工程造价快速估算新方法及其应用

王筑盛 廖小建 杜晓玲 著

中国建筑工业出版社

TU723
W49

414284

工程造价快速估算新方法及其应用

王祯显 廖小建 杜晓玲 著





00414284

中国建筑工业出版社

(京)新登字 035 号

图书在版编目（CIP）数据

工程造价快速估算新方法及其应用/王祯显等著．-北京：中国建筑工业出版社，1998
ISBN 7-112-03591-0

Ⅰ．工… Ⅱ．王… Ⅲ．建筑造价-计算方法 Ⅳ．TU723

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 14415 号

工程造价快速估算新方法及其应用
王祯显　廖小建　杜晓玲　著
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新　华　书　店　经　销
北京市云浩印刷厂印刷
*
开本：787×1092 毫米 1/32　印张：9½　字数：210 千字
1998 年 9 月第一版　1998 年 9 月第一次印刷
印数：1—5000 册　定价：12.00 元
ISBN 7-112-03591-0
TU·2776（8842）
版权所有　翻印必究
如有印装质量问题，可寄本社退换
（邮政编码　100037）

模糊数学是一门新兴的数学分支，近30年来发展非常迅速。本书通俗地介绍了模糊数学的基本知识，着重介绍了根据模糊数学原理及应用电子计算机技术，所提出的对建筑工程造价进行快速估算的新方法。为帮助读者学习，附有大量的工程应用实例，有些是用电子计算机做的。本书有很高的实用价值，可供建筑企业经营管理人员、预决算技术人员、建筑设计技术人员、建设银行的有关人员以及具有中等以上文化程度的科技人员阅读，亦可供大专院校师生和科研人员参考。

序　言

自从美国查德教授在1965年创立模糊集合论以来，模糊数学在国内外得到了迅速的发展。近年来在国内的建筑工程、特别是建筑工程管理领域中的应用，更是引人注目。《工程造价快速估算新方法及其应用》一书，是王祯显等同志十多年来应用模糊数学进行工程造价快速报价研究的系统总结，凝集了作者多年的心血。此项成果经过作者和有关同志的努力，在国内得到了普及和推广，取得了良好的效果。

此书不但着重介绍了用模糊数学进行工程造价快速估算的方法，而且由于以相当大的篇幅阐述了模糊数学的基本概念、理论与方法。既是有实用价值的普及读物，也是一本深入浅出并联系实际的模糊数学应用方面的专著，因此谨向对这一领域有兴趣的读者推荐。

电子计算机的诞生与应用，使过去旷日持久甚至可望不可及的计算分析得以迅速实现，促使科学技术发展日新月异，一日千里。但随着科技发展，特别在管理科学乃至自然科学中，对过去积累的经验性数据与成果的处理需求日益迫切。随着近十年来智能决策支持系统（如专家系统等）的发展，应用传统数学的“非真即伪”的概念有时难以奏效，这就要求引入模糊概念。例如建筑工程成本估测涉及众多影响和特征因素。在投标报价时间有限，资料齐全程度不一等条件下，沿用传统造价计算方法，往往困难重重。这就需要分析建筑工程的特征因素和积累的历史造价估算数据和经验，

运用模糊数学方法，另辟途径，来实现工程造价的快速测算。模糊数学为数学进入模糊概念禁区开辟了途径。随着知识工程与人工智能方法的发展，使存贮、推理、处理和利用领域专家头脑中的大量经验等模糊思维概念与知识成为可能。领域专家的生命有限，但他们的经验与技能却可藉此而在一定程度上保留下来，供后人应用。仅从此意义来看，模糊数学及相关技术的发展确有不容忽视的意义。

希望此书出版后，能起到普及和深化模糊数学在我国的发展与应用的作用，更希望在读者的支持与爱护下，本书所提供的工程造价快速测算方法能不断发展和推广应用，为我国建筑业的改革做出应有的贡献。

卢　谦

1997 年 11 月于北京

前　言

本书介绍的这种工程造价快速估算新方法的理论依据，是模糊数学原理。模糊数学是一门崭新的、有强大生命力和渗透力的新学科，是一门新兴的数学分支。它自 1965 年由美国著名控制理论专家查德教授创始以来，发展十分迅速，其应用的涉及面极为广泛，几乎遍及理、工、农、医以及社会科学的各个领域。模糊数学的研究对象是客观世界的大量的模糊概念，从这些模糊概念里求得数量规律，然后用精确的数学方法来处理，它是模糊数学的任务。模糊数学的出现标志着科学已经发展到一个更加高级的阶段。用数学的方法来处理带有模糊性的复杂问题，就能够使数学更加接近人类的思维，应用数学的方法来解决更多的日常生活问题。正如查德教授所预言的那样："在今后十几年里，这门学科必将得到大力发展，也必将在人类知识科学方法的宝库里占有一席之地。"我国著名科学家钱学森说："是否存在着两种数学，一种叫经典数学，一种叫模糊数学！……客观事物实际上都带有模糊性，模糊性是客观存在的，模糊性是本质的属性，人认识客观世界时模糊性就进来了，各种事物便普遍地带有模糊性；建立模糊数学是一个战略任务，现代文明已经进入到这样的阶段，客观实际需要建立模糊数学体系……。"

建筑工程造价本身就是一个不确切的数字，带有模糊性，因为，建筑工地的一砖一瓦、一个铁钉、一寸木料、一粒水泥等都是无法认真结清的。俗话说得好：建筑工地遍地

是黄金，就是这个意思，不管是工、料还是造价都只能是一个大概的数字。综合评判一个建筑工程质量的好坏或一个建筑设计方案的优劣，也都带有模糊性的色彩。既是这样，那么建筑工程的许多方面，就可以应用模糊数学的原理把人们的思维和运用经验的过程，用数学的形式科学地具体表现出来。

这种快速估算造价的新方法，对建筑工程招标投标快速估算标底尤为适应。通过许多工程实测检验（快速估算的结果与工程竣工决算相比），估算精度较高，可达95%以上，而估算所用时间极少，手算最多二个小时，熟练了半小时足够，若用电子计算机算就更快，只要几分钟就可出结果。这就为施工企业投标竞争取胜赢得了时间，也为设计部门做设计方案的技术经济比较争得了速度，为经济管理部门进行经济管理提供了快速的计算方法，亦为电子计算机的应用开辟了新路。王祯显教授自1983年在全国首先提出了此思想并结合实际将这一方法应用到工程实践中而初见成效，1993年获江西省科委科技进步奖和省教委优秀科技成果奖，王祯显教授先后应邀到北京、上海、南京、杭州、昆明、重庆、成都、武汉、南昌、沙市、桂林、泰安、九江、上饶等二十多个大中城市讲学，听众达万余人，深受专家和同行的欢迎和好评。清华大学著名教授卢谦评价说："他首创的应用模糊数学的快速报价法，有较高的学术价值。"英国萨而福大学布兰登教授和斯基特摩尔博士也认为"此法给出了一个计算工程造价的新途径。"西安建筑科技大学刘砚田教授评价："快速估算数学模型及其计算机程序，具有方法新颖、快速可靠的优点，属于国内首创。"

本书依据王祯显教授1988年编著的《土木建筑工程管

理中的模糊数学方法》（湖南大学出版社出版）一书所提出的思想和方法，由王祯显、廖小建、杜晓玲撰写。

模糊数学虽然在自然科学及社会科学领域内都有广阔的发展前景，但它正处于发展当中，一些应用研究才初见成效或开始进行，仍有许多工作要做。本书的特点在于突出工程实例，通过各种工程实例展现工程造价快速估算新方法。由于作者水平有限，同时还在探索过程中，必然有不够完善或不当之处，期待读者予以批评指正和完善。本书在撰写过程中特别得到了卢谦教授的指教和中国建筑工业出版社袁孝敏副总编、鄢锁林编辑的关怀以及江西省各建筑公司的大力支持，同时还参考了国内有关资料，在这里一并表示诚挚的感谢。

目　录

前言
第一章　模糊数学概论 …… 1
　第一节　什么是模糊数学 …… 1
　第二节　模糊数学与经典数学的关系 …… 2
　第三节　模糊数学与电子计算机的关系 …… 5
　第四节　模糊数学的发展 …… 7
第二章　应用前的准备知识 …… 11
　第一节　普通集合 …… 11
　第二节　模糊子集及其运算 …… 16
　第三节　λ截集和支集 …… 25
　第四节　隶属函数的确定 …… 34
　　一、确定隶属函数的一般原则和方法 …… 46
　　二、常用隶属函数 …… 50
　　三、怎样度量模糊性 …… 56
　　四、用“距离”来度量模糊性 …… 57
　　五、用“贴近度”来度量模糊性 …… 66
　　六、关于距离或贴近度的选用经验 …… 71
　第五节　模糊关系与模糊矩阵及其运算 …… 73
　第六节　模糊聚类分析 …… 89
　　一、用最大树法进行聚类分析 …… 93
　　二、模糊聚类分析实际应用一例 …… 96
　第七节　相似优先比 …… 103
第三章　模糊数学在建筑工程快速估算造价中的应用 … 113
　第一节　问题的提出 …… 113

第二节　估算公式的原理和推导 …… 116
第三节　快速估算的数学模型 …… 120
第四节　隶属函数值的确定 …… 122
第五节　估算步骤 …… 125
第六节　工程实例应用 …… 127
一、实例应用“Ⅰ” …… 127
二、实例应用“Ⅱ” …… 139
三、实例应用“Ⅲ” …… 154
四、实例应用“Ⅳ” …… 162
五、实例应用“Ⅴ” …… 179
六、实例应用“Ⅵ” …… 190
七、实例应用“Ⅶ” …… 204
八、实例应用“Ⅷ” …… 211
九、实例应用“Ⅸ” …… 219
十、实例应用“Ⅹ” …… 227
十一、实例应用“Ⅺ” …… 241
十二、实例应用“Ⅻ” …… 248
十三、实例应用“XIII” …… 255
十四、实例应用“XIV” …… 262
十五、实例应用“XV” …… 269
十六、实例应用“XVI” …… 275
第七节　电算方法 …… 282
一、算法 …… 283
二、计算框图 …… 283
三、程序输入数据格式 …… 283
四、输出结果说明 …… 286
五、数据库建立方法 …… 286
六、算例 …… 287
第八节　结语 …… 287
参考文献 …… 289

第一章　模糊数学概论

第一节　什么是模糊数学

模糊数学是用数学方法研究和处理具有“模糊性”现象的数学。这里所谓的模糊性，主要是指客观事物差异的中间过渡中的“不分明性”，这在日常生活中比比皆是，如模糊词：在“早晨”、“上午”、“中午”、“傍晚”、“晚上”之间，“白天”和“晚上”之间，“过去”、“现在”、“将来”之间，“春”、“夏”、“秋”、“冬”之间都无法进行精确的划分。

在人的思维控制和语言中，许多概念都是模糊的东西。当我们拿起一只杯子时，究竟用多大的力气，并不需要精确地计算，我们可以根据触觉和视觉等感觉，经几次反馈和调整，就能以恰如其分的力量握住杯子，既不会因用力过猛而捏碎杯子，也不会因用力太小而使杯子落地。有时候，清晰的东西也会产生模糊信息。如男子和女子本来是可以明确划分的，可是留长发、穿花衬衫的男青年，却提供了模糊信息。

人们的所谓“经验”，往往也是模糊的东西。例如，要确定一炉钢水是否已经炼好，除了要知道钢水温度、成分比冶炼时间等精确信息外，还要注意钢水颜色、沸腾情况等模糊信息。要对这样的过程进行控制，很难采用目前通行的自动控制方法，因此，往往还是由熟练工人凭借经验来操纵。

语言也有模糊性。例如，“我要吃糖”这句话的含义是明确的。然而在日常生活中我们同样能理解下列含意不够明确的语言“我要糖”、“要吃糖”，甚至“我我我要吃糖”、“糖糖糖”等模糊语言的含义，最后两句可分别看作出自口吃者和孩子之口。还有“高个子与矮个子”、“清洁和污染”、“美与丑”、“冷与热”等等都难以明确划定界限。

模糊数学的研究对象是客观世界里的大量的模糊概念，从这些模糊概念里求得数量规律，然后用精确的数学方法来处理它。模糊数学的出现标志着科学已经发展到一个更加高级的阶段，能够用数学的方法来处理带有模糊性的复杂问题。这就使数学能够更加接近人类的思维，用来解决更多的日常生活问题。著名科学家钱学森谈模糊数学时说：“模糊性是客观的存在，是本质的属性，人们开始认识世界时，就把模糊性带进来了，……”。

那么，该怎样来综合和处理模糊信息呢？这就要寻找一种新工具——一种表现和加工模糊信息的数学工具，它就是模糊数学。模糊数学在精确的经典理论与充满了模糊性的现实世界之间，架起了一座桥梁。

模糊数学是一门崭新的、有强大生命力和渗透力的新科学分支，这方面的新知识对从事许多方面的科学研究和实际工作的人们都具有很大的吸引力。

第二节　模糊数学与经典数学的关系

有人概述：数学是从量的侧面研究客观世界的一门学科。这就决定了现代数学有它特殊的普遍性、抽象性以及在应用方面的广泛性，因此不能有、也不应该有不允许应用数

学的学科和对象。当然，有些学科到现在还没有用上数学，但是这只是因为它们量的规律过于复杂，数学还无法深入到它里面去。

在现实世界里存在大量的模糊现象。例如："好"、"坏"、"长"、"短"、"一大堆"、"一小撮"、"太热"、"太冷"、"比较甜"、"比较苦"、"物美价廉"、"地大物博"等等，过去都很难用数学描述。但是它们在人的头脑里的确有个"标准"，也曾经被数学家所注意，有人还为"一大堆"作过初步的探讨。直到1965年，美国自动控制论专家、加利福尼亚大学教授查德（L.A.Zadeh）根据工作中的体会写了一篇新论文《模糊集合》，开始用数学的观点来刻划模糊事物，这就标志着模糊数学这门新学科的诞生。

在模糊数学的理论研究中有两大支柱，其一是模糊数学的概念，它是普通集合论的推广也就是把｛0，1｝两点上取值的特征函数推广到可在［0，1］闭区间上取任意值的隶属函数，这是具有深远意义的。第二点就是分解定理和扩张原则，也就是从方法论的角度上来看，任何模糊数学的定理中通过分解定理化为普通集合论的问题来处理，而扩张原则又是把普通集合论的方法扩张到模糊数学中去。因此，从概念上来说模糊数学是经典数学的推广和发展，但从方法上来说模糊数学又是使用传统的普通集合论的方法，可见，模糊数学和经典数学之间有着难解难分的密切关系。因此，决不能把模糊数学和传统数学分割开来，当然也不能完全用传统数学的要求来看待模糊数学，这里面存在着辩证的关系。

如果说，在过去的科学发展中，人们能够回避模糊性而运用经典数学，那末，在今天的科学发展中，人们就再也无法回避模糊性了，必须寻找到一套研究和处理模糊性的数学

方法，这就是模糊数学产生的历史必然性。

模糊数学不是让数学变成模模糊糊的东西，而是要让数学进入模糊现象这个禁区。即用精确的数学方法来处理过去无法用数学描述的模糊事物，因为在现实世界里如果要想绝对地精确是办不到的，只是相对的，但不能把“模糊”两字看成纯粹消极的贬义词。过分的精确反倒模糊，适当地模糊反而精确。在许多控制过程中以及人脑对模糊事物进行识别和判决，模糊的手段常常可以达到精确的目的。如前面谈到的控制一炉钢水是否炼好；又比如找人，只知被找的人是一个大胡子，高个子，并不需要问此人的身高究竟是一点几几米，也并不需要问此人脸上究竟有多少根胡须以及每根胡须平均有多粗多长。在人脑中，大胡子，高个子都是模糊特征，按每个人对这些特征的隶属程度的高低进行筛选，便可以很快地从大庭广众之中找到所要找的人。

研究模糊性具有很重要的现实意义。这里简单举个例子，如果在作化学实验的时候，需要加某种药物，具体加多少这是要求比较精确的，为此要使用分析天平。但是炊事员在炒菜的时候加入盐和酱油“少许”，“少许”这个概念就是模糊的，它只是凭炊事员的经验确定，而不需要、也不可能很精确。即使是使用了分析天平、电子计算机等先进工具而让一个不会炒菜的人去做，也决不可能比有经验的炊事员做的菜好。这是因为化学实验中的化学变化是比较简单的，而炒菜的过程是比较复杂的，这里面有化学成分的变化，也有物理作用以及多方面的复杂因素（如火候、调料、时间等等），决不是列出一两个方程就能解决的，也就是说它是一个涉及面非常广泛的“大系统”，而“大系统”是很难用过去的传统数学方法来计算的，很多是实践和经验的总结。而

精确数学对这些就完全无能为力。如果非要用精确的数学方法去“生搬硬套”不可，反而会错误百出。就像前几年有人用微分方程（高等数学的一个分支）去计算某种生物的生活规律，结果只能导致失败。因为这种生物的生活规律决不像机械运动那样简单。

模糊数学的出现，给我们研究那些复杂的、难以用精确的数学描述的问题带来了方便而又简单的方法。国际上有人说它是“异军突起”。也正是因为这点，模糊数学才能渗透到各个领域里去，并且显示出强大的生命力。

模糊数学的概念其实是从普通数学也就是精确数学概念推导出来的，因此我们可以说：模糊数学包含着精确数学。从模糊数学的研究和应用的方法说来，使用的完全是普通数学的方法，这也就说明了模糊数学跟普通数学有难分难解的亲密关系。模糊数学是精确数学的延伸和推广。

第三节　模糊数学与电子计算机的关系

模糊数学诞生于 1965 年，从它诞生的那天起，便和电子计算机的发展息息相关，相辅相成。可以这样说：没有电子计算机，便没有模糊数学。另一方面，若没有模糊数学，电子计算机的应用也会大大受到限制。因为利用模糊数学构造数学模型，来编制计算机程序，可以更广泛、更深入地模拟人的思维，从而提高电子计算机的“智力”。

随着科学技术的发展，人们希望能够更广泛地使用电子计算机，这就给计算机科学（就是研究电子计算机理论和数学方法的一门学科）提出一个很重要的任务，就是要不断地提高电子计算机的“智力”，使它能够模拟人脑的思维方法，

去应付复杂多变的环境。例如让电子计算机自动驾驶汽车，自动吊装大建筑物，自动调节排灌系统，或者让电子计算机参与心理学、经济学、社会科学领域的一些活动，甚至让电子计算机进行公安侦破直接去识别罪犯。如果已经查明罪犯是个“大胡子”对于人说来，“大胡子”这个特征是容易识别的，但是对于电子计算机来说却是“一筹莫展”了，因为没有恰当的数学语言去描述“大胡子”这个特征，因此也就无法编制程序，让电子计算机去理解这个概念的含义。

目前，电子计算机发展的主要障碍就在于：现在的数学无法全部、真实地反映人脑的思维活动。人脑的大量思维都具有模糊性，而现有的数学对此却无能为力。将人们思维和语言建立起数学模型来编制程序，就可以使计算机“灵活”起来，以便对付难以预测的各种复杂环境。熟悉计算机的人，在调试程序时，都会为计算机的严格、死板感到不便。为什么呢？这是因为我们在编制程序时使用的是形式语言。形式语言无论是 ALGOL、FORTRAN、BASIC、COBOL 等都是教条式的八股文，对于格式的要求特别严格，这是因为计算机是一种机械，它不会像人那样，对语言的理解具有很大的灵活性，计算机科学面临的重要任务之一，是要让计算机更进一步地模拟人脑思维，就是所谓提

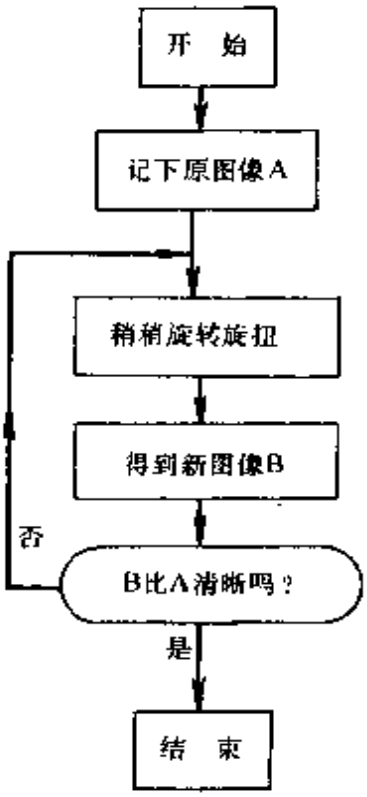


图 1-1

高计算机的“智能”，使它能像人一样，能及时地应付复杂多变的环境，去参与更多的社会事物使其进一步代替人们部分脑力劳动。但要达到这个目的，单纯依靠形式语言是不行的。因为无法用它来表达、描述人的模糊化的语言概念。就拿最简单的人脑指挥手调电视为例，要求把图像调得更清晰一些，就是对于小孩子都轻而易举办到的事（如图 1-1），但对于计算机说来却是一个大难题了。从这个角度来说，计算机的“智力”还不如一个三、四岁的小孩呢！这是为什么呢？因为“稍稍旋转旋扭”和“B 比 A 更清晰吗?”都是自然语言，是计算机所不能理解的语言。因此，要使计算机理解这些的关键是让一部分自然语言直接进入程序，即在形式语言中渗入一些自然语言。自然语言的特点就是它具有模糊性，带有模糊性的语言，也就是模糊语言，而未来的算法语言就是这样的。目前已经配制成功的 FSTDS 系统语言，就是具有一定模糊性的形式语言。

第四节　模糊数学的发展

尽管事物的各种表现或内在属性有其确定性，但是，由于观测手段和科研水平所限，在科学发展的一定阶段上人们对这些属性的认识常带有模糊性，为了描述并分析自然界及人类社会中的各种模糊事物，人们就要探索能表现事物模糊性的新的数学工具。

1965 年，美国自动控制专家加里福尼亚大学教授查德在他第一篇论文《模糊集合》（Fuzzysets）中，引人了“隶属函数”这个概念，来描述差异的中间过渡，这是精确性对模糊性的一种逼近，因而他首次成功地运用了数学方法描述

模糊概念，这是一个开创性的有意义的工作。模糊数学诞生于1965年，还很年轻。但是在理论研究和实际应用的某些方面已经取得了一些显著成就，研究方向涉及到电子计算机、人工智能、模式识别、控制论、信息论、心理学、电子学、生物学、气象学、地质学等多种学科。它所能解决的实际问题，内容可以涉及到理、工、农、医以及社会科学的很多方面。在一些过去不能应用数学的禁区，由于模糊数学的兴起，也开始使用数学了，这无疑会给这些科学技术部门带来深远的影响。诚然目前这方面还只是一个开端，所能完善解决的问题还不多，但是已经显示出模糊数学是一个很有发展前途的新兴学科。正如模糊数学创始人L.A.查德所预言的那样："在今后十几年里，这门学科必将得到大力发展，也必将在人类知识和科学方法的宝库里占有一席之地。"

模糊数学的发展是跟计算机科学、系统工程（研究大系统的一门学科）和人工智能（用机器模拟人或制造机器人的一门学科）的发展息息相关的。在很久以前，人们就在探索寻求能进行思维和推理的智能机器。这可以追溯到德国数学家莱布尼茨（1646～1716）、英国数学家布尔以及计算机科学的先驱者英国数学家巴贝奇（1792～1871）和图灵（1912～1954）等人的工作。但是直到电子计算机发展到能够应付复杂工作的阶段，他们的想法才有可能实现。而计算机在模拟人脑思维的时候，又必须用模糊数学来建立数学模型，这一点不管是自觉的还是不自觉的，都要涉及到隶属函数等模糊数学概念。

模糊数学虽然只有二十来年的历史，从理论上还远远谈不到完善，但是我们决不能苛求一个只有二十来年历史的新学科像古老的学科那样完美。我们现在应该看到它的发展趋

势，这可以从全世界有关模糊数学的论文总数统计看出来：1965 年，2 篇；1968 年，22 篇；1970 年，69 篇；1972 年，169 篇；1974 年，395 篇；1976 年，522 篇；1980 年，1500 篇（其中博士论文 200 篇）；到 1984 年大约有 4000～8000 篇。论文涉及面是十分广泛的，它不仅使数学的其他分支迅速"模糊化"（也就是按模糊数学的观点来改造这个数学分支），同时它的应用触角也涉及到国民经济的各个领域，如心理学、生物学、化学、物理学、气象学、电子学、计算机科学、控制论、信息论等等，特别是那些过去不能应用数学的学科，应用了模糊数学之后都取得了显著的成果。就拿电子计算机诊病来说吧，采用模糊数学作为模型编制程序以后，治疗效率有的竟达 97% 以上，甚至于超过名医本人，这倒不是说计算机比人更聪明了，而是它"学习"了名医的经验以后，能严格、精确地开出处方。医师本人还有疏忽和遗忘的时候，而电子计算机却永远不会疏忽和遗忘。

模糊数学的渗透力是非常强的，各行各业似乎都或多或少地应用它，这种事例也是非常多的，例如天气预防和石油生产等等。有些已经参加工作的青年读者也许没有可能在短时期里接触比较高深的模糊数学理论，但是这也不影响把这门新学科应用到自己的工作上去，因为深奥的理论固然有用，但是在很多具体的事例中，却是凭经验选定隶属函数，再经过简单的运算就能基本解决实际问题。这也正是模糊数学的特点，它能使人花比较少的精力而获得足够的信息。

由于当代科学技术既高度分化又高度综合，庞大的科学体系已经成为多层次多系列的一个整体结构，模糊数学就是研究这种整体结构而又高度分化的一个有力工具，因此它必将有广阔的应用前景。周恩来同志青年时代写的《雨中岚山

——日本京都》一诗里有这样的诗句：

潇潇雨，雾蒙浓；
一线阳光穿云出，愈见姣妍。
人间的万象真理，愈求愈模糊；
——模糊中偶然见着一点光明，
真愈觉姣妍。

这正是对模糊数学最好的注解！

第二章　应用前的准备知识

第一节　普通集合

集合论是现代数学的基础。具有某种特定属性的对象的全体，叫做集合。例如地球上的全部建筑、建筑物的各个组成部分、太阳系的行星、某个班级的学生、某本书里的所有字、某张桌子上的所有物品等等都是集合。每个集合里通常都包含有若干个体。集合里所含有的个体，称为集合中的元素（简称为元）。例如，地球是太阳系行星集合中的一个元素，墨水、茶杯、书、台灯……等，都是“桌上物品”这一集合中的元素，分部分项工程就是“单位建筑工程”这一集合中的元素。同一集合中的元素都具有某种共同的性质，人们就是根据这种性质，来判断某一讨论范围内的事物是否属于该集合。

客观事物，浩如烟海，千头万绪。但是我们在考虑一个具体问题时，总是把议题局限在某一个范围内。例如需讨论“男子”这一概念，不必去考虑那些风马牛不相及的事物，不必去考察一块石头或一片云霞，我们可以把自己的议题首先限制在“人”这样一个范围内，把所有的人作为讨论对象，然后再从“人”这个概念里考虑什么是“学生”，什么是“青年”。这种被讨论的全体对象就叫做“论域”，常用大写字母 E、U 等表示。论域里的每个对象都叫“元素”，常

用小写字母 a、b、x、y 等表示。设给定论域 U，由 U 里一部分元素所组成的整体，叫做 U 里的一个“集合”，也简称“集”，常用大写字母 A、B、C 等表示。在上举的例子里，“人”就可以作为一个论域，具体的某些人如张小明、李小华、王豪、赵杰等等就是元素，而学生、青年就是人这个论域里的两个集合。如果张小明、李小华是中学生，王豪、赵杰是青年工人，那么这四个人都属于青年这一集合，而只有张小明、李小华同时又属于学生这一集合。

在 U 里任意给定一个元素 u，并且任意给定一个集合 A，当 u 属于 A 的时候，记作 $u \in A$，当 u 不属于 A 的时候，记作 $u \notin A$。u 要么属于 A，要么不属于 A，二者必居其一，而且只居其一，这是普通集合论里的起码要求。

集合的表示方法有三种。把一个集合的元素全部列出，并用花括号括起的方法，叫做列举法，例如：

中国的省市＝{北京，天津，上海，武汉，重庆，四川，
湖北，江西，江苏，浙江、昆明，……}

单位建筑工程＝{基础工程、砌筑工程，屋面工程，地
面工程，装饰工程，吊装工程，……}

如果一个集合中有许多元素，或者有无限多个元素，用列举法就不行了，这时可用定义法来代替，所谓定义法，就是用构成集合的定义来表示集合，也就是用集合中元素的共性来描述集合，例如，对于集合 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$，我们可定义 A 为小于 10 的奇数，于是 A 便可表示为：

$$A = \{x \mid x \text{ 为奇数}, x < 10\}$$

花括号中的 x 代表构成集合的各元素，一竖的右边表示构成这一集合的定义，也即 x 所具备的特性。这一竖有时也可用冒号代替，如

$$A = \{x : x \text{ 为奇数}, x < 10\}$$

又如设论域是全世界的人，记作 U，那么就可以把所有 20 岁以下的人组成的集合记作：

$$A = \{u \mid u \in U, u \text{ 是 20 岁以下的人}\}。$$

类似地，全体身高 1.75 米的人所组成的集合记作：

$$B = \{u \mid u \in U, u \text{ 是身高 1.75 米的人}\}。$$

同理，所有 15 岁的男孩的集合记作：

$$C = \{u \mid u \in U, u \text{ 是 15 岁的男孩}\}。$$

由上面的例子可以看到，集合 C（15 岁的男孩）实际上是集合 A（20 岁以下的人）的一部分，我们把 C 叫做 A 的一个“子集”，记作 $C \subseteq A$。

也有这样的集合，按要求的条件，集合里不包含任何元素，例如，把一生下来就能说话的人所组成的集合记作：

$$D = \{u \mid u \in U, u \text{ 是一生下来就能说话的人}\}。$$

事实上没有一个人一生下来就能说话，所以集合 D 不包含任何元素，这样的集合叫做“空集”，用符号 ϕ 表示。

也有这样的集合，按要求的条件，集合里包含论域里的所有元素，例如，以活着的人作为论域 U，而且把能呼吸和进行新陈代谢的人所组成的集合记作：

$E = \{u \mid u \in U$，u 是能呼吸和进行新陈代谢的人$\}$，因为所有活着的人都能呼吸和进行新陈代谢，所以集合 E 包含论域 U 里的所有元素，这样的集合叫做“全集”。

按照子集的定义：假定 A 和 B 都是集合，B 的每个元素都是 A 的元素，那么把 B 叫做 A 的子集。所以全集和空集也可以看成是一个集合的子集。说全集是某一个集合的子集，就是 $A \subseteq A$。至于空集可以说是任何集合的子集，就是说，对任意集合 A，都包含空集 ϕ 作为 A 的一个子集。

假定 A 和 B 都是集合，如果凡属于 A 的元素也一定属于 B，而且凡属于 B 的元素也一定属于 A，那么就说 A 和 B 两个集合是相等的，记作 $A=B$。就是说，如果 $A\subseteq B$ 和 $B\subseteq A$ 同时成立，那么 $A=B$。如果不符合上面所说的条件，就说两个集合 A 和 B 不相等，记作 $A\neq B$。

如果 $B\subseteq A$ 而 $B\neq A$，那么就说 B 是 A 的一个真子集，记作 $B\subset A$。

关于集合，可以用图来表示，这种图叫凡恩图。方块表示论域 E（也可以看作是全集），集合 A、B 用圆圈表示（如图 2-1、图 2-2）。

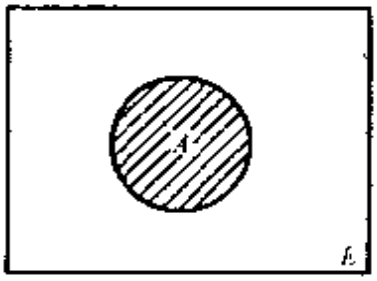


图 2-1　$A\subset E$ 的凡恩图

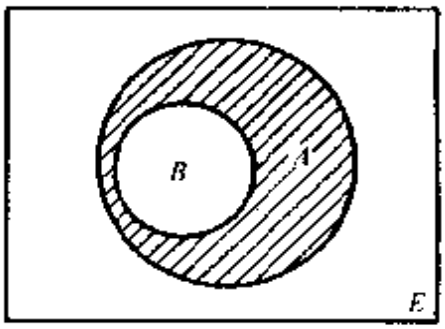


图 2-2　$B\subset A\subset E$ 的凡恩图

凡恩图是表示集合和它们之间关系的一种很直观易懂的图示法。右上图表示任意集合 A，显然它是包含在论域 E 里的，就是 $A\subset E$。左下图表示 B 是 A 的真子集，显然从图上可以看出：

$$B\subset A\subset E$$

除了列举法与定义法之外，一个集合还可以用特征函数 χ 来表示，χ 为希腊字母，读作“喜”，特征函数 χ 可表示 x 是否属于集合 A：若 $x\in A$，则 $\chi_A(x)=1$，若 $x\notin A$，

则 $\chi_A(x) = 0$。对 U 的子集 A 而言，由

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1(x \in A) \\ 0(x \notin A) \end{cases}$$

所定义的函数 $\chi_A(x)$ 称为 A 的特征函数。

通过各元素的特征函数与集合 $\{0, 1\}$ 中的各元素一一对应，就能清楚地勾划出一个集合。例如，一个工人小组共有六人，记作 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6，在这一论域中，“技工”与“辅工”集合可分别表示为：

$$\text{技工} = 0/x_1 + 1/x_2 + 0/x_3 + 1/x_4 + 1/x_5 + 1/x_6$$

$$\text{辅工} = 1/x_1 + 0/x_2 + 1/x_3 + 0/x_4 + 0/x_5 + 0/x_6$$

这里值得注意的是：式中的加号并非相加，仅借用表示列举，每项分式也并不表示相除，分母表示元素的名称，分子为该元素对应的特征函数值。

某工学院 = {机械系、土建系、电机系、化工系、食品系}

土建系 = {工民建专业、建筑学专业、水工专业、给排水专业}

工民建专业 = {工民建 83 级、工民建 84 级、工民建 85 级、工民建 86 级}

工民建 83 级 = {工民建 83 - 1 班、工民建 83 - 2 班、工民建 83 - 3 班}

显然，某工学院集合包含了土建系集合，也包含了工民建专业集合和工民建 83 级集合等，因为后者的元素全部都能在“某工学院”集合中找到。如果 B 集合的元素全部都能在 A 集合中找到，B 集合便称为 A 集合的子集合（简称子集），可用符号记为：

$$B \subset A$$

集合 B 作为集合 A 的子集的充分必要条件是：如果在 B 中任取一元素 x，此元素必定同时属于集合 A。如以符号

“$\forall_x$”表示“任意每一个x”，则上述条件可以表示为：

若$\forall_x \in B$都有$x \in A$，则$B \subset A$。

$B \subset A$也可写作$A \supset B$，读作A包含B，或B被A包含。

一个集合不是另一个集合的子集时，可用符号$\not\subset$表示，例如：$C \not\subset D$，$B \not\subset D$。

第二节　模糊子集及其运算

以上介绍了建立集合的概念。如果我们对周围的一切细加考察的话，就不难发现，上述集合的概念，还不能概括所有的事物。因为集合论中，一事物要么属于集合，要么就不属于，这里没有模棱两可的情况。然而在现实生活中，却充满了模糊事物、模糊概念。

我们知道，在思维中每一个概念都有一定的外延与内涵。所谓外延就是指适合于那个概念的一切对象。符合某个概念的那些对象的全体，叫做该概念的外延。所有的人组成“人”这个概念的外延。外延，实际上就是一个集合。人脑中概念的形成，实际上总要涉及到集合论。我们在说到某个概念的外延时，总离不开一定的论域。而概念的内涵则是外延包括的一切对象具有的本质属性。外延限定了概念的内涵：凡人所共有而非人便不具有的特性，便是“人”这一概念的本质属性。这样，内涵就是集合的定义，外延则是组成该集合的所有元素。

在人们的思维中，有着许多模糊的概念。语言是思维的外壳，在语言中有许多表现模糊概念的词，例如：年轻、暖和、胖、响、粉红、明亮、现在、傍晚……等等。对于这些

模糊的概念。由于它没有明确的内涵和外延，所以无法用普通集合来加以描述，也就是说，在这样的集合中，一元素是否属于某集合，不能简单地用“是”或“否”来回答，这里有一个渐变的过程。例如“男子”集合与“女子”集合都具有清晰的内涵和外延，我们可以在人群中很容易地进行划分。然而，“高个子”集合和“老年人”集合的边界就不那么明确了。为了对这两类不同的集合加以区别，前者叫做普通集合（或经典集合），后者叫做模糊集合，可用大写字母下添加波浪线表示，如 $\underset{\sim}{A}$ 就是表示模糊集合。

那么，该怎样来描述一个模糊集合呢？

在前面，我们曾经介绍过三种表示普通集合的方法。其中第三种方法利用了特征函数 $\chi_A(x)$。如 $\chi_A(x_1)=1$，说明元素 x_1 属于集合 A；如 $\chi_B(x_1)=0$，表明 x_1 不属于集合 B。在普通集合论中，特征函数值只取 0 和 1 两个值就已足够，也就是说，特征函数与集合 $\{0, 1\}$ 相对应。

在描述一个模糊集合时，我们可以在普通集合的基础上，把特征函数的取值范围从集合 $\{0, 1\}$ 扩大到在 $[0, 1]$ 区间连续取值，这样一来，我们就能借助经典数学这一工具，来定量地描述模糊集合。

为了将普通集合与模糊集合加以区别，我们把模糊集合的特征函数称为从属函数或隶属函数，记作 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$。$\mu$ 是个希腊字母，读作“米尤”。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 表示元素 x 属于模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的程度或“资格”。由于 μ 可在 $[0, 1]$ 区间连续取值，所以很适合表现元素属于某一模糊集合的种种暧昧状态。$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近 1，表示 x 从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度很高；$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 的值接近于 0，表示 x 从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度很低。即隶

属函数 $\underset{\sim}{\mu}(x)$ 满足：$0 \leqslant \underset{\sim}{\mu}(x) \leqslant 1$ 也可记作 $\underset{\sim}{\mu}(x) \in [0, 1]$。

普通集合只能表现确切概念，要表示模糊概念，需要模糊集合。论域元素总是分明的，而只有 X 的子集 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 等才是模糊的，所以模糊集合通常是指模糊子集合。在不易混淆的场合，模糊子集简称模糊集。

模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 完全由其隶属函数所刻划。特别当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 的值域取 $[0, 1]$ 用区间的两个端点，亦即 $\{0, 1\}$ 两个值时，$\underset{\sim}{A}$ 便退化为一个普通子集，隶属函数也就退化为特征函数，由此可见普通集合是模糊集合的特殊情况，而模糊集合是普通集合概念的推广。

前面讲过，一个普通集合的“内涵”和“外延”都必须是明确的；但是在日常生活里有许多概念都没有明确的外延，例如“大胡子”、“好天气”等等，这些概念叫模糊概念。又如以人的年龄作为论域，取 $U = [0, 120]$，以岁作为单位，那么“年轻”、“中年”、“年老”都没有明确的外延。或者以人的身材高矮作为论域，那么“高个子”、“中等身材”、“矮个子”也没有明确的外延。再如以光的颜色（波长）作为论域，那么“黄色”、“浅红色”等等也没有明确的外延。所以这些都是模糊概念。

模糊概念不能用普通集合来描述，这主要是因为不能绝对地区别“属于”或“不属于”，而只能问属于的程度是多少，就是论域上的元素符合概念的程度不是绝对的 0 或 1，而是介于 0 和 1 之间的一个实数。

假设给定有限论域 $U = \{a_1, a_2 \cdots\cdots a_n\}$，它的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 可以用查德给出的表示法：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_1)}{a_1}+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_2)}{a_2}+\cdots+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i)}{a_i}+\cdots+\frac{\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_n)}{a_n}$$

这是 $a_i\in U$，是论域 U 里的元素，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i)$ 是 a_i 对 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数。这里 $i=1, 2, \cdots n$，而且

$$0\leqslant\mu_{\underset{\sim}{A}}(a_i)\leqslant 1。$$

要特别声明一点，上面的表达式是表示一个有 n 个元素的模糊子集，式子里“+”号叫“查德记号”决不是分式求和，这点要千万注意！

先看这样一个例子：

设论域 $E=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.3}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0.2}{x_4},$$

$$\underset{\sim}{B}=\frac{0.2}{x_1}+\frac{0}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}+\frac{1}{x_4},$$

意思就是 x_1、x_2、x_3、x_4 对模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度分别是 0.5、0.3、0.4、0.2，x_1、x_2、x_3、x_4 对模糊子集 $\underset{\sim}{B}$ 的隶属度分别是 0.2、0、0.6、1。

那么

$$\begin{aligned}\overline{\underset{\sim}{A}}&=\frac{1-0.5}{x_1}+\frac{1-0.3}{x_2}+\frac{1-0.4}{x_3}+\frac{1-0.2}{x_4}\\&=\frac{0.5}{x_1}+\frac{0.7}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}+\frac{0.8}{x_4},\\\underset{\sim}{B}&=\frac{1-0.2}{x_1}+\frac{1-0}{x_2}+\frac{1-0.6}{x_3}+\frac{1-1}{x_4}\\&=\frac{0.8}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.4}{x_3}+\frac{0}{x_4},\end{aligned}$$

意思就是 x_1、x_2、x_3、x_4 对 $\underset{\sim}{A}$ 的补集 $\overline{\underset{\sim}{A}}$ 的隶属度分别是 0.5、0.7、0.6、0.8；x_1、x_2、x_3、x_4 对 $\underset{\sim}{B}$ 的补集 $\overline{\underset{\sim}{B}}$ 的隶

属度分别是0.8、1、0.4、0。

在模糊子集的运算中，我们还利用命题演算中的“或”符号“∨”和“与”符号“∧”，把这两个符号推广，分别用来表示“取最大值”和“取最小值”。因此，我们还可以得到

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \frac{0.5 \vee 0.2}{x_1} + \frac{0.3 \vee 0}{x_2} + \frac{0.4 \vee 0.6}{x_3} + \frac{0.2 \vee 1}{x_4}$$

$$= \frac{0.5}{x_1} + \frac{0.3}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{1}{x_4},$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \frac{0.5 \wedge 0.2}{x_1} + \frac{0.3 \wedge 0}{x_2} + \frac{0.4 \wedge 0.6}{x_3} + \frac{0.2 \wedge 1}{x_4}$$

$$= \frac{0.2}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{0.2}{x_4}。$$

同样的道理可以计算 $\overline{\underset{\sim}{A}} \cup \underset{\sim}{B}$、$\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \underset{\sim}{B}$ 等等，这里就不细说了。你如果有兴趣，可以自己作些练习。

我们再来看一个实例：

设以人的岁数作为论域 $U = [0, 120]$，单位是“岁”，那么“年轻”、“年老”都是 U 上的模糊子集，它们的隶属函数如下：

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) = \text{“年轻”}(u) = \begin{cases} 1 & (0 < u \leqslant 25), \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} & (25 < u < 120); \end{cases}$$

$$\mu_{\underset{\sim}{B}}(u) = \text{“年老”}(u) = \begin{cases} 0 & (0 < u \leqslant 50), \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^2\right]^{-1} & (50 < u < 120)。 \end{cases}$$

上面第一式的意思是说：不大于25岁的人，对子集“年轻”的隶属函数值是1（就是一定属于这一子集）；而大于25岁的人，对子集“年轻”的隶属函数值按 $\left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1}$

来计算，例如 40 岁的人，隶属函数值

$$\mu_{\tilde{A}}(u_{40}) = \left[1 + \left(\frac{40-25}{5}\right)^2\right]^{-1} = 0.1。$$

上面第二式的意思是说：小于或等于 50 岁的人，对子集“年老”的隶属函数值是 0（就是一定不属于这一子集）；而大于 50 岁的人，对子集“年老”的隶属函数值按 $\left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}$ 来计算，例如 55 岁的人和 60 岁的人，对子集“年老”的函属函数值分别是

$$\mu_B(u_{55}) = \left[1 + \left(\frac{55-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = 0.5,$$

$$\mu_B(u_{60}) = \left[1 + \left(\frac{60-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} = 0.8。$$

应该指出：模糊子集的隶属函数值的确定通常是根据经验或统计，常常带有主观性。但是，有些隶属函数的计算公式，像上面的“年轻”、“年老”等，往往被大家所接受。我们在后面还要有专节对这个问题作些说明。

根据上面的规定，可以画出这两个模糊子集的隶属函数图（如图 2-3）。

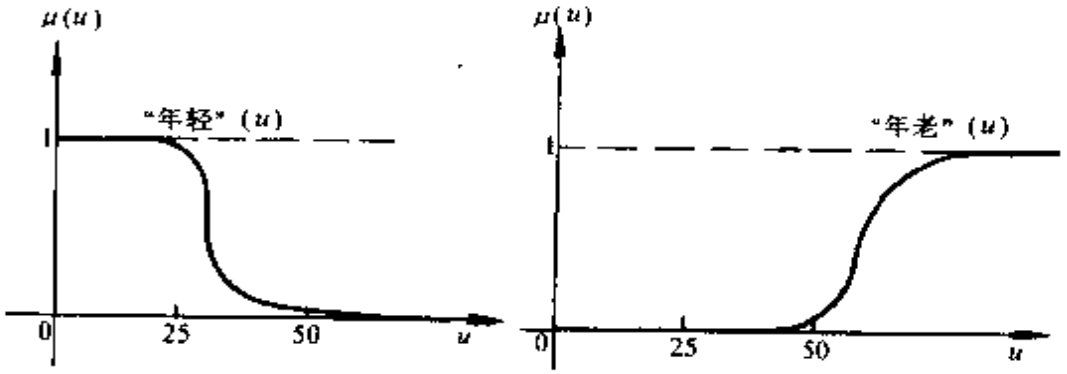
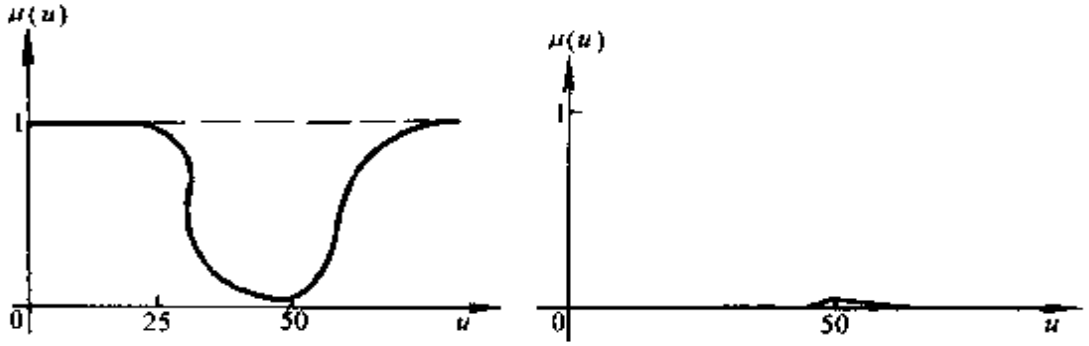


图 2-3　“年轻”、“年老”两个模糊子集的隶属函数图

我们还可以用图表示并集和交集（如图 2-4）。交集 $\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$ 的意思，就是某种程度属于子集“年轻”而某种程度属于子集“年老”的那一批人。



$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，表示“年轻”或“年老”。

$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，表示某种程度属于“年轻”，某种程度属于“年老”。

图 2-4

另外，$\overline{\underset{\sim}{A}}$ 表示“不年轻”，$\overline{\underset{\sim}{B}}$ 表示“不年老”。它们的图示可以按 $1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 和 $1 - \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)$ 画出，这里从略。而“不年轻”并且“不年老”，也就是“中年”，它可以用 $\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$ 来表示，（如图 2-5）。

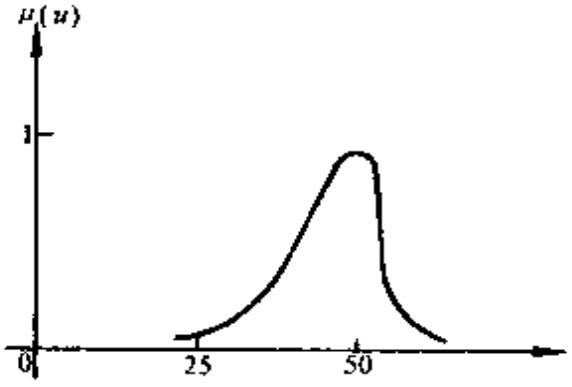


图 2-5 $\overline{\underset{\sim}{A}} \cap \overline{\underset{\sim}{B}}$，表示“中年”。

同理可算得“年老”、“年轻”的隶属函数值见表 2-1、表 2-2

表 2-1

u	0	50	55	60	70	80
$\mu_{年老}(u)$	0	0	0.5	0.8	0.94	0.97

表 2-2

u	0	25	28	30	40	50
$\mu_{年轻}(u)$	1	1	0.74	0.5	0.1	0.04

若以“老年人”为例，把 55 岁代入公式计算，便可得知 55 岁的人属于“老”的资格为 0.5；而 60 岁的人属于“老年人”的程度为 0.8……以此类推，这样一来，我们就能对本来是模糊的语言加以定量的刻划。

在对模糊概念进行定量刻划的基础上，我们还能把“否定”、连接词“或”、“与”以及程度副词“极”、“很”、“相当”、“比较”、“有点儿”、“稍微有点”等定义为对从属函数进行某种运算，这样一来，由模糊概念跟这些否定词、连接词、程度副词构成的派生词，也能用从属函数来加以定量刻划。这里，被定义了某种运算法则的否定词、连接词、程度副词，就叫做“模糊算子”。

模糊算子的运算规则定义如下：

否定词“非”的从属函数

$$\mu_{非A} = 1 - \mu_A$$

连接词“或”的从属函数

$$\mu_{A或B} = \mu_A \vee \mu_B$$

连接词“与”（“且”）的从属函数

$$\mu_{A与B} = \mu_A \wedge \mu_B$$

$$\mu_{A且B} = \mu_A \wedge \mu_B$$

程度副词“极”、“很”、“相当”、“比较”、“有点儿”、“稍微有点”的从属函数

$$\mu_{极A} = (\mu_A)^4$$

$$\mu_{很A} = (\mu_A)^2$$

$$\mu_{相当A} = (\mu_A)^{1.25}$$

$$\mu_{比较A} = (\mu_A)^{0.75}$$

$$\mu_{有点A} = (\mu_A)^{0.5}$$

$$\mu_{稍微有点A} = (\mu_A)^{0.25}$$

例如，一位60岁的人属于“老年人”的从属函数值为0.8，那么，他属于“不老的人”这一新模糊集合的从属函数值则为$1-0.8=0.2$；而属于“很老的人”的从属程度为$(0.8)^2 = 0.64$；属于“有点老”的程度则为$(0.8)^{0.5} = \sqrt{0.8} \doteq 0.9$，以此类推。

再譬如，某人属于“高个子”的程度为0.9，而属于“胖子”的程度只有0.4，那么，他属于“高个子或者胖子”的程度为

$$0.9 \vee 0.4 = 0.9;$$

而属于“高而且胖”的程度就只有

$$0.9 \wedge 0.4 = 0.4。$$

模糊集的代数运算

1. 代数和$\underset{\sim}{A} + \underset{\sim}{B}$，定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}}(x) = (\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) \wedge 1$$

当$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) > 1$时，取值1

2. 环和$\underset{\sim}{A} \oplus \underset{\sim}{B}$，定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) + \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

3. 代数积 $\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$，定义为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}}(x)=\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)\cdot\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

4. 绝对差$|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|$，定义为

$$\mu_{|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|}(x)=|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)-\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)|$$

例　设 $\underset{\sim}{A}=\dfrac{0.3}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\dfrac{0.5}{x_3}$，$\underset{\sim}{B}=\dfrac{0.6}{x_1}+\dfrac{0.2}{x_3}$，求 $\underset{\sim}{A}+\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}$，$|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|$。

解：$$\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}=\frac{0.3+0.6}{x_1}+\frac{1+0}{x_2}+\frac{0.5+0.2}{x_3}$$

$$=\frac{0.9}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.7}{x_3},$$

$$\underset{\sim}{A}\oplus\underset{\sim}{B}=\frac{0.3+0.6-0.3\times0.6}{x_1}+\frac{1+0}{x_2}$$

$$+\frac{0.5+0.2-0.5\times0.2}{x_3}=\frac{0.72}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.6}{x_3}$$

$$\underset{\sim}{A}\cdot\underset{\sim}{B}=\frac{0.3\times0.6}{x_1}+\frac{1\times0}{x_2}+\frac{0.5\times0.2}{x_3}$$

$$=\frac{0.18}{x_1}+\frac{0.1}{x_3},$$

$$|\underset{\sim}{A}-\underset{\sim}{B}|=\frac{|0.3-0.6|}{x_1}+\frac{|1-0|}{x_2}+\frac{|0.5-0.2|}{x_3}$$

$$=\frac{0.3}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{0.3}{x_3}。$$

第三节　λ 截集和支集

为了研究模糊数学的应用，还引进了两个重要的概念：一个叫 λ 截集，一个叫支集。

我们现在先从一个实例谈起。

假如某医生今天给五个发烧病人看病，设这五个病人是$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，他们的体温依次是38.9℃、37.2℃、37.8℃、39.2℃、38.1℃，医生在统计表上就可以这样写：

37℃以上的五人$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$，

38℃以上的三人$\{x_1, x_4, x_5\}$，

39℃以上的一人$\{x_4\}$。

如果规定37.5℃以下的不算发烧，问有多少发烧病人？医生就可以回答：

$$\{x_1, x_3, x_4, x_5\}。$$

但是所谓“发烧”实际上是一个模糊概念，它存在程度上的不同，也就是说要用隶属函数来描述。如果根据医师的经验规定，对“发烧”来说：

体温39℃以上的隶属函数$\mu(x) = 1$；

体温38.5℃以上不到39℃的，隶属函数$\mu(x) = 0.9$；

体温38℃以上不到38.5℃的，隶属函数$\mu(x) = 0.7$；

体温37.5℃以上不到38℃的，隶属函数$\mu(x) = 0.4$；

体温37.5℃以下的，不算发烧，隶属函数是0。

我们就可以用模糊集合来处理这个问题。用$\underset{\sim}{A}$表示“发烧”这一模糊子集，那么

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.9}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{0.4}{x_3} + \frac{1}{x_4} + \frac{0.7}{x_5}。$$

现在如果我们问：隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant 0.9$的有哪些人？用$A_{0.9}$来表示这一集合，这是一个普通集合，我们就有

$$A_{0.9} = \{x_1, x_4\}$$

同样，如果用$A_{0.8}$、$A_{0.6}$、$A_{0.4}$分别表示$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant$

0.8、$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant 0.6$、$\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant 0.4$ 的普通集合，我们有

$$A_{0.8} = \{x_1, x_4\},$$

$$A_{0.6} = \{x_1, x_4, x_5\},$$

$$A_{0.4} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}。$$

一般地，我们用 A_λ 表示 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \lambda$ 的集合，这个集合就叫 λ 截集，也叫 λ 水平集。

现在我们可以给 λ 截集下这样一个定义：设 $\underset{\sim}{A}$ 是论域 X 上的模糊子集，而 $A_\lambda = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \geqslant \lambda, x \in X\}$，就把 A_λ 叫做模糊集 A 的 λ 截集。这里 A_λ 是一个普通集合，$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$。

我们一开头不是问一共有多少发烧病人吗？这其实是问 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0$ 的集合，而这个集合也就是所有 $\lambda > 0$ 的 λ 截集的并集，这个并集就叫做 $\underset{\sim}{A}$ 的支集，可以用 A_0^+ 表示，就是

$$\underset{\sim}{A}_0^+ = \bigcup A_\lambda = \{x \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0, x \in X\}。$$

