地信网论坛
BBS.3S001.COM

目　录

1　边坡可靠性分析的基本原理 …… 1
1.1　概述 …… 1
1.1.1　边坡工程质量指标 …… 1
1.1.2　定数概念的安全性表达 …… 2
1.1.3　风险概念的可靠度表达 …… 8
1.1.4　边坡可靠性研究的进展及其分析方法 …… 11
1.2　变化性与不确定性 …… 16
1.2.1　基本概念 …… 16
1.2.2　不确定性的类型 …… 21
1.2.3　不确定性的描述 …… 25
1.3　边坡可靠性概念 …… 25
1.3.1　可靠性定义 …… 26
1.3.2　可靠性尺度 …… 27
1.3.3　极限状态与极限状态方程 …… 28
1.3.4　干涉理论与破坏概率 …… 31
1.3.5　可靠指标与安全系数 …… 40
1.4　设计可靠度的确定 …… 50
1.4.1　确定设计可靠度的方法 …… 51
1.4.2　建筑结构设计可靠指标 …… 52
1.4.3　岩土工程设计可靠指标的零星意见 …… 54
1.4.4　几个应用实例 …… 56
2　输入概率模型的选择 …… 61
2.1　概述 …… 61
2.2　可靠性分析常用的概率分布 …… 63
2.2.1　连续概率分布 …… 63
2.2.2　离散概率分布 …… 76

地信网论坛
BBS.35001.COM

2.2.3 经验概率分布 …… 81
2.3 分布类型的选择 …… 87
2.3.1 点估计法 …… 88
2.3.2 直方图法 …… 90
2.3.3 概率图法 …… 92
2.4 参数估计 …… 106
2.4.1 点估计方法 …… 107
2.4.2 区间估计方法 …… 114
2.5 随机变量分布的检验 …… 122
2.5.1 X^2 检验 …… 122
2.5.2 K-S检验 …… 129
3 蒙特卡洛模拟法 …… 136
3.1 概述 …… 136
3.2 蒙特卡洛法的一般形式及模拟步骤 …… 139
3.2.1 一般形式 …… 139
3.2.2 模拟步骤 …… 140
3.2.3 误差估计与模拟次数 …… 143
3.3 均匀分布随机数的产生方法 …… 147
3.3.1 均匀分布随机数的性质 …… 147
3.3.2 均匀分布随机数的产生 …… 148
3.3.3 均匀分布随机数的检验 …… 152
3.4 非均匀分布随机变量的抽样方法 …… 160
3.4.1 连续随机变量的抽样 …… 161
3.4.2 离散随机变量的抽样 …… 177
3.5 减小试验方差的方法 …… 179
3.5.1 对偶变数法 …… 179
3.5.2 相关抽样法 …… 181
3.6 模拟结果的可信度估计 …… 182
3.7 实例分析 …… 189
3.7.1 美国双峰铜矿 …… 189
3.7.2 澳大利亚新南威尔士和昆士兰煤矿排土场 …… 197
3.7.3 尖山露天铁矿 …… 204

地信网论坛
BBS.35001.COM

指标法 …… 218
4.1 概述 …… 218
4.2 中心点法 …… 222
4.3 验算点法 …… 233
4.3.1 两个正态分布的变量 …… 233
4.3.2 多个正态分布的变量 …… 236
4.3.3 多个非正态分布的变量 …… 250
4.3.4 相关变量的处理 …… 254
4.4 实例分析 …… 265
4.4.1 极限状态方程的建立与可靠指标的求解 …… 265
4.4.2 状态函数求导 …… 268
4.4.3 危险破坏面的优化求解方法 …… 269
4.4.4 计算结果分析 …… 274
5 统计矩法 …… 280
5.1 统计矩法的基本公式 …… 280
5.2 实例分析 …… 284
5.2.1 路堑土坡 …… 284
5.2.2 永平铜矿西北排土场 …… 286
5.2.3 德兴铜矿南山采场第Ⅰ设计区边坡 …… 292
6 随机有限元法 …… 295
6.1 概述 …… 295
6.2 有限元法的基础 …… 297
6.3 线性一次逼近法 …… 304
6.3.1 线性一次逼近理论 …… 304
6.3.2 各向同性边坡体的局部破坏概率 …… 308
6.3.3 有一定方向不连续面边坡体的局部破坏概率 …… 313
6.3.4 确定破坏面边坡体的总体破坏概率 …… 317
6.3.5 算例 …… 318
6.4 迭代验算法 …… 326
6.4.1 基于有限元的可靠指标计算公式 …… 326
6.4.2 基于随机有限元原理的可靠指标计算方法 …… 330
6.4.3 实例分析 …… 335

地信网论坛
BBS.3S001.COM

附表 1　标准正态分布表 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}\xi$ …… 340
附表 2　χ^2分布的（1－α）百分位值 …… 344
参考文献 …… 345

质级地质论坛: http://bbs.3s001.com/

地信网论坛
BBS.3S001.COM

1 边坡可靠性分析的基本原理

1.1 概 述

1.1.1 边坡工程质量指标

边坡工程质量即工程效果，表明特定边坡的设计目标或功能，在边坡形成和使用过程中，其技术经济指标实际所达到的水平。它是设计（决策）质量（Q）、施工（形成）效能（I）和管理（控制）水平（C）的三元函数，其表达式为

$$E=f(Q,I,C) \tag{1-1}$$

式中，E为边坡工程效果。为了获得良好的边坡工程效果，在现代工程管理中，比较突出地强调最优化设计、最优化施工和最优化管理三位一体的设计思想和管理方法。

边坡工程质量是以边坡工程性能指标为判别基准的。边坡工程质量指标即边坡工程性能指标有三：一是安全性，二是实用性，三是时效性。

边坡安全就是消除由于边坡破坏造成生命财产的损失。边坡安全性是指边坡工程在形成和使用过程中，在正常工作环境和预计条件作用下，保持总体边坡稳定的能力。对于临时边坡，即永久性边坡形成之前的中期边坡，例如露天采矿场的推进阶段边坡、对于长边坡，例如采矿场的台阶边坡、路堑边坡、水渠堤坡等，可能存在甚或难免发生某些局部边坡变形或破坏，但按质量指标的要求，亦应最大限度地满足安全的定义，即最大限度地减小损失。安全性涉及到国家财产、人民生命和社会影响等问题，是边坡工程的重要性能指标，因此，必须予以特别注意。

任何边坡都是从属性工程，都相对独立地服务于采矿、交通、水利、建筑等特定工程。实用性是指在预计条件下，边坡满足特

地信网论坛
BBS.35001.COM

足主体使用要求的能力。例如露天矿边坡，有时，尽管边坡岩体工程地质力学条件可能形成较陡的安全边坡，而由于矿体的赋存形态或采矿工艺要求却须设计成较缓的边坡。当然，亦有时出于使用的考虑，须对性能不良的边坡岩体进行人工加固、排渗等，从而构造实用的较陡边坡。满足主体工程的实用性是边坡使用价值的量度。因此，从工程经济和环境工程角度说，也应当是合理的。

时效性是特定的主体工程在其工程寿命期限内，边坡在正常形成和使用条件下，不致因边坡岩体性能随时间迁移而出现不可接受的破坏概率的能力。对于这一性能，在当前只能通过施工控制、生产管理和变形监测来实现。特别是大型露天矿边坡，边坡要在几十年的开采过程中形成，不可能准确地预知深部边坡岩体的工程地质条件，因此，还不能通过可靠的数学模型进行定量处理。目前最好的方法还是采用动态可靠性分析方法，亦称滚动预测方法，即始终在当前最新信息的基础上，进行边坡可靠性设计和预测，直至完成使用期。

一个边坡具有安全、实用和时效性能，人们就认为它存在可靠性。因此，可将安全性、实用性和时效性合称为可靠性。可靠性是在一定条件下实现的，其定义为：在规定的条件下和规定的时间内，完成预定功能的能力。

综上可见，边坡可靠性是评价和衡量边坡工程质量的综合性指标。从这个意义上可以说，提高边坡可靠性与提高边坡工程质量具有同样的含义。因此，在广泛的边坡工程设计、施工和使用中，深入地分析、评价边坡的可靠性，成为边坡工程实践的必需。

1.1.2 定数概念的安全性表达

在边坡工程评价、设计和建设中，安全性始终是最根本、最重要的指标。由于构成边坡的岩土工程性质、分析模型的抽象、设计参数的假定以及未来边坡的工作环境变化，都包含有许许多多的不确定因素，而工程技术人员不可能在设计时或施工中完全

地信网论坛
BBS.3S001.COM

确定地预知这些不确定因素可能造成的后果。因此，必须在工程中采取一些方法处理不确定性。传统的边坡评价方法，是把不确定性概括成一个认为可以弥补与实际状态之间差别的集总系数，即安全系数F_S，用以作为评价指标，表达边坡的安全性。

经过长期的工程实践，安全系数法本身不断得以发展，并积累了丰富的使用经验。目前，在各种不同的假定下，提出许多分析方法，诸如Fellenius法、Bishop法、Janbu法、Morgenstern-Price法、Spencer法、Sarma法，等等。但应指出，各种分析方法的计算安全系数的真确性，只能在各自假设的模型内等效，并不与实际模型等效。因而，在各种边坡工程计算中，都隐含地承认安全系数本身带有某种不确定的事实，所以才拟定出各自的可接受安全系数标准，即规定取用$F_S>1$的某一设计使用阈值。然而，如何认识安全系数与安全系数法的概念，如何评价安全系数对建设费用和工程效益的具体影响，采用多大的设计安全系数最适宜，这往往成为工程设计之关键性问题。据目前各方面报告看，计算的安全系数有很宽的可接受范围，不仅各国之间不同，同一国家不同工程系统也不同，就是同一系统的知名专家之间，他们的意见也可能存在很大差异。这反映了工程实践中确定安全系数精确含义的困难。下面，我们简要地讨论一下有关安全系数法的基本假定和安全概念。

1.1.2.1 破坏面的概念

在所有的极限平衡分析方法中，都必须假定一个简单形状的破坏面，因此，构成破坏面的构造不连续面形式或剪切阻力最小路径的概念成为这一假定的依据。而且，是把这个面看作一个假想的、把潜在破坏体分成两个刚性体的面，一般不涉及假定破坏面上、下每点的应力分布，也不必使潜在破坏体内每点都满足应力平衡方程。可以认为，极限平衡方法关注的是主破坏面。然而，一般在潜在破坏体内仍可能有其他破坏面，就是说，抗剪阻力有可能沿主破坏面和其他破坏面一起被调动，很多大型滑坡的实际观察也证明，破坏面一般是一个大的剪切带，很少为单一的破坏

地信网论坛
BBS.3S001.COM

面。为此，规范把破坏面定义为：描述不稳定范围的外部界限面。这种假定与实际的差异，必然给稳定性评价带来风险。

边坡分析是根据不同的假定破坏面的形状选择相应的分析方法，而不同的分析方法可能产生不同的、理论上安全系数最小的破坏面，亦称最危险破坏面，通常是通过对若干假定破坏面的反复试算确定的。即使是由一个或几个确定的不连续面、或软弱层、或古滑动面构成的破坏面，在其通过的部分可以大致定位，但仍需试算。因为完整的潜在破坏面很少，很难预先确知，在这种情况下，只是可以减少试算的次数。对于均质边坡，如土质边坡、随机方向裂隙极发育的软岩边坡或蚀变岩体边坡，可以认为其性质不受构造不连续面性态的控制。为简化起见，通常假定椭圆形、圆弧形或对数螺旋形等近似破坏面。其实不尽然。所以说，安全系数计算结果都是在给定参数下对应假定破坏面形式的安全系数。这样，在实际应用中，根据边坡岩体的结构和构造特征，确定具体的任意形状的破坏面，可能比用圆弧形破坏面去近似更好。同时还应说明，用假定的连续延伸的破坏面去近似本来不连续的破坏面，也是不精确的。

这里，必须明确指出，破坏面的假定是所有边坡稳定性分析方法的基础，无论是安全系数法，还是可靠性分析法，甚或随机数值模拟法，都不可避免地要确定这个不确定的破坏面，只是确定的方法不同而已。然而，不管采用哪种处理方法，决定性的因素是所建立的边坡工程地质模型的正确性，如果对工程场地的地质条件和可能的破坏模式缺乏深入的了解，那么，无论采用多么精确的分析方法，所计算的安全系数或破坏概率都可能没有什么实际意义。

1.1.2.2 分析方法的选择

各种不同的分析方法，由于建立模型所考虑的材料性质、边界约束条件、以及力学假定的不同，而各自都有一定的适用范围，计算结果必然存在很大差异，就是同一工程，采用同样的计算参数，选用几种似适合的计算方法，其计算的安全系数值的大

地信网论坛
BBS.35001.COM

小也不相同，可能相差30%，由此就可能得出完全不同的工程结论。Whitman和Bailey曾对4种不同类型的边坡，分别采用3种不同计算方法进行对比研究，对比结果如表1-1所示。很显然，Fellenius法过低估计安全系数，偏于保守和安全，可能造成工程的不经济，而Bishop法和M-P法有比较精确解，计算结果的差异也相对较小。

鉴于分析方法对计算安全系数F_S值有如此重大影响，故可以认为，所采用的设计安全系数值在一定程度上依据所采用的分析方法而定，就是说，对于不同的分析方法，应采用不同的设计安全系数值。比如，若选择Fellenius法，设计安全系数取$F_S=1.15$，若选择Bishop法，则取$F_S=1.20$。然而，这样的设计结果，从定量上讲，它们可能具有相同的安全度。而且，目前，这样的决定只能且完全凭工程技术人员的经验。这种经验决定，往往会完全抵毁了精确方法对简化方法的优点和差异。

表 1-1　不同分析方法求得的安全系数值的对比

实　　例	安全系数 F_S		
	Fellenius法	简化Bishop法	Morgenstern-Price法③
1. 均质土，无孔隙水压	1.49	1.61	1.58～1.62
2. 有机淤泥上填体长期稳定性，三种不同土	1.09	1.33	1.24～1.26
3. 同2，填体暂时稳定性	0.66	0.7～0.82②	0.73～0.78
4. 有粘结力土的斜心墙支托的堆石水下边坡	1.14① 1.84	2.00	2.01～2.03

① 第1个值相对于全容重和有孔隙压力，第2个值相应于水下容重。这表明，在特殊条件下，使用Fellenius法有困难；

② 由于坡脚附近条块基面处确定剪切力困难；

③ 选择具有条块间力的假定。

1.1.2.3 输入参数的变化性

边坡稳定性分析的目的是为了评价在假定破坏机理、破坏面和边坡几何形状下相应破坏模式的安全系数。然而，由于用于

地信网论坛
BBS.35001.COM
计算的参数如抗剪强度、地下水压分布、构成破坏面的不连续面的产状要素、容重等具有很大的变化性和不确定性，而安全系数计算所使用的参数值不可能代表该参数的真值。因为，计算参数的选取通常是基于研究期间所能够作的现场测定和试验室试验结果，暂且不讨论试验结果本身能否反映参数的总体特征，就取用值而言，也不反映试验结果的变化性。客观地质体的任何性质都不存在唯一的确定值，都具有一定的随机性。人为地、经验地确定计算参数值，不但失去了精确试验和测定计算参数值的必要性，而且也不可能非常有把握地计算出工程的真实的安全系数值。

数据的变化性和各种误差都强烈地影响安全系数的计算结果。下面举一简单例子即可说明参数值的影响程度。

有一散体干边坡，其粘结力$c=0$，摩擦角为ϕ，对于指定的边坡角α，边坡的安全系数可定义为：

$$F_S=\frac{\tan\phi}{\tan\alpha} \tag{1-2}$$

安全系数的均值为

$$\overline{F_S}=\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)\overline{\tan\phi} \tag{1-3}$$

而安全系数的方差$Var[F_S]$正比于摩擦系数$\tan\phi$的方差$Var[\tan\phi]$：

$$Var[F_S]=\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right)^2 Var[\tan\phi] \tag{1-4}$$

如果将式（1-4）开平方，并除以式（1-3），则可得

$$\delta_{F_S}=\delta_{\tan\phi} \tag{1-5}$$

即安全系数的变异系数等于摩擦系数的变异系数。计算参数的离散程度对安全系数真确度的控制作用可见一斑。

1.1.2.4 边坡体内变形程度的判断

在潜在滑体稳定性评价和加固工程设计中，可能涉及到许多不确定因素，其中一个很重要因素就是对边坡岩体内变形程度的

地信网论坛
BBS.3S001.COM

判断。我们来分析一个平面破坏边坡的加固例子。设潜在滑体的抗滑力为R，滑动力为S，通过岩石锚索施加的外力为P，力P与潜在破坏面法线间夹角为θ。如果把锚固力$P\sin\theta$视作减小滑动力，则有定义

$$F_S=\frac{R}{S-P\sin\theta} \tag{1-6}$$

如果把锚固力$P\sin\theta$视作增大抗滑力，则有定义

$$F_S=\frac{R+P\sin\theta}{S} \tag{1-7}$$

两个定义，从物理意义上讲都是合理的，但却会得出两个不同的安全系数值，它们之间差别的大小取决于P值相对于R和S值的大小。反过来讲，如果给定一个所要求的F_S值，用式(1-6)和式(1-7)所预计的力P也不同，其差别随着F_S值的增大而增大。应当说，在P为主动力的场合，在潜在滑体发生移动之前，锚索受拉，采用式(1-6)是正确的，但如果P是由非受拉锚索施加的力，则采用式(1-7)较为合适。因为在移动发生之后，岩石锚索只能产生抗滑力。然而，在实际工程应用中，往往并不知道岩体位移阶段，这就有可能使锚固力计算方法选取的随意性给工程实践带来偏差和风险。

1.1.2.5 安全性的含义

传统的分析方法，试图以安全系数值综合地反映各个参数和所采用分析方法的不确定的岩体状态；反映具体边坡对主体工程（如采矿工程、水利工程、道路工程等）的重要性。安全系数虽是欲以数值表示安全度指标，但并不是定量表示安全性的尺度。在实际应用中，较高的安全系数意味更安全，但并不表明安全多少。不能认为采用安全系数$F_S=1.20$，就可以得到120%的安全，$F_S=2.2$的边坡为$F_S=1.1$的边坡的安全程度的2倍。而确定设计安全系数值，往往凭借工程技术人员的设计经验和工程判断的能力，并没有通用的或广为接受的准则。这样，难免带有一定程度的随意性和人为因素，甚至主观臆断成分。显而易见，不

地信网论坛
BBS.35001.COM
能定量地表示安全度是安全系数方法的最大缺点。

定数分析把沿整个破坏面的安全系数看作常数，并且认为沿破坏面每点的局部安全系数与之相等。所以，如果把边坡设计成总体安全系数大于1，就认为沿边坡任何地方都不存在局部破坏。实际上，即使是均质的、各向同性的边坡，边坡体内的应力分布也不是均匀的。根据实际观察和有限元分析可知，超限应力区和局部破坏均可能在所谓“安全”边坡中形成，并存在一定的破坏概率。

安全系数与实际变形之间的客观关系通常很难确定，边坡开始破坏很少与计算安全系数等于1时相一致。实际的安全系数是由边坡岩体工程地质力学条件决定的，而计算的安全系数受到当时的测试技术和计算技术的制约，不得不建立许多简化的假定，而这些简化假定对计算结果的影响往往又难以估计。在实践中，时有计算安全系数大于1的边坡发生破坏，而计算安全系数小于1的边坡仍保持稳定。这就在所难免。

概括地说，安全系数法是一种处理工程问题的方法，并且在长期的应用中已积累了相当丰富的经验。可是，采用这种设计法，实质上是用定数模型处理不确定性问题，这就在理论上存在不完备的地方，其结果使边坡工程的安全水平含混不清，也无法提供说明工程安全度的评价指标。正是因此，必然导致产生定量评定工程安全度的要求，并形成和发展成基于风险概念的可靠性分析方法。

1.1.3 风险概念的可靠度表达

由上述可知，在边坡工程设计中，必然存在一定程度的风险，这是一种客观存在。一方面，是由于我们对土体和岩体性质、破坏机理认识以及数学力学假定的不完善，致使预测的理论模型与工程实际存在一定差异；另一方面，即便是采用可靠的模型和适宜的方法进行精确分析，亦会由于计算数据测试误差及其固有的变化性，依然有风险存在。

所谓风险，定义有二：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

，风险就是边坡发生破坏的概率，或者，风险就是边坡破坏产生不良后果的可能性。也就是说，风险包括发生破坏的可能性及其所产生的后果两方面。故风险可表示为

$$r=f(p,\ c) \tag{1-8}$$

式中 p——发生破坏的概率；

c——破坏产生的后果。

其二，风险是边坡工程预期后果估计中较为不利的一面。这里，风险是表明一种观点，即用考虑各种可能的、统计的观点来观察、分析边坡，从而可以使我们考虑问题更全面，设计更合理。

本书同时接受这两种定义，即在可靠性分析过程中，我们采用后者；在可靠度评价中，我们采用前者。

在边坡工程可靠性分析中，通过风险识别、风险估计和风险评价，从而作出全面的、综合的分析，给出完整的系统信息，其中包括破坏后果在内的工程经济分析，进而作出优化的工程决策。因本书侧重于可靠性分析方法研究，故只从工程可靠性的角度论述，以寻求可接受的风险水平，即在可接受的风险水平上，使边坡工程在规定的设计使用期间内能够满足预期的用途。

传统的定数方法几乎完全依赖计算的安全系数值，尤其在依据较高安全系数的规范进行设计时，似乎绝对安全是可以达到的。其实不然，安全系数并不能定量地表达风险程度，也不能指明可接受风险水平。不同岩体、且具有不同地下水压条件的两个边坡，有可能求得相同的安全系数，但它们的破坏概率可能有重大差别；反之，如果两个具有相同破坏概率的边坡，它们的安全系数值可能全然不同。对比以下两个边坡，可以说明这种差异：

边坡A：堆石边坡，坡度1∶1.4，粘结力$C=0$，摩擦角$\phi=41°\pm1.6°$；

边坡B：土质边坡，坡度1∶2.5，粘结力$c=39.98\pm12.74$ kPa，摩擦角$\phi=20°\pm1°$。

对这两个边坡，采用相同半径的滑动弧和最大深度，以有效

地信网论坛
BBS.3S001.COM

应力分析方法求得的平均安全系数近乎相等，即$\overline{F}_S=1.5$，而标准差S有差异，$S_A=0.0408$，$S_B=0.1669$。由蒙特卡洛模拟抽取500个安全系数样本，得出安全系数的频率分布（图1-1），两个分布曲线均呈对称状，堆石边坡的分布曲线较窄，相对土质边坡较平缓，形状上的这种差异反映了两种材料性质变化性的差异，但安全系数均值都等于1.5。如果要使破坏概率相等，可以土质边坡的分布曲线为基准，向左平移堆石边坡的分布曲线，使之与土质边坡分布曲线下、$F_S=1$以左的面积相等，这时，边坡A的中值安全系数或平均安全系数$F_S=1.12$，而边坡B的平均安全系数仍为$F_S=1.5$。它们相同的破坏概率$p_f=1.6^{-3}$。很显然，对于不同边坡或不同条件下的同样边坡，相同的安全系数值不能反映相同的安全程度或可靠程度。

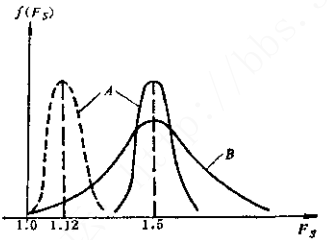


图 1-1　两边坡安全系数频率分布比较

以很明确的分析结果作为设计依据是必要的。因此，工程实践对边坡安全度的表达进一步提出以下要求：首先，希望提供的安全系数值能反映破坏概率的具体估计；其次，需要有安全系数值的上下限或可靠指标的可信度估计，对应各种影响因素作出乐观的和悲观的预测；第三，设计中采用的可接受的安全系数值或破坏概率值一定要考虑到破坏的经济损失后果。

有鉴于此，在边坡工程设计领域，基于定数原理的安全和稳定性的传统研究，日益为风险和可靠性分析所补充或取代。所谓

地信网论坛
BBS.35001.COM

可靠性分析，就是在承认计算所用数据的真确性、破坏机理的合理性、以及分析方法本身的适用性都具有一定程度不确定性的前题下，建立可靠性评价的随机模型，把其输入参数诸如潜在破坏面几何要素、岩土物理力学性质、地下水压分布、地震力以及其它附加荷载等均视作随机变量，并以一定的分布函数描述它们。由此，表明边坡状态的状态函数值以及状态的评价指标亦为随机变量。就是说，通过预测模型把有关假定、参数值、边界条件和初始条件的不确定性引伸到预测结果的不确定性。借助于概率论和数理统计方法，便可以求得边坡可靠度p_s，即所设计边坡能在使用期内、在指定的工作条件下，肯定地达到预计状态的程度，或保证边坡稳定的概率。因为可靠概率p_s与破坏概率p_f之和为全概率，所以有：

$$p_s + p_f = 1 \tag{1-9}$$

因此，可靠性分析结果能反映各种类型的不确定性或随机性，包括频率分布上的和结果可信程度上的不确定性，不但给出边坡设计可采用的平均安全系数，还同时给出相应的可能承担的风险，即破坏概率。用概率论的观点来研究边坡的可靠性，避免了“绝对化”，只要破坏概率很小，小到公众可以接受的程度，就认为边坡设计是可靠的。可见，用破坏概率比用安全系数作为评价指标更能客观、定量地反映边坡的安全性。在实际应用上，对于鉴别具有相同安全系数、不同破坏概率的两个边坡的安全性，破坏概率比安全系数具有更突出的优点。进而言之，破坏概率对确定具体边坡工程采用多大可靠度为好的问题，更具实用价值，而安全系数对确定采用多大的安全度为好几乎毫无意义。

正是由于可靠性分析方法使人们能够取得纵观岩土工程问题的能力，才在近20年间迅速地从理论研究课题发展成具有广泛实际应用价值、且又可行的一整套方法论。

1.1.4 边坡可靠性研究的进展及其分析方法

出于市场激烈竞争的需要和人类对安全性的更高要求，可靠性理论和可靠性工程研究成为当今世界各国工业领域的热门课题

地信网论坛
BBS.35001.COM

之一。仅在美国，就有从事这方面工作的工程技术人员50万，可见一斑。

可靠性工程是一门正在迅速发展的新学科，可靠性分析方法被誉为近代工程技术的重要发展。它首先在电子工业、航天和航空工业等部门得到充分的认识。无论从经济观点看，为了减少总费用；或者从安全角度讲，为了避免人身事故和财产损失；或者从推销商品来说，为了企业信誉，可靠性研究都起到了非常重大的作用。尔后，逐渐推广到机械工程、土木工程、道路工程、水利工程、矿山工程等。自70年代后期应用于边坡工程以来，由于世界范围内岩土工程技术界的重视，可靠性分析方法得以更多的应用实践和理论完善，许多国家已用可靠性理论为修改规范、指导设计的基础。

许多学者对边坡可靠性研究作出卓有成效的贡献。伍(Wu)和克拉夫特 (Kraft)、马特索 (Matsuo)和库罗达(Kuroda)、莫拉-卡塔兰 (Morla-Catalan) 和科内尔 (Cornell)、阿朗桑 (Alonson) 以及哈尔 (Harr) 曾对土质边坡作过典型研究；麦克马洪 (McMahon)、皮特廷 (Pitean) 和马廷 (Martin)、马雷克 (Marek) 和萨瓦莱 (Savaly)、比彻 (Beacher) 和爱因斯坦(Einstein)、莫里斯(Morriss) 和斯托特(Stotter)、金 (Kim)、梅杰(Major)和布朗(Brown)、赫格特 (Herget)论述了概率方法在岩质边坡中的应用；恩格因(Nguyen) 和乔伍德赫里 (Chowdhury)报告了矿山排土场的可靠性分析； 乔伍德赫里和阿-格里瓦斯 (A-Grivas) 对累进破坏的概率分析方法、范马克斯(Vanmarcke)、尤赛曼 (Yucemen) 对三维效应的概率分析方法均作了有益的探索；阿-格里瓦斯和阿卡 (Asaoka)、马特索和格拉斯 (Glass)、萨瓦莱和考尔对其它附加载荷的概率分析予以很大注意；坎布 (Cambou)、科内尔、安格等人根据线性一次逼近理论，采用随机有限元方法进行可靠性分析。

在我国，边坡可靠性研究工作开展较晚，时至1983年，攀钢石灰石矿边坡可靠性分析与经济分析研究课题才作为第一个这个

地信网论坛
BBS.35001.COM
领域的研究成果通过冶金部级鉴定。近年来，边坡可靠性研究和应用得到一定的发展，尤其是作为我国“七五”计划重点科技攻关项目“尖山铁矿边坡优化设计方法研究”，其对可靠性分析作了全面地、深入地探讨。可以预计，可靠性分析方法的推广和应用必将进一步推动我国边坡工程技术的进步。

目前，边坡可靠性分析所常用的方法有：

（1）蒙特卡洛模拟方法，亦称随机模拟方法或统计试验方法；

（2）可靠指标法，包括中心点法和验算点法；

（3）统计矩近似法，亦称Rosenblueth统计矩法；

（4）随机有限元法，是可靠指标法与数值法相耦合的方法，包括一次线性逼近法和叠代验算法。

本书除第1章叙述可靠性分析基本原理，第2章介绍可靠性分析的基本工具外，第3、4、5、6章分别论述以上四种分析方法。

边坡可靠性分析程序如图1-2所示。现简要说明如下：

（1）为校核已有边坡的可靠度，自然有特定的边坡几何形状和相应的边坡工程地质剖面图；为设计边坡，可指定一组边坡几何形状（反映边坡角、边坡高度、边坡轮廓线变化）和相应的边坡工程地质剖面图。这是边坡分析的基础，无论采用哪种分析方法，地质模型和数据的精确性决定分析结果的精确性。或者说，离开可靠的地质模型的分析，任何分析方法和精度都是没有意义的。这一点，对于所有岩土工程问题都是一样的。

