高等土力学

目录

第一章　土工试验及测试

第二章　土的本构关系

第三章　土的强度

第四章　土中水与土的渗透及其计算

第五章　土体的压缩与固结

第六章　土工数值分析（一）土体稳定的极限平衡和极限分析

第七章　土工有限单元法分析（二）----渗流、应力应变和固结计算

第一章　土工试验及测试

由于土的力学性质的复杂多变，土工试验是土力学中的基本内容，试验土力学成为土力学的一个重要分支。另一方面，由于现场原状土的结构性，土工问题的诸多影响因素使现场原位测试和工程原型监测成为工程实践中不可缺少的一部分。

广义的土工试验包括室内试验、原位测试、模型试验和原位监测等；从内容上又可分为物理性质试验、力学性质试验和水力学性质试验；也可以从宏观和微观不同尺度进行试验和测试。本章侧重于土的力学性质试验。

土工试验的不可替代的作用表现在：

1. 只有通过试验才能揭示土作为一种碎散多相的地质材料的一般的和特有的力学性质。
2. 只有对具体土样的试验，才能揭示不同类型、不同产地、不同状态土的不同力学性质，如：非饱和土、区域性土、人工复合土等。
3. 试验是确定各种理论参数的基本手段。
4. 试验是验证各种理论的正确性及实用性的主要手段。
5. 足尺试验、模型试验可以验证土力学理论与数值计算结果的合理性；也是认识和解决实际工程问题的重要手段。
6. 原位测试、原位监测直接为土木工程服务。同时是数值计算的反算和实现信息化施工的依据。

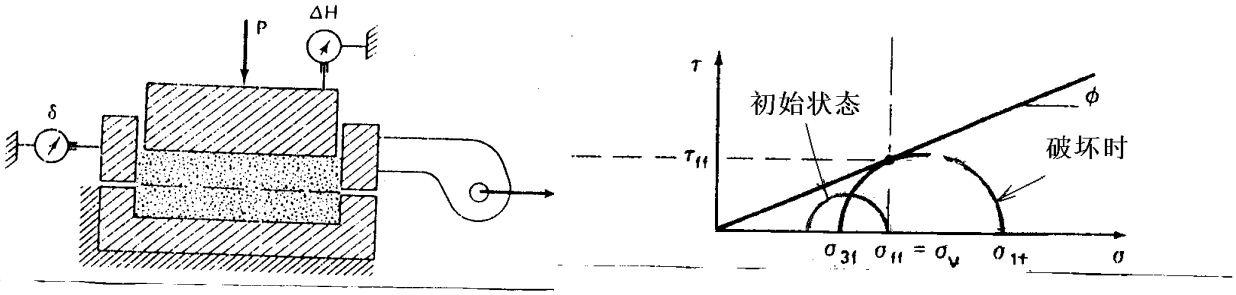
所以，土力学的研究和土工实践从来不能脱离土工实验工作，它是人们深入认识土的性状和发展完善理论和计算方法的正确途径。

1.1　室内试验

1.1.1　直剪试验、单剪试验和环剪试验

早期的土力学研究及解决与土有关的工程问题是将土的强度问题和变形问题分开考虑的。相应的试验仪器是直剪仪和侧限压缩仪。

直剪仪是土力学中最古老的仪器之一，200 多年前，库仑（Coulomb）就用它进行土的强度试验，建立了土强度的库仑公式。其示意图见图 1.1.1（a）。其试验设备和原理十分简单：试样放在剪切盒中，它在一水平面上被分为上、下盒，一半固定，另一半或推或拉以产生水平位移。上部通过刚性加载帽施加正的竖向荷载 P。试验过程中竖向荷载一般不变，可量测水平向剪切荷载、水平位

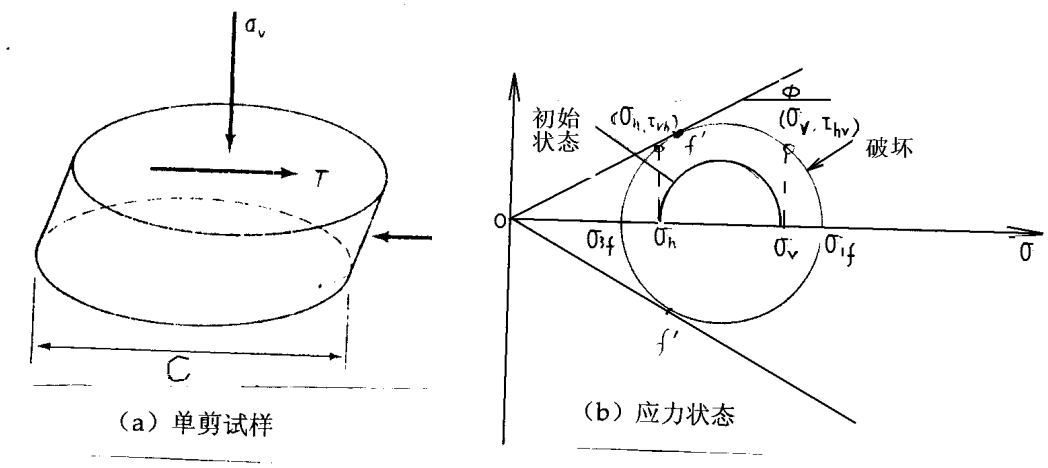


（a）仪器简图　　（b）剪切面处土应力状态变化

移和试样垂直变形。根据剪切面的面积，可计算出剪切面上的正应力σ_v和剪应力τ。从破坏时的σ_v与τ_f间关系可确定土的强度包线。

但这种试验的破坏面(即剪切面)是人为确定的，试样中的应力和应变不均匀且十分复杂，试样内各点应力状态及应力路径不同。在剪切面附近土单元上的主应力大小是变化的，方向是旋转的。在初始状态，剪切面土单元与试验中其它单元一样是K_0应力状态，即$\sigma_3=K_0\sigma_v=K_0\sigma_1$。在剪切破坏时，剪切面附近土单元主应力大小和方向决定于强度包线，其应力状态见图 1.1.1（b)。由初始应力莫尔圆i变化到破坏时与强度包线相切的莫尔圆f，但破坏面上正应力$\sigma_v=\sigma_{1i}$一直未变。

直剪仪直观、简便、经济，尤其对于砂土和渗透系数 $k<10^{-7}$cm/s 的粘性土能很快得到试验结果，但也有上述缺点。针对其应力应变不均匀，边界上存在应力集中等问题，人们对它进行了一些改进。单剪仪（Simple shear apparatus）就是一种代表性仪器，见图 1.1.2。它四周用一系列环形圈代替刚性盒，因而没有明显的应力应变不均匀，试样内所加的应力被认为是纯剪。在图 1.1.2（b）中，加载过程中竖直应力σ_v和水平应力σ_h保持常数，τ_{vh}（τ_{hv}）不断增加。应力莫尔圆圆心不变，其直径逐渐扩大，直至与强度包线相切。值得注意的是其水平面（σ_v，τ_{hv}）和竖直面（σ_h，τ_{vh}）都不是破坏面，f′和 f″代表破坏面的应力大小和方向。这种仪器可以做动静剪切试验，有很多明显的有优点。另一种室内剪切仪器是环剪仪（Torsional or ring shear apparatus）,由于试样是环状的，所以剪切面的面积总不变，它特别适用于量测大应变后土的残余强度或终极强度，在这种情况下，它可以用一个试样完成几种正应力下的剪切试验。仪器简图见图 1.1.3。



(a)单剪试样 (b)应力状态

图 1.1.2　单剪试验

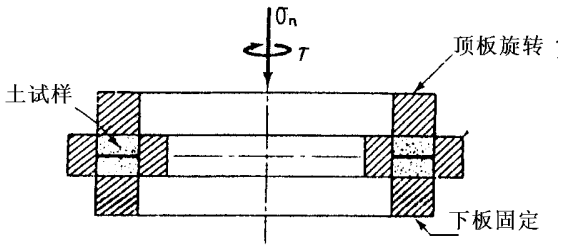


图 1.1.3 环剪仪简图

这一类剪切试验也常被用来进行不同材料间的剪切特性。比如：土与混凝土或钢材；土与土工合成材料及不同土料之间接触面特性的试验。用以研究接触面特性并确定有关强度和变形参数。

1.1.2　侧限压缩试验

也称单向压缩试验，仪器简图见图 1.1.4。它所确定的应力应变关系曲线一般表为曲线 $e-p$，e 为孔隙比，p 为施加的竖向压力（kPa）。由于试样应力状态总是 $\sigma_3/\sigma_1=K_0$,所以不会发生破坏。这种试验的结果通常只需用一个参数(压缩模量 E_s 或压缩系数 a)就可表示。所以它用于建立在弹性理论基础上的地基沉降计算的分层总和法。不能用以揭示土的应力－应变－强度关系的全过程及一般的土体受力变形的特性。但它目前依然是土力学试验应用最多的试验之一。它的另一个用途是在固结试验中确定试验压缩与时间关系，用以确定粘性土的固结系数 c_v。

1.1.3　三轴试验

1930 年卡蘧格兰德（A.Casagrande）研究用圆柱形试样的压缩代替直剪仪以确定土的强度指标，这就成了目前广泛使用的三轴仪和三轴试验。它可以完整地反映试样受力变形直到破坏的全过

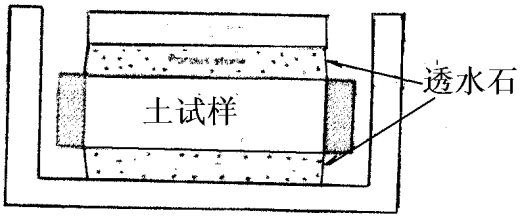


图 1.1.4 侧限压缩试验

程。因而既可作强度试验；也可作应力应变关系试验。它可以模拟不同工况；也可很好地控制排水条件；并且可以进行一些不同应力路径的试验。三轴试验中试样应力状态明确；应变量测简单可靠；可较容易判断试样的破坏；操作比较简单。这样，三轴仪成为土力学实验室中不可缺少的仪器。

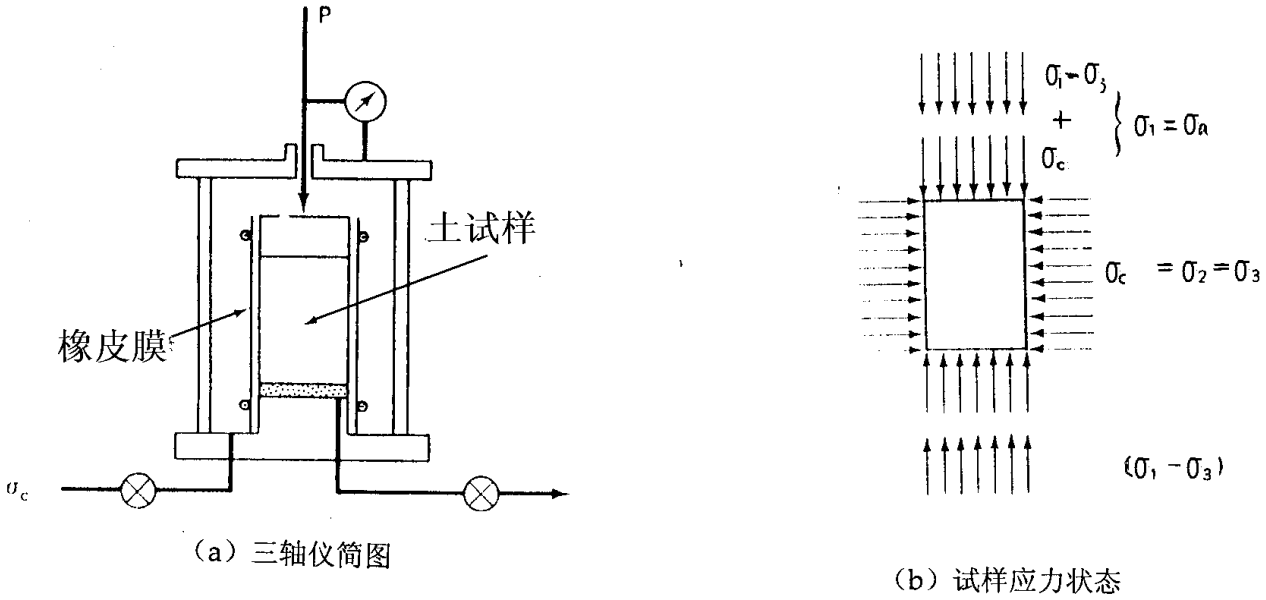
后来，又发展了进行土的动力试验的动三轴仪；进行高应力水平的高压三轴仪；对粗颗粒土进行试验的大型三轴仪以及进行非饱和土试验的非饱和土三轴仪等。另外，随着量测和控制方面传感

器的精度的提高，各种数据的自动采集，应力路径和应变路径的自动控制和对软岩和硬土试验的微应变量测等各种试验技术及设备也在不断发展。

1. 三轴仪及几种不同应力路径的三轴试验

图 1.1.5 表示的是三轴仪及其试样的应力状态。试样被橡皮膜包裹放在压力室中的压力水中，对于饱和试样，排水试验中可通过接通试样的排水管量测试样的体积变化；在不排水试验中可通过孔压传感器量测试样中的孔隙水压力。当首先施加室压（围压）σ_c时，则试样为各向等压应力状态，即$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$；随后通过活塞施加轴压，则在轴向产生偏差应力$\sigma_1-\sigma_3$，设$\sigma_1=\sigma_a$，$\sigma_a$为总轴向应力。

当轴向加载活塞与试样帽间有拉挂装置时，轴向应力可为小主应力，即$\sigma_a=\sigma_3$，$\sigma_1-\sigma_3<0$。



（a）三轴仪简图　　（b）试样应力状态

图 1.1.5 三轴试验

按一定规律变化室压σ_c和轴向应力σ_a，用三轴仪可以完成不同应力路径的试验。通常有如图 1.1.6 所示的几种应力路径，当然也有其它应力路径或上述各应力路径的组合。也有控制不同应变路径的三轴试验。对于所有的三轴试验，试样受到的三个主应力总有两个是相等的。所以常用平均主应力 p 和广义剪应力 q 表示。在图 1.1.8 中

$$p=1/3(\sigma a+2\sigma c) \tag{1.1.1}$$

$$q=(\sigma a-\sigma c) \tag{1.1.2}$$

在一般应力状态下，为了表示中主应力的大小，常用另外两个参数表示：

$$b=(\sigma_2-\sigma_3)/(\sigma_1-\sigma_3) \tag{1.1.3}$$

$$tg\theta=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{2b-1}{\sqrt{3}} \tag{1.1.4}$$

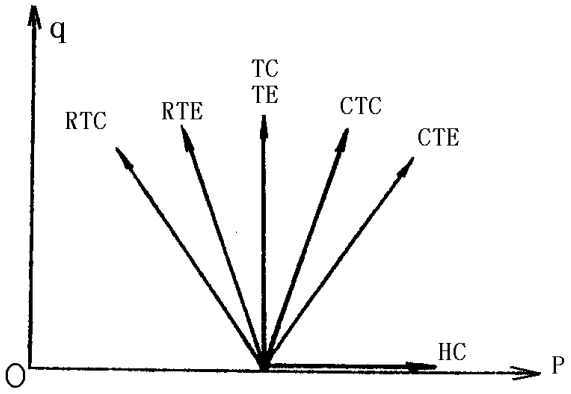


图 1.1.6 几种三轴试验的应力路径

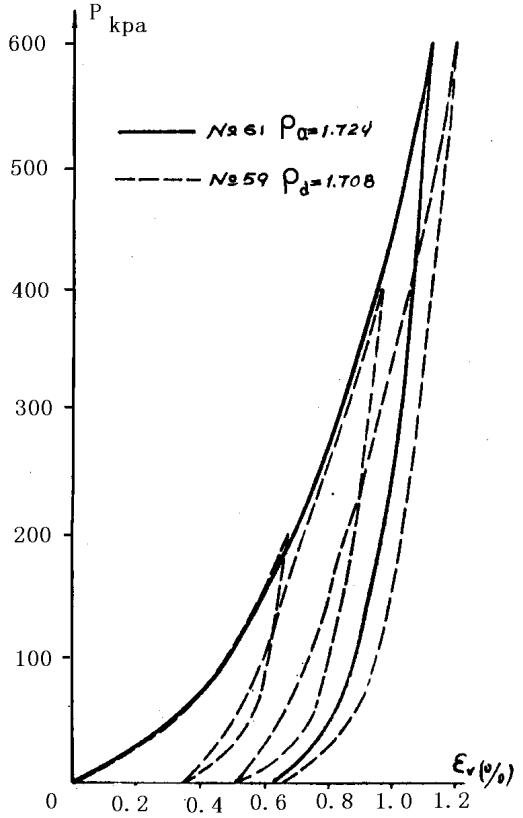


图 1.1.7 中密承德砂在各向等压下

$p \sim \varepsilon_v$ 关系曲线

(1)　各向等压（静水压缩）（HC，Hydrostatic compression）试验

在这种试验中，在三轴压力室中用静水压力通过橡皮膜向试样施加室压σ_c。这时试样应力状态为$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma_c$。不断增加室压，同时量测试样的体积变化。在承德中密砂上进行的静水压缩试验结果见图 1.1.7。

可见这种试验中随着围压$\sigma_c=p$的增加，同样应力增量引起的体应变增量越来越小，这是由于土逐渐被压密的结果，常被称为土的压硬性。在卸载时试样发生回弹，再加载的曲线并不完全与卸载曲线重合，产生滞回圈。当进行不排水试验时，可量测试样孔压，试样孔压与施加室压之比$\Delta u/\Delta\sigma_c$就是孔压系数 B，B 的大小表示土的饱和程度。

(2)　常规三轴压缩（CTC:Conventional triaxial compression）试验

有时也简称为三轴试验。在这种试验中，一般试样是首先等向固结（HC）到一定围压σ_c，然后保持σ_c不变，增加轴向应力直至破坏。试验中$b=0$或$\theta=-30°$。

(3)　常规三轴伸长（CTE:Conventional Triaxial Extension）试验

在这种试验中，试样一般首先被等向固结，然后在保持轴向应力σ_a不变的情况下，逐渐增加室压使$\sigma_c=\sigma_1=\sigma_2$，$\sigma_a=\sigma_3$,试样被挤长，所以有时也被称为“挤长试验”。这种试验中，轴向加载活塞与试样帽之间要有一定连接。尽管试样帽上部施加的是拉力，但试样帽下部受压，实际上σ_a仍然是正值。在试验中，b=1.0 或$\theta=30^o$。

(4)　平均主应力 p 为常数的三轴压缩（TC:Triaxial compression）和三轴伸长（TE:Triaxial extension）试验。

由于保持平均主应力 p=常数，所以在 TC 试验中轴向为大主应力$\sigma_a=\sigma_1$,在σ_a增加同时，围压σ_c减少：$\Delta\sigma_c=-\Delta\sigma_a/2$。从而使 p 保持不变（见式 1.1.1）。最后试样被压缩而破坏。在这种试验中$\theta=-30^o$或 b=0。

在 TE 试验中，轴向应力$\sigma_a=\sigma_3$为小主应力，在减小轴向应力的同时，增加室压σ_c，使$\Delta\sigma_a=-2\Delta\sigma_c$，使 P 保持不变。试样被挤长，最后伸长破坏。试验中$\theta=30^o$或 b=1.0。

(5)　减压的三轴压缩（RTC：Reduced triaxial compression）试验

试样一般首先在一定应力状态下被固结。试验中轴向应力为大主应力$\sigma_a=\sigma_1$，并保持不变，围压σ_c逐渐减小，即$\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3=\Delta\sigma_c<0$。试样由于围压减小而被轴向压缩，对于粘土，当初始$\sigma_c$足够大时，试样可被压缩破坏。对于砂土则与初始围压大小无关，都会发生减压压缩破坏。试验中$\theta=-30^o$或 b=0。

(6)　减载的三轴伸长（RTE：Reduced triaxial extension）试验

试样首先在σ_c下等向压缩固结，然后保持室压σ_c不变，轴向σ_a减小，即$\Delta\sigma_3 = \Delta\sigma_a < 0$，$\Delta\sigma_1 = \Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_c = 0$，试样被轴向伸长，可达到破坏。由于室压不变，试样伸长，所以这种试验也被称为三轴伸长试验。这时$\theta = 30^o$或$b = 1.0$。当$\sigma_3 < 0$时，试样中实际上存在拉应力，可引起拉伸破坏。

(7)　等比加载（PL:Proportional loading ）试验

用三轴试验可进行等比加载压缩试验。一般情况是：$\sigma_a / \sigma_c = \Delta\sigma_a / \Delta\sigma_c = k$，其中 k 一般为不小于 1.0 的常数。等比加载试验中最普遍的是静水压缩试验（HC，k=1.0）和k_a固结试验（$k = 1/k_0$）。在这类试验中，试样总是加载压缩（$\Delta\varepsilon_v > 0$）和卸载回弹（$\Delta\varepsilon_v < 0$）的。

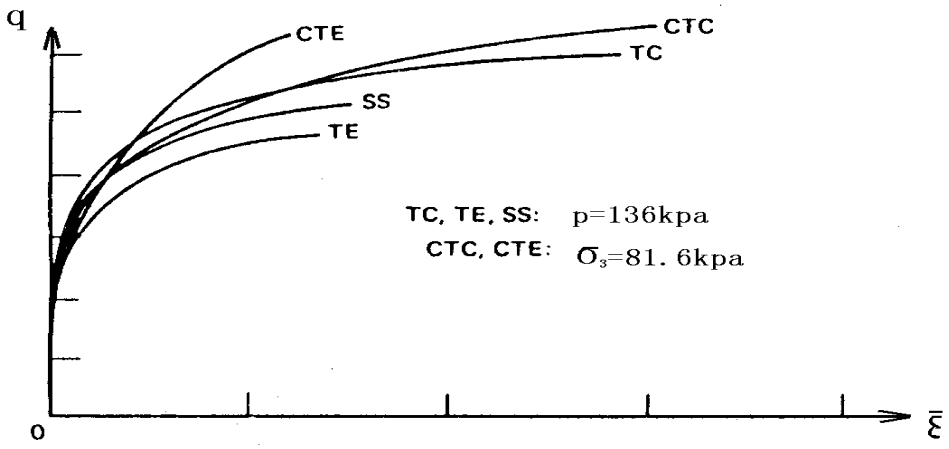


图 1.1.8 不同应力路径三轴试验

各种三轴试验的应力路径见图 1.1.8，各应力状态特性见表 1-1。

表 1-1 不同应力路径的三轴试验应力特点（加载时）

试验 特性	HC	CTC	CTE	TC	TE	RTC	RTE	PL
名称	静水压缩 (各向等压)	常规三 轴压缩	常规三轴 伸长(挤 长)	三轴压缩 (p=c)	三轴伸长 (p=c)	减压三轴 压缩	减压三轴 伸长	三轴等比 试验
主要应 力特点	三个主应 力相等	围压不 变	轴向应力 不变	平均主应 力不变	平均主应 力不变	轴向应力 不变	围压不变	常应力比 $\sigma_a/\sigma_c=k$
σ_1	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$
σ_2	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$\sigma_c=\sigma_1/k$
σ_3	$=\sigma_c$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$=\sigma_c$	$=\sigma_a$	$\sigma_c=\sigma_1/k$
$\Delta\sigma_1$	>0	>0	>0	>0	>0	=0	=0	>0
$\Delta\sigma_2$	>0	=0	>0	$=-\Delta\sigma_1/2$	>0	<0	=0	$\Delta\sigma_1/k$
$\Delta\sigma_3$	>0	=0	=0	$=-\Delta\sigma_1/2$	$-2\Delta\sigma_1$	<0	<0	$\Delta\sigma_1/k$
Δp	>0	>0	>0	=0	=0	<0	<0	>0
$b(\theta)$	/	0(-30°)	1(30°)	0(-30°)	1(30°)	0(-30°)	1(30°)	0(-30°)

2. 三轴试验的一些问题

尽管三轴试验应力状态比较简单，边界影响也不是很严重，但仍存在一些问题。

(1) 边界条件的影响

由于顶帽和底座与试样间的摩擦力，使试样两端存在剪应力，从而形成对试样的附加约束，这样在压缩试验中试样破坏时呈鼓形而拉伸试验时试样呈腰鼓形（颈缩）。这使试样中应力、应变不均匀，同时使周围压力σ_c变化。有人对此进行专门研究和采用滚珠、润滑来消除端部约束。改变顶帽和底座形状消除变形不均匀。另一个约束来自于橡皮膜对试验的约束，它也等于增加了室压σ_c。另外，当进行很小室压三轴试验时，试样与顶帽的自重，压力室静水压力加压活塞的自重及它与活塞轴套间摩擦等因素的影响也都应考虑。像制样时过度拉伸橡皮膜，也可产生对试样的附加轴向应力；砂土制样施加真空增加有效围压。

(2) 关于体应变及孔压量测

对于饱和土试样的排水试验，可通过与试样连通的量水管量测试样体积变化。而对于非饱和土，可以通过量测压力室的体积变化（扣除加压活塞移动引起的体积变化）。这时，一般压力室分为内外两室，充满相同压力的水，量测内筒内体积的变化可推算试样体积的变化。

对于粗粒土，压力室的压力水会使橡皮膜嵌入试样表面，形成麻面，亦即膜嵌入的影响（Membrane penetration）。对于均匀的粗粒土，在室压变化情况下，它对试验的体变量测影响很大，使量测的试样体积压缩量放大了。这一影响与试样的密度、颗粒尺寸和形状及土的级配有关；与膜厚度和模量有关；也与室压σ_c的变化有关。人们力图用不同方法率定或消除这一影响。对于常规三

轴排水试验，由于室压 $\sigma_c = \sigma_3'$ 是不变化的，所以它对剪切过程中试验体积量测影响不大。但对于三轴不排水试验，因为其有效围压随孔压变化而变化，它对量测的孔压有较大影响。

图 1.1.9(a)表示在试样固结之后情况，其中阴影的部分表示的是膜嵌入造成的附加的体积压缩。由于膜嵌入，使量测的体变比实际体变大。图 1.1.9（b）则表示在施加偏差应力 $\sigma_1 - \sigma_3$ 之后，试样内产生正孔压 Δu，作用在膜上的有效围压为 $\sigma_3' = \sigma_c - \Delta u$，与图(a)相比，则膜嵌入深度减少了（即膜向后回弹），这就意味着试样发生膨胀，骨架的这种膨胀趋势使量测的孔压 Δu 变小。所以膜嵌入一般使量测的正孔压偏小。反之在试样发生较强烈剪胀性的情况，会使量测的负孔压加大（绝对值减小）。

为减小三轴试验的误差，人们采用了各种措施来消除或者量测以率定以上的影响。

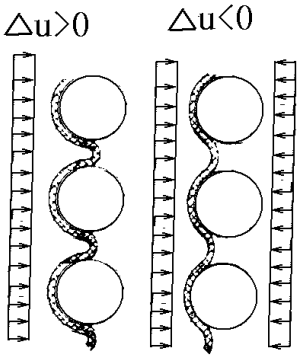
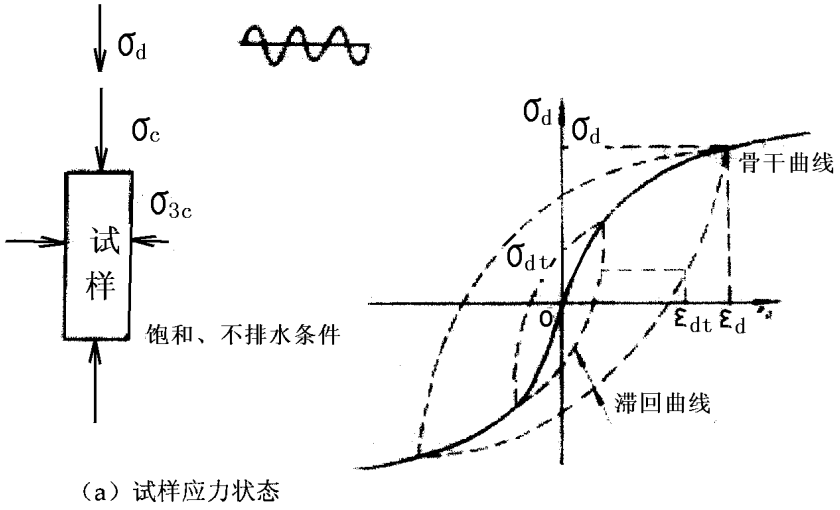


图 1.1.9 膜嵌入对孔压量测的影响

3. 动三轴试验

为了模拟循环加载情况下土的动力特性，人们在常规静三轴仪基础上，在轴向增加激振系统。其激振方式有电磁力、气（液）压力、惯性力等。后来发展可以在轴压和室压两向分别激振。动三轴试样的应力状态和典型试验曲线见图 1.1.10。用这种试验可从确定土的动模量、阻尼比、动强度和确定饱和土的抗液化剪应力等。



（a）试样应力状态

图 1.1.10 动三轴试验

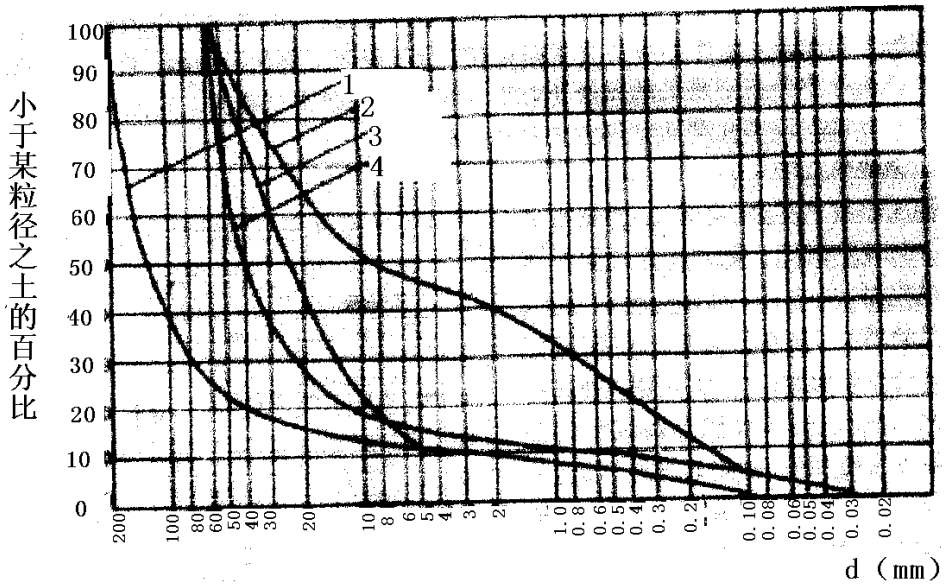
4. 大型高压三轴仪

近年来在深覆盖层上的高土石坝发展很快，尤其大型混凝土面板堆石坝应用广泛。这种坝型对于坝体的变形十分敏感，其数值计算需要用三轴试验确定堆石料的模型参数。这种坝料最大粒径可达一米以上，并且由于最大坝高可为 200 米或更高，因而需要大型高压的三轴仪。根据研究三轴试样的直径应大于最大粒径 4－6 倍。即 $d_{\max}=(\frac{1}{4}-\frac{1}{6})D$，$D$ 为试样直径。这样需要试样直径达几米的三轴仪。目前这么大三轴仪是不现实的。我国的大型三轴仪试样直径有 300mm、600mm 和 700mm。最大室压 σ_3 达到几 MPa。

这种三轴试验的关键问题是如何模拟原型料。通常采用的方法有：

1. 相似模拟。它是将原型粒的每一粒组按固定的比例缩小若干倍，保持与原型料几何相似。使最大粒径为试样直径的 1/5 左右。其缺点是常会将堆石料变成砂砾料，甚至将粗粒土变成细粒土。
2. 剔除法。是将大于 $d_{\max}$ 部分的土料剔除掉。而把剩余的部分作为试验材料。一般只有超过 $d_{\max}$ 的粒径所占比例很小时（小于 10%）才使用此法。
3. 替代法。亦称等量替代法。它是以 $d_{\max}$ 以下的一定范围的粒组按比例等量替代超过 $d_{\max}$ 的部分。它保持了细粒土的含量不变。
4. 混合法。可将以上方法混合使用。

图 1.1.11 是对某种原型料用三种方法进行模拟得到的级配曲线。用不同方法模拟的土料一般较难达到堆石坝的现场密度。常需用相对密度来模拟。



1.原型料 2..剔除法 3.替代法 4.相似法

图 1.1.11 几种模拟方法的级配曲线

5. 量测、采集与控制

随着电子技术的发展，各种精确的量测传感元件、数据传送和采集以及控制软件在三轴试验中得到广泛应用。量测的精度大大提高；数据采集实现了自动化；并且可以按设定的应力路径或应变路径实现试验的自动化。

尤冈文夫（F.Tatsuoka）对于软岩和硬土试样的三轴试验采用在压力室内量测试样变形的方法。如图 1.1.12 所示。由于这类试验本身变形很小，尤其是在应力循环时，要求量测应变范围达 0.005%(0.00005)这样的微应变。他们采用在压力室内量测轴向荷载，用一对局部变形传感器（LDT,Local deformation transducers）在试样侧面直接量测轴向应变。这样就消除了试样端部的影响，图 1.1.13 表示的是用 LDT 和在压力室外量测轴向变形的不同结果，(a)、(b)、(c)、(d) 分别表示不同应变范围。这是软泥岩试样的三轴固结不排水试验。由于透水石和试样端部间的相互作用，使端部变形占很大比例且表现为卸载时的塑性变形。而用 LDT 量测在小应变时加载－卸载－再加载时几乎是完全弹性的。

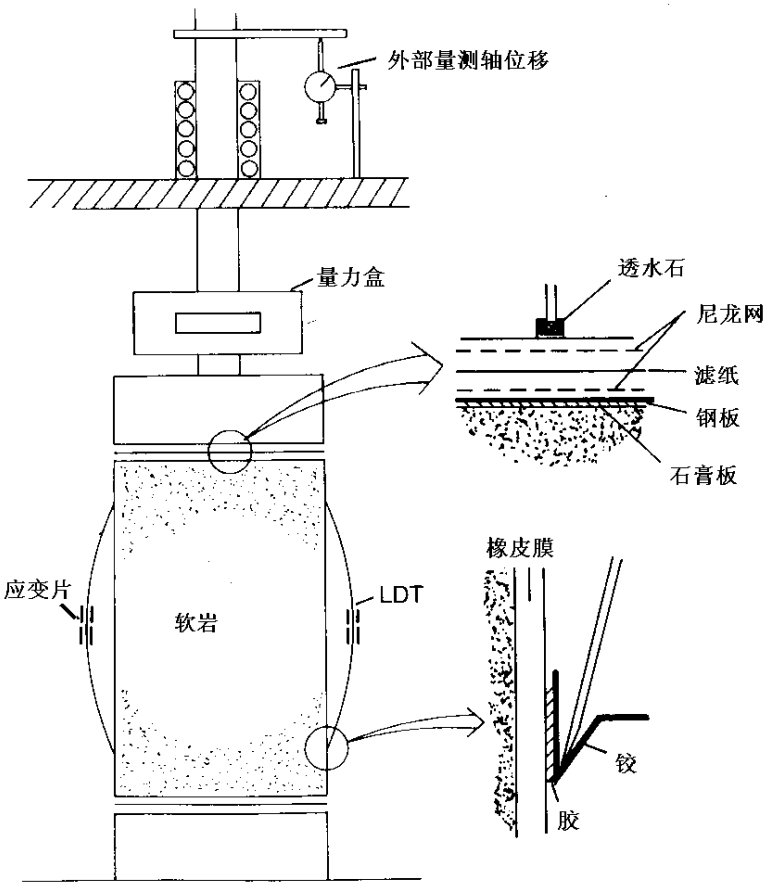
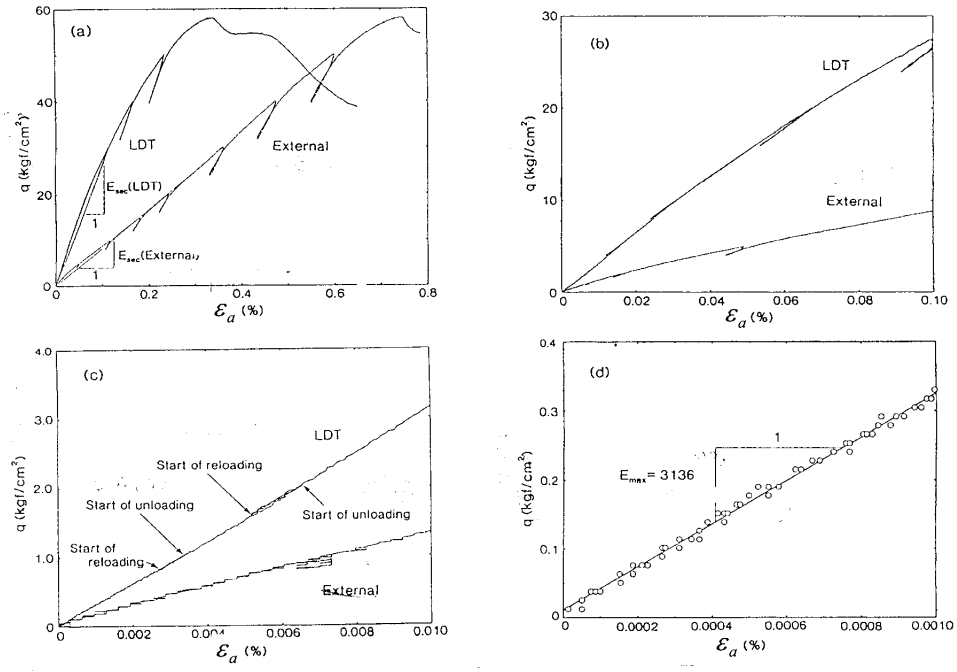


图 1.1.12 三轴压缩试验的量测方法



（a）ε_a：0～0.8%　（b）ε_a：0～0.1　（c）ε_a：0～0.01　（d）ε_a：0～0.001

图 1.1.13 软岩上固结不排水三轴试验中不同量测方法的应力应变关系

1.1.4　真三轴试验

在上述的三轴试验中，其根本的不足是其中有两个主应力总是相等的。从三轴仪面世以来，人们就力图实现“真正”的三个主应力可以实现独立变化的试验，亦即真三轴试验。早在 1936 年，克捷曼（Kjellman）就设计过六块刚性板在三个方向独立施加主应力的仪器，但仪器本身的复杂性及各方面的相互干扰使其没有得到广泛的应用。早期的真三轴试验主要是用于研究中主应力对土的强度的影响，尤其是侧重于对平面应变条件下的变形和强度特性的研究，所以相对来讲边界干扰并不是十分关键的问题。随着土的本构关系理论的发展，人们更加迫切要求实现更复杂的应力路径，以更加系统、全面、深入地揭示土的应力应变强度关系；另外也借助于复杂应力路径来验证本构模型，以检验它们的适用的普遍性，从而大大推动更精细的真三轴仪的研制和高水平的试验技巧的发展。目前的真三轴仪可以分为两大系列；改造的真三轴仪与盒式的真三轴仪。

早期人们为了变化中主应力σ_2，很自然地想到在原三轴压力室中将试样改成长方体，并安装一对侧向压力板施加σ_2。其特点是试样有一对面是暴露在压力室中，优点是减少这个方向上与其他两方向边界间的干扰；也比较容易形成和观察到如剪切面等破坏形式。缺点是三个方向并不能完全“独立”地施加大、中、小主应力。一般讲露在压力室中的面作用的是小主应力，即使在轴向可以施加拉力，压力室中暴露的面上也不能作用大主应力。这样很难进行如应力路径在π平的 6 个角域中自由变化的真三轴试验，使试验应力路径受到限制。

图 1.1.14 表示的是劳（Lo）等人设计的真三轴仪，它是在压力室中加入一对复合水平加压板。试样尺寸为$140mm\times80mm\times80mm$。测向加压板是一对柔性囊，内部有一尺寸稍小的刚性金属板紧压在试样表面。这样既避免了与上下边界间相互干扰，也使得试样变形较为均匀，在这一对侧面没有暴露的间隙。

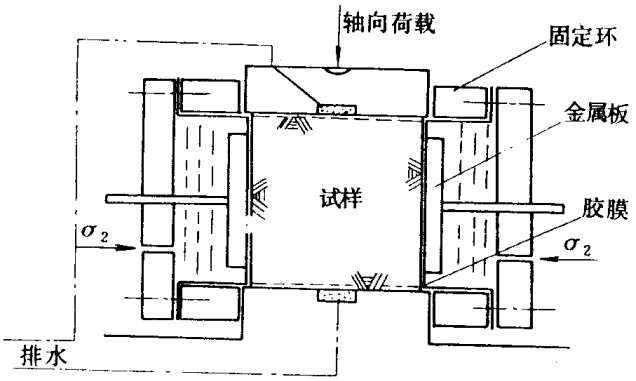


图 1.1.14 劳（Lo）等人设计的真三轴仪

莱特（Lade）和邓肯（Duncan）所研制的真三轴仪也是这种系列的真三轴仪，见图 1.1.15。试样尺寸为 76×76×76mm 的立方体，在压力室中有一对侧压力板。它是由软木和不锈钢片互层组成。其中软木是易于压缩的，并且泊松比接近为 0。这对侧向水平加压板通过滚轮安装在刚性框架上，框架分两部分，上部分固定在竖向加压杆上，下部分与底座固定。这样在竖向加压时，加载杆通过刚架对侧向板与试样同步加压，尽可能减少了板与试样间摩擦和加载装置间的干扰。半刚性的侧向加压板也减少了试样的应力分布不均匀。

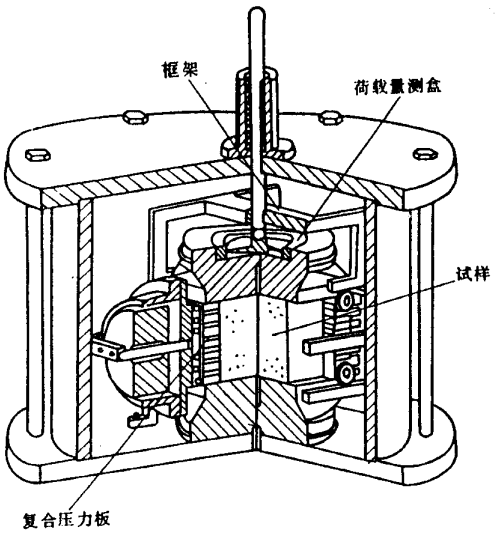


图 1.1.15 莱特（Lode）和邓肯（Duncan）的真三轴仪简图

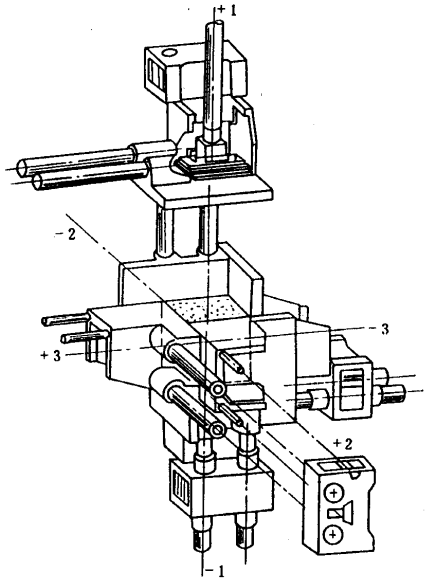


图 1.1.16 卡尔斯鲁厄大学所使用的真三轴仪的加载和导向系统图

盒式真三轴仪是在立方体（或长方体）试样上的三个方向上设置三个独立的加载系统，从而形成一个立方体的“盒”。其加载系统的边界可以是刚性的，可以是柔性的，也可以是混合的。其中最具代表性的是 60 年代英国剑桥大学亨勃雷（Hambly）及皮阿斯（Pearce）设计和发展的剑桥式真三轴仪。它历经修改、完善成为进行土的复杂应力路径试验的著名的仪器。其工作

原理见图 1.1.16。试样初始形状为一 100×100×100mm 的立方体，它被放在刚性板之中。试验中试样的六个面都被刚性板覆盖。加压刚性板为三对互相垂直的加压杆所驱动，可以是应力控制，也可以是应变控制。允许每边在 60mm～130mm 间变化。由于采用了有效的润滑，大大减少了板与试样间摩擦力，使试样上的剪应力合力只为正应力合力的 2%左右，基本上可认为其边界上作用的是主应力。所以它也可用于砂土试验。

这种仪器的优点是很显著的：可以在三个方向上独立施加主应力，并且大、中、小主应力可以在三个方向自由转换，可作到大约 30%的均匀应变而不会使边界互相干扰；并且已基本实现控制和数据采集自动化。但它的刚性边界容易造成应力分布不均匀；刚性加压板对于破坏时试样剪切带的形成和观察都会有干扰和影响。

真三轴仪常被用来进行在π平面上不同应力路径的试验。比如 p＝常数，同时不同 b(θ)保持常数的试验；平面应变试验；在不同方向制样以研究土的各向异性；在π平面上应力路径急剧转折的试验。其中以在π平面使半径 σ_{oct} 不变，应力路径为圆周的试验最有代表性。图 1.1.17 表示的是正常固结粘土圆周应力路径和相应应变路径。可见应力路径与应变路径形状不同；当应力回归到原来出发点时，应变并未回归到原点。目前用真三轴试验进行原状土试验困难较大。

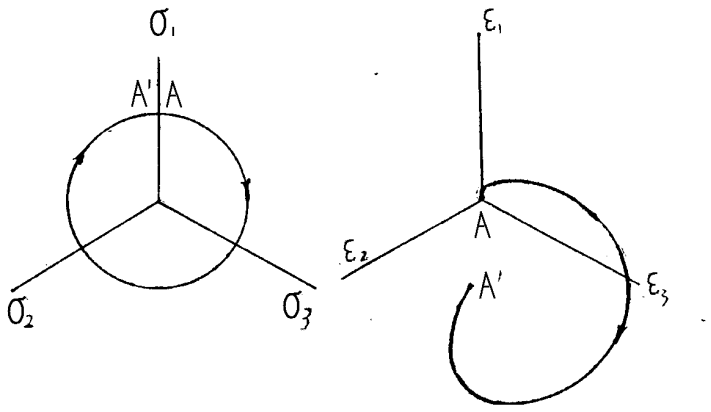
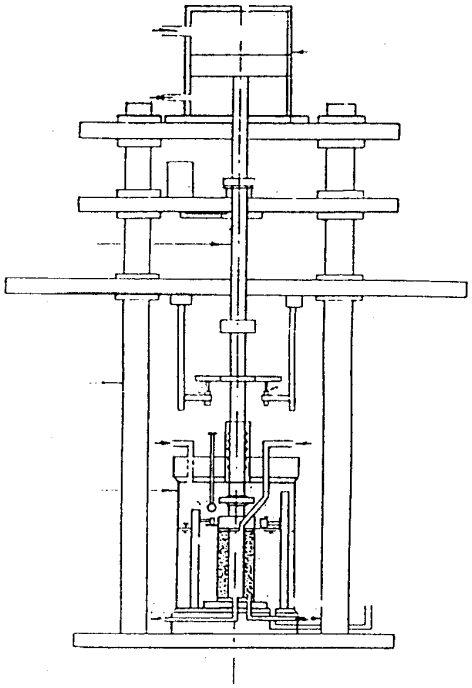


图 1.1.17 正常固结粘土的真三轴试验

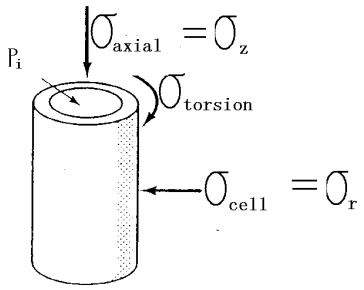
在π平面上试验曲线

1.1.5　空心圆柱扭剪试验和方向剪切试验

为了全面地揭示土的应力应变关系特性，需要独立变化 6 个应力分量并量测相应的 6 个应变分量；或者独立变化三个主应力并能任意改变它们的方向。可惜目前还没有这样“完全”的试验设备。人们为了研究主应力方向旋转情况下土的力学特点，发展了空心圆柱扭剪仪和方向扭剪仪。空心圆柱扭剪仪在独立施加内、外压，施加轴向荷载及扭矩时，可以变化 σ_r，σ_θ，σ_z 和 $\tau_{z\vartheta}$ 四个应力变量。亦即可以独立变化三个主应力的大小和在一个方向变化主应力方向，从而实现主应力方向的旋转。因而是研究主应力旋转对土应力应变关系影响的很有用的仪器。图 1.1.18 是这种仪器的简图和试样受力的状态，在主应力不旋转时，它可以与真三轴仪一样作不同应力路径的真三轴试验。



（a）仪器简图

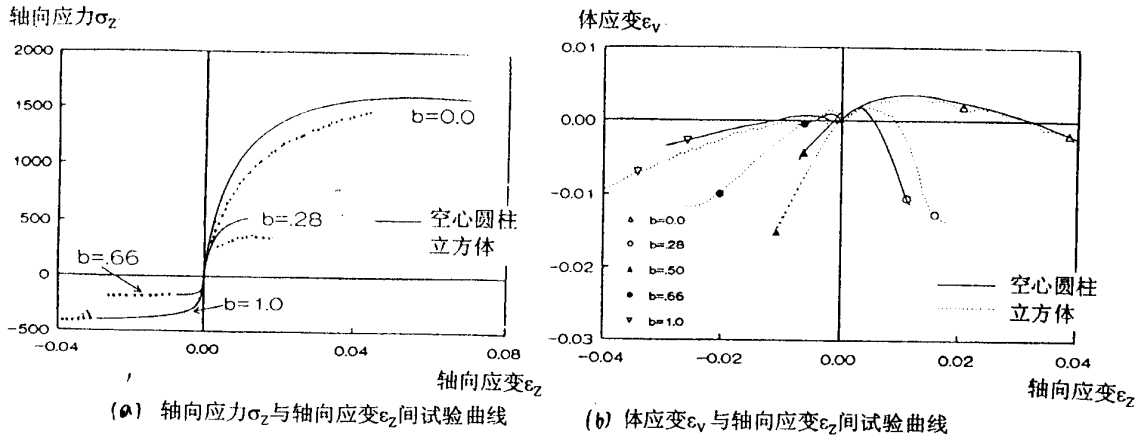


（b）试样应力状态

图 1.1.18 空心圆柱扭剪仪试验

这种仪器也有一些缺点。首先是空心圆柱试样沿径向其应力是不均匀的，只有试样的厚度与直径相比很薄时，这种不均匀性才可以忽略。在两端施加扭矩时，为了不使试样帽与试样间滑动，常需要有一些齿嵌入试样，所以试样沿长度方向的剪应力 $\tau_{z\vartheta}$ 也不易均匀分布。因而试样的长度要合适。另外，由于这种试样的内外表面都覆盖橡皮膜，膜嵌入对试样体积的量测有很大影响。为了使比表面积不小于三轴试样，其试样的尺寸一般比较大。常用的试样是内径 200mm，外径 250mm，高 250mm。这样的试样重量很大，不易搬动。其制样程序比较复杂，量测的精度也不易保证。

另一种可进行主应力方向旋转的仪器是方向剪切仪（Directional shear cell）。它是在一个方向（常常是竖向）保持平面应变状态。另外两个方向上可同时施加正应力和剪应力，从而实现主应力在水平面上的旋转，这对于研究应力引起的各向异性是很有用的。其原理见图 1.1.19。



(a) 轴向应力σ_z与轴向应变ε_z间试验曲线　(b) 体应变ε_v与轴向应变ε_z间试验曲线

b=常数的真三轴试验与空心圆柱试验的比较

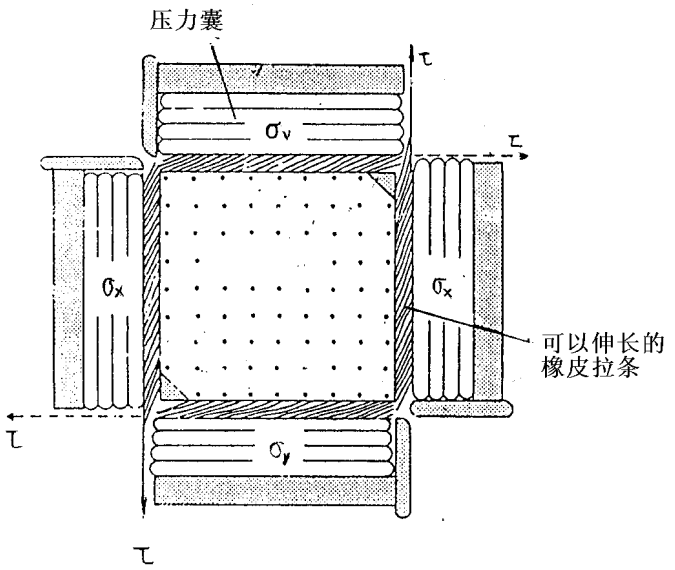
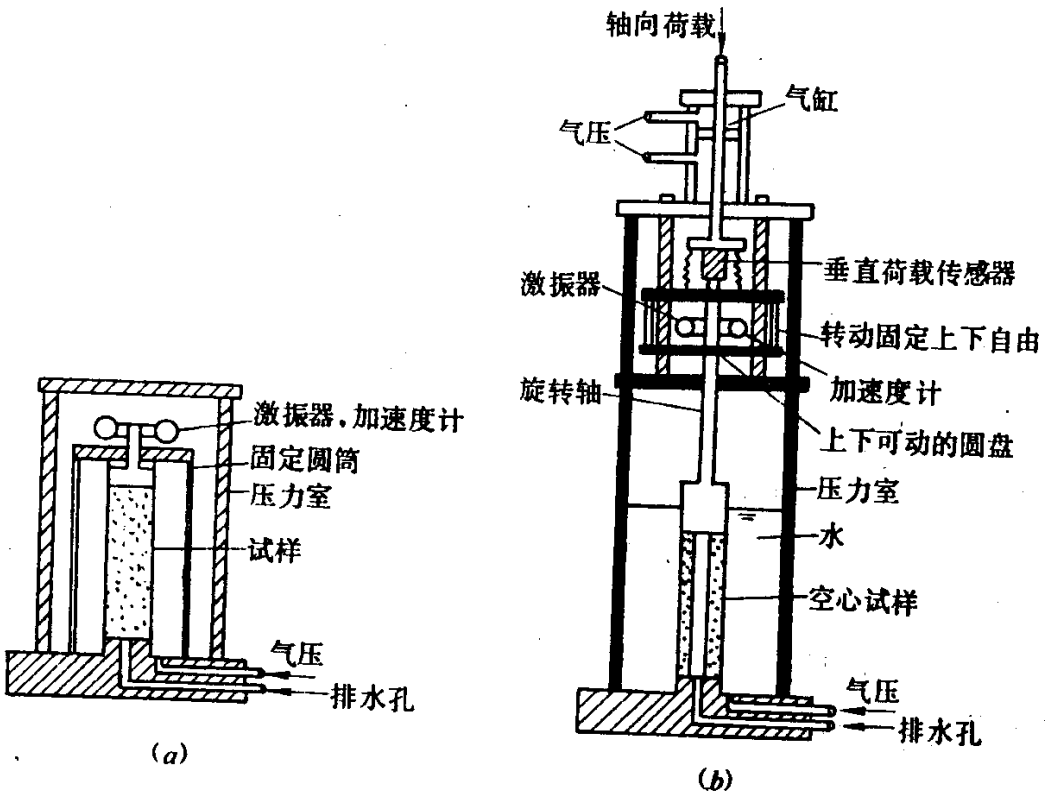


图 1.1.19 方向剪切仪

1.1.6　共振柱试验

研究土的动力特性除了上述的动单剪试验、动三轴试验以外，共振柱试验也是一个重要手段。共振柱试验的原理是通过激振系统，使试样发生振动，调节激振频率，直至试样发生共振。从而确定弹性波在试样中传播的速度，计算试样的弹性模量、剪切模量和阻尼比。

共振柱试验的试样可以是圆柱形的，也可以是空心圆柱形的。试样可以是一端固定，一端自由；或者一端固定，另一端为弹簧和阻尼器支承。试样在压力室中可能是各向等压应力状态；也可以是轴向与侧向压力不等的应力状态。如图 1.1.20 所示。



（a）各向等压共振柱　　（b）轴向与侧向不等压共振柱

图 1.1.20 共振柱试验装置

激振可以是轴向激振，也可以是扭剪激振。在确定阻尼比时，可用自由振动和稳态激振达到试样共振频率时，切断激振器电源使试样发生自由衰减振动从其振幅和振次关系曲线确定土的对数递减率和阻尼比。

1.2　模型试验

模型试验一直是岩土工程中一种重要手段，它既用来检验各种理论分析和数值计算；也用于指导实际工程的设计和施工。近年来陆续兴建了许多重大的岩土工程，人们对岩土工程问题的认识逐渐深入。各种模型试验受到越来越多的重视，得到了很大的发展。

1.2.1　1g 下的模型试验

在通常的重力场中，在一定的边界条件下对土工建筑物或地基进行模拟，量测有关应力变形数据，通过一定的理论计算或数据计算来检验理论计算结果，也是土的应力应变关系研究的一种手段。这种试验分为小比尺试验和足尺试验。

小比尺的试验是将土工建筑物或地基及基础缩小 n 倍，同样自重和荷载也缩小 n 倍。由于土并不是线弹性材料，在 1g 下小尺寸模型中（g 为重力加速度）土中的应力水平很低。而在很低的围压

下，土的应力、应变、强度性状与常规围压下有很大不同。比如很多土在很低围压下表现出强烈的剪胀和应变软化特性，尤以粗粒土为甚，而在一般围压下则应力应变性质明显不同。在很低围压下土的强度指标（如内摩擦角φ）有明显的提高，亦即强度的非线性。对于粘性土其摩擦强度与围压大体上有线性关系，而粘聚强度则不受围压影响，小尺寸的模型无法正确的按比例缩小粘聚强度。所以 1g 下的小比尺试验一般意义不大。

对这种小比尺下 1g 试验结果如果进行数值分析，则需要进行很低围压下的试验以确定参数。这种试验难度很大，这并不容易得到准确结果。

另一种 1g 下模型试验是足尺试验，即基本上按原型尺度模拟进行试验。这种试验可信度高，资料十分宝贵，可直接用以指导工程设计，但造价昂贵，投资巨大。比如美国、日本都对土工合成材料加筋构造物进行过足尺试验。在施工期间、加载期间和随后运行的很长一段时间，监测得到很多数据，对于人们认识加筋土构造物的特性、对于检验有关本构模型和数值计算方法、对于加筋土建筑物的设计有重大意义。图 1.2.1 是在美国科罗拉多（Clorado）大学进行的足尺加筋土挡土墙，也称为丹佛墙（Denver wall）的施工情况。该墙高 3.05m，宽 1.22m，长 2.08m；在一个大型模型槽内进行试验，铺设了 12 层长 1.68m 的　热粘无纺织物为筋材。墙顶用气囊加压。分别对粘性土和砂土填料进行试验，然后曾征集到 15 个不同国家的大学和研究所对试验的结果进行预测，与试验结果进行了比较。

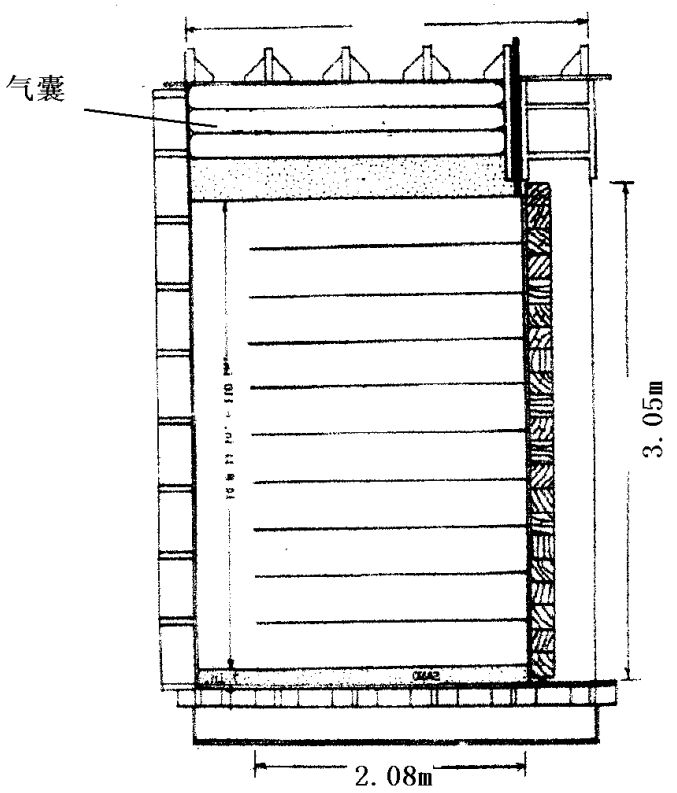


图 1.2.1 加筋挡土墙的足尺试验
（Denver wall）

德国的柏林大学对浅基础进行了大量系统的足尺试验研究。对于单桩的足尺试验也比较普遍。近年来，日本和美国都在酝酿建立长宽各为十几米到二十几米的大型足尺的振动台，模拟岩土工程

及结构工程的地震反应，拟投资上亿美元。另外，海洋钻井平台的足尺试验及大比尺试验也是不少见的。这种不惜巨资投入进行足尺及原型试验表明了人们对于岩土工程的认识和对理论分析及数值计算的信赖还有很大不足。

1.2.2　ng 的模型试验

所谓 ng 模型试验就是将土工建筑物或地基与基础尺寸缩小 n 倍，一般采用原型材料作模型，土的密度相同。这样可使模型与原型的应力、应变相同；破坏机理相同，变形相似。对于以重力荷载为主的情况，尤为适用。目前有土工离心机和渗水力模型试验两种，土工离心机模型试验应用最广泛。

1.　土工离心机模型试验

法国人菲利普斯（E.Phillips）早在 1869 年就提出使用离心机做模型试验的设想，推导了有关相似关系。用离心机研究岩土工程问题始于 20 世纪 30 年代初。60 年代以后，英国、美国和日本等国家采用先进的技术建造了专门用于土工模型试验的离心机。到了 80 年代，世界上许多国家先后发展了大型土工离心机，建立离心模型实验室，使数据采集及控制系统更加先进。我国 80 年代以来也先后建成多个土工离心机实验室。其中南京水科院土工离心机容量为 400g-t；北京水科院的容量达 450g-t。

离心机模拟法是利用离心力场提高模型的体积力，形成人工重力。当原型尺寸与模型尺寸之比为 n 时（n>1），使离心机加速度 a_m 为：

$$a_m = \frac{L_p}{L_m} g = ng \tag{1.2.1}$$

其中 L_p 为原型尺寸，L_m 为模型尺寸，g 为重力加速度。这样在保证原型与模型几何相似的前提下，可保持它们的力学特性相似；应力应变相同；破坏机理相同；变形相似。这对于以重力为主要荷载的岩土工程问题是十分适用的。

图 1.2.2 为土工离心机模型试验的示意图。试验时将模型箱放在吊篮中，通过水平旋转产生离心力。试验中量测元件信号通过滑环输出为数据采集系统接收，输入计算机进行数据处理，也可通过计算机系统控制试验过程。同时也可以通过闭路电视系统进行观察。

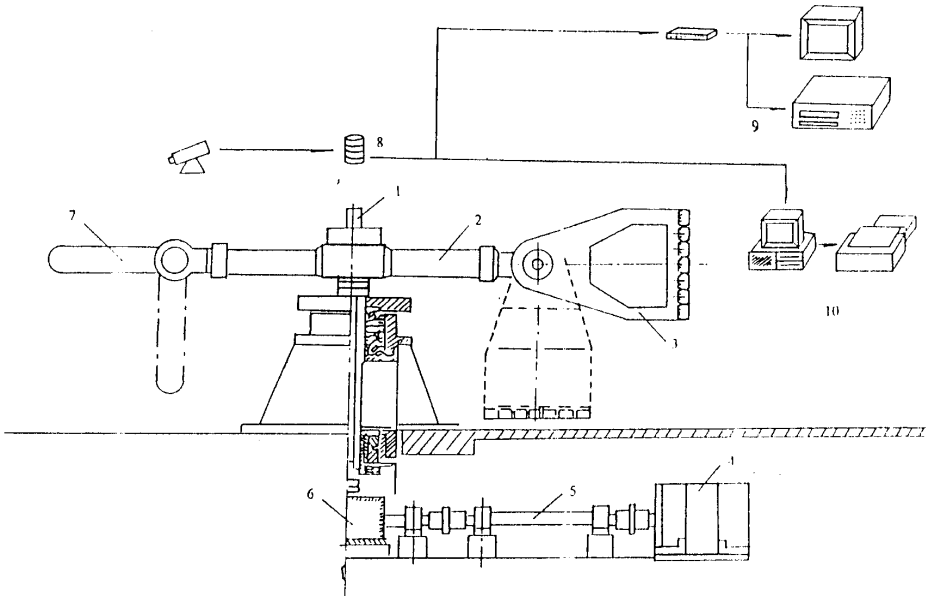


图 1.2.2 土工离心机

1.转轴 2. 转臂 3.吊篮 4.电动机及整流系统 5.转动轴

6.变速齿箱 7.平衡重 8.滑环 9.闭路电视 10.计算机数据采集系统

土工离心机已在岩土工程中得到广泛的应用。用以研究挡土墙和土与结构物间相互作用问题、岩土高边坡问题、堤坝路基等填方工程、地下结构和基坑开挖问题、浅基础、桩基础和深基础问题。目前已经可以模拟在运行中施工过程。比如在运行中打桩施工；让密度接近于土的液体逐渐从模型基坑中流出模拟基坑开挖过程等。最近，利用土工离心机模拟地震、爆破等动力问题得到很大重视和很大发展。许多离心机上都装置了振动台用以研究岩土工程的地震反应。另一个发展较快的领域是环境方面的课题研究。包括介质扩散、热传播、污染问题、寒区冻土问题等。另一方面，土工离心机模型试验也广泛用于渗透固结、应力应变关系、边坡稳定分析等岩土理论方面的研究。成为岩土工程中最为重要的模型试验手段。

土工离心机试验中的相似准则和比尺因素如表 1.2 所示。

表 1.2 **土工离心试验中的比尺因素**

序号	变量	符号	无量纲数	模型率	比尺因素
1	加速度	a		$N_a=$	n
2	模型长度	l		$N_l=$	1/n
3	土密度	ρ		$N_\rho=$	1
4	颗粒尺寸	d	d/l	$N_d=$	1
5	孔隙比	e	e	$N_e=$	1
6	饱和度	S_r	S_r	$N_s=$	1
7	液体密度	ρ_l	ρ_l/ρ	$N_{\rho l}=N_\rho=$	1
8a	表面张力	σ_t	$\sigma_t/(\rho adl)$	$N_{\sigma t}=N_\rho N_a N_d N_l=$	1
8b	毛细管高度	h_c	$h_c\rho_l ad/\sigma_t$	$N_c=N_\sigma N_\rho^{-1} N_a^{-1} N_d^{-1}=$	1/n
9a	粘滞性	η	$\eta/(\rho_l d\sqrt{dl})$	$N_\eta=N_\rho N_d N_a^{1/2} N_l^{1/2}=$	1
9b	渗透性	k	$k\eta/(d^2\rho a)$	$N_k=N_d^2 N_\rho N_a N_\eta^{-1}=$	n
10	颗粒摩擦力	ϕ	ϕ	$N_\phi=$	1
11	颗粒强度	σ_c	$\sigma_c/(\rho al)$	$N_\sigma=N_\rho N_a N_l=$	1
12	粘聚力	c	$c/(\rho al)$	$N_c=N_\rho N_a N_l=$	1
13	压缩性	E	$E/(\rho al)$	$N_E=N_\rho N_a N_l=$	1
14	时间：惯性	t_1	$t\sqrt{a}/l$	$N_t=N_a^{-1/2}N_l^{1/2}=$	1/n
15	时间：层流	t_2	$t\sqrt{k}/l$	$N_t=N_l N_k^{-1}=$	$1/n^2$
16	时间：蠕变	t_3		$N_t=$	1

但土工离心机模型试验也有其局限性。首先是试验材料的模拟问题。一般是原型和模型使用相同材料，土料也是如此。但对于如堆石坝中的堆石料需要采用如图 1.1.11 介绍的方法模拟。另外，在制样中如何保证土料要求的密度和均匀性也是很难的技术，并且土料的密度对其性质影响很大。岩石材料一般就无法用天然岩石，而用石膏与胶凝等材料配置，模拟天然岩石的节理裂隙等。另外，像土工合成材料，薄混凝土板材等如将原型按比例减少，一般无法制造。所以也是按一定刚度和强度要求用其它材料代替。

另外，就是模拟原型的误差。土料本身的模拟困难很大，除了土的密度和均匀度以外对于天然原状土的结构性也很难在模型中反映。另外的误差从则来自这种方法本身，如模型本身自重与模拟的重力场方向不同；模型各点半径不同而使模拟的重力各点不同；尺寸效应使土的强度发生变化；小尺寸模型的比表面积大，周边摩擦影响也大。

最后，一个问题就是在同一个试验中，有些物理量的比尺因素在不同问题中不同。在表 1.2 中可见同样是时间，在惯性力情况下比尺因素为$1/n$。对于渗流固结等问题为$1/n^2$，对于蠕变为 1。如果这些问题同时发生，则很难正确模拟。

2.　渗水力模型试验

渗水力模型试验是另一种 ng 模型试验。它的原理是用水在土中向下的渗透力 $j=\gamma_w i$ 这一体积力模拟重力。从而达到模型尺寸缩小 n 倍而土中应力应变与原型一致的目的。图 1.2.3 是这种试验设备的简图。图 1.2.4 是其原理图。

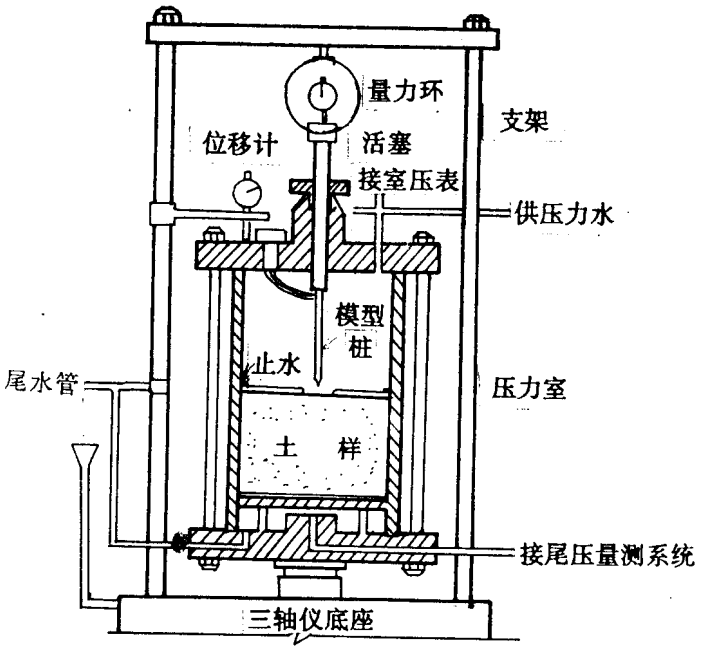


图 1.2.3 渗水力模型试验设备简图

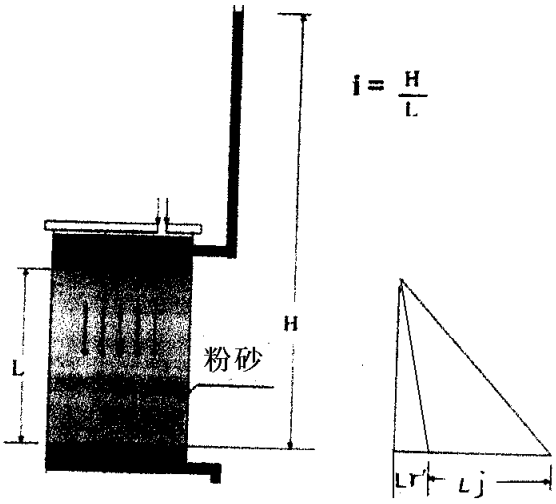


图 1.2.4 渗水力模型试验原理图

从图 1.2.4 可见，在向下的渗透力作用下，模型土体向下的重力为:

$$n\gamma' = i\gamma_w + \gamma' \tag{1.2.1}$$

如果 $\gamma' \approx \gamma_w$，则模型比为 $n = i+1$。

渗水力模型试验已经用于天然地基的浅基础、桩基础等问题的研究。它的突出优点是它的设备是静态的，所在 ng 条件下沉桩等比较方便。但它也有很明显的局限性：只能做饱和土体试验；地面是水平的；土的渗透系数过大和过小都影响试验精度和造成操作困难。

1.3　现场测试与原型观测

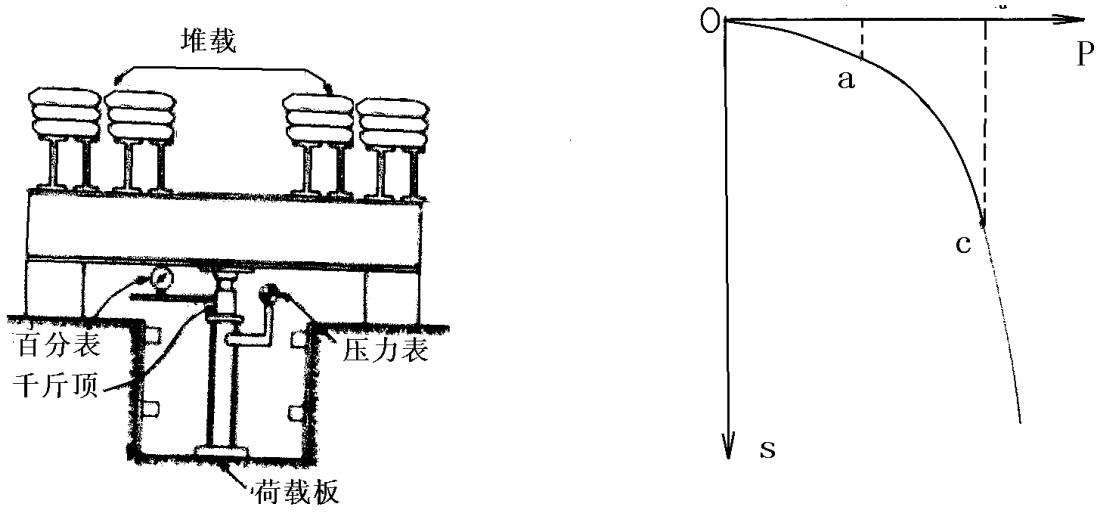
原状土的室内试验，首先必须现场取样，这样就会产生扰动；有的土（如砂土）取得原状土样十分困难。所以现场测试土的有关参数是工程中常用的方法。同样，原型观测比模型试验更贴近真实，得到的资料也更宝贵。

1.3.1　平板载荷试验

平板载荷试验是用一定尺寸的载荷板在指定土层上逐级加载，同时量测相应沉降。其加载简图和典型曲线见图 1.3.1。以得到的 $p-s$ 曲线确定极限地基承载力 p_u。变形模量通过下式计算：

$$E = \frac{pb(1-\upsilon^2)}{s} I \tag{1.3.1}$$

其中，p 为 $p-s$ 曲线接近直线段（oa）上压强值（kPa），s 为相应的沉降；b 为荷载板宽度；υ 为土的泊松比；I 为反映荷载板形状和刚度的系数。可见从此公式不能同时确定 E 和 υ 两个参数。



（a）试验简图　　（b）$P \sim s$ 曲线

图 1.3.1 平板载荷试验

1.3.2　静力触探

静力触探是将金属探头用静力压入土中，测定探头所受到的阻力，通过以往试验资料和理论分析，得到比贯入阻力与土的某些物理力学性质间的关系，定量地确定土的某些指标。如砂土的密实度、粘土的不排水强度、土的压缩模量、地基承载力及单桩的侧阻力和端阻力等。

静力触探形式很多，大型的必须在现场用机械操作。图 1.3.2 为在现场使用的单桥和双桥式探头，前者只量测贯入过程锥头所受的总阻力 Q,若锥底面积为 A，则总比贯入阻力为：

$$p_s = \frac{Q}{A} \tag{1.3.2}$$

双桥探头能分别测定锥底的总阻力 Q_p 和侧壁摩阻力 Q_s，单位面积上锥头阻力和侧壁阻力分别为:

$$q_p = \frac{Q_p}{A} \tag{1.3.3}$$

$$q_s = \frac{Q_s}{s} \tag{1.3.4}$$

式中 s 为探头侧壁摩擦筒表面积。常用锥底面积 $A = 15cm^2$ ；侧壁表面积 $s = 300cm^2$ 的双桥探头。近年来，静力触探的探头有很大改进，比如装置了孔压传感器及数据自动采集等。

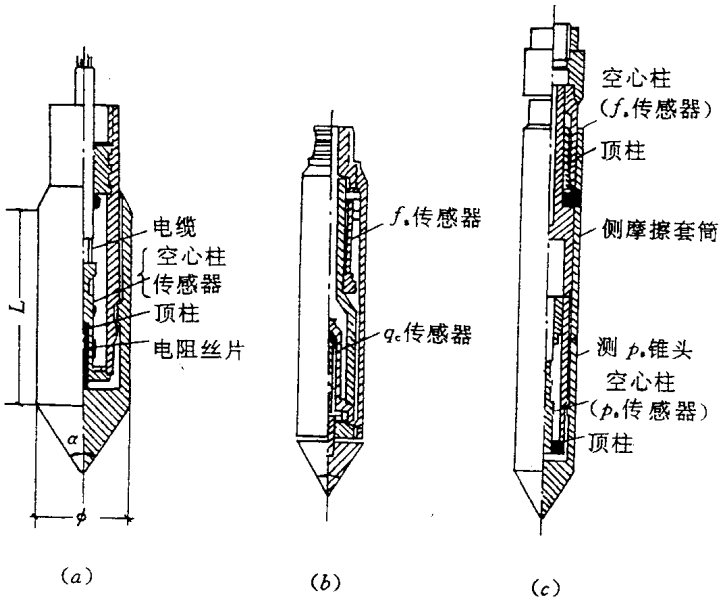


图 1.3.2 野外静力触探探头

图 1.3.3 为两种袖珍静力触探仪，可在试样取样筒中直接测出饱和软粘土的不排水抗剪强度，也可以对室内试样进行量测。

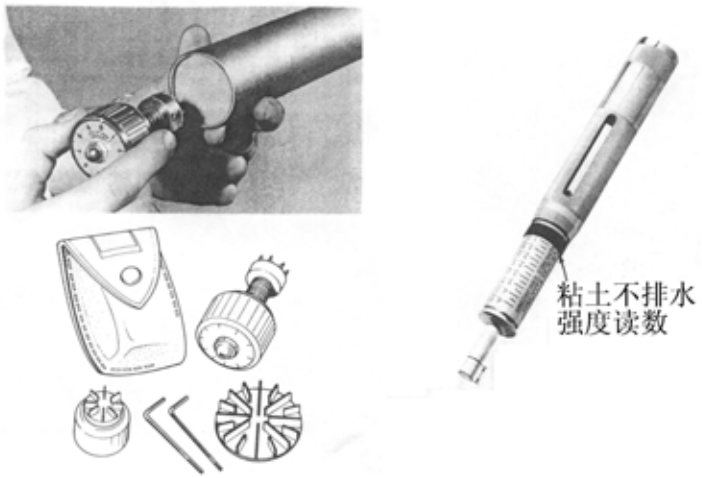


图1.3.3两种袖珍触探设备

1.3.3　动力触探

动力触探是用一定重量的击锤，从一定高度自由落下，击打插入土中的探头，测定使探头贯入土中一定深度所需要的击数。以此击数确定被测土的物理力学性质。按使用土层不同可分为以下几种动力触探试验：

1. 标准贯入试验（SPT）

其探头是管状的，如图 1.3.4 所示，适用于一般粘性土和砂土地基。击锤质量为 63.5kg，落距为 76cm，以探头贯入 30cm 的击数 $N_{63.5}$ 为贯入指标。可用以判断砂土的密实度、饱和砂土的液化可能性和地基的承载力等。探头形状见图 1.3.4。

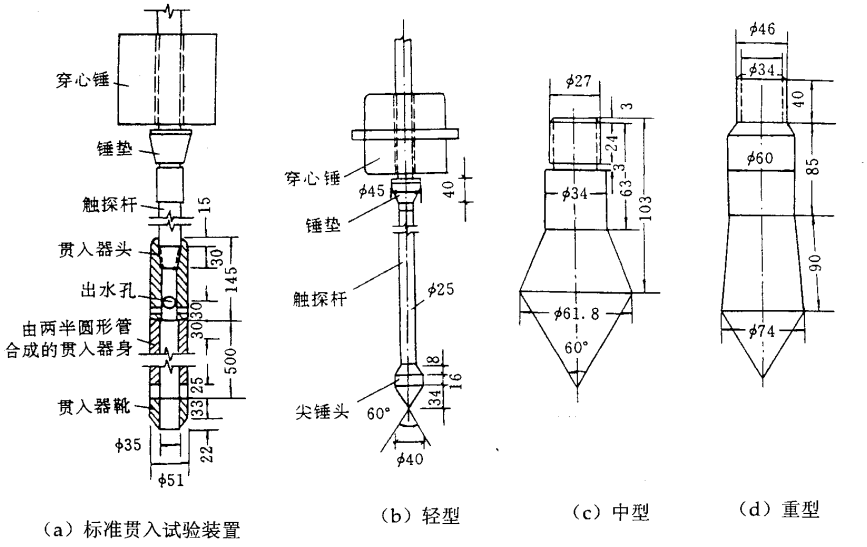
2. 轻型触探试验

轻型触探试验用于确定一般粘性土和素填土地基的承载力和基坑验槽。圆锥形探头，击锤质量为 10kg，落距为 50cm，贯入 30cm 时对应的击数为 N_{10}。见图 1.3.4（a）

3. 重型触探试验

对于碎石土和卵石土等地基适用于这种触探试验。探头圆锥形。击锤质量为 63.5kg，落距为 76cm，以探头贯入 10cm 的击数记做 $N_{63.5}$。见图 1.3.4(b)。

另外还有超重型、中型等圆锥形探头的动力触探试验。还有一种直接用击锤击打的轻便式触探设备，主要探查地基密实度和填方的质量。



（a）标准贯入试验装置　（b）轻型　（c）中型　（d）重型

图 1.3.4 各种动力触探探头

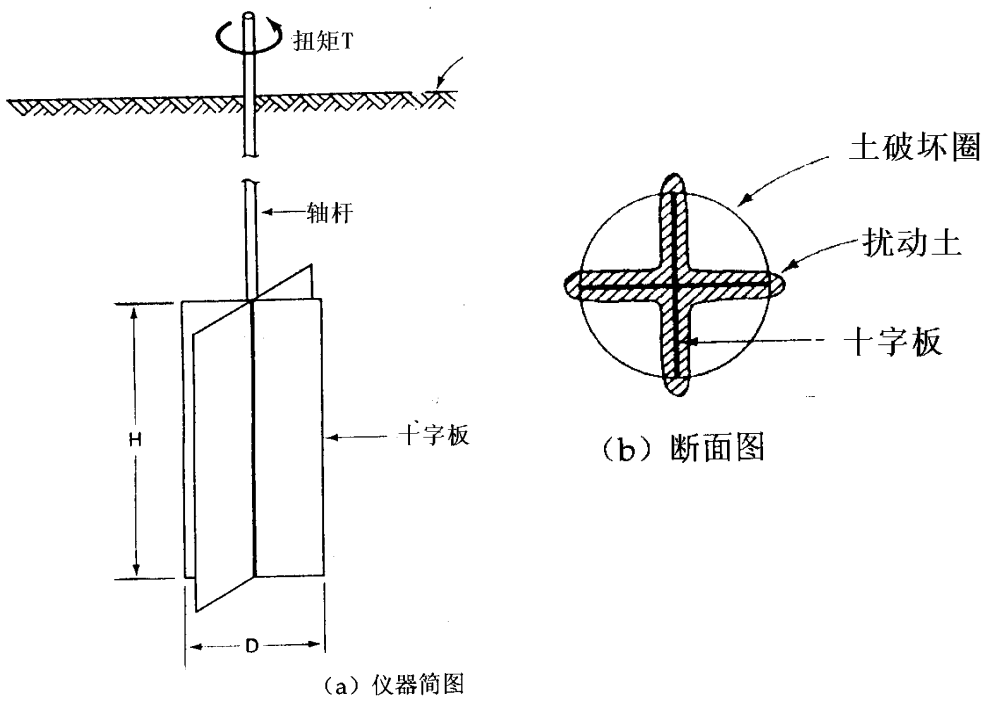
1.3.4　十字板剪切试验（VST）

这种试验是将十字型钢板插入土中，施加扭矩达到最大值 T_{max} 时，十字板在土中被扭动，通过这个扭矩计算土的抗剪强度，见图 1.3.5。对于野外试验，板高与外直径之比一般为 $\frac{H}{D}=2$。对于各向同性的土:

$$\tau_f = \frac{6}{7}\frac{T_{\max}}{\pi D^2} \tag{1.3.5}$$

实际上，现场土常常是各向异性的，对于正常固结土，水平面上抗剪强度一般大于垂直面的抗剪强度。

用式（1.3.5）计算的τ_f一般偏大，常需经修正后使用。这种试验可用于软到硬粘土，对于饱和的软粘土，它测得的抗剪强度τ_f相当于不排水强度C_u。



（a）仪器简图　　（b）断面图

图 1.3.5 十字板剪切试验

1.3.5　旁压试验（Pressuremeter test）

这种试验使用的设备是旁压仪。它是将一个圆柱形探头插入地基土中，有预钻式和自钻式两种。前者是将探头插入预先钻好的孔中；后者是这种探头自己能钻入土中。在试验时，其探头的空腔中加压力水，量测所施加压力与探头体积间的关系，得到 p－v 曲线。合理地分析试验曲线可以确定地基土的变形和强度性质及相关参数。它原则上适用于任何地基土。其设备和试验曲线如图 1.3.6 所示：

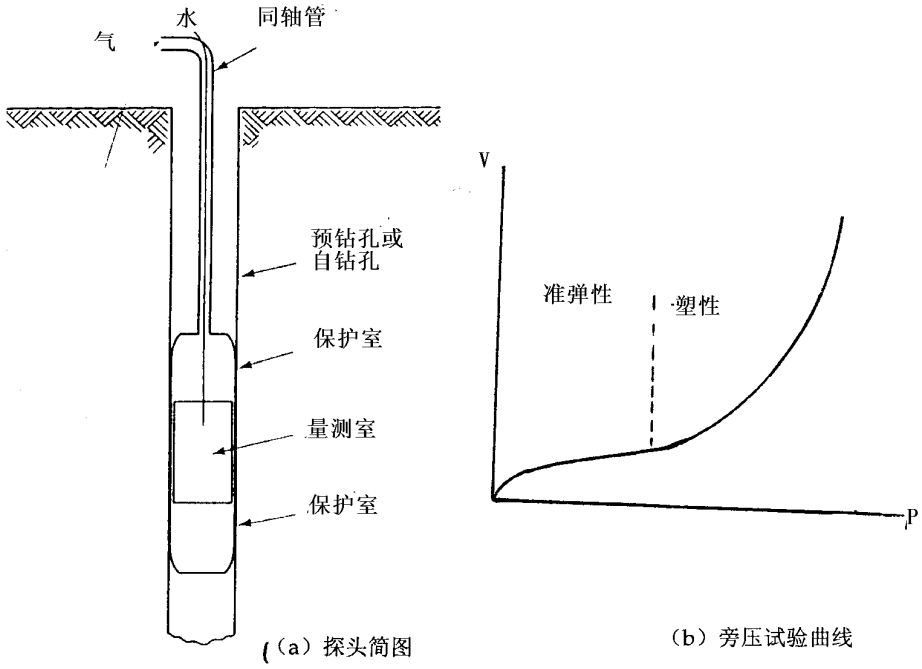


图 1.3.6 旁压试验

1.3.6　螺旋载荷板压缩仪（SPC）和钻孔剪切仪（BST）试验

这类试验是在现场在一定深度压缩或在孔中剪切，如图 1.3.7 和图 1.3.8。

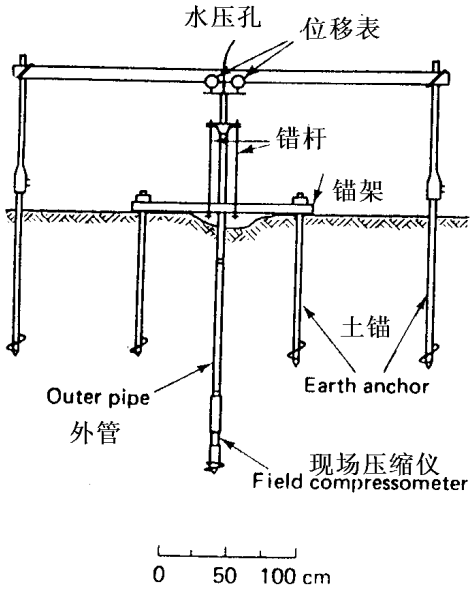


图 1.3.7 螺旋板载荷板压缩试验(SPC)

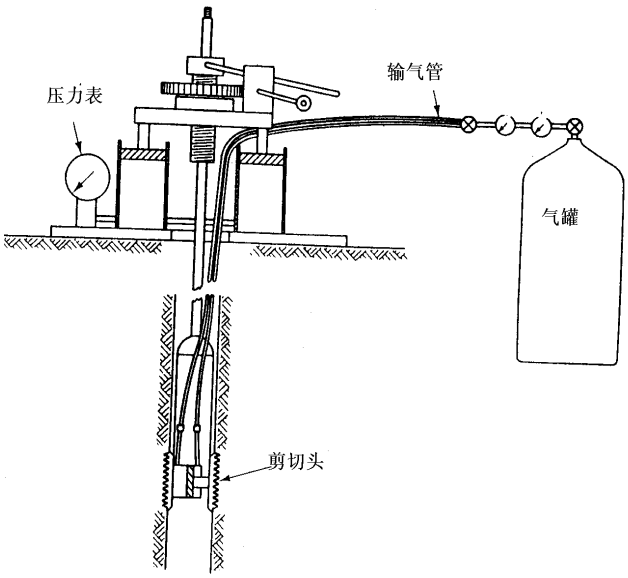


图1.3.8钻孔剪切试验（BST）

在螺旋板载荷试验中，首先将板旋入指定深度，用液压加压力，量测压力与沉降关系，直至破坏。它适用于除了粒径很大的碎石土以外的任何土类，可求得土的抗剪强度。

在深孔剪切试验中，剪切头被放入到钻孔中的指定深度，可张开的齿状剪切头被打开，施加正压力使其在孔壁上，正应力为σ_n。然后剪切头被向上拉，根据最大拉力计算土的抗剪强度。它比较适用于粉质土，但排水条件不十分明确。

1.3.7　物探检测

与地质勘探相结合，各种物理勘探手段也属于现场测试范围。如各种波速试验，声反射试验，声发射检测，探地雷达，电磁法，电法，放射性勘探等。主要用于土层勘察，地质缺陷的探察和土层性质的检测。

1.3.8　原型监测

原型监测是岩土工程中的重要内容。比如地基处理中的预压固结工程，深基坑开挖工程，地下工程，软土上路堤，高土石坝与高边坡等。它一般在施工期和运行期进行。它可以发现施工中土体的反应，控制施工进度与指导工程措施的采用，实现信息化施工，也是反算的主要依据。更宝贵的是原型观测资料的积累，可以提高人们的认识，进一步指导今后工程实践及发展和改进理论数值计算。

原型观测的手段有：地面变形观测、土体孔隙水压力监测，测量地基不同深度土的位移、土压力，还有结构上的应变和应力等。采用的工具有地面观测仪器，孔压传感器、测地基深处土位移的测斜仪、土压力盒及一些物理勘探手段等。

1.4　试验检验与验证

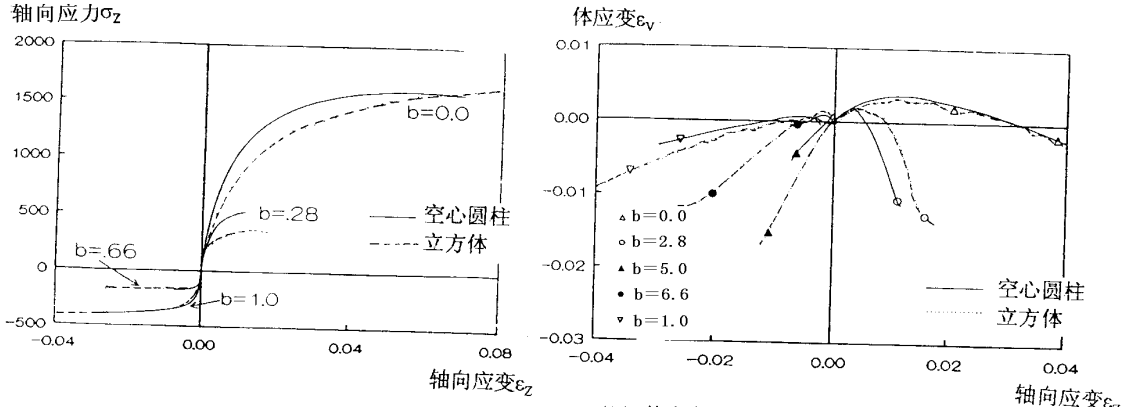
土工试验受许多条件限制，其结果的精度与其他材料试验相比不可能很高。对试验本身也需进行检验。另一方面，土力学中的理论与数值计算的预测结果可信性亦需验证。试验验证是最常用的方法。在一些论文和报告中，常常是作者本人进行这种验证，缺乏客观性和公正性。20 世纪 80 年

代以后，由于大量的土的本构关系模型纷纷被提出，并且都由提出者验证，结果很“满意”。为提高验证的客观性和权威性，组织过多次国际性的“考试”或“竞赛”。这种活动也用于检验试验结果和数值计算的结果。

1.4.1　对试验的检验

1.　复杂应力路径试验检验

1982 年由法国的 Grenoble 大学和德国的 Karlsrube 大学分别用剑桥式盒式真三轴仪对同样砂土和粘土进行复杂应力路径和应变路径的同样试验。两份试验结果的差别主要是人为操作和技巧的原因。1987 年由美国的 Case Western Reserve 大学和法国的 Grenobe 大学分别使用空心圆柱扭剪仪和盒式真三轴仪对于同样的砂土进行同样应力路径的试验，发现结果有较大差别。图 1.4.1 表示的是二者对于 Hostun 砂的试验结果。要求试样干密度为 1.65g/cm^3，然后在围压为 500kPa 下固结。为了防止膜嵌入对于空心圆柱试样的影响，两个试验中 $\sigma_2 = 500$ kPa 为常数。变化 σ_z 并使 b 分别保持 0，0.28，0.66 和 1.0 不变进行 4 种应力路径试验。试验结果见图 1.4.1。其中图（a）为轴向应力与应变间曲线；图(b)为体应变与轴应变间曲线。可见二者差别有时是很大的。在接近破坏时，空心圆柱试验有时发生颈缩；而真三轴试验则发现 V 型剪切带。



（a）轴向应力 σ_z 与轴向应变 ε_z 间试验曲线　　（b）体应变 ε_v 与轴向应变 ε_z 间试验曲线

图 1.4.1　b＝常数的真三轴试验与空心圆柱扭剪仪试验结果的比较

2.　土工离心机试验检验

1986 年由欧洲共同体资助，发起“土工离心机的联合试验”。参赛者有三家：英国的剑桥大学、法国的道桥中心研究室和丹麦的工程院。试验的内容是模拟饱和砂土地基上的圆形浅基础的承载力和荷载－沉降关系。试验土料统一为巴黎盆地天然沉积的一种均匀石英细砂。模型地基的孔隙比规定为 e＝0.66（相对密度 $D_r = 86\%$），规定圆形基础的模型直径 $D = 56.6mm$,离心加速度＝28.2g，基底完全粗糙。此前，由丹麦岩土研究所对于这种土进行了物性试验和三轴试验，其结果公布于众。要求载荷－沉降关系表示成无量纲底变量 $q/\gamma' nb \sim s/b$ 曲线。

其中：q ＝基础上施加的荷载(kPa)

γ' ＝土的浮容重（kN/m^3）

n ＝重力加速度水平，即模型比尺

b ＝模型基础的尺寸（m）

s ＝基础的中心垂直沉降（m）

同样也进行了相同条件下的现场荷载试验，以便与模型试验结果对比。

这三家精心制样、安装、运转和量测，反复摸索，反复校验，校正各种参数和影响因素。剑桥大学还在离心机上做了静力触探试验。最后，剑桥大学提交了一组试验结果，另外两家按要求给出了曲线。图 1.4.2 表示了其试验结果。

可见，这种世界最先进的土工离心机模型试验的误差也很高。值得提出的是，这是一种条件非常简单明确的模型试验，而现场的工程实际情况的条件和影响因素远比这复杂。在这个试验中，加载速率、模型地基砂的密度、制样方法和运行程序对试验结果都有影响。例如剑桥大学的试验表明，砂土的孔隙比变化 0.01（相当于相对密度变化 3%），则其承载力变化 18%，如图 1.4.3 所示。而由于模型地基是先制样，后运转，保证地基内砂土各处均匀，孔隙比误差在 0.01 范围内是有较大难度的。

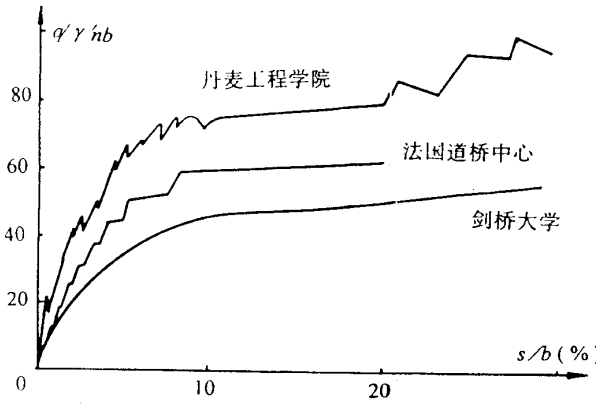


图 1.4.2 圆形天然浅基础的试验荷载－沉降关系曲线

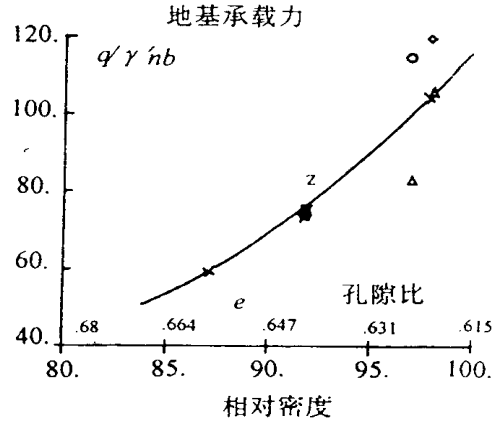


图 1.4.3 地基承载力与模型地基孔隙比间关系（剑桥大学试验结果）

1.4.2　本构关系模型的验证

80 年代以来，关于土的本构关系的“考试”进行了多次。1980 年美国和加拿大召开了“岩土工程中极限平衡、塑性理论和一般的应力应变关系北美研讨会”。会前用两种天然土平均主应力 p ＝常数的三轴试验，b＝常数的真三轴试验，砂土在 π 平面上应力路径为圆周的真三轴试验。

事先公开土的物性参数和基本试验的结果。然后在国际范围征求参赛者。参加预测的有各个不同国家的 17 个本构模型。从给出的结果看，轴向应力应变关系 $(\sigma_1-\sigma_3)\sim\varepsilon_1$ 预测的精度一般尚可；体应变预测的精度较差。对于应力路径在 π 平面上为圆周的情况，许多模型无能为力。由于原状土的各向异性，对于其循环加载和超固结性状很难预测，只有少数模型参加了预测。结果表明，没有一个模型能够合理地预测所有的试验情况。正如会议主席 Finn 所说：“没有给任何一个本构模型戴上王冠”。这也是符合当前的土力学理论发展的现状的。

1982 年在法国召开了“土的本构关系国际研讨会”人们用不同的理论模型对砂土和粘土的复杂应力路径的试验结果进行了预测。如上所述，也对试验本身进行了检验。

1987 年在美国克里夫兰召开了“非粘性土的本构关系国际研讨会”。会议征求对真三轴试验和空心扭剪试验结果用理论模型进行预测。共有世界各国的 32 个土的本构模型参赛。其中包括：

3 个次弹性模型（H）

3 个增量非线形模型（I）

1 个内时模型（E）

9 个具有一个屈服面的弹塑性模型（EP1）

10 个具有两个屈服面的弹塑性模型（EP2）

6 个其它形式的弹塑性模型（EP）

会议将预测结果与试验结果比较，按四个单项评分。评分的标准见图 1.4.4。规定了上下限，按统计方法打分。图 1.4.5 与图 1.4.6 表示出 b＝常数的真三轴试验的预测得分情况。可见其轴向应力应变关系预测经过还差强人意；而体应变的预测则基本是不及格。

这些“考试”基本上反映了人们当前认识和描述土的应力应变关系的能力和水平。它表明，即使对于实验室制作的重塑土试样，其应力应变关系也是相当复杂的。现有的关于土的本构关系的数学模型的描述能力在精度和条件方面都是有限的。有的模型使用了 20 多，甚至 40 多个常数，结果仍然不令人十分满意。

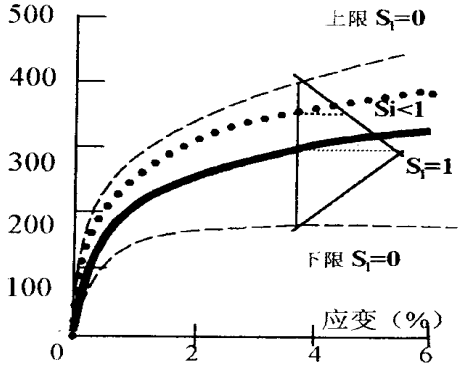


图 1.4.4 本构模型预测的评分标准

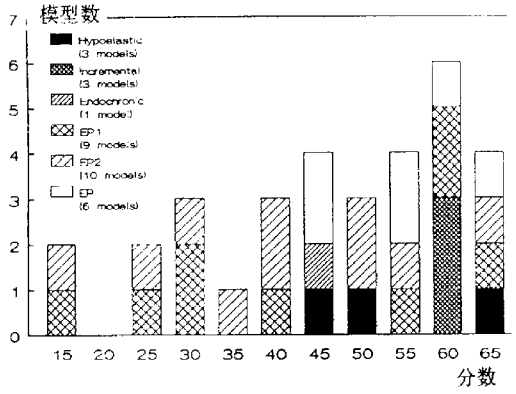


图 1.4.5 轴向应力应变关系的直方图（满分 100）

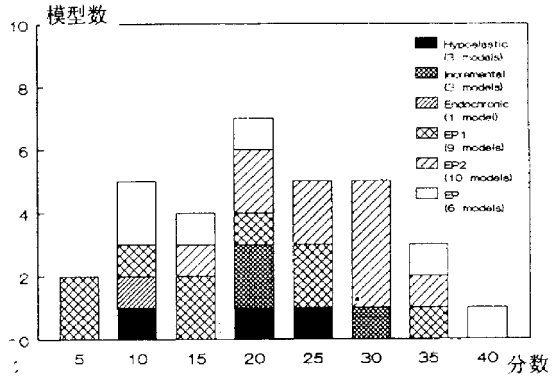


图 1.4.6 体应变与轴向应变关系得分的直方图（满分 100）

1.4.3　数值计算的检验

随着计算机技术的发展，土工数值计算大大加强了我们认识和解决复杂岩土工程问题的能力。但这种快捷和“精确”的计算也往往引起人们对数值计算的盲目相信。在国外进行过多次数值计算与分析的检验活动。

加筋土的计算是岩土数值计算中很有代表性的课题。它涉及到土的本构模型，筋材的应力应变关系模型和筋土间的界面模型及这些模型涉及的众多参数。对于此课题，目前已经有较多的计算程序和经验。1991 年在美国的科罗拉多大学，有美国联邦公路局资助，在足尺试验的基础上进行了加筋土计算的竞赛。

目标试验是在一个高 3.05 米，宽 1.22 米，长 2.084 米的大型试验槽中进行的。铺设了 12 层长为 1.68 米的无纺土工织物，作为土工织布加筋挡土墙。墙顶采用气囊加压。气囊下铺设 5cm 的砂垫层。试验用的土料有两种：一种是均匀的砂土，$D_{50}=0.42\text{mm}$；另一种为粉质粘土，塑限 $W_P=19\%$，液限 $W_L=37\%$。试验见图 1.2.1。事先公布了砂土的三轴试验，粘土的不同排水条件下的三轴试验，

土工布的拉伸试验和筋土间的界面直剪试验等试验的结果。征求世界各国同行们进行数值计算，预算试验观测结果。预测项目有：

1. 两种加筋挡土墙再顶部加载 103.5kPa 以后的墙顶最大位移、不同位置的墙面位移及筋的应变
2. 在加载 100 小时后的以上各项位移和应变

共有 15 个不同国家的大学和研究单位参赛。包括美国的科罗拉多大学等 8 家，英国的哥拉斯格大学等两家，日本的东京大学等 3 家。中国和加拿大各一家。其中 14 家参加了荷载－变形和应变关系的预测。部分计算的结果见图 1.4.7 和图 1.4.8。它们分别表示了砂土和粘土在上述荷载下的墙顶最大位移的预测。可见只有少数计算的误差在 30%以内。

对于砂土加筋挡土墙试验的破坏荷载是 207kPa，预测值从 10kPa 到 517kPa 不等。粘土加筋挡土墙在荷载加到 230kPa 时由于气囊爆破而未能继续试验。计算的破坏荷载在 21kPa 到 207kPa 之间。

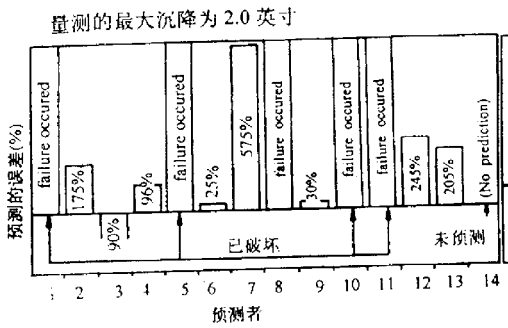


图 1.4.7 砂土加筋挡土墙的墙顶最大位移计算的误差

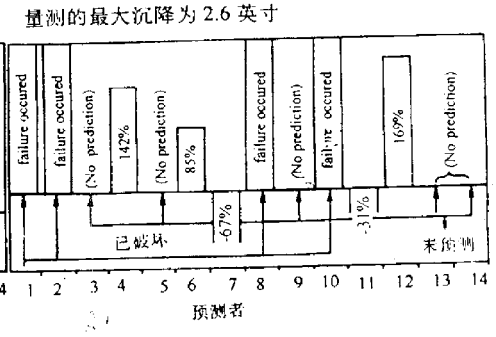


图 1.4.8 粘土加筋挡土墙的墙顶最大位移计算的误差

1989－1994 年有美国自然科学基金会（NSF）组织土工离心的地震反应模型试验。对 9 种工程模型进行了试验。各家动力反应分析结果表明，定性地反应总的趋势比较可行，但定量的预测误差很大。

第二章　土的本构关系

2.1　概述

材料的本构关系（*Constitutive relationship* ）是反映材料的力学性状的数学表达式，表示形式一般为应力—应变—强度—时间的关系。也称为本构定律（*Constitutive law* ）、本构方程（*Constitutive equation* ），或者本构关系数学模型（*Mathematical model* ）。后者也可简称为本构模型。为简化和突出材料某些变形强度特性，人们常使用弹簧、粘壶、滑片和胶结杆等元件及其组合的元件模型。

土的应力应变关系十分复杂，除了时间外，还有温度、湿度等影响因素。其中时间是一个主要影响因素。与时间有关的土的本构关系主要是指反映土流变性的理论。而在大多数情况下，可以不考虑时间对土的应力——应变和强度（主要是抗剪强度）关系的影响，本章介绍的主要是与时间无关的本构关系。土的强度是土受力变形发展的一个阶段，即在微小的应力增量作用下，土单元会发生无限大（或不可控制）的应变增量。因而它实际上是土的本构关系的一个组成部分。但在长期的岩土工程实践中，在解决某些土力学问题时，人们常常只关心土体受荷的最终状态，亦即破坏状态。因而土的强度成为土力学中一个独立的领域，本书第二章将对土的强度进行单独讨论。

人们一般认为土力学这门学科诞生于 1925 年太沙基（*K.Terzaghi*）的“土力学”一书出版以后。在此之前和以后的多年中，人们在长期的实践中积累了许多工程经验和形成了土力学的基本理论。如土的莫尔——库仑（*Mohr——Coulomb*）强度理论、有效应力原理和饱和粘土的一维固结理论等。但长期以来人们在解决土工建筑物和地基问题时，总是将它们分为变形问题和稳定问题两大类。对于变形问题，人们基本上是基于弹性理论计算土体中的应力，用简单的侧限压缩试验测定土的变形参数，在弹性应力应变理论的范畴中计算变形。在计算设计中辅以一定的经验方法和经验公式。由于当时建筑物并不是十分高重，使用中对变形的要求也不是很高，所以这些计算一般能满足设计要求。

大量的土工和地基问题是稳定问题，解决方法是对土体进行极限平衡分析确定其稳定的安全系数。人们一般用莫尔——库仑破坏准则对不同工程问题中的土体进行极限平衡分析。这种分析不考虑土体破坏前的变形过程及变形量，只关心土体处于最后整体滑动时的状态及条件。所使用的实际上是刚塑性或理想塑性的理论。这种在变形计算中主要使用弹性理论，在解决强度问题时使用完全塑性理论的方法成为解决土工问题的经典和传统的方法，在目前解决许多工程问题时，仍然是主要的分析方法。

20 世纪 50 年代末到 60 年代初，高重土工建筑物和高层建筑物的兴建和许多工程领域对于建筑物变形要求很高，给土体的非线性应力变形计算提出了必要性；另一方面计算机及计算技术手段的迅速发展推动了非线性力学理论、数值计算方法和土工试验的日新月异的发展，为在岩土工程中进行非线性、非弹性数值分析提供了可能性。从而极大推动了土的本构关系的研究。70～80 年代是土的本构关系迅速发展的时期。上百种土的本构模型成为土力学园地中最绚烂的花朵。在随后的土力学实践中，一些本构模型逐渐为人们所接受，出现在大学本科的教材中，也在一些商用程序中被广泛使用。这些被人们普遍接受和使用的模型都具有形式比较简单；参数不多且有明确的物理意义和易于用简单试验所确定；能反映土变形的基本主要特性。另一方面，人们也针对某些工程领域的特殊条件建立有特殊性的土的本构模型。例如土的动本构模型、流变模型及损伤模型等。

几十年关于土的本构关系的研究使人们对土的应力应变特性的认识达到了前所未有的深度；促使人们对土从宏观研究到微观、细观的研究；为解决如高土石坝、深基坑、大型地下工程、桩基础、近海工程和高层建筑中地基、基础和上层建筑共同作用等工程问题提供了更深刻的认识和理论指导。本构关系的研究也推动了岩土数值计算的发展。将土视为连续介质，随后又将其离散化的方法有：有限单元法、有限差分法、边界单元法、有限元线法、无单元法以及各种方法的耦合。另一种计算方法是考虑岩土材料本身的不连续性。如考虑裂缝及不同材料间界面的界面模型和界面单元的使用，随后离散元法（*DEM*）、不连续变形分析（*DDA*）和流形元法（*MEM*）、颗粒流（*PFC*）等数值计算方法快速发展。数值计算有时采用不同的本构模型；有时用以验证本构模型；有时用以从微观探讨土变形特性的机理；有时则对是微观颗粒（节理）的研究建立岩土本构关系。

2.2　应力和应变

2.2.1　应力

1.　应力分量与应力张量

土体中一点 $M（x，y，z）$的应力状态可以用通过该点的微小立方体上的应力分量表示。这个立方体的六个面上作用着九个应力分量：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix} \tag{2.2.1}$$

上式表示的是一个二阶对称张量，在右侧的矩阵中九个分量中由于剪应力成对，其中只有六个分量是独立的。所以也可用这六个应力分量的列矩阵（或一个 6 维向量）来表示一点的应力状态：

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix} \tag{2.2.2}$$

或者

$$\{\sigma\}^T=\{\sigma_x,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ \tau_{xy},\ \tau_{yz},\ \tau_{zx}\} \tag{2.2.3}$$

由于在土力学中一般规定法向应力以压为正，剪应力则以图 2-2-1 所示的方向为正。

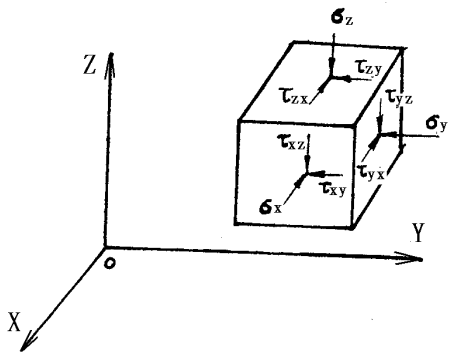


图 2-2-1 一点的应力分量及正方向

2.　应力张量的坐标变换

上述的二阶张量σ_{ij}在任一新的坐标系下的分量 $\sigma_{i'j'}$应满足：

$$\sigma_{i'j'}=a_{i'k}a_{j'l}\sigma_{kl} \tag{2.2.4}$$

其中 $a_{i'k}$ 与 $a_{j'l}$ 为新坐标系轴与老坐标系轴夹角的余弦。见图 2-2-2，其中 $a_{1'1}=\cos\alpha$，$a_{1'2}=\cos\beta$，$a_{1'3}=\cos\gamma$。

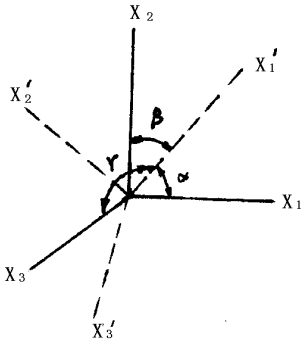


图 2-2-2 张量的坐标变换

3. 应力张量的主应力和应力不变量

在过一点的斜截面上，如果只有法向应力而无剪应力时，这个斜截面就是主应力面。设图 2-2-3 中 *ABC* 平面为主应力面，此面上法向应力为 σ。*ABC* 面的外法线与 *x*、*y*、*z* 坐标轴夹角的余弦分别为 *l*、*m*、*n*，其中：

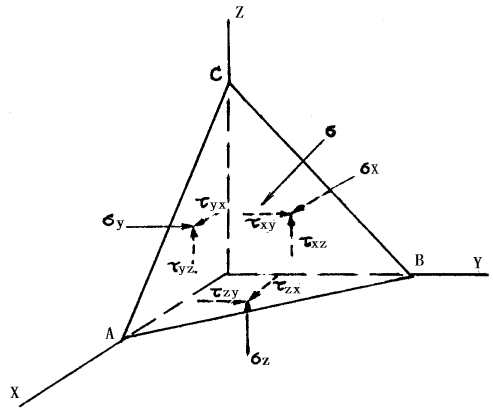


图 2-2-3 作用在主应力面与 *ABC* 斜四面体上的应力

$$\begin{cases} l=\cos\alpha \\ m=\cos\beta \\ n=\cos\gamma \end{cases} \tag{2.2.5}$$

在 *AOB*、*BOC*、*COA* 面上作用有 9 个应力分量：$\sigma_x,\tau_{xy},\tau_{xz}$；$\sigma_y,\tau_{yx},\tau_{yz}$；$\sigma_z,\tau_{zx},\tau_{zy}$。根据力的平衡条件，四面体在三个方向的合力为 0：

$$\begin{aligned} \textstyle\sum x=0 \qquad & (\sigma_x-\sigma)l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=0 \\ \textstyle\sum y=0 \qquad & \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{zy}n=0 \\ \textstyle\sum z=0 \qquad & \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0 \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

在式（2.2.6）中，若以 l、m、n 为未知数，它是齐次线性三元方程组，只有其系数行列式为零时，才能存在 l、m、n 的非零解。

$$\Delta=\begin{vmatrix}\sigma_x-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma\end{vmatrix}=$$

$$\sigma^3-\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)\sigma^2+\left(\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^{\ 2}-\tau_{yz}^{\ 2}-\tau_{zx}^{\ 2}\right)\sigma-$$
$$\left(\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^{\ 2}-\sigma_y\tau_{zx}^{\ 2}-\sigma_z\tau_{xy}^{\ 2}\right)$$
$$=0 \tag{2.2.7}$$

也可写成：

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0 \tag{2.2.8}$$

此三次方程的三个根，即 σ_1、σ_2、σ_3 是三个主应力。亦即像 ABC 这样的斜截面共有三个，它们两两正交，其面上只有法向应力，没有剪应力。这三个法向应力就是三个主应力。由于三个主应力大小与初始坐标系 x、y、z 的选择无关，因此 I_1、I_2、I_3 是三个标量，亦称应力不变量（*Stress invariant*），即不随坐标的选择而变的量。三个应力不变量的表达形式为：

第一应力不变量：

$$I_1=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=\sigma_{kk} \tag{2.2.9}$$

第二应力不变量：

$$I_2=\sigma_x\sigma_y+\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x-\tau_{xy}^{\ 2}-\tau_{yz}^{\ 2}-\tau_{zx}^{\ 2} \tag{2.2.10}$$

第三应力不变量：

$$I_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z+2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}-\sigma_x\tau_{yz}^{\ 2}-\sigma_y\tau_{zx}^{\ 2}-\sigma_z\tau_{xy}^{\ 2} \tag{2.2.11}$$

如果坐标系选择正好使微立方体三对面上作用主应力，剪应力都为零，则：

$$I_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3 \tag{2.2.9′}$$

$$I_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1 \tag{2.2.10′}$$

$$I_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \tag{2.2.11′}$$

4. 球应力张量与偏应力张量

应力张量 σ_{ij} 可以分解为一个各方向应力相等的球应力张量和一个偏应力张量：

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_{11}-\sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \sigma_{23}\\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m\end{bmatrix} \tag{2.2.12}$$

其中球应力张量表示为：

$$\sigma_m=\frac{1}{3}\sigma_{kk}=\frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right)=\frac{1}{3}\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right) \tag{2.2.13}$$

偏应力张量表示为：

$$S_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\,\delta_{ij} \tag{2.2.14}$$

其中 $\delta_{ij}\begin{cases}=0 & i\neq j\\ =1 & i=j\end{cases}$ 称为克罗纳克尔 δ（*Kronecker delta*）。

当 x，y，z 方向与主应力方向重合时，即六面体的六个面为主应力面时：

$$\begin{cases}S_1=\sigma_1-\sigma_m\\ S_2=\sigma_2-\sigma_m\\ S_3=\sigma_3-\sigma_m\end{cases} \tag{2.2.15}$$

可以推导偏应力张量的三个不变量与主应力间的关系：

第一偏应力不变量：

$$J_1=S_{kk}\equiv 0 \tag{2.2.16}$$

第二偏应力不变量：

$$J_2=\frac{1}{2}S_{ij}S_{ji}=\frac{1}{6}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \tag{2.2.17}$$

第三偏应力不变量：

$$J_3=\frac{1}{3}S_{ij}S_{jk}S_{ki}=\frac{1}{27}(2\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)(2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3)(2\sigma_3-\sigma_1-\sigma_2) \tag{2.2.18}$$

5. 八面体应力

在 xyz 坐标系中，如果取 $OA=OB=OC$，则斜截面 ABC 外法向与三个坐标轴夹角的余弦 $l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}}$。如果图 2-2-4 中平面 AOB，BOC 和 COA 为主应力面，分别作用 σ_1、σ_2、σ_3，则 ABC 为八面体上的一个面。在八个象限中分别绘出与 ABC 同样的斜截面围成的一个八面体。

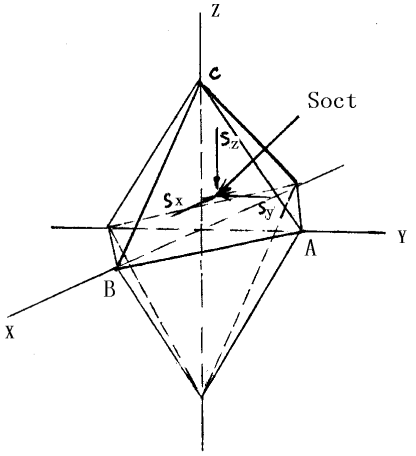


图 2-2-4　八面体及其应力

取 ABC 为单位面积，作用在 ABC 平面上的总应力（它不一定与该面法线重合）s_{oct}，它在三个方向的分量为 s_x，s_y，s_z。根据平衡条件：

$$\begin{cases} s_x = \sigma_1 l = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1 \\ s_y = \sigma_2 m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 \\ s_z = \sigma_3 n = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3 \end{cases} \tag{2.2.19}$$

则　　$$s_{oct}^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) \tag{2.2.20}$$

将 s_{oct} 分解为八面体上的正应力和剪应力：

八面体正应力：

$$\sigma_{oct} = s_x l + s_y m + s_z n = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{I_1}{3} \tag{2.2.21}$$

八面体剪应力：

$$\tau_{oct} = \sqrt{s_{oct}^2 - \sigma_{oct}^2} = \frac{1}{3}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.22}$$

可见 σ_{oct} 和 τ_{oct} 与应力不变量及偏应力不变量有一定关系，在土力学中常用另外两个应力不变量 p 与 q。

p 为平均主应力：

$$\mathrm{p}=\sigma_{oct}=\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{2.2.23}$$

q 称为广义剪应力（或等效剪应力）：

$$\mathrm{q}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}\,\tau_{oct} = \sqrt{3J_2} \tag{2.2.24}$$

有时也将 p、q 分别称为八面体正应力和八面体剪应力。实际上 q 并不是某一具体平面上的剪应力，它只是为了在土力学中表达方便而引入的一个表达式。因为在单轴与三轴压缩的情况下，$\mathrm{q}=\sigma$ 或者 $\mathrm{q}=\sigma_1 - \sigma_3$，这是很便利的。

6. 主应力空间与 π 平面

对于各向同性的材料，其应力应变关系与具体的坐标系方向无关，只与三个主应力 σ_1、σ_2、σ_3 的大小有关，所以可以用主应力空间及其应力变量来描述。

（1）主应力空间

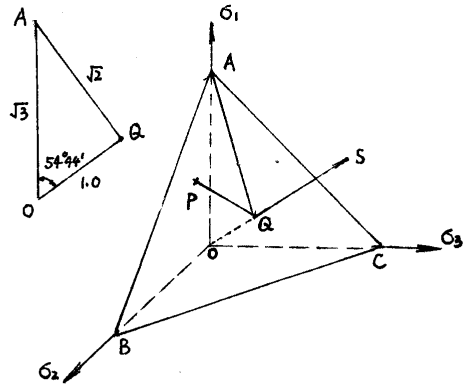
所谓主应力空间就是以三个主应力为坐标轴，用应力，如 *kPa* 为度量尺度形成的一个空间。在此空间中的一个点 *P* 代表一个应力状态（σ_1，σ_2，σ_3）（压应力为正）；此空间中的一条线表示了一条应力路径，也就是应力状态连续变化在应力空间形成的轨迹，应力路径可以在不同应力空间或应力平面中表示。

（2）空间对角线和 π 平面

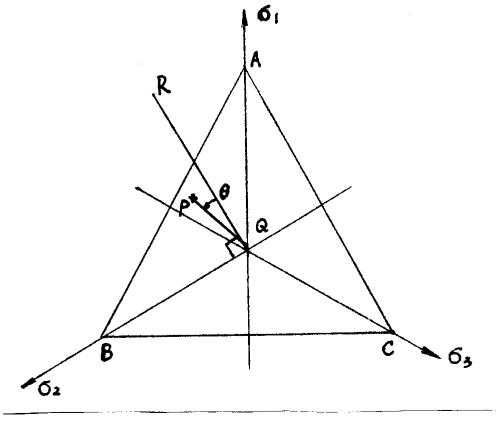
图 2-2-5（a）表示了一个主应力空间。其中射线 *OS* 与 σ_1，σ_2，σ_3 轴夹角相等，即：

$$\alpha=\beta=\gamma=54.44^\circ \tag{2.2.25}$$

或者　　$$l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{2.2.26}$$



a. 主应力空间



b. π 平面

图 2-2-5　主应力空间与 π 平面

则 *OS* 线为空间对角线（Space diagonal）。与空间对角线垂直的平面被称为 π 平面（偏应力平面）。π 平面有无限多，其中过应力点 *P* 的 π 平面与空间对角线 *OS* 相交于 *Q*，连接 *QP*。由于在 π 平面上各点的平均主应力 p 都相等，所以 *QP* 表示偏应力的大小。

（3）π 平面的意义和参数

(a)在 π 平面上所有点的主应力之和（$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$）（或平均主应力 p）是常数。

在 π 平面上任一点 *P*（σ_1，σ_2，σ_3）向 *OS* 投影都是 *Q* 点，$\overline{OP}$ 向 *OS* 投影的长度都是 $\overline{OQ}$。

$$\overline{OQ}=\sigma_x l+\sigma_y m+\sigma_z n \tag{2.2.27}$$

由于 $l=m=n=\frac{1}{\sqrt{3}}$，所以

$$\overline{OQ}=\frac{1}{\sqrt{3}}（\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3）=\frac{1}{\sqrt{3}}I_1=\sqrt{3}\,\sigma_{oct} \tag{2.2.28}$$

可见$\overline{OQ}$与主应力之和，或应力第一不变量I_1，或平均主应力 p（八面体主应力σ_{oct}）有关。亦即π平面上各点主应力之和都是相等的。

(b) π平面上长度表示偏应力大小

在图 2-2-5(a)和(b)中：

$$\overline{OP}^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2$$

$$\overline{OQ}^2=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$$

$$\overline{PQ}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{3}\ \tau_{oct}=\sqrt{2J_2}=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\mathrm{q} \tag{2.2.29}$$

可见$\overline{PQ}$长度实际是表示了八面体剪应力或偏应力第二不变量的大小。

(c) 应力洛德角

为了表示三个主应力σ_1、σ_2、σ_3，或描述一个应力点 *P*，除了$\overline{OQ}$和$\overline{PQ}$两线段长度之外，还需要有另一个变量。例如以图 2-2-5 中 *Q* 为圆心，以$\overline{PQ}$为半径，还可以有无限多应力点。为了描述点 *P* 在π平面上的位置还应引入另外一个参数。亦即$\overline{PQ}$与某一固定方向的夹角。这个夹角就是应力洛德（Lode）角。在π平面应力洛德角的定义如图 2-2-5(b)所示。首先确定在σ_2轴与σ_1轴之间与σ_2轴正方向夹角为 90°的方向 *QR*，则$\overline{PQ}$与 *QR* 之间的夹角定义为洛德角θ_σ，或者简写为θ。我们已知洛德参数及毕肖甫（*Bishop*）常数为：

$$\mu_\sigma=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{2.2.30}$$

$$b=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{2.2.31}$$

可以推导出：

$$tg\theta=\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}}=\frac{2b-1}{\sqrt{3}} \tag{2.2.32}$$

洛德角与偏应力不变量J_2和J_3间的关系为：

$$\sin 3\theta=-\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \tag{2.2.33}$$

应力洛德角是一个表征应力状态的参数，可表示中主应力和其他两个主应力间的相对比例。如果我们定义$\sigma_1\geq\sigma_2\geq\sigma_3$，则洛德角$\theta$在+30°～-30°角域中变化。对于三轴压缩试验，$\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$，则$\theta$=-30°；对于三轴伸长试验，$\sigma_1=\sigma_2>\sigma_3$（$\sigma_3$为轴向应力），则$\theta$=30°。

可见三个独立的应力参数 p、q 和θ可以确定应力点 P 在主应力空间中的位置，即主应力大小。它们与σ_1，σ_2，σ_3或I_1、I_2、I_3，或I_1、J_2、J_3一样可以表示一点的主应力状态。

2.2.2　应变

1.　应变张量

与应力一样，一点的应变状态可以用一个二阶的张量——应变张量来表示：

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz}\\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z\end{bmatrix} \tag{2.2.34}$$

由于其对称性，它有 6 个独立分量，可以用列矩阵或一个 6 维的向量表示：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{2.2.35}$$

或者

$$\{\varepsilon\}^{\mathrm{T}}=\begin{Bmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{yz} & \gamma_{zx}\end{Bmatrix} \tag{2.2.36}$$

在式（1.2.35）中，由于应变与位移间关系为：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \tag{2.2.37}$$

所以工程剪应变与张量应变差$\frac{1}{2}$系数，亦即$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}$，$\varepsilon_{yz}=\frac{1}{2}\gamma_{yz}$，$\varepsilon_{zx}=\frac{1}{2}\gamma_{zx}$。

2.　球应变张量和偏应变张量

应变张量同样可分为球张量和偏张量：

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\varepsilon_v}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\varepsilon_v}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon_v}{3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\varepsilon_{11}-\frac{\varepsilon_v}{3} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22}-\frac{\varepsilon_v}{3} & \varepsilon_{23}\\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33}-\frac{\varepsilon_v}{3}\end{bmatrix} \tag{2.2.38}$$

或者表示为　　$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\,\delta_{ij}+e_{ij}$

其中e_{ij}为式（2.2.38）中右侧后一项，称为偏应变张量。

当 x，y，z 方向与主应变方向重合时，只有三个主应变ε_1、ε_2和ε_3，对应有三个偏主应变：$e_1=\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_v}{3}$，$e_2=\varepsilon_2-\frac{\varepsilon_v}{3}$，$e_3=\varepsilon_3-\frac{\varepsilon_v}{3}$。

3.　应变不变量与偏应变不变量

应变张量和偏应变张量分别有三个不变量：

$$I_{1\varepsilon}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=\varepsilon_{kk} \tag{2.2.39}$$

$$I_{2\varepsilon}=\varepsilon_x\ \varepsilon_y+\varepsilon_y\ \varepsilon_z+\varepsilon_z\ \varepsilon_x-\frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)=\varepsilon_1\ \varepsilon_2+\varepsilon_2\ \varepsilon_3+\varepsilon_3\ \varepsilon_1 \tag{2.2.40}$$

$$I_{3\varepsilon}=\varepsilon_x\ \varepsilon_y\ \varepsilon_z+\frac{1}{4}[\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}-(\varepsilon_x\ \gamma_{yz}^2+\varepsilon_y\ \gamma_{zx}^2+\varepsilon_z\ \gamma_{xy}^2)]=\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3 \tag{2.2.41}$$

$$J_{1\varepsilon}=0 \tag{2.2.42}$$

$$J_{2\varepsilon}=\frac{1}{2}\ e_{ij}e_{ji}=\frac{1}{6}[(\varepsilon_x-\varepsilon_y)^2+(\varepsilon_y-\varepsilon_z)^2+(\varepsilon_z-\varepsilon_x)^2+\frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2+\gamma_{yz}^2+\gamma_{zx}^2)$$

$$=\frac{1}{6}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]=\frac{1}{2}(e_1^{\ 2}+e_2^{\ 2}+e_3^{\ 2}) \tag{2.2.43}$$

$$J_{3\varepsilon}=\frac{1}{3}\ e_{ij}e_{jk}e_{ki}=\frac{1}{3}(e_1^{\ 3}+e_2^{\ 3}+e_3^{\ 3})$$

$$=\frac{1}{27}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2-\varepsilon_3)(2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3)(2\varepsilon_3-\varepsilon_1-\varepsilon_2) \tag{2.2.44}$$

4. 八面体应变及应变π平面

在土力学中习惯于分别用如下三个应变参数表示八面体应变及π平面上的参数：

体应变：　　$$\varepsilon_v=\varepsilon_{kk}=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3=I_{1\varepsilon} \tag{2.2.45}$$

广义剪应变：　　$$\bar{\varepsilon}=[\frac{2}{3}\ e_{ij}e_{ji}]^{\frac{1}{2}}=[\frac{4}{3}\ J_{2\varepsilon}]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{3}[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{2.2.46}$$

应变洛德角：　　$$tg\theta_\varepsilon=\frac{2\varepsilon_2-\varepsilon_1-\varepsilon_3}{\sqrt{3}(\varepsilon_1-\varepsilon_3)} \tag{2.2.47}$$

应变增量张量同样也存在上述各参数。

在塑性力学中认为σ_{ij}，$d\varepsilon_{ij}^p$同轴，常用塑性应变的增量形式。

2.3　土的应力应变特性

由于土是岩石风化而成的碎散颗粒的集合体，一般包含有固、液、气三相，在其形成的漫长的地质过程中，受风化、搬运、沉积、固结和地壳运动的影响，其应力应变关系十分复杂，并且与诸多因素有关。其中主要的应力应变特性是其非线性、弹塑性和剪胀（缩）性。主要的影响因素是应力水平（Stress level）、应力路径（Stress path）和应力历史（Stress history），亦称 3S 影响。

2.3.1　土应力应变关系的非线性

由于土由碎散的固体颗粒组成，土宏观的变形主要不是由于颗粒本身变形，而是由于颗粒间位置的变化。这样在不同应力水平下由相同应力增量而引起的应变增量就不会相同，亦即表现出非线性，图 2-3-1 表示土的常规三轴压缩试验的一般结果，其中实线表示密实砂土或超固结粘土，虚线表示松砂或正常固结粘土。从图 2-3-1（a）可以看到，正常固结粘土和松砂的应力随应变增加而增加，但增加速率越来越慢，最后逼近一渐近线；而在密砂和超固结土的试验曲线中，应力开始随应变增加而增加，达到一个峰值之后，应力随应变增加而下降，最后也趋于稳定。在塑性理论中，前者称为应变硬化（或加工硬化），后者称为应变软化（或加工软化）。应变软化过程实际上是一种不稳定过程，有时伴随着应力的局部化—剪切带的产出现，其应力应变曲线对一些影响因素比较敏感。由于其应力应变间不成单值函数关系，所以反映土的应变软化的数学模型一般形式复杂，难于准确；反映应变软化的数值计算方法也有较大难度。

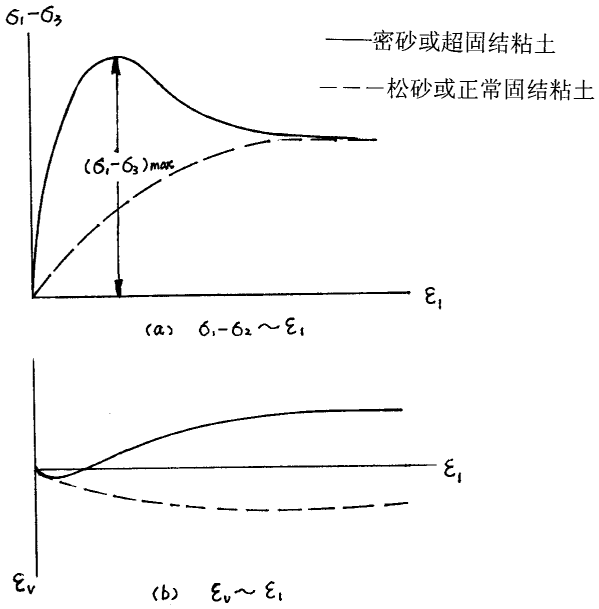


图 2-3-1　土的三轴试验典型曲线

2.3.2　土的剪胀性

由于土是碎散的颗粒集合，在各向等压或等比压缩时，孔隙减少，从而发生较大的体积压缩。这种体积压缩大部分是不可恢复的，如图 2-3-2 所示。

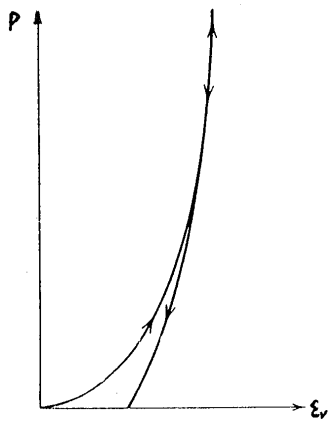


图 2-3-2　各向等压和等比压缩试验曲线

在图 2-3-1（b）中，可以发现，在三轴试验中，对于密砂或强超固结粘土偏差应力$\sigma_1-\sigma_3$增加引起了轴应变ε_1的增加，但除开始时少量体积压缩（正体应变）外，发生明显的体胀（负体应变）。由于在常规三轴压缩试验中，平均主应力增量$\Delta\ p=\frac{1}{3}(\sigma_1-\sigma_3)$在加载过程中总是正的，不可能是体积的弹性回弹，因而这种体应变只能是由剪应力引起的，被称为剪胀性（Dilatancy）。广义的剪胀性指剪切引起的体积变化，包括体胀，也包括体缩。后者也常被称为“剪缩”。土的剪胀性实质上是由于剪应力引起土颗粒间相互位置的变化，使排列变化而而使颗粒间的孔隙加大（或减小），从而发生了体积变化。

2.3.3　的变形的弹塑性

在加载后卸载到原应力状态时，土一般不会恢复到原来的应变状态。其中有部分应变是可恢复的，部分应变是不可恢复的塑性应变，并且后者往往占很大比例。可以表示为：

$$\varepsilon=\varepsilon^{\mathrm{e}}+\varepsilon^{\mathrm{p}} \tag{2.3.1}$$

其中ε^e表示弹性应变，ε^p表示塑性应变。图 2-3-3 表示的承德中密砂（一种天然均匀细砂）在$\sigma_3=100kPa$的三轴试验结果。其中单调加载试验曲线用虚线表示；循环加载试验曲线用实线表示。可见每一次应力循环都有可恢复的弹性应变及不可恢复的塑性应变，亦即永久变形。

对于结构性很强的原状土，如很硬的粘土，可能在一定的应力范围内，它的变形几乎是“弹性”的，只有到一定的应力水平时，亦即达到屈服条件时，才会产生塑性变形。一般土在加载过程中弹性和塑性变形几乎是同时发生的，没有明显的屈服点，所以亦称为弹塑性材料。

土在应力循环过程中另一个特性是存在滞回圈，在图 2-3-3 中卸载初期应力应变曲线陡降，减少到一定偏差应力时，卸载曲线变缓，再加载曲线开始陡而随后变缓。这就形成一滞回圈，越接近破坏应力时，这一现象越明显。在图 2-3-2 中另一个值得注意的现象是卸载时试样发生体缩。由于卸载时平均主应力 p 是减少的，这种卸载体缩显然无法用弹性理论解释。人们认为这主要源于土的剪胀变形的可恢复性和加载引起土结构的变化。总之，即使是在同一应力路径上的卸载－再加载过程，土的变形也并非是完全弹性的。但一般情况下，近似认为是弹性变形。

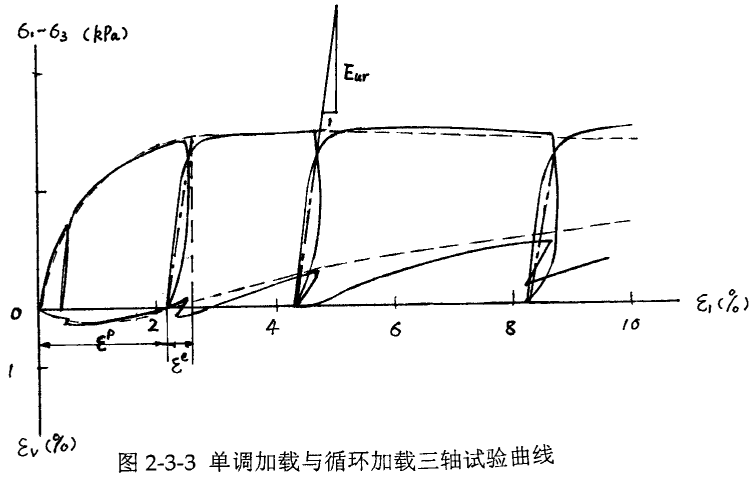


图 2-3-3 单调加载与循环加载三轴试验曲线

2.3.4　土应力应变的各向异性和土的结构性

所谓各向异性是指在不同方向上材料的物理力学性质不同。由于土在沉积过程中，长宽比大于 1 的针、片、棒状颗粒在重力作用下倾向于水平方向排列而处于稳定的状态；另外，在随后的固结过程中，竖向的上覆土体重力产生的竖向应力与水平土压力产生的水平应力大小是不等的，这种不等向固结也会产生土的各向异性。土的各向异性主要表现为横向各向同性，亦即在水平面各个方向的性质大体上是相同的，而竖向与横向性质不同。土的各向异性可分为初始各向异性（Inherent anisotropy）和诱发各向异性（Induced anisotropy）。天然沉积和固结造成的各向异性可归入初始各向异性之列。在室内重力场中各种制样过程也会使土试样具有不同程度的初始各向异性。

检验初始各向异性的最简单的试验是等向压缩试验。在对土样进行等向压缩试验时，经常发现轴向应变小于$\frac{1}{3}$体应变，$\varepsilon_z=(0.17\sim0.22)\varepsilon_V$。这表明竖直方向比水平方向的压缩性小。

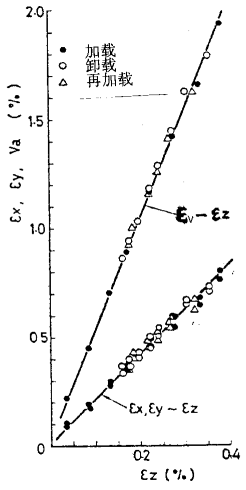
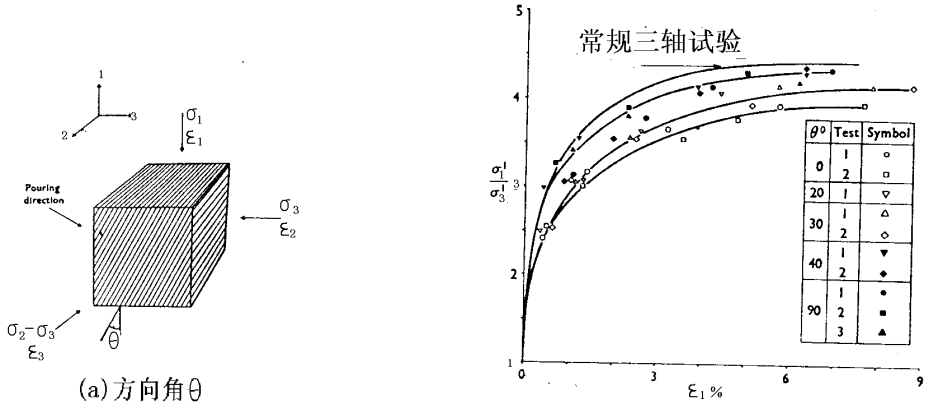


图 2-3-4　由玻璃珠模拟立方体“砂土”试样的各向等压试验

图 2-3-4 是用自由下落的小玻璃珠制成模拟“土”试样在各向等压试验中的结果。其中 $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 2.2\varepsilon_z$，$\varepsilon_z$ 为竖直方向的应变，$\varepsilon_v = 5.4\varepsilon_z$。这种各向异性是由于小玻璃珠在不同方向的排列不同引起的。



(a) 方向角θ　　（b）不同θ的应力应变关系曲线

图 2-3-5　砂土的各向异性

图 2-3-5 表示的是砂土的试验结果。试样是在空气中用撒砂雨的方法制成的立方体三轴试样，用立方体真三轴仪进行的常规三轴压缩试验。竖直方向大主应力与砂土的沉积面（图中阴影线表示）成夹角 θ，θ=90° 表示的是常规方法制样试验情况，即大主应力 σ_1 与沉积面垂直。从图可见不同方向试验的应力应变曲线是不同的。在 θ=20° 和 θ=40° 的试验中，实测的两个横向应变 ε_2 与 ε_3 是不等的，$\varepsilon_3 > \varepsilon_2$。从图中可见，对于 θ=90° 和 θ=40° 的试验可以用一条曲线表示，θ=30° 和 θ=20° 的试验结果也可以用一条曲线表示，而 θ=0° 用单独一条曲线表示，最上部曲线是用常规制样和常规三轴仪进行的常规三轴试验结果。（θ=90°）

所谓诱发各向异性是由于受到一定的应变后，土颗粒将发生空间位置的变化，从而改变了土的空间结构。，这种结构的变化对于土进一步加载的应力应变关系将产生影响，并且不同于初始加载时的应力应变关系。

图 2-3-6 表示的正常固结粘土的一种三轴试验：首先试样被等比固结到 $\bar{\tau}=(\sigma_1-\sigma_3)/2=$

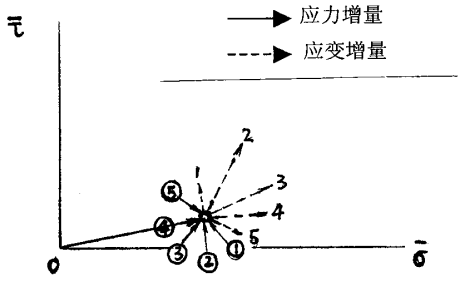
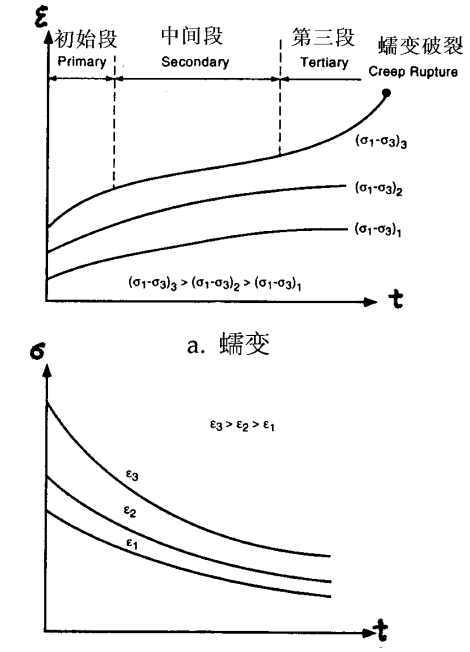


图 2-3-6　正常固结粘土不同应力增量方向的试验

14.2kPa 和 $\bar{\sigma}=(\sigma_1+\sigma_3)/2$=90kPa，然后在五个方向施加相同的应力增量，量测相应的应变增量。可见不同方向应力增量引起的应变增量方向和大小都不同，其中初始不等向固结所引起的各向异性是主要原因。例如对于沿原应力路径④加载产生的应变路径与原固结的应力路径完全一致。而其他应力路径则不然。

上述例子都是室内制样的情况，原状天然土的各向异性往往更强烈，也比较复杂。原状土的各向异性常常是其结构性的一个方面的表现。所谓土的结构性是由于土颗粒的空间排列集合及土中各



a. 蠕变

b. 应力松弛

图 2-3-8　粘土的蠕变与应力松弛

相间和颗粒间的作用力造成的。结构性可以明显提高土的强度和刚度。对于粘性土更重要。取样和其他扰动会破坏原状土的结构。原状粘土无侧限抗压强度与扰动重塑土强度之比称为灵敏度，它是粘性土的结构性的一个指标。图 2-3-7 表示了原状土与扰动土的压缩曲线。可见原状土在同样平均主应力下更不易变形与压缩。有关土的结构性在 2.8 节中还要进一步讨论。

2.3.5　土的流变性

粘性土的应力应变强度关系受时间的影响除了基于有效应力原理的孔压消散和土体固结问题之外，还有土的流变性的影响。与土的流变性有关的现象是土的蠕变与应力松弛。所谓蠕变是指在应力状态不变的条件下，应变随时间逐渐增长的现象；应力松弛是指维持应变不变，材料内的应力随时间逐渐减小的现象。图 2-3-8 表示土的蠕变和应力松弛的现象。在图 2-3-8(a)中，在某一常应力作用下，土的应变不断增加，但当这个应力值较小时，如图中$(\sigma_1-\sigma_3)_1$和$(\sigma_1-\sigma_3)_2$，试样变形逐渐趋于稳定；当这个常应力较大时，则应变量会在相对稳定之后又突然加快，最后达到蠕变破坏。这种蠕变强度低于常规试验的强度，有时只有后者的 50%左右。粘性土的蠕变性随着其塑性、活动性和含水量的增加而加剧。

在侧限压缩条件下，由于土的流变性而发生的压缩称为次固结，长期的次固结可以使土体不断加密而使正常固结土呈现出超固结土的特性，被称为似超固结土或“老粘土”。

除了粘性土的流变性以外，近年来也发现一些高面板堆石坝的堆石体也随着时间不断发生变形，受到很大关注。这可能与岩石及堆石块体之间的流变性有关。

2.3.6　影响土应力应变关系的应力条件

1.　应力水平

所谓应力水平一般有两层含义：一是指围压的绝对值的大小；二是指应力（常为剪应力）与破坏值之比，即 $S = q/q_f$ 。这里应力水平是指围压。

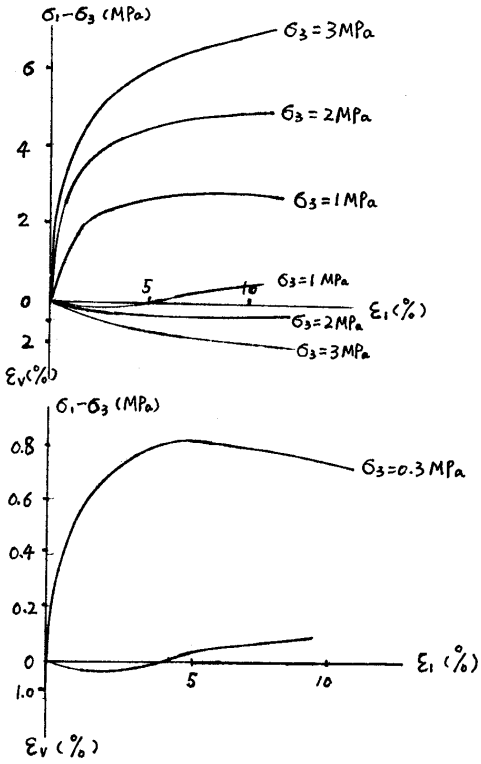


图 2-3-9　承德中密砂在不同围压下的三轴试验曲线

图 2-3-9 表示了承德中密砂在不同围压下的三轴试验曲线。可见随着 σ_3 增加，砂土的强度和刚度都明显提高，应力应变关系曲线形状也有变化。在很高围压下，即使很密实的土，也与松砂（见图 2-3-1）的应力应变关系曲线相似：没有剪胀性和应变软化现象。

应当指出土的抗剪强度 τ_f 或 q_f 随着正应力 σ_n 或围压 σ_3 增加，但破坏时的应力比，或者砂土的内摩擦角 φ，则常常随着围压的增加而降低。

土的变形模量随着围压而提高的现象，也称为土的压硬性。由于土是由碎散的颗粒所组成，所以围压所提供的约束对于其强度和刚度是至关重要的。这也是土区别于其他材料的重要特性之一。简布（Janbu）在 1963 年用下式表示土在三轴试验中初始模量 E_i 与围压 σ_3 之间的关系：

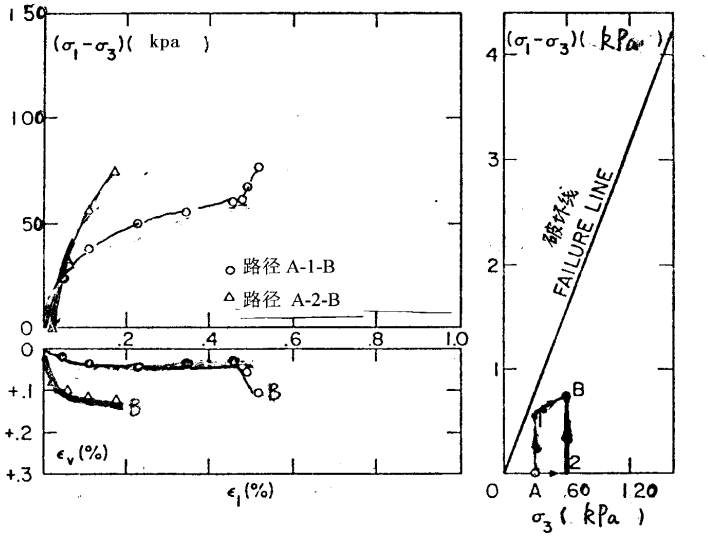
$$E_i = KPa\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n \tag{2.3.2}$$

其中 K 与 n 为试验常数。这个公式后来为许多本构模型所应用。

2.　应力路径

图　　表示了不同应力路径阿的三轴试验的应力应变关系曲线。可见它们受应力路径的影响很明显。图 2-3-10 表示的是蒙特雷（Monterey）松砂的两种应力路径的三轴试验。它们的起点 A 和终点 B 都相同，但路径 1 是从 A-1-B；路径 2 是 A-2-B。从图 2-3-10（a）可见路径 1 发生了较大的轴向应变。这是由于点 1 的应力比高于点 B，更接近于破坏线，这就产生较大的轴向应变。

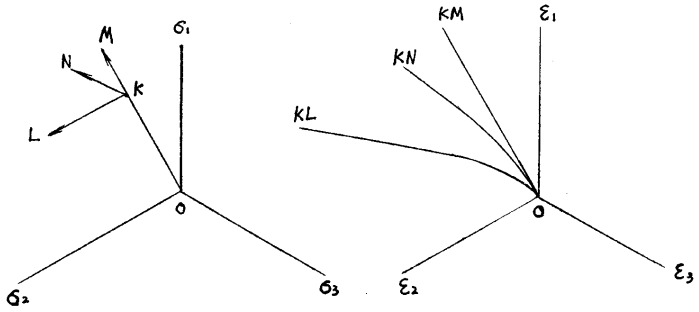
伍德（D.M.Wood）在盒式真三轴仪上对重塑的饱和粘土先各向等压固结后，沿图 2-3-11 中 *OK* 方向剪切试验，然后从 *K* 点出发沿 *KM*、*KN* 和 *KL* 不同应力路径继续试验，得到了图（b）所示的



(a) 应力应变关系曲线　　(b) 应力路径

图 2-3-10　松砂在不同应力路径下应力应变关系

应变路径。可见沿 *OK* 原来方向加载，应变路径与应力路径方向一致，都为直线。但当应力路径发生转折时，粘性土对于刚刚经过的路径似乎有“记忆”，或者应变路径沿 *OK* 方向有惯性，只有在新应力路径上走很长距离后，应变路径的方向才逐渐靠近过来。



(a) 应力路径　　(b) 应变路径

图 2-3-11　正常固结粘土在 π 平面上不同应力路径的真三轴试验

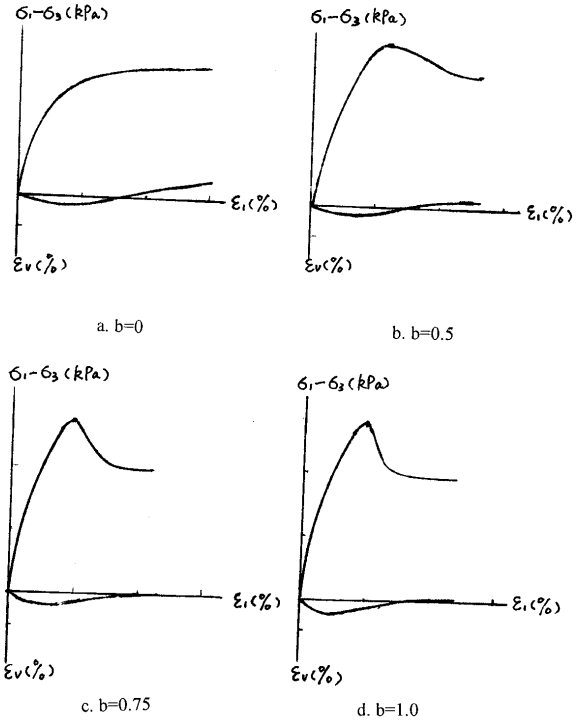


图 2-3-12　σ_3＝300kPa 的真三轴试验

图 2-3-12 为承德中密砂的真三轴试验。试验中σ_3＝300kPa 保持不变，中主应力不同（b＝常数）的四个试验表明，随着中主应力的增加，曲线初始模量提高，强度也有所提高，体胀减少，应变软化加剧。

3. 应力历史

应力历史既包括天然土在过去地质年代中受到的固结和地壳运动作用，也包括土在试验室（或在工程施工、运行中）受到的应力过程。对于粘性土一般指其固结历史。如果粘性土在其历史上受到过的最大先期固结压力（指有效应力）大于目前受到的固结压力，那么这就是超固结粘土。如果目前的固结压力就是其历史上最大固结压力，那么它就是正常固结土。超固结土与正常固结土的应力应变曲线区别见图 2-3-1。如上所述，土的流变性使粘性土在长期荷载作用下，尽管历史上固结应力没变化，但由于次固结使土表现出超固结的性状。这也是一种应力历史的影响。

2.4　土的弹性模型

2.4.1　概述

基于广义虎克定律的线弹性理论，以其形式简单，参数少而且物理意义明确和在工程界有广泛深厚的基础而在许多工程领域得到应用。早期土力学中的变形计算中主要是基于线弹性理论的。只有在计算机技术得到迅速发展之后，非线弹性理论模型才得到较广泛的应用。

1.　线弹性模型

在线弹性模型中，只需两个材料常数即可描述其应力应变关系：E 和 ν；或 K 和 G；或 λ 和 μ。其应力应变关系可表示为：

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} = \dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{zx} \end{cases} \tag{2.4.1}$$

亦可表示成：

$$\begin{cases} p = K\varepsilon_V \\ q = 3G\bar{\varepsilon} \end{cases} \tag{2.4.2}$$

其中　$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$　；　$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$　。

这种关系用张量可表示成：

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij} \tag{2.4.3}$$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu}\varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \tag{2.4.4}$$

或者

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \tag{2.4.5}$$

其中$[D]$为刚度矩阵：

$$[D]=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & 对 & & \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & & 称 & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \tag{2.4.6}$$

在土力学的地基附加应力计算中，目前还基本上是用线弹性理论的布辛尼斯克(J.Boussinesq)或者明德林(Mindlim)解。而在沉降计算中也主要是在经典弹性理论的基础上进行的。

首先对土样进行侧限压缩试验，得到压力 p 与土的孔隙比 e 的关系曲线。尽管这种关系曲线不是直线，但可在一定的应力范围内线性化为：

$$a=\frac{e_1-e_2}{p_2-p_1} \tag{2.4.7}$$

其中 a 为压缩系数。

则从 a 推导出侧限压缩模量 E_s：

$$E_s=\frac{\Delta p}{\Delta \varepsilon_z}=\frac{1+e_1}{a} \tag{2.4.8}$$

据弹性理论可得到：

$$E_s=\frac{1-\nu}{1-\nu-2\nu^2}E \tag{2.4.9}$$

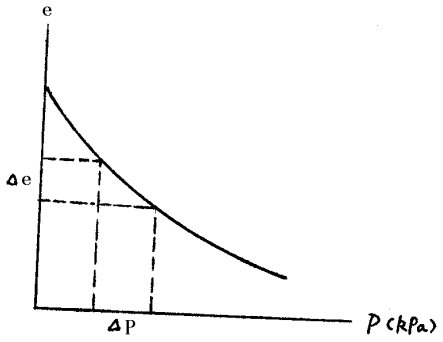


图 2-4-1　土的压缩曲线图

对于土的应力应变关系，线弹性理论是过于简化了。但当应力水平不高和在一定的边界条件情况下，它还是在许多方面得到应用。如用于计算土中应力和配合一定的经验计算地基变形，能为工程问题提供有用的解答。

土的各向异性在大多数情况下表现为横观各向同性。亦即是层状结构。它在 x,y 组成的水平面内是各向同性的。用线弹性理论表述则只需 5 个独立的材料常数：E、E'、ν、ν'、G'。

$$\begin{cases}\varepsilon_x=\dfrac{1}{E}(\sigma_x-\nu\sigma_y)-\dfrac{\nu'}{E'}\sigma_z\\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}(\sigma_y-\nu\sigma_x)-\dfrac{\nu'}{E'}\sigma_z\\ \varepsilon_z=\dfrac{1}{E'}\sigma_z-\dfrac{\nu'}{E'}(\sigma_x+\sigma_y)\\ \gamma_{xy}=\dfrac{2(1+\nu)}{E}\tau_{xy}\\ \gamma_{yz}=\dfrac{1}{G'}\tau_{yz}\\ \gamma_{zx}=\dfrac{1}{G'}\tau_{zx}\end{cases} \tag{2.4.10}$$

2. 非线性弹性模型

应力应变关系的非线性是土的基本变形特性之一。为了反映这种非线性，在弹性理论范畴内有两种模型：割线模型和切线模型。割线模型是计算材料应力应变全量关系的模型。在这种模型中，弹性参数 E_s 和 ν_s (或者 K_s 和 G_s)是应变或应力的函数而不再是常数。这样它可以反映土变形的非线性及应力水平的影响；另一个明显的优点在于它也可用于应变软化阶段。在计算中可用迭代法计算。但这是一种理论上不够严密的模型，不一定保证解的稳定性和唯一性。

切线弹性模型是建立在增量应力应变关系基础上的弹性模型，实际上是采用分段线性化的广义虎克定律的形式。模型参数 E_t、ν_t (或者 K_t、G_t)是应力(或应变)的函数，但在每一级增量情况下是不变的，它可以较好地描述土受力变形的过程，因而得到广泛的应用。具体计算中可用基本增量法中点增量法和迭代增量法等。模型的表达形式为增量的广义虎克定律：

$$\{d\sigma\}=[D_t]\{d\varepsilon\} \tag{2.4.11}$$

其中$[D_t]$为增量形式的刚度矩阵。

2.4.2　邓肯—张(Duncan—Chang)双曲线模型

1. 前言

康纳(Kondner)在 1963 年根据大量土的三轴试验的应力应变关系曲线，提出可以用双曲线拟合三轴试验的$(\sigma_1-\sigma_3)\sim\varepsilon_a$ 曲线，即：

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_a}{a+b\varepsilon_a} \tag{2.4.12}$$

其中 a 、b 为试验常数。对于常规三轴压缩试验，$\varepsilon_a=\varepsilon_1$。邓肯等人根据这一双曲线应力应变关系等提出了一种目前被广泛应用的增量弹性模型，一般被称为邓肯一张(Duncan—Chang)模型。

2. 切线变形模量 E_t

在常规三轴压缩试验中，式（2.4.12）也可以写成：

$$\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}=a+b\ \varepsilon_1 \tag{2.4.13}$$

将常规三轴压缩试验的结果按$\dfrac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}\sim\varepsilon_1$的关系进行整理，则二者近似成线性关系。其中 a 为直线的截距；b 为直线的斜率。见图 2-4-2 所示。

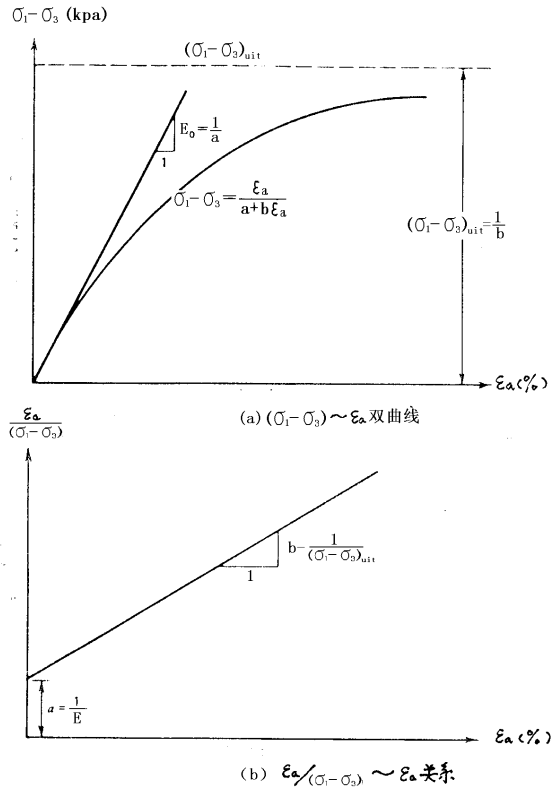


图 2-4-2　土的应力应变的双曲线关系

由于在常规三轴压缩试验中，由于 $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$，所以:

$$E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_{3)}}{d\varepsilon_1} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2} \tag{2.4.14}$$

在试验中的起始点，$\varepsilon_1 = 0$，$E_t = E_i$，则

$$E_i = \frac{1}{a} \tag{2.4.15}$$

这表明 a 代表的是在这个试验中的起始变形模量 E_i 的倒数。在式（2.4.12）中，如果 $\varepsilon_1 \to \infty$，则

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult} = \frac{1}{b} \tag{2.4.16}$$

或者

$$b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \tag{2.4.17}$$

则表明 b 代表的是双曲线的渐近线所对应的极限偏差应力 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$ 的倒数。

在土的试样中，如果应力应变曲线近似于双曲线关系，则往往是根据一定应变值（如 $\varepsilon_1 = 15$ %）来确定土的强度 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$ 而不可能在试验中使 ε_1 无限大，求取 $(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$；对于有峰值点的情况，取 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f = (\sigma_1 - \sigma_3)_{峰}$。这样 $(\sigma_1 - \sigma_3)_f < (\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}$。定义破坏比 R_f 为：

$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} \tag{2.4.18}$$

$$b=\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}=\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f} \tag{2.4.19}$$

将（2.4.19）、（2.4.15）代入（2.4.14）中

$$E_t=\frac{1}{E_i}\left[\frac{1}{\frac{1}{E_i}+\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\varepsilon_1}\right]^2 \tag{2.4.20}$$

式(2.4.20)中 E_t 表示为应变 ε_1 的函数，使用时不够方便，可将 E_t 表示为应力的函数形式。从式(2.4.12)可以得到：

$$\varepsilon_1=\frac{a(\sigma_1-\sigma_3)}{1-b(\sigma_1-\sigma_3)}=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{E_i[1-\frac{R_f(\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}]} \tag{2.4.21}$$

将（2.4.21）代入式（2.4.14）

$$\begin{aligned}E_t&=\frac{a}{\left[a+\frac{ab(\sigma_1-\sigma_3)}{1-b(\sigma_1-\sigma_3)}\right]^2}=\frac{1}{a\left[1+\frac{b(\sigma_1-\sigma_3)}{1-b(\sigma_1-\sigma_3)}\right]^2}\\&=\frac{1}{a\left[\frac{1}{1-b(\sigma_1-\sigma_3)}\right]^2}\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

将（2.4.19）、（2.4.15）代入（2.4.22）得

$$E_t=E_i\left[1-R_f\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]^2 \tag{2.4.23}$$

根据莫尔——库仑强度准则：

$$(\sigma_1-\sigma_3)_f=\frac{2c\cos\varphi+2\sigma_3\sin\varphi}{1-\sin\varphi} \tag{2.4.24}$$

简布发现三轴试验的初始模量 E_i 与围压 σ_3 有关，如果给出 $\lg(E_i/P_a)$ 与 $\lg(\sigma_3/P_a)$ 的关系图则二者近似呈直线关系，见图 2-4-3。

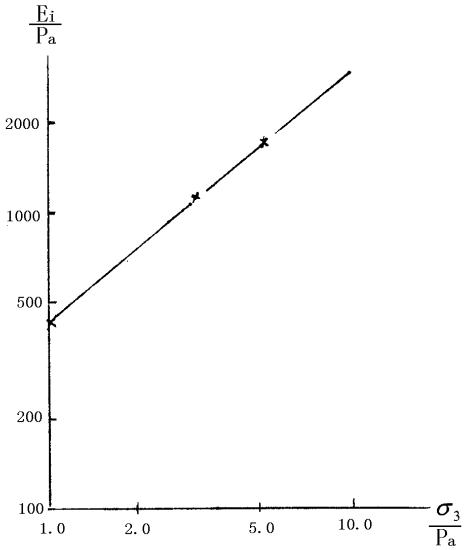


图 2-4-3　中密砂 $\lg(E_i / P_a)$与 $\lg(\sigma_3 / P_a)$间的试验关系图

所以：
$$E_i = KP_a(\frac{\sigma_3}{P_a})^n \tag{2.4.25}$$

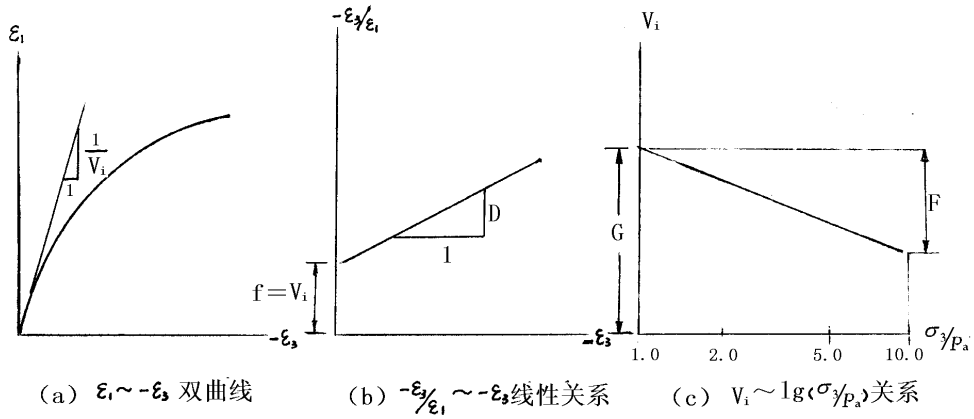
其中 P_a为大气压，量纲与σ_3相同；K、n 为试验常数，分别代表 $\lg(E_i / P_a)$与 $\lg(\sigma_3 / P_a)$直线的截距和斜率。将式（2.4.24）和式（2.4.25）代入式（2.4.23）则得到

$$E_t = KPa(\frac{\sigma_3}{Pa})^n \left[1-\frac{R_f(\sigma_1-\sigma_3)(1-\sin\varphi)}{2c\cos\varphi+2\sigma_3\sin\varphi}\right]^2 \tag{2.4.26}$$

可见切线变形模量的公式中共包括有 K、n、 ϕ、c、R_f五个材料常数。

3. 切线泊松比(poisson's ratio) ν_t

Duncan 等人根据一些试验资料，假定在常规三轴压缩试验中轴向应变ε_1与侧向应变-ε_3之间也存在双曲线关系（见图 2-4-4）。



（a）$\varepsilon_1 \sim -\varepsilon_3$ 双曲线　　（b）$-\varepsilon_3/\varepsilon_1 \sim -\varepsilon_3$线性关系　　（c）$V_i \sim \lg(\sigma_3/P_a)$关系

图 2-4-4　切线泊松比有关参数

$$\varepsilon_1 = \frac{-\varepsilon_3}{f + D(-\varepsilon_3)} \tag{2.4.27}$$

或者

$$-\varepsilon_3 / \varepsilon_1 = f + D(-\varepsilon_3) = f - D\varepsilon_3 \tag{2.4.28}$$

从式（2.4.28），试验得到的$-\varepsilon_3/\varepsilon_1$与$-\varepsilon_3$的关系可近似为直线关系，从而确定截距$f$与斜率$D$。从式（2.4.28）可见当$-\varepsilon_3 \to 0$时，$(-\varepsilon_3/\varepsilon_1)_{\varepsilon_3 \to 0} = f = \nu_i$，$\nu_i$即为初始泊松比。见图 2-4-4(a)。$D$为$\varepsilon_1$～$-\varepsilon_3$关系渐近线的倒数，见图 2-4-4(b)。试验表明土的切线泊松比ν_i是与试验的围压σ_3有关的。它们画在单对数坐标中，可假设是一条直线，见图 2-4-4(c)，这样：

$$\nu_i = \mathrm{f} = \mathrm{G} - \mathrm{F}\lg(\sigma_3 / \mathrm{Pa}) \tag{2.4.29}$$

G、F为试验常数，其确定见图 2-4-4(c)。

将式（2.4.27）微分：

$$\nu_t = \frac{-d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{(1 - D\varepsilon_1) f + D\varepsilon_1 f}{(1 - D\varepsilon_1)^2} = \frac{\nu_i}{(1 - D\varepsilon_1)^2} \tag{2.4.30}$$

将（2.4.21）中ε_1表达式代入式（2.4.30），则得到

$$\nu_t = \frac{G - F\lg(\sigma_3 / Pa)}{\left\{1 - \dfrac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{KPa\left(\dfrac{\sigma_3}{P_a}\right)^n \left[1 - \dfrac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin\varphi)}{2c\cos\varphi + 2\sigma_3 \sin\varphi}\right]}\right\}^2} \tag{2.4.31}$$

在切线泊松比式中又引入 G、F、D 三个材料常数。加上 E_t 中五个常数，共有八个常数。根据弹性理论，$0 < \nu_t < 0.5$。

4. 卸载——再加载模量

为了反映土变形的可恢复部分与不可恢复部分，Duncan—Chang 模型在弹性理论的范围内，采用了卸载——再加载模量不同于初始加载模量的方法。

通过常规三轴压缩试验的卸载——再加载曲线确定其卸载模量。由于这个过程中应力应变表现为一个滞回圈，所以用一个平均斜率代替，表示为 E_{ur}。从图 2-3-3 可见，在不同应力水平下这个平均斜率都接近相等，所以可认为它在同样围压σ_3下是一个常数。但它随围压σ_3增加而增加，试验表明在双对数坐标中二者关系可用直线近似。即

$$E_{ur} = K_{ur} P_a \left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n \tag{2.4.32}$$

其中 K_{ur} 为 $\lg(E_{ur}/P_a)$～$\lg(\sigma_3/P_a)$直线的截距，n 为其斜率。这里的 n 与式（2.4.25）中取为相等。其实 E_{ur} 与 E_i 和(σ_3/P_a)之间的指数不会完全相等，但二者一般相差不大，取为相等可用截距 K 或 K_{ur} 来调整，从而减少了一个材料常数。一般 $K_{ur} > K$。

应当指出，尽管 Duncan-Chang 模型引入不同变形模量，从而可反映土变形的不可恢复部分。但它毕竟还不是弹塑性模型，它没有离开弹性理论框架及理论基础，因而在复杂应力路经中如何判断加卸载就成为一个问题。最初，根据三轴试验，其作者用$(\sigma_1 - \sigma_3)$或 q 判断加卸载。而没考虑σ_3的变化，显然不完全合理。以后作者及使用者提出了一些不同加、卸载准则，1984 年邓肯等人提出加载函数为：

$$S_s = S\sqrt[4]{\sigma_3 / P_a} \tag{2.4.33}$$

其中 S 为应力水平

$$S=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f} \tag{2.4.34}$$

如果在加载历史中加载函数的最大值为 S_{sm}，则临界应力水平为：

$$S_m=\frac{S_{sm}}{\sqrt[4]{\sigma_3/P_a}} \tag{2.4.35}$$

如果 $S>S_m$，则为加载；如果 $S<\frac{3}{4}S_m$，则为卸载或再加载，使用 E_{ur} 式（2.4.32）计算；如果 $\frac{3}{4}S_m<S<S_m$，则用 E_t 与 E_{ur} 内插。显然这是一种经验的方法。也有人根据不同工程问题采用其他准则。

5. 邓肯（Duncan）等人的 E—B 模型

试验表明，在上述模型中，ε_1 与 ε_3 间的双曲线假设与实际情况相差较多；同时使用切线泊松比 ν_t 计算也有一些不便之处。1980 年邓肯等人提出了 $E-B$ 模型，其中 E_t 的确定与式（2.4.26）相同，另外引入体变模量 B 代替切线泊松比 ν_t。

$$B=\frac{E}{3(1-2\nu)} \tag{2.4.36}$$

在三轴试验中用下式确定 B：

$$B=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)_{70\%}}{3(\varepsilon_V)_{70\%}} \tag{2.4.37}$$

其中 $(\sigma_1-\sigma_3)_{70\%}$ 与 $\varepsilon_{V\,70\%}$ 为 $\sigma_1-\sigma_3$ 达到 70% $(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 时的偏差应力和体应变的试验值。这样对于每一个 σ_3=常数的三轴压缩试验，B 就是一个常数。试验表明，B 与 σ_3 有关，二者关系在双对数坐标中可近似为一直线，这样：

$$B=K_bP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^m \tag{2.4.38}$$

其中 K_b 和 m 是材料常数，分别为 $\lg(B/P_a)$ 与 $\lg(\sigma_3/P_a)$ 直线关系的截距和斜率。从式（2.4.36）可知，$E_t/3<B$。当 $B=17\,E_t$ 时，$\nu_t=0.49$，这时它可用于饱和土体的总应力分析。关于 E、ν 模型与 E、B 模型哪一个更适用，存在不同意见。在我国土石坝数值计算中，人们认为 E、ν 模型计算结果更好一些。

6. Duncan-Chang 模型参数的确定

在确定 a、b 时，用式（2.4.13）及图 2-4-2(b)求取 $\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}$ 与 ε_1 之间的直线关系时，常常发生低应力水平和高应力水平的试验点偏离直线的情况。对于同一组试验，不同的人可能取不同的 a、b 值。切线泊松比 ν_t 中的参数确定的任意性更大。尤其是对于有剪胀性的土，在高应力水平 ν_t 的确定实际意义不大。为此 Duncan 等人在总结许多试验资料的基础上建议如下计算有关参数的方法：

参数 b 的确定：

$$b=\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}=\frac{\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}\right)_{95\%}-\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}\right)_{70\%}}{(\varepsilon_1)_{95\%}-(\varepsilon_1)_{70\%}} \tag{2.4.39}$$

参数 a 的确定：$\dfrac{1}{aP_a}=\dfrac{E_i}{P_a}$

$$= \frac{1}{P_a} \frac{2}{\left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}\right)_{95\%} + \left(\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}\right)_{70\%} - \left(\frac{1}{\sigma_1-\sigma_3}\right)_{ult} \left[(\varepsilon_1)_{95\%} + (\varepsilon_1)_{70\%}\right]} \tag{2.4.40}$$

参数 B 的确定：

$$\frac{B}{P_a} = \frac{\Delta P}{\Delta \varepsilon_V} = \frac{(\sigma_1-\sigma_3)_{70\%}}{3(\varepsilon_V)_{70\%}} \tag{2.4.41}$$

其中下标 95%、70%分别代表 $\sigma_1-\sigma_3$ 等于 $(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 的 95%及 70%时的试验数据。用上式列表对不同 σ_3 的结果进行计算。然后用双对数坐标中确定，E_i、E_{ur} 及 B 的截距和斜率，从而可以确定出所有的材料常数。这样计算的结果一般离散性较小，也不会因人而异。

7. 关于 Duncan-chang 模型的讨论

由于 Duncan 等人的双曲线模型可以反映土变形的非线性和一定程度反映土变形的弹塑性；也由于它建立在广义虎克定律的弹性理论的基础上，很容易为工程界接受；加之参数及材料常数不多，物理意义明确，只需常规三轴压缩试验即可确定；并且适用的土类比较广。所以为岩土工程界所熟知和广泛应用。成为最为普及的本构模型之一。

