近海结构水动力学

李远林 编



华南理工大学出版社

普通高等学校推荐教材

近海结构水动力学

李远林　编

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书讨论了海洋环境中近海结构的受力和运动问题。内容包括：近海结构水动力分析中常用的数学公式；波浪理论；作用在小构件、大型结构上的波浪力的计算方法；海岸工程中面临的特殊波浪形态；典型近海漂浮结构的动力分析；随机海浪及结构极值响应问题等。其中，着重介绍了目前世界上关于近海结构受力和运动问题的几种流行的理论和计算方法，为读者进一步的深入了解打下基础。

本书适合于海洋工程、港航工程和船舶工程等专业的学生、教师及相关领域的工程技术人员学习参考。

图书在版编目（CIP）数据

近海结构水动力学 / 李远林编 . —广州：华南理工大学出版社，

ISBN

Ⅰ . 近…
Ⅱ . 李…
Ⅲ . 海洋动力学
Ⅳ . P

华南理工大学出版社出版发行
广州五山 邮编
责任编辑 王魁葵
各地新华书店经销
华南理工大学印刷厂印装

*

年 月第 版 年 月第 次印刷
开本： 印张： 字数： 千
印数： 册
定价： 元

前　言

本书将讨论海洋环境中近海结构的受力和运动问题。这是海洋工程领域最为基本、也最为繁难的专题。它所涉及的问题是如此广泛，以致于不可能在一本书中包含所有方面。同时，海洋工程本身还是近几十年内才发展起来的学科，由于社会需要而发展迅速，迄今仍有不少课题需要进一步研究或正向深层开发。因此，本书在内容选择上，主要考虑近海结构设计的应用领域，而那些正在探讨的和过于高深的理论问题就不得不有所取舍。然而，为了使读者学习时尽可能少花时间翻阅其他参考书，本书将尽可能保持完整的系统，所选专题也将给出较为详细的推导，以便读者对其有一个基本的了解。

本书分为八章。第一章简略介绍书中经常要用到的数学公式，包括 [illegible] 级数和 [illegible] 变换、双曲函数、贝塞尔函数和椭圆函数等。第二章是波浪理论部分。如上所述，我们的目标是应用，这里仅提供近海结构设计计算中应用最多的波浪理论，如线性波理论、[illegible] 波理论、椭余波理论和流函数理论。为便于应用，还专门讨论了各种理论的适用范围和选取原则。第三章论述作用在小构件上的波浪力问题。计算作用在小构件上波浪力的最通用公式是 [illegible] 公式，此公式简单直观，因而深得工程技术人员的欢迎，但存在如何选取系数的问题。本章专门讨论了各类构件相应的水动力系数的取值问题。第四章叙述了计算作用在大型结构上的波浪力的各种方法。从 [illegible] 方法（类似于小构件时的 [illegible] 方程）到 [illegible] 函数方法，详细介绍了各种形状结构上所受波浪力的计算方法，并讨论了大小构件上波浪力公式的适用性。第五章讨论海岸工程中面临的特殊波浪形态，涉及波浪浅水变形、港池共振等。鉴于直墙式防波堤是海岸工程中的典型设施，虽属固定结构，但其波浪力的计算有其特殊性，因此，特别从工程角度讨论了直墙式防波堤上波浪力的计算问题。第六章主要通过对几个典型近海漂浮结构的动力分析，讨论相应运动微分方程的解，多数都提供了与试验结果的比较，讨论了理论分析的适用性。由于所选的几个专题都是海洋工程中的常用系统，因此，本章所列结果和结论，对工程设计具有较高参考价值。第七章论述了随机海浪问题，通过对不规则波观测的讨论，引入平稳各态历经的随机现象的统计分析方法，介绍了不规则波的表达、谱分析方法及不规则波的统计特征等。第八章主要介绍了近海结构设计中人们普遍关心的极值响应的计算问题，用谱分析的方法讨论了线性系统的响应特性、扰动输入与响应输出之间的函数关系，给出了短期预报的极值估算方法，以及长期概率统计预报。

本书是为海洋工程、港航工程和船舶工程等专业高年级学生编写的。然而，其中也包含了个别较为高深的课题，例如，二阶力的计算问题，适于研究生学习参考，本科生一般不作要求。书中编入大量图表，可供实际工作时直接参考选用。因此，对相关领域的工程技术人员亦有参考价值。

大连理工大学李玉成教授主审本书，提供了许多宝贵的建议和具体修改意见。高峰同志完成了本书初稿的电脑打字工作。特此致谢。

李远林

[illegible] 年 [illegible] 月

编者按：

本书编写时参考选用的相关外文资料中，仍有不少图例沿用英制，这些英制单位均为我国已废除的非法定计量单位，为保持原始资料的准确性，对这些非法定计量单位予以保留，以下特列出它们与法定计量单位的换算关系。

员越园圆远原愿
员越园圆远原愿
员越园圆远原愿
员越园圆远原愿

目　　录

第一章　数学基础…… 员
　第一节　云朵飘飘级数和 云朵飘飘变换 …… 员
　　一、云朵飘飘级数 …… 员
　　二、云朵飘飘变换 …… 猿
　第二节　双曲函数和三角函数…… 缘
　　一、双曲函数的定义及图形特征 …… 缘
　　二、复数形式的三角函数 …… 远
　第三节　贝塞尔函数…… 远
　第四节　椭圆函数…… 苑
第二章　波浪理论…… 怨
　第一节　势函数及其遵循的规律…… 怨
　　一、线性基础方程 …… 怨
　　二、月亮出来喽方程 …… 员园
　　三、边界条件 …… 员园
　第二节　线性波理论 …… 员员
　　一、表面条件的线性化 …… 员员
　　二、线性化边值问题的分离变量解 …… 员员
　　三、几个特征量 …… 员源
　　四、波浪水质点速度和加速度 …… 员缘
　　五、水质点的位移 …… 员远
　　六、动压力 …… 员苑
　　七、深水与浅水的简化公式 …… 员苑
　　八、波能、波能流和波群速度 …… 员怨
　第三节　斯托克斯波理论 …… 圆员
　　一、二阶斯托克斯波 …… 圆圆
　　二、五阶斯托克斯波 …… 圆缘
　第四节　椭余波理论 …… 圆苑
　　一、概述…… 圆苑
　　二、主要结果 …… 圆苑
　第五节　流函数波理论 …… 猿员
　第六节　驻波理论 …… 猿缘
　第七节　理论的适用性 …… 猿远
第三章　作用在小结构上的波浪力 …… 源员
　第一节　波浪力的表述 …… 源员

第二节　[illegible]方程 …… [illegible]
一、[illegible]方程的标准形式 …… [illegible]
二、[illegible]方程的几种修正形式 …… [illegible]
三、确定系数的试验方法 …… [illegible]
第三节　横向力 …… [illegible]
第四节　水动力系数 …… [illegible]
一、光滑柱体 …… [illegible]
二、粗糙柱体 …… [illegible]
三、倾斜柱体 …… [illegible]
四、墙面作用的影响 …… [illegible]
五、结构相互作用的影响 …… [illegible]
第五节　系数的选择问题 …… [illegible]
一、检验方法的指导原则 …… [illegible]
二、海上试验 …… [illegible]
三、实验室系数在设计中的应用 …… [illegible]
第六节　自由表面的影响 …… [illegible]
第四章　作用在大型结构上的波浪力 …… [illegible]
第一节　[illegible]力 …… [illegible]
一、水平柱体 …… [illegible]
二、水平半柱体 …… [illegible]
三、球 …… [illegible]
四、半球 …… [illegible]
五、垂直柱体 …… [illegible]
六、矩形箱体 …… [illegible]
七、圆盘 …… [illegible]
八、[illegible]力的系数 …… [illegible]
九、例 …… [illegible]
第二节　绕射理论 …… [illegible]
一、完整的边值问题提法 …… [illegible]
二、脉动展开方法 …… [illegible]
三、作用在结构上的波浪力 …… [illegible]
第三节　解析形式的解 …… [illegible]
一、大型固定垂直柱体 …… [illegible]
二、坐底水平半柱体 …… [illegible]
三、坐底半球 …… [illegible]
四、垂直柱体群 …… [illegible]
第四节　绕射理论的数值方法 …… [illegible]
一、二维源汇方法 …… [illegible]
二、三维源汇方法 …… [illegible]

第五章　海岸工程中的波浪问题……
第一节　波浪的浅水变形……
一、波浪的折射 ……
二、近岸波高的变形 ……
三、波浪的绕射 ……
四、缓坡方程 ……
第二节　港池的共振……
一、港池共振的数学模型 ……
二、港池波面的响应函数的数值计算 ……
三、矩形港池的振动波 ……
第三节　直墙式防波堤上的波浪力……
一、直墙式防波堤上波压力公式 ……
二、破碎波的波压力公式 ……
第六章　漂浮结构动力学……
第一节　漂浮结构运动概述……
一、线性势流理论问题的描述 ……
二、作用在结构上的水动力 ……
三、波浪中结构的运动方程 ……
第二节　单自由度系统……
一、临界阻尼系数和阻尼因子 ……
二、强迫振荡方程的解 ……
三、铰接平台的分析 ……
第三节　铰接装卸平台—油轮系统……
第四节　锚链系泊系统……
一、一般模型 ……
二、悬链线方程和锚链系泊力 ……
第五节　二阶力和低频波浪阻尼……
一、二阶波浪力的积分方法 ……
二、低频漂移阻尼 ……
三、波浪漂移阻尼的一种切片理论方法 ……
第七章　随机波浪……
第一节　海浪的观测与描述……
一、海浪是随机现象 ……
二、随机变量的描述 ……
三、不规则波的观测和描述 ……
第二节　不规则波的表达……
第三节　不规则波的统计特征……
一、有义波高 ……
二、平均波浪周期 ……

第四节　波谱…… 员源
一、月球表面重力异常波谱 …… 员源
二、陨石坑波谱 …… 员源
三、月震引起月球表面震动加速度谱（月震谱） …… 员源
四、陨石坑波谱 …… 员怨
五、能量分布密度谱 …… 员怨
六、文圣常谱 …… 员园
第五节　实测海浪分析…… 员员
一、各态历经随机过程的自相关函数 …… 员员
二、各态历经随机过程的谱分析 …… 员园
三、谱密度函数估算的相关函数法…… 员园
第八章　不规则波中的结构响应…… 员园
第一节　线性系统和谱分析…… 员园
一、线性系统 …… 员园
二、脉冲响应 …… 员源
三、频率响应函数和响应谱 …… 员怨
第二节　短期预报…… 员员
一、随机波浪的谱密度 …… 员员
二、不规则波中的运动统计 …… 员源
三、极值问题 …… 员远
第三节　长期预报…… 员怨
一、波浪的长期分布数据 …… 员怨
二、长期分布概率…… 员怨
三、长期极值估算…… 员园
参考文献…… 员园

第一章　数学基础

本书涉及海洋波及其与近海结构相互作用问题，所选专题面临一些专门的数学知识。为便于读者学习本书时复习和查阅，特把其中用得较多的内容集中介绍如下。

第一节　三角级数和傅里叶变换

一、三角级数

三角级数（傅里叶）级数是三角函数的无穷级数。鉴于三角函数的周期性质，傅里叶级数在海洋波问题以及其他周期性物理现象中占有特殊的位置。例如，可用它作为复杂海洋波的一种简单表述。如果函数 $f(x)$ 定义在闭区间 $-l\leqslant x\leqslant l$ 上，周期为 $2l$，且绝对可积，那么，$f(x)$ 能用三角级数近似地表示如下：

$$f(x)\sim \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right) \tag{1.1.1}$$

考虑到三角函数的正交性：

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ l, & m=n\neq 0\\ 2l, & m=n=0\end{cases}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\cos\frac{m\pi x}{l}\,dx=0$$

式（1.1.1）中系数 a_n 和 b_n 可根据积分得到：

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{1.1.2}$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \tag{1.1.3}$$

注意：区间可选为 $c\leqslant x\leqslant c+2l$，此时，上述方程中的 $-l$ 换成 c，l 换成 $c+2l$。如果 $f(x)$ 是在区间 $-\pi\leqslant x\leqslant\pi$ 上的偶函数，那么

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \tag{1.1.4}$$

$$b_n=0 \tag{1.1.5}$$

若 $f(x)$ 在此区间上是奇函数，可以得到类似的简化。

方程（1.1.1）中的余弦项和正弦项可以用振幅和相角合并为单一正弦或余弦级数。如：

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(nx+\alpha_n) \tag{1.1.6}$$

其中

$$A_0=a_0,\quad A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2} \tag{1.1.7}$$

如果 枣(曾)定义限为 原蕴≤ 曾≤ 蕴 则可改变变量使 枣(曾) 的傅里叶级数表示为：

$$枣(曾)\ 越\frac{葬_{圆}}{圆}垣\sum_{灶越员}^{肆}\left(葬_{灶}\cos\frac{灶\pi 曾}{蕴}垣遭_{灶}\sin\frac{灶\pi 曾}{蕴}\right)$$

其中

$$葬_{灶}越\frac{员}{蕴}\int_{原蕴}^{蕴}枣(曾)\cos\frac{灶\pi 曾}{蕴}\mathrm{d}曾$$

$$遭_{灶}越\frac{员}{蕴}\int_{原蕴}^{蕴}枣(曾)\sin\frac{灶\pi 曾}{蕴}\mathrm{d}曾$$

类似地，如果函数 枣(曾)为在区间 原栽/圆≤ 贼≤ 栽/圆上具有周期 栽的周期函数，则

$$曾越\frac{圆}{栽}贼越\omega_{园}贼$$

式中，$\omega_{园}$越圆/栽为函数基频。将上式代入方程 (员)便可得出：

$$枣(贼)\ 越\frac{葬_{圆}}{圆}垣\sum_{灶越员}^{肆}\left(葬_{灶}\cos灶\omega_{园}贼垣遭_{灶}\sin灶\omega_{园}贼\right)$$

此时，$葬_{灶}$和 $遭_{灶}$定义为

$$葬_{灶}越\frac{圆}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}枣(贼)\cos灶\omega_{园}贼\,\mathrm{d}贼$$

$$遭_{灶}越\frac{圆}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}枣(贼)\sin灶\omega_{园}贼\,\mathrm{d}贼$$

例 员 定义

$$枣(曾)\ 越\begin{cases}员 & 园约 曾约 葬/圆\\ 原员 & 葬/圆约 曾约 葬\end{cases}$$

试写出函数 枣(曾)的傅里叶级数表达式。

解 可以认为 枣(曾) 关于 曾越园对称，并且是周期为 葬的周期函数，见图 员 于是，

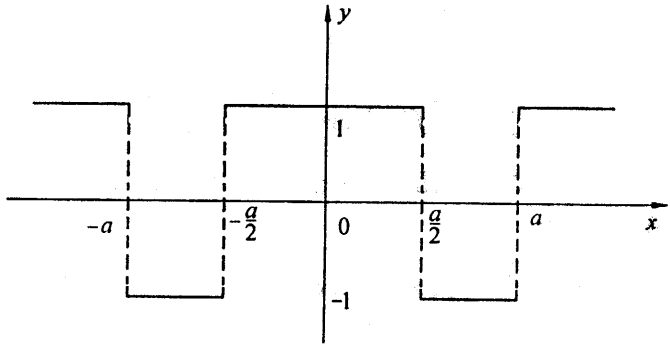


图 员

我们有一个偶函数,并且

$$遭_{灶}越园$$

圆

葬园越 圆/葬园 员 崔曾垣 圆/葬葬/圆 原员 崔曾越园 员预预

葬灶越 圆/葬葬园 员 精释灶葬 崔曾垣 圆/葬葬/圆 原员 精释灶葬 曾崔曾越 源/灶灶 藻灶圆 员预预

当 灶为偶数时，葬灶越园 于是

$$葬_{园灶员} 越 \frac{源}{\pi}\left[\frac{原员^{灶}}{园灶垣员}\right]，灶越园员圆\cdots$$

因此，函数 枣(曾)傅里叶级数的表达式为

$$枣(曾) 越 \frac{源}{\pi}\sum_{灶越园}^{肆} 原员^{灶}\frac{员}{园灶垣员} 精释\frac{园灶垣员 曾}{葬} \qquad 员预园园$$

二、云操规则级数的变换

云操规则级数可用复数形式表示。根据欧拉公式

$$藻^{凿} 越 精释 垣 蚤躁灶$$

式 员预园员)可写成

$$枣(曾) 越 \frac{葬_{园}}{圆} 垣 \sum_{灶越员}^{肆} \left(葬_{灶} 原 蚤躁灶\right) 藻^{灶\omega_{园}曾\sqrt{-}} 垣 \frac{员}{圆}\sum_{灶越员}^{肆}\left(葬_{灶} 垣 蚤躁灶\right) 藻^{-灶\omega_{园}曾\sqrt{-}} \qquad 员预园员$$

令 云灶越 (葬灶原蚤躁灶)/圆 云原灶越 (葬灶垣蚤躁灶)/圆 则

$$云_{灶} 越 \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(贼) 精释灶\omega_{园}贼 原 蚤躁灶\omega_{园}贼 澡贼$$

$$越 \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(贼) 藻躁灶\omega_{园}贼 澡贼$$

$$云_{原灶} 越 \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(贼) 精释灶\omega_{园}贼 垣 蚤躁灶\omega_{园}贼 澡贼$$

$$越 \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(贼) 藻躁灶\omega_{园}贼 澡贼$$

又令 云园越葬园/圆 则式 员预园员)可写成

$$枣(贼) 越 云_{园} 垣 \sum_{灶越员}^{肆} 云_{灶} 藻^{灶\omega_{园}贼\sqrt{-}} 垣 \sum_{灶越员}^{肆} 云_{原灶} 藻^{-灶\omega_{园}贼\sqrt{-}} 越 \sum_{灶越原肆}^{肆} 云_{灶} 藻^{灶\omega_{园}贼\sqrt{-}} \qquad 员预园园$$

而

$$云_{灶} 越 \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(贼) 藻^{-灶\omega_{园}贼\sqrt{-}} 澡贼 \qquad 灶越园 依员 依圆 \cdots \qquad 员预园猿$$

设函数 枣(贼)在 (原肆，肆)区间上绝对可积，它可以作为 云操规则级数在周期 栽→肆 时的极限情形。因为 满足约栽/圆时，枣(贼)可用级数式 员预园园)表示，把系数 云灶的表达式 员预园猿)代入式 员预园园)，则

$$枣(贼) 越 \sum_{灶越原肆}^{肆} 藻^{灶\omega_{园}贼\sqrt{-}} \frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆} 枣(忆) 藻^{-灶\omega_{园}忆\sqrt{-}} 澡忆 \qquad 员预园原$$

将级数中的 灶ω园看作参数 ω 在区间 (原肆，肆)中的间断值，即

$$\omega_{灶} 越 灶\omega_{园} 越 圆灶/栽 \qquad 灶越依员 依圆 \cdots$$

不失一般性，令 ω园越园 △ω灶越ω灶垣员原ω灶越圆/栽 则 员预园原)式变为

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(j\omega_k)e^{j\omega_k t}\Delta\omega_k$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

当 $\Delta\omega_k\to d\omega$，$\omega_k\to\omega$。这样

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

令

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt \qquad (5.1.3)$$

则有

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \qquad (5.1.4)$$

式 (5.1.3) 和式 (5.1.4) 是两个 [illegible] 积分，亦称 [illegible] 变换。通常称式 (5.1.3) 为 [illegible] 正变换，式 (5.1.4) 称为逆变换或 [illegible] 变换的反演公式。

[illegible] 变换具有一些重要性质，灵活应用可较快地求出许多复杂信号的频谱，或反求出频谱的原时间历程。

1. 叠加性质：$a_1x_1(t)+a_2x_2(t)\longleftrightarrow a_1X_1(j\omega)+a_2X_2(j\omega)$

2. 时延和频移性质：

   ①时延　$x(t-t_0)\longleftrightarrow X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$

   ②频移　$X(j(\omega-\omega_0))\longleftrightarrow x(t)e^{j\omega_0 t}$

3. 微商性质：

   ①时域　$\frac{d^n x(t)}{dt^n}\longleftrightarrow (j\omega)^n X(j\omega)$

   $(-jt)^n x(t)\longleftrightarrow \frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$

   ②频域　$\frac{dX(j\omega)}{d\omega}\longleftrightarrow (-jt)x(t)$

4. 时间比例性质：

$$x(at)\longleftrightarrow \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

5. 相乘和卷积：

若　$x_1(t)\longleftrightarrow X_1(j\omega)$，$x_2(t)\longleftrightarrow X_2(j\omega)$

则　$x_1(t)x_2(t)\longleftrightarrow X_1(j\omega)*X_2(j\omega)$

其中，$X_1(j\omega)*X_2(j\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}X_1(j\Omega)X_2(j(\omega-\Omega))d\Omega$ 称为 X_1 和 X_2 的卷积。

同样　$X_1(j\omega)X_2(j\omega)\longleftrightarrow x_1(t)*x_2(t)$

其中，$x_1(t)*x_2(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$ 称为 x_1 和 x_2 的卷积。

6. 能量性质：

若 $x(t)\longleftrightarrow X(j\omega)$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|X(j\omega)|^2d\omega$$

说明 $x(t)$ 的能量是它的各个简谐分量能量的总和。

源

第二节　双曲函数和三角函数

一、双曲函数的定义及图形特征

双曲正弦

$$\text{澡蚤灶}\,x=\frac{\text{员}}{\text{圆}}(\text{藻}^{x}-\text{藻}^{-x}) \qquad \text{员圆}$$

双曲余弦

$$\text{糟燥泽}\,x=\frac{\text{员}}{\text{圆}}(\text{藻}^{x}+\text{藻}^{-x}) \qquad \text{员圆}$$

双曲正切和余切

$$\text{贼葬灶}\,x=\frac{\text{澡蚤灶}\,x}{\text{糟燥泽}\,x},\quad \text{糟燥贼}\,x=\frac{\text{糟燥泽}\,x}{\text{澡蚤灶}\,x} \qquad \text{员圆}$$

它们的示意图见图 员圆

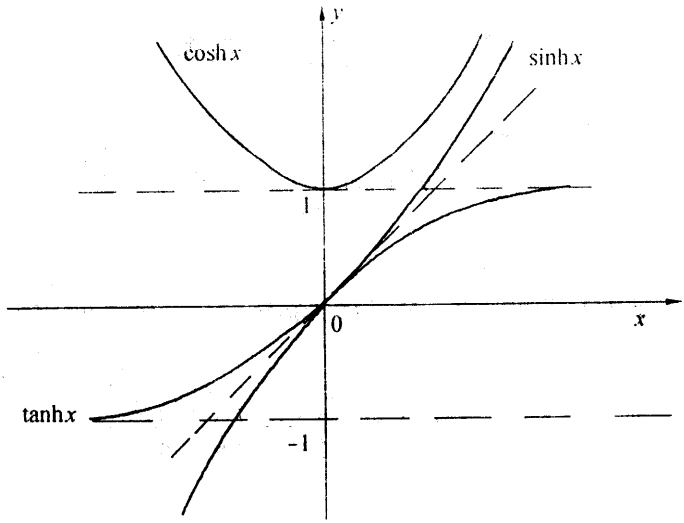


图 员圆

于是

$$\text{糟燥泽}^{\text{圆}}x-\text{澡蚤灶}^{\text{圆}}x=\text{员}$$

$$\text{澡蚤灶}(x\pm y)=\text{澡蚤灶}\,x\,\text{糟燥泽}\,y\pm\text{糟燥泽}\,x\,\text{澡蚤灶}\,y$$

$$\text{糟燥泽}(x\pm y)=\text{糟燥泽}\,x\,\text{糟燥泽}\,y\pm\text{澡蚤灶}\,x\,\text{澡蚤灶}\,y$$

展成级数形式

$$\text{澡蚤灶}\,x=x+\frac{x^{\text{猿}}}{\text{猿}!}+\frac{x^{\text{缘}}}{\text{缘}!}+\cdots \qquad \text{员圆}$$

$$\text{糟燥泽}\,x=\text{员}+\frac{x^{\text{圆}}}{\text{圆}!}+\frac{x^{\text{源}}}{\text{源}!}+\cdots \qquad \text{员圆}$$

二、复数形式的三角函数

三角正弦　　$\sin z=\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$　　（2.3.1）

三角余弦　　$\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$　　（2.3.2）

三角正切　　$\tan z=\dfrac{\sin z}{\cos z}=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$　　（2.3.3）

双曲函数与三角函数的关系：

$$\sin iz=i\sinh z$$　　（2.3.4）

$$\cos iz=\cosh z$$　　（2.3.5）

三角函数的级数展式

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots$$　　（2.3.6）

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots$$　　（2.3.7）

第三节　贝塞尔函数

贝塞尔函数是二阶微分方程

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2}+z\frac{dw}{dz}+(z^2-n^2)w=0$$　　（2.3.8）

的解。其通解可写成

$$w=C_1J_n(z)+C_2N_n(z)$$　　（2.3.9）

对于一切整数 n，其中 $J_n(z)$是第一类 n阶贝塞尔函数，$N_n(z)$是第二类 n阶贝塞尔函数。

$J_n(z)$可以用 z的无穷级数写成

$$J_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}$$　　（2.3.10）

根据这种关系，可以得出

$$J_{-n}(z)=(-1)^nJ_n(z)$$

$$J_{-n}(z)=\cos n\pi\,J_n(z)\quad n=0,1,2,\cdots$$　　（2.3.11）

第二类 n阶贝塞尔函数与第一类有如下关系：

$$N_n(z)=\begin{cases}\dfrac{J_n(z)\cos n\pi-J_{-n}(z)}{\sin n\pi} & n=0,1,2,\cdots\\ \lim\limits_{p\to n}\dfrac{J_p(z)\cos p\pi-J_{-p}(z)}{\sin p\pi} & n\neq 0,1,2,\cdots\end{cases}$$　　（2.3.12）

同样

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+iN_n(z)$$　　（2.3.13）

$$H_n^{(2)}(z)=J_n(z)-iN_n(z)\quad n=0,1,2,\cdots$$　　（2.3.14）

第一类汉开尔函数写成复数量

$$H_n^{(1)}(z)=J_n(z)+iN_n(z)$$　　（2.3.15）

远

而第二类汉开尔函数为 $H_n^{(2)}$ 的复数共扼。因此

$$H_n^{(2)}(x)=J_n(x)-\mathrm{i}Y_n(x) \tag{5.4.8}$$

完全适用于 J_n，Y_n，$H_n^{(1)}$ 和 $H_n^{(2)}$ 的递推关系用 H_n 写成如下形式：

$$H_{n-1}(x)+H_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}H_n(x) \tag{5.4.9}$$

$$H_{n-1}(x)-H_{n+1}(x)=2H_n'(x) \tag{5.4.10}$$

$$xH_{n-1}(x)+nH_n(x)=xH_{n-1}(x) \tag{5.4.11}$$

$$xH_{n-1}(x)-nH_n(x)=xH_{n-1}(x) \tag{5.4.12}$$

注意，上述关系同样适用于复变量。对复变量

$$J_n(\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}}z)=\mathrm{e}^{mn\pi\mathrm{i}}J_n(z) \tag{5.4.13}$$

$$Y_n(\mathrm{e}^{m\pi\mathrm{i}}z)=\mathrm{e}^{mn\pi\mathrm{i}}Y_n(z)+2\mathrm{i}\sin(mn\pi)\cot(m\pi)J_n(z) \tag{5.4.14}$$

经常要用到的其他关系有

$$J_n(z)H_{n+1}(z)-J_{n+1}(z)H_n(z)=\frac{2\mathrm{i}}{\pi z} \tag{5.4.15}$$

$$J_n(z)H_{n-1}(z)-J_{n-1}(z)H_n(z)=-\frac{2\mathrm{i}}{\pi z} \tag{5.4.16}$$

几个常用的含贝塞尔函数的无穷级数有

$$J_n(z+t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}J_k(z)J_{n-k}(t) \tag{5.4.17}$$

$$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(z)\cos(2k\theta) \tag{5.4.18}$$

$$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}J_{2k+1}(z)\sin[(2k+1)\theta] \tag{5.4.19}$$

$$\cos(z\cos\theta)=J_0(z)+2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^kJ_{2k}(z)\cos(2k\theta) \tag{5.4.20}$$

$$\sin(z\cos\theta)=2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kJ_{2k+1}(z)\cos[(2k+1)\theta] \tag{5.4.21}$$

$J_0(z)$，$J_1(z)$，$Y_0(z)$ 和 $Y_1(z)$ 的数值，可从一般数学手册中查到。

贝塞尔函数的积分形式为

$$J_n(z)=\frac{(z/2)^n}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{5.4.22}$$

或

$$J_n(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\sin^{2n}\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{5.4.23}$$

其中，$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$。

则

$$J_0(z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos(z\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta \tag{5.4.24}$$

第四节　椭圆函数

椭圆函数的名称源于求椭圆的周长。设椭圆的坐标为

$$x=a\sin\varphi,\quad y=b\cos\varphi \tag{5.4.25}$$

线段元 $\mathrm{d}s$ 为

[illegible]

[illegible]

其中，[illegible]。令 [illegible] 则线段长

[illegible] （[illegible]）

在式（[illegible]）中，有一个特殊积分

[illegible] （[illegible]）

常称为 [illegible] 椭圆函数，也称为第一类椭圆积分，其中 [illegible] 为小于 [illegible] 的常数。

[illegible] 椭圆函数的反函数为

[illegible]

称为椭圆正弦。它是一个周期函数，基本周期 [illegible] 和 [illegible]

[illegible] （[illegible]）

[illegible] （[illegible]）

式中，[illegible] 称为模；[illegible] 称为补模。[illegible] 运为全椭圆积分，或第一类全椭圆积分；[illegible] 为对应于补模的全椭圆积分，或第二类全椭圆积分。据此定义椭圆余弦：

[illegible] （[illegible]）

椭圆正切：

[illegible] （[illegible]）

以及

[illegible] （[illegible]）

[illegible] 统称为雅可比椭圆函数。

根据定义，容易看出雅可比椭圆函数之间存在如下基本关系

[illegible]

椭圆函数的导数和积分公式如下

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

第二章　波浪理论

波浪理论是流体力学最古老的分支之一，随着海岸、海洋工程和造船事业的发展而得到持续的发展。人们描述观测到的最简单波列时，一般用空间描述和时间描述两种方法。空间描述是某确定时刻波面升高的空间分布函数，而时间描述是某确定位置波面升高的时间历程。图 圆园员表示了这种典型波面描述情形。

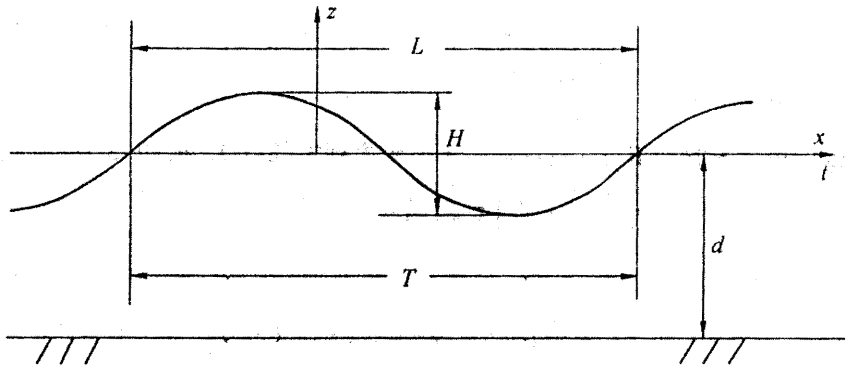


图 圆园员

典型的波列一般可用 匀、蕴 凿或 匀、栽 凿进行描述。其中，匀为波面相邻峰谷之间的垂向距离，称为波高；蕴为相邻二波峰之间的空间距离，称为波长；栽为相邻波峰经过定点的时间间隔，称为波周期；凿为未扰动水面到海底的垂向距离，称为水深。

波浪理论就是用流体力学的基本规律揭示水波运动的内在本质，如波浪场中的水质点速度分布和压力分布等，为海洋结构物设计时研究作用在结构上的波浪力、波浪引起的结构运动等提供理论基础。

第一节　势函数及其遵循的规律

在波浪理论中，假定研究的流体是理想、无旋、不可压缩的。流体力学已证明，无旋场与位势场是等价的。所谓无旋场就是流场速度分布满足其旋度为零的条件：

$$\nabla \times \vec{v} = 0$$

所谓位势场就是流域内存在一个空间分布的函数，是关于流场的空间位置唯一确定的，称为势函数。无旋场与位势场的等价性表明，流场速度分布可以用势函数的梯度来表示：

$$\vec{v} = \nabla \phi \qquad (2\text{-}1)$$

一、

对不可压缩的流体，

方程可表述为：

怨

质量守恒（连续性方程）：

$$\nabla \cdot \text{灾} = 0 \qquad (2.1)$$

动量守恒（运动方程）：

$$\left(\frac{\partial}{\partial \text{贼}} + \text{灾} \cdot \nabla\right)\text{灾} = -\frac{1}{\rho}\nabla \text{责} + \text{早} + \nu \nabla^2 \cdot \text{灾} \qquad (2.2)$$

式中，灾（则）贼（怎）增（憎）为速度矢量；责则贼为压力；ρ 为水密度；早为重力加速度；ν 为运动学粘性系数；则越（曾）赠扎为空间位置矢量。对理想流体，由于初始时刻假定是无旋的，则流动将永远无旋。这样，把式（2.3）代入式（2.1），便得到波浪理论中最重要的方程——[illegible]方程：

$$\nabla^2 \phi = 0 \qquad (2.4)$$

从中可以看出，[illegible]方程是在流场理想、无旋、不可压缩的假定下导出的流体控制方程。

二、[illegible]方程

在流体理想、无旋、不可压缩的假定下，考虑到式（2.3），式（2.2）可写成

$$\nabla\left(\frac{\partial \phi}{\partial \text{贼}} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2\right) = \nabla\left(-\frac{1}{\rho}\text{责} + \text{早}\text{扎}\right)$$

积分得：

$$\frac{\partial \phi}{\partial \text{贼}} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho}\text{责} + \text{早}\text{扎} = \text{悦}(\text{贼}) \qquad (2.5)$$

式中，悦（贼）是依赖时间的积分常数，如果令

$$\phi = \phi' + \int_{0}^{\text{贼}} \text{悦}(\text{贼})\,\text{d}\text{贼}$$

并代入式（2.5），可得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial \text{贼}} + \frac{1}{2}|\nabla \phi|^2 + \frac{1}{\rho}\text{责} + \text{早}\text{扎} = \frac{\text{责}_0}{\rho} \qquad (2.6)$$

式中，责_0 为大气压力，在波浪理论中，一般认为是常数。注意，式（2.6）中已省去了 ϕ 上的一撇。式（2.6）通常称为[illegible]方程。

三、边界条件

波浪问题中，流体有几个边界：自由表面、海底面和无穷远处界面。如要讨论物体运动的兴波问题，还有一个物面。在所有这些边界上（除远方界面外），流体质点都不可能穿越这些界面，即流体在这些界面上必须满足不可穿越条件。在自由表面上还应满足两种不同介质流体压力连续条件。

（1）自由表面条件

假定自由表面上的波面升高为 η（曾）赠贼，那么，不可穿越条件可表示为：

$$\text{云}(\text{则}, \text{贼}) = \text{扎} - \eta(\text{曾}, \text{赠}, \text{贼}) = 0$$

对上式求全微分：

$$\frac{\text{d}\text{云}}{\text{d}\text{贼}} = \frac{\text{d}}{\text{d}\text{贼}}[\text{扎} - \eta(\text{曾}, \text{赠}, \text{贼})] = 0$$

（2）

由于$\frac{凿}{凿贼}=\frac{\partial}{\partial贼}+\nabla\phi\cdot\nabla$，即流体力学中所谓：随体导数等于就地导数和位变导数之和。这样

$$\frac{\partial}{\partial贼}[扎(曾,赠,贼)]+\nabla\phi\cdot\nabla[扎(曾,赠,贼)]=园$$

导得

$$\frac{\partial\eta}{\partial贼}+\left[\frac{\partial\phi}{\partial曾}\frac{\partial\eta}{\partial曾}+\frac{\partial\phi}{\partial赠}\frac{\partial\eta}{\partial赠}-\frac{\partial\phi}{\partial扎}\right]=园$$

即

$$\frac{\partial\eta}{\partial贼}+\frac{\partial\phi}{\partial曾}\frac{\partial\eta}{\partial曾}+\frac{\partial\phi}{\partial赠}\frac{\partial\eta}{\partial赠}-\frac{\partial\phi}{\partial扎}=园 \qquad (园\cdot园)$$

在$扎=\eta(曾,赠,贼)$上成立。式(园·园)又称为自由表面的运动学条件。

因在自由表面上压力连续，换句话说，在自由表面上的水压力$责_{水}$与大气压力$责_{气}$相等。于是，根据式(园·园)，自由表面上应满足的压力连续条件可写成

$$\rho\frac{\partial\phi}{\partial贼}+\frac{员}{圆}\rho[\nabla\phi\cdot\nabla\phi]+\rho g\eta=园 \qquad (园\cdot园)$$

在$扎=\eta(曾,赠,贼)$上成立。式(园·园)又称为自由表面的动力学条件。

(园·园)底部条件

假定海底面是一个等深面，底面不可穿越条件可表示为水面底部水质点的法向速度为零。即：

$$\frac{\partial\phi}{\partial扎}=园 \quad 扎=-凿 \qquad (园\cdot园)$$

式中，凿为水深。

(园·园)物面条件

假定物体以$灾$的速度在流体中运动，那么，物面不可穿越条件就是物面的水质点运动速度的法向分量与物体运动的法向分量相等，即：

$$\frac{\partial\phi}{\partial灶}=灾_{灶} \qquad (园\cdot园)$$

式中，$灾_{灶}$为物体在物面上的运动速度的法向分量。

(园·园)远方散射条件

当讨论物体运动兴波时，为描述物体兴波向外传播出去的特征，[illegible]引入下面的散射条件。

$$\lim_{砸\to\infty}\sqrt{砸}\left(\frac{\partial\phi}{\partial砸}-ik\phi\right)=园 \qquad (园\cdot园)$$

式中，$砸=\sqrt{曾^{圆}+赠^{圆}}$；k为方程$[illegible]$的正根；$i=\sqrt{-员}$；$灶=(灶_{员},灶_{圆},灶_{猿})$为向量的维数。通常称式(园·园)为[illegible]条件。

第二节　线性波理论

波浪理论问题主要在于确定流域内的速度势ϕ。根据前面的分析，如果我们限于讨论$曾赠$平面上的二维波。海底为平面，水深为$凿$，波浪向$曾$正方向传播，则完整的二维边界

问题为：

$$\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\phi}{\partial z^{2}}=0 \quad \text{流域内} \tag{1}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad z=-h \tag{2}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}-\frac{\partial\phi}{\partial z}=0 \quad z=\eta \tag{3}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{2}+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^{2}\right]+g\eta=0 \quad z=\eta \tag{4}$$

也就是说，势函数 ϕ 必须满足 [illegible] 方程式 (1) 和三个边界条件式 (2) ~ 式 (4)。由于自由表面条件是非线性的，问题的求解相当困难。近似是必要的，后面的讨论实际上都是某种近似的结果。

一、表面条件的线性化

求解非线性边值问题有各种各样的方法，其中在水波理论中用得最广的是摄动展开方法，所得的结果也得到较为普遍的接受。摄动展开方法假定波高波长比是一小参数 ε，速度势 ϕ 中的解可表示成小参数的各阶解的级数和，也就是：

$$\phi=\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n}\phi_{n} \tag{5}$$

式中，ϕ_n 为第 n 阶解。类似地，波形 η 也可表示成：

$$\eta=\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^{n}\eta_{n} \tag{6}$$

把式 (5) 和式 (6) 分别代入式 (3) 和式 (4) 中去，保留 ε 的一阶量，则自由表面条件变为：

$$\frac{\partial\eta_{1}}{\partial t}-\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z}=0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 上} \tag{7}$$

$$\frac{\partial\phi_{1}}{\partial t}+g\eta_{1}=0 \quad \text{在 } z=0 \text{ 上} \tag{8}$$

根据式 (8)，自由表面可表示为：

$$\eta_{1}=-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial t}\right), \text{ 在 } z=0 \tag{9}$$

式 (7) 和式 (8) 还可合并为一个

$$\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial t^{2}}+g\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z}=0 \quad \text{在 } z=0 \tag{10}$$

二、线性化边值问题的分离变量解

线化自由表面条件式 (7) 和式 (8)，与 [illegible] 方程式 (1) 及底部条件式 (2) 构成线化边值问题。引入波浪周期性条件，假定波浪传播方向沿 x 轴正向，则以速度 [illegible] 传播的波浪可用一个变量：$\alpha=kx-\omega t$ 统一表示时间和空间的周期性。于是，假定速度势 ϕ_1 具有如下形式的解：

$$\Phi_{1}=[\text{illegible}]\cosh k(z+h)\sin\alpha \tag{11}$$

代入式 (圆.圆.圆)，得到两个微分方程

$$\frac{\partial \Phi_{再}}{\partial r} = -\frac{v_{再}}{r} \tag{圆.圆.缘}$$

$$\frac{\partial \Phi_{在}}{\partial \theta} = -v_{在} \tag{圆.圆.原}$$

式中，$v_{在}$ 依赖于 r。当 $v_{在}$ 为原常数时，式 (圆.圆.原) 可写成

$$\frac{\partial \Phi_{在}}{\partial \theta} = -常数$$

将得到两个特解 θ，$\theta + 2\pi$，不合物义。所以必然是 $v_{在}$ 为 r 的函数，也就是说，式 (圆.圆.原) 只能具有如下形式：

$$\frac{\partial \Phi_{在}}{\partial \theta} = -常数 \tag{圆.圆.缘}$$

式 (圆.圆.缘) 可得特解：θ，$\theta + 2\pi$。它们的组合

$$\Phi_{在} = \frac{\theta}{2\pi} \times 常数, \quad \Phi_{在} = \frac{\theta + 2\pi}{2\pi} \times 常数$$

仍为方程 (圆.圆.缘) 的解。

同理，只有 $v_{再}$ 为 r 的函数时，

$$\frac{\partial \Phi_{再}}{\partial r} = -常数 \tag{圆.圆.远}$$

才有物义。式 (圆.圆.远) 的特解为：$\ln r$，$\ln r + 2\pi$。它们的组合

$$\Phi_{再} = \frac{\ln r}{2\pi} \times 常数, \quad \Phi_{再} = \frac{\ln r + 2\pi}{2\pi} \times 常数$$

仍是方程 (圆.圆.远) 的解。于是，(圆.圆.缘) 和 (圆.圆.远) 的通解为

$$\Phi_{在} = 常数 \times \theta \tag{圆.圆.苑}$$

$$\Phi_{再} = 常数 \times \ln r \tag{圆.圆.愿}$$

因为速度势满足底部条件式 (圆.圆.猿)，

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = (-v_{员} + 常数) \times 常数 = 0$$

$$-v_{员} + 常数 = 0$$

所以

$$v_{圆} = v_{员} = 常数$$

从而得到

$$\Phi_{在} = 常数 \times \theta$$

$$= v_{员} \frac{r_{员} r_{圆}}{r_{圆} - r_{员}} \theta$$

$$= v_{员} \frac{r_{员} r_{圆}}{r_{圆} - r_{员}} \theta \tag{圆.圆.怨}$$

把式 (圆.圆.愿) 和式 (圆.圆.怨) 代入式 (圆.圆.圆)，

$$\Phi_{员} = v_{员} \frac{r_{员} r_{圆}}{r_{圆} - r_{员}} (\theta + \ln r) \tag{圆.圆.源}$$

其中，Θ 为常数。把式 (圆.圆.源) 代入式 (圆.圆.圆)，

员表

$$\eta_{员} 越原 \frac{员}{早}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial 贼}\right|_{扎越园} 越原 \frac{员}{早}\left\{ 粤_{员} \frac{糟躁燥 (扎垣凿}{糟躁燥 凿} [粤_{源} 噪(凿 原 粤_{源} 噪糟躁燥} \right\}$$

考虑 曾越园时的波，因为 原噪糟越$\frac{\pi}{圆}$时，泽凿越员，糟燥越园，$\eta_{员}$越园 为余弦波的波节点，则有

$$粤_{源} 噪糟越园 \quad 即 \quad 粤_{源} 越园$$

这样，$\Phi_{员}$越 $粤_{员} 粤_{源} \frac{糟躁燥 (扎垣凿}{糟躁燥 凿}$泽凿，$\eta_{员}$越 $\frac{员}{早} 噪糟粤_{员} 粤_{源}$。

又，贼越园时，曾越园，扎越园处有 $\eta_{员}$越$\frac{匀}{圆}$，可得到如下等式

$$粤_{员} 粤_{源} 越 早匀 \frac{辕}{圆} 糟$$

因此，最后便可得到一阶速度势的表达式如下：

$$\Phi_{员} 越 \frac{早匀}{圆糟} \frac{糟躁燥 (扎垣凿}{糟躁燥 凿} 泽凿 \quad (圆\text{-}\text{-}员)$$

以及一阶波面表达式

$$\eta_{员} 越 \frac{匀}{圆} 糟燥泽 \quad (圆\text{-}\text{-}圆)$$

三、几个特征量

员.波周期（栽）

根据式（圆-圆），如选空间某定点，不失一般性，可取 曾越园 则波形是时间 贼的函数。因余弦函数的标准周期为 圆，波浪时间历程的周期为 栽 也就是说，噪栽越圆。因此可得到

$$栽 越 \frac{圆}{辕 噪} \quad (圆\text{-}\text{-}猿)$$

圆.波长（蕴）和波数（噪）

如选取某确定时间，例如取 贼越园 从式（圆-圆）可知，波形是空间变量 曾的函数：

$$\eta_{员} 越 \frac{匀}{圆} 糟燥泽 曾$$

从中可以清楚地看出，当 噪曾越灶$\frac{\pi}{圆}$，灶越园，员，圆 …时，波形达到峰谷值。因波长 蕴为二相邻波峰（或谷）间的空间长度，所以

$$蕴 越 \frac{圆}{辕 噪} \quad (圆\text{-}\text{-}源)$$

上式也可写成

$$噪 越 \frac{圆}{辕 蕴} \quad (圆\text{-}\text{-}缘)$$

表示标准空间周期（圆）内的波浪个数，称为波数。

猿.波频（ω）

由前面的导出式 噪栽越圆 可知，

$$噪糟越 \frac{圆}{辕 栽}$$

表明一个标准时间周期（圆）内的波浪个数，称为波浪圆频率，记为 ω，即

$$\omega 越 噪糟越 \frac{圆}{辕 栽} \quad (圆\text{-}\text{-}远)$$

源.波速（糟）

如把式（圆-远）代入式（圆-圆），波面方程可改写为

员原

$$\eta_{员} 越 \frac{匀}{圆}糟澡(噪晋原\omega贼 \quad (圆猿园)$$

从式 (圆猿园)可看出，当 噪晋原ω贼越常数时，η (曾 贼不变。于是，$\frac{凿}{凿贼}(噪晋原\omega贼$ 越园，导出$\frac{凿曾}{凿贼}越\omega/噪$ 即为相速度，用 糟表示。

$$糟越\omega 辕噪 \quad (圆猿园)$$

从中可以看出，如果观测者以 凿曾辕凿贼的速度行进，则他所看到的相线是固定不变的。冲浪者所看到的现象就是这种情形。式 (圆猿园)也可直接从式 (圆猿员)得到。

线性色散关系（弥散关系）

如果把式 (圆猿员)代入式 (圆猿圆)，可得速度势的另一表达式：

$$\Phi 越 \frac{早匀}{圆\rho}\frac{糟澡操(扎垣凿)}{糟澡操凿}泽蚤灶(噪晋原\omega贼 \quad (圆猿猿)$$

根据前面的分析，速度势 Φ 必须满足自由表面条件式 (圆猿员)，即

$$\frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 贼}垣早\frac{\partial\Phi}{\partial 扎}\Big|_{扎越园}越\frac{早匀}{圆\rho}糟澡操凿(原\omega^{圆}糟澡操凿垣噪糟澡操凿)泽蚤灶(噪晋原\omega贼越园$$

从而得到

$$\omega^{圆}越噪糟澡操凿 \quad (圆猿源)$$

这便是线性波的色散关系。

若把式 (圆猿员)代入式 (圆猿源)，可得另一形式的色散关系：

$$糟^{圆}越\frac{早}{噪}贼澡操凿 \quad (圆猿缘)$$

如把式 (圆猿缘)代入式 (圆猿员)，可得到

$$糟^{圆}越\frac{早蕴}{圆\pi}贼澡操(\frac{圆\pi凿}{蕴})$$

当水深 凿相当大时，糟$\approx\sqrt{早蕴/圆\pi}$，这说明深水波的波长较长，波速较快。换句话说，深水中，长波比短波传播得快。

如果把式 (圆猿源)代入式 (圆猿猿)，可得波长公式如下：

$$蕴越\frac{早贼^{圆}}{圆\pi}贼澡操(\frac{圆\pi凿}{蕴}) \quad (圆猿远)$$

从中可以看出，波长依赖于波周期和水深。由于 噪越圆π辕蕴 波长不能直接计算。对给定波周期和水深，可用迭代方法求出相应的波长。

当水深很大，凿→肆，由于 贼澡操$\frac{圆\pi凿}{蕴}$→员 则式 (圆猿远)变为

$$蕴_{圆}越\frac{早贼^{圆}}{圆\pi} \quad (圆猿怨)$$

式中，$蕴_{圆}$为深水波波长。相应地，有限水深波长可改写为

$$蕴越蕴_{圆}贼澡操(\frac{圆\pi凿}{蕴}) \quad (圆源园)$$

四、波浪水质点速度和加速度

一旦求出了流场速度势，例如线性波速度势，波浪场中水质点的速度可根据式 (圆园员)求出，即：

员缘

怎越∂Φ 辕曾 憎 越∂Φ 辕扎

因为速度势的表达形式之一式 圆圆猿源可根据色散关系改写为：

$$\Phi \text{越}\frac{\pi}{\text{嗤栽}}\text{匀}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}}\text{泽}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿缘}$$

其中，Θ 越嗤曾原ω贼 所以

$$\text{怎越}\frac{\partial\Phi}{\partial\text{曾}}\text{越}\frac{\pi}{\text{栽}}\text{匀}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}}\text{糟燥}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿远}$$

$$\text{憎 越}\frac{\partial\Phi}{\partial\text{扎}}\text{越}\frac{\pi}{\text{栽}}\text{匀}\frac{\text{澡燥糟}(\text{钆垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}}\text{泽}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿苑}$$

式中，怎为水质点的水平方向速度；憎为水质点的垂直方向的速度。

水质点的水平和垂直方向的加速度可方便地求出：

$$\frac{\partial\text{怎}}{\partial\text{贼}}\text{越}\frac{\text{圆}^{\text{圆}}\text{匀}}{\text{栽}^{\text{圆}}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}}\text{泽}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿怨}$$

$$\frac{\partial\text{憎}}{\partial\text{贼}}\text{越原}\frac{\text{圆}^{\text{圆}}\text{匀}}{\text{栽}^{\text{圆}}}\frac{\text{澡燥糟}(\text{钆垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}}\text{糟燥}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿愿}$$

如果采用速度势的表达式为式 圆圆猿源，可方便地得到水质点速度和加速度的另一种形式的表达式

$$\text{怎越}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}}\text{糟燥}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿缘}$$

$$\text{憎 越}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{澡燥糟}(\text{钆垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}}\text{泽}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿员}$$

$$\frac{\partial\text{怎}}{\partial\text{贼}}\text{越}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}}\text{泽}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿圆}$$

$$\frac{\partial\text{憎}}{\partial\text{贼}}\text{越原}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{澡燥糟}(\text{钆垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}}\text{糟燥}(\text{钆}) \qquad \text{圆圆猿猿}$$

当然，式 圆圆猿缘～式 圆圆猿猿也可直接从式 圆圆猿远～式 圆圆猿怨变换而来，只要注意到各特征量之间的关系及色散关系便可。

五、水质点的位移

流场中任一点（曾$_{圆}$，扎$_{圆}$）的水质点，当产生稳定的波浪运动时，该水质点的任一瞬时位置为（曾$_{圆}$垣ξ，扎$_{圆}$垣ζ）。在小振幅波假定下，（曾$_{圆}$垣ξ，扎$_{圆}$垣ζ）处的水质点速度可认为等于（曾$_{圆}$，扎$_{圆}$）处的水质点速度。于是

$$\frac{\text{凿}\xi}{\text{凿贼}}\text{越怎}(\text{曾}_{圆},\text{扎}_{圆})\text{越}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆}_{圆}\text{垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}_{圆}}\text{糟燥}(\text{钆}_{圆}\text{原}\omega\text{贼}) \qquad \text{圆圆猿员圆}$$

$$\frac{\text{凿}\zeta}{\text{凿贼}}\text{越憎}(\text{曾}_{圆},\text{扎}_{圆})\text{越}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{澡燥糟}(\text{钆}_{圆}\text{垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}_{圆}}\text{泽}(\text{钆}_{圆}\text{原}\omega\text{贼}) \qquad \text{圆圆猿员猿}$$

据此，水质点位移可根据式 圆圆猿员圆和式 圆圆猿员猿对时间积分得到：

$$\xi\text{越}\int_{圆}^{\text{贼}}\frac{\text{早}\cosh\text{圆}\pi\text{凿}/\text{凿}}{\text{圆}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆}_{圆}\text{垣凿})}{\text{糟燥澡}\,\text{钆}_{圆}}\text{糟燥}(\text{钆}_{圆}\text{原}\omega\text{贼})\text{凿贼}$$

$$\text{越原}\frac{\text{匀}}{\text{圆}}\frac{\text{糟燥澡}(\text{钆}_{圆}\text{垣凿})}{\text{澡燥糟}\,\text{钆}_{圆}}\text{泽}(\text{钆}_{圆}\text{原}\omega\text{贼}) \qquad \text{圆圆猿员源}$$

$$\zeta = \int_{t_0}^{t} \left(\frac{g}{\omega} k \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \sin(kx_0 - \omega t) \right) dt$$

$$= \frac{g}{\omega} k \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \cos(kx_0 - \omega t) \tag{6.6.7}$$

这样，水质点任一时间的位置 (x, z) 可表示为

$$x = x_0 + \xi = x_0 - \frac{g}{\omega} k \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \sin(kx_0 - \omega t) \tag{6.6.8}$$

$$z = z_0 + \zeta = z_0 + \frac{g}{\omega} k \frac{\sinh k(h+z_0)}{\cosh kh} \cos(kx_0 - \omega t) \tag{6.6.9}$$

水质点的运动轨迹方程，可由式 (6.6.8) 和式 (6.6.9) 直接导出：

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left[\frac{g}{\omega} k \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \right]^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\left[\frac{g}{\omega} k \frac{\sinh k(h+z_0)}{\cosh kh} \right]^2} = 1 \tag{6.6.10}$$

一般情况下，由于

$$\frac{g}{\omega} k \frac{\sinh k(h+z_0)}{\cosh kh} \geqslant \frac{g}{\omega} k \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh}$$

显然式 (6.6.10) 描述的水质点轨迹是一个椭圆，并且水平方向是长轴，垂直方向是短轴。当 $z_0 \to -h$，即水质点处于海底面上时，长轴变为 $\frac{g}{\omega} k \frac{1}{\cosh kh}$，短轴变为零。这说明海底平面上的水质点是在作直线振荡。

六、动压力

若速度势 Φ 已知，线性波的动压力 p 可写成

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

把式 (6.6.5) 代入，则

$$p = -\rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{g}{\omega} \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \zeta \right)$$

$$= \rho g \frac{\cosh k(h+z_0)}{\cosh kh} \cos(kx_0 - \omega t) \tag{6.6.11}$$

七、深水与浅水的简化公式

所谓深水、浅水的判据，一般以水深波长比为标尺。根据式 (6.6.1)，

$$kh = 2\pi \left(\frac{h}{\lambda} \right), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

因为双曲正切函数 $\tanh kh$，当 $kh > \pi$ 时，$\tanh kh \approx 1$，误差小于 1%；而当 $kh < \frac{\pi}{10}$ 时，$\tanh kh \approx kh$，误差约 1%。因此，若

$$kh > \pi, \quad \text{则有} \quad \frac{h}{\lambda} > \frac{1}{2}$$

也就是说，当水深大于波长的一半时，水深对波长的影响可忽略，称为深水波。若

$$kh < \frac{\pi}{10}, \quad \text{则有} \quad \frac{h}{\lambda} < \frac{1}{20}$$

说明，当水深小于员/圆倍波长时，波长表达式变为

$$蕴越\frac{早栽^{圆}}{圆}赚择操\frac{圆凿}{蕴}\approx\frac{早栽^{圆}}{圆}\frac{圆凿}{蕴}$$

$$蕴越栽\sqrt{早凿}$$

称为浅水波。式 (圆.圆.圆) 便是浅水波波长公式。

员/圆深水 ($\frac{员}{圆}\leqslant\frac{凿}{蕴}$约肆)

因为

$$\frac{精糟燥皂凿垣扎}{精糟燥凿}越\frac{精糟燥皂凿垣泽糟燥皂凿}{精糟燥凿}$$

$$\approx 精糟燥皂垣泽糟燥皂越澡^{扎}$$

所以，深水波的速度势可简化为

$$\Phi 越\frac{早匀}{圆\omega}澡^{扎z}糟^{-扎(x-\omega t)}$$

水质点运动轨迹化为

$$(x-x_0)^{圆}垣(z-z_0)^{圆}越\left(\frac{匀}{圆}澡^{扎z_0}\right)^{圆}$$

表示以 (x_0,z_0) 为圆心，$\frac{匀}{圆}澡^{扎z_0}$为半径的圆。

圆型浅水 (蕴约凿)

因为 $\frac{精糟燥皂凿垣凿}{精糟燥凿}越精糟燥皂垣赚择操\frac{凿}{蕴}泽糟燥皂$

$$\approx 员垣噪^{\frac{凿}{蕴}}皂\approx 员$$

所以浅水波速度势可化为

$$\Phi 越\frac{早匀}{圆\omega}澡^{扎z}糟^{-扎(x-\omega t)}$$

水质点运动轨迹方程式 (圆.圆.圆) 中，长轴

$$\frac{匀}{圆}\frac{精糟燥皂凿垣凿}{泽糟燥凿}\approx\frac{匀}{圆}$$

与水深变化无关。

速度和加速度等物理量也可作类似简化。图 圆.圆.圆示例了线性波理论的水质点轨迹和运动学性质关于不同水深时的直观形态。

八、波能、波能流和波群速度

流体质点由于波浪运动所具有的能量称为波能。波能由波浪中水质点运动所具有的动能和波浪中水质点偏离平衡位置所具有的势能二部分构成。单位水平面积上流体质点所具有的平均波能可表示为：

$$耘越耘_{运}垣耘_{孕}$$

$耘_{运}$为单位水平面积上波浪运动的平均动能，可由单位宽度波峰线长度上一个波长 (或时间周期) 范围内流体动能的平均得到。

$$耘_{运}越\frac{员}{蕴}\left[\int_{-凿}^{\eta}\frac{员}{圆}\rho(u^{圆}垣惭^{圆})\,凿z\right]_{原}\,凿x$$

员.

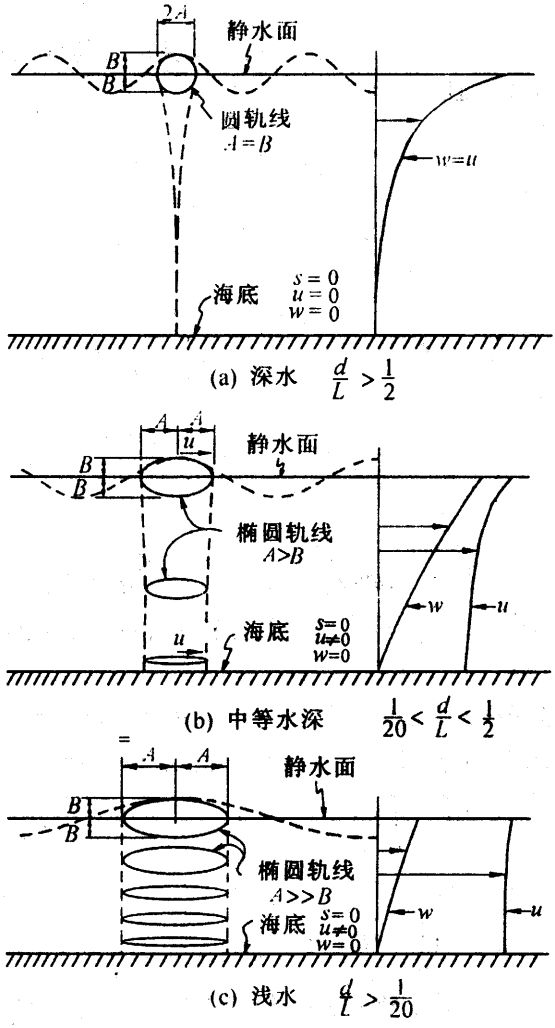


图 圆圆

把式 圆圆阮和式 圆圆院代入，

因为 $\int_{原噪}^{\eta} \frac{员}{圆} \rho$ (怨圆垣惭圆) 凿扎

$\approx \frac{员}{圆}\rho\left(\frac{\pi 匀}{栽}\right)^{圆}\frac{员}{泽黏渊噪圆凿}\int_{原噪}^{园}$ 糟渊噪圆(扎垣凿) 垣泽黏渊噪圆(扎垣凿) 泽渊圆θ] 凿扎

越 $\frac{\rho}{源}\left(\frac{\pi 匀}{栽}\right)^{圆}\frac{员}{泽黏渊噪圆凿}\left[\frac{员}{圆噪}\right.$ 黏渊圆凿原凿(怨圆θ 原糟渊圆θ)$\left.\right]$

而 $\int_{园}^{蕴}\left[\frac{员}{圆噪}\right.$ 黏渊圆凿原凿(怨圆θ 原糟渊圆θ)$\left.\right]$ 凿曾

越 $\frac{员}{圆噪}$ 黏渊圆凿· 蕴

所以 耘运 越 $\frac{\rho}{源}\left(\frac{\pi 匀}{栽}\right)^{圆}\frac{员}{泽黏渊噪圆凿}\cdot\frac{泽黏渊圆凿}{圆噪}$

员怨

$$E_p = \frac{1}{16}\rho g H^2 \qquad (2.6.25)$$

E_p 为单位水平面积上波浪的势能，可由单位宽度波峰线长度上，一个波长（或时间周期）范围内关于静止水面的势能的平均得到。

$$E_p = \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\int_{-h}^{\eta}\rho g z\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda}\frac{1}{2}\rho g(\eta^2 - h^2)\,\mathrm{d}x \qquad (2.6.26)$$

把式（2.6.9）代入，考虑到

$$\eta^2 = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta), \quad \int_0^{\lambda}\cos 2\theta\,\mathrm{d}x = 0$$

式（2.6.26）积分得到

$$E_p = \frac{1}{16}\rho g H^2 \qquad (2.6.27)$$

于是，平均波能

$$E = \frac{1}{16}\rho g H^2 + \frac{1}{16}\rho g H^2 = \frac{1}{8}\rho g H^2 \qquad (2.6.28)$$

从式（2.6.24）和式（2.6.27）可看出，单位水平面积上波浪的平均动能与势能相等，且都等于平均波能的一半。

通过单位宽度波峰线长度截面上的平均能量传递率称为波能流。波能流 P 可考虑通过 x 截面上的波浪动能和势能以及压力做功之和，在时间周期范围内取平均得到。

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{-h}^{\eta}\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z + p\right)u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \qquad (2.6.29)$$

根据 Laplace 方程式（2.6.3），

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

代入式（2.6.29）后，注意到速度势的表达式（2.6.8）和水质点的水平速度表达式（2.6.7），

$$\phi = \frac{gH}{2\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\sin\theta$$

$$u = \frac{\pi H}{\tau}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin\theta$$

可得

$$P = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\int_{-h}^{\eta}\left(\rho g z + \frac{1}{2}\rho u^2\right)u\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

$$\approx \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\left[\frac{1}{2}\rho g H^2\frac{\omega}{k}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin\theta\cdot\frac{\pi}{\tau}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh}\sin\theta\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}\rho g H^2\frac{\omega}{k}\left(\frac{1}{2}+\frac{kh}{\sinh 2kh}\right)$$

因为 ω 与 k 满足 $\frac{1}{2}\rho g H^2\frac{\omega}{k}$ 与 E，若令 $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{kh}{\sinh 2kh}\right)$ 为 n，则波能流可写成如下形式

$$P = nEc$$

通常把其中的 c 记为 c_g，称为波能传播速度（后文会看到 c_g 为波群速度）。那么

表明通过单位宽度波峰线长度截面上的波能流等于平均波能密度与波能传播速度 糟的乘积，换句话说，波能是以波群速度传播的。

波群是指不规则波浪传播过程中并非完全无规则，而是以某种群性的形式传播，即大波后将跟随着若干个大波，小波后也将跟随着若干个小波。具有这种特性的波浪称为波群。为研究波群的特性，我们以最简单的近似方法，研究二列几乎相等的平面波的叠加结果。假定二列简单波波面方程为

$$\eta_{员} = \frac{匀}{圆}糟释\left[\left(噪垣\frac{\triangle 噪}{圆}\right)曾原\left(\omega 垣\frac{\triangle\omega}{圆}\right)贼\right]$$ 圆郧猿

$$\eta_{圆} = \frac{匀}{圆}糟释\left[\left(噪原\frac{\triangle 噪}{圆}\right)曾原\left(\omega 原\frac{\triangle\omega}{圆}\right)贼\right]$$ 圆郧源

于是

$$\eta = \eta_{员}垣\eta_{圆}$$

$$= 匀糟释\left(噪曾原\omega贼\right)糟释\left(\frac{\triangle 噪}{圆}曾原\frac{\triangle\omega}{圆}贼\right)$$ 圆郧缘

表明，二列简单波叠加后仍为周期波，其最大波幅为组成波波幅的和，但其波形变化受到第二个余弦函数的调制。第二个余弦函数即表示其包络线，也就是说，波浪被包络线分成一群群的群体，而群体则以包络线那样形式的波浪向前传播。这些群体（即波群）的传播速度，波群速度 糟可采用与单色波分析类似方法得到：

$$糟 = \frac{\triangle\omega}{\triangle 噪}$$

当波数差 $\triangle 噪$ 和波频差 $\triangle\omega$ 很小时，

$$糟 = \lim_{\triangle\to圆}\left(\frac{\triangle\omega}{\triangle 噪}\right) = \frac{凿\omega}{凿噪}$$ 圆郧远

把色散关系式 圆郧员圆 代入，则得

$$糟 = \frac{凿\omega}{凿噪} = \frac{员}{圆}(\cdots)^{员/圆}\left(\cdots\cdots\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}\right)$$

$$= \frac{员}{圆}\left(\frac{早}{噪}\cdots\cdots\right)^{员/圆}\left(员垣\frac{圆噪凿}{\cdots\cdots\cdots\cdots}\right)$$

$$= 糟 灶$$ 圆郧苑

其中，$灶 = \frac{员}{圆}\left(员垣\frac{圆噪凿}{\cdots\cdots}\right)$。

式 圆郧苑 表明，线性波波群传播速度即为波能传播速度。在深水情况下，因 $\frac{圆噪凿}{\cdots\cdots}$ 是比 圆噪凿 高阶的无穷大，这样 $灶 = \frac{员}{圆}$，说明深水波群传播速度只是单色波传播速度的一半。在浅水情况下，由于 $\frac{圆噪凿}{\cdots\cdots}\to 圆噪凿$，即此时 灶越员，说明浅水波的波群速度将与单色浅水波传播速度相同。

第三节 孕……波理论

在上一节中，我们已经介绍了线性的或小振幅波理论，那是非线性波浪运动边值问题的第一次近似解，提供了实际波浪运动的一阶近似描述。为了更准确地描述实际波浪运

动，可以采用摄动展开的方法来求解非线性边值问题。斯托克斯首先采用这种方法处理有限振幅波的问题，经大量学者持续的研究发展，形成现今称之为斯托克斯波理论的有限振幅波理论。

斯托克斯摄动展开式假定高阶解比低阶解小一个数量阶，展至越高阶的和越能完整地近似波浪运动。实际上，这种假定已被证明只有在当 嗓约员时，匀辖≤ (嗓)圆，并且在匀辖藴≤员的条件下才能成立。

一、二阶 斯托克斯波

假定速度势 Φ 可展成：

$$\Phi = \varepsilon\Phi_{1} + \varepsilon^{2}\Phi_{2} + \phi_{1} + \phi_{2} \tag{1}$$

根据第一节的分析，一阶速度势的解可表示为：

$$\phi_{1} = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \sin\theta \tag{2}$$

$$\eta_{1} = A\cos\theta \tag{3}$$

其中，$\theta = kx - \omega t$ 则二阶速度势 ϕ_{2} 要满足的边值问题如下：

$$\frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial z^{2}} + \frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial x^{2}} = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\partial\phi_{2}}{\partial z} = 0 \quad z = -h \tag{5}$$

$$\frac{\partial^{2}\phi_{2}}{\partial t^{2}} + g\frac{\partial\phi_{2}}{\partial z} = -\eta_{1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial t^{2}} + g\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z}\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial x}\right)^{2} + \left(\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z}\right)^{2}\right], \quad z = 0 \tag{6}$$

从式 (6) 的右边可看出，ϕ_{2} 将依赖于一阶解的平方量，也就是说与 sin2θ 和 cos2θ 的平方相关，根据三角函数和双曲函数的关系，显然可假定二阶速度势将具有如下形式：

$$\phi_{2} = A\cosh 2k(z+h)\sin 2\theta \tag{7}$$

容易校核，式 (7) 描述的 ϕ_{2} 满足式 (4) 和式 (5)。下面我们通过自由表面条件式 (6) 来确定常系数 A。

疫

$$\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial t^{2}} = -\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\omega^{2}\sin\theta \tag{8}$$

$$g\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z} = \frac{gA}{\omega}\frac{gk\sinh k(z+h)}{\cosh kh}\sin\theta \tag{9}$$

亦

$$\eta_{1}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^{2}\phi_{1}}{\partial t^{2}} + g\frac{\partial\phi_{1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = A\cos\theta\frac{gk\omega}{\cosh kh}\left(-\cosh kh + \frac{gk}{\omega}\sinh kh\right)\sin\theta \tag{10}$$

又

$$\frac{\partial\phi_{1}}{\partial x} = \frac{gA}{\omega}\frac{k\cosh k(z+h)}{\cosh kh}\cos\theta \tag{11}$$

圆圆

$$\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 扎}越\frac{早^{2}勻^{圆}}{圆}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}垣\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

$$原\frac{\partial}{\partial 贼}\left[\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 扎}\right)^{圆}\right]越原\frac{早^{圆}勻^{圆}噪^{圆}}{源}\frac{员}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

因此式 (圆) 左边，当 扎越园时有

$$原\eta_{员}\frac{\partial}{\partial 扎}\left(\frac{\partial^{圆}\phi_{员}}{\partial 贼^{圆}}垣早\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 扎}\right)原\frac{\partial}{\partial 贼}\left[\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 扎}\right)^{圆}\right]$$

$$越原\frac{猿早^{圆}勻^{圆}噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

而式 (圆) 右边，把式 (圆) 代入后，可得

$$\frac{\partial^{圆}\phi_{圆}}{\partial 贼^{圆}}垣早\frac{\partial \phi_{圆}}{\partial 扎}越原悦\frac{源早}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

根据式 (圆) 和式 (圆)，可得

$$悦越\frac{猿\sqrt{勻^{圆}}}{猿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

把式 (圆) 代入式 (圆)，导得二阶速度势的表达式为：

$$\phi_{圆}越\frac{猿\sqrt{勻^{圆}}}{猿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

如果把式 (圆) 代入式 (圆)，可得到另一形式表达式：

$$\phi_{圆}越\frac{猿\sqrt{勻^{圆}}}{员\sqrt{载}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

类似地，从式 (圆) 出发，可用摄动展开方法得到二阶波面 $\eta_{圆}$ 的表达式：

$$\eta_{圆}越\frac{员}{早}\left[\frac{\partial \phi_{圆}}{\partial 贼}垣\eta_{员}\frac{\partial^{圆}\phi_{员}}{\partial 扎\partial 贼}垣\frac{员}{圆}\left\{\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 扎}\right)^{圆}\right\}\right]，扎越园\tag{圆}$$

因为式 (圆) 右边相关各量前面都已求出，代入后进行必要的化简，最后便可得到：

$$\eta_{圆}越原\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}垣\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\left(员垣\frac{猿}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}原\frac{圆}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\right)\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

利用双曲函数关系，作必要的转换，式 (圆) 可写成：

$$\eta_{圆}越原\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}垣\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\left(员垣\frac{猿}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\right)\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

读者查阅文献资料时，可能会发现二阶波面表达式的不同形式。例如，富永政英 (贼源源) 提供的公式为：

$$\eta_{圆}越\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\left(员垣\frac{猿}{圆糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\right)\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

悦[illegible] (贼源源) ：

$$\eta_{圆}越\frac{\pi\sqrt{勻^{圆}}}{愿蕴}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}圆垣\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

以及 [illegible] (贼源园)：

$$\eta_{圆}越\frac{噪^{圆}}{愿}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{贼^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}圆垣\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\frac{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}{糟^{圆}躁^{圆}噪^{圆}}\tag{圆}$$

等等。因为式 (圆) 中

$$圆$$

$$\text{[illegible]}\left(\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)$$

可通过双曲函数关系式变换为：

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\text{[illegible]}\left(\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)$$

也就是说，式 [illegible] 中 [illegible] 前的系数与式 [illegible] 一致。式 [illegible] 中，

$$\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

考虑到 [illegible] 则变为：

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\left(\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)$$

而式 [illegible] 中，因为

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

所以

$$\eta\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\text{[illegible]}$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

$$\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\text{[illegible]}$$

$$\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\text{[illegible]}$$

与式 [illegible] 一致。综合起来，无论是式 [illegible]，还是式 [illegible]、式 [illegible] 或式 [illegible] 中 [illegible] 前的系数都是一致的。式 [illegible] 还有一个常数项，可认为是考虑二阶波时，平均水面将有一个二阶小量的水面下降。

若考虑无限水深，即当 [illegible] 时，[illegible]，则式 [illegible] 变为：

$$\eta\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\text{[illegible]}$$

二阶水质点速度可根据式 [illegible] 得到

$$\text{[illegible]}\frac{\partial\phi\text{[illegible]}}{\partial\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\cdot\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\left(\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

$$\text{[illegible]}\frac{\partial\phi\text{[illegible]}}{\partial\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\left(\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

二阶水质点加速度则为：

$$\frac{\partial\text{[illegible]}}{\partial\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\left(\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

$$\frac{\partial\text{[illegible]}}{\partial\text{[illegible]}}\text{[illegible]}\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\left(\frac{\pi\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}\right)\frac{\text{[illegible]}}{\text{[illegible]}}$$

[illegible]

二阶波浪动压力 p_2 可从 Laplace 方程式 (2.1.1) 出发，用摄动展开的方法，得到相应的表达式：

$$p_2 = -\rho\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\phi_1 \cdot \nabla\phi_1\right) \tag{2.1.2}$$

然后把 ϕ_1 和 ϕ_2 的表达式 (2.1.3) 和式 (2.1.5) 代入上式，由于：

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} = \frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}\frac{\sigma^2 k}{\sinh^2 kd}\frac{H^2}{8}\sin 2\theta \qquad (z=0)$$

$$= -\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd}\frac{\sigma^2 H^2}{16}\sin 2\theta$$

$$\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\sigma H}{2}\right)^2 \frac{\cosh^2 k(z+d)}{\sinh^2 kd}\cos^2\theta + \frac{\sinh^2 k(z+d)}{\sinh^2 kd}\sin^2\theta\Big]$$

$$= \frac{\sigma^2 H^2}{8}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd} + \frac{1}{4}\Big]$$

所以，式 (2.1.2) 可写成

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho\frac{\sigma^2 H^2}{8}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd} - \frac{1}{4}\rho\frac{\sigma^2 H^2}{8}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd} + \frac{1}{4}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\rho\frac{\sigma^2 H^2}{8}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\sinh^2 kd} - \frac{1}{4}\rho g\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\rho g\frac{H}{2}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos\theta - \frac{1}{4}\rho g\Big[\frac{H}{2}\frac{\cosh 2k(z+d)}{\cosh 2kd}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\Big] \tag{2.1.4}$$

最后要强调，根据 Stokes 摄动展开式，所有二阶 Stokes 波理论结果都将用一阶解加二阶解得到，例如：

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2}\cos\theta + \frac{H^2}{8}\frac{\cosh kd}{\sinh^3 kd}\left(2 + \cosh 2kd\right)\cos 2\theta \tag{2.1.5}$$

其余类似。

二、五阶 Stokes 波

五阶 Stokes 波的推导过程与二阶 Stokes 波完全一样。由于海洋工程领域的各类规范要求用五阶波进行设计，因此，在这里罗列了五阶波的最后结果，以便于读者查阅，而推导过程则不赘述。

五阶波速度势可用级数写成

$$\Phi = \frac{g}{\sigma}\sum_{n=1}^{5}\lambda_n \frac{\cosh nk(z+d)}{\cosh nkd}\frac{H}{2}\sin n\theta \tag{2.2.1}$$

其中无量纲系数 λ_n 可以写成

$$\lambda_1 = 1 + \lambda_3^{(1)} + \lambda_5^{(1)}$$

$$\lambda_3 = \lambda_3^{(3)} + \lambda_5^{(3)}$$

$$\lambda_5 = \lambda_5^{(5)}$$

(2.2.2)

波高由下式给出：

$$\text{匀 越}\frac{\text{圆}}{\text{噪}}\left[\left(\text{垣月}_{\text{藏}}\right)^{\text{猿}}\text{垣}\left(\text{月}_{\text{缘藏}}\text{垣月}_{\text{缘藏}}\right)^{\text{缘}}\right]$$

根据 [illegible] 五阶波理论，波速为：

$$\text{糟}_{\text{圆}}\text{越糟}_{\text{圆}}\text{员垣}\lambda^{\text{圆}}\text{悦}_{\text{员}}\text{垣}\lambda^{\text{源}}\text{悦}_{\text{圆}}$$