（2）根据边坡岩体工程地质力学判断和破坏机理分析，识别潜在破坏模式，确定破坏面的可能形状。如果由空间位置比较确定的不连续面构成潜在破坏面，可以此作确定型破坏面处理；如果预计潜在破坏面只有有限个可能变化形态，如双折线破坏面中主滑面与次滑面的不同组合，圆弧形破坏中不同圆弧位置，顺层滑动一剪切岩体破坏中破坏面在某一软弱岩层中的可能位置，等等，可采用试验法或其它优化求解方法，找到安全系数最小破

地信网论坛
BBS.35001.COM

坏面，并在可靠性分析中把它视作确定型破坏面处理；如果破坏模式已确定，如楔形破坏，阶梯形破坏，等等，但由边坡岩体不连续面的空间分布决定潜在破坏面形状是随机的，则可根据构成可能破坏面的几组不连续面产状要素、间距、长度、搭接长度等的分布函数和统计参数，通过计算机按预定的模式进行随机模拟求得。

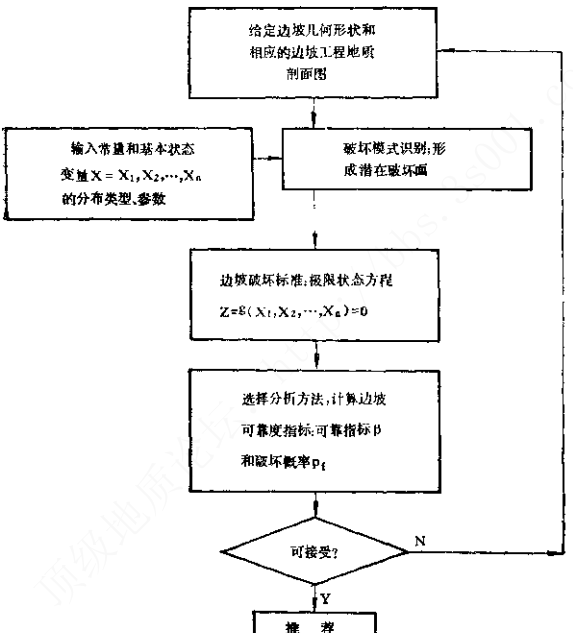


图 1-2 边坡可靠性分析程序

（3）基本状态变量是可靠性分析的依据。参加计算的所有

地信网论坛
BBS.3S001.COM

随机变量，包括岩体和不连续面抗剪强度、地下水压、组成破坏面的不连续面的产状、长度、起伏角、弹性模量、泊松系数、岩体容重，等等。均需掌握它们的空间分布规律，求出它们的统计量，如均值、方差、变异系数等。有的分析方法，还需根据工程岩体的地质特征和实际测试数据的数量和质量，确定其经验分布或拟合标准型概率分布，相应地确定分布函数和分布参数。数据捕捉方法和数据精度要求，均需根据工程设计阶段和工程性质来确定。一般，对于大型重点工程和可靠度要求高的工程，需要有足够数量、足够精确的样本量来确定随机变量的分布类型。这里可以引用目前计算技术领域中一句流行语来说明：输入的是垃圾，输出的肯定是垃圾。

（4）确定边坡破坏标准，建立极限状态方程。首先，根据假定的破坏模式和潜在破坏面的形状，选取合适的安全系数计算方法，依此建立极限状态方程，确定评价准则。如果采用蒙特卡洛模拟方法和统计矩法，则直接由安全系数计算公式求得安全系数样本和统计量；如果采用可靠指标法，若所选用的安全系数公式为显式，则可用安全储备的表达式直接建立极限状态函数 $Z=g(X)=0$，这里，Z 定义为安全储备，即 $Z=M_S$；若所选用的安全系数公式为隐式，则可用安全系数（F_s-1）定义安全储备，即 $Z=F_s-1$；如果采用随机有限元方法，则需依 *Morh-Colmb* 破坏准则建立极限状态方程。

（5）选择可靠性分析方法，计算可靠指标 β 和破坏概率。根据工程对象的设计阶段和要求，以及可用基本状态变量的数据状况，选择分析方法。如果只知道状态变量的均值和方差，可以在假定的概率分布下，求得可靠指标和破坏概率；如果已知状态变量的概率分布和参数，既可采用可靠指标法，又可以采用蒙特卡洛模拟法求得比较精确解。如果需要比较详细地了解边坡岩体变形特性和局部破坏状况，可以采用随机有限元方法。

（6）选取设计可靠度指标，即指定可靠度的可接受标准，并将它与实际计算结果相对照，如果对计算结果满意，则推荐设

地信网论坛
BBS.35001.COM

作使用；如果对计算结果不接受，则需要重新修改边坡几何形状，或采用提高可靠的工程措施，重新进行可靠度计算、分析和评价。

1.2 变化性与不确定性

1.2.1 基本概念

边坡工程是以岩土体为工程材料、以岩土体天然结构为工程结构，或以堆置物为工程材料、以人工控制结构为工程结构的特殊构筑物。前者如露天采矿场边坡、坝肩和库区边坡、渠道边坡和路堑边坡等；后者如排土场边坡、尾矿坝边坡、灰场边坡等。这些构筑物都程度不同的存在组成和结构上的不均匀性，尤其是天然结构边坡，更为突出。因为构成边坡的地质体经受长期、多循回的地质作用，由于作用强度不一，且又错综复杂，致使它们的工程地质性质差异很大。就是在同一地区，同一岩体内，也会造成地质特性的强烈空间变化性。这就决定了边坡工程必然具有不确定性。因为，我们不能本征地描述岩体的工程地质特征，不能准确地构造工程力学模型，不能充分地预测作用的条件和效应，等等。边坡工程的不确定性因素不但多，而且还难以定量估计。通过适当的现场调查和试验，重要岩土工程技术性质的不确定性可以得到一定程度的降低，但绝不可能完全消除。因为，任何一种工程地质性质的不确定性都包含有其固有的变化性，通过大量的统计分析，能减小的只是量测“噪音”，而固有的变化性是永远存在的。

这里，我们定义变化性为表征岩体工程性质参数所固有的不确定性，就是说，各个工程场地的各个基本参数都有它本身的变化范围和变化规律。具体参数值的出现与否是不确定的，这种不确定性是由于参数本身的变化性引起的，代表客观世界的“真实”不确定性。岩土体这种固有的不确定性，造成岩土性质的离散，是不可避免的。此外，还可能在参数测定、统计分析过程中引入不确定性，即由于试验方法和量测偏差、统计估计误差引起的，

地信网论坛
BBS.3S001.COM

各有人为因素的“伪假”不确定性。造成这种不确定性的因素极其复杂，要正确地、定量地说明这种因素的影响亦很困难，要完全消除由此而引起的性质离散，即便是在将来也是不可能的。概言之，这两部分不确定性叠加合成总体不确定性，其可表示为：

$$\text{性质的不确定性}=\begin{cases}\text{空间变化性}\\ \text{量测噪音}\begin{cases}\text{试验和量测偏差}\\ \text{统计估计误差}\end{cases}\end{cases}$$

对待这样一个不确定性问题，把它们视作随机变量，采用数理统计方法求得它们的总体性质，这是比较切合实际的。

边坡可靠性分析方法是处理边坡工程不确定性的一种有效方法。可能有人误解，认为计算数据的测定结果有偏差，何必再进行统计分析和可靠性分析。其实，数据精度和可靠程度是所有分析方法和设计方法的基础，包括可靠性分析方法，也包括定数分析方法。它们的差别在于：定数分析方法是通过经验判断选择一个确定的设计参数，在计算结果上附加一个人为余量即大于1的安全系数值，以此处理不确定性；可靠性分析方法承认基本状态变量的随机性，通过可靠性计算求得预测结果的定量的不确定性。恰恰反映了可靠性分析方法的优点。

实际工程经验还表明，由于技术问题造成的离散，肯定比真正的边坡岩体所固有的离散大，因此，计算出的破坏概率也比实际大。所以，一般边坡可靠性设计偏于安全。

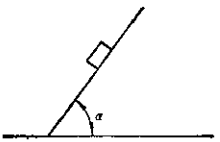
业已明确，变化性和不确定性具有不同的内涵，前者反映物理的客观变化，后者表明状态的或结果的不确定。通常，所谓不确定性是指不能肯定描述分析参数的不确定性，以及由此而引起边坡预测性能的不确定性。

现在，我们来分析一个简单例子，进一步说明输入参数的不确定性影响。

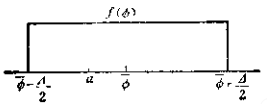
一个倾角为α平面上放一块体（图1-3a），试分析块体的稳定性。假定块体与平面间的摩擦角为ϕ。根据简单平面滑动的几何条件$\alpha>\phi$可知，当$\alpha=\phi$时，处于极限平衡状态，安全系数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

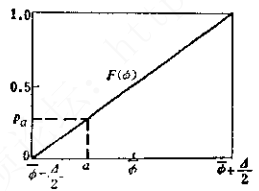
$F_S=1$；当$\alpha<\phi$时，表示$F_S>1$；当$\alpha>\phi$时，表示$F_S<1$。若摩擦角ϕ不是一个确定值，而是在一定范围内变化值，即



a



b



c

图 1-3 块体稳定性分析

$$\left(\overline{\phi}-\frac{\Delta}{2}\right)\text{和}\left(\overline{\phi}+\frac{\Delta}{2}\right)$$

其中，$\overline{\phi}$为摩擦角均值；Δ为摩擦角变化范围。而且，ϕ值在此范围内服从均匀分布，如图1-3*b*所示。

在这种情况下，肯定稳定的最陡边坡角是

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\alpha<\left(\overline{\phi}-\frac{\Delta}{2}\right)$$

但是，也在很大程度上存在这样一种可能性，即使边坡角α大于摩擦角下限$\left(\overline{\phi}-\frac{\Delta}{2}\right)$时，块体仍然保持稳定。在$\alpha$角增大并进入滑动可能发生的数值范围$\left[\left(\overline{\phi}-\frac{\Delta}{2}\right),\left(\overline{\phi}+\frac{\Delta}{2}\right)\right]$，如果滑动的影响后果不甚严重，可能证明加陡边坡角$\alpha$是合理的。为了评价加陡边坡角所承担的风险，需要计算它的破坏概率。对于此例，给定边坡角α的破坏概率p_a与摩擦角ϕ小于或等于α的概率相同。换句话说，若已知随机变量ϕ的分布函数：

$$F(\phi)=\frac{\phi-\left(\overline{\phi}-\frac{\Delta}{2}\right)}{\Delta}$$

则可求得破坏概率p_a（图1-3c）。

下面，我们再举一个简单例子说明计算模型的不确定性影响。

图1-4示出一个简单平面破坏边坡，其中潜在破坏面的总体倾角或平均倾角为α，最大扩张角为i，摩擦角为ϕ，粘结力$c=0$。根据Patton方法，力学上两个等效安全系数定义为

$$F_{\mathrm{I}}=\frac{\tan(\phi+i)}{\tan\alpha} \tag{1-10}$$

$$F_{\mathrm{II}}=\frac{\tan\phi}{\tan(\alpha-i)} \tag{1-11}$$

式（1-10）把扩张角i处理为增大抗滑力，式（1-11）把扩张角i处理成减小滑动力。在数值上，只有当$F_S=1$时，两者才相等；在其它情况下，可能有很大差异。例如，当$\phi=30°$，$i=10°$，$\alpha=20°$，则$F_{\mathrm{I}}=2.31$；而$F_{\mathrm{II}}=3.27$。这是一个简单模型的定数分析，足可见模型不确定性的影响之大。如果把潜在破坏面倾角α、扩张角i以及摩擦角ϕ视作随机变量，采用式（1-10）和（1-

地信网论坛
BBS.3S001.COM

计分别求得安全系数F_1和F_2的频率分布，同样会产生很大差异。由此，亦可从另一个侧面看出，如果作为可靠性设计基础——数学力学模型的精度太差，那么，依此算出的破坏概率的可靠性设计，其结果不仅在工程上没什么意义，而且有时也可能成为判断错误的因素。

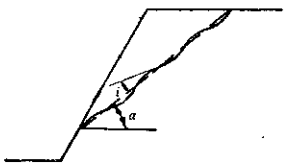


图 1-4 简单平面破坏边坡

概括地说，边坡可靠性分析的目的是使之能把任一边坡工程岩体的性质和稳定状态的不确定性定量化，进而把这些不确定性合理地纳入边坡设计中。对于这样一个不确定性问题，采用概率统计方法处理是非常有效的。为了便于理解，下面，扼要地说明一下概率和统计在意义上的区别。

为了适当地描述分析参数的空间变化，需要采用统计分析方法，根据特定参数的有限数量的观察结果，检验数据样本的频率分布，并对参数全体作出推断，用来解释客观结果。例如，抗剪强度和变形性能的试验数据、不连续面的几何参数的野外测定数据等，它们的变化性均宜用统计方法处理。应当指出，在边坡工程的大多数情况下，推断的客观性仅仅限于力所能及条件下的客观性。就是说，往往只反映具体岩体的特定位置的统计性质。由于边坡工程的空间范围很大，特别是露天矿边坡，难以从空间变化性上描述同一岩体、不同统计地点的统计值与某个特定位置的统计性质的实际关系。从工程上讲，须作一定的假定，若能表征工程设计区的一般性质就足够了。

为了表达分析结果与实际状态之间的不确定性，则需使用概

地信网论坛
BBS.3S001.COM

学方法，用以描述参数、事件、模式的置信程度。概率分布能够比较完整地描述所有可能状态，而点估计只是它的一部分，因此更有实用价值。以概率表达的置信程度是受统计处理的变化性制约的，或者说，置信程度的精度绝不高于参数变化性的统计精度。这里，再一次强调指出，假如岩土体性质的试验和测定结果不可靠，那么，包括可靠性分析在内的所有分析方法的基础就从根本上动摇了。

1.2.2 不确定性的类型

边坡工程评价和设计中的数学模型、基本变量及预测结果都带有某种不确定性。其中，主要有以下三种类型。

1.2.2.1 物理不确定性

边坡形成后是否发生大变形和破坏，主要决定于边坡岩体不连续面的形态、强度和变形性质、地下水压和动力荷载的实际值。然而，却不能精确地知道这些参数的真值，因为它们都是变化量，这是历史的和现代的地质作用过程和作用产物所决定的不确定性，它反映了诸参数固有的空间变化性。就是说，由于岩体的组成、结构、力学效应是变化的，不均匀的，各向异性的，不连续面即便是同一组，其几何形态、力学性质、空间密度等都因地而别，都具有显著的随机性质，即实际发生的结果不是唯一确定的。例如，同一组粘土试样，在同一实验室、同一试验仪器、同一试验条件下测定抗剪强度，结果也有一定离散，其中摩擦角 ϕ 值可能离散 ±25%，粘结力 c 值可能离散 ±50%，给定正应力下的抗剪强度值变化约 ±30%。图1-5示出岩石质量指标(RQD)对应模量比（$E_{岩体}/E_{岩石}$）的变化范围。节理测量中同样存在变化性，同一节理面，同一量测人员在几处的测量结果（如走向、倾角、宽度等）都不同。一组节理面的测量结果也存在一定范围，而在这个范围内不同数值出现的频率可能也不相同。物理变化性只有靠考察样本数据才能定量化，而样本容量又受到实际情况和经济上的限制，而这种限制将导致所谓统计的不确定性。

1.2.2.2 统计不确定性

地信网论坛
BBS.3S001.COM

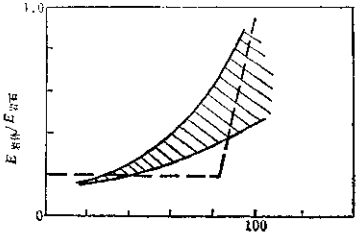


图 1-5 RQD-$E_{岩体}/E_{岩石}$变化范围

正如上节所讨论的，与概率不同，统计和由样本观察所得出的推断有关。在边坡可靠性分析过程中，为了建立各个基本变量的概率模型，一般是，首先根据有限的测定和试验数据，选择合适的概率分布类型，然后确定它的参数值。概率分布的参数值是根据样本数据估计的，样本和样本容量不同，估计的参数也不同。显然，我们能够掌握的始终是统计量，不是边坡岩体性质的真值，真值是不能求得的，只能由上述结果从统计上推断真值。因此，对于一组已知的数据，可以认为分布参数本身也是随机变量，其不确定性依赖于样本数据总合及已有的知识。这种不确定性叫做统计不确定性。它主要是由于信息误差和信息缺乏而产生的。

例如，不连续面的几何形态参数，包括产状、间距、长度、起伏角等，它们的空间变化可以通过岩体露头和定向岩心详细测得。但是，由于它们来自无限的总体，又受取样范围和条件的限制，统计结果只能反映不连续面的局部特征，特定不连续面组的某一参数的频率分布，必然受到测点布置、取样面积、量测方法、样本量的影响。图1-6示出某一测点层面倾角的概率密度分布，同一测点，两个不同样本量n_1和n_2（且$n_1<n_2$），结果n_2的精度高于n_1。这说明：其一，参数统计需要有足够的样本量；其二，

地信网论坛
BBS.3S001.COM

通过加大样本量可以降低不确定性；其三，分布参数本身也是随机变量。

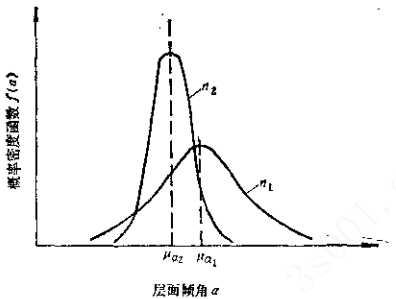


图 1-6 层面倾角的概率密度分布

1.2.2.3 模型不确定性

边坡可靠性分析和设计是利用数学模型或模拟（例如公式、方程、算法、计算模拟程序等）来实现一组输入量或基本变量（例如边坡几何参数、强度参数等）与所要求的输出量（例如可靠指标、破坏概率等）之间的联系。这些模型一般在形式上是确定的，例如作为建立极限状态方程的因式——安全系数计算公式。而且，它们都是在对实际问题理想化的数学力学抽象下构造

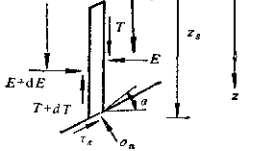


图 1-7 条块的平衡

地信网论坛
BBS.35001.COM

的。图1-7示出边坡极限分析的条块平衡。

设dx为条块宽度，则根据垂直和水平的力的平衡及对条块中心与破坏面交点的力矩平衡，并略去高阶小量后可得

$$\sigma_n + \tau_s \tan\alpha + \frac{dT}{dx} = w_z h \tag{1-12}$$

$$\tau_s + \frac{dE}{dx} - dh\tan\alpha = w_x h \tag{1-13}$$

$$(z_x - z_c)\frac{dE}{dx} - E\frac{dz_c}{dx} + T = w_x h h_x \tag{1-14}$$

式中 w_x和w_z为水平和垂直向平均体积力；h为条块高度；h_x为条块重心到滑动面的距离；z_c为条块间作用力的合力垂直坐标；其它符号见图1-7。设F_S为安全系数，抗剪强度降低F_S倍后条块处于极限平衡状态，则破坏面上的应力条件为

$$\tau_s = \frac{1}{F_S}[c + (\sigma_n - u)\tan\phi] \tag{1-15}$$

如果孔隙压力分布u已知，并先假定F_S值，则上述四式中包含σ_n、τ_s、T、E和z_c五个未知变量，因而无法求解。为了把上述静不定问题化成静定问题，必须选用一个假设。Fellenius法假定$T=E=0$，简化Bishop法采用Krey的$T=0$的假设，Morgenster-Price法假定T与E之间存在某种函数关系，Spencer法假定T与E之间的比例已知，Janbu法假定z_c已知。因此，任何一种方法总有某种程度的局限性。

在实际工程应用中，特别是象工作条件和环境随时变化、边坡形成与使用同步的大型露天矿边坡，难以精确地判断和预计边坡岩体的力学效应和破坏机理。而我们常常只是把注意力放在设计计算的计算方法上，却往往忽略了计算和设计背后的简化的假定条件，结果就把包含许多假设或理想化的理论公式、以及试验获得输入数据误认为真值而进行设计计算。实际上，这里已引入了不确定性，即基本变量的不确定性和模型本身的不确定性。模型不确定性是由简化假设和未知边界条件而产生的，也是由未包含在

地信网论坛
BBS.3S001.COM

模型中的其它变量和它们之间相互关系的未知效应产生的。

图1-8表示出两个不同模型所求得的同一工程的安全系数频率分布和破坏概率的差异。

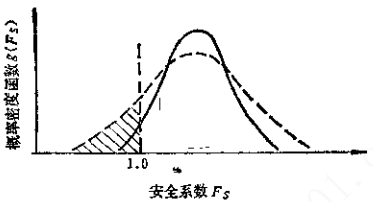


图 1-8 模型引起的不确定性

1.2.3 不确定性的描述

边坡可靠性分析方法，需要定量地描述预测过程中所包含的重要的不确定性，并把这些不确定性纳入可靠性分析，以评价边坡破坏的风险。

由上可知，无论由什么原因产生的不确定性，终究都使各影响因素和分析结果以随机变量的形式出现。因此，只能应用概率的概念和方法对不确定性加以定义、预测和估计。就是说，对某一可能取值还需同时指出它的出现的机会有多少。

为了求得各基本随机变量的分布类型及其数字特征，必须通过大量的试验、量测，收集有关数据，经过统计分析，确定为标准概率分布、离散分布或经验分布的形式（详见第2章）。应当强调指出的是，在整个分析过程中，必须明确地把工程判断和地质推断引入到不确定性评价中，只有这样，才会使不确定性的概率模型更有实际意义。

1.3 边坡可靠性概念

边坡可靠性问题之所以提出，是由于边坡工程一系列设计基本变量具有不确定性，边坡工程性质属于非确定或随机性的。而

地信网论坛
BBS.35001.COM

可靠性理论提供系统的构思，可靠性分析方法为评价不确定性因素的工程影响的有效手段。为了系统地理解边坡可靠性的概念和掌握边坡可靠性分析方法，我们首先需要借助于统计数学（包括概率论和数理统计等）定义边坡可靠性、构造边坡可靠性模型、确立边坡可靠性尺度。

1.3.1 可靠性定义

在1.1.1节中，我们对边坡可靠性提出一般性定义，即在规定的条件下和规定的时间内，完成预定功能的能力。为了把可靠性作为边坡工程性能的数量化指标，须引进可靠度概念。按照可靠性理论的定义，可靠度就是在规定的条件下和规定的时间内，完成预定功能的概率。

应当明确，边坡可靠性分析方法是基于极限平衡原理建立状态方程，在定值安全系数方法基础上发展起来的。评价边坡可靠度仍是以随机变量安全系数直接作统计样本，或是以安全储备刻划边坡状态。其根本性差别在于，它摒弃传统安全系数的因果对应的确定值观念，而承认一因多果的事实，通过安全系数或安全储备与基本变量X_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的函数关系和它们呈现的统计规律求得可靠度。从定量化的意义上讲，亦可把可靠度定义为：在规定的条件作用下和规定的使用期限内，安全系数或安全储备大于或等于某一规定值（$F_S \geqslant 1.0$或$M_S \geqslant 0$）的概率，亦即边坡保持稳定的概率。

规定的作用条件，是指设计所预计的环境条件、指定的施工条件和正常使用条件。在规定的条件中，包括不可控因素，如边坡岩体的组成和结构、地震作用、特大暴雨等，以及可控因素，如边坡几何形状、人工加固、减震爆破、降压疏干等。前者属于预测精度问题，后者属于控制能力问题。由于边坡用途不同，形成过程不同，要求控制的因素和程度也不同。对于露天矿边坡，爆破动力、临界震动速度的控制和地下水压力的降低，往往成为重要条件。为了合理地规定这些条件，对于大型边坡工程，必须严格遵守有关规范进行设计，并作出切实的风险估计，切忌

地信网论坛
BBS.3S001.COM

设计、施工和使用过程中的随意性。就目前的研究水平，还不能把人为过失包容在可靠性分析中考虑。必须指出，所有规定的条件都受当时的认识能力和技术条件的制约，在非一次性成坡的工程（如露天矿边坡、排土场边坡、尾矿堤和灰坝边坡等）建设中，应当在不断丰富有用资料的基础上，采用跟踪评价、滚动预测技术即动态设计最优化方法，不断修正规定条件，使边坡始终在当前条件下达到最佳状态。

规定的使用期限，是指边坡工程的有效服务期。可靠度与时间有着密切的关系，没有时间概念就无所谓可靠度。规定的时间，通常是主体工程（如采矿工程、水利工程等）要求的、能在预计的可靠度指标下工作的时间。在可靠度计算中，是根据边坡的不同使用期限和重要程度，选定极端条件（如地震、洪水等）的再现期和估计其发生概率。因此，超过了规定的时间，就相当于超越了规定的条件。此外，就同一边坡而言，随着时间加长，可靠度自然会降低。虽然不是超过了规定时间立即就不能使用，但其破坏概率必将逐渐加大，甚至超过原设计给定的允许值。还要说明一点，规定时间的可靠度是基于总体的平均估计，它不反映边坡可靠性的动态变化。因为，目前还难以对一些时效因素如风化作用速度和程度、岩体强度衰减速度和程度等作出定量的描述和构模。

预定的功能，是以边坡工程性能指标安全性、实用性和时效性来表征的。这三个性能是相互依存的，没有安全性，就失去了使用价值；没有实用性，安全性也就没有实际意义；从使用角度说，安全性和实用性都必然有时间坐标，即必须考虑时效性。如果实现了规定的性能指标，就叫做完成了预定功能，否则，就是丧失功能。完成功能和丧失功能都是以概率值度量的。一般，在指定用途和服务期内设计边坡，其性能指标突出反映在安全性上，即以边坡不达到极限状态的概率来衡量。

1.3.2 可靠性尺度

根据可靠性的定义可知，可靠度的大小是用概率来度量的。

地信网论坛
BBS.35001.COM

概率是在闭区间[0,1]上取值的。因此，可靠度R的上下界表示为

$$0 \leqslant R \leqslant 1$$

可靠度的特点就是将抽象的可靠性，以明确的、定量的概率形式作出定义。这一点是边坡可靠性设计的最大特征，它不用“绝对安全”或“必然破坏”这样的表述。就是说，在边坡可靠性设计中，“绝对”不破坏的东西是绝对不存在的，因而只能用“可能性”(概率)来表示，这也表明了可靠性设计的基本立场。对于搞实际工程的技术人员，只能在设计当时的技术和经济条件下，取得适量的有用信息，并作出明智判断和最优决定。对于任何工程问题，都不能说“绝对的”。这样“可能的”估计，恰恰反映了客观事实，而“绝对的”数值，恰恰具有很大程度的谜惑性。这一点正是工程技术人员所最能理解的。

在边坡工程中，可靠度有三种尺度：

一是稳定概率，即可靠度或称可靠概率（p_s）。它是边坡能完成预定功能的概率，仅在安全意义上讲，可谓边坡安全系数达到某一阈值的概率。因为人们从情感上更关心破坏的可能性，所以，稳定概率并不常用。

二是破坏概率，即不可靠度或称不可靠概率（p_f）。它是边坡不能完成预定功能的概率，又可谓边坡安全系数达不到某一阈值的概率。它与稳定概率是互补的，即$p_s + p_f = 1$。因此，在实际工程中，一般是计算破坏概率，并提出破坏概率的限值。

三是可靠指标，或称安全指标（β）。在边坡分析中，其值是边坡状态函数（以基本变量为自变量，反映边坡完成功能状态的函数）的平均值除以状态函数标准差的商，或是在n维状态空间中，n维极限状态面至坐标原点的最短距离，并取$\beta \geqslant 1$。在标准正态空间，可靠指标β与破坏概率p_f有数值上的对应关系。

1.3.3 极限状态与极限状态方程

岩土边坡，包括道路工程边坡、水利工程边坡、建筑工程边坡以及采矿工程边坡(包括采场边坡、排土场边坡、尾矿坝边坡)，无论是在天然地质体中形成的，还是人工堆筑的，一般在正常设

地信网论坛
BBS.35001.COM

计、施工和管理条件下，都假定在正常使用期内其工作状态无明显退化。因而，所选择的数学模型不是直接与时间有关的随机过程模型，而是间接考虑时间影响的随机变量模型。这样就可以认为，边坡的可靠性主要决定于在某种条件“作用”下，它所呈现的稳定状态。

边坡状态受到许多因素或变量的控制，如边坡岩体结构、破坏机理、强度与变形特性、潜在破坏面的几何形态，地下水压力、地震与爆破震动的动力效应，等等。而且这些变量都具有不确定性，即所谓随机变量。我们可以用这些随机变量来构造函数模型，用以描述边坡状态：

$$Z=g(X)=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \qquad (1\text{-}16)$$

函数$g(X)$反映边坡的状态或性能，称为状态函数或功能函数，X称为基本状态变量。

边坡工程所要完成的最基本功能是安全性功能，亦即边坡工程体在某些因素作用时和作用后，仍能保持必需的整体稳定的能力。因此，边坡状态是以安全极限状态作为衡量它是否破坏的评判准则，于是由式（1-16）可得极限状态方程：

$$Z=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)=0 \qquad (1\text{-}17)$$