但是该模型是建立在增量广义虎克定律基础上的变模量的弹性模型，由于其理论基础的限制，它有许多固有的、不可逾越的缺陷。而有时人们不了解这一点，强迫它承担它本身无法完成的任务，如企图让它反映不同应力路径的影响；反映土的剪胀性等，其结果常常会犯基本理论的错误。

在确定其参数时，一般只能使用 σ_3 ＝常数(dσ_3=0)的常规三轴压缩试验。因为只有在这种特定的试验中，在增量广义虎克定律中：

$$d\varepsilon_1 = \frac{d\sigma_1}{E_t} - \frac{\nu_t}{E_t}(d\sigma_2 + d\sigma_3) \tag{2.4.42}$$

由于 $d\sigma_2 = d\sigma_3 = 0$，才存在着：

$$E_t = \frac{d(\sigma_1-\sigma_3)}{d\varepsilon_1} \tag{2.4.43}$$

亦即 $\sigma_1-\sigma_3$ 与 ε_1 的关系曲线的斜率就是其切线变形模量。同样 $\varepsilon_3 \sim \varepsilon_1$ 曲线的斜率为切线泊松比 ν_t。

除了常规三轴压缩试验以外，其他的一些试验中的 $\sigma_1-\sigma_3$ 与 ε_1 之间的曲线也可用双曲线来描述，但其斜率却不一定就是切线变形模量 E_t。在平面应变中，如果平面应变方向主应力为 σ_2，在试验中保持 σ_3 ＝常数，不断增加大主应力 σ_1 直致破坏，得到的 $\sigma_1-\sigma_3$ 与 ε_1 之间曲线也近似双曲线关系，但这时

$$\frac{d(\sigma_1-\sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{E_t}{1-\nu_t^2} \tag{2.4.44}$$

另外对于饱和土的三轴固结不排水试验，可以用来确定总应力分析时的 Duncan-Chang 模型的参数，但 ν_t ＝0.49 不变。如果用以进行有效应力分析时，这样确定的模型则不能使用。因为 $\sigma' = \sigma - u$，当 B=1.0 时，$u = A\Delta(\sigma_1-\sigma_3)$，则

$$\frac{d(\sigma_1-\sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{E_t}{1-A(1-2\nu_t)} \tag{2.4.45}$$

同样用 *CTE*、*TE*、*TC*、*RTC*、*RTE* 三轴试验也不能直接确定这个模型的参数。

有人建议让 $\nu > 0.5$ 以反映土的剪胀性。如果这样，则在施加等向压力增量 dP 时，将会产生体胀，外力作负功，从而违反了能量守恒定律。

由于模型是在σ_3＝常数的三轴试验基础上建立的，对于基坑开挖工况时$\Delta\sigma_3<0$并变化很大时，计算误差会很大。尽管如此，人们还是在可能的条件下对 Duncan-Chang 模型进行了一些改造和改进，从而使其能更适应于实际工程问题。这包括：

(1) 对于某些大粒径土，内摩擦角φ随围压减少，表示成

$$\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi\lg\left(\sigma_3/Pa\right) \tag{2.4.46}$$

(2) 为了反映平面应变下中应力对应力～应变及强度的影响，可让上述模型参数中的φ为平面应变试验的内摩擦角。

(3) 为了反映中主应力的影响，将此模型中凡是σ_3都用$\sigma_3\sqrt[3]{\sigma_3/\sigma_2}$代替。

类似的修正还有许多，但要十分注意不应违背有关的物理力学原理，也不应顾此失彼。

2.4.3　K、G 模型

这一类模型是将应力和应变分解为球张量和偏张量两部分，分别建立球张量 p 与ε_V；偏张量 q 与$\bar{\varepsilon}$间的增量关系。即：

$$\begin{cases}dp=Kd\varepsilon_V\\ dq=3Gd\bar{\varepsilon}\end{cases} \tag{2.4.47}$$

一般通过各向等压试验确定体变模量 K；通过 p=常数的三轴试验确定剪切模量 G。但人们有时为了反映土的剪胀性，也建立了一些这两个张量交叉影响的模型。

1.　多马舒克——维利亚潘(Domaschuk—Valliappan)模型

在他们的 K—G 模型中，他们假设在各向等压试验中 p～ε_V 之间关系可用幂函数近似；而在 p=常数的三轴压缩试验中，q 与$\bar{\varepsilon}$之间关系可用双曲线近似。

则切线体积模量为：

$$K_t=\frac{dp}{d\varepsilon_V}=K_i\left[1+n\left(\frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_{Vc}}\right)^{n-1}\right] \tag{2.4.48}$$

切线剪切模量为：

$$G_t=\frac{dq}{3d\bar{\varepsilon}}=G_i\left[1-R_f\frac{q/3}{10^{\alpha}\left(\dfrac{p}{p_c e_{ic}}\right)^{\beta}}\right]^2 \tag{2.4.49}$$

式中 n、α、β为试验常数，e_{ic}为起始间隙比，R_f为破坏比。

$$K_i=\frac{p_c}{\varepsilon_{Vc}} \tag{2.4.50}$$

p_c与ε_{Vc}为初始的各向等压应力及相应的体应变的特征值。G_i为 q～3$\bar{\varepsilon}$之间曲线的初始斜率。

2.　内勒(Naylor)模型

这个模型建议 K、G 表示为：

$$\begin{aligned} K_t &= K_i + \alpha_K p \\ G_t &= G_i + \alpha_G p + \beta_G q \end{aligned} \tag{2.4.51}$$

其中为 K_i、α_K、G_i、α_G 和 β_G 为试验常数，一般 α_K>0, α_G>0, β_G<0。亦即 K_t 随 p 增加而增加；G_t 随着 p 增加而增加，随 q 增加而减少。K_i 和 α_K 可用各向等压试验确定；G_i、α_G 和 β_G 用 p=常数的三轴压缩试验确定。

3. 伊鲁米和维鲁伊特(Izumi-Verruijt)的耦合模型

在这个模型中，考虑了剪应力增量 dq 对于土的体应变增量 $d\varepsilon_v$ 的影响，所以也称为三参数模型。这样增量形式的应力应变关系表示为：

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= \frac{1}{K_t} dp + \frac{1}{H_t} dq \\ d\bar{\varepsilon} &= \frac{1}{3G_t} dq \end{aligned} \tag{2.4.52}$$

其中 H_t 为切线剪胀模量，K_t 为切线体积模量，G_t 为切线剪切模量。它们都是应力 p 与 q 的函数，通过试验确定。一般增量的应力应变关系表达式为：

$$\{d\varepsilon\} = [D_t]\{d\sigma\} \tag{2.4.53}$$

其中，　　$[D_t] = [A] + [B]$

其中矩阵 $[A]$ 是对称的；矩阵 $[B]$ 是不对称的。

4. 沈珠江模型

沈珠江用下面两函数表示土的应力应变全量关系：

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= f_1(p,q) \\ \bar{\varepsilon} &= f_2(p,q) \end{aligned} \tag{2.4.54}$$

表示为增量的形式为：

$$\begin{aligned} d\varepsilon_v &= \frac{\partial f_1}{\partial p} dp + \frac{\partial f_1}{\partial q} dq = Adp + Bdq \\ d\bar{\varepsilon} &= \frac{\partial f_2}{\partial p} dp + \frac{\partial f_2}{\partial q} dq = Cdp + Ddq \end{aligned} \tag{2.4.55}$$

因而函数 f_1 与 f_2 的确定是关键问题。其中 f_1 的确定是用各向等压试验和不同 $q/p = \eta$ 的试验，在 $e \sim \ln p$ 曲线上得到一组近似互相平行的直线，则得到 f_1 的函数形式为：

$$\varepsilon_v = \psi(\eta) - \frac{\lambda}{1+e_0} \ln p \tag{2.4.56}$$

其中 f_2 用不同 p=常数的三轴压缩试验确定：

$$\left(q/p\right) = \eta = \frac{\bar{\varepsilon}}{a + b\bar{\varepsilon}} \tag{2.4.57}$$

其中 a、b 是 p 的函数。

5. 讨论：

K、*G* 模型将球张量与偏张量分开考虑，如再考虑二者耦合，还可以反映如土的剪胀性等特性。因而这类模型有一定的合理性和适用性，但这类模型常要求作 p=常数这种不是常规的三轴试验，一般实验室不易实行，并且受特定应力路径限制。

由于土的强度受中主应力的影响，如果用 M=q/p 作为破坏准则，则用常规三轴压缩试验$(\sigma_2=\sigma_3)$得到的 M 是最大的，而针对其他应力状态，这一破坏准则偏大。

在考虑球张量与偏张量耦合的情况下，刚度矩阵不对称，这对于一般数值计算不很方便。但各种 *K*、*G* 模型在解决一些工程问题中还是经常被应用。并且有许多特定形式。

2.4.4　高阶的非线弹性理论模型

高阶的非线性弹性理论可表示为全量应力应变关系和增量的应力应变关系。它们可根据张量的对称原理或能量原理建立，按照假设条件的不同而有不同理论模型。

1.　柯西(Cauchy)弹性理论

柯西弹性理论假设应力与应变有一一对应的关系，则其一般的张量函数关系为：

$$\sigma_{ij}=F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \tag{2.4.58}$$

对于各向同性材料，F_{ij} 可表示为 ε_{kl} 的多项式函数，则式（2.4.58）可表示为 ε_{kl} 的不高于二次幂的函数，即简化为：

$$\sigma_{ij}=A_0\delta_{ij}+A_1\varepsilon_{ij}+A_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} \tag{2.4.59}$$

或者：

$$\varepsilon_{ij}=B_0\delta_{ij}+B_1\sigma_{ij}+B_2\sigma_{ik}\sigma_{kj} \tag{2.4.60}$$

其中：A_0、A_1、A_2 为应变张量不变量的函数；B_0、B_1、B_2 为应力张量不变量的函数。在式（2.4.59）和式（2.4.60）中如果 A_2=0（或者 B_2=0），A_1（ B_1）为常量。A_0（B_0）取适当值，则它们退化为线弹性模型的广义虎克定律形式（见式 2.4.4）。一些割线弹性模型可归于 Canchy 弹性理论范畴。

对式（2.4.59）微分，可得到其增量的形式：

$$\begin{aligned}d\sigma_{ij}=&\left[\left(K-\frac{2}{3}G\right)\delta_{kl}\delta_{ij}+2a_2I_{1\varepsilon}\delta_{kl}\delta_{ij}+a_3(I_{1\varepsilon}\delta_{kl}-\varepsilon_{kl})\delta_{ij}\right.\\&\left.+(2G+a_5I_{1\varepsilon})\delta_{ik}\delta_{jl}+a_5\varepsilon_{ij}\delta_{kl}+a_6(\varepsilon_{lj}\delta_{ik}+\varepsilon_{ik}\delta_{jl})\right]d\varepsilon_{kl}\end{aligned} \tag{2.4.61}$$

或写成矩阵形式

$$\{d\sigma\}=[D_t]\{d\varepsilon\} \tag{2.4.62}$$

$[D_t]$一般为一非对称的切线刚度矩阵，由应变状态 ε_{ij} 和第一应变不变量 $I_{1\varepsilon}$ 和材料常数 *K*、*G*、a_2、a_3、a_5 和 a_6 确定。

这种模型的应变是可恢复的和与应力路径无关的，亦即应力唯一为目前的应变状态决定（式 2.4.59）；或者应变唯一为目前应力状态所决定（式 2.4.60）。柯西弹性模型不保证存在唯一的应变能，所以对于一定的加载—卸载循环，柯西弹性理论模型可能会产生能量，亦即该模型可能会违反热力学定律，并且无法保证解的唯一性和材料的稳定性。从而导致提出了格林(Green)弹性理论模型。

2.　格林(Green)弹性理论—超弹性理论(Hyperelastic theory)

格林弹性理论或超弹性理论是假设物体变形后所存储的能量密度可用应变能密度函数$W(\varepsilon_{ij})$表示。这样，外力所对应的应力状态 σ_{ij} 下弹性体产生的应变增量为 $d\varepsilon_{ij}$，则外力所做的功为：

$$dW=\sigma_{ij}\,d\varepsilon_{ij} \tag{2.4.63}$$

物体内部由于外力做功而产生的应变能增量为：

$$dW=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}}\,d\varepsilon_{ij} \tag{2.4.64}$$

式（2.4.63）与式（2.4.64）相等：

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{2.4.65}$$

反之如果设余能密度函数$\Omega(\sigma_{ij})$，则有

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.4.66}$$

当 W 与 Ω 存在二阶导数时，则增量形式的应力应变关系为：

$$d\sigma_{ij}=\frac{\partial^2 W}{\partial\varepsilon_{ij}\partial\varepsilon_{kl}}d\varepsilon_{kl}=H_{ijkl}d\varepsilon_{kl} \tag{2.4.67}$$

或者

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}d\sigma_{kl}=H^{'}{}_{ijkl}d\sigma_{kl} \tag{2.4.68}$$

切线刚度矩阵 H_{ijkl} 和切线柔度矩阵 $H^{'}{}_{ijkl}$ 是对称的四阶张量。在具体应用建立模型时，Ω 可选为应力不变量的函数；W 可选为应变不变量的函数。一般采用 2～4 次多项式函数（亦即 1～3 阶超弹性模型）。例如三阶超弹性模型的余能密度函数 Ω 为应力不变量的四次多项式函数：

$$\begin{aligned}\Omega(\overline{I_1},\overline{I_2},\overline{I_3})=&A_0+A_1\overline{I_1}+\frac{1}{2}B_1\overline{I_1}^2+\frac{1}{3}B_2\overline{I_1}^3+B_3\overline{I_1}\,\overline{I_2}+B_4\overline{I_2}+B_5\overline{I_3}\\&+\frac{1}{4}B_6\overline{I_1}^4+B_7\overline{I_1}^2\overline{I_2}+\frac{1}{2}B_8\overline{I_2}^2+B_9\overline{I_1}\,\overline{I_3}\end{aligned} \tag{2.4.69}$$

其中 A_0、A_1、$B_1\cdots\cdots B_9$ 为试验常数。$\overline{I_1},\overline{I_2},\overline{I_3}$ 为三个表示为下式的应力不变量：

$$\overline{I_1}=\sigma_{kk},\qquad \overline{I_2}=\frac{1}{2}\sigma_{km}\sigma_{km},\qquad \overline{I_3}=\frac{1}{3}\sigma_{km}\sigma_{kn}\sigma_{nm} \tag{2.4.70}$$

通常初始应力为零时，应变也为零，则一般的超静定模型的应力应变关系为：

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_{ij}}=\varphi_1\delta_{ij}+\varphi_2\sigma_{ij}+\varphi_3\sigma_{im}\sigma_{mj} \tag{2.4.71}$$

对于三阶超弹性模型：

$$\begin{aligned}\varphi_1=&B_1\overline{I_1}+B_2\overline{I_1}^2+B_3\overline{I_2}+B_6\overline{I_1}^3+2B_7\overline{I_1}\,\overline{I_2}+B_9\overline{I_3}\\\varphi_2=&B_3\overline{I_1}+B_4+B_7\overline{I_1}^2+B_8\overline{I_2}\\\varphi_3=&B_5+B_9\end{aligned} \tag{2.4.72}$$

在式（2.4.71）及（2.4.72）中使用一般的应力不变量 I_1、I_2、I_3 或偏应力不变量 J_2,J_3 也可以，但 φ_i 的表达形式就不如式（2.4.72）简洁。因而三阶模型共有 $B_1\cdots\cdots B_9$ 9 个试验常数。它们可以通过各向等压试验(HC)，常规三轴压缩试验(CTC)、单剪试验(SS)、平均主应力为常数的压缩试验(TC)及伸长试验(TE)以及等比加载试验来确定。

将式（2.4.71）微分，该模型还可以写成增量的形式

$$d\varepsilon_{ij}=\frac{\partial^2\Omega}{\partial\sigma_{ij}\partial\sigma_{kl}}d\sigma_{kl}=H_{ijkl}d\sigma_{kl} \tag{2.4.73}$$

H_{ijkl} 为对称的四阶张量。它也是正定的，因而可保证解的唯一性和稳定性。式（2.4.73）也可表示为：

$$d\varepsilon_{ij}=\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\sigma_{kl}}\delta_{ij}+\varphi_2\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\sigma_{kl}}+\sigma_{ij}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\sigma_{kl}}+\varphi_3\frac{\partial(\sigma_{im}\sigma_{mj})}{\partial\sigma_{kl}}+\sigma_{im}\sigma_{mj}\frac{\partial\varphi_3}{\partial\sigma_{kl}}\right)d\sigma_{kl}=H_{ijkl}d\sigma_{kl} \tag{2.4.74}$$

从式（2.4.74）可见，上述的超弹性模型可以反映土的非线性。由于在该模型中应力与应变增量主轴不一定重合，亦即存在偏张量与球张量的交互影响，因而它可反映土变形的剪胀性，诱发各向

异性等。另外如中主应力σ_2(或者应力洛德角θ或第三应力不变量$\overline{I_3}$)对应力应变关系的影响可以得到反映。

但是作为一种全量的弹性理论，用超弹性理论所建立的模型也存在不可避免的缺陷。首先它无法反映应力路径的影响，因而确定参数的试验与需要解决的问题的应力路径应尽可能一致；由于它的应力与应变状态是一一对应的，因而卸载到原点，应变也回到原点，无法反映土的不可恢复的塑性变形。对于有较大应力反复变化情况常常是假定一定的加卸载准则，另外假设或用试验确定卸载模量；对于高阶的超弹性模型使用参数偏多，并且物理意义不清楚，为了得到这些参数的室内试验有些是非常规的，这就限制了它们在工程中广泛使用。

和 Canchy 弹性理论一样，从式（2.4.71）可见，一阶超弹性理论模型在各向同性及初始应力应变都为零的情况下就变成线弹性模型，可表示成广义虎克定律的形式。

3. 次弹性模型(Hyporelasticitic model)

次弹性模型是一种在增量意义上的弹性模型。亦即只有增量应力张量和增量的应变张量间存在一一对应弹性对应关系。所以也被称为最小弹性(minimum elastic)模型。一般函数关系为：

$$d\sigma_{ij} = F_{ij}(\sigma_{mn}, d\varepsilon_{kl}) \tag{2.4.75}$$

或

$$d\varepsilon_{ij} = Q_{ij}(\varepsilon_{mn}, d\sigma_{kl}) \tag{2.4.76}$$

这类模型的最简单的形式是应变增量$d\varepsilon_{ij}$与应力增量$d\sigma_{ij}$之间是线性关系，但是其模量是目前应力状态σ_{ij}或者应变状态ε_{ij}的函数。这类增量线性模型可表示为如下四种形式：

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= C_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl}, \quad & d\sigma_{ij} &= C_{ijkl}(\varepsilon_{mn})d\varepsilon_{kl} \\ d\varepsilon_{ij} &= D_{ijkl}(\varepsilon_{mn})d\sigma_{kl}, \quad & d\varepsilon_{ij} &= D_{ijkl}(\sigma_{mn})d\sigma_{kl} \end{aligned} \tag{2.4.77}$$

对于上式中的第一个来讲，如果材料是各向同性的，则材料性质张量$C_{ijkl}(\sigma_{mn})$必须满足各向同性的条件，这时$C_{ijkl}(\sigma_{mn})$的一般的形式为：

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = {} & A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + A_3\sigma_{ij}\delta_{kl} + A_4\delta_{ij}\sigma_{kl} \\ & + A_5(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk} + \delta_{jk}\sigma_{il} + \delta_{jl}\sigma_{ik}) + A_6\delta_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} + A_7\delta_{kl}\sigma_{im}\sigma_{mj} \\ & + A_8(\delta_{ik}\sigma_{jm}\sigma_{ml} + \delta_{il}\sigma_{jm}\sigma_{mk} + \delta_{jk}\sigma_{im}\sigma_{ml} + \delta_{jl}\sigma_{im}\sigma_{mk}) + A_9\sigma_{ij}\sigma_{kl} \\ & + A_{10}\sigma_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} + A_{11}\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kl} + A_{12}\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kn}\sigma_{nl} \end{aligned} \tag{2.4.78}$$

这里有$A_1 \cdots\cdots A_{12}$共 12 个材料参数，它们只与应力张量σ_{ij}的不变量有关。$C_{ijkl}(\sigma_{mn})$通常被称为材料的切线刚度张量。

上述的一般形式的张量C_{ijkl}形式太复杂，在实际应用上往往可在C_{ijkl}中的应力张量取较低阶的形式。一阶的次弹性模型是假设在张量C_{ijkl}中只存在着一次方的应力张量，其一般形式为：

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = {} & (a_{01} + a_{11}\sigma_{rr})\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(a_{02} + a_{12}\sigma_{rr})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + a_{13}\sigma_{ij}\delta_{kl} \\ & + \frac{1}{2}a_{14}(\sigma_{jk}\delta_{li} + \sigma_{jl}\delta_{ki} + \sigma_{ik}\delta_{lj} + \sigma_{il}\delta_{kj}) + a_{15}\sigma_{kl}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.4.79}$$

其中$a_{01} \cdots\cdots a_{15}$共是 7 个材料常数。如果将式（2.4.79）代入（2.4.77）的第一个式中，则可以得到一阶次弹性的增量的应力应变关系表达成为：

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} = {} & a_{01}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{02}d\varepsilon_{ij} + a_{11}\sigma_{rr}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{12}\sigma_{rr}d\varepsilon_{ij} + a_{13}\sigma_{ij}d\varepsilon_{kk} \\ & + a_{14}(\sigma_{jk}d\varepsilon_{ik} + \sigma_{ik}d\varepsilon_{jk}) + a_{15}\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}\delta_{ij} \end{aligned} \tag{2.4.80}$$

这个模型是在初始各向同性假设中得到的，但是由于其应力增量张量和应变增量张量一般并不同轴，所以它可反映土变形的应力引起的各向异性。由于这种微分形式是否可积分需要满足一定条件，所

以它一般是与应力路径有关的。另外，它也反映了应力应变增量的偏张量与球张量间的相互影响，所以它可以反映土的剪胀性。

一阶次弹性模型中包含有 7 个材料常数，可以用不同的室内试验来推求，因而它们不是唯一的，最好是结合具体的工程问题，分析其应力路径，然后采用与之相近的应力路径的室内试验来确定材料常数。

在零阶的次弹性模型中，张量 C_{ijkl} 中不含有应力张量项，则增量的应力应变关系为：

$$d\sigma_{ij} = a_{01} d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{02} d\varepsilon_{ij} \tag{2.4.81}$$

若令 $a_{01} = \lambda,\quad a_{02} = 2G$，其中

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \tag{2.4.82}$$

则式（1.5.79）可表示为增量广义虎克定律的形式：

$$d\sigma_{ij} = \lambda d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij} \tag{2.4.83}$$

可见上述的 Duncan-Chang 模型和一些 K、G 增量弹性模型也是次弹性模型的特例。

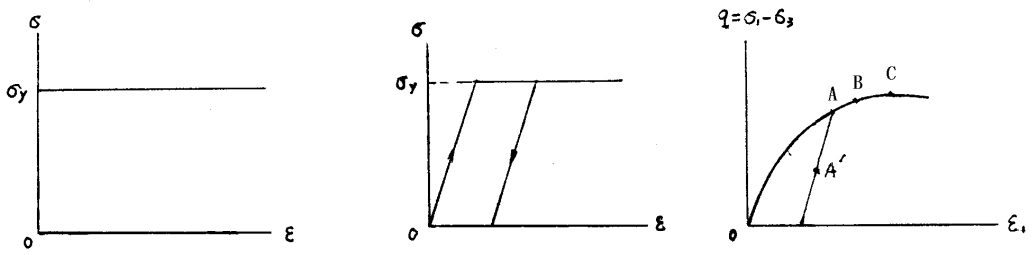
与超弹性模型一样，次弹性模型中的材料参数一般比较多，且直接物理意义不明确，不易唯一和方便地确定。另外其模量矩阵一般是不对称的，因而常常不能保证解的唯一性和稳定性。但采用合适的形式，这类模型可以反映土的非线性，应力路径的依赖性，剪胀性和应变软化特性。

2.5　土的弹塑性模型的一般原理

2.5.1　塑性理论在土力学中的应用

在经典土力学中，亦即在太沙基创建土力学学科之前，塑性理论就在土力学中得到应用。但这些塑性理论基本上是刚塑性理论和弹性——理想塑性理论。前者在达到屈服条件之前不计土体的变形，一旦应力状态达到屈服条件，土体的应变就趋于无限大或者不可确定；后者是认为土体应力达到屈服之前是线弹性应力应变关系，一旦发生屈服，则呈理想塑性，亦即应变趋于无限大或者不能确定，所以这两种塑性理论中的屈服与破坏具有相同的意义。它们在简单应力状态下的应力应变关系如图 2-5-1(a)、(b)所示。其屈服准则可能是莫尔—库仑(Mohr—Coulomb)准则，密塞斯(Mises)准则或者屈雷斯卡(Tresca)准则及它们的广义形式。这些经典塑性理论模型长期以来用于分析和解决与土的稳定有关的工程问题。如地基承载力问题，土压力问题和边坡稳定问题。它们的共同特点是只考虑处于极限平衡(塑性区)条件下或土体处于破坏时的极终条件下的情况而不计土体的变形和应力变形过程。

随着土的本构关系模型的发展，现代土力学中增量弹塑性理论模型得到广泛的应用。在这类模型中，土的弹性阶段和塑性阶段并不能截然分开，亦即是应变硬化(或应变软化)的屈服条件；土体破坏只是这种应力变形的最后阶段。



a. 刚塑性　　b. 弹性—理想塑性　　c. 弹塑性模型

图 2-5-1　不同塑性模型的应力应变关系曲线

随着计算机技术的发展，各种增量弹塑性理论模型被提出和得到广泛应用。在这类模型中假定土的总应变分为可恢复的弹性应变 ε_{ij}^{e} 和不可恢复的塑性变形 ε_{ij}^{p} 两部分，即：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p} \tag{2.5.1}$$

增量形式为

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{2.5.2}$$

其中的 ε_{ij}^{e} 或 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ 可用上节介绍的不同的弹性理论中比较简单的形式来确定。而塑性应变增量 $d\varepsilon_{ij}^{p}$ 则需要用下面介绍的塑性应变增量理论来推求。

2.5.2　屈服准则或屈服面

1.　屈服准则

屈服准则是弹塑性材料被施加一应力增量后判别其加载还是卸载，或是中性变载的条件。亦即它是判断是否发生塑性变形的准则。在加载时 $d\varepsilon^{e}$ 和 $d\varepsilon^{p}$ 都会产生；卸载时仅产生 $d\varepsilon^{e}$ 。在图 2-5-1(a)中，对于 A 点，加载时 dq＞0，同时产生 $d\varepsilon^{e}$ 和 $d\varepsilon^{p}$；卸载时 dq<0，仅产生 $d\varepsilon^{e}$ ＜0。对于 A' 点，无论荷载 q 增加与减少，都不会产生 $d\varepsilon^{p}$，仅产生 $d\varepsilon^{e}$ 。

在图 2-5-1(c)中，土被从 O 点逐渐加载到 A 点，则 A 点为屈服点，B、C 都成为新的屈服点。可见应力状态在屈服点上，即意味着加载时有塑性变形 $d\varepsilon^p$ 产生，卸载时只有弹性变形 $d\varepsilon^e$ 。应力状态减小到屈服点以内时，正负应力增量只引起弹性变形，总塑性应变 ε_A^p 一直不变，所以屈服点与一定塑性应变相关。塑性应变成为屈服准则的一个内变量，在简单的应力状态下可表示为：

$$f = q - q_y\left(\varepsilon^p\right) = 0 \tag{2.5.3}$$

2. 屈服函数

式（2.5.3）是一种最简单应力状态下的屈服函数。在一般应力状态下，屈服准则可用一应力张量的函数来表示：

$$f\left(\sigma_{ij}, H\right) = 0 \tag{2.5.4}$$

其中 f 为屈服函数，σ_{ij} 为应力张量，H 为反映材料塑性性质的参数，一般为塑性应变的函数，称为硬化参数。

用屈服函数判断加卸载的方法如下：

(1) $f = 0$ 时应力状态在屈服面上，

$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} > 0$ 为加载，$d\varepsilon^p$ 和 $d\varepsilon^e$ 同时发生；

$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = 0$ 为中性变载，只发生弹性变形 $d\varepsilon^e$；

$\dfrac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} < 0$ 为卸载，只发生弹性变形 $d\varepsilon^e$ 。

(2) $f < 0$ 则表示应力状态在现有屈服面之内，微小的应力变化只产生弹性应变。

对于各向同性材料屈服函数的一般形式（2.5.4）也可以表示为：

$$f\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, H\right) = 0 \tag{2.5.4－1}$$

$$f\left(I_1, I_2, I_3, H\right) = 0 \tag{2.5.4－2}$$

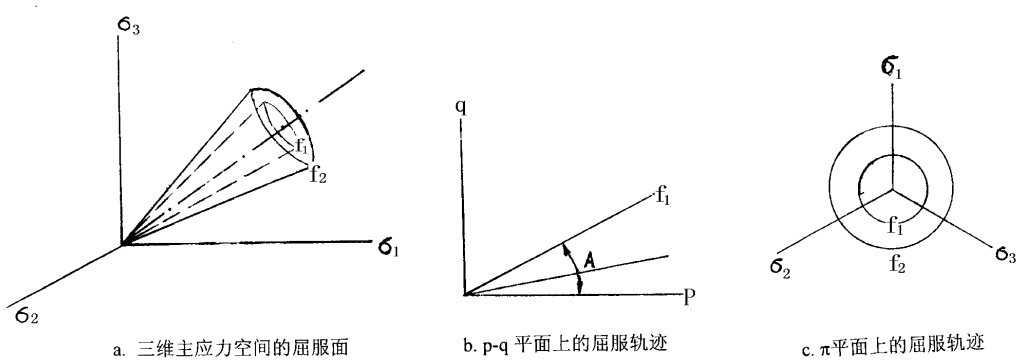
$$f\left(p, q, \theta, H\right) = 0 \tag{2.5.4－3}$$

在土的弹塑性模型的屈服函数中通常只包括两个应力不变量。

3. 屈服面与屈服轨迹

屈服准则用几何方法来表示即为屈服面和屈服轨迹。由于许多模型都假设土是各向同性的，则（2.5.4－1）、（2.5.4－2）和（2.5.4－3）可分别在不同的三维应力空间中表示成为曲面，被称为屈服面。这一屈服面与任一个二维应力坐标平面的交线就是屈服轨迹，图 2-5-2(a)为一种最简单的圆锥形屈服面；(b)和(c)分别表示它在 p—q 平面和 π 平面上的轨迹。

由于在增量的弹塑性模型中，超越目前的屈服面的应力变化都将引起新的屈服和产生新的屈服



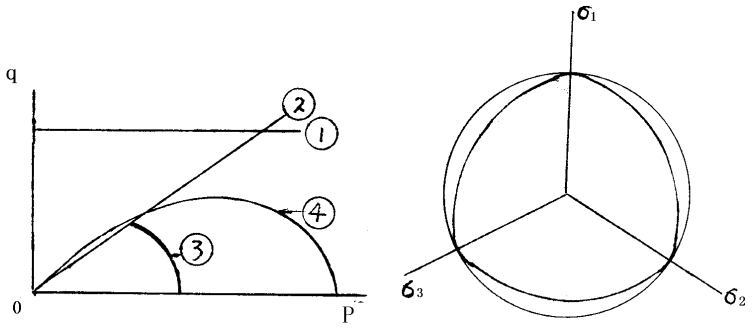
a. 三维主应力空间的屈服面　　b. p-q 平面上的屈服轨迹　　c. π平面上的屈服轨迹

图 2-5-2　圆锥形屈服面及其屈服轨迹

面，所以屈服面和屈服轨迹是一系列曲面族或曲线族。如果应力状态 A 位于某一屈服面 f_1(见图 2-5-2(b))在应力增量 $d\sigma$ 下超越了目前的屈服面 f_1，使屈服面变化到 f_2，是加载过程，将发生弹性和塑性应变增量 $d\varepsilon^e$ 和 $d\varepsilon^p$；如果应力增量使应力状态 A 点向目前屈服面 f_1 内运动则是卸载，只发生弹性变形 $d\varepsilon^e$ 。

4. 土的屈服面和屈服轨迹的形状

经典的塑性理论是在金属受力变形和加工的基础上建立的，所以以剪应力作为简单的加卸载准则是最通常的形式，在 p-q 空间它表示为一平行于 p 轴的直线，见图 2-5-3(a)直线①。土的不可恢复的塑性应变从微观的角度看主要是由于土颗粒间相互位置的变化(错动或挤密)及颗粒本身的破碎。尤其是当颗粒在受到外力后从一个高势能状态进入相对低势能的较稳定状态时，其位移是不可恢复的。对于土这种摩擦材料，在等应力比作用下，理论上颗粒间不发生错动，所以许多本构模型选择 p-q 平面上过原点的射线为土的屈服轨迹(空间为各种锥面)是反映了土变形和强度的摩擦特性。如图 2-5-3(a)中直线②所示。



a. p-q 平面上　　b. π平面上

图 2-5-3　几种土的屈服轨迹

与其它材料不同，土在各向等压或平均主应力增加的等比应力条件下，实际上土颗粒会相互靠近，结构破坏，颗粒破碎，导致孔隙减少，也会发生塑性体应变。因而各种与 p 轴相交的“帽子”屈服面也是土的本构模型常用的形式，见图 2-5-3(a)中曲线③。有些土的本构模型具有上述两组屈服面，即锥面与帽子屈服面。后来有人将二者结合成用 2-5-3(a)中曲线④这种统一形式。

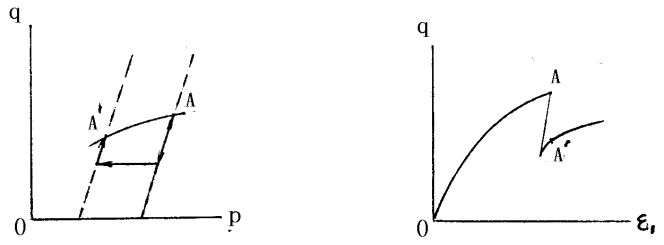
如果采用 Mises 屈服准则或广义 Mises 屈服准则，则在 π 平面上的屈服轨迹为圆形；实际上土的屈服更接近莫尔—库仑的准则，所以用各种在 π 平面没有角点的平滑梨形的封闭曲线作为屈服轨迹就更符合实际情况。见图 2-5-3(b)所示。

5. 土的屈服轨迹及屈服面的确定

土的屈服准则很难严格准确地确定。这主要是由于实际上土并没有十分严格的加载卸载或弹性塑性变形的分界，在许多试验中卸载—再加载过程中也有塑性应变发生。另外，由于应力路径的影响，某一应力状态下的应变不唯一，加卸载也难以唯一确定。所以屈服准则一般是基于经验及假设而建立的。

最一般的方法是基于上述的理解，假设一定的屈服面(锥面、帽子等)，然后再设定适当的硬化参数 H，使计算应力应变关系符合试验结果。实际上许多土的本构模型都采用此法。

另一种方法是根据屈服准则的定义直接从试验来确定土在一定应力平面上的屈服轨迹。具体的方法是利用三轴试验在 p-q 应力平面上不断变化应力路径，从相应的应力应变曲线判断加卸载，然后得到小段屈服轨迹，用曲线拟合得到屈服函数。这种方法的不足之处首先是不同应力路径得到的结果可能不同，另外有时应力应变曲线上的屈服点不易清晰界定，因而整理出一套完整的屈服轨迹和屈服面比较困难。



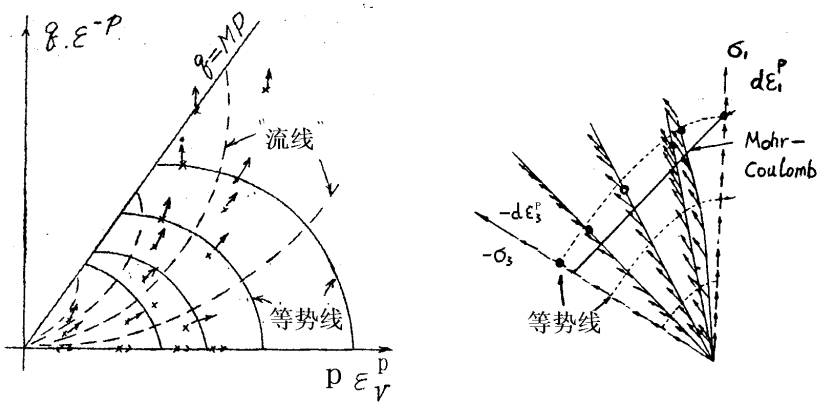
a. 屈服轨迹　　b. 对应的应力应变关系

图 2-5-4 从试验确定土的屈服轨迹

图 2-5-4 表示的是一系列三轴试验的应力路径，从应力应变曲线上，大体可判断 A' 与 A 处于同一屈服轨迹上。因而可用 AA' 一段屈服轨迹表示。

另一种试验间接确定屈服轨迹的方法是在假设应力与应变及其增量同轴的前提下，在应力空间直接从试验确定塑性应变增量的方向，然后根据正交原理，像画流网一样绘制与这些增量方向正交的曲线族，该曲线族就是塑性势 g 的轨迹，根据 Dracker 假说塑性势函数与屈服函数是一致的，从而间接确定屈服轨迹，清华弹塑性模型就是这样建立的。图 2-5-5 表示的是它在 p—q 平面和 π 平面上确定的屈服轨迹。

2.5.3　流动规则(正交定律)与硬化定律



a. p-q 平面上　　b. π平面上

图 2-5-5 从塑性应变增量方向确定等势线

1.　流动规则

在塑性理论中，流动规则用以确定塑性应变增量的方向或确定塑性应变增量张量的各个分量间的比例关系。在塑性理论中规定了塑性应变增量的方向是由在应力空间中的塑性势面 g 来决定的：在应力空间中各应力状态点的塑性应变增量方向必须与通过该点的塑性势面相垂直。所以它也叫作正交定律。这实质上是假设在应力空间中一点的塑性应变增量的方向是唯一的，只与该点的应力状态有关，与施加的应力增量无关。亦即：

$$d\varepsilon^{P}{}_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.5.5}$$

与屈服函数一样，塑性势函数也是应力状态的函数，可表示为：

$$g\left(\sigma_{ij}, H\right) = 0 \tag{2.5.6－1}$$

$$g\left(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, H\right) = 0 \tag{2.5.6－2}$$

$$g(I_1,I_2,I_3,H)=0 \tag{2.5.6－3}$$

$$g(p,q,\theta,H)=0 \tag{2.5.6－4}$$

根据 Drucker 假说，对于稳定材料

$$d\sigma_{ij}\,d\varepsilon^{P}{}_{ij}\geq 0 \tag{2.5.7}$$

因而 $d\varepsilon^{P}{}_{ij}$ 必须正交于屈服面才能满足式（2.5.6），并且屈服面也必须是外凸的，这就是说塑性势面 g 与屈服面 f 必须是重合的，亦即

$$f=\mathrm{g} \tag{2.5.8}$$

这被称为相适应的流动规则，或称相关联流动规则，它满足经典塑性理论要求的材料稳定性，能保证解的唯一性，其刚度矩阵 $[D]_{ep}$ 是对称的。

相反如果令 $f\neq \mathrm{g}$，即为不相适应流动规则。它不能保证解的唯一性，$[D]_{ep}$ 也不对称。在不同土的本构模型中，塑性势函数有时被假设，有时通过试验的塑性应变增量来确定。

2. 加工硬化定律

加工硬化定律是决定一个给定的应力增量引起的塑性应变大小的准则。亦即在式(2.5.5)中的 $d\lambda$ 是由硬化定律决定的。

硬化参数 H 一般是塑性应变的函数，即

$$H=H\left(\varepsilon^{P}{}_{ij}\right) \tag{2.5.9}$$

在不同的本构模型中它常被假设是塑性变形功 $W_p\approx\int\sigma_{ij}d\varepsilon^{P}{}_{ij}$，塑性八面体剪应变 $\bar{\varepsilon}^{p}$，塑性体应变 ε_V^p，或者 $\bar{\varepsilon}^{p}$ 与 ε_V^p 的组合的函数。应当认识到硬化参数是有一定的物理意义的。由于它是塑性应变的函数，而塑性应变实质上反映了土中颗粒间相时位置变化和颗粒破碎的量，也就是土的初始状态和组构发生变化的量，这种状态和组构的变化使土不再与初始状态相同，在受力后变形特性发生变化。而硬化参数 $H\left(\varepsilon^{P}{}_{ij}\right)$ 实际是一种土的状态与组构变化的内在尺度，宏观上影响土的应力应变关系。一般情况下的增量弹塑性模型中 $d\lambda$ 可根据屈服准则，流动规则和硬化定律来推导。

根据式（2.5.4） $f(\sigma_{ij},H)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial\sigma_{ij}}d\sigma_{ij}>0$ 表明是加载情况，则将式（2.5.4）微分得：

$$df=\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}+\frac{\partial f}{\partial H}dH=0 \tag{2.5.10}$$

从式（2.5.9）：

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}+\frac{\partial f}{\partial H}\left\{\frac{\partial H}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\{d\varepsilon^{p}\}=0$$

从式（2.5.5）：

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}+\frac{\partial f}{\partial H}\left\{\frac{\partial H}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}=0$$

或者

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}+\frac{\partial f}{\partial H}\left\{\frac{\partial H}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}d\lambda=0$$

则可得到

$$d\lambda=-\frac{\left\{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}}{\dfrac{\partial f}{\partial H}\left\{\dfrac{\partial H}{\partial\varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\dfrac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}} \tag{2.5.11}$$

设　$$A=-\frac{\partial f}{\partial H}\left\{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon^{p}}\right\}^{T}\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\} \tag{2.5.12}$$

则　$$d\lambda=\frac{\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}}{A} \tag{2.5.11－1}$$

A 也称为塑性硬化模量，是硬化参数的函数。

在 p-q 应力空间，设各函数与另一应力不变量——洛德角 θ 无关，则得：

$$d\lambda=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial p}dp+\dfrac{\partial f}{\partial q}dq}{A} \tag{2.5.11－2}$$

其中：　$$A=-\frac{\partial f}{\partial H}\left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{V}{}^{p}}\frac{\partial g}{\partial p}+\frac{\partial H}{\partial \overline{\varepsilon}^{p}}\frac{\partial g}{\partial q}\right) \tag{2.5.12－1}$$

式（2.5.5）可写成：

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{V}^{p}&=d\lambda\frac{\partial g}{\partial p}\\ d\overline{\varepsilon^{p}}&=d\lambda\frac{\partial g}{\partial q}\end{aligned} \tag{2.5.5－1}$$

2.5.4　弹塑性本构模型的弹塑性模量矩阵的一般表达式

根据弹塑性应变的定义，从式（2.5.2）得到

$$\{d\varepsilon\}=\{d\varepsilon^{e}\}+\{d\varepsilon^{p}\} \tag{2.5.2－1}$$

两侧乘以弹性模量矩阵 $[D]$：

$$[D]\{d\varepsilon\}=[D]\{d\varepsilon^{e}\}+[D]\{d\varepsilon^{p}\} \tag{2.5.13}$$

其中 $[D]\{d\varepsilon^{e}\}=\{d\sigma\}$，　$\{d\varepsilon^{p}\}=d\lambda\left\{\dfrac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}$

将它们代入上式（2.5.13）得到：

$$[D]\{d\varepsilon\}=\{d\sigma\}+[D]\,d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}$$

或者　$$\{d\sigma\}=[D]\{d\varepsilon\}-[D]\,d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\} \tag{2.5.14}$$

为了推导 $\{d\sigma\}$ 与 $\{d\varepsilon\}$ 之间表达式，可将 $d\lambda$ 表示成 $\{d\varepsilon\}$ 的函数。

将（2.5.14）两侧乘以 $\dfrac{1}{A}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}$：

$$\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}=\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\left([\mathrm{D}]\{d\varepsilon\}-[D]d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}\right) \tag{2.5.15}$$

将 $\dfrac{1}{A}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\{d\sigma\}=d\lambda$（见式 2.5.11－1）代入式（2.5.15），得到：

$$d\lambda=\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\left([\mathrm{D}]\{d\varepsilon\}-[D]d\lambda\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}\right)$$

或者
$$d\lambda\left(1+\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\right)=\frac{1}{A}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]\{d\varepsilon\}$$

则
$$d\lambda=\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}}\{d\varepsilon\} \tag{2.5.16}$$

在式（2.5.16）中，$d\lambda$ 用 $\{d\varepsilon\}$ 来表示，将式（2.5.16）代入式（2.5.14）则可得到 $\{d\sigma\}$ 与 $\{d\varepsilon\}$ 的关系式。

$$\begin{aligned}\{d\sigma\}&=[\mathrm{D}]\{d\varepsilon\}-\frac{[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}}\{d\varepsilon\}\\&=\left([\mathrm{D}]-\frac{[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}}\right)\{d\varepsilon\}\\&=[\mathrm{D}]_{ep}\{d\varepsilon\}\end{aligned} \tag{2.5.17}$$

其中 $[\mathrm{D}]_{ep}$ 即为弹塑性模量矩阵，一般表达式为：

$$[\mathrm{D}]_{ep}=[\mathrm{D}]-\frac{[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}} \tag{2.5.18}$$

对于相适应流动规则 g=*f*，则

$$[\mathrm{D}]_{ep}=[\mathrm{D}]-\frac{[D]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[\mathrm{D}]}{A+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \tag{2.5.18－1}$$

可见它是一个对称矩阵。

2.6　剑桥模型(Cam-Clay)

剑桥模型是由英国剑桥大学罗斯柯(Roscoe)等人建立的一个有代表性的土的弹塑性模型。它主要是在正常固结和弱超固结土的试验基础上建立起来的，后来也推广到强超固结土。这个模型采用了帽子屈服面，相适应的流动规则和以塑性体应变为硬化参数。它在国际上被广泛的接受和应用，“临界状态土力学”已成为理论土力学领域中的一个重要的分支。在一些国外大学本科土力学教材中它也被介绍，在国内外许多岩土工程的专业和商业程序中也得到应用。

2.6.1　正常固结粘土的物态边界面

在饱和重塑正常固结粘土中，应力状态与土的体积状态(或含水量、孔隙比)之间存在着唯一性关系，这早已为许多试验资料所证实。

如果将 6 个正常固结重塑粘土试样，每两个分别在 p_{01}、 p_{02} 和 p_{03} 的静水压力下固结，然后分别进行排水和固结不排水的常规三轴压缩试验，最后都达到破坏。试验的有效应力路径、试样的比体积 v 与有效平均应力 p′ 的关系曲线分别见图 2-6-1(a)和(b)。在三轴应力状态，其中：

偏应力 $q' = \sigma_1' - \sigma_3'$

平均主应力 $p' = \frac{1}{3}\left(\sigma_1' + 2\sigma_3'\right)$

比体积 $v = 1 + e$

e 为土的孔隙比。如将图 2-6-1(b)中的 v—p′ 关系表示在 v～$\ln p'$ 坐标系中，其关系可近似用直线表示，见图 2-6-1(c)

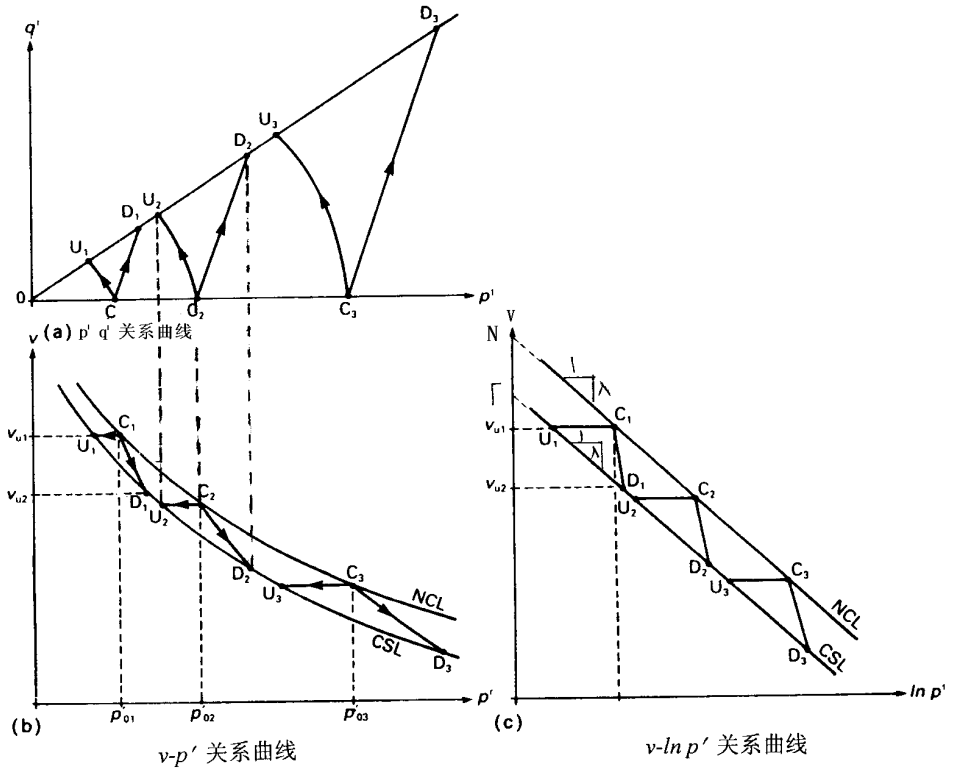


图 2-6-1　正常固结粘土的三轴试验结果：固结曲线与临界状态线

在图 2-6-1(a)中，三对试样的固结过程的应力路径分别为 $O-C_1$、$O-C_2$ 和 $O-C_3$；三个三轴不排水试验的有效应力路径分别是 C_1U_1、C_2U_2 和 C_3U_3；三个三轴排水试验的应力路径分别是 C_1D_1、

C_2D_2 和 C_3D_3。这些试验的结果表明，六个试验的有效应力路径终点都位于同一条直线上——破坏线 $q' = Mp'$ 上。图 2-6-1(b)表明，排水试验中发生体积压缩；不排水试验中无体积变化。在各向等压固结中体积变化沿着正常固结曲线 *NCL*(*Normal consolidation line*)。而在试样破坏时它们分别达到 U_1、D_1、U_2、D_2、U_3 和 D_3 各点，在图（b）中，通过这些点的曲线表示的是在破坏或临界状态下的有效平均主应力 p′ 与比体积 v 的关系，它对应于图（a）中 p′ ～q′ 坐标系下的 $q' = Mp'$ 破坏线。这两条线实际上是在三维坐标系 q′ ～v～p′ 中一条空间曲线——临界状态线 *CSL*(*Critical state line*)在不同平面上的投影。临界状态线 *CSL* 在这个三维空间中的情况见图 2-6-2。

则它在 p′ ～q′ 平面上表示为：

$$q' = Mp' \tag{2.6.1}$$

在 v～$\ln p'$ 平面上表示为：(图 2-6-1(c))

$$v = \Gamma - \lambda \ln p' \tag{2.6.2}$$

其中 Γ：*CSL* 线在 p′ ＝1kPa 时对应的比体积；

λ：*CSL* 线在 v～$\ln p'$ 平面中的斜率。

在图 2-6-1(c)中，正常固结线 *NCL* 可表示为：

$$v = N - \lambda \ln p' \tag{2.6.3}$$

其中 *N*：*NCL* 线在 p′ =1kPa 下对应的比体积；

λ：*NCL* 线在 v～$\ln p'$ 平面中的斜率。

可见在 v～$\ln p'$ 平面中 *NCL* 与 *CSL* 是平行的。

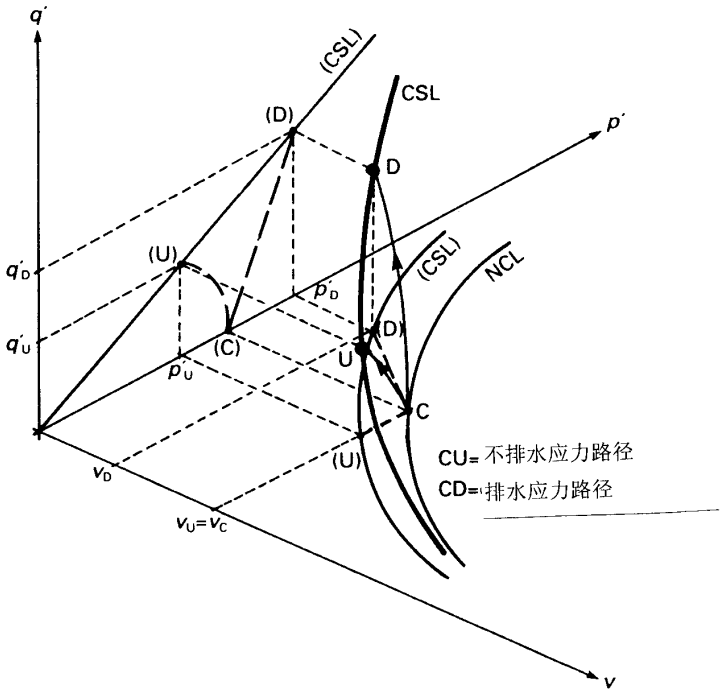


图 2-6-2　三维坐标下的临界状态线 *CSL* 及其投影

从式（2.6.1）和（2.6.2）可以推导出：

$$p' = \exp\frac{\Gamma - v}{\lambda} \tag{2.6.4}$$

和
$$q' = Mp' = M\exp\frac{\Gamma - v}{\lambda} \tag{2.6.5}$$

对于正常固结土的各向等压固结试验，当卸载时，试样将发生回弹，卸载时的体积变化与 p′ 之间关系可表示为：(见图 2-6-3)

$$v = v_\kappa - \kappa \ln p' \tag{2.6.6}$$

其中 v_κ：为某一卸载曲线在卸载到 p′＝1 kPa 时对应的比体积
κ：为卸载曲线在 v-p′ 平面上的斜率。

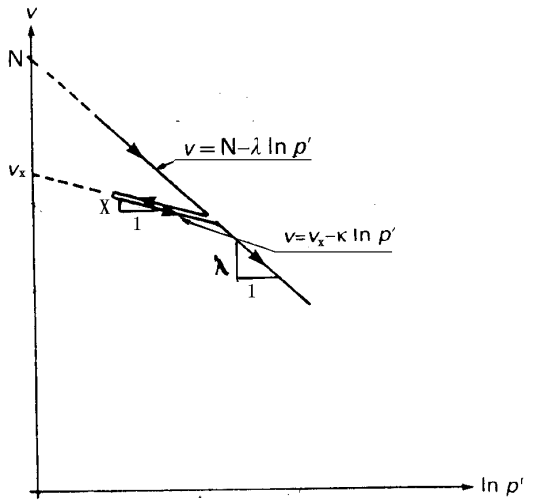
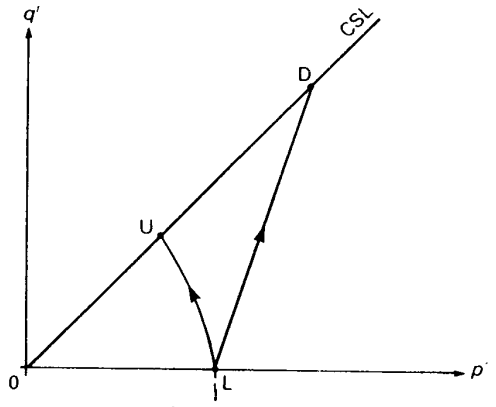


图 2-6-3 固结压缩与回弹

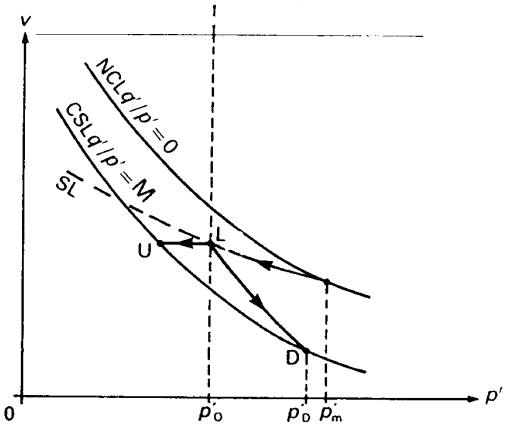
图 2-6-1 也表明两组应力路径 C_i—U_i 与 C_i—D_i 中，各应力路径形状相似，亦即相互平行。在图 2-6-2 中以正常固结粘土的各向等压固结线 *NCL* 和临界状态线 *CSL* 为边界，由于 p′ ～q′ ～v 间存在唯一性关系，在三维空间 p′ ～q′ ～v 中组成一个曲面，被称为物态边界面(*State boundary surface*)或称为 *Roscoe* 面，而正常固结粘土的各 *C*—*U* 和 *C*—*D* 状态路径都必须在这个物态边界面上。由于在物态边界面上，p′ q′ 及 v 三者有唯一性关系，所以各向等压固结到同一密度（v 相同）试样进行总应力路径不同的不排水试验，由于体积不变，它们的有效应力路径是相同的，都是 C_i—U_i。其应力应变关系曲线也相同。

2.6.2　超固结土和完全的物态边界面

对于轻的超固结土，它是在一定固结应力下卸载回弹形成的。在图 2-6-4 中它可用 *L* 点表示。*L* 位于正常固结线 *NCL* 和临界状态线 *CSL* 之间。亦即它回弹后的体积比在同固结应力 p_0' 下对应的临界状态更大一些，或者其含水量状态更“湿”。它在不排水加载试验中路径将从 *L* 到 U；而在排水加载试验中其路径从 L 到 D。U 和 D 都在上述的正常固结土的临界状态线 *CSL* 上。



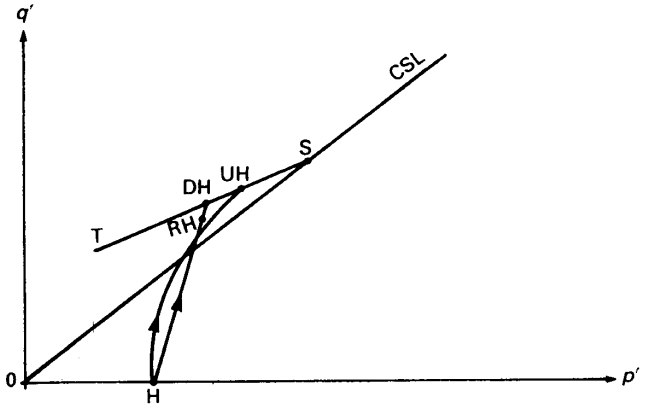
a. 有效应力路径



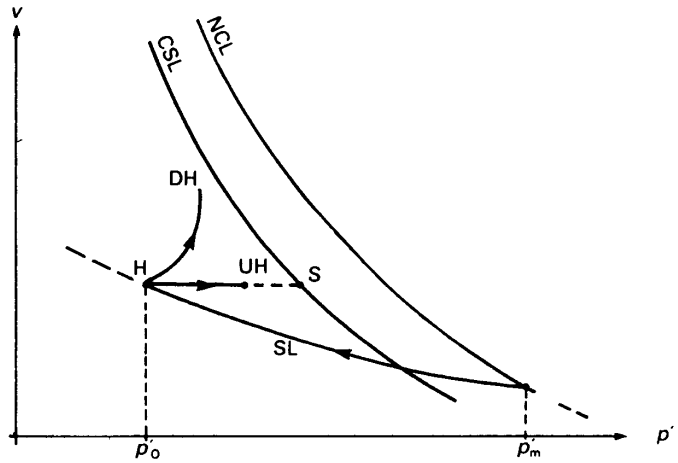
b. 在 *v*-*p′* 平面上的状态路径

图 2-6-4 轻超固结土的临界状态图

对于一个重超固结土，它首先被各向等压固结到应力 p'_m （见图 2-6-5(b)），然后卸载回弹到 *H* 点。而 *H* 点是在正常固结土的临界状态线之后或之下。然后在不排水加载试验中它从 *H* 达到 *UH*，体积不变。其中点 *UH* 位于 *CSL* 线以上（见图 2-6-5(a)）。当不排水试验加载破坏或屈服之后，其有效应力路径将沿着直线 TS 继续运动，试样发生更大变形，最后在 *CSL* 线上达到点 S。这时只有发生滑裂面以后土才可能达到临界状态线 *CSL*。超固结程度越大，土达到临界状态所需应变也越大。



a. 有效应力路径



b. 在 *v-p′* 平面上的状态路径

图 2-6-5 重超固结土的临界状态图

在排水加载试验中，重超固结土将发生体胀（剪胀），在土达到屈服后体积不断增加。其应力路径为 *H—DH*，其中 *DH* 也是在 *TS* 线上的破坏点。在破坏或屈服之后，由于体积增加而引起应力降到残余应力 *RH* 点。*RH* 可能在 *CSL* 线上，也可能在 *CSL* 线以上。试样由于出现了滑动面而变弱化或软化。图 2-6-5(a)中的直线 *TS* 代表了物态边界面的一部分，它控制了重超固结土的破坏或屈服，被称为 Hvorslev 线。物态边界面的第三部分是从原点 *O* 到点 *T* 之间部分。这一部分可以用零拉应力，$\sigma_3^{'}=0$ 条件表示，亦即单轴压缩排水试验的应力路径，如图 2-6-6(a)所示。这样就在 p′ —q′ 平面上形成一个完全的临界物态边界面的截面，它由 *OT*、*TS* 和 *SC* 三部分组成。

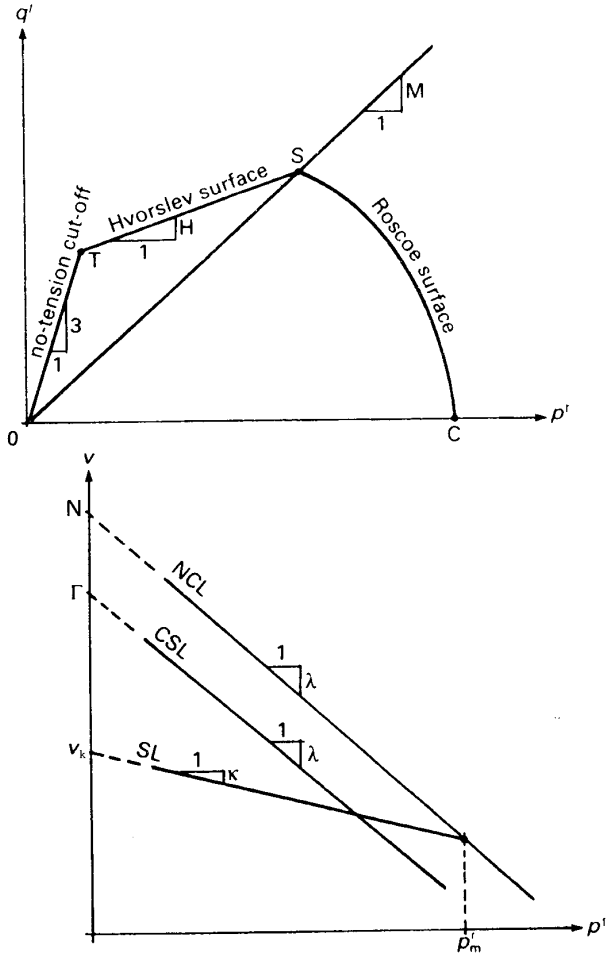


图 2-6-6 完全的临界物态边界面

其中 *OT* 段表示零拉应力线：

$$q' = 3p' \tag{2.6.7}$$

TS 是 Hvorslev 面的投影：

$$q' = Hp' + (M - H)\exp\frac{\Gamma - v}{\lambda} \tag{2.6.8}$$

SC 是 v 为常数的 Roscoe 面的投影：

$$\begin{aligned} q' &= Mp'\frac{N - v - \lambda \ln p'}{\lambda - \kappa} \\ &= Mp'\left[1 - \frac{\Gamma - v - \lambda \ln p'}{\lambda - \kappa}\right] \end{aligned} \tag{2.6.9}$$

其中公式（2.6.9）需在屈服轨迹基础上推出。

在图 2-6-6(b)中，*NCL* 为正常固结线：

$$v = N - \lambda \ln p' \tag{2.6.3}$$

CSL 为临界状态线：

$$v = \Gamma - \lambda \ln p' \tag{2.6.2}$$

SL 为回弹线：

$$v = v_\kappa - \kappa \ln p' \tag{2.6.6}$$

对于在 p′ ～q′ ～e 三维空间中的完全的物态边界面见图 2-6-7。其中 SS 是临界状态线；*NN* 是正常固结线。*VVTT* 是零拉应力边界面；*TTSS* 是 Hvorslev 面；*SSNN* 是 Roscoe 面。

正常固结土和超固结土的性状是不相同的。正常固结土状态路径总是位于 Roscoe 面之上；而超固结土的状态路径则在此面之外，并且随着超固结程度的提高而逐渐远离这个面。在重超固结土情

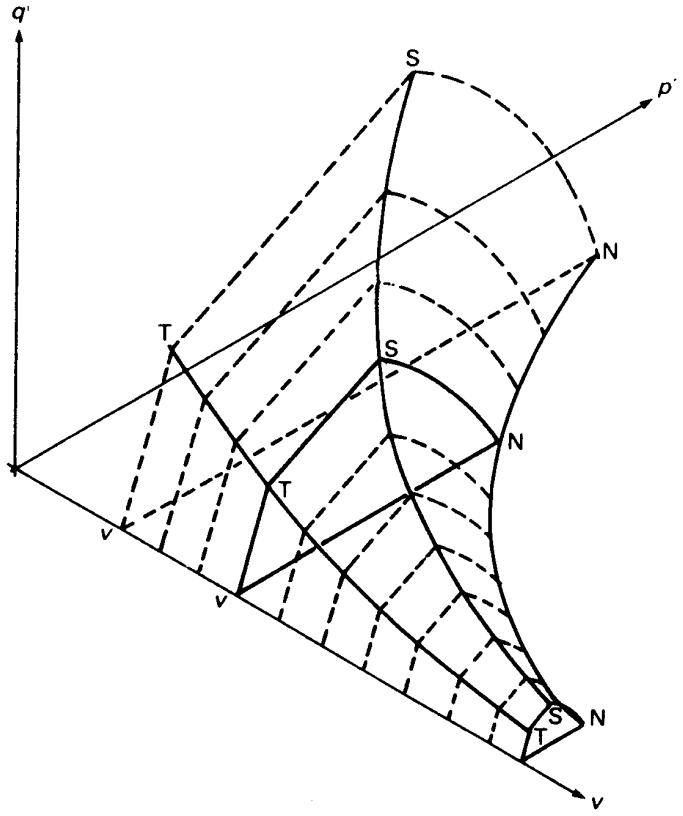
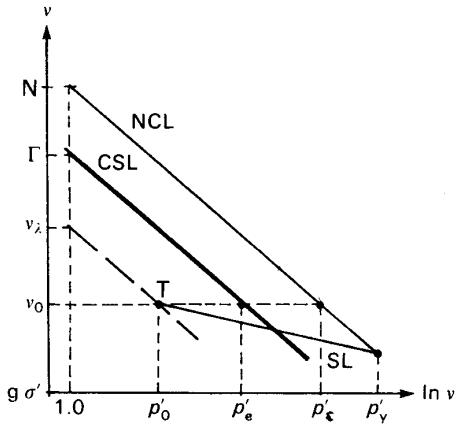


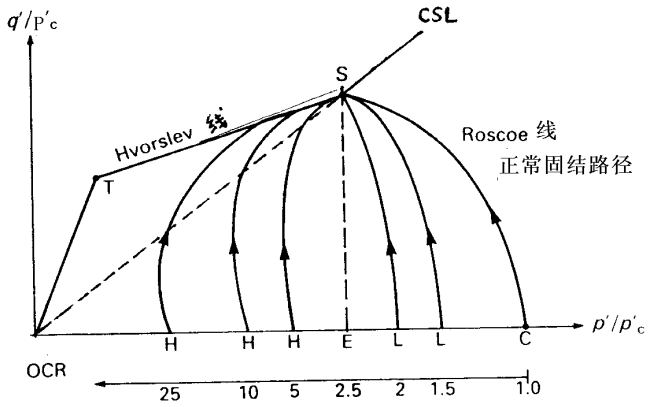
图 2-6-7 包括超固结土的完全的物态边界面

况，临界状态之前是峰值状态，超固结比对于其应力状态有很大影响。为了更简单地表示应力历史的影响，可将试验结果无量纲化，亦即将应力被一等效应力 p_c' 除，p_c' 为临界状态线上的平均主应力值。无量纲化的参数见图 2-6-8(a)。其中点 T 代表超固结土试样目前的应力状态 p_o'，对应的等体积 v_o 线在 *NCL* 线上相交于 p_e'；与 *CSL* 线相交于 p_c'。图 2-6-8(b)表示的是无量纲化后的 $q'/p_c' \sim p'/p_c'$ 关系图，它表示一个常体积的物态边界面断面。对于正常固结土($p_o' = p_c'$)，其有效应力路径是在 Roscoe 面上运动一直到 *CSL* 线，与它相交于 S 点，对于 $p_o' < p_c'$ 情况属于超固结土，如果应力路径在 *E* 与 *C* 之 间，它属于轻超固结土，与其临界状态比较，它较松和较“湿”，其应力路径为 *L*→*S*，从下面达到 *CSL* 线。对于重超固结土，试样比临界状态密实和更“干”，其不排水有效应力路径在原点 *O* 和 *E* 之间。其应力路径向上稍弯曲，和从反向达到 Hvorslev 线(或 *TS* 线)。然后随着应变的增加而沿着 Hvorslev 线前进。

在重超固结土的排水三轴试验中，当其状态路径达到 Hvorslev 面时，达到了峰值剪应力，并伴随着试样剪胀；然后发生应变软化；最后在经过了很大应变以后，伴随着剪切面产生应力达到残余应力，状态路径接近于 *CSL* 线。



a. 各向等压加载与卸载试验



b. 超固结比对不排水应力路径的影响

图 2-6-8　正常固结土与超固结土的应力路径

2.6.3　弹性墙与屈服轨迹

1.　弹性墙

正常固结粘土和轻超固结土，也被称为湿(wet)粘土。在卸载时会发生可恢复的体应变(见图 2-6-3)。图 2-6-9 表示的是 p′ ～q′ ～v 三维空间中的物态边界面。*CA* 为正常固结土的各向等压固结曲线 *NCL*，*AR* 为卸载回弹曲线。从曲线 *AR* 各点作垂线形成一面垂直的曲面，称为弹性墙，它与物态边界面相交于 *AF*。在 *AR* 上应力变化时的弹性比体积如式(2.6.6)所示：

$$v = v_\kappa - \kappa \ln p'$$

无塑性体积变化，亦即在弹性墙上塑性体应变 ε_V^p 保持为常数。如果选塑性体应变为硬化参数，亦即等塑性体应变面就是屈服面，等塑性体应变线 *AF* 是屈服轨迹；AF 向 p′ －q′ 平面上的投影 *A′F′* 为屈服面在 p′ －q′ 平面上的屈服轨迹。图 2-6-10(b)表示的是弹性墙 *ARF* 在 p′ ～v 平面上的投影，可见其回弹曲线是唯一的，并且与 v 轴截距代表其塑性比体积 v_0^p，在同一弹性墙上，或者同一屈服轨迹上，其塑性比体积 $v^p = v_0^p$ 是个常数，或者说其塑性体应变 ε_V^p 是常数。

2. 能量方程

在图 2－6－9 中，*A′F′* 为剑桥模型在 p′ －q′ 上的屈服轨迹，但是只能根据物理意义作几何

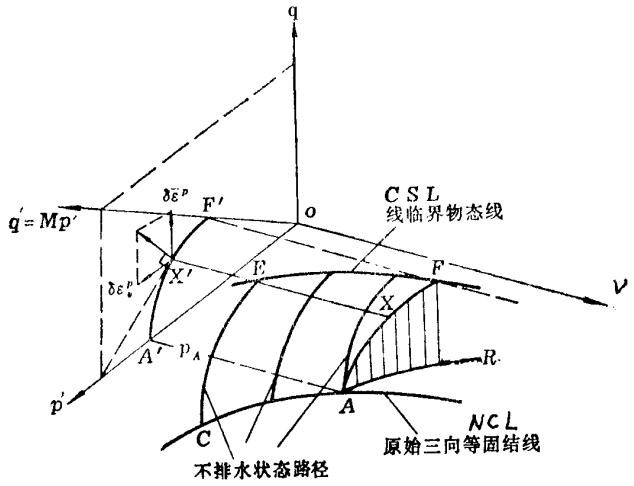


图 2-6-9　正常固结土的物态边界面

上的表示，尚无法用数学表达式表示为屈服函数。为了得到屈服函数，尚需引进一些假设。其中能量方程实质上是一种假设。用它来计算试验的应力应变关系，如与实测不符，则可修改能量方程，直至二者较为一致。

单位体积土在八面体应力 p′ 和 q′ 状态下，加载时有应力增量 dp′ 和 dq′，产生变形增量 $d\varepsilon_V$ 和 $d\bar{\varepsilon}$，则其变形能增量为：

$$dE = p' d\varepsilon_V + q' d\bar{\varepsilon} \tag{2.6.9}$$

而变形能增量又可分为可恢复的弹性变形能增量 dW^e 和不可恢复的塑性变形能增量 dW^p，亦即：

$$dE = dW^e + dW^p \tag{2.6.10}$$

其中

$$dW^e = p d\varepsilon_V^e + q d\bar{\varepsilon}^e \tag{2.6.11}$$

$$dW^p = p d\varepsilon_V^p + q d\bar{\varepsilon}^p \tag{2.6.12}$$

关于弹塑性变形能，Roscoe 作了如下假设：

(1)假定一切剪应变都是不可恢复的，亦即：

$$d\bar{\varepsilon}^e = 0 \tag{2.6.13}$$

微分式（2.6.6）可以得到：

$$dv^e = -\kappa \frac{dp'}{p'}$$

$$d\varepsilon_V^e = -\frac{dv^e}{1+e} = \frac{\kappa}{1+e}\frac{dp'}{p'} \tag{2.6.14}$$

$$d\varepsilon_V^p = d\varepsilon_V - \frac{1}{1+e}\frac{\kappa}{p'}dp' \tag{2.6.15}$$

这样:
$$dW^e = \frac{\kappa}{1+e}dp' \tag{2.6.16}$$

(2)假定塑性变形能增量可表示为：

$$dW^p = Mpd\bar{\varepsilon}^p = Mpd\bar{\varepsilon} \tag{2.6.17}$$

则：
$$dE = dW^e + dW^p = \frac{\kappa}{1+e}dp' + Mpd\bar{\varepsilon} \tag{2.6.18}$$

将式（2.6.9）代入式（2.6.18）则得：

$$p'\left(d\varepsilon_V - \frac{\kappa}{1+e}\frac{dp'}{p'}\right) = \left(Mp' - q'\right)d\bar{\varepsilon}$$

将式（2.6.15）代入上式：

$$p'd\varepsilon_V^p = \left(Mp' - q'\right)d\bar{\varepsilon}$$

由于$d\bar{\varepsilon} = d\bar{\varepsilon}^p$，则

$$\frac{d\varepsilon_V^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = M - \frac{q'}{p'} = M - \eta \tag{2.6.19}$$

其中$\eta = \frac{q'}{p'}$。

公式（2.6.19）实际上就表示了流动规则。因为$d\varepsilon_V^p \big/ d\bar{\varepsilon}^p$实际上表示了塑性应变增量在 p′ ～q′ 平面上的方向，与这一方向正交的轨迹就是在这个平面上土的屈服轨迹(相适应流动法则)，见图 2-6-9 所示。

3. 剑桥模型的屈服面在 p′～q′平面上的屈服轨迹表达式

根据式（2.6.19）可见，当应力比 η＝M 时，则$d\varepsilon_V^p \big/ d\bar{\varepsilon}^p$＝0，这表明塑性应变增量向量$d\varepsilon^p$是竖直的，$d\varepsilon_V^p$＝0；而 η＝0，亦即各向等压时，$d\varepsilon_V^p \big/ d\bar{\varepsilon}^p$＝$M$，$d\varepsilon^p$并不是水平方向。这不符合实际各向等压加载的实际情况（$d\bar{\varepsilon}^p = 0$）。从以上分析可见在 p′ ～q′ 平面上这一屈服轨迹是“子弹头”式的，(见图 2-6-10)。

设其屈服轨迹可表示为：

$$f\left(p', q', H\right) = 0 \tag{2.6.20}$$

则：
$$df = \frac{\partial f}{\partial p'}dp' + \frac{\partial f}{\partial q'}dq' + \frac{\partial f}{\partial H}dH = 0$$

因为在同一屈服面上硬化参数为常数，所以 dH＝0，则：

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'}dp' + \frac{\partial f}{\partial q'}dq' = 0 \tag{2.6.21}$$

根据相适应的流动规则：

$$d\varepsilon_V^p = d\lambda\frac{\partial f}{\partial p'} \tag{2.6.22}$$

$$d\bar{\varepsilon}^{p} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial q'} \tag{2.6.23}$$

将上两式代入式（2.6.22），则得：

$$dp' d\varepsilon_V^p + dq' d\bar{\varepsilon}^{p} = 0 \tag{2.6.24}$$

将式（2.6.19）代入，则得：

$$\frac{dq'}{dp'} - \frac{q'}{p'} + M = 0 \tag{2.6.25}$$

将此微分方程变换得到

$$\frac{-Mq'dp' + Mp'dq'}{\left(Mp'\right)^2} + \frac{dp'}{p'} = 0$$

积分得到：

$$\frac{q'}{Mp'} + \ln p' = \ln c \tag{2.6.26}$$

其中 $\ln c$ 是一个积分常数，可通过边界条件确定。在图 2-6-10 中，点 A 是各向等压的试验点，对应是 $p' = p_0'$，q＝0 和 $v = v_0$。将这一条件代入式（2.6.26），则得出：

$$c = p_0' \tag{2.6.27}$$

将此式代入式（2.6.26），则得到 p′ －q′ 平面上“湿粘土”的屈服轨迹方程为：

$$f = \frac{q'}{p'} - M \ln \frac{p_0'}{p} \tag{2.6.28}$$

它在 p′ －q′ 平面上的形状如图 2-6-9 和图 2-6-10 所示，它像一个“帽子”，是子弹头形状。

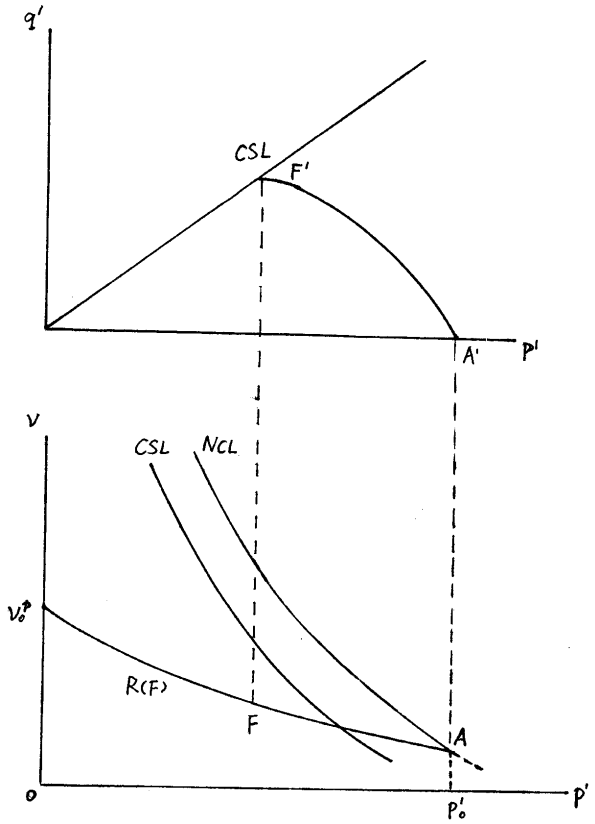


图 2-6-10　弹性墙上塑性比体积 v^p 唯一性和剑桥模型的屈服面

4. 物态边界面的方程

在图 2-6-9 中屈服轨迹 AF 沿着各向等压初始固结曲线 *NCL* 移动就形成空间曲面——状态边界面。它实质上是在三维空间 p′ ,q′ ,v 中的屈服面。由 *NCL* 的表达式可见：(式（2.6.3）)

$$v = N - \lambda \ln p'$$

由于在各向等压情况下，我们表示为 $p' = p_0'$， $v = v_0$。所以上式也可表示为：

$$v_0 = N - \lambda \ln p_0' \tag{2.6.29}$$

对于 *NCL* 上任一点 *A*(p_0'，v_0)（见图 2-6-9），它同时也位于回弹曲线的起点上，所以它又可用回弹曲线的方程表示如式(2.6.6)形式(见图 2-6-10)：

$$v_0 = v_\kappa - \kappa \ln p_0'$$

从上两式可得到：

$$v_\kappa = N - (\lambda - \kappa) \ln p_0' \tag{2.6.30}$$

在屈服轨迹 *AF* 上，存在着如下关系 $v = v_\kappa - \kappa \ln p'$

或者

$$v = N - (\lambda - \kappa) \ln p_0' - \kappa \ln p' \tag{2.6.31}$$

从式（2.6.28），得到屈服轨迹的方程为：

$$\frac{q'}{p'} - M \ln \frac{p_0'}{p} = 0$$

$$\ln p_0' = \frac{q'}{Mp'} + \ln p' \tag{2.6.32}$$

将式（2.6.32）代入（2.6.31）得到：

$$\eta = \frac{q'}{p'} = \frac{M}{\lambda - \kappa}\left(N - v - \lambda \ln p'\right) \tag{2.6.33}$$

这个方程是屈服轨迹沿着 *NCL* 线移动形成的，是一个包含三个变量 p', q' 和 v 的三维曲面方程，亦即物态边界面方程。这也是式（2.6.9）的由来。

5. “湿粘土”的增量应力应变关系

将式（2.6.33）微分，可得：

$$dv = -\left[\frac{\lambda - \kappa}{Mp'}\left(dq' - \eta dp'\right) + \frac{\lambda}{p'} dp'\right]$$

或者

$$d\varepsilon_v = \frac{\lambda}{1+e}\left[\frac{1 - \kappa/\lambda}{Mp'}\left(dq' - \eta dp'\right) + \frac{dp'}{p'}\right] \tag{2.6.34}$$

亦即

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e}\left[\frac{\lambda - \kappa}{M} d\eta + \lambda \frac{dp'}{p'}\right] \tag{2.6.35}$$

从能量方程式（2.6.18），可得到：

$$dE = \frac{\kappa}{1+e} dp' + Mp' d\bar{\varepsilon} = p' d\varepsilon_v + q' d\bar{\varepsilon}$$

将（2.6.35）代入得到

$$d\bar{\varepsilon}=\frac{\lambda-\kappa}{(1+e)Mp'}\left[\frac{dq'}{M-\eta}+dp'\right]=\frac{\lambda-\kappa}{(1+e)}\cdot\frac{p'd\eta+Mdp'}{Mp'(M-\eta)} \tag{2.6.36}$$

从式（2.6.35）和（2.6.36）就可以从已知的应力增量 dp′ ,dq′ 求取相应的应变增量 $d\varepsilon_V$ 和 $d\bar{\varepsilon}$。

可见在确定剑桥模型的屈服面和确定应力应变关系时只需三个实验常数：各向等压固结参数 λ；回弹参数 κ 和破坏常数 M。其中 λ 和 κ 均可用各向等压试验确定；M 可用常规三轴压缩试验确定。

6. 修正的剑桥模型

上述的剑桥模型假设一种能量方程表达形式 (式（2.6.17）) $dW^p=Mpd\bar{\varepsilon}$，确定的屈服轨迹在 p′ －q′ 平面上是子弹头形的。首先这种屈服面在各向等压试验施加应力增量 dp′ ＞0 及 dq′ ＝0 时，会产生塑性剪应变增量及总剪应变增量 $d\bar{\varepsilon}^p=d\bar{\varepsilon}=d\varepsilon_V^p/M$，这显然是不合理的。另外，许多试验结果也表明，用以上模型计算的三轴试验的应力应变关系与试验结果相差较大。应变在试验前段计算的应变 ε_1 偏大。

为此 1965 年，勃兰德（Burland）建议了一种新的能量方程的形式，得到了修正剑桥模型。他建议用下式代替式（2.6.17）：

$$dW^p=p\sqrt{\left(d\varepsilon_V^p\right)^2+M\left(d\bar{\varepsilon}^p\right)^2} \tag{2.6.37}$$

这样得到

$$d\varepsilon_V^p/d\bar{\varepsilon}^p=\frac{M^2-\eta^2}{2\eta} \tag{2.6.38}$$

这样当 η＝0，或 dq′ ＝0 时，$d\bar{\varepsilon}^p=0$。这符合于一般的试验结果。

将（2.6.38）代入式（2.6.24），得到：

$$\frac{dq'}{dp'}+\frac{M^2-\eta^2}{2\eta}=0 \tag{2.6.39}$$

在 p′ －q′ 平面上的屈服轨迹方程为：

$$\frac{p}{p_0}=\frac{M^2}{M^2+\eta^2} \tag{2.6.40}$$

从式（2.6.40）可推导出

$$\left(p'-\frac{p_0}{2}\right)^2+\left(\frac{q'}{M}\right)^2=\left(\frac{p'_0}{2}\right)^2 \tag{2.6.41}$$

这在 p′ ,q′ 平面上是一个椭园，其顶点在 q′ ＝Mp′ 线上。以 p_0' 亦即 ε_V^p 为硬化参数。见图

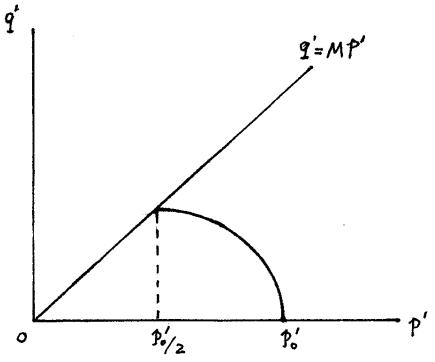


图 2-6-11 修正剑桥模型的屈服面

2-6-11

其增量的应力应变关系为

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e}\left[(\lambda-\kappa)\frac{2\eta d\eta}{M^2+\eta^2}+\lambda\frac{dp'}{p'}\right] \tag{2.6.42}$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda-\kappa}{1+e}\cdot\frac{2\eta}{M^2-\eta^2}\left(\frac{2\eta d\eta}{M^2+\eta^2}+\frac{dp'}{p'}\right) \tag{2.6.43}$$

7. 关于剑桥模型的几个说明

(1) 用修正的剑桥模型计算的三轴试验应力应变关系要比用原始模型计算的结果更接近于实测。但在η较低时计算应变ε_1偏小。为了改善对剪应变值的模拟，对于状态路径在弹性墙上运动时，无塑性剪应变发生，亦即中性加载时无塑性应变的条件，模型的提出者作了修正，增加了一个新的屈服面，即在p′－q′平面中平行于p′轴的附加剪切屈服面，亦即对修正剑桥模型作了进一步修正。

(2) 剑桥模型在三维应力状态中是一个椭球，亦即在π平面上屈服轨迹为圆周。由于从三轴常规压缩确定的破坏条件为：

$$q' = M_c p' = \frac{6\sin\varphi}{3-\sin\varphi}p' \tag{2.6.44}$$

而实际土的破坏更符合莫尔—库仑准则，这样在三轴伸长时（$p'=(\sigma_1'+2\sigma_3')/3$，　$q'=\sigma_1'-\sigma_3'$）的破坏时应力比

$$M_t = \frac{3-\sin\varphi}{3+\sin\varphi}M_c \tag{2.6.45}$$

所以该模型在应用时并不是以q′＝M_cp′为破坏条件而是以莫尔—库仑强度准则为破坏条件。因而在应力应变计算过程中，如果应力状态达到了莫尔—库仑准则，则令土破坏，按刚塑性材料变形，这样常会造成应力应变曲线的不连续。

(3) 对于平面应变状态土的计算及三维应力状态，则使用普遍的应力状态：

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma_1'+\sigma_2'+\sigma_3')$$

$$q' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]^{1/2}$$

$$\varepsilon_V = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+(\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2+(\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right]^{1/2}$$

用类似方法计算。对于平面应变问题，其内摩擦角比三轴试验确定的ϕ的值要高一些。

2.7　Lade-Duncan 模型和清华模型

土的弹塑性本构模型种类繁多。它们可能采用相适应流动规则，也可能采用不相适应的流动规则；可能采用单一屈服面，也可能采用两重、多重屈服面；可能采用等向硬化规律，也可能采用运动硬化规律。另一方面为了反映土的剪胀性，应变软化，循环加载下的滞回圈及土变形的各向异性，人们采用了各种弹塑性模型的形式，变化有关参数，使用不同的室内试验手段，使土的弹塑性模型成为土的本构模型园地中最繁茂的花圃。

清华弹塑性模型和 Lade-Duncan 模型是两个有代表的土的弹塑性模型，也是 70—80 年代土的本构关系研究中杰出的成果。

2.7.1　莱特——邓肯（Lade-Duncan）模型

这个模型是莱特（Lade）和邓肯（Duncan）在砂土的试验基础上建立起来的。它采用不相适应的流动规则，以塑性功 W_P 为硬化参数，较好地反映了砂土的破坏和砂土的剪胀性，成为适用于砂土应力变形分析的代表性弹塑性模型。

1.　弹性应变

与其他弹塑性模型一样，它将土的变形分为弹性和塑性两部分，即：

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{p}$$

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

其中 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ 用广义虎克定律确定，弹性模量表示形式与 Duncan-Chang 模型中式（2.4.32）一样。

$$E = k_{ur} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

对于弹性变形部分，可以假设泊松比 ν 为常数。

2.　塑性理论的主要函数

该模型的破坏面不同于其他强度理论，其形式为：

$$f_1 = I_1^3 / I_3 = k_f \tag{2.7.1}$$

模型的屈服面函数为：

$$f = I_1^3 / I_3 = k \tag{2.7.2}$$

$k < k_f$。

塑性势面：

$$g = I_1^3 - k_2 I_3 = 0 \tag{2.7.3}$$

可见它的破坏面、屈服面和塑性势面都具有相似的函数表达形式，因而在应力空间具有相似的形状。只是破坏面为屈服面及塑性势面的外极限；k 与 k_2 并不相等，因而采用的是不相适应的流动规则。这三种曲面及其轨迹在不同应力空间中的形状如图 2-7-1 所示。它们在主应力空间为一锥体，顶点在应力轴原点。在连续加载时，屈服面和塑性势面以空间对角线为中心膨胀，锥体径向加大，以破坏面为极限。它们在 π 平面上形状类似于梨形。

3.　硬化参数与应力应变关系

Lade-Duncan 模型以塑性功 W_P 为硬化参数

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p} \tag{2.7.4}$$

将式（2.7.4）两侧微分得：

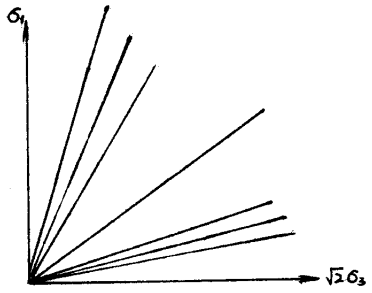
$$dW_p = d\varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij}$$

因为 g 为 σ_{ij} 的三阶齐次方程，则

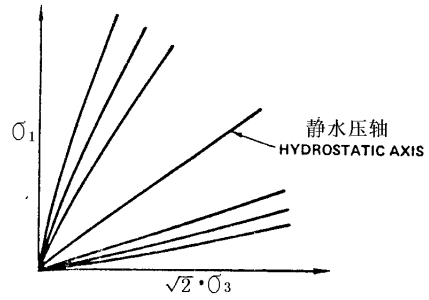
$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} = 3g \tag{2.7.5}$$

则：

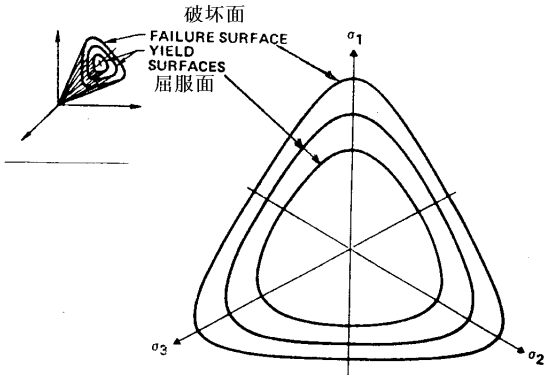
$$d\lambda = \frac{dW_p}{3g} \tag{2.7.6}$$



a. Lade-Duncan 模型-在三轴平面上的屈服与破坏轨迹



b. 修正的 Lade-Duncan 模型



c. 在π平面上的屈服与破坏轨迹

图 2-7-1 Lade-Duncan 模型的屈服面及其轨迹

4. 模型的参数确定：

(1)强度参数 k_f

它可以用不同围压的三轴试验计算试样破坏时的 $k_f = I_1^3 / I_3$，如果其强度包线为直线，则不同围压得到的 k_f 是相同的，否则可以取其平均值。

(2)弹性常数 k_{ur}，n 和 ν

它们的确定方法与在 Duncan—Chang 模型的方法一样。可以从卸载—再加载曲线确定，有时也从其加载曲线的初始段确定，一般设泊松比 ν 为常数。

(3)塑性势函数中 k_2

模型的提出者认为 k_2 与屈服函数 f 间关系可表示成：

$$k_2 = Af + 27(1 - A) \tag{2.7.7}$$

k_2　可从不同三轴试验中确定的塑性应变增量比

$$-\nu^p = \frac{d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{\partial g / \partial \sigma_3}{\partial g / \partial \sigma_1} = \frac{3I_1^2 - k_2\sigma_1\sigma_3}{3I_1^2 - k_2\sigma_3^2}$$

则：

$$k_2 = \frac{3I_1^2(1 + \nu^p)}{\sigma_3(\sigma_1 + \nu^p\sigma_3)} \tag{2.7.8}$$

从不同试验点的 f 和 k_2 的关系，绘制成 $f - k_2$ 式（2.7.7）表示的直线，确定常数 A。

(4)硬化参数 W_P 确定

试验结果表明 W_P 与 f 间可表示成双曲线关系：

$$(f - f_t) = \frac{W_p}{a + dW_p} \tag{2.7.9}$$

其中：

$$a = Mp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^l \tag{2.7.10}$$

$$d = \frac{1}{(f - f_t)_{ult}} \tag{2.7.11}$$

$$(f - f_t)_{ult} = \frac{k_f - f_t}{r_f}$$

M、l 为试验常数，r_f 为破坏比，r_f 与 f_t 也是材料常数。它们都可从不同围压三轴试验确定。因而，该模型共有 9 个常数。

2.7.2　修正的 Lade-Duncan 模型

上述的 Lade-Duncan 模型的屈服面和塑性势面是开口的锥形，所以只会产生塑性体胀，即剪胀；只有弹性体变是正的，亦即加载有弹性体缩。它在各向等压的应力下不会发生屈服，不会产生塑性应变，这显然不符合土的变形特性。另外，它的破坏面、屈服面和塑性势面的子午线都是直线，不能反映围压 σ_3 或者平均主应力 p 对土的强度和屈服的影响。为此模型的提出者对原模型进行了修正。

1.　弹性变形和两种塑性变形

为了反映在各向等压情况及平均主应力 p 对土屈服的影响，他们增加了一组帽子屈服面，这样应变增量分为三部分：

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^c + d\varepsilon_{ij}^p \tag{2.7.12}$$

其中 $d\varepsilon_{ij}^e$ 为弹性部分，用广义虎克定律确定；$d\varepsilon_{ij}^p$ 为塑性剪胀应变增量；$d\varepsilon_{ij}^c$ 为塑性塌陷应变增量。其中弹性部分仍用上述的 E、ν 参数计算。

2. 塑性塌陷变形 $d\varepsilon_{ij}^{c}$

为了反映在 p 作用下土体的塑性体积压缩，即在压力下土体的“塌陷”，增加了一组帽子屈服面，表示为：

$$f_c = I_1^2 + 2I_2 \tag{2.7.13}$$

它以塌陷塑性功 Wc 为硬化参数；采用相适应的流动准则，即

$$W_c = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{c} \tag{2.7.14}$$

$$d\varepsilon_{ij}^{c} = d\lambda_c \frac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} \tag{2.7.15}$$

将式（2.7.14）微分，则得

$$d\lambda_c = \frac{dW_c}{2 f_c} \tag{2.7.16}$$

3. 塑性剪胀变形

在这部分塑性变形中，塑性体应变永远是负的，亦即是塑性剪胀。其屈服面、塑性势面和破坏面均在上述的直子午线锥面基础上进行了改进、变成微弯的形式。

(1) 破坏面方程

$$\eta_1 = \left(I_1^3 \Big/ I_3 - 27 \right) \left(I_1 \Big/ p_a \right)^m \tag{2.7.17}$$

η_1 为一常数。

(2) 屈服面方程

$$f_p = \left(I_1^3 \Big/ I_3 - 27 \right) \left(I_1 \Big/ p_a \right)^m \qquad f_p < \eta_1 \tag{2.7.18}$$

f_p 是一变量，随加载过程而增加。

(3) 塑性势面方程

$$g_p = I_1^3 - \left(27 + \eta_2 \left(\frac{p_a}{I_1} \right)^m \right) I_3 \tag{2.7.19}$$

式（2.7.19）也可写成：

$$g'_p = \left(I_1^3 \Big/ I_3 - 27 \right) \left(I_1 \Big/ p_a \right)^m - \eta_2 \tag{2.7.20}$$

有关的图形见图 2-7-1(b)。

4. 有关参数确定

(1)弹性参数 E、ν

在这个模型中，需要从卸载应力应变关系确定 E、ν 及其中有关常数。一般不能从初始加载段确定，这是由于初始加载段的应变包括 $d\varepsilon_{ij}^{e}$ 与 $d\varepsilon_{ij}^{c}$ 两部分。

(2)塑性塌陷部分的参数 Wc

模型的提出者认为塌陷塑性功 Wc 与屈服函数 fc 间存在如下关系：

$$W_c = cP_a \left(\frac{f_c}{p_a{}^2} \right)^p \tag{2.7.21}$$

其中 c、p 为试验常数。

可从各向等压试验结果计算每一应力状态下的 W_c 及 f_c，二者在对数坐标下为直线，确定参数 c 和 p。

(3)塑性剪胀部分的参数

(i)强度常数 η_1 与 m

可从进行不同围压的常规三轴压缩试验，得到各个围压 σ_3 下的破坏应力状态 $(\sigma_1-\sigma_3)_f$ 与 σ_3，根据式 2－7－17，分别计算在破坏时的 I_1 及 I_1^3/I_3，在双对数坐标系下，破坏时的 P_a/I_1 与 (I_1^3/I_3-27) 的直线关系，其在 $Pa/I_1=1.0$ 处的截距为 η_1，直线的斜率为 m。

(ii)塑性势函数中的 η_2

模型的提出者建议 η_2 与应力状态及屈服函数间关系为；

$$\eta_2 = Sf_p + R\sqrt{\sigma_3 / p_a} + t \tag{2.7.22}$$

其中有 S、R、t 三个试验常数。

上式可写成

$$\eta_2 = Sf_p + \eta_{20} \tag{2.7.23}$$

可以从几种围压下三轴试验确定在各应力状态下的 ν^p，

$$\nu^p = \frac{d\varepsilon_3^p}{d\varepsilon_1^p} = \frac{\partial g_p / \partial \sigma_3}{\partial g_p / \partial \sigma_1} \tag{2.7.24}$$

将式（2.7.19）或（2.7.20）微分后代入式（2.7.24）就可得到 $\eta_2 = f\left(\nu^p, f_p\right)$ 的函数关系。从而得到 η_2 与 f_P 之间的近似直线关系，确定常数 S 和 η_{20}。试验表明 S 与 σ_3 无关，η_{20} 是 $\sqrt{\sigma_3}/p_a$ 的线性函数，从 $\eta_{20} \sim \sqrt{\sigma_3}/p_a$ 的直线关系可确定常数 R 和 t。

(4)硬化参数——剪胀的塑性功 W_P

剪胀塑性功可表示为

$$f_p = ae^{-bW_p}\left(\frac{W_p}{p_a}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.7.25}$$

这是一个双值函数。f_P 与 W_P 间的试验关系见图 2-7-2。在式（2.7..25）中

$$a = \eta_1\left(\frac{ep_a}{W_{p峰}}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{2.7.26}$$

$$b = \frac{1}{qW_{p峰}} \tag{2.7.27}$$

$$W_{p峰} = Pp_a\left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^l \tag{2.7.28}$$

$$q = \alpha + \beta\sigma_3 / p_a \tag{2.7.29}$$

从图 2-7-2 可见，$W_{p峰}$ 可直接确定；然后从式（2.7.25）可得到不同 σ_3 下的参数 q。然后从 $W_{p峰}$ 与 q 与 σ_3 的关系可得到试验常数 P、l、α、β。

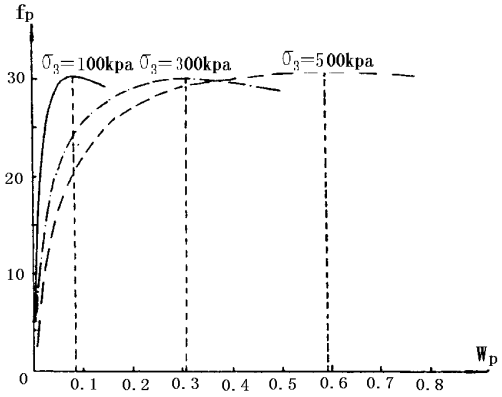


图 2-7-2　常规三轴试验中修正 Lade-Duncan 模型的 W_p 与 f_p 关系

这样，修正的 Lade-Duncan 模型共有弹性常数 K_{ur}、n、ν，塑性塌陷常数 c、p，塑性剪胀常数 R、S、t、α、β、P、l 共计 14 个参数。它们分别从各向等压试验、常规三轴试验(加载与卸载)确定。

应当看到，Lade-Duncan 的原始模型，具有简单，能反映砂土剪胀的优点，尤其是其破坏准则较好符合试验结果。修正后虽然可反映塑性体缩和应变软化及围压或平均主应力的影响，但趋于复杂，参数增加，并且其软化计算也不很成功。

随后该模型的提出者又对它进行了一些发展，结合等向硬化与运动硬化以适应较大应力反复的应力条件下应力应变关系计算。

在此模型中 W_P 中含有应力变量，对于流动规则来讲,数学上不够严密。

2.7.3　清华弹性模型

清华弹塑性模型是以黄文熙为首的清华大学研究组提出来的。其特点在于不是首先假设屈服面函数和塑性势函数，而是根据试验确定的各应力状态下的塑性应变增量的方向，然后按照相适应流动规则确定其屈服面；再从试验结果确定其硬化参数。因而这是一个假设最少的弹塑性模型。

1.　弹性应变

弹性应变部分采用 K、G 模型计算。其中体变模量 K 从各向等压试验的卸载曲线确定；剪切模量 G 从常规三轴压缩试验确定。其一般形式为：

$$K = K_0 p \tag{2.7.28}$$

$$G = G_0 p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n \tag{2.7.29}$$

2.　屈服面的确定

在三轴试验的结果中，计算各应力状态下的塑性应变为：

$$\varepsilon_v{}^p = \varepsilon_v - \varepsilon_v{}^e$$

$$\bar{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^e$$

其中 $\varepsilon_v{}^e$ 和 $\bar{\varepsilon}^e$ 用式（2.7.28）和（2.7.29）计算，然后绘制不同围压下三轴试验的 $\varepsilon_v{}^p \sim \bar{\varepsilon}^p$ 关系曲线；然后在 p～q 平面上对应的应力点处绘制其塑性应变增量方向，用图 2-5-5(a)的小箭头表示。它实际就是 $\varepsilon_v{}^p \sim \bar{\varepsilon}^p$ 曲线对应于该应力点的切线方向。

将该图中的小箭头方向连线就如同“流线”；对应的与其正交的“等势线”即为塑性势轨迹。按照德鲁克(Drucker)假说，即相适应的流动规则，f=g，则塑性势轨迹即为在 p—q 平面上的屈服轨迹。用适当的函数表示，则为屈服函数。

许多土的三轴试验结果表明，这个屈服轨迹大体上是一组比例椭圆，可以用下式表示：

$$f = g = \left(\frac{p-h}{kh}\right)^2 + \left(\frac{q}{krh}\right)^2 - 1 = 0 \tag{2.7.30}$$

它包含有两个试验常数 r 和 k，它们与椭圆的长短轴大小有关。从式（2.7.30）可以得到硬化参数 h 用应力状态表达的形式：

$$h = \frac{\sqrt{k^2 p^2 + \frac{k^2-1}{r^2} q^2} - p}{k^2 - 1} \tag{2.7.31}$$

根据正交规则，将式（2.7.30）微分，并将（2.7.31）式代入，则得

$$-\frac{d\varepsilon_V{}^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{dq}{dp} = -r^2 x + \frac{r^2}{k^2-1}\left[-x + \sqrt{x^2 k^2 + \frac{k^2-1}{r^2}}\right] \tag{2.7.32}$$

其中 $x = p/q = 1/\eta$。

式（2.7.32）是满足于正交于椭圆屈服面的塑性应变增量方向的关系式。只要将所有试验点都点绘在 $Z-\eta$ 座标系中，得到图 2-7-3 的结果，其中 $Z = arctg\left(-\frac{d\varepsilon_V{}^p}{d\bar{\varepsilon}^p}\right)$。然后用公式（2.7.32）去拟合试验点，从而确定试验常数 r、k。

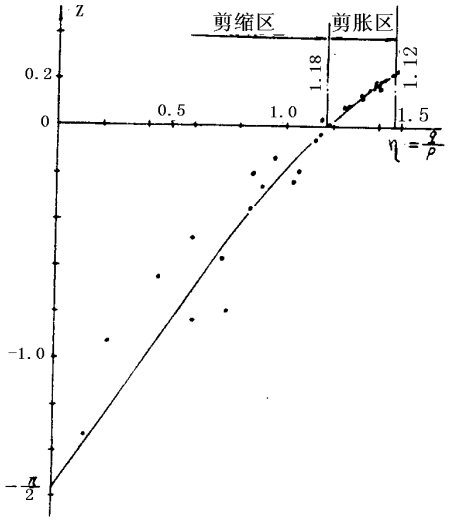


图 2-7-3　$Z-\eta$ 平面上三轴试验结果

3. 硬化参数的确定。

在式（2.7.31）中对于各向等压的应力状态 $p = p_0$，　$q = 0$，该式可表示为：

$$h = \frac{p_0}{1+k} \tag{2.7.33}$$

由于在各向等压试验中 p_0 与塑性体应变 $\varepsilon_{v0}{}^p$ 有一一对应关系，所以（2.7.33）又可表示为 $\varepsilon_{v0}{}^p$ 的函数。通过各向等压试验的卸载应力应变关系一般可以将 p_0 与 $\varepsilon_{v0}{}^p$ 之间关系表示为：

$$p_0 = p_a \frac{1}{m_4}(\varepsilon_{v0}^p + m_0)^{m_5} \tag{2.7.34}$$

当然 p_0 与 $\varepsilon_{v0}{}^p$ 之间关系也可根据试验结果表示成其他的函数形式。

从式（2.7.33）和（2.7.34）可得到

$$h = \frac{p_a}{1+k}\frac{1}{m_4}(\varepsilon_{v0}^p + m_6)^{m_5} \tag{2.7.35}$$

在任一个屈服面上，硬化参数 h 是相等的。亦即在一个屈服面上，从式（2.7.31）与（2.7.33），各向等压应力点（ p_0， $q=0$ ）与其他应力点之间关系满足于：

$$p_0 = \left[\sqrt{k^2 p^2 + \frac{k^2-1}{r^2}q^2} - p\right]/(k-1) \tag{2.7.36}$$

而在一个屈服面上，各向等压的塑性体应变 ε_{v0}^p 与其他应力状态的塑性体应变($\varepsilon_v{}^p$ ， $\bar{\varepsilon}^p$)之间也应满足一定关系，以使该屈服面各点的硬化参数为常数。

将所有同一屈服面上的 $\varepsilon_{v0}{}^p$ 与($\varepsilon_v{}^p$ ， $\bar{\varepsilon}^p$)之间关系绘制在同一 $\varepsilon_v{}^p$ 与 $\bar{\varepsilon}^p$ 坐标系中，就得到一条曲线，这些曲线 L_1、L_2、L_3……L_n 表示同一屈服面上 $\varepsilon_v{}^p$， $\bar{\varepsilon}^p$ 之间满足一定的关系。

$$\varepsilon_{v0}{}^p = f(\varepsilon_v{}^p,\ \bar{\varepsilon}^p)$$

这种关系的最简单形式是成性关系：

$$\varepsilon_{v0}{}^p = \varepsilon_v{}^p + m_3\,\bar{\varepsilon}^p \tag{2.7.37}$$

两侧除以 $\varepsilon_{v0}{}^p$，则得

$$\in_1 = 1 - m_3 \in_2 \tag{2.7.38}$$

其中 $\in_1 = \varepsilon_v{}^p \big/ \varepsilon_{v0}{}^p$， $\in_2 = \bar{\varepsilon}^p \big/ \varepsilon_{v0}{}^p$。

见图 2-7-4 所示，二者关系也可用二次函数关系表示，可能会更准确一些，但形式会更复杂。

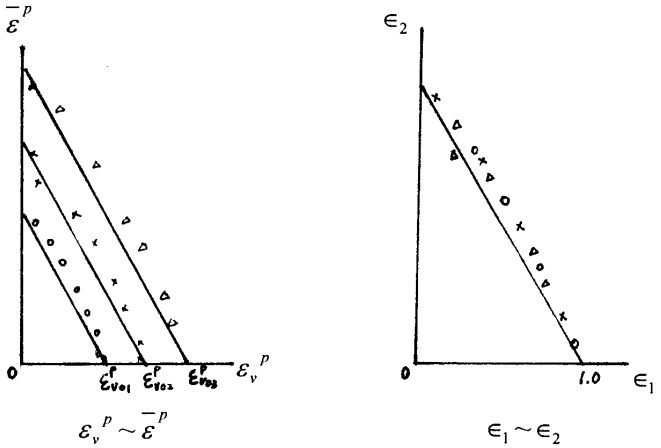


图 2-7-4 同一屈服面上 $\varepsilon_v{}^p$ 与 $\bar{\varepsilon}^p$ 间关系

将式（2.7.34）和（2.7.37）代入（2.7.33）就得到硬化参数的表达式

$$h=\frac{p_a}{1+k}\cdot\frac{1}{m_4}\left[m_6+\varepsilon_V^p+m_3\bar{\varepsilon}^p\right]^{m_5} \tag{2.7.39}$$

这样，就得到了屈服函数硬化参数的全部表达式。值得注意的是，某些函数形式可根据试验资料适当确定，以较准确和简便为标准。在如上的函数形式中，共有弹性材料常数 K_0,G_0 和 n；屈服函数中常数 k、r；硬化参数中的常数 m_3、m_4、m_5 和 m_6 共计 9 个试验常数。它们可从各向等压试验和常规三轴试验及他们的卸载试验确定。

4. 模型的三维形式

上述模型是在 p－q 应力平面上建立起来的。与应力洛德角 θ 无关，这意味着其破坏轨迹、屈服轨迹在 π 平面上是圆周。这显然不符合土的实际情况。为了建立三维的弹塑性模型形式。最主要的是确定屈服面在 π 平面上的轨迹的形状及函数表达式。

图 2-5-5(b)是从承德中密砂的真三轴试验和平面应变试验得到的 π 平面上的塑性应变增量方向。采用同样的原理和方法，可以得到 π 平面上的屈服轨迹。这种屈服轨迹可以用平面上的两段相切的圆弧组成。试验与理论都证明了，在 π 平面上，屈服轨迹与破坏轨迹形状是相同的。所以其破坏轨迹与屈服轨迹可用图 2-7-5 的双圆弧示。这两段圆弧的圆心，一个在 σ_3 轴上，一个在 σ_1 轴上，在 $\theta=\theta_0$ 处相切。按照圆心与半径的不同，这两段双圆弧的组合可以有许多种。其中图 2-7-5 所示形状较为符合试验结果。

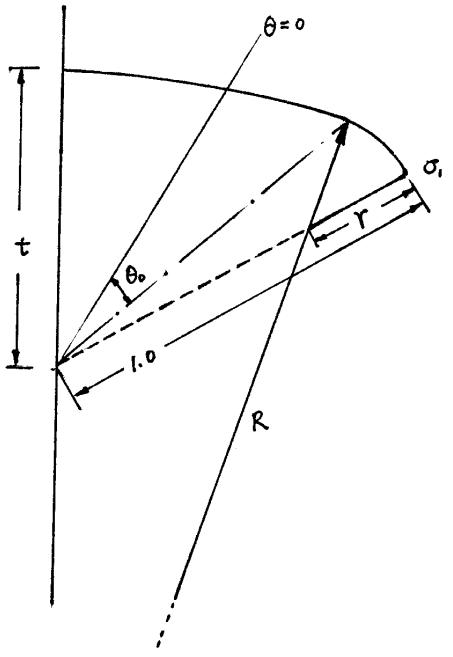


图 2-7-5 双圆弧屈服轨迹

在三维形式的屈服方程中，需要引入一个形状参数 $\alpha(\theta)$。它表示了 π 平面上屈服轨迹的形状。试验表明它也表示了破坏面在π平面上的轨迹的形状.

$$f=\left(\frac{p-h}{kh}\right)^2+\left(\frac{q}{\alpha(\theta)krh}\right)^2-1=0 \tag{2.7.40}$$

破坏方程为：

$$q/p = M_c\alpha(\theta) \tag{2.7.41}$$

其中为 M_c 为常规三轴压缩试验得到的破坏应力比 $M_c = q_c/p$。$\alpha(\theta)$ 可表示为如下形式：

当 $\theta > \theta_0$ 时：

$$\alpha_1 = \frac{1}{t(2t-1)}\left[\sqrt{(1-t^2)(2t^2+1)^2\cos^2(30°-\theta)+t^2(2t-1)(2-2t+3t^2-2t^3)} - (1-t)(2t^2+1)\cos(30°-\theta)\right] \tag{2.7.42}$$

当 $\theta < \theta_0$ 时：

$$\alpha_2 = \frac{1}{1+2t-2t^2}\left[\sqrt{(1-t)^2(2t^2+t+2)^2\cos(30°+\theta)+(1+2t-2t^2)(4t^3-4t^2+4t-3)} + (1-t)(2t^2+t+2)\cos(30°+\theta)\right] \tag{2.7.43}$$

$$\theta_0 = arctg\frac{4t^3-4t^2+t-3}{\sqrt{3}(4t^3+3t+1)} \tag{2.7.44}$$

其中 t 为三轴伸长 $(\theta=30°)$ 与三轴压缩 $(\theta=-30°)$ 试验得到的强度比之比，即

$$t = M_t/M_c \tag{2.7.45}$$

M_t：三轴伸长试验中破坏应力比　$M_t = q_t/p$。

清华弹塑性模型可反映土的剪胀性，也可用于三维的应力状态。适用于砂土和粘土。剑桥模型是其对于正常固结土的特殊形式。已用于土石坝分析，地基计算，桩基础计算等一些工程问题中。

2.8　土的结构性及土的损伤模型

2.8.1　概述

土是由分散的颗粒组成的。土的强度、渗透性和应力应变关系特性是由这些颗粒的矿物、大小、形状，颗粒间的排列和粒间的作用力决定的。所谓土的组构（fabric）通常是指颗粒、粒组和孔隙空间的几何排列方式；而土的结构（structure）则更倾向于用来表示土的组成成分、空间排列和粒间作用力的综合特性。

所谓土的结构性就是指这种结构而造成的力学特性。结构性的强弱表示土的结构对于其力学性质（强度、渗透及变形性质）影响的强烈程度。一般讲原状土比重塑土表现出更强的结构性，这是由于它在漫长的沉积过程及随后的各种地质作用过程中，使土粒间排列和各种作用力表现特有的形式和作用。以往土力学研究中的理论和模型基本上是在对重塑土进行室内试验的基础上建立起来的。而自然界存在和工程实践中遇到的大量是原状土。土的结构性对土力学性质的影响有很大意义，土的损伤模型就是在此基础上建立起来的。

2.8.2　粗粒土结构

粗粒土一般是单粒的结构。由于粗粒土中颗粒的大小可以相差很大，小的颗粒填补了大颗粒所形成的孔隙，级配良好的粗粒土比级配均匀的粗粒土密度更高。另一方面，形状不规则的颗粒可以使密度降低、孔隙更大。即使是由均匀圆球组成的“土”，它们在空间的排列方式不同，也会造成不同的松密状态和不同力学性质。图 2-8-1 表示了几种不同的颗粒空间排列方式。不同排列方式会使粗粒土的密度、渗透性、强度、压缩性、各向异性方面表现很大不同。

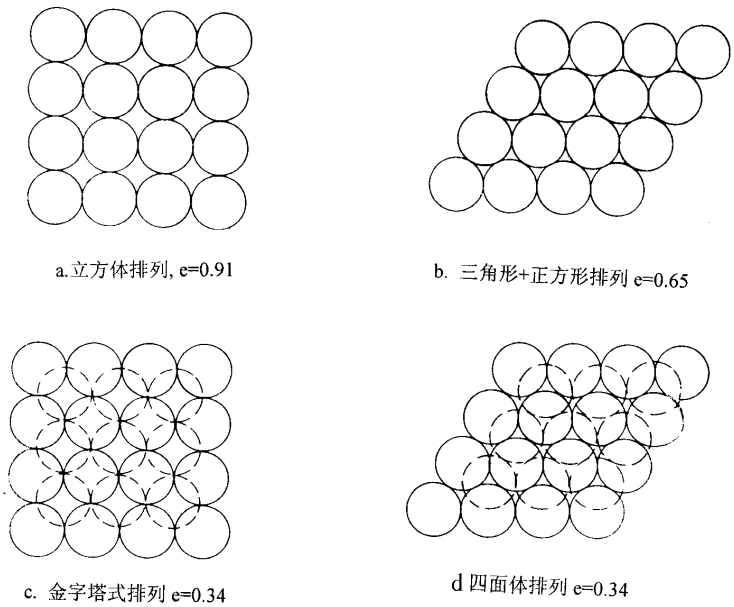
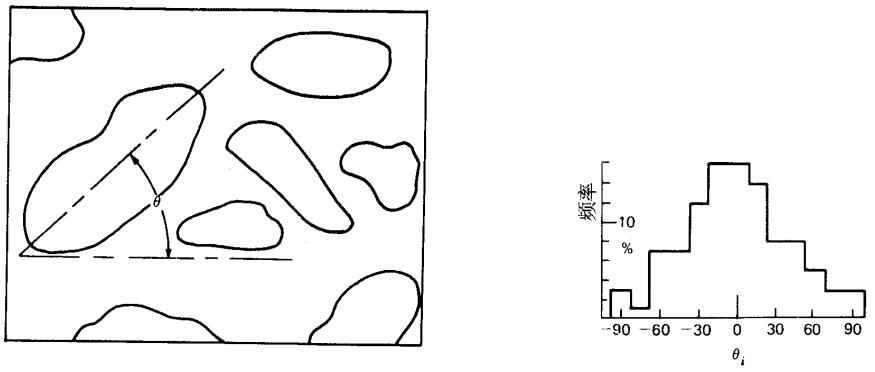


图 2-8-1 均匀圆球在空间的几种排列方式

尽管除了云母等矿物之外，大多数非粘土矿物的颗粒都呈粒状。但它们又不是各方向尺度都相等的，多少呈椭球形、扁平形，甚至针、片状。粗颗粒的长宽比 L/W 的频率分布是表示其颗粒形状的一个重要指标。以蒙特雷（Monterey）0 号砂为例，这是一种分选很好的河砂，主要由石英和少

量的长石组成。即使如此，它仍有 50%以上的颗粒其长宽比大于 1.39。这对于大多数砂土和粉土是有代表性的。在重力场中，土颗粒，特别是粗粒土，在沉积的过程中的定向作用是很突出的。可以用颗粒的长轴与空间某一方向（如水平方向）的夹角表示这种空间定向作用。如图 2-8-2（a）表示颗粒的长轴与水平方向夹角为θ，图 2-8-2（b）表示的是一种平均长宽比 L/W 为 1.64 的均匀细砂的θ角分布频率柱状图。这是轻轻敲击圆筒形刚性制样模而成的试样。这个图反映了较强烈的颗粒定向作用，亦即颗粒的长轴更倾向于水平方向排列。用撒砂制成的试样会表现更强的空间定向。当粗粒土中含有一定比例的粘土或其胶结物质时，粗粒土还会被粘结而形成不同的集合形式。



(a)　在垂直面上颗粒的方向特性　　(b) 在垂直面上θ的分布频率

图 2-8-2 粗粒土颗粒的空间定向作用

2.8.3　粘土颗粒与水的相互作用——双电层

1.　水的分子结构

水分子由两个氢原子和一个氧原子组成，总电荷是平衡的。但它们在空间是 V 形排列，H-O-H 夹角是 105°，如图 2-8-3 所示。这种正电荷（H）集中于一角，负电荷集中于另一角的情况使水分子形成偶极子。它与其他水分子、水中离子和土的颗粒表面间形成相互作用力，这种作用力在粘土表面表现更突出。

2.　粘土矿物成分及表面电荷

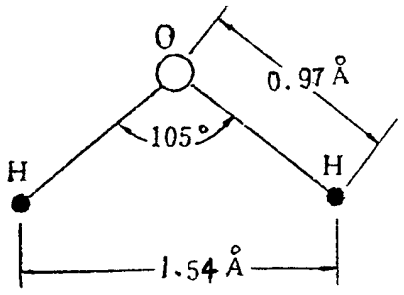


图 2-8-3　水的分子结构

粘土主要由粘粒（粒径小于 5um）组成，它的主要成分是粘土矿物，也称次生矿物，即高岭土、伊利土和蒙脱土。

高岭石产于酸性环境中，是花岗石风化后的产物，通常来源于长石的水解，其分子式为 $Al_4[Si_4O_{10}](OH)_8$。蒙脱石常由火山灰、玄武岩等转变而来，一般在碱性、排水不良的环境里风化形成，其分子式为 $Al_4[Si_8O_{20}]\cdot(OH)_4\cdot nH_2O$。伊利石为云母类粘土矿物，形成的条件需一定的钾离

子，分子式为$(K, H_2O)_2 Si_8 (Al,Mg,Fe)_{4,6} \cdot O_{20} \cdot (OH)_4$。三种粘土矿物的比表面积相差很大，高岭石为 7~30m2/g，蒙脱石为 810 m2/g，伊利石介于其中间，67~100 m2/g。

粘土矿物的晶体结构大多由两种基本单元构成，即由二氧化硅薄片组成的四面体和氢氧化铝薄片组成的八面体单元，并成层排列，参见图 2-8-4 和 2-8-5。每个四面体中，四个氧原子之间夹一个硅原子，而八面体单元的上部和下部各有 3 个氢氧根，中心为铝原子。

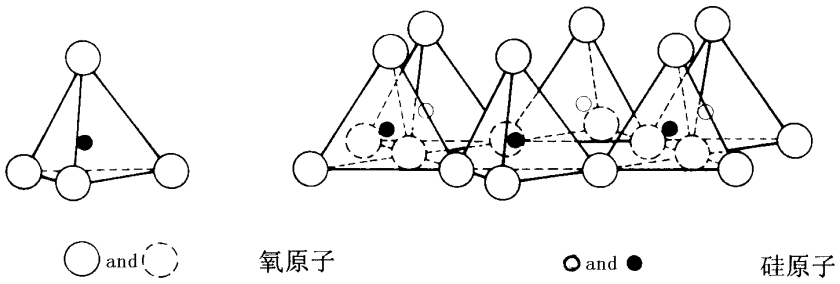


图 2-8-4　硅氧四面体图

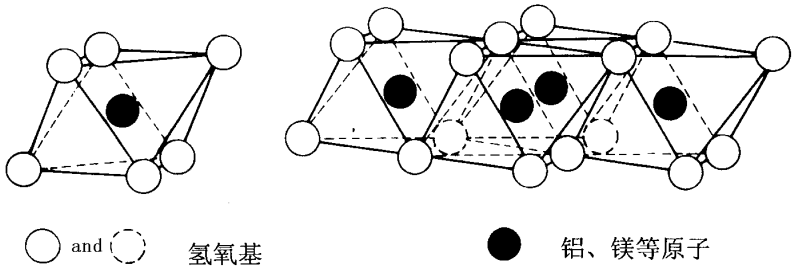


图 2-8-5　铝氢氧八面体

电泳试验表明，粘土矿物颗粒表面带负电荷。其原因可以解释为：

1) 正常晶体中，总的正负电荷是平衡的，但在薄片边缘或表面，结构连续性遭受破坏，形成不平衡电荷，这些被破坏了的键常使粘土颗粒带净负电荷。但在破坏了的边缘局部，也发现了正电荷集中现象。
2) 四面体中心的硅或八面体中心的铝被别的较低价的阳离子置换，例如，镁或铁的置换，结果是晶体表面出现不平衡的负电荷。这种置换作用称为同晶转换。
3) 当粘土存在于某种碱性溶液中时，土粒表面的氢氧基产生氢的离解，从而带负电。

3. 粘土颗粒与水的相互作用力及双电层

粘土颗粒细小，并且呈片状，其比表面积很大，它与土中水充分接触。由于粘土颗粒与水分子均存在不平衡的电荷发布，加之土中水一般存在大量的离子，这就使粘土颗粒表面与水之间作用力影响十分显著，往往与重力处于相同量级。这些相互作用力可能是水土间的静电引力；土颗粒表面通过阳离子与极化的水分子间的引力；由于离子浓度不同产生的渗析引力；由于极化分子间产生的范德华力（Van der waals forces）等。见图 2-8-6~图 2-8-8 。

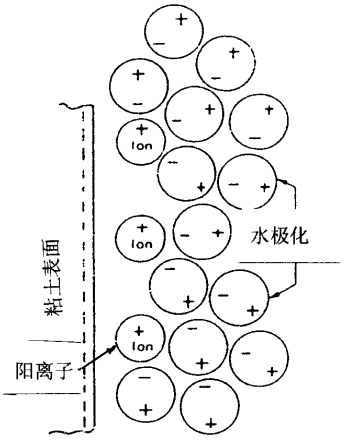


图 2-8-6　阳离子水化作用

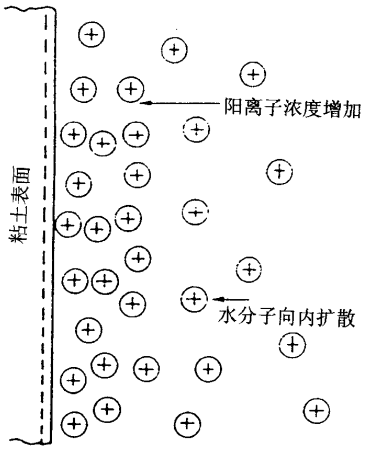


图 2-8-7　渗透吸引

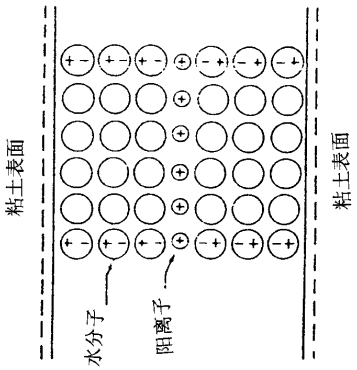


图 2-8-8　偶极子吸引

总之，带负电的粘土片状颗粒在其周围形成电场，周围水分子偶极子、阳离子（如 Na^{+}，Ca^{++} 等）因静电引力而被吸附在粘土颗粒表面，离表面愈近，吸附力愈大，吸附愈紧。带有负电荷的粘土片状颗粒和周围的水分子、阳离子云等组成的扩散层被称为扩散双电层，简称双电层。扩散双电层之外的孔隙水视为自由水。而在双电层之内的水称为结合水或薄膜水，它具有许多与一般水不同的性质。

2.8.4　粘土颗粒间作用力及粘土的结构

粘土颗粒间存在着复杂的相互作用力，它们有引力，也有斥力。当总的引力大于斥力时，就表现为净引力，反之表现出净斥力。这将形成粘土的不同的结构。粘土颗粒间的作用力主要有：

1.　静电力

如上所述，粘土颗粒带负电荷。它们主要分布在其平面部分，而两端则带正电荷。根据库仑定律，同性电荷相排斥，异性电荷相吸引，作用力大小与电荷距离的平方成反比。也称为库仑力。

2.　分子力，也称范德华力（Van der waals forces）

物质的极性分子与相邻的另一极性分子间通过偶极吸引；极性分子也可诱发相邻的非极性分子，通过偶极吸引；在非极性分子中，分子中转动的电子可产生瞬时极性而吸引。这些作用力称为分子键，分子间的键力与距离 6 次方成反比。在两个粘土颗粒中的吸引力为它们各个分子吸力之和。使它们之间相互吸引，并且从距离的 4 次方左右的关系衰减。因而只有颗粒很小时（$<1\mu m,10^{6}m$）时，并且相距很近时它才起明显作用。

3.　通过离子起作用的静电力

当两个相邻的粘土颗粒靠近时，双电层重叠，即形成公共结合水膜时，阳离子与粘土粒表面负电荷共同吸引。这种吸引力在两个双电层相距 2.5nm（$2.5\times10^{-9}m$）时，这个静电力明显起作用，可达到 7kPa。

4.　颗粒间的结晶和胶结

这是一种化学键，它将原子、离子按一定规律通过化学键结合起来。其影响范围很小，但键能很高，可形成粘土很高粘聚力。

5.　渗透斥力

溶有离子的水与纯净水之间存在着渗透压力差。两粘土颗粒之间的水离子浓度高，产生的压力差使两个土粒互相排斥。

在粘土沉积过程中，悬液中粘土颗粒一面沉降，一面作不规则布朗运动，它们可能会因面－面相互吸引而形成粒组；还可以进一步由单粒和粒组间引力而形成絮凝。在高含盐量的海水中沉积，由于引力大于斥力，容易形成絮凝结构。而在淡水中沉积则更容易形成分散结构。絮凝结构可能是由于在盐水中粘土颗粒间表现为净引力；也可能是在淡水中带正电的粘土颗粒的边角与带负电的平面间的静电吸引而形成板房式片架结构。粘土颗粒的结构可因环境变化而变化。比如受到干扰片架结构可能破坏。当高价阳离子代换低价阳离子时，会由于离子－静电引力而形成絮凝结构，反之用低价阳离子代换，使双电层变厚，使引力减少，而使粘土分散。图 2-8-9 表示了几种不同粘土的结构形式。

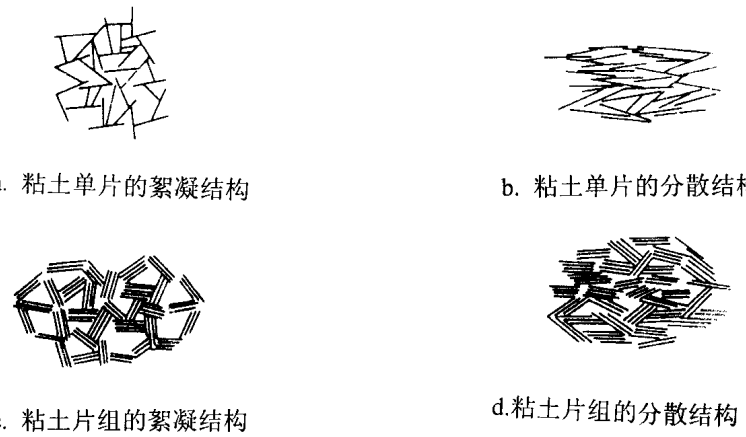


图 2-8-9　粘土的几种结构形式

实际上粘土的结构形式可能更复杂。可能存在多级组构，亦即先由颗粒组成粒组、团粒，再由团粒组成宏观上类似于粗粒土性质的土。另外沉积、固结和历史变故可形成许多特殊土，它们有不同的结构，如湿陷性黄土、膨胀土、红土、盐渍土、分散性土等。它们表现出特殊的物理力学性质。

2.8.5　土的结构性

土中颗粒的组成，土颗粒的排列与组合，颗粒间的作用力构成了土的不同的结构。它们对土的强度、渗透性和应力——应变关系特性有极大影响。土的结构对土力学性质影响的强烈程度，可称为土的结构性的强弱。在粘性土中，敏感性指标是反映粘土结构性的重要指标。由于在实验室和野外土都不可避免地处于地球的重力场中，不可能达到完全随机的排列及颗粒间相互完全独立无联系，因而不管是原状土还是室内重塑土总是表现出一定的结构性。室内制样的方法、程序和环境，在天然情况下土的生成、搬运、沉积、固结及在千万年地质历史中所受到的各种变故都会形成其不同的或特有的结构性。由于原状土是长期地质历史的产物，因而比室内重塑土具有更强的结构性。在同样的密度及含水量情况下，原状土与重塑土性质有很大差别。图 2-8-10 为在侧限压缩试验中，正常固结的原状土与重塑土的试验结果，可见在在一定的压力范围内二者有明显的差别，超过一定的压力以后，两曲线趋于平行。在图 2-8-11 中表示了在比最优含水量更湿的情况下，用静压法和揉挤法制成压实土样的无侧限压缩试验结果。由于静压法制样形成更强的凝絮结构，而揉挤则破坏了颗粒间的联系及结构性，二者的应力应变及强度相差很大。

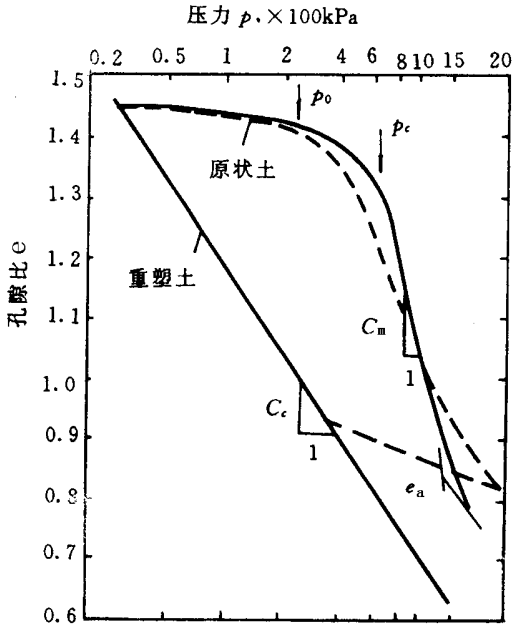
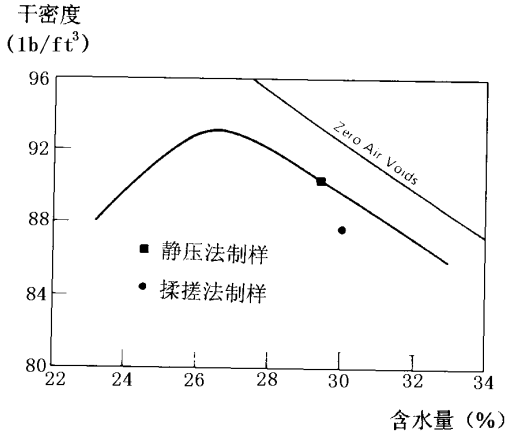
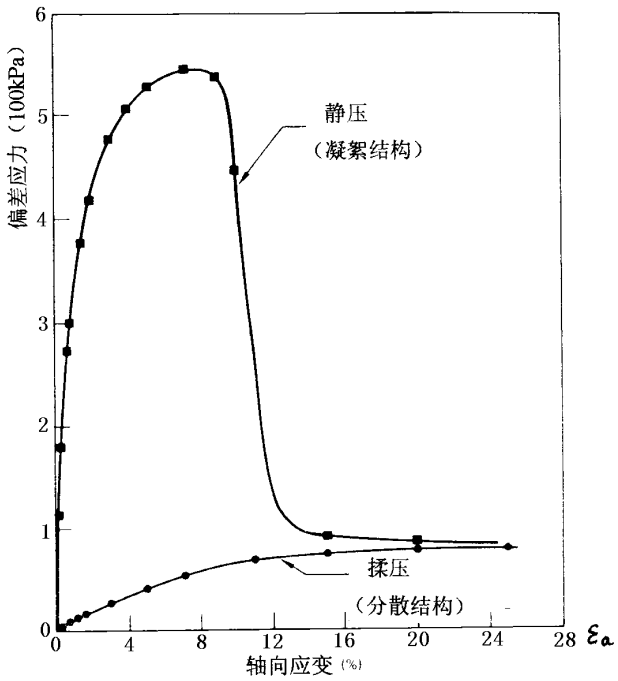


图 2-8-10 结构性土的压缩曲线



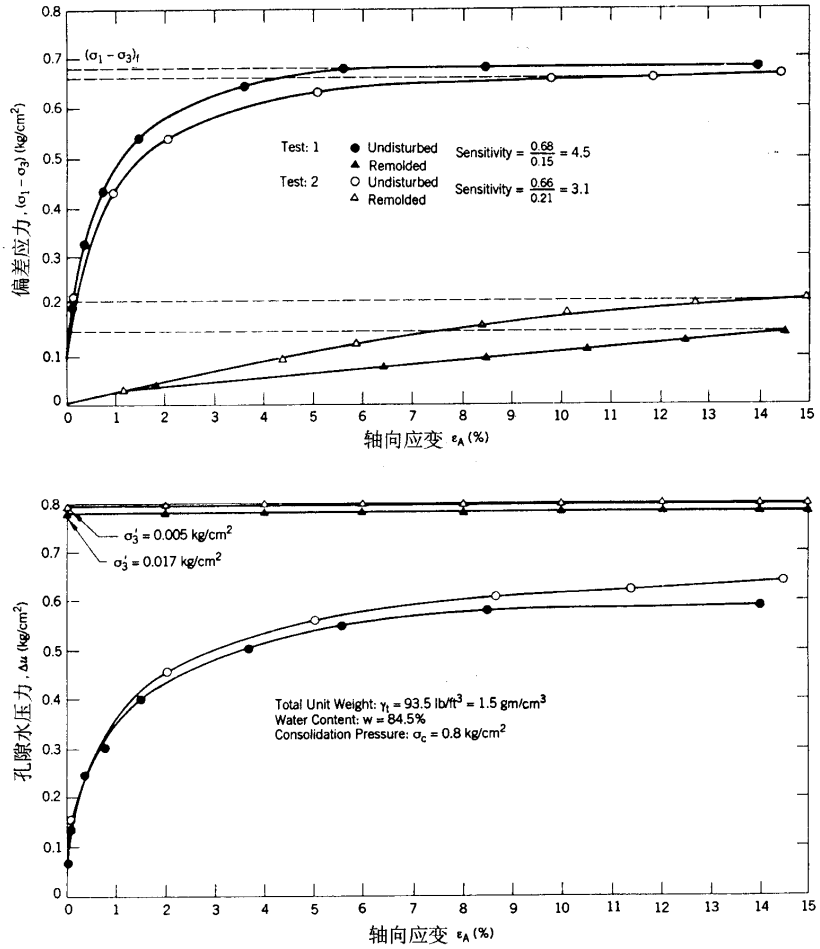
a.　两种制样方法



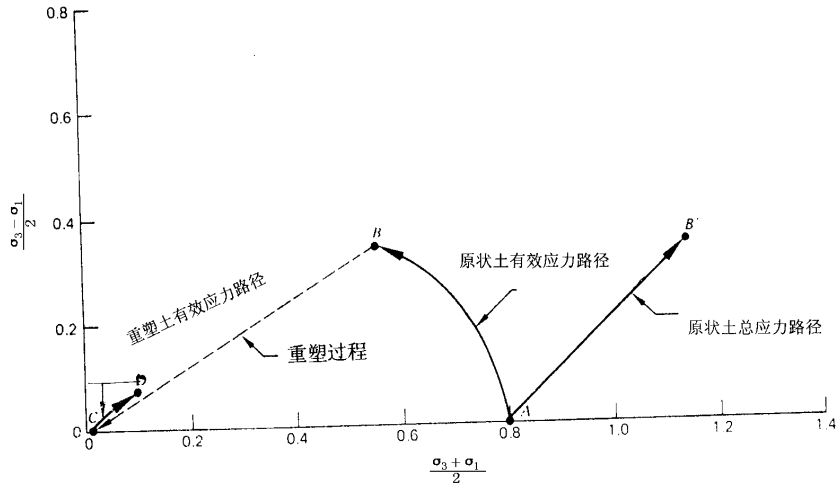
b. 无侧限压缩试验

图 2-8-11 制样方法对压实粘土的无侧限压缩试验强度的影响

图 2-8-12 表示的是一种旧金山海滨淤泥土的原状土与扰动土的不排水试验结果。首先将原状土样从地层中取出放在三轴压力室中，施加围压 $p=80kPa$（不固结）以平衡原位应力。然后进行不排水试验直到破坏。然后拆开三轴压力室，取出试样，在橡皮膜中就地进行重塑，再重装压力室，仍然施加$80kPa$围压（不固结），再加轴向荷载，得到的应力应变曲线和孔压关系见图 2-8-12（a），这种试验分别进行了两组。可见两种土的应力应变关系相差极大。对两组试样，由不排水强度计算的敏感度分别为 4.5 和 3.1。这种差别主要是由于二者的有效应力不同。由于扰动土的结构破坏，使试样内超静孔压大大增加，有效应力降低。二者的有效应力路径见图 2-8-12（b）。



a. 应力应变关系曲线



b. 总应力路径和有效应力路径

图 2-8-12 重塑与原状土的不排水试验

以往在土力学中研究建立的理论及模型基本是建立在对重塑土试验的基础上，因而对于土的结构性的考虑是不够的。在自然界和工程实践中，大量存在和涉及的是原状土，因而考虑土的结构性

对土的力学性质的影响是一个重要的课题。所谓的特殊土或区域性土往往具有更强烈或特殊的结构性。土的结构性对土的应力应变强度的影响，以及土的结构性破坏后应力应变强度性质的变化是土力学理论和实践中一个重要研究领域。

2.8.6　损伤理论及其在岩土材料中应用

连续损伤力学是由恰克诺夫（Kachanov）1958 年在研究一维蠕变断裂问题时提出的，他引入了连续性因子和有效应力的概念来表示材料损伤后的应力应变关系。以后损伤力学（damage mechanics）被推广应用来模拟金属的疲劳，蠕变及延展塑性变形的损伤，也被用于岩石和砼等脆性材料。近年来也被广泛应用于土力学中。

对于连续性材料，单轴拉伸试样受到拉力 P 作用，其表观（总）截面积为 A，由于产生损伤（断裂）截面上实际受力面积为 A_{ef}，因断裂而产生的孔隙面积为 A_D，则

$$A = A_{ef} + A_D \tag{2.8.1}$$

两侧除以总面积 A，得

$$1 = \frac{A_D}{A} + \frac{A_{ef}}{A} = D + \psi \tag{2.8.2}$$

其中 $D = \dfrac{A_D}{A}$ 称为损伤因子，或损伤变量；

$\psi = \dfrac{A_{ef}}{A}$ 为连续性因子。

截面上的表观应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} \tag{2.8.3}$$

在截面孔隙（断裂）部分应力为零。

$$\sigma_D = 0 \tag{2.8.4}$$

在截面上连续部分上实际应力为 σ_{ef}

则
$$P = \sigma A = \sigma_D A_D + \sigma_{ef} A_{ef} = \sigma_{ef} A_{ef} \tag{2.8.5}$$

所以
$$\sigma_{ef} = \frac{p}{A_{ef}} \tag{2.8.6}$$

其中 σ_{ef} 称为有效应力，可见

$$\sigma_{ef} = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1-D} \tag{2.8.7}$$

或者
$$\sigma = (1-D)\sigma_{ef} \tag{2.8.8}$$

由于损伤造成有效断面积减小，有效应力增加，最简单的损伤模型是线弹性损伤模型，如果假设损伤对应变的影响只是由于有效断面积减少和有效应力的增加，只需将无损伤或损伤前材料的本构关系应用于有效应力部分，就可得到损伤材料的表观的本构关系。以一维损伤为例，表现的应变为

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_{ef}}{E_0} = \frac{\sigma}{E_0(1-D)} = \frac{\sigma}{E_0\psi} \tag{2.8.9}$$

E 为表观的弹性模量，E_0 为材料的实际弹性模量。

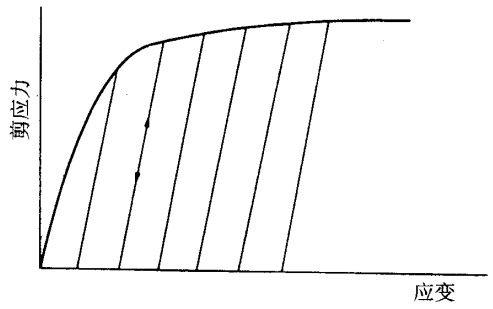
如能确定 $D_{(\sigma,\varepsilon)}$ 或 $\psi_{(\sigma,\varepsilon)}$ 的变化规律，上式就表示一种最简单的损伤本构模型。可见建立损伤模型需做以下三项工作：

（1） 选择或确定一个或一组合适的损伤变量 D。

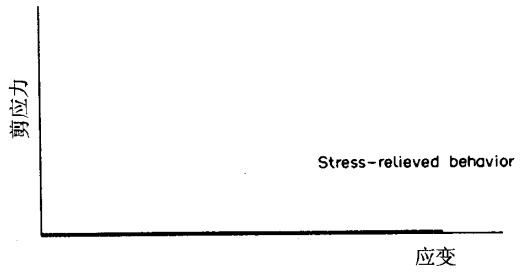
（2） 确定有效应力与损伤变量间关系，即考虑损伤变量的本构关系。

（3） 确定损伤变量的函数表达式 D=D（σ,ε）。亦即随应力应变增加材料的损伤发展规律。损伤变量是有明确物理意义的物理量。D=0 时表示材料无损伤或初始状态；D=1.0 表示材料达到完全损伤状态。根据材料受力变形和强度的微观机理定义损伤变量，是建立合理有效的损伤模型的关键。

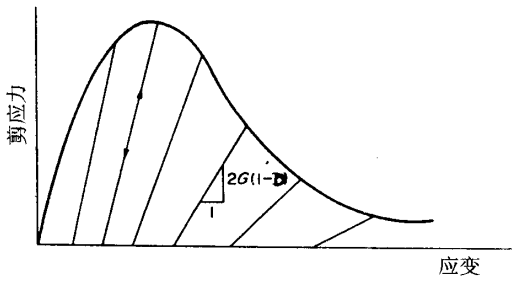
除了上述的损伤模型之外，还有弹塑性损伤，粘弹塑性损伤等本构模型。图 2-8-13 就是一种弹塑性材料的损伤变形的分解图。



a. 初始材料的弹塑性应力应变关系



b. 完全损伤材料的应力应变关系



c. 损伤材料的平均应力应变关系

图 2-8-13 弹塑性材料损伤变形特性分析图

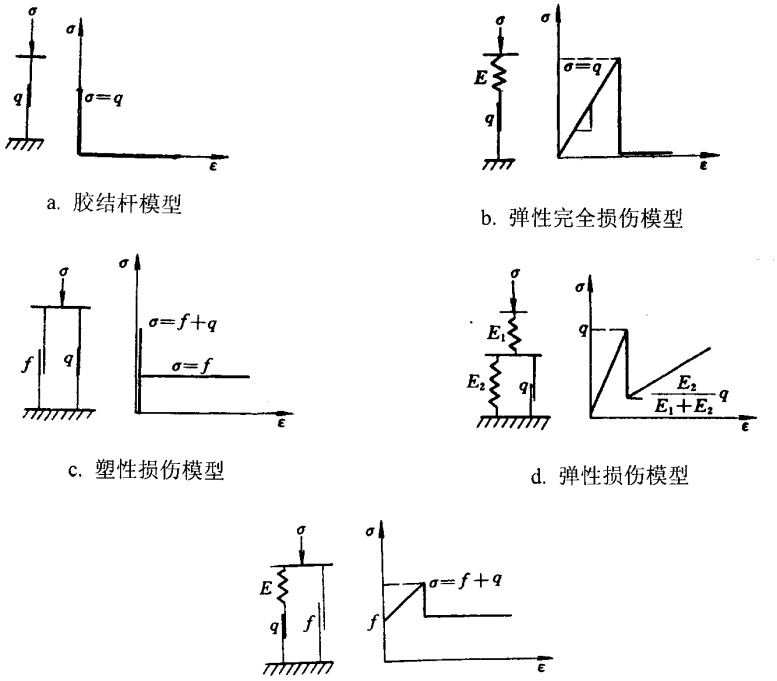
在图 2-8-13 中，材料有两部分。一部分保持其原本的应力应变持性，即弹塑性应力应变关系，另一部分为损伤部分。这是零应力下屈服的刚塑性应力应变关系。损伤部分的体积为 V_D，令 $D=V_D/V$，D=0 表示材料无损伤，应力应变关系服从图 2-8-13（a）所示曲线；D=1 则表示完全损伤变成以零应力为屈服应力的刚塑性应力应变关系（图 2-8-13(b)）。当 D 在 0—1 之间变化时，部分原状材料，部分损伤材料的平均效应反映在图 2-8-13（c）中。随着损伤部分的增加最后残余强度趋于零。

为了反映材料损伤，沈珠江提出了胶结杆物理模型以反映材料的脆性，它的屈服应力为 $\sigma_f = q$，但一旦破裂则屈服应力变为零，亦即：

$$\begin{aligned} &\sigma \le q; \qquad &\varepsilon = 0 \\ &\sigma = 0; \qquad &\varepsilon > 0 \end{aligned} \tag{2.8.10}$$

胶结杆与其他物理模型组合而成为各种多元模型，形成各种不同应力应变关系，见图 2-8-14。

当然还能以更多组合以描述材料的弹、塑、粘性及脆性的应力应变关系。



a. 胶结杆模型　　b. 弹性完全损伤模型

c. 塑性损伤模型　　d. 弹性损伤模型

e. 弹塑性损伤模型

图 2-8-14 由胶结杆组成的各种损伤模型

经典的损伤力学是针对金属材料发展起来的，当用于土时就不完全适用。由于土主要是在压应力状态下工作，土体在损伤之后仍可承担压应力，在一定应力条件下仍具有抗剪强度。损伤部分不是不能承担任何荷载了。如上节所述，土的结构性包括由于土体组成，排列变化和粒间胶结等因素。土的塑性变形主要是源于土粒间相互位置的移动和土粒的破碎，因而土的塑性理论模型主要是土颗粒排列关系的描述，以塑性应变为函数的硬化参数实际上是土中颗粒相互位置及排列的积累的一个尺度。从这个意义上讲，土的塑性理论模型也能反映土的结构性及其变化。但是当颗粒间存在以粒间作用力为主的相互联系时，损伤可反映这种作用的破坏过程，这种相互作用的破坏可能由于拉应力、剪应力，也可能在各向等压应力状态下发生。与塑性应变一样，损伤及其引起的应变也是不可恢复的，可以在不可逆热力学理论框架内建立损伤本构模型。

在建立土的损伤模型时，最常用的方法是将原状土在初始状态作为一种初始无损伤材料；而将完全破坏（重塑）的土体作为损伤后的材料。在加载（或其他扰动）变形过程中土体可认为是原状土与损伤土两种材料的复合体。把损伤土部分所占的比例 w 称为损伤比。则实际土体力学特性可表示为二者的加权平均值。

$$S = (1-w)S_i + wS_d \tag{2.8.11}$$

其中 S 为土的某一种力学指标，S_i 与 S_d 分别为原状土及重塑土的同一力学指标。w 为损伤比，亦即损伤土所占的比例，它可以是面积比、体积比、重量比或者其他物理量之比。以单向压缩为例

说明式（2.8.11）。在图 2-8-15 中，土试样总截面积为 A，损伤后的重塑面积为 A_d ，原状土面积为 A_i，总荷载为 F。未损伤的原状土与损伤后重塑土承担荷载分别为：

$$F_i = \sigma_i A_i \tag{2.8.12}$$

$$F_d = \sigma_d A_d \tag{2.8.13}$$

损伤变量 w 定义为：

$$w = \frac{A_d}{A} \tag{2.8.14}$$

则表观应力 σ 为：

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{F}{A} = \frac{F_i}{A} + \frac{F_d}{A} = \frac{F_i}{A_i}\cdot\frac{A_i}{A} + \frac{F_d}{A_d}\cdot\frac{A_d}{A} \\ &= (1-w)\sigma_i + w\sigma_d\end{aligned} \tag{2.8.15}$$

上式如果推广为张量形式：

$$\{\sigma\} = (1-w)\{\sigma_i\} + w\{\sigma_d\} \tag{2.8.16-1}$$

或者

$$\sigma_{ij} = (1-w)\sigma_{ij}^i + w\sigma_{ij}^d \tag{2.8.16-2}$$

其增量形式为：

$$\{\Delta\sigma\} = (1-w)\{\Delta\sigma_i\} + w\{\Delta\sigma_d\} - [\{\sigma_i\} - \{\sigma_d\}]\Delta w \tag{2.8.17}$$

如果表示为增量应力应变关系：

$$\{\Delta\sigma\} = (1-w)[D_i]\{\Delta\varepsilon\} + w[D_d]\{\Delta\varepsilon\} - [\{\sigma_i\} - \{\sigma_d\}]\left\{\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right\}^T\{\Delta\varepsilon\} \tag{2.8.18}$$

其中 $[D_i]$ 与 $[D_d]$ 分别为原状土与重塑土的切线刚度矩阵，设 w 是应变的函数，式（2.8.18）也可以写成：

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_d\{\Delta\varepsilon\} \tag{2.8.19}$$

其中

$$[D]_d = (1-w)[D_i] + w[D_d] - [\{\sigma_i\} - \{\sigma_d\}]\left\{\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right\}^T \tag{2.8.20}$$

$[D]_d$ 可以称为切线的损伤模量矩阵。

与其他材料相比，岩土材料的损伤有更广的意义和动因。钱德拉·德赛（Chandra S.Desai）提

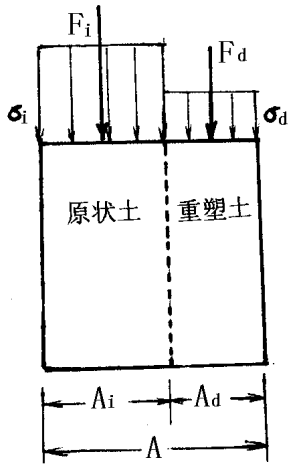


图 2-8-15 单向压缩土体的损伤的示意图

出扰动状态概念（DSC　Disturbed state concept）即认为力学、热、环境等因素均可引起材料的微

结构的扰动，原状材料由于扰动而发生微结构的调整，最后达到完全被调整状态。在完全被调整状态不同材料表现出不同的性状：

（a） 没有了强度，如某些损伤模型所假设；

（b） 无抗剪强度，但可承受静水压力，如同受限制的液体；

（c） 达到临界状态，在一定 p，q 作用下，表现一定抗剪强度，发生剪应变，但不再发生体应变，如一般岩土材料。其平均应力应变可表示为：

$$\sigma_{ij}{}^{a} = (1-D)\sigma_{ij}^{i} + D\sigma_{ij}^{c} \tag{2.8.21}$$

即

$$d\sigma_{ij}{}^{a} = d\sigma_{ij}^{i} + dD\sigma_{ij}^{r} + D\cdot d\sigma_{ij}^{r} \tag{2.8.22}$$

其中，上标 a: 表示平均，表观的意思（average）

i: 表示初始，（intact）

c: 临界状态（critical State）

$$\sigma_{ij}{}^{r} = \sigma_{ij}^{c} - \sigma_{ij}^{i}$$

D: 是一个扰动状态因素，相当于损伤因子。

德赛的扰动因子 D（disturbance function）所包含的因素更广泛，一般可表示为：

D=D（ζ， ρ_0， p_0，R，θ，t）

其中：ζ 应力应变历史参数，可用塑性应变或塑性功的轨迹表示：

ρ_0 初始密度

p_0 初始压力

R 颗粒间接触面性质

θ 温度

t 时间。

应当看到引起损伤（或扰动）的因素可以是多方面的，不同土有其主要影响因素。例如对于一般原状土，主要是由于颗粒间移动造成粒间联结与原组织的破坏，损伤表现为塑性应变的函数。而对于冻土，则温度、压力均可引起结冻土的融解，宏观上表现出损伤性质。例如围压大到一定水平，冻土的强度包线随围压增加而下降。对于湿陷性黄土则损伤主要是由土中含水量增加引起的。另外反复加载引起的疲劳、长期加载下的蠕变、腐蚀、老化，其损伤主要是时间的函数。广义的损伤可以表现为多种动因及来源于土的多种微观结构的变化。因而广义的土的损伤模型可能是反映土的结构性及应力应变特点的有力工具。

2.8.7　沈珠江的结构性的粘土的弹塑性损伤模型

沈珠江对于结构性粘土提出了一个弹塑性损伤模型。他认为没受扰动的土为原状土；结构性完全丧失的土为完全损伤土或重塑土。在侧限压缩试验中，重塑土与结构性土的应力应变关系如图 2-8-10 所示。原状粘性土的受力损伤变形可以看作是原状土向重塑土的演变过程。他认为原状粘土变形性状近似为弹性，只有在达到初始屈服面时，材料才会发生塑性变形。原状粘土也表现出高得多的渗透系数和固结系数；有明显的应变软化和压缩性，孔压系数 A 可能大于 1.0。而完全损伤土或重塑土为弹塑性，具有一组单屈服面 f_d；他还设损伤比 w 为土的应变的函数。

1. 完全损伤土的应力应变关系

这样在式(2.8.22)中，完全损伤土的模量矩阵可表示：

$$[D_d]=[D_d]_{ep}=[D_d]_{e}-\frac{[D_d]_e\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}[D_d]_e}{A_d+\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^{T}[D_d]\left\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}} \tag{2.8.23}$$

其中$[D_d]_{ep}$与$[D_d]_{e}$分别为损伤土的弹塑性与弹性矩阵。A_d 为塑性硬化模量。

对于损伤土的弹性部分，可以取泊松比 ν_d ＝常数，杨氏模量可以通过侧限压缩试验的回弹曲线确定：

$$E_d=\frac{(1+\nu_d)(1-2\nu_d)}{1-\nu_d}\frac{1+e_0}{0.434}\frac{\sigma_1}{c_e} \tag{2.8.24}$$

c_e 为侧限压缩试验中 $e\text{-}\lg\sigma_1$ 曲线的回弹段的斜率。

损伤土的塑性变形可用塑性理论确定。损伤土的屈服函数可表示为：

$$f_d=\frac{p}{1-(\eta/\eta_m)^n} \tag{2.8.25}$$

其中

$$\eta=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2})^2+(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3})^2+(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3+\sigma_1})^2\right]^{\frac{1}{2}} \tag{2.8.26}$$

n 和 η_m 为材料参数，$\eta_m=\sqrt[n]{1+n}\,\eta_d$，$\eta_d$ 为土开始发生剪胀时的 η 值，对于无明显剪胀的土 $\eta_d=\eta_f$。η_f 为土破坏时的 η 值。亦即式（2.8.26）中：$\eta=\eta_f$ 时，

$$\eta_f=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin^2\varphi_{13}+\sin^2\varphi_{12}+\sin^2\varphi_{23}\right]^{\frac{1}{2}}=\sin\varphi \tag{2.8.27}$$

其中φ_{12}，φ_{23}，φ_{13} 的意义见图 2-8-16。

当参数 n=1.2 时，式（2.8.25）表示的屈胀轨迹如图 2-8-17 所示。

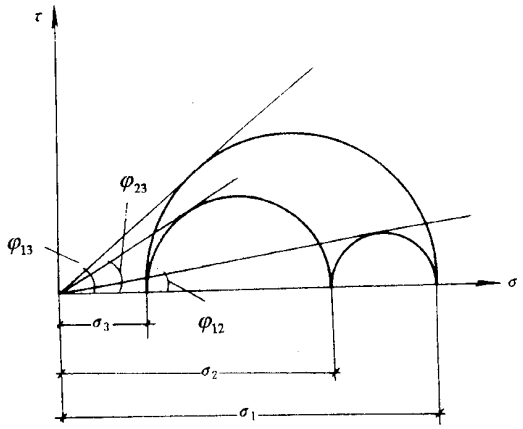


图 2-8-16　φ_{12}，φ_{23}，φ_{13} 的意义

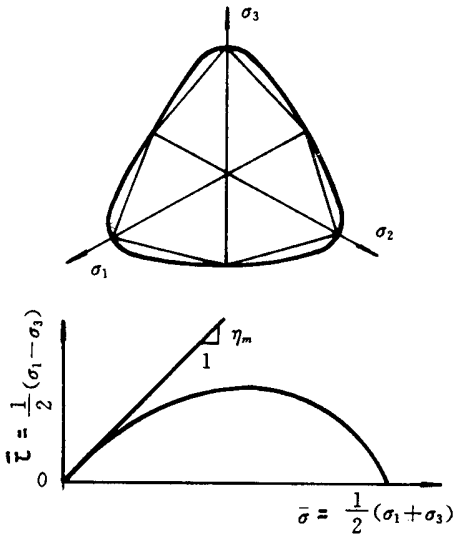


图 2-8-17　损伤土的屈服轨迹

对重塑土（损伤土）进行侧限压缩试验，c_c 和 c_e 分别为其 $e \sim \log\sigma_1$ 直线的初始压缩和回弹指数，这样

$$c_c = \frac{\sigma_1}{0.434}\frac{\Delta e}{\Delta\sigma_1} \tag{2.8.28}$$

$$c_e = \frac{\sigma_1}{0.434}\frac{\Delta e^e}{\Delta\sigma_1} \tag{2.8.29}$$

$$\Delta\varepsilon_1 = \frac{\Delta e}{1+e_0} \tag{2.8.30}$$

$$\eta_0 = \frac{1-k_0}{1+k_0} \tag{2.8.31}$$

$$p = \frac{1}{3}(1+2k_0)\sigma_1 \tag{2.8.32}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial\sigma_1} = \frac{2k_0}{(1+k_0)^2\sigma_1} \tag{2.8.33}$$

则

$$\frac{\partial f_d}{\partial\sigma_1} = \frac{A}{1-(\eta_0/\eta_m)^n} \tag{2.8.34}$$

其中 k_0 为静止土压力系数，$k_0 \approx 1-Sin\phi$，

$$A = \frac{1}{3} + \frac{1}{\eta_0}\frac{n(\eta_0/\eta_m)^n}{1-(\eta_0/\eta_m)^n}\frac{2k_0(1+2k_0)}{3(1+k_0)^2} \tag{2.8.35}$$

由于

$$d\varepsilon_1^p = d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^e = 0.434\frac{c_c - c_e}{1+e_0}\frac{d\sigma_1}{\sigma_1} \tag{2.8.36}$$

$$df_d = \frac{\frac{1}{3}(1+2k_0)d\sigma_1}{1-(\eta_0/\eta_m)^n} \tag{2.8.37}$$

则

$$d\varepsilon_1^p = \frac{1}{A_d}df_d\frac{\partial f_d}{\partial\sigma_1} = \frac{1}{A_d}\frac{\frac{1}{3}(1+2k_0)d\sigma_1}{1-(\eta_0/\eta_m)^n}\frac{A}{1-(\eta_0/\eta_m)^n} = \frac{1}{A_d}\frac{A(1+2k_0)d\sigma_1}{3\left[1-(\eta_0/\eta_m)^n\right]^2}$$

$$\therefore\quad \frac{1}{A_d} = (0.434\frac{c_c - c_e}{1+e_0}\frac{3\left[1+(\eta_0/\eta_m)^n\right]^2}{A(1+2k_0)\sigma_1}) \tag{2.8.38}$$

可见，完全损伤土的变形特性由土的三个参数c_c、c_e和$\sin\varphi$完全确定。

2. 损伤的演化规律

在上述的损伤模型中损伤变量ω可以设为土的应变的函数：

$$\omega = 1 - e^{-(a\varepsilon_v + b\varepsilon_s)} \tag{2.8.39}$$

其中

$$\varepsilon_s = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2-\varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3-\varepsilon_1)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

其中参数 a、b 可以通过侧限压缩试验和无侧限压缩试验确定。在图 2-8-11 中，在侧限压缩试验中，原状土压缩曲线与重塑土压缩曲线大体上平行时转折处的孔隙比为e_a，设对应的损伤变量$\omega = 0.95$，则从式（2.8.39）可得

$$a = \frac{\ln 20}{(e_0 - e_a)/(1+e_0)} - b \tag{2.8.40}$$

再设无侧限压缩试验的应力应变曲线下降段后期转折点ε_b处的$\omega = 0.95$，见图 2-8-18。

设对应$\varepsilon_v = 0$，则得：

$$b = \frac{\ln 20}{1.5\varepsilon_b} \tag{2.8.41}$$

则式(2.8.39)的增量形式可写成

$$d\omega = (1-\omega)(ad\varepsilon_v + bd\varepsilon_s) \tag{2.8.42}$$

定义原状土压缩曲线的斜率为

$$c_t = \frac{1+e_0}{0.434}\frac{d\varepsilon_1}{d\sigma_1}$$

设c_m为c_t最大值：

$$c_t = (c_m - c_c)\sin\pi\omega + c_c \tag{2.8.43}$$

则有参数e_a、ε_b和c_m三个参数，加上上述参数c_c、c_e和$\sin\varphi$，以及v_d，以及原状土的模量E_i、v_i和初始屈服参数p_0、q_0，模型共有11个参数。

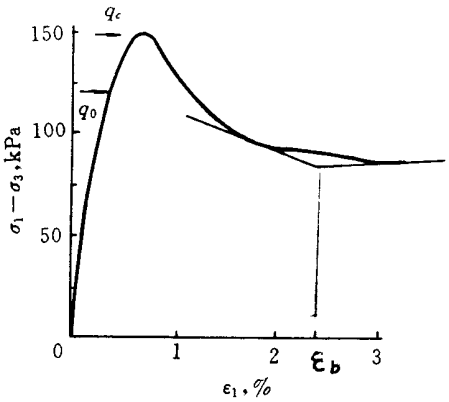


图 2-8-18　无侧限压缩试验曲线

2.9　土的本构关系模型的数学实质及广义位势理论

土的本构模型式样繁多，其假设和功能各不相同。它们可能以全量形式表示；也可能以增量形式表示。有的是应力应变间存在唯一性关系的弹性模型；也有的是反映土不可恢复变形的弹塑性模型。在塑性理论中有相适应（相关联）的流动准则；也有不相适应（非关联）的流动准则。表面的纷繁的形式使人很难看到它们的联系及假设条件。而实际上，它们都是具有不同物理和数学简化和假设的，在数学上有一定的相互联系。可以在共同的数学基础上建立土的统一的本构模型理论体系。

2.9.1　土的一般应力应变关系及广义位势理论。

从室内试验可得到在应力应变主空间中的一般的应力应变关系：

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= f_1(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\\ \sigma_2 &= f_2(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\\ \sigma_3 &= f_3(\varepsilon_1\ \varepsilon_2\ \varepsilon_3)\end{aligned} \tag{2.9.1-1}$$

或者

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= F_1(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)\\ \varepsilon_2 &= F_2(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)\\ \varepsilon_3 &= F_3(\sigma_1\ \sigma_2\ \sigma_3)\end{aligned} \tag{2.9.1-2}$$

用主应力表示其应力应变关系是建立在材料是各向同性的假设基础上的。上式也是在假定应力应变间存在全量唯一关系时得到的，亦即未考虑应力路径的影响。若考虑应力路径的影响，在函数式中可以增加 R_σ 或者 $R\varepsilon$作为影响系数。

式（2.9.1-1）的增量关系可表示为

$$\{d\sigma\}_{3\times1}=[f]_{3\times3}\{d\varepsilon\}_{3\times1} \tag{2.9.2-1}$$

其中

$$[f]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial\varepsilon_3}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial\varepsilon_3}\\ \dfrac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_1} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_2} & \dfrac{\partial f_3}{\partial\varepsilon_3}\end{bmatrix} \tag{2.9.3}$$

式（2.9.2）是可积的，亦即与应力路径无关。对于更普遍的关系，增量关系可写成：

$$\{d\varepsilon\}_{3\times1}=[A]_{3\times3}\{d\sigma\}_{3\times1} \tag{2.9.2-2}$$

这就定义了在一定应力增量下，有一定的应变增量发生。矩阵 A 中各项是应力（或应变）的函数。因而式（2.9.2-2）有更普遍的意义。

对应于某一具体的坐标系 x,y,z，通过坐标变换，将（2.9.1-1）式转换成一般应力应变空间（6 维）的表达式：

$$\sigma_{ij}=F_{ij}(\sigma_{kl},\varepsilon_{mn}) \tag{2.9.4}$$

如果应力与应变的三个主方向相同，亦即：

$$[T_\sigma]_{3\times6}=[T_\varepsilon]_{3\times6} \tag{2.9.5}$$

$[T_\sigma]_{3\times6}$ 和$[T_\varepsilon]_{3\times6}$ 为应力与应变的坐标转换矩阵，则

式（2.9.4）可表示为：

$$\sigma_{ij}=F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \tag{2.9.6}$$

式（2.9.2-1）可表示为：

$$\{d\sigma\}_{6\times1}=[T_{d\sigma}]_{6\times3}[f]_{3\times3}[T_{d\varepsilon}]_{3\times6}\{d\varepsilon\}_{6\times1} \tag{2.9.7}$$

若应力、应变的全量及增量的主方向都相同，亦即，

$$[T_\sigma]=[T_\varepsilon]=[T_{d\sigma}]=[T_{d\varepsilon}] \tag{2.9.8}$$

则式（2.9.7）可表示为：

$$\{d\sigma\}_{6\times1}=[D]_{6\times6}\{d\varepsilon\}_{6\times1} \tag{2.9.9}$$

[D]为主应变的函数。当然也可在应力空间内建立类似的关系。

所谓的广义位势理论是在主空间内确定一个或几个（两个或三个）势函数，使应力应变或其增量与这些势函数建立一定关系。在式(2.9.1-1)和（2.9.1-2）中，如果三维的主空间是一个有势场，矢量$\sigma_i(d\sigma_i)$或$\varepsilon_i(d\varepsilon_i)$方向与某一势函数的梯度矢量方向一致，则可建立一个单一势面的理论公式。如果不存在这样一个势函数，则在三维空间的任一矢量总可以用与其梯度矢量线性无关的三个势函数　$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$的梯度矢量表示：

$$\varepsilon_i=\sum_{k=1}^{3}\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma_i} \tag{2.9.10}$$

当应力与应变的主方向一致时，

$$\varepsilon_{ij}=\sum_{k=1}^{3}d\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.9.11}$$

类似的其增量的关系也同样可表达成与式（2.9.10）或(2.9.11)类似的形式。如果应变增量只包括塑性应变增量$d\varepsilon_{ij}^{p}$，则广义位势理论则成为广义的塑性位势理论。

2.9.2　超弹性模型或格林（Green）弹性模型

在式(2.9.1-1)和（2.9.1-2）中，若矢量σ_i或ε_i的旋度为零，即满足：

$$\frac{\partial\sigma_i}{\partial\varepsilon_j}=\frac{\partial\sigma_j}{\partial\varepsilon_i} \tag{2.9.12-1}$$

或者

$$\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\sigma_j}=\frac{\partial\varepsilon_j}{\partial\sigma_i} \tag{2.9.12-2}$$

则σ_i或ε_i为有势场的矢量，存在着一个势函数 W 或Ω（变形能或余能），使

$$\sigma_i=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_i} \tag{2.9.13-1}$$

或者

$$\varepsilon_i=\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_i} \tag{2.9.13-2}$$

当应力与应变三个主方向相同时，上两式可写成：

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{2.9.14-1}$$

或者

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.9.14-2}$$

这就是超弹性模型（Green 模型）的一般表达式。它除了假定应力应变的主方向一致外，还假定σ_i或ε_i为有势场的矢量。选择合适的参数，一阶超弹性模型可表示为广义虎克定律的形式。

2.9.3　柯西（Cauchy）弹性模型

式（2.9.6）是柯西模型的最一般表达式。它无须假设三维主空间存在唯一势函数使其矢量方向与σ_i或ε_i矢量方向一致。

但是如果在主应变空间将主应力用三个矢量线性无关的势函数$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$表示，总是可以的，再假设应力应变主方向一致，则可表示成：

$$\sigma_{ij}=\sum_{k=1}^{3}A_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{2.9.15}$$

其中势函数φ_k可表示为三个应变不变量的函数，因为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial\bar{I}_{1\varepsilon}}{\partial\varepsilon_{ij}}&=\delta_{ij}\\ \frac{\partial\bar{I}_{2\varepsilon}}{\partial\varepsilon_{ij}}&=\varepsilon_{ij}\\ \frac{\partial\bar{I}_{3\varepsilon}}{\partial\varepsilon_{ij}}&=\varepsilon_{im}\varepsilon_{mj}\end{aligned} \tag{2.9.16}$$

其中

$$\begin{aligned}\bar{I}_{1\varepsilon}&=\varepsilon_{kk}\\ \bar{I}_{2\varepsilon}&=\frac{1}{2}\varepsilon_{km}\varepsilon_{kn}\\ \bar{I}_{3\varepsilon}&=\frac{1}{3}\varepsilon_{km}\varepsilon_{kn}\varepsilon_{nm}\end{aligned}$$

则式(2.9.15)又可表示为：

$$\sigma_{ij}=\alpha_1\delta_{ij}+\alpha_2\varepsilon_{ij}+\alpha_3\varepsilon_{im}\varepsilon_{mj} \tag{2.9.17}$$

对于二阶柯西模型，其增量形式可表示为：

$$\{d\sigma\}=[D_t]\{d\varepsilon\} \tag{2.9.18}$$

其中$[D_t]$为一非对称的切线刚度矩阵。可见柯西模型只作了应力应变主方向一致的假设，因而格林模型是柯西模型的特例。选择合适的参数，柯西模型也可退化为线弹性模型的广义虎克定律的形式。柯西模型并不能满足解的唯一性与稳定性。但对于土，这可能不是必要条件。

2.9.4　次弹性模型

全量的弹性模型（柯西和格林模型）是假设应力与应变状态一一对应的。次弹性模型是在增量关系上建立的模型，它具有更普遍的意义，从式（2.9.2-2）经坐标变换可以得到

$$d\sigma_{ij}=F_{ij}(\sigma_{mn},d\varepsilon_{kl}) \tag{2.9.19}$$

对于各向同性、变形与时间无关的情况，上式可写成

$$d\sigma_{ij}=D_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \tag{2.9.20}$$

次弹性具有更宽松的条件，它是在增量意义上为弹性的。当它可积分时，它就退化为柯西弹性模型，因而次弹性模型一般可反映应力路径影响和应力引起的各向异性。但因此它一般使用的参数较多，并且不易试验确定，参数的物理意义也不够明确。

2.9.5　弹塑性模型的塑性位势理论

弹塑性模型中弹性应力应变关系一般都用线弹性和简单的非线弹性模型描述。关键部分是它的塑性应变增量的计算。

类似式（2.9.2-2）所表示，塑性主应变增量与主应力增量的关系可表示为：

$$\{d\varepsilon^p\}_{3\times1}=[A]_{3\times3}\{d\sigma\}_{3\times1} \tag{2.9.21}$$

如果矩阵[A]的秩为 1，并且 $d\varepsilon_i^p$ 矢量为一个有势场矢量，就可得出：

$$d\varepsilon_i^p=d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_i} \tag{2.9.22}$$

如果再假设 $d\varepsilon_i^p$ 与 σ_i 的三个主方向相同，通过坐标变换得到

$$d\varepsilon_{ij}^p=d\lambda\frac{\partial g}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.9.23}$$

可见这种经典的单一塑性势面塑性理论的假设包括：

1) 式（2.9.21）中矩阵[A]的秩为 1
2) 在三维应力空间中，$d\varepsilon_i^p$ 为一有势的矢量场
3) $d\varepsilon_i^p$ 与 σ_i 的三个主方向一致

2.9.6 相适应与不相适应的流动规则

设在主空间中塑性应变满足如下的塑性方程：

$$f(\varepsilon_i^p\ \sigma_i)=0 \tag{2.9.24}$$

它实际上就是以 ε_i^p 为硬化参数的屈服函数。对式（2.9.24）微分，得

$$\{\frac{\partial f}{\partial\varepsilon_p}\}_{1\times3}^T\{d\varepsilon\}_{3\times1}+\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}_{1\times3}^T\{d\sigma\}_{3\times1}=0 \tag{2.9.25}$$

从式（2.9.25）和式（2.9.22）可得到：

$$\{d\varepsilon^p\}_{3\times1}=\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\}_{3\times1}\frac{1}{A}\{\frac{\partial f}{\partial\sigma_i}\}_{1\times3}^T\{d\sigma\}_{3\times1} \tag{2.9.26}$$

其中

$$A=-\{\frac{\partial f}{\partial\varepsilon^p}\}^T\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\} \tag{2.9.27}$$

可见在式（2.9.21）中

$$[A]_{3\times3}=\{\frac{\partial g}{\partial\sigma}\}\frac{1}{A}\{\frac{\partial f}{\partial\sigma}\}^T \tag{2.9.28}$$

当 g=f 时，矩阵[A]是对称的，亦即就是所谓的相适应的流动规则；当 $g\neq f$ 时，矩阵[A]是不对称的，这就是不相适应的流动规则。而矩阵[A]是否对称应由材料的性质决定，由土的具体试验结果决定，不是人为事先规定的。

既使是对于不相适应的流动规则（$g\neq f$），矩阵[A]中各元素之间存在如下关系：

$$a_{11}:a_{21}:a_{31}=\frac{\partial g}{\partial\sigma_1}:\frac{\partial g}{\partial\sigma_2}:\frac{\partial g}{\partial\sigma_3} \tag{2.9.29}$$

$$a_{11}:a_{12}:a_{13}=\frac{\partial f}{\partial\sigma_1}:\frac{\partial f}{\partial\sigma_2}:\frac{\partial f}{\partial\sigma_3} \tag{2.9.30}$$

至于材料矩阵[A]是否满足上两式的关系，也是完全由材料性质决定的，因而单一塑性势面模型是有其局限性的。

2.9.7 多重势面的广义塑性理论

如上所述，在式（2.9.21）中，$d\varepsilon_i^p$ 是主应力空间中一个三维矢量，当它为有势的矢量场时，可以用为一的势函数描述；否则，可以用三个其梯度矢量线性无关的势函数表示和拟合：

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\sum_{k=1}^{3}d\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma_i} \tag{2.9.31}$$

假设 $d\varepsilon_i^{p}$ 与 σ_i 三个方向相同

经坐标变换式（2.9.31）可变换为

$$d\varepsilon_{ij}^{p}=\sum_{k=1}^{3}d\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\sigma_{ij}} \tag{2.9.32}$$

其中 $d\lambda_k$ 可用式（2.9.21）中三个方程确定。

这就是广义的多重势面塑性理论。φ_k 可以取任意三个梯度矢量线性无关的函数。例如可选为三个主应力，三个应力不变量，或三个应力不变量的函数。因而这种模型给适应复杂土体变形留下更广阔的空间；在一定的简化后，可得到更简化与实用的模型。

综上所述，可见各种弹性、弹塑性本构模型实际上是在不同的数学物理假设基础上建立的，其数学本质是相通的。广义的变形位势理论可以清楚地说明各种本构模型，便于从更高的视野建立土的简便实用的本构模型。

但土的应力变形性质毕竟是十分复杂的，人们在实际应用中往往从试验数据拟合，使用半经验的方法得到更实用的模型，有时与各种经典理论不一致，突破传统理论模型的约束，这往往是实际应用的需要。

第二章 习题与思考题：

2.1　什么叫材料的本构关系？在土的本构关系中，土的强度和应力-应变有什么联系？

2.2　说明土与金属材料的应力应变关系有什么主要区别？

2.3　推导偏差应力张量 $s_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ 的第一，第二和第三不变量的一般表达形式与用主应力表达的公式。

2.4　什么是八面体正（法向）应力和八面体剪（切向）应力，八面体法向应变　和八面体剪切向应变？为什么在土力学中常用　$p,q;\varepsilon_v,\bar{\varepsilon}$　表示它们？

2.5　证明在 σ_1、σ_2、σ_3 分别为大中小主应力时，应力洛德角 $-\frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{6}$。

2.6　已知砂土试样的 σ_1 =800kPa，σ_2=500 kPa，σ_3 =200kPa，计算 I_1、I_2、I_3、J_2、p、q 和 θ 各是多少，如果 σ_2= σ_3 =200kPa，上述各值为多少？

2.7　什么是加工硬化？什么是加工软化？绘出它们的典型的应力应变关系曲线。

2.8　什么是土的压硬性？什么是土的剪胀性？解释它们的微观机理。

2.9　简述土的应力应变关系的特性及其影响因素。

2.10　定性画出在高围压（σ_3>30MPa）和低围压（σ_3=100kPa）下密砂三轴试验的 $(\sigma_1-\sigma_3)\sim\varepsilon_1\sim\varepsilon_v$ 应力应变关系曲线形状。

2.11　说明在很低的围压（σ_3<10kPa）影响三轴试验结果的边界条件和因素。

2.12　在 p,q 应力平面上绘制各向等压（HC），常规三轴压缩试验（CTC），和常规三轴伸长试验（CTE）的应力路径。

2.13　粘土和砂土的的初始各向异性是由于什么原因？什么是诱导各向异性？

2.14 下面是承德中密砂在三种围压下的三轴试验结果。用这些数据计 Duncan 双曲线 E, ν 和 E, B 模型的参数。（见附表）

2.15 从超弹性模型的一般表达式 $\varepsilon_{ij}=\dfrac{\partial\Omega}{\partial\sigma_{ij}}$，其中 $\Omega=f(I_1,I_2,I_3)$，推导一阶超弹性模型（即 Ω 是应力的二次函数）的表达式，在什么条件下，它成为线弹性模型？（广义的虎克定律）？

2.16 写出次弹性模型 $\dot{\sigma}_{ij}=d_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl}$ 的 0 阶形式（即 d_{ijkl} 是常数张量）。在什么条件下它成为增量的广义虎克定律公式？

2.17 在 Duncan-Chang 的非线弹性性双曲线模型中，参数 a, b, E_i E_t, $(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$ 以及 R_f 各代表什么意义？

2.18 饱和粘土的常规三轴固结不排水试验的应力应变关系可以用双曲线模拟，是否可以用这种试验确定 Duncan-Chang 模型的参数？这时泊松比 ν=？，这种模型用于什么情况的土工数值分析？

2.19 是否可以用饱和粘土的常规三轴固结不排水试验来直接确定用有效应力表示的 Duncan-Chang 模型的参数？对于有效应力，上述试验的 $d(\sigma_1-\sigma_3)/d\varepsilon_1$ 是否就是土的切线模量 E_t ？用广义虎克定律推导 $d(\sigma_1-\sigma_3)/d\varepsilon_1$ 的表达式。

2.20 土的 σ_3 为常数的平面应变试验及平均主应力为常数的三轴压缩试验（σ_1 增加的同时，σ_3 相应减少，保持平均主应力 p 不变），三轴伸长试验（围压 σ_1 保持不变，轴向应力 σ_3 不断减少）的应力应变关系曲线都接近双曲线，是否可以用这些曲线的切线斜率 $d(\sigma_1-\sigma_3)/d\varepsilon_1$ 直接确定切线模量 E_t ？用广义虎克定律推导这些试验的 $d(\sigma_1-\sigma_3)/d\varepsilon_1$ 的表达式。

2.21 通常认为在平面应变试验中，应变为零方向上的主应力是中主应力。设两个主动主应力成比例，即 $\sigma_z/\sigma_x=k\geq 1.0$ ，平面应变方向上的主应力为 σ_y。用弹性理论，设 $\nu=0.33$，计算 k 等于多少时，σ_y 成为小主应力？

2.22 在平面应变情况下，$\varepsilon_y=0$ 及 $d\varepsilon_y=0$。有人假设 $\varepsilon_y^e=\varepsilon_y^p=d\varepsilon_y^e=d\varepsilon_y^p=0$，是否正确？

2.23 当两个主动主应力减小到接近于零时，按弹塑性模型认为是卸载，说明平面应变方向的主应力不应当也是零。

2.24 土的塑性力学与金属材料的塑性力学有什么区别？

2.25 说明塑性理论中的屈服准则、流动准则、加工硬化理论。说明相适应和不相适应的流动准则？

2.26 什么是物态边界面？什么是临界状态线？在 p,q, $\nu=1+e$ 三维空间绘出正常固结粘土的物态边界面和临界状态线。

2.27 正常固结粘土在 p,q,平面上的屈服轨迹是弹性墙与物态边界面交线的投影，还是土的固结不排水应力路径的投影？为什么？

2.28 一种正常固结粘土具有的唯一的物态边界面，说明在同样围压下固结到同样孔隙比的正常固结粘土，其固结不排水试验在 p,q,平面上的有效应力路径是唯一的。

2.29 两个完全一样（含水量，孔隙比相同）的正常固结饱和粘土试样，在相同的各向等压下固结，然后进行**不排水**剪切试验（CU）。A 试样进行的是常规三轴压缩试验（CTC）；B 试样进行的是减压的三轴伸长试验（RCE，轴向应力保持不变，围压逐渐减少，直至破坏。）。问：

（1）两个固结不排水试验的有效应力路径是否相同？

（2）两个固结不排水试验的应力应变关系曲线（即 $(\sigma_1-\sigma_3)\sim\varepsilon_1$ 关系曲线 ）是否相同？

2.30 说明什么是 Hvorslev 面，它适用于什么状态的粘性土？

2.31 说明剑桥弹塑性模型的试验基础和基本假设。该模型的三个参数： M、λ，κ 分别表示什么意义？如何确定？

2.32 剑桥模型和修正的剑桥模型在 p,q 平面上的屈服轨迹可以分别表示为：

$f=\frac{q}{p}-M\ln\frac{p}{p_0}=0$　　和　$f=\frac{p}{p_0}-\frac{M^2}{M^2+\eta^2}=0$

绘制它们在 p,q 平面上的形状，说明造成两种屈服轨迹的区别的原因。

2.33 从上题屈服面及硬化参数 p_0，根据 $d\varepsilon_v^p=d\lambda\dfrac{\partial f}{\partial p}$，$d\bar{\varepsilon}=d\lambda\dfrac{\partial f}{\partial q}$，推导 $d\varepsilon_v$ 及 $d\bar{\varepsilon}$ 与 dp、dq 的关系。

2.34 已知弹塑性模型的屈服函数 f(σij,H)，塑性势函数 g(σij,H)和硬化参数 H(εij)，推导弹塑性模量矩阵 $[D]_{ep}$。

$$[D]_{ep}=[D]-\frac{[D]\left\{\dfrac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}\left\{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]}{A+\left\{\dfrac{\partial f}{\partial\sigma}\right\}^T[D]\left\{\dfrac{\partial g}{\partial\sigma}\right\}}$$

2.35 上式中 A 为硬化模量。推导其表达式。

2.36 Lade-Duncan 弹塑性模型使用什么流动准则？绘出 Lade-Duncan 弹塑性模型在 p,q,平面上屈服轨迹和塑性势轨迹的形状。说明这种轨迹反映的塑性应变有什么特点。适用于什么土？

2.37 修正的 Lade-Duncan 有哪两种屈服面？各使用什么流动准则？它们反映的塑性应变有什么不同？在各向等压应力状态下发生哪一种屈服？

2.38 清华弹塑性模型的主要特点是什么？如何在 p,q,平面上确定各应力点的塑性应变增量的方向？

2.39 清华模型的硬化参数 $H=H(\varepsilon_{ij}^p)$，这表明在同一个屈服面上各点的塑性应变存在什么关系？清华模型是如何各向等压试验和三轴试验确定硬化参数的？

2.40 从各向等压试验得到各向等压压力 p_o 与塑性体应变 $\varepsilon_{v_0}^p$ 关系为：

$$\varepsilon_{v0}^p=m_4p_a\ln(1+\frac{p_0}{m_5p_a}),$$

从三轴试验得到在每个屈服面上的塑性应变关系为：

$$\frac{\varepsilon_v^p}{\varepsilon_{vo}^p}=1+m_3\,\bar{\varepsilon}^p\Big/\varepsilon_{vo}^p+m_2(\bar{\varepsilon}^p\Big/\varepsilon_{vo}^p)^2$$ 已知屈服函数如式（2.8.　）

推导硬化参数的表达式。

2.41 在土的损伤模型中，损伤比 ω 表示什么意义？土的损伤可能由于什么原因产生的？

2.42 土的结构性是由什么原因造成的？它对土的力学性质有什么影响？

2.43 如果损伤比 ω 是应变张量{ε}的函数，从 $\{\varepsilon\}=(1-\omega)\{\varepsilon_i\}+\omega\{\varepsilon_d\}$ 推导 $\{d\varepsilon\}=$？说明式中各项的物理意义。

2.44 对于广义位势理论，说明各种本构模型的基本假设和理论公式。

附表：

承德中密砂常规三轴试验数据表 (围压 σ_3=100kPa)

应力差	轴向应变	体应变	备注
$\sigma_1-\sigma_3$（100kPa)	ε_1	ε_v	
0.508	.00225	.00074	
1.002	.00449	.00130	
1.463	.00674	.00176	
1.849	.00898	.00223	
2.149	.01123	.00223	
2.331	.01348	.00214	
2.477	.01572	.00176	
2.587	.01797	.00158	
2.665	.02021	.00111	
2.730	.02246	.00056	
2.777	.02471	.00009	
2.812	.02695	.00003	
2.845	.03032	-.00012	
2.878	.03369	-.00195	
2.889	.03706	-.00288	
2.894	.04043	-.00381	
2.889	.04492	-.00474	
2.879	.04941	-.00567	
2.869	.05390	-.00650	
2.853	.05839	-.00752	
2.836	.06289	-.00827	
2.809	.06738	-.00891	

承德中密砂常规三轴试验数据表 (围压 σ_3=300kPa)

应力差	轴向应变	体应变	备注
$\sigma_1-\sigma_3$（100kPa)	ε_1	ε_v	
0.909	.00125	.00075	
2.286	.0035	.00151	
3.533	.00575	.00236	
4.341	0.008	.00302	
5.203	.01025	.00329	
5.781	.01251	.00329	

6.202	.01476	.00329	
6.529	.01701	.00329	
6.789	.01926	.00302	
7.065	.02151	.00283	
7.233	.02376	.00236	
7.390	.02601	.00189	
7.515	.02939	.00160	
7.714	.03276	.00094	
7.846	.03614	.00028	
7.939	.03952	-.00047	
8.016	.04402	-.00123	
8.043	.04852	-.00207	
8.058	.05302	-.00292	
8.047	.05753	-.00377	
8.026	.06203	-.00452	
7.992	.06653	-.00537	
7.932	.07216	-.00613	
7.859	.07778	-.00707	

承德中密砂常规三轴试验数据表 (围压 σ_3=500kPa)

应力差	轴向应变	体应变	备注
$\sigma_1-\sigma_3$（100kPa)	ε_1	ε_v	
0.756	.00025	.00057	
2.454	.0025	.00114	
4.587	.00476	.00199	
6.349	.00701	.00275	
7.689	.00926	.00303	
8.751	.01151	.00341	
9.573	.01376	.00351	
10.224	.01602	.00360	
10.759	.01827	.00360	
11.197	.02052	.00341	
11.551	.02277	.00313	
11.837	.02502	.00294	
12.164	.02840	.00246	

12.439	.03178	.00199	
12.652	.03516	.00152	
12.808	.03854	.00104	
12.953	.04304	.00009	
13.069	.04754	-.00066	
13.148	.05205	-.00171	
13.21	.05655	-.00246	
13.239	.06106	-.00322	
13.234	.06556	-.00408	
13.211	.0719	-.00423	
13.117	.07682	-.00569	

第二章　参考文献

[1] Mitchell J.K., Fundamentals of Soil Behavior (Second Edition), New York: John Wiley & Sons, Inc., Printed in USA, 1993.

