我们更深入地了解磁异常之间的关系，便于研究和掌握磁异常的特征，对于磁异常的解释有一定意义。

5.7.1 任意磁化与沿坐标轴向磁化的磁场关系式

本章第二节中（5.2.3）式给出了磁性体的磁化强度矢量与坐标轴的某一轴向方向一致时的磁位表达式。当磁化强度矢量与z轴一致时，称为垂直磁化，这时磁位以U_z表示，磁场强度分量分别以$Z_{a\perp}$、$H_{ax\perp}$、$H_{ay\perp}$表示；当J与x轴向一致时，称为沿ox轴向水平磁化，磁位以U_x表示，磁场各分量分别以$Z_{a(x)}$、$H_{ax(x)}$、$H_{ay(x)}$表示；同样，当J与y轴向一致时，磁位以U_y表示，磁场各分量分别以$Z_{a(y)}$、$H_{ax(y)}$、$H_{ay(y)}$表示。由（5.2.3）式可得：

$$
\left.\begin{aligned}
H_{ax\perp}&=-\frac{\partial U_z}{\partial x}=J\int_v\frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}dv\\
H_{ay\perp}&=-\frac{\partial U_z}{\partial y}=J\int_v\frac{3(y-\eta)(z-\zeta)}{r^5}dv\\
Z_{a\perp}&=-\frac{\partial U_z}{\partial z}=J\int_v\frac{2(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{r^5}dv\\
H_{ax(x)}&=-\frac{\partial U_x}{\partial x}=J\int_v\frac{2(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-(z-\zeta)^2}{r^5}dv\\
H_{ay(x)}&=-\frac{\partial U_x}{\partial y}=J\int_v\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}dv\\
Z_{a(x)}&=-\frac{\partial U_x}{\partial z}=J\int_v\frac{3(x-\xi)(z-\zeta)}{r^5}dv\\
H_{ax(y)}&=\frac{\partial U_y}{\partial x}=J\int_v\frac{3(x-\xi)(y-\eta)}{r^5}dv\\
H_{ay(y)}&=-\frac{\partial U_y}{\partial y}=J\int_v\frac{2(y-\eta)^2-(x-\xi)^2-(z-\zeta)^2}{r^5}dv\\
Z_{a(y)}&=-\frac{\partial U_y}{\partial z}=J\int_v\frac{3(y-\eta)(z-\zeta)}{r^5}dv
\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.1)
$$

以上给出了磁性体的磁化强度矢量分别与某一坐标轴向一致时，相应的磁场分量的积分表示式。由上列关系式可以看出有下列关系存在。

$$Z_{a(x)}=H_{ax\perp},\quad Z_{a(y)}=H_{ay\perp},\quad H_{ay(x)}=H_{ax(y)} \tag{5.7.2}$$

为了得到任意磁化与沿三个坐标轴向磁化时磁场强度各分量间的关系式，可将（5.7.1）式代入前面的（5.2.4）式中，则可得：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\frac{J_x}{J}H_{ax(x)}+\frac{J_y}{J}H_{ax(y)}+\frac{J_z}{J}H_{ax\perp}\\ H_{ay}&=\frac{J_x}{J}H_{ay(x)}+\frac{J_y}{J}H_{ay(y)}+\frac{J_z}{J}H_{ay\perp}\\ Z_a&=\frac{J_x}{J}Z_{a(x)}+\frac{J_y}{J}Z_{a(y)}+\frac{J_z}{J}Z_{a\perp}\end{aligned}\right\} \tag{5.7.3}$$

考虑到（5.7.2）式的关系，上式可写为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=\frac{J_x}{J}H_{ax(x)}+\frac{J_y}{J}H_{ay(x)}+\frac{J_z}{J}Z_{a(x)}\\ H_{ay}&=\frac{J_x}{J}H_{ax(y)}+\frac{J_y}{J}H_{ay(y)}+\frac{J_z}{J}Z_{a(y)}\\ Z_a&=\frac{J_x}{J}H_{ax\perp}+\frac{J_y}{J}H_{ay\perp}+\frac{J_z}{J}Z_{a\perp}\end{aligned}\right\} \tag{5.7.4}$$

以上关系式说明，任意磁化时的磁场强度分量，可由相应轴向磁化的三个磁场分量合成。

考虑到（5.2.24）式的关系，上式可写为以下形式：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=H_{ax(x)}\cdot\cos I\cdot\cos A'+H_{ax(y)}\cdot\cos I\cdot\sin A'+H_{ax\perp}\cdot\sin I\\ H_{ay}&=H_{ay(x)}\cdot\cos I\cdot\cos A'+H_{ay(y)}\cdot\cos I\cdot\sin A'+H_{ay\perp}\sin I\\ Z_a&=Z_{a(x)}\cdot\cos I\cdot\cos A'+Z_{a(y)}\cdot\cos I\cdot\sin A'+Z_{a\perp}\cdot\sin I\end{aligned}\right\} \tag{5.7.5}$$

或写为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax}&=H_{ax(x)}\cdot\cos I\cdot\cos A'+H_{ay(x)}\cos I\cdot\sin A'+Z_{a(x)}\cdot\sin I\\ H_{ay}&=H_{ax(y)}\cdot\cos I\cdot\cos A'+H_{ay(y)}\cdot\cos I\cdot\sin A'+Z_{a(y)}\cdot\sin I\\ Z_a&=H_{ax\perp}\cdot\cos I\cdot\cos A'+H_{ay\perp}\cdot\cos I\cdot\sin A'+Z_{a\perp}\cdot\sin I\end{aligned}\right\} \tag{5.7.6}$$

以上讨论的是三度体的情况。当为二度体时，即磁性体沿 y 轴方向可看作是无限伸长时，其关系式将简化。

在二度体情况下，磁位在 y 轴方向的变化保持恒定，其导数为零。根据公式(5.2.3)，有：

$$H_{ax(x)}=-J\frac{\partial}{\partial x}\iint_s\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(r,x)}{r^2}ds\,d\eta$$

式中 s 是xoz面内磁性体的横截面积；ds为面积元，$d\eta$是磁性体沿y方向的长度元。对变量 η 积分后，可得：

$$H_{ax(x)}=-2J\frac{\partial}{\partial x}\iint_s\frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}ds=-2J\iint_s\frac{(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]^2}ds \tag{5.7.7}$$

类似地可求得$Z_{a(x)}$，$H_{a\perp}$，$Z_{a\perp}$的解析表达式

$$\left.\begin{aligned}
Z_{a(x)} &= -2J\frac{\partial}{\partial z}\iint_s \frac{x-\xi}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}ds \\
&= 4J\iint_s \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]^2}ds \\
H_{a\perp} &= -2J\frac{\partial}{\partial x}\iint_s \frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}ds \\
&= 4J\iint_s \frac{(x-\xi)(z-\zeta)}{[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]^2}ds \\
Z_{a\perp} &= -2J\frac{\partial}{\partial z}\iint_s \frac{z-\zeta}{(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2}ds \\
&= 2J\iint_s \frac{(z-\zeta)^2-(x-\xi)^2}{[(x-\xi)^2+(z-\zeta)^2]^2}ds .
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.8}$$

由以上四个表达式可以看出，若磁性体沿走向无限长，则有关系式：

$$\left.\begin{aligned}
H_{ax\perp} &= Z_{a(x)} \\
Z_{a\perp} &= -H_{ax(x)}
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.9}$$

将此关系式代入（5.7.5）式和（5.7.6）式，并考虑到$\frac{\partial U}{\partial y}=0$，则有：

$$\left.\begin{aligned}
H_a = H_{ax} &= H_{a(x)}\cdot\cos I\cdot\cos A' + Z_{a(x)}\cdot\sin I \\
Z_a &= H_{a\perp}\cdot\cos I\cdot\cos A' + Z_{a\perp}\cdot\sin I
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.10}$$

上式也可写为：

$$\left.\begin{aligned}
H_a &= H_{a\perp}\cdot\sin I - Z_{a\perp}\cdot\cos I\cdot\cos A' \\
Z_a &= Z_{a\perp}\cdot\sin I + H_{a\perp}\cdot\cos I\cdot\cos A'
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.11}$$

将（5.7.11）式代入（5.2.21）式，可得：

$$\begin{aligned}
\Delta T &= Z_{a\perp}(\sin^2 I - \cos^2 I\cdot\cos^2 A') + H_{a\perp}\cdot 2\cos I\cdot\sin I\cdot\cos A' \\
&= Z_{a\perp}(\sin^2 I - \cos^2 I\cdot\cos^2 A') \\
&\quad + H_{a\perp}\cdot\sin 2I\cdot\cos A'
\end{aligned} \tag{5.7.12}$$

当磁性体为东西走向时，测线与磁北的夹角$A'=0°$，则：

$$\Delta T = H_{a\perp}\cdot\sin 2I - Z_{a\perp}\cos 2I \tag{5.7.13}$$

以上（5.7.10）—(5.7.13)式是二度体斜磁化和垂直磁化时的关系式。在这些关系式中，$Z_{a\perp}H_{a\perp}$的系数函数角是地磁倾角I。若以有效磁化倾角i_s表示时，根据图5.7.1，则有：

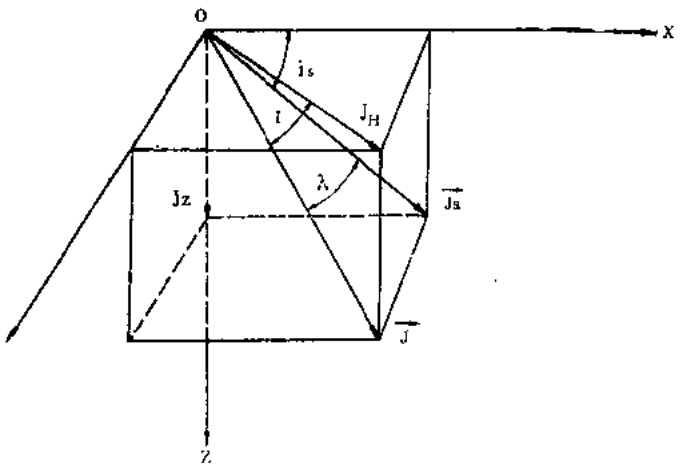


图 5.7.1　磁化强度矢量关系图

$$J_z=J\cdot\cos\lambda \qquad J_x=J_z\cdot\cos i_z$$
$$J_x=J_z\cdot\sin i_z \qquad ctgi_z=ctgI\cos A'$$

由此可相应看出：$\frac{J_x}{J}=\cos i_z\cdot\cos\lambda$，$\frac{J_z}{J}=\sin i_z\cdot\cos\lambda$，$\lambda$为$J$和$J_z$间夹角。利用上列关系式，(5.7.11) 式可写为：

$$\left.\begin{aligned}H_a&=(H_{a\perp}\cdot\sin i_z-Z_{a\perp}\cos i_z)\cos\lambda\\Z_a&=(Z_{a\perp}\sin i_z+H_{a\perp}\cos i_z)\cos\lambda\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.14)$$

又因$J_x=J\cdot\sin I$及$J_x=J_z\sin i_z=J\cdot\cos\lambda\cdot\sin i_z$，故$\cos\lambda=\sin I/\sin i_z$，所以上式可写为：

$$\left.\begin{aligned}H_a&=(-Z_{a\perp}\cos i_z+H_{a\perp}\sin i_z)\frac{\sin I}{\sin i_z}\\Z_a&=(Z_{a\perp}\sin i_z+H_{a\perp}\cos i_z)\frac{\sin I}{\sin i_z}\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.15)$$

上式表明，当已知垂直磁化二度体的$Z_{a\perp}$和$H_{a\perp}$表达式时，可由上式求出任意磁化时的磁场表达式。掌握了$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$的曲线特征，可由上式分析出Z_a、H_a的特征。

5.7.2 任意磁化与顺层磁化的磁场关系式

由板状体磁场的讨论可知，当其为顺层磁化时，其磁场表达式及其曲线形态较为简单；当其为垂直磁化时，常可利用Z_a曲线的形态特征，判定板状体的倾向。因此，研究顺层磁化与垂直磁化及任意磁化时磁场表达式间的关系是有实用意义的。

设板状体的倾角为α；当为顺层磁化时，则$i_z=\alpha$；顺层磁化时的磁场垂直和水平分量分别为$Z_{a\parallel}$、$H_{a\parallel}$，根据 (5.7.15) 式则有：

$$\left.\begin{aligned}Z_{a\parallel}&=(Z_{a\perp}\sin\alpha+H_{a\perp}\cos\alpha)\frac{\sin I}{\sin i_z}\\H_{a\parallel}&=(-Z_{a\perp}\cos\alpha+H_{a\perp}\sin\alpha)\frac{\sin I}{\sin i_z}\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.16)$$

在上式中，以$\sin\alpha$乘第一式，减去以$\cos\alpha$乘第二式，可得：

$$Z_{a\perp}=(Z_{a\parallel}\sin\alpha-H_{a\parallel}\cos\alpha)\frac{\sin i_z}{\sin I}\qquad(5.7.17)$$

同样，以$\cos\alpha$乘第一式，加上以$\sin\alpha$乘第二式，可得：

$$H_{a\perp}=(Z_{a\parallel}\cos\alpha+H_{a\parallel}\sin\alpha)\frac{\sin i_z}{\sin I}\qquad(5.7.18)$$

将 (5.7.17)、(5.7.18) 式代入 (5.7.15) 式，经合并，化简后可得：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=Z_{a\parallel}\cos(\alpha-i_z)+H_{a\parallel}\sin(\alpha-i_z)\\H_a&=H_{a\parallel}\cos(\alpha-i_z)-Z_{a\parallel}\sin(\alpha-i_z)\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.19)$$

令$\gamma=\alpha-i_z$，上式可写为：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=Z_{a\parallel}\cos\gamma+H_{a\parallel}\sin\gamma\\H_a&=H_{a\parallel}\cos\gamma-Z_{a\parallel}\sin\gamma\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.20)$$

以上 (5.7.17)—(5.7.20) 式分别给出了顺层磁化与垂直磁化和斜磁化间磁场表达式

间的关系。当其系数角已知时，可利用以上关系式，算出同一形体不同磁化方向时的磁场值。由于顺层磁化二度板状体磁场表达式和曲线形态都较简单，因此掌握了顺层磁化的磁场表达式及其异常曲线特征，根据上式就易于了解任意磁化时的磁场表达式及其曲线特征。

5.7.3 二度体磁异常的通式及其分析

根据（5.7.15）式，二度磁性体的 Z_a、H_a表达式为以下形式：

$$Z_a=(Z_{a\parallel}\cdot\sin i_r+H_{a\perp}\cos i_r)\frac{\sin I}{\sin i_r}$$

$$H_a=(-Z_{a\perp}\cos i_r+H_{a\perp}\sin i_r)\frac{\sin I}{\sin i_r}$$

二度磁性体的ΔT表达式为：

$$\Delta T=Z_a\sin I+H_a\cos I\cos A'$$

将Z_a、H_a表达式代入ΔT式中，并考虑到：$\mathrm{ctg}i_r=\mathrm{ctg}I\cos A'$，则有

$$\begin{aligned}\Delta T&=\frac{\sin I}{\sin i_r}[(Z_{a\perp}\sin i_r+H_{a\perp}\cos i_r)\sin I\\&-(-Z_{a\perp}\cos i_r+H_{a\perp}\sin i_r)\cos I\cos A]\\&=\frac{\sin^2 I}{\sin^2 i_r}(-Z_{a\perp}\cos 2i_r+H_{a\perp}\sin 2i_r)\\&=\frac{\sin^2 I}{\sin^2 i_r}[Z_{a\perp}\sin(2i_r-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(2i_r-90^\circ)]\end{aligned}\qquad(5.7.21)$$

由（5.7.15）和（5.7.21）式，若把其系数函数角表示为同一形式，则有：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=\frac{\sin I}{\sin i_r}(Z_{a\perp}\sin i_r+H_{a\perp}\cos i_r)\\H_a&=\frac{\sin I}{\sin i_r}[Z_{a\perp}\sin(i_r-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(i_r-90^\circ)]\\\Delta T&=\frac{\sin^2 I}{\sin^2 i_r}[Z_{a\perp}\sin(2i_r-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(2i_r-90^\circ)]\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.22)$$

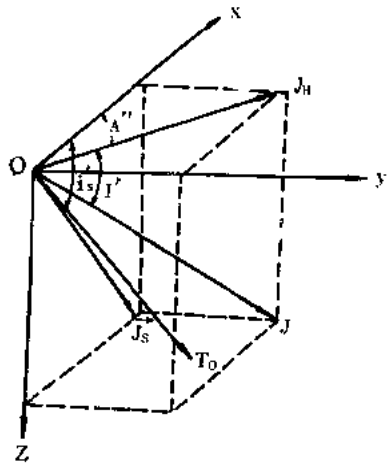


图 5.7.2 J与T_0方向不一致时坐标关系示意图

若在（5.7.22）式中引入系数K、特征角θ，则可将（5.7.22）式表示为统一形式的通式：

$$\Delta F=K(Z_{a\perp}\sin\theta+H_{a\perp}\cos\theta)\qquad(5.7.23)$$

上式中ΔF代表不同的磁场分量，K和θ对不同的磁场分量取不同值，如表5.7.1以示。

以上讨论的是$J_r=0$的情况。在实际工作中，往往有剩磁和消磁作用存在，这时J的方向与T_0方向不一致，因此，有效磁化倾角也不同于前面所讨论的情况。下面讨论这种情况下的通式。

如图5.7.2所示，若J与T_0方向不一致，假设J的倾角为I'，J_H与x轴的夹角为A''，J_s与x轴的夹角为i'_s。

根据以上给定条件，(5.7.15)式可写为，

$$Z_a=\frac{\sin I'}{\sin i'_s}(Z_{a\perp}\sin i'_s+H_{a\perp}\cos i'_s)$$
$$H_a=\frac{\sin I'}{\sin i'_s}(-Z_{a\perp}\cos i_s+H_{a\perp}\sin i'_s) \tag{5.7.24}$$

由于$\mathrm{ctg}i_s=\cos A'\mathrm{ctg}I$，故有：

$$\Delta T=Z_a\sin I+H_a\cos I\cos A'$$
$$=\frac{\sin I}{\sin i_s}(Z_a\sin i'_s+H_a\cos i'_s) \tag{5.7.25}$$

将（5.7.24）式代入（5.7.25）式，化简后可得：

$$\Delta T=\frac{\sin I}{\sin i_s}\frac{\sin I'}{\sin i'_s}[Z_{a\perp}\sin(i_s+i'_s-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(i_s+i'_s-90^\circ)] \tag{5.7.26}$$

将（5.7.24）和（5.7.26）式写为相同的函数角形式，则：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a&=\frac{\sin I'}{\sin i'_s}(Z_{a\perp}\sin i'_s+H_{a\perp}\cos i'_s)\\
H_a&=\frac{\sin I'}{\sin i'_s}[Z_{a\perp}\sin(i'_s-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(i'_s-90^\circ)]\\
\Delta T&=\frac{\sin I}{\sin i_s}\frac{\sin I'}{\sin i'_s}[Z_{a\perp}\sin(i_s+i'_s-90^\circ)+H_{a\perp}\cos(i_s+i'_s-90^\circ)]
\end{aligned}\right\} \tag{5.7.27}$$

（5.7.27）式同样可以表示为（5.7.23）式的形式。现将其系数K、特征角θ的对应关系列表于表5.7.1。

由以上讨论可知，二度磁性体的磁异常，不论是ΔT还是Z_a、H_a，它们都以同样的数学形式与$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$相联系，因此，只要掌握了$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$的函数特征和曲线特征，就可根据通式及K、θ的对应关系表，来导出斜磁化时的磁场表达式或分析其相应的磁场分量ΔT、Z_a、H_a的特征。应用表5.7.1，对那些截面呈对称的二度体是很方便的。例如，已知垂直磁化二度水平圆柱体的$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$磁场表达式为：

$$Z_{a\perp}=\frac{2M_s}{(R^2+x^2)^2}(R^2-x^2)$$
$$H_{a\perp}=\frac{-2M_s}{(R^2+x^2)^2}2Rx$$

表 5.7.1

磁异常类型 (ΔF)	J与T_0方向一致			J与T_0方向不一致		
	系数 (K)		特征角 (θ)	系数 (K)		特征角 (θ)
	J_a垂直	J垂直		J_a垂直	J垂直	
Z_a	1	$\frac{\sin I}{\sin i_a}$	i_a	1	$\frac{\sin I'}{\sin i_a'}$	i_a'
H_a	1	$\frac{\sin I}{\sin i_a}$	i_a-90°	1	$\frac{\sin I'}{\sin i_a'}$	$i_a'-90^\circ$
ΔT	$\frac{\sin I}{\sin i_a}$	$\frac{\sin^2 I}{\sin^2 i_a}$	$2i_a-90^\circ$	$\frac{\sin I}{\sin i_a}$	$\frac{\sin I}{\sin i_a}\cdot\frac{\sin I'}{\sin i_a}$	$i_a+i_a'-90^\circ$

因$M_s=J_s\cdot S$，故查表中J与T_0方向一致时的J垂直的K系数和相应的特征角，即可根据（5.7.23）式直接写出与（5.5.4）、（5.5.5）相同的Z_a、H_a、ΔT的表达式。对其它形体也一样，知道了K系数和特征角的函数值，很容易由$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$的曲线形态，分析出Z_a、H_a和ΔT的曲线特征。

对于有一定倾角且斜磁化的二度体（如倾斜板状体），应用Z_a、H_a、ΔT与$Z_{a/\!/}$、$H_{a/\!/}$的关系式也方便。

把（5.7.20）式代入ΔT表达式中，当J与T_0方向一致时可得：

$$\Delta T=\frac{\sin I}{\sin i_s}[H_{a/\!/}\cos(\gamma-i_s)-Z_{a/\!/}\sin(\gamma-i_s)]$$

把Z_a、H_a与ΔT写成相同的函数形式，则有：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=Z_{a/\!/}\cos\gamma+H_{a/\!/}\sin\gamma\\H_a&=Z_{a/\!/}\cos(90^\circ+\gamma)+H_{a/\!/}\sin(90^\circ+\gamma)\\\Delta T&=\frac{\sin I}{\sin i_s}[Z_{a/\!/}\cos(90^\circ+\gamma-i_s)+H_{a/\!/}\sin(90^\circ+\gamma-i_s)]\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.28)$$

对于J与T_0方向不一致时，与前面讨论类似有：

$$\left.\begin{aligned}Z_a&=Z_{a/\!/}\cos\gamma'+H_{a/\!/}\sin\gamma'\\H_a&=Z_{a/\!/}\cos(90^\circ+\gamma')+H_{a/\!/}\sin(90^\circ+\gamma')\\\Delta T&=\frac{\sin I}{\sin i_s}[Z_{a/\!/}\cos(90^\circ+\gamma'-i_s)+H_{a/\!/}\sin(90^\circ+\gamma'-i_s)]\end{aligned}\right\}\qquad(5.7.29)$$

若$Z_{a/\!/}$、$H_{a/\!/}$为J（不是J_s）顺层磁化所引起，则(5.7.28)式应乘以$\frac{\sin I}{\sin i_s}$，而(5.7.29)式还需乘以$\frac{\sin I'}{\sin i_s'}$。$I'$、$i_s'$的定义同前。这样有一定倾向且斜磁化二度体的通式可表示为：

$$\Delta F=K(Z_{a/\!/}\cos\theta+H_{a/\!/}\sin\theta)$$

式中K系数和特征角θ列于表5.7.2中。

表 5.7.2

磁异常类型	J 与 T_0 方向一致			J 与 T_0 方向不一致		
	系数 (K)		特征角	系数 (K)		特征角
(ΔF)	J_s 顺层	J 顺层	(θ)	J_s 顺层	J 顺层	(θ)
Z_a	1		γ	1	$\frac{\sin I'}{\sin i_s'}$	γ'
H_a	1		$90^\circ+\gamma$	1	$\frac{\sin I'}{\sin i_s'}$	$90^\circ+\gamma'$
ΔT	$\frac{\sin I}{\sin i_s}$	$\frac{\sin^2 I}{\sin i_s}$	$90^\circ+\gamma-i_s$	$\frac{\sin I}{\sin i_s}$	$\frac{\sin I}{\sin i_s}$ $\frac{\sin I'}{\sin i_s'}$	$90^\circ+\gamma'-i_s$

表中：$\gamma=\alpha-i_s$，$\gamma'=\alpha-i_s'$；其它符号定义如前。

以上讨论可以综合概括为包含带有自变量(x)和自变——参变量(h)的二元函数，如果它满足二元拉普拉斯方程而成为调和函数时，可以写成如下的一般形式：

$$T(x,\ h)=K_0[\phi(x,\ h)K_1+f(x,\ h)K_2]\qquad(5.7.30)$$

其中$p(x,\ h)$和$f(x,\ h)$都满足拉氏方程，是两个处处相互共轭正交的函数，它们的图形，就象平面上的正交曲线坐标网格一样，它们的共轭正交性质在数学物理本质方面，具有类似保守场和其力线的共轭正交特性。上面讨论的$Z_{a\perp}$、$H_{a\perp}$及$Z_{a/\!/}$、$H_{a/\!/}$就是这样两对共轭正交函数。

K_0、K_1和K_2是与x、h无关并含有其它参变量的常系数，而且有$(K_1)^2+(K_2)^2=1$。

K_1和K_2也具有简单的共轭正交性，它们常常是某一个线性函数（这里是特征角）的余弦和正弦值。

（5.7.30）式是二度磁异常通式的一般形式，它适用于三种分量的磁异常（Z_a、H_a、ΔT）。

§5.8 复杂条件下磁性体磁场的计算

在前几节的讨论中，做了许多假设才使问题的讨论简化。而在实际中，有些假设条件常不能满足。如形体不规则、磁性不均匀、地形不水平和磁性体不单一等。但是我们应注意，简单条件下磁性体磁场的讨论，是我们认识复杂条件下磁性体磁场的基础。

本节重点介绍截面形状不规则水平二度磁性体磁场的计算方法，三度体仅作简略介绍。地形不水平、磁性体不单一的问题，将在第六、七章中讨论。

5.8.1 任意截面二度体磁场的计算

设有一任意形状截面的水平二度体，该二度体被均匀磁化，磁化方向任意，求其在垂直走向剖面上的磁场。

对给定的形体，可将其看作是由无数多个紧密并列的小水平圆柱体所组成。如果我们以剖面上任一计算点为中心，自中心以不同的角度作射线，以不同的半径作圆弧，则可将二度体的截面划分成一些大小不等的小扇形截面，每一扇形柱体的磁场可由小水平圆柱体磁场对扇形截面ΔS积分求得。若已知每一扇形柱体在计算点的场值，那么，整个二度体的磁场值可用求和的办法得到。基于以上思路，发展了一种计算截面形状任意的水平二度体磁场的扇形量板法，这种扇形量板也叫做米柯夫量板。下面讨论量板的原理和制作方法。

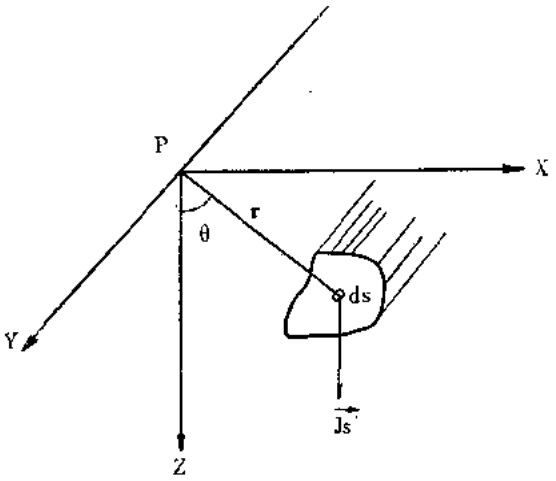


图 5.8.1 任意截面示意图

1．扇形量板的基本原理

设有一截面形状如图5.8.1所示的水平二度体，为讨论简便，假设它被垂直磁化。以计算点P为坐标原点，柱体截面积以S表示。

对面积元为ds的小水平圆柱体，其磁场表达式为：

$$dZ_a=2J_t ds\,\frac{R^2-(x-\xi)^2}{[R^2+(x-\xi)^2]^2}$$

$$dH_a=-2J_s ds\frac{2R(x-\xi)}{[R^2+(x-\xi)^2]^2}$$

因计算点与坐标原点重合，故$x=0$，为与常用符号一致，仍以x代替ξ，，则上式改写为：

$$dZ_a=2J_s ds\frac{R^2-x^2}{(R^2+x^2)^2}$$

$$dH_a=2J_s ds\frac{2Rx}{(R^2+x^2)^2} \tag{5.8.1}$$

将上式化为极坐标形式，用$R=r\cos\theta$，$x=r\sin\theta$代入上式，则有：

$$dZ_a=2J_s ds\frac{\cos2\theta}{r^2}$$

$$dH_a=2J_s ds\frac{\sin2\theta}{r^2} \tag{5.8.2}$$

上式中r为ds到计算点的距离，θ为r与z轴夹角，$ds=rdrd\theta$，故上式可写为：

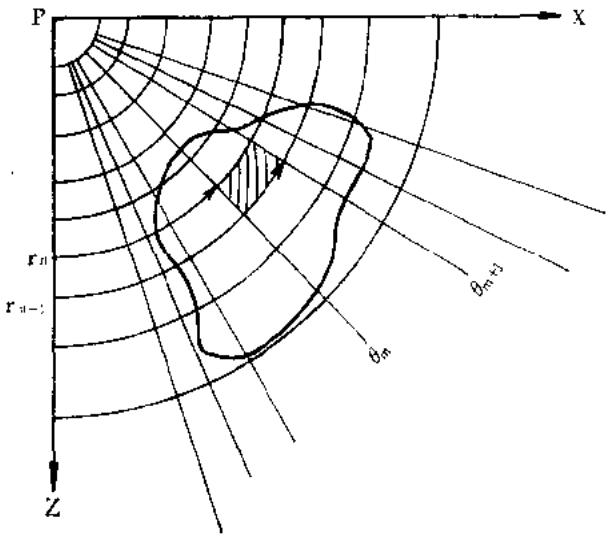


图 5.8.2 扇形截面示意图

$$dZ_a=2J_s\frac{dr}{r}\cos2\theta d\theta$$

$$dH_a=2J_s\frac{dr}{r}\sin2\theta d\theta \tag{5.8.3}$$

如果以半径为r_n和r_{n+1}的圆弧以及与z轴夹角为θ_m和θ_{m+1}的射线，将磁性体截面划分成许多截面积为ΔS的扇形截面，如图5.8.2所示。

截面积为ΔS的扇形柱体的磁场为：

$$\Delta Z_a=\iint_{\Delta S}dZ_a=\iint_{\Delta S}2J_s\frac{dr}{r}\cos2\theta d\theta$$

$$=J_s\int_{\theta_m}^{\theta_{m+1}}\int_{r_n}^{r_{n+1}}\frac{2dr}{r}\cos2\theta d\theta$$

$$=J_s(\sin2\theta_{m+1}-\sin2\theta_m)\cdot\ln\frac{r_{n+1}}{r_n} \tag{5.8.4}$$

$$\Delta H_a=\iint_{\Delta S}dH_a=\iint_{\Delta S}2J_s\frac{dr}{r}\sin2\theta d\theta$$

$$=J_s\int_{\theta_m}^{\theta_{m+1}}\int_{r_n}^{r_{n+1}}2\frac{dr}{r}\sin2\theta d\theta$$

$$=J_s(\cos2\theta_m-\cos2\theta_{m+1})\ln\frac{r_{n+1}}{r_n} \tag{5.8.5}$$

因而截面积为S的二度体在计算点的磁场为：

$$Z_a=\Sigma\Delta Z_{ai}$$

$$H_a=\Sigma\Delta H_{ai} \tag{5.8.6}$$

如果使每一扇形柱体在计算点产生的磁场都为一个定值，设为1伽玛，则$Z_a=\Sigma\Delta Z_{ai}=\eta_Z$，$H_a=\Sigma\Delta H_{ai}=\eta_H$，$\eta_Z$、$\eta_H$为截面$S$内的小扇形个数，这样，通过数出$S$内所包含扇形的个数，即得出$Z_a$或$H_a$的大小。为满足$\Delta Z_{ai}=1$伽玛的条件，要求$\theta_m$和$r_n$满足以下条件：

$$J_r(\sin2\theta_{m+1}-\sin2\theta_m)\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}=1\gamma \tag{5.8.6}$$

$$J_r(\cos2\theta_m-\cos2\theta_{m+1})\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}=1\gamma \tag{5.8.7}$$

如令$J_r=100\times10^{-5}$CGSM，则（5.8.6）式可写为：

$$(\sin2\theta_{m+1}-\sin2\theta_m)\cdot\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}=0.01$$

为满足以上关系式，可以人为地规定：

$$\left.\begin{aligned}&|\sin2\theta_{m+1}-\sin2\theta_m|=\frac{1}{8}=0.125\\ &\text{则：}\\ &\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}=0.08\end{aligned}\right\} \tag{5.8.8}$$

按（5.8.8）式关系可求得计算Z_a时划分ΔS_i的各θ_m和r_n的数值。

求θ_m：令$\theta_0=0$，则：

$$\begin{aligned}&\sin2\theta_1=0.125, && \theta_1=3^\circ35';\\ &\sin2\theta_2-\sin2\theta_1=0.125, && \theta_2=7^\circ15';\\ &\sin2\theta_3-\sin2\theta_2=0.125, && \theta_3=11^\circ01'\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

按以上方法求出的θ值分别为：

0°，3°35′，7°15′，11°01′，15°00′，19°21′，24°18′，30°32′，45°。

当θ大于45°面又小于135°时，$\sin2\theta_{m+1}<\sin2\theta_m$，这时令其差为$-0.125$，表示在$45^\circ<\theta<135^\circ$的区间内$\Delta Z$为负值。类似可得该区间的各$\theta$值为：59°28′，65°42′，70°39′，78°59′，82°45′，86°25′，90°00′，93°35′，97°15′，101°01′，105°00′，109°21′，114°18′，120°32′，135°00′

求r_n值：令$r_0=1$，则有

$$\ln\frac{r_1}{r_0}=0.08,\quad r_1=1.08;$$

$$\ln\frac{r_2}{r_1}=0.08,\quad r_2=1.17;$$

$$\ln\frac{r_3}{r_2}=0.08,\quad r_3=1.27;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

类似地求得：$r=1$，1.08，1.17，1.27，1.38，1.49，1.62，1.75，1.90，2.05，2.23，2.41，2.61，2.83，3.07，3.32，3.60，4.22，4.57，4.95，5.37，5.81，6.30，6.81，7.39，8.00，8.67，9.37，10.18，11.02，11.94，12.94，14.61，

15.18，……。

按以上θ和r的两组数据即可划出如图5.8.3表示的扇形量板。量板中每块扇形在计算点（即原点）的磁场为1γ，其条件是：$J_r=100\times10^{-5}$CGSM。计算Z_a时，与z轴夹角为±45°范围内的各扇形取正值，在±45°～±135°间取负值。

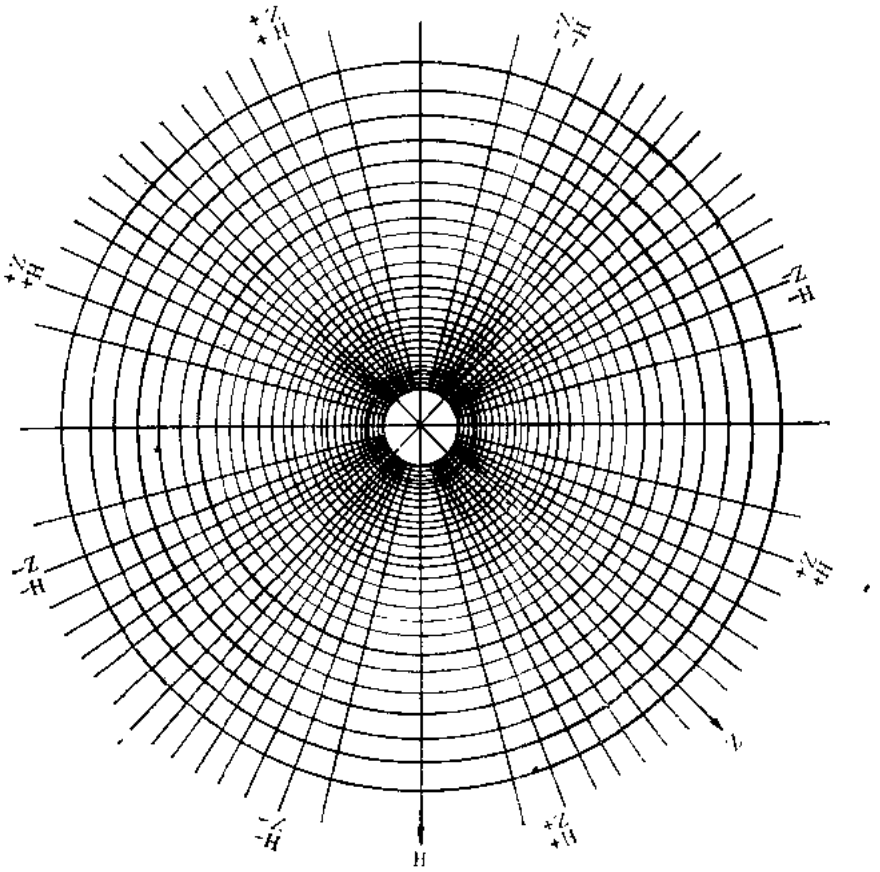


图 5.8.3 扇形量板示意图

2. H_a的计算

以上讨论了计算Z_a的量板制作原理，为计算H_a，无需另作量板，可由（5.8.4）和（5.8.5）式对比看出来。因为：

$$\sin2\theta=\cos(90^\circ-2\theta)=\cos2(45^\circ-\theta) \tag{5.8.9}$$

将上式代入（5.8.4）式，则有：

$$\Delta Z=J_r[\cos2(45^\circ-\theta_{m+1})-\cos2(15^\circ-\theta_m)]\ln\frac{r_{n+1}}{r_n}$$

$$=J_r[\cos2(\theta_{m+1}-45^\circ)-\cos2(\theta_m-45^\circ)]\ln\frac{r_{n+1}}{r_n} \tag{5.8.10}$$

比较（5.8.10）和（5.8.5）两式可以看出，计算ΔZ和计算ΔH的公式仅是θ角差了45°。因此，只要将计算Z_a的量板转45°角，即可用来计算H_a，故在量板z轴左侧45°处，标出

H轴，量板即可用于计算Z_a和H_a。量板中，Z_a和H_a的取值符号一致。

3．斜磁化情况

以上是按垂直磁化条件下推导出的公式制作的量板，若为斜磁化，量板仍可使用，现分析如下：

当为斜磁化时，设J_r与z轴夹角为β，则由截面为ds的小水平圆柱体引起的磁场为：

$$dZ_a=\frac{2J_r ds}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\sin i_r-2Rx\cos i_r]$$

将上式以极坐标表示，并注意到$\beta=90^\circ-i_r$，则有：

$$dZ_a=\frac{2J_r}{r^2}\cos(2\theta+\beta)ds=\frac{2J_r}{r^2}\cos 2\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right)ds \qquad (5.8.11)$$

同理：

$$dH_a=\frac{2J_r}{r^2}\sin 2\left(\theta+\frac{\beta}{2}\right)ds$$

比较（5.8.3）和（5.8.11）式可以看出，它们之间仅差$\frac{\beta}{2}$角。故对斜磁化情况，无需另做量板，只要将原量板的z轴（计算H_a时为H轴）转$\frac{\beta}{2}$角，即转到z轴与J_r夹角的平分线上即可。保证这一条件后，同样可以数扇形个数求和的方法计算出场值。

4．J_r≠100×10^{-5}CGSM的处理

在制做量板时，曾假定$J_r=100\times10^{-5}$CGSM，而在实际计算时，J_r可能是任意值，这时计算公式应为：

$$Z_a=0.01\times J_r\cdot\eta_Z$$
$$H_a=0.01\times J_r\cdot\eta_H \qquad (5.8.12)$$

上式中η_Z、η_H为磁性体截面S所包围的扇形个数，J_r为实际有效磁化强度，注意J_r以10^{-5}CGSM为单位。

5．量板的使用方法

（1）在透明纸上按一定比例尺绘制剖面图，并注意比例尺的选择应使矿体顶端埋深大于量板第一环半径，以保证能读出扇形数；在地形剖面线上标明测点位置。定出剖面内J_r方向和z轴夹角的平分线，即oz′轴线；过每一计算点作与oz′轴线的平行线，如图5.8.4所示。

（2）将剖面计算点与量板原点扣合，并使量板Z轴与oz′轴平行。

（3）数出矿体截面包围的扇形数η_Z（或η_H）。

（4）根据（5.8.12）式计算出Z_a（或H_a）值。

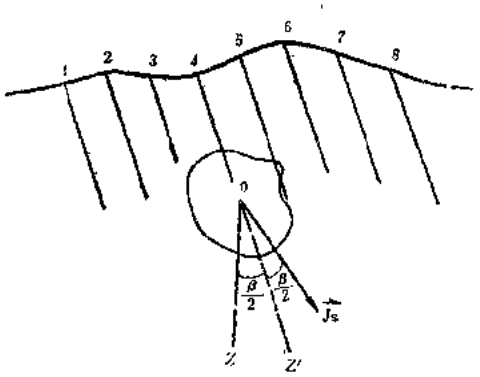


图 5.8.4 量板使用方法示意图

（5）将下一个计算点对准量板原点，重复以上步骤，直至计算完所有计算点的场值。

6．量板的应用条件和用途

由于量板是在二度条件下推导出来的，因此，它的应用条件是截面形状任意的水平二度体，只要磁性体可看作是均匀磁化，其磁化方向可以任意，同时也不受地形起伏的限制。

量板主要用于正演计算。正演计算在选择法求反演问题时，用途很大，详细情况在下一章介绍。

5.8.2 任意三度体磁场的计算方法

形状任意的不规则三度磁性体，很难给出简单的磁场表达式。由于电子计算机的广泛应用，使我们仍能计算不规则形体的磁场。

计算任意形状三度体的磁场，从数学方法来讲，是一个计算任意积分域的三重体积分问题，因其积分限的变化，很难用解析式将它表示出来。但如果我们把不规则的三度体，看作是一些规则三度体的组合，那么，我们就可以将上述体积分划分成一系列规则积分域进行积分，而后以其和作为近似解。目前计算任意三度体时，是以立方体、长方体、有限柱体等去逼近任意形体、计算出这些规则形体的磁场和，作为任意三度体磁场的近似值。其计算方法有以下几种：

（1）体元法（亦称点元法）

把实际要计算的不规则磁性体，按适当方法分割成许多小的规则形体（如立方体、长方体等），用解析方法计算出每个小规则形体的磁场，然后累加求和，即得到该不规则形体的磁场近似值。

（2）面元法

由一组平行面将磁性体截成许多断面，每个断面用多边形逼近它，计算出多边形断面的二重积分值；然后沿垂直断面方向，用数值积分方法算出整个磁性体在观测点的重力位；再利用泊松公式算出相应的磁场值，作为所求磁性体的磁场近似值。

（3）线元法

用两组相互垂直的平行面，将磁性体分割成一系列棱柱体，每个棱柱体以其中心线元来表示，用解析法求出沿线元方向的一重积分；然后在垂直于棱柱体的方向上完成二重数值积分，从而得到任意三度体磁场的三重积分近似值。

（4）表面积分法

当磁性体均匀磁化时，可由包围磁性体的一系列磁荷面来计算其场值。不规则三度体可用一系列多边形平面逼近磁性体表面，求出这些多边形磁荷面的磁场和，即为该磁性体磁场的近似值。

对不规则磁性体的磁场，不论采用哪一种方法计算，所得磁场值都是近似的，并且都是用数学模型体的几何角点坐标作为解析式的参量，只要确定了这些角点的坐标，将它们代入相应的算式中，即可用电子计算机完成所需的计算工作。为对其计算过程有进一步的了解，下面以体元法为例，作简单介绍。

对一个任意形状的三度体，我们可将其近似看作由许多不同体积和磁性的长方体组合而成。用解析法计算出所有这些小长方体在计算点P的磁场，而后累加求和，就得到整个磁性体在P点的磁场值。由此可见，体元法的计算精度与用长方体组合模拟实际磁性体的近似程度有关系。

假设我们分割磁性体的长方体元如图5.8.5所示。图中 Q_i 表示任一个长方体元，计算点 P 位于坐标原点 (0,0,0)，长方体的角点坐标如图所示。

根据泊松公式，磁场计算公式可写为：

$$\left.\begin{aligned} H_{ax} &= J_x V_1 + J_y V_2 + J_z V_3 \\ H_{ay} &= J_x V_2 + J_y V_4 + J_z V_5 \\ Z_a &= J_x V_3 + J_y V_5 + J_z V_6 \\ \Delta T &= H_{ax}\cos I\cos A' + H_{ay}\cdot\cos I\cdot\sin A' + Z_a \sin I \end{aligned}\right\} \tag{5.8.13}$$

上式中的 V_1、V_2…V_6 分别为：

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= -\left|\left|\left|\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{yz}{xR}\right)\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \\ V_2 &= \left|\left|\left|\left[\ln(z+R)\right]\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \\ V_3 &= \left|\left|\left|\left[\ln(y+R)\right]\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \\ V_4 &= -\left|\left|\left|\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{xz}{yR}\right)\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \\ V_5 &= \left|\left|\left|\left[\ln(x+R)\right]\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \\ V_6 &= -\left|\left|\left|\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{xy}{zR}\right)\right|_{x_1}^{x_2}\right|_{y_1}^{y_2}\right|_{z_1}^{z_2} \end{aligned}\right\} \tag{5.8.14}$$

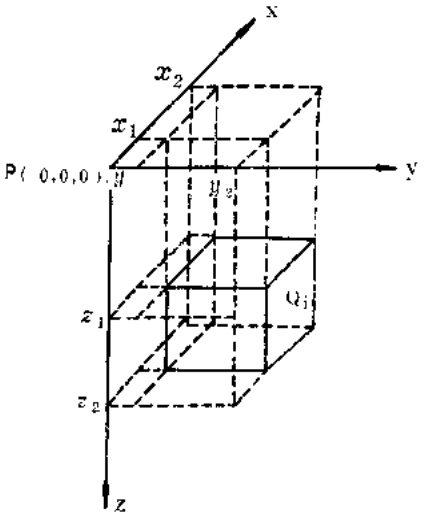


图 5.8.5 长方体元坐标示意图

上式各式中 $R=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

把上列各式中的积分限：x_1、x_2、y_1、y_2、z_1、z_2 分别代入后，即可得到计算 V_1、V_2、V_3…V_6 的表达式。计算出 V_1、V_2…V_6 后，可由 (5.8.13) 式求得任一长方体元在 P 点的场值，最后对各个长方体元在 P 点的场值累加求和，即得整个磁性体的场值。以上计算，都可编制计算程序由电子计算机完成计算工作。

5.8.3 非均匀磁化磁性体磁场的计算

以上的讨论，都假设磁性体是被均匀磁化的。实际上，以非二次曲面为边界的磁性体。即使其磁化率均匀，外磁场均匀，由于磁性体自身的消磁作用，其磁化强度也不会是均匀的。因此，有必要研究非均匀磁化磁性体的磁场计算问题。高速计算机的发展，为这种计算提供了可能。下面仅对这种计算作简略介绍。

非均匀磁化磁性体磁场的计算，是对那种因观测面距磁性体较近的磁异常的解释而提出的。正如本章开始时指出的那样，当计算远离磁性体的磁场时，磁性体可近似看作是均匀磁化体。另外，因考虑形体自身的消磁作用，故对非强磁体，同样也可近似看作均匀磁化体。

为计算非均匀磁化磁性体的磁场，国内外的地球物理工作者已提出了一些不同的算法。一种方法是把磁性体所占空间分割成 n 个体积元，若 n 足够大，则每个体积元的直径足够小，使每一个体积元可看作是均匀磁化体，因此可取其中任意点处的参数代表整个体元，于是可用矩形求积公式把磁性体磁场的积分方程化为线性方程组，而后通过求解方程

组来计算磁性体的磁场。另一种是计算多个任意形状三度体表面的磁异常方法。这种方法是先由磁性体磁场的积分方程求出磁性体表面的磁荷密度σ，而后由位场关系式求得其磁场分量值。而在求解σ时，在磁性体表面建立曲线坐标网包围整个磁性体，以此确定磁性体表面离散化的分点数，以及相应的σ值。上述计算，可参阅《磁法勘探问题》的有关章节。

§5.9 磁性体与其磁场对应关系的主要特点

本章前几节讨论了计算磁性体磁场的基本公式，对不同的形体导出了其磁场表达式，并分析了其磁场特征。对球体和向下无限延深二度板状体进行了重点分析。在讨论单个形体磁场的基础上，总结分析了二度体磁场Z_a、H_a和ΔT的通式。最后介绍了复杂条件下磁性体磁场的计算途径。

在前几节中公式较多，但只要掌握了沿特定方向磁化（如垂直磁化和顺层磁化）磁性体的简单正弦函数形式及其曲线形态，就可根据任意磁化与特定方向磁化间的关系式，分析掌握任意磁化下的磁性体磁场表达式及其特征。

由于每种磁性体的磁场都可通过其平面特征、剖面特征和空间特征，来展示磁性体与磁场的对应关系，分辨一种形体与另一种形体磁场特征的差别。因此，对不同形体与其磁场特征的对应关系进行总结分析，对实际磁异常的解释和系统掌握磁性体磁场的特征，是有帮助的。

5.9.1 磁性体与其磁场平面分布的对应关系

单个磁性体Z_a磁异常的平面等值线形状大体可分为三种，即长带状、等轴状和椭圆状。如球体的Z_a等值线为等轴状，二度极状体和水平圆柱体等的Z_a等值线为长带状，有限长水平圆柱体和板状体的异常为长椭圆状。可见平面等值线的形态往往是磁性体水平展布情况的反映，磁异常轴的方向一般反映地质体的走向。

可见，我们可以根据Z_a等值线的形状，把磁性体区别为二度异常和三度异常，即取1/2极大值等值线，若长轴为短轴长度的三倍以上，则视为二度异常，否则为三度异常。三度异常又可分为长、短轴近于相等的等轴状异常和长短轴之比大于1而小于3的似二度异常。表5.9.1中给出了几种规则形体的等轴状异常和长带状异常。

5.9.2 磁性体与其磁场的剖面对应关系

由以前所作的讨论可知，磁性体的Z_a剖面曲线有三种基本形态：两侧无负异常的Z_a曲线、一侧有负异常的Z_a曲线和两侧都有负异常的Z_a曲线。

1．两侧无负异常的Z_a曲线

顺层（或顺轴）磁化无限延深板状体（或柱状体）的Z_a异常为两侧无负值的曲线。其极大值对应原点。这种剖面异常特征可作为判定磁性体顺层（或顺轴）磁化且向下无限延深的标志。

2．一侧有负异常的Z_a曲线

斜磁化无限延深板状体的Z_a剖面曲线为一侧有负值的曲线。Z_a曲线不对称，原点位于$Z_{a\max}$和$Z_{a\min}$之间；负值位于J_t穿出板面的一侧。曲线的不对称性决定于γ角的大小，γ角愈大，曲线愈不对称。当磁性体呈南北走向时，J_t垂直向下，可根据Z_a曲线的陡缓判定

表 5.9.1

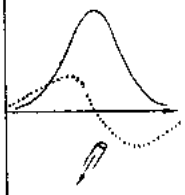
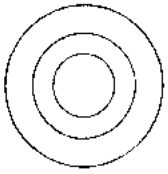
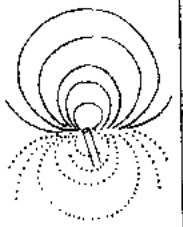
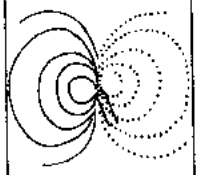
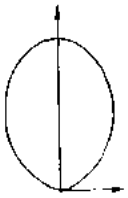
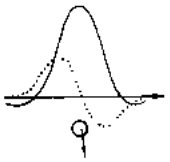
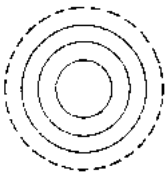
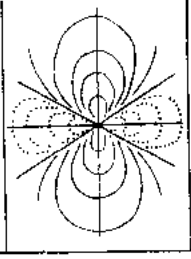
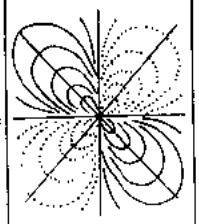
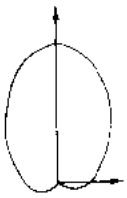
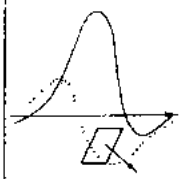
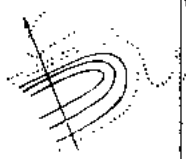
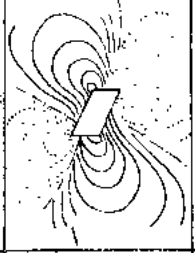
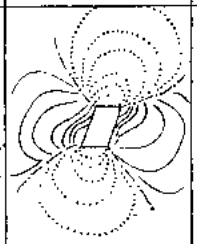
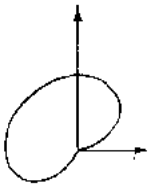
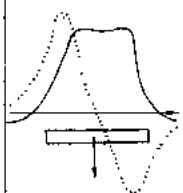
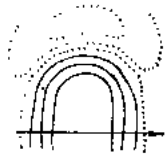
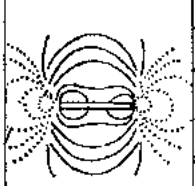
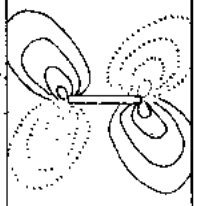
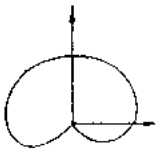
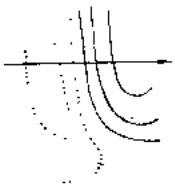
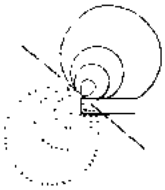
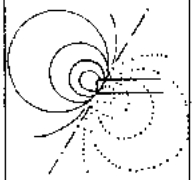
类别	主剖面上 Za，Ha	Za 平面等值线	Za 空间等值线	Ha 空间等值线	Za—Ha 参量图
无限延深陡立柱体顺轴磁化					
垂直磁化球体					

表 5.9.2

类别	主剖面上 Za，Ha	Za 平面等值线	Za 空间等值线	Ha 空间等值线	Za—Ha 参量图
斜交磁化有限延深薄板					
垂直磁化水平薄板					
水平台阶					

板状体的倾向。

3．两侧有负值的Z_a曲线

Z_a剖面曲线两侧出现负值，是磁性体下延深度不大的表现。如球体、有限延深的柱体和板状体、水平圆柱体等，其Z_a剖面曲线一般都是两侧出现负值。

有限延深磁性体的截面为轴对称形的，如球体、水平圆柱体和直立板状体等。在垂直磁化情况下，其Z_a曲线为两侧有负值的对称曲线，并且其极值对应原点。若为斜磁化，Z_a为非对称曲线，原点位于二极值点坐标之间。顺层磁化有限延深板状体，在板体倾向一侧负值较强；对有限延深、倾斜且斜磁化的板状体，其曲线的非对称性不仅与γ角有关，还与磁性体下界面的位置有关。表5.9.1和5.9.2中给出了几种有限延深磁性体的Z_a剖面示意图。

5.9.3 磁性体与其磁场空间等值线的对应关系

表5.9.1和表5.9.2列出了各类型态磁性体的Z_a空间等值线图。可见厚板状体和水平薄板状体，Z_a等值线有交于两点的趋势。有限延深的磁性体，正等值线两侧均有负等值线；对接触界线，则只有一侧有负等值线。

在磁性体的不同高度上，Z_a的正值范围和Z_{amax}的位置均不同；不同形体其磁场随高度的减小程度也不同。

第六章　磁性体磁场的反演方法

§6.1　概　　述

前一章已经给出各种规则形体磁场的空间域解析表达式，并分析了磁性体与磁场特征对应的规律性。本章主要讨论根据已知磁场的分布确定场源分布的方法。通常称为磁异常解释理论的反演问题。

磁性体磁场的反演方法是建立在正演问题的基础上。目前已有的反演方法较多，本章主要讨论一些规则形状磁性体磁场空间域的反演方法，它是磁测资料解释推断的基本方法。最后简要介绍不规则形状磁性体的解释方法和频率域的正反演问题。

6.1.1　磁性体磁场反演的目的和方法

磁性体磁场反演的目的，在于根据工作地区测定的磁异常的分布特征，结合有关的地质资料和岩、矿石物性资料，确定磁性体的赋存位置、形状及规模大小，如磁性体的中心位置、埋藏深度、倾向、倾角、延深长度和分布范围等。有条件时还要确定其磁化强度的大小和方向。

磁异常的反演方法，习惯上分为定性及半定量解释和定量计算，前者是后者的基础，后者又是前者的继续和深入，二者密切相关，定量计算只有在对磁异常做定性及半定量解释的基础上，才能正确地选择计算的公式。实践表明，在没有做正确的定性及半定量解释，初步判断磁性体的形状和产状之前，立即套用某种反演计算公式，往往使计算结果与实际情况有很大出入，甚至可能得到错误的结论。

磁异常定量计算的方法繁多，有的在空间域中进行，也有的在频率域中进行。目前常用的较为成熟的方法还是以空间域为主，并且由利用单分量（如 Z_a）的解释，逐步发展了多分量的解释体系。

6.1.2　磁性体磁场反演的多解性

由正演部分的讨论知道，决定磁异常特征的主要因素有两个：一是磁性体的磁化特征，二是磁性体的空间赋存状态。不同的磁性体可以引起形态特征相同的磁异常，造成反演解释的多解性。下面列举几种情况来讨论：

1．确定二度板状体倾向（倾角）的多解性，由正演理论知道它的磁异常形态主要决定于磁化特征角（$\gamma=\alpha-i$），有时也决定于下延深度，见图6.1.1。图中（a）说明无限延深板状体只要 γ 角相等，磁性体倾向可能有三种情况，图中所列的三种倾向，它们的 Z_a 剖面形态特征相同，这时虽能利用磁异常曲线求出 γ 角，但由于 i 不易确定，故板状体的倾向及倾角（α）无单值解。对于弱磁性体，可将 i 角取为正常地磁倾角在剖面内的投影，因磁化方向已确定，可以判断板状体的倾向。图中（b）说明不同延深板状体倾向不同可引起同样形态的磁异常。

2．在反演计算中有时对某些分量有单一解，而另一些参量可能是多值解，如球形磁

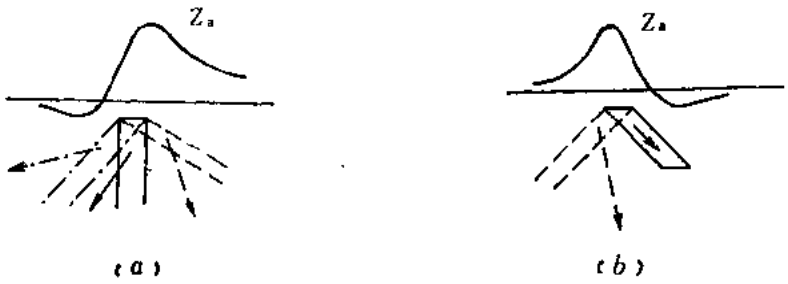


图 6.1.1 判断倾向的多解性

性体能单一求出其中心埋深(R)和总磁矩(M)，但它的体积或半径则不能求出。其它形体也有类似情况。

3．在最优化选择法中造成多解性因素还取决于模型体的选择、初始值的给定以及计算的方法等，这方面将在本章第四节中讨论。

上面关于磁异常解释结果多解性的讨论仅限于磁性体赋存状态方面，而对引起磁异常的地质原因及某些解释方法本身所造成的多解性将在后面有关的章节中讨论。

§6.2 磁性体形状的判定

在磁异常解释推断中，估计引起磁异常的磁性体的形状是很重要的。因为各种定量计算方法都是针对不同的几何形体提出的，所以它是正确选用反演计算方法的前提。同时，磁性体形状的判定也有助于确定引起磁异常的地质原因。

6.2.1 异常特征的分析法

根据磁异常的分布特征判定磁性体形状的方法，称其为磁异常特征分析法。

由第五章的讨论可知，不同的磁性体其磁场的平面、剖面和空间分布特征不同。因此，我们可根据磁异常特征与磁性体形状的对应规律，大体判定磁性体的形状。如我们首先可根据磁异常的平面特征，大体判定其为二度体异常或为三度体异常，而后根据其剖面和空间分布特征确定其磁性体的大体形状。

由于三度体异常又分为等轴状异常和似二度体异常两种情况。在实际工作中，似二度体异常经常遇到，因此，应注意对似二度体异常的研究，如走向长度有限和端面效应的影响。

6.2.2 根据T_a异常特征判断倾向

根据Z_a异常特征，在已知磁化强度方向的条件下，可以判别磁性体的倾向。但是，当磁性体的剩余磁化强度较大且与感应磁化强度方向不同及在强磁性体消磁作用明显且磁性体形状又未知时，磁化强度的方向往往难以确定，这样仅利用Z_a异常特征就无法判断磁性体的倾向。

这里所介绍的利用剖面内异常矢量的强度（$T_a=\sqrt{Z_a^2+H_a^2}$）来判断磁性体的倾向，将不受磁化方向的影响。

1．板状体T_a曲线的特征

由第五章讨论的板状体斜交磁化时的Z_a、H_a和顺层磁化条件下的$Z_{a//}$、$H_{a//}$的规格化公式，进一步可得出它的T_a和$T_{a//}$之关系为：

$$T_a=\sqrt{Z_a^2+H_a^2}=\sqrt{(Z_{a//}\cos\gamma+H_{a//}\sin\gamma)^2+(H_{a//}\cos\gamma-Z_{a//}\sin\gamma)^2}$$
$$=\sqrt{Z_{a//}^2+H_{a//}^2}=T_{a//} \tag{6.2.1}$$

这一结果反映了T_a曲线的一个重要特征，即斜交磁化板状体的磁异常矢量强度T_a和顺层磁化时的$T_{a//}$是相等的，或者说不同γ角的磁异常矢量强度T_a均与顺层磁化($\gamma=0°$)的T_a相等，这就是说T_a与磁化强度的方向无关，仅与磁性体的形状有关。因此，利用T_a曲线判断板状体的倾向，无须考虑磁化强度的方向，这对解释实际异常是很有意义的。

利用上面的结论，则对于一个有限延深的薄板状体在空间一点产生的T_a，与位于板的上、下端的两条异号磁极线在该点产生的T_a等效，如图6.2.1所示。所以有：

$$T_{aA}=\frac{\sigma}{r_A},\quad T_{aB}=\frac{\sigma}{r_B},$$

式中σ为磁荷线密度。

由余弦定理：

$$T_a=\sqrt{T_{aA}^2+T_{aB}^2-2T_{aA}T_{aB}\cos\theta}=\sqrt{\left(\frac{\sigma}{r_A}\right)^2+\left(\frac{\sigma}{r_B}\right)^2-2\frac{\sigma^2}{r_Ar_B}\cos\theta}$$

$$\because 2l=\sqrt{r_A^2+r_B^2-2r_Ar_B\cos\theta}$$

$$\therefore T_a=\frac{2l\sigma}{r_A\cdot r_B} \tag{6.2.2}$$

由上式可见，T_a的大小与薄板状体的下延长度$2l$成正比，与测点到板的上下顶面距离的乘积成反比。T_a是模量，总为正值。

2．T_a曲线与板状体倾向的关系

当板状体直立时，取板体上顶面中心在剖面上的投影点为坐标原点O，见图6.2.2。

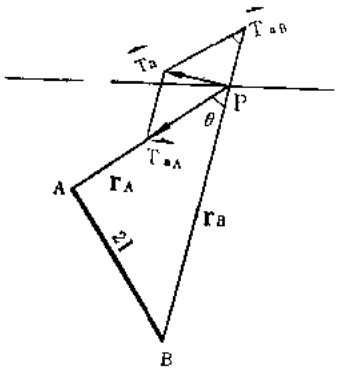


图 6.2.1 倾斜薄板在空间任意点的T_a矢量表示

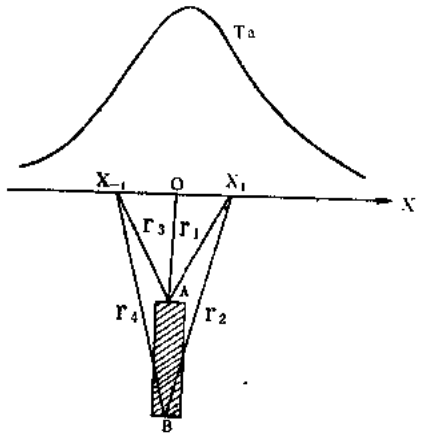


图 6.2.2 直立薄板上的T_a曲线

在原点两侧任取两个对称点x_i和x_{-i}，则：

$$(T_a)_{x_i}=\frac{2l\sigma}{r_1\cdot r_2},\quad (T_a)_{x_{-i}}=\frac{2l\sigma}{r_3\cdot r_4}$$

$$\because r_1=r_3,\ r_2=r_4$$

$$\therefore (T_a)_{x_i}=(T_a)_{x_{-i}}$$

可见，当板状体直立时，T_a曲线对称于纵轴，极大值位于板顶中心在剖面上的投影位置。

当板状体倾斜时，如图6.2.3所示，则有：

$$(T_a)_{x_i}=\frac{2I\sigma}{r_1\cdot r_2},\quad (T_a)_{x_{-i}}=\frac{2I\sigma}{r_3\cdot r_4};$$

虽然x_i和x_{-i}对称于原点，但因板状体倾斜，则有$r_1=r_3$，$r_2>r_4$，故$(T_a)_{x_i}<(T_a)_{x_{-i}}$。这样就得到一个重要结论：当磁性体倾斜时，$T_a$曲线为一不对称曲线，磁性体倾向与$T_a$曲线梯度小的一侧相对应。$T_a$曲线的极大值位于板状体上顶中心在剖面投影位置附近。

图6.2.4是山东某矿区，由Z_a和H_a作出的T_a曲线，显见矿体是倾向于北西的。这要比用Z_a曲线判断倾向清楚得多。

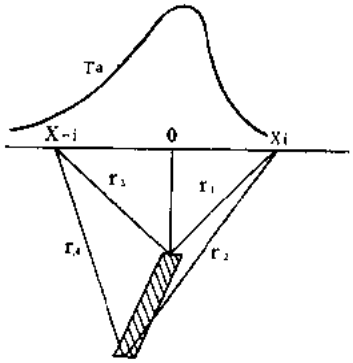


图 6.2.3 倾斜薄板上的T_a曲线

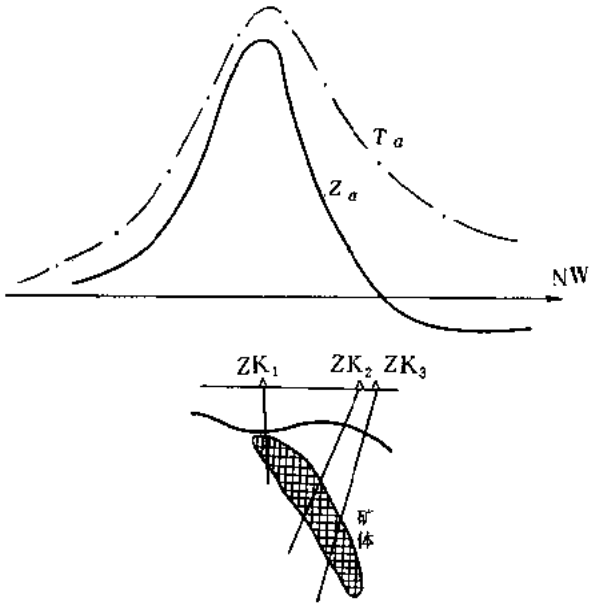


图 6.2.4 山东某矿体上的T_a曲线

6.2.3 Z_a-H_a参量图法

1．原理

Z_a—H_a参量图是以磁性体所引起的Z_a异常为纵坐标，以H_a异常为横坐标绘出的图形。图形的作法是将中心剖面上的各点场值Z_a与H_a分别在此坐标系中点出，并连成曲线。不同形状的磁性体，绘出的参量图的图形是不同的。所以可利用参量图来判别磁性体的形状。

参量图的几何图形方程式，可以由磁性体磁场的Z_a、H_a表达式消去坐标变量x得到。现以斜磁化水平圆柱体为例，推导其参量图形的方程式。

根据斜磁化水平圆柱体的磁场表达式（5.5.4）：

$$Z_a=\frac{2M_s}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\sin i_s-2Rx\cos i_s]$$

$$H_a=\frac{-2M_s}{(x^2+R^2)^2}[(R^2-x^2)\cos i_s+2Rx\sin i_s]$$

两式相比，解出x：

$$x=R\frac{(Z_a\cdot\sin i_s-H_a\cdot\cos i_s)\pm\sqrt{Z_a^2+H_a^2}}{Z_a\cos i_s+H_a\sin i_s}\qquad(1)$$

两式各自平方后相加再开方，可得：

$$\sqrt{Z_a^2+H_a^2}=\frac{2M_s}{x^2+R^2} \tag{2}$$

将（1）式代入（2）式，写为：

$$\sqrt{Z_a^2+H_a^2}=\frac{2M_s}{R^2+R^2\left[\dfrac{(Z_a\cdot\sin i_s-H_a\cos i_s)\pm\sqrt{Z_a^2+H_a^2}}{Z_a\cos i_s+H_a\sin i_s}\right]^2} \tag{3}$$

若以极坐标表示，应有$Z_a=\rho\sin\phi$，$H_a=\rho\cos\phi$，$Z_a^2+H_a^2=\rho^2$；代入（3）式经整理得到：

$$\rho=\frac{M_s}{R^2}\left[1\pm\cos(\phi+i_s)\right] \tag{6.2.3}$$

上式是表示心形线（又名心脏线）图形的方程式。从这个方程可见，一个ϕ值对应有两个ρ值，心形线的心根点位于原点，对称轴在$\phi=-i_s$处，这时$\rho_{max}=2M_s/R^2$，对称轴与横坐标轴(H_a轴）的夹角为有效磁化倾角i_s，见图6.2.5。

当水平圆柱体为垂直磁化时，(6.2.3)式相应变为：

$$\rho=\frac{M_s}{R^2}\left(1\pm\sin\phi\right) \tag{6.2.4}$$

这时对称轴在$\phi=90^\circ$处，即与坐标纵轴重合。

对于其它规则形体，同样可导出类似的参量图方程式，或根据Z_a、H_a理论曲线直接用作图法来做出相应的参量图。下面介绍几种规则形体的参量图。

无限延深厚板状体，当$\gamma=0^\circ$时，其参量图为一通过原点且对称于纵轴的压扁椭圆。b/h值越大，椭圆的长短轴之比也越大，即压扁得越厉害。当$\gamma\neq0^\circ$时，则参量图的对称轴偏离纵轴一个γ角，当厚板状体为有限延深时，Z_a-H_a参量图由上述的椭圆形变为椭圆心形线。

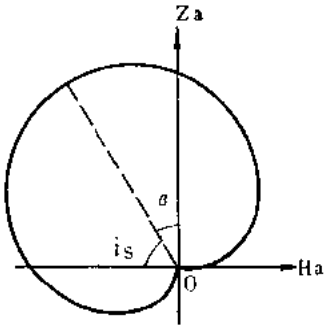


图 6.2.5 斜磁化水平圆柱体的参量图

无限延深薄板参量图为一通过原点的圆，当$\gamma=0^\circ$时，圆的对称轴即为纵轴，斜交磁化时，对称轴偏离纵轴，其夹角为γ角。当形体为有限延深薄板，其Z_a-H_a参量图的形状与水平圆柱体的参量图相似，如下延很小时，则两者相同。

球体的Z_a-H_a参量图为在纵轴方向上拉长的心形线，对称轴与纵轴之夹角为β角。

一些规则形体的参量图综合编绘在图6.2.6中。

2．关于参量图的规律性讨论及其应用

由以上几种规则形体的参量图，可以得到下面几条规律：

（1）参量图的图形

从前面的讨论可知，参量图的形状只由磁性体的形状来决定，即不同形状的磁性体其参量图的形状不同，所以可利用参量图来确定磁性体的形状。根据参量图判别磁性体的形状，其优点在于：不受正常场选择的影响，因为正常场只会改变参量图曲线的位置而不会改变其形态；不受磁化方向的影响，因为磁化方向只能改变参量图对称轴的旋转角度，而不会影响其图形的形状；参量图的形状随磁性体的走向长度、下延深度和水平宽度而变

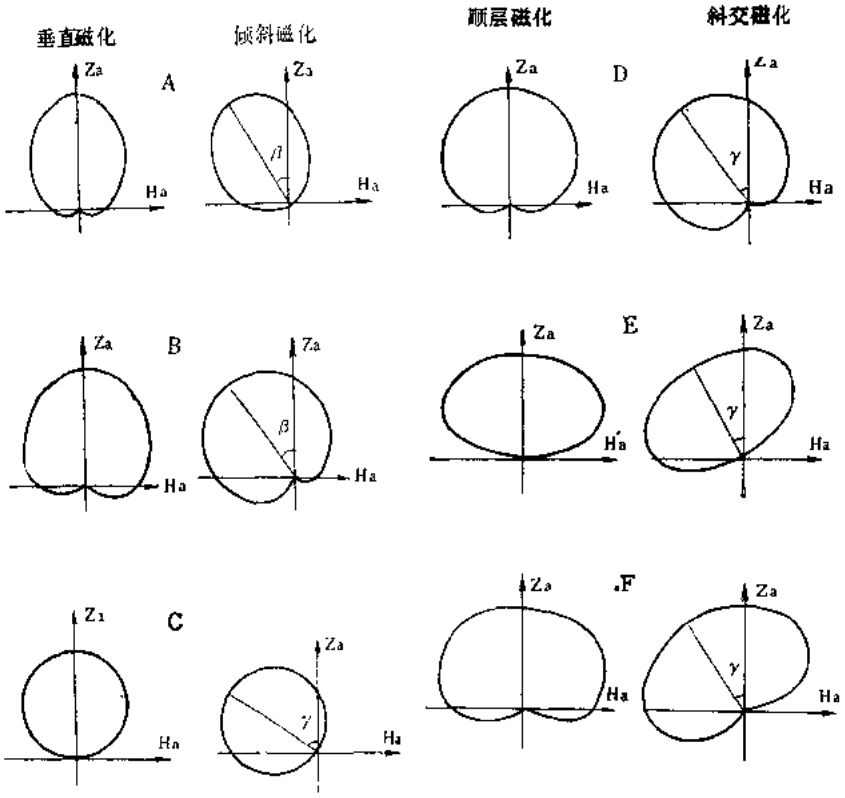


图 6.2.6 一些规则形体的Z_a-H_a参量图

A：球体；B：水平圆柱体；C：无限延深薄板；D：有限延深薄板；E：无限延深厚板；F：有限延深厚板。（C图磁化情况与D、E、F相同）

化，所以可根据参量图的形状来估计磁性体在走向、延深、宽度三个方向上发展的规模。

（2）关于磁性体延深的判断

由单极线和偶极线的参量图（图6.2.6C～D）、无限延深厚板与有限延深厚板的参量图（图6.2.6E～F），对比可以发现，凡是有限延深磁性体，其参量图都呈心形线状，而无限延深磁性体的参量图都呈圆形或椭圆形。由此可知，参量图呈心形线是确定磁性体为有限延深的标志。磁性体延深越小，Z_a负值越强，心脏线就越明显；随着延深增大，Z_a负值部分逐渐减小，参量图相应的从心脏形过渡到圆形或椭圆形。