极限状态方程表征一个n维曲面，可称为极限状态曲面。它把系统划分出三种状态，即

$$Z=g(X)>0\text{为安全状态}$$
$$Z=g(X)=0\text{为极限状态}$$
$$Z=g(X)<0\text{为破坏状态}$$

和两个区域，即安全域和破坏域。

最简单的例子，是由相互独立基本变量R和S组成的二维状态，即所谓极限状态的R-S模型

$$Z=g(R,\ S)=R-S=0$$

即把安全储备函数表达为抗滑力(R)和滑动力(S)的函数，显然，极限状态面为一条45°的直线，如图1-9所示。

例1-1 粒状土体承受剪应力τ，其剪切面上法向应力σ的平

地信网论坛
BBS.3S001.COM

均值为100kPa，标准差为20kPa，土的摩擦角的平均值为35°，标准差为5°。若τ为定值50kPa，试在基本变量空间绘出极限状态面。

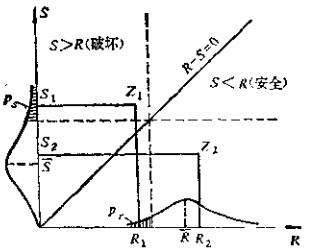


图 1-9 R-S模型的几何意义

解：据库仑定律，对于粒状土有

$$\tau=\sigma\tan\phi$$

因此，极限状态方程为

$$Z=\sigma\tan\phi-\tau=\sigma\tan\phi-50=0$$
$$=g(X_1,\ X_2,\ c)$$

式中 $X_1=\sigma$;

$X_2=\phi$;

$c=50\text{kN/m}^2$。

因为只有两个随机变量，$n=2$，极限状态面在一个二维图上将是一条线，这条线可以由$\tan\phi=50/\sigma$的方程式得到。适当选择法向应力σ的不同数值，可得到相应的$\tan\phi$的数值范围，从而得出各个ϕ值，如表1-2所示。

表 1-2 ϕ值

项　　目	数　　值						
σ (kPa)	40	60	80	100	120	140	160
$\tan\phi$	1.25	0.833	0.625	0.5	0.417	0.357	0.313
ϕ (°)	51.3	39.8	32.0	26.6	22.6	19.6	17.4

地信网论坛
BBS.3S001.COM

选取坐标σ和ϕ的比例，使得表示σ的标准差（20kPa）的长度与表示ϕ的标准差（5°）的长度相等，则可以上表中σ和ϕ的对应值绘出一条曲线（图1-10），此曲线即极限状态界限。

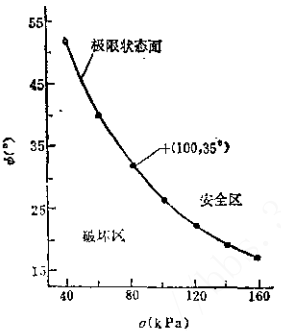


图 1-10　例1-1的极限状态面

1.3.4　干涉理论与破坏概率

我们研究抗滑力R和滑动力S两个连续随机变量所构成的联合事件的概率分布。依据联合分布的定义，有

$$F(r,\ s)=p(R<r,\ S<s)$$
$$=\int_0^r\int_0^s f(r,\ s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s \qquad (1\text{-}18)$$

因R和S皆非负值，故积分下限均取作“0”，其分布图形如图1-11所示。

$f(r,\ s)$为随机变量R和S的联合密度函数，若R和S相互独立，则

$$f(r,\ s)=f(r)f(s) \qquad (1\text{-}19)$$

概率元素$f(r,\ s)\mathrm{d}r\mathrm{d}s=p\ (r<R\leqslant r+\mathrm{d}r;\ s<S\leqslant s+\mathrm{d}s)$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$F(+\infty,\ -\infty)=\int_0^{\infty}\int f(r)f(s)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}s=1 \qquad (1\text{-}20)$$

将图1-11的S轴沿反时针方向作90°旋转，使其与R轴重

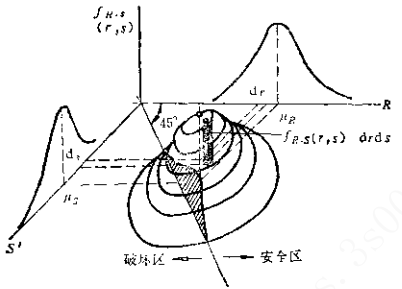


图 1-11 R和S的联合分布

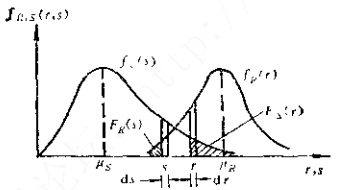


图 1-12 $f_S(s)$与$f_R(r)$的干涉

合，则成图1-12。图中可见，尽管抗滑力R的均值μ_R远大于滑动力S的均值μ_S，但因两个随机变量的密度函数曲线有交叉，形成重叠部分即干涉区，在干涉区内，既有抗滑力大于滑动力的可能，也有滑动力大于抗滑力的可能。而出现后一情况，则边坡破坏，其破坏概率为

$$p_f=p(R<S)$$

相应的可靠度为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$p_S = p(R > S)$$

由于$(R<S)$和$(R>S)$是互逆事件，故$p_f = 1 - p_s$。

若R与S相互独立，则由式(1-18)和(1-19)可得

$$\begin{aligned} p_f &= \int_{r<s}\int f(r,\ s)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(r,\ s)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty}\left[\int_0^{s} f_R(r) f_S(s)\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty} f_S(s)\left\{\left[\int_0^{\infty} f_R(r)\,\mathrm{d}r\right]\right\}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^{\infty} f_S(s) F_R(s)\,\mathrm{d}s \end{aligned} \tag{1-21}$$

式中 $F_R(s) = p(R<S)$。式(1-21)的意义可按图1-12说明如下：滑动力S在s和$s+\mathrm{d}s$之间的概率为$f_S(s)\mathrm{d}s$；$R<S$的概率为$F_R(s) = p(R<S)$，若R与S相互独立，则两者同时发生的概率为其积$F_R(s)\cdot f_S(s)\mathrm{d}s$，将此乘积在$S$的全域积分即得式(1-21)。

同样地，考察R在r和$r+\mathrm{d}r$之间的概率，以及$F_S(r) = p(S<R)$，可得

$$\begin{aligned} p_f &= \int_0^{\infty} f(r)\left[\int_r^{\infty} f(s)\,\mathrm{d}s\right]\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{\infty}[1 - F_S(r)] f(r)\,\mathrm{d}r \end{aligned} \tag{1-22}$$

破坏概率p_f的物理意义：对于每一个抗滑力R所有的可能值，当$r \leqslant R \leqslant r+\mathrm{d}r$时，滑动力$S$大于抗滑力$R$的概率；或者，对于每一个滑动力$S$所有的可能值，当$s \leqslant S \leqslant s+\mathrm{d}s$时，抗滑力$R$小于滑动力$S$的概率。

在边坡工程中，影响R和S的因素很多，简化成R和S，只是为了便于数学模型的研究。

现设极限状态方程：

$$Z = g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) = 0$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

1，2，…，n）是有关的各随机变量。其分布函数可由多重积分求得：

$$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)=\iint_D f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\times \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1-23}$$

此处积分域D如为$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)>0$，则为可靠度；反之，若D为$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)<0$，则为破坏概率。式中$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合概率密度函数。

若$X_i(i=1,2,\cdots,n)$相互独立，则

$$f_{X_1,X_2,\cdots,X_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X1}(x_1)f_{X2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n) \tag{1-24}$$

式（1-21）、（1-22）、（1-23）是求解破坏概率的精确式，无论极限状态函数是线性的，还是非线性的，都适用。

例1-2 图1-13示出分析边坡。可能发生平面剪切破坏，破坏面为A和B，其长度分别为L_A和L_B，破坏面的抗剪强度参数粘结力c和摩擦系数f为正态分布随机变量。于是，可以把破坏面A和B的安全储备表达为：

$$\begin{aligned}M_{SA}&=cL_A+N_A\cdot f-T_A\\ M_{SB}&=cL_B+N_B\cdot f-T_B\end{aligned} \tag{1-25}$$

式中 N和T分别为沿潜在破坏面的正压力和剪切力，它们仅取决于工程的几何形状，视作常量。

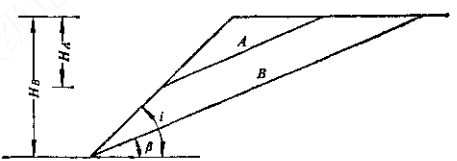


图 1-13 简单平面剪切破坏边坡

地信网论坛
BBS.3S001.COM

假定每个不连续面上抗剪强度参数的空间变化在统计上是均匀的，且以 $\bar{c}$ 和 $\bar{f}$ 分别代表 c 和 f 的均值，则安全储备的均值为

$$\begin{aligned}\overline{M}_{SA}&=\bar{c}L_A+N_A\bar{f}-T_A\\ \overline{M}_{SB}&=\bar{c}L_B+N_B\bar{f}-T_B\end{aligned}\tag{1-26}$$

安全储备的方差为：

$$\begin{aligned}S_A^2&=S_{M_{SA}}^2=E(M_{SA}^2)-[E(M_{SA})]^2\\ S_B^2&=S_{M_{SB}}^2=E(M_{SB}^2)-[E(M_{SB})]^2\end{aligned}\tag{1-27}$$

式中 $S_A=S_{M_A}$，$S_B=S_{M_B}$，分别为M_{SA}和M_{SB}的标准差。

将式 (1-25)、(1-26) 代入式 (1-27)，有

$$\begin{aligned}S_A^2&=E[(cL_A+N_Af-T_A)^2]-[\bar{c}L_A+N_A\bar{f}-T_A]^2\\ &=E[c^2L_A^2+N_A^2f^2+T_A^2+2cfL_AN_A-2cL_AT_A\\ &\quad-2fN_AT_A]-[\bar{c}^2L_A^2+\bar{f}^2N_A+T_A^2+2\bar{c}\bar{f}L_AN_A\\ &\quad-2\bar{c}L_AT_A-2\bar{f}N_AT_A]\\ &=E(c^2)L_A^2+E(f^2)N_A^2+T_A^2+2L_AN_AE(c\cdot f)\\ &\quad-2E(c)L_AT_A-2E(f)N_AT_A-\bar{c}^2L_A^2-\bar{f}^2N_A^2\\ &\quad-T_A^2-2L_AN_A\bar{c}\bar{f}+2\bar{c}L_AT_A+2\bar{f}N_AT_A\\ &=L_A^2\{E(c^2)-[E(c)]^2\}+N_A^2\{E(f^2)-[E(f)]^2\}\\ &\quad+2L_AN_A\{E(cf)-E(c)E(f)\}\end{aligned}$$

根据方差的定义，前两括号项分别为 c 和 f 的方差S_c^2和S_f^2；根据协方差的定义，后一括号项为 c 和 f 的协方差Cov(c , f)，所以

$$\begin{aligned}S_A^2&=S_c^2L_A^2+S_f^2N_A^2+2L_AN_A\mathrm{Cov}(c,\ f)\\ S_B^2&=S_c^2L_B^2+S_f^2N_B^2+2L_BN_B\,\mathrm{Cov}(c,\ f)\end{aligned}\tag{1-28}$$

因为不连续面 A 和 B 属于同一边坡，且其抗剪强度参数具有同样的概率分布，尽管它们是分离的，但它们的安全储备彼此是相关的。

根据两个变量的协方差的定义，有

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mathrm{Cov}(M_{SA}, M_{SB}) = E(M_{SA}M_{SB}) - E(M_{SA})E(M_{SB}) \tag{1-29}$$

将式 (1-25)、(1-26) 代入式 (1-29)，得

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(M_{SA}, M_{SB}) &= E[c^2 L_A L_B + cfL_A L_B - cL_A T_B \\ &\quad + cfN_A L_B + f^2 N_A N_B - fN_A T_B \\ &\quad - cT_A L_B - fT_A N_B + T_A T_B] \\ &\quad - [\bar{c}^2 L_A L_B + \bar{c}\bar{f} L_A N_B - \bar{c} L_B T_B \\ &\quad + \bar{c}\bar{f} N_A L_B + \bar{f}^2 N_A N_B - \bar{f} N_A T_B \\ &\quad - \bar{c} T_A L_B - \bar{f} T_A N_B + T_A T_B] \\ &= L_A L_B [E(c^2) - \bar{c}^2] + N_A N_B [E(f^2) \\ &\quad - \bar{f}^2] + L_A N_B [E(cf) - \bar{c}\bar{f}] \\ &\quad + N_A N_B [E(cf) - \bar{c}\bar{f}] \\ &= S_c^2 L_A L_B + S_f^2 N_A N_B + \mathrm{Cov}(c, f) \\ &\quad \times (L_A N_B + L_B N_A)\end{aligned} \tag{1-30}$$

安全储备的相关系数为：

$$\rho_{AB} = \rho_{M_{SA}M_{SB}} = \frac{\mathrm{Cov}(M_{SA}, M_{SB})}{S_A S_B} \tag{1-31}$$

M_{SA}和M_{SB}的概率分布为：

$$\begin{aligned} f_{M_{SA}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_A} \exp\left(-\frac{1}{2} t_A^2\right) \\ f_{M_{SB}} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_B} \exp\left(-\frac{1}{2} t_B^2\right) \end{aligned} \tag{1-32}$$

式中

$$t_A = \frac{M_{SA} - \bar{M}_{SA}}{S_A}, \qquad t_B = \frac{M_{SB} - \bar{M}_{SB}}{S_B};$$

安全储备的联合概率分布

$$f_{M_{SA}, M_{SB}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} S_A S_B \sqrt{1 - \rho_{AB}^2}}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\times \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho_{AB}^2)}(t_A^2-2\rho_{AB}t_At_B+t_B^2)\right\} \tag{1-33}$$

破坏概率定义为

$$\begin{aligned} p_{f\,A} &= \int_{-\infty}^{0} f_{M_{S\,A}}(x)\mathrm{d}x = F_{M_{S\,A}}(0) \\ p_{f\,B} &= \int_{-\infty}^{0} f_{M_{S\,B}}(y)\mathrm{d}y = F_{M_{S\,B}}(0) \\ p_{f(A,B)} &= \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f_{M_{S\,A}M_{S\,B}}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= F_{M_{S\,A}M_{S\,B}}(0,\ 0) \end{aligned} \tag{1-34}$$

式中 $F_{M_{S\,A}}$、$F_{M_{S\,B}}$和$F_{M_{S\,A}M_{S\,B}}$分别为累积分布；x和y为虚设的积分变量。

在实际工程应用中，当功能函数g的形式简单且成线性、n又很少时，尚可应用式（1-23）求得破坏概率。但始终存在两个实际问题：第一，很难有充足的数据来确定n个基本变量的联合概率密度函数，也很难有足够的数据保证边缘分布函数和协方差是可信的；第二，即使联合密度函数或式（1-23）中的边缘密度函数是已知的，多维积分也难以实现。对于大多数实际问题不存在解析解，必须求助于数值方法。

现在，让我们接着前面的叙述，进一步分析曲线$f_R(r)$与$f_S(s)$干涉区的大小与破坏概率p_f的关系（图1-14）：

（1）干涉区的大小依赖于曲线$f_R(r)$和$f_S(s)$的相对位置，如图1-14(a)所示，即均值μ_R与μ_S相差越大，两曲线距离越大时，干涉区越小，p_f越小；反之，均值μ_R与μ_S越接近，两曲线距离越小时，干涉区越大，p_f则越大。$f_R(r)$与$f_S(s)$的相对位置可以用中值安全系数来度量，即

$$F_O=\frac{\mu_R}{\mu_S}$$

亦可用平均安全储备来度量，即

$$M_O=\mu_R-\mu_S$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

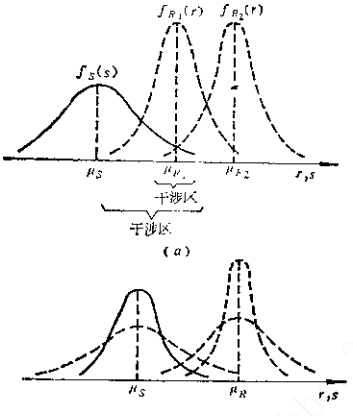


图 1-14　干涉区大小与p_f的关系

（2）干涉区的大小依赖于$f_R(r)$和$f_S(s)$的离散程度，如图1-14(b)所示。比较实线和虚线即可看出，即使具有相同的均值，不同离散程度的曲线所形成的干涉区大小不同，故p_f也将不同。离散程度用变异系数表示：

$$\delta_R=\frac{\sigma_R}{\mu_R}$$

和

$$\delta_S=\frac{\sigma_S}{\mu_S}$$

式中　σ_R和σ_S分别为随机变量R和S的标准差。因此可以说，任何可靠性的度量都应该是（μ_R/μ_S），δ_R和δ_S的函数。

以上，在破坏概率各精确式推导中，都是假定R和S是相互独立的。可是，在一般情况下，边坡工程中的R和S都是相关的，可能有

$$R=f\ (\text{几何参数，强度参数})$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$S=f\ (\text{几何参数，附加作用力})$$

例如，边坡几何形状影响潜在滑体的重量、正应力和剪切力，同时引起R与S的相应变化。在这种情况下，R与S的联合概率密度为$f_{RS}(r,s)$，破坏概率为

$$p_f=\int_0^{\infty}\left[\int_0^{s}f_{RS}(r,s)\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}s \tag{1-35}$$

由于实际工程问题的复杂性，往往不能简单地用R和S两个随机变量来表达，且也不知道R和S的分布。这时，可有两种方法处理：

（1）以安全储备$M_S=R-S$作为极限状态函数，因为R和S均为随机变量，所以M_S也是随机变量，其密度函数为$f_{M_S}(m_S)$。显然，破坏概率可表达为

$$p_f=p(M_S<0)=\int_{-\infty}^{0}f_{M_S}(m_S)\mathrm{d}m_S=F_{M_S}(0) \tag{1-36}$$

即为图1-15(a) 中阴影部分面积。

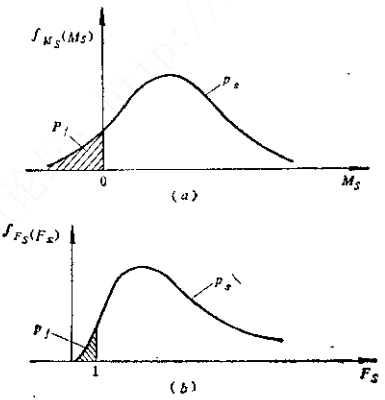


图 1-15　(a) 安全储备的分布；
(b) 安全系数的分布

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（2）以安全系数 $F_S=\frac{R}{S}$ 作为极限状态函数，因为 R 和 S 是随机变量，所以安全系数 F_S 也是随机变量。它的概率密度函数为 $f_{F_S}(f_S)$，则破坏概率可表达为

$$p_f=p(F_S<1)=\int_0^1 f_{F_S}(f_S)\mathrm{d}f_S=F_S(1) \qquad (1\text{-}37)$$

可用图1-15(b) 中阴影面积表示。

1.3.5 可靠指标与安全系数

我们知道，描述随机变量的分布特征以其概率密度分布函数为最全面。如果各基本变量的概率密度函数和分布函数为已知情况下，据此可精确求得破坏概率。但在实际边坡工程中，精确地确定概率分布是很难的，即使确定了，也很难采用解析法解出。鉴此，当随机变量的分布尚不清楚时，只用分布的数字特征：一阶原点矩（均值）和二阶中心矩（方差）近似描述随机变量的分布特征，采用简化的数学模型进行边坡可靠度计算，不失为有效途径。

一般，在边坡工程中，破坏概率可以分别由三个等价事件的概率来表示，即

$$p_f=p[(R-S)<0]=p\left(\frac{R}{S}<1\right)=p\left(\ln\frac{R}{S}<0\right)$$

因此，可根据状态函数的三种不同定义分别讨论。

1.3.5.1 定义 $Z=R-S$

这里 Z 的物理意义是安全储备，这样定义的状态函数是线性函数。因 R 和 S 都是随机变量，则 Z 也是随机变量。图1-16表示 Z 的分布，当 $Z>0$，则安全，$Z<0$ 则破坏。破坏概率 $p_f=p(Z<0)$ 等于图中阴影部分的面积。由此可见，由原点0到均值 μ_z 的直线距离，可以用标准差 σ_z 来度量，即 $\mu_z=\beta\sigma_z$，显然，β 与 p_f 之间存在一一对应的关系，β 愈小，p_f 愈大；反之，β 愈大，p_f 愈小。因此，β 和 p_f 一样，可以作为衡量边坡可靠性的一个指标，一般称为可靠指标。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

指标β即为安全储备的均值与标准差之比，或安全储备的变异系数的倒数：

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \tag{1-38}$$

式中 $\mu_Z=\mu_R-\mu_S$，安全储备均值；

$\sigma_Z=\sqrt{\sigma_R^2-\sigma_S^2}$，安全储备标准差。

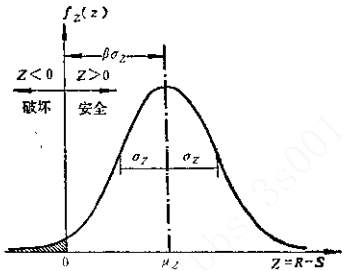


图 1-16 $Z=R-S$的密度函数

对于某一确定的$f_z(Z)$来说，则有破坏概率

$$p_f=p(Z<0)=F_Z(0)$$

$$=\int_{-\infty}^{0}f_Z(Z)\mathrm{d}Z$$

引入标准化变量，即令$\mu_{Z'}=0$，$\sigma_{Z'}=1$

$$Z'=\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$$

这时

$$p_f=p\left(\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}<\frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)=p\left(Z'<-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)$$

$$=F_{Z'}\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)=F_{Z'}(-\beta) \tag{1-39}$$

如果R和S为正态变量，即$R\sim N(\mu_R,\sigma_R)$和$S\sim N(\mu_S,$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

正态变量$Z\sim N(\mu_Z,\ \sigma_Z)$，对$Z$的标准化正态分布

$$p_f=\int_{-\infty}^{-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\left(\frac{z'}{2}\right)^2\right]\mathrm{d}z'$$

$$=1-\Phi\left(\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)=1-\Phi(\beta)=\Phi(-\beta)\quad(1\text{-}40)$$

式中 $\Phi(\cdot)$——标准化正态分布函数。

式（1-28）可写成

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}=\frac{\mu_R-\mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}=\frac{\frac{\mu_R}{\mu_S}-1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)^2\delta_R^2+\delta_S^2}}$$

$$=\frac{F_O-1}{\sqrt{F_O^2\delta_R^2+\delta_S^2}}\quad(1\text{-}41)$$

式中 F_O——中值安全系数；

δ_R,δ_S——R和S的变异系数。

根据可靠指标的定义，可有

$$\mu_Z=\beta\sigma_Z$$

或
$$\mu_R=\mu_S+\beta\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}\quad(1\text{-}42)$$

由此可得中值安全系数

$$F_O=\frac{\mu_R}{\mu_S}=\frac{1+\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2-\beta^2\delta_R^2\delta_S^2}}{1-\beta^2\delta_R^2}\quad(1\text{-}43)$$

这表明，按式（1-38）定义的可靠指标β，其对应的中值安全系数F_O可由式（1-43）计算。但使用时需注意，式中δ_R值必须较小（<0.25），否则不适用。

从式（1-41）可知，只要μ_R和μ_S一定，F_O就随之而定。此时，如δ_R和δ_S增大，β必然减小；反之，如果δ_R和δ_S减小，β必然增大。β作为度量边坡可靠度的指标，它既与中值安全系数F_O有关，又与变异系数δ_R和δ_S有关。而中值安全系数F_O只依μ_R和μ_S的比值而定，与β随δ_R和δ_S的变化无关。所以，不能仅仅以F_O

地信网论坛
BBS.35001.COM

来表示边坡的可靠度。

1.3.5.2 定义$Z=R/S$

这里Z的物理意义是安全系数，但此安全系数不是定值，而是随机变量，因为R和S是随机变量。这样定义的状态函数是非线性的。对于非线性函数，计算精确的破坏概率一般是很困难的，因为精确的破坏概率的计算包括整个非线性区域$Z<1$的联合概率密度函数的积分，而这需要复杂的数值计算。为了实用目的，可将非线性函数线性化，以求破坏概率的近似值。

根据二阶矩法，只要求计算随机变量函数的均值和方差。可用Taylor级数展开求非线性函数的均值和方差，这是能满足实用要求的。

若$Z=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$各自的偏导数都存在且连续，则函数$Z$的全微分为

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial g}{\partial X_1}\mathrm{d}X_1+\frac{\partial g}{\partial X_2}\mathrm{d}X_2+\cdots+\frac{\partial g}{\partial X_n}\mathrm{d}X_n$$

随机变量标准差与其函数的标准差之间的关系，可以近似地用函数的全微分来表达，即

$$\sigma_Z=\frac{\partial g}{\partial X_1}\sigma_{X_1}+\frac{\partial g}{\partial X_2}\sigma_{X_2}+\cdots+\frac{\partial g}{\partial X_n}\sigma_{X_n}$$

而各变量代数和的标准差的平方，等于各变量标准差的平方和，则标准差的平方或方差为

$$\sigma_Z^2=\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)^2\sigma_{X_1}^2+\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)^2\sigma_{X_2}^2+\cdots+\left(\frac{\partial g}{\partial X_n}\right)^2\sigma_{X_n}^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2\sigma_{X_i}^2 \qquad (1\text{-}41)$$

设R和S相互独立，则$Z=g(R,S)=R/S$的均值和方差以及变异系数可按式(1-44)求得：

$$\mu_Z\approx\frac{\mu_R}{\mu_S}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\sigma_Z^2 \approx \frac{\sigma_R^2}{\mu_S^2} + \left(\frac{\sigma_S}{\mu_S^2}\right)^2 \mu_R^2$$

并由此得变异系数

$$\delta_Z^2 \approx \delta_R^2 + \delta_S^2$$

当$f_Z(Z)$确定后，可求得$p_f = F(1)$，如图1-17所示。

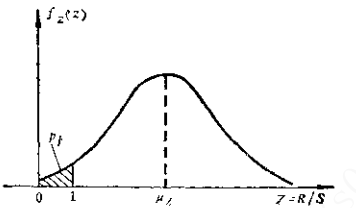


图 1-17　$Z=R/S$的密度函数

引入标准化变量

$$Z' = \frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$$

则得

$$p_f = F_{Z'}\left(\frac{1-\mu_Z}{\sigma_Z}\right) = F_{Z'}\left(-\frac{\mu_Z-1}{\sigma_Z}\right) = F_{Z'}(-\beta) \qquad (1\text{-}45)$$

这里，可靠指标为

$$\beta = \frac{\mu_Z-1}{\sigma_Z} = \frac{1-\frac{\mu_S}{\mu_R}}{\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}} = \frac{1-\frac{1}{F_O}}{\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}} \qquad (1\text{-}46)$$

亦可写成

$$\mu_R = \frac{\mu_S}{1-\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}} \qquad (1\text{-}47)$$

由上式得中值安全系数

$$F_O = \frac{1}{\frac{\mu_S}{\mu_R}} = \frac{1}{1-\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}} \qquad (1\text{-}48)$$

1.3.5.3　定义 $Z=\ln\left(\frac{R}{S}\right)=\ln R-\ln S$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

在此定义下的破坏概率为$\ln\left(\frac{R}{S}\right)<0$，如图1-18所示。

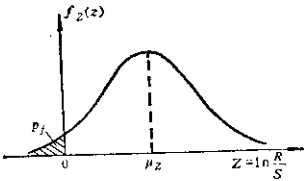


图 1-18 $Z=\ln\left(\frac{R}{S}\right)$的密度函数

当$f_Z(Z)$确定后，可求出$p_f=F_Z(0)$。

引入标准化变量

$$Z'=\frac{Z-\mu_Z}{\sigma_Z}$$

则得

$$F_{Z'}\left(\frac{0-\mu_Z}{\sigma_Z}\right)=F_{Z'}\left(-\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}\right)=F_{Z'}(-\beta)$$

若R和S相互独立，则可靠指标为

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}=\frac{\mu_{\ln R}-\mu_{\ln S}}{\sqrt{\sigma^2_{\ln R}+\sigma^2_{\ln S}}} \tag{1-49}$$

式中 $\mu_{\ln X}$和$\sigma^2_{\ln X}$——对数均值和方差。

由对数正态分布的性质可知，对数正态分布的变异系数为

$$\delta_X=\sqrt{e^{\sigma^2_{\ln X}}-1}$$

由此

$$\delta^2_X=e^{\sigma^2_{\ln X}}-1$$

或

$$\sigma^2_{\ln X}=\ln(1+\delta^2_X)$$

所以

$$\begin{aligned}\sigma_Z&=\sqrt{\sigma^2_{\ln R}+\sigma^2_{\ln S}}\\&=[\ln(1+\delta^2_R)+\ln(1+\delta^2_S)]^{1/2}\\&=\{\ln[(1+\delta^2_R)(1+\delta^2_S)]\}^{1/2}\end{aligned} \tag{1-50}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

又 $$\mu_{\ln X}=\ln\mu_X-\frac{1}{2}\sigma^2_{\ln X}$$

所以 $$\mu_Z=\mu_{\ln R}-\mu_{\ln S}$$

$$=\ln\mu_R-\ln S-\frac{1}{2}(\sigma^2_{\ln R}-\sigma^2_{\ln S})$$

$$=\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\delta_R^2}{1+\delta_S^2}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)-\ln\sqrt{\frac{1+\delta_R^2}{1+\delta_S^2}}$$

$$=\ln\frac{\mu_R/\mu_S}{\sqrt{\frac{1+\delta_R^2}{1+\delta_S^2}}}$$

$$=\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\sqrt{\frac{1+\delta_S^2}{1+\delta_R^2}}\right) \qquad (1\text{-}51)$$