[2] Chen W. F. and Saleeb, A. E., Contitutive Equation for Engineering Materials, Vol.1, Elacticity and modelling, New York：Viley-Tnter-Science, 1982.

[3] 濮家骝、李广信，土的本构关系及其验证与应用，岩土工程学报，1986，8（1）：47-82。

[4] 黄文熙主编，土的工程性质，北京：水利水电出版社，1983。

[5] 钱家欢，殷宗泽主编， 土工原理与计算（第二版），北京：中国水利水电出版社，1996。

[6] 沈珠江，理论土力学，北京：中国水利水电出版社，2000。

[7] 屈智炯，土的塑性力学（第一版），成都：成都科技大学出版社，1987。

[8] 徐秉业、刘信声，应用弹塑性力学（第一版），北京：清华大学出版社，1995。

[9] 龚晓南，土塑性力学（第二版），杭州：浙江大学出版社，1999。

[10] A.N.Schofiled and C.P.Wroth, Critical State Soil Mechanics, England: Publishing by McGraw-Hill Publishing Company Limited, 1968.

[11] R. Whitlow, Basic Soil Mechanics (Third edition), London: Longman Group Limited, 1995.

[12] 黄文熙，水工建设中的结构力学与岩土力学问题——黄文熙论文集，北京：中国水利水电出版社，1989。

[13] 李广信，土的三维本构关系的探讨与模型验证，清华大学博士论文，1985。

[14] Lade P.V. and Duncan J.M., Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soils, Proc. ASCE, JGTD, 1975, 101(GT10): 1037-1053.

[15] Duncan J.M. and Chang C.Y. , Nonlinear analysis of stress and strain in soils, proc. ASCE, JSMFD 1970, 96(SM5),1629-1633.

[16] M. Kamon, T. Matsut, M. Oka, H. Matsuoka, T. Tokue, T. Nakai and R. Kitamura, STATE-OF-ART-REPORT, I. Micrometric Approaches, Report of ISSMFE subcommittee on constitutive laws of soil and proceedings of discussion session 1A XI ISSMFE, Proceedings of XI ISSMFE, 1985.

[17] 杨光华，土的本构模型的数学理论及其应用，清华大学博士论文，1998。

[18] G. Bianchini, A. Seada, P. Puccini, J. Lanier and Z. Zitouni, Complex Stress Paths and Validation of Constitutive Models, Geotechnical Testing Journal, Vol. 14, No. 1, 1991:13-25.

[19] 沈珠江，结构性粘土的弹塑性损失模型，岩土工程学报，1993，15（3）：21-28。
[20] 黄文熙、濮家骝、陈愈炯，土的硬化规律和屈服函数，岩土工程学报，1981，3(3):19-26。
[21] C.S. Desai and H.J. Siriwardane, Constitutive Laws Engineering Materials, Prentice-Hall, Inc, NJ.07632 Englewood Cliffs, 1984.
[22] Lade P.V. and Duncan J.M., Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soils with curved yield surface, Int. J. solids and structure, 1977, 13(11): 1019-1035.
[23] Duncan J.M., Wong K.S. and Mabry P., Strength stress-strain and bulk modulus parameters for Finite Element Analyses of stresses and movements in soil masses, Report No. VCB/GT/78-02, Univ. of California, Berkeley, 1978.

第三章　土的强度

3.1　概述

土与人类的关系十分密切。在人类进化发展的上万年历史中，挖沟筑堤，疏河开渠，建造房屋殿宇、庙堂墓塔，首先涉及的是土的强度问题。长期实践经验的积累，使人们对土的强度的重要性有了较深刻的理解。

土的强度理论研究甚至早于“土力学”学科的建立，亦即早在太沙基（Terzaghi）1925 年出版其著作《土力学》之前。1776 年，库仑（Coulomb）就在试验的基础上提出了著名的库仑公式：

$$\tau_f = c + \sigma tg\varphi \tag{3.1.1}$$

1900 年莫尔（Mohr）提出：在土的破坏面上的抗剪强度是作用在该面上的正应力的单值函数：

$$\tau_f = f(\sigma_f) \tag{3.1.2}$$

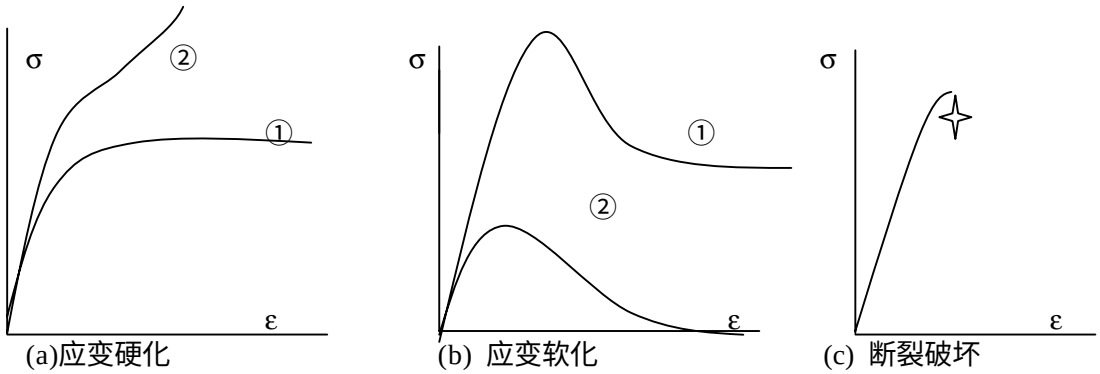
这样，库仑公式（3.1.1）只是在一定应力水平下式（3.1.2）的线形特例。从而建立了著名的莫尔－库仑强度理论。

在随后的许多年中，人们针对莫尔－库仑强度理论中抗剪强度与中主应力无关的假设，进行了大量的中主应力对土抗剪强度影响的研究，并且企图在土力学中引进广义密塞斯（Mises）和广义屈雷斯卡（Tresca）强度理论，但它们与土的强度性质实在相差太大。只有到了 20 世纪 60 年代以后，随着计算机技术的发展及大型土木工程的兴建，关于土的应力－应变－强度－时间关系即本构关系的研究广泛开展，人们才逐步认识到土的强度与土的应力－应变关系是密不可分的，它是土受力变形过程的一个阶段；并进一步认识到除剪切强度以外，还有拉伸强度、断裂及与孔隙水压力有关的土的破坏问题。这样，一些与土的本构模型相应适应的土强度准则也相继被提出。另一方面，人们也力图从微观机理上研究土的强度及建立强度理论；探索原状土、非饱和土、区域性土和老粘土等的强度问题。

源于土的碎散性、多相性和在长期地质历史造成的多变性，土的强度也呈现其特殊性。

首先，由于土是碎散颗粒的集合，它们之间的相互联系是相对薄弱的。所以土的强度主要是由颗粒间的相互作用力决定，而不是由颗粒矿物的强度本身直接决定的。土的破坏主要是剪切破坏，其强度主要表现为粘聚力和摩擦力，亦即其抗剪强度主要由粒间的粘聚力和摩擦力组成。而土是三相组成的，固体颗粒与液、气相间的相互作用对于土的强度有很大影响，所以引入了孔隙水压力、吸力等土力学所特有的影响土强度的因素。土的地质历史造成土强度强烈的多变性、结构性和各向异性。土强度的这些特点体现在它受内部和外部、微观和宏观众多因素的影响，成为一个十分复杂的课题。

不同的土试样（它一般是代表一个受力均匀的土单元）在不同条件下的加载试验，可得到不同的应力－应变关系。一般可表示为图 3-1-1 中的几种情况。对于不同的应力应变关系，其破坏的确定也是不同的。



(a)应变硬化　(b) 应变软化　(c) 断裂破坏

图 3.1.1 几种土的应力应变关系曲线

图 3-1-1(a)表示的是应变硬化情况。亦即随着应变增加，其应力也不断增加。由于土变形的弹塑性特点，在用塑性理论描述时就是随着应变增加，在应力空间中的屈服面不断扩大。图中①表示松砂和正常固结粘土在固结排水试验中的曲线；②一般表示饱和密砂和中密砂在不排水试验中曲线。在这种情况下，通常以应变达到一定限度（通常为 15%）来定义试样的破坏。图 3-1-1(b)表示的是应变软化。它一般表现为在应变达到一定值时，应力（或应力差）达到一个峰值点，随后应变再增加则应力减小，一般存在一个残余应力。在塑性理论中，在“软化”阶段，其应力空间的屈服面是随应变而逐渐收缩的。其中①表示密砂或超固结土在排水试验中的应力应变曲线，②常表示松砂在固结不排水试验中的应力应变曲线，这时通常以达到峰值应力定义为土的破坏。图 3-1-1（c）表示的是断裂式破坏，即在很小的应变下，试验突然断裂，比如对硬粘土的无侧限压缩试验、粘土的拉伸试验等。这时由断裂应力确定土的强度，其破坏状态比较容易确定。

从上述情况可见，土试样在一定的应力状态下，失去稳定或者发生过大的应变就是发生了破坏。所谓土的强度是指其破坏时的应力状态。有时，土的强度的定义与土表观的“破坏”并不一致，如土的残余强度，松砂不排水情况下的流滑等。同时，土的破坏和强度的确定存在一定的人为的因素。定义破坏的方法是破坏准则。基于应力状态的复杂性，破坏准则常常是应力状态的组合。强度理论是揭示土破坏的机理的理论，它也以一定的应力状态的组合来表示。这样，强度理论与破坏准则的表达式是一致的。

从第二章关于土的屈服的概念可以发现，土的破坏与屈服并非是同一的概念。对于图 2-5-1 中的 (a) 刚塑性应力应变关系和(b) 弹性-完全塑性应力应变关系，土屈服即意味着破坏；对于(c) 弹塑性应力应变关系，屈服与破坏是不同的概念。

对于一个试样，其应力状态达到其强度时，它将发生很大变形（完全塑性与应变硬化情况）或者不能稳定（应变软化和断裂情况），这时即意味着试样破坏。对于刚塑性及完全塑性模型，一个边值问题的土体（如地基）中部分土体达到其强度（或发生屈服），只能说这部分土体达到了极限平衡条件（或称塑性区），整个土体或者与其相邻的结构不一定破坏。这时，塑性区土体的变形由与其相邻的弹性区边界条件决定。从变形的角度看，所谓土的强度就是处于某种应力状态，在这种应力状态下，微小的应力增量可以引起很大的，或者不可确定的应变增量（应变硬化和完全塑性）；或者微小的应力增量使其丧失稳定（应变软化和断裂）。

图 3-1-2 表示的是用完全塑性理论分析地基承载力时的情况，当地基中塑性区发展到一定深度

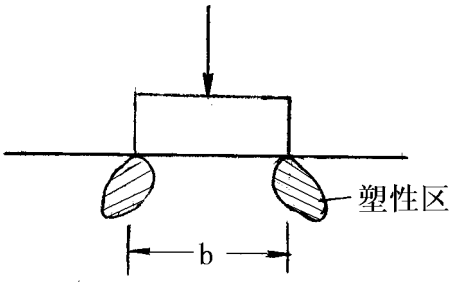
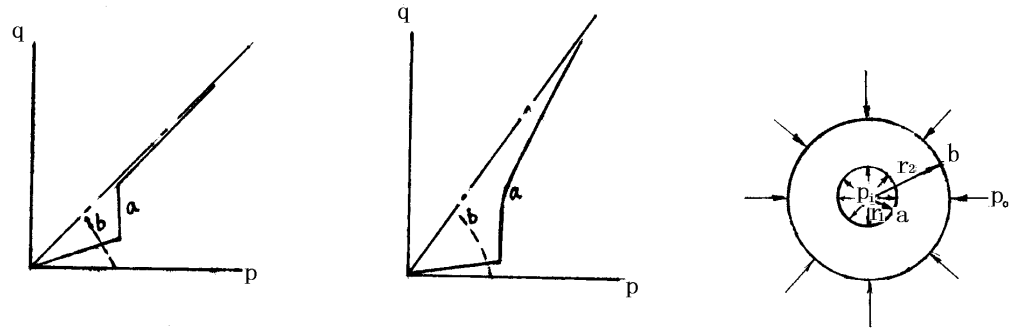


图3-1-2　　地基中塑性区的开展

时的情况。尽管塑性区最大深度 z_{max} 达到 b/3 或者 b/4，其中 b 是基础的宽度。其对应的荷载还是设计所容许的。地基作为整体还远未失稳。这主要是由于达到其强度（屈服）的部分土体为尚未达到强度的土体弹性状态所包围，其变形主要由尚未屈服的土体所形成的边界条件决定。

图 3-1-3 表示一种厚壁筒内压扩张问题的计算分析。如果用弹性－完全塑性模型分析计算（见图 3-1-3(a)），则发现内壁（r_1）的土单元 a 路径的应力状态很快达到强度线，并且继续沿着强度线移动“等待”外径（r_2）土单元 b 路径达到强度线，则试样整体破坏。如果用应变硬化的弹塑性模

型分析(见图 3-1-3（b）)，则内壁土单元应力路径逐渐靠近破坏线，最后内外径一起达到破坏线而发生整体破坏。



(a)用弹性—理想塑性模型　　(b)用弹塑性模型　　(c)受力情况　$P_i > P_0$

图3-1-3　　厚壁园筒内压扩张问题

以上分析表明，土的屈服与强度（破坏）并不是完全一致的概念，它是人们所选择的理论模型有关的，土体破坏与边值问题的具体边界条件有关。

可通过室内外试验直接或间接测定土的强度和强度指标。第一章所介绍的直剪仪和三轴仪是工程中最常用的仪器。野外的十字板试验、旁压试验、现场剪切试验等是在现场测定原状土强度的手段。一些其他试验可测定更复杂应力状态和边界条件的土的强度。由于试验中的应力状态和应力路径的限制，所确定的土的强度理论或破坏准则不可能包含所有影响因素。

3.2 土的抗剪强度的机理

如上所述，在一定应力范围内，莫尔－库仑强度理论可表示为（3.1.1）式

$$\tau_f = c + \sigma tg\varphi$$

从此式中可见土的强度由两部分组成：c 和 $\sigma tg\varphi$。前者为粘聚强度；后者为摩擦强度。实际上土的强度机理及影响因素十分复杂，不可能将二者截然分开。其表现形式与实际机理往往不一致。

一般无粘性土间一般不存在严格意义上的粘聚力，但碎石、卵石在很密实的情况下，相互间紧密咬和，可在其中垂直开挖而不倒塌。对于干砂及水下饱和砂土，只有坡度小于天然休止角φ_r的土才能稳定。而对于稍潮湿及毛细饱和区砂土，同样可以垂直开挖一定深度而不坍。这是由于毛细吸力使砂土颗粒间产生正的压力，这种有效压应力在颗粒间产生摩擦强度，但宏观上表现为“假粘聚力”。

饱和粘性土的不排水强度指标为 c_u，$\varphi_u=0$。实际上粘土颗粒间肯定存在摩擦强度，只是由于存在的超静孔隙水压力使所有破坏时的有效应力莫尔圆唯一，无法单独反映 $\sigma' tg\varphi'$ 部分强度。正常固结粘土的强度包线过原点，似乎不存在粘聚力，而在一定围压固结，具有一定密度的粘土也肯定具有粘聚力，只不过这部分粘聚力 $c=f(\sigma)$是固结应力的函数而被宏观上归入内摩擦角部分中。这种强度表观形式上与实际机理不一致情况随处可见。所以我们将它们在形式上分为摩擦强度与粘聚强度只是基于分析解决问题的方便。也有人不区分这两种强度，而直接使用抗剪强度 τ_f。

3.2.1 摩擦强度

粘性土摩擦强度微观机理比较复杂，这里只着重分析砂土的摩擦强度。砂土间的摩擦强度可分两个部分：滑动与咬合。而后者又会引起土的剪胀、颗粒破碎和颗粒重定向排列，它们对土的强度有不同影响。

1. 固体颗粒间的滑动摩擦

沿着固体表面滑动产生真正意义上的磨擦。它一般是土摩擦强度的主要部分。它可以表示为：

$$\mu = \frac{T}{N} = tg\varphi_\mu \tag{3.2.1}$$

其中 N 为正压力，T 为开始滑动时的剪切力，μ 为摩擦系数，ϕ_μ为滑动摩擦角。可见摩擦力 T 正比于正压力 N，两物体间摩擦阻力与物体尺寸无关。

固体颗粒间接触处的性质和影响因素十分复杂。即使是“光滑的”固体表面也是不完全光滑的，其不平度在 10nm~100nm 之间（纳米，10^{-9}m），不平处的坡度为 120°~>175°（见图 3-2-1）。

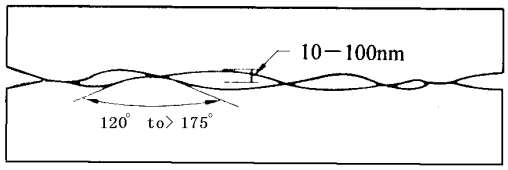


图3-2-1　两“光滑”表面间的接触

对于光滑的石英矿物表面其凹凸不平可达到 500nm，而一些松散矿物颗粒表面不平度可超过这个尺度 10 倍以上。即使是云母片状表面也有“波”动。因而所谓滑动摩擦也存在不规则表面的咬合和“自锁”作用。在土中颗粒间的实际接触面积是非常小的，接触点的应力非常大。太沙基认为在凸起的接触点材料达到屈服，这样实际接触面积由材料屈服强度 σ_y和荷载决定：

$$A_c = \frac{N}{\sigma_y} \tag{3.2.1}$$

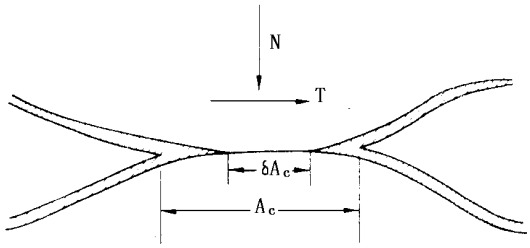
在屈服区接触面积 A_c上，抗剪强度为 τ_m，则剪切荷载可达到

$$T = A_c \tau_m \tag{3.2.2}$$

则摩擦系数：

$$\mu = \frac{\tau_m}{\sigma_y} \tag{3.2.3}$$

可见凸起处材料发生塑性屈服，产生塑性变形。滑动的切向力 T 取决于接触面积及接触处的抗剪强度。由于接触处颗粒间距离是单分子的尺度，形成吸附引力；甚至使局部矿物产生重结晶。这表明所谓摩擦力又与土的粘聚力形成的机理相似。



3-2-2　不平表面吸附膜的影响

在这种情况下，静摩擦，即起动时阻力可能大于滑动以后的摩擦。由于颗粒表面不是完全清洁，固体表面总为一层吸附膜所覆盖（图 3-2-2）。而这种吸附膜起润滑作用，这时实际接触面积大大减少

$$T = A_c[\delta\tau_m + (1-\delta)\tau_c] \tag{3.2.4}$$

其中δ为实际接触面积与总接触面积之比，τ_m 及 τ_c 为固体间的及吸附膜间的抗剪强度，τ_c 要比 τ_m 小得多。所以小颗粒的粘性土的内摩擦角比粗颗粒小得多。对于非粘土矿物，其滑动摩擦角也受这个吸附膜的影响。图 3-2-3 表示不同情况下石英表面的摩擦系数。没有化学清洁的表面非粘性矿物由于吸附膜的润滑作用，其摩擦角是很小的，在饱和情况下，由于水对吸附膜的破坏，使大块的石英、长石和方解石等矿物的抛光表面的吸附膜溶解破坏，使其滑动摩擦角有所提高，而对于片状矿物颗粒的土，水本身也可起润滑作用。而表面清洁的光滑表面间的摩擦角是很大的。

下表是常见矿物的滑动摩擦角一般值：

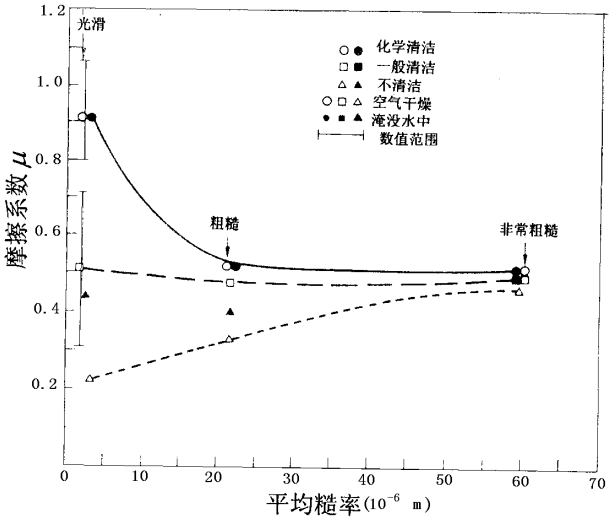


图3-2-3　石英表面的摩擦系数

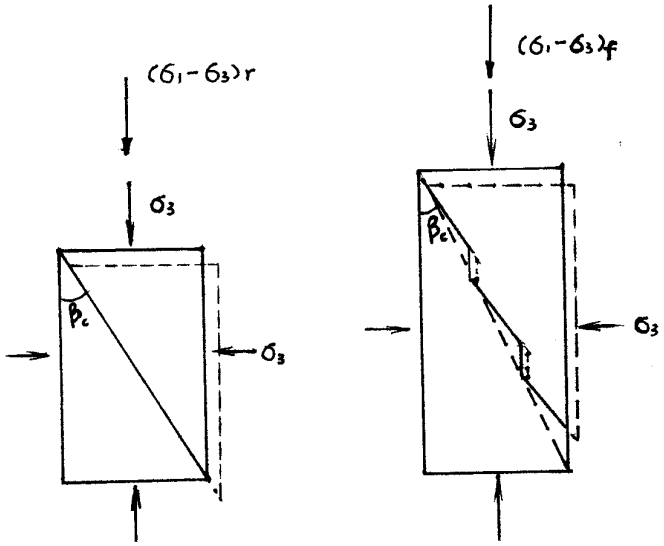
表3－1

非粘土矿物	饱和石英	22~24.5 °
	饱和长石	28~37.6 °
	饱和方解石	34.2 °
	饱和绿泥石	12.4 °
粘土矿物	高岭石	12 °
	伊利石	10.2 °
	蒙脱石	4~10 °

一般可以认为天然土中一般清洁的石英表面滑动摩擦系数 $\mu \approx 0.5$，摩擦角 $\phi_\mu \approx 26°$ 左右。

2. 咬合摩擦

由于土颗粒间不可能是平面接触。颗粒间的交错排列，使在剪切面处的颗粒发生提升错动、转动、拔出，并伴随着土体变化、颗粒的重定向排列及颗粒本身的破碎断裂，见图 3-2-4。广义上讲，由于剪切引起的土体积变化称为剪胀，所以广义的剪账包括剪胀和剪缩。但是一般讲剪胀是指剪切引起的土体积增加。剪胀的结果使颗粒从低势能状态变为高势能状态，要消耗额外能量。因而剪胀后的状态常常是不稳定的，在卸载时可部分恢复。常常是颗粒刚起动时对应着峰值强度，而剪胀稳定时，对应于土的残余强度。



(a)无剪胀 D＝1.0　　(b)剪胀 D>1.0

图3-2-5　　试样的剪胀模型

图 3-2-5 示意表示了试样在有无剪胀时的状态，图中

$$D=\left[1-\frac{d\varepsilon_v}{d\varepsilon_1}\right] \tag{3.2.5}$$

图 3-2-5（a）表示无剪切体变情况。这时外荷载所作的功 w_r 为：

$$w_r=\Delta\varepsilon_1(\sigma_1-\sigma_3)_r \tag{3.2..6}$$

在同样围压 σ_3 下，对于有剪胀情况，见图 3-2-5（b）。单位体积外力作功 w_f 除包括上式中 w_r 外，还需要克服 σ_3 对于体变阻力作功：

$$w_f=\Delta\varepsilon_1(\sigma_1-\sigma_3)_f=w_r-\Delta\varepsilon_v\sigma_3=\Delta\varepsilon_1(\sigma_1-\sigma_3)_r-\Delta\varepsilon_v\sigma_3 \tag{3.2.7}$$

其中 $\Delta\varepsilon_v$ 是负体变，即体胀。

从上式得：

$$(\sigma_1-\sigma_3)_f=(\sigma_1-\sigma_3)_r-\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1}\sigma_3 \tag{3.2.8}$$

由于其中 σ_3 相等，则

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_f=\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\right)_r-\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1} \tag{3.2.9}$$

在破坏时

$$tg^2\left(45°+\frac{\varphi_f}{2}\right)=tg^2\left(45°+\frac{\varphi_r}{2}\right)-\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1} \tag{3.2.10}$$

由于 $\frac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1}$ 是负值（剪胀），所以在有剪胀情况下的内摩擦角 φ_f 比无剪胀时内摩擦角 φ_r 高。这是由于外力需克服 σ_3 对体胀的阻力所作的额外功。

土颗粒的重排列和颗粒破碎是由于土颗粒间咬合而发生的另两种现象。在较高围压下剪切时，粗粒土单位面积上接触点较少，接触点处局部应力集中，这样就可能产生颗粒接触点破碎屈服，棱

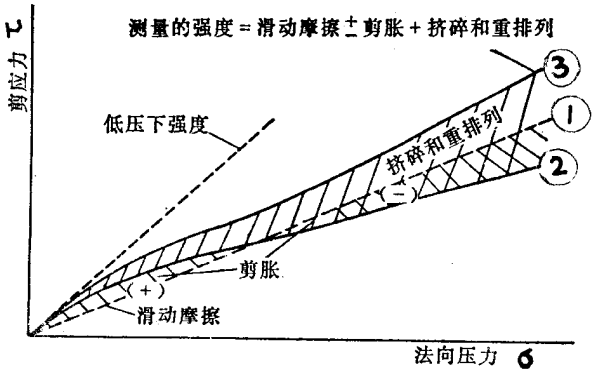


图3-2-6　　砂土的强度包线及影响因素

角颗粒局部边角折断、剪断，这在高围压、大颗粒、弱矿物、针片状颗粒的情况下是非常普遍的。这时试验前后的级配曲线表明，试验后的细颗粒含量明显提高。在一定围压下剪切发生的另一种现象是颗粒的重新定向和重新排列，尤以针片状颗粒在剪切带区内最为明显。这些颗粒破碎、颗粒重排列，均需要外力额外作功，因而也提高了砂土的内摩擦角。从图 3-2-6 可见，在基本是线性的滑动剪切强度之外，剪胀提高了抗剪强度；剪缩（负剪胀）减少了抗剪强度。颗粒的破碎与重定向排列也增加了土的抗剪强度。但是应当看到，由于颗粒破坏，使断裂的颗粒残余部分更容易嵌入孔隙中，不易形成大孔隙，因而大大减少了土产生剪胀的可能性，甚至会发生剪缩。在高围压下，颗粒破碎量大，很少发生剪胀。颗粒的重排列往往会破坏土的原有结构，造成剪胀量减少。从这个角度来看，颗粒的破碎和重排列减少了土的剪胀，与不发生颗粒的破碎和重排列相比，实际上减少了土的摩擦强度。在图 3-2-6 中①代表纯滑动摩擦强度包线；③表示纯粹由剪账（+）与剪缩（-）引起的强度包线的变化；②表示实际的强度包线。

3.2.2　粘聚力

在有效应力情况下，将总抗剪强度扣除了摩擦强度σ′tgφ′，得到的是所谓的粘聚力。从另一个角度看，所谓粘聚力是破坏面没有任何正应力作用下的抗剪强度。由于大多数强度包线都不是线性的，通过外延直线段找其截距确定粘聚力往往是不精确的。而在很多情况下在很低围压下，甚至在无围压（无正应力）的剪切试验也是很难准确的。所以土的纯粹的粘聚力在数值上是难于精确测定的。

土的颗粒间存在着相互作用的力，其中粘土颗粒-水-电系统间的相互作用是最普遍的。颗粒间的相互作用可能是吸引力，也可能是排斥力。土的粘聚力是由于土颗粒间的引力与斥力的综合作用。如在 2.8.4 中所介绍，粘土中的引力主要包括：

1 静电引力

它包括库仑力和离子－静电力。由于粘土矿物颗粒是片状的，在平面部分带负电荷，而两端边角处带正电荷。边－面接触则会相互吸引。另外，由于粘土颗粒带负电，在水溶液中吸附阳离子，两相邻颗粒靠近时，双电层重叠，形成公共结合水膜，通过阳离子将两颗粒相互吸引。见图 2-8-8。

2.范得华力（van der Waals forces）

范得华力是分子层次间的引力。物质的极化分子与相邻的另一个极化分子间通过相反的偶极吸引；极化分子与非极化分子接近时，也可能诱发后者，而与其反号的偶极相吸引。

3. 颗粒间的胶结

粘土颗粒间可以被胶结物所粘接，它是一种化学键。它们包括碳、硅、铅、铁的氧化物和有机混合物。这些胶结材料可能来源于土料本身，亦即矿物的溶解和重析出过程；也可能来源于土中水溶液中。由胶结物形成的粘聚力可达到几百 kPa，这种胶结不仅对于粘土，而且对于砂土也会产生一定的粘聚力，即使含量很小，也明显改变了土的应力应变关系及强度包线。

4. 颗粒间接触点的化合价键

当正常固结土在固结后再卸载而成为超固结，其抗剪强度并没有随有效正应力的减少而按比例减少，而是保留了很大部分的强度。在这个过程中由于孔隙比减少，造成在颗粒间接触点形成初始的化合价键是重要原因。这种化合键主要包括离子键、共价键和金属键，其键能很高。

5. 表观的粘聚力

这种粘聚力一般并非来源于粘土间的胶结和各种键接。例如毛细引力，在部分饱和土中，水的表面张力产生的拉力，它实际上是被负孔压形成的正有效应力而产生的摩擦强度。所以不算是一种真正意义上的粘聚力。

另一种表观粘聚力是机械咬和力。由于颗粒的几何堆积，可以在无任何物理和化学引力的体系中引起表观粘聚力。粗糙表面的咬和可以说明这一点。在图 3-2-7 中，当不施加任何正应力时，由于咬和作用也存在抗剪的阻力。

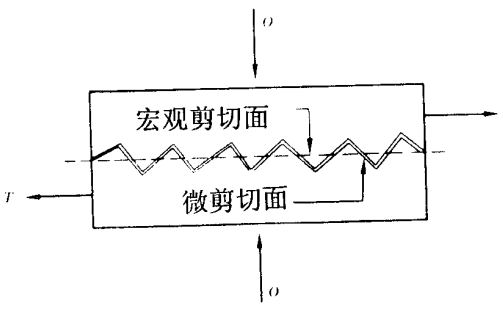


图3-2-7　　由于微观咬合表现的似粘聚力

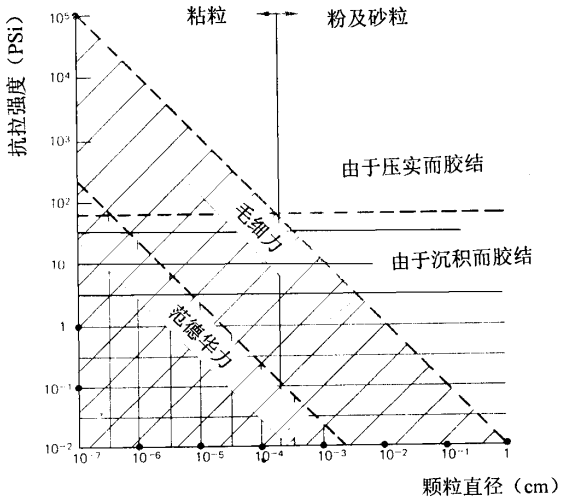


图3-2-8　几种颗粒力对土强度的影响

在上述各项中，除了胶结之外，粘聚力都是来源于颗粒间由于各种内部吸引而产生的正应力。而抗剪强度则是由于这些吸引力而产生的粒间的摩擦。有人认为这种粘聚抗剪强度来源于“内部压力”。据测试分析表明，粒间吸引力引起的粘聚力较小，化学胶结力是粘聚力的主要部分。图 3-2-8 表示土中颗粒间作用力与颗粒尺寸间的关系。

值得注意的是土中水的冻结可以产生土的粘聚力。因而冻土（砂土、粘性土）具有抗拉强度、无侧限抗压强度和抗剪强度。对于冻土其抗剪强度可表示为：

$$\tau_f = c_{(T)} + \sigma tg\varphi_{(T)} \tag{3.2.11}$$

其中 $c_{(T)}$冻土的粘聚力，是温度的函数。以无侧限压缩试验为例，冻土的强度与土的性质、温度、加载速率和时间等因素有关。一般来讲，温度越低，强度越高；瞬时强度明显高于蠕变强度；干密度越大，强度越高。冻结砂土的强度高于冻结粘土，其中冻结细砂具有最高强度。另一个影响因素是围压。对于土，一般讲抗剪强度总是随围压（或破坏面上正应力）增大而增大。冻土抗剪强度一般与围压间无直线关系，并且不是围压的单值函数。当围压达到某值后，冻土由冰开始融化，这一围压叫冰融围压。当围压超过冰融围压时，冻土的三轴剪切强度不增加反而下降，其冰融围压随着强度降低而提高。可见严格讲它不适用于摩尔－库仑强度理论，亦即抗剪强度与作用面上的正应力间不成单值函数关系。图 3-2-9 是冻结粘土的破坏主应力线。可见不同程度地存在着随着围压增加抗剪强度降低的现象。温度越低，冰融围压越高。

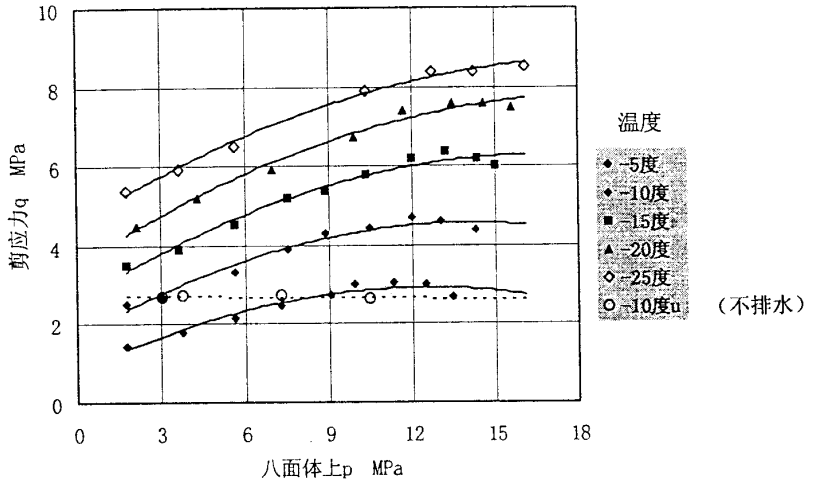


图3-2-9　兰州冻砂的强度

3.3 土的强度与土的物理性质

3.3.1 影响土强度的因素

影响土的强度的因素很多，土的抗剪强度及其影响因素的关系可以定性地写成以下公式：

$$\tau_f = f\left(e,\phi,C,\sigma',c,H,T,\varepsilon,\dot{\varepsilon},S\right) \tag{3.3.1}$$

其中 e 为土的孔隙比，C 代表土的组成，H 代表应力历史，T 表示温度，ε和 $\dot{\varepsilon}$ 分别表示应变和应变率，S 表示土的结构。c 和φ为粘聚力及内摩擦角，它们可以通过不同的试验确定，它也包含了排水条件、加载速率、围压范围、应力条件及应力历史等因素。可见式（3.3.1）式只是一个一般表达式，不可能写成具体函数形式，同时其中各种因素并不独立，可能相互重叠。

纵观式（3.3.1），可以发现各种影响因素可以分为两大类，一类是土本身的因素，主要是其物理性质；另一类是外界条件，主要是应力应变条件，前者可称为内因，后者可称为外因。

1. 内部因素

影响土强度的内部因素又可以分为土的组成（C）、状态（e）和结构（S）。其中土的组成是影响土强度的最基本因素，其中包括：土颗粒的矿物成分，颗粒大小与级配，颗粒形状，含水量（饱和度）以及粘性土的离子和胶结物种类等因素。土的状态是影响土强度的重要因素，比如砂土的相对密度大小是其咬合及因此产生的剪胀、颗粒破碎及重排列的主要影响因素；同样粘土的孔隙比和土颗粒的比表面积决定了粘土颗粒间的距离，这又影响了土中水的形态及颗粒间作用力，从而决定粘性土粘聚力的大小。土的结构本身也受土的组成影响。原状土的结构性，特别是粘性土的絮凝结构使原状土强度远大于重塑土的强度，是不可忽视的影响因素。

2. 外部因素

除了温度以外，外部因素主要是指应力应变因素。包括：应力状态（围压、中主应力）、应力历史、主应力方向、加载速率及排水条件。它们又主要是通过改变土的物理性质而影响土的强度。

这些因素对于不同土的强度的影响十分复杂，有些是目前仍需要进一步研究的课题。

3.3.2 影响土强度的一般物理性质

1. 颗粒矿物成分的影响

如上所述，不同矿物之间的滑动摩擦角是不同的。对于粘土矿物，滑动摩擦角是高岭土>伊利土>蒙脱土。但实际粘土抗剪强度还与结合水及双电层性质有关。土的总内摩擦角也是高岭土>伊利土>蒙脱土。对于粗粒土，含有中性矿物的土，如云母、泥岩等，其滑动摩擦角明显变小。另外，由软弱矿物颗粒组成的土，在较密实状态及较高围压下，相互咬合的颗粒更容易折断和破碎而不是被拔出和翻转引起剪胀，因而软弱矿物抑制了土的剪胀，从而降低了土的抗剪强度。比如由风化岩组成的碎石及堆石其强度包线明显非线性，随着围压增加包线斜率变小，这是由于在较高围压下颗粒的破碎引起的。正常固结粘土中粘土矿物及塑性指数与正常固结粘土抗剪强度关系见图 3-3-1。

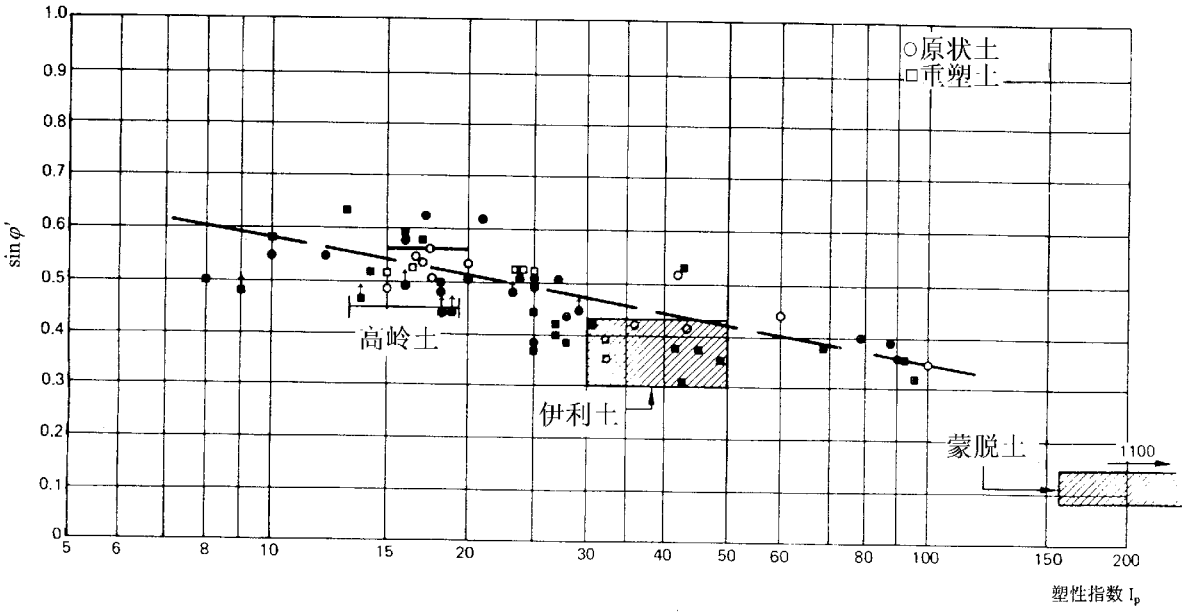


图3-3-1　　正常固结粘土抗剪强度与塑性指数及粘土矿物的关系

2. 粗粒土颗粒的几何性质

对于粗粒土，在孔隙比相同及级配相似时，颗粒尺寸的大小对土强度的影响有两个方面：一方面大尺寸颗粒具有较强的咬合，可能增加土的剪胀，从而提高强度；另一方面，大尺寸颗粒在单位体积中颗粒间接触点少，接触点上应力加大，颗粒更容易破碎，从而减少剪胀，降低了土的强度。对于砂土，如果均匀的细砂与粗砂具有相同的孔隙比，二者的内摩擦角φ基本相同。但由于细砂的 e_{min} 要大，所以这时细砂的相对密度 Dr 要高。

对于堆石坝坝体材料，由于其颗粒尺寸很大，难于用三轴试验等仪器直接试验确定其强度及应力应变关系，这样就有多种方法将颗粒尺寸缩小进行模拟，如 **1.1.3** 所介绍关于这种尺寸缩小对强度的影响还是一个尚待解决的问题。

在其他条件相同时，颗粒表面糙度增加将会增加砂土的内摩擦角。

粗粒土的针、片状形状及棱角加强了颗粒间的咬合作用，从而可提高其内摩擦角。可是另一方面其针片状颗粒更易于折断，棱角处也可能因局部接触应力很大而折损。当围压不是很高时，在同样的围压下，砂土由于单位体积接触点多，颗粒破碎一般不严重，其棱角使抗剪强度增加，碎石土由于单位体积内接触点少，接触应力大，有棱角及针片状颗粒更易破碎，所以其强度提高不明显。在密实状态下，大粒径卵石土有时比碎石土强度高。颗粒尺寸对强度的影响大小也与颗粒矿物、围压等因素有关。

3. 土的组成的其他因素

粗粒土的级配对于其抗剪强度也有较大影响。两种相对密度相同的砂，级配较好的砂孔隙比 e 要小，咬合作用也比较强；另一方面对于级配良好的土，单位体积中颗粒接触点多，接触应力小，颗粒破碎少，剪胀量加大，所以抗剪强度高。

在不考虑孔隙水压力情况下，干砂与饱和砂土的抗剪强度相差不大；在其他条件相同时，干砂的内摩擦角可能比湿砂高 1－2°，但一般认为二者是相同的。

4. 土的状态

对于砂土，其孔隙比或者相对密度可能是影响其强度的最重要因素。孔隙比小，或者相对密度大的砂土有较高的抗剪强度。由于正常固结粘土的强度包线过原点，所以孔隙比对粘土强度指标的影响通常表为其应力历史即超固结比的影响。关于孔隙比与砂土及粘土强度的关系将在以下两节讨论。

5. 土的结构

在 2.8 节我们讨论了土的结构性。土的结构对于土的抗剪强度有很大影响，有时对于某些粘性土，如区域性土或特殊土，可以说是结构控制土的工程性质。图 2-8-10 表示粘土的几种基本组构形式。一般讲在相同密度下，凝絮结构的粘土有更高的强度，天然原状土由于沉积过程中的地质环境，沉积以后的地质活动和应力历史，粘土矿物形成不同的结构形式。一般讲，原状土的结构性使其强度高于重塑土或扰动土；室内试样的制样方法也影响土的组构形式。如图 2-8-12 和图 2-8-13 所示。

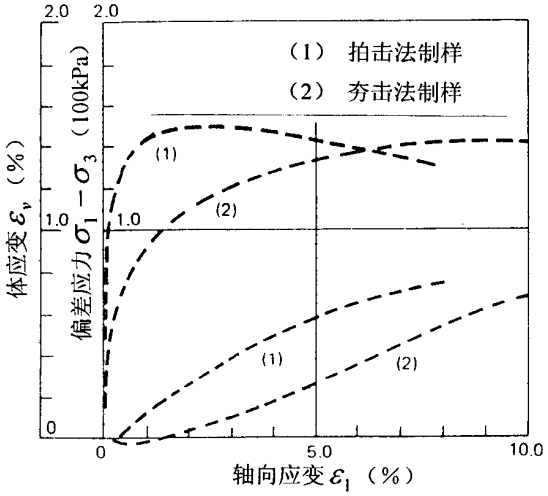


图3-3-2　不同制样方法 e＝0.64 砂试样的三轴试验

图 3-3-2 表示均匀砂土的三轴试验结果。土颗粒是圆滑的，粒径为 0.85mm－1.19mm。颗粒的平均轴长比（即长轴与短轴比）为 1.45。试样孔隙比 e＝0.64。

用两种方法制样：一种是夯击的方法；另一种是在制样模外敲击的方法。对制成的试样切片观测表明，敲击法制样中颗粒的长轴更倾向于平行于水平方向（见图 2-8-2）。其三轴试验的强度、应力应变关系的模量与剪胀性均比夯击试样高。

综上所述，土的物理性质对其抗剪强度的影响可列为表 2－2。

表3－2　影响砂土内摩擦角的物理性质

因素	对内摩擦角的影响
孔隙比 e	e↑　φ↓
棱角 A	A↑　φ↑ （对碎石影响小）
颗粒表面粗糙度 R	R↑　φ↑
含水量 w	w↑　φ↓
颗粒尺寸 S	影响不大，并且不确定
级配	C_u↑　φ↑

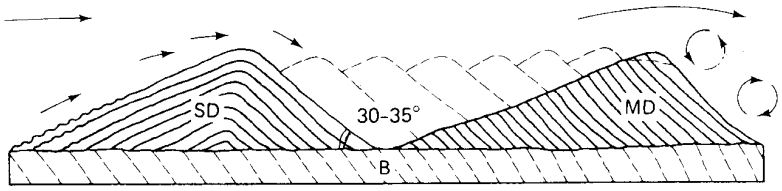
6　剪切带的存在对土的强度的影响

在密砂、坚硬粘土及原状土的试验中，应变软化常常伴随着应变的局部化和剪切带的形成。剪切带处局部孔隙比很小，并且有强烈的颗粒定向作用。剪切带的生成会使土的强度降低。

3.3.3 孔隙比 e 与砂土抗剪强度关系——临界孔隙比 e_{cr}

如上所述，随着孔隙比减小，砂土的内摩擦角φ将明显提高。松砂与密砂在试验中的应力应变关系也有很大区别。

当我们通过一个漏斗向地面轻轻撒砂时，在地面上形成一个砂堆，这个砂堆与水平面夹角就是天然休止角，也是最松状态下砂内摩擦角。图 3-3-3 是天然状态下砂丘例子。其中 SD 是静止砂丘，MD 代表迁移性砂丘。在静止砂丘的背风面坡度角接近于天然休止角；一般为 30°－35°。可见即使在“最松”状态下，其内摩擦角φ_r亦大于矿物滑动摩擦角φ_u，亦即颗粒间存在一定咬合。

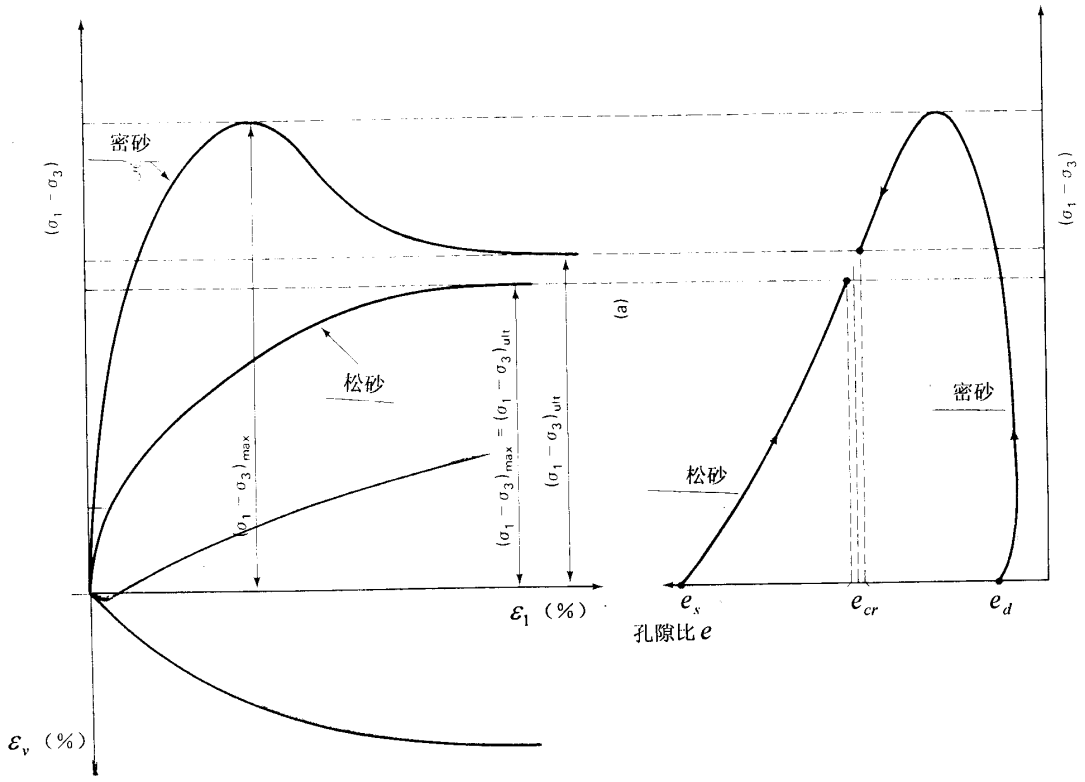


SD：固定砂土

MD：移动砂土

图3-3-3　　风积砂丘及天然休止角

在同一围压下对于松、密两个标准砂试样进行三轴试验。结果表示在图 3-3-4 中，应力差$\sigma_1-\sigma_3$与轴应变及体应变间关系曲线及相应的孔隙比 e 随$\sigma_1-\sigma_3$变化曲线分别表示在（a）与（b）中。可见松砂的应力应变曲线是应变硬化的，并且伴随着试样体积收缩（剪缩），亦即孔隙比减小；对于密砂应力应变曲线是应变软化的，伴随着剪胀，即孔隙比增加。两个试样在加载最后，其孔隙比接近相同，亦即达到临界孔隙比 e_{cr}。所谓临界孔隙比是指在在三轴试验加载过程中，轴向应力差几乎不变时，即达到极限应力差$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$，轴向应变连续增加，最终试样体积几乎不变时的孔隙比。



(a)轴应力差—轴应变—体应变

$\sigma_1-\sigma_3\sim\varepsilon_1\sim\varepsilon_v$

(b) $\sigma_1-\sigma_3\sim e$

图3-3-4 松砂和密砂的三轴试验结果

临界孔隙比也可以叙述为：在某一围压下，用具有临界孔隙比的砂试样进行排水三轴试验，偏差应力达到$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$时，试样的体应变为零；或者固结不排水试验时的孔隙水压力为零。

如果变化围压σ_3进行试验，则发现临界孔隙比是不同的。围压增加则临界孔隙比减小；围压减小临界孔隙比增加。在很高围压下，既使是很密的砂土，三轴试验时也不发生剪胀而是体积收缩。对于 Sacramento 河砂，在不同围压下的临界孔隙比 e_{cr} 的关系见图 3-3-5。

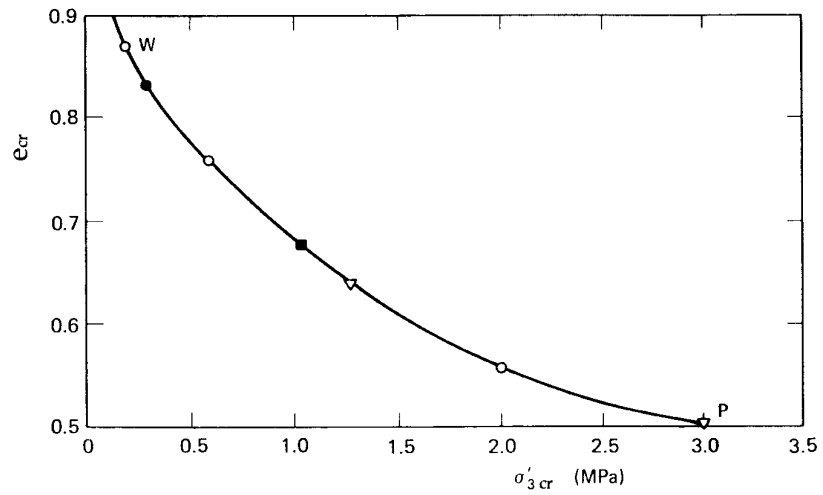


图3-3-5　　临界孔隙比 e_{cr} 与围压的关系

一种砂土在某种围压σ_3 下三轴试验试样破坏时，体变为零的孔隙比为对应这个σ_3 的临界孔隙比；对应于一种孔隙比的试样进行不同围压的三轴试验，试样破坏时体应变为零的围压σ_3 可称为这种砂在这种孔隙比下的临界围压σ_{cr}。

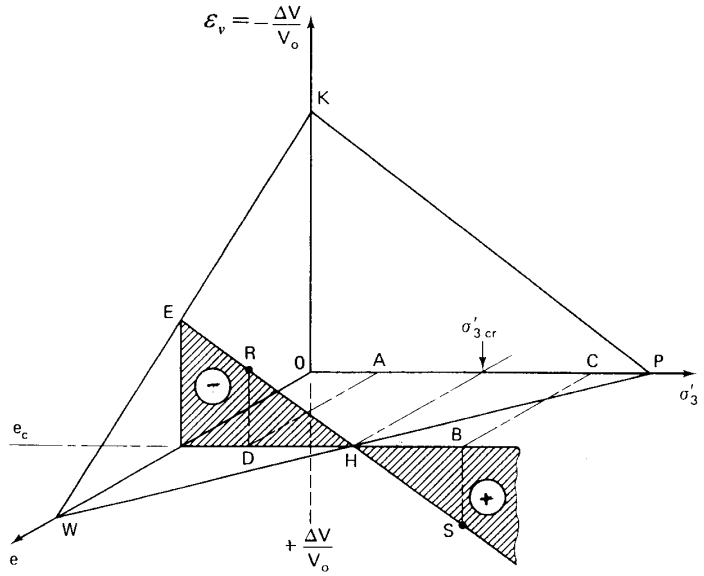


图3-3-6　　砂土三轴排水试验中体应变ε_v，围压σ_3 和试样孔隙比 e 间关系简图

图 3-3-6 表示了三轴试验中围压σ_3，试样孔隙比 e 及试样破坏时体应变ε_v 三者的近似关系，可用一平面 KWP 近似表示。其中平面上的 WP 相当于图 3-3-5 中的$\sigma_{3\,cr}-e_{cr}$ 关系曲线。在图 3-3-6 中，如果砂试样固结后孔隙比为 e_c，则在围压σ_{3cr} 下进行排水试验，破坏的体变为零（图中 H 点），如果围压小于这个σ_{3cr}（A），三轴试验破坏点试样将发生剪胀（体应变为图中 DR）；如果围压大于这个σ_{3cr}（C），三轴试验破坏时试样将发生收缩（图中 BS）。对于砂土，临界孔隙比是一个很有意义的概念。它对于判断饱和砂土的液化及流滑，对于解释砂土中桩侧摩阻力的临界桩长等问题都有重要意义。在基础工程中，夯击、振动、挤压可使地基中松砂加密，但可能将密砂变松。可是另一方面，砂土三轴试验的条件对结果有很大影响，试样中的端部约束、膜嵌入和剪切带的形成与发展将影响试样体变，因而临界孔隙比并不是很容易准确确定的。

砂土的孔隙比对其抗剪强度指标有重大影响，不同级配的的无粘性土（包括粉土 M、砂土 S 和砾石土 G）在不同的密度（孔隙比）下的有效内摩擦角的关系见图 3-3-7。

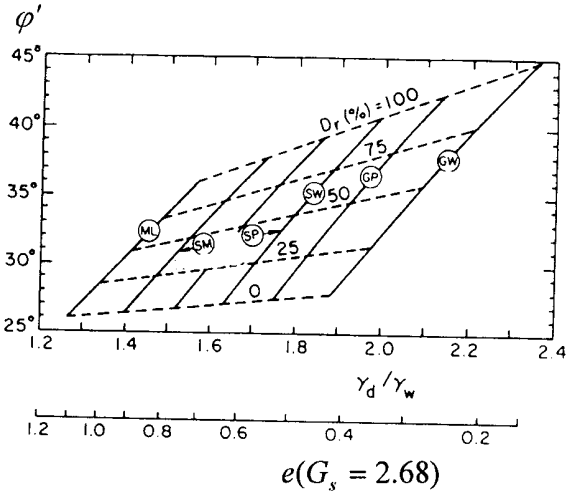


图3-3-7　无粘性土密度和级配对内摩擦角的影响

3.3.4　孔隙比与粘土强度——真强度理论

所谓正常固结粘土是指其历史上的最大固结应力就等于当前受到的有效固结应力。对于地基中的原状土，亦即其历史上的最大固结应力等于现在受到的上覆土自重应力。对于我们在室内制备的重塑土试样，所谓正常固结土就是其历史上的最大固结应力等于我们在试验中施加的围压σ_c。

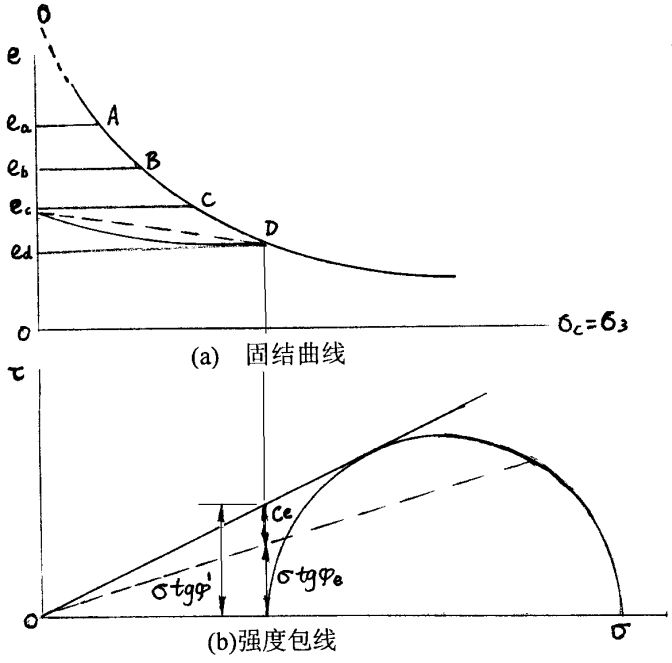


图3-3-8　正常固结土的固结与强度包线曲线

图 3-3-8 表示的是在室内粘土的压缩试验及相应的三轴试验结果。首先将调成泥浆状的粘土浆，在不同围压σ_c下固结压缩得图 3-3-8（a）中 e－σ_c曲线。这时所谓正常固结土就是初始曲线 ABCD 代表的土；而在卸载、加载曲线上的点是超固结土。对于σ_c＝0 的正常固结土，实际上没施加任何有

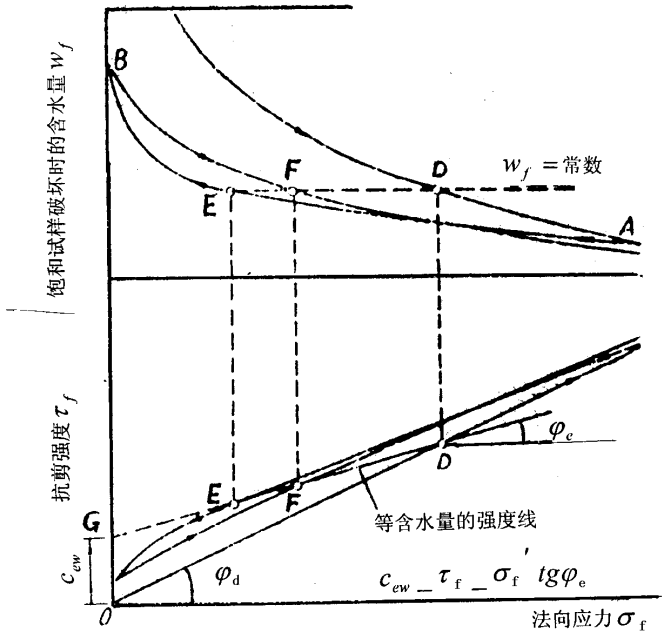
效应力，亦即它所处的调制泥浆状态，因而不具有任何强度，所以在图 3-3-8（b）抗剪强度$\tau_f=0$。亦即正常固结粘土的强度包线应当过原点：

$$\tau_f = \sigma tg\varphi \tag{3.3.2}$$

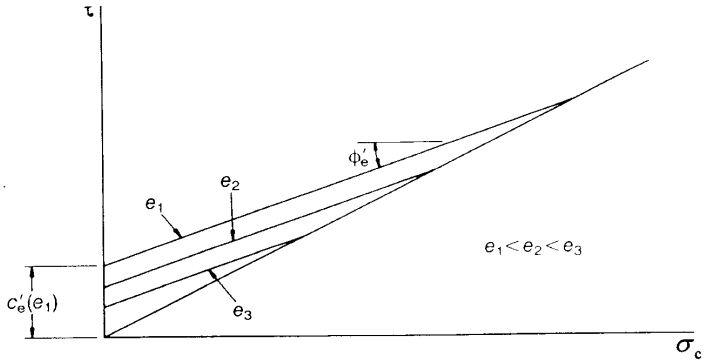
$$c=0 \tag{3.3.3}$$

尽管表观上粘聚力 c＝0，但在上述情况中，我们做的若干三轴试验 O，A，B，C，D 是在不同围压下固结，在施加偏差应力$(\sigma_1-\sigma_3)$之前它们的密度或孔隙比是不同的。试样 O 是未经任何固结的泥浆，$\tau_f=0$，c＝0；试样 A，B，C，D 是在一定围压下固结成形的粘土试样，它们具有不同的孔隙比，也具有不同的密度，土颗粒的距离变小，足以发挥一定粘聚力。只是这种粘聚力也是随围压增加而增加，被$\tau_f = \sigma tg\varphi$这样的公式中的 tgφ所掩盖。所以所谓正常固结土的强度包线是由若干个初始状态不同的试样试验所得到的。

为了反映孔隙比对于粘土抗剪强度及其指标的影响，伏斯列夫（Hvorslev）把抗剪强度分为受孔隙比影响的凝聚分量c_e和不受孔隙比影响的摩擦分量ϕ_e，它们的角标 e 表示等孔隙比。即所谓的“真强度理论”与“真强度指标”的。图 3-3-9（a）表示土样在侧限状态下固结与卸载，然后用直剪试验对经不同应力固结历史的试样进行直剪试验确定抗剪强度及试样在破坏时的孔隙比e_f。



(a)慢剪试验确定真强度指标



(b)不同密度的真强度包线

图3-3-9　　伏斯列夫的抗剪强度

在图 3-3-9 为饱和重塑粘土的直剪试验中，有效垂直压力σ′、剪切破坏面上的含水量ω_f（与剪切破坏面上土的孔隙比 e_f 对应）、抗剪强度τ_f 的关系图。图中 DA 代表正常固结状态的情况；AE 代表回弹状态下的情况；FA 代表再加载状态下的情况。D、E、F 是具有某一相同含水量ω_f（与剪切破坏面上土的孔隙比 e_f 对应）的 3 个点。在图 3-3-9（b）中，E,F, D3 个点近似在同一条直线上。这条直线表明，对于具有相同的破坏时的含水量ω_f 的土试验，在不同的垂直应力σ′下，具有不同的抗剪强度τ_f。

其强度抱线的截距为 c_e，斜率为 $tg\varphi_e$。抗剪强度可表示为：

$$\tau_f = c_e + \sigma tg\varphi_e (\qquad 3.3.4)$$

c_e 被称为“ 真粘聚力 ”，φ_e 被称为“ 真内摩擦角 ”。这个强度公式的最突出之点是同一强度包线上各个试样破坏时的孔隙比（或饱和土的含水量）是相同的，因而至少它是对具有同样密度的试样进行试验整理出的τ_f 与σ_n 间关系。这比正常固结粘土进行三轴试验，用同一条强度包线表示在不同有效垂直压力下，孔隙比完全不同的土试样的强度，更能反映土的强度机理。

从图 3-3-9（a）可见，如果在不同固结应力下卸载，对应不同孔隙比进行试验，则会得到不同强度包线。对于在同一种土不同密度下试验结果表明φ_e 基本不变，而真粘聚力 c_e 是孔隙比的函数。由于正常固结粘土的强度是过原点的直线，所以真粘聚力 c_e 也应当与固结应力成正比，亦即：

$$c_c = \xi\sigma_c \tag{3.3.5}$$

尽管在真强度理论的包线上试样的破坏孔隙比都是相同的，但它们的应力历史及所受的有效应力毕竟不同，从而其微观结构也会不同，因而在剪切变形过程中的体变（排水试验）和孔压（不排水试验）也是不同的，因而 c_e 与$\sigma tg\varphi_e$ 与“ 真正 ”微观意义上的粘聚力与摩擦强度还是有区别的。

3.4 影响土的强度外部条件

影响土强度的外部条件主要有应力、应变、时间、温度等因素，其中应力条件是最基本的。它又包括：围压或小主应力、中主应力、应力历史、应力方向和加载速率等。试验表明，在无明显卸载情况下，应力路径对土的强度及强度指标影响不大。

3.4.1 围压σ_3的影响

从莫尔——库伦破坏准则

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{2}{1-\sin\varphi}\left(c\cos\varphi+\sigma_3\sin\varphi\right) \tag{3.4.1}$$

它表明在三轴试验中，破坏时偏差应力$(\sigma_1-\sigma_3)_f$与围压σ_3之间为线性关系。但对于超固结粘土和许多粗颗粒土，强度包线实际上并不是直线，亦即φ不是常数。这主要如第三节所述的颗粒的咬合而发生的剪胀、颗粒破碎、重排列造成的。所以对于某些碎石，特别是在进行堆石坝进行稳定分析时，一般应考虑土强度包线的非线性。可以表示为：

$$\varphi=\varphi_0-\Delta\varphi\log\frac{\sigma_3}{Pa} \tag{3.4.2}$$

或者

$$\tau_f=A\sigma_n^b \quad (b<1.0) \tag{3.4.3}$$

其中，Pa 是与围压σ_3单位相同的大气压力，A、b，φ_0,$\Delta\varphi$是试验常数。对于大尺寸颗粒，由较软弱矿物或风化岩石组成的颗粒，这种非线性更加明显。

围压σ_3不仅影响土的峰值强度，如第一章所述，也影响了土的应力应变关系及体变关系。图 3-4-1（a）表示 Sacramento 河松砂在不同围压下三轴试验的$\sigma_1/\sigma_3-\varepsilon$及$\varepsilon_v-\varepsilon_1$间关系曲线。可见随着围压增加，破坏时的轴向应变加大，但$(\sigma_1/\sigma_3)_f$只有少量减少。随着围压增加，在剪切过程中体应变不断增加，在较低围压下，松砂也存在轻微的剪胀。对于这种 $e_c=0.87$ 的松砂，其临界围压大约为 200kPa。图 3-4-1（b）表示的是这种砂在密实状态下的三轴试验结果，可见其峰值强度随着围压增加有明显降低，相应的轴向应变加大，图中箭头表示破坏点。在高围压下应力应变曲线基本也是应变软化，并且体应变由剪胀变成体缩。围压从 100kPa 增加到 3900kPa 时，内摩擦角降低达$\Delta\varphi=12°$，这种固结后孔隙比都是 $e_c=0.61$ 的密砂，其临界围压为 17MPa 左右。通过试验得到这种砂土的临界孔隙比与围压间关系见图 3-3-5。

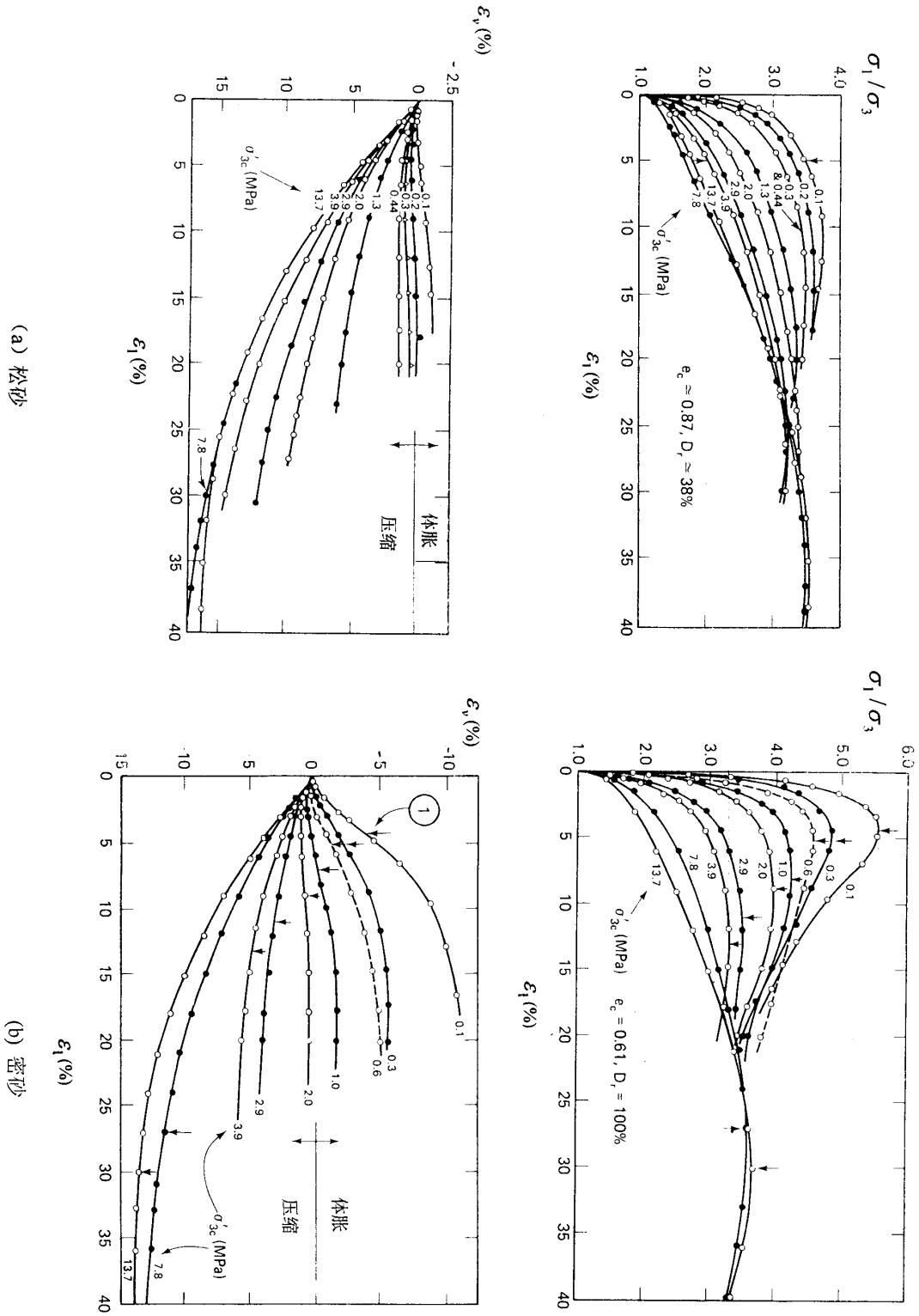


图3-4-1　　不同围压下松砂与密砂的三轴试验

在很高围压下（σ_3=13.7MPa）三轴试验之后，砂的孔隙比 e 只有 0.37，远小于这种砂的“最小孔隙比”。这表明试验中必然有颗粒产生严重的破碎现象，造成土的级配的变化。

在极低围压下（σ_3<10kPa），砂土应力应变和强度特性对于农机、航天、军工、沙漠地区交通等问题有时是很有意义的，由于在很低围压下，即使是很松的砂土也会因颗粒间咬合而产生剪胀性，所以这时对应的内摩擦角有所提高。但这种极低围压下的试验很难精确测定其参数，其中涉及三轴试样端部约束、膜约束、压力室内的静水压力、加载杆的摩擦力以及试样自重等因素都使准确地测定砂土在极低围压下的抗剪强度成为难题。

围压对于粘性土的抗剪强度的影响还表现在其超固结比的影响。实际上反应了应力历史的影响。图 3-4-2 表示的是粘土的三轴排水试验。当围压$\sigma_3>\sigma_p'$时，粘土是正常固结土，其强度包线的延长线过原点；当卸载至$\sigma_3<\sigma_p'$时，土是超固结土，强度包线在正常固结土之上，并且与纵轴有一定截距，在无侧限，即$\sigma_3=0$ 的情况下的排水试验中，真正意义上的粘聚力主要是化学胶结力。由于在无侧限状态下试验受许多边界条件和孔隙水压力、吸力等因素的影响，所以测得的粘聚力是不易准确的。通常是通过几个一定围压下的三轴试验，确定强度包线，外延与纵坐标相交，以交点的截距确定超固结土的粘聚力 c。

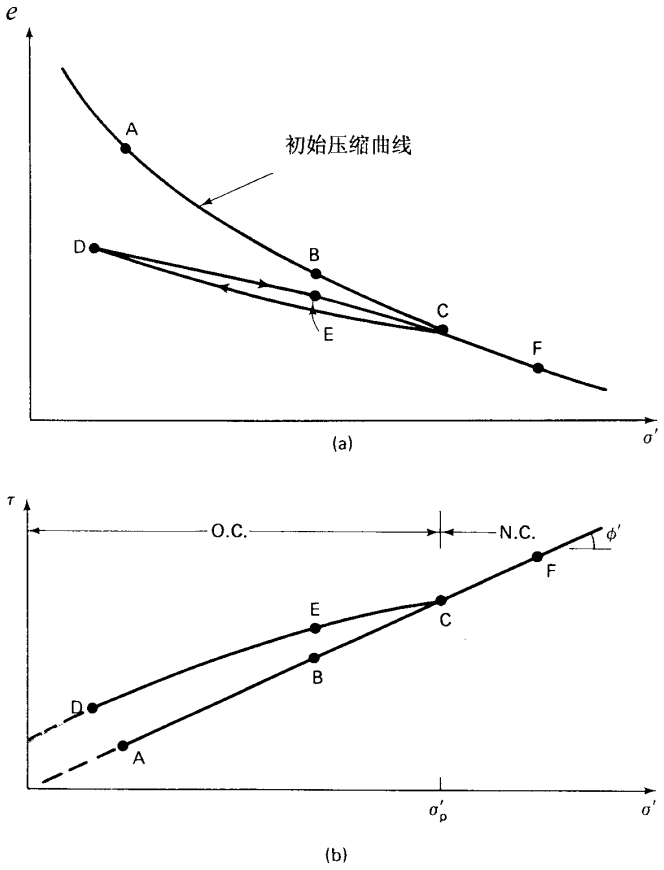


图3-4-2　正常固结土与超固结土的压缩曲线与强度曲线

在高围压下，粘土将发生很大的体积压缩，当它们孔隙比或饱和土的含水量减少到一定程度时，粘土颗粒相互靠近，颗粒间斥力将加大。例如粘土颗粒距离达到 100 $\mathring{A}$（10^{-10} m）时，土粒表面相互作用很明显了。这对于饱和纯高岭土大约相当于含水量为 15%；对于纯蒙脱土，相应含水量为 800%。当粘土颗粒表面有三层水分子（大约厚 10 $\mathring{A}$）时，水将强烈地被粘土颗粒表面吸引。亦即粘土颗粒相距 20 $\mathring{A}$ 时，斥力很大。对于片状的粘土颗粒，如果想将最后几层水分子“挤”走，大约需要 400MPa 压力。因而在高围压下，粘土固结和剪切时体变很小，其应力应变曲线是硬化型的，排水试验的强度包线有下弯的趋势。

3.4.2 中主应力的σ_2影响

中主应力，尤其是平面应变状态下破坏时的中主应力对土的抗剪强度的影响一直是土力学研究的重要课题。尽管这种影响对于不同土及在不同条件下是不同的，但可以肯定的是随着中主应力的增加土的抗剪强度也增加。在常规三轴试验中$\sigma_2=\sigma_3$，因而测得的抗剪强度是最小的。

表示中主应力与其他主应力关系主要用以下两个变量，其中毕肖甫参数 b 为

$$b=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{3.4.4}$$

可见它可从 0 变化到 1.0。b＝0 对应常规三轴压缩试验；b＝1 对应三轴伸长试验。另一个变量是应力洛德角θ，见式（2.2.32）

$$\theta=tg^{-1}\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}$$

当θ＝－30°对应 b＝0，为常规三轴压缩试验应力状态；θ＝＋30°，b=1。

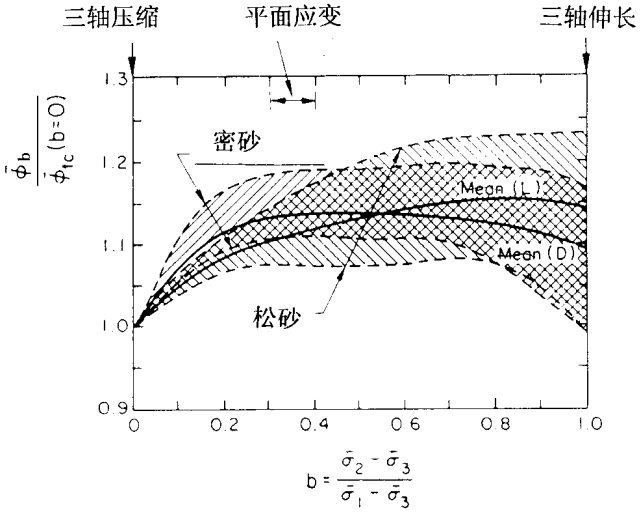


图3-4-3　在 Ham 河砂土上的真三轴试验结果

图 3-4-3 表示了对 Ham 河砂的松、密状态用各种真三轴仪进行的各种真三轴试验结果总结，尽管试验仪器、试验方法及真三轴试验的边界条件都有一定影响，得到结果有较大离散，但大体的趋势还是可以看出的：在 b 从 0 增加到 0.3（相当于平面应变破坏时的应力状态）时，松砂和密砂的内摩擦角φ有较明显提高，随后，随着 b 增加，φ增加缓慢或基本不变。

中主应力增加将增加平均主应力从而使土有较多压密；另一方面在破坏时σ_2方向的应力较大，增加了对土颗粒的约束和咬合作用。莫尔—库伦强度理论完全不计中主应力的影响，用常规三轴压缩试验确定的内摩擦角是偏于保守的，但由于破坏及伴随的剪切带都发生在$\sigma_1-\sigma_3$平面上，σ_2的影响毕竟是次要的，忽略这种影响往往是足够近似的，也是偏于安全的。

平面应变状态下土的抗剪强度明显高于常规三轴压缩试验情况。值得说明的是平面应变方向，即$\varepsilon_y=0$方向的主应力σ_y不一定总是中主应力。在大主动主应力σ_z与小主动主应力σ_x之比为 k 的平面应变等比加载情况方向下，根据广义虎克定律，$\varepsilon_y=0$方向主应力

$$\sigma_y=\nu(1+k)\sigma_x \tag{3.4.5}$$

这样当 k<(1-ν)/ν时，σ_y将变成小主应力。在平面应变卸载时，平面应变方向常出现残余应力或卸载屈服现象，这时σ_y可能成为大主应力。只有在平面应变条件下土体发生破坏时，平面应变方向上主应力才总是中主应力，并且 b＝0.3－0.4。对于正常固结粘土，平面应变与三轴压缩状态下的内摩擦角关系见图 3-4-4，它总结了 12 种原状粘土试验结果，可表示为：

$$\bar{\varphi}_p = 1.1\bar{\varphi}_t \tag{3.4.6}$$

或

$$\bar{\varphi}_p = \frac{9}{8}\bar{\varphi}_t \tag{3.4.7}$$

其中 $\bar{\varphi}_p$ 为平均平面应变压缩的内摩擦角；$\bar{\varphi}_t$ 为平均的三轴压缩试验内摩擦角。

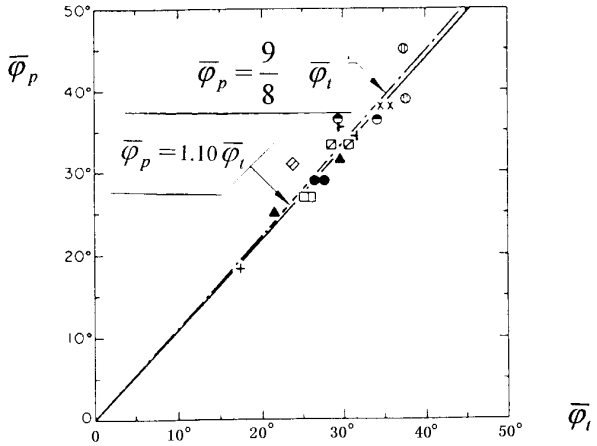


图3-4-4　正常固结粘土的三轴压缩及平面应变试验的内摩擦角关系

对于砂土，在一般工程范围内，平面应变状态下的内摩擦角也比三轴压缩高，对于密砂可高 4°－9°；对于松砂可高 2°－4°。但是随着围压的增加，二者的差别越来越小。当σ_3＝30MPa 以后，平面应变与三轴压缩的内摩擦角差别就很小了。这是由于在高围压下砂土很难发生剪胀，因而σ_2 的约束作用和压密作用就变得不明显了。如图 3-4-5 所示。对于砂土，Ramamurthy 建议如下的经验公式：

对于松砂　$$Sin\varphi_p + 3(\frac{1}{Sin\varphi_t} - \frac{1}{Sin\varphi_p}) = 1 \tag{3.4.8}$$

对于密砂　$$3Sin\varphi_p - Sin\varphi_t\,(Sin\varphi_p + Cos\varphi_p) = 2Sin\varphi_t \tag{3.4.9}$$

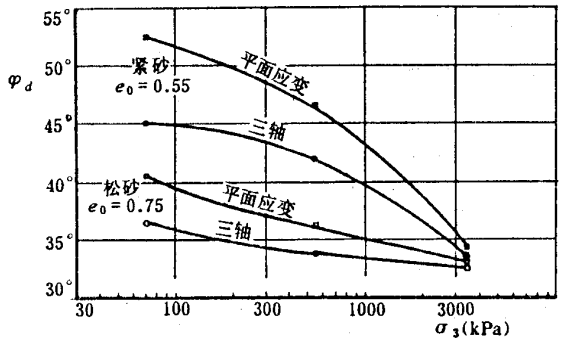


图3-4-5　不同围压下平面应变和三轴压缩的砂土内摩擦角比较

3.4.3　主应力方向的影响——土强度的各向异性

土的结构性造成土强度的明显的各向异性，亦即在不同主应力方向下土的抗剪强度不同。同样，在地球重力场中，天然土的风化、堆积、搬运、沉积和固结过程中不可避免地受重力影响。即使是主要由石英矿物组成的经过严格筛选的均匀砂土颗粒，其长宽比大于 1.4 的颗粒含量也超过一半。

其他矿物的针片状颗粒的比例更高。这些颗粒的长轴由于重力而倾斜于平行地面方向沉积和排列。如 2.8 中所介绍。

在图 3-4-6 中沿 AB 面，颗粒长轴基本平行于该平面，在剪切力作用下，比较容易滑动破坏；对于 CD 平面，颗粒间交叉咬合，颗粒间接触应力的竖向分量大得多，剪切必将引起颗粒的错动的和重排列，所以较难于滑动破坏，表现较高抗剪强度。

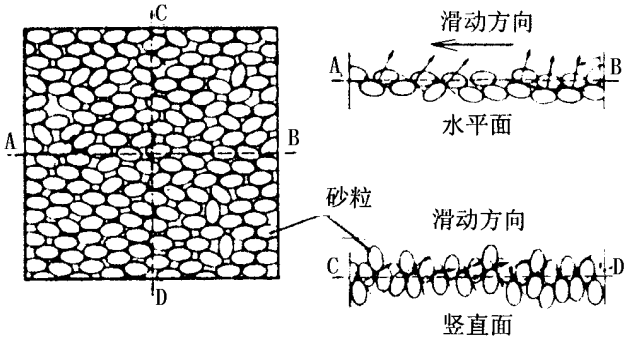


图3-4-6　　土中颗粒的排列与抗滑阻力

既使是完全圆球状的颗粒在重力场中沉积或制样也可形成各向异性的排列。在图 2-8-1 中（a）表示颗粒的立方体排列，是最疏松状态 e＝0.91，处于不稳定状态，抗剪强度很低，在水平和竖直方向抗剪强度一样。其他几种情况都表现一定程度的抗剪强度各向异性。

图 3-4-7 表示的是模拟天然的密实砂土的试验结果。首先在一个大槽子中用砂雨法制样，制成孔隙比为 e=0.515 的密砂。然后在不同方向取立方体试样进行三轴试验，其中θ表示σ_1方向与水平方向的夹角。可见沿制样沉积面的垂直方向（θ＝90°），即常规制样的三轴压缩试验时，得到的内摩擦角最大；沿制样沉积面方向施加大主应力时，内摩擦角最小，两者差别在 2 度左右。

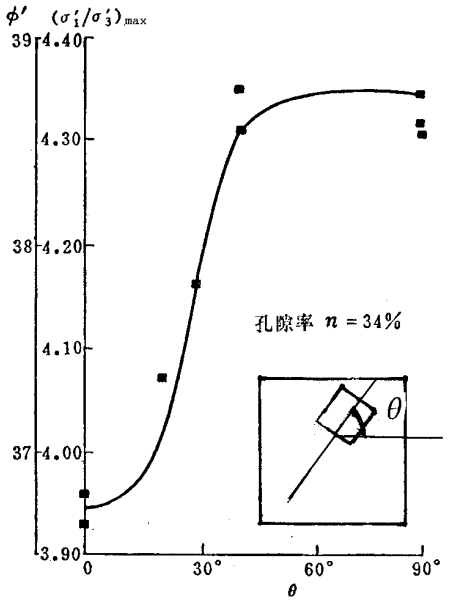
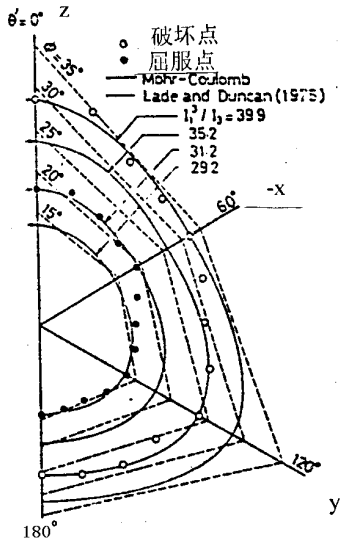
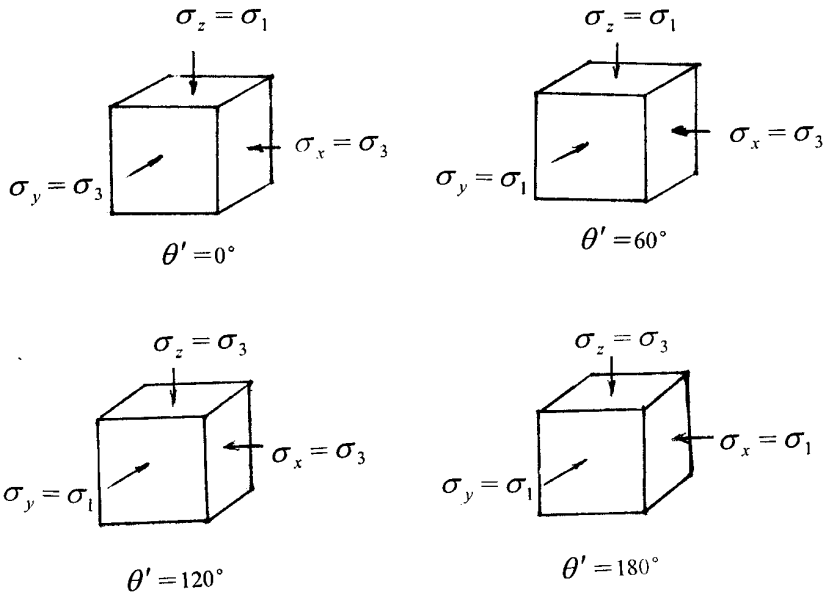


图3-4-7　　主应力方向对砂土强度的影响



(a)　砂土π平面上强度



(b)　不同θ'对应的应力状态

图3-4-8　在π平面上的真三轴试验结果

图 3-4-8 是用粒径为 0.125mm－0.42mm 的玻璃珠组成的模拟砂土。比重 G＝2.476，最大孔隙比 e_{max}＝0.731，最小孔隙比 e_{min}＝0.491。将模拟砂土均匀地用砂雨法撒入立方体制样盒中，制成孔隙比 e＝0.719 的松试样，然后进行真三轴试验。其中以 z 为垂直方向，x，y 为两个水平方向，定义应力洛德角θ′：

$$tg\theta'=\frac{\sqrt{3}(\sigma_y-\sigma_x)}{2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y} \tag{3.4.10}$$

其中不同的θ’所代表的应力状态如图 3-4-10(b)所示，如果土是各向同性的，则在 0－60°、60－120°和 120－180°各角域的强度线应当是相同的。但图 3-4-10 表明在在θ’＝0－60°时土的内摩擦角（或抗剪强度）最高；θ’＝120－180°时最低。最大可差 10°左右。这个图中的强度变化主要由两个因素引起：大主应力方向与中主应力的大小。大主应力方向越接近竖直方向，中主应力越高，抗剪强度越高。综合两个因素可见，θ’＝30°左右时，土的内摩擦角φ最高，达到 35°，θ’＝120°时φ最低，只有 24°。所以试验点偏离莫尔—库伦强度轨迹。

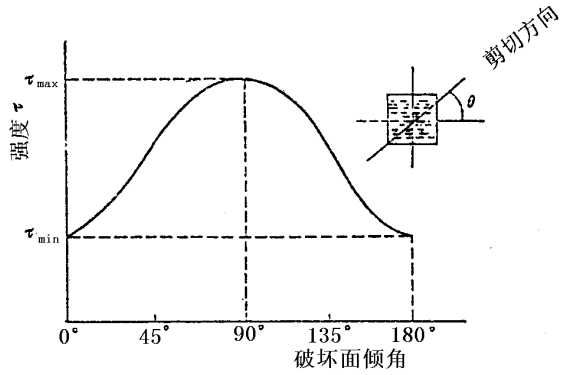


图3-4-9 粘性土直剪试验中剪切方向对强度的影响

粘性土的抗剪强度同样受应力方向的影响，也是各向异性。图 3-4-9 表示的是对一种天然沉积的正常固结粘土，沿不同方向切取试样进行直剪试验的结果，可见当剪切面与试样的沉积层面垂直时（θ＝90°）抗剪强度最高。原状粘土的不排水强度也是和剪切方向有关的。例如在十字板剪切试验中沿水平方向的抗剪强度τ_{fh}常常比沿垂直方向抗剪强度τ_{fv}大，这主要由于在水平平面上固结应力σ_v大。但对于强超固结土，可能水平方向的正应力更大，而$\tau_{fv} > \tau_{fh}$。图 3-4-10 表示不同粘土在三轴不排水强度与主应力方向的关系。其中α表示剪切破坏面与水平方向的夹角；β表示试样轴向与水平方向夹角。在土 K_0 固结时的大主应力方向为竖直方向。图中纵轴表示在不同角度时的不排水强度与β＝90°时的不排水强度之比，即$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)_\beta \Big/ \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)_{\beta=90^\circ}$。可见粘土的不排水抗剪强度强烈的各向异性，它与土质、埋深、超固结比等因素有关，研究表明，它们的有效应力强度指标 c’、φ’受主应力方向的影响较小，以上的各向异性主要由不同加载方向产生不同孔隙水压力引起的。

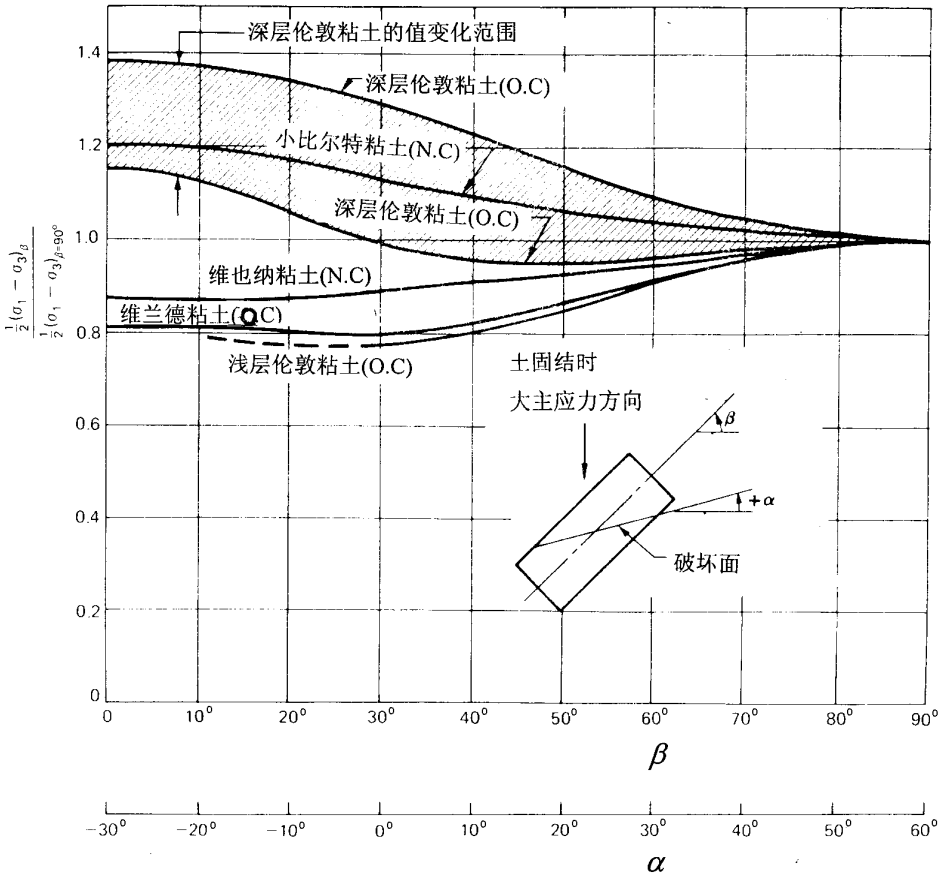


图3-4-10　各种粘土不排水强度与主应力方向关系

土的强度的各向异性在实际工程中一般考虑不多，这是由于土工问题中的荷载主要是自重荷载，其方向是垂直的，与一般确定土的　　强度指标的试验的情况相近。但有些工程问题，比如旁压仪试验确定土强度，计算土被动土压力，用圆弧法计算抗滑稳定问题时，土强度的各向异性会有较大影响。

3.4.4　土的抗剪强度与加载速率的关系

这里所谓的时间分为三类，一类是极短的时间或很快的加载速率，这表现为土的动力或瞬时强度问题；第二类是常规的加载速率，它主要涉及土的排水对强度的影响；第三类是很慢的加载速率或时间的停顿，它涉及土的流变强度及土强度的时效性。

1. 瞬时加载下土的动强度

在冲击荷载下，土的强度一般有所提高。这可能与土的破坏需要一定能量有关。对于饱和土控制土强度的往往是产生的超静孔压。

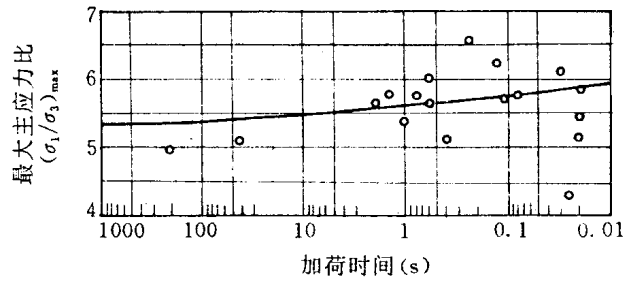


图3-4-11　干砂强度与加载时间关系

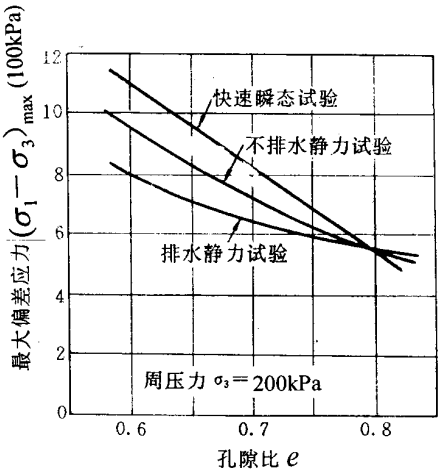


图3-4-12　不同加载条件下最大偏差应力与孔隙比关系

对于干砂冲击试验强度一般为静加载强度的 1.1－1.2 倍。图 3-4-11 表示不同加载速率下三轴试验$(\sigma_1/\sigma_3)_{max}$ 的变化情况。对于饱和砂土，在冲击荷载下，来不及排水，相当与不排水情况。对于密砂由于剪胀趋势而产生负孔压，从而大大提高了抗剪强度；对于很松的砂由于产生正孔压力，冲击荷载下强度低于静力试验强度。见图 3-4-12 所示，在对应于围压σ_3=200kPa 下的临界孔隙比 e＝0.79 时，静力加载下的排水、不排水强度及瞬时强度基本相同。

粘性土的静荷载及冲击荷载下三轴试验的强度试验见图 3-4-13。两曲线表明，冲击荷载下粘土的动强度有很大提高。加载时间为 0.02s 的动强度约为加载时间为 8 分钟左右（465s）的静强度的 2 倍左右。

理查德（Richart, F. E）将土在冲击荷载下动强度用下式表示：

$$(\tau_{\max})_d = K(\tau_{\max})_s \tag{3.4.11}$$

式中$(\tau_{max})_d$ 和$(\tau_{max})_s$ 分别为土的动、静抗剪强度；K 为应变速率系数。K 有如下影响因素：

（1）K 与土的性质有关

对于干砂，K 约为 1.1－1.2；对于饱和粘土 K 为 1.5－3.0；对于部分饱和粘土 K=1.5－2.0。

（2）K 随着围压的增加而增加

例如对于一种密砂，当围压小于 588kPa 时，K=1.07，高于 588kpa 时 K 可达 1.2。

关于循环及振动加载情况下土的动强度将在土动力学中介绍。一般认为，在循环加载时土的有效应力强度指标与 静力试验的有效应力强度指标 c’、φ’十分接近，循环及振动荷载引起的超静孔压是二者强度差别的主要原因。

2. 土的蠕变强度

室内的强度试验，既使是排水试验，一般均可在几十分钟或几小时、十几小时内完成。然而在极慢的加载速率时，某些土会在远低于常规强度试验下的峰值强度时发生破坏，有时甚至只为后者的 50%。这种情况被称为蠕变破裂。粘土的蠕变及应力松弛见图 2-3-8。

在饱和的敏感性高的软粘土的不排水条件下，和在强超固结土的排水条件下，与常规试验强度相比，蠕变强度下降最明显。

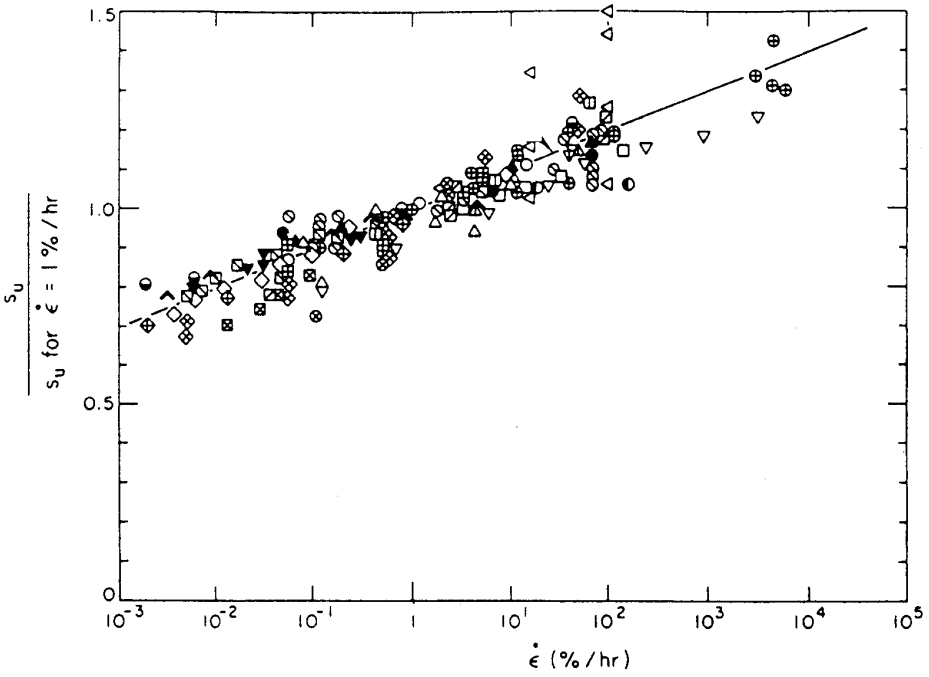
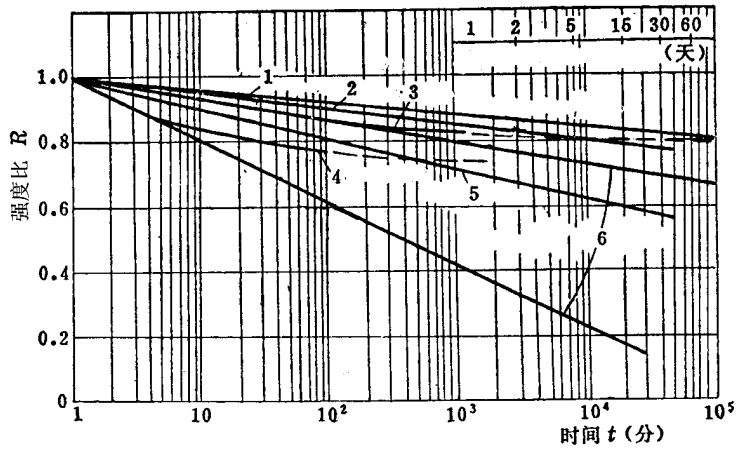


图3-4-13　应变率对不同粘土的不排水强度的影响

在不排水条件下蠕变，土中的孔隙水压力可能增加，可能减少，也可能基本不变。26 种粘土的不排水强度与应变速率的关系见图 2-4-13。可见随着应变速率的减少，或加载时间加长，土的长期强度降低，它与应变速率的对数呈线性关系。可近似表示为：

$$\frac{s_u}{s_{u|\%/小时}} = 1 + 0.10 \log \dot{\varepsilon} \tag{3.4.12}$$

其中 $S_{u|\%/小时}$表示每小时应变为 1%的常规不排水试验强度，S_u 为不同应变速率下的不排水强度。



1—墨西哥城粘土；2—剑桥粘土；3—比尔饱和粘土页岩；4—密西西比粘土；5—俄亥俄斑脱土；6—柯克劲卡粘土

图3-4-14　强度与加载时间关系

尽管土的强度随加载速率的减小而减小，但它还是不会无限减小，存在一个极限值。图 3-4-14 是几种原状粘土页岩在保持含水量不变情况下进行不同加载时间得到的无侧限抗压强度试验。所示曲线是在各试样上施加不同轴向荷重测得破坏时的时间。其中从加载一分钟的强度 q_1 为基准，$R=q/q_1$。可见强度与加载时间之间也是对数关系。

在许多情况下，土的蠕变强度对于土工问题有重要意义。例如土坡的稳定问题，破坏可能从土体的局部高应力水平区开始，向外逐步扩展，达到土体剪切破坏发生滑坡。深层蠕变可经历很长时间，甚至几年；而剪切破坏则很快发生。许多天然滑坡就是这样发生的。挡土建设物中的土压力也受蠕变的影响。如果墙相对于土向外位移，则墙上的土压力逐渐减少到主动土压力。但位移停止后由于土中应力松弛，需要挡土墙承担更大土压力，所以作用于墙上土压力会逐渐增加，或者说是由于土的长期强度降低而使主动土压力增加。例如在软粘土中开挖的基坑，如果基坑暴露时间过长，其支护结构可能会由于土的流变性而产生的应力松弛而破坏。

3. 土的时效性——拟似超固结土

正常固结粘土在一定压力（如自重压力）下固结，当超静孔隙水压力完全消散时，主固结已经完成。但如果此压力长时间继续施加，由于土的流变性而发生的次固结会使它继续压缩变密，从而使粘土颗粒间进一步接近使粒间力加强和胶结材料凝固。在成千上万年的有效应力作用下，次固结使这种正常固结的老粘土表现为类似超固结土的特性。图 3-4-15 表示地质历史对于正常固结土密度的影响。在实际自重应力 P_0 作用下，对于新近沉积的正常固结土其孔隙比为 e_0；对于固结了一万年的土，其孔隙比为 $e_0^{'}$，它相当于新近沉积正常固结土（或室内正常固结土）在 p_{cq} 下的孔隙比。在 NCL 上，$P_{cq}>p_0$，只有上覆应力大于 p_{cq} 时，该土才会发生变形。这种老正常固结土有与超固结土相似的特性，被称为“拟似超固结土”QOC（Quasi-over consolidation）或正常固结老粘土（Normal consolidation aged clay）。其中 p_0/p_{cq} 称为拟似超固结比（QOCR）。

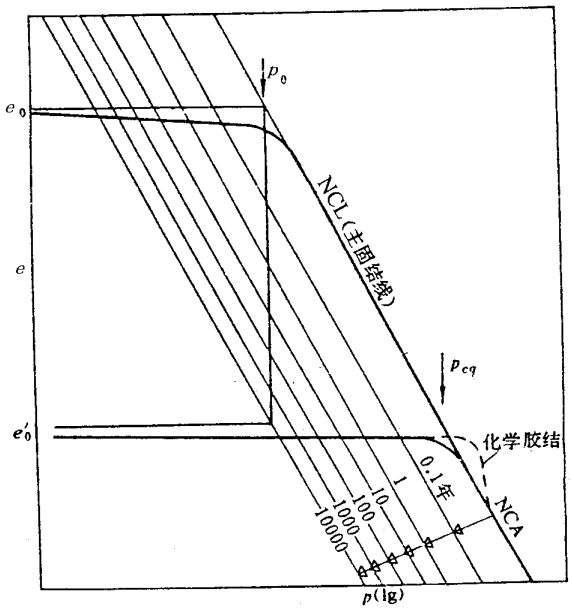
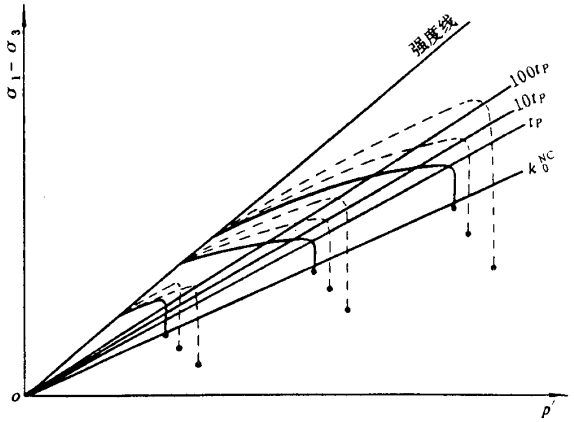


图3-4-15　新老正常固结粘土的压缩特性

由于拟似超固结具有超固结土的特性，所以其抗剪强度也明显高于正常固结土。其有效应力路径见图 3-4-16，可见随着荷载施加时间的延续，静止土压力系数 K_0 有所提高。不排水强度$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$提高，但其残余强度度比较接近于正常固结土。



t_p—主固结完成时间

图3-4-16　不同次固结历时的有效应力路径

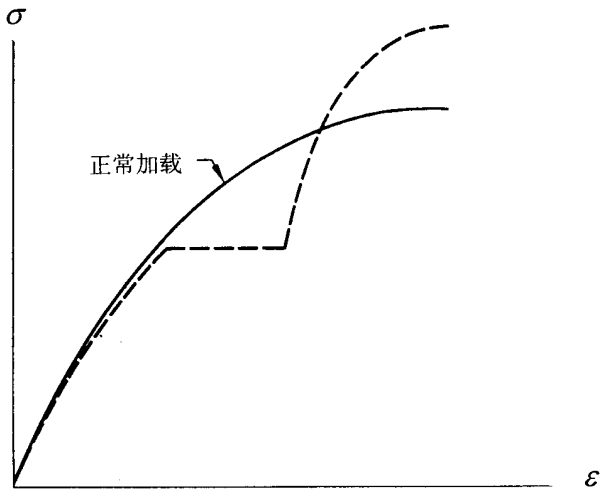


图3-4-17　加载停顿对土应力－应变－强度的影响

不管砂土与粘土，当在正常试验中保持应力状态不变而加载停顿或者在接近破坏时有一个应力循环时，再继续试验其强度往往有所提高，应力应变曲线的斜率增加，见图 3-4-17。可能是由于颗粒位置的重新调整，对于粘土则可能由于蠕变，造成次固结。当然，上述试验也可能在加载停顿过程中发生蠕变破坏而使强度降低。

3.4.5　温度与土强度关系

温度主要是通过对饱和粘土中的孔隙比的作用而影响土的强度。由于在较高温度下，水的粘滞性变小，渗透系数增加，从而在高温下固结的饱和粘土的孔隙比减小，因而固结温度 T_c 越高，土的密度也越高。但是在不排水情况下剪切时，较高的剪切温度可能产生较高超静孔隙水压力，减少土的有效应力，从而使土的抗剪强度下降。所以强度常常随剪切温度 T_s 升高而下降。图 3-4-18 表示的是高塑性的淤积粘土的固结不排水直剪试验结果。在竖直压力 p_c＝408kPa 下固结时，可见随着固结温度 Tc 提高，在同样剪切温度下试验得到的土的强度也越高；在同样固结温度下固结的试样，剪切温度越高，土的固结不排水剪切峰值强度也就越低。

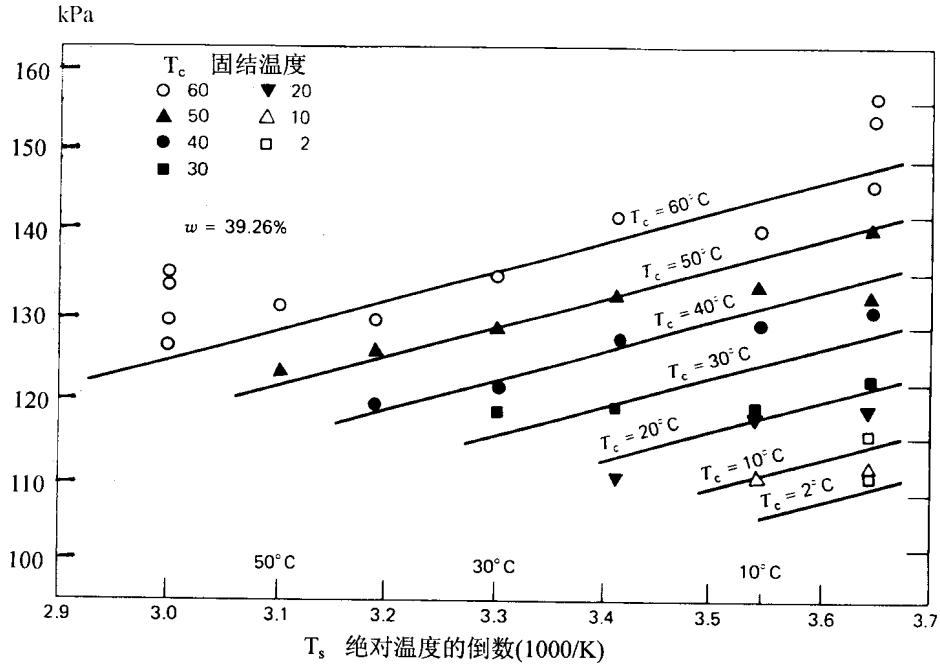


图3-4-18　固结温度 Tc 和剪切温度Ts 对粘土固结不排水抗剪强度的影响

3.5 土的排水与不排水强度

3.5.1 有效应力原理及孔压系数

1. 有效应力原理

土的抗剪强度中摩擦力是由作用在颗粒上的法向应力决定的。根据有效应力原理，作用在饱和土体上的总应力由土中的两种介质承担，一是孔隙水中的孔隙水压力，另一种是土颗粒形成的骨架上的有效应力。而土的抗剪强度是由有效应力决定的。

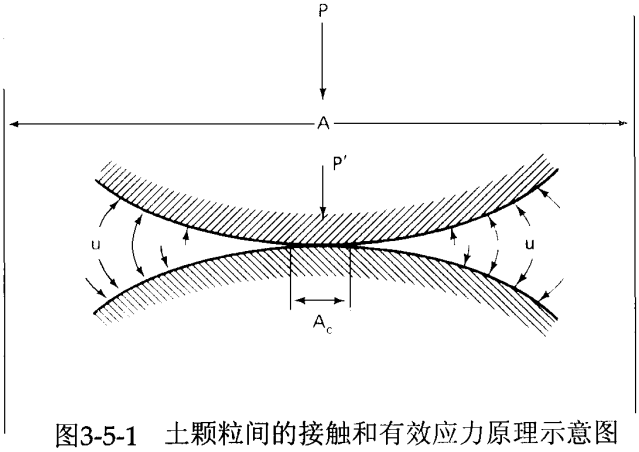


图3-5-1 土颗粒间的接触和有效应力原理示意图

图 3-5-1 表示的是饱和土中荷载和力的传递情况的示意图：作用在面积 A 上的总的垂直荷载是 p，它由土中的颗粒间接触压力 p'和静水压力$(A-A_c)u$ 共同承担的，亦即：

$$p = p' + (A - A_c)u \tag{3.5.1}$$

其中 A_c 为颗粒间接触面积。上式两侧分别除以总面积 A

$$\frac{P}{A} = \frac{P'}{A} + \left(\frac{A - A_c}{A}\right)u \tag{3.5.2}$$

又可表示为

$$\sigma = \sigma' + \left(1 - \frac{A_c}{A}\right)u \tag{3.5.3-1}$$

$$\sigma = \sigma' + (1 - \alpha)u \tag{3.5.3-2}$$

其中α是颗粒间接触面积与总面积之比。由于颗粒间的接触可近似为点接触，α近似为 0，则上式可近似表达成：

$$\sigma = \sigma' + u \tag{3.5.4}$$

这就是最早为太沙基所提出的饱和土体有效应力原理的一种数学表达式。从式（3.5.4）可见所谓的有效应力σ'实际上是一个虚拟的物理量。首先它并不是土颗粒间的接触应力，从图 3-5-1 可见实际的接触应力可能非常大，并且各接触点的接触应力方向和大小各不相同，有效应力σ'只是土体单位面积上的所有颗粒间接触力的垂直分量之和，它是很有用的概念。颗粒间接触应力用有效应力来表示，对于砂土和砾石是比较清楚的。对于粘土矿物，由于它们是片状的和为结合水膜所包围，所谓的粒间接触应力及孔隙水压力都很难分清和解释。但是许多试验和分析都表明，式（3.5.4）这一简单表达式对于砂土和粘土都是适用的。有效应力原理对于土力学理论和工程实际问题都是非常重要和有用的概念。但是对于非饱和土，式（3.5.4）不再适用。目前对于非饱和土的简便实用的有效应力原理的公式尚有待探讨。另外有一些孔隙介质，它们的固体不是成颗粒状存在，而是连续的，

这样无法取一个截面而不切割固体本身。式（3.5.3-2）中的α不能忽略，所以公式（3.5.4）的简单形式一般不能直接用于如混凝土、岩石和轻质泡沫等材料。除非是存在着连通裂隙的强风化破碎岩体。

由于土的抗剪强度是由有效应力决定的，而在许多情况下，我们所能量测和计算的只有总荷载 p 或总应力σ，这样在分析有关土的强度问题时，就不可避免地涉及总应力强度和有效应力强度，或者说是土的排水与不排水强度。

2. 三轴试验应力条件下孔压系数 B 和 A

孔隙水压力系数用于表示超静孔隙压力增量和总应力增量的关系，对于三轴应力状态，土单元的三个应力增量分别为 $\Delta\sigma_1$、$\Delta\sigma_2$ 和 $\Delta\sigma_3$，其中 $\Delta\sigma_2=\Delta\sigma_3$，$\Delta\sigma_1>\Delta\sigma_3$，对应的孔隙压力增量 Δu。对大多数土工问题将主应力增量分成两部分考虑较为方便，即各向等压增量 $\Delta\sigma_3$ 和偏应力增量 $\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3$。前者相应的孔隙水压力增量为 Δu_0，后者相应的孔隙水压力增量为 Δu_1，$\Delta u=\Delta u_0+\Delta u_1$。

(1) Δu_0 的计算

设
$$\Delta u_0 = B\Delta\sigma_3 \tag{3.5.5}$$

式中 B 为孔隙压力系数，$B=\dfrac{1}{1+n\dfrac{C_v}{C_s}}$。

C_s 代表土骨架的体积压缩系数，C_v 代表孔隙流体的体积压缩系数，n 表示孔隙率。

对于饱和岩土，水压缩系数 C_v 很小。在岩石中，结构的刚度很大（C_s 也很小），故 B 值较小，而土的压缩性大（C_s 较大），故对饱和土而言，B 值取 1；对非饱和土，B 值依赖于饱和度 S_r，参见图 3-5-2。饱和岩石和土的 B 值可计算并列于表 3-3。

表3－3　　孔隙压力系数 B 的计算值

块石或土	C_s ($10^{-4}\times kPa^{-1}$)	n (%)	B
巴斯石灰岩	0.06	15	0.468
滑　石	0.25	30	0.647
密　砂	15	40	0.988
硬粘土	80	42	0.997
软粘土	400	55	0.999

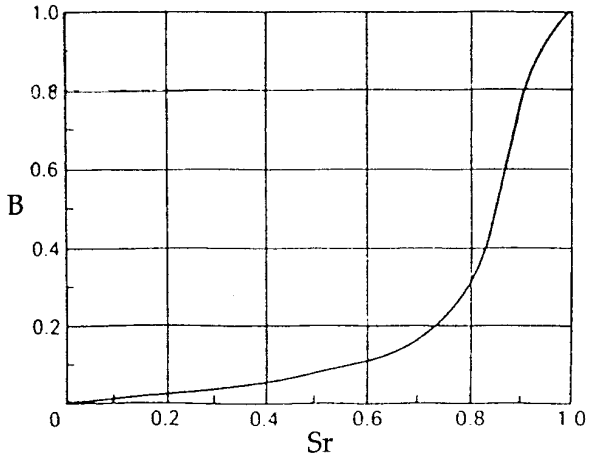


图3-5-2　孔隙压力系数 B 和饱和度 Sr 关系

(2)　Δu_1 的计算

大主应力方向的偏差应力增量 $\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3$，产生了相应的孔隙水压力增量 Δu_1，在常规三轴压缩试验中，$\Delta\sigma_3=0$，大主应力方向有效应力增量为 $\Delta\sigma_1'=(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)-\Delta u_1$，而小主应力有效应力增量为，$\Delta\sigma_3'=0-\Delta u_1=-\Delta u_1$。对理想弹性材料而言，

$$\Delta u_1=\frac{1}{3}B(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3) \tag{3.5.6}$$

表 3-4　孔压系数 A_f 参考值

土的类型	A_f
高灵敏粘土	0.75-1.5
正常固结粘土	0.5-1.0
轻微超固结粘土	0-0.5
重超固结粘土	−0.5~0

但土不是理想弹性体，剪应力变化可引起体变，司开普顿（A.W.Skempton）引入孔隙压力系数 A 代替系数 $\frac{1}{3}$，则

$$\Delta u_1=AB(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3) \tag{3.5.7}$$

孔压系数 A 主要反映剪应力对土的体积变化的影响，它在剪切过程中不是常数，它取决于施加应力水平、应变速率、是加载还是卸载。此外，还取决于排水条件和应力历史（正常固结、还是超固结土），因此，对于特定的应力应变参数，例如，最大偏应力和超固结比等，都应测量 A 值。可以用三轴不排水试验测得 A 和 B 值。试样剪切破坏时的值 A_f 最为重要，表 3-4 给出一些典型土的 A_f 值。

(3)　三轴应力状态下孔隙压力的一般表达式

对于三轴应力状态，可以将各向等压增量 $\Delta\sigma_3$ 和偏差应力增量 $\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3$ 引起的孔隙压力 Δu_0 和 Δu_1 相加。

$$\begin{aligned}\Delta u&=\Delta u_0+\Delta u_1\\&=B\Delta\sigma_3+AB(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)\\&=B[\Delta\sigma_3+A(\Delta\sigma_1-\Delta\sigma_3)]\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

3.　一般应力状态下的孔压系数

亨克尔（Henkel）考虑到中主应力对超静孔压生成的影响，提出了如下饱和土的孔压公式：

$$\Delta u=\frac{1}{3}(\Delta\sigma_1+\Delta\sigma_2+\Delta\sigma_3)+\frac{a_0}{3}\Delta[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2+\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]^{\frac{1}{2}} \quad (3.5.9)$$

李广信认为除应力增量 Δp ， Δq 对孔压影响外，还应考虑另一个应力增量 $q\Delta\theta$ 的影响并用增量的形式表示，给出如下公式：

$$du=B(dp+adq+cqd\theta) \quad (3.5.10)$$

其中 θ 为应力洛德角，孔压系数 B 主要反映了土的饱和度的影响； a 反映由剪应力引起的土的体变的性质，亦即土的剪胀（剪缩）性；而系数 c 则反映的是土变形的各向异性。因而上述孔压系数与土的本构关系之间有密切联系，可以用不同的本构模型来计算表示。对于不能反映剪应力对土体积变化影响及不能反映土各向异性的各种线弹性，非线弹性模型，在饱和土情况下：

B=1.0

a=0 （A=$\frac{1}{3}$ ） (3.5.11)

c=0

对于可反映土的剪胀（缩）性和应力引起的各向异性等变形特性的弹塑性模型，可以通过不排水条件推导上述各孔压系数。对于饱和土：

$$d\varepsilon_v=d\varepsilon_v^e+d\varepsilon_v^p=0$$

其中

$$d\varepsilon_v^e=\frac{dp}{\mathrm{K}}$$

$$d\varepsilon_v^e=d\lambda\frac{\partial f}{\partial p} \quad ,$$

$$q=q'$$

$$p'=p-u$$

对于屈服系数为 $f(p',q,\theta,H)=0$ 情况，

其中 $H=H(\varepsilon_v^p\bar{\varepsilon}^p)$

则可得到如下公式： B=1.0

$$a=K\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial f}{\partial p'}/(A^*+K\frac{\partial f}{\partial p'}\cdot\frac{\partial f}{\partial p'}) \quad (3.5.12)$$

$$c=K\frac{1}{q}\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial p'}/(A^*+K\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial f}{\partial p'})$$

其中 A^* 见 2.6 节式（2.6. ） $A^*=-\frac{\partial f}{\partial H}(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial H}{\partial\varepsilon_v^p}+\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial\bar{\varepsilon}^p})$

而对于只包含有 p'，q 两变量的修正剑桥模型，可以推导得到：

B=1.0

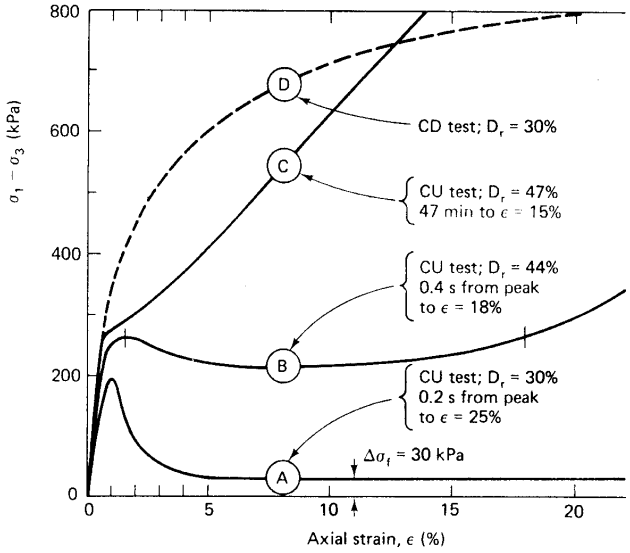
$$a=\frac{2\eta(\lambda-\kappa)}{\lambda(m^2-\eta^2)-2\eta^2\kappa)} \quad (3.5.13)$$

可见孔压系数 A(或 a)及 c 在加载过程中都不是常数，是随着土的加载与变形而变化的。

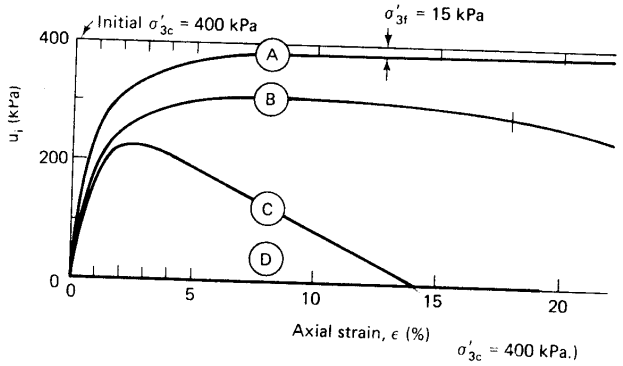
3.5.2 砂土的排水和不排水强度

砂土的渗透系数比较大，而在一般实际工程中，荷载施加速度不是非常快，这样砂土中的水有充分时间排出或被吸入。但是有时荷载作用时间很快（如地震），或者在很快时间就发生很大变形（如滑坡），或者地基中砂土被不透水边界所包围。这时在砂土中就会发生超静孔隙水压力，并且在土体破坏时仍存在超静孔压。这时砂土的不排水强度试验是必要的。

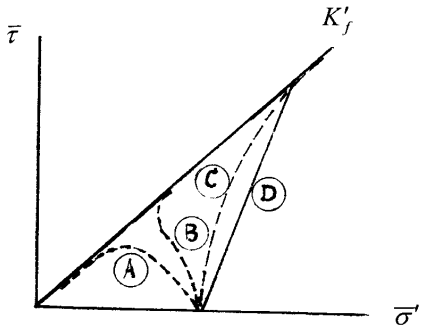
关于松砂和密砂在排水条件（或干砂条件）下的三轴试验应力应变和强度关系已在 2.3 中介绍。图 2-3-1 表示松砂与密砂在一般围压范围下的常规三轴排水试验中的结果。对于松砂，其应力应变曲线基本是应变硬化型，试验过程中体积减小，孔隙比 e 也变小。对于密砂其应力应变关系曲线是应变软化型的，在达到峰值应力以后有很大应力下降，最后达到残余应力。其强度是由峰值应力，或者是最大应力差$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$来决定的。它们的体积在试验过程中有明显膨胀，即剪胀；孔隙比随之增加。在较大应变之后，松砂和密砂的极限应力差$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$，孔隙比 e 均接近相同。后者就是砂土在这个围压下的临界孔隙比 e_{cr}。



(a) 应力一应变关系曲线



(b) 孔隙水压力



(c) 有效应力路径

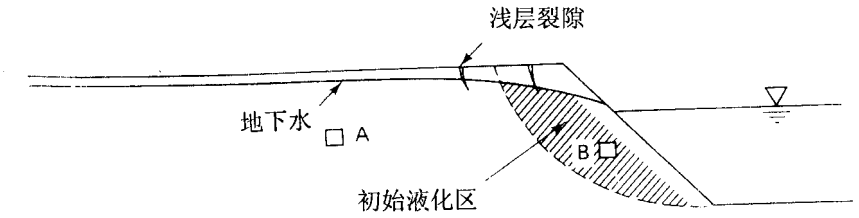
图3-5-3　不同密度饱和砂土在固结不排水试验

砂土的固结不排水试验是首先将饱和试样在围压σ_3下固结，然后关闭排水阀门，施加轴向应力差(σ_1-σ_3)。

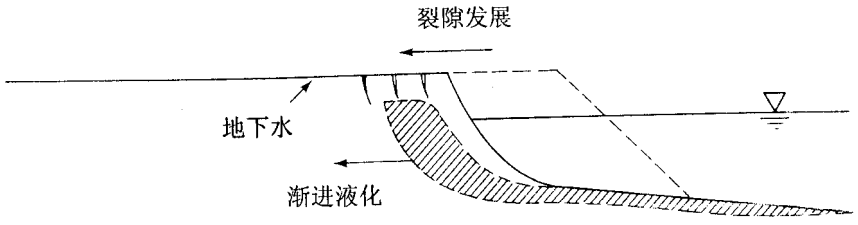
不同密度下饱和砂土的固结不排水试验结果见图 3-5-3，其中 D 为松砂的排水试验。它表示在固结压力σ_3＝400kPa 下，不同密度饱和砂土的排水及不排水试验结果。正如在第三节中所述，由于

在不排水试验中饱和试样的体积是不变的，只有在试样处于临界孔隙比 e_{cr} 时，试验过程中土试样的体积才基本没有变化的趋势，因而不会产生明显的超静孔隙水压力。孔隙比大于该固结压力σ_3 下的临界孔隙比 e_{cr} 时，试验中产生正的超静孔压，$u>0$。从式（3.5.4）可见导致有效围压σ'_3 减少。反之如果试样孔隙比小于该围压下的临界孔隙比 e_{cr}，试验将引起负超静孔压，$u<0$。根据式（3.5.4），可知导致有效围压σ'_3 增加。

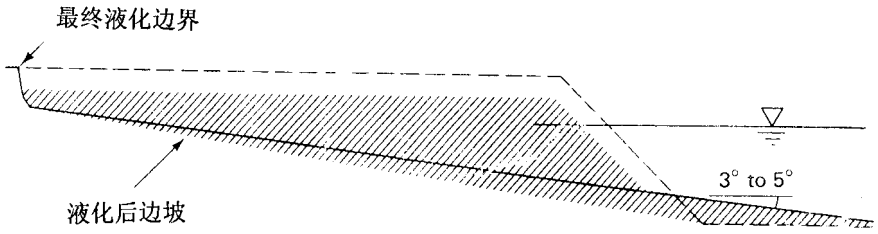
对于图 3-5-3 中的松砂试样 A，与排水试样相反，其应力应变关系是应变软化型的。大约在轴应变$\varepsilon_1=1\%$时即达到了峰值应力，$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}=200kPa$。然后随着应变增加，其应力差$(\sigma_1-\sigma_3)$骤减，很快降到约 30kPa，相应的轴应变为 5%左右；随后尽管应变增加，应力差不再变化。试验中的孔压也保持不变，这时的有效围压σ'_3 仅为 15kPa。这种现象也可以看作是一种静态的液化：随着应变加大，超静孔压急剧上升，有效应力减少，砂土呈流动状态，也称为“ 流滑 ”。其残余强度也称为稳态强度（Steady state strength）。值得注意的是，对于松砂的固结不排水试验应如何确定其强度及强度指标。在峰值应力差$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}=200kPa$ 时，它的有效应力路径还远离有效应力破坏线，见图 3-5-3（c）。砂土的应力状态并未达到其强度，但饱和砂土试样象很粘重的液体一样流动了。对应的固结不排水内摩擦角φ_{cu} 为 11.5°；而当它达到稳定状态时，尽管偏差应力$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$ 仅为 30kPa，其有效应力路径达到了有效应力强度的破坏线，有效应力内摩擦角$\varphi'=30°$，而对应的残余不排水强度则只有$\varphi_{cu}=2°$。这时才达到该种砂土真正意义上的“ 破坏 ”。



(a) 开始液化



(b) 液化流滑发展



(c) 破坏后的滑动区范围

（水平尺度为二倍竖向尺度）

图3-5-4　　临水松砂中的液化与流滑

图 3-5-4 表示了由该种松砂所组成的河岸，开始处于稳定状态，但由于坡角冲刷等原因使阴影区处于极限平衡状态而很快滑动，随着坡内各点（始点 B）发生较大应变而产生较大超静孔压，

同时来不及消散，从而使很大范围土迅速液化，极限平衡区扩展，逐渐向坡内发展，最后在 3°-5° 左右达到平衡，这种流滑破坏现象可在很短时间发生，是一种灾难性的破坏。对于松砂、水力充填土、尾矿料及敏感性粉土均可能发生这种流滑破坏。

3.5.3 粘土的排水与不排水强度

1. 饱和粘土的排水试验

如图 3-4-2 所示正常固结粘土的强度包线是过原点的，亦即历史上最大有效固结应力为 0 的饱和粘土应呈泥浆状态，没有抗剪强度。

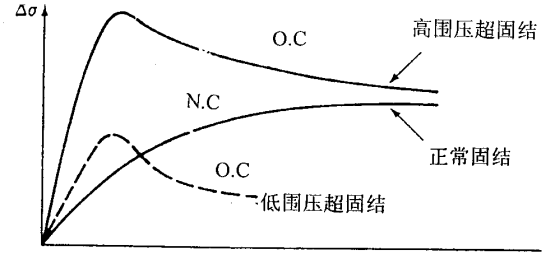
在相同的固结压力下进行常规三轴排水试验，正常固结粘土与超固结粘土的应力应变和强度性状是不同的，它们的差别可参见图 2-3-1（a）与（b）。正常固结粘土与松砂相似，超固结土与密砂相似。亦即正常固结粘土应力应变曲线是硬化型，试验过程中试样发生体积收缩；而超固结土的应力应变关系是在较小应变下达到一个峰值应力差$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$，然后随着应变增加而减小，最后达到一个相对稳定残余强度$(\sigma_1-\sigma_3)_{re}$，呈应变软化型。试验中，常常发生明显的剪胀。具体定量的关系与超固结比有关。

图 3-4-2 表示了在排水试验中固结粘土和超固结粘土的 e－σ’曲线和强度包线。可见超固结土的强度包线（DEC）在正常固结土包线（ABCF）之上，并且 c’是大于 0 的。应当指出的是，这里所谓的正常固结土与天然土层的“ 正常固结土 ”的概念不同。例如，如果有一饱和天然土层的上覆有效应力$\sigma'_{vo}=\gamma' z$，而它在地质历史上受到的最大固结应力也是σ'_{vo}，则我们称它为正常固结土。但从这个土层取样，充分回弹以后在受到的固结应力大于或超过$\sigma'_p=\sigma'_{vo}$，到 C 和 F 点，则它在这些试验中仍是正常固结土，其强度也在正常固结土包线上（过原点）；如果试样在三轴试验中固结应力小于σ'_p（如 D、E 点），则这种土在室内试验中成为超固结土，它的强度落在超固结土强度包线（DEC）上。在图 3-4-2 中的固结 e－σ’曲线和强度包线表明，一旦固结应力超过其历史最大有效应力，则它就不再“ 记忆 ”以往的历史，只服从原始的曲线（强度包线过原点）。

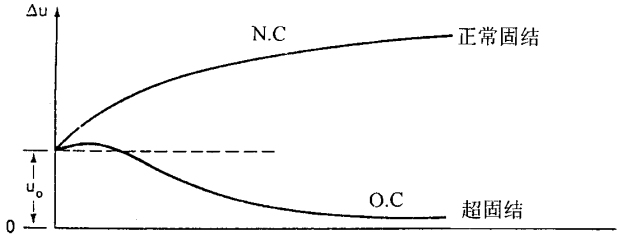
2. 饱和粘土的三轴固结不排水试验（CU）（Consolidated undrained test）

这种试验是将试样在三轴仪上，在一定的压力下（可能是等向应力σ_3；也可能是不等向应力，例如$\sigma_3/\sigma_1=k_o$）固结，待超静孔压完全消散以后，关闭与试样相通的排水阀门，增加$\sigma_1-\sigma_3$，直到试样被破坏。在此期间，超静孔压将产生和发展，一般通过孔压传感器量测孔压。

一种标准的正常固结粘土和超固结粘土的固结不排水试验的应力应变和孔压关系见图 3-5-5



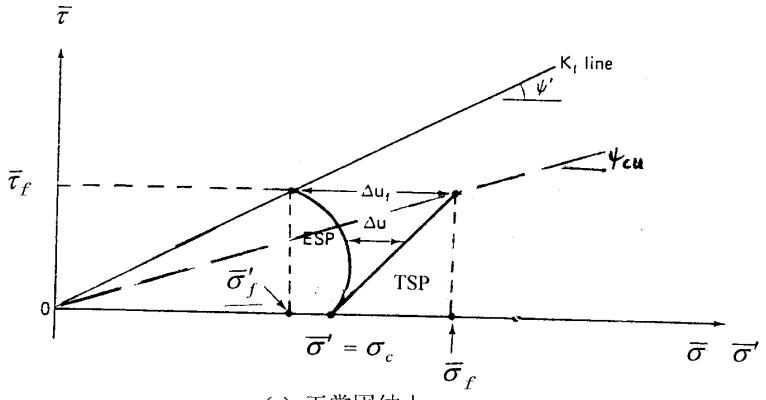
(a)



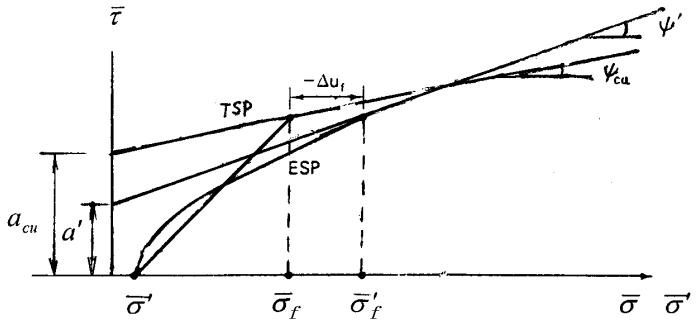
(b)

图3-5-5　正常固结土与超固结土的三轴固结不排水试验

二者的应力应变关系曲线的形状与排水情况下相似。对于正常固结粘土应力应变曲线仍是应变硬化型，剪切过程中产生正孔压。对于超固结土，其应力差$\sigma_1-\sigma_3$在小应变下有峰值$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$，然后随着应变加大，$(\sigma_1-\sigma_3)$有所下降，亦即是应变软化。其孔压力开始有少许增加，然后很快减少，可出现负孔压。图 3-5-5（b）中 u_0是为增加试样饱和度而施加的反压，可以以 u_0为孔压 0 点。粘土与砂土在固结不排水试验中应力应变及强度特性不同，主要是由于砂土变形及强度受有效围压影响远比粘土敏感。由于粘土中存在粘聚强度，它与围压无关，所以正常固结土在固结不排水试验中，也不会象松砂一样在很低有效围压下迅速软化而发生流滑。



(a) 正常固结土



(b) 超固结土

图3-5-6　三轴固结不排水试验的应力路径

图 3-5-6 反映了正常固结和超固结粘土在固结不排水试验中的总应力路径和有效应力路径，及相应的有效应力强度指标和总应力强度指标。其中横坐标 $\bar{\sigma}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$，纵坐标 $\bar{\tau}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$，破坏线 K_f 称为破坏主应力线。与水平向夹角表示为 ϕ，$\sin\varphi=tg\phi$。在图 3-5-6（a）中，u_0 是反压，所以在固结阶段的有效固结应力 $\sigma_3'=\bar{\sigma}'=(\sigma_3-u_0)$。实际的总应力路径是（T-$u_0$）SP，由于剪切过程中产生正孔压，有效应力路径总在总应力路径的左边。所以 $\varphi'>\varphi_{cu}$。

对于图 3-5-6（b）中所表示的超固结土，实际的总应力路径（T-u_0）SP；而有效应力路径开始是稍靠（T-u_0）SP 的左边，随后由于负孔压的形成，使有效应力路径 ESP 到总应力路径的右边，直到达到有效应力破坏线。

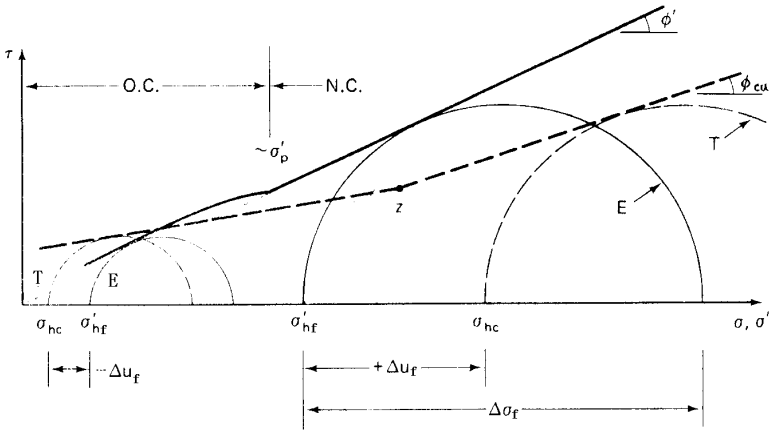


图3-5-7　超过先期固结压力σ'_p的强度包线（T 为总应力，E 为有效应力）

在包括正常固结与超固结两段的强度包线情况见图 3-5-7。可见在先期固结压力σ_p'附近的排水试验包线及固结不排水试验包线的斜率是不同的。在一定范围内有时也可用一直线近似。

3. 固结不排水试验（CU）确定的强度指标

如上所述，正常固结粘土的排水（CD）与固结不排水（CU）试验的强度包线都过原点，亦即粘聚力为 0。并且$\varphi'>\varphi_{cu}$，一般φ_{cu}大约为φ'的一半，即$\varphi_{cu}=10-15°$左右。c'与 c_{cu} 都非常接近等于 0，见图 3-5-6（a）。对于超固结粘土和击实粘土，φ_{cu}比φ'小，而 c_{cu} 一般比 c'大，见图 3-5-6（b）。当破坏包线跨越固结应力（或先期固结压力）时，很难用单一的总应力指标来表示，见图 3-5-7。

由于在 CU 试验中可量测试样的孔隙水压力，所以可通过 CU 试验得到饱和粘土试样的有效应力路径，从而确定其有效应力强度指标 c'和φ'。一般认为这样得到的强度指标 c'与φ'与排水试验得到的强度指标 c_d 和φ_d 是一致的。但是这里有一个如何定义破坏应力状态的问题。在三轴试验中，我们通常以偏差应力达到极大值$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$时定义为试验破坏；也可以以应力达到最大应力比$(\sigma_1/\sigma_3)_{max}$时定义为破坏。两种方法的结果有时是一致的，有时是不同的。如在上述的砂土固结不排水试验中（见图 3-5-3 中 A 试样），用最大应力比和最大应力差确定的有效应力的摩擦角就不同。图 3-5-3（c）表示的是松砂的固结不排水试验的应力路径。从图可见，当应力状态达到$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$时其有效应力路径并未达到其有效应力（排水）破坏线$K'_f$。如果用$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$来确定有效应力强度指标，则偏小很多。只有在试样过了峰值状态之后，达到稳态破坏状态，有效应力路径才接近有效应力（排水）破坏线K'_f。这时对应于$(\sigma_1/\sigma_3)_{max}$，或者$(\bar{\tau}'/\bar{\sigma}')_{max}$。

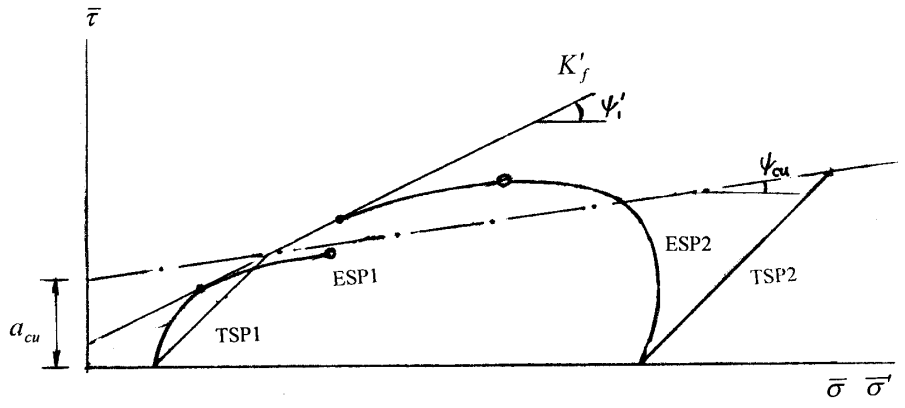


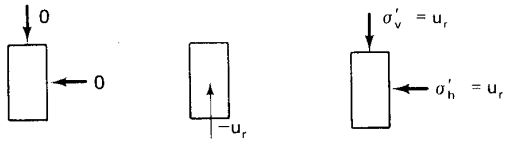
图3-5-8　一种敏感性粘土的三轴固结不排水试验的应力路径和强度指标

图 3-5-8 是针对一种敏感性粘土的固结不排水三轴试验结果。它在低围压下试验产生负孔压，其有效应力路径转到总应力路径的右边；在高围压下试验，其性状接近于正常固结粘土，产生正孔压，有效应力路径在总应力路径的左边。从此图可见，用最大偏差应力$(\sigma_1-\sigma_3)_{max}$确定的破坏线比用最大应力比$(\sigma_1'/\sigma_3')_{max}$（或者$(\bar{\tau}'/\bar{\sigma}')_{mzx}$）确定的破坏线低，亦即$\varphi_1'>\varphi_2'$。一般用最大应力比$(\sigma_1'/\sigma_3')_{max}$确定的有效应力摩擦角$\varphi'$接近于从排水试验得到的$\varphi_d$，而用最大应力差得到的值则偏小。但固结不排水的总应力指标c_{cu}和φ_{cu}总是从最大偏差应力确定的。

对于粘性土，一般是用固结不排水三轴试验，试验中量测孔隙水压力，确定其有效应力强度指标，对于原状的正常固结粘土，其φ'与粘土矿物组成和塑性指数有关，一般$\varphi'=20°-35°$，见图 3-3-1。

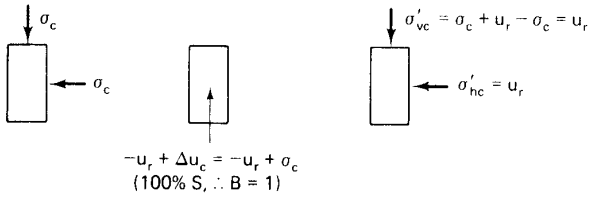
4. 粘土的不固结不排水试验（UU）（Unconsolidated undrained test）

不固结不排水三轴试验（UU）也简称不排水试验，是指在将试样安置在三轴压力室中后，排水阀门从一开始就关闭。这样对于完全饱和的试样，施加任何围压，试样中有效应力也没有变化，不发生固结，没有体积和孔隙比（或含水量）的变化。随后，象在 CU 试验中一样，试样被不排水剪切。一般于 10－20 分钟内加载到破坏。量测总应力，一般不量测孔隙水压力，所以总是以总应力表示强度及强度指标。在试验的不同几个阶段，在现场采取的饱和粘土试样的不排水试验中，试样中的总应力，孔隙水压力和有效应力的条件如图 3-5-9 中所示。图中第一列为总应力状态，第二列为孔压状态，第三列为有效应力状态。在这个试验中，假设从原位取样时时保持不扰动和不回弹的（无体变）。由于这时的总应力为 0（大气压），而又不容许发生体积回弹，所以其有效应力还应当与原位应力等价，因而其内部孔压 u_r 必须是负的，它被称为“残余孔压”。相应的有效应力为$\sigma_{v0}'=\sigma_{h0}'=u_r$。图 3-5-10 表示的是在原位 k_0 固结的地基土，取样时的有效应力路径。这时由于它上面的上覆的主应力σ_{v0}'被消除，而试样的体积又不回弹，则其应力状态从 B 变到 C，对于 B 点，$\sigma_{h0}'=k_0\sigma_{v0}'$，$\bar{\sigma}=\frac{1+K_0}{2}\sigma_{v0}'$，$\bar{\tau}=\frac{1-K_0}{2}\sigma_{v0}'$。对于 C 点，$\sigma_v'=\sigma_h'=\sigma_r'$。二者在试样体变方面是等价的，即从 B 到 C，试样体积不变。这时试样内超静孔压是负值$-u_r$，其中$u_r=\sigma_v'=\sigma_h'=\sigma_r'$。

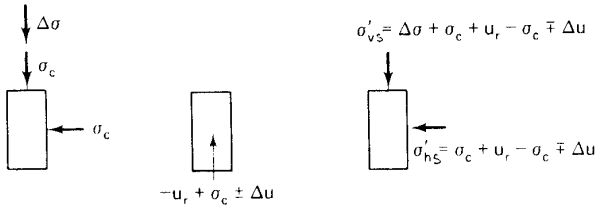


取样后，存在负孔压

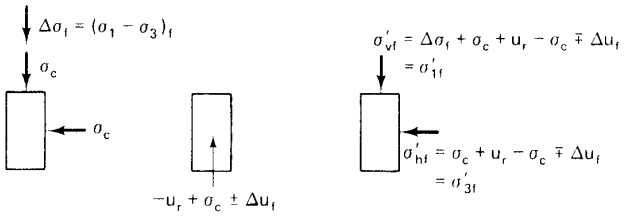
(a) 取样后，放入压力室前



（b）放入压力室，施加围压σ_c，产生孔压Δu



(c) 施加轴向荷载$\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_3$，产生孔压$\Delta u$



(d) 试样破坏时，产生孔压Δu_f

图3-5-9 饱和原状粘土试样在三轴不排水试验（UU）中各阶段的应力条件

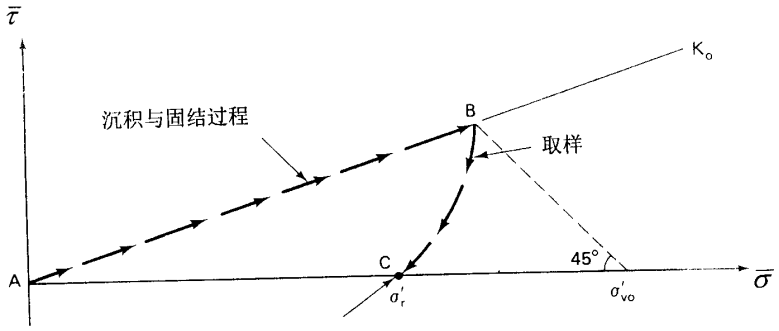


图3-5-10　正常固结粘土沉积与取样过程中有效应力路径（k_0<1.0）

在图 3-5-9（b）中，在施加围压σ_c时，由于阀门是关闭的，试样内将产生超静孔隙水压力Δu_c＝Bσ_c，B＝1.0，$\Delta u_c=\sigma_c$，试样内的总孔压为 u＝Δu_c-u_r=σ_c－u_r。有效应力为$\sigma_{v0}'=\sigma_{h0}'=u_r$未变。

在图（c）中，施加轴荷载而发生剪切时，这时由于偏差应力(σ_1-σ_3)或$\Delta\sigma$产生又一个孔隙水压力增量±Δu。有效应力变成：

$$\sigma'_{vs}=\Delta\sigma+u_r\mp\Delta u\ ,\ \ \sigma'_{hs}=u_r\mp\Delta u\ 。$$

图（d）表示试样破坏时应力状态。这时的偏差应力达到极限值$(\sigma_1-\sigma_3)_f=\Delta\sigma_f$，对应的孔压增量为$\pm\Delta u_f$。孔隙水压力为$-u_r+\sigma_c\pm\Delta u_f$，有效应力状态成为：

$$\sigma'_{vf}=\Delta\sigma_f+u_r\mp\Delta u=\sigma'_{1f}\ ,\ \ \sigma'_{hf}=u_r\mp\Delta u_f=\sigma'_{3f}\ 。$$

由于自始至终试样的体积或孔隙比都没有变化，所以不管施加的围压σ_c是多少，试样上的有效应力与$\sigma_c=u_r$的固结不排水（CU）试验是完全一致的。因而对于完全饱和的粘土，每一个不同σ_c的试验中的试样的孔隙比都是一样的，其有效应力路径和破坏时的有效应力状态也是一样的。亦即其破坏时的有效应力莫尔园只有一个，总应力莫尔园的半径等于这个有效应力莫尔园的半径。这样，所有不同的不固结不排水试验破坏时莫尔园的包线是一条水平线，其斜率$\varphi_{uu}=\varphi_u=0$，在纵坐标上截距为 $c_u=\tau_f$，c_u称为土的不排水强度。见图 3-5-11 及图 3-5-12（a）。由于有效应力的破坏时的莫尔园只有一个，所以无法通过 UU 试验量测孔隙水压力确定土的有效应力强度指标 c’、φ’。另外尽管对于总应力其不排水内摩擦角为$\varphi_u=0$，其试样中的剪切面倾角不会等于 45°，而应当用φ’来确定。

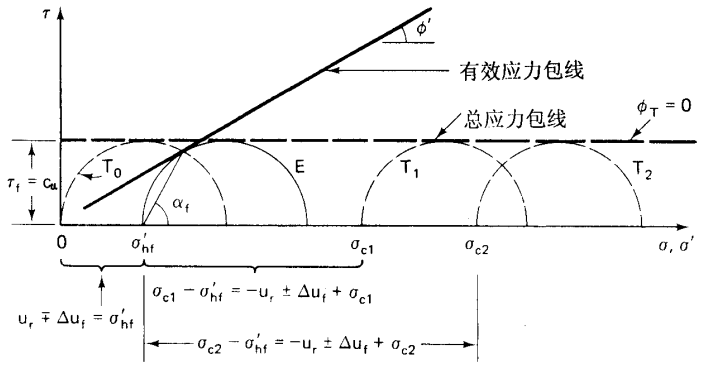
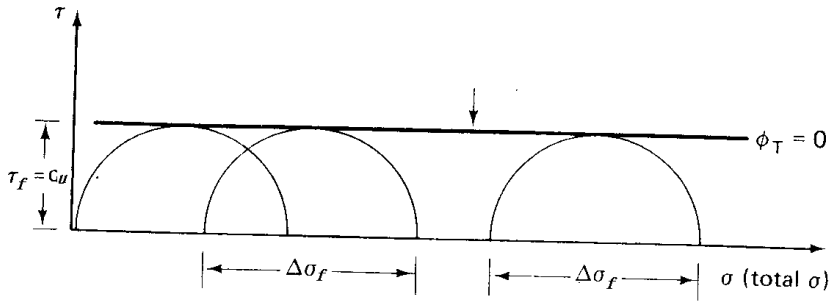
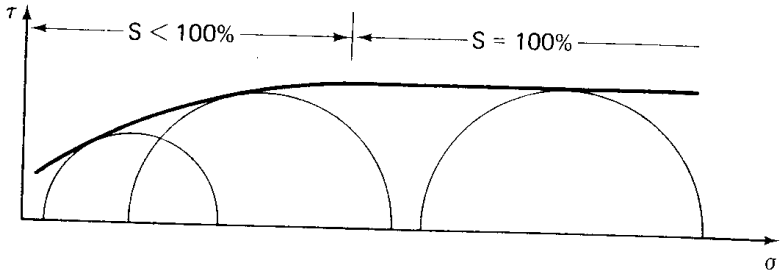


图3-5-11　正常固结饱和粘土的三轴不排水试验有效应力破坏莫尔圆的唯一性



(a) 饱和土



(b) 非饱和土

图3-5-12　饱和与非饱和粘土的不排水强度包线

对于部分饱和土，由于试样中会有空气，它在围压σ_c增加时，空气体积会被压缩，它也会溶解在孔隙水中。这样试样总的体积会被压缩，其中的有效应力也会改变，所以部分饱和土的 UU 包线在初始段时弯曲的，随着围压的增加，空气被完全压缩及溶解，饱和度接近 100%，强度包线就倾向水平线。见图 3-5-12（b）

不同粘土的不排水强度值变化很大，c_u 可以从 0 到若干 MPa。原状土的不排水抗剪强度 c_u 为竖向有效上覆应力σ_{v0}'归一化，表示成 c_u/σ_{v0}'，反映了粘土的性质和地质历史。但 c_u/σ_{v0}'也受试验方法的影响。例如通过现场十字板剪切试验，不排水三轴试验和快剪试验得到的结果就不完全一致。

无侧限压缩试验是 UU 试验的一种特殊情况，亦即施加的围压为 0。用这种试验同样可以得到不排水抗剪强度 c_u。但是条件是（1）试样完全饱和；(2）试样必须是原状、均匀、无缺陷的；(3）只有在粘土情况下，初始的有效围压等于残余毛细应力（负孔压），如图 3-5-9（a）所示。没有回弹及固结；(4）取样后，试样必须快速地试验到破坏（5－15 分钟），以免发生水分蒸发和表面干燥。

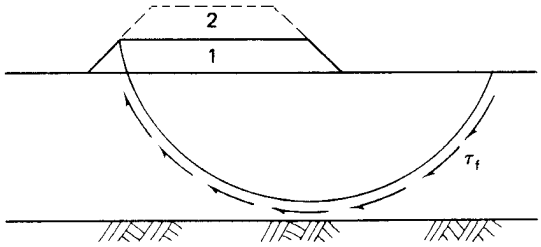
5.　排水和不排水强度指标的工程应用

三轴固结排水试验（CD）得到的是有效应力强度指标；在固结不排水试验（CU）中量测孔压也可以得到有效应力强度指标，并且免去了由于排水试验所用时间过长而引起的问题。

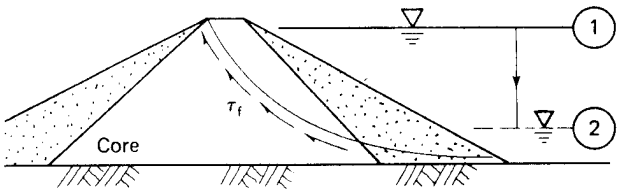
对于砂土，在一般加载的速率下，是用有效应力强度指标进行分析的。对于粘性土地基和土工建筑物，如果在计算时，超静孔压已经全部消散，或者土中的孔隙水压力可以准确地确定，则可以用有效应力强度指标进行稳定分析。例如用稳定渗流的流网可以较准确地确定在正常使用处于稳定渗流状态的土坝，长期稳定的天然土坡和挖方工程，在软粘土地基上施工非常慢的填方，或者使用砂井和塑料排水板加速地基固结的情况。

在上述一些工程问题中，如果其中土体在现有的应力体系中平衡并完全充分地固结，然后，由于某种原因而很快施加荷载形成不排水情况，这时就适用于固结不排水强度指标。如图 3-5-13 中所

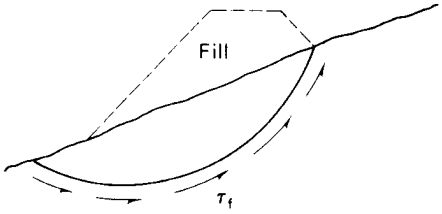
示的几种工况。其中图 3-5-13（a）表示的是在填方部分（1）作用下填方及地基已经固结稳定，然后又很快施加上部填方部分（2）。图（b）表示土坝竣工后正常使用很长时间并蓄水后，库水位骤降时土坝上游边坡的稳定分析；图（c）表示在一个天然土坡上很快施工一个填方的情况。在这些情况的稳定分析中都适于使用固结不排水强度指标。



(a) 在①层填土固结后施工②层填土

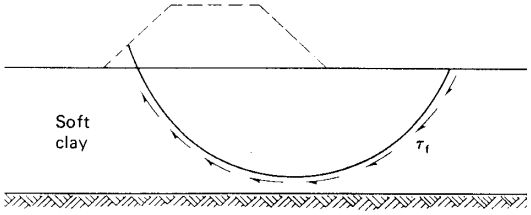


(b) 库水位从①骤降到②

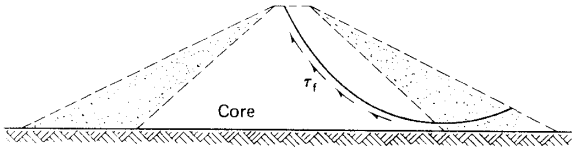


(c) 在天然土坡上快速填方

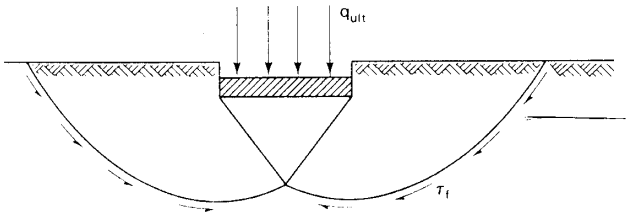
图3-5-13　在粘土中使用 CU 强度指标进行土体稳定分析的例子



(a) 在软粘土地基上快速施工的填方



(b) 土坝快速施工，竣工后，心墙未固结



(c) 在粘土地基上快速施工建筑物

图3-5-14　在粘土中使用 UU 强度指标进行土体极限平衡分析的例子

如果在工程问题中，荷载是很快地被施加，从而被引起的超静孔隙水压力没有时间消散，土也没有时间固结。在这种情况下，我们假设施工中所施加的总应力变化不影响原状土的不排水强度。图 3-5-14 中所列的几种例子包括：(a) 在正常固结软粘土地基上很快地填筑填方工程；(b) 很快施工的土坝在竣工时；(c) 在正常固结粘土地基上很快施工基础及上部结构。这些工程的稳定分析中的控制条件是刚刚施加了荷载之后。随着时间的延续，孔压消散，土被固结，地基或边坡也变得安全了。

6. 非饱和土的排水强度

非饱和土中存在基质吸力(u_a-u_w)，而它是反映土颗粒、水与气界面上的物理化学作用的力学参数，它主要源于毛细作用。由于其中水压力 u_w 是负孔压，而 u_a 一般为大气压力，所以吸力(u_a-u_w)是作用于土骨架上的有效压应力。它对土的强度有很大的影响。

对于处于稍湿和潮湿的砂土，可以直立开挖一定高度而不倒塌，表明存在“粘聚力”。这种粘聚力 $c''=(u_a-u_w)tg\varphi''$，它实质上是摩擦力引起的，在变干燥或浸水饱和时会迅速消失，所以有时也被称为“假粘聚力”。

对于粉土和粘性土，这种吸力的影响是很大的。许多基坑支护结构上实测的应力远小于理论计算值，很大可能是由于非饱和土的吸力贡献没有被计入。根据毕肖甫（Bishop）公式，非饱和土的有效应力原理可表示为：

$$u = u_a - \chi(u_a - u_w) \tag{3.5.14}$$

$$\sigma' = \sigma - u_a + \chi(u_a - u_w) \tag{3.5.15}$$

其中χ是与土性质及饱和度有关参数。这样就可以用莫尔—库仑理论表示非饱和土的强度：

$$\tau_f = c' + [\sigma - u_a + \chi(u_a - u_w)]tg\varphi' \tag{3.5.16}$$

在实际应用中参数χ是不确定的，它随饱和度而变化，式（3.5.16）较难实用。

弗雷德伦德（D. G. Fredlund）指出了非饱和土强度的另一表达式：

$$\tau_f = c' + (\sigma - u_a)tg\varphi' + (u_a - u_w)tg\varphi'' \tag{3.5.17}$$

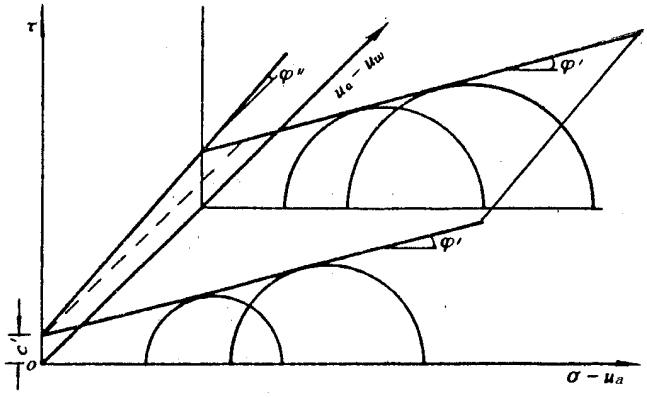


图3-5-15　非饱和土的破坏面

其中各组成部分情况见图 3-5-15。这是一个三维的坐标系：（τ, σ–u_a, u_a-u_w）。在τ, σ–u_a 坐标平面上，强度包线的斜率为 tgφ′；在τ, u_a-u_w 坐标平面上，强度包线的斜率为 tg φ″。可见在这种表示方法中吸力产生的强度可归纳入粘聚力中：

$$c'' = c' + (u_a - u_w)tg\varphi'' \tag{3.5.18}$$

式（3.5.18）对于人们认识和分析非饱和土的强度构成是有益的。但由于实际上 tgφ''=χtgφ'，它与式（3.5.17）并无实质上的区别。实测表明φ'' <φ'，但与χ一样，φ''不会是个常数。所以在工程中如何准确应用非饱和土强度，还是有待解决的问题。

对于非饱和土，也可进行固结不排水试验、不固结不排水试验，并确定有关的指标。

3.6　土的强度理论

3.6.1　概述

材料的强度是指材料破坏时的应力状态。定义破坏的方法是破坏准则。基于应力状态的复杂性，破坏准则常常是应力状态的组合。强度理论是揭示土破坏的机理的理论，它也以一定的应力状态的组合来表示。因而强度理论与破坏准则的表达式是一致的。这样，强度理论的一般表达式应当是：

$$f(\sigma_{ij}, k_i) = 0 \tag{3.6.1}$$

其中应力张量σ_{ij}为二阶张量，有 6 个独立变量，严格的讲，它们对土的强度都有影响，k_i为强度参数。如果用主应力表示，则除了三个主应力的大小以外，还与主应力方向有关。对于各向同性的材料，式（3.6.1）可以表示为：

$$f(I_1, I_2, I_3, k_i) = 0 \tag{3.6.2}$$

或者：

$$f(p, q, \theta, k_i) = 0 \tag{3.6.3}$$

像可以独立变化 6 个应力变量的室内土工仪器还没有被实现一样，如式（3.6.1）这样“完全”的强度理论也还从未见过。

在实际问题中，人们总是探求和选择使材料破坏的主要因素，忽略次要的应力因素，建立适用的破坏准则，并根据材料在简单应力状态下的试验确定材料强度参数和指标。另一方面，人们往往从不同角度将强度理论进行分类。