在条件有利时，还可根据参量图来确定磁性体的下延深度。例如，对沿走向无限、延深有限的垂直磁化直立薄板状体，其磁场的参量图之极坐标方程为：

$$\rho = M_s\left[\frac{\sin\phi}{h(h+2l)} \pm \frac{\sqrt{h^2+2lh+l^2\sin^2\phi}}{h(h+2l)(l+h)}\right]$$

式中：ϕ——变角，ρ——动径。

当$\phi=0°$时：

$$\rho_{\phi=0} = M_s\frac{\sqrt{h^2+2lh}}{h(h+2l)(l+h)}$$

当$\phi=90°$时：

$$\rho_{\phi=90°} = M_s\frac{2}{h(h+2l)}$$

侧有：

$$\frac{\rho_{\phi=90^\circ}}{\rho_{\phi=0^\circ}}=\frac{2(h+l)}{\sqrt{h(h+2l)}}=\frac{2\left(1+\frac{l}{h}\right)}{\sqrt{1+2\left(\frac{l}{h}\right)}}$$

利用上式可计算出不同的l/h值所对应的$\rho_{\phi=90^\circ}/\rho_{\phi=0^\circ}$值，见表6.2.1。

表 6.2.1

$\frac{l}{h}$	0	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0	8.0	10.0	∞
$\frac{\rho_{\phi=90^\circ}}{\rho_{\phi=0^\circ}}$	2.00	2.01	2.12	2.31	2.50	2.68	3.02	3.33	3.62	4.37	4.80	∞

在利用实际资料做出的参量图上，取得$\rho_{\phi=90^\circ}/\rho_{\phi=0^\circ}$的值，便可由表6.2.1查得相应的$l/h$值，若已知$h$则可求得其下延长度$2l$。

（3）关于磁性体宽度的判断

由图6.2.6中可以看出，凡是厚板，其参量图都呈压扁状，如为薄板则参量图为等轴状。所以可根据参量图来判断磁性体的“厚”与“薄”，还可利用下表6.2.2来确定无限延深厚板的水平宽度。

表 6.2.2

$\frac{b}{h}$	0	0.1	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	6.0	8.0	10.0	∞
长轴/短轴	1.000	1.004	1.040	1.116	1.218	1.300	1.384	1.452	1.532	1.572	1.688	1.860	1.970	2.000

（4）关于三度体与二度体的判断

从图6.2.6中可以看出：凡是三度体，其参量图是在对称轴方向拉长，而二度体的参量图则是等轴形或在对称轴方向压扁。据此可区分是三度体还是二度体。当磁性体的走向长度逐渐缩小时，相应的参量图由等轴状过渡到拉长状。

对于有限长单极线，由计算可求得当L/h值不同时，参量图的短轴与长轴之比值，列于表6.2.3。这样，就可根据由实测异常所作出的参量图的短轴/长轴值从表中查到相应的L/h值。

表 6.2.3

$\frac{L}{h}$	0	1	2	3	∞
短轴/长轴	0.767	0.847	0.902	0.964	1.000

（5）关于磁化方向的判断

已知无限延深的板状体，其参量图对称轴与纵轴的夹角为γ角，走向无限长的水平圆柱体参量图对称轴与纵轴的夹角为β角（即$90^\circ-i_z$角），所以可根据参量图对称轴与纵轴之夹角来判定有效磁化强度的方向或和该方向有关的角度。具体说，对无倾向可言的磁性

体（如球体、水平圆柱体），可利用参量图直接确定磁化强度的方向，而对板状体，只能确定出γ角的大小。应当指出，对无限延深的薄板状体，当正常场选择不准时，致使参量图不对称，从而无法找到对称轴。

（6）关于正常场改正问题

当Z_a、H_a在有正常场影响情况下，其参量图的原点相当于平移了一个位置，图形不变。可从参量图对称轴的顶点确定坐标原点，便可以确定Z_a、H_a两个坐标的位移值，将正常场影响校正过来。但是，这种校正正常场的方法，对于无限延深的薄板状体是不适用的，因为其参量图是不通过原点的圆。无明显的图根点，所以对它只能发现正常场选择的不准，而无法进行改正。

6.2.4 利用不同高度上场值的方法

本方法是利用磁场的空间分布特征来确定磁性体的形状。不同高度上的磁场可以通过两个途径得到：①根据观测场，由位场的空间换算获得（在下一章具体讨论计算方法）。②由不同飞行高度的航空磁测获得。磁场的空间分布特征比平面分布特征的内容更为丰富，为此根据平面分布难以解决的问题，利用其空间分布则变为有可能或较容易解决。特别是随着电子计算机的普遍应用和磁异常空间转换计算精度的提高，该方法的应用也日益广泛。

1．利用磁异常断面等值线的特征

在前一章中，我们已经讨论过规则磁性体的x-z垂直断面中等值线的分布特征（如图5.3.5；5.3.10；5.4.5所示），了解到不同形状的磁性体其断面等值线图的特征也各不相同，不仅可以用它来判断磁性体的形状和磁化的特征，而且断面等值线具有交会的趋势，通常交会点可以反映其磁性体上顶（或中心）的埋藏深度及水平宽度。但必须指出：在实际资料中，交点虽无法精确求出，但往往可以得到明显的相交趋势，因而近似地确定其磁性体的位置是可能的。另外由于向下延拓是属于不适定的以及边缘效应等问题，会影响解释的效果和误差。

2．利用不同高度上Z_a异常的特征值

坐标点的连线

由于各种形体Z_a异常的特征点坐标都随高度不同而发生有一定规律的变化，但对于不同的形体，和它们相应的特征值坐标点的连线和连线的交点也不同，因此可以用连线的交点来判断磁性体的位置和形状。

现例举无限延深二度薄板状体加以说明。其Z_a的极坐标表达式为：

$$Z_a=\frac{2J_i\cdot 2b\sin\alpha}{r}\cos(\theta+\gamma)$$

上式坐标原点(0,0)为薄板顶点在地表水平线上的投影，r为测点至板顶间的距离，θ为r与垂线间的夹角，且偏向x正半轴为正，反之为负。若令$Z_a=0$，则$\cos(\theta+\gamma)=0$，因而有$\theta_0=\frac{\pi}{2}-\gamma$，这里$\gamma$为有效磁化强度的特征角，对同一薄板，磁化强度不变，其γ和θ_0角均为一定值，因此，不同高度上$Z_a=0$的坐标点连线为垂线或θ_0角的直线。

令$\frac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，可求出其极值点的坐标，即由

$$\frac{\partial Z_a}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial Z_a}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}=0$$

其中：

$$\frac{\partial Z_a}{\partial r}=-\frac{2J_1 2b\sin\alpha}{r^2}\cos(\theta+\gamma)\ ;$$

$$\frac{\partial Z_a}{\partial \theta}=-\frac{2J_1 2b\sin\alpha}{r}\sin(\theta+\gamma)\ ,$$

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\sin\theta\ ;\qquad \frac{d\theta}{dx}=\frac{1}{r}\cos\theta\ ;$$

从而

$$\frac{\partial Z_a}{\partial x}=-\frac{2J_1 2b\sin\alpha}{r^2}\sin(2\theta+\gamma)=0$$

可解得：

$$\theta_m=\frac{-\gamma}{2}\ ;\qquad \theta_n=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$$

由θ_0、θ_m和θ_n可知：极大值和极小值和零值坐标点连线，都是直线，这些线在极坐标的原点（即薄板顶点）相交，因此，可以用来确定薄板顶点的位置。极大值点的连线和极小点连线互相垂直；零值点连线与极小点连线间夹角为$\frac{\gamma}{2}$。

若令特征值坐标点连线与x轴正方向夹角用φ来表示，如图6.2.7所示，则：

$$\varphi_0=90^\circ+\theta_0=\pi-\gamma$$

$$\varphi_n=90^\circ+\theta_n=\pi-\frac{\gamma}{2}$$

$$\varphi_m=90^\circ+\theta_m=90^\circ-\frac{\gamma}{2}$$

利用以上给出的关系，可确定薄板上顶及其产状。

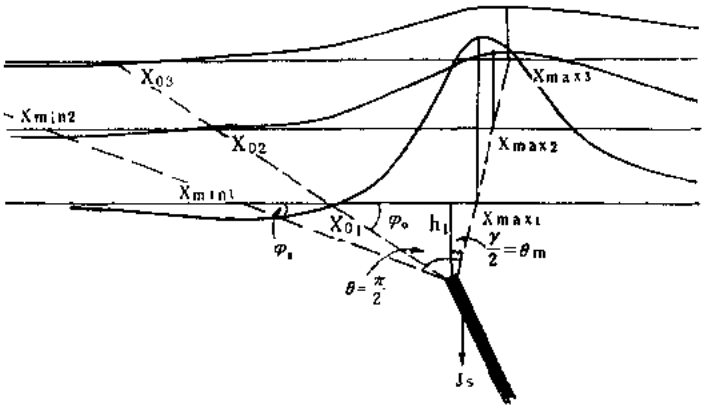


图 6.2.7 斜交磁化薄板状体不同高度上Z_a剖面曲线

对其它形体也可进行类似分析，表6.2.4给出了不同形体特征点连线的夹角，可供判断形体时参考。

3．利用不同高度上Z_{amax}值

表 6.2.4

形　　体	X_{max} 与 X_{min} 线间夹角	零值线间夹角	形状参数
半空间厚板			0
无限延深厚板状体	$<90°$		$0<n<1$
无限延深薄板状体	$90°$		1
有限延深板状体	$60°<\theta<90°$	$>90°$	$1<n<2$
水平圆柱体	$60°$	$90°$	2
单极			2
双极			$2<n<3$
球体	$90°$	$\geqslant 90°$	3

（1）计算形状参数 n

对比某些简单规则形状磁性体 Z_a 异常的极大值表达式，可以用下面的通式来表示：

$$Z_{amax}=\frac{C}{h^n} \tag{6.2.7}$$

式中 C 为与磁性体的磁化强度和几何参数有关的常数，n 为衰减指数，又常称之为磁性体的形状参数。现在考虑在三个不同高度上的磁场，其极值应分别为：

$$Z_{a1max}=\frac{C}{h^n},\quad Z_{a2max}=\frac{C}{(h+\Delta h)^n},\quad Z_{a3max}=\frac{C}{(h+2\Delta h)^n};$$

令：$\frac{Z_{a1max}}{Z_{a2max}}=\alpha$，$\frac{Z_{a1max}}{Z_{a3max}}=\beta$；

则：

$$\alpha=\frac{(h+\Delta h)^n}{h^n}=\left(1+\frac{\Delta h}{h}\right)^n\approx 1+n\frac{\Delta h}{h}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{\Delta h}{h}\right)^2 \tag{6.2.8}$$

$$\beta=\frac{(h+2\Delta h)^n}{h^n}=\left(1+2\frac{\Delta h}{h}\right)^n\approx 1+n\frac{2\Delta h}{h}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{2\Delta h}{h}\right)^2 \tag{6.2.9}$$

解出：$\dfrac{\Delta h}{h}=\dfrac{4\alpha-\beta-3}{2n}$

代入（6.2.8）式得：

$$\alpha=1+\frac{4\alpha-\beta-3}{2}+\frac{n-1}{8n}(4\alpha-\beta-3)^2$$

求得：

$$n=\frac{(4\alpha-\beta-3)^2}{16\alpha^2+\beta^2-8\alpha\beta-16\alpha+2\beta+5} \tag{6.2.10}$$

由三个高度上的 Z_{amax} 求出 α、β 值后，代入式（6.2.10）即可求得形状参数 n。对照表 6.2.4，可判断磁性体的形状。

用式（6.2.10）求 n，必须取 Δh 尽量的大，这样不同高度上的 Z_{amax} 差异才显著。若 Δh 过小，则 α、β 均接近于 1，就难以求准 n 值。但是当 Δh 过大时，近似式（6.2.8）、（6.2.9）的条件 $\left(\frac{2\Delta h}{h}\ll 1\right)$ 就不满足。所以上述求 n 的方法并非是理想的方法。为此进行如下改进。

由式（6.2.7）可得：

$$h=\frac{C'}{(Z_{a\max})^{1/n}} \tag{6.2.11}$$

式中$C'=C^{1/n}$，两者意义相同。

设当埋深为h_1、$h_2=h_1+\Delta h$、$h_3=h_1+2\Delta h$时，其所对应的极大值为$Z_{a1\max}$、$Z_{a2\max}$和$Z_{a3\max}$。则有$h_2=\frac{h_1+h_3}{2}$，将其中的h分别以（6.2.11）式中对应部分代替，有

$$\frac{C'}{(Z_{a2\max})^{1/n}}=\frac{1}{2}\left[\frac{C'}{(Z_{a1\max})^{1/n}}+\frac{C'}{(Z_{a3\max})^{1/n}}\right]$$

整理得：

$$\frac{(Z_{a1\max}\cdot Z_{a3\max})^{1/n}}{(Z_{a2\max})^{1/n}}=\frac{1}{2}\left[(Z_{a1\max})^{1/n}+(Z_{a3\max})^{1/n}\right] \tag{6.2.12}$$

此式为估算n值的恒等式。具体使用时只要在大于零和小于3的区间内，找到一个n值，使得式（6.2.12）成立，则此值即为所求的形状参数n。由于n的变化区间较小，采用逐次逼近的方法，即使是手算，也只要算二、三次便可求出n值。显然此方法对Δh的限制可适当放宽。

（2）计算埋深和磁化特征角

以薄板和水平圆柱体为例来说明采用不同高度上$Z_{a\max}$及其坐标位置求埋深和磁化特征角的方法。

（A）斜交磁化无限延深薄板状体

由表6.2.4知其形状参数$n=1$，取两个高度上Z_a的极大值，其对应关系为：

$$Z_{a1\max}=\frac{C}{h},\quad Z_{a2\max}=\frac{C}{h+\Delta h}$$

两式相比得：

$$\frac{Z_{a1\max}}{Z_{a2\max}}=\frac{h+\Delta h}{h}=1+\frac{\Delta h}{h}$$

则有：

$$h=\frac{Z_{a2\max}}{Z_{a1\max}-Z_{a2\max}}\cdot\Delta h \tag{6.2.13}$$

式中，$Z_{a1\max}$、$Z_{a2\max}$分别为低平面和高平面上的极大值，Δh为高度差。

若设不同高度上$Z_{a\max}$所对应的坐标间水平距离为d，则有：

$$\cos\gamma=\frac{\Delta h^2-d^2}{\Delta h^2+d^2} \tag{6.2.14}$$

（B）斜磁化水平圆柱体

已知其形状参数$n=2$，则同样应有：

$$Z_{a1\max}=\frac{C}{R^2},\quad Z_{a2\max}=\frac{C}{(R+\Delta h)^2}$$

两式相比并稍加整理可得：

$$R=\frac{\sqrt{Z_{a2\max}}}{\sqrt{Z_{a1\max}}-\sqrt{Z_{a2\max}}}\cdot\Delta h \tag{6.2.15}$$

设不同高度上$Z_{a\max}$所对应坐标间水平距离为d，则有：

$$i_s=\mathrm{ctg}^{-1}\left(\frac{3d}{\Delta h}\right) \tag{6.2.16}$$

§6.3 规则形体磁场的反演计算方法

磁性体磁场的反演计算方法，在磁法勘探中称为定量解释。其目的就是对具体地质条件下的实测磁异常选用数学表达式进行定量计算，借以确定磁性地质体的空间位置、几何参量及磁性参量。

6.3.1 特征点法

由第五章的讨论知道，磁性体磁场的特征量和磁性体的形状、空间位置、几何参量及磁性参量密切相关。所谓特征点法，就是利用磁异常曲线上的某些特征点，如极大值点，极小值点、1/2极大值点和1/4极大值点、拐点及零值点的坐标位置和它们之间的距离，来求解磁性体的几何参量和磁性参量的一种定量解释方法。

1．几种规则形体磁场的特征点法

（1）球体

已知斜磁化球体的磁场表达式为：

$$Z_a=\frac{M_s}{(x^2+R^2)^{5/2}}[(2R^2-x^2)\sin i_s-3Rx\cos i_s]$$

分别求其极值点和零值点的坐标。

令$\frac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，则有

$$x^3\sin i_s+4Rx^2\cos i_s-4R^2x\cdot\sin i_s-R^3\cos i_s=0 \qquad (6.3.1)$$

此方程有三个根，设x_m为Z_{amax}的横坐标，即方程的一个根，另外两个根为Z_{amin}的横坐标。当$i_s>60^\circ$时，由于Z_a的极大值点偏离坐标原点较小，所以$x_m\ll R$。若以x_m代替（6.3.1）式中的x，并用R^3去除式中各项并略去x_m/R的高次项，则得：

$$\mathrm{ctg}i_s=-4\frac{x_m}{R} \qquad (6.3.2)$$

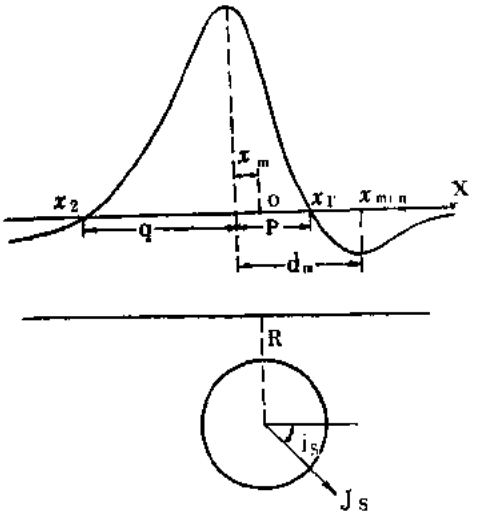


图 6.3.1 球体特征线段P、q表示图

再令$Z_a=0$，则有：

$$x_{1,2}^2+3Rx_{1,2}\mathrm{ctg}i_s-2R^2=0$$

上式中$x_{1,2}$为零值点坐标。将式中$\mathrm{ctg}i_s$用（6.3.2）式结果代入，得：

$$x_{1,2}^2-12x_{1,2}x_m-2R^2=0$$

此方程根与系数的关系为：

$$x_1\cdot x_2=-2R^2$$

$$x_1+x_2=12x_m \qquad (6.3.3)$$

式（6.3.3）虽然给出了Z_a零值点横坐标与中心埋深R的关系，但由于实测Z_a曲线的坐标原点是未知的，所以R仍为未知。为此须寻找与原点位置无关的特征线段。设x_1到x_m的线段为P，x_2到x_m的线段为q，如图6.3.1所示。

则由图可知：$x_1=P+x_m$，$x_2=x_m-q$

将其结果代入（6.3.3）式，可得方程组：

$$(P+x_m)(x_m-q)=-2R^2$$
$$(P+x_m)+(x_m-q)=12x_m$$

解此方程组得：

$$\left.\begin{aligned} R&=\frac{1}{\sqrt{2}}[P\cdot q-0.11(P-q)^2]^{1/2}\\ x_m&=\frac{P-q}{10}\end{aligned}\right\}\qquad(6.3.4)$$

由以上两式即可求得球体的中心埋深R和球体中心在地面的投影位置，即原点。求原点的方法是，在求得x_m的长度以后，由于极大值向反磁化方向偏移，可见由$Z_{a\max}$对应的横坐标点向绝对值大的那个极小值一侧量取x_m长度，便可定出原点位置。当$i_r=90°$时，有$P=q$，则$R=0.7P$。当$i_r<60°$时，由于在强度小的负值一侧的零值点变得难以确定，同时也不满足（6.3.4）式的导出条件，则不能利用$P\cdot q$点法。我们可以直接解（6.3.1）式，得极大值和明显的极小值点的横坐标$x_{\max}$和$x_{\min}$，见式（5.3.8）它们都是i_r的复杂函数并与R有关。若以d_m表示极值点坐标间的距离，则：

$$d_m=x_{\min}-x_{\max}$$
$$=2\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\operatorname{ctg}^2 i_r}\left[\cos\left(60°-\frac{\varphi}{3}\right)-\cos\left(60°+\frac{\varphi}{3}\right)\right]R$$

令：

$$2\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{16}{9}\operatorname{ctg}^2 i_r}\left[\cos\left(60°-\frac{\varphi}{3}\right)-\cos\left(60°+\frac{\varphi}{3}\right)\right]R=\frac{1}{f}$$

d与R的关系可表示为：

$$R=f\cdot d\qquad(6.3.5)$$

令$K=|Z_{a\min}|/Z_{a\max}$，当有效磁化倾角i_r一定时，K、f的值也一定，它们都随着i_r角的变化而改变其值。对于不同的i_r角，可求出一系列与它相对应的K、f值，如表6.3.1所示。具体做时，可以从实测异常曲线中量得d，并根据$Z_{a\max}$及$Z_{a\min}$求得K值，然后从表6.3.1中查出和K值相对应的f值，最后代入式（6.3.5）中计算出球体的中心埋深R。

表 6.3.1

i_s	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
k	1.00	0.53	0.29	0.15	0.10	0.04	0.02
f	1.00	0.98	0.92	0.83	0.72	0.61	0.50
ϕ	0.43	0.56	0.70	0.82	0.92	0.98	1.00

将极大值的坐标$x_{\max}$代入Z_a表达式可得：

$$Z_{a\max}=\frac{2M}{R^3}\Phi$$

式中Φ也为i_r的函数，则

$$M=\frac{1}{2}\frac{R^3 Z_{a\max}}{\Phi}\qquad(6.3.6)$$

Φ和i_s的对应关系见表6.3.1。若已知磁化强度J_s，则可求出球体的体积。

（2）水平圆柱体

与球体类似，由水平圆柱体的Za表达式出发，可得出水平圆柱体解反问题的特征点法公式。

当$i_s>60°$时，可由$P\cdot q$点法求中心埋深：

$$R=\left[P\cdot q-\frac{5}{16}(P-q)^2\right]^{1/2} \tag{6.3.7}$$

$$x_m=\frac{P-q}{4}$$

当为任意磁化时，可利用表6.3.2求解反问题。

表 6.3.2

i_s	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
K	1.00	0.74	0.54	0.39	0.30	0.19	0.13
$f(i_s)$	0.856	0.857	0.831	0.789	0.731	0.660	0.577
$\phi(i_s)$	0.650	0.744	0.830	0.901	0.955	0.989	1.00

$$K=\frac{|Z_{a\min}|}{Z_{a\max}}$$

表中：

$$R=f(i_s)\cdot d_m$$

$$M_s=\frac{1}{2}Z_{a\max}\cdot\frac{R^2}{\Phi(i_s)} \tag{6.3.8}$$

式（6.3.7）中P、q，x_m及（6.3.8）式中的d_m意义见图6.3.1和图6.3.2。

（3）无限延深薄板状体

已知斜交磁化无限延深薄极的Z_a表达式为：

$$Z_a=\frac{2J_s\cdot 2b\sin\alpha}{x^2+h^2}(h\cdot\cos\gamma-x\cdot\sin\gamma)$$

令 $\frac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，可解得$Z_a$的极值点横坐标：

$$x_{\max}=h(\operatorname{ctg}\gamma-\csc\gamma)$$

$$x_{\min}=h(\operatorname{ctg}\gamma+\csc\gamma) \tag{6.3.9}$$

将$x_{\max}$和$x_{\min}$分别代入Z_a表达式，即可求得其极大值和极小值：

$$Z_{a\max}=\frac{2J_s\cdot 2b\sin\alpha(1+\cos\gamma)}{2h}$$

$$Z_{a\min}=\frac{-2J_s\cdot 2b\sin\alpha(1-\cos\gamma)}{2h} \tag{6.3.10}$$

若记$\frac{1}{2}Z_{a\max}$所对应的横坐标为$x_{1/2}$和$x'_{1/2}$，可求得：

$$x_{1/2}=h\left[\frac{-2\sin\gamma+\sqrt{4-(1-\cos\gamma)^2}}{1+\cos\gamma}\right]$$

$$x'_{1/2}=h\left[\frac{-2\sin\gamma-\sqrt{4-(1-\cos\gamma)^2}}{1+\cos\gamma}\right] \tag{6.3.11}$$

又可求得$x_{1/2}$与$x'_{1/2}$两点间的距离$d_{1/2}$及极值点坐标间距离d_m，

$$d_{1/2}=x_{1/2}-x'_{1/2}=2h\sqrt{\frac{3-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}}$$

$$d_m=x_{\min}-x_{\max}=2h\cdot\csc\gamma$$

故有：

$$h=\frac{1}{2}\left[\frac{1+\cos\gamma}{3-\cos\gamma}\right]^{1/2}\cdot d_{1/2}=K_{1/2}\cdot d_{1/2} \tag{6.3.12}$$

$$h=\frac{1}{2}\sin\gamma\cdot d_m=f(\gamma)\cdot d_m \tag{6.3.13}$$

由（6.3.10）式可得：

$$\frac{|Z_{a\min}|}{Z_{a\max}}=\frac{1-\cos\gamma}{1+\cos\gamma}=K \tag{6.3.14}$$

极值点和$\frac{1}{2}Z_{a\max}$点之间特征线段之比：

$$\frac{x_{1/2}-x_m}{x_m-x'_{1/2}}=\frac{\sqrt{4-(1-\cos\gamma)^2}-\sin\gamma}{\sqrt{4-(1-\cos\gamma)^2}+\sin\gamma} \tag{6.3.15}$$

以上所列$K_{1/2}$、$f(\gamma)$、K和 $\frac{x_{1/2}-x_m}{x_m-x'_{1/2}}$均是$\gamma$角的函数，给$\gamma$角不同的值，即可计算出一系列相应的值，列于表6.3.3中。式（6.3.15）和表6.3.3中的x_m即$x_{\max}$。

表 6.3.3

γ	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
K	0.00	0.02	0.07	0.17	0.33	0.59	1.00
$\frac{X_{1/2}-X_m}{X_m-X_{1/2}}$	1.00	0.77	0.61	0.47	0.38	0.31	0.27
f(γ)	0.00	0.13	0.25	0.35	0.43	0.48	0.50
$K_{1/2}$	0.50	0.49	0.47	0.43	0.39	0.34	0.29

反演计算步骤为：（a）由实测Z_a曲线量得$Z_{a\max}$、$Z_{a\min}$、d_m、$d_{1/2}$和特征线段$(x_{1/2}-x_m)$、$(x_m-x_{1/2})$；（b）分别计算出K和特征线段之比值 $\frac{x_{1/2}-x_m}{x_m-x'_{1/2}}$，查表求得$\gamma$角和相应的$f(\gamma)$及$K_{1/2}$；（c）将$d_m$和$f(\gamma)$、$d_{1/2}$和$K_{1/2}$分别代入式（6.3.13）、（6.3.12）即可求出薄板上顶埋深h。当γ角较小或异常受到干扰因而极小值难以确定时，不宜用（6.3.13）式求h，而应使用（6.3.12）式。若i_r角已知，则可求得板状体倾角α；（d）用$Z_{a(0)}=Z_{a\max}+Z_{a\min}$求出薄板顶面中心在地表的投影位置。

（4）无限延深厚板状体

（A）顺层磁化情况

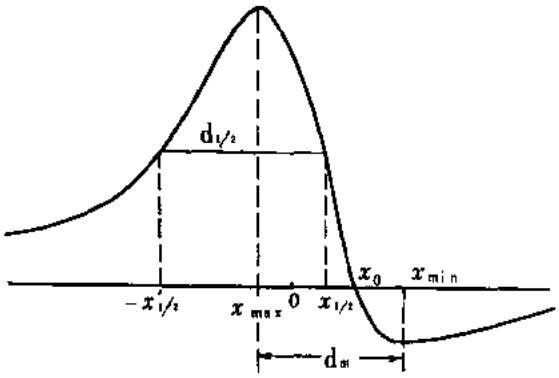


图 6.3.2 薄板Z_a曲线的特征线段

已知：

$$Z_a=2J_s\cdot\sin\alpha\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right]$$

则有：

$$Z_{amax}=4J_s\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}^{-1}\frac{b}{h} \tag{6.3.16}$$

为了求出板状体上顶的水平半宽度b及埋深h，需建立两个方程。我们选用$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$极大值点的横坐标$x_{1/2}$和$x_{1/4}$，见图6.3.3。经推导得：

$$\left.\begin{aligned} h&=\frac{x_{1/4}^2-x_{1/2}^2}{2x_{1/2}} \quad 或 \quad h=\frac{d_{1/4}^2-d_{1/2}^2}{4d_{1/2}}\\ b&=\sqrt{x_{1/2}^2-h^2} \quad 或 \quad b=\sqrt{d_{1/2}^2-4h^2}\end{aligned}\right\} \tag{6.3.17}$$

式中$d_{1/2}$、$d_{1/4}$分别为$\frac{1}{2}$和$\frac{1}{4}$极大值点坐标间距离。

若令$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}=0$，得：

$$x_{极}^2=\frac{1}{3}\left(b^2-h^2+2\sqrt{b^4+h^4+b^2h^2}\right)$$

当$b=h$时，$x_{极}\doteq 1.1b$

(6.3.18)

当$b\gg h$时，$x_{极}=b$

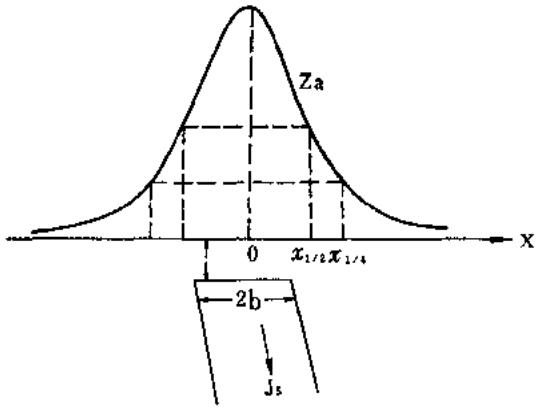


图 6.3.3 顺层磁化厚板的特征点图

在实际资料解释中，常利用（6.3.18）式给出的近似关系由Z_a曲线拐点的横坐标来确定顺层磁化厚板状体的上顶边界。

当求得h和b之后，再利用（6.3.16）式可计算出$J_s\sin\alpha$的值，若已知J_s或α中的一个，则可求出另一个。

（B）斜交磁化情况

已知其Z_a表达式为：

$$Z_a=2J_s\cdot\sin\alpha\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2}\cos\gamma+\frac{1}{2}\cdot\sin\gamma\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}\right]$$

由于表达式较复杂，我们不容易导出简单的特征点法公式，必须寻求另外的途径。由该表达式可以看出，它是由一个奇函数(记为$\varphi(x)$)和一个偶函数(记为$f(x)$)所组成。其中：

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=2J_s\sin\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\operatorname{tg}^{-1}\frac{2bh}{x^2-b^2+h^2}=Z_{a\alpha}\cos\gamma\\ \varphi(x)&=J_s\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma\cdot\ln\frac{(x-b)^2+h^2}{(x+b)^2+h^2}=H_{a\alpha}\sin\gamma\end{aligned}\right\} \tag{6.3.19}$$

式中$Z_{a//}$和$H_{a//}$分别表示顺层磁化厚板的Z_a和H_a。

则有：

$$Z_a(x)=f(x)+\varphi(x)$$
$$Z_a(-x)=f(x)-\varphi(x)$$

由上两式可得：

$$\left.\begin{aligned} f(x)&=\frac{1}{2}[Z_a(x)+Z_a(-x)]\\ \varphi(x)&=\frac{1}{2}[Z_a(x)-Z_a(-x)]\end{aligned}\right\} \tag{6.3.20}$$

式（6.3.20）表明：$f(x)$为Z_a曲线的半和曲线，$\varphi(x)$为Z_a曲线的半差曲线。只要已知Z_a曲线的原点，便可分解得到半和曲线及半差曲线，见图 6.3.4。确定原点的原理如下：

令 $\dfrac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，可得方程：

$$x^2-2hx\cdot\mathrm{ctg}\gamma-(b^2+h^2)=0$$

解此方程则可得：

$$\begin{aligned} x_{max}&=h\cdot\mathrm{ctg}\gamma-\sqrt{(h\mathrm{csc}\gamma)^2+b^2}\\ x_{min}&=h\cdot\mathrm{ctg}\gamma+\sqrt{(h\cdot\mathrm{csc}\gamma)^2+b^2}\end{aligned} \tag{6.3.21}$$

以x_{max}和x_{min}分别代入Z_a表达式，经运算可证得：

$$Z_{amax}+Z_{amin}=2J_s\sin\alpha\cdot\cos\gamma\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{h^2-b^2}=Z_a(0) \tag{6.3.22}$$

由实测Z_a曲线可得Z_{amax}、Z_{amin}，再利用上式求出$Z_a(0)$值，进而便可确定出原点位置（也即厚板顶面中心在地面的投影位置）。

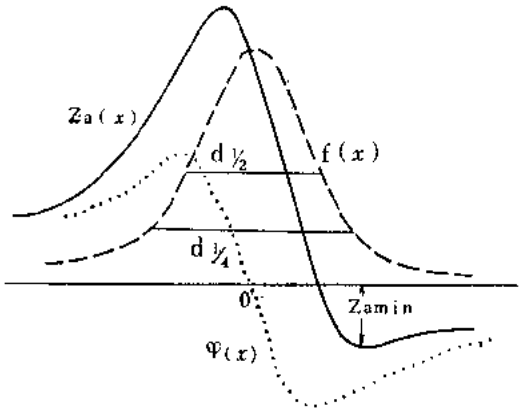


图 6.3.4 厚板Z_a异常曲线的分解

由上面的讨论可以看出，半和曲线（或半差曲线）具有和顺层磁化条件下的Z_a曲线（或H_a曲线）完全相同的形态特征，仅强度相差$\cos\gamma$倍（或$\sin\gamma$倍）。所以，对半和曲线（或半差曲线），可以用顺层磁化Z_a异常（或H_a异常）的计算公式进行解释，求得的几何参量就是板状体的几何参量，而求出的磁化强度则为$J_{s//}$（或$J_{s\perp}$），即有效磁化强度在平行板的侧面方向上（或垂直板的侧面方向上）的分量。这样就使得难于进行直接解释的斜交磁化条件下的异常变得容易解释。人们通常把这种方法称为分解曲线法。

利用半和曲线在求得h和b之后，还可用下式求得γ角。

$$\because\quad d_m=x_{min}-x_{max}=2\sqrt{(h\mathrm{csc}\gamma)^2+b^2}$$

$$\therefore\quad \mathrm{csc}^2\gamma=\frac{1}{4h^2}(d_m^2-4b^2) \tag{6.3.23}$$

若已知i_s，则进一步可求出厚板状体的倾角α和J_s。

从以上列举的几种形体可见，特征点法的计算公式，都是在对正问题中所得的不同形

状磁性体的磁场表达式进行分析的基础上得出的，所以有的文献上又称之为分析法。显见，特征点法的应用条件，就是正演公式推导时所假设的条件。这种方法具有简单、快速的特点。但是须事先大致估计磁性体的形状，并要求特征点明显、不受干扰和正常场选择准确。

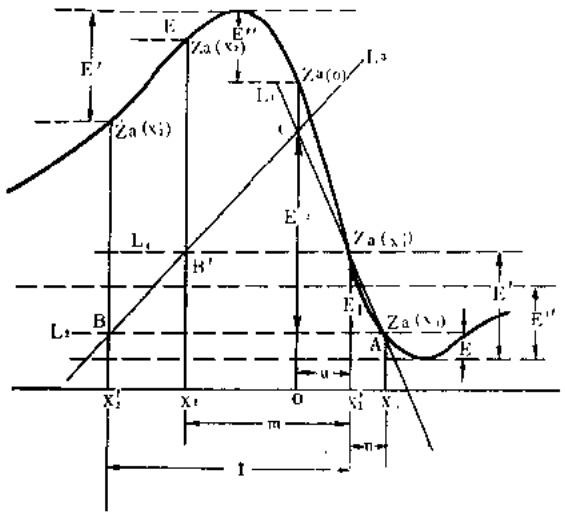


图 6.3.5 共轭点法求原点

2．共轭点法确定原点

无论是二度薄板状体还是厚板状体，均有下面关系式成立：

$$Z_a(0)=Z_{a\max}+Z_{a\min}$$

$$\Delta T(0)=\Delta T_{\max}+\Delta T_{\min}$$

直接利用此关系式确定坐标原点的位置是很简便，但受正常场选择的影响颇大。而共轭点法则是不受正常场选择影响的确定原点的方法，其作法如图6.3.5。在Z_a曲线极大值两侧找两对场值的共轭点，分别从极大值和极小值点起算，其对应的坐标为x_2、x'_2和x_1、x'_1，即有：

$$Z_a(x_2)=Z_{a\max}-E,\quad Z_a(x'_2)=Z_{a\max}-E',$$

$$Z_a(x)=Z_{a\min}+E,\quad Z_a(x'_1)=Z_{a\min}+E';$$

（1）计算法确定原点：

令共轭点坐标之间的距离为：

$$\overline{x'_1x'_2}=l,\quad \overline{x'_1x_2}=m,\quad \overline{x_1x'_1}=n;$$

由下式计算：

$$x_1=\frac{n(l+n)}{l-m+n}\tag{6.3.21}$$

求得x_1长度后，由x_1点向极大值方向截取x_1长度，即为原点位置。

（2）作图法确定原点：

连结$Z_a(x_1)$和$Z_a(x'_1)$得直线L_1；过$Z_a(x_1)$和$Z_a(x'_1)$作两条与x轴平行的直线L_2和L_4，分别与过$Z_a(x'_2)$和$Z_a(x_2)$所做的两条垂线交于B和B'，再连结B和B'得直线L_3，L_3与L_1交于一点C；由C点做x轴的垂线，其垂足即为原点位置。

（3）对上述两种方法作简要证明：

对于走向、延深都很大的厚板状体，已知：$Z_a(x)=f(x)+\varphi(x)$

其中$f(x)$对称于纵轴，在$x=0$处有极大值$f(0)=2J_s\sin\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{h^2-b^2}$。$\varphi(x)$对称于原点，在$x=0$处有$\varphi(0)=0$。

因x_1和x_2为一对共轭点，所以有：

$$Z_a(x_1)+Z_a(x_2)=Z_{a\min}+E+Z_{a\max}-E$$

$$=Z_{a\max}+Z_{a\min}=Z_a(0)$$

由Z_a的构成特点有：

$$Z_a(x_1)+Z_a(x_2)=f(x_1)+f(x_2)+\varphi(x_1)+\varphi(x_2)=Z_a(0)$$

而且 $Z_a(0)=f(0)+\varphi(0)$

比较上面两式可得如下关系式：

$$\begin{cases} f(x_1)+f(x_2)=f(0) \\ \varphi(x_1)+\varphi(x_2)=\varphi(0) \end{cases} \tag{6.3.25}$$

将上式改写并化简得：

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{x_1^2-b^2+h^2}+\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{x_2^2-b^2+h^2}=\mathrm{tg}^{-1}\frac{2bh}{h^2-b^2} \tag{6.3.26}$$

$$\ln\frac{(x_1-b)^2+h^2}{(x_1+b)^2+h^2}+\ln\frac{(x_2-b)^2+h^2}{(x_2+b)+h^2}=0 \tag{6.3.27}$$

解（6.3.26）式得：$x_1\cdot x_2=\pm(h^2+b^2)$

解（6.3.27）式得：$x_1=-x_2$，$x_1\cdot x_2=-(h^2+b^2)$

可见满足（6.3.25）式的共同条件是：

$$x_1\cdot x_2=-(h^2+b^2) \tag{6.3.28}$$

同理可证得另一对共轭点x_1'和x_2'也有

$$x_1'\cdot x_2'=-(h^2+b^2)$$

故

$$x_1\cdot x_2=x_1'\cdot x_2' \tag{6.3.29}$$

由图可见：

$$x_1=n+u,\quad x_2=u-m$$

$$x_1'=u,\quad x_2'=u-l$$

将这些结果代入式（6.3.29），即可解得：

$$u=\frac{nm}{l-m+n} \tag{6.3.30}$$

所以：

$$x_1=n+u=\frac{n(l+n)}{l-m+n}$$

对作图法，由相似三角形可证：

$$\frac{E_1}{E_2}=\frac{n}{n+u},\quad \frac{E_1}{E_2}=\frac{l-m}{l-u};$$

所以容易得：

$$u=\frac{nm}{l-m+n}$$

此式与（6.3.30）式相同，说明使用作图法也可求得原点（$x=0$）的位置。

（4）共轭点法的应用：

当磁测剖面并非足够长而正常场选择又不准时，利用共轭点法可以迅速确定出原点位置，以便进行实测曲线的分解。另外，在确定了原点之后，便可得$Z_a(0)$的值，进而可由实测异常曲线定出 $Z_a=0$的线，达到了正常场改正之目的，即利用图中 E'' 可以定出 $Z_a=0$ 的线。但是，当异常曲线极小值受干扰时，此方法难以使用或确定出的原点位置误差较大。

3．对称背斜的反演计算方法

已知斜磁化无限延深对称背斜的磁场表达式为：

$$Z_a=-2J_s\sin2\alpha\left[\cos i_s\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+Hh}+\frac{1}{2}\cdot\sin i_s\cdot\ln\frac{x^2+h^2}{x^2+H^2}\right]$$

$$H_a=2J_s\sin2\alpha\left[-\sin i_s\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+Hh}+\frac{1}{2}\cos i_s\cdot\ln\frac{x^2+h^2}{x^2+H^2}\right]$$

式中所用符号的意义见图6.3.6。此二表达式也较为复杂，要想由它们导出简单的特征点法计算公式也是困难的。但分析此二表达式可知，它们同样也是由一个偶函数和一个奇函数所构成，所以仍可使用分解曲线法来求解。在分解曲线时，可以利用磁异常总强度矢量的模量Ta曲线的极大值位置来确定原点，其原理后面要讨论。

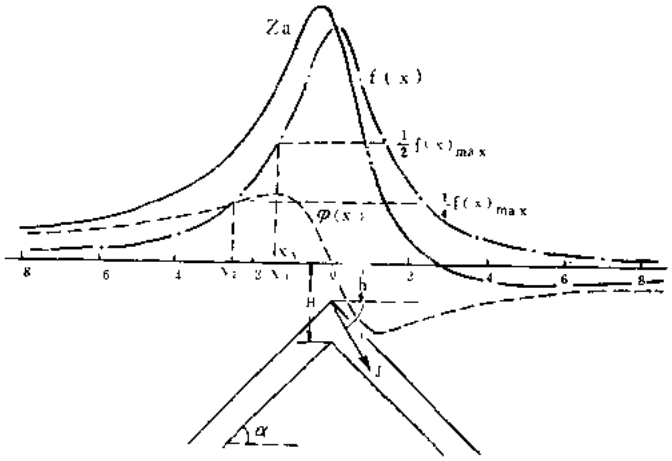


图 6.3.6　对称背斜的$f(x)$、$\varphi(x)$曲线的特征线段

由Z_a、H_a的表达式求得相应的T_a为：

$$T_a=\sqrt{Z_a^2+H_a^2}=2J_s\sin2\alpha\left\{\left[\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+Hh}\right]^2+\frac{1}{4}\left[\ln\frac{x^2+h^2}{x^2+H^2}\right]^2\right\}^{1/2}$$

由上式可见，T_a为偶函数，因此T_a曲线对称于坐标纵轴，极大值的位置就是原点的位置。

由对称背斜的Z_a曲线分解得出的半和曲线$f(x)$和半差曲线$\varphi(x)$的表达式为：

$$f(x)=J_s\cdot\sin i_s\cdot\sin2\alpha\cdot\ln\frac{x^2+H^2}{x^2+h^2}$$

$$\varphi(x)=-2J_s\cos i_s\sin2\alpha\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{x(H-h)}{x^2+Hh}$$

在$x=0$（即原点）处，$f(x)$取极大值：

$$f(x)_{max}=f(0)=2J_s\cdot\sin i_s\cdot\sin2\alpha\ln\frac{H}{h}\qquad(6.3.31)$$

若记 $\frac{1}{2}f(x)_{max}$ 和$\frac{1}{4}f(x)_{max}$ 的横坐标为x_1和x_2，则进一步可求出：

$$x_1=\pm\sqrt{Hh},\quad x_2^2=\sqrt{Hh}\ (\sqrt{Hh}+H+h)\qquad(6.3.32)$$

若记$\varphi(x)_{max}$的横坐标为x_3，则令$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}=0$，可求出：　　$x_3=\pm\sqrt{Hh}$　　(6.3.32)′

应用Z_a及H_a曲线，令 $\frac{\partial Z_a}{\partial x}=0$、$\frac{\partial H_a}{\partial x}=0$，可分别求出$Z_a$曲线极值点坐标$x_{zmax}$、$x_{zmin}$和$H_a$曲线极值点坐标$x_{Hmax}$和$x_{Hmin}$：

$$\left.\begin{aligned} x_{zmax}&=\frac{1}{2}(H+h)\,\mathrm{tg}i_s-\frac{1}{2}[(H+h)^2\mathrm{tg}^2i_s+4Hh]^{1/2}\\ x_{zmin}&=\frac{1}{2}(H-h)\,\mathrm{tg}i_s+\frac{1}{2}[(H+h)^2\mathrm{tg}^2i_s+4Hh]^{1/2}\end{aligned}\right\}\tag{6.3.33}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{Hmax}&=-\frac{1}{2}(H+h)\,\mathrm{ctg}\,i_s-\frac{1}{2}[(H+h)^2\mathrm{ctg}^2i_s+4Hh]^{1/2}\\ x_{Hmin}&=-\frac{1}{2}(H+h)\,\mathrm{ctg}\,i_s+\frac{1}{2}[(H+h)^2\mathrm{ctg}^2i_s+4Hh]^{1/2}\end{aligned}\right\}\tag{6.3.34}$$

利用上面求得的特征点坐标，可以导出计算h、H、i_s、α、和J_s的反演公式。

方法1：利用Z_a和H_a的特征点坐标

令：$\frac{1}{2}[-(x_{zmax}+x_{zmin})\ (x_{Hmax}+x_{Hmin})]^{1/2}=\frac{1}{2}(H+h)=A$，

再令：$-x_{zmax}\cdot x_{zmin}=-x_{Hmax}\cdot x_{Hmin}=Hh=B$；

则有：
$$h=A-\sqrt{A^2-B}\tag{6.3.35}$$
$$H=2A-h=A+\sqrt{A^2-B}\tag{6.3.36}$$

在原点（$x=0$）处：

$$Z_a(0)=f(0)=2J_s\sin i_s\cdot\sin 2\alpha\ln\frac{H}{h}$$

$$H_a(0)=-2J_s\cos i_s\cdot\sin 2\alpha\ln\frac{H}{h}$$

则有：
$$i_s=\mathrm{tg}^{-1}[-Z_a(0)/H_a(0)]\tag{6.3.37}$$
$$J_s\sin 2\alpha=\frac{Z_a(0)}{2\sin i_s\ln\frac{H}{h}}\tag{6.3.38}$$

若已知J_s、α其中之一，则可求出另一个量。

方法2：利用$f(x)$的1/2和1/4极大值点坐标

将x_1的表达式代入x_2中，经整理后得：

$$H+h=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1},$$

又∵
$$x_1^2=Hh$$

∴
$$\left[\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{x_1}\right)^2-4x_1^2\right]^{1/2}=\frac{\sqrt{x_2^4-2x_1^2x_2^2-3x_1^4}}{x_1}=H-h$$

解上面的式子，即可分别求得h和H，

$$h=\frac{x_2^2-x_1^2-\sqrt{x_2^4-2x_1^2x_2^2-3x_1^4}}{2x_1}\tag{6.3.39}$$

$$H=\frac{x_2^2-x_1^2+\sqrt{x_2^4-2x_1^2x_2^2-3x_1^4}}{2x_1}\tag{6.3.40}$$

6.3.2 切线法

切线法是利用过异常曲线上的一些特征点的切线之交点坐标间的关系来计算磁性体产状要素的方法。有时配合使用某些特征点上的异常强度还可计算磁性体的磁化强度。这种方法计算简便快速，受正常场选择影响小。在航磁ΔT异常的定量解释中应用十分广泛。

开始，切线法只是一种近似的经验方法，后来经过研究，已发展成为一种有理论基础的定量计算方法。

1．经验切线法

如图6.3.7所示，过Z_a曲线极大值两侧的拐点作两条切线，它们与过曲线极大值点和

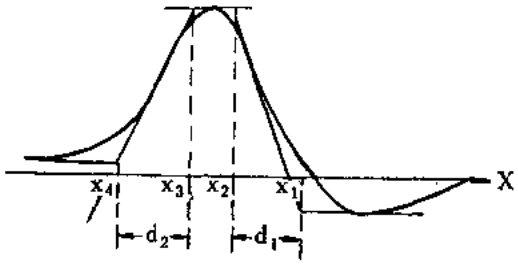


图 6.3.7 经验切线法图示

极小值点的切线有四个交点，其坐标分别为x_2、x_3和x_1、x_4，则有求埋深h的经验公式：

$$h=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(x_3-x_4)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right) \tag{6.3.41}$$

当Z_a曲线两翼对称时，则有$d_1=d_2$，这时经验公式为

$$h=\frac{1}{2}(x_1-x_2) \tag{6.3.42}$$

当异常曲线无极小值时，可用x坐标轴来代替过极小值点的切线。

用理论曲线进行实际计算的结果表明：上述经验方法，对于顺层磁化无限延深的板状体（当b=h时）或垂直磁化有限延深直立板状体（当$b=h$，$2l>2h$时），一般能得到较好的效果，而对其它二度体及三度体效果均较差。为提高切线法的计算精度，人们在理论研究的基础上提出了带校正系数的切线法。

2．带校正系数的切线法

（1）无限延深厚板状体

当板状体直立且为顺层磁化时，其Z_a表达式为：

$$Z_a=2J_1\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{x+b}{h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{x-b}{h}\right]$$

分别求Z_a对x的一次和二次偏导数：

$$\frac{\partial Z_a}{\partial x}=Z'_{ax}=2J_1\left\{\frac{h}{h^2+(x+b)^2}-\frac{h}{h^2+(x-b)^2}\right\}$$

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}=Z''_{axx}=2J_1\left\{\frac{2h(x-b)}{[h^2+(x-b)^2]^2}-\frac{2h(x+b)}{[h^2+(x+b)^2]^2}\right\}$$

在拐点处，$Z''_{axx}=0$，则有$3x^4+2(h^2-b^2)x^2-(h^2+b^2)^2=0$

解得：

$$x_3=\pm\sqrt{\frac{b^2-h^2+2\sqrt{b^4+b^2h^2+h^4}}{3}} \tag{6.3.43}$$

将拐点坐标x_3分别代入Z_a和Z'_{ax}的表达式中，可得拐点处的场值Z_{a3}和曲线的最大斜率$(Z'_{ax})_{max}$。若使x和b均以h为单位，则可求得系数：

$$K_0=\frac{x_3}{h},\quad K_5=\frac{Z_{a3}}{J_z},\quad K_6=\frac{|(Z'_{ax})_{max}|h}{J_z},\tag{6.3.44}$$

又因 $Z_{amax}=4J_z\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{h}$，

则有：

$$K_4=\frac{Z_{amax}}{J_z}=4\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{h}\tag{6.3.45}$$

利用点斜式可列出拐点处的切线方程：

$$Z_a^*-Z_{a3}=(Z'_{ax})_{max}(x-x_3)\tag{6.3.46}$$

Z_a^*为切线上任意点的纵坐标，x为相应的横坐标。这时过拐点的切线与过极大值点的切线$Z_a=Z_{amax}$及直线$Z_a=0$分别交于x_2和x_1两点，见图6.3.8.(*a*)。

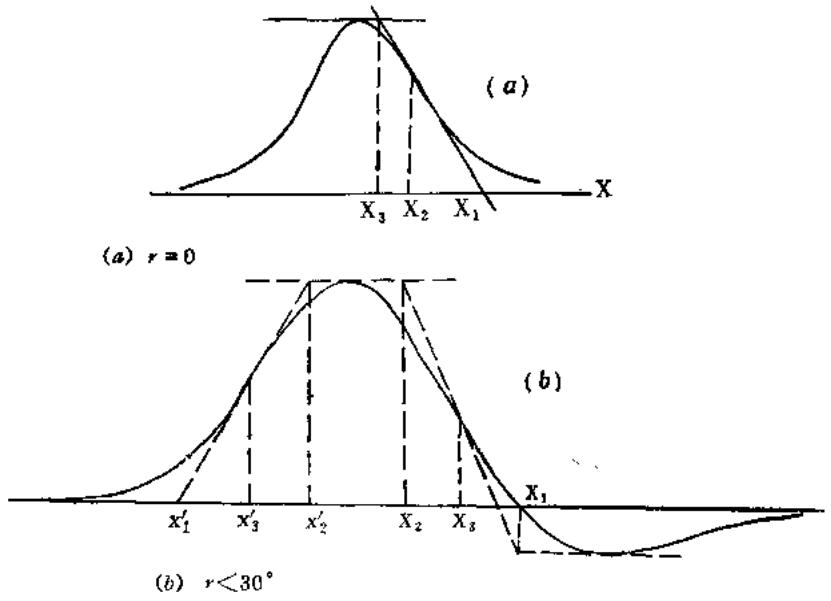


图 6.3.8 无限延深厚板的切线法

以$Z_a=0$代入（6.3.46）式便可求得x_1：

$$-Z_{a3}=(Z'_{ax})_{max}(x_1-x_3)$$

$$K_1=\frac{x_1}{h}=\frac{x_3}{h}+\frac{Z_{a3}}{|(Z'_{ax})_{max}|\cdot h}\tag{6.3.47}$$

再以 $Z_a=Z_{amax}=4J_z\mathrm{tg}^{-1}\frac{b}{h}$ 代入（6.3.46）式，可得x_2的坐标。

$$K_2=\frac{x_2}{h}=\frac{x_3}{h}+\frac{Z_{a3}-Z_{amax}}{|(Z'_{ax})_{max}|\cdot h}\tag{6.3.48}$$

由上面两式又可求出特征线段(x_1-x_2)。

$$K_3=\frac{x_1-x_2}{h}=\frac{Z_{amax}}{|(Z'_{ax})_{max}|\cdot h}\tag{6.3.49}$$

并令： $K_7=\frac{x_1-x_2}{x_2}$ (6.3.50)

当$b=h=1$时，分别代入（6.3.44)～(6.3.50）各式，即可得到一系列与其相应的系数：

$$K_0=\frac{x_3}{h}=1.08,\quad K_1=\frac{x_1}{h}=2.36,$$

$$K_2=\frac{x_2}{h}=0.42,\quad K_3=\frac{x_1-x_2}{h}=1.94,$$

$$K_4=\frac{Z_{amax}}{J_s}=3.14,\quad K_5=\frac{Z_{a3}}{J_s}=2.08,$$

$$K_6=\frac{(Z'_{ax})_{max}\cdot h}{J_s}=1.62,\quad K_7=\frac{x_1-x_2}{x_2}=4.60;$$

类似地给定不同的b/h值，可求出切线法的整套系数数据，见表6.3.4。

表 6.3.4

系数	K_0	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
$\frac{b}{h}$	$\frac{x_3}{h}$	$\frac{x_1}{h}$	$\frac{x_2}{h}$	$\frac{x_1-x_2}{h}$	$\frac{Z_{amax}}{J_s}$	$\frac{Z_{a3}}{J_s}$	$\frac{(Z_{ax}')_{max}h}{J_s}$	$\frac{x_1-x_2}{x_2}$
0.1	0.58	1.74	0.16	1.54	0.41	0.30	0.26	9.63
0.5	0.71	1.95	0.25	1.70	1.86	1.36	1.10	6.80
1.0	1.08	2.36	0.42	1.93	3.14	2.08	1.62	4.60
2.0	2.00	3.40	1.10	2.39	4.40	2.66	1.88	2.17
3.0	3.00	4.45	1.90	2.54	4.95	2.80	1.93	1.34
4.0	4.00	5.45	2.76	2.72	5.32	2.88	1.96	0.99
5.0	5.00	6.50	3.73	2.80	5.48	2.96	1.98	0.75
8.0	8.00	9.50	6.60	2.90	5.76	3.00	1.99	0.44
10.0	10.00	11.50	8.56	2.96	5.92	3.05	2.00	0.35

表中的数据是根据煍层磁化无限延深直立厚板状体的磁场表达式计算而得的。实际中经常遇到斜交磁化的情况，当$\gamma<30°$时，实测异常曲线已表现出不对称特征，这时可先将曲线两边的特征线段取平均值，然后再利用此表进行计算，其误差在15%～20%；若$\gamma>30°$，曲线则明显不对称，可先利用分解曲线法求得$f(x)$曲线，而后再对$f(x)$曲线用此表求解。使用此表作切线法的步骤是：(*a*) 在异常曲线上，按图6.3.8.(*b*)做切线，定出点x_1、x'_1、x_2、x'_2、x_3和x'_3的位置，查出Z_{amax}和Z_{a3}的值，并求出各特征线段的平均值$\overline{X_1-X_2}$、$\bar{x}$、$\bar{x}_2$和$\bar{x}_3$；(*b*) 求出K_7的值，查表确定b/h及K_0、K_1、K_2、K_3、K_4、K_5和K_6的值，如所求之值介于表中数据之间可用内插法求取；(*c*) 利用K_0、K_1、K_2和K_3求h，如$h=\frac{\overline{X_1-X_2}}{K_3}$；(*d*) 由查得的$b/h$值乘以计算出的$h$即得板顶的水平半宽度b；(*e*) 利用$K_4$和$K_5$计算有效磁化强度$J_s$，如 $J_s=\frac{Z_{amax}}{K_4}$或$J_s=\frac{Z_{a3}}{K_5}$。

实际使用切线法时，也可将表6.3.4中的各项系数绘制成K与b/h的关系曲线，然后用查列线图代替查表，避免了内插问题。

（2）走向有限、延深有限的磁性体

这种磁性体的异常曲线，一般是两侧有负值，作切线的方法如图6.3.9所示，利用下面的表6.3.5配合式（6.3.51）求磁性体的中心埋深R、半宽度b及磁化强度J_r。

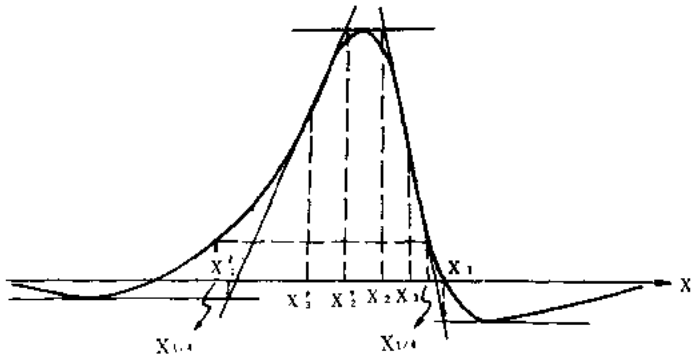


图 6.3.9 有限延深板状体的切线法

表 6.3.5

$\frac{b}{R}$	K_1	K_2	K_3	$\frac{x_1-x_2}{x_2}$
0.1	1.50	1.0	0.3	8.8
0.5	1.70	1.1	1.6	6.2
1.0	2.00	1.3	2.6	4.0
2.0	2.30	1.7	3.4	1.8
3.0	2.45	1.75	3.5	1.1
4.0	2.60	1.80	3.55	0.70

$$R=\frac{(x_1-x_2)^2}{K_1(x_{1/4}-x_2)};\quad R=\frac{(x_1-x_2)^2}{K_2(x_{1/10}-x_2)};\quad J_r=\frac{Z_{a\max}-Z_{a\min}}{K_3};\qquad (6.3.51)$$

式中$x_{1/4}$和$x_{1/10}$分别为由极小值起算的异常曲线全幅值的1/4和1/10所对应的横坐标。用此方法求得的R的计算误差与磁性体的下延长度l、走向长度L有关，若$l<R$或$L<R$，则误差可达35%，当$l=R$时，误差达10%，而当$l>2R$时，一般误差小于5%。

对其它规则形体，如水平圆柱体或球体等均可用同样方法求解，仅是校正系数值不同，这里不再详述。

6.3.3 积分法

积分法是针对各种规则形体，利用其Z_a、H_a异常曲线和x轴之间所围的面积、部分面积或其它型如$\int x^m Z_a dx$的积分，来计算磁性体的产状要素和磁性参量的方法。它的优点在于充分利用了整条异常曲线上的场值，避免了个别测点上异常的测量误差和干扰的影响。但该方法要求正常场选择准确，剖面要足够长、并且事先要对磁性体的形状有一定的估计，以便正确选用计算公式。

1．计算埋藏深度

通常利用异常曲线与x轴所围面积Q和$Z_{a\max}$之比值，它和埋深h有如下关系：

$$h=\frac{Q}{Z_{a\max}}\cdot K \qquad (6.3.52)$$

式中：Q为Z_a曲线与x轴所围的全面积或部分面积，K为和磁性体形状及磁化强度有关的系数。

由前章所给出的斜交磁化无限延深薄板状体的Z_a表达式可求得其极大值为：

$$Z_{amax}=2J_s\cdot 2b\sin\alpha\frac{1+\cos\gamma}{2h}$$

还可求得：

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}Z_a dx=2J_s\cdot 2b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\pi$$

则有：

$$h=\frac{Q}{Z_{amax}}\cdot\frac{(1+\sec\gamma)}{2\pi}=\frac{Q}{Z_{amax}}\cdot K(\gamma)\qquad(6.3.53)$$

根据不同的γ角事先可算得相应的$K(\gamma)$并列入表6.3.6。

表 6.3.6

γ	0°	15°	30°	45°	60°	75°
$K(\gamma)$	0.318	0.324	0.343	0.384	0.477	0.774
$K_0(\gamma)$	0.32	0.39	0.51	0.77	1.43	1.64

此方法用起来有困难，因积分限为（$-\infty$，∞），面积$Q=Q_{(+)}-|Q_{(-)}|$不易求准，会引起算出来的h有误差。为了减小误差，可采用Z_a曲线与x轴所围的部分面积求h，如图6.3.10所示。当$Z_a=0$时，可得零值点坐标$x_0=h\cdot\mathrm{ctg}\gamma$，并把$x_0$记为$x_{01}$，而在原点的另一侧取一点，记作$x_{02}$，要求$|x_{02}|=x_{01}$，只要原点位置已知，$x_{02}$点的位置即可定出。$Z_a$曲线与$x$轴在（$x_{02}$，$x_{01}$）区间所围成的面积为：

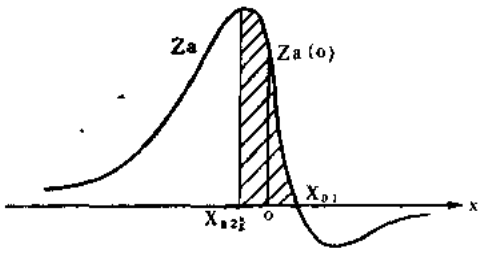


图 6.3.10 部分积分法图解

$$Q_{(部分)}=\int_{-h\mathrm{ctg}\gamma}^{h\mathrm{ctg}\gamma}Z_a dx=2J_s\cdot 2b\cdot\sin\alpha(\pi-2\gamma)\cdot\cos\gamma$$

则有：

$$h=\frac{Q_{(部分)}}{Z_{amax}}\cdot\frac{1+\sec\gamma}{2(\pi-2\gamma)}=\frac{Q_{(部分)}}{Z_{amax}}\cdot K_0(\gamma)\qquad(6.3.54)$$

对不同γ角所相应的$K_0(\gamma)$值如表6.3.6所列。γ角可由表6.3.3或其它方法求得。

由（6.3.54）式可导出利用不同高度的方法来避开$K(\gamma)$求h，并能进一步求γ角。

$$h=\frac{Q^{(1)}_{(部分)}\cdot Z^{(2)}_{amax}}{Q^{(2)}_{(部分)}\cdot Z^{(1)}_{amax}-Q^{(1)}_{(部分)}\cdot Z^{(2)}_{amax}}\cdot\Delta h\qquad(6.3.55)$$

式中右上角标（1）、（2）分别表示低平面和高平面上的面积或极大值。对斜磁化水平圆柱体也可采用与上述方法相同的推导，得到类似于（6.3.54）和（6.3.55）的式子，不同的仅是：面积为$Q_{(+)}$，系数K决定于i，（见表6.3.7），而计算结果则是水平圆柱体的中心埋

表 6.3.7

i_a	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°
$K(i_a)$	1.00	0.99	0.98	0.96	0.92	0.86	0.75	0.54

深R_0。

2．计算二度体磁矩和磁化倾角

（1）计算二度无限延深板状体的磁化特征角（γ）

由斜交磁化无限延深薄板的磁场表达式可得：

$$Q_{Z_a}=\int_{-\infty}^{\infty}Z_a dx=4\pi J_t h\cdot\sin\alpha\cdot\cos\gamma$$

$$Q_{H_a}=\int_{-\infty}^{\infty}H_a dx=-4\pi J_t h\cdot\sin\alpha\cdot\sin\gamma$$

所以有：

$$\gamma=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\int_{-\infty}^{\infty}H_a dx}{\int_{-\infty}^{\infty}Z_a dx}=-\mathrm{tg}^{-1}\frac{Q_{H_a}}{Q_{Z_a}} \tag{6.3.56}$$

可以证明（6.3.56）也适用于斜交磁化无限延深厚板状体。

（2）计算任意二度体的磁矩及磁化倾角

利用$\int_{-\infty}^{\infty}xZ_a dx$及$\int_{-\infty}^{\infty}xH_a dx$的积分形式，可以证明对任意形状二度体存在如下关系：

$$\int_{-\infty}^{\infty}xZ_a dx=-2\pi M_x,\quad \int_{-\infty}^{\infty}xH_a dx=-2\pi M_z$$

则有：

$$M_x=\frac{-1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot Z_a dx,\quad M_z=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}xH_a dx \tag{6.3.57}$$

故可求出二度体的截面磁矩M_t和磁化倾角i_t：

$$M_t=\sqrt{M_x^2+M_y^2}$$

$$\mathrm{tg}i_t=\frac{M_z}{M_x}=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}xH_a dx}{\int_{-\infty}^{\infty}xZ_a dx} \tag{6.3.58}$$

上述积分需在无限长剖面上进行计算，这在实际上是难以做到的。在金属矿区，由于干扰及相邻磁性体影响，积分只能在一定范围内进行，因此，需要考虑远处积分校正的问题。若积分在区间$[-L,\ L]$内进行，则

$$M_x=-\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}xZ_a dx+A_0$$

$$M_x=-\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}x\cdot H_a dx+A_x$$

式中的A_x和A_z称为场值积分的远处改正项，其相应的表达式为：

$$A_x=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-L}x\cdot Z_a dx+\int_{L}^{\infty}x\cdot Z_a dx\right)$$

$$A_z=-\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{-L}x\cdot H_a dx+\int_{L}^{\infty}x\cdot H_a dx\right)$$

当x很大时，对于向下延深有限的磁性体，可以假定其磁异常的特点与水平圆柱体的磁异常相似，故可用水平圆柱体的磁场表达式来求A_x和A_z的值。

当$x>R$时，可将$x\cdot Z_a$按$(R/x)^n$展开，并只取n≤3的项、则有：

$$x\cdot Z_a\doteq\frac{6R^2M_x}{x^3}-\frac{4RM_x}{x^2}-\frac{2M_z}{x}$$

这时对上式积分的远处校正值为：

$$A_x=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{-L}x\cdot Z_a dx+\int_{L}^{\infty}x\cdot Z_a dx\right]=\frac{4RM_x}{\pi L}$$

同理可得对$x\cdot H_a$积分的远处校正值为：

$$A_z=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{-L}x\cdot H_a dx+\int_{L}^{\infty}x\cdot H_a dx\right]=\frac{4RM_z}{\pi L}$$

故经远处校正后的M_x和M_z应为

$$M_x=-\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-L}^{L}xZ_a dx+\int_{-\infty}^{-L}x\cdot Z_a dx+\int_{L}^{\infty}x\cdot Z_a dx\right]$$

$$=-\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}x\cdot Z_a dx+\frac{4R}{\pi L}M_x$$

得

$$M_x=\frac{-\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}x\cdot Z_a dx}{1-\frac{4R}{\pi L}} \tag{6.3.59}$$

同理有：

$$M_z=\frac{-\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L}x\cdot H_a dx}{1-\frac{4R}{\pi L}} \tag{6.3.60}$$

式中的R为磁性体的中心埋深，可通过其它方法求得。将得到的M_x和M_z代入（6.3.58）式中，便能求出二度体的截面磁矩M_t。由于$M_t=J_t\cdot S$，在已知S或J_t的情况下，还可求出J_t或S。对于有效磁化倾角i_t，可直接由区间$[-L,\ L]$内的积分之比来求得。

实际作时，对上述两式中的积分可代为求和的形式，即：

$$\int_{-L}^{L}x\cdot Z_a dx=\Delta x\sum_{i=-n}^{n}x_i Z_a(x_i)$$

$$\int_{-L}^{L} x \cdot H_a dx = \Delta x \sum_{i=-n}^{n} x_i \cdot H_a(x_i) \tag{6.3.61}$$

式中：Δx为采样间隔；$\pm n$为左右两端的采样点号，$n=L/\Delta x$；x_i为第 i 个采样点的横坐标；$Z_a(x_i)$和$H_a(x_i)$分别为第 i 个采样点的Z_a和H_a值。

对式（6.3.61）计算时，列表求和是方便可行的。但要注意积分区间的中点、即坐标原点不能任意选择，而应选在磁性体重心（即磁矩中心）在地表的投影点上，其近似位置可利用T_a曲线确定。对水平圆柱体，T 曲线是对称的。对向下延深有限的磁性体，随着$|x|$的增大其对称性将增强。将所有T_a相等的两点之中点连成一线，则该连线与 x 轴的交点即近似为磁性体重心在地表的投影位置，参看图6.3.11。

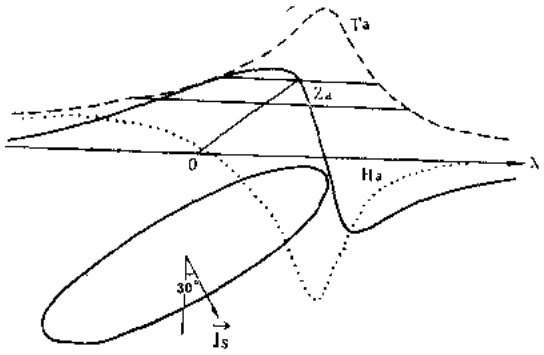


图 6.3.11 有限延深磁性体重心位置确定

6.3.4 矢量法

用磁异常矢量的强度、方向及其分布规律求解磁性体几何参量和磁性参量的方法称为矢量法。按使用方法的不同，可分为矢量交会法、矢量轨迹法、矢量倾角法、矢量强度空间等值线量板法及矢量强度比值圆交会法等。这些矢量法解释异常一般具有三个方面的特点：除了矢量交会法以外，多数矢量解释法都适用于任意磁化方向、起伏地形上磁测资料的直接解释；矢量法解释异常，大都使用图解法，从实测剖面图上直接确定磁性体的产状要素等，免除了繁琐的计算；矢量解释法一般可确定多种参数，如上顶埋深、中心埋深或下底埋深、板状体的倾角及磁化强度的方向等。但矢量法受磁性体形状和正常场的影响较大，还需用水平磁异常的数据，在使用前应对磁性体形状和正常场进行正确的估计。

本节只介绍T_a矢量交会法和矢量强度T_a的比值圆交会法，而对其它的矢量法可参阅有关的文献资料。

1. T_a矢量交会法

这种方法是利用磁异常矢量T_a的方向作图，以求得磁性体的几何参量和磁性参量。在剖面上，磁异常矢量$T_a=Z_a+H_a$。

（1）单磁极和单极线

单磁极：

已知 $$Z_a=\frac{mh}{(x^2+h^2)^{3/2}},\quad H_a=\frac{-mx}{(x^2+h^2)^{3/2}},$$

现以极坐标表示，令$x=r\sin\theta$，$h=r\cos\theta$，则有：

$$Z_a=\frac{m}{r^2}\cos\theta,\quad H_a=-\frac{m}{r^2}\sin\theta;$$

因而有：

$$-\frac{H_a}{Z_a}=\operatorname{tg}\theta \tag{6.3.62}$$

单极线：

已知 $$Z_a=2\sigma\cdot 2b\frac{h}{x^2+h^2},\quad H_a=-2\sigma\cdot 2b\frac{x}{x^2+h^2};$$

以极坐标表示为：

$$Z_a=2\sigma\cdot 2b\frac{\cos\theta}{r},\quad H_a=-2\sigma\cdot 2b\frac{\sin\theta}{r};$$

同样有：

$$-\frac{H_a}{Z_a}=\mathrm{tg}\theta \tag{6.3.63}$$

可见，对以上两种形体均存在关系式$-\frac{H_a}{Z_a}=\mathrm{tg}\theta$，即在剖面上各点矢量$\boldsymbol{T}_a$的方向与测点到场源点的连线$r$重合，$\boldsymbol{T}_a$的延长线必然会交于一点（场源点），见图6.3.12。