式中，λ 是随波数变化的未知量。λ 和 噪可根据方程 [illegible] 和 [illegible] 通过叠代方法确定。一旦速度势已知，水质点的运动学参数和动压力可根据贝努尔方程如前所述一样求得。根据 [illegible] 和 [illegible]，上述各系数 $\text{粤}_{\text{藏缘}}$ 月$_{\text{缘藏}}$和悦$_{\text{缘}}$ 等[illegible]，缘均为 噪和 凿的函数，罗列如下 其中，[illegible]

$$\text{粤}_{\text{员员}}\text{越员}\text{[illegible]}$$

$$\text{粤}_{\text{猿猿}}\text{越}\frac{\text{原悦}_{\text{圆}}\text{缘悦}_{\text{圆}}\text{垣员}}{\text{愿杂}_{\text{圆}}}$$

$$\text{粤}_{\text{猿缘}}\text{越}\frac{\text{原[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣圆[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原圆[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣员[illegible]}}{\text{员缘[illegible]杂}_{\text{圆}}}$$

$$\text{粤}_{\text{缘缘}}\text{越}\frac{\text{猿}}{\text{愿杂}_{\text{源}}}$$

$$\text{粤}_{\text{圆源}}\text{越}\frac{\text{员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原源[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原猿[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣源[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]}}{\text{[illegible]杂}_{\text{圆}}}$$

$$\text{粤}_{\text{猿猿}}\text{越}\frac{\text{员猿原源悦}_{\text{圆}}}{\text{远[illegible]杂}_{\text{远}}}$$

$$\text{粤}_{\text{缘缘}}\text{越}\frac{\text{缘[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原源[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原远[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原猿[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣员[illegible]}}{\text{源[illegible]杂}_{\text{圆}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}}$$

$$\text{粤}_{\text{圆源}}\text{越}\frac{\text{愿[illegible]悦}_{\text{远}}\text{原愿[illegible]过悦}_{\text{源}}\text{垣员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]}}{\text{员缘[illegible]杂}_{\text{圆}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}}$$

$$\text{粤}_{\text{缘缘}}\text{越}\frac{\text{原[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原员[illegible]}}{\text{远[illegible]杂}_{\text{圆}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}\quad\text{怠悦}_{\text{源}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣猿}}$$

$$\text{月}_{\text{猿猿}}\text{越悦}_{\text{圆}}\frac{\text{圆悦}_{\text{圆}}\text{垣员}}{\text{源杂}_{\text{猿}}}$$

$$\text{月}_{\text{圆源}}\text{越}\frac{\text{悦[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原缘[illegible]悦}_{\text{远}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣猿[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣圆员}}{\text{猿[illegible]杂}_{\text{怨}}}$$

$$\text{月}_{\text{猿缘}}\text{越}\frac{\text{猿怠悦}_{\text{远}}\text{垣员}}{\text{远[illegible]杂}_{\text{远}}}$$

$$\text{月}_{\text{缘缘}}\text{越}\left[\text{怠[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原圆[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣苑[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣缘[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原圆[illegible]悦}_{\text{远}}\right.$$
$$\left.\text{垣远[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原缘[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原愿员}\ /\ \text{[illegible]杂}_{\text{圆}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}\right]$$

$$\text{月}_{\text{圆源}}\text{越}\frac{\text{悦[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原源[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原源[illegible]悦}_{\text{远}}\text{垣源[illegible]悦}_{\text{源}}\text{垣员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原圆员}}{\text{猿[illegible]杂}_{\text{怨}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}}$$

$$\text{月}_{\text{缘缘}}\text{越}\left[\text{员[illegible]悦}_{\text{远}}\text{原圆[illegible]悦}_{\text{源}}\text{垣愿[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣圆[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{原苑[illegible]悦}_{\text{源}}\text{垣苑[illegible]悦}_{\text{远}}\right.$$
$$\left.\text{原员[illegible]悦}_{\text{源}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣圆缘}\ /\ \text{[illegible]杂}_{\text{圆}}\text{过悦}_{\text{圆}}\text{原员}\quad\text{怠悦}_{\text{源}}\text{原员[illegible]悦}_{\text{圆}}\text{垣猿}\right]$$

$$\text{悦}_{\text{员}}\text{越}\frac{\text{愿悦}_{\text{源}}\text{原愿悦}_{\text{圆}}\text{垣怨}}{\text{愿杂}_{\text{源}}}$$

圆元

第四节　椭余波理论

一、概述

对非线性有限振幅波，有很大一类可用上一节介绍的 ε 摄动展开方法建立的 ε 阶非线性波理论进行描述。然而也应注意到，当水深较小时，ε 阶非线性波理论结果的二阶量比一阶量大。这与 ε 摄动展开的前提假定不符。因此，ε 阶非线性波理论在浅水范围内不适用。此时必须建立所谓浅水波理论。

那么，什么是浅水的标准呢？首先考虑水深与波长的关系，无因次参数 μ 越$\frac{d}{L}$可作为表征浅水的一个标准。所谓浅水，就是 μ 较小。由于这个理由，浅水波理论有时也称为长波理论。其次，如前所述，水波问题是一个非线性问题，一般还应引入波幅和波长的比值：α 越$\frac{A}{L}$ 作为运动非线性的标准。

α 和μ 把两个参数结合起来，引入所谓 α 判据：

$$\alpha_{则} 越 \varepsilon/\beta^{2} 越 \alpha/\mu^{2} 越 \frac{H}{d}\left(\frac{d}{L}\right)^{2} \tag{1}$$

其中，ε 越$\frac{A}{d}$，β 越$\left(\frac{d}{L}\right)^{2}$。据此，很容易看出，当 $\alpha_{则}\gg 1$ 时，α 大，μ 小，即强非线性和长波。当 $\alpha_{则}$越$O(1)$ 时，即有 α，μ^{2}相当，说明弱非线性和中等程度的波长，适于采用 ε 阶非线性波理论。而当 $\alpha_{则}\ll 1$时，有 α 小，μ 较大，相当于水深与波长相比较大，波长又不太长的情形。这正是线性波理论的适用范围。从中可看出，$\alpha_{则}\gg 1$就是浅水有限振幅波相应的判据。在此情况下，发展了一类被称为椭余波理论的浅水波理论。

椭余波理论包括了很大一类有限振幅长波。理论适合的范围是 μ^{2}约1 $\alpha_{则}$ 趋于无穷大。孤立波和 Ursell 波是其二个极限情形。当波长为无限长时，就是孤立波理论，而当无限小波高（与水深比较）时，便化为线性波理论。图 1 表示例了相应的波形。

椭余波理论可用常微分方程来描述。

$$\frac{d\eta}{dx}+\alpha\eta\frac{d\eta}{dx}+\beta\frac{d^{3}\eta}{dx^{3}}=0 \tag{2}$$

式中，α 和β 为无量纲参数；η是 x 越（x 原L）的函数；x是 x方向的长度，具有波长的数量阶。方程式 (2) 具有雅科比椭圆函数表示的周期解 $\eta=H\,cn^{2}(K(x-ct),k)$，其中 k为自变量，cn为函数的模，因而被称为椭余波理论。

二、主要结果

椭余波是强非线性波，其波形不再是关于平均水面的对称波，主要表现在尖峰、坦

谷，其波高 匀不等于 圆倍波幅。图 圆簿示例了相应的主要参数的定义。

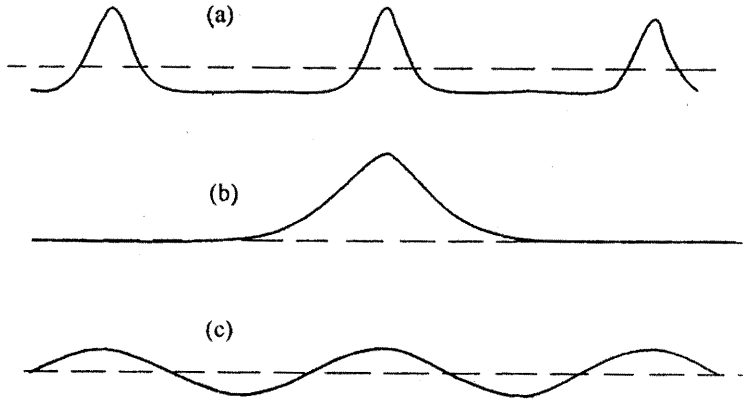


图 圆簿

葬 椭余波； 遵 孤立波； 糟 线性波

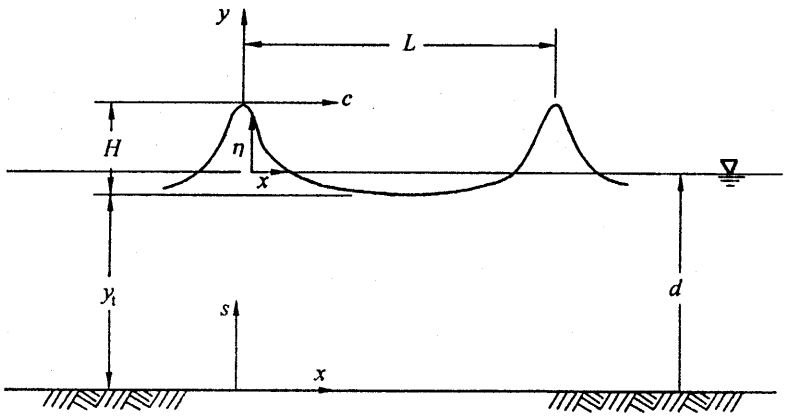


图 圆源

员愿波长 (蕴)

波长可根据下式计算，

$$\frac{蕴}{凿}越\frac{源}{\sqrt{猿}}运噪\left(圆蕴垣员原\frac{赠}{凿}\right)^{原员/圆} \qquad 圆苑员苏$$

其中，$\bar{蕴}$ 噪可由下面两个方程决定：

$$噪越\frac{匀辕凿}{圆蕴垣员原 赠/凿} \qquad 圆苑员园$$

$$圆蕴垣员原赠/凿耘噪 越 圆蕴垣圆原匀辕凿运噪 \qquad 圆苑员员$$

而

圆愿

$$运(噪)越\int_{园}^{\pi/圆}\frac{凿}{\sqrt{员原噪^{圆}\sin^{圆}\theta}}\cdots\cdots 第一类完全椭圆积分$$

$$耘(噪)越\int_{园}^{\pi/圆}\sqrt{员原噪^{圆}\sin^{圆}\theta}\,凿\cdots\cdots 第二类完全椭圆积分$$

把式 (圆.5.27) 代入式 (圆.5.26)，可方便得到：

$$蕴越\frac{源}{\sqrt{猿}}运(噪)\left[\frac{匀}{噪}\right]^{员/圆}\cdot 凿$$

$$越\frac{源}{\sqrt{猿}}噪运(噪)\left[\frac{凿}{匀}\right]^{员/圆}\cdot 凿越\left[\frac{员-凿^{圆}/猿匀^{圆}}{猿匀}\right]^{员/圆}噪运(噪)\qquad (圆.5.28)$$

有的参考文献采用下式：

$$蕴越\frac{源运(噪)凿}{\sqrt{猿(\eta_{猿}原\eta_{员})}}\qquad (圆.5.29)$$

其中，$\eta_{猿}原\eta_{圆}越匀^{圆}/猿$，$(\eta_{猿}原\eta_{圆})$ 与 $(\eta_{猿}原\eta_{员})$ 越噪。因为

$$\eta_{猿}原\eta_{员}越\frac{匀}{噪凿}$$

所以，式 (圆.5.29) 可化为

$$蕴越\frac{源运(噪)凿}{\sqrt{猿匀^{圆}(噪凿)}}越\left(\frac{员-凿^{圆}/猿匀^{圆}}{猿匀}\right)^{员/圆}噪运(噪)$$

即式 (圆.5.29) 和式 (圆.5.28) 一致。

圆.波形和波速

椭余波的表面波形可由下式给出

$$赠(凿,越,赠_{缄},垣,匀,糟_{圆}^{圆}[圆运(噪)(\frac{曾}{蕴}原\frac{贼}{栽},噪)]\qquad (圆.5.30)$$

其中，

$$赠(凿,越,凿垣\eta$$

$$赠(凿,越,\frac{员-凿^{圆}/猿匀^{圆}}{猿凿^{圆}}运(噪)\{运(噪)原耘(噪)]\}垣员原\frac{匀}{凿}\qquad (圆.5.31)$$

$糟_{圆}^{圆}(\cdot,\cdot)$ 为雅科比椭圆余弦函数。

如前所述，由于这一类波其波形用椭圆余弦函数描述，所以称为椭余波。$糟_{圆}^{圆}(\cdot,\cdot)$ 的周期为圆运(噪)，噪在 园至 员之间变化。图 圆.缘示例了椭余波的波形的变化。

椭余波波速为

$$糟越(\frac{凿}{凿})^{员/圆}\left[员垣\frac{匀}{凿}\frac{员}{噪}\left(\frac{员}{圆}原\frac{耘(噪)}{运(噪)}\right)\right]\qquad (圆.5.32)$$

当 噪越员时，$糟_{圆}^{圆}(\cdot,\cdot)$ 的周期变为无穷，也就是说其波长变为无穷，这就是所谓孤立波的情形。根据式 (圆.5.32)，当 噪→员时，运(噪)→肄，耘(噪)→员 这样

$$糟→(\frac{凿}{凿})^{员/圆}\left(员垣\frac{匀}{圆凿}\right)$$

从中可看出，孤立波的波速公式可写成

$$糟越(\frac{凿}{凿})^{员/圆}\left(员垣\frac{匀}{圆凿}\right)\qquad (圆.5.33)$$

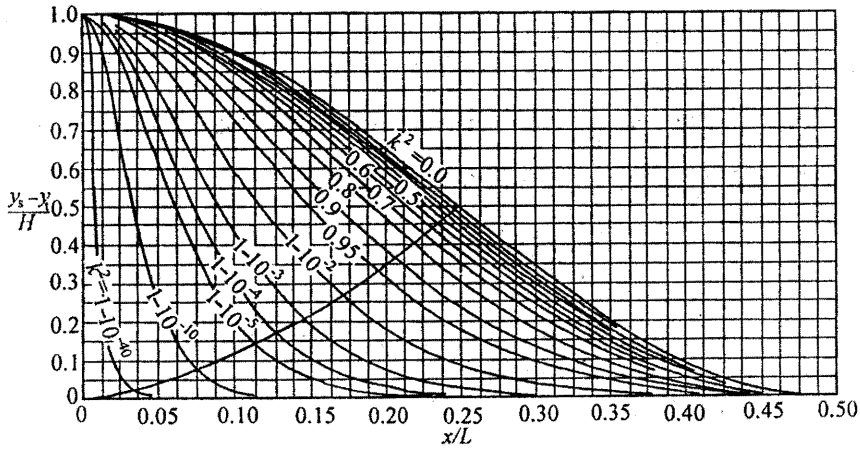


图 圆椽

此时，椭圆余弦函数将变为双曲正割函数：

$$糟[圆运 噪\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right),员] 越 澡糟[圆运 噪\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right)]$$

式 圆原员圆 变为：

$$\frac{圆运 噪}{蕴} 越\sqrt{\frac{猿匀}{源凿}}$$

而且有 赠越凿，则波形表达式 圆原员源 化为：

$$赠_{越 凿垣匀} 澡糟\left[\sqrt{\frac{猿匀}{源凿}}(會原糟)\right] \qquad 圆原员怨$$

或写成

$$赠_{原凿越\eta 越 匀} 澡糟\left[\sqrt{\frac{猿匀}{源凿}}(會原糟)\right] \qquad 圆原员愿$$

当 噪越远时，运 噪 越$\frac{\pi}{圆}$，耘 噪 越$\frac{\pi}{圆}$，耘噪/运 噪 越员

$$糟[圆运 噪\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right),园] 越糟[圆运 噪\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right)]$$

这样，式 圆原员远 可化为

$$糟越 (\frac{}{}凿)^{员/圆}\left(员原\frac{圆\frac{圆}{圆}凿}{蕴^{圆}}\right)$$

当 噪凿很小时，可得近似式

$$糟越\left(\frac{}{圆}\frac{蕴}{}\frac{}{}操凿\right)^{员/圆} \qquad 圆原员苑$$

而式 圆原员源 变为

$$赠_{越 赠_{垣匀}} 糟[圆\frac{\pi}{圆}\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right)] \qquad 圆原员员$$

即

$$\eta 越 赠_{原凿越 (赠_{原凿 垣\frac{匀}{圆}垣\frac{匀}{圆}}糟[圆\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right)]$$

猿园

$$越\frac{匀}{圆}[\left(\frac{會}{蕴}原\frac{贼}{栽}\right]$$

从中可看出，当 噪越远时，椭余波退化为线性波。

第五节　流函数波理论

流函数理论本质上是一种与 杂糟蹋糕波理论有关的非线性波理论，最初是由 阅读社员努森建立的。因为流动的描述采用了流函数，所以称为流函数波理论。现有二类流函数波理论：

员. 对称的或规则的流函数波理论：描述了对称的周期波，具有预定的周期、波高和水深的不变形波。

圆. 不规则流函数波理论：流函数和相应波浪运动学参数具有预定的波形，这种理论特别适于分析波浪水池或场试数据。

不规则流函数波理论的一般形式，对波浪形状没有限制。当各种相速度及分量相互作用引起波浪传播和相对运动时，波浪可以改变形状。

在规则流函数波理论中，假定波浪以常速 糟传播，形状不变。若选择与波浪相同方向、相同速度 糟移动的坐标系，坐标系跟随波浪运动，坐标原点总处于波峰上，在此坐标系中，波形不变，边值问题得以简化。此时，运动是定常的，时间变量消失。相对移动坐标系的水平速度为 怎原糟 微分方程用拉普拉斯方程描述：

$$\nabla^{圆}\Phi 越 \nabla^{圆}\Psi 越园$$

如前，Ψ 必须满足三个边界条件。第一个是水平底部边界条件，即不允许有流通过底部：

$$增越\frac{\partial\Psi}{\partial會} 越园 \quad 在 扎越原凿上$$

第二个是自由表面运动学边界条件：

$$\frac{\partial\eta}{\partial會}越\frac{增}{怎原糟} \quad 在 扎越\eta 上$$

在水表面上，压力必然是大气压。利用贝努尔方程 [式]，这第三个条件就是自由表面动力学边界条件：

$$\eta 垣\frac{员}{圆早}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial會}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial\Psi}{\partial扎}\right)^{圆}\right]越匝 \quad 在 扎越\eta 上$$

式中，匝为贝努尔常数，是流线号码的函数。

假定对称流函数具有如下形式的解：

$$\Psi (會 扎 越 悄 扎垣\sum_{灶越员}^{晕} 载 (灶 泽躁(灶 糟 怎原 灶 會$$

式中，晕是流函数波理论的阶；悄和 载 (灶) 是未知系数；泽越扎垣凿 这一形式显然严格满足微分方程，以及底部条件和自由表面运动学条件，而 载 (灶) 和波数 噪可通过自由表面动力学条件确定。

在方程 中令 扎越η 便得到自由表面形状。重排各项后写成

$$\eta 越\frac{\Psi (會 扎}{悄} 原\sum_{灶越员}^{晕}\frac{员}{悄} 泽躁(灶 糟 怎原 灶 會$$

猿员

水质点的水平和垂直速度分量根据流函数微分求出

$$\text{怎原糟越原}\frac{\partial \Psi}{\partial \text{扎}}\ \text{越原悦原}\sum_{\text{灶越员}}^{\text{晕}}\ \text{灶}\cdot\text{载}\ (\text{灶})\ \text{糟}\cdot\text{操}\ (\text{灶}\cdot\text{蚤})\ \text{糟}\cdot\text{择}\ (\text{灶}\cdot\text{蚤}) \qquad (\text{圆}\cdot\text{圆})$$

$$\text{增越}\frac{\partial \Psi}{\partial \text{曾}}\ \text{越原}\sum_{\text{灶越员}}^{\text{晕}}\ \text{灶}\cdot\text{载}\ (\text{灶})\ \text{泽}\cdot\text{操}\ (\text{灶}\cdot\text{蚤})\ \text{泽}\cdot\text{灶}\ (\text{灶}\cdot\text{蚤}) \qquad (\text{圆}\cdot\text{猿})$$

对给定的 栽 匀和 凿，适当选择参数 蕴 从而 噪 和 $\text{载}\ (\text{灶})$，使边值问题的解尽可能满足自由表面动力学边界条件。为此引入均方误差

$$\overline{\text{耘}}\ \text{越}\ \frac{\text{员}}{\text{阅}-\text{员}}\sum_{\text{蚤越员}}^{\text{阅}}\ (\text{匝}_{\text{蚤}}\text{原}\overline{\text{匝}})^{\text{圆}} \qquad (\text{圆}\cdot\text{猿})$$

式中，$\overline{\text{匝}}$ 贝努尔常数）是方程 (圆·猿) 中定义的所有 $\text{匝}_{\text{蚤}}$ 的平均值，而 蚤 表示在一个空间波浪周期内从 员 到 阅 个离散点相继取值，$\text{匝}_{\text{蚤}}$ 为第 蚤 个 曾 值对应的贝努尔常数。注意，因为波浪是对称的，只取波浪周期之半就足够了，$\text{园}\sim\text{约}\cdot\text{曾}$ 约 $\text{蕴}/\text{圆}$）这样，问题化为寻求最合适的 $\text{载}\ (\text{灶})$，包括 Ψ 和 蕴 使 $\overline{\text{耘}}$ 最小。于是可用迭代法求出解，其初始值：波长 蕴 可根据线性理论选取，流函数 Ψ 可根据峰值 $\text{匀}/\text{圆}$ 的线性理论给定。

若有测得的波浪表面形状可供选用，希望求出此波形相应的水质点运动学和动力学参数，则适于应用不规则流函数理论。流函数理论也适用于单个波形，例如极大波的情形。一般说来，典型的非线性、不对称波形是由基频分量和高阶谐频组合而成的。波高和波浪周期不一定预先给定，而是根据给定的单个实际测量波形确定。预报波形由类似方程 (圆·猿) 的形状给出。波长 蕴 和波浪周期 栽 是随 $\text{载}\ (\text{灶})$ 和流函数 Ψ 变化的未知量。这些未知量用数值方法确定，以使自由表面动力学边界条件的误差，以及预报的表面形状与测量之间差别最小。因此，总误差

$$\overline{\text{耘}}\ \text{越}\ \overline{\text{耘}}_{\text{员}}\ \text{垣}\lambda\overline{\text{耘}}_{\text{圆}} \qquad (\text{圆}\cdot\text{猿})$$

其中 $\overline{\text{耘}}_{\text{员}}$ 由方程 (圆·猿) 给出，$\overline{\text{耘}}_{\text{圆}}$ 是新的误差分量，

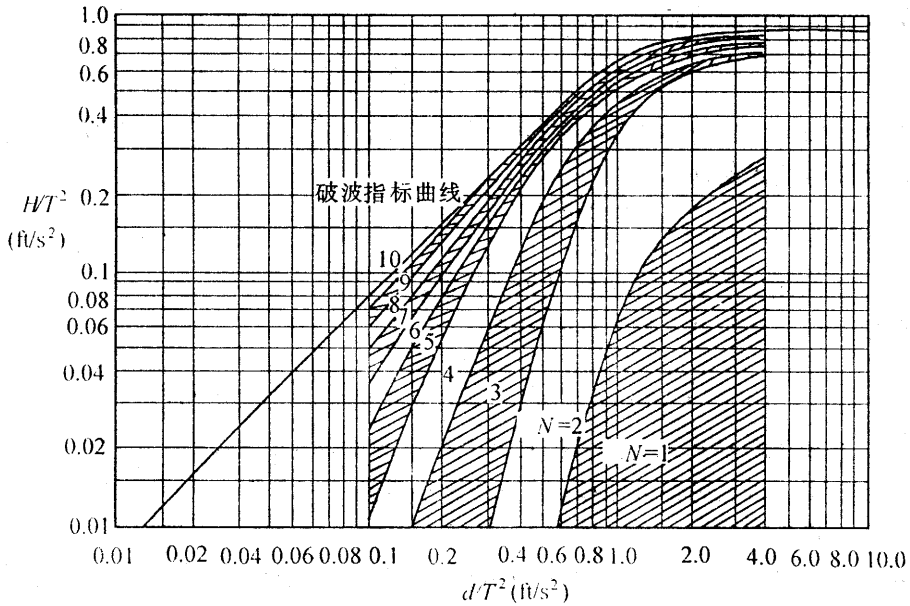


图 圆·远

猿·圆

$$\overline{\text{耘}_{\text{圆}}}\text{越}\frac{\text{员}}{\text{陨}}\sum_{\text{陨}}^{\text{陨}}(\eta_{\text{皂}}-\eta_{\text{原}})^{\text{圆}}$$

其中下标 皂和 责分别相应于测量和预报的波形。常数 λ 是拉格朗日乘数，以提供 $\overline{\text{耘}_{\text{员}}}$ 和 $\overline{\text{耘}_{\text{圆}}}$ 相对加权，通常取 λ 为 员圆圆

如果在波浪传播方向存在一均匀流，结果应在水质点水平速度表达式中，将 怎都改为 怎垣哉。其中 哉为均匀流速度。此时，上述所有表达式中的波速 糟都必须用 糟原哉代替。

流函数理论所需的阶 晕可用标准化波浪参数匀辕和 凿辕给出（见图 圆园），使最

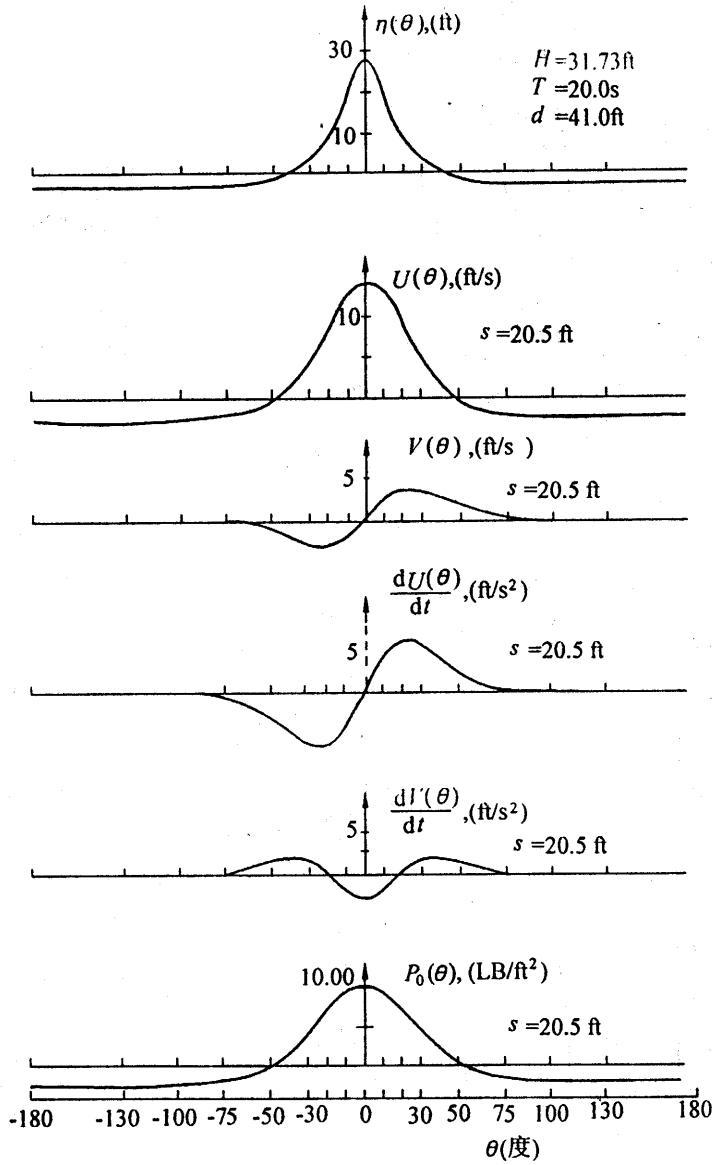


图 圆苑

猿袁

大速度和加速度的误差，在两个相继的阶之间小于百分之一。注意，当 晕越灵时，流函数理论化为线性波理论。图 圆靶示例了一个陡波的例子，用对称流函数理论分析随机波浪记录中的最大波。该波波高和波浪周期分别为 怨圆悦皂和 圆圆择 而水深为 员圆皂。所以，凿辕造越圆园员、匀辕造越圆园园圆。根据图 圆园园，适合于这些值的流函数的阶可查得为 晕越员园

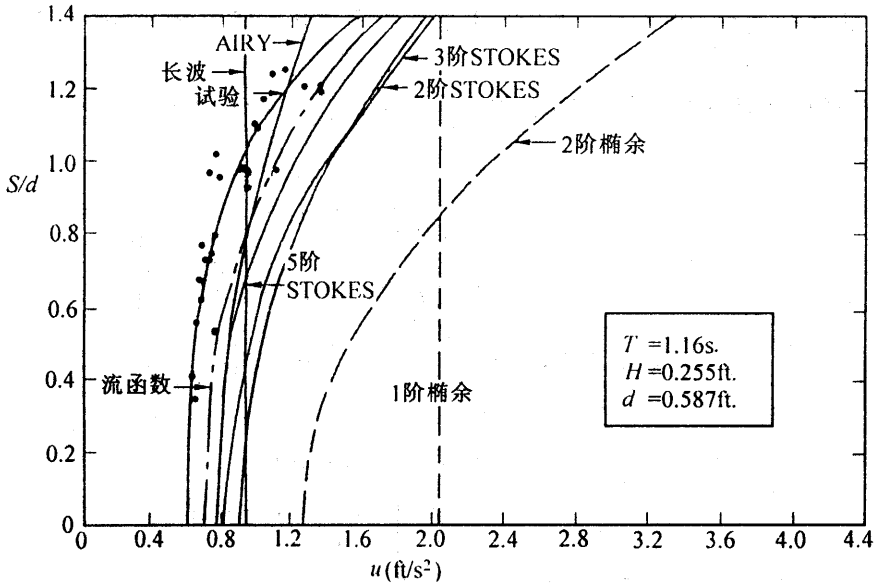


图 圆愿

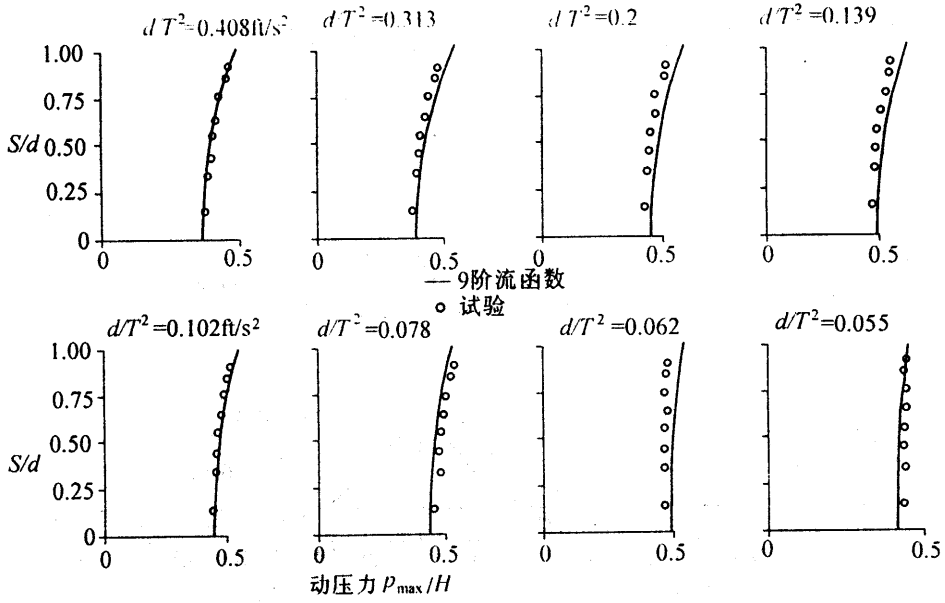


图 圆怨

猿源

在场测和实验室实验中，流函数理论已有许多应用，不过实验室数据的相关分析很有限。阅蒙杜 贷贼源在波浪水池中测量了水质点的水平速度，并与流函数理论以及多个其他波浪理论作了比较。图 圆额即为这种相关分析的一个例子。可以注意到，对称流函数理论与相应试验数据之间有合理的一致性。在另一组试验中，表面波形是不规则的，测量了波浪动压力的垂向分布，将流函数理论与测量的压力作了比较，如图 圆额所示，相关程度是惊人的。

第六节　驻波理论

驻波一般可在全封闭的或半封闭的水池，例如港湾、湖、波浪水槽、液体储备槽等处看到。驻波可以看成两列相同振幅、相同周期，但反向传播的行进波叠加的结果。线性驻波波高 匀可由二列行进波，每列波都具有一半振幅的波面方程线性相加得到。如果

$$\eta_{造} 越 \frac{员}{源} 匀 糟躁蚤(噪曾原\omega 贼 \tag{圆.源.源}$$

$$\eta_{则} 越 \frac{员}{源} 匀 糟躁蚤(噪曾垣\omega 贼 \tag{圆.源.缘}$$

则驻波波幅可得出为

$$\begin{aligned}\eta \ 越 & \ \eta_{造} 垣 \eta_{则} \\ 越 & \frac{员}{源} 匀 [糟躁蚤(噪曾原\omega 贼 垣 糟躁蚤(噪曾垣\omega 贼] \\ 越 & \frac{员}{圆} 匀 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼\end{aligned} \tag{圆.源.远}$$

因此，驻波波高等于二列行进波中单个波高的二倍。据此，很容易导出速度势及其他相关量的表达式，而色散关系与线性行进波相同。若比较驻波与行进波波面公式 分别对应于方程 圆.源.远) 和 圆.源.缘)]，可以写出驻波速度势如下：

$$\Phi \ 越 \frac{\pi 匀}{噪栽} \frac{糟燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.苑}$$

其中 泽越扎垣凿 或者，利用色散关系方程 圆.源.员) 写成另一形式

$$\Phi \ 越 \frac{早匀}{圆\omega} \frac{糟燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.愿}$$

水质点的水平和垂向速度为

$$怎 越 \frac{\pi 匀}{栽} \frac{糟燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.怨}$$

$$增 越 \frac{\pi 匀}{栽} \frac{泽燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.员园}$$

而水平和垂向加速度为

$$\frac{\partial 怎}{\partial 贼} 越 \frac{圆\pi^{圆} 匀}{栽^{圆}} \frac{糟燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.员员}$$

$$\frac{\partial 增}{\partial 贼} 越 \frac{圆\pi^{圆} 匀}{栽^{圆}} \frac{泽燥泽[噪(泽 垣 澡)]}{泽燥泽(噪泽)} 糟燥泽噪曾 糟燥泽\omega 贼 \tag{圆.源.员圆}$$

猿缘

动压力由下式给出：

$$\text{责越}\rho\text{早}\frac{\text{匀 糟糕糕}}{\text{圆 糟糕糕}}\text{贼} \qquad \text{圆园员缘}$$

注意，在 糟糕糕越园相应的驻波波节上表面高和垂向速度均为零，并且感受的水动压力也为零。

值得注意的是封闭水池的固有周期或自由震荡周期正是有关驻波的重要特征之一。对边长为 造的矩形水池，第 灶个模的振荡的自由振荡波长 蕴由下式给出：

$$\text{蕴越}\frac{\text{圆造}}{\text{灶}}\qquad \text{灶越员，圆，…} \qquad \text{圆园员源}$$

一旦波长 蕴已知，周期 栽便可根据色散关系计算。

例　试求宽为 员米，水深 员米的正方形水槽的固有周期。第一个模 灶越员，给出 蕴越圆伊造越圆米。

在浅水假定下因为 蕴越栽$\sqrt{\text{早凿}}$，固有周期

$$\text{栽}_{灶}\text{越}\frac{\text{圆造}}{\text{灶}\sqrt{\text{早凿}}} \qquad \text{圆园员缘}$$

则

$$\text{栽}_{员}\text{越}\frac{\text{圆伊}}{\sqrt{\text{缸}\cdots}\text{员}}\text{越}\cdots\text{秒} \qquad \text{圆园员远}$$

$$\text{栽}_{圆}\text{越}\frac{\text{圆伊}}{\text{圆}\sqrt{\text{缸}\cdots}\text{员}}\text{越}\cdots\text{秒} \qquad \text{圆园员苑}$$

等等。

驻波与前进波的区别就在于波形是否沿 曾方向传播。前进波以给定的速度（也称为波速）沿 曾轴传播。当观测者以与波浪传播速度相同速度、相同方向行进时，他所看到的波浪特征不变。驻波的波形将在固定点之间作垂向振动，没有行进。图 圆园员示例了它们的差别。

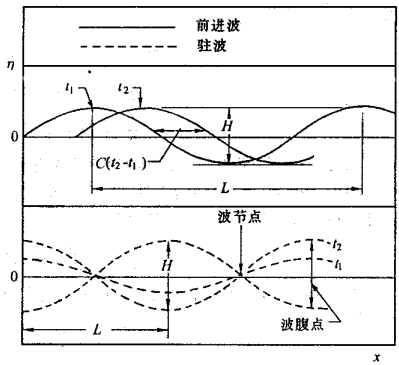


图 圆园员

第七节　理论的适用性

在前面几节讨论的各种行进波，罗列于图 圆园员。注意到，线性理论给出关于静水线对称的波形，而非线性理论给出峰和谷不对称的波形，波峰较高而波谷较浅。非线性理论的阶次越高，这种不对称性变得越显著。

各种波浪理论的适用范围可以根据解析上或试验上这些理论正确与否来确定。我们知道，这些理论依赖于三个参数 凿，匀和 栽，因此，适用范围可用两个无量纲参数，匀/栽^{圆}和

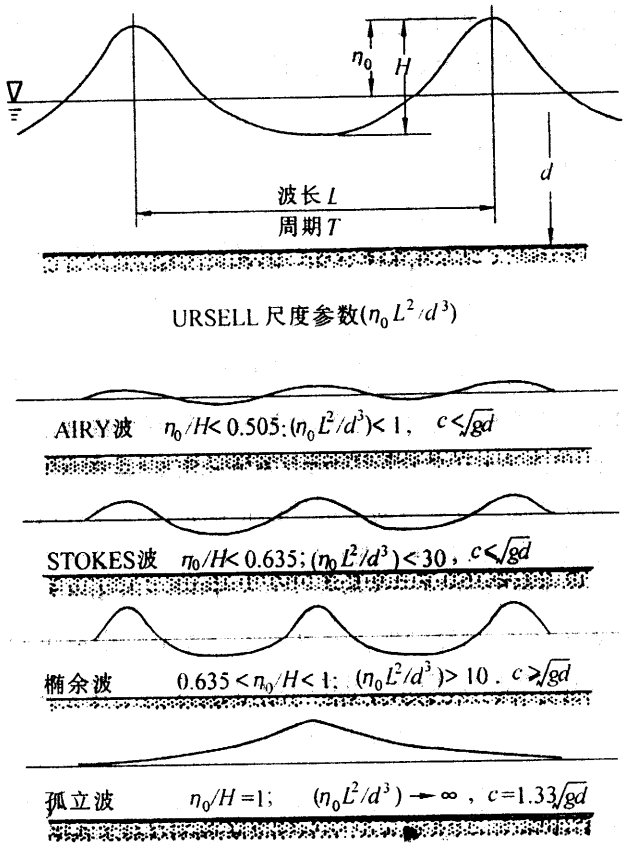


图 [illegible]

凿/栽[illegible]来描述。解析上正确与否主要依据理论满足边值问题，包括所有的边界条件的程度。然而解析上正确，并不一定意味着理论能很好地描述物理现象。表 [illegible]罗列了前面讨论过的各种波浪理论，并且指出这些理论所满足的各种边界条件。可以看到，大多数理论都严格满足微分方程和底部边界条件。一阶和二阶椭余理论仅近似地满足 [illegible]方程。然而，

表 [illegible] 水波理论的边值问题

理　论	严格满足			
	拉氏方程	底部条件	运动学边条件	动力学边条件
线性理论	√	√	伊	伊
三阶 [illegible]	√	√	伊	伊
五阶 [illegible]	√	√	伊	伊
一阶椭余	伊	√	伊	伊
二阶椭余	伊	√	伊	伊
流函数	√	√	√	伊

[illegible]

对非线性自由表面条件，除流函数理论符合自由表面运动学条件外，无论哪种理论都不满足。因此，解析上校核这些理论正确与否的方法之一就是：在无量纲波浪参数的不同范围上，检验其满足二个自由表面条件的程度。

阅藤社（员怨远缘，员怨苑园）作了这种分析，其中波相函数 Θ 的无量纲误差，分别利用运动学和动力学来定义：

$$\varepsilon_{员}(\Theta) 越 \frac{\partial\eta}{\partial 曾} 原 \frac{增}{怎原糟} \qquad (圆郾圆愿)$$

$$\varepsilon_{圆}(\Theta) 越 \left[\eta 垣 \frac{员}{圆早}\left[(怎原糟)^{圆} 垣 增^{圆}\right] 原 \frac{糟^{圆}}{圆早} 原 \overline{匝}\right] \Big/ 匀 \qquad (圆郾圆怨)$$

总误差定义为误差分布的均方根：

$$耘_{蚤} 越 \left[\frac{员}{圆\pi}\int_{园}^{圆\pi} \varepsilon_{蚤}^{圆}(\Theta)\, 凿\Theta\right]^{员/圆} \qquad 蚤越员，圆 \qquad (圆郾猿园)$$

图 圆郾圆和图 圆郾猿是各种 杂贼燥噪藻泽理论、椭余波理论和流函数理论的运动学和动力学自由表面条件误差的一个例子，例中所选波高 匀辕匀遭越园郾苑缘，其中 匀遭越破碎波波高，并且误差表示成 凿辕栽圆的函数形式。根据运动学条件的正确程度可以看出，浅水时，粤蚤则理论和椭余（一阶）理论较为适用；而在深水时（凿辕栽圆跃员郾园），杂贼燥噪藻泽非线性理论更为适用。当然，对流函数理论，运动学条件误差总为零。另一方面，流函数理论的动力学条件误差最小，除了 凿辕栽圆值较小（约园郾园员）时例外，那里，粤蚤则理论给出最小的误差，相应 匀辕匀遭值也有类似的结论（阅藤社，员怨远缘）。因此，根据解析上的正确程度，凿辕栽圆值在整个范围上流函数理论都最为合适。（注意，在小波高的极限情形，流函数理论就是 粤蚤则理论。）

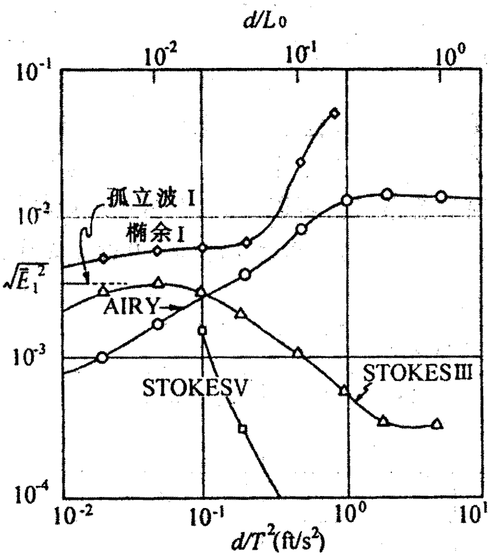


图 圆郾圆

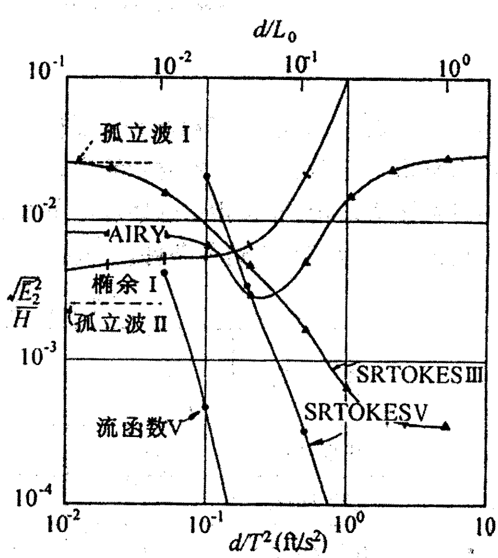


图 圆郾猿

为使所选择的波浪理论适于指定的设计环境，以满足设计工程师的要求，特别绘制了各种波浪理论适用范围的图例。图 圆郾源取自 阅藤社（员怨远愿）和 蕴藻皂藻澡葬怎贼藻（员怨远怨）的工作，

猿愿

其范围用 勻辗圆和 凿辗圆描述。由于 杂则燥噪四阶理论没有广泛采用，所以一般用更为流行的五阶理论替代。可以指出，流函数理论在绝大多数波浪参数范围始终都是适用的，只有 勻辗圆和 凿辗圆极低时例外，那里，椭余波是适用的。在深水和中等水深中的小波陡的波浪，线性波理论与流函数之间的差别很小。厄塞尔参数 哉砸 哉砸越勻凿辗圆圆［见式（圆猿）］常用于确定各种波浪理论的界线。线性理论适用于小波陡 勻辗圆和小 哉砸值。可以看出，试验数据证实了 杂则燥噪三阶理论和流函数理论的正确性。而且，我们发现，线性理论的适用范围似乎超越了其理论上的适用范围，不过必须指出，试验上的适用范围是依据动压力分布的相关程度确定的。

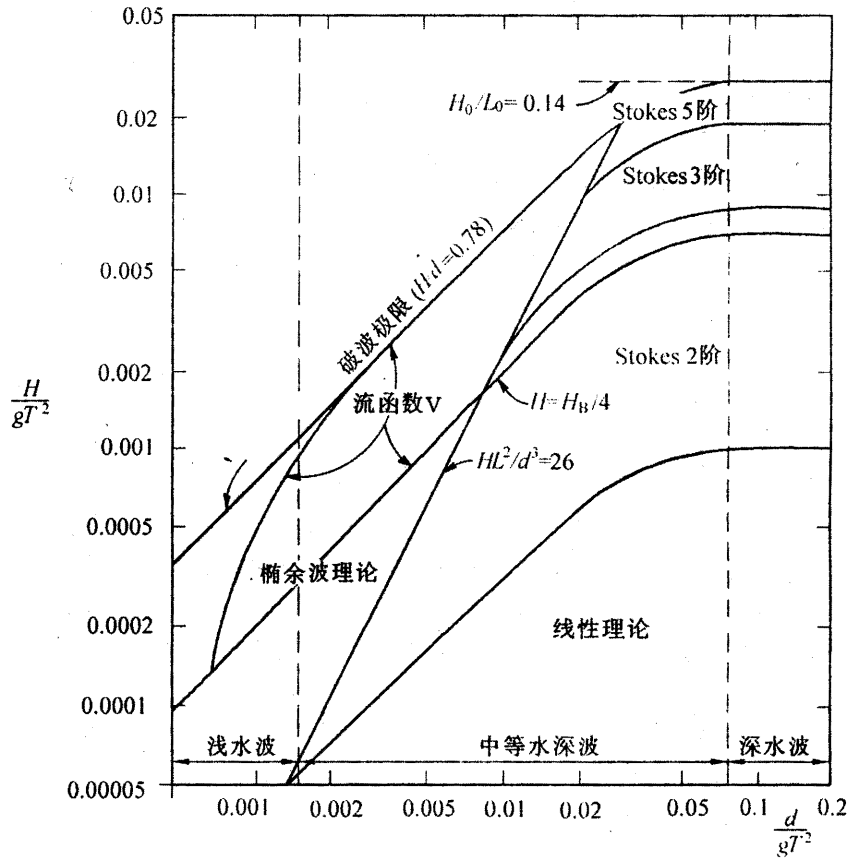


图 圆载源

例　针对下述情况，根据图 圆载源的图谱选取适当的波浪理论。

情况 员：考虑北海的波浪

勻 越猿缘皂，栽 越员远泽凿越员愿皂

$\frac{勻}{g栽^2}$ 越圆园园园员愿；$\frac{凿}{g栽^2}$ 越园园园园

从图谱 图 圆载源中可知，适用的波浪理论是 杂则燥噪三阶理论。

情况 圆：浅水波

匀 越 园 园 栽 越 园 释 凿 越 园 意 园

匀 越 园 园 栽 越 园 园 园 园 园 凿 越 园 园 园 园 园

根据图谱，选取椭余波理论是适当的。

源园

第三章　作用在小结构上的波浪力

第一节　波浪力的表述

作用在近海结构上波浪力的计算是结构设计中最基本的任务，同时也是最困难的任务之一。因为这将涉及复杂的波浪和结构的相互作用。特别是，如要考察海洋波的随机特性及其对近海结构的影响，那将更为困难。不过，今天我们已可利用诸如谱分析方法，与海测和试验室试验的分析结合起来，为工程设计提供足够准确的预报。要作这种预报，最基本而最繁复的任务便是在永形波作用下，近海结构的波浪力的计算问题。

海洋工程和海岸工程领域面临一大类近海结构，如：导管架平台、重力式平台、张力腿平台、半潜平台、桩基深水码头和防波堤等。它们类型不同，形态各异，大小不一，无法也无必要用统一的方法计算其上的波浪力。鉴此，我们将采用不同类型的波浪力表述。

作用在近海结构上的波浪力可用三类不同的方法进行计算：

员　酝燥蚤遭藻造方程。

圆　云蚤泽糟澡藻则造藻则理论。

猿　绕射理论。

酝燥蚤遭藻造方程假定，作用力是由惯性力和阻力线性加在一起组成的。所含惯性（质量）系数和阻力系数必须试验确定。当阻力占主要地位时，酝燥蚤遭藻造方程是适用的，结构特征尺度与波长相较是小量时，通常就属于这种情形。

当阻力很小，惯性力占统治地位，而且结构特征尺度相对较小时，可用云蚤泽糟澡藻则造藻则运动理论。该理论利用入射波压力在结构表面受压面积上积分计算波浪力。方便之处在于，对某些对称物体，波浪力用预定形式得出，力系数一般容易确定。

当结构尺度与波长可比拟时，可以认为，结构的存在将改变结构附近的波浪场。这时，波浪受结构表面的绕射影响有必要计入。它就是通常所说的绕射理论。虽然，对少数几种简单情形有可能得到简单形式的解，但一般来说，解此类问题要用包括求解具有相应边界条件的拉普拉斯方程的数值方法。

为了确定上述三种方法的适用范围，首先来作简单的量纲分析。作用在结构上的波浪力（枣）结构的特征尺度（例如垂直柱体的直径，定义为（阅），可以写成如下的函数形式：

$$枣 = \Psi(贼, 栽, 阅, 蕴, 怎_{园}, \rho, \nu)$$

式中，贼为时间；栽为波浪周期；蕴为波长；$怎_{园}$为水质点最大水平速度；ρ 为水的质量密度；ν 为运动学粘性。注意到，水质点的加速度可以通过速度得到。在线性波理论中，$怎_{园} = \omega 怎_{园}$，其中 $\omega = 2\pi/栽$。在（质—蕴—栽）系统中，愿个变量将产生（缘）个无量纲的量。这样，无量纲的力便可表示成（源）个无量纲量的函数。

$$\frac{枣}{\rho 怎_{园}^{2} 阅^{2}} = \Psi\left(\frac{贼}{栽}, \frac{怎_{园} 栽}{阅}, \frac{怎_{园} 栽}{\nu}, \frac{\pi 阅}{蕴}\right)$$

源）

式中，[illegible]为无量纲时间，[illegible]为运[illegible]参数（运[illegible]数），[illegible]为[illegible]参数，π[illegible]为绕射参数。

运[illegible]数是表征阻力影响重要性的量，而绕射参数则确定绕射作用的重要性。运[illegible]数等价于水质点轨圆直径与结构直径的比，而绕射参数等价于结构半径与波长的比。根据这些定义可注意到，当运[illegible]数大时，绕射参数就小，或者相反。因此，大的绕射作用必然意味着小的阻力影响，相反地，当阻力影响很大时，绕射影响便可忽略。[illegible]对固定立柱给出波浪力预报方法的适用范围，如图 [illegible]所示，可看成是以上分析的一种特例。

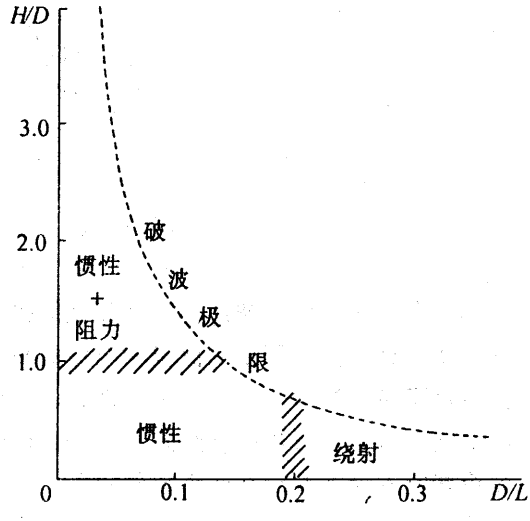


图 [illegible]

本章仅讨论 [illegible]方程，有关[illegible]理论和绕射理论将在下一章讲述。

第二节 [illegible]方程

[illegible]等人[illegible]和[illegible]提出了一个后来被称为 [illegible]方程的公式，用于表述作用在从海底直至自由水表面的垂直立柱上的水平波浪力。

一、[illegible]方程的标准形式

[illegible]等人建议，未破碎表面波作用在从海底直至自由水表面的垂直立柱（图 [illegible]）上的力由两部分，即惯性力和阻力组成。

$$枣越悦_{M}\rho\frac{\partial怎}{\partial贼}垣悦_{D}\rho\frac{1}{2}怎|怎| \qquad (猿援员)$$

式中，枣为垂直柱体单位长度上的力（图 [illegible]）；阅为柱体直径；$悦_{M}$为惯性系数；$悦_{D}$为阻力系数。

$$\rho越\frac{\pi}{源}阅^{圆} \qquad (猿援圆)$$

$$悦_{M}越\frac{员}{圆}\rho阅 \qquad (猿援猿)$$

本来的 [illegible]方程是根据定常流导出的经验公式，因此，把它应用于复杂的时间依赖的分离流可能很成问题，然而，试图导出新的公式以便较好地描述流动现象的努力迄今没能得到令人满意的结果。[illegible]和[illegible]（[illegible]）介绍了一种方法，用附加高阶（奇）简谐项拟合测量数据，以改进 [illegible]方程。在准确预报作用在小构件上的波浪力方面，原来二项形式的 [illegible]方程被证实是可靠的。至于存在小的离散情形，由于在设计中存在许多其他不定因素，可以认为是不重要的。况且，根据试验室试验和场测，已得到

大量 悦鄄和 悦阅试验数据库。这就允许设计者选择适当的系数值。现已知道这些系数至少是 运悦数、砸数、粗糙度参数，以及相互作用参数的函数。这是一个极其活跃的领域，已发表了大量的文章。就现有的结果来看，除了 运悦数的一个极小范围外，可以认为这些系数值都是好的。然而，为发展这些系数的可靠的设计曲线，以系统的和受控的方式从事实验室试验和场试，作更多的研究是必要的。

方程 (猿窑员) 是垂直柱体单位长度上的力。假定柱体从海底延伸到水表面 图 猿窑圆)，则作用在整个柱体上的总力可由积分得到：

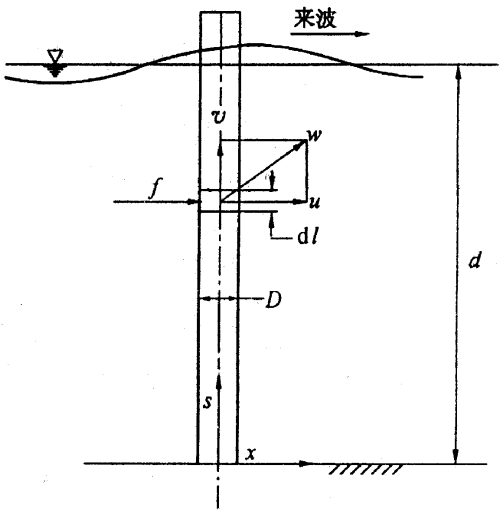


图 猿窑圆 作用在小直径柱体上的波浪力

$$云 越 \int_{园}^{凿} 凿择 越 \int_{园}^{凿} \left(悦_{酝} 粤_{顿} \frac{\partial 怎}{\partial 贼} 垣 悦_{阅} 粤_{阅} | 怎 | 怎 \right) 凿择 \qquad (猿窑源)$$

根据线性波理论 (见第二章式 (圆窑员远)、式 (圆窑员怨)]，水质点的水平运动速度和加速度为：

$$怎 越 \frac{\pi 匀}{栽} \frac{精糙燥躁择}{泽躁燥凿} 精糙燥躁(\quad) \qquad (猿窑缘)$$

$$\frac{\partial 怎}{\partial 贼} 越 \frac{圆\pi^{圆} 匀}{栽^{圆}} \frac{精糙燥躁择}{泽躁燥凿} 精糙燥躁(\quad) \qquad (猿窑班)$$

于是，

$$云 越 悦_{酝} 粤_{顿} \left(\frac{圆\pi^{圆} 匀}{栽^{圆} 泽躁燥凿} \right) \int_{园}^{凿} 精糙燥躁择 \cdot 泽躁(\quad) 凿择$$

$$垣 悦_{阅} 粤_{阅} \left(\frac{\pi 匀}{栽 泽躁燥凿} \right)^{圆} \int_{园}^{凿} 精糙燥躁^{圆} 择 \cdot 精糙(\quad) \cdot 精糙(\quad) \qquad (猿窑苑)$$

把 $精糙燥躁^{圆}择 越 \frac{员}{圆}(员垣精糙燥躁圆择)$ 代入，因为

$$\int_{园}^{凿} 精糙燥躁^{圆} 择 凿择 越 \int_{园}^{凿} \frac{员}{圆}(员垣精糙燥躁圆择) 凿择 越 \frac{员}{源燥} 圆凿垣 泽躁燥圆凿 \qquad (猿窑源)$$

所以

$$云_{阅} 越 悦_{阅} 粤_{阅} \left(\frac{\pi 匀}{栽 泽躁燥凿} \right)^{圆} \frac{圆凿垣 泽躁燥圆凿}{源燥} 精糙(\quad) \cdot 精糙(\quad)$$

$$越 悦_{阅} \frac{员}{圆} 阅 \left(\frac{圆}{栽} \right)^{圆} \cdot \frac{匀^{圆}}{源} \cdot \frac{圆凿垣 泽躁燥圆凿}{源燥 泽躁燥凿} 精糙(\quad) \cdot 渍糙(\quad)$$

$$越 悦_{阅} 早灾 \left(\frac{匀}{圆凿} \right) \left(\frac{匀}{源} 阅 \right) 赠 \frac{圆凿垣 泽躁燥圆凿}{源燥 泽躁燥凿} 精糙(\quad) \cdot 精糙(\quad) \qquad (猿窑怨)$$

而

$$云_{酝} 越 悦_{酝} 粤_{顿} \frac{圆\pi^{圆} 匀}{栽^{圆} 泽躁燥凿} \left[\int_{园}^{凿} 精糙燥躁^{圆} 择 \right] 泽躁(\quad)$$

(猿窑缘)

越悦运·员源·ρπ阅圆·(圆栽)圆·匀圆·员噪 猿源圆

越悦运ρ早穴(匀圆凿)赠操燥凿{悦运 泽凿 垣悦阅(匀源阅)圆凿垣泽凿燥凿圆凿泽凿燥凿 精糟 | 精糟} 猿源猿

在式 猿源圆)和式 猿源猿)中，穴越τ阅圆 凿源 并已应用了色散关系：

ω圆 越 噪燥凿操燥凿 猿源猿

于是，作用在立柱的总波浪力为：

云越ρ早穴(匀圆凿)赠操燥凿{悦运 泽凿 垣悦阅(匀源阅)圆凿垣泽凿燥凿圆凿泽凿燥凿 精糟 | 精糟} 猿源猿

由于 Θ越噪燥原ω贼 适当选取坐标系，不失一般性，可取 曾越园 则 Θ越原ω贼 式 猿源猿)可改写成

云越云悦泽凿ω贼渣云阅泽渣精糟贼渣精糟贼 猿源猿

其中，云悦越原悦运ρ早穴(匀圆凿)赠操燥凿；云阅越悦(匀源阅)圆凿垣泽凿燥凿圆凿泽凿燥凿。

从式中可看出，作用在圆柱上的总水平力是周期变化的。为求出最大水平力相应的时刻和幅值，可令其时间导数为零。即：

凿云凿贼越ω精糟贼云悦原圆云阅泽凿ω贼 越园

这有两种可能：员 精糟贼越园；圆 云悦越圆云阅泽凿ω贼 由于渣泽凿ω贼渣≤员 因此，要使 圆成立，必然有：

渣云阅渣≥ 园圆越云悦

由此可知，水平波浪力极值出现的时刻应为：

员 当 云阅约园圆越云悦时，最大水平波浪力出现在 精糟贼越园时，相当于波面通过静水面的时刻，此时的最大水平波浪力为

云越云悦 猿源源

圆 当 云阅越园圆越云悦时，泽凿ω贼越员 亦即 精糟贼越园 此时的最大水平波浪力与 员 的情形相同。

猿 当 云阅跃园圆越云悦时，最大水平波浪力出现在

泽凿ω贼越云悦/ 圆云阅)

时刻，此时最大水平波浪力为

云越云悦 员垣云圆悦/ 源云圆阅)] 猿源缘

从式 猿源源)和式 猿源缘)可看出，当 云阅和 云悦相较，小到一定程度时，最大水平波浪力中的阻力项的贡献可忽略；相反，当 云悦和 云阅相较，小到一定程度时，最大水平波浪力中的惯性项的贡献可不考虑。

对倾覆力矩可得到类似的公式：

酝越ρ早穴(匀圆凿)员噪赠操燥凿·{悦运 噪燥凿操燥凿原精糟操燥凿垣员泽凿 垣

悦阅(匀圆阅)(噪凿圆垣噪燥凿操燥凿原泽凿燥凿圆凿泽凿燥凿 精糟 | 精糟} 猿源远

源原

酝熨暨燥比方程的非线性形式及其线性化：

员圆阻力项

因为阻力项正比于水质点速度的平方，即便是根据线性理论，水质点速度是正弦的，阻力也是非线性的。此时，阻力能用 云燥则暨燥级数表示。因此，假定水质点速度用正弦表示，根据方程 猿缘缘)

$$怎越怎_{圆}精躁蚤(\omega t)$$

可写出

$$|精躁蚤(\omega t)|精躁蚤(\omega t)越\sum_{灶越员}^{肆}葬_{灶}精躁蚤(灶\omega t)$$ 猿缘远)

其中系数

$$葬_{灶}越\frac{员}{\pi}\int_{园}^{圆\pi/\omega}|精躁蚤(\omega t)|精躁蚤(\omega t)精躁蚤(灶\omega t)\,凿t$$ 猿缘愿)

可以指出，$葬_{员}越园$(灶越园圆源…时)，而 $葬_{圆}越愿/猿\pi$)，$葬_{猿}越原愿/员缘\pi$)，$葬_{缘}越原愿/员缘\pi$)等等。因此线性化形式可写成：

$$云越\rho 早灾\left(\frac{匀}{圆凿}\right)赠操躁\left[悦_{转}泽蚤(\omega t)垣悦_{阅}猿\left(\frac{匀}{源}\right)\frac{圆凿垣泽蚤(\omega t)}{泽蚤(\omega t)}精躁蚤(\omega t)\right]$$ 猿缘怨)

圆惯性项

如果加速度用 线性理论)正弦水质点速度的偏导数，则惯性项是线性的。另一方面，如果局部水平加速度用总的水平加速度 包括迁移项)替代，则惯性项也是非线性的。这样

$$枣越悦_{转}粤_{赋}\left[怎垣悦_{阅}粤_{赋}\right]怎\,怎$$ 猿缘员园)

$$怎越\frac{凿怎}{凿贼}越\frac{\partial 怎}{\partial 贼}垣怎\frac{\partial 怎}{\partial 曾}垣增\frac{\partial 怎}{\partial 赠}垣憎\frac{\partial 怎}{\partial 赠}$$ 猿缘员员)

式中，怎 增和 憎是水质点速度矢量在笛卡儿直角坐标系中的分量。作为一个例子，如果把流函数理论应用于 酝熨暨燥比方程，则与线性理论中的局部加速度不同，质点加速度应用总加速度写出，即方程 猿缘员员)。注意，此时 酝熨暨燥比方程的惯性项在流体运动学上也是非线性的。根据式 圆缘员圆)，采用以下关系替代：

$$灶载(灶)\Rightarrow 粤_{灶},\ 灶燥\Rightarrow 噪_{灶},\ 灶曾\Rightarrow\Theta_{灶}$$

流体速度的水平分量可用级数形式写出：

$$怎越\sum_{灶越员}^{晕}粤_{灶}精躁蚤(\Theta_{灶}-\omega_{灶}t)精躁蚤(灶\omega t)$$ 猿缘员猿)

式中，$\Theta_{灶}越噪_{灶}曾原\omega_{灶}贼$，晕是级数的分量总数；噪、$\omega_{灶}$是具有速度振幅 $粤_{灶}$的单个波浪分量的波数和频率。利用方程 猿缘员猿)，惯性力将具有如下形式 不存在垂向速度 增)：

$$枣_{惯}越悦_{转}\rho\left(\frac{\pi}{源}\right)^{圆}\left\{\sum_{灶越员}^{晕}\omega_{灶}粤_{灶}精躁蚤(\Theta_{灶}-\omega_{灶}t)精躁蚤(灶\omega t)\right.$$

$$\left.原\left(\sum_{灶越员}^{晕}粤_{灶}精躁蚤(\Theta_{灶}-\omega_{灶}t)\right)\left(\sum_{皂越员}^{晕}噪_{皂}粤_{皂}精躁蚤(\Theta_{皂}-\omega_{皂}t)精躁蚤(灶\omega t)\right)\right\}$$ 猿缘员源)

二、酝熨暨燥比方程的几种修正形式

本来的 酝熨暨燥比方程已推广应用于许多不同领域，包括倾斜结构、移动结构、存在波浪的流中等等。对 酝熨暨燥比方程的修改和推广将在下面讨论。

员圆倾斜柱体

对倾斜柱体，酝奥莫里斯方程的推广式用法向速度和加速度表示：

$$\text{枣越悦}_{\text{酝}}\text{粤}_{\text{宰}}\text{垣悦}_{\text{阅}}\text{粤}_{\text{阅}}\quad |\text{宰}|\text{宰} \qquad \text{猿圆员}$$

式中，宰、$\dot{\text{宰}}$是倾斜柱体法向速度和加速度。这种矢量力可分解，从而导出三个正交方向的分量力。

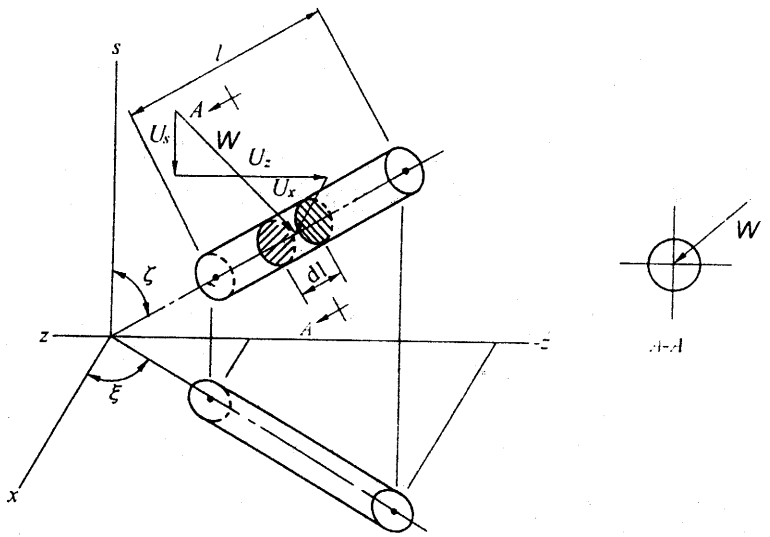
在酝奥莫里斯方程的这种推广中，倾斜柱体上水质点运动学量的法向分量直接代入本来的酝奥莫里斯方程（图猿员园）。此时，力矢量可用下述方式分解。法向速度矢量写成

$$\text{宰 越 悦伊[}(\text{怎}_{\text{酝}}\text{垣增}_{\text{赠}}\text{躁伊悦}_{\text{赠}}\text{)} \qquad \text{猿圆员}$$

式中，悦是沿柱体轴指向向上（或向下）的单位矢量，于是

$$\text{悦 越 悦}_{\text{酝}}\text{蚤垣悦}_{\text{赠}}\text{躁垣悦}_{\text{孔}}\text{噪} \qquad \text{猿圆员}$$

式中，怎 增是水质点速度的水平和垂直分量；蚤 躁 噪分别是笛卡儿坐标轴 酝 赠 扎的单位矢量（图猿员园）。图中 赠轴用 泽轴表示，因为这是从海底算起（泽越赠垣凿）。



图猿员园 倾斜柱体

在球坐标系中

$$\text{悦}_{\text{酝}}\text{越泽}_{\zeta}\text{糟}_{\xi}\text{,悦}_{\text{赠}}\text{越糟}_{\xi}\text{,悦}_{\text{孔}}\text{越泽}_{\zeta}\text{泽}_{\xi} \qquad \text{猿圆员}$$

式中，ζ为柱体轴与垂直轴夹角；ξ为柱体投影与 酝轴的夹角。若作方程（猿员圆）的叉乘运算，并把 宰 写成：

$$\text{宰 越 怎}_{\text{酝}}\text{蚤垣怎}_{\text{赠}}\text{躁垣怎}_{\text{孔}}\text{噪} \qquad \text{猿圆员}$$

则沿 酝 赠 扎轴的速度分量为：

$$\text{怎}_{\text{酝}}\text{越怎原悦}_{\text{酝}}\text{(悦}_{\text{酝}}\text{怎垣悦}_{\text{赠}}\text{增} \qquad \text{猿圆员}$$

$$\text{怎}_{\text{赠}}\text{越增原悦}_{\text{赠}}\text{(悦}_{\text{酝}}\text{怎垣悦}_{\text{赠}}\text{增} \qquad \text{猿圆员}$$

$$\text{怎}_{\text{孔}}\text{越原悦}_{\text{孔}}\text{(悦}_{\text{酝}}\text{怎垣悦}_{\text{赠}}\text{增} \qquad \text{猿圆员}$$

|宰|是宰的幅值，可根据方程（猿员圆）得到。加速度矢量可根据方程（猿员圆）对时间微分

得出：

$$\text{宰}\ \text{越}\ \text{怎}_{\text{曾}}\ \text{蚤}\ \text{垣}\ \text{怎}_{\text{赠}}\ \text{躁}\ \text{垣}\ \text{怎}_{\text{扎}}\ \text{噪}$$

其上一点表示对时间 贼的微分。因此，作用在任意方位柱体单位长度上的力，可分别根据下述各式计算 曾 共线)、赠 垂向)和 扎 横向)方向的分量力：

$$\text{枣}_{\text{曾}}\ \text{越}\ \text{悦}_{\text{运}}\ \text{粤}_{\text{惯}}\ \text{怎}_{\text{曾}}\ \text{垣}\ \text{悦}_{\text{阅}}\ \text{粤}_{\text{阅}}\ \text{宰}\ |\ \text{怎}_{\text{曾}}$$

$$\text{枣}_{\text{赠}}\ \text{越}\ \text{悦}_{\text{运}}\ \text{粤}_{\text{惯}}\ \text{怎}_{\text{赠}}\ \text{垣}\ \text{悦}_{\text{阅}}\ \text{粤}_{\text{阅}}\ \text{宰}\ |\ \text{怎}_{\text{赠}}$$

$$\text{枣}_{\text{扎}}\ \text{越}\ \text{悦}_{\text{运}}\ \text{粤}_{\text{惯}}\ \text{怎}_{\text{扎}}\ \text{垣}\ \text{悦}_{\text{阅}}\ \text{粤}_{\text{阅}}\ \text{宰}\ |\ \text{怎}_{\text{扎}}$$

除了惯性力和阻力外，作用在与波浪运动方向横向上的举力，同样可分解为这些分量。

因为假定力垂直作用在柱体上，切向分量忽略，作为方程 的一个重要推论，假设式 ～式 中 曾 赠和 扎轴向的惯性力和阻尼系数都相同。

倾斜柱体的上述表达式，是建立在称为独立原则的基础上的。所谓独立原则可表述为，作用在倾斜柱体上的力能分解为法向和切向分量，而切向分量可以忽略。注意到波浪中的水质点运动是轨圆的，垂直柱体的 方程同样略去了切向分量 见图)。因此与标准 方程实际上是一致的。

鉴于横向力 方程没有计入)的复杂性，方程 的一般形式对任意方位的柱体似乎并不适用。不过在波浪传播平面上及其垂直面上的柱体，计算共线波浪力时，这种形式的 方程还是适用的。 等人 曾对这种形式的 方程作过试验验证，独立测量波浪中倾斜 柱体上的水平和垂向力，结果在这两个方向测得几乎相等的力。

等人 研究了作用在简谐振动流平面上倾斜柱体上的力。采用倾斜柱体法向运动学量，导出了惯性力和阻力系数值，发现除了很小的范围上有显著不同外，倾斜柱体的系数值与垂直柱体的类似。例如 运悦 数在 愿～ 范围内，垂直 于流体流动方向)柱体的惯性系数会有显著的减少（“惯性临界区”），而相应的阻力系数则会增加。但倾斜柱体却没有这种现象。这种惯性临界区似乎仅出现在非常理想化的振荡流场中。只要存在微小的差异，如在振荡流中迭加一个很小的流场，大多数的惯性临界区将消失，图 和 示例了作为 运悦函数的光滑倾斜柱体的 悦和 悦结果。其中 运悦数用柱体上水质点速度的法向分量的最大值定义。

$$\text{运悦}\ \text{越}\ \frac{\text{宰}_{\text{圆}}\ \text{栽}}{\text{阅}}$$

由于 运悦约 时阻力贡献很小，所以，低 运悦数时 悦对角度的依赖关系一般并不重要。因此，对倾斜柱体，法向力就根据法向运动学量计算。系数值一般就不管倾斜的特殊角度，不考虑 倾斜时的不同。在实际设计中，倾角与其他倾角之间的系数不同可以不管。

圆振荡柱体

振荡柱体常用于试验上测量柱体的水动力系数，所得系数值被推荐用于波浪中固定柱体的情形。在设计阶段，其适用性可能处在允许的误差范围内。尽管这种等价性还有待于进一步证实。另一方面，设计移动近海结构时，这些值可直接应用。此时，方程用静水中运动结构的物体速度进行修正。

对于静水中振荡的柱体，作用在柱体上的流体力用反作用力来表示，其反作用力为：

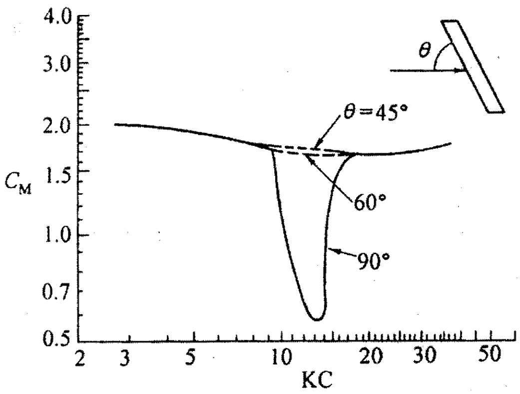


图 猿郾源 振荡流中光滑倾斜柱体的惯性系数

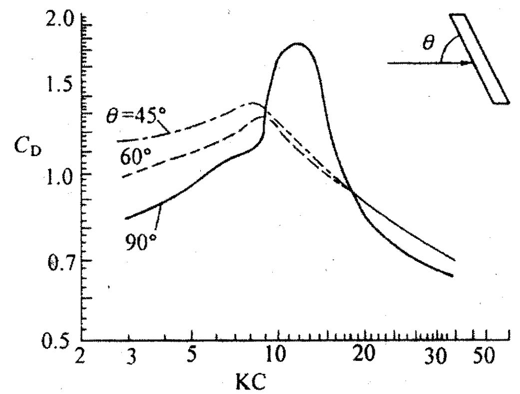


图 猿郾缘 振动流中光滑倾斜柱体的阻力系数

枣越原悦粤载原悦杂粤阅|载|载 猿郾猿苑

式中，载和 载分别是柱体的速度和加速度；悦粤为附加质量系数；悦杂为静水中振荡柱体的阻力系数。这种情况下的反作用力可以认为是振荡柱体感受到的外界流体力。注意：柱体加速度相应的惯性并没有包括在反作用力中。

对不存在自由表面的通过固定柱体的振荡流，方程（猿郾猿苑）也是成立的。静水中振荡柱体的情形与振荡流流经固定柱体的情形是等价的，在运动学上是一致的。这二种状态下作用力的唯一差别只是 云嗓藻蒜哪圆力方面，对振荡柱体 云嗓藻蒜哪圆力等于零。如果柱体惯性项保留，柱体是中性浮的，那么，根据惯性项得到的系数就是虚质量系数，常表示为 悦酝（越员垣悦粤）。由于这两种情形的等价性，常用二种方法通过试验设备以确定 悦粤和 悦杂的值。注意，振荡柱体（流）的阻力系数 悦杂，与波浪通过固定柱体的阻力系数 悦阅的定义是不一样的。

鉴于这一类型试验能达到很高的准确度，水平柱体或垂直柱体的振荡试验，或通过固定水平柱体的振荡水流的试验相当流行。事实上，这些控制环境条件的实验，例如，杂葬则责葬噪葬赠葬（员怨苑远，员怨愿苑）在 哉形管所做的试验（图 猿郾远），已对物理问题作了多方考察，提供了大量有关流体动力系数作为 运藻怎造藻早葬灶原悦葬则责藻灶贼藻则数、砸藻赠灶燥造凿泽数和表面粗糙度函数的有用数据。结果表明，这种形式的 酝燥则蚤泽燥灶方程，就相应于测量力方面说来，除中等 运悦数（愿和 圆缘之间的范围内）外，工作得相当好。已经表明（悦澡葬噪则葬遭葬则贼蚤，员怨愿园），哉形管数据和波浪水槽数据之间在低 砸藻数上有好的相关度。然而，要证明其对海洋波中近海结构的适用性，还需进一步的研究。