正如我们所熟知的，材料的四种古典的强度理论是：

最大正（拉）应力理论（第一强度理论）；最大正（拉）应变理论（第二强度理论）；最大剪应力理论（第三强度理论）和能量理论（第四强度理论）。这些强度理论主要是针对如钢材等连续介质提出来的，对于碎散、多相的土一般不适用。

对于岩土材料人们从不同角度划分其强度理论公式。例如陈惠发（W. F. Chen）将土的破坏准则分为一个参数的准则和两个参数的准则，前者包括屈雷斯卡（Tresca）、密塞斯（Mises）和洛德－邓肯（Lade－Duncan）直线破坏线准则；后者包括广义的屈雷斯卡（Extended Tresca Criterion）和广义密塞斯（Drucker－Prager 准则是其一个特例）准则；莫尔—库仑准则（Mohr－Coulomb）及强度线弯曲的莱特（Lade）破坏准则。

沈珠江按照考虑剪应力的数目和压应力影响等将岩土的抗剪强度理论分为三个系列，每个系列中又分三个准则。它们是：

Ⅰa－单剪应力理论（Tresca 理论）

Ⅰb－广义单剪应力理论（Extended Tresca 理论）

Ⅰc－单剪切角理论（Mohr－Coulomb 理论），可表示为剪切角 $\sin\varphi_{13}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}=\sin\varphi$ （c＝0 时）

Ⅱa－双剪应力理论（俞茂鋐理论）

Ⅱb－广义双剪应力理论，即在上述理论Ⅱa 中计入平均主应力的影响

Ⅱc－双剪切角理论：考虑三维应力状态中，两个较大莫尔园的剪切角的综合影响。

Ⅲa－三剪切力理论（Mises 理论）

Ⅲb－广义三剪应力理论（Extended Mises 理论）

Ⅲc－三剪切角理论（松岗元-中井照夫，沈珠江）

其中Ⅲc考虑三个应力莫尔园的影响，表示为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\sin^2\varphi_{13}+\sin^2\varphi_{12}+\sin^2\varphi_{23}\right]^{\frac{1}{2}}=\sin\varphi \tag{3.6.4}$$

其中 $\sin\phi_{13}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3}$，$\sin\phi_{12}=\dfrac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$，$\sin\phi_{23}=\dfrac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_2+\sigma_3}$。

它与松岗元-中井照夫（Matsouka-Nakai）所提出的空间滑动面理论（SMP）相似。

早期的土力学将土的强度问题和变形问题截然分开，前者用于土体的稳定分析，采用极限平衡的方法；后者用于土的变形和地基沉降计算。这样土的强度只涉及其最终破坏时的应力状态，与应力变形过程无关。随着现代土力学的发展，人们逐渐认识到土的本构关系是应力－应变－时间－强度的统一的关系，土的强度实际上是变形过程的发展最后阶段。可认为是施加很小应力增量 $d\sigma_{ij}$，即引起很大的应变增量 $d\varepsilon_{ij}$ 所对应的应力状态。这样土的强度理论常常融合在土的本构关系之中。为此，这里将土的强度理论分为经典理论与现代的强度理论。

3.6.2 土的古典强度理论

1. 屈雷斯卡（Tresca）准则与广义屈雷斯卡（Extended Tresca）准则

屈雷斯卡强度准则实际上是古典强度理论中的最大剪应力理论。它是 1864 年屈雷斯卡针对金属材料所提出的一个屈服准则。用数学表达式表示成：

$$\sigma_1-\sigma_3=2k \tag{3.6.5}$$

k 是一个材料常数，是试验中试样破坏时的纯剪应力。σ_1 和 σ_3 分别为最大和最小主应力。如果用应力不变量形式表述，上式可写成：

$$\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-k=0 \tag{3.6.6}$$

其中θ为应力洛德角；J_2 为第二偏应力不变量。其中θ见式（2.2.32）

$$\theta=tg^{-1}\frac{2\sigma_2-\sigma_1-\sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1-\sigma_3)}$$

在土力学中，这一准则只有对于饱和粘土的不排水强度指标才适用。这时

$$\sigma_1-\sigma_3=2c_u \tag{3.6.7}$$

亦即 $k=c_u$。

这个准则在主应力空间σ_1、σ_2、σ_3（σ_1、σ_2、σ_3 只代表三个主应力，而不代表大小次序）表示为一个正六边形的棱柱面。它在π平面的断面是一个正六边形，见图 3-6-1。

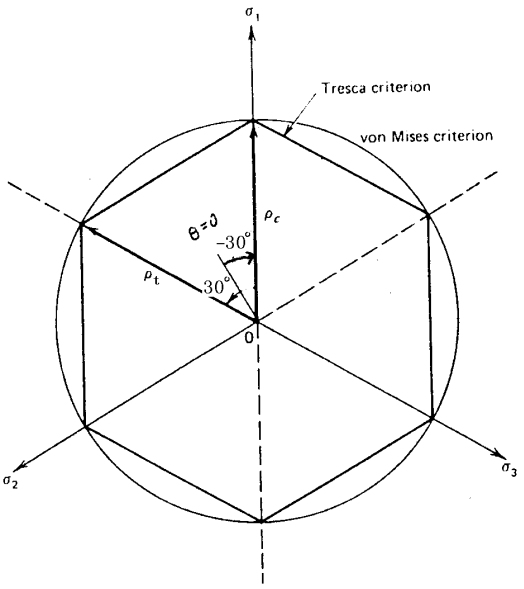


图3-6-1　Mises 和 Tresca 强度准则在π平面的轨迹

由于 Tresca 准则没有反映平均主应力 p（或应力第一不变量 I_1）对抗剪强度的影响，所以它一般不适用于表示土的强度，对于岩土材料，人们推广这个强度准则成为广义的屈雷斯卡准则（Extended Tresca criterion）。可表示成：

$$(\sigma_1-\sigma_3)=2k+\alpha I_1 \tag{3.6.8}$$

或者

$$\sqrt{J_2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)-k-\frac{1}{2}\alpha I_1=0 \tag{3.6.9}$$

其中αI_1 反映平均主应力的影响。这个公式所定义的破坏面在主应力空间是一个正六边形的角锥面，见图 3-6-2。

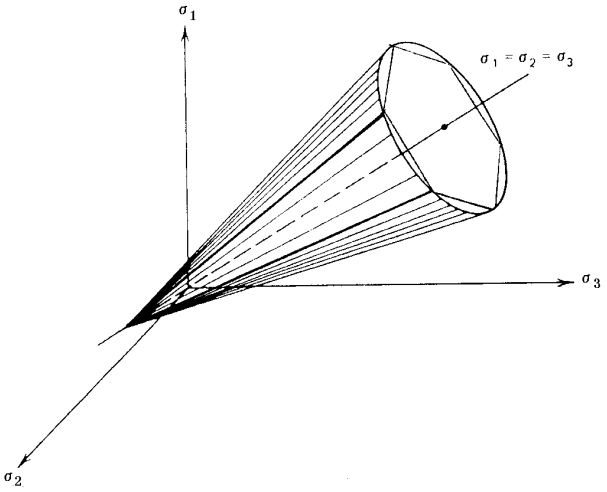


图3-6-2　广义 Mises 和广义 Tresca 破坏准则在主应力空间的破坏锥面

2. 密塞斯（Von Mises）和广义密塞斯（Extended Von Mises）准则

这一准则实际上是古典强度理论中形变能（畸变能）理论。实质上也是一种以八面体剪应力判断破坏的理论。它们用三个主应力可以表示为：

$$(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2=6k^2 \tag{3.6.10}$$

用应力不变量也可表示为：

$$J_2=k^2 \tag{3.6.11}$$

或者

$$\sqrt{J_2}=k \tag{3.6.12-1}$$

$$q=\sqrt{3}k \tag{3.6.12-2}$$

$$\tau_{oct}=\sqrt{\frac{2}{3}}k \tag{3.6.12-3}$$

密塞斯准则在主应力空间代表一个圆柱面。它在π平面上的轨迹是一个园（见图 3-6-1）。由于它不像 Tresca 准则那样有一些角点，在用作屈服面时，Mises 准则是光滑的，所以常常为人们在数值计算中选用为屈服准则。可是它没有反映平均主应力 p 对抗剪强度的影响，所以和 Tresca 准则一样，只对于饱和粘土的不排水强度可以近似地使用。

为了反映平均主应力 p（或者应力第一不变量 I_1）对土抗剪强度的影响，Drucker 和 Prager 于 1952 年发展了广义 Mises 准则（Extended Von Mises criterion）或者 Drucker－Prager 准则。它的表达式可写成：

$$\sqrt{J_2}-\alpha I_1-k=0 \tag{3.6.13}$$

或者

$$q-\sqrt{3}\alpha p-\sqrt{3}k=0 \tag{3.6.14}$$

其中 k 与α为材料常数。广义密塞斯准则在主应力空间表示为一个正圆锥面（图 3-6-2），在π平面轨迹仍是一个圆（图 3-6-1）。

3. 莫尔－库仑强度准则

莫尔（Mohr）于 1900 年给出了如式（3.1.2）所示的强度公式：

$$\tau_f=f(\sigma)$$

即一个平面上的抗剪强度τ_f取决于作用于这个平面上的正应力σ。其中破坏包线的函数$f(\sigma)$由试验确定。根据这一准则，当材料应力状态的最大的莫尔园与上式所表示的包线相切时，材料就发生破坏。这也意味着中主应力σ_2对于强度无影响。

最简单的莫尔包线是线性的：

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3+2cctg\varphi}=\sin\varphi \tag{3.6.15}$$

或者表示为式（3.1.1）

$$\tau_f=c+\sigma tg\varphi$$

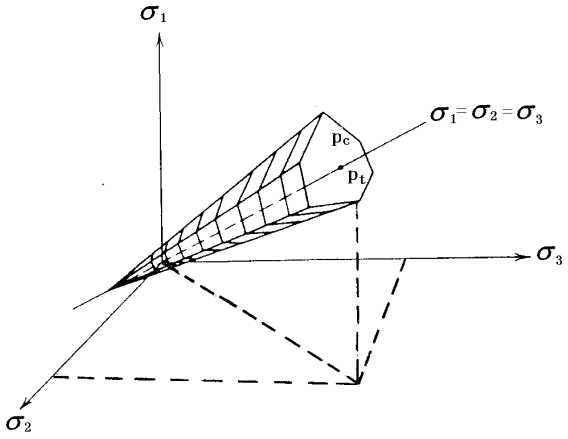
这就是库仑（Coulomb）于 1776 年所提出的库仑公式。其中 c 和φ就是我们所熟知的粘聚力和内摩擦角。式（3.1.2）或式（3.1.1）亦即所谓的莫尔－库仑强度准则，它被广泛应用于岩土材料。它表明材料的抗剪强度于作用于该平面上正应力有关。引起材料破坏不是由于最大剪应力，而是决定在某个平面上τ－σ的最危险组合。式（3.6.15）用应力不变量可表示为：

$$\frac{I_1}{3}\sin\varphi+\sqrt{J_2}\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi-\cos\theta\right]+c\cos\varphi=0 \tag{3.6.16}$$

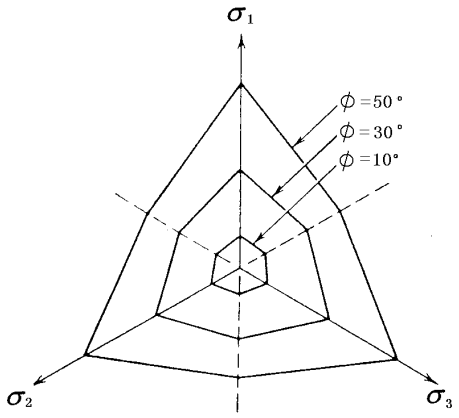
或者

$$p\sin\varphi+\frac{1}{\sqrt{3}}q\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\sin\varphi-\cos\theta\right]+c\cos\varphi=0 \tag{3.6.17}$$

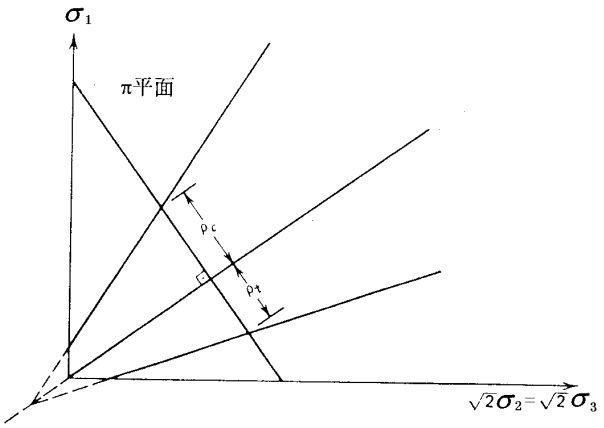
它在主应力空间表现为一个不规则六面锥体表面。见图 3-6-3（a）；它在π平面上的截面形状为一不规则的六边形，见图 3-6-3（b），而在三轴平面上表现为一开口的夹角，见图 3-6-3（c）。



(a) 主应力空间



(b) π平面

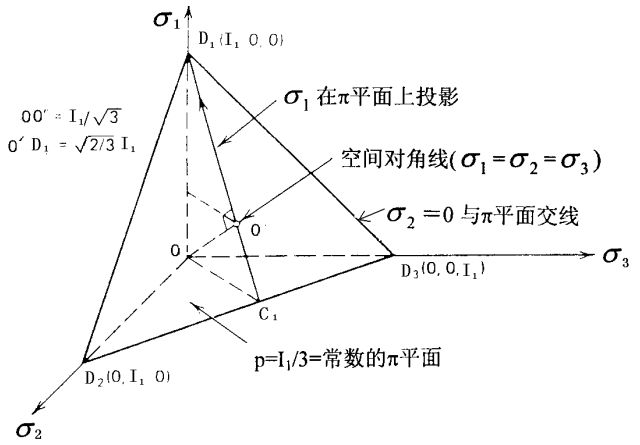


(c) 三轴平面

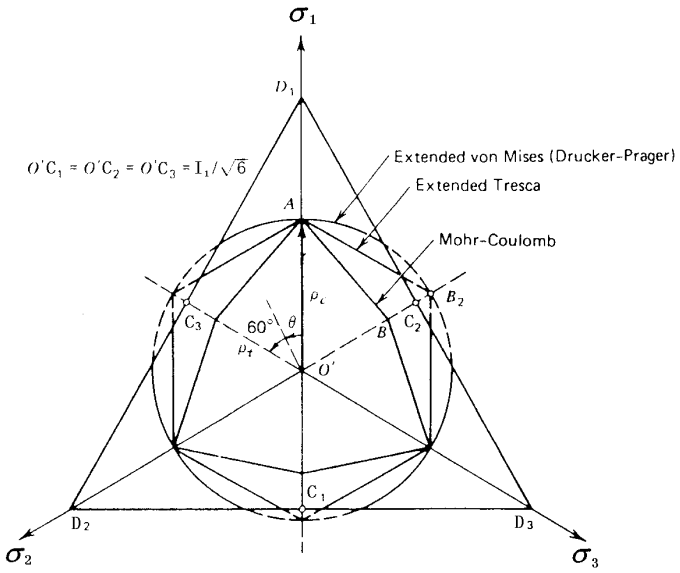
图3-6-3　莫尔－库仑强度准则的破坏面与破坏轨迹

4. Tresca、Mises 和 Mohr－Coulomb 三个强度准则的讨论

Tresca 准则和 Mises 准则都没有反映平均主应力 p 对土抗剪强度的影响，这就未能反映土作为摩擦材料的基本力学特性。尽管这两个准则的“广义”形式考虑了平均主应力 p 对抗剪强度的影响，但这个影响并非是破坏面上正应力对该面上的抗剪强度的影响。Tresca 准则是最大剪应力准则；Mises 准则是最大八面体剪应力准则，这与土的摩擦强度是不一致的。其中最为突出的矛盾是在三轴压缩($\sigma_2=\sigma_3$)应力状态与三轴伸长的应力状态($\sigma_1=\sigma_2$)，用这两个准则预测的土的抗剪强度$(\sigma_1-\sigma_3)_f$或者 q_f都是相等的。



(a)



(b)

图3-6-4　在π平面上的三种破坏准则的轨迹

三个准则在一个π平面（I_1 或 p 为常数）上的轨迹都被表示在图 3-6-4 中。在图 3-6-4（a）中，点 D_1、D_2、D_3 表示（p＝常数）π平面与三个坐标轴的交点。O D_1、OD_2、O D_3 在π平面上投影为 $O'D_1=O'D_2=O'D_3=\sqrt{\frac{2}{3}}I_1$。为了简化，设粘聚力 c＝0，并且对于三个准则，假设在常规三轴压缩情况（θ＝－30°）三者的抗剪强度都相等。三个破坏轨迹相交于图 3-6-4 中 A 点。

当中主应力等于大主应力并且 p 不变时，$\sigma_1=\sigma_2$，亦即$\theta=30°$时（三轴伸长试验），由于广义 Tresca 和广义 Mises 准则在π平面上的轨迹分别是正六边形和圆形。所以其抗剪强度与三轴压缩试验时是一样的，即图中 $OB_2=OA$。这样在$\theta=30°$情况下，这两个准则的破坏轨迹就可能跑到 D_1D_2，D_2D_3，D_1D3 线之外，亦即相应的应力状态有一个负的主应力，即土中出现拉应力，这对于粘聚力 c＝0 的情况是不可能出现的。在常规三轴压缩试验中，如果在三轴压缩试验中得到砂土的$\varphi'_{\theta=-30°}=36.9°$，（$\varphi'$是莫尔－库仑准则的参数），这时我们用广义 Mises 和广义 Tresca 准则预测三轴伸长应力状态（$\sigma_1=\sigma_2>\sigma_3$）的强度都会得出不现实的结果（$\varphi'_{\theta=30°}=90°$）。

莫尔－库仑强度准则是描述剪切面上剪应力τ与该面上正应力σ间关系，表现了土作为散体材料的摩擦强度的基本特点。这是比较合理的，所以它在土力学得到广泛的应用。但它假设中主应力σ_2对土的抗剪强度没有影响，它的强度包线常常被假设是直线，即内摩擦角φ是常数，与围压无关，这些近似一般不会引起大误差，但当应力水平很大时，可能引起比较大误差。当用莫尔－库仑准则作为塑性模型的屈服准则时，由于其屈服面及在π平面上轨迹有导数不连续的角点，这在数值计算中不够方便。

广义屈雷斯卡和广义密塞斯准则在应力空间的子午面（过原点 O 的平面）上，抗剪强度 q 与平均应力 p 之间也是直线关系，同样未能反映在高围压下，土抗剪强度的非线性。相对广义屈雷斯卡准则和莫尔－库仑准则，广义密塞斯准则的在应力空间的曲面和在π平面上的轨迹都是光滑的，因而作为屈服准则进行数值计算是比较方便的。为了避免用常规三轴压缩试验得到的π平面上圆半径过大的问题（见图 3-6-4），有时广义密塞斯准则在π平面上的圆半径（或式 3.6.14 中的 k）用三轴伸长试验确定，或采用上述两种试验的平均值，见图 3-6-5 中的三轴伸长圆和折中圆。

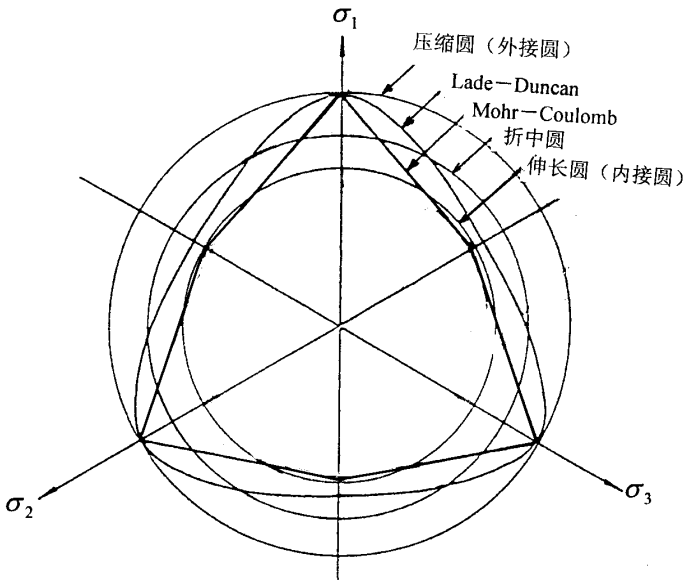


图3-6-5　不同破坏准则在π平面上的轨迹

3.6.3　近代的强度理论

60 年代以来，计算机技术推动了土的本构关系数学模型研究的发展，人们越来越清楚地认识到，土的破坏是其在应力应变关系发展的一个阶段，这时施加一个小的应力增量，就会引起很大或不确定的变形增量。这样，土的破坏准则或强度理论就成了土的本构关系模型的一个组成部分。伴随着本构关系模型也提出了一些新的强度理论。也有相当多的本构模型采用了上述的古典强度理论。

1. 莱特－邓肯强度准则

如 2.7.1 所述，莱特和邓肯在 1975 年针对无粘性土提出了一种适用于砂土的弹塑性模型，采用不相关联的流动准则，但其中屈服面，塑性势面和破坏面在形状上是一致的。这样就提出了一个很有代表性的破坏准则。它用应力不变量的形式表示：

$$f(I_1,I_3)=I_1^{\,3}-k_f I_3=0 \tag{3.6.18}$$

或者

$$\frac{I_1^{\,3}}{I_3}=k_f \tag{3.6.19}$$

其中 k_f 是与砂土密度有关的材料常数。用其它应力不变量也可表达上式：

$$f(I_1,J_2,\theta)=-\frac{2}{3\sqrt{3}}J_2^{3/2}\sin 3\theta-\frac{1}{3}I_1J_2+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{k_f}\right)I_1^{\,3}=0 \tag{3.6.20}$$

$$f(p,q,\theta)=-2q^3\sin 3\theta-9q^2p+27\left(1-\frac{27}{k_f}\right)p^3=0 \tag{3.6.21}$$

图 3-6-6 表明这种公式所表示的破坏面在主应力空间是一个锥面，顶点在坐标原点。它在π平面的轨迹是梨形的封闭曲线。对照图 2-7-1，可见它与屈服面形状是一致的。在常规三轴压缩试验中，当φ→0°时它趋近于一个圆；当φ＝90°时，它退化为一个正三角形。由于在各向等压（$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$）时 $I_1^{\,3}/I_3=27$，所以 $k_f>27$ 是必要条件，因为静水压力下不会引起材料破坏。

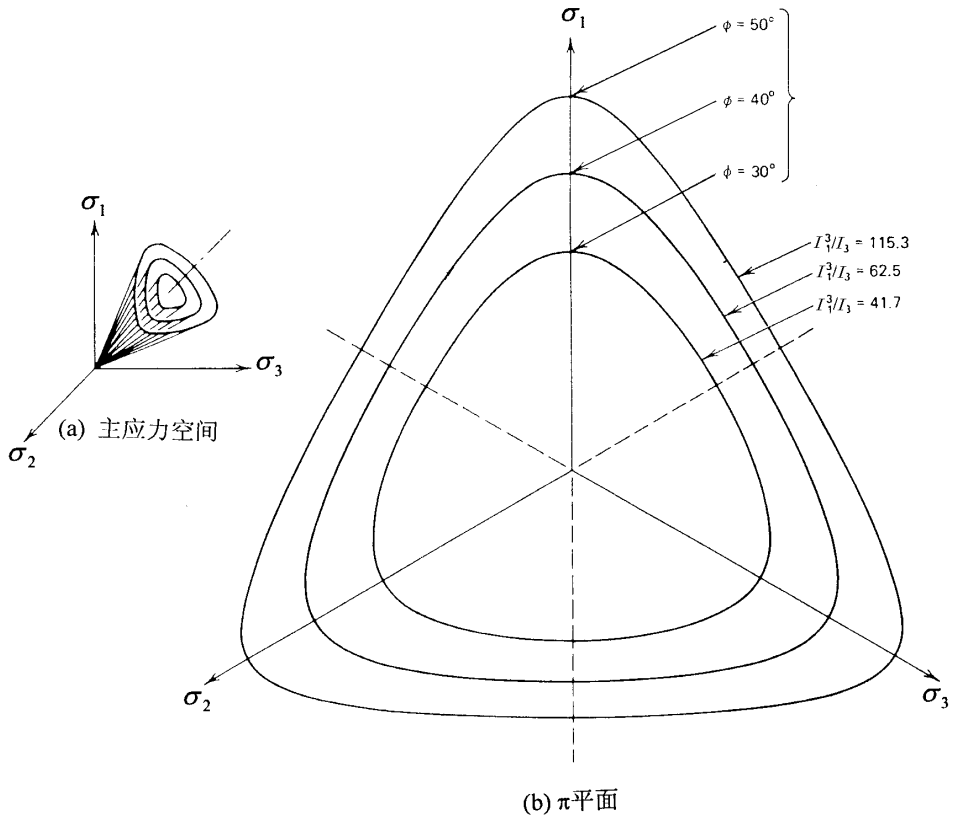


图3-6-6　Lade－Duncan 的破坏面与破坏轨迹

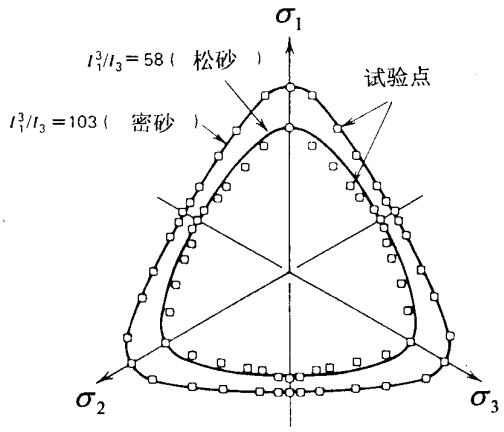


图3-6-7　试验结果与 Lade－Duncan 破坏轨迹的比较

许多砂土的试验结果表明，这一强度准则比较接近试验结果。图 3-6-7 是 Monterey 松密两种砂土的真三轴试验结果与这种破坏轨迹之间的比较。可见它符合比较好，对于松砂，在当 b 在 0－1 之间时，莱特－邓肯破坏准则估计强度偏高。实际上试验的数据只分布在θ＝－30°~＋30°的角域内，如假设土是各向同性的，并且σ_1、σ_2、σ_3 不代表其大小顺序条件，将试验数据及破坏轨迹按对称性分布在 360°内。从图中可看出，它基本上合理地反映了中主应力σ_2 对于土抗剪强度的影响。

如果设在试样破坏时大小主应力之比$\sigma_1/\sigma_3=\alpha$，则中主应力与小主应力之比为$\sigma_2/\sigma_3=b(\alpha-1)+1$，这样从式（3.6.19）可得到：

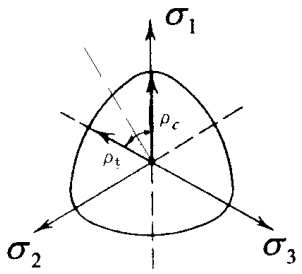
$$\frac{[\alpha(1+b)+(2-b)]^3}{b\alpha^2+(1-b)\alpha}=k_f \tag{3.6.22}$$

这个式子表示了砂土在破坏时，k_f 是常数，应力比$\alpha=\sigma_1/\sigma_3$ 是受中主应力参数 b 影响的，这与莫尔－库仑准则不同。

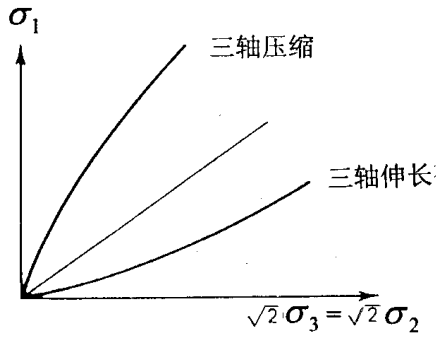
1977 年莱特修正他所提出的模型，其塑性势面、屈服面和破坏面在 p－q 子午面上的轨迹都改成弯曲的，这就反映了围压对于土的强度参数的影响。其破坏准则表示成如下公式：

$$f(I_1,I_3)=\left(\frac{I_1^{\,3}}{I_3}-27\right)\left(\frac{I_1}{p_a}\right)^m-k_f=0 \tag{3.6.23}$$

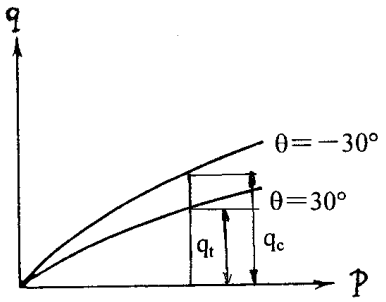
其中 k 和 m 是材料常数；p_a 是大气压，与 I_1 是同量纲的（p_a＝101.4kPa）。其在π平面、三轴平面和 p－q 平面上的轨迹如图 3-6-8 所示。在主应力空间它是一个子午线微弯的锥面。



(a) π平面



(b) 三轴平面



(c) p-q 平面

图3-6-8　修正的 Lade－Duncan 破坏准则

应当说对于砂土和正常固结粘土，莱特的破坏准则是相当成功的，它的表达式简单，试验常数少，并且能较全面地反映复杂应力状态下土强度的主要影响因素。

2. 松冈元-中井照夫 （Matsuoka- Nakai）破坏准则

基于空间滑动面（SMP：Spatial mobilized plane）的概念，松冈元等认为三维主应力状态中的三个莫尔圆对于土的强度都有影响，因而强度理论公式中应包含有这三个剪切角。空间滑动面的

倾角如图 3-6-9 所示，可见当$\sigma_2=\sigma_3$时，此倾角为 $45°+\frac{\varphi'}{2}$，$\varphi_{mo23}=0$，$\varphi_{mo12}=\varphi_{mo13}=\varphi'$，与莫尔－库仑准则一致。对于砂土，它的破坏准则表示为：

$$\frac{I_1 I_2}{I_3}=k_f \tag{3.6.24}$$

或者

$$\left[\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{\sigma_1\sigma_3}+\frac{(\sigma_1-\sigma_2)^2}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(\sigma_2-\sigma_3)^2}{\sigma_2\sigma_3}\right]=k_f-9 \tag{3.6.25}$$

或者

$$tg^2\varphi_{12}+tg^2\varphi_{23}+tg^2\varphi_{13}=k_f \tag{3.6.26}$$

其中 $tg\varphi_{12}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_2}}$，$tg\varphi_{23}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2\sqrt{\sigma_2\sigma_3}}$，$tg\varphi_{13}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2\sqrt{\sigma_1\sigma_3}}$。

它在主应力空间的形式也是一个圆锥面，在π平面轨迹与洛德－邓肯准则相似。见图 3-6-9（c）。

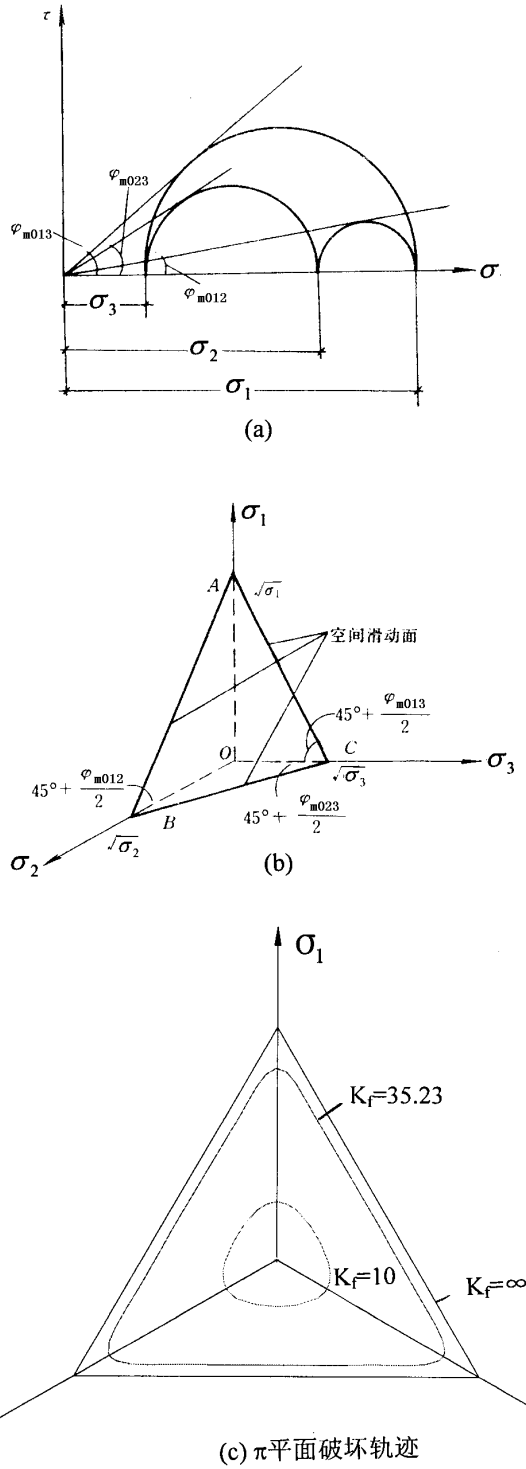


图3-6-9　　Matsuoka-Nakai 屈服条件

3. 双剪应力强度理论

我国西安交通大学的俞茂鋐认为土的破坏不仅仅取决于大主剪应力(σ_1-σ_3)，而是由三个主剪应力中的较大的两个所决定的。提出了双剪应力强度理论。

(1) 12 面体应力的概念

在主应力空间，存在如下三对正应力与剪应力：

$$\sigma_{13}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$$

主正应力: $$\sigma_{12}=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2) \tag{3.6.27}$$

$$\sigma_{23}=\frac{1}{2}(\sigma_2+\sigma_3)$$

$$\tau_{13}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)$$

主剪应力： $$\tau_{12}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2) \tag{3.6.28}$$

$$\tau_{23}=\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_3)$$

它们在主应力空间中作用在一个十二面体上，见图 3-6-10。

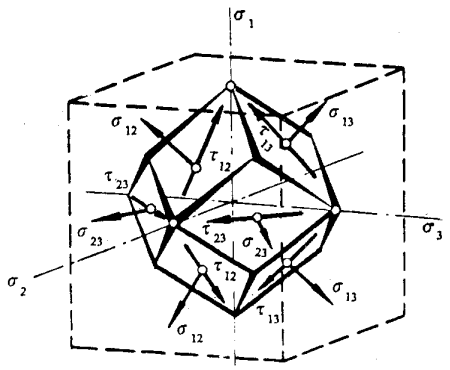


图3-6-10　十二面体应力

(2) 广义双剪应力强度理论的原理及表达式

这个强度理论的原理是：当作用于某土单元上的两个占主导地位的主剪应力及相应的主正应力的函数达到某一极限值时，土单元发生破坏。其一般表达式为：

$$\begin{cases} F=\tau_{13}+b\tau_{12}+\beta(\sigma_{13}+b\sigma_{12})-c=0(\text{当}\tau_{12}+\beta\sigma_{12}\geq\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\text{时}) \\ F=\tau_{13}+b\tau_{23}+\beta(\sigma_{13}+b\sigma_{23})-c=0(\text{当}\tau_{12}+\beta\sigma_{12}\leq\tau_{23}+\beta\sigma_{23}\text{时}) \end{cases} \tag{3.6.29}$$

其中 b、c 和β为三个材料常数。该强度理论在主应力空间中的极限面如图 3-6-11 所示，为一个不等边开口的锥面。

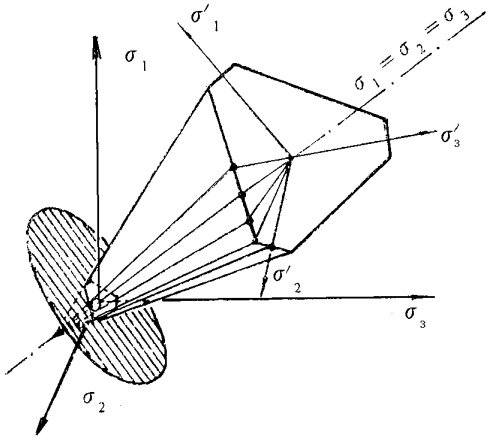


图3-6-11　主空间中的双剪强度理论极限面

(3) 广义双剪应力强度理论的一些讨论

在式（3.6.29）所表示的广义双剪应力公式中，在某些参数的特殊情况下，可以与上述古典强度理论一致。

(i) 当 b＝β＝0 时，退化成屈雷斯卡强度准则。在式（3.6.29）中如果 b＝β＝0 时变成

$$\tau_{13}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)=0 \tag{3.6.30}$$

它变成屈雷斯卡强度准则表达式，见式（3.5.6），即退化为最大剪应力强度理论。

(ii) 当 b＝0 时，退化为莫尔－库仑强度准则。在式（3.6.29）中，如果 b＝0，则变成：

$$\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)+\frac{1}{2}\beta(\sigma_1+\sigma_3)=c \tag{3.6.31}$$

其中如果β＝－sinφ，c＝ccosφ则可推出莫尔－库仑的强度理论表达式，见式（3.6.15）。调整参数 b 和β，这种强度理论的应用范围较大，但由于事先需要判断，所以相对比较麻烦，在实际问题中应用不够广泛。

4. 隐式的破坏准则

如上所述，由于破坏成为土的本构关系或应力应变关系发展的最后阶段，所以土的破坏意味着施加微小应力增量 $d\sigma_{ij}$，会产生不可控制的或很大的应变增量。这样，实际上每一个土的本构关系模型中都存在一个破坏准则。只不过有的是采用上述的某一种准则；有的是隐含在本构模型中，并无显式来表示。

例如我们所熟知的 Duncan－Chang 模型，其切线模量表示为式（2.4.23）

$$E_t=E_i\left[1-R_f\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]^2$$

其中应力$(\sigma_1-\sigma_3)$达到了莫尔－库仑强度的破坏值$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}$时，$E_t\to 0$，式中

$d\varepsilon_1=\dfrac{d\sigma_1}{E_t}\to\infty$，当然为了拟合双曲线的渐近线，引进了一个稍小于 1 的破坏比 R_f，这样在计算中某些单元可能应力状态稍高于莫尔－库仑强度理论的强度。有时就需要将应力状态修正到莫尔－库仑的极限状态。

剑桥模型是在软粘土研究的基础上发展起来的，所以其临界物态线在 p－q 平面上的投影是一过圆点的直线，表示为式（2.6.1）

$$q = Mp$$

在其应力应变计算中，当 $\eta = q/p = M$ 时，极小的应力增量将引起无限大的应变，亦即其增量应变关系中的分母为 0。式（2.6.1）实际上是广义密塞斯破坏准则。在实际应用中，剑桥模型有时也使用莫尔－库仑理论作为其破坏准则，但在某些应力状态下会引起应力应变切线的不连续。

对于一般的弹塑性本构模型，其总应变增量可表示为

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{p} + d\varepsilon^{e} \tag{3.6.32}$$

其中 $d\varepsilon^{p}$、$d\varepsilon^{e}$ 分别为塑性和弹性应变增量，由于弹性部分一般用广义虎克定律来确定，所以其破坏准则一般包含在塑性应变增量 $d\varepsilon^{p}$ 的确定中。塑性应力应变关系的一般表达式为：

$$d\varepsilon_{ij}^{p} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \tag{3.6.33}$$

这样其破坏准则就体现在 $d\lambda \to \infty$（在应变硬化塑性模型中）；或 dλ不确定。即表示为 $0/0$ 形式（在理想塑性模型中）。这意味着单元处于极限平衡应力状态。

对于一般的塑性理论模型（硬化或软化）

$$d\lambda = \frac{1}{A}\frac{df}{d\sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = -\frac{1}{A}\frac{\partial f}{\partial H} dH \tag{3.6.34}$$

当 A→0 时，表示土单元体的破坏。设 $H = H\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right)$，按弹塑性理论，从上式可推导出：

$$A = (-)\frac{\partial g}{\partial \sigma ij}\frac{\partial f}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}} \tag{3.6.35}$$

破坏准则包含在 $\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}^{p}}$ 式中。常常是 $H = H\left(\varepsilon_{ij}^{p}\right)$ 中的某些参数与土的破坏有关。但有时不能用显式表达，如清华弹塑性模型。

5. 土的各向异性的强度的表示

由于原状土一般是横向各向同性的，如上所述，其强度是各向异性的。另外如加筋土及人工改良土也常常是各向异性的。反映土各向异性的强度理论的手段比较多，但一般比较复杂。最常用的方法是修正上述的各种强度理论以反映土的强度的各向异性。比如对纤维加筋土在纤维被拉伸方向上，用莫尔－库仑强度准则，可增加一个粘聚力增量 Δc ；而在纤维受压的应力条件下，其抗剪强度则基本不变。

另外一种反映土各向异性的方法是在上述各种强度准则中，将应力不变量进行修正，不同方向的应力对强度的影响不同，可称为等效应力不变量法。比如对于横向各项同性的土，强度公式可表示为：

$$f(\varphi_1, \varphi_2) = k \tag{3.6.36}$$

其中 φ_1、φ_2 为等效应力不变量：

$$\varphi_1 = \sigma_{11} + \alpha(\sigma_{22} + \sigma_{33}) \tag{3.6.37}$$

$$\varphi_2 = \frac{\beta}{6}\left[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{33})^2\right] + \frac{(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2}{6} + \gamma(\sigma_{12} + \sigma_{13})^2 + \frac{\beta + 2}{2}\sigma_{23}^2 \tag{3.6.38}$$

其中α、β、γ为材料常数。

3.6.4 关于强度理论的讨论

强度问题是土力学中的经典问题，土的强度理论也是土力学中最早被研究和被提出的理论。许多工程问题都涉及土体的极限平衡分析，而土的强度理论是进行土体极限平衡分析的基础。密塞斯

和屈雷斯卡的破坏准则及其广义的形式作为土的强度准则有很大缺陷。只有在饱和软粘土的不排水情况下，还可以使用。

相对于以上两个强度理论，莫尔－库仑准则表达了破坏面上正应力与抗剪强度之间的关系，正确地反映了土强度的摩擦特性，形式；参数简单；参数易于通过简单的试验确定；可在一定范围内保证较高的适用性。因而在工程实践中受到工程界的欢迎和得到广泛的使用。但是这个强度理论也有两个不足：第一是它假设中主应力对土的破坏没有影响，这与我们所介绍的试验结果不符；第二点是通常令其强度包线是直线，亦即内摩擦角φ不随围压σ_3或平均主应力 p 变化，这也不符合我们前面介绍的试验结果。在一定的应力条件和应力水平下，这两个缺点不会造成很大的误差。对于一般的平面应变工程问题，φ值会有所提高，可作为安全储备使用。在较大的围压范围，对于超固结和正常固结粘土，对于含软弱矿物颗粒的碎石和堆石料，随着围压的变化内摩擦角会有很大变化，可采用式 3.4.2 与 3.4.3 的形式。

随着土的应力应变关系数学模型研究的发展，人们认识到土的强度只不过是土的应力应变的一个特殊阶段。因而土的强度理论被纳入土的本构模型之中。一些近代的土的强度理论被提出和发展。

莱特－邓肯强度准则是在砂土的试验基础上建立起来的。它只有一个材料常数，并且很容易从常规三轴试验确定。它反映了平均主应力 p 或第一应力不变量 I_1 的影响及中主应力的影响；由于破坏面形状和模型中的屈服面及塑性势面形状一致，并且没有角点，相对讲是比较合理和方便的。但它只有在修正以后才反映平均主应力 p 对于破坏应力比 q/p 的影响。这样它就比较合理地反映影响土强度较多的应力因素，因而与试验结果也符合得较好，适用于砂土和正常固结粘土。

隐含的破坏准则一般包含在土的本构模型之中，一般不能单独使用在极限平衡分析问题中。

随着工程实践和理论的发展，土的强度理论也将会进一步发展，简单、清楚的理论将会得到广泛的应用；而针对特殊条件的强度理论将会在许多具体工程问题中得到合理的应用。

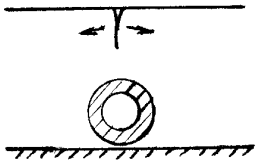
3.7 粘性土的抗拉强度

3.7.1 实际工程中的拉伸破坏与开裂

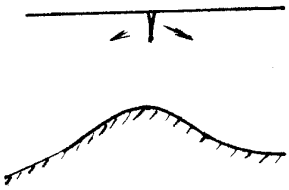
在许多工程问题中，土体会发生开裂，这些裂缝经常是由于土体的拉伸破坏引起的。这些拉伸破坏的情况可包括如下几种：

1. 不均匀沉降引起的拉伸破坏

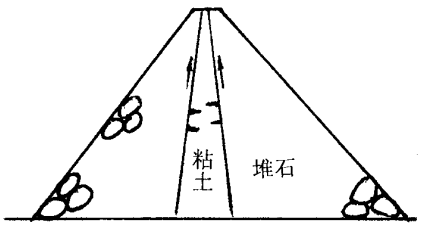
当土体或地基发生较大的不均匀沉降时，在土体或地基中会发生剪切破坏或拉伸破坏，因而产生裂缝。这些裂缝一般规模较大，深入土体，对于土工建筑物产生严重危害。尤其是对于堤坝类水工建筑物，可能产生灾难性的后果。这种裂缝可以是外部的，也可以是内部的；对于条形土工建筑物，可以是纵向的，也可以是横向的；可以是贯穿的，也可以是局部的。图 3-7-1 表示几种拉伸裂缝的情况：(a) 是上埋式埋管的情况，由于管上土体两侧向下、向外位移，在管上土体上常受拉而开裂。(b) 情况相似，是由于刚性地基不平在填方土体上部产生不均匀沉降而拉伸开裂。(c) 是一种内部裂缝情况，由于土石坝坝壳堆石材料沉降量小并且快，较早达到了稳定。而粘土心墙则由于总沉降量大，并且固结速度慢，在竣工后仍继续沉降。这样坝壳通过与心墙接触面上的摩擦力阻止心墙沉降，在心墙中摩阻力与自重应力共同作用下可能在心墙中产生竖向拉应力而产生水平裂缝。



(a) 上埋式管线



(b) 填土厚不均匀

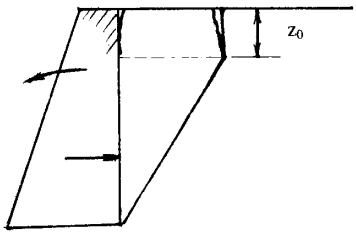


(c) 堆石坝中的粘土心墙

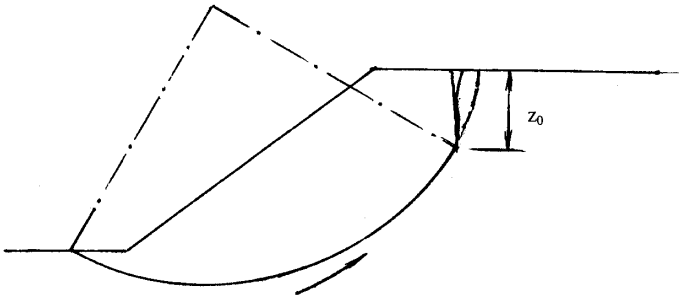
图3-7-1　几种由不均匀沉降引起的土拉伸破坏

2. 滑动中的拉伸裂缝

实践表明，许多挡土墙后的粘性土体中及粘性土坡滑移体中，都存在开裂现象。如图 3-7-2 所示。这时，土体中的应力状态是比较复杂的，其中大多数土单元是剪切破坏，但也有部分单元处于拉伸破坏，由于拉伸而产生开裂。具体的情况是由土体的应力应变性状确定的。



(a) 挡土墙后粘性土体



(b) 粘土滑坡体

图3-7-2　滑动中的拉伸裂缝

3. 水力劈裂

根据有效应力原理，从式（3.5.4）

$$\sigma' = \sigma - u$$

当$\sigma' < 0$时就会在土骨架中产生拉力，这个拉力超过土的抗拉强度σ_t，或者产生的拉应变超过土体的极限拉应变时，就会在土体中发生开裂。这种由于孔隙水压力的提高，在土体中引起拉伸裂缝发生和发展的现象被称为水力劈裂。其实这是一种拉伸破坏。这种现象在工程中存在有利和有害的两个方面。有利方面表现在粘性土灌浆时，用水泥粘土浆是不可灌的，但当灌浆压力大到一定程度时，产生水力劈裂，进行劈裂灌浆，可用于修补裂隙、孔洞，起到土体防渗和加固的作用；另外在石油开采中可通过水力劈裂开辟新的出油通道。而有害的方面是它们使水利建筑物的防渗体失效。如高土石坝的心墙（见图 3-7-1（c））中任一点，因本身总应力较低，在蓄水后，由于孔隙水压力增加而使有效最小主应力出现负值，并且绝对值接近土的抗拉强度，就会沿着最小主应力面发生水力劈裂，导致土石坝渗透破坏。这一问题已引起工程界的重视。

关于水力劈裂的准则，一般认为可表示为：

$$-\sigma_3' = -(\sigma_3 - u) < \sigma_t \tag{3.7.1}$$

其中σ_t为粘性土的抗拉强度，σ_3'为拉力，应力符号为负。水力劈裂的试验可以用空心圆柱的内压渗透试验来进行。

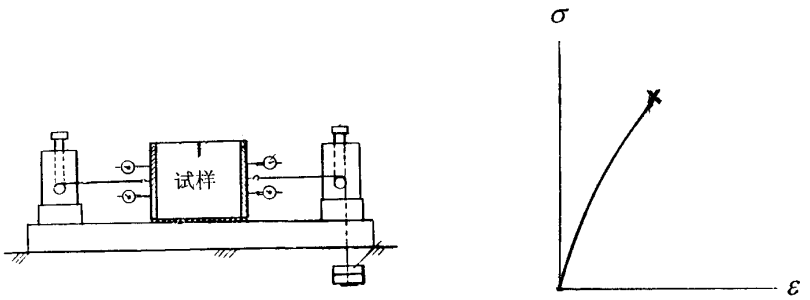
3.7.2 土的抗拉强度的测定

在土力学试验中，测定土的抗拉强度一般不能像其他材料一样进行竖向的单轴拉伸试验。这是由于土的抗拉强度值一般很低，土的自重常常足以导致土体被拉断。

一般的试验方法包括：三轴拉伸试验、单轴拉伸试验、土梁弯曲试验、径向、轴向压裂试验及空心圆柱内压开裂试验等。在这些试验中，试样需精心制备，避免缺陷；精心养护，试验中防止水份蒸发，防止摩擦力、自重、膜约束等造成误差。

1. 单轴拉伸试验

土的单轴拉伸试验是测定土抗拉强度的最直接和有效的试验方法，它还可以测得土的拉伸应力应变关系。但由土抗拉强度和极限拉应变都很小，并且对于土样缺陷很敏感，所以这种试验必须精心进行。



(a) 仪器简图　　(b) 应力－应变关系曲线

图3-7-3　单轴拉伸试验

图 3-7-3 为清华大学采用水平放置的方形试样进行击实土抗拉试验，试样水平分层制作的，两端通过环氧树脂粘接在端板上，施加拉力。为了增加粘接力，可在试样两端预先钻一些浅孔以便使树脂进入。试样下部放置密布的涂油滚珠及玻璃条以消除底部的摩擦力。这种试验测得的拉伸应力应变曲线见图 3-7-3（b）。极限拉应变很小，在ε＝0.1%左右即断裂破坏。一般讲，随着土含水量的增加，破坏时的极限抗拉应变也增大，亦即表现较大塑性。在相同的干密度下，含水量低的试样抗拉强度高，但极限拉应变小，即表现更多脆性。在相同含水量时，干密度高的试样抗拉强度高。

2. 三轴拉伸试验

在三轴试验中，在顶帽与荷载杆之间装备有拉挂装置就可以实现轴向作用小主应力，亦即三轴伸长试验。但要实现轴向作用拉应力，则必须在帽和底座与试样端部间用胶结物胶结或冰冻法胶结。这时围压是大主应力σ_1，当$\sigma_1=0$ 时试验变成单轴拉伸试验。试验中试样外表面涂一层硅脂，橡皮胶要预留褶皱，减小轴向的摩擦力及约束力。为了避免两端胶结的困难，也可作成试样中部尺寸小于两端的试样，在室压的作用下，可在中部产生拉应力直至破坏，而两端仍不脱离。见图 3-7-4。三轴拉伸试验可实现应力状态较为复杂的拉伸试验，分析拉伸破坏和抗剪破坏的两种破坏形式及其分界。

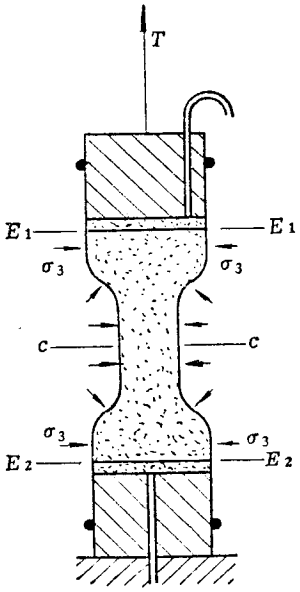


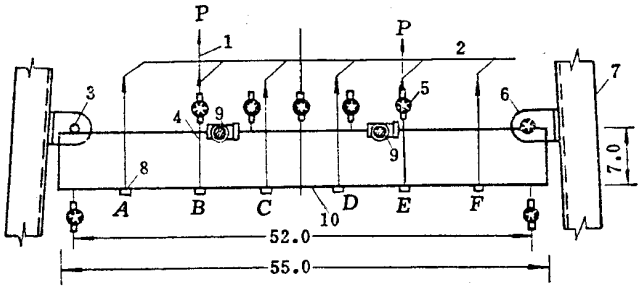
图3-7-4　三轴伸长试验的试样

3. 土梁弯曲试验

土梁是在模具中分层压（击）实的。为了消除自重影响，将土梁反向支承于支座上，见图 3-7-5。在跨中等距的 B、E 两点逐级施加向上荷载 P。这时，BE 段为纯弯段。为了消除自重影响，还可以在图中土梁下边缘 A、B、C、D、E、F 点施加适量的向上平衡力；也可将试样用橡皮膜包裹后，放入比重较接近的液体中，在梁的中部，根据材料力学公式计算其拉力为：

$$\sigma_t = \frac{6M}{bd^2} \tag{3.7.2}$$

上式是基于弹性理论得到的，当土体接近破坏时，梁的中性轴不在梁中心高度上，应力也不再是线性分布的，所以在计算中需进一步修正。



1—试验荷重；2—平衡土梁自重荷重；3—支座；4—细钢丝；5—测微表；6—滚动支座；7—试验架；8—传力横梁；9—读数显微镜；10—土梁

图3-7-5　土梁试验装置简图（单位：cm）

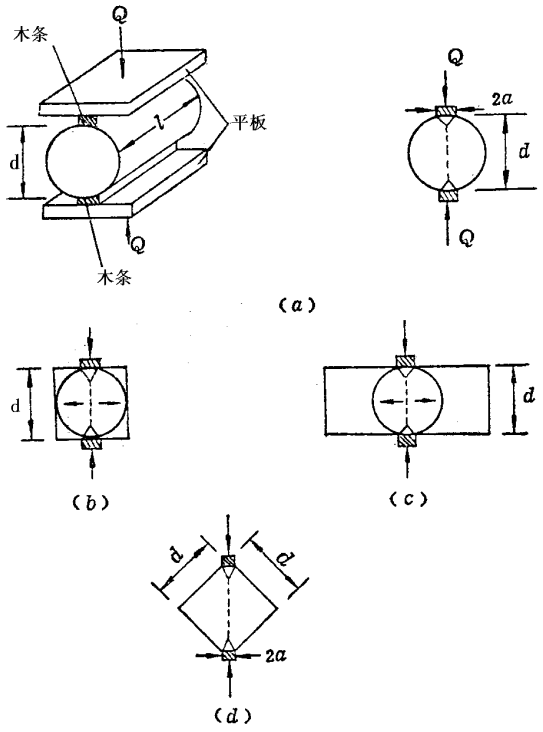
4. 径向压裂法

径向压裂法又称为巴西试验法。原来是用于测定混凝土和岩石等脆性材料的抗拉强度。图 3-7-6 中表示了四种测定试验方法，试样分别为圆柱、立方体和梁。可沿直径、中线和对角线几种方向进行压裂试验。根据弹性理论的鲍辛尼斯克（J. Boussinesq）解，可以计算得到水平方向拉应力为：

$$\sigma_t = -\frac{2Q}{\pi l d} \tag{3.7.3}$$

式中各符号意义见图 3-7-6。

用它可以近似地间接计算径向压裂试验的抗拉强度。



(a)圆柱体；(b)立方体；(c)梁；(d)立方体沿对角线加压

图3-7-6　四种径向压裂方式

5. 断裂韧度测定试验

由于土体常常是不均匀和有缺陷的，拉伸强度问题中常伴随着缺陷及微裂缝隙、周围的应力集中及裂缝的发展问题。

在预先就有垂直于拉伸方向的小缝隙的土体中进行拉伸时，在裂缝的尖端将产生应力集中，根据弹性理论

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \tag{3.7.4}$$

其中 a 为原有裂缝长度，σ为全断面上平均拉应力。K_I 描述了裂缝尖端应力场集中的情况，称为应力强度因子，对于有限尺寸试件的情况：

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\, y\left(\frac{a}{w}\right) \tag{3.7.5}$$

w 为试样抗拉断面的宽度，$y\left(\frac{a}{w}\right)$称为形状修正参数。

当应力强度因子达到极限状态时，亦即引起试样断裂时

$$K_{If} = K_{IC} \tag{3.7.6}$$

K_{IC}称为张开型（I 型）断裂韧度，它是材料抗断裂性能的一个重要参数，属于材料的固有特性，单位是（ $kN/m^{\frac{3}{2}}$ ）。

断裂韧度的测定试验也可以通过图 3-7-3 所示的试验仪器进行，只是在试样预留一长度为 a 的垂直方向的裂缝。试验表明，土的断裂韧度与其抗拉强度一样与土的干密度和含水量有关。在最优含水量和最大干密度附近，当含水量相同时，干密度高的试样有较高的断裂韧度；当干密度相同时，含水量高的试样的断裂韧度低。

3.7.3 粘性土的联合强度理论

在有拉应力条件下，粘性土的破坏可能是剪切破坏，也可能是拉伸破坏。在有拉应力存在的复杂应力状态下，破坏状态的判断有时是比较困难的。

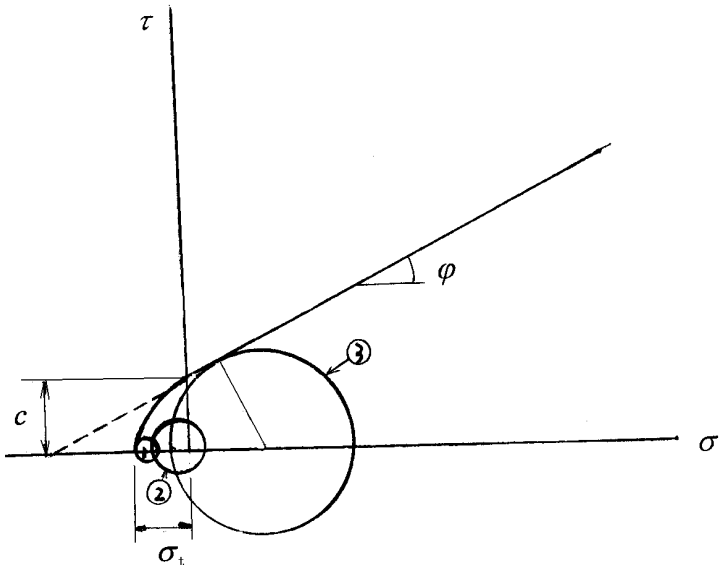


图3-7-7　　粘性土的拉伸和剪切破坏

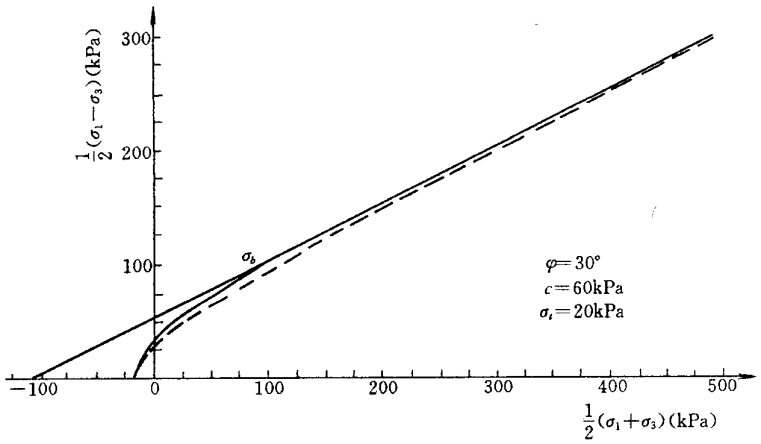


图3-7-8　　两种强度包线的比较

土的剪切破坏一般认为符合莫尔－库仑强度理论。但存在拉应力条件下，其包线不再是直线，见图 3-7-7。其中圆①应力状态为拉伸破坏。

其条件是$\sigma_3=-\sigma_t$，圆③为剪切破坏，其条件是

$$\frac{\sigma_1-\sigma_3}{\sigma_1+\sigma_3+2cctg\varphi}=\sin\varphi \tag{3.7.7}$$

而圆②既未拉伸破坏，也未剪切破坏，处于静力平衡稳定状态。

既能判断拉伸破坏，也能判断剪切破坏的强度理论被称为联合强度理论。它们一般是将莫尔－库仑强度理论的直线包线在拉伸区变弯曲光滑。格锐费斯（Griffith）针对岩石的脆性破裂将莫尔－库仑包线用抛物线描述，并建立单轴抗压强度σ_c与单轴抗拉强度σ_t关系：

$$\sigma_C=\frac{4\sigma_t}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu} \tag{3.7.8}$$

其中μ为岩土中微裂隙的摩擦系数。

根据格锐费斯的理论，将强度包线分为前一段抛物线和后一段直线，二者在某一点光滑相接，可推导下列抛物线方程：

$$\bar{\tau}^2=2\tau_b\sin\varphi\bar{\sigma}+\tau_b\sin\varphi\sigma_t+\frac{\sigma_t}{4} \tag{3.7.9}$$

其中$\bar{\tau}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$，$\bar{\sigma}=\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}$，$\sigma_t$为土的抗拉强度，$\tau_b=(\sigma_b tg\varphi+c)/\cos\varphi$。$\sigma_b$称为闭合应力，表明应力大于此值时，岩土的微裂缝即闭合，它与土的抗拉强度有关。

根据试验资料可以用一个经验公式来拟合试验资料，可以用一双曲线拟合，它与σ轴截距为σ_t，以莫尔－库仑的直线包线为渐近线：

$$\tau^2=(c+\sigma tg\varphi)^2-(c-\sigma_t tg\varphi)^2 \tag{3.7.10}$$

式（3.7.9）与式（3.7.10）表示的曲线形式见图 3-7-8，其中虚线为式（3.7.9），实线为（3.7.10）计算结果。直线为莫尔－库仑包线。

第三章　参考文献

[1] Mitchell J.K., Fundamentals of Soil Behavior (Second Edition), New York: John Wiley & Sons, Inc., Printed in USA, 1993.

[2] Robert D. Holtz and William D. Kovacs, An Introduction to Geotechnical Engineering, New Jersey, Printice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1981.

[3] 黄文熙主编，土的工程性质，北京：水利水电出版社，1983。

[4] 钱家欢，殷宗泽主编， 土工原理与计算（第二版），北京：中国水利水电出版社，1996。

[5] 沈珠江，理论土力学，北京：中国水利水电出版社，2000。

[6] 屈智炯，土的塑性力学（第一版），成都：成都科技大学出版社，1987。

[7] D. G. 弗雷德隆德，H. 拉哈尔佐合著，陈仲颐等译，非饱和土力学，北京：中国建筑工业出版社，1997。

[8] 李广信，土的三维本构关系的探讨与模型验证，清华大学博士论文，1985。

[9] 刘彦生，宽级配击实粘土断裂韧度性质研究，清华大学硕士论文，1994。

[10] 俞茂鋐，强度理论新体系，西安：西安大学出版社，1992。

[11] R.H.G. Parry, Mohr Circles, Stress Paths and Geotechnics, London: E & FN SPOM, 1995.

[12] Matsuoka, H. and Nakai, T(1977), Stress-strain relationship of soil based on the SMP, proc. 9th ICSMFE, Specialty session 9, 153-163.

[13] Duncan J.M. and Chang C.Y. , Nonlinear analysis of stress and strain in soils, proc. ASCE, JSMFD 1970, 96(SM5),1629-1633.

第四章 土中水与土的渗透及其计算

4.1 概述

4.1.1 岩土中的水及其运动

岩土材料实际上是非连续的，是由多相组成的。在其孔隙中存在着气、液相介质，当孔隙连通时，这些流体可在不平衡的势能情况下发生流动。其中土中水及其运动会引发许多工程和环境问题。岩土中流体及其运动是一个重要和有实际意义的课题，它和人类生活密切相关；与其有关的工程领域有：水利、建筑、交通、采矿、石油、农业和环境等。

浅层岩土中的水主要来自大气中的降水，随后它在土的孔隙中流动。土中水可以分为两部分，如图 4.1.1 所示。地下水位以下称为地下水，它又以上层滞水、潜水和承压水的形式存在。地下水位以下的土基本是饱和的，孔隙水压力大于大气压力，可在重力的作用下运动。另一部分存在于地下水位以上。它可能是入渗的水，向下运动补给地下水，上层滞水有时也可列入这部分；可能是由于毛细作用或者植物根系作用向上运动的水，这些向上运动的水的孔隙水压力小于大气压。除局部毛细区的水在土中接近饱和外，大多数处于非饱和状态。

从图 4.1.1 可见，土中各部分的水一般是可运动的；它们具有不同的饱和度、不同的势能和不同的运动方向。土中水对于土的工程性质有重要影响；土中水的运动对于人类生活及环境也具有很大的影响。例如，土中水会影响土本身的强度和变形性质；孔隙水压力改变了土中有效应力，也进一步影响了土体的强度和变形。水入渗可补给地下水，也可能将地表污染带入地下水。渗流产生的

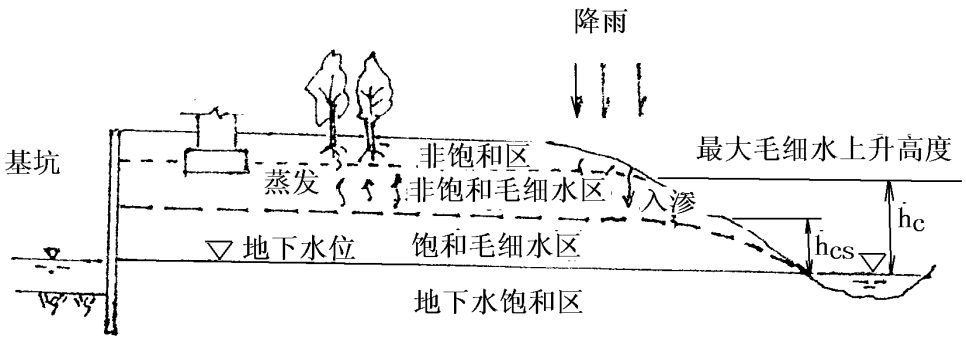


图4.1.1 土中的水

渗透力可影响土坡的稳定，而渗透力又可引发土的渗透破坏。这些对于水利和建筑工程有很大意义。

地球表面的干旱区和半干旱区占很大面积。这时地下水位通常很深，气候变化引起地表附近土的含水量变化。在碱性环境下生成的一种高塑性土—膨胀土，其含水量增高会引起土体积膨胀，当它的变形受限时，会产生膨胀力。对于一些孔隙较大的粉土，例如湿陷性黄土，含水量增高，又可能引起湿陷，在荷载作用下湿陷更明显。暴雨使非饱和区的土达到饱和，使原来的负孔压消失，随后在土中渗流的渗透力作用下，可引起土体的崩塌、土坡的滑动及产生泥石流。

4.1.2 渗流的工程意义

土中水的渗流使大气降水补给地下水，或者增加土壤含水量，这对于地球上蓬勃生长的草木等植物是至关重要的，是地球生命的源泉之一。同时也使宝贵的水资源得以存储，使大地充满了生机。

可是渗流也会引发许多严重的工程问题。我国大量的挡水和输水建筑物及构造物的渗漏是一个严重的问题。目前我国已建渠道 80%没有防渗措施，渠系中水的利用系数平均不足 0.5，有的渠道

渗漏量高达 80%，损失了大量宝贵的水资源，恶化了环境，也引起了土壤的盐碱化。渗透变形引起的水利工程破坏是又一个严重的问题。据美国的调查统计，他们破坏的 206 座土坝中有 39%是由于渗透引起的。著名的弟顿（Teton）坝，1976 年由于渗透破坏而引起垮坝，总损失达 2.5 亿美元。我国青海的沟后混凝土面板卵石坝于 1993 年 8 月因渗透而引起溃坝，造成 300 多人死亡。1998 年长江洪水期间，堤防出险 5000 余处，其中 60—70%是由于管涌等渗透变形引起的。堤防工程中的主要险情：管涌、散浸、脱坡、崩岸等都与渗透有关。

其他领域中，土中水的渗流也有重要意义。高层建筑深基坑发生事故比例很高，其中主要原因在于土中水引起的水土压力变化和渗透变形。在采矿与石油工程中，渗流也是一个重要课题。近年来，环境工程受到世界各国的重视。其中有毒生活和工业废水的排放和固体垃圾堆放引起的地下水的污染；放射性核废料的通过地下水的污染与扩散，成为重大环境课题。这些都促进了从微观到宏观，从物理化学到力学，从理论分析到数值计算的对渗流问题的深入系统的研究。

4.1.3 土中水和渗流问题的研究历史

20 世纪初，随着人类在物理和化学领域中研究的进展，人们对土中水的形态和水土相互作用开始进行探讨。在认识到粘土矿物的组成和分子间结构以后，对于粘土颗粒与水间相互作用从微观进行研究，劳（Low）1901 年给出了粘土颗粒表面结合水形成的机理；马丁（Martin）1960 年得出了不同厚度结合水的密度分布，同时也给出了物理模型以说明土的冻胀机理（1959）。米切尔（Mitchell）在 1975 年出版的《土性基础》（Fundamentals of Soil Behavior）一书中，对于土中水的形态及其对土性的影响作了较全面的总结和阐述。

对于土中水的渗流研究的历史更加悠久。早在 1856 年，法国工程师达西（Darcy）提出了线性渗流的达西定律。1889 年，俄国的茹可夫斯基（H. E. Жуковьскцú）首先推导了渗流的微分方程。1922 年，巴甫洛夫斯基（H. H. Павловскцú）提出了求解渗流场的电模拟法。由于渗流的微分方程在复杂边界条件下很难得到其解析解，所以人们力图用数值算法解决它。1910 年理查森（L. F. Richardson）首先提出了有限差分法。在 20 世纪 60 年代之后，由于计算机及计算技术的迅速发展，人们广泛应用有限单元法、边界元法和许多其他计算方法计算解决渗流问题。目前，关于饱和、非饱和土的渗流计算；稳定、非稳定流的渗流计算；不同介质的混和流计算；渗流与应力变形相耦合、渗流和极限分析相耦合的的各种数值计算方法和程序得到迅速发展，成为计算土力学中一个重要分支。

4.2 土中水的形态及其对土性的影响

土中水可以呈固态、液态和气态存在。其中液态水又可分为结合水、毛细水和重力水。不同形态的水对于土的物理力学性质有重要影响，特别是对于粘土和粉土。

4.2.1 土与水间的物理化学作用，粘土颗粒表面的双电层

1. 水分子结构及其相互作用

水分子为 H_2O，原子核呈 V 形排列，H-O-H 夹角稍小于 105°，见图 4.2.1，外层电子六个来自氧原子，两个分别来自两个氢原子（各一个），O-H 距离 0.97Å（1Å=10^{-10}m），H-H 距离 1.54Å。

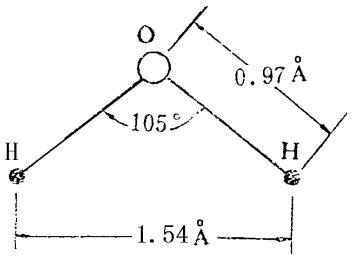


图4.2.1 水分结构

可以看出，水分子的正负电荷是平衡的，但分布并不均匀，正电荷集中在一角，负电荷在另一角，构成了偶极子。分子的正角吸引另一个分子的负角，导致临近四个水分子间键接，形成四面体结构。水分子间的键接可能有两种方式，一是氢键结合，当一个水分子的氢被吸附到相邻水分子的氧时，就形成了氢键，氢键是原子间的键，其影响范围约为 2~3Å，键能为 21~42kJ/mol；二是范德华（Van der Waals）键，这是一种分子间作用力，例如两个水分子偶极子间的作用力，其影响范围达 3~10^3Å，键能约为 2.1~21kJ/mol。原子键除了氢键外，还有离子键和共价键，它们的影响范围为 1~2Å，键能达 84~840kJ/mol，故又称为高能键。一种元素的原子失去其最外层的电子形成阳离子。另一些元素的原子获得电子形成阴离子，阴阳离子间静电引力形成离子键，例如钠原子失去最外层的一个电子，成阳离子，如氯原子获得一个电子成阴离子；两者吸引成氯化钠分子。共价键是两个具有不完整的外电子层的原子，共用外电子层而结合在一起，如两个氢原子共用各自最外层的一个电子，形成电子对，键合成 H_2。对水的键能研究表明，H-O 键中 40%为离子键，60%为共价键。

2. 粘土颗粒表面的电荷

粘土颗粒表面带有负电荷，这种现象可由下面的实验得到证实。在潮湿粘土中插入两个直流电极，通电后阳极周围的土变干，而阴极周围的土变得更湿。这是因为土颗粒带负电荷，向阳极移动，这种电动现象称为电泳，而水分子向阴极移动，称为电渗。

这个实验原理被用于电渗降水，将竖直插入软土地基的排水花管接阴极，在电渗作用下，孔隙水流向排水管并导出地面，以加速渗透系数很小的软粘土地基固结。

粘土颗粒表面带电的原因可有如下几种解释：

（1）正常晶体中，总的正负电荷是平衡的，但在薄片边缘或表面，结构连续性遭受破坏，形成不平衡电荷，这些被破坏了的键常使粘土颗粒带净负电荷。但在破坏了的边缘局部，也发现了正电荷集中现象。

（2）四面体中心的硅或八面体中心的铝被别的较低价的阳离子置换，例如，镁或铁的置换，结果是晶体表面出现不平衡的负电荷。这种置换作用称为同晶转换。

（3）当粘土存在于某种碱性溶液中时，土粒表面的氢氧基产生氢的离解，从而带负电。

3. 粘土颗粒表面的双电层与结合水

带负电的粘土薄片在其周围形成电场，周围水中的水分子偶极子，以及阳离子，如 Na^+和 Ca^{2+}等，因静电吸引而收附于土粒表面，离土粒表面愈近，吸引愈紧。带有负电荷的粘土片和周围的极化水分子、带有正电荷的阳离子云等组成的扩散层被称为扩散双电层，简称双电层。土颗粒与水发生物理化学作用，对于粘土矿物，其离子易溶于水，且粘土颗粒扁平，比表面积大，与水充分接触，相互作用力可能与颗粒的重力处于相同量级，因此研究粘土颗粒与水的相互作用是重要的。水分子具有不均匀分布的电荷和偶极子特性，它能吸引溶液中的离子成为氢氧化物，即水化作用。正离子吸附于水分子负电的一端，从而破坏了水的结构。未溶离子虽没有发生水化作用，但仍占据空间，也影响到水的扩散性和粘滞性。大量证据表明水被土的矿物吸附，特别是粘土矿物，其作用机理见 2.8.3 节所述。粘土颗粒与水间相互作用力可包括氢键作用、可交换阳离子的水化作用、渗析作用、静电力作用和范德华力作用。

由于粘土颗粒与水之间相互作用，在土粒表面形成双电层，或称为扩散层。双电层内的水被称为结合水。结合水又分为强结合水和弱结合水。当粘土中含水量小于 1%时，高岭土颗粒表面大约为 3 层水分子，厚度约为 10Å，其强结合水密度明显高于一般水。（见图 4.2.2）

同样，越接近粘土颗粒表面，水冻结温度越低，在双电层中水的冻结温度可能比孔隙中心的水低几

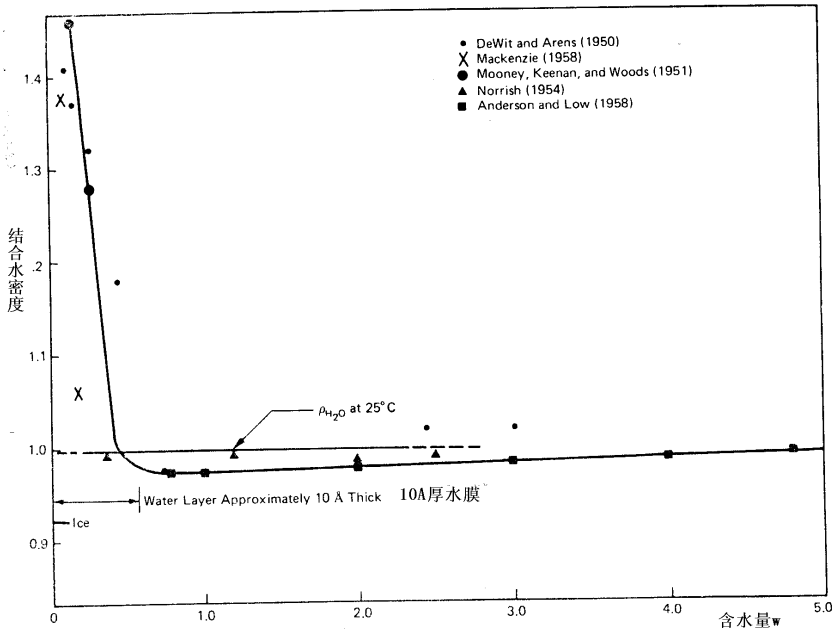


图4.2.2 结合水的密度

度。结合水的粘滞性大、比热大、介电常数也较低。

4. 粘土颗粒双电层的厚度

扩散层的厚度可假设从土粒表面到离子浓度达水溶液中正常离子浓度的点。粘粒表面带负电荷，并在周围形成电场。电场强度可以用电位来表示，正常离子浓度的点即为电位为零的点。图 4.2.3（a）中，用一无限范围的薄片表示粘粒表面，假定其上负电荷均匀分布，距其 x 处一微分体 dV，包含有电荷的密度 $\rho = v \in n$，根据波尔兹曼（Boltzmann）公式和古衣一察普门（Guoy-Chapman）方程，可推导出微分方程

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{\lambda} v \in n_0 \exp(-\frac{v \in \psi}{kT}) \qquad (4.2.1)$$

式中 ψ——扩散层中离土粒表面 x 处的电位，土粒表面电位记作 ψ_0；

λ——扩散层介质的介电常数；

v——电荷的离子价；

$\in$——电荷的静电单位；

n——离子的浓度，其中 n_0 为零电位时离子浓度；

k——波尔兹曼常数；

T ——绝对温度。

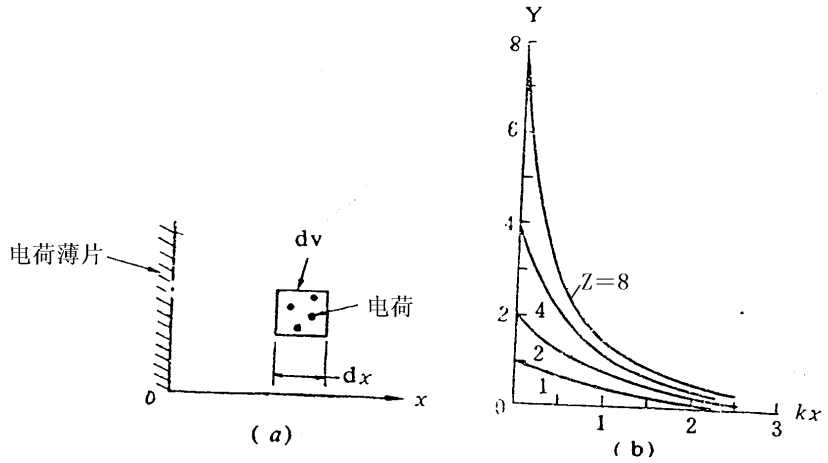


图4.2.3 双电层中电位和电荷的分布

图 4.2.3（a）的边界条件为，$x=0,\ \psi=\psi_0$；$x=\infty,\ \psi=0$，可以求得微分方程的解，并可近似表示为

$$\psi=\frac{4kT}{v\in}\exp(-Kx) \qquad (4.2.2)$$

式中 $$K=(\frac{8\pi n_0\in^2 v^2}{\lambda kT})^{1/2}$$

因此，扩散层电位随离土粒表面的距离呈指数关系衰减。如图 4.2.3（b）所示。图中，$z=v\in\psi_0/(kT),Y=v\in\psi/(kT)$。当$x=\frac{1}{K}$时，$\psi=\frac{4kT}{v\in}$，视为电位近似于零，即扩散层厚度近似为 1/K。

$$\frac{1}{K}=\frac{1}{\in v}(\frac{\lambda kT}{8\pi n_0})^{1/2} \qquad (4.2.3)$$

从式（4.2.3）可见，扩散层厚度与介电常数λ和绝对温度 T 的乘积的平方根成正比，和正常溶液中离子浓度n_0的平方根成反比，同时与离子价成反比。即采用高价离子和增加浓度可减小土粒周围的电位。计算结果表明扩散层的厚度的变化范围从几个 Å 到数百 Å。

5. 一些结论

（1）粘土颗粒表面带负电，其上吸附有阳离子云或水分子偶极子，当粘土表面富集某种阳离子时，可能发生离子置换，例如，钙离子置换钠离子，并对粘土的特性产生重要影响。水分子偶极子在粘土表面形成强结合水，其厚度约 10Å（三个水分子层），强结合水比重大于 1，冰点低于零度，不能象自由水那样流动。

（2）粘土颗粒对水的特性的影响，随与粘粒表面距离的增加按指数关系衰减，相互作用在大约 100Å 以内是明显的，并无证据表明工程中粘土内水的粘滞性和水动力特性等不同于自由水，也就是说达西定律基本上适用于高塑性粘土。

（3）研究粘土和水的分子结构，以及相互作用具有一定的理论和实践意义。例如解释粘土的特性和应用于工程实际。

（4）土的塑性是粘性土的主要特性，它主要取决于土粒的矿物成分和粘土矿物的片状结构，实验表明对原生矿物长石、石英等，即使研磨成小于 2μm 的微粒，也不具塑性。粘土矿物的片状结构，使其具有较厚的扩散层，颗粒间靠结合水连结，因而表现出塑性。

改变悬液中离子的浓度和价数，可以改变扩散层的厚度，从而改变颗粒间的排列起到絮凝或分散作用，例如比重计试验中的分散剂，护壁泥浆中的膨润土，此外，加分散剂可使沉积粘土排列紧

密，获得较少的渗透系数和高的强度，加絮凝剂则获得更开敞的结构，以利于排水。其他研究成果也能用于指导工程实践，例如，不同化学物质的吸附特性、离子交换特性可应用于废弃物和有害废物的填埋，保证粘土垫层的防渗性和长期安全运行。

4.2.2 毛细水与土中吸力

1. 毛细水和毛细上升高度

水气间表面的张力形成了其表面的收缩膜，它是由收缩膜内水分子受到的不平衡力造成的。这种膜类似于弹性薄膜，它具有与相邻水相不同的性质，所以有人建议将水气分界面的收缩膜作为土中的第四相。它可将两个土颗粒紧紧地拉在一起。

在固体、水、气体的表面上，由于一般固体的密度大，水被固体所吸引上升，收缩膜有被拉伸趋势，从而带动水上升。在内径很小的玻璃管中，由于收缩膜的作用，水将沿着玻璃管上升，形成弯月面。如图 4.2.4 所示。在一定直径 d 的管中，水的表面张力和水与玻璃间的夹角 α 决定了水上升的高度。值得注意的是，如果液体密度比固体高，如水银，则 $\alpha > 90°$，收缩膜外凸，管内的液面下降。纯净的水和洁净的玻璃之间的夹角 α 近似为 0，水气间在 20℃时表面张力 $T = 74 dynes/cm = 0.000074 kN/m$，取玻璃管下部容器中水面为基准面，当考虑玻璃管中水体竖向平衡时：

$$h_c \gamma_w - \frac{4T\cos\alpha}{d} = 0$$

$$h_c = \frac{4T\cos\alpha}{\gamma_w d} \qquad (4.2.4)$$

h_c 为毛细水的上升高度。从水的压力角度看，如取大气压 $p_a = 0$，则在毛细管中水位上部的压力 u_w 为：

$$u_w = -h_c \gamma_w \qquad (4.2.5)$$

可见只要是 $\alpha < 90°$，则在毛细管中水压力为负值。见图 4.2.4

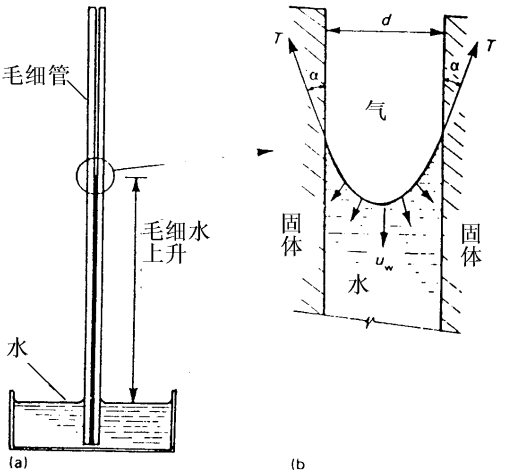


图4. 2. 4 毛细水上升

2. 土中吸力

从式（4.2.5）可见，在毛细区，水的压力为负。称为毛细水压力。

在图 4.2.5 中，表示了不同玻璃管中在不同情况下毛细水上升情况。吸水毛细水上升时，上升水柱为大孔隙所阻（图 c），达不到细管所能上升的高度（图 d）；脱水下降时，水柱高度为细管所控制，图 a 和图 b 水柱高度相同。另外，脱水时α角较小，吸水时α角较大，脱水时水柱高（图 b）比吸水时水柱高（图 d）高。

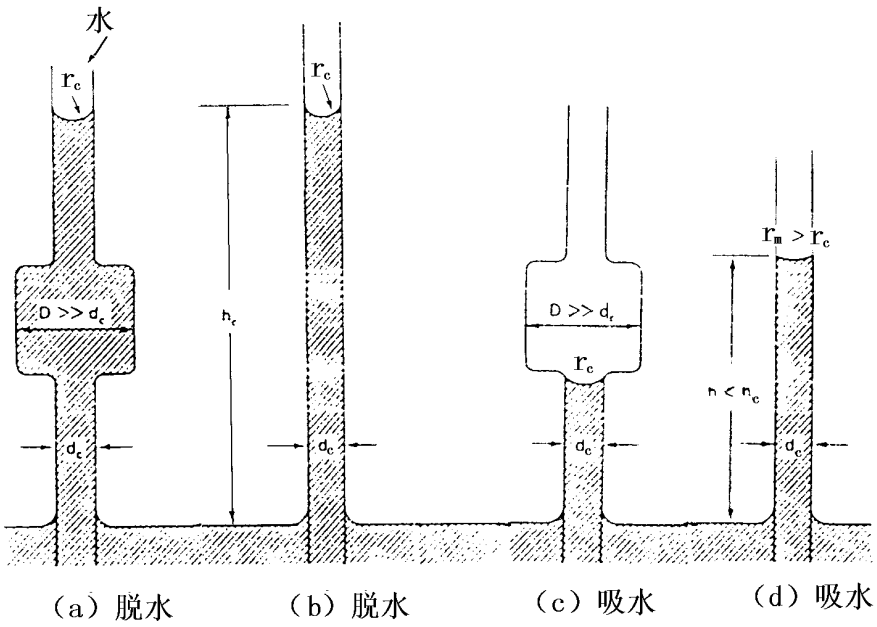


图4.2.5 毛细水的瓶颈效应

土中毛细水的情况远比玻璃管中的复杂。首先是孔隙分布不均匀；另外土中含有不同矿物，由于其密度不同，与水间的吸引力也不同。因而土的组成、状态和结构都对这种毛细水及其分布有重大影响。

用不同初始饱和度的砂及粉土毛细上升和排干脱水试验。试验表明，在土中毛细区不存在完全饱和区，即s_r达不到 100%。图 4.2.6 表示的是立于水中土柱中不同高度的饱和度。

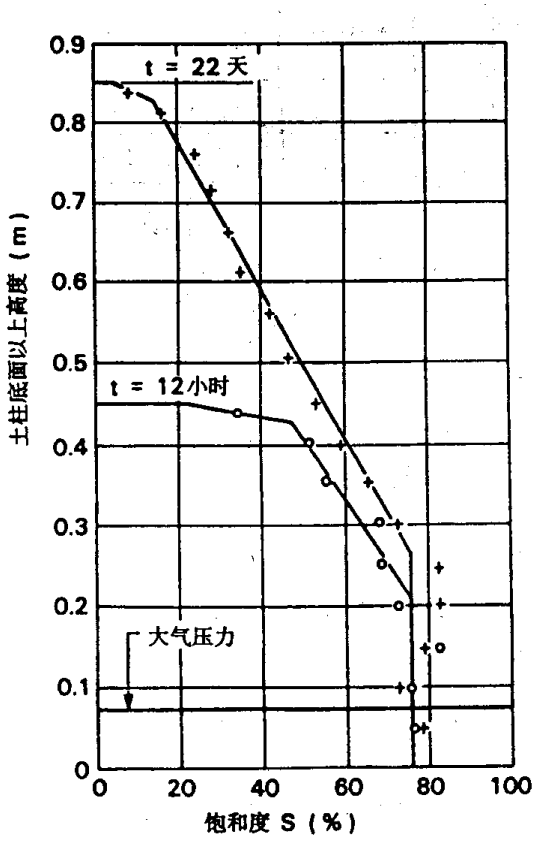


图4.2.6 饱和度随土柱高度的变化

所谓土中的吸力（Suction）包括基质吸力和渗透吸力两部分。基质吸力（Matric Suction）主要是指土中毛细作用；而渗透吸力是指溶质部分，它是由于土中水溶液中盐分浓度不同引起的。一般基质吸力占总吸力的主要部分。它通常用以上介绍的毛细管上升来解释。但在非饱和土中，基质吸力不能简单的用这种毛细管上升模型来分析和解决问题。非饱和土中基质吸力可表示为：

$$s = u_a - u_w \qquad (4.2.6)$$

其中 u_a 是孔隙气压力，当孔隙气体与大气连通时，$u_a = p_a = 0$。吸力也可用毛细管折算的上升高度 h_w 表示。这时 $s = h_w \gamma_w$。为了方便，有时也用吸力指数 pF 表示：

$$pF = \log_{10} h_w \qquad (4.2.7)$$

其中 h_w 单位为 cm，pF 一般为 0－7。在砂土中 h_w 一般不超过 50cm，对应 pF＝1.7。

在土中，基质吸力与土的饱和度有关，它与饱和度或含水量之间的关系曲线也称为土—水特征曲线，或称水分特征曲线。不同土的土—水特征曲线见图 4.2.7，可见吸力与土类和吸水脱水过程有关。一般认为如果土的相对湿度等于 100%时，即饱和土中吸力为 0；在低饱和度时，这个吸力可达近万 kPa。对于土力学问题关系较大的是较高相对湿度时的吸力范围。

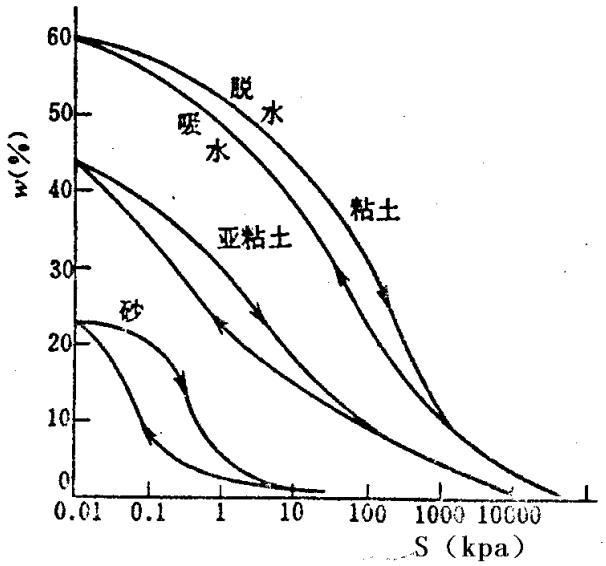


图4.2.7 不同的土—水特征曲线

4.2.3 土的冻胀和冻融作用

1. 冰分子结构

在大气压力下，天然水在低于 0℃时就会结晶成为冰。这种固体状态的水的晶体，分子成规则排列。三个水分子在一个平面上，三个分子又组成另外一个平面。氧与氧之间为氢键所连接，在一个平面上水分子间距离为 4.5Å；冰的键能为 19kN/mol。当温度升高接近融点时，氢键间的破裂增多，冻土的强度降低，蠕变速率提高。

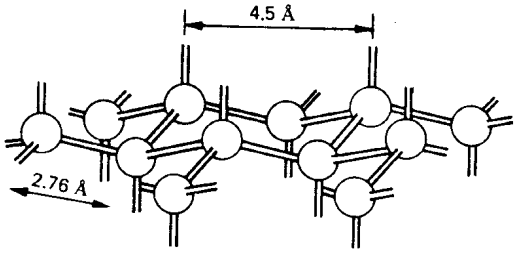


图4.2.8 冰的分子结构

2. 冻胀

水在结冰时体积发生膨胀，大约体胀 9%。这对于孔隙率高达 0.5、冻结厚度为 1 米的饱和地基土，将引起 4.5cm 的冻胀量。1928—29 年冬季，卡萨格兰德（Casagrande）在美国新罕布什尔州的公路进行了实地量测。当地秋季时地下水位深 2m，冬季当冻层深度为 45cm 时，地表总冻胀量达 13cm。冻层中冻结前含水量为 8%—12%，冻结后含水量达到 60%—110%。开挖后发现冻层中分布大量的冰晶、冰透镜体、冰夹层，平均冰厚度为 13cm。可见地基中水分的转移才是地基冻胀的基本原因。见图 4.2.9。

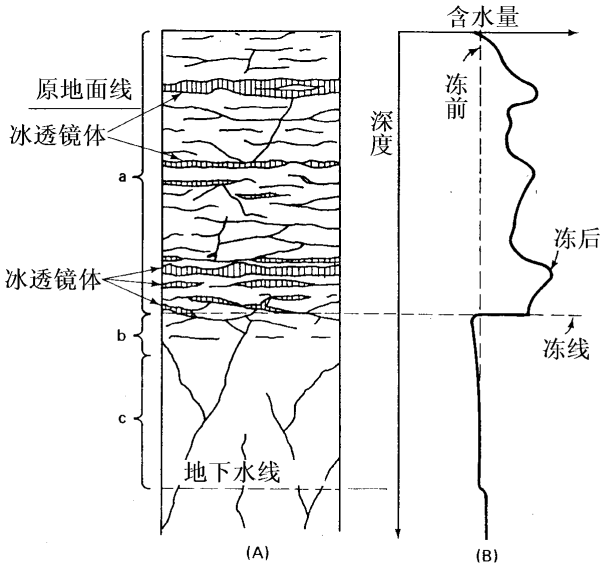


图4.2.9 冻土不同土层含水量的分布

土的冻胀具有很复杂的物理化学机理，其细节尚有待于进一步研究。它是一个复杂的相变、热传递、力和水份运动的过程。目前人们较普遍地接受马丁（Martin）的模型：粘土颗粒表面的结合水在－0.5℃～－30℃才会结冰，因而粘土颗粒表面总存在一层未冻水。溶解有离子的孔隙水结冰温度 T_0 也低于 0℃。冰晶体核的形成需要比 T_0 低的温度，并且在冰晶表面也存在一层未冻水膜，随着温度降低，这部分水膜逐渐冻结到冰晶中。这样，在冻结区存在很明显地吸力。这种吸力来源于：冻结时冰晶表面的未冻水膜变薄而产生地吸力；由于孔隙中水冻结而使离子浓度提高产生的渗透吸力；细粒土表面未冻水的吸力。如果地基土中的水是一个开放的体系，即地下水被毛细吸力源源不断吸引上升，而冻结锋面（即土冻层下缘）又在毛细影响区，则冻结锋面的负孔压又吸引这部分毛细水，补充被冻结的冰晶表面变薄的未冻水膜，使冰晶不断扩大，变成冰透镜体和冰层。随着温度降低冻层下降，冰透镜体不断形成和扩大，造成冻胀不断发展。直止由于水的相变（水结冰）热（80J/kg）与散热平衡时，冻结深度不再变化，冻胀也变缓了。可见地基土的强烈冻胀需要有以下

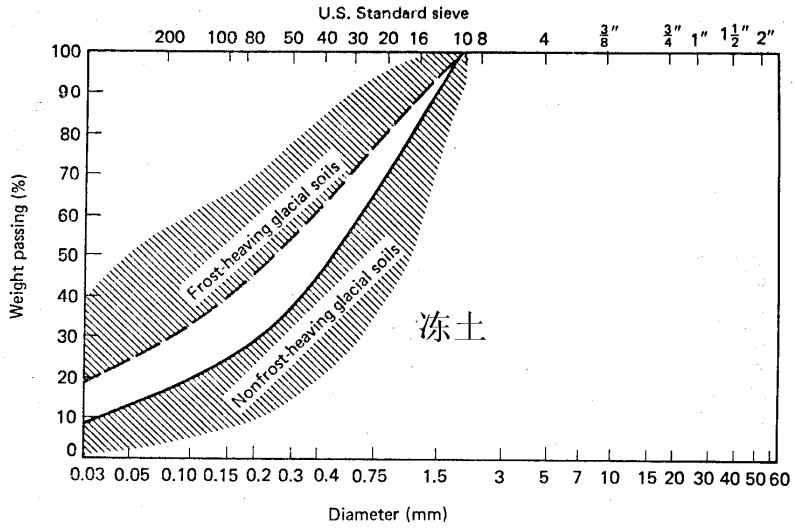


图4.2.10 冰渍土冻胀的级配界限

条件：

（1）.低于水的冻结温度

（2）.地下水位与冻结锋面较接近，或土壤含水量较高，可供给冻结锋面足够的水份。

（3）.土的颗粒及级配有利于产生冻胀。

在粗粒土中由于没有结合水和不易形成冰透镜体，所以是非冻胀土。纯粘土由于渗透系数太小，水流动受限制不能向冻结区提供足够水份，也不是对冻胀很敏感的土。但粘土中如存在较多的砂粒、粉粒或者裂隙发育时，则会产生严重冻胀。其实在土中是孔隙的尺寸而非土颗粒本身的尺寸决定冻胀。一般认为 0.1mm 是允许冰透镜体形成的最大颗粒尺寸。而 0.02mm 是一个对冻胀敏感的颗粒尺寸。对于级配良好的粗粒土但小于 0.02mm 颗粒含量为 3%；对于均匀级配的粗粒土但小于 0.02mm 颗粒含量为 10%，都会使土发生冻胀。即使砾石土含有 5%—10%的 0.02mm 的颗粒也会产生冻胀。对于一种瑞典的冰碛土，其冻胀和非冻胀的级配界限见图 4.2.10。渗透系数 $k=10^{-3}\sim10^{-6}$cm/s 的粉土、粉质粘土和砂质粘土及裂隙发育的粘土最易发生冻胀。

冻胀会导致轻型建筑物倾斜、开裂；使桩发生冻拔；使公路路面开裂、铁路路轨变形。对于小型水利建筑物，如渠系上的桥、涵洞、闸等，冻胀可使其基础开裂；对于翼墙及渠道刚性护坡，冻胀土压力可使其发生位移而开裂，过水时被冲毁。我国内蒙河套灌区的 80%渠系建筑物受冻害。

3. 融化作用

当气温升高时，因冻结而被向上吸引的水份形成的冰透镜体及冰夹层从上而下融化成水。但下部冻土尚未融化。多余水份除少量蒸发外，无法下渗，形成泥浆。常常看到一些道路表面因水份蒸发形成薄硬壳，中间夹泥浆状融土，下部为冻土，形成道路“翻浆”的现象。在北方一些渠系中，由于表层融化，下部为冻土，高含水量的融土沿冻土表层下滑，使渠道淤堵。

可见冻融是地基土和土工构造物的严重的工程问题。人们常常采用各种工程措施防止冻害。其中建筑物基础的最小埋置深度的规定就是针对冻害而采取的措施。

4.3 土的渗透性

4.3.1 土中水的势能

水总是从能量高的状态流向能量低的状态。由于土中水的渗流速度一般较慢，其动能部分可以忽略，所以决定土中水运动的主要是其势能。土中水的势能可以分为重力势、压力势、基质势和溶质势。当然可以有另外划分。

势能的单位是焦耳，即 kN·m。如果是单位体积水的能量，可表示为 kPa；如果用单位重量水的能量则可表示为 m。

1. 重量势ψ_g

它就是水的位能，对于单位体积的水的重力势可表示位：

$$\psi_g = z\gamma_w \qquad (4.2.1)$$

z 为所考虑点相对于基准面的竖向距离，在基准面以上取正值；之下取负值。γ_w 为水的容重。见图 4.3.1（a）中点 A。

2. 压力势ψ_p

它由水受到的压力所决定，又可分为静水压力势、渗流压力势和超静水压力势。后者也称为荷载势。某点的压力势可以用与该点连通的测压管中水位确定。三种压力势在图 4.3.1 中给出了定性的表示。

在静止的地下水位以下，土中各处的孔隙水总势能是相等的，因而是静水，不会流动。这时孔隙水总势能为重力势和静水压力势。对于图 4.3.1（a）中 B 点：

$$\psi_B = \psi_g + \psi_p = 0 + 0 = 0$$

对于 A 点：

$$\psi_A = \psi_g + \psi_p = -\gamma_w h + \gamma_w h = 0$$

在流动的情况下，土中水总是向着总势能低处，沿着势能梯度（最大水力坡降）方向流动。所以这时某点的压力势并不等于该点与其上自由水面间的高差，而是用通过该点的连通管内的静水位来度量。在图 4.3.1（b）中 A 点的压力势为：

$$\psi_p = \gamma_w h \tag{4.3.2}$$

在稳定渗流的情况下，静水压力势和渗流压力势都不随时间而变化。

超静水压力势是由荷载在水中引起的高于静水压力的那部分。如图 4.3.1（c）和（d）所示。图（c）表示的是由外加荷载引起的超静水压力势，这时 ψ_p 最大可达到：

$$\psi_p = \Delta h \gamma_w = q \tag{4.3.3}$$

图（d）中超静水压力势是由土体自重而引起。当饱和松砂振动完全液化时，超静水压力势最大可达到：

$$\psi_p = \Delta h \gamma_w = (\gamma_{sat} - \gamma_w) H \tag{4.3.4}$$

其中 γ_{sat} 为砂饱和容重，H 为考虑点以上砂土厚度。欠固结土中超静水压力势有类似的情况。超静

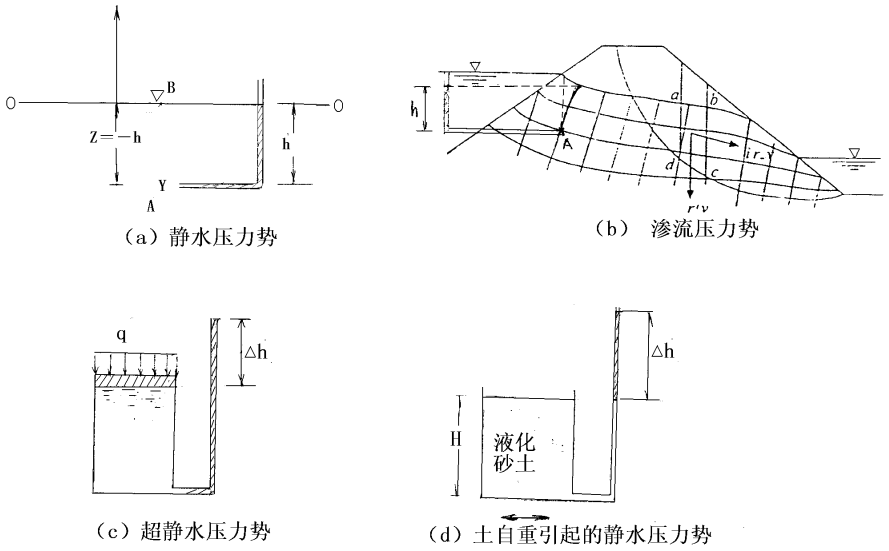


图4.3.1 土中水的势能

水压力势一般是随时间而变化，当外部因素不变时，它一般是逐渐消散，这种消散过程称为固结。

3. 基质势 ψ_m

基质势又称为广义毛细势，主要是由气水界面的收缩膜，即表面张力引起的。图 4.3.2 表示的是将一土柱立于水容器中，由于基质势而使水份上升，当达到平衡时，土柱中各高度的含水量（或饱和度）不同，相应的基质势也不同。由于最后处于静止状态，水已经不再流动，所以土柱中各处的总势能应当相等。如果以容器内静水位为基准面，则各点总势能应当为 0。对于 A 点：

$$\psi_A = \psi_g + \psi_m = -\gamma_w h_A + \psi_m = 0$$

则

$$\psi_m = -\gamma_w h_A$$

对于 B 点：

$$\psi_A = \psi_g + \psi_m = \gamma_w h_B + \psi_m = 0$$

$$\psi_m = -\gamma_w h_B$$

可见基质势是负值，表观为吸力。可用毛细上升高度来表示。

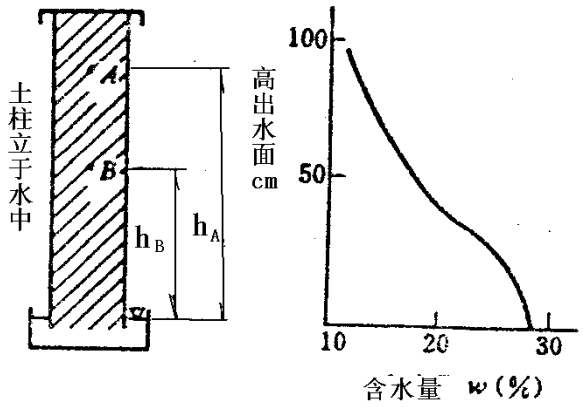


图4.3.2 基质势概念

基质势只存在于非饱和土体中，如图 4.2.6 和图 4.3.2 所示。完全饱和土的基质势将消失。基质势也可看作是广义的压力势的一种，如图 4.3.3，A 点的基质势也可通过张力计在该点量测的连通水面量测。由于这水面低于该点。所以是一种负的压力势，而 B 点为正压力势。在图 4.3.3 中，B 点的总势能为：

$$\psi_B = \psi_g + \psi_p = \gamma_w z_B + \gamma_w h_B = \gamma_w h_{w(B)}$$

A 点的总势能为：

$$\psi_A = \psi_g + \psi_m = \gamma_w z_A - \gamma_w h_A = \gamma_w h_{w(A)}$$

由于$\psi_A > \psi_B$，所以将会发生从 A 向 B 的渗流。

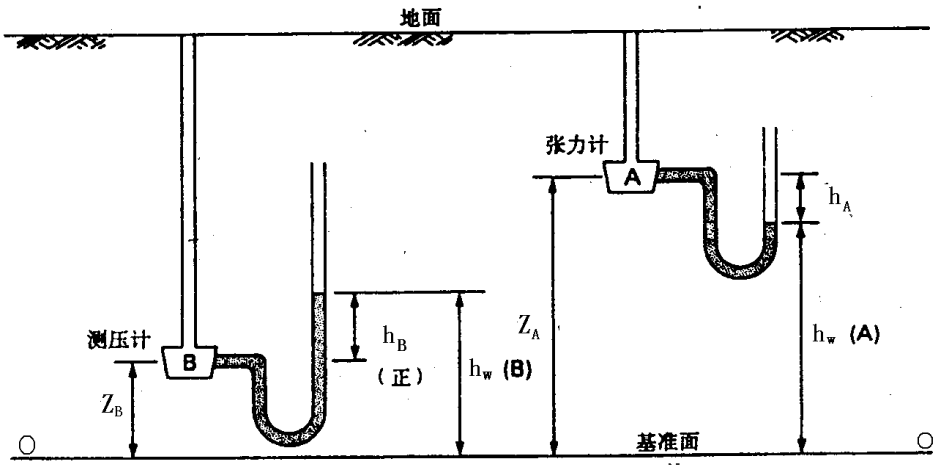


图4.3.3 基质势与压力势

从图 4.3.2 可见，土柱中各高度的基质势不同，对应的是土的含水量也不同，因而基质势与土的含水量（或饱和度）之间存在一定关系。这种关系就是图 4.2.7 所表示的土—水特征曲线。可见这里的基质势的大小等于上面所讲的吸力，但符号相反。

$$\psi_m = -s = -(u_a - u_w) \qquad (4.3.5)$$

当孔隙与大气连通时，$u_a = p_a = 0$，u_w为负的孔隙水压力，对于图 4.3.2 中土柱中各点

$$\psi_m = -\gamma_w h = u_w = -s \qquad (4.3.5)$$

所以吸力和基质势也可用土中毛细水上升高度表示。如图 4.3.3 所示。

土—水特征曲线通常以体积含水率θ为纵坐标，以基质吸力$S=u_a-u_\omega$的对数值为横坐标。

$$\theta = \frac{v_w}{v} = S_r n = \frac{S_r e}{1+e} \qquad (4.3.6)$$

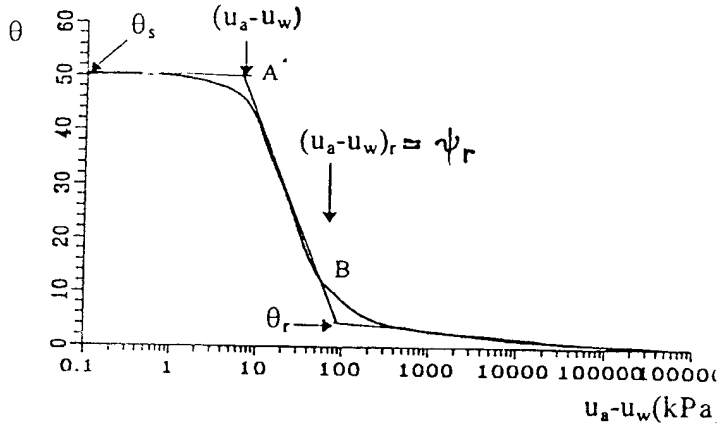


图4.3.4 土水特征曲线

典型的土水特征曲线参见图 4.3.4。曲线上有两个转折点 A 和 B，A 为进气值点，表示当吸力增加到一定值时，土体外空气将冲破水膜进入土体。A 点处吸力$(u_a - u_\omega)_A$称为进气值。B 点为残余含水量点，当土体中含水量降低到一定值θ_r（残余含水量）时，含水量的继续减小需要增加很大的吸力，对应的吸力记为S_r（这里S为基质吸力）。

弗雷德隆德（Fredlund）根据土样的颗分曲线，用统计分析的方法导出了可适用不同土类的土水特征曲线的拟合公式。

$$\theta = [1 - \frac{\ln(1+S/S_r)}{\ln(1+10^6/S_r)}] \cdot \frac{\theta_s}{\{\ln[e+(S/a)^n]\}^m} \qquad (4.3.7)$$

式中， a、m、n 为拟合参数，从颗分曲线得到；

S_r——残余含水量对应的基质吸力；

θ_s——饱和体积含水率。

4. 溶质势ψ_o

如果纯水中溶质势设为零，即$\psi_o = 0$，则溶解有离子的溶液中溶质势$\psi_o < 0$。离子浓度越大，溶解的离子价位越高，ψ_o的绝对值越高。溶质势是半透膜上渗透压力的反作用，总是负值，也叫作渗析吸力。它实际上是水中离子和分子渗析扩散的驱动势能，与一般水体的宏观流动有区别。

这样土中水的总势能可表示为：

$$\psi = \psi_g + \psi_p + \psi_m + \psi_o \qquad (4.3.8)$$

但实际上以上各项并不一定会同时存在，一般对于饱和土主要是重力势ψ_g与压力势ψ_p；对于高饱和度的非饱和土也可存在压力势（超静水压）；对于一般非饱和土则主要有重力势和基质势。

4.3.2 达西定律的物理意义

达西定律揭示了单位面积渗流量 q 与水头坡降 i 成正比，比例常数为渗透系数 k。这是从实验得出的规律，能否从理论上证明这一规律，渗透系数的物理意义是什么？很多人致力于建立渗流的物理模型，用理论进行推导，其中较成功的是毛细管模型，参见图 4.3.5。用毛细管代替孔隙通道，分析其中的一根毛细管，半径为 R，截面积为 a，截面上流速 $v(r)$呈抛物线分布。

在 L 长度上有水头损失 h，即水力坡降 $i=h/L$，渗透力 $j=\gamma_\omega h/L$，则半径为 r 的管流水体所受总渗透力$=L\pi r^2\gamma_\omega h/L=\pi r^2\gamma_\omega h$。该力为周边的水体的阻力所平衡，阻力$=2\pi rL\cdot\tau$，其中 τ 为水的粘滞力，对牛顿粘滞流体，$\tau=-\eta\dfrac{dv}{dr}$，η 为动力粘滞系数。

令阻力等于总渗透力可得

$$-2\eta dv=\gamma_\omega irdr$$

运用边界条件 $r=R$，$v=0$ 积分得 r 半径处的流速

$$v=\frac{\gamma_\omega i}{4\eta}(R^2-r^2) \qquad (4.3.9)$$

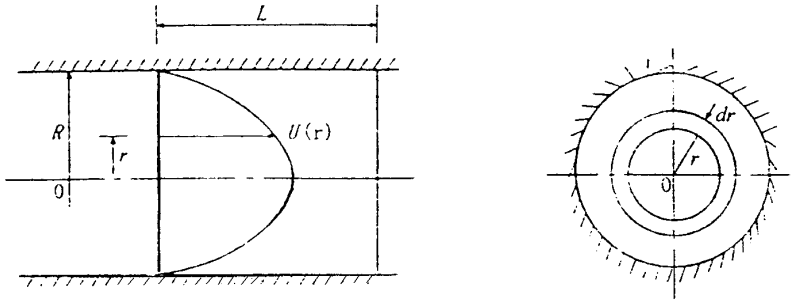


图4.3.5毛细管渗流模型

图 4.3.5 表示圆环的流量 $dq_0=v\cdot 2\pi rdr$，r 从 0 积分到 R 可得一根毛细管的断面流量 $q_0=\dfrac{\gamma_\omega R^2}{8\eta}ai$，如单位截面积有 m 根毛细管，则 $ma=n$（n 为孔隙率），单位截面积的流量 $q=mq_0$，从而得到

$$q=\frac{\gamma_\omega R^2}{8\eta}\cdot ni \qquad (4.3.10)$$

式中 R——毛细管半径；

η——动力粘滞系数；

n——孔隙率。

从式（4.3.1）可见 q 与 i 成正比，如比例常数记为 k，则

$$k=\frac{\gamma_\omega R^2}{8\eta}\cdot n \qquad (4.3.11)$$

对于饱和土，渗透系数 k 取决于流体的性质 η，而 η 又与温度、介质浓度和水中气泡等因素有关，γ_ω 与可溶性盐的含量有关，此外，R 和 n 受土粒的颗粒大小、级配等因素影响，这些因素也是影响土的渗透系数的因素。

式（4.3.11）只是定性理解土渗透系数主要影响因素的公式。实际上存在各种初步确定土渗透系数的经验公式。除以上因素外，土颗粒的形状、矿物组成等也是不可忽略的因素。对于高塑性粘土，粘土颗粒表面存在双电层，在一定范围内形成结合水，受双电层影响，对孔隙水中的 η、R、n 都会产生影响。结合水的性质与一般状态的水有很大区别。但实践表明，达西定律对于粘性土在一定范围内也是适用的。

4.3.3 非饱和土的渗透性

非饱和土的孔隙中存在气和水两种流体。根据其饱和度的不同，土中气和水呈不同的形态。图4.3.6表了非饱和土中孔隙水与气的三种不同形态。当土的饱和度比较高时，例如对于击实粘土含水量大于最优含水量 w_{op} 时，相应的饱和度约为 85%～90%，这时土的孔隙主要被水所占据。气体呈气泡状被水所包围，可随水一起流动，如图 4.3.6（c）所示，称为气封闭状态。这种混和的流体是可压缩的，在较高压力势下，气泡可能压缩和溶解，使孔隙水饱和度进一步提高。这种情况下，一般可按饱和土计算渗透与固结问题，只不过其渗透系数小于饱和土。当土中含水量很小时，孔隙水主要以水蒸汽和结合水状态存在，或者吸附在土颗粒局部和表面，被气体所隔离封闭，可不考虑水的流动。如图 4.3.6（a）所示情况，称为水封闭状态。对于图 4.3.6（b）情况，气和水都是连通的，均可能发生流动，称为双开敞体系。相应饱和度对于粘土约为 $s_r = 50\% \sim 90\%$；对于砂土 $s_r = 30\% \sim 80\%$，这种情况是研究非饱和土渗透性的主要课题。一般分别考虑空气的流动和水的流动。

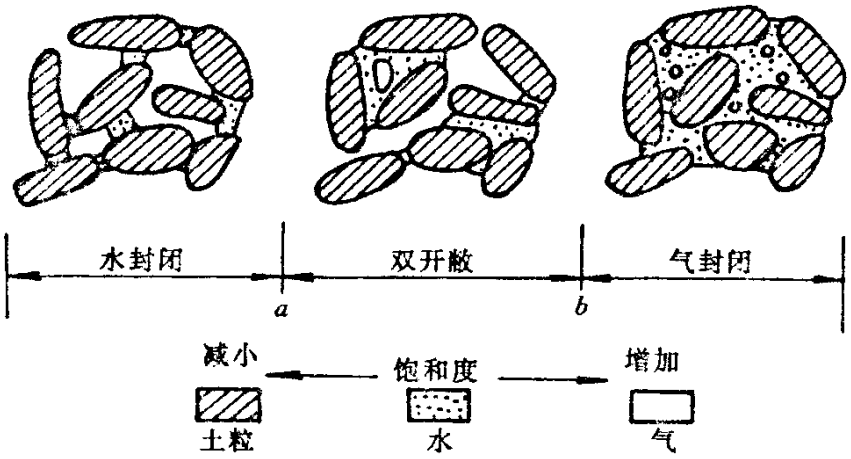


图4.3.6 非饱和土中水气形态

从以上分析，应分别研究两种流动状态，即气流动和水流动。可表示为下列广义达西定律形式：

$$\left.\begin{aligned} v_a &= k_a i_a = k_a \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v_\omega &= k_\omega i_\omega = k_w \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (4.3.12)$$

1. 空气流动

Fick 定律（1855）用以描述空气沿坐标轴方向的流动，例如沿 y 方向可写成

$$J_a = -D_a \frac{\partial c}{\partial y} = -D_a \frac{\partial c}{\partial u_a}\frac{\partial u_a}{\partial y} \qquad (4.3.13)$$

式中 J_a——通过单位面积土的空气质量流量；

D_a——土中空气流动的传导常数；

c——空气浓度，单位体积土中空气的质量，是绝对气压的函数，$c = f(u_a)$，见式（4.3.14）

$\frac{\partial c}{\partial y}$——沿 y 方向的浓度梯度；

u_a——空气压力；

$\frac{\partial u_a}{\partial y}$——沿 y 方向空气压力梯度。

式中负号表示沿浓度梯度减小的方向流动。空气浓度和气压的关系

$$c = \rho_a(1-S_r)n \qquad (4.3.14)$$

$$\rho_a = \frac{\omega_a u_a}{RT}$$

式中 ρ_a——空气密度；

S_r ——土的饱和度；

n——孔隙率；

ω_a——空气分子质量；

R ——气体常数；

T——绝对温度。

为了得到类似于达西定律的形式，Blight（1971）进行如下修改，

定义空气传导系数 D_a^*

$$D_a^* = D_a \frac{\partial c}{\partial u_a} = D_a \frac{\partial[\rho_a(1-S)n]}{\partial u_a} \qquad (4.3.15)$$

式（4.3.13）可改写成

$$J_a = -D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial y} = -D_a^* \rho_a g \frac{\partial h_a}{\partial y} = -D_a^* \rho_a g i_{ay} \qquad (4.3.16)$$

根据 J_a 的定义可知，通过单位面积土的空气质量流量为

$$J_a = \rho_a \frac{\partial V_a}{\partial t} = \rho_a v_a \quad (V_a \text{为通过的空气体积}) \qquad (4.3.17)$$

式中，v_a 为通过空气的体积流速，令式（4.3.17）等于式（4.3.16），从式(4.3.12)得

$$k_a = D_a^* g \qquad (4.3.18)$$

k_a 可称为空气在土中的渗透系数。

2. 水的流动

非饱和土中水的流动受饱和度或基质势的影响，通常非饱和土的饱和度用体积含水率 θ 表示，由式（4.3.6），$\theta = v_\omega / v$，而孔隙率 $n = v_v / v$。当土处于饱和状态时，$v_\omega = v_v$，即 $\theta = n$，这时土的渗透系数为常数，即前述饱和土的渗透系数。非饱和土的渗透系数不是常数，受饱和度（或 θ ）和基质势的影响。随着 θ 减小渗透系数 k_ω 减小，这是因为，空气增多减小了过水面积，土粒和水靠近，水土之间相互作用增强，此外，土中大的孔隙透水性强，空气增多首先将大孔隙中的水排空，使小孔隙水不能参加渗流，称为“瓶口效应”。用基质吸力 $s = u_a - u_\omega$ 反映非饱和土饱和度对渗透系数的影响更易表达土变干和变湿过程的不同特点。

首先，用土—水特征曲线表示基质吸力和体积含水率之间的关系。参见图 4.3.7。从图可知当 $\theta = n$ 时，s＝0，为饱和土，θ 减小相当于 s 增大，过水断面积减小，k_ω 减小。从土—水特征曲线可见干湿过程曲线不重合，这是因为干湿过程水土接触角不同，孔隙中形成弯液面时水膜的厚度不同。此外，因“瓶口效应”，土变干时，水不能离开小孔隙，而变湿时水不易进入小孔隙，称为“盲端效应”，见图 4.2.5。因此，用基质吸力更能反映非饱和土的渗透性。

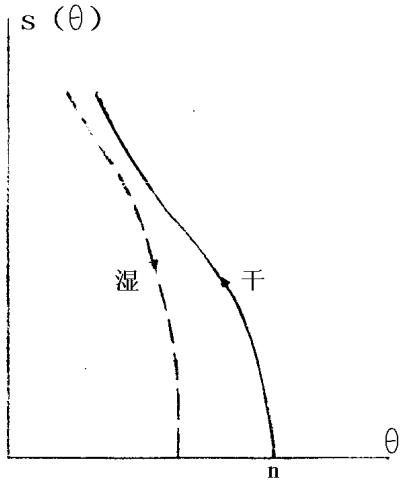


图4.3.7 基质吸力与含水率

康得纳（Gardner，1958）从实验得到非饱和土中水的渗透系数k_ω和饱和土渗透系数k_s，以及基质吸力间的关系如下：

$$k_\omega = \frac{k_s}{1+a[\frac{u_a-u_\omega}{\rho_\omega g}]^n} \qquad (4.3.19)$$

式中 a、n 为试验确定的常数。

还有其他类似的公式。关于土—水特征曲线的确定是在实验室用压力板仪完成的，将土样置于仪器的高进气陶瓷板上，分别控制u_a和u_ω的变化，测量土样的θ，整理而得土—水特征曲线。

4.3.4 影响土渗透系数的因素

式 4.3.11 是用毛细管模型得到的表示土渗透系数影响因素的一般公式。经进一步试验和分析研究，影响土渗透系数的因素可分为两方面，即土颗粒骨架和流体性质。

1. 颗粒骨架对土渗透系数影响

（1）.土颗粒的组成

首先粘土和粗粒土间渗透系数及其影响因素的机理不同。粘土颗粒表面存在结合水和可交换阳离子，其渗透系数很低；不同粘土矿物之间渗透系数相差极大，其渗透性大小的次序为：

高岑石>伊里石>蒙脱石

粘土矿物的片状颗粒也使粘土渗透系数呈各向异性，有时水平向渗透系数比垂直向可大几十倍、上百倍。

对于粗粒土，影响渗透系数的因素有颗粒的大小、形状和级配。一般讲存在一个特征粒径与渗透系数间存在如下关系：

$$k = cd \qquad (4.3.20)$$

其中特征粒径一般取d_{10}。这也表明对于粗粒土中的细颗粒对土的渗透性有较大影响。

（2）.土的状态

影响土的渗透性的另一个重要因素是其密度。一般讲，可以建立渗透系数k与土孔隙比e之间的经验公式，k随e减小而减小。比如可认为e□$\log k$间关系为直线。

（3）.土的结构

土的结构对于粘性土的渗透系数影响更大一些。如果粘性土先形成粒组、团粒结构（见图 2.8.10），则团粒间的大孔隙决定了渗透性，使其渗透性明显加大。图 4.3.8 表示的是击实粘土的击实曲线与相应的渗透系数。可见在最大干密度（亦即最小孔隙比$e_{\min}$）下其渗透系数最小，这时对应

击实时土处于最优含水量状态。如击实时 $w < w_{op}$，在击实时容易形成絮状结构，易形成相对较大的孔隙，渗透系数就大。对于 $w > w_{op}$，击实土形成分散结构，易形成较多的小孔隙，即使孔隙量相同，渗透系数也 $w < w_{op}$ 时小的多。

粘性土的触变性使其强度随时间而提高，渗透系数降低。图 4.3.9 为压实土在不同含水量 w 下，k_0 / k_{21} 的变化。其中 k_0 为压实后立即测的 k 值，k_{21} 为 21 天后实测的 k 值。

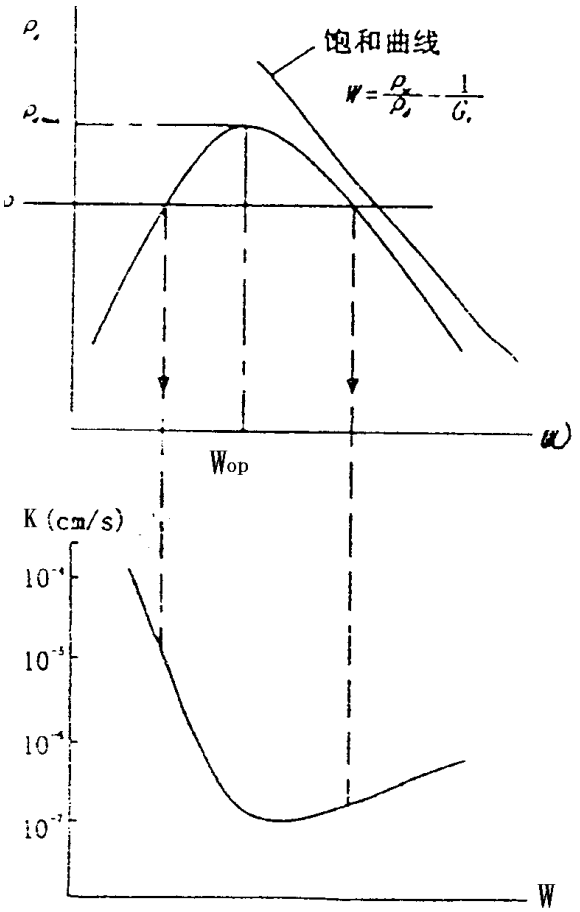


图4.3.8 粘性土的压实曲线和渗透性

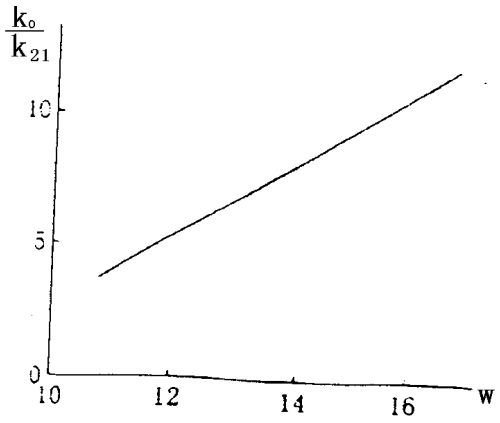


图4.3.9 压实粘性土不同时间的渗透系数$\frac{k_0}{k_{21}}$与含水量w间关系

2. 渗透流体的影响

从式（4.3.11）可见流体的粘滞系数 η 和液体（水）的容重 γ_w 是渗透系数 k 的主要影响因素，而渗透流体受到的压力、温度和流体内电解质的浓度对这两项都有影响。当水中含有封闭小气泡时，即使含量很小，也会对其渗透性产生很大影响。在粘土中由于双电层的影响，电解质溶质的成分对其渗透性起主要作用。其中渗透流体的极性增大，介电常数越小，k 随之减小。这既与对粘土的结构的影响有关，也与渗透流体本身性质有关。溶液中盐含量提高（或价位提高），渗透系数加大，这与粘土中结合水膜的厚度有关。

4.3.5 达西定律的适用范围

达西定律规定土的渗透流速与其水力坡降间成线形关系，比例常数是渗透系数 k 。这是在流体处于层流和流体的流变方程符合牛顿定律的前提下才成立的。对于大颗粒土，存在大孔隙通道，在

高水力坡降下可能会使渗透变成紊流；在粘土中由于水与颗粒表面相互作用也可能使流变方程偏离牛顿定律。这分别成为了达西定律适用情况的上、下限。

1. 粗粒料的渗透性

水在粗颗粒土，例如砾石、卵石的孔隙中流动时，水流形态可能发生变化，随流速增大，呈紊流状态，渗流不再服从达西定律，类似于管道水流，用雷诺数 R_e 判断粗粒土中的流态。

$$R_e = \frac{vd_{10}}{\eta} \qquad (4.3.21)$$

式中 v——流速；

d_{10}——土的有效粒径；

η——动力粘滞系数。

当 R_e＜5 时，层流，$v = k$；

R_e＞5 时，过渡区，$v = ki^{0.74}$

R_e＞200 时，紊流，$v = ki^{0.5}$

也可不计流动形态，用统一公式模拟试验结果，例如

$$i = aq + bq^2 \qquad (4.3.22)$$

或

$$i = aq^m \quad m = 1 \sim 2 \qquad (4.3.23)$$

式中 q 仍为单位面积断面流量，a、b 为试验确定的常数。

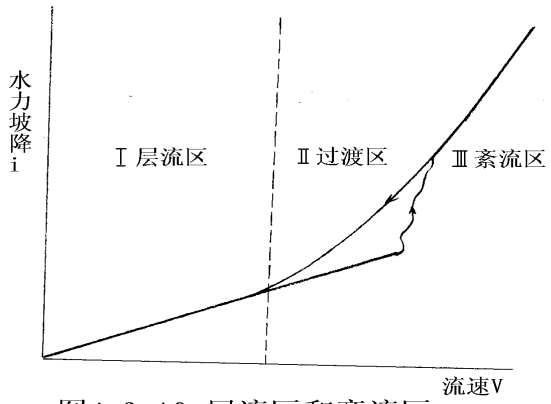


图4.3.10 层流区和紊流区

2. 粘土的渗透性

一般认为达西定律基本上是适用于粘性土的。可是在较低的水力坡降下，某些粘土的渗透试验表明，v 与 i 之间偏离直线，如图 4.3.11 所示。对于这一现象有不同解释，但是一般认为这是由于粘

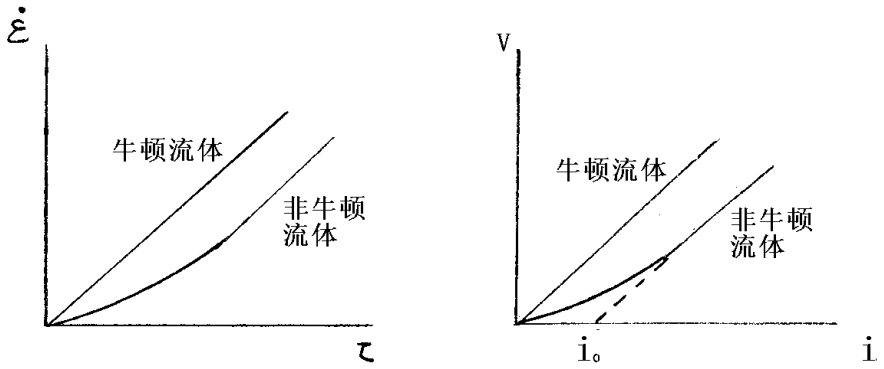


图4.3.11 流动性状不同类型

土颗粒表面与孔隙水间物理化学作用结果，亦即双电层内的结合水与一般流体不同，是半固体状态，有较大粘滞性，不服从牛顿粘滞定律，只有在较大起始坡降下，达到其屈服强度，才开始流动。

4.4 二维渗流与流网

4.4.1 二维渗流的基本微分方程

实际上工程中的渗流很多都是平面问题。如漫长的堤防，拦河的坝，闸，输水渠系等。基坑的渗流也可按二维渗流进行分析。

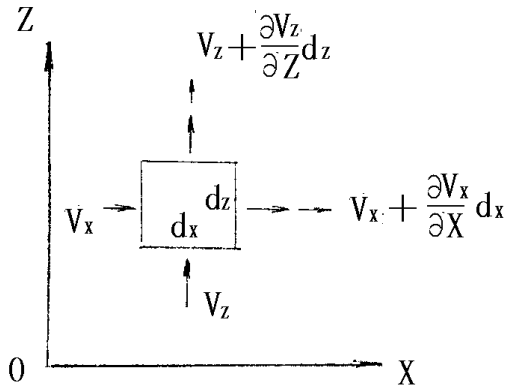


图4.4.1

根据不可压缩流体的假设和水流连续条件，在图 4.4.1 中，在体积不变条件下，对于饱和土流入微单元的水量必须等于流出的水量，亦即：

$$v_x dz + v_z dx = (v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx)dz + (v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} dz)dx$$

亦即

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \qquad (4.4.1)$$

根据达西定律：

$$v_x = -k_x \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$v_y = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \qquad (4.4.2)$$

其中，k_x，k_y 分别为 x 与 z 方向土的渗透系数，h 为某一点的测管水头，一般等于重力势加压力势。将式（4.4.2）代入式(4.4.1)，则得：

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.4.3)$$

对于各向同性的土，$k_x = k_y$，则：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad (4.4.4)$$

这就是饱和各向同性土中二维渗流的基本微分方程。

只有边界条件很简单的情况，才可直接从这个方程积分得到解析解。例如对于图 4.4.2 的简单的一维渗流问题，可直接进行积分，从边界条件求解。图 4.4.2 为一维渗流的示意图，水流通过两种土体，将渗流方向取为 x 轴正方向。式（4.4.4）简化为：$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$，微分方程的通解为

$$h = c_1 x + c_2 \qquad \text{（a）}$$

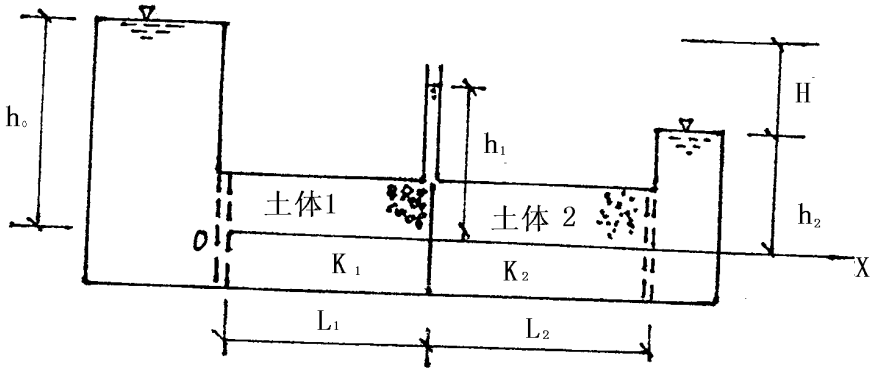


图4.4.2 一维渗流通过两种土体

对土体 1 而言，边界条件为，$x=0$，$h=h_0$；$x=L_1$，$h=h_1$。可确定c_1和c_2，$c_2=h_0$，根据联系性原理，可得，$k_1\dfrac{h_0-h_1}{L_1}=k_2\dfrac{h_1-h_2}{L_2}$，即$h_1=\dfrac{L_2k_1h_0+L_1k_2h_2}{L_1k_2+L_2k_1}$。则微分方程在土体 1 中的定解为：

$$h=h_0-\frac{k_2(h_0-h_2)}{L_1k_2+L_2k_1}x \qquad \text{（b）}$$

对土体 2 而言，边界条件为$x=L_1$，$h=h_1$；$x=L_1+L_2$，$h=h_2$。可求得微分方程在土体 2 中的定解为：

$$h=\frac{(L_1k_1h_0-L_1k_1h_2+L_2k_1h_0+L_1k_2h_2)-k_1(h_0-h_2)x}{L_1k_2+L_2k_1} \qquad \text{（c）}$$

微分方程的解（b）和（c）可进一步简化，将测管水头基准面选在h_2的水面位置，即设在$x=L_1+L_2$处，$h=0$，并将水头损失h_0-h_2记作H，则（b）和（c）分别简化为（d）和（c）.

土体 1 中 $$h=H\left(1-\frac{k_2x}{L_1k_2+L_2k_1}\right) \qquad \text{（d）}$$

土体 2 中 $$h=H\frac{k_1(L_1+L_2-x)}{L_1k_2+L_2k_1} \qquad \text{（e）}$$

式（d）和式（e）也可用于通过两层透水地基沿铅直方向渗流的解，两土层的厚度分别为L_1和L_2，渗透系数分别为k_1和k_2，将x轴正方向选为铅直向下即可。

对于一些边界条件相对简单的工程问题，也有人对式（4.4.4）进行积分得到解析解。图 4.4.3 为 Harr 解出的围绕不透水板桩的渗流，图 4.4.4 为不透水坝身下地基的渗流。图中，T’为透水地基的厚度，S 为不透水板桩或防渗帷幕贯入透水地基的深度，H 为上下游水头差。图中给出无量纲形式的解。

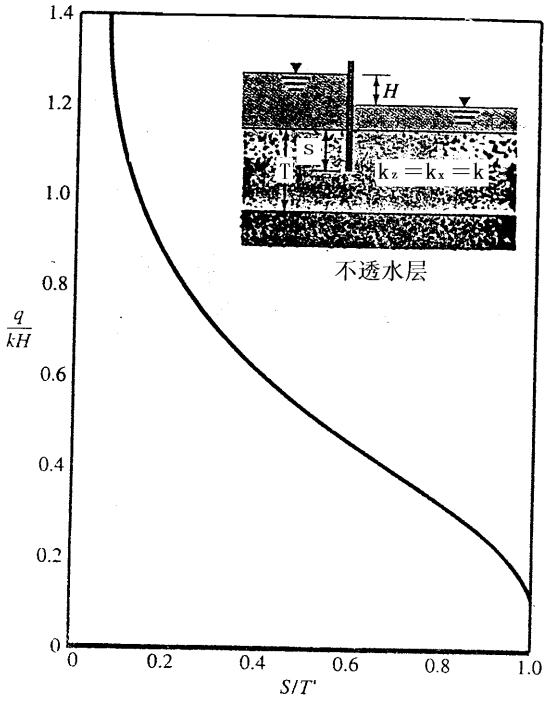


图4.4.3 围绕不透水板桩的渗流

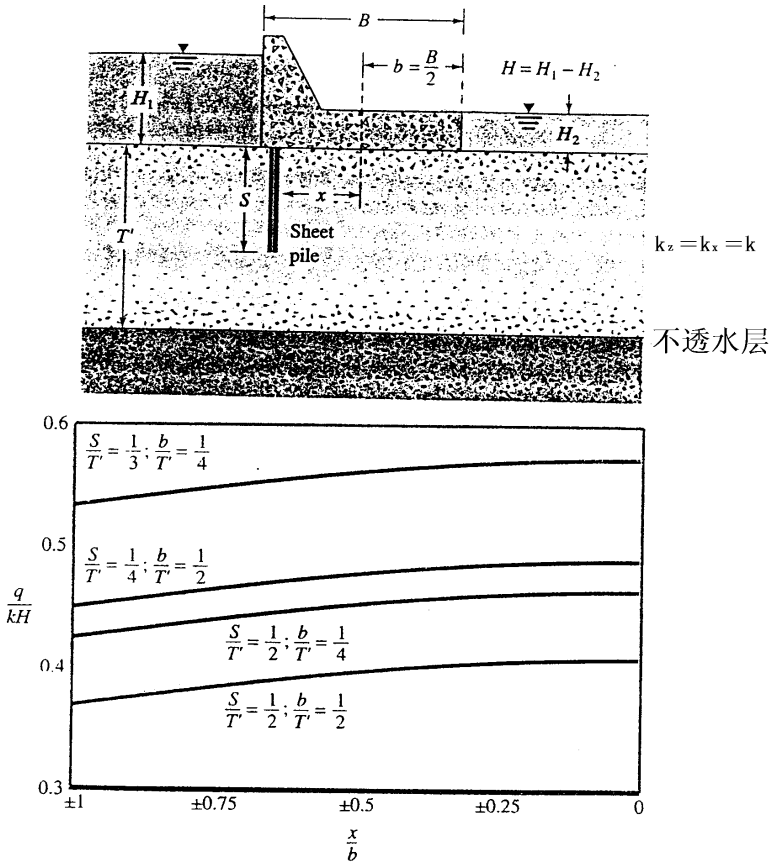


图4.4.4 坝下地基的渗流

人们根据式（4.4.4）的基本微分方程采用近似公式法、图解法（流网）、数值计算法、试验模拟法对复杂边界问题求解，解决了许多土中渗流的工程问题。

4.4.2 流网及其应用

1. 势函数与流函数

二维渗流测压管水头 h 的拉普拉斯方程如式（4.4.4）所示。

引入速度势的定义，设势函数 $\Phi = kh$，则有 $v_x = ki_x = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$，$v_z = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$，即势函数的一阶导数为流速，负号代表流速指向 Φ 减小的方向。根据势流理论中的柯西－黎曼方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial z} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{aligned} \qquad (4.4.5)$$

必存在一个流函数 ψ，ψ 的一阶偏导数 $\dfrac{\partial \psi}{\partial z} = v_x$，$\dfrac{\partial \psi}{\partial x} = -v_z$。

将式（4.4.5）中的前一式两边对 x 微分减去第二式两边对 z 微分得

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0$$

将式（4.4.5）中的前一式两边对 z 微分加上第二式两边对 x 微分得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$$

可见势函数和流函数为共轭调和函数，其解为两族曲线－流网。

2. 流网的性质及绘制

（1）.等势线和流线正交

将式（4.4.5）中前一式除以第二式得

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} / \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} / \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (4.4.6)$$

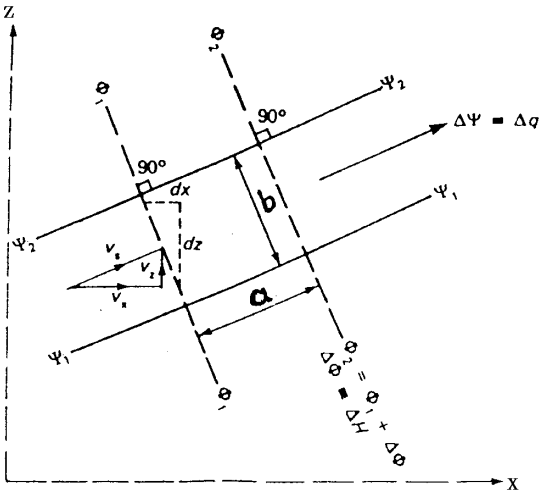


图4. 4. 5 流网的网格

在等势线 Φ 上，因为 $\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} \cdot \left(\dfrac{dz}{dx}\right)_{\Phi}$，所以斜率 $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)_{\Phi} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} / \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$

在流线 ψ 上，因为 $\frac{\partial \psi}{\partial x}=\frac{\partial \psi}{\partial z}\cdot(\frac{dz}{dx})_{\psi}$，所以斜率 $(\frac{dz}{dx})_{\psi}=\frac{\partial \psi}{\partial x}/\frac{\partial \psi}{\partial z}$

在等势线与流线交点处 $(\frac{dz}{dx})_{\Phi}\cdot(\frac{dz}{dx})_{\psi}=(\frac{\partial \Phi}{\partial x}/\frac{\partial \Phi}{\partial z})\cdot(\frac{\partial \psi}{\partial x}/\frac{\partial \psi}{\partial z})$

据式（4.4.6）可知 $(\frac{dz}{dx})_{\Phi}\cdot(\frac{dz}{dx})_{\psi}=-1$

故流线与等势线正交，参见图 4.4.5。

（2）网格形状

如流网中各等势线间差值相等，且各流线间隔也相等，则各网格的长宽比为常数。

设流网中有 m 条等势线间隔和 n 条流槽，网格沿流线方向长度为 a，沿等势线方向长度为 b，若等势线间隔相等，则两等势线间差值为△$h=H/m$，H 为总水头损失。若流线间隔相等，各流槽的流量为△$q=q/n$，q 为总单宽渗流量。

网格中水力坡降 $i=\frac{\Delta h}{a}=\frac{H}{am}$，则

$$\triangle q=kib=k\frac{b}{a}\frac{H}{m} \qquad (4.4.7)$$

因为各网格 H/m 和△q 相等，故从式（4.4.7）可知，长宽比 a/b 为常数。

应用正交性和 a/b 为常数可绘制流网并计算单宽渗流量 q。

$$q=n\Delta q=kH\frac{b}{a}\frac{n}{m} \qquad (4.4.8)$$

若网格为正方形，即 $a=b$，则 $q=kH\frac{n}{m}$ （4.4.9）

（3）边界条件：

在绘制流网中各种边界条件常常是十分有用的。

（1）地下水下的不透水边界为流线，如图 4.4.6，UU 线和 AA'线，以及图 4.4.7 中的 UU 线和 AJ 线。

（2）水下的透水边界上总水头相等，所以为一条等势线，如图 4.4.12 中的 AC 线和图 4.4.6 中 GH 线。

（3）水平的地下水位为一等势线，如图 4.4.6 中 DF。

（4）浸润线及下游出流线上压力水头为 0，只有位置水头，它们也是流线，如图 4.4.12 中 CF 和图 4.4.11（c）中的 JF。

（4）流网的绘制

一般首先根据边界条件确定边界上流线和等势线，然后根据流网的正交性反复试画，修正。注意流线之间、等势线之间不能交叉。当存在着渗流的自由水面时，如图 4.4.10 中的 CH 线，往往要反复试画。当存在对称性时，可只绘制其中一半，但注意中间流槽的绘制。当无法分割为整数时，可划分为非整数的流槽（见图 4.4.7）。

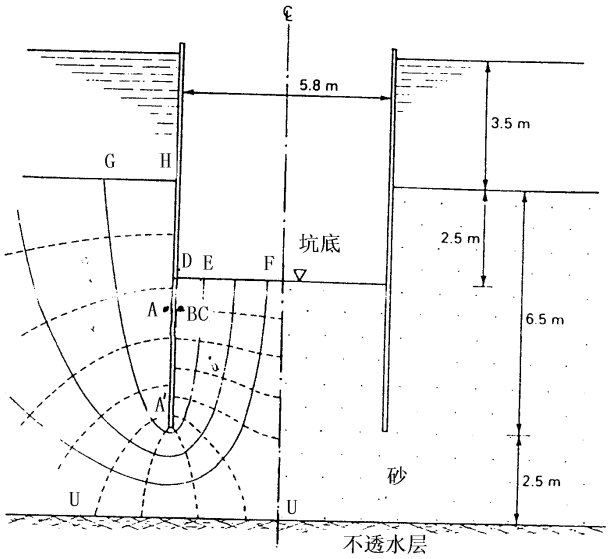


图4.4.6 基坑抽水开挖流网

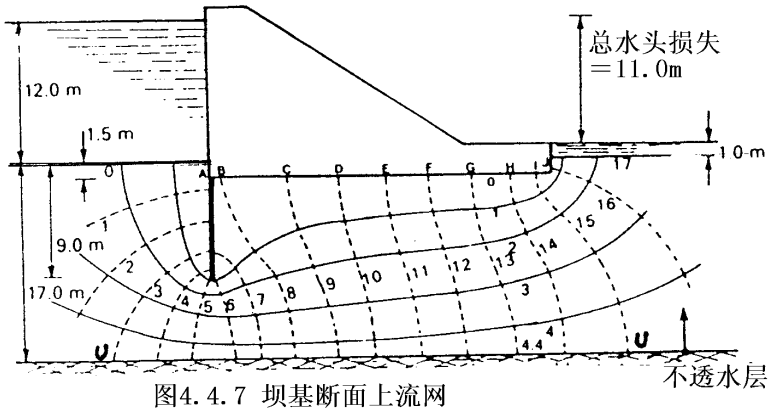


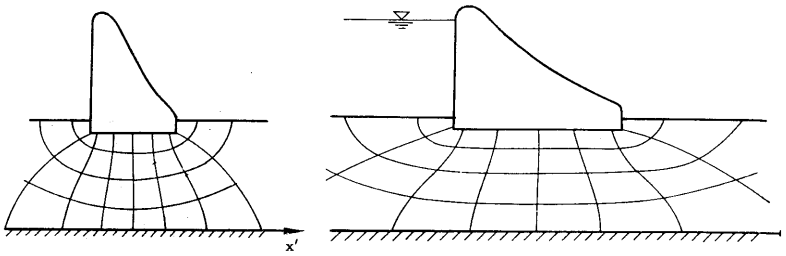
图4.4.7 坝基断面上流网

3. 各向异性土与分层土中的流网

各向异性土中的渗流，按式（4.4.3）分析。如果将坐标进行变换，则可得到式（4.4.4）的各向同性形式的微分方程。一般情况下，土的水平渗透系数较大，则 $k_z / k_x < 1.0$，这时设：

$$x' = x\sqrt{k_z / k_x} \qquad (4.4.10)$$

则在 x'、z 坐标系中按各向同性土进行绘制流网，然后再恢复到原来 x、z 坐标系。这时正方形的网格变“扁”了，见图 4.4.8。



(a) 转化的变态流网　　(b) $k_x=4k_z$ 时的实际流网

图4.4.8 各向异性土中的流网

地基一般由分层土组成，各层土的渗透系数不同。设各层土都是各向同性的，但在交界处流线会发生转折，不同土层中的流网形状各不相同。图 4.4.9 表示了土层界面上流线的折射与不同土层中流网的形状。

(1). 不同土层界面处流线的折射规律

图 4.4.9 表示第一个土层中两条相邻流线在交界面 A、B 处进入第二个土层时的转角变化。假设两个土层的渗流系数分别为 k_1 和 k_2，且 $k_1 < k_2$。现在推求入射角 α_1 与 折射角 α_2 之间的关系。自 A、B 两点作垂线分别为 AA' 和 BB' 分别垂直两条流线，则 AA' 和 BB' 应是两条等势线。水流自 A' 流至 B 和自 A 流至 B' 的水头损失相等，假设均为△h'，根据水流连续原理，边界两边相邻流线间的流量必须相等，即△q_1 ＝△q_2，

故
$$k_1 \frac{\Delta h'}{A'B} \cdot \Delta s_1 = k_2 \frac{\Delta h'}{AB'} \cdot \Delta s_2$$

则
$$\frac{k_1}{tg\alpha_1} = \frac{k_2}{tg\alpha_2} \qquad (4.4.11)$$

或
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{tg\alpha_1}{tg\alpha_2} \qquad (4.4.12)$$

式（4.4.11）或（4.4.12）为两层介质中的渗流折射定律，式中 α_1、α_2 分别为流线折射前后与分界面法线间的夹角，如图 4.4.9 所示。

(2). 交界面两边流槽的宽度△s 随偏转角发生变化

从图 4.4.9 可知：△$s_1 = AB \cdot \cos\alpha_1$；△$s_2 = AB \cdot \cos\alpha_2$，

则
$$\frac{\Delta s_1}{\Delta s_2} = \frac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2} \qquad (4.4.13)$$

当 $k_1 < k_2$ 时，$\alpha_1 < \alpha_2$，则 $\Delta s_1 > \Delta s_2$。

(3). 交界面两边网格的形状随渗透系数发生变化。

在图 4.4.9 中，设第一层土中等势线的间距为△l_1，第二层土中等势线的间距为△l_2，当两边取相同的势能降落△h 时，则

$$\Delta q_1 = k_1 \frac{\Delta h}{\Delta l_1} \Delta s_1$$

$$\Delta q_2 = k_2 \frac{\Delta h}{\Delta l_2} \Delta s_2$$

由于
$$\Delta q_1 = \Delta q_2$$

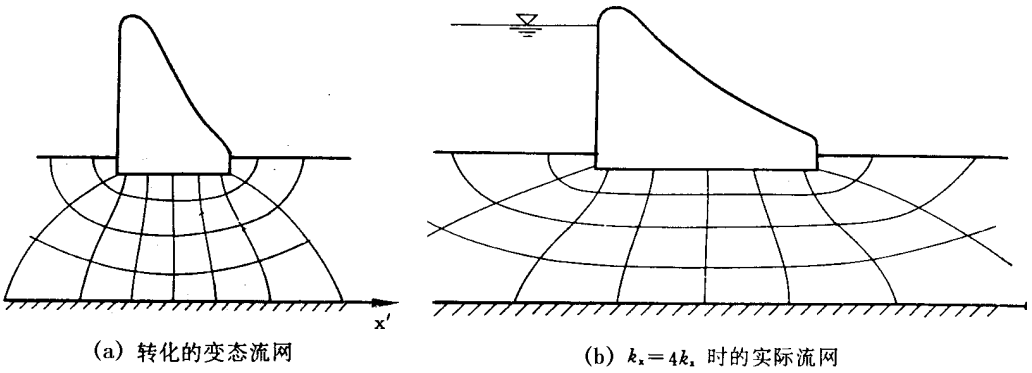
故
$$k_1 \frac{\Delta h}{\Delta l_1} \Delta s_1 = k_2 \frac{\Delta h}{\Delta l_2} \Delta s_2$$

则
$$k_1 \frac{\Delta s_1}{\Delta l_1} = k_2 \frac{\Delta s_2}{\Delta l_2} \qquad (4.4.14)$$

如果第一层流网为正方形，$\triangle s_1 = \triangle l_1$，则式（4.4.14）可表达为：

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\Delta s_2}{\Delta l_2} \qquad (4.4.15)$$

即第二层土中网格的边比等于上下两层土的渗流系数的比值。当$k_1 < k_2$时，$\triangle s_2 < \triangle l_2$，网格将拉长；当$k_1 > k_2$时，$\triangle s_2 > \triangle l_2$，网格将压扁，见图 4.4.9。



(a) 转化的变态流网　　(b) $k_x = 4k_z$ 时的实际流网

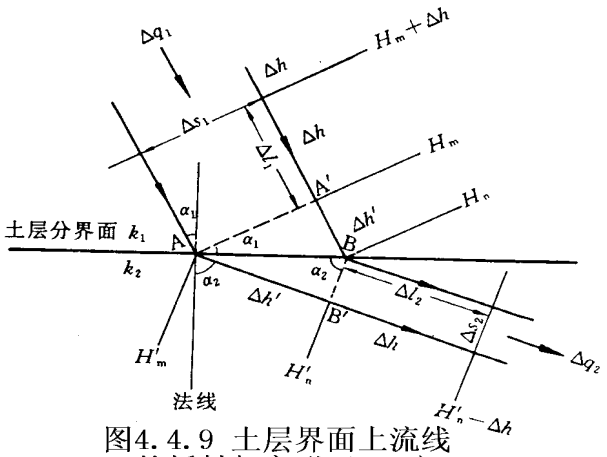


图4.4.9 土层界面上流线的折射与变形（$k_1<k_2$）

4. 流网的应用

（1）.计算渗流量、孔隙水压力和水力坡降

用下面例子说明

[例题 4－1]图 4.4.6 所示长基坑由两边平行的不透水板桩围绕，板桩间距 5.8m，基坑开挖深度 2.5m，坑内水位抽至与坑底齐平。已知砂土地基的渗透系数$k=4.5\times10^{-5}m/s$，求（a）沿基坑壁长边每米长度的抽水流量，（b）板桩两侧 A 和 B 点的孔隙水压力各是多大？（A 和 B 在坑底以下 0.8m）；（c）确定坑底土体的水力坡降i。

[解]因对称性只画出一半的流网，中心线处流槽为两边共用，注意流线与对称线不能相交，故流槽数为 n=7，等势线间隔数 m=13。网格近似于正方形，$a=b$。

（a）每延米抽水流量

$$q=kH\frac{n}{m}=4.5\times10^{-5}\times6.0\times\frac{7}{13}$$

$$=14.54\times10^{-5}m^3/s$$

（b）以不透水层顶面为基准面，坑外地面测压管水头为 12.5m，坑底测压管水头为 6.5m，相邻等势线间水头差为$(6/13)$m。

A 点距坑外地面 2.4 个等势线间隔，其测压管水头为$h_A=12.5-2.4\times\frac{6}{13}=11.4m$

B 点距坑底 1 个等势线间隔，其测压管水头为 $h_B=6.5+1\times\frac{6}{13}\approx7.0m$

A 点孔隙水压力$u_A=(h_A-z_A)\gamma_w=(11.4-5.7)\times9.81=55.9kPa$

B 点孔隙水压力$u_B=(h_B-z_B)\gamma_w=(7.0-5.7)\times9.81=12.8kPa$

（c）坑底 BCDE 单元的水力坡降等于两等势线间水头差除以流网沿流线方向长度，即

$$i=\frac{6}{13\times0.8}\approx0.58$$

(2)．计算水工建筑物基底的孔隙压力分布

用流网可以计算出水工建筑物基底的孔隙压力分布，求孔隙水压力分布图形的面积即可求得基底的扬压力。用下面的例子说明计算过程。

[例题 4－2]图 4.4.7 为一透水地基上的混凝土坝，地基的渗透系数$k=5.2\times10^{-5}m/s$，为减少渗流量在坝基前沿设 9m 深防渗帷幕。用流网求：（a）沿坝轴线每米长的渗透流量。（b）坝基各点的扬压力。

[解]根据透水地基的边界条件绘制流网，流线和等势线编号如图 4.4.7 所示。最低一个流槽的网格单元高度仅为长度的 0.4（非方形），故流槽数 n＝4.4，等势线间隔数 m＝17。

（a）每延米渗流量

$$q=kH\frac{n}{m}$$

$$=5.2\times10^{-5}\times11\times\frac{4.4}{17}=1.48\times10^{-4}m^3/s$$

（b）取不透水层为基准面，0 号等势线测管水头$h=12+17=29m$，等势线间隔的水头差为$11/17m$。坝基各点的等势线号Φ_i、测管水头h_i和孔隙水压力$u_i=\gamma_w h_i$列于表 4－1。计算公式为

$$u_i=\gamma_w(29-z_i-\Phi_i\frac{11}{17})$$

表 4－1 坝基各点的孔隙水压力u_i（扬压力）

	位置（各点$z_i=15.5m$）									
	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Φ_i	0.5	8	9	10	11	12	13	14	15	6
$u_i(kPa)$	129	82	75	69	63	56	50	44	37	3

(3).坝和土堤的渗流

前述板桩墙和混凝土坝基固定了流场的边界，而土坝（堤）流场的上边界没有限制，又称浸润线或自由水位线，该线上的压力水头为零（大气压力），因此沿该线(最高一条流线)等势线间隔即为位置z的间隔，且△z_i为常数。数学上可证明土坝中地下水位线为抛物线，但在进入和流出坝身的位置情况较复杂，需对抛物线有一些修正。

图 4.4.10 为进入坝身处的修改，其中（a）图的浸润线应垂直于坝面，这是因为坝的上游面为一等势线，流线与之垂直。（b）与（c）图表示上游面有粗粒料堆体，浸润线应与水平线相切。

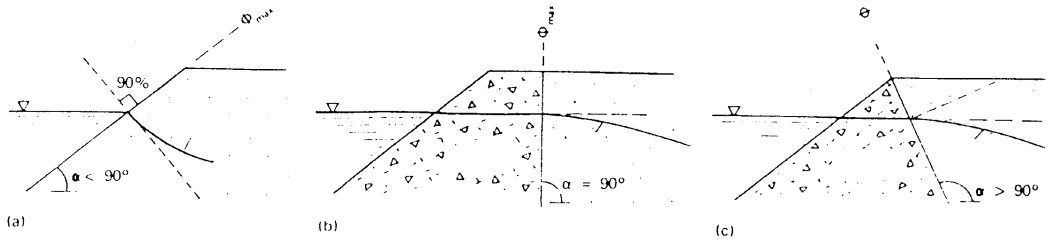


图4.4.10 进入土坝处的浸润线

图 4.4.11 为流出坝身处的修改，（a）为水平排水垫褥，（b）为排水棱体，两图抛物线尾部应与排水体界面垂直，（c）图中，实际浸润线较抛物线降低，且下游坡相切，并将下游坡 JF 视为最上一条流线的一部分。

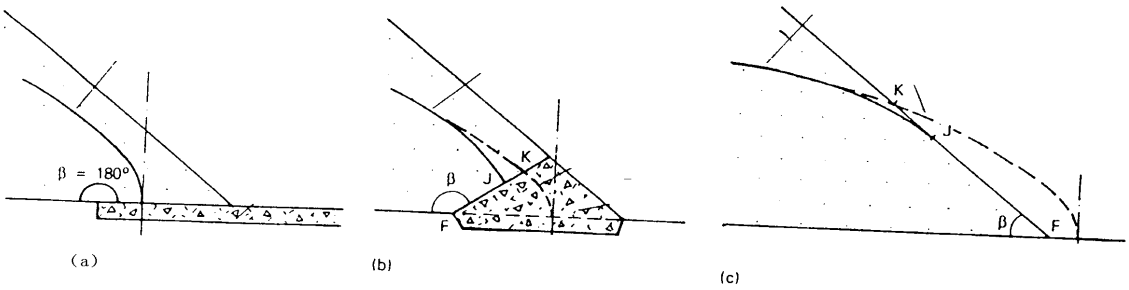


图4.4.11 土坝出流处浸润线

下面用一个实例说明土坝中流网的绘制。

[例题 4－3]不透水地基上的均质土坝如图 4.4.12 所示，土坝的渗透系数$k=6.0\times10^{-6}m/s$，在坝下游设水平排水垫褥，绘制流网并计算（a）沿坝轴线每米的渗流量，（b）沿一假设滑动弧 AS 上的孔隙水压力水头。

[解]绘制浸润线时，起点 D 的确定取为 DC＝0.3BC＝0.3×2×16＝9.6m。绘抛物线 DF，注意到进入和流出处抛物线与等势线夹角修正为直角，且等势线与浸润线交点间铅直距离△z为常数。图示流网$m=22$，$n=3.5$。

（a）每延米渗流量

$$q=kH\frac{n}{m}$$

$$=6.0\times10^{-6}\times16\times\frac{3.5}{22}=15.3\times10^{-6}m^3/s$$

（b）估计滑动圆弧与流线交点和圆弧上其他点等势线读数Φ_i及各点的位置z_i，则孔隙水压力水头h_w

$$h_w = H\frac{\Phi_i}{m} - z_i$$

圆弧上各点的计算结果列于图 4.4.12 的T_1表中。

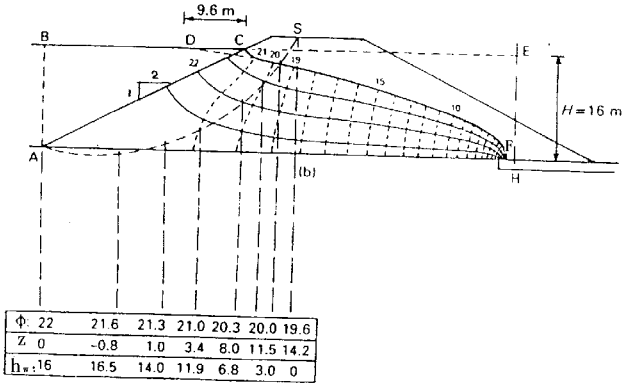


图4.4.12 土坝的断面

4.5 有关渗流的一些工程问题

4.5.1 渗透力与渗透变形及其防治

1. 渗透力

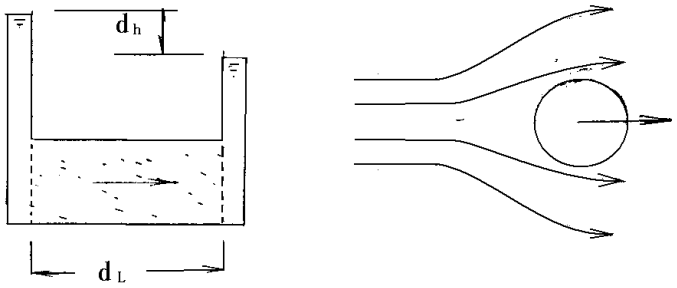


图4.5.1 渗透力的概念

在图 4.5.1（a ）中，从水平渗流的土体中沿渗透方向取出一微单元体，其面积为dA，长度为dl。在两端的水头差dh作用下，土中水发生水平渗流。如果以孔隙中的水体作隔离体，分析在流动方向上力的平衡，则：

$$\Delta P = Adh\gamma_w = F \qquad (4.5.1)$$

其中Δp为两端孔隙水上的压力差；F为土颗粒形成的骨架对孔隙水流的总的阻力。由于这个阻力均匀分布在微单元中，所以单位体积土中颗粒产生的阻力为：

$$f = \frac{F}{dAdl} = \gamma_w\frac{dh}{dl} \qquad (4.5.2)$$

f表示单元体积土体中土颗粒对水的阻力，与流动方向相反。它实际上是流动的水对土颗粒的拖曳力的反作用力。所以单位体积土体中，渗透水流对于土颗粒骨架的拖曳作用力为：

$$j = f = \gamma_w \frac{dh}{dl} = \gamma_w i \qquad (4.5.3)$$

j 也叫渗透力，它是作用于土骨架上的一种体积力，作用方向与渗流方向一致，是水流对土颗粒的拖曳力。与浮力是作用于土颗粒表面上的静水压力差一样，渗透力是源于作用在土颗粒上沿渗流方向上的渗流水压力不等，所以它与浮力一样，在客观上表现为体积力。

2. 渗透变形

由于渗透力是作用在土骨架上的力，所以它将产生有效应力，这又会对土的变形和稳定产生影响。其中渗透变形（或称渗透破坏）是较为严重的工程问题。1998 年洪水，许多堤防的险情都是由于渗透变形引起的。渗透变形有两种主要形式，一是流土，二是管涌，其他形式还有接触流土和接触冲刷等。流土可发生在无粘性土和粘性土中，当向上的渗透力大于有效容重时，土粒处于悬浮状态，故一般发生在渗流出逸处，可以用公式 $\gamma' \le j = i\gamma_w$,或 $i_{cr} = \gamma'/\gamma_w$ 判断。管涌发生在无粘性土，特别是缺少中间粒径的情况，细颗粒在粗颗粒形成的孔隙中流动，以至流失，逐渐形成管形通道。管涌还没有公式判断，主要根据试验得到的颗粒级配情况判断。

3. 渗透变形的防治

渗透变形是堤坝和基坑失稳的主要原因之一，设计时应予重视。防止渗透变形的根本措施是采用不透水材料阻断渗流途径，或者设法增长渗径减小水力坡降，此外，在渗流出逸处布置反滤层可减轻流土和管涌产生的危害。亦即上挡下排。

（1）. 堤身心墙、斜墙和堤基垂直截流墙

防渗墙材料可用粘土、混凝土、塑性混凝土、自凝灰浆和土工膜等。其中塑性混凝土具有足够的强度和较低的弹模，可适应较大变形而保持不开裂，曾成功用于三峡工程二期围堰，其配比经反复试验后确定，一般成分为每立方米含水泥 70～220kg，膨润土 80～105kg，砂石骨料 1600kg，常掺入粉煤灰 50～80kg。自凝灰浆的配比为水泥 100～150kg，膨润土 30～50kg 含缓凝剂和固化剂及水。

土工膜的渗透系数一般小于 10-11cm/s，防渗性好，施工方便，得到迅速推广。模袋砼具有便于水下施工的优点，主要用于岸坡防护，同时也兼有防渗功能。截流墙成槽的方法有开挖，钻孔，链斗，抓斗或射水法成槽，以及锯槽，同时成墙。也可采用高喷、旋喷、劈裂灌浆和搅拌的方法形成地下截流墙。

（2）. 水平铺盖

水平铺盖防渗层一般用粘土铺筑，要求土料的渗透系数 k<10-5cm/s，铺盖的厚度 0.5～1.0m，允许水力坡降为 4～6。土工膜也常被用作防渗铺盖。

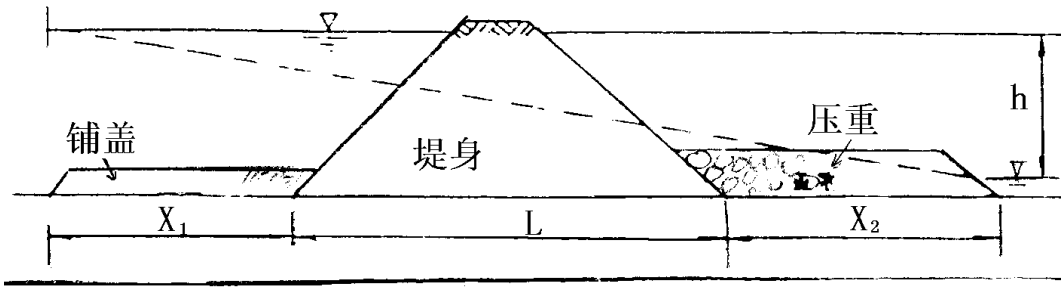


图4.5.2 防渗铺盖和压重

（3）. 背水侧压渗盖重

如图 4.5.2 所示，在迎水侧防渗铺盖长度为 x_1，在背水坡用透水材料铺设压渗盖重，长度为 x_2。定义允许水力坡降

$$[i] = \frac{h}{x_1 + L + x_2} \qquad (4.5.4)$$

[i]的最大值和堤基材料有关。参见表 4-2。

表 4—2　　允许水力坡降

堤基材料	[i]
极细砂、粉土	0.056
中、细砂	0.067
粗砂	0.083
砂砾石	0.111

（4）. 排水减压井

对于双层地基，上层相对不透水，下层透水，两层土均较厚。为防止堤的背水坡脚的上层承受较大的水力坡降，常用减压井将下层承压水引出上层土，以避免流土破坏。

（5）. 贴坡排水

为避免背水坡渗流出逸处的渗透变形，同时不致采用太缓的坡面，可以用贴坡反滤排水层处理，贴坡排水也减小了渗水对背水坡面的冲刷。施工时应清除坡面的草皮、杂物，清除深度 10cm～20cm，贴坡排水层的高度应高出最高的渗流出逸点 0.5m～1.0m。根据所选材料不同，可分为砂砾料贴坡排水和土工织物贴坡排水。

（6）. 基坑流土的防治

防治措施与堤坝的相似，例如增加板桩墙插入透水地基的深度或在透水地基不太厚的情况插入下卧不透水层。也可采用高压喷射注浆的方法形成防渗帷幕或水平封底隔渗层。参见图 4.5.3。

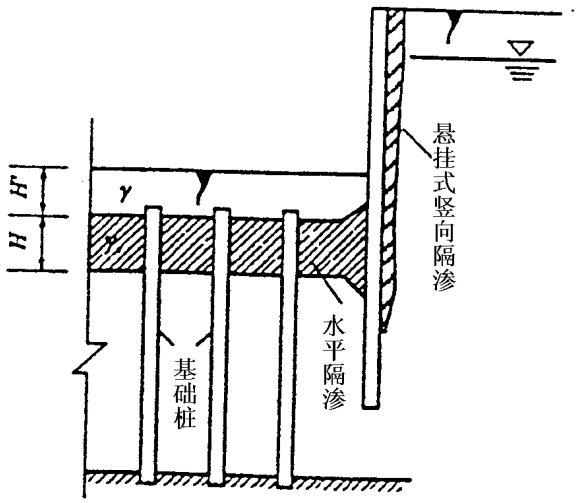


图4.5.3 悬挂式竖向隔渗和水平封底隔渗

用透水材料，例如砂砾石，铺设在坑底形成压渗盖重，也可有效地防止坑底的流土破坏。压渗盖重是由一层或几层不同粒径的材料组成的滤层，一方面要求渗透水不会在滤层产生过大的水头损失；另一方面，能保护坑底土，不使细颗粒流失或堵塞在滤层孔隙中。

4.5.2　渗流条件下土坡的稳定

渗流产生的渗透力可以改变滑动土体上的有效应力，从而改变滑动面上的滑动力和抗滑力，因而有时渗流会引发土坡的失稳。在从坡向外和向下的渗流常减少抗滑力或增大滑动力，减少土坡的稳定安全系数。这种情况发生在堤坝稳定渗流情况下的下游坡，水位骤降时的上游坡，一些局部大量降雨也会引起天然土坡的失稳。

1.　稳定渗流时土坡的稳定分析

在进行土坡稳定分析时，首先需计算确定浸润线的位置，绘制流网，每个土条在浸润线以下的单元，例如图 4.5.4（a）中的 abcd，体积为 V，当用条分法分析时，受到总渗透力的作用，其大小为 $jV = i\gamma_\omega V$，方向沿流线，作用在单元的形心上，水力坡降 i 由土条包含的流网计算。单元 abcd

的重量为 $\gamma' V$ 和总渗透力 $i\gamma_\omega V$ 的合力为 R，参见图 4.5.4（b)。因等势线不是竖直的，流网与土条的划分不一致，给计算带来困难，此外，合力 R 的计算亦较复杂，故一般不用此法分析渗流的作用。

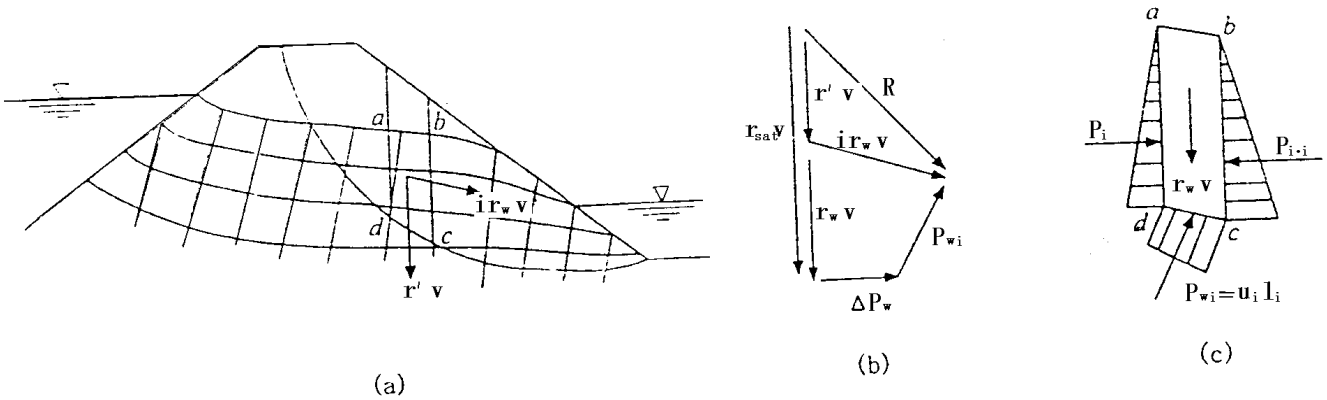


图4.5.4 渗流作用下土坡稳定分析

另一种分析方法是取 abcd 中的孔隙水作为脱离体，参见图 4.5.4（c)，用以分析总渗透力的作用。该脱离体受的力有孔隙水重量 $\gamma_w V_v$、土粒浮力的反作用力 $\gamma_w V_s$，V_v 和 V_s 分别为 abcd 中孔隙和土粒的体积，以上两力的合力为 $\gamma_w V$，相当于 abcd 中无土粒充满水的重量，分别标于图 4.5.4（c）和（b）中。此外，还有两竖直面 ad 和 bc 上总孔隙水压力之差 $\Delta P_w = P_i - P_{i+1}$，土条底面孔隙水压力 $P_{wi} = u_i l_i$。从（b）图可见 $\gamma_w V$、ΔP_w 和 P_{wi} 三力也构成了总渗透力 $i\gamma_w V$，因 $\gamma' V + \gamma_w V = \gamma_{sat} V$，从（b）图还可以看出，用 $\gamma_{sat} V$、ΔP_w 和 P_{wi} 三力同样可求得第一种分析方法求得的 $\gamma' V$ 和 $i\gamma_w V$ 的合力 R，而计算却方便得多。将土条上各力对滑动圆弧的圆心 0 点取矩，ΔP_w 为内力不出现在平衡方程中，$\gamma_{sat} V$ 为土条的饱和重量，考虑到土条有部分处在下游水位以下，则该部分应以浮容重计算，按有效应力分析法，土坡稳定的安全系数 F_s 为

$$F_s = \frac{\sum [c_i' l_i + (w_i \cos\alpha_i - u_i l_i)\mathrm{tg}\varphi_i']}{\sum W_i \sin\alpha_i} \qquad (4.5.5)$$

式中 $W_i = (\gamma h_{i1} + \gamma_{sat} h_{i2} + \gamma' h_{i3}) b_i$

h_{i1}、h_{i2} 和 h_{i3} 分别为第 i 土条在浸润线以上、浸润线至下游水位和下游水位至滑动面的高度，参见图 4.5.5。关于 u_i 的计算，过土条底部中点作等势线，取图 4.5.5 中 h_w 为计算水头，即 $u_i = \gamma_w (h_w - h_{i3})$。