$\underset{\sim}{A}_0^+$ 也有的书上记作 $\mathrm{supp}\underset{\sim}{A}$[1]。$\bigcup A_\lambda$ 就是表示所有 $\lambda > 0$ 的 λ 截集的并集的意思。

对于发烧病人的例子，$\underset{\sim}{A}$ 的支集就正是

$$\mathrm{supp}\underset{\sim}{A} = \{x_1, x_3, x_4, x_5\},$$

就是所有算作“发烧”的病人全体所构成的集合。

下面我们再举一个例子：

设论域 $U = \{a, b, c, d, e, f\}$，

---

[1] “supp”是英文 support 的缩写，support 的意思是支柱。

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{a} + \frac{0.3}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.9}{d} + \frac{0}{e} + \frac{0.1}{f},$$

$$A_{0.1} = \{a, b, c, d, f\},$$

$$A_{0.3} = \{a, b, c, d\},$$

$$A_{0.6} = \{a, c, d\},$$

$$A_{0.9} = \{a, d\},$$

$$A_1 = \{a\},$$

$$\mathrm{supp}\underset{\sim}{A} = \{a, b, c, d, f\}。$$

以后为简便起见，$\underset{\sim}{A}$ 的支集以外的元素可以略去不写，就是说，

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{a} + \frac{0.3}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.9}{d} + \frac{0}{e} + \frac{0.1}{f},$$

可以略写作

$$\underset{\sim}{A} = \frac{1}{a} + \frac{0.3}{b} + \frac{0.6}{c} + \frac{0.9}{d} + \frac{0.1}{f}。$$

当 $\lambda = 1$，A_1 也叫做 $\underset{\sim}{A}$ 的“核”。如果 $\underset{\sim}{A}$ 的核 $A_1 \neq \phi$（就是 $\underset{\sim}{A}$ 的核不是空集），那么我们说模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 是“正规的”。

查德提出模糊集合的概念，把模糊集合的交并等运算定义为逐元对隶属度进行 min($\wedge$) 和 max($\vee$) 的运算。

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(x) = \min(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(x) = \max(\mu_{\underset{\sim}{A}}(x), \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$$

这是很大的成功，至今有关模糊数学的文献中绝大多数都是用 $\wedge$、$\vee$ 运算进行分析的。

又设论域：

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$\underset{\sim}{A} = 0.2/x_1 + 0.7/x_2 + 1/x_3 + 0.5/x_5$$

$$\underset{\sim}{B} = 0.5/x_1 + 0.3/x_2 + 0.1/x_4 + 0.7/x_5$$

则

$$\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B} = \frac{0.2 \vee 0.5}{x_1} + \frac{0.7 \vee 0.3}{x_2} + \frac{1 \vee 0}{x_3} + \frac{0 \vee 0.1}{x_4} + \frac{0.5 \vee 0.7}{x_5}$$

$$= 0.5/x_1 + 0.7/x_2 + 1/x_3 + 0.1/x_4 + 0.7/x_5$$

$$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B} = \frac{0.2 \wedge 0.5}{x_1} + \frac{0.7 \wedge 0.3}{x_2} + \frac{1 \wedge 0}{x_3} + \frac{0 \wedge 0.1}{x_4} + \frac{0.5 \wedge 0.7}{x_5}$$

$$= 0.2/x_1 + 0.3/x_2 + 0.5/x_5$$

给出运算公式：

$$\mu_{\underset{\sim}{k}}(z) = \bigvee_{z=x*y} (\mu_{\underset{\sim}{1}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{J}}(y))$$

设给出模糊数：

$$\underset{\sim}{I} = \frac{1}{1} + \frac{0.1}{2}$$

$$\underset{\sim}{J} = \frac{0.1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{0.8}{3}$$

$$\underset{\sim}{K} = \frac{0.9}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.9}{5}$$

此处 $\underset{\sim}{I}$、$\underset{\sim}{J}$、$\underset{\sim}{K}$ 均用查德记号表示，因 $\underset{\sim}{I}$ 的峰值在 1，俗称“$\underset{\sim}{1}$”并读作“模糊 1”。同理 $\underset{\sim}{J}$、$\underset{\sim}{K}$ 分别记作“$\underset{\sim}{2}$”和“$\underset{\sim}{4}$”，并读作“模糊 2”和“模糊 4”。

现在需要计算 $\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{K} = ?$

根据加法结合律，我们先计算 $\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J}$，由上面公式，因

$\underset{\sim}{I}$ 有两项，$\underset{\sim}{J}$ 有三项，配搭起来共有 2×3 项，抽象运算“$*$”在此时是“$+$”组合结果为：

$$\frac{1\wedge0.1}{1+1}+\frac{1\wedge1}{1+2}+\frac{1\wedge0.8}{1+3}$$

（$\underset{\sim}{I}$ 中第一项配 $\underset{\sim}{J}$ 中各项）

$$\frac{0.1\wedge0.1}{2+1}+\frac{0.1\wedge1}{2+2}+\frac{0.1\wedge0.8}{2+3}$$

（$\underset{\sim}{I}$ 中第二项配 $\underset{\sim}{J}$ 中各项）

在上式中，分母中“$+$”是数的加法，而连接两项“$+$”是查德记号，“$\wedge$”为取最小值。

将上式化简得

$$\frac{0.1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}$$

$$\frac{0.1}{3}+\frac{0.1}{4}+\frac{0.1}{5}$$

再对“分母”相同各项取隶属度最大值，（即进行“$\underset{x=x*y}{\vee}$”运算）则得：

$$\underset{\sim}{I}+\underset{\sim}{J}=\frac{0.1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.1}{5}$$

其峰值在 3，可理解为 $\underset{\sim}{1}+\underset{\sim}{2}=\underset{\sim}{3}$，这是符合对普通数加法的习惯，将 $\underset{\sim}{I}+\underset{\sim}{J}$ 记作 $\underset{\sim}{3}$，再与 $\underset{\sim}{K}$ 作加法运算，即求：

$\underset{\sim}{3}+\underset{\sim}{K}=?$ 根据交换律 $\underset{\sim}{3}+\underset{\sim}{K}=\underset{\sim}{K}+\underset{\sim}{3}$，仿前面 $\underset{\sim}{3}$ 此时有四项，K 有三项，搭配起来共有 $4\times3=12$ 项，具体如下：

$\underset{\sim}{K}$ 中第一项配 $\underset{\sim}{3}$ 中各项：

$$\frac{0.9\wedge0.1}{3+2}+\frac{0.9\wedge1}{3+3}+\frac{0.8\wedge0.8}{3+4}+\frac{0.9\wedge0.1}{3+5}$$

$\underset{\sim}{K}$ 中第二项配 $\underset{\sim}{3}$ 中各项：

$$\frac{1 \wedge 0.1}{4+2} + \frac{1 \wedge 1}{4+3} + \frac{1 \wedge 0.8}{4+4} + \frac{1 \wedge 0.1}{4+5}$$

$\underset{\sim}{K}$ 中第三项配 $\underset{\sim}{3}$ 中各项：

$$\frac{0.9 \wedge 0.1}{5+2} + \frac{0.9 \wedge 1}{5+3} + \frac{0.9 \wedge 0.8}{5+4} + \frac{0.9 \wedge 0.1}{5+5}$$

化简后得：

$$0.1/5 + 0.9/6 + 0.8/7 + 0.1/8$$
$$0.1/6 + 1/7 + 0.8/8 + 0.1/9$$
$$0.1/7 + 0.9/8 + 0.8/9 + 0.1/10$$

再对“分母”相同的项，按最大运算“∨”进行，则得：

$$\underset{\sim}{3} + \underset{\sim}{K} = 0.1/5 + 0.9/6 + 1/7 + 0.9/8 + 0.8/9 + 0.1/10$$

其峰值在 7，亦即 $\underset{\sim}{3} + \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{3} + \underset{\sim}{4} = \underset{\sim}{7}$。所以 $\underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{7}$。

以上是按公式：

$$\mu_{\underset{\sim}{K}}(Z) \underset{z=x*y}{=} \vee (\mu_{\underset{\sim}{I}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{J}}(y))$$

进行运算的，但在国外文献中，不少情况是把“∧”写为“·”即普通乘法。“∨”换成“+”即普通加法，用 Σ 表示。请看下面。

总的说来，模糊数的算术运算一般有两大类定义，其一是以最大、最小运算为基础的，按照

$$\mu_{\underset{\sim}{K}}(Z) \underset{z=x*y}{=} \vee (\mu_{\underset{\sim}{I}}(x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{J}}(y))$$

为定义的，其中 $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{I} ※ \underset{\sim}{J}$，而抽象运算“※”满足：

$$※ \in \{+, -, \times, \div\}$$

而另一类是以普通的加、乘为基础的，对比上式则有：

$$\mu_{\underset{\sim}{K}}(Z) \underset{z=x*y}{=} \Sigma \mu_{\underset{\sim}{I}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{J}}(y))$$

其中：

$$\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{I} ※ \underset{\sim}{J}$$

$$※ \in \{+, -, \times, \div\}$$

上面运用这种加、乘法则叙述各种类型的模糊整数，但本节只叙述归一化的模糊正整数，设论域为正实数轴 R_+，即 x 轴之 $[0, \infty)$ 区间，先定义模糊 $\underset{\sim}{I}$，亦即“$\underset{\sim}{I}$”

$$\underset{\sim}{I} = 0.1/0 + 0.8/1 + 0.1/2$$

对上式中“分子”表示隶属函数要求必须归一化亦即 $\sum_{i=0}^{\infty} \mu_{\underset{\sim}{I}(i)} = 1$，对上式即为：

$$0.1 + 0.8 + 0.1 = 1$$

由此可以推得 $\underset{\sim}{2}$、$\underset{\sim}{3}$ 等等，具体步骤如下：运用 $\mu_{\underset{\sim}{K}}(z) \underset{Z=x*y}{=} \Sigma \mu_{\underset{\sim}{I}}(x) \cdot \mu_{\underset{\sim}{J}}(y)$，此处 $\underset{\sim}{I} = \underset{\sim}{J} = 0.1/0 + 0.8/1 + 0.1/2$，“$*$”取为普通加法，并用“$+$”表示，求 $\underset{\sim}{2}$ 即计算 $\underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{I}$，仿模糊数算术运算法则，但将“$\wedge$”改为普通乘法，将“$\vee$”改为普通加法，搭配起来共有 $3 \times 3 = 9$ 项，具体详述如下：

第一项和其余三项搭配：

$$\frac{0.1 \times 0.1}{0+0} + \frac{0.1 \times 0.8}{0+1} + \frac{0.1 \times 0.1}{0+2}$$

第二项和其余三项搭配

$$\frac{0.8 \times 0.1}{1+0} + \frac{0.8 \times 0.8}{1+1} + \frac{0.8 \times 0.1}{1+2}$$

第三项和其余三项搭配

$$\frac{0.1 \times 0.1}{2+0} + \frac{0.1 \times 0.8}{2+1} + \frac{0.1 \times 0.1}{2+2}$$

下面各式化简，再把“分母”（即元素）相同者，隶属函数相加：

$$0.01/0 + 0.08/1 + 0.01/2$$
$$0.08/1 + 0.64/2 + 0.08/3$$
$$0.01/2 + 0.08/3 + 0.01/4$$

对应项相加

$$\frac{0.01}{0} + \frac{0.16}{1} + \frac{0.66}{2} + \frac{0.16}{3} + \frac{0.01}{4}$$

这个模糊数的峰值 0.66 在 2、故为 $\underset{\sim}{2}$，亦即：

$$\underset{\sim}{Z} = \frac{0.01}{0} + \frac{0.16}{1} + \frac{0.66}{2} + \frac{0.16}{3} + \frac{0.01}{4}$$

各元素隶属度之和，仍要归一化，亦即：

$$0.01 + 0.16 + 0.66 + 0.16 + 0.01 = 1$$

用类似方法，可推得：

$$\underset{\sim}{3} = \underset{\sim}{2} + \underset{\sim}{1}$$
$$= \frac{0.001}{0} + \frac{0.024}{1} + \frac{0.195}{2} + \frac{0.560}{3} + \frac{0.195}{4}$$
$$+ \frac{0.024}{5} + \frac{0.001}{6}$$

这样定义的 $\underset{\sim}{1}\underset{\sim}{2}\underset{\sim}{3}\cdots\cdots\underset{\sim}{n}\cdots\cdots$称之为“模糊正整数”，如图 2-6，严格地说 $\underset{\sim}{1}$，$\underset{\sim}{2}$，$\underset{\sim}{3}\cdots\cdots$都是离散的几个点，但为明显起见，我们把它连接成曲线。从图中可看出由于归一化的要求，$\underset{\sim}{1}$，

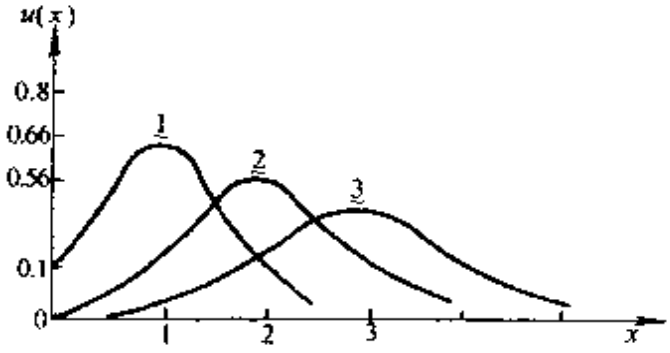


图 2-6　模糊正整数

$\underset{\sim}{2}$，$\underset{\sim}{3}$……的图形随着 n 之增加而越低越宽。

特别设：

$$\underset{\sim}{1} = 1/1$$

亦即 1 的隶属函数为 1，其余都为 0，即可以推得 $\underset{\sim}{2}=1/2$，注意这不是分数，而表示 2 的隶属函数为 1，这样类推下去即得：$\underset{\sim}{1}=1$，$\underset{\sim}{2}=2$，……$\underset{\sim}{n}=n$，即为普通正整数，因此可以说：模糊正整数是普通正整数的推广，而普通正整数是模糊正整数的特例。目前国际上定义的模糊数类型很多，读者有兴趣可找模糊数学理论书籍参考。

第四节　隶属函数的确定

模糊概念是客观事物本质属性在人们头脑中的反映，是人类社会在长期发展过程中约定俗成的东西。模糊性的根源在于客观事物的差异之间存在着中间过渡，存在着亦此亦彼的现象。查德用隶属程度来描述差异的中间过渡，它是用精确的数学语言对模糊性的一种描述。在模糊数学中，我们用一个 0 与 1 之间的数来反映论域中元素从属于模糊集合的程度。隶属函数就是用于这个用途的。

隶属函数的具体确定，确实包含着人脑的加工，其中包含着某种心理过程。归根到底，心里活动也是物质性的。心理学的大量实验表明，人的各种感觉所反应出来的心理量与外界刺激的物理量之间保持相当严格的关系。这些便在客观上对隶属函数进行了某种限定，使得隶属函数是对模糊概念具有客观性的一种量度，这种量度带着主观性，具有一定的客观规律，但是，不能主观任意地捏造。正确地确定隶属函

数，是利用模糊集合恰如其分地定量表现模糊概念的基础。在许多文献、资料、书中提出了确定隶属函数的一般原则和方法，精辟地阐述了这个问题。可是，模糊概念何止万千，确定反映模糊概念的模糊集合的隶属函数，却无法找到统一的途径可循。对同一模糊概念，不同的人往往使用不同的隶属函数。只要隶属函数能反映该模糊概念，尽管形式不同，但在解决处理模糊信息的问题中仍能殊途同归。要正确确定隶属函数，既要深刻认识它反映的模糊概念，又要找到定量反映这模糊概念的恰当形式，因而是很困难的。应用模糊数学来解决实际问题，往往归结为寻找一个或几个隶属函数。这个问题解决了，其它问题也就迎刃而解。隶属函数的确定过程，本质上是客观的，但又容许有一定的人们的主观判断，只有多实践和总结，才能逐渐掌握这些技巧。

在模糊集理论中，某一元素属于某一个模糊子集的隶属程度或从属程度，则是人们对该模糊子集所对应的概念的一种数量上的反映，隶属程度取多大，在很大程度上取决于人们对此概念的理解，因此，同一元素对同一模糊集，不同的人可能会赋以不同的隶属程度。可见，隶属度的确定具有相当程度的主观性，于是有些人称之为主观概率。但需注意，此时虽然也用“概率”一词，但其含义则已完全不同。此外，人们在确定一个模糊子集的隶属程度时，又总想使它确定得更合理、更客观。因此，对某些模糊集的元素的隶属程度也就能以同它们所对应的概率数值来表示，虽然如此，它们在含义上仍是不同的。“概率”表示了事件发生的可能性，或说是稳定频率，用来描述随机事件，而隶属度表示该元素属于某一模糊集的隶属程度，因而是对一个概念的数量化描述。

初学者常常分不清模糊数学和概率论的区别，甚至把它们混为一谈，主要是因为它们都是研究不确定现象，而变量这种不确定性又都是在［0，1］闭区间中取值。但这两种不确定性是有着本质区别的。

概率论所研究和处理的随机现象，其事件本身有着明确的含意，只是由于发生的条件不充分，而使得在条件与事件之间不能出现决定的因果关系，从而，事件的出现与否表现出不确定性。这种不确定性称为随机性。

模糊数学是研究和处理模糊现象的，它所要处理事物的概念本身是模糊的；即一个对象是否符合这个概念难以确定，也就是由于外延模糊而带来的不确定性。我们称这种不确定性为模糊性。1978 年，查德曾提出了可能性理论的基本思想，并阐述了随机性与隶属度的区别。这曾被人誉为模糊数学的第二个里程碑。

概率反映了一定条件对事件的内在联系与制约，概率的客观意义可以由随机试验中所出现的频率稳定性来承担。自然界和社会上发生的现象是多种多样的。有一类现象在一定条件下必然发生（或必然不发生）。例如，向上抛一石子，它必然还要落下来，同性的电荷必然相斥。这类现象称为确定性现象，但在现实世界中还存在着另外一种不确定的现象。例如，向上抛掷一枚硬币后，我们就无法预先确定它落地后是国徽朝上，还是数字朝上。又如，当我们掷一枚骰子时，结果是几点呢？这也是我们无法预料的。这种现象我们称为不确定现象。但是如果我们多次抛掷同一枚硬币，则可以发现出现国徽朝上的次数一般约占总抛掷次数的 50%，而当多次掷同一骰子时，我们会发现 6 点朝上的次数约占总抛掷次数的六分之一。因此，尽管我们事先无法确定下一次

抛掷硬币后是否会国徽朝上，也无法预料投掷骰子后会出现几点；但是大量试验的情况下，它们又显示出某种固有的规律性。这种规律性我们称为统计规律性。

以上谈到的不确定现象，在个别试验中呈现出不确定性，而在大量重复试验中，又具有统计规律性，这样的现象，我们称为随机事件。一个随机试验，如果我们反复进行几次，出现随机事件 A 的次数是 n_A，则比值

$$f(A) = n_A/n$$

称为随机事件 A 在这几次试验中出现的频率。

我们的硬币抛掷五百次，记下“出现国徽”的频率。现请十个人来做这个试验，试验次数均为五百次。他们得到的频率分别为：

$$0.512;\ 0.498;\ 0.506;\ 0.512;\ 0.502$$
$$0.492;\ 0.488;\ 0.516;\ 0.524;\ 0.494$$

虽然他们得到的频率各不相同，但它们都接近 0.5，或者说它们都在 0.5 这个数左右摆动，我们就称这个数为出现“国徽朝上”这一事件的可能性是 0.5。

一般地说，一个随机事件 A 的概率就是该事件在每次试验中出现的可能性。严格一些说，就是在大量随机试验中事件 A 出现的频率 $f(A)$ 摆动的中心。随机事件 A 的概率一般记为 $P(A)$，当 n 相当大时，显然有

$$P(A) \doteq f(A) = n_A/n$$

于是，若记 A 为随机事件“国徽朝上”，则有

$$P(A) = 0.5$$

若记 B_i 为掷骰子试验中“出现 i 点”这一随机事件，则有

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = P(B_4) = P(B_5)$$

$$= P(B_6) = \frac{1}{6}$$

实践证明，随着 n 的增大，上式的值逐渐稳定，最后趋向一个 [0，1] 闭区间的数 P，这个 P 就是 A 发生的概率。

隶属函数在某些场合下，也可以通过模糊统计而得到，那么什么叫模糊统计呢？它和概率统计是存在着本质的区别的。

要做一个模糊统计试验，首先要选取一个论域 U，例如人的集合。在 U 中选择一个固定的元素 $u_0 \in U$，例如张三。然后再考虑 U 的一个运动着的、边界可变的普通集合 A^*，例如“高个子”到底是多高？这个概念是随着不同的条件、场合和不同观点而改变的。而每次试验实际上可理解为，让不同观点的人评论张三是不是属于“高个子”这个集合 A^*，当然有时会得到“张三属于高个子”，即 $u_0 \in A^*$；但有时也会得到“张三不属于高个子”，即 $u_0 \notin A^*$。而 u_0 对高个子的隶属度 $u(u_0)$ 也可表为：

$$\mu(u_0) = L_{im} \frac{u_0 \in A^* \text{ 的次数}}{n}$$

其中 n 是总的试验次数，同样地要求它充分大就可以了。实践也表明，随着 n 的增大 $\mu(u_0)$ 也会趋向一个 [0，1] 闭区间的数，这个数就是隶属度。

前面我们所谈到的随机事件，尽管在试验前是不确定的，但当试验后，它却是明确的。如试验后出现 6 点，那就不是出现其它点数，我们完全可以肯定这事件是发生还是没有发生。但是，如果有人问你，出现大点数的概率是多少，又该怎样来计算呢？这个问题具有双重的不确定性，其一是掷一次骰子后到底出现什么点数不能确定，这是事件的随机

性，其二是什么样的点数算大点数也不明确，这是事件的模糊性。为了处理事件的模糊性，我们引入一个模糊集，用它来表示“大点数”这一模糊事件。记 $\underset{\sim}{A}$ 为“大点数”这一模糊集。骰子只可能出现 6 种情况，我们用 B_1、B_2、B_3、B_4、B_5 和 B_6 分别表示出现 1、2、3、4、5 和 6 点这 6 个事件。于是模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 的论域为

$$X = \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6\}$$

我们认为 6 点从属“大点数”的程度为 1，5 点从属于“大点数”的程度为 0.7，4 点从属于“大点数”的程度为 0.4，而 3 点、2 点及 1 点从属于大点数的程度为 0，则

$$\underset{\sim}{A} = 0.4/B_4 + 0.7/B_5 + 1/B_6$$

这样我们可用下式来计算模糊随机事件“出现大点数”的概率。

$$\begin{aligned} P(\underset{\sim}{A}) &= 0.4 \times P(B_4) + 0.7 \times P(B_5) + 1 \times P(B_6) \\ &= 0.4 \times \frac{1}{6} + 0.7 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} \\ &= 2.1 \times \frac{1}{6} = 0.35 \end{aligned}$$

上述的计算方法虽然是人为规定的，但却是合于情理的。

一般说来，若一个随机试验的可能结果为随机事件集合

$$X = \{B_1, B_2, \cdots\cdots, B_m\}$$

模糊随机事件 $\underset{\sim}{A}$ 是论域 X 上的一个模糊子集，B_i 从属于 $\underset{\sim}{A}$ 的程度为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(B_i)$，则模糊随机事件的概率

$$\begin{aligned} P(\underset{\sim}{A}) = {} & \mu_{\underset{\sim}{A}}(B_1) \cdot P(B_1) + \mu_{\underset{\sim}{A}}(B_2) \cdot P(B_2) + \cdots \\ & + \mu_{\underset{\sim}{A}}(B_m) \cdot P(B_m) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \mu_{\underset{\sim}{A}}(B_i) P(B_i)$$

只要确定了模糊随机事件所对应的模糊子集 $\underset{\sim}{A}$，并知道各清晰随机事件的概率，就容易算出模糊随机事件的概率。当然这个概率不仅与每清晰随机事件的概率有关，而且也和模糊子集本身的确定有关。前者是客观统计规律的反映，而后者却主要依赖于人们的主观性。

例 1 某商店每天售出某种商品的数量是不确定的，它是一个随机事件。用 A_i 表示售出 i 件该种商品。事件 A_i 的概率在表 2-3 中列出。

表 2-3

售出数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	……
概　率	0.01	0.02	0.03	0.03	0.05	0.06	0.1	0.15	0.2	0.15	0.1	0.26	……

“6 件左右”这一模糊事件所对应的模糊集为：

$$\underset{\sim}{A} = 0.2/A_4 + 0.7/A_5 + 1/A_6 + 0.7/A_7 + 0.2/A_8$$

于是模糊随机事件 $\underset{\sim}{A}$ 的概率

$$\begin{aligned} P(A) &= 0.2 \times 0.05 + 0.7 \times 0.06 + 1 \times 0.1 \\ &\quad + 0.7 \times 0.15 + 0.2 \times 0.2 \\ &= 0.01 + 0.042 + 0.1 + 0.105 + 0.04 \\ &= 0.297 \end{aligned}$$

例 2 掷一次骰子，“不出现小点数”的概率是多少？

解 小点数这一模糊事件，可用模糊集合 $\underset{\sim}{L}$ 来表示。

$$\underset{\sim}{L} = 1/B_1 + 0.7/B_2 + 0.4/B_3$$

模糊集“不出现小点数”应为 $\underset{\sim}{L}$ 的补。

$$\begin{aligned}\overline{\underset{\sim}{L}} &= 1 - \underset{\sim}{L} \\ &= \frac{1-1}{B_1} + \frac{1-0.7}{B_2} + \frac{1-0.4}{B_3} + \frac{1-0}{B_4} + \frac{1-0}{B_5} + \frac{1-0}{B_6} \\ &= 0.3/B_2 + 0.6/B_3 + 1/B_4 + 1/B_5 + 1/B_6\end{aligned}$$

于是

$$P(\overline{\underset{\sim}{L}}) = 0.3 \times \frac{1}{6} + 0.6 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{6}$$

$$= 3.9 \times \frac{1}{6} = 0.65$$

由于模糊随机事件的模糊性，所以它的概率与模糊事件所对应的模糊子集的规定就有密切的关系，亦即和人的主观性有关。因而模糊随机事件的概率包含了事件的客观规律，也含有人对事件的主观判断，这是与通常概率最根本的区别。

以上是通过模糊统计的方法而得到隶属函数，下面将介绍用二元对比排序法确定隶属函数。

二元对比排序法，是把事物两两相比，从而确定顺序，由此便可以决定隶属函数的大体形状。张三比李四更热情，这说明

$$u_{\text{热情}}(\text{张三}) \geqslant u_{\text{热情}}(\text{李四})$$

拿张三与李四对比，看谁对“热情”的隶属程度高，这叫做二元对比。人们对事物的认识往往从二元对比开始。可惜，二元对比所确定的顺序，通常不满足数学对“序”的要求。主要是不满足传递性，可以出现循环的状况：张三似乎比李四热情，李四似乎比王五更热情，而当拿王五与张三对比时，又觉得王五似乎比张三热情。这是模糊顺序观念的一种

特征。

那么，怎样在二元对比的基础上确定整体的顺序呢？怎样用二元对比方法建立隶属函数呢？下面只介绍相对比较法和对比平均法，至于优先关系定序法和择优比较法就不作介绍了，读者若感兴趣的话，请看汪培庄编著的书。

相对比较法：

设给定论域 U，对 U 中的元素 x，y，……等需要按某种特性进行排序，这需要先在二元对比中建立比较级，然后再按一定方法转化为总体的排序。

设给定一对元素 (x,y))，所谓二元比较级就是指“数对”$(f_y(x),f_x(y)$ 需满足：

$$0 \leqslant f_y(x) \leqslant 1 \qquad 0 \leqslant f_x(y) \leqslant 1$$

其意义为：在 x 和 y 的二元对比中，如果 x 具有某特征的程序定为 $f_y(x)$ 的话，那么 y 具有该特性的程度，便定为 $f_x(y)$。

例如设论域 $U=\{x_1,x_2,x_3,Z\}$ 其中 x_1 表示长子，x_2 表示次子，x_3 表示三子，Z 表示父亲。如果仅考虑长子和次子与父亲的相似问题，则长子相似于父亲的程度为 0.8，次子相似于父亲的程度为 0.5。如果仅考虑次子与三子，则次子相似于父亲的程度为 0.4，三子相似于父亲的程度为 0.7。如果仅考虑长子与三子，则长子相似于父亲的程度为 0.5，三子为 0.3，这时建立的关系式如下：

$$g(x_1,x_1)=1 \quad g(x_1,x_2)=0.8 \quad g(x_1,x_3)=0.5$$
$$g(x_2,x_1)=0.5 \quad g(x_2,x_2)=1 \quad g(x_2,x_3)=0.4$$
$$g(x_3,x_1)=0.3 \quad g(x_3,x_2)=0.7 \quad g(x_3,x_3)=1$$

其中 $g(x_i,x_j)$ 表示前述相似程度 $(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$，我们

把它列为下表 2-4。

二元相对比较法　　表 2-4

$a/b\ f_b(a)$	x_1	x_2	x_3
x_1	1	0.8	0.5
x_2	0.5	1	0.4
x_3	0.3	0.7	1

按照“谁最像父亲”这一标准排序，可得：

$$(f_{x_2}(x_1), f_{x_1}(x_2)) = (0.8, 0.5)$$

$$(f_{x_3}(x_2), f_{x_2}(x_3)) = (0.4, 0.7)$$

$$(f_{x_1}(x_3), f_{x_3}(x_1)) = (0.5, 0.3)$$

以第一个式子为例，它的意思是，长子 x_1 和次子 x_2 相对照，如果把长子像父亲的程度定为 0.8 的话，那么，次子像父亲的程度就应该定为 0.5，当然，0.8 与 0.5 并不是他们像父亲的绝对度量，而是具有相对性。

令

$$f(x/y) = \frac{f_y(x)}{\max(f_x(y), f_y(x))}$$

显然有：

$$f(x/y) = \begin{cases} f_y(x)/f_x(y) & \text{当 } f_y(x) \leqslant f_x(y) \\ 1 & \text{当 } f_y(x) > f_x(y) \end{cases}$$

此外 $x、y \in U$。以 $f(x/y)$ 为元素作成矩阵，并将 $f(x/x)$ 取为 1，这叫做“相及矩阵”，对此问题形式如下：

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5/8 & 1 & 4/7 \\ 3/5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

就相及矩阵中，每一行取最小值，按所得数目从大到小排列得：

$$1 > 3/5 > 4/7$$

亦即 $$1 > 0.6 > 0.57$$

结论是长子最像父亲（1），幼子次之（0.6），次子最不像父亲（0.57）。

对比平均法：

仍借前面的表示相似程度 $g(x,y)$ 的符号

若 $$g(x,y) = f_y(x)$$

$$g(y,x) = f_x(y)$$

这样，我们可以得出前面所述之 x 与 y 的二元比较级

$$(f_y(x), f_x(y))$$

引用余洪祖的例子，设论域 E 是美丽的花的集合。设：

$$E = \{\text{樱花、菊花、蒲公英}\}$$

并分别按顺序表示为 x、y、z，如设樱花的美丽程度为0.8，菊花为0.7，则表示为：

$$g(x,y) = 0.8 \qquad g(y,x) = 0.7$$

如果考虑樱花和蒲公英的话，则有：

$$g(x,z) = 0.9 \qquad g(z,x) = 0.5$$

同理，考虑菊花和蒲公英时，有：

$$g(y,z) = 0.8 \qquad g(z,y) = 0.4$$

我们则列表 2-5 如下：

樱花、菊花、蒲公英的比较　　表 2-5

$g(x, y)$	x	y	z
x	1	0.8	0.9
y	0.7	1	0.8
z	0.5	0.4	1

如果是权数相同的判断，亦即没有偏爱和特殊兴趣的情况下，我们则得：

$$\text{樱花对“美”的隶属度} = \frac{1}{3}[g(x,x) + g(x,y) + g(x,z)]$$
$$= 0.9$$

$$\text{菊花对“美”的隶属度} = \frac{1}{3}[g(y,x) + g(y.y) + g(y,z)]$$
$$= 0.83$$

$$\text{蒲公英对“美”的隶属度} = \frac{1}{3}[g(z,x) + g(z,y) + g(z,z)]$$
$$= 0.63$$

在以上三式中，$\frac{1}{3}$是权数，因共有三种花，各占权$\frac{1}{3}$。$g(x,x)$、$g(x,y)$、$g(x,z)$分别是 x 和 y、z 相比的二元比较级，同样可以把 y 和 x、z 相比，z 和 x、y 相比，这里仍然规定：

$$g(x,x) = g(y,y) = g(z,z) = 1$$

也就是自己和自己相比，美丽度为 1。

由此可得，在平均时有论域 E 的模糊集“美丽” $\underset{\sim}{A}$ 为：

$$\underset{\sim}{A} = 0.9/\text{樱花} + 0.83/\text{菊花} + 0.63/\text{蒲公英}$$

如果在上例中是非平均的，也就是考虑偏爱或特殊兴

趣，例如给樱花、菊花、蒲公英分别赋权数为 0.1、0.8、0.1，则得：

$$\begin{aligned}\text{樱花对“美”隶属程度} &= 0.1\times[g(x,x)+g(x,y)\\&\quad+g(x,z)]\\&=0.83\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{菊花对“美”的隶属度} &= 0.8\times[g(y,x)+g(y,y)\\&\quad+g(y,z)]\\&=0.95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{蒲公英对“美”隶属度} &= 0.1\times[g(z,x)+g(z,y)\\&\quad+g(z,z)]\\&=0.47\end{aligned}$$

这就得到：论域 E 的加权模糊集“美丽” $\underset{\sim}{B}$ 为

$$\underset{\sim}{B} = 0.83/\text{樱花} + 0.95/\text{菊花} + 0.47/\text{蒲公英}$$

菊花在此夺魁的原因，正是由于偏爱者给它加了很大的权数。

一、确定隶属函数的一般原则和方法

1. 隶属函数的确定过程，本质上是客观的，但又容许有一定的人们的主观判断。

2. 在某些场合，隶属函数可以通过模糊统计试验来加以确定。

3. 在某些场合，可以吸收概率统计的处理结果。如，用概率来作为隶属度。

4. 在某些场合，用二元对比排序的方法可以确定隶属函数的大致形状。

5. 在某些场合，隶属函数可以作为一种推理的产物出现。

6. 在模糊数学的许多应用领域内，隶属函数是可以通

过“学习”逐步修改而完善化的。实践效果是检验和调整隶属函数的依据。

应该着重指出，模糊集合中隶属函数值的确定，带有主观性，通常是根据经验或统计而定，也可以由某个权威、专家评判给分的方法来确定。如体操裁判的评分，这虽然有一定的主观性，但是却反映了大量的经验程度，如果能在主观评分的基础上，再通过“学习”，逐步修改而趋于完善，其实践效果会更好。事实上，也不可能存在对任何问题、任何人都适用的确定隶属函数的方法，因为模糊集合说到底毕竟是依赖于主观随意性的事，如果对不同人都适用的确定方法早就已知的话，所谓“模糊性”也就不存在了。

例如，我们将 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ 作为论域，来讨论“几个”这一模糊概念。模糊概念用数学语言来说就是模糊集，它们的内涵和外延虽然是不清晰的，但根据经验，可以定量地给出它们的隶属函数，模糊集“几个”可表示如下：

$$\text{几个} = 0/1 + 0/2 + 0.3/3 + 0.7/4 + 1/5 + 1/6 + 0.7/7 + 0.3/8 + 0/9 + 0/10$$

由上式可知，五个、六个的隶属程度为 1，说明用“几个”来表示五个、六个的可能性最大；而“几个”表示四个、七个的可能性为 0.7；用“几个”表示三个、八个的可能性只有 0.3。汉语中通常不用“几个”来表示一个、二个或九个、十个（表达它们的时候，另有词如“一两个”、“八九个”、“靠十个”、“十来个”等），所以它们对“几个”的隶属函数为零。

前面我们一直在应用到隶属函数，但是隶属函数怎样确定的问题，还没有详细讨论过，现在我们回过头来就来谈谈

这个问题。

我们知道隶属函数在模糊数学中占有重要的地位，前面我们也已经提到过，它的值的确定常常带有主观性，在很多情况下是由专家评定而决定的。那么是不是也有些什么方法可资遵循呢？这个问题目前已经引起国内外模糊数学界的充分重视。不过这个问题涉及到比较高深的理论，我们现在只能作一个简要的介绍。

确定隶属函数的方法，现在已经提出或应用的，大致有以下七种。

（一）例证法。这是1972年查德提出的，主要思路是由已知的有限个$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的值来估计论域U上的模糊集$\underset{\sim}{A}$的隶属函数。例如：设论域U是全体人类，$\underset{\sim}{A}$是“高个子的人”，显然$\underset{\sim}{A}$是U的一个模糊子集。怎样来确定$\mu_{\underset{\sim}{A}}$呢？我们可以给出一个高度h。问到某人高度是h是否算“高”，回答的时候可以选用几个语言真值（就是一句话是真的程度）中的一个，如“真的”、“大致真的”、“似真又似假”、“大致假的”、“假的”。然后，最简单的办法就是把这些语言真值分别定作数字1、0.75、0.5、0.25、0。如果把几个不同的高度h_1、h_2、$\cdots h_n$都作为样本进行询问，就可以得到A的隶属函数$\mu_{\underset{\sim}{A}}$的离散表示法。

（二）统计法。这是国外1976年提出的方法。在某些情况下，隶属函数可以用统计学方法来确定，这种统计叫做“模糊统计”。1977年国外曾经有人在社会科学领域里用这种方法估计隶属函数，它的方法类似于投票。在这里必须承认一个隐含的前提：投赞成x属于$\underset{\sim}{A}$的票的概率跟$\mu_{\underset{\sim}{A}}$成正比。不过模糊统计和概率统计还是有本质的区别。因为概率

统计所研究的对象虽然是否发生不能肯定，如果发生却是完全分明的事件；而模糊统计所研究的对象本身就可以是不分明的。

（三）蕴含解析定义法。它诞生于1976年，是根据微积分的理论来确定的。假设隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 是连续可微的函数，然后用微分的方法求得 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$。因为涉及到微积分，这里就不详细介绍了。

（四）可变模型法。它也是1976年提出的，因为涉及的面比较宽，这里也不详细介绍了。

（五）相对选择法。它依赖于一种叫做“相对隶属度”的概念，这里也不详细介绍了。

（六）子集比较法。它是1974年由K.S.冯提出的，它的直观意义是取模糊集 $\underset{\sim}{A}$ 里各元素的平均隶属度。

（七）滤波函数法。它是1978年提出的方法，就是靠一种所谓“滤波函数”（原来是无线电学中的名词）来判别一些形容词（例如“高”、“大”等）的隶属函数。

以上七种方法都有一定的局限性，也就是说这个问题还没有完全解决。

隶属函数的确定过程，本质上说应该是客观的，但是事实上现在还没有一个完全客观的评定标准。在许多情况下，常是初步确定粗略的隶属函数，然后通过“学习”和实践检验逐步修改和完善化，而实际效果正是检验和调整隶属函数的依据。

模糊统计是确定隶属函数的一种主要方法，它需要作大量的实验，因此工作量是比较大的。

隶属函数是描述模糊概念的关键，它的引入标志着数学

已经发展到一个新的阶段——开辟了模糊数学这一新的数学分支。

二、常用隶属函数

为了使你能够很容易地确定隶属函数，我们现在从国外资料里摘引了常用的隶属函数，并且画出了图形，供你参考(如图 2-7、图 2-8)。下面所举两组 14 种是从 A. 卡夫曼的著作《模糊子集引论》(1975 年版) 里引来的。你在处理一般问题的时候，只要选用一种就可以了，具体的参数可以由实际问题决定。

第一组，适用于 x 很小的隶属函数。以下隶属函数，论域 X 取正值，图象在第一象限。

第一种：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ 0 & (a\leqslant x)。\end{cases}$$

第二种：

$$\mu(x)=e^{-kx}(k>0)。$$

第三种：

$$\mu(x)=e^{-kx^2}(k>0)。$$

第四种：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant a_1),\\ \dfrac{a_2-x}{a_2-a_1} & (a_1<x<a_2),\\ 0 & (a_2\leqslant x)。\end{cases}$$

第五种：

$$\mu(x)=\begin{cases}1-ax^k & \left(0\leqslant x<\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\right),\\ 0 & \left(\dfrac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x\right)。\end{cases}$$

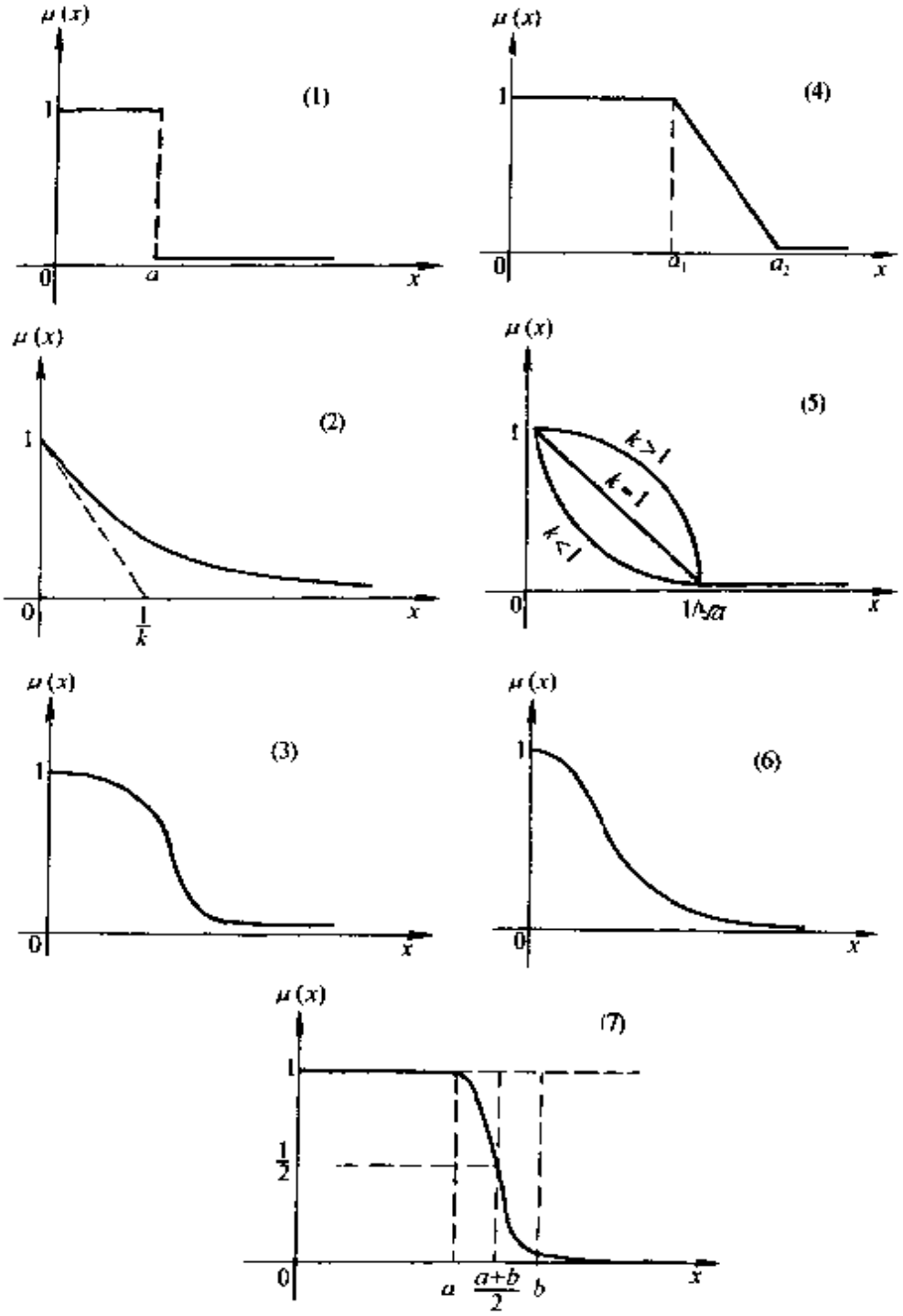


图 2-7　不同情况的隶属函数图

（图旁所注图序分别跟上面的种数相对应）

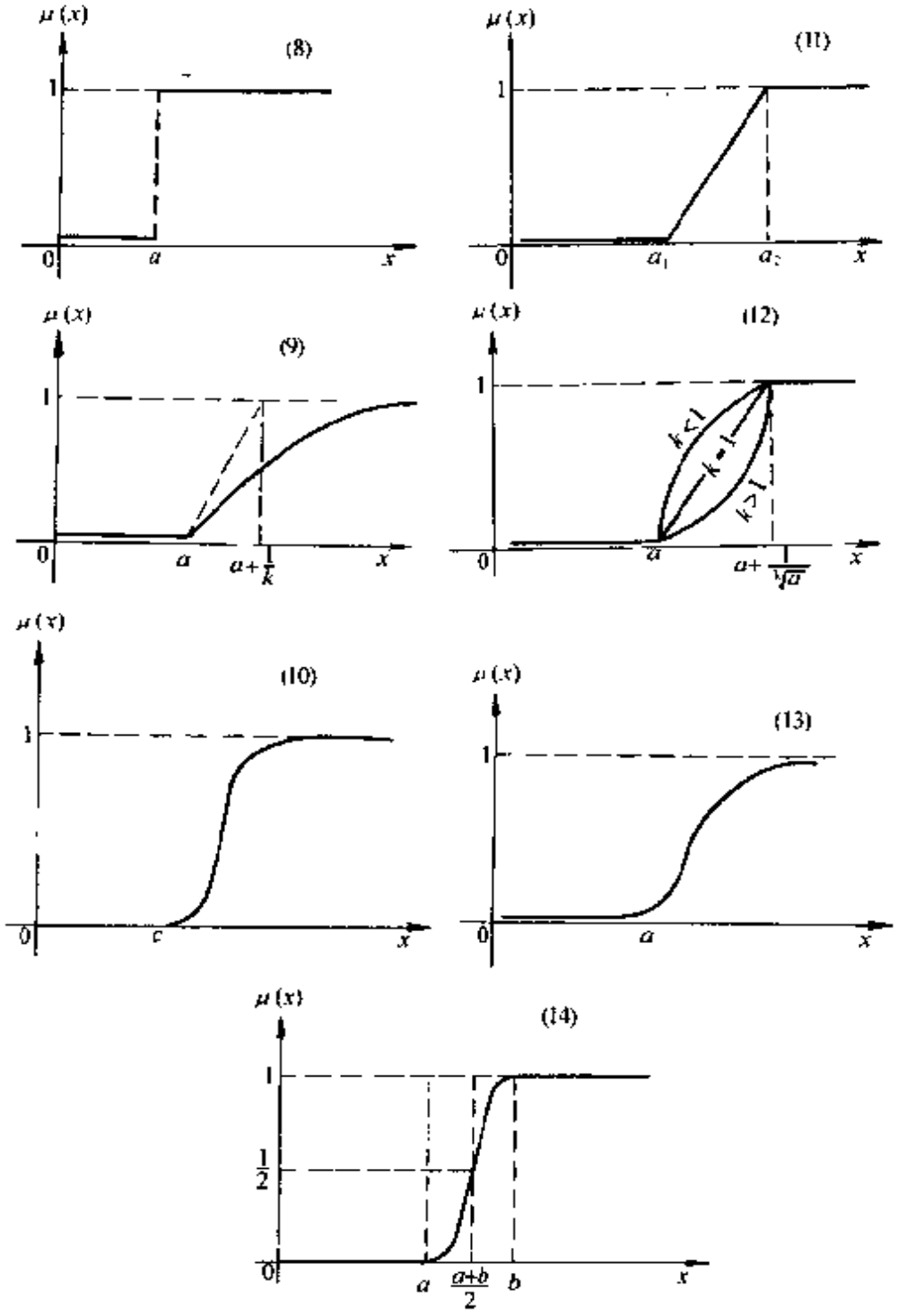


图 2-8　不同情况的隶属函数图

（图旁所注图序分别跟上面的种数相对应）

第六种：

$$\mu(x)=\frac{1}{1+kx^2}(k>1)。$$

第七种：

$$\mu(x)=\begin{cases}1 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) & (a<x<b),\\ 0 & (b\leqslant x)。\end{cases}$$

第二组，适用于 x 比较大的隶属函数。以下隶属函数，论域 X 也取正值，图象也在第一象限。

第八种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x<a),\\ 1 & (a\leqslant x)。\end{cases}$$

第九种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ 1-e^{-k(x-a)} & (a<x)(k>0)。\end{cases}$$

第十种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ 1-e^{-k(x-a)^2} & (a<x)(k>0)。\end{cases}$$

第十一种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a_1),\\ \frac{x-a_1}{a_2-a_1} & (a_1<x<a_2),\\ 1 & (a_2\leqslant x)。\end{cases}$$

第十二种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ a(x-a)^k & \left(a<x<a+\frac{1}{\sqrt[k]{a}}\right),\\ 1 & \left(a+\frac{1}{\sqrt[k]{a}}\leqslant x\right)。\end{cases}$$

第十三种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ \frac{k(x-a)^2}{1+k(x-a)^2} & (a<x<\infty)。\end{cases}$$

第十四种：

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (0\leqslant x\leqslant a),\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{b-a}\left(x-\frac{a+b}{2}\right) & (a<x<b),\\ 1 & (b\leqslant x)。\end{cases}$$

卡夫曼书里还举了另外两组 14 种，我们只简单提一提。

第三组，适用于 $|x|$ 很小的隶属函数。论域 X 取 $(-\infty、\infty)$ 就是实数轴，图象在第一、第二两个象限，而且对于 $\mu(x)$ 轴是对称的。也一共七种。

第四组，适用于 $|x|$ 比较大的隶属函数。论域 X 也取 $(-\infty、\infty)$ 就是实数轴，图象也在第一、第二两个象限，而且对于 $\mu(x)$ 轴是对称的，也一共七种。

除去卡夫曼书里所列举的函数外，还有四种隶属函数也是常用的。

一是正态型（如图 2-9）：

$$\mu(x)=e^{\left(\frac{x-a}{b}\right)^2}(b>0)。$$

二是 Γ 型（如图 2-10）：

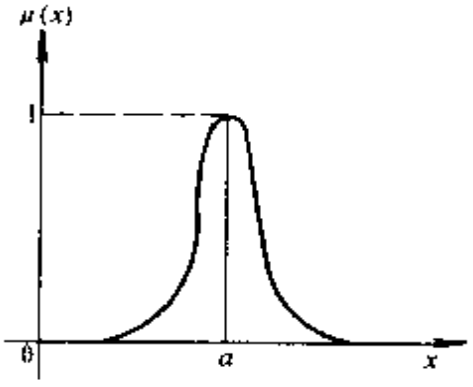


图 2-9　正态型隶属函数

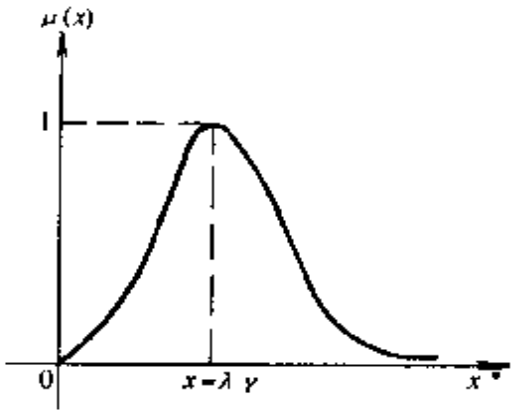


图 2-10　Γ型隶属函数

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x<0),\\ \left(\dfrac{x}{\lambda\nu}\right)^{\nu}e^{\nu-\frac{x}{\lambda}} & (x\geqslant 0)(\lambda>0,\nu>0)。\end{cases}$$

三是戒上型（如图 2-11）：

$$\mu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+[a(x-e)]^{b}} & (x>c),\\ 1 & (x\leqslant c)。\end{cases}$$

这里 a、b、c 是参数，要求 $a>0$，$b>0$。特例：$a=\dfrac{1}{5}$，$b=2$，$c=25$，就是“年轻”的隶属函数。

四是戒下型（如图 2-12）：

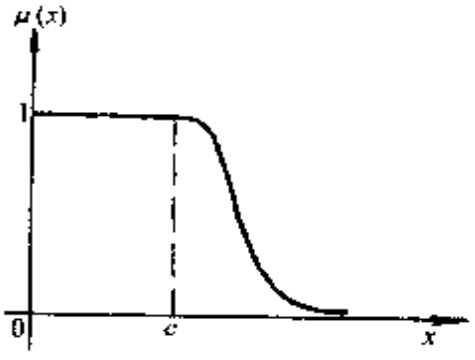


图 2-11　戒上型隶属函数

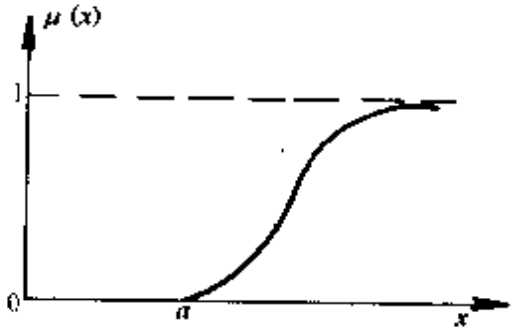


图 2-12　戒下型隶属函数

$$\mu(x)=\begin{cases}0 & (x<c),\\ \dfrac{1}{1+[a(x-e)]^{b}} & (x\geqslant c)。\end{cases}$$

这里 a、b、c 是参数，要求 $a>0$，$b<0$。特例：$a=\frac{1}{5}$，$b=-2$，$c=50$，就是“年老”的隶属函数。

三、怎样度量模糊性

隶属函数的值的确定，虽然有各种方法，本质上应该是客观的，但实际上常常带有主观性。对同一论域上的模糊集合，不同的人或用不同的判断标准，所得出的各元素的隶属度也不尽相同。那么，有没有办法来比较哪一个更正确些呢？这就涉及到怎样来度量模糊性的问题，也就是度量模糊程度或模糊度的问题。

下面我们通过一个实际例子来说明这个问题。

假定有甲、乙两个顾客到百货大楼去买衣服，他们主要考虑三个因素：第一，因素 x_1 是花色式样；第二，因素 x_2 是耐穿程度；第三，因素 x_3 是价格。这时甲、乙两人就会根据自己的观点，分别给这三个因素 x_1、x_2、x_3“打分”，这种“打分”实际上是模糊的，也就是要确定对这个因素“满意”的隶属度。但是由于甲、乙两个人的经验、性格和经济情况等都不相同，所以他们对 x_1、x_2、x_3 所确定的隶属度也不会相同，假定如表 2-6 所示。

两位顾客给衣服不同因素确定的隶属度　　表 2-6

	花色式样（x_1）	耐穿程度（x_2）	价　格（x_3）
顾客甲确定的隶属度	$\mu_{\tilde{A}}(x_1)=0.8$	$\mu_{\tilde{A}}(x_2)=0.4$	$\mu_{\tilde{A}}(x_3)=0.7$
顾客乙确定的隶属度	$\mu_{\tilde{B}}(x_1)=0.6$	$\mu_{\tilde{B}}(x_2)=0.6$	$\mu_{\tilde{B}}(x_3)=0.5$

这就得到两个模糊集：

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.8}{x_1}+\frac{0.4}{x_2}+\frac{0.7}{x_3},\quad \underset{\sim}{B}=\frac{0.6}{x_1}+\frac{0.6}{x_2}+\frac{0.5}{x_3}。$$

这里 $\underset{\sim}{A}$ 相应于顾客甲，$\underset{\sim}{B}$ 相应于顾客乙。究竟谁的观点正确呢？这看来没法确定，因为各人有各人的经验，各人有各人的道理。这就是怎样度量模糊性的问题。解决这个问题的研究途径很多，各有所长但是也各有所短。大致说来有“熵”、“距离”、“贴近度”三种概念。