（2）斜交磁化无限延深薄板

磁场的极坐标表达式为：

$$Z_a=\frac{2J_z\cdot 2b\cdot\sin\alpha}{r}\cos(\theta+\gamma)$$

$$H_a=-\frac{2J_z\cdot 2b\cdot\sin\alpha}{r}\sin(\theta+\gamma)$$

则有：

$$-\frac{H_a}{Z_a}=\mathrm{tg}(\theta+\gamma) \tag{6.3.64}$$

(6.3.64) 式说明：$\boldsymbol{T}_a$与垂线间的夹角不再是θ角，而是$(\theta+\gamma)$角，所以各点的$\boldsymbol{T}_a$延长线不会交于一点。若把各点$\boldsymbol{T}_a$的方向都旋转一个γ角，使其与r重合，它们的延长线便能交会于一点，即交于薄板的上顶。下面介绍求其γ角和板顶位置的作图法。

在异常剖面上找出$Z_a=|H_a|$的两点，其相应的横坐标为x_1和x_2，见图6.3.13。由

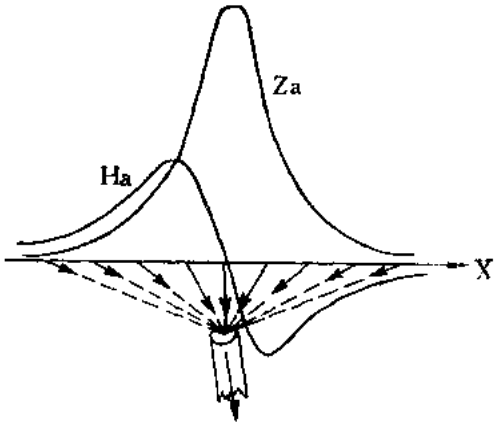


图 6.3.12 $\boldsymbol{T}_a$矢量交会于一点

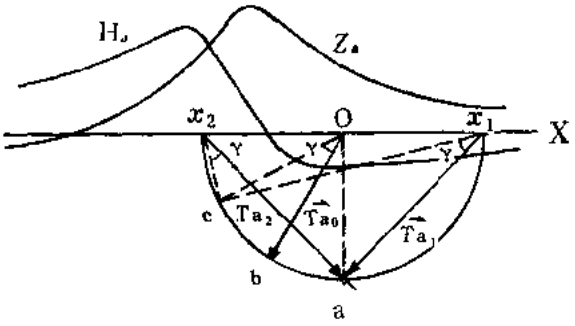


图 6.3.13 作图法求板顶和γ角

Z_a、H_a表达式可解出x_1、x_2，并进一步可得：

$$h^2=|x_1|\cdot|x_2|$$

上式说明板顶埋深h为x_1和x_2的比例中项，故板顶必在以x_1和x_2连线为直径的圆周上。设x_1和x_2的连线中点为O点，分别作出x_1、x_2和O点处的异常矢量$\boldsymbol{T}_{a1}$、$\boldsymbol{T}_{a2}$和$\boldsymbol{T}_{a0}$。$\boldsymbol{T}_{a1}$

与T_{a2}和垂线间的夹角为±45°，它们交于圆周上一点a，并且a点又在过O点的垂线上；T_{a0}与圆周交于b点；在圆周上取一点c，使得$\overset{\frown}{bc}=\overset{\frown}{ab}$，则$c$点就是板的顶面位置，直线$ob$和$oc$之间的夹角即为$\gamma$角。

对上述作图法所得的结果可证明如下：由薄板的Z_a、H_a表达式可求得：

$$x_1=\frac{h(\sin\gamma+\cos\gamma)}{\sin\gamma-\cos\gamma},$$

$$x_2=\frac{h(\cos\gamma-\sin\gamma)}{\sin\gamma+\cos\gamma};$$

x_1和x_2连线中点o的坐标为$\frac{x_1+x_2}{2}=-h\mathrm{tg}2\gamma$，也即圆心角$\angle coa=2\gamma$，因$\overset{\frown}{bc}=\overset{\frown}{ab}$，显见$ob$与$oc$之间夹角为$\gamma$；利用平面几何知识容易得到，$x_2c$与$x_2a$，$x_1c$与$x_1a$之间的夹角相等且等于圆心角$\angle coa$之半，即等于$\gamma$角，所以$c$点正是$T_a$、$T_{a2}$和$T_{a0}$各自旋转了$\gamma$角之后的交点。

实际中为了提高解释的精度，在求得γ角以后可多取几个点上的T_a，并且旋转γ角，把其相交的趋势点作为板顶位置；还可利用$Z_a=H_a=0$的两个点，以及用Z_a的极大值和极小值的坐标点或半极大值坐标点的连线为直径作圆，诸圆的共同交点或相交的趋势点便是所求的板顶中心位置。

2．矢量强度T_a比值圆法

比值圆法是矢量强度解释方法中的一种，它适用于任意地形、任意磁化方向及任意下延长度，可以确定二度板状体的顶端埋深，下延长度及倾斜方向与倾角；确定有限延深磁性体（如水平圆柱体）的中心埋深。

（1）方法的基本原理：

由公式$T_a=\sqrt{Z_a^2+H_a^2}$可将几种规则形体磁异常总矢量强度T_a的极坐标表达式归纳为如下的通式：

$$T_a=\frac{Q}{r^n} \tag{6.3.65}$$

式中Q为与磁性体的磁性及其几何尺度有关的常数；r为磁性体的中心或顶面至观测点的距离；n为与磁性体的形状有关的参数，如$n=1$为无限延深薄板状体，$n=2$为水平圆柱体等。可见，各类形体的T_a均与r^n成反比，这是共同点，它们都能以一种T_a比值圆交会法求其顶、底端或中心的位置。

（2）水平圆柱体比值圆交会法（双圆法）

设在起伏地形下有一任意磁化方向的水平圆柱体，如图6.3.14所示。水平圆柱体截面中心位置在O点，与地面上任意三测点的距离为r_1、r_2和r_3，在三测点上的T_a值分别为T_{a1}、T_{a2}和T_{a3}，由（6.3.65）式可写出它们的T_a比值关系式：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{T_{a1}}{T_{a2}}=T_{a12}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2=K_{12}^2,\quad K_{12}=\sqrt{T_{a12}}\\
&\frac{T_{a1}}{T_{a3}}=T_{a13}=\left(\frac{r_3}{r_1}\right)^2=K_{13}^2,\quad K_{13}=\sqrt{T_{a13}}\\
&\frac{T_{a2}}{T_{a3}}=T_{a23}=\left(\frac{r_3}{r_2}\right)^2=K_{23}^2,\quad K_{23}=\sqrt{T_{a23}}
\end{aligned}\right\} \tag{6.3.66}$$

写成一般形式：

$$\frac{T_{ai}}{T_{aj}}=T_{aij}=\left(\frac{r_j}{r_i}\right)^3=K_{ij}^3,\quad K_{ij}=\sqrt{T_{aij}}$$

可见，K值取决于圆柱体截面中心到各测点距离之比，称为比值系数，它可通过任意两点上T_{ai}和T_{aj}之比求得。i、j两点间的距离d_{ij}也为已知。由几何学知，若我们以i、j两点间距离d_{ij}作为基线长度画出比值系数为K_{ij}的比值圆，则水平圆柱体的中心必在其圆周上。对此结论证明如下：

设在地形线上任取两点P_i和P_j，其连线$\overline{P_iP_j}$的长度为d_{ij}，由两点的T_a可计算出比值系数K_{ij}。如图6.3.15，令坐标系的原点在P_j处，x轴与$\overline{P_iP_j}$重合，动点M的坐标为$(x,\ y)$，此时P_i点的坐标为$(d_{ij},\ 0)$，比值系数

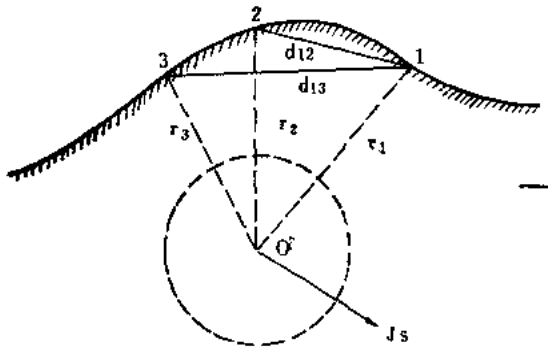


图 6.3.14　水平圆柱体坐标系简图

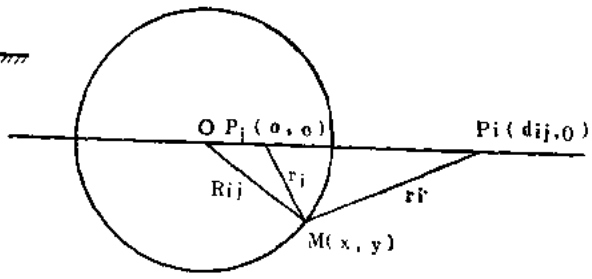


图 6.3.15　比值圆简图

$$K_{ij}=\frac{P_jM}{P_iM}=\frac{r_j}{r_i}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-d_{ij})^2+y^2}}$$

将上式展开后经配方、整理可得：

$$\left(x+\frac{d_{ij}\cdot K_{ij}^2}{1-K_{ij}^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{d_{ij}\cdot K_{ij}}{1-K_{ij}^2}\right)^2$$

显见此式为圆的方程，即动点M的轨迹是一个比值系数为K_{ij}的比值圆，如图6.3.15所示。该圆的半径R_{ij}和圆心O点到P_j的距离OP_j分别为：

$$\left.\begin{aligned}R_{ij}&=\frac{d_{ij}K_{ij}}{1-K_{ij}^2}\\OP_j&=R_{ij}\cdot K_{ij}\end{aligned}\right\}\qquad(6.3.67)$$

若有两组d_{ij}和K_{ij}可做出两个比值圆，则两圆的公共交点必为水平圆柱体截面的中心位置。此法也称作双圆法。须注意：作比值圆时，应取比值系数$K_{ij}<1$，其圆心位于T_a值大的一端外侧。

（3）薄板状体的比值圆交会法（分交法）

设起伏地形下有一任意倾斜方向和任意磁化倾角的有限延深板状体，如图6.3.16所示。由（6.2.2）式知道，剖面内各测点的T_a值与测点到薄板上、下端点的距离r_A和r_B之乘积成反比，即$T_a=\frac{Q}{r_A\cdot r_B}$，这时两点上$T_a$的比值为

$$\frac{T_{ai}}{T_{aj}}=\frac{r_{Aj}\cdot r_{Bj}}{r_{Ai}\cdot r_{Bi}}=K_{ij}^{A}\cdot K_{ij}^{B} \tag{6.3.68}$$

可见，有限延深板状体T_a的比值，对应有两个比值系数K_{ij}^{A}和K_{ij}^{B}，它们分别取决于磁性体两端点到各测点之间的距离之比，使问题变得复杂化。为此，要设法消除K_{ij}^{A}或K_{ij}^{B}，让T_a的比值仅与一个K_{ij}^{B}或K_{ij}^{A}有关，这样便又可以使用前述的双圆法了。

方法一：当磁性体上顶A为已知时，可在起伏地形上直接量出r_{Ai}和r_{Aj}的值，则$K_{ij}^{A}=r_{Aj}/r_{Ai}$可算出，再利用T_a的比值求出K_{ij}^{B}，即$K_{ij}^{B}=(T_{ai}/T_{aj})/K_{ij}^{A}$；还可在起伏地形上取与$A$等距离的点(以$A$点为圆心作圆，圆与地形线之交点即为与$A$等距离的点)，则有$r_{Ai}=r_{Aj}$，$K_{ij}^{A}=1$，然后利用$T_a$的比值，亦可求出$K_{ij}^{B}$的值，$K_{ij}^{B}=\dfrac{T_{ai}}{T_{aj}}$。

若只知道磁性体上顶A在地面上的投影位置o，当地形水平时，可在o点两侧取对称的点（如图6.3.17），显然有$r_{Ai}=r_{Aj}$，$K_{ij}^{A}=1$，则$K_{ij}^{B}=T_{ai}/T_{aj}$，当为起伏地形时，类似地可在o点两侧取对称的点，此时$r_{Ai}\approx r_{Aj}$，$K_{ij}^{A}\approx 1$，能近似地求得K_{ij}^{B}的值。

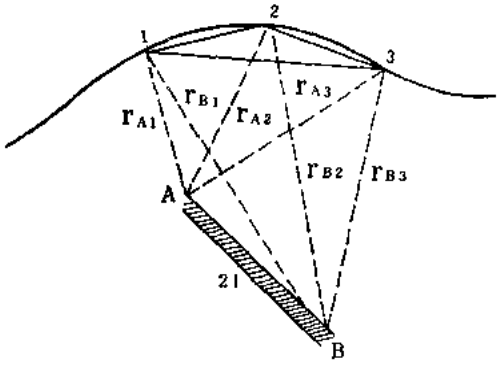


图 6.3.16 有限延深板状体坐标系简图

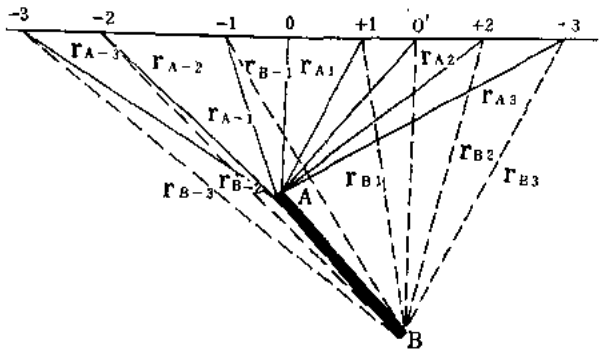


图 6.3.17 已知磁性体上顶在地面投影"o"点确定K_{ij}^{B}

在已知K_{ij}^{B}后，再利用式（6.3.67）求出半径、定出圆心位置，便可做比值圆求其交点，即磁性体下端B。可见，当只知o点位置，对于起伏地形条件下确定出的B端会有一定误差。

磁性体下端B定出以后，对已知o点位置的情况，又可采用上述方法从B端出发交出上顶A的位置。

方法二：当磁性体上顶A及其在地面的投影位置均为未知时，可把T_a剖面曲线极大值的位置近似作为A在地面的投影o点的位置；当T_a曲线不对称时，还可在曲线极大值附近较陡的一侧取点，用前述比值圆交会法先交出上顶A的位置，而后再交出下端B。所以此方法也称为比值圆分交法。

利用T_a曲线极大值的坐标位置来确定A端在地面的投影位置，这样的近似做法是可行的。因为对薄板状体来说，即使T_a曲线呈明显地不对称，但其极大值坐标点的位置与实际板顶在地面的投影位置也是相当接近的（尤其是对水平地形），见图6.3.18。

由图6.3.18可见，当$\alpha=30^\circ$时，在$2l/h=1.25$的附近偏离最大，仅为$0.3h$；若$2l/h\gg 1$，则偏离随$2l$变大而愈来愈小。计算结果还表明，当磁性体有一定水平宽度时，偏离值也相应减小；当α角增大时，偏离值也减小；$\alpha=90^\circ$时，$x_o/h=0$。因此在$\alpha>30^\circ$时，可

将T_a曲线极大值坐标点的位置近似作为板状体上顶在地面的投影位置。但是，在地形剧烈起伏的情况下，这样做将会引起较大的误差，而对截面近似圆形的二度体的T_a异常，其偏离相对地也会小些。

***6.3.5 起伏地形条件下磁异常反演计算方法**

以上所讨论的磁性体磁场的正、反演计算方法，大都是以观测面水平为其假设条件的。而金属矿区的地面磁测经常在山区进行，所得磁测结果是沿着起伏地形线分布的。目前，对起伏地形上的磁异常解释主要有以下三个途径。

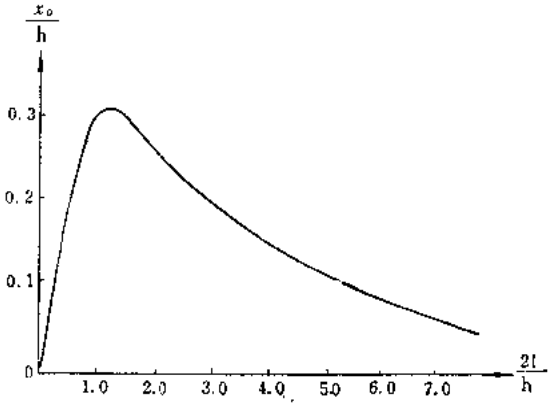


图 6.3.18 倾斜薄板($\alpha=30°$)T_a极大值点位置偏离板顶图

第一、对起伏地形条件下的Z_a异常，利用选择法（包括最优化选择法）在原起伏地形上直接进行解释，有关选择法的内容，将在下一节具体讨论。还可使用复变函数求奇点的方法和磁异常的矢量法进行直接解释。

第二、将起伏地形上的场值经地形改正（即磁异常的曲化平）后，转化为水平地形上的场值，然后用前述的一般解反问题的方法进行解释。有关曲化平的方法将在第七章中讨论。

第三、就是本节所要介绍的建立规则形体在起伏地形上的磁场表达式和反演计算方法。下面对这种方法做重点介绍：

1．起伏地形上Z_a异常直接解释法的基本原理

本方法的基本出发点在于建立起水平地形和起伏地形统一的磁场表达式，而把水平地形仅作为起伏地形的一种特殊情况，即地形线的倾角α为零的情况。由于磁场是测点坐标(x, y, z)的函数，引入地形线倾角α的参量(此处α与第五章中代表的含义不同)使测点坐标为(x, y, α)。由于α可由地形测量得到，这样我们就可以象水平地形那样来分析起伏地形下磁性体磁场的正、反演问题。

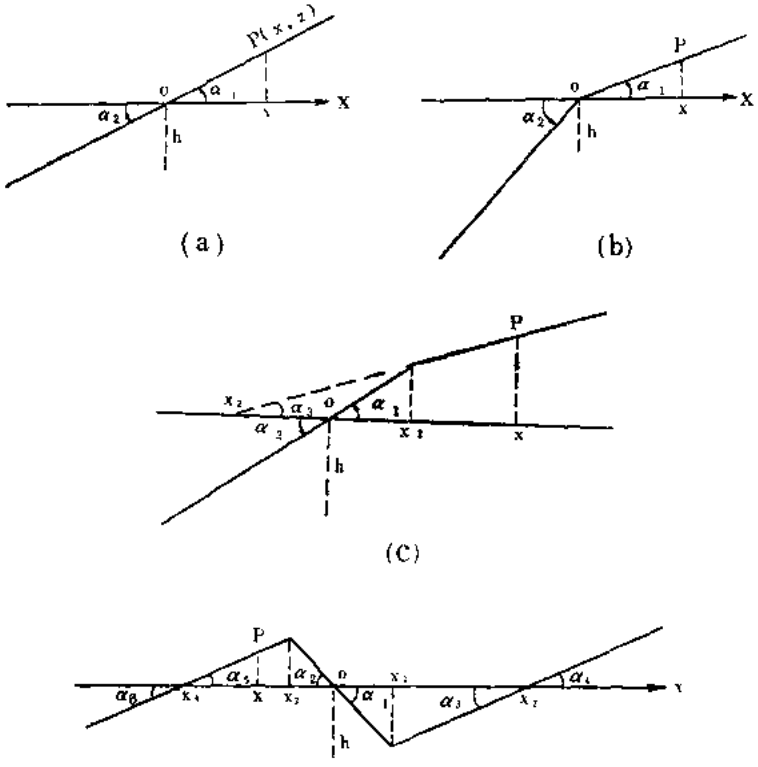
在处理实际问题时，对地形在较大范围内升降的情况，通常可采用以直代曲的办法，把起伏地形线分为若干段，在每段上以直代曲来近似表征实际地形。究竟将地形线划分成多少段合适，应视实际地形的起伏情况及所要求的异常解释精度而定。

（1）坐标变化关系的分析

采用以直代曲的方法近似表征实际起伏地形，其最基本的地形线构造单元是斜坡地形，如图6.3.19所示。

设磁性体上顶（或中心）在简化了的地形剖面线上的投影点为坐标原点o，过原点作参考水平线x，原点到磁性体上顶（或中心）的距离为h（或R）。地形线上任意一点的坐标可表示为(x, h_x)，h_x与h、x、α有关，因α为已知，h为定值，则h_x是x的函数。

图6.3.19中所有斜坡段的倾角α_1，α_2，……统由α_j表示，其中j=1，2，3……。用α_j表示简化地形线的直线段与水平线的夹角，它的正、负号规定为：若测点P所在直线段位于直角坐标系的一、三象限α取正，位于二、四象限α取负。地形直线段(或延长线)



(D)一般简化地形坐标关系图 ($X_0=0$)

图 6.3.19 简化地形坐标关系图

与 x 轴的交点的坐标以及倾角不同的地形线的交点的坐标统以 x_i 表示。如图6.3.19中 (a) 为单斜坡地形，取 $i=0$，$j=1$，2；并有 $x_i=0$，$\alpha_1=\alpha_2$；(b) 为双斜坡地形，取 $i=0$，$j=1,2$；有 $x_i=0$，$\alpha_1\neq\alpha_2$。(c)为一般的组合地形（即包含若干个倾角不同的直线），取 $i=0$，1,2，$j=1$，2，3，…。为此，可将简化地形线分为两类，一类是 $x_i=x_0=0$，称为简单情况下起伏地形(即图6.3.19中的(a)、(b))，另一类是一般起伏地形(如图中(c))。

由图6.3.19—(c)可见，地形线上某计算点 P 的纵坐标 h_x 的一般表示式为：

$$h_x=h+(x-x_i)\operatorname{tg}\alpha_j \tag{6.3.69}$$

当地形线与 x 轴仅有一个交点时，$x_0=0$，(6.3.69)式变为：

$$h_x=h+x\operatorname{tg}\alpha_j \tag{6.3.70}$$

此处的 α_j，x_i 为计算点所在的地形直线段的倾角及与 x 轴的交点。对任意地形直线段（如图6.3.19中(D)的形式）上任一计算点的 h_x 值可分段表示为如下形式：

$$h_x=\begin{cases} h+x\operatorname{tg}\alpha_j & x_3\leqslant x\leqslant x_1,\ \alpha_j=\alpha_1=\alpha_2<0^\circ \\ h+(x-x_2)\operatorname{tg}\alpha_j & x>x_1,\ \alpha_j=\alpha_3=\alpha_4>0^\circ \\ h+(x-x_4)\operatorname{tg}\alpha_j & x<x_3,\ \alpha_j=\alpha_5=\alpha_6>0^\circ \end{cases} \tag{6.3.71}$$

（2）起伏地形上的磁场表达式

水平地形条件下的简单规则形体的磁场表达式是已知的，当把表达式中的 h（或R)以 h_x 替代后，便得到了起伏地形条件下相应的磁场表达式。但须注意，对不同的地形、x_i 和

α_j 的取值不同。下面以二度薄板状体为例讨论起伏地形下的磁场。

以 h_x 代入已知的水平地形时二度薄板状体的 Z_a 表达式，即得：

$$Z_a=\frac{2\sigma\cdot 2b}{x^2+[h+(x-x_i)\,tg\alpha_j]^2}\{[h+(x-x_i)\,tg\alpha_j]\cos\gamma-x\cdot\sin\gamma\} \qquad (6.3.72)$$

当 $x_i=x_0=0$，即地形线为斜坡、山谷、山脊等简单情况，式（6.3.72）变为

$$Z_a=\frac{2\sigma\cdot 2b}{x^2+(h+x\,tg\alpha_j)^2}[(h+x\,tg\alpha_j)\cos\gamma-x\cdot\sin\gamma] \qquad (6.3.73)$$

若为顺层磁化，即 $\gamma=0^\circ$ 时，则式（6.3.73）变为

$$Z_a=\frac{2\sigma\cdot 2b}{x^2+(h+x\,tg\alpha_j)^2}(h+x\cdot tg\alpha_j) \qquad (6.3.74)$$

由以上三式可看出，当地形不水平时，磁场特征还与地形线的倾角 α_j 的大小及符号有关。

对于其它简单形体，其起伏地形上的磁场表达式均可采用与上相同的方法求解。

2．求解反问题的方法

由起伏地形上的 Z_a 表达式可知，除了地形参量 x_i 和 α_j 以外，其它参量和水平地形相同，而且 x_i 和 α_j 又是已知的。因此，可类似水平地形那样，导出起伏地形条件下直接进行反演计算的公式。下面仍以薄板状体为例说明起伏地形上直接进行定量解释的方法和思路。

式（6.3.73）已给出简单起伏地形上斜交磁化无限延深薄板的 Z_a 表达式，若令 $Z_a=0$，则得：

$$x_0=\frac{h}{tg\gamma-tg\alpha_1}=h\cdot f_1 \qquad (6.3.75)$$

上式中令：$\dfrac{1}{tg\gamma-tg\alpha_1}=f_1$。

求 $\dfrac{\partial Z_a}{\partial x}=0$，得

$$x^2(1-tg\alpha_j\cdot ctg\gamma)-2xhctg\gamma-h^2\cos^2\alpha_j ctg\gamma(tg\alpha_j+tg\gamma)=0$$

解此方程，得极值点坐标为：

$$x_{max}=\frac{1-\cos\alpha_2\cdot\sec\gamma}{tg\gamma-tg\alpha_2}\cdot h=f_2\cdot h \qquad (6.3.76)$$

$$x_{min}=\frac{1+\cos\alpha_3\cdot\sec\gamma}{tg\gamma-tg\alpha_3}\cdot h=f_3\cdot h \qquad (6.3.77)$$

上式中分别令：$\dfrac{1-\cos\alpha_2\cdot\sec\gamma}{tg\gamma-tg\alpha_2}=f_2$，$\dfrac{1+\cos\alpha_3\cdot\sec\gamma}{tg\gamma-tg\alpha_3}=f_3$。

上面公式中的 α_1、α_2、α_3 分别为零值点、极大值点和极小值点所对应的地形直线段的倾角。利用上述特征点坐标所构成的特征线段即可求得上顶埋深。

表 6.3.8

γ / f / α_j	15°			30°			45°			60°			75°		
	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3	f_1	f_2	f_3
0°	3.732	−0.132	7.595	1.732	−0.268	3.732	1.000	−0.414	2.414	0.577	0.577	1.732	0.268	−0.767	1.303
15°	—	—	—	3.232	−0.373	6.837	1.366	−0.500	3.232	0.683	−0.636	2.002	0.289	−0.788	1.366
−15°	1.866	0.000	3.752	1.183	−0.136	2.502	0.788	−0.289	1.866	0.500	−0.466	1.466	0.250	−0.683	1.183
30°	−3.232	−0.334	−6.130	—	—	—	2.366	−0.532	5.264	0.866	−0.633	2.366	0.317	−0.743	1.378
−30°	1.183	0.122	2.243	0.866	0.000	1.732	0.634	−0.142	1.410	0.433	−0.316	1.183	0.232	−0.544	1.008
45°	−1.366	−0.366	−2.366	−2.366	−0.434	−4.298	—	—	—	1.366	−0.565	3.298	0.366	−0.634	1.366
−45°	0.789	0.211	1.366	0.634	0.116	1.151	0.500	0.000	1.000	0.366	−0.151	0.844	0.211	−0.366	0.789

表 6.3.9

$\frac{\lvert Z_{amin}\rvert}{Z_{amax}}$ / γ / α	0°	15°	30°	45°	60°	75°
0°	0(0)	0.017(0.017)	0.072(0.073)	0.172(0.172)	0.333(0.333)	0.586(0.588)
15°	0.017(0.017)	0(0.072)	0.017(0.171)	0.072(0.333)	0.172(0.589)	0.333(1.000)
30°	0.072(0.072)	0.017(0.171)	0(0.334)	0.017(0.588)	0.072(1.000)	0.171(1.703)
45°	0.173(0.172)	0.072(0.333)	0.017(0.588)	0(1.000)	0.017(1.698)	0.071(3.004)
60°	0.333(0.333)	0.171(0.588)	0.072(1.000)	0.017(1.699)	0(2.999)	0.017(5.833)
75°	0.588(0.588)	0.333(1.000)	0.172(1.699)	0.072(2.999)	0.017(5.826)	0(13.928)

注：圆括号内数值为α与γ异号时的极值比。

$$\left.\begin{aligned} h&=d_{m0}\cdot f_4, \quad f_4=\frac{1}{f_1-f_2}\\ h&=d'_{m0}\cdot f_5, \quad f_5=\frac{1}{f_1-f_3}\\ h&=d_m\cdot f_6, \quad f_6=\frac{1}{f_2-f_3}\end{aligned}\right\} \tag{6.3.78}$$

式中：$d_{m0}=x_0-x_{max}$ 为极大值点和零值点间的距离；$d'_{m0}=x_0-x_{min}$ 为极小值点与零值点间的距离；$d_m=x_{max}-x_{min}$ 为极大值点与极小值点之间距离。以上所计算出的 h 均取其绝对值。上述公式中的系数 f 为 γ 和 α_i 的函数，其值可由不同的 γ 和 α_i 事先计算出，如表6.3.8所示。此表适用于简单的简化地形，如斜坡、山脊和山谷地形。

对单斜坡地形，上述解析式更简单，可由 $|Z_{amin}|/Z_{amax}$ 的比值来确定 γ 角，其关系式为：

$$\frac{|Z_{amin}|}{Z_{amax}}=\frac{(1-\cos\alpha\cdot\sec\gamma)^2+(\mathrm{tg}\gamma-\sin\alpha\cdot\sec\gamma)^2}{(1-\cos\alpha\cdot\sec\gamma)^2+(\mathrm{tg}\gamma+\sin\alpha\cdot\sec\gamma)^2} \tag{6.3.79}$$

对不同的 γ 和 α，由上式可制成表（6.3.9），使用已知的极值比和 α 角可查得相应的 γ 角，由表可见，当 $\alpha=\gamma$ 时，Z_a 曲线近于对称且无负值。

当 $\gamma=0°$ 时，若 $\alpha_2\fallingdotseq\alpha_1$（或 $\alpha_2=\alpha_1$），则由（6.3.75）至（6.3.78）式可得到相应的表达式，则更为简单，可自行推导。

当求得 h 后，再结合使用相应的 f 值，便可求得特征点的坐标 x_0、x_{max} 和 x_{min}，进一步还能确定出原点的位置，即板的上顶中心在地形线上的投影点。

对其它简单形体，采用类似的推导方法，也可得到起伏地形上求 h（或 R）及原点位置的特征点法计算公式。

§6.4 不规则形体磁场的反演计算方法

在自然界中，地质体存在的形状大都是不规则的。而在前一章正演部分中所谓的规则形体，是在不失其实际意义的条件下对形体所作的某种程度上的近似，是相对概念。提出规则形体的目的在于使问题简化、便于研究和掌握磁性体磁场的基本特征。显然，基于规则形体磁场的反演解释方法，在实际应用中不可避免地会有误差。同时，自然界中常出现非单一磁性体，反映有叠加磁场的情况，对这类异常如仍用上节所述的解释方法，其解释结果将会和实际情况有较大差别。对不规则形体的异常或叠加异常，用选择法进行解释常可以获得较好的结果。

6.4.1 选择法的概述

所谓选择法，就是将实测异常曲线与理论异常曲线进行对比，使理论曲线拟合实测曲线的一种异常解释方法。这种对比拟合常采用逐次逼近的方式。对尚未进行钻探、坑探等工作，磁性体还全然未知的情况，可根据实测异常，在用其它方法解释的基础上，结合分析地质、物性等资料，确定磁性体的初始模型；再由磁性体初始模型和磁化强度计算出它所引起的理论异常；把计算得出的理论异常曲线和实测异常曲线进行对比，若两者吻合较

好，则可把初始模型体作为异常的解释结果；若两者相差较大，则应根据差别情况修改初始模型，再计算其理论异常，再和实测异常对比，直到理论曲线和实测曲线拟合得比较满意为止。把模型体最后一次的修改结果作为异常解释的结果。当磁性体已被勘探工程全部控制，这时选择法还可用于处理叠加异常和剩余异常解释。应根据已控制磁性体的几何参量和磁性参量计算其所引起的理论异常，并和实测异常对比。若两者吻合较好，则表明磁性体的主体部分已被控制；若两者相差较大，则应求出剩余异常并进行解释，以求得隐伏磁性体的位置和赋存状态。

综上所述，选择法解释异常的步骤可归纳为：(*a*)磁性体初始模型的给出；(*b*)初始模型体理论异常的计算；(*c*) 将理论异常曲线和实测异常曲线对比，视二者拟合情况决定是否修改模型体；(*d*)若拟合的不好，修改初始模型体，然后重复(*b*)、(*c*)、(*d*)，直到拟合得较好为止。

以上诸步骤中，重要的是模型体修改和其理论异常的计算。修改模型体，要求修改者注意结合地质情况和具有丰富的经验，要能把握磁性体的不同部位、不同磁化状态对异常特征的影响，才能准确、快速地获得满意的结果。关于磁性体磁异常理论曲线的获得，目前主要有四个途径：①对简单的规则形体，可用相应的正演公式计算；②对截面不规则的二度、似二度体，可用量板法计算；③对不规则的三度体，可由电子计算机计算；④可由模型实验的方法获得。使用电子计算机计算理论异常，并根据它和实测异常拟合的情况自动修改模型体参量的方法，又称为最优化选择法。

选择法是实际异常解释中最常用、效果较好的方法之一，它的特点在于利用了整条剖面（或整个观测面）上的异常资料，解释精度较高；它可以给出磁性体的断面位置和形状，而且形状又可以是任意的（对三度体可以给出全部几何参量），特别是当多个磁性体叠加时，可以分别给出每个磁性体的形态；它适用于起伏地形上的异常解释，在条件有利时还可用来分解叠加异常。但是其解释结果受正常场选择不准的影响较大，计算工作量较大，也存在解释结果的多解性问题。

6.4.2 量板法

在第五章正演问题中，对计算任意形状截面二度体的磁场中已介绍了米柯夫量板。在反演问题中，根据实测异常曲线形态特征和地质、物探等资料，判断磁性体截面的形状、产状和磁化强度，确定磁性体模型，用量板法算出理论曲线，和实测曲线对比进行解释。实际上，量板法属于选择法中的一种计算方法。有关似二度量板可参阅《地质与勘探》1976年第八期。关于米柯夫量板这里不再介绍，仅对似二度量板和接触带量板法作如下介绍。

1．计算似二度体中心剖面上Z_a异常的量板法

米柯夫量板适用于二度磁性体异常的计算，对沿走向有限的似二度体仍直接使用此量板计算，就会引起误差，走向长度越短则误差越大，而对非中心剖面上异常的计算其误差会更大些。为克服这一弱点，下面提出使用米柯夫量板加改正系数的方法来计算似二度体中心剖面上的异常。

已知有限长水平圆柱体中心剖面上的Z_a表达式为：

$$Z_a^{(2L)}=\frac{2M_z\cdot L[(R^2-x^2)(x^2+L^2)+2R^4]-2M_x\cdot x\cdot R\cdot L(3R^2+3x^2+2L^2)}{(x^2+R^2)^2(x^2+R^2+L^2)^{3/2}},\tag{6.4.1}$$

式中：$M_z=M_s\cdot\sin i_s$，$M_x=M_s\cdot\cos i_s$；

若令 $R/L=A$，$x/L=B$，则上式可改写为：

$$Z_a^{(2L)}=\frac{2M_s(R^2-x^2)}{(x^2+R^2)^2}\left[\frac{(1+B^2)+\dfrac{2A^4}{(A^2-B^2)}}{(1+A^2+B^2)^{3/2}}\right]\sin i_s$$
$$-\frac{2M_s\cdot 2xR}{(x^2+R^2)^2}\left[\frac{3A^2+3B^2+2}{2(1+A^2+B^2)^{3/2}}\right]\cos i_s \tag{6.4.2}$$

上式中：

$$\frac{2M_s(R^2-x^2)}{(x^2+R^2)^2}=Z_{a\perp}^{(\infty)}\ ,\quad \frac{-2M_s\cdot 2xR}{(x^2+R^2)^2}=H_{a\perp}^{(\infty)}$$

若令：

$$K_1=\frac{1+B^2+\dfrac{2A^4}{(A^2-B^2)}}{(1+A^2+B^2)^{3/2}} \tag{6.4.3}$$

$$K_2=\frac{3A^2+3B^2+2}{2(1+A^2+B^2)^{3/2}} \tag{6.4.4}$$

则式（6.4.2）可改写为：

$$Z_a^{(2L)}=Z_{a\perp}^{(\infty)}\cdot K_1\cdot\sin i_s+H_{a\perp}^{(\infty)}\cdot K_2\cdot\cos i_s$$
$$=[0.01n_ZJ_s]\cdot K_1\cdot\sin i_s+[0.01n_HJ_s]\cdot K_2\cos i_s \tag{6.4.5}$$

K_1 系 数 表　　表 6.4.1

x/L \ R/L	2.0	1.5	1.0	2/3	0.5	0.4	1/3	0.25	0.2
0.0	0.805	0.940	1.061	1.088	1.073	1.057	1.044	1.027	1.018
0.2	0.806	0.947	1.072	1.115	1.116	1.116	1.123	1.198	—
0.4	0.810	0.958	1.115	1.254	1.522	—	0.457	0.799	0.862
0.6	0.818	0.983	1.237	2.491	0.109	0.589	0.707	0.786	0.815
0.8	0.833	1.030	1.677	−0.126	0.508	0.635	0.688	0.732	0.751
1.0	0.862	1.150	—	0.337	0.543	0.611	0.643	0.672	0.685
1.2	0.914	1.465	−0.330	0.417	0.529	0.572	0.594	0.615	0.624
1.4	1.015	3.170	0.111	0.430	0.502	0.532	0.548	0.563	0.569
1.6	1.240	−2.080	0.234	0.421	0.471	0.493	0.505	0.516	0.521
1.8	1.959	−0.367	0.279	0.404	0.441	0.458	0.466	0.475	0.479
2.0	—	−0.041	0.295	0.385	0.413	0.425	0.432	0.439	0.442
2.2	−1.045	0.083	0.297	0.365	0.387	0.397	0.402	0.407	0.410
2.4	−0.324	0.143	0.293	0.346	0.363	0.371	0.375	0.379	0.381
2.6	−0.095	0.180	0.286	0.328	0.341	0.348	0.351	0.355	0.356
2.8	0.011	0.199	0.277	0.310	0.322	0.327	0.330	0.333	0.334
3.0	0.069	0.200	0.267	0.295	0.304	0.309	0.311	0.313	0.314
3.5	0.131	0.201	0.243	0.261	0.267	0.270	0.271	0.273	0.273
4.0	0.149	0.191	0.221	0.233	0.237	0.239	0.240	0.241	0.242
4.5	0.152	0.182	0.201	0.210	0.213	0.214	0.215	0.216	0.216
5.0	0.149	0.170	0.185	0.191	0.193	0.194	0.195	0.195	0.196
10.0	0.094	0.096	0.098	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099

上式中，有效磁化强度 J_i 及其倾角 i_i、走向半长度 L、中心埋深 R 和计算点坐标 x，对选择法来讲均为已知。K_1和K_2可用不同的R/L及x/L值分别代入式（6.4.3）和式（6.4.4）算出，列于表 6.4.1 和表 6.4.2 中。

K_2 系 数 表　　表 6.4.2

x/L \ R/L	2.0	1.5	1.0	2/3	0.5	0.4	1/3	0.25	0.20
0.0	0.626	0.750	0.884	0.960	0.984	0.993	0.996	0.998	0.999
0.2	0.624	0.745	0.879	0.955	0.979	0.989	0.993	0.997	0.998
0.4	0.618	0.735	0.863	0.938	0.965	0.976	0.982	0.987	0.989
0.6	0.608	0.718	0.839	0.910	0.937	0.950	0.956	0.963	0.967
0.8	0.594	0.690	0.801	0.873	0.899	0.911	0.918	0.925	0.928
1.0	0.578	0.667	0.770	0.829	0.852	0.863	0.869	0.876	0.879
1.2	0.560	0.640	0.730	0.781	0.801	0.811	0.816	0.822	0.824
1.4	0.541	0.613	0.690	0.733	0.750	0.758	0.763	0.768	0.770
1.6	0.521	0.588	0.651	0.687	0.701	0.708	0.712	0.716	0.717
1.8	0.501	0.565	0.614	0.644	0.655	0.661	0.664	0.667	0.669
2.0	0.481	0.535	0.578	0.603	0.613	0.618	0.620	0.623	0.624
2.2	0.462	0.506	0.546	0.567	0.575	0.578	0.580	0.583	0.584
2.4	0.443	0.482	0.515	0.533	0.540	0.543	0.544	0.546	0.547
2.6	0.425	0.458	0.488	0.502	0.508	0.511	0.512	0.513	0.514
2.8	0.408	0.435	0.462	0.475	0.479	0.481	0.483	0.484	0.484
3.0	0.391	0.414	0.439	0.449	0.453	0.455	0.456	0.457	0.458
3.5	0.354	0.373	0.388	0.395	0.398	0.399	0.400	0.401	0.401
4.0	0.322	0.338	0.347	0.352	0.354	0.355	0.356	0.356	0.356
4.5	0.295	0.306	0.313	0.317	0.318	0.319	0.319	0.320	0.320
5.0	0.271	0.279	0.285	0.288	0.289	0.289	0.290	0.290	0.290
10.0	0.146	0.147	0.148	0.148	0.149	0.149	0.149	0.149	0.149

具体计算时，按二度体垂直磁化情况，用米柯夫量板逐点读出n_Z与n_H，然后根据R/L的比值，由表6.4.1及6.4.2分别查出各测点坐标(x/L)所对应的K_1及K_2系数值，连同磁化强度 J_i 及其倾角 i_i，一并代入式（6.4.5）计算，即得到沿走向有限的水平圆柱体中心横剖面上的磁场 $Z_a^{(2L)}$。

图6.4.1是对一个i_i为45°，走向长度$(2L)$为埋深(R)两倍的水平圆柱体（即$L=R$），用上述带校正系数的量板法和直接用理论公式计算出的中心剖面上 Z_a 曲线的对比图。由图可见，使用上述方法计算所得曲线与理论公式计算所得曲线甚为接近。

对以上讨论的方法只需稍加变

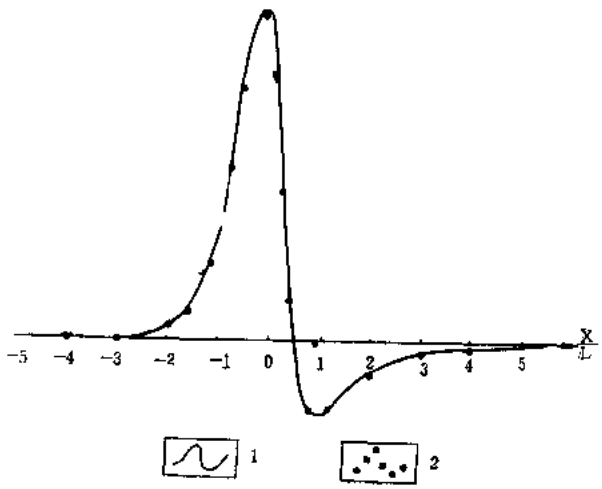


图 6.4.1　理论计算和带校正系数量板法

1—用公式计算所得有限长水平圆柱体（$L=R$）的 Z_a 曲线；
2—用量板法所得有限长水平圆柱体（$L=R$）的 Z_a 曲线

化还可取得更为简便的计算方法。若把（6.4.2）式中的第二项作如下变化：

$$-\frac{2M_s\cdot 2xR}{(x^2+R^2)^2}\left[\frac{3A^2+3B^2+2}{2(1+A^2+B^2)^{3/2}}\right]\cos i_s=\frac{2M_s(R^2-x^2)}{(x^2+R^2)^2}\cdot\left\{\frac{3A^2+3B^2+2}{\left(\frac{x}{R}-\frac{R}{x}\right)(1+A^2+B^2)^{3/2}}\right\}\cos i_s$$

令：

$$K'_2=\frac{3A^2+3B^2+2}{\left(\frac{x}{R}-\frac{R}{x}\right)(1+A^2+B^2)^{3/2}}=K_2\cdot\frac{2}{\left(\frac{x}{R}-\frac{R}{x}\right)} \tag{6.4.6}$$

则得：

$$Z_a^{(2L)}=0.01n_Z\cdot J_s(K_1\sin i_s+K'_2\cdot\cos i_s) \tag{6.4.7}$$

由（6.4.6）式可算出K'_2系数表。这样，仅需用一次米柯夫量板读出n_Z，再结合使用K_1及K'_2系数表，按式（6.4.7）即可求出$Z_a^{(2L)}$。

2．计算火成岩接触面Z_a异常的量板法

矽卡岩类型磁铁矿床往往赋存在沉积岩与火成岩的接触带上及其附近，矿体异常与火成岩异常总是叠加在一起的，解释中需要从叠加异常中剔除火成岩引起的异常，为此要计算火成岩体接触界面的异常。另外在间接找矿中，有时需要研究磁性接触带的产状，同样也要计算出火成岩接触面的异常。下面讨论用量板法计算火成岩体异常的方法。

已知当岩体宽度和沿走向长度很大而向下延深有限时，其一侧接触面（即台阶）的Z_a表达式为：

$$Z_a=\pm 2J_s\sin\alpha\left[\sin\gamma\cdot\ln\frac{r_C}{r_A}+\cos\gamma\cdot(\varphi_A-\varphi_C)\right] \tag{6.4.8}$$

式中A为台阶的上角点，C为台阶的下角点。台阶开口向着x轴正方向取正号，相反则取负号。

令：

$$K=\pm 2J_s\sin\alpha \tag{6.4.9}$$

$$\ln r_C-\ln r_A=m(\ln r_{m+1}-\ln r_m)$$

$$\varphi_A-\varphi_C=n(\varphi_{n+1}-\varphi_n)$$

并设

$$\ln r_{m+1}-\ln r_m=0.1 \tag{6.4.10}$$

$$\varphi_{n+1}-\varphi_n=0\cdot 1 \tag{6.4.11}$$

则（6.4.8）式变为：

$$Z_a=0.1K(m\sin\gamma+n\cos\gamma) \tag{6.4.12}$$

由式（6.4.10），设$r_0=1$，则可得一系列同心圆半径r的值，即$r=1.0$，1.11，1.22，……；由式(6.4.11)，设$\varphi_0=0°$，则可得一系列间隔为5.73°的角度值，即$\varphi=0°$，$5.73°$，$11.46°$，……。这些半径长和角度值所决定的同心圆和射线就构成了如图6.4.2所示的扇形量板。量板中φ角是由x轴正向（右侧）起算的，沿顺时针为正。

使用该量板计算Z_a时，应先按适当的比例尺在透明纸上绘出半无限水平台阶状岩体的断面图，并确定出计算点的位置；再根据接触带的倾角α和岩体的有效磁化强度J_s计算出K值，并确定出γ角的正负及数值；让计算点和量板中心点重合，剖面线与量板水平线（x轴）重合，数出岩体接触面A、C两点之间同心圆号之差m和射线号之差n；最后将K、m、n、γ的值代入式（6.4.12）即可计算出该点的Z_a值。注意K、m、n的正负号，

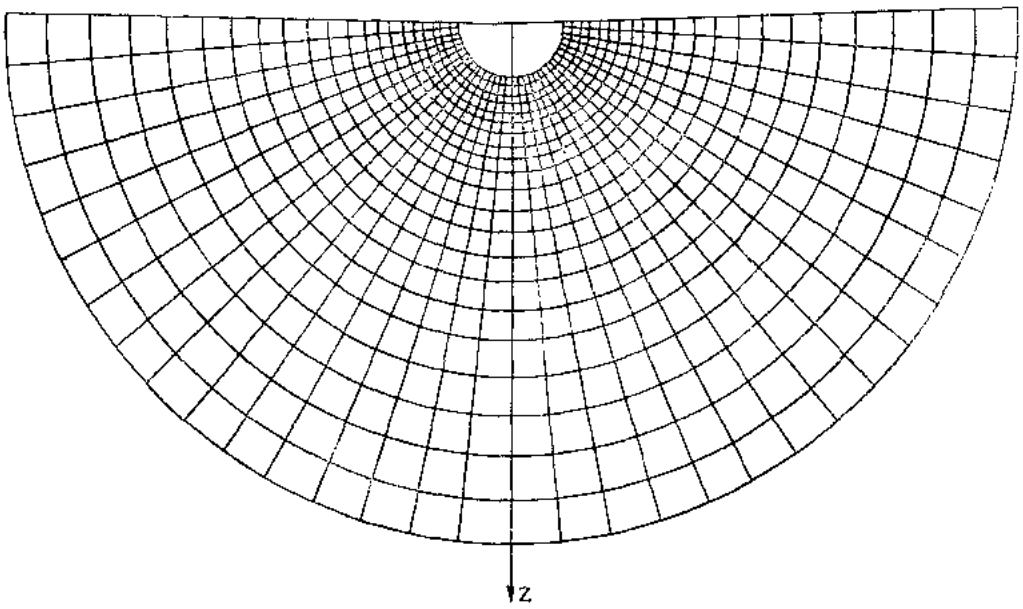


图 6.4.2 计算半无限水平台阶岩体扇形量板

当台阶开口向着x轴正向时K取正号，m、n的符号分别由$\ln r_C-\ln r_A$和$\varphi_A-\varphi_C$决定。

实际应用中，对边界不规则的水平台阶岩体，可将此量板和米柯夫量板配合使用以求得Z_a。图6.4.3所示为不规则岩体，首先对规则部分（如图中AC接触面）用岩体扇形量板

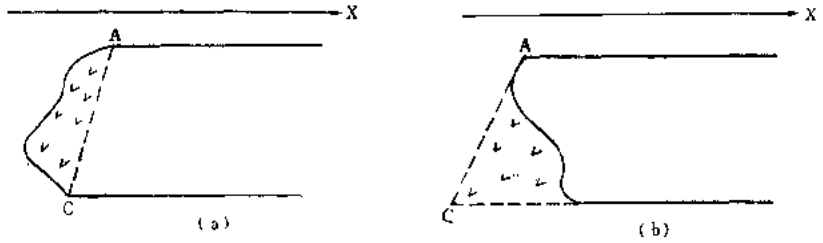


图 6.4.3 岩体的不规则部分示意图

计算得Z_{a1}，然后用米柯夫量板计算不规则（阴影）部分得Z_{a2}，再将Z_{a1}和Z_{a2}叠加起来即得边界不规则水平台阶岩体的磁场Z_a。

6.4.3 剩余异常的计算和解释

选择法（尤其是适于手算的量板法）应用的一个重要方面，是用于剩余异常的计算和解释。在勘探阶段，当用钻探等工程手段控制了一部分矿体或磁性岩体时，可计算出这已知部分的磁场值($Z_{a已知}$)，从实测磁异常中减掉这部分已知磁场值，所求得的差值称为剩余异常，即$Z_{a剩余}=Z_{a实测}-Z_{a已知}$，$Z_{a剩余}$应反映出未知磁性体或盲矿体的磁场。对求得的剖面或平面剩余异常，应选取适当的方法进行解释。通过计算和解释剩余磁异常来推断旁侧或深部盲矿体，可为进一步布置钻探工程提供依据。剩余异常的解释在实际工作中已取得了不少良好的地质效果。

应用剖面异常进行剩余异常计算和解释的基本步骤同选择法。由于剩余异常是实测异常和理论异常的差值，因此要求计算已知部分理论异常值尽可能地准确。为了准确计算理

论异常，减少使用二度量板所造成的误差，可考虑的途径有：其一，根据所控制的已知条件，按照地质特征，合理地圈定已知矿体的形态或截面形状和大小，作为计算理论异常曲线的模型体，并根据矿体的磁性资料确定磁化强度的大小和方向。根据模型体计算出理论异常曲线后，还需注意从实测曲线中消除非矿异常以及其它磁性体（如岩体）及附近已知矿体的异常干扰。在这样的基础上计算出的剩余磁异常才是我们研究解释的对象。如果剩余异常属于似二度体异常，则最好选用中心剖面作解释，必要时应采用似二度量板计算或配合采用不规则三度体的计算方法（如线元法等）来计算剖面异常。其二，在进行曲线拟合时，可把异常正值部分拟合的好坏作为选择法计算的主要拟合标准，面对负值部分只作趋势上的拟合而不作数值拟合，这种做法往往要依赖于经验。其三，对沿走向长度较小的磁性体，应采用二度米柯夫量板带校正系数的办法计算理论场值，特别是在负值部分。有关剩余异常的解释实例及其研究中应该注意的具体问题，将在第八章中详细讨论。

6.4.4 最优化选择法

上述适于手算的选择法，是一种比较好的异常解释方法，但它存在以下缺点：（1）对理论异常和实测异常拟合的优劣没有一个严格的客观评定标准；（2）理论异常计算工作量大，特别是对似二度异常；（3）一般只适于解释二度（或似二度）剖面异常，对三度异常的解释难以实现，无法获得磁性体在三度空间的形态及其产状要素。

由于高速电子数字计算机的广泛应用，在重磁资料的定量解释中引入了最优化方法，使选择法能够用于不规则三度体异常的解释和适应更为复杂的情况。所谓最优化选择法，其方法的实质就是前述的选择法。它是由给定的地质体模型参数，用计算机计算出理论场值，并与实测场值进行对比，根据对比结果自动修改模型体参量，再计算再对比，最后取拟合最佳的模型体参数以数字形式或图形输出，作为实测异常的解释结果。

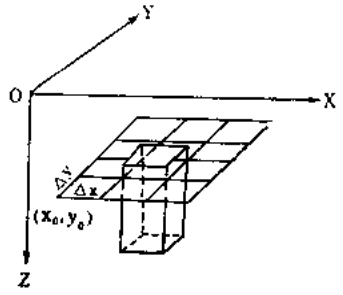


图 6.4.4 （3×4）直立方柱组合模型示意图

最优化选择法的计算步骤与一般选择法大体是一致的。然而在这过程中，需要提出如下三个问题：第一要根据实际情况选取地质体的数学模型，并且要有严格的数学解析式。第二如何评定理论场值与实测场值之间的拟合程度。第三如何在计算后确定地质体模型参量的修改量。这在数学上是属于多参量的非线性最优化估计问题。

1．方法的基本原理

设实测异常以 ΔZ_k 表示，k 为观测点号，$k=1, 2, \cdots, m$。m 为观测点数；以 Z 表示所选取的地质体模型的理论异常，Z 是模型体参量和测点坐标的函数，即

$$Z=f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ b_1,\ b_2,\ \cdots b_n) \tag{6.4.13}$$

式中 x_k，y_k，z_k 为观测点的坐标；b_1，b_2，$\cdots b_n$ 表示模型体的几何参量和磁性参量，n 为参量的个数，模型体的初始参量以 $b_1^{(0)}$，$b_2^{(0)}$，$\cdots b_n^{(0)}$ 表示。在三度磁异常解释中，一般选用直角棱柱体的组合模型，见图 6.4.4。其理论场值基本计算公式在第五章第六节中已给出。

本方法将理论值与实测值之间的符合程度用它们之间的偏差平方和来衡量，若以 Φ 表示，则：

$$\Phi=\sum_{k=1}^{m}[\Delta Z_k-f(x_k,\ y_k,\ z_k,\ b_1,\ b_2,\ \cdots b_n)]^2=\min \tag{6.4.14}$$

我们的目的，在于寻求一组关于模型参量的修改量 δ_1，δ_2，$\cdots\delta_n$，使初始参量得到修正，可写为：

$$b_i=b_i^{(0)}+\delta_i \qquad (i=1,2,\cdots n) \tag{6.4.15}$$

将修改后的模型体参量代入（6.4.14）式，使理论异常与实测异常的偏差平方和Φ值逐步获得改善，直到Φ取得极小，这时我们便取该组的模型参量 $b_i(i=1,2,\cdots n)$。作为解释的结果。在这个准则下的选择法就称为最小二乘意义下的最优化选择法。

我们称Φ为目标函数，最优化方法的关键在于求出使目标函数 Φ 取极小的改正量 δ。对(6.4.14)式的多参量非线性目标函数求极小的问题，由计算数学知道其算法是很多的，我们通常采用的是阻尼最小二乘法，它是在高斯法和最速下降法之间取某种插值。

已知高斯叠代法和最速下降法的求解形式为：

$$A\delta_t=g \tag{6.4.16}$$

$$b=b^{(0)}+\lambda\delta_g=b^{(0)}-\lambda\mathrm{grad}\Phi \tag{6.4.17}$$

前式为高斯方程，后式为最速下降法，式中 δ_t，δ_g 分别为高斯法和最速下降法的修改量的校正矢量，A 为方程的系数方阵，$A=P^TP\left(P=\left(\frac{\partial f}{\partial b_i}\right)_{b_i=b^{(0)}}\text{的雅可比矩阵}\right)$，$g=P^T[\Delta Z-f(b^{(0)})]$，$\delta_g=-\mathrm{grad}\Phi=-\left(\frac{\partial\Phi}{\partial b_i}\right)^T$（即$\Phi$函数在 b 点的负梯度方向上），λ 为最优步长，上述两种方法均存在一定的弊病，前者因校正矢量步长太大，往往使其叠代不收敛，特别是初始值远离真值时，更易出现发散，故不稳定收敛，后者虽然解决了前者的不稳定收敛问题，但因在接近极小时步长太小，使其收敛速度极慢。因而为了充分发挥这两种方法的优势，克服它们的弊病，提出了阻尼最小二乘法（马奎特法），即对高斯方程作如下修改：

$$(A+\lambda I)\delta_0=g \tag{6.4.18}$$

式中 I 为单位矩阵，λ 为用来控制校正方向和步长的任意正数，称之为阻尼系数。此时修正量 δ_0 是 λ 的函数即 $\delta_0=\delta_0(\lambda)$，称为马奎特校正矢量，显然（6.4.18）式降低了系数方阵的条件数，改善了叠代的收敛性。

另外，再对Φ函数求梯度，并与高斯法的向量 g 比较，则得：

$$\frac{1}{2}\delta_g=g \tag{6.4.19}$$

可见 g 的方向就是最速下降方向 δ_g。对比上述三式可以发现，（6.4.18）式实际上就是介于高斯法和最速下降法之间的某种插值。当$\lambda=0$时，马奎特方法就变化为高斯法；当 λ 充分大时，$\delta_0\doteq\frac{1}{\lambda}g$，这时马奎特校正方向就是最速下降的方向。在实际计算中，在收敛的情况下应使 λ 尽可能取较小的值，让叠代过程以较大的步长即接近于高斯方向前进；仅当不满足Φ值逐渐减小时，才被迫取较大的 λ 值，即改取最速下降方向并减小步长，以保证收敛。这就是阻尼最小二乘法的实质。

阻尼最小二乘法和高斯法及最速下降法之间关系见图 6.4.5 所示。

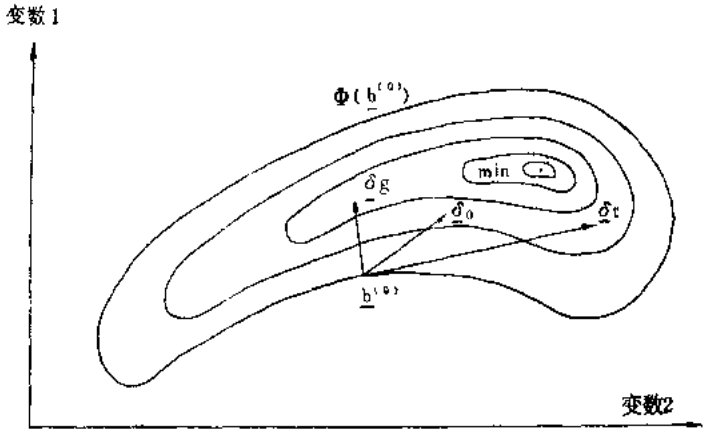


图 6.4.5 校正矢量方向比较

在实际应用阻尼最小二乘法时，由于阻尼系数 λ 选择不当，常常做多次解方程组的无效计算工作。为此又提出改进的阻尼最小二乘法，并称为改进马奎特方法。该方法是利用计算过程的中间信息来决定在下次叠代中应取的方向和步长，即决定合适的 λ 值。这样就使阻尼最小二乘法趋于完善。其应用实例请参阅第八章第五节。

2．收敛性和多解性问题的讨论

所谓最优化选择法收敛性应包含两方面内容：一是指计算过程能否趋近并找到目标函数Φ的极小；二是指收敛的速度。这与所选取的具体计算方法是密切有关的，为此，目前我们所采用的改进阻尼最小二乘法，从理论上说属于局部收敛于极小，收敛速度为二阶敛速，此种算法对平方和形式的目标函数效果是较好的。实践表明，它的收敛性还决定于目标函数Φ的复杂程度及初始值的选取，具体地说，如果选择地质模型简单即理论场值计算公式简单、参量个数少，这时Φ函数也简单，收敛性就能改善，若初始值的选取又接近真值，则能获得更好的收敛效果，反之，将严重影响其计算的收敛性。

多解性是物探资料解释中所固有的，用最优化选择法解释也同样存在多解性，其原因除了一般解释方法的位场反演问题多解性之外，在解释过程中，由于算法不同，计算结果可以有不同，即使是同一算法，由于所给的地质模型、参量个数以及初始值等不同，其计算结果也会有差异。这样便出现更为复杂的多解性问题。

由上述讨论可以看到，最优化选择法收敛性与多解性的问题还有所关联，为了提高其收敛性，减小其多解性，应注意以下几点：（1）合理选择地质模型，尽可能选用简单模型，做到使正演公式简单，参量个数减少，初始值容易合理选定；（2）对模型体参量施以约束，一般采用对参量给定合理的上、下限进行约束，必要时可采用求条件极值的算法；（3）当使用高速电子计算机时，如果需要可算出多种可能的解，然后进行比较，并结合实际的地质、物性及综合物探资料分析决定取舍，以求得较为符合实际的解。

§6.5 磁异常的频谱及其解释

随着数字计算机技术的迅速发展和普及，近几年来国内外在频率域的位场理论、位场转换与处理以及反演解释等方面做了大量的研究工作，并在实际应用中取得了一定的成

效。经利用富里哀变换对重磁异常的频谱特征进行分析，对应于空间域提出了磁异常频率域解释的理论和方法。本节主要介绍三方面的内容：一是磁异常频谱换算的基本原理，二是几种规则形状磁性体的磁异常频谱，三是磁异常频谱的基本反演方法。

6.5.1 磁异常频谱换算的基本原理

若把磁异常的空间变化视为周期无穷大的周期函数，则可把磁异常分解为各种频率的谐波，这些谐波的幅度不是随时间变化，而是随空间变化。各种频率的谐波都具有各不相同的振幅和初位相，因此，我们可以把磁异常看成是由这些谐波所组成，这些谐波的振幅和初位相是频率的函数，分别称为振幅谱和相位谱，又统称为频谱。利用磁异常所换算出的频谱进行解释的方法称为频谱分析（或波谱分析）法。

设在一条长为 $2L$ 的剖面上所测得的磁异常为$T(x)$，它是以$2L$为周期的周期函数，在满足狄里希利条件下，可看作是沿 x 轴的无穷个正弦波或余弦波的叠加，也就是说，$T(x)$可用富里哀级数展开，即：

$$T(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{K=1}^{\infty}(a_K\cos K\omega_0 x+b_K\sin K\omega_0 x) \tag{6.5.1}$$

式中 a_0、a_K 和 b_K 称为富氏系数，与$T(x)$的关系为：

$$\begin{aligned} a_K&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}T(x)\cos K\omega_0 x\,dx \\ b_K&=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}T(x)\sin K\omega_0 x\,dx \end{aligned} \tag{6.5.2}$$

$$(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

其中ω_0为圆频率，$\omega_0=2\pi f_0$，f_0为基频（或波数），$f_0=\frac{1}{2L}$，$2L$为波长（即上述的周期）。若已知磁异常$T(x)$及剖面长度$2L$，可由式（6.5.2）计算出富氏系数a_K和b_K，进而可算得振幅谱A_K和相位谱Φ_K，即：

$$A_K=\sqrt{a_K^2+b_K^2},\quad \Phi_K=\mathrm{tg}^{-1}\frac{b_K}{a_K}, \tag{6.5.3}$$

应用尤拉公式，富氏级数可写成复数形式：

$$T(x)=\sum_{K=-\infty}^{\infty}C_K e^{iK\omega_0 x} \tag{6.5.4}$$

其中：

$$C_K=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L}T(x)\,e^{-iK\omega_0 x}\,dx$$

$$(K=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

由于K只取整数，故C_K是离散值。因此C_K称为离散谱（或称线谱），$|C_K|=\frac{1}{2}A_K$。

上面所假定的$T(x)$是以$2L$为周期的函数，这往往与实际情况不符，一般磁异常在剖面$2L$以外是逐渐趋于零的，这时x的变化范围是（$-\infty$，∞），即$T(x)$为非周期函数。显然这时可认为$T(x)$的周期$2L$为无限大，但是由于$T(x)$为绝对可积的有界函数，且在任何有限区间内只有有限个间断点和有限个极值点，故仍可看作简单谐波的叠加。由富氏级数的复数形式，经变换后可用富氏积分表示如下：

$$S_T(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)e^{-i\omega x}\,dx \tag{6.5.5}$$

$$T(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}S_T(\omega)\,e^{i\omega x}\,d\omega \tag{6.5.6}$$

其中：$S_T(\omega)$为磁异常$T(x)$的复谱（连续谱）。式（6.5.5）的意义就是已知$T(x)$求复谱$S_T(\omega)$，也称为富里哀正变换；式（6.5.6）由$S_T(\omega)$求$T(x)$，称为富里哀反变换。由于$\omega=2\pi f$，所以富里哀变换还可写成：

$$\left.\begin{aligned}S_T(f)&=\int_{-\infty}^{\infty}T(x)\,e^{-i2\pi fx}\,dx\\T(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}S_T(f)e^{i2\pi fx}\,df\end{aligned}\right\} \tag{6.5.7}$$

显然$S_T(f)$也是复函数，它的模称为振幅谱$A(f)$，它的幅角称为相位谱$\Phi(f)$，即：

$$\left.\begin{aligned}A(f)&=|S_T(f)|=\{[\mathrm{Re}S_T(f)]^2+[\mathrm{Im}S_T(f)]^2\}^{1/2}\\\Phi(f)&=\mathrm{tg}^{-1}\left[\frac{\mathrm{Im}S_T(f)}{\mathrm{Re}S_T(f)}\right]\end{aligned}\right\} \tag{6.5.8}$$

还将振幅谱的平方称为能谱（或功率谱），把振幅谱、能谱的对数分别称为对数振幅谱和对数能谱。

实际中的磁异常，是在等间距测点上测出的离散数据序列（航磁连续记录也需要离散取值），即$T(j\Delta x)$，（$j=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots,\ N-1$），这时剖面的基本波长$L_x=N\cdot\Delta x$，$N$为采样点数，$\Delta x$为采样间隔，基频$f_0=\frac{1}{L_x}$，即为频率域中的采样间隔。对(6.5.7)式可以改写为离散富氏变换公式：

$$S_T\left(\frac{n}{L_x}\right)=\Delta x\cdot\sum_{j=0}^{N-1}T(j\cdot\Delta x)\,\exp\left(-i2\pi\,\frac{jn}{N}\right) \tag{6.5.9}$$

$$\left(n=-\frac{N}{2},\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ \frac{N}{2}\right)$$

将式（6.5.4）写成级数形式，并把$(-L,\ L)$换成$(0,\ L_x)$，K换成n，利用$x=j\cdot\Delta x$，$L_x=N\cdot\Delta x$，然后经和上式对比，可得离散富氏变换的富氏系数与富氏变换的关系为：

$$C_n=\frac{1}{L_x}S_T\left(\frac{n}{L_x}\right) \tag{6.5.10}$$

所以，这时离散的富氏反变换为：

$$\begin{aligned}T(x)&=\frac{1}{L_x}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1}S_T\left(\frac{n}{L_x}\right)\exp\left(i2\pi\,\frac{n}{L_x}x\right)\\&=\sum_{n=-N/2}^{N/2-1}C_n\cdot\exp\left(i2\pi\,\frac{n}{L_x}x\right)\end{aligned} \tag{6.5.11}$$

上面讨论了一维情况下磁异常（二度异常）与其频谱互算的基本原理，对有两个坐标变量x、y的三度异常，相应的二维富氏变换为

$$\left.\begin{aligned} S_T(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y)\mathrm{e}^{-i2\pi(ux+vy)}\,dxdy \\ T(x,y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_T(u,v)\mathrm{e}^{i2\pi(ux+vy)}\,dudv \end{aligned}\right\} \tag{6.5.12}$$

式中 u，v 分别为沿 x 和 y 方向的波数（频率）。这时磁异常的振幅谱和相位谱分别为：

$$\left.\begin{aligned} A(u,\ v) &= |S_T(u,\ v)| = \{[\mathrm{Re}S_T(u,\ v)]^2 + [\mathrm{Im}S_T(u,\ v)]^2\} \\ \Phi(u,\ v) &= \mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}S_T(u,\ v)}{\mathrm{Re}S_T(u,\ v)} \end{aligned}\right\} \tag{6.5.13}$$

离散的富氏变换表达式为：

$$S_T\left(\frac{m}{L_x},\ \frac{n}{L_y}\right) = \Delta x\cdot\Delta y\sum_{j=0}^{M-1}\sum_{k=0}^{N-1} T(j\Delta x,\ K\Delta y)\exp\left[-i2\pi\left(\frac{mj}{M}+\frac{nK}{N}\right)\right] \tag{6.5.14}$$

富氏系数与富氏变换之间关系为：

$$C_{mn} = \frac{1}{L_xL_y}S_T\left(\frac{m}{L_x},\ \frac{n}{L_y}\right)$$

$$(m=-M/2,\ \cdots,\ 0,\ \cdots M/2-1),\ (n=-N/2,\ \cdots,\ 0,\ \cdots,\ N/2-1)$$

离散的富氏反变换为：

$$\begin{aligned} T(x,\ y) &= \frac{1}{L_x\cdot L_y}\sum_{m=-M/2}^{M/2-1}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} S_T\left(\frac{m}{L_x},\ \frac{n}{L_y}\right)\exp\left[i2\pi\left(\frac{m\cdot x}{L_x}+\frac{ny}{L_y}\right)\right] \\ &= \sum_{m=-M/2}^{M/2-1}\sum_{n=-N/2}^{N/2-1} C_{mn}\exp\left[i2\pi\left(\frac{mx}{L_x}+\frac{ny}{L_y}\right)\right] \end{aligned} \tag{6.5.15}$$

上三式中，M、Δx 和 N、Δy 分别为在 x 和 y 方向上的取样点数及取样间隔，m、n 分别为频率域中沿 u、v 方向上的倍频数，相应的频距间隔为 $1/L_x$ 和 $1/L_y$。

由上述讨论可见，利用离散型富里哀变换可由磁异常求出富氏系数，并能进而算出其振幅谱和相位谱。利用富氏反变换可由磁异常的频谱回算出空间分布的异常。实现上面的运算通常采用快速富氏变换算法（FFT），而对于一维情况的手算也可采用快速的三角函数叠代法。利用富氏变换的性质（如叠加性质、微分性质、褶积性质、巴什瓦公式等）还可进行磁异常的频谱变换运算，这往往要比空间域中的运算来得简单。同时，由于异常的频谱以相位和振幅的富里哀级数的形式反映了磁异常的特征，因此在频率域中研究异常，具有和空间域不相同的特点，可使得一些在空间域难以实现和难以解决的问题变得容易进行和解决。所以，研究频率域中磁异常的解释问题已经成了异常解释理论中的一个重要方面。

6.5.2 几种规则形状磁性体异常的频谱

对应于空间域磁场解释理论中的正演问题，我们可以导出一些规则形状磁性体磁场的频谱表达式。其频谱表达式可以通过以下三个途径求得：

（1）由空间域已知的重、磁异常表达式，利用式（6.5.5）或式（6.5.12）的富里哀积分变换直接计算求得；

（2）利用富里哀变换的一些基本性质及频率域的泊松公式，由一种频谱换算出另一

种频谱；

（3）由已知其频谱的形体组合成另一种形体，通过积分可求得后者的频谱，这也可称之为积分计算法。

下面尽量选择较简便的途径推导出各种规则形体磁异常的频谱表达式。

1．无限延深薄板

已知斜交磁化无限延深薄板的空间域磁场分量Z_a的表达式为：

$$Z_a=2J_z\cdot 2b\cdot\sin\alpha\ \frac{h\cdot\cos\gamma-x\cdot\sin\gamma}{x^2+h^2}$$

式中符号的意义同第五章。对上式进行富氏变换可求得其频谱。具体进行积分时，可将上式分为两部分，由留数定理可有：

$$\left.\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h}{x^2+h^2}e^{-i\omega x}\,dx&=\pi\,e^{-\omega h}\\ \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+h^2}e^{-i\omega x}\,dx&=i\pi\,e^{-\omega h}\end{aligned}\right\}\qquad(6.5.16)$$

从而可得其相应的频谱表达式为：

$$\begin{aligned}S_z(\omega)&=2J_z2b\cdot\sin\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\frac{h\cos\gamma-x\cdot\sin\gamma}{x^2+h^2}e^{-i\omega x}\,dx\\&=2J_z\cdot 2b\cdot\sin\alpha\,e^{-\omega h}\cdot\pi(\cos\gamma+i\sin\gamma)\\&=2\pi\tau\,e^{-\omega h}\cdot e^{i\gamma}\end{aligned}\qquad(6.5.17)$$

上式中的$\tau=2b\cdot J_z\cdot\sin\alpha$，为薄板沿走向单位长度上的面磁荷量。

当$\gamma=0^\circ$时，即为顺层磁化情况，其频谱为：

$$S_{Z/\!/}(\omega)=2\pi\tau\cdot e^{-\omega h}\qquad(6.5.18)$$

若为垂直磁化$i_z=\frac{\pi}{2}$，$\gamma=\alpha-i_z=\alpha-\frac{\pi}{2}$，由（6.5.17）式可得垂直磁化时$Z_a$异常的频谱表达式，即

$$S_{Z\perp}(\omega)=2\pi\tau e^{-\omega h}\cdot e^{i(\alpha-\pi/2)}\qquad(6.5.19)$$

将（6.5.19）式与（6.5.17）式对比，可得：

$$S_Z(\omega)=S_{Z\perp}(\omega)e^{i(\pi/2-i_z)}\qquad(6.5.20)$$

该式为二度体在斜磁化与垂直磁化条件下磁场频谱之间的关系式，此式也可由频率域中的泊松公式导出。由此可见，在频率域中的二度异常，斜磁化与垂直磁化两者的振幅谱是相同的，仅相位谱恒差$\pi/2-i_z$。