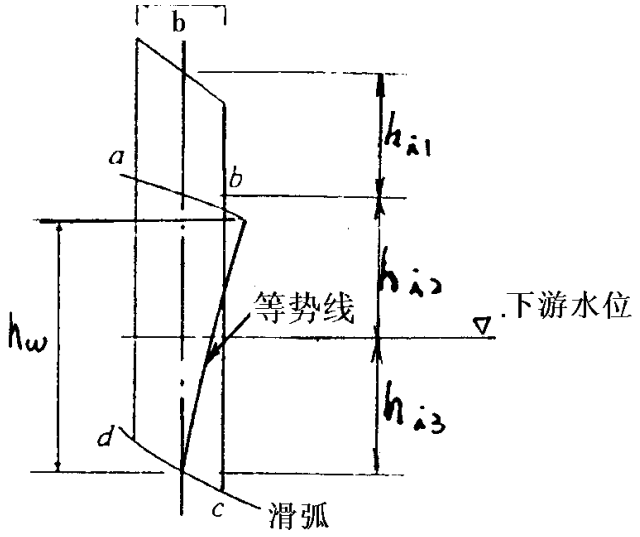


图4.5.5 土条各段高度

2. 坡面处的几种渗流的情况

图 4.5.6（a）所示渗流出逸处土坡表面有一单位体积无粘性土体，它受有浮容重 γ' 和渗透力 $\gamma_w i$ 作用。设土坡坡角为 β，渗流方向与水平线夹 θ 角，当该土体处于极限平衡时，水力坡降取临界值 i_{cr}，写出沿坡面方向的力的平衡条件为：

$$\gamma' \sin\beta + \gamma_w i_{cr} \cos(\beta-\theta) = [\gamma' \cos\beta - \gamma_w i_{cr} \sin(\beta-\theta)]\mathrm{tg}\varphi \qquad (4.5.6)$$

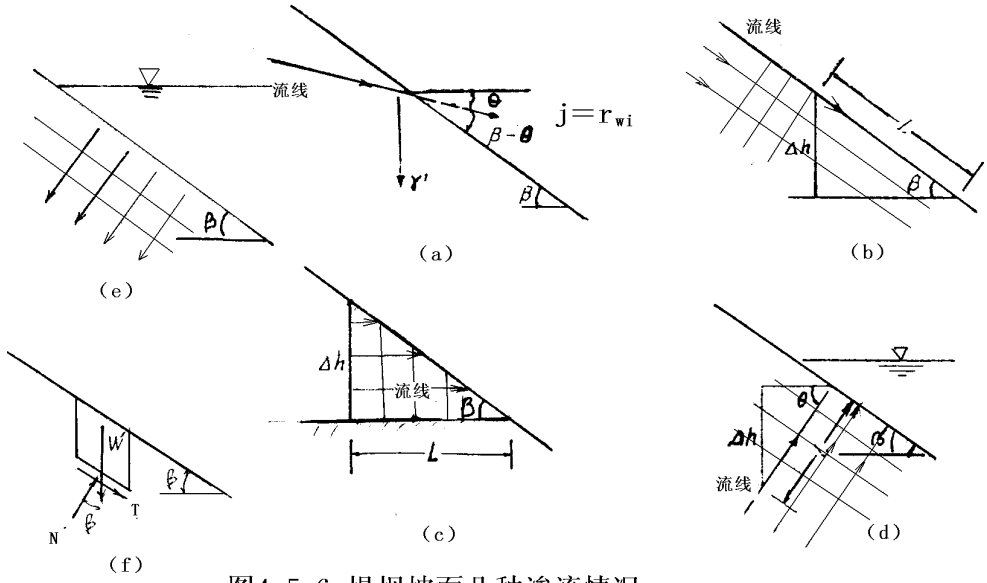


图4.5.6 堤坝坡面几种渗流情况

图 4.5.6（b）、（c）、（d）、（e）表示的是坡面处几种特殊渗流的流网。图（b）为沿坡渗流情况，如图 4.5.7 中浸润线出逸段 QR。图 4.5.6（c）是不透水地基上土坝下游的局部情况，这里局部流线只能是接近水平方向；图（d）是图 4.5.7 中下游水位以下 RT 段，流线垂直于下游坡面；图（e）是图 4.5.7 中土坝的上游坡面 PS 段。

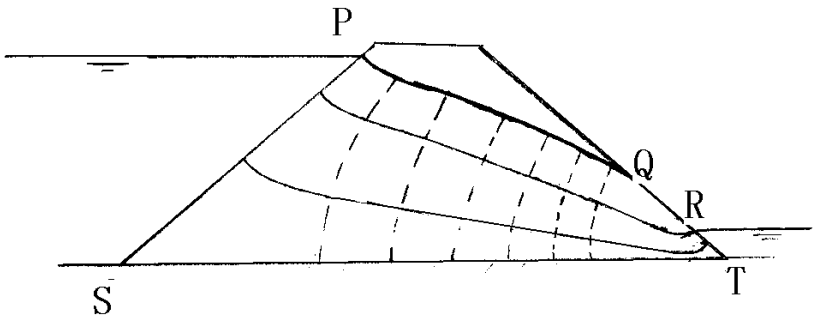


图4.5.7 不透水地基上的土坝流网

在以上几种情况下，都涉及到坡面的局部抗滑稳定问题。对于无粘性土，往往是局部的失稳破坏引发整体破坏。所以应对其进行抗滑稳定分析。如图 4.5.6（f）所示，取坡面上单位体积的微单元进行受力平衡分析。认为其两侧面的骨架上作用力相互抵消，则其自重为

$$w'=\gamma' \qquad (4.5.7)$$

w'产生的滑动力：

$$T'=\gamma'\sin\beta \qquad (4.5.8)$$

w'产生的抗滑力：

$$N'tg\varphi=\gamma'\cos\beta tg\varphi \qquad (4.5.9)$$

作用在单位土体骨架上的渗透力为：

$$j=\gamma_w i \qquad (4.5.10)$$

计算土单元的抗滑稳定安全系数：

$$F_s=\frac{\text{抗滑力}}{\text{滑动力}}=\frac{Ntg\varphi}{T} \qquad (4.5.11)$$

其中 N，T 是考虑了渗透力后的滑动面上的法向力和切向力。

在图 4.5.6（b）、（c）、（d）、（e）中只是渗透力的方向不同。将单位体积土单元的抗滑稳定分析结果列于表 4—3 中。

表 4—3　　坡面几种渗流情况的抗滑稳定分析

工况项目	沿坡渗流 图（b）	水平渗流 （无下游水位）图（c）	垂直坡面向外 图（d）	垂直坡面向内 图（e）
i	$\sin\beta$	$tg\beta$	/	/
j	$\gamma_w\sin\beta$	$\gamma_w tg\beta$	$\gamma_w i$	$\gamma_w i$
T	$\gamma_{sat}\sin\beta$	$\gamma_{sat}\sin\beta$	$\gamma'\sin\beta$	$\gamma'\sin\beta$
N	$\gamma'\cos\beta$	$\gamma'\cos\beta-\gamma_w\sin\beta\cdot tg\beta$	$\gamma'\cos\beta-\gamma_w i$	$\gamma'\cos\beta+\gamma_w i$
F_s	$\frac{\gamma'}{\gamma_{sat}}\frac{tg\varphi}{tg\beta}$	$\frac{\gamma'-\gamma_w tg^2\beta}{\gamma_{sat}tg\beta}tg\varphi$	$\frac{\gamma'\cos\beta-\gamma_w i}{\gamma'\sin\beta}tg\varphi$	$\frac{\gamma'\cos\beta+\gamma_w i}{\gamma'\sin\beta}tg\varphi$
当 $\gamma'=\gamma_w$，$\varphi=\beta=30^0$ 时	$F_s=1/2$	$F_s=1/3$	$F_s=1-1.15i$	$F_s=1+1.15i$
当 $\gamma'=\gamma_w$，$\varphi=30^0$，$F_s=1$ 时	$\beta=16.1^0$	$\beta=15^0$	$i=\cos\beta-\sqrt{3}\sin\beta$	$i=\sqrt{3}\sin\beta-\cos\beta$

可见在这几种情况下，向外向下的渗流都减少了抗滑稳定安全系数。而垂直向内的渗透力增加了抗滑力，是有利于边坡稳定的，见图 4.5.6（e）。在水下钻孔灌注桩的施工中，为了保证钻孔不倒塌，必须在孔内保持比地下水位高的水位，产生向内的渗流；而为了使其保证一定的抗滑稳定安全系数，需要有足够的水力坡降 i，因而在钻井孔内加泥浆护壁，使井壁处局部水力坡降加大。在

$\gamma' = \gamma_w$，$\varphi = 30^0$ 时，对于垂直井壁（$\beta = 90^0$），则需要 $i = 1.732$ 才能使井壁处于临界极限平衡状态。

4.5.3 挡土构造物上的土压力和水压力

在进行挡土结构的设计时，首先须计算作用在结构上的土压力和水压力。力的大小主要取决于挡土结构的高度、土的性质和地下水性质。例如基坑支护结构，墙后土体常常是饱和的，存在静水压力、渗流和超静孔压力的影响，经典的土压力理论常常不能给出附合实际的结果。除了水的影响外，还存在下列一些因素，如开挖应力路径和三维效应的影响等。本节只考虑土中水对挡土结构上土压力和水压力的影响。

1. 静水压力作用下的水土压力

根据有效应力原理，$\sigma_z = \sigma'_z + u$，其中 u 可以是静水压力、渗流情况下的水压力和超静孔压力。首先考虑静水压力作用下，挡土结构上土压力和水压力的计算。这里涉及到目前我国土力学基础工程界争议的一个焦点问题，即水土分算和合算问题。图 4.5.8 情况可近似认为板桩两侧作用静水压力。

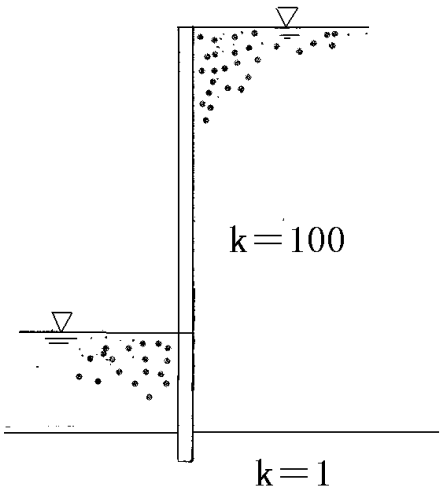


图4.5.8 板桩上作用的静水压力

（1）.水土分算

水土分算是指水压力和土压力分开计算，即有效自重应力 σ'_z 将在挡土结构上产生土压力，而孔隙水压力 u 是各向等压的，故直接作用在挡土结构上。

根据朗肯土压力理论：

$$\left.\begin{aligned} p_a &= \sigma'_z K'_a - 2c'\sqrt{K'_a},\ K'_a = \tan^2(45^\circ - \frac{\phi'}{2}) \\ p_p &= \sigma'_z K'_p + 2c'\sqrt{K'_p},\ K'_p = \tan^2(45^\circ + \frac{\phi'}{2}) \end{aligned}\right\} \quad (4.5.12)$$

其中孔隙水压力是静水压力及超静水压力。但由于实际工程中较难确定施工中的超静水压力和有效应力强度指标 c'和 ϕ'，往往采用一般形式的水土分算，即

$$\left.\begin{aligned} p_a &= \sigma_z K_a - 2c\sqrt{K_a},\ K_a = \tan^2(45^\circ - \frac{\phi}{2}) \\ p_p &= \sigma_z K_p + 2c\sqrt{K_p},\ K_p = \tan^2(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \\ p_w &= u = \gamma_w z \end{aligned}\right\} \quad (4.5.13)$$

式中 u 只是包含静水压力，而将难以确定的超静孔压力的影响包含在 c 和ϕ中，可采用固结不排水或不排水强度指标。

（2）． 水土合算

水土合算计算土压力时考虑土体自重的总应力σ_z，例如只有自重应力作用的情况，$\sigma_z = r_{sat} z$，而不再计及任何水压力影响。

$$\left.\begin{aligned} p_a &= K_a \gamma_{sat} z - 2c\sqrt{K_a},\ \ K_a = \tan^2(45^\circ - \frac{\phi}{2}) \\ p_p &= K_p \gamma_{sat} z + 2c\sqrt{K_p},\ \ K_p = \tan^2(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \\ p_w &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4.5.14)$$

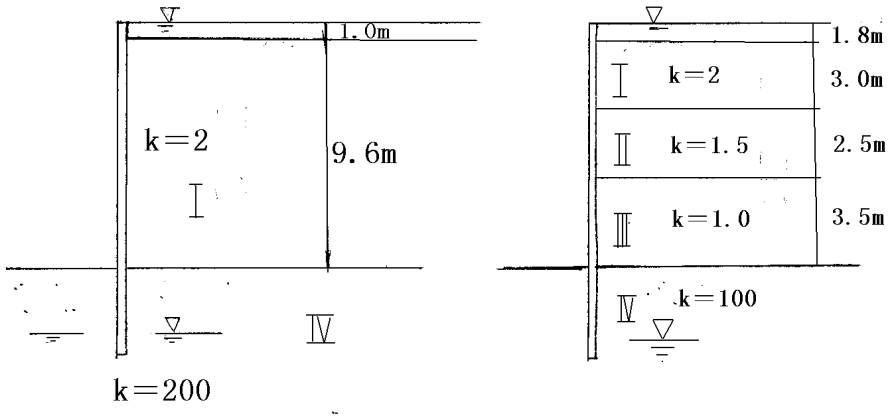
在水土合算时，采用固结不排水或不排水的总应力强度指标。水土合算一般用于粘性土。

比较水土分算与水土合算，可见对于水压力部分计算方法不同。在水土合算中由于将静水压力部分也乘以主动土压力系数（计算荷载时）或被动土压力系数（计算抗力时），缺乏理论基础。由于两种算法计算自重应力和抗剪强度指标不同，其结果是不会相同的。即使对于软粘土，取c_u和$\varphi_u = 0$，使$k_a = k_p = k_w = 1.0$，两种算法得到的总水土压力的分布和大小也是不同的。关于在粘土中水土合算是否有理论基础尚有待研究。但工程中实际工程情况比较复杂，很少是静水压情况。水土分算更能合理反映水土的作用。在对支护结构和地下结构进行稳定分析时，水土合算无法反映水的浮力，显然是不合理的。

2. 不同渗流情况下的水土压力

在基坑开挖地支护结构设计时，会遇到许多复杂的地基水土关系，只有清楚地分开水与土及它们的相互作用，才能得到合理的荷载与抗力。

(1).有上层滞水的情况



（a）单层不透水层　　（b）多层不透水层

图4.5.9 有上层滞水时的情况

在很多情况下，基坑开挖遇到的地下水是上层的滞水，稳定的地下水（潜水）位于很深的透水层中，如图 4.5.9 所示。对于图（a）情况，由于水是垂直下渗，$i \approx 1.0$，这时会得到板桩上的水压力为零，考虑到向下的渗透力，主动土压力$P_a = k_a \gamma_{sat} z$，可见与水土合算结果一致。对于图（b）情况，滞水下渗，各层渗透系数不同，其水、土压力和总压力的分布应逐层根据水流连续性条件计算。应当注意到水的渗透力对于土压力的影响，这时它产生附加土压力△$P_a = k_a jz$。

（2）.有承压水的情况

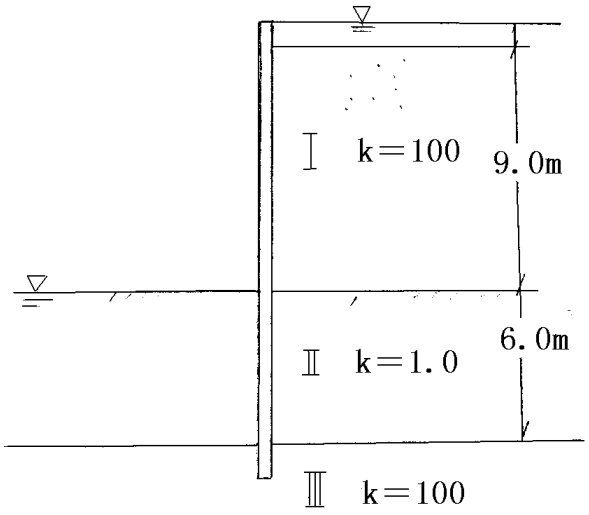


图4.5.10 有承压水的情况

图 4.5.10 表示基坑下有一层不透水土层，由于基坑内排水，使这一土层下存在承压水。在土层I中，对板桩产生的水压力接近静水压力；在土层II中除水压力外，还由于向下的渗透力在板桩后产生很大的主动土压力；在板桩前，由于下部承压水向上渗流，可能发生流土，应验算$i < i_{cr} = \gamma' / \gamma_w$。即使不发生流土，也可能因被动土压力丧失而失稳，从而使竖向有效应力及被动土压力大大减小。

（3）.均匀土中基坑内排水情况

对于图 4.5.11 的坑内排水情况，如果设板桩后作用主动土压力，桩前为被动土压力。一种简化

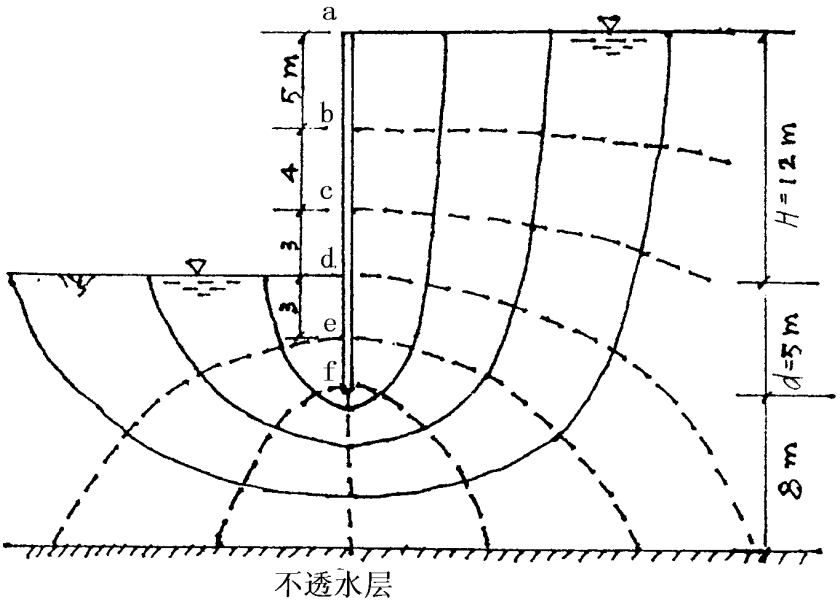


图4.5.11 板桩墙剖面图

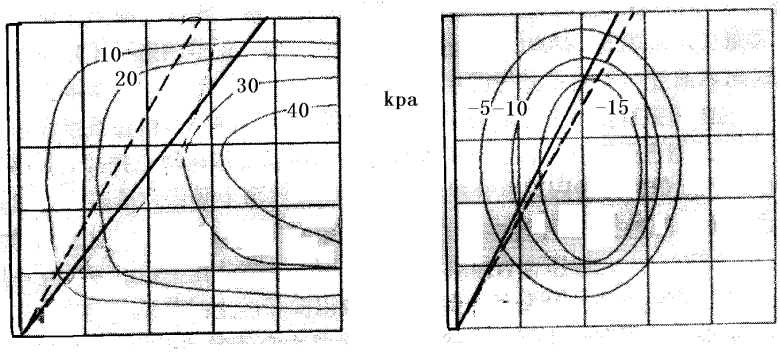
的计算方法是假设水头损失沿板桩的外轮廓线均匀损失，则桩后为向下渗透力，桩前为向上渗透力，$i = H/(H+2d)$，主动土压力增加，被动土压力减少，水压力也不同于静水压力，这种情况可用朗肯土压力理论进行近似计算。

实际上这是一个二维渗流问题，需要绘制流网才能进行较准确的计算。在绘制了流网后，由于土中应力场不再是一维情况，无法同时达到朗肯的极限平衡应力状态。这时应根据库伦土压力理论，通过假设滑裂面的计算方法计算。计算表明这时主动侧的滑裂面与桩夹角大于$45^0 - \varphi/2$，计算的水土压力之和也比简化计算大一些，这是由于存在水平渗透力。

如果在基坑外人工排水或降水，由于有向外的渗透力，使主动水土压力降低，被动侧水土压力增加。

3. 超静孔隙水压力对水土压力的影响

在粘性填土施工时，可能在挡土构造物后土中产生正的孔隙水压力；在粘性土中开挖则可能在支护构造物后地基土中产生负的超静孔压。在渗流固结中，孔压消散，相应的挡土构造物上压力不断变化。有效应力的分析可以清楚地反映这一情况，采用总应力分析时，则应合理地选用强度指标。



（a）墙后正超静孔压　　（b）墙后负超静孔压

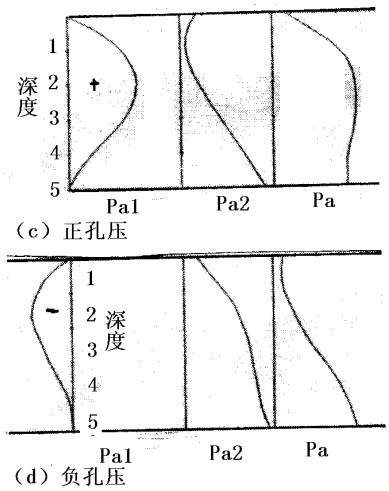


图4.5.12 超静孔压引起的土压力

图 4.5.12 表示的是上部有超载的挡土构造物后土中正负超静孔压的情况及对应的主动土压力。假设墙面是排水的，墙后土体是饱和度 $S_r=90\%$ 的非饱和土。图（a）是由于填土及荷载引起的正超静孔压等孔压线分布，图（b）是由于基坑开挖引起的负超静孔压等孔压线分布。用库伦土压力理论的图解法，发现正孔压的滑裂面与墙夹角大于 $45^0-\varphi/2$；负孔压时，滑裂面倾角小于 $45^0-\varphi/2$。图（c）表示的正孔压情况的主动土压力，图（d）为负孔压情况的主动土压力。其中 P_{a2} 是表示由有效自重应力 σ_z' 引起的主动土压力；P_{a1} 是滑裂面上的超静孔压的水平分量，实质上是水平方向的渗透力，表现为作用在墙上的主动土压力。二者之和为墙上总的主动土压力。可见有负孔压时主动土压力明显减少。

可见，所谓的水土合算只是一种经验算法，它无法反映各种水、土分布情况下的复杂的水土压力大小与分布的情况。在实际工程问题中，还应作具体的分析，而有效应力原理是基本的理论基础。

4.5.4 基坑的井点降水

当地下水位较高影响基坑开挖，或坑底不透水土层下方有高承压水层会引起坑底土流土时，应考虑人工降水。

1 井点降水法的分类和适用条件

几种主要井点降水法适用的土层条件和能达到的降水深度参见表 4－4。

各种方法的原理、性能介绍于下。

（1）. 轻型井点降水

这种降水方法的布置参见图 4.5.13。该法广泛用于降水深度较小的基坑开挖。井点管中的水靠真空泵产生的真空吸至集水箱，再用水泵排出，故降水深度不超过 10m，一般在 3~6m 范围。根据抽真空的设备可分为三类：干式真空泵轻型井点、射流泵轻型井点和隔膜泵轻型井点。

表 4－4 井点降水法的适用条件

适用条件	轻型井点		喷射井点	电渗井点	管井井点
	单层	双层			
土层渗透系数(m/d)	0.1~20	0.1~20	0.1~20	<0.1	20~200
降水深度(m)	3~6	6~12	8~20	8~20	>10

1－集水总管；2－连接管；3－井点管；4－滤管；5－水泵房；
6－基坑；7－原地下水位；8－降水后地下水位

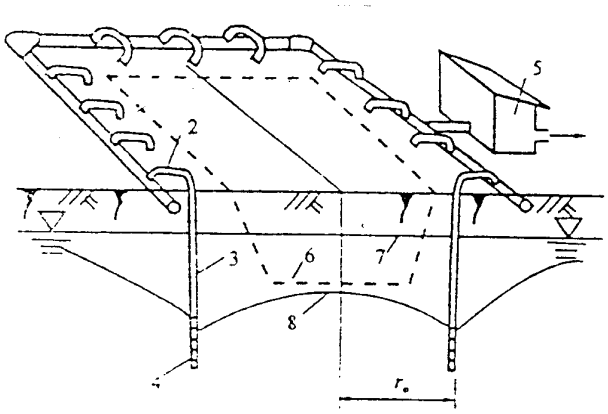


图4. 5. 13 轻型井点布置图

轻型井点一般布在基坑外缘 0.5~1.0m，井点间距 1.0~2.0m，呈封闭形状。如降水面积很大，降水浸润线在基坑中心不能满足降水深度要求时，可在基坑内增设井点，该措施还能加速降水。

当降水深度较大，超过单层轻型井点降水深度 4.5~5.0m 时应沿坑边不同高程设置双层（或称双级），甚至多层井点，阶梯状布置接力抽水降低地下水位。

（2）. 喷射井点降水

该法用于弱透水层中降水深度较大的降水工程，其井点管分内外两管。工作原理为，高压水泵将压力工作水经进水总管压入内外管间环形空间，向下经喷嘴使水流速度加快，一般可达 30m/s，从而产生负压、卷吸地下水一起沿内管上升，这样达到深层降水的目的。

（3）. 电渗井点降水

对于渗透系数小于 0.1mm/d 的饱和粘土，尤其是在淤泥质粘土中降水，上述方法往往效果很差，这时应施加直流电压于地基土，利用电渗现象与电泳特性，配合轻型井点或喷射井点，促使地下水流动，排出。

电渗井点排水的结构和原理如下，利用井点管作阴极，在其内侧平行布设直径 38~50mm 的钢管或直径大于 20mm 的钢筋（不得与井点管相碰）作阳极。接通直流电（可用 9.6~55kW 的直流电焊机）在电势作用下，促使带正电荷的孔隙水向阴极井点管方向流动（电渗），使带负电荷的粘土微粒向阳极方向移动（电泳），从而加速地下水位的下降。

（4）. 管井和深井降水

管井法是围绕基坑每隔 10~30m 设置一个井管，可采用直径大于 200mm 的钢管、铸铁管、水泥管（包括水泥砾石滤水管）或塑料管制作，其下部为过滤段。每个管井采用一台水泵（离心泵、潜

水泵）抽水。降水深度从小于 10m（安装于管顶的离心泵）到大于 100m。当降水深度大时，采用的是深井泵，即为深井降水。单井抽水量从 10m3/d 到大于 1000m3/d。

2. 井点降水方案的设计

（1）. 设计步骤

- 明确设计要求，包括降水面积、降水深度，要求的时间等；
- 勘察场地的工程地质和水文地质条件，掌握地层分布、土的物理性质指标和地下水位等。可用单孔稳定流抽水试验求得含水层的渗透系数 k 和降水漏斗的半径 R（影响半径）。渗透系数也可根据土的工程分类大致确定，参见表 4－5。

表 4－5　渗透系数参考值

土名	粘土	粉质粘土	粉土	粉砂	细砂	中砂	粗砂	砾卵
k(m/d)	<0.001	0.001~0.05	0.05~0.5	0.5~1	1~5	5~20	20~50	>50

- 了解场地施工条件，分析降水对邻近建筑的影响；
- 根据地基土层条件、要求降水的深度，选择降水方法；
- 井点布置和设计；
- 制定施工和管理技术要求。

（2）. 计算基坑涌水量

涌水量的计算以水井理论为依据，基坑（井点系统）的涌水量和基坑面积、形状、降水深度、渗透系数、以及地下水压力、井的深度等因素有关。根据地下水的压力，水井可分为无压井（潜水井）和承压井，参见图 4.5.14，凡水井布置在两层不透水层之间的含水层内，且含水层内水头高于上部不透水层底板的情况，该井称为承压井；井底到达不透水层的称为完整井，否则为非完整井。

a．单井涌水量计算

根据杜布依（Dupuit）假设，在均质各向同性的含水层中有一完整井，水流沿径向轴对称流入井内，渗流符合达西定律，抽水前地下水位水平，抽水后井周围水平面变成弯曲的水面，最后趋于稳定，形成图（4.5.14(a)）所示的降落漏斗，漏斗为一旋转曲面，其轴线和井轴重合。

取井轴为 Z 轴，径向为 ρ 轴。根据达西定律，单井的涌水量

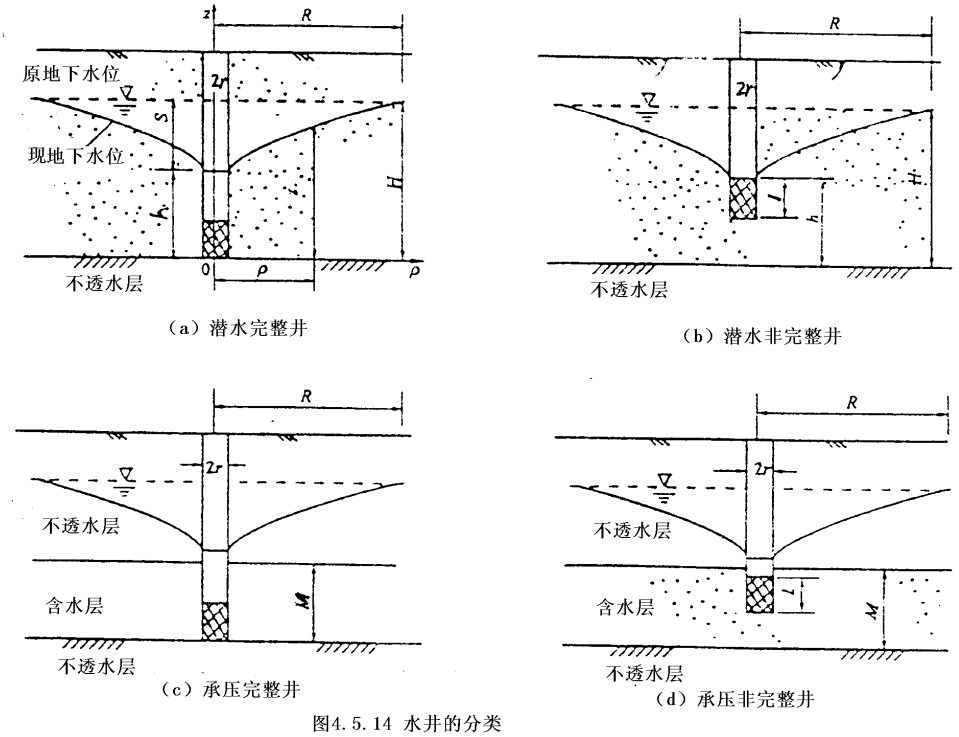


图4. 5. 14 水井的分类

$$Q_0 = kiA$$

$$Q_0 = k\frac{dz}{d\rho}2\pi\rho z \tag{4.4.14}$$

式中 Q_0－单井涌水量；

k－渗透系数；

i－水力坡降；

A－过水面积。

式（4.5.14）积分得

$$z^2 = \frac{Q_0}{\pi k}\ln\rho + c \tag{4.5.15}$$

将边界条件 $\rho = r,\ z = h$ 代入式（4.5.15）得

$$h^2 = \frac{Q_0}{\pi k}\ln r + c$$

将边界条件 $\rho = R,\ z = H$ 代入式（4.5.15）得

$$H^2 = \frac{Q_0}{\pi k}\ln R + c$$

上列两式相减消去积分常数 c 得

$$H^2 - h^2 = \frac{Q_0}{\pi k}\ln\frac{R}{r}$$

$$Q_0 = \pi k\frac{H^2 - h^2}{\ln\dfrac{R}{r}}$$

将 $\pi = 3.14,\ H - h = S,\ H + h = 2H - S$ 代入上式，并用常用对数代换自然对数得

$$Q_0 = 1.366k\frac{(2H - S)S}{\lg\dfrac{R}{r}} \tag{4.5.16}$$

式中 H－原地下水位至底部不透水层距离；

S－水位降深；

R－影响半径；

r－水井半径

（2）井点系统涌水量

井点降水沿基坑周围布设 n 个井，基坑涌水量 Q 即为井点系统的总涌水量，设同时抽水的单井的涌水量相同，都为 q，则 $Q=nq$，由于各井的降落漏斗互相干扰，q 小于 Q_0。假设井点系统呈圆形布置，井点系统中心至各井轴线的距离为 r_0，各井处水位为 h，降深为 S，参见图 4.5.15。

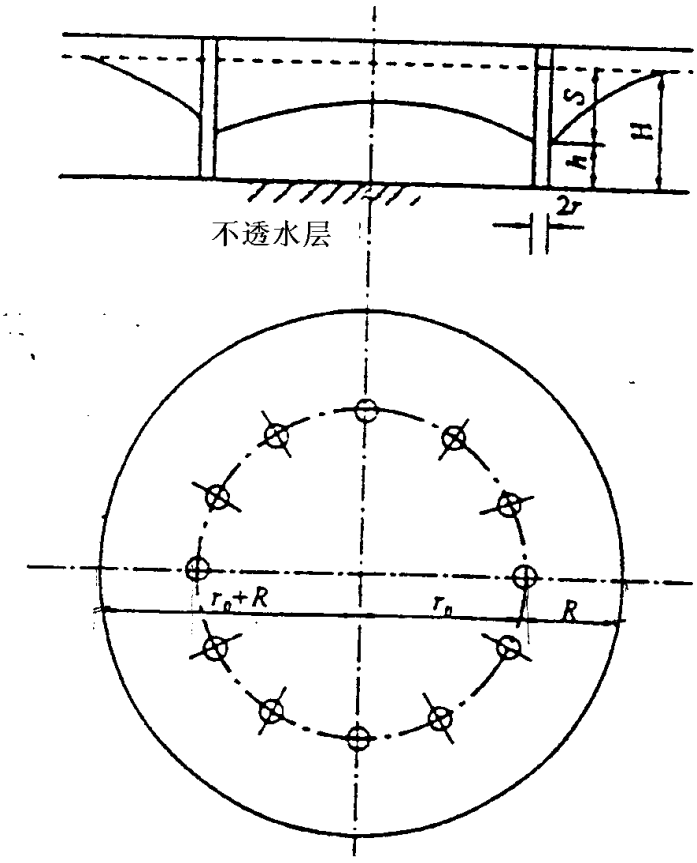


图4.5.15 圆形布置的井点系统

将圆形布置的井点系统近似为位于中心的单井，在井位，将 $\rho=r_0, z=h$ 代入式（4.5.15）得

$$h^2=\frac{nq}{\pi k}\ln r_0+c$$

在影响范围边缘，将 $\rho=R+r_0, z=H$ 代入式（4.5.15）得

$$H^2=\frac{nq}{\pi k}\ln(R+r_0)+c$$

由上两式得：

$$H^2-h^2=\frac{nq}{\pi k}\ln\frac{R+r_0}{r_0}$$

$$Q=nq=\pi k\frac{H^2-h^2}{\ln\dfrac{R+r_0}{r_0}}$$

类似式（4.5.16）整理得

$$Q=1.366k\frac{(2H-S)\cdot S}{\lg\dfrac{R+r_0}{r_0}} \qquad (4.5.17)$$

式中 Q－基坑涌水量；

S－井点处水位降深；

r_0－井点系统中心至井轴线距离；

其它符号意义同前。

式（4.5.17）为潜水完整井系统的涌水量，对于潜水非完整井系统，潜水不仅从井侧流入，同时从井底流入，其涌水量公式：

$$Q=1.366k\frac{\overline{H}^2-h^2}{\lg\frac{R+r_0}{r_0}+\frac{\overline{H}-l}{l}\lg(1+0.2\frac{\overline{H}}{r_0})} \quad (4.5.18)$$

式中 $\overline{H}=\frac{1}{2}(H+h)$；

l —滤水管长度，参见图 4.5.14（b）。

对于承压井，假设地下水为层流，含水层上下两个不透水面是水平的，则承压完整井系统的涌水量计算公式为：

$$Q=2.73k\frac{MS}{\lg\frac{R+r_0}{r_0}} \quad (4.5.19)$$

式中 M—承压含水层厚度；

S—井点处水位降深。

承压非完整井系统的涌水量计算公式为：

$$Q=2.73k\frac{MS}{\lg\frac{R+r_0}{r_0}+\frac{M-l}{l}\lg(1+0.2\frac{M}{r_0})} \quad (4.5.20)$$

上述（4.5.17）~（4.5.20）式为圆形均布井点系统涌水量的计算公式。适用于周围无隔水边界和邻近补给源的情况。在应用上述公式时，对不同形状的基坑应先化引为圆形基坑，求得化引圆半径 r_0，并且要知道抽水影响半径 R。

（3）基坑的化引圆半径 r_0 和影响半径 R

不规则基坑化为圆形基坑，其半径 r_0 可用下式计算：

$$r_0=\sqrt{F/\pi}=0.565\sqrt{F} \quad (4.5.21)$$

式中 F—基坑面积。

如果已确点井点的布置，n 个井点至环绕形状中心的距离分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$。则可用下式较准确的确定化引圆半径。

$$r_0=\sqrt[n]{r_1 r_2 \cdots\cdots r_n} \quad (4.5.22)$$

影响半径 R 可用单孔稳定流抽水试验确定，其大小和含水层厚度、土的渗透系数、以及降深有关，一般经抽水 1~5 天，水位降落曲线稳定后，即可测定。也有一些经验公式可用于估算影响半径。

对潜水井 $R=2S\sqrt{kH}$ （4.5.23）

对承压井 $R=10S\sqrt{k}$ （4.5.24）

式中 k—渗透系数，单位 m/d；

其余符号意义同前。

3．计算单井点出水能力

单井点出水能力取决于水文地质条件、井点过滤器结构、成井工艺和抽水设备能力，一般可按下列方法计算。

（1）轻型井点和喷射井点

就目前的井点结构和抽水设备，在渗透系数较小、地下水补给充足的地区，单井出水能力，对轻型井点，q=1.5~2.5m³/h，对喷射井点，q= 5~20m³/h。

对弱透水层，地下水补给不足，实际出水量达不到上述数值，可用下式估算：

$$q=\alpha ikDH' \quad (4.5.25)$$

式中 q—单井点出水量，m³/d；

α—经验系数，α=1.0~1.5；

i—水力坡度，开始抽水时，i=1，抽水稳定后 i=0.05~0.1；

D—钻孔直径；

H'－井底至地下水位高度。

（2）管井

$$q=\frac{ld}{\alpha'}\times 24000 \qquad (4.5.26)$$

式中 q－单井点出水量，m^3/d；

l－过滤段浸没长度；

d－过滤器外径，（钻孔直径）；

α'－与 k 有关的系数，参见表 4－6。

表 4－6 经验系数 α'

渗透系数 k（m/d）	α'（含水层厚小于 20m）
2~5	130
5~15	100
15~30	70
30~70	50

在井点系统的涌水量和单井出水能力确定以后就可以确定井点数量和间距，进行井点的布置。

4．井点布置

井点的数量为：

$$n'=\frac{Q}{q} \qquad (4.5.27)$$

井管的平均间距

$$b=\frac{2(l+B)}{n'} \qquad (4.5.28)$$

式中 l 和 B 分别为矩形井点系统的长和宽。

一般在基坑四角适当加密布置井点，因此，实际采用井管的数量取 n=1.1n'，各井管的长度可用下式确定，参见图 4.5.16。

$$l_0=l_1+l_2+s+l+l_3 \qquad (4.5.29)$$

式中 l_0－井管长度；

l_1－井管露出地面长度，约 200mm；

l_2－地下水位深度；

s－井点处水位降深；

l－过滤管长度；

l_3－沉砂管长度。

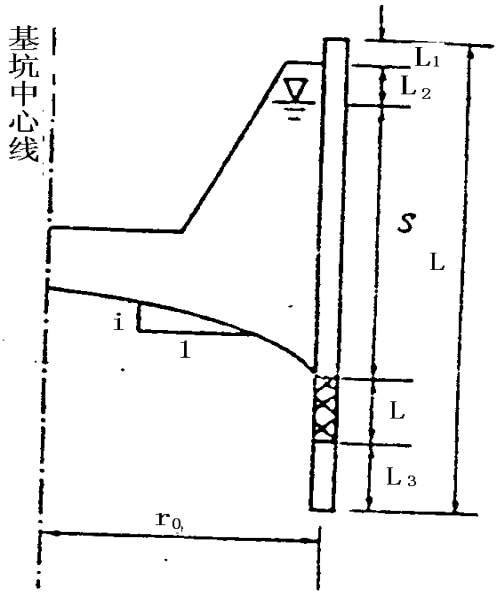


图4.5.16 井点埋设深度

井管应距基坑边缘一定距离，以保证井管的密闭性，对轻型井点距离为 0.5~1.0m，对管井为 1.0~1.5m。井点布置后应根据实际井位按式（4.5.22）计算化引圆半径 r_0。并将其它参数一起代入式（4.5.17）~（4.5.20）检验井点处水位降深是否达到设计要求，例如对潜水完整井，井点处水位

$$h=\sqrt{H^2-\frac{Q}{1.366k}\lg\frac{R+r_0}{r_0}}$$

井点处降深

$$S=H-h$$

基坑中心处水位比井点处水位高 ir_0，参见图 4.5.16，i 为基底水力坡降，可近似取 i=0.1，考虑到抽水水位波动，坑底水位应至少低于坑底 1m。

4.6 渗流的数值计算

随着电子计算机和计算技术的迅速发展，各种数值计算方法，如有限差分法、有限单元法、边界元法及其它算法在渗流计算中得到越来越广泛的应用。有限差分法使用比较早，在工程中应用广泛，当计算机在工程中普遍应用以后，这种算法取得很大进展。有限单元法的基本思想很早就为人们所认识，只有在计算机广泛应用之后才得以迅速普及和发展。1965 年辛克维茨（O. C. Zienkiewiz）和张（Y. K. Chang）提出有限元法适用于所有可按变分形式计算的场问题，这就为将有限元法从结构计算应用于渗流计算提供了理论基础。70 年代有限元又被应用于求解非稳定渗流问题；将比奥渗流固结理论与土的本构模型相结合，求解有效应力—孔压相耦合的应力—变形—时间过程。近年来，人们也用不同数值方法计算非饱和土的渗流问题，取得了很大进展。

4.6.1 渗流的基本微分方程

1. 不可压缩流体

从水流的连续性条件和达西定律可得到式（4.4.1）与（4.4.2），从而建立如下二维的微分方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=0 \qquad (4.6.1)$$

当 k_x、k_z 为常数时，就得到式（4.4.3）；当 $k_x=k_z=k$ 时就得到式（4.4.4）所示的拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial z^2}=0$$

其中 $h=z+u_w/\gamma_w$，为重力势和压力势之和，对于非饱和土 u_w 为负值，表示为基质势。

2. 可压缩流体

在图 4.3.6 所示的高饱和度非饱和土中，气体以封闭的气泡形式存在于孔隙水中，可认为是一种可压缩的流体，则：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial h}{\partial z}\right)=s_s\frac{\partial h}{\partial t} \qquad (4.6.2)$$

其中 s_s 为单位贮水量：

$$s_s=\gamma_w(\alpha+n\beta) \qquad (4.6.3)$$

它表示的是下降单位水头时，由于骨架压缩和水的膨胀所释放出的贮存水量。其中 α 与 β 分别为土与水的压缩系数。

在有蒸发、降雨情况下，式（4.6.2）中还应加入单位水平面积上蒸发（入渗）量 ε；在有自由水面的不稳定流中，自由水面升降引起水量变化，用给水度 μ 表示，μ 表示在自由水面改变单位高度时，从含水层单位截面积上吸收（排出）的水量。对于无自由水面的非稳定渗流，渗流微分方程与稳定渗流的基本微分方程是一致的（式（4.6.1））。

4.6.2 定解条件

渗流问题的数值计算定解条件中最重要的是其边界条件。一般存在着两类边界条件：

1．一类边界条件Γ_1

Γ_1为渗流区的边界。在这种边界条件上，所有水头h是已知的，如承压水情况，图 4.4.6 中基坑内外地面，图 4.4.7 坝上下游表面等，可直接在边界上赋值。另外图 4.4.12 中的自由水面 CF 上，水头等于垂直坐标值，即$h=z$，也属于第一类边界条件。

2．二类边界条件Γ_2

Γ_2是具有给定流入流量的边界。例如在不透水边界上如图 4.4.6 和图 4.4.7UU 段，这时$v_n=0$，或者：

$$k\frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2}=q=0 \qquad (4.6.4)$$

n代表法线方向。另一种第二类边界条件是自由水位线，如图 4.4.12 中 CF 段。对于稳定渗流，由于它也是一条流线，与式（4.6.4）相同（$k\frac{\partial h}{\partial h}\Big|_{\Gamma_2}=0$），所以自由水位线（浸润线）又叫作混和边界条件；对于非稳定渗流情况，

$$q=\mu\frac{\partial h}{\partial t}\cos\theta \qquad (4.6.5)$$

如上所述，μ为给水度，见图 4.6.1，其中$dh=\frac{\partial h}{\partial t}dt$。

3．对于非稳定流，还应有初始条件：

$$h(x,z,t)\big|_{t=0}=h_0(x,z) \qquad (4.6.6)$$

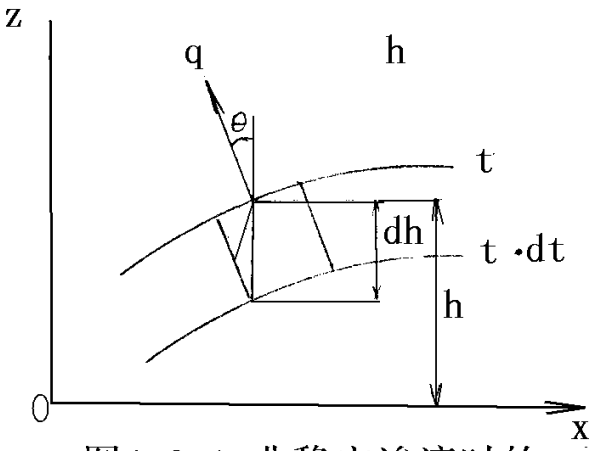


图4.6.1 非稳定渗流时的自由水面边界条件变化

4.6.3 泛函和变分

式（4.6.1）或（4.6.2）所示的微分方程在复杂的边界条件下无法直接积分得到解析解，数值计算的方法是首先建立h的泛函，一定边值问题的解就是这个泛函的极小值。这个求解过程就是变分。

在x方向，在dt时间，单位容重的流体上在单位时间内外力所作的功的增量为：

$$dA_x=dq_x dh_x^*$$

其中 dh_x^* 为在 x 方向上的水头差，dq_x 为 x 方向的流量。（见图 4.6.2）

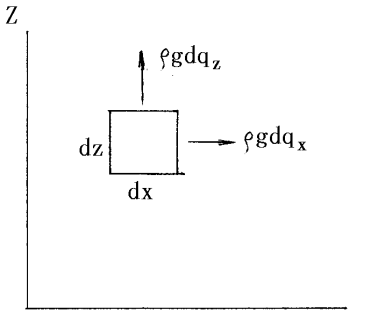


图4.6.2 单位流体作的功

$$dh_x^* = \frac{\partial h^*}{\partial x}dx$$

则
$$dA_x = dq_x \frac{\partial h^*}{\partial x}dx \qquad (4.6.7)$$

由于 $q_x = k_x \frac{\partial h^*}{\partial x}dz$ ， $\frac{\partial h^*}{\partial x} = \frac{q_x}{k_x dt}$，代入式（4.6.7）：

$$dA_x = \frac{dx}{k_x dz} q_x dq_x$$

外力到时间 t_0 所作的总功为：

$$A_x = \frac{dx}{k_x dz}\int_0^{Q_x} q_x dq_x$$

$$A_x = \frac{d_x}{k_x dz}\frac{Q_x^2}{2} \qquad (4.6.8)$$

Q_x 是在某时间 t_0 时，水头为 h 时的总渗流量。

$$Q_x = k_x \frac{\partial h}{\partial x}dz \qquad (4.6.9)$$

则
$$A_x = \frac{k_x}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 dxdz \qquad (4.6.10)$$

单位体积外力所作的功：

$$a_x = \frac{k_x}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 \qquad (4.6.11)$$

由于外力作功等于土体内存储的能量，设渗流的能量密度为 w_x，则

$$w_x = -a_x = \frac{k_x}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2$$

同样
$$w_z = -a_z = \frac{k_z}{2}\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2$$

在某一渗流域 Ω 中，忽略液体的可压缩性，其渗流能的表达式为：

$$I(h) = \iint_\Omega \frac{1}{2}\left[k_x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2\right]dxdz \qquad (4.6.12)$$

对于非稳定渗流，存在自由水面情况，边界上能量为 $\int_{\Gamma_2} qhd\Gamma = \int \mu \frac{\partial h}{\partial t}\cos\theta h d\Gamma$

则上述渗流能为：

$$I(h) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2}\left[k_x \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + k_z \left(\frac{\partial h}{\partial z}\right)^2 \right] dxdz + \int_{\Gamma_2} \mu \frac{\partial h}{\partial t}\cos\theta h d\Gamma \qquad (4.6.13)$$

$I(h)$ 是一个泛函，求其极小值，对应的 $h(x,z)$ 就是式（4.6.1）微分方程的解。

4.6.4 渗流有限元计算

1. 渗流场的离散与插值函数

首先对渗流场作网格划分，将渗流场划分为有限个小区域（单元）。一般来说，单元形状的选择取决于结构或总体求解域的几何特征及分析期望的精度等因素。对于平面问题最常用的是三角形单元，因为三角形单元划分灵活，能较好地适应渗流场复杂的边界形状和非均质土层。以下分析均以三角形单元为例。

单元的划分基本上是任意的，但可以根据需要，在渗流坡降较大或要求详细研究的部分，将单元划分得密些。如图 4.6.3（a）所示为将渗流场离散化为若干三角形单元的情况。

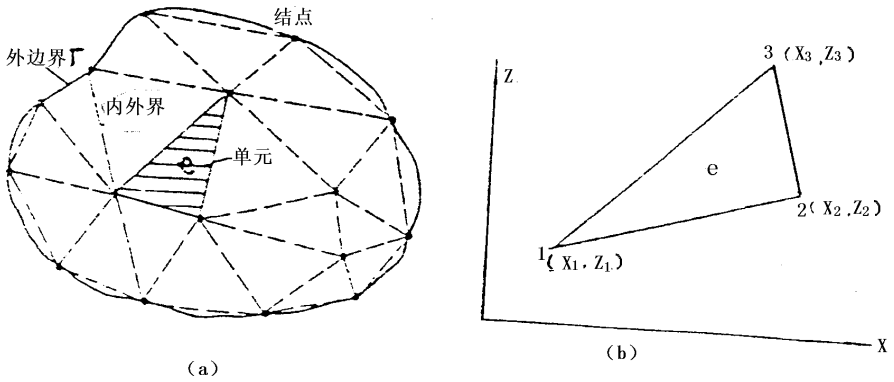


图4.6.3 有限单元网格划分

单元划分完成后，对单元和单元结点编号，对每个划分的单元（如图 4.6.3），其结点按逆时针编号为 1、2、3，相应坐标为 (x_1,z_1)、(x_2,z_2)、(x_3,z_3)。有限元法不是直接求解整个区域的水头函数，而是采用离散化的办法，把所求水头函数 h（整个区域连续可导）近似为单元内连续可导、整个区域连续的分区水头函数，从而求出整体水头函数的近似分布。对各单元的近似水头函数一般用多项式插值函数构成，最常用的是线性多项式。

假设单元 e 的水头函数值在 1、2、3 结点上的值分别为 h_1、h_2、h_3，在单元内部的值可用线性插值求得：

$$h(x,z) = a_1 + a_2 x + a_3 z$$

式中 a_1, a_2, a_3 为系数，显然在 e 单元上的三个结点上有：

$$\begin{cases} h_1 = a_1 + a_2 x_1 + a_3 z_1 \\ h_2 = a_1 + a_2 x_2 + a_3 z_2 \\ h_3 = a_1 + a_2 x_3 + a_3 z_3 \end{cases} \qquad (4.6.14)$$

为方便计引入下列符号：

$$\begin{cases} C_{11}=(x_2z_3-x_3z_2)/2A^e & C_{12}=(x_3z_1-x_1z_3)/2A^e & C_{13}=(x_1z_2-x_2z_1)/2A^e \\ C_{21}=(z_2-z_3)/2A^e & C_{22}=(z_3-z_1)/2A^e & C_{23}=(z_1-z_2)/2A^e \\ C_{31}=(x_3-x_2)/2A^e & C_{32}=(x_1-x_3)/2A^e & C_{33}=(x_2-x_1)/2A^e \end{cases}$$

式中 A^e ——三角形单元面积

$$A^e=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & x_1 & z_1\\ 1 & x_2 & z_2\\ 1 & x_3 & z_3\end{vmatrix}$$

解方程组（4.6.14）得各系数为：

$$\begin{cases} a_1=C_{11}h_1+C_{12}h_2+C_{13}h_3=\dfrac{1}{2A^e}\begin{vmatrix}h_1 & x_1 & z_1\\ h_2 & x_2 & z_2\\ h_3 & x_3 & z_3\end{vmatrix} \\ a_2=C_{21}h_1+C_{22}h_2+C_{23}h_3=\dfrac{1}{2A^e}\begin{vmatrix}1 & h_1 & z_1\\ 1 & h_2 & z_2\\ 1 & h_3 & z_3\end{vmatrix} \\ a_3=C_{31}h_1+C_{32}h_2+C_{33}h_3=\dfrac{1}{2A^e}\begin{vmatrix}1 & x_1 & h_1\\ 1 & x_2 & h_2\\ 1 & x_3 & h_3\end{vmatrix} \end{cases}$$

即 $a_i=C_{ij}H_j \quad (i,j=1,2,3)$

因此单元 e 上水头函数表达式为：

$$\begin{aligned} H(x,z)&=[(C_{11}h_1+C_{12}h_2+C_{13}h_3)+(C_{21}h_1+C_{22}h_2+C_{23}h_3)x+(C_{31}h_1+C_{32}h_2+C_{33}h_3)z] \\ &=[(C_{11}+C_{21}x+C_{31}z)h_1+(C_{12}+C_{22}x+C_{32}z)h_2+(C_{13}+C_{23}x+C_{33}z)h_3] \end{aligned}$$

若令单元形函数：

$$\begin{cases} N_1(x,z)=C_{11}+C_{21}x+C_{31}z \\ N_2(x,z)=C_{12}+C_{22}x+C_{32}z \\ N_3(x,z)=C_{13}+C_{23}x+C_{33}z \end{cases}$$

则得到以三角形单元三结点上水头函数值 h_1,h_2,h_3 为基础的线性插值函数矩阵表达式：

$$h=[N_1N_2N_3]\begin{Bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{Bmatrix} \qquad (4.6.15)$$

由（4.6.15）式可进而得到：

$$i_x=\frac{\partial h}{\partial x}=h_1\frac{\partial N_1}{\partial x}+h_2\frac{\partial N_2}{\partial x}+h_3\frac{\partial N_3}{\partial x}=C_{21}h_1+C_{22}h_2+C_{23}h_3 \qquad (4.6.16)$$

同理

$$i_z=\frac{\partial h}{\partial z}=C_{31}h_1+C_{32}h_2+C_{33}h_3 \qquad (4.6.17)$$

若用矩阵表示为

$$\begin{Bmatrix}i_x\\ i_z\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial h}{\partial x}\\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{Bmatrix} \qquad (4.6.18)$$

由流速 $v_x=i_xk,\ v_z=i_zk$ 得：

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} i_x \\ i_z \end{Bmatrix} \tag{4.6.19}$$

从式（4.6.15）可得到：

$$\frac{\partial h}{\partial t} = [N] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e \tag{4.6.20}$$

2. 单元渗流矩阵

根据式（4.6.13）对泛函 $I(h)$ 变分求最小值：

$$\left\{ \frac{\partial I(h)}{\partial h} \right\}^e = [K]^e \{h\}^e + [P]^e \left\{ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right\}^e = 0 \tag{4.6.21}$$

$\bar{h}$ 为在自由水面边界上的水头。

其中 $$[K]^e = \frac{k_x}{4A^e} \begin{bmatrix} c_{21}c_{21} & c_{21}c_{22} & c_{21}c_{23} \\ c_{22}c_{21} & c_{22}c_{22} & c_{22}c_{23} \\ c_{23}c_{21} & c_{23}c_{22} & c_{23}c_{23} \end{bmatrix} + \frac{k_z}{4A^e} \begin{bmatrix} c_{31}c_{31} & c_{31}c_{32} & c_{31}c_{33} \\ c_{32}c_{31} & c_{32}c_{32} & c_{32}c_{33} \\ c_{33}c_{31} & c_{33}c_{32} & c_{33}c_{23} \end{bmatrix} \tag{4.6.22}$$

式（4.6.21）右侧的后一项反映第二类边界条件中自由水面变化。对于可压缩流体，式（4.6.21）中加入一项：

$$\left\{ \frac{\partial I(h)}{\partial h} \right\}^e = [K]^e \{h\}^e + [P]^e \left\{ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right\}^e + [S]^e \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\}^e = 0 \tag{4.6.23}$$

其中 $$[S] = \frac{S_S A^e}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.6.24}$$

其中 S_S（见式（4.6.3））反映水头变化对于流体和土骨架（孔隙）的体积的影响。

3. 整体平衡方程

式（4.2.23）是 e 单元的泛函的微分方程确定极小值，将所有单元泛函的微分叠加，并等于零，即可得到由节点水头组成的方程组，即整体平衡方程：

$$[K]\{h\} + [P]\left\{ \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right\} + [S]\left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} + \{F\} = 0 \tag{4.6.25}$$

$\{F\}$ 为从已知结点得到的常数项，相当于结构有限元中的荷载项。对于不稳定渗流，用差分表示与时间有关的项。

在式（4.6.25）中，矩阵中各项系数为对各单元求和。

$$\left.\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} K_{ij}^e \\ S_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} S_{ij}^e \\ P_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} P_{ij}^e \\ F_{ij} &= \sum_{e=1}^{m} F_{ij}^e \end{aligned}\right\} \tag{4.6.26}$$

这样就可对式（4.6.25）多元联立方程组用不同的数学方法求解，得到各单元结点水头 h_i，然后可用式（4.6.15）求单元域内任一点水头值，从而得到有限元数值分析的解。对于三维渗流计算方法是一样的。

计算对于也可取四边形单元、等参元及多节点单元等。

4.6.5 关于渗流自由水位线（浸润线）的确定

在土坝、堤防以及边坡等的渗流分析中，均存在渗流自由面即浸润线的问题。迄今用有限元法、边界元法及离散元法等数值计算方法求解无压渗流时，最困难最复杂的问题之一便是渗流自由面的确定。由于渗流自由面的位置事先是未知的，必须迭代求解。渗流自由面属于混合边界问题，必须同时满足水头边界条件（第一类边界条件）和流量边界条件（第二类边界条件）。较为准确地确定渗流自由面，对于正确计算渗流场、分析边坡稳定和渗透稳定等问题，具有十分重要的意义。

渗流自由面问题的求解方法主要分为水力学法、流网法、试验法和有限单元法。

1. 水力学法

对一些边界条件比较简单，渗流场为均质的情况下，可以使用水力学法。水力学法主要是对上游和下游坝段及流线作一些假定，将复杂的渗流域简化。一般对上游三角形坝段有平均流线法和矩形替代法，对下游三角形坝段有垂直等势线法、圆弧形等势线法、折线等线法和替代法等，其中，有些内容已在前面流网的绘制中应用。

2. 流网法

在绘制有稳定渗流自由面的坝体的流网时，其步骤如下：

（1）首先按一般水力学方法或经验初步绘出坝体内的自由水面线。

（2）将上下游水面差根据需要分为若干等分，并作水平线和自由水面相交，得一系列交点。

（3）以上游水面线以下的坝坡线为流网的第一条等势线，以下游面以下的坝坡线为流网的最末一根等势线，并根据这两条等势线的变化趋势，在自由水面线和各交点处向下延伸作各条等势线。其起点处应与自由水面线正交。

（4）以自由水面线为第一条流线，以不透水地基为最末一条流线，根据流线的变化趋势，绘制中间流线。它们应满足与各等势线的正交要求，形成一组扭曲的正方形网格。

（5）检查初步绘制的流网图，根据正交条件，逐步调整网格，直至满足上述条件为止。

用流网法进行渗流场的计算，需要具有一定的经验和作图技巧。物别是在有自由面的情况下，调整网格和浸润线会相互影响，具有一定的难度。

3. 试验法

电模拟试验是在水力学试验中应用得比较普遍方法，自从 1918 年巴甫洛夫斯基提出后，水电比拟法得到迅速的发展，现已在渗流、地表水的运动等领域有了较为成功的应用。

电模拟法的基本原理，是渗流场中的达西（Darcy）定律和电学中的欧姆（Ohm）定律具有相似的数学方程式。即

达西定律：$$v=-k\frac{\partial h}{\partial s}$$

欧姆定律：$$i=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial s'}$$

欧姆定律中，i 为电流强度，ρ 为电阻率，$\frac{\partial u}{\partial s'}$ 为电压梯度。

在电模拟试验中，用导电溶液和导电纸模拟渗流场，用加有一定电压的铜条模拟第一类边界条件，用绝缘体模拟不透水面。通过量测域内点的电压来求解电场。

电模拟试验的优点是：可以对复杂的渗流域进行模拟；模型没有比尺效应，可根据设备状况定大小和电压等；试验设备简单，测试比较方便。

电模试验的缺点主要有：因为导电物是均匀的，所以只适用于各向同性的情况；对于渗流场内有不同的材料分区时，导电物的选取和连接比较困难；在有自由面时，因为自由面是未知的，而电模型中没有直接比拟重力的物理量，不能自然形成浸润线，因此必须在自由面加以电压边界条件。在试验中要不断调整自由面和边界电压，具有一定的复杂性，同时，下游溢出点的位置也难以正确地测定；在有水位变动时，情况更为复杂。

4. 有限单元法

有限单元法的基本思路，是将所研究的不规则的计算域离散化为有限多个规则单元，然后在单元内用相对简单的插值函数进行近似模拟。有限单元法的首要条件是将计算域离散，但对于有自由面的无压渗流，由于边界是未知的，计算域也未知。因此，计算结果的可靠性取决于能否正确地确定自由面。

有自由面的渗流计算是渗流计算中一个突出的难题，引起了不少学者的研究，其计算方法主要分为变动网格法和固定网格法。

（1）变动网格法

有限元渗流计算浸润线在最初主要采用变动网格法。首先假定一个浸润线，然后划分网格，在给定的边界条件下计算此假定渗流域；然后根据计算结果调整浸润线，重新划分网格，逐步迭代求解，直至满足在浸润线上 h=z 的条件，即测压管水头等于位置水头。

变动网格法在逐步的迭代中可逼近实际的渗流域，因此可以较固定网格法更为准确地计算渗流，但也存在着一些缺陷：

（a）当自由面附近渗流介质不均一，尤其有水平介质层时网格变动会破坏介质分区，程序处理十分困难；

（b）当渗流域内有结构物时，网格变动常会改变结构的边界条件，计算精度受到影响；

（c）在网格变动过程中，每一次迭代计算网格均要随自由面的变动而变动，总体渗透矩阵需要重新形成，故需大量机时。在计算机发展的早期，这一问题制约了此方法的应用；

（d） 最为重要的是，如渗流分析的主要目的是给出渗透力，以便分析渗流应力场，对其变形和稳定性作出评价。由于应力分析经常要包括渗流自由面以上的区域，而用变动网格法，计算后的网格已经不是初始的划分了，因而不能用同一网格进行耦合作用分析，增加了计算的复杂性和工作量。

（2）固定网格法

针对变动网格法的上述问题，国内外都把重点放在固定网格法的研究上。自从 Neuman 于 1973 年提出不变网格的伽辽金（Galerkin）法以来，已经发展了一系列的计算方法，主要有以下几种：

a．剩余流量法

该法通过计算自由单元内过自由表面的流量来修改各结点的势。具体方法如下：

（ⅰ）对全域剖分网格，根据边界条件求出各结点水头；

（ⅱ）沿结点连线寻找自由面上的点（$\phi = z$），该点可由求得的结点水头内插，得出自由面的近似位置；

（ⅲ）判断自由面法向流速是否满足 $v_n = \partial h / \partial n = 0$，如果成立，则该自由面为最终自由面，否则应按如下调整；

（ⅳ）按下式求剩余结点流量：

$$\{Q_{ri}\} = \iint_{\Omega} [N]^T \{q_{ri}\} d\Omega \qquad (4.6.27)$$

式中，$[N]$ 为单元形函数；$\{q_{ri}\}$ 为流过自由面的剩余流量

$$\{q_{ri}\} = -[K][B]\{h_i\}A \qquad (4.6.28)$$

式中 $[K]$ 为渗透矩阵；$[B]$ 为几何矩阵；A 为单元内自由面的表面积；

（ⅴ）以剩余结点流量为右端项，求解方程 $[K]\{\Delta h_{ri}\} = \{Q_{ri}\}$，其中 $[K]$ 为总体刚度矩阵；

（ⅵ）$i+1$ 步的水头值为 $\{h_{i+1}\} = \{h_i\} + \{\Delta h_{ri}\}$

（ⅶ）重复（ⅱ）~（ⅵ），直至（ⅲ）满足为止。

剩余流量法在全域划分网格，刚度矩阵不会随着自由面的变化而变化，可以解决耦合的问题；但剩余流量法以第一次计算的结果为基础，计算精度比较差；同时，本方法要计算单元内自由面的面积、法向流速分布等，由于自由面与单元相交有许多不同情况，程序判断比较复杂，再按该情况计算单元内自由面面积和法向，工作量比较大。

b．单元传导矩阵调整法

本方法将全域剖分单元，在自由面以上的单元，其渗透系数为 $k = 0$，但为了计算的稳定性，Bathe 建议将自由面以上的单元的渗透系数给定为一个小值：

$$\begin{cases} k = k & h \geq z \\ k = k/1000 & h < z \end{cases}$$

首先，按全域均为实际渗透系数k建立总体刚度矩阵$[K]$

$$[K] = \sum_{e=1}^{n} \iint_{\Omega(e)} [B^{(e)}]^T [k^{(e)}][B^{(e)}] d\Omega^{(e)} \qquad (4.6.29)$$

式中，e为单元号；n为单元总数。

求解方程组，得到各结点的水头值，将结点水头小于位置水头的单元的渗透系数取为原渗透系数的 1 / 1000，重新计算单元的刚度矩阵形总体刚度矩阵，求解结点水头。

在实际操作中，可根据经验，将必然处于自由水面线以下和以上的单元的渗透系数定好，以节约计算费用。

单元传导矩阵法实际是将跨越自由面的单元按复合材料来处理。

复合材料单元的渗透系数在复合面突变，单元渗透矩阵不能代表这一特性，因此，计算受到影响，同时，与剩余流量法一样，在自由面与单元相交时的情况比较复杂，在处理三维的问题尤为困难。

另外，固定网格法还有子单元法、初流量法、虚单元法等，主要就集中在有自由面穿越的单元的处理方法上。固定网格法较好地解决了渗流和应力变形的耦合计算问题，是目前渗流分析的主要方法。

习题四

4.1 粘土颗粒表面带电的原因是什么？如何解释双电层的形成和对结合水特性的影响？

4.2 怎样估算扩散层影响厚度，试从凝聚和分散作用的应用，说明改善土性的可能措施。

4.3 从土的冻胀性机理分析，哪些因素会影响地基土的冻胀量。

4.4 土中水的势能主要有哪几项？图 4-1 所示土层中 2—2 断面处基质吸力为多少？分别以 kPa 和 pF 值为单位，并求出有效应力的分布。（2－2 为毛细水上升高度）

4.5 简述饱和粘性土中渗透性的影响因素。

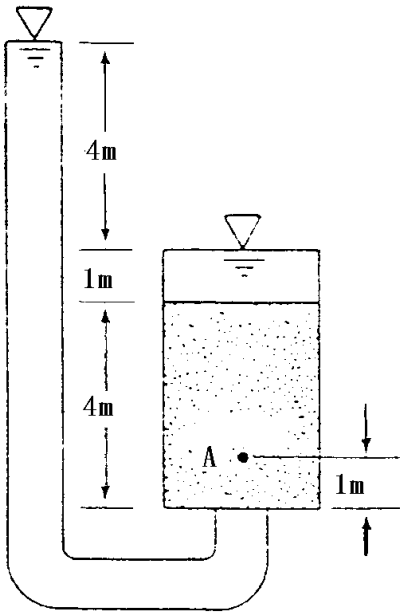
4.6 非饱和土孔隙流体的运动包括空气和水两部分，其中水的流动受哪些因素影响？

4.7 根据粘土的压实曲线，可以在含水量w小于和大于最优含水量w_{op}两种情况下达控制干密度$\rho_a = \lambda_c \rho_{a\max}$，$\lambda_c$为压实系数，试分析这两种情况下土的渗透性的大小。

4.8 根据势流理论的柯西－黎曼方程（见下式）证明平面渗流的等势线和流线正交。

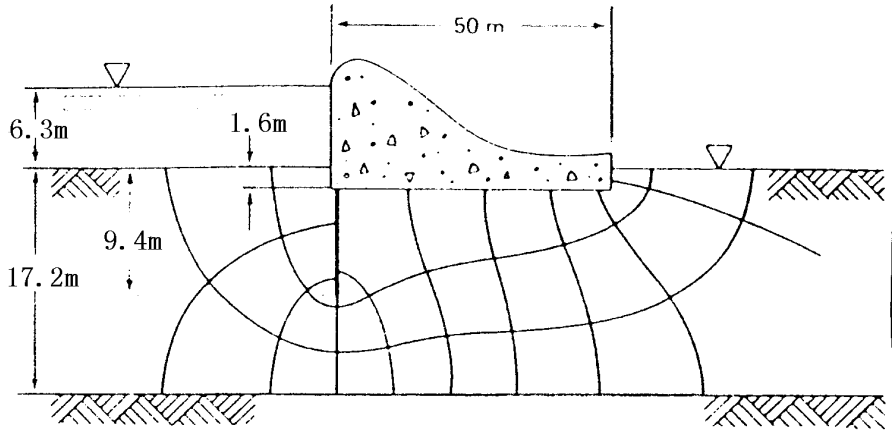
$$\begin{cases} -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \psi}{\sigma z} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}$$

4.9 图中所示容器，水在土样中向上流动，求土层上下两面和 A 点的压力水头、位置水头和总水头，如土的孔隙比为 0.5，渗透系数为 0.1cm/s，求渗流量。



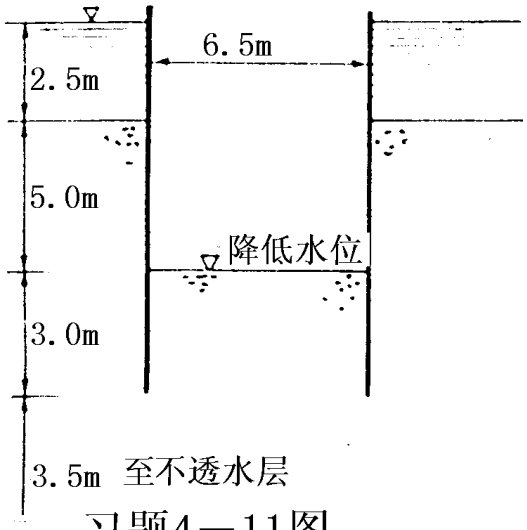
习题4－9图

4.10 根据图中所示流网，已知坝基渗透系数为 3.5×10^{-4}cm/s，求（1）沿坝长每米的渗流量；（2）坝基扬压力的分布。



习题4－10图

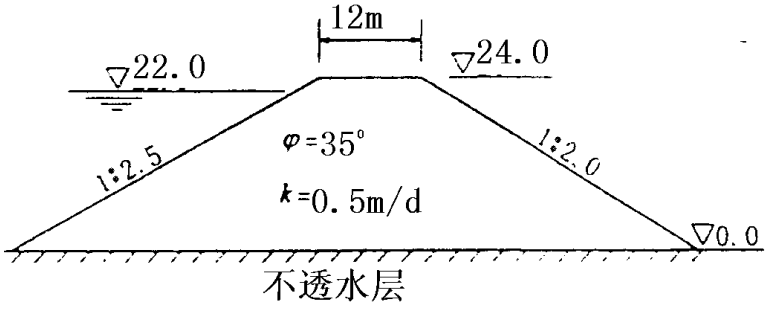
4.11 图中为一双排板桩墙构成的围堰，板桩进入均质砂基中 8m，砂的饱和容重 $\gamma_{sat}=20.4\text{kN/m}^3$ 渗透系数 k=6.5×10-4m/s。（1）画出流网（因对称可画一半）并估计每米长围堰需安排的抽水量；（2）计算基坑底部抗流土的安全系数。



习题4－11图

4.12 在图 4.5.8 中计算板桩后的水压力和主动土压力，$\gamma_{sat}=19.2KN/m^3$，$\varphi=35^0$。

4.13 某土坝断面如图所示，总长 110m 用绘制流网公式计算总渗流量 Q。



习题4－13图

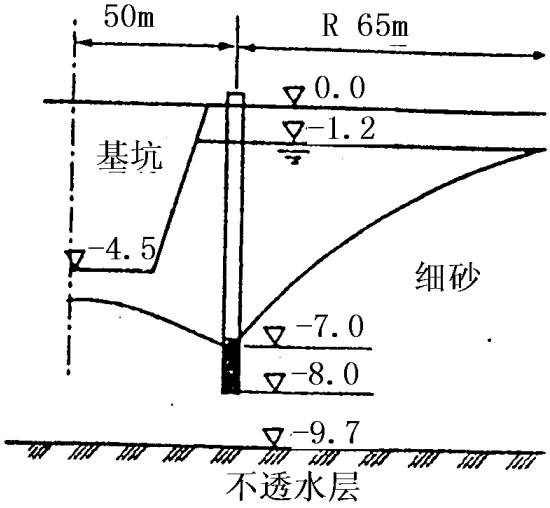
4.14 在图 4.5.10 中，土层I：$\gamma_{sat}=19.3KN/m^3$，$\varphi=37^0$；土层II：$\gamma_{sat}=18.7KN/m^3$，$\varphi=28^0$，$c=15KPa$。求板桩后主动土压力和板桩前被动土压力及两侧的水压力。

4.15 在图 4.5.9 中Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ层土$\gamma_{sat}=19.0KN/m^3$，$\varphi=30^0$，$c=5KPa$。分别求出图（a）和图（b）中基坑底面以上的主动土压力及水压力。

4.16 对于图 4.5.11，用$i=H/(H+2d)$近似计算桩后主动土压力及桩前被动土压力。（$\gamma_{sat}=20KN/m^3$，$\varphi=30^0$，$c=0$），用流网及库伦图解法求板桩后主动土压力。

4.17 图 4.5.6（b）、（c）中如果$\varphi=35^0$，$\gamma'=\gamma_w$，问$F_s=1.0$时最小稳定坡度为多少。对于图（d）、（e），如果$i=0.5$，$F_s=1.0$时最小稳定坡度为多少。

4.18 某降水工程的降水面积为 50×50m²，拟采用轻型井点，井管底高程为▽－8.0m，过滤管长 1.0m，钻孔直径 400mm，地基情况如图所示，细砂层的渗透系数 k=1.14m/d，问需设计多少根井点才能满足设计要求？



习题4－18图

主要参考文献

1．黄文熙主编，土的工程性质，1983，水利电力出版社。
2．陈仲颐、叶书麟，基础工程学，1990，中国建筑工业出版社。
3．吴天行，土力学（第二版），冯国栋等译，1982，成都科技大学。
4．钱家欢、殷宗泽，土工原理与计算(第二版)，1996，中国水利水电出版社。
5．陈仲颐、周景星、王洪谨，土力学,1994,清华大学出版社。
6．洪毓康，土质学与土力学（第二版），1999，人民交通出版社。
7．D.G 弗里德隆德、H.拉哈尔丘，非饱和土力学，陈仲颐等译，1997，中国建筑工业出版社。
8．顾慰慈，渗流计算原理及应用，2000，中国建材工业出版社。
9．清华大学水力学教研组编，水力学，1980，人民教育出版社。
10．毛昶熙，电模拟试验与渗流研究，1980，水利出版社。
11．李广信，基坑支护结构上水土压力的分算与合算，岩土工程学报，vol22(3),2000。
12．王钊主编，基础工程原理，1998，武汉水利电力大学出版社。
13．杜延龄、许国安，渗流分析的有限元法和电网络法，1992，水利电力出版社。
14．Braja M.Das，Principles of geotechnical Enginerring(Fourth edition),1995, PWS Publishing company.
15．R.Whitlow, Basic soil mechanics(Third edition)，1995，Long Man.
16．James K.Mitchell,Foundamentals of soil behavior(Second edition),1993, John wiley and sons.
17.Robert D.Holtz, Willian D.kovas , An introduction to geotechnical engineering, 1981,Prentice-Hall Inc.
18．Harr,M.E，Ground water and seepage,1962,Mc Graw-Hill, New York.

第五章．土体的压缩与固结

5.1 概述
5.2 土的压缩及其主要影响因素
5.3 地基沉降的原因和类型
5.3.1 引起地基沉降的可能原因
5.3.2 沉降与变形的类型
5.3.3 沉降计算应考虑的要素
5.4 瞬时沉降和次固结沉降
5.4.1 瞬时沉降
5.4.2 次固结沉降
5.5 地基沉降计算
5.5.1 计算方法综述
5.5.2 单向压缩沉降计算法
5.5.3 考虑三向变形效应的单向压缩沉降计算法
5.5.4 三向变形沉降计算法
5.5.5 弹性理论法
5.5.6 应力路径法
5.5.7 剑桥模型法
5.5.8 曲线拟合法
5.5.9 现场试验法
5.5.10 其它方法简述
5.5.11 对几种沉降计算方法的评述
5.6 坝体沉降计算的一些特点
5.6.1 坝体沉降估算的简化方法
5.6.2 坝体中的应力传递
5.6.3 土料的湿化变形
5.7 研究固结问题所需的基本方程
5.7.1 平衡条件
5.7.2 有效应力原理
5.7.3 应力—应变关系
5.7.4 水流连续条件
5.8 单向固结的普遍方程与太沙基固结理论
5.8.1 单向固结的普遍方程
5.8.2 太沙基单向固结理论
5.9 单向固结的复杂情况
5.9.1 荷载随时间变化
5.9.2 土层厚度随时间变化
5.9.3 地基为成层土
5.9.4 有限应变土层的固结
5.9.5 固结微分方程的差分解法
5.10 二向和三向固结
5.10.1 比奥固结理论
5.10.2 太沙基—伦杜立克（K.Terzaghi-L.Rendulic）理论

5.10.3 比奥理论和准多维固结理论的比较
5.10.4 三向固结和单向固结
5.10.5 三向固结的轴对称问题
5.10.6 多向固结的差分解法
5.11 非饱和土的固结
5.11.1 非饱和土固结的某些特点
5.11.2 弗雷德隆德(D.G..Fredlund)非饱和土单向固结理论
5.12 固结试验
5.12.1 常规固结试验
5.12.2 准先期固结压力
5.12.3 对试验方法的讨论
5.12.4 连续加荷固结（压缩）试验

第五章．土的压缩与固结

5.1 概述

土是矿物颗粒的松散堆积体。当作用在土体中的应力发生变化时，土的体积随之改变。体积减小，称为压缩；反之，则为膨胀。由于土体积压缩，地基在铅直方向的位移称为沉降，同时还伴生水平位移。土体完成压缩变形要经历一段时间过程。对于饱和土，荷载增加时，土体一般是逐渐压缩（应力解除一般引起膨胀），部分水量从土体中排出，土中孔隙水压力相应地转为土粒间的有效应力，直至变形趋于稳定。这一变形的全过程称为固结。土体的压缩依赖于其所受有效应力的变化；而固结则取决于土体排水的快慢，它是时间的函数。

土的压缩与固结的研究，历史上经历了漫长岁月，直到 1923 年，太沙基提出了土力学中最重要的理论—有效应力原理，才建立起量化的分析计算方法。紧接着他总结了前人关于土的性状的研究成果，结合他创建的单向固结理论，于 1925 年发表了他的题为《土力学和地基基础》（Erdbaumechanik auf bodenphysikalscher Grundlage）的著作。为此，人们把该书的出版看成是土力学学科的诞生.

固结与压缩对土的工程性状有重要影响，与土工建筑物和地基的渗流、稳定和沉降等问题有密切联系。例如，土体由于压缩，渗透性减小；伴随着固结过程，土体内的粒间应力不断改变，使土的强度相应变化；土体的压缩导致建筑物地基下沉，直接影响上层结构的使用条件和安全。

土的固结和压缩的规律相当复杂。它不仅取决于土的类别和性状，也随其边界条件、排水条件和受荷方式等因素而异。粘性土与无粘性土的变形机理不同；二相土和三相土的固结过程迥然有别，后者由于土中含气，变形指标不易准确测定，状态方程的建立与求解都比较复杂。天然土体一般都是各向异性、非均质或成层的，如何合理地考虑它们对变形的影响，尚待进一步研究。就地基而言，建筑物施加的通常是局部荷重，在固结过程中，除上下方向的排水压缩外，同时有不同程度的侧向排水与膨胀，这一类二向与三向固结问题，迄今还没有获得普遍的解析解。考虑到荷重随时间而改变的情况，更使固结微分方程的数学处理更加复杂化了。

太沙基的饱和土体固结理论是建立在许多简化假设的基础上的：土骨架是线弹性变形材料；土孔隙中所含不可压缩流体按达西定律沿单方向流动引起单向压缩变形，等等。故这一理论常称为单向固结理论。后来，经太沙基与伦杜立克（Rendulic）发展，得到三向固结方程，可以考虑三向排水时的单向压缩，其中假设了固结过程中总应力（正应力之和）为常量。比奥（Biot）进一步研究了三向变形材料与孔隙压力的相互作用，导出比较完善的三向固结方程。但是，由于比奥理论将变形与渗流结合起来考虑，大大增加了固结方程的求解的难度，至今仅得到个别情况的解析解。五十多年来，固结理论的发展，主要围绕着假设不同材料的模式，得到不同的物理方程：（1）土骨架—假

设为弹性的（各相同性与各相异性的），塑性的或粘弹性的（线性与非线性以及它们的各种组合）；(2)土中流体—假设为不可压缩的，线性粘滞体的或可压缩的；（3）土骨架与流体间的相互作用—有人提出以混合体力学（Mechanics of mixture）为基础，利用连续原理、平衡方程与能量守恒定律，建立混合体特性方程，选用适当边界条件，以获得固结理论解。

虽然二向、三向理论在许多实际情况中比单向理论更为合理，但是，在指标测定与求解方面比较复杂。因此，单向固结理论至今在某些条件下与近似计算中仍被广泛应用。多年来，单向固结理论也获得了较大进展，研究方向侧重于对太沙基基本假设的修正。例如，考虑土的有关性质指标在固结过程中的变化，压缩土层的厚度随时间改变，非均质土的固结，固结荷重为时间的函数以及有限应变时的固结等。这些修正，使得计算模型能更准确地反映土的特性、土层分布和土的加荷过程。

对于土的压缩量（沉降）的计算，随着对土的应力应变关系理解的深化，也从原先只考虑单向压缩变形，发展到计及侧向变形，后来，更将土的应力历史、应力路径等因素纳入计算方案。六十年代电子计算机问世后，计算技术有了划时代的飞跃，极大地推动了岩土力学理论的发展，使得以往无法考虑的许多土的复杂的本构关系，有可能被引入计算。例如，在压缩变形计算中，除土的线性弹性模型外，已经逐渐引用其它各种模型：非线性弹性模型（其中最著名的有邓肯－张模型）、弹塑性模型（如剑桥模型）等。有限单元法在固结计算中的应用，可以在一次分析中，得到土体应力变形发展的全过程。

在固结理论发展的同时，测试技术也有了相应提高。虽然沿用多年的侧限固结仪至今仍被采用，并作了许多改进，研制了各种形式的连续加荷的试验仪器和方法，但是，愈来愈多的研究者强调，应该用三轴仪测定土的变形指标，并建立了相应的计算方法。当前，计算技术的飞跃前进，排除了计算途径上的许多障碍，使计算指标测定的可靠性问题跃居于重要地位。

土的固结与压缩理论发展至今，内容已相当广泛，但许多问题还处于探索阶段，在本章中难以全面介绍。因此，只选择了与生产实际比较接近的部分，向读者引述。主要包括土体的压缩性状、地基的沉降计算方法、土石坝沉降特点、土的单向固结理论及其改进、二向、三向固结理论、非饱和土固结理论简介，最后介绍土的固结（压缩）试验。

5.2 土的压缩及其主要影响因素

5.2.1 土体变形机理分析

天然土体一般由三相组成，即矿物颗粒构成土骨架，土骨架孔隙内充填水和空气。土体受到外力后，土粒和孔隙中的流体均将发生位移。由于土粒的移动速度与水流速度相比，数值很小，故为了分析方便，常忽略不计。因而，常假设土体变形是孔隙中流体体积变化的结果。假设从变形的饱和土体中取出单元土体，由于不考虑土粒位移，故土体中的土粒重量 Ws 显然为常数。土体的变形性质可以从研究其含水重 W 的变化率（或称储水率）$\frac{\partial W}{\partial t}$ 加以探讨。

根据土的三相组成的相关关系可知：

$$W=W_s\cdot\omega\% \tag{5-2-1}$$

而

$$\omega\cdot\gamma_{w_0}\cdot G_s=S_r\cdot e\cdot\gamma_\omega \tag{5-2-2}$$

故

$$\omega=\frac{S_r\gamma_\omega e}{\gamma_{\omega_0}G_s}=\frac{S_r\gamma_\omega e}{\gamma_s} \tag{5-2-2}$$

式中　ω—土的含水率；

W_s—土粒重量；

S_r—土的饱和度；

e—孔隙比；

$\gamma_\omega, \gamma_{w_0}$—分别为水容重及其在 4℃时的容重；

G_s—土粒比重；

γ_s—土粒容重。

故式（5-2-2）可写成：

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\omega\cdot W_s\%)=W_s\frac{\partial}{\partial t}(\frac{S_r\gamma_\omega e}{\gamma_s})$$
$$=W_s[e\gamma_w\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial S_r}{\partial t}+S_r\gamma_\omega\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial e}{\partial t}+S_r e\frac{1}{\gamma_s}\frac{\partial\gamma_\omega}{\partial t}-S_r e\gamma_\omega\frac{1}{\gamma^2_s}\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}] \quad (5-2-3)$$

式（5－2－3）表明，土体中水重的变化率，不外由下列几种原因所引起：1.饱和度变化；2.孔隙比变化；3.水容重变化；4.土粒容重变化。

从式（5-2-3）可以看到，如果忽略水容重γ_ω与土粒容重γ_s的微小变化，则土的孔隙比 e 与饱和度S_r的变化可能有以下四种组合情况：（1）e 与S_r均为常量；（2）S_r为常量,e 变化；（3）e 为常量，S_r变化；（4）e 与S_r均变化。第一种情况显然属于稳定渗流，是与本书第四章有关的。第（2）、（3）、（4）种情况都属于土体中的非稳定流。其中第（2）种如果孔隙比 e 减小，为本章将要研究的固结问题；如果 e 是增大，则为土的膨胀。第（3）种是土体积恒定时的排水（S_r减小）或吸水（S_r增大）。第（4）种情况则为非饱和土的压缩与膨胀问题。

为了较深入地定量分析土中水重变化率，可以进一步用土骨架的应力－应变关系、土粒与水的物性方程等将式（5－2－2）细化，并将常见的一些土性指标代入，即可明显地看出关于土体变形地下列特点：1.土颗粒的压缩量比水的压缩量小的多，可以忽略；2.在饱和土中，水的压缩量与土骨架的相比，数值极小，故土的骨架压缩控制土的压缩；3.砂土和一些粉土的压缩量比粘土的小的多，故对于粘土与砂土相间的地基，粘土层的沉降量是主要的；4.对于非饱和土，饱和度变化对土固结有重要作用，必须加以考虑。

5.2.2 土体压缩的一般规律

土体在压力、温度及周围环境发生变化时将引起压缩，其中压力改变是最常见的原因。膨胀是压缩的逆过程。毛细吸力是一种特殊的荷载。

研究土的压缩常用压缩试验直接测定土的应力－应变关系。由于试验时不允许试样侧向变形，故称为侧限压缩试验，又称 Ko 压缩试验。在需要探讨土的三向变形特性时，一般要进行三轴压缩试验。

1. 压缩曲线

用 Ko 试验测得的土的应力－应变关系称压缩曲线，可将它们绘在算术坐标或半对数坐标图上，分别为图 5-2-1 和图 5-2-2。前者为上凹曲线，常称 e－p 曲线，后者为下凹曲线，称 e－Logp 曲线。e－Logp 曲线常有以下特点：在低压力时曲线平缓，随压力增大而变陡，并成为一条斜直线，如图 5-2-3。此外，曲线陡度随试样扰动程度加大而变平缓。例如在图 5-2-3 中，由于试样在钻孔采取时，至少要受到应力解除引起的轻扰动，即使仅受应力解除影响的原状土样，其压缩曲线也为图中的 Ks 所示。完全不扰动的原位土的曲线则是 K 线。试验如在含水率不变情况下重塑，曲线却变缓为 Kr 线。众多试验表明，对于大多数粘性土，扰动程度不同的试样的上述曲线将会交于 $e=0.42e_o$ 处，其

中 e_o 为土的原位孔隙比。

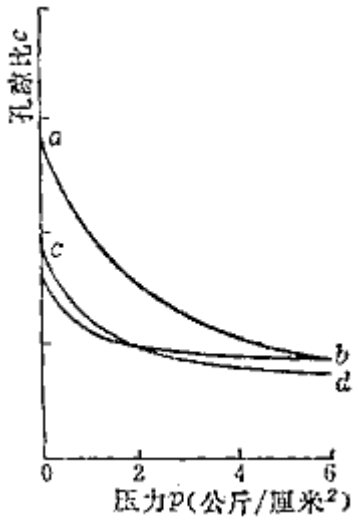


图 5-2-1　土的压缩与回弹（e－P 曲线）

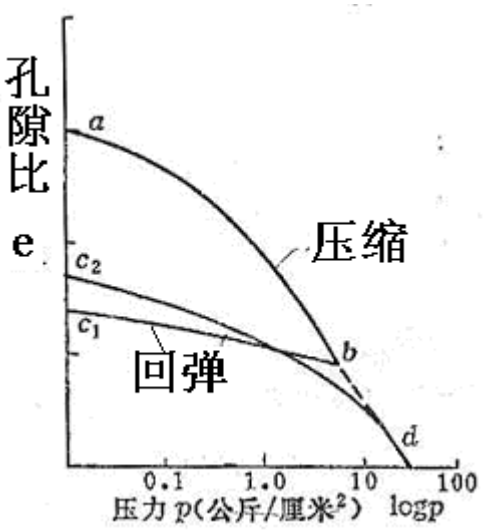


图 5-2-2　土的压缩与回弹（e－Logp 曲线）

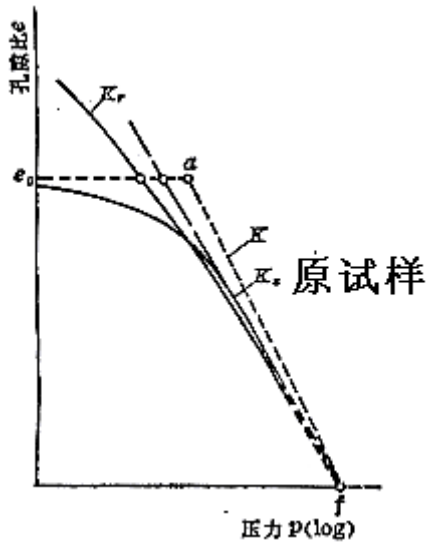


图 5-2-3　试样的压缩曲线

试样受到一定压力后卸荷将发生膨胀（回弹），膨胀时的应力－应变关系称为膨胀曲线，它的 e－Logp 曲线近似为直线，而且比同一荷载范围内的压缩曲线平缓得多。再加荷与卸荷曲线不相吻合，形成迴滞圈，表明土的变形中有不可恢复的塑性分量。

2. 压缩过程曲线

压缩过程曲线也称为固结曲线。图 5-2-4 是某级荷载增量时试样的固结曲线。不论粘土或砂土，压缩都有一个时间过程，即表现时间滞后现象，时间过程的长短主要取决于土体排水和排气能力，砂土比粘土完成压缩的时间短得多。固结曲线的形状一般是中段与末段在半对数坐标图中近似为直线，二直线延长线的交点 t_c 分曲线为两部分，前段为主固结曲线，后段为次压缩曲线。

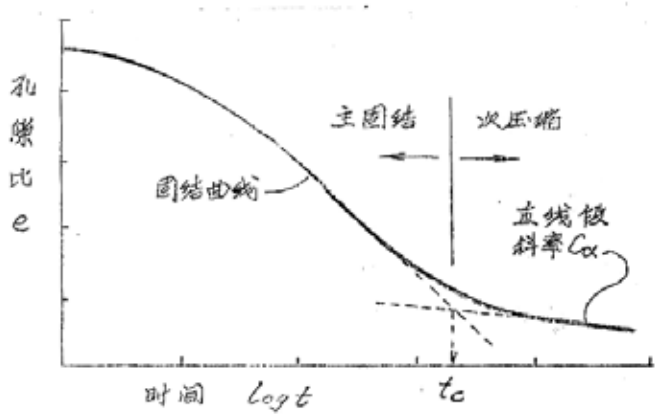


图 5-2-4　次压缩系数C_α曲线

3. 压缩性指标

根据上述压缩曲线和固结曲线可以求得供沉降量和沉降速率计算用的各项指标。这些指标在一般土力学教材中已有介绍，现简要列于表 5-2-1。并补充以下说明：

表 5-2-1　　侧限压缩试验中土的压缩性指标表

指标	公式	参考图	物理意义
压缩系数 a_v	$a_v=\frac{e_1-e_2}{p_1-p_2}=-\frac{\Delta e}{\Delta p}$	图 5-2-1	单位有效压力变化时孔隙比的变化
体积压缩系数 m_v	$m_v=\frac{\Delta n}{\Delta p}=\frac{a_v}{1+e_1}$		单位有效压力变化时孔隙率的变化
压缩模量 E_s	$E_s=\frac{1}{m_v}=\frac{\Delta p}{\varepsilon_z}$		垂直压力增量与垂直应变之比
压缩指数 C_c (再压缩指数 C_r)	$C_c=\frac{e_1-e_2}{\lg(\frac{p_2}{p_1})}=\frac{\Delta e}{\Delta(\lg p)}$	图 5-2-3	初始加载时 e－lgP 曲线的直线段的斜率（C_r为膨胀时 e－lgP 曲线的斜率）
固结系数 C_v	$C_{v\alpha}=\frac{k}{m_v\gamma_w}$		反映土固结快慢的指标，由 e－lgt 曲线求得
次压缩系数 C_α	$C_\alpha=\frac{\Delta e}{\lg(\frac{t}{t_c})}$	图 5-2-4	e－lgt 曲线次压缩段直线的斜率。其中 t,t_c 分别为同一级荷载增量后经历的时间和主固结完成时间

先期固结压力 p_c			土体在历史上经受过的最大垂直有效压力。

(1) 压缩指数 C_c 与压缩系数 a_v 间有下列关系：

或
$$\left.\begin{aligned} C_c &= \Delta p \cdot Lg\frac{p_1}{p_2}\cdot a_v \\ a_v &= \frac{1}{\Delta p} Lg\frac{p_1}{p_2}\cdot C \end{aligned}\right\} \qquad (5\text{-}2\text{-}3)$$

（2）变形模量 E 一般是指无侧限条件下或在某一固定围压下加载时土的应力与应变的比值。它与侧限时的压缩模量 Es 间的理论关系可借广义虎克定律导得：

$$E=\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}E_s \qquad (5\text{-}2\text{-}4)$$

式中 ν —排水条件下的泊松比

5.3 影响土压缩性的主要因素

和其它材料的变形特性类似，土的压缩（膨胀）性首先取决于土的组成和结构状态；其次还受到外界环境影响。而在计算地基沉降时，要考虑土体所受荷载及其所处边界条件等因素。

1．土体本身性状

（1） 土粒粒度、成分和土体结构

天然土的土粒尺寸极为分散，从粗粒的砾到微粒的粘粒与胶粒，粒径粗细在很大程度上也反映了土粒的矿物成分。例如，天然土中的石英、长石颗粒通常较粗，而粘土矿物的蒙脱石、伊利石和高岭石的土粒总是较细。粗粒形状多呈多面体或接近球形，而细颗粒如粘粒则多为鳞片状，其比表面积大，故有较高表面活性。

当土体经受力时，土粒可能产生滑动、滚动、挠曲或被压碎。

粗粒土基本上是单粒结构。在压力作用下，土粒发生滑动与滚动，位移到比较密实、更稳定的位置。土的级配越好，密度愈高，压缩量愈小。如果压力较大，其压缩有可能是部分土粒被压碎。压碎程度随压力和粒径增大以及颗粒带棱角而加剧。粗粒土的压缩一般比细粒土的要小。但是，在高压时，也能达到相当的量级。

细粒土土粒大多呈扁平鳞片状，其典型结构有两种：絮凝结构与分散结构，见图 2-8-10，天然沉积物是这两种结构的组合。

粘土的压缩来源于三种主要因素：颗粒间的水膜被挤薄，土粒间发生相对滑移达到较密实状态，以及扁平薄土粒具有弹性，在压力下产生挠曲变形。

具有分散结构的粘土颗粒，接近于平行排列。这类土的压缩变形，主要由于颗粒间的水被挤出所引起。人工压密土的结构，多属此型。而疏松的、具絮凝结构的沉积粘土的变形，则往往是颗粒相互滑移到新稳定位置和土粒发生弹性挠曲的结果。

当荷重施加到饱和粘性土上时，土开始是固结，孔隙中的自由水受压而被挤出，随之粒间应力增大，使得粒间的部分结合水也逐渐被挤出，这部分水的排出速率远比自由水的为慢。自由水排出时产生的压缩称为主固结压缩；而部分结合水被挤出以及土粒位置重新调整土估价发生蠕变产生的压缩称为次压缩。高塑性粘土与有机土的次压缩量较大，超固结粘土的次压缩量则很小。

对于粘土，当先前施加的压力去除后，由于土粒弹性挠曲的卸荷回复和在电磁力作用下被挤出的部分结合水又被吸入，粘附于土粒表面，故粘土体表现为弹性回弹（膨胀）。无粘性土的弹性回弹很小。

（2） 有机质

土中有机质主要为纤维素和腐殖质，其存在使土体的压缩性与收缩性增大，对强度也有影响。随着有机质的成因、龄期和分解程度的不同，其物理性与化学性变化很大。

有机质对土体压缩性的影响，至今还缺少系统的研究。从我国昆明滇池的泥炭（有机质含量大于 60％）与泥炭质土（有机质含量 10-60％）的试验成果，可以看出它们的典型特征。

天然泥炭与泥炭质土的最突出的物理性状，是含水率很高，孔隙比大，比重低，液、塑限大。表 5-2-2 是几个地区的泥炭的天然含水率。滇池泥炭的渗透系数 $k=10^{-3}\backsim10^{-5}$cm/s,泥炭质土的渗透系数 $k=10^{-4}\backsim10^{-6}$cm/s，且大部分的水平渗透系数为垂直向的 1.5∽3 倍。因此，这类土的压缩性极高，但固结较快。

表 5-2-2 几个地区泥炭与泥炭质土的含水率

地点	含水率ω（％）
昆明滇池	150∽940
美国麻省	250∽800
美国佛罗理达	480∽900
倍爱尔兰	400∽800
德国	600∽900
斯里兰卡金河	330∽890

图 5-2-5 是滇池泥炭土试样的固结曲线，其显著特点为：在加荷后很短时间内，即完成大部分压缩；随着荷载加大，压缩量急剧增加；土体的压缩系数 a_v 随荷载范围变化很大，要特别注意按实际荷载范围确定该系数。并注意这类土固结过程中 e、k、C_c 等指标的变化。

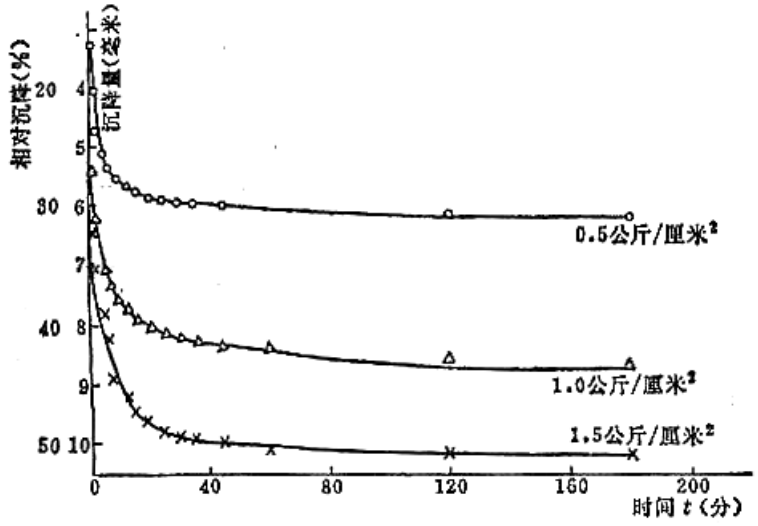


图 5-2-5　滇池泥炭的固结曲线

（3）孔隙水

孔隙水对土的压缩性的影响，表现在水中阳离子对粘土表面性质（包括水膜厚度）的影响。如果土中含有膨胀性粘土矿物，则这种影响更为显著。当孔隙水中的阳离子性质和浓度，使粘结水膜厚度减薄时，土的膨胀性与膨胀压力均将减小；反之亦然。

2．环境因素

（1） 应力历史

按先期固结压力 Pc 与该点土现有土层有效覆盖压力 Po 的比值 Pc/Po,即超固结比 OCR,天然土可区分为三类：

OCR=1,即 Po=Pc,为正常固结土；

OCR>1,即 Po<Pc,为超固结土；

OCR<1,即 Po>Pc,为欠固结土；

土的 OCR 愈大，土所受超固结作用愈强，在其它条件相同时，其压缩性愈低。

引起超固结作用的有应力与非应力的两种原因。前者可能是：历史上曾有过大片冰川过境；地面上原有厚覆盖层，后由于各种原因覆盖层减薄；地下水位原来较低，后来上升了；地面长期曝露，毛细压力引起土干缩，等等。非应力原因引起的超固结压力称拟似先期固结压力，它们可能是由于土的风化与胶结，孔隙水水质变化（水中离子改变）， 或是土承担恒定长期荷载引起了次压缩等所导致，见 3.4.4 所述。

以图 5-2-6 说明这一应力历史时土的压缩曲线的影响。其中图 a 为正常固结土在地基中的原位压缩曲线，待至 $P_o=P_c$ 时因取样卸荷，土单元回弹，并受一定扰动。用该试样作压缩试验实际为再压缩，当压力达到原先卸荷时的 P_c，曲线又逐步过渡到原位压缩曲线的延长线上。图 b 为超固结土被采样再作室内试验的同样情况。

可用经验的方法，修正试验压缩曲线，得到正常固结土与超固结土地原位压缩曲线 DBC（图 a）及 DEC(图 b)，确定压缩指数 Cc 和再压缩指数 Cr。

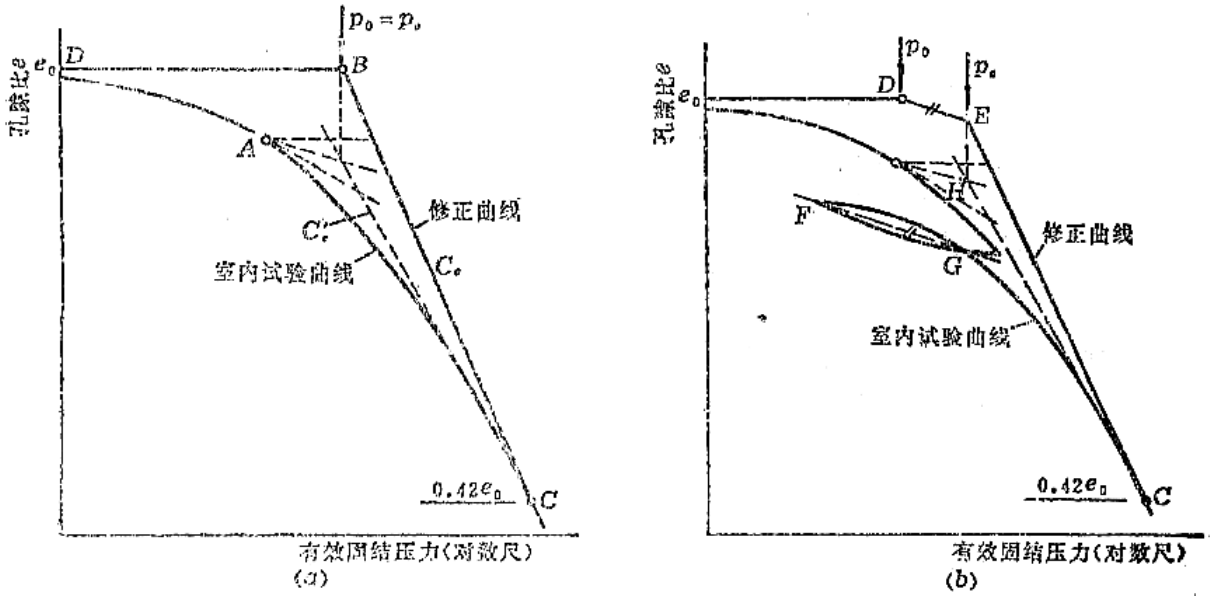


图 5-2-6　压缩曲线的修正

（a）正常固结土；（b）超固结土

（2） 温度

温度对土的压缩特性的影响，随土的成分与应力历史而异。有限的试验成果表明，温度对有机质的影响要比对无机质土的为大，而对超固结土的效应，尤为显著。

有人曾用两类相同的试样进行过单向压缩的比较试验。两类粘土的矿物成分及含量大体相同，但有机质土的含碳量远高于无机土的。结果认为，温度对于无机质土的压缩曲线、压缩过程线和次压缩系数等，均影响很小。

但是，对于有机质土，试验温度不同，反映出不同的效应。曾经进行了两个循环的压缩，每次控制的温度不同，得到的结果如下：

从图 5-2-7 可以看出，第一个循环系在 25℃下进行，第二个循环升温至 50℃，发现升温后压缩

曲线下移；相反，如果第二个循环降温（右侧曲线），则曲线上移。前后两种情况中，压缩指数 Cc 几乎不变。

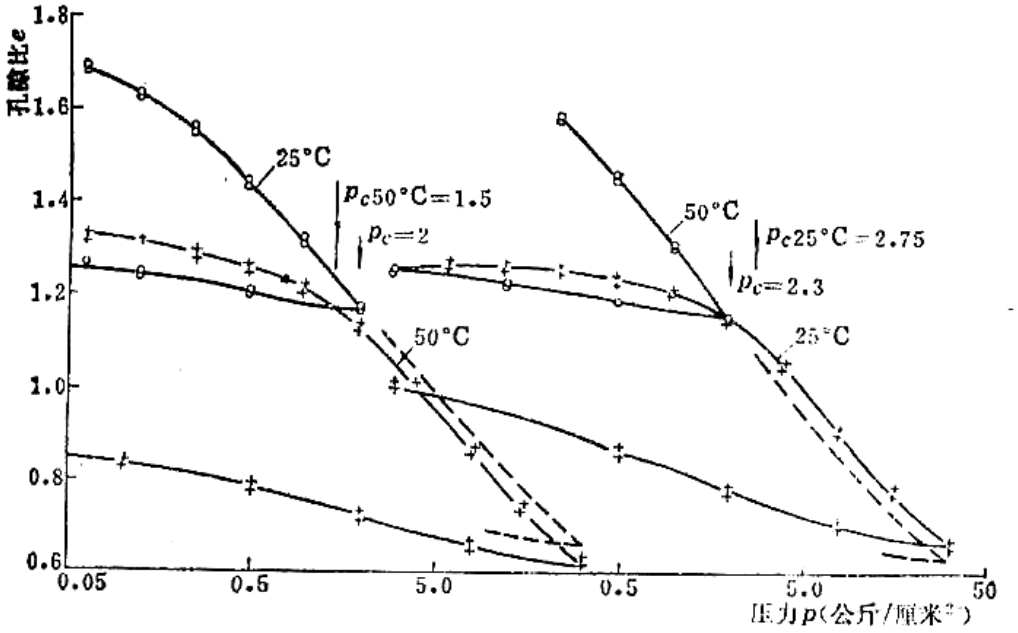


图 5-2-7　　温度对压缩曲线的影响（每点代表两次试验）

由于压缩曲线位移，故在升温时，按压缩曲线确定的先期固结压力下降；反之，则增大。

图 5-2-8 是在不同温度时正常固结有机质粘土的次压缩系数C_α的试验成果，从中看不出温度有明显影响。

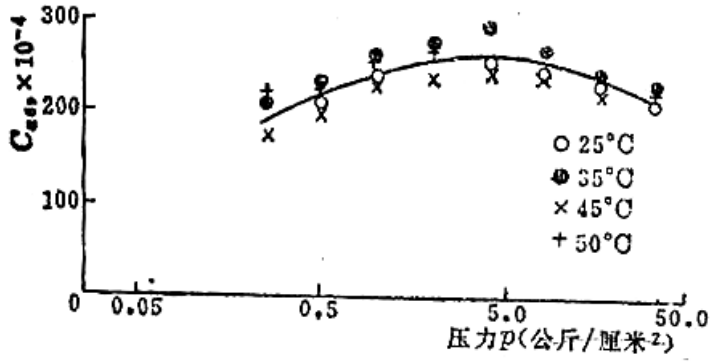


图 5-2-8　温度对次压缩曲线的影响（除 50℃以外，每点代表 4 次试验）

图 5-2-9 表明温度对超固结有机粘土次压缩率与压缩量的影响，在一定荷重增量时，试验温度愈高，次压缩率与压缩量均相应增大。温度对土的压缩性的效应，主要来源于温度变化引起饱和土空隙中水体积变化及相应的有效应力的改变。

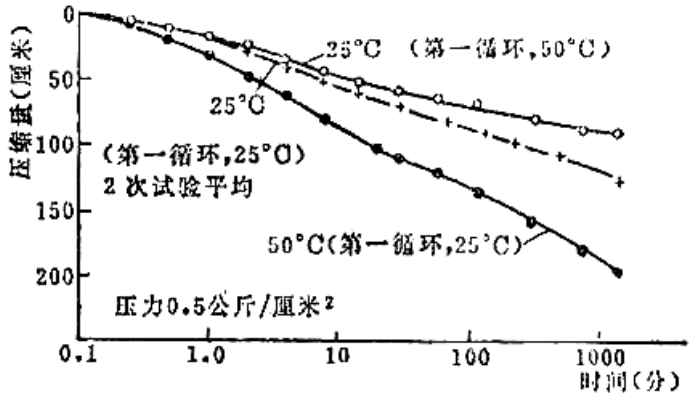


图 5-2-9　超固结有机质粘土的典型固结曲线

5.3 沉降产生原因和类型

地基的沉降计算是土建工程设计中的一项必不可少的内容。因为沉降与变形的结果使建筑物各部位发生位移与相对位移，可能妨碍建筑物的正常工作，或因相对位移衍生的次应力过大导致结构的开裂，甚至破坏。水工建筑物的沉降会促使安全超高减小，引起的裂缝会造成堤坝体的集中渗流，渗流破坏在坝工事故中居于首位。为了保持设计高程，往往在堤坝顶施工时需预留超高，也需要事先估算堤坝顶日后的可能沉降。

5.3.1 引起地基沉降的可能原因

地基的沉降变形可能由多种原因引起，如表 5-3-1 所示。现今常用的计算方法基本上是针对由荷重引起的那部分沉降制定的。非直接由荷重导致的沉降，需要靠慎重选址、地基预处理或其它结构措施来预防或减轻其危害。

表 5-3-1　　建筑物沉降的可能原因

原因	机理	性质
建筑物荷重	土体形变	瞬时完成
	土体固结时孔隙比发生变化	决定于土的应力应变关系，且随时间而发展
环境荷载	土体干缩	取决于土体失水后的性质，不易计算
	地下水位下降	土层有效重量增大，沉降随时间而发展
不直接与荷载有关的其它因素，常涉及环境原因	振动引起土粒重排列	视振动性质与土的密度而异，不规则
	土体浸水饱和湿陷或软化，结构破坏丧失粘聚力	随环境改变的速率而变化，很不规则
	地下洞穴及冲刷	不规则、有可能严重
	化学或生物化学腐蚀	不规则，随时间而减弱
	矿井、地下管道垮塌	可能很严重
	整体剪切、形变—蠕变、滑坡	不规则
	膨胀土遇水膨胀、冻融变形	随土的湿度与温度而变，不规则

5.3.2 沉降与变形的类型

可以从不同角度来将沉降与变形分类。

1．　按产生时间先后区分的沉降

地基受建筑物荷重作用后的沉降过程曲线示意如图 5-3-1。

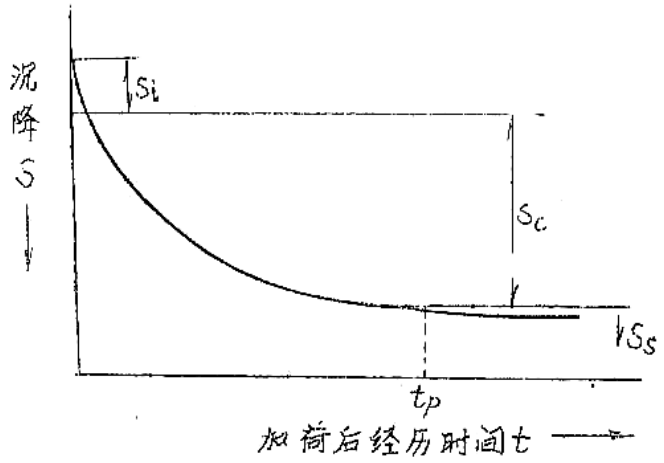


图 5.3.1　沉降分量

为计算方便，按时间先后常人为地将其分为三段，即三种分量：

（1）瞬时沉降 S_i　发生在加荷的瞬时。对于饱和土，即不排水条件下土体形变引起的沉降。

（2）固结沉降 S_c　土体在外荷作用下产生的超静水压力迫使土中水外流，土孔隙减小，形成的地面下沉。其中也包含部分剪切形变。由于孔隙水排出需要时间，这一分量是时间的函数。

（3）次压缩沉降 S_s　它基本上发生在土中超静水压力完全消散以后，是在恒定有效应力下的沉降。

上述三种分量其实是相互搭接的，无法截然分开，只不过某时段以一种分量为主而已。

对于无粘性土例如砂土，瞬时沉降往往是主要的。饱和无机粉土与粘土，通常固结沉降所占比重最大。而对高有机质土，高塑性粘土及泥炭等，次压缩却不容忽视。

一般情况下，如不计次压缩沉降，地基沉降量可按下式计算：

$$S=S_i+S_c \tag{5-3-1}$$

当地基为单向压缩时，对于饱和土，因其在加荷瞬时不可能产生不排水形变，式（5-3-1）中的 $S_i=0$。一般情况下，某时刻地基的沉降量 S_t 可按下式计算：

$$S_t=S_i+U_t \cdot S_c \tag{5-3-2}$$

式中 U_t—t 时刻地基的平均固结度，由固结理论算得。

2．　按变形方式区分的沉降

按变形方式沉降可以分为土体只有单向变形的沉降、二向变形的或三向变形的。当地基压缩土层厚度与基础宽度相比较小时，或压缩层埋藏较深，地基土层近似于受侧限的单向压缩时，对饱和土此时不产生瞬时沉降。但在厚土层上的单独基础，其地基的变形将具明显的三向性质，即土体不仅在 Z 方向（竖直向），而且在 X、Y 方向均有变形，地基沉降若按单向压缩计算，将会得到低估值。代维斯和鲍罗斯（Davis and Poulos）针对饱和土地基上的圆形基础沉降进行过分析，得到以下结果：

（1）当地基土排水时的泊松比 $\mu'>0.3$ 时，按单向压缩计算带来的误差随土层厚度加大迅速增加，如图 5-3-2。

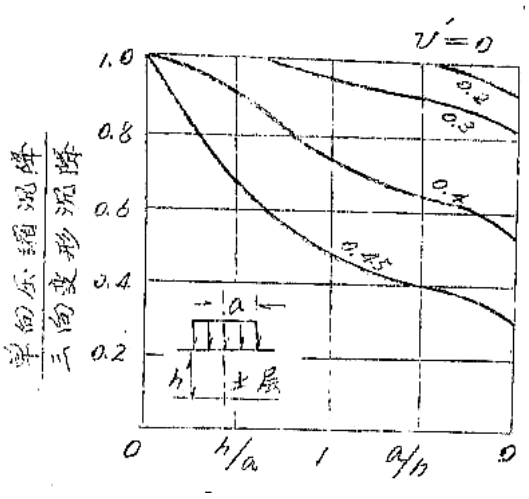


图 5-3-2　按单向压缩计算沉降引起的误差

（2）土层相对厚度与排水时的泊松比 μ ’增大，瞬时沉降在总沉降中的比重增大，如图 5-3-3。

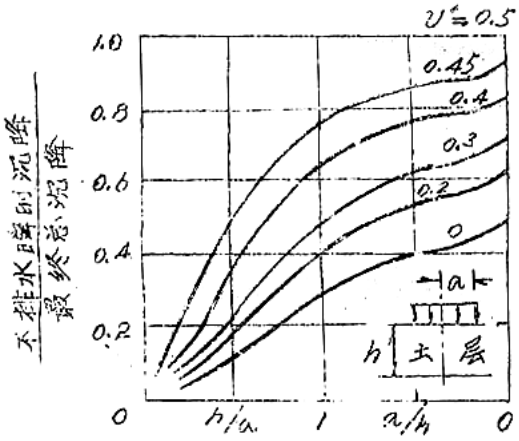


图 5-3-3　瞬时沉降在总沉降中所占比重

当基础荷载的长度比其宽度大得多，例如此比值大于 5，则土的变形具二向性质，即长度方向上的变形相对较小，可忽略不计。

3. 本章研究的沉降

沉降计算主要包括两方面内容：（1）. 最终沉降量。事实上，沉降并无最终值，因为次压缩沉降随时间而增加。常说的最终沉降可认为是固结沉降的最终值与瞬时沉降之和。（2）. 沉降过程。它反映沉降随时间的发展，其表达式为 5-3-2，式中的固结度 U_t 需按后面的固结理论来确定。

5.3.3 沉降计算应考虑的要素

沉降计算结果的可信度依赖于计算中各环节的处理是否恰当：

1. 计算断面　　应根据详细可靠的地基勘探成果和建筑物布置，确定具代表性的供计算用的地基剖面，确定土层的垂直与水平分布、压缩层范围、排水层位置和有关边界条件等。

2. 应力分析　　包括沿深度的有效自重应力、外荷载分布和附加应力计算。

3. 计算参数　　应采用有代表性的试样，通过试验实测所需计算参数。试验设备和方法应与计

算方法相匹配。试验应尽量模拟土的实际压缩条件。

4. 计算模型　　根据对材料性状的不同假设、变形维数、室内或现场变形指标等各种考虑情况，应按计算需要和实际条件合理选用。现有多种计算模型，详见本章第 5.4 和 5.5 节。

可见，沉降计算应考虑多环节因素，不能重此轻彼。不过，计算参数的正确选用往往起主要作用。

5.4 瞬时沉降和次压缩沉降

5.4.1 瞬时沉降

瞬时沉降也称初始沉降，指地基土在不排水条件下受荷载作用产生的地面沉降。可采用弹性理论计算。

1. 基本解答

当地基面有集中荷载 P 作用，半无限弹性地基在地面距荷载作用点距离 r 处的地面沉降 S_i 按下式计算：

$$S_i = \frac{P}{\pi E r}(1-\mu^2) \tag{5.4.1}$$

式中 E，μ —土的弹性模量和泊松比。

2. 均布荷载柔性基础下的瞬时沉降

根据公式（5.4.1），通过积分，可以求得矩形或圆形基础在均布荷载 q 作用下不同部位的地面瞬时沉降 S_i。普遍表达式如下：

$$S_i = \frac{qB}{E}(1-\mu^2)I \tag{5.4.2}$$

式中 B、L－ 矩形基础的宽度和长度；

I—　　影响系数，见表 5-4-1。

表 5-4-1　不同形状基础的影响系数 I

基础形状	计算点位置		
	中心	角，边（注）	平均
方形	1.12	0.56	0.95
矩形，长宽比 L/B =2	1.52	0.76	1.30
矩形，长宽比 L/B =2	2.10	1.05	1.83
圆形	1.00	0.64	0.85

注：矩形为角点，圆形为边界点。

3. 考虑地基有限厚度和基础埋深的瞬时沉降

当压缩厚度为 H、基础埋深为 D 时，基础的平均瞬时沉降按下式计算：

$$S_i = \mu_0\mu_1\frac{qB}{E} \quad （按\ \mu=0.5） \tag{5.4.3}$$

式中　μ_0 —考虑基础埋深 D 的修正系数，见图 5-4-1；

μ_1 －考虑地基压缩层 H 的修正系数，见上图。

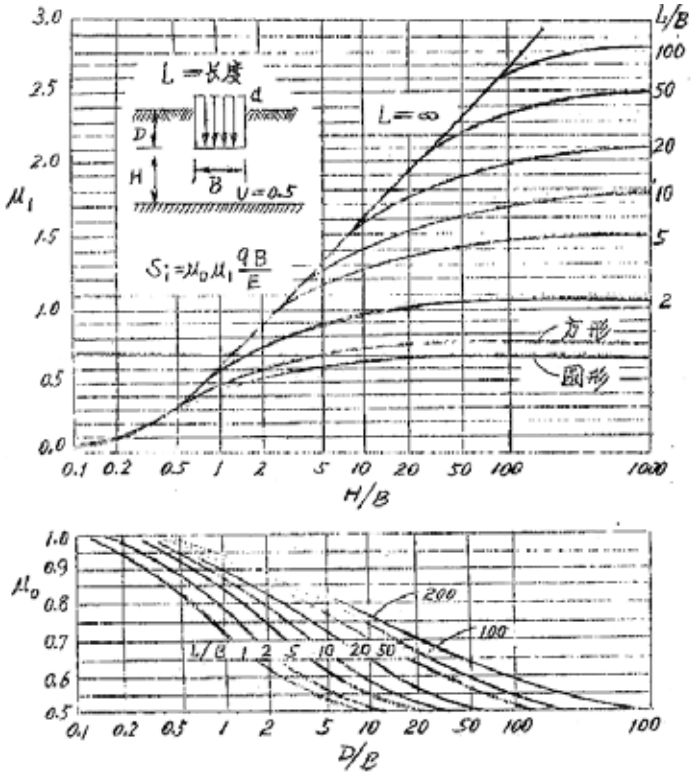


图 5-4-1　瞬时沉降的修正系数μ_0与μ_1

4. 弹性模量 E 的确定

对于饱和粘土地基，建议在以上诸式中的泊松比采用μ＝0.5，弹性模量应为不排水条件下的E_u。并用基础底面以下一倍基础宽深度内的原状土试样通过固结不排水三轴试验测定。

（1）取高质量原状土试样，在三轴仪中施加其在地基中的垂直原位应力的 2/3 或 1/2 的各向等压应力，待其等压固结，或施加垂直原位应力，并在 K₀条件下固结。

（2） 在不排水条件下施加轴压力即预计荷载产生的偏应力（$\sigma_1-\sigma_3$），卸荷至偏应力为零，如此重复五、六次，如图 5-4-2。

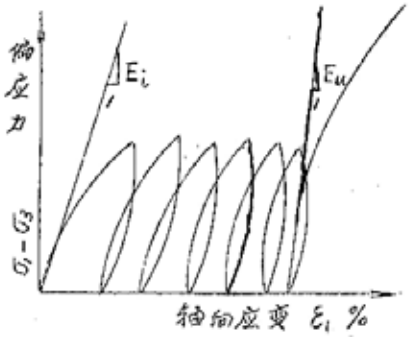


图 5-4-2　弹性模量的确定

（3） 在最后一个循环的加荷线上的$(\sigma_1-\sigma_3)/2$ 处作曲线的切线，其斜率即为E_μ。

5. 瞬时沉降修正

粘性土的不排水强度较低，地基在承受基础荷载的瞬时极易产生局部塑性剪切区，则基于弹性理论的瞬时沉降计算不尽合理。达帕洛里亚（D'Appolonia）等为此通过有限元分析，建议了简化修正方法。令修正前后的瞬时沉降分别为 S_i 和 S_i'，定义二者比值为沉降比 S_R，即：

$$S_R = S_i / S_i' \tag{5-4-4}$$

或

$$S_i' = S_i / S_R \tag{5-4-5}$$

上式中 S_R 总小于 1。该值取决于以下两个参数：土的极限承载力 q_{ult} 和初始剪应力比 f。f 按下式计算：

$$f = \frac{\sigma_{v0}' - \sigma_{ho}'}{2S_u} = \frac{1-K_0}{2S_u/\sigma_{vo}'} \tag{5-4-6}$$

式中　$\sigma_{v0}', \sigma_{ho}'$ －起始垂直和水平有效应力；

S_u－土的不排水抗剪强度；

K_0－土的静止侧压力系数。

三种 H/B 情况时的 S_R 绘于图 5-4-3。该结果按均质地基、强度各向同性与条形基础求得的。实际上，影响 S_R 最敏感的是 f。正常固结粘性土的 f ≈0.6∽0.75。开始出现局部塑性区时的安全系数均为 4∽6。

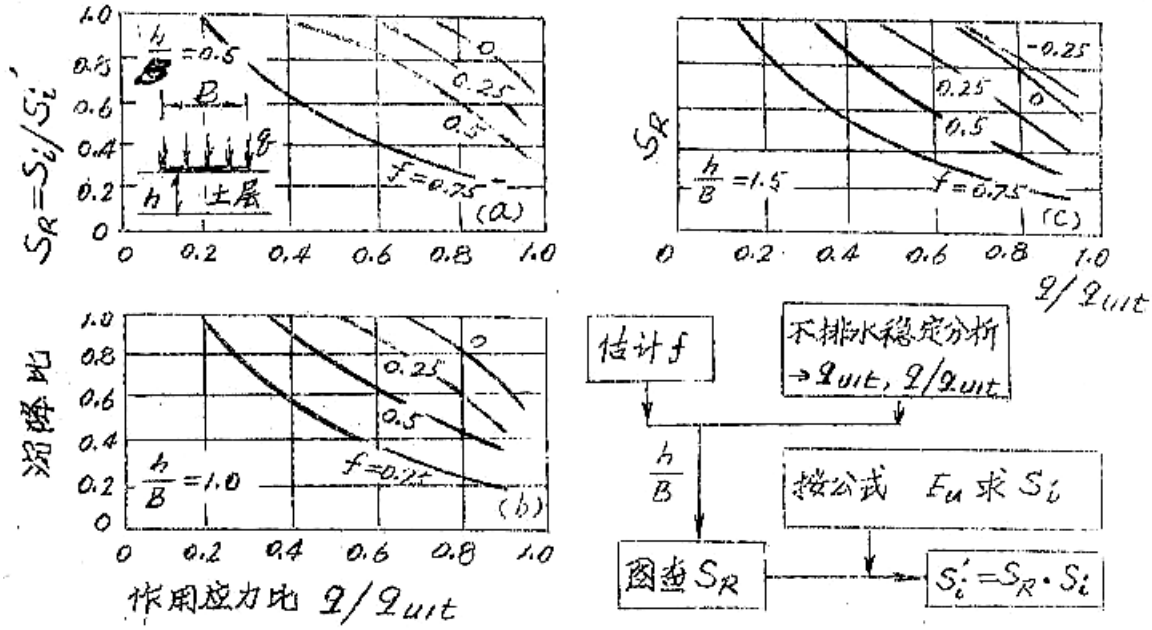


图 5-4-3　均质、各向同性、弹性地基上条形基础的沉降比 S_R

5.4.2 次压缩沉降

次压缩沉降是地基土中超静水压力消散殆尽，土的主固结完成后继续产生的那部分沉降，如图 5-2-4。以孔隙水压力消散为依据的经典太沙基固结理论未考虑次压缩导致的沉降。许多学者研究过这一问题，试图为土的次固结建立数学模型。例如早在 1939 年穆钦（Merchant）就提出过一个流变

方程，假设次压缩速率与残余次压缩量成正比。后来又发展为泰勒（Taylar）－穆钦力学模型。由于这些成果比较复杂，计算参数又非常规试验所能测定，故迄今工程实用上仍按布依斯曼（Buisman）建议的半经验法估算次压缩沉降量。

大量的固结试验成果表明，在一级荷载下的固结曲线如图 5-2-4 所示。它表明，试样完成主固结后的次压缩曲线绘在半对数坐标中基本上为一直线，称该直线斜率为次压缩系数C_α，其意义见表 5-2-1。

$$C_\alpha = \frac{\Delta e}{\lg t - \lg t_p} = \frac{\Delta e}{\lg(t / t_c)}$$

式中　t，t_c－从固结过程开始起算的和主固结完成时的时间。

如果压缩土层的厚度为 H，显然，地基的次压缩沉降可按下式估算：

$$H = \sum H = \frac{C_\alpha}{1+e_0} \lg(\frac{t}{t_c}) H \qquad (5.4.7)$$

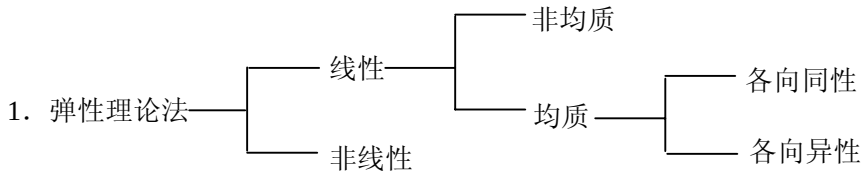
式中e_0－试样的起始孔隙比。

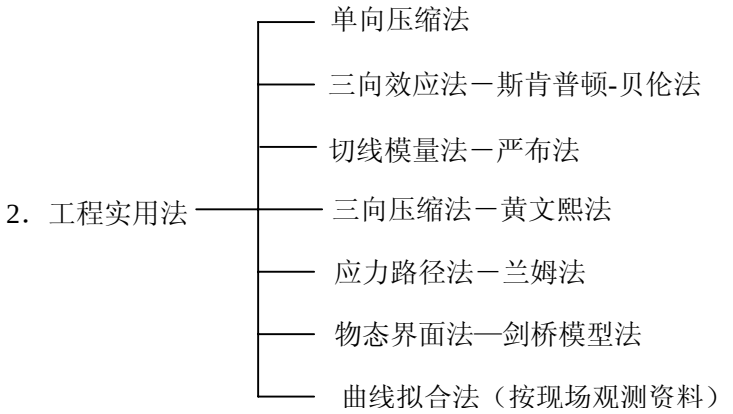
次压缩速率不涉及孔隙水的流动与土层厚度，故现场次压缩率可由室内试验成果估算。并且可以看出，次压缩率和时间有关。

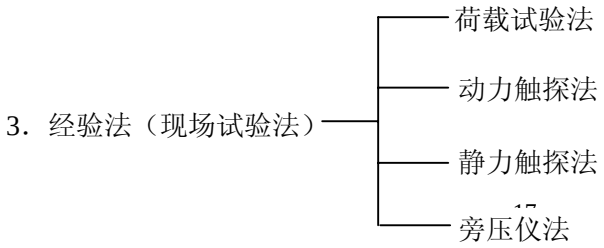
5.5 地基沉降计算

5.5.1 计算方法综述

现行计算方法很多，可归纳为以下几大类：







4．数值计算法
- 有限单元法
- 差 分 法
- 集总参数法（Lumped Parameter Method）

第 1 类弹性理论法是将土体视为弹性体。测定其弹性常数。再用弹性理论计算土体中的应力与土的变形量。虽然在某些符合弹性理论基本假设的理想条件下可以采用，对于一般地基，由于土的压缩特性随处变化，边界条件比较复杂。加之用它不能求得土体变形随时间的变化，这类方法较少应用。

第 2 类的工程实用法是应用最多的方法。尤其是前面的两种。这类方法是按弹性理论计算土体中的应力，借试验提供各项变形参数，结合分层叠加原理，可以方便地考虑到土层的非均质、应力应变关系的非线性以及地下水位变动等实际存在的复杂因素。

拟合法是利用现场已经测到的初期沉降资料，绘制沉降过程曲线，预估后期沉降量的方法。因依据的是实测资料，故计算结果有较高的可信度。

第 3 类经验法大多是采用现场测试结果，借经验相关关系，求得土的压缩性指标，再代入理论公式求解。对于无粘性土（如砂土等）取原状样进行室内试验有困难的情况，它不失为一种可行的途径。

第 4 类方法以有限元法为主。它实际上不能算是独立的一类。因为它只是利用计算机作为运算手段，还是以其它理论（主要是弹性理论）为依据，借有限单元法离散化特点，可计算复杂的几何与边界条件、施工与加荷过程、土的应力应变关系的非线性（包括各种本构关系）——以及应力状态进入塑性阶段等情况。尽管如此，成果的可信性归根结底还取决于输入指标的正确性与所用模型的代表性。这些还是值得进一步研究底课题。

本章着重介绍应用较多或带有一定方向性的几种方法。其它内容可参阅有关文献。

5-5-2 单向压缩沉降计算法

单向压缩沉降是指 K_0 条件下的沉降，即在竖直应力作用下，不考虑土体的侧向变形。因为其计算方法简单，计算指标也容易测定，所以一般建筑物地基土常具三向变形特性，但常常仍按单向压缩计算。为了计及变形的三向效应，可用经验系数予以修正。例如我国《建筑地基基础设计规范》（$GBJ7-89$）即根据基础底面的附加压力 p_0 和沉降计算深度范围那的压缩模量当量值，规定修正系数，$\psi_s=0.2\sim1.4$。

应当注意的是，按本法计算时，地基中的竖直附加应力是由弹性理论确定的，这意味着应力的计算仍是考虑了地基土的三向变形效应。土的应力－应变关系用压缩曲线 $e\sim p$ 曲线或 $e-\log p$ 曲线，利用后一曲线可以考虑土的应力历史和可对压缩曲线进行修正（消除试样受扰动的影响，并可计算地基开挖回弹时沉降的影响。

1. 基本方法

设地基压缩层厚为 H，其中点处 M 点的土层自重压力为 p，由于建筑物荷载 P，该点产生附加压力 Δp，总压力增至 $p_2=p_1+\Delta p$。如图 5-5-1，则地基沉降按下式计算：

$$S = m_v \cdot \Delta p \cdot H \tag{5.5.1}$$

式中 m_v － 压缩层土的体积压缩系数，其压力范围为 p_1 至 p_2，由土的压缩曲线确定。

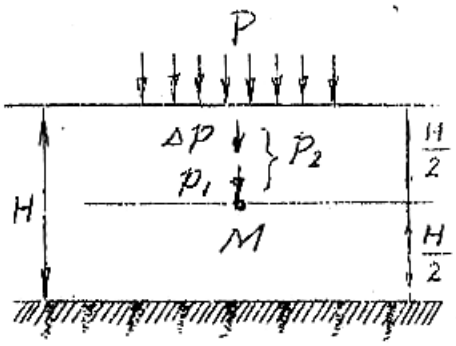


图 5-5-1　沉降计算图

当利用 $e \sim \log p$ 压缩曲线计算地基沉降时，则沉降计算公式如下：

$$S = \left(\frac{C_r}{1+e_o}\lg\frac{p_c}{p_1} + \frac{C_c}{1+e_c}\lg\frac{p_2}{p_c}\right)H \tag{5-5-2}$$

式中 C_r、C_c －分别为压缩曲线再压缩段（ $p < p_c$ ）和压缩段（ $p > p_c$ ）的斜率，即再压缩指数和压缩指标，见图 5-5-2。

p_c －土的固结压力；

e_o －对应于 p_1 时的孔隙比；

e_c －再压缩段与压缩段二直线交点处的孔隙比。因 e_c 与 e_o 相近，为简单计，常取 $e_c = e_o$。

上式系针对 $p_1 < p_c$，而 $p_2 > p_c$ 情况而言。如果 p_1 至 P_2 的整个荷载范围在再压缩段，计算中则仅需采用 C_r；在考虑地基开挖回弹时，也采用上式计算。

2. 分层总和法

当压缩层较厚或土层压缩性沿深度不均时（成层土）。为计及压缩应力沿深度分布的非线性及土性不同，应先将整个土层按不均一性或习惯规定的厚度（一般取 0.4B。其中 B 为基础短边尺寸）划分为若干个土分层（1 至 n）。按以上介绍的方法，取每分层半厚处作为代表点，求各分层沉降，然后相加。即为整个土层的沉降：

$$S = \sum_1^n m_{vi} \cdot \Delta p_i \cdot H_i \tag{5-5-3}$$

$$S = \sum_1^n \left(\frac{C_r}{1+e_o}\lg\frac{p_c}{p_{1i}} + \frac{C_c}{1+e_c}\lg\frac{p_{2i}}{p_c}\right)H_i \tag{5-5-4}$$

对于饱和土，上述沉降即为总沉降，不再考虑瞬时沉降。分层总和法也可用 e-p 曲线计算。式（5-5-4）中的C_r与C_c应由修正压缩曲线确定。修正方法见图 5-2-6。

5-5-3 考虑三向变形效应的单向压缩沉降计算法

斯肯普顿（*Skempton*）和别伦（*Bjerrum*）为了考虑一般地基固有的三向变形特性，将单向压缩公式中的Δp以不排水条件下饱和土上瞬时加荷将产生的孔隙水压力增量Δu代替，认为沉降过程即为Δu的消散过程。按斯肯普顿推导，当饱和土同时受压力增量$\Delta\sigma_1$和$\Delta\sigma_3$作用时，土体内孔隙水压力增量为见式 3.5.8。

$$\Delta u = B\left[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)\right]$$

为此，公式（5-5-3）可以写为：

$$S_c = \int_0^H m_v \cdot \Delta u \cdot \Delta H = \int_0^H m_v \cdot \Delta\sigma_1 [A + (1-A)\frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1}]dz \qquad (5\text{-}5\text{-}5)$$

比较上式与式（5-5-3），可得：

$$S_c = \mu S \qquad (5\text{-}5\text{-}6)$$

式中 S 为用式（5.5.3）计算的沉降，μ为修正系数，可以下式表示：

$$\mu = \frac{\int_0^H m_v \cdot \Delta\sigma_1 [A + (1-A)\frac{\Delta\sigma_3}{\Delta\sigma_1}]dz}{\int_0^H m_v \cdot \Delta\sigma_1 dz} \qquad (5\text{-}5\text{-}7)$$

如果体积压缩系数m_v和孔隙压力系数A为常数量，则有：

$$\mu = A + (1-A)\alpha \qquad (5\text{-}5\text{-}8)$$

而：

$$\alpha = \frac{\int_0^H \Delta\sigma_3 dz}{\int_0^H \Delta\sigma_1 dz} \qquad (5\text{-}5\text{-}9)$$

饱和土不排水条件下可取泊松比$\nu = 0.5$，则α就仅与基础形状、压缩土层厚度H与基础短边尺寸2β之比$\frac{H}{B}$有关，故式（5-5-9）的积分易于求得。

式（5-5-8）中的A值应由三轴不排水试验测定，它随土的应力历史而不同。于是，对于圆形基础或近似于方形的基础，即可按式（5-5-8）和（5-5-9）算得μ值，结果绘于图 5-5-2。严格地说，它只适用于计算基础轴线上地沉降。对于条形基础，它属于平面问题，可设$\Delta\sigma_2 = \frac{1}{2}(\Delta\sigma_1 + \Delta\sigma_3)$，而不是$\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3$，故孔隙压力计算应加修正。斯谷特（$S\cot t$）按此求得条形基础的修正系数$\mu$，并绘在图 5-5-2 中。

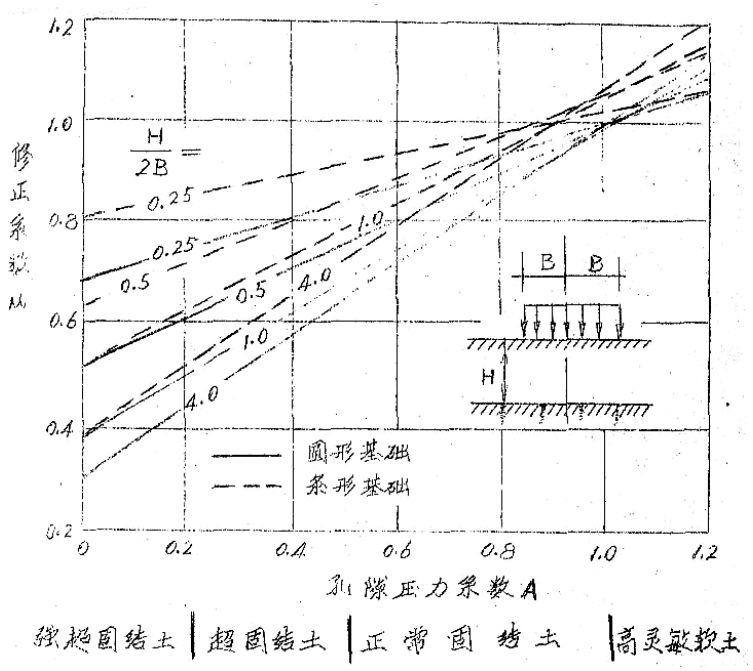


图 5-5-2　沉降修正系数

按本法计算沉降，还应考虑瞬时的沉降 S_i，故最终的沉降应为：

$$S = S_i + S_c \tag{5-5-10}$$

5-5-4 三向变形沉降计算法

本法系由黄文熙所提出。他考虑了实际土体三向受力与三向变形条件，建议用三轴实测土的应力应变关系。因此，本法是一种计及应力水平与应力路径影响的计算方法。

假设地基中一点由于基础荷重引起的附加正应力为 σ_x、σ_y、σ_z，则该点的垂直应变见式（2.4.1）。

令 $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \Theta$，则有：

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[(1+\nu)\sigma_z - \Theta] \tag{5-5-11}$$

按弹性理论，由 Θ 引起的单位体积变化应为：

$$\Delta V = \frac{1-2\nu}{E}\Theta \tag{5-5-12}$$

而土体孔隙比由 e_1 变为 e_2 引起的单位体积变化为：

$$\Delta V = \frac{e_1 - e_2}{1+e_1} \tag{5-5-13}$$

令上述二式 ΔV 相等，故得：

$$E = (1-2\nu)\frac{1+e_1}{e_1 - e_2}\Theta \tag{5-5-14}$$

将上式得 E 值代入（5-5-11），得：

$$\varepsilon_{z3}=\frac{1}{1-2\nu}[(1+\nu)\frac{\sigma_z}{\Theta}-\nu]\frac{e_1-e_2}{1+e_1} \tag{5-5-15}$$

这就是三向应力状态下垂直应变的表达式。

对于平面应变问题，$\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z=(1+\nu)(\sigma_z+\sigma_x)$，若令 $\Theta'=\sigma_x+\sigma_z$ 同样可得：

$$\varepsilon_{z2}=\frac{1}{1-2\nu}[(1+\nu)\frac{\sigma_z}{\Theta'}-\nu]\frac{e_1-e_2}{1+e_1} \tag{5-5-16}$$

而地基沉降为：

$$S=\int_0^H \varepsilon_z dz \tag{5-5-17}$$

式（5-5-16）与（5-5-17）中的 σ_z、Θ或Θ’可以按弹性理论计算。ν 与 e 可在三轴试验中模拟土体在地基中的实际受力状态测定：ν 应视为 $(p_x+p_y+p_z)$ 和 $p_z/(p_x+p_y+p_z)$ 的函数。其中 p 为某点自重应力和附加应力之和。以此类似，可通过试验，找出一定的 $p_z/(p_x+p_y+p_z)$ 下，孔隙比 e 与 $(p_x+p_y+p_z)$ 之间的关系。供计算中查用。

考虑到三向变形条件下，加荷时仍有不排水变形，故仍应再计入瞬时沉降。

5-5-5 弹性理论法

本法视地基为弹性体。地基中的应力与应变均按弹性理论计算。地基沉降由瞬时沉降 S_i 和固结沉降 S_c 两部分组成。采取类似于公式（5-4-5）所示的修正。则沉降计算公式如下：

$$S=S_i^{'}+S_c=\frac{S_i}{S_R}+(S_{T-}S_i) \tag{5-5-18}$$

式中 S_T、S_i －分别为按弹性理论计算得的总沉降量和瞬时沉降量。实际上按弹性理论，式中两种沉降分量的计算公式完全相同。只是 S_c 为固结引起的沉降。故应采用排水弹性参数 $E^{'}$ 与 $\nu^{'}$，而 $S_i^{'}$ 为不排水条件下的沉降，应采用不排水参数 E_u 与 ν_u。

计算 S_T 与 S_i 既可直接应用虎克定律，亦可应用弹性理论位移解。

直接应用虎克定律，便于考虑土层的非均质和成层情况。计算式如下：

$$S_T=\sum_{i=1}^{n}(\Delta\varepsilon_z\cdot\Delta H)_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E^{'}}[\Delta\sigma_z-\nu^{'}(\Delta\sigma_x+\Delta\sigma_y)]_i\cdot\Delta H_i \tag{5-5-19}$$

$$S_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{E_u}[\Delta\sigma_z-\nu_u(\Delta\sigma_x+\Delta\sigma_y)]_i\cdot\Delta H_i \tag{5-5-20}$$

式中，$\Delta\sigma_x$、$\Delta\sigma_y$、$\Delta\sigma_z$ －由外荷载引起的附加应力；

ΔH_i －第 i 分层的厚度。

如果地基土比较均匀，则可采用其平均弹性模量 $\overline{E'}$ 与 $\overline{E_u}$，仍按以上公式计算。但有的学者建议按弹性位移法求解：

$$S_T = \frac{qB}{\overline{E'}} I \qquad (5\text{-}5\text{-}21)$$

和

$$S_i = \frac{qB}{\overline{E_u}} I \qquad (5\text{-}5\text{-}22)$$

式中 q、B 与 I 等的含义同（5-4-2）式。

需要指出，按式（5-5-21）计算的结果常会明显偏大，因为它计算的压缩层为无限厚。

弹性理论法计算成果的可靠性主要决定于弹性参数选用是否正确。

5-5-6 应力路径法

按应力路径估算沉降的方法式兰布（ *Lambe* ）于 1964 年建议的。应力路径是描述土单元体在外力作用下应力变化过程在应力空间的轨迹。

$\bar{\sigma}$、$\bar{\tau}$ 平面上的应力路径已经在 3.5.3 节中介绍，见图 3-5-3

1. 应力路径的一些特点

（1）$\overline{\sigma}$ 与 $\overline{\tau}$ 坐标下的破坏主应力线 K_f 与 K_0 固结线

在 $\overline{\sigma} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ 和 $\overline{\tau} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 坐标下，其破坏线称为破坏主应力线 K_f，其斜率为 $tg\psi = \sin\phi$，在 $\overline{\tau}$ 坐标轴上截距 a=c。另一条直线为侧限应力状态下土体压缩的应力路径，称为 K_0 固结线，其中 K_0 为静止土压力系数。K_0 线的斜率 $tg\beta = \frac{1-K_0}{1+K_0}$。

（2）应力路径上一点对应的大、小主应力

图 5-5-3 中的 ABC 是一条有效应力路径，线上一点 B 往左、右各作 45° 直线，与 p' 轴相交点即得小主应力 σ_3' 与大主应力 σ_1'。

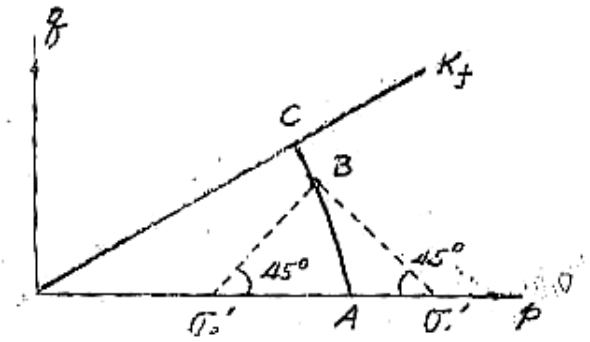


图 5-5-3　应力路径上一点大、小主应力的确定

（3）有效应力路径的相似性

图 5-5-4 是正常固结粘土在不同固结压力下固结后进行不排水剪三轴试验测得的有效应力路径 AA'、BB' 和 CC'，从物态边界面的概念（见 2.6.1）可知，它们在形状上相似。

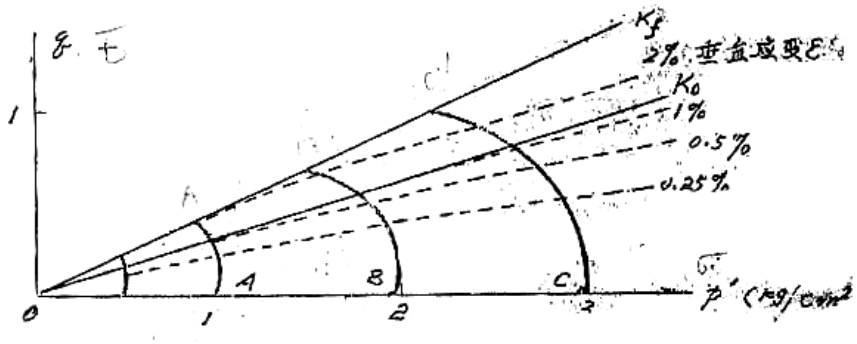


图 5-5-4　不排水试验有效应力路径

（4）等轴应变线

在图 5-5-4 的每一应力路径上如同时测出各点的轴向应变 ε_1，将各路径上 ε_1 相等的各点连接，可以得到相应于不同 ε_1 的许多条等应变线。

（5）不同应力路径时试样的变形

图 5-5-5 中的 A 点是 K_o 固结应力路径上的一点。对应的大主应力 σ_1' 位于 E 点。如在试样上施加附加轴向应力 $\Delta\sigma_1$，完全固结后的轴向应力将为 $\sigma_1'+\Delta\sigma_1$，位于图中的 F 点，但达到完全固结有不同路径，现研究不同路径时试样的变形情况。

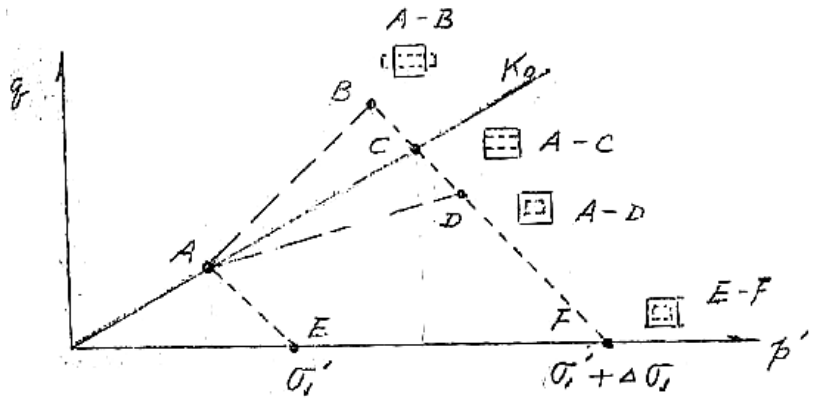


图 5-5-5　不同应力路径时试样的形变

沿 AC：试样受 K_o 压缩，只有垂直压缩，无水平变形。

沿 EF：各向等压，垂直与水平均受压缩，大小相等。

沿 AD：垂直与水平均受压缩，但前者大于后者。

沿 AB：垂直压缩，水平膨胀。

由此可见，虽然试样起始垂直有效压力均为 σ_1'，最终有效压力均为 $\sigma_1'+\Delta\sigma_1'$，但相应于 B、C、D、G 各点的垂直向变形将逐次减小，水平向由膨胀变为压缩。

（6）相同体变不同应力比时的垂直应变

饱和土试样作不排水剪时，其有效应力路径实际上即为等含水率曲线，即一条路径线上体积是相等的，但如图 5-5-6 中的 AE 与 BF 线上体积不等。可见从一条线变化到另一条线，不论沿哪种路径，它们的体变 ε_v 总相等，如图中的 EF、CI、$GH\cdots$，但其轴向应变 ε_1 却不同。为计算沉降，现研究 ε_v 相等时 ε_1 的计算。

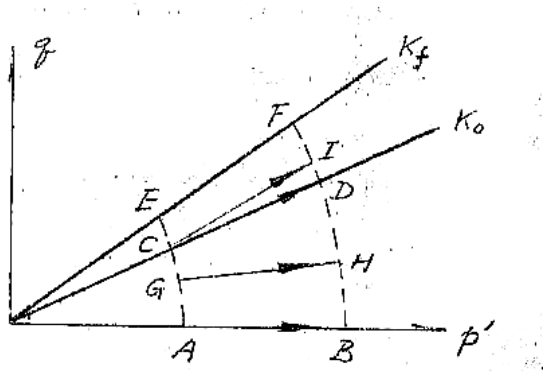


图 5-5-6　　两根有效应力路径间的体积变化

在地基上加荷引起的沉降一般可分两阶段：瞬时不排水加荷，应力路径如图 5-5-7 中的 AI，继而为沿某应力比 $K(K=\dfrac{\Delta\sigma_3'}{\Delta\sigma_1'})$ 的排水固结，如图中的 IB。根据三轴应力条件，IB 路径上的轴向固

结应变 ε_1^c 应为：

$$\varepsilon_1^c = \frac{\Delta\sigma_1^{'}}{E^{'}}(1-2\nu^{'}K) \tag{5-5-23}$$

式中 $\Delta\sigma_1^{'}$、$\Delta\sigma_3^{'}$ －竖向和水平方向有效应力增量，在排水条件下即为总应力增量；

$E^{'}$、$\nu^{'}$ －有效弹性模量和泊松比。

水平向固结应变 ε_3^c 为：

$$\varepsilon_3^c = \frac{\Delta\sigma_1^{'}}{E^{'}}[(1-\nu^{'})K-\nu^{'}] \tag{5-5-24}$$

小应变时，体变可按下式计算：

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1^c + 2\varepsilon_3^c = \frac{\Delta\sigma_1^{'}}{E^{'}}(1-2\nu^{'})(1+2K) \tag{5-5-25}$$

故有

$$\frac{\varepsilon_1^c}{\varepsilon_v} = \frac{1-2\nu^{'}K}{(1+2K)(1-2\nu^{'})} \tag{5-5-26}$$

在无侧向变形条件下压缩时 $\varepsilon_v = \varepsilon_1^c$、$K = K_o$，由式（5-5-26）可得：

$$\nu^{'} = \frac{K_o}{1+K_o} \tag{5-5-27}$$

代入式（5-5-26）则有：

$$\frac{\varepsilon_1^c}{\varepsilon_v} = \frac{1+K_o-2KK_o}{(1+2K)(1-K_o)} \tag{5-5-28}$$

当 ε_v、K 及 K_o 已知，即可按式（5-5-28）计算 ε_1^c。以下用图 5-5-7 说明应力路径为 IB 时 ε_1^c 的计算。IB 的体应变与 K_o 压缩时的 AC 相同。式（5-5-27）中的 $K_o = \sin\varphi^{'}$，其中 $\varphi^{'}$ 为正常固结土的有效内摩擦角；$K = \dfrac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$；以上各值代入式（5-5-28），可求得 IB 路径的轴向应变 ε_1^c。

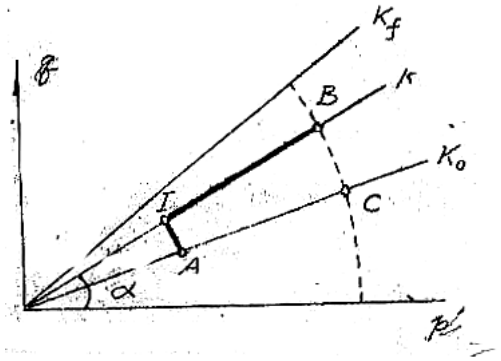


图 5-5-7　垂直应变与体应变关系推导示意图

2. 按应力路径法计算沉降量

计算方法有两种：

（1）室内模拟试验法

用高质量的原状试样作三轴试验。其加荷方式模拟现场土体的有效应力路径（不排水与排水）。直接测得垂直应变分量 ε_{1u} 和 ε_{1d}（u、d 分别为不排水和排水）。按下式计算沉降量：

$$S = S_i + S_c = (\varepsilon_{1u} + \varepsilon_{1d})H \tag{5-5-29}$$

式中 H －压缩土层厚度。

（2）应变等值线法

结合一算例说明。

从地基中采取了原状试样，经室内试验等取得下列资料：正常固结地基土的初始孔隙比 $e_0 = 0.9$，压缩指标 $C_c = 0.25$，$\varphi' = 30^\circ$，压缩层厚 $H = 3m$，取样点土层覆盖压力为 $75kPa$，建筑物引起的附加压力为 $\Delta\sigma_1 = 40kPa, \Delta\sigma_3 = 20kPa$。原状试验在不同等压固结后的三轴不排水试验的有效应力路径和相应应变见图 5-5-8。计算瞬时加荷后地基的瞬时沉降和固结后总沉降。

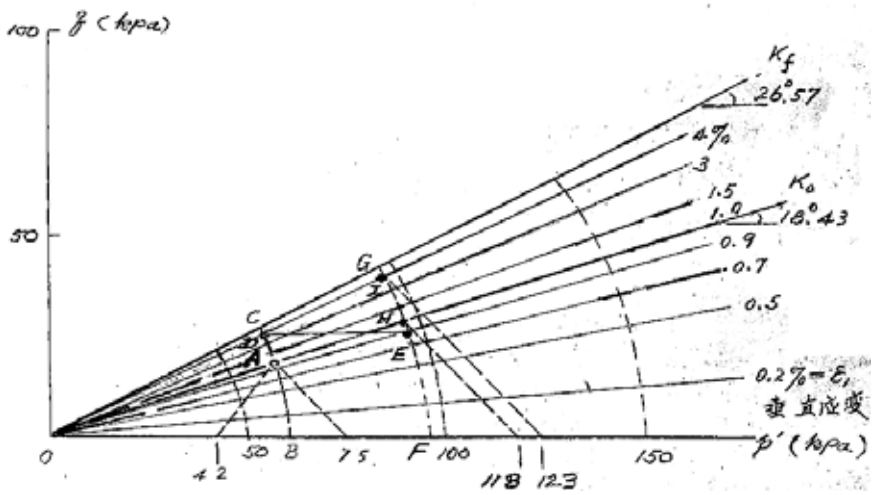


图 5-5-8　用应力路径法计算沉降算例

（ｉ）静止侧压力系数 $K_o = 1 - \sin 30^\circ = 0.5$

K_o 线位置　　$\beta = \tan^{-1}(\frac{1-0.5}{1+0.5}) = 18^\circ 26'$

K_f 线位置　　$\alpha = \tan^{-1}(\sin 30^\circ) = 26^\circ 34'$

（ii）原位应力状态（图中 A 点）

$\sigma_{10}^{'} = 75kPa$

$\sigma_{30}^{'} = K_o\sigma_{10}^{'} = 0.5\times 75 = 37.5KPa$

$\bar{\sigma}^{'} = \frac{1}{2}(\sigma_{10}^{'} + \sigma_{30}^{'}) = 56.25kPa$

$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(\sigma_{10}^{'} - \sigma_{30}^{'}) = 18.75kPa$

在图上确定 A 点后，过 A 点按三轴固结不排水试验测定的有效应力路径的形状绘出有效应力路径 BAC。

（iii）瞬时加荷（不排水）后应力状态

$\sigma_1 = 75 + 40 = 115kPa$

$\sigma_3 = 37.5 + 25 = 62.5kPa$

$\bar{\tau} = \frac{1}{2}(115 - 62.5) = 26.25kPa$

由算得的 $\bar{\tau}$ 可以确定 BAC 上的 D 点。

（iv）固结完成后的应力状态（图中 E 点）

$\sigma_1^{'} = \sigma_1 = 115kPa，\ \sigma_3^{'} = \sigma_3 = 62.5kPa$

$\bar{\sigma}^{'} = \frac{1}{2}(115 + 62.5) = 88.75kPa$

$\bar{\tau} = 26.25kPa$

由上述 $\bar{\sigma}^{'}, \bar{\tau}$ 即可在图中确定 E 点。过 E 点作有效应力路径 FEG。

（v）沉降计算

瞬时沉降对应于 AD 路径的沉降：

$S_i = (\varepsilon_{1D} - \varepsilon_{1A})H = (0.04 - 0.01)\times 3 = 0.09m$

固结沉降 S_c 为沿 DE 路径的沉降，其体变与 K_0 固结沿 AH 的相等。故有“

$\varepsilon_v = \frac{\Delta e}{1+e_0} = \frac{C_c \lg(115/75)}{1+0.9} = 0.0244$

对于各向同性土，孔压消散引起的应变可认为各方向相同，故轴向应变约为上述体变的 1/3，则固结沉降为：

$$S_c = \frac{1}{3} \times 0.0244 \times 3 = 0.0244m$$

总沉降量如下：

$$S = S_i + S_c = 0.09 + 0.0244 = 0.114m$$

5.5.7 剑桥模型法

对剑桥模型在第一章已经作了介绍。利用剑桥模型可直接计算沉降量而不必采用数值计算方法。该方法的思路是：按该模型，应力路径在土的物态边界面之内时，只产生很小的弹性变形；当应力状态触及边界面或跨越边界面时，将发生大的塑性变形。因而正常固结土处于屈服状态；超固结土可视为弹性材料。所谓的先期固结压力 P_C 则为屈服应力。

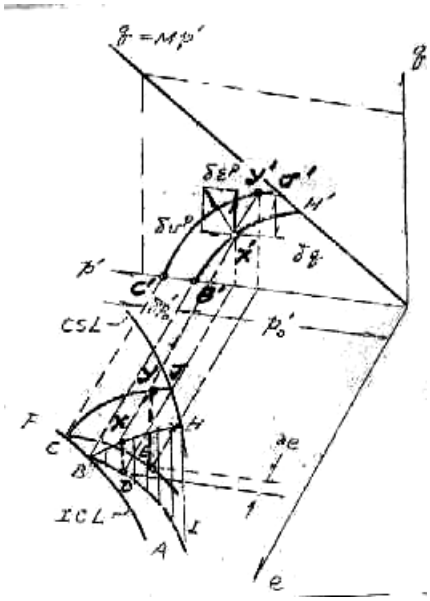


图 5.5.9　　弹性墙与屈服轨迹

1 体积应变与剪切应变增量

在图 5.5.9 中，土单元所处状态的所在状态界面上的 X 点，当其受到应力增量 d p' 和 dq，它将引起屈服，其总体积应变增量 d ε_v 和剪应力增量 d $\bar{\varepsilon}$ 应包含塑性分量 d ε_v^p 和 d $\bar{\varepsilon}^p$，因而其状态必迁移到状态边界面上的另一点 Y。在 p´–q 平面上 Y´ 点将位于一条新的屈服轨迹 B´ Y´ 上， P´ 从 $P_A' = P_0'$ 变到 $P_B' = P_0' + d\,p_0'$ ，因为 X,Y 所在的两个弹性墙是平行的，故从此墙上的任何一点过渡到另一个墙上的任何一点的塑性体应变增量 d ε^p 一定是相等的。

因而，从状态 X 变为 Y 发生的应变增量可以用式 2.6.42 和 2.6.43 计算：

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e}\left[(\lambda-k)\frac{2\eta d\eta}{M^2+\eta^2}+\lambda\frac{dp'}{p'}\right] \qquad (2.6.42)$$

$$(d\bar{\varepsilon}) = \left(\frac{\lambda-k}{1+e}\right)\left[\frac{2\eta}{M^2-\eta^2}\right]\left[\left(\frac{2\eta}{M^2+\eta^2}\right)+\frac{dp'}{p'}\right] \qquad (2.6.43)$$

注意这样计算得到的 $d\varepsilon_v$ 和 $d\bar{\varepsilon}$ 只适用于应力变化使土单元产生屈服的情况。

2 沉降计算

假设土单元所受应力路径如图 5.5.10 中的 ABCD，其中 AB 是屈服面以下弹性区域的不排水有效应力路径，假设其方向垂直，故 $d\varepsilon_v^e = 0$。BC 是屈服面以上的不排水有效应力路径，其 $d\varepsilon_v = 0$。最后，CD 是排水固结阶段。

BC 段产生的瞬时沉降可按下式计算：

$$s_i = \sum_{i=1}^{n}\left(d\bar{\varepsilon}^{\,p}\cdot\Delta H\right)_i \qquad (5.5.30)$$

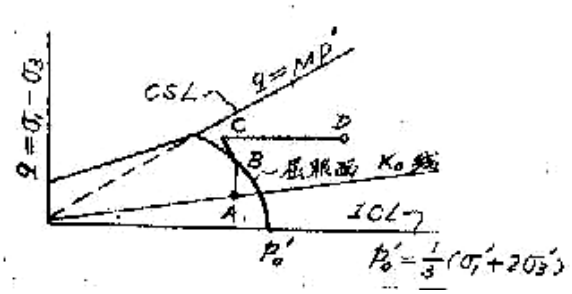


图 5.5.10　填土荷载的可能的有效路径

固结沉降按下式计算：

$$s_c = \sum_{i=1}^{n}\left(d\bar{\varepsilon}_{1c}\cdot\Delta\mathrm{H}\right)_i \qquad (5.5.31)$$

而

$$d\varepsilon_{1c} = d\bar{\varepsilon}_c^{\,p} + \frac{1}{3}d\varepsilon_v \qquad (5.5.32)$$

上式中，$\Delta\mathrm{H}$——土层厚度

5.5.8 曲线拟合法

在现今的各种沉降计算方法中，由于对压缩土层剖面、荷载条件以及在计算模型等方面都作了简化，所用的计算土性指标也未必具有真正代表性，沉降计算结果与实测资料往往有不同程度的差异，尤其是对于沉降过程的预估。为此，人们建议了根据地基沉降前期观测资料推算沉降过程和最终沉降的经验方法。

众多实测沉降曲线表明，沉降过程曲线（沉降量 S_t 与相应的时间 t 的关系）接近于双曲线。可假设该曲线的数字表达式为：

$$s_t = \frac{t}{a+t}s \tag{5.5.33}$$

式中，a——待定系数；

s——地基最终沉降量；

假设在地基沉降过程中的时刻 t_1 与 t_2 分别测得沉降为 s_1 和 s_2，代入式子（5.5.43），联立求解，即可解得式中的二未知量 s 和 a 如下：

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{t_2 - t_1}{\frac{t_2}{s_2} - \frac{t_1}{s_1}} \\ a &= s\frac{t_1}{s_1} - t_1 = s\frac{t_2}{s_2} - t_2 \end{aligned}\right\} \tag{5.5.34}$$

将算得的 s 和 a 代回式（5.5.33），即得到估算沉降过程的表达式。显然，实测资料的历时越长，测点越多，估算的最终沉降 s 将能愈接近实际。

5.5.9 现场试验法

砂砾料等地基土难以采取原状试样测定其沉降计算指标，加之弹性理论应用于这类土计算的合理性尚待研究，目前对其沉降计算不得不依靠半经验方法，即通过不同的现场或原位试验结果与土性质之间的统计相关关系，估算土的变形指标，然后仍按弹性理论的基本公式估算沉降。这些试验方法包括荷载试验，静、动力触探试验，标准贯入试验以及旁压仪试验等。在建立上述相关关系时，不可能计及土层的许多复杂因素（例如应力历史、各向异性、实际应力状态、土的剪胀性、基础形状与大小等），故其可靠性应与使用经验相联系。

此种按经验关系估算沉降的方法很多，本节仅简单介绍按标准贯入试验和旁压试验成果估算地基沉降的方法，其中以希默特曼（Schmertman）推荐的方法最为称著。

1 标准贯入试验法——希默特曼法

（1）半无限土体表面有圆形面积的均匀荷载作用时，根据弹性理论，园心点以下铅垂线上的垂直应变的基本计算公式如下：

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta p}{E} \cdot I_z \tag{5.5.35}$$

式中：Δp——表面荷载强度；

E——土的变形模量；

I_z——应变影响系数，与土的泊松比及计算点位置有关；

（2）根据模型试验与有限元计算，沿地基深度方向，应变影响因数 I_z 变化可以简化成图 5.5.11 所示形式。即最大的应变出现在 0.5B 深度处，（B——基础宽度），该处 I_z=0.6；而在 Z=2B 处，应变等于零。

基础沉降按下式计算：

$$s=\int_{o}^{\infty}\varepsilon_z dz \tag{5.5.36}$$

可近似写成：

$$s=\Delta p\cdot\int_{0}^{2B}\frac{I_z}{E}dz \tag{5.5.37}$$

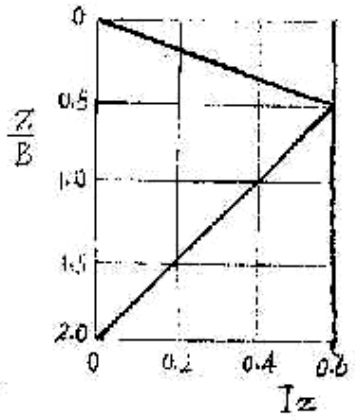


图 5.5.11　应变影响因数 I_z

再考虑某些修正，最后计算公式的形式如下：

$$s=C_1C_2\Delta p\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{I_z}{E}\right)_i\Delta Z_i \tag{5.5.38}$$

式中，Δp——基础底面净压力；

E_i——第 i 层中点处的弹性模量；

ΔZ_i——第 i 层的厚度；

C_1——考虑到基础埋深使应变减小的修正系数；

$$C_1 = 1 - \left(\frac{\sigma_0}{\Delta P} \right) \geq 0.5 \qquad (5.5.39)$$

σ_0——基础底面处的土层有效覆盖压力；

C_2——考虑时间效应的系数：

$$C_2 = 1 + 02 \lg \left(\frac{t}{0.1} \right) \qquad (5.5.40)$$

t——竣工后的时间，以年计；

（3）希默特曼建议了砂土的变形模量与静力触探探头阻力之间的经验关系，转化成与标准贯入击数 N 的关系，如表 5.5.1。

表 5.5.1 砂土变形模量 E 与标准贯入击数 N 的经验关系

土　　类	MPa/次
粉土、砂质粉土、微粘性粉土—砂混合料	0.4
洁净的细至中砂、微粉质砂	0.7
粗砂、微含粒砂	1.0
砂质砾、砾	1.2

2 旁压仪试验法

旁压仪试验提供的直接成果是探头在受逐渐增大的内腔压力下的体积与压力的关系，如图 5.5.12 所示的旁压曲线关系。由此可以求得旁压模量 E_M（按旁压曲线直线段的斜率 $\Delta V / \Delta p$ 求取），屈服压力 p_f（直线段终端压力）和极限压力 p_p。

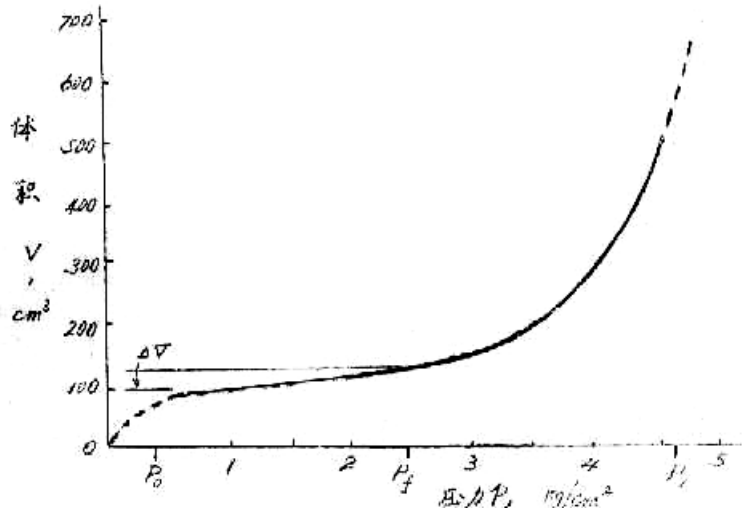


图 5.5.12　　旁压试验 p~V 曲线

根据该试验结果，梅纳(Menard)建议了沉降估算方法。该法假设沉降主要是以基础底面尺寸为直径的半圆球体积内的土体压缩所致。借弹性理论进

梅纳推导了按试验结果估算地基沉降的公式，该方法在法国应用广。

5.5.10 其他方法简述

1 有限元法

利用有限元法计算沉降量的要点和步骤如下：

（1）　将土与地基离散化为有限个单元；

（2）　利用土的本构关系，对每个单元建立刚度矩阵；

（3）　将各单元的刚度矩阵结合为整个土体的总刚度矩阵[k]，得到总载荷矢量{R}与节点位移矢量{δ}之间的关系：

$$[k]\{\delta\}=\{R\} \qquad (5.5.41)$$

（4）　解式（5.5.41），求得节点位移{δ}；

（5）　根据节点位移，计算单元的应力与应变。

最常用的本构关系是线弹性模型，此外尚有双线性弹性模型、非线性弹性模型、弹塑性模型等，借助计算机求解。

有限元法可以计及复杂的几何与边界条件，荷载和施工工序、土的非均质与应力—应变关系的非线性等，故应用日益发展。

2 概率统计法

沉降计算不易准确的原因大致有：（1）土性指标分散；（2）荷载大小与分布不完全确定；（3）

土的本构关系中有许多不定因素。因此发展了统计方法，将土的压缩性和作用荷载视为随机变量，代入相应的沉降公式，对沉降变量进行求解。

5.5.11 对几种沉降计算方法的评述

1.单向压缩沉降计算法　本法的最大优点是计算方法简单，计算指标容易测定，它可以考虑各种土层条件、地下水位、基础性状，还能计及压缩指标修正和地基上的应力历史等。当基础面积大大超过压缩土层厚，或压缩土层埋藏较深，用此法可得较好结果。反之，如果基础面积较小，地基土变形有明显三向特性，计算的沉降一般会偏低，应该给以修正，或改用考虑三向变形的方法。但在较坚硬地基土条件下，取样扰动常高估了沉降量。

2.考虑三向变形效应的单向压缩法　　它对单向压缩法作了改进，因为初始孔隙水压力系由三轴试验测定，计及了土的剪胀性。由于计算中涉及孔隙压力系数 A，可以说它也考虑到了应力历史。

本法的不完善处，是将三轴应力状态下测得的孔隙压力用于地基中的一般应力状态，系数 A 随土变形而改变，较难确定；因此，从道理上说，此法仅能用于基础对称轴上各点的沉降。

3.三向变形计算法　它具有单向压缩计算法的各种优点，并且考虑土三向变形，更接近实际。但是计算中需要土的泊松比ν和土的应力—应变关系，要求模拟实际应力条件下用三轴试验测取，较为复杂。需要积累更多的使用经验。

4.弹性理论法　直接应用弹性理论，概念清晰，计算简便。但是它的应用有较大局限性：天然土很少是均质的，各处的弹性参数变化可能很大，尤其是针对影响范围较广较深的大面积基础。本法不易计及各种实际的复杂边界条件。另外，计算范围达到无限深，常使计算结果偏大。因此弹性理论法只是用于土质相对均匀、基础面积较小的一般房屋地基设计。

5.应力路径法　计算思路无疑较为先进。它利用三轴仪在室内模拟土的原位应力路径、实测土的应变，再计算沉降。使人们得以全盘理解土的变形过程，概念清楚。

但此法也存在某些缺点：（1）试验工作量较大（要求高质量的原状试样与测试技术）；（2）计算依据的代表性点不易选择恰当；（3）应力系按弹性理论求得，实际的原位应力未必与计算应力相同。

6.剑桥模型法　是一种尚在发展的理论方法。实际上是应用了“临界状态土力学”的本构关系。而又以常规试验测得的各项指标（λ，Κ，Μ等）作为计算依据。它的最大特点是，沉降计算方法考虑了土的剪（缩）胀性的本构关系。因此，它能以同时解出地基土的垂直沉降、水平位移和固结过程中的孔隙水压力等。

但是，此法也存在较大的局限性：（1）剑桥模型只适用于正常固结土或弱超固结土，应用范围较窄；（2）迄今的试验论证只局限于重塑土。对于原状土，有待进一步积累经验。事实是“临界状态土力学”的研究目前还没有超出人工重塑土的范围。

5.6 堤坝沉降计算和一些特点

与地基沉降相比，堤坝沉降有其显著的特点。对于分区坝，不同土料之间有应力转移现象；土料，尤其是粗粒的水库土坝蓄水时会引起湿化变形；土料除垂直沉降外，经常发生显著的水平位移，等等。尽管如此，一般高度不大的（例如小于 40 米）堤坝却仍可采用近似的方法计算其沉降。观测资料表明，坝体中部的沉降基本上是沿垂直方向，因此，坝体沉降计算通常仍用单向压缩分层总和法。对于各种路堤和堤防，一般也存在类似的工程问题和使用相同的计算方法。

为了在计算中能考虑许多更接近实际的影响因素，对于高土石坝设计（例如高度大于 70 米）一般采用有限元法，以计及坝体中不同部位不同土料的应力变形关系、土性指标的变化，施工阶段以及土坝的各种使用条件。由此可以同时求得垂直与水平方向的位移。

5.6.1 高填方体沉降估算简化方法

与前述地基计算中的方法完全相同。通常将堤坝沿高度分成（8~10）个分层。计算每个分层的沉降 S_i，然后相加，得到堤坝总沉降量 S：

$$s=\sum_{i=1}^{n}s_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{e_{1i}-e_{2i}}{1+e_{1i}}\cdot h_i \qquad (5.6.1)$$

式中，n——分层数；

e_{1i}——第 I 层处土料的填筑孔隙比，该处压力为 $p_{1i}=\frac{1}{2}\gamma_i h_i$，

e_{2i}——坝体填筑至坝顶后，同一点土料的稳定孔隙比。该点压力为 $p_{2i}=p_{1i}+\sum_{i=i+1}^{n}\gamma_i h_i$，即该点以上至坝顶的土柱压力；

h_i——第 i 分层厚度。

γ_i——堤坝第 I 层土的填筑容重。

上述的 e 值由相应的压力 p 从坝料的压缩曲线上查取。

堆石坝的沉降量目前缺少可靠计算方法，但根据二十多座坝的实测资料统计，竣工后沉降可按下式估算。

$$s=0.001H^{\frac{3}{2}} \qquad (5.6.2)$$

随着压实机具改进和压实功能提高，堆石压实密度提高，相信按上式的估算值乃是沉降的上限。

5.6.2 坝体中的应力传递

对于以粗粒料为支承体的心墙及斜心墙中的应力测量发现，坝体中某平面上的实测垂直应力通常不等于该平面以上的土柱压力，主要是因为坝体各部份土料的刚度不同，当沉降不均时，土料之间发生了应力传递与拱作用所致。例如对于带上下游粗料棱体的心墙坝，如果心墙土料的压缩性大，相邻坝壳的压缩性较低，则坝体建成后心墙相对于坝壳而下沉。若两者的界面并不断开，则心墙将依靠界面的剪应力“悬挂”在坝壳上，其部分重量将传递给坝壳材料。因此，心墙内的应力减小，而坝壳内的应力相应增大。相反，坝壳也可能传递应力给心墙。