“熵”是一个物理学名词，它是描述分子无规则运动程度的一个物理量，也就是用来度量一个系统的各组成部分的紊乱程度。这种方法应用比较早，但是并不十分理想。

用“距离”来度量模糊性，是近几年来使用最广泛的方法。什么是“距离”也各有各的定义，不同的定义也各有优缺点。

由于用“距离”来度量模糊性要把很多项相加求和，连续的时候还要作积分，这往往是一项很复杂的工作，为此北京师范大学汪培庄副教授等提出“贴近度”概念，在一定程度上能弥补这个缺点，适用于手工计算。

关于“熵”，我们就不介绍了。关于“距离”和“贴近度”，下面我们分节加以说明。

四、用“距离”来度量模糊性

我们前面说过，关于“距离”有各种不同的定义，常见的有“汉明❶ 距离”和“欧几里得❷ 距离”两种。

---

❶ 理查德·汉明（1915～）是现代美国电子计算机科学家，本世纪五十年代在编码理论上有贡献。

❷ 欧几里得（约前330～前275）是古希腊数学家，以著有《几何原本》闻名。他根据平行公理和其他公理建立了一个几何学系统，就叫“欧几里得几何”。

先说汉明距离。汉明距离也叫线性距离，它的定义如下：

设给定有限论域 X，在 X 上有两个模糊子集 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的汉明距离

$$d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} | \mu_A(x_i) - \mu_B(x_i) |。$$

这里 $\sum_{i=1}^{n}$ 表示按照后面所给出的式子对论域里的 n 个元素求和，式子里左右两条竖线表示取绝对值。

$d(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ 也叫做绝对汉明距离。在实用中常应用相对汉明距离，它的定义是

$$\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{n} d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})。$$

现在再回到上节甲、乙两顾客买衣服的实际例子。已经知道

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_3},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.5}{x_3},$$

那么绝对汉明距离

$$d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = | 0.8 - 0.6 | + | 0.4 - 0.6 | + | 0.7 - 0.5 |$$
$$= 0.2 + 0.2 + 0.2 = 0.6,$$

相对汉明距离

$$\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{3} \times d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{3} \times 0.6 = 0.2。$$

如果在无限论域 X 上有 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 两个模糊集，它们的隶属函数分别是 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 和 $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，并且它们都是连续的，

这时求 $d(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 和 $\delta(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 必须积分，它的直观意义就是夹在两曲线之间的面积，如图 2-13 所示。怎样用积分求面积或求汉明距离，我们这里就不讲了。

现在来讲欧几里得距离。欧几里得距离的定义如下：

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是论域 X 的两个模糊集，$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 的欧几里得距离

$$e(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)]^2}。$$

$e(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$ 也叫绝对欧几里得距离，而相对欧几里得距离

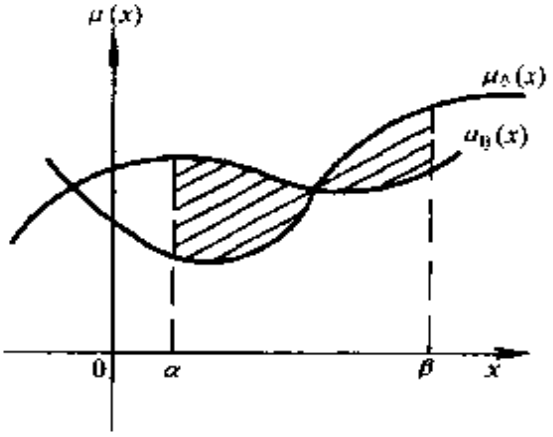


图 2-13　求绝对汉明距离就是求夹在两曲线之间的面积

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}e(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})。$$

仍然用上节甲、乙两顾客买衣服的实际例子，来计算欧几里得距离。

$$e(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \sqrt{(0.8-0.6)^2 + (0.4-0.6)^2 + (0.7-0.5)^2}$$
$$= 0.2\sqrt{3},$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{\sqrt{3}}e(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 0.2\sqrt{3} = 0.2。$$

前面所讲的汉明距离和欧几里得距离，可以统一到一个公式里来，这个公式所定义的叫做闵可夫斯基[1] 距离

$$m(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \left\{\sum_{i=1}^{n} \left|\left|\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i)\right|\right|^q\right\}^{\frac{1}{q}}。$$

$q=1$ 的时候，闵可夫斯基距离退化成为汉明距离。

$q=2$ 的时候，闵可夫斯基距离退化成为欧几里得距离。

$q \to \infty$ 的时候，叫做“车比雪夫[2] 距离”。对于车比雪夫距离，我们就不作详细讨论了。

有了“距离”这一概念，进一步就可以来描述一个模糊集合的模糊程度。

怎样用距离来描述一个模糊集合 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊程度呢？这要定义一个跟 $\underset{\sim}{A}$ 最“贴近”的普通集合，这个普通集合用 $\underline{\underset{\sim}{A}}$ 来表示。如果集合 $\underset{\sim}{A}$ 里某元素的隶属度大于 0.5，集合 $\underline{\underset{\sim}{A}}$ 的相应元素的隶属度就是 1；如果集合 $\underset{\sim}{A}$ 里某元素的隶属度不大于 0.5，集合 $\underline{\underset{\sim}{A}}$ 的相应元素的隶属度就是 0，就是

$$\mu_{\underline{\underset{\sim}{A}}}(x) = \begin{cases} 1, \text{当 } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5 \text{ 的时候；} \\ 0, \text{当 } \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \leqslant 0.5 \text{ 的时候。} \end{cases}$$

$\mu_{\underline{\underset{\sim}{A}}}(x)$ 实际上也就是普通集合 $\underline{\underset{\sim}{A}}$ 的特征函数。

---

[1] 闵可夫斯基（1864～1909）是德国数学家和物理学家，在几何学方面有一定贡献，他提出了四维空间的概念，指出通常的三维空间和时间组成的总体，又叫“闵可夫斯基世界”。

[2] 车比雪夫（1821～1894）是俄国数学家，他建立了函数逼近论，利用初等函数来逼近复杂的函数。车比雪夫也译作切比雪夫或契贝谢夫。

现在再从集合 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underline{\underset{\sim}{A}}$ 来求相对汉明距离或相对欧几里得距离，用这个距离的两倍来描述集合 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊性或模糊度，分别叫汉明模糊度或欧几里得模糊度。用 $\nu(\underset{\sim}{A})$ 表示 $\underset{\sim}{A}$ 的汉明模糊度，$\eta(\underset{\sim}{A})$ 表示 $\underset{\sim}{A}$ 的欧几里得模糊度，就是

$$\nu(\underset{\sim}{A}) = 2\delta(\underset{\sim}{A}, \underline{\underset{\sim}{A}}),$$

$$\eta(\underset{\sim}{A}) = 2\varepsilon(\underset{\sim}{A}, \underline{\underset{\sim}{A}})。$$

所以取相对距离的两倍，是因为一般求得的相对距离总在 [0, 0.5] 闭区间里，乘以 2 后，模糊度就处在 [0, 1] 闭区间里，使得人们可以从它跟 0 或 1 的差数马上得到模糊程度的明确印象。

再用上节两顾客买衣服的实际例子。已经知道

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_3},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}。$$

可知

$$\underline{\underset{\sim}{A}} = \frac{1}{x_1} + \frac{0}{x_2} + \frac{1}{x_3},$$

$$\underline{\underset{\sim}{B}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{0}{x_3}。$$

所以

$$\delta(\underset{\sim}{A}, \underline{\underset{\sim}{A}}) = \frac{1}{3}(0.2 + 0.4 + 0.3) = 0.3,$$

$$\delta(\underset{\sim}{B}, \underline{\underset{\sim}{B}}) = \frac{1}{3}(0.4 + 0.4 + 0.5) = 0.433;$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}, \underline{\underset{\sim}{A}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{0.2^2 + 0.4^2 + 0.3^2} = 0.311,$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{B}, \underline{\underset{\sim}{B}}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{0.4^2 + 0.4^2 + 0.5^2} = 0.436。$$

求得

$$\nu(\underset{\sim}{A}) = 2\delta(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{\overline{A}}) = 0.6,$$

$$\nu(\underset{\sim}{B}) = 2\delta(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{\overline{B}}) = 0.866;$$

$$\eta(\underset{\sim}{A}) = 2\epsilon(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{\overline{A}}) = 0.622,$$

$$\eta(\underset{\sim}{B}) = 2\epsilon(\underset{\sim}{B}, \underset{\sim}{\overline{B}}) = 0.872。$$

可见得 $\underset{\sim}{B}$ 的模糊度比 $\underset{\sim}{A}$ 的模糊度大。

从更深入的研究知道，用“距离”这个概念来刻划一个模糊集的模糊度，往往不十分理想，而且还需要作比较麻烦的计算。为此目前研究这个问题的人很多，提出的方法也是五花八门的。

设论域 U 为有限集，具有 n 个元素，亦即 $\#U = n$，$\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是 U 上的模糊子集，其隶属函数分别为 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$，则定义 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 之加权汉明距离 $d_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B})$ 为：

$$d_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \sum_{i=1}^{n} w(x_i) \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \mid$$

相应的，加权汉明相对距离：

$$\delta_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i) \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \mid$$

其中 $w(x_i)$，$(i = 1, 2\cdots\cdots, n)$ 是加于 x_i 上的权数，最好能够满足归一条件，亦即有：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} w(x_i) = 1$$

若当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$，$\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ 是连续的，且有 $x \in [\alpha, \beta]$

$$d_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) = \int_{\beta}^{\alpha} w(x) \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \mid \mathrm{d}x$$

$$\delta_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta w(x) \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) \mid \mathrm{d}x$$

此时权函数$w(x)$在 $[\alpha, \beta]$ 区间上也应是连续的，最好也能满足归一化条件：

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta w(x)\mathrm{d}x = 1$$

权函数 w （x）应根据实际情况确定。求和号前面加$\frac{1}{n}$，积分号前加$\frac{1}{\beta-\alpha}$是为了当w （x）$\equiv$1 时，退化为一般的汉明距离。

下面讨论一个例子，设论域：

$$U = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.4}{x_4} + \frac{1}{x_5}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.2}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.7}{x_3} + \frac{0.1}{x_4} + \frac{0.4}{x_5}$$

权数的分配，以向量形式按 x_1 到 x_5 顺序给出：

$$w = (1, 2, 0.5, 0.5, 1)$$

它满足归一化条件：

$$\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} w(x_1) = 1$$

则加权汉明距离为：

$$\begin{aligned} d_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) &= \sum_{i=1}^{n} w(x_i) \mid \mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x_i) \mid \\ &= 1\times 0.6 + 2\times 0.1 + 0.5\times 0 + 0.5\times 0.3 \\ &\quad + 1\times 0.6 \\ &= 0.6 + 0.2 + 0 + 0.15 + 0.6 \\ &= 1.55 \end{aligned}$$

$$\delta_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{5}d_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B})$$
$$= 0.31$$

加权汉明距离的实用价值很大，例如将某一生物从甲地移到乙地，两处环境不同，如果环境设为：气温、湿度、土壤三个条件，而此生物对这三条的要求各具有特点，因此决不能把这三条等同看待，这就需根据实际情况先决定权数，再计算加权汉明距离。

设某农作物在 A 地生长的很好，现准备把它移植到 B 地或 C 地，问 B、C 两地那里最为适宜?

设论域：

$$U = \{x_1, x_2, x_3\}$$

其中 x_1 是气温，x_2 是湿度，x_3 是土壤，设根据评定得 A、B、C 三地的模糊集为：

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.6}{x_3}$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.9}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.3}{x_3}$$

$$\underset{\sim}{C} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.5}{x_3}$$

权数 $w = (1.5, 0.7, 0.8)$，它满足归一化要求即：

$$\frac{1}{3}(1.5 + 0.7 + 0.8) = 1$$

则计算：

$$d_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = 1.5 \times 0.1 + 0.7 \times 0.1 + 0.8 \times 0.3$$
$$= 0.15 + 0.07 + 0.24$$
$$= 0.397$$
$$d_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{C}) = 1.5 \times 0.2 + 0.7 \times 0.2 + 0.8 \times 0.1$$

$$= 0.30 + 0.14 + 0.16$$
$$= 0.600$$

因 $d_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B}) < d_w(\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{C})$，这也就说明 A 和 B 两地环境比较相似，因此在 B 地移植此农作物较为适合。

应该说明一点，在线性模糊度中采用求 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)$ 和 $\mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ 的绝对值，有时不符合实际，例如选择人才，标准成绩是60分，张三85分，李四58分，将这些分数均除以100，即折合成隶属度则张三与标准成绩的汉明距离为：

$$|0.60 - 0.85| = 0.25$$

而李四与标准成绩的距离为：

$$|0.60 - 0.58| = 0.02$$

按照模糊度的观点应选择李四，这是不符合“择优录取”的原则，为此在考虑权数同时，也有时要考虑距离的“正”、“负”、我们定义：

若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) > 0$ 则称 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的距离为“正距离”。

若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) - \mu_{\underset{\sim}{B}}(x) < 0$ 则称 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的距离为“负距离”。

若 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = \mu_{\underset{\sim}{B}}(x)$ 则称 $\underset{\sim}{A}$ 对 $\underset{\sim}{B}$ 的距离为0在考虑了距离的正、负之后，再考虑各因素的权数是具有实用价值的。

设按德、才、学、识四条标准选择人才，不同的工作对四项的要求权数不同，可用加权汉明距离计算，但必须考虑距离的正、负，否则可能在标准之下的人会入选的。

设：论域：

$$U = \{德(x_1), 才(x_2), 学(x_3), 识(x_4)\}$$

备选者 A 经评定得：

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.5}{x_2} + \frac{0.6}{x_3} + \frac{0.6}{x_4}$$

备选者 B 经评定得：

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.8}{x_3} + \frac{0.7}{x_4}$$

如给定权数分配，并按归一化要求得：

$$w = (1.5,\ 0.7,\ 0.7,\ 1.1)$$

计算加权汉明距离，并考虑正负得：

$$\begin{aligned} d_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) &= 1.5\times(0.8-0.6)+0.7\times(0.5-0.6) \\ &\quad +0.7\times(0.6-0.8)+1.1\times(0.6-0.7) \\ &= 0.30-0.07-0.14-0.11 \\ &= -0.02 \end{aligned}$$

即说明 A 比 B 略差，应选择 B 任此项工作。

如果权数分配偏重于德，例如：

$$w' = (2.5,\ 0.5,\ 0.5,\ 0.5)$$

则

$$\begin{aligned} d'_w(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) &= 2.5\times(0.8-0.6)+0.5\times(0.5-0.6) \\ &\quad +0.5\times(0.6-0.8)+0.5\times(0.6-0.7) \\ &= 0.30 \end{aligned}$$

此时当然应选 A 任此项工作。

五、用“贴近度”来度量模糊性

为了弥补用“距离”度量模糊性的缺点，汪培庄教授等提出“贴近度”概念，它在电子计算机识别文字的时候很有用。

就以手写文字识别作为例子，如果把方块字分解成许许多多小格子，设 U 是这些小格子所组成的论域，而一个用手书写的文字都是 U 上的一个模糊子集。试问：现在输入

一个手写文字，跟哪个标准字迹最接近？这个问题所涉及的是两个模糊子集之间的贴近程度。

为了定义“贴近度”，还得先定义“内积”和“外积”两个概念。

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是论域 U 上的两个模糊子集，记

$$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = \bigvee_{u \in U} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u)),$$

$$\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} = \bigwedge_{u \in U} (\mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u))。$$

它们分别叫做 $\underset{\sim}{A}$ 和 $\underset{\sim}{B}$ 的“内积”和“外积”。这里符号“$\vee$”表示取最大值，“$\wedge$”表示取最小值，下标 $u \in U$ 表示取最大值和最小值的范围是论域 U 里所有的元素。

现在我们举一个求内积和外积的例子：

设 $$U = \{a, b, c, d, e, f\},$$

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.6}{a} + \frac{0.8}{b} + \frac{1}{c} + \frac{0.8}{d} + \frac{0.6}{e} + \frac{0.4}{f},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.4}{a} + \frac{0.6}{b} + \frac{0.8}{c} + \frac{1}{d} + \frac{0.8}{e} + \frac{0.6}{f},$$

那么内积

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} &= (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.8) \\ &\quad \vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.6) \\ &= 0.4 \vee 0.6 \vee 0.8 \vee 0.6 \vee 0.4 = 0.8,\end{aligned}$$

外积

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B} &= (0.6 \vee 0.4) \wedge (0.8 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.8) \\ &\quad \wedge (0.6 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.6) \\ &= 0.6 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.6 = 0.6。\end{aligned}$$

下面再来定义“贴近度”。

设 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 是论域 U 上的两个模糊子集，它们的贴近度

$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}[\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} + (1 - \underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B})]。 \qquad (2\text{-}1)$$

对于前面的例子，可以求得贴近度

$$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.6)] = 0.6。$$

又如图 2-14 给出 A、B 两个模糊子集，我们试来求它们的贴近度。

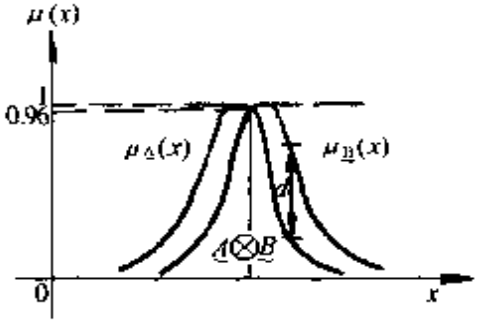


图 2-14　求两个模糊子集的贴近度

由定义可知，内积 $\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B}$ 是“最小值中的最大值”，从图上可以看出它等于 0.96。

由定义可知，外积 $\underset{\sim}{A} \odot \underset{\sim}{B}$ 是“最大值中的最小值”，由图可以看出它等于 0。

所以　　$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}[0.96 + (1 - 0)] = 0.98。$

可见 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 很贴近。最贴近的时候贴近度是 1。但是用汉明距离，有的点的距离却是很大的，如图上所标线段 d。因此，贴近度在一定程度上弥补了距离的缺点，但是它也不是很完善的，这还是有待于大家去深入钻研的一个课题。

现在我们再用上节两顾客买衣服的实际例子，来求 $\underset{\sim}{A}$、$\underset{\sim}{B}$ 两个模糊子集的贴近度。从

$$\underset{\sim}{A} = \frac{0.8}{x_1} + \frac{0.4}{x_2} + \frac{0.7}{x_3},$$

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.6}{x_1} + \frac{0.6}{x_2} + \frac{0.5}{x_3},$$

求得　　$\underset{\sim}{A} \otimes \underset{\sim}{B} = 0.6 \vee 0.4 \vee 0.5 = 0.6,$

$$\underset{\sim}{A}\odot\underset{\sim}{B} = 0.8 \wedge 0.6 \wedge 0.7 = 0.6,$$

所以 $$(\underset{\sim}{A},\underset{\sim}{B}) = \frac{1}{2}[0.6 + (1 - 0.6)] = 0.5。$$

表示这两个模糊子集的贴近度不大不小。

我们前面对两顾客买衣服的问题，用各种公式进行计算，所得的结果是有些差异的。其实这也不奇怪。已经有人证明过：度量模糊性十全十美的公式是不存在的，只能根据实际需要和经验选取。这对应用模糊数学的人说来是很不方便的。为了得出可供实用的方法，北方交通大学邵正强同志和北京工业大学二分校马玉明、丁伟等同志先后用了一年多时间，在电子计算机上得出了各种公式的适用范围，并且提出了“加权多维贴近”的方法和程序，可以供实际工作者根据具体情况选用。对于那个买衣服的例子，根据他们的分析，选用汉明距离计算是比较合适的。

对于贴近度的各种不同定义，不能笼统地比较优劣。应根据具体问题作具体的选择。格贴近度存在一些不足之处，其根源在于内积和外积中的取大“∨”和取小“∧”算子太模糊了，丢失的信息太多，只突出隶属度很大的或隶属度很小的元素的作用，这就使格贴近度在实际应用上具有很大的局限性。尽管如此，格贴近度还是常常被采用。这还是由于它只含有取大和取小运算，既不需求和，也不需求积，计算特别简单的缘故，尤其适合手算甚至心算，这是它的一个大优点。对于相当一类模糊集来说，它还是适用的。如果需要加权时，可根据实际情况建立权函数 $W(u)$，当然最好能使权函数 $W(u)$ 归一化。

距离贴近度计算比较复杂。目前，有关模糊集贴近度的问题正在探讨之中，如何恰当合理地给出模糊集贴近度的定

义尚未很好解决。在用距离来度量模糊度时，在离散情形需要求和，在连续情形则需要积分。这在论域中元素很多的情况下求和是复杂的，积分也往往会遇到较大的困难。

在贴近度的实际应用中，不可避免地会遇到选择贴近度公式的问题。这里特提出选用贴近度计算公式时要注意的几个原则：

1. 应根据具体的分析，只有对实际应用问题了解透彻了，才能作出合适的选择。

2. 对于不同的实际应用问题，对于不同的应用范围和场合，贴近度所起的作用也不尽相同，所以，所选择的贴近度计算公式应能很好满足具体应用问题对贴近度所提出的功能要求。

3. 在满足功能要求的同时，还要考虑贴近度计算式能否适应该具体问题应用范围场合等条件可能发生变化的情况。

4. 在上述基础上，希望贴近度的计算公式尽可能简单些，不要太复杂。

根据上述原则，在具体选择贴近度计算公式时，可采用如下方法和步骤：

1. 首先，对具体的应用问题进行仔细的全面的系统的分析，务必搞清楚贴近度的概念在该具体应用问题中所起的作用是什么，有哪些影响贴近度的因素。

2. 根据贴近度所起作用及其影响因素，对贴近度的计算公式提出应满足的功能，适应性等具体要求。

3. 对各个贴近度的计算公式进行认真研究，分析它们各自有什么特点。

4. 初步淘汰掉那些不符合要求的计算式。

5. 对剩下的计算公式进行详细的比较分析，看哪些个

或哪个能更好地满足要求。

6. 综合考虑满足要求的良好程度，对问题发生条件变化的适应程度，计算的繁简难易程度等，确定出比较理想的贴近度计算公式。如果这些公式均不理想，也可以根据贴近度公理和对贴近度计算公式提出的要求，对某些公式作修改或者重新构造一个。

7. 最后，要对所选的计算公式进行实践检验或模拟试验。

六、关于距离或贴近度的选用经验

在电子计算机上进行了大量的数据分析，得到了一些选用距离或贴近度的经验。现在简单介绍如下：

第一，隶属函数是多峰的时候，可以分成几个单峰区间，然后再进行处理。

第二，如果选用距离公式的时候，汉明距离简明而实用。在一般情况下没有必要选用欧几里得距离和闵可夫斯基距离。

第三，对于汉明距离或贴近度的适用范围，曾经分析了四种典型隶属函数，就是正态型、Γ 型、戒上型和戒下型，所得经验如表 2-7。

第四，对于卡夫曼所举的第一组 x 很小的七种隶属函数，可以按戒上型近似处理。

第五，对于卡夫曼所举的第二组 x 比较大的七种隶属函数，可以按戒下型近似处理。

第六，在贴近度适用的范围里，如果手工计算，应该尽量使用贴近度。

第七，在汉明距离适用的范围里，如果使用电子计算机，应该尽量使用汉明距离。

另外应该着重声明：无论是汉明距离（或欧几里得距离、闵可夫斯基距离）还是贴近度，都只是从一个侧面反映两个模糊集的差异，要想全面考虑这个问题，必须从多方面入手，而且各个因素并不等同对待，这就是所谓“多维加权贴近度”，这里就不详细介绍了。

汉明距离和贴近度的适应范围 表 2-7

样本函数 \ 被比函数	正态型（参数 a',b'）	Γ型（参数 λ',ν'）	戒上型（参数 a',b',c'）	戒下型（参数 a',b',c'）
正态型（参数 a,b）	1. $a=a'$ 的时候用汉明距离； 2. $a\neq a'$，而 $b=b$ 的时候用贴近度； 3. 其余情况用汉明距离	1. $a=\lambda'\nu'$ 的时候用汉明距离； 2. $a\neq\lambda'\nu'$ 的时候贴近度有效，但是也可以用汉明距离	1. $a\leqslant c'$ 的时候用汉明距离； 2. $a>c'$ 的时候贴近度有效，用汉明距离偶尔有反常点	1. $a\geqslant c'$ 的时候用汉明距离； 2. $a<c'$ 的时候贴近度有效；用汉明距离偶尔有反常点
Γ型（参数 λ,ν）	参考正态型-Γ型	1. $\lambda\nu=\lambda'\nu'$ 的时候，用汉明距离； 2. $\lambda\nu\neq\lambda'\nu'$ 的时候用贴近度，但是也可以用汉明距离	1. $\lambda\nu<c'$ 的时候用汉明距离； 2. $\lambda\nu>c'$ 的时候用贴近度，但是也可以用汉明距离	1. $\lambda\nu\geqslant c'$ 的时候用汉明距离； 2. $\lambda\nu<c'$ 的时候用贴近度，用汉明距离有反常点
戒上型（参数 a,b,c）	参考正态型-戒上型	参考Γ型-戒上型	用汉明距离	用汉明距离
戒下型（参数 a,b,c）	参考正态型-戒下型	参考Γ型-戒下型	参考戒上型-戒下型	用汉明距离

第五节　模糊关系与模糊矩阵及其运算

事物之间的关系也具有模糊性。“父子关系”是经典关系，因为两个人是否具有这种关系可以有明确的回答：是，或者非，二者必居其一。然而，在现实生活中，许多关系并不总是清晰的。例如：“两个人长得像”就是一种模糊关系。因为一个人只与自己长得一模一样，可以用“1”表示。儿子像父亲，只能用0与1之间的一个小数来表示。模糊关系是经典关系的自然拓广，是更高、更一般的关系。两组事物之间的关系不宜用“有”或“无”作肯定或否定的回答时，可以考虑用模糊关系来加以描述。

集合 X 到集合 Y 中的一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，是直积空间 $X \times Y$ 中一个模糊子集合。集合 X 到集合 X 中的模糊关系，称为集合 X 上的模糊关系。

例如我们考察集合 $X = \{1, 5, 7, 9, 20\}$ 上的“大得多”关系 $\underset{\sim}{R}$。直积空间 $X \times Y$ 中有二十个序对，序对(20,1)中第一个元素比第二个元素确定大得多，可以认为它从属于“大得多”的程度为1，而序对（9，5）中第一元素9比第二个元素大，但说大得多却比较勉强，可以认为序对(9,5)从属于大得多的程度为0.3。应该说明，这样确定 $\underset{\sim}{R}$ 的从属函数的值常有相当的主观性，然而它又是对 X 上模糊关系的一个客观反映，通过类似的讨论，我们可以确定

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{R} = {} & 0.5/(5,1) + 0.7/(7,1) + 0.1/(7,5) \\ & + 0.8/(9,1) + 0.3/(9,5) + 0.1/(9,7) \\ & + 1/(20,1) + 0.95/(20,5) + 0.90/(20,7) \\ & + 0.85/(20,9)\end{aligned}$$

一般说来，只要给出直积空间 $X\times Y$ 中的模糊集 $\underset{\sim}{R}$ 的隶属函数 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)$，集合 X 到集合 Y 的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 也就确定了。

一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，若对 $V_x\in X$，必有 $u_{\underset{\sim}{R}}(x,x)=1$，即每一元素 x 与自身从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度为 1，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为具有自返性的模糊关系，例如相像关系就具有自返性，仇敌关系就不具有自返性。

一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，若对 $V_{x,y}\in X$，均有

$$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,y)=\mu_{\underset{\sim}{R}}(y,x)$$

即 x 与 y 从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度和 y 与 x 从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度相同，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为具有对称性的模糊关系，例如相像关系就是具有对称性，而相爱关系就不具有对称性。

一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，若对 $A_{x,y,z}\in X$，均有

$$u_{\underset{\sim}{R}}(x,z)\geqslant\min[u_{\underset{\sim}{R}}(x,y),u_{\underset{\sim}{R}}(y,z)]$$

即 x 与 z 从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度不小于 x 与 y 从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度与 y 与 z 从属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度中较小的那一个，则称 $\underset{\sim}{R}$ 为其有传递性的模糊关系。例如“大得多”关系就具有传递性，而相像关系就不具有传递性。

对于只有有限个元素的集合 X 上的关系，可以用矩阵来表示。对于只有有限个元素集合 X 上的模糊关系，可以用模糊矩阵来表示。今后除特殊声明外，所谓模糊关系 $\underset{\sim}{R}$，都是指的二元模糊关系。

例如，设有四种物品：苹果、乒乓球、书、篮球组成的一个论域 U，并设 x_1、x_2、x_3、x_4 分别为这些物品的代号，则：

$$U=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$$

现在用打分的方法来表示这四种物品的相似程度。完全相似者为“1”分，完全不相者似为“0”分，其余按具体相似程度给 0～1 分之间的一个分数 μ，则这就决定了一个 U 上的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$。见表 2-8

四种物品的模糊关系 $\underset{\sim}{R}$　　表 2-8

R	苹果 x_1	乒乓球 x_2	书 x_3	篮球 x_4
苹果 x_1	1	0.7	0	0.7
乒乓球 x_2	0.7	1	0	0.9
书 x_3	0	0	1	0
篮球 x_4	0.7	0.9	0	1

下面介绍矩阵与模糊矩阵的基本知识。

矩阵是一种常用的数学工具，它能简洁地储存信息。通过矩阵运算，可以方便地处理信息。我们将以实际例子出发；介绍有关的概念和运算方法。

菜场为了方便群众，实行预订盆菜送货上门的办法。表 2-9 说明星期一的品种及各户预订数量：

其实我们不必像表 2-9 那样作详细的记录，如果我们每天处理这种表格，就只要记下数字的矩阵排列就行（见表 2-10）。我们可事先约定表上的每个数所表示的含义，如第三列表示各户预订的丙菜份数，第2行则表示 B 户预订的各

表 2-9

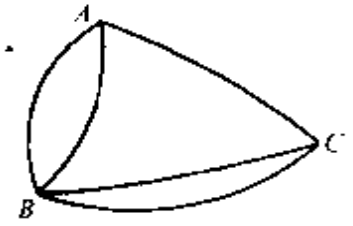
菜 / 户	甲	乙	丙	丁
A	2	1	0	0
B	0	1	2	1
C	1	1	2	2

表 2-10

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

种菜的份数。

这种数的矩形排列叫做矩阵，常以大写字母表示，如 A、B 等。矩阵还能用来描述网络。图 2-15 所示网络的连通情况可以用下列矩阵表示：



	A	B	C
A	0	2	1
B	2	0	2
C	1	2	0

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

图 2-15　网络连通图

其中第 A 行第 B 列中的 2 表示 A 与 B 间有 2 条线相连，余类推。

矩阵中各个位置中的数称为矩阵的元素。

一个有 m 行 n 列的矩阵叫做 $m \times n$ 矩阵，通常先写行后写列数。$m \times n$ 叫做矩阵的阶。

若所有元素都在一列中，这样的矩阵叫做列矩阵。

若所有元素都在一行中，这样的矩阵叫做行矩阵。

行数等于列数的矩阵（即 $m = n$），叫做方阵。

我们通过实例来讨论矩阵的运算。

如果我们要知道星期一和星期二两天各户共订各种菜多少盆，就必须把星期一和星期二的两个矩阵中各个对应的数相加起来。这样把两个矩阵合并成第三个矩阵的方法，叫做矩阵的加法，例如：

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

从中不难看出，只有当两个矩阵的阶相同时，也即只有

当它们的“形状”相同时，才能把它们相加。

类似矩阵加法，在两个矩阵的阶相同时，也可以进行矩阵减法。

如果星期二所订菜与星期一完全相同，则两天共订盆数为

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&1&2&1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\times 2=\begin{pmatrix}4&2&0&0\\0&2&4&2\\2&2&4&4\end{pmatrix}$$

常数乘矩阵，实际上就是将矩阵的每个元素乘以该常数。

除了用加法与减法可把矩阵结合起来外，矩阵还可以用另一种方式结合起来。

例如甲菜价2元，乙菜价1.5元，丙菜价1元，丁菜价0.5元，问星期一各户应付多少钱？以 A 户为例，它所订各种菜的份数如矩阵第一行所示，即行矩（2，1，0，0）。我们把各种盆菜的价格排成一个列矩阵，然后将行矩阵（2，1，0，0）和这个列矩阵作一种所谓“相乘”的运算。

这里的“相乘”实际上是把行矩阵与列矩阵中各对应元素相乘后再相加。

$$(2,\ 1,\ 0,\ 0)\begin{pmatrix}2\\1.5\\1\\0.5\end{pmatrix}=2\times 2+1\times 1.5+0\times 1+0\times 0.5$$
$$=4+1.5=5.5\ (\text{元})$$

如果把 A 户、B 户和 C 户都考虑进去，可以将用来表示订货情况的矩阵与表示价格的列矩阵“相乘”：

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&1&2&1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1.5\\1\\0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\times 2+1\times 1.5+0\times 1+0\times 0.5\\0\times 2+1\times 1.5+2\times 1+1\times 0.5\\1\times 2+1\times 1.5+2\times 1+2\times 0.5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.5\\4\\6.5\end{pmatrix}$$

如果在星期一这一天恰好物价调整为甲菜价2.1元，乙菜价1.6元，丙菜价1元，丁菜价0.6元。则可这样来算：

$$\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&1&2&1\\1&1&2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&2.1\\1.5&1.6\\1&1\\0.5&0.6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2\times2+1\times1.5+0\times1+0.5&2\times2.1+1\times1.6+0\times1+0\times0.6\\0\times2+1\times1.5+2\times1+1\times0.5&0\times2.1+1\times1.6+2\times1+1\times0.6\\1\times2+1\times1.5+2\times1+2\times0.5&1\times2.1+1\times1.6+2\times1+2\times0.6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5.5&5.8\\4&4.2\\6.5&6.9\end{pmatrix}$$

从以上例子不难看出，当两个矩阵相乘时，我们总是把第一个矩阵的每一行与第二个矩阵的每一列相乘。因此，只有在前一矩阵每一行的元素个数与后一矩阵每列的元素个数相等时，才能施行这种乘法，如果这两个数目不等，那么就无法相乘了。

在普通矩阵的基础上，我们现在要介绍如何用模糊矩阵来表现模糊关系，并利用模糊矩阵来讨论模糊关系的性质。

矩阵可以用来表现关系，如集合 $A=\{1,2,3,4\}$ 中的“小于”关系，可用矩阵

$$\begin{array}{c}\\1\\2\\3\\4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}1&2&3&4\end{array}\\\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\end{array}$$

来表示。其中第一行第一列的0元素表示序对(1,1)不属于关系 R，第二列第一行的1表示序对(1,2)属于关系 R，余

类推。这样，我们就可以用一个元素为0或1的矩阵来表现一个关系。如果集合 X 有 m 个元素，集合 Y 有 n 个元素，我们可以用矩阵 A 来表示由集合 X 到集合 Y 中的关系：

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中

$$a_{ij}=0 \text{ 或 } 1$$

$$1\leqslant i\leqslant m \qquad 1\leqslant j\leqslant n$$

如果 $a_{ij}=1$ 就表示集合 X 中第 i 个元素和集合 Y 中第 j 个元素具有关系 R，如果 $a_{ij}=0$ 就表示集合 X 中第 i 个元素和集合 Y 中第 j 个元素不具有关系 R。

当我们用矩阵来表现模糊关系时，其中的 a_{ij} 应当能表示集合 X 中第 i 个元素和集合 Y 中第 j 个元素隶属于模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 的程度，即应为 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$，这也反映了 x 与 y 之间的关系的程度。因为 $\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$ 仅在闭区间 $[0, 1]$ 中取值，我们把元素在闭区间 $[0, 1]$ 中取值的矩阵称为模糊矩阵。图 2-5 给出了七件东西的形状彼此之间的相似关系，它是一个模糊矩阵。

若一般地进行讨论，则有 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, y_2, \cdots, y_n\}$ 均为限集，$X\times Y$ 中的模糊关系可表为如下的 $m\times n$ 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} u_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_1), & n_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_2), & \cdots\cdots & u_{\underset{\sim}{R}}(x_1, y_n) \\ u_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_1), & u_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_2), & \cdots\cdots & u_{\underset{\sim}{R}}(x_2, y_n) \\ & & \cdots\cdots & \\ u_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_1), & u_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_2), & \cdots\cdots & u_{\underset{\sim}{R}}(x_m, y_n) \end{pmatrix}$$

显然，若 $\underset{\sim}{R}$ 为 X 中的模糊关系，而 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，则 $\underset{\sim}{R}$ 可表为 n 阶方阵。图 2-16 为一个七阶方阵。

模糊矩阵的一般形式是

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2} \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

其中

$$0 \leqslant a_{ij} \leqslant 1 \qquad 1 \leqslant i \leqslant m \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

可记为：$A=[a_{ij}]$。

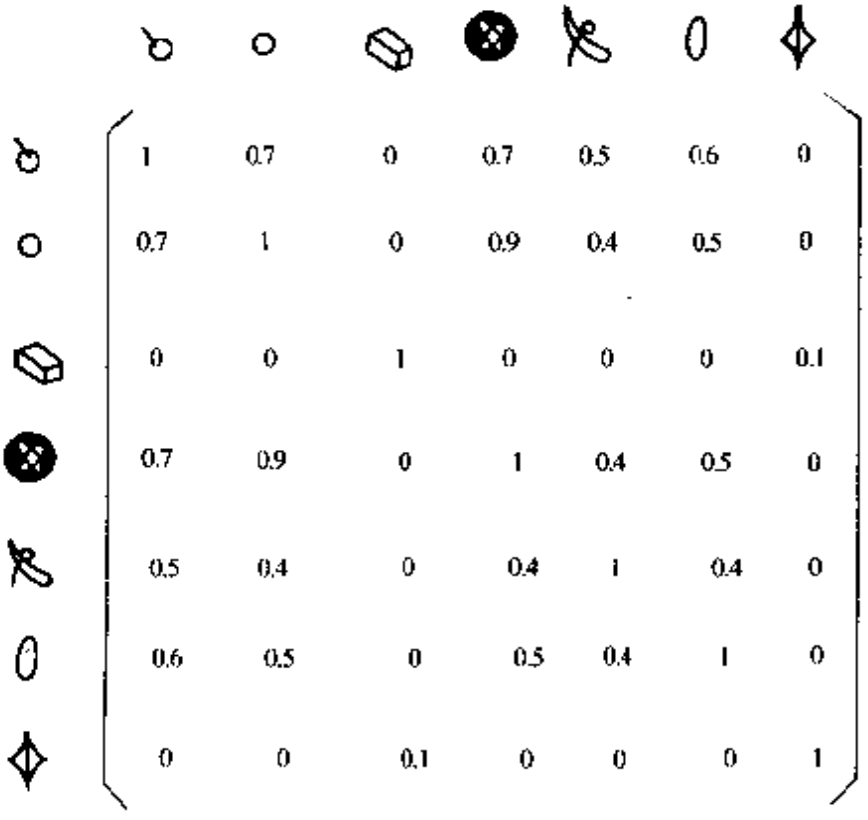


图 2-16　模糊关系矩阵

$[a_{ij}]$ 称为“模糊关系”，只能在 0～1 之间任意取值。如（$a_{11}=0.5$，$a_{21}=0.8$ 等等）。“模糊关系”一般表示事物之间的相似程度，以图 2-17 为例说明之。

图中横向有三个图形◍，⊗，△，竖向也有三个图形◍，⊗，△，横竖两图形相交处的数字表示这两个图形的相似程度——即模糊关系。如横向◍与竖向◍相交处为“1”，说明这两个图形完全相同都是圆形，横排的◍与竖排的⊗相交处为“0.7”，说明这两个图形相似 70%。横排◍与竖排的△相交处为“0”，说明这两个图形完全不同。

$\tilde{R}$	◍	⊗	△
◍	1	0.7	0
⊗	0.7	1	0
△	0	0	1

图 2-17　模糊关系

再如“A”、“B”、“C”这三个工程，按其特征向量的模糊关系可列表 2-11。

上表表示：外墙方面“A”工程与“B”工程完全相同，模糊关系为“1”；“A”工程与“C”工程相似程度只有 60%，其模糊关系为“0.6”。外粉刷方面“C”工程与“A”工程相似程度为 60%。其模糊关系为“0.6”。其余类推。

对于 $A=[a_{ij}]$ 和 $B=[b_{ij}]$ 若有

表 2-11

工程项目	外　墙		外粉刷		层　数	
	说　明	模糊关系	说　明	模糊关系	说　明	模糊关系
A	一砖实砌	1	全部干粘石	0.6	5	1
B	一砖实砌	1	部分干粘石	0.4	4	0.8
C	三斗一眠	0.6	马赛克贴面	1	2	0.4

$$c_{ij} = \max[a_{ij}, b_{ij}] = a_{ij} \vee b_{ij}$$

则称 $C = [c_{ij}]$ 为 A 和 B 的并，记为

$$C = A \cup B$$

同样，对于 $A = [a_{ij}]$ 和 $B = [b_{ij}]$ 若有

$$c_{ij} = \min[a_{ij}, b_{ij}] = a_{ij} \wedge b_{ij}$$

则称 $C = [c_{ij}]$ 为 A 和 B 的交，记为

$$C = A \cap B$$

例如，若有

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

则

$$A \cup B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \vee 0.8 & 0.3 \vee 0.5 \\ 0.4 \vee 0.3 & 0.8 \vee 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$A \cap B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.4 & 0.8 \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \wedge 0.8 & 0.3 \wedge 0.5 \\ 0.4 \wedge 0.3 & 0.8 \wedge 0.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix}$$

模糊矩阵为 $A=[a_{ij}]$，则 $[1-a_{ij}]$ 称为 A 的补矩阵，记为 $\overline{A}$。

例如：

$$A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.8 & 0.5\end{bmatrix}$$

则 $$\overline{A}=\begin{bmatrix}1-0.4 & 1-0.3\\ 1-0.8 & 1-0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.2 & 0.5\end{bmatrix}$$

模糊矩阵乘法运算步骤与普通矩阵乘法类似。不同的是并非先两项相乘后相加，而是先取小而后取大。如 $C=A\circ B$，这里的矩阵乘法符号用“$\circ$”，也称为 A 对 B 的合成，或 A 对 B 的模糊乘积。则 C 中的元素

$$C_{ij}=\max_k \min[a_{ik},b_{kj}]=\bigvee_k[a_{ik}\wedge b_{kj}]$$

这样的写法可能不太习惯，举一个例子就容易明白。我们用 2×2 阶模糊矩阵的相乘来加以说明。

设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

普通矩阵乘法运算：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}\times b_{11}+a_{12}\times b_{21} & a_{11}\times b_{12}+a_{12}\times b_{22}\\ a_{21}\times b_{11}+a_{22}\times b_{21} & a_{21}\times b_{12}+a_{22}\times b_{22}\end{bmatrix}$$

模糊矩阵乘法运算：

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(a_{11}\wedge b_{11})\vee(a_{12}\wedge b_{21}) & (a_{11}\wedge b_{12})\vee(a_{12}\wedge b_{22})\\ (a_{21}\wedge b_{11})\vee(a_{22}\wedge b_{21}) & (a_{21}\wedge b_{12})\vee(a_{22}\wedge b_{22})\end{bmatrix}$$

例如

$$A=\begin{bmatrix}0.8 & 0.7\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}0.2 & 0.4\\ 0.6 & 0.9\end{bmatrix}$$

则

$$A\circ B=\begin{bmatrix}(0.8\wedge 0.2)\vee(0.7\wedge 0.6) & (0.8\wedge 0.4)\vee(0.7\wedge 0.9)\\ (0.5\wedge 0.2)\vee(0.3\wedge 0.6) & (0.5\wedge 0.4)\vee(0.3\wedge 0.9)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.2\vee 0.6 & 0.4\vee 0.7\\ 0.2\vee 0.3 & 0.4\vee 0.3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.7\\ 0.3 & 0.4\end{bmatrix}$$

仿此可求得 $B\circ A$：

$$B\circ A=\begin{bmatrix}0.4 & 0.3\\ 0.6 & 0.6\end{bmatrix}$$

可见一般 $A\circ B\neq B\circ A$。

模糊矩阵的积对应于模糊关系的合成。如某家庭中子女与父母外貌的相似关系 R 为一模糊关系，如表 2-12。

表 2-12

$\underset{\sim}{R}$	父	母
子	0.8	0.2
女	0.1	0.6

也可用矩阵表示，即

$$\underset{\sim}{R}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.6\end{bmatrix};$$

另有一关系为 S，表示该家庭中父母与祖父母的外貌相似程度，无疑这也是个模糊关系，如表 2-13。

表 2-13

$\underset{\sim}{S}$	祖父	祖母
父	0.5	0.7
母	0.1	0

也可用矩阵表示，即

$$\underset{\sim}{S}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

模糊关系 $\underset{\sim}{R}$ 和 $\underset{\sim}{S}$ 的复合，即模糊矩阵的积 $\underset{\sim}{R}\circ\underset{\sim}{S}$ 为：

$$R\circ S=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.6\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}0.5 & 0.7\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (0.8 \wedge 0.5) \vee (0.2 \wedge 0.1) & (0.8 \wedge 0.7) \vee (0.2 \wedge 0) \\ (0.1 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.1) & (0.1 \wedge 0.7) \vee (0.6 \wedge 0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.7 \\ 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$$

如果矩阵还原成模糊关系，如表 2-14。也就是说，在该家庭中孙子与祖父、祖母的相似程度分别为 0.5、0.7；而孙女与祖父、祖母的相似程度只有 0.1。仔细回忆这一生活中常见的例子，我们就能明白模糊矩阵相乘时先取小后取大的现实依据。有人认为，取大与取小运算法则是模糊数学的“特别美妙之处”。

表 2-14

$S \circ R$	祖父	祖母
子	0.5	0.7
女	0.1	0.1

又如，设有一组同学为 X

$$X = \{\text{张三，李四，王五}\}$$

他们可以选学英、法、德、日四种外语中的任意几门，令 Y 表示这四门外语课所组成的集合

$$Y = \{\text{英，法，德，日}\}$$

设他们的结业成绩如表 2-15。

如果把他们的成绩都除以 100 而折合成隶属度，则可以认为他们的结业成绩构成 $X \times Y$ 上的一个模糊关系 R 如表 2-16 所示。

表 2-15

姓名	语种	成绩
张三	英	86
张三	法	84
李四	德	96
王五	日	66
王五	英	78

表 2-16

R	英	法	德	日
张三	0.86	84	0	0
李四	0	0	0.96	0
王五	0.78	0	0	0.66

把表 2-16 写成矩阵形式即得：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}0.86 & 0.84 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.96 & 0\\ 0.78 & 0 & 0 & 0.66\end{pmatrix}$$

这个矩阵叫做“模糊矩阵”，其中的元素必须在［0，1］闭区间取值，它可以看成是普通关系矩阵的推广

这个矩阵还可以用相应的图来表示，此图称为关系图。上例中所对应的关系图如图 2-18 所示。

再如，二人对策中，石头、剪子、布的游戏，设局中人甲、乙具有相同的策略集 X 和 Y

$$X=Y=\{\text{石头、剪子、布}\}$$

根据对策则列表如下：

如果“甲胜”记作 1，“平局”记作 0.5，“甲负”记作 0，则得关系矩阵如表 2-17。

表 2-17

$\underset{\sim}{R}$	Y（乙） 石头　剪子　布
X（甲） 石头	平　甲胜　甲负
X（甲） 剪子	甲负　平　甲胜
X（甲） 布	甲胜　甲负　平

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}0.5 & 1 & 0\\ 0 & 0.5 & 1\\ 1 & 0 & 0.5\end{pmatrix}$$

由于此例中 $X=Y$，所以关系图可简化成只画出 X 中的元素。$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x,x)$ 可以用点自身到自身的闭环表示。见图

2-19。

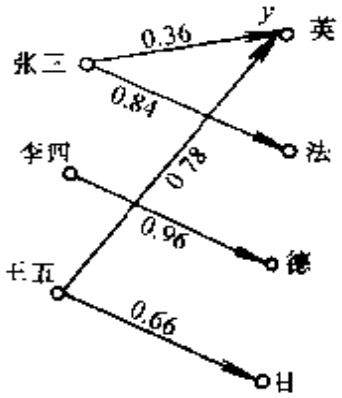


图 2-18　关系图

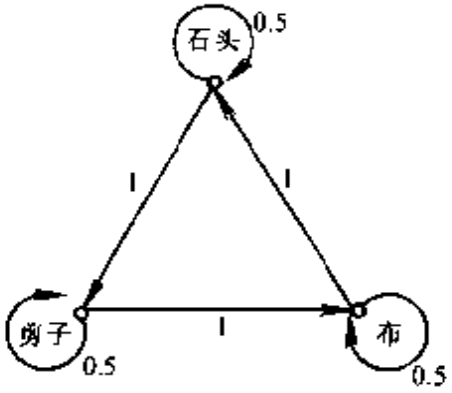


图 2-19　石头、剪子、布关系图

例 1，一份甲乙丙三同学的成绩单：

表 2-18

	英语	数学	物理	化学
甲	85	100	75	80
乙	90	95	80	70
丙	70	85	75	65

可以认为是 $X=\{$甲，乙，丙$\}$ 对 $Y=\{$英，数，理，化$\}$ 的模糊关系，见表 2-19。

表 2-19

$\underset{\sim}{R}$	英	数	理	化
甲	0.85	1	0.75	0.80
乙	0.90	0.95	0.80	0.70
丙	0.70	0.85	0.75	0.65

例 2，其中学对 1238 名学生就身高论域

$X=\{140, 150, 160, 170, 180\}$（单位 cm）

和体重论域 $Y=\{40, 50, 60, 70, 80\}$（单位：kg）的统计如下表 2-20 表示：

表 2-20

X	Y					计
	40	50	60	70	80	
140	20	16	4	2	0	42
150	80	100	80	20	10	290
160	30	120	150	120	30	450
170	15	30	120	150	120	435
180	0	1	2	8	10	21
计	145	267	356	300	170	1238

表 2-20 中第二行身高 140cm 的学生中 40kg 的人数最多（20 人），将它的权数定为 1，其余依比例定为 0.8，0.2，0.1 和 0，同样第三行身高 150cm 的学生中 50kg 的人数最多（100 人），将它的权数定为 1，于是第三行的加权比例数是 0.8，1，0.8. 0.2，0.1；同理，第四行是 0.2，0.8，1，0.8，0.2；第五行是 0.1，0.2，0.8，1，0.8；第六行是 0，0.1，0.2，0.8，1。这样上表所示 $X \to Y$ 的关系可写成下表 2-21。

它们也构成模糊关系 $\underset{\sim}{R}$。

本例提供了将统计资料改造成为隶属度并构造模糊关系的方法。

例 3，设

$X=\{1, 2, 3\}$，$Y=\{1, 2, 3, 4\}$

表 2-21

$\mu_{\underset{\sim}{R}}(x, y)$	40	50	60	70	80
140	1	0.8	0.2	0.1	0
150	0.8	1	0.8	0.2	0.1
160	0.2	0.8	1	0.8	0.2
170	0.1	0.2	0.8	1	0.8
180	0	0.1	0.2	0.8	1

$x\in X$，$y\in Y$，反映“x 比 y 小得多”（$x\ll y$）的模糊关系为：

$$\underset{\sim}{R}=\frac{0.5}{(1,\ 3)}+\frac{1}{(1,\ 4)}+\frac{0.5}{(2,\ 4)}。$$

也可将此关系列成表 2-22。

表 2-22

$\underset{\sim}{R}$ X	Y			
	1	2	3	4
1	0	0	0.5	1
2	0	0	0	0.5
3	0	0	0	0

第六节　模糊聚类分析

由于模糊集合的任何 λ 截集（$0\leqslant\lambda\leqslant1$）都是普通集合，所以对模糊集分类首先要确定 λ，然后可以按不同的 λ，就是不同的水平，来进行分类。这种方法叫做聚类分析。它在实际中应用很广泛。北京师范大学车宇翔同志已经把它用在环境科学上，刘来福副教授把它用在生物分类上，彭

祖赠副教授把它用在岩石分类上，都取得了令人满意的效果。

为了介绍模糊聚类分析，我们先讲模糊相似关系和模糊等价关系。

为简单起见，设论域 X 都是有限集。

设给定有限论域 X，并且设 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$ 是 X 上的模糊关系，如果 $\underset{\sim}{R}$ 满足自反性，就是当 $i=j$ 的时候有 $r_{ij}=1$，同时，$\underset{\sim}{R}$ 又满足对称性，就是 $r_{ij}=r_{ij}(i,j=1,2,\cdots n)$，就把 $\underset{\sim}{R}$ 叫做“模糊相似关系”，它所对应的矩阵 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$ 叫做“模糊相似矩阵”。

设 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$ 是论域 X 上的模糊相似关系，如果它还满足传递性，就把 $\underset{\sim}{R}$ 叫做模糊等价关系。

由此可知模糊等价关系是模糊相似关系的特殊情况，而模糊等价关系就是把经典集合论里的等价关系的概念推广到模糊集合论里。

从直观上看，模糊相似关系由于具有自反性，它所对应的矩阵对角线上的元素都是1。由于具有对称性，它所对应的矩阵是对称的（就是对称于对角线）。但是，模糊等价关系里的传递性却不容易在矩阵里看出来。

下面我们先看一个聚类分析的例子：

设 $X=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$，给出模糊等价关系 $\underset{\sim}{R}$，它所对应的矩阵是

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix} 1 & 0.48 & 0.62 & 0.41 & 0.47 \\ & 1 & 0.48 & 0.41 & 0.47 \\ & & 1 & 0.41 & 0.47 \\ & & & 1 & 0.41 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}。$$

由于 $\underset{\sim}{R}$ 是对称的，$r_{ij}=r_{ji}$，所以对角线以下部分可以略去不写。下面我们试按不同的 λ 取值。

第一，我们取 λ_1 满足 $0.62<\lambda_1\leqslant 1$ 的 λ 截集，由于 λ 截集是一个普通集合，它的矩阵可以用“1”或“0”二值来表示各元素，所以这时凡大于 0.62 的元素都变成 1，小于或等于 0.62 的元素都变成 0，得到

$$R_{\lambda_1}=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1\end{pmatrix},$$

这是一个“单位矩阵”，也叫“恒等矩阵”，这时对角线外的元素都是 0，可以略去不写，而 X 可以被分成五类，就是一个元素一类：

$$\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ \{x_4\},\ \{x_5\}.$$

第二，如果我们取 λ_2 满足 $0.48<\lambda_2\leqslant 0.62$ 的 λ 截集，这时大于 0.48 的元素都变成 1，小于或等于 0.48 的元素都变成 0，得到

$$R_{\lambda_2}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

现在，x_1、x_3 可以归并成一类，所以 X 一共可以分成四类：

$$\{x_1,\ x_3\},\ \{x_2\},\ \{x_4\},\ \{x_5\}.$$

第三，如果我们取 λ_3 满足 $0.47<\lambda_3\leqslant 0.48$ 的 λ 截集，

这时大于 0.47 的元素都变成 1，小于或等于 0.47 的元素都变成 0，得到

$$R_{\lambda_3}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\1&1&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}。$$

现在，x_1、x_2、x_3 可以归并成一类，所以 X 一共可以分成三类：

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3\},\ \{x_4\},\ \{x_5\}。$$

第四，如果我们取 λ_4 满足 $0.41<\lambda_4\leqslant 0.47$ 的 λ 截集，这时大于 0.41 的元素都变成 1，小于或等于 0.41 的元素都变成 0，得到

$$R_{\lambda_4}=\begin{pmatrix}1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&0&1\\0&0&0&1&0\\1&1&1&0&1\end{pmatrix}。$$