由式 (1-40) 和 (1-41) 得可靠指标:

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}=\frac{\mu_{\ln R}-\mu_{\ln S}}{\sqrt{\sigma^2_{\ln R}+\sigma^2_{\ln S}}}$$

$$=\frac{\ln\left\{\frac{\mu_R}{\mu_S}\sqrt{\frac{1+\delta_S^2}{1+\delta_R^2}}\right\}}{\sqrt{\ln[(1+\delta_R^2)(1+\delta_S^2)]}} \qquad (1\text{-}52)$$

当变异系数δ_R和δ_S小于0.30时，式 (1-52)可进一步简化，近似取

$$\sqrt{\ln[(1+\delta_R^2)(1+\delta_S^2)]}\simeq\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2} \qquad (1\text{-}53)$$

其误差小于2%。又，当δ_R和δ_S很小或者近似相等时，则有

$$\sqrt{\frac{1+\delta_S^2}{1+\delta_R^2}}\approx 1 \qquad (1\text{-}54)$$

将式 (1-53) 和 (1-54) 代入式 (1-52)，可得简化的对数正态分布可靠指标β的计算公式:

$$\beta=\frac{\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\right)}{\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}} \qquad (1\text{-}55)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

上式可写成

$$\ln\frac{\mu_R}{\mu_S}=\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}$$

或者

$$\mu_R=\mu_S\exp(\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}) \tag{1-56}$$

由此得中值安全系数

$$F_O=\frac{\mu_R}{\mu_S}=\exp(\beta\sqrt{\delta_R^2+\delta_S^2}) \tag{1-57}$$

由以上三个模型的分析可以看出，当满足下列两条件时，可靠指标β与破坏概率p_f存在一一对应的关系：

（1）极限状态面是线性的；

（2）基本变量X_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是正态分布的。

这时，当状态函数Z的分布确定之后，β与p_f的关系就确定了，即可由β算出p_f。如果Z为正态分布，则很容易地根据β值查正态分布表求得破坏概率。表1-3列出其中有意义的数据。

表 1-3 β与p_f的关系

β	1.00	1.64	2.00	3.00	3.09	3.71	4.00	4.26	4.50
p_f	15.87×10^{-2}	5.05×10^{-2}	2.27×10^{-2}	1.35×10^{-3}	1.00×10^{-3}	1.04×10^{-4}	3.17×10^{-5}	1.02×10^{-5}	3.40×10^{-6}

分析结果表明，如果$p_f\geqslant10^{-3}$（$\beta\leqslant3.09$）时，$F_Z(Z)$的分布类型对p_f的影响不敏感，即不管假设Z为怎样的分布，计算的p_f大多在同一数量级。但是，如果$p_f<10^{-5}$（$\beta>4.26$）时，$F_Z(Z)$的分布类型对p_f的计算结果就相当敏感。这时，就不能随意采用$F_Z(Z)$的分布类型，必须仔细地研究$F_Z(Z)$的实际分布。

例1-3 为边坡加固选购钢锚索。经钢锚索拉伸试验结果的统计分析，甲厂生产的钢锚索，抗力R和荷载效应S均服从正态分布，即$R\sim N(907.20\text{kN}, 136.00\text{kN})$，$S\sim N(544.30\text{kN}, 113.40\text{kN})$；乙厂生产的钢锚索，抗力$R$和荷载$S$亦服从正态分布，即$R\sim N(907.20\text{kN}, 90.70\text{kN})$，$S$的分布参数同上。问甲

地信网论坛
BBS.3S001.COM

乙两厂的钢锚索的破坏概率各为多少？

解：将上述已知值分别代入式（1-43）、（1-41）和（1-40）求得钢锚索的中值安全系数F_0、可靠指标β和破坏概率p_f：

甲厂：
$$F_0=\frac{\mu_R}{\mu_S}=\frac{907.20}{544.30}=1.67$$

$$\beta=\frac{\mu_R-\mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}=\frac{907.20-544.30}{\sqrt{136.00^2+113.40^2}}=2.05$$

$$p_f=1-\phi(\beta)=1-\phi(2.05)=0.0202$$

乙厂：
$$F_0=\frac{907.20}{544.30}=1.67$$

$$\beta=\frac{907.20-544.30}{\sqrt{90.70^2+113.40^2}}=2.5$$

$$p_f=1-\phi(2.5)=0.0062$$

显然，若按传统的定数方法计算，甲乙两厂的钢锚索具有相同的安全系数$F_0=1.67$，无从比较优劣。而考虑随机因素的可靠性分析则明显可见，乙厂钢锚索的破坏概率显著低于甲厂。

例1-4 某露天矿排土场边坡，如图1-19所示，基底为强风化混合岩（Su），上覆1m左右厚的第四纪粘土和亚粘土（Q）。边坡高度$H=100$m，边坡角$\alpha=38°$。试算滑动面S_1、S_2和S_3的形状示于图1-19，其中滑动面S_3的安全系数最低，其上部处在废石

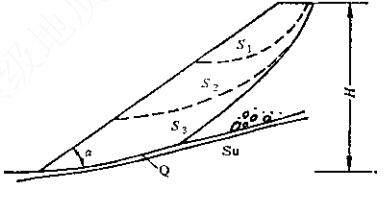


图 1-19 排土场边坡

中，下部沿基底粘土层穿过。废石容重为2.1t/m³，粘结力$\bar{c}_1=$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

9.8kPa，摩擦角$\bar{\phi}_1=32°$，基底长度$l_1=136$m；粘土层粘结力$\bar{c}_2=127.5$kPa，摩擦角$\overline{\phi_2}=26°$，基底长度$l_2=79$m。潜在滑体重量的垂直分量为$\Sigma N_1=51118$kN，$\Sigma N_2=45380$kN，剪切分量$\Sigma T=57216$kN，设粘结力和摩擦系数的变异系数分别为$\delta_c=0.35$，$\delta_{\tan\phi}=0.1$。试以正态分布和对数正态分布假设，计算其中值安全系数、可靠指标和破坏概率。

（1）按正态分布的假设计算　抗滑力R的均值为

$$\begin{aligned}\mu_R&=\Sigma N_i\overline{\tan\phi}+\Sigma\overline{c_i}\,l_i\\&=(51118)(\tan32°)+(45380)(\tan26°)\\&\quad\div(136)(9.8)+(79)(127.5)\\&=65481\end{aligned}$$

中值安全系数为

$$F_0=\frac{\mu_R}{\mu_S}=\frac{65481}{57216}=1.14$$

因两个独立随机变量的函数$f(x)$和$f(y)$的方差为：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[af(x)+bf(y)]&=a^2\mathrm{Var}[f(x)]\\&\quad+b^2\mathrm{Var}[f(y)]\end{aligned}$$

式中　a和b为常数。

因有$\delta_X=\dfrac{\sigma_X}{\mu_X}$，所以，

$$\mathrm{Var}[\tan\phi_1]=[(0.1)(\tan32°)]^2=3.90\times10^{-3}$$
$$\mathrm{Var}[\tan\phi_2]=[(0.1)(\tan26°)]^2=2.38\times10^{-3}$$
$$\mathrm{Var}[c_1]=[(0.35)(9.8)]^2=11.76$$
$$\mathrm{Var}[c_2]=[(0.35)(127.5)]^2=1991.39$$

因此，R的方差为

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[R]&=(51118)^2\mathrm{Var}[\tan\phi_1]+(45380)^2\mathrm{Var}[\tan\phi_2]\\&\quad+(136)^2\mathrm{Var}[c_1]+(79)^2\mathrm{Var}[c_2]\\&=27737912.33\end{aligned}$$

标准差　　$\sigma_R=5266.7$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

变异系数　　$\delta_R=5266.7/56481=0.09$

由式（1-31）求得可靠指标：

$$\beta=\frac{\mu_R-\mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2-\sigma_S^2}}=\frac{65481-57216}{\sqrt{27737912.33+0}}=1.57$$

由式（1-30）求得破坏概率：

$$p_f=1-\Phi(\beta)=1-\Phi(1.57)=0.0582=5.82\%$$

（2）按对数正态分布的假设计算由式（1-52）求得可靠指标：

$$\beta=\frac{\ln\left(\frac{\mu_R}{\mu_S}\sqrt{\frac{1+\delta_S^2}{1+\delta_R^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+\delta_R^2)(1+\delta_S^2)]}}$$

$$=\frac{\ln\left(\frac{65481}{57216}\sqrt{\frac{1}{1+(0.09)^2}}\right)}{\sqrt{\ln[(1+(0.09)^2)\cdot 1]}}=1.41$$

由式（1-30）求得破坏概率：

$$p_f=1-\Phi(\beta)=1-\Phi(1.41)=0.0793=7.93\%$$

依据正态分布和对数正态分布假设所求得的破坏概率分别为5.82%和7.93%，略有差异，说明研究随机变量的概率分布是很重要的，只有当假设的概率分布比较符合实际时，所求得的破坏概率才能比较客观地反映设计所承担的风险，可谓真实的破坏概率。对于非正态或非对数正态分布，求得的可靠指标所对应的破坏概率，只有相对意义，故称为破坏概率的运算值。

1.4　设计可靠度的确定

设计可靠度，是设计规范规定的或设计取用的作为设计依据的可靠度，它表示设计所预期达到的工程可靠度，或者从风险角度说，它表示设计所允许的或可接受的风险水平。

风险是相对的，边坡工程可接受的风险水平是由破坏概率和破坏后果决定的，它反映决策者的风险态度，既要结合主观判定，又要考虑工程性质和重要程度，实际破坏的经验数据，以及

地信网论坛
BBS.3S001.COM

所承担风险与可能得到的经济受益之间的权衡。因此说，边坡工程的可靠性并不是越高越好。因为可靠性越高，需用的费用就越多。一般，若要把可靠度从99%提高到99.9%这样的数量级，费用成指数增加。如何在安全和费用上作出合理的权衡？这是设计中必须考虑的问题之一，也是可靠性设计的根本问题。然而，在不同工程条件下，确定设计可靠度或可接受风险水平阈值并非是件容易事，甚至可以说，比评价破坏风险本身还难。目前，任何一个国家的岩土工程专家或国际协会（如ISSMFE和ISRM等）都不采纳一般性建议，因为至今还没有一个统一的水准。对于边坡工程可靠性设计，还是处于刚刚起步阶段，更缺乏实际经验。这里，仅对设计可靠度的确定原则、方法、借鉴的规范和应用实例作一般性讨论。

1.4.1 确定设计可靠度的方法

国内外许多学者和专家都在探索如何选择最适宜的破坏概率或设计可靠指标问题。例如，有人通过对比其他事故（如车祸、飞机失事等）发生的概率来推论人们可以接受的工程破坏概率；有人建立了破坏概率与工程直接造价、维护费用以及投资风险之间的关系。显然，当边坡破坏概率减小即可靠度提高时，工程的直接成本将提高，而不稳定费用（包括滑坡造成的经济损失和滑坡处理费用）将减少，投资风险亦将减小；如果破坏概率增大，工程直接成本降低，则不稳定费用和投资风险将提高。概言之，边坡设计可靠度的选择，不仅涉及生命财产的损失，甚或产生严重的社会影响；而且还涉及到国家的技术经济政策。

目前，一般采用类比法或校准法来确定设计可靠度。

类比法是参照人们日常活动中所经历的各种风险，确定一个能为之接受的破坏概率或可靠指标。例如，根据对参加各种活动所面临的风险水平的统计分析，建议建筑结构的年失效率为1×10^{-5}，这大致相当于正常房屋在设计基准期50年的失效概率为5×10^{-4}，当状态函数为正态分布时，相当于可靠指标$\beta=3.29$。但这是否合适，是可以研究的。

地信网论坛
BBS.35001.COM

由于对风险水平的接受程度往往因人而异，所以用类比法确定设计可靠度难以为人们所公认。

校准法是通过对现行设计规范安全度的校核（反演计算），找出隐含于现有工程中相应的可靠指标值，经综合分析和调查，据以制定今后设计采用的目标可靠指标。这实质上是充分注意到了工程建设长年积累的实践经验，继承现行设计规范规定的设计可靠度水准，认为它从总体上来讲是合理的、可以接受的。

在现阶段，从实用出发，这是一种比较切实可行的确定设计可靠度的方法，如加拿大、美国和欧洲一些国家都采用此法。但在边坡工程领域中，在这方面工作还做得很少，远未达到成熟化的程度，更谈不上规范化，还需要一个较长的摸索、总结的过程。

1.4.2 建筑结构设计可靠指标

可靠性方法在工程结构设计中，已进入工程实用阶段，许多国家和国际组织已开始根据结构可靠性理论制订新的设计标准和规范。因为建筑工程与边坡工程略有相近之处，在边坡工程没有形成自己的设计规范情况下，亦可借以参考。

（1）我国《建筑结构设计统一标准》(1983) 它是基于结构设计规范安全度的校核分析结果，同时综合考虑安全与经济等因素，根据建筑结构的安全等级（表1-4），规定设计可靠指标 β_k（表1-5）。

表 1-4 建筑结构的安全等级

安全等级	破坏后果	建筑物类型
一级	很严重	重要建筑物
二级	严重	一般工业与民用建筑
三级	不严重	次要建筑

《建筑结构设计统一标准》规定，当有充分根据时，可对表1-5规定的β_k值±0.25的调整。当有特殊要求时，β_k的选取可不受

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表1-5的限制。

表 1-5 结构构件承载能力极限状态的设计可靠指标β_k

破坏类型	安全等级		
	一级	二级	三级
延性破坏	3.7	3.2	2.7
脆性破坏	4.2	3.7	3.2

上述的β值，是根据设计基准期$T=50$年规定的。而且，只对静力荷载下设计结构时适用。对于含有动力荷载的组合作用下，目标可靠指标一般比上述规定值为小，一般在1～2之间。

表1-5中，延性破坏是指结构构件在破坏前有明显的变形或其他先兆；脆性破坏是指结构构件在破坏前无明显的变形或其他预兆。划分这两种破坏类型，主要是出于安全性的考虑。对此，目前尚无明确的定量标准，一般可根据以往的经验来确定。

一般按表1-4取与结构相同的安全等级，但允许对部分结构构件根据其重要程度及综合经济效果进行适当调整。

（2）国际安全度联合委员会（JCSS）制订的《结构统一标准规范的国际体系》第一卷“对各类结构和各种材料的共同统一规则”提出的建议见表1-6。

表 1-6 国际标准建议的年风险率p_f

遭受危险平均人数	经济后果		
	不严重	严重	很严重
少（<0.1）	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}
中等	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
多（>10）	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}

（3）北欧五国关于《结构荷载与安全性设计规程的建议》中规定的数值见表1-7。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 1-7 安全指标β和破坏概率p_f(年)

破坏类型	破坏后果(安全度等级)		
	不严重	严重	极严重
Ⅰ	3.1×10^{-5}	3.7×10^{-6}	4.2×10^{-7}
Ⅱ	3.7×10^{-4}	4.2×10^{-5}	4.7×10^{-6}
Ⅲ	4.2×10^{-5}	4.7×10^{-6}	5.2×10^{-7}

(4) 美国对现行钢筋混凝土结构设计规范安全度水平校准的结果是(设计基准期$T=50$年):

对钢筋混凝土受弯梁 $\beta=2.6\sim3.2$

先张法预应力混凝土受弯梁 $\beta=3.2\sim4.0$

一般箍筋柱(压坏) $\beta=3.0\sim3.5$

螺旋筋柱(压坏) $\beta=2.6\sim3.3$

有箍筋梁(受剪) $\beta=1.9\sim2.4$

拟采用的目标可靠指标为:

延性破坏构件 $\beta=3.0$

脆性破坏构件 $\beta=3.5$

1.4.3 岩土工程设计可靠指标的零星意见

(1) Gregory B.Baecher提出了有关土建工程的可接受风险的有益参考。图1-20示出不同工程年破坏概率与潜在后果的大致范围。实线表示范围是基于历史资料;虚线表示范围是基于先验风险分析。这些数据不能用以描述"可接受"风险,只是"所采用"风险。

(2) Harr.M.E用能力(C)和需求(D)具有相同变异系数δ_C或$\delta_D=20\%$,30%,40%情况下,采用$C-D$模型计算了中值安全系数$F_o=\overline{C}/\overline{D}$与破坏概率$p_f$,计算结果示于图1-21。可以看出,在相同变异系数(δ_C和δ_D)情况下,对数正态分布的破坏概率较之正态分布的高。在变异系数不相同的情况下,中值安全系数与破坏概率的关系取决于变异系数的相对值大小,例如

地信网论坛
BBS.3S001.COM

情况（b），正态分布则出现较高的破坏概率。从实用意义上讲，对于大多数岩土工程问题，$p_f > 1\times10^{-3}$，而且在这个有意义范

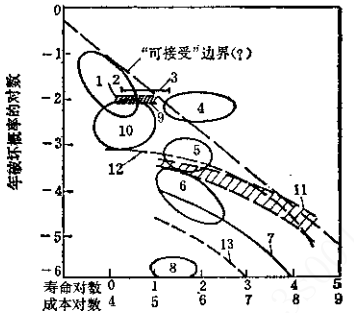


图 1-20 各种土建工程"可接受"的风险

1—露天矿边坡；2—疾病（disease）；3—商品航运；4—移动钻架；5—固定钻台；6—坝；7—坝（反应堆安全平台）；8—工业航空；9—滑坡（特定场地）；10—基础与边坡；11—"CANVEY"油库；12—"CANVEY"液态天然气库；13—100核电站（RSS）

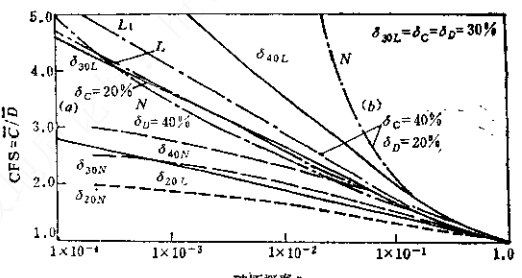


图 1-21 中值安全系数与破坏概率关系

（a）$\delta_C=20\%$，$\delta_D=40\%$；（b）$\delta_C=40\%$，$\delta_D=20\%$；N—正态分布（虚线）；L—对数正态分布（实线）；$\delta_{30L}=\delta_C=\delta_D=30\%$

地信网论坛
BBS.35001.COM

围内，破坏概率对分布类型不敏感。

（3）Nguyen V. U和Chowdhury R. N. 提出“实验”破坏概率的概念，即以排土场的破坏长度与排土场总长度之比（%）表示破坏概率。由此确认，可接受的破坏概率是沿采矿方向，新开采的总长度上发生破坏的长度与总长度的允许比率。显然，允许比率与矿山所能接受的生产破坏或生产损失风险密切相关。

（4）Tobutt D. C. 和Richards E. A. 认为，对于土木工程，如土坝、建筑物基础以及市区的土边坡等，可接受破坏概率$p_f=0.01\%$或更低，这也是必要的。而排土场和采矿场边坡可接受破坏概率可能比较高，这主要是由矿山边坡的临时性质所决定的，除非这些边坡临近居民区。如不在居民区，只考虑经济上的后果，如产量降低、生产推迟，等等。

（5）Priest和Brown采用蒙特卡洛模拟方法研究了秘鲁一露天矿边坡稳定性，并据其破坏概率提出了一组选择设计安全系数的准则。对于主要运输线路的边坡及其下有矿山永久性设备的边坡，可接受破坏概率$p_f=0.3\%$（$F_s=2.0$），对于台阶边坡以及临时的非靠近运输线路的边坡，可接受的破坏概率$p_f=10\%$（$F_s=1.3$）。实践证明，通常比较高的破坏概率是可以接受的。

1.4.4 几个应用实例

例1-5 美国一个大型铜露天矿，汽车运输，为确定10年的开采设计方案，在东端帮的三个设计区，拟定了两个年度矿石产量相等的边坡设计方案，即采用45°的斜坡道间边坡角和38°斜坡道间边坡角。

研究区边坡岩体主要由石英二长斑岩和角砾岩组成。石英二长斑岩岩石强度较高，裂隙发育；角砾岩岩石强度中等。经不连续面的详细测量和分析，确认其潜在破坏模式为平面剪切破坏。

采用蒙特卡洛模拟方法，求得不同边坡高度和边坡角的破坏概率，如表1-8所示。结果表明，破坏概率随边坡高度增加而减小，这是因为随着边坡高度增大，贯通的不连续面出现机会减少

地信网论坛
BBS.3S001.COM

的缘故。最后经过经济分析，选定38°边坡设计方案，就是说，该矿最后接受的破坏概率为3.9%（H<100m）和12%（H>100m）。

表 1-8 破坏概率总表

设计区		I		II 和 III	
边坡角		38°	45°	38°	45°
边坡高度（m）	15	0.039	0.432	0.001	0.016
	30	0.030	0.418	0.002	0.019
	122	0.012	0.198	0.003	0.033
	244	0.007	0.142	0.004	0.040
	366	0.002	0.086	0.005	0.047

例1-6 加拿大卡西阿石棉矿上盘上部边坡，边坡高度213m，由泥质板岩组成。总体稳定性分析结果表明，从可能取用的边坡角来看，深部破坏的可能性很小，然而，台阶的楔形破坏则成为稳定性的重要因素，成为总体边坡设计的基础。

分析了不同宽度平台的可能楔形破坏的概率，而平台宽度是台阶几何形状和总体边坡角的函数。为了以最低的费用提供足够的安全，需要精确地分析边坡几何形状，以使滑落下来的岩石都能拦截在平台上。必要的话，还要备有通向平台的安全通路，以便清除这些滑坡碎石。

假定：破坏不超过一个以上的台阶；碎石堆积的角度不小于自然安息角；台阶上不产生后冲破坏，不减小平台的有效拦截宽度。分析结果示于图1-22。可以看出，在大约10%概率处，台阶坡面角β=70°、80°和90°三条曲线都有明显而又一致的“突变”和“加陡”，相应的总体边坡角在51°～53°之间，如稍增大边坡角，不稳定概率将急剧增大。因此建议，取用台阶边坡破坏概率p_f不大于10%。

例1-7 我国尖山露天铁矿是一个未开采的基建矿山。采场走向近东西向，由于其与尖山倾伏向斜轴向重合，使之北帮、西端帮和南帮边坡岩体成顺坡层状结构，只东端帮为截切层状结构。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

构成边坡岩体主要有石英片岩、铁闪片岩、斜长角闪片岩等。西端帮边坡高384m，总体边坡角34°；北帮边坡高250～280m，总体边坡角44°；南帮边坡高230～260m，总体边坡角44°；东端帮边坡高250m，总体边坡角47°。

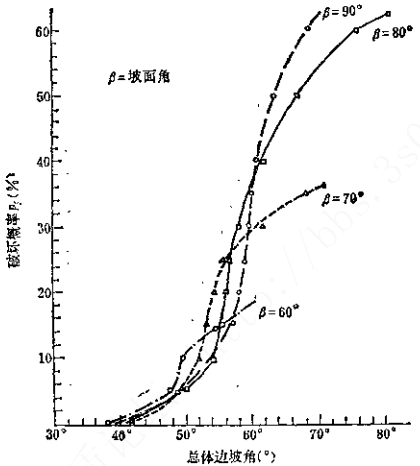


图 1-22 溢出平台的楔形破坏的概率

经过综合分析，最后选定总体边坡设计破坏概率阈值为10×10^{-3}（即可靠指标$\beta=2.33$），同时满足中值安全系数$F_s\geqslant1.15$。确定的主要依据是：

（1）可接受风险水平的确定，一方面反映分析的精度和决策者的胆识与魄力；另一方面也受到实际抗御风险能力的制约，例如，边坡位移监测系统的完备程度，边坡破坏的防范装备水平等等。考虑到我国目前的技术状况，风险补救能力较弱，宜适当

地信网论坛
BBS.3S001.COM

降低风险水平。

（2）设计可靠指标确定得准确与否，决定于破坏概率计算结果的准确程度。考虑到可靠性分析方法在露天矿边坡工程评价中应用还处于开始阶段，为了保证评价质量，对目前实际应用的几种分析方法均作了比较深入的对比研究，且以比较精确的蒙特卡洛模拟法为基本分析方法，模拟次数$N=5000$，其它分析结果辅以参考，但其计算的破坏概率高于模拟结果时，取高者作设计使用指标。

（3）可靠度的可靠度，即破坏概率的误差和可信度，也是工程决策中所极为关注的指标。为了提高可靠指标的精度，该工程取误差的数量级为1×10^{-2}，就是说，只对实际破坏概率的$p_f\times10^{-2}$位有效。

（4）可靠性分析方法是一种崭新的方法，而工程界对任何新的设计方法都需要有一个适应过程。为此，该工程同时选用破坏概率和安全系数两个评价指标。按一般工程经验，取用允许安全系数$F_S\geqslant1.15$。同时取用两个评价指标的实际意义是，保证工程安全系数$F_S\geqslant1.15$的概率为p_f。

（5）建筑结构构件设计可靠度一般是子系统的目标可靠度（表1-5）。而总体边坡的可靠度实际上是系统可靠度。在同一系统内，子系统的设计可靠度必须高于系统的可靠度。以美国一些运载火箭和导弹的可靠指标的初步统计（表1-9），可以说明这一点。

表 1-9　美国火箭和导弹的可靠指标

名　称	红　石	雷　神	宇宙神	大力神		民　兵	北极星	土　星
				I	II	III	A_2	V
总可靠度 p_s	0.91	0.73	0.84	0.79	0.86	0.83	0.86	0.85

（6）分析中考虑了地下水压、爆破震动以及地震力等动力

地信网论坛
BBS.3S001.COM

因素，虽按二级安全重要程度、延性破坏考虑，据《建筑结构设计统一标准》规定，亦可将设计可靠指标作适当降低。

（7）参照现有的露天边坡工程经验，总体边坡可接受的破坏概率一般选定在$3\times10^{-3}\sim10\times10^{-3}$，而台阶边坡可接受破坏概率一般选定在$10\times10^{-2}$左右。

顶级地质论坛：http://bbs.3s001.com/

地信网论坛
BBS.3S001.COM

2 输入概率模型的选择

2.1 概 述

在边坡可靠性分析中，是以一定的概率模型来描述状态变量所具有的不确定性。这种不确定性，一方面包含变量的物理不确定性，它反映变量本身固有的实际变化；另一方面，也包含变量的统计不确定性，它是在统计过程中给模型带来的“噪音”。在实际处理时，就要在充分认识随机变量物理性的本征的基础上，寻求随机变量的统计规律性，求统计参数的数值，建立适宜的概率模型。这里，应当说明两点：第一，建立输入概率模型、估计其特征参数值是边坡可靠性分析的关键之一，因为它决定分析结果的准确度。然而，要严格推导随机变量的概率分布往往是很困难的，特别是作为无限样本母体的地质体，又不可能无限地抽样，这样的概率模型更难建立，这就需要我们尽可能详细地占有随机变量的有关信息；第二，任何模型都不可能反映客体的一切特征，而只是对客体特征及变化规律的一种近似抽象。因此，从工程概念来说，既要尽力提高输入模型的真确性，又要承认输入模型的相对性。

随机变量的概率分布是对随机变量最基本、最完善的描述形式。概率分布的定义是：设X是一个随机变量，x是一个任意的实数，事件“X取得小于x数值”的概率

$$F(x)=p(X<x) \tag{2-1}$$

则称为随机变量X的分布函数。它既适合理论分布，又适合经验分布；既适合离散型分布，又适合连续型分布。

在选择输入随机变量的概率分布时，有两种方法可以采用：

一是采用标准型的理论分布（如正态分布、对数正态分布、

地信网论坛
BBS.35001.COM

指数分布、贝塔分布等）去拟合实测数据。首先根据经验或理论估计，假设一种概率分布，然后估计其参数，再对它进行概率分布的拟合优良性检验，最后确定其分布类型。理论分布的形式简明，且能提供所选用概率分布的完整资料，同时可重复性好，对数据随机的奇异变化不敏感。因此，在有可能的情况下，特别是根据实际随机过程的性质可以认定它属于某一种类型理论分布的情况下，应当选用理论分布去拟合实测数据。它的主要缺点是：如果所选用的理论分布并不符合真实分布，则其分析结果的偏差不可能通过增大数据量和计算精度而减小；理论分布参数有时难以估计，甚至会出现错误；有的分布如最常用的正态分布，其积分下限是从$-\infty$开始的，会包含负值；伽马分布无上限，等等。而在边坡可靠性分析中，所输入随机变量均为正值，且是有限值，故可能使尾部的概率值估计带来误差。

二是直接按实测数据的频率分布作出经验分布函数。勿需检验或证明它是具有哪一种属性的概率分布。在样本容量很大的情况下，这是一种实用而又简便的方法。它的主要缺点是：由于数据测量条件的影响，所收集数据本身具有一定程度的偶然性，不同区段所测量的同一参数，两组数据所获得的经验分布可能迥然不同；另外，数据极值和定数范围的限定也未必合理，实际上，所模拟系统性态的估量主要决定于端部极值出现概率。

在实际工作中，可能会出现两种或两种以上类型的分布都能拟合同一组数据，或者同一组数据可以作出两种以上不同的经验分布函数。对于前者，需要比较不同分布的相对有效程度，最后选定拟合程度好者作为输入变量的概率分布模型；对于后者，则需根据实际物理量的性质作出判断和选择。

有些时候，样本量较小，不能有根据地证明它确属的分布类型，但却知该随机过程是由很多互不相干、且都不起主导作用的随机因素之和所引起的，根据中心极限定理，可以认为其概率分布是正态的。