应力传递程度可以用垂直应力传递系数 r_t 来表示，$r_t=\frac{\sigma_z}{\gamma z}$。其中 σ_z 为坝顶以下 z 深度处某平面上的实际垂直应力，γ 为心墙土料容重。可见 r_t 愈小，心墙向坝壳的应力传递作用愈大。如果 $r_t>1$,则相反地系由坝壳向心墙传递应力。库哈维（Kulhawy）等曾就带砂壳的垂直心墙坝，用有限元法分析了各种条件时应力传递作用的影响，结果指出：

1、心墙土料含水率对应力传递影响很显著。如果含水率 ω>最优含水率 ω_{op},最大的应力传递（即最小的 r_t）出现在坝底附近；随高度上升，程度减轻；在坝顶附近则有相反现象，即坝壳向心墙传递应力（$r_t>1$），如图 5.6.1。

如果 $\omega<\omega_{op}$ 心墙的应力传递在中段 2/3 至 3/4 范围内几乎为常量（r_t=常量），而在顶部与底部，则系由坝壳传递应力给心墙（$r_t>1$）。

2、坝壳愈密，心墙愈湿，应力传过现象愈烈。

3、过渡层土料性质与厚度对应力传递影响不大。

4、墙的厚度愈薄，愈易产生应力传递。

5、坝坡愈陡，应力传递愈烈。

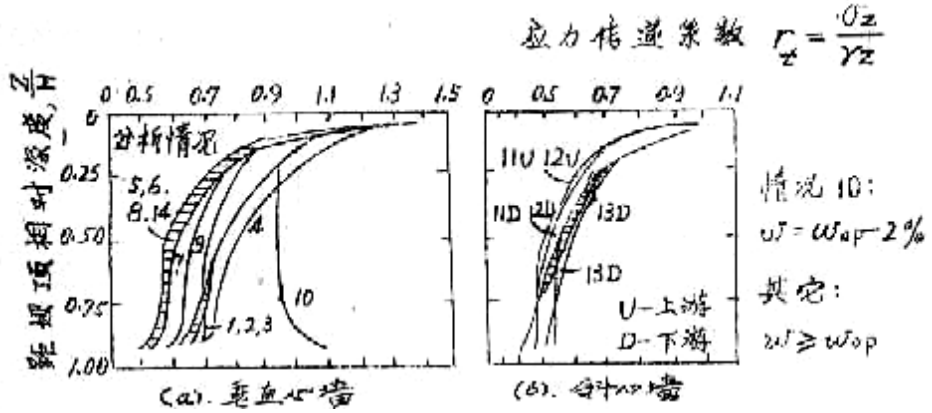


图 5.6.1　土料含水率对应力传递影响（图中 1.2.3 代表工程案例号）

土料间应力传递的结果，使坝体内应力发生重分布，因而沉降计算中用土柱压力 γz 作为某平面上的垂直应力便出现不同程度的误差。另外应力传递是坝体内发生内部水平裂缝与坝顶纵向裂缝的可能原因之一。

严格讲，即使是匀质的堤坝，由于各部分沉降差异，也存在应力传递的现象。理论研究与实测结果都表明，均质坝横断面沿中轴线的垂直应力呈曲线分布。对于粗粒土，苏联 BOДГEO 的研究认为，该曲线接近抛物线，应力传递系数是坝坡 m 的函数，当 m 为 1.3~4.0（横：竖），经验关系式为：

$$r_t=0.6+\sqrt{0.059m-0.072} \tag{5.6.3}$$

或

$$r_t=0.5+\frac{\ln\left(m+\sqrt{m^2-1}\right)}{4.2} \tag{5.6.4}$$

奥代（Одe）的公式为：

$$r_t=0.86-\frac{\xi}{3.14m^2} \tag{5.6.5}$$

式中，ξ ——土的侧压力系数。

以上几式中，当 m=2，ξ=0.55 时，数值相当接近，为 0.814~0.830。

如取坝断面轴线为 Z 轴，坝顶水平线为 X 轴，其交点为原点，则对于对称三角形断面的均质土坝或带斜墙的堆石坝，$BO\Pi\Gamma EO$ 建议坝体内不同点的垂直应力 σ_z 按下列经验公式确定：

$$\sigma_z=\gamma\left(ax^n+r_tz\right) \tag{5.6.6}$$

式中，γ——填筑材料的容重；

$$a=-\frac{r_tz}{m^n};$$

$$n=\frac{1}{2r_t-1};$$

如果是非均质的心墙坝或斜墙坝，则需要用模型试验方法或有限元法具体分析。例如苏联学者曾借光弹试验研究了 300 米高的努列克坝的坝体应力，得出心墙中的最大垂直应力出现在坝顶下相当于 0.8 倍坝高的高程上。并非在坝轴线上，而是在坝肩以外。

5.6.3 土料的湿化变形

土石坝建成初期，土石料会发生浸水湿化变形。这是土石坝变形的另一个重要特点。许多学者根据实测变形和分析计算对此进行过详细研究。

有人认为，对于土石坝，除坝料自身重量外，作用于坝上的水压力和坝料的浸水软化，对坝体变形起着重要作用。甚至象奥洛维尔坝的压密良好的洁净粒状坝壳料和英菲尔尼罗坝（EL Infiernillo Dam）硅质砾岩和闪长岩堆石均有软化现象。水压力使心墙坝上游地基承受垂直荷重，引起向下的位移；同时上游坝壳由于受水浮力，有效应力降低，出现膨胀趋势；库水压力作用于心墙上游面，促使心墙向下游位移，并水平向压缩下游坝壳，引起坝壳料的沉降。上述错综复杂的影响因素，造成土石坝变形的有趣变化图象。例如，英菲尔尼罗坝初蓄水时的位移变化如图 4.6.2。开始时，上游坝料湿化作用占主导，沉降较大，坝顶向上游转动；由于作用于心墙的水压力与库水位高度呈平方关系，故随库水位上升，横向水压力的作用愈来愈大，位移逐渐转向下游。

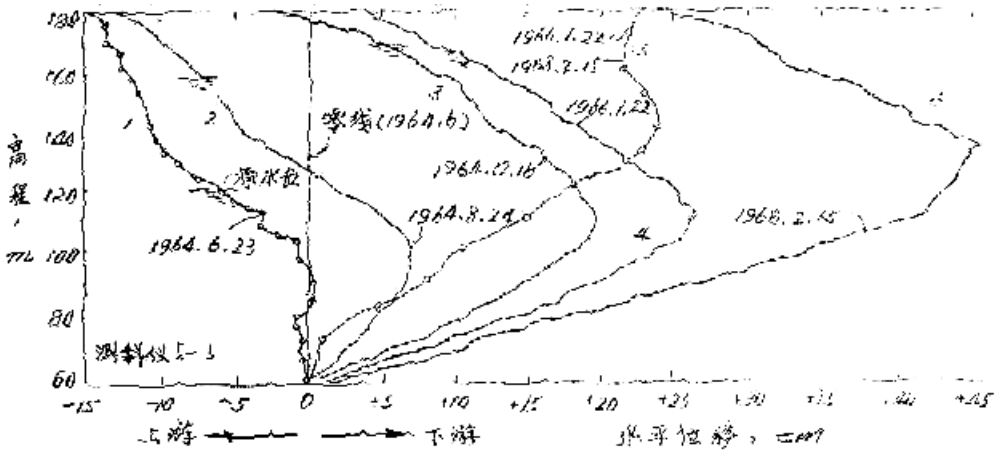


图 5.6.2 英菲尔尼罗坝上下游方向位移

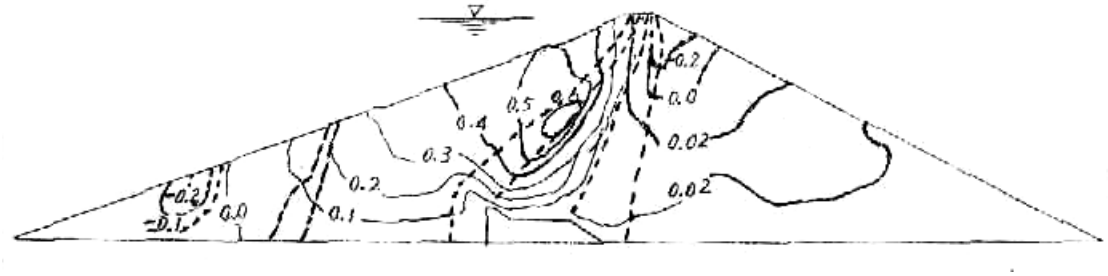


图 5.6.3　　σ_3 ＝300kPa 小浪底的三轴湿化试验

马塞尔等人曾以几种堆石进行单向压缩的湿化试验，得出当“降雨量”等于堆石体积的 35%时，软石灰石块产生的沉降即相当于完全浸水时的沉降。清华大学对小浪底堆石料进行了三轴湿化试验，发现湿化变形随着 σ_3 和 $\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}$ 的增大而增加。试验结果见图 5.6.3。他们建立了非线性和塑性湿化变形模型，对小浪底的初次蓄水情况进行了有限元分析，得到了与英菲尔尼罗坝相似的结果。

计及湿化效应的土石坝的变形计算方法至今还是个值得研究的课题，可见土石坝的变形机理远比地基的复杂。

5.7 研究固结问题所需的基本方程

固结是土体受外力作用，内部应力变化引起体积变化，同时有部分孔隙水被挤出的压密过程。要探讨固结规律，建立固结微分方程，首先要研究平衡条件、有效应力原理、应力应变关系和水流连续条件等几个基本课题。

5.7.1 平衡条件

当土体受外力作用处于平衡状态时，土体中任何一个单元体上的各应力分量（图 5.7.1）均应该满足下列平衡方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+x=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+y=0\\ \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+z=0\end{aligned}\right\} \qquad (5.7.1)$$

式中 σ　τ ——分别为单元土体各个面上的正应力与剪应力；

x、y、z ——所取坐标轴，它们分别垂直于单元体的各相应面；

X、Y、Z——单元体在 x、y、z 各方向上所受的体积力；

应力符号的规定，见图 4.7.1

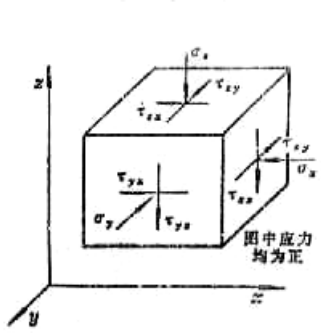


图 5.7.1　土单元体应力

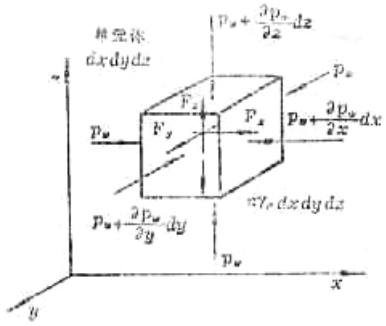


图 5.7.2　作用于单元体孔隙水上的力

如果只考虑单元体中水体部分的平衡，可按下法求得其平衡方程。假设所取单元土块与相应坐标系统如图 5.7.2 所示，写出 x 方向的平衡方程：

$$p_\omega n_{Ax}dydz-\left(p_\omega+\frac{\partial p_\omega}{\partial x}dx\right)n_{Ax}dydz+F_x n_v dxdydz=0 \qquad (5.7.2)$$

式中 p_ω——水压力；（未计入由于孔隙水自重引起的水压力变化）

n_{Ax}、n_v ——分别为 yz 面上的孔隙率与单元土块的孔隙率；

F_x ——在 x 方向的体积力（与渗透力大小相等，方向相反）。

对于均质土体，假设 $n_{Ax}=n_v=n$，式（5.7.2）可简化为：

$$F_x=\frac{\partial p_\omega}{\partial x} \qquad (5.7.3)$$

同理，可以求得 y 与 z 方向的平衡方程：

$$F_y = \frac{\partial p_\omega}{\partial y} \tag{5.7.4}$$

$$F_z = \frac{\partial p_\omega}{\partial z} + \gamma_\omega \tag{5.7.5}$$

式（5.7.5）中多一项γ_ω，是因为沿 z 方向水受重力作用。

5.7.2 有效应力原理

饮和土体受到外力作用后，体内任何一点的总应力 σ 将由有效应力 σ ´　和孔隙水压力 u 所分担，可以如式 3.5.4 表示为 σ = σ ´ +u 。

这就是为太沙基 1920 年所发现，并于 1923 年应用于固结理论的重要的有效应力原理。

在土体固结过程中，随着水量从土体中排出，孔隙水压力逐渐消散（减少），同时有效应力等量增加。下面举例简要阐明孔隙水压力的变化情况。

如图 5.7.3，该地下水位与地面齐平，用测压管量测地下 M 点的孔隙水压力。在自然情况下，M 点的测压水头为h_s，相应的水压力为$u_s = \gamma_\omega h_s$，称为静水压力。除非地下水位改变，u_s将恒定不变。如果在地面上施加荷重 q，由于 M 点土体中不能立刻排水，测压管中水位将增高h_e，它是超过静水位的水头，故称超静水头，相应增加的水压力$u_e = \gamma_\omega h_e$称超静水压力。随着 M 点土体的排水固结，h_e将从开始的最高值随时间下降至零，超静水压力也相应消散。在加载瞬时，M 点的孔隙和压力u为上述两种压力之和，即$u = u_s + u_e$。

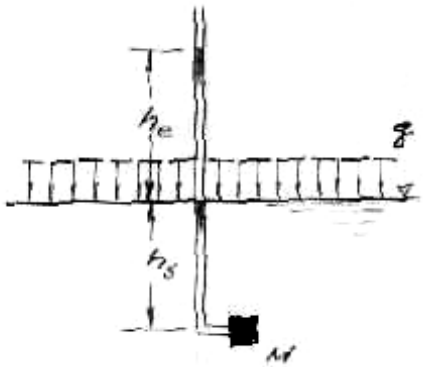


图 5.7.3　孔隙水压力变化

5.7.3 应力—应变关系

有关土的应力—应变关系在第二章中已作了介绍。对于单向固结，因其应力状态与 K_0 固结试验基本一致，故在推导固结方程时，直接引用固结试验压缩曲线，可以下式表示：

$$a_v = \frac{\Delta e}{\Delta \sigma}$$

或

$$\Delta \varepsilon = m_v \cdot \Delta \sigma \tag{5.7.6}$$

对于三向与二向固结问题，土体的受力条件比较复杂，这种复杂应力条件的变形特性也十分复杂，还缺少完善的测试方法。因此，土体是理想均质各向同性弹性体，利用弹性常数来表达土体的应力—应变关系。

5.7.4 水流连续条件

研究水流连续条件，以达西定律为依据，如第四章所介绍，其数学表达形式如下：

$$q = kia \tag{5.7.7}$$

式中 q——在与水流方向垂直的平面内，单位时间通过的渗流量；

k——土的渗透系数；

i——沿水流方向的水力梯度；

a——过水面积；

假设所取单元土体及坐标系统如图 5.7.2 所示。对于饱和土，容易导得进入土单元体的流量增量Δq应为 x、y、z 三个方向进入的分流量之和：

$$\Delta q = \Delta q_x + \Delta q_y + \Delta q_z = \left(k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \right) dxdydz \tag{5.7.8}$$

式中　　h——作用水头；

k_x、k_y、k_z——单元土体在三个方向的渗透系数。

上式是不可压缩流体在渗流过程中体积守恒的连续方程。饱和土在稳定渗流条件下，单元土体内的水量保持不变，即Δq=0，则式（5.7.8）变成：

$$k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \tag{5.7.9}$$

式（5.7.9）称为拉普拉斯方程，如果土骨架或土孔隙中的流体可以压缩， 则Δq≠0，土体中的渗流即为不稳定流或瞬时流，这种情况就是固结理论所要研究的问题。

5.8 单向固结的普遍方程与太沙基理论

5.8.1 单向固结的普遍方程

利用 5.7 节中的基本方程，可以建立土体的固结方程。首先研究应用最广的单向固结理论。

土体中一点作用于水流的阻力与作用于土骨架的渗透力大小相等而反向，故可以直接写出在 z 方向单位体积土骨架中孔隙壁对水流的阻力的表达式如下：

$$F_Z = -j_z = -i_z \gamma_\omega = -n \frac{\gamma_\omega}{k} v_s \tag{5.8.1}$$

式中　n——土的孔隙率；

v_s——在土体中沿水流方向的渗透流速（seepage velocity），它与出逸流速v（discharge velocity)的关系是v=nv_s，上式右侧带负号，表示曳阻力与流速方向相反。根据式（5.7.5），Z 方向的体积力$F_z = \frac{\partial p_\omega}{\partial z} + \gamma_\omega$，所以$\frac{\partial p_\varpi}{\partial z} + \gamma_\varpi + n\frac{\gamma_\varpi}{k} \upsilon_s = 0$

因此将上式对 z 求导数，因为 k=f(z)，故有：

$$\frac{\partial^2 p_\omega}{\partial z^2} + n\gamma_\omega \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{v_s}{k} \right) = 0$$

即

$$\frac{\partial^{2\omega} p_\omega}{\partial z^2} + n\gamma_\omega \left[\frac{1}{k^2} \left(k \frac{\partial v_s}{\partial z} - v_s \frac{dk}{dz} \right) \right] = 0$$

或
$$\frac{\partial^2 p_\omega}{\partial z^2}+n\gamma_\omega\frac{1}{k}\frac{\partial v_s}{\partial z}-n\gamma_\omega v_s\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz}=0 \qquad (5.8.2)$$

单向固结条件下，由于 $\frac{dv}{dz}=\varepsilon_z$，q=v，得到：

$$n\frac{\partial v_s}{\partial z}=-\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} \qquad (5.8.3)$$

式中 ε_z——z 方向的应变；当为单向固结，ε_z 即等于体积应变 ε_v。

按此，式（5.8.2）可改写成：

$$\frac{\partial^2 p_\omega}{\partial z^2}+\gamma_\omega\frac{1}{k}\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}-n\gamma_\omega v_s\frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz}=0 \qquad (5.8.4)$$

在固结问题中，研究土体在外力作用下超静水压力随时间与位置的变化，是最有实际意义的。因此，可将上式进行适当变化。

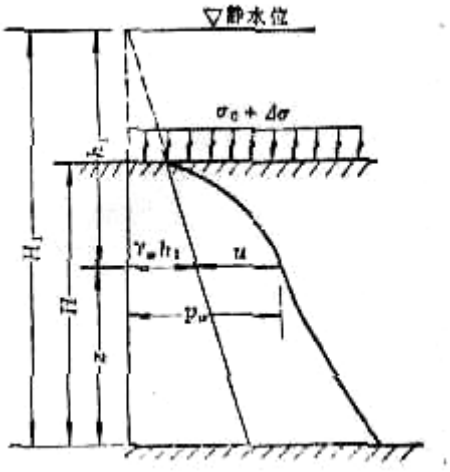


图 5.8.1　土层剖面和作用力

假设固结土层的剖面如图 5.8.1。在土层表面的单位面积上原有大片匀布荷重 σ，荷重增量为 $\triangle\sigma_0$，在地面下（H-z）深度处存在超静水压力 u。根据有效应力原理，在固结过程中该处的有效应力 σ' 为：

$$\sigma'=\sigma-p_\omega=\sigma-\left[\gamma_\omega(\mathrm{H}_1-z)+u\right]$$

而按图 5.8.1，（H-z）深度处的总应力 σ 应为：

$$\sigma=(\sigma_0+\triangle\sigma)+\gamma_{sat}(\mathrm{H}-z)+\gamma_\omega(\mathrm{H}_1-\mathrm{H})$$

代入上式并简化得：

$$\sigma'=(\sigma_0+\Delta\sigma)+\gamma'(\mathrm{H}-z)-u \qquad (5.8.5)$$

式中 γ_{sat}、γ' ——分别为土的饱和容重和浮容重。

将式（5.8.5）对时间 t 求导数得：

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\sigma)+\gamma'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5.8.6)$$

其次，垂直应变 ε_z 也可以用有效应力与变形指标表示。根据单向固结试验的压缩曲线，体积压缩系数 m_v 的定义如下：

$$m_v = \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial \sigma'}$$

而 $$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t}$$

故有

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = m_v \frac{\partial \sigma'}{\partial t} \qquad (5.8.7)$$

再将式（5.8.7）代入式（5.8.4），并且注意到式（5.8.4）的末项具有下列关系：

$$n\gamma_\omega v_s \frac{1}{k^2}\frac{dk}{dz} = -F_z \frac{1}{k}\frac{dk}{dz} = -\left(\frac{\partial p_\omega}{\partial z} + \gamma_\varpi\right)\frac{1}{k}\frac{dk}{dz}$$

则式（4.8.4）变成以下形式：

$$\frac{\partial^2 p_\omega}{\partial z^2} + \frac{m_v \gamma_\omega}{k}\frac{\partial \sigma'}{\partial t} + \left(\frac{\partial p_\omega}{\partial z} + \gamma_\varpi\right)\frac{1}{k}\frac{dk}{dz} = 0 \qquad (5.8.8)$$

再将式（5.8.5）代入（5.8.8），并以超静水压力表示，则式（5.8.8）变为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{m_v \gamma_\omega}{k}\left[\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t} + \gamma'\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\right] + \frac{1}{k}\frac{dk}{dz}\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad (5.8.9)$$

式（5.8.9）是反映单向固结过程的普遍方程。它综合考虑了外加荷重随时间变化，土层厚度随时间变化，以及土的渗透性随深度变化等等可能遇到的情况。

5.8.2 太沙基单向固结理论

早在 1925 年，太沙基即建立了饱和土单向固结微分方程，并获得一定起始条件与边界条件时的数学解，迄今仍被广泛应用。

1 基本假设

为了便于分析和求解，太沙基作了一系列简化假设：

（1） 土体是均质的，完全饱和的；

（2） 土的渗透性与压缩性均为常量；

（3） 土粒与水均为不可压缩介质；

（4） 外荷重一次瞬时加到土体上，在固结过程中保持不变；

（5） 土体的应力与应变之间存在直线关系；

（6） 在外力作用下，土体中只引起上下方向的渗流与压缩；

（7） 土中渗流服从达西定律；

（8） 土体变形完全是由孔隙水排出和超静水压力消散所引起的。

以上假设中将实际情况理想化，近似地反映了实际情况。例如：当地面上的加荷面积比压缩土层的厚度大得很多，或压缩层埋藏比较深，侧向变形和渗流的可能性较小；土骨架的结构粘滞性小，渗透压缩占主要成分；施工期短且土的渗透系数小时，可认为是瞬时加荷，等等。

2 太沙基方程及其解答

不难看出，太沙基所研究的问题只是前面所讲的普遍情况中的一个特例。在式（5.8.9）中，令 k=常量，H=常量，△ б =0　，则有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\frac{m_v\gamma_\omega}{k}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

或
$$c_v\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5.8.10)$$

式中
$$c_v=\frac{k}{m_v\gamma_\omega}=\frac{k(1+e)}{a_v\gamma_\omega} \qquad (5.8.11)$$

这就是太沙基单向固结微分方程。式中 c_v 称土的固结系数。因为假设了 k 和 m 为常量，故 c_v 自然也是常量。

式（5.8.10）表示了超静水压力 u 与位置 z 及时间 t 的函数关系。根据给定的起始条件与边界条件，可以求得它的解析解。

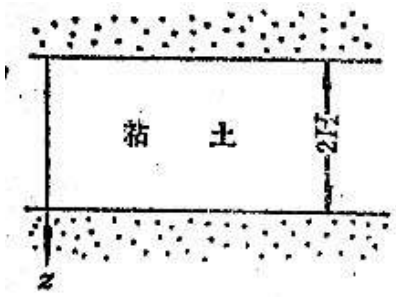


图 5.8.2　固结方程推导图

如图 5.8.2 假设土层厚为 2H,顶面与底面均可自由排水，土面上瞬时施加的外荷重为 σ 。故起始条件与边界条件如下：

t=0，u=u_0;

t>0，z=0，u=0;

t>0，z=2H，u=0 。

由上述条件，借富里哀级数，可得式（5.8.10）的解答如下：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{H}\int_0^{2H}u_0\sin\frac{n\pi z}{2\mathrm{H}}dz\right)\left(\sin\frac{n\pi z}{2\mathrm{H}}\right)\cdot\exp\left(-\frac{n^2\pi^2c_vt}{4H^2}\right) \qquad (5.8.12)$$

上式中的 n 为正整数，u_0 为起始超静水压力，u_0= σ 。

如果起始超静水压力不随深度而变,即 u_0=常量,并令 n 为奇数 n=2m+1(m 为整数),则式(5.8.12)可改写成：

$$u=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2u_0}{M}\sin\frac{Mz}{\mathrm{H}}\right)\exp(-M^2T_v) \qquad (5.8.13)$$

式中 M=$\frac{1}{2}$ π (2m+1)；

T_v——无因次时间因数：

$$T_v=\frac{c_vt}{H^2} \qquad (5.8.14)$$

根据式（5.8.13），容易求得任何时刻 t、任意深度 z 处的超静水压力 u。为了研究土层中超静水压力的消散程度，常应用固结度概念。Z 深度处土的固结度U_z表示该处超静水压力的消散程度，即：

$$U_z=\frac{u_0-u}{u_0}=\frac{\sigma-u}{u_0}=1-\frac{u}{u_0} \tag{5.8.15}$$

将式（5.8.13）代入式（5.8.15），可得

$$U=1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{\mathrm{H}}\right)\exp(-M^2T_v) \tag{5.8.16}$$

上式表示不同深度处土的固结度与时间的关系，即 $U_z=f(T_v)$，可以绘成图 5.8.3。图中的曲线称为等时孔压线。每一等时孔压线（对应于某特定时间 t 或时间因数 T_v）上的各点，给出了该时刻各个深度处所达到的固结度。

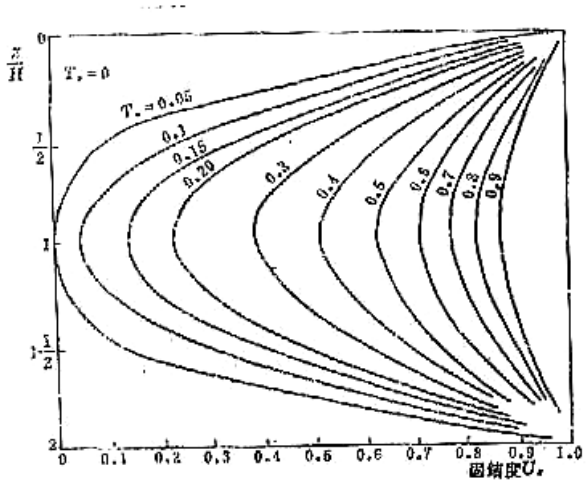


图 5.8.3　土层中各点在不同时刻（T_v）的固结度

对于工程更有实用意义的，是整个土层的平均固结度 U。它反映全压缩土层超静水压力的平均消散程度。类似于式（5.8.15），可得土层平均固结度为：

$$U=1-\frac{\int_0^{2H}u\,dz}{\int_0^{2H}u_0\,dz} \tag{5.8.17}$$

在本情况中，由于 u_0 沿深度为常量，故得：

$$U=1-\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{2}{M^2}\right)\exp(-M^2T_v) \tag{5.8.18}$$

上式所示的 $U=f(T_v)$，可绘成图 5.8.4 中的曲线 I，或制成表格以供计算。

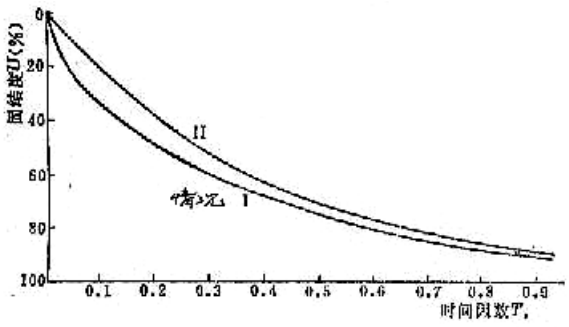


图 5.8.4　理论固结曲线 $U=f(T_v)$

公式（5.8.18）还可以足够近似地用下列经验关系式代替：

$$\text{当}\quad \left.\begin{aligned} U<0.6, T_v &= \frac{\pi}{4}(U)^2 \\ U>0.6, T_v &= -0.0851-0.933\lg(1-U) \end{aligned}\right\} \qquad (5.8.19)$$

顺便指出，在单向固结条件下，由超静水压力所定义的固结度也正反映以土体变形表示的固结度，即由式（5.8.18）求得的固结度，同样表示土体完成变形（即地基沉降量）的比值。如果已知地基的最终沉降基 S，则任何时刻 t 的沉降量 S_t 即可按下式计算：

$$S_t=U_t \cdot S \qquad (5.8.20)$$

3 起始超静水压力非均匀分布的情况

如果不同深度处起始 u_0 的分布不等的，只要把式（5.8.13）代入式（5.8.17），可得到类似计算式。

u_0 的几种典型分布情况如下：

情况 I（a）均匀分布：即以上所谈的情况；

（b）直线分布：$u_0=u_1+u_1'\dfrac{H-z}{H}$；

情况 II　半正弦曲线：$u_0=u_2\sin\dfrac{\pi z}{4H}$；

情况 III　正弦曲线：$u_0=u_3\sin\dfrac{\pi z}{2H}$；

情况 IV　直线增加与直线减小：

$$0<z<H, u_0=u_4\frac{z}{H}$$

$$H<z<2H, u_0=u_4\frac{2H-z}{H}$$

将以上分布函数代入式（5.8.17），得到相应的 U 与 T_v 的相互关系，可制成表格进行计算。

固结微分方程是线性函数，故它们的解可以迭加。因此，如果某情况下的起始超静水压力分布图能表示为所列图形的组合，则可以利用各组合图形的固结度，来求该分布图形的平均固结度。

4 固结系数的确定

固结系数 c_v 是求解固结问题的重要参数。上述单向固结情况下的理论固结曲线的前段（U<60%

左右）近似为抛物线，故可直接从一级荷重下的试验固结曲线以半图解法确定c_v值。

它们都要靠作图求解，并且都要利用试验曲线的后半段。事实上，试验曲线后半段反映的是主、次压缩的变形量之和，要靠作图准确定出主固结的终点是困难的。为此，日本学者提出了借计算确定固结系数的三点法。

该法认为，土体在任何时刻的固结度 U，为该时刻的压缩量 ρ 与主固结压缩量ρ_f之比，它符合于太沙基固结理论的基本假设。故：

$$U=\frac{\rho}{\rho_f} \tag{5.8.21}$$

从这点出发，可以从试验曲线（某级荷重增量下的压缩量与时间关系曲线）上选取适当的三点，建立三个方程式，联立解得c_v。原理与方法如下。

可以将式（5.8.19）改写成另一形式，即：

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}T_v\text{很小,Tv}<<1\text{时，}\ U=(4\pi^{-1}T_v)^{0.5}\\ \text{当}T_v\text{很大,Tv}>>1\text{时，}\ \mathrm{U}=1\end{array}\right\} \tag{5.8.22}$$

借曲线配合法，式（5.8.22）中两个式子可合并成下面的统一关系式：

$$U=\frac{\left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{0.5}}{\left[1+\left(\frac{4T_v}{\pi}\right)^{2.8}\right]^{0.179}} \tag{4.8.23}$$

或以 U 表示 T_v:

$$T_v=\frac{\frac{\pi}{4}U^2}{\left(1-U^{5.6}\right)^{0.357}} \tag{5.8.24}$$

如果已经有了某级荷重下的试验固结曲线，假设在该曲线上已经排除了起始压缩与次压缩影响的主固结部分的理论零点与固结终点的读数分别为 R_i 与 R_f，则为了求得 R_i、R_f和c_v值，可以在曲线的开始段（$T_v<<1$）选取两个时刻 t_1和 t_2，它们的读数分别为 R_1和 R_2，由式（5.8.14）与（5.8.19）可得：

$$\text{当}T_v=T_{v1}\text{时},\frac{c_vt_1}{H^2}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(R_1-R_i)}{(R_f-R_i)}\right]^2$$

$$\text{当}T_v=T_{v2}\text{时},\frac{c_vt_2}{H^2}=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(R_2-R_i)}{(R_f-R_i)}\right]^2$$

联立解以上两式，可求得：

$$R_i=\frac{\left(R_1-R_2\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right)}{\left(1-\sqrt{\frac{t_1}{t_2}}\right)} \tag{5.8.25}$$

再在试验曲线的后段（$T_v>>1$），读取时间 t_3时的 R_3，由式（5.8.24），可得：

$$T_v = T_{v3} : \frac{c_v t_3}{H^2} = \frac{\pi}{4} \frac{\left[\frac{(R_3 - R_i)}{(R_f - R_i)}\right]^2}{\left\{1 - \left[\frac{(R_3 - R_i)}{(R_f - R_i)}\right]^{5.6}\right\}^{0.357}}$$

根据T_{v1}，T_{v2}，T_{v3}的三个式子，可以进一步求得：

$$R_f = R_i - \frac{R_i - R_3}{\left\{1 - \left[(R_i - R_3)\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right)/(R_1 - R_2)\sqrt{t_3}\right]^{5.6}\right\}^{0.179}} \qquad (5.8.26)$$

$$c_v = \frac{\pi}{4}\left[\frac{(R_1 - R_2)}{(R_i - R_f)} \frac{H}{\left(\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}\right)}\right]^2 \qquad (5.8.27)$$

用 butong 方法分别求得的c_v值，由于它们在配合时所依据的时间-变形曲线段的范围不同，通常是不会相同的。一般是时间平方根法得出的值较大，时间对数法得出的较小，而以前者应用较多。根据单向固结理论，理论曲线的开始段应该是抛物线，而在半对数纸上则为直线。故在时间平方根法中，延长前段直线以寻求理论零点，是比较合理的。但是，根据实测，在试验曲线上固结度相当于 90%的一点的孔隙水压力，通常比理论计算值为高。这表明次压缩可能会大大影响用平方根法求取固结度 90%的时间 t_{90}，故用对数法来确定 R_{100} 则比较可靠。三点法利用计算确定理论固结零点与终点，更符合单向固结定义，并且避免了作图，可能是较好的方法。

另外，c_v值受试验方法的影响较大。三向与二向固结时的固结系数，也不同于单向固结时的数值。这些在下面有关部分再作讨论。

5.9 单向固结的复杂情况

太沙基单向固结理论是在作了许多假设的条件下获得的，为的是便于得到简化的解析解。但是实际工程条件往往并不符合某些简化假设，暂称其为复杂情况。有些学者研究过部分复杂条件，一般说来，结果都会相当复杂，常常要靠数值法求解，不便实用，而要代之以简化方法或半经验方法。现举几种情况说明如下。

5.9.1 加荷随时间变化

作用于地基上的荷重总是随施工进程逐渐增加的，而不会象太沙基假设的“瞬时”加荷。席夫曼（Shiffman）给出了此情况的理论解，太沙基则建议了图解法。

1 理论解

此情况的固结微分方程可从式（5.8.9）简化而得。令该式中$\Delta\sigma = f(t)$，k=常量和 H=常量，可得方程如下：

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t} \qquad (5.9.1)$$

假设土层是双面排水，荷重按直线规律增长，如图 5.9.1，增长率为$\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t} = \frac{p_0}{t_0}$，$p_0$为某时段$t_0$内施加的外荷重，如果是不排水，$p_0$就是起始超静水压力，故亦可写成$\frac{\partial \Delta\sigma}{\partial t} = \frac{u_0}{t_0}$。在这种荷重条件下 t_0时土层中的平均超静水压如下：

$$\bar{u}(T_v)=\frac{32\bar{u}_0}{T_{v_0}\pi^4}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_v}{4}\right)\right] \qquad (5.9.2)$$

式中　$T_{v_0}=\dfrac{c_v t_0}{H^2}$；

$\bar{u}_0$——起始平均超静水压力；

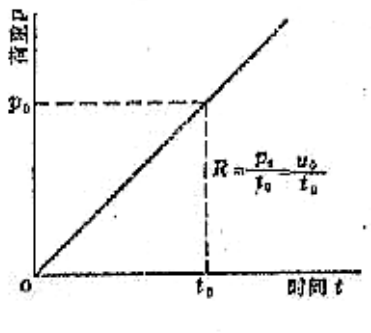


图 5.9.1　荷重随时间直线增大

在加荷过程中，一方面地基土中的超静水压力随加荷而上升，同时也随排水固结而消散，其变化情况可绘成图 5.9.2。

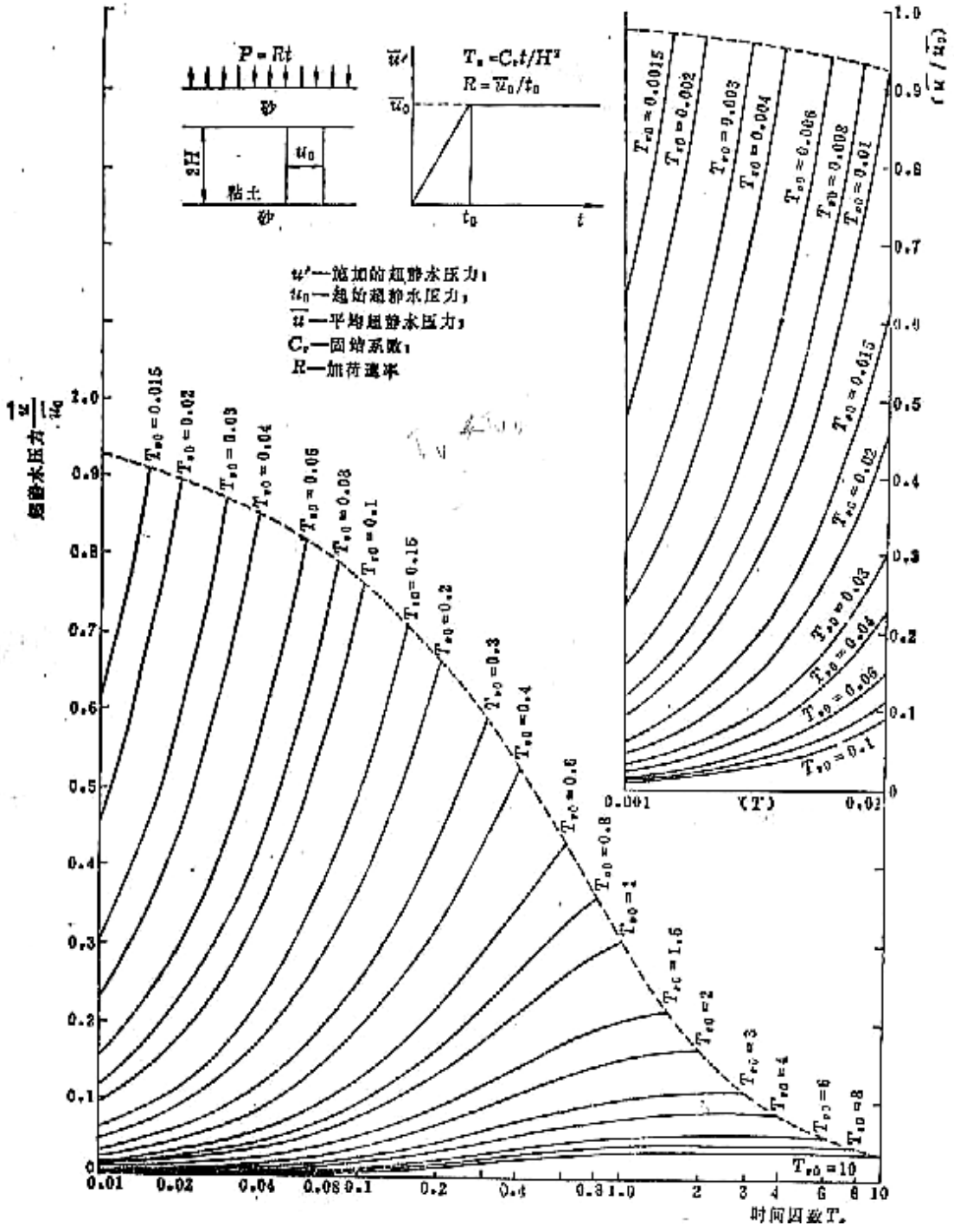


图 5.9.2 施工期的固结曲线

一旦施工结束，地基荷重变为恒定值，固结即应按太沙基理论计算，其起始超静水压力为完建时（T_{v0}）的数值。故完建后的平均超静水压力如下：

$$\bar{u}(T_v)=\frac{32\bar{u}_0}{T_{v_0}\pi^4}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^4}\left[1-\exp\left(-\frac{n^2\pi^2T_{v_0}}{4}\right)\right]\times\exp\left[-\frac{n^2\pi^2}{4}(T_v-T_{v_0})\right] \quad (5.9.3)$$

式（5.9.3）可绘制成图 5.9.3

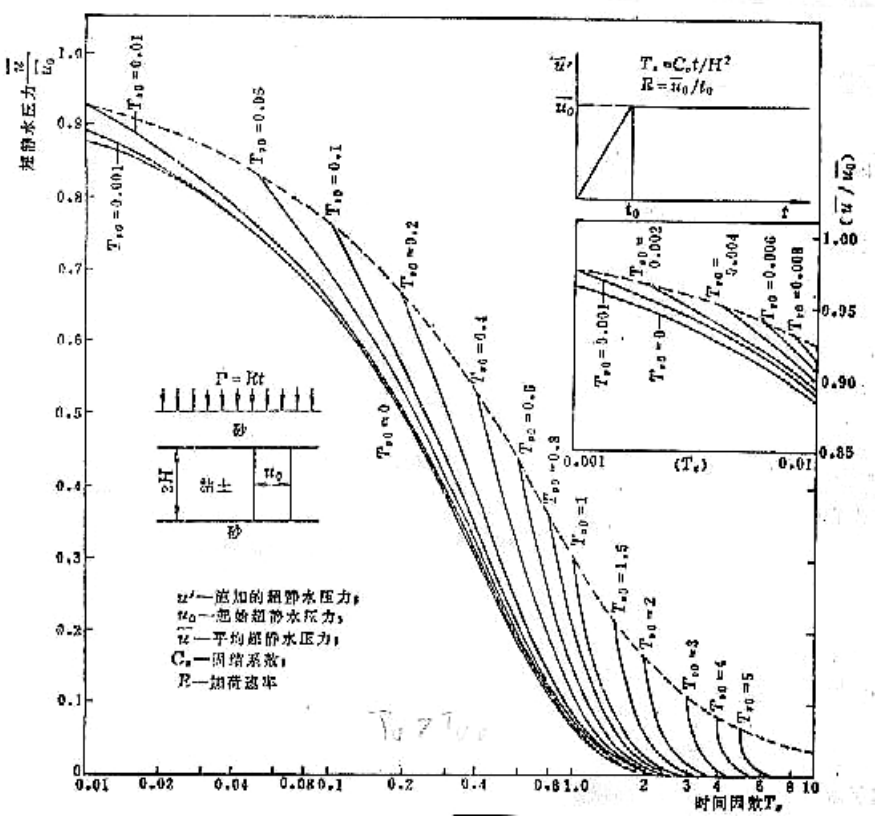


图 5.9.3　完建后的固结曲线

2 简化图解法

实际的施工加荷情况可以区分为线性增长和不规则增长。前者太沙基建议用图解法求解，后者可以采用曲线迭加法。

（1）太沙基简化法

假设地基上的加荷方式如图 5.9.4 中的上图所示，加荷至 $t=t_0$达到最后值 p_0。在沉降量～时间坐标中，先绘出假设荷重 p 在时间 t=0 时一次施加的固结曲线 0C，然后按下法绘制线性加荷的固结曲线：

（i）在施工期，即当 $t\leqslant t_0$(t_0为竣工时刻)，如图中t_A,有：

沉降量=（瞬时加荷经过t_A/2 时的沉降量）×p_t/p）　　（4.9.4）

上式中的 p_t 为t_A时的荷重，p 为最终荷重。所得曲线上一点为n_1。

(ii)刚竣工和峻工后，即当 $t\geqslant t_0$,如图中t_0和t_B,沉降量为：

沉降量=瞬时加荷经过（$t-t_0$/2）时的沉降　　（5.9.5）

按上式得到t_0时的沉降点如图中的点n_2，t_B时的沉降点如图中的点n_3。

由此可得沉降曲线为 o$n_1n_2n_3$。

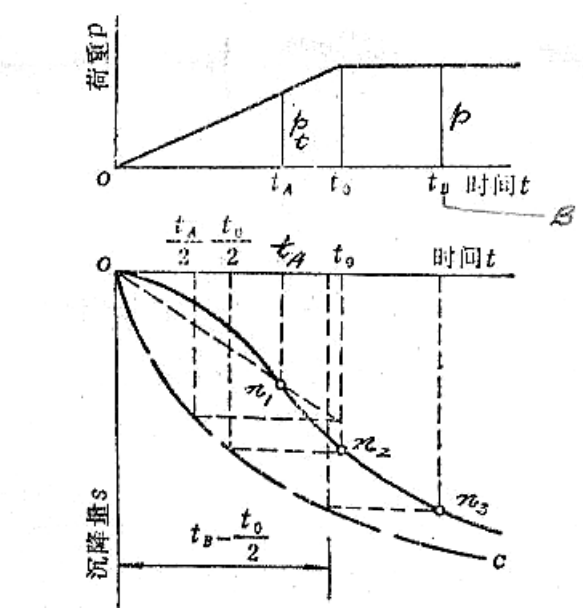


图 5.9.4　荷重随时间线性增长情况下沉降过程的简化计算

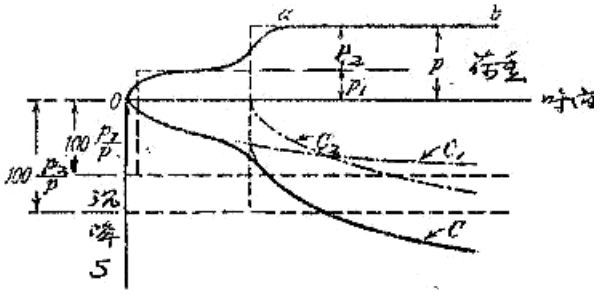


图 5.9.5　用迭加法求固结曲线

（2）、直接迭加法

当加荷过程线不规则，如图 5.9.5 中 oa 曲线时，可以根据具体情况，将总荷重分为几级分荷重，各在不同时刻瞬时施加，例如图中总荷重 p 分为 p_1 和 p_2 两级施加。C_1、C_2 分别表示瞬时施加 p_1 和 p_2 时以沉降 s 表示的固结曲线，将同一时刻的两个沉降量相加，就得到总荷重的固结曲线 C。

5.9.2 土层厚度随时间变化

天然土在静水中的沉积过程，是土层厚度随时间变化的典型情况。如果是在大面积（相对于土层厚度而言）内的均匀沉积，则显然在自重下的固结过程近似于单向固结的情况。土堤、土坝的施工进程，也是土层厚度不断变化的实例。

这种情况容易从普遍方程式（5.8.9）求得固结微分方程。由于外荷重增量 $\Delta\sigma$=0，假设渗透系数 k=常量，而土层厚度增长规律是 H=f(t)，故该式变成：

$$c_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - \gamma' \frac{\partial H}{\partial t} \tag{5.9.6}$$

式的边界条件是（见图 5.9.6）

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}z=H\text{时，}\ u=0(u\text{—超静水压力})\\ \text{当}z=0\text{时，}\dfrac{\partial u}{\partial t}=0(\text{不排水面})\end{array}\right\}\tag{5.9.7}$$

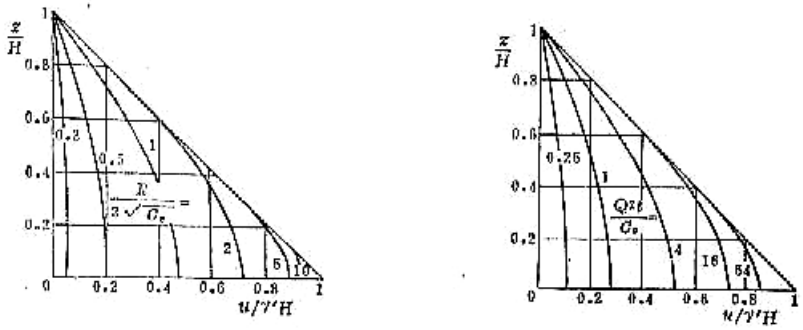


图 5.9.6 沉积土层

吉勃逊(Gibson)针对只有土层表面排水情况以及土层沉积规律包括下列两类，给出了解答:1.沉积厚度与时间平方根成正比；2.厚度与时间呈直线关系。前者有解析解，后者要用数值法求解。

1、沉积土层厚度与时间平方根成正比

土层厚度 $H=Rt^{1/2}$(R——表示沉积速率的常数)，按边界条件式（5.9.7），式（5.9.6）的解答如下：

$$u=\gamma' Rt^{\frac{1}{2}}\left[1-\frac{\exp\left(-\frac{z^2}{4c_v t}\right)+\frac{z}{2}\left(\frac{\pi}{c_v t}\right)^{\frac{1}{2}}erf\left(\frac{z}{2\sqrt{c_v t}}\right)}{\exp\left(-\frac{R^2}{4c_v}\right)+\frac{R}{2}\left(\frac{\pi}{c_v}\right)^{\frac{1}{2}}erf\left(\frac{R}{2\sqrt{c_v}}\right)}\right]\tag{5.9.8}$$

式中 erf(x)为误差函数,$\text{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}du$。以 $\frac{R}{2\sqrt{c_v}}$ 为参数，可以将式（4.9.8）表示的超静水压力分布，绘成 $\frac{u}{\gamma' H}$ 与 $\frac{z}{H}$ 的关系曲线，如图 5.9.7。从此图可以看出，如果沉积厚度与沉积时间的平方根成正比，则沿土层厚的超静水压力的分布只与 $\frac{R}{2\sqrt{c_v}}$ 有关，而不受时间 t 的影响，因而土层的平均固结度也就与时间无关。

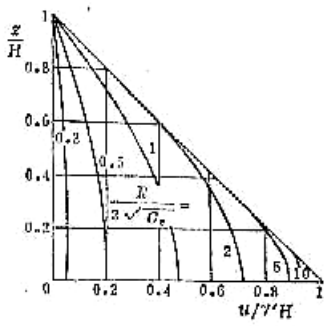


图 5.9.7　$\frac{u}{\gamma' H}$ 与 $\frac{z}{H}$ 的关系曲线

（底面不透水，$H=Rt^{1/2}$ 的超静水压力分布）

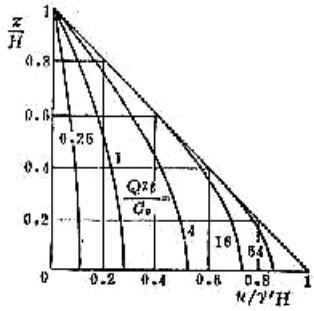


图 5.9.8　$\frac{u}{\gamma' H}$ 与 $\frac{z}{H}$ 关系曲线

（底面不透水，$H=Qt$ 的超静水压力分布）

（2）沉积土层厚度与时间成正比

这是更接近实际的情况，即 $H=Qt$，但不易获得解析解。对此，吉勃逊求得下列表达式：

$$u=\gamma' Qt-\gamma'(\pi c_v t)^{-1/2}\exp\frac{-z^2}{4c_v t}\int_0^{\infty}\xi\tanh\frac{Q\xi}{2c_v}\cosh\frac{z\xi}{2c_v t}\exp-\frac{\xi^2}{4c_v t}d\xi \qquad (5.9.9)$$

式中 ξ 是为满足边界条件式（4.9.7）中第二项需要选定的某函数。用数值法计算上式中的积分。若以 $T=Q^2t/C_v$ 为参数，可以绘成 $\frac{u}{\gamma' H}$ 与 $\frac{z}{H}$ 的关系曲线，如图 5.9.8。

土层的平均固结度可用下式计算：

$$U=1-\frac{\int_0^H u\,dz}{\gamma'\int_0^H (H-z)\,dz} \qquad (5.9.10)$$

2 双面排水

对于双面排水时两种沉积规律下的总水压力的分布，吉勃逊也得到了解答。

5.9.3 地基为成层土

天然沉积土一般具有成层结构。如果各分层间的固结特性相差较大，则宜按成层地基考虑。即根据实际土层剖面，将地基分为若干个水平分层，每个分层的土性视为均匀一致。格雷（Gray）曾针对上下透水和一面透水的双层地基得到各层平均固结度的解答，但计算十分复杂，很难用于实际。工程应用可以采取下列方法之一。

1 化解当量层法

泊姆（Palmer）建议从各分层中选择一个固结系数 c_{vc} 作为整个土层的参数，同时将该分层以外的其它各层的厚度改变，得到改变后的总化解当量层 H_c，则实际土层固结按 c_{vc} 和 H_c 的均匀土层计算。

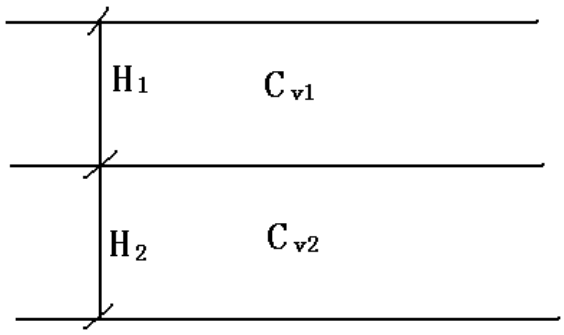


图 5.9.9 双层地基计算示意

设双层地基如图 5.9.9，取c_{v1}作为公共指标，即c_{vc}=c_{v1}。在某时刻 t，第 2 层的时间因数为：

$$T_v = \frac{c_{v2}t}{H_2^{\ 2}}$$

现将其指标改变为c_{v1}，又欲使其在同样时间 t 达到同样固结度，则其原厚度 H_2 需改为化解厚度 H_2´：

$$T_v = \frac{c_{v1}t}{H_2'^{\ 2}}$$

以上二式相等，故有：

$$H_2' = \sqrt{\frac{c_{v1}}{c_{v2}}} \cdot \mathrm{H}_2 \qquad (5.9.11)$$

由此，本法可用于多层地基，固结按均质土层计算，采用土层厚为$H_C = H_1 + H_2' + H_3' + \cdots\cdots$，固结系数为$c_{vc} = c_{v1}$。

顺便指出，如果分层中夹有透水层，则应将该层视为自由排水面，而将二透水层之间的土层分别计算它们的固结过程，将相同时刻的压缩量予以迭加。

2 平均指标法

格雷建议成层地基的固结可以仍按单层计算，但采用平均固结指标。

设第 i 分层的厚度、体积压缩系数、固结系数和渗透系数分别为 h_i、m_{vi}、c_{vi} 和 k_i，则整个土层达到某固结度（相应的时间因数为 T_v）所需时间 t 可由下式计算：

$$t = \frac{\mathrm{H}^2}{\bar{c}_v} T_v \qquad 5.9.12)$$

式中 H——整个土层厚，即各分层之和；

$\bar{c}_v$——整个土层的平均固结系数。

平均固结度$\bar{c}_v$按下式求得：

$$\bar{c}_v = \frac{\vec{k}}{\bar{m}_v \gamma_\omega} \qquad (5.9.13)$$

式中指标上方的符号“-”表示平均值。$\bar{k}$ 与 $\bar{m}_v$ 进一步可按下式求得：

$$\bar{k}=\frac{\sum h_i}{\sum\left(\frac{h_i}{k_i}\right)} \tag{5.9.14}$$

$$\bar{m}_v=\frac{\sum m_{vi}h_i}{h_i} \tag{5.9.15}$$

另外，　　$H=\sum h_i$

代入式（5.9.12），可得：

$$t=\sum\frac{h_i}{m_{vi}c_{vi}}\sum m_{vi}h_iT_v \tag{5.9.16}$$

5.9.4 有限应变土层的固结

太沙基固结理论实际上假设了固结过程中土的排水距离不变，因为一般情况下土层应变很小可以忽略不计。但是，在高压缩性地基上建造，会产生相当大的变形，沉降量甚至达到压缩土层厚的百分之几十。如仍按太沙基理论计算，固结时间明显偏长。奥申（Ojsen）和拉德（Ladd）曾利用差分法研究了这种大应变的固结问题。

假设地基土为线弹性体，固结系数为常量，瞬时施加荷重，针对地基沉降 s_t 为土层初始厚度 h_0 的 1%、10%、50%和 80%，用差分法考虑土层厚度变化，将所得沉降——时间曲线与太沙基小应变理论的结果对比，结果表明，当沉降量与土层初始厚度之比小于 10%时，在实用上可直接采用太沙基理论。

如果是超出了上述比值，则建议计算仍采用太沙基理论，但土层计算厚度 h 应按下式确定：

$$h=h_0-\frac{s_t}{2N_D} \tag{5.9.17}$$

式中 N_D——排水面的数目。

另外，吉勃逊和薛天曼还建议了另一种解法，即认为压缩系数非常量；有效应力与孔隙比已具有非线性关系；渗透系数 k 依赖于孔隙比，其计算比较复杂。

5.9.5 固结微分方程的差分解法

研究土体固结过程最终要求解微分方程。但是，除非将问题简化，或边界条件简单，微分方程求解往往相当复杂，甚至不能获得解析解。如本节中以上所述的几种复杂情况。为工程实用，复杂问题常求助于数值解法，有限差分法是处理固结问题的常用方法。

1 差分基本表达式

差分法是将微分方程近似地转化为代数方程表达式，以便于求解。

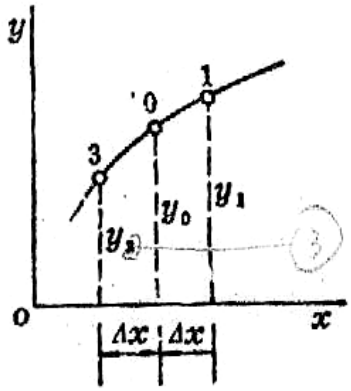


图 5.9.10　差分式推导图

现考虑图 5.9.10 所示的函数关系 y=f(x)。假设在曲线上取三点 0、1、3，每两点间横距为 Δx，根据泰勒级数，1、3 两点的函数值可由下列级数表示：

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \cdots\cdots \\ y_3 &= y_0 - \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \Delta x - \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \quad (5.9.18)$$

将上两式相减，得：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \frac{1}{2\Delta x}(y_1 - y_3) - \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 \frac{(\Delta x)^3}{3!} - \cdots\cdots$$

如果所取 Δx 很小，上式中右侧第二项及继后各项值均很小，可以忽略，则上式可改写成：

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \cong \frac{1}{2\Delta x}(y_1 - y_3) \quad (5.9.19)$$

如果将式（5.9.18）中的两式相加，同样略去高阶微量，可得：

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \cong \frac{1}{(\Delta x)^2}(y_1 + y_3 - 2y_0) \quad (5.9.20)$$

实际上，如果上述三点相距很近，可认为 y 值间呈线性关系，可以直接求得式（5.9.19）与（5.9.20），例如：

从点 3 到点 1：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(\frac{y_1 - y_0}{\Delta x} + \frac{y_3 - y_3}{\Delta x}\right) = \frac{1}{2\Delta x}(y_1 - y_3) \quad (5.9.21)$$

同样可直接求得式（4.9.20）。

如果 y 又是变量 z 的函数，可以在 z 方向增加 2、4 两点，如图 5.9.11，同样可写出与式(5.9.19）和式（5.9.20）相似的 $\frac{\partial y}{\partial z}$ 和 $\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ 的差分表达式。

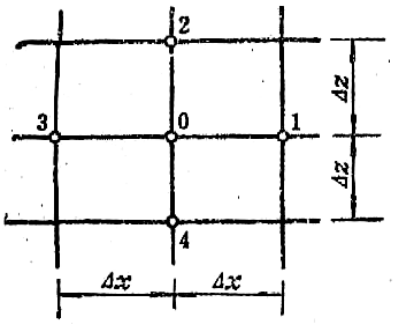


图 5.9.11　差分计算用网格

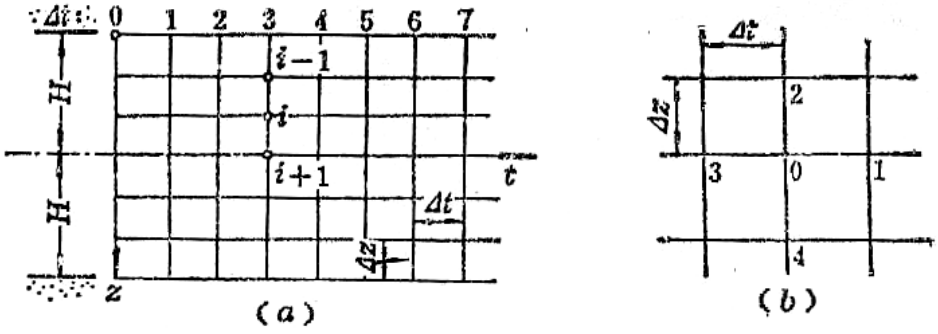


图 5.9.12　差分计算用网格

2 单向固结方程的差分计算

以太沙基固结微分方程式（5.8.10）为例，说明差分法的应用。

可以先将上下双面排水的地基划分成矩形网格，如图 5.9.12(a)，横边表示微小的计算时段Δt，竖边表示微小的距离段Δz。图形左上角一点代表时间与深度的零点。向右表示时间增长，向下表示深度变化。按图 5.9.12(b)，由于在任意点 o，超静压力应满足式（5.8.10）,故有：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = c_v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 \qquad (A)$$

由式（5.9.19）与（5.9.20），可得：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_0 = \frac{u_1 - u_0}{\Delta t}$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{u_2 + u_4 - 2u_0}{\Delta z^2}$$

代入式（A）并化简，得：

$$u_1 = \beta(u_2 + u_4 - 2u_0) + u_0 \qquad (5.9.21)$$

式中

$$\beta = \frac{c_v \Delta t}{(\Delta z)^2} \qquad (5.9.22)$$

也可以将上述符号略加修改：令图 5.9.12（b）中表示位置的 o 点为 i，则相应的 2 与 4 点可分别记为 i-1 与 i+1;如图 5.9.12(a)。假设 o 点相应的时间为 t，则增加一个时段Δt 后的时间记为 t+1，故式（5.9.21）即可写成：

$$u_{i,t+1}=\beta\left(u_{i-1,t}+u_{i+1,t}-2u_{i,t}\right)+u_{i,t}=\beta(u_{i-1,t}+u_{i+1,t})+(1-2\beta)u_{i,t} \qquad (5.9.23)$$

式（5.9.23）表明，在单向固结情况下，对于地基中任何一点，只要知道该点及其上、下节点处在 t 时刻的超静水压力，就可以求得经过一个时段Δt 后同一点的超静水压力。因此，如果地基中各节点处的初始超静水压力已经确定，就可以重复利用式（5.9.23），逐点推算出任何时刻的超静水压力分布。

为了使计算收敛并简化起见，式中的β不得大于 1/2。如令β=1/2,则式（5.9.23）可简化为：

$$u_{i,t+1}=\frac{1}{2}\left(u_{i-1,t}+u_{i+1,t}\right) \qquad (5.9.24)$$

具体计算时，一般可先假设Δz；然后按已知 C_v 和Δz，根据式（5.9.22）求出计算时每Δt，即　；再按弹性理论求出 t=0 时沿深度不同节点的初始超静水压力 u（对于单向固结即计算得的竖向附加应力）；最后按式（5.9.23）或（5.9.24）进行孔隙水压力的消散计算。计算时还需注意：1.在排水面处任何时刻 u=0；2.在不排水面处，应在该面下设对称虚节点，二对称点的 u 始终相等。

图 5.9.13 是一个算例。假设地基只有上面排水，下面不排水，厚度为 H。设将其分为 8 等份。沿深度的节点由 0 至 8。因为底面不排水，底面处有$\frac{\partial u}{\partial z}$=0，可在底面下另设一虚拟的对称点 7´，在任何时刻，$u_7=u_{7'}$(如底面排水，则任何时刻u_8=0)。在地面上瞬时加上外荷重，假设在 t=0 时沿深度各点引起的附加应力均为 1。因为地面排水，故除节点 0 的 u_0=0 外，其它各节点的超始超静水压力均为 u_0=1。这些数值均列于表 5.9.1。

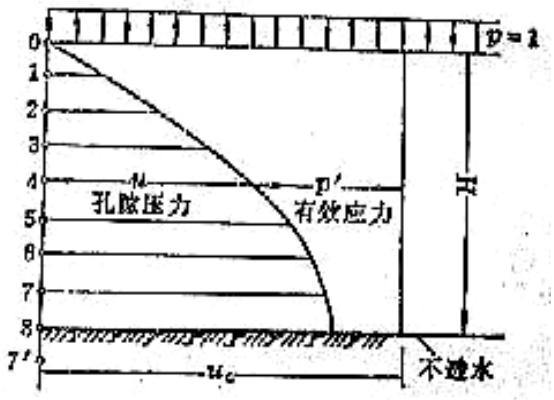


图 5.9.13　单向固结孔隙压力分布图

由已知的 c_v、Δz 令β=1/2，借式（5.9.22）计算出Δt。然后利用式（5.9.24）列表计算经过Δt、2Δt、3Δt……后各节点的超静水压力。经过 24Δt 后的超静水压力分布，如图 5.9.13 所示。

由上述可以看到，差分法计算成果的精度，取决于所采用的分格数 m 与β值。所取β愈小，m 愈大，则计算值与精确解愈接近；但计算工作量亦将成比例增加。

表 5.9.1

$$u_{i,t+1}=\frac{1}{2}(u_{i+1,t}+u_{i-1,t})$$

节点编号	计算时段编号													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.67	0.47	0.43	0.36	0.34	0.31	0.29	0.27	0.26	0.25	0.24	0.23	0.22	0.16
2	0.93	0.84	0.72	0.68	0.62	0.58	0.55	0.52	0.49	0.48	0.46	0.44	0.43	0.32
3	1	0.97	0.93	0.86	0.82	0.78	0.74	0.71	0.69	0.66	0.64	0.62	0.60	0.46
4	1	1	0.99	0.96	0.93	0.90	0.87	0.85	0.82	0.80	0.78	0.76	0.74	0.59
5	1	1	1	1	0.98	0.96	0.95	0.93	0.91	0.89	0.88	0.86	0.84	0.68
6	1	1	1	1	1	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.93	0.92	0.91	0.76
7	1	1	1	1	1	1	1	0.99	0.99	0.98	0.97	0.96	0.95	0.80
8	1	1	1	1	1	1	1	1	0.99	0.99	0.98	0.97	0.95	0.81
7′	1	1	1	1	1	1	1	0.99	0.99	0.98	0.97	0.95	0.95	0.80

3 用差分法解复杂固结问题

本节中曾讨论过有别于太沙基理论的几种复杂情况，利用差分法求解却不难予以处理。

（1） 外荷重随时间变化

计算方法与上述单向固结计算所述的完全一样，只是应该将某时段内增加的荷重（即超静水压力），中途分别加到各相应节点上，然后继续进行消散计算。

（2） 土层厚度随时间增大

当土层厚度随时间增长时，固结微分方程可写成下列差分形式：

$$u_{i,t+1}=\beta\left(u_{i-1,t}+u_{i+1,t}\right)+(1-2\beta)u_{i,t}+\Delta\sigma_{i,t,t+1} \tag{5.9.25}$$

式中 $\Delta\sigma_{i,t,t+1}$——在时段 t 至 t+Δt 内增加的土层重量。

为简化计，仍令 β=1/2，则式（5.9.25）变为：

$$u_{i,t+1}=\frac{1}{2}\left(u_{i-1,t}+u_{i+1,t}\right)+\Delta\sigma_{i,t,t+1} \tag{5.9.26}$$

例如，假设地基底面不排水，土层厚度等速增长，由 t=0 至 t=T（T 为土层增厚总时间），厚度由零增大到最后值 H。如果将土层等分为 8 层，则每层厚 ΔH=H/8,每层填筑时间为 ΔT=T/8。由于在给定 Cv、ΔH 和 β=1/2 情况下可以算得相应的计算时段 Δt，而该值并不等于 ΔT，故在选取 ΔH 时，应尽量使 ΔT 是求得的 Δt 的整数倍，如 ΔT/Δt=n，则每增加一层土重后，应按式(5.9.26)进行几次调整计算，调整次数由 ΔT/Δt 确定。表 5.9.2 是每增加一层土重进行两次调整的算例。注意，每层土的重量在起始的瞬时全部加上，故每层开始一列的数字表示已经将一层土重加进以后的超静水压力。图 5.9.14 是每经过 2 次调整计算后的超静水压力分布，其中也表示了 $n=10$ 的计算结果。

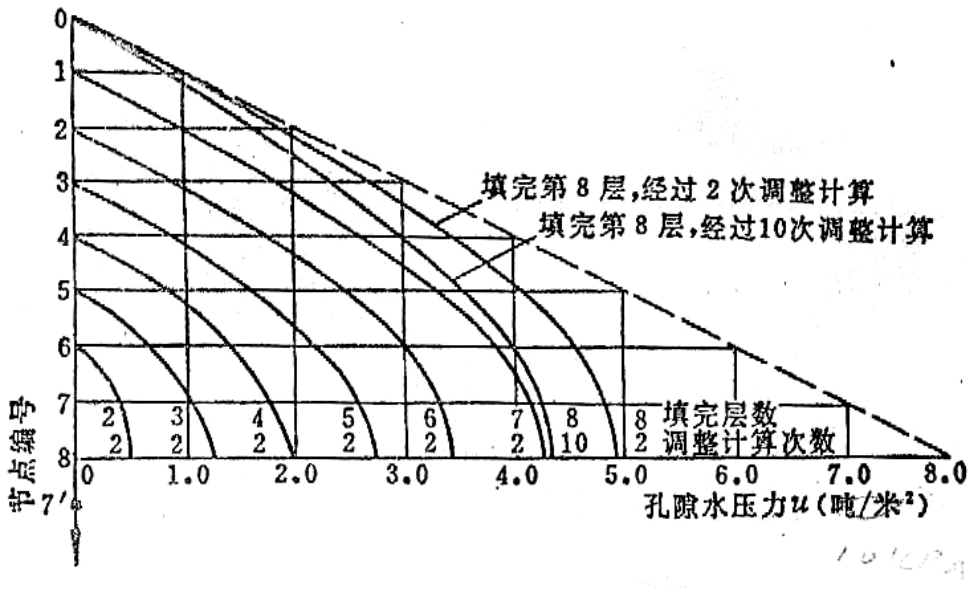


图 5.9.14 填土至不同高度时断面内的孔隙压力分布。

（3）.地基为成层土

对于成层地基中的每一个分层，因为认为是均质的，故仍按式(5.9.23)或式(5.9.24)计算各节点的超静水压力。所不同的是，要考虑每两层的界面处应满足必要的连续条件。同时，不同的层内应采用不同的分格尺寸或不同的计算时段。

在分界面上的 i 点，地下水渗流应符合连续条件，亦即进入界面的流速应等于离开界面的流速，即：

$$k_1(\frac{\partial u}{\partial z})_1 = k_2(\frac{\partial u}{\partial z})_2 \qquad (5.9.27)$$

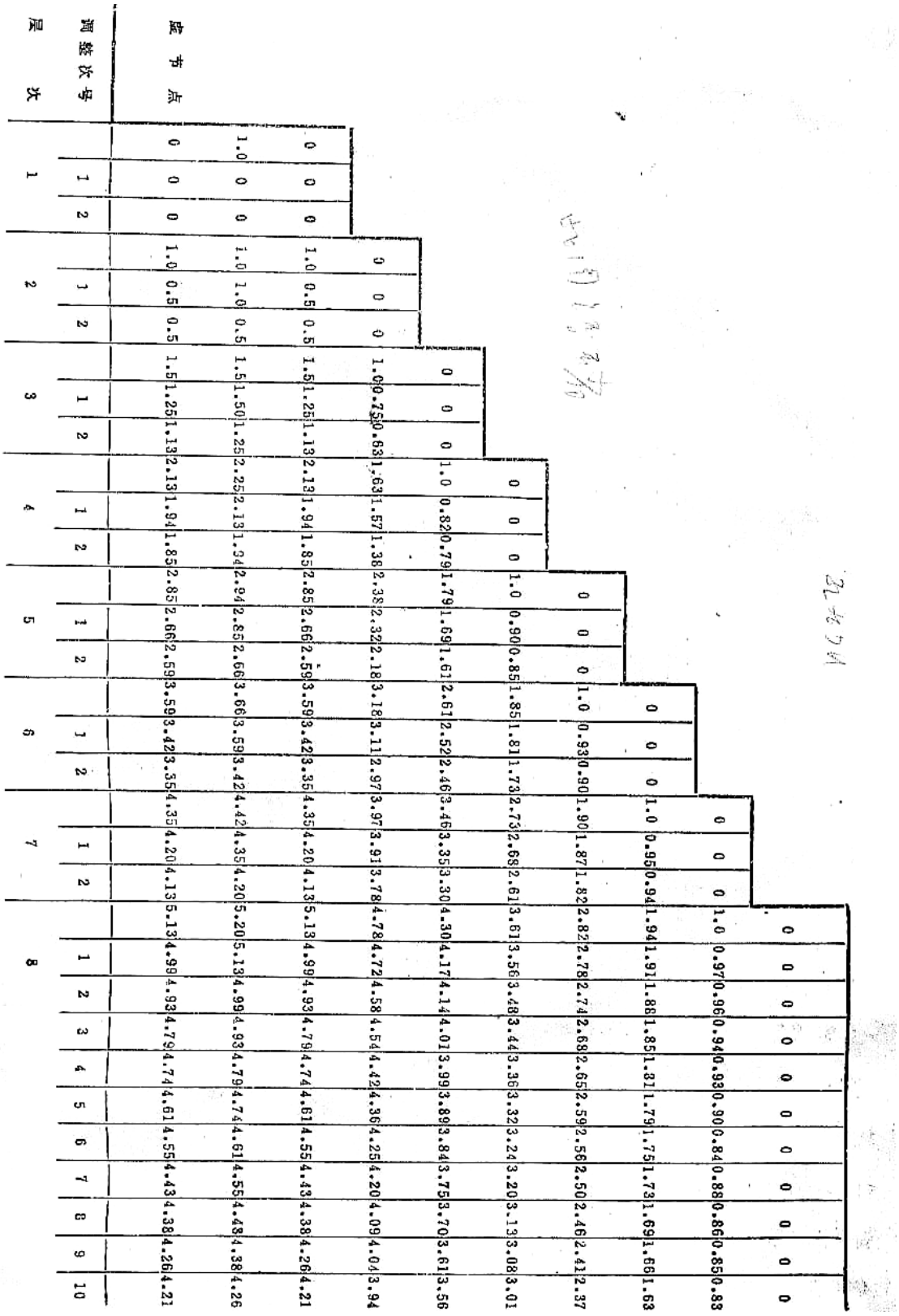
写成差分形式，则有：

$$k_1 \frac{u_{i,t} - u_{i-1,t}}{\Delta z_1} = k_2 \frac{u_{i+1,t} - u_{i,t}}{\Delta z_2} \qquad (5.9.28)$$

如果各分层内采用相同的分格尺寸，即 $\Delta z_1 = \Delta z_2$，则式(5.9.28)得到简化，如再令 $k_1 = nk_2$，该式可写成：

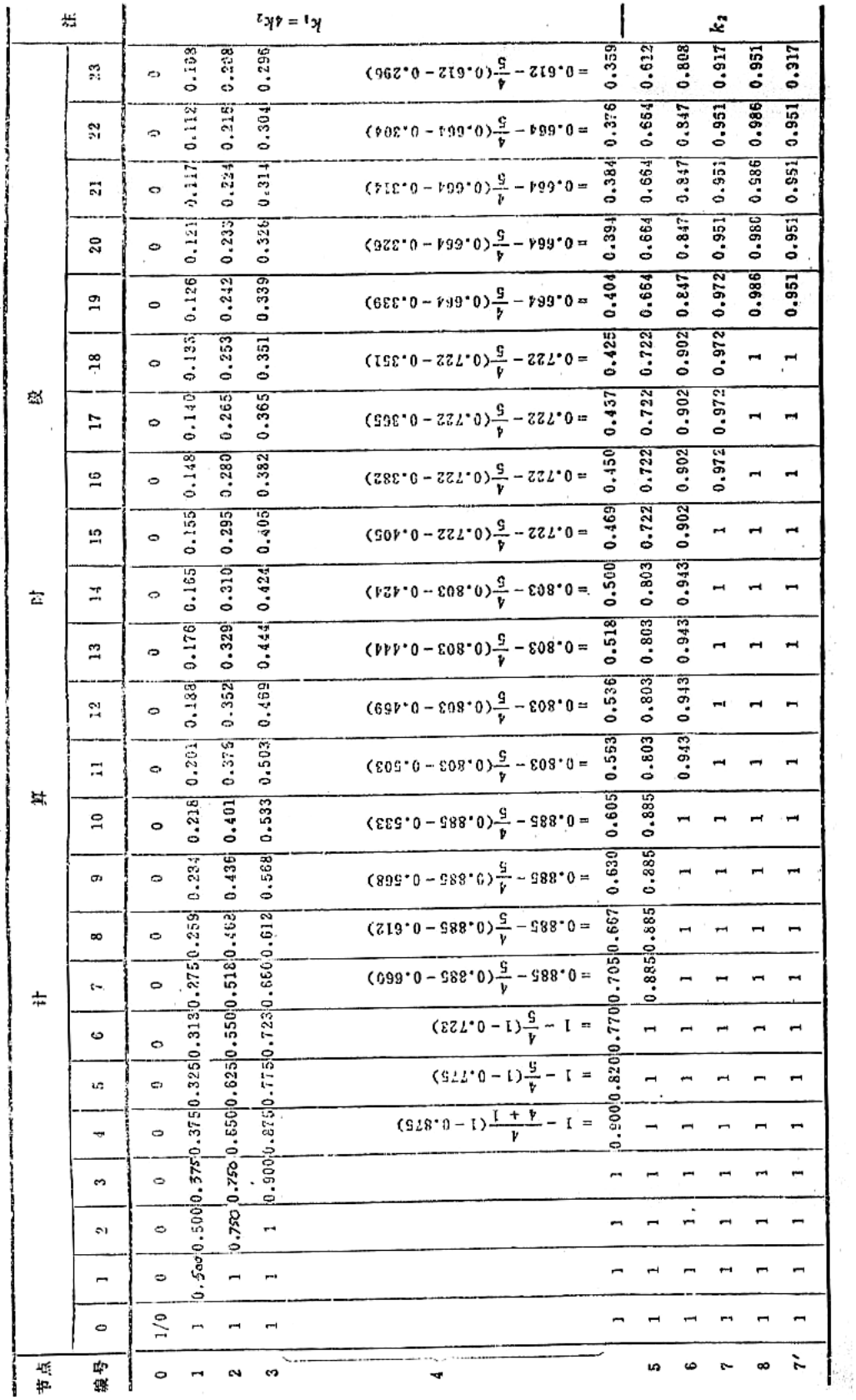
$$u_{i,t} = u_{i+1,t} - (\frac{n}{n+1})(u_{i+1,t} - u_{i-1,t}) \qquad (5.9.29)$$

表 5.9.2　土层厚度逐渐增大时的固结算例(假设每填筑一层的荷重增量为 1.0)



层次	调整次号	各节点										
1		0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		0	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0.5	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0.5	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0	0
3		0	1.0	0.5	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0.75	1.0	0.5	0	0	0	0	0	0	0
	2	0	0.63	1.25	0.5	0.5	0	0	0	0	0	0
4		0	1.0	0.75	0.5	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0.82	1.25	0.63	0.5	0	0	0	0	0	0
	2	0	0.79	1.32	0.75	0.63	0.5	0	0	0	0	0
5		0	1.0	0.82	0.63	0.5	0	0	0	0	0	0
	1	0	0.90	1.32	0.79	0.63	0.5	0	0	0	0	0
	2	0	0.85	1.39	0.86	0.75	0.63	0.5	0	0	0	0
6		0	1.0	0.90	0.75	0.63	0.5	0	0	0	0	0
	1	0	0.93	1.39	0.86	0.75	0.63	0.5	0	0	0	0
	2	0	0.90	1.45	0.93	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0
7		0	1.0	0.93	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0	0
	1	0	0.95	1.45	0.93	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0
	2	0	0.94	1.50	0.99	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0
8		0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0
	1	0	0.97	1.50	0.99	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0
	2	0	0.96	1.48	0.99	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0
	3	0	0.94	1.48	0.97	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0
	4	0	0.93	1.46	0.97	0.88	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0
	5	0	0.90	1.46	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
	6	0	0.84	1.44	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
	7	0	0.88	1.44	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
	8	0	0.86	1.44	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
	9	0	0.85	1.44	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
	10	0	0.83	1.44	0.96	0.88	0.81	0.75	0.63	0.5	0	0
		0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0
		0	0	0.94	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0	0	0
		0	0	0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5	0
		0	0	0	0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75	0.63	0.5
		0	0	0	0	0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75	0.63
		0	0	0	0	0	0	1.0	0.95	0.89	0.82	0.75
		0	0	0	0	0	0	0	1.0	0.95	0.89	0.82
		0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0.95	0.89
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0	0.95
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1.0
		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 5.9.3　成层地基固结算例(参看图 5.9.15)



根据式(5.9.22)分别计算各层的计算时段 Δt，加以比较，可得：

$$\Delta t_1 = n\Delta t_2$$

即第 1 层每进行 n 次计算，第 2 层才进行一次计算。

表 5.9.3 是一个算例。土层厚度分成 8 等份，底部不透水，$k_1 = 4k_2$。全部计算都按式(5.9.24)进行，只是对界面的节点 4(见图 5.9.15)，应按式(5.9.29)计算，并且下层每进行一次计算，上层要进行 4 次调整运算。经过 23 个时段后的计算结果，绘于图 5.9.15 中。

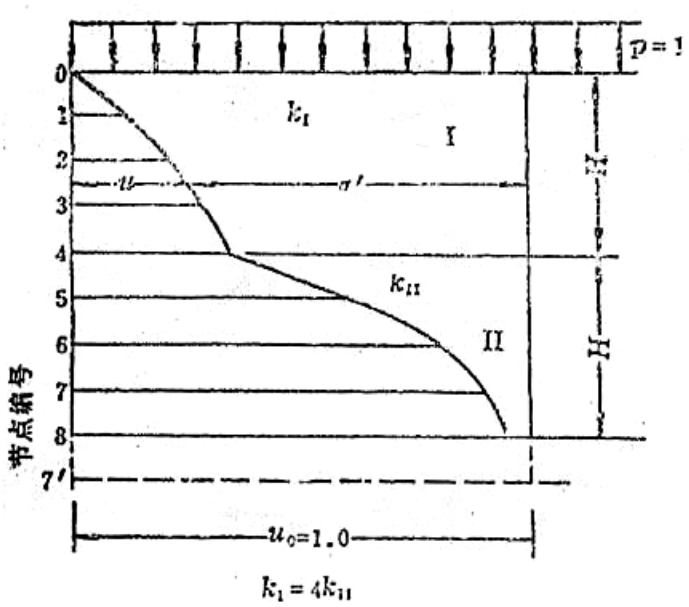


图 5.9.15 双层地基固结计算

对于其它特殊情况的差分计算，请参阅有关专著。

5.10 二向和三向固结

受建筑物荷重作用的一般地基总要引起多方向的排水和变形。以上讨论的单向固结实际上仅是特定条件下的情况。计算和实测沉降说明，在许多场合，按单向固结理论计算的沉降速率往往此实际发生的要慢，主要原因之一是水平向的排水加速了超静水压力的消散。图 5.10.1 是按三向固结理论计算得到的圆形基础荷重下粘土层的固结曲线。它说明，基础的半径相对越小，即 a/H 愈小，固结速率愈快；只有当基础尺寸与土层厚度比较相当大时(a/H→∞)，固结曲线才接近单向固结情况；甚至当 a/H=1 时，水平排水效应仍非常显著。

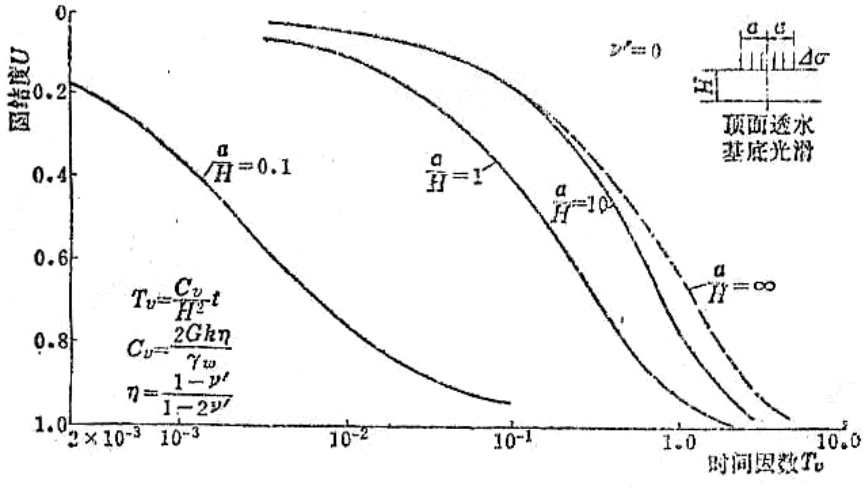


图 5.10.1 圆形基础荷重下土层的固结

建立三向固结理论要考虑土体在三个方向的排水和变形。解决三向固结问题现有两种方法。一种是太沙基—一伦杜立可(Rendulic)理论，它是太沙基理论的延伸。该理论推导时，假设固结过程中土体内的正立力之和（总应力）保持不变，忽现了实际存在的应力和应变的耦合作用，因而常称它为准三向固结理论。因其与物体热传导方程形式类似，故又称为扩散方程。另一种是比奥(Biot)理论，它直接从弹性理论出发，满足土体的平衡条件、弹性应力——应变关系和变形协调条件，此外还考虑了水流连续条件。它在理论上较准三向理论严格，但求解较复杂。推导中采用了弹性应力——应变关系指标。由于在实际固结过程中，弹性指标不断变化，故应力将发生重分布，同时总应力需要调整以满足应力和应变的相容条件，故固结过程中，虽然外荷重保持不变，土体中的主应力之和却不断变化。可见解比奥方程，涉及到应力重分布。因其求解复杂，目前能获得精确解只有少数几种情况，比奥理论多用于有限的计算中。

5.10.1 比奥固结理论

该理论常被认为是真三向固结理论。假设有一均质、各向同性的饱和土单元体 dxdydz，受外力作用，首先应满足平衡方程。以土骨架为隔离体，以有效应力表示，则有：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y'}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z'}{\partial z}+\frac{\partial u}{\partial z}=-\gamma\end{aligned}\right\} \qquad (5.10.1)$$

式中 σ'——有效应力；

u——超静水压力；

γ——土体容重。

考虑变形对的几何条件。设土骨架在 x、y、z 方向的位移为u^s,v^s,w^s，其六个应变分量应为：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{-\partial u^s}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{-\partial v^s}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{-\partial w^s}{\partial z}\\
&\gamma_x=-(\frac{\partial w^s}{\partial y}+\frac{\partial v^s}{\partial z})\\
&\gamma_y=-(\frac{\partial u^s}{\partial z}+\frac{\partial w^s}{\partial x})\\
&\gamma_z=-(\frac{\partial v^s}{\partial x}+\frac{\partial u^s}{\partial y})
\end{aligned}\right\}\qquad (5.10.2)$$

式中 ε_x，ε_y，ε_z——x, y, z 方向的正应变；

γ_x，γ_y，γ_z——yz, xz 与 xy 平面内的剪应变。

在材料为均质弹性体的假设下，应变分量可表示为应力分量的函数：

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{1}{E'}[\sigma'_x-v'(\sigma'_y+\sigma'_z)]\\
&\varepsilon_y=\frac{1}{E'}[\sigma'_y-v'(\sigma'_x+\sigma'_z)]\\
&\varepsilon_z=\frac{1}{E'}[\sigma'_z-v'(\sigma'_x+\sigma'_y)]\\
&\gamma_x=\frac{\tau_{yz}}{G'}=\frac{\tau_{yz}.2(1+v')}{E'}\\
&\gamma_y=\frac{\tau_{xz}}{G'}=\frac{\tau_{xz}.2(1+v')}{E'}\\
&\gamma_z=\frac{\tau_{xy}}{G'}=\frac{\tau_{xy}.2(1+v')}{E'}
\end{aligned}\right\}\qquad (5.10.3)$$

式中 E′，v′，G′——分别为弹性模量、泊桑比与剪切模量(排水条件下)。

为了方便，进一步找出应力与位移的关系。为此，解式(5.10.3)，并注意体应变 $\varepsilon_v=(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)$，可得：

$$\left.\begin{aligned}
&\sigma_x=2G'(\varepsilon_x+\frac{v'}{1-2v'}\varepsilon_v)\\
&\sigma_y=2G'(\varepsilon_y+\frac{v'}{1-2v'}\varepsilon_v)\\
&\sigma_z=2G'(\varepsilon_z+\frac{v'}{1-2v'}\varepsilon_v)\\
&\tau_{xy}=G'\gamma_z,\quad \tau_{yz}=G'\gamma_x,\quad \tau_{xz}=G'\gamma_y
\end{aligned}\right\}\qquad (5.10.4)$$

将式(5.10.4)及式（5.10.2）代入平衡方程(5.10.1)，得到下式：

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2 u^{s^2}-(\frac{\lambda'+G'}{G'})\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial x}+\frac{1}{G'}\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ \nabla^2 v^{s^2}-(\frac{\lambda'+G'}{G'})\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial y}+\frac{1}{G'}\frac{\partial u}{\partial y}=0\\ \nabla^2 w^{s^2}-(\frac{\lambda'+G'}{G'})\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial z}+\frac{1}{G'}\frac{\partial u}{\partial z}=-\gamma\end{aligned}\right\} \tag{5.10.5}$$

上式中，$\lambda'=\dfrac{v'E'}{(1+v')(1-2v')}$

$$G'=\frac{E'}{2(1+v')}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

式(5.10.5)的三个方程式中包含四个未知数：u^s、v^s、w^s 与 u。为了求解，还需要补充一个方程。由于水是不可压缩的，对于饱和土，土单元体内水量的变化率在数值上等于土体积的变化率，故由达西定律可得：

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u=-\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \tag{5.10.6}$$

式(5.10.6)提供了水流连续条件的第四个方程。这样，解式(5.10.5)与(5.10.6)组成的方程组，即可求得四个未知量。可以看到，这样得到的结果，既满足弹性材料的应力-应变关系和平衡条件，又满足变形协调条件与水流连续方程。故比奥理论是三向固结的精确表达式。

另外，根据式(5.10.3)，并注意到有效应力σ′ 等于总应力σ与超静水压力 u 之差，容易得到下列关系式：

$$\frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t}=\frac{1-2v'}{E'}\frac{\partial}{\partial t}(\Theta-3u) \tag{5.10.7}$$

代入式(5.10.6)，则可求得：

$$C_{v3}\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{3}\frac{\partial\Theta}{\partial t} \tag{5.10.8}$$

式中 C_{v3}——三向固结时的固结系数：

$$C_{v3}=\frac{kE'}{3\gamma_w(1-2v')} \tag{5.10.9}$$

Θ ——一点的正应力之和，$\Theta=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$。

从式(5.10.8)可以看到：

(1)方程中的 C_{v3} 为三向固结系数，它不同于单向固结系数 C_{v1}；(2)式中 Θ 的是一点的三个正

应力之和(总应力)，在固结过程中并不一定为一常量，只有在固结完成后，它才等于外荷重在该点的三个正应力分量之和；（3）当只考虑超静孔压时，式（5.10.5）第三式中$-\gamma$可代为 0，即不计静水压力部分。

对于二向平面（平面应变）问题，比奥方程为式(5.10.5)中的第 1 与 3 两式及水流连续条件为：

$$c_{v2}\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{1}{2}\frac{\partial \Theta}{\partial t} \tag{5.10.10}$$

式中c_{v2}一二向固结时的固结系数；

$$c_{v2}=\frac{kE'}{2\gamma_w(1+v')(1-2v')} \tag{5.10.11}$$

∇^2—拉普拉斯算子，$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，$\Theta_2=\sigma_x+\sigma_z$。

顺便指出，按弹性应力一应变关系，可以得到单向固结的固结系数C_{v1}，有下列形式：

$$c_{v1}=\frac{kE'(1-v')}{\gamma_w(1+v')(1-2v')} \tag{5.10.12}$$

固结系数与土的变形特性有关。三种固结条件下的固结系数存在以下关系：

$$c_{v1}=2(1-v')C_{v2}=3\frac{1-v'}{1+v'}C_{v3} \tag{5.10.13}$$

如果$v'=0.5$，则三个系数相等，如果$v'=0$，则$c_{v1}=2c_{v2}=3c_{v3}$。

5.10.2 太沙基—伦杜立克理论(扩散方程)

扩散方程是从上述表明水流连续条件的式(5.10.6)导得。假设土体受到三个方向有效主应力σ_1'，σ_2'和σ_3'作用，到其体积应变ε_v可以下式表示：

$$\varepsilon_v=f(\sigma_1',\ \sigma_2',\ \sigma_3') \tag{B}$$

而

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_1'}\frac{\partial \sigma_1'}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_2'}\frac{\partial \sigma_2'}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_3'}\frac{\partial \sigma_3'}{\partial t} \tag{C}$$

又

$$\sigma_1'=\sigma_1-u,\quad \sigma_2'=\sigma_2-u,\quad \sigma_3'=\sigma_1-u \tag{D}$$

将(D)代入(C)，并加整理，有：

$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_1'}\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_2'}\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_3'}\frac{\partial \sigma_3}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_1'}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_2'}+\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_3'}\right) \tag{E}$$

由于
$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_1}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_2}=\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial \sigma_3}=\frac{1-2\nu'}{E'} \tag{F}$$

则（E）可表示为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}&=\frac{1-2\nu'}{E'}[(\frac{\partial \sigma_1}{\partial t}+\frac{\partial \sigma_2}{\partial t}+\frac{\partial \sigma_3}{\partial t})-3\frac{\partial u}{\partial t}]\\&=\frac{1-2\nu'}{E'}[\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)}{\partial t}-3\frac{\partial u}{\partial t}]\\&=\frac{1-2\nu'}{E'}(\frac{\partial \Theta}{\partial t}-3\frac{\partial u}{\partial t})\end{aligned} \tag{G}$$

太沙基假设，一点的主应力之和不随时间变化，即$\frac{\partial \Theta}{\partial t}=0,$

得：
$$\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t}=-3\frac{1-2\nu'}{E'}\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.10.14}$$

从式(5.10.6)，得：

$$\frac{k}{\gamma_w}\nabla^2 u=\frac{3(1-2\nu')}{E'}\frac{\partial u}{\partial t}$$

或

$$c_{v3}\nabla^2 u=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.10.15}$$

式中c_{v3}——三向固结系数，

$$c_{v3}=\frac{kE'}{3\gamma_w(1-2\nu')} \tag{5.10.16}$$

比较式(5.10.15)和式(5.10.8)，在扩散方程中，缺少比奥方程中的$\frac{1}{3}\frac{\partial \Theta}{\partial t}$的一项，这是因为前者假设了土体中一点的三个主应力之和为常量，即$\frac{\partial \Theta}{\partial t}=0$所致。但两种理论的固结系数却完全一致，所以扩散方程也称为准三向（二向）固结理论。

如果是二向固结，类似可得：

$$c_{v2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.10.17}$$

其中二向固结系数C_{v2}与式(5.10.11)相同。

对于一维固结，即单向固结情况，从式（5.10.12）得：

$$c_{v1}=\frac{kE'(1-\nu')}{\gamma_w(1+\nu')(1-2\nu')}=\frac{kE_s}{\gamma_w}$$

这与太沙基一维固结系数c_v是相同的。这时的主应力之和$\Theta_1=\sigma_z$，由于在荷载不变时，总应力σ_z在固结过程中不变，所以$\frac{\partial\Theta_1}{\partial t}=\frac{\partial\sigma_z}{\partial t}=0$。这时式（5.10.8）与式（5.10.14）完全相同，所以在二维情况下，太沙基理论是严格的。

5.10.3 比奥理论和准固结理论的比较

为了弄清两种理论的差别，可以进行以下比较：

1. 两种理论的推导依据

二者都假设土骨架是线弹性体，小变形，渗流服从达西定律。在推导时，Biot 理论将水流连续条件与弹性理论相结合，故可解得土体受力后的应力、应变和孔压的生成和消散过程，理论上是完整严密的。而扩散方程是将应力应变关系视为常量（E＝常数）的同时，也假设三个主应力（总应力）之和不变，不满足变形协调条件。在土工数值计算中，人们也使用非线性弹塑性模型代替线弹性模型与 Biot 固结理论耦合求解。

2. 曼代尔一克雷尔效应(Mandel-Cryer effect)

按比奥理论解饱和土的固结问题时会出现一种异乎寻常的现象：在不变的荷重施加于土体上后的某时段内，土体内的孔隙水压力不是下降，而是继续上升，而且超过应有的压力值。该现象只是由曼代尔（Mandel）发现，后者克雷尔(Cryer)也发现，故称为曼代尔一克雷尔效应，或称应力传递效应。图 5.10.2 是按比奥理论得到的条形基础受均布荷重轴线上一点 M 的应力和超静水压力的过程线。该图表明：

(1).M 点的垂直与水平应力分量σz 与σx 虽然在开始与终了时和按弹性理论算得的应力值一致，但在固结过程中它们却不断地在变化，并不保持常量，可图 5.10.2(a)。

(2).超静水压力 u 的消散过程(图(b))与按扩散方程算得的不同，是在固结的开始段持续上升，等到某时刻后才开始下降，逐步消散。这种现称为曼代尔-克雷尔效应。曼代尔-克雷尔效应在圆球试样的固结试验与深厚地基粘土中均曾发现过。许多学者进行过专门的论证试验。

产生曼代尔-克雷尔效应的原因可以解释如下。在表面透水的地基面上施加荷量，经过暂短的时间，靠近排水面的土体由于排水发生体积收缩，总应力与有效应力均有增加。土的泊桑比也随之改变。但是内部土体还来不及排水。为了保持变形协调，表层的压缩必然挤压土体内部，使那里的应力有所增大。因此，某个区域内的总应力分量将超过它们的起始值，而内部孔隙水由于收缩力迫使其压力上升。水平总应力分量的相对增长(与起始值相比)比垂直分量的相对增长要大。

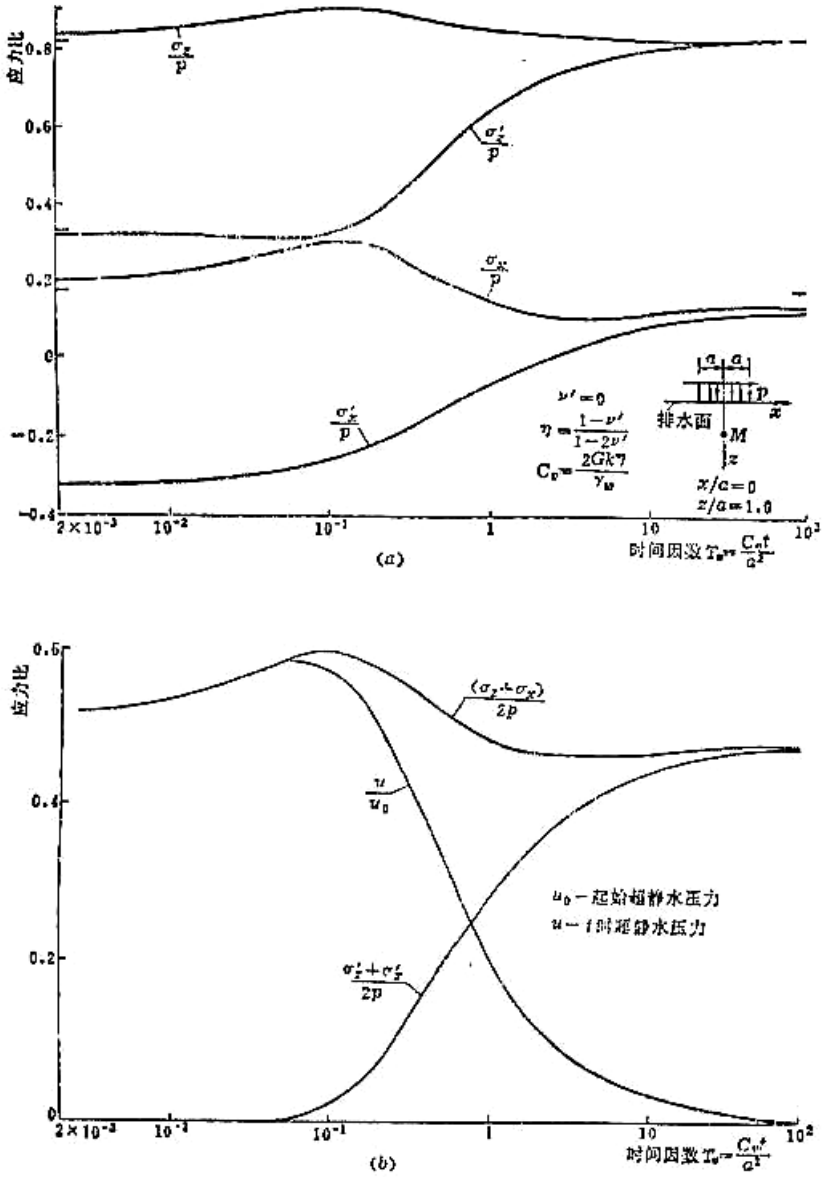


图 5.10.2 条形基础荷重下的二向固结

按平面应变问题分析，该效应有以下特点：

a)地面排水性能愈差，效应愈不显著，地面不透水时，几乎无该效应，如图 5.10.3。

b)如果地面透水，超静水压力出现峰值点的时间随深度而推后，并且峰值愈来愈高.图 5.10.4 表示在 $x/a=0$ 的中心线上，不同深度处的超静水压力比的时程曲线。

c)该效应的倾向影响范围是在 $x^2-z^2=a^2$ 的双曲线的二曲线之间；在同一水平面上，离基础轴线愈近，效应愈明显。图 5.10.5 表示在 $z/a=0.5$ 的水平线上，距中心不同距离处的超静水压力比的时程曲线。

d)由于曼代尔-克雷尔效应，地面透水的土体中一点的剪应力随时间变化，最大值可能在固结过程中的基础边缘产生，如图 5.10.6。有的工程事故发生在竣工以后，有可能由于这个原因造成。

e)该效应还随土的泊松比的增大而减小，如图 5.10.7。

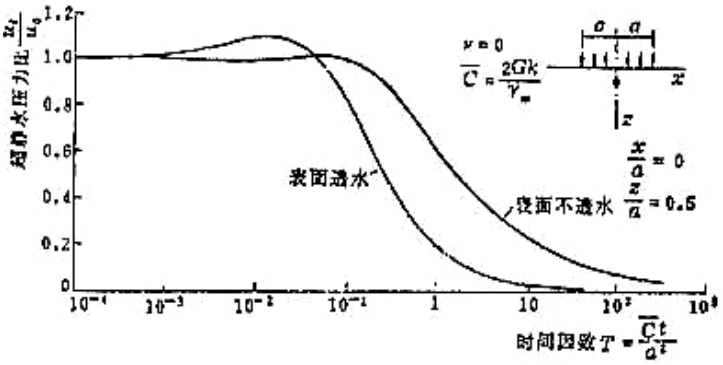


图 5.10.3 表面透水性对超静水压力消散的影响

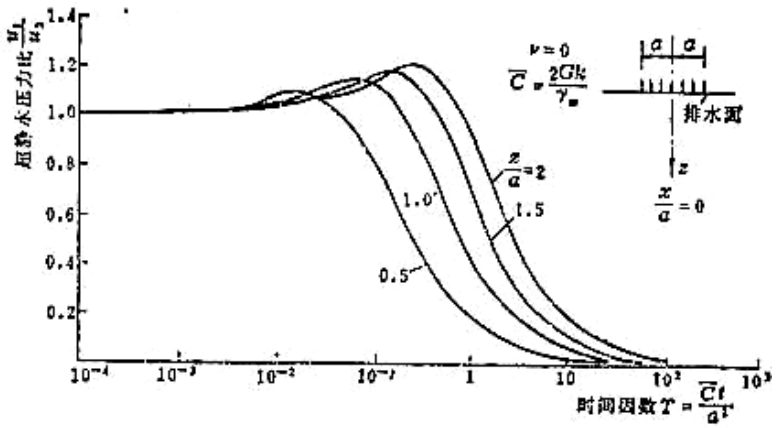


图 5.10.4 不同深度的超静水压力的消散

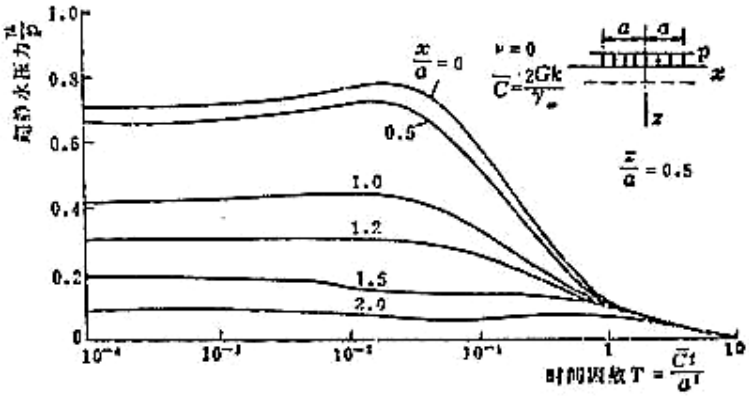


图 5.10.5 据轴线不同水平距离的各点的超静水压力

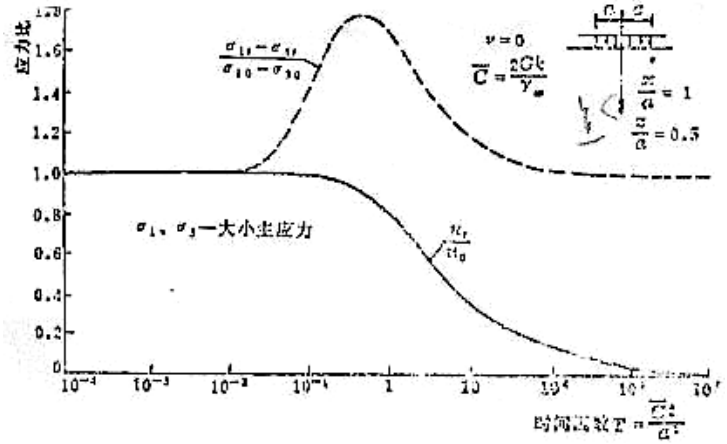


图 5.10.6 最大剪应力随时间的变化

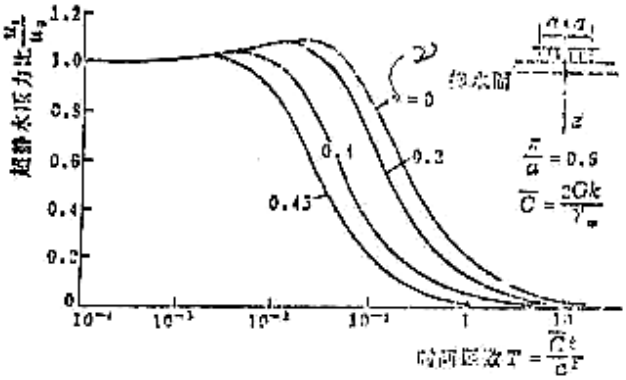


图 5.10.7 泊松比对超静水压力消散的影响

3．超静水压力消散的比较

按扩散理论求解固结问题不会出现曼代尔一克雷尔效应。但是，如果不计起始段的超静水压力增长，并且在扩散方程中，对于三向问题，固结系数采用C_{v3}，二向问题采用C_{v2}，则解得的超静水压力的消散过程与比奥的精确解是十分相近的。图 5. 10. 8 是条形基础轴线上一点的计算结果。圆形基础也有类似情况。

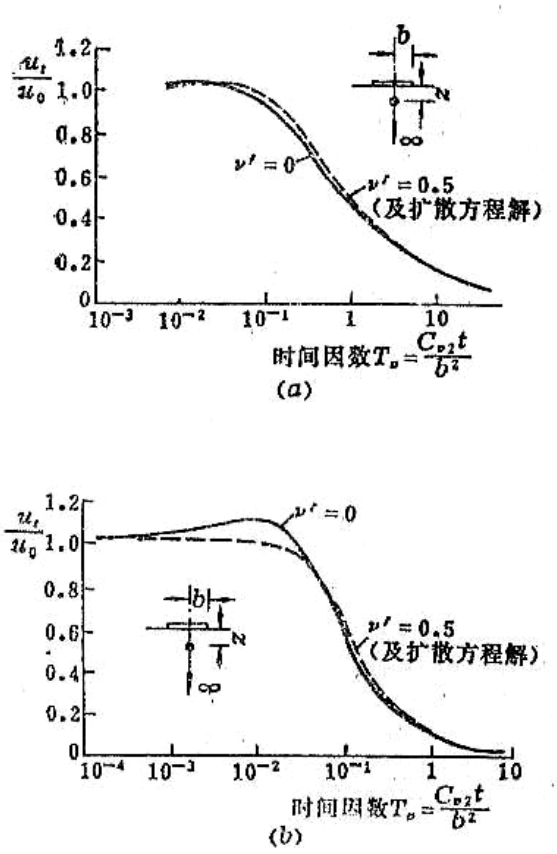


图 5-10-8　扩散方程与比奥理论解的超静水压力消散比较

（a）顶面不透水；（b）顶面透水

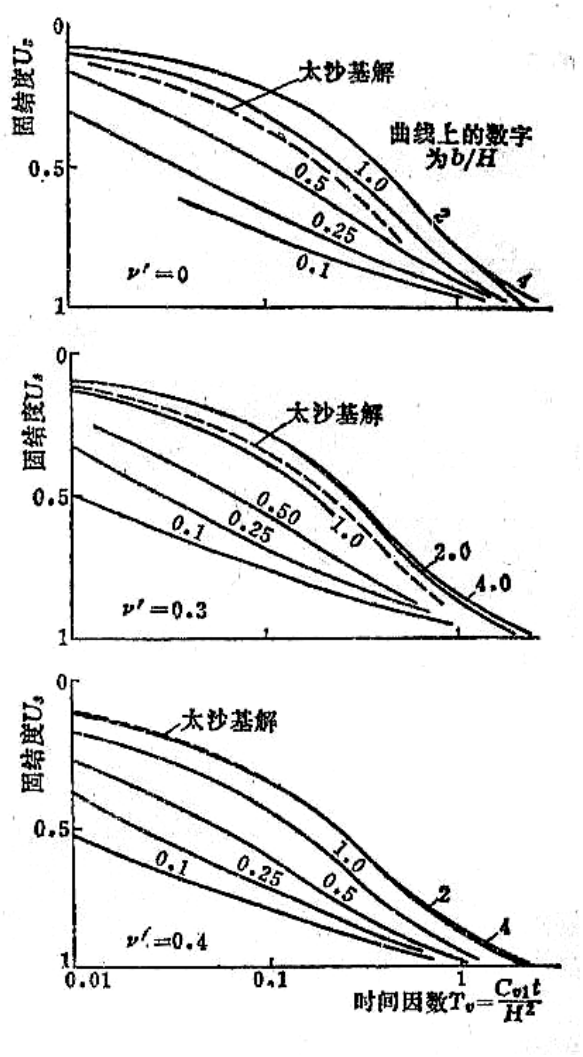


图 5-10-9　时间因数与固结度（以沉降量定义）的关系（条形基础）

4．固结度的比较

无论是单向或准三向固结理论，都只研究土体中超静水压力的消散过程，不涉及与变形的耦合作用，并用超静水压力的消散程度定义固结度U_p，而且认为它等于按土体变形定义的固结度U_s。实际上，只有在单向固结时才会是这样。对于实际存在应力重分布的真二向或三向固结，在同一时刻的两种固结度并不相等，而且随ν'值的不同而改变。

萨夫曼(schiffman)等的研究表明，尽管从理论上说，扩散理论并不是严密的方法，但是由于分析计算中采用的土性指标有不确定性，所以如果基础半宽与压缩层厚度之比的 a/H＞1，在工程实用上，用简单的扩散理论估算沉降——时间关系已有足够度。

5.10.4 三向固结的轴对称问题

地基处理工程中常采用砂井或塑料排水带加速软土地基固结。这时固结由两种排水作用所引起：1.沿垂直方向(z 轴)的渗流；2.垂直于 z 轴的平面内的轴对称渗流。将平面内渗流以极坐标表示，列式(5.10.15)可改写成下式：

$$c_v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)=\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (5.10.18)$$

式中 r——离开砂井轴线的水平距离，随研究点的位置而改变，如图 5.10.10。

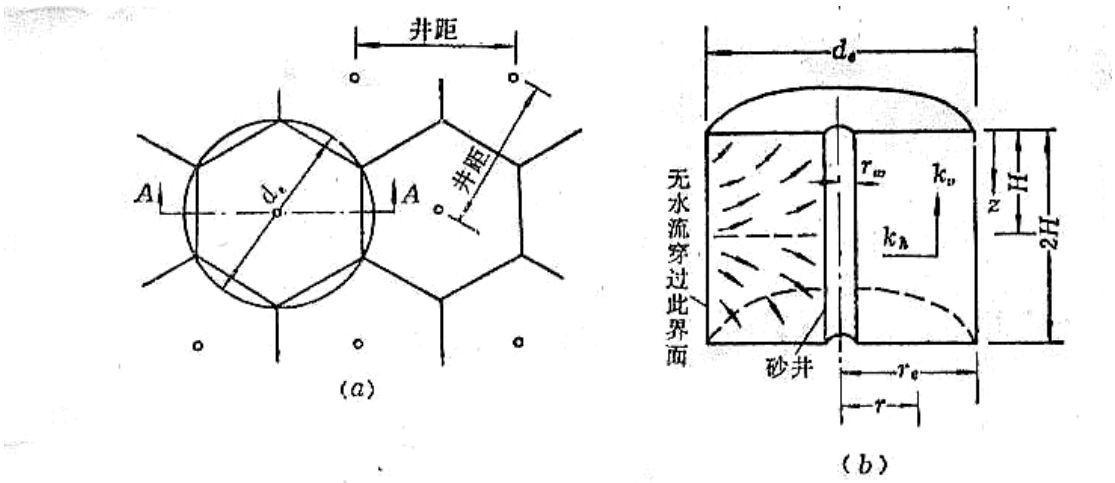


图 5.10.10 砂井和每个砂井影响范围内的渗流

（a）　砂井平面布置；(b)剖面 A-A

卡雷洛(Carrillo)业已证明，式(5.10.18)表示的固结可以分解为两种渗流来计算：如果某一时刻由竖直向渗流引起的地基的固结度为U_z，又计算得同一时刻由轴对称平面渗流引起的固结度为U_r，则地基的总固结度U_r 可由下式计算：

$$1-U=(1-U_z)(1-U_r) \qquad (5.10.19)$$

竖直向渗流引起的固结度U_z在 5.8.2 节中已详细叙述。以下只讨论轴对称渗流引起的固结度U_r。

巴隆（Barron）系统第研究过砂井地基的排水固结问题。他考虑了在固结时的两种变形情况：1.自由竖向应变；2。等竖向应变。前者认为地基表面的荷载分布是均匀的，后者则认为地面的变形是单一的。实际上，固结时，靠近砂井的土体固结较快该区域的地面沉降较大，必然要使地面的接触压力发生再分布。如果作用荷载的材料在该下陷部分有产生拱作用的趋势，情况更是如此。如果完全发挥拱作用，很可能更接近于等应变情况。

假设砂井群呈三角形分布，如图 5.10.10（a），则每个砂井的影响范围为六边形。如果用当量直径 d_e 的圆代替该正六边形，则显然此圆便是每个砂井的影响区。圆内各点的水必将沿平面的径向向砂井排泄。然后垂直向上及向下流动，对于辐射流，由于水流对称，圆周面可以看成不排水面。取包围在影响圆内的单位厚度的土体研究，先不考虑垂直向渗流，其固结方程为：

$$c_{vr}(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2 u}{\partial r^2})=\frac{\partial u}{\partial t} \tag{5.10.20}$$

式中：c_{vr} 水平方向渗流的固结系数：

$$c_{vr}=\frac{k_h(1+e)}{a_v\gamma_w} \tag{5.10.21}$$

解方程　(5.10.20)应满足下列边界条件和初始条件：

（1）　井圆周面处（$r=r_w$）在 t>0 时，超静水压力$u=0$；

（2）　影响区的周界面，即$r=r_e$处，$\frac{\partial u}{\partial r}=0$。

（3）　$t=0, r_w\le r\le r_e, u=u_0$。

解式 (5.10.20)得到等应变情况下的超静水压力表达式如下：

$$u_r=\frac{4\bar{u}}{d_e^2 f(n)}[r_e^2\ln(\frac{r}{r_w})-\frac{r^2-r_w^2}{2}] \tag{5.10.22}$$

式中$\bar{u}=u_0e^{\lambda}$整个地基平均辐射向渗流引起的超静水压力；

u_0——辐射向的起始平均超静水压力；

$$\lambda=\frac{-8T_r}{f(n)},\quad n=\frac{r_e}{r_w} \tag{H)(I}$$

$$T_r=\frac{C_{vr}t}{d_e^2} \tag{J}$$

$$f(n)=\frac{n^2}{n^2-1}\ln(n)-\frac{3n^2-1}{4n^2} \tag{k}$$

巴隆获得等应变时辐射向的平均固结度U_r表达式如下：

$$U_r=1-\exp[\frac{-8T_r}{f(n)}] \tag{5.10.23}$$

针对不同径比$n=\frac{r_e}{r_w}$的 $U_r=f(T_r)$　关系，也可查有关的计算表格。

对于自由应变的解答可参考有关文献。

图 5.10.11 是两种解答结果的比较。由图中可以看到，　当$n=\frac{r_e}{r_w}=5$时，自由应变引起的固

结度较大，但在约$U_r > 0.5$以后，两种情况下的曲线基本趋于一致。

在地基中设置砂井时，施工操作将不可避免地扰动井壁周围土体，引起“涂抹”作用，使其渗透性降低；另外砂井中的材料对水的垂直渗流有阻力，使砂井内不同深度的孔压不全等于大气压（或等于 0），这被称为“井阻”，涂抹和井阻使地基地固结速率减慢。不考虑涂抹和井阻对固结影响的砂井称为理想井。

非理想井的剖面如图 5.10.11 所示。其中 H 为单面排水时砂井长度，双面排水时，砂井长度为 2H。r_s为涂抹区外缘半径；r_w和r_e分别为砂井和影响区半径。砂井的竖向渗透系数为k_w；涂抹区的渗透系数为k_s；未扰动的地基土地水平渗透系数为k_n。

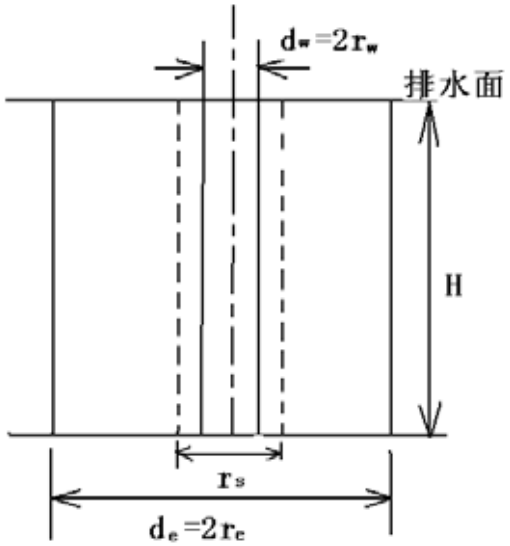


图 5.10.11　非理想井示意图

仍采用式（5.10.20）径向固结的基本固结方程，不过边界条件和初始条件变为：

（1）$r = r_w$时，$u_r = u_w$；

（2）$r = r_e$时，$\dfrac{\partial u_r}{\partial r} = 0$；

（3）$z = 0$时，$u_w = 0$；

（4）$z = H$时，$\dfrac{\partial u_w}{\partial z} = 0$；

（5）$t = 0$时，$r_w \le r \le r_e$，$u = u_0 = p_0$。

并且在$r = r_s$处，孔压是连续的；在砂井和土体间流量符合连续条件：

$$\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = -\frac{zk_s}{r_w k_w}\frac{\partial u_r}{\partial r}\bigg|_{r=r_w} \tag{5.10.24}$$

满足式（5.10.20）和（5.10.24）及以上初始条件和边界条件的解可得到：

$$u_w = u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D}{F_a + D}\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{H}e^{-\beta_r t} \tag{5.10.25}$$

$$u_r \begin{cases} u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D}{F_a+D}[\frac{k_h}{k_s}(\ln\frac{r}{r_w} - \frac{r^2 - r_w^2}{2r_e^2} + D)\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{H}e^{-\beta_r t}(r_w \le r \le r_s) \\ u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D}{F_a+D}[\ln\frac{r}{r_s} - \frac{r^2 - r_s^2}{2r_e^2} + \frac{k_h}{k_s}(\ln s - \frac{s^2-1}{2n^2} + D]\frac{2}{M}\sin\frac{Mz}{H}e^{-\beta_r t}(r_s \le r \le r_e) \end{cases} \tag{5.10.26}$$

式中，$s = \frac{r_s}{r_w}$；

$\beta_r = \frac{BC_{vh}}{(F_a + D)d_e^2}$ ；

G：井阻因子，$G = \frac{k_h}{k_w}(\frac{H}{d_w})^2$ ；

$M = \frac{2m+1}{2}\Pi \qquad m = 0,1,2.....$

$Fa = (\ln\frac{n}{s} + \frac{k_h}{k_s}\ln s - \frac{3}{4})\frac{n^2}{n^2-1} + \frac{s^2}{n^2-1}(1 - \frac{k_h}{k_s})(1 - \frac{s^2}{4n^2}) + \frac{k_h}{k_s}\frac{1}{n^2-1}(1 - \frac{1}{4n^2})$；

$D = \frac{8C_{vh}}{(F_a + D)d_e^2}$；

由式（5.10.26）可得考虑涂抹和井阻的砂井地基径向固结度一般表示为：

$$\overline{U_r} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{M^2} e^{-\beta_r t} \tag{5.10.27}$$

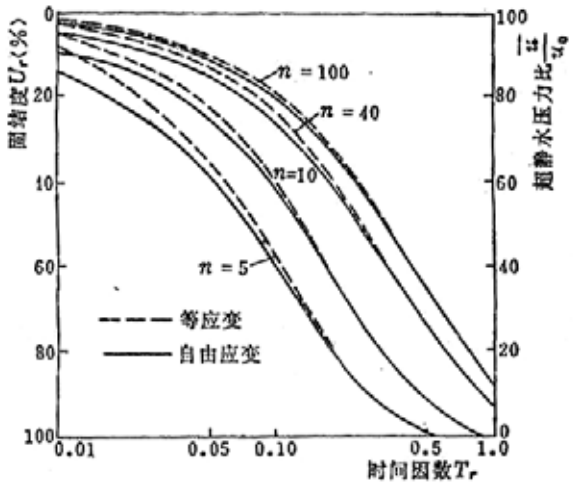


图 5.10.12 轴对称渗流时的$U_r = f(T_r)$

附带指出，砂井经过该进和演变，现在大多已由塑料排水带代替。该材料是由塑料排水芯带和外包滤膜组成的长条反滤排水产品，宽度和厚度一般分别约为 100㎜ 和 4～5㎜.将其垂直插入地基，可起类似于砂井的加速软土地基排水固结的作用。排水带地基的固结计算，仍采用上述用于砂井的方法，只是应当先将排水带截面尺寸转化为砂井的当量直径d_w：

$$d_w = \alpha \frac{2(b+\delta)}{\bar{W}} \tag{5.10.27}$$

式中　b,δ——排水带截面的厚度和宽度；

α　——转化系数，一般采用$\alpha = 1$

5.11 非饱和土的固结

5.11.1 非饱和土固结的某些特点

非饱和土是一种三相体系，其中除包含可以认为是不可压缩的固相土粒和液相水外，还含有一定数量的可压缩气体。由这种体系组成的土体，不仅在压缩方面，而且在渗透性方面，都比饱和土（二相体系）复杂的多，迄今还没有一个公认可实际应用分析非饱和土固结问题的成熟的理论方法。

建立非饱和土固结方程的复杂性，主要在于下面一些原因：

1.饱和土固结理论的建立，是以土体积变化的连续条件为基础的，即认为在固结过程中，土体积的任何变化，都是土中水在静水压力梯度作用下从土体中排出的结果。对于非饱和土，因土中气体具有很高的压缩性，故当这部分气体与外界连通时，由于孔隙气压力作用，一部分气体要从土体中排出。与此同时，未排出气体在压力下体积发生变化，密度改变，而且还有一定量的气体要溶解于孔隙水中。对于以气泡形式存在于土孔隙中的封闭气体，也发生体积改变与溶解的现象。由此可见，要建立严格的连续条件，是比较困难的。

2.当土中孔隙中的流体兼有水与气时，研究它们的渗透性，通常是近似地将其当作两种不混合流体的运动问题来处理。尽管如此，也不易得到可靠的解答。对于饱和粘土，一般认为可以认为土中渗流可以用达西定律来描述。这时，渗透系数 k 基本常量，它与土的含水率和作用水压力无关。可是，对于非饱和土，不仅要涉及两种介质的渗透性，并且都与土的含水率和吸力密切相关。此外，对于给定状态的土，当由湿到干或由干到湿达到同一含水率时，渗透性亦不一致，亦即它们与含水率的关系，并非一单值函数。再者，非饱和土的渗透系数受土的结构性的影响相当显著，因此，要测定渗透系数，并且为了保证结构性不受影响，常需要不同于常规试验的测试技术。

3．有效应力原理是土力学中研究应力、应变、强度关系的基本原理。对于饱和土，太沙基最早提出的　$\sigma = \sigma' + u$　的著名公式一直被普遍应用。对于非饱和土，许多学者在饱和土公式的基础上，提出了各种表达式。这些表达式的正确性，尤其是适用性，还需要经受更多的实践检验。此外，表达式中的各参数测定比较复杂，往往不易得到稳定的数值。

4.如果再计及非饱和土渗流的非线性以及固结过程中水、气的相互作用，问题的求解难度更大。

鉴于以上原因，有关非饱和土的研究进展比较缓慢，到 20 世纪 70 年代，净应力和吸力双变量理论的确定，标志着非饱和土力学的研究逐步趋于成熟，但非饱和土固结理论的建立完全是 90 年代以后的事。其中以弗雷隆德（Fredlund）土的非饱和土单向固结理论较为完善，下面作简要介绍。

5.11.2 弗雷伦德非饱和土单向固结理论

弗雷隆德等学者用类似于求解饱和土固结问题的方法，研究了非饱和土的单向固结

1. 应力状态变量的选择

虽然一般认为，非饱和土是三相体系，但弗雷隆德从“相”的定义出发，却将非饱和土视为四相体系，即将土中水的分界面当做第四相，并称其为收缩膜（Contractile skin）,这是因为该膜是不同于其两侧介质的另一种物质。这样，土骨架与收缩膜在力系作用下处于平衡状态，而水、汽两相则在压力梯度下引起流动。

为了研究土体的平衡，弗雷隆德选用了净应力（$\sigma - u_a$） 与基质吸力（$u_a - u_w$） 作为应力状态变量（Stress state variable)。因此，非饱和土上的作用力系，可用图 5.11.1。

2. 基本方程

（1） 连续条件

假设土粒不可压缩，收缩膜无体变可言，则土体的体积变化符合下列方程：

$$\frac{\Delta V_v}{V_0} = \frac{\Delta V_w}{V_0} + \frac{\Delta V_a}{V_0} \tag{5.11.1}$$

式中 V_0 ——土体总体积；

ΔV_w、ΔV_a——分别为水相与气相的体积变化。

由此可见，知道了上式三种体积变化中的任意两种，即可得到第三者。故需建立两个体积变化的性状方程。

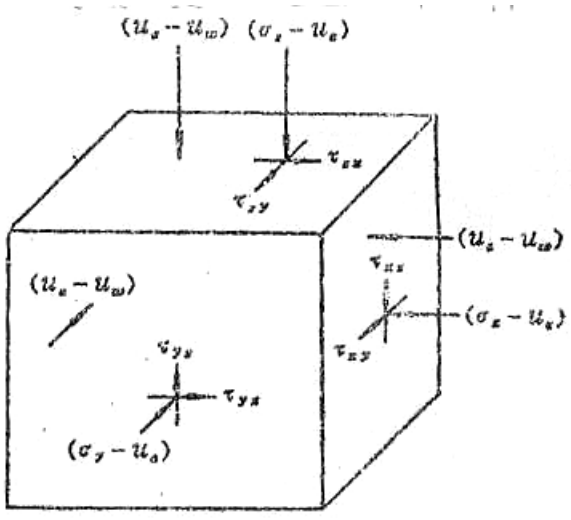


图 5.11.1 非饱和土上的作用力系

土体的体积变化有：

$$\frac{dV_v}{V_0} = m_{1k}^s \, d(\sigma - u_a) + m_2^s \, d(u_a - u_w) \tag{5.11.2}$$

水体积变化有：

$$\frac{dV_w}{V_0} = m_{1k}^w \ d(\sigma - u_a) + m_2^w \ d(u_a - u_w) \qquad (5.11.3)$$

图 5.11.2 是各相应力状态变量和体积变化关系的空间曲面，因此，上式中 m 的意义如下：

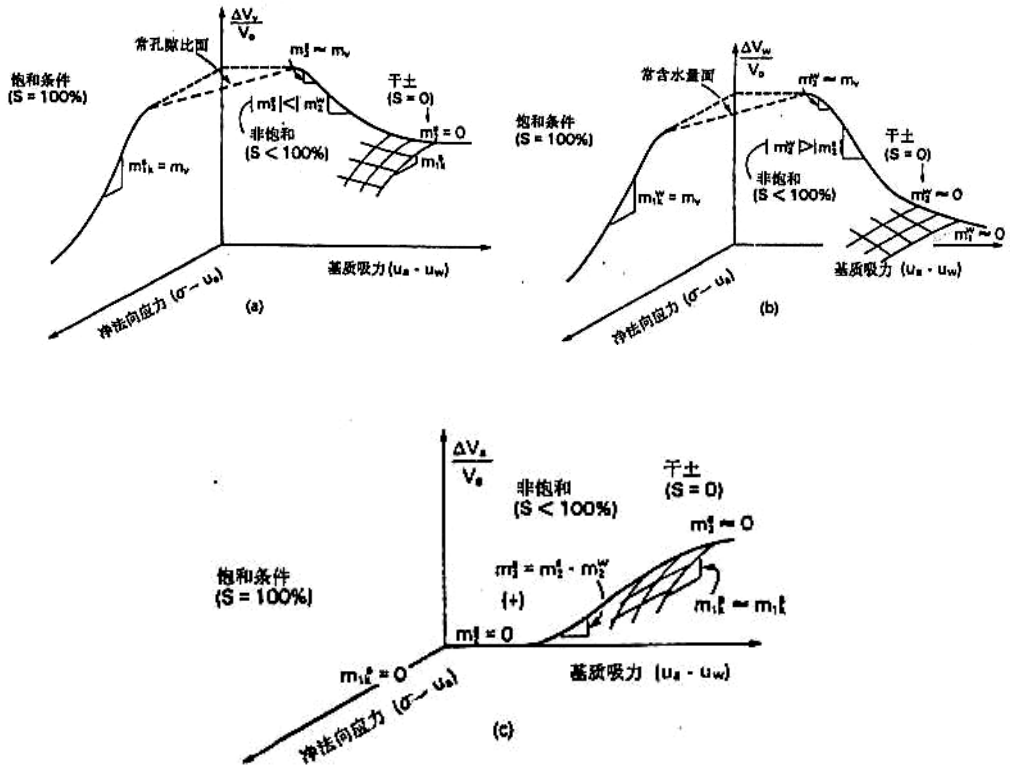


图 5.11.2　非饱和土的本构面

（a）　土结构本构面;（b）液相本构面;（c）气相本构面

V_v, V_w——单元体中的孔隙体积和水体积;

m_{1k}^s, m_{1k}^w——k_o 条件下净法向应力变化 $d(\sigma - u_a)$ 时土骨架体积和水体积变化系数

m_2^s, m_2^w——k_o 条件下基质吸力变化 $d(u_a - u_w)$ 时土骨架体积和水体积变化系数

对于气相，可由式（5.11.2）与（5.11.3）相减，或直接按图（5.11.2）写出：
气体体积变化有：

$$\frac{dV_a}{V_0} = m_{1k}^a d(\sigma - u_a) + m_2^a d(u_a - u_w) \qquad (5.11.4)$$

m_{1k}^a 与 m_2^a 为气相的相应体积变化系数。

（2）　渗透规律

液相渗流符合达西定律：

$$v=-\frac{k_z}{\gamma_w}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{5.11.5}$$

式 v 渗透流速

k_z 为 z 方向的渗透系数

如 4.3.3 节介绍，土中气体流动符合费克（Fick）定律：通过单位面积上的空气质量流量可用式（4.3.16）计算：

$$J_a=-D_a^*\frac{\partial u_a}{\partial z}$$

式中 D_a^* 为传导系数，见式（4.3.15）：

$$D_a^*=D_a\frac{\partial c}{\partial u_a}$$

（3）　物理方程

流体在恒温条件下的压缩性定义为：单位体积的流体由于压力变化而引起的体积改变，可以用下式表示如下，见图 5.11.3：

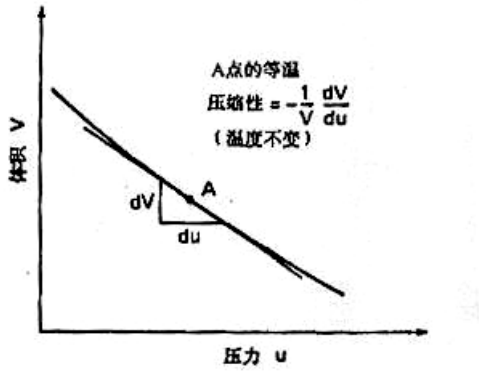


图 5.11.3 等温压缩性的定义

$$C=-\frac{1}{V}\frac{dV}{du} \tag{5.11.6}$$

式中 C——流体的压缩性

du —— 压力变化

按以上定义，可以求的恒温时土中气相压缩性，

$$C_a = \frac{1}{\bar{u}_a} = \frac{1}{u_a + u_{at}} \tag{5.11.7}$$

式中 $\bar{u}_a$ ——空气压力，以绝对压力计，故 $\bar{u}_a = u_a + u_{at}$

u_a——压力表示空气压力

u_{at}——大气压力

土中空气与水混合体的压缩性 C_{aw} 为:

$$C^{aw} = S_r C^w (\frac{du_w}{d\sigma}) + (1 - S_r + hS_r)(\frac{du_a}{d\sigma})\frac{1}{\bar{u}_a} \tag{5.11.8}$$

式中 S_r——饱和度

C^w——水的压缩性

$$C^w = -\frac{1}{v_w}\frac{dv_w}{du_w} \tag{5.11.9}$$

h——亨利溶解系数

3. 固结方程推导

（1） 基本假设

在推导中所作的假设与太沙基对饱和土提出的假设类似，但补充以下几点：①假定气相是连续的；②在固结过程中，土骨架及其中各相的体积变化系数 m_{1k}^s, m_{1k}^w 和 m_2^s, m_2^w 保持常量；③不考虑气体溶解水和水汽蒸发。以上假设并不完全正确，但为推导所必需。

（2） 液相微分方程

在单向固结时，通过非饱和土单元体的水的净流量为：

$$\frac{\partial V_w}{\partial t} = \left(v_w + \frac{\partial v_w}{\partial Z} dZ \right) dxdy - v_w dxdy \tag{5.11.10}$$

式中 v_w：水在 Z 方向上的速度，V_w：土中水的体积。

简化上式，单位体积的水净流量为：

$$\frac{\partial (Vw / V_0)}{\partial t} = \frac{\partial v_w}{\partial Z} \tag{5.11.11}$$

由达西定律，得：

$$\frac{\partial(Vw/V_0)}{\partial t}=\frac{\partial\left(-k\dfrac{\partial h_w}{\partial z}\right)}{\partial Z}$$

$$=-\frac{k_w}{\rho_w g}\frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}-\frac{1}{\rho_w g}\frac{\partial k_w}{\partial z}\frac{\partial u_w}{\partial z}-\frac{\partial k_w}{\partial z}$$

（5.11.12）

式中 h_w ——水头，为重力水头和空隙压力水头之和，即为 $Z+\dfrac{\mu_w}{\rho_w g}$，其中 ρ_w 为水的密度。

而上式中的 $\dfrac{\partial\left(V_w/V_0\right)}{\partial t}$ 可由式（5.11.3）对 t 求导而得到：

$$\frac{\partial\left(V_w/V_0\right)}{\partial t}=m_{1k}{}^{w}\frac{\partial(\sigma-u_a)}{\partial t}+m_2 w\frac{\partial(u_a-u_w)}{\partial t}\qquad(5.11.13)$$

令式（5.11.12）和式（5.11.13）相等，并整理可得到：

$$m_2^w\frac{\partial u_w}{\partial t}=-\left(m_{1k}{}^{w}-m_2^w\right)\frac{\partial u_a}{\partial t}+\frac{k_w}{\rho_w g}\frac{\partial^2 u_w}{\partial Z^2}+\frac{1}{\rho_w g}\frac{\partial k_w}{\partial Z}\frac{\partial u_w}{\partial Z}+\frac{\partial k_w}{\partial Z}\qquad(5.11.14)$$

式（5.11.14）是液相偏微分方程的普遍形式。

将式（5.11.14）重新排列可以写成：

$$\frac{\partial u_w}{\partial t}=-C_w\frac{\partial u_a}{\partial t}+C_v{}^{w}\frac{\partial^2 u_w}{\partial Z^2}+\frac{C_v^w}{k_w}\frac{\partial k_w}{\partial Z}\frac{\partial u_w}{\partial Z}+C_g\frac{\partial k_w}{\partial Z}\qquad(5.11.15)$$

式中

C_w ————与液相偏微分方程有关的相互作用常数（即（$1-m_2{}^{w}/m_{1k}{}^{w}$）/（$m_2{}^{w}/m_{1k}{}^{w}$））；

c_v^w ————考虑液相的固结系数（即 $kw/\left(\rho_w g m_2{}^{w}\right)$）；

c_g ————重力项常数（即 $1/m_2{}^{w}$）。

重力项（上式最后一项）与其它项相比较可以忽略不计，同时假设 k_w 不随位置而变，则式（5.11.15）简化为：

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = -C_w \frac{\partial u_a}{\partial t} + c_v{}^w \frac{\partial^2 u_w}{\partial Z^2} \qquad (5.11.16)$$

（3）气相微分方程

通过非饱和单元土体净气流质量速率为：

$$\frac{\partial M_a}{\partial t} = \left(J_a + \frac{\partial J_a}{\partial Z} dz \right) dxdy - J_a \, dxdy$$

或

$$\frac{\partial \left(M_a / V_0 \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(J_a \right)}{\partial Z} \qquad (5.11.17)$$

式中∂M_a————在时间为∂t内单元土体内气体质量变化

将式（5.11.13）的J_a代入上式，得：

$$\frac{\partial \left(M_a / V_0 \right)}{\partial t} = \frac{\partial \left(-D_a^* \frac{\partial u_a}{\partial Z} \right)}{\partial Z} \qquad (5.11.18)$$

式（5.11.18）中的空气质量应该等于其体积V_a乘以密度ρ_a，即$M_a = V_a . \rho_a$，对该式右侧加以推导，并将全式加以整理，得：

$$\rho_a \frac{\partial \left(V_a / V_0 \right)}{\partial t} + \frac{V_a}{V_0} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} = -D_a^* \frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2} - \frac{\partial D_a^*}{\partial Z^2} \frac{\partial u_a}{\partial Z} \qquad (5.11.19)$$

空气体积与土的体积存在下列关系：

$$V_a = \left(1 - S_r \right) nV \qquad (5.11.20)$$

式中

S_r————饱和度；

n————空隙率；

V————土单元体当前的总体积。

由于假设固结时土发生的是小应变，土的体积V可假设为初始V_0。故式（5.11.19）可改为：

$$\rho_a \frac{\partial\left(V_a/V_0\right)}{\partial t}+(1-S_r)n\frac{\partial \rho_a}{\partial t}=-D_a^*\frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2}-\frac{\partial D_a^*}{\partial Z^2}\frac{\partial u_a}{\partial Z} \tag{5.11.21}$$

根据波义尔定律，理想气体的密度与压力的关系为：

$$\rho_a=\frac{\omega_a}{RT}\overline{u}_a \tag{5.11.22}$$

式中

ω_a————气体的分子质量（kg/kmol）；

R————通用（克分子）气体常数（即 8.31432J/mol.k）；

T————绝对温度（ T=t^o+273.16）(K)；

t^o————摄氏温度（^oC）；

$\overline{u}_a$————绝对空隙气压力（$\overline{u}_a=u_a+\overline{u}_{at}$）（kPa）；

将式（5.11.22）代入式（5.11.21），进一步整理可得单元体单元体积的空气流量为：

$$\frac{\partial\left(V_a/V_0\right)}{\partial t}=-\frac{D_a^*}{\left(\omega_a/RT\right)\overline{u}_a}\frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2}-\frac{(1-S_r)n}{\overline{u}_a}\frac{\partial u_a}{\partial t}-\frac{1}{\left(\omega_a/RT\right)\overline{u}_a}\frac{\partial D_a^*}{\partial Z}\frac{\partial u_a}{\partial Z} \tag{5.11.23}$$

上式中的$\frac{\partial\left(V_a/V_0\right)}{\partial t}$可由式（511.4）对 t 求导而得，令二式相等，并整理得：

$$-\left(m_{1k}^a-m_2^a-\frac{(1-S_r)n}{\overline{u}_a}\right)\frac{\partial u_a}{\partial t}=m_2^a\frac{\partial u_w}{\partial t}-\frac{D_a^*}{\left(\omega_a/RT\right)\overline{u}_a}\frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2}-\frac{1}{\left(\omega_a/RT\right)\overline{u}_a}\frac{\partial D_a^*}{\partial Z}\frac{\partial u_a}{\partial Z} \tag{5.11.24}$$

式（5.11.24）是气相偏微分方程的普遍形式。

对于非饱和土，式（5.11.24）可以简化为下式：

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=-C_a\frac{\partial u_w}{\partial t}+c_v{}^a\frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2}+\frac{c_v^a}{D_a^*}\frac{\partial D_a^*}{\partial t}\frac{\partial u_a}{\partial Z} \tag{5.11.25}$$

式中

C_a————与气相偏微分方程有关的相互作用常数，即

$$\left[\frac{m_2^a / m_{1k}^a}{1-m_2^a / m_{1k}^a-(1-S_r)n/(\overline{u}_a m_{1k}^a)}\right]$$

c_v^a————与气体有关的固结系数，即

$$\left[\frac{D_a^*}{(\omega_a/RT)}\frac{1}{\overline{u}_a m_{1k}^a(\ 1-m_2^a/m_{1k}^a\ )-(1-S_r)n}\right]$$

上式中如果忽略气相透射率变化，即令$\frac{\partial D_a^*}{\partial Z}$=0，则有：

$$\frac{\partial u_a}{\partial t}=-C_a\frac{\partial u_w}{\partial t}+c_v^a\frac{\partial^2 u_a}{\partial Z^2} \qquad (5.11.26)$$

4．固结方程组求解

（1）、求解方法

利用 5.9.5 节的单向固结的差分解法。 先将方程（5.11.16）和（5.11.26）转化为差分方程。

液相的微分方程的差分形式可写成：

$$\frac{u_{w(i,j+1)}-u_{w(i,j)}}{\Delta t}=-C_w\frac{u_{a(i,j+1)}-u_{a(i,j)}}{\Delta t}+c_v^a\frac{u_{w(i+1,j)}-2u_{w(i,j)}+u_{w(i-1,j)}}{\Delta Z^2} \qquad (5.11.27)$$

气相的微分方程可写成：

$$\frac{u_{a(i,j+1)}-u_{a(i,j)}}{\Delta t}=-C_a\frac{u_{w(i,j+1)}-u_{w(i,j)}}{\Delta t}+c_v^a\ C_w\frac{u_{a(i+1,j)}-2u_{a(i,j)}+u_{a(i-1,j)}}{\Delta Z^2}$$

（5.11.28）

将式（5.11.28）乘以（$-C_w$）并代入式（5.11.27）便可解出空隙水压力：

$$\frac{u_{w(i,j+1)}-u_{w(i,j)}}{\Delta t}=C_a\ C_w\ \frac{u_{w(i,j+1)}-u_{w(i,j)}}{\Delta t}-c_v^a\ Cw\ \ \frac{u_{a(i+1,j)}-2u_{a(i,j)}+u_{a(i-1,j)}}{\Delta Z^2}$$

$$+c_v^a\ \frac{u_{w(i+1,j)}-2u_{w(i,j)}+u_{w(i-1,j)}}{\Delta Z^2} \qquad (5.11.29)$$

化简并重新排列式（5.11.29），可得未知的空隙水压力的表达式：

$$u_{w(i,j+1)}=u_{w(i,j)}+\frac{\beta_w g_1^w}{(1-C_aC_w)}-\left(\frac{C_w}{1-C_aC_w}\right)\beta_a f_1^a \qquad (5.11.30)$$

式中

$\beta_w=c_v^a\ \dfrac{\Delta t}{\Delta Z^2}$；

$\beta_a=c_v^a\ \dfrac{\Delta t}{\Delta Z^2}$；

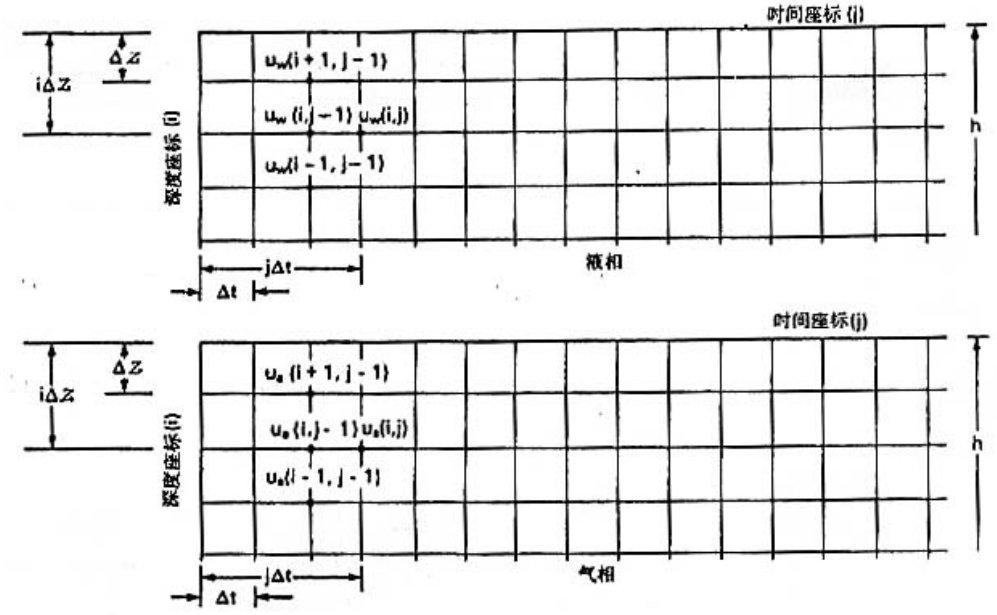


图 5.11.4　求解瞬变空气流和水流方程的有限差分网格

$g_1^w=u_{w(i+1,j)}-2u_{w(i,j)}+u_{w(i-1,j)}$；

$f_1^a=u_{a(i+1,j)}-2u_{a(i,j)}+u_{a(i-1,j)}$ 。

同样的，将式（5.11.27）乘以（$-C_a$）并代入式（5.11.28），便可求得孔隙气压力：

$$\frac{u_{a(i,j+1)}-u_{a(i,j)}}{\Delta t}=C_a\,C_w\,\frac{u_{a(i,j+1)}-u_{a(i,j)}}{\Delta t}-c_v^a\,C_a\,\frac{u_{w(i+1,j)}-2u_{w(i,j)}+u_{w(i-1,j)}}{\Delta Z^2}$$

$$+c_v^a\,\frac{u_{a(i+1,j)}-2u_{a(i,j)}+u_{a(i-1,j)}}{\Delta Z^2} \qquad (5.11.31)$$

化简并重新排列式（5.11.31），可得未知的孔隙气压力的表达式：

$$u_{a(i,j+1)}=u_{a(i,j)}-\frac{C_a\beta_w g_1^w}{(1-C_aC_w)}+\left(\frac{\beta_a f_1^a}{1-C_aC_w}\right) \qquad (5.11.32)$$

式（5.11.30）和（5.11.34）联立求解利用图 5.11.4 所示的差分网格。

(2)初始应力和边界条件

与 4.9.5 节所述方法步骤一样，在进行差分计算之前，应先求解相应于时刻 t=0 时差分网格深度各节点因瞬时施加总荷载所引起的初始孔隙水压力u_w和孔隙气压力u_a，确定方法读者可参考文献。

另外在运算过程中，几处自由排水边界处，孔隙压力应该始终为零；在不排水边界处$\frac{\partial u}{\partial Z}=0$。

（3）计算结果

联立求解式（5.11.30）和（5.11.32）的结果，可以求解液相和气相平均固结度 U 和时间因数 T 的关系。对于液相有：

$$U_w=1-\frac{\int_0^{2d}u_w dz}{\int_0^{2d}u_{w0}dz} \qquad (5.11.33)$$

$$T_w=\frac{c_v^w}{d^2}t \qquad (5.11.34)$$

式中　　d ————排水路径的长度；

其它符号的意义同前。

同样，对于气相有：

$$U_a=1-\frac{\int_0^{2d}u_a dz}{\int_0^{2d}u_{a0}dz} \qquad (5.11.35)$$

$$T_a = \frac{c_v^w t}{d^2} \qquad (5.11.36)$$

图 5.11.5 是对应于不同水、气作用常数时液相的 U～T 关系，图 5 .11.6 则是气相的 U～T 关系。可以看到，无论向饱和状态或是完全干燥状态，曲线都是平缓过渡的。

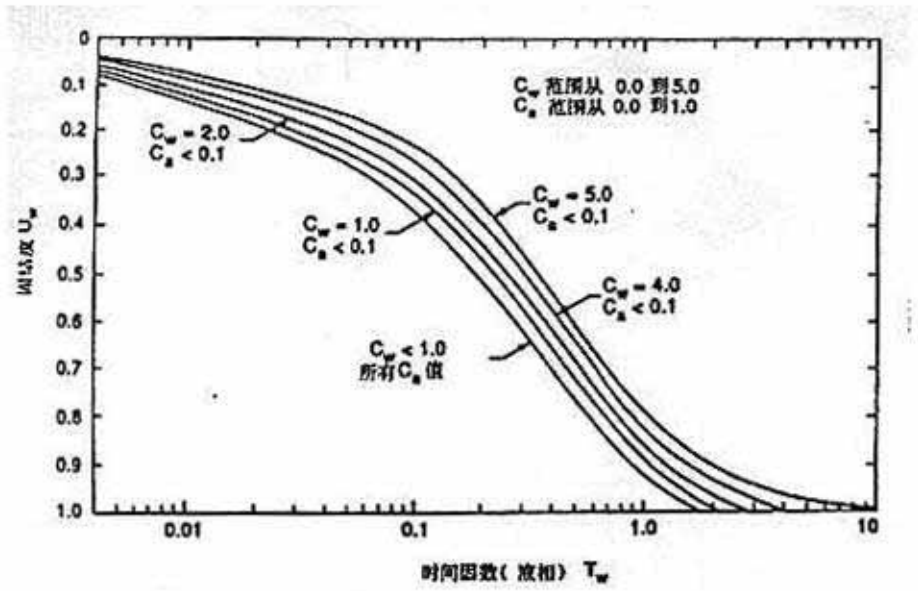


图 5.11.5　液相的无量纲时间因数与固结度的关系曲线

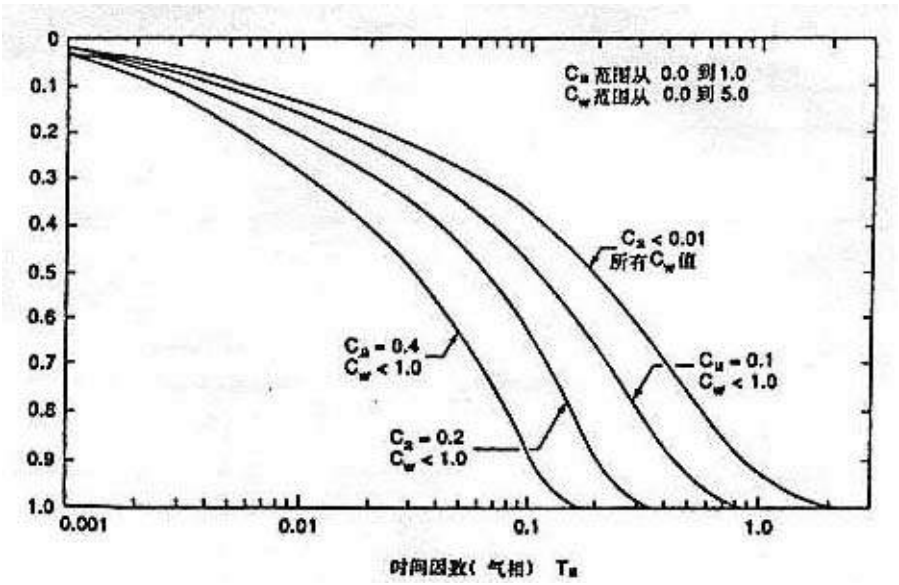


图 4.11.6　气相的无量纲时间因数与固结度的关系曲线

5.12 固结试验

5.12.1 几种固结试验方法

在第一章中介绍了侧限压缩试验和固结试验的仪器（见图 1.1.4）。常规的固结试验是分级加载。从 12.5kPa 开始，每级荷重与原荷重之比，即荷重比为 1.0。如果需测定原状土的先期固结压力，初始段的荷重比可采用 0.5 或 0.25。每级荷重常需 24 小时量测时间～变形关系。这种试验常需一周甚至十余天。并且加载方式与实际施工情况差别较大。

早在 1959 年，汉弥尔登（Hamilton）等人就提出连续加载压缩试验方法，大大减少了工作量；缩短了试验时间。常常几小时就可完成试验，并且目前已经制成了完全自动化的装置。

连续加荷压缩试验按试验时控制条件的不同，可以区分为：

1．恒应变速率试验法（简称 CRS 法）：加荷时控制试样的变形速率为常量。

2．恒荷重速率试验法（简称 CRL 法）：加荷时控制试样上应力增长速率为常量。

3．控制孔隙压力梯度试验法（简称 CGC 法）：加荷时保持试样底部的孔隙压力为常量。

4．控制孔隙压力比试验法（简称 λ 法）：加荷过程中控制试样底部孔隙压力 u_b 与总应力 p 的增量比，即 $\frac{\Delta u_b}{\Delta p}=\lambda$ 小于某一数值。

现就其中的两种方法简介如下。

5.12.2 恒应变速率压缩试验

1、 试验设备于方法

试验用专门设备，如图 5.12.1 所示。试样装在固结环里，其底部密封，通过透水石利用压力传感器可以量测底部（相当于常规试验中试样的中平面）的孔隙压力。整个装置平稳放在加压设备下面的荷重盒上，后者替代常用的量力环，减少加荷系统本身的变形，以确保恒应变条件。用量表测试样的垂直变形。

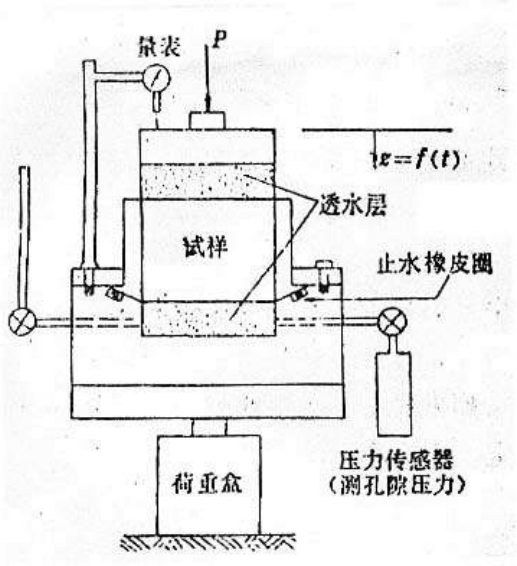


图 5.12.1　CRS 试验仪器装置示意图

为了可靠地测得试样底面的孔隙压力，要求整个试样盒与透水石都要充分饱和。试验方法是，从加荷设备施加压力 p 于试样顶面的传压板，使产生恒定速率的向下位移。定期测读试样变形、底面孔隙压力与相应的总荷重，从而计算试样的孔隙比变化 Δe 与有效垂直压力 σ' 以及 Δe 与底部孔隙压力 u_b 的关系，并可以计算不同孔隙比时的 c_v。

2．理论依据

恒定变速率压缩试验仍以太沙基单向固结理论为基础，采用太沙基的大部分基本假设。

假设在固结过程中，试样的渗透系数 k 只是平均孔隙比 $\bar{e}$ 的函数，它仅与时间 t 有关，而不依赖于位置 z（以排水面为起点），即：

$$k = k(\bar{e}) = j(t) \tag{H}$$

则单向固结微分方程可写成：

$$\frac{k}{\gamma_w}\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = \frac{1}{1+e}\frac{\partial e}{\partial t} \tag{I}$$

在恒应变速率试验中，要求垂直应变速率为常量，设其为 R（$R = \dfrac{\Delta L}{T}$，ΔL 为时段 T 内的垂直压缩量）。由于试样系侧限压缩，故试样的体积变化率亦应为常量，即：

$$\frac{dV}{dt} = -RA \tag{J}$$

式中　　V————试样体积；

　　A————试样面积。

则平均孔隙比 $\bar{e}$ 的变化率为

$$\frac{d\bar{e}}{dt} = -\frac{1}{V_s}\frac{dV}{dt} = -\frac{RA}{V_s} = -r = 常量 \tag{K}$$

式中　V_s————试样中的土粒体积。

如果试样的厚度为 H，则有：

$$\bar{e} = \frac{1}{H}\int_0^H e\,dz \tag{L}$$

从式（K）和（L）可见，任何时间 t 与任何位置 z 的孔隙比 $e(z,t)$，必为时间的一次函数，故可写成：

$$e(z,t) = g(z)t + e_0 \tag{M}$$

式中　　$g(z)$————仅与 z 有关的函数；

　　e_0————试样的开始孔隙比。

如果式（M）中的 $g(z)$ 为已知函数，则式（I）即可求解。实际上，该函数不易准确确定，

为简化计，令其为线性函数，则式（M）可写成：

$$e = e_0 - rt\left[1 - \frac{b}{r}\left(\frac{z - 0.5H}{H}\right)\right] \tag{N}$$

式中　b————根据孔隙比随深度与时间变化而定的常数。

在试样底面（不排水面），$z = H$，将其代入（N），得底面处的孔隙比为e_b：

$$e_b = e_0 - rt\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)\right] \tag{O}$$

在式（O）中，如果$\frac{b}{r} = 0$，则$e_b = e_0 - rt$，即表示任何时间在试样全高度内孔隙比是均匀的；如果$\frac{b}{r} = 2$，则$e_b = e_0$，即底部孔隙比不随时间而变化，显然不合理。故实际上的$\frac{b}{r}$应在 0 与 2 之间。

如果e的变化符合式（N），则配合下式边界条件：$u(0,t) = 0$，$\frac{\partial u}{\partial z}(H,t) = 0$（式中

u　————孔隙压力），可以获得式（I）的解答。

为简化计算，假设（I）中的 1＋e 可以用$1 + \bar{e}$代替，则得解答如下：

$$u = \frac{\gamma_w r}{k(1+\bar{e})}\left[\left(Hz - \frac{1}{2}z^2\right) - \frac{b}{r}\left(\frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{6H}\right)\right] \tag{5.12.1}$$

这样，试样底面处（z=H）的孔隙水压力为：

$$u_b = u_{z=H} = \frac{\gamma_w r H^2}{k(1+\bar{e})}\left[\frac{1}{2} - \frac{b}{r}\left(\frac{1}{12}\right)\right] \tag{5.12.2}$$

利用关系式（5.12.2）与实测试样底的孔隙水压力，可以确定试样的压缩曲线与固结系数。

（1）压力曲线　平均有效应力可按下法计算。设试样上所加的垂直应力为σ，实测底部的孔隙水压力为u_b，试样的平均有效应力为：

$$\bar{\sigma}' = \sigma - \alpha u_b \tag{P}$$

式中　α————平均孔隙压力$\bar{u}$与u_b的比值，可借式（5.12.1）与（5.12.2）求得：

$$\alpha = \frac{\bar{u}}{u_b} = \frac{\frac{1}{H}\int_0^H u\,dz}{u_b} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{b}{r}\left(\frac{1}{24}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{b}{r}\left(\frac{1}{24}\right)} \tag{Q}$$

由式（Q）计算得的α值，如表 5.12.1。可见$\frac{b}{r}$对α的影响不大，一般可取α＝0.7。

表 5.12.1　α 随 $\frac{b}{r}$ 的变化

b/r	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
α	0.667	0.682	0.700	0.722	0.750

根据 α、u_b 和外加压力 σ，由式（P）可计算 σ'，又由测得的土体变形，计算相应的孔隙比 e，即可绘制压缩曲线。

（2）固结系数　　按单向固结理论，有：

$$c_v = \frac{k(1+e)}{\alpha_v \gamma_w} \tag{5.8.11}$$

上面已得到 $e—\sigma'$ 曲线，故用上式求 c_v 时唯一的未知数就是 k。如果用 $\bar{e}$ 代替 e，则知道 u_b 与 r 后，k 值可由式（5.12.2）反求，将其代入上式，即可获得 C_v 的计算式如下：

$$c_v = \frac{\gamma H^2}{\alpha_v u_b}\left[\frac{1}{2} - \frac{b}{r}\left(\frac{1}{12}\right)\right] \tag{5.12.3}$$

利用式（5.12.3），可求得任何孔隙比时的 c_v。

5.12.3 控制梯度压缩试验【CGC 法】

1．试验特点与试验方法

在常规试验中，某级荷重下试样中孔隙压力分布的等时孔压线，如图 5.12.2 所示。分析该图形，可以发现：

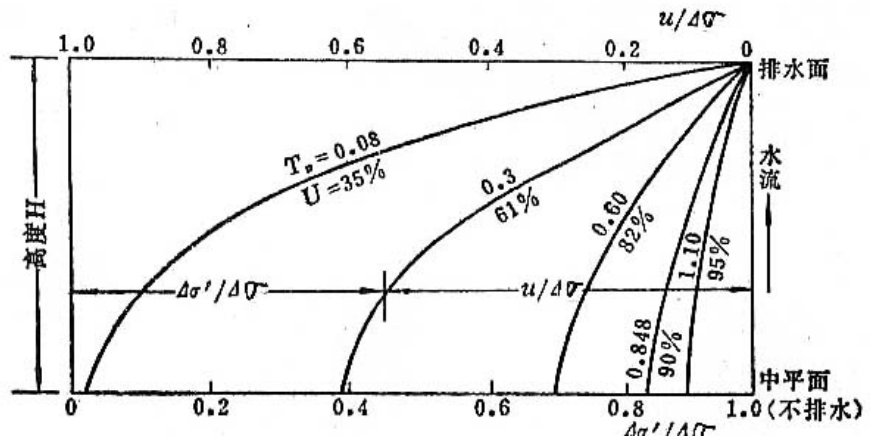


图 5.12.2　常规固结试验的等时孔压线

（1）　在固结过程中，沿试样高度各水平面上的有效应力 $\Delta\sigma'$ 很不均匀：近排水面处有效应力最大，不排水处最小，尤其是在刚加荷时（T_V 值小）。这样，试样内各处受压不均，就引起压缩性也不均。

（2）　试样不同高度处，孔隙压力梯度相差很大；在刚加荷后，排水面处的梯度极高，比起在地基

的土体中承受的要高得多。极高的梯度，常使试样结构受到破坏。

（3） 随着固结发展，试样应变速率变化很大。在T_V＝0.08 时的要比T_V＝1.1 时的快 10 倍以上。即使试样平均固结度达到 95％以上（T_V＝1.1），试样的应变速率仍为现场的若干万倍。

为了克服上述的若干缺点，出现了控制梯度试验法。用这种方法可以进行不同应变速率的试验。

控制梯度固结试验所用仪器与常规固结试验所用相仿，只是前者尚具有以下特点：试样顶面可以排水，但底面完全封闭了。底面透水石与一细导管连接，直通孔隙水压力指示器。它可以随时指示试样底面的孔隙压力，故底面实际上相当于常规试验中试样的中平面。固结仪的构造示意如图 5.12.3。

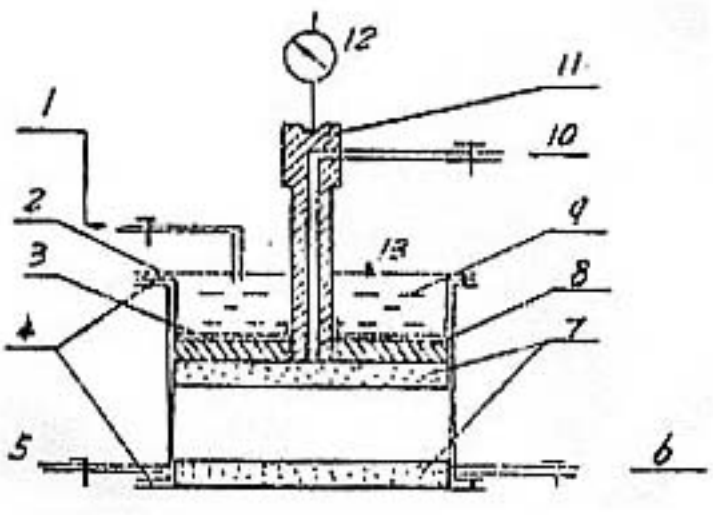


图 5.12.3　CGC 固结仪构造示意图

进行试验的方法是：先规定一个底部孔隙压力Δu_b（不同的Δu_b反映不同的应变速率）。连续加荷于试样，待底部的孔隙压力值达到预定的Δu_b，此后靠自动装置调整加荷速率，以保证Δu_b始终不变，直到试样上的压力达到所需的数值。在整个试样过程中，任何时刻均可读取并记录所加荷重与相应的试样变形量。

CGC 试验中，孔隙压力的分布与常规试验中的比较，如图 5.12.4。显然，在 CGC 图形中，不管外加荷重多大，任何时刻的分布图都是许多形状相同的抛物线，都是排水面处的孔隙压力为 0，不排水面处的等于Δu_b，只有在开始建立Δu_b的一段与最后消散Δu_b的一段才是例外。这些抛物线所反映的水力梯度，比常规试验中的小得多，沿高度有效应力的分布也均匀得多。

利用 CGC 方法，还可以进行中断加荷试验，以研究某级荷重下的次压缩效应。即试验进行到某时刻，停止继续加载，让孔隙压力消散，然后再继续 CGC 试验。

2．试验理论依据

CGC 试验同样也是以太沙基单向固结理论为基础的。根据 5.8 节的普遍方程，简化后，可以求得固结方程如下：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}=-C_v\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \tag{5.9.1}$$

式（5.9.1）在特定条件下的形式如下：

（1） 在常规试验中，采用的式分级瞬时加荷，故σ为常量，即$\frac{\partial \sigma}{\partial t}=0$，代入式（5.9.1），即可简化为太沙基单向固结微分方程。在 CGC 试验中，这种情况只发生在开始段与终了段。

（2） 在 CGC 试验中，除了首尾两段外，试样中的孔隙压力分布保持不变，可见$\frac{\partial u}{\partial t}=0$。代入式（5.9.1），即得 CGC 条件下的固结方程：

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t}=-C_v\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} \tag{5.9.1}$$

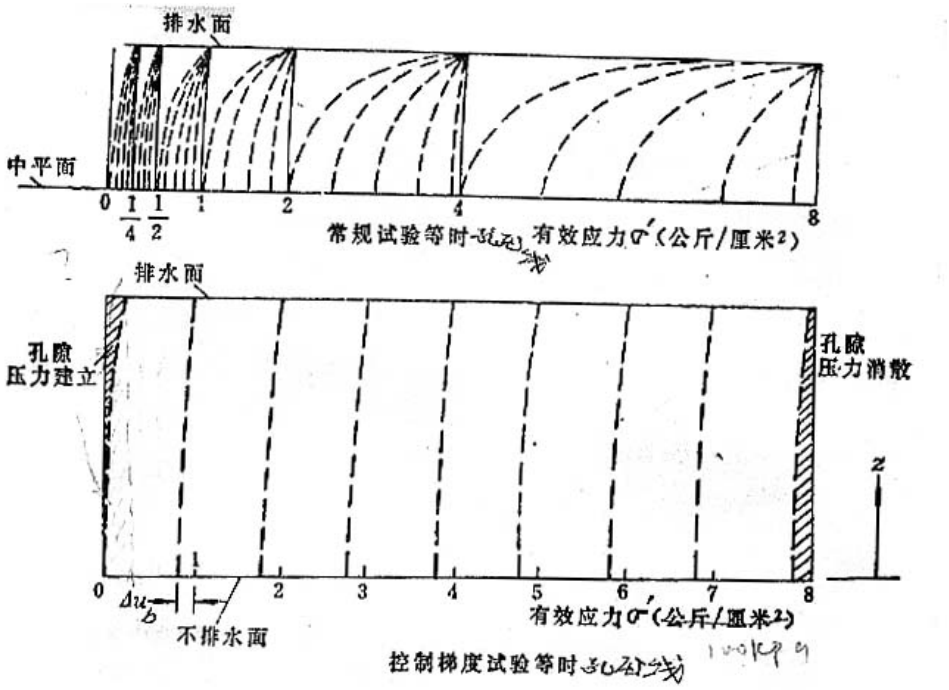


图 5.12.4　两种试验中孔隙压力的比较

CGC 试验的边界条件是：$z=0$，$u=\Delta u_b$；$z=H$，$u=0$，可得式（5.12.4）的解答如下：

$$u=-\frac{\Delta u_b}{H^2}z^2+\Delta u_b=\Delta u_b\left(1-\frac{z^2}{H^2}\right) \tag{5.12.5}$$

表明试验过程中的孔隙压力分布呈抛物线型。

压缩曲线按下法求得：

任何时刻试样的有效应力可按下式计算：

$$\sigma'=\sigma-\bar{u}=\sigma-\frac{2}{3}\Delta u_b \tag{5.12.6}$$

式中　　σ ————外加压力；

$\bar{u}$ ————平均孔隙压力，按式（5.12.5）计算。

根据对应于σ的压缩量计算孔隙比e，按σ'与e绘制压缩曲线。更有意义的是，由于孔隙压力的分布始终不变，且可算得任何σ时的e，故 CGC 试验可以提供无数点据，供绘制压缩曲线之用。

试样的固结系数c_v由理论推导得：

$$c_V = \frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{H^2}{2\Delta u_b} \tag{5.12.7}$$

或

$$c_V \cong \frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\frac{H^2}{2\Delta u_b} \tag{5.12.8}$$

因此，只要知道微小时段Δt内的垂直压力增量$\Delta\sigma$，就可直接利用式（5.12.8）算得c_v，不需要再借助作图。同样，其特点是可以求任何时刻（任何平均孔隙比）的c_v值。

另外，体积压缩系数m_v和渗透系数k可直接按以下公式计算：

$$m_v \cong \frac{1}{H}\frac{\Delta\delta/\Delta t}{\Delta\sigma/\Delta t} \tag{5.12.9}$$

$$k \cong \frac{\gamma_w H}{2u_b}\frac{\Delta\delta}{\Delta t} \tag{5.12.10}$$

式中　$\Delta\delta$ ————试样垂直变形增量；

γ_w————水容重。

参考文献

1．Scott, R.F, Principles of Soil Mechanics, Addison-wesley publishing Co. Inc.1963.

2. 黄文熙，张文正，俞仲泉：水工建筑物土壤地层的沉降量与地层中的应力分布，水利学报，第 3 期。

3．Lambe, T.W., Method of Estimating settlements, JSMFD.SMS.1964.

4. Burland, J.B., A method of Estimating the Pore Pressures and Displacements Beneath Embankments on Soft Natural Clay Deposits, Stress Strain Behaviour of Soils,G.F. Foulis & Co.Ltd.,1971.

5. Roscoe, K.H. and Burland, J.B. On the Generalized stress-strain Behaviour of "Wet" Clay. Engineering plasticity, Cambridge University press,1968.

6. 黄文熙主编，土的工程性质，第一章，水利电力出版社，1983。

7．王正宏，沉降计算，水工设计手册，第三卷，水利电力出版社，1984。

8．Kulhawy. F.H. er al. Load Transfer and Hydraulic Fracturing in Zoned Dams. JCED. ASCE. 102. GT9.1976.

9. Nobari, E.S. and Duncan, J.M. Movement Dams due to Reservior Filling performation of Earth and Earth-supported structures. Vol.1.part Ⅰ.1972.

10. B.A.弗洛林，土体压密理论，水利电力出版社，1960。

11．Murry, R.T., Devolopment in two- and three-dimentional consolidation theory, Devolopment in Soil

Mechanics,1978.
12. Richart, F.H., Review of the theories for sand drains, Trans. ASCE,Vol.124,1959.
13. Mitchell, J.K., Fundamentals of Soil Behavior, John Wiley & Sons,1976.
14. Simons, N.E., The Stress Path Method of Settlement Analysis Applied to London Clay, Stress-Strain Behavior of Soils G.T. Foulis & Co. Ltd.,1971.
15. Hamilton, J.T. and Crawford, C.B., Improved Determination of preconsolidation Pressure of a Sensitive clay. ASTM STP No.254,1959.
16. Aboshi, H., Constant loading rate consolidation test, Soils and Foundation, Vol. 10, No. 1, 1970.
17. D.G.弗雷德伦德、H.拉哈尔佐合著，非饱和土土力学，中国建筑工业出版社，1997.
18. Gilbson R.E. Schiffman R.L., Theory of one Dimensional Consolidation of Saturated Clays .Ⅱ. Finite Non-linear Consolidation of Thick Homogeneous Layers, Canadian, Geotechnical Journal, Vol.18, No.2, 1981.