现在，x_1、x_2、x_3、x_5 可以归并成一类，所以 X 一共可以分成两类：

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_5\},\ \{x_4\}。$$

第五，如果我们取 λ_5 满足 $0\leqslant\lambda_5\leqslant 0.41$ 的 λ 截集，这时所有的元素都变成 1，就是得到全称矩阵 $\underset{\sim}{E}$，X 可以全部归并成为一类：

$$\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}。$$

总结以上各种情况，得到一个动态的聚类图，如 2-20

所示。

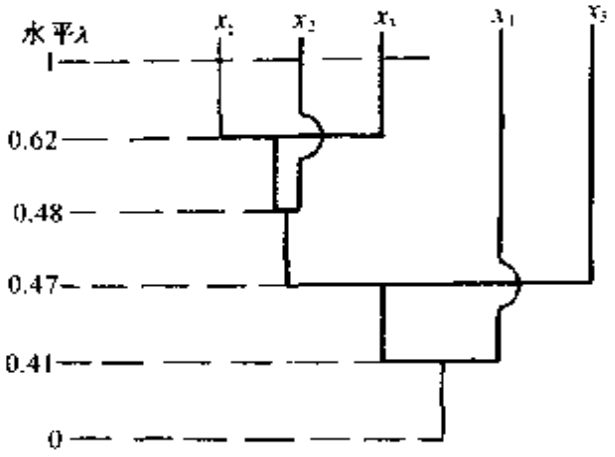


图 2-20　一个动态的聚类图

一、用最大树法进行聚类分析

模糊聚类分析对生物、人文和社会科学用来分类是十分有用的。它所采用的方法很多，如 λ 截集、λ 截矩阵、最大树法等，它是模关系理论的一种应用。

设有三个家庭，每家有 4-7 人，选每人的一张照片，共 16 张放在一起。请陌生的中学生对照片两两比较，按相象程度给出隶属度，结果列成表 2-23。

表 2-23

$\underset{\sim}{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1															
2	0	1														
3	0	0	1													
4	0	0	0.4	1												
5	0	0.8	0	0	1											
6	0.5	0	0.2	0.2	0	1										
7	0	0.8	0	0	0.4	0	1									

续表

$\underset{\sim}{R}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	0.4	0.2	0.2	0.5	0	0.8	0	1								
9	0	0.4	0	0.8	0.4	0.2	0.4	0	1							
10	0	0	0.2	0.2	0	0	0.2	0	0.2	1						
11	0	0.5	0.2	0.2	0	0	0.8	0	0.4	0.2	1					
12	0	0	0.2	0.8	0	0	0	0	0.4	0.8	0	1				
13	0.8	0	0.2	0.4	0	0.4	0	0.4	0	0	0	0	1			
14	0	0.8	0	0.2	0.4	0	0.8	0	0.2	0.2	0.6	0	0	1		
15	0	0	0.4	0.8	0	0.2	0	0	0.2	0	0	0.2	0.2	0	1	
16	0.6	0	0	0.2	0.2	0.8	0	0.4	0	0	0	0	0.4	0.2	0.4	1

这表就确定一个模糊关系 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$。由于它是对称的，所以表里只列出对角线以下的部分。

现在要求把照片分成三类，每类 4～7 张，属于同一家庭。

我们先画一个图，每个照片的编号作为一个“点”，而点的全体就构成一个集合

$$V=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots 15,\ 16\}。$$

如果在矩阵里 $r_{ij}\neq 0$，点 i 和点 j 就连上一条“线”。具体画法是先确定一个点，再直接从矩阵 $\underset{\sim}{R}$ 里按照 r_{ij}（这就是“权数”）从大到小的顺序连线，并且要求不产生“圈”，最后直到 16 个点都被连通为止。线旁边注上权数。这样就得到一棵“最大树”。连法不同，所得的最大树也不全相同，但是不影响结果。下页的图就是根据上表画出的一棵最大树，我们把它叫做 $\underset{\sim}{T}$（如图 2-21）。

现在分别按不同的 λ 值考虑。

第一步，先取 $\lambda_1=0.5$，那么最大树 $\underset{\sim}{T}$ 可以分成三棵树

方法是把权数小于 0.5 的线去掉，就可以得到以下三类：

{13，1，16，6，8，4，12，10，15，9}，

{5，2，7，11，14}，

{3}。

因为 {3} 自己成一类，不符合一个家庭 4～7 人的要求，因此对 {3} 拒绝分类，那就只有两类，不符合要求。

第二步，再取 $\lambda_2 = 0.6$，就是去掉权数小于 0.6 的线，就得到三类：

{13，1，16，6，8}，

{4，12，10，15，9}，

{5，2，7，11，14}。

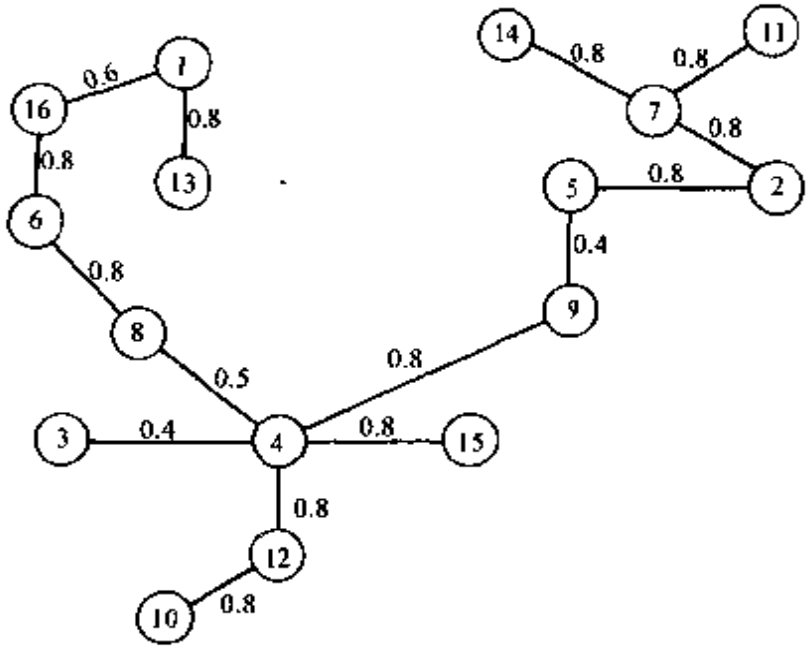


图 2-21　根据照片相象程度画出的一棵“最大树”

这符合原来的要求，不过 {3} 不属于任何一个家庭。

应该指出，这里是有实际意义的，因为虽然父母间的相貌可以完全不像，但是儿女像父亲，又像母亲，就是父-儿女-母之间有一条通路，它实际上就反映了一个家庭里所有的人的相像程度。

这种方法应用方便，可以供读者结合本人具体工作选用。

二、模糊聚类分析实际应用一例

上一节我们讲了应用最大树方法进行聚类分析，现在再结合前面讲的数据预处理构造模糊关系矩阵的方法，举一个聚类分析实际应用的例子。这个例子采用重庆建筑大学高师娴同志1983年12月在广州全国模糊数学应用成果学术交流会上发表的一篇论文。

近年来，发达国家的民用建筑广泛使用混凝土减水剂，在拌和混凝土的时候使用少量减水剂，可以减少用水量，提高混凝土强度，增加混凝土耐久性，降低劳动强度，减少施工设备的磨损，加快施工速度。但是减水剂价格比较高。因此需要经济合理地对不同型号的水泥选用合适的减水剂。

现在以AF型号的混凝土减水剂作为例子，对全国六家大型水泥厂生产的几种型号的水泥的适应性进行实验测定，把数据处理后用模糊聚类分析方法对各种型号的水泥进行分类，为合理选择水泥型号和厂家提供参考。

所选用的水泥分别编号如下：

第1号 C_1：琉璃河水泥厂425普通水泥；

第2号 C_2：琉璃河水泥厂325矿渣水泥；

第3号 C_3：邯郸水泥厂525普通水泥；

第4号 C_4：邯郸水泥厂425矿渣水泥；

第5号 C_5：江南水泥厂525硅酸盐水泥；

第 6 号 C_6：江南水泥厂 425 矿渣水泥；

第 7 号 C_7：启新水泥厂 525 普通水泥；

第 8 号 C_8：启新水泥厂 425 火山灰水泥；

第 9 号 C_9：大同水泥厂 525 普通水泥；

第 10 号 C_{10}：大同水泥厂 425 矿渣水泥；

第 11 号 C_{11}：锦西水泥厂 425 普通水泥。

就数学上说，就是

论域 $U = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8, C_9, C_{10}, C_{11}\}$。

再选用下面四种指标作为对适应性的参考因素：

x_1：水泥用量，(kg/m^3)；

x_2：水灰比（%）；

x_3：坍落度❶ (cm)；

x_4：相对强度，%。相对强度指加 AF 减水剂后的强度对未加减水剂的强度的比，强度用 1d、3d、7d、28d 四次测定值的算术平均值。

AF 减水剂的用量都固定在 0.6%。实验测得的数据如表 2-24。

表上的数据就是前面讲数据预处理一节里所说的 x_{ki} 的值，这里 $k=1, 2, 3, 4$，$i=1, 2, \cdots 11$。表里标准差就是按照

$$s_k = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x'_{ki} - \overline{x'_k})^2}$$

❶ 坍落度是表示混凝土拌和物流动性的一种指标。把刚拌好的混凝土按一定方法装满一个标准的无底截头圆锥筒里，加以捣实，然后把筒竖直提起，混凝土坍落后的高度跟筒高的差，就是坍落度，用厘米做单位。

的公式计算的，我们试以 x_3 这一因素作为例子：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(x'_{3i}-\overline{x'_3})^2 &= (5.0-8.8)^2+(6.0-8.8)^2+(5.0-8.8)^2\\&\quad+(5.0-8.8)^2+(7.0-8.8)^2\\&\quad+(5.0-8.8)^2+(5.5-8.8)^2\\&\quad+(6.0-8.8)^2+(14.0-8.8)^2\\&\quad+(21.0-8.8)^2+(17.0-8.8)^2\\&=330.69。\end{aligned}$$

AF 减水剂对 11 种型号水泥的适应性的四种参考因素数据 表 2-24

适应性因素 / 元素	x_1	x_2	x_3	x_4
1	315	66	5.0	122
2	350	55	6.0	129
3	315	54	5.0	134
4	350	50	5.0	142
5	315	56	7.0	132
6	350	59	5.0	138
7	315	64	5.5	140
8	350	59	6.0	119
9	274	62	14.0	132
10	335	56	21.0	135
11	322	48.1	17.0	128
平均值 $(\overline{x'_k})$	326.5	57.2	8.8	131.9
标准差 (s_k)	22.54	5.27	5.48	6.79

$$s_3=\sqrt{\frac{1}{11}\times 330.69}=5.48;$$

跟表里的值相符。

接着根据公式

$$x''_{ki}=\frac{x'_{ki}-\overline{x'_k}}{s_k}$$

进行标准化。例如求 x''_{35}的值：

$$x''_{35}=\frac{x'_{35}-\overline{x'_3}}{s_3}=\frac{7.0-8.8}{5.48}=-0.328。$$

按照这方法逐一求得各个 x''_{ki}的值，如表 2-25。

AF 减水剂对 11 种型号水泥的适应性的四种参考因素数据标准化值 表 2-25

元素 \ 适应性因素	x_1	x_2	x_3	x_4
1	−0.510	1.670	−0.693	−1.458
2	1.043	−0.417	−0.511	−0.427
3	−0.510	−0.607	−0.693	0.309
4	1.043	−1.366	−0.693	1.487
5	−0.510	−0.228	−0.328	0.015
6	1.043	0.342	−0.693	0.898
7	−0.510	1.290	−0.602	1.193
8	1.043	0.342	−0.511	−1.900
9	−2.329	0.911	0.949	0.015
10	0.377	−0.228	2.226	0.457
11	−0.200	−1.727	1.496	−0.574
$x''_{kmax}-x''_{kmin}$	3.372	3.397	2.919	3.387

再根据极值标准化公式

$$x_{ki}=\frac{x''_{ki}-x''_{kmin}}{x''_{kmax}-x''_{kmin}}$$

求 x_{ki}，例如求 x_{35}的值，因为

$$x''_{3\min} = -0.693,\quad x''_{3\max} = 2.226,$$

求得 $$x_{35} = \frac{-0.328 + 0.693}{2.919} = 0.125。$$

按照这方法逐一求得各个 x_{ki}的值，如表 2-26。

AF 减水剂对 11 种型号水泥的适应性的四种参考因素数据最后标准值 表 2-26

适应性因素 / 元素	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0.539	1	0	0.130
2	1	0.386	0.062	0.435
3	0.539	0.330	0	0.652
4	1	0.106	0	1
5	0.539	0.441	0.125	0.565
6	1	0.609	0	0.826
7	0.539	0.888	0.031	0.913
8	1	0.609	0.062	0
9	0	0.777	0.563	0.565
10	0.802	0.441	1	0.696
11	0.631	0	0.750	0.391

现在进行标定。我们采用欧几里得距离法：

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & (\text{当 } i = j \text{ 的时候}), \\ \sqrt{\dfrac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(x_{ki} - x_{kj})^2} & (\text{当 } i \neq j \text{ 的时候})。 \end{cases}$$

试以计算 r_{56}作为例子：

$$(0.539-1)^2 + (0.441-0.609)^2 + (0.125-0)^2 + (0.565-0.826)^2$$
$$= (-0.461)^2 + (-0.168)^2 + 1.25^2 + (-0.261)^2,$$
$$r_{56} = \sqrt{\frac{1}{4}\left[(-0.461)^2 + (-0.168)^2 + 0.125^2 + (-0.261)^2\right]}$$

$=0.285$。

按照这一公式逐一求得各个 r_{ij} 值，就得模糊关系矩阵 $\underset{\sim}{R}$：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{pmatrix}
1 & 0.414 & 0.425 & 0.665 & 0.360 & 0.461 & 0.396 & 0.311 & 0.460 & 0.652 & 0.640 \\
 & 1 & 0.258 & 0.317 & 0.243 & 0.227 & 0.417 & 0.244 & 0.600 & 0.498 & 0.436 \\
 & & 1 & 0.310 & 0.094 & 0.283 & 0.308 & 0.424 & 0.451 & 0.517 & 0.432 \\
 & & & 1 & 0.364 & 0.266 & 0.456 & 0.561 & 0.699 & 0.558 & 0.520 \\
 & & & & 1 & 0.285 & 0.287 & 0.375 & 0.386 & 0.462 & 0.395 \\
 & & & & & 1 & 0.273 & 0.414 & 0.594 & 0.521 & 0.561 \\
 & & & & & & 1 & 0.530 & 0.420 & 0.560 & 0.630 \\
 & & & & & & & 1 & 0.632 & 0.598 & 0.532 \\
 & & & & & & & & 1 & 0.491 & 0.517 \\
 & & & & & & & & & 1 & 0.308 \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}。$$

现在按上节介绍的最大树方法进行聚类，先画出最大树，如图 2-22（a）所示。

然后取 λ 截集确定分类。

如果取 $\lambda<0.462$，那么论域的全部元素都聚成一类。如果取 $\lambda>0.699$，那么论域的每一元素都各自成一类。这两种情况都不符合要求。

如果取 $\lambda=0.600$，那么如图 2-22（b）所示，论域被分成四类：{1，2，4，7，8，9，10，11}，{3}，{5}，{6}。

如果取 $\lambda=0.630$，那么如下图 2-22（c）所示，论域被分成五类：{1，4，7，8，9，10，11}，{2}，{3}，{5}，{6}。

如果取 $\lambda=0.640$，那么如图 2-22（d）所示，论域被分成七类：{1，4，9，10，11}，{2}，{3}，{5}，{6}，{7}，{8}。

我们取不同的 λ 值，就可以得到一个动态的聚类图，如图 2-23 所示。

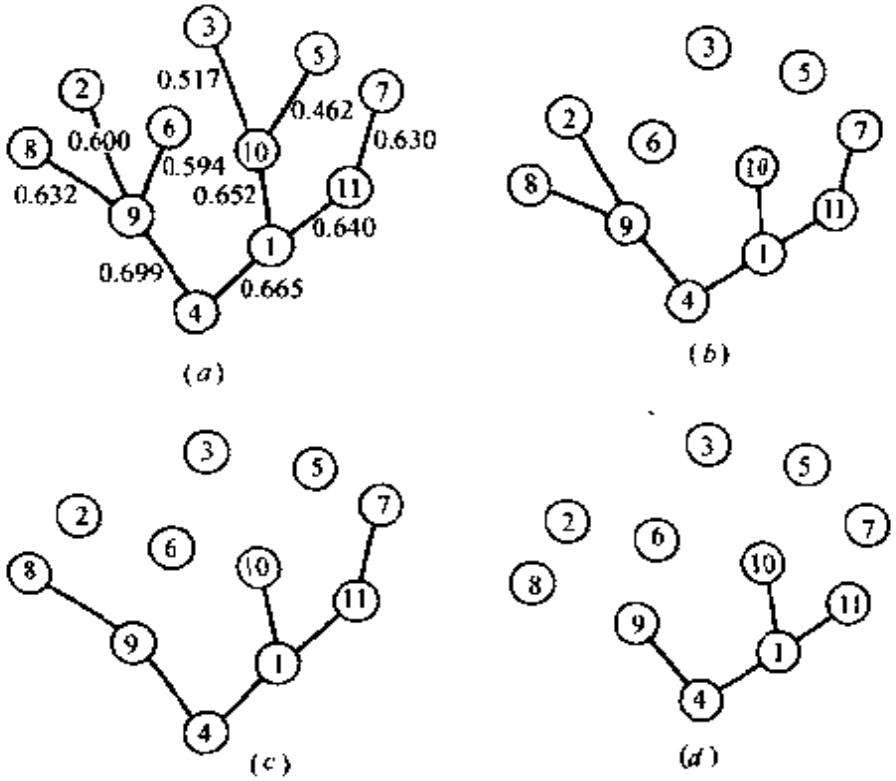


图 2-22　根据 AF 减水剂对不同类型水泥画出的最大树和取不同 λ 值的λ 截集进行分类。

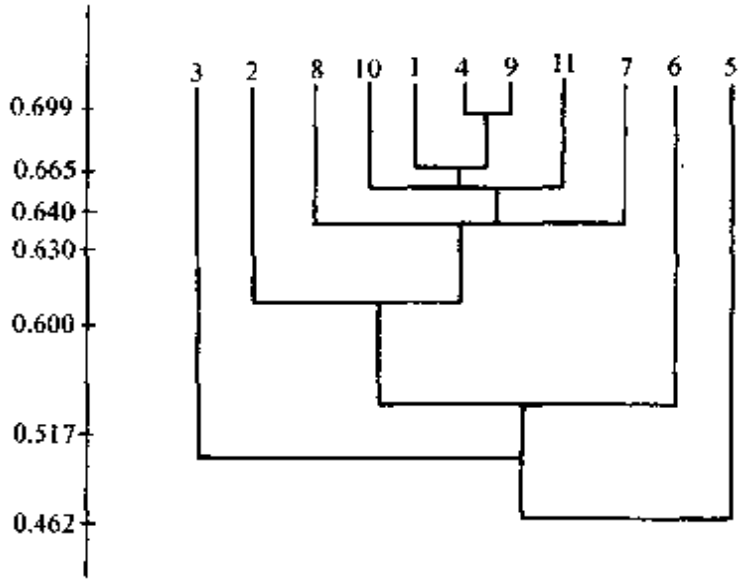


图 2-23　十一种类型水泥的动态聚类图

为了便于分析，先就论域 U 里水泥型号分成四个类型，六个品种：

第一，普通水泥：425 号，525 号；

第二，矿渣水泥：325 号，425 号；

第三，火山灰水泥：425 号；

第四，硅酸盐水泥：525 号。

现在就 $\lambda=0.600$，论域可以分成四类：

第一类：{琉璃河水泥厂 425 普通水泥，琉璃河水泥厂 325 矿渣水泥，邯郸水泥厂 425 矿渣水泥，启新水泥厂 525 普通水泥，启新水泥厂 425 火山灰水泥，大同水泥厂 525 普通水泥，大同水泥厂 425 矿渣水泥，锦西水泥厂 425 普通水泥}；

第二类：{邯郸水泥厂 525 普通水泥}；

第三类：{江南水泥厂 525 硅酸盐水泥}；

第四类：{江南水泥厂 425 矿渣水泥}。

聚类以后，凡是同一类水泥，它们对 AF 减水剂在 0.6% 用量下，就水泥用量、水灰比、坍落度、相对强度四个因素来说，适应性相同，可以相互代替。施工单位就可以就近选取厂家，以节省长途运输费用；或者选用同一厂家而价格比较便宜的一种水泥型号，以节约基建资金。

不属同一类的水泥就不应该代替。

第七节　相似优先比

在前面我们叙述了模糊性度量的各种形式和聚类分析的原理，在实用中它们往往是和相似优先比同时应用的。

什么叫相似优先比呢？就是在所考虑的样品集合

$$X=\{x_1,\ x_2,\ \cdots x_n\}$$

中，首先选定一个固定样品 x_k（$1 \leqslant k \leqslant n$），然后想法找出在其余 $n-1$ 个样品中，哪些跟 x_k 最相似，哪些次之。寻找的方法，首先是以成对的样品 x_i、$x_j \in X$ 去跟固定样品 x_k 作比较，当 x_i 跟 x_k 的相似程度高于 x_j 跟 x_k 的相似程度的时候，在 x_i 和 x_j 这两者择一中，就优先选择相似程度大的 x_i，或者说，x_i 比 x_j 优先。这就叫做相似优先比。在选择中要注意以下三点：

第一，在 x_i 和 x_j 两者择一中，所谓“优先”性（或者说相似程度大）是相对于这两者比较而说的，说 x_i 比 x_j 优先，并不是对所有样品来说 x_i 都优先，就是说不是在整体上的绝对优先。只有在所有的两两对比中，x_i 都取得优先的时候，才能说 x_i 在总体上是优先的，就是 x_i 跟固定样品最相似。

第二，在两者择一中，所挑选上的样品 x_i，只是就 x_i 和 x_j 两个样品的比较来说的，说 x_i 跟固定样品 x_k 更相似，并不是说 x_i 跟固定样品 x_k 绝对地相似。

第三，对于两个备选样品，必须选上一个，或者当 x_i、x_j 跟 x_k 的相似程度相等的时候，就可以两个同时被选上，但是不能一个也不选。

设给定集合 X：

$$X = \{x_1, x_2, \cdots x_n\},$$

再给定固定样品 x_k 把任意 x_i，$x_j \in X$ 跟 x_k 作比较（i，$j = 1, 2, \cdots n$），得到模糊关系 $\underset{\sim}{R}$：

$$\underset{\sim}{R} = (r_{ij})\ (r_{ij} \in [0, 1],\ i,\ j = 1, 2, \cdots n),$$

我们可以根据 r_{ij} 来确定 x_i 和 x_j 哪一个优先：

如果 r_{ij} 在（0.5，1）之间，表示 x_i 比 x_j 优先。

如果 r_{ij} 在 (0, 0.5) 之间，表示 x_j 比 x_i 优先。

在极值情况下，有以下三种情形：

第一，如果 $r_{ij}=1$，表示 x_i 显然比 x_j 优先。

第二，如果 $r_{ij}=0$，表示 x_j 显然比 x_i 优先。

第三，如果 $r_{ij}=0.5$，表示处在中间值，就无法确定优先性，就是说两个选择是等价的。

这样确定的 r_{ij} 就叫相似优先比，$\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$ 叫模糊相似优先比矩阵。

我们还假定 $\underset{\sim}{R}=(r_{ij})$ 里的元素 r_{ij} 具有如下两个特性：

$$r_{ij}=1 \quad (i=1, 2, \cdots n),$$

$$r_{ij}+r_{ji}=1 \quad (i\neq j,\ i,\ j=1, 2, \cdots n)。$$

这里头一个特性表示只在一个样品 x_i 中作选择，当然永远被选中 x_i，所以 $r_{ij}=1$。第二个特性表示选 x_i 而不选 x_j 的优先比跟选 x_j 而不选 x_i 的优先比总是互补的。

现在我们举一个模糊相似优先比矩阵的例子：

$$\underset{\sim}{R}=\begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 1 & 0.3 \\ 0.8 & 0.7 & 1 \end{pmatrix} \end{array}。$$

从上面矩阵里可以看到，虽然

$$x_{12}=0.9>0.5,$$

表明 x_1 比 x_2 优先，但是

$$x_{13}=0.2<0.5,$$

表明 x_1 不及 x_3 优先。而

$$\gamma_{31}=0.8>0.5,$$

$$\gamma_{32}=0.7>0.5。$$

可见在 x_1、x_2、x_3 三个样品中，x_3 比 x_1、x_2 都优先。也就是说，在这三个样品中 x_3 跟固定样品 x_k 的相似程度优先于其他两个样品。

具体应用的时候应该怎样确定 r_{ij} 呢？一般经常用绝对值距离，也就是汉明距离，可以这样定义：

$$r_{ij}=\frac{D_{kj}}{D_{ki}+D_{kj}},$$

这里

$$D_{ki}=|x_k-x_i|,$$

$$D_{kj}=|x_k-x_j|,$$

而 x_k 就是指固定样品，x_i、x_j 是被选择样品。

从上面的定义可知：

$$r_{ji}=\frac{D_{ki}}{D_{ki}+D_{kj}},$$

显然，$r_{ij}+r_{ji}=\frac{D_{kj}}{D_{ki}+D_{kj}}+\frac{D_{ki}}{D_{ki}+D_{kj}}=1,$

这就是前面所提到的 $\underset{\sim}{R}$（r_{ij}）的第二个特性。

下面举一个气象方面的实例：

设北纬 60°槽的位置用经度表示，由实际资料得 1970～1977 年的经度值如表 2-27。选取 1977 年作为固定样品，试对 1970 年和 1971 年同时计算优先比。

北纬 60°槽的位置的历年经度值　　表 2-27

年　份	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977
经度值	90	100	90	80	110	130	100	120

根据前面的定义，用 r_{01} 表示 1970 年和 1971 年的相似优先比，那么

$$r_{01}=\frac{|120-100|}{|120-90|+|120-100|}=0.40,$$

$$r_{10}=1-r_{01}=1-0.40=0.60。$$

表示 1971 年比 1970 年优先。用这种方法就可以写出模糊优先比矩阵 $\underset{\sim}{R}$。

下面我们结合日本甜橘引种问题，来说明怎样运用相似优先比。这是北京林学院做的工作，我们引用的时候作了适当的简化。

他们选了日本甜橘的主要产地之一福岗和我国的合肥、武汉、长沙、桂林、温州、成都六个地点作为样本，用模糊相似优先比的方法，并且用跟甜橘生长发育关系比较密切的年平均气温、年平均降雨量、年日照时数、年极端最低气温、一月份平均气温五个因素来考虑，分析六个样本地点跟福岗的气候相似程度，通过比较，找出跟福岗最相似的地点，然后引种。具体步骤是这样的。

第一步，确定相似因子。用 A_0 表示福岗；又把合肥、武汉、长沙、桂林、温州、成都六个地点依次用 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 来表示。再把所选定年平均气温、年平均降雨量、年日照时数、年极端最低气温、一月份平均气温五个因素分别用 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 来表示，把它们叫做相似因子。

根据 1951～1970 年的资料的平均值，如表 2-28 所示。用福岗作为固定样本来比较其他各点的相似程度，再来择优选择引种地点。

第二步，建立相似优先比和关系矩阵。采用相似优先比公式来建立关系矩阵，用福岗作为固定样本，用年平均气温 C_1 作为例子，那么合肥 A_1 和武汉 A_2 对福岗 A_0 的相似优

七个地点五个相似因子具体数据　　表 2-28

相似因子 \ 地点	福岗 A_0	合肥 A_1	武汉 A_2	长沙 A_3	桂林 A_4	温州 A_5	成都 A_6
年平均气温 C_1	16.2	15.7	16.3	17.2	18.8	17.9	16.3
年平均降水 C_2	1492	970	1260	1422	1874	1698	976
年日照时数 C_3	2000	2209	2085	1726	1709	1848	1239
年极端最低气温 C_4	−8.2	−20.6	−17.3	−9.5	−4.9	−4.5	−4.6
一月份平均气温 C_5	6.2	1.9	2.8	4.6	8.0	7.5	5.6

先比分别是

$$r_{12}=\frac{|16.2-16.3|}{|16.2-15.7|+|16.2-16.3|}=0.17,$$

$$r_{21}=1-0.17=0.83。$$

可见 A_2 比 A_1 更相似于 A_0。用类似的方法，算出有关 C_1 的所有的 r_{ij}，就得到模糊关系矩阵：

$$\underset{\sim}{R}_{C_1}=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0.17 & 0.67 & 0.84 & 0.77 & 0.17 \\ 0.83 & 0 & 0.91 & 0.96 & 0.94 & 0.50 \\ 0.33 & 0.09 & 0 & 0.72 & 0.63 & 0.09 \\ 0.16 & 0.04 & 0.28 & 0 & 0.40 & 0.04 \\ 0.23 & 0.06 & 0.37 & 0.60 & 0 & 0.06 \\ 0.83 & 0.50 & 0.91 & 0.96 & 0.94 & 0 \end{pmatrix} \end{array}。$$

同理，对于其他相似因子 C_2、C_3、C_4、C_5，也可以算出模糊关系矩阵●。矩阵里行列标志 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、

● 下面计算中某些数字，根据前面所给原始数据加以核算后，有所改动，跟北京林学院原文有出入。

A_6 因为跟 $\underset{\sim}{R}_{c_1}$ 相同，所以略去不写。

$$\underset{\sim}{R}_{c_2}=\begin{pmatrix}0 & 0.31 & 0.12 & 0.42 & 0.28 & 0.50\\ 0.19 & 0 & 0.23 & 0.62 & 0.47 & 0.69\\ 0.88 & 0.77 & 0 & 0.85 & 0.75 & 0.88\\ 0.58 & 0.38 & 0.15 & 0 & 0.35 & 0.57\\ 0.72 & 0.53 & 0.25 & 0.65 & 0 & 0.71\\ 0.50 & 0.31 & 0.12 & 0.43 & 0.29 & 0\end{pmatrix}。$$

$$\underset{\sim}{R}_{c_3}=\begin{pmatrix}0 & 0.29 & 0.57 & 0.58 & 0.42 & 0.78\\ 0.71 & 0 & 0.76 & 0.77 & 0.64 & 0.90\\ 0.43 & 0.24 & 0 & 0.52 & 0.36 & 0.74\\ 0.42 & 0.23 & 0.48 & 0 & 0.34 & 0.72\\ 0.58 & 0.36 & 0.64 & 0.66 & 0 & 0.83\\ 0.22 & 0.10 & 0.26 & 0.28 & 0.17 & 0\end{pmatrix}。$$

$$\underset{\sim}{R}_{c_4}=\begin{pmatrix}0 & 0.42 & 0.09 & 0.21 & 0.23 & 0.23\\ 0.58 & 0 & 0.13 & 0.27 & 0.29 & 0.28\\ 0.91 & 0.87 & 0 & 0.72 & 0.74 & 0.73\\ 0.79 & 0.73 & 0.28 & 0 & 0.53 & 0.52\\ 0.77 & 0.71 & 0.26 & 0.47 & 0 & 0.49\\ 0.77 & 0.72 & 0.27 & 0.48 & 0.51 & 0\end{pmatrix}。$$

第三步，由 λ 水平评出相似程度。根据实际情况由大到小选定 λ 值，作出相应的矩阵 R_λ。首先达到除对角线的元素外全行都是 1 的那一行所属的地点是最相似。按全行都是 1 出现的先后，可以排成相似程度的大小顺序，早出现的行，表示相似程度大。

现在用 $\underset{\sim}{R}_{\sigma 1}$ 作为例子，选定 λ 值是 0.96、0.94、0.91、

$$\underset{\sim}{R}_{C_5}=\begin{pmatrix}0 & 0.44 & 0.27 & 0.30 & 0.23 & 0.12\\ 0.56 & 0 & 0.32 & 0.35 & 0.28 & 0.15\\ 0.73 & 0.68 & 0 & 0.53 & 0.45 & 0.27\\ 0.70 & 0.65 & 0.47 & 0 & 0.42 & 0.25\\ 0.77 & 0.72 & 0.55 & 0.58 & 0 & 0.32\\ 0.88 & 0.85 & 0.73 & 0.75 & 0.68 & 0\end{pmatrix}。$$

0.84、0.83、0.77、0.67、0.63、0.60、0.50、0.40、0.33、0.28、0.23、0.17、0.16、0.09、0.06、0.04。

显然当取 $\lambda>0.50$ 的时候，矩阵里不会出现除对角线的元素外全行都是 1 的行。

当取 $\lambda=0.50$ 的时候，作 $R_{\lambda=0.50}$，那么在矩阵里大于或等于 0.50 的元素都变成 1，小于 0.50 的元素都变成 0，就得到

$$R_{\lambda=0.50}=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\\ A_5\\ A_6\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6\end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}。$$

从矩阵里可以看出，A_2（武汉）和 A_6（成都）首先达到除对角线外其余元素都是 1。它的实际意义是：就特征 C_1 来说，武汉和成都跟福岗情况最相似。现在把 A_2 和 A_6 同时编做第一号。然后在矩阵 $\underset{\sim}{R}_{C_1}$ 里删去 A_2、A_6 两行和对应的两列。

再降低 λ 水平，当取 $\lambda=0.40$ 的时候，同样的方法可以得到

$$R_{\lambda-0.40}=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}。$$

现在 A_1（合肥）跟福岗最相似，编做第 2 号。并且划去 A_1 的行和列。

再降低 λ 水平，当取 $\lambda=0.33$ 的时候，得到

$$R_{\lambda=0.33}=\begin{array}{c} \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}。$$

现在 A_3（长沙）和 A_5（温州）跟福岗最相似，编做第 3 号。划去 A_3、A_5 的行和列。最后剩下 A_4（桂林），编做第 4 号。这就是说：就因素 C_1（年平均气温）来说，跟福岗相似的顺序从大到小排列是

第 1 号：A_2（武汉），A_6（成都）；

第 2 号：A_1（合肥）；

第 3 号：A_3（长沙），A_5（温州）；

第 4 号：A_4（桂林）。

但是还要考虑其他因素 C_2、C_3、C_4、C_5。完全可以用相同的方法处理。

总结 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 各因素跟福岗相似顺序，把编号填入表里，就得到表 2-29。

六个地点五个相似因子相似顺序　　表 2-29

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	总　和
A_1	2	4	3	6	6	21
A_2	1	5	1	5	5	17
A_3	3	1	4	1	3	12
A_4	4	3	5	2	4	18
A_5	3	2	2	4	2	13
A_6	1	4	6	3	1	15

从上表里 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 各列的顺序数可以分别看出各个因素跟福岗同一因素的相似程度，但是我们考虑的是五个因素的综合作用。严格地说，各个因素对甜橘生长所起的作用不同，因此最好给各因素一定的“权数”，就是分别给 C_1、C_2、C_3、C_4、C_5 的顺序数乘以系数 α_1、α_2、α_3、α_4、α_5。但是因为权数的确定不是一件容易的事，为简单起见，上表里就直接求出总和，这就是假设

$$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\alpha_5=1,$$

也就是假设“平权”的情况下所得到的结果。

从上表看出对 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 来说，顺序数的总和越小，跟福岗情况越相似，从小到大的顺序是

A_3（长沙），A_5（温州），A_6（成都），

A_2（武汉），A_4（桂林），A_1（合肥）。

以上分析是符合实际情况的，在合肥因为低温影响，甜橘不宜生长。

除以上例子外，这种方法已经广泛应用在地质、地震、石油、气象、预测、决策等多方面，在社会科学的许多领域也完全可以应用。

第三章　模糊数学在建筑工程快速估算造价中的应用

第一节　问题的提出

解决建筑工程快速估算造价问题是形势所迫，大势所趋，是建筑业改革的需要。

长期以来，我们进行工程建设常习惯于使用行政手段指定设计，施工单位逐级下达任务，建设单位缺乏择优选定的自主权。设计单位、施工单位依赖主管部门分配任务，缺少独立经营的必要条件，任务完成的好坏，工期的长短，投资效益的高低，都不承担经济责任，吃国家的“大锅饭”，加上部门、地区的条块分割、封锁、保护落后。在这种外无压力、内无动力的情况下，建设工程普遍存在工期长，浪费大，效益低等问题。为了改变这种状况，真正发挥建设、设计和施工单位的积极性，行使经营管理的主动权，必须进行招标与投标，鼓励竞争，防止垄断。

招标与投标是我国建筑业经营方式的一项重大改革，也是当前建筑业产品市场交易的主要形式。近几年来，我国正在大力实施工程建设招标投标制，已取得了一定的成效，积累了不少经验，并正在向指导价竞争费方向发展。

一个承包施工企业的生存与发展，不再是过去单纯靠行政手段分配建设任务的老办法。

按行政隶属关系分配任务，用预算加鉴证办法进行结算，是从五十年代初沿袭下来的老办法，这种做法不利于促进承建单位改进经营管理、缩短工期，降低造价。

工程招标投标是国际上广泛采用的分派任务的主要交易方式，将建筑施工企业推向了市场，引入了竞争机制。实践表明，招标承包制适应建筑工程的特点和我国实际情况，符合价值规律原则，具有较好的经济效益和社会效益。

建筑产品作为一种特殊的商品，不同于其它工业商品，它的生产周期长，占用资金多，具有单个性、复杂性且体积庞大与大地相连接。因此，只能按期货交易的方式进行交换，形成没有物流的流通。特别是建筑工程的费用构成复杂，这给招标投标和造价控制带来了一定的困难，使市场竞争更为激烈。

建筑业的改革，要围绕缩短工期，降低造价，提高工程质量和投资效益来进行，关键是要执行投资包干制和招标承包制，这些重大的改革措施促使建筑企业加强企业管理，提高管理水平，增加经济效益。招标，是一种具有竞争性质的经济手段。实行招标投标，摆在建筑企业面前的主要课题是改革工程预算管理办法，尽快提出工程报价。

目前，各地区都有统一的工程预算定额，以定额为基础，编制工程预算书，作为甲、乙双方工程价款结算的依据，也是确定工程造价的依据。实行招标投标以后，确定工程造价，甲、乙方结算的依据不是国家规定的定额，而是以投标书为依据。现行的一套工程预算编制方法，速度慢，周期长，赶不上施工的需要，更赶不上投标的需要，就是用现在的一套预算办法加上电子计算机也很难适应投标的需要，因为，当代的电子计算机还不能识图，预算的很多工作还必

须人去做。所以各建筑施工单位必须根据本企业的情况，包括施工技术、人员、施工设备、管理水平，研究自己的报价依据，采用先进的计算手段——电子计算机，建立报价系统，快速准确地报价，提高竞争能力。为此，根据预测科学，提出如下估测方法，可以达到快速准确的目的。通过许多工程实测的检验（估算的结果与工程竣工资料相比），精度提高了许多，可达 95% 以上，而计算所用的时间较少；手算，最多二个多小时，熟练了半个多小时就可以算出。如果用电子计算机来计算，那就更快了，只要几分钟就可以有结果。这就为建筑企业投标竞争取胜赢得了时间，为设计单位作设计方案的技术经济比较争得了速度，同时也为电子计算机的应用开辟了新路。

预测科学是一门研究未来的学科，它的功能是正确地掌握对当前的决策具有重要作用的未来的不确定的因素或未知事件，提供信息和数据，据以形成可行性方案，为决策与规划服务。我们预测就是根据已发生的事情研究其规律性和发展趋势，预测未来，工程估价就是用这种方法。有丰富经验的工程验算人员，拿到大量图纸，不需进行大量的计算，根据建筑物的类型、结构、装饰等特征，就可以估算出造价、用工数量、主要材料消耗量等，而且经验越丰富，这种估算就越准确。受到中医诊断电子计算系统和模糊数学方法的启示，作者认为总结有经验的工程预算人员的估测方法，输入计算机，利用先进的预算工具实现快速而较准确的工程预算估测是可能的。有经验的工程预算人员之所以能做出比较准确的估测，就是因为在他的脑子中已经有了很多已做过的预算，利用相似法加上适当的系数调整，就可以进行估测。这一点，当代计算机是完全能够胜任的。我们可以把相当数量

的典型工程中的预算资料及工程特征进行整理输入计算机，让计算机在众多的典型工程中查找同预估工程最相似的三个工程，用这三个工程的预算资料，结合当时的材料价格、工资水平、收费办法，通过一定的计算去估测。计算机内存储的工程预算资料越丰富，搜集当时的材料价格等市场信息愈准确及时，那么，估测也就愈准确。为此，特此提出模糊数学理论的应用。

第二节　估算公式的原理和推导

建筑工程的估算，从实际上来说，是利用某种方法，对工程造价所作的一个预先估计或称预测。这就给我们利用众多的现代预测技术来进行建筑工程估算，提供了巨大的可能性和坚实的理论基础。

虽然由于建筑工程本身的单体性、复杂性、多样性以及对建筑地点的依赖性等特点，不存在两个完全一样的工程，它们总会在某些方面有差异，但是总还可以在众多的工程中找到差异比较小的一些工程，也就是比较相似的一些工程。换句话说，众多的建筑工程之间存在着某些相似性，不同的工程它们的相似程度也就不同。我们估算的基本原理，就是建立在建筑工程之间的这种相似性上面。

对于某个要估算的建筑工程（称之为欲估工程），我们可以从数目众多的已经知道造价的建筑工程（称之为典型工程）中找出与之最相似的若干个工程，然后利用这若干个与欲估工程最相似的若干个工程（称之为相似工程）的造价作为原始资料，采用某种可行的预测方法，对欲估工程的造价进行预测而得到欲估工程的估价。这就是快速估算新方法的

基本原理。

在预测技术中，有一种被广泛应用的预测方法，叫指数平滑法。快速估算所采用的估算公式，就是以指数平滑法为理论依据。按照指数平滑法的原理，可以推导出快速估算公式。

设 n 个典型工程与欲估工程的贴近度（即相似程度）为 α_i，$i=1, 2, \cdots, n$，从大到小排列成一个有序数列并令为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，相应的典型工程的单方造价为 $E_1, E_2 \cdots, E_n$。就是说，与欲估工程最相似的（贴近度最大）典型工程的单方造价为 E_1，次相似的为 E_2，依次类推下去，最不相似的为 E_n。

设第 i 个相似工程的单方造价的预测值为 E_i^*，其预测误差为 $(E_i - E_i^*)$，则第 $i-1$ 个相似工程的单方造价预测值为：$E_{i-1}^* = E_i^* + \alpha_i (E_i - E_i^*)$

该式的意思是：对第 i 个相似工程的单方造价预测值进行修正，修正的方法是加上其预测误差 $(E_i - E_i^*)$ 和该工程与欲估工程的贴近度 α_i 的乘积，然后就把修正后的值作为与欲估工程第 $i-1$ 相似工程的单方造价的预测值。这样，上式可以改变为：

$$E_{i-1}^* = \alpha_i E_i + (1 - \alpha_i) E_i^*$$

依次类推并展开，则可得欲估工程的单方造价预测值为：

$$\begin{aligned} e^* &= \alpha_1 E_1 + (1 - \alpha_1) E_1^* \\ &= \alpha_1 E_1 + (1 - \alpha_1)[\alpha_2 E_2 + (1 - \alpha_2) E_2^*] \\ &= \cdots\cdots \\ &= \alpha_1 E_1 + \alpha_2 (1 - \alpha_1) E_2 + \alpha_3 (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) E_3 + \\ &\quad \cdots + \alpha_n (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_{n-1}) E_{n-1} \end{aligned}$$

$$+(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n)E_n^*$$

其中 E_n^* 为预测初始值，取为 n 个典型工程单方造价的算术平均值即：

$$E_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_i$$

可见，欲估工程的单方造价预测值就是各相似工程单方造价的加权平均值，这些权值从大到小地变化逐渐趋于零，且满足归一化条件，所有权值之和等于 1，即

$$\alpha_1 + \alpha_2(1-\alpha_1) + \alpha_3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \cdots +$$
$$\alpha_n(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n-1}) + (1-\alpha_1)$$
$$(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_n) = 1$$

把预测公式改写如下，可以从另一个角度来理解该公式的物理（经济）含义。

$$e^* = E_n^* + \alpha_1(E_1 - E_n^*) + \alpha_2(1-\alpha_1)(E_2 - E_n^*)$$
$$+ \alpha_n(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_{n-1})(E_n - E_n^*)$$

该式的意义可以这样来理解：用各工程单方造价的算术平均值 E_n^* 来对欲估工程进行估价，精度显然较低，所以用各相似工程单方造价与算术平均值之差乘上相应的由贴近度组成的权值来进行调整。相似程度大的工程，其权值也大，因而，它所起的调整作用越大，相似程度小的工程，其权值也小，所起的调整作用也就越小。用相似程度的大小来控制相应工程的调整作用，这显然是很在道理的。

在上面按照指数平滑法的思路推导出的欲估工程的单方造价预测公式中，贴近度 α_i 就是平滑系数。如果令 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$（大于零小于 1 的某常数），则该式就和一般的指数平滑法的预测公式完全一样了。因此，该预测公式不仅具有指数平滑法的全部特点，而且具有某些我们所要求的

特性。首先，与欲估工程越相似（即贴近度越大）的典型工程其权值也越大，与欲估工程相似程度小（即贴近度小）的典型工程其权值也小；换句话说，它对相似程度大的典型工程更为重视，这正是我们所希望的特点。其次，采用相似程度（即贴近度）作为平滑系数，由于贴近度的数值一般较大（越大越好，因为贴近度越大，表示该典型工程与欲估工程越相似，对预估工程的造价估算精度就越高），所以预测值能够较迅速地反映出造价的变化状态，敏感地跟踪造价的变化趋势，这也是符合我们所要求的。此外，由于权值是呈指数级递降的，衰减非常大，贴近度第四大的典型工程其权值已经相当小，一般可以忽略，所以一般只要取最相似的三个典型工程就完全可以。这就使预测公式大为简化，即

$$e^* = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2(1-\alpha_1) + \alpha_3 E_3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)(E_1+E_2+E_3)/3$$

由于各相似工程与欲估工程只是相似不是相同，即存在差异，因此，应该对估价进行调整，乘上一个调整系数 λ，则有

$$e^* = \lambda \cdot \left[\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2(1-\alpha_1) + \alpha_3 E_3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \frac{1}{3}(E_1+E_2+E_3)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\right]$$

此式就是建筑工程造价快速估算新方法中所采用的估算公式，下面将具体应用。

从上面对估算公式的推导和说明中，我们可以清楚地看出，这个估算公式绝对不是瞎拼硬凑出来的，而是有其充分的理论依据，它实际上是把预测技术中的预测方法——指数平滑法与模糊数学的一些方法相结合，应用于建筑工程造价

的快速估算，这是建筑工程概预算方法的一个重大改革和新的突破。我们希望，通过上述推导和说明，使这个新的估算方法及估算公式，为更多的人所理解和接受。

第三节　快速估算的数学模型

已知 n 个典型工程，设

A_1，A_2，…，A_i，　$i=1$，2，…，n

用 T 表示工程特征集合，此集合元素的确定，以能概括地描述本工程的特征，并能充分说明问题为原则。常取：

$T=$ {结构特征，基础，层数层高，建筑组合，装饰，楼地面，屋面，…}

记为：

$T=\{t_1, t_2, t_3, \cdots, t_j\}$　$j=1, 2, 3, \cdots, m$

T 的模糊子集合用查德记号记为：

$$T_i = t_{i1}/t_1 + t_{i2}/t_2 + \cdots + t_{ij}/t_j$$

式中　t_j——表示工程特征的元素名称；

T_i——表示已知第 i 个工程特征对于集合 T 的模糊子集；

t_{ij}——表示已知工程特征元素对应的隶属函数值（隶属度）；

这样，取预估工程对相应的工程特征的模糊子集为：

$$\underset{\sim}{T_0^*} = t_1^*/t_1 + t_2^*/t_2 + \cdots + t_j^*/t_j$$

式中　t_j^*——表示预估工程特征元素所对应的隶属函数值（隶属度）

根据预测技术中的指数平滑法等有关理论而推导得预估

工程的土建单方直接费估测公式，该公式同样适用于估测预估工程的工和料（只要代入已知工程相应的工和料即可）。

$$e^* = \lambda\left[\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2(1-\alpha_1) + \alpha_3 E_3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \frac{1}{3}(E_1+E_2+E_3)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)\right] \quad \cdots\cdots(3\text{-}1)$$

式中 α_1，α_2，α_3——预估工程同每个已知工程的贴近度。根据择近原则，贴近度从大到小依次排序，取贴近度大的三个已知工程作为估测基础，并满足从大到小顺序即：

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3;$$

E_1，E_2，E_3——同 α_1，α_2，α_3 相应的三个已知工程的土建单方直接费（或工、料）；

λ——调整系数。考虑所选定的三个已知典型工程各自对预估工程的影响是不同的，根据对近百个工程调查统计计算的结果，三项依次各为总值的 60%～65%、25%～30%，3%～7%，即依次乘以系数 1.8，0.8，0.4。因此调整系数 λ 的经验公式为：

$$\lambda = 1 + \frac{1}{m}\left[1.8\left(\frac{T_{估}}{\underset{\sim}{T_{a1}}} - 1\right) + 0.8\left(\frac{T_{估}}{\underset{\sim}{T_{a2}}} - 1\right) + 0.4\left(\frac{T_{估}}{\underset{\sim}{T_{a3}}} - 1\right)\right] \quad \cdots\cdots (3\text{-}2)$$

式中 m——工程模糊集合中元素个数（项目个数）；

$T_{估}$——欲估工程的工程模糊关系系数；

$\underset{\sim}{T_{\alpha 1}}$，$\underset{\sim}{T_{\alpha 2}}$，$\underset{\sim}{T_{\alpha 3}}$——与 α_1，α_2，α_3 相应的工程项目中最大的 Σt_j 为 1，其他各工程的模糊关系系数为与最大的 1 相比所占的比例关系，如工程实例（一）中工程“F”的模糊关系系数 $T_F = 1 - \frac{4.95 - 4.35}{4.95} = 0.88$，其他工程依次类推。

第四节　隶属函数值的确定

确定工程模糊集合中各个元素的模糊关系系数（隶属程度），即隶属函数的确定，应着重指出：模糊集合中隶属函数的确定带有一定的主观性，是主观赋予的，通常是根据经验或统计而定。有关的工程技术人员统计了七十多个已建的工程项目中的每平方米建筑面积单方直接费用，按比例在［0，1］区间用数理统计的方法分别确定各项目（元素）系数，从而建立“工程项目单方直接费统计表”（表 3-1），作为确定隶属函数值的重要参考。其作法是：在选好同类型已建的 5～7 个典型工程中，互相轮流拟作预估工程，并在每个工程集合的相同元素中找出比较的基准，一般选较复杂的费用较高的元素为基准，其隶属函数值为 1，其他相同元素与这个基准元素相比，在闭区间［0，1］中参照“工程项目单方直接费统计表”结合工程具体情况，根据经验主观赋予元素隶属函数值，再利用估测公式（3-1），检验各已知典型工程的精度，从而建立“对比工程模糊关系系数表”（表 3-2）。

具体确定步骤是：

工程项目单方直接费统计表　　表 3-1

项目	系数					项目	系数				
基础	预制桩	灌注桩	筏基	独立基础	砖砌基础	楼地面	现浇	空心板二浇层	空心板		
	1	0.65	0.5	0.4	0.2		1	0.8	0.5		
		1	0.8	0.65	0.3			1	0.6		
			1	0.8	0.4		木地板	瓷砖	水磨石	水泥砂浆加漆	水泥砂浆
				1	0.5		1	0.7	0.4	0.2	0.1
墙体	有剪力墙	无剪力墙		有保温墙	无保温墙			1	0.6	0.3	0.15
	1	0.8		1	0.8				1	0.5	0.25
	全小间	全大间								1	0.5
	1	0.7				内装饰	木楞吊天棚	粉刷加漆	砂底纸巾面		
层数	框架十～十二	框架七～九	砖混六、四	砖混五			1	0.6	0.4		
	1	0.7	0.55	0.5				1	0.7		
		1	0.8	0.75			墙面贴壁纸	粉刷加漆	砂底纸巾面		
			1	0.95			1	0.8	0.5		
层高	5.4m	3.6m	3.2m					1	0.6		
	1	0.7	0.6			外装饰	马赛克面层	水刷石	水泥砂浆	原浆勾缝	
		1	0.85				1	0.25	0.15	0.05	
屋面	增加炉渣混凝土	增加架空层	水泥砂浆二毡三油					1	0.55	0.3	
	1	0.65	0.55						1	0.6	
		1	0.85								
窗材料	钢	水				房间组合(住宅)	二室一厅	二室二厅	三室二厅		
	1	0.9					1	0.85	0.75		
								1	0.85		

注：1. 表内小于 1 的数值应按具体情况调整。
2. 未列项目可参照确定。

砖混结构对比工程模糊关系系数表　　表 3-2

代号	工程名称	基础 说明	t_1	层数 说明	t_2	内装饰 说明	t_3	外装饰 说明	t_4	房间组合 说明	t_5	$\frac{\sum t_\beta}{T_i}$	土建造价(含水电)(元/m²)	建筑面积(m²)	备注
F	家属宿舍	砖砌条基	0.6	五层	1	普通粉刷 油漆地面	0.85	清水勾缝	1	三室一厅 单阳台 房间小	0.9	$\frac{4.35}{0.88}$	135.30	2000	已建典型工程
G	同上	少部筏基少部填塘	0.85	四层	0.95	同上	0.85	同上	1	二室一厅 单阳台	0.8	$\frac{4.45}{0.9}$	138.20	2100	同上
H	同上	部分筏基部分填塘	0.9	四层	0.95	普通粉刷 油漆地面 油漆墙裙	1	同上	1	三室一厅 双阳台 房间大	1	$\frac{4.85}{0.98}$	146.60	2100	同上
I	同上	砖砌条基	0.6	三层	0.9	普通粉刷 水泥地面	0.8	同上	1	二室一套 单阳台 房间小	0.6	$\frac{3.90}{0.79}$	130.80	1700	同上
欲估工程															
J	同上	全部筏基全部填塘	1	四层	0.95	普通粉刷 油漆地面 油漆墙裙	1	同上	1	三室一厅 双阳台 房间大	1	$\frac{4.95}{1}$	待求 (148.40)	2400	欲估工程

1. 首先选出同类型已建 5～7 个典型工程，（附竣工决算资料），并列出典型工程集合中各元素的名称；

2. 在同类元素中找出比较的基准，常选较复杂的费用较大的为基准，其隶属度为 1，其他各元素再分别与这基准元素相比较，在闭区间 [0, 1] 中参照“工程项目单方直接费统计表”结合工程具体情况根据经验主观赋予隶属度，初步建立“对比工程模糊关系系数表”。

3. 轮流计算各已知典型工程之间的贴近度，并按大小依次排序，取其对应的单位工程集合中模糊关系系数 $\underset{\sim}{T}_{\alpha 1}$，$\underset{\sim}{T}_{\alpha 2}$，$\underset{\sim}{T}_{\alpha 3}$。

4. 按公式（3-2）分别计算各典型工程的调整系数 λ。

5. 检验各典型工程的精确度，最后确定各元素的隶属函数值。

（1）在所选的典型工程中，把任意一个典型工程拟作欲估工程，按公式(3-1)轮流计算各典型工程的土建单方直接费 e_0^*。

（2）将计算出的各典型工程单方直接费与相应的典型工程实际竣工决算的单方直接费作比较，看是否满足精度要求，若能满足要求，就认定“对比工程模糊关系系数表”的隶属函数为最后隶属函数值，作为计算欲估工程估测直接费的依据。若不满足精度要求，则认为是某工程集合中元素的模糊关系系数赋予得不恰当，应作局部调整重算，直至满足精度要求为止。这就是在第二章第四节所论述的确定隶属函数的一般原则和方法的第六条：在模糊数学的许多领域中，隶属函数是可以通过“学习”逐步修改而完善化的。实践效果是检验和调整隶属函数的依据。