应当重复地强调，在选择随机变量的概率分布时，无论采用

地信网论坛
BBS.35001.COM

都不能忽略实际客体的随机变化的判断，因为它是确定随机变量概率分布的基本根据。

2.2 可靠性分析常用的概率分布

本节按照概率分布的三种类型，即连续概率分布、离散概率分布和经验概率分布，讨论其中常用分布的变化性。对于标准分布型式（连续概率分布和离散概率分布），为了便于查用，这里提供它们的相关性质的简要说明；对于经验概率分布，为了在工程实践中合理地选择适用方法，则将作以适当的叙述。

2.2.1 连续概率分布

2.2.1.1 *均匀分布* $U(a, b)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-2}$$

分布

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 1 & b<x\end{cases} \tag{2-3}$$

参数 a和b为实数，且$a<b$；a是位置参数，$b-a$是比例参数。

范围 $[a, b]$

均值 $$\mu_x=\frac{a+b}{2} \tag{2-4}$$

方差 $$\sigma_x^2=\frac{(b-a)^2}{12} \tag{2-5}$$

最大似然估计 $\hat{a}=\min X_i$，$\hat{b}=\max X_i$

说明 （1）$U(0, 1)$是贝塔分布$\beta(\alpha_1, \alpha_2)$当$\alpha_1=\alpha_2=1$时的特例；

（2）若$X\sim U(0, 1)$，且$[x, x+\Delta x]$为$[0, 1]$上的子区

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$\geqslant 0$，则

$$P\{X\in(x,\ x+\Delta x)\}=\int_{x}^{x+\Delta x}1\mathrm{d}x=(x+\Delta x)-x$$

$$=\Delta x$$

（3）$U(a,\ b)$ 密度函数见图2-1。

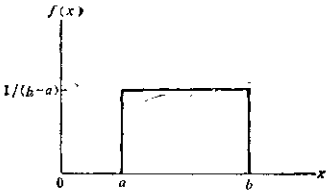


图 2-1 均匀分布密度函数

2.2.1.2 指数分布 $E(\beta)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}e^{-x/\beta} & x\geqslant 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(2\text{-}6)$$

分布

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\beta} & x\geqslant 0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(2\text{-}7)$$

参数 比例参数$\beta>0$

范围 $[0,\ \infty]$

均值 $$\mu_X=\frac{1}{\lambda}=\beta\qquad(2\text{-}8)$$

方差 $$\sigma_X^2=\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\beta^2\qquad(2\text{-}9)$$

最大似然估计 $$\widehat{\beta}=\overline{x}$$

说明 （1）$E(\beta)$分布是伽马分布和威布尔分布当形状参数$\alpha=$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

参数均为β时的特例；

（2）若X_1，X_2，…，X_m是独立的$E(\beta)$随机变量，则$X_1+X_2+\cdots+X_m\sim\Gamma(m,\ \beta)$；

（3）$E(1)$的密度函数见图2-2。

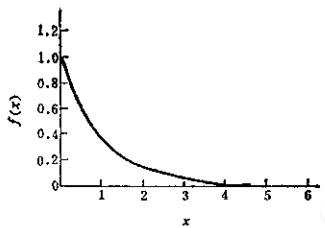


图 2-2 指数分布密度函数

2.2.1.3 伽马分布 $\Gamma(\alpha,\ \beta)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad(2\text{-}10)$$

式中 $\Gamma(\alpha)$为Γ函数，其定义为

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-x}\,dx,\quad x>0$$

分布

$$F(x)=\begin{cases}1+e^{-x/\beta}\sum\limits_{i=0}^{\alpha-1}\dfrac{(x/\beta)^i}{i!} & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad(2\text{-}11)$$

仅当α为正整数时，此式成立。

参数 形状参数$\alpha>0$，比例参数$\beta>0$。

范围 $[0,\ \infty]$

均值 $$\mu=\alpha\beta\qquad(2\text{-}12)$$

方差 $$\sigma_X^2=\alpha\beta^2\qquad(2\text{-}13)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

说明 （1）$E(\beta)$ 和 $\Gamma(1,\ \beta)$ 分布相同；

（2）对正整数 m，$\Gamma(m,\ \beta)$ 分布称作 $Erlang(\beta)$ 分布；

（3）$\chi^2(k)$ 分布与 $\Gamma(k/2,\ 1/2)$ 为同一分布；

（4）若 X_1，X_2，…，X_m 为独立随机变量，$X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\ \beta)$，则 $\sum_{i=1}^{m}X_i\sim\Gamma\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i,\ \beta\right)$；

（5）若 X_1，X_2 为相互独立的随机变量，且 $X_i\sim\Gamma(\alpha_i,\ \beta)$，则 $X_1/(X_1+X_2)\sim\beta(\alpha_1,\ \alpha_2)$；

（6）

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\begin{cases}\infty & \alpha<1\\ \dfrac{1}{\beta} & \alpha=1\\ 0 & \alpha>1\end{cases}\qquad(2\text{-}14)$$

（7）$\Gamma(\alpha,\ \beta)$ 分布的密度函数见图2-3。

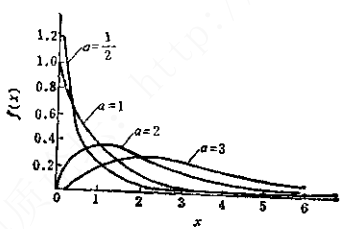


图 2-3 伽马分布密度函数

2.2.1.4 威布尔分布 $W(\alpha,\ \beta)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\qquad(2\text{-}15)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-(x/\beta)^{\alpha}} & x\geqslant 0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-16}$$

参数　形状参数$\alpha>0$，比例参数$\beta>0$。

范围　$[0,\ \infty]$

均值
$$\mu_X=\frac{\beta}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right) \tag{2-17}$$

方差
$$\sigma_X^2=\frac{\beta^2}{\alpha}\left\{2\Gamma\left(\frac{2}{\alpha}\right)-\frac{1}{\alpha}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\} \tag{2-18}$$

最大似然估计　必须满足以下两式

$$\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i^{\hat{\alpha}}\ln X_i}{\sum_{i=1}^{N}X_i^{\hat{\alpha}}}-\frac{1}{\hat{\alpha}}=\frac{\sum_{i=1}^{N}\ln X_i}{N} \tag{2-19}$$

$$\hat{\beta}=\left(\frac{\sum_{i=1}^{N}X_i^{\hat{\alpha}}}{N}\right)^{1/\hat{\alpha}} \tag{2-20}$$

计算$\hat{\alpha}$的迭代公式为

$$\hat{\alpha}_{k+1}=\hat{\alpha}_k+\frac{A+1/\hat{\alpha}_k-C_k/B_k}{1/\hat{\alpha}_k^2+(B_kH_k-C_k^2)/B_k^2} \tag{2-21}$$

式中

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{N}\ln X_i}{N}$$

$$B_k=\sum_{i=1}^{N}X_{ik}^{\hat{\alpha}}$$

$$C_k=\sum_{i=1}^{N}X_{ik}^{\hat{\alpha}}\ln X_i$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$H_k=\sum_{i=1}^{N}X_{ik}^{\hat{\alpha}}(\ln X_i)^2$$

初值为

$$\hat{\alpha}_0=\left\{\frac{\frac{6}{\pi^2}\left[\sum_{i=1}^{N}(\ln X_i)^2-\left(\sum_{i=1}^{N}\ln X_i\right)^2/N\right]}{N-1}\right\}^{-1/2} \qquad (2\text{-}22)$$

说明 （1）当且仅当$X^{\alpha}\sim E(\beta)$时，$X\sim W(\alpha,\ \beta)$；

（2）

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\begin{cases}\infty & \alpha<1\\ \dfrac{1}{\beta} & \alpha=1\\ 0 & \alpha>0\end{cases} \qquad (2\text{-}23)$$

（3）$W(\alpha,\ \beta)$ 密度函数曲线见图2-4。

2.2.1.5 正态分布 $N(\mu,\ \sigma^2)$

密度 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2},\quad -\infty<x<\infty \qquad (2\text{-}24)$$

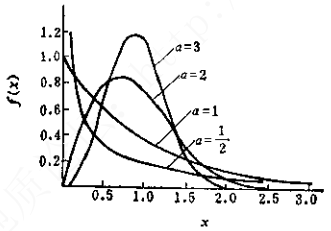


图 2-4 威布尔分布密度函数

分布 其定义为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx \qquad (2\text{-}25)$$

参数 位置参数$\mu\in(-\infty,\ \infty)$，比例参数$\sigma>0$

范围 $(-\infty,\ \infty)$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

均值 μ

方差 σ^2

最大似然估计
$$\hat{\mu} = \overline{x}(n) \tag{2-26}$$

$$\hat{\sigma} = \left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2\right\}^{1/2} \tag{2-27}$$

说明 （1）$N(0, 1)$ 为标准正态分布，其分布函数为

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Phi(x) \tag{2-28}$$

式中 Φ为拉普拉斯函数，可查表求得；

（2）正态随机变量X落在某区间内的概率计算：

$$p(X<x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-29}$$

$$p(X\in[a, b]) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-30}$$

$$p(|x-\mu| \leqslant r\sigma) = 2\Phi(r) - 1 \tag{2-31}$$

（3）$N(0, 1)$ 密度曲线见图2-5。

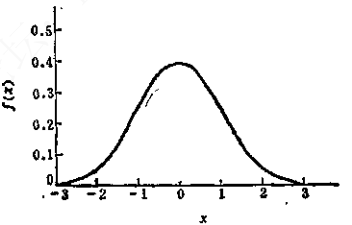


图 2-5 正态分布密度函数

2.2.1.6 对数正态分布 $LN(\mu, \sigma^2)$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,x\sigma}\exp\left[-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] & x>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-32}$$

参数　形状参数$\sigma>0$，比例参数$\mu\in(-\infty,\ \infty)$

范围　$(0,\ \infty)$

均值

$$\mu_X=\ln\mu+\frac{1}{2}\sigma_X^2 \tag{2-33}$$

方差

$$\sigma_X^2=\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{\mu^2}\right) \tag{2-34}$$

最大似然估计

$$\hat{\mu}=\sum_{i=1}^{N}\ln x_i/N \tag{2-35}$$

$$\hat{\sigma}=\left[\frac{\sum_{i=1}^{N}(\ln x_i-\hat{\mu})^2}{N}\right]^{1/2} \tag{2-36}$$

说明　（1）若$Y\sim N(\mu,\ \sigma^2)$，则$e^Y\sim LN(\mu,\ \sigma^2)$；

（2）若$X\sim LN(\mu',\ \sigma^2)$，则$\ln X\sim N(\mu',\ \sigma^2)$；

（3）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$；

（4）随机变量X落在某一区间内的概率计算：

$$p(X>x)=1-\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-37}$$

$$p(a<X<b)=\Phi\left(\frac{\ln b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\ln a-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-38}$$

（5）$LN(\mu,\ \sigma^2)$密度曲线见图3-6。

2.2.1.7　贝塔分布　$\beta(\alpha_1,\ \alpha_2)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{\beta(\alpha_1,\ \alpha_2)} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-39}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

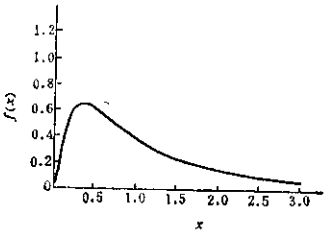


图 2-6 对数正态分布密度函数

式中 $\beta(\alpha_1, \alpha_2)$ 为贝塔函数，其定义为

$$\beta(\alpha_1, \alpha_2)=\int_0^1 t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}\mathrm{d}t \tag{2-40}$$

对任意实数$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$，贝塔函数有

$$\beta(\alpha_1, \alpha_2)=\beta(\alpha_1, \alpha_2) \tag{2-41}$$

$$\beta(\alpha_1, \alpha_2)=\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} \tag{2-42}$$

参数 形状参数$\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$

范围 〔0，1〕

均值 $$\mu_X=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \tag{2-43}$$

方差 $$\sigma_X^2=\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2)^2(\alpha_1+\alpha_2+1)} \tag{2-44}$$

说明 （1）若X是〔0，1〕区间贝塔分布随机变量，则$a+bX$为具有同一分布曲线形状的〔a，b〕区间的贝塔随机变量；

（2）当且仅当$1-X\sim\beta(\alpha_2, \alpha_1)$时，$X\sim\beta(\alpha_1, \alpha_2)$；

（3）$\beta(1, 2)$密度函数是左三角形，$\beta(2, 1)$密度函数是右三角形；

（4）$$\lim_{x\to 0} f(x)=\begin{cases}\infty & \alpha_1<1\\ \alpha_2 & \alpha_1=1\\ 0 & \alpha_1>1\end{cases}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$(5)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\infty & \alpha_2<1\\ \alpha_1 & \alpha_2=1\\ 0 & \alpha_2>1\end{cases}$$

(6) 当且仅当$\alpha_1=\alpha_2$时，密度曲线对称于$x=\frac{1}{2}$，且均值与众数相同；

(7) $\beta(\alpha_1,\ \alpha_2)$ 密度曲线见图2-7。

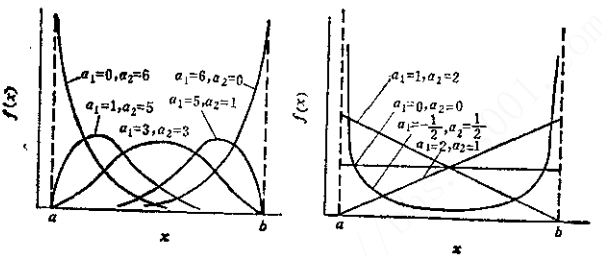


图 2-7 贝塔分布密度函数

2.2.1.8 三角分布 Triang(a, b, c)

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)} & a\leqslant x\leqslant c\\ \dfrac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)} & c<x\leqslant b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}\qquad(2\text{-}45)$$

分布

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)} & a\leqslant x\leqslant c\\ 1-\dfrac{(b-x)^2}{(b-a)(b-c)} & c<x\leqslant b\\ 1 & b<x\end{cases}\qquad(2\text{-}46)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

a、b、c皆为实数，且$a<c<b$；a为位置参数，$b-a$为比例参数，c为形状参数；

范围 $[a, b]$

均值 $$\mu_X=(a+b+c)/3 \qquad (2\text{-}47)$$

方差 $$\sigma_X^2=(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)/18 \qquad (2\text{-}48)$$

说明 （1）$c\to b$和$c\to a$的极限情况分别称为右三角形和左三角形；

（2）Triang(a, b, c) 密度曲线见图2-8。

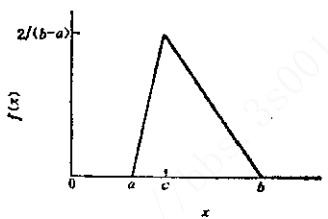


图 2-8 三角分布密度函数

2.2.1.9 χ^2分布 $\chi^2(n)$

密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}x^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}e^{-\frac{x}{2}} & x>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \qquad (2\text{-}49)$$

参数 自由度数n为正整数

范围 $[0, \infty)$

均值 $\mu_X=n$

方差 $\sigma_X^2=2n$

说明 （1）若$X_1, X_2, \cdots, X_n$为独立$N(0,1)$随机变量，则$\sum_{i=1}^{n}X_i\sim\chi^2(n)$；

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（2）$\Gamma(n/2,\ 2)$ 与 $\chi^2(n)$ 的密度函数相同；

（3）若 X_1，X_2，…，X_m 为独立随机变量，且 $X_i\sim\chi^2(n_i)$，则 $\sum_{i=1}^{m}X_i\sim\chi^2\left(\sum_{i=1}^{m}n_i\right)$；

（4）若 X_1，X_2，…，X_m 为独立 $N(\mu,\ 0^2)$ 随机变量，$\overline{x}$、s^2 分别为样本均值和方差，则 $\frac{(M-1)}{\sigma^2}s^2\sim\chi^2(M-1)$；

（5）若 $X\sim\chi^2(n)$，则当 n 很大时（$n>45$），$\sqrt{2X^2}\sim N(\sqrt{2n-1},\ 1)$；

（6）χ^2 分布密度曲线见图2-9。

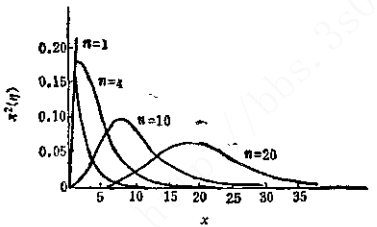


图 2-9 χ^2 分布密度函数

2.2.1.10 极值Ⅰ型分布 $G(u,\ \alpha)$

密度 $$f(x)=\alpha\exp\{-\alpha(x-u)-\exp[-\alpha(x-u)]\} \tag{2-50}$$

分布 $$F(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\} \tag{2-51}$$

参数 u 为位置参数，α 为比例参数

范围 $(-\infty,\ \infty)$

均值 $$\mu=u+\frac{0.5772}{\alpha} \tag{2-52}$$

方差 $$\sigma_x^2=(1.2825/\alpha)^2 \tag{2-53}$$

说明 （1）在容量为 n 的任何样本中，最大极值的分布函数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

I x_n^n也是极大值Ⅰ型分布，而标准差保持常数（与n无关），即$\sigma_{x_n^n}=\sigma_x$；

（2）若X服从极值Ⅰ型分布，其参数为α和u，则由n次独立试验产生的极大值的极值分布函数为

$$F_{x_n^n}(x)=\exp\{-n\exp[-\alpha(x-u)]\} \qquad (2\text{-}54)$$

其平均值为

$$\mu_{x_n^n}=\mu_x+\frac{\sqrt{6}}{\pi}\sigma_x\ln(n) \qquad (2\text{-}55)$$

（3）$G(u,\ \alpha)$ 密度函数见图2-10。

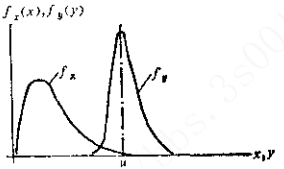


图 2-10 极值Ⅰ型分布密度函数

2.2.1.11 极值Ⅱ型分布 $G(u,\ k)$

密度

$$f(x)=ku^k x^{-k-1}e^{-(\frac{u}{x})^k}, \qquad 0<x<\infty \qquad (2\text{-}56)$$

分布

$$F(x)=\exp\left[-\left(\frac{u}{x}\right)^k\right], \qquad 0<x<\infty \qquad (2\text{-}57)$$

参数 位置参数$u>0$，形状参数$k>0$

范围 $[0,\ \infty)$

均值 $$\mu_x=u\Gamma(1-1/k), \qquad k>1 \qquad (2\text{-}58)$$

方差 $$\sigma_x^2=u^2[\Gamma(1-2/k)-\Gamma^2(1-1/k)], \qquad k>2 \qquad (2\text{-}59)$$

式中，$\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数：

$$\Gamma(k)=\int_0^\infty e^{-u}u^{k-1}du \qquad (2\text{-}60)$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

说明 （1）当$k\leqslant 2$时，标准差σ_x是没有定义的；

（2）若X是极大值Ⅱ型分布，则$Y=\ln X$是极大值Ⅰ型分布。

2.2.1.12 极值Ⅲ型分布 $G(u,\ k)$

密度
$$f(x)=\frac{k}{\omega-u}\left(\frac{\omega-x}{\omega-u}\right)^{k-1}\times\exp\left[-\left(\frac{\omega-x}{\omega-u}\right)^{k}\right],\qquad x\leqslant\omega \tag{2-61}$$

分布
$$F(x)=\exp\left[-\left(\frac{\omega-x}{\omega-u}\right)^{k}\right],\qquad x\leqslant\omega \tag{2-62}$$

对于极小值，则
$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x-\varepsilon}{u-\varepsilon}\right)^{k}\right],\qquad x\geqslant\varepsilon \tag{2-63}$$

式中 ω为上限值，ε为下限值

参数 k为形状参数，u为位置参数

均值
$$\mu_X=\varepsilon+(u-\varepsilon)\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right) \tag{2-64}$$

方差
$$\sigma_X^2=(u-\varepsilon)^2\left[\Gamma\left(1+\frac{2}{k}\right)-\Gamma^2\left(1+\frac{1}{k}\right)\right] \tag{2-65}$$

2.2.2 离散概率分布

2.2.2.1 伯努利分布$\mathrm{Ber}(p)$

密度
$$p(x)=\begin{cases}1-p & x=0\\ p & x=1\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-66}$$

分布
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-p & 0\leqslant x<1\\ 1 & 1\leqslant x\end{cases} \tag{2-67}$$

参数 $p\in(0,\ 1)$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

范围　　(0，1)

均值　　$\mu_X = p$　　(2-68)

方差　　$\sigma_X^2 = p(1-p)$　　(2-69)

最大似然估计　　$\hat{p} = \overline{x}$

说明（1）伯努利随机变量X是伯努利试验的结果，它只有两个取值，1代表成功，0代表失败；

（2）若n为正整数，则$X_1 + X_2 + \cdots + X_n$服从二项分布$Bin(n, p)$，或者说伯努利分布是$n=1$的二项分布；

（3）$Ber(p)$分布的密度函数见图2-11。

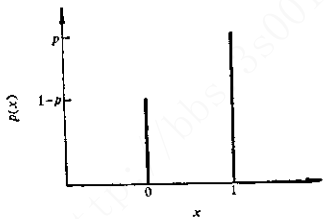


图 2-11　伯努利分布密度函数

2.2.2.2　离散均匀分布 DU(i, j)

密度

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{j-i+1} & x \in \{i, i+1, \cdots, j\} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \qquad (2\text{-}70)$$

分布

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < i \\ \dfrac{\lceil x \rfloor - i + 1}{j-i+1} & i \leqslant x \leqslant j \\ 1 & j < x \end{cases} \qquad (2\text{-}71)$$

式中　$\lceil \cdot \rfloor$表示取整。

参数　i和j为整数，$i \leqslant j$，i是位置参数。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

范围　　$\{i, i+1, \cdots, j\}$

均值　　$\mu_X = (i+j)/2$　　(2-72)

方差　　$\sigma_X^2 = \dfrac{(j-i+1)^2-1}{12}$　　(2-73)

最大似然估计　　$\hat{i} = \min x_k$，　$\hat{j} = \max x_k$

说明　（1）$DU(0,1)$ 与 $Ber\left(\frac{1}{2}\right)$的分布相同；

（2）$DU(i,j)$ 的密度函数见图2-12。

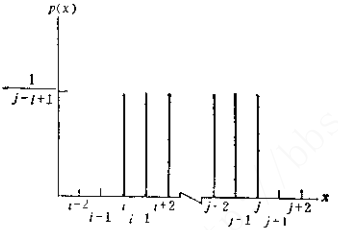


图 2-12　离散均匀分布密度函数

2.2.2.3　二项分布　$Bin(n,\ p)$

密度

$$p(x) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k}, & k \in \{0,1,\cdots,n\} \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \qquad (2\text{-}74)$$

式中　$x_k = k$，　$q = 1-p$。

分布

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{[x]} C_n^k p^i q^{n-i} & 0 \leqslant x \leqslant n \\ 1 & n < x \end{cases} \qquad (2\text{-}75)$$

参数　n 是正整数，　$p \in (0,1)$

范围　　$\{0,1,\cdots,n\}$

均值　　$\mu_X = np$　　(2-76)

地信网论坛
BBS.3S001.COM

方差　　$\sigma_X^2 = np(1-p)$　　(2-77)

最大似然估计　　$\hat{p} = \frac{\overline{x}}{n}$

说明（1）二项分布$Bin(n,\ p)$是n次独立伯努利试验中成功次数（每次试验成功概率为p）的概率分布；

（2）若有m个独立随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_m$，且$X_i \sim Bin(n_i,\ p)$，则$\sum_i X_i \sim Bin\left(\sum_{i=1}^{m} n_i,\ p\right)$；

（3）当且仅当$p=0.5$时，$Bin(n,p)$对称；

（4）当且仅当$n-X \sim Bin(n,1-p)$时，$X \sim Bin(n,p)$；

（5）$Bin(n,p)$的密度函数见图2-13。

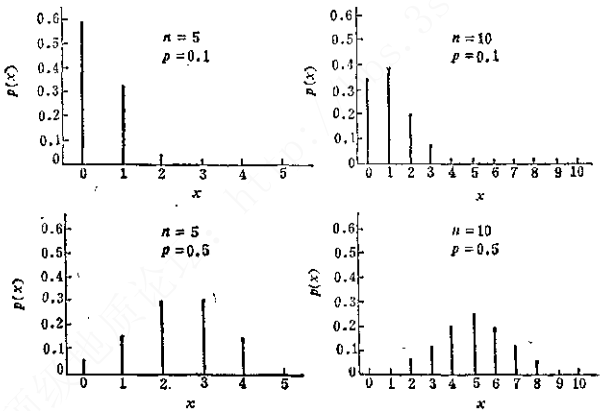


图 2-13　二项分布密度函数

2.2.2.4　几何分布　Geom(p)

密度

$$p(x) = \begin{cases} p(1-p)^k, & k \in \{0,\ 1,\ \cdots\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \qquad (2\text{-}78)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

式中 $x_k = k$

分布

$$F(x) = \begin{cases} 1-(1-p)^{[x]+1} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \tag{2-79}$$

参数 $p \in (0,1)$

范围 $\{0,1,\cdots\}$

均值 $$\mu_X = \frac{1-p}{p} \tag{2-80}$$

方差 $$\sigma_X^2 = \frac{1-p}{p^2} \tag{2-81}$$

最大似然估计 $$\hat{p} = \frac{1}{\bar{x}+1}$$

说明（1）若$Y_1, Y_2, \cdots$为独立伯努利$Ber(p)$随机变量，且$X = \min\{i : y_i = 1\} - 1$，则$X \sim Geom(p)$，其中$\min\{i : Y_i = 1\}$表示使$Y_i = 1$的最小值；

（2）若$X_1, X_2, \cdots X_m$为独立Geom(p)随机变量，则$\sum_i x_i \sim$Negbin(m, p)。这里Negbin(m, p)为负二项分布；

（3）与几何分布相对应的连续分布是指数分布；

（4）Geom(p)是Negbin(s, p)当$s=1$的特例；

（5）Geom(p)的密度函数见图2-14。

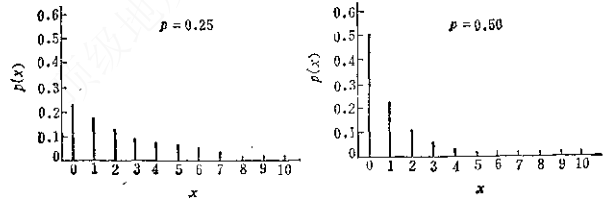


图 2-14 几何分布密度函数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

2.2.2.5 泊松分布 Poisson(λ)

密度

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} & k\in\{0,1,\cdots\}\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2-82}$$

式中 $x_k=k$。

分布

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\lfloor x\rfloor}\dfrac{\lambda_i}{i!} & 0\leqslant x\end{cases} \tag{2-83}$$

参数	$\lambda>0$	
范围	$\{0,1,\cdots\}$	
均值	$\mu_x=\lambda$	(2-84)
方差	$\sigma_X^2=\lambda$	(2-85)
最大似然估计	$\hat{\lambda}=\overline{x}$	

说明(1)若$x_1,x_2,\cdots,x_m$是独立随机变量,且$x_i\sim$Poisson(λ_i),则$\sum_{i=1}^{m}x_i\sim$Poisson$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)$;

(2) Poisson(λ) 密度函数见图2-15。

2.2.3 经验概率分布

在某些情况下,例如我们不能求得足以拟合实测数据的理论分布,则可以用所获得的原始实测数据直接确定其概率分布,即所谓经验概率分布。在随机模拟时,可由经验概率分布进行随机抽样。作经验分布函数的方法很多,这里仅介绍三种常用方法,并举例说明它们的应用。

2.2.3.1 阶梯形经验分布函数

对于给定原始数据$x_1,x_2,\cdots,x_n$的实际值,按其递增顺序排列,即$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$,则

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$F_n(x)=\begin{cases}0 & x<x_1\\ \dfrac{i}{n} & x_i\leqslant x<x_{i+1}\\ 1 & x\geqslant x_n\end{cases} \tag{2-86}$$

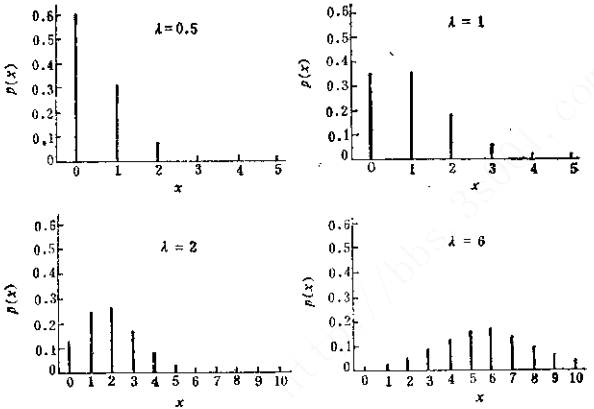


图 2-15 泊松分布密度函数

式中 n 为样本量，$i=1, 2, \cdots, n-1$。

式（2-86）为经验分布函数，它的图形为阶梯形曲线（图2-16）。

例2-1 某尾矿库，统计了25年的流入库内的峰值流量(m^3/d)，按由小到大的顺序排列，并与相应统计概率分布函数一起列入表2-1。其分布图形如图2-16所示。

2.2.3.2 逐段线性连续经验分布函数

将阶梯形经验分布函数进行逐段线性内插，可得连续的经验分布函数。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-1 峰值流量(m^3/d)统计数据