高等土力学复习思考题（固结理论）

一、名词解释

1. 出逸流速（discharge velocity）、渗流流速（seepage velocity）.
2. 变形模量、压缩模量
3. 静水压力、超静水压力、孔隙水压力
4. 扩散方程
5. 曼代尔效应
6. 超固结土、正常固结土、欠固结土

二、问题回答

1. 你认为单向固结理论的假设中，哪些比较合理，哪些与实际情况出入较大？
2. 叙述求固结系数c_v有几种方法？
3. 二相邻粘性土层的固结系数不同（c_{v1},c_{v2}），为何将其按均质土计算？
4. 写出单向固结微分方程的差分式，怎样用它进行地基土地孔压消散计算？
5. 太沙基三向固结理论与比奥理论的主要区别何在？
6. 在比奥理论中，何以按应力定义的固结度U_p和按变形定义的固结度U_s不等？
7. 建立非饱和土地孔压消散方程，与饱和土的相比，其主要困难在哪里？

三、计算题

有一双层地基，二者的土性指标如表。试按 Gray 法计算该地基固结达 50%所需的日数，地基底面及顶面皆透水。

地基土性性质

层号	Ⅰ	Ⅱ
厚度，m	1.5	2.0
渗透系数 k, cm/s	6×10^{-7}	3×10^{-7}
压缩系数α_v，cm^2/kg	0.13	0.097
孔隙比 e	1.09	0.92

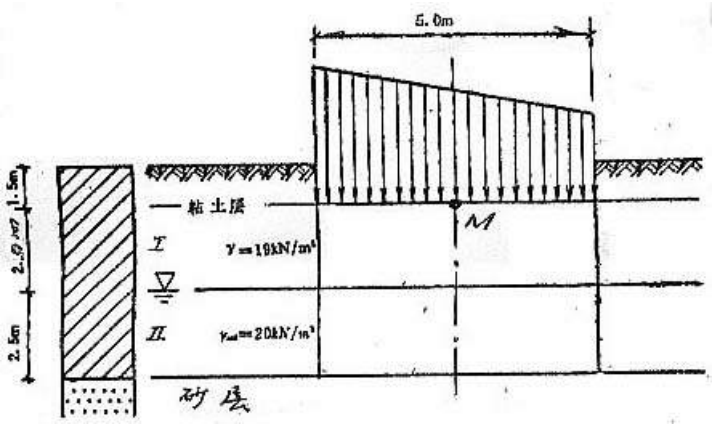
思考题和练习题（沉降计算部分）

一、思考题

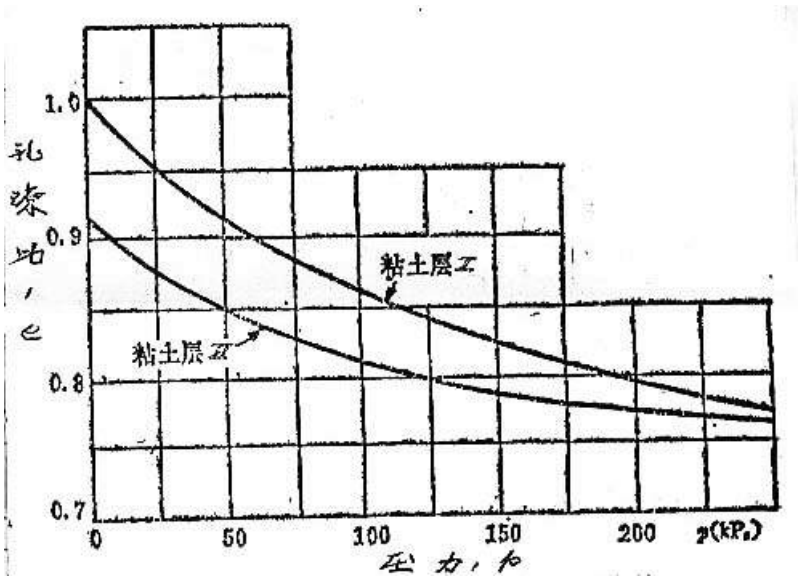
1. 沉降计算中通常区分几种沉降分量？它们形成的机理何在？按什么原理对它们进行计算？
2. 要较可靠地计算沉降量，应该注意哪些主要影响因素？
3. 目前常用的计算固结沉降的方法有哪些？它们的基本假设有何不同？
4. 比较用 e—P 和 e—LogP 压缩曲线计算沉降量的优缺点。
5. 单向压缩法计算沉降量在什么条件下才较为合理？
6. Skempton 沉降计算法从理论上讲有何优点和局限性？
7. 应用三向变形计算法时，你认为计算中所用的变形参数应该如何去测定？
8. 系统回顾用应力路径法计算沉降的方法、步骤和理论依据。
9. 按剑桥模型法计算沉降量的基本思路是什么？

二、练习题

1. 某条形基础底宽 B=5.0m,基础埋深 D_f=1.5m,基础承受的自重及其上结构物重量为 F=1000kN,基底荷载合力的偏心距 e=0.2m。地基剖面、地基土的压缩曲线及地下水位等见例图 1，图 2。计算基底中轴处（M 点）的单向压缩沉降量。又通过地基饱和原状试样的三轴不排水剪试验，测得围压 $\sigma_3 = 200kPa,$ 轴压 $\sigma_1 = 408kPa,$ 破坏时试样中的孔隙水压力 u_f=87kPa,再用 Skempton 法计算地基沉降量，并与前者比较。

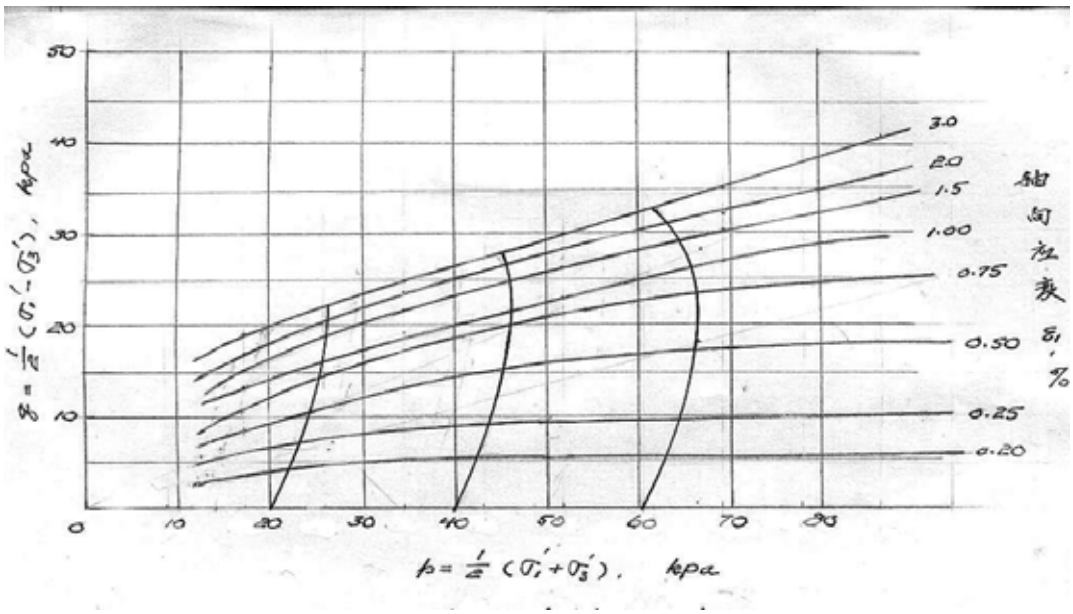


例图 1



例图 2　粘土层 A、B 的 e—P 曲线

2．地基压缩层厚 4m，通过钻探采得代表性原状试样，测得其初始孔隙比 e_0=1.0,有效内摩擦角 ϕ'＝25^0，土的压缩指数 C_c=0.31.试样在 20、40、60kPa 等围压下固结，然后作三轴 CU 试验，分别测得其有效应力路径为例图 3。试用应力路径法估算地基沉降量。



例图 3　　地基土的有效应力路径

土工数值分析（一）
土体稳定的极限平衡和极限分析

目　　录

1 前言 2

2 理论基础 － 塑性力学的上、下限定理 4

2.1 一般提法 4
2.2 塑性力学的上、下限定理 5
2.3 边坡稳定分析的条分法 7

3 土体稳定问题的下限解 － 垂直条分法 9

3.1 垂直条分法的静力平衡方程及其解 9
3.2 数值分析方法 12
3.3 垂直条分法的有关理论问题 15
3.4 垂直条分法在主动土压力领域中的应用 19

4 土体稳定分析的上限解－斜条分法 23

4.1 求解上限解的基本方程式 23
4.2 上限解和滑移线法的关系 25
4.3 边坡稳定分析的上限解 27
4.4 地基承载力的上限解 27

5 确定临界滑动模式的最优化方法 30

5.1 确定土体的临界失稳模式的数值分析方法 30
5.2 确定最小安全系数的最优化方法 32

6 程序设计和应用 39

6.1 概述 39
6.2 计算垂直条分法安全系数的程序 S.FOR 39
6.3 计算斜条分法安全系数的程序 E.FOR 53

土工数值分析（一）：土体稳定的极限平衡和极限分析法

1 前言

边坡稳定、土压力和地基承载力是土力学的三个经典问题。很多学者认为这三个领域的分析方法属于同一理论体系，即极限平衡分析和极限分析方法，因此，应该建立一个统一的数值分析方法。Janbu曾在1957年提出过土坡通用分析方法。Sokolovski(1954)应用偏微分方程的滑移线理论提出了地基承载力、土压力和边坡稳定的统一的求解方法。W. F. Chen (1975) 在其专著中全面阐述了在塑性力学上限和下限定理基础上建立的土体稳定分析一般方法。但是，上述这些方法只能对少数具有简单几何形状、介质均匀的问题提供解答，故没有在实践中获得广泛的应用。

下面分析这三个领域分析方法的现状以及建立一个统一的体系的可能性。

有关边坡稳定分析的理论的研究工作，从早期的瑞典法，到适用的园弧滑裂面的Bishop简化法，到适用于任意形状、全面满足静力平衡条件的Morgenstern - Price法 (1965)，其理论体系逐渐趋于严格。近代计算技术的发展，使自动搜索临界滑裂面成为可能 (Celestino and Duncan, 1981; Chen and Shao, 1988)。

作用于支挡结构上的土压力问题实际上是一个具有垂直表面并且在此表面作用有外荷的边坡稳定问题。传统的库伦主动土压力理论使用的分析方法和边坡稳定方法也是类似的。

图1.1是在任何一本土力学教科书中可以看到的按库伦理论计算主动土压力的方法。假定墙后土体一部分沿一个直线滑裂面滑动，通过分析由墙土结合面、滑裂面和土体顶部直线构成的三角形的土体的力的平衡，可以计算土体作用在墙上的主动土压力P。不断变动直线滑裂面 ，可以找得使P获得极大的临界滑裂面。这一极大值就是按库伦土压力理论获得的主动土压力。

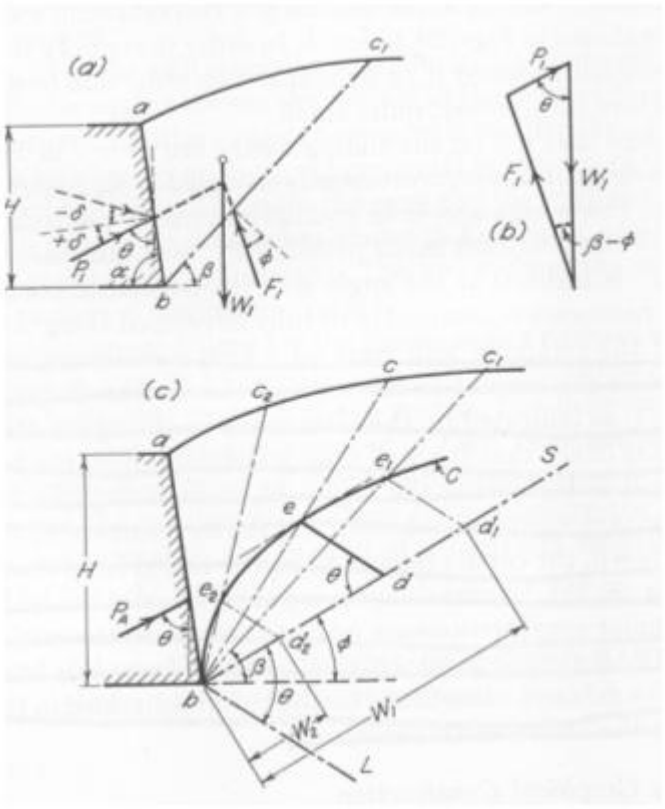


图 1. 1 应用库伦理论计算主动土压力的方法,摘自 Terzaghi & Peck (1967), (a) 作用于一滑动土体上的力； (b) 静力平衡条件; (c) 确定临界滑裂面。

一般认为，传统的库仑主动土压力理论在柔性支挡结构领域是不适用的。Casagrade (1973) 在调查了德国和巴拿马运河的一系列锚拉墙破坏实例后指出，作用在各种柔性支挡结构上的土压力通常要比按传统的库伦方法确定的主动土压力大，其数值接近土的静止土压力。Terzaghi和Peck(1967)曾使用大量篇幅对这一问题作出解释。在回顾土压力理论发展50年的历史后，Peck(1990)教授曾作过以下这一样总结：

“我们现在已经知道，土压力的分布是和变形特征相关联的。我们高度赞赏Terzaghi在这一问题上作出的杰出贡献。这一极有意义的发现是他在Robert大学所作的香烟盒试验和麻省理工学院所作的大型模型试验中得到的。他通过这些试验说明，土压力的合力的作用点可以在上三分点和下三分点之间的任何一个位置。”

Terzaghi和Peck采用如图1.2所示的方法，试图通过加入力矩平衡条件后采用边坡稳定分析的方法获得柔性支挡结构的土压力，据此提出了一套经验系数，已在当前工程界广泛使用。我们将在3.4节中讨论。上述论述说明，土压力和边坡稳定分析具有相同之处。

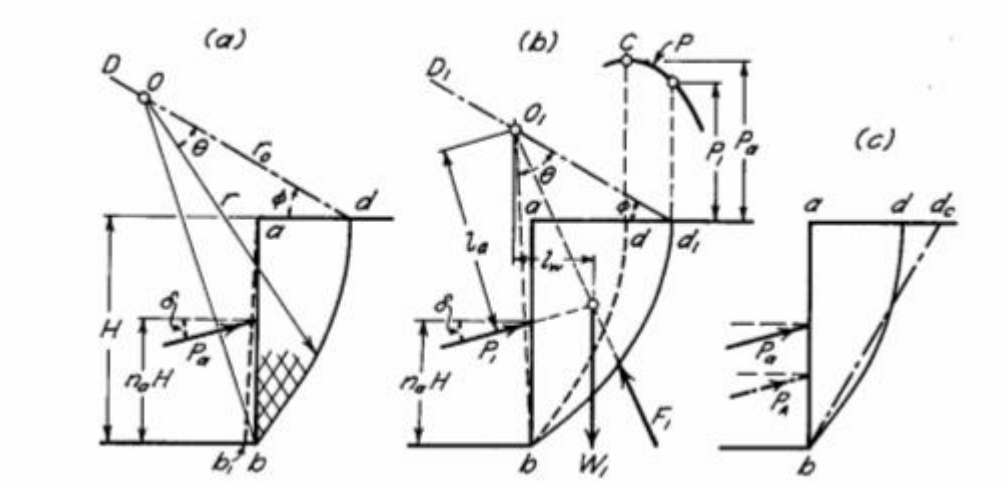


图 1. 2　Terzaghi 和 Peck 建议的计算柔性支挡结构的土压力的方法，(a) 对数螺旋线滑裂面, (b) 作用在滑体上的力，(c) 与库伦理论的比较，实线为本法，虚线为库伦理论。摘自 Terzaghi 和 Peck(1967)

地基承载力分析是另一种类型边坡稳定问题。这个边坡具有一个水平的表面。但是，这一领域和传统的垂直条分法存在一个重大的区别，那就是假定滑裂面所包含的不稳定土体全部达到了极限平衡。边坡稳定的垂直条分法由于不要求在条块的垂直界面也达到极限平衡，故一般不推广到地基承载力分析中。传统的地基承载力理论，是以在均匀、无重量的条件下推导出的Prandtl解为基础的。但当遇到土体具有自重，两侧具有表面荷载，以及基础具有埋深、偏心荷载等情况时，无法获得理论解，则引入了各种经验修正系数。但这些修正，仍然没有考虑倾斜荷载、地下水，地基分层等多种复杂的因素。

Prandtl解属于塑性力学上限解的范畴。近期，Donald和Chen (1997) 提出了建立在对土条进行斜分条的塑性力学上限解法，并使用最优化方法来求解临界破坏模式。由于这一方法与Prandtl解具有相同的理论基础，故可以很好地收敛到现有的一系列已知的闭合解。这样，在地基承载力领域，我们也获得了一个可以适用于各种复杂情况的数值分析方法。

在塑性力上、下限定理以及条分法基础上，有条件建立求解土力学经典问题的统一的、实用的数值解法。

2　理论基础 — 塑性力学的上、下限定理

2.1　一般提法

土体稳定分析的基本提法和求解固体力学问题是一致的，即在一个确定的荷载条件下，寻找一个应力场 σ_{ij} 、相应的位移场 u_i，以及应变场 ε_{ij} ，它们满足下列条件（以张量形式表达）。

(1)　静力平衡

$$\sigma_{ij} = W_i \tag{2.1}$$

其力学边界条件是

$$\sigma_{ij} n_j = T_i \tag{2.2}$$

其中 W_i 为体积力, T_i为作用于表面S上的边界力，n_j为S面法线的方向导数。

静力平衡的另一个表达形式是虚功原理，即相应任一协调的位移场增量 $\dot{u}$ ，有

$$\int_v \sigma_{ij} \cdot \dot{u}_{i,j} dv = \int_v W_i \cdot \dot{u}_i dv + \int_s T_i \dot{u}_i ds \tag{2.3}$$

(2) 变形协调

$$\varepsilon_{ij}=\frac{u_{i,j}+u_{j,i}}{2} \tag{2.4}$$

(3) 本构关系

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \tag{2.5}$$

$$f(\sigma_{ij})\le 0 \tag{2.6}$$

式(2.5)和(2.6)分别反映了材料必须遵守的应力应变关系和强度准则，有时二者合一。其中 C_{ijkl}为反映弹性或弹塑性的本构关系刚度矩阵的张量表达式。

式(2.6)通常采用摩尔－库仑准则，即

$$f(\sigma_{ij})=\tau-(\sigma_n tg\phi+c)\le 0 \tag{2.7}$$

其 $f(\sigma_{ij})$ 为屈服面函数，σ_n 和 τ 为破坏面上的法向和剪切应力，c和ϕ为抗剪强度指标。在一般的岩土材料中，还需有不容许出现拉应力的限制条件，

$$\sigma_3\ge 0 \tag{2.8}$$

σ_3为土体内任一点的小主应力，定义后为正。

2.2 塑性力学的上、下限定理

全面满足上述条件的解答，即是反映实际情况的真实解。但是，岩土材料的不连续性，不均匀性，各向异性和非线性的本构关系以及结构在破坏时呈现的剪胀和软化、大变形、应力引起的各向异性等特性，使求解岩土材料应力和变形的问题变得十分困难和复杂。在工程实践中寻找能基本反映上述条件的简化方法，始终是人们长期探索的一条途径。

下限定理从构筑一个静力许可的应力场入手，认定凡是满足式(2.1)、(2.2)和(2.7)、(2.8)的应力场所相应的外荷载 T_i^* 一定比真实的极限荷载小。上限定理从构筑一个处于塑性区Ω*内和滑裂面Γ上的协调的塑性位移场 u_{ij}^* 出发，认定凡是满足式(2.3)和(2.7)中的等式所相应的外荷载一定比相应真实的塑性区Ω的真实的极限荷载大(参见图2.1(a))。由于弹性变形通常相对塑性变形小许多，所以在应用上限定理通过式(2.3)确定外荷载时，还可以将其中的u仅理解为塑性变形。式(2.3)左端的内能耗散包括两项，即塑性区域Ω内和沿滑面Γ上的内能耗散。

用塑性力学上、下限定理分析边坡稳定问题，就是从下限和上限两个方向逼近真实解。这一求解方法最大的好处是回避了在工程中最不易弄清的本构关系表达式(2.5)，而同样获得了理论上十分严格的计算结果。

在实际工程中我们分析的对象往往是一个具有一定安全储备的结构，分析这样一个结构的稳定性的提法往往是这样的：对某一处于稳定的结构, 需要一个多大的外部干扰因素, 方可将其过渡到极限状态。在塑性力学和边坡稳定领域, 通常有以下三种处理方案。

(1) 方案1。如果边坡表面作用有荷载T^o, 那么, 可以将这个荷载增加到直至破坏，此时的荷载为T, 定义加载系数为

$$\eta=\eta_t=\frac{T-T^0}{T} \tag{2.9}$$

这一定义在地基承载能力问题中可得到广泛的应用。

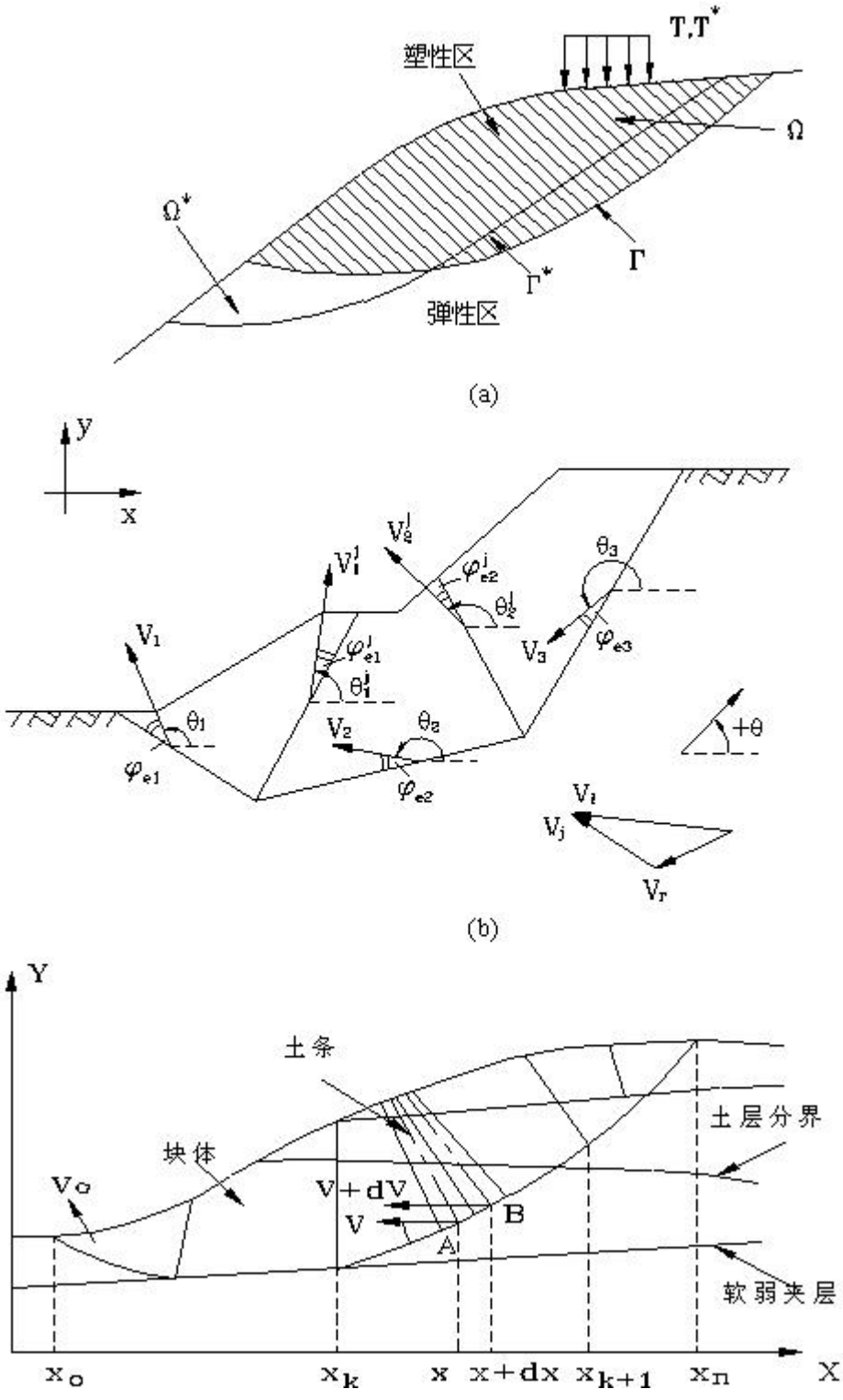


图 2. 1 边坡稳定塑性力学上限解。(a) 连续界质破坏模式 (b) 多楔体破坏模式 (c) 分段连续多块休破坏模式

(2) 方案2。极限状态是通过施加一个假想的水平体积力$\eta_b W$（如水平地震惯性力）实现的。其中W为滑坡体的自重。Sarma (1979) 首先提出这一思路，并称η_b为临界加速度系数。这一方案在边坡问题中较适用, 因为大多数的边坡问题中不存在表面荷载。

采用(1)，(2)两种处理方案，η_t 或η_b通常可以直接通过一个公式求得，不需迭代。同时，这两种处理与塑性力学上、下限定理中的加载概念一致，因此，可以获得较坚实的理论基础。

(3) 方案3。定义安全系数F是这样的一个数值, 如果材料的抗剪强度指标c'和 ϕ'按下式降低为c'_e和ϕ'_e，那么, 边坡处于极限状态。

$$c_e = c / F \tag{2.10}$$

$$\tan\phi'_e = \tan\phi' / F \tag{2.11}$$

采用这一方法时, F常以隐式出现在求解的方程式中, 需要进行迭代。通常的作法是，先假设一系列的F值，分别求得相应的η_t或η_b，然后找到使η_t或η_b为零时相应的F值。为了表达方便,在以下的叙述中, 我们为这三种方案提供统一的计算公式。对出现下标e的量，如相应方案1和2，则意味着式(2.10)和(2.11)中的F值为1。

2.3 边坡稳定分析的条分法

按照2.2节的理论框架进行二维土体的极限分析，有两种途径：

(1) 有限单元法

在这方面具有代表性的工作当属澳大利亚学者Sloan(1988,1989)，他提出了将土体划分为三角形单元，并对各几何量和物理量作线性离散化的模式，分别从上限和下限寻找土体失稳的临界模式。有关工作已在文献中(陈祖煜和汪小刚, 2000)简略介绍。

(2) 条分法。

上、下限解的严格方法，在数学处理方面会遇到较大的困难，不便在实际工程问题中推广。作为一种近似的作法，土力学中很早就采用了将滑动体划分成若干条块的“条分法”。传统的极限平衡分法采用垂直界面的条块，通过分析条块的静力平衡获得一个许可的应力场及其相应的解，这就是第3节要介绍的垂直条分法。Sarma (1979)提出斜条分法，并假定沿倾斜的条块界面也达到了极限平衡。事实上，这些倾斜的界面也是滑移面。Donald and Chen (1997)沿用了这一构想，建立了求解边坡稳定的上限解的方法。这就是第4节要介绍的斜条分法。

下面，我们首先简单回顾一下这两种条分方法的基本理论框架。

(1) 下限解－土体稳定分析的垂直条分法

分析图2.2(c)所示的作用于垂直土条上的力，可以发现，在这个土条上，存在着4个未知量，即作用于土条底面的法向力N，作用于土条侧面的总作用力G, 它的倾角β以及该力作于侧面上的位置y_t。已经证明，当土条Δx的宽度变为无限小时，将N的作用点位置设在条底中点，其包含的误差将是一个相对Δx高阶的小量。故N的作用位置不是未知量。对这些土条，我们可以建立两个静力平衡方程和一个力矩平衡方程，因此，需要对其中某一未知函数作出适当的假定，在相应的边界条件下求解安全系数F值。通常，我们对土条侧面的$G(x)$的某个参数作出假定，相应的满足静力平衡条件的解，属于下限解范畴。当然，它还要接受式(2.7)和(2.8)的限制，在通用条分法中，这一限制可具体化为：

$$\frac{[E'\tan\phi'_{av} + c'_{av}h]}{X} > F \tag{2.12}$$

$$E' > 0 \tag{2.13}$$

$$N > 0 \tag{2.14}$$

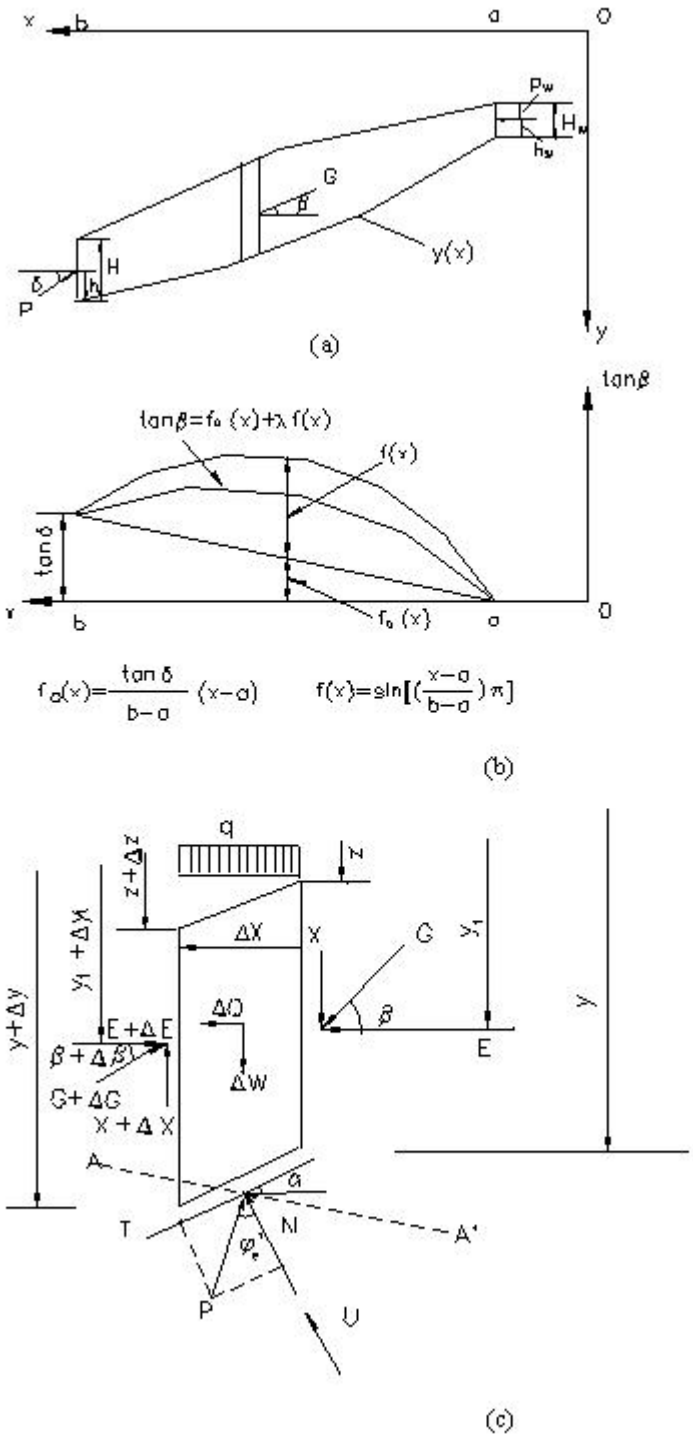


图 2. 2 边坡稳定的垂直条分法 (a) 边坡断面；(b) 对 tan β 的假定 (c) 作用在条块上的力

其中E'，X分别为作用于侧面的有效水平作用力和切向力，ϕ'_{av}和c'_{av}为侧面上的有效应力抗剪强度指标，h为土条高度。

(2) 上限解－土体稳定分析的斜条分法

对于一个处于极限状态的边坡(图2.1(a))，假定在土体里存在一个塑性区Ω^*，塑性区里各点达到屈服，在这一塑性区和边界上如果由于某一外荷载增量导致一个塑性应变ε_{ij}^*，那么可以通过类似式(2.3)这样的虚功原理的表达式求解相应这一塑性变形模式的外荷载T^* （图2.1(a)）。

$$\int_{\Omega^*} \sigma_{ij}^* \cdot \varepsilon_{ij}^* dv + \int_{\Gamma^*} dD_s^* = \boldsymbol{W}\boldsymbol{V}^* + \boldsymbol{T}^*\boldsymbol{V}^* \tag{2.15}$$

上限定理指出，相应真实塑性区Ω的外荷$\boldsymbol{T}$一定比$\boldsymbol{T}^*$小或相等。因此，极限分析上限解就是在许多可能的滑动机构$\boldsymbol{\Omega}$中寻找一个使T^*最小的临界滑动机构。式中$\boldsymbol{V}^*$是外荷载增量引起的相应塑性位移，这个位移率通常称为塑性速度。$\boldsymbol{W}$是塑性区的体积力。式(2.15)的左边两项分别是产生于破坏体$\boldsymbol{\Omega}^*$内和沿滑裂面Γ*的内部耗散能。

作为由图2.1(a)所代表的上限解命题的一种简化，斜条分法将滑动土体分成若干具有倾斜侧面的土条（图2.1(b)），假定沿条块底面和侧面土体，均达到了极限平衡。而每一条块本身则视为一个刚体。在某一外力增量的作用下，破坏土体将产生一个塑性速度V_i^*。此时，式(2.3)可简化为

$$\sum_{k=1}^{n-1} D_{ek}^j + \sum_{i=1}^{n} \Delta D_{ei}^s = WV^* + T^*V^* \tag{2.16}$$

式中D为作用在土条底面或侧面的内能耗散，分别用上标s和j表达，土条被划分为n为土条，包括$n-1$个侧面。

如果材料遵守摩尔--库伦破坏准则和相关联的流动法则， 则可确认沿滑面的速度V与滑面夹角为ϕ_e（Chen,1975）。这一认识导致了下面两个重要结论。

(1) 由于速度V与滑动界面的夹角必须为ϕ_e，滑面上的反力在速度方向作的功，即单位面积内能耗散，可用下式表示(Chen,1975)：

$$dD = (c'_e \cos\phi'_e - u\sin\phi'_e)V \tag{2.17}$$

其中u为孔压，式(2.17)说明，在根据式(2.15)或式(2.16)计算F时，不需要知道滑面上的法向和切向应力。

(2) 由于速度V与滑动界面的夹角必须为ϕ_e，知道第一个条块的速度V_1后, 即可求得第二个条块的速度V_2和第一个条块相对于第二个条块的速度V_1^j。依此类推，任意一条块的V和V^j可表达成第一个条块的速度V_1的线性函数。这样V不再是未知数，将通过式(2.16)求解一个F值。在4.1节中，将介绍详细的计算步骤。很显然上述步骤实际上就是在实现早已由W.F.Chen(1975)等学者详细叙述的土的塑性力学上限解法。只是采用了一个简单实用的斜条分法来代替这些学者提出的纯解析法，为其在工程实践中广泛应用创造了条件。

3 土体稳定问题的下限解 一 垂直条分法

3.1 垂直条分法的静力平衡方程及其解

设想土坡的一部分沿着某一滑裂面滑动。在这个滑裂面上，土体处处达到极限平衡。设土条底的法向力和切向力分别为N和T，正应力σ'_n和剪应力 τ 之间满足摩尔-库伦强度准则。则有

$$\Delta T = c'_e \Delta x \sec\alpha + (\Delta N - u\Delta x \sec\alpha)\tan\phi'_e \tag{3.1}$$

式中 α为土条底倾角，$\tan\alpha=dy/dx$；u为孔隙水压力，通常定义孔隙水压力系数

$$r_u = \frac{u}{dW/dx} \tag{3.2}$$

对如图2.2(c)所示的土条，建立X和Y方向的静力平衡方程

$$\Delta N\sin\alpha-\Delta T\cos\alpha+\Delta Q-\Delta(G\cos\beta)=0 \tag{3.3}$$

$$-\Delta N\cos\alpha-\Delta T\sin\alpha+(\Delta W+q\Delta x)-\Delta(G\sin\beta)=0 \tag{3.4}$$

将式(3.1)代入式(3.3)，(3.4)，消去ΔN，令$\Delta x\to 0$，得到静力平衡的微分方程

$$\cos(\phi_e'-\alpha+\beta)\frac{dG}{dx}-\sin(\phi_e'-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{dx}G=-p(x) \tag{3.5}$$

其中：

$$\begin{aligned}p(x)=&(\frac{dW}{dx}+q)\sin(\phi_e'-\alpha)-r_u\frac{dW}{dx}\sec\alpha\sin\phi_e'\\&+c_e'\sec\alpha\cos\phi_e'-\eta\frac{dW}{dx}\cos(\phi_e'-\alpha)\end{aligned} \tag{3.6}$$

式中，G=土条间作用力；y_t= 土条间作用力的作用点的 y 坐标值； α=土条底倾角；β=土条间作用力与水平线的夹角；dW/dx =土条单位宽的重量；q =单位宽度上表面垂直荷重；η =水平地震力系数，h_t=水平地震力作用点与条底中点的距离。$\Delta Q=\eta\Delta W$,为水平地震力。

式(3.5)也可通过将作用在条块上的力投影图2.2(c)中线AA′ 方向获得。AA′ 与土条底切线方向夹角为ϕ'_e，故土条底的法向力N'与由其贡献的切向抗力$N'\tan\phi'_e$ 的合力因与AA′ 垂直故不出现。

同时，将作用在土条上的力对土条底中点取矩，建立力矩平衡方程

$$\begin{aligned}&(G+\Delta G)\cos(\beta+\Delta\beta)[(y+\Delta y)-(y_t+\Delta y_t)-\frac{1}{2}\Delta y]\\&-G\cos\beta(y-y_t+\frac{1}{2}\Delta y)+G\sin\beta\Delta x-\eta\frac{dW}{dx}h_t=0\end{aligned} \tag{3.7}$$

h_t为侧向力作用点距条底中点的垂直距离，当$\Delta x\to 0$时，可得

$$G\sin\beta=-y\frac{d}{dx}(G\cos\beta)+\frac{d}{dx}(y_tG\cos\beta)+\eta\frac{dW}{dx}h_t \tag{3.8}$$

微分方程组(3.5)和(3.8)的边界条件是(图2.2(a))

$$G(a)=P_w \tag{3.9}$$

$$G(b)=P \tag{3.10}$$

$$\beta(a)=0 \tag{3.11}$$

$$\beta(b)=\delta \tag{3.12}$$

$$\kappa(a)=h_w/H_w=1/3 \tag{3.13}$$

$$h/H=\kappa(b) \tag{3.14}$$

其中P_w为顶端拉力缝上作用的水压力。P为作在底端垂直界面上的主动土压力，δ为该土压力与水平线的夹角。

式(3.5)是一个一阶非线性常微分方程，它的积分形式是

$$G(x)=-\sec(\phi_e'-\alpha+\beta)s^{-1}(x)[\int_a^x p(\zeta)s(\zeta)dx-G(a)] \tag{3.15}$$

其中

$$s(x)=\sec(\phi'_e-\alpha+\beta)\exp[-\int_a^x\tan(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\zeta}d\zeta] \tag{3.16}$$

将式(3.9),(3.10)代入(3.15)，可得

$$\int_a^b p(x)s(x)dx=G_m \tag{3.17}$$

其中

$$G_m=P_w-PE_b \tag{3.18}$$

$$E_b=\exp[\int_a^b\tan(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\zeta}d\zeta] \tag{3.19}$$

式(3.8)的积分形式是

$$\int_a^x G(\sin\beta-\cos\beta\tan\alpha)dx=\int_a^x\eta\frac{dW}{dx}h_t dx+[G\cos\beta(y_t-y)]_a^x \tag{3.20}$$

引入一个新的变量

$$t(x)=\int_a^x(\sin\beta-\cos\beta\tan\alpha)\exp[\int_a^\xi\tan(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{\phi\beta}{\phi\zeta}d\zeta]d\xi \tag{3.21}$$

其中ζ和ξ为积分过程中的哑元，将式（3.15）代入式（3.20）左侧，我们有

$$\begin{aligned}&-\int_a^b(\sin\beta-\tan\alpha\cos\beta)\cdot[\int_a^x p(\xi)s(\xi)d\xi-P_w]\exp[\int_a^\xi\tan(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{\phi\beta}{\phi\zeta}d\zeta]dx\\&=-\int_a^b\left[\int_a^x p(\xi)s(\xi)d\xi-P_w\right]dt=-\left[t(x)\int_a^x p(\xi)s(\xi)d\xi\right]_a^b+\int_a^b p(x)s(x)t(x)dx+\int_a^b P_w dt\\&=-t(b)G_m+\int_a^b p(x)s(x)t(x)dx+P_w t(b)=P\cdot E(b)t(b)+\int_a^b p(x)s(x)t(x)dx\end{aligned} \tag{3.22}$$

式（3.20）右侧为

$$\int_a^b\eta\frac{dW}{dx}h_e dx+h_w P_w\cos\beta_a-h\cdot P\cdot\cos\beta_b=\int_a^b\eta\frac{dW}{dx}h_t dx+P_w h_w-h\cdot P\cdot\cos\delta \tag{3.23}$$

式（3.20）变为

$$\int_a^b p(x)s(x)t(x)dx=M_m \tag{3.24}$$

其中

$$M_m=P_w h_w-P[h\cos\delta+t(b)E_b]+\int_a^b\eta\frac{dW}{dx}h_e dx \tag{3.25}$$

式(3.25)中P为作用于滑动土体左侧（即$x=b$）的条间作用力$G(b)$。在土压力问题中，也就是待求的主动土压力； P_w 为右侧拉力缝中($x=a$)的水压力, 即$G(a)$。 h ＝土压力的作用点到土条底的距离，即在$x=b$时的$(y-y_t)$值；h_w＝拉力缝中水压力作用点到土条底的距离；δ 为$x=b$时的β值，即土体和墙的摩擦角。

3.2 数值分析方法

3.2.1 对土条侧向力引入的假定

方程(3.17)和(3.24)中包括一个待定安全系数F (或土压力P) 和一个未知变量$\beta(x)$。Chen和Morgenstern (1983)建议对$\beta(x)$引入以下假定 (图2.2(b))。

$$\tan\beta = f_o(x) + \lambda f\ (x) \tag{3.26}$$

$f_0\ (x)$为一线性函数，它保证$f_o(a)$和 $f_o\ (b)$的数值分别等于tanβ在$x=a$和$x=b$的设定数值(图2.2(b))。在边坡稳定分析中，由于滑裂面两端点处土条尖灭为单元，剪应力成对的原理要求β值与该点坡面的倾角相等（参见3.3.2节的讨论)。$f\ (x)$为保证$f(a)$和 $f\ (b)$为0的任意函数。引入这两个假定的函数后，式(3.17)和式(3.24)中仅包含安全系数F(或土压力P)和λ两个未知量，可以通过数值方法求解。

采用不同的$f(x)$，将得到不同的F或P。在所有这些解中，在满足(2.12)至(2.14)的限制条件的前提下，均属下限解。Morgenstern - Price发现，这些解均十分接近。Chen和Morgenstern (1983) 的研究进一步证实了这一点。因此，在垂直条分法求解过程中，仅引入一、二个简单的关于$f(x)$的假定。例如，$f_o(x)=0$，$f(x)=1$或取$f(x)$为一正弦曲线（图2.2(b)）。在3.3.2节中我们还将深入讨论这一问题。

3.2.2 解边坡稳定安全系数的步骤

在边坡稳定分析领域，式（3.17）至（3.24）中的土压力P为零，因而简化为

$$G_n(F,\lambda) = \int_a^b p(x)s(x)dx - P_w = 0 \tag{3.27}$$

$$M_n(F,\lambda) = \int_a^b p(x)s(x)t(x)dx - P_w h_w - \int_a^b \eta\frac{dW}{dx}h_t dx = 0 \tag{3.28}$$

式（3.27）和（3.28）中包含有F和λ两个未知量。可按第3.2.4节介绍的方法求解。

3.2.3 解主动土压力的步骤

在土压力领域，式（3.17）和（3.24）中包含的F为已知量，其值为1。式(3.17)和式(3.24)中未知量为λ和P，可以通过式（3.17）直接求解P，再代入式（3.24）得到一个只包括一个未知量λ的方程式(Chen and Li, 1998)：

$$M_n(\lambda) = M - P_w h_w + (P_w - G)\left[\frac{h\cos\delta}{E(b)} + t(b)\right] - \int_a^b \eta\frac{dW}{dx}h_t dx = 0 \tag{3.29}$$

其中

$$G = \int_a^b p(x)\cdot s(x)dx \tag{3.30}$$

$$M = \int_a^b p(x)\cdot s(x)\cdot t(x)dx \tag{3.31}$$

这样，求解主应力土压力的步骤是：

(1) 求解满足式（3.29）的λ。

(2) 代入式（3.17）（或式(3.24)），获得土压力值P。

在实际操作时，我们通常假定的一个土压力值P'，这一值可以是根据经验公式获得的主动土压力，然后定义

$$\eta = 1 - \frac{P}{P'} \tag{3.32}$$

将η作为最优化方法的目标函数，最终获得使η最小（即P最大）的临界滑裂面（见第3.4和5.2节）。假定的P'值不影响最终的成果。

3.2.4 Newton-Raphson迭代法

对于边坡稳定问题通常采用Newton-Raphson迭代法求解下列静力平衡方程中的F，λ。

先假定一个F_1，λ_1，代入式(3.27)，(3.28)，此时右式不为零，下一个更为接近其解F^*，λ^*的数值F_2，λ_2通过下式求得($i=1$)。

$$\Delta F_i = F_{i+1} - F_i = \frac{G_n \dfrac{\partial M_n}{\partial \lambda} - M_n \dfrac{\partial G_n}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial G_n}{\partial \lambda}\dfrac{\partial M_n}{\partial F} - \dfrac{\partial G_n}{\partial F}\dfrac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \tag{3.33}$$

$$\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_{i+1} - \Delta \lambda_i = \frac{-G_n \dfrac{\partial M_n}{\partial F} + M_n \dfrac{\partial G_n}{\partial F}}{\dfrac{\partial G_n}{\partial \lambda}\dfrac{\partial M_n}{\partial F} - \dfrac{\partial G_n}{\partial F}\dfrac{\partial M_n}{\partial \lambda}} \tag{3.34}$$

重复上述步骤，直至下列收敛标准得到满足

$$\Delta F_i < \varepsilon \tag{3.35}$$

$$\Delta \lambda_i < \varepsilon \tag{3.36}$$

在STAB程序中，ε值设为10^{-4}。该程序开发以来使用的实际情况证明，对绝大数问题均能迅速地收敛到这一精度。

对土压力问题，式(3.29)是一个包含一个未知量的Newton-Raphson迭代，即

$$\Delta \lambda_i = \Delta \lambda_{i+1} - \Delta \lambda_i = -\frac{M_n}{\partial M_n / \partial \lambda} \tag{3.37}$$

选择一个比较接近最终解λ^*，F^*的λ_1和F_1，对于保证数值计算收敛有着十分重要的意义，这里建议的方法，经过大量实践计算的检验，证明十分有效

1. F_1的确定

Chen(1992)提出以下一个简化公式确定安全系数的初值。

$$F = \frac{B_k}{A_k} - \frac{C_k}{B_k} \tag{3.38}$$

其中

$$A_k = \int_a^b B dx \tag{3.39}$$

$$B_k = \int_a^b A dx + \int_a^b B\xi dx \tag{3.40}$$

$$C_k = \int_a^b A\xi dx \tag{3.41}$$

$$\xi = tg\varphi'\alpha + K_i - \tan\varphi'_{av}\alpha_{av} \tag{3.42}$$

系数A,B为，

$$A = [\frac{dW}{dx}(\cos\alpha - r_u \sec\alpha)\tan\phi' + c'\sec\alpha - \eta\frac{dW}{dx}\sin\alpha\tan\phi' + q\cos\alpha\tan\phi'] \tag{3.43}$$

$$B=[(\frac{dW}{dx}+q)\sin\alpha+\eta\frac{dW}{dx}\cos\alpha] \tag{3.44}$$

$$K_i=\sum_{i=1}^{s}[\tan\phi_i^{'}\cdot\alpha_i]_\ell^r \tag{3.45}$$

K_i是一个计及滑裂面上α 和 ϕ' 突然变化影响的系数。如果某段滑面是光滑、均匀的，则K_i就是一个常数。在积分过程中，当某一土条的 ϕ 值或条底倾角 α 出现突变时，K_i就要增加一个值$[tan\phi'_i\cdot\alpha_i]_i^r$（方括号内的变量在突变点右侧和左侧的差值，$x$轴向左为正），这里 α 以弧度计。式中$\alpha_{av}$，$\phi'_{av}$为 α，$\phi'$ 在(a，b)段的平均值，以弧度计。

这个方法适用于任意形状滑裂面，并不需迭代求解。文献(Chen,1992)详细介绍了推导过程以及有关其计算精度的测试结果。

2. λ_1的确定

假定tan β的平均值和$tan\alpha$ 的平均值相同，即

$$\int_a^b\tan\beta dx=\int_a^b\tan\alpha dx \tag{3.46}$$

将式(3.26)代入式(3.46)即可得到一个λ值作为初值λ_1。

3.2.5 计算导数的公式

用式(3.33)，(3.34)求解，需要确定$\partial M_n/\partial\lambda,\partial M_n/\partial F,\partial G_n/\partial\lambda,\partial G_n/\partial F$ 的数值。计算这些导数的公式如下列。详细推导参见陈祖煜(1991)和Chen&Li (1998)。

$$\frac{\partial G_n}{\partial F}=\int_a^b p(x)\cdot s(x)(k(x)-\int_a^x\sec^2(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\phi'_e}{dF}\frac{d\beta}{d\xi}d\xi)dx \tag{3.47}$$

$$\frac{\partial M_n}{\partial F}=\int_a^b p(x)\cdot s(x)[k(x)t(x)-\int_a^x t\cdot\sec^2(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\phi'_e}{dF}\frac{d\beta}{d\xi}d\xi]dx \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial G_n}{\partial\lambda}=\int_a^b p(x)\cdot s(x)(-\int_a^x\sec^2(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\lambda}\frac{d\alpha}{d\xi}d\xi dx+D_i)dx \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_n}{\partial\lambda}&=\int_a^b p(x)\cdot s(x)(-\int_a^x t\cdot\sec^2(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\lambda}\frac{d\alpha}{d\xi}d\xi+D_{ti}\\&+\int_a^x\cos\phi'_e\sec\alpha\sec(\phi'_e-\alpha+\beta)\exp(\int_a^\xi\tan(\varphi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\zeta}d\zeta)\frac{d\beta}{d\lambda}d\xi]dx\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$D_i=[\tan(\phi'_e-\alpha+\beta)\frac{d\beta}{d\lambda}]_{x=a}-\sum_{i=1}^{s}[\tan(\phi'_{ei}-\alpha_i+\beta)\frac{d\beta}{d\lambda}]_1^r \tag{3.51}$$

$$D_{ti}=-\sum_{i=1}^{s}[t_i\tan(\phi'_{ei}-\alpha_i+\beta)\frac{d\beta}{d\lambda}]_1^r \tag{3.52}$$

其中D_i和D_{ti}是考虑到滑面上α和ϕ'_e可能出现的突变点而增加的附加值。符号$[\ ]_\ell^r$表示在该点相应数值在突变点右侧和左侧的差值。

使用式（3.29）计算土压力时，相应导数的公式为，

$$\frac{\partial M}{\partial\lambda}=\frac{\partial M_n}{\partial\lambda}+[P_w-G]\left\{\left[\frac{h\cos\delta}{E(b)}+t(b)\right]Q(b)-R(b)\right\}-\frac{\partial G_n}{\partial\lambda}\left[\frac{h\cos\delta}{E(b)}+t(b)\right] \tag{3.53}$$

其中 $\frac{\partial M_n}{\partial \lambda}$ 和 $\frac{\partial G_n}{\partial \lambda}$ 已由式（3.50）和式（3.49）提供，其它两项为，

$$Q(b)=\int_a^b \sec^2(\phi'-\alpha+\beta)\frac{d\alpha}{d\xi}\frac{d\beta}{d\lambda}d\xi - D_i + \left[\tan(\phi'-\alpha+\beta)_b \frac{d\beta_b}{d\lambda}\right] \tag{3.54}$$

$$R(b)=-\int_a^b \cos\phi' \sec\alpha \sec(\phi'-\alpha+\beta)E^{-1}(x)\frac{d\beta}{d\lambda}dx + \int_a^b t(x)\sec^2(\phi'-\alpha+\beta)\frac{d\alpha}{d\xi}\frac{d\beta}{d\lambda}d\xi + D_{ti} - t(b)\tan(\phi'-\alpha+\beta)_b \frac{d\beta_b}{d\lambda} \tag{3.55}$$

3.2.6 算例

图3.1算例为澳大利亚ACAD协会考核稳定分析程序的一个考题(Donald and Giam,1992)，一大批程序对此例进行分析。在以后各节还将涉及。滑裂面1为使用Spencer法获得的临界滑裂面，相应安全系数为1.366。滑裂面2为使用圆弧滑裂面和Bishop法算得的安全系数为1.378，对同一圆弧使用Spencer法的安全系数为1.383。在第6节中，此例将作为所附源程序的考题，再作进一步介绍。

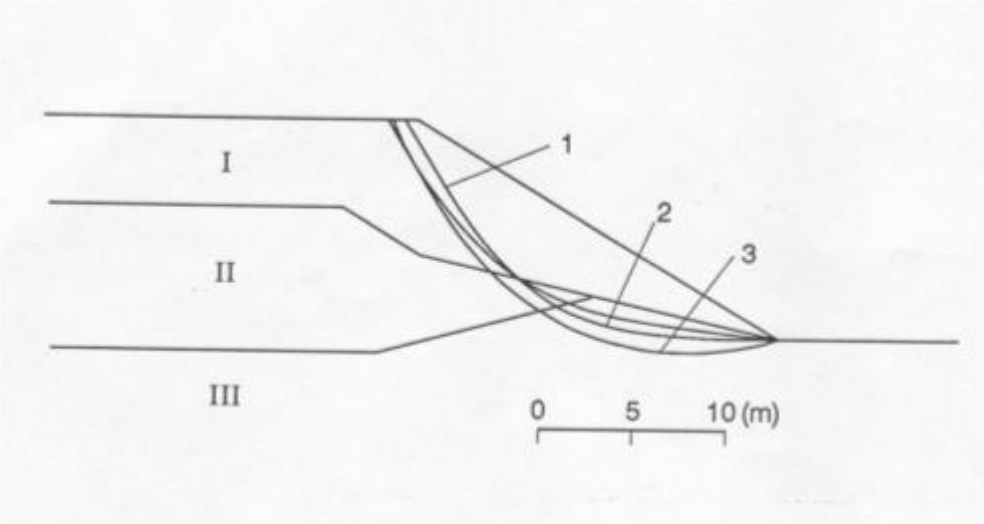


图 3. 1 垂直条分法算例,比较不同方法成果一例。澳大利亚 ACAD 标准问卷题。临界滑裂面：1，任意形状，临界 F_m = 1.366 (Spencer); 2. 圆弧，Bishop 法 F_m = 1.384，同一弧，Spencer F_m = 1.382; 3. 斜条分法上限解, F_m = 1.418

3.3 垂直条分法的有关理论问题

3.3.1 关于滑面顶部设拉力缝的必要性

一些学者很早就认识到，按照极限平衡的理论体系获得的解，如果*c*值较大时，在靠近滑面顶部的土条，按式（3.15）将给出数值为负的条间力*G*，按式（3.3）和式（3.4）计算滑面上的法向力*N′*，也可能得到负值。这一现象不仅不合理，而且有时会导致数值计算不收敛的问题。Terzaghi(1943)讨论了在滑面顶部设拉力缝的必要性，并推导了计算拉力缝高度H_w的公式。即

$$H_w=\frac{2c}{\gamma}tg(45^\circ+\frac{\phi_e'}{2}) \tag{3.56}$$

其中γ为土的容重。在通用条分法的理论框架内，可以用以下简捷的推导获得这一公式。首先认定，在滑面顶部，滑面与水平线的夹角α按土的强度理论，应为

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi'_e}{2} \tag{3.57}$$

代入式(3.5)右侧，并令其为零，此时，$\frac{dW}{dx} = \gamma H_w$，得到(此时式(3.6)中$q$，$r_u$和$\eta$为零)。

$$H_w = \frac{c\cos\phi'_e}{\gamma \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'_e}{2})\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'_e}{2})} \tag{3.58}$$

由于

$$\cos\phi'_e = \sin(\frac{\pi}{2} - \phi'_e) = 2\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'_e}{2})\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'_e}{2}) \tag{3.59}$$

代入式(3.58)可得式（3.56）

从以上推导可知，式（3.56）是建立在以下假定基础上得到的：

(1) 在拉力缝处，不仅G为零，$\frac{dG}{dx}$亦为零。

(2) 在拉力缝处，滑裂面与水平面夹角为$(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi'_e}{2})$。

上述两个假定不是我们建立的边坡稳定通用条分法的理论体系的必要条件，因此式（3.56）仍属近似。

3.3.2 土条侧向力须满足的边值条件

在求解滑动土体的力和力矩平衡方程式时，为了使问题变得静定可解，引入了对tanβ的假定，即式(3.26)。本节论证的问题是, tanβ值在滑动土体两端，即$x=a$和$x=b$处是确定的，不能随意假定，否则将违背剪应力成对的原理。这一命题，是Chen和Morgenstern(1983)首先提出的。

首先，来考察一个处于滑面逸出点的端部的土条B(图3.2左上角)，这是一个特殊的土条，它具有三角形形状，土条在此尖灭为一个单元。在这个土单元的垂直面上有

$$\tan\beta_b = \lim_{x\to b}\frac{X}{E} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} \tag{3.60}$$

式中β_b为$\beta(x)$在端部的值；τ_{xy}、σ_x分别为作用在边条块B的垂直面的剪应力和垂直应力。

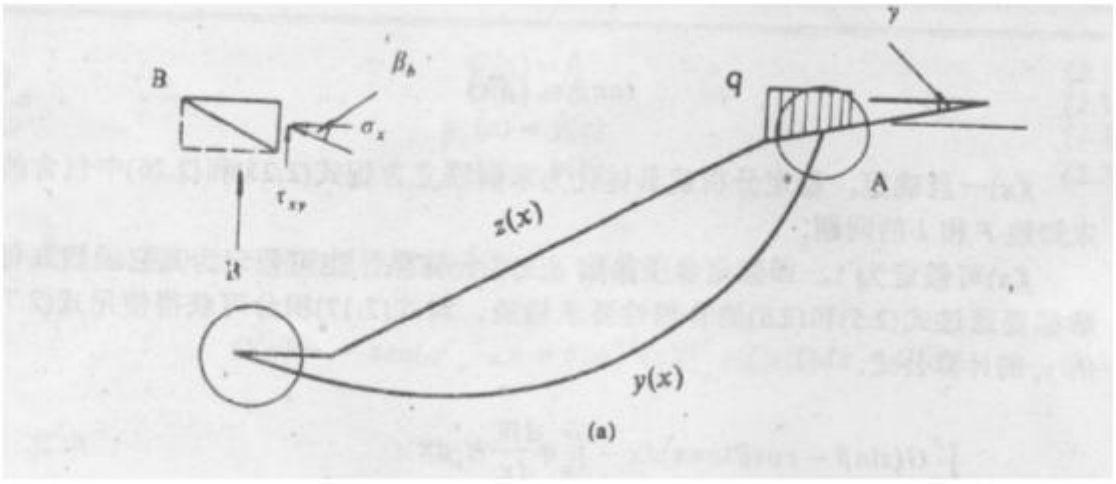


图 3. 2 说明土条侧向力须满足的边值条件示例

式(3.60)说明，如果端点的应力状态是确定的，则β在端点处的值也是确定的。就图(3.2)B点的情况而言，τ_{xy}的值是零，在σ_x不等于零的时候，β_b的值就是零。换句话说，如果$\beta(x)$的值在端点被假定为非零值的话，在端部剪应力成对的原理将受到破坏。

经过论证，Chen和Morgenstern认为，当土条的宽度足够小时，端点土条的侧向作用力的合力平行于该土条顶面，即

$$\beta_a = \gamma_a \tag{3.61}$$

其中γ为滑裂面两个端部坡面的倾角（图3.2）。

固定土条侧向力在端部的值，可以限制对β假定的任意性，具有一定的理论和实用意义。为了使对tanβ的假定符合本节提出的限制，提出了式(3.26)。这是Chen&Morgenstern提出的对Morgenstern-Price建议的下式的修正,

$$\tan\beta = \lambda f(x) \tag{3.62}$$

在式(3.26)中$f_o(x)$为满足式(3.61)的一个假定的分布函数，$f(x)$为另一个假定的函数，它在$x=a$和b时为零。

从实用角度，可以对式(3.26)中的$f_o(x)$和$f(x)$取下面两种假定，它分别代表了方法严格程度的两个水平。

土条侧向力实用假定1：取$f_o(x)=0$，　$f(x)=1$这就是常用的Spencer法。

土条侧向力实用假定2：取$f_o(x)$在(a, b)区间内为直线，$f(x)$为正弦曲线，参见图2.2(b)。

下面通过一个实例说明在一些条件下，使用土条侧向力实用假定2的必要性。这个例子是STAB的一个用户在进行重力坝抗滑稳定分析时，事先设计的一个考题。

如图3.3所示的混凝土大坝。在设定的推力和滑面上的强度指标条件下，安全系数完全可以用简单的力学平衡求得。此例滑面AB上的ϕ和c分别取38.66°和343kN/m^2,混凝土容重取24.5 kN/m^3, 无扬压力，可得F=1.867。可是，采用STAB程序的Spencer法(即土条侧向力实用假定1)，安全系数却是F=2.585。出现这一问题的原因就在于对于A点对水压力的倾角的假定上面。显然，在A点β应为零。而采用Spencer法，则土条间作用力的倾角，包括A点，均为一非零的值，这样，β就在端部出现了突变点，就好象水压力也是以一个倾斜的β角作用在坝面上。这一问题导致了安全系数严重地偏离正确值。如果我们采用的土条侧向力假定在端部采用了合适的数值(参见图3.3中下方标注(b)所示三角形图形)，令 $f_0(x)$在A、B点为零，获得了F=1.868，与理论值完全一致。

顺便指出，随着理论体系日趋完善，条分法在重力坝深层抗滑分析中逐渐得到应用。(陈际唐、刘宁,1997; Hamel,1976)。

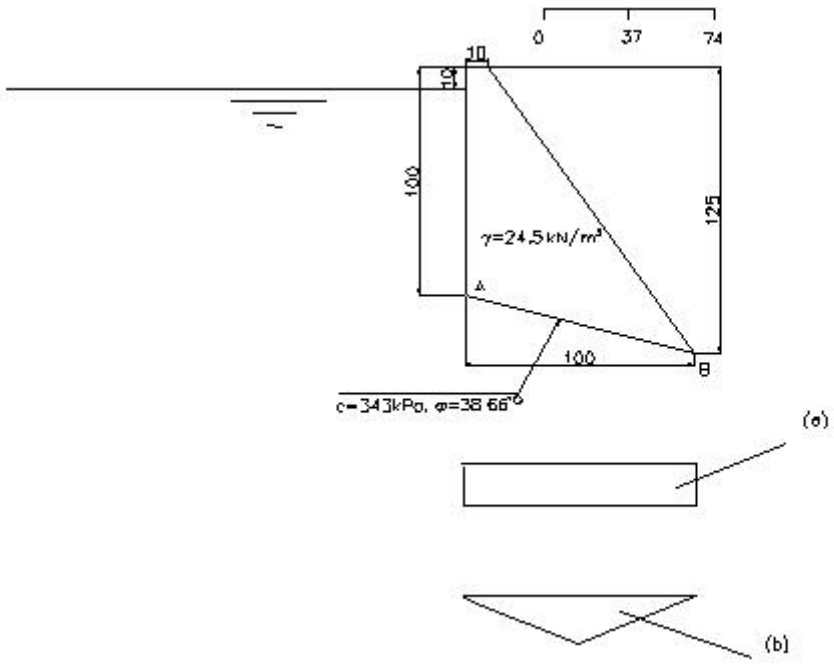


图 3. 3 采用更加符合实际土条侧向力假定 2 的必要性示例

3.3.3 垂直条分法的下限背景

斜条分法和塑性力学的上限定理是完全一致的，但是将工程中常用的垂直条分法纳入下限定理的理论框架，在学术界并不是具有一致的看法的。有人认为，垂直条分法需要事先确定一个滑裂面，然后求解相应最小安全系数的临界滑裂面。这一步骤恰恰是有悖于“下限”这一基本命题的。W.F.Chen (1975)认为，基于极限平衡原理的垂直条分法既不是下限，也不是上限。

从本章的内容可以看到，在滑裂面固定时，传统的极限平衡方法所获得的确实是一个静力许可的应力场，其解答也确实是一个小于真实解的、留有余地的安全系数。引入了求解最小安全系数和临界滑面的求解步骤，最后获得的仍然是一个静力许可的应力场，只是没有严格按照下限解的步骤在诸多的解答中找一个最大的解答。对于工程师来说是至关重要的是，了解他们经常使用的“Bishop”、“Morgenstern-Price”法等总在向他们提供一个偏安全的安全系数值。现在让我们来看下面一个算例。

图3.4示一无重量承受垂直荷载的边坡， ϕ=30°, c=88.2 kPa。根据滑移线理论可得极限荷载为 q=1092.1 kPa。此例还将在第4节中多次提到。相应理论解，土条侧向力倾角的分布图形应如图3.4(b)所示。图3.5和表3.1分别给出相应这一理论侧向力倾角的分布图形和土条侧向力假定1和2的临界滑裂面。需要强调的是，这些滑裂面都是使用计算机自动搜索获得的，可见垂直条分法得到的临界滑裂面，虽然与理论解在形状上稍有出入，但安全系数均小于理论值1.00。

表3.1 解释垂直条分法的下限背景一例

$f_o(x)$ 和$f(x)$	滑裂面			
	初始		临界	
	编号	F_o	编号	F_o
理论(图3.4b)	0	1.110	3	0.990
假定1	0	1.015	1	0.991
假定2	0	0.987	2	0.957

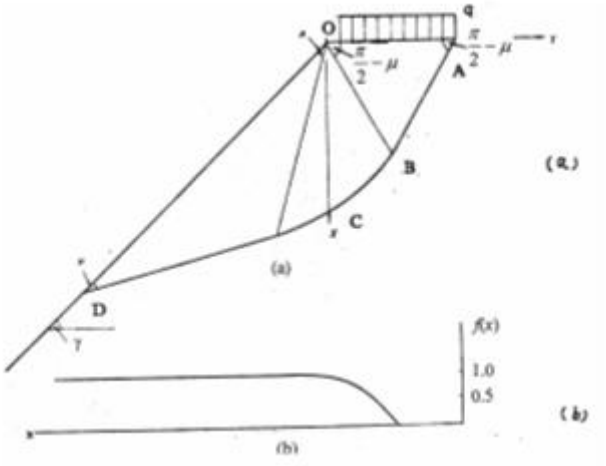


图 3. 4 无重量承受垂直荷载的边坡，(a)计算简图, (b) 相应理论解土条侧向力倾角的分布图形

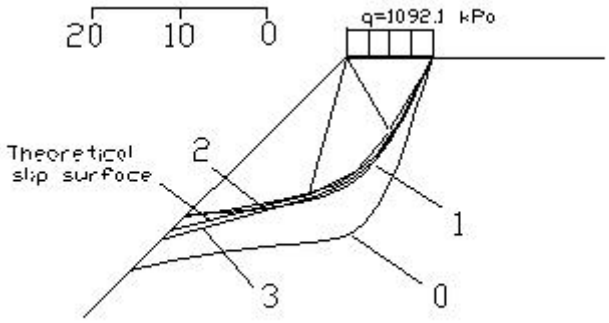


图 3. 5　对图 3.4 所示例，采用不同的侧向力假定获得的安全系数和临界滑裂面。0=初始滑裂面，1: 假定 1, *F*=0.991; 2:假定 2, *F*=0.957; 3:使用理论滑裂面和理论侧向力侧定，即图 3.4(b)图形，*F*=0.990

3.4　垂直条分法在主动土压力领域中的应用

在第1节中，已经讨论了，作用于不同支挡结构的土压力的分布形状不同，导致合力的位置不同, 其主动土压力也不同。如果引入力矩平衡条件，则有可能实现不同支挡结构的土压力的分析和计算。在执行垂直条分法中，可以通过输入不同的$\kappa=h/H$值来计入这一影响，

现在通过一个墙高为12 m 的算例来说明使用3.2节介绍的数值分析方法求解主动土压力的步骤 (Chen and Li, 1997)，如图3.6示。此例两端点的β值均设为零，采用图2.2(b)第2种侧向力的假定。当h=4, 6, 8m， 相应κ=1/3、1/2、2/3。输入的初始滑裂面编号为0，获得的临界滑裂面分别为1,2,3。相应的主动土压力，即$x=a$处的P值分别为387.3, 599.07, 462.76kN。分析这些计算成果，可得到如下认识:

(1) 在k=1/3时，临界滑裂面回归为一条直线（曲线1），与水平面夹角恰好为45°+ϕ/2 (=63°)，其土压力数值也与库伦土压力的理论值一致。说明，当作用点为下三分点时，本文介绍条分法可以回归为重力式挡土墙的经典理论。

(2) 当κ=1/2时，主动土压力P_a变大。相应的临界滑裂面为曲线型（曲线2）。由此可见，诸如支撑、锚拉和悬臂这一类的支挡式结构，其土压力通常比重力式挡土墙的相应值大。Casagrande (1973) 曾建议使用静止土压力系数K_O 作为各种支挡式结构的主动土压力系数, K_O 可取为 $(1-\sin\phi)$。 对于本例，K_O*=0.41*， 故在κ*= 1/2* 情况下P_a = 610.80 *kN*, 这一数值和使用本文介绍的下限解*599.07kN*接近。

(3) P_a在κ=1/2时，附近获得极大值。从实用和安全观点来看，工程师可以将P_a的极大值作为柔性支挡结构主动土压力的解。

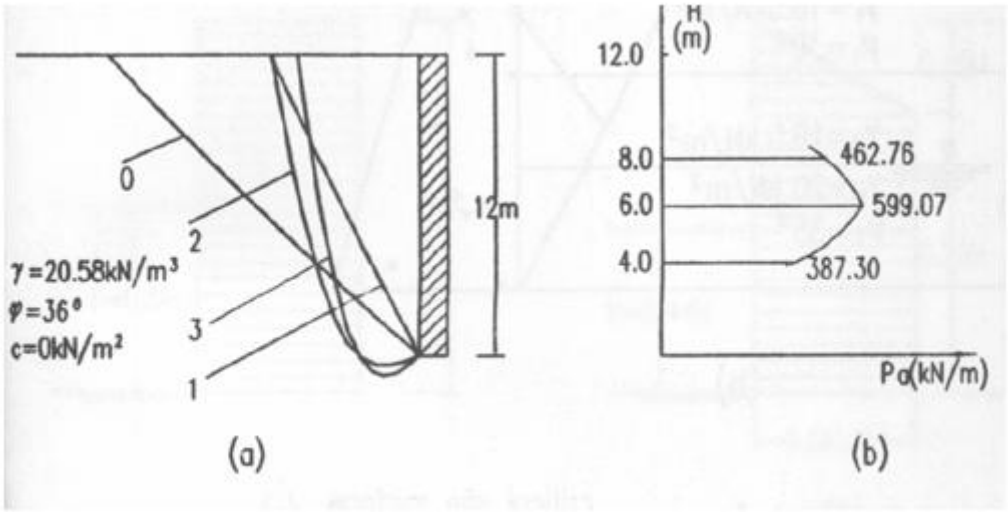


图 3. 6 分析土压力与作用点位置关系一例

在κ=*1/2*计算过程中，我们还发现如果不引入式(2.12)至式(2.14)的限制条件，得到的P_a值是*1269.98kN*。可是，检查这个解相应的正应力和剪力分布,发现这个解答是不正确的，因为坡顶附近的土条面上的正应力和剪应力违背了式(2.12)。这个解如果不被排除，将代替正确解*599.07kN* 。事实上，曾有类似的错误解的数值比遵循合理性条件的解大10倍还多的情况。这一现象说明，条分法中的合理性条件的限制，即式(2.12)至(2.14)，限制了对$f(x)$假定的随意性，为其推广到土压力领域创造了条件。

本例说明，早期Terzaghi和Peck使用的简化的力矩平衡方法（图1.2），可以用本章介绍的更严格的方法来代替。相应砂土和粘性土，Terzaghi和Peck(1967)建议的经验方法的土压分布图形如图3.7示。这分别意味κ=0.5和0.44。采用这一简化方法提出经验公式。对于砂土，

$$P_a = K_a \gamma H^2 \tan^2(45° - \frac{\phi}{2})/2 \qquad (3.63)$$

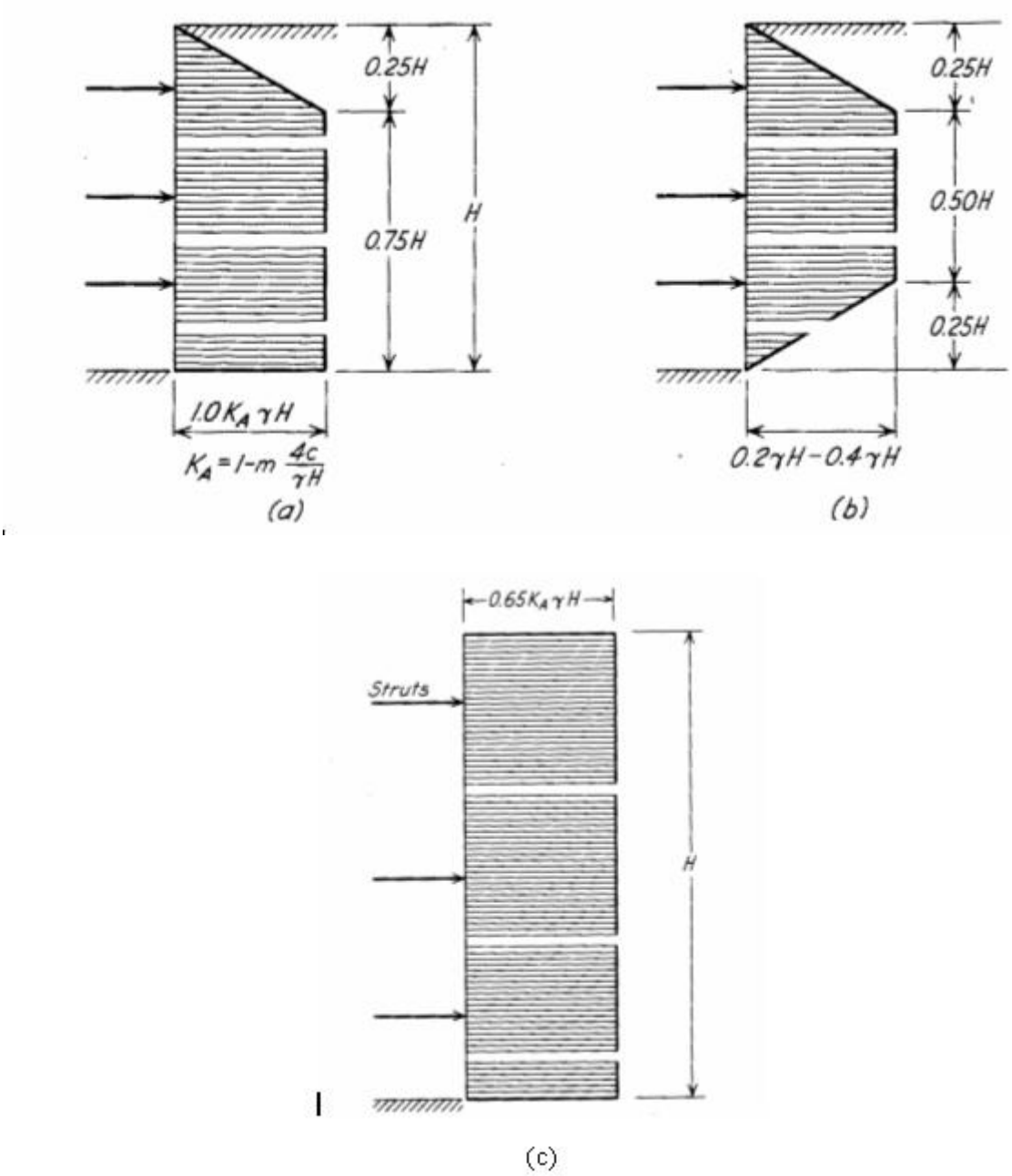
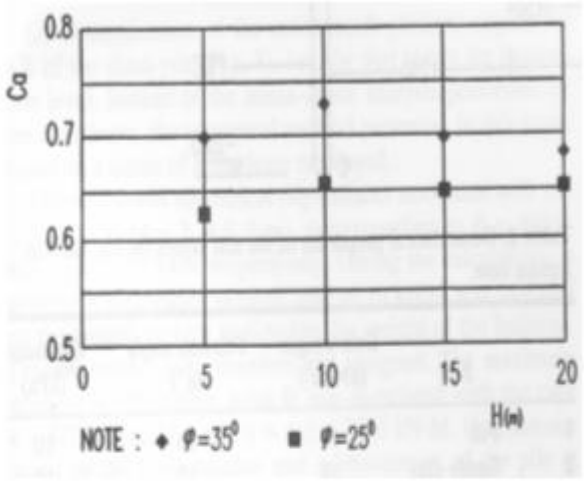
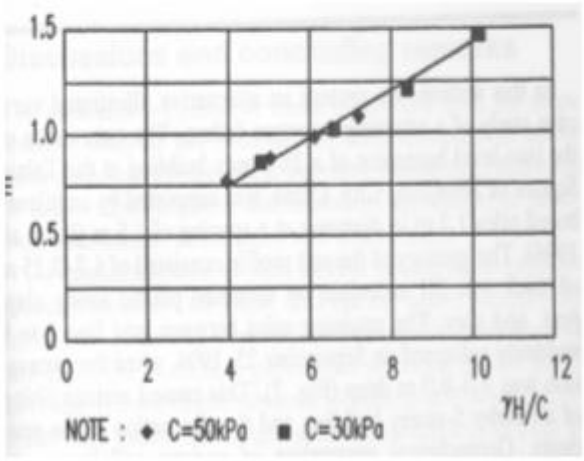


图 3. 7 Terzaghi 和 Peck 建议的确定支撑墙的土压力的经验方法。(a) 软粘土, (b) 带裂隙的硬粘土, (c) 砂性土。

K_a 的建议值为0.65。图3.8(a)示在 ϕ=25°和35°情况下，墙高H为5, 10, 15, 20 m 的计算结果，可见，相应某一ϕ值，K_a 值基本上可视为常数。在 ϕ=25°时，这个数值约0.65，在ϕ=35°时，则为0.70。



(a)



(b)

图 3. 8 数值解与 Terzaghi-Peck 经验公式比较. (a) 砂性土 (b) 软粘土

对于粘性土Terzaghi和Peck建议K_a按下式确定，

$$K_a = 1 - \frac{4m}{N} \tag{3.64}$$

其中 $N = \frac{\gamma H}{c}$ 。当$N \geq 4$时取m=1；当N<4时。则要求取m<1。图3.8(b)示H=8, 11, 14, 17, 20 m，c＝30kPa和50kPa是计算结果。数值计算的成果说明N和m事实上存在一个线性关系，当N>6时，如取m=1可能获得较保守的土压力成果，而N<6时，则取m<1是有必要的。

上述两例说明，本文介绍的方法和目前工程界常用的经验方法可以给出趋势相同的分析计算成果。

4　土体稳定分析的上限解－斜条分法

4.1　求解上限解的基本方程式

应用2.3节介绍的求解土体稳定问题上限解的斜条分法包括如下步骤：

(1) 确定多块体的滑动模式。将滑动土体划分为一个如图2.1(b)所示的一个多块体的系统。

(2) 计算多块体破坏模式协调的速度场。

如前所述，每个条块的速度V与滑面夹角为ϕ_e，与右边相邻块体的相对速度V_j，与该两块体的交界面的夹角为ϕ_{ej}。内能耗散发生于该楔块的底面和楔块间的界面，在刚体内为零。位移协调条件要求相邻条块的移动不至于导致它们重迭或分离。也就是说，速度多边形要闭合。根据这个条件，右侧条块的速度V_r和左、右条块间的界面的相对速度V_j可以通过左侧条块的速度确定（参见图2.1(b)右下侧的速度多边形）。

$$V_r = V_l \frac{\sin(\theta_l - \theta_j)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \tag{4.1}$$

$$V_j = V_l \frac{\sin(\theta_r - \theta_l)}{\sin(\theta_r - \theta_j)} \tag{4.2}$$

其中 θ为速度与正x轴的夹角。知道第一个条块的速度V_1后，借助式(4.1)、(4.2), 即可求得V_2。依此类推，任意一条块的V和V_j可表达成第一个条块的速度V_1的线性函数。

$$V = kV_1 \tag{4.3}$$

其中

$$k = \prod_{i=1}^{k} \frac{\sin(\alpha_i^l - \varphi_{ei}^l - \theta_i^j)}{\sin(\alpha_i^r - \varphi_{ei}^r - \theta_i^r)} \tag{4.4}$$

式中α为土条底的倾角。为了保证按式(4.1)和式(4.2)解得的速度值为正值，还需注意相邻条块间滑动方向存在两种可能性，详见文献(Donald&Chen,1997)。

如果采用图2.1(b)的模式，势必需要将土体分成大量的楔体，才能保证计算精度。而这将增加数值分析的自由度，从而增加用最优化方法计算临界滑动模式的难度。Donald和Chen (1997) 提出了将图2.1(b)多楔体模式优化为图2.1(c)这样一种分段连续多块体模式。即滑裂面仅用若干个控制点来构筑，相邻控制点之间底滑面可以用曲线也可以是直线相连。各分段块体(如图2.1(c) 中x_k，x_{k+1}段)可按线性内插原则进一步细分为若干条块。当条块宽度Δx很小时，分别用V和$V+dV$代替式(4.1)中的V_l和V_r，可得计算任一条块的V的微分方程。

$$-\frac{dV}{V} = ctg(\alpha - \theta_l - \theta_j)\frac{d\alpha}{dx}dx \tag{4.5}$$

积分后可得，

$$V = E(x)V_0 \tag{4.6}$$

其中，

$$E(x) = k\exp[-\int_{x_0}^{x} \cot(\alpha - \phi_e' - \theta)\frac{d\alpha}{d\zeta}d\zeta] \tag{4.7}$$

V_o为左端点的速度。滑裂面上有若干个不连续点，在这些点α或ϕ'_e发生突变。上标 l和r代表不连续点左和右的物理量。计算从第一个界面开始，到分隔第k和第$k+1$个块体的第k个界面终止。式(4.6)说明，滑裂面上处于第k个ϕ'_e或α不连续点右侧的任一点的速度可以直接通过在(x_o, x)区间的积分求得，表达成左端点($x=x_o$处)的速度V_o的函数。滑裂面上α和ϕ'_o的突变影响在系数k中得到了考虑。

各条块侧面的相对速度在α或ϕ'发生突变处仍按式(4.2)确定。在滑面连续处则可表达为，

$$V_j = -\cos ec(\alpha - \phi'_e - \theta_j)E(x)V_0 d\alpha \tag{4.8}$$

(3)计算加载系数或安全系数

对某一多块体破坏模式，将通过式(4.6)和(4.8)获得的速度场代入式(2.17)再代入式(2.15)，由于式中左、右两边都为V_0的线性表达式，故V_0被消去，最终获得计算安全系数或加载系数的公式。

定义：

$$\begin{aligned} G = &\int_{X_0}^{X_n}[(c'_e \cos\phi'_e - u\sin\phi'_e)\sec\alpha - (\frac{dW}{dx} + \frac{dT_y}{dx})\sin(\alpha - \phi'_e) \\ &- (\eta'\frac{dW}{dx} + \frac{dT_x}{dx})\cos(\alpha - \phi'_e)]E(x)dx \\ &- \int_{x_0}^{x_n}(c_e^j \cos\phi_e^j) - u^j \sin\phi_e^j)L\cos ec(\alpha - \phi'_e - \theta_j)\frac{d\alpha}{dx}E(x)dx \\ &- \sum_{k=1}^{n-1}(c_e^j \cos\phi_e^j - u^j \sin\phi_e^j)_k L_k \cos ec(\alpha' - \phi'_e - \theta_j)_k^l \sin(\Delta\alpha - \Delta\phi'_e)_k E^l(x_k) \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$G_t = \int_{X_0}^{X_n}[\frac{dT_y}{dx}\sin(\alpha - \phi'_e) + \frac{dT_x}{dx}\cos(\alpha - \phi'_e)]E(x)dx \tag{4.10}$$

$$G_b = \int_{X_0}^{x_n} \frac{dW}{dx}\cos(\alpha - \phi'_e)E(x)dx \tag{4.11}$$

式(4.10)中T_x，T_y为T_0在x，y方向的分量，η'为水平地震加速度系数。L为土条侧面的长度，求和项Σ为滑面上α或ϕ'_e 发生突变点的附加增值。上标l代表突变点左侧的数值，Δ代表参数右侧和左侧的差值。

表面荷载的加载系数η通过下式计算

$$\eta = \eta_t = \frac{G}{G_t} \tag{4.12}$$

对方案2，水平地震的加载系数η_b通过下式计算，

$$\eta = \eta_b = \frac{G}{G_b} \tag{4.13}$$

安全系数隐含于c'_c和ϕ'_e中，它使下式满足

$$G = 0 \tag{4.14}$$

注意，在使用式(4.10)和 (4.11)时，我们使用了相同的下标e，使用方案1和2时对c'_e和ϕ'_e应理解为相应F=1。

在计算安全系数时，通常作法是假定一系列F值，按式(2.10),(2.11)计算c'_e和ϕ'_e，然后，按式(4.13)算得一系列η_b，用迭代或内插的方法求得相应于η_b为零的F值。

4.2 上限解和滑移线法的关系

上限解和滑移线法属同一理论体系(沈珠江, 2000; 龚晓南, 2000)。五十年代，苏联学者索科洛夫斯曾使用滑移线法获得一系列具有简单体形的均匀介质问题的理论解。滑移线理论通常在破坏土体内形成两组代表剪切破坏的滑移线，这两组线恰好构成了本文介绍的斜条分法中的滑裂面和倾斜条块界面，因此，可以发现，上限解可以和滑移线理论解在一些算例中可以得到一致的解答。

1. 与闭合解比较

对于图4.1所示的例，Sokolovski(1952)给出的临界垂直荷载q的计算公式

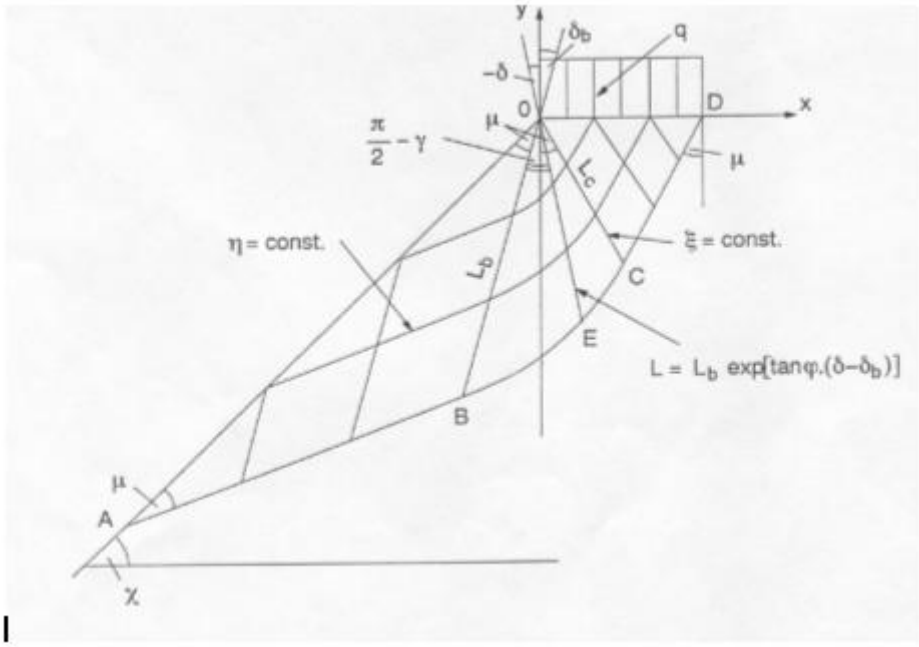


图 4. 1 具有垂直荷载的闭合解例

$$q = c\cot\phi\{\frac{1+\sin\phi}{1-\sin\phi}\exp[(\pi-2\chi)\tan\phi]-1\} \tag{4.15}$$

其中χ为边坡斜面相对水平线的夹角，相应的临界滑裂面由三段组成：AB，CD为直线，分别与边坡线和坡顶线夹角μ

$$\mu = \frac{\pi}{4}-\frac{\phi}{2} \tag{4.16}$$

BC为一对数螺旋线，其左右边界线BO和CO分别与边坡线和y轴线夹角μ。下面，我们将证明，式（4.12）或式(4.14)可以回归到式（4.15）。

在BC段中，任一条交界面OE的长度L可由下式确定。

$$L = L_b\exp[-(\delta_b-\delta)\tan\phi] \tag{4.17}$$

δ为OE相对y坐标的夹角，L_b为OB的长度。因而OC的长度L_c为

$$L_c = L_b / s \tag{4.18}$$

其中

$$s = \exp[(\frac{\pi}{2}-\chi)\tan\phi] \tag{4.19}$$

在对数螺旋线上的任一点，下式成立。

$$\alpha-\phi=-\delta \tag{4.20}$$

$$dx=-L\sec\phi\cos\alpha d\delta \tag{4.21}$$

当边坡处于极限状态时，安全系数为1，计算式(4.9)和(4.10)中的各项，对AB，BC和CD段分别进行积分，结果如表4.1所示，导致式(4.12)、式(4.14)最终变成

$$q(1-\sin\phi)=(s^2+1)c\cos\phi+(s^2-1)c\cot\phi \tag{4.22}$$

不难证明，式(4.22)与索科洛夫斯基的闭合解式(4.15)是等同的。这就说明，本文提出的上限定理的命题不仅可以通过下面的数值分析的成果验证，而且可以通过解析解获得印证。

表4.1　对图4.1 所示例对式（4.9）中各项的积分

	$E(x)$	$\int_l(c\cos\phi-u\sin\phi)\sec\alpha E(x)dx$	$\int_l\frac{dT_y}{dx}\sin(\alpha-\phi)E(x)dx$	$\int_l(c^j\cos\phi^j-u^j\sin\phi^j)\cdot L\cos ec(\alpha-\phi-\theta_j)\cdot\frac{d\alpha}{dx}E(x)dx$
AB	l	$L_c sc\cos\phi$	0	0
BC	$esp[-(\delta_b-\delta)\tan\phi]$ $=esp[-(\alpha-\alpha_b)\tan\phi]$	$\frac{1}{2}cL_c\cot\phi(s-s^{-1})$	0	$\frac{1}{2}cL_c\cot\phi(s-s^{-1})$
CD	s^{-1}	$L_c s^{-1}c\cos\phi$	$qL_c(1-\sin\phi)s^{-1}$	0

2.　与数值解比较

对于图4.1所示例，如果使用的参数c=98kPa，ϕ=30°，ψ=35°，极限荷载T的闭合解为111.44kPa。采用上限解，相应这个荷载。计算步骤如下，作为稳定分析的第一步，我们假设一个图4.2(a)所示的4条块破坏机构。左边第一个条块的速度V_1置为1，利用式(4.1)和(4.2)，第二个条块的速度V_2以及第二个条块相对于第个条块的速度V^j。再通过式(4.3)的连乘，确定每个条块的V和V_j。利用式(4.14)，可得到安全系数等于1.047。EMU程序自动搜索到图4.2(b)所示的一个临界破坏模式，得到最小安全系数F=1.013。

如果破坏体离散为16个条块，可获得图4.1(c)所示的临界破坏模式，这个模式几乎和滑移线理论的结果完全一致，相应F=1.006也十分接近理论值F＝1.0。

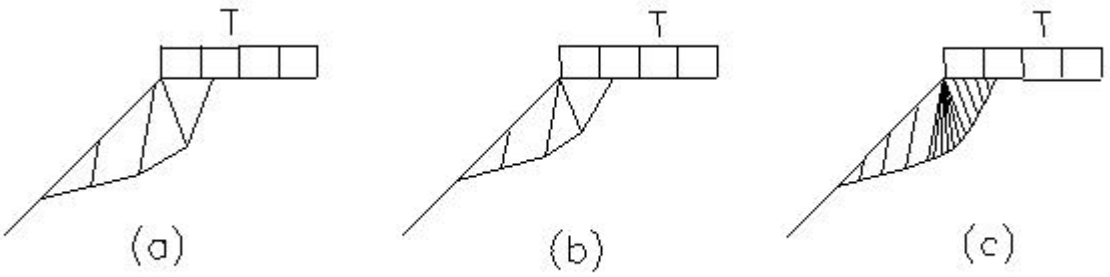


图 4. 2 数值解说明上限解的一个二维例子，(a)初始假设的破坏模式，F=1.047；(b)搜索临界模式，F_m=1.013；(c)16 个条块的临界破坏模式，F_m=1.006。

4.3 边坡稳定分析的上限解

大量算例表明，应用上限解求解边坡稳定问题，获得的成果和垂直条分方法十分接近。对图3.1算例，用传统方法分析的成果已在3.2.6节介绍，曲线3为本文叙述的斜分条的上限解的答案。相应安全系数为1.415。可见，各个方法提供的临界滑裂面相差不远，安全系数上、下限偏差在3%左右。

上限解采用斜条分法，因此，更适宜在岩质边坡中应用，此时，条块界面将代表岩体中的一组节理或某些不连续面（层面、断层等）。已经证明，上限解和岩土边坡中常用的Sarma法是等效的(Donald&Chen,1997)，因此，在边坡稳定分析领域，斜条分法和垂直条分法一样，具有广泛的应用价值。

4.4 地基承载力的上限解

从4.2节介绍的内容可以看到，上限解可以精确地得到与滑移线理论一致的解答。这一论点已为更多的算例验证。我们知道，计算地基承载力的各种修正公式都是建立在滑移线理论的Prandlt解基础上的，因此，上限解和滑移线理论的一致性导致了一个地基承载力的数值方法的诞生。在有关文献中已有详细介绍 (Chen and Donald, 1995； 陈祖煜和高锋，1997)。这些内容说明, 目前常用的计算地基承载力的公式中对地基埋深，容重，荷载偏心等复杂情况引入一系列修正系数的做法可以用更为方便、精确的数值方法来代替。反过来，在目前工程界尚习惯于那些已使用多年的经验公式时，也可以用数值方法来检验各家提出的经验修正系数的可行性。

常用的计算地基承载力的公式如下：

$$q_u = cN_c + qN_q + 0.5\gamma BN_\gamma \tag{4.23}$$

其中q_u为地基承载力，q为两侧地面荷载，B为地基宽度，γ为地基土的容重。

上述公式存在两个经验成份需要予以研究：

(1) 式中N_c和N_q分别是在其它因素为零，q和强度指标c单独作用时从滑移线理论推导出来的理论解，

$$N_c = (N_q - 1)\cot\phi \tag{4.24}$$

$$N_q = e^{\pi\tan\phi}\tan^2(45+\phi/2) \tag{4.25}$$

但是，尚无γ不为零情况下的理论解，因此，对N_γ不同学者提出了以下各种经验公式。需要通过其他途径验证这些经验公式的合理性。

$$N_\gamma(Terzaghi) = \frac{\tan\phi}{2}\left(\frac{K_{p\gamma}}{\cos^2\phi} - 1\right) \tag{4.26}$$

$$N_\gamma(Meyerhof) = (N_q - 1)\tan(1.4\phi) \tag{4.27}$$

$$N_\gamma(Vesic) = 2(N_q + 1)\tan\phi \tag{4.28}$$

$$N_\gamma(Bolton\ \&\ Lau) \approx (N_q - 1)\tan(1.5\phi) \tag{4.29}$$

（2）计算系数N_c，N_q和N_r的上述公式是在与本项有关的参数不为零，无关的参数为零时导出的。当c，ϕ和γ均不为零时，地基承载力能否按式（4.23）进行线性迭加，尚需论证。如果从上限定理的框架来理解，那么在c，q，γ单独作用时的临界滑移模式和迭加后的模式显然是不同的。因此，至少从理论角度，可以认为这一线性迭加是带有经验成份。

现在，用本章介绍的稳定分析上限方法，结合图4.3所示例子来考察这两个问题。取B=1m，c=10kN/m^2，ϕ=30°，γ=18.0kN/m^2，q=10kN/m^2，对式(4.12)进行适当的改造，相应图4.3的多块体失稳模式，可得(式中的符号参见图4.3)。

$$N_c^* = [\sum_{i=1}^{n}(s_i \cdot V_i \cdot \cos\phi_i) + \sum_{i=1}^{n-1}(h_i \cdot V_i^j \cdot \cos\phi_i^j)]/[B \cdot V_n \cdot \sin(\alpha_n - \phi_n)] \tag{4.30}$$

$$N_q^* = [-\sum_{i=1}^{n-1} l_i \cdot \sin(\alpha_i - \phi_i) \cdot V_i]/[B \cdot V_n \cdot \sin(\alpha_n - \phi_n)] \tag{4.31}$$

$$N_\gamma^* = [-\sum_{i=1}^{n}(W_i \cdot \sin(\alpha_i - \phi_i) \cdot V_i)]/[V_n \cdot \sin(\alpha_n - \phi_n) \cdot 0.5 \cdot \gamma] \tag{4.32}$$

我们的考察的方案是，对于设定的条件，进行上限解计算，获得其临界滑动模式和相应的极限荷载q_u。并按式(4.30)至(4.32)算得的N^*_c，N^*_q，N^*_γ，将其与按式(4.21)获得的q_u以及与其相关的N_c，N_q和N_r进行比较。图4.4分别示(a)q=0，γ=0, c≠0；(b)c=0，γ=0, q≠0和(c)c=0，q=0, γ≠0三种情况下的临界滑移模式。相应(a),(b),(c)三种情况分别获得的N_c，N_q和N_γ，其结果列于表4.2。从表4.2中可看出，本章介绍的上限解数值方法获得的N_c和N_q 和理论解一致，从图4.4 (a),(b)也可以看出，上限解给出的临界滑移模式和滑移线法的解答一致，每一个临界斜分条模式最终都有一部分收敛于荷载端部的扇形区，与滑移线理论吻合。再一次证明了上限解的精确性。各个经验公式计算的N_γ与上限解有一定的出入，以Mayehoff的解误差最大。文献(陈祖煜和高锋，1997)曾得出过类似的结论。

表4.2　应用数值解计算N_c，N_q和N_γ并与理论和经验解比较

图4.4 (a), N_c		图4.4 (b), N_q		图4.4 (c), N_r				
上限解	理论式(2.24)	上限解	理论式(2.25)	上限解	Terzaghi	Mayer-hoff	Vesic	Bolon & Lau
30.2	30.13	18.5	18.4	24.21	19.7	15.67	22.4	23.6

下面考察地基承载力计算公式（4.23）所采用的线性迭加形式的可行性。如果c，q和γ均不设零，进行承载力的计算，那么，将获得如图4.4(d)所示的临界滑裂面，相应的极限荷载为732.36kN/m^2。相应这这一临界滑动模式，用式(4.30),(4.31),(4.32)反算N_c，N_q和N_γ，计算值用 $\tilde{N}_c$, $\tilde{N}_q$, $\tilde{N}_\gamma$ 表示，列于表4.3, 可见 $\tilde{N}_c$, $\tilde{N}_q$,与N_c, N_q 的数值差别不大，但 $\tilde{N}_\gamma$ 的数值从单独作用时的24.21增加到了26.11。说明，式（4.23）所采用的线性迭加导致的主要误差仍发生在N_γ上面。对于本例，纯数值分析和纯经验法两者的误差为5.6%。这里纯经验法的N_γ取Bolton和Lau的经验公式，如使用其它经验公式误差还要大一些。图4.4(e)示这几种情况相应的临界滑裂面。可见实际的滑裂面和任一单一因子的临界滑裂面都不同。经过大量算例的考核，可以得出这样的结论(Wang, et. al., 2001)，地基承载力计算公式（4.23）的误差来自对N_γ的各家的经验公式本身的误差以及所采用的线性迭加的形式，误差值约为(5~10)%。

表4.3 考察纯数值分析和纯经验法的差别

上限解和反算参数				经验参数和相应极限荷载				$\frac{(q_u - q_{super})}{q_u}$
$\tilde{N}_c$	$\tilde{N}_q$	$\tilde{N}_\gamma$	q_u	N_c	N_q	N_γ	q_{super} 式(4.23)	
31.48	18.64	26.1	732.36	30.1	18.4	23.6	697.7	5.6%

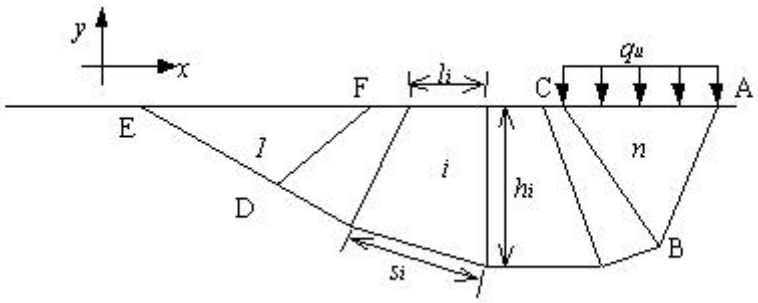
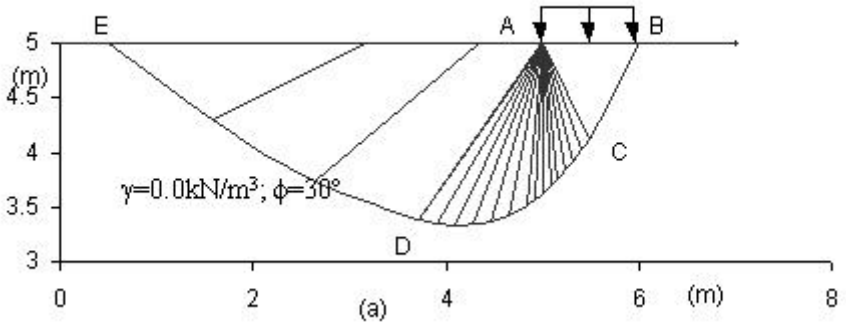
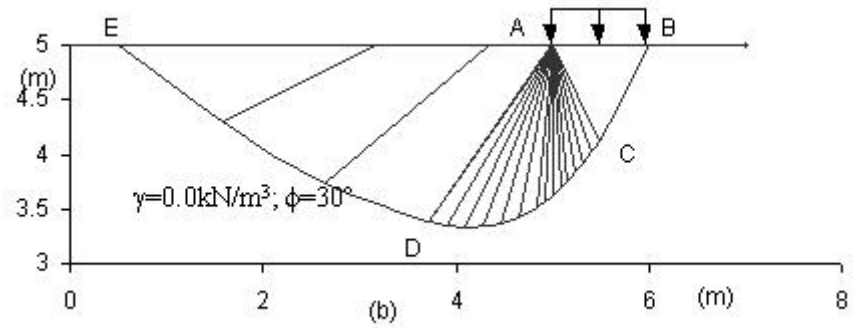
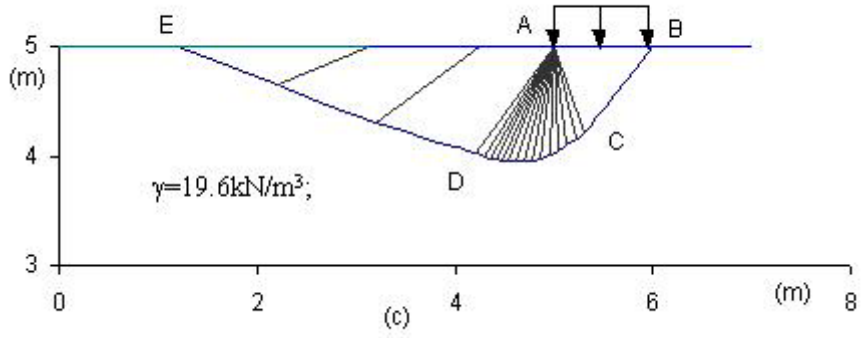


图 4.3 考察承载力公式经验因素一例，滑动模式







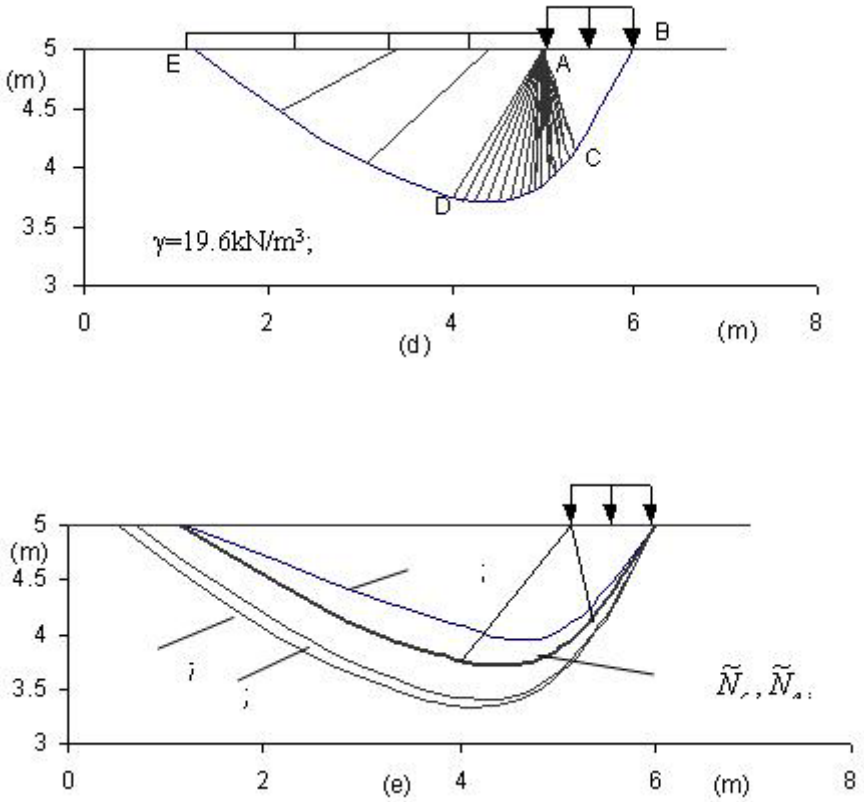


图 4. 4 考察承载力公式经验因素一例，各种情况下的临界滑动模式。(a)q=0，γ=0, c≠0；(b)c=0，γ=0, q≠0; (c)c=0，q=0, γ≠0; (d) c≠0，q≠0, γ≠0; (e) 比较各种情况的临界滑裂面。

5 确定临界滑动模式的最优化方法

5.1 确定土体的临界失稳模式的数值分析方法

上、下限定理最终形成了一个求解目标函数（安全系数或加载系数）的极值问题。岩土工程问题通常包括复杂的地形和地质条件。实际的工程问题包含的上述求解土体稳定上、下限解的命题只有在数值分析的软、硬件技术发展到一定水平后方能成为现实。非线性规划中的最优化方法为解决这类问题提供了强有力的手段。

最优化问题的提法是：对于一个具有n个自变量$\mathbf{Z}^T=(z_1, z_2,...,z_n)$的目标函数$F$，确定使$F$获得最小值$F_m$的自变量$\mathbf{Z}^T$。

在垂直条分法稳定分析中，自变量是滑裂面。因此，需要将它所代表的曲线$y(x)$用若干参数来模拟。也就是说，需要将任意形状滑裂面$y(x)$用$\mathbf{Z}^T$来近似表达。在斜条分法中条块界面的倾角(参见图5.1)δ_i也是自变量。

将滑裂面曲线用m个点A_1，A_2，...A_m 离散 (图5.1)，也就是将此m个点用直线或光滑的曲线连起来，以近似模拟此曲线。此m个坐标用$\mathbf{Z}_i(i=1，2，\cdots，m)$表示：

$$\boldsymbol{Z}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \tag{5.1}$$

一旦这种连接的模式确定，安全系数F即可表达成此m个点的坐标$x_1,y_1,x_2y_2,....x_n,y_n$的函数。因此，

$$F = F\left(x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots x_m, y_m, \delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_{m-1}\right) \tag{5.2}$$

在进行最优化搜索过程中，$A_1,A_2,....,A_m$ 将移到临界滑裂面的位置$B'_1,B_2,....,B'_m$(图5.1，此处m=6)，其中端点A_1，A_m原来在边坡线上，有可能移到边坡线外或内，需要通过一定的处理方式，分别找到他们和边坡线的交点。各点的界面倾角δ_i也将过渡到使目标函数最小的新的数值。对均匀的土体介质，通常希望滑裂面比较光滑，此时，采用三次或更高次的样条函数连接这些点。作为一般的处理，可采用直线和光滑曲线组合构筑的滑裂面。例如图5.1中A_3，A_4，A_5，A_6用曲线相连，A_2，A_3用直线相连。通常只用少量的节点构筑这一破坏模式，然后再按线性内插的原则在相邻节点中进一步将土体细分成土条（图2.1(c)）。在上限解中，条块侧面的倾角δ也将过渡到到一组新值。

当离散模型确定后，安全系数便是m个控制点A_1，A_2，...，A_m和δ的函数。在优化计算过程中，这m个点中有n个点各沿某一设定方向向临界滑裂面移动，或者不规定方向任其自由移动，其余m-n个点由于问题本身的要求可以固定。任一滑裂面的$\boldsymbol{Z}_i$可以用相应于一个初始滑裂面$\boldsymbol{Z}$的相对坐标来代表，

$$\boldsymbol{Z}_i^o = \begin{Bmatrix} x_i^o \\ y_i^o \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_i^o + \Delta\boldsymbol{Z}_i = \boldsymbol{Z}_i^o + z_i \begin{Bmatrix} \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

i=1，2，...，n。其中z_i为第i个点沿β_i移动的距离。对于固定的点，其自由度为零， 当某点(如图5.1中的A_2，A_3)需沿一个软弱夹层移动时， 则其自由度为1， 如对该点的移动方向无特殊要求，如图5.1中的其它点,则式(4.5)中β_i的和z_i一样为自变量，该点的自由度为2，问题的自由度为各点自由度的总和。搜索最小安全系数的问题具体化为求下式中F的最小值问题。

$$F = F(\Delta Z_i, \Delta\delta) = F(z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots, \Delta\delta_n) \tag{4.8}$$

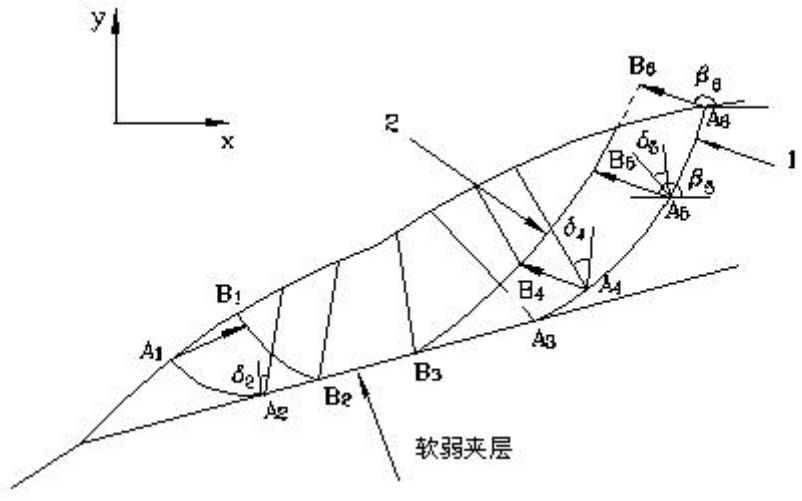


图 5. 1 任意形状滑裂面及其自由度，1. 初始滑裂面; 2. 临界滑裂面

5.2 确定最小安全系数的最优化方法

5.2.1 概述

最优化方法是近代数学规划中十分活跃的一个领域。目前，已有许多十分成熟的计算方法。总的来看，最优化方法分为两个体系。

第一种为确定性方法。它又可以分为直接搜索法和解析法两类。

直接搜索法通过比较按照一定模式构筑的自变量的目标函数，搜索最小值。人们熟知的枚举法，网格法，优选法，都是原始形式的直接搜索法。单形法，复形法，模式搜索法等则是效率较高的直接搜索法。解析法的基本思路是寻找目标函数相对于各自变量的导数均为零的解，如负梯度法，DFP法等。总的来说，这两类方法均可以较好地解决土体稳定的最小值分析问题。但这几年的实际应用表明，采用直接搜索法可能更为简便，有效。

在使用这些方法搜索边坡稳定分析中的最小安全系数时发现， 当问题包含较多自由度时，计算往往不能收敛到安全系数的整体极值上面。为了使最优化方法真正成为一个在边坡稳定分析中实用性强的工具，还需作进一步的努力，解决有效地确定整体极值问题。

在这方面一个十分简单又十分有效的思路是：设法确定一个靠近整体极值的初值。显然，初值离整体极值愈近，丢失整体极值的可能性越小。不少教科书中都指出，确定一个好的初值的重要性，同时指出，这个任务可以由随机搜索园满完成 。这样就产生了第2种方法即随机索索方法(Chen, 1992)。

随机搜索的基本思想是应用随机数在研究域内构筑一系列自变量，比较其相应的目标函数，寻找最小的目标函数。这样，在进行常规的最优化计算以前，对自变量空间进行一次均匀的、高密度的扫瞄，把整体极值的大体位置确定下来，再将这个最小目标函数作为初值，进行最优化计算。陈祖煜在九十年代初期，在边坡稳定分析垂直条分法领域对这一思路作了具体实践，取得成功。以后，Greco(1996)等人又提出了在随机探索过程中纳入一个的模式优化的功能。

在斜条法出现以后，由于自由度中增加了条块界面倾角δ_i，发现有时即使纳入随机搜索，仍不能很好地找到整体极值。最优化领域也出现的“模拟退火”、“神经网络”、“遗传算法”等新的方法，也为边坡稳定分析领域提供了新的手段，这一方面，目前仍是一个活跃的研究课题。

5.2.2 单形法

对某一初始向量Z^o，按下面模式构筑n个向量$\boldsymbol{Z}^i$(i=1,2,..,n)，组成单形，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Z}^1 &= [z_1^0 + p, z_2^0 + q, \cdots\cdots, z_m^0 + q]^T \\
\boldsymbol{Z}^2 &= [z_1^0 + q, z_2^0 + p, \cdots\cdots, z_m^0 + q]^T \\
&\cdots\cdots \\
\boldsymbol{Z}^n &= [z_1^0 + q, z_2^0 + q, \cdots\cdots, z_m^0 + p]^T
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中

$$p = \frac{\sqrt{(n+1)} + n - 1}{n\sqrt{2}} a \tag{5.2}$$

$$q = \frac{\sqrt{(n+1)} - 1}{n\sqrt{2}} a \tag{5.3}$$

a为选定的步长. 按照一定的方式通过反射，扩充和收缩，使单形不断更新逼近极值点。收敛准则为

$$\left\{ \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} [F(\boldsymbol{Z}^k) - F(\boldsymbol{Z}^a)]^2 \right\}^{1/2} < \varepsilon \tag{5.4}$$

其中

$$\boldsymbol{Z}^{a}=\frac{\sum_{k=0}^{n}\boldsymbol{Z}^{k}}{(n+1)} \tag{5.5}$$

为了形象直观地了解各种优化方法在搜索最小安全系数时的工作状况，现考察图5.2(a)所示的一个有两个自由度的例子,滑裂面由*ABC*组成，计算时令*C*点固定不动，*A*，*B*两点沿水平线移动，则该滑裂面的安全系数*F*由*A*点的*x*坐标x_1和*B*点的*x*坐标x_2决定。图5.3示*F*相应x_1，x_2的等值线图。根据枚举法可以发现在$x_1=92.0$，$x_2=143.0$时安全系数获得最小值1.257，相应临界滑裂面如图5.2中标5的那个滑裂面。如果使用单形法，则初始生成的三个滑裂面如图5.3在左下角三角形所示，搜索过程如图中折线所示，最终收敛到F_m=1.257。

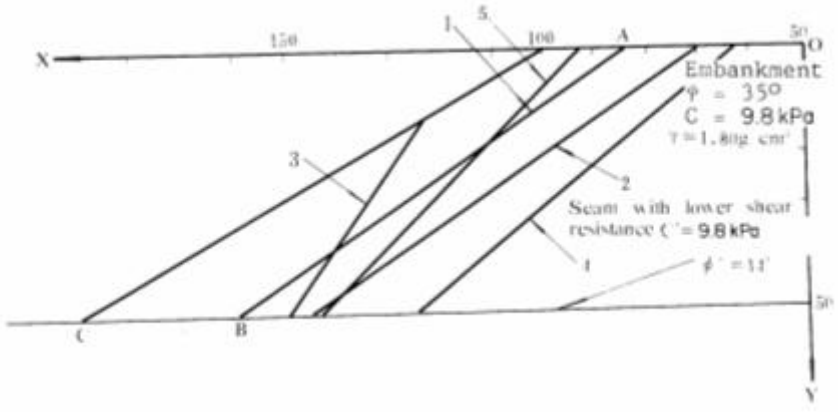


图 5. 2 搜索最小安全系数一个有两个自由度的例子滑裂面



图 5.3 使用单形法计算图 5.2 所示例

5.2.3 负梯度法

牛顿法通过解析手段寻找使目标函数F对自变量Z_i的偏导数为零的极值点($\partial F/\partial z_i=0, i=1，2，...，n$)。同时，从理论上讲，还需要满足由二阶导数形成的Hessian矩阵正定($\partial^2 F/\partial z^2_i>0，i=1，2，...，n$)。这是达到极小值的充分条件。此类方法中以导数为研究的主要对象，因此，也称为以导数为基础的方法(Gradient－based method)。一般认为，当自由度较多时，直接搜索法效率很低。此时需要考虑牛顿法体系的分析方法。由于这些方法的原理在众多的文献及教科书中都有所介绍，这里只对这一体系中最基本的一种方法，即时负梯度法作简单的介绍。

负梯度法的基本思想是对一个初始滑裂面，寻找一个使安全系数减少速率最大的方向。在数学上，就是$\left(\frac{\partial F}{\partial z_1},\frac{\partial F}{\partial z_V},\cdots,\frac{\partial F}{\partial z_n}\right)^T$ 这个向量。在这个方向上，进行一次搜索，找到这一方向安全系数的低谷点。完成了这第一次迭代后，再在这个新的起点(即上述低谷区)重复这样的运算，直到收敛至极值点。对图5.2所示例，分别以(84.0，160.0)，(70.0，145.0)，(112.0，150.0)作为起点，相应滑裂面如图5.4中1,2,3中示，它们使用负梯度法的搜索路径如图5.4 中1，2，3三条折线所示。可见每一次搜索均是沿着下降速率最大的方向进行的。图5.4中折线4代表使用DFP法的搜索过程(ABCD)， BC_1是使用了未经量纲修正的方法的方向，可见显然是一个效率低的搜索方向，BC_2为最速下降的方向。详见Chen & Shao (1988)。

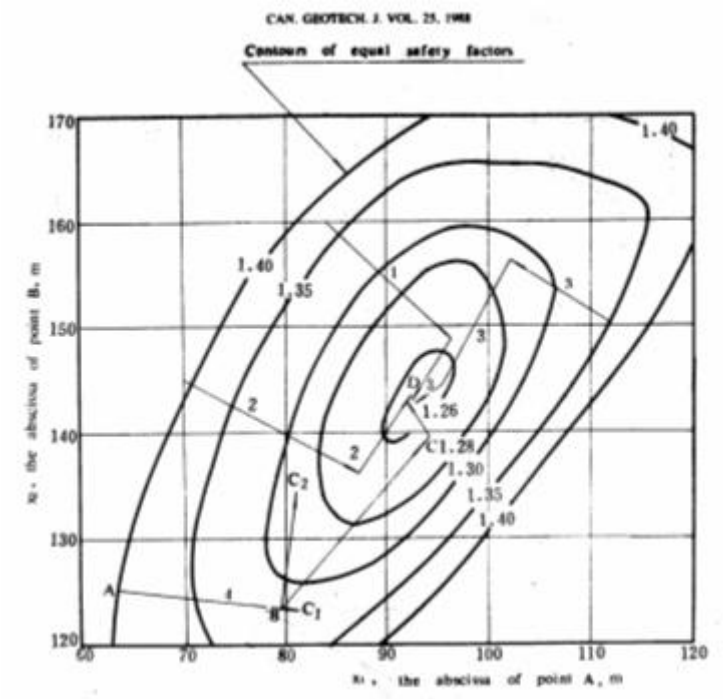


图 5.4 使用负梯度法计算图 5.2 所示例

5.2.4 随机搜索法

对于某一边坡，如图5.5所示。根据问题特点，确定一个搜索区域, 其轴线用$\boldsymbol{Z}^o$表示, 其宽度为D_i，半带宽为$d_i = D_i /2$。这个搜索区域左右边界分别用滑裂面$\boldsymbol{Z}^l$，$\boldsymbol{Z}^r$来代表。即

$$z_i^l = z_i^o - d_i \begin{Bmatrix} \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{Bmatrix} \tag{5.6}$$

$$z_i^r = z_i^o + d_i \begin{Bmatrix} \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{Bmatrix} \tag{5.7}$$

$\boldsymbol{D}=(d_1, d_2, \cdots, d_n)^T$称为搜索区宽度。

在搜索区内，任意一个滑裂面可用下式表示

$$z_i = z_i^o + (0.5-r)d_i \begin{Bmatrix} \cos\beta_i \\ \sin\beta_i \end{Bmatrix} \tag{5.8}$$

其中$\boldsymbol{r}=(r_1, r_2, \cdots, r_n)^T$, 为该滑裂面和各控制点相对于轴线距离系数。$r_1, r_2, \cdots, r_n$为伪随机数,其值均在(0,1)之间。

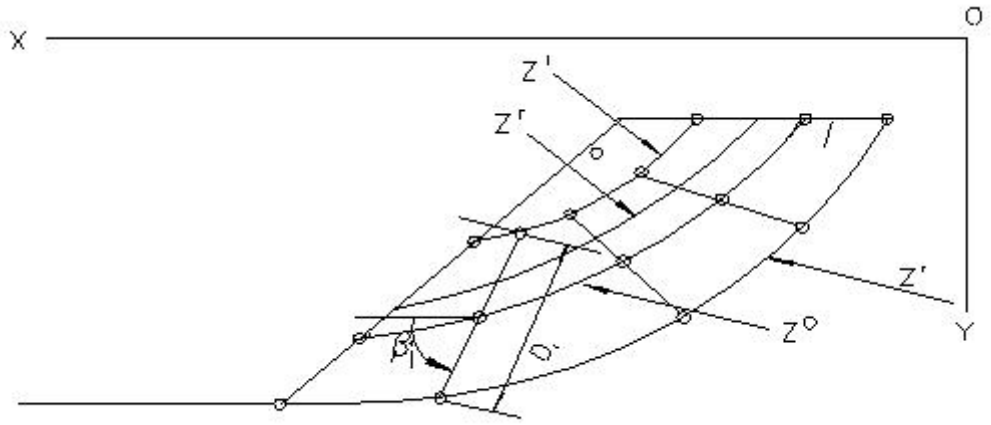


图 5. 5 生成随机滑裂面示意图

随机搜索的步骤如下：

(1)计算相应于滑裂面$\boldsymbol{Z}^o$的安全系数F_0,

(2)使用计算机伪随机发生器，产生n个r值：$r_1, r_2, \cdots, r_n$，应用式(5.8)确定一个滑裂面Z，计算其相应的安全系数F_1,。

(3)比较F_1和F_o, 如果F_1小于F_0，则F_o和$\boldsymbol{Z}^0$用F_1和$\boldsymbol{Z}$更新,否则直接转入步骤(4)。

(4)重复步骤2和3，直到比较的次数足够大，获得的最小安全系数足够小，作为最优化法的初值足够好为止。

由于计算机产生的伪随机数具有很好的均匀性，可以认为搜索区域内的滑裂面空间的每个部分都机会均等地被扫描了一遍。搜索次数越多，扫描密度越高,成果越佳。从理论上讲，随机搜索的次数无穷大时，所获得的最小安全系数就是所寻找的整体极值。

应用上述步骤，在求解某一边坡的具体问题时，需要根据经验确定一个搜索区域和一个搜索次数。作者(Chen, 1992)提出了一个基于概率理论确定这一搜索次数的方法.由于随机搜索只是为下一步的最优化计算提供一个初值, 因此,在实际应用时,可以根据经验来确定搜索次数。STAB程序则自动设定一个搜索次数。

由于随机搜索只是大致确定一个进行最优化计算的初值，为了节省随机搜索的时机，也可以使用简化方法来进行这一工作，如使用3.2.4节中介绍的简化方法(式(3.38))。

现以3.2.6节图3.1的例子说明这一步骤。使用四个点并用光滑曲线相连来代表滑裂面，搜索区间如图5.6阴影所示。采用简化法1进行45次随机搜索，由于使用简化法(式(3.38)), 很快即可在此45个滑裂面中找到一个相应最小安全系数的滑裂面,如图5.6 线1所示，相应安全系数为1.350。以此滑裂面作为初始值，任何一种最优化方法均很“轻松”地收敛到相应整体极值的临界滑裂面2上。此时采用的是Spencer法，相应安全系数为1.366。

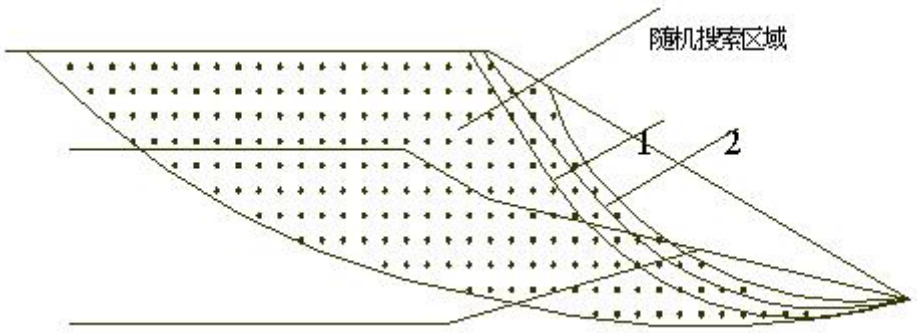


图5.6 采用随机搜索求解图3.1所示例，滑裂面1，通过45个随机滑裂面获得的初始滑裂面，F_o=1.350(简化法)；滑裂面2，应用单形法获得的临界滑裂面，F_m=1.366

5.2.5 模拟退火法

模拟退火法是模拟金属退火过程的一种最优化计算方法(唐立山等,1994)。在金属退火时，温度徐徐降低，在每一个温度阶段，系统的能量都要达到平衡状态，使其达到最小值。假设在某一随机过程中，我们获到了一个相应某一随机变量的安全系数$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$，如果它与已往已经得到的最优解$F(\boldsymbol{Z}_i)$的差值$\Delta F=F(\boldsymbol{Z}_{i+1})-F(\boldsymbol{Z}_i)$小于零，那么自然要用$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$来代替$F(\boldsymbol{Z}_i)$，但是如果$F$大于等于零，则传统的随机搜索方法就要抛弃这一选择。在模拟退火法中，我们根据Monte Carlo法的Metropolis准则，还要作一次“抽签”试验，也就是要让计算机产生一个在(0,1)之间的随机数r_i，将其与$exp[-\Delta F/T]$比较，其中T就是这一阶段的“温度”。在这里，T是一个具有安全系数F特征的量。如果$r_i < \exp[-\Delta F/T]$，那么，我们仍然要用$\boldsymbol{Z}_{i+1}$来代替$\boldsymbol{Z}_i$，这一处理有利于跳过局部极限形成的陷井。但是，我们终究抛弃了一个比现有值更优的自变量，因此是带有一定的风险的。这是计算为跳出局部极限形成的陷井付出的代价。可以看出，在这一决策过程中，以下作法是明智的：

(1) 在“退火”过程中，温度是逐渐缓慢减少的。初期T较大，用$\boldsymbol{Z}_{i+1}$代替$\boldsymbol{Z}_i$的可能性也较大。因而允许自变量在较大的范围内变动，以确定一个较好的方向。愈到计算接近终止，这一替代的可能性愈小。

(2) 只有在ΔF的绝对值足够少时，即$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$与$F(\boldsymbol{Z}_i)$十分接近时，$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$才有可能入选；

(3) 随机数r_i足够的小时$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$才有可能入选。某种意义上说，这意味把一部分成功的希望寄托在“运气”上。

这里，关键的问题是T的数值在开始的时候取得很大，其变小的过程是十分缓慢。因此，即使这一选择错了，以后仍然有机会纠正过来。在实际应用这一过程时，我们还采用了一种“记忆”功能。如果在某一温度计算步结束时，实践证明把搜索方向从$F(\boldsymbol{Z}_i)$改为$F(\boldsymbol{Z}_{i+1})$并没有带来更好的结果，我们还是要将得到原来被抛弃的$F(\boldsymbol{Z}_i)$取回来，进入下一温度计算步。

根据上述原则，模拟退火法的计算步骤如下：

(1)设置初始温度T_0。这一温度应足够高，以防止计算落入局部极值的陷井。同时，过高的初始温度可能降低搜索的效率。建议先进行一定数量（比如100次）的随机搜索，找到安全系数的最大值和最小值F_{max}和F_{min}，将初始温度设为

$$T_o = F_{\max} - F_{\min} \tag{5.59}$$

(4) 将优化计算过程分成m段，第k温度段的温度按下式确定。

$$T_k = T_0 \cdot (\alpha_T)^k \tag{5.60}$$

其中T_k为第k步迭代时的温度，α_T为温度冷却的阻尼系数。α_r应在[0，1]区间内，通过试算确定。

(3) 对于一个具有n个自由度的自变量$\boldsymbol{Z}$，产生n个随机数$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$，每个$v_i$都在（-1,1）区间，并将其换成方向导数, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$

$$u_i = \frac{v_i}{(\sum_{i=1}^{n} v_i^2)^{1/2}} \tag{5.61}$$

为了减少自变量空间的粗糙度，我们还引入一个系数，

$$\kappa_i = \frac{(z_i^+ - z_i^-)}{\max\{(z_1^+ - z_1^-), \cdots, (z_i^+ - z_i^-), \cdots, (z_n^+ - z_n^-)\}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.62}$$

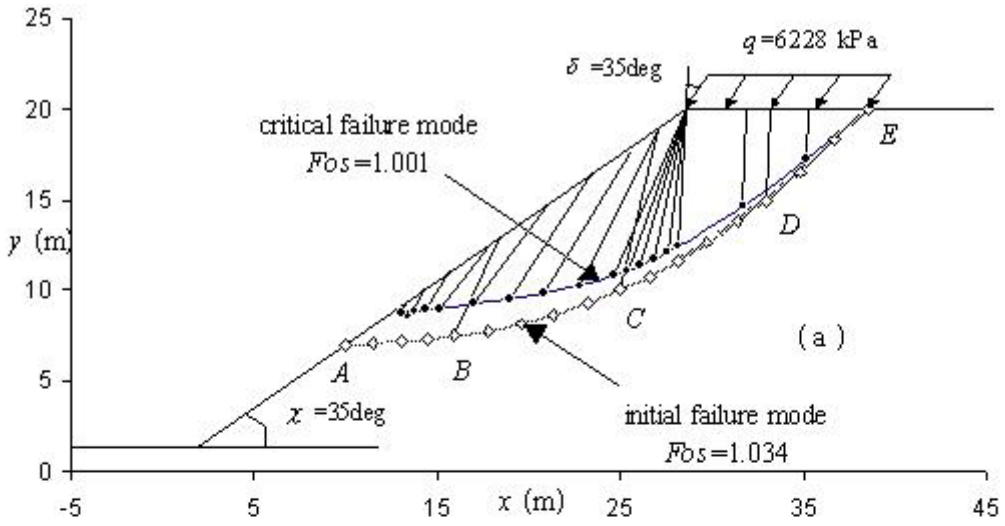
其中z^-和z^+分别代替第i个自变量在探索区域的最小值和最小大值。这样，相应某一迭代步的自变量搜索为

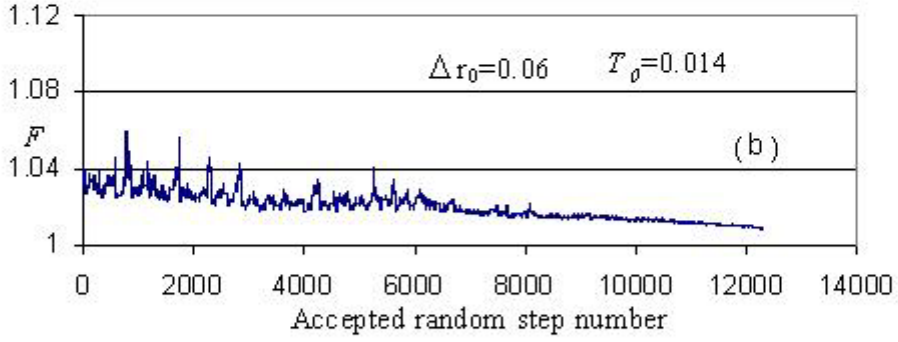
$$\Delta r_k = \Delta r_0 \cdot (\alpha_r)^{k-1} \tag{5.63}$$

其中Δr_k为第k步的带宽，同样，要随着迭代步的增加，逐步减少。这样，自变量的增量为

$$\Delta z_i = \kappa_i \cdot \Delta r_k \cdot u_i \, d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{5.64}$$

图5.7示一具有倾斜荷载无重量均质边坡，Donald and Chen (1997) 介绍了斜条分法准确地获得与索科洛夫斯基理论解完全一致的安全系数和临界滑动模式，但这是经过多次试算后最终得到的较好的解答，现在采用模拟退火法。同样，用5个点ABCDE联成一条光滑的曲线E点在优化过程中不动，因此，共有x_A，x_B，y_B，……10自由度，计算中采用α_T=0.9，α_r =0.98。首先通过100次随机搜索生成初始温度T_0，随后进行m_k=300次退火模拟，相应Δr_o=0.06和0.27，T_o分别为0.014和0.12分别获安全系数的最小值F_k=1.006和1.001。从图中可见，在安全系数趋于最终值的过程中，有时反而增加，但最终顺利地收敛到闭合解程序说明。





(b)

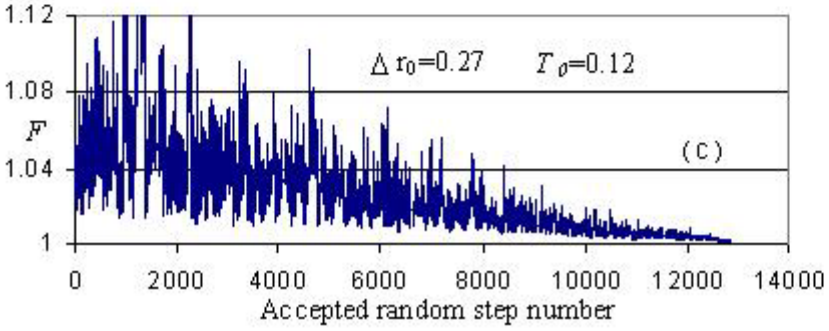


图 5. 7 采用模拟退火法计算具有倾斜荷载无重量均质边坡例, (a)计算简图, (b) Δr_o=0.06 (c) Δr_o=0.27

6 程序设计和应用

6.1 概述

从本章介绍的内容可以发现，随着近代数值分析技术的进展，土力学中的土压力、地基承载力和边坡稳定分析三个经典领域早期所包括的诸多假定和经验成份均可以通过更为严格分析步骤得以消除，在极限分析理论框架下形成一个统一的体系。但是，随之而出现的问题是，这一分析步骤必须通过计算机程序才能得以实现。现状是，尽管计算机的硬件已经获得了飞速的发展，岩土工程应用软件仍然处于原始和起步状态，远不能满足工程实际的要求。在工程设计领域，岩土数值计算的实际应用水平和五、六十年代相比，没有多少提高。因此，急需在程序设计和应用方面投入更大的人力物力，使其成为提高设计效率、保证建筑物的安全和减少工程投资的有效手段。本节介绍边坡稳定分析垂直条分法STAB和斜条分法EMU中的核心程序，即实现计算安全系数功能的子程序。同时在网上公布这两个程序的普及版以及相应的使用手册。网址为：www.geoeng.iwhr.com/geoeng/zy.chen/index.htm 使用这两个程序，读者可以进行本章介绍的方法的土体稳定分析的工作。

6.2 计算垂直条分法安全系数的程序 S.FOR

6.2.1 说明

本程序包括一个主程序和三个子程序。子程序MP实现垂直条分法的计算过程，包括陆军工程师团法。子程序SAFE2实现瑞典法、毕肖普法和简化法的计算过程，这三个方法和相应计算公式已在其它文献中曾作了详细介绍(陈祖煜,2000)。通过一个整型变量OPTION来控制计算方法，通过变量ID-C来控制滑面形状（圆弧或非圆弧）。对非圆弧滑裂面，通过IWALL=0和=1，分别实现垂直条分法计算安全系数和土压力的功能。本源程序中将水容重RW设为9.8,也就是要求使用kN-m的量纲体系。控制滑面几何形状的点有两套，一套为界面在土条底的坐标，用X2(I),Y2(I)代表，土条总数为NS。另一套为土条底中点的坐标，用X(I)，Y(I)来代表，在输入W(I)，RU(I)等一系列物理力学参数时，都是相应土条中点的，但是，加上了左，右两个端点的相应物理量，因此，读入了总数为N=NS+1行数据。在使用程序MP实现垂直条分法时，程序首先使用子程序SAFE2中简化法的计算安全系数，作为初值，然后进行第3节介绍的垂直条分稳定分析方法的计算。子程序SAFE2在进行Bishop法计算时，同样用简化法计算安全系数初值。读者还可从子程序MP中发现通过式(3.46)计算λ初值的过程。

6.2.2 源程序

```
      REAL AB1
      INTEGER N,NS,OPTION
      COMMON/AS/ASP
                COMMON/CIRCLE/ID_C,CX,CY,DS
      C       OPTION=0, SPENCER法
      C       OPTION=1, BISHOP法
      C       OPTION=2, 瑞典法
      C       OPTION=3, 工程师团法
      C       OPTION=4, 简化法
      C       ID_C=0, 任意形状滑裂面； ID_C不为零，圆弧滑裂面
                REAL X2(80),Y2(80),W(80),X(80),Y(80),C(80),F(80),WL(80)
                $,FXO(80),FX(80),BN(80)
                REAL BDA(80),FQUH(80),FDIS(80),YSF(80),RU(80),ALF(80),RW
                write(6,*)'输入数据文件名'
                OPEN(5,FILE='       ',STATUS='UNKNOWN')
                write(6,*)'输入计算成果文件名'
                OPEN(6,FILE='       ',STATUS='UNKNOWN')
                RW=9.8
                AB1=0.0
                WRITE(6,*)'边坡稳定分析'
                READ(5,*)OPTION,ID_C
                IF(ID_C.NE.0)READ(5,*)CX,CY,DS
                READ(5,*) NS !土条总数
                READ(5,*)(X2(I),I=1,NS)
                READ(5,*)(Y2(I),I=1,NS)
                N=NS+1
                DO 302 I=1,N
                READ(5,*)W(I),RU(I),C(I),F(I),BDA(I),WL(I),FQUH(I),FDIS(I),YSF(I)
           302  CONTINUE
      !读入两端点和土条底中点的数据,其中涉及力的物理量均以单宽土条计
      !X2,Y2=坐标,W=土条重量,RU=孔压系数,C=凝聚力=,F=磨擦系数,BDA=土容重,
      !WL=浸润线Y坐标,FQUH,FDIS,YSF=水平地震力的大小,Y坐标,垂直水平地震力的大小
                IF(OPTION.EQ.3)THEN
                READ(5,*)ASP
                WRITE(6,*)'陆军工程师团法，平均坝坡=',ASP
                ASP=ASP*3.14159/180.
                ENDIF
                WRITE(6,709)RW
           709  FORMAT(1X,'水容重=',F10.3//)
                WRITE(6,702)
           702  FORMAT(T25,'DATA FOR ASSUMED SIDE FORCE FUNCTION')
                WRITE(6,703)
           703  FORMAT(T25,'************************************'//)
                NS=N-1
      !计算土条底中点的坐标和条底倾角
```

```
      DO 208 I=2,NS
      X(I)=(X2(I)+X2(I-1))/2.
      Y(I)=(Y2(I)+Y2(I-1))/2.
      ALF(I)=ATAN((Y2(I)-Y2(I-1))/(X2(I)-X2(I-1)))
  208 CONTINUE
      ALF(1)=ALF(2)
      ALF(N)=0
      X(N)=X2(NS)
      Y(N)=Y2(NS)
      X(1)=X2(1)
      Y(1)=Y2(1)
      WRITE(6,716)
  716 FORMAT(T5,'NO.       ',T14,'X',T24,'Y',T34,'W',T44,'RU',T54,'C',
     #T64,'F',T74,'BDA',T84,'WL',T94,'QH',T104,'YE')
      DO 901 I=1,N
      WRITE(6,718) I,X(I),Y(I),W(I),RU(I),C(I),F(I),BDA(I),WL(I)
     #,FQUH(I),FDIS(I)
  901 CONTINUE
  718 FORMAT(1X,I5,11F10.3)
      WRITE(6,719)
  719 FORMAT(1X,/'NOTE:')
      WRITE(6,720)
  720 FORMAT(5X,'W=土条的单宽重量')
      WRITE(6,721)
  721 FORMAT(5X,'RU=孔隙水压力系数')
      WRITE(6,722)
  722 FORMAT(5X,'C=凝聚力')
      WRITE(6,723)
  723 FORMAT(5X,'F=摩擦系数')
      WRITE(6,724)
  724 FORMAT(5X,'BDA=土条的平均容重')
      WRITE(6,725)
FORMAT(5X,'WL=浸润线的Y坐标')
      SELECT CASE (OPTION)
      CASE(0)
      WRITE(6,701)
  701 FORMAT(/10X,'SPENCER METHOD')
      CALL SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,4)
      IWALL=0
      DO 301 I=1,80
      FXO(I)=0
      FX(I)=1
  301 CONTINUE !tan(BETA(I))=FXO(I)+ALAM*FX(I)
      KXYX=0
      CALL MP(N,KXYX,KS,AB1,DQ,DM,BN,FX,FXO,
     &C,F,X2,Y2,X,Y,W,RU,FQUH,WL,FDIS,RW,DB,DF)
      CASE(1)
      WRITE(6,704)
  704 FORMAT(/20X,'BISHOP法'/)
```

```
      CALL SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,OPTION)
      CASE(2)
      WRITE(6,705)
705   FORMAT(/20X,'瑞典法'/)
      CALL SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,OPTION)
      CASE(3)
      WRITE(6,731)
731   FORMAT(/10X,'工程师团法')
      CALL SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,4)
      IWALL=0
      DO 311 I=1,80
      FXO(I)=0
      FX(I)=1
311   CONTINUE !tan(BETA(I))=FXO(I)+ALAM*FX(I)
      KXYX=1
      CALL MP(N,KXYX,KS,AB1,DQ,DM,BN,FX,FXO,
     &C,F,X2,Y2,X,Y,W,RU,FQUH,WL,FDIS,RW,DB,DF)
      CASE(4)
      WRITE(6,789)
789   FORMAT(/20X,'简化法法'/)
      CALL SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,OPTION)
      CASE DEFAULT
      END SELECT
      END

      SUBROUTINE SAFE2(X2,F,FQUH,FDIS,W,RU,N,X,ALF,C,AB1,ID)
      REAL X2(80),F(80),FQUH(80),W(80),RU(80),ALF(80),X(80),C(80)
      REAL AB1,FDIS(80)
      CINTEGER N
      REAL RO1,DM,RM,BX1,CDN,DG(80),G3,DX1,G,GX
      REAL O,S1,FRIC,S2,S,DRM,P1,P2,DDM,DBX1,DCDN
      COMMON/CIRCLE/ID_C,CX,CY,DS
      INTEGER NS
      IWALL=0
      RO1=1.0
      NS=N-1
      KL=2
      DM=0.
      RM=0.
      BX1=0.
      CDN=0.
      DG(2)=0.
      G3=0.
      DO 93 I=2,NS
      DX1=X2(I)-X2(I-1)
C     DO 79 J=1,NS+1
C     IF(I.EQ.NOO(J))THEN
C     DG(I+1)=DG(I)-F(I+1)*ALF(I+1)+F(I)*ALF(I)
C     GOTO 93
C     ENDIF
```

```
C       79      CONTINUE
          DG(I+1)=DG(I)+(F(I)-F(I+1))*ALF(I)
          93          G3=G3+(F(I)*ALF(I)+DG(I))*DX1
              G3=G3/(X(N)-X(1))
          DO 202 I=2,NS
          IF(ID_C.EQ.0)THEN
          RO1=1
          ELSE
          RO1=(FDIS(I)-CY)/(DS-CY)
          ENDIF
          G=ALF(I)
          GX=G*F(I)-G3+DG(I)
          DX1=X2(I)-X2(I-1)
          O=FQUH(I)*SIN(G)
          S1=W(I)*(COS(G)-RU(I)/COS(G))
          FRIC=F(I)
          S2=(S1-O)*FRIC
          S=C(I)/COS(G)
          DRM=S+S2
          DRM=DRM*DX1
          P1=W(I)*SIN(G)
          P2=FQUH(I)*RO1
          DDM=(P1+P2)*DX1
          DM=DM+DDM
          RM=RM+DRM
          DBX1=-DRM-SIN(G)*GX*W(I)*DX1
          BX1=BX1+DBX1
          DCDN=DRM*GX
          CDN=CDN+DCDN
      202 CONTINUE
          AB1=-BX1/DM+CDN/BX1 !通过简化法求得AB1的迭代初值
          IF(ID.EQ.4)WRITE(6,*)'简化法安全系数=  ',AB1
          IF(ID.EQ.2)AB1=RM/DM
          IF(ID.EQ.2)WRITE(6,*)'瑞典法安全系数=  ',AB1
          IF(ID.NE.1)RETURN
          WRITE(6,*)'迭代过程'
          LM=1
          41 DT=0.
          DM=0.
          RM=0.
          DO 21 I=2,NS
          G=ALF(I)
          DX1=X2(I)-X2(I-1)
          S1=W(I)*(1-RU(I))*F(I)
          S2=S1+C(I)
          S=COS(G)*(1+F(I)*TAN(G)/AB1)
          DRM=DX1*S2/S
          RM=RM+DRM
          P1=W(I)*SIN(G)
```

```
      P2=FQUH(I)*RO1
      DDM=(P1+P2)*DX1
      DM=DM+DDM
      DT=DT+DRM*TAN(G)*F(I)/(AB1**2+AB1*F(I)*TAN(G))
21    CONTINUE
      AB2=RM/DM     !BISHOP方法
      IF(AB2.LT.0.OR.AB2.GE.15) THEN
      WRITE(6,*)'F.S NOT REASONABLE =      ',AB2
      AB2=9999.9
      RETURN
      ENDIF
      WRITE(6,740) LM,AB2
740   FORMAT(1X,I5,F10.5)
      IF(ABS(AB2-AB1).LT.0.0001)GO TO 49
      IF(LM.LT.10)GO TO 9191
      WRITE(6,9192)
9192  FORMAT(1X,'ITERATION TROUBLES IN BISHOP METHOD')
      GO TO 49
9191  CK=1-DT/DM    !牛顿迭代法
      AB1=AB1-(AB1-AB2)/CK
      LM=LM+1
      GO TO 41
      49WRITE(6,203)AB1
203   FORMAT(/5X,'BISHOP  法安全系数=',F10.4)
      RETURN
      END

      SUBROUTINE DETE(AB1,RW,DQ,DM,ALAM,KS,BN,FX,FXO,
     &C,F,X2,Y2,W,RU,FQUH,YSF,WL,FDIS,N,DB,KXYX,DF)
      REAL AB1,DQ,DT,DM,ALAM,DF
      REAL C(80),F(80),X2(80),Y2(80),W(80),RU(80),FXO(80),FX(80)
      REAL FQUH(80),YSF(80),WL(80),FDIS(80),BN(80)
      INTEGER KS,N,KXYX
      REAL X(80),ALF(80),G,Y(80)
      REAL EXT,EXR,EYR,EMT,EMR,FMT,DMT,DEG,DX1
      REAL DMG,BS,R1X,TX,QX,PT112,R1XT,POX
      REAL POXT,POY,DPT112,DPX112,BSG,H3,YT(80),GF(80)
      REAL GFX(80),GFY(80),BET(80),EFX(80)
      REAL G1,TA,TA1,OP,FI,FI1,CE,OQ,OQ1,THO,CW
      REAL SEGB,SEGB1,FI0,AXS11,OTEM,DDQ,PX112,DBS
      REAL SX,SXG,DTX1,DTX2,DTX,TX1,DDP,DBS1,DBS2,EPX112
      REAL AAKX1,DR1X1,DR1X2,DR1X,DR1XT
      REAL DG,DDT,GAVE,BETA,DGX,OX,OY,HSL
      REAL TAA,OQS2,OQS1,DG1,BT(80),EXR1,EXT1,EYR1
      REAL EYT1,XCE,YCE,XRE,YRE,DR2X11,DR2X12,DR2X1
      REAL GS,DPOY1,DPOY2,OY1,DDM,DDMT,PM,PMT,DDEG,DDMG
      REAL OQ0,SEGB0,DGG,DMG1,DEG1,OXX
      REAL TEMP1,TEMP2,GG,DDM2,DM1,EWALL,GWALL,PX
      REAL DQM,DMM,DTM,DMTM,DEGM,DMGM,S1,HMW,DDM1,ETA
      REAL GTENSION,HITE,WP,RW
```

```
      INTEGER EYT,IWALL,NS
!本程序计算Morgenstern-Price,Spencer和工程师团法
      IWALL=0.!土压力的作用位置
      HMW=0.
      GTENSION=0.
      HITE=0.
      GWALL=0.    !土压力的大小
!GWALL=1 计算土压力设定条件下的安全系数
!GWALL=2 计算主动土压力
      IF(KS.EQ.0)THEN !KS调用本程序段标志符,=0表示第1次调用
      WRITE(6,705)
  705 FORMAT(1X,/'VALUE OF FX0(I) IN ORDER OF I')
      WRITE(6,706)(FXO(I),I=1,N)
  706 FORMAT(1X,5F10.5)
      WRITE(6,707)
  707 FORMAT(1X,/'VALUE OF FX(I) IN ORDER OF I')
      WRITE(6,708)(FX(I),I=1,N)
  708 FORMAT(1X,5F10.5)
      WRITE(6,726)
  726 FORMAT(1X,/'迭代过程:'/)
      WRITE(6,712)
  712 FORMAT(T10,'NO.',T24,'DQ',T35,'DM',T55,'AB1',T65,'ALAM')
      ENDIF
      KS=1
      DM=0.
      DT=0.
      EXT=gtension
      EYT=0
      EXR=0.
      EYR=0.
      EMT=-gtension*hite/3.
      EMR=0.
      FMT=0.
      DQ=0.
      DMT=0.
      DEG=0.
      DMG=0.
      BS=0.
      R1X=0.
      TX=0.
      QX=0.
      PT112=0.
      PX112=0.
      R1XT=0.
      POX=0.
      POXT=0.
      POY=0.
      DPT112=0.
      DPX112=0.
```

```
      BSG=0.
      H3=HITE/3.
      YT(1)=Y2(1)-H3
      DQ=DQ-GTENSION
      GF(1)=-DQ
      DM=DM-GTENSION*H3!96.8.31
      NS=N-1
      DO 303 I=2,NS
      X(I)=(X2(I)+X2(I-1))/2.
      Y(I)=(Y2(I)+Y2(I-1))/2.
      ALF(I)=ATAN((Y2(I)-Y2(I-1))/(X2(I)-X2(I-1)))
303   CONTINUE
      ALF(1)=ALF(2)
      ALF(N)=0.
      X(N)=X2(NS)
      Y(N)=Y2(NS)
      X(1)=X2(1)   !X,Y各土条的中点坐标(在滑裂面上)
      Y(1)=Y2(1)
      DO 304 I=1,N
      BET(I)=ATAN(FXO(I)+ALAM*FX(I))
      IF(C(I).LT.0.001.AND.F(I).LT.0.001) BET(I)=0
304   CONTINUE
401   CONTINUE
      EWALL=BET(NS) !土压力的作用角度
      GFX(1)=GF(1)*COS(BET(1))
      GFY(1)=GF(1)*SIN(BET(1))
      DO 305 I=2,NS
      PX=X(I)-X(I-1)
      DX1=X2(I)-X2(I-1)
      G=ALF(I)
      G1=ALF(1)
      TA=BET(I)
      TA1=BET(1)
      OP=G-TA
      FI=ATAN(F(I)/AB1)
      FI1=ATAN(F(1)/AB1)
      CE=C(I)/AB1
      OQ=FI-G
      OQ1=FI1-G1
      THO=SIN(TA)*X(I)-COS(TA)*Y(I)-(SIN(TA)*X(1)-COS(TA)*Y(1))
      CW=1
      IF(I.GT.2)CW=(X2(I-1)-X2(I-2))/(X2(I)-X2(I-1))
      IF((OQ+TA).GT.1.5.OR.(OQ1+TA1).GT.1.5.OR.TA.GT.
       $1.5.OR.TA1.GT.1.5) GOTO 317
      SEGB=(1./COS(OQ+TA))**2
      SEGB1=(1./COS(OQ1+TA1))**2
      FMT=FMT+FQUH(I)*(Y(I)-FDIS(I))*DX1
      FI0=ATAN(F(I+1)/AB1)
      AXS11=ABS((FI-FI0))
      OTEM=ABS(OQ+TA)*180./3.14259
```

```
      IF(OTEM.LT.95.AND.OTEM.GT.85)RETURN
      DDQ=(W(I)*SIN(OQ)+CE*COS(FI)/COS(G)-RU(I)*W(I)*SIN(FI)/COS(G)
     &    -FQUH(I)*COS(OQ))/COS(OQ+TA)   !DDQ=p(x)sec(FI-ALF-BETA)
      IF(I.GT.2) GOTO 307
      PX112=-TAN(OQ1+TA1)*COS(TA1)**2.*(FX(1))
      DBS1=TAN(OQ1+TA1)
  307 DBS2=TAN(OQ+TA)
      EPX112=-DBS2*COS(TA)**2.*(FX(I))
      DBS=(DBS1*CW+DBS2)/(1+CW)
      DBS1=DBS2
      BS=BS+DBS*(BET(I)-BET(I-1))
      BSG=BS+DBS*(BET(I)-BET(I-1))*(0.5*DX1)/PX
      IF((-BS).GT.30.OR.BSG.GT.30)GOTO 317
      SX=2.71828**(-BS) !SX=s(x)*cos(FI-ALF+BETA)
      SXG=2.71828**BSG
      IF(I.GT.2) GO TO 309
      DTX1=(SIN(TA1)-TAN(G1)*COS(TA1))
  309 DTX2=(SIN(TA)-TAN(G)*COS(TA))/SX
      DTX=(DTX1*CW+DTX2)/(1+CW)
      DTX1=DTX2
      TX1=TX+DTX*PX*0.5
      TX=TX+DTX*(X(I)-X(I-1))
      DDP=(-FQUH(I)*SIN(TA)*SIN(FI)+CE*COS(OP)*COS(FI)/
     #    COS(G)+W(I)*SIN(FI)*COS(TA)-RU(I)*W(I)*SIN(FI)*COS(OP)/
     #    COS(G))*COS(FI)/(-AB1*COS(OQ+TA)**2)
      AAKX1=DDP/DDQ
      IF(I.GT.2) GO TO 310
      DR1X1=(-SIN(FI1)*COS(FI1)*SEGB1/AB1)
  310 DR1X2=(-SIN(FI )*COS(FI )*SEGB/AB1)
      DR1X=(DR1X1*CW+DR1X2)/(1+CW)
      DR1X1=DR1X2
      DR1XT=DR1X*TX1
      R1XT=R1XT+DR1XT*(BET(I)-BET(I-1))
      R1X =R1X +DR1X *(BET(I)-BET(I-1))
      DG=DDQ*SX*DX1
      DQ=DQ+DG    !DQ=DG的积分,DG=p(x)s(x),力的平衡
      DDT=DG*(AAKX1-R1X)
      DT=DT+DDT !DT=DDT的积分,DDT=p(x)s(x)t(x),力矩平衡
      GF(I)=-DQ*SXG
      GFX(I)=GF(I)*COS(BET(I))
      GFY(I)=GF(I)*SIN(BET(I))
      GAVE=(GFY(I)+GFY(I-1))/2.
      BETA=(BET(I)+BET(I-1))/2.
      DGX=GFX(I)-GFX(I-1)
      OX=(GFX(I-1)+GFX(I))/2.
      OY=(GFY(I-1)+GFY(I))/2.
      IF(WL(I).GE.Y(I))THEN
      WP=0.
      ELSE
      WP=0.5*(ru(i)*w(i))**2/rw
```

```
      ENDIF
      OXX=OX-WP
      EFX(I)=OXX
      IF(OXX.GT.0.) HSL=Y(I)-YSF(I)
      TAA=COS(TA)*COS(TA)*FX(I)
      OQS2=(BET(I+1)+BET(I))/2
      OQS1=(BET(I-1)+BET(I))/2
      DG1=GF(I)*SIN(G-OQS2)-GF(I-1)*SIN(G-OQS1)
      BN(I)=W(I)*DX1*COS(G)+DG1-FQUH(I)*DX1*SIN(G)
      BT(I)=(BN(I)-RU(I)*W(I)*DX1/COS(G))*TAN(FI)+CE*DX1/COS(G)
      EXR1=BN(I)*SIN(G)-BT(I)*COS(G)
      EXR=EXR+EXR1
      EXT1=FQUH(I)*DX1
      EXT=EXT+EXT1
      EYR1=-BN(I)*COS(G)-BT(I)*SIN(G)
      EYR=EYR+EYR1
      EYT1=W(I)*DX1
      EYT=EYT+EYT1
      XCE=X(1)
      YCE=Y(1)
      XRE=X(I)-XCE
      YRE=Y(I)-YCE
      EMT=EMT+EXT1*(FDIS(I)-YCE)-EYT1*XRE !moment of body force
      EMR=EMR+EXR1*YRE-EYR1*XRE                !moment of internal force
      if(abs(dx1).lt.0.001)goto 317
      BN(I)=BN(I)*COS(G)/DX1
      BT(I)=BT(I)*COS(G)/DX1
      IF(KXYX.EQ.0) GOTO 402
      GOTO 305
402   IF(I.GT.2) GO TO 312
      DR2X11=SEGB1*COS(TA1)**2.*(FX(1))
312   DR2X12=SEGB *COS(TA )**2.*(FX(I))
      DR2X1=(DR2X11*CW+DR2X12)/(1+CW)
      DR2X11=DR2X12
      GS=ALF(I-1)
      POX=POX-DR2X1*(ALF(I)-GS)
      POXT=POXT-DR2X1*(ALF(I)-GS)*TX1
      IF(I.GT.2) GOTO 313
      DPOY1=(COS(FI1)/(COS(G1)*COS(OQ1+TA1)))*COS(TA1)**2.*(FX(1))
313   DPOY2=(COS(FI)/(COS(G)*COS(OQ+TA)*SX))*COS(TA)**2.*(FX(I))
      OY1=(DPOY1*CW+DPOY2)/(1+CW)
      DPOY1=DPOY2
      POY=POY+OY1*PX
      DDM=DG*TX
      DDMT=DG*(AAKX1*TX-R1XT)
      PX112=PX112+DPX112
      PT112=PT112+DPT112
      DPX112=0
      DPT112=0.
      PM=POX-PX112
```

```
      PMT=POXT+POY-PT112
      DDEG=DG*PM
      DDMG=DG*PMT
      DM=DM+DDM
      DMT=DMT+DDMT
      DEG=DEG+DDEG
      DMG=DMG+DDMG
      IF(AXS11-0.005) 305,305,315
      G=ALF(I+1)
315   OQ0=FI0-G
      IF((OQ0+TA).GT.1.5) GOTO 317
      SEGB0=(1./COS(OQ0+TA)**2)
      DR2X11=SEGB0*COS(TA)**2.*(FX(I))
      DPX112=-TAN(FI0+BET(I+1)-G)*COS(BET(I+1))**2*FX(I+1)
#      +TAN(OQ+TA)*COS(TA)**2.*FX(I)
      DPT112=DPX112*TX
305   CONTINUE
      TEMP1=EPX112+PM
      TEMP2=PMT-TX*TAN(OQ+TA)*TAA
      IF(IWALL.EQ.2)THEN
      GG=-DQ
      DDM1=HMW*COS(EWALL)+TX*SX
      DDM2=HMW*COS(EWALL)/SX+TX
      DM1=DM
      DM=DM1+GG/SX*DDM1-FMT
      DDDM2=-HMW*COS(EWALL)/SX*TEMP1-TX*TEMP1+TEMP2
      DGG=-DEG*(HMW*COS(EWALL)/SX+TX)
      DMG1=DMG
      DEG1=DEG
      DMG=DMG1+GG*(-HMW*COS(EWALL)/SX*TEMP1-HMW/SX*SIN(EWALL)
      #*FX(N)*COS(EWALL)*COS(EWALL)-TX*TEMP1+TEMP2)-
      #DEG*(HMW*COS(EWALL)/SX+TX)
      DB=-DM/DMG
      ETA=1.0+DQ/GWALL/SX
      EXT=EXT-GWALL*COS(EWALL)*(1-ETA)
      EYT=EYT-GWALL*SIN(EWALL)*(1-ETA)
      EMT=EMT+GWALL*SIN(EWALL)*(X(N)-X(1))*(1-ETA)-
      % GWALL*COS(EWALL)*(Y(N)-Y(1)-HMW)*(1-ETA)
      GOTO 317
      ENDIF
      IF(IWALL.EQ.1)THEN
      DQM=SX*GWALL
      DDM1=HMW*COS(EWALL)+TX*SX
      DMM=GWALL*DDM1
      DTM=-GWALL*SX*R1X
      DMTM=-GWALL*SX*R1XT
      DEGM=TEMP1*SX*GWALL
      DMGM=TEMP2*SX*GWALL
      DMGM=DMGM-GWALL*SIN(EWALL)*FX(N)*COS(EWALL)
      $   *COS(EWALL)*HMW
```

```
      DQ=DQ+DQM
      DM=DM+DMM
      DT=DT+DTM    !DT=DQ对AB1的偏导数
      DMT=DMT+DMTM    !DMT=DM对AB1的偏导数
      DEG=DEG+DEGM    !DEG=DQ对ALAM的偏导数
      DMG=DMG+DMGM    !DMG=DM对ALAM的偏导数
      EXT=EXT-GWALL*COS(EWALL)
      EYT=EYT-GWALL*SIN(EWALL)
      EMT=EMT+GWALL*SIN(EWALL)*(X(N)-X(1))-GWALL*COS(EWALL)
      $       *(Y(N)-Y(1)-HMW)
      ENDIF
  316 CONTINUE
      if(abs(dm).gt.1.0e+20)goto 317
      if(abs(dmt).gt.1.0e+20)goto 317
      DM=DM-FMT      !DQ=Gn !DM=Mn
      S1=DEG*DMT-DT*DMG
      IF(KXYX.EQ.1)THEN
      DF=-DQ/DT
      GOTO 317
      ENDIF
      IF(ABS(S1).LE.0.01)GOTO 317
      DF=(DQ*DMG-DM*DEG)/S1
      DB=(-DQ*DMT+DM*DT)/S1
  317 RETURN
      END

C
      SUBROUTINE MP(N,KXYX,KS,AB1,DQ,DM,BN,FX,FXO,
     &C,F,X2,Y2,X,Y,W,RU,FQUH,WL,FDIS,RW,DB,DF)
      REAL AB1,DF,DQ,DM,ALAM,DB
      INTEGER KS,N,KXYX
      REAL X2(80),Y2(80),W(80),X(80),Y(80),C(80),F(80),WL(80)
      REAL FQUH(80),FDIS(80),YSF(80),RU(80),RW
      REAL GAV,PLA,FA,FB,PLA1
      REAL BN(80),FX(80),FXO(80)
      COMMON/AS/ASP
!KXYX力矩平衡控制符,=0时同时计算力和力矩的平衡
      FA=0.
      FB=0.
      PLA=0.
      IF(KXYX.EQ.0)THEN
      GAV=(Y(N)-Y(1))/(X(N)-X(1))
      DO 277 I=2,N
      PLA=PLA+(X(I)-X(I-1))*(FX(I)+FX(I-1))/2.
  277 CONTINUE
      PLA1=(FA+FB)*(X(N)-X(1))/2.
      ALAM=(GAV*(X(N)-X(1))-PLA1)/PLA    !ALAM的初值,参见
Chen&Morgenstern(1983)
      ELSE
```

```
      ALAM=ASP
      ENDIF
      MQ=1
15    CONTINUE
      CALL DETE(AB1,RW,DQ,DM,ALAM,KS,BN,FX,FXO,
       &C,F,X2,Y2,W,RU,FQUH,YSF,WL,FDIS,N,DB,KXYX,DF)
      WRITE(6,*)MQ,DQ,DM,AB1,ALAM
      AB1=AB1+DF
      IF(KXYX.EQ.0)ALAM=ALAM+DB
      IF(MQ.GE.20)GO TO 44
      MQ=MQ+1
      IF(ABS(DF).GT.0.1E-4)GO TO 15
      IF(ABS(DB).GT.0.1E-3)GO TO 15
44    CONTINUE
      IF(MQ.GE.20)THEN
      WRITE(6,*)'THE ITERATION FAILS'
      RETURN
      ENDIF
      WRITE(6,727)
727   FORMAT(1X,//'THE RESULT IS:')
      WRITE(6,710)ALAM
710   FORMAT(1X,'LAMBDA=',F12.6)
      WRITE(6,711)AB1
711   FORMAT(1X,'FACTOROF SAFETY=',F12.6/)
      RETURN
      END
```

6.2.3 算例

以3.2.6节的算例，说明上节所示源程序的使用。计算简图如图6.1示。数据文件分别为s0.dat，s1.dat，s2.dat，s3.dat，d4.dat，分别相应于垂直条分法中Morgenstern-Price法，Bishop法、瑞典法、陆军工程师团法和简化法。这些数据文件除控制符OPTION不同外，其它均相同（陆军工程师团法在数据最后增加了一行，输入平均坝坡数据）。文件s0.dat列于后。相应迭代过程如下。

NO.	DQ	DM	AB1	ALAM
1	27.113120	123.942300	1.350149	4.646409E-01
2	1.355217	19.561880	1.382552	3.872862E-01
3	9.619116E-03	1.118679E-01	1.382340	3.769034E-01

```
THE RESULT IS:
 LAMBDA=        .376840
 FACTOR OF SAFETY=       1.382342
```

上表中DQ和DM为按式(3.27)和式(3.28)计算的不平衡力和力矩, AB1 和ALAM分别为安全系数*F*和λ数值。

相应s1.dat，s2.dat，s3.dat，d4.dat的安全系数分别为1.384，1.228,1.346和1.350。

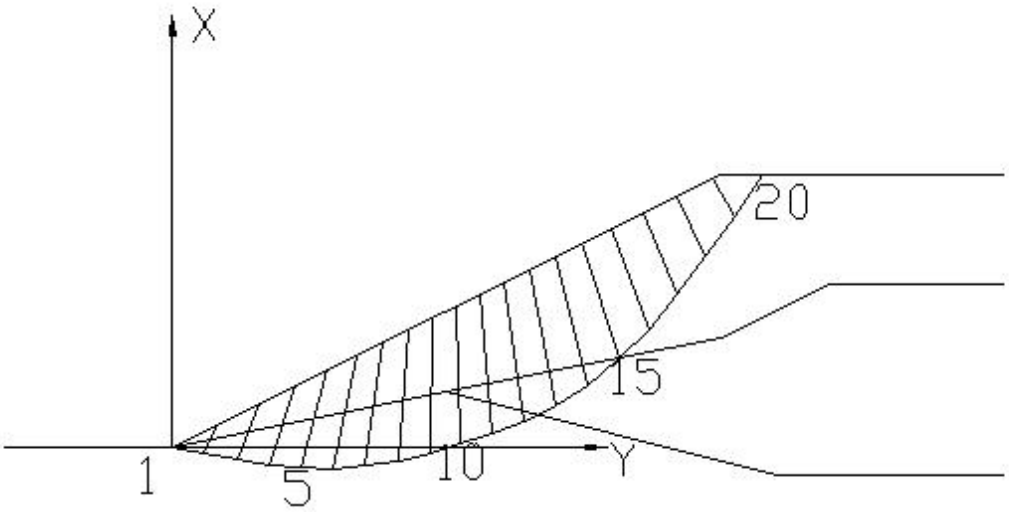


图 6. 1 垂直条分法算例

数据文件s0.dat。

```
0
20.000
-51.522   -50.480   -49.439   -48.397
-47.356   -46.314   -45.157   -44.000
-42.842   -41.685   -40.528   -39.370
-38.213   -37.055   -35.898   -34.718
-33.539   -32.359   -31.180   -30.000
-35.000   -33.466   -31.978   -30.580
-29.317   -28.235   -27.280   -26.545
-25.975   -25.511   -25.107   -24.765
-24.495   -24.311   -24.224   -24.243
-24.352   -24.530   -24.754   -25.000
0.000     0.000     0.000     0.781     0.000     76.000    0.000     0.000     0.000
14.953    0.000     0.000     0.781     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
44.024    0.000     0.000     0.781     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
62.013    0.000     0.000     0.781     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
77.801    0.000     0.000     0.781     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
90.507    0.000     0.000     0.781     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
99.652    0.000     5.300     0.424     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
104.842   0.000     5.300     0.424     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
106.278   0.000     5.300     0.424     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
105.081   0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
102.258   0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
98.251    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
92.936    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
86.076    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
77.434    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
66.706    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
53.955    0.000     7.200     0.364     19.500    76.000    0.000     0.000     0.000
```

39.650	0.000	7.200	0.364	19.500	76.000	0.000	0.000	0.000
24.234	0.000	7.200	0.364	19.500	76.000	0.000	0.000	0.000
8.152	0.000	7.200	0.364	19.500	76.000	0.000	0.000	0.000
0.001	0.000	7.200	0.364	0.000	76.000	0.000	0.000	0.000

6.3 计算斜条分法安全系数的程序 E.FOR

6.3.1 说明

在本源程序中，某些数据是采用结构变量形式出现的，相应结构列于1N4.FOR中，土条界面总数为N。程序首先读入两排有关界面的数据，随后读入一行土条底面中点的数据。最后读入条块的数据。在EMU程序中，条块的重量Q.W(I)实际上是通过条块界面的相应数据（包括界面上的平均容重B.G(I)）通过子程序计算获得的。在这里，则作为输入数据处理。程序读入拉力缝控制符TENSION和安全系数控制符OFOS。当TENSION =2或3时，将沿缝高自动设置一个水压力。OFOS =1和2，分别实现2.2节中介绍的方案1和方案2的方法，计算加载系数。OFOS =0时则计算安全系数。

6.3.2 源程序

```
      OPEN(5,FILE='        ',STATUS='UNKNOWN')
      OPEN(6,FILE='        ',STATUS='UNKNOWN')
      F1=1.1
      CALL READ_DATA
      CALL   FINDFOS(FOS,F1)
      STOP
      END
      SUBROUTINE READ_DATA
      INCLUDE 'IN4.FOR'
      O.PI=3.1415927
!水容重，坡外水位，水平地震力系数，拉力缝控制符，安全系数控制符
   READ(5,*)UWOW,WLOS,COEQ,TENSION,OFOS
      WRITE(6,*)'水容重,坡外水位,水平地震力系数,拉力缝,安全系数控制符',
      &UWOW,WLOS,COEQ,TENSION,OFOS
      READ(5,*)S.N   !土条界面总数
      WRITE(6,*)'土条界面总数',S.N
      WRITE(6,*)'界面有关数据'
!NU=界面与编号为NU的外边坡线相交，XU,YU,X,Y，界面顶部和底部坐标，L=界面长度
      WRITE(6,*)'I,NU,XU,YU,X,Y,L'
      DO I=1,S.N
      READ (5,*)I,S.NU(I),S.XU(I),S.YU(I),S.X2(I),S.Y2(I),S.L(I)
      WRITE(6,27)I,S.NU(I),S.XU(I),S.YU(I),S.X2(I),S.Y2(I),S.L(I)
      ENDDO
!G=界面上的平均容重,FW,CW=界面强度指标,P=孔压,DELTA=界面倾角
      WRITE(6,*)'B:I,G,FW,CW,P,DELTA'
      DO I=1,S.N
      READ(5,*)I,B.G(I),B.FW(I),B.CW(I),B.P(I),S.D(I)
      B.FW(I)=DTR(B.FW(I))
      S.D(I)=DTR(S.D(I))
```

```
            WRITE(6,25)I,B.G(I),RTD(B.FW(I)),B.CW(I),B.P(I),RTD(S.D(I))
            ENDDO
!土条底面中点数据，X,Y=坐标，ALPHA=倾角,C,F=强度指标
            WRITE(6,*)'DATA FOR THE MID-POINT OF SLICES'
            WRITE(6,*)'I,Q:X,Y,ALPHA,C,F'
            KG=S.N-1
            DO I=1,KG
            READ(5,*)I,Q.X(I),Q.Y(I),Q.A(I),Q.C(I),Q.F(I)
            Q.A(I)=DTR(Q.A(I))
            Q.F(I)=DTR(Q.F(I))
            WRITE(6,25)I,Q.X(I),Q.Y(I),RTD(Q.A(I)),Q.C(I),RTD(Q.F(I))
            ENDDO
!条块数据，W=重量，P=条底孔压，QX，QY=水平，垂直外荷，
            WRITE(6,*)'I,Q: WEIGHT,PORE PRESSURE,QX,QY'
            DO I=1,KG
            READ(5,*)I,Q.W(I),Q.P(I),SL.QX(I),SL.QY(I)
            WRITE(6,25)I,Q.W(I),Q.P(I),SL.QX(I),SL.QY(I)
            ENDDO
!PHX，PHY=条块界面浸润线坐标
            WRITE(6,*)'I,ID,PHX,PHY'
            DO I=1,S.N
            READ(5,*)I,S.PHX(I),S.PHY(I)
            WRITE(6,25)I,S.PHX(I),S.PHY(I)
            ENDDO
            CONTINUE
     25     FORMAT(1X,I5,7F10.3)
     27     FORMAT(1X,2I5,6F10.3)
            RETURN
            END
            SUBROUTINE FINDFOS(FOS,F1)
            AER=0.0001
            WRITE(6,*)'ITERATION PROCESS'
            WRITE(6,*)'KM,ETA,FOS'
            WRITE(6,*)KM,ETA,F1
            CALL CALWE(F1,EWT,WSM,WSL,E1,1)
            KM=0
            F2=F1*1.1
            CALL CALWE(F2,EWT,WSM,WSL,E2,1)
            AA=(E2-E1)/E1
            F0=F1-(F2-F1)/AA
            F1=F0
     20     CONTINUE
            CALL CALWE(F1,EWT,WSM,WSL,ETA,0)
            WRITE(6,*)KM,ETA,F1
            CALL DERIV(F1,DRF)
            DF=-ETA/DRF
            IF(ABS(DF).LT.AER)GOTO 10
            IF(KM.GT.10)THEN
            WRITE(6,*)'ITERATION TROUBLE IN FINDING FOS'
            ID=1
```

```
      RETURN
      ENDIF
      F1=F1+DF
      KM=KM+1
      GOTO 20
   10 CONTINUE
      FOS=F1
      WRITE(6,*)'FOS=',FOS
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE DERIV(F,DRF)
      INCLUDE 'IN4.FOR'
      DF=0.05*F
      F1=F+DF
      CALL CALWE(F1,EWT,WSM,WSL,ETA1,1)
      F2=F-DF
      CALL CALWE(F2,EWT,WSM,WSL,ETA2,1)
      DRF=(ETA2-ETA1)/(F2-F1)
      RETURN
      END
C
      SUBROUTINE CALWE(FOS,EWT,WSM,WSL,ETA,IFD)
      DIMENSION FE(60),VS(60),FWE(60),SKS(60),GTEM(60),QQX(60),QQY(60)
     #,FWF(60),ICS(60),CE(60),CWE(60),BAX(60),BAY(60),BX(60),BY(60)
      COMMON/SUMXY/SIGX,SIGY,LWW,SIGXP,SIGYP,ICS
      COMMON/VEL/FE,VS
      COMMON/ITEN/ITENSION,KTEN,HTENSION
      COMMON/OP6/IP1,IP2,IP3,IP4,IP5,IP6
      COMMON/FILES/PFILE,FILE5,FILE6,FILE7,FILE8
      CHARACTER*70 PFILE,FILE5,FILE6,FILE7,FILE8
      DIMENSION WW(60)
      INCLUDE 'IN4.FOR'
      real*8 ax,dea, dei,dei1,vs
      IF(LWW.NE.0)IFD=1
      IF(IFD.EQ.0)OPEN(10,FILE='DEB.EMU',STATUS='UNKNOWN')
      FC.G(1)=0.
      WG=0.
      WSL=0.
      WSF=0.
      WSM=0.
      FM=0.
      EANC=0.
      ECB=0.
      NT=S.N-1
      VS(1)=1.0d0
      FE(1)=ATAN(TAN(Q.F(1))/FOS)
      ce(1)=q.c(1)/fos
      DO I=1,NT
      CE(I+1)=Q.C(I+1)/FOS
```

```
      FE(I+1)=ATAN(TAN(Q.F(I+1))/FOS)
      IF(I.EQ.NT)FE(I+1)=FE(I)
      AX=Q.A(I+1)-Q.A(I)-FE(I+1)+FE(I)
      IF(AX.GE.-0.01.OR.IP4.EQ.1)THEN
      ICS(I+1)=0
      IF(I.EQ.1)FWE(1)=ATAN(TAN(B.FW(1))/FOS)
      FWE(I+1)=ATAN(TAN(B.FW(I+1))/FOS)
C     ii=i+1
C     write(6,*)'i,fos ',i,fos,b.fw(i+1),fwe(i+1)
      FWF(I+1)=FWE(I+1)
      IF(I.EQ.1)FWF(1)=FWE(1)
      ELSE
      ICS(I+1)=1
      IF(I.EQ.1)FWE(1)=O.PI-ATAN(TAN(B.FW(1))/FOS)
      FWE(I+1)=O.PI-ATAN(TAN(B.FW(I+1))/FOS)
      FWF(I+1)=-ATAN(TAN(B.FW(I+1))/FOS)
      IF(I.EQ.1)FWF(1)=-ATAN(TAN(B.FW(1))/FOS)
      ENDIF
      IF(I.EQ.NT)ICS(I+1)=ICS(I)
      SKS(I)=Q.A(I)+S.D(I)-FWF(I+1)-FE(I)
      IF(I.EQ.NT)THEN
      II=I+1
      SKS(II)=Q.A(II)+S.D(II)-FWF(II+1)-FE(II)
      ENDIF
      IF(ABS(Q.F(I+1)-Q.F(I)).LT.0.01.AND.
     % ABS(Q.A(I+1)-Q.A(I)).LT.0.05)THEN
      DEA=Q.A(I+1)-Q.A(I)
      AVA=(Q.A(I+1)+Q.A(I))/2.
      DEI=AVA+O.PI/2.+S.D(I+1)-FWE(I+1)-FE(I+1)
      DEI1=Q.A(I)+O.PI/2.+S.D(I+1)-FWE(I+1)-FE(I)
      IF(AX.GE.-0.01.AND.DEI1.LT.0.05)ID=1
      IF(AX.LT.-0.01.AND.DEI1.GT.-0.05)ID=2
      IF(IP4.EQ.1)ID=0
      IF(ID.NE.0)GOTO 110
      VS(I+1)=VS(I)*dexp(-DEA/dTAN(DEI))
      IF(VS(I+1).LT.-0.01.AND.IP4.NE.1)ID=3
      ELSE
      EXPL=Q.A(I)+O.PI/2.+S.D(I+1)-FWE(I+1)-FE(I)
      EXPR=Q.A(I+1)+O.PI/2.+S.D(I+1)-FWE(I+1)-FE(I+1)
      VS(I+1)=VS(I)*SIN(EXPL)/SIN(EXPR)
      ENDIF
      IF(VS(I+1).LT.-0.01.AND.IP4.NE.1)ID=4
      IF(ID.EQ.4)THEN
      WRITE(6,*)'EXP=Q.A+PI/2+D-FWE-FE'
      WRITE(6,*)'A,A+1,D,FW,F',Q.A(I),Q.A(I+1),S.D(I+1),FWE(I+1)
      $    ,FE(I+1)
      WRITE(6,*)'EXPL,EXPR=', EXPL,EXPR
      ENDIF
   10 DX=S.X2(I+1)-S.X2(I)
      IF(VS(I+1).LT.-0.01.AND.IP4.NE.1)GOTO 110
```

```
      GOTO 113
  110 CONTINUE
      IF(I.EQ.1.OR.I.EQ.S.N)GOTO 113
      WRITE(6,*)'KINEMATIC CONDITION VIOLATED AT NO. ',I
      WRITE(6,*)
      %'DEI1=Q.A(I)+O.PI/2.+S.D(I+1)-FWE(I+1)-FE(I),AX=DALFA-DPHI'
      WRITE(6,*)'AX,DEI1=',AX,DEI1
      WRITE(6,*)'Q.A(I),Q.A(I+1),S.D(I+1),FWE(I+1),FE(I+1)=, IN RADIUS'
      $     ,Q.A(I),Q.A(I+1),S.D(I+1),FWE(I+1),FE(I+1)
      ID=1
      RETURN
  113 CONTINUE
      BAX(I)=0.
      BAY(I)=0.
      BX(I)=0.
      BY(I)=0.
      WW(I)=UWOW*(S.PHY(I)-S.Y2(I)+S.PHY(I+1)-S.Y2(I+1))/2.
      IF(ANC.N.EQ.0)GOTO 815
      DO IH=1,ANC.N
      IF(ABS(ANC.NID(IH)).EQ.1)CYCLE
  237 IF(ANC.NL(IH).EQ.I)THEN
      TAA=COS(Q.A(I)-FE(I)+ANC.A(IH))
      IF(TAA.GT.0.0)EANC=EANC+VS(I)*TAA*ANC.TA(IH)
      ENDIF
      IF(ANC.NF(IH).EQ.I)THEN
      BAY(I)=BAY(I)+ANC.TA(IH)*SIN(ANC.A(IH))*SIN(Q.A(I)-FE(I))
      BAX(I)=BAX(I)-ANC.TA(IH)*COS(ANC.A(IH))*COS(Q.A(I)-FE(I))
      BY(I)=BY(I)+ANC.TA(IH)*SIN(ANC.A(IH))
      BX(I)=BX(I)-ANC.TA(IH)*COS(ANC.A(IH))
      ENDIF
      ENDDO
  815 CONTINUE
      QQX(I)=SL.QX(I)
      QQY(I)=SL.QY(I)
      DECB=(CE(I)*COS(FE(I))-Q.P(I)*SIN(FE(I)))
      %    *DX/COS(Q.A(I))
      ECB=ECB+DECB*VS(I)
      DWG=(Q.W(I)+QQY(I))*SIN(Q.A(I)-FE(I))
      DWG1=DWG+BAY(I)
      WG=WG+DWG*VS(I)
C     WSL- SURFACE LOAD          ; WSM- BODY FORCE
      IF(OFOS.EQ.1.OR.OFOS.EQ.-1)WSL=WSL+QQY(I)*SIN(Q.A(I)
      % -FE(I))*VS(I)
C     WSF=WSF+(COEQ*Q.W(I)+QQX(I))*COS(Q.A(I)-FE(I))*VS(I)
      DWSF=(COEQ*(Q.W(I)+WW(I))+QQX(I))*COS(Q.A(I)-FE(I))
      DWSF1=DWSF+BAX(I)
      WSF=WSF+DWSF*VS(I)
      IF(OFOS.EQ.1.OR.OFOS.EQ.-1)
      % WSL=WSL+QQX(I)*COS(Q.A(I)-FE(I))*VS(I)
      IF(OFOS.EQ.2.OR.OFOS.EQ.-2.OR.OFOS.EQ.0)
```

```
% WSM=WSM+Q.W(I)*COS(Q.A(I)-FE(I))*VS(I)
GTEM(I)=DECB-DWG1-DWSF1
ENDDO
FC.G(S.N)=0.
B.PW(S.N)=0.
PTEN=0.
FTEN=0.
IF(ITENSION.NE.0)THEN
HHH=S.L((S.N))
IF(KTEN.EQ.1)HHH=HTENSION
PTEN=0.5*HHH**2*UWOW*COS(Q.A(NT)-FE(NT))*VS(NT)
FTEN=0.5*HHH**2*UWOW
ENDIF
EJ=0.
FC.G(1)=0.
FC.GN(1)=0.
FC.GT(1)=0.
DC1=0.
DK1=0.
IF(IFD.EQ.0)SIGX=PTEN
IF(IFD.EQ.0)SIGY=0.
TW=0
DO I=2,S.N
DX=S.X2(I)-S.X2(I-1)
I1=I-1
TW=TW+Q.W(I1)+QQY(I1)+BY(I1)
C       write(6,*)'i1,tw,qqy,by',i1,tw,qqy(i1),by(i1)
CWE(I)=B.CW(I)/FOS
IF(I.EQ.2)CWE(1)=CWE(2)
DA=Q.A(I)-Q.A(I-1)-FE(I)+FE(I-1)
IF(DA.LT.0.AND.DA.GT.-0.05)DA=0.
AG=Q.A(I)+O.PI/2.-FWE(I)+S.D(I)-FE(I)
AX=SIN(DA)/SIN(AG)
IF(I.EQ.S.N)AX=1.0
IF(AX.GE.-0.01)THEN
EJ=EJ+S.L(I)*(CWE(I)*ABS(COS(FWE(I)))-B.PW(I)*SIN(FWE(I)))*AX
$*VS(I-1)
IF(ANC.N.NE.0)THEN
DO IK=1,ANC.N
IF(ANC.NID(IK).LT.0)CYCLE
IF(I1.GE.ANC.NF(IK).AND.I1.LE.(ANC.NL(IK)-1))THEN
TQ=FWE(I)-O.PI/2.
IF(ICS(I).EQ.1)TQ=-TQ
TTA=COS(TQ-S.D(I)+ANC.A(IK))
IF(TTA.GT.0)EANC=EANC+ANC.TA(IK)*TTA*AX*VS(I-1)
ENDIF
ENDDO
ENDIF
ELSE
ID=1
```

```
            ENDIF
            ENDDO
            EWT=ECB-WG-WSF+EJ-PTEN+EANC
            IF(OFOS.EQ.1.OR.OFOS.EQ.-1)ETA=EWT/WSL
            IF(OFOS.EQ.2.OR.OFOS.EQ.0.OR.OFOS.EQ.-2)ETA=EWT/WSM
        193 format(1x,5f8.2)
            RETURN
            END
            FUNCTION RTD(A)
            RTD=A*180./3.14159
            END
            FUNCTION DTR(A)
            DTR=A*3.14159/180.
            END
```

以下为1N4.FOR

```
            STRUCTURE /SLIPW/     !S
            INTEGER*4 N,NU(60)
            REAL*4 X2(60),Y2(60),XU(60),YU(60),D(60),PHX(60),PHY(60)
            REAL*4 L(60)
            END STRUCTURE
            STRUCTURE/SLIPB/!B
            REAL*4 G(60),PWA(60),PW(60),CW(60),FW(60),CCW(60),P(60)
            END STRUCTURE
      C     N=TOTAOL NUMBER OF POINTS IDENTIFYING THE BORDER
      C     G=AVERAGE UNIT WEIGHT, P=PORE PRESSURE AT THE BASE
      C     PW=TOTAL PORE PRESSURE ON THE WALL, PH=Y VALUE OF PHREATIC
LINE
      C     PWA=PW, IN TERMS OF PORE PRESSURE ANGLE
      C     C(W),F(W),P(W)= COHESION,FRICTION, PORE PRESURE AT BASE OR
WALL
            STRUCTURE /NODE/!N
            INTEGER*4 N,NN(20),NALF,NST,DF(20),NNALF(20),NNST(20),NU(20)
            INTEGER*4 ID,MOP,ITR,NAB(20),INTF(20)
            REAL*4 X(20),Y(20),D(20),M(20),W(20),XU(20),YU(20),DX(20)
      C     X,Y= COORDINATES. DF=0, UNMOVED POINTS; DF=1, MOVE ALONG THE
SPECIFIED
      C     DIRECTION; DF=-?, MOVE ALONG THE LINE NUMBERED ?.
      C     NN=SLICE NUMBER AT A NODE. NABR=NUMBER OF DISCONTINUITY IN
ALPHA
      C     NST=NOMBER OF STRAIGHT LINE SEGMENTS, NU=LINE NO. OF
INTERCEPTION PT.
      C     D=DELTA MEASURED WITH RESPECT TO POSITIVE X AXIS
      C     M=DIRECTION OF MOVEMENT WITH RESPECT TO POSITIVE X AXIS
      C     W=BANDWITH IN RANDOM SEARCH, XU,YU=COORDINATES OF
INTERCEPTION PT.
            END STRUCTURE
            STRUCTURE /OPTION/       !O
            INTEGER*4 P1,P2,P3,P4,P5,P6,W1,W2,W3,W4,W5,W6
            REAL*8 PI,E
            END STRUCTURE
```

```
C       GERROR=1, TROUBLE IN SUB.
        STRUCTURE /SLIPM/        !Q
        INTEGER*4 N,SOIL(60)
        REAL*4 X(60),A(60),Y(60),C(60)
        REAL*4 F(60),W(60),P(60),CP(60),CPA(60),WX(60),WY(90)
        END STRUCTURE
        STRUCTURE /ANCHOR/       !ANC
        INTEGER*4 N,NF(20),NL(20),NID(20)
        REAL*4 L(20),TA(20),XF(20),YF(20),XL(20),YL(20),A(20)
        END STRUCTURE
        STRUCTURE /FORCE/     !FC
        REAL*4 G(60),FN(60),FT(60),GN(60),GT(60)
        END STRUCTURE
        STRUCTURE /SFLD/         !SL
        INTEGER*4 ID(60)
        REAL*4    QX(60),QY(60)
        END STRUCTURE
        STRUCTURE /PILE/       !PL
        INTEGER*4 N,NA,NF(20),NL(20),NID(20)
        REAL*4 L(20),TA(20),XF(20),YF(20),XL(20),YL(20),A(20)
        REAL*4 H(20),PA(20),C(20),F(20)
        END STRUCTURE
        RECORD/SFLD/SL
        COMMON/A10/SL
        RECORD/SLIPW/S
        COMMON/A5/S
        RECORD/NODE/N
        COMMON/A6/N
        RECORD/OPTION/O
        COMMON/A7/O
        RECORD/SLIPB/B
        COMMON/A8/B
        INTEGER*4 TENSION,OFOS
        COMMON/CONPAR/UWOW,WLOS,COEQ,TENSION,OFOS
        RECORD/SLIPM/Q
        COMMON/A9/Q
        INTEGER SLOAD,SLINE(15)
        COMMON/SFLOAD1/SLOAD,SLINE,VALUEL(15),VALUER(15),QANGLE(15)
        RECORD/FORCE/FC
        COMMON/CFC/FC
        RECORD/ANCHOR/ANC
        COMMON/ACR/ANC
        RECORD/PILE/PL
        COMMON/PLR/PL
```

6.3.3 算例

本节提供两个算例。算例1为相应图3.1中任意形状滑裂面2。相应数据文件为E.dat。算例2相应图4.2(c)中的临界滑裂面。相应数据文件为Soko.dat。

1. 斜条分法算例 1

本例安全系数的初值为1.331,用式(4.13)计算相应的临界加速度系数为2.678787×10^{-2}。经三次迭代，临界加速度系数为7.535538×10^{-6},即趋于零，安全系数的终值为1.418。

```
KM，ETA，FOS
        0     2.678787E-02        1.330595
        1     1.450554E-03        1.412778
        2     7.535538E-06        1.417730
FOS=          1.417730
```

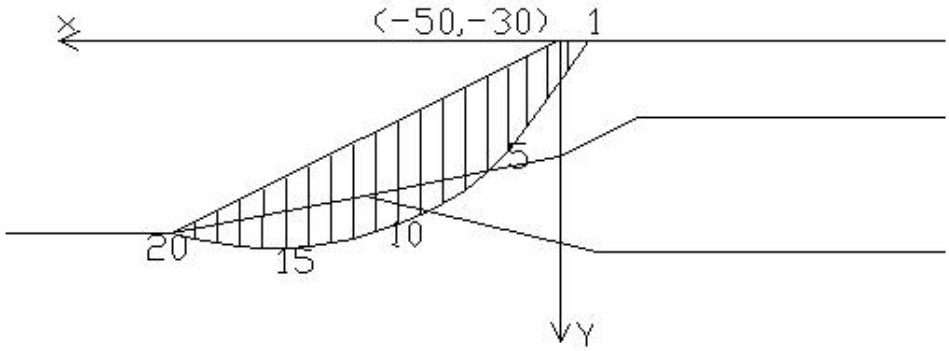


图 6.2 斜条分法算例 1

数据文件 E.dat

9.8	15	0	0	0		
20						
1	1	30	25	30	25	0
2	2	31.667	25.833	31.18	24.754	1.185
3	2	33.144	26.572	32.359	24.53	2.187
4	2	34.458	27.229	33.539	24.352	3.02
5	2	35.637	27.818	34.718	24.243	3.692
6	2	36.707	28.353	35.898	24.224	4.208
7	2	37.694	28.847	37.055	24.311	4.581
8	2	38.625	29.313	38.213	24.495	4.835
9	2	39.518	29.759	39.37	24.765	4.997
10	2	40.385	30.192	40.528	25.107	5.087
11	2	41.236	30.618	41.685	25.511	5.127
12	2	42.129	31.064	42.842	25.975	5.139
13	2	43.028	31.514	44	26.545	5.063
14	2	43.956	31.978	45.157	27.28	4.849
15	2	44.944	32.472	46.314	28.235	4.453
16	2	45.992	32.996	47.356	29.317	3.924
17	2	47.131	33.565	48.397	30.58	3.243
18	2	48.368	34.184	49.439	31.978	2.452
19	2	49.71	34.855	50.48	33.466	1.588

20	3	51.522	35	51.522	35	0
1	0	24.665	3.535	0	27.495	
2	19.5	24.665	3.535	0	24.285	
3	19.5	24.507	3.597	0	21.016	
4	19.5	24.439	3.624	0	17.716	
5	19.5	24.473	3.611	0	14.404	
6	19.5	24.629	3.549	0	11.079	
7	19.5	24.934	3.43	0	8.01	
8	19.5	25.375	3.265	0	4.891	
9	19.5	25.954	3.059	0	1.693	
10	19.5	26.84	2.734	0	-1.608	
11	19.5	28.165	2.268	0	-5.029	
12	19.5	29.883	1.736	0	-7.98	
13	19.5	31.597	1.288	0	-11.059	
14	19.5	33.781	0.807	0	-14.334	
15	19.5	37.816	0.033	0	-17.913	
16	19.5	38	0	0	-20.332	
17	19.5	38	0	0	-22.985	
18	19.5	38	0	0	-25.886	
19	19.5	38	0	0	-29.034	
20	19.5	38	0	0	-29.034	
1	30.59	24.877	-11.794	7.2	20	
2	31.769	24.642	-10.73	7.2	20	
3	32.949	24.441	-8.58	7.2	20	
4	34.129	24.297	-5.31	7.2	20	
5	35.308	24.233	-0.9	7.2	20	
6	36.477	24.267	4.287	7.2	20	
7	37.634	24.403	9.045	7.2	20	
8	38.792	24.63	13.111	7.2	20	
9	39.949	24.936	16.495	7.2	20	
10	41.106	25.309	19.229	7.2	20	
11	42.264	25.743	21.852	7.2	20	
12	43.421	26.26	26.238	5.3	23	
13	44.578	26.913	32.391	5.3	23	
14	45.735	27.757	39.542	5.3	23	
15	46.835	28.776	46.092	0	38	
16	47.876	29.948	50.481	0	38	
17	48.918	31.279	53.315	0	38	
18	49.96	32.722	55.016	0	38	
19	51.001	34.233	55.817	0	38	
1	6.794	0	0	0		
2	37.229	0	0	0		
3	55.816	0	0	0		
4	69.894	0	0	0		
5	80.145	0	0	0		
6	86.502	0	0	0		
7	91.916	0	0	0		
8	96.111	0	0	0		
9	99.456	0	0	0		
10	102.17	0	0	0		

11	107.08	0	0	0
12	109.23	0	0	0
13	110.94	0	0	0
14	111.62	0	0	0
15	102.03	0	0	0
16	94.316	0	0	0
17	80.66	0	0	0
18	61.143	0	0	0
19	25.625	0	0	0
1	30	25		
2	31.18	24.754		
3	32.359	24.53		
4	33.539	24.352		
5	34.718	24.243		
6	35.898	24.224		
7	37.055	24.311		
8	38.213	24.495		
9	39.37	24.765		
10	40.528	25.107		
11	41.685	25.511		
12	42.842	25.975		
13	44	26.545		
14	45.157	27.28		
15	46.314	28.235		
16	47.356	29.317		
17	48.397	30.58		
18	49.439	31.978		
19	50.48	33.466		
20	51.522	35		

2. 斜条分法算例 2

本例为一无重量承受外荷载的边坡，因此不能用方案2临界加速度系数,采用方案 1即式(4.12)计算加载系数。安全系数的初值为9.645881E-01,相应的加载系数为9.390098E-02。经二次迭代，加载系数为1.355278E-04，安全系数的终值为1.004741。迭代过程如下。

KM,ETA,FOS

0	9.390098E-02	9.645881E-01
1	7.880392E-03	1.001158
2	1.355278E-04	1.004741

FOS= 1.004741

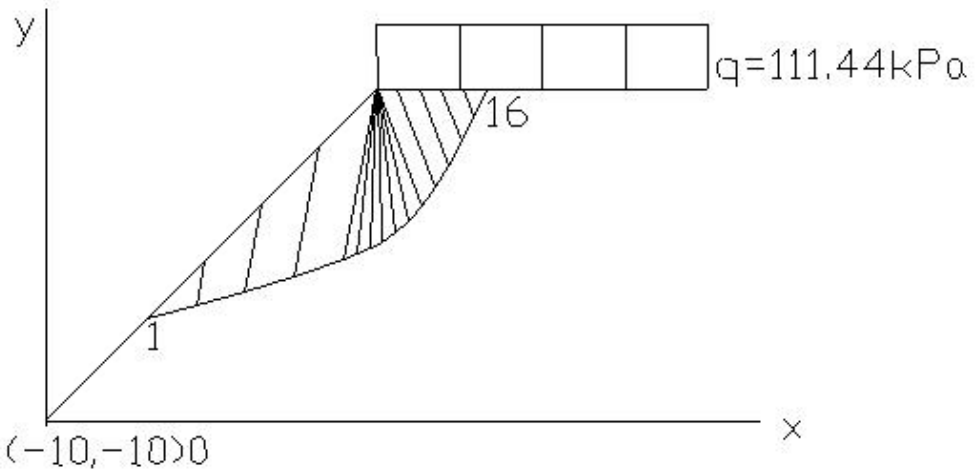


图 6. 3 斜条分法算例 2

数据文件 Soko.dat

```
1.0,-25.,0.0,0,1
   16
    1   1    -.719    -.719    -.719    -.719     .000
    2   1    4.413    4.413    3.698     .481    3.996
    3   1    9.586    9.586    8.114    1.734    7.988
    4   1   14.787   14.787   12.531    3.093   11.910
    5   1   20.000   20.000   16.948    4.610   15.690
    6   2   20.001   20.000   18.138    5.062   15.054
    7   2   20.002   20.000   19.328    5.585   14.431
    8   2   20.004   20.000   20.518    6.235   13.775
    9   2   20.005   20.000   21.708    7.068   13.044
   10   2   20.007   20.000   22.898    8.139   12.208
   11   2   20.010   20.000   24.088    9.506   11.259
   12   2   21.887   20.000   25.270   11.189    9.438
   13   2   23.856   20.000   26.453   13.150    7.326
   14   2   25.884   20.000   27.635   15.318    4.999
   15   2   27.941   20.000   28.818   17.624    2.532
   16   2   30.000   20.000   30.000   20.000     .001
    1      .000   30.000   10.000     .000   10.000
    2      .000   30.000   10.000     .000   10.308
    3      .000   30.000   10.000     .000   10.615
    4      .000   30.000   10.000     .000   10.918
```

5	.000	30.000	10.000	.000	11.217
6	.000	30.000	10.000	.000	7.110
7	.000	30.000	10.000	.000	2.679
8	.000	30.000	10.000	.000	-2.139
9	.000	30.000	10.000	.000	-7.500
10	.000	30.000	10.000	.000	-13.697
11	.000	30.000	10.000	.000	-21.236
12	.000	30.000	10.000	.000	-21.006
13	.000	30.000	10.000	.000	-20.763
14	.000	30.000	10.000	.000	-20.512
15	.000	30.000	10.000	.000	-20.257
16	.000	30.000	10.000	.000	-20.257
1	1.489	-.119	15.202	10.000	30.000
2	5.906	1.108	15.838	10.000	30.000
3	10.323	2.413	17.099	10.000	30.000
4	14.739	3.851	18.957	10.000	30.000
5	17.543	4.836	20.791	10.000	30.000
6	18.733	5.323	23.726	10.000	30.000
7	19.923	5.910	28.646	10.000	30.000
8	21.113	6.651	34.989	10.000	30.000
9	22.303	7.604	42.004	10.000	30.000
10	23.493	8.823	48.943	10.000	30.000
11	24.679	10.348	54.922	10.000	30.000
12	25.862	12.170	58.905	10.000	30.000
13	27.044	14.234	61.393	10.000	30.000
14	28.226	16.471	62.858	10.000	30.000
15	29.409	18.812	63.539	10.000	30.000
1	.000	.000	.000	.000	
2	.000	.000	.000	.000	
3	.000	.000	.000	.000	
4	.000	.000	.000	.000	
5	.000	.000	.000	.000	
6	.000	.000	.000	.261	
7	.000	.000	.000	.422	
8	.000	.000	.000	.604	
9	.000	.000	.000	.819	
10	.000	.000	.000	1.098	
11	.000	.000	.000	210.321	
12	.000	.000	.000	219.356	

13	.000	.000	.000	225.968
14	.000	.000	.000	229.263
15	.000	.000	.000	229.462
1	-.719	-.719		
2	3.698	.481		
3	8.114	1.734		
4	12.531	3.093		
5	16.948	4.610		
6	18.138	5.062		
7	19.328	5.585		
8	20.518	6.235		
9	21.708	7.068		
10	22.898	8.139		
11	24.088	9.506		
12	25.270	11.189		
13	26.453	13.150		
14	27.635	15.318		
15	28.818	17.624		
16	30.000	20.000		

参考文献

1. Bolton M.D. and, Lau, C.K.1993. Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil, Canadian Geotechnical Journal, 30(4), 1024-1033 (1993).
2. Casagrande, L. 1973. Comments on conventional design of retaining structures. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, Vol. 121, No. 9, 629-635.
3. Celestino, T. B. and Duncan, J. M., 1981. Simplified search for non-circular slip surface. Proceedings, 10th International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Stockholm. Vol.3, pp. 391-394.
4. Chen, W. F. 1975. Limit analysis and soil plasticity. Elsevier Scientific Publishing Co. , New York.
5. Chen, Z.and Morgenstern, N.R, 1983, Extensions to the generalized method of slices for stability analysis", Canadian Geotechnical Journal, Vol.20, No.l, 104-109.
6. 陈祖煜，1983年，“土坡稳定分析通用条分法及其改进”，岩土工程学报，第五卷，第4期, 11-17。
7. 陈祖煜，1991，边坡稳定分析- 极限平衡法的改进和应用，清华大学博士论文，
8. Chen, Z and Shao, C. 1988，Evaluation of minunmum factor of safety in slope stability analysis, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol 25, No.4, 735-748.