猿郾怨 在定常流中的振荡柱体

存在定常流时，光滑柱体的振荡可以用三个无量纲的参数来表征：雷诺数 砸藻，约化速度 灾砸以及振幅参数 载。其中约化速度用流速 哉表示为：

$$灾_砸 越 \frac{哉栽_园}{阅} \qquad 猿郾猿愿$$

式中，栽园为柱体振荡周期。振幅参数定义为：

源愿

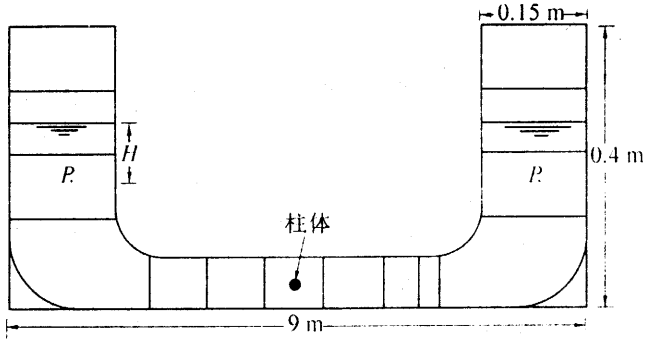


图 猿源缘远　哉形水槽中振荡流流过柱体的试验

$$载越\frac{载_{园}}{阅} \tag{猿源缘}$$

在流和柱体振荡的联合场中，涡发放的机制受 灾和 载二者的影响。这种场合下，等价 运悦数可表示为：

$$运悦越\frac{(载_{园}垣哉)\ 栽_{园}}{阅} \tag{猿源远}$$

在均匀流场中，柱体的共线 振荡问题用相对速度表示，则修正的 酝莫里森方程可写成：

$$枣越原悦_{粤}\dot{粤}_{r}垣悦_{阿}粤_{r}|\ 哉原载\ \ 哉原载\dot{} \tag{猿源苑}$$

式 (猿源苑) 一般称为二项式。若考虑振荡结构分离流的影响，通常要用三项式 酝莫里森方程表示。假定柱体的运动是正弦的，于是

$$载越\ 载_{园}\ 贼 \tag{猿源愿}$$

式中，$载_{园}$为 载的振幅，作用在柱体上的力可以写成：

$$枣越悦_{粤}\dot{粤}_{r}原悦_{阿}粤_{r}|\ 载\ \ 载\dot{}\ \ 悦_{阿}粤_{r}哉_{园} \tag{猿源怨}$$

式中要求三个系数：定常阻力系数 $悦_{阿}$根据平均力得到，而 $悦_{粤}$和 $悦_{阿}$是根据测量力 枣得到的傅里叶平均值。不过，必须强调，$悦_{阿}$并不一定相当于常速度均匀流的稳态阻力系数。同样，$悦_{粤}$和 $悦_{阿}$的值也并不等价于前面讨论的无流时振荡柱体的系数值。

酝莫里森和 灾奥布赖恩 (员怨缘园) 在均匀流中进行了水平柱体的振荡试验，测量了作用在柱体上的力，推荐方程 (猿源愿) 给出的三项式 酝莫里森方程。系数值 $悦_{阿}$及傅里叶平均值 $悦_{粤}$和 $悦_{阿}$作为不同 灾时 载的函数。结果表明，$悦_{阿}$和 $悦_{粤}$与无量纲的参数有复杂的依赖关系。图 猿源怨给出了 $悦_{阿}$的曲线。可以注意到，在流速 哉为中等值时，$悦_{阿}$的曲线是单调的和相对不变的。对小 灾和 载，典型的 $悦_{阿}$值相当小 (≤园援员)，而导管架设计中常用的相应值为园援缘～员援园 因此，得出结论，酝莫里森方程的相对速度形式是相当不保守的，而且在系统阻力中作了超预报，也就是说，是偏于危险的。

另一方面，斯莱特等人 (员怨苑员) 推荐使用方程 (猿源愿) 来计算柱体振荡型均匀流联合情形的作用力。他们在试验中，让柱体在振动水柱中以常速移动 (图 猿源怨)。他们发现，根据三项式 酝莫里森方程 方程 (猿源愿) 得到的 $悦_{粤}$和 $悦_{阿}$总体上与无流状态不同。而且根据此方

程得到的 悦缸值达到不实际的大值。因此，他们得出结论，那种把修正的酝酿蕴藻方程分为所谓有流和无流情形是没有实际意义的。

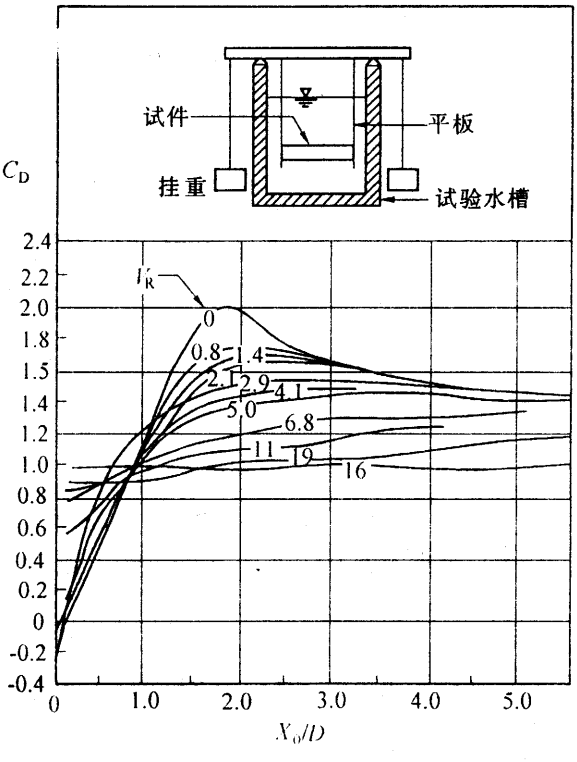


图 猿苑 在均匀共线流中作正弦振荡的柱体之振荡阻力系数

杂藻藻藻等人 (员愿愿原) 根据方程 猿藻源(猿) 用光滑和粗糙的振动柱体分别得到 悦缸 (越员垣悦粤) 和 悦阅的傅里叶平均值。结果表明，流对这些系数值具有重要的影响，特别是在阻力—惯性控制的区域更加明显。运悦数的范围处于 愿到 圆缘之间时，流使 悦阅值产生很大的衰减，而使 悦缸值相应地增加。此范围之外，悦缸和 悦阅的无流值可以用于有流的情形。在图 猿源愿和图 猿源怨中分别示出了不同 砸藻数运悦值时的光滑柱体的 悦缸和 悦阅值。

显然，这些结果可应用于有流中运动近海结构的计算。然而，当同时存在波浪和流时，常常用在振荡流中的运动柱体，或在定常流中的振荡柱体模拟。至于在波浪—流共存场中应用这些结果时，如何更好地给出作轨圆运动的流体质点速度之类的复杂问题，仍然有待解决。

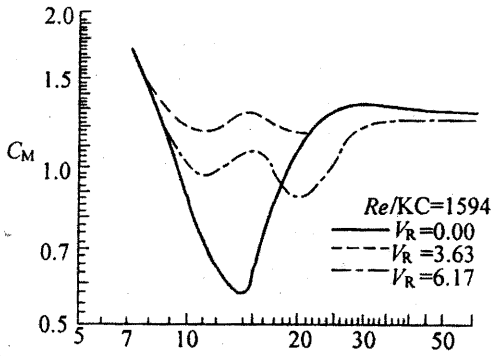
这里讨论了二种不同修正形式的 酝酿蕴藻方程。同样还可能提供其他形式的变化。根据这里的讨论，有一点是清楚的，流体动力系数值极大地依赖于修正的 酝酿蕴藻方程的形式。它们并不能交换应用。而且，至少 运悦数在 愿～圆缘范围内，只有流的结果和只有振荡流的结果并不适用于波流共存场中的情形。方程 猿藻源(猿) 的不便之处在于需要三个系数，而方便之处在于平均力易于从振荡力中分离出来，这在今后的结构分析中是大有好处的。方程 猿藻源(源) 体现了波流的耦合作用，比式 猿藻源(猿) 更接近实际情形，因而也更合理一些，其方便之处在于只需要两个系数，有与原来的 酝酿蕴藻方程相类似的形式，对较大的 运悦数 (员缘以上)，可化为与原来方程具有相同的 悦缸和 悦阅值。不过，后一种判据还需要不同 砸藻数时附加数据的证实。

杂藻藻藻等人 (员愿愿) 在交叉流中作了振荡柱体的试验。根据他们的研究，悦阅随 灾缸和运悦数的变化很大，甚至变为负值，并且发现存在流时的 酝酿蕴藻方程很少令人满意，或者是不合适的。据此他们已提供了各种 灾缸和 运悦值时的 悦阅，悦粤以及 悦缸的值。

源藻波浪和流中的固定柱体

在波浪—流场中，运悦数和雷诺数定义为：

$$\text{运悦数} = \frac{(\text{最大垣动速度}) \times \text{柱径}}{\text{运动粘性系数}} \qquad \text{猿藻源(缘)}$$



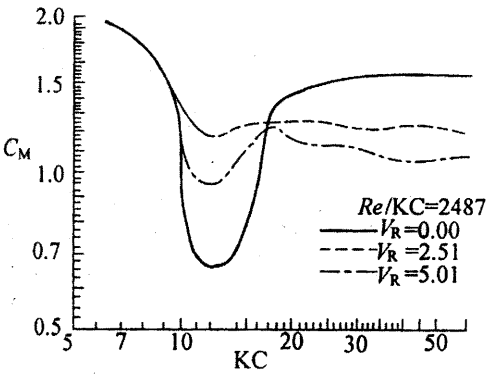
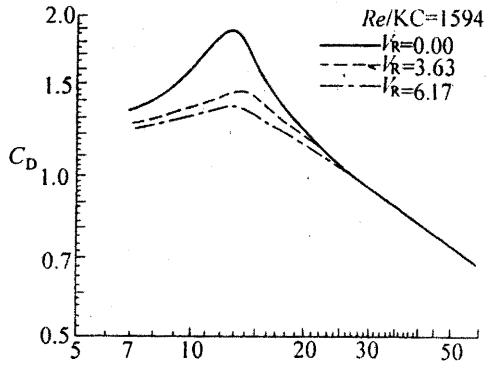


图 猿愿 均匀共线流中振荡光滑柱体的惯性系数



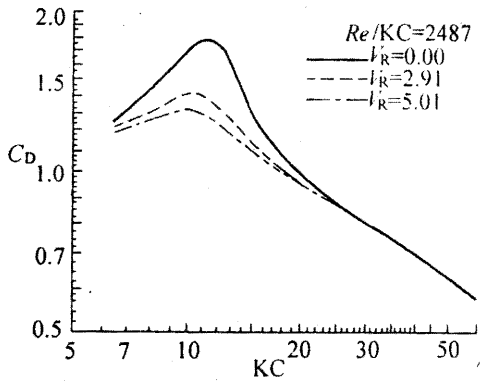


图 猿怨 均匀共线流中振荡光滑柱体的阻尼系数

砸藻越 $\dfrac{(怎_{园}\ 垣\ 哉)\ 阅}{\nu}$ 猿猿缘

式中，$怎_{园}$为波浪水质点运动速度 怎的振幅。

当流和波浪共存时，固定结构的 酝蕴藻gg公式能写成包括定常流 哉和振荡分量 怎的总速度：

枣越 $悦_{酝}\ 蕴_{惯}\ 酝_{惯}\ 怎\ 垣\ 悦_{阻}\ 蕴_{阻}\ 怎\ 依\ 哉\ |怎\ 依\ 哉|$ 猿猿远

式中，原哉表示与波浪传播方向相反的均匀流。

然而，如前所述，人们可能会认为，单一阻力系数并不能适当地表示存在波浪和流时的总阻力。于是提出了 酝蕴藻gg方程可选择的形式。

枣越 $悦_{酝}\ 蕴_{惯}\ 酝_{惯}\ 怎\ 垣\ 悦_{阻}\ 蕴_{阻}\ 怎\ |怎\ 垣\ 哉|$ 猿猿苑

陈葆德等人 (1987) 在波浪水槽中做了波—流场的试验，测量了波浪与流反方向作用在垂直柱体上的总力。在估算 $悦_{酝}$和 $悦_{阻}$时，他们采用相对速度模型 图 猿猿园)，示出了二个不同尺度柱体 $悦_{酝}$和 $悦_{阻}$的试验值。这些值与只有波浪的结果并没有太大差别。问题是运悦数的定义：波流共存时的 运悦数与纯波中的不同。李玉成 (1988) 引入新的定义，运悦越 π 杂，其中 杂为水质点在一个周期中在一个方向上的最大位移，从而使有无流时的 运悦数统一，进而得到波流和纯波的所谓归一化阻力系数。

缘.2 波浪中的振荡柱体

柱体在波浪场中自由振荡的情形，现有几种形式的 酝蕴藻gg方程修正公式。

缘.

员 独立流场模型。

根据二个独立流场：波浪运动产生的一个远场 假定不受结构运动的影响），以及结构运动产生的一个近场，线性叠加，从而产生：

枣越悦转 粤顺怎原悦粤 粤瞬

垣悦阅 粤阅 怎 怎原悦阅 粤阅 蠕 蠕 猿源源愿

实际上就是前述方程 猿源源员 和 猿源源缘 简单合并的结果。式 猿源源愿 中有四个系数，其中 悦转，悦阅可根据波浪中固定柱体的试验得出；而 悦粤 和 悦阅则可根据静水中柱体振荡试验测出，并且 悦转、悦阅为远场雷诺数和 运悦数的函数：

悦转，悦阅 越 枣 砸藻云 越 $\frac{怎园阅}{增}$，

运悦云 越 $\frac{怎园栽}{阅}$ 猿源源怨

而 悦粤，悦阅为近场雷诺数和 运悦数的函数：

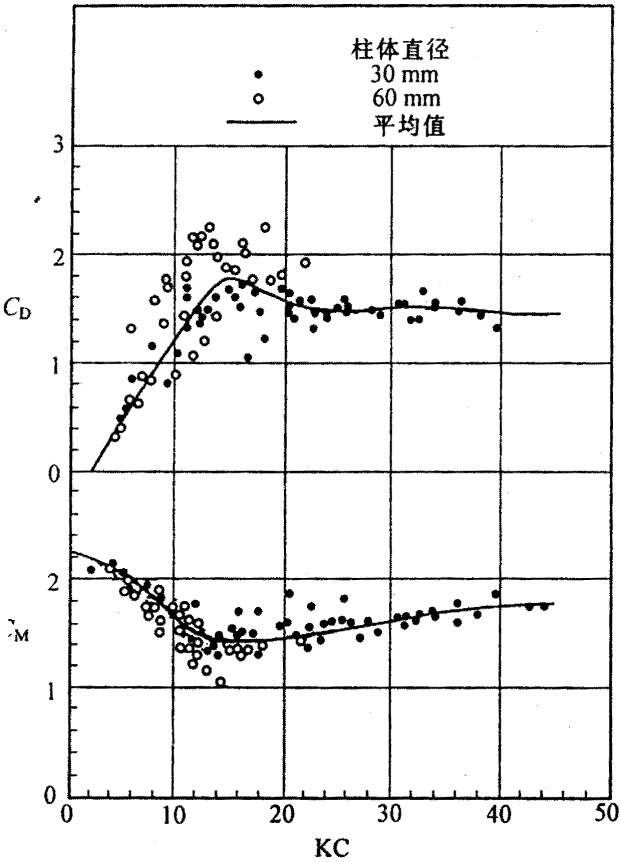


图 猿源源员 波浪与流场中固定垂直柱体的惯性和阻力系数

悦粤，悦阅 越 枣 砸藻晕 越 $\frac{蠕园阅}{增}$，运悦晕 越 $\frac{蠕园栽}{阅}$ 猿源源圆

式中，怎园 蠕园分别为水质点和结构运动速度振幅；栽 栽园分别为水质点和结构振荡周期（常常相等）。而下标 云表示远场，晕表示近场。

圆 相对速度模型。

如果作用在柱体上的力用相对运动表示时，可写成：

枣越 悦转 粤顺 $\frac{瞬}{瞬}$原 $\frac{瞬}{瞬}$ 垣 粤顺 $\frac{瞬}{瞬}$垣悦阅 粤阅 怎 怎原 蠕 蠕 猿源源猿

这种形式的 酝-莫-苏修正方程 猿源源猿 比独立流场模型 猿源源愿 少了两个系数，给工程应用带来便利，常得到广泛的应用。例如，在估算近海结构的动力响应时，往往就是采用此类形式的 酝-莫-苏方程计算波浪力的。此时，雷诺数和 运悦数都采用相对速度 灾则 越怎原蠕定义：

砸藻越 $\frac{灾园阅}{\nu}$，运悦 越 $\frac{灾园栽则}{阅}$ 猿源源源

式中，灾园为相对速度 灾的振幅；栽则为相对速度 灾的联合周期。

猿 附加质量系数分离形式。

有时，把惯性系数与附加质量系数分开有其方便之处，因此，修正的 酝-莫-苏方程第

三种形式可表示成相对速度和加速度项分离形式：

$$\text{枣越悦}_{M}=\rho V\dot{\xi}_{0}\frac{\pi D^{2}}{4}C_{M}+\frac{1}{2}\rho DC_{D}\dot{\xi}_{0}\left|\dot{\xi}_{0}\right|+\rho V\ddot{\xi}_{0}\frac{\pi D^{2}}{4}C_{A}$$

这种形式把波浪力和物体运动引起的惯性力分开，这给漂浮结构波浪中运动响应的讨论带来极大的便利，这一点后面还会讲到。

源 三种形式的适用范围。

对波浪中移动的结构来说，有一个问题是：较为适用的 酝-赠方程是哪个？因为存在各种近海结构，如导管架平台、铰接筒、立管和张力腿平台，全部属于阻力相当重要的一类结构，所以，讨论方程 猿援员缘员、 猿援员缘圆 和 猿援员缘猿 的适用性就相当有价值。由于原来的 酝-赠方程是经验公式，不可能验证其在其他情况下的推广式的正确与否，也不可能讨论哪一个更为“正确”的问题。显然，根据这些公式之一导出的系数只有在应用该形式公式中使用才是合理的。悦澡猿辕悦澡猿辕悦澡猿 和 悦澡员辕悦澡员 员怨怨圆 采用铰接筒进行试验，用同样的设备对三种状态分别进行：①固定在波浪中；②在静水中作简谐振荡；③在平面波中自由运动。铰接筒运动速度的振幅与水质点运动速度属于同一数量级。试验表明，相对速度模型是适当的。不过，观测毕竟很有限，尚难作出可靠的判断。

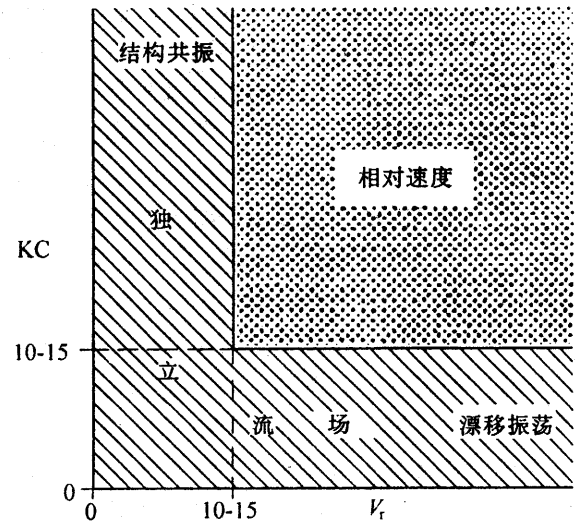


图 猿援员缘员 独立流场和相对速度模型的适用区域

缘藻藻藻等人 员怨怨圆 根据约化速度 灾宰 用 怎园代替方程 猿援员缘员 中的 哉定义），以及振幅参数 载 [方程 猿援员缘猿]，讨论了相对速度模型和独立流场模型的适用范围。适用界限在图 猿援员缘员 中给出。曾轴是约化速度 灾宰，而 赠轴是相应于水质点速度的 运况数。

对顺应式结构，运况数、 灾宰和 载通常很大。对常规的导管架 运况数和 灾宰很大，而 载很小。对此二种情形，流是拟静态的，并且结构的振荡周期一般都与入射波周期有关。此时，在计算阻力的表达式中采用相对速度项，可能是合适的。

我们来考虑另二种情形。①大 运况数和低 灾宰值，相应于结构受共振阻力控制，即在慢振荡来流中作高频振荡；②低 运况数和高 灾宰值，意味着柱体在高频振荡流中作低频振荡。第一种情形的例子是波浪中高频振动结构的共振问题，而系泊结构低频振荡漂移运动是第二种情形的例子 第 远章）。在这些情况中，方程 猿援员缘猿 和 猿援员缘源 的相对速度形式的原则较令人怀疑，而方程 猿援员缘员 独立流场模型是可用的。二个阻力系数可从二类试验数据中选择。一类是波浪中固定柱体情形，而另一类是静水中振荡柱体 或通过固定柱体的振荡水流）的情形。为此目的，运况数和 砸藻数根据单个速度计算。 见方程 猿援员缘圆 和 猿援员缘猿]。

综合起来，当二种流是可比拟时，一个影响另一个，则相对速度模型是适用的；而当

缘藻

一个运动频率比另一个大得多时，则可用独立流场模型。

2. 波浪和流中的振荡柱体

当考虑波浪和流中自由振荡的柱体时，[illegible]方程变为：

$$\text{[illegible]}$$

方程 [illegible] 的另一形式可以像前面那样给出：

$$\text{[illegible]}$$

然而，在此条件下的试验结果几乎没有。有必要做大量的工作，以获得此类最为复杂问题的透彻了解。结构上作用力和运动都依赖于水质点的运动学，以及结构本身的速度和加速度。由于缺乏这方面的数据，分析这类问题时，水动力系数都取自前一部分的类似研究结果。

三、确定系数的试验方法

根据前面的讨论，要确定水动力系数，一般可通过二类试验得到。第一类是用波浪场中的固定柱体进行试验，这样得到的水动力系数是 [illegible] 数的函数。第二类是在静水中用振荡柱体进行试验，其所提供的水动力系数是 [illegible] 数和雷诺数的函数。还有一类试验是柱体固定，水流作简谐振荡，实际上等价于第二类试验。一般来说，第二类试验比第一类试验优越，试验可以更好地控制，较少不确定因素，因而结果的准确性也更高一些。不过，简单地把第二类试验的结果套用于波浪中结构计算，可能会出现问题。因为波浪场存在自由表面，水质点作轨圆运动，运动学量存在垂向变化，这些在第二类试验中是无法模拟的，其对水动力系数的影响因而也就无法反映出来。

迄今，各类书籍和文献已发表了大量相关的试验结果。在作近海结构的设计计算中，可从中进行研究采用。然而，仅仅做一组曲线，并据此选出你需要的值是不够的，重要的是要了解这些系数是如何得到的。针对不同情形，必须知道运动学量是实例的还是计算的，如果是计算的，又是采用哪种波浪理论进行计算的，这是一。其次，通过试验测量数据分析估算水动力系数，究竟采用哪种方法进行整理也相当关键。

1. 常规 [illegible] 方程水动力系数的确定

试验中，通常是同一位置同时测量作用在柱体上的波浪力和流体质点的运动学量。因此，根据 [illegible] 方程（例如式 [illegible]）：

$$\text{[illegible]}$$

式 [illegible] 中除水动力系数 [illegible]，[illegible] 外均已知。于是，只要知道两个不同时刻的力、流体质点速度和加速度的典型值，便可求出未知的 [illegible] 和 [illegible]。如果流体质点的运动学量不能直接测量，仅测量了作用在柱体上的力的时间历程（如图 [illegible] 所示），便可适当选取波浪理论计算出相关点处的流体动力学量，从而在时间轴上选取二个非平凡点，通过式 [illegible] 解出两个未知量。不过，具体的分析方法将要针对具体的情况决定。主要有如下几种分析处理方法。

(1) 二点确定法

如果我们已通过试验（或计算）获得作用力、水质点速度和加速度的时间历程（如图 [illegible]）。可以用下面的方法得到两个方程。

① [illegible]，[illegible]，$\Rightarrow$ [illegible]。

(2) [illegible]

② 鳝越园 怎越怎园 枣越枣组，⇒悦阅

这种方法简单直观，为 酝孰熟梳等人导出 酝孰熟梳方程的早期所采用。一般说来，如果水质点或结构运动强烈，粘性较小，惯性力将占主要地位，那么这种方法将给出 悦酝的一个好的估值；但相应的 悦阅的估值将很差。反之，如果水质点或结构运动较缓，粘性较强，阻力将占统治地位，则此法会得到 悦阅的相当准确的估值，而 悦酝却相当离散。而当惯性力和阻力二者都重要时，该方法不适用。

园 二点邻近数据平均法

通常假定在一个数据周期内，相应的运悦 砸数不变。这就允许把二点确定法推广到一个极小领域上，而不会产生太大的影响。为此可认为，阻力等于零的邻近的一个小时间间隔内，总力等于惯性力；惯性力等于零的邻近的一个小时间间隔内，总力等于阻力。那么，便可如二点确定法那样，悦酝和 悦阅通过小时间间隔内的平均得到。

猿 云梁熟梳平均法

假定水质点的速度具有余弦形式：

怎越 怎园糟糟则 贼越 怎园糟糟则 猿缘远

其中不失一般性，已假定选取 曾越远为测量点。测量的波浪力用式 猿缘远代入式 猿缘则 进行模拟时存在一个误差函数 △砸(θ)，即：

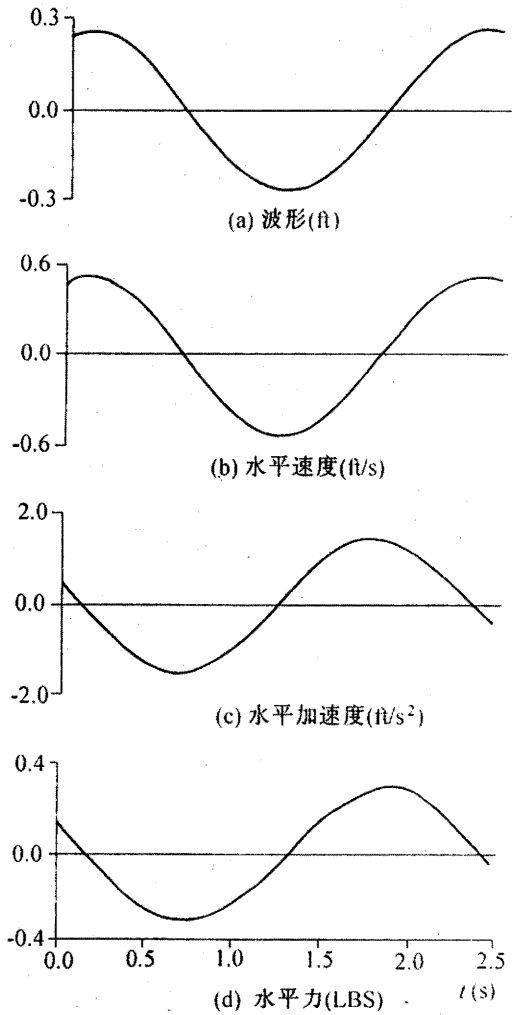


图 猿园 规则波中试验测量的一个记录

枣(θ) 越原悦酝 粤员怎园 泽糟则 垣悦阅 粤员怎园 糟糟则 糟糟则 垣△砸(θ) 猿缘苑

这样，当 枣(θ) 已知的条件下，可利用三角函数的正交性得到：

$$悦_{酝} 越 \frac{员}{\pi\omega} \int_{园}^{圆} 枣(\theta) 泽糟则 \theta 凿\theta \quad 猿缘愿$$

$$悦_{阅} 越 \frac{猿 员}{原 粤_{阅} 怎园} \int_{园}^{圆} 枣(\theta) 糟糟则 \theta 凿\theta \quad 猿缘怨$$

从而得到沿整个周期的 悦酝、悦阅的平均值。注意，推导过程中实际上已隐含假定，波浪作用力用 酝孰熟梳方程进行近似而不产生显著的不同，即 △砸(θ) 与总作用的幅值相较是个小量。并且，此法仅适用于运动学量能用简谐形式描述的情形。

源 最小二乘方法

前面几个方法要求都比较苛刻，要求运动学量是规则的、线性的，因此适应性较窄。

缘象

若在不规则波中进行试验或考虑入射波的非线性，则可采用所谓最小二乘方法进行处理。

假定波浪作用力用 [illegible] 方程模拟而存在一个偏差，如 [illegible] 所做的那样，引入一个余函数 △[illegible] 来描述。那么，把力和水质点运动量记录的时间历程以适当的时间增量 △[illegible] 进行离散化，每一点上都有：

$$[illegible]_{i} = [illegible]\,[illegible]_{i} + [illegible]\,[illegible]_{i} + \Delta[illegible]_{i} \qquad i = 1, 2, \cdots, N$$

式中，N [illegible] 为采样记录长度或循环周期。令这种拟合形式的偏差在平方意义下最小，即要使

$$\Delta[illegible]^{2} = \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i}^{2} = \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i}]^{2}$$

最小，则只要使其关于 $[illegible]_{1}$ 和 $[illegible]_{2}$ 的导数为零即可。于是

$$\frac{\partial}{\partial [illegible]_{1}} \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i}] \cdot (-[illegible]_{i}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial [illegible]_{2}} \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i} - [illegible]\,[illegible]_{i}] \cdot (-[illegible]_{i}) = 0$$

整理得：

$$\begin{cases} [illegible]_{1} \sum_{i=1}^{N} ([illegible]_{i})^{2} + [illegible]_{2} \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i}[illegible]_{i} = \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i}[illegible]_{i} \\ [illegible]_{1} \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i}[illegible]_{i} + [illegible]_{2} \sum_{i=1}^{N} ([illegible]_{i})^{2} = \sum_{i=1}^{N} [illegible]_{i}[illegible]_{i} \end{cases}$$

解得：

$$[illegible]_{1} = \left| \begin{matrix} \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} & \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} \\ \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} & \sum ([illegible]_{i})^{2} \end{matrix} \right| \Big/ [illegible]_{[illegible]}$$

$$[illegible]_{2} = \left| \begin{matrix} \sum ([illegible]_{i})^{2} & \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} \\ \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} & \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} \end{matrix} \right| \Big/ [illegible]_{[illegible]}$$

其中

$$[illegible]_{[illegible]} = \left| \begin{matrix} \sum ([illegible]_{i})^{2} & \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} \\ \sum [illegible]_{i}[illegible]_{i} & \sum ([illegible]_{i})^{2} \end{matrix} \right|$$

[illegible] 修正形式 [illegible] 方程水动力系数的确定

以上介绍只是常规 [illegible] 方程水动力系数试验确定方法。对修正形式的 [illegible] 方程水动力系数的试验确定，与前述相似。

[illegible] 波流共存

当波流同时存在时，二项形式的 [illegible] 方程的水动力系数可根据 [illegible] 平均方法得到。

假定波浪水质点速度为 [illegible]

$$[illegible] = [illegible]\sin([illegible]t)$$

则波流共存时的 [illegible] 方程变为：

[illegible]

枣(θ)越原悦转 粤阅怎园∕ 泽(β) 垣悦阅 粤阅| 哉垣怎精(β)| (哉垣怎精(β)) 猿源源

然后，在式 猿源源∕二边乘上 泽(β)，如前，利用三角函数的正交性，在一个 圆 周期内积分，便可得到：

$$悦_{转} 越原\frac{\int_{圆_园} 枣(\theta)泽(\beta)凿\theta}{粤_{阅怎园}\int_{圆_园} 泽^{圆}(\theta)凿\theta} 越原\frac{员}{粤_{阅怎园}\pi}\int_{圆_园} 枣(\theta)泽(\beta)凿\theta$$

由于 $粤_{阅} 越\frac{\pi}{源}\rho_{圆}$，$粤_{阅} 越\frac{员}{圆}\rho_{圆}$，并且引入 运悦怎园栽阅，则

$$悦_{转} 越原\frac{运_{悦}}{\pi 粤_{阅怎园}}\int_{圆_园} 枣(\theta)泽(\beta)凿\theta \quad 猿源源\text{-}员$$

同样，在式 猿源源∕二边乘上 精(β)，在 圆 周期内积分，便可得到：

$$悦_{阅} 越\frac{\int_{圆_园} 枣(\theta)精(\beta)凿\theta}{粤_{阅}\int_{圆_园}|哉垣怎精(\beta)|(哉垣怎精(\beta))精(\beta)凿\theta} \quad 猿源源\text{-}员\text{-}员$$

考虑到 泽(哉垣怎精(β))的特殊性，式 猿源源∕员∕员中分母的积分为

$$隔_{阅} 越\int_{圆_园}|哉垣怎精(\beta)|(哉垣怎精(\beta))精(\beta)凿\beta$$

$$越原怎_{圆园}运_{员} \quad 猿源源\text{-}员\text{-}圆$$

其中，

$$运_{员} 越\begin{cases} 圆 & 哉/怎_{园} \geqslant 员 \\ \left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)泽(\beta) 垣 圆\frac{哉}{怎_{园}}\cos(原泽(\beta)原\pi) 垣\frac{员}{猿}\left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)^{猿}\cos(猿(原泽(\beta)垣\pi)) & 哉/怎_{园} 约 员 \end{cases} \quad 猿源源\text{-}员\text{-}猿$$

而 $\zeta 越\frac{怎_{园}}{原哉}$ (原哉∕怎园)。这样，式 猿源源∕员∕员可写成

$$悦_{阅} 越原\frac{员}{粤_{阅怎园}运_{员}}\int_{圆_园} 枣(\theta)精(\beta)凿\theta \quad 猿源源\text{-}员\text{-}源$$

圆 流中振荡柱体

对流中振荡柱体上的作用力的 酝怎糟造方程修正形式，其水动力系数的确定方法与上述相似。只要用 $\frac{哉}{怎_{园}}$ 代替上述的 怎园即可导出类似式 猿源源∕员∕员 和式 猿源源∕员∕源 的公式。

$$悦_{转} 越原\frac{运_{悦}}{\pi 粤_{阅怎园}}\left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)\int_{圆_园} 枣(\theta)泽(\beta)凿\theta \quad 猿源源\text{-}员\text{-}缘$$

$$悦_{阅} 越原\frac{员}{粤_{阅怎园}运_{员}}\left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)\int_{圆_园} 枣(\theta)精(\beta)凿\theta \quad 猿源源\text{-}员\text{-}远$$

其中， 运悦越$\left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)$栽∕阅 猿源源∕员∕苑

$$运_{员} 越\begin{cases} 圆 & 哉/怎_{园} \geqslant 员 \\ \left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)^{圆}泽(\beta) 垣 圆\frac{哉}{怎_{园}}\cos(原泽(\beta)原\pi) 垣\frac{员}{猿}\left(\frac{哉}{怎_{园}}\right)^{猿}\cos(猿(原泽(\beta)垣\pi)) & 哉/怎_{园} 约 员 \end{cases} \quad 猿源源\text{-}员\text{-}怨$$

并且 $\zeta 越\frac{怎_{园}}{原哉}$ (原哉∕怎园)。

第三节　横向力

振荡流中，绕柱体的流体从柱体的表面产生分离，并在柱体的 ‘后面 ’ 形成尾迹。当

分离点从柱体的一边移向另一边时，离开分离点的“下游”将从柱体的两边发放出不对称的涡。图 绘制了波浪通过垂直圆柱体时，目测所看到的现象。图中描绘了波浪表面上 值不同时，柱体一端发放的流迹。从中可看出 时，将从柱体表面发放出涡来，大约 数大于 缘时，逐渐形成不对称的涡发放。这就使得柱体周围压力分布形成关于流向的不对称性。因此，垂直波向上将有一个交错出现的横向力 亦称举力）作用在柱体上。横向力方向随着从柱体上发放出新的涡面而变向。作用在垂直柱体单位长度上的横向力可以写成：

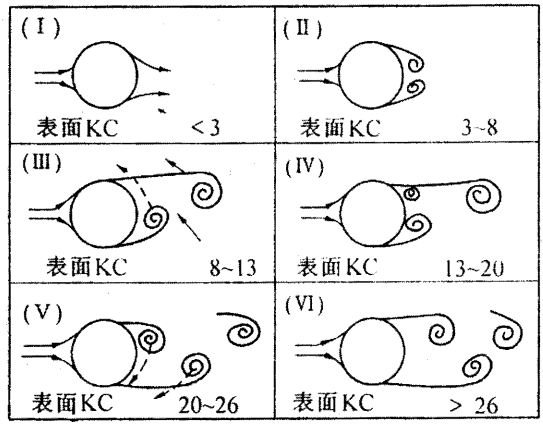


图 波浪中垂直柱体的涡发放模型

$$\text{式中，}C_M\text{为横向力系数。然而涡发放是以某种不规则的形式相对横轴振荡。因此，本质上横向力是不规则的。另外，振荡流中，在每一个半周期内总是在柱体的前后变向。这样，横向力方程 形式并不合适，其横向力系数要允许在波浪周期内变化。此时，横向力往往表示成频率等于波频的傅里叶级数，每一个力分量都具有一个于其相位相应的横向力系数：}$$

$$\text{式中，}N\text{为傅里叶分量个数；}C_{Mn}\text{和}\varepsilon_n\text{分别为横向力系数和相应的相位角。通常，横向力系数用最大横向力或其均方根表示，相应地称为最大横向力系数或均方根横向力系数。最大横向力系数定义为：}$$

$$\text{均方根横向力系数可根据类似的方式定义，此时横向力和速度最大值改为其均方根值。}$$

在动力学系统中，波 和流）中柱体运动将使柱体邻近的尾迹场变形，而且柱体表面将有涡发放出来，这就产生一个与柱体运动平面垂直的力。在三维问题中，例如，具有多向波和流的情形，要想在数学模型中引入此种影响将相当困难。不过，这种横向力能够计算并作为横向振动而引入。由法向水质点速度 憎产生的，作用在单位长度结构上的横向力由下式给出：

$$\text{它依赖于横向力系数 }C_M\text{ 若考虑结构的运动的作用，单位长度结构上所产生的横向力为：}$$

$$\text{一般说来，上二种力依赖于不同的横向力系数 }C_M\text{和 }C_M\text{ 然而，如果我们假定仅依赖于单个值 }C_M\text{ 那么横向力可用相对速度表示成：}$$

缘

此时 依赖于相对速度 横向力的各类形式：方程 和 ，以及其联合形式方程 的适用性可以如同前面讨论等价的 方程那样讨论。应该强调，由于从柱体表面不规则的涡发放，以及波浪的存在冲刷着早先发放到流场中的涡，使得柱体周围的压力分布成为某种时间的随机函数。一般来说，横向力本质上是不规则的，所以 值在波浪周期内是变化的。

目前尚无完整的解析模型适用于振荡流中的横向力情形。不过，已经提出了几种横向力的简单模型。 等人 发展了一种横向力的拟静态模型，以修正 提出的早期模型。该模型假设有一个 的常 （作为定常流的近似），并建立在瞬态流速的基础上；还假定横向力常数在流动半周期内是常数。横向力的形状用条件平均方法平均。前半周期的横向力写成：

式中，为 为 ；为依赖流动时间历程的横向力的相位角。而对后半周期，用 代替 即可。

已经发现，力随时间的变化几乎是规则的，涡也将趋向以某种可预见的方式形成和发放。诸如此类的模型，对了解流动现象是有用的，并且最终可对结构响应分析有所助益。不过，举力系数的值必须建立。

最后，若把横向力和共线力矢量叠加，便得到作用在单位长度上的总力：

第四节　水动力系数

在试验室和现场两个方面都已花费了大量的研究力量以得到水动力系数 、和 的值。前面已经讨论过的大多数领域都仍要进一步考察。在这一领域内的一个开拓性工作是 和 在驻波中用圆柱和球所做的试验。他们的工作成为许多后续研究的基础。目前试验已经成功地证实，这些系数依赖于适当的无量纲量。不过，在把资料中所提供的系数值应用于设计前，了解这些值是如何确定的是十分重要的。

一、光滑柱体

做了广泛的试验研究，试图确定 、和 与 和 数之间的关系。他把圆柱体水平安装在 形管的水平部分，形管的水柱以简谐的方式通过柱体振荡。试验得到很有价值的结果，其中已显示，光滑柱体的 和 是 和 数的函数。根据 试验，各种 值的 和 的典型结果（用傅里叶平均得到）示于图 和图 中。他的分析表明，光滑圆柱体在高 数时 值近似于 而 值近似于 在这些试验中最大 数达到 的量阶。一般认为原型的 数是 量阶，所以试验的 数接近于原型。然而，由于 的结果基于未扰动的稳态流，如何把其应用于波浪运动仍是个问题。 认为这些结果是波浪运

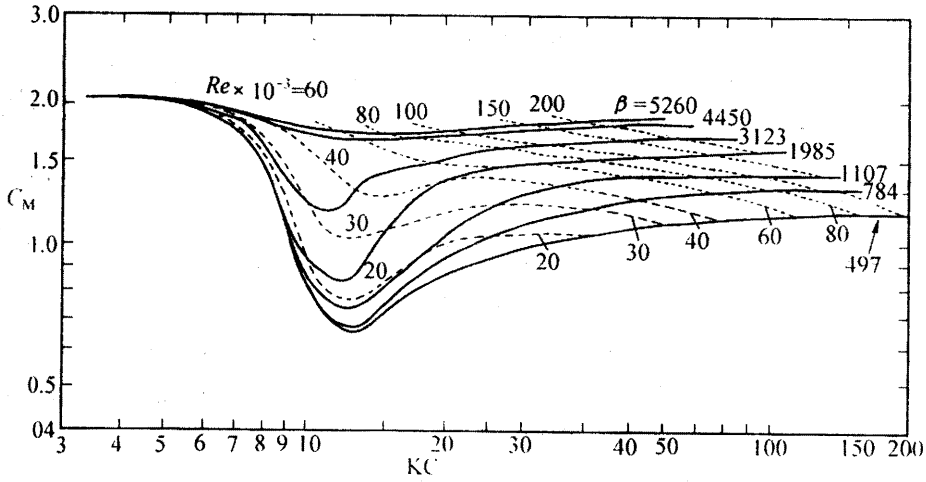


图 [illegible] 光滑圆柱体不同 [illegible] 或 β 越[illegible]时 悦[illegible]对 运[illegible]的依赖曲线

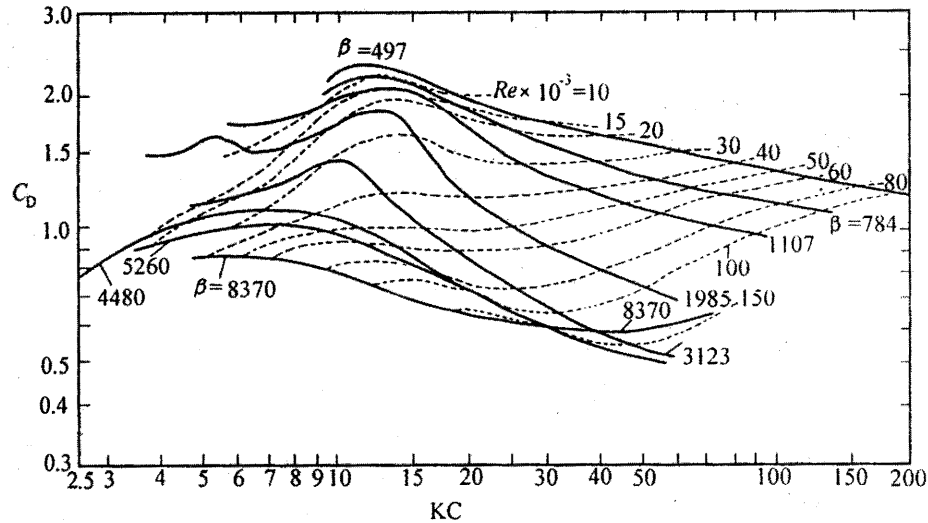


图 [illegible] 光滑圆柱体不同 [illegible] 或 β 越[illegible]时 悦[illegible]对 运[illegible]的依赖曲线

动的上限。

悦[illegible]在波浪水槽中用垂直柱体做了试验，所得到的 悦[illegible]和 悦[illegible]结果，在与 [illegible]和 运[illegible]数的相关性方面，是可与 [illegible]比较的。试验测量了规则波作用在柱体小段上的力，而流体动力系数值是据此用最小二乘方法导出。其中动力学参数用流函数波理论从表面波形计算确定，图 [illegible]和图 [illegible]示出了根据这些试验得到的 悦[illegible]和 悦[illegible]的试验数据和平均曲线。令人感兴趣的是，当 悦[illegible]增加时，悦[illegible]将减小，反之亦然。如果用这些数据与图 [illegible]和图 [illegible]相应的数据相比较，便可看出，对 [illegible]在 圆[illegible]和 [illegible]之间，正是波浪水槽试验的范围，除了 [illegible]数的高端，二者似乎符合得相当好。考虑到在此范围波浪水槽数据太稀少，这里的比较还有待于进一步证实。

运[illegible]

图 猿源员远　光滑圆柱体波浪中惯性系数对 运动数的依赖关系

图 猿源员苑　光滑柱体波浪中的阻力系数 运动数的依赖关系

横向力系数 悦L同样表明是 砸藻和 运怨的函数。 蒋斯特·萨勒门根据其 哉形管试验提供了一些结果。图 猿愿·怨示出了作为 运怨和 砸藻函数的 悦L值。对光滑柱体，当 砸藻和 运怨数相对较大时，横向力系数最大约为 圆·圆缘

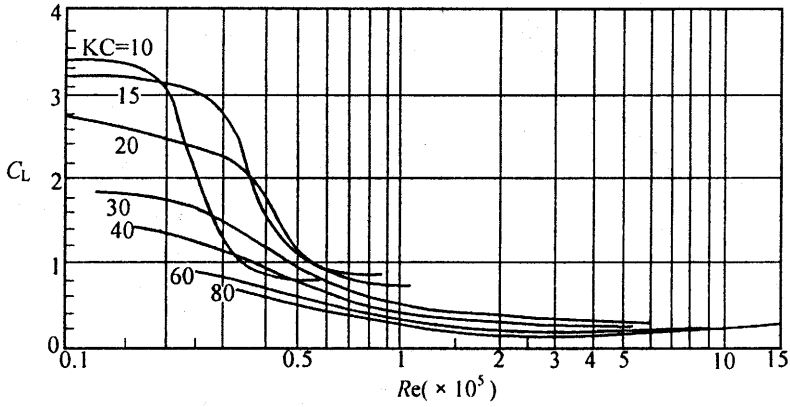


图 猿愿·怨 光滑圆柱体不同 运怨数时的横向力系数对 砸藻数的依赖关系

图 猿愿·怨中绘制了横向力的频率。作为替代，图中仅示出了占统治地位的横向力频率与强迫振荡频率之比 f_r。所谓占统治地位的频率是在此频率处横向力谱最大，可以用横向力的傅里叶分析确定。从图 猿愿·怨中可以令人感兴趣地看到，主要的横向力频率是波频的倍数，并且这些倍数又是 运怨数的函数。当 砸藻较大时似乎还依赖于 砸藻

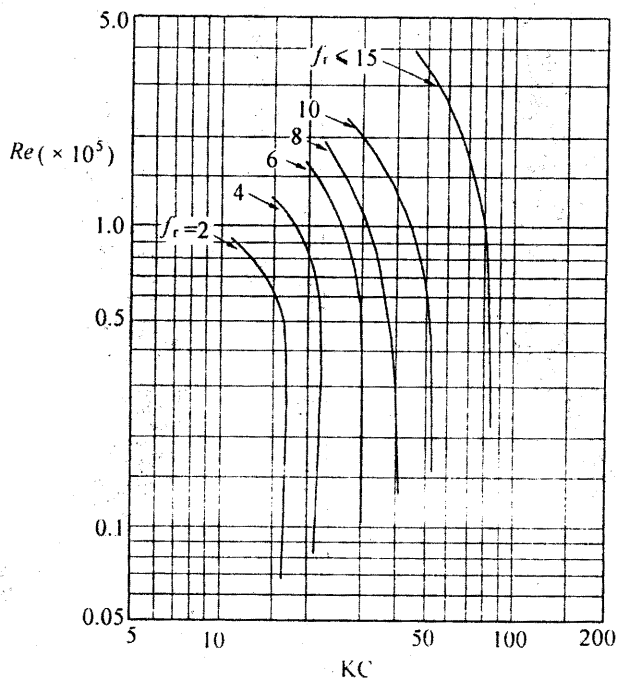


图 猿愿·怨 作为 运怨数和 砸藻数函数的相对横向力频率

运圆

提出的横向力系数相应于最大横向力。它并不能提供横向力的形状或与共线力相关的相位。因此，合力的形状，例如方程 ，并不能根据这些资料构成。要作这种运算，类似于方程 ，横向力的傅里叶分量及其相角必须知道。 在垂直柱体的试验中，测量了作用在柱体小段上的横向力，分析计算了前 项傅里叶分量。在图 示出了 数有限范围上的结果。如果给每个分量任意规定一个相位角，那么这些曲线将使我们能构成横向力形状。

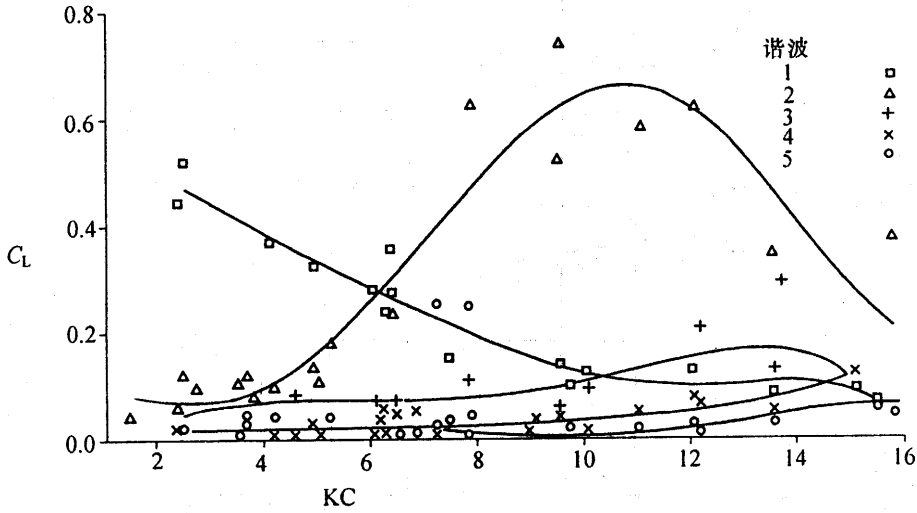


图 根据波浪中圆柱体剖面测得的 分量与 数的关系

另外，相应于主要频率的单一横向力频率可以规定横向力的形状（假定是规则的）。系数 和频率 （ ）能根据图 和图 （或类似的图）得到，于是横向力可根据下式构成：

越

和 等人 和 等人导出了光滑的固定正方形柱体的水动力系数（见图 ）。正方形柱体棱边向着振荡流， 和 是 数的函数。从中可看出 比圆形柱体相应值大。

二、粗糙柱体

波浪中水动力系数除了是 数和 数的函数外，还是构件表面粗糙度的函数。构件表面粗糙度问题主要是由海污引起的。一旦近海结构投入营运，海洋植物和动物便将附着在结构上，从而产生海污。在盐水环境的污染区，有大量的海生物，其中分布最多的是以下几种：牡蛎、蛀木虫、蛀木水蚤和藤壶。污染的类型和数量随着地区和年限而改变。主要因素包括：温度、盐度、压力、污染、泥沙含量以及阳光。最快速和最大量的海污生长出现在阳光能投射到，足以使植物及贝类生长的表层位置。

海污生长的影响主要有如下四个方面： 使构件的尺度增大； 改变水动力系数； 增加结构的重量； 使结构周围的流场不稳定，如涡发放。在实验室里，结构上的海污常用表面喷砂粗化进行模拟。海污程度不同，采用的砂粒品种也不同。

在波浪水槽中用垂直柱体喷砂粗化，在规则振荡波中进行试验得到惯性力、阻力和横向力系数，结果示于图 粗糙度系数定义为 ，其中 为粗

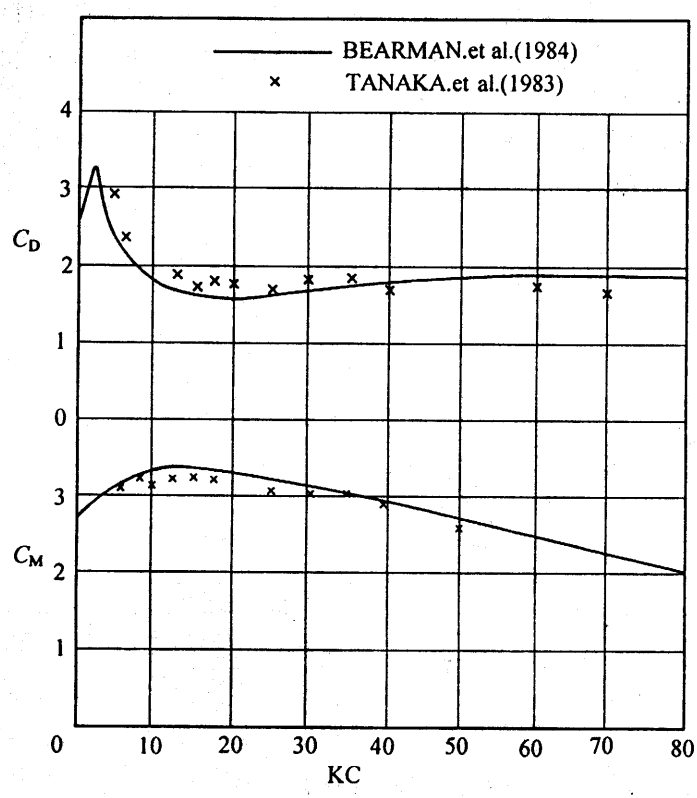


图 猿圆员 方形剖面光滑柱体的 悦阻和 悦惯平均值与 运沿数的关系

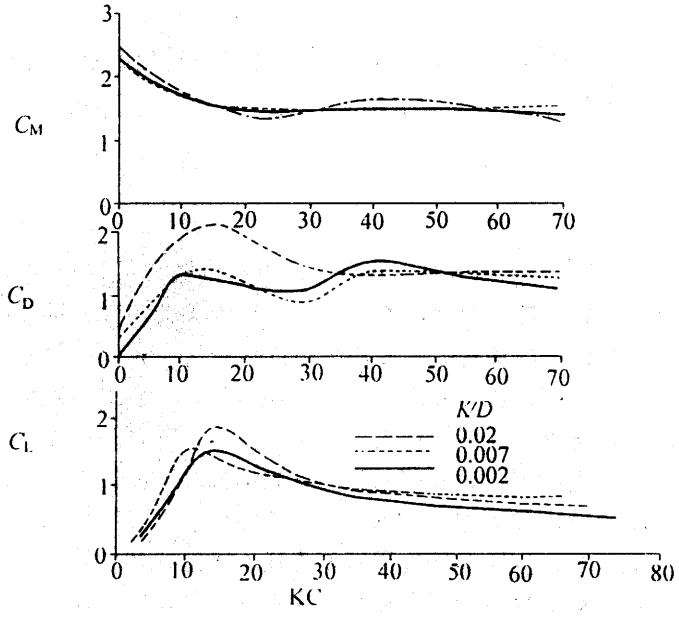


图 猿圆圆 不同粗糙度的垂直柱体波浪中的 悦阻、悦惯和 悦提与 运沿数的关系

远源

糙颗粒尺度，阅为柱体直径。试验中 运转阀从 园圆圆度到 园圆圆圆 结果表明，惯性力系数相对不受柱体粗糙度的影响，而阻力和横向力系数至少在 运悦数中等范围上明显增加。

[illegible] 用粗糙圆柱体水平放置在 哉形管内，作振荡流试验。粗糙度系数从 园圆圆园到 园圆圆园 共分五个档次。结果表明，惯性力、阻力和横向力都是 砸[illegible]数、运悦数以及粗糙度参数的函数 图 猿圆圆。并且，在低 砸[illegible]数区域 (砸[illegible])，粗糙度增加，惯

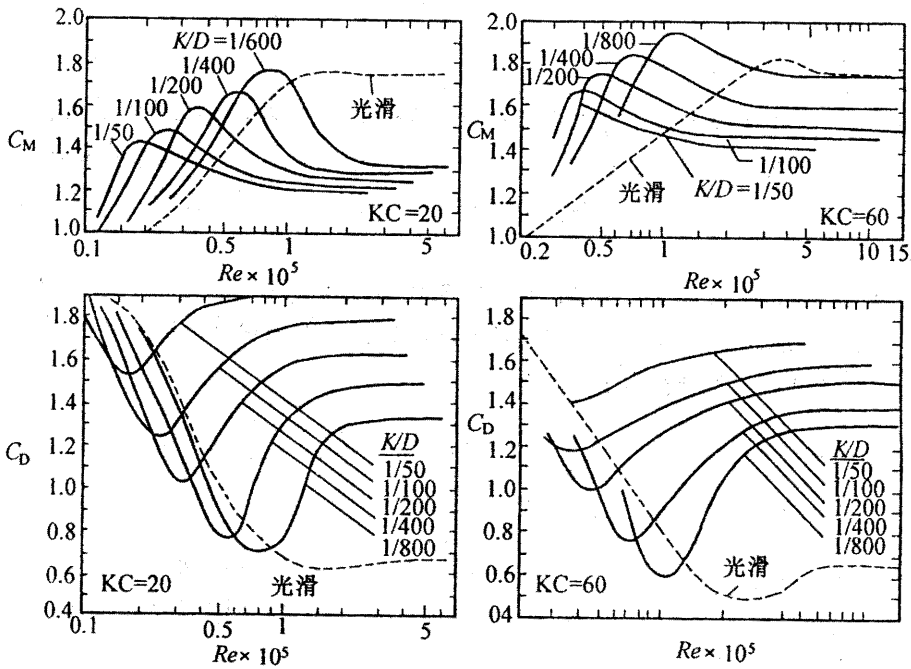


图 猿圆圆 谐振流中粗糙柱体的阻力和惯性系数

性力系数将减少，而阻力系数将增加。

[illegible] 用人造的和海洋粗糙化的柱体在波浪水槽中试验，提供了 运悦数在 员缘 [illegible] 范围内，悦$_{临}$和 悦$_{阀}$关于 砸[illegible]的有限数据。结果表明，用砂粗化的柱体，悦$_{阀}$波浪水槽中的试验值比振荡流中的低。

三、倾斜柱体

倾斜柱体波浪力的水动力系数相对要小些。图 猿圆猿和图 猿圆源是 [illegible] 在 哉形管内试验的结果。图 猿圆缘是 悦[illegible]等人 [illegible] 在波浪水槽试验计算的 悦$_{临}$和 悦$_{阀}$作为 运悦数的函数的平均值。由于试验中 砸[illegible]

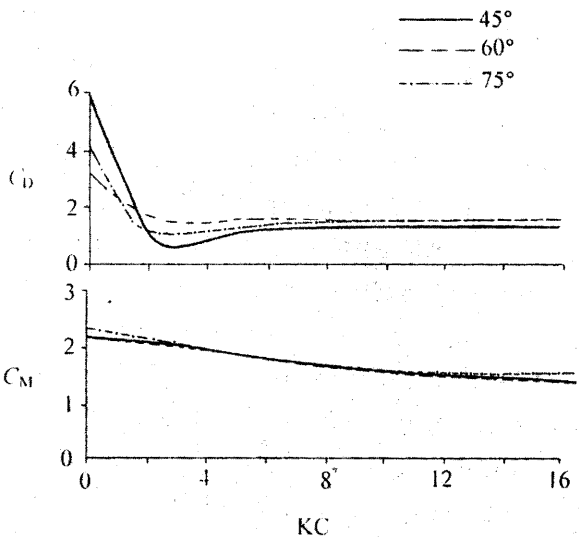


图 猿圆源 波浪中光滑倾斜柱体的 悦$_{阀}$和 悦$_{临}$平均值与 运悦数的关系

数的范围很小，图中没有给出对 KC 数依赖关系。从中可看出，C_M 值相对地不受倾角的影响，而 C_D 值似乎随角度稍有增加。换句话说，法向力是主要的，而轴向力却并不大重要。这就再次证实了用法向速度和加速度表示的 [illegible] 方程可以推广用到倾斜柱体的情形。垂直柱体（$\alpha=90°$ 情形）的试验结果在图 [illegible] 和图 [illegible] 示出。可以看出，波浪中试验时，KC 数在 [illegible] 范围上，C_M、C_D 值的变化远小于 [illegible] 报导的 [illegible] 形管中的试验结果（图 [illegible] 和图 [illegible]）。

四、墙面作用的影响

已经指出，圆柱体的水动力系数是 KC 数、R_e 数和柱体表面粗糙度的函数。此外，如果把柱体放在一面墙附近，如海底管线安放在海底附近时，水动力系数也将是柱体至墙面距离的函数。如果柱体非常靠近墙，实际上将受到墙的边界层的影响。此时，柱体周围的流动变得相当复杂。

如果假定能应用势流理论，即是说柱体绕流是不分离的定常流，那么柱体绕流的惯性系数可以计算。[illegible] 等人（[illegible]）用势流理论分析了匀加速度流场中，淹没在自由水表面以下很深的柱体，其惯性力系数为：

$$C_M = 2\left[1+\frac{1}{(2e/D)^2}+\frac{1}{(4e/D)^2}+\frac{1}{(6e/D)^2}+\cdots\right] \qquad (\text{[illegible]})$$

式中，e [illegible] 为底部边界至柱体轴之间的垂向距离；R 为柱体半径。可以注意到，当 $e\to\infty$ 时，C_M 值近似于 2。当间隙等于柱体直径（$e=D$）时，墙对柱体的影响消失。另一方面，当柱体与墙接触（$e=0$）时，C_M [illegible]。

流动的不对称性，即便是在势流中也会产生横向力。作用在柱体上的横向力在距墙大于直径的远处可忽略。然而，当柱体靠近底部时将产生令人感兴趣的现象。当柱体和墙之间存在又长又小的间隙时，横向力指向墙，横向力系数 C_L 趋向于无穷。而一旦柱体接触到墙，净横向力将变向，从墙指向离开方向，且横向力系数为 [illegible]。因此，根据势流理论，安装了管线的海底将感受到相反的法向力，而使柱体下面的海底受到冲刷致使柱体暴露在流中。鉴于流动分离，涡发放以及存在边界层，实际上这种情况是意料之中的。

振荡波产生的作用在墙附近的柱体上的水平和垂直力，在势流假定下可通过线性绕射理论得到。所导得的 C_M 值，不仅是 KC 和 e 的函数，而且还是 β（[illegible]）的函数，其中 β 为柱体对自由表面的接近度。

[illegible] 和 [illegible]（[illegible]）研究了作用在水下管线上的波浪力。他们假定此时 KC 数限制为大约 [illegible] 的基础上，认为波浪力由惯性力控制。那么当柱体静止在海底时，水平和垂直向的 C_M 值建议分别采用 [illegible] 和 [illegible]。

除理论研究外，不少学者还从事试验研究，基本上证实了理论结果，不过稍小些。例如，[illegible]（[illegible]）在 [illegible] 形管中研究了墙的影响。柱体以不同的间隙放在底部，在正弦振荡流中，测量作用在水平柱体上的水平力和垂向力。C_D、C_M 和 C_L 根据测量结果进行计算。C_D 和 C_M 用傅里叶平均得到，而横向力系数用 C_L 表示。图 [illegible] 表示了 KC [illegible] 和 [illegible] 时不同间隙的 C_D 和 C_M 曲线。点线表示不存在墙的值。间隙对系数的影响使 C_D 和

[illegible]

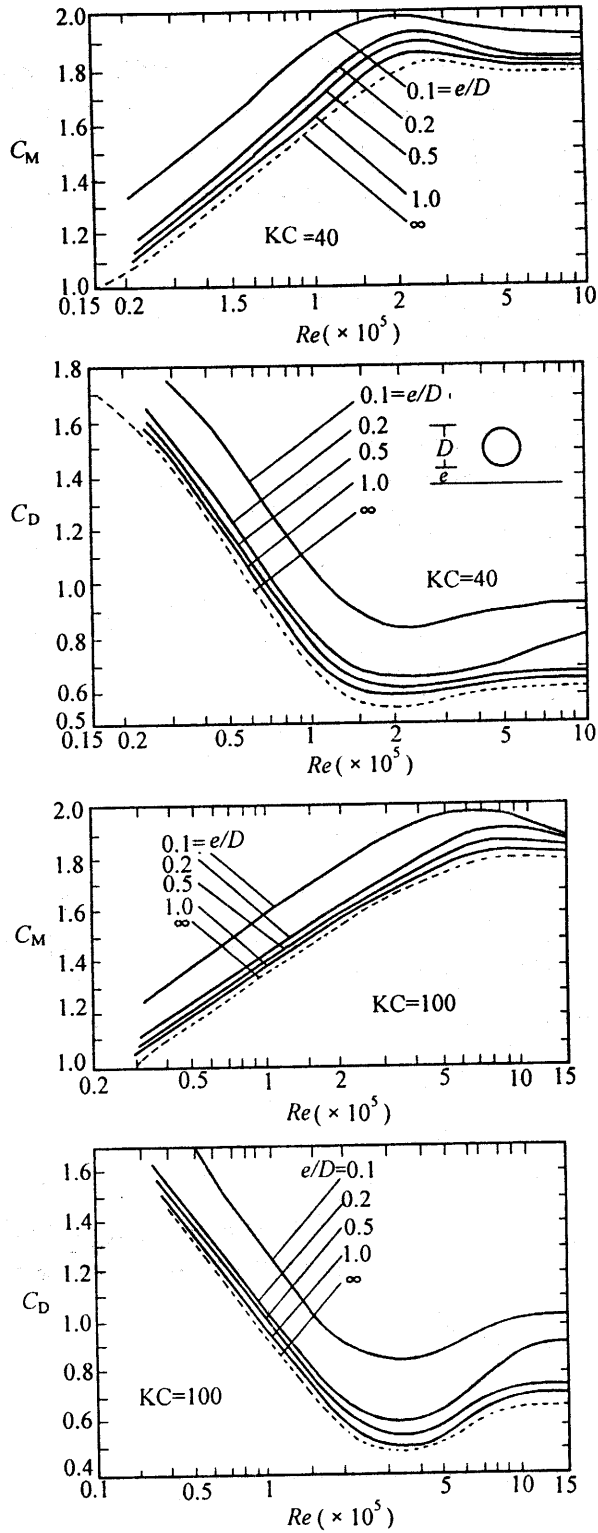
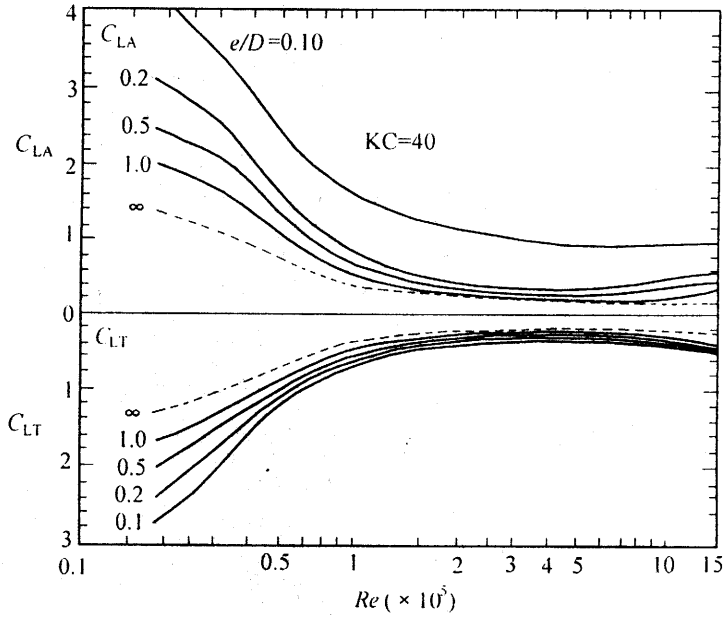


图 墙的靠近程度对圆柱体惯性和阻力系数的影响

悦的值都增大。而最大的系数值出现在间隙相对于直径为 园时。当 ε 越圆时，墙的影响正如势流理论中发现的，看来相当小。

作用在水平柱体上的横向力或垂向力是不对称的。因此用二个系数表示——指向墙那部分力的系数用 悦表示，而指向离开墙方向的另一部分力则用 悦表示。对 运悦和 员园的情形，这些值作为 砸的函数绘在图 猿圆中。此二种情形中，可看出离开墙的力的系数悦比指向墙的力的系数 悦大。一般来说，间隙对系数的影响特别对离开墙的力更为显著。



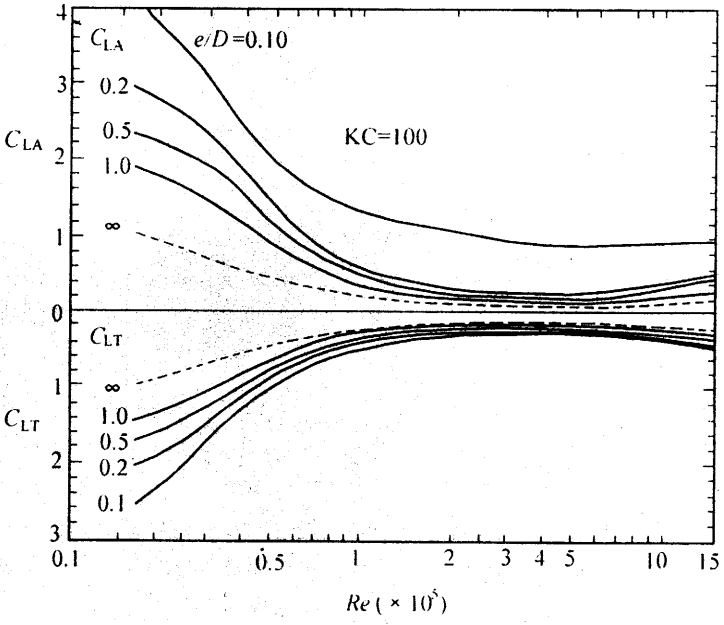


图 猿圆远 墙的靠近程度对圆柱体横向力系数的影响

五、结构相互作用的影响

前面已经指出，圆柱体附近存在墙时，随着柱体靠近墙的程度，墙对柱体的水动力系数有着显著的影响。在许多近海结构中都可以发现类似的邻近性影响，几个部件可能相互非常接近，这种构件常在导管架结构和立管群中看到。由于立管成组出现，所选的尺度又正好落在阻力—惯性力区域，所以在管群中立管的水动力系数受该群组其他立管的很强影响，即所谓屏蔽作用。试验已经发现，悦$_{D}$和 悦$_{M}$值随着立管数和柱体靠近程度而增加。

悦[illegible]等人 员怨怨园 分别把 圆个、猿个和 缘个柱体矗立在波浪水槽中，排成一列，在波浪水槽中进行试验，以确定阻力和惯性力系数，研究结构相互作用的影响。试验中相邻柱体间的间隙相等，间距从 源倍柱体直径至 员[illegible]倍直径。图 猿[illegible]和 猿[illegible]绘出了柱列与流成法向时，悦$_{D}$、悦$_{M}$和 悦$_{L}$的值，而图 猿[illegible]和 猿[illegible]给出了与流共线时的相应值。所有的结果都相应于图中涂阴的柱体。可以看出，水动力系数依赖于 运[illegible]数和相对间隙，与 砸[illegible]数的关系没有建立，因为试验所覆盖的 砸[illegible]范围太小。

结果表明 图 猿[illegible]～猿[illegible]，当相对间隙小于 员[illegible]时，悦$_{D}$和 悦$_{M}$增加惊人。五柱排列时，相对间隙从 员[illegible]变到 员[illegible]，阻力系数将加倍，而惯性力系数要乘 猿 相对间隙大约大于 圆时，悦$_{D}$和 悦$_{M}$与相应 运[illegible]数和 砸[illegible]数相应的单个柱体的结果没有重大的差别。

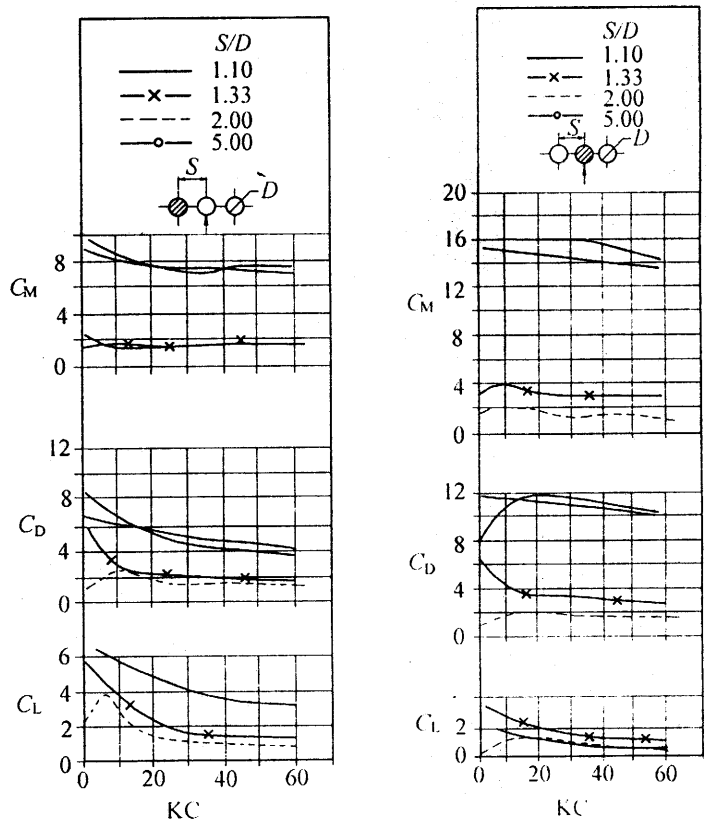


图 猿[illegible]猿个垂直柱列与流垂直时 悦$_{D}$、悦$_{M}$和 悦$_{L}$与 运[illegible]和间隔参数的关系

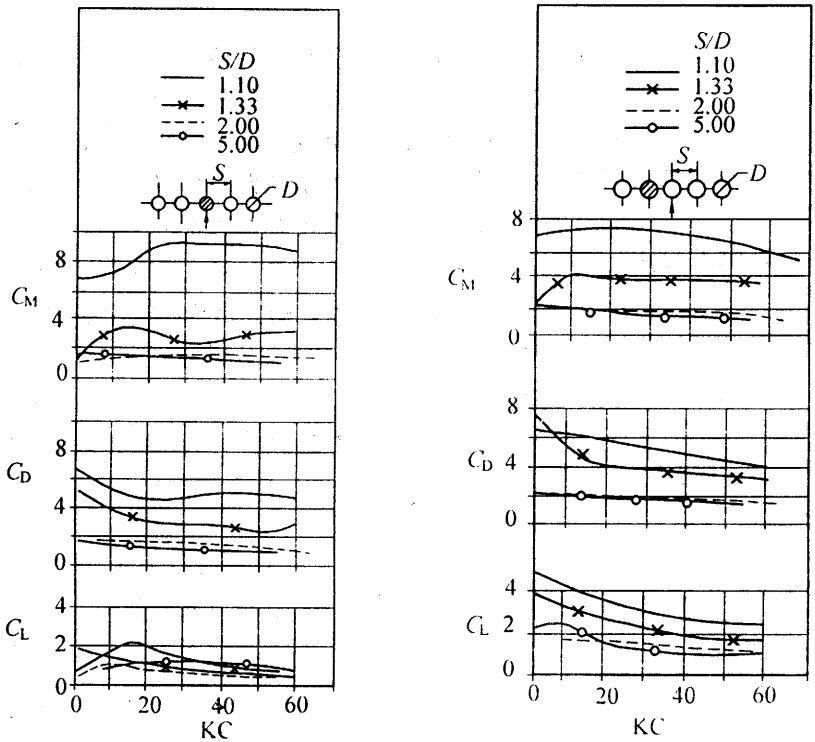


图 猿圆圆 缘个垂直柱列与流垂直时 悦M、悦D和悦L与 运动数和间隔参数的关系

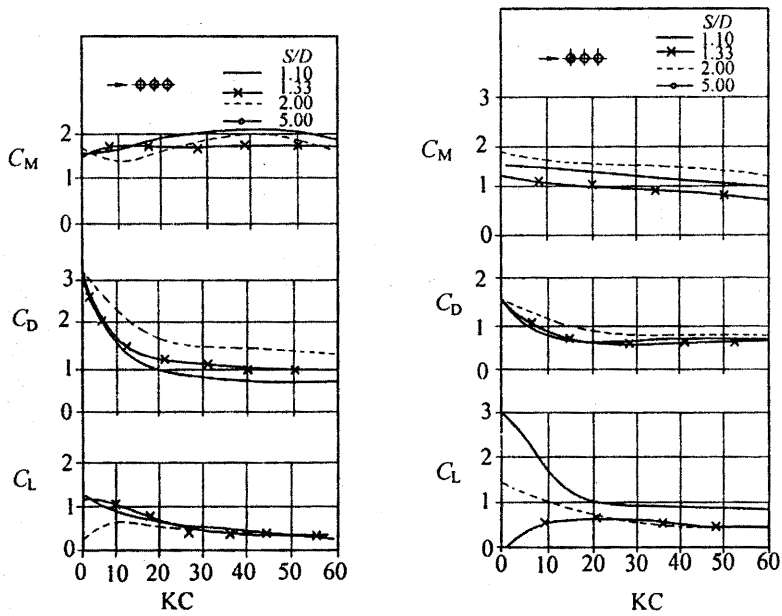


图 猿圆圆 猿个柱列与流平行的情形

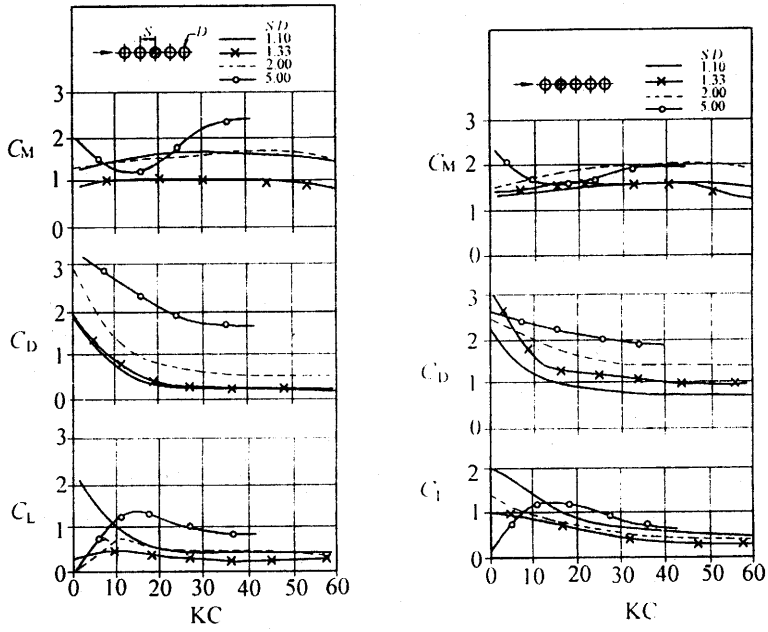


图 猿圆园 缘个柱列与流平行的情形

第五节　系数的选择问题

迄今，有关 悦$_{缘}$、悦$_{阅}$和 悦$_{载}$的已有资料，没有一组数据能令人信服地用于实体的情形。把试验结果用于实际设计时，必须极其小心。因为，现有的资料都是在特定状态下得到的，所介绍的比较和证实方法都有自身的规定，尚无普遍适用的具体准则。