第五节　估　算　步　骤

快速估算土建单方直接费的具体步骤是这样进行：

1. 根据工程对象的具体情况，首先列出工程集合中各元素的名称，这些元素的选定要能概括地描述该工程有代表性的特征。

2. 参照“工程项目单方直接费统计表”结合工程具体情况主观赋予集合中各元素的模糊关系系数，即隶属函数值的确定（t_j）。

3. 算出 Σt_j，并定 Σt_j 最大值为 1，其他各工程的模糊关系系数为与最大的 1 相比所占的比例关系，在闭区间

[0，1]中取值，如工程实例中“F”工程的模糊关系系数T_F为$\underset{\sim}{T}_F = 1 - \frac{4.95 - 4.35}{4.95} = 0.88$，其他各工程的模糊关系系数见表3-2。

4．检验所选的典型工程的可靠性：

（1）列出各典型工程的模糊子集；

（2）根据公式（2-1），轮流计算各典型工程的贴近度；

（3）按照择近原则选取前面三个大的贴近度，并依次排序使其满足$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \alpha_3$，以及相应的三个典型工程的土建单方直接费$E_1$，$E_2$，$E_3$；

（4）由经验公式（3-2）分别计算各典型工程的调整系数λ值；

（5）利用估测公式（3-1），分别求出各典型工程的土建单方直接费，再分别求出后，与相应的典型工程实际竣工决算的单方直接费作比较，看是否满足精度要求，若能满足要求，则说明典型工程各元素所定的隶属度可靠；若不满足要求，则要对所定的元素的隶属度作适当的局部调整重新检验精度，直至满足精度要求为止，最后确定“对比工程模糊关系系数表”。

5．根据最后确定的“对比工程模糊关系系数表”，用上述步骤估算欲估工程的土建单方直接费。

6．检验欲估工程的可靠性，把所求得的欲估工程的单方直接费作为已知，列入已知典型工程行列，重复上述步骤和方法，再次检验各典型工程的精度。若都能满足要求，则说明欲估工程所估算的结果是正确的，若不能满足精度要求，则需要对欲估工程各元素的隶属度作局部适当调整，按上述方法重算，直至满足精度要求为止。这样，反复了二遍

检验可充分说明其计算结果是可靠的，并可以把这个检验过的欲估工程当作典型工程使用，来估算新的欲估工程。

第六节　工程实例应用

一、实例应用“I”

估算某单位的一幢砖混结构家属宿舍的土建单方造价，其资料见表 3-2（此资料是 80 年代初搜集整理的）。

解

1. 选择四个同类型结构的已建典型工程“F”、“G”、“H”、“I”。并根据工程具体情况划分为五个元素（即项目）进行对比，对欲估工程“J”根据图纸资料亦相应列出。

2. 参照“工程项目单方直接费统计表 3-1”结合工程具体情况初步主观赋予各元素的隶属函数值（t_j）并算出 $\sum_1^m t_j$，定 $\sum_1^m t_j$ 值最大的为 1，其他各工程的模糊集合 T_i 值大小，为与最大值 1 相比在闭区间 [0，1] 中取值，

“F”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6+1+0.85+1+0.9=4.35$

“G”工程：$\sum_1^m t_j = 0.85+0.95+0.85+1+0.8=4.45$

“H”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9+0.95+1+1+1=4.85$

“I”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6+0.9+0.8+1+0.6=3.90$

} 已知典型工程

“J”工程 $\sum_1^m t_j = 1+0.95+1+1+1=4.95$　　欲估工程

$\sum_{1}^{m} t_j = 4.95$ 为最大，故：

$$\underset{\sim}{T_I} = 1$$

$$\underset{\sim}{T_F} = 1 - \frac{4.95 - 4.35}{4.95} = 0.88$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 1 - \frac{4.95 - 4.45}{4.95} = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 1 - \frac{4.95 - 4.85}{4.95} = 0.98$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 1 - \frac{4.95 - 3.9}{4.95} = 0.79$$

从而建立同类结构“对比工程模糊关系系数”表 3-2。

3. 检验所选用的已建典型工程的可靠性即检验“对比工程模糊关系系数表”表 3-2：

（1）列出各典型工程的模糊子集，查德记号记为：

$$\underset{\sim}{T_F} = 0.6/t_1 + 1/t_2 + 0.85/t_3 + 1/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 0.85/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 0.9/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.8/t_3 + 1/t_4 + 0.6/t_5$$

检验典型工程“F”的可靠性：

（2）根据公式（2-1）轮流计算“F”与其他各典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_G} = (0.6 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.85 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8)$$

$$= 0.6 \vee 0.95 \vee 0.85 \vee 1 \vee 0.8 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_G} = (0.6 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.85 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.8)$$

$$= 0.85 \wedge 1 \wedge 0.85 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.85$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_G}) = \frac{1}{2}[T_F \otimes T_G + (1 - T_F \odot T_G)]$

$$= \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.85)] = 0.58 \quad \cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_H} = (0.6 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 1)$$

$$= 0.6 \vee 0.95 \vee 0.85 \vee 1 \vee 0.9 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_H} = (0.6 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 1)$$

$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.9$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_H}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.9)] = 0.55 \quad \cdots ③$

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_I} = (0.6 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.6)$$

$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 1 \vee 0.6 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_I} = (0.6 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.6)$$

$$= 0.6 \wedge 1 \wedge 0.85 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.6$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_I}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.6)] = 0.7 \quad \cdots\cdots ①$

(3) 贴近度依次排序：$\alpha_1 = 0.7$；$\alpha_2 = 0.58$；$\alpha_3 = 0.55$

典型工程相应造价：$E_1 = 130.8$ 元/m^2；$E_2 = 138.2$ 元/m^2；$E_3 = 146.6$ 元/m^2

(4) 由公式 (3-2) 计算调整系数 λ

$$\lambda_F = 1 + \frac{1}{m}\left[1.8\left(\frac{\widetilde{T}_{估}}{\widetilde{T}_{\alpha 1}} - 1\right) + 0.8\left(\frac{\widetilde{T}_{估}}{\widetilde{T}_{\alpha 2}} - 1\right) + 0.4\left(\frac{\widetilde{T}_{估}}{\widetilde{T}_{\alpha 3}} - 1\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{\widetilde{T}_F}{\widetilde{T}_I} - 1\right) + 0.8\left(\frac{\widetilde{T}_F}{\widetilde{T}_G} - 1\right) + 0.4\left(\frac{\widetilde{T}_F}{\widetilde{T}_H} - 1\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.9} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.88}{0.98} - 1\right)\right] = 1.03$$

(5) 利用估测公式 (3-1) 计算典型工程 "F" 的单方造价 e_F^*

$$e_F^* = \lambda[\alpha_1 \cdot E_1 + \alpha_2 \cdot E_2(1-\alpha_1) + \alpha_3 \cdot E_3(1-\alpha_1)(1-\alpha_2) + \frac{1}{3}(E_1+E_2+E_3)(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3)]$$

$$= 1.03[0.7 \times 130.8 + 0.58 \times 138.2(1-0.7) + 0.55 \times 146.6(1-0.7)(1-0.58) + \frac{1}{3}(130.8+138.2+146.6)(1-0.7) \times (1-0.58)(1-0.55)]$$

$$= 1.03[133.63] = 137.64 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{137.64-135.3}{135.3}\times 100\% = 1.7\% < 5\%$ （行）

同理检验典型工程“G”的可靠性

计算贴近度：

$$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_F) = (\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_G) = 0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_G \otimes \underset{\sim}{T}_H &= (0.85 \wedge 0.9) \vee (0.95 \wedge 0.95) \vee (0.85 \wedge 1) \\ &\quad \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1) \\ &= 0.85 \vee 0.95 \vee 0.85 \vee 1 \vee 0.8 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_G \odot \underset{\sim}{T}_H &= (0.85 \vee 0.9) \wedge (0.95 \vee 0.95) \wedge (0.85 \vee 1) \\ &\quad \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1) \\ &= 0.9 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.9\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_H) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.9)] = 0.55 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_G \otimes \underset{\sim}{T}_I &= (0.85 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 0.8) \\ &\quad \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.6) \\ &= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 1 \vee 0.6 = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_G \odot \underset{\sim}{T}_I &= (0.85 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 0.8) \\ &\quad \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.6) \\ &= 0.85 \wedge 0.95 \wedge 0.85 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_I) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

依次排序：

$\alpha_1 = 0.6$	$\alpha_2 = 0.58$	$\alpha_3 = 0.55$
$E_1 = 130.8$ 元/m^2	$E_2 = 135.3$ 元/m^2	$E_3 = 146.6$ 元/m^2
$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.79$	$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.88$	$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

计算调整系数 λ：

$$\lambda_G = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.9}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.9}{0.88} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.9}{0.98} - 1\right)\right] = 1.05$$

估算单方直接费：

$$e_G^* = 1.05[0.6 \times 130.8 + 0.58 \times 135.3(1 - 0.6) + 0.55 \times 146.6(1 - 0.6)(1 - 0.58) + \frac{1}{3}(130.8 + 135.3 + 146.6)(1 - 0.6)(1 - 0.58)(1 - 0.55)] = 1.05 \times 133.8$$

$$= 140.49 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{140.49 - 138.2}{138.2} \times 100\% = 1.7\% < 5\%$ （行）

同理检验典型工程“H”的可靠性：

计算贴近度：

$$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_F) = (\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_H) = 0.55,$$

$$\because \quad \underset{\sim}{T}_F = 0.88 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_G) = (\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_H) = 0.55$$

$$\because \quad \underset{\sim}{T}_G = 0.9 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_H \otimes \underset{\sim}{T}_I = (0.9 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.6) = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_H \odot \underset{\sim}{T}_I = (0.9 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.6) = 0.9$$

$$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_I) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.9)] = 0.55$$

$$\because \quad \underset{\sim}{T}_I = 0.79 \qquad \cdots\cdots③$$

依次排序：

$\alpha_1=0.55$　　$\alpha_2=0.55$　　$\alpha_3=0.55$

$E_1=138.2$ 元/m²；　$E_2=135.5$ 元/m²；　$E_3=130.8$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.9$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.79$

计算调整系数 λ

$$\lambda_H = 1+\frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.9}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{0.88}-1\right)+0.4\left(\frac{0.98}{0.79}-1\right)\right]=1.07$$

估算单方直接费：

$$e_H^* = 1.07[0.55\times138.2+0.55\times135.3(1-0.55)+0.55\times130.8(1-0.55)(1-0.55)+\frac{1}{3}(138.2+135.3+130.8)(1-0.55)(1-0.55)(1-0.55)] = 1.07\times136.35 = 145.89 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{146.6-145.89}{146.6}\times100\%=0.48\%<5\%$ （行）

同理检验典型工程“I”的可靠性：

计算贴近度：

$$(\underset{\sim}{T}_I,\underset{\sim}{T}_F)=(\underset{\sim}{T}_F,\underset{\sim}{T}_I)=0.7 \quad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T}_I,\underset{\sim}{T}_G)=(\underset{\sim}{T}_G,\underset{\sim}{T}_I)=0.6 \quad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_I,\underset{\sim}{T}_H)=(\underset{\sim}{T}_H,\underset{\sim}{T}_I)=0.55 \quad \cdots\cdots③$$

依次排序：

$\alpha_1=0.7$；　　$\alpha_2=0.6$；　　$\alpha_3=0.5$

$E_1=135.3$ 元/m²；　$E_2=138.2$ 元/m²；　$E_3=146.6$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.9$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$

计算调整系数 λ：

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.79}{0.88} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.79}{0.9} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.79}{0.98} - 1\right)\right] = 0.93$$

估算单方直接费：

$$e_I^* = 0.93[0.7 \times 135.3 + 0.6 \times 138.2(1 - 0.7) + 0.55 \times 146.6(1 - 0.7)(1 - 0.6) + \frac{1}{3}(135.3 + 138.2 + 146.6)(1 - 0.7)(1 - 0.6)(1 - 0.55)] = 0.93 - 136.83 = 127.25 \text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\frac{130.8 - 127.25}{130.8} \times 100\% = 2.7\% < 5\%$（行）

结论：通过精度检算（与竣工决算资料相比）证明，都在±5%精度范围之内；已知典型工程的模糊关系系数（即隶属函数值）完全可靠，“对比工程模糊关系系数”（表3-2）可视为经验资料应用于估算新的同类型结构工程费用。

4. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-2”，用上述步骤与方法估算欲估工程（某单位家属宿舍）“J”的土建单方造价。

列出对比的模糊子集：查德记号为：

已建典型工程

$$\underset{\sim}{T_F} = 0.6/t_1 + 1/t_2 + 0.85/t_3 + 1/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 0.85/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 0.9/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.8/t_3 + 1/t_4 + 0.6/t_5$$

$T_J = 1/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5$　　欲估工程

计算欲估工程“J”与各典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T_J} \otimes \underset{\sim}{T_F} = (1 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.9) = 1$$

$$\underset{\sim}{T_J} \odot \underset{\sim}{T_F} = (1 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.9) = 1$$

$$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_F}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 1)] = 0.5$$

$$\underset{\sim}{T_J} \otimes \underset{\sim}{T_G} = (1 \wedge 0.85) \vee (0.95 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8) = 1$$

$$\underset{\sim}{T_J} \odot \underset{\sim}{T_G} = (1 \vee 0.85) \wedge (0.95 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.8) = 0.95$$

$$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_G}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.95)] = 0.53$$

$\because$　$\underset{\sim}{T_G} = 0.9$　　……②

$$\underset{\sim}{T_J} \otimes \underset{\sim}{T_H} = (1 \wedge 0.9) \vee (0.95 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = 1$$

$$\underset{\sim}{T_J} \odot \underset{\sim}{T_H} = (1 \vee 0.9) \wedge (0.95 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) = 0.95$$

$$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_H}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.95)] = 0.53$$

$\because$　$\underset{\sim}{T_H} = 0.98$　　……①

$$\underset{\sim}{T_J} \otimes \underset{\sim}{T_I} = (1 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.8)$$

$$\vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.6) = 1$$

$$\underset{\sim}{T_J} \odot \underset{\sim}{T_1} = (1 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.8)$$

$$\wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.6) = 0.95$$

$$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.95)] = 0.53$$

$\because \quad \underset{\sim}{T_J} = 0.79$ ……③

$\alpha_1 = 0.53$; $\alpha_2 = 0.53$; $\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 146.6$ 元/m^2; $E_2 = 138.2$ 元/m^2; $E_3 = 130.8$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.98$; $\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.9$; $\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 0.79$

计算调整系数 λ：

$$\lambda_J = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{1}{0.98} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.9} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.79} - 1\right)\right] = 1.05$$

估算欲估工程“J”的单方直接费：

$$e_J^* = 1.05[0.53 \times 146.6 + 138.2(1 - 0.53) + 0.53 \times 130.8(1 - 0.53)(1 - 0.53) + \frac{1}{3}(146.6 + 138.2 + 130.6)(1 - 0.53)(1 - 0.55)(1 - 0.53)]$$

$$= 1.05 \times 141.82 = 148.40 \text{ 元/m}^2$$

5. 检验欲估工程“J”所求得结果的可靠性：

把所求得的欲估工程造价 148.40 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度；

检验典型工程“F”的精度：

计算贴近度：

$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_G}) = 0.58$ …②；$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.55$ …③

$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_I}) = 0.7$ …①；$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.5$

依次排序：

$\alpha_1 = 0.7$；　$\alpha_2 = 0.58$；　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 130.8$ 元/m²；$E_2 = 138.2$ 元/m²；$E_3 = 146.6$ 元/m²

$\underset{\sim}{T_{a_1}} = 0.79$；　$\underset{\sim}{T_{a_2}} = 0.9$；　$\underset{\sim}{T_{a_3}} = 0.98$

计算 λ 值

$$\lambda_F = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.9} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.88}{0.98} - 1\right)\right] = 1.03$$

估算“F”的单方直接费：

$$e_F^* = 1.03[0.7 \times 130.8 + 0.58 \times 138.2(1 - 0.7) + 0.55 \times 146.6(1 - 0.7)(1 - 0.58) + \frac{1}{3}(130.8 + 138.2 + 146.6)(1 - 0.7)(1 - 0.58)(1 - 0.55)] = 137.64 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{137.64 - 135.3}{135.3} \times 100\% = 1.7\% < 5\%$ （行）

同理检验典型工程“G”的精度：

计算贴近度：

$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_F}) = 0.58$ …②；$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.55$ …③

$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_I}) = 0.6$ …①；$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.53$

依次排序：

$\alpha_1 = 0.6$；　$\alpha_2 = 0.58$；　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 130.8$ 元/m²；$E_2 = 135.3$ 元/m²；$E_3 = 146.6$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{a_1}=0.79$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_2}=0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_3}=0.98$

计算 λ 值：

$$\lambda_G=1+\frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.9}{0.79}-1\right)+0.8\left(\frac{0.9}{0.88}-1\right)+0.4\left(\frac{0.9}{0.98}-1\right)\right]=1.05$$

估算单方直接费：

$$e_G^*=1.05[0.6\times130.8+0.58\times135.3(1-0.6)+0.55\times146.6(1-0.6)(1-0.55)+\frac{1}{3}(130.8+135.3+146.6)(1-0.6)(1-0.58)(1-0.55)]$$

$$=140.49\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\frac{140.49-138.2}{138.2}\times100\%=1.7\%<5\%$（行）

同理检验典型工程“H”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_H,\underset{\sim}{T}_F)=0.55$，　∵ $\underset{\sim}{T}_F=0.88$　　……②

$(\underset{\sim}{T}_H,\underset{\sim}{T}_G)=0.55$，　∵ $\underset{\sim}{T}_G=0.9$　　……①

$(\underset{\sim}{T}_H,\underset{\sim}{T}_I)=0.55$，　∵ $\underset{\sim}{T}_I=0.79$　　……③

$(\underset{\sim}{T}_H,\underset{\sim}{T}_J)=0.53$

同样得：

$e_H^*=145.89$ 元/m^2，——符合精度

同理检验典型工程“I”的精度

$(\underset{\sim}{T}_I,\underset{\sim}{T}_F)=0.7$　　……①

$(\underset{\sim}{T}_I,\underset{\sim}{T}_G)=0.6$　　……②

$$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.55 \quad \cdots\cdots ③$$

$$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.53$$

同样得：

$e_I^* = 127.25$ 元/m^2——符合精度

结论：

经再次检验工程“F”，“G”，“H”，“I”及“J”，都在精度要求范围内，都是可靠的，今后可作为已知典型工程模糊关系资料应用，计算新的同类型结构的欲估工程单方直接费。

二、实例应用“Ⅱ”

继实例应用“Ⅰ”，估算某单位的砖混结构家属宿舍“K”工程的单方土建造价，其资料见表 3-3（此资料是 80 年代初搜集整理的）。

1．建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系

已知典型工程：

“F”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6 + 0.95 + 0.85 + 0.3 + 0.9 = 3.60$

“G”工程：$\sum_1^m t_j = 0.85 + 0.9 + 0.85 + 0.3 + 0.8 = 3.70$

“H”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9 + 0.9 + 1 + 0.3 + 1 = 4.10$

“I”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6 + 0.85 + 0.8 + 0.3 + 0.6 = 3.15$

“J”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 0.9 + 1 + 0.3 + 1 = 4.20$

欲估工程：

砖混结构对比工程模糊关系系数表　　表 3-3

已估工程	工程代号	工程名称	基础		层数、层高		内装饰		外装饰		房间组合		$\frac{\sum t_i}{T_c}$	土建造价 元/m²
			说明	t_1	说明	t_2	说明	t_3	说明	t_4	说明	t_5		
已知典型工程	F	家属宿舍	砖砌条基	0.6	五层	0.95	普通粉刷、油漆地面	0.85	原浆勾缝	0.3	三室一厅，单阳台，房间小	0.9	$\frac{3.6}{0.72}$	135.30
	G	同上	少部筏基少部填塘	0.85	四层	0.9	普通粉刷、油漆地面	0.85	同上	0.3	二室一厅，单阳台	0.8	$\frac{3.7}{0.74}$	138.20
	H	同上	部分筏基部分填塘	0.9	四层	0.9	普通粉刷、油漆墙裙、油漆地面	1	同上	0.3	二室一厅，双阳台，房间大	1	$\frac{4.10}{0.82}$	146.60
	I	同上	砖砌条基	0.6	二层	0.85	普通粉刷、水泥地面	0.8	同上	0.3	二室一厅，单阳台房间小	0.6	$\frac{3.15}{0.63}$	130.80
	J	同上	全部筏基全部填塘	1	四层	0.9	普通粉刷、油漆墙裙、油漆地面	1	同上	0.3	三室一厅，双阳台，房间大	1	$\frac{4.20}{0.84}$	148.40
欲估工程	K	同上	全部筏基全部填塘	1	六层	1	普通粉刷、油漆墙裙、油漆地面	1	水刷石	1	三室一厅，双阳台，房间大	1	$\frac{5.00}{1}$	待求 (164.69)
	K′	招待所	钢筋混凝土条基	0.95	五层少部六层	0.96	普通粉刷、油漆墙裙、油漆地面	1	水刷石、水泥砂浆粉刷各半	0.8	大小间，长雨篷，内廊	0.5	$\frac{4.21}{0.842}$	待求 (153.17)

“K”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 1+1+1+1+1 = 5.00$

$\sum_{1}^{m} t_j = 5$ 为最大，故：

$$\underset{\sim}{T}_K = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_F = 1 - \frac{5-3.6}{5} = 0.72$$

$$\underset{\sim}{T}_G = 1 - \frac{5-3.7}{5} = 0.74$$

$$\underset{\sim}{T}_H = 1 - \frac{5-4.1}{5} = 0.82$$

$$\underset{\sim}{T}_I = 1 - \frac{5-3.15}{5} = 0.63$$

$$\underset{\sim}{T}_J = 1 - \frac{5-4.2}{5} = 0.84$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系系数表”（表3-3）。

2. 检验“对比工程模糊关系系数表”（表3-3），最后确定其隶属度值。

（1）列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_F = 0.6/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_G = 0.85/t_1 + 0.9/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_H = 0.9/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_I = 0.6/t_1 + 0.85/t_2 + 0.8/t_3 + 0.3/t_4 + 0.6/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_J = 1/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

（2）检验典型工程“F”的可靠性

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_G} = (0.6 \wedge 0.85) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 0.85) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0.8)$$
$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.8 = 0.9$$
$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_G} = (0.6 \vee 0.85) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 0.85) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 0.8)$$
$$= 0.85 \wedge 0.95 \wedge 0.85 \wedge 0.3 \wedge 0.9 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_G}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8$ ……③

$\because \underset{\sim}{T_G} = 0.74$

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_H} = (0.6 \wedge 0.9) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 1)$$
$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.9$$
$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_H} = (0.6 \vee 0.9) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 1)$$
$$= 0.9 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_H}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8$ ……②

$\because \underset{\sim}{T_H} = 0.82$

$$\underset{\sim}{T_F} \otimes \underset{\sim}{T_I} = (0.6 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.85) \vee (0.85 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0.6)$$
$$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.85$$
$$\underset{\sim}{T_F} \odot \underset{\sim}{T_I} = (0.6 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.85) \wedge (0.85 \vee 0.8) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 0.6)$$
$$= 0.6 \wedge 0.95 \wedge 0.85 \wedge 0.3 \wedge 0.9 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_1) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.3)] = 0.78$

$$\underset{\sim}{T}_F \otimes \underset{\sim}{T}_J = (0.6 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 1)$$
$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_F \odot \underset{\sim}{T}_J = (0.6 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_J) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8$ ……①

$\because \underset{\sim}{T}_J = 0.84$

为此：

$\alpha_1 = 0.8$；　$\alpha_2 = 0.8$；　$\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 148.4$ 元/m²；　$E_2 = 146.6$ 元/m²；　$E_3 = 138.2$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.84$；　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{a_3} = 0.74$

$$\lambda_F = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.72}{0.84} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.72}{0.82} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.72}{0.74} - 1\right)\right]$$
$$= 0.93$$

估算造价：$e_F^* = 0.93[0.8 \times 148.4 + 0.8 \times 146.6(1 - 0.8) + 0.8 \times 138.2(1 - 0.8)(1 - 0.8) + \frac{1}{3}(148.4 + 146.6 + 138.2)(1 - 0.8)(1 - 0.8)(1 - 0.8)]$
$= 0.93[118.72 + 23.46 + 4.42 + 1.16]$
$= 137.37$ 元/m²

精度：$\frac{137.37 - 135.3}{135.3} \times 100\% = 0.75 < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“G”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_F) = (\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_G) = 0.8$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T}_F = 0.72$

$$\underset{\sim}{T}_G \otimes \underset{\sim}{T}_H = (0.85 \wedge 0.9) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.80 \wedge 1)$$
$$= 0.85 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_G \odot \underset{\sim}{T}_H = (0.85 \vee 0.9) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.8 \vee 1)$$
$$= 0.9 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_H) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8$ ……②

∵ $\underset{\sim}{T}_H = 0.82$

$$\underset{\sim}{T}_G \otimes \underset{\sim}{T}_I = (0.85 \wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 0.85) \vee (0.85 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.6)$$
$$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.85$$

$$\underset{\sim}{T}_G \odot \underset{\sim}{T}_I = (0.85 \vee 0.6) \wedge (0.9 \vee 0.85) \wedge (0.85 \vee 0.8) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.8 \vee 0.6)$$
$$= 0.85 \wedge 0.9 \wedge 0.85 \wedge 0.3 \wedge 0.8 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_I) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.3)] = 0.78$

$$\underset{\sim}{T}_G \otimes \underset{\sim}{T}_J = (0.85 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 1)$$
$$= 0.85 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_G \odot \underset{\sim}{T}_J = (0.85 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.8 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_J) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8$ ……①

$\because \underset{\sim}{T}_J = 0.84$

为此：

$\alpha_1 = 0.8$；　$\alpha_2 = 0.8$；　$\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 148.4$ 元/m²；　$E_2 = 146.6$ 元/m²；　$E_3 = 135.3$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.84$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.72$

$$\lambda_G = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.74}{0.84} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.74}{0.82} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.74}{0.72} - 1\right)\right]$$
$$\doteq 0.94$$

估算造价：$e_G^* = 0.94[0.8 \times 148.4 + 0.8 \times 146.6(1 - 0.8)$
$+ 0.8 \times 135.3(1 - 0.8)(1 - 0.8)$
$+ \frac{1}{3}(148.4 + 146.6 + 135.3)$
$\times (1 - 0.8)(1 - 0.8)(1 - 0.8)]$
$= 0.94[118.72 + 23.46 + 4.33 + 1.15]$
$= 138.8$ 元/m²

精度：$\frac{138.8 - 138.2}{138.2} \times 100\% = 0.4\% < 5\%$（行）

(4) 检验典型工程“H”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_F) = (\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_H) = 0.8$ …③　$\because \underset{\sim}{T}_F = 0.72$

$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_G) = (\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_H) = 0.8$ …②　$\because \underset{\sim}{T}_G = 0.74$

$\underset{\sim}{T}_H \otimes \underset{\sim}{T}_1 = (0.9 \wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 0.8)$
$\vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.6)$
$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.85$

$\underset{\sim}{T}_H \odot \underset{\sim}{T}_1 = (0.9 \vee 0.6) \wedge (0.9 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 0.8)$

$$\wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.6)$$

$$= 0.9 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_1) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.3)] = 0.78$

$$\underset{\sim}{T}_H \otimes \underset{\sim}{T}_J = (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 1)$$

$$\vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 1)$$

$$= 0.9 \vee 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 1 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_H \odot \underset{\sim}{T}_J = (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_J) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.3)] = 0.85$ ……①

为此：

$\alpha_1 = 0.85$；$\alpha_2 = 0.74$；$\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 148.4$ 元/m²；$E_2 = 138.2$ 元/m²；$E_3 = 135.3$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.84$；$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.74$；$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.72$

$$\lambda_H = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.82}{0.84} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.82}{0.74} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.82}{0.72} - 1\right)\right]$$

$$= 1.02$$

估算造价：$e_H^* = 1.02[0.85 \times 148.4 + 0.8 \times 138.2(1 - 0.85)$

$$+ 0.8 \times 135.3(1 - 0.85)(1 - 0.8)$$

$$+ \frac{1}{3}(148.4 + 138.2 + 135.3)$$

$$\times (1 - 0.85)(1 - 0.8)(1 - 0.8)]$$

$$= 1.02[126.14 + 16.58 + 3.25 + 0.84]$$

$$= 149.75 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{149.75 - 146.6}{146.6} \times 100\% = 2.15\% < 5\%$（行）

(5) 检验典型工程“I”的可靠性

$$(\underset{\sim}{T}_I, \underset{\sim}{T}_F) = (\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_I) = 0.78 \quad \because \underset{\sim}{T}_F = 0.72$$

$$(\underset{\sim}{T}_I, \underset{\sim}{T}_G) = (\underset{\sim}{T}_G, \underset{\sim}{T}_I) = 0.78 \quad \because \underset{\sim}{T}_G = 0.74 \quad \cdots ③$$

$$(\underset{\sim}{T}_I, \underset{\sim}{T}_H) = (\underset{\sim}{T}_H, \underset{\sim}{T}_I) = 0.78 \quad \because \underset{\sim}{T}_H = 0.82 \quad \cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_I \otimes \underset{\sim}{T}_J = (0.6 \wedge 1) \vee (0.85 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.6 \wedge 1)$$
$$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.85$$

$$\underset{\sim}{T}_I \odot \underset{\sim}{T}_J = (0.6 \vee 1) \wedge (0.85 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.6 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 0.3 \wedge 1 = 0.3$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_I, \underset{\sim}{T}_J) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.3)] = 0.78 \quad \cdots\cdots ①$

$\because \underset{\sim}{T}_J = 0.84$

为此：

$\alpha_1 = 0.78$；　$\alpha_2 = 0.78$；　$\alpha_3 = 0.78$

$E_1 = 148.4$ 元/m^2；　$E_2 = 146.6$ 元/m^2；　$E_3 = 138.2$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.84$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.74$

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.63}{0.84} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.63}{0.82} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.63}{0.74} - 1\right)\right] = 0.86$$

估算造价：$e_I^* = 0.86[0.78 \times 148.4 + 0.78 \times 146.6 \times (1 - 0.78) + 0.78 \times 138.2(1 - 0.78) \times (1 - 0.78) + \frac{1}{3}(148.4 + 146.6 + 138.2) \times (1 - 0.78)(1 - 0.78)(1 - 0.78)]$

$= 0.86[115.75 + 25.16 + 5.17 + 1.59]$

$= 127$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{130.8-127}{130.8}\times 100\% = 2.9\% < 5\%$（行）

(6) 检验典型工程“J”的可靠性

$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_F}) = (\underset{\sim}{T_F}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.8$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T_F} = 0.72$

$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_G}) = (\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.8$ …② ∵ $\underset{\sim}{T_G} = 0.74$

$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_H}) = (\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.85$ …①

$(\underset{\sim}{T_J}, \underset{\sim}{T_I}) = (\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.78$

为此：

$\alpha_1 = 0.85$； $\alpha_2 = 0.8$； $\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 146.6$ 元/m^2； $E_2 = 138.2$ 元/m^2； $E_3 = 135.3$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.82$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.74$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 0.72$

$$\lambda_J = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.84}{0.82}-1\right)+0.8\left(\frac{0.84}{0.74}-1\right)+0.4\left(\frac{0.84}{0.72}-1\right)\right]$$
$$= 1.04$$

估算造价：$e_J^* = 1.04[0.85\times 146.6 + 0.8\times 138.2(1-0.85)$
$+ 0.8\times 135.3(1-0.85)(1-0.8)(1-0.8)$
$+ \frac{1}{3}(146.6 + 138.2 + 135.3)$
$\times (1-0.85)(1-0.8)(1-0.8)]$
$= 1.04[124.61 + 16.58 + 3.25 + 0.84]$
$= 151.09$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{151.09-148.4}{148.4}\times 100\% = 1.8\% < 5\%$（行）

3. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数”（表3-3）。用上述步骤与方法估算欲估工程“K”的土建单方造

价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T_F} = 0.6/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 0.85/t_1 + 0.9/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 0.9/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 0.6/t_1 + 0.85/t_2 + 0.8/t_3 + 0.3/t_4 + 0.6/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_J} = 1/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

} 已知典型工程

$$\underset{\sim}{T_K} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5 \quad \text{欲估工程}$$

计算欲估工程“K”与已知典型工程的贴近度：

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_K} \otimes \underset{\sim}{T_F} &= (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 0.85) \\ &\quad \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.9) \\ &= 0.6 \vee 0.95 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_K} \odot \underset{\sim}{T_F} &= (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 0.85) \\ &\quad \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.9) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T_K}, \underset{\sim}{T_F}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 1)] = 0.48$ ……③

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_K} \otimes \underset{\sim}{T_G} &= (1 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.85) \\ &\quad \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.8) \\ &= 0.85 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.8 = 0.9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_K} \odot \underset{\sim}{T_G} &= (1 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.85) \\ &\quad \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.8) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1\end{aligned}$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_K, \underset{\sim}{T}_G) = \frac{1}{2}[0.9 + (1-1)] = 0.45$

$$\underset{\sim}{T}_K \otimes \underset{\sim}{T}_H = (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 1)$$
$$= 0.9 \vee 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 1 = 1$$
$$\underset{\sim}{T}_K \odot \underset{\sim}{T}_H = (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_K, \underset{\sim}{T}_H) = \frac{1}{2}[1 + (1-1)] = 0.5$ ……②

$\because \underset{\sim}{T}_H = 0.82$

$$\underset{\sim}{T}_K \otimes \underset{\sim}{T}_I = (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.6)$$
$$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.6 = 0.85$$
$$\underset{\sim}{T}_K \odot \underset{\sim}{T}_I = (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.6)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_K, \underset{\sim}{T}_I) = \frac{1}{2}[0.85 + (1-1)] = 0.43$

$$\underset{\sim}{T}_K \otimes \underset{\sim}{T}_J = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 1)$$
$$= 1 \vee 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 1 = 1$$
$$\underset{\sim}{T}_K \odot \underset{\sim}{T}_J = (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

贴近度：$(\underset{\sim}{T}_K, \underset{\sim}{T}_J) = \frac{1}{2}[1 + (1-1)] = 0.5$ ……①

$\because \underset{\sim}{T}_J = 0.84$

为此：

$\alpha_1 = 0.5$；　$\alpha_2 = 0.5$；　$\alpha_3 = 0.48$

$E_1 = 148.4$ 元/m^2；$E_2 = 146.6$ 元/m^2；$E_3 = 135.3$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.84$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.72$

$$\lambda_K = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{1}{0.84} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.82} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.72} - 1\right)\right]$$
$$= 1.13$$

估算造价：$e_K^* = 1.13[0.5 \times 148.4 + 0.5 \times 146.6(1-0.5)$
$+ 0.48 \times 153.3(1-0.5)(1-0.5)$
$+ \frac{1}{3}(148.4 + 146.6 + 135.3)$
$\times (1-0.5)(1-0.5)(1-0.48)]$
$= 1.13[74.2 + 36.65 + 16.24 + 18.65]$
$= 164.69$ 元/m^2

4．检验欲估工程“K”所估算造价的可靠性，即把所求得的欲估工程造价 164.69 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“F”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_G) = 0.8$ …③ $\because T_G = 0.74$；

$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_H) = 0.8$ …② $\because \underset{\sim}{T}_H = 0.82$

$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_1) = 0.78$；$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_J) = 0.8$ …① $\because \underset{\sim}{T}_J = 0.84$

$(\underset{\sim}{T}_F, \underset{\sim}{T}_K) = (\underset{\sim}{T}_K, \underset{\sim}{T}_F) = 0.48$

为此：

$\alpha_1=0.8$；　　$\alpha_2=0.8$；　　$\alpha_3=0.8$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=146.6$ 元/m^2；$E_3=138.2$ 元/m^2

与前面验算的工程“F”完全相同故估算造价仍为137.37元/m^2。

精度：$\dfrac{137.37-135.3}{135.3}\times 100\%=0.75\%<5\%$(行)

(2) 验算典型工程“G”的精度：

$(\underset{\sim}{T_G},\underset{\sim}{T_F})=0.8$ …③

$\because \underset{\sim}{T_F}=0.72$；$(\underset{\sim}{T_G},\underset{\sim}{T_H})=0.8$ …② $\because \underset{\sim}{T_H}=0.82$

$(\underset{\sim}{T_G},\underset{\sim}{T_I})=0.78$；$(\underset{\sim}{T_G},\underset{\sim}{T_J})=0.8$ …① $\because \underset{\sim}{T_J}=0.84$；

$(\underset{\sim}{T_G},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_G})=0.45$

为此：

$\alpha_1=0.8$；　　$\alpha_2=0.8$；　　$\alpha_3=0.8$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=146.6$ 元/m^2；$E_3=135.3$ 元/m^2

与前面验算的工程“G”完全相同故估算造价仍为138.8元/m^2。

精度：$\dfrac{138.8-138.2}{138.2}\times 100\%=0.4\%<5\%$(行)

(3) 验算典型工程“H”的精度：

$(\underset{\sim}{T_H},\underset{\sim}{T_F})=0.8$ …③ $\because \underset{\sim}{T_F}=0.72$；$(\underset{\sim}{T_H},\underset{\sim}{T_I})=0.78$

$(\underset{\sim}{T_H},\underset{\sim}{T_G})=0.8$ …②

$\because \underset{\sim}{T_G}=0.74$；$(\underset{\sim}{T_H},\underset{\sim}{T_J})=0.85$ …①

$(\underset{\sim}{T_H},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_H})=0.5$

为此：

$\alpha_1=0.85$；　　$\alpha_2=0.8$；　　$\alpha_3=0.8$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=138.2$ 元/m^2；$E_3=135.3$ 元/m^2

与前面验算的工程“H”完全相同故估算造价仍为149.75 元/m^2。

精度：$\frac{149.75-146.6}{146.6}\times 100\% = 2.15\% < 5\%$(行)

(4) 验算典型工程“I”的精度：

$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_F})=0.78$，$\because \underset{\sim}{T_F}=0.72$；$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_G})=0.78$ …③

$\because \underset{\sim}{T_G}=0.74$

$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_H})=0.78$ …② $\because \underset{\sim}{T_H}=0.82$；

$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_J})=0.78$ …① $\because \underset{\sim}{T_J}=0.84$

$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_I})=0.43$

为此：

$\alpha_1=0.78$；　　$\alpha_2=0.78$；　　$\alpha_3=0.78$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=146.6$ 元/m^2；$E_3=138.2$ 元/m^2

与前面验算的工程“I”完全相同故估算造价仍为 127 元/m^2。

精度：$\frac{130.8-127}{130.8}\times 100\% = 2.9\% < 5\%$(行)

(5) 验算典型工程“J”的精度：

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_F})=0.8$ …③ $\because \underset{\sim}{T_F}=0.72$；

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_G})=0.8$ …② $\because \underset{\sim}{T_G}=0.74$

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_H})=0.85$ …①；$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_I})=0.78$

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_J})=0.5$

为此：

$\alpha_1=0.85$；　　$\alpha_2=0.8$；　　$\alpha_3=0.8$

$E_1=146.6$ 元/m^2；$E_2=138.2$ 元/m^2；$E_3=135.3$ 元/m^2

与前面验算的工程“J”完全相同故估算造价仍为151.09元/m^2。

精度：$\frac{151.09-148.4}{148.4}\times 100\% = 1.8\% < 5\%$(行)

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K”的估算土建单方造价为164.69元/m^2，是可信的。

三、实例应用“Ⅲ”

继实例应用“Ⅱ”，估算某单位的砖混结构招待所“K'”工程的单方土建造价，其资料见表3-3（此资料是80年代初搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

“F”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6 + 0.95 + 0.85 + 0.3 + 0.90 = 3.60$

“G”工程：$\sum_1^m t_j = 0.85 + 0.9 + 0.85 + 0.3 + 0.8 = 3.70$

“H”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9 + 0.9 + 1 + 0.3 + 1 = 4.10$

“I”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6 + 0.85 + 0.8 + 0.3 + 0.6 = 3.15$

“J”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 0.9 + 1 + 0.3 + 1 = 4.20$

“K”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.00$

欲估工程：

“K'”工程：$\sum_1^m t_j = 0.95 + 0.96 + 1 + 0.8 + 0.5 = 4.21$

$\sum_{1}^{m} t_j = 5$ 为最大，故：

$$\underset{\sim}{T_K} = 1$$

$$\underset{\sim}{T_F} = 1 - \frac{5 - 3.6}{5} = 0.72$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 1 - \frac{5 - 3.7}{5} = 0.74$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 1 - \frac{5 - 4.1}{5} = 0.82$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 1 - \frac{5 - 3.15}{5} = 0.63$$

$$\underset{\sim}{T_J} = 1 - \frac{5 - 4.2}{5} = 0.84$$

$$\underset{\sim}{T_{K'}} = 1 - \frac{5 - 4.21}{5} = 0.842$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系系数表3-3”。

2. 检验“对比工程模糊关系系数表3-3”，最后确定其隶属度值。

(1) 列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T_F} = 0.6/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 0.85/t_1 + 0.9/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 0.9/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 0.6/t_1 + 0.85/t_2 + 0.8/t_3 + 0.3/t_4 + 0.6/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_J} = 1/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_K} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5$$

(2) 检验各典型工程的可靠性，因其资料完全同实例应

用“Ⅱ”，而在实例应用“Ⅱ”中对所有典型工程通过检验都在精度范围之内完全可靠，故这里就不再重复检验。

3. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-3”。用上述步骤和方法估算欲估工程“K'”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T_F} = 0.6/t_1 + 0.95/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_G} = 0.85/t_1 + 0.9/t_2 + 0.85/t_3 + 0.3/t_4 + 0.8/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_H} = 0.9/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_I} = 0.6/t_1 + 0.85/t_2 + 0.8/t_3 + 0.3/t_4 + 0.6/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_J} = 1/t_1 + 0.9/t_2 + 1/t_3 + 0.3/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_K} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 1/t_5$$

已知典型工程

$$\underset{\sim}{T_{K'}} = 0.95/t_1 + 0.96/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.5/t_5$$ 欲估工程

计算欲估工程“K'”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T_{K'}} \otimes \underset{\sim}{T_F} = (0.95 \wedge 0.6) \vee (0.96 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 0.85) \vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.9)$$
$$= 0.6 \vee 0.95 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.5 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T_{K'}} \odot \underset{\sim}{T_F} = (0.9 \vee 0.6) \wedge (0.96 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 0.85) \wedge (0.8 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.9)$$
$$= 0.9 \wedge 0.96 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T_{K'}}, \underset{\sim}{T_F}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.8)] = 0.58$$

$$\underset{\sim}{T_{K'}} \otimes \underset{\sim}{T_G} = (0.95 \wedge 0.85) \vee (0.96 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.85)$$

$$\vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.9)$$

$$= 0.85 \vee 0.9 \vee 0.85 \vee 0.3 \vee 0.5 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \odot \underset{\sim}{T}_{G} = (0.95 \vee 0.85) \wedge (0.96 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.85)$$

$$\wedge (0.8 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.9)$$

$$= 0.95 \wedge 0.96 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K'}, \underset{\sim}{T}_{G}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55$$

$$\underset{\sim}{T}_{K} \otimes \underset{\sim}{T}_{H} = (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.96 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 1)$$

$$\vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$= 0.9 \vee 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.5 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \odot \underset{\sim}{T}_{H} = (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.96 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\wedge (0.8 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$= 0.95 \wedge 0.96 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K'}, \underset{\sim}{T}_{H}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6 \cdots ③ \quad \because \underset{\sim}{T}_{H} = 0.82$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \otimes \underset{\sim}{T}_{I} = (0.95 \wedge 0.6) \vee (0.96 \wedge 0.85) \vee (1 \wedge 0.8)$$

$$\vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.6)$$

$$= 0.6 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 = 0.85$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \odot \underset{\sim}{T}_{I} = (0.95 \vee 0.6) \wedge (0.96 \vee 0.85) \wedge (1 \vee 0.8)$$

$$\wedge (0.8 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.6)$$

$$= 0.95 \wedge 0.96 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.6 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K'}, \underset{\sim}{T}_{I}) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.6)] = 0.63 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \otimes \underset{\sim}{T}_{J} = (0.95 \wedge 1) \vee (0.96 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 1)$$

$$\vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$= 0.95 \vee 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.5 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \odot \underset{\sim}{T}_{J} = (0.95 \vee 1) \wedge (0.96 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\wedge (0.8 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 0.96 \wedge 1\,0.8 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K'}, \underset{\sim}{T}_{J}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6 \cdots ② \because \underset{\sim}{T}_{J} = 0.84$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \otimes \underset{\sim}{T}_{K} = (0.95 \wedge 1) \vee (0.96 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1)$$

$$\vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$= 0.95 \vee 0.96 \vee 1 \vee 0.8 \vee 0.5 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K'} \odot \underset{\sim}{T}_{K} = (0.95 \vee 1) \wedge (0.96 \vee 1) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K'}, \underset{\sim}{T}_{K}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 1)] = 0.5$$

为此：

$\alpha_1 = 0.63$；　$\alpha_2 = 0.6$；　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 130.8$ 元/m^2；　$E_2 = 148.4$ 元/m^2；　$E_3 = 146.6$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.63$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.84$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.82$

$$\lambda_{K'} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.842}{0.63} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.842}{0.84} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.842}{0.82} - 1\right)\right] = 1.12$$

$$e^{*}_{K'} = 1.12[0.63 \times 130.8 + 0.6 \times 148.4(1 - 0.63) + 0.6 \times 146.6(1 - 0.63)(1 - 0.6)$$

$$+\frac{1}{3}(130.8+148.4+146.6)$$
$$(1-0.63)(1-0.6)(1-0.6)]$$
$$=1.12[82.4+32.94+13.02+8.4]$$
$$=153.17\text{ 元}/\text{m}^2$$

4. 检验欲估工程“K'”所估算造价的可靠性，即把所求得的欲估工程造价 153.17 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“F”的精度：

$(T_F, T_G)=0.8$ …③ ∵ $T_G=0.74$；$(T_F, T_H)=0.8$ …② ∵ $T_H=0.82$

$(T_F, T_I)=0.78$；$(T_F, T_J)=0.8$ …① ∵ $T_J=0.84$

$(T_F, T_K)=(T_K, T_F)=0.48$；$(T_F, T_{K'})=(T_{K'}, T_F)=0.58$

为此：

$\alpha_1=0.8$；　$\alpha_2=0.8$；　$\alpha_3=0.8$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=146.6$ 元/m^2；$E_3=138.2$ 元/m^2

与前面验算的工程“F”完全相同故估算造价仍为 137.37 元/m^2。

精度：$\dfrac{137.37-135.3}{135.3}\times 100\%=0.75\%<5\%$(行)

(2) 验算典型工程“G”的精度：

$(T_G, T_F)=0.8$ …③ ∵ $T_F=0.72$；$(T_G, T_H)=0.8$ …② ∵ $T_H=0.82$

$(T_G, T_I)=0.78$；$(T_G, T_J)=0.8$ …① ∵ $T_J=0.84$

$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_K}) = (\underset{\sim}{T_K}, \underset{\sim}{T_G}) = 0.45$；$(\underset{\sim}{T_G}, \underset{\sim}{T_{K'}}) = (\underset{\sim}{T_{K'}}, \underset{\sim}{T_G}) = 0.55$

为此：

$\alpha_1 = 0.8$；　　$\alpha_2 = 0.8$；　　$\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 148.4$ 元/m²；$E_2 = 146.6$ 元/m²；$E_3 = 135.3$ 元/m²

与前面验算的工程“G”完全相同故估算造价仍为 138.80 元/m²。

精度：$\frac{138.80 - 138.2}{138.2} \times 100\% = 0.4\% < 5\%$（行）

（3）验算典型工程“H”的精度：

$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_F}) = 0.8$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T_F} = 0.72$；$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_I}) = 0.78$

$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_G}) = 0.8$ …② ∵ $\underset{\sim}{T_G} = 0.74$；$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.85$　①

$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_K}) = (\underset{\sim}{T_K}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.5$；$(\underset{\sim}{T_H}, \underset{\sim}{T_{K'}}) = (\underset{\sim}{T_{K'}}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.6$

为此：

$\alpha_1 = 0.85$；　　$\alpha_2 = 0.8$；　　$\alpha_3 = 0.8$

$E_1 = 148.4$ 元/m²；$E_2 = 138.2$ 元/m²；$E_3 = 135.3$ 元/m²

与前面验算的工程“H”完全相同故估算造价仍为 149.75 元/m²。

精度：$\frac{149.75 - 146.6}{146.6} \times 100\% = 2.15\% < 5\%$（行）

（4）验算典型工程“I”的精度：

$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_F}) = 0.78$ ∵ $\underset{\sim}{T_F} = 0.72$；$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_G}) = 0.78$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T_G} = 0.74$；

$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_H}) = 0.78$ …② ∵ $\underset{\sim}{T_H} = 0.82$；$(\underset{\sim}{T_I}, \underset{\sim}{T_J}) = 0.78$

…① ∵ $\underset{\sim}{T_J}=0.84$;

$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_I})=0.43$;$(\underset{\sim}{T_I},\underset{\sim}{T_{K'}})=(\underset{\sim}{T_{K'}},\underset{\sim}{T_I})=0.63$

为此：

$\alpha_1=0.78$；　　$\alpha_2=0.78$；　　$\alpha_3=0.78$

$E_1=148.4$ 元/m^2；$E_2=146.6$ 元/m^2；$E_3=138.2$ 元/m^2

与前面验算的工程“J”完全相同故估算造价仍为 127 元/m^2。

精度：$\frac{130.8-127}{130.8}\times100\%=2.9\%<5\%$(行)

(5) 验算典型工程“J”的精度：

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_F})=0.8$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T_F}=0.72$;$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_G})=0.8$ …② ∵ $\underset{\sim}{T_G}=0.74$;

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_H})=0.85$ …①;$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_I})=0.78$

$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_K})=(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_J})=0.5$;$(\underset{\sim}{T_J},\underset{\sim}{T_{K'}})=(\underset{\sim}{T_{K'}},\underset{\sim}{T_J})=0.6$

为此

$\alpha_1=0.85$；　　$\alpha_2=0.8$；　　$\alpha_3=0.8$

$E_1=146.6$ 元/m^2；$E_2=138.2$ 元/m^2；$E_3=135.3$ 元/m^2

与前面验算的工程“J”完全相同故估算造价仍为 151.09 元/m^2。

精度：$\frac{151.09-148.4}{148.4}\times100\%=1.8\%<5\%$(行)

(6) 验算典型工程“K”的精度：

$(\underset{\sim}{T_K},\underset{\sim}{T_{K'}})=(\underset{\sim}{T_{K'}},\underset{\sim}{T_K})=0.5$，其他与前面计算的“$K$”工程相同，故完全符合精度要求。

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K'”的估算土建单方造价为153.17元/m^2是可信的。

四、实例应用“Ⅳ”

估算某单位的砖混结构家属宿舍“K_1”工程的单方土建造价，其资料见表3-4，此资料是80年代初搜集整理的。

1．建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

“A_1”工程：$\sum_1^m t_j = 0.5 + 0.95 + 1 + 0.8 + 0.9 = 4.15$

“A_2”工程：$\sum_1^m t_j = 0.95 + 1 + 0.55 + 0.6 + 0.96 = 4.06$

“A_3”工程：$\sum_1^m t_j = 0.4 + 0.95 + 0.3 + 0.8 + 0.9 = 3.35$

“A_4”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 1 + 0.5 + 1 + 0.85 = 4.35$

“A_5”工程：$\sum_1^m t_j = 0.6 + 0.9 + 0.4 + 0.9 + 1 = 3.80$

欲估工程：

“K_1”工程：$\sum_1^m t_j = 0.35 + 0.9 + 0.4 + 0.9 + 1 = 3.55$

$\sum_1^m t_j = 4.35$ 为最大，故：

$\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$\underset{\sim}{T}_{A_1} = 1 - \dfrac{4.35 - 4.15}{4.35} = 0.95$

砖混结构对比工程模糊关系系数表　　表 3-4

已估工程	工程代号	工程名称	基础 说明	t_1	层数、层高 说明	t_2	外装饰 说明	t_3	内装饰 说明	t_4	房间组合 说明	t_5	$\frac{\Sigma t_i}{t_3}$	土建造价 元/m²
已知典型工程	A_1	家属宿舍	条基(-2.1m)下设毛石混凝土	0.5	5×3.0m	0.95	水刷石钢门窗	1	灰砂底纸筋灰面,贴脸搁板	0.8	三室一厅、二室一厅各半	0.9	$\frac{4.15}{0.95}$	114.49
	A_2	同上	筏基(-1.25m)	0.95	6×3.0m	1	水泥砂浆面、钢门窗	0.55	灰砂底纸筋灰面	0.6	三室一厅多,二室一厅少	0.96	$\frac{4.06}{0.933}$	116.29
	A_3	同上	条基(-1.95m)	0.4	5×3.0m	0.95	厚浆勾缝木门窗	0.3	灰砂底纸筋灰面,贴脸搁板	0.8	三室一厅,二室一厅各半	0.9	$\frac{3.35}{0.77}$	100.74
	A_4	同上	筏基(-1.95m)	1	6×3.0m	1	水泥砂浆抹面、木门窗	0.5	灰砂底纸筋灰面,贴脸搁板有壁柜、碗橱	1	三室一厅、二室一厅、一室一厅均有	0.85	$\frac{4.35}{1}$	118.96
	A_5	同上	条基(-1.3m)有地梁	0.6	4×3.0m	0.9	加浆勾缝钢门窗	0.4	灰砂底纸筋灰面墙和地面刷涂料	0.9	三室一厅	1	$\frac{3.8}{0.87}$	104.65
欲估工程	K_1	同上	条基(-1.2m)	0.35	4×3.0m	0.9	清水勾缝钢门窗	0.4	灰砂底纸筋灰面墙和地面刷涂料	0.9	三室一厅	1	$\frac{3.55}{0.82}$	待求(102.52)
	K_2	同上	箱基(-1.75m)	0.35	6×3.2m	0.35	水泥砂浆抹面、钢门窗	0.55	灰砂底纸筋灰面	0.6	三室一厅、二室一厅各半	0.9	$\frac{4.05}{0.931}$	待求(119.41)

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} = 1 - \frac{4.35 - 4.06}{4.35} = 0.933$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_3} = 1 - \frac{4.35 - 3.35}{4.35} = 0.77$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_5} = 1 - \frac{4.35 - 3.8}{4.35} = 0.87$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系系数表3-4”。

2. 检验“对比工程模糊关系系数表3-4”，最后确定其隶属度值。

(1) 列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.5/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 0.55/t_3 + 0.6/t_4 + 0.96/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.4/t_1 + 0.95/t_2 + 0.3/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.85/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$

(2) 检验典型工程“A_1”的可靠性

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_{A_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_2} &= (0.5 \wedge 0.95) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.6) \\ &\quad \vee (1 \wedge 0.55) \vee (0.9 \wedge 0.96) \\ &= 0.5 \vee 0.95 \vee 0.6 \vee 0.55 \vee 0.9 = 0.95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_{A_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_2} &= (0.5 \vee 0.95) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.6) \\ &\quad \wedge (1 \vee 0.55) \wedge (0.9 \vee 0.96) \\ &= 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.96 = 0.8\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.8)] = 0.58 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.5 \wedge 0.4) \vee (0.95 \wedge 0.95) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0.9)$$
$$= 0.4 \vee 0.95 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.5 \vee 0.4) \wedge (0.95 \vee 0.95) \wedge (0.8 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 0.9)$$
$$= 0.5 \wedge 0.95 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.5)] = 0.73 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.5 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.9 \wedge 0.85)$$
$$= 0.5 \vee 0.95 \vee 0.8 \vee 0.5 \vee 0.85 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.5 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.5) \wedge (0.9 \vee 0.85)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.90 = 0.9$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.9)] = 0.53$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.5 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 1)$$
$$= 0.5 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.5 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (0.9 \vee 0.1)$$
$$= 0.6 \wedge 0.95 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 1 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.6)] = 0.65 \quad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　　$\alpha_2 = 0.65$；　　$\alpha_3 = 0.58$