根据场的叠加性质，式（6.5.16）实际上是顺层磁化时磁场的垂直分量和水平分量的富里哀变换，两者之间的关系可写成一般形式为：

$$S_H(\omega)=iS_Z(\omega)\qquad(6.5.21)$$

上式说明了二度磁异常频谱的另一个重要特点，即当二度磁性体形态一定时，它的各磁场分量的振幅谱是相同时，而相位谱恒差$\pi/2$。

上面所讨论的无限延深薄板的频谱表达式，其坐标原点取在薄板上顶面中心在地面的投影点处。在实际工作中，原点位置常是任意选的，在任选坐标原点的坐标系中，设上顶中心投影点的横坐标为x_0，则由富氏变换的平移性质，不难得到其相应的频谱。(6.5.17)式就变为：

$$S_Z(\omega)=2\pi\tau e^{-\omega h}\cdot e^{i\gamma}\cdot e^{-i\omega x_0}=2\pi\tau\ e^{-\omega h}e^{i(\gamma-\omega x_0)} \tag{6.5.22}$$

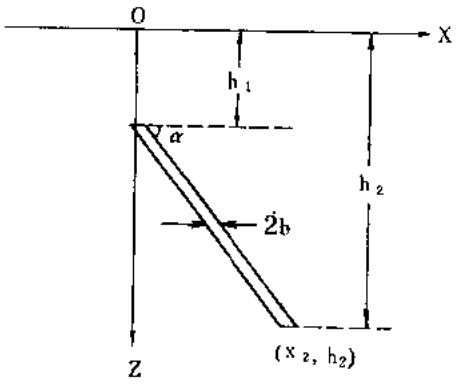


图 6.5.1 有限延深薄板截面图

2．有限延深薄板

如图 6.5.1 所示，设坐标原点位于薄板顶面中心在地面的投影点，h_1、h_2分别为薄板的顶、底面埋深，α、2b 分别为薄板的倾角和水平宽度。可将它看作为两个埋深和顶面位置都不同的无限延深薄板的叠加，故有：

$$\begin{aligned}S_Z(\omega)&=S_{Z_1}(\omega)-S_{Z_2}(\omega)\\&=2\pi\tau\ (e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}\cdot e^{-i\omega x_2})e^{i\gamma}\\&=2\pi\tau\ (e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}\cdot e^{-i\omega(h_2-h_1)\operatorname{ctg}\alpha})e^{i\gamma}\end{aligned} \tag{6.5.23}$$

当板直立时，有：

$$S_Z(\omega)=2\pi\tau\ (e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2})e^{i(\pi/2-i_s)} \tag{6.5.24}$$

3．厚板

设坐标原点位于厚板顶面中心在地面的投影点。此时，水平宽度为 2b 的厚板的磁异常，可由宽为$d\xi$的薄板异常沿 x 方向自$-b$到b积分得到。若$S_{Z_2}(\omega)$、$S_{Z_1}(\omega)$分别为有限延深的厚板和薄板异常的频谱，则有：

$$\begin{aligned}S_{Z_2}(\omega)&=\int_{-b}^{b}S_{Z_1}(\omega)\ e^{-i\omega\xi}\,d\xi=S_{Z_1}(\omega)\ \frac{2\cdot\sin(\omega b)}{\omega}\\&=2\pi\tau\ \frac{\sin(\omega b)}{\omega b}(e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}\cdot e^{-i\omega x_2})e^{i\gamma}\end{aligned} \tag{6.5.25}$$

当$h_2\to\infty$时，则得无限延深厚板异常的频谱：

$$S_Z(\omega)=2\pi\tau\cdot\frac{\sin(\omega b)}{\omega b}e^{-\omega h}\cdot e^{i\gamma} \tag{6.5.26}$$

式中的$\tau=2\cdot J_s\cdot b\cdot\sin\alpha$，为厚板沿走向单位长度上的面磁荷量。

4．水平圆柱体

水平圆柱体的磁异常$Z_2(x)$可由无限延深直立薄板的$Z_1(x)$异常沿Z方向求导得到。由式（6.5.17）可得到无限延深直立薄板$Z_1(x)$异常的频谱：

$$S_{Z_1}(\omega)=2\pi\tau\ e^{-\omega h}\ e^{i(\pi/2-i_s)}$$

由富氏变换的微分性质，可直接写出频谱和导数的频谱之间的关系如下：

$$\begin{aligned}S_{Z_2}(\omega)&=\omega S_{Z_1}(\omega)\cdot d\\&=\omega 2\pi\tau\cdot e^{-\omega h}\cdot e^{i(\pi/2-i_s)}\cdot d\end{aligned}$$

式中d为垂直方向上的微小增量，令角$\pi/2-i_s=\beta$，$M_s=\tau\cdot d$，为水平圆柱体单位长度上

的磁矩，R为中心埋深，则上式可改写为：

$$S_{Zz}(\omega)=2\pi\omega M_t\cdot e^{-\omega R}\cdot e^{i\beta} \tag{6.5.27}$$

对二度体的水平薄板和倾斜阶梯，同样利用频谱的微分和积分性质极易导出，其振幅谱组成因子见表6.5.1。

5．球体

设球体的密度和磁化强度分布均匀，则以泊松公式为基础利用富里哀积分变换可求得球体异常的频谱。

已知$Z=0$时球体的引力位为：

$$V=G\delta v\frac{1}{(x^2+y^2+R^2)^{1/2}}$$

式中δv为球体的剩余质量，R为球体的中心埋深，则它的富里哀变换为：

$$S_V(\omega,\nu)=G\delta v\frac{2\pi e^{-R\sqrt{\omega^2+\nu^2}}}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \tag{6.5.28}$$

由空间域的泊松公式，可以写出球体磁场Z_a分量的频谱表达式，即

$$S_z(\omega,\nu)=\frac{J}{G\delta}(\alpha_1 S_{V_{xz}}+\beta_1 S_{V_{yz}}+\gamma_1 S_{V_{zz}}) \tag{6.5.29}$$

式中的α_1、β_1、γ_1分别为磁化强度矢量J的方向余弦，$S_{V_{xz}}$、$S_{V_{yz}}$、$S_{V_{zz}}$分别为引力位的频谱的二阶导数，它们可由对（6.5.28）式利用富氏变换的微分定理分别求得。所以上式可改写为：

$$S_z(\omega,\nu)=M[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1 S]\cdot 2\pi e^{-RS} \tag{6.5.30}$$

式中$S=\sqrt{\omega^2+\nu^2}$（下同），$M=J\nu$为球体的磁矩。该式为球体垂直磁异常的频谱表达式。其振幅谱$|S_z(\omega,\nu)|$和相位谱$\Phi(\omega,\nu)$分别为：

$$\left.\begin{aligned}|S_z(\omega,\nu)|&=2\pi M[(\alpha_1\omega-\beta_1\nu)^2+\gamma_1^2\cdot S^2]^{1/2}\cdot e^{-RS}\\ \Phi_z(\omega,\nu)&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\alpha_1\omega+\beta_1\nu}{\nu_1\cdot S}\end{aligned}\right\} \tag{6.5.31}$$

分析（6.5.29）式，实际上就是磁性体的垂直磁异常的频谱与重力异常频谱之间的关系。对（6.5.28）式求垂向导数，即得球体的重力异常$g(x,y)$的频谱：

$$S_g(\omega,\nu)=S_{V_z}(\omega,\nu)=G\delta v\cdot 2\pi e^{-R\cdot S}$$

所以式（6.5.30）也可改写为：

$$S_z(\omega,\nu)=\frac{J}{G\delta}[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot S]S_g(\omega,\nu) \tag{6.5.32}$$

式（6.5.32）也就是频率域泊松公式，若作类似上述推导，不难得到球体其它两个水平分量的频谱，进一步就可求出总磁力异常ΔT的频谱。设正常地磁场方向t_0的方向余弦为α_0、β_0、γ_0，则ΔT的频谱为：

$$S_{\Delta T}(\omega,\nu)=\frac{2M\pi}{S}[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot S][i(\alpha_0\omega+\beta_0\nu)+\gamma_0\cdot S)\,e^{-R\cdot S} \tag{6.5.33}$$

6．无限延深柱体

这里指柱体截面 a 的线度比其上顶面埋深h小很多的情况，设原点取在柱 体顶面中心的正上方。这时（$Z=0$）的重力异常为：

$$g(x,y)=\frac{G\delta S}{(x^2+y^2+h^2)^{1/2}}$$

其频谱为：

$$S_g(\omega,\nu)=G\delta S\frac{2\pi e^{-h\sqrt{\omega^2+\nu^2}}}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}}$$

式中S为柱体截面积。

设磁化强度方向t_1的方向余弦为α_1、β_1、γ_1，则由（6.5.32）式可求得斜磁化无限延深直立柱体Z_a异常的频谱：

$$S_z(\omega,\nu)=2\pi M_t[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1 s]\frac{e^{-h\cdot s}}{s} \tag{6.5.34}$$

式中 $s=\sqrt{\omega^2+\nu^2}$。

当垂直磁化时，即有$\alpha_1=\beta_1=0$，$\gamma_1=1$，则此时无限延深直立柱体可看作单磁极，其Z_a异常的频谱为：

$$S_{Z_\perp}(\omega,\nu)=2\pi M_t e^{-h\cdot\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \tag{6.5.35}$$

式中$M_t=J\cdot S$为柱体单位长度上的磁矩，此处S为截面积。

7．无限延深直立长方体

设一无限延深直立长方体沿y方向的走向长度为$2L$，沿 x 方向的水平宽度为 $2b$，顶面埋深为h，坐标原点设在柱体中心正上方，它所引起的磁异常的频谱，可由直立细柱体频谱沿两个坐标轴方向积分获得，令$ds=d\xi d\eta$，对（6.5.35）式积分，则

$$S_z(\omega,\nu)=2\pi J\frac{i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot s}{s}e^{-h\cdot s}\int_{-b}^{b}\int_{-L}^{L}e^{-i(\omega\xi+\nu\eta)}\,d\xi d\eta$$

$$=8\pi J\cdot\frac{\sin(\nu L)\cdot\sin(\omega b)}{\omega\nu}\cdot\frac{i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot s}{s}e^{-h\cdot s} \tag{6.5.36}$$

类似于式（6.5.33），不难得到无限延深直立长方体总磁力异常ΔT的频谱，表示如下：

$$S_{\Delta T}(\omega,\nu)=8\pi J\cdot\frac{\sin(\nu L)\cdot\sin(\omega b)}{\omega\nu s^2}[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot s]$$

$$\cdot[i(\alpha_0\omega+\beta_0\nu)+\gamma_0\cdot s]e^{-hs} \tag{6.5.37}$$

8．直角棱柱体

对直立的直角棱柱体，可以看成是埋深分别为h_1和h_2的两个无限延深的直立长方体之差，故由（6.5.36）式可导出其Z_a异常的频谱如下：

$$S_z(\omega,\nu)=8\pi J\frac{\sin(\nu L)\cdot\sin(\omega b)}{\nu\omega s}[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1 s](e^{-h_1 s}-e^{-h_2 s}) \tag{6.5.38}$$

利用式（6.5.37）还可导出其ΔT异常的频谱表达式，即：

$$S_{\Delta T}(\omega,\nu)=8\pi J\frac{\sin(\nu L)\cdot\sin(\omega b)}{\nu\omega s^2}[i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1 S][i(\alpha_0\omega+\beta_0\nu)$$

$$+\gamma_0\cdot s]\cdot(e^{-h_1\cdot s}-e^{-h_2\cdot s}) \tag{6.5.39}$$

综合上述规则形状磁性体磁异常的频谱表达式，可用一通式来表示：

$$S(\omega,\nu)=C\cdot B(\omega,\nu)\cdot D(\omega,\nu)\cdot H(\omega,\nu)\cdot E(\omega,\nu)\cdot F(\omega,\nu) \qquad (6.5.40)$$

式中：c 为常数因子，仅与物体形状及磁性参数有关；B 为水平尺寸因子，与物体的水平尺寸（即水平宽度、走向长度）有关，其一般形式为：

$$B(\omega,\nu)=\sin(\omega b)\cdot\sin(\nu L)$$

D 为方向因子，它与磁化强度方向及有一定延深物体的倾斜轴方向有关，

$$D(\omega,\nu)=\frac{i(\alpha_1\omega+\beta_1\nu)+\gamma_1\cdot s}{i(\alpha\omega+\beta\nu)+\gamma\cdot s}$$

其中α_1、β_1、γ_1和α、β、γ分别为磁化强度和倾斜轴的方向余弦。对应于直立的物体（对无明显延深的球体、水平圆柱体和水平薄板相当于直立情况）有$\alpha=\beta=0$，$\gamma=1$；H 为深度因子，它与物体埋深及向下延深有关，其一般形式为：

$$H(\omega,\nu)=e^{-sh_1}-e^{-sh_2}\cdot e^{-i(\omega x_2'+\nu y_2')}$$

式中$x_2'=x_2-x_1$、$y_2'=y_2-y_1$分别为磁性体延深长度在x 轴和y 轴上的投 影；E 为位移因子，它与坐标的选取有关，其形式为

$$E(\omega,\nu)=e^{-i(\omega x_0+\nu y_0)}$$

式中x_0、y_0为物体中心的坐标；F为与ω、ν有关的频率因子，它和物体的形状有 关。

由于磁异常的频谱可以表示成一些因子的乘积，如（6.5.40）式的形式，因此在频率域中研究磁异常具有以下的优点：

（1）磁异常的频谱表达式比空间域的磁场表达式简单，便于快速进行正演计算。各种参数彼此为独立函数且以相乘的形式出现，因此在对数域中，频谱将是这些函数的线性函数，即

$$\ln|S(\omega,\nu)|=\ln|C|+\ln|B|+\ln|D|+\ln|H|+\ln|E|+\ln|F|$$

（2）由上面的讨论可以看出，磁异常的相位谱与物体的埋深、水平尺寸无关，而与方向因子、位移因子和深度因子H中延深长度在x轴及y轴上的投影有关。当形体直立时，其相位谱仅决定于物体中心位置和磁化特征角（γ或β角）。振幅谱与物体的中心位 置无关，在许多情况下它的变化主要取决于物体的几何尺寸和埋深。因此分别 研究 振幅 谱和 相位谱，对于定量解释较为方便。

（3）在磁异常的表达式中，与埋深有关的项是负指数函数（即$e^{-\omega h}$），它 对 频谱 函数起着重要的作用。因此，我们有可能利用一些简单的方法来求埋深，并把平面位置相同而埋深不同的物体所引起的叠加异常分开。

（4）三度磁异常的频谱，在ω轴或ν轴上是和相应截面的二度体异常的频 谱相同 的，此称为一致性原理。例如一个沿走向有限的无限延深薄板，若y轴平行于走向，x轴垂直于走向，则在ω轴上的频谱$S(\omega,0)$相当于二度无限延深薄板的频谱，而在ν轴上的频谱$S(0,\nu)$则相当于水平宽度为$2L$的无限延深厚板的频谱。只是因子C有所不同。

（5）在频率域进行磁异常的各种转换比在空间域要简单、容易得多。

6.5.3 频谱曲线的定性分析

利用磁异常的各种频谱曲线的特征，可以判别磁性体的形状、赋存状态和磁性参数。

在实际工作中，通常是应用振幅谱、对数振幅谱、功率谱和对数功率谱（它们两者相应的波谱曲线总体形态基本相似）来求解反问题，有时也用相位谱进行解释。由于三度体异常的频谱和二度体异常的频谱有一致性原理存在，下面仅以二度异常垂直分量Z_a的振幅谱、对数振幅谱和相位谱为主进行分析。

1．振幅谱

（1）振幅谱的组成因子：

对于二度异常和三度异常在频率轴上的振幅谱，同样可表示为若干个因子的乘积，即

$$|S(\omega)|=A(\omega)=C\cdot F(\omega)\cdot B(\omega)\cdot H(\omega) \qquad (6.5.41)$$

式中C为常数因子，$F(\omega)$为频率因子，$B(\omega)$为水平尺寸因子，$H(\omega)$为深度因子。对有限延深情况，在振幅谱公式中$H(\omega)$可表示为：

$$H(\omega)=e^{-\omega h_1}[1+e^{-2\omega T}-2e^{-\omega T}\cos(\omega\cdot d)]^{1/2} \qquad (6.5.42)$$

式中$T=h_2-h_1$，$d=T\cdot\mathrm{ctg}\alpha$为磁性体延深长度在水平轴上的投影，见图6.5.1。当物体直立时，$\alpha=\pi/2$，上式改写为：

$$H(\omega)=e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2} \qquad (6.5.43)$$

若物体为无限延深，即$h_2\to\infty$，则有

$$H(\omega)=e^{-\omega h_1} \qquad (6.5.44)$$

现将常见的规则形体Z_a异常振幅谱的组成因子列于表6.5.1和表6.5.2中。

二度异常的振幅谱组成因子 **表 6.5.1**

序　号	物体形状	C	F	B
1	水平圆柱体	$2\pi M_s$	ω^1	1
2	水平线极	$2\pi 2bJ_s\sin\alpha$	ω^0	1
3	无限延深直立薄板	$4\pi bJ_s$	ω^0	1
4	无限延深倾斜薄板	$2\pi 2bJ_{s_0}\sin\alpha$	ω^0	1
5	有限延深倾斜薄板	$2\pi 2bJ_s\sin\alpha$	ω^0	1*
6	水平薄板	$4\pi J_s d$	ω^0	$\sin(\omega b)$
7	倾斜阶梯	$2\pi J_s\cdot\sin\alpha$	ω^{-1}	1*
8	无限延深倾斜厚板	$4\pi J_s\cdot\sin\alpha$	ω^{-1}	$\sin(\omega b)$
9	有限延深倾斜厚板	$4\pi J_s\cdot\sin\alpha$	ω^{-1}	$\sin(\omega b)$*

（*）为倾斜有限延深情况下的深度因子$H(\omega)$，见前述$H(\omega)$表达式。

三度异常在频率轴上振幅谱的组成因子 **表 6.5.2**

序号	物体形状	$A(0,\nu)$ 即 $\omega=0$			$A(\omega,0)$ 即 $\nu=0$		
		C	F	B	C	F	B
10	无限延深柱体	$2\pi M_s$	ν^0	1	$2\pi M_s$	ω^0	1
11	走向有限、无限延深薄板	$8\pi bJ_s\sin\alpha$	ν^{-1}	$\sin(\nu L)$	$8\pi bJ_sL\sin\alpha$	ω^0	1
12	球体（偶极）	$2\pi M$	ν^1	1	$2\pi M$	ω^1	1
13	有限长水平圆柱体	$4\pi J_s\cdot S$	ν^0	$\sin(\nu L)$	$4\pi J_s\cdot S\cdot L$	ω^1	1
14	无限延深直立长方柱体	$8\pi bJ_s$	ν^{-1}	$\sin(\nu L)$	$8\pi J_sL$	ω^{-1}	$\sin(\omega b)$
15	直角棱柱体	$8\pi bJ_s$	ν^{-1}	$\sin(\nu L)$	$8\pi J_s\cdot L$	ω^{-1}	$\sin(\omega b)$*

（*）为直立有限延深情况下的深度H。

由式（6.5.40）及上面两表显见也体现了上述频率域中研究磁异常之优点。这里需指出，振幅谱中各因子均与物体形状有关，振幅谱曲线的基本形态主要取决于深度因子，即曲线是以负指数函数为其基本特征。而频率因子（F）和水平尺寸因子（B）与物体形状有关，它们只对振幅谱曲线进行某些改造，其中以（B）因子的影响更大一些。

（2）振幅谱的图形

单个规则形体磁异常剖面振幅谱曲线的图形大致可分为三种类型：即连续性、周期脉动型和过渡型。曲线类型的不同，反映了物体形状的不同。

连续型振幅谱是由（6.5.41)式中$B(\omega)=1$和$H(\omega)=e^{-\omega h}$或$H(\omega)=e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h}$所定义的$A(\omega)$类型。这类振幅谱不出现周期性脉动或波动。属于此类型的除了直立阶梯外都是横向水平尺寸不大的物体，如水平线极、水平圆柱体、直立的或无限延深的薄板状体，如图（6.5.2）所示（实线为振幅谱、虚线为对数振幅谱）。

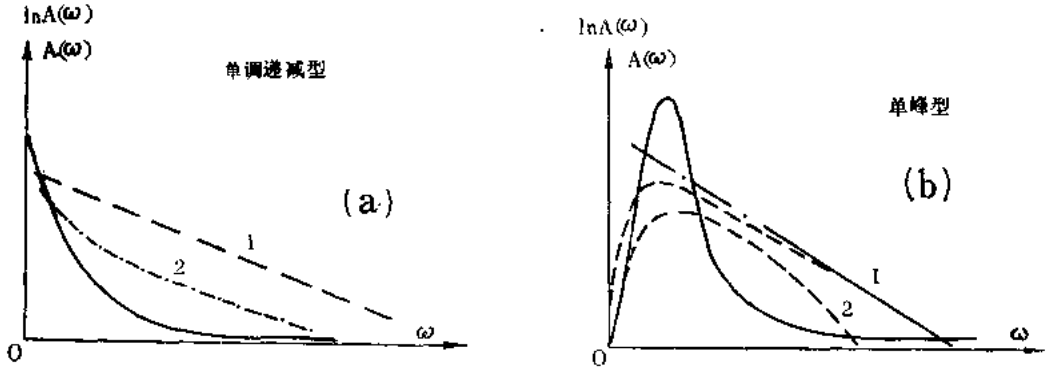


图 6.5.2 连续型的谱曲线

(a) 1—无限延深薄板的对数振幅谱曲线；2—直立阶梯的对数振幅谱曲线；(b) 1—有限延深直立薄板的对数振幅谱曲线；2—水平圆柱体的对数振幅谱曲线

连续型中又可细分为两个亚类：一是单峰型曲线，在ω趋于零波数时$A(\omega)\to 0$，有一个明显的波峰；另一亚类是单调递减型，即在零波数处$A(\omega)\to C$（阶梯形除外），随ω增大$A(\omega)$单调减小的曲线。前者主要反映为下界有限的直立形体，如有限延深直立薄板和水平圆柱体，如图6.5.2(b)所示。后者反映为无限延深形体，如无限延深薄板及半无限的水平台阶，见图6.5.2(a)。

周期脉动型的振幅谱是指（6.5.41）式中水平尺寸因子$B(\omega)=\sin(\omega b)$的情况。由于$B(\omega)$为周期函数，当$\omega=\frac{n\pi}{b}$（n为整数）时，$B(\omega)=0$，因此振幅谱是以$\frac{\pi}{b}$为周期的脉动曲线。由上面表中可见，水平薄板、厚板及棱柱体等横向水平尺寸较大的物体，其振幅谱都是属于此种类型，如图6.5.3所示（实线为振幅谱，虚线为对数振幅谱）。这类振幅谱曲线同样可以零波数附近的波形特征来判断磁性体的下界深度。若在零波数处，$A(\omega)\to 0$，即有第一个明显波峰时，为有限延深物体；如在零波数处$A(\omega)\to C$，则为无限延深物体（阶梯形除外）。另外此类振幅谱曲线由于受频率因子$F(\omega)$的影响而使其特征有所区别，水平薄板的$F(\omega)=1$，厚板状体的$F(\omega)=1/\omega$，所以后者的振幅曲线随ω增大周期脉动振幅衰减要比前者快；在同一周期内，脉动曲线上升和下降的两支对称性，前者要比后者更近

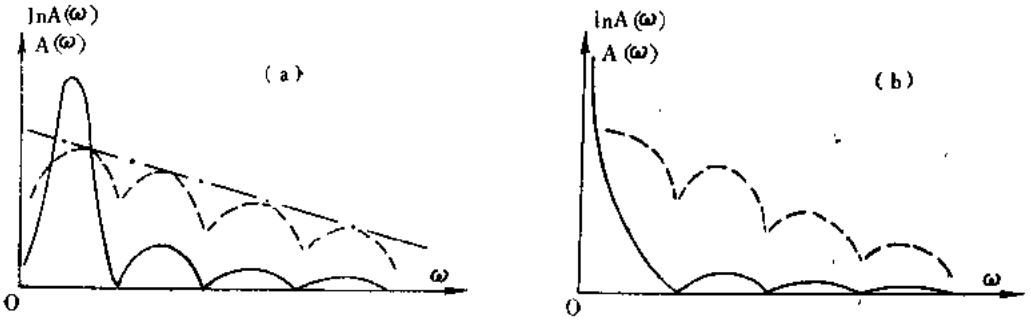


图 6.5.3 周期脉动型谱曲线

（a）水平薄板；（b）无限延深厚板

于对称。

过渡型的振幅谱主要是指$B(\omega)=1$，而且$H(\omega)$由式（6.5.42）所定义的$A(\omega)$类型。此类中典型的形体为有限延深倾斜薄板，有

$$A(\omega)=C\cdot e^{-\omega h_1}\left[1+e^{-2\omega T}-2e^{-\omega T}\cos(\omega d)\right]^{1/2} \tag{6.5.45}$$

式中$T=h_2-h_1$，$d=T\cdot\mathrm{ctg}\alpha$。显然，当$d=0$时，即为直立薄板的连续型振幅谱。当$h_1=h_2$（即$T=0$）时，变为水平薄板，此时

$$\left[1+e^{-2\omega T}-2e^{-\omega T}\cos(\omega b)\right]^{1/2}=2\sin\left(\frac{\omega}{2}\cdot d\right) \tag{6.5.46}$$

则（6.5.45）式变为周期脉动型振幅谱。因此有限延深倾斜薄板的振幅谱介于连续型和周期脉动型之间，称为过渡型。这类曲线产生周期性扭动，但扭动的幅度不是很大，对下延较大的物体，当$30^\circ<\alpha<150^\circ$时，这种扭动表现得很不明显，见图6.5.4。

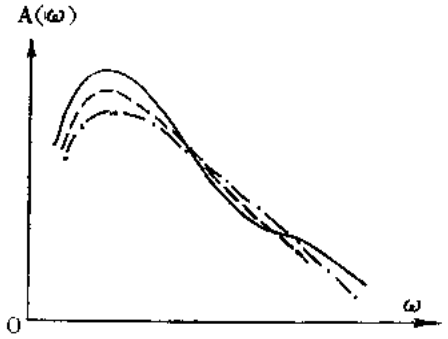


图 6.5.4 有限延深倾斜薄板不同倾角（α）的振幅对比图

实线：$\alpha=15^\circ$；虚线：$\alpha=30^\circ$；点划线：$\alpha=90^\circ$

2．对数振幅谱

二度体磁异常的对数振幅谱图形，也和振幅谱一样可分为连续型、周期脉动型和过渡型三类，并且各类所属的形体也与其振幅谱相对应。但是，同类对数振幅谱对不同的形体还表现出不同的特点，这样就有可能利用它进一步判断物体的形状。

二度体连续型的对数振幅谱，由（6.5.41）式可知，其在高频段有

$$\ln A(\omega)=\ln C+n\ln\omega-\omega h_1 \tag{6.5.47}$$

$$n=\begin{cases}1, & \text{水平圆柱体}\\ 0, & \text{薄板}\\ -1, & \text{直立阶梯}\end{cases}$$

由上式可以清楚地看出，薄板的对数振幅谱在高频段有一条直线；而水平圆柱体的$\ln A(\omega)$不是直线，因为$(\ln A(\omega))''<0$，所以是上凸的曲线；对直立阶梯，由于$(\ln A(\omega))''>0$，

故其对数振幅谱曲线是上凹的曲线，见图6.5.2。这样便可将直立有限延深薄板与水平圆柱、无限延深薄板与阶梯进一步区分开。

水平薄板和有限延深厚板，其振幅谱曲线均为周期脉动型，两者难以区分。它们的对数振幅谱虽然也为脉动型，但前者的对数振幅谱因为没有频率因子的影响，所以各个波峰附近有一条直线为它们的公切线，而后者无此规律，见图6.5.3。

3．相位谱

对于简单规则形状二度磁性体的相位谱，可以分为直线型和收敛型两大类。以有限延深倾斜板状体为例，当磁性体中心或顶面中心在水平轴上的投影点与坐标原点不一致时，由富氏变换的位移定理可写出其复谱的一般形式为：

$$S(\omega)=C\cdot F(\omega)\cdot B(\omega)\cdot H(\omega)\cdot e^{i\gamma}\cdot e^{-i\omega x_0} \tag{6.5.48}$$

式中$H(\omega)=(e^{-\omega h_1}-e^{-\omega h_2}\cdot e^{-i\omega d})$，$x_0$为磁性体上顶中心的投影点相对于坐标原点的位移，令$\beta=(\gamma-\omega x_0)$，$T=h_2-h_1$，则可得相位谱为：

$$\Phi(\omega)=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\sin\beta-e^{-\omega T}[\sin(\beta-\omega d)]}{\cos\beta-e^{-\omega T}[\cos(\beta-\omega d)]} \tag{6.5.49}$$

上式也为二度磁性体相位谱的一般表示形式。

（1） 直线型的相位谱

由（6.5.49）式可见，当$d=0$时，有

$$\Phi(\omega)=\gamma-\omega x_0 \tag{6.5.50}$$

显见其相位谱曲线是一条斜率为（$-x_0$）的直线，它在纵轴上的截距为γ角。当$x_0=0$时，为一条水平直线。属于该类型的形体有水平薄板、有限延深直立板、水平圆柱体及无限延深的板状体。

（2）收敛型的相位谱

在（6.5.49）式中，当$d\fallingdotseq 0$、$T\fallingdotseq 0$时，相位谱曲线是以指数衰减为其主要特征的振荡曲线。当ω很大（即高频）时，由于$e^{-\omega T}\to 0$而收敛为一条直线，故称之为收敛型的相位谱曲线。有限延深倾斜板状体属此类形

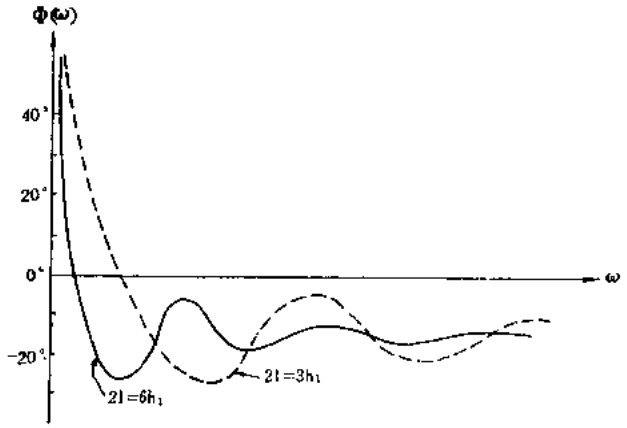


图 6.5.5 不同延深倾斜薄板的相位谱曲线

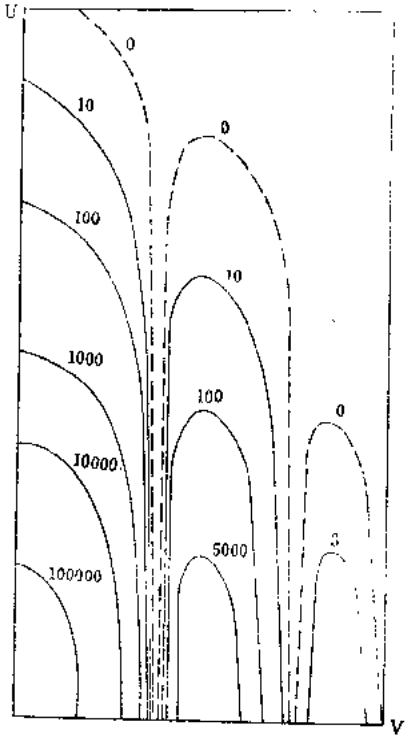


图 6.5.6 有限长水平圆柱体的振幅谱平面特征

体。见图6.5.5。

经对上述三种主要频谱曲线进行分析可以看出，磁异常的各种谱曲线的特征与磁性体形状有着密切的关系，并且不同形体的各种谱曲线的特征又有明显差异，这对利用谱曲线来判别磁性体的形状非常有利。具体作时，先由实测磁异常经变换作出$A(\omega)\sim\omega$曲线，再依据振幅谱曲线的类型初步判断磁性体形状的所属范畴，并结合参考对数振幅谱和相位谱曲线进一步判别和区分形体。图6.5.6为三度形体振幅谱平面等值线图。

6.5.4 磁异常频谱的定量解释

利用频谱曲线判断磁性体形状以后，可进一步求解反问题。频谱曲线在不同的频率段上往往反映了磁性体不同部位的参数特征，而且磁性体的各个参数又都以独立因子出现在频谱函数中，因此利用频谱曲线能直观地求得磁性体的参数，特别是可求出在空间域中难以得到的下底埋深等参数。下面就讨论如何利用磁异常的振幅谱及相位谱来求解磁性体的几何参数和磁性参数。

1．磁异常振幅谱的解释

（1）振幅谱为连续型中的单调递减曲线

这一类型的振幅谱表达式为：

$$A(\omega)=C\cdot F(\omega)\cdot e^{-\omega h} \tag{6.5.51}$$

式中频率因子$F(\omega)$为1或ω^{-1}。

（A）计算上顶埋深h

可利用对数振幅谱曲线高频段的渐近直线求h。当ω很大时，其对数振幅谱曲线的渐近线是一条斜率为h的直线，若设直线的斜率为m_A，则有：

$$h=|m_A| \tag{6.5.52}$$

还可直接利用振幅谱曲线的任意点法求h。在频率轴上任取ω_1和ω_2，相应有$A(\omega_1)$和$A(\omega_2)$，两者之比值为：

$$\frac{A(\omega_1)}{A(\omega_2)}=\frac{C\cdot F(\omega_1)e^{-\omega_1 h}}{C\cdot F(\omega_2)e^{-\omega_2 h}}=\frac{F(\omega_1)}{F(\omega_2)}e^{h(\omega_2-\omega_1)}$$

两边取对数得：

$$h=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\ln\left[\frac{A(\omega_1)\cdot F(\omega_2)}{A(\omega_2)\cdot F(\omega_1)}\right] \tag{6.5.53}$$

（B）确定常数因子C

当$F(\omega)=1$时，利用对数振幅谱高频段渐近直线在纵轴上的截距，它正好为$\ln C$，还可利用零波数处的振幅谱$A(\omega_0)=C$，来求出常数因子C。然后还可通过查表由已判断的形体确定C因子的组成，进而求出其它参数（如b或J_z）。

（2）振幅谱为连续型中的单峰曲线

振幅谱表达式为：

$$A(\omega)=C\cdot F(\omega)e^{-\omega h_1}(1-e^{-\omega T})$$

式中$F(\omega)$为1或ω。

当$F(\omega)=\omega$时，为水平圆柱体的振幅谱，即：

$$A(\omega)=C\cdot\omega e^{-\omega R}$$

可用振幅谱的极大值求R。令$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0$，则：

$$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=C\cdot e^{-\omega R}(1-\omega R)=0 \tag{6.5.54}$$

所以有

$$R=\frac{1}{\omega_m} \tag{6.5.54}$$

式中ω_m为振幅谱曲线极大值所对应的ω值。同样也还可利用任意点法（即（6.5.53）式）求R。

当$F(\omega)=1$时，为有限延深直立薄板的振幅谱，即：

$$A(\omega)=Ce^{-\omega h_1}(1-e^{-\omega T})=4\pi J_r be^{-\omega h_1}(1-e^{-\omega T}) \tag{6.5.55}$$

（A）求上顶埋深h_1

当ω很大（即高频段）时，（6.5.55）式有近似关系式存在：

$$A_1(\omega)\doteq Ce^{-\omega h_1}$$

故可利用（6.5.52）式或（6.5.53）式求出h_1，并进一步求出C。

（B）求延深长度T

当ω很小（即低频段）时，有近似关系式：

$$A_2(\omega)\doteq C(1-e^{-\omega T})$$

在低频段上取ω_3和ω_4，并使$\omega_4=2\omega_3$，则可以计算出延深长度T：

$$T=\frac{1}{\omega_3}\ln\frac{A(\omega_3)}{A(\omega_4)-A(\omega_3)} \tag{6.5.56}$$

这时有$h_2=T+h_1$。在已求得h_1和C的情况下还可利用振幅谱曲线原点处的斜率直接求下界深度h_2。若以$\omega=0$代入$A_2(\omega)$的一阶导数式，即得：

$$h_2=\frac{1}{C}\left.\frac{dA_2(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}+h \tag{6.5.57}$$

式中$\left.\frac{dA_2(\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=0}$即为振幅谱曲线原点处切线的斜率。

（C）求b

利用振幅谱曲线的极值$A(\omega)_{max}$可求得b。

由（6.5.55）式，令$\frac{dA(\omega)}{d\omega}=0$解得：

$$\omega_{max}=\frac{1}{T}\ln\frac{h_1+T}{h_1}$$

所以有：

$$b=A(\omega)_{max}\cdot\frac{h_1+T}{T}\left(\frac{h_1+T}{h_1}\right)^{\frac{h}{T}}(4\pi J_r)^{-1} \tag{6.5.58}$$

由上式可见，只要知道b和J_r中的一个便可求得另一个参数。

由上面的讨论还可看出：振幅谱的高频段反映了浅部（上顶）磁性体的效应；低频段则主要反映了深部（下端）磁性体的效应。此规律对其它有下界面的形体均存在。

（3）过渡型的振幅谱

分析式(6.5.45)给出的有限延深倾斜薄板的振幅谱表达式可知，利用高频段的近似式

得到类似于单调递减的形式，可解出上顶埋深和常数因子 C，而利用低频段的近似式，则可用单峰型振幅谱的解释法求解下底埋深和水平宽度b。

（4）周期脉动型的振幅谱

（A）计算b

对周期脉动型因$B(\omega)=\sin(\omega b)$，其振幅谱和对数振幅谱出现周期性极小值节点。设这些节点处的频率为ω_{0k}，，则$\omega_{0k}=\frac{\pi}{b}K$，$(K=1,2,3,\cdots)$。可见能利用这些周期性极小值节点所对应的频率求 b，即

$$b=\frac{\pi}{\omega_{0k}}K \qquad (K=1,2,3,\cdots) \tag{6.5.59}$$

式中K为出现周期性极小值节点的序号。

（B）计算上顶埋深h_1

在振幅谱曲线上取$\omega_1=\frac{\pi}{2b}$、$\omega_2=\frac{3\pi}{2b}$，相对应的振幅谱为$A(\omega_1)$和$A(\omega_2)$，此时有：

$$|\sin(\omega_1 b)|=|\sin(\omega_2 b)|=1，\ 即 B(\omega)=1$$

其振幅谱的表达式可写成：

$$A(\omega)=C\cdot F(\omega)\cdot e^{-\omega h_1}\cdot H_1(\omega)$$

对比式（6.5.41）和（6.5.42）可知，式中

$$H_1(\omega)=[1+e^{-2\omega T}-2e^{-\omega T}\cos(\omega\cdot d)]^{1/2}$$

将ω_1和ω_2代入上式并取相应振幅之比，有

$$\frac{A(\omega_1)}{A(\omega_2)}=\frac{e^{-\omega_1 h_1}\cdot H_1(\omega_1)\cdot F(\omega_1)}{e^{-\omega_2 h_1}\cdot H_1(\omega_2)\cdot F(\omega_2)}$$

取对数后可得：

$$h_1=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\ln\frac{A(\omega_1)\cdot H_1(\omega_2)}{F\cdot A(\omega_2)\cdot H_1(\omega_1)} \tag{6.5.60}$$

式中$F=\frac{F(\omega_1)}{F(\omega_2)}$，当$F(\omega)=1$、$F=1$，令$H_1(\omega_2)=H_1(\omega_1)=1$时，为水平薄板；当$F(\omega)=\omega^{-1}$时，$F=3$，为厚板状体，若是无限延深，$H_1(\omega_1)=H_1(\omega_2)=1$，则可直接求得$h_1$，当有限延深时，可利用振幅谱低频段近似式求出$T$和利用相位谱曲线求得$d$后，再求解$h_1$。

（5）利用振幅谱“标准化”曲线的解释

求得了b以后，可知水平尺寸因子$B(\omega)$，再根据已判断出的形体，由振幅谱组成因子表中查得频率因子$F(\omega)$，这样便可得到振幅谱的“标准化”公式，即

$$NA(\omega)=\left|\frac{A(\omega)}{F(\omega)\cdot B(\omega)}\right|=C\cdot H(\omega) \tag{6.5.61}$$

由上式可见，振幅谱的“标准化”曲线的类型依赖于深度因子 $H(\omega)$，即可有单调递减型、单峰型和过渡型的谱曲线。使用“标准化”曲线便可利用前述的相应方法来求解反演问题。

2．磁异常相位谱的解释

(1) 直线型的相位谱

式 (6.5.50) 已经给出：$\Phi(\omega)=\gamma-\omega x_0$，在频率轴上任取$\omega_1$和$\omega_2$，其中 $\omega_2>\omega_1$，有

$$x_0=-\frac{\Phi(\omega_2)-\Phi(\omega_1)}{\omega_2-\omega_1} \tag{6.5.62}$$

若计算所得的x_0为正值，则从所选定的坐标原点向x轴的正向截取x_0长度，即得磁性体上顶中心在水平轴上的投影点位置；当x_0为负值时，应向x轴的负方向截取$|x_0|$长度以求得上顶中心在x轴上的投影位置。

由相位谱斜线在纵轴上的截矩可求γ角，但应注意这里所求出的γ角为$\gamma=-(\alpha-i_z)$，与空间域的习惯规定相差一负号。

(2) 收敛型的相位谱

利用高频段渐近直线，同样可用直线型相位谱的解释法求得γ角和x_0，下面着重讨论其求解岩层倾角α及倾斜长度的水平投影宽度d。

(A) 计算α角

设$x_0=0$，当ω趋于零波数时，由罗必塔法则可求得：

$$\frac{\mathrm{Im}S(0)}{\mathrm{Re}S(0)}=\frac{T\cdot\sin\gamma+d\cos\gamma}{T\cos\gamma-d\sin\gamma}=\frac{\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{ctg}\alpha}{1-\mathrm{tg}\gamma\cdot\mathrm{ctg}\alpha}$$

令α角的余角为α'，即$\alpha+\alpha'=\pi/2$，则有：

$$\frac{\mathrm{Im}S(0)}{\mathrm{Re}S(0)}=-\frac{\mathrm{tg}\gamma+\mathrm{tg}\alpha'}{1-\mathrm{tg}\gamma\cdot\mathrm{tg}\alpha'}=\mathrm{tg}(\gamma+\alpha')$$

利用上式可求得α'角，但不能使$\omega=0$(因为会导致$\mathrm{Im}S(0)=0$)。但是当ω很小时，$\mathrm{Im}S(0)$和$\mathrm{Re}S(0)$都是连续函数，故可取ω很小时的相位谱值，有：

$$\alpha\doteq\gamma+\frac{\pi}{2}-\mathrm{tg}^{-1}\frac{\mathrm{Im}S(\omega)}{\mathrm{Re}S(\omega)} \tag{6.5.63}$$

(B) 计算d

由于$\Phi(\omega)$是围绕着它的高频段渐近直线，$\Phi_1(\omega)$波动的呈指数衰减的函数，因此在低频段上相位谱曲线$\Phi(\omega)$将与渐近直线$\Phi_1(\omega)$有一系列交点（见图6.5.5），若设交点的横坐标为ω_i，，应有$\Phi(\omega_i)=\Phi_1(\omega_i)$。

收敛型相位谱还可以写成下面的形式：

$$\Phi(\omega)=\gamma-\omega x_0+\mathrm{tg}^{-1}\frac{e^{-\omega T}\sin(\omega d)}{1-e^{\omega T}\cos(\omega d)}$$

所以有：

$$\gamma-\omega_i x_0+\mathrm{tg}^{-1}\frac{e^{-\omega_i T}\sin(\omega_i d)}{1-e^{-\omega_i T}\cos(\omega_i d)}=\gamma-\omega_i x_0$$

则

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{e^{-\omega T}\sin(\omega_i d)}{1-e^{-\omega_i T}\cdot\cos(\omega_i d)}=0$$

若使上式成立，应有：$\omega_i d=k\pi$，$(k=1,2,\cdots)$再设相邻两个交点的横坐标分别为ω_i、ω_{i-1}，则

$$d=\frac{\pi}{\omega_i-\omega_{i-1}} \tag{6.5.64}$$

如果已求得x_0、α、T和d，也就不难求出磁性体中心位置在剖面上的投影$\bar{x}_0$。

$$\bar{x}_i=x_0+\frac{1}{2}T\cdot \mathrm{ctg}\alpha=x_0+\frac{1}{2}d \tag{6.5.65}$$

式中$\bar{x}_0$为磁性体中心相对于坐标原点的位移。

对于三度磁性体中心位置的确定，需用到$\omega=0$及$\nu=0$两个频率轴上的相位谱曲线，应用类似上面的方法分别求出其x_0、y_0和$\bar{x}_0$、$\bar{y}_0$。

由上面的讨论可见，利用相位谱求解反问题时，须将反正切函数的主值恢复为相应的多值函数，才能进行解释。

由已求得的α、h_1、T等参数，再利用振幅谱的表达式不难求出磁化强度J。应指出上述的一系列解释方法仅限于单个规则形体异常的解释。目前在应用频谱分析进行重、磁异常解释中也像空间域一样，有频率域的最优化选择法可求解反问题，从某种意义上说，后者可能要优于前者，因为它的解析式简单、参数少，并基本上以独立因子出现，最优化的收敛性和多解性将会有所改善。另外在频率域解释中，可对异常群采用统计分析进行平均径向谱的解释方法，此方法适于做大量异常的处理，可将航磁异常群划分为平均深度各不相同的几组，为区域地质构造调查提供解释结果。

最后要指出，频率域中磁异常正、反演问题的研究，目前都是建立在观测面水平和将实测异常准确地换算成频谱的基础上。虽然快速富氏变换为我们提供了快速计算频谱的方法，但在换算过程中的各种误差会对换算结果产生一定的影响，所以如何减小换算误差以及改进频率域的解释方法，都还是有待于进一步研究的问题。

第七章　磁异常的处理及转换

§7.1　磁异常处理和转换的目的及内容

7.1.1　处理和转换的目的

根据磁异常的数学物理特征，对实测磁异常进行必要的数学加工处理，使之满足某些特定需要的过程称为异常的处理和转换。它已成为磁异常解释推断中不可缺少的重要步骤，其目的是：

（1）通过磁异常的处理和转换，使实际异常满足磁异常解释理论所要求的假设条件。实际情况是复杂多变的，它往往不能满足第五章所述的正演问题的假设条件，例如：磁性体形态复杂、多个磁性体迭加、非均匀磁化、观测面不水平、J_r较大且与J_i方向不同又无法确定及形状复杂的磁性体的退磁作用等，都会使异常复杂化。对于复杂磁异常进行解释时，除了谋求运用复杂情况的解释方法外，主要办法是对复杂异常进行一定的数据处理，使其满足或接近于假设条件，即将复杂异常处理成为简单异常，例如把迭加异常分解为孤立异常。

（2）通过磁异常的转换，满足磁异常解释推断方法的要求。磁异常的实际情况常常是复杂的，解释推断的要求在不断深入，推断的方法也在不断发展，这就要求能从多方面提供异常信息，来满足推断方法本身的要求。例如：磁场空间分布法要求磁异常的空间分布资料，矢量解释法要求磁异常总矢量T_a的资料，频率域解释方法要求磁异常的频谱。但是，野外实际工作中由于各种条件的限制，往往只进行磁场单分量的测量，这样就要求对磁异常进行转换，从而满足解释推断方法的要求。

（3）根据磁异常解释推断的要求，经过处理，突出有用异常的信息，有利于异常的解释推断。例如，在实测异常中，存在浅部磁性体异常的干扰，则应通过向上延拓、插值或滤波等处理手段，压制浅部干扰异常，提高异常的信噪比，突出有用磁性体异常。又如：磁铁矿与火成岩体的磁异常因其磁性和产状不同其异常特点将有明显差异，但是二者都埋藏较深时，其差异就不明显了，如果通过磁异常的转换（如通过延拓），可突出各自特点。

实践证明磁异常资料的处理和转换，对于提高解释推断的效果是很重要的，是磁异常解释理论研究的重要课题。由于电算技术的应用，磁异常处理和转换的研究和应用正在不断深入和发展。

对磁异常进行处理和转换时，要注意以下几个问题：

（1）对于实测磁异常，并不要求都用所有的方法处理和转换一遍，而是根据地质情况和异常特征来选择合适的处理方法。盲目地对磁异常做处理和转换并不能使解释推断的效果更好，反而因失去处理的意义而造成浪费。

（2）磁异常的处理和转换只能使包含在观测资料中的某些信息更加突出，更加明显，而不能处理不包含在观测数据中的各种信息。异常处理和变换只能改变异常的信噪比，而

不能提供新信息。因此，更不能认为通过磁异常的处理和转换能代替实际观测。

（3）磁异常的处理和转换方法一般遵循物理原理，并按计算数学方法，在应用中要根据实际地质情况进行方法实验，加强资料的综合研究，不断总结和提高，才能取得地质效果并使方法日臻完善。

7.1.2 处理和转换的内容

磁异常的数据处理和转换包括空间域和频率域两类方法，就其转换内容而言，大体可归纳为下列几种：

（1）划分异常：利用计算数学中曲线拟合和插值等手段，划分局部和背景异常，消除浅部磁性覆盖层的随机干扰和观测中的偶然误差等。

（2）磁异常的空间转换，又称为磁异常的延拓：利用磁异常的调和函数性质，根据实测异常求其它无源空间部分的磁异常。

（3）磁异常参数ΔT、Z_a、H_a及T_a之间变换。

（4）磁异常的积分变换：利用磁异常的可加性，将实测三度异常转换为二度异常等。

（5）磁异常的微分变换：利用磁异常的调和函数性质，根据实测磁异常求不同空间位置磁异常的一阶或高阶导数异常。

（6）磁异常的富氏变换和数字滤波。

上述内容在本章中将分别予以阐述。

§7.2 磁异常的圆滑和插值

7.2.1 磁异常的最小二乘圆滑

野外实测异常中经常包含一些测量的偶然误差及近地表的不均匀磁性体的随机干扰，其磁场特征表现为不规则的起伏，起伏值服从于正态分布规律，起伏的平均值为零。此种随机干扰在进行场的向下延拓及导数换算时，还会“放大”，使转换后的场发生更大的畸变。消除这类随机干扰，通常称为圆滑或光滑曲线。其目的是为了突出较光滑的主体异常，并使磁测资料的转换取得更好的效果。

1．最小二乘圆滑的原理及计算公式

对实测磁异常进行圆滑，从数学上讲属于函数的拟合问题，即用一个函数去拟合离散的实测值，根据实测异常的特点，这个拟合函数可以为多项式，或者为富氏级数等其它函数形式，一般常用多项式。由于拟合的原则是采用最小二乘法，使多项式与实测异常的偏差的平方和最小达到圆滑异常的目的。所以称为最小二乘圆滑。基本设想是：如为二度异常，圆滑是沿着磁异常剖面进行的，令计算点的坐标为x_0，在其两侧各取若干个点，在这些点上利用m阶多项式与实测曲线进行拟合，求出x_0点的圆滑值。其它点的圆滑值也用相同方法逐点移动进行，故这种方法又称为滑动最小二乘拟合。若为三度异常，圆滑是对平面异常进行的，则在计算点周围取若干个点，一般在测线和垂直测线的两个方向上以相等的点距取点，利用这些点进行滑动曲面拟合。

现以二度异常圆滑为例讨论圆滑的原理及其计算方法。

最小二乘拟合多项式为：

$$Q_m(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m=\sum_{j=0}^{m}a_jx^j$$

在 x 轴的〔a，b〕区间内，若在 x_0，x_1，x_2，$\cdots x_n$ 共（$n+1$）个点上测得的异常值为 Z_0，Z_1，Z_2，$\cdots Z_n$。根据这（$n+1$）个点上的异常值，用最小二乘法求出多项式。

设 $Q_m(x_i)$ 为 $Q_m(x)$ 在 x_0，x_1，$\cdots x_n$ 各点上的值，令 $Q_m(x_i)$ 与 Z_i 之差值的平方和为最小，即：

$$\varepsilon=\sum_{i=0}^{n}\left[Q_m(x_i)-Z_i\right]^2=\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx^j-Z_i\right]^2=\min$$

$$(n>m) \qquad (7.2.1)$$

为使（7.2.1）式达到最小，应有：

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial a_k}=2\sum_{i=0}^{n}\left[Q_m(x_i)-Z_i\right]x_i^k=0$$

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{j=0}^{m}a_jx_i^{j+k}\right]-\sum_{i=0}^{n}Z_ix_i^k=0$$

$$\sum_{j=0}^{m}a_j\sum_{i=0}^{n}x_i^{j+k}-\sum_{i=0}^{n}Z_ix_i^k=0 \qquad (7.2.2)$$

式中 $\quad j=k=0,1,2,\cdots\cdots,m$

（7.2.2）式中 Z_i 和 x_i 都为已知值，而 a_j 为未知数，故（7.2.2）式为（$m+1$）元的线性方程组，方程中的每一个方程式都包含有（$n+1$）个点的 x_i 和 Z_i 值。解这个（$m+1$）元的线性方程组就可以求出系数 a_0，a_1，a_2，$\cdots a_m$。

引用符号 $b_k=\sum_{i=0}^{n}Z_ix_i^k$，$S_{j+k}=\sum_{i=0}^{n}x_i^{j+k}$，则（7.2.2）式化简为：

$$b_k=\sum_{j=0}^{m}a_j\cdot S_{j+k}$$

用矩阵表示线性方程组：

$$\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}_{(m+1)\times1}=\begin{pmatrix}S_0&S_1&S_2&\cdots\cdots&S_m\\S_1&S_2&S_3&\cdots\cdots&S_{m+1}\\S_2&S_3&S_4&\cdots\cdots&S_{m+2}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\S_m&S_{m+1}&S_{m+2}&\cdots\cdots&S_{2m}\end{pmatrix}_{(m+1)(m+1)}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}_{(m+1)\times1}$$

将上式的矩阵方程简写为：

$$\mathbf{B}=\mathbf{SA}$$

由此求出：

$$\mathbf{A}=\mathbf{S}^{-1}\mathbf{B} \qquad (7.2.3)$$

式中 $\mathbf{S}^{-1}$ 为 $\mathbf{S}$ 的逆矩阵。

当圆滑点为坐标原点，即 $x=0$，多项式 $Q_m(x)=a_0$，故在 $x=0$ 点的拟合值 $\bar{Z}_a(0)=a_0$，则有：

$$\bar{Z}=a_0=\sum_{i=-n}^{n}S_i^{-}B_i \qquad (7.2.4)$$

例如用一个二阶多项式在〔-2，+2〕区间取$x=0$，±1，±2五个点来拟合实测异常，按(7.2.1)式可列出如下三个三元一次方程式：

$$k=0,\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_0}=0 \qquad \sum_{i=-2}^{2}[a_0+a_1x_i+a_2x_i^2-Z_i]=0$$

$$k=1,\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_1}=0 \qquad \sum_{i=-2}^{2}[a_0x_i+a_1x_i^2+a_2x_i^3-Z_ix_i]=0$$

$$k=2,\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial a_2}=0 \qquad \sum_{i=-2}^{2}[a_0x_i^2+a_1x_i^3+a_2x_i^4-Z_ix_i^2]=0$$

以$x=0$，±1，±2代入上面方程式，由求逆矩阵方法，按（7.2.4）式得二阶五点圆滑公式：

$$\bar{Z}(0)=a_0=\frac{1}{35}[17Z_0+12(Z_1+Z_{-1})-3(Z_2+Z_{-2})]$$

$$=0.4857Z_0+0.3429(Z_1+Z_{-1})-0.0857(Z_2+Z_{-2})$$

同理可得到其它二度异常的圆滑公式，例如：

一阶五点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=\frac{1}{5}(Z_0+Z_1+Z_{-1}+Z_2+Z_{-2})$$

二阶七点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=\frac{1}{21}[7Z_0+6(Z_1+Z_{-1})+3(Z_2+Z_{-2})-2(Z_3+Z_{-3})]$$

$$=0.3333Z_0+0.2857(Z_1+Z_{-1})+0.1428(Z_2+Z_{-2})$$
$$-0.0952(Z_3+Z_{-3})$$

二阶九点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=\frac{1}{231}[59Z_0+54(Z_1+Z_{-1})+39(Z_2+Z_{-2})$$
$$+14(Z_3+Z_{-3})-21(Z_4+Z_{-4})]$$
$$=0.2554Z_0+0.2338(Z_1+Z_{-1})+0.1688(Z_2+Z_{-2})$$
$$+0.0606(Z_3+Z_{-3})-0.0909(Z_4+Z_{-4})$$

二阶十一点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=0.2074Z_0+0.1958(Z_1+Z_{-1})+0.1608(Z_2+Z_{-2})$$
$$+0.1026(Z_3+Z_{-3})+0.0210(Z_4+Z_{-4})-0.0839(Z_5+Z_{-5})$$

四阶七点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=0.5671Z_0+0.3246(Z_1+Z_{-1})-0.1298(Z_2+Z_{-2})$$
$$+0.0216(Z_3+Z_{-3})$$

四阶十一点圆滑：

$$\bar{Z}(0)=0.3333Z_0+0.2797(Z_1+Z_{-1})+0.1397(Z_2+Z_{-2})$$
$$-0.0233(Z_3+Z_{-3})-0.1049(Z_4+Z_{-4})+0.042(Z_5+Z_{-5})$$

三度异常的圆滑是在二维平面内进行的曲面拟合，亦称之谓二维圆滑。因圆滑公式书

写复杂，考虑到圆滑系数对称于坐标原点，这里给出一个象限的圆滑系数，见图 7.2.1 、图 7.2.2 及图 7.2.3。其它点位的圆滑系数读者可以根据对称性自行判断。图中 系数是在测线和测点间距相等（即 $\Delta x=\Delta y$）的情况下计算得到的。

当多项式 $Q_m(x)$的阶数较高，并且用的点数较多时，解线性方程组是困难的。在此情况下可以用正交多项式来求得系数。读者可参考有关数学参考书，在此不加讨论。

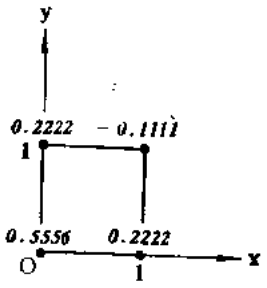


图 7.2.1 平面二阶九点光滑系数

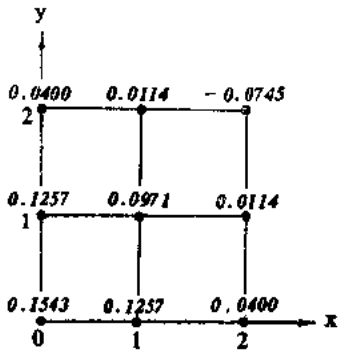


图 7.2.2 平面二阶二十五点圆滑系数

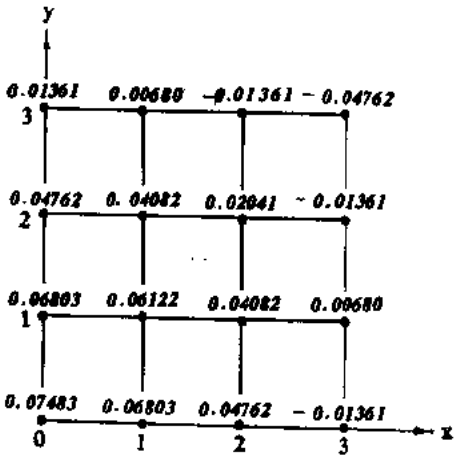


图 7.2.3 平面二阶四十九点圆滑系数

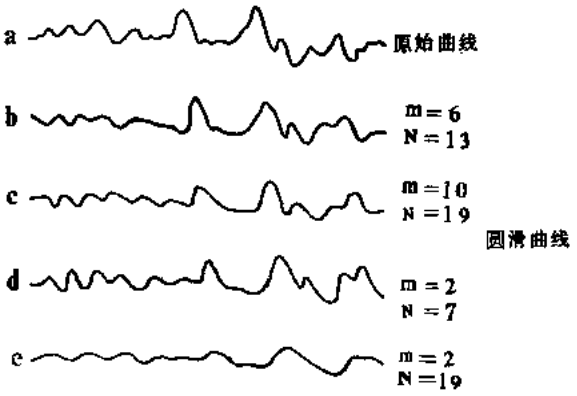


图 7.2.4 不同点数和阶次的最小二乘圆滑效果

2．影响圆滑效果的因素

（1）多项式的阶次：从理论上来分析，多项式的阶次越高，对实测异常的拟合程度越好，因此原异常上的一些起伏变化都能拟合出来，所以圆滑效果就不好。反之，多项式阶次越低，对原曲线拟合程度越低，圆滑作用显著。见图7.2.4中c，e。

（2）圆滑的点数：圆滑的点数越多，圆滑的效果越好。但圆滑的点数过多，就加大了计算工作量，边缘损失也过大。见图7.2.4中d，e。

（3）圆滑的点距：圆滑的点距Δx（或Δy)越大，圆滑的效果也越好。但点距过大，会引起圆滑后的异常强度压得过低，宽度变大，梯度变小，即失真过大。为了保证异常尽量少失真，而又要去掉干扰异常，Δx要大于干扰异常的宽度，要比需要保留的异常宽度小很多。

可以看出：采用低阶次而少点数与高阶多点的公式有可能得到相同的圆滑效果，见图7.2.4中c，d。经常使用的圆滑公式的阶次并不高，同时点数也不宜过多。

以上介绍了不同阶次和不同点数的二度和三度异常的圆滑方法。对于随机干扰强度不大，而异常趋势规律比较明显的二度异常，我们亦可以更为简单地用徒手圆滑的方法。圆

滑时只要保持圆滑前后的曲线与 x 轴所夹的面积不变即可。

7.2.2 磁异常的插值

在局部异常和区域背景异常迭加的情况下，常常需要将局部异常和背景异常加以划分。当局部异常的宽度与背景异常的宽度相差不太多（例如1/3左右），而其强度又相当大的情况下，采用光滑的方法已不能奏效，可采用插值的方法。其实质是：根据不受局部场干扰地段的异常值，建立插值函数，然后根据该函数求出受干扰地段的磁场值，即为区域异常值。实测异常与求得的区域异常的差值，即是局部异常。

下面介绍磁异常的拉格朗日插值计算。

在实测二度磁异常的剖面上，选取 x_0，x_1，x_2……x_n 等$(n+1)$个点为插值结点，其异常值分别为 $Z(x_0)$，$Z(x_1)$，$Z(x_2)$……$Z(x_n)$，若计算点的坐标为 $x(a<x<b)$，其异常值为 $Z(x)$，则在区间 $[a, b](x_0=a, x_n=b)$ 上 $Z(x)$ 可用拉格朗日插值多项式表示，其形式为

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{n} Z(x_m)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{m-1})(x-x_{m+1})\cdots(x-x_n)}{(x_m-x_0)(x_m-x_1)\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots(x_m-x_n)} \tag{7.2.5}$$

或简记为：

$$Z(x)=\sum_{m=0}^{n} Z(x_m)\frac{\Pi_n(x)}{(x-x_m)\Pi_n'(x_m)} \tag{7.2.6}$$

其中：

$$\Pi_n(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots\cdots(x-x_n)$$

$$\Pi_n'(x_m)=\frac{\partial}{\partial x}[\Pi_n(x)]_{x=x_m}=(x_m-x_0)(x_m-x_1)$$
$$\cdots\cdots(x_m-x_{m-1})(x_m-x_{m+1})\cdots\cdots(x_m-x_n)$$

若如图7.2.5所示，用五点x_0，x_1，x_2，x_3，x_4内插出x点的场值，则由（7.2.5）式可知，相当于用4次多项式来逼近实测异常。按（7.2.6）式可展开成下式：

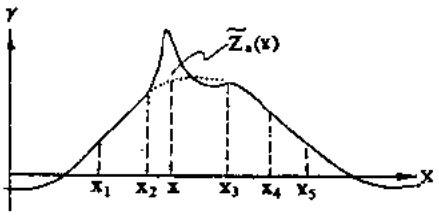


图 7.2.5 五点插值示意图

$$\begin{aligned}\tilde{Z}(x)=&\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x_0-x_4)}Z(x_0)\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)}Z(x_1)\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)}Z(x_2)\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)}Z(x_3)\\&+\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}Z(x_4)\end{aligned}$$

就可以计算出$\tilde{Z}(x)$值，将$\tilde{Z}(x)$值与$Z(x_0)$，$Z(x_1)\cdots Z(x_4)$等值用圆滑曲线连接起来，得到光滑的背景异常。再用实测异常减去背景异常即得局部异常（剩余异常），从而将区域异常

与局部异常分离开。

对于平面的异常数据，可以用二维的插值多项式进行内插，二维插值多项式为：

$$\tilde{Z}(x,y)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}\prod_{\substack{l=0\\ l\neq i}}^{m}\prod_{\substack{k=0\\ k\neq i}}^{n}\left(\frac{x-x_k}{x_i-x_k}\right)\cdot\left(\frac{x-y_l}{y_j-y_l}\right)Z_{ij} \tag{7.2.7}$$

理论上插值多项式是唯一的。但是选择的插值结点不同，其局部异常的干扰并不相等，所以实际计算的结果并不是唯一的。因此应在定性分析异常的基础上选择插值结点。一般应尽量避开局部异常的干扰，为了减少计算误差，插值结点间的距离又不能过大。此外，插值结点应大致均匀分布于计算点的两翼。为了便于计算，结点不应选择过多，即插值多项式的阶次不宜过高。一般情况下，选择4～6个插值结点，建立3～5阶插值多项式，约可满足区分区域背景异常和迭加异常的要求。

*§7.3 磁异常空间转换的基本理论

在场源以外的空间内，磁位u及其在各个方向的偏导数都是调和函数，都满足拉普拉斯方程。在位论中已知拉普拉斯方程具有如下的边值问题：

1．狄里希莱(Dirichlet)问题（第一边值问题）：

$$\begin{cases}\Delta u=0 & (\text{在}\Omega\text{内})\\ u|_R=f(M) & (\text{在}\Omega\text{的边界}R\text{上})\end{cases} \tag{7.3.1}$$

2．诺依曼(Neumann)问题（第二边值问题）：

$$\begin{aligned}&\Delta u=0 && (\text{在}\Omega\text{内})\\ &\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_R=\varphi(M) && (\text{在}\Omega\text{的边界上})\end{aligned} \tag{7.3.2}$$

本节将分别讨论利用格林函数法建立拉普拉斯方程在上述边值问题中解的积分表达式。

7.3.1 第一边值问题和泊松积分

1．格林公式及调和函数的积分表达式

设u，V都是x，y，z的函数，且在$\Omega+R$上有连续的一阶偏导数，在Ω内有连续的二阶偏导数。则此函数将满足格林第二公式：

$$\iiint_{\Omega}(u\Delta V-V\Delta u)\,dV=\iint_R\left(u\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds \tag{7.3.3}$$

所谓调和函数的积分表达式，就是用调和函数及其在区域边界R上的法向导数沿R的积分来表示调和函数在Ω域内任意点的值。

设$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$为Ω域内某一固定点，为求调和函数在该点的值，引出一个函数：

$$V=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \tag{7.3.4}$$

函数$\frac{1}{r}$除点M_0外，处处满足拉普拉斯方程。通常称它为拉氏方程的基本解。由于$V=\frac{1}{r}$在Ω内有奇异点M_0，在Ω内作一个以M_0为中心，以充分小的正数ε为半径的球面Γ，在Ω

域内挖去Γ所包围的球域K，得到区域 Ω-K，见图7.3.1。

则7.3.3式在 Ω-K域内应写为：

$$\iiint_{\Omega-K}\left[u\Delta\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\Delta u\right]d\Omega=\iint_{R+\Gamma}\left[u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds \qquad (7.3.5)$$

因为在 $\Omega-K$ 内，$\Delta u=0$，$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$，在球面$\Gamma$上：

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}=-\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial r}=\frac{1}{r^2}=\frac{1}{\varepsilon^2}$$

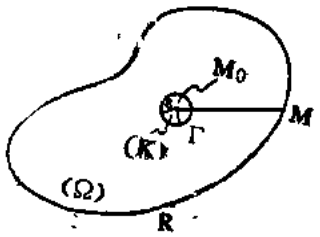


图 7.3.1 Ω域中的计算点示意图

因此：

$$\iint_{\Gamma}u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}ds=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Gamma}uds=\frac{1}{\varepsilon^2}\bar{u}\cdot 4\pi\varepsilon^2=4\pi\bar{u}$$

其中$\bar{u}$是函数u在球面Γ上的平均值。同理可得：

$$\iint_{\Gamma}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}ds=\frac{1}{\varepsilon}\iint_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}ds=4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)$$

此外$\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)$是$\frac{\partial u}{\partial n}$在球面$\Gamma$上的平均值，将此二式代入（7.3.5）式，得

$$\iint_{R}\left[u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right]ds+4\pi\bar{u}-4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)=0$$

现令$\varepsilon\to 0$，则$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\bar{u}=u(M_0)$，因为$u(x,\ y,\ z)$是一阶连续可微，故$\frac{\partial u}{\partial n}$有界，则

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}4\pi\varepsilon\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial n}\right)=0$，则得：

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{R}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-\frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]ds \qquad (7.3.6)$$

式中将$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$记为$r_{MM_0}$。 (7.3.6)

式说明，对于 $\Omega+K$上有连续一阶偏导数的调和函数u，在域 Ω内任意点M_0之值，可用函数在区域边界R上的值及其在R上的法向导数的积分表达式来表示。

2．格林函数

狄里希莱问题（7.3.1）式或诺依曼问题（7.3.2）式的条件是只知边界上的调和函数或是其外法向导数之一，故（7.3.6）式还得加以改造才能解决这两个问题，因此要引出格林函数。

在公式（7.3.6）中考虑这样一个特殊的调和函数$g(M,\ M_0)$，它在区域Ω内关于变量M是调和的，而在Ω的边界R上与函数$\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}$在边界R上的值相同，即

$$\left[g(M,M_0)\right|_R=\left.\frac{-1}{4\pi r_{MM_0}}\right|_R$$

在格林第二公式（7.3.3）中取$V=g(M,\ M_0)$就有

$$\iint_R\left(g\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial n}{\partial g}\right)ds=0$$

把此式与（7.3.6）相加就得到：

$$u(M_0)=\iint_R\left(G\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial G}{\partial n}\right)ds \tag{7.3.7}$$

其中函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}+g\ (M,M_0) \tag{7.3.8}$$

称为格林函数。由于$G(M,\ M_0)$的灵活性，可以设法用式（7.3.7）来解狄里希莱问题和诺依曼问题。

在解狄里希莱问题（7.3.1）式中的$G(M,\ M_0)$应满足条件：

$$\begin{cases}\Delta G=0\\ G|_R=0\end{cases}$$

$$g(M,M_0)\Big|_R=\frac{-1}{4\pi r_{MM0}}\Big|_R$$

$G(M,\ M_0)$称为区域Ω内的狄里希莱问题的格林函数。如果这样的$G(M,\ M_0)$已经求得，则狄里希莱问题的解（7.3.7）式就表示为：

$$u(M_0)=-\iint_R f\frac{\partial G}{\partial n}ds \tag{7.3.9}$$

在一般情况下不能得到$G(M,\ M_0)$的解析表达式，因为它又要去解一个特殊的狄里希莱问题。

$$\Delta g=0$$

$$g\Big|_R=\frac{-1}{4\pi\gamma_{MM_0}}\Big|_R$$

这同样是困难的。但是在一些特殊形状的区域中，格林函数是完全可以确定的。

3．半空间的格林函数和泊松积分

现考虑一个最简单的区域的格林函数。设在一个导体平面位于$z=0$平面上，在$z<0$的半空间中的点$M_0(x_0,y_0,-z_0)$处放一个点电荷q，求在半空间$z<0$中电位的分布规律。如图7.3.2。

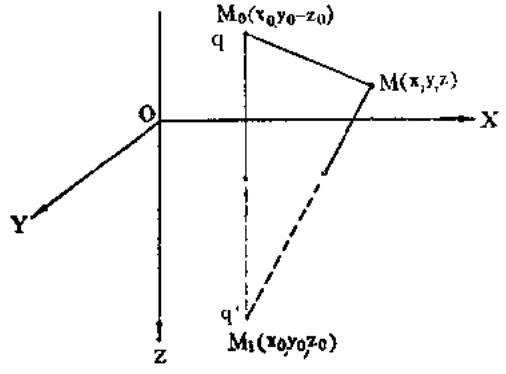


图 7.3.2　镜象法示意图

由于导体接地，故q的电位G在z=0上之值为零，因此得定解问题：

$$\begin{cases}\Delta G=0 & \text{在}z<0\text{半空间中，}\\ G|_{z=0}=0 & M_0\text{点除外}\end{cases}$$

现在用镜象法来解决这个问题。我们知道由于q的存在，$z=0$平面上出现了感应面电荷。现在我们以点电荷q'来代替感应面电荷，把它放在M_0点关于$z=0$平面的镜象点$M_1(x_0,y_0,\ z_0)$处，如图7.3.2所示。

现在由 q 和 q' 所共同产生的电位在 $z=0$ 平面上之值为零这个条件来确定 q' 的值。显然两个电荷在上半空间任一点 $M(x,\ y,\ z)$ 处的电位为

$$G(M,\ M_0)=\frac{q}{4\pi r}+\frac{q'}{4\pi r_1}$$

其中：

$$r=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}$$
$$r_1=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$$

在 $z=0$ 平面上应有：

即：
$$G(M,M_0)|_{z=0}=\left(\frac{q}{4\pi r}+\frac{q'}{4\pi r_1}\right)_{z=0}=0$$

$$\frac{q}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0^2)+z_0^2}}+\frac{q'}{4\pi\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}}=0$$

所以 $q=-q'$

上半空间的电位分布为：

$$G(M,M_0)=\frac{q}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}-\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right] \tag{7.3.10}$$

当 M 点处于 xoy 平面上 $(z=0)$ 时，并令 $q=1$，由于 n 与 z 反向，由上式对 z 轴求导可得：

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=-\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}$$

代入（7.3.9）式后得：

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{Z_0}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x,y)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2]^{3/2}}dxdy$$

$M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是半空间 $z<0$ 中的点，$f(x,y)$ 是 $u(M_0)$ 的边值，所以 $f(x,y)=u(x,y,0)$，把积分变量换为 ξ，η，则上面的积分变为：

$$u(x,y,z)=\frac{z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\eta,0)}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}d\xi d\eta \tag{7.3.11}$$