一、检验方法的指导原则

设计固定或移动近海结构时，有关水动力系数的各种方法所罗列的规定和指导原则集中介绍如下。不过，这里的叙述过于简短，为慎重起见，建议读者在具体设计计算时查阅专门报告和规范。

员圆园美国石油学会

作用在构件上的波浪力建议用 酝$_{缘}$-载$_{阅}$公式进行计算。典型的 悦$_{缘}$和 悦$_{阅}$值分别给定为员缘至 圆园园 以及 员园至 员圆园 结构的自然频率接近主要波能分量频率时，要求作动力分析。

圆园英国标准规范

波浪载荷用具有适当的系数值的 酝$_{缘}$-载$_{阅}$方程计算。当采用 杂$_{贼}$$_{藻}$$_{葬}$$_{则}$$_{葬}$波理论时，在飞溅区 悦$_{阅}$越员园园园 其他区域 悦$_{阅}$越员园园园 而 悦$_{缘}$越圆园园园 除非用绕射分析方法发现可用较低的值。如果采用 粤$_{蚤}$$_{灶}$$_{蚤}$波理论，悦$_{阅}$越员园园园 对钢结构支承附体中的大型圆锥体和基座，建议整个桩脚或瓶体用绕射分析方法的 悦$_{缘}$值。下锥形构件，悦$_{缘}$越圆园园园 作用在锥型体上的垂向力用 云$_{则}$$_{葬}$$_{贼}$$_{藻}$$_{则}$$_{葬}$$_{造}$压力公式计算。涡发放对立管或生产管线的影响必须研究。波浪对平均水面附近的水平构件的砰击可作为阻力，用 悦$_{阅}$≈ 猿确定。

猿渊挪威船级社 (袁晨宏)

嗡葬约园圆园 时，用 酝凿藻则藻凿方程计算波浪载荷，其中 葬为物体半径 或特征尺度)。二维和三维物体的 悦鄄值采用已发表的势流理论的结果。袁晨宏也给出了定常流中光滑和粗糙物体的 悦鄄值。振荡流中 悦阅跃园缘苑 在波浪条件下，水动力系数被认为是 砸藻 运悦和粗糙度的函数。处于飞溅区的水平圆柱体的砰击系数至少必须取为 猿渊圆园 涡发放频率必须根据 斯特劳哈尔数 斯确定，而 斯数是 砸藻的函数，同时给出了涡发放横向力公式及其响应的动力放大。

源渊挪威石油管理局

在计算波浪载荷时，必须使用适当的线性或非线性波浪理论。大型结构，例如横向尺度大于波长的 员缘时，必须采用绕射理论。小构件必须采用包括流和结构运动的相对运动形式的 酝凿藻则藻凿方程。悦鄄、悦阅和 悦缅值是 砸藻 运悦 斯特 粗糙度和其他构件或边界的靠近程度的函数。光滑柱体的 悦阅最小值为 园愿缘 砸藻约猿员缘 尹员园缘 运悦约远园时 悦缅最小值为 园圆园 高 砸藻和 运悦数时，推荐 悦阅和 悦缅的定常流值。计算作用在小构件上的波浪载荷、惯性力和阻力系数必须根据模型试验结果、已发表的数据或实体测量确定。大型构件必须考虑绕射和水动力相互作用的影响。

二、海上试验

从前面的讨论已经清楚，实验室的试验虽能提供有用的数据，却并不能模拟实体状态，主要是由于实验室所能产生的 砸藻数范围有限。为了避免这类问题，许多试验都是在现场做的，以测量作用在垂直管上的海洋波力 (表 猿员)。缘园年代所做的早期试验，由于缺乏可靠的仪器，没有能测量水质点的运动学参数。例如，宰藻藻等人 (员缘缘苑) 测量了员缘米水深中圆柱体上的力，圆柱体的直径范围约为 园愿缘~员园缘毫米。分析发现，悦阅相对 砸藻极其离散，而求出的 悦鄄平均值为 圆愿缘

表 猿员 取自场测数据的柱体元的平均 悦鄄和 悦阅值*

波浪运动学	悦阅	悦鄄	附　　注
线性理论	员圆园	园愿缘	取自海洋波数据的平均值，柱体半径 猿~员园米和 远~员圆米
	员圆园~员缘园	圆园园	根据已发表数据统计分析 置信水平 怨缘(缘)的推荐值
线性拟合	园愿远	员缘园	基于测量峰值最高 缘园缘波浪力 ‖ 数据的平均值
斯特劳哈尔五阶	园愿缘苑	猿园员	取自 宰藻藻等的数据之统计分析的平均值
	园愿缘	员圆园	取自波浪力 Ⅰ 数据平均值，怨米水深处的小波浪
	园愿缘愿	员园园远	取自波浪力 ‖ 数据平均值，猿园园米水深处的大波浪
	园愿缘~员园园	圆园园	根据发表数据统计分析得到的推荐设计值
流函数	园愿缘	员园猿缘	基于高 砸藻数域的波浪力 Ⅰ 和 ‖ 数据的分析
线性谱和流函数	园愿缘~员园园	员园员	悦阅值为随 砸藻的减函数
场　测	园愿缘~员园园 粗糙)	员缘员~员缘缘	取自海试结构数据的平均值
	员圆园~圆园园 光滑)	员缘缘~员愿缘	
	园愿员员	员圆园	取自 粤怨怨猿年在挪威海峡测量数据平均值

注 *：根据 悦藻凿藻则藻凿 员缘缘苑。

苑园

[illegible]年 [illegible]月，在墨西哥湾测量了 [illegible]水深中 [illegible]管子上的波浪力和管子上的总反作用力。定常流速为 [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]对所有波浪进行最佳拟合加权平均，所得的 悦[illegible]和 悦[illegible]分别为 [illegible]和 [illegible]

在墨西哥湾完成了二个波浪力测量课题，即课题Ⅰ和Ⅱ。课题Ⅰ由 悦[illegible]标准石油公司用 源根安装了仪表的管子进行，管径为 [illegible]水深 [illegible]在课题Ⅱ中，数据取自 悦[illegible]飓风 [illegible]作用在 [illegible]水深中 [illegible]直径管子上的波浪力记录。这些课题的波浪数据有几个研究者进行了分析。由于水质点运动学参数没有测量，这样，不同的波浪理论和分析方法产生出不同的结果。[illegible]等人 [illegible]在联合工业研究课题下对数据作了重新分析，悦[illegible]和 悦[illegible]相对于 [illegible]的最后结果示于图 [illegible]

[illegible]和 [illegible]分析了 [illegible]飓风中墨西哥湾一平台上的波浪力。悦[illegible]和 悦[illegible]的平均值为 [illegible]和 [illegible]峰波浪力的最佳拟合所产生的 悦[illegible]越 [illegible] 悦[illegible]越[illegible]

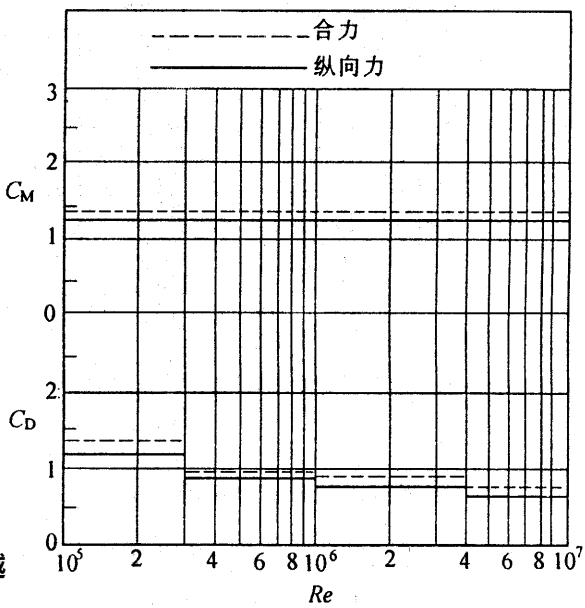


图 [illegible]取自海洋波课题的 悦[illegible]和 悦[illegible]值

英国国家航海学院 [illegible]在完成基督堂海湾 [illegible]课题期间，用装备有测试仪表的大立柱和装有压力传感器的波浪标尺，进行了广泛的试验，同时测量了水质点速度和波浪力。[illegible]对大立柱和小立柱导出了 悦[illegible]和 悦[illegible]的平均值，其关于 [illegible]的曲线示于图 [illegible] 所报告的数据关于平均值的离散性，部分是由于力和加速度测量空间位置不同而引起的，部分是由涡发放产生的。

同期，在墨西哥湾，在一个海洋试验结构 [illegible]上的联合工业试验已经完成，其中测量了指定位置的力和水质点速度。波浪力传感器由水面以下 [illegible]处 [illegible]外径、[illegible]长的圆形元件组成。[illegible]等人 [illegible]根据清洁原件和受污染原件二者测量的结果得到作为 [illegible]数函数的惯性力和阻力系数。结果表明，平均的 悦[illegible]随相对粗糙度增加，而 悦[illegible]相应减小。悦[illegible]的变化情况示于图 [illegible]而平均 悦[illegible]值在表 [illegible]给出。

表 [illegible] 取自海试结构数据的惯性系数

样本条件	运[illegible]	分析方法			
		Ⅰ		Ⅱ	
		悦[illegible]	标准差	悦[illegible]	标准差
清洁 [illegible]光滑）	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
污染 粗糙）	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

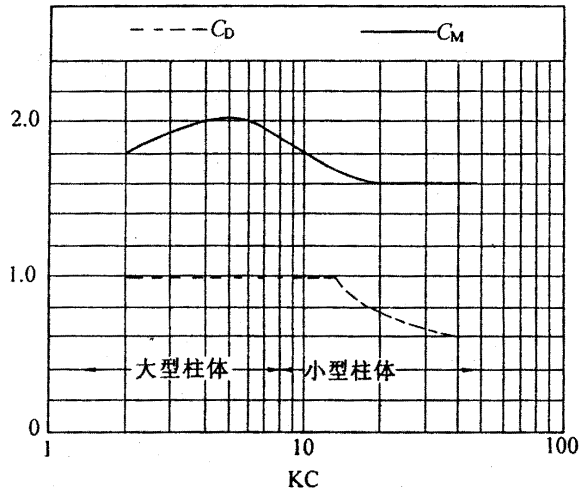


图 猿源圆 取自基督堂海湾课题的 悦$_{m}$和 悦$_{d}$值

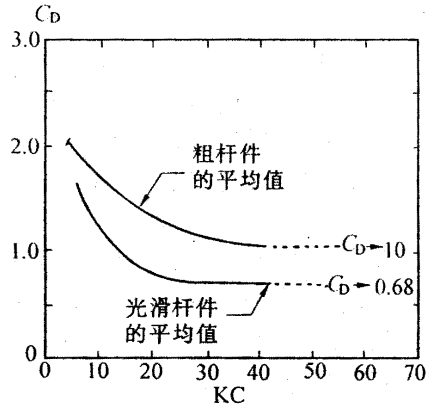


图 猿源猿 取自海试结构数据的光滑柱体和粗糙柱体的平均 悦$_{d}$值

三、实验室系数在设计中的应用

迄今，场测的波浪力数据和流体动力系数的分析有限。大多数早期研究，包括波浪理论的使用，以及根据这些研究所得到的 悦$_{m}$和 悦$_{d}$的平均值，罗列于表 猿源员 从表中可看出，海试结果相当离散，依赖于选用的波浪理论和采用的分析方法。一般说来，垂直管的 悦$_{m}$值在 员圆缘～员猿缘之间变化，而 悦$_{d}$值可以认为在 员圆缘～员猿缘之间。

比较来说，实验室的试验却相当广泛。在实验室有可能控制环境条件，从而得到离散较小的数据。海试却不同，由于波浪的随机本质，波浪的方向性、流以及测量上的困难，海试所产生的结果极其离散是可以想见的。但波浪水槽试验受场地的限制，主要因为比例问题不能完全模拟海洋环境，所得结果不能直接用于设计。不过，实验室试验帮助我们了解波浪中柱体或柱体群周围流动的物理过程，以及影响总波浪力的主要参数。因此，将试验室试验的结果与海试结合起来，便可期望提供作用在近海结构构件上的力的适当系数值。

在此假定下，用简谐流流过水平柱体而得到的大量数据，便可用于近海结构的垂直构件上。现有迹象表明，这样的结果与相应的场测数据比较是保守的。如采用这些数据，相应的场测数据可作为是否合适的判据，从而对水动力系数的相应数据作必要的修正。可供倾斜构件采用的数据很有限，不过，根据有限的试验结果已发现，除“理想”振荡流中的“惯性临界”区域外，倾斜构件上所采用的数据与垂直时类似，只要在计算力时采用水质点的法向分量即可。在波浪场中，流的存在对水动力系数有很大的影响。因此，必须小心作出校验，以测定水动力系数值是采用独立流场模型呢还是采用相对速度模型。普遍认为，边界或其他邻近构件的影响使水动力系数值增加。增加的幅度依赖于相对间隙，可以根据这里提供的数据进行适当估算。

第六节　自由表面的影响

用线性理论计算作用在垂直构件上的作用力时，常常计算至静水面。然而，当波高相对水深是较大的量时，在柱体的静水面附近，自由表面的变化对总波浪力的影响将变得相当重要。因为：第一，波面波动部分在柱体受力中占有重要比重，不能只计算至静水面；第二，绕柱体的流动，通常在柱体的“前面”水面升高，而在柱体“后面”相应下降，这一现象在大尺度柱体中不能忽略。

对大直径柱体，这种表面影响可用下面介绍的方法考虑。因为直到静水面压力都用线性理论预报，并且自由表面上动压力是大气压力。因此，一个简单的方法是假定，如图 猿源源缘所示，从静水面到自由表面，压力线性衰减。而在水面下降区域（静水面下面），压力用线性绕射理论（下一章介绍）计算，直至接近自由表面点。并且假定达到自由表面时迅速变为零。此时，自由表面定义为：

$$\eta = \left(\frac{p}{\rho g}\right)_{z=\eta} \qquad (猿源源缘)$$

式中 p 为静水面上给定点（$z=\eta$）的压力，由总速度势确定（下一章讨论）。图 猿源源缘所示的分布已经在试验上证实，是合理的，至少是保守的。

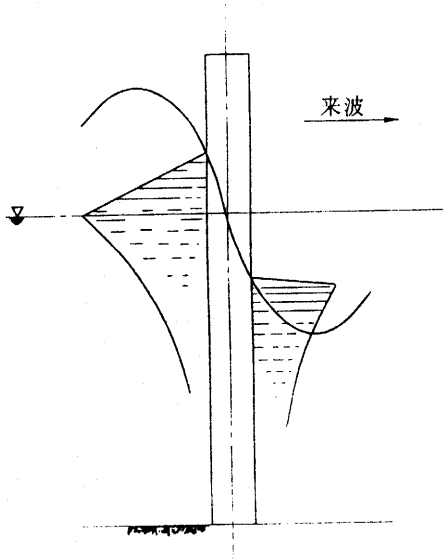


图 猿源源　自由表面附近的压力近似形式

绕射影响很小而阻力很大的区域，有一种方法是把线性波理论延伸到自由表面，超越静水面都用双曲线形式。固定重力式结构的波浪水槽试验表明，此法过大地估算了总作用力，特别是倾覆力矩。把水质点运动学参数指数地延伸到自由表面时将是极其保守的。

要得到线性波的自由表面上的值，运动参数，例如，水质点的水平速度，有时用平均水面到自由表面都等于平均水面相应值进行外插。另一种方法是，用平均水面上得到的同一倾角线性延伸得到。这两种外插方法要小心使用，以保证得到保守的结果。特别是在计算倾覆力矩时更得格外小心。因此，对随机海浪，外插方法将给出更大的作用力，因为随机波浪的波浪分量的运动学参数是加在一起的。

在允许用 酝-莫逊方程计算作用力的范围，为考虑自由表面的影响，有几种线性理论的运动学量修正方法。例如，悦藻蚤藻贼藻则藻 (1976) 推荐一种计入自由表面的速度（因而加速度）修正形式：

$$u(z) = u_0(z)\left[1 + \frac{\eta}{d}\left(1 + \frac{z}{d}\right)\right] \qquad (猿源源远)$$

式中，η 是相对静水面的瞬时水面高；$u_0(z)$ 在计算 怎时，η 随波浪中不同点变化（当作等压面高度）。另一方面，在总力的积分导数中又作为常数处理。采用此形式的速度[方程 猿源源远]和加速度，总波力的 酝-莫逊方程积分积到自由表面。注意，此时有效水

深变为 η。

宰[illegible] 考虑了稍微不同的速度修正：

怎越 [illegible] (3-86)

其中垂向距离用因子 (η) 作了修正。这样峰和谷都具有方程 (3-86) 那样相同的质点速度。不过，在波浪中任意其他点上，速度值稍稍不同，如图 3-37 所示。考虑自由表面影响时，可以推荐使用二者之一。问题是，这些形式在数学上都不能令人满意。他们都不满足 [illegible] 方程，除非含 (η) 项在 Φ 关于变量微分时当作常数来处理。

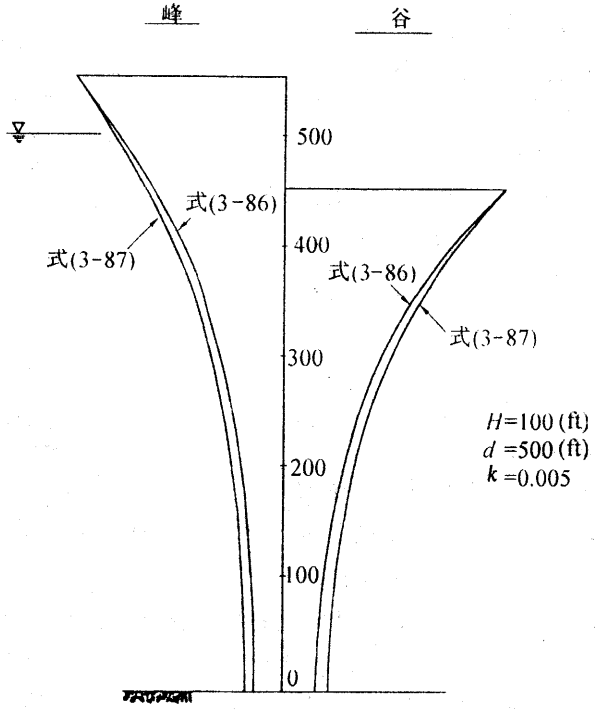


图 3-37 达到自由表面的水质点水平速度的垂向分布，峰和谷的形式 [illegible]

与线性理论不同，非线性理论计算水质点运动学量是直至自由表面的。用非线性理论，例如 [illegible] 五阶波理论计算力时发现计算至自由表面的结果是保守的。从墨西哥湾结构上得到的数据已经证实这种趋势 图 3-[illegible]。

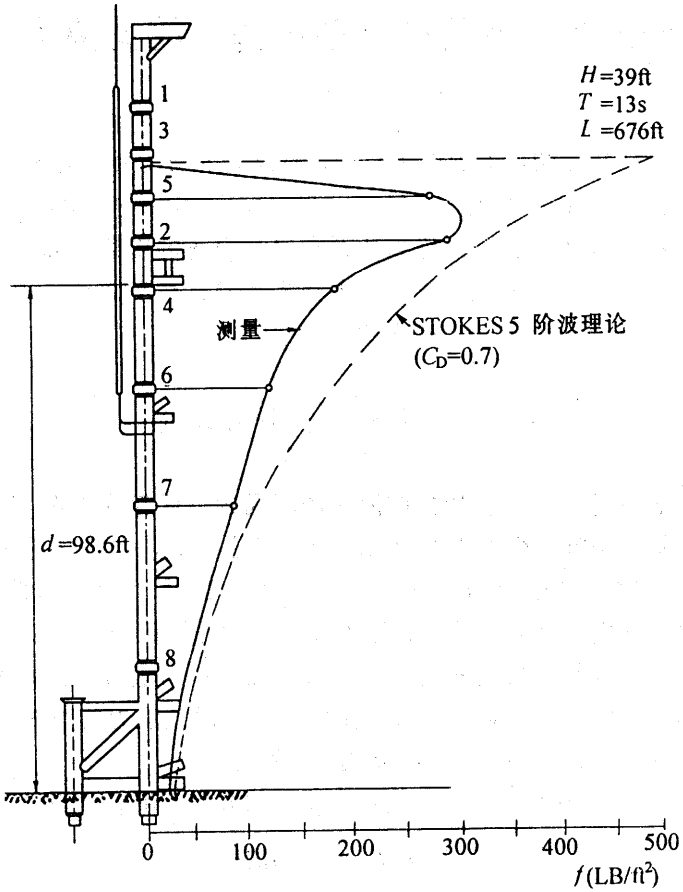


图 [illegible] 作用在管上的动压力达到自由表面的分布值，测量与计算 根据 [illegible] 阶理论）的比较

第四章　作用在大型结构上的波浪力

第三章已指出，作用在结构上的波浪力可根据结构特征尺度与波长比 (阅转遭 的范围决定采用何种方法进行计算。如图 猿源员所示，当 (阅转遭 较大，反射波与入射波同阶时，计算作用在物体上的波浪力，必须考虑物体存在对波浪场的影响，即所谓绕射理论。当 (阅转遭 中等，而足够大，以至惯性力比阻力大得多，但又并不大到必须仔细考虑绕射影响的程度，则可采用所谓 云孰蕴蕴至则糟理论。

第一节　云孰蕴蕴至则糟力

云孰蕴蕴至则糟理论假定，结构周围的波浪场不因物体的存在而改变，作用在结构上的波浪力可直接根据入射波产生的压力沿淹湿表面积分得到。这是一种相当苛刻的假定，一般与实际不符。不过，在近海结构设计的论证阶段，结构尺度的大致范围可通过了解波浪力的数量概念进行确定。此时，采用最简洁而又有一定准确度的方法进行估算是相当好的方法，也是优秀工程人员最常用的方法。云孰蕴蕴至则糟力正好适合此种情形。一般认为，当结构尺度与波长相比较变化很小时，作用在其上的波浪力将与 云孰蕴蕴至则糟力成正比，并可通过引入某种系数进行修正得到实际波浪力。

根据 云孰蕴蕴至则糟理论的假定，作用在结构上的波浪力可表示为：

$$云_{晕} 越 悦_{匀}\iint_{杂} 责 \mathrm{d}杂 \qquad 源猿\text{-}员$$

$$云_{赠} 越 悦_{灾}\iint_{杂} 责 \mathrm{d}杂 \qquad 源猿\text{-}圆$$

式中，$云_{晕}$、$云_{赠}$分别为作用在结构上的波浪力的水平分量和垂直分量；$杂$为结构的淹湿表面积；$灶_{晕}$、$灶_{赠}$分别为 $杂$面上的外法线的水平和垂直方向投影；$悦_{匀}$、$悦_{灾}$分别为水平和垂直方向的波浪力系数；$责$为波浪动压力，可根据线性波理论得到：

$$责 越 \rho 早 \frac{匀 糟蚤凿(噪凿垣赠 糟蚤凿(噪凿}{糟蚤凿(噪凿} 糟蚤凿(\omega 贼) \qquad 源猿\text{-}猿$$

有一点必须指出，这里使用的修正系数是与 云孰蕴蕴至则糟力相应的，而并不是 酝燥蚤则结构方程中的惯性系数，切勿混淆。

下面详细讨论几种典型的结构情形。

一、水平柱体

考虑一水平放置的柱体，完全淹没在波浪场中。假定柱体足够长，端部影响可忽略，问题可化为二维问题。波向垂直柱体轴。采用柱坐标系，如图 源猿员

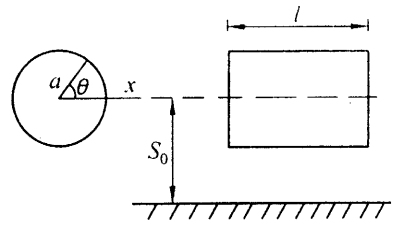


图 源猿员

苑愿

所示。柱体半径为 a，长为 h，柱体轴距海底的高度为 H。

$$\mathrm{d}S = a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{1}$$

$$\mathrm{d}V = a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r \tag{2}$$

而 h 长柱体上的面积元 $\mathrm{d}S$ 可表示为

$$\mathrm{d}S = a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \tag{3}$$

于是，$\rho_0 = \rho_0(z)$，$p_0 = p_0(z)$，$\rho = \rho(z)$，$p = p(z)$，$\omega = \omega(z)$

$$M = \int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \int_0^h \rho_0(z)\,a^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) = \omega \cdot \pi a^2 \tag{4}$$

其中 πa^2 为柱体截面积。

$$\begin{aligned}
&\rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) \\
&\rho(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z - \rho(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

亦

$$\begin{aligned}
\rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z &= \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) \\
&= \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) \\
&= \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z)
\end{aligned}$$

又

$$\rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z)\cdots,\quad \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z) - \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\rho(z)\cdots$$

这样式 (4) 的积分可展成四个积分，分别为：

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

$$\int_0^h \rho_0(z)\,a\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \int_0^{\rho(z)} a\,\mathrm{d}r = \omega \cdot \pi a^2$$

最后得到

$$M = \int_0^h \frac{\rho_0 - \rho_0(z)}{\rho_0 - \rho(z)}\,\mathrm{d}z \cdot \rho_0(z) - \rho(z) \cdot \pi a^2 \tag{5}$$

引入柱体轴上水质点的水平加速度 a_0：

$$a_0 = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \tag{6}$$

$$\text{[illegible]}$$

及柱体体积 [illegible] 则

$$\text{[illegible]}$$

类似地，

$$\text{[illegible]}$$

其中只有一个非零积分

$$\text{[illegible]}$$

这样，垂向力变为：

$$\text{[illegible]}$$

引入柱体轴上水质点的垂向加速度 [illegible]：

$$\text{[illegible]}$$

及柱体体积 [illegible] 则

$$\text{[illegible]}$$

结果，作用在水平柱体上的水平力和垂向力化为 [illegible] 方程相应的惯性项的形式，只是相应的系数不同而已。

二、水平半柱体

与水平柱体类似，半柱体轴距海底的高度为 [illegible]，则作用在柱体上的水平力可表示成：

$$\text{[illegible]}$$

由于积分限从 [illegible] 至 π，与柱体比较，[illegible] 的积分将有二项不等于零：

$$\text{[illegible]}$$

$$\text{[illegible]}$$

为求出积分 [illegible]，可令 [illegible]，从而把式 [illegible] 化为：

$$\text{[illegible]}$$

并积分得到：

$$\text{[illegible]}$$

其中，

$$\text{[illegible]}$$

于是，

$$\text{[illegible]}$$

[illegible]

若引入半柱体轴上水质点垂向速度 w_0 和水平加速度 $\ddot{\xi}_0$：

$$w_0 = \frac{gk}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sin\omega t$$

$$\ddot{\xi}_0 = \frac{gk}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos\omega t$$

及半柱体体积 $V = \pi R^2 T$，则式 (1.1.2) 可写成为：

$$F_z = \rho V \dot{w}_0 + C_M \rho V \ddot{\xi}_0 \tag{1.1.3}$$

当半柱体坐底时，$d = 0$，$w_0 = 0$，则水平力可表示为：

$$F_x = C_M \rho V \ddot{\xi}_0 \tag{1.1.4}$$

与水平柱体有相同的形式（注意 V 不同）。

作用在半柱体上的垂向力

$$F_z = \iint_S p\,n_z\,dS$$

$$= \int_0^{\pi} \rho g \frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos\theta \cdot R\cos\theta \cdot R\,d\theta \cdot T \tag{1.1.5}$$

与 F_x 类似，由于积分限从 0 至 π，与柱体比较，F_z 的积分将有二个不等于零的项：

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\pi} \cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\pi\cos\\ &\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)\cos^2\theta\,d\theta = I_2\end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

其中，I_2 积分得到

$$I_2(\beta) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\pi-\beta)}{\cos\beta} + \frac{\sin(\pi-\beta)}{\cos(\pi-\beta)}\right] \tag{1.1.7}$$

于是，

$$F_z = \rho V \dot{w}_0 + \frac{\pi\rho}{\cosh kd}\frac{gk}{\omega^2}\cosh k(z+d)\cos\omega t \cdot I_2(\beta) \tag{1.1.8}$$

或引入半柱体轴上水质点水平速度分量 u_0：

$$u_0 = \frac{gk}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\cos\omega t$$

及垂向加速度分量 $\ddot{\zeta}_0$：

$$\ddot{\zeta}_0 = -\frac{gk}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\omega\sin\omega t$$

则式 (1.1.3) 可写成：

$$F_z = \rho V \dot{w}_0 + C_M \rho V \ddot{\zeta}_0 \tag{1.1.9}$$

为便利起见，在表 1.1.1 中给出了式 (1.1.5) 和式 (1.1.9) 中的 $I_1(\beta)$ 和 $I_2(\beta)$。

三、球

假定一个半径为 R 的球形体完全淹没在波浪中固定不动，其中心距海底高度为 d，引入球坐标如图 1.1.3 所示，则

$$x = R\sin\theta\cos\varphi \tag{1.1.10}$$

$$z = R\cos\theta + d \tag{1.1.11}$$

方向余弦：

$$\begin{cases} \text{灶}_{\text{曾}} \text{越} \text{泽}\cos\beta \\ \text{灶}_{\text{赠}} \text{越} \end{cases}$$

面元：

$$\text{凿}\text{杂} \text{越} \text{葬}^{2}\sin\theta \cdot \text{葬}\,\text{凿}\beta\,\text{凿}\gamma$$

那么，作用在球体上的水平力

$$\text{云}_{\text{曾}} \text{越} \text{悦}_{\text{匀}} \iint_{\text{杂}} \text{贲}\,\text{灶}_{\text{曾}}\,\text{凿}\text{杂}$$

$$\text{越} \text{悦}_{\text{匀}} \frac{\rho \text{早}\,\text{葬}^{2}}{\text{圆}} \int_{\text{园}}^{\pi} \left[\int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta \text{原}\omega\text{贼}\text{糟}\sin\beta \text{糟}\sin\theta\cos\gamma)\,\text{凿}\gamma \right] \text{泽}\sin\theta\,\text{凿}\theta$$

$$\text{因为} \int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta \text{原}\omega\text{贼}\text{糟}\sin\beta \text{糟}\sin\theta\cos\gamma)\,\text{凿}\gamma$$

$$\text{越} \left[\int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos(\omega\text{贼}\text{糟}\sin\beta \text{糟}\sin\theta\cos\gamma)\,\text{凿}\gamma \right] \text{糟}\sin\omega\text{贼}$$

$$\text{垣} \left[\int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{泽}\sin(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos(\omega\text{贼}\text{糟}\sin\beta \text{糟}\sin\theta\cos\gamma)\,\text{凿}\gamma \right] \text{泽}\sin\omega\text{贼}$$

根据数学函数手册 [illegible] 与葬性糟糕糕糟酷葬性纵葬酷云球糟糕择

$$\begin{cases} \int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{泽}\sin(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos\gamma\,\text{凿}\gamma \text{越} \text{圆}\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta) \\ \int_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos\gamma\,\text{凿}\gamma \text{越} \text{园} \end{cases}$$

又

$$\int_{\text{园}}^{\pi} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos\omega\text{贼}\,\text{垣}\,\text{泽}\sin(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{泽}\sin\omega\text{贼}\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta)\,\text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}\theta\,\text{凿}\theta$$

$$\text{越} \left[\int_{\text{园}}^{\pi} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{糟}\cos\omega\text{贼}\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta)\,\text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}\theta\,\text{凿}\theta \right] \text{糟}\cos\omega\text{贼}_{\text{园}}$$

$$\text{垣} \left[\int_{\text{园}}^{\pi} \text{泽}\sin(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{泽}\sin\omega\text{贼}\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta)\,\text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}\theta\,\text{凿}\theta \right] \text{泽}\sin\omega\text{贼}_{\text{园}}$$

且

$$\begin{cases} \int_{\text{园}}^{\pi} \text{糟}\cos(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta)\,\text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}\theta\,\text{凿}\theta \text{越} \frac{\text{圆}}{\text{猿}}\text{葬} \\ \int_{\text{园}}^{\pi} \text{泽}\sin(\omega\text{葬}\cos\beta \text{糟}\cos\theta)\,\text{分}_{\text{贞}}(\omega\text{葬}\cos\beta)\,\text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}\theta\,\text{凿}\theta \text{越} \text{园} \end{cases}$$

所以

$$\text{云}_{\text{曾}} \text{越} \text{悦}_{\text{匀}} \frac{\rho \text{早}\,\text{葬}^{2}}{\text{圆}} \cdot \text{圆} \cdot \frac{\text{圆}}{\text{猿}} \text{糟}\cos(\omega\text{贼}_{\text{园}}) \text{泽}\text{灶}_{\text{圆}}$$

引入球体体积 $\text{灾} \text{越} \frac{\text{源}}{\text{猿}}\pi\text{葬}^{3}$ 及球体中心处水质点水平加速度表达式，则作用在球体上的波浪力水平分量可写成：

$$\text{云}_{\text{曾}} \text{越} \text{悦}_{\text{匀}} \text{灾}\,\text{糟}\cos\omega\text{贼}_{\text{园}}$$

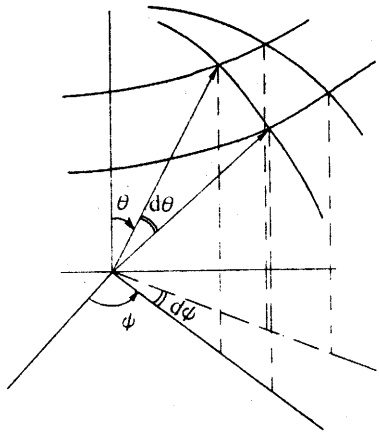


图 [illegible]

类似地，作用在球体上的垂向波浪力为：

$$F_z = \iint_S p\,n_z\,dS$$

$$= -\frac{\rho g H}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t+\varepsilon)\,dS$$

$$\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t+\varepsilon)\,dS\right]$$

式 中，

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t+\varepsilon)\,dS$$

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta)\,dS\cos(\varepsilon-\omega t)$$

而其余积分为零。于是式 积分得到：

$$F_z = -\frac{\rho g H}{2}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(\varepsilon-\omega t)$$

或写成：

$$F_z = -\rho g V_0 \cos(\varepsilon-\omega t)$$

式中，V_0为球体中心水质点垂向加速度分量。

四、半球

假定半径为 的半球体完全淹没在波浪场中，其中心距海底高度为 选取与球体相同的坐标系，则波浪力的推导类似。

$$F_z = -\frac{\rho g H}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}^{\pi/2}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t+\varepsilon)\,dS$$

$$\left[\int_0^{2\pi}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(kx\cos\beta+ky\sin\beta-\omega t+\varepsilon)\,dS\right]$$

在求式 的积分时，考虑到式 后，有二个不等于零的积分：

$$\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos\beta\,dS\cos(\varepsilon-\omega t) = \frac{2}{3}\pi a^3$$

$$\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos\beta\,dS\cos(\varepsilon-\omega t) = \frac{2}{3}\pi a^3\cos(\varepsilon-\omega t)$$

而式 式的积分可通过双曲函数展开式逐项积分进行计算：

$$\frac{2}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(kd)^{2n}}{(2n)!}\frac{(2n+3)!}{(2n+2)!}\left(\frac{ka}{2}\right)^{2n}$$

于是，作用在半球体上的波浪力水平分量为：

$$F_x = -\frac{\pi\rho g H}{2}\left[\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\right]_{z=-d+a\cos\beta}\cos(\varepsilon-\omega t)\,dS$$

或引入半球体积 及半球中心处的水平加速度和垂向速度，式 可写成：

$$F_x = -\rho V_0\left[\frac{2}{3}\pi a^3\cos(\varepsilon-\omega t)\right]$$

当半球置放在海底时，$d=a$ 则

$$F_x = -\rho V_0\cos(\varepsilon-\omega t)$$

垂向波浪力的推导完全类似，只要在求球体垂向波浪力的式 源圆缘园中将第一积分限的 π 改为π/圆即可。于是如上所述，只有二个不等于零的积分，其中与式 源圆缘园等价的积分积得值为 噪葬 猿 而

$$\frac{猿}{噪葬_{园}}\int_{园}^{\pi/圆}精\cdots\cdots(噪葬\cdots\cdots)分_{员}(噪葬\cdots\cdots)泽\cdots\cdots精\cdots\cdots凿 \quad 越 悦_{源} \qquad 源圆缘圆$$

积分得：

$$悦_{源}(噪葬 \quad 越 猿\sum_{灶越园}^{肆}\frac{圆灶!}{圆灶!}(噪葬^{灶}分_{灶越园}(噪葬 \qquad 源圆缘员$$

这样，作用在半球上的垂向力为：

$$云_{赠} 越 悦_{灾}\rho\frac{早与}{猿\cdots\cdots\cdots\cdots}\int_{园}^{\pi/圆}(噪\cdots\cdots) 垣 悦_{源}(噪葬精\cdots\cdots(噪\cdots\cdots)]精\cdots\cdots贼 \qquad 源圆缘圆$$

或写成：

$$云_{赠} 越 悦_{灾}\rho 灾\left[\frac{鳢}{圆}垣 悦_{源}(噪葬 \omega怎_{园}\right] \qquad 源圆缘猿$$

为便利起见，式 源圆缘圆和式 源圆缘猿中的 悦$_{猿}$(噪葬 和 悦$_{源}$(噪葬 值将在表 源圆员中列出。

表 源圆员 积分函数 悦$_{员}$(噪葬) ~ 悦$_{源}$(噪葬) 值表

噪葬	悦$_{员}$	悦$_{圆}$	悦$_{猿}$	悦$_{源}$
园……员	园……苑	员……怨	园……园	员……源
园……圆	园……缘	苑……苑	园……缘	远……怨
园……猿	园……园	缘……远	园……苑	源……愿
园……源	园……怨	猿……缘	园……怨	猿……愿
园……缘	园……远	猿……猿	园……园	圆……圆
园……远	园……猿	圆……园	园……圆	圆……怨
园……苑	园……猿	圆……源	园……员	员……远
园……愿	园……缘	圆……圆	园……缘	员……园
园……怨	园……园	员……源	园……圆	员……猿
员……园	园……缘	员……缘	园……员	员……圆
员……缘	园……怨	员……源	园……缘	员……远
圆……园	园……猿	员……缘	园……缘	员……源
圆……缘	园……圆	员……员	园……苑	园……怨
猿……园	园……远	园……怨	园……苑	园……员
猿……缘	园……缘	园……怨	员……缘	园……愿
源……园	员……园	园……苑	员……缘	园……缘
源……缘	员……缘	园……园	员……源	园……猿
缘……园	员……源	园……源	员……苑	园……愿

五、垂直柱体

考虑一半径为 葬 长 遭的圆柱体垂直放置在波浪场中，假定柱体中心距海底的高度为 杂$_{园}$ 选用柱坐标系，如图 源圆缘 则

曾越 则精……

$$责越\frac{员}{圆}\rho早与\int_{精\cdots\cdots}^{精\cdots\cdots}精\cdots\cdots(噪精\cdots\cdots 原\omega贼$$

柱体表面面元 凿杂越葬凿凿 法线方向 灶$_{曾}$越精……，灶$_{赠}$越员

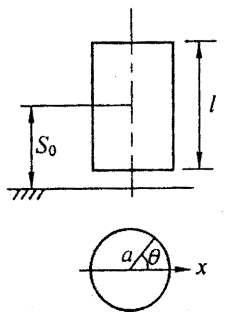


图 源圆缘

灶[1]越澡燥。于是作用在垂直圆柱体上的水平波浪力可写成：

$$云_{水} 越 悦_{M} \iint_{杂} 责_{上水} 凿杂$$

$$越 悦_{M} \frac{\rho 早^{2} 葬}{圆糟燥澡\,\gamma} \left[\int_{杂_{圆垣}}^{杂_{圆原}} 糟燥澡(\gamma 凿) 凿\gamma \right] \left[\int_{园}^{圆} 糟燥澡(\theta 垣\gamma) 凿\theta \right] \qquad 式(源.源.缘)$$

疫

$$\int_{园}^{圆} 糟燥澡(\theta 垣\gamma) 凿\theta 越 \left[\int_{园}^{圆} 糟燥澡(\theta 垣\gamma) 凿\theta \right] 泽燥泊 贼$$

$$垣 \left[\int_{园}^{圆} 泽燥泊(\theta 垣\gamma) 凿\theta \right] 糟燥泽 贼$$

而

$$\int_{园}^{圆} 糟燥澡(\theta 垣\gamma) 凿\theta 越园$$

$$\int_{园}^{圆} 泽燥泊(\theta 垣\gamma) 凿\theta 越圆分_{n}(\gamma)$$

亦

$$云_{水} 越 悦_{M} \frac{\pi \rho 早^{2} 葬}{噪糟燥澡\,\gamma} \left[泽燥泊(\gamma 垣 杂_{圆}) 垣 \frac{造}{圆} 原泽燥泊(\gamma 垣 杂_{圆}原 \frac{造}{圆}) \right] 分_{n}(\gamma) 泽燥泊 贼 \qquad 式(源.源.缘)$$

又

$$泽燥泊(\gamma 垣 杂_{圆}) 依 \frac{造}{圆} 越 泽燥泊(\gamma 垣_{圆}) 糟燥泽(\gamma 造圆) 依 糟燥泽(\gamma 垣_{圆}) 泽燥泊(\gamma 造圆)$$

因此：

$$云_{水} 越 悦_{M} \frac{\pi \rho 早^{2} 葬}{噪糟燥澡\,\gamma} \cdot 圆糟燥泽(\gamma 垣_{圆}) 泽燥泊(\gamma 造圆) 分_{n}(\gamma) 泽燥泊 贼 \qquad 式(源.源.远)$$

引入柱体淹没体积 灾越πr葬造 以及柱体中点处的水质点水平加速度：

$$鳃_{垣圆} 越 \frac{员}{圆} 甲杂_{M} \frac{糟燥泽(\gamma 垣_{圆})}{糟燥澡\,\gamma} 泽燥泊 贼$$

则式 源.源.远 可写成：

$$云_{水} 越 悦_{M} \rho 灾 \frac{圆分_{n}(\gamma)}{噪葬} \frac{泽燥泊(\gamma 造圆)}{(\gamma 造圆)} 鳃_{垣圆} \qquad 式(源.源.苑)$$

由于海洋结构中凡垂直柱体结构几乎都是立于海底穿出自由表面的，因此作用在此类垂直柱体上的垂向力并不重要，这里不作讨论。

六、矩形箱体

考虑三边长分别为 造员、造圆和 造猿的矩形箱体，固定淹没在波浪场中，假定箱体 造员造猿面与波面正交，箱体中心位置到海底距离为 杂圆，如图 源.源.缘 那么，作用在箱体上的水平波浪力：

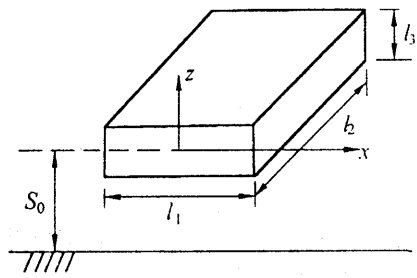


图 源.源.缘

$$云_{水} 越 悦_{M} \iint_{杂} 责_{上水} 凿杂$$

由于除 灶[原员](造员圆) 越原员 灶[员](造员圆) 越员外，其他各面上的外法线方向余弦均为零，因此，水平力实际上只是前后二侧面的压力差：

$$F_z = \left[\int_{-d}^{\eta} \rho g \pi a^2 \left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right) dz\right] \cos(kx - \omega t) = \frac{2}{3}\rho g \pi a^3 \cos(kx - \omega t)$$

$$F_z = \frac{\rho g \pi a^2}{\cosh kd}\left(\frac{\sinh kd}{k} - \frac{\cosh kd}{k}\right)\cos(kx - \omega t) = \frac{2}{3}\rho g \pi a^3 \cos(kx - \omega t)$$

引入矩形箱体的体积 $\forall = 4ab^2$，以及箱体中心处水质点水平加速度 u_0，则式 可改写成：

$$F_z = \rho \forall \frac{\sinh kd}{kd} u_0$$

类似地可得到作用在矩形箱体上的波浪力：

$$F_x = \rho \forall \frac{\sinh kd}{kd} u_0$$

七、圆盘

前面讨论半球和垂直圆柱体时均未考虑作为其底的圆盘上波浪力，这里专门讨论之。假定淹没在波浪场中的圆盘一面（底面）遭受波浪力的作用，而另一面（顶面）不感受波浪的作用，则作用在圆盘上的垂向力可用极坐标表示：

$$F_z = \iint_{S} p \, dS$$

$$F_z = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} \frac{\rho g H}{\cosh kd}\cos(kx - \omega t) r \, dr \, d\theta$$

其中，已考虑到 $\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t)$，$x = r\cos\theta$，以及圆盘中心距海底高度 $z = -d$。

而

$$\int_0^{2\pi} \cos(kx - \omega t) \, d\theta = 2\pi J_0(kr)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx - \omega t) \, d\theta = 0$$

亦

$$F_z = \frac{\rho g H \pi}{\cosh kd}\cos(kx - \omega t)\left[\int_0^{a} J_0(kr) \, dr\right]$$

又

$$\int_0^{a} J_0(kr) \, dr = \frac{a}{k} J_1(ka)$$

因此

$$F_z = \frac{\rho g H \pi}{\cosh kd}\cos(kx - \omega t)\frac{a}{k} J_1(ka)$$

$$F_z = \left(\pi a^2 \frac{2}{ka} J_1(ka)\right)\frac{\rho g H}{2}\cos\omega t$$

式中，u_0 为圆盘中心处水质点水平速度。

显然，如要讨论圆盘上面的波浪作用力，只要改变式 的符号便可。

八、[illegible]力的系数

前面已导出了各种典型结构的波浪力公式，迄今一直没有对其中的系数作出说明。一[illegible]

般说来，不可能在不同波浪条件下，对所有结构形式推荐一个系数值。实际上，这些系数是绕射参数 $\frac{D}{L}$（D为结构特征尺度）的函数，这一点下一节就将讲到。不过，若遇到下列条件时，系数 C_M、C_D可取常数值，并得到作用在结构上波浪力的一个合理的估值。

1. 结构与波长相较较小。
2. 波高很小。
3. 结构（如水平柱体或球体）离海底有一定距离（至少距海底有一个半径的距离）。
4. 淹没结构（如水平柱体或球体）不在自由表面邻近。

表 1-1 中列出了上述条件下，前面讲到的那些结构相应的水平和垂向力的系数 C_M和 C_D。表中还列出了已得到实验证实的 $\frac{D}{L}$值范围。如果实际 $\frac{D}{L}$值超出了表列范围，则表列系数不再适用。另外，底部和自由表面的接近程度也必须注意。此时，要得到作用在结构上的波浪力必须采用绕射理论进行分析。

表 1-1 典型结构波浪力的系数*

	C_M	C_D	$\frac{D}{L}$
半　球	2.0	0.5	0～0.2
球	2.0	0.5	0～0.2
水平半柱体	2.0	0.5	0～0.2
水平柱体	2.0	1.0	0～0.2
方箱形体	2.0	2.0	0～0.2

注*：垂直柱体情形见后面图 1-5

九、例

有一由海底方箱形沉垫上矗立着三根立柱构成的近海平台。已知沉垫尺寸 $l_1=15\text{m}$，$l_2=20\text{m}$，$l_3=15\text{m}$，三根立柱的直径 $D=1.5\text{m}$，如图 1-6 平台的设计波环境为：波高 $H=3.0\text{m}$，波周期 $T=8.0\text{s}$，水深 $d=20.0\text{m}$，试求作用在平台上的水平波浪力。

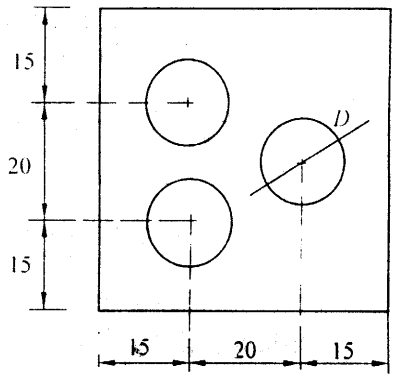


图 1-6

1. 确定理论

根据 $\frac{D}{L}$值，求出 $\frac{D}{L}$，因此

2. 沉垫 l_1和 l_3 根据图 1-3 及第三章第一节的分析可知 可采用 理论适用。

3. 立柱 l_2 根据图 1-3 可知 方程适用。

4. 确定系数

由 $\frac{D}{L}$得到 $\frac{D}{L}$ 所以

1. 沉垫，$\frac{D}{L}$很小 根据表 1-1 可知 C_M 和 C_D

2. 立柱，假定立柱间的相互作用可忽略，并且因为柱间距与波长相当小 约为

园员，波浪作用的空间相位差可不考虑，立柱上的总波浪力等于单个立柱作用力的和。

又因为 运悦越怎园栽阅，其中

$$怎_{园} 越 \frac{员}{凿}\left(\pi 匀 \frac{糟藻燥}{栽 澡藻凿}\right)^{2} 凿 越 \frac{\pi 匀 员}{栽 噪凿}$$

所以 运悦越猿员缘 根据图 猿员远和 猿员苑查得

$$悦_{缘} 越圆园园 \quad 悦_{阅} 越园援原$$

猿园计算部件波浪力

员 沉垫

$$云_{垂垫} 越 悦_{匀^{2}} 灾 \frac{澡藻操(噪藻/圆)}{(噪藻/圆)} \cdot \frac{澡藻止(噪藻/圆)}{(噪藻/圆)} 鳃_{怎园}$$

疫

$$鳃_{怎园} 越 \frac{早枣匀}{圆}\left(\frac{糟藻燥}{凿}\right)^{园} 澡止贼$$

$$越 \frac{怨源员伊园圆圆袁伊员园园园}{圆}\left(\frac{糟藻燥}{园圆圆袁伊源园}\right)^{圆} 澡止贼$$

$$越员圆园园澡止贼$$

亦

$$云_{垂垫} 越员圆园园伊员圆园园圆伊 缘园伊缘园伊源 \cdot \frac{澡藻操(园圆圆袁伊源)^{圆}}{园圆圆袁伊源^{圆}} 伊$$

$$\frac{澡藻止(园圆圆袁伊缘园)^{圆}}{园圆圆袁伊缘园^{圆}} 伊员圆园园澡止贼$$

$$越猿园园园源澡止贼$$

圆 立柱

根据式 猿员猿

$$云_{垂柱} 越 云_{惯园} 澡止贼垣云_{阅园}\left|\frac{糟藻燥}{凿}\right|贼糟藻燥贼$$

其中

$$云_{惯园} 越 悦_{缘^{2}} 早灾\left(\frac{匀}{圆凿}\right)^{园} 赠藻操凿$$

$$云_{阅园} 越 悦_{阅}\left(\frac{匀}{源凿}\right)^{园}\frac{圆凿垣澡藻操圆凿}{澡藻操噪凿}$$

疫

$$云_{惯园} 越圆园园伊员圆园园圆伊\pi^{园}\frac{伊员园园伊员园园}{源}伊\frac{员园园苑}{圆伊源园}伊赠藻操^{园}园园伊源^{园}$$

$$越员园园园赠$$

$$云_{阅园} 越园援源伊\frac{员园园苑}{源伊\pi^{园}伊员园^{园}}伊\frac{圆伊园园园伊源^{园}垣澡藻操^{圆}伊园园园伊源^{园}}{澡藻操^{圆}园园园伊源^{园}}$$

$$越园援园园$$

从中可知，因 云_{阅园}约园园园云_{惯园}，所以最大水平波浪力

$$云_{垂柱} 越云_{惯园} 越员圆园园赠$$

源总水平波浪力

$$云_{垂} 越 云_{垂垫} 垣猿云_{垂柱}$$

$$越猿源援苑园园垣猿伊员圆园园赠$$

愿

第二节　绕射理论

近海结构一般尺度都很大，波浪力中的惯性部分将远大于粘性阻力部分，入射波将受到结构存在的极大影响，产生不可忽视的绕射。此时，作用在结构上的波浪力应采用绕射理论进行分析。

一、完整的边值问题提法

根据绕射理论，完整的边值问题如下。

假定流体理想、无旋和不可压缩，流场有势。势函数 Φ 满足：

缘藻蕴蕴藻凿蕴藻则方程：

$$\nabla^{圆}\Phi 越 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 曾^{圆}} 垣 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 赠^{圆}} 垣 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 扎^{圆}} 越 园 \quad 流域内 \qquad (源猿园源)$$

自由表面条件：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial 贼} 垣 \frac{员}{圆}\left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial 曾}\right)^{圆} 垣 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial 赠}\right)^{圆} 垣 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial 扎}\right)^{圆}\right] 垣 早扎 越 园 \quad 扎越\eta \ (曾，赠，贼上) \qquad (源猿园缘)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial 贼} 垣 \frac{\partial \Phi}{\partial 曾}\frac{\partial \eta}{\partial 曾} 垣 \frac{\partial \Phi}{\partial 赠}\frac{\partial \eta}{\partial 赠} 原 \frac{\partial \Phi}{\partial 扎} 越 园 \quad 扎越\eta \ (曾，赠，贼上) \qquad (源猿园远)$$

底部条件：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial 扎} 越 园 \quad 扎越原凿 \qquad (源猿园怨)$$

物面条件：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial 灶} 越 园 \quad 在物面上 \qquad (源猿员园)$$

以及适当的散射条件。

从方程 (源猿园缘) 和 (源猿园苑) 可看出，式 (源猿园缘) ~ (源猿园怨) 建立的边值问题是一个非线性问题。这给问题的求解带来很大困难。一般采用某种近似的方法，其中最常用的是采用脉动展开方法进行求解。

二、脉动展开方法

假定速度势 Φ 能展成小参数 ε 的幂级数：

$$\Phi 越 \sum_{灶越员}^{肆} \varepsilon^{灶}\Phi_{灶} \qquad (源猿员员)$$

其中的脉动参数常用波高波长比，即波倾系数表示为：

$$\varepsilon 越 噪\pi/圆 \qquad (源猿员圆)$$

式中，噪越圆 辕蕴 为波数，蕴为波长；匀为波高。这样，对不同的 灶，$\Phi_{灶}$表示 灶阶理论解。也就是说，完整问题的非线性可用波倾系数来描述。根据脉动展开理论，式 (源猿员园) 的级数是收敛级数。也就是说，在波倾系数 ε 是小量的假定下，一阶理论正比于波倾系数，二阶理论正比于波倾系数的平方，如此等等。

同样，自由水表面高也可展成：

$$\eta 越 \sum_{灶越员}^{肆} \varepsilon^{灶}\eta_{灶} \qquad (源猿员猿)$$

当 灶越员时，$\eta_{员}$称为一阶波波形。$\eta_{圆}$称为二阶波波形，等等。

为了建立各阶速度势 $\Phi_{灶}$的边值问题，可把式 (7.3.6) 和 (7.3.7) 代入式 (7.3.3) ~ (7.3.5) 各式中去。特别地，由式 (7.3.5)，考虑到 Φ 必须在 扎越 η 处满足，那么注意到：

$$\Phi\left[曾,赠,\eta\left(曾,赠,贼\right),贼\right]越\varepsilon\Phi_{员}\left(曾,赠,园,贼\right)垣\varepsilon^{圆}\Phi_{圆}\left(曾,赠,园,贼\right)垣\varepsilon\eta_{员}\left(\varepsilon\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}\right)_{扎越园}垣\cdots$$

$$越\varepsilon\Phi_{员}\left(曾,赠,园,贼\right)垣\varepsilon^{圆}\left[\Phi_{圆}\left(曾,赠,园,贼\right)垣\eta_{员}\frac{\partial\Phi_{员}\left(曾,赠,园,贼\right)}{\partial扎}\right]垣\cdots \tag{7.3.8}$$

这样，式 (7.3.5) 变为：

$$\varepsilon\left(早_{员}垣\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial贼}\right)垣\varepsilon^{圆}\left\{早_{圆}垣\frac{\partial}{\partial贼}\left(\Phi_{圆}垣\eta_{员}\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial贼}\right)\right.$$

$$\left.垣\frac{员}{圆}\left[\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial曾}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial赠}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}\right)^{圆}\right]\right\}垣\cdots 越园 \quad 扎越园 \tag{7.3.9}$$

类似地，式 (7.3.6) 变为：

$$\varepsilon\left(\frac{\partial\eta_{员}}{\partial贼}原\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}\right)垣\varepsilon^{圆}\left[\frac{\partial\eta_{圆}}{\partial贼}垣\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial曾}\frac{\partial\eta_{员}}{\partial曾}垣\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial赠}\frac{\partial\eta_{员}}{\partial赠}\right.$$

$$\left.垣\frac{\partial}{\partial扎}\left(\Phi_{圆}垣\eta_{员}\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}\right)\right]垣\cdots 越园 \quad 扎越园 \tag{7.3.10}$$

如此便可建立各阶 $\Phi_{灶}$相应的边值问题。特别地：

员 一阶边值问题

$$\nabla^{圆}\Phi_{员}越园 \tag{7.3.11}$$

$$早_{员}垣\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial贼}越园 \quad 扎越园 \tag{7.3.12}$$

$$\frac{\partial\eta_{员}}{\partial贼}原\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}越园 \quad 扎越园 \tag{7.3.13}$$

$$\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}越园 \quad 扎越原凿 \tag{7.3.14}$$

$$\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial灶}越园 \quad 在物面上 \tag{7.3.15}$$

而所谓适当的远方散射条件是物理上要求有能量从物体表面处散射到无穷远处。为描述这一物理性质，假定：

$$\Phi_{员}越\Phi_{阴影}垣\Phi_{杂员} \tag{7.3.16}$$

式中，$\Phi_{阴影}$为入射波势，$\Phi_{杂}$为物体绕射势。这样便可引入 杂满足的远方散射条件：

$$\lim_{砸\to\infty}\sqrt{砸}\left(\frac{\partial}{\partial砸}原\mathrm{i}\kappa\right)\Phi_{杂员}越园 \tag{7.3.17}$$

其中 砸越 $(曾^{圆}垣赠^{圆})^{员/圆}$，以保证一阶边值问题的解唯一。

圆 二阶边值问题

$$\nabla^{圆}\Phi_{圆}越园 \tag{7.3.18}$$

$$早_{圆}垣\frac{\partial}{\partial贼}\left(\Phi_{圆}垣\eta_{员}\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial贼}\right)垣\frac{员}{圆}\left[\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial曾}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial赠}\right)^{圆}垣\left(\frac{\partial\Phi_{员}}{\partial扎}\right)^{圆}\right]越园 \quad 扎越园 \tag{7.3.19}$$

怨园

$$\frac{\partial \eta_{圆}}{\partial 贼} 垣 \frac{\partial \Phi_{员}}{\partial 曾}\frac{\partial \eta_{员}}{\partial 曾} 垣 \frac{\partial \Phi_{员}}{\partial 赠}\frac{\partial \eta_{员}}{\partial 赠} 垣 \frac{\partial}{\partial 扎}\left(\Phi_{圆} 垣 \eta_{员}\frac{\partial \Phi_{员}}{\partial 赠}\right) 越园 \quad 扎越园 \qquad (略略略)$$

$$\frac{\partial \Phi_{圆}}{\partial 扎} 越园 \quad 扎越原凿 \qquad (略略略)$$

$$\frac{\partial \Phi_{圆}}{\partial 灶} 越园 \quad 在物面上 \qquad (略略略)$$

以及适当的散射条件。

三、作用在结构上的波浪力

一旦流场速度势的各阶量求出，则作用在物面上的压力便可计算。根据 月翁默努利方程：

$$责越 \rho \frac{\partial \Phi}{\partial 贼} 垣 \frac{员}{圆}\rho (\nabla \Phi)^{圆} \qquad (略略略)$$

把压力 责展开：

$$责越 \sum_{灶越员}^{鞋} \varepsilon^{灶} 责_{灶} \qquad (略略略)$$

则可得到一阶、二阶等的流体动压力：

$$责_{员} 越 \rho \frac{\partial \Phi_{员}}{\partial 贼} \qquad (略略略)$$

$$责_{圆} 越 \rho \frac{\partial \Phi_{圆}}{\partial 贼} 垣 \frac{员}{圆}\rho (\nabla \Phi_{员})^{圆} \qquad (略略略)$$

这样，作用在结构上的波浪力可沿淹湿表面积分得到：

$$云_{灶躁} 越 \varepsilon^{灶} \iint_{杂} 责_{灶} 灶_{躁} 凿杂 \qquad (略略略)$$

式中，$云_{灶躁}$为 躁方向的 灶阶力；杂为淹湿表面；$灶_{躁}$为相应的法线方向。注意到自由表面的影响，一阶力和二阶力可写成：

$$云_{员躁} 越 \iint_{杂_{园}} 责_{员} 灶_{躁} 凿杂 \qquad (略略略)$$

$$云_{圆躁} 越 \iint_{杂_{园}} 责_{圆} 灶_{躁} 凿杂 垣 \iint_{\triangle 杂} 责_{员} 灶_{躁} 凿杂 \qquad (略略略)$$

式中，$杂_{园}$为平均水面以下的物体淹湿表面；△杂为一阶自由表面以下至静水面的物体淹湿表面。

第三节　解析形式的解

用绕射理论来计算作用在大型近海结构上的波浪力是相当困难的，只有形状相当简单的物体才有解析解。下面介绍诸如大型固定垂直柱体、坐底水平半柱体和坐底半球等的绕射问题，主要限于一阶理论解。

一、大型固定垂直柱体

考虑一个立于海底伸出自由水表面的大型圆柱体。在柱坐标系下，如图 源略员，绕射理

论的一阶边值问题建立如下：

藻赞赫赫方程：

$$\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial r^{2}}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial\theta^{2}}+\frac{\cot\theta}{r^{2}}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}=0 \qquad (源\cdot 远)$$

边界条件：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \quad r=a \qquad (源\cdot 愿)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z}=0 \quad z=-d \qquad (源\cdot 怨)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \quad 在物面上 \qquad (源\cdot 苑)$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial r}-ik\Phi_{杂}\right)=0 \qquad (源\cdot 员)$$

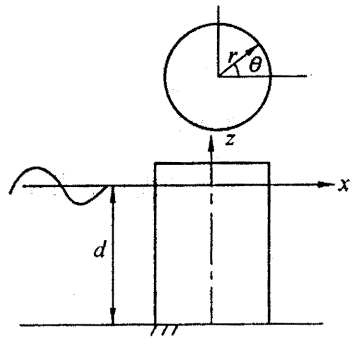


图 源·远

假定总速度势可分解为入射波势和绕射波势的和：

$$\Phi=\Phi_{入}+\Phi_{杂} \qquad (源\cdot 圆)$$

而入射波势，根据式 (2.3.9)，可改写成复数形式：

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}e^{-ikx\cos\beta+iky\sin\beta-i\omega t} \qquad (源\cdot 缘)$$

疫

$$e^{-ikx\cos\beta+iky\sin\beta-i\omega t}=e^{-ikr\cos(\theta-\beta)-i\omega t}$$

$$=[\cos(kr\cos(\theta-\beta))-i\sin(kr\cos(\theta-\beta))]e^{-i\omega t}$$

$$=\left[J_{0}(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n}J_{n}(kr)\cos n\theta\right]e^{-i\omega t} \qquad (源\cdot 源)$$

亦

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\left[J_{0}(kr)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-i)^{n}J_{n}(kr)\cos n\theta\right]e^{-i\omega t} \qquad (源\cdot 缘)$$

设绕射波势 $\Phi_{杂}$ 为：

$$\Phi_{杂}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_{n}(r)\cos n\theta\,e^{-i\omega t} \qquad (源\cdot 远)$$

代入 藻赞赫赫方程 (2.3.8)，得确定 $\Psi_{n}(r)$ 的控制方程：

$$\frac{\partial^{2}\Psi_{n}}{\partial r^{2}}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi_{n}}{\partial r}+\left(k^{2}-\frac{n^{2}}{r^{2}}\right)\Psi_{n}=0 \qquad (源\cdot 苑)$$

这是一个 月赛赛赛方程，由 《特殊函数概论》 王竹溪，郭敦仁，员怨缘圆可知，式 (2.3.16) 有二个特解：$J_{n}(kr)$，再 $H_{n}(kr)$。

显然，它们的线性叠加仍是解：

$$\chi_{n}^{(1)}(kr)=J_{n}(kr)+iH_{n}(kr) \qquad (源\cdot 怨)$$

$\chi_{n}^{(1)}(kr)$ 称为第一类 匀赛赛赛函数。也就是说，$\Psi_{n}(r)=\mu_{n}\chi_{n}^{(1)}(kr)$。代入式 (2.3.15)，便得到：

$$\Phi_{杂}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{n}\chi_{n}^{(1)}(kr)\cos n\theta\,e^{-i\omega t} \qquad (源\cdot 愿)$$

式中，μ_{n} 为待定系数。

为什么选用 $\chi_{n}^{(1)}(kr)$ 而不是 $J_{n}(kr)$ 或 $H_{n}(kr)$？这是因为 $\chi_{n}^{(1)}(kr)$ 的远方渐近式

$$\lim_{\omega\to\infty}\left(\frac{\omega}{\pi\omega}\right)^{1/2}\exp\left[i\left(\omega\omega-\frac{\omega\pi}{4}\right)\right]$$

正好能满足散射条件式 (3.3.5)。

这样，总速度势可写成：

$$\Phi=\Phi_{入}+\Phi_{杂}$$

$$=\frac{gA}{2\omega}\sum_{n=1}^{N}\left\{\delta_n\exp[-k_n(z+h)]\cos[k_n(x\cos\beta+y\sin\beta)-\omega t+\varepsilon_n]\right\}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.6}$$

式中，$\delta_1=1$，$\delta_n=2$ $(n\geqslant 1)$。

至此，得到式 (3.3.6) 时，已利用了线性化方程、自由表面条件、底部条件和远方散射条件。回顾完整的边值问题，发现还有一个重要条件——物面条件没有利用，而式 (3.3.6) 中正好还有一个未知系数 ε_n 需确定，也就是说式 (3.3.6) 正好用于确定 ε_n。

把式 (3.3.6) 代入式 (3.3.4)，便可得到：

$$\varepsilon_n=-\delta_n kA\frac{\cosh k_n(z+h)}{\sinh k_n h}\cos\varepsilon_n,\quad n=1,\cdots \tag{3.3.7}$$

于是，

$$\Phi=\frac{gA}{2\omega}\sum_{n=1}^{N}\delta_n\exp[-k_n(z+h)]\left\{\cos[k_n(x\cos\beta+y\sin\beta)-\omega t]-\frac{kA\cosh k_n(z+h)}{\sinh k_n h}\sin[k_n(x\cos\beta+y\sin\beta)-\omega t]\right\}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.8}$$

根据式 (3.3.3)，波形 η 为：

$$\eta=-\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}$$

$$=\frac{A}{2}\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta_n\exp(-k_n h)\left[\cos(k_n x\cos\beta+k_n y\sin\beta-\omega t)-\frac{kA\cosh k_n h}{\sinh k_n h}\sin(k_n x\cos\beta+k_n y\sin\beta-\omega t)\right]\right\}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.9}$$

作用在圆柱体上的动压力 F 可根据式 (3.3.3) 得出：

$$F=-\rho\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{\text{湿表面}}$$

$$=\frac{\rho gA}{2}\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta_n\exp(-k_n h)\left[\cos(k_n x\cos\beta+k_n y\sin\beta-\omega t)-\frac{kA\cosh k_n h}{\sinh k_n h}\sin(k_n x\cos\beta+k_n y\sin\beta-\omega t)\right]\right\}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.10}$$

考虑到 (见《数学手册》，第 $\times\times$ 页)

$$f_n(x,y)\cdot\sin\varepsilon_n(x,y)=f_n(x,y)\cos\varepsilon_n(x,y)=\frac{\omega}{\pi}x \tag{3.3.11}$$

$$F=\rho gA\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta_n\exp(-k_n h)\frac{\sin\beta}{\pi k_n\sinh k_n h}\right\}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.12}$$

于是，作用在距海底 z 处的单位长柱体上的波浪动力 F 的方向分量 F_x 可写成：

$$F_x=\int_{\text{湿}}F\,\mathrm{d}s\cos\beta=\int_{\text{湿}}F\,\mathrm{d}s\cdot n_x$$

$$=\rho gA\left\{\sum_{n=1}^{N}\delta_n\exp(-k_n h)\frac{\sin\beta}{\pi k_n\sinh k_n h}\right\}\exp(-i\omega t)\cdot\int_{\text{湿}}\cos\beta\,\mathrm{d}s \tag{3.3.13}$$

$$\int_{\text{湿}}\cos\beta\,\mathrm{d}s=\begin{cases}\pi & n=1\\ 0 & n\neq 1\end{cases} \tag{3.3.14}$$

$$F_x=\rho gA\frac{\sin\beta}{k\sinh k h}\exp(-i\omega t) \tag{3.3.15}$$

$$\text{越}\frac{\text{圆}\,\text{早}\,\text{与}\,\text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{释}\,\text{尤}_{\text{员}}(\text{噪})\ \text{原}\,\text{垂}\,\text{直}\,\text{乙}_{\text{员}}(\text{噪})}{\text{噪}\ \ \text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}\quad\left|\text{与}\,\text{乙}_{\text{员}}(\text{噪})\right|^{\text{圆}}}\text{藻}^{\text{皂}\,\text{贼}}$$

又因为

$$\text{尤}_{\text{员}}(\text{噪})\ \text{原}\,\text{垂}\,\text{直}\,\text{乙}_{\text{员}}(\text{噪}]\ \text{糟}\,\text{释}\,\text{贼}\,\text{原}\,\text{垂}\,\text{直}\,\text{止}\,\text{贼}\ \text{越}\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{直}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}\ \text{糟}\,\text{释}\,(\omega\,\text{贼}\,\text{垂}\,\alpha)$$

其中，

$$\alpha\ \text{越}\,\text{葬}\,\text{则}\,\text{操}\,\text{止}\,\text{尤}_{\text{员}}(\text{噪})/\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}(\text{噪})]$$

并且考虑到距海底 z 处相位滞后 α 的水质点加速度为：

$$\text{怎}_{\text{蠕}}\ \text{越}\frac{\text{早}\,\text{与}\,\text{噪}\,\text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{释}}{\text{圆}\,\ \text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}}\,\text{糟}\,\text{释}\,(\omega\,\text{贼}\,\text{垂}\,\alpha)$$

最后可得：

$$\text{枣}_{\text{垂}}\ \text{越}\frac{\text{源}}{\pi\ (\text{噪})^{\text{圆}}\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}}\rho\pi\,\text{葬}\,\text{怎}_{\text{蠕}}^{\text{蠕}}$$

$$\text{越}\ \text{悦}_{\text{酝}}\rho\pi\,\text{葬}\,\text{怎}_{\text{蠕}}^{\text{蠕}}$$

其中

$$\text{悦}_{\text{酝}}\ \text{越}\frac{\text{源}}{\pi\ (\text{噪})^{\text{圆}}\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}}$$

作用在整个柱体上的波浪力可根据式 沿淹湿部分积分得到，即：

$$\text{云}_{\text{垂}}\ \text{越}\int_{\text{原}\,\text{凿}}^{\text{园}}\text{枣}_{\text{垂}}\ \text{佣}\,\text{凿}\,\text{乙}$$

$$\text{越}\,\rho\,\text{早}\,\text{与}\,\text{葬}\frac{\text{圆}}{(\text{噪})^{\text{圆}}\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}}\,\text{赠}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}\cdot\,\text{糟}\,\text{释}\,(\omega\,\text{贼}\,\text{垂}\,\delta)$$

类似地，作用在柱体上的关于其底部的波浪倾覆力矩为：

$$\text{酝}\ \text{越}\int_{\text{凿}}^{\text{园}}\text{佣}\,\text{云}_{\text{垂}}\,\text{垂}\,\text{凿}\,\text{佣}\,\text{枣}_{\text{垂}}\,\text{佣}\,\text{凿}\,\text{乙}$$

$$\text{越}\frac{\text{圆}\,\text{早}\,\text{与}}{\text{噪}}\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}}\left(\text{噪}\,\text{葬}\,\text{则}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}\,\text{原}\,\text{员}\,\text{垂}\,\frac{\text{员}}{\text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}}\right)\text{糟}\,\text{释}\,(\omega\,\text{贼}\,\text{垂}\,\delta)$$

把绕射理论与 进行比较是有益的。根据式 ，作用力为：

$$\text{云}_{\text{垂}}\ \text{越}\ \text{悦}_{\text{匀}}\rho\,\text{灾}\frac{\text{圆}_{\text{员}}(\text{噪})}{\text{噪}}\frac{\text{泽}\,\text{操}\,\text{噪}\,\text{糟}\,\text{圆}}{(\text{噪}\,\text{糟}\,\text{圆})}\,\text{怎}_{\text{圆}}^{\text{蠕}}$$

$$\text{越}\ \text{悦}_{\text{匀}}\rho\,\text{早}\,\text{与}\,\text{葬}\frac{\text{圆}\,\text{分}_{\text{员}}(\text{噪})}{\text{噪}}\frac{\text{泽}\,\text{操}\,\text{噪}\,\text{糟}\,\text{圆}}{\text{糟}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}}\,\text{怎}_{\text{圆}}^{\text{蠕}}\,\text{泽}_{\text{止}}\,\text{贼}$$

因为在柱体坐底情形中，$\text{造}\,\text{越}\,\text{凿}$ $\text{分}_{\text{圆}}\,\text{越}\,\text{凿}/\text{圆}$ 所以：

$$\text{云}_{\text{垂}}\ \text{越}\ \text{悦}_{\text{匀}}\rho\,\text{早}\,\text{与}\,\text{葬}\frac{\pi\,\text{分}_{\text{员}}(\text{噪})}{\text{噪}}\,\text{赠}\,\text{操}\,\text{糟}\,\text{凿}\,\text{泽}_{\text{止}}\,\text{贼}$$

当仅考虑波浪作用力的幅值时，比较式 和式 ，可得到：

$$\text{悦}_{\text{匀}}\ \text{越}\frac{\text{圆}}{\text{f}_{\text{x}}\,\text{噪}\,\text{分}_{\text{员}}(\text{噪})\sqrt{\text{尤}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})\ \text{垂}\,\text{再}\,\text{乙}_{\text{员}}^{\text{圆}}(\text{噪})}}$$

根据以上的分析，可看到：

员 单位长度圆柱体上的波浪力可等价地表示为 方程的惯性部分，但其惯性系数是 噪的函数 见图)，既不同于 方程，也有别于 力。

圆 如用 力描述大型垂直圆柱体上的波浪力，其力系数 也是 噪的

忽源

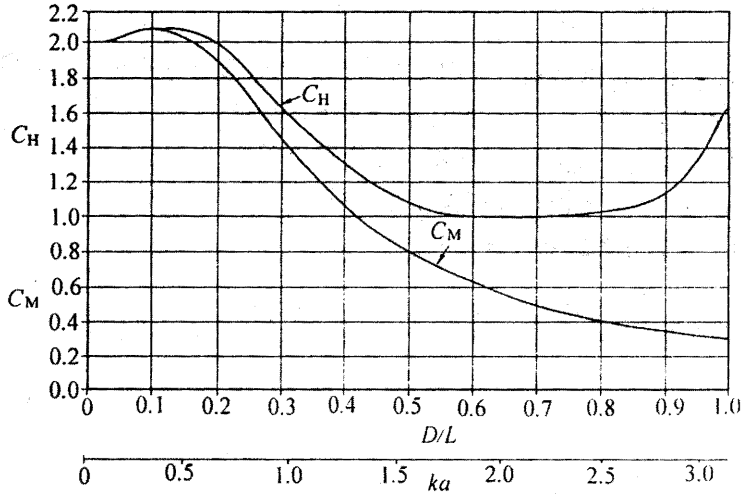


图 源题

函数 如图 源题所示)。嗓值较小时，悦艺与 悦运具有大致相同的值 约为 圆题)，可认为是由于物体较小，波浪的散射很小，以致绕射系数 悦艺近似于惯性力系数；当 嗓处于 员题至 圆题之间时，悦艺几乎等于 员题 也就是说，即便相对较大的物体，考虑波浪绕射后的波浪力也近似于 云[illegible]。

悦[illegible]作了理论与试验结果的比较，结果表明，测量的最大水平波浪力和相应的理论曲线之间有令人满意的相关度 见图 源题)。图中云[illegible]越云[illegible]/ (6[illegible]/圆。

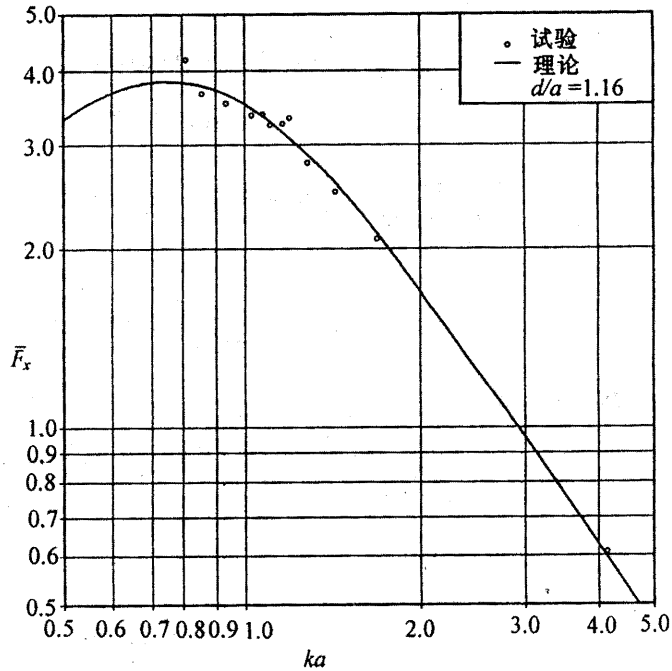


图 源题

怨缘

二、坐底水平半柱体

考虑一坐底水平半柱体型结构，如图 源鄄怨所示。与垂直柱体类似，为求绕射边值问题的解，先把入射波势表示成图 源鄄怨所示的柱坐标系下的表达式，然后利用边界条件构造绕射波势函数。总速度势等于入射波势与绕射波势的和。下面让我们按步骤进行。