$E_1 = 100.74$ 元/m^2；$E_2 = 104.65$ 元/m^2；$E_3 = 116.29$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.87$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.93$

$$\lambda_{A_1} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.95}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.95}{0.87} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.95}{0.93} - 1\right)\right]$$
$$= 1.1$$

估算造价：$e^*_{A_1} = 1.1[0.73 \times 100.74 + 0.65 \times 104.65 \times (1 - 0.73) + 0.58 \times 116.29(1 - 0.73) \times (1 - 0.65) + \frac{1}{3}(100.74 + 104.65 + 116.29) \times (1 - 0.73)(1 - 0.65)(1 - 0.58)]$

$= 1.1[73.54 + 16.95 + 7.28 + 4.86]$

$= 112.89$ 元/m^2

精度：$\frac{114.49 - 112.89}{114.49} \times 100\% = 1.4\% < 5\%$（行）

（3）检验典型工程“A_2”的可靠性

$$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.58$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.95 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.55 \wedge 0.3) \vee (0.96 \wedge 0.9)$$
$$= 0.4 \vee 0.95 \vee 0.6 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.95 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.6 \vee 0.8) \wedge (0.55 \vee 0.3) \wedge (0.96 \vee 0.9)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.55 \wedge 0.96 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.55)] = 0.7 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.95 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 1) \vee (0.55 \wedge 0.5) \vee (0.96 \wedge 0.85)$$
$$= 0.95 \vee 1 \vee 0.6 \vee 0.5 \vee 0.85 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.95 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.6 \vee 1) \wedge (0.55 \vee 0.5) \wedge (0.96 \vee 0.85)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.55 \wedge 0.96 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.55)] = 0.73 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.95 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.6 \wedge 0.9) \vee (0.55 \wedge 0.4) \vee (0.96 \wedge 1)$$
$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee 0.96 = 0.96$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.95 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (0.6 \vee 0.9) \wedge (0.55 \vee 0.4) \wedge (0.96 \vee 1)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.55 \wedge 1 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = \frac{1}{2}[0.96 + (1 - 0.55)] = 0.71 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　　$\alpha_2 = 0.71$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 118.96$ 元/m²；$E_2 = 104.65$ 元/m²；$E_3 = 100.74$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.87$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_3} = 0.77$

$$\lambda_{A_2} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.933}{1.0} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.933}{0.87} - 1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.933}{0.77}-1\right)\Big] = 1.02$$

估算造价：$e^*_{A_2} = 1.02[0.73\times 118.96 + 0.71\times 104.65$

$$\times(1-0.73) + 0.7\times 100.74(1-0.73)$$

$$\times(1-0.71) + \frac{1}{3}(118.96+104.65+100.74)$$

$$\times(1-0.73)(1-0.71)(1-0.7)]$$

$$=1.02[86.84 + 19.78 + 5.71 + 2.63]$$

$$=117.26\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{116.29-117.26}{116.29}\times 100\% = 0.83\% < 5\%$（行）

（4）检验典型工程“A_3”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.73$ …③ ∵ $\underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.95$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.7$

$\underset{\sim}{T}_{A_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.4 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1)$

$$\vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0.9 \wedge 0.85)$$

$$=0.4 \vee 0.95 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.85 = 0.95$$

$\underset{\sim}{T}_{A_3} \odot \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.4 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1)$

$$\wedge (0.3 \vee 0.5) \wedge (0.9 \vee 0.85)$$

$$=1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 0.9 = 0.5$$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = \dfrac{1}{2}[0.95 + (1-0.5)] = 0.73$ …② ∵ $\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$\underset{\sim}{T}_{A_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.9)$

$$\vee (0.3 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 1)$$

$$=0.4 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_3} \odot \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.4 \vee 0.6) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 0.9) \wedge (0.3 \vee 0.4) \wedge (0.9 \vee 1)$$

$$= 0.6 \wedge 0.95 \wedge 0.9 \wedge 0.4 \wedge 1 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.4)] = 0.75 \quad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.73$；　　$\alpha_3 = 0.73$

$E_1 = 104.65$ 元/m²；$E_2 = 118.96$ 元/m²；$E_3 = 114.49$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.87$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.95$

$$\lambda_{A_3} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.77}{0.87} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.77}{1} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.77}{0.95} - 1\right)\right] = 0.91$$

估算造价：$e^*_{A_3} = 0.9[0.75 \times 104.65 + 0.73 \times 118.96 \times (1 - 0.75) + 0.73 \times 114.49(1 - 0.75) \times (1 - 0.73) + \frac{1}{3}(104.65 + 118.96 + 114.49) \times (1 - 0.75)(1 - 0.73)(1 - 0.73)]$

$= 0.9[78.49 + 21.71 + 5.64 + 2.05]$

$= 98.18$ 元/m²

精度：$\frac{100.74 - 98.18}{100.74} \times 100\% = 2.54\% < 5\%$（行）

（5）检验典型工程“A_4”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.55$；

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73 \cdots①$ ∵ $\underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73 \cdots②$ ∵ $\underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.77$

$$\underset{\sim}{T_{A_4}} \otimes \underset{\sim}{T_{A_5}} = (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.5 \wedge 0.4) \vee (0.85 \wedge 1)$$
$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.9 \vee 0.4 \vee 0.85 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_{A_4}} \odot \underset{\sim}{T_{A_5}} = (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (0.5 \vee 0.4) \wedge (0.85 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 1 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T_{A_4}}, \underset{\sim}{T_{A_5}}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7 \qquad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　$\alpha_2 = 0.73$；　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 116.29$ 元/m^2；$E_2 = 100.74$ 元/m^2；$E_3 = 104.65$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.933$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 0.87$

$$\lambda_{A_4} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{1}{0.933} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.77} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.87} - 1\right)\right] = 1.09$$

估算造价：$e^*_{A_4} = 1.09[0.73 \times 116.29 + 0.73 \times 100.74 \times (1 - 0.73) + 0.7 \times 104.65(1 - 0.73) \times (1 - 0.73) + \frac{1}{3}(116.29 + 100.74 + 104.65) \times (1 - 0.73)(1 - 0.73)(1 - 0.7)]$

$= 1.09[84.89 + 19.86 + 5.14 + 2.35]$

$= 122.34$ 元/m^2

精度：$\frac{122.34 - 118.96}{118.96} \times 100\% = 2.84\% < 5\%$（行）

（6）检验典型工程“A_5”的可靠性

$$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.65;$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7 \cdots ③ \because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.75 \cdots ①$$

$$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = (\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7 \cdots ② \because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 100.74$ 元/m²；$E_2 = 118.96$ 元/m²；$E_3 = 116.29$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.933$

$$\lambda_{A_5} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.87}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.87}{1} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.87}{0.933} - 1\right)\right] = 1.02$$

估算造价：$e^*_{A_5} = 1.02[0.75 \times 100.74 + 0.7 \times 118.96 \times (1 - 0.75) + 0.7 \times 116.29(1 - 0.75) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(100.74 + 118.96 + 116.29) \times (1 - 0.75)(1 - 0.7)(1 - 0.7)]$

$= 1.02[75.56 + 20.82 + 6.11 + 2.52]$

$= 107.11$ 元/m²

精度：$\frac{107.11 - 104.65}{104.65} \times 100\% = 2.35\% < 5\%$（行）

3. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-4”。用上述步骤与方法估算欲估工程“K_1”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.5/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 0.55/t_3 + 0.6/t_4 + 0.96/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.4/t_1 + 0.95/t_2 + 0.3/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.85/t_5$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$

（已知典型工程）

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.35/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$ 欲估工程

计算欲估工程“K_1”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_1} = (0.35 \wedge 0.5) \vee (0.9 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.9)$$
$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_1} = (0.35 \vee 0.5) \wedge (0.9 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.9)$$
$$= 0.5 \wedge 0.95 \wedge 0.9 \wedge 1 \wedge 1 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7 \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_2} = (0.35 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.6) \vee (0.4 \wedge 0.55) \vee (1 \wedge 0.95)$$
$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee 0.95 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_2} = (0.35 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.6) \wedge (0.4 \vee 0.55) \wedge (1 \vee 0.95)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.55 \wedge 1 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.55)] = 0.7 \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.93$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.35 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.9)$$
$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.8 \vee 0.3 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_3} = (0.35 \vee 0.4) \wedge (0.9 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.9)$$
$$= 0.4 \wedge 0.95 \wedge 0.9 \wedge 0.4 \wedge 1 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.4)] = 0.75 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.35 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.85)$$
$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.9 \vee 0.4 \vee 0.85 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_4} = (0.35 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.4 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 0.85)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 1 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7 \cdots ③ \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.35 \wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 1)$$
$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.9 \vee 0.4 \vee 1 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} \odot \underset{\sim}{T}_{A_5} = (0.35 \vee 0.6) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.4 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 1)$$
$$= 0.6 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.4 \wedge 1 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.4)] = 0.8 \quad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.8$；　　$\alpha_2 = 0.75$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 104.65$ 元/m^2；$E_2 = 100.74$ 元/m^2；$E_3 = 118.96$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.87$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.77$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{K_1} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.82}{0.87} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.82}{0.77} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.82}{1.0} - 1\right)\right] = 0.98$$

估算造价：$e^*_{K_1} = 0.98[0.8 \times 104.65 + 0.75 \times 100.74 \times (1 - 0.8) + 0.7 \times 118.96(1 - 0.8) \times (1 - 0.75) + \frac{1}{3}(104.65 + 100.74 + 118.96) \times (1 - 0.8)(1 - 0.75)(1 - 0.7)]$

$= 0.98[83.72 + 15.11 + 4.16 + 1.62]$

$= 102.52$ 元/m^2

4．检验欲估工程“K_1”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 102.52 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“A_1”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.58$；$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.73$　　……①

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.55$；$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.65$　　……③

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.7$　　……②

为此

$\alpha_1 = 0.73$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 100.74$ 元/m²；$E_2 = 102.52$ 元/m²；$E_3 = 104.65$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.87$

$$\lambda_{A_1} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.95}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.95}{0.82} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.95}{0.87} - 1\right)\right] = 1.12$$

估算造价：$e^*_{A_1} = 1.12[0.73 \times 100.74 + 0.7 \times 102.52 \times (1 - 0.73) + 0.65 \times 104.65(1 - 0.73) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(100.74 + 102.52 + 104.65) \times (1 - 0.73)(1 - 0.7)(1 - 0.65)]$

$= 1.12[73.54 + 19.38 + 5.51 + 2.91]$

$= 113.5$ 元/m²

精度：$\frac{114.49 - 113.5}{114.49} \times 100\% = 0.86\% < 5\%$（行）

(2) 检验典型工程“A_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.58$；

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.77$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7$ …②　$\because \underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.87$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7$ …③ $\because \underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.82$

为此

$\alpha_1 = 0.73$；　$\alpha_2 = 0.7$；　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 118.96$ 元/m²；$E_2 = 104.65$ 元/m²；$E_3 = 102.52$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 1$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.87$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.82$

$$\lambda_{A_2} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.933}{1} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.933}{0.87} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.933}{0.82} - 1\right)\right] = 1.00$$

估算造价：$e^*_{A_2} = 1.0[0.73 \times 118.96 + 0.7 \times 104.65 \times (1 - 0.73) + 0.7 \times 102.52(1 - 0.73) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(118.96 + 104.65 + 102.52) \times (1 - 0.73)(1 - 0.7)(1 - 0.7)]$

$= 1.0[86.84 + 19.78 + 5.81 + 2.64]$

$= 115.06$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{116.29 - 115.06}{116.29} \times 100\% = 1.06\% < 5\%$（行）

（3）检验典型工程“A_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.73$，$\because \underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.95$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.7$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = (\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.73 \cdots ③$ $\because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = (\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.75 \cdots ①$ $\because \underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.87$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.75 \cdots ②$ $\because \underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.82$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　$\alpha_2 = 0.75$；　$\alpha_3 = 0.73$

$E_1 = 104.65$ 元 $/m^2$；$E_2 = 102.52$ 元 $/m^2$；$E_3 = 118.96$ 元 $/m^2$

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.87$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{A_3} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.77}{0.87} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.77}{0.82} - 1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.77}{1}-1\right)\Big] = 0.93$$

估算造价：$e^{*}_{A_3} = 0.93[0.75\times 104.65 + 0.75\times 102.52$

$$\times(1-0.75) + 0.73\times 118.96(1-0.75)$$

$$\times(1-0.75)+\frac{1}{3}(104.65+102.52-118.96)$$

$$\times(1-0.75)(1-0.75)(1-0.73)]$$

$$=0.93[78.49+19.22+5.43+1.84]$$

$$=97.63\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{100.74-97.63}{100.74}\times 100\% = 3.1\% < 5\%$（行）

（4）检验典型工程“A_4”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73$ …①　∵ $\underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73$ …②　∵ $\underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.77$

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.7$ …③　∵ $\underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.87$

$(\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.7$　∵ $\underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.82$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　$\alpha_2 = 0.73$；　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 116.29$ 元/m^2；$E_2 = 100.74$ 元/m^2；$E_3 = 104.65$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.933$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.87$

$$\lambda_{A_4} = 1+\frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{1}{0.933}-1\right)+0.8\left(\frac{1}{0.77}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{1}{0.87}-1\right)\right] = 1.09$$

估算造价：$e^*_{A_4} = 1.09[0.73 \times 116.29 + 0.73 \times 100.74$
$\times (1-0.73) + 0.7 \times 104.65(1-0.73)$
$\times (1-0.73) + \frac{1}{3}(116.29+100.74+104.65)$
$\times (1-0.73)(1-0.73)(1-0.7)]$
$= 1.09[84.89 + 19.86 + 5.34 + 2.35]$
$= 122.56$ 元/m^2

精度：$\frac{122.56-118.96}{118.96} \times 100\% = 3.03\% < 5\%$（行）

(5) 检验典型工程“A_5”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = (\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.65$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = (\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7 \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = (\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.75$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = (\underset{\sim}{T}_{A_4}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7$ …③ $\because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.8$ ……①

为此：

$\alpha_1 = 0.8; \quad \alpha_2 = 0.75; \quad \alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 102.52$ 元/m^2; $E_2 = 100.74$ 元/m^2; $E_3 = 118.96$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.82; \quad \underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.77; \quad \underset{\sim}{T}_{a_3} = 1$

$$\lambda_{A_2} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.87}{0.82}-1\right) + 0.8\left(\frac{0.87}{0.77}-1\right) + 0.4\left(\frac{0.87}{1}-1\right)\right] = 1.03$$

估算造价：$e^*_{A_5} = 1.03[0.8 \times 102.52 + 0.75 \times 100.74$
$\times (1-0.8) + 0.7 \times 118.96(1-0.8)$

$$\times(1-0.75)+\frac{1}{3}(102.52+100.74+118.96)$$
$$\times(1-0.8)(1-0.75)(1-0.77)]$$
$$=1.03[82.02+15.11+4.16+1.6]$$
$$=105.99\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\frac{105.99-104.65}{104.65}\times100\%=1.28\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_1”的估算土建单方造价为102.52元/m^2是可信的。

五、实例应用“V”

继实例应用“Ⅳ”，估算某单位的砖混结构家属宿舍“K_2”工程的单方土建造价，其资料见表3-4（此资料是80年代初搜集整理的）。

1．建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

“A_1”工程：$\sum_1^m t_j=0.5+0.95+1+0.8+0.9=4.15$

“A_2”工程：$\sum_1^m t_j=0.95+1+0.55+0.6+0.96=4.06$

“A_3”工程：$\sum_1^m t_j=0.4+0.95+0.3+0.8+0.9=3.35$

“A_4”工程：$\sum_1^m t_j=1+1+0.5+1+0.85=4.35$

“A_5”工程：$\sum_1^m t_j=0.6+0.9+0.4+0.9+1=3.8$

“K_1”工程：$\sum_1^m t_j=0.35+0.9+0.4+0.9+1=3.55$

欲估工程：

“K_2”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 1 + 0.55 + 0.6 + 0.9 = 4.05$

$\sum_1^m t_j = 4.35$ 为最大，故：

$\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$$\underset{\sim}{T}_{A_1} = 1 - \frac{4.35 - 4.15}{4.35} = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_2} = 1 - \frac{4.35 - 4.06}{4.35} = 0.933$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_3} = 1 - \frac{4.35 - 3.35}{4.35} = 0.77$$

$$\underset{\sim}{T}_{A_5} = 1 - \frac{4.35 - 3.8}{4.35} = 0.87$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_1} = 1 - \frac{4.35 - 3.55}{4.35} = 0.82$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系系数表 3-4”。

2. 检验“对比工程模糊关系系数表 3-4”，最后确定其隶属度值。

(1) 列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$\underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.5/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$

$\underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 0.55/t_3 + 0.6/t_4 + 0.96/t_5$

$\underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.4/t_1 + 0.95/t_2 + 0.3/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$

$\underset{\sim}{T}_{A_4} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.85/t_5$

$\underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$

$$\underset{\sim}{T_{K_1}} = 0.35/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$

(2) 检验各典型工程的可靠性，因其资料完全同实例应用“Ⅳ”，而在实例应用“Ⅳ”中对所有典型工程通过检验都在精度范围之内完全可靠，故这里就不再重复检验。

3. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-4”。用上述步骤和方法估算欲估工程“K_2”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T_{A_1}} = 0.5/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_{A_2}} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 0.55/t_3 + 0.6/t_4 + 0.96/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_{A_3}} = 0.4/t_1 + 0.95/t_2 + 0.3/t_3 + 0.8/t_4 + 0.9/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_{A_4}} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.85/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_{A_5}} = 0.6/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$

$$\underset{\sim}{T_{K_1}} = 0.35/t_1 + 0.9/t_2 + 0.4/t_3 + 0.9/t_4 + 1/t_5$$

} 已知典型工程

$$\underset{\sim}{T_{K_2}} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.55/t_3 + 0.6/t_4 + 0.9/t_5 \quad \text{欲估工程}$$

计算欲估工程“K_2”与已知典型工程的贴近度：

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_{K_2}} \otimes \underset{\sim}{T_{A_1}} &= (1 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.6 \wedge 0.8) \\ &\quad \vee (0.55 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.9) \\ &= 0.5 \vee 0.95 \vee 0.6 \vee 0.55 \vee 0.9 = 0.95\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T_{K_2}} \odot \underset{\sim}{T_{A_1}} &= (1 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.6 \vee 0.8) \\ &\quad \wedge (0.55 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.9) \\ &= 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.8\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.8)] = 0.58$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_2} = (1 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 0.6)$$

$$\vee (0.55 \wedge 0.55) \vee (0.9 \wedge .96)$$

$$= 0.95 \vee 1 \vee 0.6 \vee 0.55 \vee 0.9 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_2} = (1 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.6 \vee 0.6)$$

$$\wedge (0.55 \vee 0.55) \wedge (0.9 \vee .96)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.6 \wedge 0.55 \wedge 0.96 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.55)] = 0.73 \cdots ② \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_3} = (1 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.6 \wedge 0.8)$$

$$\vee (0.55 \wedge 0.3) \vee (0.9 \wedge 0.9)$$

$$= 0.4 \vee 0.95 \vee 0.6 \vee 0.3 \vee 0.9 \doteq 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_3} = (1 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.6 \vee 0.8)$$

$$\wedge (0.55 \vee 0.3) \wedge (0.9 \vee 0.9)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.55 \wedge 0.9 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.55)] = 0.7 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_4} = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 1)$$

$$\vee (0.55 \wedge 0.5) \vee (0.9 \wedge 0.85)$$

$$= 1 \vee 1 \vee 0.6 \vee 0.5 \vee 0.85 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_4} = (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.6 \vee 1)$$

$$\wedge (0.55 \vee 0.5) \wedge (0.9 \vee 0.85)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.55 \wedge 0.9 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.55)] = 0.73 \cdots ① \because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{A_5} = (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.6 \wedge 0.9) \vee (0.55 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 1)$$

$$= 0.6 \vee 0.9 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \odot \underset{\sim}{T}_{A_5} = (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (0.6 \vee 0.9) \wedge (0.55 \vee 0.4) \wedge (0.9 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.55 \wedge 1 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.55)] = 0.68$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{K_1} = (1 \wedge 0.35) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.6 \wedge 0.9) \vee (0.55 \wedge 0.4) \vee (0.9 \wedge 1)$$

$$= 0.35 \vee 0.9 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_2} \odot \underset{\sim}{T}_{K_1} = (1 \vee 0.35) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (0.6 \vee 0.9) \wedge (0.55 \vee 0.4) \wedge (0.9 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.55 \wedge 1 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.55)] = 0.68$$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　　$\alpha_2 = 0.73$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 118.96$ 元/m^2；$E_2 = 116.29$ 元/m^2；$E_3 = 100.74$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.933$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.77$

$$\lambda_{K_2} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.931}{1} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.931}{0.933} - 1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.931}{0.77}-1\right)\Big] = 0.99$$

估算造价：$e^*_{K_2} = 0.99[0.73 \times 118.96 + 0.73 \times 116.29 \times (1-0.73) + 0.7 \times 100.74(1-0.73) \times (1-0.73) + \frac{1}{3}(118.96+116.29+100.74) \times (1-0.73)(1-0.73)(1-0.7)]$

$=0.99[86.84 + 22.92 + 5.14 + 5.72]$

$=119.41$ 元/m^2

4. 检验欲估工程“K_2”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 119.41 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“A_1”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.58$

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.73$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.65$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{A_1}, \underset{\sim}{T}_{K_2}) = (\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.58$，$\because \underset{\sim}{T}_{K_2} = 0.931$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.7$ ……②

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　$\alpha_2 = 0.7$；　$\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 100.74$ 元/m^2；$E_2 = 102.52$ 元/m^2；$E_3 = 104.65$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.82$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.87$

$$\lambda_{A_1} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.95}{0.77}-1\right)+0.8\left(\frac{0.95}{0.82}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.95}{0.87}-1\right)\Big] = 1.17$$

估算造价：$e^{*}_{A_1} = 1.17[0.73 \times 100.74 + 0.7 \times 102.52$

$\times (1-0.73) + 0.65 \times 104.65(1-0.73)$

$\times (1-0.7) + \frac{1}{3}(100.74 + 102.52 + 104.65)$

$\times (1-0.73)(1-0.7)(1-0.65)]$

$= 1.17[73.54 + 19.38 + 5.51 + 2.91]$

$= 118.57$ 元 /m^2

精度：$\frac{118.57-114.49}{114.49} \times 100\% = 3.56\% < 5\%$（行）

(2) 检验典型工程“A_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.58$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.77$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73$ …① $\because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.7$ …③ $\because \underset{\sim}{T}_{A_3} = 0.87$.

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.82$

$(\underset{\sim}{T}_{A_2}, \underset{\sim}{T}_{K_2}) = (\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.73$ …② $\because \underset{\sim}{T}_{K} = 0.931$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　　$\alpha_2 = 0.73$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 118.96$ 元 /m^2；$E_2 = 119.41$ 元 /m^2；$E_3 = 104.65$ 元 /m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.931$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.87$

$$\lambda_{A_2} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.933}{1}-1\right) + 0.8\left(\frac{0.933}{0.931}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.933}{0.87}-1\right)\Big] = 0.98$$

估算造价：$e^*_{A_2} = 0.98[0.73\times 118.96 + 0.73\times 119.41$
$\times(1-0.73) + 0.7\times 104.65(1-0.73)$
$\times(1-0.73) + \frac{1}{3}(118.96+119.41+104.65)$
$\times(1-0.73)(1-0.73)(1-0.7)]$
$= 0.98[86.84 + 23.54 + 5.34 + 5.84]$
$= 119.13$ 元/m^2

精度：$\frac{116.29-119.13}{116.29}\times 100\% = 2.4\% < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“A_3”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.73 \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.95$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7,$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.73 \cdots ③ \because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.75 \cdots ① \because \underset{\sim}{T}_{A_5} = 0.87$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.75 \cdots ② \because \underset{\sim}{T}_{K_1} = 0.82$

$(\underset{\sim}{T}_{A_3}, \underset{\sim}{T}_{K_2}) = (\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.7$

为此：

$\alpha_1 = 0.75; \qquad \alpha_2 = 0.75; \qquad \alpha_3 = 0.73$

$E_1 = 104.65$ 元/m^2；$E_2 = 102.52$ 元/m^2；$E_3 = 118.96$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.87; \qquad \underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.82; \qquad \underset{\sim}{T}_{a_3} = 1$

$$\lambda_{A_3} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.77}{0.87}-1\right) + 0.8\left(\frac{0.77}{0.82}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.77}{1}-1\right)\Big] = 0.93$$

估算造价：$e^{*}_{A_3} = 0.93[0.75 \times 104.65 + 0.75 \times 102.52$

$\times (1-0.75) + 0.73 \times 118.96(1-0.75)$

$\times (1-0.75) + \frac{1}{3}(104.65+102.52+118.96)$

$\times (1-0.75)(1-0.75)(1-0.73)]$

$= 0.93[78.49 + 19.22 + 5.43 + 1.84]$

$= 97.63$ 元 /m^2

精度：$\frac{100.74-97.63}{100.74} \times 100\% = 3.09\% < 5\%$（行）

（4）检验典型工程“A_4”的精度：

$(T_{A_4}, T_{A_1}) = 0.55$,

$(T_{A_4}, T_{A_2}) = 0.73$ …① ∵ $T_{A_2} = 0.933$

$(T_{A_4}, T_{A_3}) = 0.73$ …② ∵ $T_{A_3} \doteq 0.77$

$(T_{A_4}, T_{A_5}) = 0.7$ …③ ∵ $T_{A_5} = 0.87$

$(T_{A_4}, T_{K_1}) = (T_{K_1}, T_{A_4}) = 0.7$ ∵ $T_{K_1} = 0.82$

$(T_{A_4}, T_{K_2}) = (T_{K_2}, T_{A_4}) = 0.65$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$; $\alpha_2 = 0.73$; $\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 116.29$ 元 /m^2; $E_2 = 100.74$ 元 /m^2; $E_3 = 104.65$ 元 /m^2

$T_{a_1} = 0.933$; $T_{a_2} = 0.77$; $T_{a_3} = 0.87$

$$\lambda_{A_4} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{1}{0.933}-1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.77}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{1}{0.87}-1\right)\Big] = 1.09$$

估算造价：$e^{*}_{A_4} = 1.09[0.73 \times 116.29 + 0.73 \times 100.74$

$\times (1-0.73) + 0.7 \times 104.65(1-0.73)$

$\times (1-0.73) + \frac{1}{3}(116.29+100.74+104.65)$

$\times (1-0.73)(1-0.73)(1-0.7)]$

$= 1.09[84.89 + 19.86 + 5.34 + 2.35]$

$= 122.56$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{122.56-118.96}{118.96} \times 100\% = 3.03\% < 5\%$（行）

(5) 检验典型工程“A_5”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.65,$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7 \quad \because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.75$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.7$ …③ $\because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = (\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.8$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{A_5}, \underset{\sim}{T}_{K_2}) = (\underset{\sim}{T}_{K_2}, \underset{\sim}{T}_{A_5}) = 0.68$

为此：

$\alpha_1 = 0.80; \quad \alpha_2 = 0.75; \quad \alpha_3 = 0.70$

$E_1 = 102.52$ 元 $/m^2; E_2 = 100.74$ 元 $/m^2; E_3 = 118.96$ 元 $/m^2$

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.82; \quad \underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.77; \quad \underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{A_5} = 1 + \frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.87}{0.82}-1\right) + 0.8\left(\frac{0.87}{0.77}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.87}{1}-1\right)\Big] = 1.03$$

估算造价：$e^{*}_{A_5} = 1.03[0.8\times 102.52 + 0.75\times 100.74$
$\times(1-0.8) + 0.7\times 118.96(1-0.8)$
$\times(1-0.75)+\frac{1}{3}(102.52+100.74+118.96)$
$\times(1-0.8)(1-0.75)(1-0.7)]$
$=1.03[82.\underline{02} + 15.\underline{11} + 4.16 + 1.61]$
$=105.99$ 元/m^2

精度：$\frac{105.99-104.65}{104.65}\times 100\% = 1.23\% < 5\%$（行）

(6) 检验典型工程“K_1”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_1}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{A_1} = 0.95$

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{A_2} = 0.933$

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_3}) = 0.75$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_4}) = 0.7$ …③ $\because \underset{\sim}{T}_{A_4} = 1$

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{A_2}) = 0.8$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{K_1}, \underset{\sim}{T}_{K_1}) = 0.68$

为此：

$\alpha_1 = 0.8$；　$\alpha_2 = 0.75$；　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 104.65$ 元/m^2；$E_2 = 100.74$ 元/m^2；$E_3 = 118.96$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.87$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{K_1} = 1+\frac{1}{5}\left[1.8\left(\frac{0.82}{0.87}-1\right)+0.8\left(\frac{0.82}{0.77}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.82}{1}-1\right)\Big] = 0.98$$

估算造价：$e^{*}_{K_1} = 0.98[0.8\times 104.65 + 0.75\times 100.74$
$\times(1-0.8) + 0.7\times 118.96(1-0.8)$
$\times(1-0.75) + \frac{1}{3}(104.65+100.74+118.96)$
$\times(1-0.8)(1-0.75)(1-0.7)]$
$=0.98[83.72+15.11+4.16+1.62]$
$=102.52$ 元 $/m^2$

精度 100%符合要求（行）。

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_2”的估算土建单方造价为 119.41 元/m^2 是完全可信的。

六、实例应用“Ⅵ”

估算某市第一医院住院部框架现浇结构“K_3”工程的单方土建造价，其资料见表 3-5，此资料是 80 年代初搜集整理的。

1．建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

“B_1”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 0.4+0.5+1+0.65+0.8+0.4+0.7$
$=4.45$

“B_2”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 1+1+0.5+0.8+0.85+0.5+0.7$
$=5.35$

“B_3”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 0.4+0.4+0.6+0.8+0.7+0.35+0.7$
$=3.95$

“B_4”工程：$\sum_1^m t_j = 0.5 + 0.6 + 1 + 0.7 + 0.7 + 0.6 + 0.7$

$= 4.80$

欲估工程：

“K_3”工程：$\sum_1^m t_j = 0.65 + 0.6 + 0.55 + 0.9 + 0.9 + 0.9$

$+ 0.55 = 5.05$

$\sum_1^m t_j = 6.1$ 为最大；（见实例应用“Ⅸ”及表3-6，因它们应用同一个资料）。故：

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} = 1 - \frac{6.1 - 4.45}{6.1} = 0.73$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_2} = 1 - \frac{6.1 - 5.35}{6.1} = 0.88$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_3} = 1 - \frac{6.1 - 3.95}{6.1} = 0.65$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_4} = 1 - \frac{6.1 - 4.8}{6.1} = 0.79$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系数表3-5”。

2. 检验“对比工程模糊关系系数表3-5”，最后确定其隶属度值。

（1）列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.4/t_1 + 0.5/t_2 + 1/t_3 + 0.65/t_4 + 0.8/t_5 + 0.4/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_2} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.8/t_4 + 0.85/t_5$$

框架结构对比工程模糊关系系数表　　表 3-5

已估工程	工程代号	工程名称	基础 说明	t_1	层数、层高 说明	t_2	楼地面 说明	t_3	房屋开间 说明	t_4	内装饰 说明	t_5	外装饰 说明	t_6	屋面 说明	t_7	$\frac{\Sigma t_i}{\Sigma}$	土建造价 元/m²
已知典型工程	B_1	师专图书馆	独立基础(-1.5m)	0.4	三层四层3×4.2m四层部分有夹层	0.5	现浇水磨石	1	大房间	0.65	吊天棚普通墙面	0.8	水刷石(钢窗)	0.4	有架空层	0.7	$\frac{4.45}{0.73}$	197.60
	B_2	保险公司大楼	预制桩半地下室	1	十二层3.3+5.1+9×3.3+4.2m	1	预制板二次浇筑层通道楼梯水磨石	0.5	底层和第八层有大间	0.8	部分吊天棚墙面均刷乳胶漆	0.85	玻璃纸皮面,水刷石(钢窗)	0.5	有架空层	0.7	$\frac{5.35}{0.88}$	213.20
	B_3	省二医院办公大楼	独立基础(-1.8m)	0.4	五层、六层均3.6m	0.4	现浇普通楼面少量水磨石	0.6	1/3大间2/3小间	0.8	普通天棚墙面106涂料	0.7	水刷石(木窗)	0.35	有架空层	0.7	$\frac{3.95}{0.65}$	192.17
	B_4	省五交化公司维修大楼	筏基	0.5	六层4.75+5×3.6m	0.6	现浇,大部分水磨石及缸砖	1	大小间都有	0.7	普通天棚墙面刷胶	0.7	水刷石鳖假石(钢窗)	0.6	有架空层	0.7	$\frac{4.80}{0.79}$	203.26
欲估工程	K_3	市一医院住院部	灌注桩	0.65	五、六、七层:4.2+3×3.6m+2×4.7m+4.2m	0.6	现浇五层其它预制板,部分水磨石	0.55	除底层外大部分小间	0.9	第四层全部手术室吊天棚漆墙面	0.9	水刷石、马赛克(钢窗)	0.9	1/3有架空层	0.55	$\frac{5.05}{0.83}$	待求(211.63)
	K_4	电视机厂装配人楼	挖孔桩(-10m)	0.6	十二层:底层4.5m顶层5.0m其它层4.0m	1	现浇水磨石	1	80%面积为大车间	0.4	30%吊天棚70%漆天棚墙面弹涂	1	全部玻璃马赛克墙板铝窗90%	1	有炉渣混凝土	1	$\frac{6}{0.98}$	待求(227.39)

$$+ 0.5/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.4/t_1 + 0.4/t_2 + 0.6/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5$$
$$+ 0.35/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_4} = 0.5/t_1 + 0.6/t_2 + 1/t_3 + 0.7/t_4 + 0.7/t_5$$
$$+ 0.6/t_6 + 0.7/t_7$$

(2) 检验典型工程“B_1”的可靠性

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.65 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.85)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$= 0.4 \vee 0.5 \vee 0.5 \vee 0.65 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.7$$
$$= 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \odot \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.65 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 0.85)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.5) \wedge (0.7 \vee 0.7)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.85 \wedge 0.5 \wedge 0.7 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.5)] = 0.65,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.4 \wedge 0.4) \vee (0.5 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.65 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.7)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.35) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.6 \vee 0.65 \vee 0.7 \vee 0.35 \vee 0.7$$
$$= 0.7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \odot \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.4 \vee 0.4) \wedge (0.5 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.6)$$

$$\wedge (0.65 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 0.7)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.35) \wedge (0.7 \vee 0.5)$$
$$= 0.4 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.8 \wedge 0.4 \wedge 0.7 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = \frac{1}{2}[0.7 + (1 - 0.4)] = 0.65,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65$ ……③

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.5 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1)$$
$$\vee (0.65 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0.7)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$= 0.4 \vee 0.5 \vee 1 \vee 0.7 \vee 0.8 \vee 0.6 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} \odot \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.4 \vee 0.5) \wedge (0.5 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 1)$$
$$\wedge (0.65 \vee 0.7) \wedge (0.8 \vee 0.7)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.6) \wedge (0.7 \vee 0.7)$$
$$= 0.5 \wedge 0.6 \wedge 1 \wedge 0.7 \wedge 0.8 \wedge 0.6 \wedge 0.7 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.5)] = 0.75 \quad \text{……①}$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.65$；　　$\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 203.26$ 元/m^2；$E_2 = 213.2$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.79$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_1} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.73}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.73}{0.88} - 1\right)\right.$$
$$\left. + 0.4\left(\frac{0.73}{0.65} - 1\right)\right] = 0.968$$

估算造价：$e^*_{B_1} = 0.968[0.75 \times 203.26 + 0.65 \times 213.2$
$$\times (1 - 0.75) + 0.65 \times 192.17(1 - 0.75)$$

$$\times(1-0.65)+\frac{1}{3}(203.26+213.2+192.17)$$
$$\times(1-0.75)(1-0.65)(1-0.65)]$$
$$=0.968[152.45+34.65+10.93+6.21]$$
$$=197.70\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\frac{197.6-197.7}{197.6}\times100\%=0.051\%<5\%$（行）

(3) 检验典型工程“B_2”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{B_1})=(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_2})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_1}=0.73$ …①

$$\underset{\sim}{T}_{B_2}\otimes\underset{\sim}{T}_{B_3}=(1\wedge0.4)\vee(1\wedge0.4)\vee(0.5\wedge0.6)$$
$$\vee(0.8\wedge0.8)\vee(0.85\wedge0.7)$$
$$\vee(0.5\wedge0.35)\vee(0.7\wedge0.7)$$
$$=0.4\vee0.4\vee0.5\vee0.8\vee0.7\vee0.35\vee0.7$$
$$\approx0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_2}\odot\underset{\sim}{T}_{B_3}=(1\vee0.4)\wedge(1\vee0.4)\wedge(0.5\vee0.6)$$
$$\wedge(0.8\vee0.8)\wedge(0.85\vee0.7)$$
$$\wedge(0.5\vee0.35)\wedge(0.7\vee0.7)$$
$$=1\wedge1\vee0.6\wedge0.8\wedge0.7\wedge0.5\wedge0.7\approx0.5$$

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{B_3})=\frac{1}{2}[0.8+(1-0.5)]=0.65$，

$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_3}=0.65$ ……②

$$\underset{\sim}{T}_{B_2}\otimes\underset{\sim}{T}_{B_4}=(1\wedge0.5)\vee(1\wedge0.6)\vee(0.5\wedge1)$$
$$\vee(0.8\wedge0.7)\vee(0.85\wedge0.7)$$
$$\vee(0.5\wedge0.6)\vee(0.7\wedge0.7)$$
$$\approx0.5\vee0.6\vee0.5\vee0.7\vee0.7\vee0.5\vee0.7$$
$$=0.7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_2} \odot \underset{\sim}{T}_{B_4} = (1 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 0.6) \wedge (0.5 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.7) \wedge (0.85 \vee 0.7) \wedge (0.5 \vee 0.6) \wedge (0.7 \vee 0.7)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.85 \wedge 0.6 \wedge 0.7 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = \frac{1}{2}[0.7 + (1 - 0.6)] = 0.55 \qquad \cdots\cdots ③$$

为此：

$\alpha_1 = 0.65$；　　$\alpha_2 = 0.65$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 192.17$ 元/m^2；$E_3 = 203.26$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.73$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.65$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.79$；

$$\lambda_{B_2} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.73} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.65} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.88}{0.79} - 1\right)\right] = 1.10$$

估算造价：$e^*_{B_2} = 1.10[0.65 \times 197.6 + 0.65 \times 192.17 \times (1 - 0.65) + 0.55 \times 203.26(1 - 0.65) \times (1 - 0.65) + \frac{1}{3}(197.6 + 192.17 + 203.26) \times (1 - 0.65)(1 - 0.65)(1 - 0.55)]$

$= 1.10[128.44 + 43.72 + 13.69 + 10.91]$

$= 216.43$ 元/m^2

精度：$\frac{216.43 - 213.2}{213.2} \times 100\% = 1.52\% < 5\%$ （行）

(4) 检验典型工程“B_3”的可靠性

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = (\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.65$,

$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$, 　　$\cdots\cdots ②$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = (\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.65,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88, \qquad \cdots\cdots①$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_{B_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_4} &= (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.4 \wedge 0.6) \vee (0.6 \wedge 1) \\ &\quad \vee (0.8 \wedge 0.7) \vee (0.7 \wedge 0.7) \\ &\quad \vee (0.35 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.7) \\ &= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.6 \vee 0.7 \vee 0.7 \vee 0.35 \vee 0.7 \\ &= 0.7\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underset{\sim}{T}_{B_3} \odot \underset{\sim}{T}_{B_4} &= (0.4 \vee 0.5) \wedge (0.4 \vee 0.6) \wedge (0.6 \vee 1) \\ &\quad \wedge (0.8 \vee 0.7) \wedge (0.7 \vee 0.7) \\ &\quad \wedge (0.35 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.7) \\ &= 0.5 \wedge 0.6 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.7 \wedge 0.6 \wedge 1 = 0.5\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = \frac{1}{2}[0.7 + (1 - 0.5)] = 0.6 \qquad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1 = 0.65$；　$\alpha_2 = 0.65$；　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 213.2$ 元/m²；$E_2 = 197.6$ 元/m²；$E_3 = 203.26$ 元/m²；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.88$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.79$；

$$\lambda_{B_3} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.88} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.65}{0.73} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.65}{0.79} - 1\right)\right] = 0.91$$

估算造价：$e^*_{B_3} = 0.91[0.65 \times 213.2 + 0.65 \times 197.6 \times (1 - 0.65) + 0.6 \times 203.26(1 - 0.65) \times (1 - 0.65) + \frac{1}{3}(213.2 + 197.6 + 203.26) \times (1 - 0.65)(1 - 0.65)(1 - 0.6)]$

$$= 0.91[138.58 + 44.95 + 14.94 + 10.03]$$
$$= 189.74 \text{ 元 /m}^2$$

精度：$\frac{189.74 - 192.17}{192.17} \times 100\% = 1.26\% < 5\%$ （行）

（5）检验典型工程“B_4”的可靠性

$(T_{B_4}, T_{B_1}) = (T_{B_1}, T_{B_4}) = 0.75$ ……①

$(T_{B_4}, T_{B_2}) = (T_{B_2}, T_{B_4}) = 0.55$ ……③

$(T_{B_4}, T_{B_3}) = (T_{B_3}, T_{B_4}) = 0.6$ ……②

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.6$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 192.17$ 元/m^2；$E_3 = 213.2$ 元/m^2；

$T_{\alpha_1} = 0.73$；　　$T_{\alpha_2} = 0.65$；　　$T_{\alpha_3} = 0.88$；

$$\lambda_{B_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.79}{0.73} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.79}{0.65} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.79}{0.88} - 1\right)\right] = 1.04$$

估算造价：$e^*_{B_4} = 1.04[0.75 \times 197.6 + 0.6 \times 192.17 \times (1 - 0.75) + 0.55 \times 213.2(1 - 0.75) \times (1 - 0.6) + \frac{1}{3}(197.6 + 192.17 + 213.2) \times (1 - 0.75)(1 - 0.6)(1 - 0.55)]$

$= 1.04[148.2 + 28.83 + 11.73 + 9.04]$

$= 205.71$ 元 /m^2

精度：$\frac{205.71 - 203.26}{203.26} \times 100\% = 1.21\% < 5\%$ （行）

3．根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-5”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_3”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.4/t_1 + 0.5/t_2 + 1/t_3 + 0.65/t_4 + 0.8/t_5 + 0.4/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_2} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.8/t_4 + 0.85/t_5 + 0.5/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.4/t_1 + 0.4/t_2 + 0.6/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5 + 0.35/t_6 + 0.7/t_7$$

$$\underset{\sim}{T}_{B_4} = 0.5/t_1 + 0.6/t_2 + 1/t_3 + 0.7/t_4 + 0.7/t_5 + 0.6/t_6 + 0.7/t_7$$

（已知典型工程）

$\underset{\sim}{T}_{K_3} = 0.65/t_1 + 0.6/t_2 + 0.55/t_3 + 0.9/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6 + 0.55/t_7$ 欲估工程

计算欲估工程“K_3”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_1} = (0.65 \wedge 0.4) \vee (0.6 \wedge 0.5) \vee (0.55 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.65) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.4) \vee (0.55 \wedge 0.7)$$

$$= 0.4 \vee 0.5 \vee 0.55 \vee 0.65 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.55$$

$$= 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \odot \underset{\sim}{T}_{B_1} = (0.65 \vee 0.4) \wedge (0.6 \vee 0.5) \wedge (0.55 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.65) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.4) \wedge (0.55 \vee 0.7)$$

$$= 0.65 \wedge 0.6 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.7$$

$$= 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_3}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.6)] = 0.6,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.65 \wedge 1) \vee (0.6 \wedge 1) \vee (0.55 \wedge 0.5) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.85)$$

$$\vee (0.9 \wedge 0.5) \vee (0.55 \wedge 0.7)$$

$$= 0.65 \vee 0.6 \vee 0.5 \vee 0.8 \vee 0.85 \vee 0.5 \vee 0.55$$

$$= 0.85$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \odot \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.65 \vee 1) \wedge (0.6 \vee 1) \wedge (0.55 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.85)$$

$$\wedge (0.9 \vee 0.5) \wedge (0.55 \vee 0.7)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.55 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.7 = 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_3}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = \frac{1}{2}[0.85 + (1 - 0.55)] = 0.65 \quad \cdots\cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.65 \wedge 0.4) \vee (0.6 \wedge 0.4) \vee (0.55$$

$$\wedge 0.6) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.7)$$

$$\vee (0.9 \wedge 0.35) \vee (0.55 \wedge 0.7)$$

$$= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.55 \vee 0.8 \vee 0.7 \vee 0.35 \vee 0.55$$

$$= 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \odot \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.65 \vee 0.4) \wedge (0.6 \vee 0.4) \wedge (0.55$$

$$\vee 0.6) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.7)$$

$$\wedge (0.9 \vee 0.35) \wedge (0.55 \vee 0.7)$$

$$= 0.65 \wedge 0.6 \wedge 0.6 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.9 \wedge 0.7$$

$$= 0.60$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_3}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.6)] = 0.6,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.65 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.6) \vee (0.55$$

$$\wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.7) \vee (0.9 \wedge 0.7)$$

$$\vee (0.9 \wedge 0.6) \vee (0.55 \wedge 0.7)$$

$$=0.5\vee0.6\vee0.55\vee0.7\vee0.7\vee0.6\vee0.55$$
$$=0.7$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_3}\odot\underset{\sim}{T}_{B_4}=(0.65\vee0.5)\wedge(0.6\vee0.6)\wedge(0.55\vee1)\wedge(0.9\vee0.7)\wedge(0.9\vee0.7)\wedge(0.9\vee0.6)\wedge(0.55\vee0.7)$$
$$=0.65\wedge0.6\wedge1\wedge0.9\wedge0.9\wedge0.9\wedge0.7$$
$$=0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_3},\underset{\sim}{T}_{B_4})=\frac{1}{2}[0.7+(1-0.6)]=0.55$$

为此：

$\alpha_1=0.65$；　　$\alpha_2=0.6$；　　$\alpha_3=0.6$

$E_1=213.2$ 元/m^2；$E_2=197.6$ 元/m^2；$E_3=192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.73$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.65$；

$$\lambda_{K_3}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.83}{0.88}-1\right)+0.8\left(\frac{0.83}{0.73}-1\right)+0.4\left(\frac{0.83}{0.65}-1\right)\right]=1.02$$

估算造价：$e^*_{K_3}=1.02[0.65\times213.2+0.6\times197.61-0.65)+0.6\times192.17(1-0.65)\times(1-0.6)+\frac{1}{3}(213.2+197.6+182.17)\times(1-0.65)(1-0.6)(1-0.6)]$

$=1.02[138.58+41.5+16.14+11.26]$

$=211.63$ 元/m^2

4. 检验欲估工程“K_3”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 211.63 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“B_1”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.75$， ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_1}, \underset{\sim}{T}_{K_3}) = (\underset{\sim}{T}_{K_3}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.6$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$； $\alpha_2 = 0.65$； $\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 203.26$ 元/m^2；$E_2 = 213.2$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.79$； $\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.88$； $\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

完全同前面已检验的“B_1”精度（行）。

(2) 检验典型工程“B_2”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{K_3}) = (\underset{\sim}{T}_{K_3}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，

$\because \underset{\sim}{T}_{K_3} = 0.83$ ……①

为此：

$\alpha_1 = 0.65$； $\alpha_2 = 0.65$； $\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 211.63$ 元/m^2；$E_2 = 197.6$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.83$； $\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.73$； $\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_2} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.83} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.73} - 1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.88}{0.65}-1\right)\Big]=1.06$$

估算造价：$e^{*}_{B_2}=1.06[0.65\times211.63+0.65\times197.6\times(1-0.65)+0.65\times192.17(1-0.65)\times(1-0.65)+\frac{1}{3}(211.63+197.6+192.17)\times(1-0.65)(1-0.65)(1-0.65)]$

$=1.06[137.56+44.95+15.30+8.60]$

$=218.79$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{218.79-213.2}{213.2}\times100\%=2.62\%<5\%$ （行）

(3) 检验典型工程“B_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\ \underset{\sim}{T}_{B_1})=0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1}=0.73$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\ \underset{\sim}{T}_{B_2})=0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2}=0.88$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\ \underset{\sim}{T}_{B_4})=0.6$，$\because T_{B_4}=0.79$

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\ \underset{\sim}{T}_{K_3})=(\underset{\sim}{T}_{K_3},\ \underset{\sim}{T}_{B_3})=0.6$，

$\because \underset{\sim}{T}_{K_3}=0.83$ ……③

为此：

$\alpha_1=0.65$；　$\alpha_2=0.65$；　$\alpha_3=0.6$

$E_1=213.2$ 元/m^2；$E_2=197.6$ 元/m^2；$E_3=211.63$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.88$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.83$；

$$\lambda_{B_3}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.88}-1\right)+0.8\left(\frac{0.65}{0.73}-1\right)+0.4\left(\frac{0.65}{0.83}-1\right)\right]=0.908$$

估算造价：$e^{*}_{B_3}=0.908[0.65\times213.2+0.65\times197.6$

$$\times(1-0.65)+0.6\times211.63(1-0.65)$$
$$\times(1-0.65)+\frac{1}{3}(213.2+197.6+211.63)$$
$$\times(1-0.65)(1-0.65)(1-0.6)]$$
$$=0.908[138.58+44.95+15.55+10.17]$$
$$=190\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\frac{190-182.17}{182.17}\times100\%=1.13\%<5\%$（行）

(4) 检验典型工程“B_4”的精度。

$(\underset{\sim}{T}_{B_4},\ \underset{\sim}{T}_{B_1})=0.75$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_4},\ \underset{\sim}{T}_{B_2})=0.55$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2}=0.88$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_4},\ \underset{\sim}{T}_{B_3})=0.6$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_4},\ \underset{\sim}{T}_{K_3})=(\underset{\sim}{T}_{K_3},\ \underset{\sim}{T}_{B_4})=0.55$，

$\because \underset{\sim}{T}_{K_3}=0.83$

为此：

$\alpha_1=0.75$；　$\alpha_2=0.6$；　$\alpha_3=0.55$

$E_1=197.6$ 元/m^2；$E_2=192.17$ 元/m^2；$E_3=213.2$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{a_1}=0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{a_2}=0.65$；　$\underset{\sim}{T}_{a_3}=0.88$；

完全同前面已检验的“B_4”精度（行）

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_3”的估算土建单方造价为211.63元/m^2是可信的。

七、实例应用“Ⅶ”

继实例应用“Ⅵ”，估算某电视机厂装配大楼框架现浇结构“K_4”工程的单方土建造价，其资料见表3-5（此资料

是80年代初搜集整理的)。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”，根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“Ⅵ”。

欲估工程：

“K_4”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 0.6 + 1 + 1 + 0.4 + 1 + 1 + 1 = 6$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} = 1 - \frac{6.1 - 6.0}{6.1} = 0.98$$

2. 根据实例应用“Ⅵ”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-5”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_4”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{B_1} &= 0.4/t_1 + 0.5/t_2 + 1/t_3 + 0.65/t_4 + 0.8/t_5 + 0.4/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_2} &= 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.8/t_4 + 0.85/t_5 + 0.5/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_3} &= 0.4/t_1 + 0.4/t_2 + 0.6/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5 + 0.35/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_4} &= 0.5/t_1 + 0.6/t_2 + 1/t_3 + 0.7/t_4 + 0.7/t_5 + 0.6/t_6 + 0.7/t_7
\end{aligned}\right\}\text{已知典型工程}$$

$\underset{\sim}{T}_{K_4} = 0.6/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.4/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6 + 1/t_7$ 欲估工程

计算欲估工程“K_4”与已知典型工程的贴近度：

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{K_4} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} &= (0.6 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 1) \\
&\quad \vee (0.4 \wedge 0.65) \vee (1 \wedge 0.8) \\
&\quad \vee (1 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.7) \\
&= 0.4 \vee 0.5 \vee 1 \vee 0.4 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.7 = 1
\end{aligned}$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \odot \underset{\sim}{T}_{B_1} = (0.6 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 1)$$
$$\times \wedge (0.4 \vee 0.65) \wedge (1 \vee 0.8)$$
$$\times \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.7)$$
$$= 0.6 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.65 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.6)] = 0.7,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.6 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.85)$$
$$\vee (1 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.7)$$
$$= 0.6 \vee 1 \vee 0.5 \vee 0.4 \vee 0.85 \vee 0.5 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \odot \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.6 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.85)$$
$$\wedge (1 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 0.7)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.6 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.7)$$
$$\vee (1 \wedge 0.35) \vee (1 \wedge 1)$$
$$= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.6 \vee 0.4 \vee 0.7 \vee 0.35 \vee 1 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \odot \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.6 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.6)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.7)$$

$$\wedge (1 \vee 0.35) \wedge (1 \vee 1)$$
$$= 0.6 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.6)] = 0.7,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.6 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1)$$
$$\vee (0.4 \wedge 0.7) \vee (1 \wedge 0.7)$$
$$\vee (1 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.7)$$
$$= 0.5 \vee 0.6 \wedge 1 \vee 0.4 \vee 0.7 \vee 0.6 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_4} \odot \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.6 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 1)$$
$$\wedge (0.4 \vee 0.7) \wedge (1 \vee 0.7)$$
$$\wedge (1 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 0.7)$$
$$= 0.6 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.7 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 0.6$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.6)] = 0.7,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_4} = 0.79 \qquad \cdots\cdots ①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.7$

$E_1 = 203.26$ 元/m^2；$E_2 = 197.6$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.79$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.73$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{K_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.98}{0.73} - 1\right)\right.$$
$$\left. + 0.4\left(\frac{0.98}{0.65} - 1\right)\right] = 1.13$$

估算造价：$e^*_{K_4} = 1.13[0.7 \times 203.26 + 0.7 \times 197.6$

$$\times(1-0.7)+0.7\times192.17(1-0.7)$$
$$\times(1-0.7)+\frac{1}{3}(203.26+197.6+192.17)$$
$$\times(1-0.7)(1-0.7)(1-0.7)]$$
$$=1.13[142.28+41.5+12.11+5.34]$$
$$=227.39\text{ 元}/\text{m}^2$$

3. 检验欲估工程“K_4”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 227.39 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“B_1”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_2})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_2}=0.88$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_3})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_3}=0.65$

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_4})=0.75$， ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{K_4})=(\underset{\sim}{T}_{K_4},\underset{\sim}{T}_{B_1})=0.7$ ……②

为此：

$\alpha_1=0.75$；　$\alpha_2=0.7$；　$\alpha_3=0.65$；

$E_1=203.26$ 元/m^2；$E_2=227.39$ 元/m^2；$E_3=213.2$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.79$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.98$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.88$；

$$\lambda_{B_1}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.73}{0.79}-1\right)+0.8\left(\frac{0.73}{0.98}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.73}{0.88}-1\right)\right]=0.94$$

估算造价：$e^*_{B_1}=0.94[0.75\times203.26+0.7\times227.39$
$$\times(1-0.75)+0.65\times213.2(1-0.75)$$
$$\times(1-0.7)+\frac{1}{3}(203.26+227.39+213.2)$$

$$\times(1-0.75)(1-0.7)(1-0.65)]$$

$$=0.94[152.45+39.79+10.39+5.63]$$

$$=195.76\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{197.6-195.63}{197.6}\times100\%=0.93\%<5\%$（行）

（2）检验典型工程“B_2”的精度。

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{B_1})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_2}=0.73$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{B_3})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_3}=0.65$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{B_4})=0.55$，