9. Chen, Z. 1992, Random trials used in determining global minimum factors of safety of slopes. *Canadian Geotechnical Journal*, Vol. 29, No. 2, 225-233.
10. 陈祖煜，1994，“边坡稳定的塑性力学上限解”，中国土木工程学会第七届土力学及基础工程学术会议论文集，中国建筑工业出版社， 484-488。
11. Chen, Z. Y. and Donald, I, 1995, Comparison between the limit equilibrium and limit analysis method. 267-270. *Proceedings of the 10th Asian Regional Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*. 267-270.
12. 陈祖煜，1997年，”论边坡稳定Sarma法中条块间作用力方向的两种可能性”，中国水利水电科学研究院学报，第1 期，19-26。
13. 陈祖煜，1997年, “边坡稳定分析的塑性力学上限解和下限解”, 中国水利电力技术发展和成就, 中国电力出版社。198-208.
14. 陈祖煜, 高锋，1997年,地基承载力的数值分析, 岩土工程学报, 第5期, 1-8。
15. Chen, Z. Y. and Li, S. M. 1998, Evaluation of active earth pressure by the generalized meyhod of slices. Canadian Geotechnical Journal. Vol. 35, ， No. 4，591－599.
16. 陈祖煜, 2000, 边坡稳定分析，土工计算机分析，第8章，龚晓南主编，p. 215-233, 中国建筑工业出版社。
17. 陈祖煜, 汪小刚，2000, 极限分析数值方法，土工计算机分析，第9章，龚晓南主编，p. 234-256,中国建筑工业出版社。
18. Donald, I. and Chen, Z. Y. 1997. Slope stability analysis by an upper bound plasticity method. Canadian Geotechnical Journal, December. 34: 853-862.
19. Donald I. and Giam, P. 1992, The ACAD slope stability analysis program review. Proc. of the 6th International Symposium on Landslides. Vol. 3, 1665-1670.
20. 龚晓南,史美东 2000, 滑移线场数值解，土工计算机分析，第7章，龚晓南主编，p. 193-214, 中国建筑工业出版社。
21. Greco, V. R. 1996. Efficient Monte Carlo technique for locating critical slip surface. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 122GT7:517-525. Morgenstern, N.R. and Price, V. 1965, "The analysis of the stability of general slip surface", Geotechnique, 15, No l, pp.79-93.
22. Hamel, S. R. Lon and H. F. Ferguson, 1976 . Mahoning Dam Foundation Re-Evaluation, Rock Engineering for Foundations and Slopes, Vol.I, ASCE Conference held at University of Colorado,Boulder,Colorado,on August 15～16, 1976, pp.217-244..
23. Meyerhof, G. G. 1951. The ultimate bearing capacity of foundations, Geotechnique, 2, 301-331.
24. oek, R. 1990, Fifty years’ of lateral earth pressure. *Design and Performance of Earth Retaining Structures, Proc. of Conf.* Cornel University, Ithaca, New York, June 18021, ASCE Geotechnical Special Publication, No. 25.
25. Morgenstern, N.R. and Price, V. 1965, "The analysis of the stability of general slip surface", Geotechnique, 15, No l, pp.79-93.

26. Peck, R. 1990, Fifty years' of lateral earth pressure. *Design and Performance of Earth Retaining Structures, Proc. of Conf*. Cornel University, Ithaca, New York, June 18021, ASCE Geotechnical Special Publication, No. 25.
27. Prandtl L. 1920 . Uber die harte plasticher korper . Nach . K. Ges . Wiss. Gott., Math .-phys. Klasse, 74-85.Sarma. K. S. 1979. Stability snalysis of embankments andslopes. J. Geotech. Am. Soc. Civ. Engrs, 105， GT. 12， 1511-1524.
28. Spencer, E. 1967. A method of analysis of stability of embankments assuming parallel inter-slice forces. Geotechnique. 171: 11-26.
29. Terzaghi, K. and Peck, R. B. 1967. Soil mechanics in engineering practice. John Wiley and Sons. New York.
30. Terzaghi，K., Theoretical soil mechanics, New York: Wiley, 1943.
31. U.S.Army Corps of Engineers, 1967. "Stability of slopes and foundations" Engineering Manual, Visckburg,Miss.
32. Sokolovski, V. V. 1954, Statics of soil media, Translated by Jones, D. H. and Scholfield, A. N., 1960, London.
33. Sloan S. W. 1988. Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming. International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics , 12, 61-67.
34. Sloan S. W. 1988. A steepest edge active set algorithm for solving sparse linear programming problems . International journal for Numerical Methods in Engineering, 26, 2671-2685.
35. Sloan S. W. 1989. Upper bound limit analysei\s using finite elements and linear programming. International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics , 13, 263-282.
36. Vesic, A.S. 1973. Analysis of ultimate loads of shallow foundations, JSMFD, ASCE, 99(1), 45-73.
37. 唐立山，谢云，尤矢勇，罗祖华，非数值并行算法，第一册，模拟退火算法，科学出版社，1994年4月第一版。
38. Wang, Y. J. , Yin J .H., and Chen, Z. Y. 2001. Calculation of bearing capacity of a strip footing using an upper bound method. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics.
39. 沈珠江，2000. 理论土力学。中国水利水电出版社。
40. 陈际唐，刘宁，1997，三峡大坝左厂坝段深层抗滑稳定问题，中国水利水电技术发展与成就，中国电力出版社，P.108-112。

第七章　土工有限单元法分析（二）
----渗流、应力应变和固结计算

7.1　前言

在渗流、应力应变和固结分析的有限元计算中，比奥（Biot）固结理论是最具普遍意义的。渗流、应力应变计算和太沙基固结理论都可以看作其分别去掉位移和孔隙水压力等自由度的特例。本书第五章已详细介绍土的固结理论以及相关问题。由于实际工程通常包含复杂的边界条件、几何剖面和物理力学特性指标，因此，通常需要用数值分析方法来求解。有限元法是求解固结问题解的常用手段。沈珠江曾介绍固结计算中的孔压和位移形函数处理和构筑方法，并提供了相应的源程序。谢康和等人介绍了三维条件下比奥固结有限元方程的推导，并讨论了平衡方程的空间离散和时间离散的方法以及构筑单元和整体固结矩阵的具体处理方案。

由于比奥固结理论中同时包含了位移和孔隙水压力，并带有时间这个自变量，有必要为整个数值分析方法建立一套完整的理论基础。本章从基础理论出发，阐述二维渗流、固结和应力应变分析的有限元方法。对弹性材料，从变分最小势能原理建立整个有限元分析的理论基础。在阐述中，使用了算子运算符号，用矩阵来代替较抽象的张量表达形式，使推导过程简捷易懂。为便于理解，附录(7.8 节)介绍了一些预备知识。在本章中沿用结构分析的惯例，压应力处理成负值。

最后，还将介绍有限元方法在实际工程中的应用实例。

7.2　反映静力和流量平衡的微分方程和边界条件

7.2.1　基本方程式

设某一土体在自重（包括土体中的水重）作用下，在初始时刻 t=0 时处于有效应力场$\{\sigma_0'\}$和孔压 u_0 状态。此时土体的位移和应变作为计算参照点，设为零。如果此时受到外荷载的作用，则土体将产生附加位移，同时还将产生附加的有效应力和孔隙水压力。新建立的孔压场将改变原有的渗流流速，一部分水从土中挤出，随着时间推移，孔隙水压力和有效应力不断变化直至最后形成一个与外荷平衡的稳定的$\{\sigma'\}$和 u。建立一个 y 坐标向上的坐标系，在此过程中的任一时刻 t，土体应同时满足静力平衡、变形相容和渗流平衡，其微分方程和相应边界条件描述如下：

1. 应力场应是静力许可的

在弹性力学中已经熟知

$$[\partial]\{\sigma\}=-\{f_b\} \tag{7.2.1}$$

其中$[\partial]$ 在7.8节附录式(7.8.8)中定义，$\{\sigma\}$为总应力，$\{f_b\}$为单位体积力。

$$\{\sigma\}^T=(\sigma_x,\sigma_y,\tau_{xy}) \tag{7.2.2}$$

$$\{f_b\}^T=(0,-\gamma_s) \tag{7.2.3}$$

γ_s为土的实际容重，对于饱和土体即为饱和容重。

对饱和土体，总应力和有效应力的关系为

$$\{\sigma\}=\{\sigma'\}+\{a\}u \tag{7.2.4}$$

其中 u 为孔隙水压力， $\{a\}$由下式定义

$$\{a\}^T=(1,1,0) \tag{7.2.5}$$

由于达西定律是对水头 h 而言的，我们把式(7.2.4)中的 u 改为 h，根据定义

$$h=-\frac{u}{\gamma_\omega}+y \tag{7.2.6}$$

得知

$$u=-\gamma_\omega(h-y) \tag{2.7}$$

这里需要注意，在有限元计算中，压应力一概被处理成负的，故具有压力性质的孔压也被处理成负的。

将式(7.2.4)，(7.2.7)代入(7.2.1)，得到

$$[\partial]\{\sigma'\}-\gamma_\omega[\partial]\{a\}(h-y)=-\{f_b\} \tag{7.2.8}$$

应力场的边界条件要求在所研究物体一段边界 s_1 满足下式

$$[\overline{T}]=[N]\{\sigma'\}+[N]\{a\}u \tag{7.2.9}$$

其中 $\{\overline{T}\}^T=(\overline{T}_x,\overline{T}_y)$为作用在 s_1 上已知的单位面积上的力。[∂]、[*N*]在附录式(7.8.8)，(7.8.9)中定义。将式(7.2.7)代入(7.2.9)，得

$$\{\overline{T}\}=[N]\{\sigma'\}-[N]\{a\}\gamma_\omega(h-y) \tag{7.2.10}$$

2. 位移场应是变形相容的

位移场 $\{W\}^T$ =（W_x，W_y）代表了物体中任意一点在 x、y 方向的位移。当应变很小时，位移和应变满足下式

$$\{\varepsilon\}=[\partial]^T\{W\} \tag{7.2.11}$$

其中$\{\varepsilon\}$为应变矢量

$$\{\varepsilon\}^T=(\varepsilon_x,\varepsilon_y,\gamma_{xy}) \tag{7.2.12}$$

位移场的边界条件要求，在所研究物体的一般边界 s_2 上满足下式

$$\{W\}=\{\overline{W}\} \tag{7.2.13}$$

其中$\{\overline{W}\}$为s_2上已知或设定的位移约束条件。

3. 本构关系

应力场$\{\sigma'\}$和应变场$\{\varepsilon\}$通过本构关系联系起来。对于弹性体，

$$\{\sigma'\}=\{\Delta\sigma'\}+\{\sigma'_0\} \tag{7.2.14}$$

其中，

$$\{\Delta\sigma'\}=[C]\{\varepsilon\} \tag{7.2.15}$$

$[C]$为根据广义虎克定律建立起来的刚度矩阵，它是对称的。从现在开始，$\{\varepsilon\}$均指由荷载增量引起的应变增量

4. 渗流场应满足达西定律和流量连续条件

按达西定律，水在土孔隙中的流速矢量$\{V\}$满足下式

$$\{V\}=-[K]\{\nabla\}h \tag{7.2.16}$$

其中$\{V\}^T=(V_x,V_y)$，$\{\nabla\}$在附录式(7.8.5)中定义。$[K]$为渗透系数矩阵。对渗流各向异性的土体

$$[K]=\begin{bmatrix}k_{xx} & k_{xy}\\ k_{yx} & k_{yy}\end{bmatrix} \tag{7.2.17}$$

$[K]$是对称的。在大部分土工问题中，经常取$k_{xy}=k_{yx}=0$，即渗流主轴恰为x、y坐标轴。

连续条件要求，某一时段内，流出单位土体的水量$\{\nabla\}^T\{V\}\Delta t$加上水的压缩量$-\frac{1}{Q}\Delta u$等于土体的压缩量$-\Delta\varepsilon_v=-(\Delta\varepsilon_x+\Delta\varepsilon_y)$，可表达为

$$\{\nabla\}^T\{V\}+\{a\}^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\}-\frac{1}{Q}\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{7.2.18}$$

其中Q为不饱和土体的压缩模量，当土体饱和并假定水不可压缩时，$1/Q$为零。将式(7.2.7)，(7.2.16)代入(7.2.18)得

$$-\{\nabla\}^T([K]\{\nabla\}h)+\{a\}^T\frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\}+\frac{\gamma_\omega}{Q}\frac{\partial h}{\partial t}=0 \tag{7.2.19}$$

式(7.2.19)是一个含对t微分的方程。如将其在(t_0, t)时段内积分，引入卷积的定义（附录（7.8.2）），可得

$$-\{\nabla\}^T([K]*\{\nabla\}h)+\{a\}^T\{\varepsilon\}+\frac{\gamma_\omega}{Q}(h-h_0)=0 \tag{7.2.20}$$

7.2.2 边界条件

渗流场的边界条件为：

1. 第一类边界条件。在所研究的物体边界面s_3上，水头满足下式

$$\overline{h}=h \tag{7.2.21}$$

$\overline{h}$ 为设定的水头值。

2. 第二类边界条件。在所研究的物体边界s_4上，流量满足下式

$$\overline{q}=\{V\}^T\{n\}=-\{\nabla\}^T h[K]\{n\} \tag{7.2.22}$$

同样，对式(7.2.22)在时段(t_0, t)内积分得

$$g*\overline{q}=-\{\nabla\}^T h*[K]\{n\} \tag{7.2.23}$$

其中 g=1，$\overline{q}$ 为 s_4 上设定的流量强度。

3. 第三类边界条件。所研究的边界为渗流场的自由面。

此时，自由面上各点的孔压为大气压，故应满足式(7.2.21)，式中 $\overline{h}=y-y_0$（y_0 为位置水头的参照高程）。同时，在自由面法线方向没有流量，故又应满足式(7.2.22)，$\overline{q}=0$。但是，自由面的位置通常是未知的，需要在满足这两个条件的情况下予以确定，常需迭代解决，参见第 7.6.1.2 节。

7.3 变分原理

7.3.1 固结问题的数学提法

固结问题的数学提法是，在体力{f_b}和边界上面力{T}的作用下，求满足微分方程(7.2.8)，(7.2.11)，(7.2.14)，(7.2.19)和边界条件(7.2.10)，(7.2.13)，(7.2.21)，(7.2.23)的位移场{W}和水头场 h。用有限元求解这些偏微分方程组边值问题，其基本途径是找出一个泛函π（{W}，h），当{W}和 h 为该偏微分方程边值问题解时，π获得极值。

可以提出，所寻找的泛函由下式确定，注意下面某些公式是经过格林公式转换后获得的。

$$\pi(\{W\},h)=\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4+\pi_5+\pi_6+\pi_7 \tag{7.3.1}$$

其中，

$$\pi_1=\int_v-\frac{1}{2}\{\Delta\sigma'\}^T*\{\varepsilon\}dv-\int_v\{\sigma_0'\}*\{\varepsilon\}dv \tag{7.3.2}$$

$$\pi_2=\int_v\gamma_\omega(h-y)*\{a\}^T\{\varepsilon\}dv \tag{7.3.3}$$

$$\pi_3 = \int_v \frac{1}{2}\gamma_\omega \{\nabla\}^T h * [K] * \{\nabla\} h dv \tag{7.3.4}$$

$$\pi_4 = \int_v \frac{1}{2}\frac{\gamma_\omega^2}{Q}(h - 2h_0) * h dv \tag{7.3.5}$$

$$\pi_5 = \int_v -\{f_b\}^T * \{W\} dv \tag{7.3.6}$$

$$\pi_6 = \int_{S_1} \{\overline{T}\}^T * \{W\} ds \tag{7.3.7}$$

$$\pi_7 = \int_{S_4} \gamma_\omega * q * h ds \tag{7.3.8}$$

7.3.2 数学提法的证明

设$\{W\}$和 h 分别有一满足第一类边界条件(7.2.13)、(7.2.21)和(7.2.23)的增量$\{\delta W\}$和δh。分别来看由式(7.3.2)至(7.3.8)定义的π_1至π_7各量的增量。

$$\begin{aligned}\delta\pi_{1,W} &= -\delta\left(\int_v \frac{1}{2}\{\Delta\sigma'\}^T * \{\varepsilon\} dv\right) - \delta\left(\int_v \{\sigma_0'\}^T * \{\varepsilon\} dv\right) \\ &= -\int_v \delta\left(\frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T [C] * \{\varepsilon\}\right) dv - \int_v \{\sigma_0'\}^T * \{\delta\varepsilon\} dv\end{aligned} \tag{7.3.9}$$

这里，引述一个一般性的原理，对任一向量$\{A\}$，当$[B]$对称时，有

$$\begin{aligned}\delta\left(\frac{1}{2}\{A\}^T [B]\{A\}\right) &= \frac{1}{2}\{\delta A\}^T [B]\{A\} + \frac{1}{2}\{A\}^T [B]\{\delta A\} \\ &= \{A\}^T [B]\{\delta A\} = \{\delta A\}^T [B]\{A\}\end{aligned} \tag{7.3.10}$$

这样，式(7.3.9)可写成

$$\begin{aligned}\delta\pi_{1,W} &= -\int_v \{\varepsilon\}^T [C] * \{\delta\varepsilon\} dv - \int_v \{\sigma'_0\}^T * \{\delta\varepsilon\} dv \\ &= -\int_v \{\sigma'\}^T * [\partial]^T \{\delta W\} dv\end{aligned} \tag{7.3.11}$$

由附录式(7.8.7)格林公式可知

$$\delta\pi_{1,W} = \int_v ([\partial]\{\sigma'\})^T * \{\delta W\} dv - \int_{S_1} ([N]\{\sigma'\})^T * \{\delta W\} ds \tag{7.3.12}$$

π_2同时包括 h 和$\{W\}$两个变量。当$\{W\}$有一增量$\{\delta W\}$时，

$$\begin{aligned}\delta\pi_{2,W} &= \int_v \gamma_\omega (h - y) * \{a\}^T \{\delta\varepsilon\} dv \\ &= \int_v \gamma_\omega (h - y) * \{a\}^T [\partial]^T \{\delta W\} dv\end{aligned} \tag{7.3.13}$$

由附录式(7.8.7)可知

$$\delta\pi_{2,W} = -\int_v [[\partial]\{a\}\gamma_\omega(h-y)]^T * \{\delta W\}dv + \int_{S_1} ([N]\{\mathrm{a}\})^T \gamma_\omega(h-y) * \{\delta W\}ds \quad (7.3.14)$$

当 h 有一满足边界条件(7.2.21)的增量δh 时，

$$\delta\pi_{2,h} = \int_v \gamma_\omega \{a\}^T \{\varepsilon\} * \delta h dv \quad (7.3.15)$$

π_3仅包含 h，它的增量是

$$\delta\pi_{3,h} = \int_v \gamma_\omega \delta(\frac{1}{2}\{\nabla\}^T\ h * [K] * \{\nabla\}h)dv \quad (7.3.16)$$

利用式(7.3.10)表达的原理

$$\delta\pi_{3,h} = \int_v \gamma_\omega \{\nabla\}^T h * [K] * \{\nabla\}\delta h dv = \int_v \gamma_\omega ([K] * \{\nabla\}h)^T * \{\nabla\}\delta h dv \quad (7.3.17)$$

利用附录式(7.8.4)，可得

$$\delta\pi_{3,h} = -\int_v \left(\gamma_\omega \{\nabla\}^T ([K] * \{\nabla\}h)\right) * \delta h dv + \int_{S_4} \gamma_\omega \left([K] * \{\nabla\}h\right)^T \{n\} * \delta h ds \quad (7.3.18)$$

其它几项为，

$$\delta\pi_{4,h} = \int_v \frac{\gamma_\omega^2}{Q}(h-h_0) * \delta h dv \quad (7.3.19)$$

$$\delta\pi_{5,W} = -\int_v \{f_b\}^T * \{\delta W\}dv \quad (7.3.20)$$

$$\delta\pi_{6,W} = \int_{S_1} \{\overline{T}\}^T * \{\delta W\}ds \quad (7.3.21)$$

$$\delta\pi_{7,h} = \int_{S_4} \gamma_\omega * q * \delta h ds \quad (7.3.22)$$

于是，

$$\begin{aligned}
\delta\pi &= \delta\pi_{1,W} + \delta\pi_{2,W} + \delta\pi_{2,h} + \delta\pi_{3,h} + \delta\pi_{4,h} + \delta\pi_{5,W} + \delta\pi_{6,W} + \delta\pi_{7,h} \\
&= \int_v [\partial\{\sigma'\} - \gamma_\omega(h-y)\partial\{a\} - \{f_b\}]^T * \{\delta W\}dv \\
&+ \gamma_\omega \int_v [-\{\nabla\}^T [K] * \{\nabla\}h + \{a\}^T\{\varepsilon\} + \frac{\gamma_\omega}{Q}(h-h_o)] * \delta h dv \\
&+ \int_{S_1} [\{\overline{T}\} - [N]\{\sigma'\} + [N]\{a\}\gamma_\omega(h-y)]^T * \{\delta W\}ds \\
&+ \int_{S_4} [\gamma_\omega * q + \gamma_\omega \{\nabla\}^T h * [K]\{n\}] * \delta h ds
\end{aligned} \quad (7.3.23)$$

分析式(7.3.23)的右端项，可见被积函数中与δW 和δh 相乘的恰好是需要满足的微分方程(7.2.8)，(7.2.20)和边界条件(7.2.10)，(7.2.23)。而在推导式(7.3.11)时，我们已经使用了应变相容条件(7.2.11)

和本构关系(7.2.15)。这就意味着，凡是满足本章一开始提出的偏微分方程边值问题的$\{W\}$和 h 必将使$\delta\pi$为零。进一步的分析也可以证明$\delta^2\pi$总是大于零的。于是，可以得出结论，固结问题偏微分方程的边值问题解能使由式(7.3.1)定义的泛函π取极值。反之亦然。

7.4 有限元解法的基本原理

7.4.1 离散化

将所研究的域 V 分成 n 个单元，共 m 个节点。这 m 个节点的$\{W\}$用$\{v\}$来代表，即

$$\{v\}^T = (W_{x1}, W_{y1}, W_{x2}, W_{y2}, \cdots\cdots, W_{xm}, W_{ym}) \tag{7.4.1}$$

同样，用$\{\varphi\}$代表这 m 个节点的$\{h\}$值，

$$\{\varphi\}^T = (h_1, h_2, \cdots\cdots, h_m) \tag{7.4.2}$$

任一点$\{W\}$和 h 可用该点所属单元的节点$\{W\}^e$和$\{h\}^e$近似表示，本质上，也就是可用$\{v\}$和$\{\varphi\}$代表。于是，π可以近似地用$\{v\}$和$\{\varphi\}$来代表，

$$\pi(\{W\}, h) = \pi(\{v\}, \{\varphi\}) \tag{7.4.3}$$

根据里兹法的原理，使π取得极值的$\{v\}$和$\{\varphi\}$满足 [注]

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{v\}^T} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \pi}{\partial W_{x1}} \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial W_{y1}} \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial W_{x2}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \pi}{\partial W_{ym}} \end{Bmatrix} = \{0\} \tag{7.4.4}$$

[注] 对于某一行向量$\{a\}^T$，我们定义$\dfrac{C}{\{a\}^T}$为一列向量$\{b\}$，它满足：

$$C = \{a\}^T\{b\} \qquad 或 \qquad C = \{b\}^T\{a\}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial \{h\}^T}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial \pi}{\partial h_1}\\ \dfrac{\partial \pi}{\partial h_2}\\ \vdots\\ \vdots\\ \dfrac{\partial \pi}{\partial h_m}\end{Bmatrix}=\{0\} \tag{7.4.5}$$

其中{0}为元素均为零的向量。由式(7.4.4)和(7.4.5)可得 3m 个线性方程，可用来求解由{v}和{h}所包含的 3m 个未知数。这就是有限单元法的基本原理。

下面，介绍各步骤的具体推导。

7.4.2 形状函数

单元内任一点的{W}和 h 可用该单元节点的$\{W\}^e$和$\{h\}^e$来近似表达，

$$\{W\}=[N_W]\{W\}^e \tag{7.4.6}$$

$$h=[N_h]\{h\}^e=\{h\}^{eT}[N_h]^T \tag{7.4.7}$$

因此，

$$\{\varepsilon\}=[\partial]^T\{W\}=[\partial]^T[N_W]\{W\}^e=[B_W]\{W\}^e \tag{7.4.8}$$

$$\{\nabla\}h=\{\nabla\}[N_h]\{h\}^e=[B_h]\{h\}^e \tag{7.4.9}$$

其中，

$$[B_W]=[\partial]^T[N_W] \tag{7.4.10}$$

$$[B_h]=\{\nabla\}[N_h] \tag{7.4.11}$$

[N_W]，[N_h]称形状函数或插值函数。对三角形和四边形单元，具有不同表达形式，将在第 7.5 节中详述。同时，我们记

$$[B_\Delta]^T=\{a\}^T[B_W] \tag{7.4.12}$$

将式(7.4.6)，(7.4.7)，(7.4.8)，(7.4.9)和(7.4.12)代入式(7.3.1)，得

$$\pi=\sum_{i=1}^{n}\int_{v_i}\{-\frac{1}{2}\{W\}^{eT}[B_W]^T[C][B_W]*\{W\}^e-\{\sigma_0'\}^T[B_W]*\{W\}^e$$
$$+\gamma_\omega\{h\}^{eT}[N_h]^T[B_\Delta]^T*\{W\}^e-\gamma_\omega y[B_\Delta]^T*\{W\}^e$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_\omega\{h\}^{eT}*[B_h]^T[K][B_h]*\{h\}^e-\{f_b\}^T[N_W]*\{W\}^e \quad (7.4.13)$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\gamma_\varpi^2}{Q}\{h\}^{eT}[N_h]^T[N_h]*\{h\}^e-\frac{\gamma_\varpi^2}{Q}\{h_0\}^{eT}[N_h]^T[N_h]*\{h\}^e\}dv$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{S_1}\{\overline{T}\}^{eT}[N_W]^T[N_W]*\{W\}^e ds+\sum_{i=1}^{n}\int_{S_4}\gamma_\omega*\{q\}^{eT}[N_h]^T[N_h]*\{h\}^e ds$$

注意边界上$\{\overline{T}\}$和 q 也被离散化为

$$\{\overline{T}\}=[N_W]\{\overline{T}\}^e \quad (7.4.14)$$

$$q=[N_h]\{q\}^e \quad (7.4.15)$$

如果将(7.4.13)中的单元节点位移$\{W\}^e$和水头$\{h\}^e$改写成系统整体的位移$\{v\}$和水头$\{\varphi\}$，可表达为

$$\pi=-\frac{1}{2}\{v\}^T[k_1]*\{v\}-\{M_1\}^T\{v\}+\gamma_\omega\{\varphi\}^T[k_3]^T*\{v\}-\gamma_\omega\{M_4\}^T*\{v\}$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_\omega\{\varphi\}^T*[k_2]*\{\varphi\}^T+\frac{1}{2}\frac{\gamma_\varpi^2}{Q}\{\varphi\}^T[k_4]*\{\varphi\}-\frac{\gamma_\varpi^2}{Q}\{\varphi_o\}^T[k_4]*\{\varphi\} \quad (7.4.16)$$
$$-\{M_2\}^T*\{v\}+\{P_1\}^T*\{v\}+\gamma_\omega*\{P_2\}^T*\{\varphi\}$$

其中

$$[k_1]=\sum_{e=1}^{n}\int_v[B_W]^T[C][B_W]dv \quad (7.4.17)$$

$$[k_2]=\sum_{e=1}^{n}\int_v[N_h]^T[k][N_h]dv \quad (7.4.18)$$

$$[k_3]=\sum_{e=1}^{n}\int_v[B_\Delta][N_h]dv \quad (7.4.19)$$

$$[k_4]=\sum_{e=1}^{n}\int_v[N_h]^T[N_h]dv \quad (7.4.20)$$

$$\{M_1\}=\sum_{e=1}^{n}\int_v[B_w]^T\{\sigma_0\}dv \tag{7.4.21}$$

$$\{M_2\}=\sum_{e=1}^{n}\int_v[N_w]\{f_b\}^T dv \tag{7.4.22}$$

$$\{M_4\}=\sum_{e=1}^{n}\int_v y[B_\Delta]dv \tag{7.4.23}$$

$$\{P_1\}=\sum_{e=1}^{n}\int_{S_1}[N_W]^T[N_W]\{\overline{T}\}^e ds \tag{7.4.24}$$

$$\{P_2\}=\sum_{e=1}^{n}\int_{S_4}[N_h]^T[N_h]\{q\}^e ds \tag{7.4.25}$$

式(7.4.17)至(7.4.25)系指各矩阵按其在整体结构矩阵中的位置相加。

7.4.3 里兹法

对式(4.16)所表达的 π 进行式(7.4.4)、(7.4.5)的运算，注意式(7.3.10)所反映的原理和对式(7.4.4)、(7.4.5)所加的附注，可以得到最终的线性方程式组：

$$-[k_1]\{\nu\}+\gamma_\omega[k_3]\{\varphi\}=\{M_2\}-\{P_1\}+\gamma_\omega\{M_4\}+\{M_1\} \tag{7.4.26}$$

$$\gamma_\omega[k_3]^T\{\nu\}+\gamma_\omega(g*[k_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4])*\{\varphi\}=-\gamma_\omega\{P_2\}+\frac{\gamma^2\omega}{Q}[k_4]\{\varphi_0\} \tag{7.4.27}$$

求解这个方程组，即获得了用有限元法得到的固结问题的解。

7.4.4 增量表达形式

式(7.4.26)，(7.4.27)是以全量形式表达的固结问题的线性方程组。即式中的$\{\nu\}$和$\{\varphi\}$都是在时刻 t 的值。用 $*$ 表达的卷积是在时段(0，t)内积分。这是假定土体为弹性时的表达式。

由于土体是非线性的材料，故实际使用时需将时段分隔成(0，t_1)，(t_1，t_2)，……，(t_{n-1}，t_n)若干时段，每一段的 k_1 用切线模量，通过逐段积分进行增量法计算。在(t_{n-1}，t_n)时段内，可近似地取

$$[g*f(t)]_{t_{n-1}}^{t_n}\approx\Delta t(1-\alpha)f(t_{n-1})+\Delta t\alpha f(t_n) \tag{7.4.28}$$

一般说来，α可在 0.5 至 1 的范围内取值。

式(7.4.26)中$\{M_1\}$，$\{M_4\}$，$\{\Phi_0\}$为常量，增量为 0，这样，式(7.4.26)、(7.4.27)在(t_{n-1}，t_n)段的增量表达式为

$$-[k_1]\{\dot{\nu}\}+\gamma_\omega[k_3]\{\varphi(t_n)\}=\{\dot{M}_2\}-\{\dot{P}_1\}+\gamma_\omega[k_3]\{\varphi(t_{n-1})\} \tag{7.4.29}$$

$$\gamma_\omega[k_3]^T\{\dot{v}\}+\gamma_\omega\{\alpha\Delta t[k_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\}\{\varphi(t_n)\}$$
$$=-\Delta t\gamma_\omega(\alpha\{P_2(t_n)\}+(1-\alpha)\{P_2(t_{n-1})\})-\gamma_\omega\{(1-\alpha)\Delta t[k_2]-\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\}\{\varphi(t_{n-1})\} \quad (7.4.30)$$

其中顶端标 • 的量为在(t_{n-1}，t_n) 时段的增量。

7.4.5 将孔隙水压作为未知量的处理

本节讨论一个多次被一些人忽略而导致错误计算结果的问题。即将孔隙水压来代替水头进行固结计算时，需增加一项考虑边界条件的矩阵$\{M_3\}$的问题。

前面已经提到，在进行固结计算时，有一些文献不是把水头 h 而是把孔压 u 作为未知数。由于 h 和 u 存在着式(7.2.6)这样简单的联系。前面所述的思路和推导若用 u 作为未知数，一样适用。事实上，只要将式(7.2.6)代入任何有 h 的地方，就是用 u 作为未知数的作法。

用式(7.2.6)将式(7.3.1)至(7.3.8)中所有 h 置换成 u，删去既不包含$\{W\}$也不包含 u 的“ 常量 ”，可得泛函π用 u 来表达的形式，

$$\pi(\{w\},u)=\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_3'+\pi_4+\pi_5+\pi_6+\pi_7 \quad (7.4.31)$$

其中

$$\pi_1=\int_v-\frac{1}{2}\{\Delta\sigma'\}^T*\{\varepsilon\}dv-\int_v\{\sigma_o'\}^T*\{\varepsilon\}dv \quad (7.4.32)$$

$$\pi_2=\int_v-u*\{a\}^T\{\varepsilon\}dv \quad (7.4.33)$$

$$\pi_3=\int_v\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_\omega}\{\nabla\}^Tu*[K]*\{\nabla\}udv \quad (7.4.34)$$

$$\pi_3'=\int_v-\{\nabla\}^Tu*[K]*\{g_1\}dv \quad (7.4.35)$$

$$\pi_4=\int_v\frac{1}{2}\frac{1}{Q}(u-2u_o)*udv \quad (7.4.36)$$

$$\pi_5=\int_v-\{f_b\}^T*\{W\}dv \quad (7.4.37)$$

$$\pi_6=\int_{s_1}\{\overline{T}\}^T*\{W\}ds \quad (7.4.38)$$

$$\pi_7=\int_{s_4}-g*q*uds \quad (7.4.39)$$

其中

$$\{g_1\}^T=(0,1) \quad (7.4.40)$$

与式(7.4.16)相对应，π 用系统单元节点来近似表达，具有下列形式，

$$\begin{aligned}\pi=&-\frac{1}{2}\{v\}^T[k_1]*\{v\}-\{M_1\}^T\{v\}-\{p\}^T[k_3]^T*\{v\}\\&+\frac{1}{2}\frac{1}{\gamma_\omega}\{p\}^T*[k_2]*\{p\}-\{p\}^T*[M_3]*\{g_1\}\\&-\{M_2\}^T*\{v\}+\frac{1}{2Q}\{p\}^{\mathrm{T}}[k_4]*\{p\}\\&-\frac{1}{Q}\{p_o\}^T[k_4]*\{p\}+\{P_1\}^T\{v\}-g*\{P_2\}^T*\{p\}\end{aligned}\tag{7.4.41}$$

其中{p}代表 m 个节点的 u 值，g=1

$$[M_3]=-\sum_{i=1}^{n}\int_v[B_h]^T[\mathrm{k}]\{g_1\}dv\tag{7.4.42}$$

与式(7.4.26)，(7.4.27)对应，系统的线性方程组为

$$\{k_1\}\{v\}+[k_3]\{p\}=-\{M_2\}+\{P_1\}-\{M_1\}\tag{7.4.43}$$

$$[k_3]^T\{v\}-\frac{1}{\gamma_\omega}(g*[k_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4])*\{p\}=-g*\{P_2\}-\{M_3\}*\{g_1\}-\frac{1}{Q}[k_4]\{p_0\}\tag{7.4.44}$$

与(7.4.29)，(7.4.30)相对应，式(7.4.43)，(7.4.44)在(t_{n-1}，t_n)时段的增量表达式为：

$$\{k_1\}\{\dot{v}\}+\{k_3\}\{p(t_n)\}=-\{\dot{M}_2\}+\{\dot{P}_1\}-[k_3]\{p(t_{n-1})\}\tag{7.4.45}$$

$$\begin{aligned}&[k_3]^T\{\dot{v}\}-\frac{1}{\gamma_\omega}\{\alpha\Delta t[\ \mathrm{k}_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\}\{p(t_n)\}\\&=-\Delta t[\alpha P_2(t_n)+(1-\alpha)P_2(t_{n-1})]+\frac{1}{\gamma_\omega}\{(1-\alpha)\Delta t\ \ [k_2]-\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\}\{p(t_{n-1})\}\\&\quad-\Delta t(1-\alpha)\{M_3(t_{n-1})\}-\Delta t\alpha\{M_3(t_n)\}\end{aligned}\tag{7.4.46}$$

将(7.4.31)和(7.3.1)比较，或将(7.4.46)与(7.4.30)比较，可以发现当把孔隙水压力作为未知数时，泛函的表达式增加了一项π'_3，线性方程的右端增加了一项 M_3。这是一个重大的差别，也是我们把“孔压力未知数”单独作为一个问题提出来的理由。

π'_3和{M_3}的出现，从数学角度看，是将式(7.2.6)代入泛函表达式(7.3.6)后出现的一项，从理论本质上，可作如下解释。

如果将(7.2.6)代入式(7.2.19)，可以发现，由于式(7.2.19)包含的是对 y 的两次微分，式(7.2.6)中包含 y 那一项不会体现在微分方程中，故用水头 h 和用孔压 u，其反映流量平衡的微分方程式形式是一样的，只是有一个γ_w系数的差别。

但是，当将式(7.2.6)代入第二类边界条件式(7.2.23)中时，由于式(7.2.23)仅包含了对 y 的一次微分，故变成了

$$g*\overline{q}=\frac{1}{\gamma_\omega}\{\nabla\}^T u*[K]\{n\}-\{g_1\}^T*[K]\{n\}\tag{7.4.47}$$

与式(7.2.23)比较，在形式上增加了一项 $-\{g_1\}^T * [K]\{n\}$。为了使式(7.4.47)这样的边界条件在 S_4 上满足，π'_3 的存在是必要的。因为 $\delta(\pi'_3)$ 恰好就是增加的那项 $\int_{S_4} -\{g_1\}^T [K]\{n\}\delta u ds$，即根据附录式(7.8.4)，

$$\delta(\pi'_3) = \int_v -\{\nabla\}^T (\delta u) * [K] * \{g_1\} dv + \int_{s_4} \{g_1\}^T * [K]\{n\} * \delta u ds \tag{7.4.48}$$

如前所述，这个问题曾被一些作者忽略。

7.4.6 将超孔隙水压力作为未知量的处理

迄今为至，我们所研究的孔压 u 和有效应力$\{\sigma'\}$都是指它的绝对值，即包含了 $t=0$ 时的初始值 u_0 和$\{\sigma'_0\}$。对于计算如图 7.4.1 那样的不断加荷的土石坝，这种处理方法是必要的。但是，如图 7.4.1 所示的经典的固结问题，我们感兴趣的仅仅是加荷后引起的附加有效应力$\{\Delta\sigma'\}$和超孔隙水压力 u_e，而对于 $t=0$ 时事先存在的应力$\{\sigma'_0\}$和静水压力 u_0 并不感兴趣。如果我们将 u_e 作为未知数，把超孔隙水压力$\{p_e\}$定义为孔压$\{p\}$在(0，t)之间的增量，

$$\{p_e\} = \{p\} - \{p_0\} \tag{7.4.49}$$

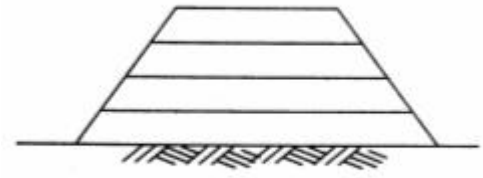


图 7.4.1施工中不断加荷的土石坝

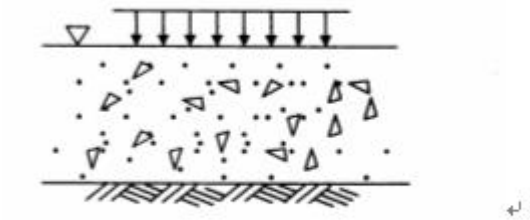


图 7.4.2经典的固结问题

根据式(7.4.45)，将(t_{n-1} 取为 t_0=0)，

$$[k_1]\{v\} + [k_3]\{p_e\} = -\{\Delta M_2\} + \{\Delta P_1\} \tag{7.4.50}$$

其中$\{\Delta M_2\}$和$\{\Delta P_1\}$分别相应值在(t，0)之间的增量。

由于在 t=0 时，$\{p_0\}$处于稳定渗流状态，故式(7.4.44)可简化为

$$\frac{1}{\gamma_\omega}[k_2]\{p_0\}=\{P_2(0)\}-\{M_3(0)\} \tag{7.4.51}$$

根据式(7.4.49)，(7.4.51)，式(7.4.44)用超孔隙压力 p_e 来表达为

$$[k_3]\{v\}-\frac{1}{\gamma_\omega}\left(g*[k_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\right)*\{p_e\}=-g*\{P_{2e}\} \tag{7.4.52}$$

其中$\{P_{2e}\}$为 P_2 在(0，t)时段的增值。式(7.4.49)，(7.4.52)为以超孔隙水压力表达的结构线性方程组。其增量表达式为

$$[k_1]\{\dot{v}\}+[k_3]\{p_e(t_n)\}=\{\dot{M}_2\}-\{\dot{P}_1\}+[k_3]\{p_e(t_{n-1})\} \tag{7.4.53}$$

$$\begin{aligned}&[k_3]\{\dot{v}\}-\frac{1}{\gamma_\omega}(\alpha\,\Delta t[\,\mathrm{k}_2]+\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4])\{p_e(t_n)\}\\&=-\Delta t\,[\alpha\{P_{2e}(t_n)\}-(1-\alpha)\{P_{2e}(t_{n-1})\}]+\frac{1}{\gamma_\omega}\{(1-\alpha)\Delta t[k_2]-\frac{\gamma_\omega}{Q}[k_4]\}\{p_e(t_{n-1})\}\end{aligned} \tag{7.4.54}$$

将式(7.4.53)，(7.4.54)与用孔压表达的式(7.4.45)，(7.4.46)和用水头表达的式(7.4.29)，(7.4.30)比较，就可发现，式(7.4.54)的右端并不存在$\{M_3\}$，即用超孔隙水压力来表达，其形式和用水头表达的形式相似。我们注意到，比奥的著作都是类似图 7.4.2 的问题，即用超孔隙水压力作为研究对象的。

可以看到，在边界 S_4 上的第二类边界条件的表达式(7.2.23)，如果以超孔隙水压力来表达，将是

$$g*\overline{q}_e=\frac{1}{\gamma_\omega}\{\nabla\}^T u_e*[k]\{h\} \tag{7.4.55}$$

其中 $\overline{q}_e$ 为 $\overline{q}$ 在(0，t)时段的增值。此式与式(7.2.23)相似，不象以孔隙水压力表达的式(7.4.47)那样增加了一项。这是式(7.4.44)中不存在$\{M_3\}$的根本原因。

综上所述，可作如下总结：

当遇到如图 7.4.2 所示事先已存在一个稳定渗流场的情况，用超孔隙水压力求解固结问题比较方便，此时用式(7.4.53)，(7.4.54)，方程式中不包含$\{M_3\}$。

当遇到如图 7.4.1 所示事先并不存在一个稳定渗流场的情况时，亦无超孔隙水压力，用实际孔隙水压力比较方便，此时用式(7.4.45)，(7.4.46)，需注意方程中包含$\{M_3\}$。

无论哪种情况，都可以用水头 h 作为未知数，使用式(7.4.29)，(7.4.30)求解固结问题。

7.5 结构矩阵的形成和计算

7.5.1 三角形单元

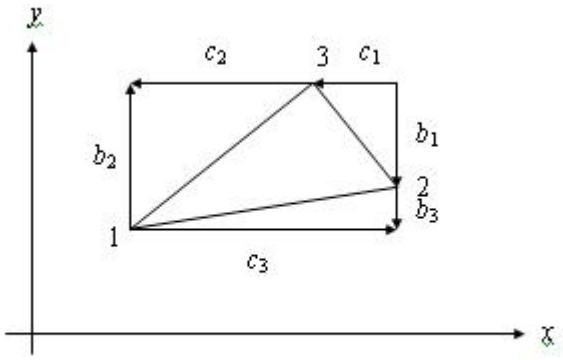


图 7.5.1 三角形单元

三角形单元的自变量用以下矩阵表达。

$$\{W\}^{eT}=(W_{x1},W_{y1},W_{x2},W_{y2},W_{x3},W_{y3}) \tag{7.5.1}$$

$$\{h\}^{eT}=(h_1,h_2,h_3) \tag{7.5.2}$$

单元内任一点(x，y)的$\{W\}$和 h 可用该单元的$\{W\}^e$和$\{h\}^e$表示，即式(7.4.6)和(7.4.7)，其中

$$[N_h]=(N_1,N_2,N_3) \tag{7.5.3}$$

$$[N_W]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \tag{7.5.4}$$

而

$$N_1=(a_1+b_1x+c_1y)/2\Delta \tag{7.5.5}$$

$$a_1=x_2y_3-x_3y_2 \tag{7.5.6}$$

$$b_1=y_2-y_3 \tag{7.5.7}$$

$$c_1=x_3-x_2 \tag{7.5.8}$$

$$2\Delta=\det\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \tag{7.5.9}$$

参考图 7.5.1，在脚标为 2、3 时，N、a、b、c 的相应表达式可依次类推。

式(7.4.10)，(7.4.11)中

$$[B_h]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}(N_1,N_2,N_3)$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\end{bmatrix} \qquad (7.5.10)$$

$$=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}$$

$$[B_W]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial x} & 0\\ 0 & \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial N_3}{\partial y}\\ \dfrac{\partial N_1}{\partial y} & \dfrac{\partial N_1}{\partial x} & \dfrac{\partial N_2}{\partial y} & \dfrac{\partial N_2}{\partial x} & \dfrac{\partial N_3}{\partial y} & \dfrac{\partial N_3}{\partial x}\end{bmatrix} \qquad (7.5.11)$$

$$=\frac{1}{2\Delta}\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3\\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3\end{bmatrix}$$

2) 单元矩阵的积分

将式(7.5.3)、(7.5.4)、(7.5.10)、(7.5.11)代入式(7.4.17)至(7.4.25)，可以得到相应各单元矩阵。一般来说，它们都具有 $k\int_v N_1^{\,a}N_2^{\,b}N_3^{\,c}dv$ 这样的表达形式，其中 k 为不包含 x，y 的常数。

可以证明，对一个三角形单元，

$$\int_s N_1^{\,a}N_2^{\,b}N_3^{\,c}ds=\frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2\Delta \qquad (7.5.12)$$

其中，N_1、N_2、N_3为形函数，！表示阶乘运算，Δ为三角形单元面积，a、b、c为指数。

这样，就算得式(7.4.17)至(7.4.25)各单元矩阵系数的数值。下一步，具体求解线性方程组(7.4.26)，(7.4.27)即可得到问题的最后解。

7.5.2 四节点四边形单元

1) 形状函数

对任一单元，在该单元形心处建立局部座标(s，t)如图 7.5.2 所示。将单元内任一点的 x、y、{W}、u 均表达成 s、t 的函数

$$x=\frac{1}{4}(1-s)(1-t)x_1+\frac{1}{4}(1+s)(1-t)x_2+\frac{1}{4}(1+t)(1+s)x_3+\frac{1}{4}(1-s)(1+t)x_4 \tag{7.5.13}$$

$$y=\frac{1}{4}(1-s)(1-t)y_1+\frac{1}{4}(1+s)(1-t)y_2+\frac{1}{4}(1+t)(1+s)y_3+\frac{1}{4}(1-s)(1+t)y_4 \tag{7.5.14}$$

采用式(7.5.13)，(7.5.14)这样的表达式，当四边形节点（x、y）值分别为(x_1，y_1)、(x_2，y_2)、 (x_3，y_3) 和 (x_4，y_4)时，使得相应节点的（s，t）坐标分别为（-1，-1)，(+1，-1)，(+1，+1)，(-1，+1)。

用矩阵来表达，式(7.5.13)、(7.5.14)可写成

$$x=(N_1,N_2,N_3,N_4)\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{Bmatrix} \tag{7.5.15}$$

$$y=(N_1,N_2,N_3,N_4)\begin{Bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{Bmatrix} \tag{7.5.16}$$

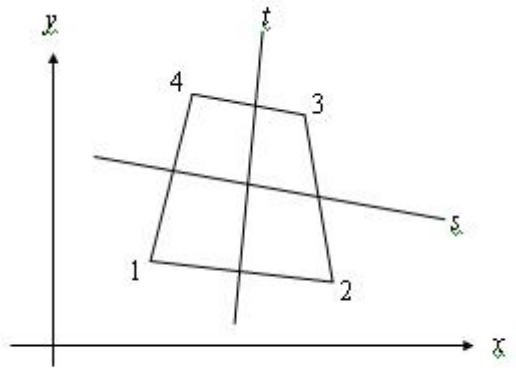


图 7.5.2 四边形四节点单元

其中，

$$N_1=\frac{1}{4}(1-s)(1-t) \tag{7.5.17}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+s)(1-t) \tag{7.5.18}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+s)(1+t) \tag{7.5.19}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1-s)(1+t) \tag{7.5.20}$$

和式(7.5.3)，(7.5.4)类似，我们有

$$[N_h] = (N_1, N_2, N_3, N_4) \tag{7.5.21}$$

$$[N_w] = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{pmatrix} \tag{7.5.22}$$

而相应的$\{W\}^e$和$\{h\}^e$表达式应为

$$\{W\}^e = (W_{x1}, W_{y1}, W_{x2}, W_{y2}, W_{x3}, W_{y3}, W_{x4}, W_{y4})^T \tag{7.5.23}$$

$$\{h\}^e = (h_1, h_2, h_3, h_4)^T \tag{7.5.24}$$

计算应变和水头梯度时，首先需要建立对整体坐标微分和对局部坐标微分之间的关系：

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{7.5.25}$$

其中

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} [s] \\ [t] \end{Bmatrix} ([X], [Y]) \tag{7.5.26}$$

$$\left.\begin{aligned} [s] &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial s}, \frac{\partial N_2}{\partial s}, \frac{\partial N_3}{\partial s}, \frac{\partial N_4}{\partial s} \right) = (N_{1s}, N_{2s}, N_{3s}, N_{4s}) \\ [t] &= \left(\frac{\partial N_1}{\partial t}, \frac{\partial N_2}{\partial t}, \frac{\partial N_3}{\partial t}, \frac{\partial N_4}{\partial t} \right) = (N_{1t}, N_{2t}, N_{3t}, N_{4t}) \end{aligned}\right\} \tag{7.5.27}$$

$$\left.\begin{aligned} [X]^T &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ [Y]^T &= (y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned}\right\} \tag{7.5.28}$$

而

$$\left.\begin{aligned} N_{1s}&=-\frac{1}{4}(1-t)\ ,\quad N_{1t}=-\frac{1}{4}(1-s)\\ N_{2s}&=\ \frac{1}{4}(1-t),\quad N_{2t}=-\frac{1}{4}(1+s)\\ N_{3s}&=\ \frac{1}{4}(1+t)\ ,\quad N_{3t}=\ \frac{1}{4}(1+s)\\ N_{4s}&=-\frac{1}{4}(1+t)\ ,\quad N_{4t}=\ \frac{1}{4}(1-s)\end{aligned}\right\} \tag{7.5.29}$$

式(7.5.25)可变换成

$$\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{Bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial s}\\ \dfrac{\partial}{\partial t}\end{Bmatrix} \tag{7.5.30}$$

和式(7.5.10)，(7.5.11)相似。

$$\begin{aligned}[B_h]&=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}\end{bmatrix}(N_1,N_2,N_3,N_4)\\ &=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial s}\\ \dfrac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\end{bmatrix}(N_1,N_2,N_3,N_4)\\ &=\boldsymbol{J}^{-1}\begin{bmatrix}N_{1s}&N_{2s}&N_{3s}&N_{4s}\\ N_{1t}&N_{2t}&N_{3t}&N_{4t}\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.5.31}$$

$$[B_W]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x}&0\\ 0&\dfrac{\partial}{\partial y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4&0\\ 0&N_1&0&N_2&0&N_3&0&N_4\end{bmatrix} \tag{7.5.32}$$

假如我们将式(7.5.30)中的 $\boldsymbol{J}^{-1}$ 写成

$$\boldsymbol{J}^{-1}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}\\ Q_{21}&Q_{22}\end{bmatrix} \tag{7.5.33}$$

代入(7.5.30)，则有

$$\frac{\partial}{\partial x}=Q_{11}\frac{\partial}{\partial s}+Q_{12}\frac{\partial}{\partial t} \tag{7.5.34}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=Q_{21}\frac{\partial}{\partial s}+Q_{22}\frac{\partial}{\partial t} \tag{7.5.35}$$

将式(7.5.34)、(7.5.35)代入式(7.5.32)，得

$$[B_W]=\begin{bmatrix} Q_{11}\dfrac{\partial}{\partial s}+Q_{12}\dfrac{\partial}{\partial t} & 0 \\ 0 & Q_{21}\dfrac{\partial}{\partial s}+Q_{22}\dfrac{\partial}{\partial t} \\ Q_{21}\dfrac{\partial}{\partial s}+Q_{22}\dfrac{\partial}{\partial t} & Q_{11}\dfrac{\partial}{\partial s}+Q_{12}\dfrac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \tag{7.5.36}$$

$$=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & m_{14} & 0 \\ 0 & m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 & m_{24} \\ m_{21} & m_{11} & m_{22} & m_{12} & m_{23} & m_{13} & m_{24} & m_{14} \end{bmatrix}$$

其中，$m_{1i}=Q_{11}N_{is}+Q_{12}N_{it}$，$m_{2i}=Q_{21}N_{is}+Q_{22}N_{it}$，$i$=1, 2, 3, 4。

2) 单元矩阵的积分

将式(7.5.21)、(7.5.22)、(7.5.31)、(7.5.32)分别代入式(7.4.17)至(7.4.25)，可以得到相应各单元矩阵。注意到 $dxdy$=det[J]$dt\,ds$，可得到一般的表达式$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(s,t)dsdt$。用高斯积分法来计算式(7.4.17)至(7.4.25)各单元矩阵系数的值。一般用四点法，此时

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}F(s,t)dsdt\approx\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_i\alpha_jF(s_i,t_j) \tag{7.5.37}$$

其中

$s_1=t_1=0.57735,\quad s_2=t_2=-0.57735$

$\alpha_1=\alpha_2=1.0$

7.5.3 八节点四边形单元

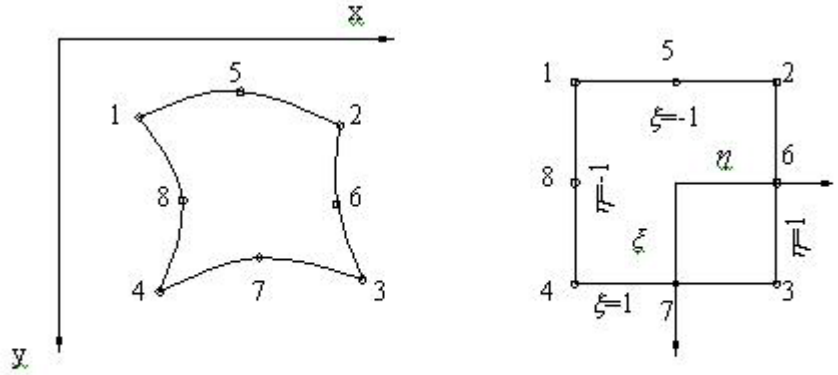


图 7.5.3 四边形八节点单元

1）形状函数

如图 7.5.3 所示，对任一八节点四边形单元，如在该单元形心处建立坐标（ξ，η），经过映射后也都可转换为正方形。整体坐标和局部坐标之间的微分关系仍记作：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \boldsymbol{J} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \tag{7.5.38}$$

其中

$$[\boldsymbol{J}] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{8} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \sum_{i=1}^{8} x_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} & \sum_{i=1}^{8} y_i \dfrac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = N_{i\xi} = \begin{cases} \dfrac{\xi_i}{4}(1+\eta_i\eta)(2\xi\xi_i+\eta_i\eta) & (i=1,2,3,4) \\ -\xi(1+\eta_i\eta) & (i=5,7) \\ \dfrac{\xi_i}{2}(1-\eta^2) & (i=6,8) \end{cases}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = N_{i\eta} = \begin{cases} \dfrac{\eta_i}{4}(1+\xi\xi_i)(2\eta_i\eta+\xi\xi_i) & (i=1,2,3,4) \\ \dfrac{\eta_i}{2}(1-\xi^2) & (i=5,7) \\ -\eta(1+\xi\xi_i) & (i=6,8) \end{cases}$$

相应的位移和孔隙水压力分别为：

$$\{W\}^e = (W_{x1}, W_{y1}, W_{x2}, W_{y2}, W_{x3}, W_{y3}, W_{x4}, W_{y4}, W_{x5}, W_{y5}, W_{x6}, W_{y6}, W_{x7}, W_{y7}, W_{x8}, W_{y8})^T \tag{7.5.39}$$

$$\{h\}^e = (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8)^T \tag{7.5.40}$$

单元内任一点(x，y)的$\{W\}$和 h 可用该单元的$\{W\}^e$和$\{h\}^e$表示，即式(7.4.6)和(7.4.7)，其中

$$[N_h] = (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8) \tag{7.5.41}$$

$$[\mathbf{N}_W] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

(7.5.42)

其中形函数 N_i 分别为：

$$N_1 = (1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)/4$$

$$N_2 = (1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)/4$$

$$N_3 = (1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)/4$$

$$N_4 = (1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)/4$$

$$N_5 = (1-\xi^2)(1-\eta)/2$$

$$N_6 = (1+\xi)(1-\eta^2)/2$$

$$N_7 = (1-\xi^2)(1+\eta)/2$$

$$N_8 = (1-\xi)(1-\eta^2)/2$$

由此，得到：

$$[B_h] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8)$$

$$= \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix} (N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8) \qquad (7.5.43)$$

$$= \boldsymbol{J}^{-1} \begin{bmatrix} N_{1\xi} & N_{2\xi} & N_{3\xi} & N_{4\xi} & N_{5\xi} & N_{6\xi} & N_{7\xi} & N_{8\xi} \\ N_{1\eta} & N_{2\eta} & N_{3\eta} & N_{4\eta} & N_{5\eta} & N_{6\eta} & N_{7\eta} & N_{8\eta} \end{bmatrix}$$

我们仍将 J^{-1} 写成

$$\boldsymbol{J}^{-1} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \qquad (7.5.45)$$

仍有

$$\frac{\partial}{\partial x}=Q_{11}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{12}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{7.5.46}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=Q_{21}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{22}\frac{\partial}{\partial \eta} \tag{7.5.47}$$

由此可知

$$[B_w]=\begin{bmatrix} Q_{11}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{12}\frac{\partial}{\partial \eta} & 0 \\ 0 & Q_{21}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{22}\frac{\partial}{\partial \eta} \\ Q_{21}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{22}\frac{\partial}{\partial \eta} & Q_{11}\frac{\partial}{\partial \xi}+Q_{12}\frac{\partial}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & m_{12} & 0 & m_{13} & 0 & m_{14} & 0 & m_{15} & 0 & m_{16} & 0 & m_{17} & 0 & m_{18} & 0 \\ 0 & m_{21} & 0 & m_{22} & 0 & m_{23} & 0 & m_{24} & 0 & m_{25} & 0 & m_{26} & 0 & m_{27} & 0 & m_{28} \\ m_{21} & m_{11} & m_{22} & m_{12} & m_{23} & m_{13} & m_{24} & m_{14} & m_{25} & m_{15} & m_{26} & m_{16} & m_{27} & m_{17} & m_{28} & m_{18} \end{bmatrix} \tag{7.5.48}$$

其中，$m_{1i}=Q_{11}N_{i\xi}+Q_{12}N_{i\eta}$，$m_{2i}=Q_{21}N_{i\xi}+Q_{22}N_{i\eta}$，i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8

2) 单元矩阵的积分

同为四边形单元，八节点单元与四节点单元在单元区域上进行数值积分，计算方法是基本相同的。

7.5.4 不协调的位移模式

在四边形等参单元中，我们假定坐标 x，y 和位移$\{W\}$具有相同的形状函数，即用式(7.4.6)表达$\{W\}$的形状函数和用式(7.5.15)，(7.5.16)表达 x，y 的形状函数都是$[N_W]$。然而，如果座标 x，y 采用较低阶的形状函数，可以使计算效率提高。反过来，如果位移$\{W\}$采用较高的自由度，则可以提高精度。特别是对较薄的单元，可以改善线性方程组的病态。在 SAP4，FEDAM 等程序里，曾采用这样一种不协调的位移模式。对于座标 x，y 仍采用式(7.5.15)，(7.5.16)，由式(7.5.41)确定的$[N_h]$不变，但式（7.5.23）中$\{W\}^e$增加了四个自由度,

$$\{W\}^{eT}=(W_{x1},W_{y1},W_{x2},W_{y2},W_{x3},W_{y3},W_{x4},W_{y4},\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \tag{7.5.49}$$

或者，用分矩阵的形式表达

$$\{W\}^e=\{W,\theta\} \tag{7.5.50}$$

其中

$$\{\theta\}^T=(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2) \tag{7.5.51}$$

在式(7.4.17)至(7.4.25)中，与$\{W\}$有关的仅有$[k_1]$，$[k_2]$，$[k_3]$和$[M_4]$等项，体积力仍使用原$[N_h]$的插值函数。相应$[N'_W]$和$[B'_W]$应具有下面表达形式

$$[N'_W]=[[N_W][N_\theta]] \tag{7.5.52}$$

其中

$$N_\theta=\begin{bmatrix} N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \tag{7.5.53}$$

$$N_5=1-s^2 \tag{7.5.54}$$

$$N_6=1-t^2 \tag{7.5.55}$$

与式(7.5.27)相应，

$$\left.\begin{aligned} N_{5s}=1-2s,\quad N_{5t}=0 \\ N_{6s}=0,\quad N_{6t}=1-2t \end{aligned}\right\} \tag{7.5.56}$$

与式(7.5.32)相应，

$$[B'_W]=[[B_W][B_\theta]] \tag{7.5.57}$$

其中

$$[B_\theta]=\begin{bmatrix} Q_{11}N_{5s}+Q_{12}N_{5t} & 0 & Q_{12}N_{6s}+Q_{12}N_{6t} & 0 \\ 0 & Q_{21}N_{5s}+Q_{22}N_{5t} & 0 & Q_{21}N_{6s}+Q_{22}N_{6t} \\ Q_{21}N_{5s}+Q_{22}N_{5t} & Q_{11}N_{5s}+Q_{12}N_{5t} & Q_{21}N_{6s}+Q_{22}N_{6t} & Q_{11}N_{5s}+Q_{12}N_{5t} \end{bmatrix} \tag{7.5.58}$$

这样，对于每一个单元，都增加了α_1，β_1，α_2，β_2四个自由度，相应的$[B_W]$为(3×12)的矩阵。每个单元增加的这四个自由度仅在本单元出现，在整体线性方程组中以块的形式出现，可以在求解以前，甚至在组成总体刚度矩阵以前，用高斯消去法先将这四个自由度消除。这个特殊处理纳入整个计算中不会增加很多新的工作。

7.5.5 接触面单元

接触面单元是用来模拟岩石中的不连续面和不同材料的交界面的位移特性的一种特殊单元。Good man 最早提出过这类单元。这里介绍邓肯等的一种推导。如图 7.5.4 的不连续面，假如面 AB 上的位移可用中点 C 的值来平均表达的话，则 C 点接触面上和下的位移分别是 u_{i}，v_{i}和 u_{j}，v_{j}。同一点上、下的位移不一样，反映了它的不连续性。

设 C 点法线方向位移为v'，切线方向为 u'，则在 u'和v'方向的相对位移为

$$\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_i'\\ v_i'\\ u_j'\\ v_j'\end{Bmatrix}=[B]\{\delta'\} \tag{7.5.59}$$

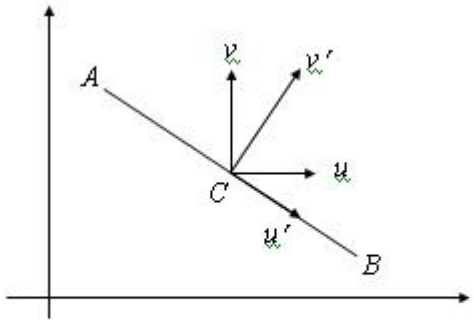


图 7.5.4　　接触面单元

其中：$[B]=(-I,I)$，I为单位矩阵；$\{\delta'\}^T=(u_i',v_i',u_j',v_j')$。利用图7.5.4所表示的关系，法线和切线方向的位移v'，u'和x，y方向的位移v，u之间存在如下关系：

$$\begin{Bmatrix}u'\\ v'\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Z & -C\\ C & Z\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix}=[\theta]\begin{Bmatrix}u\\ v\end{Bmatrix} \tag{7.5.60}$$

其中

$$Z=\sin\alpha, C=\cos\alpha$$

$$\theta=\begin{bmatrix}Z & -C\\ C & Z\end{bmatrix}$$

将(7.5.60)代入(7.5.59)后得

$$\begin{Bmatrix}\Delta u\\ \Delta v\end{Bmatrix}=[B]\begin{bmatrix}[\theta] & 0\\ 0 & [\theta]\end{bmatrix}\{\delta\}=[S]\{\delta\} \tag{7.5.61}$$

其中

$$\{\delta\}=\begin{Bmatrix}ui\\ v_i\\ u_j\\ vj\end{Bmatrix} \tag{7.5.62}$$

$$S=[B]\begin{bmatrix}[\theta] & 0\\ 0 & [\theta]\end{bmatrix}=[-[I]\ [\theta]\ [I]\ [\theta]]$$
$$=\begin{bmatrix}-Z & C & Z & -C\\ -C & -Z & C & Z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}[A_1]\\ [A_2]\end{bmatrix} \tag{7.5.63}$$

$$[A_1]=(-Z \quad C \quad Z \quad -C) \tag{7.5.64}$$

$$[A_2]=(-C \quad -Z \quad C \quad Z) \tag{7.5.65}$$

刚度矩阵为：

$$[K]=[S]^T\begin{bmatrix}k_s & 0\\ 0 & k_H\end{bmatrix}[S]=k_s[A_1]^T[A_1]+k_H[A_2]^T[A_2] \tag{7.5.66}$$

其中，k_s，k_H分别为v和u方向的变形模量

7.5.6 结构矩阵

1. 剑桥模型及邓肯的修正

选用合适的土的本构关系，对于计算成果的可靠性，是十分重要的。本节以剑桥模型为例，建立平面应变和三轴条件下的弹塑性本构关系的表达式。土的有效应力普遍的弹塑性本构关系，即应力增量$\dot{\sigma}'$与应变增量$\dot{\varepsilon}$的关系可用下式表达：

$$\{\dot{\sigma}'\}=[C^{ep}]\{\dot{\varepsilon}\} \tag{7.5.67}$$

其中$[C^{ep}]$为弹塑性模量矩阵，如式（2.5.18）所示，也可写成如下形式：

$$[C^{ep}]=[C^e]-\frac{[C^e]\{\frac{\partial g}{\partial \sigma'}\}\{\frac{\partial f}{\partial \sigma'}\}^T[C^e]}{\{\frac{\partial f}{\partial \sigma'}\}^T[C^e]\{\frac{\partial g}{\partial \sigma'}\}+A} \tag{7.5.68}$$

式(7.5.68)中$[C^e]$为弹性模量矩阵，f为屈服函数，g为塑性势函数。

在采用相关联流动法则的模型中，$g=f$。A为表示硬化规律的参数。辛克维奇和邓肯等都曾用塑性力学的观点对剑桥模型予以解释，提出修正的剑桥模型。关于修正剑桥模型的屈服函数和屈服面见图 2.6.11 和式（2.6.41），其屈服函数也可写成

$$f=f(p',q)=p'(1+\frac{\eta^2}{M^2})=p'_0 \tag{7.5.69}$$

剑桥模型是对正常固结重塑粘土进行三轴试验得到的。为了将此模型用于土石坝中填筑土等情况时，邓肯在下列几个方面做了修正。

(1) 对土的强度包线的处理。剑桥模型假定正常固结土的强度包线在 p'–q 平面上是通过原点的。但填筑土具有凝聚力，邓肯建议采用强度包线不通过原点，而在 p 轴上相交于离原点距离为 p'_r

的点上(见图 7.5.5)，因此，上面推导的所有公式中有关 p' 的量都应加上 p'_r 的值。

(2)对等向压缩曲线的处理。邓肯认为等向压缩曲线的斜率 λ 不是常数，可随 p' 改变而改变。因此，输入的 λ 是一系列数值，在计算时通过内插来决定处于某一应力状态的λ值。

(3)对土的泊桑比的处理。邓肯认为在弹性部分泊桑比 μ 也随 p' 改变而改变。因此，也需输入一组 μ 和 p' 的数值，供计算时内插取值，这样可更好地反映土的应力应变关系。

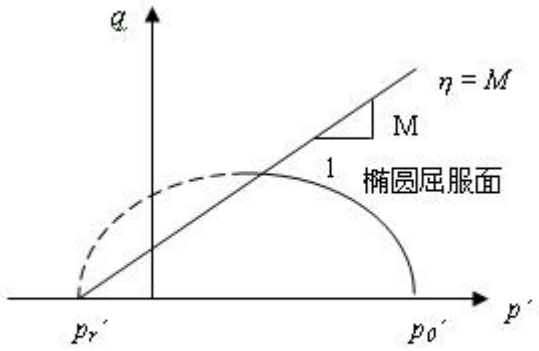


图 7.5.5 邓肯对修正剑桥模型的修正

2. 通过三轴和单向压缩试验确定和拟合参数

首先推导三轴和单向压缩条件下的应力和应变的关系，其目的是对这些试验的曲线进行参数拟合，从而获得具有代表性的弹塑性本构关系参数，用于有限元分析。

对于一般的三轴应力状态情况：

$$p' = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3} \tag{7.5.70}$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_3 \tag{7.5.71}$$

剑桥理论采用塑性体应变为硬化参数，参看第 2.6 节，其屈服函数可表达为

$$f(p', q) = H(\Delta v^p) \tag{7.5.72}$$

其中

$$H(\Delta v^p) = p_0 \exp(\frac{\Delta v^p}{\lambda - \kappa}) \tag{7.5.73}$$

相应增量 dp'和 dq 时，我们有

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq = \frac{\partial H}{\partial (\Delta v^p)} d(\Delta v^p) = \frac{1}{\lambda - \kappa} f \cdot d(\Delta v^p) \tag{7.5.74}$$

而

$$d(\Delta v^P) = (1+e) d\varepsilon_v^P = (1+e) d\lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \tag{7.5.75}$$

故有

$$A=\frac{df}{d\lambda}=\frac{1+e}{\lambda-k}\cdot f\frac{\partial f}{\partial p'} \tag{7.5.76}$$

其中，$d\lambda$ 为非负值的函数，e 为孔隙比，λ为等向压缩$\nu-\ln p'$曲线的斜率，κ为等向回弹曲线的斜率。从式（7.5.69）得到：

$$\frac{\partial f}{\partial p'}=1-\frac{q^2}{M^2}\frac{1}{p'^2} \tag{7.5.77}$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{2q}{M^2p'} \tag{7.5.78}$$

应用上述关系，我们可以建立三轴条件下的应力应变关系。令

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T=(\dot{\varepsilon}_v,\dot{\varepsilon}_s) \tag{7.5.79}$$

$$\{\dot{\sigma}'\}^T=(\dot{p}',\dot{q}) \tag{7.5.80}$$

式中$\dot{\varepsilon}_v$为体积应变增量，$\dot{\varepsilon}_s$为剪应变增量，q'和p'为应力增量。此时式(7.5.68)中[C^e]为

$$[C^e]=\begin{bmatrix}B & 0\\ 0 & G\end{bmatrix} \tag{7.5.81}$$

式中 B 为体积模量，G 为剪切模量，对三轴应力情况，轴向应力和径向应力与相应的应变之间应满足如下关系：

$$\begin{Bmatrix}p'\\ q\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_3\end{Bmatrix} \tag{7.5.82}$$

由于

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_v\\ \varepsilon_s\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_3\end{Bmatrix} \tag{7.5.83}$$

故有

$$\begin{Bmatrix}\dot{\sigma}'_1\\ \dot{\sigma}'_3\end{Bmatrix}=[C_t^{ep}]\begin{Bmatrix}\dot{\varepsilon}_1\\ \dot{\varepsilon}_3\end{Bmatrix} \tag{7.5.84}$$

其中

$$[C_t^{ep}]=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}[C^{ep}]\begin{bmatrix}1 & 2\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix} \tag{7.5.85}$$

单向压缩可以认为是一种特殊的轴对称三轴情况($\dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_2 = 0$)，采用上述方法同样可以得到类似的结果。

应用上述关系式，可以确定某一个三轴试验特定应力路径下应力和应变的关系。把这个关系和试验室实测的关系对比，可以了解所选用的剑桥模型参数是否合适。可以编制单向固结和常规三轴压缩试验沿着这两条不同的应力路径加载的计算机程序，来进行参数拟合和调整工作。

下面我们以小浪底大坝心墙土和高塑性土为例说明如何采用常规的单向和三轴试验成果整理和拟合修正的剑桥模型的参数。首先根据表 7.1 和表 7.2 介绍的方法和公式，利用单向固结和常规三轴试验的数据初步确定参数。其中 M 和 p_r' 可以根据粘聚力 c 和内摩擦角 ϕ 确定：

$$M = \frac{6\sin\phi}{3-\sin\phi} \tag{7.5.86}$$

$$P_r' = \frac{c}{\tan\phi} \tag{7.5.87}$$

然后利用剑桥模型的本构关系，编制沿着这两条不同的应力路径加载的计算机程序。通过计算机优化和人为选择进行参数拟合，选取最优参数。

心墙土和高塑性土最终拟合的参数见表 7.3，这些参数也是最后应用于有限元固结计算的参数，其试验结果与拟合曲线见图 7.5.6 至图 7.5.9。

表7.1　剑桥模型参数的初步选取——饱和高塑性土 p'-λ 关系的确定

σ_3 (kPa)	σ_1- σ_3 (kPa)	ε_v	p' (kPa)	η	p_0' (kPa)	$\Delta p_0'$ (kPa)	$p'_{0\,avg}$ (kPa)	λ
200	250	0.01	283	0.601	310	110	255	0.0414
500	420	0.017	640	0.543	647	147	573	0.119
800	690	0.022	1030	0.593	1034	234	917	0.154

$p' = \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3}$　　$\eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{p' + p_r'}$

$p_0' = \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2}\right)(p' + p_r') - p_r'$

$\Delta p_0' = p_0' - \sigma_3$

$p_{0\,avg}' = \frac{p_0' + \sigma_3}{2}$

$\lambda = \frac{p_{0\,avg}'}{\Delta p_0'}(1 + e_i)\varepsilon_v$

注：σ_3、σ_1- σ_3 和ε_v 由三轴排水试验曲线获得

表7.2　剑桥模型弹性参数的初步选取——饱和高塑性土 p'-μ关系的确定

E_i (kPa)	p' (kPa)	B (kPa)	μ	$p' = \sigma_3$	等向固结回弹曲线 $\kappa = \frac{\Delta e}{\Delta \ln p'}$
2250	200	14944	0.475	$B = \frac{1+e_i}{\kappa} p'$	一维固结回弹曲线 $\kappa \approx \frac{0.8\Delta e}{\Delta \ln \sigma_v' \left(\frac{1+2k_0}{3}\right)}$
3600	500	77572	0.492	$\mu = \frac{1}{2} - \frac{E_i}{6B}$	$\kappa = 0.9\lambda_{\min}$ 或 $\kappa = 0.1\lambda_{nc}$（正常固结）
5000	800	188457	0.495	e_i = 0.787 初始孔隙比	κ= 0.03

表7.3　拟合后的心墙土和高塑性土的物性参数和剑桥模型参数

材 料	γ_d (kN/m^3)	S_r(%)	G	E	M	p_r (kPa)	κ	p_0 (kPa)	λ	p' (kPa)	μ
								283	0.020	200	0.374
心墙粘土	16.3	87.64	2.77	0.787	0.571	136.2	0.001	640	0.030	500	0.419
								1030	0.038	800	0.430
								822	0.034	400	0.254
高塑性土	15.5	90.0	2.73	0.674	0.664	586.8	0.009	1380	0.046	800	0.264
								1956	0.047	1200	0.303

各图中实线为实测曲线，虚线是计算拟合的曲线。从图中可以看出，不论是三轴试验还是单向压缩试验，模拟曲线和试验曲线总体趋势吻合较好，说明由试验确定的剑桥模型参数能够较好地反映土体的力学特征，可以作为固结计算的依据。

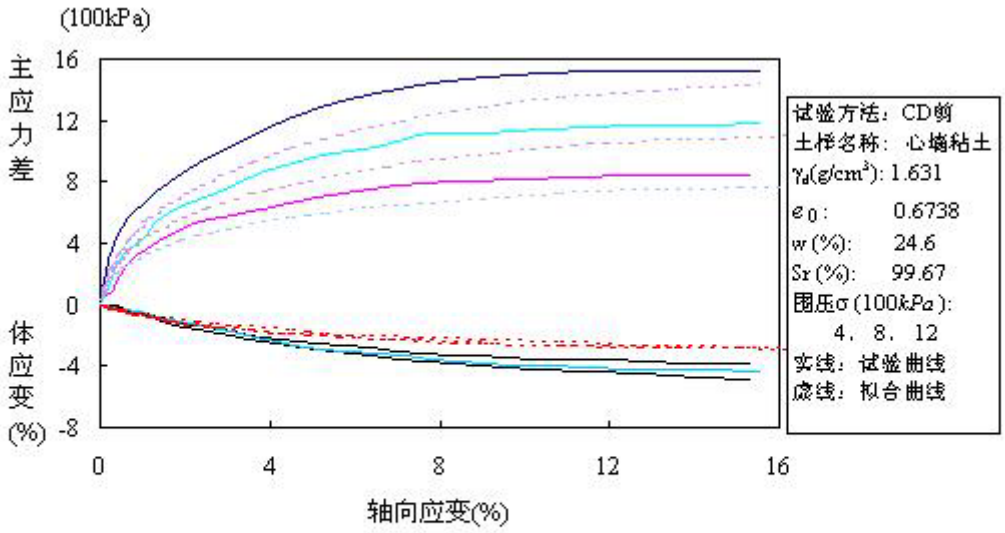


图 7.5.6 小浪底心墙粘土三轴固结排水试验与数值拟合结果

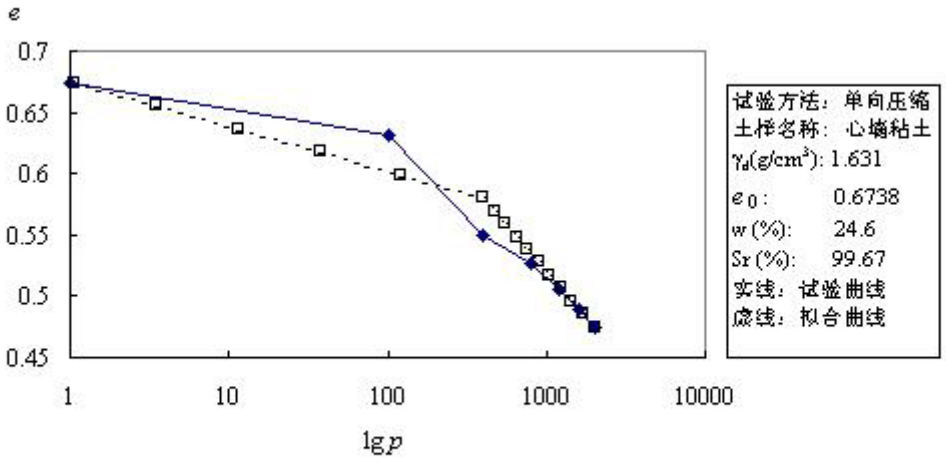


图 7.5.7 小浪底心墙粘土单向压缩试验与数值拟合结果

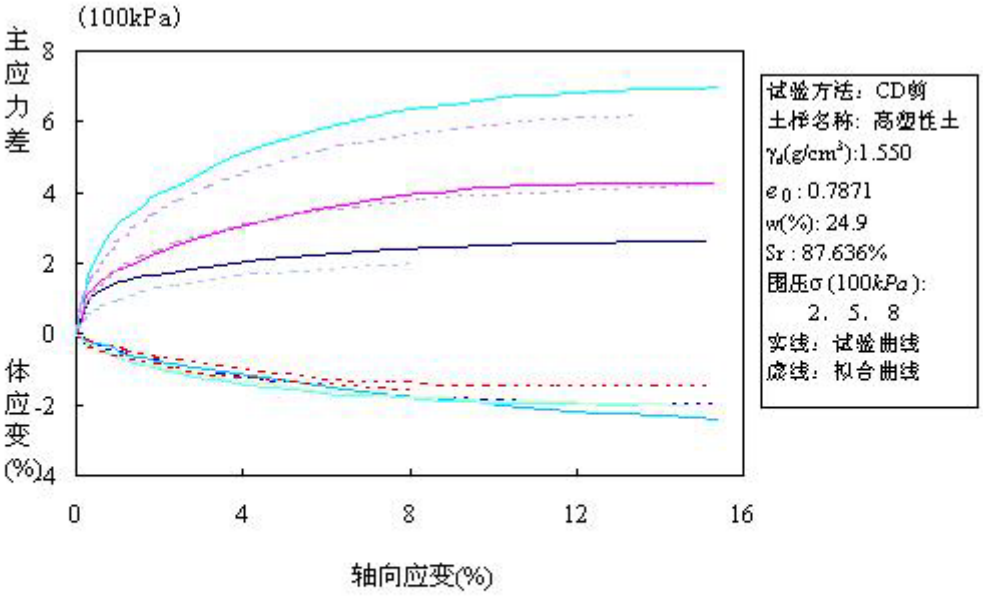


图 7.5.8 小浪底高塑性土三轴固结排水试验与数值拟合结果

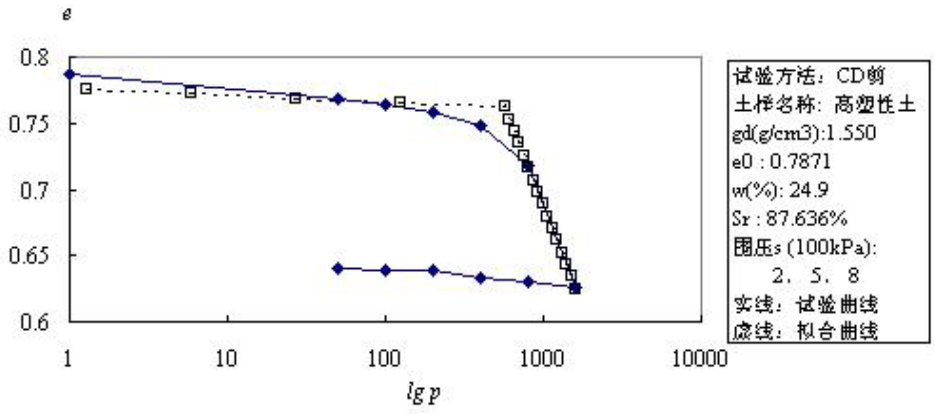


图 7.5.9 小浪底高塑性土单向压缩三轴试验与数值拟合结果

3. 平面应变条件下的结构矩阵的构建

本节推导的平面应变条件下的应力和应变之间的关系式，其目的是在实际应用式(5.68)提供具体的计算表达式。

在平面应变条件下，式(7.5.67)中的应力和应变矢量分别为：

$$\{\dot{\varepsilon}\}^T = (\dot{\varepsilon}_x, \dot{\varepsilon}_y, \dot{\varepsilon}_{xy}) \tag{7.5.88}$$

$$\{\dot{\sigma}'\}^T = (\dot{\sigma}'_x, \dot{\sigma}'_y, \dot{\tau}_{xy}) \tag{7.5.89}$$

式(7.5.68)中的$[C^e]$为

$$[C^e] = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\mu \end{bmatrix} \tag{7.5.90}$$

其中 E 为弹性模量，μ为泊桑比。

在使用式(7.5.68)计算$[C^{ep}]$时，需要知道$\{\frac{\partial f}{\partial \sigma'}\}$，此时，使用了以下的关系式

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_x} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma'_y} \\ \frac{\partial f}{\partial \sigma'_z} \\ \frac{\partial f}{\partial \tau'_{xy}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_x} & \frac{\partial q}{\partial \sigma'_x} \\ \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_y} & \frac{\partial q}{\partial \sigma'_y} \\ \frac{\partial p'}{\partial \sigma'_z} & \frac{\partial q}{\partial \sigma'_z} \\ \frac{\partial p'}{\partial \tau'_{xy}} & \frac{\partial q}{\partial \tau'_{xy}} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial q} \end{Bmatrix}^T \tag{7.5.91}$$

由于

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z) \tag{7.5.92}$$

$$q = \sqrt{3J'_2} \tag{7.5.93}$$

$$J'_2 = \frac{1}{6}\{(\sigma'_x - \sigma'_y)^2 + (\sigma'_y - \sigma'_z)^2 + (\sigma'_z - \sigma'_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2\} \tag{7.5.94}$$

故可以由式(7.5.91)求得

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma'_i} = \frac{1}{3} + [\frac{2\sigma'_i - \sigma'_j - \sigma'_k}{M^2 p'} - \frac{1}{3}\frac{q^2}{M^2 p'^2}] \tag{7.5.95}$$

其中 $i=x, y, z$。在 i 代表 x 时，j，k 分别代表 y，z，以此类推。

$$\frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} = \frac{6}{p'M^2}\tau_{xy} \tag{7.5.96}$$

在使用比奥理论进行平面固结计算时，将使用这些表达式。书后附录 A 为 CON2D 程序按式(7.5.68)和本节公式构筑的子程序 CAMCLY。

7.6 比奥理论的简化情况：渗流、应力应变和太沙基固结计算

7.6.1 渗流计算

土石坝和地基在稳定渗流时，土骨架没有变形，因此，不存在位移自由度$\{W\}$，此外，对于半透水和砂砾坝壳，当库水位骤降时，将会发生不稳定渗流（即孔压场随时间变化），但此时亦可认为骨架没有变形。这两种情况，式(7.2.19)可以简化为熟知的拉普拉斯方程，

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}h) = 0 \tag{7.6.1}$$

相应边界条件仍为式(7.2.21)和(7.2.22)。

泛函的表达式可写成

$$\pi = \pi_3 + \pi_7 \tag{7.6.2}$$

经离散化后，有限元的线性方程经简化为：

$$[k_2]\{\varphi\} = \{P_2\} \tag{7.6.3}$$

也可以将孔隙水压力作为未知数，这时渗流计算与第四章是一样的。

7.6.2 结构计算

1. 控制方程

土石坝和地基在施工过程中，可以把土骨架和孔隙水视为一个整体来分析。此时应力是总应力，

不出现孔隙水压变量，静力平衡方程式(7.2.1)仍适用。反映本构关系的式(7.2.14)左端{σ'}和右端{$\Delta\sigma'$}应用总应力{σ}和{$\Delta\sigma$}代替。[C]代表总应力和应变之间的关系。相应的泛函表达式为，

$$\pi = \pi_1 + \pi_5 + \pi_6 \tag{7.6.4}$$

其中按式(7.3.2)计算的π_1，但{$\Delta\sigma'$}和{σ'_0}均应用相应总应力的量代替。一般仍采用增量法，式(7.4.29)删去φ这个自由度简化为

$$[k_1]\{\dot{v}\} = [\dot{P}_1] - [\dot{M}_2] \tag{7.6.5}$$

2. 有关问题的处理

(1) 土石坝分层填筑的模拟

由于土石坝是分层填筑的，因此在采用增量法进行有限元计算时，土体单元应模拟施工实际过程，分层加入，逐层计算。层数通过综合考虑计算精度和投入工作量后合理确定。此外，由于新加土层是以散粒体状态上坝的，不构成对下部土体的约束。为模拟这一实际情况，可采用以下处理方法：将新加土层的体积模量和弹性模量减少 1000 倍，并在计算结束后将新加土层单元的节点（除新、老层结合部位的结点）的位移全部归零。

在按增量法进行计算过程中，一些单元出现卸荷、拉力破坏、剪切破坏等现象，需要作一些近似处理。目前尚无一致公认的处理方法，以下介绍 FEADAM 程序的处理方法供参考，该程序采用 Duncan—Chang 非线性模型。

(2) 关于总应力和有效应力参数

当采用总应力分析计算时，需将土和水的混合体作为研究对象。此时，所获得的是总应力，即有效应力和孔隙水压力的和。在进行计算时，应使用土和水这个混合体的模量μ和 E。

对于饱和土体，相应总应力的μ和 E 可从下式求得。

$$\mu = 0.49 \tag{7.6.6}$$

$$E = \frac{1.5E'}{1+\mu'} \tag{7.6.7}$$

式（7.6.6）意味着饱和土体是几乎不可压缩的。同时，对于饱和土体，$G'=G$，根据关系式

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \qquad G' = \frac{E'}{2(1+\mu')} \tag{7.6.8}$$

即可获得式(7.6.7)。对于孔压总是为0的情况（坝壳材料，完全固结后应力变形），有效应力指标与总应力指标是一致的。

土石坝在施工过程中的σ_1和σ_3几乎同步增长，可假定 $K = \frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ 为常数。这样，对筑坝材料进行单向压缩试验，通过测得的 m_v，即可由下式来确定其弹性常数。

$$\mu = \frac{K_o}{1+K_o} \tag{7.6.9}$$

$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{7.6.10}$$

$$E=\frac{1}{m_v}\left[\frac{(1+2K_o)(1-K_o)}{1+K_o}\right] \tag{7.6.11}$$

K_0系数可以在设有可以测定侧向力σ_3的特殊单向压缩试验的设备中进行，对于无粘性土和正常固结粘土也可以按以下经验公式确定。

$$K_o \approx 1-\sin\phi \tag{7.6.12}$$

(3) 关于加卸荷模量

对于Duncan—Chang模型的加卸载判断见2.5.2节，如图7.6.1所示。

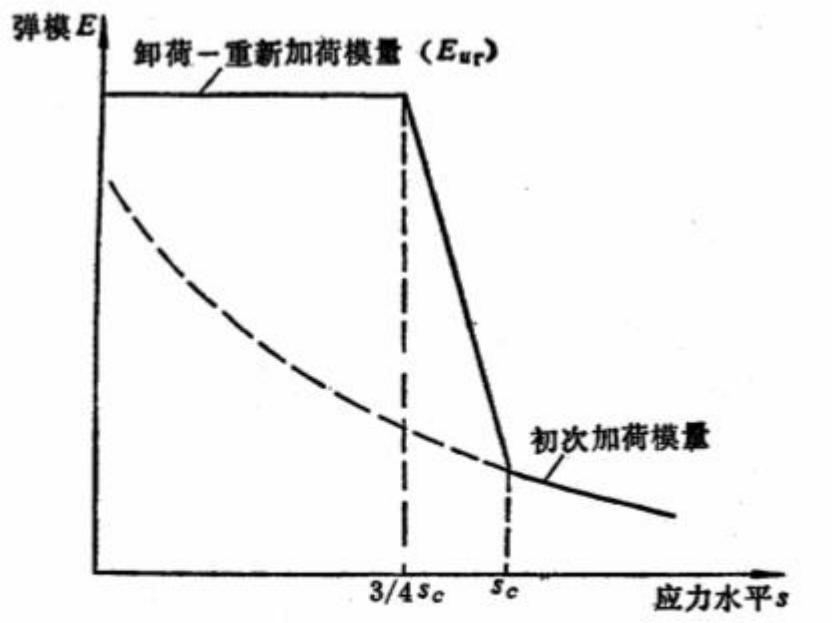


图 7.6.1采用卸荷模量的处理

在按第二章介绍的 Duncan—Chang 模型进行应力应变分析时，FEADAM 程序作了以下的具体处理：

(1) 当小主应力σ_3<0时，该单元处于受拉状态，其模量不再根据当时的应力水平计算，而是取0.1p_a计算体应变模量K，并取 E=0.1K进行第一次迭代，如果计算结果表明该单元仍处于受拉状态，则E、K分别取第一次迭代值的1/10再进行一次计算。

(2) 当应力水平q/q_f大于0.95时，取为0.95。

(3) 当σ_3较小时，初始模量E_I偏小，可规定，当（σ_3/p_a）<0.1时，取（σ_3/p_a）=0.1。

(4) 为了防止泊松比 μ过小，规定最小的体积模量K_{min}由下式确定

$$K_{\min} = (E_t / 3)\left\{\frac{2-\sin\varphi}{\sin\varphi}\right\} \qquad \varphi > 2.3^{\circ}$$

$$K_{\min} = 17E_t \qquad \varphi < 2.3^{\circ}$$

7.6.3 太沙基单向固结计算

1. 控制方程

太沙基的固结理论是比奥理论中引入假定后的简化情况。

式(7.2.19)中的$\{a\}\dfrac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\}$实际上是体积应变率$\dot{\varepsilon}_v$，已知，

$$d\varepsilon_v = m_v d\sigma'_m = m_v d(\sigma_m - u)$$

其中σ'_m为平均有效应力，σ_m为总平均应力，m_v为体积模量的倒数。太沙基理论的主要假定为σ_m不随时间变化，这样

$$\{a\}^T \frac{\partial}{\partial t}\{\varepsilon\} = \frac{\partial \varepsilon_V}{\partial t} = -m_v \frac{\partial u}{\partial t} = m_v \gamma_\omega \frac{\partial h}{\partial t} \tag{7.6.13}$$

则式(7.2.19)简化为

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}h) = (\gamma_\omega m_v + \frac{\gamma_\omega}{Q})\frac{\partial h}{\partial \mathrm{t}} \tag{7.6.14}$$

对于渗流各向同性的材料，上式可写成

$$c_v\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial h}{\partial t} \tag{7.6.15}$$

其中

$$c_v = (\gamma_\omega m_v + \frac{\gamma_\omega}{Q})/k \tag{7.6.16}$$

对饱和土体，假定水不可压缩，Q为无穷大，

$$c_v = \frac{\gamma_\omega m_v}{k} \tag{7.6.17}$$

这类问题和热传导问题很相似，威尔森（Wilson）等曾提出过用有限元求解的步骤。下面为简化起见，仅讨论$Q\to\infty$这种情况。

用孔压作为未知量，

$$\{\nabla\}^T([k]\{\nabla\}u) = \gamma_\omega m_v \frac{\partial u}{\partial t} \tag{7.6.18}$$

用超孔隙水压力作为未知量，

$$\{\nabla\}^T[k]\{\nabla\}u_e = \gamma_\omega m_v \frac{\partial u_e}{\partial t} \tag{7.6.19}$$

在 7.4 节已经讨论过，尽管式(7.6.14)和(7.6.18)、(7.6.19)具有相似的形式，但式(7.6.18)的边界条件和式(7.6.14)、(7.6.19)形式表达式不一样，其泛函表达式及相应线性方程组中增加了一项$\{M_3\}$。

太沙基固结计算中习惯上多用孔压，下面以式(7.6.18)为基础提出有限元的表达式。式(7.6.18)在(0，t)时段的积分表达式

$$\{\nabla\}^T[k]\{\nabla\} * u - \gamma_\omega m_v(u - u_0) = 0 \tag{7.6.20}$$

其相应的边界条件为式(7.4.47)。

这里，按习惯，压力性质的孔压不再处理成负的。这不影响式(7.6.18)或(7.6.19)，但式(7.4.47)应写为

$$\gamma_\omega \cdot \overline{q} = -\{\nabla\}^T u * [k]\{n\} - \{g_1\}^T * [k]\{n\} \tag{7.6.21}$$

满足式(7.6.20)和(7.6.21)的泛函为

$$\pi(u) = \pi_3 + \pi_4 + \pi_7 + \pi_8 \tag{7.6.22}$$

$$\pi_3 = \frac{1}{2}\int_v \{\nabla\}^T u * [k] * \{\nabla\} u dv \tag{7.6.23}$$

$$\pi_4 = \frac{1}{2}\int_v \gamma_\omega m_v u * (u - 2u_0) dv \tag{7.6.24}$$

$$\pi_7 = \int_{s_4} \gamma_\omega * q * u ds \tag{7.6.25}$$

$$\pi_8 = \int_v \{\nabla\}^T u * [k] * \{g_1\} dv \tag{7.6.26}$$

将孔压场 u 离散化为 m 个节点的矢量$\{P\}$，按里兹法可得使$\pi(u)$获得极值的$\{P\}$的线性方程组为

$$[k_2] * \{u\} + \gamma_\omega m_v [k_4]\{u\} = \gamma_\omega m_v [k_4]\{u_0\} - \gamma_\omega [M_3] - \gamma_\omega [P_2] \tag{7.6.27}$$

2. 边界条件和初始条件

在进行太沙基一维固结计算时，每一个荷载增量导致的孔隙水压力的增量并不象比奥理论那样由平衡条件自动计算确定的，而是分析者用另外的手段确定作为初始条件输入的。常用的Skempton的经验公式如下，

$$\Delta u = B[\Delta\sigma_3 + A(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3)] \tag{7.6.28}$$

由于

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma_1' + 2\sigma_3') \tag{7.6.29}$$

$$q = \sigma_1' - \sigma_3' \tag{7.6.30}$$

对于饱和土体，B=1,故有

$$\Delta p' = \Delta p - \Delta u = \left(\frac{1}{3} - A\right)(\Delta\sigma_1 - \Delta\sigma_3) \tag{7.6.31}$$

对于弹性介质，我们有

$$\Delta p' = \frac{K_s \Delta V}{V} \tag{7.6.32}$$

尤其对弹性的土体有 A=1/3。对于弹塑性本构模型，有关孔压系数的计算见式（3.5.11)。
孔压系数 A 可表示成：

$$A = \frac{1}{3} + \frac{K_S\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\frac{\partial f}{\partial q}\right)}{A^* + K_S\left(\frac{\partial f}{\partial p'}\right)^2}$$

在大多数情况下，孔隙水压力系数 A 和 B 是通过试验确定的。

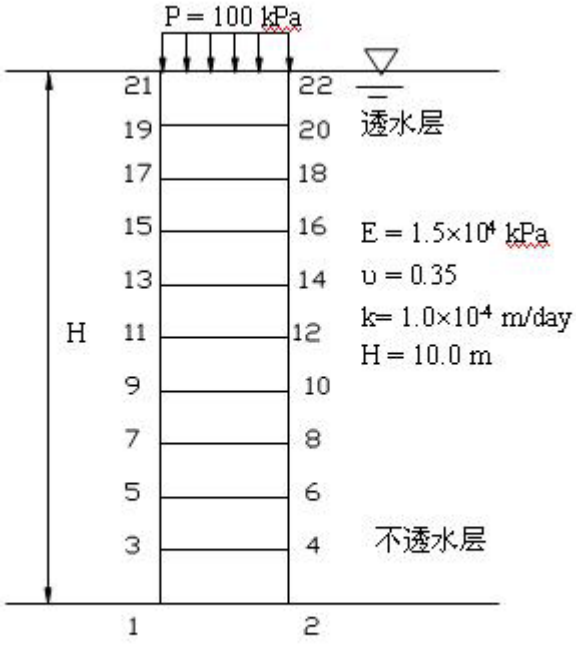
7.7 例题和实例

根据上面介绍的基本原理和方法，清华大学和中国水利水电科学院改进了由 Duncan 等人编写的二维平面应变固结有限元计算程序 CON2D，下面是利用此程序进行的一些算例和实例的计算。

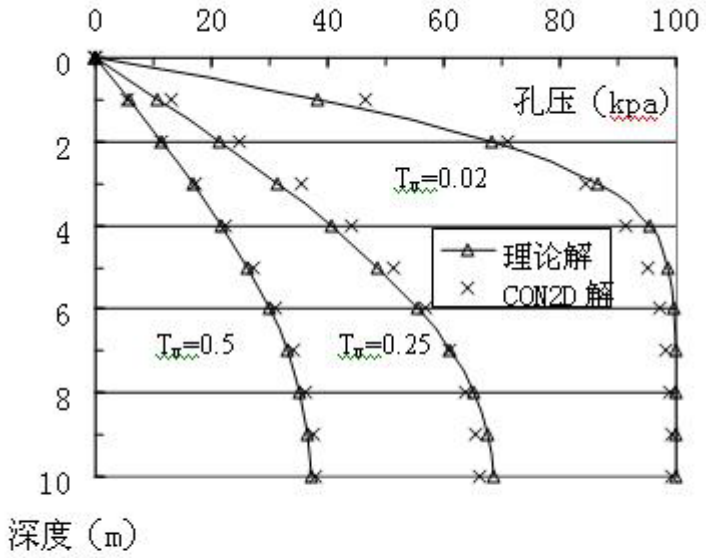
7.7.1 一维固结计算

计算实例 1——太沙基单向固结问题，对于这个最基本的固结问题，已有理论解可作为检验的工具。计算中具体采用的图形及参数见图 7.7.1(a)，有限元计算结果与理论计算结果见图 7.7.1 (b)。

从图 7.7.1 的结果来看，CON2D 的计算值在各个时间段都与理论解吻合得十分好。



(a) 计算简图



(b) 有限元计算结果与理论解的对比

图 7.7.1太沙基单向固结问题

7.7.2 二维固结计算

坝体稳定渗流计算。本例题用于验证坝体孔压的消散过程分析成果的正确性。首先使用一个独立的稳定渗流程序 Seep 计算如图 7.7.2 所示的均质坝，坝体材料渗透系数 k = 0.001 m/day，上游水位 H = 57.0 m。根据 Seep 的计算结果，稳定渗流时坝体总水头分布和孔隙压力分布如图 7.7.3 所示。Seep 在计算中采用调整网格的办法，迭代结束后最终的渗流网格如图 7.7.4 所示。其中 B 点为溢出

点，AB 为浸润线。现在假定某一充分饱和的坝体瞬间填筑成图 7.7.4 的形状，并且上游水位也同时上升到与 A 点相同的高程（57.0m）。那么，从理论上讲，当 $t\to\infty$ 时，孔隙水压经过完全的消散后，必然形成稳定渗流，由 CON2D 程序计算所得的结果应当与 Seep 程序计算的结果一致。

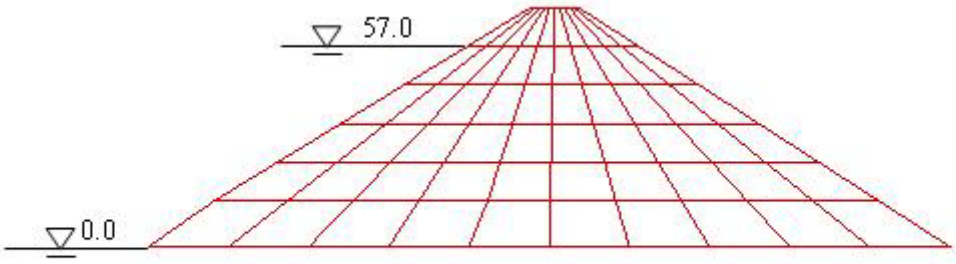
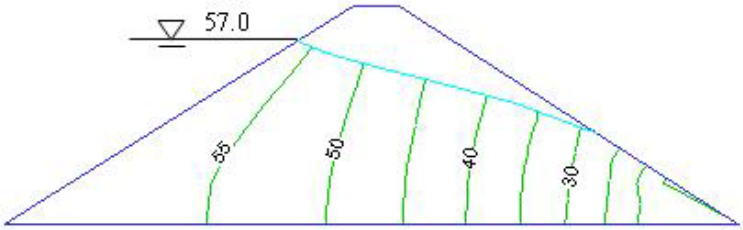
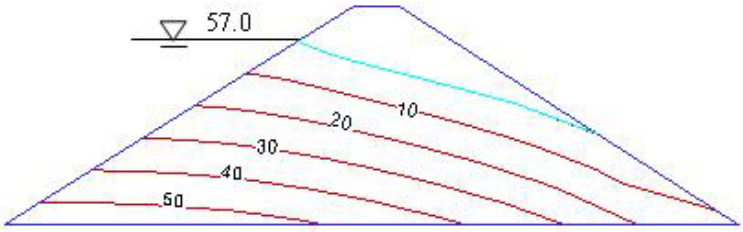


图 7.7.2 二维固结计算例的网格



(a) 坝体总水头分布



(b) 坝体孔隙压力分布

图 7.7.3 二维固结计算例，稳定渗流时坝体总水头分布和孔隙压力分布（使用 SEEP 程序渗流计算结果）

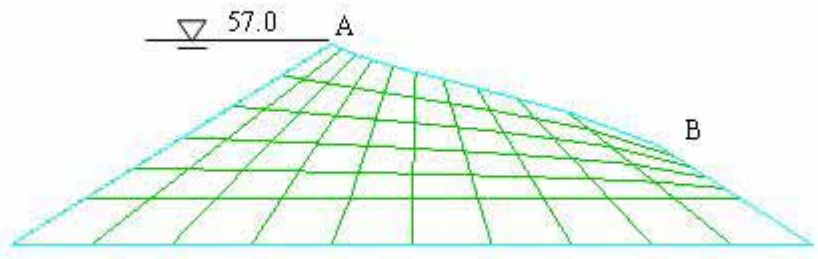


图 7.7.4　SEEP 程序计算调整后的网格

图 7.7.5 –7.7.7 分别显示了在 t = 1 天、t = 10 天和 $t = \infty$ 时的孔隙压力等值线。从上述图形的对比中可以清楚地看到坝体内孔压变化的过程，以及渗流场的发展。比较图 7.7.7 与图 7.7.3，可以发现两个程序计算的结果几乎完全相同。由此可确认程序的正确性。

如果我们假定坝体瞬间填筑成图 7.7.2 的形状，上游水位上升到 H = 57.0 m 水头，采用图 7.7.2 的网格使用 CON2D 计算，同样可以得到与前面相同的结果。各个时间段的孔隙压力分布完全一致。其中 t = ∞ 时的总水头等值线与孔隙压力等值线见图 7.7.8。

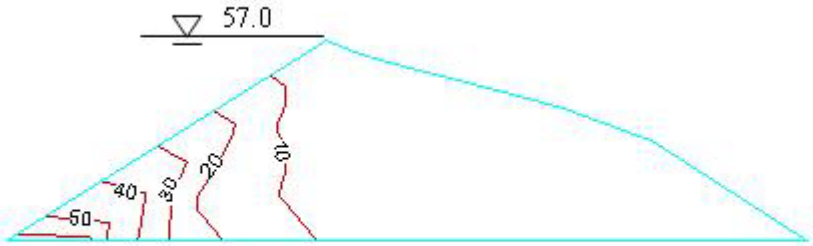


图 7.7.5 稳定渗流时坝体的孔隙压力分布（t = 1 天）

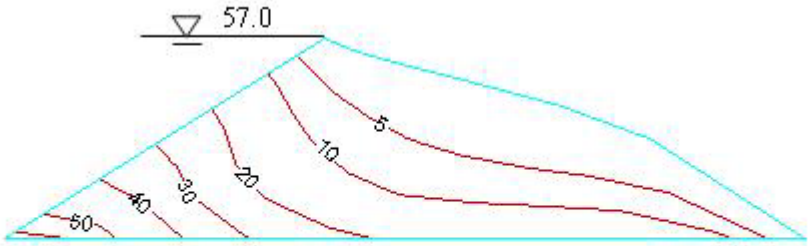
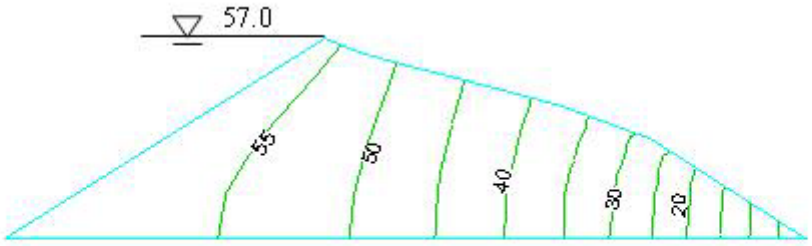
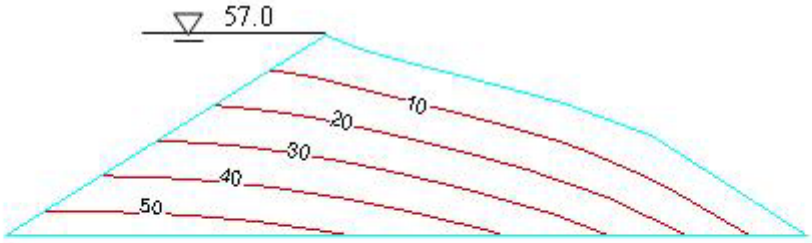


图 7.7.6稳定渗流时坝体孔隙压力分布（t = 10 天）

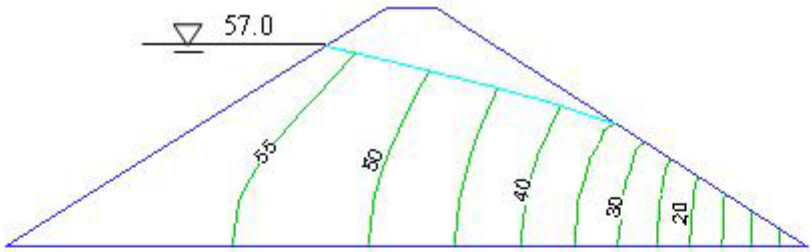


(a) $t=\infty$ 时的总水头等值线

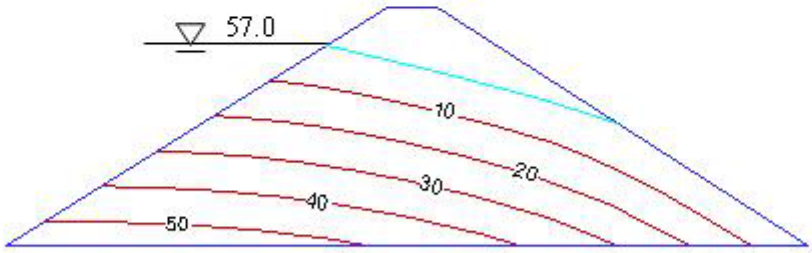


(b) $t=\infty$ 时的孔隙压力等值线

图 7.7.7稳定渗流时坝体总水头分布和孔隙压力分布（$t = \infty$）



(a) 总水头等值线



(b) 孔隙压力等值线

图 7.7.8稳定渗流时坝体总水头分布和孔隙压力分布（$t = \infty$，完整网格）

7.7.3 小浪底大坝斜心墙施工期孔隙水压消散计算[18]

小浪底水利枢纽工程位于黄河中游最后一段峡谷的出口处，上距三门峡大坝 130km。拦河大坝为壤土斜心墙堆石坝，设计最大坝高 154m。心墙由粉质壤土组成，防渗墙顶端设有高塑性土区，坝壳由堆石体组成。河床段坝基处于深厚砂砾石之上。大坝典型剖面详见图 7.7.9。

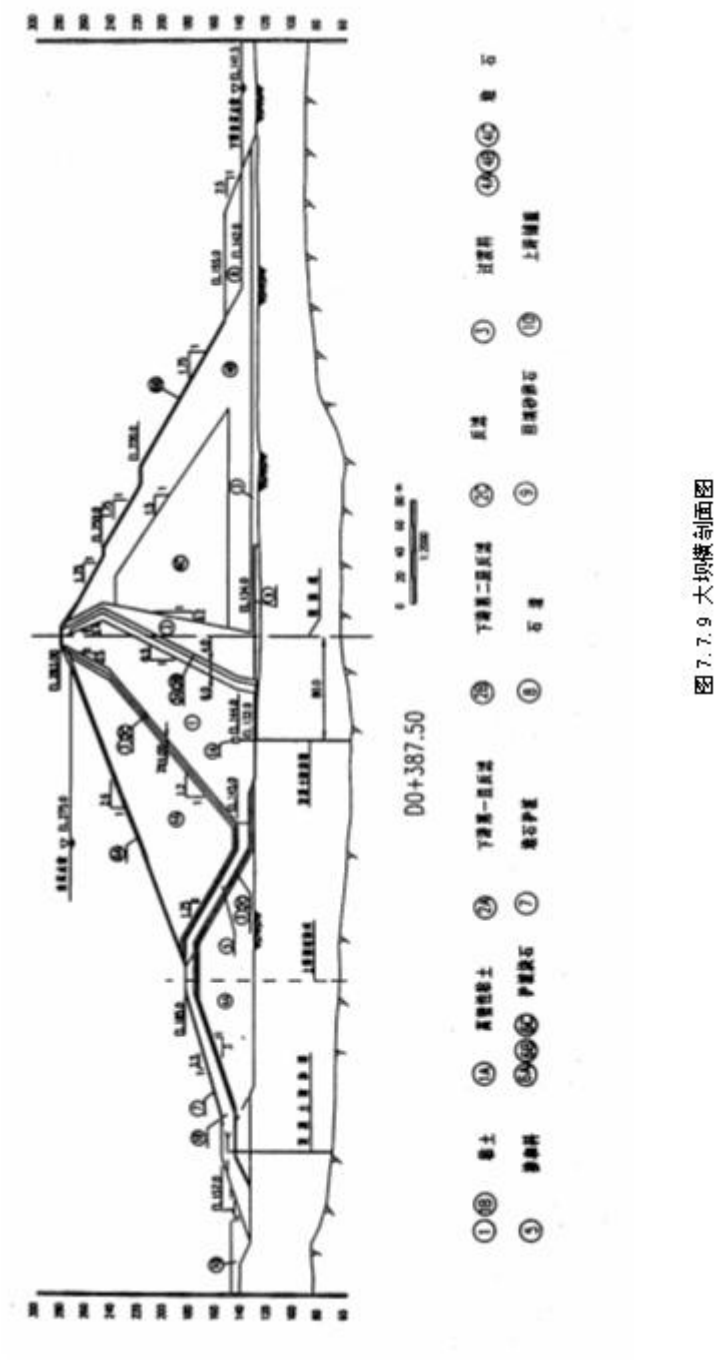


图 7.7.9 小浪底大坝典型剖面

土石坝心墙在上坝碾压后，其饱和度已达到90–92%，而防渗材料的渗透系数一般都很小。随着上覆坝体在施工过程中的不断升高，坝的心墙孔隙水压力将迅速增高，所以，对于高土石坝，有必要对施工期的孔隙水压力的消散进行分析计算。为确保大坝安全，并为大坝施工期和蓄水期运行决策提供必要的技术支持，需要在上坝土料的应力－应变－强度特性、渗透和固结特性等全面试验研究的基础

上，对坝体进行弹塑性应力变形计算和固结分析，包括大坝堆石体、防渗墙的应力及变形分布和斜心墙的变形、孔隙水压力增长及消散和有效应力状态计算等。

小浪底坝体材料的组成比较复杂，需要采用不同的本构模型以反映各种材料的物理力学特性。例如，分别对堆石料和心墙土与高塑性土采用了邓肯-张 *E-B* 模型和扩展剑桥模型，并且使用接触面模型模拟混凝土防渗墙和土体之间的连接关系。心墙粘土和高塑性土的剑桥模型参数在 7.5.6 节中已有详细介绍。

实际计算中考虑了大坝施工过程及水位变化，有限元网格划分参见图 7.7.10。单元总数为 679 个，结点总数为 1000 个，自由度总数为 2605 个。在防渗墙与周围土体之间设置两结点接触面单元共 74 个，并独立编号。

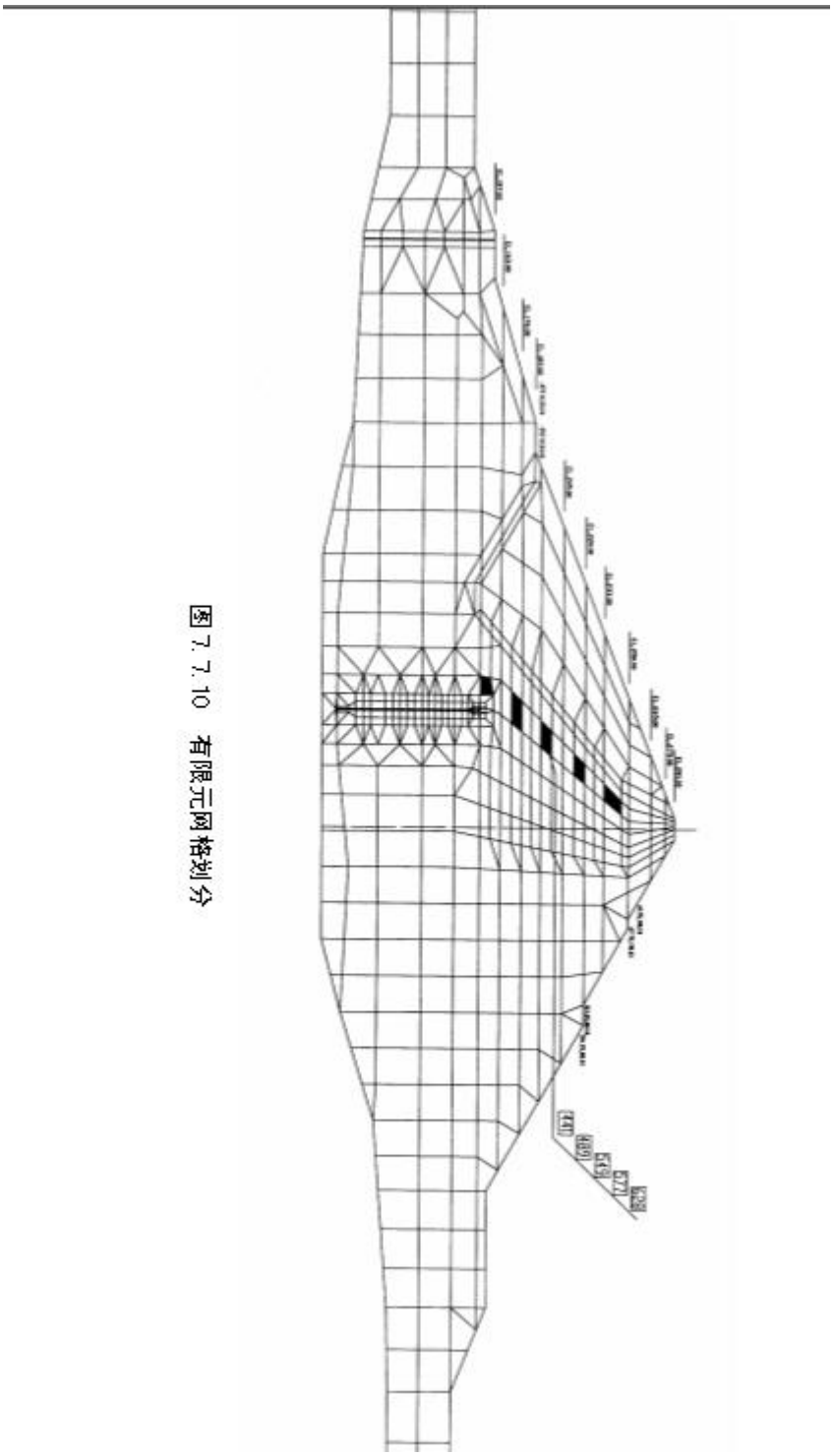


图 7.7.10 有限元网格划分

计算结果

1. 孔隙压力

从大坝斜心墙在竣工蓄水后各个时期的孔隙压力等值线图中可以看出斜心墙内部孔隙压力场在上游库水作用下逐渐变化直至形成稳定渗流的过程。其中大坝斜心墙在竣工蓄水时及竣工后 5 年的孔隙压力等值线见图 7.7.11 和图 7.7.12。

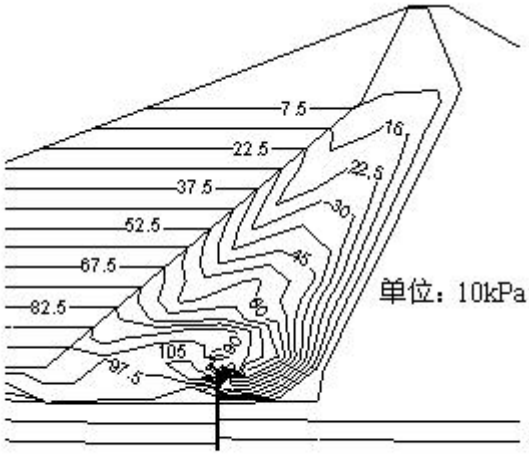


图 7.7.11<250m 水位>竣工蓄水时的孔压等值线

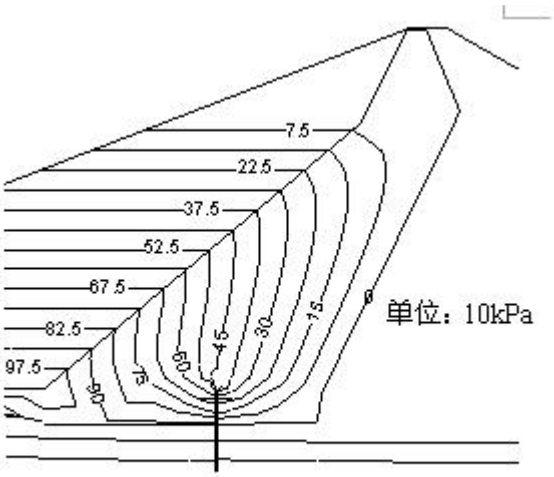


图 7.7.12<250m 水位>竣工蓄水后 5 年的孔压等值线

在斜心墙上游侧一带，大坝竣工蓄水时库水压力的等间距等值线已经波及斜心墙内部孔压呈现“拱型”的等值线，说明斜心墙内部的孔隙压力场已经受到上游库水压力的影响，而在斜心墙中央及下游侧，孔隙压力场的分布尚未受到上游库水的影响(图 7.7.11)。竣工蓄水时心墙最大孔隙压力约为 105m 水柱，约占竖直总应力的 50%，出现在斜心墙下部位于主防渗墙上游侧的一块区域，在防渗墙顶部高塑性土一带，孔隙压力约为 90m 水柱。竣工蓄水后随着固结时间的增长，斜心墙各处的孔压值逐渐减小直至趋于稳定，防渗墙顶部高塑性土一带的孔隙压力基本处于 50m 水柱左右的一个水平上(图 7.7.12)。

为判断最大孔隙压力出现的阶段，在斜心墙中央不同高程选取了 6 个具有代表性的单元来分析其孔隙压力随时间的变化过程，这 6 个单元编号依次为 E397（高塑性土中心）、E441、E489、E549、E577、E628，其具体位置见图 7.7.10 所示。图 7.7.13 为该 6 个单元的孔隙压力随坝体填筑高度和

时间变化的过程，从图中可见，各单元的最大孔隙压力基本上都发生在坝体填筑竣工蓄水完成期阶段，据此可认为，图 7.7.11 显示的孔隙压力是填筑过程中出现的最大孔压值。

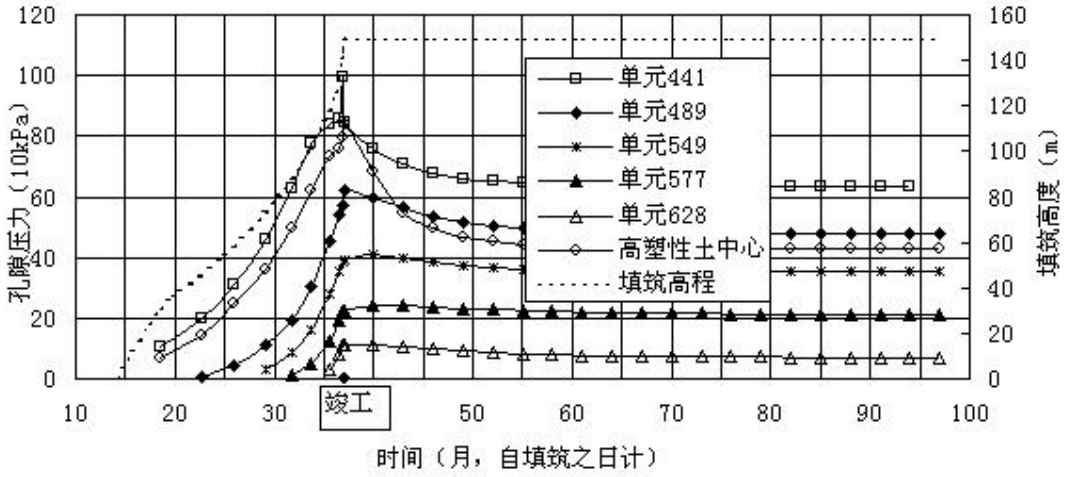


图 7.7.13 <250m 水位>代表性单元的孔压历程

从孔隙压力的变化历程可以比较合理地判断形成稳定渗流的时间。由图 7.7.13 可以判断，大约在蓄水以后 2.5 年，孔隙压力已消散至稳定状态。因此可以认为蓄水以后两年半左右稳定渗流即已形成。

2. 变形

图 7.7.14 是竣工蓄水时(坝体填筑完毕，上游水位升至 250m 高程)大坝的累积位移矢量图。从整体看，由于心墙刚度相对较低，坝体的变形呈现心墙部分大、坝体两侧和基础部分小的态势；其变形方向，在坝体中间部位呈偏向下游侧，而在坝体两侧基本呈竖直向。

由图中可以看出：竣工蓄水时，坝体的最大沉降约为 2.14m，竣工后由于固结的作用使坝体沉降继续增大。至两年半形成稳定渗流以后，坝体的变形不再明显，蓄水 5 年后，坝体的累积最大沉降值达到 2.62m。

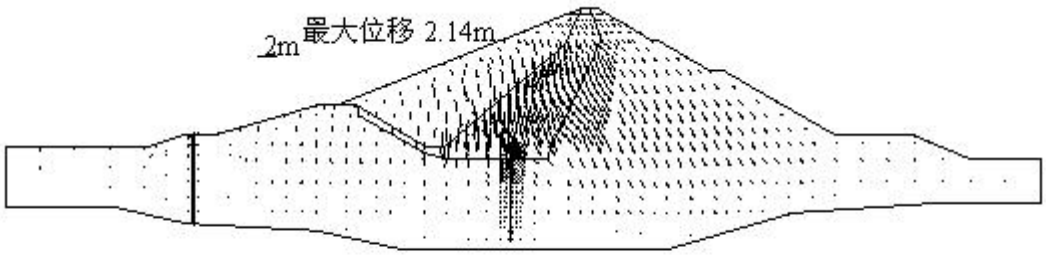


图 7.7.14 <250m 水位>竣工蓄水时的总位移矢量图

3. 应力

大坝竣工蓄水时的大主应力、小主应力等值线如图 7.7.15、图 7.7.16 所示。从总体上看，高程较低部分的应力较大，下游部位比上游部位的应力要大。在同一高程上，无论大主应力还是小主应力，其最大值都出现在下游坝壳与心墙毗邻的部位，且心墙部位的大主应力明显小于两侧坝壳的大

主应力。上下游坝壳处的剪应力较大，而斜心墙部位的剪应力非常小，斜心墙基本以竖直方向的压缩为主。

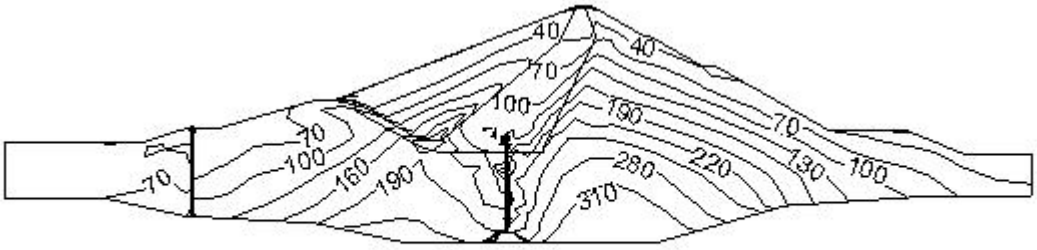


图 7.7.15 〈250m 水位〉竣工蓄水时大主应力等值线（单位：10kPa）

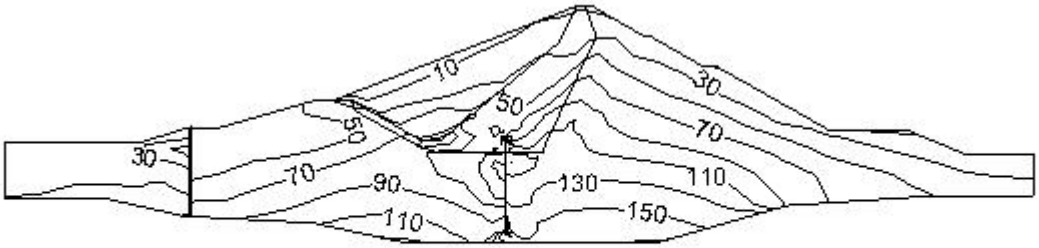


图 7.7.16 〈250m 水位〉竣工蓄水时小主应力等值线（单位：10kPa）

在整个坝体中，除了高塑性土区个别单元出现小主应力小于零外，其它单元的小主应力全部大于零，不会出现受拉。

计算机图像对比分析结果表明，心墙部位的应力随着时间推移有一定的增长，这是心墙固结过程中孔隙压力逐渐消散的结果。在同一高程上，大、小主应力在心墙部位有较明显的增长，心墙底部单元的应力在蓄水以后仍有相当的增长。分析心墙内部的应力状态可以发现，各个单元的有效小主应力全部大于零，不会出现拉伸破坏，发生水力劈裂的可能性较小。

7.8 附录：预备知识

7.8.1 散度定理的矩阵表达及一些推广

散度定理，也有人称为格林定理、奥－高定理，它是分部积分定理在二维、三维情况下的扩展。对于一维问题，分部积分定理表达为

$$\int_a^b v\frac{du}{dx}dx = u\cdot v\Big|_a^b - \int_a^b u\frac{dv}{dx}dx \tag{7.8.1}$$

在二维情况下，散度定理表达为

$$\int_v \psi\frac{d\phi}{dx}dv = -\int_v \frac{d\psi}{dx}\phi dv + \int_s \psi\phi n_x ds \tag{7.8.2}$$

$$\int_v \psi \frac{d\phi}{dy} dv = -\int_v \frac{d\psi}{dy} \phi dv + \int_s \psi \phi n_y ds \tag{7.8.3}$$

其中ψ、ϕ为在 x、y 座标系中一封闭曲线 s 所围面积上的两个变量。该两变量及其一阶导数均为连续的函数[注] 。n_x、n_y 为该封闭曲线 s 上某点法线的方向余弦。

下面提出两个建立在散度定理上的推广定理。

定理 1　对于某一二维的向量$\{\psi\}^T=(\psi_1, \psi_2)$和标量$\varphi$，下式成立。

$$\int_v \{\psi\}^T \{\nabla\} \varphi dv = -\int_v \{\nabla\}^T \{\psi\} \varphi dv + \int_s \{\psi\}^T \{n\} \varphi ds \tag{7.8.4}$$

其中

$$\{\nabla\}^T = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{7.8.5}$$

$$\{n\}^T = \left(n_x, n_y \right) \tag{7.8.6}$$

定理 2　对于任一三维的向量$\{\psi\}^T = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$和二维的向量$\{\varphi\}^T = (\varphi_1, \varphi_2)$，下式成立。

$$\int_v \{\psi\}^T [\partial]^T \{\varphi\} dv = -\int_v ([\partial]\{\psi\})^T \{\varphi\} dv + \int_s ([N]\{\psi\})^T \{\varphi\} ds \tag{7.8.7}$$

其中

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \tag{7.8.8}$$

$$[\boldsymbol{N}] = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{7.8.9}$$

上述两个定理的证明是直截了当的。只需用矩阵的运算法则将等式左、右两边化开，使用散度定理，即可发现等式是成立的。

7.8.2　卷积的概念

设 u、v为空间座标 x 和时间坐标 t 的函数，则定义卷积

$$u * v = \int_{t_0}^{t} u(x, t-\tau) v(x, \tau) d\tau \tag{7.8.10}$$

卷积具有以下性质

[注] 在本文的叙述中，对任何引入的函数，都假定它在所定义的域内，具有问题所要求的本身和各阶导数的连续性，不再赘述。

(1) $u * v = v * u$

(2) 如果$u * v = 0$，则$u = 0$或$v = 0$

(3) $u *（v * \omega）=（u * v）* \omega = u * v * \omega$

(4) $u *（v + \omega）= u * v + u * \omega$

同样，卷积的概念也可引伸到矩阵的运算。

定义

$$[C] = [A] * [B] \tag{7.8.11}$$

如果

$$C_{ij} = \sum_{m=1}^{M} a_{im} * b_{mj} \tag{7.8.12}$$

C、a、b 分别为[C]，[A]，[B]的元素。M 为[A]的列数或[B]的行数。

参考文献

1. 朱百里、沈珠江，计算土力学，上海科学技术出版社，1990 年。
2. 龚晓南主编，土工计算机分析，中国建筑工业出版社，2000 年。
3. Sandhu, R. S. and Wilson, P. E. L. (1969), “Finite element analysis of seepage in elastic media”, J. Engr. Mechs. Div., ASCE, 95.pp641-652.
4. Hwang, C. T., Morgenstern, N. R. and Marry, D.W. (1971), “On solutions of plane strain consolidation problems by finite element method”, Canadian Geotechnical Journal, Vol. 8, No.1.p109.
5. Hwang, T. (1970), “plane strain consolidation program by finite element method”, University of Alberta.
6. Eisenstein, Z and Krishnayya A. V, G. Law T. C (1976), “Analysis of consolidation in cores of earth dams”, Numerical methods in geomechanics, Vol.2.p1089-1105.
7. Wang, C. and Duncan (1977), “Analysis of consolidation of earth and rockfill dams”, Report No. TE77-3, University. Of California, Berkeley.
8. Krishnayya, A. V. G (1973), “finite element consolidation program for two dimensional problems (FECP 2D), University of Alberta”.
9. Wilson, E. L. and Nickell, R. E (1966), “Application of the finite element method for heat conduction analysis”, Nuclear Engineering and Design, 4, 1966.
10. 陈祖煜，“ 渗流和固结计算中的孔隙水压和超孔隙水压 ”，水利水电科学研究院，1985 年。
11. Biot, M.A,(1955), “Theory of elasticity and Consolidation for a porous anisotropic solid”, Journal of applied physics 26, pp182-185.
12. Bathe, K and Wilson, E. L (1976), “Numerical methods in finite element analysis”, prentice-Hall, Inc. Pp. 149-150.
13. Goodman, R. E, Taylor, R. L and Brekke, T. L (1968), “A model for the mechanics of jointed rock”, Journal of soil mechanics and Foundations Division, May, SM3, pp637-658.
14. Duncan, J. M et. Al. (1981), CON2D: “A finite element computer program for analysis of consolidation”, Report No. VCB1GT/81-01, university of California, Berkeley.
15. Taylor, R. t. (1968) “ Axisymmetric and plane flow in porous media ”, University of California.
16. Taylor, R. L. and Brown, C. B. (1967), “Darcy flow solutions with free surface”, Proc. ASCE, J: Hydraulic Div. 93, Hy2, 25-33.
17. 张有天，陈平，王镭， 有自由面渗流问题分析的初流量法 水利水电科学研究院，1987 年 6 月。
18. 陈祖煜等，黄河小浪底水利枢纽工程斜心墙堆石坝应力应变和固结分析研究，中国水利水电科学研究院，报告编号：GE-2000-3-014，2000 年 4 月。
19. Hird C. C., Pyrah I. C. and Russell D. 1992. Finite element modelling of vertical drains beneath embankments on soft ground. Geotechnique 42 No. 3, pp499-511.
20. Indraratna,B. and Redana, I. W. 1995. Plain strain modelling of smear effects associated with vertical drains. J. Geotech. Engrg., ASCE,123(5), 474-478.
21. 赵维炳等，1998，平面应变有限元分析中砂井的处理方法，水利学报 No.6
22. Mikusinski, J.(1959), “Operational Calculus” 中译本：“ 算符演算 ”，王建午译，上海科学技术出版社出版，1964 年。

附录1：子程序CAMCLY——（摘自CON2D）

子程序 CAMCLY 的功能是形成修正剑桥模型的塑性应力应变矩阵。

```
C***********************************************************************
C                    S U B R O U T I N E     C A M C L Y
C***********************************************************************
      SUBROUTINE CAMCLY (EMPR,VOID,SIG,CEP,MTRIAX,PRINTR,KAPPA,POIS,
     1 LAMDA,BLADE,PATM,NELAST,IFAIL,ITER,NUMMAT,IELEM)
      IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
      DIMENSION SIG(4),DFDSIG(4),CE(4,4),DMATX(4,4),CEP(4,4),DD(4)
      DIMENSION VOID(1),EMPR(NUMMAT,1)
      REAL*8 MTRIAX,LAMDA,KAPPA
C-----------------------------------------------------------------------
C
C          COMPUTES THE PLASTIC STRESS-STRAIN MATRIX BASED ON THE
C          MODIFIED CAM-CLAY MODEL DEVELOPED BY CHANG AND DUNCAN (1983)
C
C                          D I C T I O N A R Y
C
C       F          =   FUNCTIONAL (PO)
C       CE         =   ELASTIC CONSTITUTIVE MATRIX
C       CEP        =   ELASTIC-PLASTIC CONSTITUTIVE MATRIX
C       NELAST     =   0 - FOR PLASTIC FLOW CONDITIONS (STRESS-STRAIN)
C                      1 - FOR ENTIRELY ELASTIC STRESS-STRAIN CONDITIONS
C       PPRIME     =
C       MTRIAX     =
C       QDEV       =
C       YOUNG      =   YOUNG'S MODULUS
C       POIS       =   POISSON'S RATIO
C       IFAIL      =   0, ELASTIC CONDITIONS
C                  =   1, ON FAILURE SURFACE
C                  =   2, ON YIELD CAP
C                  =   12, AT INTERSECTION OF FAILURE SURFACE AND YIELD CAP
C                  =   3, TENSILE FAILURE
C-----------------------------------------------------------------------
      PPRIME = ( SIG(1) + SIG(2) + SIG(3) ) / 3.0
      QDEV = DSQRT( 0.5 * ( (SIG(1)-SIG(2))**2 + (SIG(2)-SIG(3))**2 +
     1 (SIG(3)-SIG(1))**2 + 6.0 * SIG(4)**2 ) )
      SIGX   = SIG(1)
      SIGY   = SIG(2)
      SIGZ   = SIG(3)
      TAUXY = SIG(4)
      RATIO = ( (QDEV / (PPRIME + PRINTR)) / MTRIAX )**2
      F        = ( 1.0 + RATIO ) * (PPRIME + PRINTR) - PRINTR
C
      IF (IFAIL.EQ.3) GO TO 5
```

```
      CALL FAIL (SIGX,SIGY,SIGZ,TAUXY,MTRIAX,PRINTR,IFAIL)
C
      IF (IFAIL.EQ.0 .AND. NELAST.EQ.0) IFAIL = 2
      IF (IFAIL.EQ.1 .AND. NELAST.EQ.0) IFAIL = 12
C
C     F O R M   E L A S T I C   S T R E S S - S T R A I N   M A T R I X
C
      BULK = (1. + VOID(IELEM)) * PPRIME / KAPPA
      IF (IFAIL.EQ.1 .OR. IFAIL.EQ.12) BULK = BULK/50.
      YOUNG = 3.0 * BULK * (1.0 - 2.0 * POIS)
    5 IF (IFAIL.EQ.3) THEN
          BULK  = BULK/50.
          POIS  = 0.33
          YOUNG = 3.0 * BULK * (1.0 - 2.0 * POIS)
      END IF
      CALL ELAST(YOUNG,POIS,CE)
      DO 20 I = 1,4
          DO 10 J = 1,4
             CEP(I,J) = CE(I,J)
   10     CONTINUE
   20 CONTINUE
      IF (BULK.LT.100000.0) THEN
         IF (ITER.EQ.1) PRINT 6000, IELEM,QDEV,PPRIME,F,MTRIAX,BULK,POIS,
     1      LAMDA,VOID(IELEM),BLADE,IFAIL,IELEM
         IF (ITER.EQ.2) PRINT 6000, IELEM,QDEV,PPRIME,F,MTRIAX,BULK,POIS,
     1      LAMDA,VOID(IELEM),BLADE,IFAIL,IELEM
      ELSE
         IF (ITER.EQ.1) PRINT 6010, IELEM,QDEV,PPRIME,F,MTRIAX,BULK,POIS,
     1      LAMDA,VOID(IELEM),BLADE,IFAIL,IELEM
         IF (ITER.EQ.2) PRINT 6010, IELEM,QDEV,PPRIME,F,MTRIAX,BULK,POIS,
     1      LAMDA,VOID(IELEM),BLADE,IFAIL,IELEM
      END IF
      IF (NELAST.EQ.1) RETURN
      IF (IFAIL.EQ.3) RETURN
C
C     F I N D   P A R T I A L   O F   P O   W I T H   R E S P E C T   T O
C           S I G 1 ,   S I G 2 ,   S I G 3 ,   A N D   T A U X Y
C
      X = PPRIME + PRINTR
      XX = QDEV * QDEV / 3.0
      XXX = MTRIAX**2 * (PPRIME + PRINTR)**2
      DFDSIG(1) = 0.33333 + (X * (2.0 * SIGX - SIGY - SIGZ) - XX) / XXX
      DFDSIG(2) = 0.33333 + (X * (2.0 * SIGY - SIGX - SIGZ) - XX) / XXX
      DFDSIG(3) = 0.33333 + (X * (2.0 * SIGZ - SIGX - SIGY) - XX) / XXX
      DFDSIG(4) = 6.0 * TAUXY / (MTRIAX**2 * X)
```

```
C
      B = ( 1. + VOID(IELEM) ) * (DFDSIG(1) + DFDSIG(2) + DFDSIG(3)) * F
      B = B / (KAPPA - LAMDA)
C
C     F O R M   P L A S T I C   S T R E S S - S T R A I N   M A T R I X
C
      DO 40 I = 1,4
         TEMP = 0.0D0
         DO 30 J = 1,4
            TEMP = TEMP + CE(I,J) * DFDSIG(J)
   30    CONTINUE
         DD(I) = TEMP
   40 CONTINUE
      DO 60 I = 1,4
         DO 50 J = 1,4
            DMATX(I,J) = DD(I) * DD(J)
   50    CONTINUE
   60 CONTINUE
      A = 0.0
      DO 70 I = 1,4
         A = A + DFDSIG(I) * DD(I)
   70 CONTINUE
      DENOM = A - B
C
C          C O M B I N E   E L A S T I C   A N D   P L A S T I C
C     P A R T S   O F   T H E   S T R E S S - S T R A I N   M A T R I X
C
      DO 90 I = 1,4
         DO 80 J = 1,4
            DMATX(I,J) = DMATX(I,J) / DENOM
            CEP(I,J) = CE(I,J) - DMATX(I,J)
   80    CONTINUE
   90 CONTINUE
6000 FORMAT (I10,6F10.3,F13.5,F9.3,F8.3,I8,I10)
 6010 FORMAT (I10,4F10.3,D10.3,F10.3,F13.5,F9.3,F8.3,I8,I10)
      RETURN
 END
```

附录2：总刚集成子程序ADDSTF——（摘自CON2D）

子程序 ADDSTF 的功能是集成总体刚度矩阵，它调用了子程序 BRSTIF、LKSTIF 和 BMSTIF 分别计算了杆单元（BAR ELEMENT）、连接单元（LINKAGE ELEMENT）和梁单元（BEAM

ELEMENT）的单元刚度矩阵。

变量表 1

ID	结点边界条件
NOMNP	当前网格中的结点总数
NPSWP	结点的指定水压力
GSTIFF	总体刚度矩阵
ELSTIF	单元刚度矩阵
NUMEL	当前网格中的土体单元总数
NEQB	每块中的方程数
NE2B	两倍的 NEQB
MBAND	半带宽
NUMLD	总加载步数
NUMNPT	结点总数
NBLOCK	块的数数
LN	填筑计数
NLAY	总填筑层数
NUMSWP	心墙和坝壳料之间的接触面上孔压会发生变化的结点总数
NEWLAY	是否进行填筑 （0-不，1-是）
NBRELT	杆单元的单元总数
NUMBR	杆单元的材料总数
NBRCAL	新增加单元中最大的杆单元编号
NLKELT	连接单元的单元总数
NLKMAT	连接单元的材料总数
NUMCLK	先期存在的连接单元数
NBMELT	梁单元的单元总数
NBMMAT	梁单元的材料总数
NBMCAL	新增加单元中最大的梁单元编号
NUMNP	当前网格中最大的结点编号

变量表 2

IPP	方法控制，1 为总孔压法，0 为超静孔压法
NPRINT	存储控制，0 存储所有阶段结果，>0 为存储 NPRINT 各阶段的结果
NSTGPRN	需要保存的阶段号

NUMAPN	在本阶段孔压被指定的结点总数
NAPN	孔压被指定的结点编号
PAPN	指定的孔压值
NSETS	孔压保持一致的结点对数（固结计算区内连接单元的一些结点的孔压必须保持一致）
IINODE	结点 I
JJNODE	结点 J
LM	在总刚矩阵中的自由度定位向量
SFAC	计算被删除单元刚度的折减系数（删除单元的刚度矩阵用很小的值代替）

变量表 3

PROPBR	杆单元的材料参数
INPBR	杆单元的材料编号及相应结点
STBTOT	杆单元的轴向力
BRANG	杆单元法向与 X 方向的夹角
BRLEN	刚单元的长度
LKODEB	杆单元状态标志码，-1 不在当前网格中，0 在先期网格中，1 在新增网格中
LBARC	先期杆单元数
BARWT	考虑湿化的杆单元参数
LBRRM	本次加载中删除的杆单元数列
MBRRM	被删除杆单元的标志数列，1 为未被删除，-1 为在本次加载中删除，-2 为在以前的加载中删除

连接单元和梁单元的变量定义与杆单元类似，不再一一赘述。

注意：有关本子程序的验证请访问水科院岩土所陈祖煜教授主页
http://www.geoeng.iwhr.com/geoeng/Chenzuyu/index.htm

```
C*******************************************************************************
      SUBROUTINE ADDSTF (ID, NOMNP, NPSWP, GSTIFF,
     1  NUMEL, NEQB, NE2B, NBLOCK, MBAND, NUMLD, LN, NUMNPT, NLAY, NUMSWP,
     2  NBRELT, NBRCAL, NEWLAY, NLKELT, NLKMAT, NBMELT, NBMCAL, NUMNP)
C*******************************************************************************

      IMPLICIT REAL(8) (A-H, O-Z)
      REAL(8) LKANG, LKLEN
      REAL(8) INPBR, INPBM, ID, NOMNP, NPSWP
      COMMON /CONTROL/ IPP, NPRINT, NSTGPRN(100)
      COMMON /APP/NUMAPN, NAPN(200), PAPN(200)
      COMMON /EQVPN/ NSETS, IINODE(200), JJNODE(200)
      COMMON /BAR/ PROPBR(20, 4), INPBR(1000, 3), STBTOT(1000), BRANG(1000),
     &  BRLEN(1000),LKODEB(1000),LBARC(1000),BARWT(1000,2),LBRRM(1000), MBRRM(1000)
```

```
      COMMON /HLINK/ PROPLK(20, 4), INPLK( 500, 3), STRSLK( 500, 2),
     &    LKANG( 500), LKLEN( 500), LKODE( 500), LINKC( 500), LLKRM( 500),   MLKRM( 500)
      COMMON /BEAM/ PROPBM(20, 8), INPBM(1000, 5), STBMTOT(1000, 5),
     &    BMANG(1000), BMLEN(1000), LKODBM(1000), LBEAMC(1000),
     &    BEAMWT(1000, 2), DXOLEN(1000), DYOLEN(1000), LBMRM(1000),   MBMRM(1000)

      DIMENSION ELSTIF(24, 24)
      DIMENSION GSTIFF(NE2B, MBAND)
      DIMENSION NOMNP(NUMLD, 4), ID(NUMNPT, 4), LM(24)
      DIMENSION NPSWP(NUMSWP)
      DIMENSION SMATX(4, 4), SA(2, 4), BSMATX(6, 6), FDMATX(5, 6)

      K        =   NEQB+1
      X        =   DBLE(NBLOCK)
      MB       =   DSQRT(X)
      MB       =   MB/2 + 1
      NEBB     =   MB * NE2B
      MCOUNT =   1
      NSHIFT =   0
      REWIND 18
C           形成块中的方程
      DO 500 MBLOCK = 1, NBLOCK, 2
        KEYB = 0
        IF (NBRELT.GT.0) KEYB = 1
        KEYL = 0
        IF (NLKELT.GT.0) KEYL = 1
        KEYBM = 0
        IF (NBMELT.GT.0) KEYBM =1
        DO 110 I = 1, NE2B
          DO 100 J = 1, MBAND
            GSTIFF(I, J) = 0.0D0
100       CONTINUE
110     CONTINUE
        REWIND 13
        REWIND 17
        NA     = 17
        NUME = NUM3
        IF (MCOUNT .NE. 1) GO TO 150
C   文件（通道号 13）中存储着土体四边形单元的单元刚度矩阵
140     NA     =   13
        NUME =   NUMEL
        NUM3 =   0
      OPEN (28, FILE='ELSTIF.OUT', STATUS='UNKNOWN', FORM='UNFORMATTED')
150     DO 300 N = 1, NUME          ！ 对块中的每个单元
          IF (NA.LT.45) THEN
```

```
                READ(NA) ND, (LM(I), I=1, ND), ((ELSTIF(I, J), J=1, ND), I=1, ND)
              ELSE
                IF (NBRELT.GT.0 .AND. NA.EQ.50.AND.LKODEB(N).EQ.0) THEN    ！杆单元
                  CALL BRSTIF(ID, SMATX, SA, LM, NUMNPT, NBRELT, N)
                  ND = 4
                  SFAC=1.0D0
                  IF (MBRRM(N).LT.0) SFAC=0.00001
                  DO 156 IELEM = 1, 4
                    DO 154 JELEM = 1, 4
                      ELSTIF(IELEM, JELEM) = SMATX(IELEM, JELEM)*SFAC
  154               CONTINUE
  156             CONTINUE
                END IF
                IF (NLKELT.GT.0.AND.NA.GE.100.AND.LKODE(N).GE.0) THEN！连接单元
                  CALL LKSTIF(ID, SMATX, SA, LM, NUMNPT, NLKELT, NLKMAT, N)
                  ND = 4
                  SFAC=1.0D0
                  IF (MLKRM(N).LT.0) SFAC=0.00001
                  DO 170 IELEM = 1, 4
                    DO 160 JELEM = 1, 4
                      ELSTIF(IELEM, JELEM) = SMATX(IELEM, JELEM)*SFAC
  160               CONTINUE
  170             CONTINUE
                END IF
                IF (NBMELT.GT.0.AND.NA.EQ.75.AND.LKODBM(N).EQ.0) THEN！梁单元
                  CALL BMSTIF(ID, BSMATX, FDMATX, LM, NUMNPT, NBMELT, N)
                  ND=6
                  SFAC=1.0D0
                  IF (MBMRM(N).LT.0) SFAC=0.00001
                  DO 176 IELEM = 1, 6
                    DO 174 JELEM = 1, 6
                      ELSTIF(IELEM, JELEM)=BSMATX(IELEM, JELEM)*SFAC
  174               CONTINUE
  176             CONTINUE
                END IF
              END IF
C          控制单元类型的语句
              IF (NA.EQ.50.AND.LKODEB(N).LT.0) GO TO 300
              IF (NA.EQ.101.AND.LKODE(N).LT.0) GO TO 300
              IF (NA.EQ.75.AND.LKODBM(N).LT.0) GO TO 300
              WRITE (28) ND
              WRITE (28)((ELSTIF(III, JJJ), JJJ=1, ND), III=1, ND)
 5003         FORMAT (1E14.5)
 5002         FORMAT (/, 'ELEMENT STIFFNESS MATRIX,    ND=', I5)
C          刚度集成
```

```
                DO 220 I=1, ND
                    LMN=1-LM(I)
                    II=LM(I)-NSHIFT
                    IF (II .LE. 0 .OR. II .GT. NE2B) GO TO 220
                    DO 200 J=1, ND
                        JJ=LM(J)+LMN
                        IF (JJ .LE. 0) GO TO 200
                        GSTIFF(II, JJ) = GSTIFF(II, JJ) + ELSTIF(I, J)
200                 CONTINUE
220             CONTINUE

C               确定刚度矩阵是否已经存在文件（通道号 17）中
                IF (MCOUNT .GT. 1) GO TO 300
                DO 250 I=1, ND
                    II=LM(I) - NSHIFT
                    IF (II .GT. NE2B .AND. II .LE. NEBB) GO TO 260
250             CONTINUE
                GO TO 300
260             WRITE(17) ND, (LM(I), I=1, ND), ((ELSTIF(I, J), J=1, ND), I=1, ND)
                NUM3 = NUM3 + 1
300         CONTINUE
            IF (NA.EQ.17) GO TO 310
C           确定是否存在杆单元、连接单元和梁单元
            IF (KEYB.EQ.1 .OR. KEYL.EQ.1 .OR. KEYBM.EQ.1) THEN
                IF (KEYB.EQ.1) THEN
                    KEYB = 0
                    NA   = 50
                    NUME = NBRELT
                    GO TO 150
                END IF
                IF (KEYL.EQ.1) THEN
                    KEYL = 0
                    NA   = 101
                    NUME = NLKELT
                    GO TO 150
                END IF
                IF (KEYBM.EQ.1) THEN
                    KEYBM = 0
                    NA   = 75
                    NUME = NBMELT
                    GO TO 150
                END IF
            END IF
310         CONTINUE
C       对心墙和坝壳接触面上的结点进行处理
```

```
      IF (NUMSWP.EQ.0) GO TO 370
        DO 360   I=1, NE2B
          NEQD=I+NSHIFT
          DO 350 NPF=1, NUMSWP
            NPT=NPSWP(NPF)
            II=ID(NPT, 3)              ！孔压自由度
           IF(II.NE.NEQD .OR. II.EQ.0) GO TO 350
            GSTIFF(I, 1)=1.0D+20       ！罚函数处理
  350       CONTINUE
  360     CONTINUE
  370   CONTINUE
C       对指定孔压的结点进行处理
      IF (NUMAPN.GT.0) THEN
        DO 361   I=1, NE2B
          NEQD=I+NSHIFT
          DO 351 NPF=1, NUMAPN
            NPT=NAPN(NPF)
            II=ID(NPT, 3)
            IF(II.NE.NEQD .OR. II.EQ.0) GO TO 351
            GSTIFF(I, 1)=1.0D+20
  351       CONTINUE
  361     CONTINUE
      ENDIF
      IF (LN.LE.NLAY) THEN
        NN1=NOMNP(LN, 3)
        IF(NN1.EQ.0) GO TO 430
        NN2=NOMNP(LN, 4)
        DO 420 I=1, NE2B
          NEQD=I+NSHIFT
          DO 410 NPT=NN1, NN2
            II=ID(NPT, 3)
            IF(II.EQ.0) GO TO 410
             IF(II.EQ.NEQD) GSTIFF(I, 1)=1.0D+20
  410       CONTINUE
  420     CONTINUE
      END IF
  430   CONTINUE
C       对连接单元中必须保持相同孔压的结点进行罚函数处理
      IF(NSETS.EQ.0) GOTO      199
      MAXFRD=0
      DO I=1, NUMNP
        N3=ID(I, 3)
        IF(N3.GT.0 .AND. N3.GT.MAXFRD) MAXFRD=N3
      ENDDO
      CO=1.0D+12
```

```
      DO 198 ISET=1, NSETS
        IAPOS=ID(IINODE(ISET), 3)
        JAPOS=ID(JJNODE(ISET), 3)
        IF(IAPOS.EQ.JAPOS) THEN
          WRITE(90, *) 'ERROR! IAPOS=JAPOS IS NOT ALLOWED'
          STOP
        ENDIF
        IF(IAPOS.GT.JAPOS) THEN
          DD=IAPOS
          IAPOS=JAPOS
          JAPOS=DD
        ENDIF
        IF(JAPOS.LE.MAXFRD) THEN
          NCOL = JAPOS-IAPOS+1
          GSTIFF(IAPOS, 1) =      GSTIFF(IAPOS, 1)+CO
          GSTIFF(JAPOS, 1) =      GSTIFF(JAPOS, 1)+CO
          GSTIFF(IAPOS, NCOL) = GSTIFF(IAPOS, NCOL)-CO
        ENDIF
198     CONTINUE
199     CONTINUE
      WRITE (18) ((GSTIFF(I, J), I=1, NEQB), J=1, MBAND)  ！输出总刚矩阵
      IF (MBLOCK .EQ. NBLOCK) GO TO 500
      WRITE (18) ((GSTIFF(I, J), I=K, NE2B), J=1, MBAND)
      IF (MCOUNT.EQ.MB) MCOUNT=0
      MCOUNT=MCOUNT+1
      NSHIFT=NSHIFT+NE2B
500   CONTINUE
      CLOSE (28, STATUS='KEEP')
      RETURN
      END
```