序号	样本 x_i	频数 m_i	累积频数 Σx_i	统计分布 $F_n(x_i)$
1	79.8	1	1	0.04
2	101.2	1	2	0.08
3	111.4	1	3	0.12
4	118.9	1	4	0.16
5	126.7	1	5	0.20
6	138.1	2	7	0.28
7	143.1	1	8	0.32
8	148.2	1	9	0.36
9	160.1	2	11	0.44
10	195.0	4	15	0.60
11	202.0	1	16	0.64
12	204.6	1	17	0.68
13	214.2	1	18	0.72
14	218.3	1	19	0.76
15	222.5	1	20	0.80
16	236.9	1	21	0.84
17	314.4	1	22	0.88
18	352.9	1	23	0.92
19	374.4	1	24	0.96
20	436.7	1	25	1.00

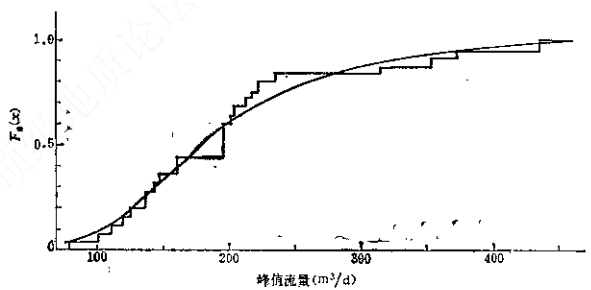


图 2-16 阶梯形经验分布函数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

设$x_{(0)}=0$，按式（2-86）作出的逐段线性连续经验分布函数为

$$F_n(x)=\begin{cases}\dfrac{i}{n}+\dfrac{x-x_{(i)}}{n[x_{(i+1)}-x_{(i)}]}, & x_{(i)}\leqslant x<x_{(i+1)}, \quad i=0,1,\cdots,n\\ 1, & x_{(n)}\leqslant x\end{cases}$$

(2-87)

还可作另一种逐段线性连续分布函数，当$x<x_{(1)}$时，$F_n(x)=0$，内插从$x_{(1)}$点开始。其经验分布函数为

$$F_n(x)=\begin{cases}0,\\ \dfrac{i-1}{n-1}+\dfrac{x-x_{(i)}}{(n-1)[x_{(i+1)}-x_{(i)}]},\\ 1,\end{cases}$$

$$x<x_{(1)}$$

$$x_{(i)}\leqslant x<x_{(i+1)},\ i=1,2,\cdots,n-1$$

$$x_{(n)}\leqslant x$$

(2-88)

例2-2 稠粘土每压实25cm的击打次数x_i的实测数据依序为4，8，11，16，17，19，21，25，32，34，$n=10$，其逐段线性连续经验分布函数的图形如图2-17所示。若$x=15$，即$x_{(3)}(=11)<x<x_{(4)}(=16)$，按式（2-88）可求得$F(15)=2.8/9$。

2.2.3.3 成组数据的经验分布

设n个数据x_j在相邻的k个区间，即$[a_0,a_1)$，$[a_1,a_2)$，…，$[a_{k-1},a_k)$内的观测数据分别为n_1，n_2，…，n_k，这里$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$(通常，a_j是等间距的，但这里不必作此规定)，但我们并不知道每个数据的数值。现令

$$G(a_0)=0$$

$$G(a_j)=\frac{n_1+n_2+\cdots+n_j}{n},\quad j=1,2,\cdots,k$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

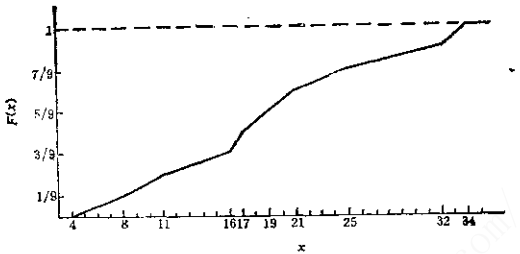


图 2-17 逐段线性连续经验分布函数

通过a_j间的线性内插，可定义成组数据逐段线性连续经验分布函数

$$G(x)=\begin{cases}0, & x<a_0\\ G(a_{j-1})+\dfrac{x-a_{j-1}}{a_j-a_{j-1}}[G(a_j)-G(a_{j-1})], & a_{j-1}\leqslant x<a_j,\ j=1,2,\cdots,k\\ 1, & a_k\leqslant x\end{cases} \tag{2-89}$$

在实际应用中，亦可按直方图形式输入，即以各组界限值代替原始数据即可。

例2-3 有50个抗压强度测定数据如下（单位为MPa）：

	29.0	30.4	31.7	26.0	28.2	27.9
26.5	27.4	29.9	28.8	29.1	30.2	25.2
28.4	26.8	29.3	27.3	28.0	29.8	28.0
30.1	27.1	28.3	32.4	29.6	30.9	30.6
29.2	30.7	28.3	31.5	26.4	31.1	27.8
29.6	27.3	28.2	29.5	31.3	30.6	29.4

地信网论坛
BBS.3S001.COM

31.0 27.6 28.2 25.7 28.5 28.7 31.3
29.4 28.9

其中$x_{max}=32.4$，$x_{min}=25.2$。现将50个数据分成以下8个区间：

1. 〔25.2, 26.0)　$n_1=2$　$G(a_1)=2/50=0.04$
2. 〔26.0, 27.1)　$n_2=4$　$G(a_2)=6/50=0.12$
3. 〔27.1, 28.0)　$n_3=7$　$G(a_3)=13/50=0.26$
4. 〔28.0, 29.0)　$n_4=12$　$G(a_4)=25/50=0.50$
5. 〔29.0, 30.1)　$n_5=11$　$G(a_5)=36/50=0.72$
6. 〔30.1, 31.0)　$n_6=7$　$G(a_6)=43/50=0.86$
7. 〔31.0, 31.7)　$n_7=8$　$G(a_7)=49/50=0.98$
8. 〔31.7, 32.4)　$n_8=1$　$G(a_8)=50/50=1.00$

其分布图形示于图2-18中的实线。同样数据，按等间距划分8个区间，图2-19示出其频率分布直方图，采用同样的方法，可求得逐段线性连续经验分布函数，其图形如图2-18中虚线所示。这里的界限值a_0和a_k因绘制直方图的需要，不一定与x_{max}和x_{min}相一致。

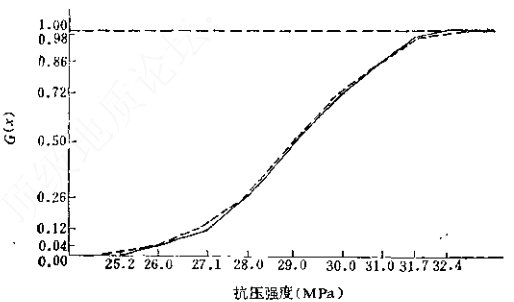


图 2-18　成组数据的经验分布函数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

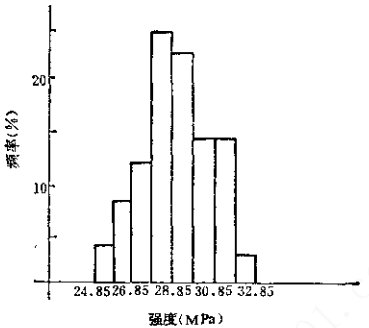


图 2-19 频率直方图

2.3 分布类型的选择

在边坡可靠性分析中，随机模拟方法是由指定的输入变量概率分布产生模拟的随机变量，可靠指标法是基于正态变量或非正态变量经当量正态化进行计算的，因此，根据给定数据选择和建立系统输入随机变量的概率分布，直接关系到分析结果的准确性和精确性，或者说，关系到可靠性分析的可靠性，因为，任何输入概率模型的误差远不能由计算方法的精度得以补偿。自然，正确地选择和建立输入概率模型是至关重要的。

选择概率分布的主要依据是有关该随机变量的物理知识和占有的数据。在某些情况下，不考虑特定分布的参数值，可以利用所分析系统中某一随机变量的先验知识，根据对该随机变量产生过程的认识，选择总体上似乎比较适宜的概率分布，或者至少可以排除某些分布。例如摩擦角、粘结力、节理组倾角、不连续面的起伏角等多服从正态分布，不连续面间距、长度等多服从指数分布，等间隔时期内最大地震震级、最高洪水位等可能服从极值分布等等。即使根据已有的知识尚不能决定应用那种分布，起码可以决定一些定性资料，例如，是离散分布还是连续分布，是有界

地信网论坛
BBS.35001.COM

的还是无界的，是对称的还是非对称的，等等，这些对选择概率分布也是很有用的。

数据对选择概率分布有决定性作用，因此，通常要花很多时间和经费去收集数据。一般来说，有了足够的数据就可以比较好地选择出概率分布，至少可以作出经验分布，而且可以用数据去检验所选择概率分布的正确性。

在实践中，有时我们很难有足够的知识准确地、直观地判断某一随机变量所属的分布类型，需要借助于其它方法。为此，本节将介绍二种简单推断方法，用以帮助我们选择适宜的分布形式。

2.3.1 点估计法

有些连续分布可以用它们的实际参数值的函数来表征，其中

表 2-2 连续分布变异系数δ_c取值范围

分布类型	变异系数 δ_c	δ_c 取值范围
均匀分布$U(a, b)$	$\frac{b-a}{\sqrt{3}(a+b)}$	$(-\infty, \infty)$①
指数分布$E(\beta)$	1	1
伽马分布$\Gamma(\alpha, \beta)$	$\alpha^{-\frac{1}{2}}$	>1，当$\alpha<1$ $=1$，当$\alpha=1$ <1，当$\alpha>1$
威布尔分布$W(\alpha, \beta)$	$\left\{\frac{\Gamma((2/\alpha)+1)}{[\Gamma((1/\alpha)+1)]^2}-1\right\}^{1/2}$	>1，当$\alpha<1$ $=1$，当$\alpha=1$ <1，当$\alpha>1$
正态分布$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{\sigma}{\mu}$	$(-\infty, \infty)$①
对数正态分布$LN(\mu, \sigma^2)$	$(e^{\sigma^2}-1)^{1/2}$	$(0, \infty)$
贝塔分布$\beta(\alpha_1, \alpha_2)$	$\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2}(\alpha_1+\alpha_2+1)\right]^{-1/2}$	$(0, \infty)$
三角分布$T(a, b, c)$	$\frac{(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)^{1/2}}{\sqrt{2}(a+b+c)}$	$(-\infty, \infty)$①

① 不包括零。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

常用的有变异系数。变异系数定义为

$$\delta_c = \frac{\sqrt{V_{ar}(X)}}{E(X)} \tag{2-90}$$

式中 $V_{ar}(X)$ 和 $E(X)$ 分别为该分布的方差和均值。

表2-2给出各种分布类型变异系数δ_c的计算方法和取值范围。从表2-2可以看出，各种分布的变异系数显示一定的特征。伽马分布和威布尔分布，当α小于、等于或大于1时，其δ_c分别小于、等于或大于1。指数分布，其$\delta_c \approx 1$。而均匀分布、正态分布、对数正态分布、贝塔分布和三角分布的δ_c特征不明显。

因为δ_c取决于分布的实际参数值，而实际参数值又是未知的，因此，必须根据实际观测数据进行估计。设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为n个独立的观测数据，并令其均值和方差的估计值为

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$$

那么δ_c的估计值$\hat{\delta}_c$为

$$\hat{\delta}_c = \frac{\sqrt{s^2}}{\overline{x}} \tag{2-91}$$

离散分布同样采用变异系数作为特征量，其定义为

$$\delta_D = \frac{\sqrt{V_{ar}(X)}}{E(X)} \tag{2-92}$$

其估计值 $\hat{\delta}_d$为

$$\hat{\delta}_d = \frac{\sqrt{s^2}}{\overline{x}} \tag{2-93}$$

式中 s^2和$\overline{x}$分别为样本方差和均值。

一些离散分布的变异系数列于表2-3。从表2-3可以看出，泊松分布的$\delta_d = 1$，伯努利分布和二项分布的$\delta_d < 1$，而负二项分

地信网论坛
BBS.35001.COM

仰和几何分布的$\delta_d > 1$。

表 2-3 离散分布变异系数δ_d取值范围

分布类型	变异系数 δ_d	δ_d 取值范围
伯努利分布Ber(p)	$1-p$	(0, 1)
离散均匀分布DU(i, j)	$\frac{(j-i+1)^2-1}{6(i+j)}$	$(-\infty, \infty)$
二项分布Bin(n, p)	$1-p$	(0, 1)
几何分布Geom(p)	$1/p$	(1, ∞)
负二项分布B(s, p)	$1/p$	(1, ∞)
泊松分布Poisson(λ)	1	{1}

根据变异系数的估计值按表2-2和表2-3可选择概率分布的类型；这种方法很简便，但缺点也很明显，一方面是δ不能唯一地确定分布形式，另一方面，由于数据本身的随机性，故其估计值$\hat{\delta}$可能偏离δ值较多。在缺少比较可靠的且正规的统计评价（如假设检验）情况下，点估计的简单计算至少可作为粗略的指导。

2.3.2 直方图法

直方图实质上是相应于所获得数据x_1，x_2，…，x_n密度函数的图形估计方法。在数据量很大的情况下，它能以很大的概率接近于随机变量的密度函数。直方图绘图简单，数据解释直观，从直方图可大致看出近似哪一种连续分布，且适用于任何分布。

直方图的绘图步骤是：

（1）将数据x_1，x_2，…，x_n分组。根据数据的最大值x_{max}和最小值x_{min}，选择两个边界点a_0。（稍小于x_{min}）和a_k（稍大于x_{max}），并在$[a_0, a_k]$区间划分k个等长子区间，其分界点分别为

$$a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_i < \cdots < a_k \qquad (2\text{-}94)$$

其中

$$a_i - a_{i-1} = \frac{a_k - a_0}{k}, \quad i = 1, 2, \cdots, k \qquad (2\text{-}95)$$

（2）统计落于每个子区间数据的频数f_i。设落于每个子区间的数据的个数为m_i，则

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$f_i=\frac{n_i}{n} \tag{2-96}$$

显然，$0<f_i<1$，$\sum f_i=1$。当n很大时，f_i可近似表示随机变量X在$[a_{i-1}, a_i)$区间内取值的概率

$$f_i \simeq p(a_{i-1}\leqslant x<a_i)$$

$$=\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\mathrm{d}x,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{2-97}$$

（3）画直方图。在直角坐标系中，每一个子区间$[a_{i-1}, a_i)$上画一长方形，其高度为

$$h=\frac{f_i}{a_i-a_{i-1}} \tag{2-98}$$

此即直方图。

显然，直方图中每一长方形的面积近似代表数据落于该子区间的概率。

在作直方图的过程中，应当合理地选择子区间数k。通常，取用不同的k值试画，选择直方图最平滑者。为了初步地确定k值，可采用下列方法：

斯塔杰司（Sturges）公式

$$k\approx 1+3.32\lg n \tag{2-99}$$

可由样本量n初步地确定子区间数的近似值k。斯塔杰司公式是以二项分布为前提的模型导出的，因此，假如频数分布模型与二项分布有显著不同时，还是不用斯塔杰司公式为宜。

对正态总体，子区间数k与样本量n的关系满足下式时比较合理

$$k=1.87(n-1)^{2/5} \tag{2-100}$$

还可以在式（2-99）和式（2-100）计算k值的基础上，采用工程方法确定子区间数：将极差R_n除以1、2、5或0.1、0.2、0.5，或0.01，0.02，0.05等，把它们的商与式（2-99）或式（2-100）计算出的k相近者，即定为子区间数k，相应得子区间宽

地信网论坛
BBS.3S001.COM

能值：$h=1\times10^r$，2×10^r，5×10^r，…，其中r为整数。

例2-4 一组含水量测定数据，样本量$n=40$，其中最大值$x_{max}=30.75\%$，最小值$x_{min}=29.16\%$，样本极差$R_n=x_{max}-x_{min}=1.59\%$。试确定子区间数$k$和子区间宽度$h$。

解：由斯塔杰司公式求得

$$k=1+3.32\lg40\simeq6.32$$

$$R_n/0.2=1.59/0.2=7.95\simeq8$$

因此，取子区间数$k=8$，子区间宽度$h=0.2$。

可以看出，直方图使用中的主要问题是区间划分因人而异，至今尚无统一的公认的划分区间的方法或经验公式，同一组数据，按不同区间宽度分组，如果进行分布假设有效性检验的话，有的可能拟合某一分布，有的则否。而图形直观相似性在很大程度上也是主观判断的结果，没有一个客观的标准。

2.3.3 概率图法

上面叙述了用直方图估计密度曲线的形状。当然，也可以直接用经验分布函数$F_N(x)$来估计理论分布函数。首先，根据原始数据估计累积分布，计算对应累积分布函数值$F_N(x_i^*)$。方法是：将n个观测值x_i按从小到大的顺序重新排列，则得到

$$x_{(1)},\ x_{(2)},\ x_{(3)},\ \cdots,\ x_{(n)}$$

对应$x_{(i)}$的相对累积频数$F_N(x_i^*)$用下列方法求得：

当样本量n较大时，可采用

$$F_N(x_i^*)=\frac{i}{n} \tag{2-101}$$

当样本量小（$n<20$）时，可采用中位秩法

$$F_N(x_i^*)=\frac{i-0.3}{n+0.4} \tag{2-102}$$

在n很小时，式(2-102)误差较大，下式则较为准确：

$$F_N(x_i^*)=\frac{i-0.5}{n} \tag{2-103}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

$$F_N(x_i^*)=\frac{i}{n+1} \qquad (2\text{-}104)$$

这些计算比较简单，几种常用的中位秩表也可在有关可靠性数值表中查到。

然而，由经验分布曲线估计理论分布曲线不像直方图那样直观，因为连续分布函数几乎都呈“S”形曲线，很难明显区分。但是，我们可以把一些理论分布在某种坐标系里直线化，同时也在该坐标系里画出经验分布函数，这样就可以比较它们的差异。

设$0<q<1$，则分布函数$F(x)$的q分位数x_q为

$$x_q=F^{-1}(q) \qquad (2\text{-}105)$$

式中 $F^{-1}(q)$是$F(x)$的反函数。因为$F(x)$是连续概率分布函数，是连续、单调、递增的函数，故存在反函数。

若$F(x)$和$G(y)$是两个分布函数，则当且仅当$F(x)$的每一个分位数x_q与$G(y)$的每一个相应分位数y_q相等时，才有$F(x)=G(y)$。既然对于所有的q有$x_q=y_q$，则x_q与y_q组成的图形在xy坐标系中为通过原点的斜率为1的直线。若$F(x)$和$G(y)$仅在位置参数和比例参数上有差别，则$(x_q,\ y_q)$图形仍为直线，但其斜率可能不为1，也可能不通过坐标原点。由$(x_q,\ y_q)$组成的分位数的图形称为概率图。

用概率图法对给定数据选择概率分布，并可以对概率分布参数作出工程估计，这是一种简单易行的方法。这种方法的特点是：把按某种理论分布的数据画在概率纸上，并拟合一条直线，只要读取该直线的斜率和截距，就能掌握有关指定分布的特征参数。但是，这种方法只有事先选定一种理论分布时才能应用。下面介绍几种常用理论分布的概率图构成和应用。

2.3.3.1 正态概率纸

设正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$的分布函数为$F(x)$，令$t=(x-\mu)/\sigma$，用t将正态分布$N(\mu,\ \sigma^2)$的变量x作替换后，t就符合标准正态分布$N(0,\ 1)$，设其分布函数为$\Phi(t)$。反过来，如果用$x=\mu+$

地信网论坛
BBS.35001.COM

的变量t作替换，则x就符合$N(\mu,\sigma^2)$分布。可以证明

$$F(x)=\Phi(t)$$

设分布函数Φ的反函数为Φ^{-1}，则

$$\Phi^{-1}(F(x))=\Phi^{-1}(\Phi(t))=t$$

因而

$$x=\mu+\sigma t=\mu+\sigma\Phi^{-1}(F(x)) \tag{2-106}$$

x与$\Phi^{-1}(F(x))$为一次方程式的关系，而标准差σ为该一次方程式所表示直线的斜率。

正态概率纸就是利用这种性质构成的，就是说，正态概率纸的横轴作为普通刻度，使x与其相对应，而纵轴作为Φ^{-1}函数刻度，使$F(x)$与之相对应。x_i与$F(x_i)$一一对应，则得n个特征点$(x_i,\ F(x_i))$。若各特征点$(x_i,\ F(x_i))$在正态概率纸上基本上在一条直线上（首、尾两点可以不予考虑），则认为母体X服从正态分布；否则，认为母体不服从正态分布。

如果特征点$(x_i,\ F(x_i))$回归成直线，由于

$$F(\mu)=\Phi(0)=0.5$$

在μ两侧的$\pm\sigma$之间包含全体分布的百分比为68.3%，则有

$$F(\mu-\sigma)=\Phi(-1)\approx0.1587$$

或

$$F(\mu+\sigma)=\Phi(1)\approx0.8413$$

所以，使$F(x)=0.5$的x是均值μ；使$F(x)\approx0.1587$或$F(x)\approx0.8413$的x是$\mu-\sigma$或$\mu+\sigma$。

正因为如此，作为正态母体参数$(\mu,\ \sigma)$的工程估计方法，可从纵坐标$F(x)=50\%$处，引横轴平行线与回归直线相交，过交点引横轴垂直线，与横轴交点的横坐标即母体均值的工程估计，记为$\hat{\mu}$。

同样的方法，从纵坐标$F(x)=15.87\%$和84.13%处作横轴平行线与回归直线相交，过交点引横轴垂直线得横坐标$\hat{\mu}-\hat{\sigma}$和$\hat{\mu}+\hat{\sigma}$，取正态母体标准差估计为$\hat{\mu}$值与$\hat{\mu}-\hat{\sigma}$或$\hat{\mu}+\hat{\sigma}$之差。

例2-5 对某排土场的沉降量（单位：mm）进行了8次观测，观测值为：$x_i=77.11,\ 58.24,\ 66.32,\ 53.18,\ 82.20,\ 69.05,\ 62.40,\ 72.36$。试对沉降量进行正态性检验。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

解：样本量$n=8$。

（1）把n个观测值按从小到大的顺序（升序）排列，得x_i=53.18，58.24，62.40，66.32，69.05，72.36，77.11，82.20；

（2）采用中位秩法（式2-102)求出对应于x_i的累积概率$F(x_i)$的估计值$\hat{F}(x_i)$：$\hat{F}(x_i)$=8.3，20.1，32.1，44.0，56.0,67.9,79.9,91.7；

（3）在正态概率纸上画出$(x_i, F(x_i))$，$i=1, 2, \cdots, 8$，并作$(x_i, F(x_i))$特征点的回归直线，如图2-20所示；

（4）从图2-20可判断：该排土场沉降量服从正态分布，而且，$\hat{\mu}=67.6$mm，$\hat{\sigma}=\hat{\mu}-(\hat{\mu}-\hat{\sigma})=67.6-56.6=11$ mm，所以，$X\sim N(67.6, 11)$。

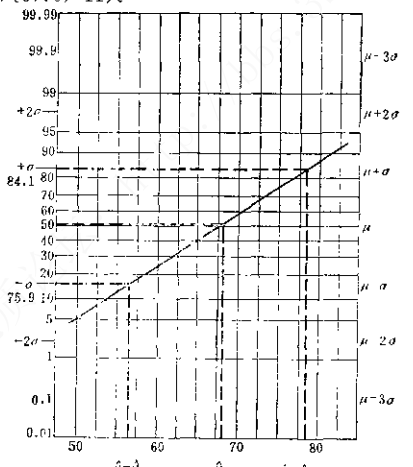


图 2-20 沉降量的正态性检验

例2-6 对$n=100$个点荷载强度指数，采用概率图法进行正

地信网论坛
BBS.3S001.COM

解:(1) 根据原始数据绘制频数分布表，频数分布的组数依斯塔杰司公式计算:

$$m \approx 1+3.32\lg n = 1+3.32\lg 100 \approx 8$$

为使组距正好为整数，故取$m=12$，如表2-4所示。设第i组的频数为f_i，累积频数为C_i:

$$C_i = \sum_{k=1}^{i} f_k$$

把第i组的上界作为在概率纸上画点的数据x_i ($i=1, 2, \cdots, m$)。

(2) 采用平均秩法来求$F(x_i)$，即

$$F(x_i) = C_i/(n+1)$$

表 2-4 点荷载强度指数

组号 i	强度指数组距	频数 f_i	累积频数 $C_i=\sum_{k=1}^{i} f_k$
1	35～40	1	1
2	40～45	3	4
3	45～50	4	8
4	50～55	10	18
5	55～60	14	32
6	60～65	19	51
7	65～70	18	69
8	70～75	15	84
9	75～80	9	93
10	80～85	4	97
11	85～90	2	99
12	90～95	1	100

表 2-5 $F(x_i)$估计值

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	40	45	50	55	60	65	70	75	80	85	90	95
$F(x_i)$	0.99	4.0	7.9	17.8	31.7	50.5	68.3	83.2	92.1	96.0	98.0	99.0

地信网论坛
BBS.35001.COM

为第i组的累积频数。计算结果见表2-5。把$(x_i, F(x_i))$特征点画在正态概率纸上，并拟合成条直线（图2-21）；

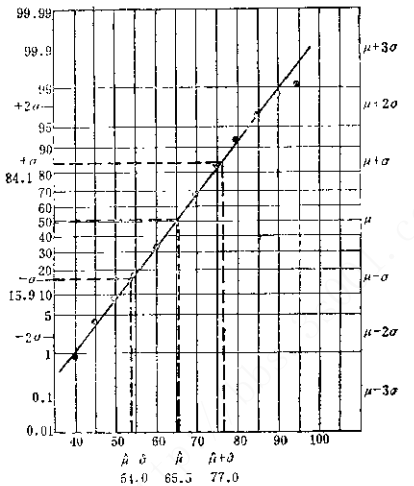


图 2-21 点荷载强度指数的正态性检验

（3）从纵轴$F(x_i)=50\%$处画一条水平线，在纵轴x的刻度上读取该线与回归直线的交点坐标值，此值即均值μ的估计值$\hat{\mu}=65.5$；

（4）从纵轴$-\sigma=15.9\%$处画一条水平线，在横轴x的刻度上读取该线与回归直线交点的值，此值即$\hat{\mu}-\hat{\sigma}$的值，从而可求得标准差σ的估计值$\hat{\sigma}=\hat{\mu}-(\hat{\mu}-\hat{\sigma})=65.5-54=11.5$。

2.3.3.2 对数正态概率纸

根据正态分布与对数正态分布性质的关系，令$t=\dfrac{\ln x-\mu}{\sigma}$，则

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$F(x)=\Phi(t)=\Phi\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma}\right) \tag{2-107}$$

其反函数也具有同样性质，即

$$\Phi^{-1}(F(x))=\Phi^{-1}(\Phi(t))=t$$

从而可得$(\ln x,\ \Phi^{-1}(F(x)))$的直线方程

$$\ln x=\mu+\sigma t=\mu+\sigma\Phi^{-1}(F(x))$$

以$\ln x$为横坐标，$\Phi^{-1}(F(x))$为纵坐标，则构成直角坐标系形式的对数正态概率纸。

x的对数$\ln x$的观测结果，在对数正态概率纸上可用回归直线进行拟合，回归拟合直线的参数为

$$\text{斜率：}\frac{1}{\sigma};\quad \text{截距：}-\frac{\mu}{\sigma}$$

对数正态分布检验判据：若各特征点可以近似用一条直线拟合，则X服从对数正态分布；否则，X不服从对数正态分布。

应指出，这里所求得的μ为位置参数，σ为比例参数，而对数正态变量X的特征参数需由下式求得

$$\hat{\mu}_X=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{2-108}$$

$$\hat{\sigma}_X=\exp(2\mu+\sigma^2)\ \{\exp(\sigma^2)-1\} \tag{2-109}$$

例2-7 某露天矿台阶水平排水孔水流量20个观测结果，x_i $(i=1,2,\cdots,20)$，单位：米^3/月：

180，300，540，190，130，110，90，70，45，32，

60，160，120，240，360，260，150，80，100，53。

试检验水流量X的分布特性，并确定其分布参数。

解：（1）样本量$n=20$，将数据从小到大排列，设此数列为x_i（$i=1$，2，…，20），如表2-6所示；

（2）采用中位秩法（式2-102）求出与x_i相对应的累积概率$F(x_i)$的估计值$\hat{F}(x_i)$，列入表2-6；

（3）把特征点$(x_i,\ \hat{F}(x_i))$（$i=1$，2，…，20）画在

地信网论坛
BBS.35001.COM

对数正态概率纸上（横轴已是对数刻度，不需要再对观测数据进行对数转换）；

表 2-6 例2-7的$\hat{F}(x_i)$估计值

序号 i	观测值 x_i	累积频数 C_i	累积概率 $\hat{F}(x_i)$(%)	序号 i	观测值 x_i	累积频数 C_i	累积概率 $\hat{F}(x_i)$(%)
1	32	1	3.4	11	130	11	52.5
2	45	2	8.3	12	150	12	57.4
3	53	3	13.1	13	160	13	62.3
4	66	4	18.1	14	180	14	67.2
5	70	5	23.0	15	197	15	72.1
6	80	6	27.9	16	240	16	77.0
7	90	7	32.8	17	250	17	81.9
8	100	8	37.7	18	300	18	86.9
9	110	9	42.6	19	360	19	91.7
10	120	10	47.5	20	540	20	96.6