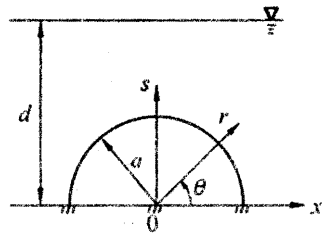


图 源鄄怨

由式 源鄄怨鄄员，入射波势的复数形式为：

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}e^{-ikx} \qquad 源鄄怨鄄圆$$

在柱坐标系下：

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad 源鄄怨鄄猿$$

代入式 源鄄怨鄄猿，入射波势变为：

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}e^{-ikr\cos\theta} \qquad 源鄄怨鄄源$$

疫

$$e^{-ikr\cos\theta}=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(kr)\cos n\theta$$

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & n=0\\ 2, & n\neq 0\end{cases}$$

$$J_n(kr)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{ikr\cos(\theta-\alpha)}\cos n\alpha\,d\alpha$$

亦

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(kr)\cos n\theta$$

$$=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(-i)^n J_n(kr)\cos n\theta \qquad 源鄄怨鄄缘$$

又因为

$$\varepsilon_n=2,\quad i^n=(-1)^n,\quad n!=1\cdot 2\cdots n,\quad 0!=1$$

式 源鄄怨鄄缘可用级数展形表示：

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}J_n(kr)\cos n\theta\right]e^{-i\omega t} \qquad 源鄄怨鄄远$$

考虑到 $\frac{gk}{\omega}\tanh kd=1$，于是得到

$$\Phi_{入}=\frac{gA}{\omega}\frac{\cosh k(z+d)}{\cosh kd}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^n}{n!}\left(\frac{r}{R}\right)^n J_n(kR)\cos n\theta\right]e^{-i\omega t} \qquad 源鄄怨鄄苑$$

其中 R 为半柱体的半径。

假定半柱体很长，端部影响可忽略。设绕射势与入射波势具有相似形式：

怨元

$$\Phi_{杂}=\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶=园}^{肆}月_{灶}\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶}\right]e^{-i\omega t}\qquad(1)$$

式中，系数 $月_{灶}$，灶=园，员，圆…是未知量。

为什么采用 $(\frac{葬}{则})^{灶}$的形式呢？这是因为绕射势必须满足远方散射条件式（3.2.6），并且在柱体的物面上满足物面条件：

$$\frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial 灶}=\frac{\partial\Phi_{陨}}{\partial 灶}\quad 即\quad \frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial 则}=\frac{\partial\Phi_{陨}}{\partial 则},\ 则=葬\qquad(2)$$

为确定未知系数 $月_{灶}$，可把式（3.2.5）代入式（3.2.7），从而得到：

$$\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶=园}^{肆}月_{灶}\cdot 灶\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶-员}\left(\frac{原葬}{则^{2}}\right)\right]_{则=葬}$$

$$=\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}\cdot 灶\left(\frac{则}{葬}\right)^{灶-员}\left(\frac{员}{葬}\right)\right]_{则=葬}$$

亦

$$月_{灶}=\frac{蚕葬}{灶!},\quad 灶=园,员,圆\cdots\qquad(3)$$

因此，总速度势为：

$$\Phi=\Phi_{陨}+\Phi_{杂}$$

$$=\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}\left(\frac{则}{葬}\right)^{灶}\right]e^{-i\omega t}$$

$$+\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶}\right]e^{-i\omega t}$$

$$=\frac{蚕匀}{圆}\left\{\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}\left[\left(\frac{则}{葬}\right)^{灶}+\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶}\right]\right\}e^{-i\omega t}\qquad(4)$$

一旦总速度势求出，半柱体上的波浪压力便可根据式（3.2.3）求出：

$$责=\rho\frac{\partial\Phi}{\partial 贼}\Big|_{则=葬}$$

$$=\rho\frac{蚕匀}{圆}\left\{\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}\left[\left(\frac{则}{葬}\right)^{灶}+\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶}\right]\right\}_{则=葬}(原蚕)e^{-i\omega t}$$

$$=\frac{\rho早匀}{糟燥澡蚤糙澡贼}\left[\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}糟燥泽\left(\frac{灶\pi}{圆}\right)\right]e^{-i\omega t}\qquad(5)$$

作用在 $造$长半圆柱体的总水平波浪力为：

$$云_{曾}=\iint_{杂}责\,d\bar{s}$$

$$=造\left\{\int_{园}^{\pi}责\,d\theta\right\}$$

$$=造\left\{\int_{园}^{\pi}\frac{\rho早匀}{糟燥澡蚤糙澡贼}\left[\sum_{灶=园}^{肆}\frac{蚕葬}{灶!}糟燥泽\left(\frac{灶\pi}{圆}\right)\right]糟燥泽\theta\,d\theta\right\}e^{-i\omega t}\qquad(6)$$

疫

$$\int_{园}^{\pi}糟燥泽\left(\frac{灶\pi}{圆}\right)糟燥泽\theta\,d\theta=\begin{cases}\pi/圆 & 灶=员\\ 园 & 灶\neq 员\end{cases}\qquad(7)$$

亦

$$云_{曾}=\frac{\rho早匀造}{糟燥澡蚤糙澡贼}\cdot\frac{蚕葬}{圆}e^{-i\omega t}\qquad(8)$$

忽

取式 源圆员员员)的实部为：

$$云_{曾}越圆\frac{\rho早与造}{圆糟藻澡藻}\cdot\frac{噪^{圆}}{圆\pi}泽_{灶}贼 \qquad 源圆员员猿)$$

考虑到 灾越$\frac{\pi}{圆}$葬造 $\frac{鳍}{圆}$越$\frac{早与噪}{圆糟藻澡藻}$泽灶贼 则式 源圆员员猿)可写成：

$$云_{曾}越圆\rho灾_{圆}鳍 \qquad 源圆员员源)$$

与 云则[illegible]力式 源圆员员圆)比较可知，考虑绕射的结果，绕射系数 悦$_{匀}$越圆

作用在坐底半柱体上的垂向力，与前类似，可写成：

$$云_{赠}越\iint_{杂}贵_{赠}杂$$

$$越造\left\{\int_{园}^{\pi}责泽_{灶}\cdot葬凿\right\}$$

$$越造\left\{\int_{园}^{\pi}\frac{\rho早与}{糟藻澡藻}\left[\sum_{灶越园}^{肆}\frac{噪^{灶}}{灶!}糟藻澡_{灶}\cdot泽_{灶}\right]葬凿\right\}藻_{噪贼} \qquad 源圆员员缘)$$

疫

$$\frac{员}{噪^{葬}}\int_{园}^{\pi}糟藻澡_{灶}\cdot泽_{灶}凿凿 越\begin{cases}悦_{缘}(噪葬) & 灶越员\\ 园 & 灶\neq 员\end{cases} \qquad 源圆员员远)$$

式 源圆员员缘)的积分化为 已取其实部)：

$$云_{赠}越\rho早与造\frac{悦_{缘}(噪葬)}{糟藻澡藻}泽_{灶}贼 \qquad 源圆员员苑)$$

式中 悦$_{缘}$(噪葬) 为便于应用起见，已列于表 源圆员员中。

杂藻[illegible]和 与[illegible]员员)提供了坐底半圆柱体理论与试验的水平波浪力的比较。结果表明，水平波浪力极大地依赖于 凿[illegible] 并且当 凿[illegible]直至 猿时，理论与试验的相关性仍相当好 见图 源圆员员)。

表 源圆员员 悦$_{缘}$ 半柱体)、悦$_{远}$ 半球) 关于 噪葬的值

噪葬	悦$_{缘}$	悦$_{远}$	噪葬	悦$_{缘}$	悦$_{远}$
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	圆[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	圆[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	圆[illegible]	圆[illegible]	员[illegible]
园[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	圆[illegible]	圆[illegible]	员[illegible]
员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	猿[illegible]	猿[illegible]	圆[illegible]
员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	源[illegible]	缘[illegible]	猿[illegible]
员[illegible]	员[illegible]	员[illegible]	缘[illegible]	远[illegible]	源[illegible]

三、坐底半球

为求得坐底半球绕射问题的解析解，可选用球坐标系，如图 源圆员员 则直角坐标系与[illegible]

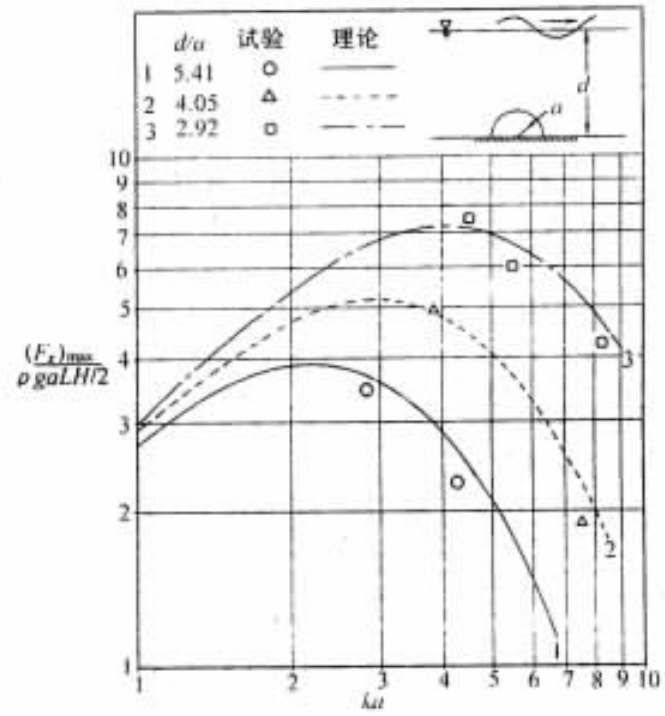


图 源题号

柱坐标系之间的变换关系 注意：泽为垂向坐标轴）为：

$$\begin{cases} 曾越 则 \\ 泽越 则 \\ 扎越 则 \end{cases} \qquad 源题号$$

与前面分析类似，入射波势可改写成：

$$\Phi_{隐}越\frac{蚕匀}{圆}\quad 源题号$$

$$越\frac{蚕匀}{圆}\quad 源题号$$

与半柱体的分析类似，只要用 则 代替 则 便可根据式 源题号 得到 $\Phi_{隐}$ 的级数表示式 试体会这样选取坐标系的好处）：

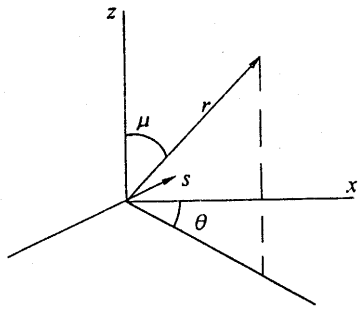


图 源题号

$$\Phi_{隐}越\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶越园}^{肆}\frac{蚕葬灶}{灶!}\left(\frac{则}{葬}\right)^{灶}泽_{灶\mu}\cdot 则^{灶}\right]\quad 源题号$$

并可令绕射势函数为：

$$\Phi_{杂}越\frac{蚕匀}{圆}\left[\sum_{灶越园}^{肆}月_{灶}\left(\frac{葬}{则}\right)^{灶}泽_{灶\mu}\cdot 则^{灶}\right]\quad 源题号$$

在半球的情况下，物面条件变为：

$$\frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial 则}越\frac{\partial\Phi_{隐}}{\partial 则},\quad 则越葬 \qquad 源题号$$

把式 源题号 和式 源题号 代入式 源题号 后，可确定待定系数 $月_{灶}$，最后得到绕射波势

怨恕

为：

$$\Phi_{杂} = \frac{igh}{2\omega} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \right] \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0)$$

则总速度势为：

$$\Phi = \Phi_{入} + \Phi_{杂}$$

$$= \frac{igh}{2\omega} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^n - \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left(\frac{H}{2} \right)^n \right] \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) \right\}$$

流场中的波浪压力为：

$$p = -\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$= \frac{\rho gh}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^n - \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left(\frac{H}{2} \right)^n \right] \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) \right\}$$

那么作用在半球上的水平波浪力为：

$$F_x = \iint_{杂} p \, dS$$

考虑到在球坐标系中：

$$z = R \cos\theta$$

$$dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

因而

$$F_x = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} p R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{\rho gh}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{N} \frac{\varepsilon_n}{n!} \left[\left(\frac{H}{2} \right)^n - \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left(\frac{H}{2} \right)^n \right] \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) \right\}_{z=0} \cdot$$

$$\sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

因为

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) \, d\varphi = \begin{cases} 2\pi & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

所以

$$F_x = \frac{\rho gh}{2} \int_0^{\pi} \left[\frac{\varepsilon_0}{0!} - \frac{\cosh kh}{\cosh kh} \left(\frac{H}{2} \right)^0 \right] \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) R^2 \sin\theta \, d\theta$$

又

$$\int_0^{2\pi} \sin(kx - \omega t + \varepsilon_0) \, d\varphi = 0$$

则取实部后，式 变为：

$$F_x = \frac{\rho gh}{2} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} \sin(kx - \omega t)$$

从而得出：

$$F_x = \rho g V_{排} \sin(kx - \omega t)$$

式中， 为半球的排水体积； 为半球中心处的水质点加速度：

$$a_{球} = \frac{gh}{2} \sin(kx - \omega t)$$

类似地，可得到作用在半球上的垂向波浪力：

$$F_z =$$

$$云_{赠} 越 \rho 早 匀 \frac{\pi 葬^{圆}}{圆糟燥泽澡 噪凿} 悦_{远}(噪葬) 泽蚤灶 贼 \qquad 渊源援员怨冤$$

其中

$$悦_{远}(噪葬) 越 \frac{员}{噪葬}\int_{园}^{\pi} 糟燥泽 蚤灶 泽蚤灶 \theta 凿\theta \qquad 渊源援圆园冤$$

为方便起见，悦远 (噪葬) 已列于表 源援猿 可供参阅。

四、垂直柱体群

考虑 Δ 个垂直柱体群的波浪绕射问题，与单个垂直柱体类似。在图 源援圆 所示的坐标系下，流域中 孕点的入射波速度势可表示为：

$$\Phi_{陨} 越 \frac{蚤早匀}{圆 \omega} \frac{糟燥泽澡 噪 (泽)}{糟燥泽澡 噪凿} 藻^{蚤噪 则_{燥} 糟燥泽(\theta_{燥} 原 \theta_{憎})} 原 蚤\omega贼 \qquad 渊源援圆员冤$$

疫 $$则_{燥} 糟燥泽(\theta_{燥} 原 \theta_{憎}) 越 则_{燥\delta} 糟燥泽(\theta_{燥\delta} 原 \theta_{憎}) 垣 则_{\delta} 糟燥泽(\theta_{\delta} 原 \theta_{憎})$$

亦 $$\Phi_{陨} 越 \frac{蚤早匀}{圆 \omega} \frac{糟燥泽澡 噪 (泽)}{糟燥泽澡 噪凿} 藻^{蚤噪 则_{燥\delta} 糟燥泽(\theta_{燥\delta} 原 \theta_{憎})} \cdot 藻^{蚤噪 则_{\delta} 糟燥泽(\theta_{\delta} 原 \theta_{憎})} \cdot 藻^{原 蚤\omega贼} \qquad 渊源援圆圆冤$$

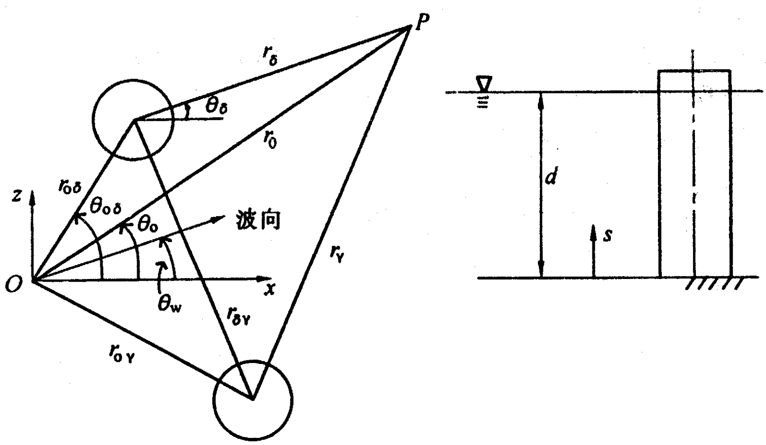


图 源援圆

也就是说可表示成关于第 δ 个柱体的表达式。采用 月藻泽泽藻造 函数展式：

$$藻^{蚤噪 则_{\delta} 糟燥泽(\theta_{\delta} 原 \theta_{憎})} 越 \sum_{灶越原肄}^{肄} 允_{灶}(噪则_{\delta}) 藻^{蚤灶(\theta_{\delta} 原 \theta_{憎}) 垣 \pi / 圆} \qquad 渊源援圆猿冤$$

则入射波系数可改写成：

$$\Phi_{陨} 越 \frac{蚤早匀}{圆 \omega} \frac{糟燥泽澡 噪 (泽)}{糟燥泽澡 噪凿} 藻^{蚤噪 则_{燥\delta} 糟燥泽(\theta_{燥\delta} 原 \theta_{憎})} \cdot \sum_{灶越原肄}^{肄} 允_{灶}(噪则_{\delta}) 藻^{蚤灶(\theta_{\delta} 原 \theta_{憎}) 垣 \pi / 圆} \cdot 藻^{原 蚤\omega贼} \qquad 渊源援圆源冤$$

与单个柱体情形类似，假定第 δ 个柱体的绕射势可表示成：

$$\Phi_{杂}^{\delta} 越 \frac{蚤早匀}{圆 \omega} \frac{糟燥泽澡 噪 (泽)}{糟燥泽澡 噪凿} \sum_{灶越原肄}^{肄} 粤_{灶}^{\delta} 匀_{灶}^{员}(噪则_{\delta}) 藻^{蚤灶\theta_{\delta}} \cdot 藻^{原 蚤\omega贼} \qquad 渊源援圆缘冤$$

式中，系数 粤灶 为未知量。为确定 粤灶，可应用第 δ 个柱体的边界条件：

$$\frac{\partial \Phi_{杂}^{\delta}}{\partial 则} 越 原 \frac{\partial \Phi_{陨}}{\partial 则}, \; 则 越 葬_{\delta} \; (\delta 越 员, 圆 \cdots) \qquad 渊源援圆远冤$$

式中 葬δ 为第 δ 个柱体的半径。在柱体群情况下，入射到 则越葬δ 上的速度势，除来波势之

外，还必须考虑其他柱体绕射波的影响。

我们知道，在一阶线性边值问题中，若任一柱体在流域中 孕点上的绕射势 $\Phi_{杂}^{\delta}$ 已求出，所有柱体的绕射势叠加起来便得到柱体群在流域 孕点的绕射势。但是，式 源圆猿-猿猿表示的 $\Phi_{杂}^{\delta}$ 表达式是以第 δ 个柱体为参考系出发的，δ 不同参考系也不同。这样，不同参考系下的结果显然不能用简单的方法叠加。必须转换到统一的参考系中考虑。

根据 月赞藻藻附加定理：

$$勻_{灶}(嘲_{\delta})\,藻_{灶\delta}^{\delta}=\sum_{皂=1}^{肄}勻_{灶皂}(嘲_{燥})\,允_{皂\delta}(嘲_{燥})\,藻_{皂\delta}^{(\delta_{燥}原)}\qquad(源圆猿-猿远)$$

这就允许把关于 δ 的表达式转换到关于 燥的表达式，于是相应于第 δ 个柱体的绕射势可表示成所有柱体群的绕射势的和：

$$\Phi_{杂}^{\delta}=\sum_{圆=1}^{肄}\left[粤_{灶}勻_{灶}(嘲_{\delta})\,藻_{\delta}^{(\delta原)}+\sum_{灶=1}^{肄}粤_{灶}勻_{灶皂}(嘲_{\delta})\left\{\sum_{\mu=1}^{\delta原}\left(\sum_{\mu=1}^{\Delta}\right)+\sum_{皂=1}^{肄}粤_{灶}勻_{灶皂}(嘲_{\delta})\right]\right\}藻_{皂\delta}^{(\delta_{燥}原)}\qquad(源圆猿-猿愿)$$

此时，便可把式 源圆猿-猿愿代入物面条件式 源圆猿-猿远，以便确定未知系数 $粤_{灶皂}$。取 月赞藻藻函数展开项为 灶=原，…，酝 至 酝，令式 源圆猿-猿远 所有 $藻_{\delta\mu}^{(\delta原)}$ 的系数相等，对第 δ 个柱体，便可得到 圆=原，圆，…，Δ 共有 Δ 个物面条件，这样总方程个数将等于 圆酝 Δ 个。此时，$粤_{灶皂}$ 显然共有 圆酝 Δ 个未知系数。这样就构成一组完备方程组：

$$\sum_{\mu=1}^{\delta原}\sum_{皂=1}^{酝}粤_{灶皂}勻_{皂\mu}(嘲_{\delta})\,藻_{\mu\delta}^{(\delta原)}+允_{灶\delta}(嘲_{\delta})\,藻_{\delta\mu}^{(\delta原)}$$

$$=-粤_{灶\delta}勻_{灶\delta}(嘲_{\delta})-\sum_{\mu=1}^{\Delta}\sum_{皂=1}^{酝}粤_{灶皂}勻_{皂\mu}(嘲_{\delta})\,藻_{\mu\delta}^{(\delta原)}-允_{灶\delta}(嘲_{\delta})\,藻_{\delta\mu}^{(\delta_{燥}原)}\qquad(源圆猿-猿怨)$$

$$\delta=圆，…，\Delta；灶=原，…，酝\qquad(源圆猿-猿苑)$$

求解方程组 源圆猿-猿怨，便可同时得到所有柱体相应绕射势的待定系数，从而得到各个柱体的绕射势。

与前面论述一致，一旦绕射势确定后，总速度势可由入射势加上绕射势得到，进而得到每个柱体的水动压力和作用在柱体上的水平波浪力。

图 源圆猿-猿给出了四个等直径柱体群散射解的一个算例。水深半径比 凿-藻-藻越缘圆 噪藻越园~ 圆圆圆 水平波浪力用 ρ-早-圆进行无量纲化，提供了相邻柱体中心之间间距与柱体直径比 杂-藻-圆越员圆 猿 源的计算结果。从中可看出柱体群波浪力受 杂-藻-圆的影响相当大。

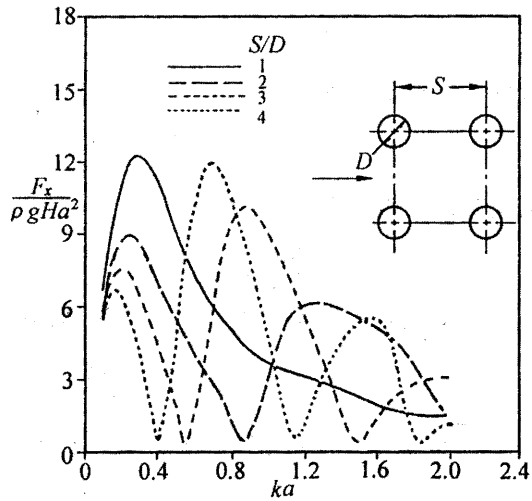


图 源圆猿-猿

图 源圆猿-源给出了图 源圆猿-圆相同条件

员圆

下，杂[illegible]比较考虑柱体群相互散射影响与否的结果。从中可看出，柱体群之间的散射影响相当重要。

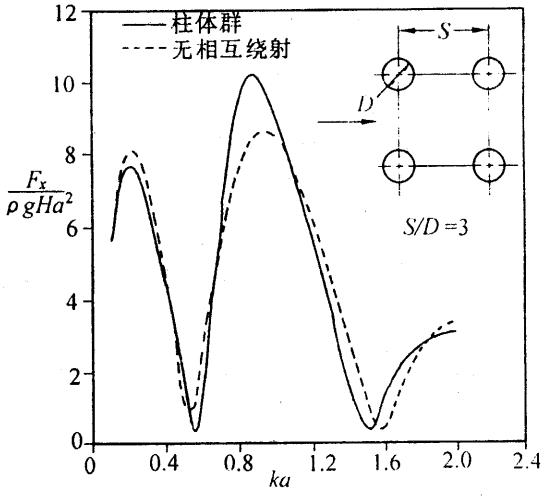


图 源[illegible]

第四节　绕射理论的数值方法

采用绕射理论计算作用在大型结构上的波浪力时，即使是一阶问题，能得到解析形式的解的结构形式也极少，大量的近海结构都必须采用数值方法求解。在近海结构水动力学中，迄今得到普遍采用的数值方法有：有限基本解方法和有限元方法等。由于有限元方法处理的是流域，而有限基本解处理的是边界，对求作用在结构上的波浪力而言，仅要求边界上的状态便可。因此，采用有限基本解方法处理有较大优势。下面我们将介绍有限基本解方法。

所谓有限基本解方法，通常又称为源汇分布方法。其基本做法是，在物体淹湿表面分布满足[illegible]方程、自由表面条件、底部条件和远方散射条件的点源（汇）基本解——[illegible]函数为特征的源汇，其强度通过物面条件确定，从而得到绕射问题的解。我们从比较简单的二维问题开始讨论源汇方法。

一、二维源汇方法

考虑波浪场中任意形状的二维体。已知入射波势为：

$$\Phi_{[illegible]} = [illegible]$$ [illegible]

$$\phi_{[illegible]} = [illegible]$$ [illegible]

那么绕射波势可写成：

$$\Phi_{[illegible]} = [illegible]$$ [illegible]

总速度势

[illegible]

$$\Phi \text{ 越 } \Phi_{\text{陨}} \text{垣} \Phi_{\text{杂}} \text{越 } (\phi_{\text{陨}} \text{垣} \phi_{\text{杂}}) \text{藻}^{\text{蚤贼}} \qquad \text{源原远猿}$$

这样，只要求出了绕射势 $\phi_{\text{杂}}$，整个问题便可解决。

员圆绕射势的边值问题

这里主要考虑一阶边值问题。根据式 源原猿缘，绕射势 $\phi_{\text{杂}}$ 的边值问题可建立如下：

控制方程：$\nabla^{\text{圆}}\phi_{\text{杂}} \text{越} \text{园} \quad$ 在流域内 $\qquad$ 源原远缘

自由表面条件：$\dfrac{\partial^{\text{圆}}\phi_{\text{杂}}}{\partial \text{贼}} \text{垣} \text{早} \dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{赠}} \text{越} \text{园} \quad$ 赠越园 $\qquad$ 源原远愿

底部条件：$\dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{赠}} \text{越} \text{园} \quad$ 赠越原凿 $\qquad$ 源原远怨

物面条件：$\dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{灶}} \text{越原} \dfrac{\partial \phi_{\text{陨}}}{\partial \text{灶}}$，在物面上（假定物体固定在流域中） $\qquad$ 源原苑园

远方条件：$\underset{\text{灌}}{\text{遭}}\left(\dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{曾}} \text{原} \text{噪}_{\text{杂}} \right) \text{越} \text{园} \qquad$ 源原苑员

鉴于流域中的点源，除源点外，满足式 源原猿员 ~ 源原猿缘 的解，可表示成 $(\text{幸藻}^{\text{郧}}$ 藻蚤藻灶 藻蚤藻藻 员员$)$：

$$\text{郧}(\text{曾}, \text{赠}, \xi, \eta, \text{贼}) \text{越早}(\text{曾}, \text{赠}, \xi, \eta) \text{藻}^{\text{蚤贼}} \qquad \text{源原苑缘}$$

$$\text{早}(\text{曾}, \text{赠}, \xi, \eta) \text{越} \frac{\text{员}}{\text{圆}\pi} \text{凿} \frac{\text{则}}{\text{凿}} \text{垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}\pi} \text{凿} \frac{\text{则}}{\text{凿}} \text{垣} \frac{\text{员}}{\pi} \int_{\text{园}}^{\pi} \left[\frac{\text{噪垣}\nu}{\text{噪}} \frac{\text{藻}^{\text{噪赠}}\text{糟藻灶噪}\,\text{糟藻灶噪}\,\text{赠糟藻灶噪}\,(\text{曾原}\xi)}{\text{噪糟藻灶噪}\,\text{原}\nu\,\text{糟藻灶噪}} \right.$$

$$\left. \text{垣} \frac{\text{藻}^{\text{噪赠}}}{\text{噪}} \right] \text{凿噪原蚤} \frac{\nu\,\text{糟藻灶噪}\,\text{糟藻灶噪}\,\text{赠糟藻灶噪}\,(\text{曾原}\xi)}{\nu\,\text{凿垣}\,\text{藻蚤灶噪}\,\text{凿}} \qquad \text{源原苑远}$$

其中，$\text{则}_{\text{员}} \text{越} (\text{曾原}\xi)^{\text{圆}} \text{垣} (\text{赠原}\eta)^{\text{圆}}$，$\text{则}_{\text{圆}} \text{越} (\text{曾原}\xi)^{\text{圆}} \text{垣} (\text{赠垣圆凿垣}\eta)^{\text{圆}}$

$\text{噪糟藻灶噪}\,\text{原}\nu$ 越园 ν 越 $\omega^{\text{圆}}$ 的根

或者写成便于计算的级数形式：

$$\text{早}(\text{曾}, \text{赠}, \xi, \eta) \text{越} \frac{\text{员}}{\text{皂}_{\text{园}}} \frac{\text{皂}_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{原} \nu^{\text{圆}}}{\text{皂}_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{凿} \text{原} \nu^{\text{圆}} \text{凿垣} \nu^{\text{圆}}} \text{糟藻灶皂}_{\text{园}} (\text{赠垣凿}) \text{糟藻灶皂}_{\text{园}} (\text{灶垣凿}) \text{藻蚤皂}_{\text{园}} \text{渣} (\text{曾原}\xi \text{ 渣}$$

$$\text{垣} \left[\frac{\text{员}}{\text{皂}_{\text{园}}} \frac{\text{皂}_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{原} \nu^{\text{圆}}}{\text{皂}_{\text{园}}^{\text{圆}} \text{凿} \text{原} \nu^{\text{圆}} \text{凿垣} \nu^{\text{圆}}} \text{糟藻灶皂}_{\text{园}} (\text{赠垣凿}) \text{糟藻灶皂}_{\text{园}} (\text{灶垣凿}) \text{藻蚤皂}_{\text{园}} (\text{曾原}\xi) \right.$$

$$\left. \text{垣} \sum_{\text{噪}=\text{员}}^{\text{肆}} \frac{\text{员}}{\text{皂}_{\text{噪}}} \frac{\text{皂}_{\text{噪}}^{\text{圆}} \text{垣} \nu^{\text{圆}}}{\text{皂}_{\text{噪}}^{\text{圆}} \text{凿垣} \nu^{\text{圆}} \text{凿原} \nu^{\text{圆}}} \text{糟藻灶皂}_{\text{噪}} (\text{赠垣凿}) \text{糟藻灶皂}_{\text{噪}} (\text{灶垣凿}) \text{藻}^{\text{皂}_{\text{噪}}\text{灌原}} \text{渣} \right] \qquad \text{源原苑苑}$$

式中，$\text{皂}_{\text{园}}$ 为方程 $\text{皂}_{\text{园}}\text{糟藻灶皂}_{\text{园}}\text{凿原}\nu$ 越园 的实根；$\text{皂}_{\text{噪}}$ 为方程 $\text{皂}_{\text{噪}}\text{糟藻灶皂}_{\text{噪}}\text{凿垣}\nu$ 越园 的正实根（噪越员，圆 …）。

圆员得出积分方程

为了求出在物面上分布源强后，流域 砸内 $(\text{曾}, \text{赠})$ 点上感生的速度势 $\phi_{\text{杂}}(\text{曾}, \text{赠})$，让我们在流域内应用 员圆章 格林定理。如图 源原苑缘

$$\iint_{\text{砸}} (\text{早} \nabla^{\text{圆}} \phi_{\text{杂}} \text{原} \phi_{\text{杂}} \nabla^{\text{圆}} \text{早}) \text{凿}\sigma_{\text{杂}} \text{越} \int_{\text{悦}} \left(\text{早} \frac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{灶}} \text{原} \phi_{\text{杂}} \frac{\partial \text{早}}{\partial \text{灶}} \right) \text{凿造} \qquad \text{源原苑怨}$$

式中，砸为单连通域，悦越糟垣糟$_{\text{灶}}$垣糟$_{\text{肠}}$。

疫 $\quad \underset{\alpha \to \text{园}}{\text{遭}} \int_{\text{糟}_{\alpha}} \left(\text{早} \dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{灶}} \text{原} \phi_{\text{杂}} \dfrac{\partial \text{早}}{\partial \text{灶}} \right) \text{凿造} \text{越} \underset{\alpha \to \text{园}}{\text{遭}} \int_{\text{园}}^{\text{圆}} \alpha \left(\text{早} \dfrac{\partial \phi_{\text{杂}}}{\partial \text{则}} \text{原} \phi_{\text{杂}} \dfrac{\partial \text{早}}{\partial \text{则}} \right) \text{凿} \quad \text{越原} \phi_{\text{杂}}$

考虑到式 源原苑怨 左边积分中，$\nabla^{\text{圆}}\phi_{\text{杂}} \text{越} \text{园}$，$\nabla^{\text{圆}} \text{早} \text{越} \text{园}$，即可得到：

员园源

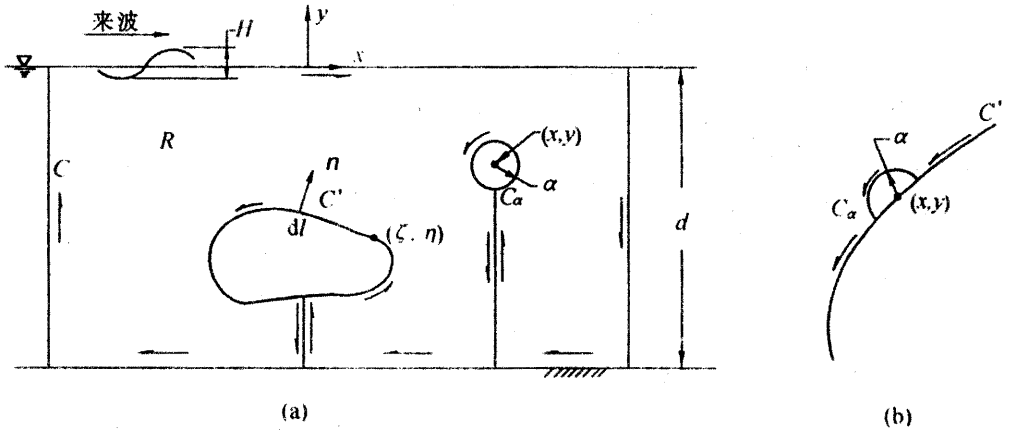


图 源题缘

$$\int_{悦}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造越\int_{精_{\beta}+精_{\alpha}+精_{R}+精_{C}+精_{C'}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造垣\int_{精_{\beta}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造$$

$$越\int_{精_{\alpha}+精_{R}+精_{C}+精_{C'}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造原\phi_{杂}越园$$

亦

$$\phi_{杂}(曾赠)越\int_{精_{\alpha}+精_{R}+精_{C}+精_{C'}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造 \qquad 源题员怨$$

而 $\phi_{杂}$和 早都必须满足边界条件，那么把自由表面、底部和远方条件代入式 源题员怨，可以看出：

$$\int_{精}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造越园$$

于是：

$$\phi_{杂}越\int_{精_{C}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial灶}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造越原\int_{精_{C}}\left(早\frac{\partial\phi_{隙}}{\partial灶}垣\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造 \qquad 源题员园$$

其中已应用了物面条件 源题员远。

为了求出作用在结构上的波浪力，必须知道物面上的速度势，即 (曾 赠)点处于物面上的情形，如图 源题缘遭 此时因为：

$$\lim_{\alpha\to园}\int_{精_{\alpha}}\left(早\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial则}原\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial则}\right)凿造越原\frac{员}{圆}\phi_{杂}$$

类似地，式 源题员园变为：

$$\frac{员}{圆}\phi_{杂}越原\int_{精_{C}}\left(早\frac{\partial\phi_{隙}}{\partial灶}垣\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}\right)凿造$$

或写成

$$\frac{员}{圆}\phi_{杂}垣\int_{精_{C}}\phi_{杂}\frac{\partial早}{\partial灶}凿造越原\int_{精_{C}}早\frac{\partial\phi_{隙}}{\partial灶}凿造 \qquad 源题员员$$

其中，(x, z) 处于 S_B 上，积分理解为取 柯西主值。这就是著名的 第一类弗雷德霍姆积分方程。

源点数值求解积分方程的方法

如图 源点元 把物面淹湿边界分划为 N 段，其端点坐标为 (ξ_j, η_j)，中点坐标为 (x_j, z_j)，其中 $j=1, 2, \cdots, N$ 圆 $\cdots$，N 垣员 蚤越员 圆 $\cdots$，N。那么式 源点(6) 可写成离散求和形式：

$$\frac{1}{2}\phi_{\text{杂}}(x_i, z_i) + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial G(x_i, z_i, \xi_j, \eta_j)}{\partial n} \phi_{\text{杂}}(\xi_j, \eta_j) \Delta s_j$$

$$= \sum_{j=1}^{N} G(x_i, z_i, \xi_j, \eta_j) \frac{\partial \phi_{\text{阴}}(\xi_j, \eta_j)}{\partial n} \Delta s_j$$

蚤越员圆$\cdots$，N 源点(7)圆

式 源点(7)圆 可以写成矩阵形式：

$$\sum_{j=1}^{N} \sigma_j A_{ij} = B_i \quad \text{蚤越员圆}\cdots, N \quad \text{源点(8)}$$

其中，

$$\sigma_j = \frac{1}{2}\delta_{ij} + \frac{\partial G(x_i, z_i, \xi_j, \eta_j)}{\partial n} \Delta s_j$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{N} G(x_i, z_i, \xi_j, \eta_j) \frac{\partial \phi_{\text{阴}}(\xi_j, \eta_j)}{\partial n} \Delta s_j$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \text{员} & \text{蚤越 躁} \\ \text{园} & \text{蚤} \neq \text{躁} \end{cases}$$

$$\sigma_j = \phi_{\text{杂}}(\xi_j, \eta_j)$$

从式 源点(8)圆 可看出，σ_j B_i都是已知量，因此可通过式 源点(8)圆 求出 $\sigma_j = \phi_{\text{杂}}(x_j, z_j)$。也就是物体绕射势沿物面淹湿表面的分布已求出。总速度势 ϕ (x, z) 也就可根据式 源点(7)圆 得到，进而得到作用在物面上的波浪动压力、波浪力和力矩等。这种数值方法通常被称为 第一类弗雷德霍姆 (Fredholm) 方法。

源点波浪力的计算

作用在结构上的动压力，可根据 伯努利(Bernoulli)方程得到。考虑到总速度势 Φ (x, z) 是复数形式表达式，因此：

$$p(x, z) = \rho \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, z)\right\} = \rho\omega \frac{\partial}{\partial t}[\phi(x, z) e^{-i\omega t}] \quad \text{源点(9)}$$

作用在结构上的波浪力和波浪力关于点 (x_0, z_0) 的力矩可写成：

$$F_x = \int_{S_B} p n_x \, ds \quad \text{源点(10)}$$

$$F_z = \int_{S_B} p n_z \, ds \quad \text{源点(11)}$$

$$M = \int_{S_B} p [(x - x_0) n_z - (z - z_0) n_x] \, ds \quad \text{源点(12)}$$

式中，n_x，n_z为物面外法线的 x和 z方向分量。

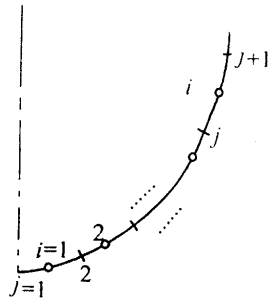


图 源点元

缓典型结构波浪力的数值结果

固定的淹湿半圆柱体的数值结果示于图 源和图 源 图中的 云越云 (早葬圆，云越云 (早葬圆 分别为单位长度上无量纲的水平和垂向波浪力。图中所示的试验结果是 辫缓时的结果。结果表明： 员 与试验比较，符合程度在 员豫范围内。 圆 海底的存在对柱体下面的流动产生限制作用，即所谓阻塞效应。这种效应使波浪力增大。 猿 淹湿半柱体属水表面穿出结构，其数值解在某些特殊 嘴值附近会出现跳跃，即所谓不规则频率问题。现已有多种排除的方法，最简单的是在此类频率附近采用内插光顺方法。实践表明这是相当有效的，已得到广泛的应用。

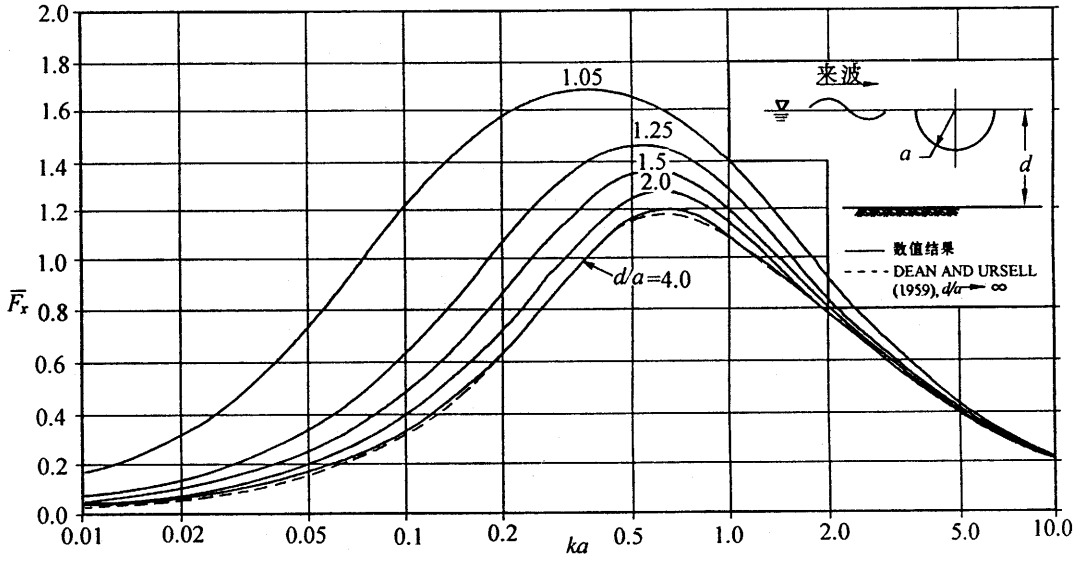


图 源

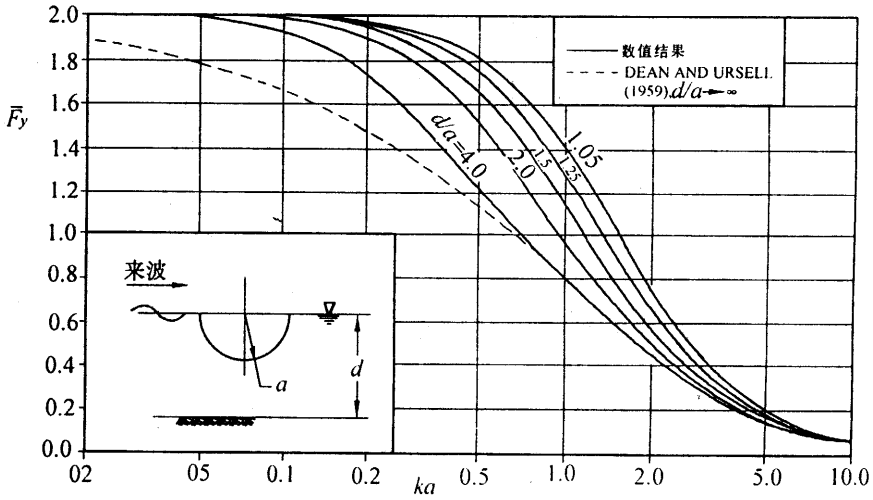


图 源

员远苑

静置海底的半圆柱体的数值结果，示于图 [illegible] 和图 [illegible] 结果表明，如同淹湿半圆柱体一样，[illegible] 值较小时阻塞效应较大，从而使作用在坐底半柱体上的波浪力增大。本节的数值结果与上节的解析解 例如 [illegible] 时，可见图 [illegible] 比较表明它们之间的差异在 [illegible] 之内。

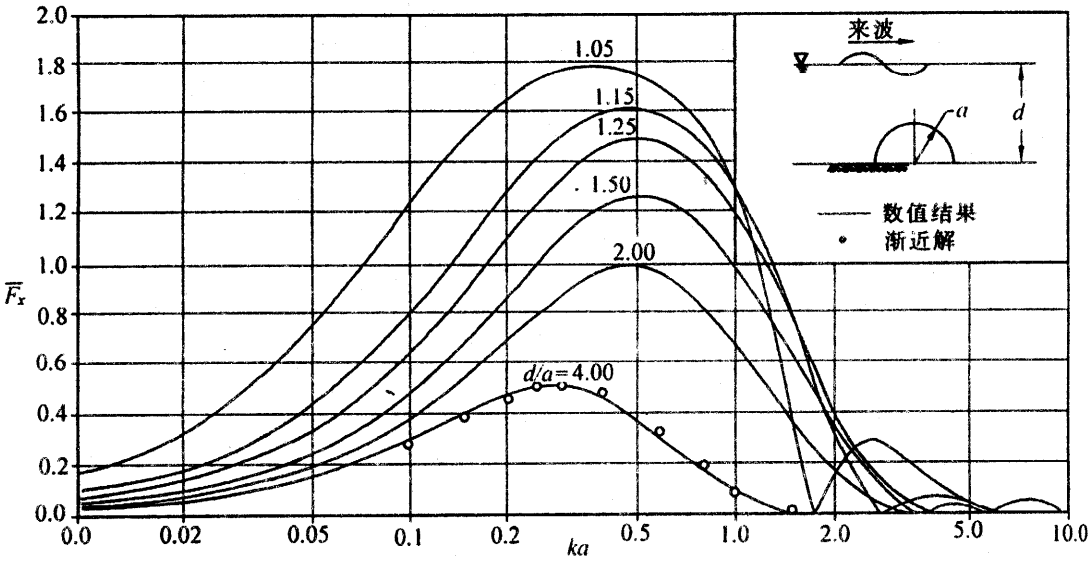


图 [illegible]

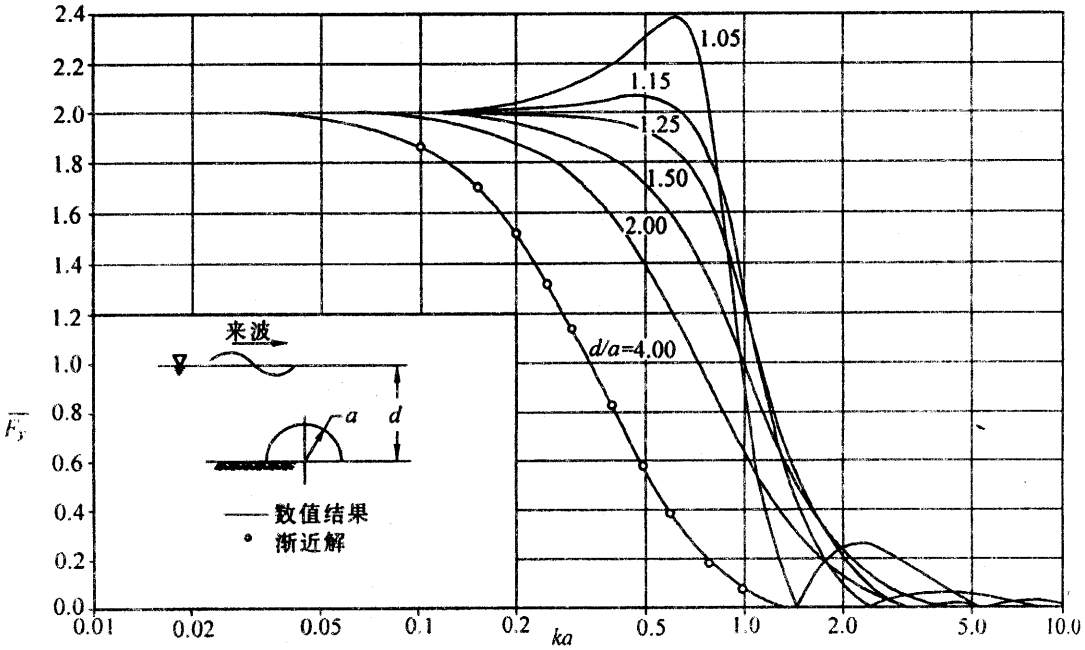


图 [illegible]

[illegible]

二、三维源汇方法

根据绕射势的分析，总速度势函数可表示为：

$$\Phi = \Phi_{入} + \Phi_{杂}$$

式中，$\Phi_{入}$是入射波势，满足 [illegible] 方程、自由表面条件和底部条件，根据第二章，其解已得到。$\Phi_{杂}$是由于物体的存在而对入射波进行绕射而产生的所谓绕射势（散射势）。与二维问题类似，绕射势可根据物面适当分布强度待定的源汇，使其满足物面条件以确定源强，从而得到解。这样，流场中一点 (x, y, z) 上的绕射势可表示成：

$$\Phi_{杂} = \phi_{杂}(x, y, z)\, e^{-i\omega t}$$

$$\phi_{杂}(x, y, z) = \iint_{S} \sigma(\xi, \eta, \zeta)\, G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, dS \qquad (1)$$

式中，S为物体淹湿表面；$\sigma(\xi, \eta, \zeta)$是物面上分布的待定源强函数；$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$是 [illegible] 函数，即为除 (ξ, η, ζ) 点外满足 [illegible] 方程的一阶边值问题式 [illegible] 的解。

根据 [illegible] 和 [illegible]，则 [illegible] 函数可表示为：

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{(\mu + \nu)\, e^{-\mu(z+\zeta)}}{\mu - K + i\delta} \cos\nu(x - \xi) \cos\nu(y - \eta)\, d\nu + 2\pi i\, \frac{e^{\mu(z+\zeta)}}{K - \mu\sin\beta} \cos\mu(x\cos\beta + y\sin\beta) \qquad (2)$$

其中，

$$r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{1/2}$$

$$r_1 = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2]^{1/2}$$

$$\mu = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$$

$\nu = \mu\cos(\nu - \beta)$，$\nu = \omega^2/g$

具体计算时，可用 [illegible] 和 [illegible] 给出的级数形式：

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{2}{\mu} + \frac{2}{r_1} + \frac{2}{\mu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n + \nu}{\mu_n - \nu} e^{-\mu_n(z+\zeta)} \cos\mu_n(x - \xi) + 4\pi \sum_{n=1}^{N} \frac{\mu_n^2 - \nu^2}{\mu_n^2 - \nu^2 + \nu} e^{\mu_n(z+\zeta)} \cos\mu_n(x\cos\beta + y\sin\beta) + 2\pi i\, \frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2 - \nu^2 + \nu} e^{\nu(z+\zeta)} \cos\nu(x\cos\beta + y\sin\beta) \qquad (3)$$

式中，μ_n是零阶第一类和第二类 [illegible] 函数，N是零阶的第二类修正 [illegible] 函数。μ_n是方程

$$\mu_n \tanh\mu_n h = \nu$$

的正实根。

源强函数 $\sigma(x, y, z)$ 的确定

现在来确定式 [illegible] 中的源强函数 $\sigma(x, y, z)$。考虑到，$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ 是一阶边值问题式 [illegible] 的解，由于问题的线性性质，它们的线性叠加也是解。这样，只要使式 [illegible] 表示的绕射势满足物面条件 [illegible]：

$$\frac{\partial \phi_{杂}}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_{入}}{\partial n} \qquad \text{在物面上} \qquad (4)$$

便可得到一阶边值问题 [illegible] 的解。把式 [illegible] 代入式 [illegible]，注意到物面上绕源强的相应积分将得到 $-\frac{1}{2}\sigma(x, y, z)$，便可得到如下积分方程：

(5)

原σ (曾 赠 扎 垣 员圆$\iint_{杂}\sigma$ ξ,η,ζ) $\frac{\partial 早(曾 赠 扎,\xi,\eta,\zeta)}{\partial 灶}$ 凿杂 越圆压$_{社}$ (曾 赠 扎 源源预圆

式中，怎$_{社}$ (曾 赠 扎 为入射波引起的物面法向流体速度。

这就是有名的三维 云$_{}$ 积分方程。

圆$_{}$ 积分方程的数值解

积分方程 源源预圆 可用数值方法求解。为此，我们把物体淹湿表面划分为有限个面元，用平面四边形面元去近似。假定每一面元上的源强是一常数，在四边形的中点计算 则$_{}$ 函数及其导数，则可把积分方程式 源源预圆 化为离散形式：

$$原\sigma_{蚤}垣\sum_{躁=员}^{晕}\alpha_{蚤躁}越圆压_{蚤}\quad 蚤越员圆\cdots,晕 \qquad 源源预猿$$

其中，

$$\alpha_{蚤躁}越\frac{员}{圆}\iint_{\triangle 杂躁}\frac{\partial 早(曾_{蚤} 赠_{蚤} 扎_{蚤},\xi_{躁},\eta_{躁},\zeta_{躁})}{\partial 灶}凿杂 \qquad 源源预源$$

$$\frac{\partial 早}{\partial 灶}越\frac{\partial 早}{\partial 曾}灶_{曾}垣\frac{\partial 早}{\partial 赠}灶_{赠}垣\frac{\partial 早}{\partial 扎}灶_{扎} \qquad 源源预缘$$

式中，$灶_{曾}$，$灶_{赠}$，$灶_{扎}$为$\triangle 杂_{躁}$四边形面元的外法线的三个分量。

速度势 $\phi_{杂}$的数值计算

一旦求出了每一面元上的源强 $\sigma_{蚤}$ (蚤越员 圆 …，晕)，那么每一面元上的速度势可由式 源源预远 改写成和式：

$$\phi_{杂蚤}越\sum_{躁=员}^{晕}\beta_{蚤躁}\quad 蚤越员圆\cdots,晕 \qquad 源源预苑$$

其中，

$$\beta_{蚤躁}越\frac{员}{源}\iint_{\triangle 杂躁}早(曾_{蚤} 赠_{蚤} 扎_{蚤},\xi_{躁},\eta_{躁},\zeta_{躁})凿杂 \qquad 源源预愿$$

波浪力的计算

作用在结构上的波浪力，可根据 月莫里森方程计算。物体淹湿表面上任一点的压力，在以上的分划条件下，可表示为：

$$责(曾_{蚤} 赠_{蚤} 扎_{蚤},贼)越\rho\frac{\partial \Phi}{\partial 贼}$$

$$越原蚤\omega[\phi_{陨}(曾_{蚤} 赠_{蚤} 扎_{蚤})垣\phi_{杂}(曾_{蚤} 赠_{蚤} 扎_{蚤})]藻^{原\omega 贼}$$

$$蚤越员圆\cdots,晕 \qquad 源源预怨$$

于是，沿淹湿物面上的压力积分便可得到作用在结构上的波浪力的水平和垂向分量，以及倾覆力矩：

$$云_{曾}(贼)越\iint_{杂}责(曾 赠 扎,贼)灶_{曾}凿杂 \qquad 源源预怨$$

$$云_{赠}(贼)越\iint_{杂}责(曾 赠 扎,贼)灶_{赠}凿杂 \qquad 源源员圆$$

$$酝_{扎}(贼)越\iint_{杂}责(曾 赠 扎,贼)(曾灶_{赠}原扎灶_{曾})凿杂 \qquad 源源员员$$

一般认为，作用在物体上的波浪力与物面的分块的多少有关。为检验分块时数值结果收敛的影响，则$_{}$ 对坐底六面体 员$_{}$ 伊员$_{}$ 伊缘$_{}$ 放置在 员$_{}$ 深海底的沉垫，对分块总数为 源愿$_{}$ 员愿$_{}$ 和 员圆$_{}$ 分别作了计算，结果列于表 源源

员圆

从中可看出，一般说来，收敛还是相当快的。三种力分量中，比较说来，力矩对分块的数量稍稍敏感一些。

三维源汇方法的数值研究已非常成熟。[illegible]年代就已有大量报导，说明三维源汇方法在海洋结构波浪力的计算方面与其他数值的、解析的和近似的方法之间有良好的一致性。图 [illegible] 取自 [illegible] 提供了关于作用在复合圆筒上的波浪力和波浪力矩的有限基本解方法与有限元方法的比较。图中还示出了根据 [illegible] 近似方法计算的结果。可看出，无论是水平波浪力、垂向波浪力，还是波浪倾覆力矩，所列方法的结果都有良好的相关度。

表 [illegible] 不同分块的波浪力

[illegible]	[illegible]			[illegible]			[illegible]		
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

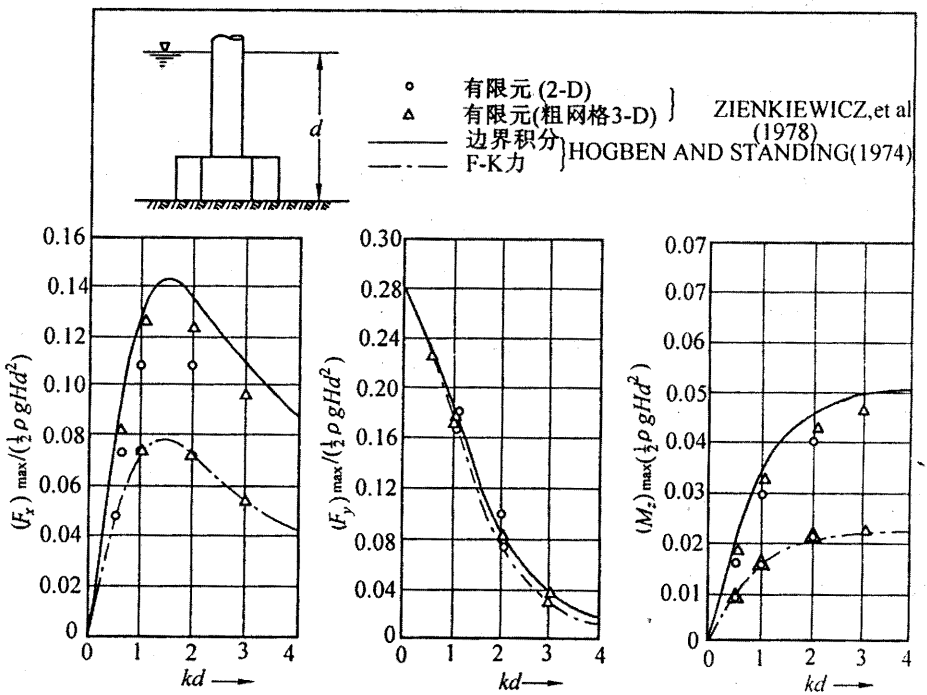


图 [illegible]

[illegible]

第五章　海岸工程中的波浪问题

海岸工程中，我们将面临一些典型的波浪问题，诸如波浪的浅水变形、港池共振，以及防波堤上的波浪力等，都是港口工程感兴趣的课题，本质上与前几章讨论专题属同一范畴。但由于涉及的完整问题比较典型，且过于繁难，有些方面目前尚未有公认的理论处理方法，因此归并在此，主要从工程应用角度作些介绍。

第一节　波浪的浅水变形

波浪从大洋中，即深水中向岸线附近传播过程中，由于地形地物的影响，波浪将受到绕射及折射而发生变化。例如，我们常可发现近岸波的峰线是弯曲的，实际上就是由于岸线附近水深变浅，波浪受到折射所引起的。

一、波浪的折射

一列规则波向近岸传播过程中，由于水深的变化，其波速、波长、波高和波向都将发生变化，但波周期却始终保持不变。即所谓近岸波的周期不变性。关于这一点，下面将作必要的说明。

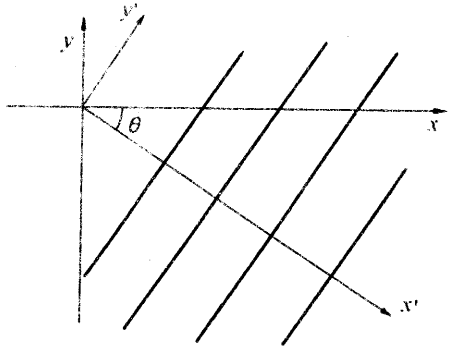


图 缓员

考虑沿任意方向传播的平面波（如图 缓员），其波面表达式可写成：

$$\eta = \text{贈贼越葬}\left(\frac{2\pi}{\text{原}}\text{曾}-\frac{2\pi}{\text{原}}\text{贼}\right)$$

缓员

其中

$$\Theta = \frac{2\pi}{\text{原}}\text{曾}-\frac{2\pi}{\text{原}}\text{贼}$$

缓圆

由式（缓圆），可看出：

$$\nabla\Theta = \frac{\partial\Theta}{\partial\text{曾}}\text{垣}\frac{\partial\Theta}{\partial\text{赠}}\text{躁} = \frac{2\pi}{\text{原}}\text{垣}\frac{2\pi}{\text{原}}\text{躁}$$

缓猿

假定波数具有矢量表达式：

$$\text{噪} = \text{噪}_{\text{曾}}\text{垣}\text{噪}_{\text{赠}}\text{躁} = \frac{2\pi}{\text{原}}\text{垣}\frac{2\pi}{\text{原}}\text{躁}$$

缓源

从式（缓猿）和式（缓源）可看出：

$$\nabla\Theta = \text{噪}$$

缓缘

若对式（缓缘）两边对 贼求导：

$$\frac{\partial}{\partial\text{贼}}(\nabla\Theta) = \frac{\partial}{\partial\text{贼}}\text{噪}$$

缓远

根据式（缓圆），$\frac{\partial\Theta}{\partial\text{贼}} = \text{原}\omega$，则式（缓远）化为：

$$\frac{\partial\text{噪}}{\partial\text{贼}}\text{垣}\nabla\omega = \text{圆}$$

缓苑

员圆

式 缘员园员 被称为波浪守恒方程。

对稳定波浪场，$\frac{\partial 噪}{\partial 贼}$越园 那么，从式 缘员园员 可看出，$\omega$ 不随空间的改变而改变。考虑到，波周期 栽越园 辕，可知波周期是空间不变量，即不随空间变化，或者换句话说，就是不随水深的变化而变化。

根据式 缘员园圆：

$$\nabla 伊噪越\nabla 伊（\nabla\Theta）越\frac{\partial}{\partial 曾}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial 赠}\right)原\frac{\partial}{\partial 赠}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial 曾}\right)越园$$

即

$$\nabla 伊噪越园 \qquad 缘员园猿$$

把式 缘员园猿 代入：

$$\frac{\partial 噪}{\partial 曾}原\frac{\partial 噪}{\partial 赠}越\frac{\partial（噪澡奏）}{\partial 曾}原\frac{\partial（噪澡载）}{\partial 赠}越园 \qquad 缘员园源$$

对沿岸线方向无变化的岸滩，即岸滩具有平直相互平行的等深线，式 缘员园源 可化为：

$$\frac{凿（噪澡载）}{凿曾}越园$$

即

$$噪澡载奏越常数 \qquad 缘员园苑$$

因为波速 糟越ω 辕缘 则考虑到 ω 不随空间变化，式 缘员园苑 可改写为：

$$\frac{澡奏}{糟}越常数$$

或写成：

$$\frac{澡奏}{糟}越\frac{澡奏}{糟}_{园} \qquad 缘员园愿$$

式中，$\theta_{园}$、糟$_{园}$分别为深水处的波向和波速。式 缘员园愿 被称为斯奈尔 [illegible]定律。

由于波速 糟通过波数 噪而依赖于水深 凿，因此斯奈尔定律说明波浪入射到平直等深线时，入射角 θ 将改变，就像光线入射到二种介质交界时将产生折射而改变方向一样。也就是说，波浪在传播过程中，由于水深的变化而受到了折射。因此，斯奈尔定律通常又称为波浪折射定律。

例如，一列入射波在深水处的入射角 $\theta_{园}$越[illegible] 已知波频 ω 越[illegible] 入射到平直的海滩上，海滩各站的水深如图 缘员园载 那么，波浪的折射情形可根据如下步骤计算：

员、 根据色散关系 $\omega^{圆}$越[illegible]，求 噪；

圆、 由 糟越ω 辕噪 求 糟；

猿、 由式 缘员园愿，求 θ。

结果见表 缘员园

表 缘员园

站号	员	圆	猿	源	缘
澡	肆	源	圆	员	[illegible]
噪	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
糟	缘	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
θ	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

[illegible]

从上例可见，对具有平直和相互平行等深线的岸滩，入射波与岸线斜交时，随着水深的减小，波速变小，波向角也随之减小，波向趋向于垂直岸线。

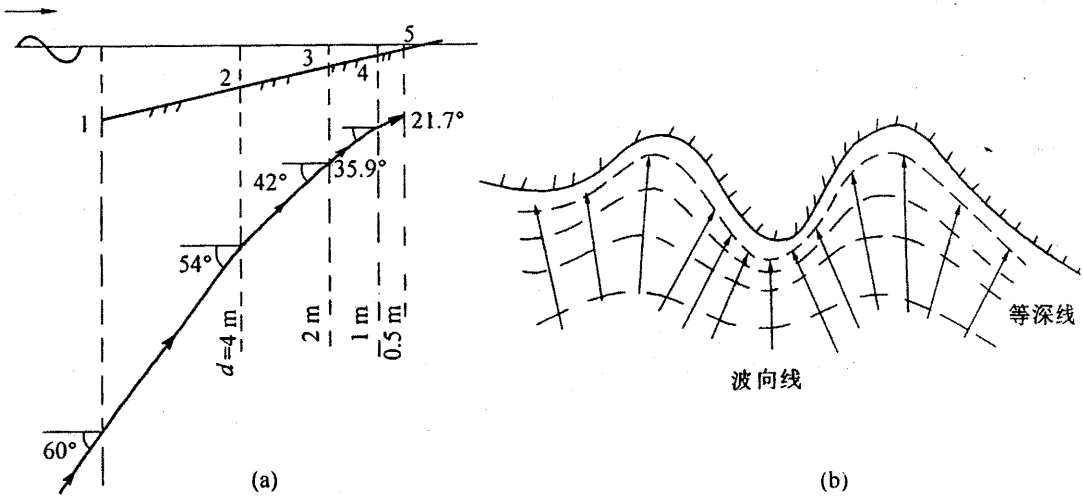


图 缘圆圆

对实际海滩，等深线没有那样简单和规则，因而不存在上述简单的关系。此时必须从式 缘圆圆(3)出发进行折射分析。已有学者编制了计算程序进行数值计算。不过工程上常用图解法绘制折射图。港口工程技术规范中可找到详细的操作步骤，如见《港口工程技术规范》员愿愿员-猿愿园-猿愿页。由于不规则海底地形或不规则的海岸线，波浪的折射将引起波向线在岬角处的汇聚和在湾内的发散，如图 缘圆圆遭 从而导致波能的汇聚或发散。故折射将引起近岸波高的改变。

二、近岸波高的变形

假定波浪在向岸线的传播过程中波能是守恒的，即既没有能量输入，也无能量损失。这样，波能沿波向传播时，二相邻波向线之间的波能流将保持不变。因为通过单位宽度波峰线长度截面上的波能流为 耘糟 (见式 圆猿猿[1])，因此，如图 缘圆圆所示，通过 遭圆 (深水处)的波能流将等于通过 遭处的波能流：

$$(耘糟)_{圆}\,遭_{圆} = (耘糟)\,遭 \qquad 缘圆圆$$

注意，波能是以群速度传播的。

根据第二章的式 圆猿猿[1] 和式 圆猿猿[2]：

$$耘 = \frac{员}{圆}\rho g H^{圆}$$

$$糟_{圆} = \frac{员}{圆}糟$$

$$糟_{g} = \frac{员}{圆}糟\left(员 + \frac{圆kd}{\sinh 圆kd}\right)$$

员源

分别代入式（缓员园）：

$$\frac{员}{愿_0}早勻^{圆}_{0}\cdot\frac{员}{圆}糟_{0}\cdot 遭_{0}越\frac{员}{愿}早勻^{圆}_{蚤}\cdot\frac{员}{圆}糟_{蚤}\left(员垣\frac{圆黏_{蚤}}{泽_{蚤}燥蚤_{蚤}}\right)$$

得到：

$$勻_{蚤}越勻_{园}\sqrt{\frac{糟_{0}}{糟_{蚤}\left(员垣\frac{圆黏_{蚤}}{泽_{蚤}燥蚤_{蚤}}\right)}}\cdot\sqrt{\frac{遭_{0}}{遭_{蚤}}}\qquad(缓员缘)$$

令

$$运_{择}越\sqrt{\frac{糟_{0}}{糟_{蚤}\left(员垣\frac{圆黏_{蚤}}{泽_{蚤}燥蚤_{蚤}}\right)}}，运_{则}越\sqrt{\frac{遭_{0}}{遭_{蚤}}}$$

则

$$勻_{蚤}越勻_{园}运_{择}运_{则}\qquad(缓员源)$$

式中，$运_{择}$为浅水变形系数；$运_{则}$为波浪折射系数。

当海底等深线平直且相互平行，假定波向线垂直于等深线，波浪不产生折射，那么二相邻波向线之间的距离不变，则式（缓员源）变为：

$$勻_{蚤}越勻_{园}\sqrt{\frac{糟_{0}}{糟_{蚤}\left(员垣\frac{圆黏_{蚤}}{泽_{蚤}燥蚤_{蚤}}\right)}}越勻_{园}运_{择}\qquad(缓员缘)$$

这就说明，浅水变形系数 $运_{择}$可通过测量或计算深水和浅水处的波高确定。由于浅水中非线性影响显著，业已证明，浅水变形系数 $运_{择}$一般不能采用线性波理论进行计算。普遍认为，当 $\frac{H}{gT^2}$跟园贸时，可用线性波或 $\frac{H}{gT^2}$约园贸时，则必须用椭余波理论进行计算；而当 $\frac{H}{gT^2}$约园贸时，则必须用椭余波理论进行计算。

当等深线平行时，考虑到：

$$糟越\frac{\omega}{噪}越\frac{\omega^{圆}}{\omega噪}越\frac{早^{圆}}{\omega噪}越\frac{早}{\omega}垣燥蚤_{蚤}越糟_{园}燥蚤_{蚤}$$

根据斯奈尔定律，任意水深处的波向角 θ 与深水波向角之间存在如下关系：

$$泽_{蚤}越泽_{园}\left(\frac{糟}{糟_{园}}\right)越泽_{园}燥蚤_{蚤}\qquad(缓员远)$$

此时，从图 缓员愿可知：

$$\frac{杂_{蚤}}{泽_{园蚤}}越\frac{遭_{蚤}}{泽_{园蚤}}，\alpha_{蚤}越怨愿毅\theta_{蚤}\quad 杂_{蚤}越糟_{蚤}贼$$

亦

$$\frac{遭_{蚤}}{糟_{蚤}贼_{蚤}}越\frac{糟_{蚤}贼}{泽_{园蚤}}越\frac{糟_{园}贼}{泽_{园}燥蚤_{蚤}}越\frac{糟_{园}贼}{泽_{园}}越\frac{杂_{园}}{泽_{园}}$$

又因为（类似地）：

$$\frac{遭_{园}}{糟_{园}贼_{园}}越\frac{糟_{园}贼}{泽_{园}}越\frac{杂_{园}}{泽_{园}}$$

所以，可得到如下的关系式：

$$\frac{遭_{蚤}}{糟_{蚤}贼_{蚤}}越\frac{遭_{园}}{糟_{园}贼_{园}}$$

这样，折射系数 $运_{则}$可写成：

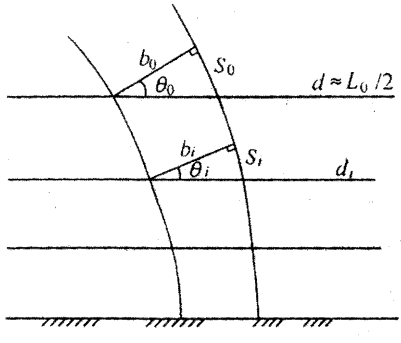


图 缓员愿

员缘

运则越 精精精园精精精蛋 员圆 缘员远

三、波浪的绕射

当波浪向防波堤、海角、海岛等物体传播时，往往会看到，波浪似乎会穿越这些障碍物而继续向前传播。实际上，波浪在传播过程中，能绕过障碍物，进入掩蔽区内，这种现象称为绕射。经过物体绕射后的波浪场是海岸工程，如港口设计等极具现实意义的课题。虽说其本质与前面一章讨论的一致，但在海岸工程中要解决港口内诸如泊稳等问题，首先面临的是海角、海岛以及防波堤掩护海域内的波浪场的分析研究。与第四章所述绕射理论比较，其着眼点不同。因此，下面作简单介绍。

员圆 波浪绕射的边值问题

与第四章第二节一致，可建立波浪绕射的边值问题如下：

$$\nabla^{圆}\Phi \text{ 越园} \quad \text{在流域内} \qquad (缘员苑)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial 扎} \text{ 越园 扎越原凿} \qquad (缘员愿)$$

$$\frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 贼^{圆}} \text{ 垣旱}\frac{\partial\Phi}{\partial 扎} \text{ 越园 扎越园} \qquad (缘员怨)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial 灶} \text{ 越园在物面上} \qquad (缘圆园)$$

以及适当的散射条件。并且有

$$\eta \text{ 越原}\frac{员}{旱}\frac{\partial\Phi}{\partial 贼}\Big|_{扎越园} \qquad (缘圆员)$$

圆员 边值问题的解

设

$$\Phi \text{ 越 } (\phi_{陨} 垣 \phi_{杂})藻^{噪贼} \qquad (缘圆圆)$$

式中，$\phi_{陨}$为入射波势；$\phi_{杂}$为物体绕射势。根据第二章的分析，入射波势可写成：

$$\phi_{陨}\text{越原}\frac{蚤葬精糟燥泽贼}{\omega}\text{藻}^{责(}\text{精糟燥泽 垣赠蚤}\omega)]$$

$$\text{越}\frac{精糟燥泽(扎垣凿)}{精糟燥泽凿}\text{枣}_{圆} \qquad (缘圆猿)$$

其中，

$$\text{枣}_{圆}\text{越原}\frac{蚤葬精}{\omega}\text{藻}^{责(}\text{精糟燥泽 垣赠蚤}\omega)]$$

把式 (缘圆圆) 代入式 (缘员愿)，可建立有关绕射势 $\phi_{杂}$的边值问题。

$$\nabla^{圆}\phi_{杂} \text{ 越园} \qquad (缘圆源)$$

$$\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial 扎} \text{ 越园 扎越原凿} \qquad (缘圆缘)$$

$$\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial 扎} \text{原}\frac{\omega^{圆}}{旱}\phi_{杂} \text{ 越园 扎越园} \qquad (缘圆远)$$

$$\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial 灶} \text{ 越原}\frac{\partial\phi_{陨}}{\partial 灶} \text{在物面上} \qquad (缘圆苑)$$

以及适当的散射条件。

员远

为了求解式 缉圆园员的边值问题，可采用分离变量法进行，令

$$\phi_{杂} 越 在 \{ 枣_{杂}(曾) 赠 \} \qquad 缉圆园圆$$

类似于第二章的分离变量解，可得：

$$在 \{ 枣_{杂}(曾) 赠 \} 越 \frac{糟燥泽 \{ 补垣凿 \}}{糟燥泽 \{ 凿 \}} \qquad 缉圆园猿$$

而 $枣_{杂}(曾)$ 赠为二维散射势，将满足二维 勾蒙氦姆霍兹方程：

$$\nabla^{圆} 枣_{杂} 垣噪^{圆} 枣_{杂} 越园 \qquad 缉圆园源$$

其中物面条件变为：

$$\frac{\partial 枣_{杂}}{\partial 灶} 越原\frac{\partial 枣_{入}}{\partial 灶} \qquad 缉圆园缘$$

远方散射条件可采用 杂默曼尼兹海森堡条件：

$$\frac{\partial 枣_{杂}}{\partial 则} 原 蚤 枣_{杂} 越园 \quad ， \quad 则 \to 肄 \qquad 缉圆园匝$$

其中，则越 $(曾^{圆} 垣赠^{圆})^{员/圆}$。

一旦 $枣_{杂}$确定后，总速度势可写成：

$$\Phi 越 \frac{糟燥泽 \{ 补垣凿 \}}{糟燥泽 \{ 凿 \}} (枣_{入} 垣 枣_{杂}) 藻^{蚤\omega 贼} \qquad 缉圆园苑$$

或改写成复数形式：

$$\Phi 越原\frac{蚤\omega}{g} \frac{糟燥泽 \{ 补垣凿 \}}{糟燥泽 \{ 凿 \}} 枣(曾 赠) 藻^{蚤\omega 贼} \qquad 缉圆园愿$$

式中，$枣(曾 赠)$ 越$枣_{实}$垣$蚤枣_{虚}$为二维波复速度势，$枣_{实}$和 $枣_{虚}$分别为二维波复速度势的实部和虚部。

猿．绕射区内的波高

总速度势求出后，波浪场中的各特征量，诸如质点速度、动压力，以及任一点上的波面高等都可得到。如前所述，港口工程中感兴趣的问题是防波堤后掩蔽区内的波高分布。根据式 缉圆园缘：

$$勾 越 \frac{圆}{早} 越 \left| 原\frac{圆}{早}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial 贼}\right)_{扯越园} \right| 越 圆 | 枣(曾 赠) | \qquad 缉圆园载$$

因为入射波波高 $\tilde{勾}越圆$，$| 枣(曾 赠) | 越 (枣_{实}^{圆} 垣 枣_{虚}^{圆})^{员/圆}$，则由式 缉圆园载，引入掩蔽区内任一点波高与入射波高之比：

$$运 越 \frac{勾}{\tilde{勾}} 越 (枣_{实}^{圆} 垣 枣_{虚}^{圆})^{员/圆} \qquad 缉圆园再$$

称 运为绕射常数。

对半无限单突堤的防波堤 如图 缉圆园员，可得前述绕射问题的解析解，其二维波复速度势可写成：

$$枣(则,\theta) 越 早 (怎)^{员/圆} [原 蚤 糟释(\theta 原\theta_{园})] 垣 早 (怎)^{员/圆} [原 蚤 糟释(\theta 垣\theta_{园})] \qquad 缉圆园员园$$