$(\underset{\sim}{T}_{B_2},\underset{\sim}{T}_{K_4})=0.6$ ……③

为此：

$\alpha_1=0.65$；　$\alpha_2=0.65$；　$\alpha_3=0.6$；

$E_1=197.6$ 元/m^2；$E_2=192.17$ 元/m^2；$E_3=227.39$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.65$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$；

$$\lambda_{B_2}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.73}-1\right)+0.8\left(\frac{0.88}{0.65}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.88}{0.98}-1\right)\right]=1.09$$

估算造价：$e^*_{B_2}=1.09[0.65\times197.6+0.65\times192.17$

$$\times(1-0.65)+0.6\times227.39(1-0.65)$$

$$\times(1-0.65)+\frac{1}{3}(197.6+192.17+227.39)$$

$$\times(1-0.65)(1-0.65)(1-0.6)]$$

$$=1.09[128.44+43.72+16.71+10.08]$$

$$=216.86\text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{216.86-213.2}{213.2}\times100\%=1.72\%<5\%$（行）

(3) 检验典型工程“B_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.6$，

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{K_4}) = (\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.7$ ……①

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.65$；　　$\alpha_3 = 0.65$；

$E_1 = 227.39$ 元/m^2；$E_2 = 213.2$ 元/m^2；$E_3 = 197.6$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.98$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.88$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.73$；

$$\lambda_{B_3} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.98} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.65}{0.88} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.65}{0.73} - 1\right)\right] = 0.88$$

估算造价：$e^*_{B_3} = 0.88[0.7 \times 227.39 + 0.65 \times 213.2 \times (1 - 0.7) + 0.65 \times 197.6(1 - 0.7) \times (1 - 0.65) + \frac{1}{3}(226.58 + 213.2 + 197.6) \times (1 - 0.7)(1 - 0.65)(1 - 0.65)]$

$= 0.88[159.17 + 41.57 + 13.49 + 7.82]$

$= 195.4$ 元/m^2

精度：$\frac{195.4 - 192.17}{192.17} \times 100\% = 1.68\% < 5\%$ （行）

(4) 检验典型工程“B_4”的精度。

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.75$， ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.55$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{K_4}) = (\underset{\sim}{T}_{K_4}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.7 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.6$；

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 227.39$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.73$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.98$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.79}{0.73} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.79}{0.98} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.79}{0.65} - 1\right)\right] = 1.01$$

估算造价：$e^*_{B_4} = 1.01[0.75 \times 197.6 + 0.7 \times 227.39 \times (1 - 0.75) + 0.6 \times 192.17(1 - 0.75) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(197.6 + 227.39 + 192.17) \times (1 - 0.75)(1 - 0.7)(1 - 0.6)]$

$= 1.01[148.2 + 39.79 + 8.65 + 6.17]$

$= 204.84$ 元/m^2

精度：$\frac{204.84 - 203.26}{203.26} \times 100\% = 0.78\% < 5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_4”的估算土建单方造价为227.39元/m^{2}是可信的。

八、实例应用“Ⅷ”

继实例应用“Ⅶ”，估算某中西结合医院门诊部大楼框架现浇结构“K_5”工程的单方土建造价，其资料见表3-6，此资料是80年代初搜集整理的。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有

框架结构对比工程模糊关系系数表 表 3-6

已估工程	工程代号	工程名称	基础 说明	t_1	层数、层高 说明	t_2	楼地面 说明	t_3	房屋开间 说明	t_4	内装饰 说明	t_5	外装饰 说明	t_6	屋面 说明	t_7	$\frac{\sum t_i}{T_i}$	土建造价 元/m²
已知典型工程	B_1	师专图书馆	独立基础(-1.5m)	0.4	三层四层 3×4.2m 四层部分有夹层	0.5	现浇水磨石	1	大房间	0.65	吊天棚普通墙面	0.8	水刷石(钢墙)	0.4	有架空层	0.7	$\frac{4.45}{0.73}$	197.60
	B_2	保险公司大楼	预制桩半地下室	1	十二层 3.3+5.1+9×3.3+4.2m	1	预制板二次浇筑层通道楼梯水磨石	0.5	底层和第八层有大间	0.8	部分吊天棚墙面均刷乳胶漆	0.85	玻璃纸皮面,水刷石(钢窗)	0.5	有架空层	0.7	$\frac{5.35}{0.88}$	213.20
	B_3	省二医院办公大楼	独立基础(-1.8m)	0.4	五层、六层均 3.6m	0.4	现浇普通楼面少量水磨石	0.6	1/3 大间 2/3 小间	0.8	普通天棚墙面 106 涂料	0.7	水刷石(木窗)	0.36	有架空层	0.7	$\frac{3.95}{0.65}$	192.17
	B_4	省交五公司化维修大楼	筏基	0.5	六层 4.75+5×3.6m	0.6	现浇,大部分水磨石及缸砖	1	大小间都有	0.7	普通天棚墙面刷胶	0.7	水刷石噩假石(钢窗)	0.6	有架空层	0.7	$\frac{4.80}{0.79}$	203.26
欲估工程	K_5	中西结合医院门诊部	箱基(-5.55)	0.55	地上十层,地下一层:5.55m+4.2+8×3.3m+4.2m	0.95	现浇,大部水磨石,其它涂聚苯乙烯	1	有剪力墙,内墙轻质板,底层大间其它少量大间	1	少量吊天棚,墙面均刷涂料二度,全漆台度	0.9	三面玻璃马赛克,一面水刷石,(铝钢窗 65%)	0.95	石棉沥青防水涂料,红砖架空层	0.75	$\frac{6.10}{1}$	待求 (229.70)
	K_6	市少年宫活动楼	预制桩基(较深)	1	八层局部九层(层高 3.6)	0.85	现浇水磨石地面	1	内廊,大小活动间	0.8	普通天棚,墙面涂料油漆墙裙	0.7	瓷砖贴面	1	有架空层	0.7	$\frac{6.05}{0.99}$	待求 (226.08)

关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“Ⅵ”。

欲估工程：

“K_5”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 0.55 + 0.95 + 1 + 1 + 0.9 + 0.95 + 0.75$

$= 6.1$

$\underset{\sim}{T}_{K5} = \frac{6.1}{6.1} = 1$

2. 根据实例应用“Ⅵ”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表 3-6”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_5”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$\underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.4/t_1 + 0.5/t_2 + 1/t_3 + 0.65/t_4 + 0.8/t_5 + 0.4/t_6 + 0.7/t_7$

$\underset{\sim}{T}_{B_2} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.8/t_4 + 0.85/t_5 + 0.5/t_6 + 0.7/t_7$

$\underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.4/t_1 + 0.4/t_2 + 0.6/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5 + 0.35/t_6 + 0.7/t_7$

$\underset{\sim}{T}_{B_4} = 0.5/t_1 + 0.6/t_2 + 1/t_3 + 0.7/t_4 + 0.7/t_5 + 0.6/t_6 + 0.7/t_7$

（已知典型工程）

$\underset{\sim}{T}_{K_5} = 0.55/t_1 + 0.95/t_2 + 1/t_3 + 1/t_4 + 0.9/t_5 + 0.95/t_6 + 0.75/t_7$

（欲估工程）

计算欲估工程“K_5”与已知典型工程的贴近度：

$\underset{\sim}{T}_{K_5} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_1} = (0.55 \wedge 0.4) \vee (0.95 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 1)$

$\vee (1 \wedge 0.65) \vee (0.9 \wedge 0.8)$

$\vee (0.95 \wedge 0.4) \vee (0.75 \wedge 0.7)$

$= 0.55 \vee 0.5 \vee 1 \vee 0.65 \vee 0.8 \vee 0.4 \vee 0.7 = 1$

$\underset{\sim}{T}_{K_5} \odot \underset{\sim}{T}_{B_1} = (0.55 \vee 0.4) \wedge (0.95 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 1)$

$$\wedge (1 \vee 0.65) \wedge (0.9 \vee 0.8)$$
$$\wedge (0.95 \vee 0.4) \wedge (0.75 \vee 0.7)$$
$$= 0.55 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.95 \wedge 0.75$$
$$= 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.55)] = 0.73,$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.55 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.5)$$
$$\vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.85)$$
$$\vee (0.95 \wedge 0.5) \vee (0.75 \wedge 0.7)$$
$$= 0.55 \vee 0.95 \vee 0.5 \vee 0.8 \vee 0.85 \vee 0.5 \vee 0.7$$
$$= 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \odot \underset{\sim}{T}_{B_2} = (0.55 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.5)$$
$$\wedge (1 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.85)$$
$$\wedge (0.95 \vee 0.5) \wedge (0.75 \vee 0.7)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.95 \wedge 0.75 = 0.75$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.75)] = 0.6$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.55 \wedge 0.4) \vee (0.95 \wedge 0.4) \vee (1$$
$$\wedge 0.6) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.7)$$
$$\vee (0.95 \wedge 0.35) \vee (0.75 \wedge 0.7)$$
$$= 0.4 \vee 0.4 \vee 0.6 \vee 0.8 \vee 0.7 \vee 0.35 \vee 0.7$$
$$= 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \odot \underset{\sim}{T}_{B_3} = (0.55 \vee 0.4) \wedge (0.95 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.6$$
$$\wedge (1 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.7)$$

$$\wedge (0.95 \vee 0.35) \wedge (0.75 \vee 0.7)$$
$$= 0.55 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.95 \wedge 0.75$$
$$= 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.55)] = 0.63 \quad \cdots\cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.55 \wedge 0.5) \vee (0.95 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1)$$
$$\vee (1 \wedge 0.7) \vee (0.9 \wedge 0.7)$$
$$\vee (0.95 \wedge 0.6) \vee (0.75 \wedge 0.7)$$
$$= 0.5 \vee 0.6 \vee 1 \vee 0.7 \vee 0.7 \vee 0.6 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_5} \odot \underset{\sim}{T}_{B_4} = (0.55 \vee 0.5) \wedge (0.95 \vee 0.6) \wedge (1 \vee 1)$$
$$\wedge (1 \vee 0.7) \wedge (0.9 \vee 0.7)$$
$$\wedge (0.95 \vee 0.6) \wedge (0.75 \vee 0.7)$$
$$= 0.55 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.95 \wedge 0.75$$
$$= 0.55$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.55)] = 0.73。$$

$$\because \underset{\sim}{T}_{B_4} = 0.79 \quad \cdots\cdots ①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.73$；　$\alpha_2 = 0.73$；　$\alpha_3 = 0.63$

$E_1 = 203.26$ 元/m^2；$E_2 = 197.6$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.79$；　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{a_3} = 0.65$；

$$\lambda_{K_5} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{1}{0.79} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.73} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.65} - 1\right)\right] = 1.14$$

估算造价：$e^*_{K_5} = 1.14[0.73 \times 203.26 + 0.73 \times 197.6$

$$\times(1-0.73)+0.63\times192.17(1-0.73)$$
$$\times(1-0.73)+\frac{1}{3}(203.26+197.6+192.17)$$
$$\times(1-0.73)(1-0.73)(1-0.63)]$$
$$=1.14[148.38+38.95+8.83+5.33]$$
$$=229.70\text{ 元}/\text{m}^2$$

3. 检验欲估工程“K_5”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 229.7 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“B_1”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_2})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_2}=0.88$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_3})=0.65$，$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_3}=0.65$

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{B_4})=0.75$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_1},\underset{\sim}{T}_{K_5})=(\underset{\sim}{T}_{K_5},\underset{\sim}{T}_{B_1})=0.73$ ……②

为此：

$\alpha_1=0.75$；　$\alpha_2=0.73$；　$\alpha_3=0.65$

$E_1=203.26$ 元/m^2；$E_2=229.7$ 元/m^2；$E_3=213.2$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.79$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=1$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.88$；

$$\lambda_{B_1}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.73}{0.79}-1\right)+0.8\left(\frac{0.73}{1}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.73}{0.88}-1\right)\right]=0.94$$

估算造价：$e^*_{B_1}=0.94[0.75\times203.26+0.73\times229.7$
$$\times(1-0.75)+0.65\times213.2(1-0.75)$$
$$\times(1-0.73)+\frac{1}{3}(203.26+229.7+213.2)$$

$$\times (1-0.75)(1-0.73)(1-0.65)]$$

$$= 0.94[152.45 + 41.92 + 9.35 + 6.54]$$

$$= 197.64 \text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{197.64-197.6}{197.6} \times 100\% = 0.022\% < 5\%$（行）

(2) 检验典型工程“B_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{K_5}) = (\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.6$ ……③

为此：

$\alpha_1 = 0.65$；　$\alpha_2 = 0.65$；　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 192.17$ 元/m^2；$E_3 = 229.7$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.65$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$；

$$\lambda_{B_1} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.73}-1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.65}-1\right) + 0.4\left(\frac{0.88}{1}-1\right)\right] = 1.09$$

估算造价：$e^*_{B_2} = 1.09[0.65 \times 197.6 + 0.65 \times 192.17 \times (1-0.65) + 0.6 \times 229.7(1-0.65) \times (1-0.65) + \frac{1}{3}(197.6 + 192.17 + 229.7) \times (1-0.65)(1-0.65)(1-0.6)]$

$$= 1.09[128.44 + 43.72 + 16.88 + 10.12]$$

$$= 217.08 \text{ 元}/\text{m}^2$$

精度：$\dfrac{217.08-213.2}{213.2} \times 100\% = 1.82\% < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“B_3”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.6$

$(\underset{\sim}{T}_{B_3}, \underset{\sim}{T}_{K_5}) = (\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.63$ ……③

为此：

$\alpha_1 = 0.65$；　$\alpha_2 = 0.65$；　$\alpha_3 = 0.63$

$E_1 = 213.2$ 元/m^2；$E_2 = 197.6$ 元/m^2；$E_3 = 229.7$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.88$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$；

$$\lambda_{B_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.88} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.65}{0.73} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.65}{1} - 1\right)\right] = 0.9$$

估算造价：$e^*_{B_3} = 0.9[0.65 \times 213.2 + 0.65 \times 197.6 \times (1 - 0.65) + 0.63 \times 229.7(1 - 0.65) \times (1 - 0.65) + \frac{1}{3}(213.2 + 197.6 + 229.7) \times (1 - 0.65)(1 - 0.65)(1 - 0.63)]$

$= 0.9[138.58 + 44.95 + 17.73 + 9.68]$

$= 189.85$ 元/m^2

精度：$\frac{192.17 - 189.85}{192.17} \times 100\% = 1.21\% < 5\%$（行）

(4) 检验典型工程“B_4”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.75$， ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.55$，

$$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{K_5}) = (\underset{\sim}{T}_{K_5}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.73 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.73$；　　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 229.7$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.73$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.79}{0.73} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.79}{1} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.79}{0.65} - 1\right)\right] = 1.01$$

估算造价：$e^*_{B_4} = 1.1[0.75 \times 197.6 + 0.73 \times 229.7 \times (1 - 0.75) + 0.6 \times 192.2(1 - 0.75) \times (1 - 0.73) + \frac{1}{3}(197.6 + 229.7 + 192.17) \times (1 - 0.75)(1 - 0.73)(1 - 0.6)]$

$= 1.01[148.2 + 41.92 + 7.78 + 5.58]$

$= 205.51$ 元/m^2

精度：$\frac{205.51 - 203.26}{203.26} \times 100\% = 1.11\% < 5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_5”的估算土建单方造价为229.7元/m^{2}是可信的。

九、实例应用“Ⅸ”。

继实例应用“Ⅶ”，估算某市少年宫活动楼框架现浇结构“K_6”工程的单方土建造价，其资料见表3-6（此资料是80年代初搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有

关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“Ⅵ”。

欲估工程：

“K_6”工程：$\sum_1^m t_j = 1 + 0.85 + 1 + 0.8 + 0.7 + 1 + 0.7$

$= 6.05$

$\sum_1^m t_j = 6.1$ 为最大；见实例应用“Ⅶ”，因它们都应用同一个资料。故：

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} = 1 - \frac{6.1 - 6.05}{6.1} = 0.99$$

2. 根据实例应用“Ⅶ”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表 3-6”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_6”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{B_1} &= 0.4/t_1 + 0.5/t_2 + 1/t_3 + 0.65/t_4 + 0.8/t_5 + 0.4/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_2} &= 1/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.8/t_4 + 0.85/t_5 + 0.5/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_3} &= 0.4/t_1 + 0.4/t_2 + 0.6/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5 + 0.35/t_6 + 0.7/t_7 \\
\underset{\sim}{T}_{B_4} &= 0.5/t_1 + 0.6/t_2 + 1/t_3 + 0.7/t_4 + 0.7/t_4 + 0.6/t_6 + 0.7/t_7
\end{aligned}\right\} \text{已知典型工程}$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} = 1/t_1 + 0.85/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 0.7/t_5 + 1/t_6 + 0.7/t_7$$

欲估工程

计算欲估工程“K_6”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_1} = (1 \wedge 0.4) \vee (0.85 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.65) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$

$$\vee (1 \wedge 0.4) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$= 0.4 \vee 0.5 \vee 1 \vee 0.65 \vee 0.7 \vee 0.4 \vee 0.7$$
$$= 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} \odot \underset{\sim}{T}_{B_1} = (1 \vee 0.4) \wedge (0.85 \vee 0.5) \wedge (1 \vee 1)$$
$$\wedge (0.8 \vee 0.65) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$
$$\wedge (1 \vee 0.4) \wedge (0.7 \vee 0.7)$$
$$= 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 0.7 = 0.7$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_6}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.7)] = 0.65,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……③

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_2} = (1 \wedge 1) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.85)$$
$$\vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$= 1 \vee 0.85 \vee 0.5 \vee 0.8 \vee 0.7 \vee 0.5 \vee 0.7$$
$$= 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} \odot \underset{\sim}{T}_{B_2} = (1 \vee 1) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.8 \vee 0.8) \wedge (0.7 \vee 0.85)$$
$$\wedge (1 \vee 0.5) \wedge (0.7 \vee 0.7)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.85 \wedge 1 \wedge 0.7 = 0.7$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_6}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.7)] = 0.65,$$

$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$ ……①

$$\underset{\sim}{T}_{K_6} \otimes \underset{\sim}{T}_{B_3} = (1 \wedge 0.4) \vee (0.85 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.6)$$
$$\vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$
$$\vee (1 \wedge 0.35) \vee (0.7 \wedge 0.7)$$

$$=0.4\vee0.4\vee0.6\vee0.8\vee0.7\vee0.35\vee0.7$$
$$=0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6}\odot\underset{\sim}{T}_{B_3}=(1\vee0.4)\wedge(0.85\vee0.4)\wedge(1\vee0.6)\wedge(0.8\vee0.8)\wedge(0.7\vee0.7)\wedge(1\vee0.35)\wedge(0.7\vee0.7)$$
$$=1\wedge0.85\wedge1\wedge0.8\wedge0.7\wedge1\wedge0.7=0.7$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_6},\underset{\sim}{T}_{B_3})=\frac{1}{2}[0.8+(1-0.7)]=0.55$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6}\otimes\underset{\sim}{T}_{B_4}=(1\wedge0.5)\vee(0.85\wedge0.6)\vee(1\wedge1)\vee(0.8\wedge0.7)\vee(0.7\wedge0.7)\vee(1\wedge0.6)\vee(0.7\wedge0.7)$$
$$=0.5\vee0.6\vee1\vee0.7\vee0.7\vee0.6\vee0.7$$
$$=1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_6}\odot\underset{\sim}{T}_{B_4}=(1\vee0.5)\wedge(0.85\vee0.6)\wedge(1\vee1)\wedge(0.8\vee0.7)\wedge(0.7\vee0.7)\wedge(1\vee0.6)\wedge(0.7\vee0.7)$$
$$=1\wedge0.85\wedge1\wedge0.8\wedge0.7\wedge1\wedge0.7=0.7$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_6},\underset{\sim}{T}_{B_4})=\frac{1}{2}[1+(1-0.7)]=0.65,$$

$\because\ \underset{\sim}{T}_{B_4}=0.79$ ……②

为此：

$\alpha_1=0.65$；　$\alpha_2=0.65$；　$\alpha_3=0.65$

$E_1=213.2$ 元/m²；$E_2=203.26$ 元/m²；$E_3=197.6$ 元/m²；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.88$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.79$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.73$；

$$\lambda_{K_6}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.99}{0.88}-1\right)+0.8\left(\frac{0.99}{0.79}-1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.99}{0.73}-1\right)\Big]=1.08$$

估算造价：$e^{*}_{K_6}=1.08[0.65\times213.2+0.65\times203.26\times(1-0.65)+0.65\times197.6(1-0.65)\times(1-0.65)+\frac{1}{3}(213.2+203.26+197.6)\times(1-0.65)(1-0.65)(1-0.65)]$

$=1.08[138.58+46.24+15.73+8.78]$

$=226.08$ 元 $/m^2$

3. 检验欲估工程“K_6”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 226.08 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“B_1”的精度

$(T_{B_3},T_{B_2})=0.65$，$\because T_{B_2}=0.88$ ……③

$(T_{B_1},T_{B_3})=0.65$，$\because T_{B_3}=0.65$

$(T_{B_1},T_{B_4})=0.75$ ……①

$(T_{B_1},T_{K_6})=(T_{K_6},T_{B_1})=0.65$，

$\because T_{K_6}=0.99$ ……②

为此：

$\alpha_1=0.75$；　$\alpha_2=0.65$；　$\alpha_3=0.65$

$E_1=203.26$ 元/m^2；$E_2=226.08$ 元/m^2；$E_3=213.2$ 元/m^2；

$T_{\alpha_1}=0.79$；　$T_{\alpha_2}=0.99$；　$T_{\alpha_3}=0.88$；

$$\lambda_{B_1}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.73}{0.79}-1\right)+0.8\left(\frac{0.73}{0.99}-1\right)+0.4\left(\frac{0.73}{0.88}-1\right)\right]=0.94$$

估算造价：$e^*_{B_1} = 0.94[0.75 \times 203.26 + 0.65 \times 226.08$
$\times (1-0.75) + 0.65 \times 213.2(1-0.75)$
$\times (1-0.65) + \frac{1}{3}(203.26 + 226.08 + 213.2)$
$\times (1-0.75)(1-0.65)(1-0.65)]$
$= 0.94[152.45 + 36.74 + 12.13 + 6.56]$
$= 195.41$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{195.41 - 197.6}{197.6} \times 100\% = 1.1\% < 5\%$（行）

(2) 检验典型工程“B_2”的精度：

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_3} = 0.65$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{B_2}, \underset{\sim}{T}_{K_6}) = (\underset{\sim}{T}_{K_6}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，

$\because \underset{\sim}{T}_{K_6} = 0.99$ ……①

为此：

$\alpha_1 = 0.65$；　$\alpha_2 = 0.65$；　$\alpha_3 = 0.65$

$E_1 = 226.08$ 元/m^2；$E_2 = 197.6$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.99$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_2} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.88}{0.99} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.88}{0.73} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.88}{0.65} - 1\right)\right] = 1.015$$

估算造价：$e^*_{B_2} = 1.015[0.65 \times 226.08 + 0.65 \times 197.6$
$\times (1-0.65) + 0.65 \times 192.17(1-0.65)$

$$\times (1-0.65)+\frac{1}{3}(226.08+197.6+192.17)$$
$$\times (1-0.65)(1-0.65)(1-0.65)]$$
$$=1.015[146.95+44.95+15.30+8.80]$$
$$=219.24\ 元/m^2$$

精度：$\frac{219.24-213.2}{213.2}\times 100\% = 2.83\% < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“B_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_1} = 0.73$ ……②

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.65$，$\because \underset{\sim}{T}_{B_2} = 0.88$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.6$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_3},\underset{\sim}{T}_{K_6}) = (\underset{\sim}{T}_{K_6},\underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.55$，

为此：

$\alpha_1=0.65$；　$\alpha_2=0.65$；　$\alpha_3=0.6$

$E_1=213.2$ 元/m^2；$E_2=197.6$ 元/m^2；$E_3=203.26$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.88$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.79$；

$$\lambda_{B_3}=1+\frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.88}-1\right)+0.8\left(\frac{0.65}{0.73}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.65}{0.79}-1\right)\right]=0.91$$

估算造价：$e^*_{B_3}=0.91[0.65\times 213.2+0.65\times 197.6$
$$\times (1-0.65)+0.6\times 203.26(1-0.65)$$
$$\times (1-0.65)+\frac{1}{3}(213.2+197.6+203.26)$$
$$\times (1-0.65)(1-0.65)(1-0.6)]$$
$$=0.91[138.58+44.95+14.94+10.03]$$

$= 189.74$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{192.17-189.74}{192.17}\times 100\% = 1.26\% < 5\%$（行）

(4) 检验典型工程“B_4”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_1}) = 0.75$ ……①

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_2}) = 0.55$

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{B_3}) = 0.6$ ……③

$(\underset{\sim}{T}_{B_4}, \underset{\sim}{T}_{K_6}) = (\underset{\sim}{T}_{K_6}, \underset{\sim}{T}_{B_4}) = 0.65$ ……②

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　$\alpha_2 = 0.65$；　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 197.6$ 元/m^2；$E_2 = 226.08$ 元/m^2；$E_3 = 192.17$ 元/m^2；

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.99$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.65$；

$$\lambda_{B_4} = 1 + \frac{1}{7}\left[1.8\left(\frac{0.79}{0.73}-1\right)+0.8\left(\frac{0.79}{0.99}-1\right)+0.4\left(\frac{0.79}{0.65}-1\right)\right] = 1.01$$

估算造价：$e^*_{B_4} = 1.01[0.75\times 197.6 + 0.65\times 226.08\times(1-0.75) + 0.6\times 192.17(1-0.75)\times(1-0.65) + \frac{1}{3}(197.6+226.08+192.17)\times(1-0.75)(1-0.65)(1-0.6)]$

$= 1.01[148.2 + 36.74 + 10.09 + 7.18]$

$= 204.23$ 元 $/m^2$

精度：$\frac{204.23-203.26}{203.26}\times 100\% = 0.48\% < 5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在

±5%范围内，故欲估工程“K_6”的估算土建单方造价为226.08元/m^2是可信的。

十、实例应用“X”

估算某文化宫办公兼活动大楼现浇钢筋混凝土框架结构“K_7”工程的单方土建造价，其资料见表3-7（此资料是80年代搜集整理的）。

1. 选择四个同类型结构的已建典型工程“C_1”、“C_2”、“C_3”、“C_4”。并根据工程具体情况划分为六个元素（即分部分项工程）进行同类对比，对欲估工程“K_7”根据图纸资料亦相应列出。

2. 参照“工程项目单方直接费统计表3-1”结合工程具体情况初步主观赋予各元素的隶属度值（t_j）并算出$\sum_1^m t_j$，定$\sum_1^m t_j$值最大的为1，其他各工程的模糊集合$\underset{\sim}{T_i}$值的大小，与最大值1相比在闭区间［0，1］中取值。

已知典型工程：

“C_1”工程：$\sum_1^m t_j = 1+1+1+0.8+1+1 = 5.80$

“C_2”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9+0.4+0.5+1+0.8+0.8 = 4.40$

“C_3”工程：$\sum_1^m t_j = 0.8+0.3-0.5+0.7+0.9+0.9 = 4.10$

“C_4”工程：$\sum_1^m t_j = 0.95+1+1+0.95+1+0.8 = 5.70$

欲估工程：

“K_7”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9+1+1+0.85+0.95-0.8$

框架结构对比工程模糊关系系数表　　表 3-7

已估工程	工程代号	工程名称	结构特征		基础处理		外墙装饰		层数与层高		房间组合		楼地面		$\frac{\sum t_i}{T_c}$	土建造价元/m²
			说明	t_1	说明	t_2	说明	t_3	说明	t_4	说明	t_5	说明	t_6		
已知典型工程	C_1	省科技活动中心招待所	现浇框架预制楼板半地下室	1	预制钢筋混凝土桩基础、较深	1	瓷砖贴面	1	8层(层高3.6m)	0.8	外廊小房间	1	水磨石缸砖、马赛克楼地面	1	$\frac{5.8}{1}$	294.21
	C_2	某图书馆	现浇框架预制楼板	0.9	独立钢筋混凝土柱基	0.4	水刷石	0.5	12层(层高2.7m,局部4层(层高5.4m)	1	12层为书库,4层为阅览室	0.8	水磨石楼地面	0.8	$\frac{4.4}{0.76}$	244.43
	C_3	某生物楼	现浇框架局部砖混预制楼板	0.8	独立钢筋混凝土柱基,局部条基	0.3	白色干粘石	0.5	7层局部9层(层高3.6m)	0.7	内廊、教室及实验室	0.9	水磨石及马赛克楼地面	0.9	$\frac{4.1}{0.71}$	240.07
	C_4	某宾馆	现浇框架,预制与现浇楼板各半	0.95	地梁、满堂钢筋混凝土基础	1	瓷砖贴面	1	两边10层中间13层(层高3.3m)	0.95	内外廊,小房间	1	水磨石楼地面	0.8	$\frac{5.7}{0.98}$	286.16
欲估工程	K_7	某文化宫办公兼活动楼	现浇框架预制楼板	0.9	预制钢筋混凝土桩基、较深	1	瓷砖贴面	1	9层电梯间10层(层高3.6m)	0.85	内廊、大小活动间	0.95	水磨石楼地面	0.8	$\frac{5.5}{0.95}$	待求(283.34)
	K_8	某物理楼	现浇框架现浇楼板	1	独立钢筋混凝土柱基	0.4	洗石子	0.5	8层都分6层(层高3.6m)	0.75	内廊、实验室	0.9	水磨石及马赛克楼地面	0.9	$\frac{4.45}{0.77}$	待求(245.85)

续表

已估工程	工程代号	工程名称	结构特征		基础处理		外墙装饰		层数与层高		房间组合		楼地面		$\frac{\sum t_i}{T_i}$	土建造价 元/m²
			说明	t_1	说明	t_2	说明	t_3	说明	t_4	说明	t_5	说明	t_6		
欲知工程	K_9	电子技术服务大楼	现浇钢筋混凝土框架预制楼板	0.9	地梁满堂钢筋混凝土基础	1	洗石子	0.5	6层(层高3.3m)	0.6	一楼服务大厅,以上设内廊及大小房间	0.95	水泥及水磨石楼地面	0.7	$\frac{4.65}{0.80}$	待求 (251.68)
	K_{10}	某企管楼	现浇框架局部砖混预制楼板	0.8	钢筋混凝土独立柱基及局部条基	0.3	洗石子	0.5	4层、局部3层(层高3.3m)	0.4	外廊,4层为招待所,3层为教室	0.9	水磨石楼地面	0.8	$\frac{3.70}{0.64}$	待求 (225.98)
	K_{11}	某烟厂车间	现浇框架预制楼板	0.9	钢筋混凝土预制桩基	1	水泥砂浆粉刷	0.3	5层(层高4.5m)	0.55	大间少许设小间	0.8	水泥及水磨石楼地面	0.7	$\frac{4.25}{0.73}$	待求 (241.10)
	K_{12}	制药厂大输液车间	现浇框架现浇楼板	1	箱形基础	1	水泥砂浆粉刷	0.3	3层(层高4.5m)	0.35	局部内廊、设大小车间	0.95	水泥及水磨石楼地面	0.7	$\frac{4.30}{0.74}$	待求 (241.91)
	K_{13}	工艺美术馆展览大楼	现浇框架预制楼板	0.9	钢筋混凝土独立柱基	0.4	水刷石	0.5	3层(层高4.5m)	0.35	门厅及展厅少许小间	0.8	水磨石楼地面	0.8	$\frac{3.75}{0.65}$	待求 (227.02)
	K_{14}															

$$= 5.50$$

$\sum_{1}^{m} t_j = 5.8$ 为最大，故

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2} = 1 - \frac{5.8 - 4.4}{5.8} = 0.76$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_3} = 1 - \frac{5.8 - 4.1}{5.8} = 0.71$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_4} = 1 - \frac{5.8 - 5.7}{5.8} = 0.98$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_7} = 1 - \frac{5.8 - 5.5}{5.8} = 0.95$$

从而初步建立同类结构“对比工程模糊关系系数表3-7”。

3. 检验“对比工程模糊关系系数表3-7”，最后确定其隶属度值。

(1) 列出各典型工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_3} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_4} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6$$

(2) 检验典型工程“C_1”的可靠性

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.8 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.8)$$

$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.8 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \odot \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.5) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.8)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 = 1$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 1)] = 0.45 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.7) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.9)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.7 \vee 0.9 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.5) \wedge (0.8 \vee 0.7) \wedge (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.9)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (1 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.8)$$

$$= 0.95 \vee 1 \vee 1 \vee 0.80 \vee 1 \vee 0.8 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (1 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 0.8)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 1 = 0.95$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.95)] = 0.53 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.55$；　　$\alpha_2 = 0.53$；　　$\alpha_3 = 0.45$

$E_1=240.07$ 元/m²；$E_2=286.16$ 元/m²；$E_3=244.43$ 元/m²

$T_{a_1}=0.71$；　　$T_{a_2}=0.98$；　　$T_{a_3}=0.76$

$$\lambda_{C_1}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.71}-1\right)+0.8\left(\frac{1}{0.98}-1\right)+0.4\left(\frac{1}{0.76}-1\right)\right]=1.15$$

估算造价：$e^*_{C_1}=1.15\ [0.55\times240.07+0.53\times286.16\times(1-0.55)+0.45\times244.43\times(1-0.55)(1-0.53)+\frac{1}{3}\times(240.07+286.16+244.43)\times(1-0.55)(1-0.53)(1-0.45)]$

$=1.15\ [132.04+68.25+23.26+29.88]=1.15\times253.43$

$=291.45$ 元/m²

精度：$\frac{294.21-291.45}{294.21}\times100\%=0.94\%<5\%$（行）。

（3）检验典型工程“C_2”的可靠性

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_1})=(\underset{\sim}{T}_{C_1},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.45 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2}\otimes\underset{\sim}{T}_{C_3}=(0.9\wedge0.8)\vee(0.4\wedge0.3)\vee(0.5\wedge0.5)\vee(1\wedge0.7)\vee(0.8\wedge0.9)\vee(0.8\wedge0.9)$$

$$=0.8\vee0.3\vee0.5\vee0.7\vee0.8\vee0.8=0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2}\odot\underset{\sim}{T}_{C_3}=(0.9\vee0.8)\wedge(0.4\vee0.3)\wedge(0.5\vee0.5)\wedge(1\vee0.7)\wedge(0.8\vee0.9)\wedge(0.8\vee0.9)$$

$$=0.9\wedge0.4\wedge0.5\wedge1\wedge0.9\wedge0.9=0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_3})=\frac{1}{2}[0.8+(1-0.4)]=0.7 \qquad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \wedge 0.95) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$\vee (1 \wedge 0.95) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$

$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.95 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \vee 0.95) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$\wedge (1 \vee 0.95) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$

$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.8)] = 0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.58$；　　$\alpha_3 = 0.45$

$E_1 = 240.07$ 元/m^2；$E_2 = 286.16$ 元/m^2；　$E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.98$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{C_2} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.71} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.76}{0.98} - 1\right)\right.$$

$$\left. + 0.4\left(\frac{0.76}{1} - 1\right)\right] = 0.976$$

估算造价：$e^*_{C_2} = 0.976\ [0.7 \times 240.07 + 0.58 \times 286.16$

$$\times\ (1 - 0.7)\ + 0.45 \times 294.21\ (1 - 0.7)$$

$$\times\ (1 - 0.58)\ + \frac{1}{3}\ (240.07 + 286.16$$

$$+ 294.21)\ (1 - 0.7)\ (1 - 0.58)\ (1 - 0.45)]$$

$$= 0.976\ [168.05 + 47.22 + 17.87 + 20.31]$$

$$= 0.976 \times 253.45 = 247.11 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{247.11 - 244.43}{244.43} \times 100\% = 1.1\% < 5\%$（行）

（4）检验典型工程“C_3”的可靠性

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = (\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.55 \quad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = (\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.7 \quad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_3} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.8 \wedge 0.95) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8)$$
$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.7 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_3} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.8 \vee 0.95) \wedge (0.3 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.8)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.9)] = 0.5 \quad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　$\alpha_2 = 0.55$；　$\alpha_3 = 0.5$

$E_1 = 244.43$ 元/m²；　$E_2 = 294.21$ 元/m²；　$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.76$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{C_3} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.71}{1} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.71}{0.98} - 1\right)\right] = 0.923$$

估算造价：$e^*_{C_3} = 0.923\ [0.7 \times 244.43 + 0.55 \times 294.21 \times (1-0.7) + 0.5 \times 286.16\ (1-0.7) \times (1-0.55) + \frac{1}{3}\ (244.43 + 294.21 \times +286.16)\ (1-0.7)\ (1-0.55)\ (1-0.5)]$

$= 0.923\ [171.1 + 48.54 + 19.31 + 18.56]$

$= 0.923 \times 257.51 = 237.68$ 元/m²

精度：$\frac{240.07-237.68}{240.07}\times 100\%=0.99\%<5\%$（行）

（5）检验典型工程“C_4”的可靠性

$$(T_{C_4},T_{C_1})=(T_{C_1},T_{C_4})=0.53 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(T_{C_4},T_{C_2})=(T_{C_2},T_{C_4})=0.58 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(T_{C_4},T_{C_3})=(T_{C_3},T_{C_4})=0.5 \qquad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1=0.58$；　　$\alpha_2=0.53$；　　$\alpha_3=0.5$

$E_1=244.43$ 元/m^2；$E_2=294.21$ 元/m^2；$E_3=240.07$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}}=1$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}}=0.71$

$$\lambda_{C_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{1}-1\right)+0.4\left(\frac{0.98}{0.71}-1\right)\right]=1.11$$

估算造价：$e^*_{C_4}=1.11\ [0.58\times 244.43+0.53\times 294.21\times(1-0.58)+0.5\times 240.07\ (1-0.58)\times(1-0.53)+\frac{1}{3}\ (244.43+294.21+240.07)\ (1-0.58)\ (1-0.53)\ (1-0.5)]$

$=1.11\ [141.77+65.49+23.70+25.62]$

$=1.11\times 256.58=284.86$ 元/m^2

精度：$\frac{286.16-284.86}{286.16}\times 100\%=0.48\%<5\%$（行）

4. 根据所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_7”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\underset{\sim}{T_{C_1}} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_2}} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_3}} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_4}} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6$$

已知典型工程

$$\underset{\sim}{T_{K_7}} = 0.9/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.85/t_4 + 0.95/t_5 + 0.8/t_6$$

欲估工程

计算欲估工程“K_7”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T_{K_7}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_1}} = (0.9 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.85 \wedge 0.8) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1)$$
$$= 0.9 \vee 1 \vee 1 \vee 0.80 \vee 0.95 \vee 0.8 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_{K_7}} \odot \underset{\sim}{T_{C_1}} = (0.9 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.85 \vee 0.8) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.85 \wedge 1 \wedge 1 = 0.85$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_7}}, \underset{\sim}{T_{C_1}}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.85)] = 0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

$$\underset{\sim}{T_{K_7}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.85 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.85 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_{K_7}} \odot \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (1 \vee 0.5) \wedge (0.85 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$
$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_7}}, \underset{\sim}{T_{C_2}}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55 \qquad \cdots\cdots③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_7} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.9 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.85 \wedge 0.7) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.9)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.7 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_7} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.9 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (1 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.85 \vee 0.7) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 0.9)$$

$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.85 \wedge 0.95 \wedge 0.9 = 0.85$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_7}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.85)] = 0.53$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_7} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1)$$

$$\vee (0.85 \wedge 0.95) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$

$$= 0.9 \vee 1 \vee 1 \vee 0.85 \vee 0.95 \vee 0.8 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_7} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1)$$

$$\wedge (0.85 \vee 0.95) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$

$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_7}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.6$；　　$\alpha_2 = 0.58$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 286.16$ 元/m^2；$E_2 = 294.21$ 元/m^2；$E_3 = 244.43$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.98$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.76$

$$\lambda_{K_7} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.95}{0.98} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.95}{1} - 1\right)\right.$$

$$\left. + 0.4\left(\frac{0.95}{0.76} - 1\right)\right] = 1$$

估算造价：$e^*_{K_7}=1\ [0.6\times286.16+0.58\times294.21\ (1-0.6)$
$+0.55\times244.43\ (1-0.6)\ (1-0.58)$
$+\frac{1}{3}\ (286.16+294.21+244.43)\ (1-0.6)$
$(1-0.58)\ (1-0.55)]\ =1\ [171.7+68.26$
$+22.59+20.79]\ =1\times283.34$
$=283.34$ 元/m^2

5. 检验欲估工程“K_7”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 283.34 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_2}})=0.45$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_3}})=0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_4}})=0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{K_7}})=(\underset{\sim}{T_{K_7}},\underset{\sim}{T_{C_1}})=0.58 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1=0.58$；　　$\alpha_2=0.55$；　　$\alpha_3=0.53$

$E_1=283.34$ 元/m^2；$E_2=240.07$ 元/m^2；$E_3=286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}}=0.95$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}}=0.71$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}}=0.98$

$$\lambda_{C_1}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.95}-1\right)+0.8\left(\frac{1}{0.71}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{1}{0.98}-1\right)\right]=1.072$$

估算造价：$e^*_{C_1}=1.072\ [0.58\times283.34+0.55\times240.07$
$\times\ (1-0.58)\ +0.53\times286.16\ (1-0.58)$

$$\times (1-0.55) + \frac{1}{3}(283.34+240.07$$
$$\times +286.16)(1-0.58)(1-0.55)(1-0.53)]$$
$$=1.072[164.34+55.46+28.67+23.97]$$
$$=1.072\times 272.44=292.06 \text{ 元/m}^2$$

精度：$\frac{294.21-292.06}{294.21}\times 100\%=0.73\%<5\%$（行）

（2）检验典型工程“C_2”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.7 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{K_7}) = (\underset{\sim}{T}_{K_7}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.55 \qquad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1=0.7$；　　$\alpha_2=0.58$；　　$\alpha_3=0.55$

$E_1=240.07$ 元/m^2；$E_2=286.16$ 元/m^2；$E_3=283.34$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.98$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.95$

$$\lambda_{C_2}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.71}-1\right)+0.8\left(\frac{0.76}{0.98}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.76}{0.95}-1\right)\right]=0.978$$

估算造价：$e^*_{C_2}=0.978[0.7\times 240.07+0.58\times 286.16$
$$\times (1-0.7)+0.55\times 283.34(1-0.7)$$
$$\times (1-0.58)+\frac{1}{3}(240.07+286.16$$
$$+283.34)(1-0.7)(1-0.58)(1-0.55)]$$
$$=0.978[168.05+49.79+19.64+15.30]$$

$$=0.978\times252.78=247.22\ 元/m^2$$

精度：$\dfrac{247.22-244.43}{244.43}\times100\%=1.14\%<5\%$（行）

（3）检验典型工程“C_3”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.7 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{K_7})=(\underset{\sim}{T}_{K_7},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1=0.7$；　　$\alpha_2=0.55$；　　$\alpha_3=0.53$

$E_1=244.43\ 元/m^2$；$E_2=294.21\ 元/m^2$；$E_3=283.34\ 元/m^2$

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.95$

$$\lambda_{C_3}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.76}-1\right)+0.8\left(\frac{0.71}{1}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.71}{0.95}-1\right)\right]=0.93$$

估算造价：$e^*_{C_3}=0.93\ [0.7\times244.43+0.55\times294.21\times(1-0.7)+0.53\times283.34\ (1-0.7)\times(1-0.55)+\frac{1}{3}\ (244.43+294.21+283.34)\ (1-0.7)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$=0.93\ [171.1+48.54+20.27+17.39]$

$=0.93\times257.3=239.29\ 元/m^2$

精度：$\dfrac{240.07-239.29}{240.07}\times100\%=0.33\%<5\%$（行）

（4）检验典型工程“C_4”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{K_7}) = (\underset{\sim}{T}_{K_7}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.6$；　　$\alpha_2 = 0.58$；　　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 283.34$ 元/m²；$E_2 = 244.43$ 元/m²；$E_3 = 294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.95$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{C_4} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.95} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.98}{0.76} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.98}{1} - 1\right)\right] = 1.05$$

估算造价：$e^*_{C_4} = 1.05\ [0.6 \times 283.34 + 0.58 \times 244.43 \times (1-0.6) + 0.53 \times 294.21\ (1-0.6) \times (1-0.58) + \frac{1}{3}\ (283.34 + 244.43 + 294.21)\ (1-0.6)\ (1-0.58)\ (1-0.53)]$

$= 1.05\ [170 + 56.71 + 26.2 + 21.64]$

$\approx 1.05 \times 274.55 = 288.28$ 元/m²

精度：$\frac{288.28 - 286.16}{286.16} \times 100\% = 0.74\% < 5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全部符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_7”的估算土建单方造价为283.34元/m²是可信的。

十一、实例应用“XI”

继实例应用“X”，估算某大学物理楼框架现浇钢筋混

凝土结构“K_8”工程的单方土建造价，其资料见表 3-7，此资料是 80 年代搜集整理的。

1．建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“X”。

欲估工程：

“K_8”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 1/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 0.75/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} = 1 - \frac{5.8 - 4.5}{5.8} = 0.77$$

2．根据实例应用“X”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表 3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_8”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{C_1} &= 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_2} &= 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_3} &= 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.8/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_4} &= 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6
\end{aligned}\right\} \text{已知典型工程}$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} = 1/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 0.75/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

欲估工程

计算欲估工程“K_8”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_1} = (1 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$\vee (0.75 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 1)$$
$$= 1 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.75 \vee 0.9 \vee 0.9 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \odot \underset{\sim}{T}_{C_1} = (1 \vee 1) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$
$$\wedge (0.7 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6 \qquad \cdots\cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \wedge 0.9) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.75 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.75 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \odot \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \vee 0.9) \wedge (0.4 \vee 0.4) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.75 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 0.8)$$
$$= 1 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.9 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.4)] = 0.75$$

$$\because \quad \underset{\sim}{T}_{C_2} = 0.76 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.75 \wedge 0.7) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.9 \wedge 0.9)$$
$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.7 \vee 0.9 \vee 0.9 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_8} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.75 \vee 0.7) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.9 \vee 0.9)$$
$$= 1 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 0.75 \wedge 0.9 \wedge 0.9 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.4)] = 0.75,$$

$\because \quad \underset{\sim}{T_{C_3}} = 0.71$ ……②

$$\underset{\sim}{T_{K_8}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_4}} = (1 \wedge 0.95) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1) \vee (0.75 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8) = 0.95 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.75 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.95$$

$$\underset{\sim}{T_{K_8}} \odot \underset{\sim}{T_{C_4}} = (1 \vee 0.95) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1) \wedge (0.75 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.8) = 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_8}}, \underset{\sim}{T_{C_4}}) = \frac{1}{2}[0.95 + (1 - 0.9)] = 0.53$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$； $\alpha_2 = 0.75$； $\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 244.43$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2；$E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.76$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.71$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 1$

$$\lambda_{K_8} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.77}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.77}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.77}{1} - 1\right)\right] = 1$$

估算造价：$e^*_{K_8} = 1\ [0.75 \times 244.43 + 0.75 \times 240.07 \times (1-0.75) + 0.6 \times 294.21\ (1-0.75) \times (1-0.75) + \frac{1}{3}\ (244.43 + 240.07 + 294.21)\ (1-0.75)\ (1-0.75)\ (1-0.6)]$

$= 1\ [183.32 + 45.01 + 11.03 + 6.49]$

$= 1 \times 245.85 = 245.85$ 元/m^2

3. 检验欲估工程“K_8”所估算造价的可信性，即把所

求得的欲估工程造价 245.85 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

(1) 检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{K_8}) = (\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.6$；　$\alpha_2 = 0.55$；　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 245.85$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2；$E_3 = 286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{C_1} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.98} - 1\right)\right] = 1.15$$

估算造价：$e^*_{C_1} = 1.15\ [0.6 \times 245.85 + 0.55 \times 240.07 \times (1-0.6) + 0.53 \times 286.16\ (1-0.6) \times (1-0.55) + \frac{1}{3}\ (245.85 + 240.07 + 286.16)\ (1-0.6)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$= 1.15\ [147.51 + 52.82 + 27.30 + 21.77]$

$= 1.15 \times 249.4 = 286.81$ 元/m^2

精度：$\dfrac{294.21 - 286.81}{294.21} \times 100\% = 2.52\% < 5\%$ (行)

(2) 检验典型工程“C_2”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.7 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.58 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{K_8}) = (\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.75 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.58$

$E_1 = 245.85$ 元/m²；　$E_2 = 240.07$ 元/m²；$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{C_2} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.76}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.76}{0.98} - 1\right)\right] = 0.99$$

估算造价：$e^*_{C_2} = 0.99\ [0.75 \times 245.85 + 0.7 \times 240.07 \times (1-0.75) + 0.58 \times 286.16\ (1-0.75) \times (1-0.7) + \frac{1}{3}\ (245.85 + 240.07 + 286.16)\ (1-0.75)\ (1-0.7)\ (1-0.58)]$

$= 0.99\ [184.39 + 42.01 + 12.45 + 8.11]$

$= 0.99 \times 246.96 = 244.49$ 元/m²

精度：$\frac{244.43 - 244.49}{244.43} \times 100\% = 0.025\% < 5\%$（行）

（3）检验典型工程“C_3”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.55 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.7 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{K_8}) = (\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.75 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 245.85$ 元/m²；$E_2 = 244.43$ 元/m²；$E_3 = 294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.77$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_4} = 1$

$$\lambda_{C_3} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.77} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.71}{0.76} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.71}{1} - 1\right)\right] = 0.95$$

估算造价：$e^*_{C_3} = 0.95\ [0.75 \times 245.85 + 0.7 \times 244.43 \times (1-0.75) + 0.55 \times 294.21\ (1-0.75) \times (1-0.7) + \frac{1}{3}\ (245.85 + 244.43 + 294.21)\ (1-0.75)\ (1-0.7)\ (1-0.55)]$

$= 0.95\ [184.39 + 42.78 + 12.14 + 8.83]$

$= 0.95 \times 248.14 = 235.73$ 元/m²

精度：$\frac{240.07 - 235.73}{240.07} \times 100\% = 1.81\% < 5\%$（行）

(4) 检验典型工程“C_4”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.53$，　∵　$\underset{\sim}{T}_{C_1} = 1$ 　　……②

$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.58$ 　　……①

$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{C_4}, \underset{\sim}{T}_{K_8}) = (\underset{\sim}{T}_{K_8}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) - 0.53$，∵　$T_{K_8} = 0.77$…③

为此：

$\alpha_1=0.58$；　　$\alpha_2=0.53$；　　$\alpha_3=0.53$

$E_1=244.43$ 元/m^2；$E_2=294.21$ 元/m^2；$E_3=245.85$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{a_1}}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T_{a_2}}=1$；　　$\underset{\sim}{T_{a_3}}=0.77$

$$\lambda_{C_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{1}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.98}{0.77}-1\right)\right]=1.10$$

估算造价：$e^*_{C_4}=1.1\ [0.58\times244.43+0.53\times294.21\times(1-0.58)+0.53\times245.85\ (1-0.58)\times(1-0.53)+\frac{1}{3}\ (244.43+294.21+245.85)\ (1-0.58)\ (1-0.53)\ (1-0.53)]$

$=1.1\ [141.77+65.49+25.72+24.26]$

$=1.1\times257.24=282.964$ 元/m^2

精度：$\frac{286.16-282.964}{286.16}\times100\%=1.12\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_8”的估算土建单方造价为245.85 元/m^2 是可信的。

十二、实例应用“Ⅻ”

继实例应用“Ⅹ”，估算某电子技术服务大楼框架现浇钢筋混凝土结构“K_9”工程的单方土建造价，其资料见表3-7（此资料是80年代搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“X”。

欲估工程：

“K_9”工程：$\sum_1^m t_j = 0.9+1+0.5+0.6+0.95+0.7$

$=4.65$

$\sum_1^m t_j = 5.8$ 为最大；见实例应用“X”，因它们都应用同一个资料。故：

$$\underset{\sim}{T}_{K_9} = 1 - \frac{5.8-4.65}{5.8} = 0.80$$

2. 根据实例应用“X”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_9”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{C_1} &= 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_2} &= 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_3} &= 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_4} &= 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6
\end{aligned}\right\} \text{已知典型工程}$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_9} = 0.9/t_1 + 1/t_2 + 0.5/t_3 + 0.6/t_4 + 0.95/t_5 + 0.7/t_6 \quad \text{欲估工程}$$

计算欲估工程“K_9”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_9} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_1} = (0.9 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$\vee (0.6 \wedge 0.8) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 1)$$

$$= 0.9 \vee 1 \vee 0.5 \vee 0.6 \vee 0.95 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \odot \underset{\sim}{T_{C_1}} = (0.9 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$\wedge (0.6 \vee 0.8) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 1)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_9}}, \underset{\sim}{T_{C_1}}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T_{C_1}} = 1 \quad \cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.6 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$

$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.6 \vee 0.8 \vee 0.7 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \odot \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.6 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 0.8) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$

$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 0.8 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_9}}, \underset{\sim}{T_{C_2}}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7, \because \underset{\sim}{T_{C_2}} = 0.76 \cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_3}} = (0.9 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.6 \wedge 0.7) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.7 \wedge 0.9)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.6 \vee 0.9 \vee 0.7 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \odot \underset{\sim}{T_{C_3}} = (0.9 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.6 \vee 0.7) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.7 \vee 0.9)$$

$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 0.7 \wedge 0.95 \wedge 0.9 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_9}}, \underset{\sim}{T_{C_3}}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7, \because \underset{\sim}{T_{C_3}} = 0.71 \cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_4}} = (0.9 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$\vee (0.6 \wedge 0.95) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$

$$= 0.9 \vee 1 \vee 0.5 \vee 0.6 \vee 0.95 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_{K_9}} \odot \underset{\sim}{T_{C_4}} = (0.9 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$\wedge (0.6 \vee 0.95) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$

$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_9}}, \underset{\sim}{T_{C_4}}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T_{C_4}} = 0.98$$

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 244.43$ 元/m²；$E_2 = 240.07$ 元/m²；$E_3 = 294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 1$

$$\lambda_{K_9} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.8}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.8}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.8}{1} - 1\right)\right] = 1.02$$

估算造价：$e^*_{K_9} = 1.02\ [0.7 \times 244.43 + 0.7 \times 240.07 \times (1-0.7) + 0.6 \times 294.21\ (1-0.7) \times (1-0.7) + \frac{1}{3}\ (244.43 + 240.07 + 294.21)\ (1-0.7)\ (1-0.7)\ (1-0.6)]$

$= 1.02\ [171.1 + 50.41 - 15.89 + 9.34]$

$= 1.02 \times 246.74 = 251.68$ 元/m²

3. 检验欲估工程“K_9”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 251.68 元/m² 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{C_3}}, \underset{\sim}{T_{C_2}}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}}, \underset{\sim}{T_{C_3}}) = 0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}}, \underset{\sim}{T_{C_4}}) = 0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}}, \underset{\sim}{T_{K_9}}) = (\underset{\sim}{T_{K_9}}, \underset{\sim}{T_{C_1}}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.6$；　　$\alpha_2 = 0.55$；　　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 251.68$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2；$E_3 = 286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.8$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.98$

$$\lambda_{C_1} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.8} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.98} - 1\right)\right] = 1.13$$

估算造价：$e^*_{C_1} = 1.13\ [0.6 \times 251.68 + 0.55 \times 240.07 \times (1-0.6) + 0.53 \times 286.16\ (1-0.6) \times (1-0.55) + \frac{1}{3}\ (251.68 + 240.07 + 286.16)\ (1-0.6)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$= 1.13\ [151 + 52.82 + 27.3 + 21.94]$

$= 1.13 \times 253.06 = 285.96$ 元/m^2

精度：$\frac{294.21 - 285.96}{294.21} \times 100\% = 2.8\% < 5\%$（行）

（2）检验典型工程“C_2”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{C_2}}, \underset{\sim}{T_{C_1}}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_2}}, \underset{\sim}{T_{C_3}}) = 0.7, \quad \because \quad \underset{\sim}{T_{C_3}} = 0.71 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_2}}, \underset{\sim}{T_{C_4}}) = 0.58 \qquad \cdots\cdots③$$