（4）绘出拟合线，各点基本在一条直线上，故可认为水流量X服从对数正态分布（图2-22）；

（5）从纵轴50%（或$F(\mu)$，或$\Phi(0)$）的点画一条水平线，从横轴x上读取该线与拟合线交点的坐标值，此值即位置参数μ的估计值$\hat{\mu}$：

$$\hat{\mu}=\ln\hat{\tilde{x}}=\ln 130\approx 4.87$$

式中，$\hat{\tilde{x}}$为中位值，$\hat{\tilde{x}}=e^{\mu}$；

（6）从纵轴84.1%（或$F(\mu+\sigma)$，或$\Phi(1)$），或者纵轴15.9%（或$F(\mu-\sigma)$，或$\Phi(-1)$）的点画一水平线，从横轴x上读取该线与拟合线交点的坐标值，此值分别为$x_{0.841}$或$x_{0.159}$。于是，根据此值与第（5）步骤中估计的位置参数$\hat{\mu}$的关系，可求得比例系数σ的估计值$\hat{\sigma}$为

地信网论坛
BBS.35001.COM

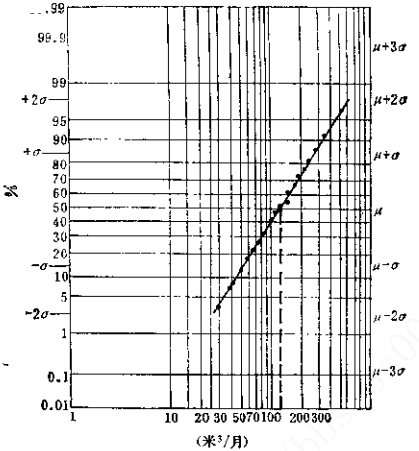


图 2-22　水流量的数据分布

$$\hat{\sigma}=\ln\hat{x}_{0.841}-\ln\hat{\bar{x}}=\ln\hat{x}_{0.841}-\hat{\mu}$$
$$=\ln280-\ln130=5.635-4.868$$
$$=0.767\approx0.77$$

或者

$$\hat{\sigma}=\ln\hat{\bar{x}}-\ln\hat{x}_{0.159}=\hat{\mu}-\ln\hat{x}_{0.159}$$
$$=\ln130-\ln60=4.868-4.094$$
$$=0.774\approx0.77$$

（7）用所估计的位置参数$\hat{\mu}$及比例参数σ，由式(2-108)和式（2-109）求出对数正态分布的均值和方差：

$$\hat{\mu}_x=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)=\exp\left\{4.87+\frac{(0.77)^2}{2}\right\}$$
$$=\exp(5.166)\approx175\quad(米^3/月)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\hat{\sigma}_X = \exp(2\mu+\sigma^2)\{\exp(\sigma^2)-1\}$$

$$= \exp(2\times 4.87+0.77^2)\times \{\exp(0.77)^2-1\}$$

$$= \exp(10.33)\times 0.8092 \approx 24792 \text{ (米}^3\text{/月)}$$

当数据量较大时，同样可以频数分布方法处理。

2.3.3.3 指数概率纸

随机变量X的指数分布函数

$$F(x)=1-e^{-\lambda x} \tag{2-110}$$

变换式 (2-110)并取对数，得

$$\ln\frac{1}{1-F(x)}=\lambda x \tag{2-111}$$

显然，式 (2-110) 为一通过坐标原点的直线方程，斜率为λ。故以x为横轴，以$\ln\left(\frac{1}{1-F(x)}\right)$为纵轴构成直角坐标系的指数概率纸，横轴取均匀刻度，纵轴取不均匀刻度。若回归直线不通过坐标原点，则$F(x)=1-e^{-\lambda(x-r)}$，其中r为位置参数，它等于回归直线与x轴交点的横坐标值。

指数分布的检验判据：若被检验数据的特征点在指数概率纸上呈一条直线，则它服从指数分布，否则，就不服从指数分布。

例2-8 实测节理间距数据x_i ($i=1,2,\cdots,8$)：0.80，2.36，0.35，3.50，0.51，0.12，1.22，1.70(m)，试求$F(x)$。

解：（1）将数据x_i由小到大重新排序，得数列$x_i^*=0.12$，0.35，0.51，0.80，1.22，1.70，2.36，3.50；

表 2-7 例2-8的$F(x_i)$估计值

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0.12	0.35	0.51	0.80	1.22	1.70	2.36	3.50
$\hat{F}(x_i)$	0.0833	0.2024	0.3214	0.4405	0.5595	0.6786	0.7976	0.9167

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（2）采用中位秩公式$F_N(x_i^*)=\frac{i-0.3}{n+0.4}$计算$x_i^*$所对应的累积概率估计值$\widehat{F}(x_i)$列入表2-7；

（3）在指数概率纸上画出（x_i，$\widehat{F}(x_i)$）各点，并可用通过坐标原点的直线拟合（图2-23之1），故可认为节理间距值服从指数分布；

（4）从纵轴$F(x)=63.2\%$处引与横轴平行的直线与拟合线相交，在横轴x上读取该点的坐标即$\widehat{\mu}=\frac{1}{\lambda}=1.40\text{m}$，因此$\lambda=0.714$，分布函数则为$F(x)=1-e^{-0.714x}$。

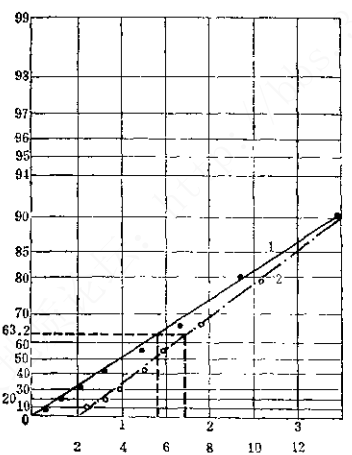


图 2-23 指数概率纸

例2-9 节理面起伏用测得8个数据，其从小到大排列的数列x_i及相应的累积概率（采用中位秩$\widehat{F}(x)$）列于表2-8。试求λ

地信网论坛
BBS.3S001.COM

;)。

解：（x_i，$\widehat{F}(x_i)$）特征点标在指数概率纸上（图2-23之2），可用直线拟合，但回归直线不过原点，它与横轴交点为$r=2.0$（度）。由图2-23得$\widehat{\mu}=\frac{1}{\lambda}=6.8$（度），$\lambda=0.147$，所以分布函数为$F(x)=1-e^{0.147(x-2)}$。

表 2-8 例2-9的$\widehat{F}(x_i)$估计值

i	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	2.2	3.2	3.8	5.0	5.9	7.8	10.2	12.0
$\widehat{F}(x_i)$	0.0833	0.2024	0.3214	0.4405	0.5595	0.6786	0.7976	0.9167

2.3.3.4 极值概率纸

极值分布的分布函数

$$F(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\} \qquad (2\text{-}51)$$

式中 u——特征最大值，$u=\mu-\frac{r}{\alpha}$；

r——$Euler$常数，$r\simeq0.577215$；

α——离散尺度或称Gumbel斜率，$\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{6}\,\sigma}=1.2825/\sigma$；

μ——随机变量X的均值；

σ——随机变量X的标准差。

设$y=\alpha(x-u)$，于是有

$$F(y)=\exp\{-\exp(-y)\} \qquad (2\text{-}112)$$

将式（2-112）两边取两次对数，则有

$$y=-\ln\ln\{1/F(x)\}=\alpha(x-u) \qquad (2\text{-}113)$$

从而，可绘出横轴x（代表随机变量）为均匀刻度、纵轴为

地信网论坛
BBS.35001.COM

的函数值(代表与随机变量相应的累积概率)的极值概率纸。

把n个点$(x_i, F(x))$画在极值概率纸上,如果基本上呈直线,则随机变量X服从极值分布。

根据前面的假定$y=\alpha(x-u)$,可求得拟合线的斜率

$$\alpha=y/(x-u) \tag{2-114}$$

又,当$y=0$时,可有$x=u$,且$F(x)=e^{-1}=0.368$,故可知函数值$F(x)=0.368$所对应的是x坐标为特征最大值u。

根据$u=\mu-\frac{r}{\alpha}$,得出$y=\alpha(\mu-u)r$。因此,在极值概率纸右边y尺上,从$Euler$常数$r=0.577215$处向左画一条水平线,在x轴刻度上读取该线与拟合线交点的坐标值,此值即为极值分布的均值。

此外,还可以求得回归周期

$$T(x)=\frac{1}{1-F(x)} \tag{2-115}$$

它表明发生一次的平均时间。

例2-10 某地区近10年($n=10$)的地震观测资料,每年最大地震级为$x_i=4.0, 2.3, 5.0, 3.3, 3.5, 4.2, 2.7, 6.0, 3.2, 4.7$。试求其分布函数与分布参数。

解: (1)将$n=10$个数据从小到大重新排列,设此数列为$x_i^*(i=1, 2, \cdots, 10)$,见表2-9。

表 2-9 例2-10的$\hat{F}(x_i)$估计值

i	x_i^*	$\hat{F}(x_i)(\%)$	i	x_i^*	$\hat{F}(x_i)(\%)$
1	2.3	6.7	6	4.9	51.8
2	2.7	16.2	7	4.2	64.5
3	3.2	25.9	8	4.7	74.1
4	3.3	35.5	9	5.0	83.8
5	3.5	45.2	10	6.0	93.3

地信网论坛
BBS.3S001.COM

、2）由中位秩法求出对应于x_i^*的累积概率$F(x_i)$的估计值$\widehat{F}(x_i)$；

（3）把数据点$(x_i, \widehat{F}(x_i))$，$(i=1, 2, \cdots, n)$画在极值概率纸上（图2-24）。

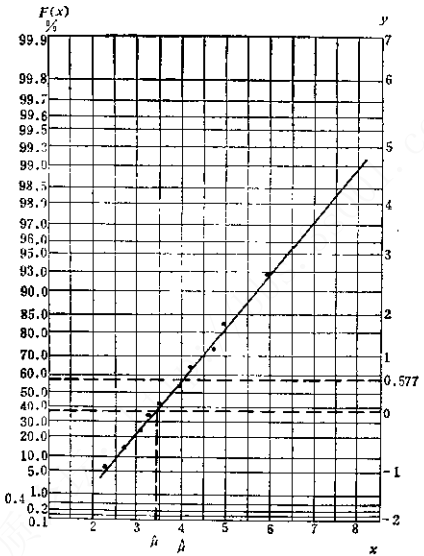


图 2-24 极值概率纸

（4）如果画出来的各点大体排列在一条直线上，可认为此数据服从极值分布，并绘出拟合线；

（5）求参数u和α的估计值$\widehat{u}$和$\widehat{\alpha}$。沿纵轴$y=0$或$F(x)=0.368$的水平虚线找到其与拟合线交点，在横轴x上读取该交点的坐标值即$\widehat{u}$值，$\widehat{u}=3.4$。

地信网论坛
BBS.35001.COM

由式（2-114），取$x=6$，由概率图可得$y=2.57$，所以

$$\alpha=2.57/(6-3.4)=0.988$$

（6）求均值μ和方差σ^2的估计值$\hat{\mu}$和$\hat{\sigma}^2$。在纵轴y尺上，从$y=r=0.577215$处向左画一条水平线，在x轴上读取该线与拟合线交点的坐标值即$\hat{\mu}$值，$\hat{\mu}=4.0$。亦可采用计算方法，即

$$\hat{\mu}=\hat{u}+\frac{r}{\hat{\alpha}}$$

$$=3.4+0.577/0.988\approx 3.98$$

$$\sigma=1.2825/\hat{\alpha}$$

$$=1.2825/0.988=1.30$$

（7）分析x与回归周期T（x）之关系。若预计50年周期，即$T(x)=50$，据式（2-115）有

$$F(x)=1-\frac{1}{50}=0.98$$

所对应的x坐标为7.3，就是说$x=7.3$级地震平均50年1次；

（8）求大于x的概率。大于$x=7.3$级的概率为

$$p_{x>7.3}=1-F(x)$$

$$=1-0.98=0.02$$

2.4 参数估计

我们知道，随机变量及其统计规律性，是通过随机变量的分布和分布参数（或数字特征如均值、方差和高阶矩）来描述的，只有我们已知分布参数值，随机变量X的分布函数才能完全确定。然而，在边坡工程领域中，总体的分布参数精确值一般是未知的，均需通过样本的观测值去估计代表总体的随机变量X的分布函数的某些参数值，这就叫做参数估计。

总体参数估计分为点估计和区间估计。根据样本观测值x_1，x_2，…，x_n，直接确定总体参数θ的一个估计值$\hat{\theta}$的方法，叫

地信网论坛
BBS.3S001.COM

做点估计方法，$\hat{\theta}$称为θ的点估计。如果对待估参数能给出一个参数范围或区间〔θ_l，θ_u〕，θ_l和θ_u分别是参数的下限和上限；同时又给出θ落在〔θ_l，θ_u〕区间内的概率或可信程度即置信度，这就是参数的置信区间估计方法。它表示为

$$p(\theta\in[\theta_l,\ \theta_u])=1-\alpha$$

式中 α表示置信度或显著水平。置信度α的意义是：如果要求某一统计推断结论的置信度α（一般可取$\alpha=1\%$，5%，10%），则总体参数θ在〔θ_l，θ_u〕区间的可能性为（$1-\alpha$）。

2.4.1 点估计方法

设总体X的密度函数为f（x，θ_1，θ_2，…，θ_m），其中θ_1，θ_2，…，θ_m是未知参数。通常用总体X的样本X_1，X_2，…，X_n构成的统计量$\hat{\theta}$（X_1，X_2，…，X_n）来估计总体参数θ_i，称$\hat{\theta}$为θ的估计量。对应于样本值x_1，x_2，…，x_n可计算出估计量的数值$\hat{\theta}(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，称之为$\theta_i$的估计值。显然，总体参数的点估计问题，就是求估计量$\hat{\theta}_i(X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n)$的问题。

评价估计量好坏的标准有三：

（1）无偏性 若估计量$\hat{\theta}$的期望值等于被估参数θ，即

$$E(\hat{\theta})=\theta \tag{2-116}$$

则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计。无偏估计意味着估计的平均值等于所估计的参数值，并非估计的个别值都接近所估计的参数，随机变量的特性决定估计值总是围绕在参数的附近摆动。

（2）有效性 若$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$是两个无偏估计量，当

$$\frac{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_1)}{\mathrm{Var}(\hat{\theta}_2)}<1 \tag{2-117}$$

时，则$\hat{\theta}_1$比$\hat{\theta}_2$更有效。有效性是要求估计值对参数的偏离（摆

地信网论坛
BBS.35001.COM

动）要小。

（3）一致性　若样本容量 n 很大时，估计量 $\hat{\theta}$ 以很大概率趋近于被估参数 θ，即对于任意 $\theta>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} p(|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon)=1 \qquad (2\text{-}118)$$

则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的一致估计。

具备上述三个特性的估计值 $\hat{\theta}_i$ 称为最佳估计值，即最为接近所要求的未知参数 θ_i。

参数点估计方法很多，有矩法、最大似然法、贝叶斯估计法、最小二乘法等。这里只介绍广为应用的矩法和最大似然法。

2.4.1.1 矩法

直接用样本的 r 阶矩作为总体 r 阶矩的估值的方法简称为矩法。据统计学可知，样本 x_1，x_2，…，x_n 集合的均值是随机变量 X 的一阶矩，方差则是随机变量 X 的二阶矩。由于概率分布参数都与均值和方差有关（参见2-2节），这里只写出样本均值和方差的计算方法。

设随机变量的样本为 x_1，x_2，…，x_n，则

样本均值　$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\approx\mu_X \qquad (2\text{-}119)$$

样本方差　$$S_n^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\approx\sigma^2 \qquad (2\text{-}120)$$

用样本均值 $\overline{X}$ 估计总体均值 μ_X 是正确的、无偏估计；但用样本方差 S_n^2 估计总体方差 σ^2，可以证明是偏小的，其无偏估计应是

$$S_{n-1}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2 \qquad (2\text{-}121)$$

当 n 很大时，式(2-120)和（2-121）的计算结果差别很小。

样本方差还可用下列两式计算，即

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$S_{n-1}^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{X}^2\right) \tag{2-122}$$

$$S_{n-1}^2=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}{n(n-1)} \tag{2-123}$$

例2-11 某尾矿库，统计了25年的流入库内的峰值流量（m^3/d）如表2-10所示。

表 2-10 流入库内峰值流量(m^3/d)

年序	流量	年序	流量	年序	流量
1	111.4	10	222.5	19	198.0
2	138.1	11	314.4	20	118.9
3	143.1	12	218.3	21	198.0
4	436.7	13	198.9	22	160.4
5	352.9	14	160.4	23	126.7
6	374.4	15	148.2	24	79.8
7	214.2	16	138.1	25	101.2
8	198.0	17	204.2		
9	239.6	18	202.2		

根据表2-10的数据，由式（2-119）和（2-120）求得均值$\overline{X}$和标准差S^2为

$$\overline{X}=\frac{1}{25}(111.4+138.1+\cdots+101.2)$$
$$=199.9(m^3/d)$$
$$S_n=\left\{\frac{1}{25}[(111.4-199.9)^2+(138.1-199.9)^2+\cdots+(101.2-199.9)^2]\right\}^{1/2}$$
$$=84.5(m^3/d)$$
$$S_{n-1}=\left\{\frac{1}{24}[(111.4-199.9)^2+(138.1-199.9)^2\right.$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$+\cdots+(101.2-199.9)^2]\Big\}^{1/2}$$

$$=88.1(m^3/d)$$

例2-12 数据同例2-11，假设峰值流量服从极值Ⅰ型分布$G(u,\alpha)$，根据样本均值$\bar{x}=199.9m^3/d$，方差$S_{n-1}=7761.6m^3/d$，求分布参数u和α。

解：由式（2-52）和（2-53）可知极值1型分布的均值和方差分别为

$$\mu_x=u+\frac{0.5772}{\alpha}$$

$$\sigma_x^2=\left(\frac{1.2825}{\alpha}\right)^2$$

将参数u和α的估计量记为$\hat{u}$和$\hat{\alpha}$，则

$$u+\frac{0.5772}{\alpha}=199.9$$

$$\frac{(1.2825)^2}{\alpha^2}=7761.6$$

解此二式得

$$\alpha=0.0146;\quad u=160.3658$$

2.4.1.2 最大似然法

最大似然法是参数估计中另一种常用方法，它可以直接求算参数的点估计值。从理论上讲，它比矩法精度高，矩法是利用样本矩来作为总体矩的估值，其概率分布可以是未知的，而最大似然法，其概率分布一定是已知的，它是利用总体的概率密度函数$f(x_i,\theta_j)$的表达式及样本所提供的信息来估值的。最大似然法实际上就是最大概率法。

设随机变量X的密度函数为$f(x_i,\theta_j)$，其中θ为参数，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$。最大似然法的原理就是选取样本观测值$x_1,x_2,\cdots,x_n$出现概率达到最大时的$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$作为总体未知参数的估值。换言之，总体的参数$\theta_j$应等于什么值时，观

地信网论坛
BBS.3S001.COM

测值是来自母体的可能性最大，即概率最大。x_i的出现概率正比于在x_i处的概率密度函数值，如果是随机抽样，取得n个独立观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的概率为$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_j)$。显而易见，问题变成求$\prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_j)$的极值问题。令

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) \tag{2-124}$$

其中$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$称为观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的似然函数；$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$为待估的参数。

若$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$的值使$L$取得极值，则必须满足下列方程组

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0, j = 1, 2, \cdots, m \tag{2-125}$$

由于$\ln x$是x的增函数，因此L与$\ln L$在相同的点处达到最大，所以上述方程组可以用下列方程组来代替

$$\frac{\partial \ln L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)}{\partial \theta_j} = 0,\ j = 1, 2, \cdots, m \tag{2-126}$$

当样本容量n充分大时，往往认为是"最佳"估计。

例2-13 节理间距实测数据(单位：m)如下：0.80，2.36，0.35，3.50，0.51，0.12，1.22，1.70，设其服从指数分布，即

$$f(x) = \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}}$$

试求平均间距β的最大似然估计。

解：由式(2-124)，似然函数为

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_8;\ \beta) = \prod_{i=1}^{8} \frac{1}{\beta} \exp(-x_i / \beta)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=(\beta)^{-8}\exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$$

由式 (2-125)，有

$$\frac{\partial L}{\partial \beta}=-8\beta^{-9}\exp\left(\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{8}x_i\right)+\beta^{-8}$$

$$\times\exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{8}x_i\right)\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{\beta^2}=0$$

或

$$\beta^{-8}\left[-7+\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{\beta}\right]\exp\left(-\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{8}x_i\right)=0$$

由此可得

$$\hat{\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{8}x_i}{8}=1.32(\mathrm{m})$$

表 2-11　页岩原位抗剪断试验结果

编　号	tanϕ	ln(tanϕ)	编　号	tanϕ	ln(tanϕ)
1	0.88	−0.128	16	0.72	−0.329
2	0.83	−0.186	17	0.78	−0.248
3	0.94	−0.062	18	0.35	−1.050
4	0.74	−0.301	19	0.30	−1.204
5	0.97	−0.031	20	0.46	−0.777
6	0.92	−0.083	21	0.44	−0.821
7	0.90	−0.105	22	0.90	−0.105
8	0.71	−0.342	23	0.27	−1.309
9	0.74	−0.301	24	0.48	−0.734
10	0.65	−0.431	25	0.55	−0.598
11	0.76	−0.274	26	0.34	−1.079
12	0.72	−0.329	27	0.58	−0.545
13	0.77	−0.261	28	0.66	−0.416
14	0.74	−0.301	29	0.73	−0.315
15	0.68	−0.386	Σ		−13.05

地信网论坛
BBS.3S001.COM

例2-14 有29个页岩抗剪断试验求得的摩擦系数 $(\tan\phi)$，见表2-11，经检验分析其服从对数正态分布，试用最大似然法估计参数μ和σ。

解：首先求出对数正态分布下最大似然函数的一般形式：

$$L(x_i;\ \mu,\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x_i}\exp\left[-\frac{1}{2}\times\left(\frac{\ln x_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right]\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i^{-1}\right)\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\times\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2\right]$$

取对数，即

$$\ln L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\ \mu,\sigma)$$

$$=-n\ln\sqrt{2\pi}-n\ln\sigma-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\mu)^2$$

故

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})=0$$

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\sigma}=-\frac{n}{\hat{\sigma}}+\frac{1}{\hat{\sigma}^3}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})^2=0$$

因$\hat{\sigma}\neq0$，上两方程之解为

$$\hat{\mu}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\ln x_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\ln x_i-\hat{\mu})^2$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

将数据代入，得

$$\hat{\mu}=\frac{1}{29}[(-0.128)+(-0.186)+\cdots+(-0.315)]=0.45$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{29}[(-0.128-0.45)^2+(-0.186-0.45)^2+\cdots$$

$$+(-0.315-0.45)^2]=0.932$$

2.4.2 区间估计方法

在实际工作中，不仅需要求出这些参数的估计值，而且往往还需要知道这些估计值的精确性和可靠性。

假设$\hat{Z}$为未知参数Z的估计值，其误差小于某一正数ε的概率为$1-\alpha$，即

$$p(|\hat{Z}-Z|<\varepsilon)=1-\alpha \qquad (2\text{-}127)$$

就是说，随机变量区间为$(\hat{Z}-\varepsilon,\hat{Z}+\varepsilon)$包含参数$Z$真值的概率为$(1-\alpha)$，此乃置信概率，表示估计值的可靠性，而区间$(\hat{Z}-\varepsilon,\hat{Z}+\varepsilon)$叫做置信区间，它表示估计值的精确性，$\varepsilon$愈小，估值的精度愈高。区间$(\hat{Z}-\varepsilon,\ \hat{Z}+\varepsilon)$可以用$(\hat{Z}_l,\hat{Z}_u)$来代替，故式(2-127)可写成

$$p(\hat{Z}_l<Z<\hat{Z}_u)=1-\alpha \qquad (2\text{-}128)$$

该式意义是：当给定置信概率（可靠度）为$(1-\alpha)$时，根据样本观测值来确定未知参数Z的置信区间（取值范围）为$(\hat{Z}_l,\hat{Z}_u)$，这就称为参数的区间估计。

2.4.2.1 均值的区间估计

对于一个容量为n的随机样本$x_1,\ x_2,\cdots,x_n$，其均值为

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

由于每组样本观测值X_i不同，故样本均值$\overline{X}$也是一个随机

地信网论坛
BBS.3S001.COM

变量，其数学期望为

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)$$

因此有

$$E(\overline{X})=\frac{1}{n}n\mu=\mu \tag{2-129}$$

即样本均值的期望值等于总体均值，从而$\overline{X}$可认为是总体均值μ的无偏估计。

因为$\overline{X}$是随机变量，它也有方差

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\overline{X})&=\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\\&=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)^2-n\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i\right)^2\right]\\&=\frac{1}{n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\left[\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\overline{X}_i^2\right]\right\}\\&=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\left(\frac{1}{n^2}\right)n\overline{X}_i^2\right]\\&=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}_i^2\right)\right]\\&=\frac{1}{n}\sigma^2\end{aligned} \tag{2-130}$$

因此，根据式（2-129）及式（2-130），样本均值$\overline{X}$具有均值μ和标准差$\sigma/\sqrt{n}$。根据中心极限定理，当样本容量n足够大，样本均值$\overline{X}$近似为正态变量，因而，一般可假定$\overline{X}$服从正态分布$N(\mu,\ \sigma/\sqrt{n})$。经简单的代换，可知$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$为标准正态变量。若设$\varepsilon=\pm K_{\alpha/2}$，则$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$在给定区间$\pm K_{\alpha/2}$的概率为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$p\left(-K_{\alpha/2}<\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\leqslant K_{\alpha/2}\right)=1-\alpha \qquad (2\text{-}131)$$

整理后，得

$$p\left(\overline{X}-K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu\leqslant\overline{X}+K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=1-\alpha \qquad (2\text{-}132)$$

对于特定容量为n的样本，式（2-132）的意义是：被估计的区间包含未知量μ的置信度为（$1-\alpha$）。这个区间即均值μ的（$1-\alpha$）置信区间，并表示为

$$\langle\mu\rangle_{1-\alpha}=\left(\overline{X}-K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X}+K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \qquad (2\text{-}133)$$

可以看出，对于同一置信度（$1-\alpha$），降低σ或增大n，可使置信区间变窄，这就意味着，较小的总体方差和较大的样本容量可以提高估计的精度。

应当指出，这里所得的置信区间，只对标准差为已知的正态总体是确切的；而对非正态总体，式（2-133）的置信区间仅是近似的，其近似程度随着容量n的增加而提高。

如果样本量n很大（$n>30$），即可认为样本方差S^2为总体方差σ^2的很好估计值，可以用S^2替代σ^2，即假定总体方差σ^2为已知，则可依照下列步骤进行均值区间估计：

（1）选定置信度（$1-\alpha$）；

（2）由正态分布表确定$K_{\alpha/2}$值：

$$K_{\alpha/2}=\Phi^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

（3）根据样本观测值的均值$\overline{X}$和标准差σ：

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\sigma=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2\right]^{1/2}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

(2-133) 求出均值μ的 $(1-\alpha)$ 置信区间

$$\langle\mu\rangle_{1-\alpha}=\left(\overline{X}-K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X}+K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

例2-15 某石灰石露天矿，一组灰岩层面倾角统计数据，样本量$n=181$，由测量数据求得样本均值$\overline{X}=39.54°$，标准差$\sigma=1.56°$，试确定层面倾角的99%和95%置信区间。

解：（1）置信度$1-\alpha=0.99$或$\alpha=0.01$；

（2）查标准正态分布表得

$$K_{\alpha/2}=K_{0.005}=\Phi^{-1}(1-0.005)=2.58$$

（3）
$$K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=2.58\frac{1.56}{\sqrt{181}}=0.299$$

从而得μ的99%置信区间为$(39.54°-0.299°;\ 39.54°+0.299°)$或 $(39.24°;\ 39.84°)$。

同理可得95%的置信区间如下：

$$K_{0.025}=\Phi^{-1}(0.975)=1.96$$

$$K_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=0.227$$

因此，95%的置信区间为 $(39.31°;\ 39.77°)$。

如果层面倾角服从正态分布，则上述结果为确切的99%和95%置信区间；如果分布为非正态，则上述结果仅是近似的置信区间。

下面讨论样本容量$n<30$情况下均值的区间估计方法。如果已知总体服从正态分布，则可以证明，$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$服从于自由度$f=(n-1)$的$t$分布，其中$S$为样本标准差。$t$分布的密度函数为

$$f_T(t)=\frac{\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi f}\,\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{1}{2}(f+1)}\qquad -\infty<t<\infty$$

(2-134)

地信网论坛
BBS.35001.COM

f越大越接近标准正态分布，当$f>30$时，则t分布几乎就是标准正态分布。

由此可以算出随机变量$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$的概率

$$p\left(-t_{\alpha/2,n-1}<\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}\leqslant t_{\alpha/2,n-1}\right)=1-\alpha \quad (2\text{-}135)$$

式中$t_{\alpha/2,n-1}$的含义与式（2-133）中的$K_{\alpha/2}$相同，即$t_{\alpha/2,n-1}$表示自由度为$(n-1)$的t分布下累积概率$(1-\alpha/2)$处的百分位值，不同概率$p=(1-\alpha/2)$下的$t_{\alpha/2,n-1}$值从t分布的p百分位值表查得。

式（2-135）可改写成

$$\langle\mu\rangle_{1-\alpha}=\left[\overline{X}-t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}};\ \overline{X}+t_{\alpha/2,n-1}\frac{S}{\sqrt{n-1}}\right] \quad (2\text{-}136)$$

式中$\overline{X}$和S分别为样本均值和样本标准差，n为样本容量，$(n-1)$为自由度，$(1-\alpha)$为预定的置信度。实际上，这是在总体方差未知情况下进行均值区间估计的方法。