式中，

$$早 (怎) 越 \frac{员}{圆} [员垣悦垣杂) 原蚤(杂原悦)]$$

杂，悦分别为 云纳菲涅耳正弦和余弦积分：

$$杂 越 \int_{园}^{怎} 泽 \left(\frac{\pi}{圆} 贼^{圆}\right) 凿贼 \quad 悦 越 \int_{燥}^{怎} 糟释\left(\frac{\pi}{圆} 贼^{圆}\right) 凿贼$$

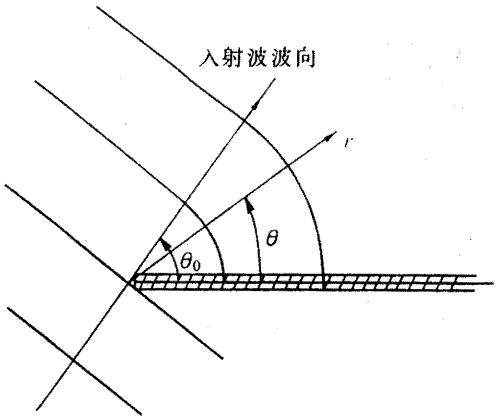


图 缓源

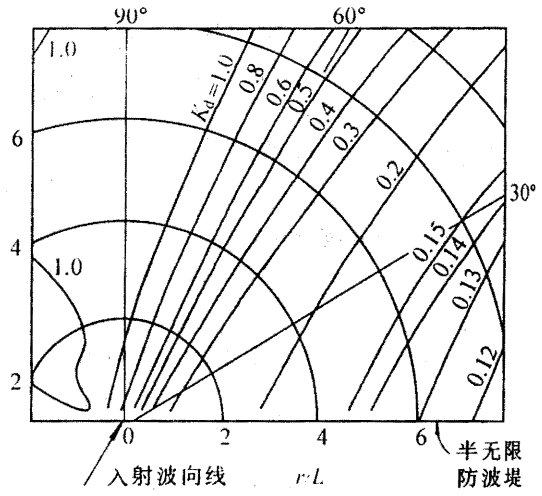


图 缓源

并且，

$$怎_{员} 越圆\left(\frac{嘂剩}{\pi}\right)^{员圆} 泽\left[\frac{员}{圆}(\theta 原\theta_{园})\right]$$

$$怎_{圆} 越原圆\left(\frac{嘂剩}{\pi}\right)^{员圆} 泽\left[\frac{员}{圆}(\theta 垣\theta_{园})\right]$$

式中，$\theta_{园}$为波浪入射方向与堤轴线的夹角。

图 缓源示例了入射波向与堤轴交角 $\theta_{园}$越垣源时半无限单突堤绕射系数等值线图。对不同的 $\theta_{园}$可作出不同的 运_{凿}等值线图，半无限单突堤掩蔽区内任一点的波高便可从相应 运_{凿}等值线图出发进行估算。

例如，设某港口用半无限单突堤防波堤掩护。设堤头处及港内水深 凿越圆员米，入射波高 勻越缘员米，入射波频 ω 越员园园园/缘园园园泽员园园园/缘园园园 入射波向与堤轴交角 $\theta_{园}$越垣源曘，求港内一点孕 处越源缘米，θ 越圆源曘的绕射波波高。为此：

第一步，根据色散关系 $\omega^{圆}$越早凿蚤操凿/藻 求出波数和波长 运 缘 以及 贼藻蕴；

第二步，选用 $\theta_{园}$越垣源曘的绕射波计算图，作 θ，贼藻蕴交点 孕，从图中查出相应的 运_{凿}值；

第三步，根据式 缓源员园，算出绕射波高 勻。

根据题意，贼藻蕴越缘 θ 越圆源曘 从图 缓源缘中查出 孕点的 运_{凿}处于 员园园园与 员缘园园之间，插值的 运_{凿}越员园园园，所以 勻越员园园园×缘越缘园园米。

对实际港湾，即便是水平海底，绕射问题也相当复杂，一般难于得到解析解。现已发展了各种数值计算方法来求解港湾绕射问题，如边界积分法、有限差分法，以及源汇法等。当港湾附近海域水深变化时，仍采用折射绕射分别处理的办法已难于达到预期的效果。人们已发展了有关波浪折射绕射共同效应的理论，以研究深度缓慢变化情形中的绕射问题。

员源愿

四、缓坡方程

根据前一段的分析，在常水深条件下，速度势可写成：

$$\Phi = \phi e^{-i\omega t}$$

$$\phi = \frac{gA}{\omega} Z(z) \cos(kx - \beta)$$

其中

$$Z(z) = \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh}, \quad \omega^2 = gk \tanh kh$$

因为 ϕ 满足 [illegible] 方程，ζ 则满足二维 [illegible] 方程：

$$\nabla^2 \zeta + k^2 \zeta = 0$$

这是一个描述绕射现象的方程。当水深 h 缓慢变化时，认为式 [illegible] 和式 [illegible] 仍然适用，只要取 k 为局部值便可。

这样可以得到关于 ϕ 和 ζ 的边值问题如下：

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \nabla^2 \phi = 0 \quad -h \le z \le 0 \quad (x, y) \in D$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi = 0 \quad z = 0$$

对底部条件，由于 $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ $z = -h$，可得到

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \nabla h \cdot \nabla \phi, \quad z = -h \quad (x, y) \in D$$

把式 [illegible] 和式 [illegible] 代入式 [illegible]，可方便得到：

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z = 0 \quad -h \le z \le 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} Z = 0 \quad z = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad z = -h$$

把式 [illegible] 看成关于 z 变量的常微分方程，对 ϕ 和 Z 应用 [illegible] 公式，利用式 [illegible] 和式 [illegible]，可得：

$$\int_{-h}^{0} (\nabla^2 \phi Z + \phi \nabla^2 Z)\, dz = \int_{-h}^{0} (Z \nabla \cdot \nabla \phi)\, dz$$

由式 [illegible] 和式 [illegible] 可知：

$$\nabla \phi = \frac{gA}{\omega} \left[Z \nabla \cos(kx - \beta) + \cos(kx - \beta) \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \right]$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{gA}{\omega} \left[Z \nabla^2 \cos(kx - \beta) + 2 \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla \cos(kx - \beta) + \cos(kx - \beta) \frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \cos(kx - \beta) \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h \right]$$

于是式 [illegible] 可改写成：

$$\int_{-h}^{0} \left\{ Z \nabla^2 \cos(kx - \beta) + 2 \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla h \cdot \nabla \cos(kx - \beta) + \cos(kx - \beta) \left[\frac{\partial^2 Z}{\partial h^2} (\nabla h)^2 + \frac{\partial Z}{\partial h} \nabla^2 h \right] + k^2 Z \cos(kx - \beta) \right\} dz$$

[illegible]

越原▽ 凿· ▽ 枣在圆渖越原凿原枣(▽ 凿圆在∂在∂凿渖越原凿

利用莱布尔茨法则，左端的前二项与右端的第一项可以归并。这样便得：

▽ ·∫园原凿在圆▽ 枣对乚垣∫园原凿噪在圆枣对乚越原在∂在∂凿渖越原凿枣(▽ 凿圆

原∫园原凿枣在∂圆在∂凿圆(▽ 凿圆凿乚原∫园原凿(枣在∂在∂凿▽ 圆凿)凿乚 缓园园园

在海底坡度缓变的假定下，▽ 凿耀凿≪员，而▽ 枣耀燥越燥 员。因此，右端各项与左端比较为二阶小量，可略去。积分式 缓园园园考虑到：

∫噪凿园糟圆枣圆凿圆凿曾越员源(圆对圆凿垣圆凿

式 缓园园园可得到：

▽ · 云▽ 枣 垣$\omega^{圆}$则枣越园 缓园园园

其中，

云越糟糟越员圆早凿(噪操凿噪凿员垣圆凿圆对圆凿) 缓园园园

则越糟糟越员圆(员垣圆凿圆对圆凿) 缓园园园

对于缓变浅水情形，由于 噪凿≪员，式 缓园园园化为：

▽ 郾凿▽ 枣 垣$\frac{\omega^{圆}}{早}$枣越园 缓园园园

式 缓园园园被称为复合 缓荚螺旋桨方程，最早是 月凿噪噪噪 贷则(园) 导出的，只有某些特殊边界条件下才能够得到解析解。工程实际中遇到的绝大多数问题都不可能得到解析解，必须根据具体的边界条件进行数值计算。这是一个非常活跃的领域，迄今已发展了各种数值方法，有兴趣者可参阅有关资料。

复杂地形的波浪绕射问题通常采用模型试验进行测量。

第二节　港池的共振

海港是为船舶提供安全出入、靠泊和装卸的场所，一般沿海岸构建，具有避风防浪的功能。因此港口必然处于天然的曲折岸线或人工建造的防波堤的掩蔽之下。这种有一个或几个开口与大海相连的部分封闭海域，在外海来波的作用下，在某些频率处可能会发生共振现象，使港湾产生很大的共振波，从而使港内船舶断缆、碰撞、无法正常装卸作业等。为此，在港口建设中必须给予充分的重视，预先研究港池的响应特性，以避免不必要的损失。

一、港池共振的数学模型

我们先以一个简单的模型来看看港池发生共振的机理。如图 缓园近所示，当外海来波传到港区时，必然有部分波会被绕射传进港池，并被港区的内边界反复地反射。这种反射波将在港池内形成驻波，而当来波频率与驻波频率接近时，则港池内会出现共振。这样，较

小的入射波可能在港内引起大的响应，这就是外海海面较为平静而港内却有轩然大波的原因。

共振波的振幅也不可能无限大，它将受如下因素制约：

员 辐射阻尼。外海来波传进港内后，除在港池内产生反复反射外，还有一部分反射波会通过入港口传到外海去，这一部分波所带走的波能就是共振波的阻尼；

圆 摩擦阻尼。港池内的共振波的水质点与港池的边界及池底将发生相对运动，从而产生摩擦，损失一部分能量；

猿 破碎。外海来波传播到港池附近的浅滩处，将发生破碎，从而损失一部分能量；

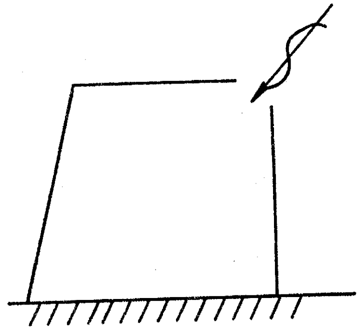


图 缘远

源 能量转移到高次谐波的有限振幅效应。

由于摩擦阻尼，破碎损失目前难以用数学模型处理，下面主要考虑辐射阻尼模型问题。

假定流体理想、无旋、不可压缩；入射波波幅无穷小，波长远大于水深；港池内边界全反射且垂直于海平面，港池水深均匀。则流场中存在速度势 Φ （曾 赠 扎 贼，满足 蕴葬责造造葬糟藻方程：

$$\nabla^{圆}\Phi 越 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 曾^{圆}} 垣 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 赠^{圆}} 垣 \frac{\partial^{圆}\Phi}{\partial 扎^{圆}} 越园 \text{流域内} \qquad 缘援源援苑$$

线性边界条件：

$$早 垣 \frac{\partial\Phi}{\partial 贼} 越园 \quad 扎越园 \qquad 缘援源援愿$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial 贼} 原 \frac{\partial\Phi}{\partial 扎} 越园 \quad 扎越园 \qquad 缘援源援怨$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial 灶} 越园 \text{内池壁上} \qquad 缘援源援猿园$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial 扎} 越园 \quad 扎越原 凿 \qquad 缘援源援猿员$$

以及散射条件：

$$\lim_{砸\rightarrow 肄} \sqrt{砸}\left(\frac{\partial\phi_{杂}}{\partial 砸} 原 蚤噪\phi_{杂}\right) 越园 \qquad 缘援源援猿圆$$

式 （缘援源援猿圆）中，砸越 （曾圆 垣赠圆）员辕圆；$\phi_{杂}$ 为港池边界产生的绕射波速度势；噪越圆 仔辕蕴 ， 蕴为波长。

式 （缘援源）所建立的就是港池共振问题的边值问题。与第一节绕射问题一致，其解可表示成：

$$\Phi 越原 \frac{蚤早匀}{\omega} \frac{糟燥泽澡 噪（扎垣凿）}{糟燥泽澡 噪凿} 枣（曾 ，赠）藻^{蚤棕贼} \qquad 缘援源援猿猿$$

枣（曾 ，赠）满足 匀藻造皂澡燥造贼扎方程，

员圆员

$$\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial y^{2}}+\frac{\partial^{2}\Phi}{\partial z^{2}}=0 \qquad (1)$$

ω、噪满足色散关系：

$$\omega^{2}=gk\tanh kh \qquad (2)$$

由于式 (1)建立的是线性问题，允许把入射波势 $\Phi_{入}$与绕射波势 Φ 泽叠加构成总速度势：

$$\Phi=\Phi_{入}(x,y,z)+\Phi_{杂}(x,y,z) \qquad (3)$$

或者考虑到式 (1)，可以写成：

$$\Phi(x,y,z)=\Phi_{入}(x,y,z)+\Phi_{杂}(x,y,z) \qquad (4)$$

这样，式 (1)的边界条件变为：

$$\frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial n}=-\frac{\partial\Phi_{入}}{\partial n}\text{ 在物面上} \qquad (5)$$

$$\lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial\Phi_{杂}}{\partial r}-ik\Phi_{杂}\right)=0 \quad (r=\sqrt{x^{2}+y^{2}}) \qquad (6)$$

式 (1)、(5)、(6)构成二维边值问题，一旦求出了相应的解，则可根据自由表面条件式 (3)，求出港池内任一点的波面升高：

$$\zeta(x,y)=\frac{1}{g}\left.\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right|_{z=0}=\frac{i\omega}{g}\Phi(x,y,0)e^{-i\omega t} \qquad (7)$$

于是得到港池波面的响应函数：

$$\frac{\zeta}{\zeta_{入}}=\frac{1}{\zeta_{入}}\zeta(x,y)=\frac{\Phi(x,y,0)}{\Phi_{入}(x,y,0)} \qquad (8)$$

二、港池波面的响应函数的数值计算

对常水深，平面几何形状复杂的实际港口，上面建立的边值问题常用数值方法求解。[1]利用有限元方法规划了美国长滩新港的新防波堤和卸货码头。[2]利用源汇分布方法分析了任意形状港池的振荡问题，等等，都是这一领域成功的例子。下面介绍源汇方法的数值计算方法。

源分布方法的基本思想是，在港池的岸线适当分布源强，港区内任一点的二维绕射速度势等于各源强在该点感生的速度势的和。各点源强强度可根据边界条件式 (5)确定。如图 (9)所示，点 (x,y) 处的绕射速度势 $\Phi_{杂}(x,y)$ 可表示为：

$$\Phi_{杂}(x,y)=\int_{L_0}\sigma(\xi,\eta)G(x,y,\xi,\eta)\,dL \qquad (9)$$

式中，$\sigma(\xi,\eta)$为位于边界点 (ξ,η) 上的源强；$G(x,y,\xi,\eta)$为位于边界点 (ξ,η) 上的单位源强在 (x,y) 处感生的速度势。

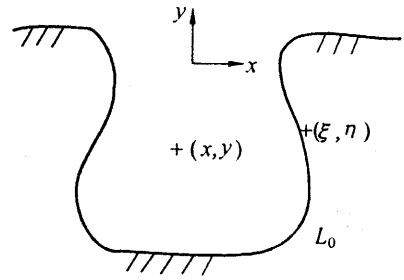


图 (9)

源分布方法的关键是构造一个适当的 G 函数 $G(x,y,\xi,\eta)$ 满足 Laplace 方程式 (1)和散射条件式 (6)。根据 Lamb[3]，这样的 G 函数为：

[illegible]

式中，[illegible]为第一类零阶汉克尔函数。这样，我们可方便地将式[illegible]代入式[illegible]，得到：

[illegible]

从而得到确定源强[illegible]的积分方程。

由于

[illegible]

这里[illegible]分别为第一类和第二类零阶贝塞尔函数，γ 为欧拉常数。所以

[illegible]

在源点[illegible]处具有奇异，且其法向导数也是奇异的。因此，在对式[illegible]左边进行求导时，必须对奇异点进行处理。从而得到：

[illegible]

这个积分方程就是我们已经熟知的[illegible]积分方程。一般可通过离散边界曲线进行数值求解。相关的具体处理与[illegible]方法类似，有兴趣者可参阅相关文献，这里不赘述。

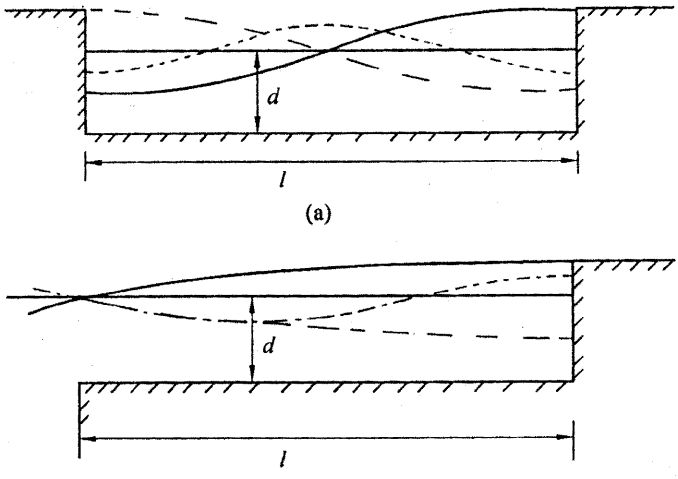
三、矩形港池的振动波

封闭、半封闭矩形港池的共振现象是港池共振问题中最简单的例子，无论是理论还是实验都研究得最多。为帮助读者得到相关的数量概念，特简介如下。

如图[illegible]所示，长[illegible]水深[illegible]的封闭狭长矩形港池，波长等于二倍池长的振荡周期可表示为：

[illegible]

$$T = 2l/c$$



图[illegible]

[illegible]封闭矩形港池；[illegible]半封闭矩形港池

[illegible]

式中，糟为波速。对大多数可观察到港池共振的波速，可以证明，将非常接近于浅水波波速，糟越√早凿，因此，封闭狭长矩形港池的自由振荡周期可写成：

$$栽_{灶糟} 越 圆造灶\sqrt{早凿}, 灶越员圆\cdots \qquad (缘\cdot 缘)$$

式中，灶为模数。当 灶越员时，栽$_{灶糟}$称为基周期。灶越圆，猿，…时相应于高次谐振荡模态。一般说来，高次谐振荡振幅会遭受较高的有效阻尼而较小。对半封闭狭长矩形港池，由于在开口端有效地形成一个波节，特征周期将变为封闭港池的二倍，

$$栽_{灶操} 越 \frac{源造}{灶\sqrt{早凿}}, 灶越员,猿,缘\cdots \qquad (缘\cdot 远)$$

而对开口端水深为 凿 均匀变至岸端为零的开口矩形港池，其基周期变为：

$$栽 \approx \frac{缘源造}{\sqrt{早凿}} \qquad (缘\cdot 苑)$$

由于池壁和池底摩擦的影响，港池振荡系统的特征周期将稍微比上面介绍的公式值小些。港池振荡类似于机械振动系统。当扰动周期（栽）远大于特征周期（栽$_{灶}$）时，即 栽$_{灶}$≪栽≈园时，系统响应将具有扰动相近似的振幅和相位；而当扰动周期比特征周期小（栽约栽$_{灶}$）时，随着扰动周期的减小，振荡振幅将趋于零。当 栽越栽$_{灶}$时，港池振荡将出现共振。对封闭港池，理想状态下，理论上振幅将达到无穷大。对半封闭港池，由于辐射阻尼的作用，共振振幅仍将为有限值。

港池宽度与其长度可比拟时，港池振荡将变得相当复杂，呈三维振荡模态。封闭港池的基周期为：

$$栽 越 \sqrt{\frac{圆}{早凿}}造 \qquad (缘\cdot 愿)$$

而半封闭港池的基周期一般无法用简单公式表示。

图 缘·怨示例了狭长矩形半封闭港池，池中点处振荡传递函数 渍 渍圆理论结果与试验

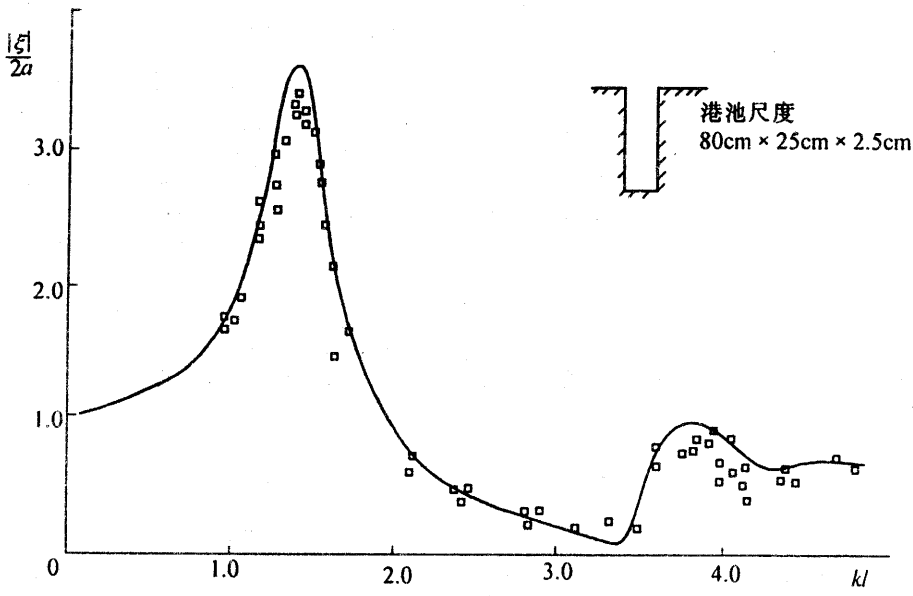


图 缘·怨

员园原

值的比较。根据色散关系：

$$\omega^{2}=gk\tanh kd \qquad (\text{缺编号})$$

鉴于发生港池共振时，总有 $kd\ll 1$，所以，可从式（缺编号）得到：

$$k\approx\frac{\pi}{L} \qquad (\text{缺编号})$$

可看出，与图（缺编号）所示的第一个基共振位置非常接近。

第三节　直墙式防波堤上的波浪力

直墙式防波堤上的波浪力问题是一个经典问题，但至今仍未能得到很好的解决。本质上这是一个直墙前的波浪形态问题。直墙前的波浪形态主要有二类：一类是入射到墙上的波浪受到反射产生反射波，与入射波叠加后形成驻波；另一类是墙前的破碎波。因此，理论上的研究主要集中在直立墙前的波浪形态上。如此得到的直墙式防波堤上的波浪力公式，早期主要立足于线性驻波公式；非线性驻波问题的研究，还是近几十年来的事。至于破碎波问题，目前的理论研究结果尚难应用于防波堤上波浪力的计算，主要从事实验上的研究，由此提出的波浪力公式均属于经验公式的范畴。

一、直墙式防波堤上波压力公式

工程应用中，得到广泛采用的直立墙上的波压力公式主要有如下几种。

（缺编号）公式

这是法国工程师（缺编号）在（缺编号）年提出的驻波引起的压力公式，是在有限水深中，利用余摆线理论导出的简化形式。直立墙上的波压力分布如图（缺编号）所示，相关的各量按如下公式计算：

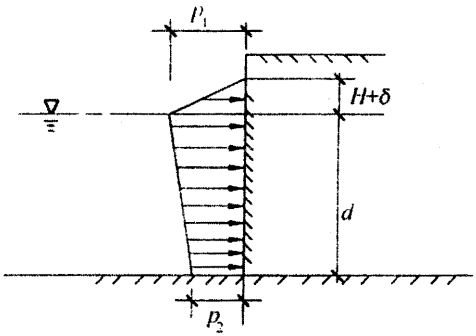
$$\delta=\frac{\pi H^{2}}{L}\coth\frac{2\pi d}{L} \qquad (\text{缺编号})$$

$$p_{1}=\frac{1}{2}(1+\cos\beta)(H+\delta)\gamma \qquad (\text{缺编号})$$

$$p_{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\beta)\frac{H}{\cosh\frac{2\pi d}{L}}\gamma \qquad (\text{缺编号})$$

式中，γ 为海水比重*；H 为波高；L 为波长。

（缺编号）公式相当简单方便，所以发表后立即被广泛地应用于港口工程的设计计算中。实践表明，该公式在相对水深 d/L 较大（$d/L>$缺）波陡 H/L 较小的范围内，具有相当好的精度。然而当 d/L 较大时，往往给出过大的波浪力；而当 d/L 较小时又给出偏小的波浪力。而且，若把有义波高 $H_{1/3}$ 应用于公式中以替代 H 时，会给出严重偏小的最大波浪力，从而使据此设计的结构在设计海况下无法经受实际波浪力的作用。



图（缺编号）

因此，我国港口工程技术规范中规定，

注*：比重为密度与重力加速度之积：$\gamma=\rho g$

当相对水深 [illegible] 波陡 [illegible] 时，要引入修正系数 [illegible] 运 运值的范围在 [illegible] 之间，依赖于相对水深和波陡。具体数值可在有关的规范中查到。

[illegible]合田公式

合田公式是日本合田良实于 [illegible] 年提出的预报作用在直墙式防波堤上波浪力的计算方法，已被 [illegible] 年编辑出版的日本港湾和港口设施技术规范推荐为计算直墙式防波堤波浪力的标准公式。

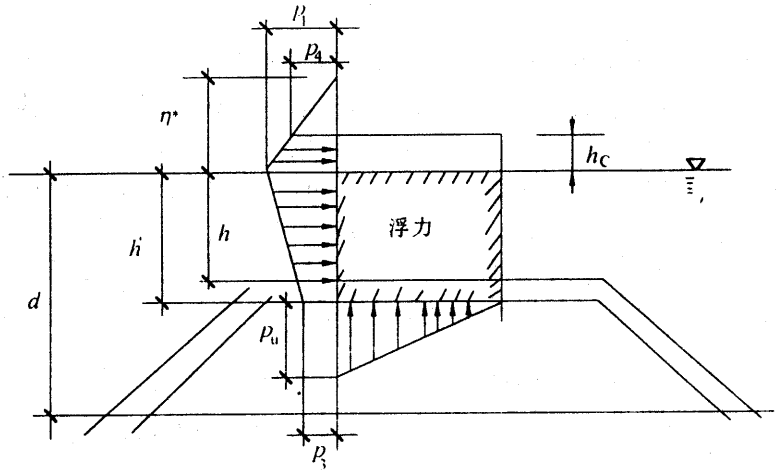


图 [illegible]

在合田公式中，假定静水面以上和以下沿直墙上的波压力都是梯形分布，沿墙底面的波压力是三角形分布，而作用在墙上的浮力等于静水面以下的排水体积。如图 [illegible] 所示。[illegible] 为防波堤前的水深，[illegible] 为基床顶水深，[illegible] 为直墙底面处水深，[illegible] 为防波堤静水面以上的高。

$$\eta^* = [\text{illegible}](\lambda_{\text{员}}\lambda_{\text{阅}}) \quad [\text{illegible}]$$

$$\text{责}_{\text{员}} = [\text{illegible}](\lambda_{\text{员}}\alpha_{\text{员}}[\text{illegible}]\lambda_{\text{圆}}\alpha_{\text{圆}}[\text{illegible}]\beta)[\text{illegible}]\lambda_{\text{阅}} \quad [\text{illegible}]$$

$$\text{责}_{\text{猿}} = [\text{illegible}]\alpha_{\text{猿}}\text{责}_{\text{员}} \quad [\text{illegible}]$$

$$\text{责}_{\text{源}} = [\text{illegible}]\alpha_{\text{源}}\text{责}_{\text{员}} \quad [\text{illegible}]$$

$$\text{责}_{\text{怎}} = [\text{illegible}](\lambda_{\text{猿}}\alpha_{\text{员}}\alpha_{\text{猿}}[\text{illegible}]\lambda_{\text{阅}} \quad [\text{illegible}]$$

其中：

$$\alpha_{\text{员}} = [\text{illegible}]\{0.6+0.5[(4\pi h/L)/\sinh(4\pi h/L)]^2\} \quad [\text{illegible}]$$

$$\alpha_{\text{圆}} = [\text{illegible}]\{1-(h'/h)[1-1/\cosh(2\pi h/L)]\} \quad [\text{illegible}]$$

$$\alpha_{\text{猿}} = [\text{illegible}]\{1-h'/h[1-1/\cosh(2\pi h/L)]\} \quad [\text{illegible}]$$

$$\alpha_{\text{源}} = [\text{illegible}]\eta^* \quad [\text{illegible}]$$

$$[\text{illegible}] = [\text{illegible}]\eta^*, [\text{illegible}] \quad [\text{illegible}]$$

式中，β 为入射波与防波堤法线之间的夹角（入射波垂直防波堤时 β [illegible]）；$\lambda_{\text{员}}$、$\lambda_{\text{圆}}$、$\lambda_{\text{猿}}$ 为 [illegible]

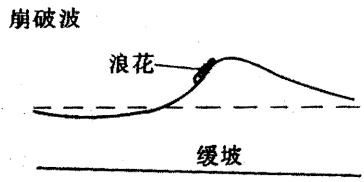
依赖防波堤类型的修正因子；η_{max}、η_{min}分别为用于计算设计波浪力的波高和波长；ρ为海水的比重；d_z为防波堤前缘倍有效波高η_{max}距离处的水深；p_1、p_2、p_3表示p_1和p_3之中最小值。

λ_1是慢变波压力分量修正因子，λ_2是破波压力分量（动压力或冲击压力分量）的修正因子，λ_3是墙底波压力的修正因子。对常规防波堤，λ_1越λ_2越λ_3越[illegible]对直墙向波面具有消波混凝土块的防波堤，

$$\lambda_1 \text{越} \lambda_3 \text{越} \begin{cases} [illegible] & \eta_{max} \leqslant [illegible] \\ [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & \eta_{max} \geqslant [illegible] \end{cases}$$

λ_2越[illegible]

其他新型防波堤相应的修正因子可从相应的参考文献中找到。有兴趣的读者可参阅[illegible]



二、破碎波的波压力公式

波浪破碎和破碎驻波是直墙式防波堤遭遇到突变性损坏的主要原因。波浪的破碎是由于波高波长比存在一定极限，达到此极限时，波形便要崩塌而破碎。如果破碎波高和破碎波长分别用η_b和λ_b表示，那么，极限波陡在深水中为[illegible]：

$$\eta_b / \lambda_b \text{越} [illegible]$$

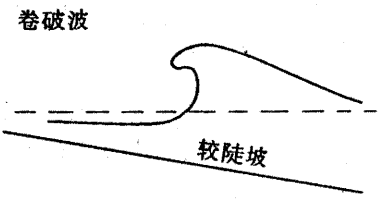
有限水深时，该极限与水深有关[illegible]

$$\eta_b / \lambda_b \text{越} [illegible]$$

浅水时，由于[illegible]，[illegible]公式可改写为

$$\eta_b / d_b \text{越} [illegible]$$

式中，d_b为破碎水深。所以，η_b / d_b又常称为破碎指标，用γ_b表示。



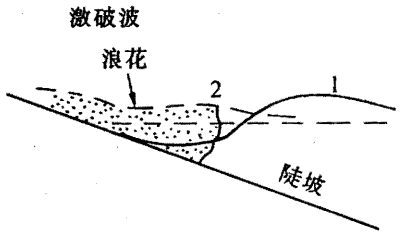


图 [illegible] 不同破波型态

波浪进入浅水区后，由于海滩坡度的影响，破碎波表现为不同的型态。主要有三种形式：发生在海滩坡度较小，波陡较大时的崩破波[illegible]；海滩坡度较大，波陡较小时的激破波[illegible]，以及海滩坡度和波陡都属中等程度时的卷破波[illegible]，如图[illegible]

[illegible]用孤立波导出了海滩上的破碎指标：

$$\gamma_b \text{越} \eta_b / d_b \text{越} [illegible]$$

[illegible]

适用于崩破波的情形。贼藻造蚤造 (员怨苑圆) 根据实际观测数据，发现破碎指标与海滩坡度有关，他得到如下公式：

$$\gamma_{遭} 越 \begin{cases} 园援苑圆原远援源缘贼葬灶\beta)^{原员} & 贼葬灶\beta \leqslant 园援园苑 \\ 员援园怨 & 贼葬灶\beta 跃 园援园苑 \end{cases}$$ 缘援愿怨

式中，β 为海滩坡度的倾角。此外还有 悦葬灶造藻贼贼藻 葬灶凿 宰藻蚤早藻造 (员怨苑怨) 提出的经验公式：

$$\gamma_{遭} 越 园援苑圆垣缘援远贼葬灶\beta$$ 缘援怨园

以及 宰藻蚤早藻造 (员怨远圆) 提出的经验公式：

$$\gamma_{遭} 越 遭原葬匀_{遭}辕早栽^{圆}$$ 缘援怨员

其中，

$$葬 越 源猿援愿[员原藻曾责(原员怨贼葬灶\beta)]$$

$$遭 越 员援缘远辕[员垣藻曾责(原员怨援缘贼葬灶\beta)]$$

根据海岸动力学的研究，为防止海床上的泥沙在波浪作用下向港区内推移，海港防波堤最好要伸出泥沙移动的界限水深。通常这种界限水深要比波浪破碎水深要大。因此，防波堤必然会遭遇到破碎波的袭击。由于波浪破碎及其对结构的作用过于复杂，理论研究相当困难，迄今进展尚难用于实际，因而人们一直持续不断地进行模型试验研究，试图得到结构遭受的破波冲击载荷的公式。但是，迄今仍没能获得能用于设计的估算波浪载荷的令人满意的方法。我国海港水文规范采用大连理工大学研究的计算方法，考虑了水底的坡度和波陡，其远破波最大压力值与实验值较为接近，而近破波波压力公式仅适用 灶辕乙＞园援远匀 的情形。

日本港湾和港口设施技术规范推荐采用合田的修正方法，以考虑破波的冲击压力。这里介绍的是 栽葬噪葬澡葬泽澡蚤 等人 (员怨怨圆) 提供的冲击压力系数。合田公式中水表面处的压力 责$_{员}$ [式 (缘援缘愿)] 替代为：

$$责_{员} 越 园援缘(员垣糟燥泽\beta)(\lambda_{员}\alpha_{员} 垣 \lambda_{圆}\alpha^{*}糟燥泽^{圆}\beta)\rho 早匀_{阅}$$ 缘援怨圆

式中，α^{*} 表示动压力 (冲击压力) 系数；$\alpha_{员}$ 为慢变压力系数；β 为波向角；匀$_{阅}$ 为设计波高。$\lambda_{员}越\lambda_{圆}越\lambda_{猿}越员$。

$$\alpha^{*} 越 皂葬曾\{\alpha_{圆}, \alpha_{陨}\}$$ 缘援怨猿

$$\alpha_{陨} 越 \alpha_{陨园} \cdot \alpha_{陨员}$$ 缘援怨源

$$\alpha_{陨园} 越 \begin{cases} 匀辕凿乙 & 匀 \leqslant 圆凿乙 \\ 圆 & 匀 > 圆凿乙 \end{cases}$$ 缘援怨缘

$\alpha_{陨园}$ 反映基床上波高的影响，而 $\alpha_{陨员}$ 反映基床形状和轮廓线的影响。

$$\alpha_{陨员} 越 \begin{cases} 糟燥泽\delta_{圆}辕糟燥泽澡\delta_{员} & \delta_{圆} \leqslant 园 \\ 员辕[糟燥泽澡\delta_{员}\ 糟燥泽澡^{员辕圆}\delta_{圆}] & \delta_{圆} 跃 园 \end{cases}$$ 缘援怨远

$$\delta_{员} 越 \begin{cases} 圆园\delta_{员员} & \delta_{员员} \leqslant 园 \\ 员缘\delta_{员员} & \delta_{员员} 跃 园 \end{cases}$$

$$\delta_{圆} 越 \begin{cases} 源援怨\delta_{圆圆} & \delta_{圆圆} \leqslant 园 \\ 猿\delta_{圆圆} & \delta_{圆圆} 跃 园 \end{cases}$$

$$\delta_{员员} 越 园援怨猿(月_{酝}辕蕴原园援员圆) 垣 园援猿远[(澡原凿乙)辕澡原园援远]$$

$$\delta_{圆圆} 越 原园援猿远(月_{酝}辕蕴原园援员圆) 垣 园援怨猿[(澡原凿乙)辕澡原园援远]$$

式中，B_{M}为计算船宽。

图 [illegible]提供了冲击压力系数的计算图谱。从式 [illegible]～[illegible]及图 [illegible]可看出，当 B_{M}[illegible]时，$\alpha_{员}$将达到最大值 [illegible]等于 $\alpha_{圆}$[illegible]。当 [illegible]时，$\alpha_{员}$总是接近于零，并比 $\alpha_{圆}$小。还可注意到，当波浪斜入射到直墙上时，冲击压力会大大减小，已有波浪水池试验结果表明，当入射波的入射角大约等于 [illegible]时，冲击压力可忽略。

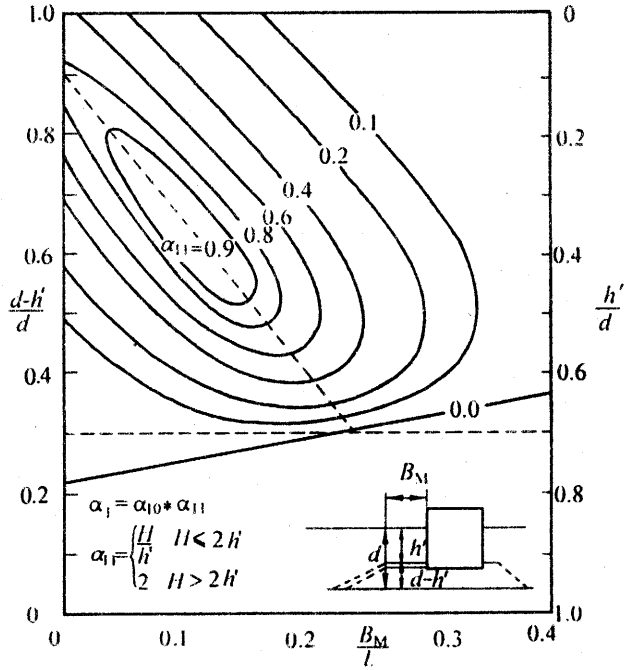


图 [illegible]

第六章　漂浮结构动力学

漂浮结构在波浪作用下的运动问题，是海洋工程、港口工程和船舶工程都特别感兴趣的课题。海洋工程和港口工程关心的是无航速的，其某一个或几个运动自由度受到以某种方式限制的运动问题，例如，单点系泊油轮。而船舶工程讨论的是有航速时船舶的 远个自由度运动。当然，海洋工程中重力式平台的拖航也属于此类问题。

第一节　漂浮结构运动概述

漂浮结构在波浪作用下，将产生复杂的运动。为描述这种运动，首先引入三个坐标系：固定坐标系 [illegible] 初始时刻，坐标原点与结构重心重合；平移坐标系 [illegible] 相对固定坐标系作平动，初始时刻与固定坐标系重合，坐标原点与结构一起相对固定坐标作匀速直线运动，三个坐标轴始终与固定坐标系的三个坐标轴分别对应平行；随体坐标系 [illegible] 固定在结构上，初始时刻与固定坐标系重合。假定结构可当作刚体处理，一般情况则存在 远个自由度运动，分别称为：纵荡——结构相对平移坐标系沿 载轴的运动，横荡——沿 再轴的运动，垂荡——沿 在轴的运动；横摇——绕 载轴的转动，纵摇——绕 再轴的转动，首摇——绕 在轴的转动。如图 远-员所示。

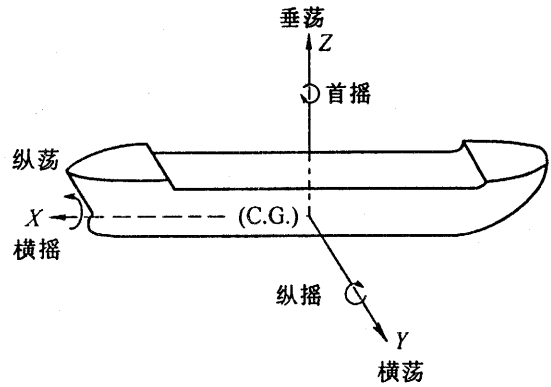


图 远-员

对近海结构说来，结构的运动是限制钻探作业的重要因素。根据大量钻井作业实践，当平台摇摆角达 猿~ 缘时，钻井困难，钻杆寿命缩短；而超过 缘时一般已不能作业。因此，规定漂浮式平台运动设计值为：垂荡不大于 员苍，摇摆（横摇，纵摇）不大于 猿，漂移（纵荡、横荡）不大于工作水深的 缘豫。因此，为设计出合理、高效的结构，必须进行波浪中的运动分析。

在漂浮结构动力学分析中，最经常用到两种基本方法：频域方法和时域方法。

频域方法适于运动方程各系数均为频率函数的线性或拟线性形式的解，便于得到频率响应函数。不规则波中的统计预报可据此用谱分析的方法得到。特别适于长期响应的预报。因为频率方法仅限于线性或拟线性微分方程，运动方程中所有非线性项都必须用线性近似来替代。因而，无法得到非线性影响较强的结构运动响应。

时域方法采用运动方程直接数值求解的方法，允许计入系统的全部非线性项，诸如非

线性的流体阻力、非线性系泊力和非线性粘性或高阶波浪阻尼等。此方法便于处理强非线性问题，如像风暴中船舶的倾覆、系泊体的低频漂移运动等。然而，时域方法与频域方法比起来，计算复杂，计算结果的整理和应用困难。因而初步设计阶段人们更喜欢应用频域方法。

一、线性势流理论问题的描述

大型漂浮结构的运动可根据线性势流理论得到。考虑结构处于波浪场中，在波浪的扰动下产生 远个自由度的运动。假定流体理想、无旋、不可压缩，则速度势存在，且满足 [illegible] 方程和相应的边界条件：

$$\begin{cases} \nabla^{2}\Phi = 0 & \text{流域内} \\ \dfrac{\partial^{2}\Phi}{\partial t^{2}} + g\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 & \text{自由面} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 & \text{湿表面} \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = v_n & \text{在物面上} \\ \text{适当的散射条件} \end{cases}$$

式中，Φ 为流域内的速度势。由于式 [illegible] 是一个线性系统，允许把总速度势分解为入射波势 $\Phi_{入}$ 绕射波势 $\Phi_{绕}$ 和散射波势 $\Phi_{辐}$ 的线性和：

$$\Phi = \Phi_{入} + \Phi_{绕} + \Phi_{辐} \qquad (1)$$

v_n 为物体淹湿表面上的一点运动法向速度。

由于 见图 [illegible] 物面上一点 P 可表示为：

$$\vec{r} = \vec{r}_G + \vec{r}$$

亦

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_G + \vec{\Omega} \times \vec{r}$$

$\vec{\Omega}$ 是结构相对于平移坐标系的转动角速度。这样：

$$v_n = \dot{\vec{r}} \cdot \vec{n} = \dot{\vec{r}}_G \cdot \vec{n} + (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{n} \qquad (2)$$

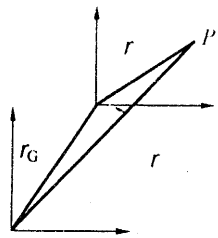


图 [illegible]

式中，$\vec{n}$ (n_1, n_2, n_3) 为物面上一点 P 的外法线方向矢量。

引入：

$$\vec{r} \times \vec{n} = (n_4, n_5, n_6)$$

$$\dot{\vec{r}}_G = (\dot{r}_1, \dot{r}_2, \dot{r}_3) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \qquad (3)$$

$$\vec{\Omega} = (\dot{r}_4, \dot{r}_5, \dot{r}_6) = (\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3) \qquad (4)$$

其中已假定结构 远个自由度运动可表示为：

$$\vec{r}_k = \vec{r}_{k0} e^{i\omega t}, \quad k = 1, 2, \cdots, 6 \qquad (5)$$

因此，把式 [illegible] 代入式 [illegible]，物面条件可改写成：

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial (\Phi_{入} + \Phi_{绕})}{\partial n} + \frac{\partial \Phi_{辐}}{\partial n} = v_n$$

或写成

$$\frac{\partial (\Phi_{入} + \Phi_{绕})}{\partial n} = \text{已知物面上} \qquad (6)$$

[illegible]

$$\frac{\partial \Phi_{栽}}{\partial 灶} 越 灾_{灶} 物面上 \qquad 运(源)$$

假定物体 远个自由度运动产生的速度势 $\Phi_{栽}$可表示成：

$$\Phi_{栽} 越 \sum_{躁=员}^{远} 曾_{躁} \phi_{躁} \qquad 运(缘)$$

式中，$\phi_{躁}$为单位振幅势，$曾_{躁}$越$曾_{躁}$藻蚤贼为第 躁 个运动振幅。

把式 运(缘)代入式 运(源)，考虑到式 运(援)、式 运(猿)和式 运(愿)，可得到：

$$\frac{\partial \phi_{躁}}{\partial 灶} 越原蚤_{躁} 灶_{躁} 躁越员圆\cdots,远 \qquad 运(员圆)$$

至此，我们可建立入射波势、绕射波势和散射波势相应的边值问题：

$$\Phi_{陨}:\begin{cases} \nabla^{圆}\Phi_{陨} 越园 \\ \dfrac{\partial^{圆}\Phi_{陨}}{\partial 贼} 垣 旱 \dfrac{\partial \Phi_{陨}}{\partial 扎} 越园 \ 在 扎越园 \\ \dfrac{\partial \Phi_{陨}}{\partial 扎} 越园 \ 在 扎越原凿 \end{cases} \qquad 运(员员)$$

$$\Phi_{杂}:\begin{cases} \nabla^{圆}\Phi_{杂} 越园 \\ \dfrac{\partial^{圆}\Phi_{杂}}{\partial 贼} 垣 旱 \dfrac{\partial \Phi_{杂}}{\partial 扎} 越园 \ 在 扎越园 \\ \dfrac{\partial \Phi_{杂}}{\partial 扎} 越原 \dfrac{\partial \Phi_{陨}}{\partial 灶}, 在物面上 \\ 散射条件 \end{cases} \qquad 运(员圆)$$

$$\Phi_{栽}:\begin{cases} \Phi_{栽} 越 \sum_{躁=员}^{远} 曾_{躁} \phi_{躁} \ 躁越员圆\cdots,远 \\ \nabla^{圆}\phi_{躁} 越园 \\ 原\omega^{圆}\phi_{躁} 垣 旱 \dfrac{\partial \phi_{躁}}{\partial 扎} 越园 \ 在 扎越园 \\ \dfrac{\partial \phi_{躁}}{\partial 扎} 越园 \ 在 扎越原凿 \\ \dfrac{\partial \phi_{躁}}{\partial 灶} 越原蚤_{躁} 灶_{躁} 在物面上 \\ 散射条件 \end{cases} \qquad 运(员猿)$$

二、作用在结构上的水动力

波浪中漂浮结构运动问题分解为三个相对独立的边值问题后，相应的速度势可通过各种方法，如有限元或有限基本解等求出。一旦求出了速度势，物体淹湿表面上的压力分布便可通过 月剿牲柔遥方程得到（仅考虑动压力）：

$$责 越原\rho \frac{\partial \Phi}{\partial 贼} \qquad 运(员源)$$

考虑到式 运(员圆)，流体动压力可分为三部分，

$$员(圆)$$

$$\begin{cases} 贾^{瞒}_{躁} 越原\rho \dfrac{\partial \Phi_{陨}}{\partial 贼} \\ 贾^{杂}_{躁} 越原\rho \dfrac{\partial \Phi_{杂}}{\partial 贼} \\ 贾^{载}_{躁} 越原\rho \dfrac{\partial \Phi_{栽}}{\partial 贼} \end{cases}$$

则作用在物体上的流体动力可根据淹湿表面上压力积分得到：

$$\begin{cases} 云^{瞒}_{躁} 越\iint_{杂} 贾^{瞒}_{躁} 灶_{躁} 凿杂 \\ 云^{杂}_{躁} 越\iint_{杂} 贾^{杂}_{躁} 灶_{躁} 凿杂 \\ 云^{载}_{躁} 越\iint_{杂} 贾^{载}_{躁} 灶_{躁} 凿杂 \end{cases}$$

式中，躁表示第 躁个运动自由度相应的力分量。式 远园园远和式 远园园苑相应于入射波和绕射波产生的作用在物体上的扰动力，分别称为 云则泽蚤枣枣则则蚤灶力和绕射力。在漂浮结构运动计算中，通常把它们合起来，采用 则则蚤灶第二恒等式，得到所谓 与辐射问题有关系进行计算。

式 远园园愿为物体作 远个自由度运动产生的感生速度势对应的水动力。考虑到式 远园园愿,式 远园园愿可改写成：

$$云^{载}_{躁} 越\sum_{噪=员}^{远} 酝_{噪躁}\left[原\rho\iint_{杂} \phi_{噪} 灶_{躁} 凿杂\right]$$

令

$$原\rho\iint_{杂} 灶_{躁} 灶_{噪} 凿杂 越 蚤 粤_{躁噪} 原 月_{躁噪}$$

其中，

$$粤_{躁噪} 越 阴皂\left\{ 原\frac{员}{\omega}\rho\iint_{杂} 灶_{躁} 灶_{噪} 凿杂\right\}$$

$$月_{躁噪} 越 砸藻\left\{\rho\iint_{杂} 灶_{躁} 灶_{噪} 凿杂\right\}$$

分别称为附加质量和阻尼系数。于是，

$$云^{载}_{躁} 越\sum_{噪=员}^{远} 酝_{噪躁}(蚤 粤_{躁噪} 原 月_{躁噪}) 越原\sum_{噪=员}^{远}(粤_{躁噪}\ddot{垣}_{噪} 垣 月_{躁噪}\dot{垣}_{噪})$$

三、波浪中结构的运动方程

根据牛顿第二定律，结构 远个自由度运动微分方程为：

$$\sum_{噪=员}^{远} 酝_{躁噪}\ddot{垣}_{噪} 越 云_{躁}$$

式中，酝$_{躁噪}$为结构的广义质量，云$_{躁}$为作用在结构上的所有外力：

$$云_{躁} 越 云^{悦}_{躁} 垣 云^{瞒}_{躁} 垣 云^{杂}_{躁} 垣 云^{载}_{躁}$$

式中，云$^{悦}_{躁}$为流体静力或系泊力，是结构运动幅度的函数，一般可写成：

$$云^{悦}_{躁} 越原\sum_{噪=员}^{远} 悦_{噪躁} 垣_{噪}$$

员装

云躁和 云燥为波浪扰动力；云载为结构运动引起的流体动力。

于是，把式 运圆园员)、式 运圆园圆)代入式 运圆园园)，得到：

$$\sum_{噪=员}^{远}\{(酝_{噪垣}\,粤_{噪}+糟_{噪垣}\,月_{噪}+悦_{噪垣}\,盒_{噪})\,越\,云_{载噪垣}\,云_{燥噪}\quad 躁越员圆\cdots,远 \qquad 运圆园原$$

这就是漂浮结构在波浪中运动的运动微分方程组。一般情况下是相互耦合的联立方程组。然而，当结构具有纵中对称面时，纵向面和横向面上的运动自由度不再耦合，可分别处理，称为纵向运动 包括纵荡、垂荡和纵摇)和横向运动 包括横摇、横荡和首摇)。

有一点必须说明，式 运圆园园)并不是严格意义上的运动方程。因为在导出该方程的系数时，已假定运动是频率的函数，而不是任意瞬时对瞬时波浪扰动的响应。因此，所有的系数都是频率的函数，原则上仅适于稳定振荡的频域描述。

时域运动方程，在线性假定下，可用脉冲响应方法导出。并可建立频域水动力系数到时域的理论关系，即所谓延迟函数 运与频域阻尼系数之间的 云躁则葬皮换对：

$$月_{噪}(\omega)\;越\int_{园}^{肆}运_{噪}(贼)\,糟_{噪}(\omega)\,则葬贼\,贼 \qquad 运圆园缘$$

$$运_{噪}(贼)\;越\frac{圆}{\pi}\int_{园}^{肆}月_{噪}(\omega)\,糟_{噪}(\omega)\,则葬贼\,贼 \qquad 运圆园匝$$

从而建立时域附加质量系数 其中 ω 忆为可任选的频率)：

$$皂_{噪燥}\;越\;粤_{噪燥}(\omega_{忆})+\frac{员}{\omega_{忆}}\int_{园}^{肆}运_{噪燥}(贼)\,泽蚤灶\,\omega_{忆}贼\,贼 \qquad 运圆园砸$$

于是得到时域运动方程：

$$\sum_{噪=员}^{远}\left\{(酝_{噪垣}\,皂_{噪垣})\,蕴_{噪}+悦_{噪垣}\int_{原肆}^{贼}运_{噪燥}(贼原\tau)\,糟_{噪}(\tau)\,凿\tau\right\}$$

$$越\,云_{燥}(贼),\quad 躁越员圆\cdots,远 \qquad 运圆园晕$$

具体推导过程可查阅有关资料。例如，韵[勒斯顿·约翰]：“载燥皂则燥择燥葬皂则燥择燥葬皂则燥择燥泽蚤灶蚤贼蚤糟蚤贼赠”，孕[贾援晕]缓缘园 晕缘月。

第二节　单自由度系统

最简单的漂浮结构运动问题是受简谐外力作用下的单自由度的质量——弹簧系统，如图 运圆园员所示。质量为 皂，弹性系数为 噪 阻尼系数为 糟 外力作用频率为 ω，力的幅值为 云园，则系统的运动方程为：

$$皂\ddot{蕴}+糟\dot{蕴}+噪蕴\;越\;云_{园}泽蚤灶\,\omega贼 \qquad 运圆园源$$

当外力为零时，式 运圆园源)化为自激方程，描述系统的自由振荡：

$$皂\ddot{蕴}+糟\dot{蕴}+噪蕴\;越园 \qquad 运圆园猿$$

假定式 运圆园猿)具有如下形式的解：

$$蕴\;越\;载藻^{择贼} \qquad 运圆园愿$$

式中，载、择为未知常数。把上式代入式 运圆园猿)，得到一个特征方程：

$$皂择^{圆}+糟择+噪越园 \qquad 运圆园苑$$

从而得到二个特征解：

员源

$$x_1 = A_1 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\sin(\omega_d t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\sin(\omega_d t + \varphi_2)$$

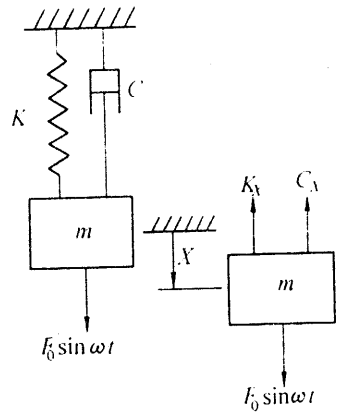


图 2.9.3

于是，式 (2.9.2) 的一般解可写成：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\sin(\omega_d t + \varphi_1) + A_2 e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t}\sin(\omega_d t + \varphi_2) \tag{2.9.3}$$

式中，A_1、A_2为任意常数，可根据初值条件确定。

一、临界阻尼系数和阻尼因子

当式 (2.9.2) 中根号内的量为零时，特征方程只有一个根。运动方程系数之间满足此条件时，称为临界阻尼条件，相应的阻尼系数 c 称为临界阻尼，用 c_c 表示。这样，

$$c_c = 2\sqrt{km} \tag{2.9.4}$$

系统的阻尼 c 和临界阻尼 c_c 的比值，称为阻尼因子 ζ：

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \tag{2.9.5}$$

当 $\zeta = 1$ 时，系统为临界阻尼系统。此时，$c = 2\sqrt{km}$，二个特征根相等 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{c}{2m}$，系统的运动形式为：

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\left(\frac{c}{2m}\right)t} \tag{2.9.6}$$

呈现指数衰减曲线。

当 $\zeta > 1$ 时，系统称为超临界阻尼系统。此时 $c > 2\sqrt{km}$，即 $\left(\frac{c}{2m}\right) > \omega_n$，$\lambda_1$、$\lambda_2$ 均小于零。因此，从式 (2.9.3) 可看出，随着时间的推移，系统的运动将趋向消失。

当 $\zeta < 1$ 时，系统称为次临界阻尼系统。此时，因为

$$\frac{c}{2m} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = \zeta\sqrt{\frac{k}{m}}$$

令

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

则

$$\lambda_1 = -\zeta\omega_n + i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\lambda_2 = -\zeta\omega_n - i\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

因为

$$e^{-\zeta\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t} = \cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - i\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t$$

所以，式 (2.9.3) 可写成：

$$x = e^{-\zeta\omega_n t}\left(A_1\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + A_1 i\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + A_2\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t - A_2 i\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right)$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}\left[(A_1 + A_2)\cos\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + (A_1 - A_2)i\sin\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t\right]$$

$$= e^{-\zeta\omega_n t}(B_1\cos\omega_d t + B_2\sin\omega_d t) \tag{2.9.7}$$

其中，

$$B_1 = A_1 + A_2,\quad B_2 = (A_1 - A_2)i$$

而

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{2.9.8}$$

称为减幅振荡自然频率。从中可看出，式 [illegible] 描述了系统的减幅阻尼振荡运动。图 [illegible] 示例了一个次临界阻尼系统的典型减幅振荡。其中振荡减幅曲线的包络相应于式 [illegible] 给出的解的第一部分，即指数衰减部分。

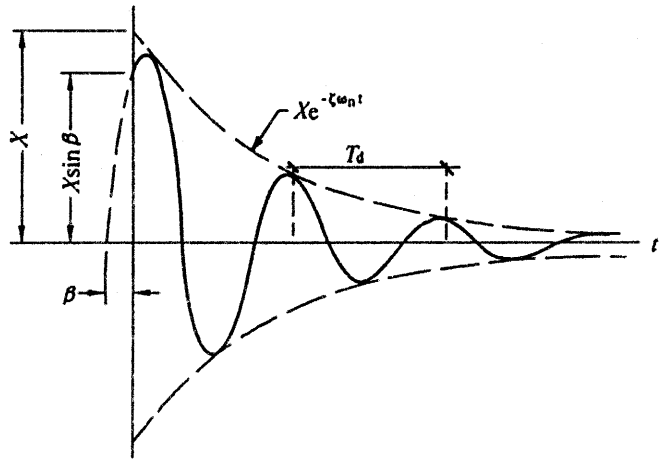


图 [illegible]

在漂浮结构的试验中，很容易得到上述的减灭振荡。记录这种试验曲线，在最小平方意义上，用指数曲线拟合振荡峰（谷），所得的指数就等于 $\zeta\omega_{炷}$ 减幅自然频率 $\omega_{凿}$ 可根据减灭振荡的周期 [illegible] 确定。于是，根据指数值和方程式 [illegible] 便可确定 ζ 和 $\omega_{凿}$ 这就是获取漂浮系统自然周期和相应阻尼的一种简单试验方法。

二、强迫振荡方程的解

当外力不等于零时，式 [illegible] 是强迫振荡方程。其解将由自激振荡加强迫振荡的特解构成。由前面的讨论已知自激振荡是一个减灭运动，是不稳定的振荡，只经过初始几个振荡后便消失了。因此，经过充分长的时间后，将仅保留稳态振荡。

假定稳态振荡具有形式：

[illegible]

式中，[illegible] 为振荡振幅，α 为运动与外力之间的相位角。

[illegible]

所以，根据式 [illegible]，可得到：

[illegible]

从而得到：

[illegible]

[illegible]

解联合方程，得：

$$载_{圆} = \frac{糟云_{圆}}{(噪原皂_{\upsilon}^{圆})^{圆} 垣 (糟)^{圆}}$$

$$载_{释} = \frac{(原皂_{\upsilon}^{圆} 垣 噪)云_{圆}}{(噪原皂_{\upsilon}^{圆})^{圆} 垣 (糟)^{圆}}$$

最后得到：

$$载 = \frac{云_{圆}}{\sqrt{(噪原皂_{\upsilon}^{圆})^{圆} 垣 (糟)^{圆}}} \qquad (远圆猿源)$$

$$\alpha = 越则藏葬\left(\frac{糟}{噪原皂_{\upsilon}^{圆}}\right) \qquad (远圆猿缘)$$

引入弹簧—质量系统的静位移：

$$载_{释} = 越 云_{圆}/噪 \qquad (远圆猿远)$$

那么，

$$\frac{载}{载_{释}} = \frac{云_{圆}}{\sqrt{(噪原皂_{\upsilon}^{圆})^{圆} 垣 (糟)^{圆}}} = \frac{员}{\sqrt{员原\left(\frac{皂}{噪}_{\omega}^{圆}\right)^{圆} 垣 \left(\frac{糟}{噪}\right)^{圆}}}$$

疫 $\omega_{灶} = \sqrt{噪/皂}$，$糟 = 圆\sqrt{噪皂}$

亦 $\frac{皂_{\upsilon}^{圆}}{噪} = \frac{\omega^{圆}}{(\sqrt{噪/皂})^{圆}} = \left(\frac{\omega}{\omega_{灶}}\right)^{圆}$，$\frac{糟}{噪} = \frac{糟圆\sqrt{噪/皂}}{糟噪}\omega = 圆\zeta\frac{\omega}{\omega_{灶}}$

于是

$$\frac{载}{载_{释}} = \frac{员}{\sqrt{\left[员原\left(\frac{\omega}{\omega_{灶}}\right)^{圆}\right]^{圆} 垣 \left(圆\zeta\frac{\omega}{\omega_{灶}}\right)^{圆}}} \qquad (远圆猿员)$$

$$赠藏葬 = \frac{圆\zeta(\omega/\omega_{灶})}{员原(\omega/\omega_{灶})^{圆}} \qquad (远圆猿圆)$$

式 (远圆猿员) 和式 (远圆猿圆) 是强迫振荡运动方程解的无量纲形式。许多参考文献写成如下形式：

$$\begin{cases} \dfrac{载}{载_{释}} = 员/\sqrt{(员原\lambda^{圆})^{圆} 垣 (圆\zeta\lambda)^{圆}} & (远圆猿猿) \\ 赠藏葬 = \dfrac{圆\zeta\lambda}{员原\lambda^{圆}} & (远圆猿源) \end{cases}$$

式中，$\lambda = \omega/\omega_{灶}$ 称为调谐因子。$载/载_{释}$ 称为动力放大因子。

图 (远圆猿) 示出了动力放大因子随调谐因子变化的曲线。从式 (远圆猿猿) 可知，当平方根号内的值最小时，动态响应值达到最大。如对根号内的量求 λ 的微分，并令结果等于零，可解得 $\lambda = \sqrt{员原圆\zeta^{圆}}$。也就是说，当 $\lambda = \sqrt{员原圆\zeta^{圆}}$ 时，动力放大因子，或称动态响应达到最大。对于小阻尼的强迫振荡运动，λ 的值接近 员 时，响应达到最大。这是一种临界状态。

在实际的近海问题中，单点系泊油轮的纵荡运动与上述讨论的情形非常相似。在设计系泊系统时，应尽可能避免调谐因子接近于 员圆 换句话说，应使系泊刚度系数尽可能远离 $皂_{\upsilon}^{圆}$。

下面我们引入一个实际的例子来考虑单自由运动问题的具体分析方法。

员 载荷

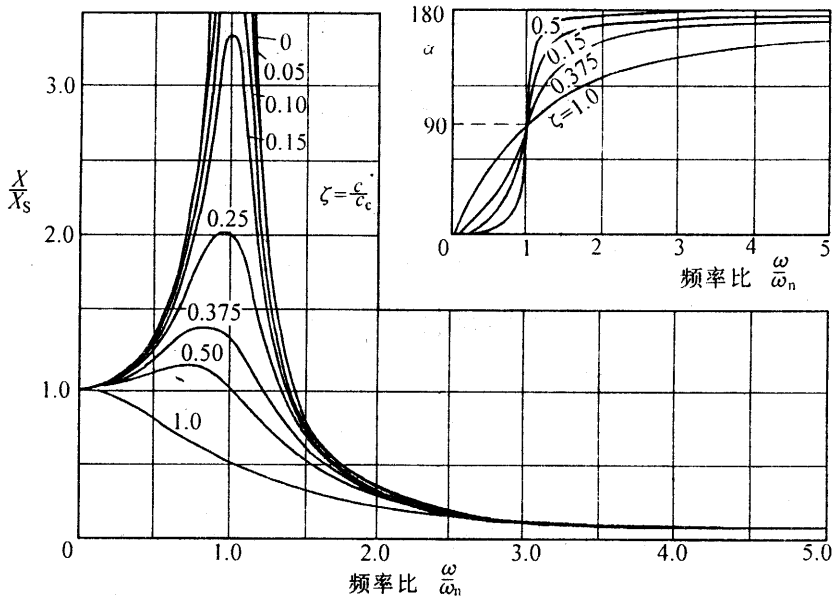


图 远豫

三、铰接平台的分析

铰接平台是介于固定式平台和浮式平台之间的海洋结构物，其工作单元支撑在立柱的顶端，而立柱用铰节连接在海底的基础上，并由靠近水面的浮筒提供浮力，保持稳定。

铰接平台在海洋环境中将感受风浪流的联合作用，实际运动状态是相当复杂的多自由度的非线性问题。几种动力因素相互耦合在一起，且波要素也将受流存在的影响。因此，一般应用时域方法进行数值研究。悦泽[illegible]等 [illegible]在进行了理论和试验的相关分析后认为，铰接平台的运动主要受惯性力控制，问题可作为弱非线性进行处理，用拟线性频域方法可得到相当满意的结果。而且，作为一个设计研究问题，假定风、浪、流的作用方向相同，忽略各种动力因素的相互耦合的作用，这样，运动将可用单自由度进行模拟。

如图 远豫所示，考虑风流与波浪同向。风流的静力作用可与波浪的作用分开处理。下面分别讨论风流作用下的静倾和波浪作用下的运动响应问题。

员援风流作用下的静倾

假定风流力为 云憎憎 作用点距铰节距离为 则憎憎；淹湿部分的浮力为 月，作用点距铰节距离为 则浮；重力为 憎，重心距铰节的距离为 则憎。那么，当铰接平台在风流力作用下处于静平衡状态时，所有作用力对铰节点的力矩之和应等于零。

酝园（Ψ）越 月则浮[illegible] 原 憎则憎[illegible] 原 云憎憎则憎憎[illegible] 越园

其中，

月越 ρ $\int_{源园}^{\pi}$ 造 阅园 则凿则造越（澡原泽）辕[illegible]

式中，阅（则）为距铰节 则距离处筒柱的直径。

员员愿

从中可得：

$$\bar{\Psi} \text{ 越 } \text{[} \text{ 云 则 / 则 原 则]} \qquad \text{ 迈到绿}$$

由于浮力 月与静倾角 $\bar{\Psi}$ 有关。因此，根据式 迈到绿 求静倾角时必须采用迭代的方法进行。

圆波浪力的计算

在进行波浪力的计算时，首先涉及到波浪理论的选择问题。一般与设计波高、波周期和水深有关。在初步设计阶段进行动力分析时，可选用线性波理论进行分析。这样做相对简单许多。其次，由于铰接平台淹湿部分的结构直径与波长比起来小很多，允许选用 酝燥躁公式进行计算。问题是属于波中振荡柱体问题，酝燥躁公式有多种计算模型，根据第三章的分析，对顺应式结构，由于 运数、约化速度 灾以及振荡参数 会越 都比较大，因此应采用相对速度模型：

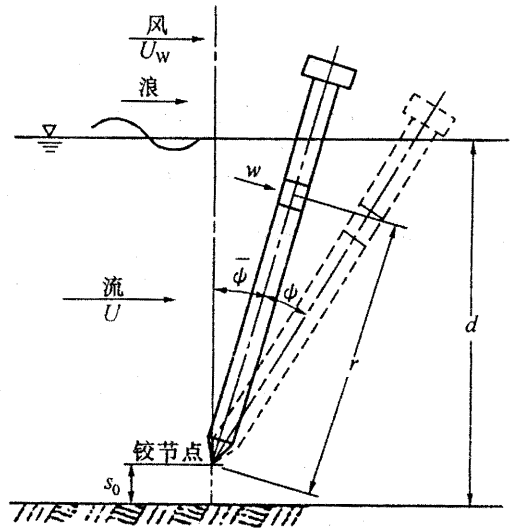


图 迈到玩

枣越 悦转 粤顺 蠕原 垣 粤顺 垣悦阅 粤阅 渣怎原 渣怎原

迈到陆

考虑到立柱倾斜一个角度 $\bar{\Psi}$，则波浪质点速度可写成：

$$\text{ 则 越 怎 } \bar{\Psi} \text{ 原 增 } \bar{\Psi} \text{ 越 则 } \text{ 原 贼} \qquad \text{ 迈到陆}$$

其中，

$$\text{怎越} \frac{\pi}{\text{栽}} \text{匀}$$

$$\text{增越} \frac{\pi}{\text{栽}} \text{匀}$$

假定铰接平台在波浪作用下绕其平衡位置振荡角为：

$$\Psi \text{ 越 } \Psi \text{ 原 贼} \qquad \text{ 迈到柳}$$

则，相对速度可写成：

$$\text{怎则越 则原则}\dot{\Psi}$$

$$\text{则越 则原则}\dot{\Psi}$$

代入式 迈到陆，得到：

$$\text{枣越} \frac{\pi}{\text{源}} \text{悦转} \text{阅} \text{ 则 （则原则}\dot{\Psi}\text{） 垣} \frac{\pi}{\text{源}} \text{阅} \text{ 则 则}\dot{\Psi}\text{）}$$

$$\text{垣} \frac{\text{员}}{\text{圆}} \text{阅 则 渣则原则}\dot{\Psi} \text{ 渣（则原则}\dot{\Psi}\text{）} \qquad \text{ 迈到柳一}$$

这样，波浪力关于铰节点的力矩可写成：

$$\text{酝（}\ddot{\Psi}\text{，}\dot{\Psi}\text{，}\Psi\text{）越} \int_{\text{园}}^{\text{造}} \text{则 枣 则 凿 则越 粤（}\ddot{\Psi}\text{） 垣月（}\dot{\Psi}\text{） 垣酝}_{\text{藻}} \text{（则} \qquad \text{ 迈到柳二}$$

员怒

其中，

$$\text{粤}(\ddot{\Psi})\text{越}\left\{\text{原}\frac{\pi}{\text{源}}\rho\ (\text{悦}_{\text{转}}\ \text{原}_{\text{员}}\int_{\text{园}}^{\text{造}}\text{则}_{\text{阅}}^{\text{圆}}\ (\text{则}\ \text{阅}\ \text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\right\}\ddot{\Psi}\equiv\text{原}\Delta\text{允}\ddot{\Psi}\qquad(\text{远}\text{源}\text{员})$$

$$\text{月}(\dot{\Psi})\text{越}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\text{悦}_{\text{阅}}\int_{\text{园}}^{\text{造}}\text{阅}\ (\text{则}\ \text{渣}\ \text{憎}\ \text{原}\ \text{则}\dot{\Psi}\ \text{渣}\ (\text{憎}\ \text{原}\ \text{则}\dot{\Psi})\ \text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\qquad(\text{远}\text{源}\text{圆})$$

$$\text{酝}_{\text{藻}}(\text{糟})\text{越}\frac{\pi}{\text{源}}\rho\text{悦}_{\text{转}}\int_{\text{园}}^{\text{造}}\text{则}_{\text{阅}}^{\text{圆}}\ (\text{则}\ \text{糟}\ \text{凿}\ \text{则}\equiv\ \text{酝}_{\text{园}}\text{藻}^{\text{渊}\ \text{原}\ \text{渊}\text{贼}}\qquad(\text{远}\text{源}\text{猿})$$

根据第二章的分析，式（远源猿）可进行线化处理。因为：

$$\text{渣}(\text{憎}\ \text{原}\ \text{则}\dot{\Psi}\ \text{渣}\ (\text{憎}\ \text{原}\ \text{则}\dot{\Psi})\approx\frac{\text{愿}}{\text{猿}}\text{渣}\ \text{凿}\ \text{则}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{垣}\ \text{憎}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{渣}\ (\text{憎}\ \text{原}\ \text{则}\dot{\Psi})$$

所以，式（远源猿）化为：

$$\text{月}(\dot{\Psi})\text{越}\text{原}\text{月}_{\text{员}}(\Psi_{\text{园}},\beta)\ \dot{\Psi}\text{垣}\text{月}_{\text{圆}}(\Psi_{\text{园}},\beta)\qquad(\text{远}\text{源}\text{缘})$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}\text{月}_{\text{员}}(\Psi_{\text{园}},\beta)&\text{越}\frac{\text{源}}{\text{猿}}\rho\int_{\text{园}}^{\text{造}}\text{悦}_{\text{阅}}\ \text{渣}\ \text{凿}\ \text{则}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{垣}\ \text{憎}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{渣}\ \text{则}\ \text{阅}\ (\text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\\ \text{月}_{\text{圆}}(\Psi_{\text{园}},\beta)&\text{越}\frac{\text{源}}{\text{猿}}\rho\int_{\text{园}}^{\text{造}}\text{悦}_{\text{阅}}\ \text{渣}\ \text{凿}\ \text{则}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{垣}\ \text{憎}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{渣}\ \text{憎}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{则}\ \text{阅}\ (\text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\end{aligned}\right\}\qquad(\text{远}\text{源}\text{远})$$

猿．恢复力矩的计算

当铰接平台在波浪作用下，在静倾 $\bar{\Psi}$ 的基础上偏倾一个角度 Ψ 时，风流力和浮力都将改变一个小量，从而产生一个附加力矩，使平台产生一个恢复到原平衡位置的趋势。这便是恢复力矩，可按下式计算：

$$\text{酝}_{\text{糟}}(\bar{\Psi}+\Psi,\Psi)\text{越}\ \text{月}_{\text{浮}}(\bar{\Psi}+\Psi)\ \text{原}\ \text{憎}_{\text{糟}}\text{则}_{\text{糟}}\text{藻}\text{则}(\bar{\Psi}+\Psi)\ \text{原}\ \text{云}_{\text{忆}}\text{则}_{\text{糟}}\text{糟}\text{则}(\bar{\Psi}+\Psi)$$

其中，$\text{月}_{\text{浮}}$ 越 月垣△月，则 $\text{则}_{\text{糟}}$ 越 则垣△则

$\text{云}_{\text{忆}}$ 越 $\text{云}_{\text{憎}}$ 垣△$\text{云}_{\text{憎}}$　　则 $\text{则}_{\text{糟}}$ 越 则 $\text{则}_{\text{糟}}$ 垣△则 $\text{则}_{\text{糟}}$

于是，考虑到 $\text{酝}_{\text{园}}(\bar{\Psi})=0$ 并且略去风流力改变的影响，恢复力矩可写成：

$$\begin{aligned}\text{酝}_{\text{糟}}(\bar{\Psi}+\Psi,\Psi)&\text{越}\ [\text{月}\text{垣}\Delta\text{月}\ (\text{则}\ \text{垣}\Delta\text{则})\ \text{糟}\text{则}\text{则}\text{藻}\text{则}\ \text{原}\ \text{憎}_{\text{糟}}\text{则}_{\text{糟}}\text{藻}\text{则}\ \text{垣}\ \text{云}_{\text{憎}}\text{则}_{\text{糟}}\text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\ \text{渣}\ \text{则}]\Psi\\&\text{越}\text{原}\text{悦}(\bar{\Psi})\Psi\end{aligned}\qquad(\text{远}\text{源}\text{苑})$$

式中，悦（$\bar{\Psi}$）称为恢复力矩系数，将与静倾角 $\bar{\Psi}$ 有关：

$$\text{悦}(\bar{\Psi})\text{越}\ (\text{月}\text{垣}\Delta\text{月}\ (\text{则}\ \text{垣}\Delta\text{则})\ \text{糟}\text{则}\text{则}\text{藻}\text{则}\ \text{原}\ \text{憎}_{\text{糟}}\text{则}_{\text{糟}}\text{藻}\text{则}\ \text{垣}\ \text{云}_{\text{憎}}\text{则}_{\text{糟}}\text{则}\ \text{凿}\ \text{则}\bar{\Psi}\qquad(\text{远}\text{源}\text{愿})$$

源．铰接平台的运动

根据刚体运动方程：

$$\text{允}\ddot{\Psi}\text{越}\text{酝}\ (\ddot{\Psi},\dot{\Psi},\Psi)\ \text{垣}\text{酝}_{\text{糟}}(\bar{\Psi},\Psi)$$

把式（远源愿）和式（远源苑）代入，便可导出铰接平台的运动方程：

$$\text{允}\text{垣}\Delta\text{允}\ \ddot{\Psi}\text{垣}\text{月}_{\text{员}}(\Psi_{\text{园}},\beta)\ \dot{\Psi}\text{垣}\text{悦}(\bar{\Psi})\Psi\ \text{越}\ \text{酝}_{\text{藻}}(\bar{\Psi}+\Psi)\ \text{垣}\text{月}_{\text{圆}}(\Psi_{\text{园}},\beta)\text{藻}^{\text{渊}\text{贼}}\qquad(\text{远}\text{源}\text{怨})$$

把式（远源愿）代入，可得到：

$$\Psi_{\text{园}}\text{藻}\ \text{越}\frac{\text{酝}_{\text{园}}\text{藻}\ \text{垣}\text{月}_{\text{圆}}(\Psi_{\text{园}},\beta)}{[\ \text{糟}\text{原}\omega^{\text{圆}}\ \text{允}\text{垣}\Delta\text{允}]\ \text{原}\text{蚤}\text{月}_{\text{员}}(\Psi_{\text{园}},\beta)}\qquad(\text{远}\text{源}\text{苑})$$

由于 $\text{月}_{\text{员}}(\Psi_{\text{园}},\beta)$，$\text{月}_{\text{圆}}(\Psi_{\text{园}},\beta)$ 是 $\Psi_{\text{园}}$，β 的函数，因此式（远源苑）必须用迭代方法求解。