$(z<0)$

这个公式也叫泊松积分。

（7.3.11）式就是位场的向上延拓公式。如果把地平面看作平面 $z=0$，$u(\xi,\ \eta,\ 0)$ 取作磁异常的实测值，则公式（7.3.11）给出了向上延拓的磁异常值。

对于二度异常，完全可以仿照三度异常的情况来外理。不过需要注意：

二维拉普拉斯方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ 的基本解应取作：

$$g(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}} \tag{7.3.12}$$

其中

$$\rho_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}$$

如果适当选取$G(M,\ M_0)$，使

$$G(M,M_0|_0=\left[\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}+g(M,M_0)\right]_0=0$$

即可得狄里希莱问题的解：

$$u(M_0)=-\int f(M)\frac{\partial G}{\partial n}ds \tag{7.3.9}$$

这时应注意到，在图7.3.2的xoz平面上的一个点，实质上是一条垂直于xoz平面的一条线，在M_0和 M_1点分别放置强度为$\frac{1}{2\pi}$和$\frac{-1}{2\pi}$的电荷，则其格林函数为：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}-\ln\frac{1}{\rho_{MM_1}}\right] \tag{7.3.13}$$

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_0=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(z+z_0)^2}}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2}}\right)\right]_{z=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{z_0}{(x-x_0)^2+z_0^2} \tag{7.3.14}$$

代入（7.3.4）式中，得：

$$u(x_0,z_0)=-\frac{Z_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x,0)}{(x-x_0)^2+z_0^2}dx$$

将积分变量x换为ξ，则得：

$$u(x,z_0)=-\frac{Z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,0)}{(\xi-x)^2+z^2}d\xi \tag{7.3.15}$$

这即是半平面的泊松积分。

7.3.2 第二边值问题

为了解决由Z_a计算H_a的问题，需要引用半空间的诺依曼问题：

$$\begin{cases}\Delta u=0 & (M在\Omega内)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n}=H(M) & (在R上)\end{cases}$$

由（7.3.7）式可知，若格林函数满足条件：

$$\begin{cases}\Delta G=0\\ \left.\dfrac{\partial G}{\partial n}\right|_R=0\end{cases}$$

则（7.3.7）式可化简为：

$$u(M_0)=\iint_R GHds \tag{7.3.16}$$

由图（7.3.2）可知：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{q}{r}+\frac{q'}{r_1}\right)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{q}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{q'}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right]$$

令上式$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{R\to 0}$ $\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}=0$，即可得 $q=q'$，令其为1，则有：

$$G(M,M_0)|_{z=0}=\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2}},$$

它满足第二边值问题的条件，

故以G代入（7.3.6）式即可得：

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}dxdy \qquad (7.3.17)$$

对于二度异常的情况只需考虑xoz剖面，故称为平面问题。在xoz剖面上的一个点，实质上是一条线，见（7.3.13）式，应把基本解改成：

$$G=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\rho_{MM_0}}+\ln\frac{1}{\rho_{MM_1}}\right]$$

其中：

$$\rho_{MM_0}=\sqrt{(x-x_0)^2+(z+z_0)^2};$$

$$\rho_{MM_1}=\sqrt{(x-x_0)^2+(z-z_0)^2},$$

当M点在x轴上时，$z_0=h$，

$$G=\frac{1}{\pi}\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+h^2}}$$

故最后得：

$$u(M_0)=\int_c G(M,M_0)\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u(x,0)}{\partial z}\ln\sqrt{(x-x_0)^2+h^2}\,dx \qquad (7.3.18)$$

7.3.3 不适定问题及数学插值模型的建立

地球物理勘中，通常所说的向下延拓，就是根据已知平面($z=0$)上的值，确定已知平面以下($z>0$)除磁性体奇点以外空间的磁场值，也就是由已知的场值向场源方向延拓。

在场源以上地表以下的空间，位场仍然是满足拉普拉斯方程的，即：

$$\frac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial z^2}=0$$

就是说可以提出以下的边值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial z^2}=0 & 0<z<h\\ Z(x,y,z)|_{z=0}=Z_0(x,y)\end{cases}$$

h为磁性体最接近地表的奇点的深度。

在数学上将初始条件和边界条件称为定解条件。拉氏方程满足定解条件的解称为定解问题。将解的存在性，解的唯一性及解的稳定性作为检查定解问题是否符合实际的标准。当定解问题存在唯一稳定的解，则此定解问题称为适定的。一个定解问题，只要不满足上述三个条件中的任一个，就称为不适定问题。对于不满足第三个条件的定解问题，称为阿达玛(Hadamard)意义下的不适定问题。在地球物理和其它科技领域内，许多应用上很重要的问题，都表现为阿达玛意义下的不适定问题。对于向下延拓，这一提法就是不适定的。因为在定解数据 $Z_0(x,y)$ 中有极微小的变化时，所得的解可以变化很大，即解是不稳定的，而野外观测到的数据总是有一定近似性的，与真正的客观实际总有某种精度范围内的误差，这些误差在解中表现为很大的数值，以至把真实解掩盖掉。以上意思可以用数学表达如下：

设 $Z_0(x,y,z)$ 为 (7.3.19) 式问题的解，对于：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 Z(x,y,z)}{\partial z^2}=0\\ Z(x,y,z)_{z=0}=Z_1(x,y)+\varepsilon\cos Mx\cdot\cos Ny\end{cases}\tag{7.3.20}$$

式中 M,N 是任意的正整数。则其解为：

$$Z(x,y,z)=Z_0(x,y,z)+\varepsilon e^{(M^2+N^2)^{1/2}\cdot z}\cos Mx\cdot\cos Ny\tag{7.3.21}$$

当 $0<z<h$ 时，尽管 ε 很小，只要 M，N 取得充分大，$Z(x,y,z)$ 与 $Z_0(x,y,z)$ 的差就可以任意大。因此可以看出，由这一古典的数学提法来作向下延拓是不适定问题，实际计算是很困难的。要想有效地进行位场向下延拓，必须改变数学提法，建立新的数学模型，以近似的数据来表征物理模型。目前经常采用多项式插值延拓，级数型正则化延拓及调和分析延拓等等。本书主要介绍拉格朗日插值多项式延拓。它的实质是利用调和函数在域内已知磁场值，建立插值多项式，利用插值多项式外推出观测面以下的磁场值。

§7.4 磁异常的空间延拓方法

根据某观测面上已知的磁异常，换算得到不同空间位置磁异常，称为磁异常的空间换算。如前所述，向上换算就是位场的狄里希莱问题，习惯上称之为磁异常的向上延拓。向下换算相当于扩大观测面以上的位场解析空间，通常称为向下延拓。在第三节位场空间转换的基本理论讨论的基础上，本节将分别介绍向上延拓和向下延拓的计算方法及其地质应用。为了叙述方便，按二度异常和三度异常的顺序讨论。

7.4.1 二度异常的向上延拓

由前述讨论可知二度异常的向上延拓即二维位场上半平面狄里希莱问题。由半平面泊松积分式 (7.3.15) 可知：

$$u(x,z)=\frac{-z}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\ 0)}{(x-\xi^2)+z^2}d\xi\tag{7.4.1}$$

因进行磁异常的向上延拓，故将上式中的 u 改为 Z_a，此外如图7.4.1所示，M_0 点坐标应为 $(x,\ -h)$，M 点的坐标仍为 $(\xi,\ 0)$，因而 (7.4.1) 式应写为：

$$Z_a(x,-h)=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,\ 0)}{(x-\xi)^2+h^2}d\xi\tag{7.4.2}$$

为了求得$(x,\ -h)$点的异常Z_a，就要用近似积分求得上式右边的积分。用不同的近似求积方法，可以得到不同的向上延拓公式。下面分别加以讨论。

1．9°射线量板法

如图7.4.2所示，将横轴划分为$[\xi_i,\xi_{i+1}]$等若干子区间，（7.4.2）式的积分用有限子区

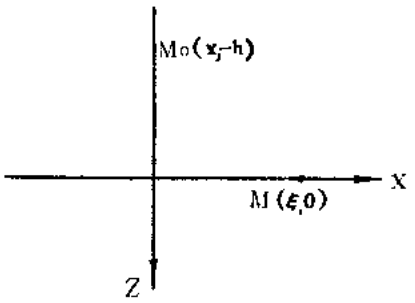


图 7.4.1 向上延拓点位坐标图

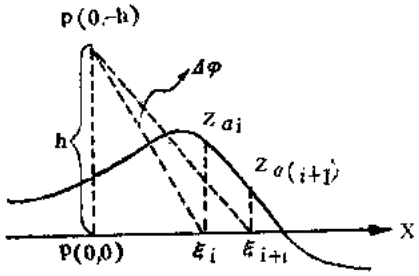


图 7.4.2 向上延拓对P点的张角图

间积分之和来表示：

$$Z_a(0,-h)=\sum_{i=-n}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\frac{hZ_a(\xi,0)}{\xi^2+h^2}d\xi \tag{7.4.3}$$

子区间的积分利用积分中值定理计算，则（7.4.3）式可写成：

$$Z_a(0,-h)=\sum_{i=-n}^{n}\frac{Z_a(\xi_k)}{\pi}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\frac{h}{\xi^2+h^2}d\xi \tag{7.4.4}$$

式中ξ_k为子区间$[\xi_i,\ \xi_{i+1}]$中的某一个值，当子区间划分足够小，$Z_a(\xi_k)$可用该子区间中Z_a的平均值$\bar{Z}_a$代替，则（7.4.4）式可写成：

$$\begin{aligned}Z_a(0,-h)&=\sum_{i=-n}^{n}\frac{\bar{Z}_{ai}}{\pi}\int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}\frac{h}{\xi^2+h^2}d\xi\\&=\sum_{i=-n}^{n}\frac{\bar{Z}_{ai}}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\xi_{i+1}}{h}-\operatorname{arctg}\frac{\xi_i}{h}\right]\end{aligned}$$

由图7.4.2可以看出：

$$\left[\operatorname{arctg}\frac{\xi_{i+1}}{h}-\operatorname{arctg}\frac{\xi_i}{h}\right]=\Delta\varphi$$

若让$\Delta\varphi=9°$，则得

$$Z_a(0,-h)=\frac{\Delta\varphi}{\pi}\sum_{i=-n}^{n}\bar{Z}_{ai}=0.05\sum_{i=-n}^{n}\bar{Z}_{ai} \tag{7.4.5}$$

划分积分间隔的条件是保持ξ_i和ξ_{i+1}之间的距离对P点的张角为9°，所以我们可以先作成量板。量板的做法如下：先确定一个量板的原点O，通过O点作一垂直线作为量板的中心线，作一条垂直子中心线的水平线，此线距O点的垂直距离为h（即换算的高度）。通过原点作放射状射线，其间的张角为9°，通过每条射线与水平线的交点作垂直线，即做成量板，量板如图7.4.3所示。

当作向上换算时，将量板中心线与异常剖面上的换算点重合，然后读取每两纵线之间的

Z_a的平均值$\bar{Z}_{ai}$。把所有各间隔内的$\bar{Z}_{ai}$相加并乘以0.05即得该点向上换算的磁异常值$Z_a(0,-h)$。然后再将量板的中心线与另一点重合，同样再计算另一点的向上换算值。当量板的边缘区间隔过大，求平均值$\bar{Z}_{ai}$有困难时，可以把每一大间隔再分成若干小区间（例如把射线角减小到4.5°或3°，先分别求出每一个小间隔内的磁场平均值，再由几个小间隔的平均值求得大间隔的平均值$\bar{Z}_{ai}$）。

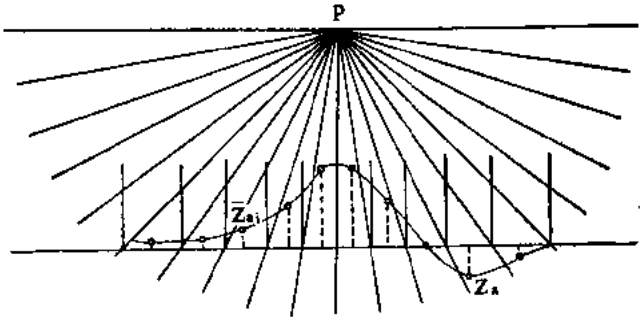


图 7.4.3 向上延拓的9°量板

2．等间距的权系数计算法

将横轴划分为$\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)h,\ \left(n+\frac{1}{2}\right)h\right\}$等若干间距为延拓高度h的子区间，其中$n=0,1,2,3\cdots\cdots$。(7.4.2)式积分用有限项子区间积分和表示，子区间内磁场的平均值以区间中点的磁场值$Z_a(nh,0)$来表示，则写成：

$$Z_a(x,-h)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)h}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)h}\frac{h\cdot Z_a(\xi,0)d\xi}{(\xi-x)^2+h^2}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_a(nh,0)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{\xi-x}{h}\right]_{\left(n-\frac{1}{2}\right)h}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)h}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_a(nh,0)\left[\operatorname{tg}^{-1}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)h-x}{h}-\operatorname{tg}^{-1}\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)h-x}{h}\right]$$

当$x=0$时：

$$Z_a(0,-h)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}Z_a(nh,0)\operatorname{tg}^{-1}\frac{4}{4n^2+3}$$

当令$n=1,2,3,\cdots 9$代入上式可得：

$$\begin{aligned}Z_a(0,-h)=&0.2951Z_a(0,0)+0.1653[Z_a(h,0)+Z_a(-h,0)]\\&+0.0660[Z_a(2h,0)+Z_a(-2h,0)]+0.0326[Z_a(3h,0)+Z_a(-3h,0)]\\&+0.0190[Z_a(4h,0)+Z_a(-4h,0)]+0.0124[Z_a(5h,0)+Z_a(-5h,0)]\\&+0.0087[Z_a(6h,0)+Z_a(-6h,0)]+0.0061[Z_a(7h,0)+Z_a(-7h,0]\\&+0.0049[Z_a(8h,0)+Z_a(-8h,0)]+0.0030[Z_a(9h,0)+Z_a(-9h,0)]\end{aligned}\qquad(7.4.6)$$

用(7.4.6)式计算高度为h的某一点的磁场值时，就需要原剖面上的19个点的场值参加计算。故向上换算一个h的高度，测线就要损失$18h$的长度。计算点的分布如图7.4.4所示。

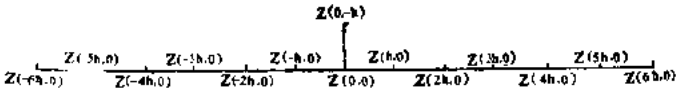


图 7.4.4 等间距权系数计算法取值点

3．不等间距的数字计算法

若在（7.4.3）式中的距离均以换算深度 h 为单位即$\left(u=\frac{\xi}{h}\right)$，则可以化为：

$$Z_a(0,-1)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(u,0)du}{1+u^2} \tag{7.4.7}$$

将上式积分变量为 u 的无穷积分，用有限积分来代替，并将有限区间划分成$(2m+1)$段，每段用$\Delta\xi_j=b_j-a_j$表示，则可写成：

$$Z_a(0,-1)=\frac{1}{\pi}\sum_{j=-m}^{+m}\int_{a_j}^{b_j}Z_a(u,0)\frac{du}{1+u^2} \tag{7.4.8}$$

（7.4.8）式中每段积分值用高斯求积公式计算，靠近计算点的积分段取求积节点数较多，而远离计算点求积节点数少，则上式可写成：

$$Z_a(0,-1)=\frac{1}{\pi}\sum_{i=-n}^{n}D_iZ_a(u_i,0) \tag{7.4.9}$$

式中：$D_i=\frac{A_i}{2}K(u_i)(b_i-a_i)$，其中 i 为求积分点的顺序号，A_i 为第 i 个节点的高斯求积系数，n 为正、负区间的节点总数。$K(u_i)=\frac{1}{1+u_i}$。

若取 u 的积分范围为〔−15,15〕，并取各段范围为〔−15,−10〕，〔−10,−5〕，〔−5,−2〕，〔−2,2〕，〔2,5〕，〔5,10〕及〔10,15〕，即$m=\pm3$共分七段，其中〔−2,2〕区间取五个求积节点，〔−15,−10〕和〔10,15〕区间取一个求积节点（即矩形法），其余各段均取两个节点，则延拓系数D_i的计算及节点横坐标位置u_i如表7.4.1所示。

表 7.4.1

i	i	u_i	$K(u_i)$	$\frac{A_i}{2}$	$b-a$	D_i
0	0	0	1.000	0.2844	4	1.136
	1	1.077	0.463	0.2393	4	0.443
	2	1.812	0.233	0.1185	4	0.110
1	3	2.634	0.126	0.5	3	0.189
	4	4.366	0.050	0.5	3	0.075
2	5	6.057	0.026	0.5	5	0.065
	6	8.913	0.012	0.5	5	0.030
3	7	12.500	0.0064	1.0	5	0.032

7.4.2 三度异常的向上延拓

将半空间狄里希莱问题（7.3.11）式

$$u(x,y,z)=\frac{Z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(\xi,\eta,0)}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z^2]^{3/2}}d\xi d\eta$$

化成柱坐标，如图7.4.5所示，各符号之间应有下面关系：

$Z=Z$，$\rho=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$ $d\xi d\eta=\rho d\rho d\varphi$ 并令：$u=Z_a$，改为柱坐标后得：

$$Z_a(M_0)=\frac{Z}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_a(\varphi,\rho)}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\rho d\rho d\varphi \tag{7.4.10}$$

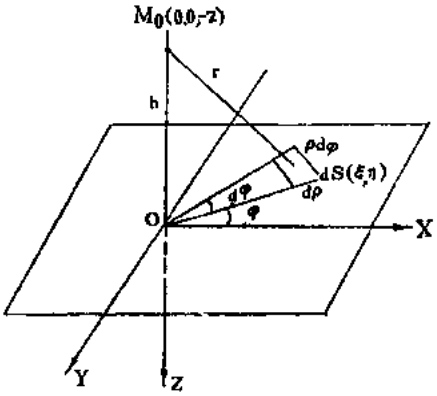


图 7.4.5 柱坐标的狄里希莱问题

（7.4.10）式即用于三度异常向上换算、以柱坐标表示的泊松积分，三度问题的向上换算多用此公式。现将（7.4.10）式再表示为：

$$Z_a(M_0)=\int_0^{\infty}\frac{Z\cdot\bar{Z}_a(\rho)}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\rho d\rho$$

其中：

$$\bar{Z}_a(\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_a(\varphi,\rho)\,d\varphi$$

即把积分分成两步，先求圆周上的平均值 $\bar{Z}_a(\varphi,\rho)$，然后再求ρ由0→∞的积分值。向上换算的积分插值法就是计算（7.4.10）式之积分。

设（7.4.10）式中Z为mh，（$m=1,2,\cdots\cdots$），则（7.4.10）式变为：

$$Z_a(0,0,-mh)=\int_0^{\infty}\frac{mh\cdot\bar{Z}_a(\rho)\rho d\rho}{(\rho^2+m^2h^2)^{3/2}} \tag{7.4.11}$$

将积分变量ρ划分为ρ_1，ρ_2，…，ρ_i，ρ_{i+1}，…ρ_{N-1}，ρ_N等若干值，则$\bar{Z}_a(\rho)$即表示半径为ρ的园环上Z_a的平均值。（7.4.11）式的无穷积分可用有限次积分和来代替。利用积分中值定理，（7.4.11）式可写为：

$$Z_a(0,0,-mh)=\sum_{i=0}^{N-1}\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}}\frac{mh\cdot\bar{Z}_a(\rho)\rho d\rho}{(\rho^2+m^2h^2)^{3/2}}$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1}mh\left\{\left[\rho_i^2+(mh)^2\right]^{-\frac{1}{2}}-\left[\rho_{i+1}^2+(mh)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

$$\cdot\left\{(\rho_{i+1}-\rho_i)^{-1}\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}}\bar{Z}_a(\rho)d\rho\right\} \tag{7.4.12}$$

式中用$\rho_i\sim\rho_{i+1}$间$\bar{Z}_a(\rho)$的平均值 $(\rho_{i+1}-\rho_i)^{-1}\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}}\bar{Z}_a(\rho)d\rho$代替积分中值定理规定$\rho_i\sim\rho_{i+1}$间某一$\bar{Z}_a(\rho)$值。在$\rho$的划分为足够小的情况下，这种代替是近似可行的。

（7.4.12）式中的积分，因被积函数$\bar{Z}_a(\rho)$的数学表达式是未知的，故难以得到积分结果。但是可以用插值的方法求得$\bar{Z}_a(\rho)$的近似值。若以$P(\rho)$表示 $\bar{Z}_a(\rho)$近似值，则$P(\rho)$值可以用下面的插值方法求得。

在$\rho_1\sim\rho_{N-1}$范围内，相邻两环$(\rho_i\sim\rho_{i+1})$间的$P(\rho)$用ρ_i、ρ_{i+1}和ρ_{i+2}三个圆周上的平均值$\bar{Z}_a(\rho_i)$、$\bar{Z}_a(\rho_{i+1})$和$\bar{Z}_a(\rho_{i+2})$，由二次插值函数求得：

$$P(\rho)=\frac{(\rho-\rho_{i+1})(\rho-\rho_{i+2})}{(\rho_i-\rho_{i+1})(\rho_i-\rho_{i+2})}\bar{Z}_a(\rho_i)+\frac{(\rho-\rho_i)(\rho-\rho_{i+2})}{(\rho_{i+1}-\rho_i)(\rho_{i+1}-\rho_{i+2})}\bar{Z}_a(\rho_{i+1})$$

$$+\frac{(\rho-\rho_i)(\rho-\rho_{i+1})}{(\rho_{i+2}-\rho_i)(\rho_{i+2}-\rho_{i+1})}\bar{Z}_a(\rho_{i+2})$$

$$(i=1,2,\cdots\cdots,N-2)$$

最后两环（$\rho_{N-1}\sim\rho_N$）间的$P(\rho)$用ρ_N、ρ_{N-1}和ρ_{N-2}三个环上的平均值$\bar{Z}_a(\rho_N)$、$\bar{Z}_a(\rho_{N-1})$和$\bar{Z}_a(\rho_{N-2})$，由二次插值函数求得：

$$P(\rho)=\frac{(\rho-\rho_{N-2})(\rho-\rho_N)}{(\rho_{N-1}-\rho_{N-2})(\rho_{N-1}-\rho_{N-2})}\bar{Z}_a(\rho_{N-1})+\frac{(\rho-\rho_N)(\rho-\rho_{N-1})}{(\rho_{N-2}-\rho_N)(\rho_{N-2}-\rho_{N-1})}$$

$$\bar{Z}_a(\rho_{N-2})+\frac{(\rho-\rho_{N-1})(\rho-\rho_{N-2})}{(\rho_N-\rho_{N-1})(\rho_N-\rho_{N-2})}\bar{Z}_a(\rho_N)$$

以$P(\rho)$代替$\bar{Z}_a(\rho)$，并利用不定积分公式：

$$\int(\rho-A)(\rho-B)d\rho=(\rho-A)^2\left[\frac{\rho}{3}-\frac{B}{2}+\frac{A}{6}\right]$$

则有：

$$\left.\begin{aligned}&\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}}\bar{Z}_a(\rho)\,d\rho\doteq\int_{\rho_i}^{\rho_{i+1}}P(\rho)d\rho=a_i\bar{Z}_a(\rho_i)+b_i\bar{Z}_a(\rho_{i+1})\\&\qquad+c_i\bar{Z}_a(\rho_{i+2})\\&\int_{\rho_{N-1}}^{\rho_N}\bar{Z}_a(\rho)d\rho\doteq\int_{\rho_{N-1}}^{\rho_N}P(\rho)d\rho=a_{N-1}\bar{Z}_a(\rho_{N-1})\\&\qquad+b_{N-1}\bar{Z}_a(\rho_N)+c_{N-1}\bar{Z}_a(\rho_{N-2})\end{aligned}\right\}\qquad(7.4.13)$$

式中系数如下：

$$a_i=\frac{(\rho_i-\rho_{i+1})\left(\frac{\rho_i}{3}-\frac{\rho_{i+2}}{2}+\frac{\rho_{i+1}}{6}\right)}{\rho_{i+2}-\rho_i};$$

$$b_i=\frac{(\rho_i-\rho_{i+1})\left(\frac{\rho_{i+1}}{3}-\frac{\rho_{i+2}}{2}+\frac{\rho_i}{6}\right)}{\rho_{i+2}-\rho_{i+1}};$$

$$c_i=\frac{(\rho_i-\rho_{i+1})^3}{6(\rho_{i+2}-\rho_i)(\rho_{i+2}-\rho_{i+1})};$$

$$(i=1,2,\cdots N-2)。$$

$$a_{N-1}=\frac{(\rho_N-\rho_{N-1})\left(\frac{\rho_{N-1}}{3}-\frac{\rho_{N-2}}{2}+\frac{\rho_N}{6}\right)}{\rho_{N-1}-\rho_{N-2}},$$

$$b_{N-1}=\frac{(\rho_N-\rho_{N-1})\left(\frac{\rho_N}{3}-\frac{\rho_{N-2}}{3}+\frac{\rho_{N-1}}{6}\right)}{\rho_N-\rho_{N-2}};$$

$$c_{N-1}=\frac{(\rho_{N-1}-\rho_N)^3}{6(\rho_{N-2}-\rho_{N-1})(\rho_{N-2}-\rho_N)};$$

以（7.4.13）式代入（7.4.12）式，化简后得：

$$Z_a(0,0,-mh)\approx\sum_{i=1}^{N}{}'K_i(\rho,mh)\bar{Z}_a(\rho_i)\qquad(7.4.14)$$

其中K_i是随ρ与mh变化的系数，在$\rho_1\sim\rho_{N-3}$各环中$K_i(\rho,\mathrm{mh})$由下式计算：

$$K_i(\rho,mh)=\frac{a_i}{\rho_{i+1}-\rho_i}mh\left[\frac{1}{(\rho_{i-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{i+1}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{b_{i-1}}{\rho_i-\rho_{i-1}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{i+1}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_i^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{c_{i-2}}{\rho_i-\rho_{i-2}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{i-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{i-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$(i=1,2,3,\cdots N-3)\qquad(7.4.15)$$

注意：其中$i=1$时，$b=c=0$；$i=2$时，$c=0$，只有在$i\geqslant3$时，a、b、c系数才同时在K_i式中出现。ρ_{N-2}，ρ_{N-1}，ρ_N各环的$K_i(\rho_i,\ mh)$由下式计算：

$$K_{N-2}=\frac{a_{N-2}}{\rho_{N-1}-\rho_{N-2}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{b_{N-3}}{\rho_{N-2}-\rho_{N-3}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-3}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{c_{N-4}}{\rho_{N-3}-\rho_{N-4}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-4}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{c_{N-1}}{\rho_N-\rho_{N-1}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_N^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$K_{N-1}=\frac{a_{N-1}}{\rho_N-\rho_{N-1}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_N^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{b_{N-2}}{\rho_{N-1}-\rho_{N-2}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{c_{N-3}}{\rho_{N-2}-\rho_{N-3}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-3}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$K_N=\frac{b_{N-1}}{\rho_N-\rho_{N-1}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_N^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]$$
$$+\frac{c_{N-2}}{\rho_{N-1}-\rho_{N-2}}mh\left[\frac{1}{(\rho_{N-2}^2+m^2h^2)^{1/2}}-\frac{1}{(\rho_{N-1}^2+m^2h^2)^{1/2}}\right]\qquad(7.4.16)$$

利用上述计算公式的一个具体方案如下：

（1）将ρ划分成10环，即$\rho_1\sim\rho_{10}$，取得最大环半径为$\sqrt{136}$ h，即 $\rho_N=\rho_{10}=\sqrt{136}$ h。其它环半径的选取原则是：离计算点近时，圆环间隔较密，反之间隔放稀，见表 7.4.2 及图7.4.6。

（2）为了克服插值计算的误差，求圆环上磁异常平均值的异常数据尽量采用实测数据。表 7.4.2 中给定半径的圆环上均有若干个方形格网中的实测点，利用这些点求圆周上磁异常的平均值，见图7.4.6。

（3）分别取 $m=1,2,3,4$，代入（7.4.15）和（7.4.16）式，求出相应的延拓高度为h，$2h$，$3h$和$4h$ 的计算系数。见表7.4.3。

当将ρ划分为11环，即$\rho_0\sim\rho_{10}$，最大环半径 $\rho_{10}=\sqrt{625}\,h=25h$。并取五个不同高度时，计算三度异常上延的系数表可见表7.4.4。

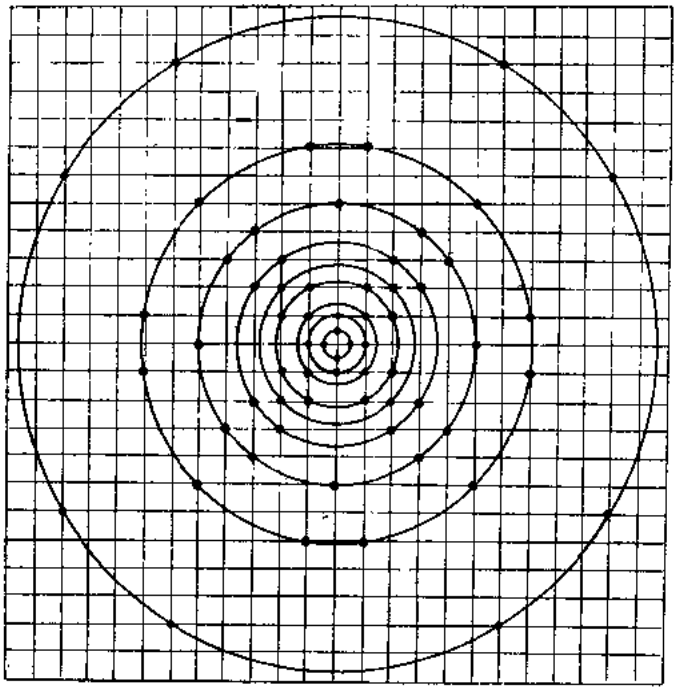


图 7.4.6　积分插值延拓量板取值点分布图

表 7.4.2

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ	0	0.5h	h	$\sqrt{2}$h	$\sqrt{5}$h	$\sqrt{8}$h	$\sqrt{13}$h	5h	$\sqrt{50}$h	$\sqrt{136}$h
点数	1	4	4	4	8	4	8	12	12	8
$\|\xi\|\|\eta\|$	0, 0	0, |0.5| |0.5|, 0	0, |1| |1|, 0	|1|,|1|	|2|,|1| |1|,|2|	|2|, |2|	|3|, |2| |2|, |3|	0, |5| |5|, 0 |4|, |3| |3|, |4|	|7|, |1| |1|, |7| |5|, |5|	|10|,|6| |6|,|10|

表 7.4.3

i	ρ_i	$K_1(\rho,h)$	$K_1(\rho,2h)$	$K_1(\rho,3h)$	$K_1(\rho,4h)$
1	0	0.0440	0.0124	0.0057	0.0032
2	0.5	0.1470	0.0509	0.0245	0.0142
3	1	0.1802	0.0852	0.0449	0.0270
4	$\sqrt{2}$	0.1233	0.0976	0.0631	0.0417
5	$\sqrt{5}$	0.1521	0.1456	0.1056	0.0745
6	$\sqrt{8}$	0.0533	0.0765	0.0715	0.0584
7	$\sqrt{13}$	0.0659	0.0990	0.1023	0.0917
8	5	0.0526	0.0847	0.0932	0.0864
9	$\sqrt{50}$	0.0765	0.1416	0.1886	0.2168
10	$\sqrt{136}$	0.0197	0.0374	0.0516	0.0616

表 7.4.4

i	ρ_i	$K_1(\rho,h)$	$K_1(\rho,2h)$	$K(\rho,3h)$	$K_1(\rho,4h)$	$K_1(\rho,5h)$
0	0	0.11193	0.04034	0.01961	0.01141	0.00742
1	1	0.32193	0.12988	0.06592	0.03908	0.02566
2	$\sqrt{2}$	0.06062	0.07589	0.05260	0.03566	0.02509
3	$\sqrt{5}$	0.15206	0.14559	0.10563	0.07450	0.05377
4	$\sqrt{8}$	0.05395	0.07651	0.07146	0.05841	0.04611
5	$\sqrt{13}$	0.06586	0.09902	0.10226	0.09173	0.07784
6	5	0.06650	0.11100	0.12921	0.12915	0.11986
7	$\sqrt{50}$	0.05695	0.10351	0.13635	0.15474	0.16159
8	$\sqrt{136}$	0.03855	0.07379	0.10322	0.12565	0.14106
9	$\sqrt{274}$	0.02273	0.04484	0.06500	0.08323	0.09897
10	25	0.03015	0.05998	0.08917	0.11744	0.14458

用图 7.4.6 所示量板及（7.4.14）式计算的方法及步骤如下：将量板的中心与换算点重合，按表7.4.2的坐标及点数求出每一圆周上Z_a的平均值$\bar{Z}_a(\rho)$，以$\bar{Z}_a(\rho)$乘上表7.4.3所列ρ_i对应的系数$K_i(\rho, mh)$，将所有圆周的平均值$\bar{Z}_a(\rho)$与$K_i(\rho, mh)$的乘积相加即为（7.4.14）式的最终结果$Z_a(M_0)$。按图7.4.6所示量板取数一次可按表 7.4.3 计算得到四个高度上的向上换算值。若按表7.4.4则可计算出五个高度的向上换算值。但是后者因最大环半径为$25h$（前者为$\sqrt{136}h$），因此计算造成的边部损失较大。

7.4.3 二度异常的向下延拓

向场源方向的位场解析延拓，已经有很多作者从台劳公式、拉普拉斯方程、调和函数的中值定理、泊松公式等各个不同出发点，推导出一系列的公式。这里我们利用复数的拉格朗日插值多项式，推导二度异常向下延拓的公式。

复数插值多项式是在复平面内建立的，在磁异常研究中，在复平面上选虚轴Z向下为正，向上为负，在复平面内任一点的复坐标用$Z=x+iy$表示。在复平面内参加插值计算的场强应为复场强。这里首先研究复场强与以往讨论的实场强的关系。如二度体的磁位为$u(x,y)$，它是调和函数，满足拉氏方程，即$\Delta u=0$。引入$u(x,y)$的共轭调和函数$V_1(x,y)$（这里引用符号V_1是为了与重力位V相区别），构成一个复位$W(x,y)$，则有：

$$W(x,y)=W(z)=u(x,y)+iV_1(x,y)$$

式中$W(z)$应满足柯西-黎曼条件：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial V_1}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial V_1}{\partial y}$$

复场强应为复磁位的负导数，若复场强用$\bar{T}(Z)$表示，按复变函数求导，则有：

$$\bar{T}(Z)=-W'(Z)=-\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial V_1}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial V_1}{\partial x}$$

因为：

$$H(x,y)=-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

$$Z(x,y)=-\frac{\partial V_1(x,y)}{\partial y}$$

所以有：

$$\bar{T}(Z)=H(x,y)-iZ(x,y)$$

不难证明$\bar{T}(Z)$满足柯西—黎曼条件，因此在磁性体以外$\bar{T}(Z)$是解析函数，H和Z是共轭调和函数。因此，$\bar{T}(Z)$称为共轭复场强。在复平面内场的换算，即是解析函数共轭复场强$\bar{T}(Z)$的换算。

由§7.2可知，复数形式的拉格朗日插值多项式为：

$$\bar{T}(Z)=\sum_{m=0}^{k}\bar{T}(Z_m)\frac{(Z-Z_0)(Z-Z_1)\cdots(Z-Z_{m-1})(Z-Z_{m+1})\cdots(Z-Z_k)}{(Z_m-Z_0)(Z_m-Z_1)\cdots(Z_m-Z_{m-1})(Z_m-Z_{m+1})\cdots(Z_m-Z_k)}$$

令$\Pi_k(Z)=(Z-Z_0)(Z-Z_1)\cdots(Z-Z_k)$

则$\Pi'_k(Z)=\frac{\partial}{\partial Z}[\Pi_k(Z)]_{Z=Z_m}=(Z_m-Z_0)(Z_m-Z_1)\cdots(Z_m-Z_{m-1})(Z_m-Z_{m+1})\cdots(Z_m-Z_k)$

即有：

$$T(Z)=\sum_{m=0}^{k}\bar{T}(Z_m)\frac{\Pi_k(Z)}{(Z-Z_m)\Pi'_k(Z_m)} \tag{7.4.17}$$

只要在复平面的上半空间选取适当的结点Z_0、Z_1、Z_2……、Z_K，由（7.4.16）式即可导出复平面下半空间某一点的磁场公式。例如：

1．令$K=3$，在上半空间取这样四个结点：$Z_0=0$，$Z_1=-ih$，$Z_2=h$，$Z_3=-h$，并使下延点的复坐标为$Z=ih$，则由（7.4.16）式有：

$$\bar{T}(ih)=4\bar{T}(0)-\bar{T}(-ih)-\bar{T}(h)-\bar{T}(-h)$$

分为虚部与实部，其虚部为：

$$Z_a(0,h)=4Z_a(0,0)-Z_a(0,h)-Z_a(0,-h)-Z_a(-h,0)$$

上式亦可由差分方法解拉普拉斯方程，或用圆内调和函数的中值定理推导出来，称为“四点平均公式”。

2．令$K=7$，在上半空间取这样八个结点：$Z_0=0$，$Z_1=-ih$，$Z_2=h$，$Z_3=-h$，$Z_4=2h$，$Z_5=-2h$，$Z_6=3h$，$Z_7=-3h$，下延点的坐标仍为$Z=ih$，则有：

$$\bar{T}(ih)=\frac{50}{9}\bar{T}(0)-\bar{T}(-ih)-\frac{25}{12}[\bar{T}(h)+\bar{T}(-h)]+\frac{1}{3}[\bar{T}(2h)$$

$$+\bar{T}(-2h)]-\frac{1}{36}[\bar{T}(3h)+\bar{T}(-3h)]$$

把上式虚部与实部分开，并将（7.4.6）式代入到$Z_a(0,-h)$中，即得：

$$\begin{aligned}Z_a(0,h)&=5.2605Z_a(0,0)-2.2486[Z_a(h,0)+Z_a(-h,0)]\\&+0.2673[Z_a(2h,0)+Z_a(-2h,0)]-0.0604[Z_a(3h,0)+Z_a(-3h,0)]\\&+0.0190[Z_a(4h,0)+Z_a(-4h,0)]-0.0124[Z_a(5h,0)+Z_a(-5h,0)]\\&-0.0087(Z_a(6h,0)+Z_a(-6h,0)]\end{aligned} \tag{7.4.18}$$

（7.4.18）式的K值较高，由实践结果证实该式有较高精度。以上各式以（7.4.18）式在我国应用较为普遍。

3．当$K=3$，$Z_0=0$，$Z_1=-ih$，$Z_2=-i2h$，$Z_3=-i3h$，$Z=ih$时可得：

$$\begin{aligned}Z_a(0,h)&=4Z_a(0,0)-6Z_a(0,-h)+4Z_a(0,-2h)-Z_a(0,-3h)\\&=4Z_a(0,0)-\delta Z\end{aligned} \tag{7.4.19}$$

其中：

$$\delta Z=6Z_a(0,-h)-4Z_a(0,-2h)+Z_a(0,-3h)$$

上式的δZ可用已知的异常$Z_a(\xi,0)$，由泊松积分求出：

$$Z_a(0,-kh)=\frac{Kh}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{R^2h^2+\xi^2}d\xi$$

代入上式后可得：

$$\delta Z=\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Z_a(\xi,0)\left\{\frac{6}{\xi^2+h^2}-\frac{8}{\xi^2+4h^2}+\frac{3}{\xi^2+9h^2}\right\}d\xi$$

我们令：$u=\frac{\xi}{h}$

$$K(u)=\frac{6}{1+u^2}-\frac{8}{4+u^2}+\frac{3}{9+u^2}$$

则：

$$\delta Z=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Z_a(u,0)K(u)du$$

我们可以用与（7.4.9）式相同的高斯求积方法，求出上式的积分近似值，得到：

$$\delta Z=\frac{1}{\pi}\left\{\sum_{i=-n}^{n}\frac{A_i}{2}K(u_i)Z_a(u_i)(b-a)\right\}$$

$$=\sum_{i=-n}^{n}C_iZ_a(u_i)\qquad(7.4.20)$$

当有限积分取为－20～20时，分成七段求积，即$m=\pm3$。与（7.4.9）式计算不同之处是，首尾二段积分间隔为10，并利用二节点高斯求积公式求积。计算（7.4.20）式积分节点位置u_i及系数C_i列于表7.4.5内。

表 7.4.5

l	i	u_i	$K(u_i)$	$A_i/2$	$(b-a)$	C_i
0	0	0	4.333	0.2844	4	1.5680
	±1	1.077	1.5228	0.2933	4	0.4630
	±2	1.812	0.5468	0.1185	4	0.0824
±1	±3	2.631	0.2129	0.5	3	0.1020
	±4	4.366	0.0584	0.5	3	0.0279
±2	±5	6.057	0.0263	0.5	5	0.0209
	±6	8.943	0.0128	0.5	5	0.0102
±3	±7	12.113	0.0072	0.5	10	0.0115
	±8	17.887	0.0028	0.5	10	0.0044

计算时按表（7.4.5）中u_i值确定各结点的横坐标，以各横坐标u_i值对应的磁异常$Z_a(u_i)$乘以系数C_i，并将乘积求和，即得δZ值，然后再按（7.4.19）式求出$Z_a(0,h)$值。

7.4.4 三度异常的向下延拓

三度异常向下延拓的方案与二度异常向下延拓相似，可以用一个高阶多项式来逼近所

求之磁异常。为此在上半空间取$Z_m=0$，$-h$，$-2h$，$-3h$，$-4h$，$\cdots -kh$，等$k+1$个点，其磁场分别为$Z_a(0,0,0)$，$Z_a(0,0,-h)$，$Z_a(0,0,-2h)$，$Z_a(0,0,-3h)$，$Z_a(0,0,-4h)$ $\cdots Z_a(0,0,-kh)$，以此构成一高次插值多项式，用上半空间的$(k+1)$个点的磁场，求出下半空间$(0,0,z)$点的磁场$Z_a(0,0,z)$，其中$z=mh$。插值多项式应为

$$Z_a(0,0,z)=\sum_{m=0}^{k}\frac{(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{m-1})(z-z_{m+1})\cdots(z-z_k)}{(z_m-Z_0)(Z_m-Z_1)\cdots(z_m-z_{m-1}(Z_m-Z_{m+1})\cdots(Z_m-Z_k)}Z_a(0,0,z_m) \tag{7.4.21}$$

当$z_m=0\sim kh$代入（7.4.21）式则上式化简为：

$$Z_a(0,0,z)=\sum_{m=0}^{k}\frac{\prod_{i=0}^{k}(z+jh)Z_a(0,0,-mh)}{(-1)^m m!(k-m)!h^k(z+mh)} \tag{7.4.22}$$

式中$\prod_{i=0}^{k}(z+jh)=z(z+h)(z+2h)\cdots(z+kh)$，当取$m=0\sim4$，即$k=4$时，并且将式中的$Z_a(0,0,-mh)$，用三度异常向上延拓的（7.4.14）式代替，可得

$$Z_a(0,0,z)=\frac{\prod_{j=0}^{4}(z+jh)\bar{Z}_a(\rho_0)}{4!h^4z}$$

$$+\sum_{m=1}^{4}\frac{\prod_{j=0}^{4}(z+jh)\left\{\sum_{i=1}^{N}k_i(\rho_i,mh)\cdot Z_a(\rho_i)\right\}}{(-1)^m m!(4-m)!h^4(z+mh)}$$

上式中的$Z_a(\rho_0)$实际上即为量板中心点的磁场$Z_a(0)$。若改变上式的求和顺序，系数以$D(\rho,\ mh)$表示，则上式可改写为：

$$Z_a(0,0,mh)=\sum_{i=1}^{N}D_i(\rho,\ mh)\bar{Z}_a(\rho_i) \tag{7.4.23}$$

其中：

$$\left.\begin{aligned}D_i(\rho,\ mh)&=\frac{\prod_{j=0}^{4}(z+jh)}{4!h^4z}+\sum_{m=1}^{4}\frac{\prod_{j=0}^{4}(z+jh)k_i(\rho,mh)}{(-1)^m m!(4-m)!h^4(z+mh)}\\ D_i(\rho,\ mh)&=\sum_{m=1}^{4}\frac{\prod_{j=0}^{4}(z+jh)k_i(\rho_i,\ mh)}{(-1)^m m!(4-m)!h^4(z+mh)}\\ &\qquad(i=2,\cdots n)\end{aligned}\right\} \tag{7.4.24}$$

按（7.4.24）式求出的系数$D_i(\rho,\ mh)$如表7.4.6所示。

若取$m=0\sim5$，即$h=5$时，最大坏半径$\rho_N=25h$，则系数见表（7.4.7）。

向下延拓从频谱分析的观点来看，实质上是高通滤波，这一点将在§7.9中详细分析。我们在此只从应用需要出发说明向下延拓时应注意的问题。

1．延拓与圆滑配合：向下延拓会随着延拓深度的加大，在某些有用异常得到“放大”

表 7.4.6

i	ρ_i	$D_1(\rho,1)$	$D_1(\rho,2)$	$D_1(\rho,3)$	$D_1(\rho,4)$
1	0	4.6594	13.6803	31.6001	62.8354
2	0.5	-1.0693	-4.1067	-10.5243	-22.1008
3	1.0	-1.1472	-4.3154	-10.9207	-22.7411
4	$\sqrt{2}$	-0.5311	-1.8471	-4.4432	-8.9334
5	$\sqrt{5}$	-0.5184	-1.6926	-3.8990	-7.5906
6	$\sqrt{8}$	-0.0673	-0.1140	-0.0874	-0.0835
7	$\sqrt{13}$	-0.0879	-0.1741	-0.2211	-0.1781
8	5	-0.0582	-0.0954	-0.0734	-0.0576
9	$\sqrt{50}$	-0.0753	-0.1306	-0.1413	-0.0768
10	$\sqrt{136}$	-0.0194	-0.0354	-0.0438	-0.0400

表 7.4.7

i	ρ_i	$D_1(\rho,1)$	$D_1(\rho,2)$	$D_1(\rho,3)$	$D_1(\rho,4)$	$D_1(\rho,5)$
0	0	4.8948	16.1087	41.7731	92.5367	183.2600
1	1	-3.0113	-13.2209	-38.2716	-89.7403	-183.9380
2	$\sqrt{2}$	0.0081	0.4027	1.7886	5.1388	11.8804
3	$\sqrt{5}$	-0.5604	-1.9459	-4.7820	-9.9452	-18.6094
4	$\sqrt{8}$	-0.0376	0.0644	0.5367	1.7478	4.2324
5	$\sqrt{13}$	-0.0689	-0.0596	0.1798	0.8908	2.4237
6	5	-0.0605	-0.0522	0.1342	0.6656	1.7777
7	$\sqrt{50}$	-0.0534	-0.0828	-0.0560	0.0718	0.3606
8	$\sqrt{136}$	-0.0380	-0.0703	-0.0900	-0.0890	-0.0571
9	$\sqrt{274}$	-0.0227	-0.0443	-0.0639	-0.0802	-0.0921
10	25	-0.0302	-0.0600	-0.0891	-0.1173	-0.1444

的同时，某些浅部的干扰或误差也随之“放大”，使延拓曲线发生剧烈的跳动，甚至出现振荡。为了克服延拓引起的“振荡”影响，在延拓之前要先对异常进行“圆滑”，要在排除“跳动”的干扰和误差以后再进行延拓，所以往往将圆滑与延拓配合使用。

2．延拓的取样间隔问题：延拓方法中延拓的点距等于或大于延拓的深度者为多。只有少数方法的个别点距小于延拓深度。因此，延拓时点距越大，延拓深度也越大。延拓点距过大则会把异常上的一些细节“跨”过去，使其在延拓曲线上显不出来，（即对异常起圆滑作用）另一方面，点距太小会把一些浅部干扰及观测误差在延拓中加以“放大”。为了得到较好的延拓效果，要按照干扰异常的宽度及需要延拓的深度来选择延拓的点距：要让延拓的点距Δx比干扰异常的半宽度大，而又小于磁性体埋深的1/4～1/3，就是说要经过三至四次延拓才能达到磁源的介面。

3．延拓到达的深度问题：从场的理论上讲，作平面的向下延拓，最大延拓深度就是磁性体的深度。然而向下延拓是用一个插值多项式来逼近实测磁异常的。实际上无限制地向下延拓，总可以得到一定的磁场数值，甚至在经过磁性体界面也仍然可以得到确定的值，而不象在理论上所说的经过界面会出现场的奇点。从另一方面看，正如上面所说，由于干扰的“放大”会出现“振荡”现象，这反而会使人误认为已延拓到场源的深度。因此就存在着向下延拓到一个怎样的深度才算合适的问题。

从向下延拓实践的经验来看，出现下面的情况后就不应再继续向下延拓：

（1）异常曲线陡的一侧曲线近于直立，并且在两个延拓深度上，异常曲线陡度相近。这种情况有人称为“极限陡度”。

（2）不同深度的延拓数据勾画的空间等值线从有聚集的趋势突然拐弯成为近似垂直地表，等值线互相平行。

（3）异常出现起伏跳动的“振荡”现象。

7.4.5 延拓换算在磁异常解释中的应用

1．向上延拓消除浅部干扰

磁场随距离的衰减速度是与磁性体的形态和体积有关的，体积大，磁场衰减慢，体积小，磁场衰减快。可以想见，一些浅部的小的磁性干扰体的磁场或一些偶然误差，比一些规模较大的磁性体的异常随距离衰减要快得多。这样我们通过磁场的向上换算，加大距离，就可以使一些局部干扰随换算的高度增大而减小，而深部大的磁性地质体所产生的磁场就突出了。

在此举例加以说明：

一是内蒙磁法普查超基性岩的实例。在该地区浅部盖有一层不厚的玄武岩，其磁性较强并且很不均匀，故磁场表现为强烈的跳动，为了消除玄武岩的干扰，将磁场向上换算到500米。由图7.4.7可以看出：向上延拓后的磁场已消除了玄武岩的干扰，同时右侧部分反映出深部的超基性岩所产生的宽而光滑的磁场。

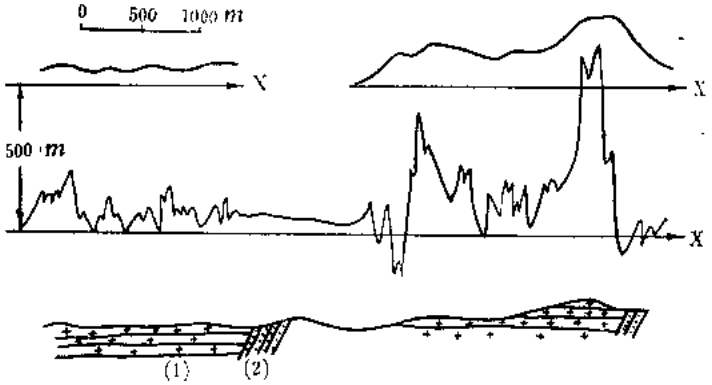


图 7.4.7 用向上延拓消除浅部玄武岩异常的影响

1—玄武岩；2—沉积岩

二是寻找深部铁矿盲矿体的实例，图7.4.8为两个峰值很明显的异常，两个异常的梯度很大，而半极值的宽度还不到25米，显然它们是浅部小矿体所引起的。但在这两个异常的两侧还存在着范围较宽的低缓异常，为了弄清这低缓异常所反映的地质现象，将磁场上延100米。由延拓的结果可以看出，所得异常的极大值并不与原极大值重合，并且曲线北侧陡南侧缓，说明矿体向北倾，其倾角大于有效磁化倾角（50°）。而原曲线上两个峰值异常完全消失。

由此可见，向上换算可消除浅部干扰，而突出深部大的地质体的磁场。

2．向下延拓处理迭加异常

有些磁异常是由多个磁性体的磁异常迭加而成的，当磁性体之间的距离接近于磁性体的埋藏深度时，迭加异常并不表现多峰值，而仅是表现出“宽”和“平”的特点。习惯上

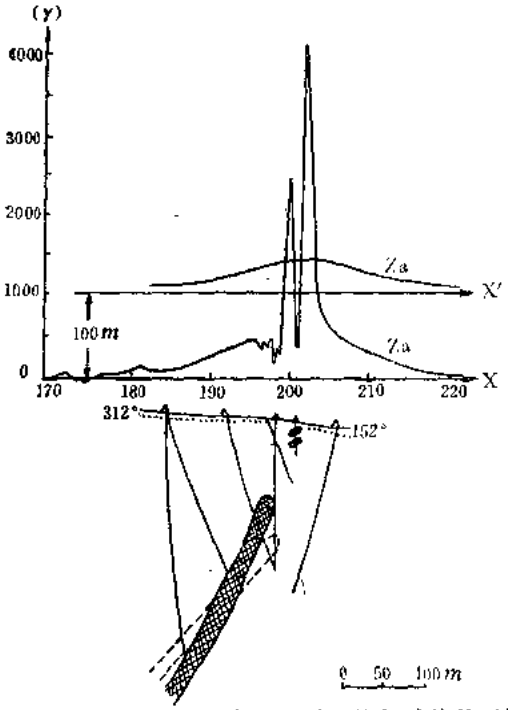


图 7.4.8 用向上延拓方法消除浅部矿体的干扰

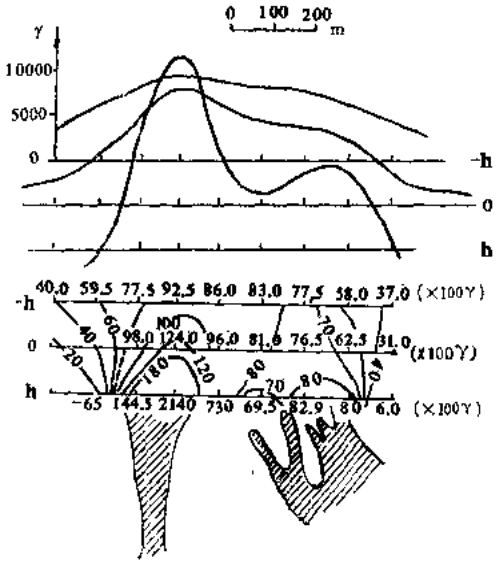


图 7.4.9 某铁矿区延拓剖面图

称之为“旁侧迭加异常”。遇到这种情况很难由实测异常推断出各个磁性体各自的产状和位置，因此经常用向下延拓来处理这种异常。

我们知道，越是接近磁性体，磁异常的梯度越大，异常曲线就显得越陡，异常的范围就接近磁性体的边界，故将迭加的磁异常向下延拓到磁性体的界面处，就可能出现几个峰值，从面把几个磁性体的异常分离开来，增强了分辨能力。

图7.4.9为某铁矿异常的延拓剖面图，图中标有“0”的剖面为实测磁异常剖面，标有“$-h$”的剖面为向上延拓h的异常剖面，而标有“h”的为下延h的异常剖面，下延结果表明异常出现了明显的“双峰”，与两个矿层相对应，这与地质情况是吻合的。

图7.4.10为我国江苏某铁矿区磁异常图的一部分。该区覆土厚达40米，并且由东向西红层逐渐加厚。最厚达200多米。由下延300米的异常图可以看出，异常分离出若干个孤立异常，见矿钻孔都处于延拓后的局部异常上，而未见矿孔一般均处于异常的边沿或外围。因此利用延拓资料有利于提高找矿勘探效果。

对于不同埋深的磁性体迭加异常（习惯上称为上下或垂直迭加），利用下延资料使浅部异常突出，其宽度则明显变窄，在此基础上利用圆滑、滤波和插值等办法，将深、浅部异常分离开来，能取得一定效果。

3．利用不同高度上延拓的异常数据，估算磁性体的形状参数，进而判断引起异常的磁性体的形状，在此基础上对异常进行解释推断。详见§6.3，这里不重复。

4．向下延拓资料有利于评价低缓磁异常。上述估算形状参数，判断磁性体形状，除提供定量解释的依据外，与地质资料配合，对评价低缓异常的性质是有利的。此外，向下延拓还能突出局部异常，减少低缓背景异常的影响，并且可以“放大”某些低缓异常上的不明显的特征（例如拐点、极值点及零值点等等），从而有利于进一步推断磁性体的几何参数和磁性参数，有利于评价低缓磁异常。

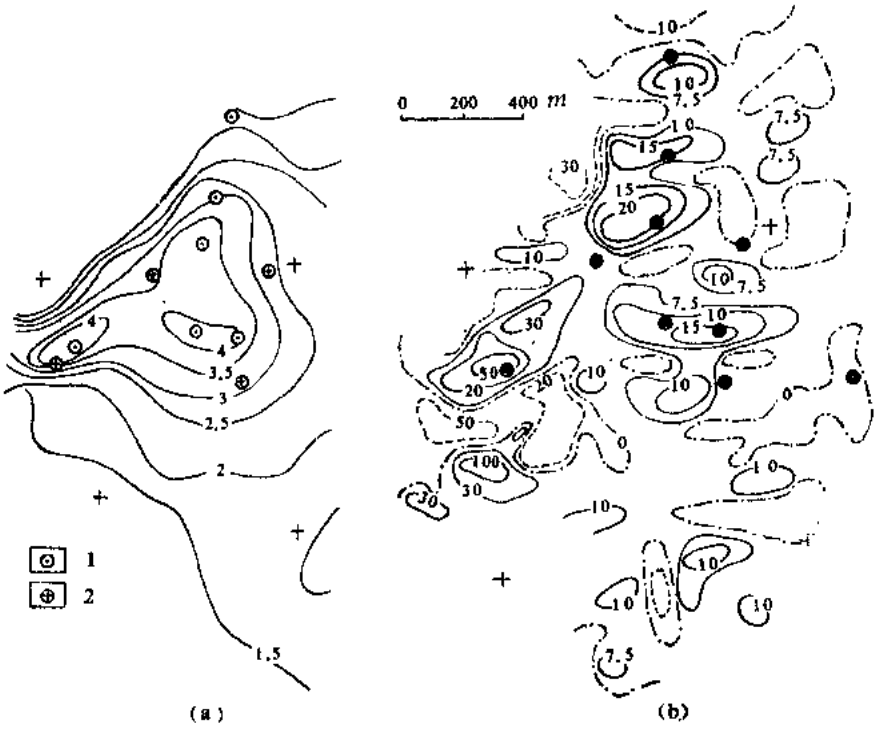


图 7.4.10 某铁矿区实测的（a）和向下延拓300米（b）的异常平面图

1—见矿钻孔；2—非矿钻孔；等值线4代表400Y。

5．利用延拓资料对异常进行解释推断。对磁异常进行向上和向下延拓。掌握了不同高度的磁异常资料，即可利用§6.2中所述方法对磁异常进行解释推断。另外，由于不同形状磁性体的空间磁场特征是有显著差别的（见第五章），因此常常利用上、下延拓的资料绘制磁异常断面等值线图，对磁异常进行推断。如图7.4.9所绘的磁异常断面等值线图，不难看出左侧断面等值线单侧有负值，接近斜磁化板状体的断面等值线图。

§7.5 磁异常各分量间的换算

在磁异常解释推断时，为判断磁性体的形状，简化反演计算及解决某些复杂情况的反演问题，需要综合应用各异常分量。但在实际磁测工作中，一般只能得到磁异常的某一分量，如Z_a或ΔT等。而在磁异常解释推断中常常要由实测异常某一分量换算出所需用的其它异常分量，因此，需要研究异常各分量之间的互算。本节将讨论常用的Z_a和H_a间的互算及ΔT换算Z_a的方法。

7.5.1 同平面二度异常Z_a与H_{ax}的互算方法

在二维第二边值问题的解（7.3.18）式中，将u看成为磁位，将x_0换为x，将x换为ξ，则应有：

$$H_{ax}=-\frac{\partial u}{\partial x};\quad Z_a=-\frac{\partial u}{\partial z}$$

将变换后的公式对x求导，并将H_{ax}和Z_a代入后得：

$$H_{ax}(x,-h)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)(\xi-x)}{(\xi-x)^2+h^2}d\xi \tag{7.5.1}$$

在同平面换算的情况下，可令(7.5.1)式中$h=0$，并且将坐标原点选在换算点上，即$x=0$，则(7.5.1)式变为：

$$H_{ax}(0,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi \tag{7.5.2}$$

(7.5.2)式即为同平面上二度异常的Z_a和H_{ax}的互算公式。下面介绍两种近似计算(7.5.2)式积分值的方法。

1．量板计算法

为了求得(7.5.2)式的积分，将积分分成三部分：

$$H_{ax}(0,0)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{\Delta\xi}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{-\infty}^{-\Delta\xi}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi\right]$$

分别求出上式三项积分的近似值。先求第二、第三项的积分近似值，其方法是先求出任一小区间$\xi_m\sim\xi_{m+1}$内的积分值，然后以n个有限项积分值之和近似地代替无穷积分，即：

$$\int_{\Delta\xi}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{-\infty}^{-\Delta\xi}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi=\int_{\Delta\xi}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi-\int_{-\Delta\xi}^{-\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi$$

$$\approx\sum_{m=1}^{n}\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}Z_a(\xi_m,0)-\sum_{m=-1}^{-n}\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}Z_a(-\xi_m,0)$$

而第一项积分应是：

$$\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi=Z_a(\xi)-Z_a(-\xi)=\Delta Z_a(0)$$

$\Delta Za(0)$表示在ξ与$-\xi$两点处Z_a的差值。证明如下：设在$\Delta\xi$的小范围内，Z_a的变化可以看成是线性的，则Z_a可写为：

$$Z_a(\xi)=Z_{a0}+p\xi$$

p为直线的斜率。将这关系代入第一项积分内可得：

$$\begin{aligned}\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi&=\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}Z_{a0}\frac{d\xi}{\xi}+\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}\frac{p\xi}{\xi}d\xi\\&=\int_{-\Delta\xi}^{-\varepsilon}Z_{a0}\frac{d\xi}{\xi}+\int_{\varepsilon}^{\Delta\xi}Z_{a0}\frac{d\xi}{\xi}+p\int_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}d\xi\\&=Z_{a0}\ln\xi\Big|_{-\Delta\xi}^{-\varepsilon}+Z_{a0}\ln\xi\Big|_{\varepsilon}^{\Delta\xi}+p\xi\Big|_{-\Delta\xi}^{\Delta\xi}\\&=p\cdot2\cdot\Delta\xi=\Delta Z_a(0)\end{aligned}$$

故三项积分之和为：

$$H_{ax}(0,0)\approx\frac{1}{\pi}\left[\Delta Z_a(0)+\sum_{m=1}^{n}\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}\bar{Z}_a(\xi_m)-\sum_{m=-1}^{-n}\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}\bar{Z}_a(-\xi_m)\right]$$

令：

$$\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}=0.314 \tag{7.5.3}$$

$$H_{ax}(0,0)=\frac{1}{\pi}\Delta Z_a(0)+0.1\left[\sum_{m=1}^{n}\bar{Z}_a(\xi_m)-\sum_{m=-1}^{-n}\bar{Z}_a(-\xi_m)\right] \tag{7.5.4}$$

(7.5.4) 式就是由Z_a计算H_{ax}的公式。在计算前，需要按 (7.5.3) 式的条件制成量板。制作量板的方法如下：

因为$\ln\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}=0.314$，则：$\frac{\xi_{m+1}}{\xi_m}=1.368$

按以上条件，可计算出一系列ξ的值为：$\xi_1=1\Delta\xi$，$\xi_2=1.37\Delta\xi$，$\xi_3=1.87\Delta\xi$，$\xi_4=2.56\Delta\xi$，$\xi_6=4.8\Delta\xi$，$\xi_7=6.57\Delta\xi$，$\xi_8=8.98\Delta\xi$，$\xi_9=12.3\Delta\xi$，$\xi_{10}=16.8\Delta\xi$，$\xi_{11}=23.0\Delta\xi$……。以某一竖线oo为中心线，按这些ξ值两边对称地画出一系列竖线，即构成如图7.5.1所示的量板。

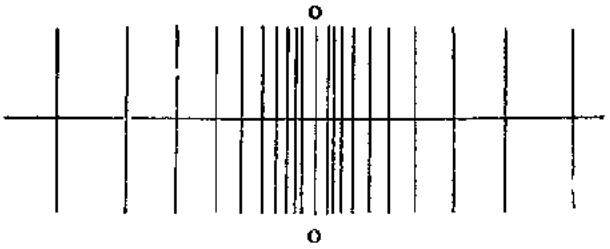


图 7.5.1 由Z_a计算H_{ax}的二度量板

计算时，使二量板上的横线与剖面线重合，并使中心线oo通过计算点。第一步读取$\pm\Delta\xi$竖线之间的Z_a增量$\Delta Z_a(0)$。要注意$\Delta Z_a(0)$值的符号；第二步依次读取量板上第一条竖线以后各个间隔内Z_a的平均值$\bar{Z}_a(\xi_m)$和$\bar{Z}_a(-\xi_m)$；第三步按公式 (7.5.4) 式计算H_{ax}值。如此将量板中心线逐点移动，进行同样的计算，即可得到整个剖面上的H_{ax}值。

由H_{ax}计算Z_a的公式和由Z_a计算H_{ax}的公式，形式完全一样，仅差一负号故当由H_{ax}计算Z_a时，可用同一量板，只需把计算结果乘一负号。

二、等间距权系数计算法

为了求 (7.5.2) 式的积分，将无穷积分划分成五部分进行：

$$H_{ax}(0,0)=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{-\xi_N}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{-\xi_N}^{-\xi_1}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{-\xi_1}^{\xi_1}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi\right.$$
$$\left.+\int_{\xi_1}^{\xi_N}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\int_{\xi_N}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi\right] \tag{7.5.5}$$

由前述结果可知，$[-\xi_1,\ \xi_1]$区间的积分近似值应为：

$$\int_{-\xi_1}^{\xi_1}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi\approx\frac{1}{\pi}[Z_a(\xi_1)-Z_a(-\xi_1)]$$

在$[\xi_1,\xi_N]$区间内，以ξ_1为单位划分成若干等间距的子区间，利用中值定理计算各子区间的积分，将子区间内Z_a的变化视为线性，区间内Z_a的平均值以区间端点的平均值代替，整理后得：

$$\frac{1}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_N}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi=\frac{1}{2\pi}\left[Z_a(\xi_1)\ln\frac{\xi_2}{\xi_1}+Z_a(\xi_2)\ln\frac{\xi_3}{\xi_1}\right.$$

$$+Z_a(\xi_3)\ln\frac{\xi_1}{\xi_2}+\cdots+Z_a(\xi_{N-1})\ln\frac{\xi_N}{\xi_{N-2}}$$

$$+Z_a(\xi_N)\ln\frac{\xi_N}{\xi_{N-1}}\Big] \tag{7.5.6}$$

若将区间$[\xi_N, \infty]$的磁异常视为按平方反比衰减，即 $Z_a(\xi)=Z_a(\xi_N)\frac{\xi_N^2}{\xi^2}$，则积分：

$$\frac{1}{\pi}\int_{\xi_N}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi=\frac{1}{2\pi}Z_a(\xi_N)$$

考虑到$[-\infty, \xi_N]$及$[\xi_{-N}, \xi_{-1}]$区间的积分，变换积分限后，取负值，则积分式相类似，(7.5.6) 式可写成：

$$H_{ax}(0,0)=\sum_{i=1}^{N}a_iZ_a(\xi_i)-\sum_{i=-1}^{-N}a_{-i}Z_a(\xi_{-i}) \tag{7.5.7}$$

式中：

$$a_{\pm1}=\frac{1}{\pi}\left(1+\frac{1}{2}\ln\frac{\xi_{\pm2}}{\xi_{\pm1}}\right);$$

$$a_{\pm i}=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\xi_{\pm(i+1)}}{\xi_{\pm(i-1)}};$$

$$a_{\pm N}=\frac{1}{2\pi}\left[1+\ln\frac{\xi_{\pm N}}{\xi_{\pm(N-1)}}\right]。$$

若取$N=10$，则$a_1\sim a_N$的权系数见表7.5.1。

表 7.5.1

$\xi\pm_i$	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
a_i	0.4286	0.1749	0.1103	0.0813	0.0645	0.0536	0.0458	0.0400	0.0355	0.1759

计算时$\xi_{\pm1}\sim\xi_{\pm N}$间可按点距来划分，读取各点垂直磁异常$Z_a(\xi_{\pm i})$值，分别乘以相应的系数，利用（7.5.7）式计算原点的水平磁异常。计算时注意不取原点的垂直磁异常值。

该方法与量板法不同之处：一是计算时垂直磁异常按等间距点取值，不同计算平均值；二是利用等间距权系数计算时，权系数不宜过多，因系为了保证（7.5.5）式近似积分的准确性要考虑远区影响，但影响值已经计算于系数中，不用另行计算。

7.5.2 同平面三度异常Z_a与H_{ax}的量板互算法

由半空间诺依曼问题的解（7.3.17）式有：

$$u=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\frac{\partial u}{\partial z}ds}{r}$$

若上式中的u表示磁位，则对x求导后可得：

$$H(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a\cos(H\cdot r)}{r^2}ds$$

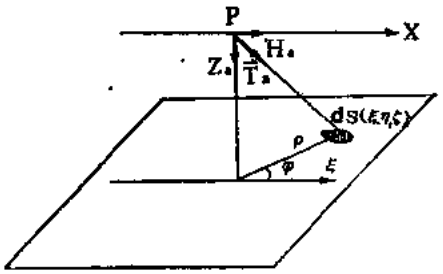


图 7.5.2 由Z_a计算H_a的柱坐标图

其中：$r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$

当只由平面上的Z_a换算H_{ax}时，$z=0$，$r=\rho$，

故：$r=\rho=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}$，

$$\cos(H\cdot r)=\cos\varphi=\frac{\xi-x}{\rho}$$

$$ds=d\xi d\eta=\rho d\varphi d\rho$$

得：

$$H(P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{Z_a(\rho,\varphi)\cos\varphi}{\rho}\,d\rho d\varphi \tag{7.5.8}$$

用直角坐标表示时：

$$H(P)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,\eta,0)(\xi-x)}{[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]^{3/2}}d\xi d\eta \tag{7.5.9}$$

(7.5.8) 和 (7.5.9) 式是三度异常Z_a计算H_a的公式。为了求得 (7.5.8) 式积分近似值。可以先求出一个小扇形面积ΔS的磁场$\Delta H(P)$，然后再将所有$\Delta H(P)$求和得到总的$H(P)$值。对任一小扇形面积ΔS产生的$\Delta H(P)$为：

$$\Delta H(P)=\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_m}^{\varphi_{m+1}}\cos\varphi d\varphi\int_{\rho_n}^{\rho_{n+1}}\frac{Z_a(\rho,\varphi)}{\rho}d\rho$$

$$=\frac{Z_a(\rho,\varphi)}{2\pi}(\sin\varphi_{m+1}-\sin\varphi_m)\ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} \tag{7.5.10}$$

令：$$\sin\varphi_{m+1}-\sin\varphi_m=0.2,\quad \ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=0.314,$$

即$$\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}=1.368,$$

则：

$$\frac{1}{2\pi}\ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}(\sin\varphi_{m+1}-\sin\varphi_m)=0.01$$

故：$$\Delta H(P)=0.01Z_a(\rho,\varphi) \tag{7.5.11}$$

对于半径ρ在0～1范围内的$\Delta H(P)$可用下法求得：

假定在0～1范围内，Z_a的变化近于线性，即$Z_a=Z_{a0}+\frac{dZ_a}{d\rho}\rho$；相应的磁场以$\Delta H'(P)$表示。

则有：

$$\Delta H'(P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int_0^1 Z_a\frac{d\rho}{\rho}$$

将Z_a值代入上式得：

$$\Delta H'(P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 Z_{a0}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_0^1\frac{dZ_a}{d\rho}\rho\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi$$

因：

$$\int_0^1 Z_{a0}\frac{d\rho}{\rho}\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=\int_0^1 Z_{a0}\frac{d\rho}{\rho}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}=0$$

故：
$$\Delta H'(P)=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 dZ_a\int_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Delta Z\cos\varphi d\varphi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\sum\Delta Z\sin\varphi\Big|_{\varphi_m}^{\varphi_{m+1}}=\frac{1}{2\pi}\sum\Delta Z(\sin\varphi_{m+1}-\sin\varphi_m)$$

同样令：
$$\sin\varphi_{m+1}-\sin\varphi_m=0.2$$

有：
$$\Delta H'(P)=0.0318\Sigma\Delta Z(\varphi)\qquad(7.5.12)$$

就是说，$\Delta H'(P)$是半径为1的圆周内全部扇形的增量ΔZ之和乘以0.0318。从而有：
$$H(P)=0.01\Sigma Z_a(\rho,\varphi)+0.0318\Sigma\Delta Z_a(\varphi)\qquad(7.5.13)$$

按（7.5.11）式的条件，可以做成由Z_a换算H_a的量板，量板的射线角度φ为：

0°，11.5°，23.6°，36.9°，53.2°，90°，126.3°，143.1°，156.4°，168.3°，180°

其半径ρ的大小为：

1，1.368，1.87，2.56，3.50，4.79，6.55，8.97，12.27，16.78，22.95，31.40，42.96，58.77，80.39，109.97，150.44，250.80，……。

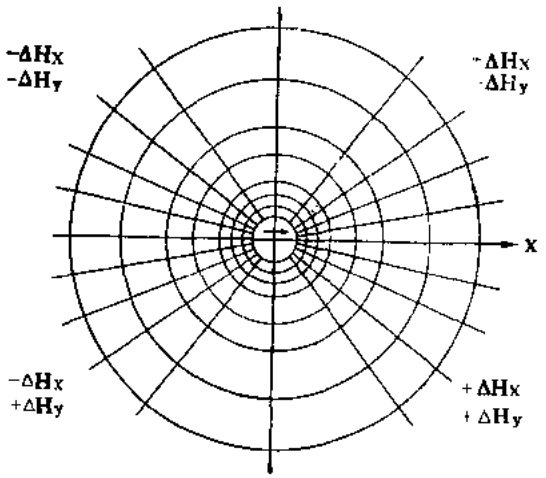


图 7.5.3 由Z_a计算H_{ax}、H_{ay}的三度量板

按以上数据作成的量板如图7.5.3所示。

计算时将量板的中心点与计算点重合，x轴向北，然后求出量板各扇形中Z_a的平均值$\bar{Z}_a(\rho,\varphi)$，再求出半径ρ_1范围内各扇形ΔZ值之和，最后代入（7.4.13）式计算。在量板上已标出了用量板计算H_{ax}和H_{ay}的符号。当计算增量ΔZ时，ΔZ正向是量板中心箭头方向。