$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{K_9}) = (\underset{\sim}{T}_{K_9}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.7$，　∵　$\underset{\sim}{T}_{K_9} = 0.8$…①

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.58$

$E_1 = 251.68$ 元/m²；$E_2 = 240.07$ 元/m²；$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.8$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{C_2} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.8} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.76}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.76}{0.98} - 1\right)\right] = 0.98$$

估算造价：$e^*_{C_2} = 0.98\ [0.7 \times 251.68 + 0.7 \times 240.07 \times (1-0.7) + 0.58 \times 286.16\ (1-0.7) \times (1-0.7) + \frac{1}{3}\ (251.68 + 240.07 + 286.16)\ (1-0.7)\ (1-0.7)\ (1-0.58)]$

$= 0.98\ [176.18 + 50.41 + 14.94 + 9.8]$

$= 0.98 \times 251.33 = 246.3$ 元/m²

精度：$\frac{244.43 - 246.3}{244.43} \times 100\% = -0.77\% < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“C_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.55$　　…③

$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.7$，　∵　$\underset{\sim}{T}_{C_2} = 0.76$　　…②

$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{C_3}, \underset{\sim}{T}_{K_9}) = (\underset{\sim}{T}_{K_9}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.7$，　∵　$\underset{\sim}{T}_{K_9} = 0.8$…①

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1=251.68$ 元/m²；$E_2=244.43$ 元/m²；$E_3=294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.8$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=1$

$$\lambda_{C_3}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.8}-1\right)+0.8\left(\frac{0.71}{0.76}-1\right)+0.4\left(\frac{0.71}{1}-1\right)\right]=0.94$$

估算造价：$e^*_{C_3}=0.94\ [0.7\times251.68+0.7\times244.43\times(1-0.7)+0.55\times294.21\ (1-0.7)\times(1-0.7)+\frac{1}{3}\ (251.68+244.43+294.21)\ (1-0.7)\ (1-0.7)\ (1-0.55)]=0.94\ [176.18+51.33+14.56+10.67]=0.94\times252.74$

$=237.58$ 元/m²

精度：$\frac{240.07-237.58}{240.07}\times100\%=1\%<5\%$（行）

（4）检验典型工程“C_4”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.53$　　……③

$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.58$　　……②

$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{K_9})=(\underset{\sim}{T}_{K_9},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.6$　　……①

为此：

$\alpha_1=0.6$；　　$\alpha_2=0.58$；　　$\alpha_3=0.53$

E_1　251.68 元/m²；$E_2=244.43$ 元/m²；$E_3=294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.8$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=1$

$$\lambda_{C_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.8}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.98}{1}-1\right)\right]=1.11$$

估算造价：$e^{*}_{C_4}=1.11\ [0.6\times251.68+0.58\times244.43\times(1-0.6)+0.53\times294.21\ (1-0.6)\times(1-0.58)+\frac{1}{3}\ (251.68+244.43+294.21)\ (1-0.6)\ (1-0.58)\ (1-0.53)]$

$=1.11\ [151+56.71+26.2+20.8]$

$=1.11\times254.71=282.73$ 元/m^2

精度：$\frac{286.16-282.73}{286.16}\times100\%=1.2\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_9”的估算土建单方造价为251.68 元/m^2 是可信的。

十三、实例应用“Ⅷ”

继实例应用“Ⅹ”估算某企业管理大楼框架现浇钢筋混凝土结构“K_{10}”工程的单方土建造价，其资料见表 3-7（此资料是 80 年代搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“Ⅹ”。

欲估工程：

“K_{10}”工程：$\sum_{1}^{m} t_j=0.8+0.3+0.5+0.4+0.9+0.8$

$=\underline{3.70}$

$\sum_{1}^{m} t_j = 5.8$ 为最大，见实例应用“X”，因它们都应用同一个资料。故：

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} = 1 - \frac{5.8 - 3.7}{5.8} = 0.64$$

2. 根据实例应用“X”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表 3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_{10}”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：

$$\left.\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{C_1} &= 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_2} &= 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_3} &= 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6 \\
\underset{\sim}{T}_{C_4} &= 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6
\end{aligned}\right\} \text{已知典型工程}$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.4/t_4 + 0.9/t_5 + 0.8/t_6$$

欲估工程

计算欲估工程“K_{10}”与已知典型工程的贴近度：

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_1} &= (0.8 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1) \\
&\quad \vee (0.4 \wedge 0.8) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1) \\
&= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.4 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.9 \\
\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_1} &= (0.8 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1) \\
&\quad \wedge (0.4 \vee 0.8) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1) \\
&= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8
\end{aligned}$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{10}}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55, \because \underset{\sim}{T}_{C_1} = 1 \cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_2} = (0.8 \wedge 0.9) \vee (0.3 \wedge 0.4) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.4 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_2} = (0.8 \vee 0.9) \wedge (0.3 \vee 0.4) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$

$$= 0.9 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.9 \wedge 0.8 = 0.4$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{10}}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.4)] = 0.7 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.3 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$

$$\vee (0.4 \wedge 0.7) \vee (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.9)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.4 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.8 \vee 0.8) \wedge (0.3 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$

$$\wedge (0.4 \vee 0.7) \wedge (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 0.9)$$

$$= 0.8 \wedge 0.3 \wedge 0.5 \wedge 0.7 \wedge 0.9 \wedge 0.9 = 0.3$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{10}}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.3)] = 0.8 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.8 \wedge 0.95) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$

$$\vee (0.4 \wedge 0.95) \vee (0.9 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$

$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.4 \vee 0.9 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{10}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.8 \vee 0.95) \wedge (0.3 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$

$$\wedge (0.4 \vee 0.95) \wedge (0.9 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$

$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{10}}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55 \quad \because \underset{\sim}{T}_{C_4} = 0.98$$

为此：

$\alpha_1=0.8$；　　$\alpha_2=0.7$；　　$\alpha_3=0.55$

$E_1=240.07$ 元/m²；　$E_2=244.43$ 元/m²；　$E_3=294.21$ 元/m²

$T_{\alpha_1}=0.71$；　　$T_{\alpha_2}=0.76$；　　$T_{\alpha_3}=1$

$$\lambda_{K_{10}}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.64}{0.71}-1\right)+0.8\left(\frac{0.64}{0.76}-1\right)+0.4\left(\frac{0.64}{1}-1\right)\right]=0.93$$

估算造价：$e^*_{K_{10}}=0.93\ [0.8\times240.07+0.7\times244.43\times(1-0.8)+0.55\times294.21\ (1-0.8)\times(1-0.7)+\frac{1}{3}\ (240.07+244.43+294.21)\ (1-0.8)\ (1-0.7)\ (1-0.55)]$

$=0.93\ [192.06+34.22+9.71+7]$

$=0.93\times242.99=225.98$ 元/m²

3．检验欲估工程“K_{10}”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 225.98 元/m² 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$(T_{C_1},T_{C_2})=0.45$

$(T_{C_1},T_{C_3})=0.55$，∵　$T_{C_3}=0.71$　　…①

$(T_{C_1},T_{C_4})=0.53$　　…③

$(T_{C_1},T_{K_{10}})=(T_{K_{10}},T_{C_1})=0.55$，∵　$T_{K_{10}}=0.64$…②

为此：

$\alpha_1=0.55$；　　$\alpha_2=0.55$；　　$\alpha_3=0.53$

$E_2=240.07$ 元/m²；$E_2=225.98$ 元/m²；$E_3=286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.64$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$

$$\lambda_{C_1}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.71}-1\right)+0.8\left(\frac{1}{0.64}-1\right)+0.4\left(\frac{1}{0.98}-1\right)\right]=1.2$$

估算造价：$e^*_{C_1}=1.2\ [0.55\times240.07+0.55\times225.98\times(1-0.55)+0.53\times286.16\ (1-0.55)\times(1-0.55)+\frac{1}{3}\ (240.07+225.98+286.16)\ (1-0.55)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$=1.2\ [132.04+55.93+30.71+23.86]$

$=1.2\times242.54=291.05$ 元/m²

精度：$\frac{294.21-291.05}{294.21}\times100\%=1.07\%<5\%$（行）。

（2）检验典型工程“C_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.45$

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.7$，∵　$\underset{\sim}{T}_{C_3}=0.71$　　…①

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.58$　　…③

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{K_{10}})=(\underset{\sim}{T}_{K_{10}},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.70$，∵ $T_{K_{10}}=0.64$…②

为此：

$\alpha_1=0.7$；　　$\alpha_2=0.7$；　　$\alpha_3=0.58$

$E_1=240.07$ 元/m²；$E_2=225.98$ 元/m²；$E_3=286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.64$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$

$$\lambda_{C_2}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.71}-1\right)+0.8\left(\frac{0.76}{0.64}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.76}{0.98}-1\right)\right]=1.03$$

估算造价：$e_{C_2}^{*}=1.03\ [0.7\times240.07+0.7\times225.98\times(1-0.7)+0.58\times286.16\ (1-0.7)\times(1-0.7)+\frac{1}{3}\ (240.07+225.98+286.16)\ (1-0.7)\ (1-0.7)\ (1-0.58)]$

$=1.03\ [168.05+47.46+17.43+9.48]$

$=1.03\times242.42=249.69$ 元/m^2

精度：$\frac{244.43-249.69}{244.43}\times100\%=-2.15\%<5\%$

（3）检验典型工程“C_3”的精度

$(\underset{\sim}{T_{C_3}},\underset{\sim}{T_{C_1}})=0.55$ ……③

$(\underset{\sim}{T_{C_3}},\underset{\sim}{T_{C_2}})=0.7$ ……②

$(\underset{\sim}{T_{C_3}},\underset{\sim}{T_{C_4}})=0.5$

$(\underset{\sim}{T_{C_3}},\underset{\sim}{T_{K_{10}}})=(\underset{\sim}{T_{K_{10}}},\underset{\sim}{T_{C_3}})=0.8$ ……①

为此：

$\alpha_1=0.8$；　$\alpha_2=0.7$；　$\alpha_3=0.55$

$E_1=225.98$ 元/m^2；$E_2=244.43$ 元/m^2；$E_3=294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}}=0.64$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}}=0.76$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}}=1$

$$\lambda_{C_3}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.64}-1\right)+0.8\left(\frac{0.71}{0.76}-1\right)\right.$$
$$\left.+0.4\left(\frac{0.71}{1}-1\right)\right]=1$$

估算造价：$e^{*}_{C_3}=1\ [0.8\times225.98+0.7\times244.43$

$\times\ (1-0.8)\ +0.55\times294.21\ (1-0.8)$

$\times\ (1-0.7)\ +\frac{1}{3}\ (225.96+244.43$

$+294.21)\ (1-0.8)\ (1-0.7)\ (1-0.55)]$

$=1\ [180.78+34.22+9.71+6.88]$

$=1\times231.59=231.59$ 元/m^2

精度：$\frac{240.07-231.59}{240.07}\times100\%=3.5\%<5\%$（行）。

（4）检验典型工程“C_4”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{C_4}},\underset{\sim}{T_{C_1}})=0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_4}},\underset{\sim}{T_{C_2}})=0.58 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_4}},\underset{\sim}{T_{C_3}})=0.5$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_4}},\underset{\sim}{T_{K_{10}}})=(\underset{\sim}{T_{K_{10}}},\underset{\sim}{T_{C_4}})=0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1=0.58$；　$\alpha_2=0.55$；　$\alpha_3=0.53$

$E_1=244.43$ 元/m^2；$E_2=225.98$ 元/m^2；$E_3=294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}}=0.76$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}}=0.64$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}}=1$

$$\lambda_{C_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{0.64}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.98}{1}-1\right)\right]=1.16$$

估算造价：$e^{*}_{C_4}=1.16\ [0.58\times244.43+0.55\times225.98$

$\times\ (1-0.58)\ +0.53\times294.21\ (1-0.58)$

$\times\ (1-0.55)\ +\frac{1}{3}\ (244.43+225.98$

$$+294.21)(1-0.58)(1-0.55)(1-0.53)]$$

$$=1.16\ [141.77+52.2+29.47+22.64]$$

$$=1.16\times246.08=285.45\ 元/m^2$$

精度：$\frac{286.16-285.45}{286.16}\times100\%=0.25\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故，欲估工程“K_{10}”的估算土建单方造价为225.98元/m²是可信的。

十四、实例应用“Ⅶ”

继实例应用“Ⅹ”估算某烟厂车间框架现浇钢筋混凝土结构“K_{11}”工程的单方土建造价，其资料见表3-7（此资料是80年代搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“Ⅹ”。

欲估工程：

“K_{11}”工程：$\sum_{1}^{m} t_j=0.9+1+0.3+0.55+0.8+0.7=4.25$

$\sum_{1}^{m} t_j=5.8$为最大，见实例应用“Ⅹ”，因它们都应用同一个资料。故：

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}}=1-\frac{5.8-4.25}{5.8}=0.73$$

2. 根据实例应用“Ⅹ”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_{11}”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：已知典型工

程：

$$\underset{\sim}{T_{C_1}} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_2}} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_3}} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

$$\underset{\sim}{T_{C_4}} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6$$

欲估工程：

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}} = 0.9/t_1 + 1/t_2 + 0.3/t_3 + 0.55/t_4 + 0.8/t_5 + 0.7/t_6$$

计算欲估工程“K_{11}”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_1}} = (0.9 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.55 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 1)$$
$$= 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.55 \vee 0.8 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}} \odot \underset{\sim}{T_{C_1}} = (0.9 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 1) \wedge (0.55 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T_{K_{11}}}, \underset{\sim}{T_{C_1}}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T_{C_1}} = 1 \quad \cdots\cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}} \otimes \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0.55 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.3 \vee 0.55 \vee 0.8 \vee 0.7 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T_{K_{11}}} \odot \underset{\sim}{T_{C_2}} = (0.9 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (0.3 \vee 0.5) \wedge (0.55 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$
$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.8 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{11}}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7 \quad \cdots\cdots①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{11}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.9 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.55 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0.9) \vee (0.7 \wedge 0.9)$$
$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.3 \vee 0.55 \vee 0.8 \vee 0.7 = 0.8$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{11}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (0.9 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (0.3 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.55 \vee 0.7) \wedge (0.8 \vee 0.9) \wedge (0.7 \vee 0.9)$$
$$= 0.9 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 0.7 \wedge 0.9 \wedge 0.9 = 0.9$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{11}}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.9)] = 0.45$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{11}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 1)$$
$$\vee (0.55 \wedge 0.95) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.55 \vee 0.8 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{11}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (0.9 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 1)$$
$$\wedge (0.55 \vee 0.95) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{11}}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T}_{C_4} = 0.98 \quad \cdots\cdots③$$

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　$\alpha_2 = 0.6$；　$\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 244.43$ 元/m²；　$E_2 = 294.21$ 元/m²；　$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.76$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 1$；　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{K_{11}} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.73}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.73}{1} - 1\right)\right.$$

$$+0.4\left(\frac{0.73}{0.98}-1\right)\Big]=0.935$$

估算造价：$e^{*}_{K_{11}}=0.935\ [0.7\times244.43+0.6\times294.21\times(1-0.7)+0.6\times286.16\ (1-0.7)\times(1-0.6)+\frac{1}{3}\ (244.43+294.21+286.16)\ (1-0.7)\ (1-0.6)\ (1-0.6)]$

$=0.935\ [171.1+52.96+20.6+13.2]$

$=0.935\times257.86=241.1$ 元/m²

3. 检验欲估工程“K_{11}”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 241.1 元/m² 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_2}})=0.45$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_3}})=0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{C_4}})=0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T_{C_1}},\underset{\sim}{T_{K_{11}}})=(\underset{\sim}{T_{K_{11}}},\underset{\sim}{T_{C_1}})=0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1=0.6$；　$\alpha_2=0.55$；　$\alpha_3=0.53$

$E_1=241.1$ 元/m²；　$E_2=240.07$ 元/m²；　$E_3=286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}}=0.73$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_2}}=0.71$；　$\underset{\sim}{T_{\alpha_3}}=0.98$

$$\lambda_{C_1}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.73}-1\right)+0.8\left(\frac{1}{0.71}-1\right)+0.4\left(\frac{1}{0.98}-1\right)\right]=1.17$$

估算造价：$e_{C_1}^{*}=1.17\ [0.6\times241.1+0.55\times240.07$

$\times\ (1-0.6)\ +0.53\times286.16\ (1-0.6)$

$\times\ (1-0.55)\ +\frac{1}{3}\ (241.1+240.07$

$+286.16)\ (1-0.6)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$=1.17\ [144.66+52.82-27.3+21.64]$

$=1.17\times246.42=288.31$ 元/m^2

精度：$\frac{294.21-288.31}{294.21}\times100\%=2\%<5\%$（行）。

（2）检验典型工程“C_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.45$

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.7,\because\ \underset{\sim}{T}_{C_3}=0.71$ …②

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.58$ …③

$(\underset{\sim}{T}_{C_2},\underset{\sim}{T}_{K_{II}})=(\underset{\sim}{T}_{K_{II}},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.7,\because\ \underset{\sim}{T}_{K_{II}}=0.73$ …①

为此：

$\alpha_1=0.7;\quad \alpha_2=0.7;\quad \alpha_3=0.58$

$E_1=241.1$ 元/m^2；$E_2=240.07$ 元/m^2；$E_3=286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.73;\quad \underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=0.71;\quad \underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$

$$\lambda_{C_2}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.73}-1\right)+0.8\left(\frac{0.76}{0.71}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.76}{0.98}-1\right)\right]=1$$

估算造价：$e_{C_2}^{*}=1\ [0.7\times241.1+0.7\times240.07$

$\times\ (1-0.7)\ +0.58\times286.16\ (1-0.7)$

$\times\ (1-0.7)\ +\frac{1}{3}\ (241.1+240.07$

$$+286.16)(1-0.7)(1-0.7)(1-0.58)]$$

$$=1\ [168.77+50.42+14.94+9.67]$$

$$=1\times243.8=243.8\ 元/m^2$$

精度：$\dfrac{244.43-243.8}{244.43}\times100\%=0.26\%<5\%$（行）

（3）检验典型工程“C_3”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.7 \qquad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.5 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_3},\underset{\sim}{T}_{K_{11}})=(\underset{\sim}{T}_{K_{11}},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.45$$

为此：

$\alpha_1=0.7$；　　$\alpha_2=0.55$；　　$\alpha_3=0.5$

$E_1=244.43$ 元/m^2；$E_2=294.21$ 元/m^2；$E_3=286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2}=1$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3}=0.98$

$$\lambda_{C_3}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.76}-1\right)+0.8\left(\frac{0.7}{1}-1\right)\right.$$

$$\left.+0.4\left(\frac{0.71}{0.98}-1\right)\right]=0.923$$

估算造价：$e^*_{C_3}=0.923\ [0.7\times244.43+0.55\times294.21$

$$\times(1-0.7)+0.5\times286.16(1-0.7)$$

$$\times(1-0.55)+\frac{1}{3}(244.43+294.21$$

$$+286.16)(1-0.7)(1-0.55)(1-0.5)]$$

$$=0.923\ [171.1+48.54+19.32+18.56]$$

$$=0.923\times257.52=237.69\ 元/m^2$$

精度：$\frac{240.07-237.69}{240.07}\times 100\%=0.99\%<5\%$（行）

（4）检验典型工程“C_4”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_1})=0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_2})=0.58 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{C_3})=0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_4},\underset{\sim}{T}_{K_{11}})=(\underset{\sim}{T}_{K_{11}},\underset{\sim}{T}_{C_4})=0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1=0.6$；　$\alpha_2=0.58$；　$\alpha_3=0.53$

$E_1=241.1$ 元/m^2；$E_2=244.43$ 元/m^2；$E_3=294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{a_1}=0.73$；　$\underset{\sim}{T}_{a_2}=0.76$；　$\underset{\sim}{T}_{a_3}=1$

$$\lambda_{C_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.73}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)+0.4\left(\frac{0.98}{1}-1\right)\right]=1.14$$

估算造价：$e^*_{C_4}=1.14\ [0.6\times 241.1+0.58\times 244.43\times(1-0.6)+0.53\times 294.21\ (1-0.6)\times(1-0.58)+\frac{1}{3}\ (241.1+244.43+294.21)\ (1-0.6)\ (1-0.58)\ (1-0.53)]$

$=1.14\ [144.66+56.71+26.2+20.52]$

$=1.14\times 248.09=282.82$ 元/m^2

精度：$\frac{286.16-282.82}{286.16}\times 100\%=1.17\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故欲估工程“K_{11}”的估算土建单方造价为

241.1 元/m^2 是可信的。

十五、实例应用“XV”

继实例应用“X”，估算某制药厂大输液车间框架现浇钢筋混凝土结构“K_{12}”工程的单方土建造价，其资料见表3-7（此资料是80年代搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表”根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“X”。

欲估工程：

“K_{12}”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.3/t_3 + 0.35/t_4 + 0.95/t_5 + 0.7/t_6$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} = 1 - \frac{5.8 - 4.30}{5.8} = 0.74$$

2. 根据实例应用“X”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_{12}”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：已知典型工程：

$$\underset{\sim}{T}_{C_1} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_2} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_3} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{C_4} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/t_5 + 0.8/t_6$$

欲估工程：

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} = 1/t_1 + 1/t_2 + 0.3/t_3 + 0.35/t_4 + 0.95/t_5 + 0.7/t_6$$

计算欲钻工程“K_{12}”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_1} = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0.35 \wedge 0.8) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 1)$$
$$= 1 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.35 \vee 0.95 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_1} = (1 \vee 1) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 1) \wedge (0.35 \vee 0.8) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{12}}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T}_{C_1} = 1 \quad \cdots ③$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.4) \vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0.35 \wedge 1) \vee (0.95 \wedge 0.8) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.8 \vee 0.7 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_2} = (1 \vee 0.9) \wedge (1 \vee 0.4) \wedge (0.3 \vee 0.5) \wedge (0.35 \vee 1) \wedge (0.95 \vee 0.8) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 0.8 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{12}}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7, \because \underset{\sim}{T}_{C_2} = 0.76 \quad \cdots ①$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \wedge 0.8) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0.35 \wedge 0.7) \vee (0.95 \wedge 0.9) \vee (0.7 \wedge 0.9)$$
$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.3 \vee 0.35 \vee 0.9 \vee 0.7 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_3} = (1 \vee 0.8) \wedge (1 \vee 0.3) \wedge (0.3 \vee 0.5) \wedge (0.35 \vee 0.7) \wedge (0.95 \vee 0.9) \wedge (0.7 \vee 0.9)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 0.5 \wedge 0.7 \wedge 0.95 \wedge 0.9 = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{12}}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.5)] = 0.7, \because \underset{\sim}{T}_{C_3} = 0.71 \cdots ②$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \otimes \underset{\sim}{T}_{C_4} = (1 \wedge 0.95) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 1)$$

$$\vee (0.35 \wedge 0.95) \vee (0.95 \wedge 1) \vee (0.7 \wedge 0.8)$$

$$= 0.95 \vee 1 \vee 0.3 \vee 0.35 \vee 0.95 \vee 0.7 = 1$$

$$\underset{\sim}{T}_{K_{12}} \odot \underset{\sim}{T}_{C_4} = (1 \vee 0.95) \wedge (1 \vee 1) \wedge (0.3 \vee 1)$$

$$\wedge (0.35 \vee 0.95) \wedge (0.95 \vee 1) \wedge (0.7 \vee 0.8)$$

$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{K_{12}}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = \frac{1}{2}[1 + (1 - 0.8)] = 0.6, \because \underset{\sim}{T}_{C_4} = 0.98$$

为此

$\alpha_1 = 0.7$; $\alpha_2 = 0.7$; $\alpha_3 = 0.6$

$E_1 = 244.43$ 元/m^2; $E_2 = 240.07$ 元/m^2; $E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.76$; $\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$; $\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{K_{12}} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.74}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.74}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.74}{1} - 1\right)\right] = 0.98$$

估算造价：$e^*_{K_{12}} = 0.98\ [0.7 \times 244.43 + 0.7 \times 240.07 \times (1-0.7) + 0.6 \times 294.21\ (1-0.7) \times (1-0.7) + \frac{1}{3}\ (244.43 + 240.07 + 294.21)\ (1-0.7)\ (1-0.7)\ (1-0.6)]$

$= 0.98\ [171.1 + 50.41 + 15.89 + 9.34]$

$= 0.98 \times 246.74 = 241.91$ 元/m^2

3. 检验欲估工程“K_{12}”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 241.91 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_2}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_2}, \underset{\sim}{T}_{C_3}) = 0.55 \qquad \cdots\cdots②$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{C_4}) = 0.53 \qquad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T}_{C_1}, \underset{\sim}{T}_{K_{12}}) = (\underset{\sim}{T}_{K_{12}}, \underset{\sim}{T}_{C_1}) = 0.6 \qquad \cdots\cdots①$$

为此：

$\alpha_1 = 0.6$；　　$\alpha_2 = 0.55$；　　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 241.91$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2；　$E_3 = 286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.74$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{C_1} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.74} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.98} - 1\right)\right] = 1.16$$

估算造价：$e^*_{C_1} = 1.16\ [0.6 \times 241.91 + 0.55 \times 240.07 \times (1-0.6) + 0.53 \times 286.16\ (1-0.6) \times (1-0.55) + \frac{1}{3}\ (241.91 + 240.07 + 286.16)\ (1-0.6)\ (1-0.55)\ (1-0.53)]$

$= 1.16\ [145.15 + 52.82 + 27.3 + 21.66]$

$= 1.16 \times 246.93 = 286.44$ 元/m^2

精度：$\dfrac{294.21 - 286.44}{294.21} \times 100\% = 2.64\% < 5\%$（行）

(2) 检验典型工程“C_2”的精度

$(\underset{\sim}{T_{c_2}}, \underset{\sim}{T_{c_1}}) = 0.45$

$(\underset{\sim}{T_{c_2}}, \underset{\sim}{T_{c_3}}) = 0.7, \because \quad (\underset{\sim}{T_{c_3}}) = 0.71$ …②

$(\underset{\sim}{T_{c_2}}, \underset{\sim}{T_{k_4}}) = 0.58$ …③

$(\underset{\sim}{T_{c_2}}, \underset{\sim}{T_{k_{12}}}) = (\underset{\sim}{T_{k_{12}}}, \underset{\sim}{T_{c_2}}) = 0.7, \because (\underset{\sim}{T_{k_{12}}}) = 0.74$ …①

为此：

$\alpha_1 = 0.7$； $\alpha_2 = 0.7$； $\alpha_3 = 0.58$

$E_1 = 241.91$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2； $E_3 = 286.16$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{\alpha_1}} = 0.74$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_2}} = 0.71$； $\underset{\sim}{T_{\alpha_3}} = 0.98$

$$\lambda_{c_2} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.74} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.76}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.76}{0.98} - 1\right)\right] = 1.00$$

估算造价：$e^*_{c_2} = 1.0[0.7 \times 241.91 + 0.7 \times 240.07 \times (1 - 0.7) + 0.58 \times 286.16(1 - 0.7) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(241.91 + 240.07 + 286.16)(1 - 0.7)(1 - 0.7)(1 - 0.58)]$

$= 1.0[169.34 + 50.42 + 14.94 + 9.68]$

$= 1.0 \times 244.38 = 244.38$ 元/m^2

精度：$\frac{244.43 - 244.38}{244.43} \times 100\% = 0.021\% < 5\%$（行）

(3) 检验典型工程“C_3”的精度

$(\underset{\sim}{T_{c_3}}, \underset{\sim}{T_{c_1}}) = 0.55$ …③

$(\underset{\sim}{T_{c_3}}, \underset{\sim}{T_{c_2}}) = 0.7, \because \quad (\underset{\sim}{T_{c_2}}) = 0.76$ …①

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = 0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{k_{12}}) = (\underset{\sim}{T}_{k_{12}}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.7$，$\because \underset{\sim}{T}_{K_{12}} = 0.74$…②

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 244.43$ 元/m^2；$E_2 = 241.91$ 元/m^2；$E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.74$；　　$\underset{\sim}{T}_{c_3} = 1$

$$\lambda_{c_3} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.71}{0.74} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.71}{1} - 1\right)\right] = 0.960$$

估算造价：$e^*_{c_3} = 0.960[0.7 \times 244.43 + 0.7 \times 241.91 \times (1 - 0.7) + 0.55 \times 294.21(1 - 0.7) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(244.43 + 241.91 + 294.21)(1 - 0.7)(1 - 0.7)(1 - 0.55)]$

$= 0.960[171.1 + 50.8 + 14.56 + 10.54]$

$= 0.960 \times 247 = 237.12$ 元/m^2

精度：$\frac{240.07 - 237.12}{240.07} \times 100\% = 1.23\% < 5\%$（行）

（4）检验典型工程“C_4”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{c_4}, \underset{\sim}{T}_{c_1}) = 0.53$　　……③

$(\underset{\sim}{T}_{c_4}, \underset{\sim}{T}_{c_2}) = 0.58$　　……②

$(\underset{\sim}{T}_{c_4}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{c_4}, \underset{\sim}{T}_{k_{12}}) = (\underset{\sim}{T}_{k_2}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = 0.6$　　……①

为此：

$\alpha_1=0.6$；　　$\alpha_2=0.58$；　　$\alpha_3=0.53$

$E_1=241.91$ 元/m²；$E_2=244.43$ 元/m²；$E_3=294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T_{a_1}}=0.74$；　　$\underset{\sim}{T_{a_2}}=0.76$；　　$\underset{\sim}{T_{a_3}}=1$

$$\lambda_{c_4}=1+\frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.74}-1\right)+0.8\left(\frac{0.98}{0.76}-1\right)+0.4\left(\frac{0.98}{1}-1\right)\right]=1.13$$

估算造价：$e^*_{c_4}=1.13[0.6\times241.91+0.58\times244.43\times(1-0.6)+0.53\times294.21(1-0.6)\times(1-0.58)+\frac{1}{3}(241.91+244.43+294.21)(1-0.6)(1-0.58)(1-0.53)]$

$=1.13[145.15+56.71+26.2+20.54]$

$=1.13\times248.6=280.92$ 元/m²

精度：$\frac{286.16-280.92}{286.16}\times100\%=1.8\%<5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故，欲估工程“K_{12}”的估算土建单方造价为241.91元/m²是可信的。

十六、实例应用“XVI”

继实例应用“X”估算某工艺美术馆展览大楼框架现浇钢筋混凝土结构“K_{13}”工程的单方土建造价，其资料见表3-7（此资料是80年代搜集整理的）。

1. 建立“对比工程模糊关系系数表“根据施工图和有关资料初步确定其模糊关系。

已知典型工程：

同实例应用“X”。

欲估工程：

“K_{13}”工程：$\sum_{1}^{m} t_j = 0.9 + 0.4 + 0.5 + 0.35 + 0.8 + 0.8$

$= 3.75$

$\sum_{1}^{m} t_j = 5.8$ 为最大，见实例应用“X”，因它们都应用同一个资料。故：

$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} = 1 - \frac{5.8 - 3.75}{5.8} = 0.65$$

2. 根据实例应用“X”所检验确定了的“对比工程模糊关系系数表 3-7”，用上述步骤与方法估算欲估工程“K_{13}”的土建单方造价。

列出对比工程的模糊子集，按查德记号为：已知典型工程：

$$\underset{\sim}{T}_{c_1} = 1/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.8/t_4 + 1/t_5 + 1/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{c_2} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 1/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{c_3} = 0.8/t_1 + 0.3/t_2 + 0.5/t_3 + 0.7/t_4 + 0.9/t_5 + 0.9/t_6$$

$$\underset{\sim}{T}_{c_4} = 0.95/t_1 + 1/t_2 + 1/t_3 + 0.95/t_4 + 1/_5 + 0.8/t_6$$

欲估工程：

$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} = 0.9/t_1 + 0.4/t_2 + 0.5/t_3 + 0.35/t_4 + 0.8/t_5 + 0.8/t_6$$

计算欲估工程“K_{13}”与已知典型工程的贴近度：

$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \otimes \underset{\sim}{T}_{c_3} = (0.9 \wedge 1) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1) \vee (0.35 \wedge 0.8) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 1)$$

$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.35 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$

$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \odot \underset{\sim}{T}_{c_1} = (0.9 \vee 1) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1)$$
$$\wedge (0.35 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 1)$$
$$= 1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 1 \wedge 1 = 0.8$$
$$(\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_1}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55, \because \underset{\sim}{T}_{c_1} = 1 \cdots ③$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \otimes \underset{\sim}{T}_{c_2} = (0.9 \wedge 0.9) \vee (0.4 \wedge 0.4) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.35 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8) \vee (0.8 \vee 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.35 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \odot \underset{\sim}{T}_{c_2} = (0.9 \vee 0.9) \wedge (0.4 \vee 0.4) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.35 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$
$$= 0.9 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 1 \wedge 0.8 \wedge 0.8 = 0.4$$
$$(\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_2}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.4)] = 0.75 \qquad \cdots ①$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \otimes \underset{\sim}{T}_{c_3} = (0.9 \wedge 0.8) \vee (0.4 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.5)$$
$$\vee (0.35 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.9)$$
$$= 0.8 \vee 0.3 \vee 0.5 \vee 0.35 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.8$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \odot \underset{\sim}{T}_{c_3} = (0.9 \vee 0.8) \wedge (0.4 \vee 0.3) \wedge (0.5 \vee 0.5)$$
$$\wedge (0.35 \vee 0.7) \wedge (0.8 \vee 0.9) \wedge (0.8 \vee 0.9)$$
$$= 0.9 \wedge 0.4 \wedge 0.5 \wedge 0.7 \wedge 0.9 \wedge 0.9 = 0.4$$
$$(\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = \frac{1}{2}[0.8 + (1 - 0.4)] = 0.7 \qquad \cdots ②$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \otimes \underset{\sim}{T}_{c_4} = (0.9 \wedge 0.95) \vee (0.4 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 1)$$
$$\vee (0.35 \wedge 0.95) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.8)$$
$$= 0.9 \vee 0.4 \vee 0.5 \vee 0.35 \vee 0.8 \vee 0.8 = 0.9$$
$$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} \odot \underset{\sim}{T}_{c_4} = (0.9 \vee 0.95) \wedge (0.4 \vee 1) \wedge (0.5 \vee 1) \wedge$$

$$(0.35 \vee 0.95) \wedge (0.8 \vee 1) \wedge (0.8 \vee 0.8)$$
$$= 0.95 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 0.95 \wedge 1 \wedge 0.8 = 0.8$$

$$(\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = \frac{1}{2}[0.9 + (1 - 0.8)] = 0.55, \because T_{c_4} = 0.98$$

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 244.43$ 元/m^2；$E_2 = 240.07$ 元/m^2；$E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 1$

$$\lambda_{k_{13}} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.65}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.65}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.65}{1} - 1\right)\right] = 0.922$$

估算造价：$e^*_{k_{13}} = 0.922[0.75 \times 244.43 + 0.7 \times 240.07 \times (1 - 0.75) + 0.55 \times 294.21(1 - 0.75) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(244.43 + 240.07 + 294.21)(1 - 0.75)(1 - 0.7)(1 - 0.55)]$

$= 0.922[183.32 + 42.01 + 12.14 + 8.76]$

$= 0.922 \times 246.23 = 227.02$ 元/m^2

3. 检验欲估工程“K_{13}”所估算造价的可信性，即把所求得的欲估工程造价 227.02 元/m^2 作为已知，重复上述步骤再次检验各典型工程的精度：

（1）检验典型工程“C_1”的精度

$$(\underset{\sim}{T}_{c_1}, \underset{\sim}{T}_{c_2}) = 0.45$$

$$(\underset{\sim}{T}_{c_1}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.55, \because \quad (\underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.71 \qquad \cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T}_{c_1}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = 0.53 \qquad \cdots③$$

$(\underset{\sim}{T}_{c_1}, \underset{\sim}{T}_{k_{13}}) = (\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_i}) = 0.55$，$\because (\underset{\sim}{T}_{k_{13}}) = 0.65$…②

为此：

$\alpha_1 = 0.55$；　　$\alpha_2 = 0.55$；　　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 240.07$ 元/m²；$E_2 = 227.02$ 元/m²；$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{\alpha_1} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_2} = 0.65$；　　$\underset{\sim}{T}_{\alpha_3} = 0.98$

$$\lambda_{c_1} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{1}{0.71} - 1\right) + 0.8\left(\frac{1}{0.65} - 1\right) + 0.4\left(\frac{1}{0.98} - 1\right)\right] = 1.2$$

估算造价：$e^*_{c_1} = 1.2[0.55 \times 240.07 + 0.55 \times 227.02 \times (1 - 0.55) + 0.53 \times 286.16(1 - 0.55) \times (1 - 0.55) + \frac{1}{3}(240.07 + 227.02 + 286.16)(1 - 0.55)(1 - 0.55)(1 - 0.53)]$

$= 1.2[132.04 + 56.19 + 30.71 + 23.9]$

$= 1.2 \times 242.84 = 291.41$ 元/m²

精度：$\frac{294.21 - 291.41}{294.21} \times 100\% = 0.95\% < 5\%$（行）

（2）检验典型工程“C_2”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{c_2}, \underset{\sim}{T}_{c_1}) = 0.45$、

$(\underset{\sim}{T}_{c_2}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.7$　　……②

$(\underset{\sim}{T}_{c_2}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = 0.58$　　……③

$(\underset{\sim}{T}_{c_2}, \underset{\sim}{T}_{k_{13}}) = (\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_2}) = 0.75$　　……①

为此：

$\alpha_1 = 0.75$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.58$

$E_1 = 227.02$ 元/m²；$E_2 = 240.07$ 元/m²；$E_3 = 286.16$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.65$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.71$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_3} = 0.98$

$$\lambda_{c_2} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.76}{0.65} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.76}{0.71} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.76}{0.98} - 1\right)\right] = 1.045$$

估算造价：$e_{c_2}^{*} = 1.045[0.75 \times 227.02 + 0.7 \times 240.07 \times (1 - 0.75) + 0.58 \times 286.16(1 - 0.75) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(227.02 + 240.07 + 286.16)(1 - 0.75)(1 - 0.7)(1 - 0.58)]$

$= 1.045[170.27 + 42.01 + 12.45 + 7.91]$

$= 1.045 \times 232.64 = 243.11$ 元/m²

精度：$\frac{244.43 - 243.11}{244.43} \times 100\% = 0.54\% < 5\%$（行）

（3）检验典型工程“C_3”的精度

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{c_1}) = 0.55$　　…③

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{c_2}) = 0.7$，∵　$(\underset{\sim}{T}_{c_2}) = 0.76$　　…①

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{c_4}) = 0.5$

$(\underset{\sim}{T}_{c_3}, \underset{\sim}{T}_{k_{13}}) = (\underset{\sim}{T}_{k_{13}}, \underset{\sim}{T}_{c_3}) = 0.7$，∵　$\underset{\sim}{T}_{k_{13}} = 0.65$…②

为此：

$\alpha_1 = 0.7$；　　$\alpha_2 = 0.7$；　　$\alpha_3 = 0.55$

$E_1 = 244.43$ 元/m²；$E_2 = 227.02$ 元/m²；$E_3 = 294.21$ 元/m²

$\underset{\sim}{T}_{a_1} = 0.76$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_2} = 0.65$；　　$\underset{\sim}{T}_{a_3} = 1$

$$\lambda_{c_3} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.71}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.71}{0.65} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.71}{1} - 1\right)\right] = 0.97$$

估算造价：$e^*_{c_3} = 0.97[0.7 \times 244.43 + 0.7 \times 227.02 \times (1 - 0.7) + 0.55 \times 294.21(1 - 0.7) \times (1 - 0.7) + \frac{1}{3}(244.43 + 227.02 + 294.21)(1 - 0.7)(1 - 0.7)(1 - 0.55)]$

$= 0.97[171.1 + 46.67 + 14.56 + 10.34]$

$= 0.97 \times 242.67 = 235.39$ 元 /m^2

精度：$\frac{240.07 - 235.39}{240.07} \times 100\% = 1.95\% < 5\%$（行）

(4) 检验典型工程“C_4”的精度

$$(\underset{\sim}{T_{c_4}}, \underset{\sim}{T_{c_1}}) = 0.53 \quad \cdots\cdots③$$

$$(\underset{\sim}{T_{c_4}}, \underset{\sim}{T_{c_2}}) = 0.58 \quad \cdots\cdots①$$

$$(\underset{\sim}{T_{c_4}}, \underset{\sim}{T_{c_3}}) = 0.5$$

$$(\underset{\sim}{T_{c_4}}, \underset{\sim}{T_{k_{13}}}) = (\underset{\sim}{T_{k_{13}}}, \underset{\sim}{T_{c_4}}) = 0.55 \quad \cdots\cdots②$$

为此：

$\alpha_1 = 0.58$；　$\alpha_2 = 0.55$；　$\alpha_3 = 0.53$

$E_1 = 244.43$ 元/m^2；$E_2 = 227.02$ 元/m^2；$E_3 = 294.21$ 元/m^2

$\underset{\sim}{T_{a_1}} = 0.76$；　$\underset{\sim}{T_{a_2}} = 0.65$；　$\underset{\sim}{T_{a_3}} = 1$

$$\lambda_{c_4} = 1 + \frac{1}{6}\left[1.8\left(\frac{0.98}{0.76} - 1\right) + 0.8\left(\frac{0.98}{0.65} - 1\right) + 0.4\left(\frac{0.98}{1} - 1\right)\right] = 1.15$$

估算造价：$e_{C_4}^{*} = 1.15[0.58 \times 244.43 + 0.55 \times 227.02 \times (1-0.58) + 0.53 \times 294.21(1-0.58) \times (1-0.55) + \frac{1}{3}(244.43 + 227.02 + 294.21)(1-0.58)(1-0.55)(1-0.53)]$

$= 1.15[141.77 + 52.44 + 29.47 + 22.67]$

$= 1.15 \times 246.35 = 283.3$ 元/m^2

精度：$\frac{286.16 - 283.3}{286.16} \times 100\% = 1\% < 5\%$（行）

结论：经验算结果各典型工程全都符合精度要求，都在±5%范围内，故、欲估工程“K_{13}”的估算上建单方造价为227.02元/m^2是可信的。

第七节 电 算 方 法

从以上快速估算的步骤和工程实例可看出，在计算过程中有很多可避免的重复计算过程，运用手算就显得很繁，比较啰嗦，容易出错，同时费时；若改用先进的计算工具——电子计算机来算，它是最不怕重复的，既省事又准确，计算速度很快，几分钟就可出结果。

目前电子计算机的种类繁多，在这里选用了*PC*-1500袖珍电子计算机，因为，它体积巧小，携带方便，价格低廉，功能比较接近于微型电脑，近来又有更新的型号*PC*-1500*A*（日本原型为*PC*-1501）问世。功能更全，配上附加的外围设备和扩展装置后，其功能可以进一步扩大。不要求特殊的机房条件，不需要专门的维护人员。因此，近年来这种计算机在我国得到相当广泛的采用。对我们建筑企业用于招标投标快速报价尤为适合。用计算机完成前面的计算过

程，既快速又可避免人为差错。为此，和赵锡钱老师配合设计了袖珍计算机（SHARP PC-1500）的计算程序。

一、算法

由于电算速度快，可以对前述方法作如下修改：

（一）从已知典型工程中找出可比工程。

通过大量的调查统计可以得到一系列典型工程的模糊关系系数集合。即工程的模糊子集事先将它们存入计算机。这些工程可属于不同的类型，在同类型工程中，每个工程所包含的模糊子集元素个数和项目也可以不同。所谓可比工程是指满足下列两个条件的工程：

1. 与欲估工程属于同一类型。

2. 其模糊子集项目包含欲估工程的项目。

显然只有可比工程才能作为估算的参考工程，因此，估算时首先从诸多典型工程中查出可比工程。

（二）在可比工程中找出合格的典型工程。

所谓合格的典型工程是指已知工程自身作估算时，估算结果与该工程竣工决算结果满足精度要求的典型工程，这一算法代替手算中典型工程精度检查步骤，通过这样找出的典型工程集合，显然能通过自身精度检查。

二、计算框图

见图 3-1。

三、程序输入数据格式

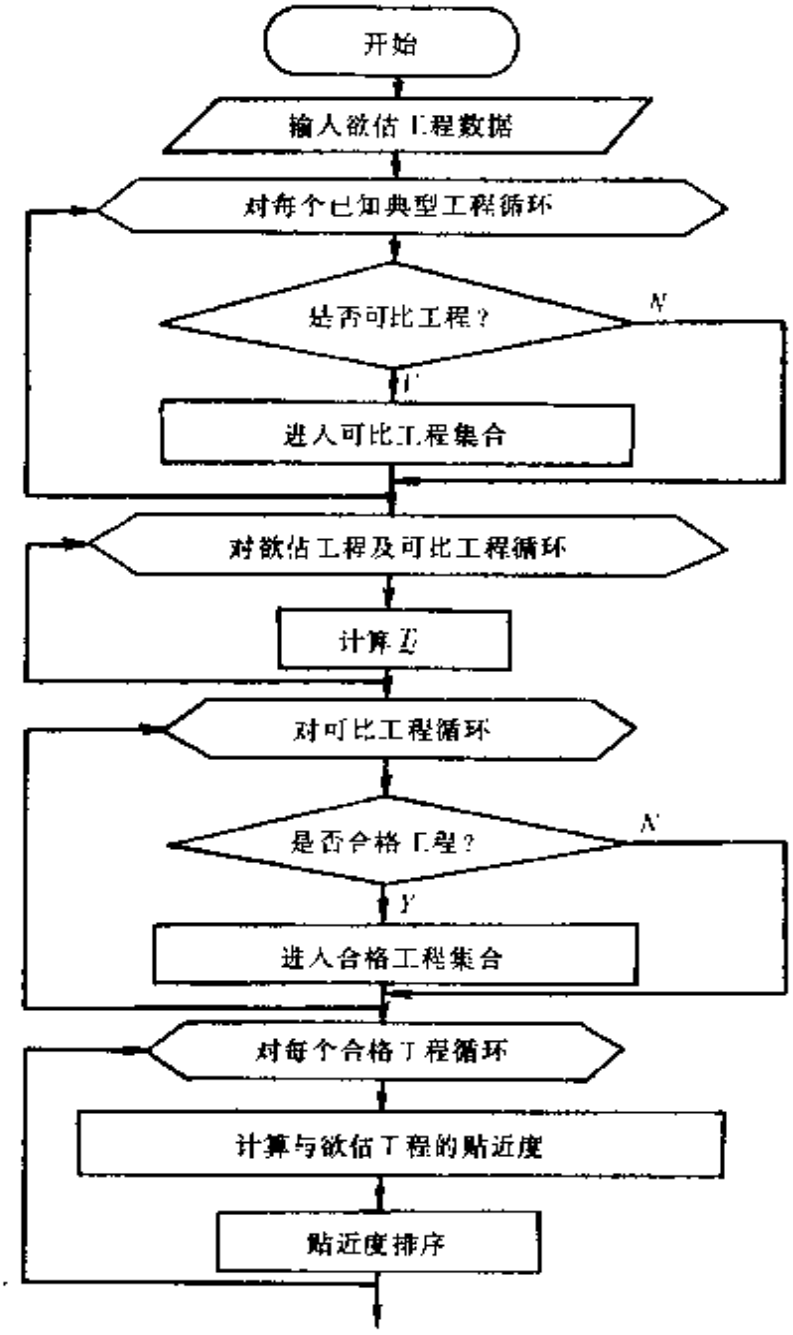
本程序在已知典型工程的数据库建立之后，只要输入欲估工程的原始数据。采用 DATA 语句输入，DATA 语句的行号必须是 3000 和 3001 两行，其输入格式为：

```
3000  DATALS,A,NB
3001  DATAXH,XJ, XS,……(三个数一组,共 NB 组)
```

注 1：各标识符的意义：

LS——欲估工程类型号；

A——欲估工程建筑面积；



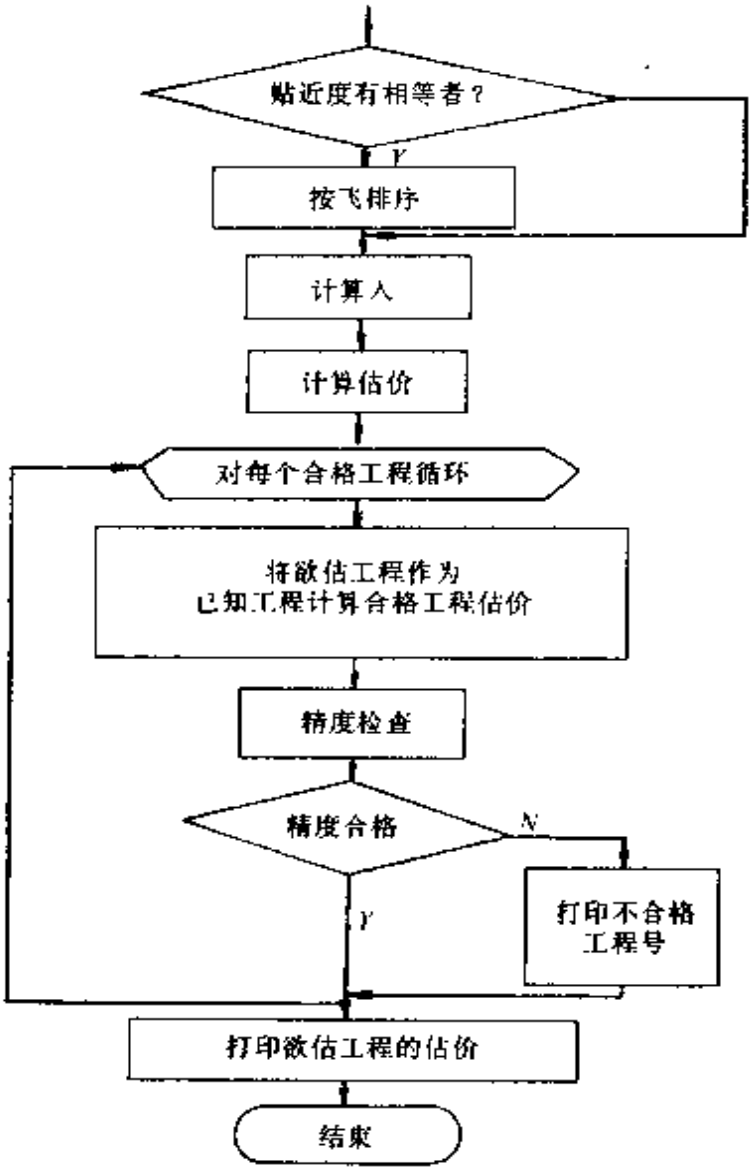


图 3-1　程序框图

NB——欲估工程模糊子集元素个数；

XH——模糊子集元素所属项目编号；

XJ——模糊子集元素所属的级别编号；

XS——模糊关系系数。

注 2：每个元素输 XH、XJ、XS 三个数，元素与元素间

的顺序不拘。

注 3：3001 行若写不下可以顺延。

四、输出结果说明

本程序的输出格式为：

GU JIA =×××、××××

R1 = ×、××× GONG CHENG: ×

TI(1) = ×、××××

R2 = ×、××× GONG CHENG: ×

TI(2) = ×、××××

R3 = ×、××× GONG CHENG: ×

TI(3) = ×、×××

其中：

GU JIA——欲估工程的单位面积估价；

R1、R2、R3——三个最高贴近度值。当贴近度相等时按 $\Sigma t_i/\max(\Sigma t_i)$ 排列；

GONG CHENG——三个最高贴近度的典型工程号；

TI(1)、TI(2)、TI(3)——三个最高贴近度典型工程的 $\Sigma t_i/\max(\Sigma t_i)$。

五、数据库建立方法

数据库由二类数据构成。第一类是存放每一类工程已知典型工程个数的数组；第二类是每个典型工程的有关数据。均用 DATA 语句存放。

第一类占据一行，行号为 11000，按本程序，应有 20 个数字。其顺序按工程类型编号。

第二类数据是可以扩充的数据，每个典型工程占两行，其行号规定了典型工程所属的工程类型号，也确定了该典型工程在本类工程中的编号（但这在计算中并不重要），行号

的计算方法为：

$$IR_1 = 10000 + I \times 1000 + JX_2 - 1$$

$$IR_2 = 10000 + I \times 1000 + JX_2$$

IR_1、IR_2 两行即为存放第 I 类工程中的第 J 个典型工程数据用。各行的内容为

IR_1：DATA LS，A，NB，ZJ

IR_2：DATA XH，XJ，XS，……（三个数一组，共 NB 组）

各标识符的意义可见输入数据说明，只增加 ZJ 表示典型工程单位面积造价。事实上，数据格式与欲估工程的输入数据完全一样。只需增加 ZJ 一项即可。

六、算例（题目同第六节工程实例（1）见表 3-2）

输入数据

```
3000  DATA  1, 2400, 5
3001  DATA  1, 1, 1.0, 3, 4, 0.95, 11, 1, 1.0,
            13, 1, 1.0, 4, 1, 1.0
```

输出结果：

GUJIA = 148.42

R_1 = 0.525(GONG CHENG : 3)

R_2 = 0.525(GONG CHENG : 2)

R_3 = 0.525(GONG CHENG : 4)

其中：GUJIA 为欲估工程估价；

R_1，R_2，R_3 为三个最大的贴近度，括号内为相应的工程号。

第八节　结　　语

造价快速估算方法的理论基础是模糊数学，而模糊数学

是一门崭新的学科，它诞生于1965年到现在仅有30几年的历史，我国的模糊数学研究开始于70年代中期，时间虽短但发展很快，几乎遍及理、工、农、医以及社会科学的各个领域。现在应用它来估算工程造价取代预算，这完全是可行的。问题是建立一个估测系统，大量的工作在于收集整理加工各种类型的典型工程的预决算资料，建立一个数据库。从技术上讲并无多大困难，困难在于如何确定工程特征向量和隶属函数，以及用数理统计方法计算调整系数，这需要有经验的预算工程人员和数学工作者相结合，对大量的工程进行分析研究、总结、提高，进一步深化，从中得出规律以达到预期的目的。典型工程数据库需随新型工程、新结构、新材料、新的施工方法的出现而不断补充。对估算工程进行回访，信息的反馈，把估算同实际工程造价进行比较，积累各类工程的估算误差，对估算进行调整，不断提高估算的精确度。

本书仅介绍了建筑工程造价的快速估算，因为本书搜集的资料仅是各已知典型工程造价方面的资料，所以算出的结果亦是造价。若搜集的是已知典型工程人、工、料方面的资料，则算出的结果当然就是相应的人、工、料方面的结果，其计算方法、步骤和应用的数学公式全同估算造价的一样。另外，以上例子所搜集的资料是80年代的工程造价资料，若要估算近代的造价，只需要利用当地的调价系数进行换算即可。这里主要是通过实例介绍这种新方法的原理和应用。

参 考 文 献

1 楼世博，孙章，陈化成编著．模糊数学．北京：科学出版社，1983

2 汪培庄．模糊集合论及其应用．上海：上海科技出版社，1983

3 王祯显编著．土木建筑工程管理中的模糊数学方法．长沙：湖南大学出版社，1988

4 闵珊华，贺仲雄编．懂一点模糊数学．北京：中国青年出版社，1985

5 青义学编著．模糊数学入门．北京：知识出版社，1987

6 冯德益，楼世博等编著．模糊数学方法与应用．北京：地震出版社，1983

7 贺仲雄编．模糊数学及其应用．天津：天津科学技术出版社，1983

8 浅居喜代治等著，赵汝怀译．模糊系统理论入门．北京：北京师范大学出版社，1982

9 陈国权编著．模糊数学在经济管理中的应用．合肥：安徽科学技术出版社，1987

10 王祯显．模糊数学在土建工程中招标投标的应用．中国土木工程学报，1986年第2期

11 孙世魁．投标报价方法．学术交流论文，1984