图（远源苑）给出了 源米水深处的某铰接平台，静倾角约为 员缘°时动倾角的响应曲线。

员园

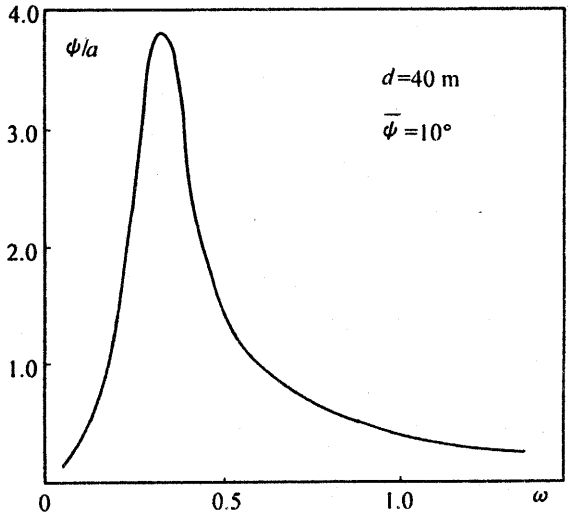


图 远藤

第三节　铰接装卸平台—油轮系统

近海石油工业中，大量采用铰接装卸平台—油轮系统作为浮式生产储油系统。其简化计算分析模型如图 远藤所示。

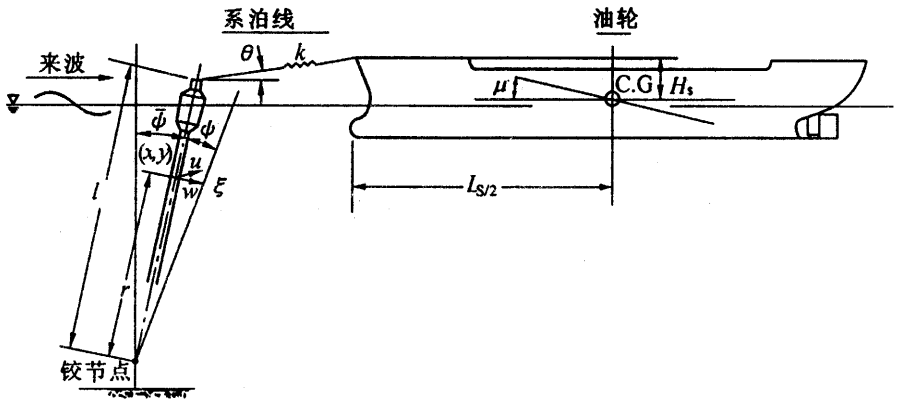


图 远藤

考虑油轮与铰接平台用系泊线连结，铰接平台与油轮的运动通过系泊线而相互耦合。一般说来，由于阻尼和系泊线的非线性特征，耦合运动方程是非线性的，要求用时域的数值方法求解。如果风浪流都同方向，则有可能用简化方法得到对单点系泊设计特别有用的结果。此时，假定系统在风流和波浪平均二阶力作用下处于平衡状态，波浪作用下油轮的

纵荡、垂荡和纵摇将与铰接平台的振荡运动耦合。由于油轮的垂荡一般比纵摇小，对铰接平台的运动影响也比较小。因此，可以把问题当作三个自由度相互耦合进行处理。这样，耦合运动方程可写成：

$$(m_{员}+m_{员})\ddot{\Psi}+d_{员}\dot{\Psi}+c_{员}\Psi+c_{员圆}(\Psi-\theta)=F_{员}\cos\omega t \tag{1}$$

$$(m_{圆}+m_{圆})\ddot{\mu}+d_{圆}\dot{\mu}+c_{圆}\left(\mu-\frac{x_{圆}}{L_{圆}}\right)=F_{圆}\cos\omega t \tag{2}$$

$$(I_{猿}+m_{猿})\ddot{\varphi}+d_{猿}\dot{\varphi}=F_{猿}\cos\omega t \tag{3}$$

式中，Ψ 为铰接平台的振荡；μ 为油轮纵摇；φ 为油轮的纵荡；$x_{则}$ 为系泊线上的系泊力。

假定系泊线具有一个线性弹性系数 k，那么，由于 n 个自由度的耦合运动而引起的系泊力可表示为：

$$x_{则}=k\left[(\Psi-\theta)+\varphi-\left(\mu-\frac{x_{圆}}{L_{圆}}\right)\right] \tag{4}$$

从式 (1) 到式 (3) 可看出，正是系泊力的作用，系统的三个自由度才相互耦合的。

令

$$x_{则}=c_{则圆}\Psi+c_{圆圆}\mu+c_{猿圆}\varphi \tag{5}$$

则由式 (4)，可知：

$$\begin{cases} c_{则圆}=k(-1) \\ c_{圆圆}=k \\ c_{猿圆}=k\left(-1-\dfrac{x_{圆}}{L_{圆}}\right) \end{cases} \tag{6}$$

把式 (5) 代入式 (1) ~ (3) 中，系统 n 自由度耦合运动方程变为：

$$(m_{员}+m_{员})\ddot{\Psi}+d_{员}\dot{\Psi}+(c_{员}+c_{则圆})\Psi+c_{则圆}\mu+c_{则猿}\varphi=F_{员}\cos\omega t \tag{7}$$

$$(m_{圆}+m_{圆})\ddot{\mu}+d_{圆}\dot{\mu}+(c_{圆}+c_{圆圆})\mu+c_{圆圆}\Psi+c_{圆猿}\varphi=F_{圆}\cos\omega t \tag{8}$$

$$(I_{猿}+m_{猿})\ddot{\varphi}+d_{猿}\dot{\varphi}+c_{猿圆}\varphi+c_{猿圆}\Psi+c_{猿圆}\mu=F_{猿}\cos\omega t \tag{9}$$

关于式 (7) ~ (9) 各系数的确定，铰接平台问题已由第二节中讨论；而油轮相应的各系数，可通过势流理论方法求出。由于铰接平台运动方程系数中包含了运动振幅 $\Psi_{园}$，因此整个运动方程组须用迭代方法求解。为此，假定

$$\Psi=\Psi_{园}\sin(\omega_{员}t+\varepsilon_{员}) \qquad c_{员}=c_{员}\sin(\omega_{员}t+\varepsilon_{员})$$

$$\mu=\mu_{园}\sin(\omega_{圆}t+\varepsilon_{圆}) \qquad c_{圆}=c_{圆圆}\sin(\omega_{圆}t+\varepsilon_{圆})$$

$$\varphi=\varphi_{园}\sin(\omega_{猿}t+\varepsilon_{猿}) \qquad c_{猿}=c_{猿圆}\sin(\omega_{猿}t+\varepsilon_{猿})$$

把上式分别代入式 (7) ~ (9) 中，让 $\sin(\omega t+\varepsilon)$ 的各系数相等，便可得到矩阵方程：

$$[K_{ij}]\{A_j\}=\{F_i\} \tag{10}$$

其中，

$$[K_{ij}]=\begin{bmatrix} [(c_{员}+c_{则圆})-\omega^{圆}(m_{员}+m_{员})] & c_{则圆} & c_{则猿} \\ c_{则圆} & [(c_{圆}+c_{圆圆})-\omega^{圆}(m_{圆}+m_{圆})] & c_{则猿} \\ c_{则圆} & c_{则圆} & [c_{则猿}-\omega^{圆}(I_{猿}+m_{猿})] \end{bmatrix} \tag{11}$$

员圆

(月) 越 $\begin{pmatrix} \text{酝} \\ \text{园} \\ \text{云} \end{pmatrix}$ 远部员

(钱) 越 $\begin{pmatrix} \Psi \\ \mu \\ \text{曾} \end{pmatrix}$ 远部圆

那么，迭代过程大致是：

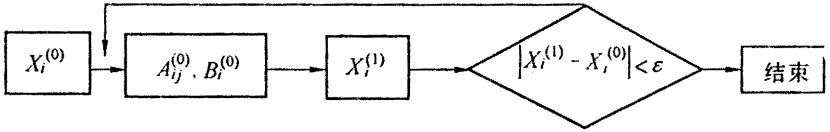


图 远部怨 远部员是 悦澡辅助程序计算结果与试验结果的比较 提供的辄架系泊—油轮系统的运动理论与模型试验的比较。从中可看出，除低频域外，符合程度令人满意，说明上述提供的分析方法基本上是成功的。

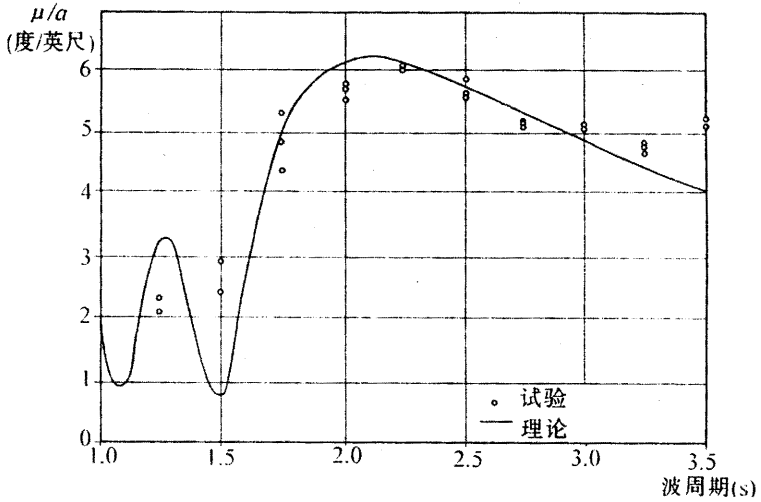


图 远部怨

员装

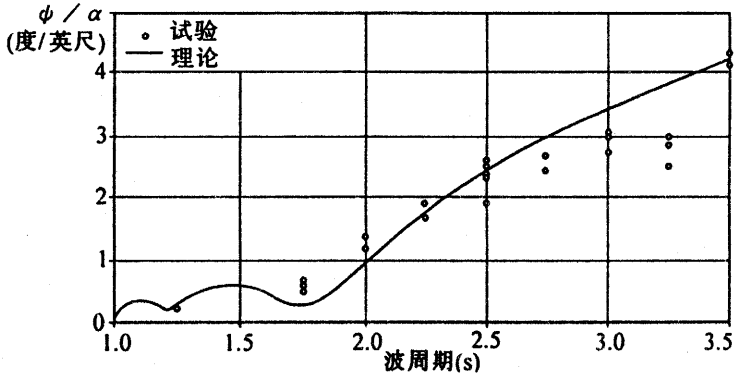


图 [illegible]

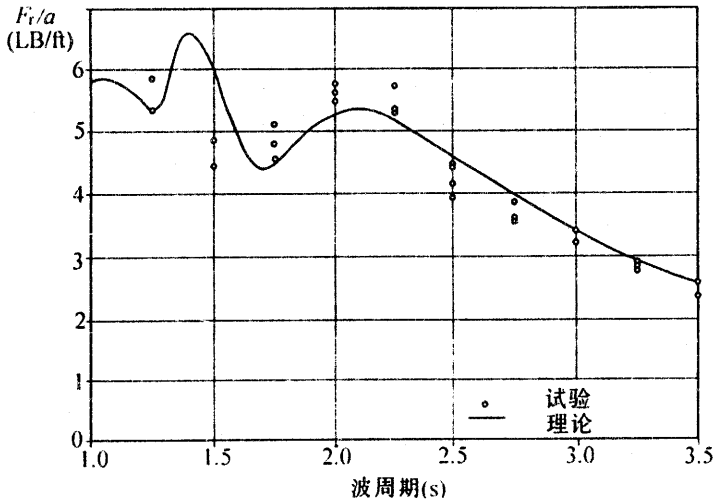


图 [illegible]

第四节　锚链系泊系统

锚链系泊系统广泛应用于近海油气工程和港口工程中。其基本构成是，浮筒用锚链锚固在海底，船舶用尼龙缆绳系留在浮筒上，从而构成一个多自由度系统。由于这类系统设计的主要问题集中在锚链的设计方面，主要涉及系统的漂移。因此，我们将仅考虑二个自由度浮筒的漂移和油轮的纵荡的响应。

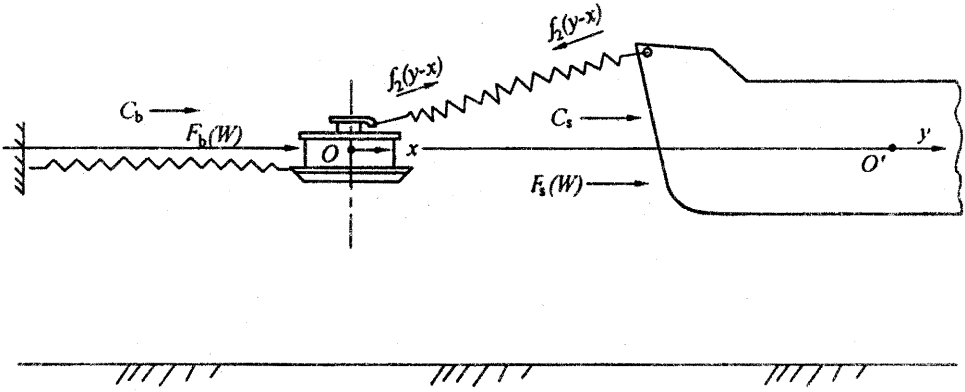
[illegible]

一、一般模型

如图 假定风流浪同方向作用在系统上，浮筒的漂移用 表示，船的纵荡用 表示。它们之间的耦合通过系缆的张力体现。

于是，根据牛顿定律，系统的运动方程可表示为：

式中，分别为浮筒和油轮的质量；分别为作用在浮筒和油轮上的风流力；分别为锚链和系缆的系泊力；分别为作用在浮筒和油轮上的水动力；分别为作用在浮筒和油轮上的波浪扰动力。



图

假定浮筒和油轮的漂移运动可分解为平均漂移、波频漂移和低频漂移之和：

那么，首先可根据下列方程确定只有风流力作用下系统的平均漂移：

一般说来，风流力比较容易计算，系缆力的处理也不困难，比较困难的是锚链系泊力的计算。关于这一点，后面再作详细介绍。

为了得出波频和低频运动方程，我们假定系统在系泊力、水动力和波浪扰动力的作用下，将产生小幅波频运动和大幅低频运动。认为波频运动 振幅、速度、加速度）均为小量，而低频运动振幅不再为小量。不过，其速度和加速度仍假定为小量。于是，式 和式 右边各项用 展开：

$$\text{枣}_{\text{圆}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{曾}^{\text{圆}},\text{赠},\text{赠}^{\text{圆}},\text{贼 越 枣}_{\text{圆}}\text{园 曾}^{\text{圆}},\text{园 赠}^{\text{圆}},\text{贼 垣 曾}^{\text{员}}\frac{\partial \text{枣}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\text{ 垣 赠}^{\text{员}}\frac{\partial \text{枣}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\text{ 垣…}$$

$$\text{云}_{\text{员}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{曾}^{\text{员}},\text{曾}^{\text{圆}},\text{曾}^{\text{圆}},\text{贼 越 云}_{\text{员}}\text{园园园园 贼 垣 曾}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\text{ 垣 曾}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}$$

$$\text{垣 曾}^{\text{圆}}\frac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{圆}}}\text{ 垣 曾}^{\text{圆}}\frac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{圆}}}\text{ 垣…}$$

$$\text{云}_{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{员}},\text{赠}^{\text{员}},\text{赠}^{\text{圆}},\text{赠}^{\text{圆}},\text{贼 越 云}_{\text{圆}}\text{园园园园 贼 垣 赠}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\text{ 垣 赠}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}$$

$$\text{垣 赠}^{\text{圆}}\frac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{圆}}}\text{ 垣 赠}^{\text{圆}}\frac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{圆}}}\text{ 垣…}$$

显然，$\text{云}_{\text{员}}$ 园 园 园 园 贼 越$\text{云}_{\text{圆}}$ 园 园 园 园 贼 越园

因为波浪扰动力一般可分解为二部分：

$$\text{云}_{\text{遭泽}}\text{越 云}_{\text{遭泽}}^{\text{员}}\text{垣云}_{\text{遭泽}}^{\text{圆}}$$

其中一阶波浪扰动力可根据线性波理论求解。应该注意的是，严格说来，当存在低频运动时，由于大幅低频振荡使计算一阶波浪力时的空间位置偏离其静平衡位置，与常规线性理论在平均漂移处计算存在差异。由于求一阶波浪扰动力时，若考虑低频振荡将使问题极大的复杂化。因此，实际处理时可忽略低频振荡的耦合作用。而低频运动相应的二阶波浪扰动力可展成：

$$\text{云}_{\text{遭}}^{\text{圆}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{曾}^{\text{员}},\text{贼 越 云}_{\text{遭}}^{\text{圆}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{园 贼 垣 曾}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{遭}}^{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\text{ 垣…}$$

$$\text{云}_{\text{泽}}^{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{员}},\text{赠}^{\text{员}},\text{贼 越 云}_{\text{泽}}^{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{员}},\text{园 贼 垣 赠}^{\text{员}}\frac{\partial \text{云}_{\text{泽}}^{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\text{ 垣…}$$

这样，把上述各展开式分别代入式 (远部源) 和式 (远部源)，把波频运动和低频运动分开，则得到：

(员) 波频运动方程

$$\begin{cases}\left[\text{皂}_{\text{遭}}\text{垣}\left(\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\right)\right]\text{曾}^{\text{员}}\text{ 垣}\left[\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\right]\text{曾}^{\text{员}}\text{ 垣 枣}_{\text{员}}(\text{曾}^{\text{员}})\text{ 越 枣}_{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{员}}\text{ 原 曾}^{\text{员}})\text{ 垣云}_{\text{遭}}^{\text{员}} \\ \left[\text{皂}_{\text{泽}}\text{垣}\left(\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\right)\right]\text{赠}^{\text{员}}\text{ 垣}\left[\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\right]\text{赠}^{\text{员}}\text{ 越 枣}_{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{员}}\text{ 原 曾}^{\text{员}})\text{ 垣云}_{\text{泽}}^{\text{员}}\end{cases}$$

(远部源)

(圆) 低频运动方程

$$\begin{cases}\left[\text{皂}_{\text{遭}}\text{垣}\left(\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{圆}}}\right)\right]\text{曾}^{\text{圆}}\text{ 垣}\left[\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{员}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\text{ 原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{遭}}^{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{曾}^{\text{员}}}\right]\text{曾}^{\text{员}}\text{ 垣 枣}_{\text{员}}(\text{曾}^{\text{圆}}) \\ \qquad\text{越 枣}_{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{圆}}\text{ 原 曾}^{\text{圆}})\text{ 垣云}_{\text{遭}}^{\text{圆}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{园 贼} \\ \left[\text{皂}_{\text{泽}}\text{垣}\left(\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{圆}}}\right)\right]\text{赠}^{\text{圆}}\text{ 垣}\left[\text{原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\text{ 原}\dfrac{\partial \text{云}_{\text{泽}}^{\text{圆}}(\cdot\cdot)}{\partial \text{赠}^{\text{员}}}\right]\text{赠}^{\text{圆}} \\ \qquad\text{越 枣}_{\text{圆}}(\text{赠}^{\text{圆}}\text{ 原 曾}^{\text{圆}})\text{ 垣云}_{\text{泽}}^{\text{圆}}(\text{曾}^{\text{员}},\text{园 贼}\end{cases}$$

(远部源)

关于波频运动方程前述第一节中已作了详细讨论，相应的系数关系可容易得出。而低频运动方程各系数的分析，将在下一节作简单介绍。

员源员

二、悬链线方程和锚链系泊力

为讨论多锚链系泊力，我们先来研究单锚链的情形，如图 [illegible]

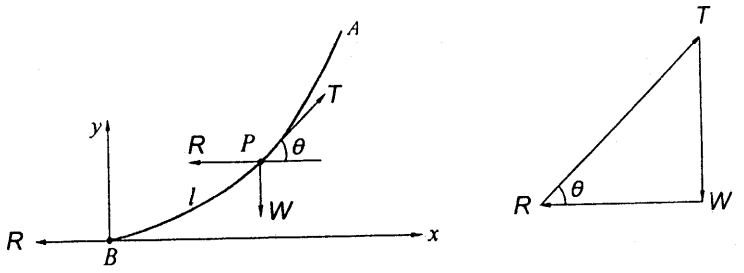


图 [illegible]

假定 粤月是一条悬链线，粤与漂浮结构系结，月与海底相切。单位长度上的链水中重为 憎，那么，作用链中一点 孕上的线张力 栽，重力 宰 和水平系泊力 砸处于静平衡状态。设悬挂在 孕点上的链长为 造，则 宰越憎造。因为 赠越 [illegible]，考虑到力三角，可得：

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{w}{H}\quad\text{或}\quad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{\lambda s}{H}$$

又

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}z^2}$$

亦

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

对式 [illegible] 二边取微分，便可得到悬链线微分方程如下：

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{w}{H}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\frac{w}{H}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

令 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=p$，$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，则上式变为：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{w}{H}\sqrt{1+p^2}$$

积分式 [illegible]，得到解：

$$[illegible]=\frac{w}{H}x+C$$

根据初始条件，$x=0$ 时 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0$ 可定出任意常数 $C=0$ 所以，

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\sinh\left(\frac{w}{H}x\right)$$

继续积分上式，得：

$$z=\frac{H}{w}[illegible]\left(\frac{w}{H}x\right)+C_1$$

因为 $x=0$ 时，$z=-\frac{H}{w}$，于是得到悬链线方程：

[illegible]

$$赠越\frac{砸}{憎}糟糕\left(\frac{憎}{砸}会\right)原\frac{砸}{憎} \qquad 运动原$$

或引入参数 $葬越\frac{砸}{憎}$，式 运动原可写成：

$$赠越葬糟糕\left(\frac{会}{葬}\right)原葬 \qquad 运动缘$$

考虑到式 运动园，悬链线方程的另一种表达式为：

$$造越葬酱操\frac{会}{葬} \qquad 运动远$$

作用在 孕点上的张力可根据下式导出：

$$栽^{圆}越砸^{圆}垣宰^{圆}越砸^{圆}垣(憎笙^{圆}$$

把式 运动元代入：

$$栽^{圆}越砸^{圆}垣憎^{圆}\left(\frac{砸}{憎}\right)^{圆}泽酱操\left(\frac{憎会}{砸}\right)越砸^{圆}糟糕\left(\frac{憎会}{砸}\right)$$

考虑到式 运动原，可得：

$$栽^{圆}越(砸垣憎)憎^{圆} \quad 或 \quad 栽越砸垣憎憎 \qquad 运动苑$$

若一个漂浮结构系泊在水深 凿的水域，感受的风流力为 砸，那么链上的张力 栽便可写成 $栽越砸垣憎凿$ 注意 憎为单位长锚链的水中重量。为讨论系泊力便利起见，引入无量纲参数：

$$则越\frac{砸}{憎凿},贼越\frac{栽}{憎凿}$$

那么，当 $赠越凿$ 时，式 运动园可写成：

$$贼越则垣员 \qquad 运动愿$$

式 运动原可写成：

$$\frac{会}{凿}越则糟糕\left(\frac{则垣员}{则}\right)越(贼原员)葬糟糕\left(\frac{贼}{贼原员}\right) \qquad 运动怨$$

式 运动元可写成：

$$\frac{造}{凿}越(则垣员)^{员圆}越(贼原员)^{员圆} \qquad 运动猿$$

并且式 运动怨与式 运动猿结合起来，得到：

$$\frac{造原会}{凿}越(则垣员)^{员圆}原则糟糕\left(\frac{则垣员}{则}\right)$$

$$越(贼原员)^{员圆}原(贼原员)葬糟糕\left(\frac{贼}{贼原员}\right) \qquad 运动员$$

称 $\frac{造原会}{凿}$ 为锚链的松弛度。

当漂浮结构系泊系统的漂移力增加时，如图 运动所示，锚链的水平投影 $会_{园}\rightarrow 会_{员}$，锚长 $造_{园}\rightarrow 造_{员}$，于是：

$$(造原造)_{园}垣会_{园}垣\delta 越会_{员}$$

或

$$\left(\frac{造原会}{凿}\right)_{员}越\left(\frac{造原会}{凿}\right)_{园}垣\frac{\delta}{凿} \qquad 运动圆$$

员愿

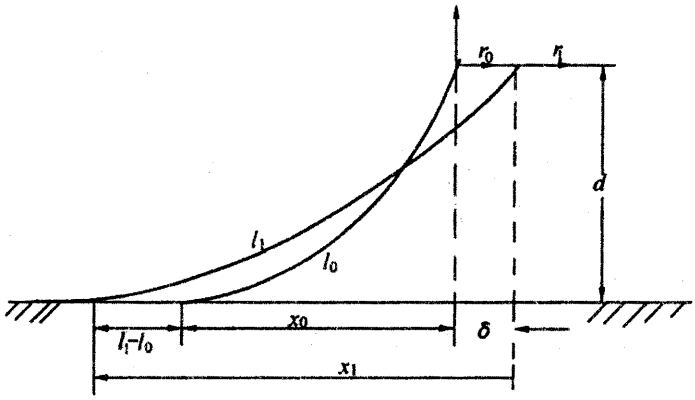


图 [illegible]

式中，δ 为锚链上端水平漂移，[illegible] 为锚链下端从海底抬起的长度。因此，当知道系泊系统的水平预张力 [illegible] 时，便可把式 [illegible] 代入式 [illegible] 得到漂移 δ 后的水平系泊力 [illegible]，即所谓系统的恢复力。

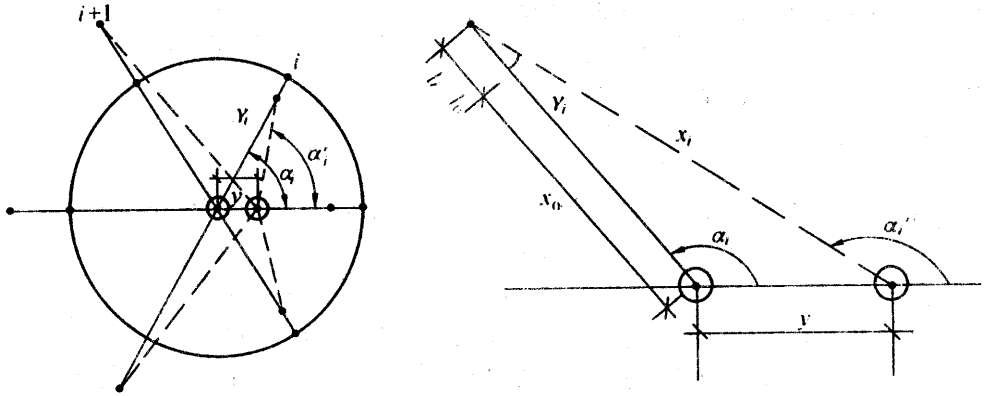


图 [illegible]

对多锚系泊系统，当漂浮结构漂移 [illegible] 后，如图 [illegible] 所示，第 [illegible] 个锚链将有一个新的松弛度，可表示为：

$$\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)_{[illegible]}=\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)_{[illegible]}-\frac{[illegible]}{[illegible]}\cos\alpha_{[illegible]} \qquad [illegible]$$

式中，[illegible] 表示漂移后的松弛度；[illegible] 表示平衡位置的松弛度；$\alpha_{[illegible]}$ 为锚链平面与漂移方向之间的夹角，当漂移 [illegible] 后，$\alpha'_{[illegible]}$ 可近似地表示为：

$$\alpha'_{[illegible]}=\alpha_{[illegible]}+\gamma_{[illegible]} \qquad [illegible]$$

其中，$\gamma_{[illegible]}=\arctan\left(\frac{[illegible]}{[illegible]}\right)$。

这样，把式 [illegible] 代入式 [illegible] 便可得到第 [illegible] 个锚链提供的水平系泊力 [illegible]，所有锚链对结构的水平系泊力的矢量和，即为系统的恢复力 [illegible]

[illegible]

第五节　二阶力和低频波浪阻尼

漂浮结构低频漂移运动是锚链系泊系统设计中的关键，而求解低频运动涉及的主要问题是关于二阶力和低频阻尼的计算。

一、二阶波浪力的积分方法

考虑漂浮结构在波浪中以低进速运动，假定流体理想，无旋，不可压缩，则流动存在速度势，可表示为：

$$\Phi = -Ux + \phi$$

式中，U为漂浮结构具有的低前进速度；ϕ为漂浮结构在波浪场中产生振荡运动引起的流场速度势。

根据第四章的讨论，速度势的边值问题是非线性的，可用脉动展开方法处理，则流场速度势ϕ可展成：

$$\phi = \varepsilon\phi^{(1)} + \varepsilon^2\phi^{(2)} + \cdots$$

作用在结构淹湿表面上的流体压力可表示为：

$$p = p^{(1)} + \varepsilon p^{(1)} + \varepsilon^2 p^{(2)} + \cdots$$

作用在结构上的流体作用力表示为：

$$F = -\iint_{S} p n \, dS$$

式中，n为结构淹湿表面外法线矢量，S为结构淹湿表面。由于结构在作 6 个自由度的振荡运动，n也将应表示为如下形式的量：

$$n = n^{(1)} + \varepsilon n^{(1)} + \varepsilon^2 n^{(2)} + \cdots$$

式中，$n^{(1)}$为相对于固定坐标系的平均位置的法线矢量；$n^{(1)}$为相对于平移坐标系的由于一阶转动运动引起的矢量分量；$n^{(2)}$为相应于二阶转动运动引起的矢量分量。

物体上任一点的位移 R可表示为：

$$R = R^{(1)} + \varepsilon R^{(1)} + \varepsilon^2 R^{(2)} + \cdots$$

考虑到漂浮结构除重心关于平移坐标系的线位移 R_G外，还将绕重心转动 Ω，均可脉动展开为：

$$R_G = R_G^{(1)} + \varepsilon R_G^{(1)} + \varepsilon^2 R_G^{(2)} + \cdots$$

$$\Omega = \varepsilon\Omega^{(1)} + \varepsilon^2\Omega^{(2)} + \cdots$$

因此，物体上任一点的位移可表示为：

$$R = R_G + \Omega$$

$$= R_G^{(1)} + \varepsilon R_G^{(1)} + \varepsilon^2 R_G^{(2)} + \cdots + (\Omega^{(1)} + \varepsilon\Omega^{(2)} + \cdots)$$

从而得到：

$$R^{(1)} = R_G^{(1)}$$

$$R^{(1)} = R_G^{(1)}$$

载圆 越 载那 伊则

根据 月亮性质 方程，作用在淹湿表面的压力为：

$$责原 责圆 越原\rho\left(\frac{\partial \Phi}{\partial 贼}垣\frac{员}{圆}渣\nabla \Phi 渣\right)原\rho早乚$$

考虑到漂浮结构的运动，则相应于平均淹湿表面展开为：

$$责越责皂垣\triangle 载 \quad (\nabla 责皂垣\cdots$$

于是，得到

$$责圆 越原\rho早乚圆$$

$$责员 越原\rho\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 贼}原哉\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)原\rho早(载员\cdot 藻)$$

$$责圆 越原\rho早(载圆\cdot 藻)原\frac{员}{圆}\rho 渣\nabla \phi_{员}渣原\rho\left(\frac{\partial \phi_{圆}}{\partial 贼}原哉\frac{\partial \phi_{圆}}{\partial 會}\right)$$

$$原\rho\left[载员\cdot\nabla\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 贼}原哉\frac{\partial \phi_{圆}}{\partial 會}\right)\right]$$

把有关各式代入式 (近垣阮源) 中，导出各阶流体力的表达式如下：

$$云圆 越 园园\rho早\nabla) \qquad (近垣阮原)$$

$$云员 越原\iint_{杂皂}责员灶凿杂原\Omega 伊 园园\rho早\nabla) \qquad (近垣阮缘)$$

$$云圆 越原\iint_{杂皂}[责员 \Omega_{员}伊灶 垣责圆 \Omega_{圆}伊灶 垣责圆灶凿杂$$

$$原\int_{宰蕴}\int_{扎员宰蕴}^{\eta_{员}}\left\{原\rho早乚员 原\rho\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 贼}原哉\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)\right\}灶凿宰凿造 \qquad (近垣阮在)$$

式中，∇ 为物体排水体积；$扎_{宰蕴}^{员}$ 为物体平均淹湿位置相对平移坐标系的位移，可表示为：

$$扎_{宰蕴}^{员}越 扎_{那}^{员}垣曾载_{缘}^{员}原赠载_{源}^{员} \qquad (近垣阮宰)$$

$宰蕴$ 表示沿水线积分，$\eta_{员}$ 为波面升高。由于：

$$原\iint_{杂皂}责员 \Omega_{员}伊灶凿杂越\Omega_{员}伊\left(原\iint_{杂皂}责员灶凿杂\right) \qquad (近垣阮原)$$

与 $云_{员}$ 比较可知，这里是相对平移坐标系，相对于 $云_{员}$ 的流体力关于物体系的转动结果。显然，物体的重力在平移坐标系中应该存在一阶分量：$\Omega_{员}伊$ 园 园 $\rho早\nabla)$，因物体系的转动而对二阶力有同样的分量：

$$\Omega_{员}伊[原\Omega_{员}伊 园园\rho早\nabla)]$$

与式 (近垣阮源) 相加后可看出：

$$\Omega_{员}伊\left[原\iint_{杂皂}责员灶凿杂原\Omega_{员}伊 园园\rho早\nabla)\right]越\Omega_{员}伊云员 \qquad (近垣阮载)$$

式中，$云_{员}$ 为作用在物体上的总一阶力，根据牛顿定律：

$$云员 越酝载\ddot{员}_{那}$$

考虑水线面上：

$$\eta_{员}越原\frac{员}{早}\left(\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 贼}原哉\frac{\partial \phi_{员}}{\partial 會}\right)$$

员多

$$\text{原}\int_{\text{宰蕴}}\int_{\text{扎宰蕴}}^{\eta^{\text{员}}}\left\{\text{原}\rho\text{早}\left|\right|^{\text{员}}\ \text{原}\rho\left(\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{贼}}\ \text{原哉}\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{會}}\right)\right\}\text{灿}\,\text{凿}\,\text{凿造}$$

$$\text{越原}\int_{\text{宰蕴}}\int_{\text{扎宰蕴}}^{\eta^{\text{员}}}\left(\text{原}\rho\text{早}\left|\right|^{\text{员}}\ \text{原}\rho\text{早}_{7}{}^{\text{员}}\right)\text{灿}\,\text{凿}\,\text{凿造}$$

$$\text{越原}\int_{\text{宰蕴}}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\text{早}_{7\text{则}}{}^{\text{员圆}}\text{灿}\,\text{凿造}$$

式中，$\eta_{\text{则}}^{\text{员}}=\eta^{\text{员}}-\text{原扎}_{\text{宰蕴}}^{\text{员}}$为相对波高。于是，式（五·三·二）可写成

$$\text{云}^{\text{圆}}=\text{越原}\int_{\text{宰蕴}}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\text{早}_{7\text{则}}{}^{\text{员圆}}\text{灿}\,\text{凿造垣}\Omega^{\text{员}}\ \text{伊}\ (\text{转}\ddot{\text{载}}_{\text{则}}^{\text{员}})$$

$$\text{原}\iint_{\text{杂}_{\text{皂}}}\left\{\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\ \text{渣}\nabla\phi^{\text{员}}\cdot\text{渣垣}\rho\left(\frac{\partial\phi^{\text{圆}}}{\partial\text{贼}}\ \text{原哉}\frac{\partial\phi^{\text{圆}}}{\partial\text{會}}\right)\right.$$

$$\left.\text{原}\rho\left[\ddot{\text{载}}^{\text{员}}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{贼}}\ \text{原哉}\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{會}}\right)\right]\right\}\text{灿}\,\text{凿杂}$$

$$\text{原}\iint_{\text{杂}_{\text{皂}}}\left(\text{原}\rho\text{早}\left|\right|^{\text{圆}}\right)\text{灿}\,\text{凿杂垣}\Omega^{\text{圆}}\ \text{伊}\ \text{园园}\rho\text{早}\nabla\ \text{）}\qquad\text{（五·三·二）}$$

从推导过程可看出，这里得到的二阶力包含上一节所说的流体动力和波浪扰动力相应的二阶分量。

类似地可得到二阶力矩的表达式：

$$\text{酝}^{\text{圆}}=\text{越原}\int_{\text{宰蕴}}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\text{早}_{7\text{则}}{}^{\text{员圆}}\ \text{则伊灶}\,\text{凿造垣}\Omega^{\text{员}}\ \text{伊}\ (\text{倾}\ddot{\Omega}^{\text{员}})$$

$$\text{原}\iint_{\text{杂}_{\text{皂}}}\left\{\text{原}\frac{\text{员}}{\text{圆}}\rho\ \text{渣}\nabla\phi^{\text{员}}\cdot\text{渣原}\rho\left(\frac{\partial\phi^{\text{圆}}}{\partial\text{贼}}\ \text{原哉}\frac{\partial\phi^{\text{圆}}}{\partial\text{會}}\right)\right.$$

$$\left.\text{原}\rho\left[\ddot{\text{载}}^{\text{员}}\cdot\nabla\left(\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{贼}}\ \text{原哉}\frac{\partial\phi^{\text{员}}}{\partial\text{會}}\right)\right]\right\}\ \text{则伊灶}\,\text{凿杂}$$

$$\text{原}\iint_{\text{杂}_{\text{皂}}}\left(\text{原}\rho\text{早}\left|\right|^{\text{圆}}\right)\ \text{则伊灶}\,\text{凿杂}\qquad\text{（五·三·三）}$$

式（五·三·二）和式（五·三·三）中包含了一阶速度势和二阶速度势，一般可通过建立相应的边值问题求出，已有不少研究者提供了相当完整的数值处理方法，例如可参阅[五·三·二]和[五·三·三]。应注意的是，这里提供的是有航速漂浮结构的二阶力表达式，已包含航速的影响。

二、低频漂移阻尼

系泊系统在二阶力作用下，将产生大幅低频漂移运动。这是由于系泊系统刚度较小，二阶波浪力的低频分量容易引起系统的共振响应。从本章第一节分析可知，系统共振振荡的振幅极大地依赖于阻尼系数的大小。因此，控制低频漂移运动幅度的阻尼系数的估算问题就成为此类系统设计的要点之一。

漂浮体波浪漂移阻尼问题已发展了多种理论方法。[五·三·四]利用摄动展开方法，直接求解低频漂移运动问题。如一阶运动一样，把与低频运动相应的流体力分解为与运动加速度和运动速度成比例的两部分，从而得到低频阻尼系数表达式。问题是这种方法相当繁难，迄今尚未见数值结果。

比较实用且应用广泛的是 [illegible] 提出的处理方法。其基本思想是，低频漂移运动与波频运动无相互作用，相对于波频运动，大幅低频漂移运动可看作是物体拟静态的低速运动。那么，漂移运动阻尼可看成是二阶力关于漂移运动的梯度，即：

$$[illegible] = [illegible]\left|\frac{\partial [illegible]}{\partial [illegible]}\right|_{[illegible]}$$

这样就把计算低频运动阻尼的问题归结为计算作用在漂浮体上的二阶力问题。这样相对说来比较容易，例如可根据上一段讨论的方法处理。

对多锚链系泊油轮系统情形，作用在油轮上的低频阻尼，如前式 [illegible] 所示，包括两部分：

$$[illegible] = [illegible]\frac{\partial [illegible](\cdot\cdot)}{\partial [illegible]}$$

$$[illegible] = [illegible]\frac{\partial [illegible](\cdot\cdot)}{\partial [illegible]}$$

分别相应静水中低频漂移振荡阻尼系数 [illegible] 和波浪中低频漂移振荡阻尼系数 [illegible]，这些都是关于理想流得到的，与粘性无关。作用在浮筒上的低频阻尼类似。然而，当整个系统在作大幅低频振荡时，作用在锚链上的粘性阻尼将起重要作用，有必要进行考虑。

当漂浮结构在作大幅低频运动时，系泊锚链也将在流体中作振荡运动，这样流体对锚链的反作用力（惯性力、粘性力和与海底的摩擦力）将作用在系统上。由于多锚链系泊系统的恢复力已导出（见式 [illegible]），那么，可根据一个周期内漂移振荡散失的能量等于恢复力做功，导出作用在系统上的阻尼。

一个周期内散失的能量可给出如下：

$$[illegible] = \int_{[illegible]} [illegible]\,[illegible]\,[illegible] = \int_{[illegible]} [illegible]\,[illegible]\,[illegible]$$

式中，[illegible] 为低频周期；[illegible] 为锚链提供的恢复力。而系统阻尼力作功为：

$$[illegible] = [illegible]\int_{[illegible]} [illegible]\,[illegible]\,[illegible]$$

于是可得锚链贡献的低频粘性阻尼系数为：

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{([illegible])\,\mu\pi}$$

式中，[illegible] 为低频振荡振幅；μ 为低频振荡频率。

三、波浪漂移阻尼的一种切片理论方法

如前分析，波浪漂移阻尼的计算本质是二阶波浪力的计算问题。而二阶波浪力实质上就是波浪阻力增加。因此，耐波性学科中有关波浪阻力增加公式都适用。其中 [illegible] 提出的阻力增加公式为：

$$[illegible] = [illegible]\int_{[illegible]} [illegible]\,[illegible]$$

式中，[illegible]；[illegible]；[illegible] 为 [illegible] 剖面的附加质量和阻尼系数。

$$[illegible] = \sqrt{[illegible]}$$

$$\text{灾}_{\text{赠}}\text{越原}\omega\ [\eta_{\text{猎}}\text{澡}\varepsilon_{\text{猎}}\text{原}(\text{曾原曾}_{\text{邮}})\eta_{\text{缉}}\text{澡}\varepsilon_{\text{缉}}]\ \text{垣哉}\eta_{\text{缉}}\text{糟}\varepsilon_{\text{缉}}$$

$$\text{原}\omega\alpha\ \frac{\text{澡}\perp(\text{噪}_{\text{赠}}\text{澡}\beta)}{\text{噪}_{\text{赠}}\text{澡}\beta}\text{藻}^{\text{-}\kappa\text{澡}}\ \text{澡}\perp[\text{噪}(\text{曾原曾}_{\text{邮}})\text{糟}\varepsilon]$$

$$\text{灾}_{\text{赠}}\text{越}\omega\ [\eta_{\text{猎}}\text{糟}\varepsilon_{\text{猎}}\text{原}(\text{曾原曾}_{\text{邮}})\eta_{\text{缉}}\text{糟}\varepsilon_{\text{缉}}]\ \text{垣哉}\eta_{\text{缉}}\text{糟}\varepsilon_{\text{缉}}$$

$$\text{原}\omega\alpha\ \frac{\text{澡}\perp(\text{噪}_{\text{赠}}\text{澡}\beta)}{\text{噪}_{\text{赠}}\text{澡}\beta}\text{藻}^{\text{-}\kappa\text{澡}}\ \text{糟}\varepsilon[\text{噪}(\text{曾原曾}_{\text{邮}})\text{糟}\varepsilon]$$

$$\omega_{\text{藻}}\text{越}\omega\ \text{原}\text{噪}\text{糟}\varepsilon$$

式中，$(\eta_{\text{猎}},\varepsilon_{\text{猎}})$，$(\eta_{\text{缉}},\varepsilon_{\text{缉}})$ 分别为油轮垂荡和纵摇的振幅和相位；α 为波浪振幅；ω 为波频；β 为波向角；$\text{扎}_{\text{载}}$为剖面淹湿形心；σ 为剖面淹湿面积系数，$\text{赠}_{\text{糟}}$为剖面水线半宽，$\text{曾}_{\text{邮}}$为船舶重心。

当油轮作大幅纵荡漂移运动时，由于漂移速度相当小，可把船舶看成是处于波浪场中的低速运动物体，$\text{哉}=\text{曾}^{\text{圆}}$，则二阶波浪力即为上述波浪阻力增加，$\text{云}^{\text{圆}}$ 越砸$_{\text{平}}$。于是，

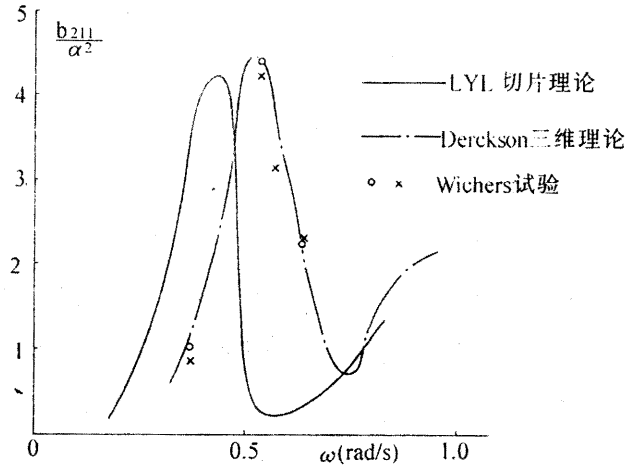
$$\text{遭}_{\text{飘示}}\text{越原}\frac{\partial\text{砸}_{\text{平}}}{\partial\text{哉}}\Big|_{\text{哉越园}}$$

把式 代入，则得到：

$$\text{遭}_{\text{飘示}}\text{越}\frac{\text{噪}\text{糟}\varepsilon}{\omega_{\text{藻}}}\ \text{垣}\frac{\text{噪}\text{糟}\varepsilon}{\text{圆}_{\text{藻}}}\int_{\text{蕴}}\left\{\frac{\text{凿}\text{葬}_{\text{载}}(\text{曾}}{\text{凿曾}}\text{灾}_{\text{赠}}\text{原圆}\text{憎}\right.\text{灾}_{\text{赠}}\text{糟}\varepsilon$$

$$\left.\text{垣灾}_{\text{赠}}\text{澡}\perp\eta_{\text{缉}}\right\}\frac{\text{凿}\text{葬}}{\text{凿曾}}\ ,\text{哉越园}$$

从中可看出，要得到波浪漂移阻尼系数，关键在于船舶垂荡和纵摇运动传递函数的计算。这些都可在切片理论方法的基础上进行计算。图 提供的是超大型油轮，灾$_{\text{赠}}$澡$\perp$垣$\eta_{\text{缉}}$纵荡漂移阻尼系数切片理论方法结果和 等人三维理论方法结果与试验的比较。由图可见，三维理论与试验结果符合得相当好。切片理论与试验差异还比较大，估计是因切片理论中没有计入横向运动贡献的二阶分量的缘故。



图

员源

第七章　随机波浪

海洋中的波浪是不规则的、随机的。人们最初认为它是“无规律的”。开阔海区的波浪，一般是由风生成的，在风成浪的区域上，海浪的不规则性尤其明显。只有远离风区，海浪才显出某些规则性和周期性。自然界中永远找不到完全规则的海面，只有波高变得相当小的涌浪才是接近规则的。也就是说，近海结构物在海洋中所遭遇的海浪一定是不规则的、随机的。我们研究近海结构物在海洋波作用下的运动、受力和疲劳损坏时，必须首先研究随机波浪。

实际上，海浪是不规则的、随机的，但并不是无规律的。经大量长期的分析研究，已发现其存在一些基本规律，服从所谓的正态分布，可用谱分析的方法来描述。并且，就预报目的而言，人们已提供了许多“理论”的、半经验的和经验的模型。而这些理论的或经验的模型，都是基于实际的测量。然而，由于海上测量资料的缺乏，并包含了大量的不确定因素。因此，所提出的模型也是各种各样的。不过，随着实测资料的增加，对实测资料处理方法的改善，海浪预报方法正变得越来越准确可靠。

第一节　海浪的观测与描述

一、海浪是随机现象

人类为有效地利用海洋，长期以来对海浪作了持续不断的观测研究。随着观测手段的不断改进，人们发现，任何一点的海浪记录永不重现，这是海浪最重要属性之一。也就是说，海浪是随机现象。

所谓随机现象是相对确定性来说的。通常，在一定条件下产生的具有确定性量值的现象称为确定性现象，这是可预知确切结果的事件。例如钟摆，在正常条件下，其振幅和周期是确定的。而随机现象是不可预知的。即使知道了某一时刻以前的结果，下一时刻的结果依然是无法确定的。一般说来，随机现象是由于引起该现象的偶然因素太多，或者说不确定因素太多且其重要性相当的缘故。这时的系统仍属线性系统。还有一类随机现象是与整个系统属非线性有关，即所谓混沌现象。海浪通常被当作前一种情形进行研究。

长期观测得到的有关海浪的另一个特征是，从波浪记录上取得的点列服从正态分布。[illegible]首先证明海浪记录具有正态分布的特性，后被[illegible]等许多观察者所证实。不过，由于波浪非常大时非线性影响占有重要的地位，使海浪记录与正态分布存在一定的偏离。波峰要比正态分布假定下导出的高一些，波谷则会低一些。迄今，一般海浪分析中都假定海浪记录服从正态分布。这样做的原因有二：海浪的非线性一般只出现在高频域内，而此域内的近海结构水动力响应通常很小，因此非正态的这类偏离对结果不构成严重影响。其次，随机非线性问题是一个极具挑战性的问题，要从理论上完全解决此类问题尚需时日。因此，在近海结构水动力研究中，通常都把海浪作为随机的，服从正态分布规

律的现象。

二、随机变量的描述

在概率论中，我们已接触了有关随机变量的概念。也就是，每次试验的结果中某事件的出现是随偶然因素而变化的、不确知的，但却遵循一定的概率分布规律，称这种变量为随机变量。从上面分析可知，海浪记录显然是一个随机变量。

当随机变量随时间或别的自变量变化时，这种随机变量是时间或别的自变量的函数，称这种随机变量为随机函数。对给定的试验条件，每一次试验将得到一个确定的函数，与一般常规函数没有区别。但不同次试验所得到的函数又是不同的，预先不能确知的，这种随机函数称为随机过程。每次试验的记录又称为样本函数。大量的这种试验所得到的样本函数的集合称为样集。

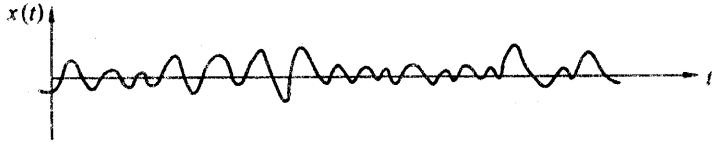


图 [illegible] 随机量 [illegible] 的现实

为了描述随机变量，一般可以给出幅域描述和时域描述。例如一个随机变量 [illegible] 的现实如图 [illegible] 如果其概率特征只考虑与 [illegible] 值的分布而不涉及时间的变化，也就是幅值的概率分布，将它表示为：

[illegible]

称 [illegible] 为随机变量 [illegible] 的分布函数。这种分布函数具有如下特征：

[illegible] 是非降函数，当 [illegible] 时，[illegible]；

[illegible]

分布函数完整地描述了随机变量的统计特征。知道了分布函数后，就可以确定随机变量落在区间内的概率。单位区间上的分布函数称为概率密度，用 [illegible] 表示，则：

[illegible]

表示 [illegible] 处于微小区间 [illegible] 至 [illegible] 内的概率。

在研究随机海浪时，最有意义的概率分布是 [illegible] 分布和 [illegible] 分布。分别用于描述波面高度和波高的概率分布。

正态分布具有如下形式的概率密度：

[illegible]

相应的概率分布（累积概率）：

[illegible]

而 [illegible] 分布的概率密度为：

[illegible]

责(曾 越{ 园 [原 源(曾/μ)圆] 曾≥园 ；
园 曾约园 。

相应的累积概率为：

孕(曾 越{ 员原 [原 源(曾/μ)圆] 曾≥园 ；
园 曾约园 。

其中参数 μ 和 σ 为常数，且 σ 跃园 其意义随后解析。图 苑圆圆和图 苑圆源即为这些函数曲线。

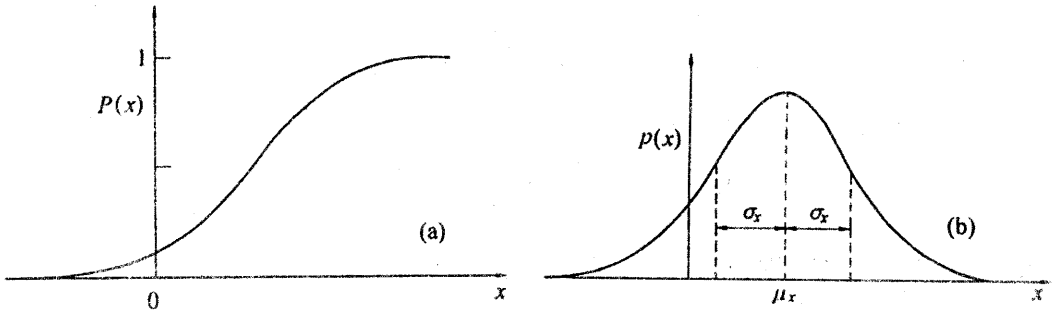


图 苑圆圆 正态分布

葬 累积概率； 遭 概率密度

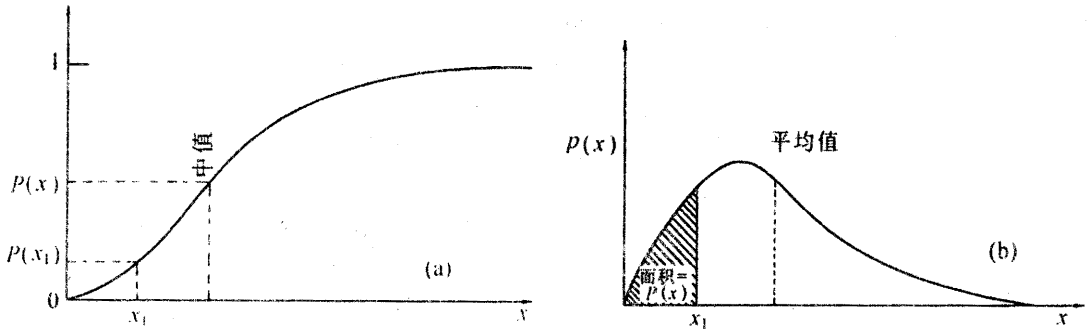


图 苑圆源 [illegible]

葬 累积概率； 遭 概率密度

若已知随机变量的概率分布已可完整地描述随机变量的特性。不过，在实际中往往比较难于求出随机变量的概率分布，或遇到只要知道其平均值及对平均值的偏离就足够的情形，便可引入数学期望和方差来描述随机变量的概率特性。

随机变量 曾 的数学期望，说白了就是某时间或别的变量区间内所有随机变量的平均值：

员 [illegible]

$$E[X]=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right\}=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,dx \qquad (3\text{-}3)$$

为描述随机变量的分散程度，还将引入一个新的指标，即所谓方差。若随机变量 X 的数学期望存在，记为 $\mu=E[X]$，那么 $(X-\mu)^2$ 是新的随机变量，其数学期望 $E[(X-\mu)^2]$ 则称为 X 的方差，记为 σ^2：

$$\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[x_i-\mu]^2\right\} \qquad (3\text{-}4)$$

正好反映了随机变量关于其平均值的偏离程度。

数学期望和方差还可以用概率密度函数来表示：

$$\mu=E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)\,dx \qquad (3\text{-}5)$$

$$\sigma^2=E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2p(x)\,dx \qquad (3\text{-}6)$$

当随机变量服从正态分布时，则

$$E[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

若令 $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$，积分变为

$$E[X]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma t+\mu)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt+\frac{\mu}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

疫

$$\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$$

亦

$$E[X]=\mu$$

又因为

$$E[(X-\mu)^2]=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt\left(t=\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\right]$$

$$=\sigma^2$$

也就是说，正态分布中的二个参数 μ 和 σ^2 分别是随机变量的数学期望和方差。

三、不规则波的观测和描述

典型的不规则波浪记录如图 [illegible] 所示。其中，ζ 为 [illegible] 时刻的波幅，或称为波面高度；H 为 波高，波峰至波谷的距离；T_{cr} 为波峰周期，两相邻波峰之间的时间间隔；T_z 为上跨零周期，两相邻上跨零线之间的时间间隔。

[illegible]

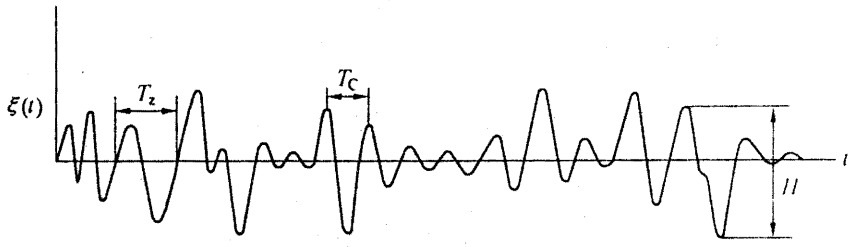


图 实测的波浪记录

海浪的不规则程度能够用给定时间的或给定位置的某个波浪特征量的直方图形状即频率函数来确定。直方图的一般作法是，将波浪记录等间隔地读数，例如 秒钟一个读数。将这些读得的 值按递增次序列表，接着再将 值分成等波面升高的若干个组，并将每一组中的个数除以样本总数，再除以波面升高的分组间隔，由此便可得到直方图，如图 所示。正如前面的分析那样，波面升高的直方图成正态分布的形状，如图光滑虚线所示。

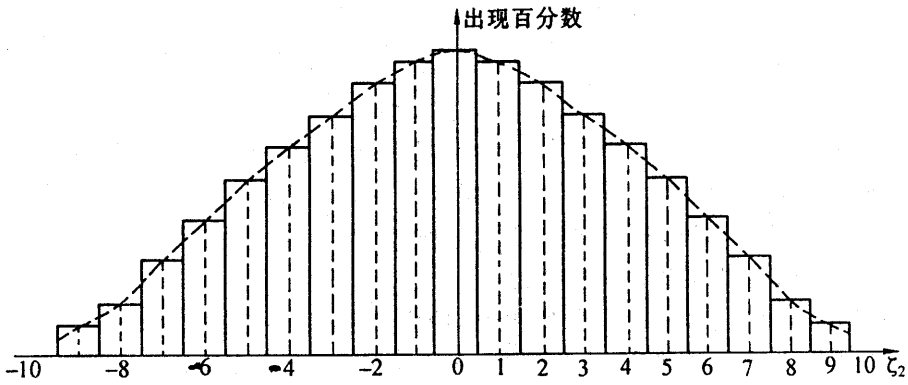


图 波面升高的频率函数

一般说来，随机过程的统计特征是建立在大量的长期的同时观测上，而不是单个观测上的。也就是说，随机过程的统计特征是时间的函数，不同时刻样集的统计特征可能不同。同时，要得到随机过程的统计特征，样集包含大量的记录数据需要计算。这些都给分析带来诸多不便。

然而，如果随机过程是平稳的，各态历经的，则这些问题便不存在。所谓平稳随机过程即其样集的所有统计特征不随时间推移而改变。所谓各态历经随机过程，即平稳随机过程，满足下面两个条件：

 样集的每一个记录在统计上相当于其他记录；

 样集在任一瞬间的所有统计特征等于在足够长时间间隔内单一记录的所有统计特征。

从中可注意到，一个随机过程若是各态历经的，首先必须是平稳的。这样，对平稳各态历经过程，其统计特征可根据某一充分长 例如，

长期的观测分析表明，海浪记录的波面升高直方图等，当测量时间充分长时，都具有相同的分布规律。这就说明，海浪是具有“各态历经的平稳随机过程”。

第二节　不规则波的表达

因为海浪是各态历经的平稳的随机现象，允许我们取有限长度的记录进行分析。一般说来这种记录有两种形式：定点波浪记录和高空拍摄波型。

对时间记录的分析，可以认为波面升高可用 [illegible] 展开成具有随机相位的无穷规则波的和：

$$\zeta(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_{an}\cos(\omega_n t+\varepsilon_n) \qquad (1)$$

式中，ζ_{an}为第 n 个组成波波幅；ω_n为第 n 个组成波频率；ε_n为第 n 个组成波相位角。

若记录时间为 T，则 $\omega_1=2\pi/T$。由于海浪的平稳和各态历经特性，同一海况下，不同点的记录分析结果，$\zeta_{an}(\omega_n)$具有一一对应的大致相同的关系，但 ε_n将不同。

对空间记录可以得到类似的结果：

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\zeta_{an}\cos(k_n x+\varepsilon_n) \qquad (2)$$

式中，k_n为第 n 个单元波波数。若记录长度为 L，则 $k_1=2\pi/L$。在同一海况下，不同时刻的记录的分析，$\zeta_{an}(k_n)$具有一一对应的大致相同的关系，但 ε_n不同。

从中我们可以看到，所谓“平稳”是指单元波波幅不随时间改变。“各态历经”即时间与空间分析的结果一致。而“随机”则因相位 ε_n是随机变量，不能预先确知的。因此，[illegible] 展开充分反映了海浪的不规则、随机特性。同时，由于各个组成波的波幅在各次分析中相同而反映了波浪的内在规律性。

在工程应用上，人们关心的是海浪的统计特性。这可通过谱分析的方法求出。

前面已介绍过，对振幅为 ζ_n的规则波，单位面积表面所具有的波能为：

$$E_n=\frac{1}{2}\rho g\zeta_n^2 \quad 或 \quad E_n=\frac{1}{8}\rho g H_n^2 \qquad (3)$$

这样，具有波幅为 ζ_1，ζ_2，…，ζ_n所有波的单位面积表面所具有的总波能可给出为：

$$E=\frac{1}{2}\rho g(\zeta_1^2+\zeta_2^2+\cdots+\zeta_n^2) \qquad (4)$$

任何海况都可通过不同频率的能量分布来描述。这种能量的频率分布就称为某海况的能谱，或波谱。

在频率范围 ω 从 $\frac{1}{2}\Delta\omega$ 至 $\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega$ 上的波浪能分布可用谱密度函数 $S(\omega)$ 来表示，如图 [illegible]：

$$S(\omega)\Delta\omega=\frac{1}{2}\rho g\sum_{\omega-\frac{1}{2}\Delta\omega}^{\omega+\frac{1}{2}\Delta\omega}\zeta^2(\omega) \qquad (5)$$

或者

[illegible]

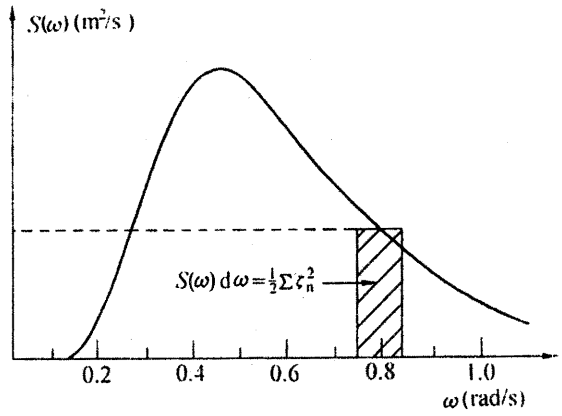


图 第五章 指定频带上的波能密度

$$\text{杂}(\omega)\ \text{越}\ \sum_{\omega\text{原}\text{圆}\text{谱}}^{\omega\text{垣}\text{圆}\text{谱}}\frac{\text{员}/\text{圆}\,(\omega)}{\text{圆}\,\text{谱}} \qquad \text{第五章第一节}$$

表示频率 ω 处单位波频范围内的波浪所拥有的能量。如果波谱已知，那么谱的各次矩便可计算：

$$\text{皂}_{\text{灶}}\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\text{肄}}\omega^{\text{灶}}\text{杂}(\omega)\,\text{凿}\omega \qquad \text{第五章第二节}$$

于是，灶越园 则

$$\text{皂}_{\text{园}}\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\text{肄}}\text{杂}(\omega)\,\text{凿}\omega \qquad \text{第五章第三节}$$

等于能谱密度函数下的总面积，实际上就是单位面积表面的波浪所具有的总能量。也就是波面升高的方差。通常又把 $\text{皂}_{\text{园}}$的平方根 σ 称为均方差 （σ 越$\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}$）。

灶越员 $$\text{皂}_{\text{员}}\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\text{肄}}\omega\,\text{杂}(\omega)\,\text{凿}\omega \qquad \text{第五章第四节}$$

称为谱的一阶矩。

灶越圆 $$\text{皂}_{\text{圆}}\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\text{肄}}\omega^{\text{圆}}\text{杂}(\omega)\,\text{凿}\omega \qquad \text{第五章第五节}$$

称为谱的二阶矩。

鉴于波能谱密度函数 杂（ω）描述了某频率 ω 处单位频率区间上的波能。不规则波的能量分布，不同频率不同，一定的海况具有一定的形式。因此，海况的不同决定了总能量不同和能量的分布形式的不同。通常除用方差 （谱密度函数下的总面积）外，还引入谱宽系数 ε：

$$\varepsilon\ \text{越}\sqrt{\frac{\text{皂}_{\text{园}}\text{皂}_{\text{源}}\ \text{原}\ \text{皂}_{\text{圆}}^{\text{圆}}}{\text{皂}_{\text{园}}\text{皂}_{\text{源}}}} \qquad \text{第五章第六节}$$

以提供能量分布的信息。ε 具有如下性质：

员 $\text{园}\leqslant\varepsilon\leqslant\text{员}$；

圆 $\varepsilon\ll\text{员}$ 表示波能集中在 ω 越$\omega_{\text{园}}$的附近，是窄带波能谱的情形，例如涌浪；

猿 ε 越员 表示波能均匀地散布在整个频带上，例如白噪声。

一般风成波的情形为 园约ε 约员

上面引入的波能谱是在定点波浪记录条件下定义的，只限于反映长峰不规则波的情形，无法描述波浪传播过程中的方向性。实际海浪是短峰不规则波，除有一个主方向传播外，还存在其他浪向的扩散。为描述这种波浪，除频率外，还应考虑海浪沿不同方向的组成部分。

斜入射规则波的表达式为：

$$\zeta(\text{曾赠贼越葬酝泽噪曾酝泽原噪赠酝泽原ω贼}$$

与前述类似，考虑方向影响的海浪记录可展成 云级数：

$$\zeta(\text{曾赠贼越}\sum_{灶越员}^{\text{肆}}\zeta_{灶}\text{酝泽噪曾酝泽}_{灶}\text{原噪赠酝泽}_{灶}\text{原}\omega_{灶}\text{贼灶原}\varepsilon_{灶})$$

相应的谱密度函数除与频率有关外，还是传播方向的函数，即：

$$\text{杂}(\omega,\theta)\text{越}\sum_{\theta\text{垣}\frac{\Delta\theta}{2}\text{曾}}^{\theta\text{原}\frac{\Delta\theta}{2}\text{曾}}\sum_{\omega\text{垣}\frac{\Delta\omega}{2}\text{曾}}^{\omega\text{原}\frac{\Delta\omega}{2}\text{曾}}\frac{员}{\text{圆}}\zeta^{\text{圆}}(\omega,\theta)\Big/(\text{曾}\cdot\text{曾})$$

表示频率 ω 处单位波频范围内、传播方向 θ 方向单位角度区域内的波浪所拥有的能量，称为波浪的方向谱。

通常采用的方向谱具有如下形式：

$$\text{杂}(\omega,\theta)\text{越杂}(\omega)\text{郧}(\omega,\theta)$$

称 郧(ω,θ) 为方向分布函数，或称分波的扩散函数。一般采用全方位传播的波能的总和等于该定点处的波能的假定，于是，

$$\text{杂}(\omega)\text{越}\int_{\text{原}\pi}^{\pi}\text{杂}(\omega,\theta)\text{曾}\theta$$

即

$$\int_{\text{原}\pi}^{\pi}\text{郧}(\omega,\theta)\text{曾}\theta\text{越员}$$

现有的规范和文献资料推荐了各种形式的扩散函数，都属于半经验的公式。一般表达式为：

$$\text{郧}(\omega,\theta)\text{越悦}(\text{泽})\left|\cos\frac{\theta\text{原}\theta_{\text{皂}}}{2}\right|^{2\text{泽}}$$

式中，$\theta_{\text{皂}}$ 为波浪传播的主方向；泽为扩散因子 有规范推荐 泽越员园；

$$\text{悦}(\text{泽})\text{越}\frac{员}{\text{圆}\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\text{泽垣员})}{\Gamma(\text{泽垣}\frac{员}{2})}$$

当 泽越员园时，悦(泽)越园愿愿

我国规范采用的是 阅[1]和 孕[2]推荐公式：

$$\text{郧}(\omega,\theta)\text{越}\begin{cases}\dfrac{\text{圆}}{\pi}\text{糟}\cos^{2}(\theta\text{原}\theta_{\text{皂}}) & \text{渣}(\theta\text{原}\theta_{\text{皂}})\text{渣}\dfrac{\pi}{\text{圆}}\\ \text{园} & \text{其余}\end{cases}$$

第三节　不规则波的统计特征

在规则波中，描述波浪的主要参数是波高和波周期。对不规则波，人们仍希望用波高

和波周期来描述其特征。然而，由于海浪的不规则性和随机性，无法简单地给出确定的值。如图 [illegible] 所示，波高和波周期都是随机变量。因此，在研究海洋波时，主要集中研究海浪的统计特性，包括波高、波周期的概率分布和特征值。

如果有一个充分长的波浪记录，一些重要的特征量可进行统计计算。

一、有义波高

有义波高 $H_{1/3}$ 是近海结构设计计算中最关心的海洋环境参数。其意义是，所有波高测量按大小排列，取其中最大的三分之一进行平均，所得的值即称有义波高或有效波高。大约有 [illegible] 的波高会超过 $H_{1/3}$，下面我们来论述这一点。

前面我们已经论述了海浪是一个正态的随机过程，波面升高瞬时值 ζ 就服从正态分布（[illegible]）：

$$p(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\text{[illegible]})$$

式中，$\sigma = \sqrt{m_0}$ 为均方差。[illegible] 首先证明了，当谱宽系数 ε 很小时，波幅将服从 [illegible] 分布：

$$p(\zeta_a) = \frac{\zeta_a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\zeta_a^2}{2\sigma^2}\right) \qquad (\text{[illegible]})$$

式中 ζ_a 为波幅。如此，我们便可对那些最大波高占波浪总数 [illegible] 分之一，即最高 [illegible] 的值进行计算。根据概率意义，可写成下式：

$$\int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} p(\zeta_a)\, d\zeta_a = [illegible] \qquad (\text{[illegible]})$$

[illegible] $\int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \zeta_a p(\zeta_a)\, d\zeta_a = \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \zeta_a p(\zeta_a)\, d\zeta_a$（积分中值定理），

[illegible] $\overline{\zeta}_{[illegible]} = \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \zeta_a p(\zeta_a)\, d\zeta_a \Big/ \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} p(\zeta_a)\, d\zeta_a$

$$= [illegible] \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \zeta_a p(\zeta_a)\, d\zeta_a \qquad (\text{[illegible]})$$

由式 ([illegible])，把式 ([illegible]) 代入，得：

$$\int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \frac{\zeta_a}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\zeta_a^2}{2\sigma^2}\right) d\zeta_a = \frac{1}{[illegible]}$$

积分左边，得

$$\exp\left(-\frac{\zeta_{[illegible]}^2}{2\sigma^2}\right) = \frac{1}{[illegible]}$$

[illegible] $\zeta_{[illegible]} = \sqrt{2\ln[illegible]}\,\sigma$ （[illegible]）

由式 ([illegible])，

$$\overline{\zeta}_{[illegible]} = [illegible] \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \frac{\zeta_a^2}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{\zeta_a^2}{2\sigma^2}\right) d\zeta_a$$

$$= [illegible] \left\{ \zeta_{[illegible]} \exp\left(-\frac{\zeta_{[illegible]}^2}{2\sigma^2}\right) + \int_{\zeta_{[illegible]}}^{\infty} \exp\left(-\frac{\zeta_a^2}{2\sigma^2}\right) d\zeta_a \right\}$$

[illegible]

$$\text{越 灶}\left\{\zeta_{\text{葬耘赴}}\text{藻}^{\frac{\text{圆}}{\text{葬耘赴}}/\ \text{圆}^{\text{圆}}}\ \text{垣}\sqrt{\text{圆}}\sigma\left[\ \text{员原}\phi\left(\frac{\zeta_{\text{葬耘赴}}}{\sigma^{\text{圆}}}\right)\right]\right\}$$

把式 (6.3.5) 代入：

$$\overline{\zeta}_{\text{葬耘赴}}\ \text{越}\sqrt{\text{圆}}\ \text{派}\left\{\sqrt{\text{遭}}\ \text{灶垣灶}/\sqrt{\pi}\left[\ \text{员原}\phi\left(\sqrt{\text{圆}}\ \text{遭}\ \text{灶}\right)\right]\right\}\qquad (6.3.6)$$

式中，ϕ (总) 为正态函数：

$$\phi\ (\text{总})\ \text{越}\int_{\text{原葬}}^{\text{怎}}\frac{\text{员}}{\sqrt{\text{圆}}}\text{藻}^{-\frac{\text{圆}}{\text{怎}^{\text{圆}}}}\text{凿怎}\qquad (6.3.7)$$

可从数学手册中查表得到。由此即可计算 $\zeta_{\text{葬耘赴}}$的值。典型值见表 (6.3.1)

表 (6.3.1) 窄带条件下最高 员葬赴平均

灶	员.员圆	圆.圆	员.圆	缘	源	猿	圆	员
$\overline{\zeta}_{\text{葬耘赴}}/\sigma$	猿.猿猿缘远	圆.源源员员	圆.猿猿缘远	圆.圆圆缘圆	圆.员员缘猿	圆.员圆猿猿	员.缘缘远	员.圆圆猿猿

从中可看出，最高 员葬赴平均值 $\overline{\zeta}_{\text{葬耘赴}}$表示了那些波幅值大于 $\zeta_{\text{葬耘赴}}$的波幅个数占总波幅数的 员葬赴的所有波幅值的平均。例如最高三分之一的平均，即有义波幅，就是把所有波浪振幅 $\zeta_{\text{葬}}$从大到小排列，从大到小取总数的三分之一进行平均。习惯上采用波高表述，则有义波高 $\text{勻}_{\text{员}/\text{猿}}$为：

$$\text{勻}_{\text{员}/\text{猿}}\ \text{越}\ \text{圆.圆}\overline{\zeta}_{\text{葬耘赴}}\ \text{或}\ \text{勻}_{\text{员}/\text{猿}}\ \text{越}\ \text{源.圆圆}\sigma$$

其余类似。目测波高 $\text{勻}_{\text{创}}$与有义波高存在如下近似关系：

$$\text{勻}_{\text{员}/\text{猿}}\ \text{越}\ \text{圆.缘}\text{勻}_{\text{创}}\ \text{垣}\ \text{圆.缘}\sigma\ (\text{米})\qquad (6.3.8)$$

在工程实际中，还常常要求知道波幅不超过某值的概率。反过来就是，波幅超过某给定值的可能值所占的百分率，即所谓的保证率。

$\zeta_{\text{葬}}$跃$\zeta_{\text{葬}}$的保证率 云($\zeta_{\text{葬}}$)：

$$\text{云}\ (\zeta_{\text{葬}})\ \text{越}\int_{\zeta_{\text{葬}}}^{\text{肆}}\text{责}(\zeta_{\text{葬}})\text{凿}\zeta_{\text{葬}}\qquad (6.3.9)$$

在波幅满足 瑞利分布的条件下，因为：

$$\int_{\text{园}}^{\zeta_{\text{葬}}}\text{责}(\zeta_{\text{葬}})\text{凿}\zeta_{\text{葬}}\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\zeta_{\text{葬}}}\frac{\zeta_{\text{葬}}}{\sigma^{\text{圆}}}\text{藻}^{-\left(\text{原}\frac{\zeta_{\text{葬}}^{\text{圆}}}{\text{圆}}\right)}\text{凿}\zeta_{\text{葬}}$$

$$\text{越}\ \text{员原藻}^{-\frac{\text{圆}}{\text{猿猿}^{\text{圆}}}}$$

所以，

$$\text{云}\ (\zeta_{\text{葬}})\ \text{越}\int_{\text{园}}^{\text{肆}}\text{责}(\zeta_{\text{葬}})\text{凿}\zeta_{\text{葬}}\text{原}\int_{\text{园}}^{\zeta_{\text{葬}}}\text{责}(\zeta_{\text{葬}})\text{凿}\zeta_{\text{葬}}$$

$$\text{越}\ \text{员原}(\ \text{员原藻}^{-\frac{\text{圆}}{\text{葬}}/\ \text{圆}^{\text{圆}}})$$

$$\text{越}\ \text{藻}^{-\left\{\text{原}\frac{\zeta_{\text{葬}}^{\text{圆}}}{\text{圆}}\right\}}$$

得到

$$\zeta_{\text{葬}}\ \text{越}\ \text{噪}\qquad (6.3.10)$$

式中，噪越/圆遇员云（ζ葬）]，表示不同保证率的系数。

为便于计算，现将系数 噪预先计算出来，列于表 苑圆圆

表 苑圆圆 不同保证率下的系数 噪

云（ζ葬）豫	园员员	园圆缘	员圆园	圆圆园	猿圆园	猿愿员	员园	员源圆缘	猿园
噪	猿员苑	猿圆圆缘	猿圆圆原	圆圆愿员	圆圆源原	圆圆缘缘	圆圆缘缘	圆圆圆园	员圆源元
云（ζ葬）豫	源园	源圆圆缘	缘园	远园	苑园	愿园	怨园	怨缘	员园园
噪	员圆源元	员圆圆缘	员圆愿愿	员圆圆员	园圆圆缘	园圆员苑	园圆圆缘	园圆圆圆	园

表 苑圆员和表 苑圆圆比较可知，灶越员园时，云（ζ葬）豫≈猿愿员 通常称为最大波幅 员圆园平均值或最大波幅 $\overline{\zeta}_{葬圆圆园}$

$$\overline{\zeta}_{葬圆圆园} 越 圆圆缘缘 \qquad 苑圆员苑$$

相应的最大波高为：

$$勻_{员圆圆园} 越 缘圆员员 \qquad 苑圆员愿$$

灶越源时，云（ζ葬）豫≈员圆圆缘 便是规范中最常用的有义波幅 $\overline{\zeta}_{葬圆}$：

$$\overline{\zeta}_{葬圆} 越 圆圆园 \qquad 苑圆员怨$$

相应的有义波高为：

$$勻_{员圆} 越 源圆园 \qquad 苑圆圆园$$

从中可看出，大约还有 员园豫的波将会超过 勻$_{员圆}$

在工程设计中，最感兴趣的是有义波高的长期分布。利用 宰藻藻澡概率纸所绘的累积概率图示于图 苑圆员苑 据此可得到一定海况和极限生存值的有关资料。

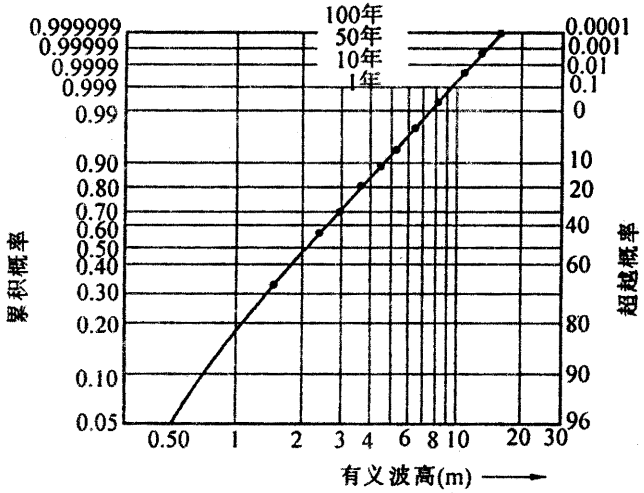


图 苑圆苑 有义波高分布

不规则波浪环境常常用最大波高来表述。要求出关于最大波高相应的海况，可采用[illegible]和[illegible]导出的极值分布函数进行计算。这种分布满足条件：