当由H_a计算Z_a时，需要同时用到H_{ax}和H_{ay}的平面数据，故三度异常很少用H_a值计算Z_a值。

7.5.3 Z_a和H_a异常互算的应用

由同一平面的实测Z_a计算H_{ax}，使Z_a、H_a相配合用于解决以下几方面的问题：

1．用Z_a与H_a互算作正常场改正。

由平面上的实测Z_a异常计算H_a异常，然后再由H_a异常计算Z_a异常。若实测的Z_a与换算所得的Z'_a相等，说明正常场选择是正确的。若Z_a与Z'_a不相等，则正常场改正值为：
$$\delta=\frac{-1}{N}\sum_{i=1}^{N}(Z_{ai}-Z'_{ai})$$

这是因为由Z_a计算的H_a不受正常场影响，故由H_a换算的Z'_a亦不受正常场的影响。由此看出所有计算点Z_a与Z'_a之差的平均值的负值就是正常场的改正值。

当Z_a具有正常场影响时可表示为$Z_a(\xi,0)+A$，按（7.5.2）式应有：
$$H_a(0,0)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)+A}{\xi}d\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{Z_a(\xi,0)}{\xi}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}A\frac{d\xi}{\xi}$$

上式第二项积分为零，即$A\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}=0$。其原因如下：被积函数$\frac{1}{\xi}$为一双曲线，如图7.5.4所示。积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{\xi}$即表示双曲线与x轴所夹的面积。

在由Z_a计算H_a时，积分是分成三个部分，第一部分由$-\Delta\xi\sim\Delta\xi$，积分结果为$\Delta Z_a(0)$，即$-\Delta\xi\sim\Delta\xi$之间的增量，它与正常场无关。由图7.5.4可见，由$-L\sim-\Delta\xi$，$\Delta\xi\sim L$的部分之积分，因曲线与横轴所夹面积相等符号相反，故积分为零。因此由Z_a计算出的H_{ax}不受正常场影响。

2．由Z_a计算出H_{ax}之后，用Z_a、H_{ax}做参量图可用于判断磁性体形状，对于有限延深磁性体还可用参量图判断正常场是否正确，并做正常场改正。

3．Z_a、H_{ax}配合做定量解释。在复杂磁异常的解释中，同时使用Z_a和H_a两个异常要素进行解释，会使问题易于解决，或提高解释的可靠性。如第六章所述解反问题的特征点法、积分法和矢量法等等。

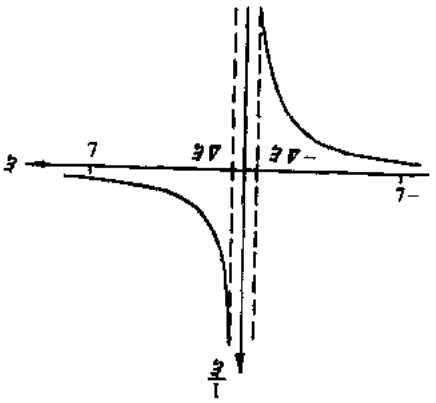


图 7.5.4 $\frac{1}{\xi}\sim\xi$ 曲线为正负面积相等的双曲线

7.5.4 二度ΔT异常换算成Z_a和H_{ax}

对于二度ΔT异常，只需将ΔT异常看成是某一磁化倾角的Z_a或H_{ax}即可。虽然如此，有些情况下我们仍然需要将ΔT换算成Z_a或H_{ax}。例如作航空磁测异常的检查工作时，航磁异常是ΔT异常，而地面则是Z_a异常，为了二者对比，就需将ΔT换算成Z_a，此外ΔT异常是随磁倾角I及剖面方位角A'而改变的。为了使解释工作更容易，有时也要将ΔT异常换算成Z_a。下面我们介绍其换算的原理。

因为：

$$\Delta T=Z_a\sin I+H_{ax}\cdot\cos I\cdot\cos A'$$

参照Z_a、H_{ax}与$Z_{a\perp}$与$H_{a\perp}$的关系，我们可以得出与ΔT垂直的矢量ΔT_1，其表达式为：

$$\Delta T_1=H_{ax}\sin I-Z_a\cos I\cos A'$$

将以上二式联立即可求出：

$$Z_a=\frac{1}{\sin^2 I+\cos^2 I\cos^2 A'}[\Delta T\cdot\sin I-\Delta T_1\cos I\cos A']$$

因ΔT是与ΔT_1垂直的，由ΔT亦可用（7.5.2）式求出ΔT_1，因此：

$$Z_a(0)=\frac{1}{\sin^2 I+\cos^2 I\cos^2 A'}\left\{\Delta T(0)\sin I-\frac{\cos I\cdot\cos A'}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta T(\xi,0)}{\xi}d\xi\right\}\tag{7.5.14}$$

由上式就可以用ΔT的实测值计算出Z_a值，上式右边第二项积分可以用（7.5.4）式以及相应的量板求得，计算方法与由Z_a计算H_{ax}完全相同。联立方程的另一个解为：

$$H_{ax}(0)=\frac{1}{\sin^2 I+\cos^2 I\cos^2 A}\left\{\Delta T(0)\cos I\cos A'+\frac{\sin I}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Delta T(\xi,0)}{\xi}d\xi\right\}\tag{7.5.15}$$

故由ΔT同样可以计算出H_{ax}来。

三度ΔT异常换算成Z_a异常目前主要用频率域方法，见本章第九节。换算的空间域方法主要有调和级数法和方位算子法，其公式推导及计算均很繁杂，这里不加赘述。

§7.6 磁异常导数的换算

7.6.1 磁异常水平和垂直导数的物理意义及其计算方法

磁异常的导数通常指的是磁场Z_a（或H_{ax}、ΔT）分别在x、y、z方向的导数，如：

$$\frac{\partial Z_a}{\partial x},\ \frac{\partial Z_a}{\partial y},\ \frac{\partial Z_a}{\partial z},\ \frac{\partial H_{ax}}{\partial x},\ \frac{\partial(\Delta T)}{\partial z},\ \cdots\cdots$$

其中常用的是$\frac{\partial Z_a}{\partial x}$及$\frac{\partial Z_a}{\partial z}$。

当Δx、Δz相当小时，并使磁场在这个范围内的变化近似于线性，则应有近似的关系：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Z_a}{\partial x}&\doteq\frac{Z_a(x+\Delta x)-Z_a(x)}{\Delta x}\text{或}\frac{\partial Z_a}{\partial x}\Delta x\doteq Z_a(x+\Delta x)-Z_a(x)\\ \frac{\partial Z_a}{\partial z}&\doteq\frac{Z_a(z+\Delta z)-Z_a(z)}{\Delta z}\text{或}\frac{\partial Z_a}{\partial z}\cdot\Delta z\doteq Z_a(z+\Delta z)-Z_a(z)\end{aligned}\right\}\tag{7.6.1}$$

（7.6.1）式说明Z_a的一阶导数相当于二磁异常之差，即磁性体移动Δx或ΔZ后的异常与原磁性体异常之差。所以异常的一阶导数相当于移动后的磁性体与原磁性体的差所引起的磁异常。

图7.6.1(a)表示$\frac{\partial Z_a}{\partial x}\Delta x$曲线，相当于板状体两旁厚度为$\Delta x$的两薄板所产生的磁场曲线。这两个薄板可看成是两个磁化方向相反的厚板错开了Δx距离，它们的重迭部分互相抵消，而剩下了边部未抵消的部分。故在左边的薄板是正常磁化的，而在右边的薄板是反

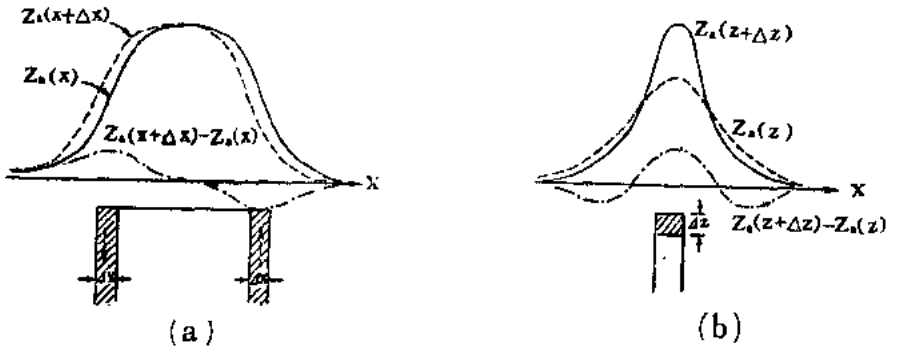


图 7.6.1 磁异常微分的物理意义

向磁化的。图7.6.1(b)说明$\frac{\partial Z_a}{\partial z}\cdot\Delta z$曲线相当于一个水平柱体的磁场曲线。这个柱体可以看成是由于两个磁化方向相反的磁性体在垂直方向上错开了Δz距离，互相重迭部分已

抵消，剩下的是顶部的正常磁化的方柱体。因此对无限延深厚板和薄板分别求其水平导数和垂直导数后，厚板的$\frac{\partial Z_a}{\partial x}\Delta x$ 曲线可用无限延深薄板解反问题的方法求磁性体的产状，而薄板的$\frac{\partial Z_a}{\partial z}\Delta z$ 曲线可用水平圆柱体解反问题的方法近似求产状。

若按这种意义来理解厚板Z_a的二次导数$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x \partial z}$，则它相当于在厚板的两个角点处存在两个磁化方向相反的方柱体，如图7.6.3所示。

同时我们应注意到二度体磁位的拉普拉斯方程为：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

故有：

$$\frac{\partial Z_a}{\partial z}+\frac{\partial H_a}{\partial x}=0 \quad 即\frac{\partial Z_a}{\partial z}=-\frac{\partial H_a}{\partial x} \tag{7.6.2}$$

就是说垂直磁异常的垂向一阶导数与水平磁异常的水平一阶导数只差一负号。在适合的情况下亦可用H_a的水平导数代替Z_a的垂向导数。

磁异常的水平和垂向导数可以直接利用磁力梯度仪观测，称之为梯度测量。在不具备梯度测量条件时，可根据磁异常计算。

计算$\frac{\partial Z_a}{\partial x}$时，可将$Z_a$异常划分成等距离的若干个点，利用前一点$(x+\Delta x)$处的异常值减后一点$x$处的异常值所得之差，作为$x$点的$\frac{\partial Z_a}{\partial x}$值。

计算$\frac{\partial Z_a}{\partial z}$时，可用向下延拓的方法计算出低于原平面$\Delta Z$的磁异常$Z_a(z+\Delta z)$，然后减去原异常$Za(Z)$求得的差值，作为$\frac{\partial Z_a}{\partial Z}$值。

计算$\frac{\partial Z_a}{\partial Z}$也可利用泊松积分由式（7.3.15）对 z 求导，并用近似求积的方法导出近似计算公式：

$$\begin{aligned}\frac{\partial Z_a}{\partial z}=&1.2732Z_a(0,0)-0.3979[Z_a(h,0)+Z_a(-h,0)]\\&-0.1061[Z_a(2h,0)+Z_a(-2h,0)]-0.0398[Z_a(3h,0)+Z_a(-3h,0)]\\&-0.0212[Z_a(4h,0)+Z_a(-4h,0)]-0.0133[Z_a(5h,0)+Z_a(-5h,0)]\\&-0.0091[Z_a(6h,0)+Z_a(-6h,0)]-0.0066[Z_a(7h,0)+Z_a(-7h,0)]\\&-0.0051[Z_a(8h,0)+Z_a(-8h,0)]-0.0040[Z_a(9h,0)+Z_a(-9h,0)]\\&-0.0124[Z_a(10h,0)+Z_a(-10h,0)]\end{aligned} \tag{7.6.3}$$

式中 h 为取样间隔，一般取为点距。

7.6.2 磁异常导数的应用

磁异常的导数常可用于解决如下几方面的问题：

1．异常经过微商后，能减弱或克服磁性围岩的干扰。例如图7.6.2所示，磁性矿体的异常Z_{a1}与磁性岩体的异常Z_{a2}迭加时，迭加异常与矿体异常相比发生了畸变，经过x方向一次微商后畸变减弱，再求垂向导数，即$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x \partial z}$异常，围岩的干扰基本上克服了。

2．将三度异常转化为二度异常，扩大二度异常解释方法的应用范围。是否为二度体，一般是按磁性体走向长度$2L$与埋深h的比值大小来衡量的。但有些磁性体$2L/h$值较大，但磁性体的宽度也很大，因此，磁性体呈等轴状，异常也为等轴状的三度异常，见图7.6.3。

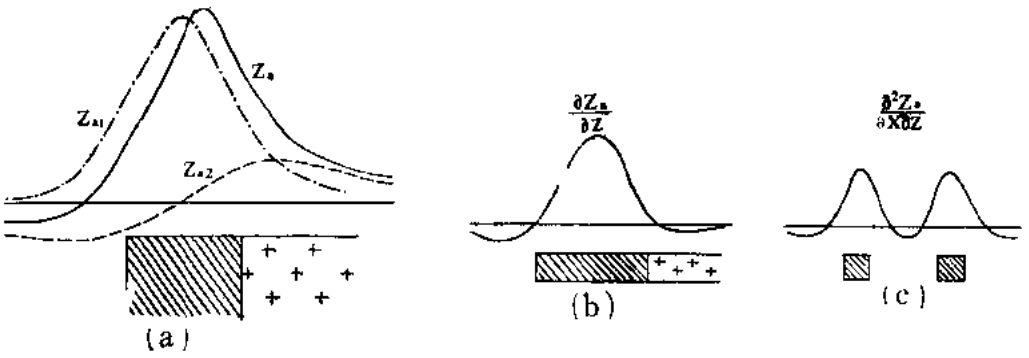


图 7.6.2　用导数法消除磁性围岩干扰

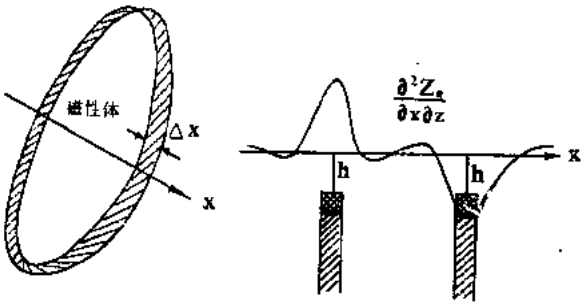


图 7.6.3　三度异常的导数异常

但沿x方向作一次微商后，则相当于磁性体只剩下两侧边缘部分，因而$\frac{\partial Z_a}{\partial x}$即相当于两个沿走向很长的薄板的异常，这样就可用薄板解释方法对其进行解释。如再沿z方向取一次微商，当磁性体下部延深较大时，剩下薄板顶部，则$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x \partial z}$可作为水平圆柱体的异常曲线进行解释。

3．能消除正常场背景值的影响。如正常场选择不当，计算产状要素时容易出错，经微商后，正常背景值将消失，因其微商为零。

4．导数异常的分辨率较高，可用于区分相邻磁性体的异常。例如地下有两个很接近的磁性体，它们在地面上产生的异常互相迭加，不易区分，若将Z_a曲线对z方向取一次微商，由于剔除了磁性体的大部分，只剩下两个磁性体的顶部，其磁场在空间的分布范围缩小，迭加部分也相应减小，异常便显示出两个峰值。如图7.6.4所示。

5．直接用导数异常进行反演计算

在此要指出，导数法必须使用恰当，其目的是使难以解决的问题简单化，如果采用不当，反而会得到相反的效果。选用水平导数还是垂直导数，应按磁性体的特点来确定。另外，为了保证导数异常的精度，计算导数异常的原始异常必须有较高的精度。采用圆滑处理后的异常计算导数效果较好。

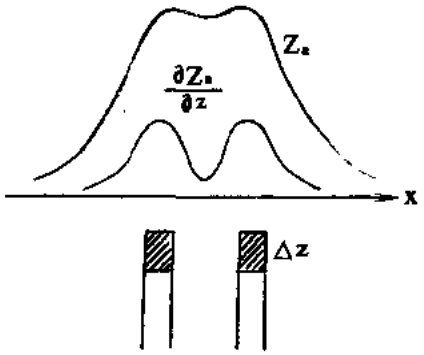


图 7.6.4 用导数分离迭加异常

7.6.3 磁异常垂向二阶导数的计算

目前，磁异常的高阶导数中常用的是磁异常垂向二阶导数，如$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}$及$\frac{\partial^2 \Delta T}{\partial z^2}$等。它们具有更高的分辨力。

对于二度体磁场，其拉氏方程为：

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}$$

由上式可见，若$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}=0$，则$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}=0$，垂直磁异常垂向二阶导数的零值点，即为垂直磁异常曲线的拐点。而由（7.6.2）式可知，垂直磁异常垂向一阶导数的零值点即为水平磁异常的极值点。一般二度体水平异常的极值点的横坐标都大于垂直磁异常拐点的横坐标，所以垂向二阶导数异常分辨率高，与矿体分布的关系更密切。

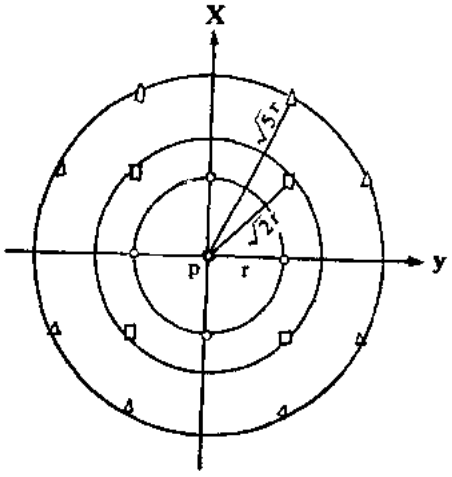


图 7.6.5 计算垂向二次导数的取值点分布

计算垂向二阶导数的基本公式很多，推导方法也多，下面介绍一些有代表性的计算方法。

1．单环法（哈克公式）：

如图7.6.5所示，以P点为圆心，以r为半径作圆，圆周与x、y轴相交的四个点的坐标为$(r,0)$，$(-r,0)$，$(0,r)$，$(0,-r)$，该四点的磁异常可以展开成级数：

$$\left.\begin{aligned}
Z_a(r,0) &= Z_{aP} + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial x}\right)_P r + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}\right) r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 Z_a}{\partial x^3}\right)_P r^3 + \cdots \\
Z_a(0,r) &= Z_{aP} + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial y}\right)_P r + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial y^2}\right)_P r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 Z_a}{\partial y^3}\right)_P r^3 + \cdots \\
Z_a(-r,0) &= Z_{aP} + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial x}\right)_P (-r) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}\right)_P r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 Z_a}{\partial x^3}\right)_P (-r)^3 + \cdots \\
Z_a(0,-r) &= Z_{aP} + \left(\frac{\partial Z_a}{\partial y}\right)_P (-r) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial y^2}\right)_P r^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 Z_a}{\partial y^3}\right)_P (-r)^3 + \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (7.6.4)$$

以上四式的总和为

$$\sum Z_a(r)=4Z_{aP}+\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z_a}{\partial y^2}\right)_P r^2+\frac{2}{4!}\left(\frac{\partial^4 Z_a}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 Z_a}{\partial y^4}\right)_P r^4+\cdots$$

若将上式中半径为r的圆周上四个点的异常值之和$\sum Z_a(r)$用平均值$\bar{Z}_a(r)$来表示应有：

$$\sum Z_a(r)=4\bar{Z}_a(r)\ ;$$

又考虑到场的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}=-\left[\frac{\partial^2 Z_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Z_a}{\partial y^2}\right]$$

故有：

$$4\bar{Z}_a(r)=4Z_{aP}-\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}\right)_P r^2+\frac{2}{4!}\left[\frac{\partial^4 Z_a}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 Z_a}{\partial y^4}\right]_P r^4+\cdots$$

由此可得：

$$\left(\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}\right)_P=-4\frac{\bar{Z}_a(r)-Z_{aP}}{r^2}+\frac{2}{4!}\left[\frac{\partial^4 Z_a}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 Z_a}{\partial y^4}\right]_P r^2+\cdots \qquad (7.6.5)$$

上式右边第一项的分子表示半径为r的圆周上四个点的异常平均值与中心点P的异常值之差。如忽略高阶导数项，则上式化简为：

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}=\frac{4}{r^2}[Z_{aP}-\bar{Z}_a(r)]$$

该式称为哈克公式。

2．多环计算法

在此给出一组多环计算公式：

（1）艾尔金斯公式

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{1}{60r^2}\left[64Z_a(0)+8\bar{Z}_a(r)-16\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)-40\bar{Z}_a(\sqrt{5}r)\right]\\
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{1}{28r^2}\left[16Z_a(0)+8\bar{Z}_a(r)-24\bar{Z}_a(\sqrt{5}r)\right]\\
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{1}{62r^2}\left[44Z_a(0)+16\bar{Z}_a(r)-12\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)-48\bar{Z}_a(\sqrt{5}r)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6.6)$$

（2）罗森巴赫公式

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{1}{r^2}\left[12Z_a(0)-6\bar{Z}_a\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)+4\bar{Z}_a(r)\right]\\
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{1}{24r^2}\left[96Z_a(0)-72\bar{Z}_a(r)-32\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)+8\bar{Z}_a(\sqrt{5}r)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6.7)$$

（3）亨德森公式

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&\approx\frac{1}{r^2}\left[6.185Z_a(0)-8.374\bar{Z}_a(r)+2.189\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)\right]\\
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&=\frac{2}{r^2}\left[3Z_a(0)-4\bar{Z}_a(r)+\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)\right]\\
\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}&\approx\frac{1}{3r^2}\left[21Z_a(0)-32\bar{Z}_a(r)+12\bar{Z}_a(\sqrt{2}r)-\bar{Z}_a(2r)\right]
\end{aligned}\right\} \qquad (7.6.8)$$

上式中的 $Z_a(0)$，$\bar{Z}_a(r)$，$Z_a(\sqrt{2}r)$，$\bar{Z}_a(\sqrt{5}r)$及$\bar{Z}_a(2r)$等分别为半径等于0，r，$\sqrt{2}r$，$\sqrt{5}r$，$2r$圆周上Z_a的平均值。从误差传递角度看，r越大，传递误差越小。但是随r增大，计算导数的精度降低，一般取探测对象埋深的1/3～2/3为宜。多环计算公式均可写成一般形式：

$$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}=\sum_{i=1}^{n} P_i \frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}(a_i r)$$

式中：$\frac{\partial^2 Z_a}{\partial z^2}(a_i r)$ 是环半径为$a_i r$时按哈克公式计算的二阶导数，P_i为权系数，n为环数。因此可以看出多环计算公式相当于若干个不同环半径的哈克公式乘以权系数之和。环半径大小决定导数异常反映的磁性体的深浅。因不同公式中不同环半径的权系数不同，因此不同公式反映磁性体深浅有别。一般要根据研究对象通过试算确定选用何种计算公式。

三、位场换算的多用算子法

本章第四节给出了三度异常向下延拓计算公式。它是用原始观测场值和向上延拓场值建立插值多项式得到的。通过插值多项式对z求二阶导数，即可得到计算垂向二阶导数的计算公式：

$$Z''_a(0,mh)=\sum_{i=1}^{N} D''_i(\rho,mh)\cdot\bar{Z}_a(\rho_i)$$

式中：D''为计算系数，当取$N=10$，即$\rho_i=\rho_0\sim\rho_{10}$共十一环，并取最大环半径为 25h，相应的计算系数见表7.6.1。表7.6.1与表7.4.4和表7.4.7组成一组系数，称为三度位场换算的多用算子。它们的取数方法相同，取一次值乘以不同的计算系数，就可分别得到上延、下延及导数等多种换算结果。计算效率很高。

表 7.6.1

i	ρ_i	$D_i''(\rho,0)$	$D_i''(\rho,h)$	$D_i''(\rho,2h)$	$D_i''(\rho,3h)$
0	0	2.82994	7.80408	14.15751	24.74755
1	1	-2.49489	-6.93715	-14.51327	-26.02351
2	$\sqrt{2}$	0.05173	0.36265	0.98108	1.92719
3	$\sqrt{5}$	-0.39416	-0.80765	-1.42970	-2.30269
4	$\sqrt{8}$	0.00932	0.13050	0.35907	0.72474
5	$\sqrt{13}$	0.00732	0.07213	0.22256	0.46253
6	5	0.00304	0.06502	0.17330	0.33920
7	$\sqrt{50}$	0.00219	0.02313	0.05501	0.09985
8	$\sqrt{136}$	0.00040	0.00565	0.01239	0.02070
9	$\sqrt{274}$	0.00004	0.00103	0.00210	0.00322
10	25	0.00000	0.00043	0.00085	0.00122

7.6.4 磁异常垂向二阶导数的应用

1．分离迭加在背景场中的局部场

当在较强的背景场中迭加有较弱的局部场的情况下，局部场只能在等值线图上表现为等值线局部发生微弱的弯曲，因此局部场是不明显的。然而由于导数受区域场的影响小，受局部场的影响大，故在导数图上局部异常必然明显。

图7.6.6(a)表示了迭加在火成岩体背景异常上的一个微弱的局部异常，局部异常仅表

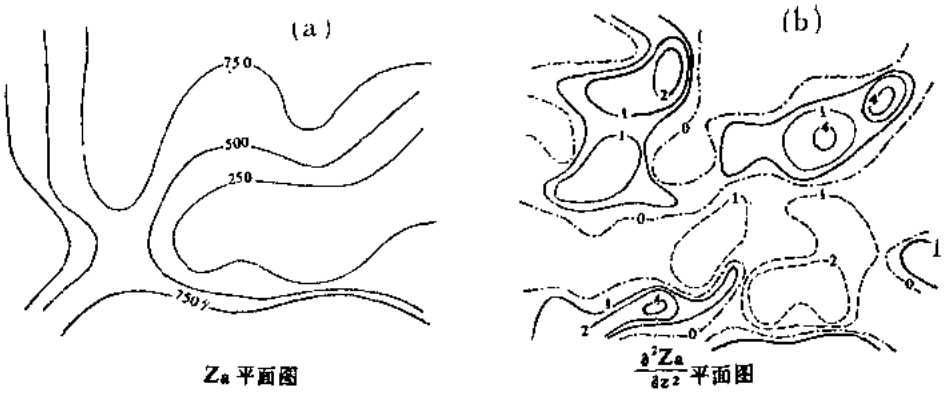


图 7.6.6 利用垂向二阶导数分离背景和局部异常

现为个别等值线向南弯曲，然而二阶垂向导数很成功地圈出了这个局部异常，见图7.6.6(b)。

2．分离旁侧迭加异常

由于多个磁性体互相靠近，其磁场互相迭加，使我们难以从实测磁异常图中分辨出有几个磁性体，更难以判断磁性体的位置、走向和分布范围，但是在导数图上，由于导数分辨率高却有可能将它们分开，使磁性体的范围、走向、轮廓表现得比较清楚。

3．用二阶导数圈定磁性体的范围和位置

以上已讨论过磁场的垂向二阶导数与磁性体的边界有密切的关系，二阶导数更能反映出磁性体的位置和边界。对于斜磁化的三度磁异常，反演是困难的，圈定边界位置更困难。但将三度异常换算为垂直磁化后，由于消除了斜磁化影响，磁性体的形态和走向就比较好辨认了，若将Z_a异常再换算成垂向二阶导数异常，用以确定磁性体的边界和形态就更准确和可靠了。

图7.6.7(a)画出了斜磁化的ΔT异常及其二阶导数，图7.6.7(b)是化成垂直磁化后的

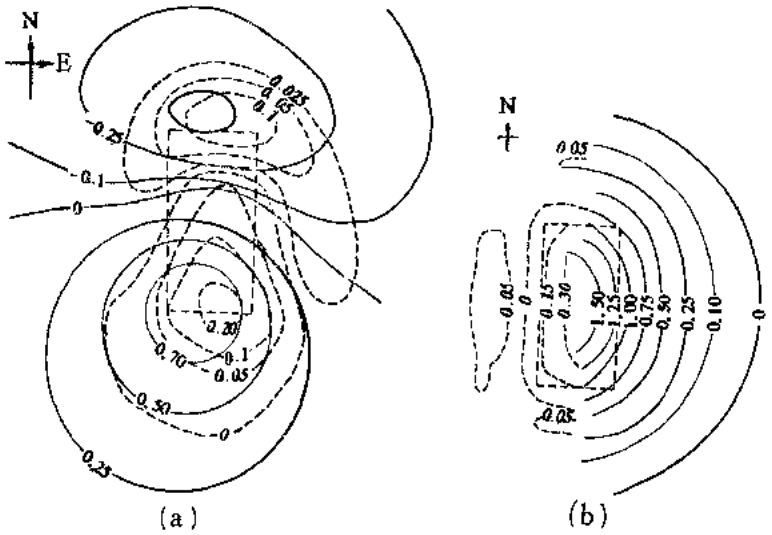


图 7.6.7 垂向二阶导数与磁性体的分布

(a)ΔT及垂向二阶导数；(b)化到地磁极的ΔT及其垂向二阶导数（实线为ΔT曲线，虚线为二阶导数曲线）

ΔT及其二阶导数。由图可见，利用垂向二阶导数异常的零值线基本上可以圈定磁性体的范围。图中磁性体的参数为：$2L=8$，$2b=4$，$h=3$，$I=60°$，$D=0°$。

图7.6.8为某矿区垂向二阶导数计算的实例。垂向二阶导数异常的分布与矿体在地面的水平投影位置基本一致。可见，利用大面积的垂向二阶导数资料指导钻探验证工程，将有利于提高找矿效果。

最后要指出，目前导数异常的应用主要偏重于定性方面，用在定量方面还存在很大的局限性。计算导数的数值与取样结点的距离有很大关系，而取样的结点间距只存在一般的选择原则，没有一个严格的标准，因而我们也很难确定哪一种结点间距计算出来的导数值是合适的。正因为如此，目前用各种方法由磁场换算出来的导数值，主要用于做定性解释。

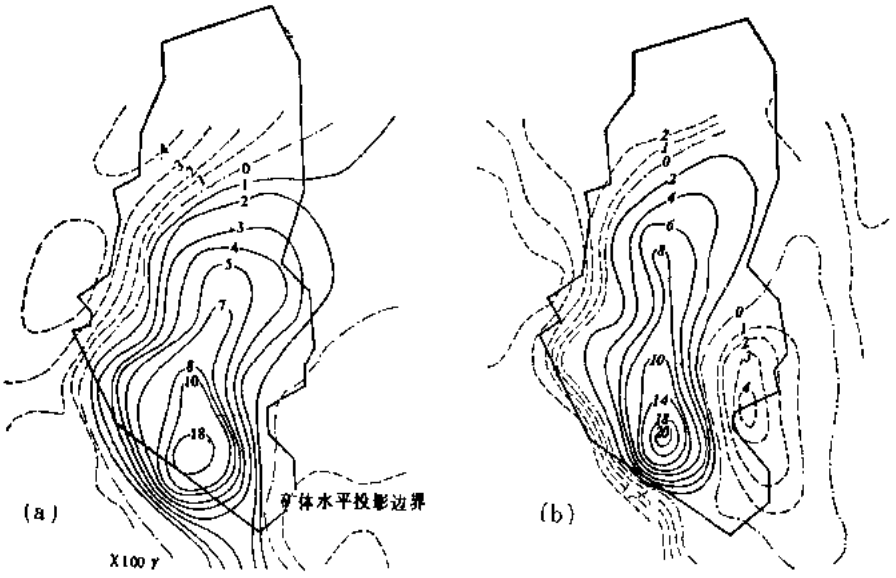


图 7.6.8　垂向二阶导数异常与矿体分布

§7.7　三度异常转换为二度异常的方法

除了球体、直立柱体等少数形体外，一般三度异常都比二度异常的解释复杂，如何简便地解释三度异常是具有实际意义的课题。解决这个问题的办法之一是研究简便的适用于三度异常的解释方法，之二，则是将三度异常转换成二度异常，而后用适于二度异常的方法进行解释。本节讨论两种转换方法，即积分平均法和迭加法。

7.7.1　积分平均法

将三度体的位函数$u(x, y, z)$沿走向y方向积分，积分限为$-\infty\sim+\infty$，即可消除y面得到一个新的二度体位函数$u_1(x, z)$。若一个横截面的形状、大小、埋深及产状与三度体在XOZ面上投影一致的二度体的位函数为$u(x, z)$，而原三度体沿y轴的长度为$2L$，则$u_1(x, z)$和$u(x, z)$的关系为：

$$u_1(x, z)=2Lu(x, z)$$

其中：

$$u_1(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,z)dy$$

有：

$$u(x,z)=\frac{1}{2L}u_1(x,z)=\frac{1}{2L}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,z)dy$$

现证明如下：

三度体位函系$u(x,\ y,\ z)$，可用以下形式表示：

$$u(x,y,z)=\iiint_v\frac{J\cdot d\xi d\eta d\zeta}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]} \tag{7.7.1}$$

式中x、y、z为观测点的坐标，ξ、η、ζ为磁性体的体积元$dv=d\xi d\eta d\zeta$的坐标，J为磁化强度。

若上式中对η积分从$-\infty$到$+\infty$，则可得到沿η轴走向的二度体的位函数$u(x,\ z)$，有：

$$\begin{aligned}u(x,z)&=\iint_s Jd\xi d\zeta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{f[(x-\xi),(y-\eta)(z-\zeta)]}\\&=\iint_s\frac{Jd\xi d\zeta}{F[(x-\xi),(z-\zeta)]}\end{aligned} \tag{7.7.2}$$

式中：

$$\frac{1}{F[(x-\xi),(z-\zeta)]}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}$$

这是因为被积函数中η是以$(y-\eta)$的形式出现的。

现计算新函数$\eta_1(x,z)$，并研究它与$u(x,z)$的关系。设

$$u_1(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,y,z)dy$$

这里$u(x,y,z)$为三度体位函数，要求此三度体截面形状、大小、埋深和产状沿走向不变，即为二度体，将（7.7.1）式代入上式有：

$$\begin{aligned}u_1(x,z)&=\int_{-\infty}^{\infty}dy\iiint_v\frac{Jd\xi d\eta d\zeta}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}\\&=\iiint_v Jd\xi d\zeta d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}\\&=\iint_s Jd\xi d\zeta\int_{-L}^{L}d\eta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}\end{aligned}$$

由于在被积函数中y并不单独出现，而是以$(y-\eta)$的形式出现，因此：

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d(y-\eta)}{f[(x-\xi),(y-\eta),(z-\zeta)]}\\&=\frac{1}{F[(x-\xi),(z-\zeta)]}\end{aligned}$$

从而$u_1(x,z)$的等式可写为：

$$u_1(x,z)=\iint_s Jd\xi d\zeta \frac{1}{F[(x-\xi),(z-\zeta)]}\int_{-L}^{L} d\eta$$

$$=2L\iint_s \frac{Jd\xi d\zeta}{F[(x-\xi),(z-\zeta)]}$$

$$=2Lu(x,z) \qquad \text{（证毕）}$$

从以上证明可见，由于$u(x,z)$是满足拉氏方程的位函数，乘以常数$2L$后，新函数$u_1(x,z)$也是表示二度体的位函数。

在实际工作中，无法直接测位函数值，而是测位函数的负梯度，即场强值，如Z_a。因此，如测得某截面沿走向方向稳定、走向长为$2L$的三度体的垂直磁异常$Z_a(x,y)$后，即可根据以上的关系，经转换可得到与该似二度体的截面相同的二度体的垂直磁异常$Z_a(x)$，则有：

$$Z_a(x)=2L\int_{-\infty}^{\infty} Z_a(x,y)dy$$

上述积分利用矩形法近似求积，积分限取$-m\sim+m$，则上式可写成：

$$Z_a(x)=\frac{\Delta y}{2L}\sum_{i=-m}^{m} Z_a(x,y_i) \qquad (7.7.3)$$

如果积分求和区间为$2L$，则上式写成：

$$Z_a(x)\approx\frac{1}{2m+1}\sum_{i=-m}^{m} Z_a(x,y_i) \qquad (7.7.4)$$

由（7.7.4）式可见，坐标为x的二度异常可用同一坐标的三度异常的平均值来计算，见图（7.7.1）。故这种方法称为积分平均法。

使用（7.7.3）和（7.7.4）式计算时，应注意如下几个问题：

1．方法仅适用于沿走向方向截面形状、大小、埋深及产状稳定的三度体，即似二度体。

2．要正确地确定似二度体的走向，计算时y平行于走向，测线应垂直于走向。

3．计算时应估算$2L$，否则利用(7.7.3)式计算二度异常时可能失真。剖面数（$2m+1$)一般可选取5～7条。

4．如为孤立三度异常计算效果较好。如为迭加异常应事先予以处理。或者主要针对有意义的异常进行积分平均计算。

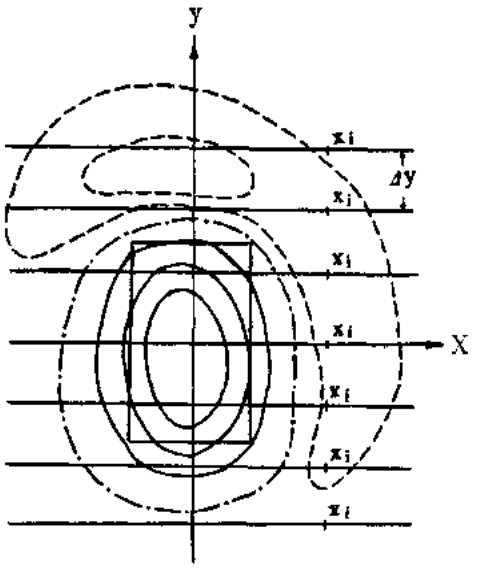


图 7.7.1 积分平均法示意图

7.7.2 迭加法

沿似二度体走向的两侧，拼接上若干个同样的磁性体。设似二度体的长度为$2L$，两侧拼接n个磁性体，组成一个新的磁性体，其走向长度为$2L(2n+1)$。见图7.7.2，当n足

够大时，新磁性体将满足二度体条件。在实际计算时，没有必要用异常图实地拼接。只要求出各磁性体在原磁性体上的磁场之和，即为二度体的磁场。现以两侧各拼接两个磁性体为例加以讨论。各磁性体和过其中心的剖面编号如图7.7.2所示。各磁性体在Ⅰ剖面上的磁场分别用Z_{11}，Z_{21}，Z_{31}，Z_{41}，Z_{51}表示。则二度异常$Z_a^{(2)}$为：

$$Z_a^{(2)}=Z_{11}+Z_{21}+Z_{31}+Z_{41}+Z_{51} \tag{7.7.5}$$

如磁性体(I)在各磁性体上的磁场用Z_{11}，Z_{12}，Z_{13}，Z_{14}，Z_{15}表示，由图中磁性体和剖面的相对关系可见，$Z_{21}=Z_{12}$，$Z_{31}=Z_{13}$，$Z_{41}=Z_{14}$，$Z_{51}=Z_{15}$，代入（7.7.5）式，则有

$$Z_a^{(2)}=Z_{11}+Z_{12}+Z_{13}+Z_{14}+Z_{15} \tag{7.7.6}$$

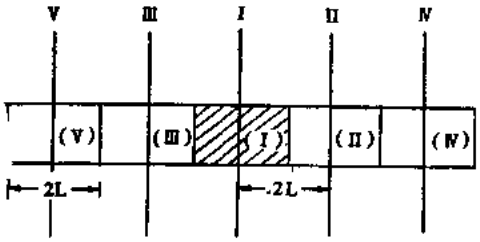


图 7.7.2 迭加法原理示意图

$$=\sum_{i=1}^{5}Z_{1i}$$

由（7.7.6）式可见，迭加法求二度异常的实质是求沿走向方向相距为$2L$的各剖面异常之和。若两侧各取n个剖面，则二度异常即为：

$$Z_a^{(2)}=\sum_{i=-n}^{n}Z_a(x,\ y_i) \tag{7.7.7}$$

式中$Z_a(x,\ y_i)$为三度异常，表示第y_i个剖面上坐标为x的点的异常值。

迭加法计算时应注意如下几个问题：

（1）与前述方法一样也仅适用于似二度体。

（2）要正确地确定似二度体的走向、计算时y轴平行于走向，测线垂直于走向。

（3）计算时应估算$2L$，$2L$估算不准相当于拼接的磁性体重迭或脱节，异常也会相应地失真。

（4）计算时剖面数n的选取应根据走向长度与深度之比值确定。如$2L/h=1$，则取$n=2$，即5个剖面，$2L/h=0.5$，则取$n=5$，即11个剖面。这样才能使拼接后的新磁性体长度为埋深的5～6倍，从而满足二度体的条件。

§7.8 磁异常观测面的曲化平方法

7.8.1 磁异常的地形影响及克服途径

第五章中讨论的正问题理论，一般均假定磁性体的磁场分布在同一水平面上。然而在大多数情况下，磁测点一般都分布在起伏地形上，因此，相对于水平地形的磁场，异常将发生畸变。

图7.8.1（a）为直立垂直磁化薄板在倾斜地形条件下的垂直磁异常。地形水平，其Z_a异常曲线对称无负值，极大值在原点。但在倾斜地形上，该Z_a异常呈不对称曲线，在倾斜方向出现负值，极大值偏离原点向倾斜方向

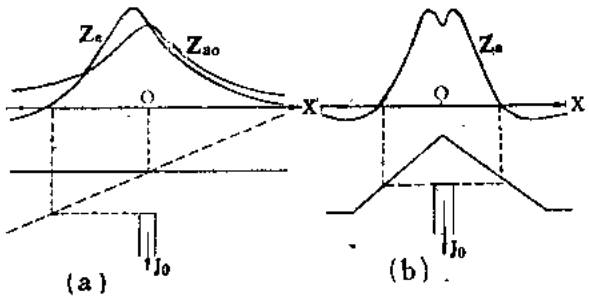


图 7.8.1 起伏地形对顺层磁化薄板异常的影响

移动，并且极值相对于过原点的平地形的极值有所增加。如忽略地形的倾斜，则可能误认为是倾斜磁化薄板所引起的磁异常。

图7.8.1 (b) 为直立垂直磁化薄板在山脊地形上的垂直磁异常。Z_a曲线出现双峰，在山脊两侧出现负值。这种异常如不注意地形起伏的影响，容易被误认为是有限延深磁性体的迭加异常。

磁异常的反演方法及场的换算与正演理论计算相同，一般均要求磁场分布在同一水平面上。为了减小反演结果的误差，避免出现谬误，以正确地进行异常的解释推断，一般从如下几方面入手：

（1）对有地形起伏影响的异常进行反演推断时，选择不受地形影响的解释推断方法。如选择法、矢量法及复变函数求奇点法等。

（2）利用起伏地形的磁异常直接进行反演解释和场的变换，前者详见第六章第三节，后者如曲面延拓等。

（3）将起伏地形上的磁异常换算为某一水平面上的磁异常，这种换算称为“曲化平”，或称为“地形改正”。但它与重力勘探中由于地形具有一定密度而进行的地形改正的概念是不同的。经过曲化平后得到的磁异常克服了地形起伏的影响，对该异常可用水平地形上场的转换方法和反演方法进行解释推断。

目前，三度异常的曲化平方法有：调和级数法、等效源法、等效偶极层法及曲面延拓法等。这些方法均需用大中型计算机完成，但目前尚处于深入研究阶段。本节侧重讨论二度异常的曲化平方法。

7.8.2 二度异常的曲化平计算法

1．保角映射计算法

（1）基本原理

假设地形剖面如图7.8.2(a) 所示，AB是校正水平线，COD表示地形剖面曲线，因为磁异常的垂直分量Z_a在地面上是一调和函数，它满足拉普拉斯方程，而在界面COD上 Z_a的值可以用磁秤测得，“化直”问题就是把沿地面 COD 测得的 $Z_a(x)$ 换算到校正水平线 AB 上去。在二度问题中就是在复平面上找到一个函数$W=f(Z)$，将COD 映射成实轴，COD以上的区域映射为实轴以上的上半平面，AB映射成$A'B'$，如图 7.8.2(b) 所示，这时在W平面上，所讨论的问题变为：



图 7.8.2 保角映射曲化平Z、W平面的对应关系

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 Z_a}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 Z_a}{\partial v^2}=0 \\ f(u,v)_{v=0}=Z_a(u,0) \end{cases}$$

这是上半平面的狄里希莱问题。求Z平面上校正水平线AB上的Z_a问题，就变成了求W平面内$A'B'$上的Z_a问题。其解就是熟知的泊松积分。寻求这个函数$W=f(Z)$就是数学上的保角

映射或称保角变换问题。

这种方法只适用于简单、规则的地形变换。经常遇到的简单地形可以寻出W、Z 的转换关系。因此，只要将Z平面中直线AOB、COD上各点的复坐标 Z 代入到相应的转换公式 $W=f(Z)$中，就能求出AOB、COD在W平面上的位置。当地形复杂时，则必须经过逐次映射才能解决。

应用保留变换时对简单的地形化直，关键在于确定各种简单地形保角变换的解析式。

（2）单斜坡地形

图7.8.3(a)所示的地形剖面COD就是一个单斜坡。要将COD以上的平面域映射为 W 平面的上半平面，只需将直线 COD 绕坐标原点顺时针旋转 α 角，已知旋转变换为：$W=Ze^{-j\alpha}$，它将直线COD变为W平面的实轴，如图7.8.3（b）所示。Z平面上的点和它在W平面的象之间有如下关系：

$$\begin{cases}|W|=|Z| \\ \arg W=\arg Z-\alpha\end{cases} \tag{7.8.1}$$

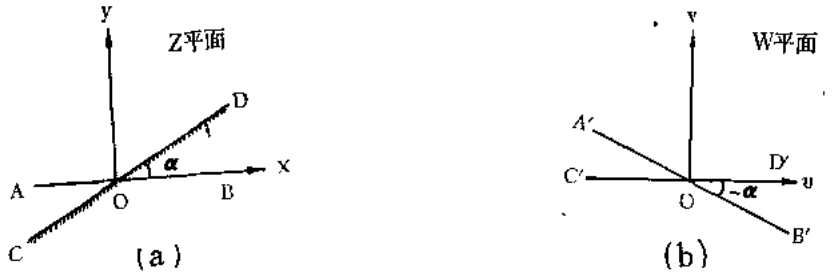


图 7.8.3　单斜地形保角映射曲化平Z、W平面的对应关系

由上式看出 COD 以上的平面映射为W的上半平面，而Z平面的实轴 AOB 变成W平面的直线$A'O'B'$。

（3）角形地形

成角形的地形包括山谷、山脊、斜坡等可由绕坐标原点的一个旋转加一个幂函数映射来实现。

以山谷为例，如图7.8.4所示：选谷底O为坐标原点，水平线为实轴，山谷一边OA 与水平线成β角，另一边OB与水平线成α角。要把山谷映射为W上半平面，首先作映 射：

$$Z_1=e^{-j\alpha}\cdot Z$$

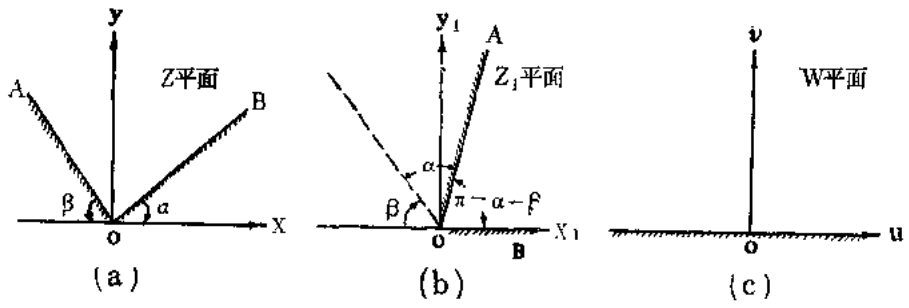


图 7.8.4　山谷地形的映射

a—Z平面的山谷；b—旋转变换；c—山谷映射成W上半平面

将OB映射成Z_1平面的正实轴，即把山谷映成了角$\pi-\alpha-\beta$的角域，如图7.8.4(b)所示。由此可得

$$\frac{\pi}{n}=\pi-\alpha-\beta$$

所以：

$$n=\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}$$

再作映射：

$$W=Z_1^n$$

把角域映射为W上半平面，如图7.8.4(c)所示，把n代入得：

$$W=(e^{-j\alpha}Z)^n=(e^{-j\alpha}Z)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}}$$

注意，山谷的两边映射成W平面的实轴变换并不唯一，相差一个正常数因子K，即：

$$W=(Ke^{-j\alpha}Z)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}}$$

找一对应点就可确定K，例如在山谷OB边距原点$\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}$处有$Z=\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}e^{j\alpha}$映成$W=1$的点，则：

$$1=\left(Ke^{-j\alpha}\cdot\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}e^{j\alpha}\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}}$$

$$K=\frac{\pi-\alpha-\beta}{\pi}$$

所以：

$$W=\left(\frac{\pi-\alpha-\beta}{\pi}e^{-j\alpha}\cdot Z\right)^{\frac{\pi}{\pi-\alpha-\beta}} \tag{7.8.2}$$

(7.8.2)式也可用于山脊、变坡度斜坡等单节点地形。如图7.8.5所示之山脊地形，按山谷地形的α和β角的定义，此时α和β角均为负角。代入(7.8.2)式，即得山脊地形的映射函数：

$$W=\left(\frac{\pi+\alpha+\beta}{\pi}e^{j\alpha}Z\right)^{\frac{\pi}{\pi+\alpha+\beta}} \tag{7.8.3}$$

其它单节点地形在此不一一描述，请读者自证。

（4）抛物线山形

由映射理论可知，函数$W=Z^{1/2}$能把Z平面的抛物线（图7.8.6）映射为W平面上的直

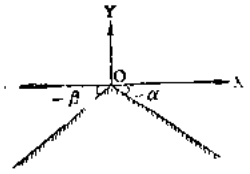


图 7.8.5 山脊地形的映射

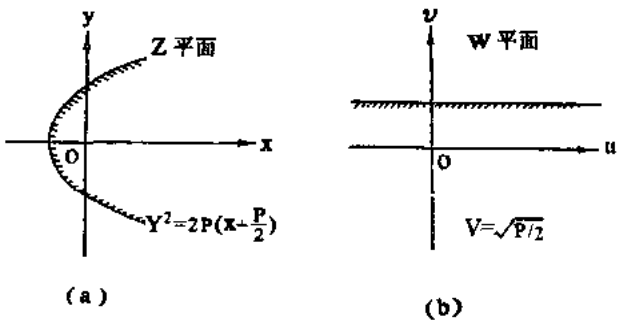


图 7.8.6 映射函数为$Z^{1/2}$的抛物线映射

线 $v=\sqrt{\frac{p}{2}}$。但抛物线是向正轴开口的，而图7.8.7（a）的抛物线向负虚轴开口，这样可先进行旋转变换，再进行平移变换，之后进行$W=Z^{1/2}$映射，如图7.8.7 中的（b）、（c）、（d）所示，由此得变换函数：

$$W=\left(Ze^{j\frac{\pi}{2}}-\frac{p}{2}\right)^{1/2} \tag{7.8.4}$$

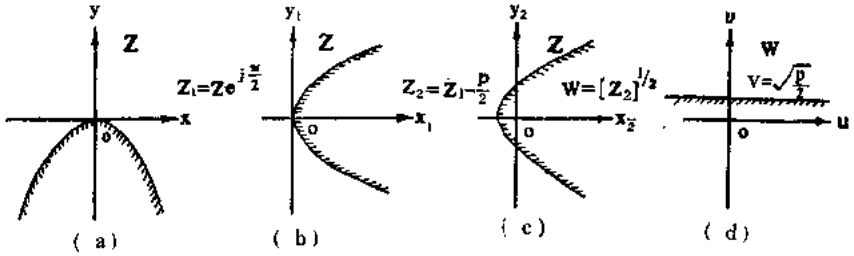
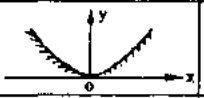
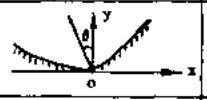
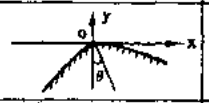
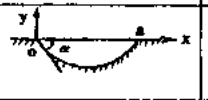
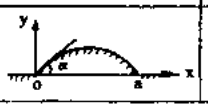


图 7.8.7　直立抛物线型山脊地形的映射过程

如地形近似为直立抛物线形山谷，则旋转变换的角度应为$-\frac{\pi}{2}$。如为倾斜抛物线，则应视抛物线对称轴的倾斜角度，进行相应的旋转变换，使变换后抛物线轴水平开口向 x 轴方向。

其它常见的简单地形的映射函数见表7.8.1。

表 7.8.1

地　　形	Z 平面图形	映　射　函　数
对　称 抛物线型山谷		$(z\cdot e^{-j\frac{\pi}{2}}-\frac{p}{2})^{1/2}$
倾　斜 抛物线型山谷，山脊		$[z\cdot e^{-j(\frac{\pi}{2}+\theta)}-\frac{p}{2}]^{1/2}$
		$[z\cdot e^{j(\frac{\pi}{2}-\theta)}-\frac{p}{2}]^{1/2}$
圆弧型山谷，山脊		$\frac{a}{1-(1-\frac{a}{2})^{\frac{\pi}{\pi+\alpha}}}$
		$\frac{a}{1-(1-\frac{a}{2})^{\frac{\pi}{\pi-\alpha}}}$

（5）保角映射曲化平的计算步骤

以单斜坡映射为例，说明用保角变换作地形化直的计算步骤：

（A）将单斜坡映射为上半平面。其映射函数：

$$W=e^{-j\alpha}Z$$

即：
$$\begin{cases}|W|=|Z| \\ \arg W=\arg Z-\alpha\end{cases}$$

校正水平线为AOB，它被映成W平面上的$A'O'B'$。

（B）建立Z平面上校正水平线AB和W平面上$A'B'$的点之间坐标对应关系图，据$|W|=|Z|$，OB上的点b_1，b_2，$\cdots b_{k-1}$，b_k，$\cdots b_n$，若$|Ob_{k-1}|=r_{k-1}$，$|Ob_k|=r_k$，则在W平面的OB'上找b'_1，$b'_2\cdots b'_{k-1}$，$b'_k\cdots b_n$，使$|Ob'_{k-1}|=r_{k-1}$，$|Ob'_k|=r_k$，它们分别是b_1，b_2，$\cdots b_n$点的像。OA上的像可以用同样的方法在OA'上找到。假若过b_{k-1}，b_k分别作AB的垂线交单斜坡于a_{k-1}，a_k点，如图7.8.8(a)，则过b'_{k-1}，b'_k作$A'B'$的垂线与$C'D'$相交于a'_{k-1}，a'_k即分别为a_{k-1}，a_k点的像，如图7.8.8(b)。

（C）在W平面上点出$C'D'$水平线的场值曲线，$C'D'$上的点的场值，应与它在斜面上的实例测场值相等。

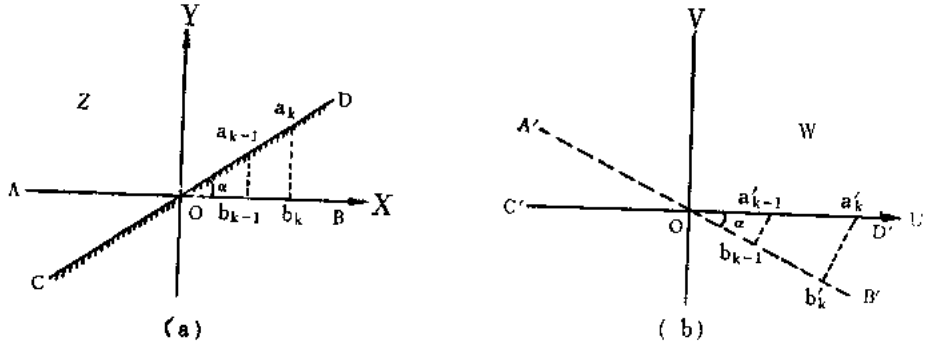


图 7.8.8 单斜坡地形的映射计算

（D）利用9°上延量板计算$A'O$上的场值，然后再用向下延拓求出OB'上各点的场值。

（E）将$A'O'B'$上的场值点回到Z平面上，即得到校正后的场值曲线。

对于一些不规则的地形，可以看成很多短的直线所组成，因此，要用多角形映射才能解决。当然上面介绍的地形的保角映射，也可由多角形映射的化简而得到。复杂地形条件下的映射，也可用电模拟方法。

2．电模拟方法

保角变换经常用于研究某些带电体的电场分布特点。在边界条件已知的情况下，带电体的等位面u和电力线v，既可用数学方法推导出来，也可用电模拟的方法得到。

在磁异常的曲化平中，就是把地形线作为带电体，测定它的等位线u和电力线v，利用u与v的正交关系进行保角变换。以山脊地形为例，其具体步骤和方法如下：

（1）构成Z平面图形

如图7.8.9所示，在长方形导电纸的一边按比例尺剪出地形剖面ABC，并画出通过地形最高点的水平线DBE，分别在DBE和ABC上标出测点位置。在地形线两端要留出一定长度的导电纸，留出的长度要大于地形起伏的最大幅度。

（2）将Z平面的点位映射到W平面

在导电纸的两侧边上分别布上线电极，接到电源上（12V左右），则导电纸就分布有电场。在靠近地形一端由于受到地形（空气）的排斥，故在这一侧等位线是弯曲的，而在对边附近等位线是彼此平行的直线，但等位线有稀有密，间距不等。

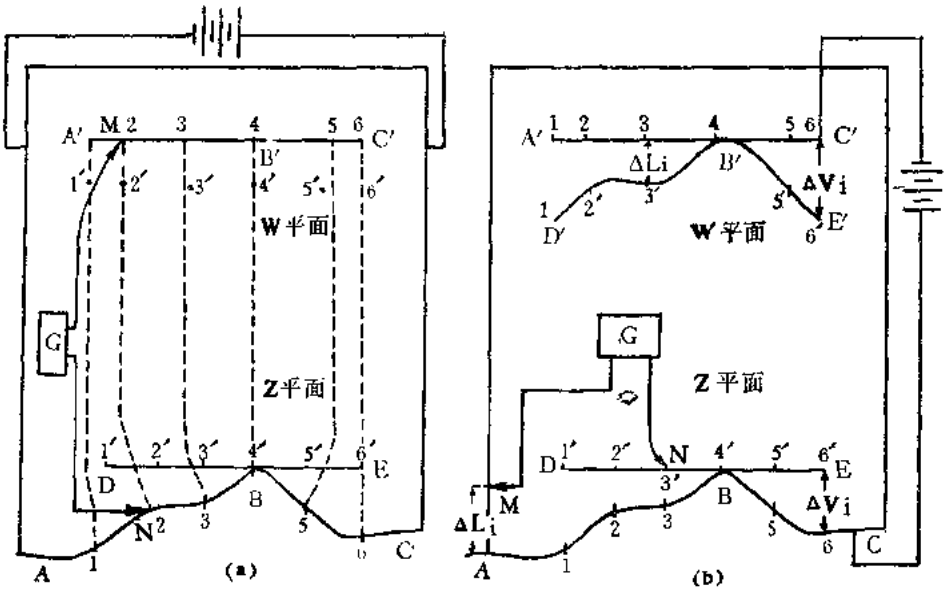


图 7.8.9 地形曲化平的导电纸模拟法

找对应等位点时，将检流计G（或电位计）的一端N放到Z平面地形线ABC的某一点i上，而G的另一端M在对边上移动，当G指零时，说明MN处在同一等位线上，这样就确定出在W平面上的i点，然后把电极移到另一点，再找出W平面上对应的点，依次逐点地将Z平面ABC上的点映射到W平面上去。然后用同样的方法在W平面上找出与Z平面DBE上各点相对应的等位点。

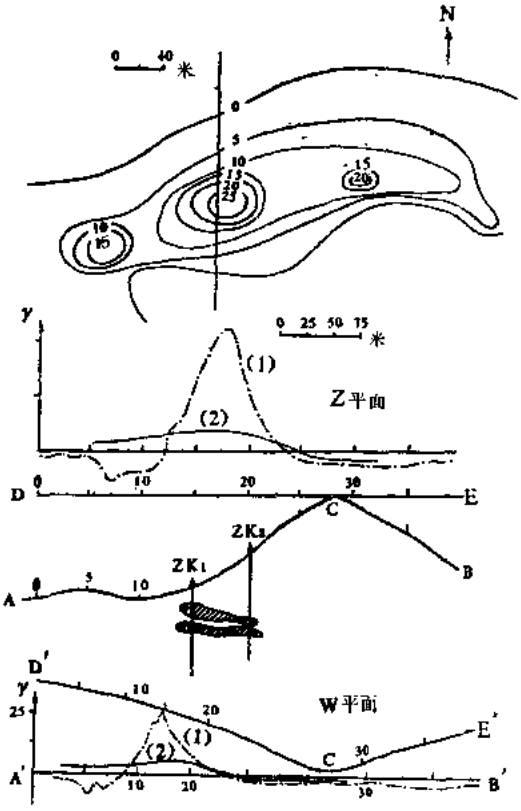


图 7.8.10 某磁异常电模拟曲化平结果

（3）将Z平面的水平线DBE映射到W平面

将两侧边的线电极取下来，分别布置到地形线ABC和对边上，接好电源。

若使用的是电位计或毫伏计，则可直接测出Z平面上的i与i'点间的电位差，然后也使W平面上的i与i'点的电位差与此相同，即：

$$\Delta V_{ii'}^{(Z)} = \Delta V_{ii'}^{(W)}$$

如此逐点地确定出W平面上i与i'点的垂直位置。

若G不能测定电位差，只能指示MN是否等位时，我们可将G的N极放到Z平面DBE直线上某一点i'，然后M极在导电纸地形线外的侧边均匀场处垂直转动，当G指零时，说明在均匀场处i'与i点之间的电位差即M与线电极的垂直距离ΔL，因此在W平面上i'与i点之间的垂直距离也应该是ΔL。

通过以上映射，即可构成W平面的图形。

Z平面上的曲线ABC映射到W平面成了直线$A'B'C'$，而Z平面上的直线DBE，则在W平面上成了曲线$D'B'E'$。

（4）磁场变换

将地形线ABC上的异常值按点号点到W平面的直线$A'B'C'$上并绘出曲线，然后用场的向上延拓方法将异常逐点地延拓到曲线$D'B'E'$上，最后再把W平面$D'B'E'$上的异常值按点号点回到Z平面的水平线DBE上并绘出曲线，则此曲线，即为消除地形影响后的异常曲线。

图7.8.10为一个受地形影响的二度异常，异常为近水平产状的两层磁铁矿体所引起。实测异常南侧负值明显，然而北侧比较陡，故磁性体的特征并不清楚。经过曲化平后，异常曲线变成南缓北陡，在北侧出现负值，磁性体产状就比较明显了。

当地形起伏高度比较大，并且异常位置处在地形的低洼位置时，若化直到地形的最高点，就会使异常变圆滑，特征不明显，为了克服这一缺点，可以使化直的水平线不通过地形的最高点，而是穿过半山腰，只要不在磁性体之下就可以。将导电纸沿地形线剪成两部分，地形线以上部分进行上半空间的电模拟，在W平面上，利用向上延拓计算地形线以上那部分水平线的曲化平异常；地形线以下部分进行下半空间的电模拟，在W平面上用向下延拓计算地形线以下那部分水平线的曲化平异常。这种方法模拟过程复杂，对实验技术要求严格，否则难以得到理想结果。

§7.9 频率域中磁异常的转换及处理

在频率域（或称波数域）中进行磁异常的转换及处理，同样可以实现空间换算、导数换算、分量换算和不同磁化方向之间的换算，并可计算磁源重力异常，还可对磁异常进行圆滑分解等处理。在频率域中实现这些转换和处理具有以下几个明显的优点：（1）频率域内的转换，将空间域内函数的褶积关系变为相应频谱的乘积关系，特别是有了快速富氏变换的计算方法，使得在空间域较复杂的转换变得简单和容易进行；（2）频率域内的转换关系不仅简单，而且层次分明，可以形象地讨论各种转换及处理的滤波作用；（3）频率域内转换，可以把各种换算统一到一个通用的表达式中，并能连续施行多种换算；每进行一种换算，只需在原来异常的频谱上乘以相应的换算因子即可；（4）在频率域内实现场的转换，可得磁异常的频谱，这样便为进行频谱分析提供了条件。因此，随着高速电子计算机的广泛应用，频率域内磁异常的转换及处理方法愈来愈被人们所重视。

本节重点讨论三度体异常在频率域中的各种换算及其数字滤波的基本原理并简介其应用。

7.9.1 磁异常变换中褶积定理的应用

本章前几节研究了在空间域进行磁异常各种转换及处理的方法，这些方法可归纳为下面的褶积公式：

$$f_z(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f_a(\xi,\eta,0)\phi(x-\xi,y-\eta)d\xi d\eta$$
$$=f_a(x,y,0)*\phi(x,y) \tag{7.9.1}$$

式中$f_a(x,y,0)$和$f_z(x,y,z)$分别为转换前后平面上的位场；$\phi(x-\xi,y-\eta)$为权函数，亦称系统脉冲响应函数，它的作用与无线电技术中滤波电路对讯号波形的控制作用相似。

例如三度异常向上延拓的权函数为：

$$\phi(x-\xi,y-\eta)=\frac{-z}{2\pi}\cdot\frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}$$

根据富氏变换的褶积定理，(7.9.1) 式的褶积在频率域内就变为相应频谱的乘积，有

$$F_b(\omega,\nu,z)=F_a(\omega,\nu,0)\cdot\Phi(\omega,\nu) \tag{7.9.2}$$

式中$F_a(\omega,\nu,0)$和$F_b(\omega,\nu,z)$分别为$f_a(x,y,0)$和$f_b(x,y,z)$的频谱；ω，ν分别为沿X和Y方向上的圆频率（或称圆波数），也常用其相应的频率u，v来表示；$\Phi(\omega,\nu)$为权函数$\phi(x-\xi,\ y-\eta)$的频谱，又称为滤波器的频率响应函数或传输函数，可写为：

$$\Phi(\omega,\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x,y)e^{-i(\omega x+\nu y)}dxdy \tag{7.9.3}$$

由式（7.9.1）和（7.9.2）对比可见，用它们对异常进行运算，可以看成是一种滤波运算，前者为空间域滤波方程，后者为频率域滤波方程。所谓磁异常的换算，实际上就是一种滤波，所以有关滤波的一些基本理论都能用于磁异常的转换。磁异常经滤波运算后的结果$f_b(x,y,z)$的特点，决定于所用权函数或频率响应函数。例如，若$\Phi(\omega,\nu)$随着圆频率ω、ν的增加而变大，则称为高通滤波；反之称为低通滤波。所以从这种意义上说，前面所讨论的换算方法大都可以看成是对异常所进行的某种滤波。

(7.9.2) 式表明，进行磁异常频率域换算，必须根据换算的目的及要求设计出相应的频率响应函数$\Phi(\omega,\nu)$，并要经过以下几步运算：第一步由原始异常经富氏正变换计算出其频谱$F_a(\omega,\nu,0)$；第二步由$F_a(\omega,\nu,0)$乘上相应的频率响应函数$\Phi(\omega,\nu)$，则得到转换后磁场的频谱$F_b(\omega,\nu,z)$；第三步利用富氏反变换，由$F_b(\omega,\nu,z)$计算出经滤波运算后的磁异常$f_b(x,y,z)$。

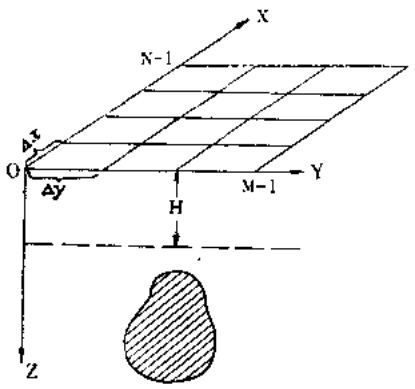


图 7.9.1 磁性体坐标系统及离散取值图

7.9.2 磁场的频率域换算

在频率域中进行磁场的换算，首先要确定换算方法的频率响应函数$\Phi(\omega,\nu)$，（人们又常称之为滤波算子）。求取滤波算子的方法有多种，下面就以向上延拓的滤波算子为基础，来导出其它各种换算的滤波因子。

1．空间换算

设场源位于$z=H$平面以下（$H>0$），见图7.9.1。则在$z=H$平面以上，磁场显然是x、y、z的连续函数，并且有一阶、二阶连续导数存在。若已知观测平面（$z=0$）上的磁场$T(x,y,0)$，则有外部狄里希莱问题，可得向上半空间（$z<0$）延拓的公式：

$$T(x,y,z)=\frac{-z}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{T(\xi,\eta,0)}{[(x-\xi)^2-(y-\eta)^2+z^2]^{3/2}}d\xi d\eta \tag{7.9.4}$$

由褶积积分公式可知，上式为函数$T(x,y,0)$和$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$关于变量$x$、$y$的二维褶积，所以可有频率域的频谱乘积相对应。设$T(x,y,0)$和$T(x,y,z)$的频谱分别为$S_T$

$(u,v,0)$和$S_T(u,v,z)$，有

$$\left.\begin{aligned} S_T(u,v,0) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y,0)\mathrm{e}^{-2\pi i(ux+vy)}\,dxdy \\ S_T(u,v,z) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} T(x,y,z)\,\mathrm{e}^{-2\pi i(ux+vy)}\,dxdy \end{aligned}\right\} \tag{7.9.5}$$

利用零阶贝塞尔函数可计算出权函数$\frac{-z}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$的频谱：

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-z}{2\pi(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{e}^{-2\pi i(ux+vy)}\,dxdy \\ &= \mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \qquad (z<0) \end{aligned} \tag{7.9.6}$$

式中$S=\sqrt{u^2+v^2}$，（下同）。这样，由褶积定理即可得到上延高度为z的平面上磁场的频谱：

$$S_T(u,v,z)=S_T(u,v,0)\cdot\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \qquad (z\leqslant 0) \tag{7.9.7}$$

对上式等号两边分别进行富氏反变换，有

$$T(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_T(u,v,0)\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z}\,\mathrm{e}^{2\pi i(ux+vy)}\,dudv \tag{7.9.8}$$

此式即为向上延拓的频率域表达式。对向下延拓（$0<z<H$）时的频率响应函数，可由向上延拓的频率响应求得。由(7.9.7)式可得：

$$S_T(u,v,0)=S_T(u,v,z)\cdot\mathrm{e}^{-2\pi s\cdot z} \qquad (z<0) \tag{7.9.9}$$

上式表明，高平面上磁场的频谱乘以$\mathrm{e}^{-2\pi s\cdot z}$，即得低平面即观测平面上磁场的频谱。按此意义就可直接写出，当$0<z<H$时，向下延拓的滤波算子$\Phi_{\mathrm{F}}(u,v)$

$$\Phi_{\mathrm{F}}(u,v)=\mathrm{e}^{2\pi sz} \qquad (0<z<H) \tag{7.9.10}$$

由此可见，(7.9.8)式可进一步推广到$0<z<H$的情况，即在频率域内位场的向上、向下延拓具有统一的表达式，其延拓高度的取值范围为$-\infty<z<H$。使用（7.9.8）式进行位场延拓时，先由$z=0$观测平面上的已知磁场值求出它的频谱$S_T(u,v,0)$，再由$S_T(u,v,0)$乘上空间换算的频率响应$\mathrm{e}^{2\pi sz}$（$z<0$时为上延、$0<z<H$时为下延），然后再通过富氏反变换，即求得$z<H$空间的场值。若略去式中y、v，并把u记为f，则得适用于二度异常延拓的频率域表达式：

$$T(x,z)=\int_{-\infty}^{\infty} S_T(f,0)\,\mathrm{e}^{2\pi f\cdot z}\,\mathrm{e}^{2\pi ifx}\,df \tag{7.9.11}$$

2．导数换算

在频率域中实现导数换算是容易的，只须应用频谱的微分定理即可求得异常对x、y、z的各阶导数的频谱。

若设$S_{T_x}(u,v,z)$、$S_{T_y}(u,v,z)$、$S_{T_z}(u,v,z)$和$S_{T_{zz}}(u,v,z)$分别为$T(x,y,z)$对x、y、z的一阶导数和对z的二阶导数的频谱，则对式（7.9.7）应用微分定理容易得到：

$$\left.\begin{aligned} S_{Tx}(u,v,z) &= 2\pi i u S_T(u,v,0)\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \\ S_{Ty}(u,v,z) &= 2\pi i v S_T(u,v,0)\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \\ S_{Tz}(u,v,z) &= 2\pi s S_T(u,v,0)\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \\ S_{Tzz}(u,v,z) &= (2\pi s)^2 S_T(u,v,0)\mathrm{e}^{2\pi s\cdot z} \end{aligned}\right\} \tag{7.9.12}$$

可见，欲求磁场 n 阶垂向导数的频谱，只要在原始异常频谱上再乘以相应的滤波因子 $(2\pi s)^n$ 即可。对其它方向的导数也是如此。由上式还可看出它们的频率响应为

$$\left.\begin{aligned} \Phi_x(u,v) &= 2\pi i u \qquad \Phi_y(u,v) = 2\pi i v \\ \Phi_z(u,v) &= 2\pi s \qquad \Phi_{zz}(u,v) = (2\pi s)^2 \end{aligned}\right\} \tag{7.9.13}$$

对式（7.9.13）中各类导数的频谱进行富氏反变换，可得其相应的导数异常：

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial z^2} \end{Bmatrix} T(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_T(u,v,0) \begin{Bmatrix} 2\pi i u \\ 2\pi i v \\ 2\pi s \\ (2\pi s)^2 \end{Bmatrix} \mathrm{e}^{2\pi s z}\,\mathrm{e}^{2\pi i(ux+vy)}\,du\,dv \tag{7.9.14}$$

该式为求磁异常导数的频谱表达式，也可由直接对（7.9.8）式求导得到。当 $z=0$ 时，利用上式还可求得原平面上 $T(x,y,0)$ 的各类导数。

有了沿 x、y、z 三个方向上求导数的频率响应，便可进一步求出沿任意方向 t 求导数的频率响应。设 t 的方向的余弦分别为 α、β、γ，则：

$$\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial t} = \alpha\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial x} + \beta\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial y} + \gamma\frac{\partial T(x,y,z)}{\partial z}$$

综合考虑式（7.9.8），可得到沿任意方向 t 求导数的滤波算子：

$$\Phi_t(u,v) = 2\pi[i(\alpha u + \beta v) + \gamma s] \tag{7.9.15}$$

若式中 $\gamma=0$，即为沿任意水平方向求导数的滤波算子：$2\pi i(\alpha u + \beta v)$。

3．分量换算

在频率域内实现各磁场分量之间换算的频率响应，可由频率域泊松公式导出，也可利用导数的频谱直接求得。设 $S_x(u,v,z)$、$S_y(u,v,z)$、$S_z(u,v,z)$ 和 $S_T(u,v,z)$ 分别为磁场分量 $H_{ax}(x,y,z)$、$H_{ay}(x,y,z)$、$Z_a(x,y,z)$ 和 $\Delta T(x,y,z)$ 的频谱。由位场的解析性质不难知道，磁场分量之间满足如下关系：

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial x} = \frac{\partial H_{ax}}{\partial t_0},\quad \frac{\partial \Delta T}{\partial y} = \frac{\partial H_{ay}}{\partial t_0},\quad \frac{\partial \Delta T}{\partial z} = \frac{\partial Z_a}{\partial t_0} \tag{7.9.16}$$

$$\frac{\partial Z_a}{\partial x} = \frac{\partial H_{ax}}{\partial z},\quad \frac{\partial Z_a}{\partial y} = \frac{\partial H_{ay}}{\partial z} \tag{7.9.17}$$

式中 t_0 为地磁场方向上的单位矢量。

利用上述关系式，结合导数的频谱即可导出各分量之间换算的频率响应。

（1）已知$\Delta T(x,y,0)$求磁场三个分量：

设t_0的方向余弦为α_0、β_0、γ_0，$S_{T_z}(u,v,z)$和$S_{z_{t_0}}(u,v,z)$为$\frac{\partial \Delta T}{\partial z}$和$\frac{\partial Z_a}{\partial t_0}$的频谱，类似式（7.9.12）可写出：

$$S_{z_{t_0}}(u,v,z)=2\pi[i(\alpha_0 u+\beta_0 v)+\gamma_0 s]S_z(u,v,0)e^{2\pi sz} \tag{7.9.18}$$

$$S_{T_z}(u,v,z)=2\pi s\cdot S_T(u,v,0)e^{2\pi sz} \tag{7.9.19}$$

上两式中，$S_z(u,v,0)$和$S_T(u,v,0)$为观测面上Z_a和ΔT的频谱。考虑到式（7.9.16）中的关系，若记$q_0=2\pi[i(\alpha_0 u+\beta_0 v)+\gamma_0 s]$，可得

$$S_z(u,v,0)=\frac{2\pi s}{q_0}S_T(u,v,0) \tag{7.9.20}$$

若将上式等号两边同乘以延拓的滤波算子，则可得相应的关系式：

$$S_z(u,v,z)=\frac{2\pi s}{q_0}S_T(u,v,z) \tag{7.9.21}$$

作类似上面的推导，还可求得由ΔT换算H_{ax}、H_{ay}的频谱表达式：

$$\left.\begin{aligned}S_x(u,v,z)&=\frac{2\pi iu}{q_0}S_T(u,v,z)\\ S_y(u,v,z)&=\frac{2\pi iv}{q_0}S_T(u,v,z)\end{aligned}\right\} \tag{7.9.22}$$

可见，由ΔT求磁场三个分量H_{ax}、H_{ay}、Z_a的频率响应分别为：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{\Delta T\to H_{ax}}&=\frac{2\pi iu}{q_0}\\ \Phi_{\Delta T\to H_{ay}}&=\frac{2\pi iv}{q_0}\\ \Phi_{\Delta T\to Z_a}&=\frac{2\pi s}{q_0}\end{aligned}\right\} \tag{7.9.23}$$

（2）已知Z_a求H_{ax}和H_{ay}：

首先讨论由Z_a计算H_{ax}，其方法基本同上。参照式（7.9.12）并考虑到（7.9.17）式中的关系，应有如下等式成立：

$$2\pi s\cdot S_z(u,v,0)=2\pi iu\cdot S_x(u,v,0)$$

$$S_x(u,v,0)=\frac{iu}{s}S_z(u,v,0)$$

其延拓形式为：

$$S_x(u,v,z)=\frac{iu}{s}S_z(u,v,z) \tag{7.9.24}$$

同理可得：

$$S_y(u,v,z)=\frac{iv}{s}S_z(u,v,z) \tag{7.9.25}$$

因为$\Delta T=\alpha_0 H_{ax}+\beta_0 H_{ay}+\gamma_0 Z_a$，所以由已知$Z_a$的频谱还可计算出$\Delta T$的频谱：

$$S_T(u,v,z)=\frac{q_0}{2\pi s}S_z(u,v,z) \tag{7.9.26}$$

由前面讨论可见，利用已知Z_a计算H_{ax}、H_{ay}和ΔT的频率响应分别为：

$$\Phi_{Z_a\to H_{ax}}=\frac{iu}{s},\quad \Phi_{Z_a\to H_{ay}}=\frac{iv}{s},$$

$$\Phi_{Z_a\to\Delta T}=\frac{q_0}{2\pi s},\tag{7.9.27}$$

综合考察公式（7.9.23）和（7.9.27），磁场各分量之间换算的频率响应可归并为：

$$\Phi=\frac{2\pi[i(\alpha' u+\beta' v)+\gamma'\cdot s]}{2\pi[i(\alpha u+\beta v)+\gamma\cdot s]}=\frac{q'}{q}\tag{7.9.28}$$

该式为频率域中任意两个磁场分量换算的频率响应。其中α、β、γ和γ'、β'、α'分别为原分量和欲换算的新分量所在方向的方向余弦。作为例子，我们给出由实测ΔT异常换算磁场三分量的频率域表达式

$$\begin{pmatrix}H_{ax}\\H_{ay}\\Z_a\end{pmatrix}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}2\pi iu\\2\pi iv\\2\pi s\end{pmatrix}\frac{1}{q_0}S_T(u,v,0)e^{2\pi sz}\,e^{2\pi i(ux+vy)}\,dudv\tag{7.9.29}$$

若已知Z_a换算出H_{ax}和H_{ay}，只要令式中$\alpha_0=\beta_0=0$，$\gamma_0=1$，即$q_0=2\pi s$，并将式中的$S_T(u,v,0)$换为$S_a(u,v,0)$即可。

4．不同磁化方向之间的换算及磁源重力异常计算

不同磁化方向之间磁场换算的基本思路是：由磁场求磁位，并由磁位求出假重力位，再由假重力位求出新磁化方向的磁位（称新磁位），最后就能求出新磁化方向下的磁场各分量。该思路是借助于假重力位与磁位的关系来实现磁化方向的换算。下面就从重磁位场频谱互算关系式出发，讨论不同磁化方向之间的换算。

（1）重磁位场的互算关系：

在均匀磁化条件下，磁性体的磁位U和引力位V之间的关系由泊松公式给出：

$$U=-\frac{1}{G\delta}\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{grad}V$$

式中δ是剩余密度。若设磁化强度J方向的单位矢量为$\boldsymbol{t}_1$，其方向余弦为α、β_1、γ_1，则有：

$$U=-\frac{J}{G\delta}\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{t}_1}\tag{7.9.30}$$

把上式等号两边对z求负偏导数，则得磁场垂直分量与重力异常关系式为

$$Z_a=\frac{J}{G\delta}\frac{\partial\Delta g}{\partial \boldsymbol{t}_1}\tag{7.9.31}$$

若令泊松比$J/(G\delta)=1$，则有：

$$\Delta g=\int Z_a d\boldsymbol{t}_1\tag{7.9.32}$$

此式即为由已知Z_a计算假重力异常（又称磁源重力异常）的空间域积分关系式。若仍取泊松比为1，可写出其相应的频谱形式：

$$S_{Z_a}(u,v,z)=2\pi[i(\alpha_1 u+\beta_1 v)+\gamma_1 s]S_{\Delta g}(u,v,z)\tag{7.9.33}$$

可得：

$$S_{\Delta g}(u,v,z)=\frac{1}{q_1}S_z(u,v,z) \tag{7.9.34}$$

式中 $q_1=2\pi[i(\alpha_1 u+\beta_1 v)+\gamma_1 s]$，$S_{\Delta g}(u,v,z)$为假重力异常的频谱。对比式（7.9.32）和（7.9.34）可见，沿某一方向积分的滤波算子等于沿该方向求导数的滤波算子的倒数。又由（7.9.34）式知$1/q_1$是由Z_a计算假重力异常的频率响应。

若用 ΔT 换算假重力异常，可按由 $\Delta T\rightarrow Z_a\rightarrow$假 Δg 的步骤进行。由前面的讨论已知 $\Phi_{\Delta T\rightarrow Z_a}$ 和 $\Phi_{Z_a\rightarrow\Delta g}$，故可直接写出换算的频率响应

$$\Phi_{\Delta T\rightarrow\Delta g}=\frac{2\pi s}{q_0\cdot q_1}$$

其相应的频谱表达式为：

$$S_{\Delta g}(u,v,z)=\frac{2\pi s}{q_0\cdot q_1}S_T(u,v,0)\,e^{2\pi sz} \tag{7.9.35}$$

对上式等号两边分别进行富氏反变换并乘上泊松比的倒数$\left(\frac{G\delta}{J}\right)$，即得磁源重力异常$\Delta g$。

若令式中$\alpha_0=\beta_0=0,\gamma_0=1$，并把 $S_T(u,v,0)$换为$S_z(u,v,0)$，则可得由Z_a换算磁源重力异常Δg的频谱表达式。

（2）不同磁化方向之间的换算：

我们在此讨论的不同磁化方向之间的转换，仅是改变磁化强度的方向，而其大小保持不变。首先讨论不同磁化方向之间垂直磁异常的换算。

设$S_{z_1}(u,v,z)$、$S_{z_2}(u,v,z)$分别是磁化方向为t_1和t_2时的磁场$Z_{a_1}(x,y,z)$和$Z_{a_2}(x,y,z)$的频谱，新磁化方向t_2的方向余弦为α_2、β_2、γ_2。

实现$Z_{a_1}\rightarrow Z_{a_2}$的换算可按由$Z_{a_1}\rightarrow\Delta g\rightarrow Z_{a_2}$的步骤进行。由式（7.9.31）可写出：

$$Z_{a_1}=\frac{J}{G\delta}\cdot\frac{\partial\Delta g}{\partial t_1},\quad Z_{a_2}=\frac{J}{G\delta}\frac{\partial\Delta g}{\partial t_2};$$

$$\therefore\ \Delta g=\frac{G\delta}{J}\int Z_{a_1}dt_1\ ;\quad \therefore\ Z_{a_2}=\int\frac{\partial Z_{a_1}}{\partial t_2}dt_1$$

由前述的求导数和积分的滤波算子，可直接写出实现上式换算的频率响应：

$$\Phi_{Z_{a1}\rightarrow Z_{a2}}=\frac{q_2}{q_1} \tag{7.9.36}$$

式中的$q_2=2\pi[i(\alpha_2 u+\beta_2 v)+\gamma_2 s]$。相应的频谱表达式为

$$S_{z_2}(u,v,z)=\frac{q_2}{q_1}S_{z1}(u,v,z) \tag{7.9.37}$$

容易证明：式（7.9.36）是所有同分量不同磁化方向换算的频率响应。欲由磁化方向为t_1的ΔT换算新磁化方向t_2时的Z_{a_2}，其换算过程为$\Delta T\rightarrow Z_{a_1}\rightarrow Z_{a_2}$，显然这时换算的频率响应为：

$$\Phi_{\Delta T\rightarrow Z_{a2}}=\Phi_{\Delta T\rightarrow Z_{a1}}\cdot\Phi_{Z_{a1}\rightarrow Z_{a2}}=\frac{2\pi s}{q_0}\cdot\frac{q_2}{q_1} \tag{7.9.38}$$

可见，不同分量、不同磁化方向之间的换算，其频率响应可以分为两部分算子的乘积，一个是求新磁位U_2的滤波因子，另一个是U_2沿某一轴向的微分因子。为此可写出由ΔT换算新磁化方向t_2的磁场三分量的频谱表达式：

$$\begin{pmatrix} S_{x_2} \\ S_{y_2} \\ S_{z_2} \end{pmatrix}(u,v,z)=\begin{pmatrix} 2\pi iu \\ 2\pi iv \\ 2\pi s \end{pmatrix}\frac{q_2}{q_0\cdot q_1}S_T(u,v,0)\,e^{2\pi sz} \tag{7.9.39}$$

上式适用于任意磁化方向的转换。若要转换为垂直磁化，只要令$\alpha_2=\beta_2=0$，$\gamma_2=1$即可。由ΔT化到地磁极的频率响应为$\frac{(2\pi s)^2}{q_0\cdot q_1}$。若已知的是$Z_a$异常，则令$\alpha_0=\beta_0=0$，$\gamma_0=1$；若要化极则相应的频率响应为$2\pi s/q_1$，这时应将$S_T(u,v,0)$换作$S_a(u,v,0)$。

5．频率域磁场转换的一个通式

上面的讨论证实了本节开始的叙述，即在频率域中每进行一种转换，只须乘上相应的频率响应函数；如果要连续实现多种变换，其频率响应函数就应为所进行的每种转换的滤波算子之乘积。因此，上面已经讨论过的几种换算可以综合起来用一个统一的公式来表示。

设观测面上磁场分量的频谱为$S_a(u,v,0)$，经各种换算后磁场分量的频谱为$S_b(u,v,z)$，则：

$$S_b(u,v,z)=S_a(u,v,0)\,e^{2\pi sz}\quad(2\pi iu)^l(2\pi iv)^m(2\pi s)^n\cdot\frac{q'}{q}\cdot\frac{q_2}{q_1} \tag{7.9.40}$$

式中：l、m、n分别为沿x、y、z方向求导的阶数，其它符号意义同前；$e^{2\pi sz}$为延拓算子，$(2\pi iu)^l\cdot(2\pi iv)^m\cdot(2\pi s)^n$为导数算子，$q'/q$为分量换算因子，$q_2/q_1$为磁化方向换算因子。

下面例举一个由实测ΔT异常换算新磁化方向下的H_{ax_2}、H_{ay_2}、Z_{a_2}和它们的一阶垂向导数以及磁源重力异常Δg的频率域换算关系式：

$$\begin{pmatrix} H_{ax_2} \\ H_{ay_2} \\ Z_{a_2} \\ \frac{\partial H_{ax_2}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{ay_2}}{\partial z} \\ \frac{\partial Z_{a_2}}{\partial z} \\ \Delta g \end{pmatrix}(x,y,z)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix} 2\pi iu \\ 2\pi iv \\ 2\pi s \\ 2\pi iu\cdot 2\pi s \\ 2\pi iv\cdot 2\pi s \\ (2\pi s)^2 \\ \frac{G\partial}{J}\cdot\frac{2\pi s}{q_2} \end{pmatrix}\frac{q_2}{q_0\cdot q_1}S_T(u,v,0)\,e^{2\pi sz}\,e^{2\pi i(ux+vy)}\,dudv \tag{7.9.41}$$

现将式（7.9.41）应用中信息的提取作以下几点说明：

(A)若不进行磁化方向转换，令$\alpha_1=\alpha_2$，$\beta_1=\beta_2$，$\gamma_1=\gamma_2$，即$q_1=q_2$；

(B)如进行磁化方向转换，则根据要求给定新磁化方向的方向余弦α_2、β_2、γ_2；当换算到垂直磁化时，则令$\alpha_2=\beta_2=0$，$\gamma_2=1$，即使$q_2=2\pi\sqrt{u^2+v^2}$，这时还可以计算磁源重力异常。

(C)若已知观测面上的Z_a异常，则令$\alpha_0=\beta_0=0$，$\gamma_0=1$，也即$q_0=2\pi\sqrt{u^2+v^2}$，并把式中$S_T(u,v,0)$换为$S_a(u,v,0)$。

(*D*)若不进行延拓，而只在观测平面上实现各种转换，则令 $z=0$即可。

(*E*)式（7.9.41）对由实测$\Delta g(x,y,0)$换算磁场分量及其一阶垂向导数也是适用的。由于重力异常与磁化方向无关，则令$q_2=q_1$，并且$\alpha_0=\beta_0=0$，$\gamma_0=1$。实际作时需将式中$\frac{q_2}{q_0\cdot q_1}$换为$\frac{q_1}{2\pi s}\cdot\frac{J}{G\delta}$、$S_T(u,v,0)$换为$S_{\Delta g}(u,v,0)$。可见换算时仍需给定原磁化方向$t_1$的方向余弦。

7.9.3 几种磁异常变换的频率响应特征

由前面的讨论已经知道，磁异常的换算相当于一种滤波运算，权函数或频率响应函数决定着换算的特性。磁异常换算的滤波作用，在空间域讨论中一般不大直观，而在频率域中通过研究频率响应函数有时会给出直观形象的概念。为了讨论的方便，仅以二度异常的几种换算的频率响应为例来说明。

二度异常换算的频率响应函数，可以由三度异常相应换算的频率响应函数令$v=0$并作形式上的变化得到，也可先对二度上延权函数作富氏正变换求出$\Phi_{上延}(\omega)$，写出上延的频谱表达式，再运用微分定理求出$\Phi_z(\omega)$，$\Phi_{zz}(\omega)$并导出$\Phi_{下延}(\omega)$，有：

$$\left.\begin{aligned}\Phi_{上延}(\omega)&=e^{-\omega|h|},\quad \Phi_{上延}(\omega)=e^{\omega|h|}\\ \Phi_z(\omega)&=\omega\qquad\quad,\quad \Phi_{zz}(\omega)=\omega^2\end{aligned}\right\}\tag{7.9.42}$$

式中h为延拓高度。根据上式可以作出频率响应随圆频率ω变化的图形，见图 7.9.2。

由图 7.9.2 和式（7.9.42）可见，向上延拓的频率响应随着ω的增大而减小，当$\omega=0$时，$\Phi_{上延}(\omega)=1$；当$\omega=\infty$时，$\Phi_{上延}(\omega)\to 0$，它对高频成分有压制作用而让低频通过，相当于一个低通滤波器；而对向下延拓和一阶、二阶垂向导数，它们的频率响应均随ω的增大而变大，对高频成分有放大作用而相对压制了低频，相当于高通滤波器。就对高频成分放大的程度而言，下延最甚，$\Phi_{下延}(\omega)$随ω呈指数形式增大且不收敛；其次，二阶垂向导数又比一阶垂向导数对高频成分的放大要强些，放大的规律和求导的阶数有关。由于高通滤波对异常高频成分的放大作用，而使那些高频随机干扰也将随之放大，导致滤波运算后的场值失真，带来误差。为此常在换算时对高频成分作适当的抑制，镶上一个低通滤波窗作为圆滑因子，通常采用汉宁窗，设其为$D(\omega)$，作导数运算时可直接乘在换算因子上，而向下延拓时需乘在指数上，构成新的滤波算子，即：

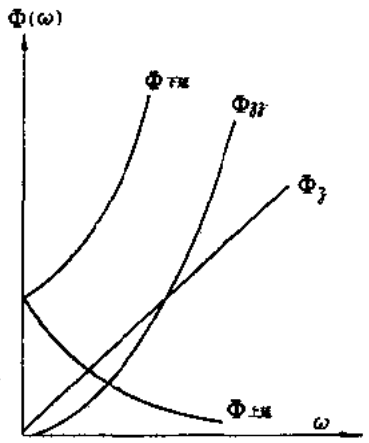


图 7.9.2 二度异常几种换算的频率响应曲线

$$\Phi_{下延}(\omega)=e^{h|\omega|D(\omega)},\quad \Phi_{导数}(\omega)=\omega^n D(\omega),\tag{7.9.43}$$

对二度异常，由Z_a求磁源重力异常的频率响应为$\frac{G\delta}{J}\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\frac{1}{(i\alpha_1+\gamma_1)}$，由$Z_a$换算$H_a$的频率响应为$i$，即$|\Phi_{Z_a\to H_a}|=1$，按上面的分析，前者也属于一种低通滤波，而后者无滤波作用，仅是一种与频率无关的换算。

7.9.4 磁异常数字滤波综述

这里不准备对磁异常的数字滤波作全面的综述，仅就其中的几个有关问题进行粗浅的讨论，以便对数字滤波的概念、应用中常常遇到的问题及解决问题可取的途径和它在磁异常转换、处理中的应用有一概貌的了解。

1．磁异常的转换与电滤波的相似性

我们知道，对无线电技术中的滤波来讲，线性滤波器的输入和输出是随时间 t 而变化的电压。若设滤波器的输入电压为 ε_a，输出电压为 ε_b，它们之间的关系可用一个褶积积分来表示，则有：

$$\varepsilon_b(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_a(t-\tau)\cdot\varphi(\tau)d\tau \tag{7.9.44}$$

式中 $\varphi(\tau)$ 为滤波器的权函数，反映了滤波器的特性。(7.9.44) 式为时间域电滤波方程。若设输入、输出电压的频谱分别为 $E_a(\omega)$ 和 $E_b(\omega)$，$\varphi(\tau)$ 的频率响应函数为 $\Phi(\omega)$，则在频率域内相应的有：

$$E_b(\omega)=E_a(\omega)\cdot\Phi(\omega) \tag{7.9.45}$$

式中 ω 称为圆频率，$\omega=2\pi f$，该式为频率域电滤波方程。

下面我们来考察磁异常的转换。由前述可知，对二度情况，观测面上的磁异常和经过转换后的磁异常之间的关系为：

$$f_b(x,h)=\int_{-\infty}^{\infty}f_a(x-\xi,0)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{7.9.46}$$

在频率域内相应有：

$$S_b(\omega)=S_a(\omega)\cdot\Phi(\omega) \tag{7.9.47}$$

式中 $S_a(\omega)$、$S_b(\omega)$ 为观测面上磁异常和换算后异常的频谱，$\Phi(\omega)$ 为权函数 $\varphi(\omega)$ 的频率响应函数。

若把磁异常空间域、频率域换算的通式 (7.9.46) 和 (7.9.47) 与时间域、频率域的电滤波方程 (7.9.44) 和 (7.9.45) 作比较，则可发现，磁异常的换算在许多方面都和电滤波相似，换算前后的异常对应着输入、输出电压，函数 $\varphi(\xi)$ 对应着滤波器的权函数。所不同的是电压是时间 t 的函数，而磁异常则是空间坐标的函数。由于磁异常转换和电滤波的相似性，因此人们常把磁异常的转换也称为磁异常的滤波，并把无线电技术中有关滤波的概念套用于磁异常的转换，这对说明磁异常换算的实质及讨论有关磁异常转换的问题相当方便。

应当指出，电滤波所用的滤波器，是由线性元件电阻 R、电容 C、电感 L 等组成的无源四端网络，而磁异常的滤波则是通过函数公式进行数值计算来实现的。所以又可称之为数字滤波。另外，电滤波中的圆频率 ω、频率 f 与我们在前面已经用相同名字称呼过的 ω 或 f 的意义也不相同。在磁异常滤波中，ω（或 f）是沿剖面方向单位长度上的圆波数（或波数）。数字滤波还有其特殊性，即它的“离散性”和“有限性”，所谓“离散性”是指输入和输出都是一系列孤立的离散值，所谓“有限性”是指从开始到结束都是在有限空间的范围内进行的。这样便使数字滤波变得较为复杂。

2．边缘效应和吉布斯效应

无论是空间域还是频率域磁异常滤波中，经滤波后的异常，在其边缘地段上会出现正、负相间的跳动现象，即振荡现象，这种现象称为边缘效应。造成边缘效应的主要原因是换

算中所使用的滤波算子的范围及实测异常的取值有限，用有限项求和代替了理论上的无穷积分。这时对异常进行换算，边缘部分的异常只能同权函数的一部分进行褶积运算，即所使用的权函数是不对称的。而高通滤波的权函数又常常是正、负交替的，所以往往在边缘部位上造成严重的振荡现象。实际上，异常在取值范围边缘以外并不一定为零，特别是当取值范围的边缘未到达正常场、而又有变化较大的异常时，边部振荡会使换算出的异常边部呈现令人难以置信的结果。

减小边缘效应常用的办法，是把取值范围扩大，将异常外推插补，或称为外推镶边法（二度体理论曲线的计算表明，一般外推后的剖面长度应达到磁性体最大埋深的六倍），然后再和中心地段上的异常一样，应用外推的值与权函数作褶积。显然这种外推应根据边部区域上异常变化的规律来进行，并要注意外推过程中防止过早出现间断点。

所谓吉布斯效应，就是经滤波后的异常在其真值的上下跳动的振荡现象。造成这种现象的原因主要是在频率域换算中，用的是富氏级数近似场以及有限长的离散值的频率截断可能形成第一类间断点。因此，即使测区足够大且已达到正常场，但测区中任何有很大梯度异常的地方，也会产生吉布斯现象。由于离散取值（数据处理中要求取离散的值及实测异常往往是一系列离散的观测值），无形中加入了一个矩形滤波器，使得在 $\omega>\omega_c$ 以外的高频成分被截除，异常被突然截断，导致异常的实际频谱和计算出的频谱脱节，使变换后的异常在原始异常变化较大处或边缘部位产生振荡。振荡的幅度和采样间距 Δx 有关。Δx 越小，则会将高频“噪声”带到数据中来，增强了高频的干扰，使振荡的幅度越大；振荡幅度的大小还和向下延拓的深度 h 有关，h 越大，振荡的幅度也越大。

为了减小振荡的幅度，需取较大的采样间隔。由于离散取值本身相当于一个低通滤波，所以若采样间隔过大，高频成分会折叠到低频，一方面使高频成分损失过多，另一方面使低频成分受到干扰造成假频现象，导致计算出的实测异常的频谱严重失真，引起转换后异常有较大误差。可见，仅用调整采样间隔来抑制振荡的幅度是有一定限度的。为使振荡现象的抑制得以改善，除了已述的外推镶边及合理选取采样间隔之外，还须选择其它的途径，下面介绍其中的两个。

途径之一是窗口函数的镶边法。在频率域滤波中，给频率响应函数人为地加上一个低通滤波窗，可以压制高频成分，这种可以抑制高频的滤波窗口函数又常称之为圆滑因子。根据场的不同特点及换算的要求可以设计不同的圆滑因子。下面给出的是适用于三度异常下延、求导的圆滑因子，其形式为：

$$D_{mn}=\frac{1}{2}\left\{1+\cos\left(\pi\sqrt{\frac{(ms)^2+(nt)^2}{\left(\frac{Ms}{2}\right)^2+\left(\frac{Nt}{2}\right)^2}}\right.\right. \tag{7.9.48}$$

式中，s、t 分别为沿 x、y 方向的采样间距；M、N 分别为 x、y 方向的采样点数；m、n 分别为 u、v 轴上的倍频数，即富氏系数的项数。这个圆滑因子的特点是当 $m\doteq M/2$，$n\doteq N/2$ 时，$D_{mn}\approx 0$；当 $m\doteq 0$、$n\doteq 0$ 时，$D_{mn}\approx 1$。也就是说对高频成分圆滑因子为零，对低频成分为1，从而起到了抑制高频同时又对低频无影响的作用。

通常使用的滤波窗函数还有以下几种：

由于离散取值，相当于在 $\Phi(\omega)$ 上又串连了一个直角窗边 $D_0(\omega)$，

$$D_0=(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}\quad(\Delta x=1)\tag{7.9.49}$$

此时，频率响应函数已变为 $H(\omega)=\Phi(\omega)\cdot D_0(\omega)$，为克服振荡现象让 $H(\omega)$ 再乘上以下任何一个滤波窗边：

（A）三角窗边：

$$D_1(\omega)=\begin{cases}1-\dfrac{|\omega|}{\pi} & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}\tag{7.9.50}$$

（B）汉宁窗边：

$$D_2(\omega)=\begin{cases}0.5+0.5\cos\omega & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}\tag{7.9.51}$$

$$D_3(\omega)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\omega & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}\tag{7.9.52}$$

(C)R_{BB}窗边：

$$D_4(\omega)=\begin{cases}0.42+0.5\cos\omega+0.08\cos2\omega & |\omega|\leqslant\pi\\ 0 & |\omega|>\pi\end{cases}\tag{7.9.53}$$

以上的每种窗边都是一种低通滤波器。此时频率响应函数为：

$$H_i(\omega)=\Phi(\omega)\cdot D_0(\omega)\cdot D_i(\omega)\qquad i=1,2,3,4\tag{7.9.54}$$

对$H_i(\omega)$进行富氏反变换即得到修改后的权函数

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi(\omega)\cdot D_0(\omega)D_i(\omega)\cos\omega x d\omega\tag{7.9.55}$$

途径之二是余弦镶边法。将原来的取数序列颠到过来，再添加到原来的取数序列之后，这样形成余弦对称的特点，使场的数值在测区边缘保持连续性，可消除边缘截断的影响。但此方法使计算工作量成倍的增加。

3．数字滤波在磁异常转换及处理中的应用

进行磁异常滤波的目的是为了压制干扰信号，突出有用信息。数字滤波可用于磁异常的空间换算、导数换算、分量换算、不同磁化方向之间的换算及磁源重力异常的求得，有关这些内容前面均已讨论过，这里不再赘述。下面重点讨论一下数字滤波在磁异常的圆滑及区域异常和局部异常划分中的应用。

（1）圆滑滤波

在实测异常中有测量误差和磁性体的干扰，它们的特点是范围窄、梯度大，反映为高频成分，当进行各种滤波运算特别是高通滤波时，必须对其进行压制。可见，在磁异常的转换及处理中，对换算前后的异常均应加以光滑处理。对异常的圆滑方式有两种，一种是将出现在个别点上的干扰分配到更多的点上去，面并不从实测异常中消除干扰成分；另一种是用一个截断函数的频谱乘以异常的频谱，把高于某个频率（截断频率）的成分剔除，如前面所介绍的圆滑因子均属这类圆滑方式。

由于实测异常一般是由两部分迭加组成的，一部分是有用信号，记为$s(x)$，其相应的频谱为$S(\omega)$；另一部分是无用信号，又常称作干扰信号，记为n(x)，其相应的频谱为

$N(\omega)$。若设实测异常及其频谱分别为$f_a(x)$和$F_a(\omega)$，则：

$$f_a(x)=s(x)+n(x)$$
$$F_a(\omega)=S(\omega)+N(\omega) \tag{7.9.56}$$

设理想的圆滑滤波的频率响应为$D_0(\omega)$，其形式为

$$D_0(\omega)=\begin{cases}1 & |\omega|\leqslant\omega_c\\ 0 & |\omega|>\omega_c\end{cases} \tag{7.9.57}$$

式中ω_c为截断频率，它和采样间隔的关系为$\omega_c=\pi/\Delta x$；根据对异常进行圆滑滤波的要求，式（7.9.56）希望得到的结果是：

$$F_b(\omega)=F_a(\omega)\cdot D_0(\omega)=S(\omega)\cdot D_0(\omega)+N(\omega)\cdot D_0(\omega)$$
$$\doteq S(\omega) \tag{7.9.58}$$

可见理想滤波将有用信号从和干扰信号迭加的状态下区分了出来。但是由于种种原因，这种理想的滤波器是不存在的，并不能将干扰信号全部消除。

上述的低通滤波对高频有明显地压制，这是我们所希望的，与此同时，也会使有用信号受到不希望有的压制。为了减小在圆滑滤波中异常的中、低频成份的损失，使有用信号的畸变尽可能的小，人们又提出了一种补偿圆滑方法。

补偿圆滑滤波也是一种线性低通滤波，它的基本思想是：首先由原始场值$f_a(x,y)$减去经用$D_0(u,v)$进行圆滑滤波后的场值$f_{D_0}(x,y)$，得二者之差$\Delta f(x,y)$。$\Delta f(x,y)$由三部分组成：一是高频干扰成分；二是有用信号的高频成分；三是有用信号中的中、低频成分。然后对$\Delta f(x,y)$再使用$D_0(u,v)$进行圆滑滤波，得$\Delta f_{D_0}(x,y)$，其主要成分为$\Delta f(x,y)$中的第三种成分，可看成是由圆滑滤波所造成的有用信号中的中、低频成分的损失部分。最后将$\Delta f_{D_0}(x,y)$加到$f_{D_0}(x,y)$中，便得到了经补偿圆滑滤波后的场值$f_1(x,y)$。

根据上述思路，我们容易导出补偿圆滑滤波的频率响应函数为：

$$D_1(u,v)=[2-D_0(u,v)]\cdot D_0(u,v) \tag{7.9.59}$$

式中$D_0(u,v)$为初始圆滑因子。若进行了n次补偿圆滑滤波，则：

$$D_n(u,v)=[2-D_{n-1}(u,v)]\cdot D_{n-1}(u,v) \tag{7.9.60}$$

初始圆滑因子一般可选用指数低通滤波器的频率响应函数，即

$$D_0(u,v)=e^{-\lambda[(u^2+v^2)^{1/2}]^p} \tag{7.9.61}$$

使用上述的补偿圆滑滤波，可沿x或y方向进行单向滤波，也可进行二维双向滤波，详细内容可参阅有关文献。

（2）区域异常和局部异常的划分

在空间域划分区域异常和局部异常，经常采用趋势分析法或插值法，其作法是用一个多项式去逼近或拟合区域异常。所使用的多项式是人们凭主观认识而定的，不同阶数、不同类型的多项式所求得的区域异常往往各异。

在频率域中，可根据区域异常及局部异常的频谱特征来划分。一般来说，区域异常是由规模较大的深场源所引起，它的梯度小，其相应的频谱主要是低频成分；而局部异常的频谱则主要是高频成分。在区域异常分布范围足够大并且又具有一定强度的条件下，可以认为它们是彼此独立互不相关的，因此可以设计一个低通（或高通）滤波器，对实测的迭加异常进行滤波，便能达到划分区域异常和局部异常的目的。

*A*最小平方滤波——维纳滤波

最小平方滤波或称维纳滤波的基本思想是：设计一个滤波器，使其输出与希望输出之间的均方差最小。以此达到区分区域异常和局部异常的目的。

设 $Z_a(x)$ 为输入，$Z_b(x)$ 为输出，$Z(x)$ 为希望输出，ε 为输出与希望输出之间的均方差，则：

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}[Z_b(x)-Z(x)]^2dx=\min \tag{7.9.62}$$

输入函数 $Z_a(x)$ 是由有用信号和干扰信号迭加构成。应用这样一种滤波器的目的，通常是为了从迭加信号中提取区域场的信息而把局部异常作为干扰滤去，或从迭加信号中提取局部异常而把区域异常的信息滤去。现假设有用信号为区域场，它系深场源所引起，埋深为 H，而干扰信号为局部异常，系埋深为 h 的浅场源所引起。由巴什瓦能量公式，(7.9.62) 式可改写成：

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}[\Phi_{区}(\omega)\cdot S_a(\omega)-S(\omega)]^2d\omega=\min \tag{7.9.63}$$

式中，$S_a(\omega)$、$S(\omega)$ 分别为 $Z_a(x)$、$Z(x)$ 的频谱，$\Phi_{区}(\omega)$ 为滤波器的频率响应。为从迭加异常中提取区域异常，可把迭加场向下延拓 h 深度使浅源异常成为白光干扰，设其振幅谱为 B，而深源场的频谱可令其满足关系：

$$|S(\omega)|\leqslant Ae^{-\omega(H-h)}$$

式 (7.9.63) 可表示为：

$$\varepsilon=\int_{-\infty}^{\infty}\{\Phi_{区}(\omega)\cdot[Ae^{-\omega(H-h)}+B]-Ae^{-\omega(H-h)}\}^2d\omega=\min$$

为了求出维纳滤波的频率响应函数 $\Phi_{区}(\omega)$，可采用变分法对上式求解，即以 $[\Phi(\omega)+\lambda G(\omega)]$ 替代上式中的 $\Phi_{区}(\omega)$，λ 为任意数，$G(\omega)$ 为具有和 $\Phi(\omega)$ 同样特性且不为零的圆波数的函数，令 $\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=0$，有

$$\left.\frac{\partial\varepsilon}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=0}=2\int_{-\infty}^{\infty}\{\Phi_{区}(\omega)[Ae^{-\omega(H-h)}+B]-Ae^{-\omega(H-h)}$$

$$\cdot G(\omega)[Ae^{-\omega(H-h)}+B]d\omega=0$$

由于 $G(\omega)$ 的任意性，则

$$\Phi_{区}(\omega)[Ae^{-\omega(H-h)}+B]-Ae^{-\omega(H-h)}=0$$

故：

$$\Phi_{区}(\omega)=\frac{Ae^{-\omega(H-h)}}{Ae^{-\omega(H-h)}+B}=\frac{1}{1+\frac{B}{A}e^{\omega(H-h)}} \tag{7.9.64}$$

利用对数振幅谱容易求出 H、h、A 和 B，进而可得出维纳滤波的频率响应函数 $\Phi_{区}(\omega)$，显然 $\Phi_{区}(\omega)$ 是一种低通滤波。

同样地，可以导出提取局部异常时维纳滤波的频率响应为：

$$\Phi_{局}(\omega)=\frac{B}{Ae^{-\omega(H-h)}+B}=\frac{1}{1+\frac{A}{B}e^{-\omega(H-h)}}$$

$$=1-\Phi_{区}(\omega) \tag{7.9.65}$$

（B）“匹配滤波”

在区域异常和局部异常迭加在一起的情况下，为区分它们，还可设计出一种与区域场或局部场“匹配”的滤波器，将所要的信息提取出来。这种提取区域场或局部场的方法称作“匹配滤波”。

我们假设区域异常是由埋深、延深都很大的磁性地质体所引起，由场的等效原理，这类地质体可用随机分布的点极源等效层代替；而把局部异常视作由许多下延、埋深均较小的磁性体所引起，并以随机分布的偶极源等效层来代替。

设偶极源等效层的埋深为d_2，偶极距为$m_{dp}(\xi,\eta,d_2)$，其相应的富氏正变换为$M_{dp}(u,v,d_2)$，观测高度为z，则可求出偶极源等效层所引起异常的振幅谱为：

$$A_{dp}=4\pi^2 sM_{dp}(u,v,d_2)e^{-2\pi(d_2-z)s} \tag{7.9.66}$$

式中$s=\sqrt{u^2+v^2}$。同样地若设点极源等效层的深度为d_1，磁荷密度为$m_p(\xi,\eta,d_1)$，相应的频谱为$M_p(u,v,d_1)$，则可求得它所产生异常的振幅谱为：

$$A_p=2\pi M_p(u,v,d_1)e^{-2\pi(d_1-z)s} \tag{7.9.67}$$

当不考虑干扰时，迭加异常的振幅谱为A_{dp}与A_p之和，则：

$$A(u,v,z)=4\pi^2 sM_{dp}(u,v,d_2)e^{-2\pi(d_2-z)\cdot s}+2\pi M_p(u,v,d_1)e^{-2\pi(d_1-z)\cdot s}$$

在$s=\sqrt{u^2+v^2}$的频率轴上，$A(u,v,z)$的对数振幅谱如图 7.9.3。图中，A段为直线，B段的$A(u,v,z)$除以s后取对数亦为直线，利用A、B段上的振幅谱及直线之斜率可以求出d_1、d_2、M_p和M_{dp}；若要从实测异常中提取区域场，可设计一个与其相“匹配”的滤波器，使它仅对区域场响应，有

$$A(u,v,z)\cdot\Phi_{区}(u,v)=A_p \tag{7.9.68}$$

式中$\Phi_{区}(u,v)$为与区域场相匹配的滤波器的频率响应函数。将前述的$A(u,v,z)$及A_p的表达式代入可得：

$$\Phi_{区}(u,v)=\frac{1}{\left[1+\frac{2\pi M_{dp}\cdot s}{M_p}e^{2\pi(d_1-d_2)s}\right]} \tag{7.9.69}$$

当求得$\Phi_{区}(u,v)$后，再由式（7.9.68）求出A_p，并对其进行富氏反变换便能获得区域异常。

同样地也可设计与局部异常相匹配的滤波器，它的频率响应为：

$$\Phi_{局}(u,v)=1-\Phi_{区}(u,v)=\frac{1}{\left[1+\frac{M_p}{2\pi M_{dp}s}e^{-2\pi(d_1-d_2)s}\right]} \tag{7.9.70}$$

实际中的迭加场并不是都能区分的，当它们的频谱特征差异很小，具体地说就是图7.9.3中的两个直线段不明显时，便难以区分。

近来，加拿大的 A. Spector 提出一种以矩形棱柱体作为等效模型体的“匹配滤波”。为了较好地模拟实际地质体的分布，不是用单一的矩型棱柱体，而是以若干个不同参数的矩形棱柱体在一定意义下的统计平均数来模拟地下地质体。用有限延深棱柱体等效层模拟近地表的地质体，以无限延深棱柱体的等效层模拟深部地质体。利用它们化极后的径向谱之特征，设计并求出从迭加场中提取区域场（或局部场）信息的匹配滤波的频率响应函数，对滤掉火山岩覆盖层的干扰取得了一定效果。

另外，对具有一定走向的磁性体，其异常的振幅谱等值线也具有方向的特征，因而提出了方向谱的概念。设$\Delta T(x,y)$的频谱为$S_T(u,v)$，不难证明存在以下关系：

$$\left.\begin{aligned}|S_T(u,v)| &= |S_T(-u,-v)|\\ |S_T(-u,v)| &= |S_T(u,-v)|\end{aligned}\right\} \tag{7.9.71}$$

利用谱的方向性可以设计出方向滤波器，把不同走向的异常分开。方向滤波器的种类较多，常见的有椭圆窗方向滤波器和扇形窗方向滤波器等。

磁异常的数字滤波，是近年来随着电子计算机在重磁资料数据处理中的应用才逐步发展起来的，许多方法还有待于在实际应用中不断完善。到目前为止，仍有很多问题需要研究。但是，它无疑给磁异常的转换及处理带来了方便，使人们能够着手于复杂异常的处理，这对实际异常的解释是很有意义的。

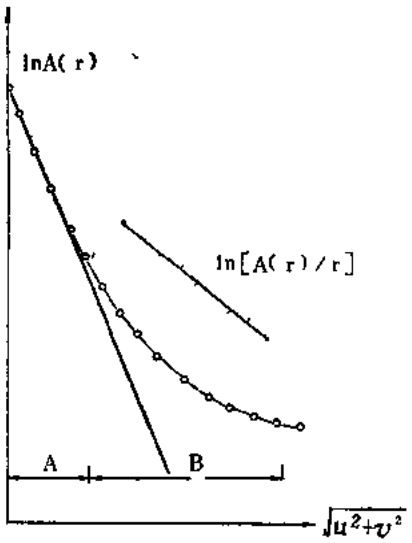


图 7.9.3 有区域、局部异常迭加时在$\sqrt{u^2+v^2}$频率轴上的对数振幅谱

第八章　磁测资料的地质解释

在前面三章中，我们讨论了磁性体磁场的正、反演问题和磁异常的处理及其转换方法。在上述讨论中，都未涉及具体地质问题。磁法勘探的根本目的在于：通过对磁测结果的分析研究解决地质问题，把磁测结果变为地质结果。因此，磁测资料的地质解释是磁法勘探工作的关键环节。本章主要讨论这一问题。

§8.1　磁测资料地质解释的方法步骤

8.1.1　磁测资料地质解释的概念、意义及其与定性和定量解释的关系

磁测资料的地质解释，通常是指：根据磁测资料、岩、矿石的磁性资料以及地质和其它物化探资料，运用磁性体磁场理论和地质理论，解释推断引起磁异常的地质原因及其相应地质体的空间赋存状态、平面展布特征，矿产和地质构造分布情况等的全过程。根据上述解释的内容，一般常把对磁测资料的地质解释分为定性解释和定量解释两个步骤。如确定引起磁异常的地质原因和有关地质体展布特征属于定性解释，确定磁性体空间位置及其形状、产状和磁性等参数属于定量解释。

实际工作中，对磁异常所作的每一地质解释不一定都要做定量解释。例如，根据磁场形态特征划分不同岩性区、根据磁异常轴向大体判定磁性体走向、根据异常特征大体判定普查对象的位置等。但是，对某些普查对象若辅以埋深、产状等资料，则使其解释结果具有更大的价值。

在一份磁测报告中，一般都包括定性和定量解释两方面，二者是相辅相成的。定量计算常以定性解释为基础；而定量计算结果常有助于地质解释，如算得磁性体的磁性有助于判定引起磁异常的地质原因等。

由于我们对各种复杂的地质情况目前还不能都给出解析关系式，在磁异常的地质解释中，正确运用一些经验性结论是必要的。如各类岩体上的磁场特征、构造现象的磁场特征等，常可作为划分不同岩体和确定构造的依据。

如果不对磁异常作地质解释，不说明测区内磁异常所反映的地质情况，那样的磁测资料很少有实用价值。

8.1.2　磁测资料地质解释的内容、方法和步骤

磁测资料地质解释的具体内容是由磁测的地质任务决定的。任务不同，对解释的内容和要求也不同。如果磁法是配合地质进行区域地质调查的工作，这时对磁异常的解释应着重于研究地质构造、圈决各类磁性岩体和预测成矿区等方面的内容；在解释中以定性解释为主。如果磁法工作的任务是普查找矿，在磁异常解释中则着重于判定异常和异常的性质（主要是判定矿异常与非矿异常）；对每个异常都应作解释，对有意义的异常应计算场源的空间位置和磁性参数；这时定性和定量解释具有同等的重要性，解释往往是综合性的。而在矿产的普查评价和初步勘探阶段，工作地区常常是有希望的矿点和有工业价值的矿区，地质工

作的主要目的是追索和圈定矿体，查明矿产的数量和质量、以及初步查明矿床赋存的地质条件和空间分布等。这时磁异常的解释重点则在于确定磁性矿体的位置、个数、形状、产状、埋深、磁性参量等，以指导山地工程的布置；同时还要注意区分矿与非矿异常；查明成矿控制构造和岩体；因此；这时定量解释具有重要意义。

虽然航磁异常与地面磁测异常的解释过程有所不同，但总体来说，磁异常的地质解释一般按下述步骤进行：

（1）磁测资料的予处理和予分析；

（2）磁异常的定性解释；

（3）磁异常的定量解释；

（4）地质结论和地质图示。

①、磁测资料的予处理和予分析

对磁测资料进行予处理和予分析，是要使对资料的解释建立在资料完整、可靠和便于解释的基础上。因此，在解释前应分析磁测精度的高低、测网的稀密、系统误差的有无和大小、正常场选择是否正确、图件的拼接是否正确、资料是否齐全、是否有干扰（磁性表土、人工磁性堆积物等）影响存在等，若有问题，就应改正或处理。此外，还应注意分析磁性地质体的磁性特征（如磁性的均匀性、方向性和大小）。

为了便于解释，解释大面积磁异常的工作常需对异常进行分区、分带，确定解释推断单元，对复杂磁异常还要进行必要的转换和处理，如为了显示深部构造特征，消除局部异常的影响，需进行向上延拓；为了使异常走向更清晰，便于与地质图对比，要将斜磁化换算到垂直磁化等。

②磁异常的定性解释

磁异常的定性解释包括两方面的内容：一是初步解释引起磁场变化的地质原因，二是根据实测磁异常特点，结合地质特征，运用正演理论所确定的磁场特征与磁性体的对应规律，大体判定磁性体的形状，分布范围和产状等。

对磁异常进行地质解释的首要任务是判断磁异常的地质原因。对找矿来讲，就是要区分出哪些是矿异常，那些是非矿异常。关于矿与非矿异常的区分问题，在此不加详述，仅就初步地质解释的一般方法问题加以说明。由于实际工作中地质任务，地质条件的不同，地质解释方法也不尽相同。但一般都从以下几个方面进行分析。

①由“已知”到“未知”，即先从已知地质情况着手进行研究。根据岩（矿）石的磁性参数，对比磁异常与地质构造的关系，找出磁异常与岩体或矿体等的对应规律，确定引起磁异常的地质原因，并依此确定的对应规律，指导条件相同的未知区的工作。在推论未知区时，应充分注意某些条件的变化（如覆盖、干扰等）对异常的可能影响。

②将异常进行分类

对磁异常进行分类的目的，是为了更好地查明异常的地质原因，便于重点研究，各个突破。

至于对异常如何分类，根据什么标准来分类，应根据物探的地质任务和测区异常总的情况而定。一般是根据异常的特点（如极值、梯度、正负值对应关系、形态、走向等）和异常分布区的地质情况，并结合物探地质任务来分类。例如普查时，往往先根据异常分布范围，把异常分为区域性异常和局部性异常。区域性异常往往与大的区域构造或火成岩等因素有

关；局部异常可能与矿床和矿化有关。为了弄清每个异常的地质原因，对区域性异常可结合地质情况分为，异常值较高而又起伏变化的大范围分布的异常，异常值较低而又平静的大范围分布的异常等；对局部性异常可结合成矿控制因素等分为有意义异常和非矿异常等等。

通过对磁异常的分类，不仅对测区异常能有一清晰的总体概念，也便于分类研究引起磁异常的地质原因。

③对异常进行详细的分析

对异常进行详细分析的目的，是为了结合磁性和地质情况确定异常的地质原因。在分析时，应注意异常的形态、走向、分布范围、异常的强度、梯度、正负异常的对应特点和异常所处的地质位置，应区分是单一异常还是迭加异常，是规则异常还是不规则的零乱异常等。

通过对异常的仔细分析，运用正演分析结论，应大致判断场源物体的形状、产状和埋深。进而根据异常所处地质位置对成矿是否有利，结合磁性、地质资料以及粗略的定量估算，以初步确定异常的地质原因。

③定量解释

定量解释通常是在定性解释基础上进行的，但其解释结果常可补充初步定性解释结果。

定量解释是以第六章中介绍的方法来计算磁性地质体的几何参数（形状、倾向、走向）以及磁性参数。其目的在于：根据磁性地质体的几何参数和磁性参数的可能数值，结合地质规律，进一步判定引起磁异常的地质原因；提供磁性地层或基底的几何参数（主要是埋深、倾角和厚度）在平面或沿剖面变化的概念，以便于推断地下的地质构造；提供磁性地质体在地面的投影位置、埋深和倾向，以便合理布置探矿工程。

④地质结论和地质图示

地质结论是磁异常地质解释的成果，也是磁法工作的最终成果。它是磁场所反映的全部地质情况的简要小结，是由定性、定量解释与地质规律的结合而做出的地质推论。它不一定与地质人员的地质推论相同。

地质图示是磁法工作中地质成果的集中表现。因此，磁法工作成果应尽可能以推断成果图的形式表现出来。如推断地质剖面图、推断地质略图、推断矿产予测略图等。这种图件不仅便于地质单位使用，也便于根据验证结果和新的地质成果进行再推断。

§8.2 区域地质测量中磁测资料的地质解释

区域地质测量（又称区域地质调查）是一项具有战略意义的、综合性的基础地质工作，是地质工作的先行步骤。因区测工作比例尺不同，其工作重点以及对磁测资料的解释要求也不同。

一般区域磁测资料的地质解释，常着重于圈定岩体、划分岩性区；推断构造形态和位置；圈定和划分成矿远景区。在实际进行该项工作时，常需结合地质和其它物探与化探资料进行。下面仅着重介绍与磁测资料解释有关的一些基本方法问题。

8.2.1 区域地质测量的基本目的和对磁异常解释的基本要求

区域地质测量的常用比例尺，由小到大分别为：1:100万（50万）、1:20万（10万）和1:5万。工作比例尺不同，其目的要求也不同。

实测磁异常是各种地质体磁异常的总和，有时十分复杂，有时则相当简单，一般磁异常

都可用来推断测区的地质构造。

大面积航空和海洋磁测结果按测量比例尺成图，或以更小的比例尺制成略图。小比例尺的磁场图能清晰地反映地台区、地槽区、洋底、结晶基底的深拗陷区或其出露区的异常场特征。

在研究磁异常时，为使某种地质因素的异常更清晰，常对实测磁异常进行一些必要的处理和转换。如为了突出深部构造异常进行向上延拓，为与重力异常进行对比分析，计算磁源重力异常等。

1:20万和1:10万比例尺的地质测量工作，在地面地质测量开始以前，应进行同比例尺或更大比例尺的航空磁测。因为在大多数情况下，磁异常图能清楚地反映断裂带、巨大岩块的相对隆起和拗陷，以及平移断层；能以不同的清晰程度显示出与围岩有磁性差异的那些岩石的轮廓；圈定含铁磁性矿物的接触带；在许多情况下可以计算磁性体的埋深等。

利用磁测资料进行地质填图的详细程度和可靠性，与测量比例尺、磁场强度的观测精度和测线空地联系的精度有关。

①1:100万的区域地质调查

小比例尺的区域地质调查工作，主要是在地质研究程度较低的地区进行。其目的是：了解工作地区的地层、岩石及地质构造的主要特征；获取区域地质矿产的初步资料，为进一步的区域地质工作和拟定矿产普查规划提供依据。

与区域地质调查比例尺相应的磁测是1:100万的航空磁测。其主要任务是研究大地构造，进行大地构造分区；研究与地壳运动有密切关系的巨大断裂；研究燃料和金属矿产总的分布规律，主要是燃料矿产。因此，对磁异常的地质解释就要求对磁异常所反映的大区域的构造信息做出判断。这就要求对磁测资料进行特征性磁场分区，即根据异常的变化特点（平静的、变化的、强烈变化的和杂乱的）、磁异常的符号（升高的正磁场区、降低的负磁场区和近零磁场区）、以及磁异常的走向和排列组合特点划分出各种各样的磁场区，每一磁场区都有各自的特征，它们常对应一定的地质构造单元。

②1:20万的区域地质调查

1:20万的区域地质调查是我国区域地质研究的基本工作，也是金属航磁工作的最小比例尺。目前我国东部地区基本完成了中比例尺的航磁工作，正确利用这些资料是很重要的。

1:20万区域地质调查的基本任务是：查明基本地层、构造和矿产的基本特征；研究区域矿产的形成和分布规律；予测矿产分布远景区，指出普查找矿的方向。因此对航磁异常的解释就应以地质填图、研究构造和划分成矿带为重点。例如根据磁异常圈定侵入岩、喷出岩以及沉积岩和变质岩，确定接触带，断裂带、破碎带等。进而根据控矿因素与局部异常的关系等划分成矿远景区。

③1:5万的区域地质调查

1:5万的区域地质调查属于大比例尺的区域地质调查，在有区域成矿远景的地区进行。主要是深入研究区域成矿规律，预测各类矿床的分布。与此相应的磁测工作不仅要根据磁测结果进行地质填图，还应具有明显的直接或间接找矿性质，对每一个局部异常都应进行较详细的解释。

8.2.2 根据磁异常圈定岩体和不同岩性区的依据和方法

磁异常是由不同地质体间的磁性差异引起的，某种磁性地质体的磁异常的特征，与地质

体的空间分布、形状、产状及其磁性特点直接相关。由第五章的讨论和长期实践证明：

（1）磁异常的轮廓可大致反映地质体的轮廓；

（2）磁异常的轴向，一般是地质体走向的反映；

（3）在地质体出露和埋藏较浅的情况下，地质体本身不均匀的磁性，常会使其磁异常发生起伏变化，磁性愈不均匀，磁场形态变化愈大；

（4）磁异常的强度和范围随埋深而变化。埋深小，异常强度大，范围小；反之，强度小范围大。

以上所述是我们根据磁性体磁场理论和磁测图与地质图对比而得出的结论，可做为圈定岩体和划分不同磁性区的依据。

在实际工作中，应注意到不同类型的岩体，因其磁性矿物含量的不同，由酸性岩到超基性岩，磁性由弱而增强；但也不能忽视同一种类的岩石，因其产出时代和条件的不同，岩石中的分相、分带以及蚀变风化等原因，磁性可能变化很大。一般来讲，各类岩石有以下磁场特征：

①侵入岩

一般超基性岩体的磁性最强，在其上常可见到上千伽玛的磁异常。图8.2.1是新疆鲸鱼岩体上的磁场图。由于超基性岩磁性不均匀，因而岩体上的磁异常呈现出在升高背景上的起伏变化。不同岩相、不同蚀变情况的超基性岩，其磁性特点因地区不同，规律各异。一般蛇纹石化常使超基性岩磁性增强，而碳酸岩化使其磁性减弱。

基性岩体常可观测到几百伽玛的磁异常。辉长岩磁性变化较大，有的磁性较强，有的地区辉长岩磁性很弱。

辉绿岩的磁性一般也很显著，它常呈脉状穿插在其它岩石中，在其上可观测到明显的磁异常。

闪长岩和花岗闪长岩，一般均有磁性，在其上可观测到数百伽玛甚至更强的异常。

我国南方分布的加里东期花岗岩，基本上是无磁性的。我国东北分布的海西期花岗岩，大多数磁性较弱，还有一部分是无磁性的；分布较广的燕山期花岗岩，磁性比较明显，可观测到300—500伽玛的磁异常，但南岭和两广的燕山期花岗岩磁性异常的幅度降低，异常不明显。

以上仅给出了不同侵入岩磁性和异常强弱的概念，实际圈定时，应考虑其磁性变化特征、产出条件及分布范围等，结合确定其边界的磁性体磁场理论来圈定。

②火山岩

火山岩磁场的共同特点是，沿剖面方向场值跳跃变化，在相邻曲线上难于对比。随着火山岩埋深增大，其跳跃变化特征逐渐减弱或消失。图 8.2.2 是山东蓬莱附近玄武岩上的磁场。有时在玄武岩的杂乱磁场中，可出现一条或数条狭窄的正的或负的线型异常，这可能是火山岩喷出裂隙的反映。有时还可在异常图中发现一个极强的异常，这可能是火山口的反映。在海南岛北部的平地上，可见到与玄武岩有关的现代负地形和与它对应的磁异常。

玄武岩磁异常峰值常达几百至几千伽玛，但也有异常很弱的地方。一般安山岩比玄武岩磁性小，异常峰值为几百至上千伽玛，同样也有磁性很弱的地区。酸性火山岩，由于其暗色矿物含量少，磁性较弱。在有些酸性熔岩盆地上，异常幅度为几十伽玛，而酸性熔岩的剩余磁化强度往往比感应磁化强度大好几倍。

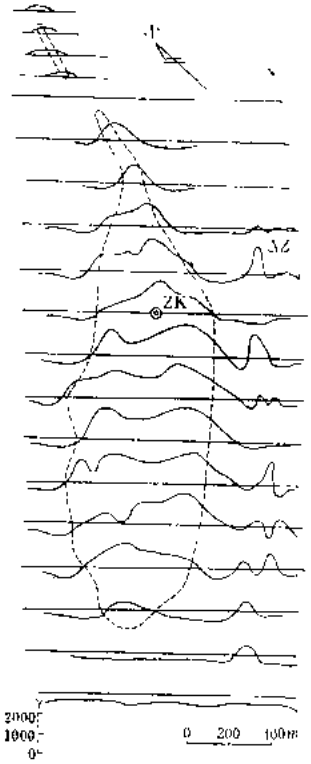


图 8.2.1 鲸鱼岩体磁异常图

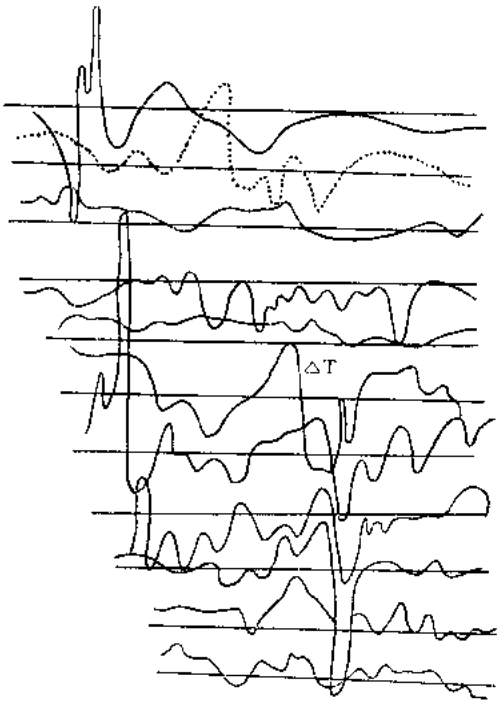


图 8.2.2 山东蓬莱附近第四纪玄武岩上的磁场图

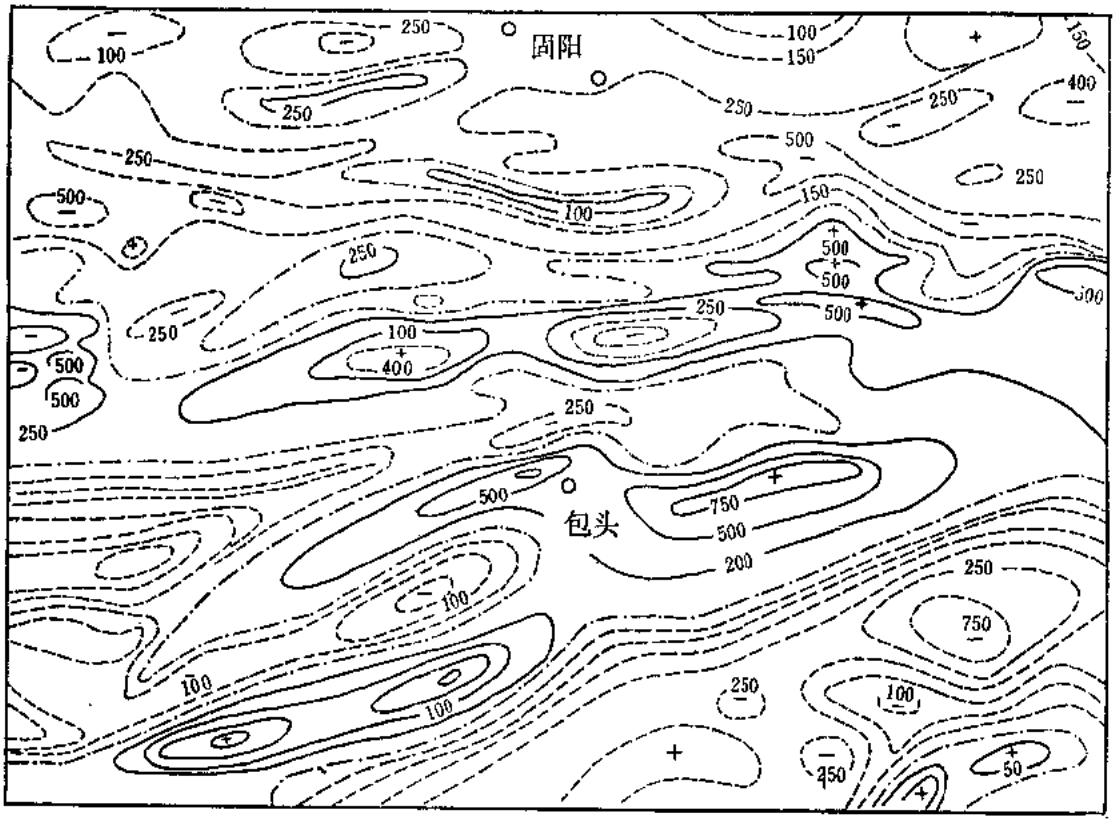


图 8.2.3 大青山中段航磁ΔT等值线图

③沉积岩和变质岩

沉积岩地层多被视为无磁性的，其磁化率一般在$100\times10^{-6}\,CGSM$以下。在其上观测到的磁场一般是近于零的平稳场或为负值的平稳场。当沉积岩夹杂一些暗色矿物时，场值也可能偏高或跳动。在分析沉积岩磁场时，也不应忽视下覆磁性基底的变化。

变质岩分为两类，即正变质岩和负变质岩。正变质岩一般磁性较强，可观测到几百及至上千伽伪的异常，其异常一般也不稳定。由于变质岩经受热力作用，铁质成分重结晶，磁性矿物分布不均匀，常使场值出现较大跳动。图8.2.3是内蒙大青山中段ΔT等值线图。在大青山地区明显的正异常带中，分布有角闪石，绿泥石和磁铁矿等，在负异常带中变质岩的暗色矿物较少。

在太古代岩石上，其磁场较复杂，磁性不均匀现象比侵入岩还明显。而元古代变质岩的磁性就小一些，甚至表现不出宏观的明显磁性，如北方的滹沱群，辽河群，南方的板溪群和昆阳群，大别山地区的佛子岭群等，它们大多由负变质岩组成。

上述不同岩类的磁场特征表明，用磁法圈定磁性体和划分不同磁性层，不仅有理论依据，同时已经被实践所证明。因此，在今后的磁法工作中，应充分重视磁法在地质填图中的作用。

8.2.3 根据磁异常推断断裂、破碎带以及褶皱等的依据和方法

地壳中的岩石因受内、外动力地质作用而发生的弯曲和断裂等，统称之为地壳地质构造。用磁法研究构造现象，都是以其相应的磁性变化及其规律性为基础的。

一些比较大的断裂构造，一般常伴有岩浆活动，因而能用磁法发现它们；另一种断裂没有岩浆活动伴随，但当其断裂破碎现象比较显著时，常使岩石磁性发生相应变化，也会在磁异常中有所反映，为我们结合地质构造特征，根据磁异常判定它们提供了依据：

1．断裂现象的磁异常特征

断裂带的磁场大约有以下几种：

（1）线性异常带

沿走向延伸很长的线性异常带可分为正异常带、负异常带和正负异常带三种。第一和第三种是由于沿断裂有较连续的后期岩浆活动所致，而第二种是因同一种磁性岩石中，其剩磁较大，岩石断裂时，沿断裂方向岩石磁性发生变化而引起的。

图8.2.4和图8.2.5表现了这种异常带的基本特征。

（2）串珠状异常带

当沿断裂的岩浆活动不均匀，因而其磁性物质的分布也不均匀，这就会引起呈串珠状的、断断续续分布的线性磁异常。

（3）雁行状异常带

有些断裂破碎带的范围较大，构造应力比较复杂，即有垂直变位也有水平变位和扭转现象，在这种情况下会造成雁行排列的岩浆活动通道，因此，在这类构造上磁异常就表现为雁行状异常带。图8.2.6是雁行排列的异常图。

（4）放射状的异常带组

在块断活动比较复杂的地区，可见到放射状的异常带组，每一个线性异常，都标志一条断裂岩浆活动线。

当我们根据磁异常推断断裂构造时，有两点值得注意：一要注意追踪并标志异常轴，

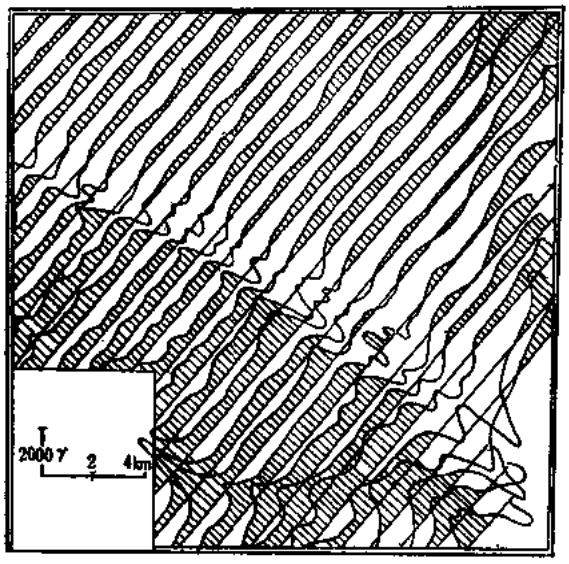


图 8.2.4 断裂带上的航磁异常

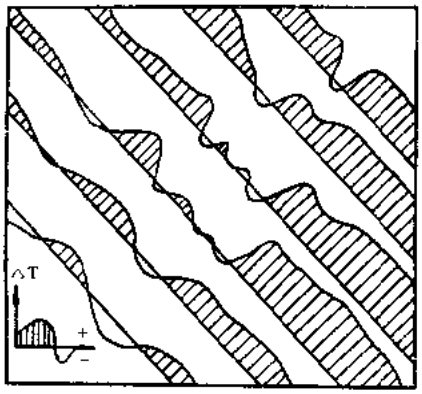


图 8.2.5 “干断裂”上的航磁异常图

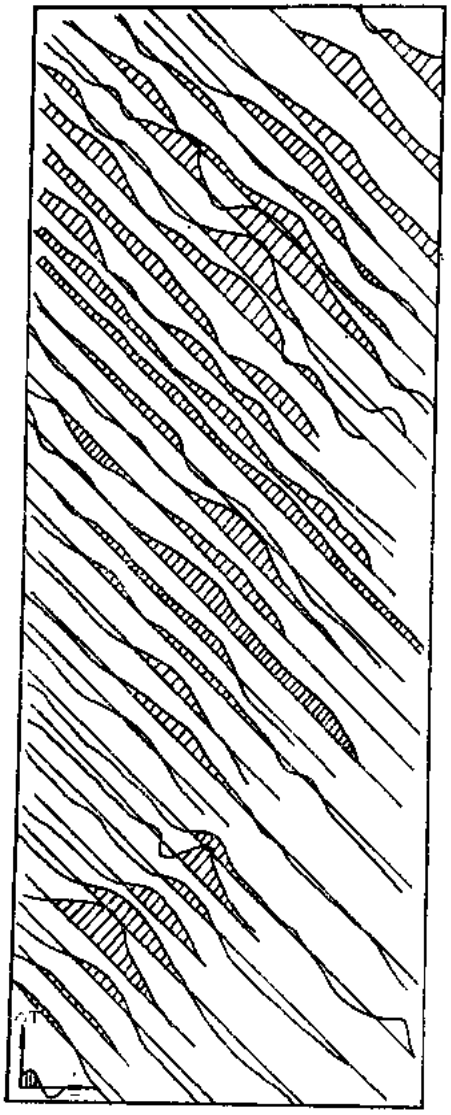


图 8.2.6 断裂带上雁行排列的异常图

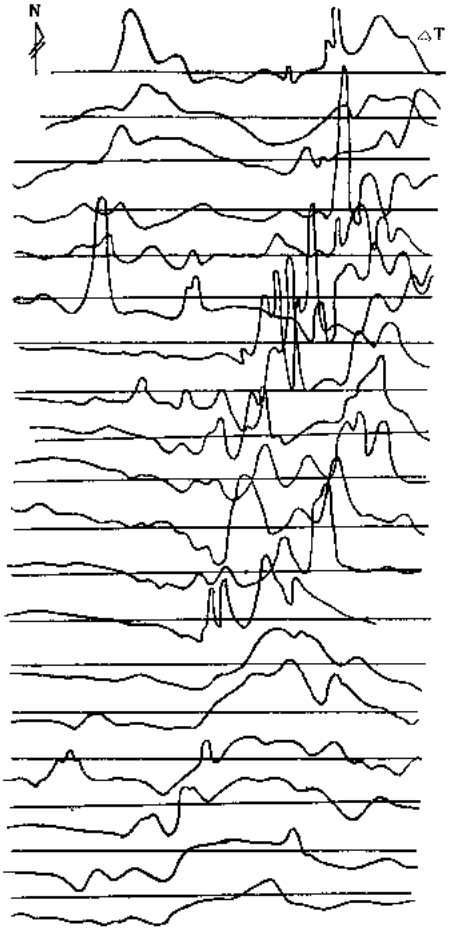


图 8.2.7 郯城—庐江深大断裂中部磁场图

二是要有理由肯定异常与岩浆活动有关。

2．深大断裂的磁异常特征

深大断裂是一种特殊的断裂类型。这种断裂常是两个不同大地构造单元的分界线；断裂切割地球的硅铝层、甚至更深；断裂活动和岩浆活动具有多轮迴性，它多半是现代地震的活动带。它是一个宽度可达几十公里，长几百公里的复杂断裂束，是一个宽大的岩浆剧裂活动通道。

在深大断裂带内，近于平行的断裂线成组出现.磁异常也如此。我国的郯城——庐江深大断裂带，是1957年由航空磁测首先发现的，图8.2.7是该断裂的磁异常图。该断裂长约800多公里，宽30—50公里，其磁异常以正异常形式出现。有的深大断裂是处于降低的磁场背景上。

深大断裂带常常可能是一个巨大的金属成矿带，如长江中下游深大断裂带就是一个金属成矿带。

3．断层的磁异常特征

断层也是一种断裂构造，规模较大的断层，沿断层面两盘发生了明显的相对位移。一个完整的磁性体，当其为断层断开，两盘不论是上、下错动还是水平错动，都会使其磁异常发生明显变化。

当有断层存在时，沿断层面的岩石磁性一般都要降低；若两盘为上下错动，上盘的磁异常强度大而范围小，下盘的磁异常强度小而范围大，且同一条等值线在下盘一边突然扩大；若两盘为水平错动，则有一条或几条能连续对比追踪的磁异常，发生异常轴线明显的水平错动现象，这表明磁性体的断裂变位，因而可判定有平移断层的存在。图8.2.8是断层异常示例，其中 a 为实际例子，b、c 为确定断层线示意图。