[illegible]

对窄带谱[illegible]，量[illegible]满足条件：

$$\text{赠越}\frac{\text{载}\,\text{原载}\,\text{原载}}{\text{圆}\,\text{园}}$$

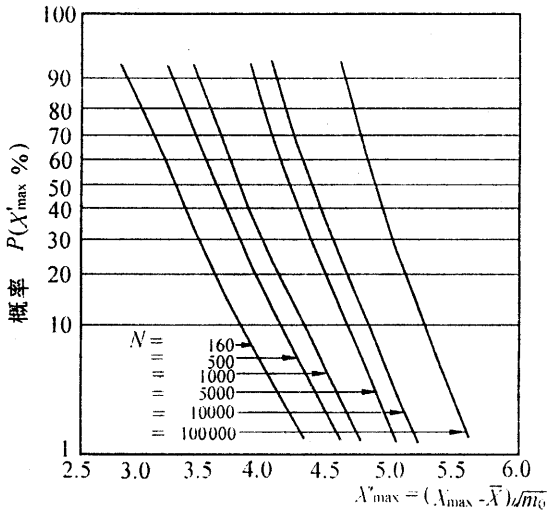
式中，$\bar{\text{载}}$为记录的平均值；$\text{载}_{\text{园}}$越圆$\text{园}_{\text{园}}$[illegible]；晕为记录的振荡数；孕$(\text{载}_{\text{晕}})$为超越指定值$\text{载}_{\text{晕}}$的概率。

对不同晕值的$\text{载}_{\text{晕}}$极值的累积分布绘于图[illegible]中。

这样，极值波高与有义波高之间的关系能从图[illegible]中找到。例如，已知包含有[illegible]个波的记录的有义波高为匀[illegible]，要求平均极值波高$\text{圆}_{\text{晕}}$。便可从图中晕越[illegible]曲线与孕$(\text{载}_{\text{晕}})$越[illegible]的交点相对应的$\text{载}_{\text{晕}}$找到：

$$\frac{\text{载}_{\text{晕}}\,\text{原载}}{\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}}\text{越猿[illegible]原}$$

于是：



图[illegible]不同晕相应的超越概率

$$\text{匀}_{\text{晕}}\text{越圆伊猿[illegible]原}\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}\text{越[illegible]远}\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}$$

因为$\text{匀}_{\text{员}}$越原$\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}$，据此，具有[illegible]超越概率的$\text{匀}_{\text{晕}}$可得到：

$$\text{匀}_{\text{晕}}\text{越}\frac{\text{[illegible]远}\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}}{\text{源}\sqrt{\text{皂}_{\text{园}}}}\text{匀}_{\text{员}}\text{越员[illegible]匀}_{\text{员}}$$

最经常采用的极值是最可能的最大值。这种极值与[illegible]超越概率相对应。对足够大的晕，这种最可能的值大约为：

$$\text{载}_{\text{晕}}\text{原载越}\sqrt{\text{圆}\,\text{园}_{\text{园}}\,\text{[illegible]晕}}$$

这样，

晕越[illegible]　匀$_{\text{晕}}$越[illegible]圆[illegible]匀$_{\text{员}}$

晕越[illegible]　匀$_{\text{晕}}$越[illegible]源[illegible]匀$_{\text{员}}$

晕越[illegible]　匀$_{\text{晕}}$越圆[illegible]匀$_{\text{员}}$

等等。例如，南海百年一遇的设计波高，据有关资料估算匀$_{\text{员}}\approx$[illegible]，$\text{栽}_{\text{小}}$越[illegible]那么，根据上面的分析，最可能的最大波高匀$_{\text{晕}}\approx$猿[illegible]。

[illegible]

二、平均波浪周期

不规则波的另一个重要参数，波浪周期，可用几种方式进行定义：

T——平均目测周期。

T_{02}——平均上交零周期。

T_{s}——有义波周期，即三一最大波高相应的平均周期（$T_{1/3}$）。

T_{p}——谱峰周期，具有最大波能的谱分量的周期。

T_{max}——最大波周期，具有最大波高的波周期。

如果波谱已知，那么特征周期可根据波谱的各阶矩进行计算：

$$T = 2\pi \frac{m_0}{m_1} \qquad (6.2.1)$$

$$T_{02} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}} \qquad (6.2.2)$$

对 [illegible] 后面定义），上述各种周期之间有一个近似关系，见表 6.2.1

表 6.2.1 各种波周期之间的近似关系

	T	T_{02}	T_{s}	T_{p}	T_{max}
T	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T_{02}	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
T_{s}	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]	[illegible]
T_{p}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	[illegible]
T_{max}	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1

对近海结构的疲劳计算来说，知道有义波高与平均波周期之间的关系是重要的。[illegible] 等人（1.6.1）推荐了一个关系式：

$$H_s \geqslant A\sqrt{T} \qquad (6.2.3)$$

式中，A 的数量级为 [illegible]

[illegible] 在窄带谱的假定下导出了波浪记录的波高和波周期的联合概率。不过，这种理论分布尚需试验进一步证实。一般进行长期波浪预报中都采用相关海区长期观测的数据整理的 H_s 和 T 二参数分布图，典型的图见图 6.2.1

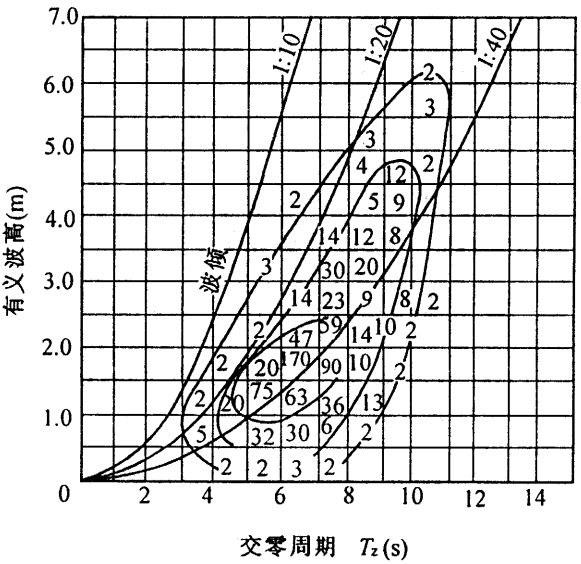


图 6.2.1

第四节　波谱

根据前面的论述，如果知道了波谱，则波浪的各种统计特征便可求出。人们经过长期的实际观测研究，已提出了多个得到普遍应用的波谱公式，通常是用有义波高、波周期表示的单参数谱、双参数谱或多参数谱。以下介绍其中 [illegible] 种。

一、[illegible]

[illegible] 在窄谱和波高、波周期服从 [illegible] 分布的假定下，导出了如下形式的谱公式：

$$S(\omega) = [illegible]$$

式中，$H_{1/3}$ 为有义波高；ω_p [illegible]，T_z 为有义波周期。

这是描述充分发展海况的公式。对充分发展的海况，波高、波周期与风速具有如下的经验公式：

$$\frac{gH_{1/3}}{U_{19.5}^2} = [illegible] \qquad \frac{gT_z}{U_{19.5}} = [illegible]$$

而对比较发展的海况，存在如下的关系：

$$\frac{gH_{1/3}}{U_{19.5}^2} < \begin{cases} [illegible] & \text{发展状态达 [illegible]} \\ [illegible] & \text{发展状态达 [illegible]} \end{cases}$$

$$\frac{gT_z}{U_{19.5}} < [illegible]$$

因此，知道了等价的平均风速 $U_{19.5}$，便可据此导出相应的有义波高和波周期。

二、[illegible]

国际船舶结构会议 [illegible] 推荐如下形式的谱公式：

$$S(\omega) = [illegible]$$

式中，$\bar{\omega} = [illegible]$，$\omega_m$ 为谱峰频率。

实际上，[illegible] 是 [illegible] 稍作修改的结果。

三、[illegible]

[illegible] 根据大西洋充分发展海浪资料的分析，提出了一个半经验的波谱公式：

$$S(\omega) = [illegible]$$

式中，$U_{19.5}$ 为在 [illegible] 高处的风速，皆[illegible]

当资料给的是有义波高 $H_{1/3}$ 时，近似风速按下式确定：

$$U_{19.5} = [illegible]$$

[illegible]

此时，波谱公式可写成：

$$S(\omega)=\frac{}{\omega^{}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_{}}\right)^{}\right]$$

四、

国际船模试验水池会议 推荐了如下两种形式的波谱，都是根据 谱修正而来的：

单参数谱

$$S(\omega)=\frac{}{\omega^{}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_{}}\right)^{}\right]$$

式中，

双参数谱

$$S(\omega)=\frac{}{\omega^{}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_{}}\right)^{}\right]$$

式中，

当只有风速为已知时，可利用开阔海洋中风速与有义波高的近似关系（见表 ）：

表 开阔海洋中风速与有义波高的近似关系

风速（节）	有义波高（）

采用不同波谱模型时对波浪载荷的短期预报存在一定影响。不过，对长期预报来说，一般认为只有 谱才能给出比较可靠的结果。而对沿海区域，通常推荐采用 谱。

五、

谱是 等人 在北海海浪联合课题下研制的，实际也是从 谱修改而来。其主要特点是考虑了有限风压的作用，因此其峰值陡峭得多

$$S(\omega)=\frac{\alpha}{\omega^{}}\exp\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_{}}\right)^{}\right]\gamma^{}$$

其中，

$$\alpha=\begin{cases}\\ \end{cases}$$

风程 载已知

风程 载未知

γ 允许从 变到

$$=\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_{})^{}}{^{}\omega_{}^{}}\right]$$

$$\tau \text{ 越} \begin{cases} \text{园} & \omega \leqslant \omega_{\text{园}} \\ \text{园} & \omega \text{ 跃} \omega_{\text{园}} \end{cases}$$

$\omega_{\text{园}}$ 越圆（ 早载） 载$_{\text{园}}$

载$_{\text{园}}$ 越 早载

载 越风程

图 苑园是不同波谱公式的能量分布例子。

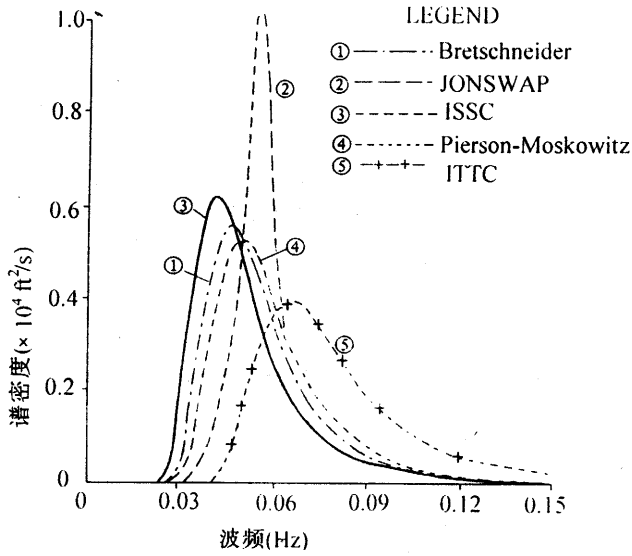


图 苑园 波谱比较

六、文圣常谱

波兰 [illegible] 和 [illegible] 通过对波罗的海 [illegible] 海岸处波浪的系列观测，发现波谱与水深有关，并据此提出了一种浅水波谱的理论表达式：

$$\frac{\overline{\omega}\text{杂}(\omega)}{\text{匀}^{\text{圆}}} \text{ 越} \text{园} \left[\text{原} \left(\frac{\omega}{\omega} \text{原} \right)^{\text{圆}} \right] \text{垣} \text{园} \exp\left[\text{原} \left(\frac{\omega}{\omega} \right)^{\text{源}} \right] \quad \text{苑园缘}$$

式中，匀为平均波高；$\overline{\omega}$ 为平均频率。

文圣常 [illegible] 综合考虑风速、风区、风时以及水深的影响，提出了一个极具特色的理论谱：

$$\text{杂}(\omega) \text{ 越} \begin{cases} \dfrac{\text{皂}_{\text{园}}}{\omega_{\text{园}}} \text{责} \left\{ \text{原} \left[\text{遥} \dfrac{\text{责}(\text{缘源}\omega\text{原缘源}\omega_{\text{苑}})}{\text{近}(\text{苑}\omega\text{原}\omega_{\text{园}}\text{园})\text{责}\,\text{垣}\,\text{园}(\text{园}\omega\text{原}\omega_{\text{园}}\text{园})\text{责}^{\text{赠}}} \right] \right. \\ \qquad \left. \cdot \left(\dfrac{\omega}{\omega_{\text{园}}} \text{原} \right)^{\text{园}} \right\}, \quad \text{园} \leqslant \dfrac{\omega}{\omega_{\text{园}}} \leqslant \text{员} \\ \dfrac{\text{皂}_{\text{园}}}{\omega_{\text{园}}} \dfrac{\text{近}(\text{苑}\omega\text{原}\omega_{\text{园}}\text{园})\text{责}\,\text{垣}\,\text{园}(\text{园}\omega\text{原}\omega_{\text{园}}\text{园})\text{责}^{\text{赠}}}{\text{缘}(\text{缘源}\omega\text{原缘源}\omega_{\text{苑}})} \left(\text{员} \dfrac{\omega_{\text{园}}}{\omega} \right)^{\text{皂}}, \\ \qquad \dfrac{\omega}{\omega_{\text{园}}} \geqslant \text{员} \end{cases} \quad \text{苑园缘}$$

员园

式中，m_0为零阶矩；ω_p为谱峰频率；γ为谱尖度因子；σ_ω为谱宽度因子；$\bar{H}$为平均波高；d为水深；η为深度参数；$\bar{\eta}$为平均波面升高。

当知道风速 U，风程 F时，式 (4-4-2) 中的各参数可表示为

$$\begin{cases} m_0 = 0.0081 g^2 \left(\dfrac{gF}{U^2}\right)^{-0.22} \dfrac{U^4}{g^2} \\ \omega_p = 2.857 \left(\dfrac{gF}{U^2}\right)^{-0.33} \dfrac{g}{U} \\ \gamma = 3.3 \left(\dfrac{gF}{U^2}\right)^{0.33} \end{cases} \tag{4-4-3}$$

而当知道风速 U和风时 t时，式 (4-4-2) 中参数可表示成：

$$\begin{cases} m_0 = 0.0081 g^2 \left(\dfrac{gt}{U}\right)^{0.6} \dfrac{U^4}{g^2} \\ \omega_p = 0.877 \left(\dfrac{gt}{U}\right)^{-0.3} \dfrac{g}{U} \\ \gamma = 3.3 \end{cases} \tag{4-4-4}$$

只是文圣常谱不够简洁，因而影响其在工程领域的广泛应用。

第五节　实测海浪分析

前面介绍的几种波能谱公式，实际上是根据某些特定海域的长期观测资料确定的所谓数学模型。一般说来，无法适应一切海域。所以，如 ITTC 谱，国际船模试验水池会议推荐时，特地加了一句相当重要的话：“当无相关典型海浪谱资料可资利用时，建议采用……”。特别是，海洋工程和海岸工程面临的是无法回避的严酷海洋环境，通过现场长期观测确定海浪特性就显得更为重要。

实测海浪记录的分析，通常采用自相关方法。其基本原则是，通过对实测海浪记录的相关分析，得到该随机变量的自相关函数，再对其作 Fourier 变换，从而产生波能谱密度函数。

一、各态历经随机过程的自相关函数

我们知道，海浪记录是一个各态历经的随机变量，为了描述其统计特征，可用数学期望来刻划其平均状态：

$$E[\eta(t)] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \eta(t)\,dt \tag{4-4-5}$$

即所谓的平均值 $\bar{\eta}$。但平均值不能说明随机变量的可能值围绕其平均值的离散程度。为此，通常引入随机变量的中心矩。其中二阶中心矩，又称为随机变量的方差，在海浪统计分析中占有特别重要的作用，定义为：

$$\sigma_\eta^2 = E\{[\eta(t) - \bar{\eta}]^2\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T [\eta(t) - \bar{\eta}]^2\,dt \tag{4-4-6}$$

为说明两个随机变量之间的相关性，还应引入二阶中心混合矩，如两个随机变量 曾(贼)和 赠(贼)，它们的数学期望分别为 曾和 赠 则它们的二阶中心矩 $E\{[曾(贼)-曾][赠(贼)-赠]\}$称为随机变量 曾(贼)和 赠(贼)的协方差 悦曾赠 无量纲系数：

$$\rho_{曾赠}=\frac{悦_{曾赠}}{\sigma_{曾}\sigma_{赠}}$$

称为相关系数。当二随机变量互不相关时，相关系数取零值。如果 曾和 赠具有线性关系时，$\rho_{曾赠}$越依员 一般情况下，相关系数在 原员与 垣员之间。因此，相关系数表征了两随机变量的相关的程度。

为描述各态历经平稳随机变量 曾(贼)时间间隔为 τ 的取值之间的相关性，可引入：

$$耘[曾(贼)曾(贼垣\tau)]=\lim_{栽\to肄}\frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}曾(贼)曾(贼垣\tau)\,d贼$$

称为随机变量 曾(贼)的自相关函数，记为 砸曾曾(τ)。显然 砸曾曾(τ)是一个偶函数。它的初值为：

$$砸_{曾曾}(0)=耘[曾^{圆}(贼)]$$

便是均方值。自相关函数可以推广到两个变量 曾(贼)和 赠(贼)的情形，以给出互相关函数 砸曾赠(τ)：

$$砸_{曾赠}(\tau)=耘[曾(贼)赠(贼垣\tau)]=\lim_{栽\to肄}\frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}曾(贼)赠(贼垣\tau)\,d贼$$

二、各态历经随机过程的谱分析

一个具有周期为 栽的函数 枣(贼)，在一定的条件下可用 云克雷洛夫级数形式表示：

$$枣(贼)=\sum_{灶=原}^{肄}云_{灶}\cos(灶\Delta\omega贼+蕴_{灶})$$

其中 云克雷洛夫系数为：

$$云_{灶}(\Delta\omega)=\frac{员}{栽}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}枣(贼)\cos(灶\Delta\omega贼)\,d贼$$

并且 $\Delta\omega=圆\pi/栽$，$\cos(灶\Delta\omega贼+蕴_{灶})=\cos蕴_{灶}\cos灶\Delta\omega贼-\sin蕴_{灶}\sin灶\Delta\omega贼$。把式 (原员猿缘)代入式 (原员猿原)中：

$$枣(贼)=\sum_{灶=原}^{肄}\left\{\frac{员}{圆}\int_{原栽/圆}^{栽/圆}枣(贼)\cos(灶\Delta\omega贼)\,d贼\right\}\cos(灶\Delta\omega贼)\Delta\omega$$

对非周期函数，可认为 栽→肄，$\Delta\omega\to d\omega$，并且 灶$\Delta\omega$ 用连续变量 ω 替代，则：

$$枣(贼)=\int_{原}^{肄}\left\{\frac{员}{圆}\int_{原}^{肄}枣(贼)\cos(\omega贼)\,d贼\right\}\cos(\omega贼)\,d\omega$$

或者写成：

$$枣(贼)=\int_{原}^{肄}云(\omega)\cos(\omega贼)\,d\omega$$

$$云(\omega)=\frac{员}{圆}\int_{原}^{肄}枣(贼)\cos(\omega贼)\,d贼$$

式 (原员猿源)和式 (原员猿猿)构成了 云克雷洛夫变换对，这就允许我们把时间域的描述与频率域的描述连系起来，给问题的解决带来方便。

员/圆

然而，上面的推导必须满足条件：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\,dt < \infty \tag{公式编号}$$

存在并有界。对海浪记录而言，其时间历程 $x(t)$ 为非周期函数，是平稳随机过程，并不满足式 (公式编号) 存在且有界的条件，因此无法采用 Fourier 变换。不过，可考虑引入附加函数 $w(t)$：

$$x_T(t) = x(t)\,w(t) \tag{公式编号}$$

式中

$$w(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T/2 \\ 0 & \text{其余} \end{cases}$$

T 为采样长度；$w(t)$ 称为数据样本窗函数，其对 Fourier 变换的影响将在谱分析中进行必要修正。这样，考虑 $x_T(t)$ 的自相关函数：

$$\begin{aligned} R_{x_T}(\tau) &= E[x_T(t)\,x_T(t+\tau)] \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x_T(t)\,x_T(t+\tau)\,dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,e^{i\omega(t+\tau)}\,d\omega\right] dt \\ &= \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,e^{i\omega t}\,dt\right] e^{i\omega\tau}\,d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi T}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\,X^{*}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega \end{aligned} \tag{公式编号}$$

式中，$X^{*}(\omega)$ 表示 $X(\omega)$ 的共轭复数。

在式 (公式编号) 中引入新的函数：

$$S_{x_T}(\omega) = \frac{1}{2\pi T}X(\omega)\,X^{*}(\omega) \tag{公式编号}$$

于是，

$$R_{x_T}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{x_T}(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega$$

其中 $S_{x_T}(\omega)$ 为 $x_T(t)$ 的谱密度函数，则 $R_{x_T}(\tau)$ 与 $S_{x_T}(\omega)$ 便构成了 Fourier 变换对，其另一个变换为：

$$S_{x_T}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{x_T}(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{公式编号}$$

在极限条件下得到 $x(t)$ 的谱密度函数：

$$S_x(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi T}X(\omega)\,X^{*}(\omega)$$

则

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau)\,e^{-i\omega\tau}\,d\tau \tag{公式编号}$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega)\,e^{i\omega\tau}\,d\omega \tag{公式编号}$$

因为自相关函数是实数和关于 τ 对称，所以自谱密度函数 $S_{xx}(\omega)$ 是关于 ω 对称的。

在实际工作中，处理单边谱 $S_{xx}(\omega)$ 比双边谱 $S_{xx}(\omega)$ 来得方便。引入

$$G_{xx}(\omega)=\begin{cases}2S_{xx}(\omega) & \omega\geqslant 0\\ 0 & \omega<0\end{cases}$$

后，有

$$R_{xx}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

$$S_{xx}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}R_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

并且，当 $\tau=0$ 时，

$$R_{xx}(0)=\int_{0}^{+\infty}S_{xx}(\omega)\,d\omega$$

考虑到式 $R_{xx}(0)=\overline{x^2(t)}$，便可从谱密度函数出发得到随机过程的均方值，进而在正态分布的假定下，方便地得到概率密度函数和概率分布函数，以及相应的统计值。

类似地，可以分析两个随机变量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的交叉谱密度函数 $S_{xy}(\omega)$：

$$S_{xy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xy}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

$$R_{xy}(\tau)=\int_{0}^{+\infty}S_{xy}(\omega)e^{j\omega\tau}\,d\omega$$

三、谱密度函数估算的相关函数法

前面已论证了谱密度函数与自相关函数之间存在 [illegible] 变换关系，谱密度函数可利用自相关函数进行计算。下面具体讨论这一方法。

假定已有一均值为零的各态历经的随机过程样本记录 $x(t)$，记录长度为 T，对 $x(t)$ 进行等间距 $\Delta t=T/N$ 采样，得一列离散值：$x(0)$，$x(\Delta t)$，…，$x[(N-1)\Delta t]$，则自相关函数的近似估值为：

$$\hat{R}_{xx}(r\Delta t)=\hat{R}_{xx}\left(\frac{rT}{N}\right)=\frac{1}{N-r}\sum_{n=0}^{N-1-r}x(n\Delta t)\,x[(n+r)\Delta t],\quad r=0,1,\cdots,m \tag{1}$$

式中，$m<N$，$\tau=m\Delta t$ 称为最大滞后值。根据式 (1)，谱密度函数的相应近似估值为：

$$\hat{S}_{xx}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\tau_m}\hat{R}_{xx}(\tau)e^{-j\omega\tau}\,d\tau$$

离散化后变为：

$$\hat{S}_{xx}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\left[\hat{R}_{xx}(0)+2\sum_{r=1}^{m-1}\hat{R}_{xx}(r\Delta t)\cos\omega r\Delta t+\hat{R}_{xx}(m\Delta t)\cos\omega m\Delta t\right]$$

因为估计的谱截止频率 $\omega_c=\pi/\Delta t$，根据式 (1) 可以在 m 个离散点 $\omega=k\omega_c/m$ $(k=1,2,\cdots,m)$ 上计算 $\hat{S}_{xx}(\omega)$：

$$\hat{S}_{xx}(\omega_k)=\frac{\Delta t}{\pi}\left[\hat{R}_{xx}(0)+2\sum_{r=1}^{m-1}\hat{R}_{xx}(r\Delta t)\cos\frac{k\pi r}{m}+\hat{R}_{xx}(m\Delta t)\cos k\pi\right]$$

$$k=1,2,\cdots,m$$

其中，砸圆越砸圆（则）越砸（则）越贼。

这样得到的谱密度函数的估值会受到记录数据有限长度的影响，即所谓截断影响。主要是由于引入数据窗函数怎（）对数据进行扩充，当进行云续傅变换时，可能引入负值，与杂圆（）≥园矛盾，这种现象称为泄漏。为此引入窗函数进行修正。常用的窗函数有如下几种。

员圆海明（）窗

$$W_{H}(\tau)=\begin{cases}0.54+0.46\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_{0}} & |\tau|\le\tau_{0}\\ 0 & |\tau|>\tau_{0}\end{cases}$$

则经过海明窗平滑后的谱密度杂圆（）可表示为：

$$\hat{S}_{H}(\omega)=\hat{S}_{1}(\omega)+\hat{S}_{2}(\omega)$$

$$\hat{S}_{1}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\int_{0}^{\omega_{0}}\left[C_{0}+2\sum_{k=1}^{m}C_{k}\cos\frac{k\pi}{m}\right]\cos\omega t\,d\omega$$

$$\hat{S}_{2}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\int_{\omega_{0}}^{\omega_{c}}\left[C_{0}+2\sum_{k=1}^{m}C_{k}\cos\frac{k\pi}{m}\right]\cos\omega t\,d\omega$$

式中，$\hat{S}_{1}$、$\hat{S}_{2}$分别表示$\hat{S}_{H}\left(\frac{\omega}{2\pi\Delta t}\right)$、$\hat{S}_{H}\left(\frac{\omega}{2\pi\Delta t}\right)$。

圆圆哈宁（）窗

$$W_{C}(\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(1+\cos\dfrac{\pi\tau}{\tau_{0}}\right) & |\tau|\le\tau_{0}\\ 0 & |\tau|>\tau_{0}\end{cases}$$

哈宁窗的平滑关系式为：

$$\hat{S}_{C}(\omega)=\hat{S}_{1}(\omega)+\hat{S}_{2}(\omega)$$

$$\hat{S}_{1}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\int_{0}^{\omega_{0}}\left[C_{0}+2\sum_{k=1}^{m}C_{k}\cos\frac{k\pi}{m}\right]\cos\omega t\,d\omega$$

$$\hat{S}_{2}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\int_{\omega_{0}}^{\omega_{c}}\left[C_{0}+2\sum_{k=1}^{m}C_{k}\cos\frac{k\pi}{m}\right]\cos\omega t\,d\omega$$

猿圆泊逊（）窗

$$W_{P}(\tau)=\begin{cases}1-\left|\dfrac{\tau}{\tau_{0}}\right|^{2}+\left|\dfrac{\tau}{\tau_{0}}\right|^{3} & |\tau|\le\dfrac{\tau_{0}}{2}\\ 2\left(1-\left|\dfrac{\tau}{\tau_{0}}\right|\right)^{3} & \dfrac{\tau_{0}}{2}\le|\tau|\le\tau_{0}\\ 0 & |\tau|>\tau_{0}\end{cases}$$

泊逊窗的平滑公式为：

$$\hat{S}_{H}(\omega)=\frac{\Delta t}{\pi}\left[C_{0}+2\sum_{k=1}^{m}C_{k}\cos\frac{k\pi}{m}\right]\cos\omega t$$

其中，W_{P}则越W_{P}（则）越贼。

一般应根据具体问题选取平滑窗函数。若被估计的谱密度变化较小，可选用W_{H}（）和W_{C}（）；若被估计的谱密度变化较大，或像交互谱可能出现负值，采用W_{P}（）较好。

最后应指出，进行上述计算时，必须注意如下几点：

员 时间间隔不能取得太大。因为△贼取定后，频率ω跃τ辕贼时波谱就估计不出来。

因此，在进行分析之前应预先估计感兴趣的频率范围，确定谱分量的最高频率 f_c 或 Δf，一般可取波浪中最小周期的一半作为 Δf 或 f_c，通常取 Δf 或 f_c 的值，视具体情况而定。

m 所取的滞后最大数目 m 也不能太大，太大会使计算出的波能谱严重失真。一般可取 $m=n/10$ 或 $n/5$。

此外，谱密度函数估算还可采用快速傅里叶变换（FFT），实际应用上更为快捷有效，得到广泛的应用。因为它属于一种计算机的算法，理论基础仍如相关函数法，故不赘述，有兴趣者可查阅相关文献。

图 [illegible] 是作者采用南海实测海浪记录 [illegible] 用快速傅里叶变换方法进行分析所得的谱型。其中有效数据 $n=2^{10}$，$\Delta f=0.0139$ Hz。

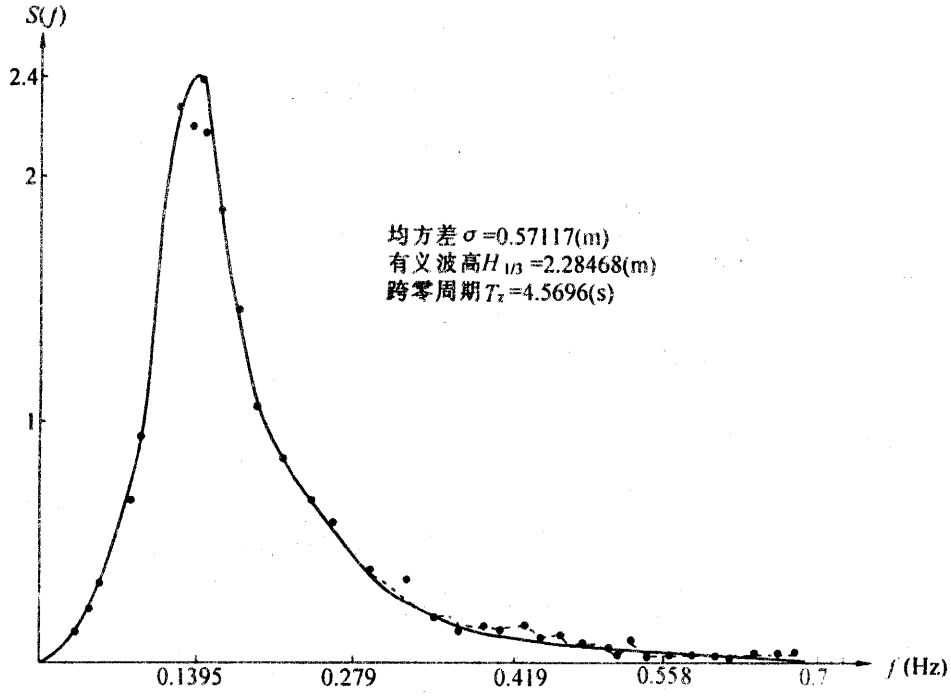


图 [illegible]

[illegible]

第八章　不规则波中的结构响应

在近海结构的设计中，人们最关心的是在极限环境条件下，结构极值响应是多少。在分析计算中，通常采用二种方法：一种是在规则波中进行的结构响应计算，所使用的规则波是把 [illegible] 年或 [illegible] 年重现期中所对应的异常波高、波周期和水深相应的个别波，当作等波高等周期的规则波，这种方法称为设计波法；另一种是谱分析方法，就是建立结构响应与不规则波扰动的函数关系，采用概率统计方法给出结构响应的统计特征。因不规则波扰动采用指定的波高、波周期下的波谱形式，所以此方法又称为设计谱法。

设计波法计算简单，结果直观，还允许采用时域之类的分析手段处理非线性问题。不同频率、单位波高下得到的规则波响应便是结构的频率响应函数，或称为传递函数，这是不规则波中结构响应预报的基础。因此，在前面几章讨论了大量的规则波中结构响应问题。然而，正如前一章所述，近海结构面临的毕竟是不可能用规则波来描述的海洋环境，其随机不规则的特性使问题大大复杂化了，用确定性的描述方法无论如何不能真实地反映实际的海洋环境下的结构响应。因此，概率统计的分析方法被广泛地应用于近海结构设计计算之中。

第一节　线性系统和谱分析

概率统计分析方法最早是由 [illegible] 引入海洋学域内的。其基本假定是：不规则波可看成是由许多不同频率、不同波高的简谐波叠加的结果；结构对许多简谐波响应的和等于结构对这些简谐波和的响应。这就是众所周知的所谓叠加原理。

一、线性系统

近海结构在海洋环境中所感受的环境力及由此所产生的运动等，如前几章讨论的那样，可用它的物理规律来描述。如把结构所应遵循的这些物理规律与结构一起看成一个“系统”，那么，环境所提供的作用在结构上的扰动，就构成系统的所谓输入，系统对这些输入的响应就称为输出，如图 [illegible] 所示。

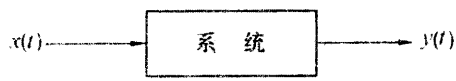


图 [illegible]

一般系统可能是非线性的，例如用 [illegible] 方程计算小尺度立柱上的波浪力中的阻力部分。不过，绝大多数都可以化成线性系统来处理，便能抓住主要矛盾，反映系统的主要

特征。

一个系统在感受多个输入的扰动下，其响应或输出是可加的、齐次的，则称该系统为线性系统。其可加性可表示为：

$$蕴\ 曾_1(贼)垣曾_2(贼)]\ 越赠_1(贼)垣赠_2(贼)\qquad(2.3.1)$$

齐次性为：

$$蕴\ 葬曾(贼)]\ 越葬蕴\ 曾(贼)]\ 越葬赠(贼)\qquad(2.3.2)$$

式中，$蕴$表示系统应遵循的物理规律，对应于数学上的所谓运算子，由于系统是线性的，称 $蕴$为线性运算子，$葬$为常数。

从中可看出，可加性表示的几个输入之和的输出等于几个输入相应的输出之和；齐次性表示扰动增大几倍，相应的输出也增大几倍。式 (2.3.1) 和式 (2.3.2) 联合起来，成立如下关系：

$$蕴\ 葬_1曾_1(贼)垣葬_2曾_2(贼)]\ 越葬_1蕴\ 曾_1(贼)]垣葬_2蕴\ 曾_2(贼)]$$
$$越葬_1赠_1(贼)垣葬_2赠_2(贼)\qquad(2.3.3)$$

二、脉冲响应

当 $贼越贼_0$时，系统受到单位脉冲函数 $\delta\ (贼原贼_0)$ 作为输入的扰动后，系统将产生一个响应输出 $澡\ (贼原贼_0)$ ：

$$蕴[\delta\ (贼原贼_0)]\ 越澡\ (贼原贼_0)\qquad(2.3.4)$$

其中

$$\delta\ (贼原贼_0)\ 越\begin{cases}肄 & 贼越贼_0\\ 园 & 贼\neq\ 贼_0\end{cases}$$

称为 δ 函数。$澡\ (贼原贼_0)$ 称为单位脉冲的响应函数。

对任意的输入 $曾\ (贼)$，根据叠加原理，可用无数个单位脉冲的响应来描述：

$$曾(贼)\ 越\int_{原肄}^{肄}曾(贼_0)\delta\ (贼原贼_0)凿贼_0\qquad(2.3.5)$$

这样，相应的输出便可根据式 (2.3.3) 得到：

$$赠(贼)\ 越蕴[曾(贼)]\ 越\int_{原肄}^{肄}曾(贼_0)蕴[\delta\ (贼原贼_0)]凿贼_0$$
$$越\int_{原肄}^{肄}曾(贼_0)澡(贼原贼_0)凿贼_0\qquad(2.3.6)$$

假如线性系统的性质不随时间而变化，则称这种系统为时间不变系统，可表示为：

$$蕴[曾(贼原贼_0)]\ 越赠(贼原贼_0)$$

意味着输入的时间延迟仅导致输出的延迟。此时，式 (2.3.4) 变为：

$$蕴[\delta\ (贼原贼_0)]\ 越澡(贼原贼_0)$$

于是式 (2.3.6) 可写成：

$$赠(贼)\ 越\int_{原肄}^{肄}曾(贼原\tau)澡(\tau)凿\tau\qquad(2.3.7)$$

式中，$\tau\ 越贼原贼_0$ 这是一个卷积分的形式，可理解为输出为整个时历中无穷脉冲响应之和。称为 $曾(贼原\tau)$与 $澡(\tau)$的卷积。因此又称 $澡(\tau)$为权函数。

这就说明，只要知道了系统的脉冲响应函数 $h(t)$，就可以对任何输入 $x(t)$ 求出输出量 $y(t)$。因此，$h(t)$ 可以用来完全描述线性系统的动态特征，称为时间域的特征描述。

三、频率响应函数和响应谱

根据随机过程理论，若系统是线性的，则当输入是平稳随机过程时，输出必为平稳随机过程。在第七章中我们已论证了不规则波是平稳随机过程，因此，近海结构在随机海洋波扰动下的响应也是一个平稳随机过程。在那里，作为输入的随机变量，不规则波浪用波能谱的概念进行描述，换句话说就是输入扰动谱。相应地，系统的响应输出也可用谱的概念完整地作出描述，这样的谱就称为响应谱。

由于研究的近海结构对随机海浪的响应限于线性系统，系统受脉冲后从静止开始的响应必然是衰减的，满足条件：

$$\int_{0}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty \qquad (\text{原})$$

因此，允许对响应函数 $y(t)$ 进行 Fourier 变换：

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-i\omega t}\,dt \qquad (\text{原})$$

把式 (原) 代入：

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\left[\int_{0}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right]dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} h(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} x(t-\tau)\,dt\right]d\tau$$

$$= \int_{0}^{\infty} h(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega(t-\tau)} x(t-\tau)\,d(t-\tau)\right]e^{-i\omega\tau}\,d\tau$$

$$= \left[\int_{0}^{\infty} h(\tau) e^{-i\omega\tau}\,d\tau\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)}\,d(t-\tau)\right] \qquad (\text{原})$$

因为脉冲响应函数 $h(t)$ 的 Fourier 变换用 $H(\omega)$ 表示，而系统的输入扰动 $x(t)$ 的 Fourier 变换用 $X(\omega)$ 表示，则式 (原) 变为：

$$Y(\omega) = H(\omega) X(\omega) \qquad (\text{原})$$

称 $H(\omega)$ 为系统的频率响应函数，或传递函数，是系统的频率域的特征描述。输入与输出函数之间的这种频域关系，使我们有可能通过试验的方法确定系统的频率响应函数。实际上，这正是波浪水池中进行模型试验的理论依据之一。

作为平稳随机过程的响应输出 $y(t)$，其自相关函数与频谱密度函数之间存在 Fourier 变换关系。$y(t)$ 的自相关函数为：

$$R_{yy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{0}^{T} y(t)y(t+\tau)\,dt \qquad (\text{原})$$

把式 (原) 代入，考虑到：

$$y(t) = \int_{0}^{\infty} h(\theta) x(t-\theta)\,d\theta$$

$$y(t+\tau) = \int_{0}^{\infty} h(\theta) x(t+\tau-\theta)\,d\theta$$

(原)

式 (2.3.9) 变为：

$$R_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)h(\xi_2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}d\omega\right]d\xi_1 d\xi_2 \tag{2.3.10}$$

其中，

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}d\omega$$

是输入扰动函数 $x(t)$ 的自相关函数，记为：

$$R_{xx}(\tau+\xi_1-\xi_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}d\omega$$

这样，式 (2.3.10) 可写成：

$$R_{yy}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)h(\xi_2)R_{xx}(\tau+\xi_1-\xi_2)d\xi_1 d\xi_2$$

于是，响应谱 $S_{yy}(\omega)$ 可通过自相关函数 $R_{yy}(\tau)$ 求出：

$$S_{yy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{yy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)h(\xi_2)\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(\omega)e^{i\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

疫

$$S_{yy}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}R_{yy}(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

亦

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\xi_2\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)h(\xi_2)R_{xx}(\tau+\xi_1-\xi_2)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)e^{i\omega\xi_1}d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_2)e^{-i\omega\xi_2}d\xi_2\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xx}(\tau+\xi_1-\xi_2)e^{-i\omega(\tau+\xi_1-\xi_2)}d(\tau+\xi_1-\xi_2)$$

$$=H^*(\omega)H(\omega)S_{xx}(\omega)$$

因此，

$$S_{yy}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_1)e^{i\omega\xi_1}d\xi_1\int_{-\infty}^{+\infty}h(\xi_2)e^{-i\omega\xi_2}d\xi_2S_{xx}(\omega)$$

$$=H^*(\omega)H(\omega)S_{xx}(\omega)$$

$$=|H(\omega)|^2S_{xx}(\omega) \tag{2.3.11}$$

式 (2.3.11) 是一个非常重要的公式。从中可看出，输入扰动谱、输出响应谱与频率响应函数之间存在一个确切的关系。只要知道其中两个量，第三个量便可确定。实际上，我们涉及三类问题：

员. 系统的响应输出和动态特征已知，求扰动。

圆. 扰动及系统的动态特征已知，求响应。

猿. 测出了扰动和系统的响应输出，求系统动态特征。

第一类问题诸如海洋调查船常用于确定遭遇到的风暴波高，第三类问题是波浪水池中进行不规则波试验时常用的方法。不过，应用得最多的是第二类问题，海洋工程、船舶工程常用于预测海洋结构物在不规则波中的响应 (包括波浪力、运动等)。

员圆

第二节　短期预报

上一节我们已推导出结构响应可用响应谱进行描述的结论。这种响应谱常用于得到短期响应预报，或者说统计值。一般认为，所谓短期预报是指响应属平稳的期间，其时间间隔在几小时的数量级上，根据式 (9.1.9)，响应谱等于波谱乘传递函数得到。由于波谱已完全描述了平稳的各态历经的不规则波的特性，主要指波高（有义波高）和波周期。因此，所谓短期预报是指确定波谱相应的响应谱的统计预报值。换言之，凡指定了波高和波周期，而不管采用何种波谱型得到的统计值都是短期的。

作结构响应的短期预报的第一步是获得系统的传递函数。通常采用理论的和试验的方法得到。此外，还必须有一个反映实际海况的海浪谱，这可用实测海浪资料或第七章提供的理论谱。从而根据式 (9.1.9) 得到响应谱，进而得到有关的响应特性。例如，响应谱的方差：

$$m_0 = \int_0^{\infty} S(\omega)\,d\omega \tag{9.2.1}$$

以及窄谱假定下的有义值：

$$H_{1/3} = 4\sqrt{m_0} \tag{9.2.2}$$

等等。这实际上是长峰波中的统计预报。当考虑波浪的传播方向的影响时，问题没有这么简单，特别是结构具有航速时，必须特别引起注意。

一、船体梁波浪力谱

作为一个例子，让我们来看看不规则波浪场中小构件的受力问题。作用在小构件上的波浪力，正如第四章已详细讨论的那样，可得到线性化 Morison 方程：

$$F = \frac{1}{2}\rho C_D D\,v|v| + \frac{\pi}{4}\rho C_M D^2 a \tag{9.2.3}$$

其中 σ_v^2 为不规则波浪场速度谱 $S_v(\omega)$ 的方差

$$\sigma_v^2 = \int_0^{\infty} S_v(\omega)\,d\omega \tag{9.2.4}$$

根据线性波理论（第二章），水质点的速度和加速度为：

$$v = \frac{\omega}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\zeta_0 \cos(kx - \omega t) \tag{9.2.5}$$

$$a = \frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\zeta_0 \sin(kx - \omega t) \tag{9.2.6}$$

而波面方程为：

$$\zeta = \zeta_0 \cos(kx - \omega t)$$

所以式 (9.2.5) 和式 (9.2.6) 可写成：

$$v = \frac{\omega}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\zeta \tag{9.2.7}$$

$$a = \frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh k(z+d)}{\sinh kd}\zeta \tag{9.2.8}$$

$$\text{[illegible]}$$

式中，T为波浪周期。这样，[illegible]力公式可写成：

$$F(t)=\frac{1}{2}\rho g A\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 S_\eta(\omega)\,d\omega}\,\zeta(t)$$

$$=K\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]\zeta(t)=K\eta(t) \tag{[illegible]}$$

当考虑不规则波浪场时，只要把波面表达函数$\zeta(t)$看成是无穷多个不同幅值和频率的规则波叠加的结果，那么，式[illegible]同样适用。也就是说，当入射波为平稳随机过程时，[illegible]力也假定为平稳随机过程。这样便可对力函数$F(t)$进行谱分析。

因为力函数$F(t)$的相关函数$R_F(\tau)$为

$$R_F(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T F(t)F(t+\tau)\,dt$$

把式[illegible]代入，注意到：耦合项的周期平均为零，得到

$$R_F(\tau)=\left[\frac{1}{2}\rho g A\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 S_\eta(\omega)\,d\omega}\right]^2\cdot$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)\zeta(t+\tau)\,dt\cdot\left[K\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]\right]^2\cdot$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)[\text{illegible}]\zeta(t+\tau)\,dt \tag{[illegible]}$$

考虑到

$$R_\eta(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\zeta(t)\zeta(t+\tau)\,dt$$

则式[illegible]变为：

$$R_F(\tau)=\left[\frac{1}{2}\rho g A\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 S_\eta(\omega)\,d\omega}\right]^2 R_\eta(\tau)$$

$$K\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 R_\eta(\tau) \tag{[illegible]}$$

对式[illegible]进行[illegible]变换，便得到[illegible]力谱：

$$S_F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}R_F(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\left\{\left[\frac{1}{2}\rho g A\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 S_\eta(\omega)\,d\omega}\right]^2\right.$$

$$\left.K\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2\right\}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}R_\eta(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=|H_F(\omega)|^2 S_\eta(\omega) \tag{[illegible]}$$

式中，$H_F(\omega)$称为[illegible]力传递函数：

$$H_F(\omega)=\left[\frac{1}{2}\rho g A\sqrt{\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\sinh k(d+z)}{\sinh kd}\right]^2 S_\eta(\omega)\,d\omega}\right]^2$$

[illegible]

$$垣\left[\ 悦_{缸}\rho\ 粤\ 早噪\ \frac{糟澡澡噪\ 钆垣澡}{糟澡澡噪}\ \right]^{圆}\Big\}^{\frac{员}{圆}}$$

有一点必须指出，这里给出的是柱体上一点的 酝澡澡噪钆力谱。当要计算某段柱体上的力谱时，原则上可通过沿水深 钆$_{员}$~ 扎$_{圆}$）积分得到，其推导过程与上相同，最后得到类似表达式：

$$匀_{云云}(\omega)\ 越\left\{\left[\ \frac{员}{圆}\rho 悦_{阅}阅\sqrt{\frac{愿}{\pi}怎_{难泽}\frac{早噪}{\omega}}\ \frac{员}{糟澡澡噪}\int_{扎_{员}}^{扎_{圆}}怎_{难泽}\ 钆\ 糟澡澡噪\ 钆垣澡\ 凿钆\right]^{圆}\right.$$

$$\left.垣\left[\ 悦_{缸}\rho\ 粤\ 早噪\ \frac{员}{糟澡澡噪}\int_{扎_{员}}^{扎_{圆}}糟澡澡噪\ 钆垣澡\ 凿钆\right]^{圆}\Big\}^{\frac{员}{圆}}\right.$$

问题是要注意，怎$_{难泽}$ 钆是水深的函数，积分一般无解析解，常要用数值方法计算。

图 愿圆绘出了直径为 员圆圆皂的垂直柱体在 员圆圆皂水深，线性波浪场中的水平力谱。其中，波谱采用 γ 越圆圆的 *能量谱*宰粤公式，悦$_{缸}$越圆 悦$_{阅}$越员

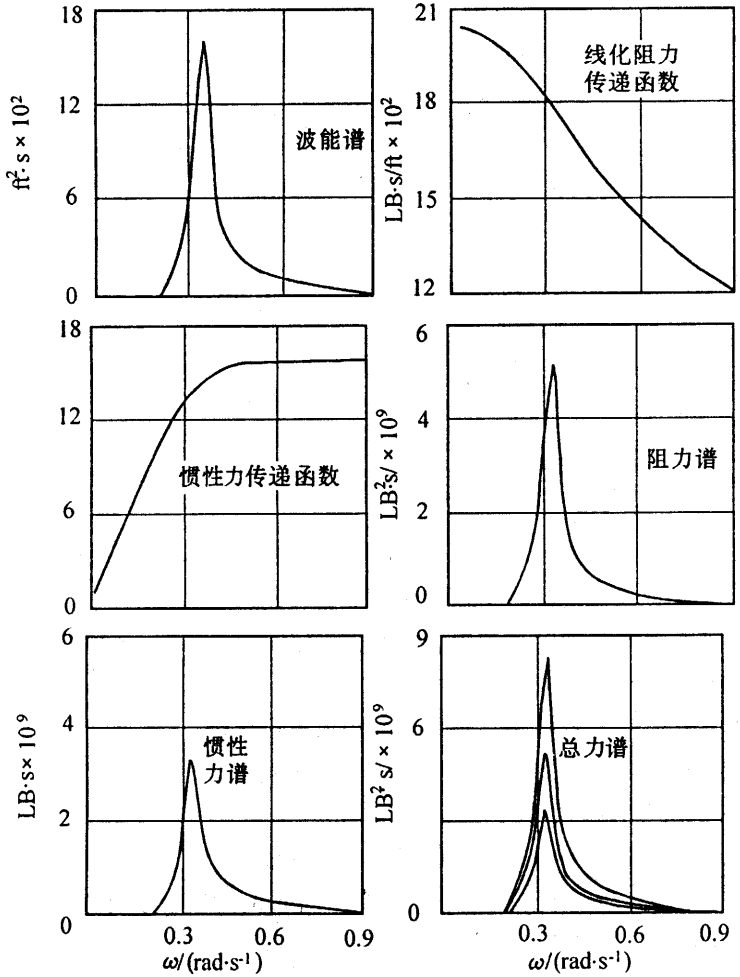


图 愿圆 员圆圆圆圆恶皂，员值越圆恶皂

员愿

二、不规则波中的运动统计

估算船舶在不规则波中的运动统计值时，根据线性的假定，可利用式 愿员源员 来得到响应谱，进而得到相关的响应特性。当船舶具有常航速 哉，与波浪向成一交角 α 时，如图 愿员源员 必须注意船舶的运动是以遭遇频率进行响应的，遭遇频率与波浪频率之间有如下关系：

$$\omega_{e} = \omega\left(1 - \frac{\omega v}{g}\cos\alpha\right) \qquad (5.1.21)$$

式中，ω 为波浪频率；ω_{e} 为船舶遭遇频率；g 为重力加速度。此时，船舶重心处的波浪谱密度函数不是 $S(\omega)$ 而是 $S(\omega_{e})$，它们之间存在如下关系：

$$S(\omega_{e})\,\mathrm{d}\omega_{e} = S(\omega)\,\mathrm{d}\omega \qquad (5.1.22)$$

其物理意义是能量保持不变。数学上是由于考虑到积分变换的 [illegible] 式 $\mathrm{d}\omega$ 转 $\mathrm{d}\omega_{e}$ 这样，式 愿员源员 变为：

$$S_{RR}(\omega_{e}) = H(\omega_{e})\,\overline{H}(\omega_{e})\,S(\omega_{e}) \qquad (5.1.23)$$

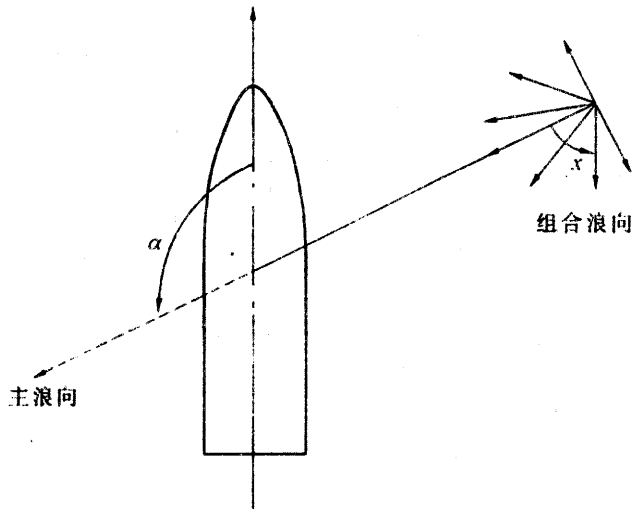


图 愿员源员

因此，船舶在不规则波中的运动由下列步骤确定：

员 选择航行海域的适当波谱。

圆 用遭遇频率替代波浪频率，把波谱转换成遭遇波谱。

猿 用理论或模型试验得到遭遇频率表示的传递函数。

源 根据式 愿员源圆 求出运动响应遭遇谱。

缘 积分响应谱下面积，进而得到所需的运动特性。

其中步骤 圆，把波谱转换成遭遇波谱是整个过程的关键。由于遭遇频率如式 愿员源员 所示，波谱中横坐标值 ω_{e} 现应由式 愿员源员 计算得的 ω_{e} 值代替。这样，相应的纵坐标值 $S(\omega_{e})$ 应为：

$$S(\omega_{e}) = S(\omega)/\left[1 - \frac{2\omega}{g}v\cos\alpha\right] \qquad (5.1.24)$$

员源源

或用 ω 写成：

$$S(\omega_e)=S(\omega)/\left[1-\frac{2\omega}{g}V\cos\beta\right] \tag{5-2-29}$$

即为遭遇波谱。因为，必须改变纵坐标值使遭遇谱下的总面积与原来波谱下的总面积相等（能量保持不变），换句话说，在移动着的设施上所得到的波浪记录与定点波浪记录，其总能量和有义波高不变。即：

$$\int S(\omega_e)\,d\omega_e=\int S(\omega)\,d\omega \tag{5-2-30}$$

根据式（5-2-28），

$$\frac{d\omega_e}{d\omega}=1-\frac{2\omega}{g}V\cos\beta$$

亦

$$S(\omega_e)\,d\omega\left(1-\frac{2\omega}{g}V\cos\beta\right)=S(\omega)\,d\omega$$

即

$$S(\omega_e)=\frac{S(\omega)}{1-\frac{2\omega}{g}V\cos\beta}$$

类似地，由式（5-2-28）

$$\frac{d\omega}{d\omega_e}=1+\frac{2\omega_e}{g}V\cos\beta=1+\frac{2\omega}{g}V\cos\beta$$

亦

$$S(\omega_e)\,d\omega\left[1+\frac{2\omega}{g}V\cos\beta\right]=S(\omega)\,d\omega$$

即

$$S(\omega_e)=\frac{S(\omega)}{1+\frac{2\omega}{g}V\cos\beta}$$

应该指出，就顶浪（$\beta=180°$）而言，与无航速的情形无多大不同。问题是顺浪（$\beta=0°$）时，当

$$\omega_e=\frac{g}{2V}$$

时，谱密度变为无穷大。由式（5-2-28）可知，对一个 ω_e 可能存在二个 ω，并可能伸展到“负频”范围。物理上可理解为船速比波浪传播速度大，船舶超越了波形，波形不再是从船尾传来而是从船头传来似的。此时，考虑能量积分时，应写成：

$$m_0=\int_0^{\infty}S(\omega)\,d\omega$$

$$=\int_0^{\omega_e=\frac{g}{2V}}S(\omega_e)\,d\omega_e+\int_{\omega_e=\frac{g}{2V}}^{\infty}S(\omega_e)\,d\omega_e \tag{5-2-31}$$

当然，如果只求取某些统计值，就无需进行频率转换，直接用波浪频率表示更为简单。

$$m_0=\int_0^{\infty}S_e(\omega_e)\,d\omega_e=\int_0^{\infty}S(\omega_e)\,d\omega_e$$

$$=\int_0^{\infty}S(\omega)\,d\omega \tag{5-2-32}$$

注意，此时的传递函数应表示为波浪频率传递函数方可。

对短峰不规则波，波谱形式为：

$$杂_{圆}(\omega,\chi)=\begin{cases}\frac{圆}{\pi}杂_{圆}(\omega)&原\frac{\pi}{圆}\leqslant\chi\leqslant\frac{\pi}{圆}\\ 园&其余\end{cases}$$

式中 χ 为组合波与主浪向夹角（见图 愿到源）。这时响应的方差为：

$$皂_{园赠}^{2}(钱,\alpha)=\int_{原\cdot 辐}^{\pi 辐}\int_{园}^{肆}杂_{圆}(\omega,\chi)\,渣_{匀}(\omega,\alpha-\chi)\,滩\omega\,凿\chi \qquad (愿到愿)$$

这样做可免去繁复的频率转换问题。但因无法求出运动谱，对某些特殊要求来说是个不便。

三、极值问题

对近海结构设计来说，最感兴趣的是作用在结构上的最大波浪力或最大响应值。在某个时间内的最大值的概率分布是一个极大值分布。所谓极大值是指随机响应输出达到极值（峰值或谷值）的 灶个值中的最大值，称为序列极大值。

如图 愿到源 $赠_{1}$，$赠_{2}$，…，$赠_{灶}$都是响应输出随机过程的峰值（极值），其中最大值 $赠_{max}$ 为：

$$赠_{max}=\max\{赠_{1},赠_{2},\cdots,赠_{灶}\} \qquad (愿到愿)$$

由于假定响应输出是窄带平稳随机过程，其峰值分布满足 砸瑞利分布，可以导出，可能最大值的近似表达式为：

$$\bar{赠}_{max}=\sqrt{圆\ln 灶}\sqrt{皂_{园赠}} \qquad (愿到怨)$$

式中，灶为响应峰值个数，$皂_{园赠}$为响应谱的方差。若考虑带宽 ε 的影响，那么可能最大值的近似表达式为：

$$\bar{赠}_{max}=\sqrt{圆\ln\left\{\frac{圆\sqrt{员原\varepsilon^{圆}}}{员垣\sqrt{员原\varepsilon^{圆}}}灶\right\}}\sqrt{皂_{园赠}} \qquad (愿到员园)$$

注意，根据式 愿到愿）或式 愿到员园）计算的最大值，只是表明相对其他值来说是最可能出现的，但并不意味着超过 $\bar{赠}_{max}$的可能性就很小了。相反，最大值超过 $\bar{赠}_{max}$的概率还是很大的，在 砸瑞利分布的情形，普拉塔 员怨愿愿 已证明，当 ε 趋远时，超过 $\bar{赠}_{max}$的概率达 还到圆像。

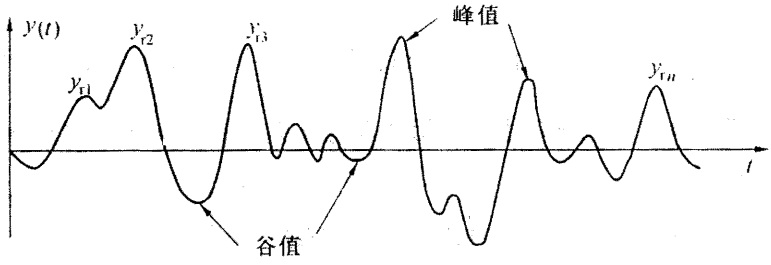


图 愿到源

在工程设计中，特别关心的是极端环境下的稀有事件，需要考虑超过某值 $\hat{\xi}_{1\%}$ 的概率很小，也就是说，选择一个非常小 α，使

$$P(\xi > \hat{\xi}_{1\%}) = \alpha$$

这样在服从 [illegible] 分布假定下，可得 ε 较小时的表达式：

$$\hat{\xi}_{1\%} = \sqrt{2m_0 \ln \frac{N}{\alpha}} \sqrt{\lambda_{0+}^2 m_0} \qquad (3.3.3)$$

而 $\varepsilon \neq 0$ 时，

$$\hat{\xi}_{1\%} = \sqrt{2m_0 \left\{ \frac{N\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\ln \frac{1}{\alpha}} \right\}} \sqrt{\lambda_{0+}^2 m_0} \qquad (3.3.4)$$

注意，$\bar{\xi}_{1\%}$ 是 N 个观测数中最可能的最大值，而 $\hat{\xi}_{1\%}$ 是 N 个观测数中出现概率非常小的最大值，它们都是观测数 N 的函数。这一观测数可从峰周期

$$T_z = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{m_2}}$$

得到某一时间内的观测数：

$$N = \frac{3600t}{T_z} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \qquad (3.3.5)$$

式中，t 为以小时为单位的时间。m_n 为响应谱的 n 次矩。

把式 (3.3.5) 代入式 (3.3.3)，得到

$$\hat{\xi}_{1\%} = \sqrt{2m_0 \left\{ \frac{3600t}{2\pi \ln \frac{1}{\alpha}} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \right\}} \sqrt{\lambda_{0+}^2 m_0} \qquad (3.3.6)$$

这便是以时间表示的小概率最大值。同样可得到时间表示的最可能最大值：

$$\bar{\xi}_{1\%} = \sqrt{2m_0 \left\{ \frac{3600t}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \right\}} \sqrt{\lambda_{0+}^2 m_0} \qquad (3.3.7)$$

例如，某 [illegible] 长的船舶，纵摇运动数据：时间 $t = 3$ 小时；运动谱的各次矩 $m_0 = 0.0$ [illegible] 度^2，$m_2 = 0.0$ [illegible] 度^2/秒^2，$m_4 = 0.0$ [illegible] 度^2/秒^4。试求出纵摇运动的最可能最大值和 $\alpha = 0.01$ 时的最大值。

利用式 (3.3.7)，最可能的最大纵摇

$$\bar{\xi}_{1\%} = 3.[illegible]\sqrt{m_0} = 3.[illegible]$$

由式 (3.3.6)，小概率 $\alpha = 0.01$ 时的最大纵摇

$$\hat{\xi}_{1\%} = [illegible]\sqrt{m_0} = [illegible]$$

然而，实际上已知观测期间记录到的纵摇幅值为 [illegible] 比最可能出现最大值预报 [illegible] 高出 [illegible]。这是可预料的，因为理论上已证明极值超过最可能最大值的机会相当多，对窄带谱说来，这个概率等于 [illegible] 所以，在设计中不宜选用最可能的最大值。而选用小概率最大值，当 $\alpha = 0.01$ 时，意味着在相似环境条件下航行的 [illegible] 艘姐妹船中，只有一艘在此时间段内有大于预报值的纵摇运动。$\alpha = 0.01$ 相应的最大值比最可能最大值大 [illegible]，一般只能用它来提设计要求，才比较合理。

[illegible]

第三节　长期预报

一个海洋结构，在整个生命期内将长期处于海洋环境中，在漫长的生命期内，遭遇的波浪，就整个说来，不再属于平稳随机过程。因此也不可能用短期预报方法给出极值统计值。相应的响应必须采用新的方法进行预报，这种方法就是长期预报方法。

尽管海洋结构在整个生命期内遭遇的海浪是千变万化的，但我们总可以把总时间跨度划分为大量短时间跨度，使每一时间间隔为几小时的持续时间，并且认为每一时间间隔内海况不变，即可看成是平稳的各态历经的。这样，每一时间间隔内结构响应都可应用短期预报方法得到相应的概率密度函数或分布，则整个生命期内的响应历程可看作是一系列短期的响应事件，通过加权方法组合起来，得到相应的概率密度函数或分布。

一、波浪的长期分布数据

为了计算响应的长期概率，必须知道波浪的长期分布。一般说来，短期波能谱密度可用两个参数：有义波高和特征周期表征。人们通过长期地对某一海域的观测，得到该海域的长期波浪数据，用有义波高 匀员辕猿和平均波周期 贼的分布形式给出。例如表 愿援员即是宰葬造凿藻灶（员怨远源）提供的北大西洋的长期波浪数据。每对 匀员辕猿、贼相应的概率可根据表中的数值除以总观测数（等于 员园园园）得到。例如，匀员辕猿越圆援缘～猿援缘皂，贼越苑～怨时，相应的概率等于 园援员圆缘园苑辕员园园园越园援园园园员圆缘园苑。

表 愿援员　北大西洋长期波浪数据

波浪高度 匀泽（皂）	波浪周期 贼（泽）								超越周期之和
	约缘	缘～苑	苑～怨	怨～员员	员员～员猿	员猿～员缘	员缘～员苑	跃员苑	
约园援缘	园援园圆员	员援园缘怨	源援园苑苑	园援园愿源	园援园员苑	园援园园远	园援园园园	园援园园园	源援圆远源
园援缘～员援缘	苑援园圆愿	员猿援员园愿	远猿援园愿	员苑援园远	园援园怨	园援园猿猿	园援园员	园援园苑	园援苑怨愿园
员援缘～圆援缘	园援员园源	员源远援圆员	员远援怨员	猿园援园源	猿援缘愿	园援园苑	园援园怨	园援园远	猿源援园园
圆援缘～猿援缘	猿援愿	源援园园	怨援员怨	猿援员怨	缘援园远	园援园愿	园援园圆	园援园苑	员愿援怨
猿援缘～源援缘	园援园猿	员圆援园怨	源援园远	园援园愿	源援愿	员援怨源	园援园愿	园援园怨	愿援园远
源援缘～缘援缘	园援园圆	源援猿源	苑援园圆	员援园怨	猿援猿	园援园远	园援园猿	园援园源	猿援圆员
缘援缘～远援缘	园援园苑	园援园圆	怨援园圆	愿援远	猿援猿	园援园怨	园援园愿	园援园猿	园援缘远
远援缘～苑援缘	园援园猿	员援园怨	源援苑	缘援圆	员援猿	园援园愿	园援园源	园援园源	员援猿圆
苑援缘～愿援缘	园援园圆	员援园怨	园援园缘	猿援远	员援愿	园援园圆	园援园猿	园援园圆	员援园怨
愿援缘～怨援缘	园援园圆	园援园源	员援远	园援园远	员援源	园援园愿	园援园圆	园援园源	远援园圆
怨援缘～员园援缘	园援园员	园援园员	园援园圆	园援园员	园援园圆	园援园缘	园援园圆	园援园圆	园援园圆
员园援缘～员员援缘	园援园圆	园援园圆	园援园猿	园援园愿	园援园苑	园援园远		园援园圆	园援园源
员员援缘～员圆援缘		园援园缘	园援园圆	园援园源	园援园圆	园援园远	园援园员		园援园愿

员愿远

续表 愿-员

波浪高度 勻-择 (m)	波浪周期 -栽 -值									超越周期之和
	约-缘	缘-苑	苑-怨	怨-员员	员员-员猿	员猿-员缘	员缘-员苑	员苑-员怨	员怨-员愿	
员园园-员缘园		园.园园		园.园园	园.园园	园.园园	园.园园		园.园园	园.园园
员缘园-员愿园				园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园
员愿园-员怨园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园
超越波高之和	园.园园	猿.缘园	猿.缘园	员.苑园	园.园缘	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园	园.园园

二、长期分布概率

考虑波浪结构系统为线性系统，根据前面的分布、线性系统的响应的极值统计概率服从 砸-瑞利分布，即

$$孕_{则}(赠 \leqslant 赠_{圆}) = 越员 - 原\exp\left(-\frac{赠_{圆}^{2}}{圆皂_{赠}^{2}}\right) \qquad (愿.园园)$$

式中，皂$_{赠}$为波浪 勻-择 -栽相应的响应方差。则超越概率为：

$$孕(赠 跃 赠_{圆}) = 越 - 原\exp\left(-\frac{赠_{圆}^{2}}{圆皂_{赠}^{2}}\right) \qquad (愿.园园)$$

因为结构生命期的超越概率可看成是波浪 (勻-择 -栽) 和工况 航向角 β 航速 哉$_{造}$)的函数。由于波浪数据与所选择的波谱形状有关，如计入，则总超越频率可写成：

$$孕_{总} = 越\sum_{蚤}\sum_{躁}\sum_{噪}\sum_{造} 枣_{蚤}枣_{躁}枣_{噪}枣_{造}\left[原\exp\left(-\frac{赠_{圆}^{2}}{圆皂_{赠|蚤,躁,噪,造}^{2}}\right)\right] \qquad (愿.园园)$$

式中，枣$_{蚤}$为海况分布概率，例如，可由表 愿-员给出；枣$_{躁}$为波谱的分布概率；枣$_{噪}$为给定海况下遭遇波向的概率，一般认为是均匀分布的；枣$_{造}$为给定海况和遭遇波向时，航速的概率。

一般说来，哉$_{造}$与海况条件 (勻-择 -栽) 相关，可采用某种失速公式计算。但考虑到长期统计主要关心的是极端海况条件，此时 哉$_{造}$不可能很高，其对长期响应概率密度函数影响很小。因此，通常取 枣$_{造}$越员 至于谱型的影响，多数理论方法都认为 枣$_{造}$越员进行简化。

于是，长期分布概率的计算步骤如下：

员. 假定方向波谱是余弦平方分布

$$杂(蚣,\theta) = 杂(蚣)\cdot 郧(\theta) \qquad (愿.园圆)$$

其中，

$$郧(\theta) = \begin{cases} \dfrac{圆}{\pi}\cos^{2}\theta & 原\dfrac{\pi}{圆} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{圆} \\ 园 & 其余 \end{cases}$$

θ 越园为主波方向。

圆. 对已有义波高 勻-择 平均波周期 -栽给定的各短期波浪，确定其出现的概率 枣$_{蚤}$特别注意 枣$_{蚤}$应满足条件：

$$\sum_{蚤=员}^{陨} 枣_{蚤} = 越员$$

式中，N为结构生命期内的各种短期波个数。

猿 用理论或模型试验方法得出每一方向的响应传递函数 $H(\omega,\theta)$。

源 对每一个短期波计算响应的均方根值 $\sigma_{响应}$ 越 $\sqrt{m_{响应}}$

$$m_{响应}=\sigma_{响应}^{2}=\int_{原}^{圆}\int_{-\pi}^{\pi}H^{2}(\omega,\theta)S_{波浪}(\omega,\theta)\,d\theta\,d\omega \tag{5.3.2}$$

缘 假定响应的振幅服从 Rayleigh 分布，则对每个响应均方根值，响应振幅超越 a 的概率为：

$$P(振幅>a)=\exp\left(-\frac{a^{2}}{2m_{响应}}\right) \tag{5.3.3}$$

远 对所有响应均方根值 $\sigma_{响应}$ 重复步骤 圆 …，N 总超越 a 的概率 $P_{总}$ (振幅>a) 可表示为单个超越概率乘上该短期波出现概率的和：

$$P_{总}(振幅>a)=\sum_{i=1}^{N}P(振幅>a)_{i}\cdot p_{i} \tag{5.3.4}$$

苑 计算结构生命期响应的振幅个数 N。例如，设结构生命期为 T 年，其中三分之一为航行时间，响应的平均遭遇周期为 T_{z} 秒，那么，生命期内总响应振幅个数约为 $N=\frac{T\times 10^{7}}{3T_{z}}$。一般按下式计算：

$$N=\sum_{i=1}^{N}N_{i}=\sum_{i=1}^{N}\nu_{i}t_{i}\times 3600 \tag{5.3.5}$$

式中，ν_{i}为短期响应每单位时间内的平均数，$\nu_{i}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m_{2i}}{m_{0i}}}$；$t_{i}$为以小时计的生命期。

愿 取长期超越概率为 10^{-8}，按式 (5.3.4) 计算出长期预报值 a_{p}。

三、长期极值估算

根据上述求得的长期预报极值，实际上并不是响应的长期极值。它仅表示结构生命期内任何一个响应振幅中其值超过某一定值的概率 p 取为 10^{-8}。此时的预报值，从极值的观点看，被超过的可能性仍有 10^{8} 之多。由于结构设计者最感兴趣的是极端状态下的响应问题，因此有必要研究极值响应发生的概率，即要求出在 N 次波浪振荡中，极值响应不超过定值 a 的累积概率 $P_{则}$ ($a_{max}\leqslant a$)。

式 (5.3.3) 已给出了不管哪一次振荡中响应 a 超越 a 的概率。显然 $a_{max}\leqslant a$ 的概率为 $1-P_{总}$ (振幅>a)。这样，如果把每一振荡看作一次试验，并认为是彼此独立的，那么，根据概率论，在 N 次试验条件下，a 超越 a 为 n 次的概率可由贝努尔二项分布给出：

$$P(n)=C_{N}^{n}P_{总}^{n}(1-P_{总})^{N-n} \tag{5.3.6}$$

当 N 很大，n 很小时，(5.3.6) 式可用离散泊松分布表示：

$$P(n)=\frac{(NP_{总})^{n}}{n!}\exp(-NP_{总}) \tag{5.3.7}$$

极值 $a_{max}\leqslant a$ 的概率即为 a 超越 a 的零次概率，

$$P_{则}(a_{max}\leqslant a)=P(0)=\exp(-NP_{总}) \tag{5.3.8}$$

极值密度函数可对式 (5.3.8) 微分得到：

$$p(a)=N\cdot\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}p_{i}\exp\left(-\frac{a^{2}}{2m_{0i}}\right)\right\}\cdot\sum_{i=1}^{N}\frac{a}{m_{0i}}p_{i}\exp\left(-\frac{a^{2}}{2m_{0i}}\right) \tag{5.3.9}$$

$$\int_{0}^{\infty}p(a)\,da=1$$

实际上，式 (7.3.10) 和式 (7.3.11) 也可从式 (7.3.9) 通过序列统计的方法得出。由式 (7.3.9)，响应小于等于某一定值 x 的概率为：

$$P(y \leqslant x) = P(y_1 \leqslant x, y_2 \leqslant x, \cdots, y_N \leqslant x)$$

按序列统计理论，响应在 N 次振荡中的极值分布为

$$F_N(x) = P(y_1 \leqslant x, y_2 \leqslant x, \cdots, y_N \leqslant x) = [F(x)]^N$$

或者改写成

$$F_N(x) = \left(1 - \frac{N[1 - F(x)]}{N}\right)^N \tag{7.3.12}$$

当 N 很大、$1 - F(x)$ 很小时，式 (7.3.12) 可近似写成

$$F_N(x) \approx \exp[-N(1 - F(x))]$$

这就是式 (7.3.10)。

因此，长期极值的均值和方差可按下式计算：

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, \mathrm{d}x \tag{7.3.13}$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 p(x)\, \mathrm{d}x \tag{7.3.14}$$

参 考 文 献

员 李远林 圆波浪理论及波浪载荷 圆广州：华南理工大学出版社，员怨怨源

圆 邱大洪 圆波浪理论及其在工程中的应用 圆北京：高等教育出版社，员怨怨元

猿 王竹溪，郭敦仁 圆特殊函数概论 圆北京：科学出版社，员怨缘怨

源 于家鹏 圆船舶与海洋工程建设物性能统计预报及应用 圆北京：国防工业出版社，员怨愿缘

缘 阅蒋社砸员圆猿猿圆缘号 考试指南[M]. 北京：中国水利水电出版社，员怨怨园

员

远 员怨愿园蒋海鹏. 船舶与海洋工程结构疲劳可靠性[M]. 北京：国防工业出版社，员怨怨缘

苑 蒋海鹏. 船舶与海洋工程结构疲劳可靠性[M]. 北京：国防工业出版社，员怨怨缘

愿 悦采韩建民，刘建红，等. 运圆匀船舶结构力学[M]. 北京：人民交通出版社，员怨怨苑

怨 运博士悦 栽圆阿莫斯社孕期指南[M]. 北京：科学出版社，员怨怨员，圆愿

员园 砸蒋龙社酝圆粤 酱酿酒社皂第员版 酱煤员员员员社 澳煤酱则博士蒋龙社糟志蒋酱遵循蒋第员第员员员社 贼则蒋龙社私员版. 员怨愿苑. 员源

员员 悦采韩建民，刘建红，等. 运圆粤员员员员则 混凝土结构设计原理[M]. 北京：人民交通出版社，员怨怨怨. 员远

员圆 酝蒋海鹏. 船舶与海洋工程结构疲劳可靠性[M]. 北京：国防工业出版社，员怨怨缘

员猿 杂蒋辉悦 则砸志蒋酱 员怨怨员 孕蒋酱则 员怨怨圆 员圆 圆）

员源 在蒋社酱酱韵悦 缮蒋酱砸宰，杂蒋早运 则援晕皂第员员员员员则 混凝土结构设计原理[M]. 北京：人民交通出版社，员怨怨愿

员缘 许维德 圆流体力学 修订本）圆北京：国防工业出版社，员怨怨怨

员远 孙明光等 圆流体力学 解说）圆广州：中山大学，员怨怨远

员苑 匀恩蒋韵云圆船舶结构设计 圆张祥孝主译 圆广州：华南理工大学出版社，员怨愿愿

员愿 巴塔查雅，砸圆海洋运载工具动力学 圆郎明川等译 圆北京：海洋出版社，员怨愿园

员怨 粤酱龙社酝圆，杂蒋禁社员员粤员员员员社 蒋海鹏. 船舶与海洋工程结构疲劳可靠性[M]. 北京：国防工业出版社，员怨怨源

圆园 缮笔曹匀圆则博士蒋龙社圆怨怨缘园

圆员 晕蒋笔蒋社允晕圆志蒋酱匀则博士蒋龙社圆怨怨苑

圆圆 李远林 圆近海结构水动力学 讲义）圆广州：华南理工大学，员怨怨猿

圆猿 严恺 圆中国海岸工程 圆南京：河海大学出版社，员怨怨园

圆源 陈士荫，顾家龙，吴宋仁 圆海岸动力学 圆北京：人民出版社，员怨怨缘

圆缘 李玉成 圆动蒋龙社方程水动力系数归一化探讨 圆水动力学研究与进展，员怨愿愿. 员猿 猿）

圆远 酱酱酝运圆则博士蒋龙社粤型圆蒋社孙建圆蒋社孙建圆蒋龙社蒋海鹏. 船舶与海洋工程结构疲劳可靠性[M]. 北京：国防工业出版社，员怨怨缘