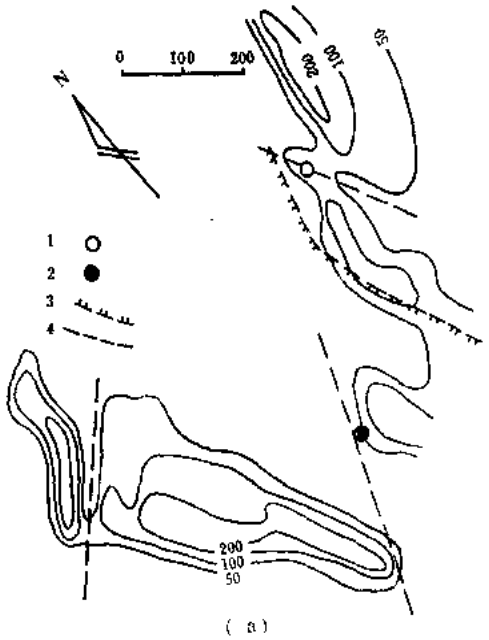


图 8.2.8 (a) 辉绿岩被多组断层断开的异常
1—未见矿钻孔；2—见矿钻孔；3—断层；4—推断断层

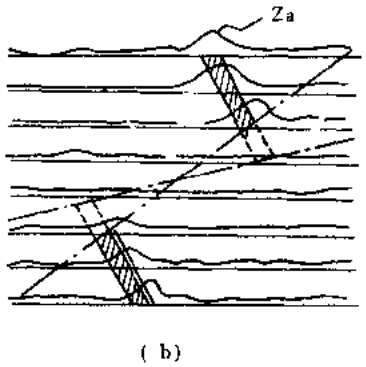


图 8.2.8 (b) 由磁异常确定断层线可能方向示意图
1—磁性层；2—断层线

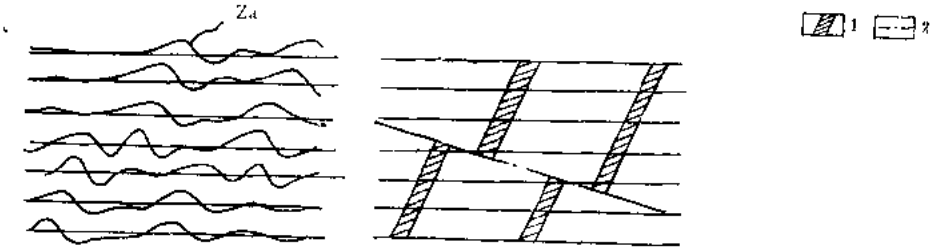


图 8.2.8 (c) 根据磁异常确定岩层的断层位移示意图

1—岩块；2—断层线

4．褶皱构造的磁异常特征

岩石受力发生弯曲称为褶皱。它有两种基本类型，即背斜和向斜。

不论是背斜还是向斜，只有当发生褶皱的岩石中有明显的磁性标志层时，才能用磁法直接研究它们，否则，只能通过磁性基岩的起伏间接地研究盖层沉积构造。

含有磁性标志层的背斜，当背斜转折端完整时，在其枢轴上方可能观测到升高的正异常；当其转折端不完整，被剥蚀掉时，可观测到类似图8.2.9所示的异常。这仅是一个粗略概念，对具体情况，如覆盖厚度、磁化方向、磁性层的磁性等应具体分析。

含有磁性标志层的向斜，磁异常在其两个翼端上方强度大，在二翼端间的转折部位上

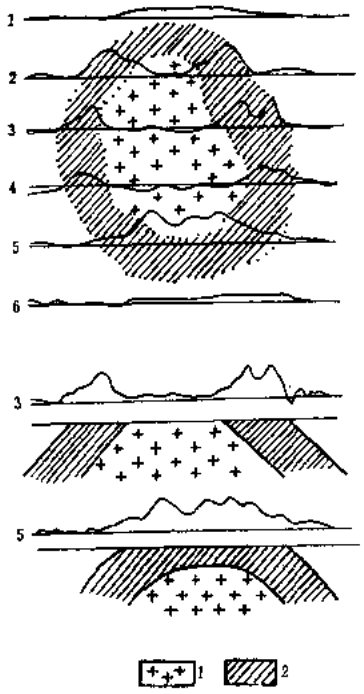


图 8.2.9 背斜上的磁异常

1—侵入体；2—接触变质岩

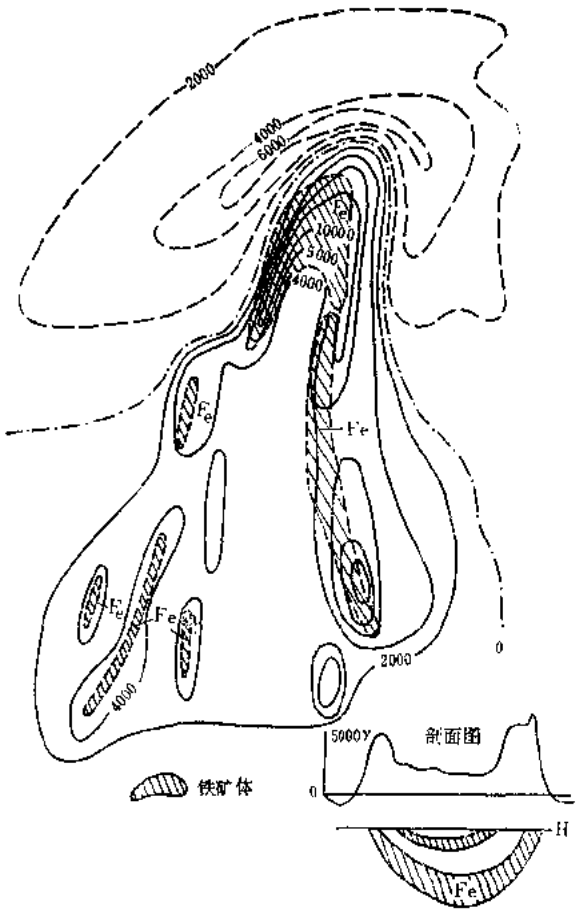


图 8.2.10 北京某铁矿地磁异常图

方出现较高的、变化较缓的场值，而向外梯度变大并出现负值。图8.2.10是密云铁矿向斜构造上的磁异常图。

欲判定与基岩隆起和凹陷有关的沉积构造，常需进行定量计算，以提供基底起伏的数量概念。一般在磁性岩石隆起的地段上，磁异常的变化较剧烈，而在它深埋地下的地区，则异常显著变缓。这可作为判定基岩相对隆起与凹陷的一种标志。

8.2.4 成矿区的圈定与划分

圈定和划分成矿远景区仅靠磁测资料是不够的，必须综合利用各种地球物理资料及地质和部分钻孔资料。利用磁测资料时，主要应考虑两方面的条件，一方面是成矿和控矿条件，另一方面是矿（或控制因素）与围岩的磁性差别，即要考虑地质、地球物理可能性。

1．含油气远景区的圈定与划分

根据磁测资料评价含油气远景时，要考虑磁性界面深度图即基底深度图所反映的构造形态（基岩的相对隆起与凹陷），也要研究生油条件、储油条件、构造条件等，其中主要是构造条件。一般来说，只要有比较宽阔的深凹陷存在，就有形成油气藏的可能性，只要在深凹陷中部存在着相对隆起，一般应列为成油气有利地段。

以构造条件为主导的远景评价方法，曾在各个工业油气藏盆地中利用过，一般都是很成功的。如在松辽盆地划分出的大庆长垣，在渤海地区，在江汉地区都得到了肯定的效果。

油气藏都储在基底盖层沉积构造中，磁测研究的地质对象是结晶基底，由于沉积构造的继承性发展，不少沉积岩的构造都和基底表面的起伏甚至和基底内部岩性差异有关，因此，利用磁测资料做综合性含油气远景区的评价与划分是有地质和地球物理依据的。

为了发现沉积盖层的褶皱构造，国外常用1:5万——1:10万比例尺的高精度航空磁测。与盖层有关的异常是由含很少量磁铁矿的某些陆原岩层引起的。沉积岩的产状很平缓，且就整个面积面言，其磁性是不稳定的，再加上存在较强的磁性基底异常，提取与沉积盖层构造有关的异常较困难。通常采用消弱深部基底磁场影响的各种变换方法，即计算磁场梯度或剩余异常（即磁场的原始值与换算至某个高度上的场值，或按一定的半径求得的平均值之间的差值）来突出沉积岩层的异常。我国70年代初航测大队曾在四川进行了这方面的尝试，取得了一定效果。

近年来，美国发展了一种直接找油找气的专利方法——磁电勘探。这种方法是基于油气藏改变了直接上覆在这种矿床上的岩石电化学性质，因而形成了垂向地电流，由于该地电流的存在，就在平静地磁场中产生了磁异常。测出该磁异常，就可根据它推断出垂向电流的方向和大小，据此可圈定或得出可能找到油气藏的区域范围和深度。这种方法在美国的一些油田上进行了成功的试验。我国近年来也有人开始注意这一方法。

2．金属矿成矿区的圈定

在评价金属矿成矿区的远景时，要研究岩浆控制条件、构造控制条件、地层和岩性控制条件、地球化学条件及地貌条件等。其中主要是岩浆、构造和地层控制条件，区域构造条件是控制全局的。我们知道与超基性岩密切相关的矿床有铬、铂和金刚石；与基性岩共生的矿床有钛磁铁矿和硫化镍矿；与中酸性火成岩有关的矿床，如钨、锡、钼、铜、铅、锌、金、铀、钛、锂、铍、铌、钽等各种成因类型的绝大多数内生矿床。区域性地质构造控制着成矿区、成矿带、矿田和矿床的位置。

在划分成矿区时，区域性地质构造有根重要的作用。褶皱带控制着成矿侵入体的侵

入。在褶皱带范围内，背斜构造和穹隆构造最有利于控制成矿的远景区。断裂带是岩浆活动的通道，在褶皱和大断裂交叉处往往控制成矿远景区。

在评价内生矿床成矿区时，岩浆和构造控制条件是主要的。而在评价海相沉积矿床时，地层及构造则是主要的。铀矿、锰矿、铜矿、铝土矿等都受地层控制，有些是内生矿床，但受不透水层的控制，如汞矿、锑矿、多金属矿等。

根据磁测资料可以圈定侵入体，研究侵入体的形状、产状、岩相和蚀变带等；可以确定断裂和褶皱等构造。利用磁测资料对控矿因素的分析结果，再结合区域性地质的研究和区内的矿点、矿床及各种找矿标志（包括各种物化探异常在内）进行综合研究，圈定出成矿远景区。

以上叙述了利用磁测资料进行岩性区划分，即沉积岩、岩浆岩和变质岩的填图，褶皱和断裂构造的圈定，以及成矿区的圈定和划分的基本方法。对一份区域性的磁测资料，一般不可能分析解释出上述所有内容，但总可以得出一些重要的地质结论。正确解释使磁场发生变化的地质原因，对得出正确的地质结论很重要。而如何正确解释磁场变化的原因，往往需要有个研究过程。人们对磁异常的认识是逐步的接近客观实际，认识并不是固定不变的。

§8.3 普查找矿中磁异常的地质解释

8.3.1 矿产普查的任务、要求及磁异常的解释任务

矿产普查亦称普查或找矿。其基本任务是：（1）查明矿产资源的区域分布；（2）寻找国家要求的矿产地，为矿山勘探提供基地。

根据任务要求的不同，矿产普查分为普查找矿和普查评价两个工作阶段。

普查找矿的基本目的是：根据国家要求，在一定的地区和期限内，尽可能找出大量的有矿地点，利用研究矿产地表露头的方法，确定每一矿点的实际意义。因此，要求查明区域矿产的形成和分布规律；圈出进一步寻找有关矿产的远景地段；对新老矿点和异常，进行初步检查，作出有无进一步工作的价值的结论。

普查评价是对有希望的矿点所进行的矿产地质研究工作。其任务是，通过地质、物化探和工程相结合的综合方法，查明矿产产出的地质条件，初步了解矿产的质量和规模，判明有无工业利用价值，为矿产勘探基地的选择提供依据。

普查找矿是以区域调查为基础的。矿产的地层与岩相条件、岩性条件、构造条件和岩浆岩条件等，是普查找矿的地质先决条件。由于磁法不受地质露头条件、磁性体的隐伏、半隐伏条件的限制，它在寻找磁铁矿、与磁铁矿物相共生的矿产以及查明成矿控制因素方面，都能起到应有的作用。由于地质条件的复杂性，决定了找矿方法的综合性。磁法，作为综合方法之一，应注意利用其进行填图的可能性。

地质找矿要尽可能发现矿化和矿点，磁法找矿就应尽可能发现异常，可以说磁异常就是磁法找矿的一个找矿标志。正如地质找矿一样，见到找矿标志，不一定就有矿；同样，发现了磁异常，不一定就有矿，必须对异常进行研究、解释甚至验证。

由以上所述可知，普查找矿中对磁异常的地质解释必须注意以下几点：

（1）既要注意大异常也要注意小异常；既要注意区域性异常，也要注意局部性异常；既要注意强异常、正异常和正负伴生的异常，也要注意弱异常和负异常。因为每一个

异常都反映一定的地质现象，包含一定的地质信息。

（2）要特别注意研究那些接触带、断裂带附近的局部异常。因为这些地段往往可能是成矿的有利地段。

（3）要注意发现和研究那些位于已知矿区和矿点及其附近的异常。因为在一个地区的成矿，不可能仅局限于某一个小范围，它可能在空间上有更大的范围和深度。因此，就矿找矿仍是一条重要找矿途径。

（4）注意应用“由已知到未知”的原则，以及研究各种异常间的相互关系。因为异常间的相互关系，可能是不同地质现象空间关系的反映。

（5）应该注意到，除简单情况外，在磁异常的地质解释中，可能存在的地质原因判定的多解性、磁性体个数判定的多解性以及对某些磁性体参量（如倾角、磁性等）计算的多解性。因此，在解释中就应紧密结合地质情况，结合其它的物探异常和化探异常，进行综合分析。尽可能对所有异常都作出必要的和有依据的解释。

还应指出，磁法在寻找磁性铁矿和某些与磁性矿物相共生的矿产方面，地质效果是举世公认的。但是，磁法绝不是一种只能找磁铁矿的方法。它在构造研究和填图中的作用，并不比找铁矿差，因此，它在综合找矿的方法中，是一种不宜忽视的方法。一般，使用磁法的经费开支，完全可以其找矿的经济价值来补偿。

8.3.2 直接普查磁性铁矿时磁异常的地质解释

因磁法能有效地寻找强磁性铁矿，很早以前就为人们所重视。由于磁铁矿在一般岩矿石中其磁性最强，磁异常有可能最为明显，因此，在磁法发展的初期，就利用磁铁矿上磁异常特别强的特点，找到了不少大中型磁铁矿床。但是，异常的强与弱，并不是寻找磁性铁矿的唯一标志。因为磁异常的强弱不仅与矿体的磁性有关，还与矿体的大小、埋藏的深浅等因素有关。正因为如此，58年以后，我国在不少地区，在一些低缓异常区，找到了铁矿。近年来，在一些地形、地质条件复杂的复杂磁异常区也找到了磁性铁矿，如产在火山岩中的铁矿等。在一些弱磁性的矿床上，也得到了可喜的试验效果。

由于以上所述，在用磁法寻找磁性铁矿的时候，对磁异常的地质解释和解决其它地质问题时的解释一样，不可能提出一个对任何条件都适用的标准化方法。不可能也没有必要罗列大量实例来分别说明它们。下面只能从总体方面综合一些必要的例子，讨论其解释方法和途径。

在普查工作的磁异常解释中，主要任务是：发现并圈定异常、研究异常并判定其地质原因，对有意义的异常进行必要的定量计算。

1．磁异常地质原因的判定

判定磁异常的地质原因，就是要解释各种磁异常是由何种地质现象引起的，对找矿来讲，最重要的是要区分开哪些是矿异常哪些是非矿异常。这是磁异常地质解释中极为重要的问题，也是尚未很好解决还在进一步探索研究的问题。

一般来讲，磁异常的地质原因可通过异常的分布和变化特征，结合异常区的磁性和地质特征，正确运用构造和不同岩体的磁场特征规律来判定。但是在复盖区，当观测到一些形态、强度和分布范围相近的磁异常时，要区分开矿与非矿，仅凭上述依据，就难于作出结论。目前还没有一种对不同成因类型、不同磁性特征的铁矿都普遍适用的区分矿与非矿异常的方法。下面介绍的一些方法是有一定局限性的，有的方法尚在试验，只能介绍其思路。

（1）对比分析法

将磁异常图与地质图相对比，结合岩矿石磁性资料进行分析估算，以确定磁异常的地质原因。通过对比和分析，常可肯定一些已知地质情况的对应异常特征，并以此为依据，解释同类异常的地质原因。通过对比，必然还有些异常不能肯定其地质原因，这时还可结合地质情况分析异常是否处于成矿有利地段，以判定其是矿异常的可能性，进而圈定成矿远景区。

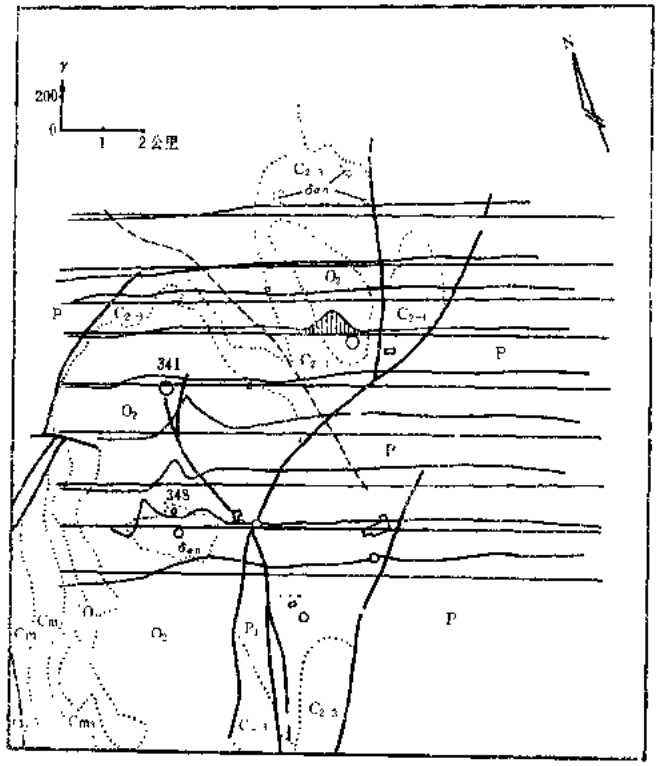


图 8.3.1　河北某地磁铁矿上的航磁异常。

图8.3.1是河北某地 1:10 万航磁图，图中有一个以 30γ为背景的孤立异常。在 1:2.5 万的地面磁测图中，该异常表现为一片明显负异常背景上的一个正 10γ的点异常。由于异常区在某矿区外围，有必要判定异常的地质原因。

物探人员根据磁异常分布区出露有中奥陶统马家沟灰岩，此种灰岩在该区为成矿围岩；在航磁图上，异常处于 30γ 背景场边部，说明异常位于接触带上，处于成矿有利地段。据此，初步判定可能是矿异常。为查明该异常，又布置了 1:5 千地面磁测，圈出了这个最大值只有 350γ 的低缓异常，见图 8.3.2。

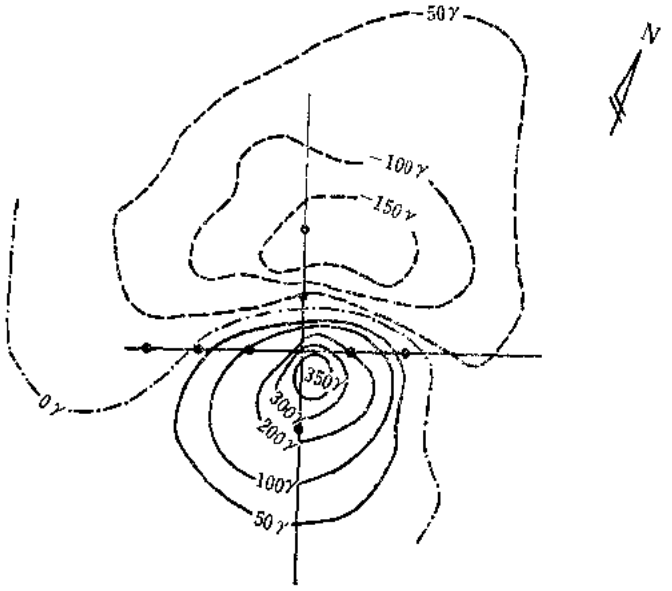


图 8.3.2　河北某地磁异常平面图

对该异常又经定性分析、定量计算，研究了磁异常的空间分布和变化特点，并以当地矿体磁性和定量计算参量作了正演计算后，进一步肯定为矿异常。经钻探验证，证实了异常为铁矿所引起。矿体为多层密集排列，而并非球形矿体，因埋藏深，故可近似看作球体。

上述方法适用于露头较好、情况较简单、资料较多的矿区及其外围。

（2）详细分析研究磁异常

的方法

在复盖区观测到强度、范围、形态基本相近的磁异常，要分辨它们是矿异常或非矿异常时，可采用详细分析研究磁异常的方法。

由第五章的讨论可知，不同磁性体的磁场表达式具有不同的形式。如果能通过磁异常的详细分析，确定磁性体的范围、形状、产状、埋深及其磁性，了解场的空间分布和变化规律，那么，结合地质知识，就可能区分开矿与非矿异常。由此可见，要详细研究异常，就需对异常进行延拓、化向磁极或求二阶导数以及进行必要的定量计算。

假如矿体体积小、磁性强，岩体体积大，磁性弱，通过对异常的详细分析研究，就可根据其几何形态、场的变化梯度以及磁性来区分它们。如果我们在已知区已积累统计了矿和岩体的磁性变化范围和产出形态，更有利于应用这种判定方法

（3）其它方法

由于地质条件和其它情况复杂，用前两种方法难于判定磁异常的地质原因时，可考虑其它方法。其它方法可以从两方面考虑，一是考虑磁性体的综合性质，利用综合物探异常来判定场源性质，二是考虑磁参数(K、J_r)间的特性或其相关特性，以判定异常性质。

有些铁矿的磁异常有时很难与其它地质体的磁异常区别开。这种铁矿的密度或电性可能与围岩有明显差异，这时就可以应用电、磁或者重、磁、电综合方法的综合异常把矿异常和非矿异常区别开。如赤铁矿具有弱磁性、高密度，有时电阻率与围岩也有差异，就可以用综合异常来判定其性质。

目前尚在研究的磁日变法、人工磁化法，主要用于区分Q值小的磁铁矿和Q值大的火成岩的磁异常。有的地方利用K与J_r的相关系数大小区分含矿与不含矿岩体。

以上介绍的后两种方法常用于磁异常的普查评价和详查勘探中，普查阶段很少应用。

2．磁异常的定量计算

磁法在寻找磁性铁矿的普查评价和详查勘探中，定量解释占有重要地位。有关定量计算的具体方法，在第六章中已作了详细讨论。因此，下面仅介绍解释中应注意的问题及步骤。

（1）解释中应注意的问题

(A)计算时，首先应分析要解释的异常是否完整；计算剖面是否足够长，有无必要的正常场；剖面位置是否符合理论条件（垂直走向或通过异常中心）；定点精度和磁测精度是否满足要求。

(B)分析异常属于何种类型，是简单规则的孤立异常，还是有畸变或迭加特征的复杂异常；分析地形影响及其它干扰特征，以便采用适当的处理和解释方法。

(C)磁法的定量解释结果一般都是近似值，其近似程度取决于：所用公式的数学模型与实际地质模型的近似程度；理论分析中的假设条件与实际条件的近似程度；定点和测量误差；异常取值和转换误差等因素。上述近似程度高、误差小，计算结果的近似程度也高；反之就要差一些。随着已知条件的增多，对异常进行再解释，可不断提高解释结果与实际地质情况的符合程度。一个正确的认识，一般很难一次完成。

（2）定量解释步骤

(A)分析磁性体的磁化特征，确定其磁化方向。

岩矿体的磁化强度是感应磁化强度和剩余磁化强度的矢量和，而剩余磁化强度的大小

和方向往往事先是不知道的。实践表明，许多情况下，可近似认为二者方向一致。但是，也有不一致的情况。因此，就应结合磁异常特征分析磁化特征，确定磁化方向。否则，很难根据异常特征判定形状，或应用需要事先知道磁化强度大小和方向的方法。

(*B*)判断矿体的形状

不同的定量解释方法，适用于不同的形体，因此，判定形体常是正确选用定量计算方法的必要条件。就是进行场的转换和处理，二度和三度体所选用的方法也不同。

(*C*)根据确定的形体和磁化条件，正确选择定量计算方法和公式。

(*D*)进行计算和复算。

(*E*)对计算结果进行正演验证。

(*F*)对解释结果的其它可能性和误差进行必要的分析。

图8.3.3和图8.3.4是大冶金山店潜伏矿体的Z_a平面等值线图和磁测剖面图。

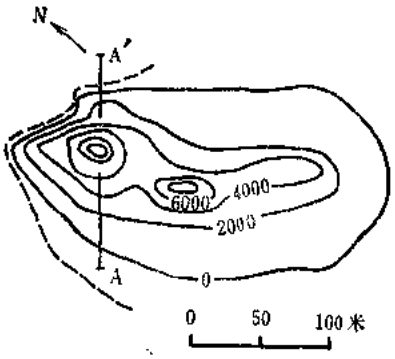


图 8.3.3 大冶金山店某潜伏矿体Z_a平面图

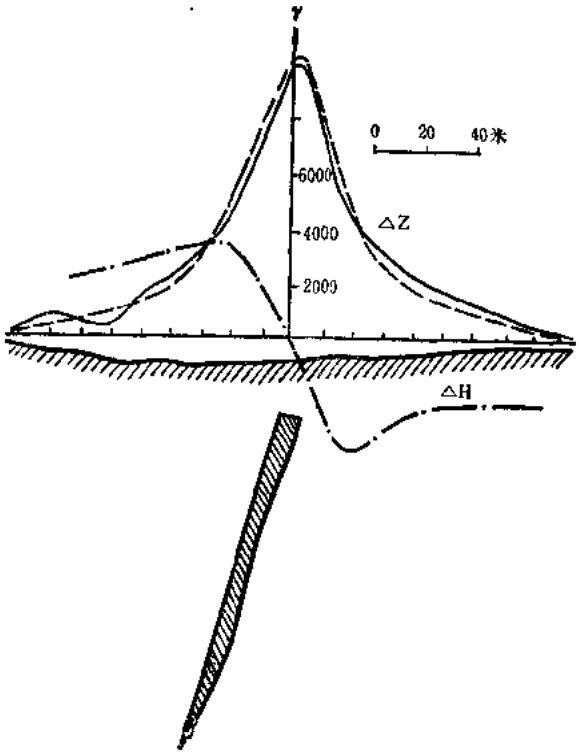


图 8.3.4 大冶金山店矿区Z_a异常剖面图

图中实线为实测Z_a，虚线为根据解释结果计算的Z_a；点划线为ΔH

由ΔZ平面等值线图来看，异常走向北10°西，由于$\frac{1}{2}\Delta Z_{max}$等值线的长、短轴之比大于五，因此可将矿体当作二度体。

从剖面图来看，ΔZ曲线两翼对称下降，且无负异常出现，因而可以近似认为矿体是向下无限延深的顺层磁化薄板状体。

对该异常的产状可用多种方法求得，下面只给出几种方法的结果。

由半值点法求得：$h=18$ 米，

由半值点和四分之一值点法求得：

$$h=\frac{x_{1/4}^2-x_{1/4}^2}{2x_{1/2}}=17.7 \text{ 米}$$

$$b=\sqrt{x_{1/2}^2-h^2}=3.2\text{米}$$

$$\because \Delta Z_{max}=11000\gamma$$

由 $\Delta Z_{max}=\frac{4b\sigma}{h}$，得：$J_z=\sigma=\frac{\Delta Z_{max}\cdot h}{4b}=0.152\text{CGSM}$

利用不同高度法求得：

$$h=\frac{\Delta Z_{20米}}{\Delta Z_{地面}-\Delta Z_{20米}}\cdot\Delta h=18.3米$$

由向量法求得：

$$\beta-i=4^\circ,\qquad i=\text{ctg}^{-1}(\sin 10^\circ\cdot\text{ctg}45^\circ)$$

所以 $$\beta=80^\circ+4^\circ=84^\circ$$

表 8.3.1 定量计算结果和钻探结果对比

推断方法	上顶埋深（米）	水平宽度（米）	倾角（β）
半值点法	18		
二分之一和四分之一值点法	17.7	6.4	
不同高度法	18.3		
向量法	23		84°
平均值	19.3		
钻探结果	20	6	102°

由上表可以看出，四种方法计算深度的结果与钻探结果很接近。其中向量法所求深度偏深，这是由于向量法交于磁极，磁极深度大于矿顶深度。

8.3.3 间接找矿时磁异常的地质解释

当我们所要寻找的矿产与围岩没有明显磁性差异，或者矿体本身为非磁性矿产时，矿体本身不能引起可分辨的磁异常，或者是不能引起磁异常时，就不能用磁法直接寻找它们。

若上述矿产与磁性矿物相共生，或是与火成岩、构造等有成因关系时，仍可用磁法间接寻找它们。所谓间接找矿，就是利用矿物的共生关系以及构造与成矿空间的关系进行找矿。

例如，铬铁矿的磁性变化较大，有的磁性比围岩高，可形成正异常；有的有反磁化现象，可形成负异常；有的无明显异常。但是铬铁矿床几乎全部产在分异较好的基性、超基性岩体中。因此，圈定超基性岩体，划分岩相带，就是一种间接找矿。在条件有利时，磁法也可作为综合找矿方法之一。

又如有色金属矿床，它们本身常是非磁性的，如铜、铅、锌等。但是矽卡岩型铜铅锌矿床，常与磁性矿物相共生，因而也可用磁法间接寻找它们。

总之，用磁法进行普查找矿时，既要注意直接找矿，也要注意间接找矿，注意查明成矿控制因素。

用磁法进行间接找矿时，常有其它物化探方法配合，因而资料常是综合的。对磁异常的解释方法与前两节所述方法类似，只是定量解释工作因矿物的共生特点和垂向分带等原因，工作量大大减少。在异常的综合解释中，应注意对异常进行分类，如综合异常与单方法异常等，这有助于识别其地质原因。

图8.3.5和图8.3.6是铬铁矿和矽卡岩型铜矿上的剖面曲线。

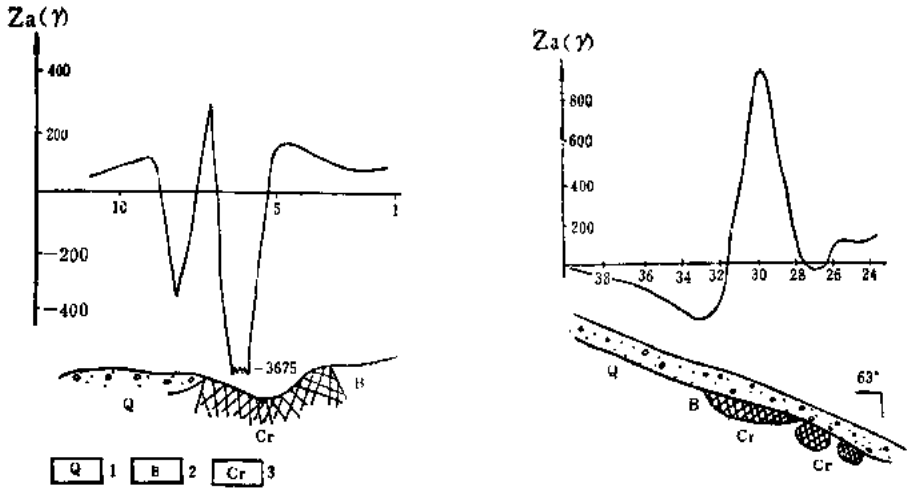


图 8.3.5 某铬铁矿磁异常剖面图

1—第四系；2—浅变质砂岩、页岩、千枚岩；3—铬铁矿

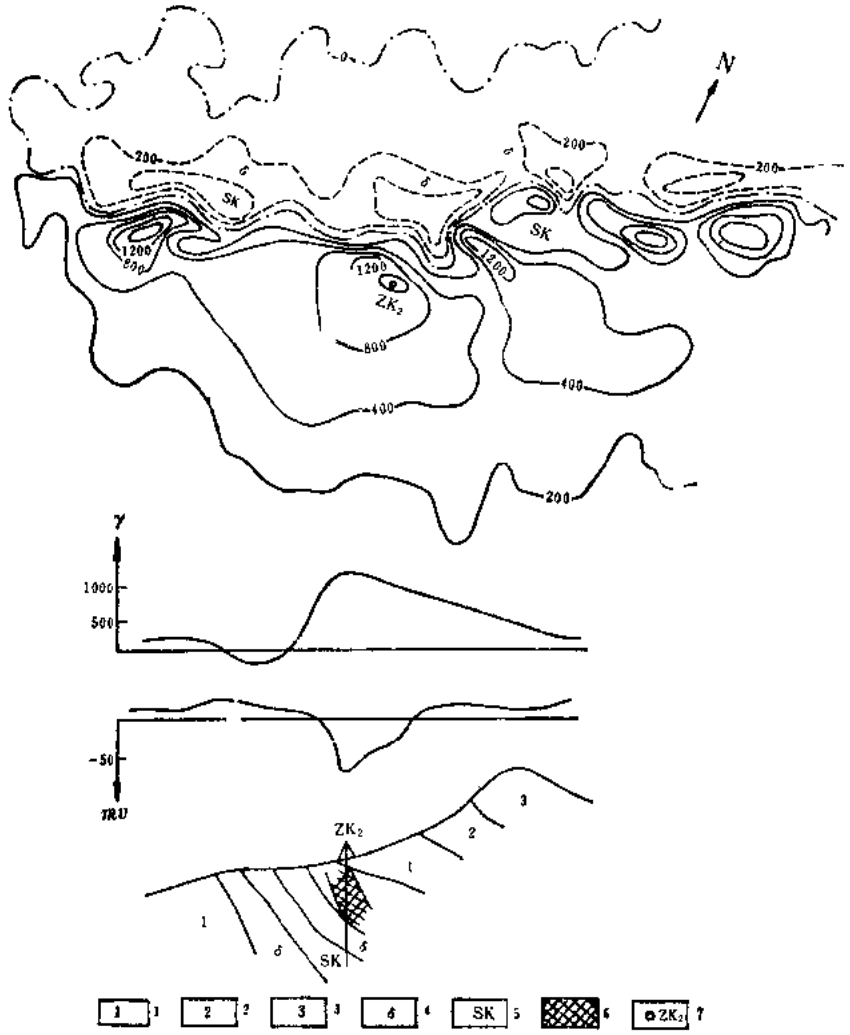


图 8.3.6 某矽卡岩铜矿的Z_a异常

1—角岩；2—灰岩；3—泥岩；4—闪长岩类；5—矽卡岩；6—矿床；7—钻孔及编号

§8.4 矿产详查勘探中磁异常的地质解释

8.4.1 矿产勘探的目的、任务及其对磁异常地质解释的要求

磁法的详查勘探工作，一般与地质勘探工作相对应。

矿产的地质勘探，主要是采用工程（钻探与坑探）追索和圈定矿体，查明矿产的数量和质量，研究矿产的开采技术条件等。勘探工作一般分为初步勘探和详细勘探两个工作阶段。

初步勘探的主要任务是：1.初步查明矿床赋存的地质条件和空间分布；2.初步查明矿产的数量和质量及其开采利用的技术条件；3.对矿床作出初步工业评价。

详细勘探的主要任务是：1.对矿床作出工业评价；2.为矿山设计提供地质、技术经济资料。

由勘探工作的任务可以看出，磁法主要是在磁性铁矿的勘探中发挥作用，特别是初步勘探阶段。

磁法的详查勘探任务，一般是查明已为普查所发现的磁异常特征，以此进行详细的解释推断。由于该项工作常与异常的钻探验证或矿区勘探相配合，因此，其解释推断的要求也有所不同。

对磁异常进行钻探验证，在布置前应提出定性和定量解释结果，便于确定孔位和选择钻机类型，予测见矿深度。在钻探过程中，应随时解释工程所见地质体是否为引起磁异常的地质体，并根据地面和井中磁测资料和探矿工程资料，进一步分析异常的找矿前景，以指导钻探工作的进行。

对异常验证的资料进行解释推断，不仅可检查第一次推断解释的正确性，同时也是不断修正解释结论、使其符合实际的再解释过程。

在矿区勘探中，因工程数量多，故可提供较多的有关岩、矿体的资料。因此，在磁异常解释中，就应详细计算矿体的几何参量和磁性参量，进一步确定矿体的空间位置，计算剩余异常，结合井中磁测资料，寻找深部和旁侧盲矿体。

8.4.2 初步勘探中磁异常的地质解释

由初步勘探的地质任务可知，磁异常的地质解释主要着重于定量解释。这对于查明矿床赋存的地质条件（主要是矿体的形状和产状）、矿体的数量，具有重要意义。

为了计算和解释剩余磁异常，在勘探阶段选择法是常用方法。根据探矿工程已控制的矿体形状、产状资料，岩芯和岩芯磁性测定和统计资料，先计算已知矿体的磁异常，通过与实测异常对比，判定有无剩余异常，若有，则应从实测异常中减去已知矿体的异常，即得剩余异常。而后再对剩余异常作解释，就可以确定盲矿体的形状、产状和位置。也可以不算出剩余异常，而根据计算异常与实测异常的符合程度，直接假定盲矿体进行选择法计算，当计算结果与实测结果吻合时，假定之盲矿体即为所求盲矿。

计算剩余异常时，主要应注意以下几点：

1．正常场选择要正确

正常场选取得是否正确，直接影响实测磁异常正负值的分布，进而会影响剩余异常的形态和数值。正常场选低了，会使负异常值减小或不出现负值，反之会使异常正值变小，

范围变窄，负值增大。因此，计算前一定要分析检查正常场选取的正确性，若选取不准，应运用正常场校正方法进行校正。

2．要清除非矿干扰引起的异常

计算剩余异常的目的是为了寻找盲矿体，如果剩余异常中有非矿干扰异常存在，就会给剩余异常的解释造成困难或产生误差。因此，在计算剩余异常时，应通过地质资料和磁测资料间的详细对比，确定非矿干扰因素，而后设法消除。

图 8.4.1 是某地矽卡岩型磁铁矿上的磁异常剖面图，最初按极大值位置布钻，只见到三层小矿体，经正演计算它只能引起500γ的异常，与实测异常对比，尚有3000γ左右的异常不能拟合。由于闪长岩有磁性，因此应计算岩体引起的干扰异常。最后，由实测异常减去已知矿体和岩体异常，得出剩余异常，又经选择法计算后布钻验证见矿。

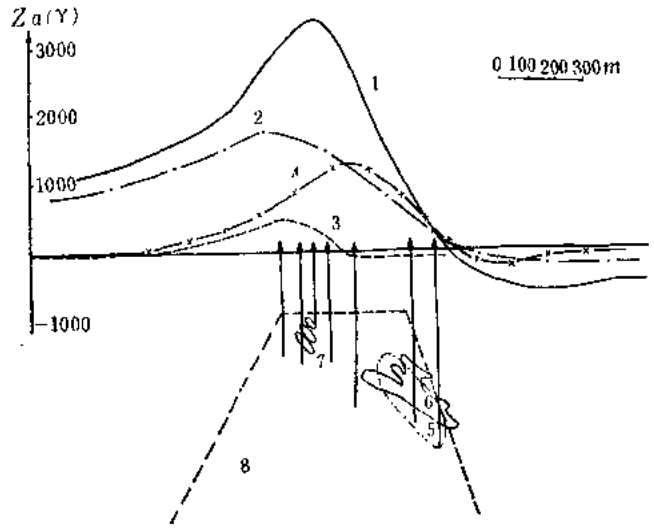


图 8.4.1　某矿体上的剩余磁异常解释

1—实测Z_a；2—岩体引起的Z_a；3—已知矿体的Z_a；4—剩余Z_a异常；5—推断盲矿体；6—验证见到的矿体；7—已知小矿体；8—岩体

3．已知磁性体的异常要计算准确

由于剩余异常等于实测异常减去已知磁性体的异常，因此已知磁性体异常计算是否准确，将直接影响剩余异常的准确度和可靠性。要使已知磁性体的异常计算准确，必须保证已知磁性体的断面形状较真实地反映已知矿体的实际，并选用正确的计算公式和方法；要正确地选用磁化强度的大小和方向。

例如，华东某铁矿磁异常，如图8.4.2。第一次计算时，矿体磁性参量未经退磁改正，选用$\kappa=0.1$CGSM，$J_r=0.012$CGSM，$\boldsymbol{J}_r$方向如图所示，计算结果在异常负值部位出现较大的剩余异常，进而推断有图中虚线所示的盲矿体存在。经钻探验证，进尺 450 米未见矿体，说明以上计算存在问题。对标本磁参数进行退 磁改正 后，选用 $\kappa=0.27$CGSM，$J_r=0.031$CGSM，并对矿体按三轴椭球体作退磁改正后，$\boldsymbol{J}_r$方向如图8.4.3所示。这样计算所得已知矿体的理论异常与实测异常基本吻合，见图 8.4.3。由此可见，对强 磁性矿体，不仅要对标本磁性测定结果作退磁改正，还应对矿体进行退磁改正，特别是层状矿体更应注意。

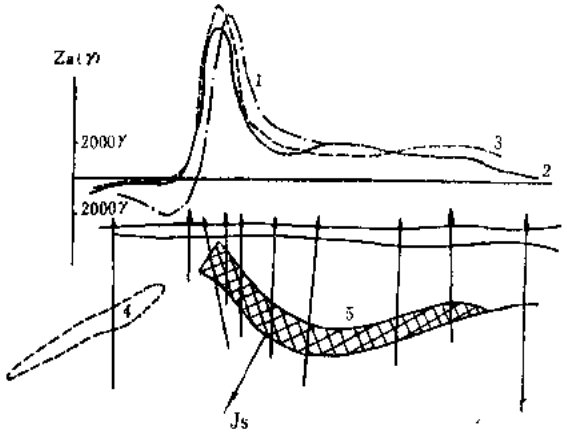


图 8.4.2 磁化方向不对时的解释结果

1—已知矿体的Z_a；2—实测Z_a；3—理论$Z_a(1+4)$；4—推断矿体；5—已知矿体。

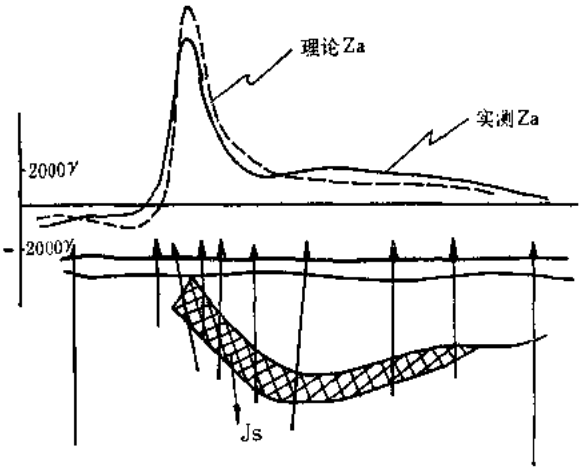


图 8.4.3 磁化方向正确时已知矿体的Z_a理论曲线

另外，钻孔间矿体连接情况不同，也会使剩余异常过大或过小。由于已知磁性体往往分布于浅部，其磁异常强度较大，故浅部已知磁性体的异常计算不准确，会给异常的进一步解释造成较大误差。

§8.5 应 用 实 例

如前所述，磁法在各种比例尺的地质填图、构造研究、铁矿床的普查与勘探以及其它矿产的普查中，都得到广泛应用并取得明显地质效果。应用磁法取得地质效果的物理前提条件是：

（1）探测对象（或其标志）与围岩具有明显的磁性差异；

（2）探测对象（或其标志）具有一定的相对规模（相对于埋深），它可产生可以被测出的磁异常；

（3）与探测对象无关的干扰因素产生的干扰异常与探测对象产生的异常相比，应足够弱或具有明显的特征，可以被分辨或消除。

满足上述条件取得地质效果的实例很多，有些已经编入《航空磁测与地面物探异常见矿实例》第一和第二集。下面仅介绍几个解释和找矿实例。

8.5.1 一个重磁异常解释推断实例

1．异常概况及地质任务

M-142异常位于某前震旦系沉积变质铁矿成矿区的南部覆盖区。1956年地面磁测发现该异常。后为航空磁测证实其存在，并将其编为M-142异常，1973—1975年，在异常区又进行了1:1万磁法及重力面积测量。1973年底在西部Ⅰ号异常中心打了第一个孔，证实异常由磁铁矿所引起，并发现有次生风化淋滤型富铁矿的迹象。

地质上提出的任务是：对异常作出远景评价；进一步提供矿体的空间分布情况，以指导钻探工程的布置；希望找到次生风化淋滤型富矿并指出其成矿有利位置。

2．重磁异常的处理及其解释

（1）迭加异常的区分

由图8.5.1可见，异常由东、西两部分组成，分别为Ⅰ、Ⅱ号异常，走向都近南北向，用常规二度体反演方法计算，东部异常源埋深在500米以下，西部异常源埋深约300米。东、西二异常间存在局部畸变(Ⅲ号异常)，使Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ三个异常之间关系面目不清。

万分之一布伽重力异常与磁异常图的特征不同。由于有区域场迭加近似为一个整体异常，如图8.5.2。

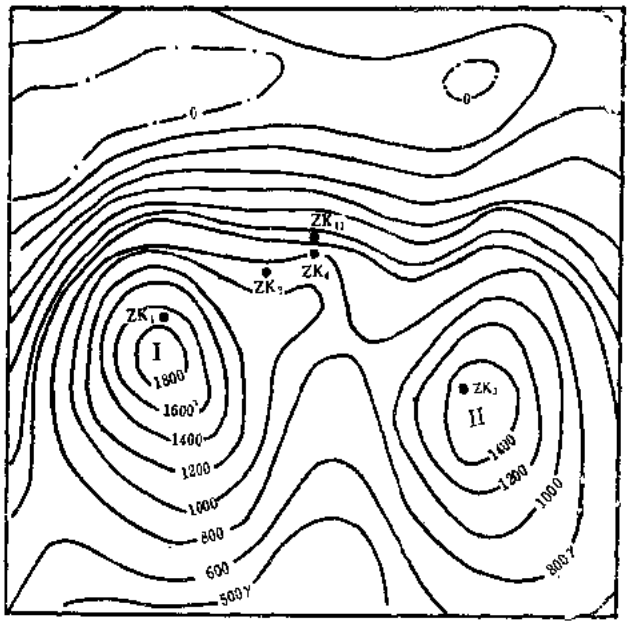


图 8.5.1 M-142磁异常Z_a平面图（单位：γ）

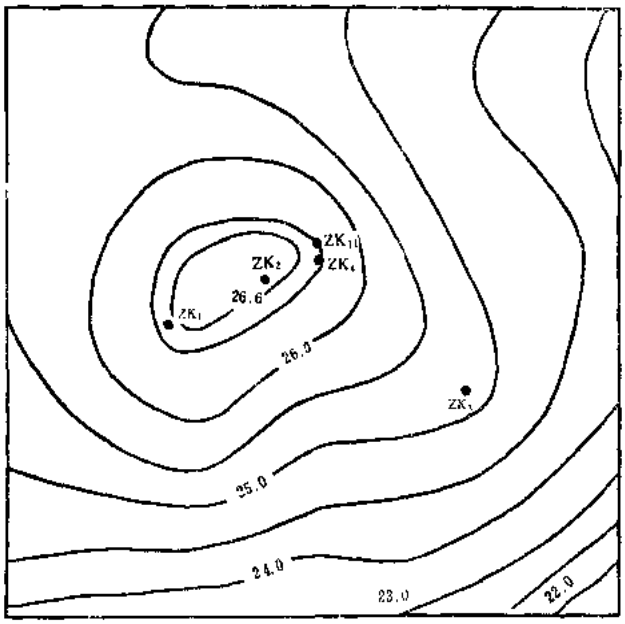


图 8.5.2 M-142布伽重力异常图（单位：mgl）

为了区分迭加异常，对Z_a异常采用积分插值法向下延拓；对布伽重力异常采用圆周法进行区域场校正，用艾勒金斯公式计算垂向二阶导数。图8.5.3是下延300米的Z_a平面等值线图，图8.5.4是$R=600$米的剩余重力异常图，二阶导数图的形态与该图类似。

以上处理，起到了如下作用：

(A)区分了迭加异常，突出了局部异常

由图 8.5.3 可以看出，下延后两个局部异常明显分离，形态特征更为清晰。东、西异常间的Ⅲ号异常明显存在，幅值在 2000γ以上。

对重力异常进行区域场校正后，也相应突出了局部异常，并且也是由三个异常所组成。

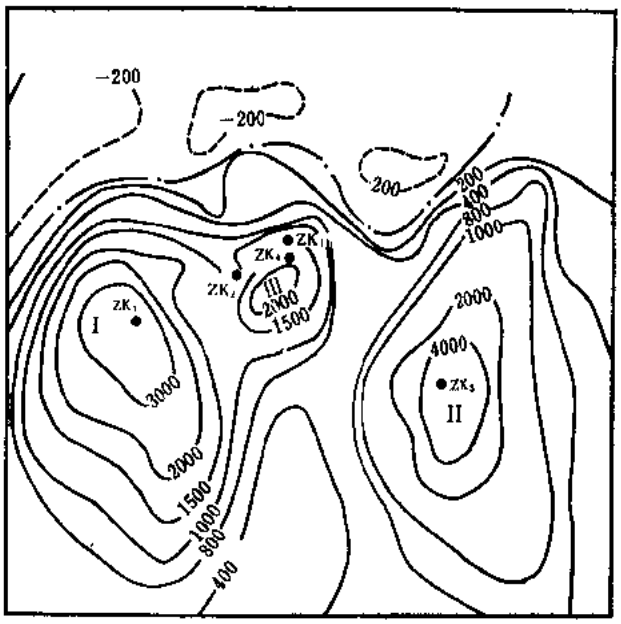


图 8.5.3 Z_a下延300米平面等值线图（单位：γ）

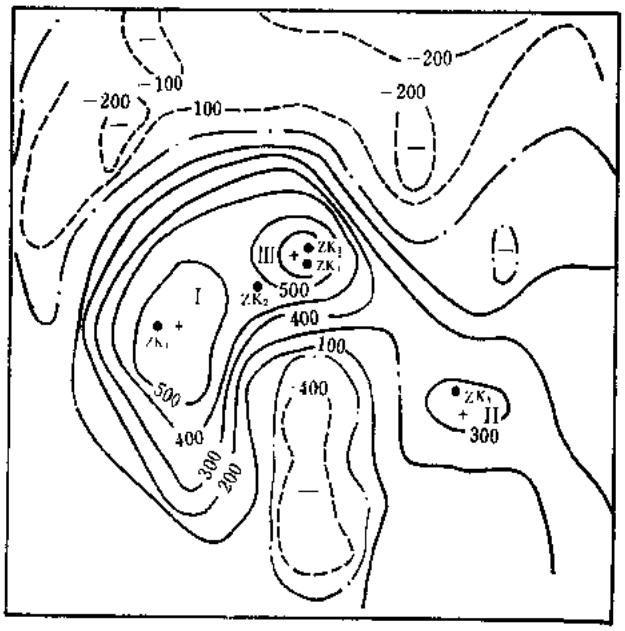


图 8.5.4 重力剩余异常平面图($R=600$米)（单位：10^{-5}mgl）

(*B*)三个重、磁局部异常的存在，说明可能存在三个矿体。三个局部异常的形态、位置、重磁结果大体是一致的。但是，Ⅲ号磁异常的幅值比Ⅰ、Ⅱ号磁异常小；而Ⅲ号重力异常的幅值却比Ⅰ、Ⅱ号重力异常大。Ⅲ号重磁异常的幅值特点是否由强磁性、高密度的磁铁矿和弱磁性、高密度的赤铁矿综合体所引起，是值得重视的。

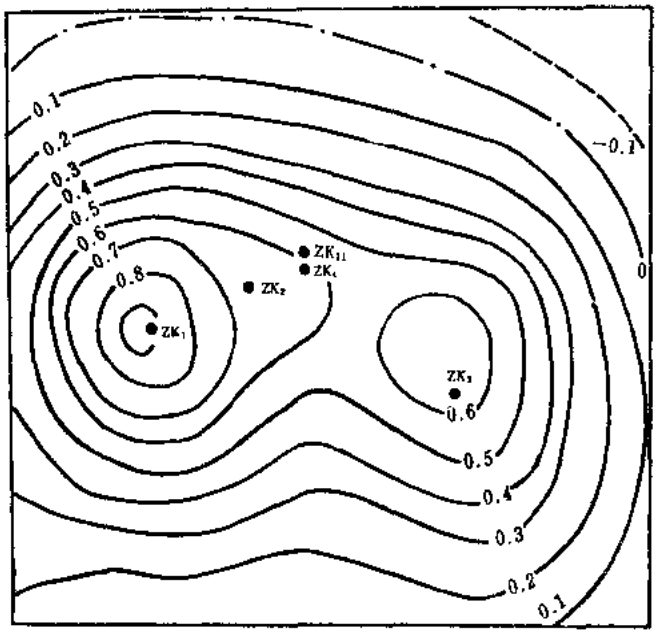


图 8.5.5 磁源重力异常平面图（单位：mgl）

（2）重磁异常性质的进一步判断

为了研究和解释Ⅲ号重、磁异常幅值之间的矛盾，鉴别异常性质，将斜磁化Z_a异常化为垂直磁化$Z_{a\perp}$，并计算了磁源重力异常$\Delta g(M)$，如图8.5.5所示。

将剩余异常图和磁源重力异常图相对比，可以看出，Ⅰ、Ⅱ号异常均有明显反映，而Ⅲ号异常在两种图上表现出不同特点，Ⅲ号异常在磁源重力图上仅表现为局部畸变。这表明：Ⅰ、Ⅱ号异常，重、磁基本是同源的，主要为强磁性磁铁矿所引起；而Ⅲ号重力局部异常，可能主要是由弱磁性或无磁性的赤铁矿引起，与之对应的Z_a下延300米局部磁异常，可能为赤铁矿下部有原生磁铁矿存在，因为埋深大，相对规模小，在地面Z_a异常图上无明显反映。

为将强磁性高密度磁铁矿体和弱磁性高密度赤铁矿体所引起的迭加重力异常分离开，试用了由布格重力异常减掉磁源重力异常的方法，以此法求出无磁源剩余异常，并计算其二阶导数，以突出无磁源重力局部异常，见图8.5.6，由图可见，已明显地消除了强磁性高密度体的异常。在Ⅰ、Ⅱ号异常处，无磁性源布格重力异常及二次导数异常基本上无显示，而Ⅲ号异常则有明显的无磁性源布格重力异常和二阶导数异常。这进一步说明了上述推断的可靠性。

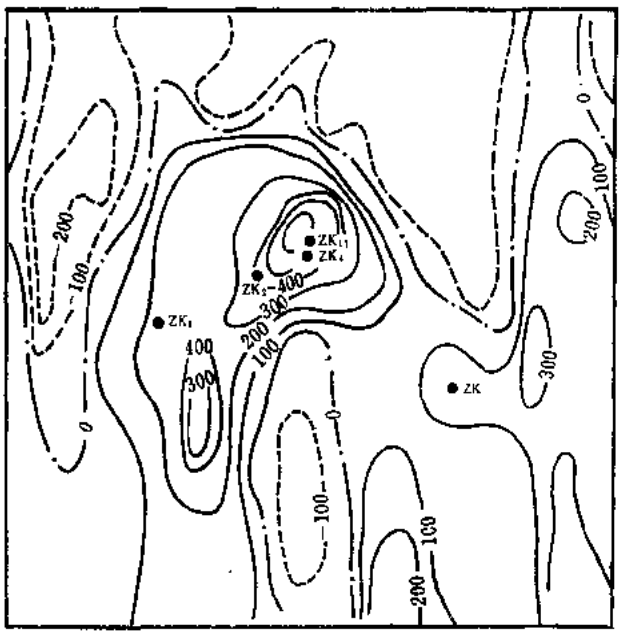


图 8.5.6 M-142无磁性源重力垂向二次导数平面图
(r=400米，单位：10^{-6}CGSM)

（3）最优化选择法对磁铁矿空间分布状态的推断

在用特征点法等反演方法给出初始值的基础上，采用直立长方体组合模型的最优化选择法，对地面Z_a异常进行反演拟合。考虑到矿体可能存在的分带性，使矿体近似为15个长方体所组成。图8.5.7是矿体分布的反演结果。h为矿体上顶埋深，H为垂直厚度。这些推断矿体的理论Z_a等值线与实测Z_a等值线的形态和幅度都相近。

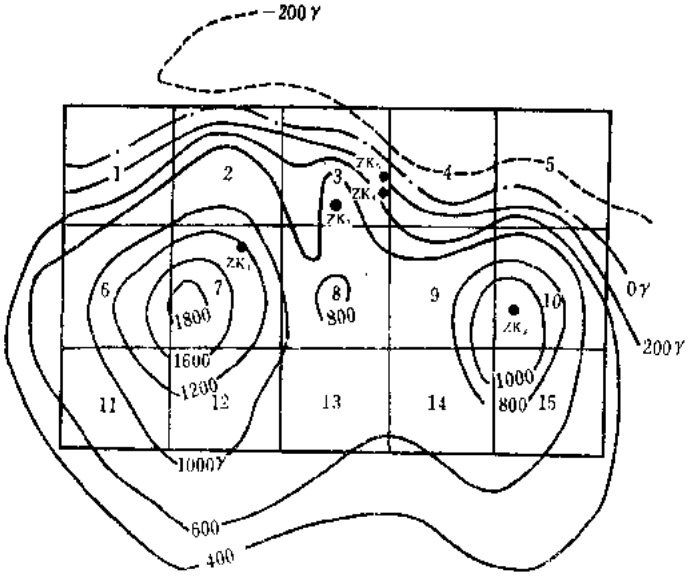


图 8.5.7 M-142最优化选择法解释结果（单位：γ）

编号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
h(m)	876	213	532	814	437	469	245	438	992	502	584	1027	547	662	1534
H(m)	27	20	81	0	4	54	42	27	161	59	11	>220	14	0	>200

从推断矿体的分布变化来看，似有三个矿带显示，其位置对应三个局部异常，且东、西矿体均为北浅南深，东浅西深，表明矿体可能倾向南西；沿走向方向又向南东倾伏，东、南部矿体埋深突然变大，可能为断层破坏、矿体下落的结果。

（4）解释推断的主要结论及验证情况

综合上述对重磁异常的处理、解释和推断，得出的主要地质结论为：M-142磁异常至少为三个深部磁铁矿体所引起，矿体规模大。本区重力局部异常由强磁性磁铁矿与弱磁性风化红铁矿所引起；Ⅰ、Ⅱ号异常由磁铁矿引起，Ⅲ号异常主要为风化红铁矿所引起。

验证结果：

(*A*)在分布于Ⅲ号异常区 8 个已竣工的钻孔均见到了风化壳型赤铁矿。全铁品位在50%左右，在其下部也见到了厚度不等的磁铁矿层。

(*B*)以2、3、4、11号孔见矿情况为例：

2 号孔位于最优化选择法推断的第3、8两个长方体之间，据计算结果，应在 500 米以下见64米厚的磁铁矿体，实际验证在433米至753米之间见赤铁矿，厚为70米，磁铁矿为54米。

3号孔位于9、10两个长方体之间，推断应在700米左右见110米磁铁矿体，实际验证在600米—785米间见22米赤铁矿和85米磁铁矿。

4号孔和11号孔位于第三、四两个长方体之间，推断应在650米左右见40米左右的磁铁矿体，实际验证在600米以下平均见磁铁矿82米。

可见，M-142重磁异常的处理和解释，初步得到了较好的结果。同时说明，合理选择重磁异常的处理和解释方法，充分利用异常的各种信息，对于提高磁异常解释推断的地质效果是十分重要的。

8.5.2 寻找非铁矿种的实例

除铁矿外，磁法在寻找与磁铁矿或磁黄铁矿相共生的铜矿、铜镍矿和多金属矿、与基性、超基性岩脉有成因关系的石棉矿以及圈定超基性岩体进一步寻找铬铁矿，圈定金伯利岩筒、岩脉或岩墙进一步找金刚石，以至划分燃烧煤层的边界等方面，都有不少成功的实例，下面简略地介绍几个。

1．用磁法间接寻找石棉矿的例子

图8.5.8所示为辽宁某地石棉矿区的磁异常平面等值线图和剖面平面图。

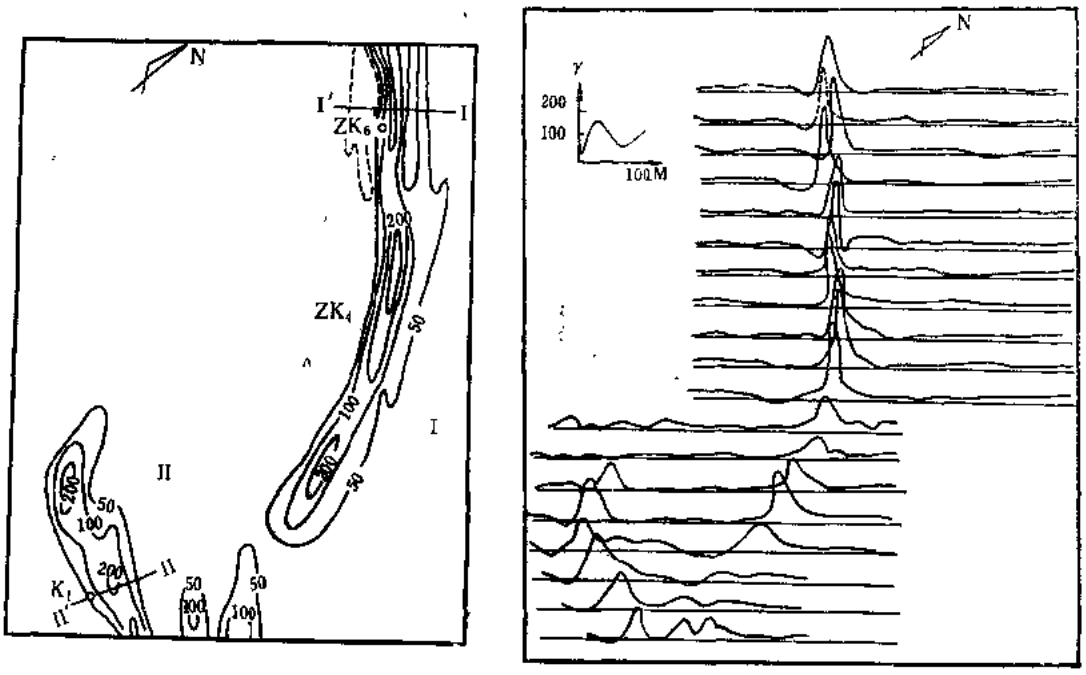


图 8.5.8 辽宁某石棉矿区磁异常平面等值线图和剖面平面图

已知该区为辉绿岩与围岩（灰岩）的中温热液交代型蛇纹石石棉矿。石棉产于辉绿岩下盘与灰岩接触面上，矿体产状与辉绿岩体一致。在已知矿段上磁异常走向与辉绿岩体一致，异常强度在150 γ—300 γ，异常呈狭长带状，梯度较大。根据定量计算和钻探结果，本区辉绿岩体顶部埋深一般为10—30米。

根据岩矿石标本磁性测定结果，本区有三种有磁性的岩石，即辉绿岩、夹赤铁矿层的板岩、含铁石英岩；其它岩石的磁性均很弱。辉绿岩的κ一般为1000×10^{-6}CGSM，J_r一般为400×10^{-6}CGSM；夹赤铁矿层板岩κ一般为200×10^{-6}CGSM，J_r为400×10^{-6}CGSM；含铁石英岩的κ和J_r一般均为100×10^{-6}CGSM。

根据已知情况，物探人员经解释推断后认为：不仅Ⅰ号异常为已知辉绿岩体沿南北方向延伸引起，Ⅱ号异常也是由辉绿岩引起的。其推断的依据是：

(*A*)Ⅱ号异常强度在200γ以上，沿走向异常变化较为稳定，异常梯度和形态与已知岩体的异常相似。

(*B*)本区只有辉绿岩和夹赤铁矿层板岩能引起200γ以上的磁异常。根据地质资料，Ⅰ区南部全为泥质板岩、泥灰岩、硅质板岩；夹赤铁矿层的板岩主要分布于Ⅰ区北部、西北部。

(*C*)Ⅰ区南部构造复杂，Ⅱ号异常走向的变化为断层错动所致。

经地质钻探验证，证实了物探人员的推断。

2．寻找铬铁矿的例子

铬铁矿产于超基性岩中，而超基性岩有较强的磁性，因而用磁法可以成功地圈定超基性岩体。但能否从中区分出矿体异常，要看矿体与超基性岩有无明显的磁性差异。如有差异，就可使用磁法，并以其磁性差异所引起的磁场变化特征，作为找铬铁矿的标志。

如云南某地，铬铁矿产于浅变质的矽质粉砂岩、泥质板岩、千枚岩中，矿体均远离母岩 50—500 米以上，铬铁矿石主要为隐晶质致密块状，具有较强的磁性，$J_i=1000\times10^{-6}$ CGSM，$J_r=20000\times10^{-6}$CGSM，而围岩——浅变质岩的磁性很弱。因此，在铬铁矿上有200—400γ的磁异常，最大正负异常峰值可达1000γ以上，见图 8.5.9。

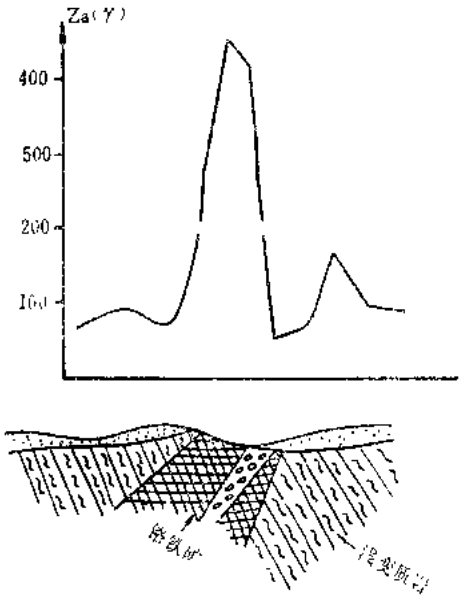


图 8.5.9　云南某地铬铁矿区磁异常示意图

在该区根据磁异常找矿，见矿率达50%以上。有时铬铁矿体上也会出现相对的磁力低现象。

3．寻找金刚石矿的例子

与金刚石有关的金伯利岩，是一种超浅成侵入的超基性岩。金伯利岩一般有两种产出形态，一种是岩筒（或岩管），另一种是岩脉。其地面投影规模（直径或宽度），从几米到几百米。岩石结构特点常见有角砾状岩石和块状岩石两种，前者多含有围岩碎屑，磁性变化较大，后者的磁性较强。用磁法寻找金刚石矿，实际就是寻找金刚石的原生矿床即金伯利岩。

如辽宁某地，ΔZ异常均与金伯利岩管相对应，如图8.5.10所示。通过磁异常圈定金伯利岩管，达到了间接找金刚石的目的。

当金伯利岩与围岩没有明显磁性差异时，也可能出现金伯利岩的磁异常没有明显的识别特征以区别于围岩磁异常的情况。

以上几个实例说明，不论是金属矿还是非金属矿，只要存在应用磁法的物理前提，都能取得明显的地质效果。我们认为，目前磁法在地质填图和普查非铁矿种方面，其作用还远远没有完全发挥出来。

由以上几个例子和国内外经验可知，磁法在普查非铁矿种时，常可起到间接找矿和填

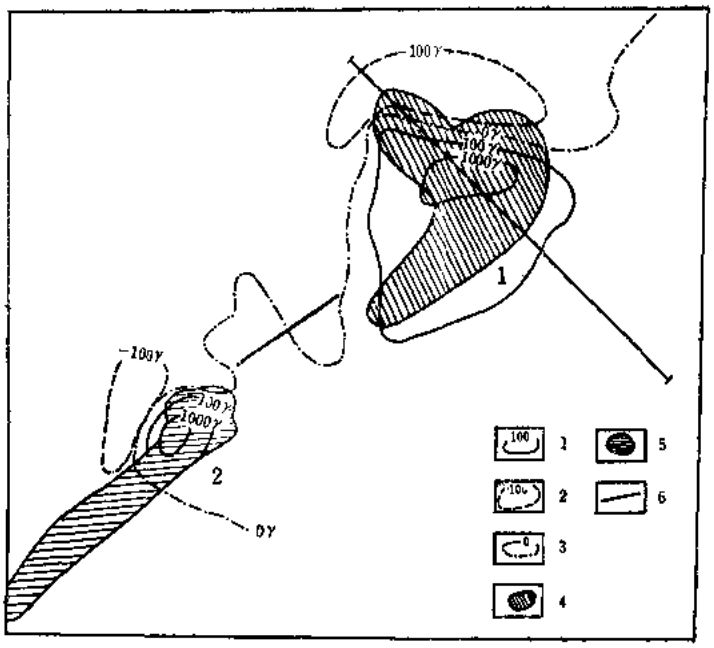


图 8.5.10　辽宁某地1,2号岩管上ΔZ异常示意图

1—正等值线；2—负等值线；3—零等值线；4—金伯利岩管及编号；5—含矿碎屑金伯利岩；6—金伯利岩脉

图的作用。对此，以后应多加注意。

另外，由于磁测精度和网度的关系，以往我们对范围小，强度弱的异常研究不够；而这些异常可能与某些地质现象有关系，如微磁测量可用以进行浅部岩石的地质学-岩石学的研究。关于这方面的研究，无疑会扩大磁法的应用范围。

主要参考文献

1. 武汉地质学院、成都地质学院、河北地质学院、合肥工大合编：应用地球物理学——磁法教程，地质出版社，1980年。
2. 长春地质学院磁法教研室：磁法勘探，地质出版社，1979年。
3. 成都地质学院：磁法勘探，地质出版社，1976年。
4. 重磁资料数据处理问题，地质出版社，1977年。
5. 地面磁测资料解释推断手册，地质出版社，1979年。
6. 熊光楚：金属矿区磁异常的解释推断，地质出版社，1981年。
7. 傅承义编著：地球十讲，科学出版社，1976年。
8. 安振昌编著：地球基本磁场，《地震地磁观测与研究》编辑部出版，1982年。
9. 中国地磁图，中国科学院地球物理研究所，1982年。
10. 北京地质仪器厂：机械式磁力仪，地质出版社，1976年。
11. 范师美等：垂直磁力仪底座东西不水平不影响读数吗？《物探与化探》1982年第2期。
12. 王延权等：定向水平磁力仪及水平向量磁异常测量，地质出版社，1980年。
13. 褚圣麟：原子物理学，人民教育出版社，1979年。
14. 地质部：地面磁测工作规范，中国工业出版社，1964年。
15. 国家地质总局：地面磁测工作规范，地质出版社，1978年。
16. 地质矿产部：物化探测量工作规范，地质出版社，1981年。
17. 长春地质学院测量教研室：物探测量，地质出版社，1978年。
18. 费业泰：误差理论与数据处理，机械工业出版社，1981年。
19. 地质部：地球物理、地球化学探矿中绘图工作规范，中国工业出版社，1964年。
20. 国家地质总局航空物探大队：航空磁力和放射性测量工作规范（试行稿），1975年。
21. 黄国祥：评岩矿石标本磁化强度矢量的统计整理方法，中南矿冶学院，1978年。
22. 陈天与、吴锡生：数学地质方法，吉林人民出版社，1980年。
23. 黄树棠、顾学新：地球物理与地球化学探矿研究报告文集(二)，中国工业出版社，1964年。
24. 朱英：两度体磁异常的规格化问题，《物探与化探》1980年第1期。
25. 武汉地质学院：磁异常矢量强度解释方法，1973年。
26. 杨文采等：重磁异常频率域解释的理论和方法，《物化探研究报导》2，1978年。
27. 谢靖：物探数据处理的数学方法（下册），地质出版社，1981年。
28. 薛琴访：场论，地质出版社，1978年。
29. 南京工学院：工程数学　数学物理方程与特殊函数，人民教育出版社，1978年。
30. 奕文贵：关于地球物理中几个不适定问题的连续依赖性，《地球物理学报》1980年第4期。
31. 奕文贵等：重、磁场解析延拓中的一些问题，《地球物理学报》1983年第1期。
32. 云南省地质局物探大队，《云南物化探》，1974年第2期。
33. 桂林冶金地质研究所：磁法寻找矽卡岩型磁铁矿经验汇编，1972年。
34. 长春地质学院：重力勘探，地质出版社，1980年。
35. 黄树棠：二度磁异常的地形改正方法，《地球物理学报》15卷1期，1966年。
36. 雷林源：保角映射在换算重磁观测资料中的某些应用，《地球物理学报》14卷1期，1965。
37. 《地质计算技术》，1980年第1期，地质部北京计算中心出版。
38. 〔日〕永田武著，丁鸿佳译：岩石磁学，地质出版社，1959年。
39. F. D. Stacey著，中国科技大学地球物理教研室译：地球物理学，地震出版社，1981年。
40. 〔苏〕Б. М. 扬诺夫斯基著，陈志强译：地磁学，地质出版社，1959年。
41. 〔苏〕Б. М. 扬诺夫斯基著，刘洪学、周姚秀译：地磁学，地质出版社，1982年。
42. P. V. 莎玛著，王彭铭等译：地质学研究中的地球物理方法，地质出版社，1983年。
43. 〔美〕C. B. 奥菲塞著，王子昌等译：理论地球物理学引论，科学出版社，1980年。

44. 〔日〕义井胤景：磁工学，国防工业出版社，1977年。

45. 〔美〕W. M. 特尔福德等，吴荣祥译：应用地球物理学，地质出版社，1982年。

46. 〔苏〕希洛夫：最小二乘法，测绘出版社，1955年。

47. 〔日〕渡部晖彦等著：海洋地球物理，科学出版社，1980年。

48. 〔苏〕A. A. 罗加乔夫，吴荣祥译：磁法勘探教程，中国工业出版社，1965年。

49. 曾佩伟等译：地球物理勘探专集，第六辑，中国工业出版社，1964年。

50. H. K. 斯图帕克等：将二度体的磁力和重力异常化到同水平，《物化探快报》，1964年。

51. 〔苏〕A. A. 罗加乔夫著，邵梦林等译：磁法勘探在地质工作中的应用，地质出版社，1982年。

52. S. Chapman and Bertels: Geomagnetism, second edition, 1951.

53. A. A. Kaufman and G. V. Keller: The Magnetotelluric Sounding Method, 1981.

54. Takesi Nagata: Rock Magnetism, 1961.

55. D. S. Parasnis: Principles of Applied Geophysics, 1979.

56. D. H. Griffiths and R. F. King: Applied Geophysics for Geologists and Engineers, 1981.

57. R. G. Henderson: Geophysics, Vol. 25, №. 3, 1960.

58. А. А. Логачев: Магниторазведка, 1978.

59. З. А. Крутиховская, Б. Н. Завойский, С. М. Подолянко, Б. Я. Савенко: Намагниченность пород железорудных формаций Большого Кривого Рога и КМА, 1964.

60. К. С. Бураков: Термомагнитометр, Физика земли, №5, 1977.

61. В. Н. Страхов: Приклад. геофиз., вып. 27, 1960. 2.

62. В. Н. Страхов: Приклад. геофиз., вып. 31, 1961. 2.

63. С. В. Шалаев: Приклад. геофиз., вып. 33, 1962. 2.

64. Е. Н. Симоненко: Вопросы разведочной геофизики, С. О. АН СССР, вып. 1, 1960.

65. В. Е. Никитский и Ю. С. Глебовский: Магниторазведка, издательство «Недра», 1980.