例2-16 用例2-11中峰值流量的数据：样本容量$n=25$，样本均值$\overline{X}=199.9\text{m}^3/\text{d}$，标准差$S_{n-1}=88.1\text{m}^3/\text{d}$，试求总体均值$\mu$的区间估计。

解：依题意$\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n-1}}$具有自由度$f=n-1=24$的$t$分布，如取$1-\alpha=99\%$，则$\alpha=0.01$，$\alpha/2=0.005$，查$t$分布的$p$百分位值表得

$$t_{\alpha/2,n-1}=t_{0.005,24}=2.797$$

故峰值流量均值的99%置信区间为

$$\langle\mu\rangle_{0.99}=\left(199.9-2.797\frac{88.1}{\sqrt{24}};\ 199.9+2.797\frac{88.1}{\sqrt{24}}\right)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$=(149.60;\ 250.20)\ (m^3/d)$

2.4.2.2 方差的区间估计

样本方差和样本均值一样，也是随机变量，也可以求计总体方差σ^2的区间估计。样本方差为

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

其数学期望为

$$E[S^2]=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}E\left\{\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2\right\}$$

$$=\frac{1}{n-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}E(X_i-\mu)^2-nE(\overline{X}-\mu)^2\right\}$$

因 $E(X_i-\mu)^2=\sigma^2$，$E(\overline{X}-\mu)^2=\frac{\sigma^2}{n}$

因此
$$E(S^2)=\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right)=\sigma^2 \qquad (2\text{-}137)$$

由此可知式（2-137）是σ^2的无偏估计，即$S^2=\sigma^2$。S^2的方差可用下式给出

$$\mathrm{Var}(S^2)=\frac{\sigma^4}{n}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4}-\frac{n-3}{n-1}\right) \qquad (2\text{-}138)$$

式中 $\mu_4=E(X-\mu)^4$为总体随机变量X的四阶中心距，可采用下式计算

$$\mu_4\simeq\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^4 \qquad (2\text{-}139)$$

可以看出，当n增大时，S^2的方差减小。

对于较大样本容量n，根据中心极限定理，可假定样本方差具有正态分布，其均值和方差如式（2-137）和（2-138），故有$(1-\alpha)$的置信区间：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$p\left(-K_{\alpha/2}<\frac{S^2-\sigma^2}{\sqrt{\mathrm{Var}(S^2)}}\leqslant K_{\alpha/2}\right)=1-\alpha \qquad (2\text{-}140)$$

因此有

$$\langle\sigma^2\rangle_{1-\alpha}=[S^2-K_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(S^2)};\ S^2+K_{\alpha/2}\sqrt{\mathrm{Var}(S^2)}] \qquad (2\text{-}141)$$

如总体为正态，则S^2的方差为

$$\mathrm{Var}(S^2)=\frac{2}{n-1}\sigma^4 \qquad (2\text{-}142)$$

于是，相应的置信区间变成

$$\langle\sigma^2\rangle_{1-\alpha}=\left(\frac{S^2}{1+K_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}};\ \frac{S^2}{1-K_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}}\right) \qquad (2\text{-}143)$$

例2-17 对于例2-15中层面倾角的数据算得$S^2=2.4336°$，$n=181$。设层面倾角为一正态变量。试求其方差σ^2的99%置信区间。

解：查标准正态分布表得

$$K_{\alpha/2}=K_{0.005}=\Phi^{-1}(1-0.005)=2.58$$

由式（2-143）得

$$\langle\sigma^2\rangle_{1-\alpha}=\left(\frac{2.4336}{1+2.58\sqrt{2/180}};\ \frac{2.4336}{1-2.58\sqrt{2/180}}\right)$$

$$=(1.91°;\ 3.34°)$$

一般，当$n>30$时，由式（2-141）和式（2-143）得到的近似结果可以满足实际问题的要求。当n很小时，由式（2-141）和式（2-143）求得的近似解，其精度可能很差，然而，如总体为正态，可得到确切的置信限，因由式（2-121）

$$(n-1)S^2=\sum_{i=1}^{n}[(X_i-\mu)-(\overline{X}-\mu)]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2-n(\overline{X}-\mu)^2$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

除以σ^2，得

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2-\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \qquad (2\text{-}144)$$

可以证明，式（2-144）中的$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$具有$\chi^2_{n-1}$分布。

自由度为f的χ^2_f分布的密度函数为

$$f_C(C)=\frac{1}{2^{f/2}\Gamma(f/2)}C^{(f/2-1)}e^{-C/2}\quad,\quad C\geqslant 0 \qquad (2\text{-}145)$$

可得σ^2的置信区间

$$p\left(\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}\leqslant\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\leqslant\chi^2_{n-1,\alpha/2}\right)=1-\alpha \qquad (2\text{-}146)$$

式中 $\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}$与$\chi^2_{n-1,\alpha/2}$的意义与式(2-133)中的$K_{\alpha/2}$和式（2-135）中$t_{n-1,\alpha/2}$相同，可由χ^2分布临界值表查得。

同样，式（2-146）可写成

$$p\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\leqslant\sigma^2\leqslant\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right)=1-\alpha \qquad (2\text{-}147)$$

方差σ^2的置信概率为$1-\alpha$的置信区间为

$$\langle\sigma^2\rangle_{1-\alpha}=\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}};\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}\right) \qquad (2\text{-}148)$$

根据χ^2分布图形可知，n越大，样本分布越接近正态分布。

例2-18 由例2-11中峰值流量的数据（m^3/d）求得$S^2=7761.61$，$n=2S$，试求σ^2的95%的置信区间。

解：自由度$f=n-1=2S-1=24$

$\alpha/2=0.025$，查表得$\chi^2_{24,0.025}=39.628$

$1-\alpha/2=0.975$，查表得$\chi^2_{24,0.975}=12.301$

于是由式（2-148）得

$$\langle\sigma^2\rangle_{0.95}=\left(\frac{(25-1)(7761.61)}{39.628};\ \frac{(25-1)(7761.61)}{12.301}\right)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$=(4700.68;\ 15143.37)$

2.5 随机变量分布的检验

一般都是采用经验分布确定概率分布的，即用样本的假设分布来代替总体的分布，具体作法是：首先对随机变量X的总体进行抽样试验，得样本x_1，x_2，…，x_n，再根据样本频率直方图的图形，选定某一理论分布来拟合它。在2.3节中，我们提供了确定随机变量分布的点估计法、直方图法和概率纸法，这些方法简单、直观，但拟合线绘制和参数确定的精度较低，且因人而异。因此，对于比较重要的边坡工程，或需进行精确评价的边坡工程，尚需采用数值的统计假设检验方法，对假设分布进行有效性检验。检验的步骤可归纳如下：

（1）建立假设　根据经验分布图形或频率直方图的形状，对总体作出某一理论分布的假设。

（2）给出统计量　选择某种适当的函数，作出检验标准即给出统计量。

（3）按观测数据进行统计量的计算。

（4）根据实际问题的要求，确定置信度α。

（5）作出判断　确定统计量的临界值，依此作出拒绝或不拒绝假设的判断。

假设检验的方法有多种，下面只介绍常用的Pearson的χ^2检验和Колмогоров-Смирнов的K-S检验。

2.5.1 χ^2检验

χ^2检验法是将变量k个值（或k个区间）的频数观测值m_1，m_2，…，m_k与假设的理论分布的相应频数值e_1，e_2，…，e_k进行比较。比较的标准是下列统计量：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i} \tag{2-149}$$

当$n\to\infty$时，统计量χ^2渐近服从自由度$f=k-1$的χ^2分布，则认为不能拒绝所假设的分布。自由度的确定：如果分布的参数

地信网论坛
BBS.3S001.COM

均非用数据估计的，则自由度$f=k-1$；每由数据估计一个参数，则减少一个自由度。

因此，如果得到

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}\leqslant C_{1-\alpha,f} \qquad (2\text{-}150)$$

则认为在置信度（$1-\alpha$）上假设的分布是一个不能拒绝的模型，否则，如计算值大于$C_{1-\alpha,f}$，则应予拒绝。其中$C_{1-\alpha,f}$叫做临界值，它为当累积概率为（$1-\alpha$）时适应χ^2分布的百分位值，可由χ^2分布的（$1-\alpha$）百分位值表上查得。

例2-19 对某边坡随机模拟抽取60个安全储备值样本，如表2-12所示。现对此边坡安全储备M_S的概率分布作统计检验。

（1）建立假设 假设安全储备M_S服从正态分布

$$H:F_{M_S}(x)\sim N(\mu,\sigma)$$

（2）选择适当的统计量 将表2-12所列的观测值进行适当分组，并计算频数分布，如表2-13。

根据样本观测值计算其均值和标准差的估计值：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{1}{60}[0.3270+0.4470+\cdots+1.2785+1.5406]$$

$$=\frac{1}{60}(46.3611)=0.7727$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})$$

$$=\frac{1}{59}[(0.3270-0.7727)^2+(0.4470-0.7727)^2+$$

$$+\cdots+(1.2785-0.7727)^2+(1.5406-0.7727)^2]$$

$$=2.818386/59=0.0478$$

$$\hat{\sigma}=\sqrt{0.0478}=0.2186$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

设应为$H:F_{M_S}(x)=N(\mu,\sigma)=N(0.7727,0.2186)$。

现将安全储备M_S值标准化为$N(0,1)$的正态变量，

$$t=\frac{M_S-0.7727}{0.2186}$$

则M_S落在某一区间的概率便可利用标准正态分布表查出。根据上述分组的区间，按下式计算M_S落在各区间的概率：

$$P_i=F_{M_S}(x_i)-F_{M_S}(x_{i-1})$$

式中 $F_{M_S}(x)$为$N(0.7727,0.2186)$，x_i为分组区间的端点。经标准化变换后，查$N(0,1)$分布表得各值如表2-13。

据此，建立统计量：

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$$

（3）按观测数据进行统计量计算：

表 2-12 安全储备值

编 号	安全储备	编 号	安全储备	编 号	安全储备	编 号	安全储备
1	0.3270	16	0.6892	31	0.7392	46	0.8665
2	0.4470	17	0.6984	32	0.7870	47	0.8180
3	0.5900	18	0.6330	33	0.7677	48	0.9231
4	0.5886	19	0.6006	34	0.7792	49	0.9044
5	0.5619	20	0.6215	35	0.7563	50	0.9647
6	0.5796	21	0.6089	36	0.7077	51	0.9150
7	0.5218	22	0.6752	37	0.7966	52	0.9432
8	0.5903	23	0.6845	38	0.8267	53	1.0139
9	0.5729	24	0.6598	39	0.8793	54	1.0083
10	0.5374	25	0.6091	40	0.8936	55	1.0491
11	0.5400	26	0.6828	41	0.8629	56	1.1410
12	0.5200	27	0.7894	42	0.8353	57	1.2105
13	0.5511	28	0.7374	43	0.8179	58	1.2828
14	0.6541	29	0.7456	44	0.8491	59	1.2785
15	0.6830	30	0.7513	45	0.8063	60	1.5406

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-13 拟合有效性的χ^2检验数据表（H：$F_{M_S}(x)=N(\mu,\sigma)$）

组别	区间	频数 m_i	累积频数 Σm_i	频率	累积频率	标准化区间
1	≤0.450	2	2	0.033	0.033	<−1.1762
2	0.450～0.650	16	18	0.267	0.300	−1.4762～−0.5613
3	0.650～0.850	25	43	0.417	0.717	−0.5613～0.3536
4	0.850～1.050	12	55	0.200	0.917	0.3536～1.2685
5	1.050～1.250	2	57	0.033	0.950	1.2685～2.1834
6	>1.250	3	60	0.050	1.000	>2.1834

组别	累积理论频率	理论频率 p_i	理论频数 $e_i=np_i$	$(m_i-e_i)^2$	$\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$
1	0.0694	0.0694	4.164	4.6829	1.1246
2	0.2877	0.2183	13.098	8.4216	0.4630
3	0.6368	0.3491	20.946	16.4349	0.7846
4	0.8980	0.2612	15.697	13.4836	0.8604
5	0.9854	0.0874	5.244	10.5235	2.0068
6	0.9854	0.0146	0.876	4.5114	5.1500

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$$

$$=1.1246+0.6430+0.7846+0.8604+2.0068+5.1500$$

$$=10.5694$$

（4）给出置信度　取$\alpha=5\%$。

由于原假设$N(\mu,\sigma)$中两个参数μ和σ均属未知，我们是用样本均值和标准差来估计它们的，所以自由度$f=k-1-2=6-3=3$。

（5）作出判断　根据第4步骤数据查χ^2表得临界值$C_{1-\alpha,f}=C_{95,3}=7.81$，而

$$\chi^2=10.5694>C_{95,3}=7.81$$

故认为以置信度5%判定原假设不真，应予拒绝，即此安全储备M_S不服从正态分布。因此，需重新假设分布，再进行检验。

现假设M_S服从对数正态分布，即$H:M_S'=\log M_S$，$F_{M_S'}$

地信网论坛
BBS.35001.COM

$\sim N(\mu,\sigma)$。将原始数据作对数变换后列于表2-14。

计算样本均值$\hat{\mu}$和标准差$\hat{\sigma}$：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=-7.493/60=-0.125$$

$$\hat{\sigma}=\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2\right\}^{1/2}=(0.0182)^{1/2}=0.1349$$

计算统计量列入表2-15。取$\alpha=5\%$，$f=k-1-2=6-3=3$，查χ^2表得临界值$C_{1-\alpha,f}=C_{95,3}=7.81$，而 $\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$

表 2-14 安全储备值的对数变换

№	x_i	$\lg x_i$	№	x_i	$\lg x_i$	№	x_i	$\lg x_i$
1	0.3270	−0.485	21	0.6039	−0.215	41	0.8629	−0.064
2	0.4470	−0.350	22	0.6752	−0.171	42	0.8353	−0.078
3	0.5900	−0.229	23	0.6845	−0.165	43	0.8179	−0.087
4	0.5886	−0.230	24	0.6598	−0.181	44	0.8491	−0.071
5	0.5619	−0.250	25	0.6094	−0.215	45	0.8063	−0.094
6	0.5796	−0.237	26	0.6828	−0.166	46	0.8665	−0.062
7	0.5218	−0.282	27	0.7894	−0.103	47	0.8100	−0.092
8	0.5903	−0.229	28	0.7374	−0.132	48	0.9231	−0.035
9	0.5729	−0.242	29	0.7456	−0.127	49	0.9044	−0.044
10	0.5374	−0.270	30	0.7513	−0.124	50	0.9647	−0.016
11	0.5400	−0.268	31	0.7302	−0.137	51	0.9150	−0.039
12	0.5200	−0.284	32	0.7870	−0.104	52	0.9432	−0.025
13	0.5511	−0.259	33	0.7677	−0.115	53	1.0130	0.006
14	0.6541	−0.184	34	0.7792	−0.108	54	1.0083	0.004
15	0.6880	−0.162	35	0.7563	−0.121	55	1.0491	0.021
16	0.6892	−0.162	36	0.7077	−0.150	56	1.1410	0.057
17	0.6984	−0.156	37	0.7966	−0.100	57	1.2105	0.083
18	0.6330	−0.199	38	0.8267	−0.083	58	1.2828	0.107
19	0.6000	−0.221	39	0.8793	−0.056	59	1.2785	0.107
20	0.6215	−0.207	40	0.8536	−0.069	60	1.5406	0.188

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=4.4967+1.0978+0.4363+0.0005+0.9595+0.0079$$
$$=4.9987$$

因4.9987<7.81，故认为$\lg x_i$服从正态分布$N(-0.125, 0.1349)$，从而无理由拒绝M_5服从对数正态分布的假设。

例2-20 二叠系灰岩（P_1y^{4+5}）层面间距实测数据，$n=132$，绘制成直方图如图2-25所示。由图可见大致服从指数分布，试在置信度$\alpha=5\%$下用χ^2法对层面间距的概率分布作统计检验。

表 2-15 拟合有效性的χ^2检验数据表（$H: F_{M_5}(x)=LN(\mu, \sigma)$）

组别	区间	频数 m_i	累积频数 $\sum m_i$	频率	累积频率	标准化区间
1	≤−0.300	2	2	0.033	0.033	≤−1.2973
2	−0.300～−0.200	15	17	0.253	0.283	−1.2973～−0.5560
3	−0.200～−0.100	20	37	0.333	0.616	−0.5560～0.1853
4	−0.100～0.000	15	52	0.250	0.866	0.1853～0.9266
5	0.000～0.100	5	57	0.084	0.950	0.9266～1.6679
6	>1.000	3	60	0.050	1.000	>1.6679

组别	累积理论频率	理论频率 p_i	理论频数 $e_i=np_i$	$(m_i-e_i)^2$	$\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$
1	0.0968	0.0968	5.808	14.5009	2.4967
2	0.2877	0.1909	11.454	12.5741	1.0978
3	0.5753	0.2876	17.256	7.5295	0.4363
4	0.8238	0.2485	14.910	0.0081	0.0005
5	0.9525	0.1287	7.722	7.4093	0.9595
6	0.9525	0.0475	2.850	0.0225	0.0079

（1）建立假设 假设层面间距服从指数分布，即

$$H: F(x)=1-e^{-\lambda(x-r)}$$

（2）选择适当的统计量 将层面间距数据进行适当分组，计算频数分布，如表2-16所示。

计算分布参数λ：已知组数$k=11$，位置参数$r=80\text{cm}$，x_i为组中值，m_i为实测频数。平均层面间距为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

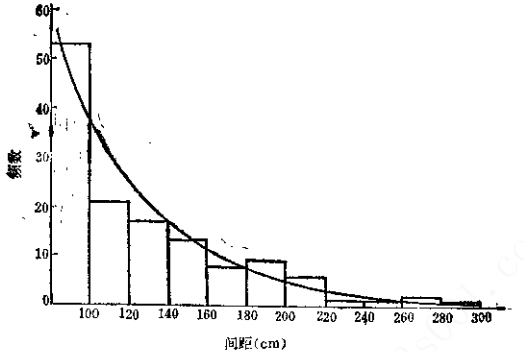


图 2-25 层面间距直方图

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_i m_i$$

$$=\frac{1}{132}(90\times 53+110\times 21+\cdots+270\times 2+290\times 1)$$

$$=127.9\text{cm}$$

$$\lambda=\frac{1}{\overline{x}-r}=\frac{1}{127.9-80}=0.0209$$

于是原假设应为

$$F(x)=1-e^{-0.0209(x_i-80)}$$

理论频数为

$$e_i=n\cdot\lambda e^{-\lambda(x_i-r)}\Delta x$$

式中 n 为样本量，$n=132$；Δx为组间距，$\Delta x=20$cm。故有

$$e_i=132\times 20\times e^{-0.0209(x_i-80)}$$

$$=2640e^{-0.0209(x_i-80)}$$

计算结果见表2-16。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-16 层面间距假设分布检验表

组号	区 间	组中值 x_i	实测频数 m_i	理论频数 e_i	m_i-e_i	$(m_i-e_i)^2$	$\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$
1	80～100	90	53	41.77	8.23	67.73	1.513
2	100～120	110	21	29.47	−8.47	71.74	2.434
3	120～140	130	17	19.40	−2.40	5.76	0.297
4	140～160	150	13	12.78	0.22	0.05	0.004
5	160～180	170	8	8.41	−0.41	0.17	0.020
6	180～200	190	9	5.54	3.46	11.97	2.161
7	200～220	210	6	3.65	2.35	5.52	1.512
8	220～240	230	1	2.40			
9	240～260	250	1	1.58	−1.98	3.92	0.985
10	260～280	270	2	1.04			
11	280～300	290	1	0.68	1.28	1.64	0.953

（3）计算统计量

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$$

$$=1.513+2.434+\cdots+0.985+0.953$$

$$=9.879$$

这里应当说明的是：为了更有效地检验，χ^2法要求理论频数不能太少，为此将原划分的第8、9组合并成一组，第10、11组合并成一组，故成9组，下面应以$k=9$计算自由度。

（4）给定置信度$1-\alpha=1-0.05=0.95$，自由度$f=k-1-1=9-2=7$。查χ^2表得

$$C_{1-\alpha,f}=C_{0.95,7}=14.067$$

（5）判断 因$\chi^2=9.879<C_{0.95,7}=14.067$，故在置信度$1-\alpha=95\%$下，不能拒绝原假设，即不能以置信度$1-\alpha=95\%$，否定层面间距服从$\lambda=0.0209$、$r=80$的负指数分布。

2.5.2 K-S检验

K-S检验法的基本思想是：将样本观测值的累积频率（$F_n(x)$）与假设的理论概率分布（$F_0(x)$）相比较来建立统计量。

设样本容量为n，按经验分布函数的建立方法，采用式(2-86)

地信网论坛
BBS.3S001.COM

率：

$$F_n(x)=\begin{cases}0, & x<x_1\\ \dfrac{i}{n}, & x_i\leqslant x<x_{i+1}\\ 1, & x\geqslant x_n\end{cases}$$

式中x_1，x_2，…，x_n为排列后的样本数据。$F_n(x)$为阶梯形曲线，如图2-26所示。

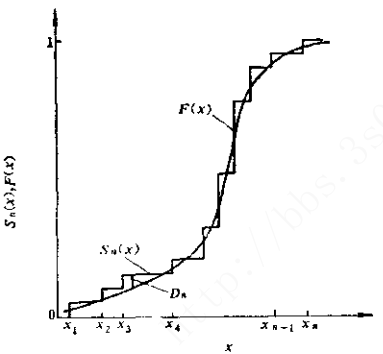


图 2-26 实测累积频率分布与理论分布曲线

在随机变量X的全部范围内，$F_X(x)$与$F_n(x)$之间的最大差异为

$$D_n=\max_{-\infty<x<\infty}|F_X(x)-F_n(x)|<D_n^{\alpha} \qquad (2\text{-}151)$$

则可认为在显著水平α上拟采用的分布是不能拒绝的，否则应予拒绝。式中D_n是一个随机变量，其分布依赖于n，D_n^{α}为显著水平α上的临界值，见表2-17。

K-S检验不用数据分组，因此使用方便，且不损失数据中的信息。对于小样本的可靠数据，也是一种有效的方法。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-17 D_n^{α}临界值表

n	α			
	0.20	0.10	0.05	0.01
5	0.45	0.51	0.56	0.67
10	0.32	0.37	0.41	0.49
15	0.27	0.30	0.34	0.40
20	0.23	0.26	0.29	0.36
25	0.21	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.20	0.23	0.27
40	0.17	0.19	0.21	0.25
45	0.16	0.18	0.20	0.24
50	0.15	0.17	0.19	0.23
>50	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

例2-21 我国某尾矿库，1970年至1989年计有20年坝上游年水位峰值资料，详见表2-18。从直方图图形直观看，可用正态分布和对数正态分布拟合，试在显著水平$\alpha=0.05$下用K-S法检验两种分布的拟合优良性。

首先检验假设 $H: F(x)=N(\mu,\sigma)$

（1）将观测值x_i由小到大按序排列（表2-18）；

（2）计算均值$\hat{\mu}$和标准差$\hat{\sigma}$：

$$\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$=\frac{1}{20}(78.46+78.73+\cdots+93.08+96.68)$$

$$=86.34$$

$$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\hat{\mu})^2$$

$$=\frac{1}{19}[(78.46-86.34)^2+(78.73-86.34)^2+\cdots$$

$$+(96.68-86.34)^2]=25.9800$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$\sigma = 5.0971$

表 2-18 K-S检验数据表 (H_0: $F(x) = N(\mu, \sigma)$)

序号	水位 (m) x_i	频数 m_i	累积频数 Σm_i	统计分布 $F_n(x)$	$t_i = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$	理论分布 $F_x(x_i) = \Phi(t_i)$	$D_n(x_i) = \lvert F_x(x_i) - F_n(x_i) \rvert$
1	78.46	1	1	0.05	−1.5460	0.0606	0.0106
2	78.73	1	2	0.10	−1.4931	0.0681	0.0319
3	79.54	1	3	0.15	−1.3311	0.0918	0.0582
4	80.13	1	4	0.20	−1.2183	0.1113	0.0887
5	82.58	1	5	0.25	−0.7377	0.2297	0.0203
6	83.65	1	6	0.30	−0.5278	0.2981	0.0019
7	83.97	1	7	0.35	−0.4650	0.3192	0.0308
8	84.06	1	8	0.40	−0.4473	0.3264	0.0736
9	84.10	1	9	0.45	−0.4395	0.3300	0.1200
10	86.28	1	10	0.50	−0.0118	0.4960	0.0040
11	86.85	1	11	0.55	0.1001	0.5398	0.0102
12	87.97	1	12	0.60	0.3198	0.6255	0.0255
13	88.40	1	13	0.65	0.4042	0.6554	0.0054
14	89.40	1	14	0.70	0.6180	0.7324	0.0324
15	89.70	2	16	0.80	0.6592	0.7454	0.0546
16	90.73	1	17	0.85	0.8613	0.8051	0.0449
17	92.69	1	18	0.90	1.2458	0.8944	0.0056
18	93.08	1	19	0.95	1.3223	0.9066	0.0434
19	96.68	1	20	1.00	2.0286	0.9788	0.0212

（3）统计每个观测值相同数值的频数m_i和累积频数Σm_i；计算统计概率分布函数$F_n(x) = \Sigma m_i / n$；

（4）将变量换算为标准正态变量 $t = \frac{x_i - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$，查标准正态分布表或计算求得理论分布函数$F_x(x_i) = \Phi(t_i)$；

（5）计算观测值的统计累积概率分布函数值$S_n(x_i)$与正态理论概率分布函数值$F_x(x_i)$之差的绝对值，即$D_n(x_i) = |F_x(x_i) - F_n(x_i)|$；

（6）找出$\max D_n = 0.1200$；由$n = 20$，$\alpha = 0.05$，查表2-17

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-19 K-S检验数据表（H：$F(x)=LN(\mu,\sigma)$）

序号	水位 $\lg x_i$	频数 m_i	累积频数 $\sum m_i$	统计分布 $F_n(x)$	$t_i=\frac{\lg x_i-\hat{\mu}}{\hat{\sigma}}$	$F_0(x_i)=\Phi(t)$	$D_n(x_i)$
1	1.8946	1	1	0.05	−1.6166	0.0526	0.0026
2	1.8961	1	2	0.10	−1.5573	0.0594	0.0406
3	1.9066	1	3	0.15	−1.1794	0.1808	0.0692
4	1.9088	1	4	0.20	−1.2530	0.1057	0.0943
5	1.9169	1	5	0.25	−0.7352	0.2297	0.0203
6	1.9225	1	6	0.30	−0.5138	0.3059	0.0059
7	1.9241	1	7	0.35	−0.4566	0.3264	0.0236
8	1.9246	1	8	0.40	−0.4378	0.3336	0.0664
9	1.9248	1	9	0.45	−0.4229	0.3372	0.1128
10	1.9259	1	10	0.50	−0.0158	0.5080	0.0080
11	1.9388	1	11	0.55	0.1374	0.5517	0.0017
12	1.9443	1	12	0.60	0.3478	0.6368	0.0368
13	1.9465	1	13	0.65	0.4348	0.6654	0.0154
14	1.9518	1	14	0.70	0.6443	0.7389	0.0389
15	1.9528	2	16	0.80	0.6838	0.7517	0.0483
16	1.9578	1	17	0.85	0.8814	0.8166	0.0334
17	1.9670	1	18	0.90	1.2451	0.8944	0.0056
18	1.9689	1	19	0.95	1.3202	0.9066	0.0434
19	1.9853	1	20	1.00	1.9684	0.9756	0.0244

注：样本均值和标准差估计值分别为 $\hat{\mu}=1.9355$，$\hat{\sigma}=0.0253$。

得 $D_{20,0.05}=0.29$。因$0.12<0.29$，故可接受坝上游年水位峰值变化服从正态分布$N(86.34,\ 5.0971)$。

同理对原数据进行对数正态分布假设检验，K-S检验数据表见表2-19，求得$\max D_n=0.1128$，可见，两种分布模式的假设均属有效，但因$0.1128<0.1200$，故对数正态分布较之正态分布更好。

例2-22 同例2-11，峰值流量（m^3/d）统计数据（x_i）见表2-20。试根据K-S检验来判断峰值流量为极值Ⅰ型分布的假设在置信度$\alpha=5\%$内是否正确。

（1）将观测值x_i由小到大重新排序（表2-20），并计算出

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 2-13 K-S检验数据表 ($H: F(x)=G(u,\alpha)$)

i	x_i	m_i	Σm_i	$F_n(x)$	$F_0(x)$	$D_n(x)$
1	79.8	1	1	0.02	0.0408	0.0208
2	101.2	1	2	0.06	0.0958	0.0358
3	111.4	1	3	0.10	0.1322	0.0322
4	118.9	1	4	0.14	0.1629	0.0171
5	126.7	1	5	0.18	0.1978	0.0178
6	138.1	2	7	0.26	0.2532	0.0068
7	143.1	1	8	0.30	0.2787	0.0213
8	148.2	1	9	0.34	0.3053	0.0347
9	160.4	2	11	0.42	0.3700	0.0500
10	198.0	4	15	0.58	0.5619	0.0181
11	202.0	1	16	0.62	0.5805	0.0395
12	204.0	1	17	0.66	0.5896	0.0704
13	214.2	1	18	0.70	0.6340	0.0660
14	218.3	1	19	0.74	0.6509	0.0891
15	222.5	1	20	0.78	0.6676	0.1124
16	236.9	1	21	0.82	0.7204	0.0996
17	314.4	1	22	0.86	0.8989	0.0389
18	352.9	1	23	0.90	0.9408	0.0408
19	374.4	1	24	0.94	0.9563	0.0163
20	436.7	1	25	0.98	0.9841	0.0041

均值$\hat{\mu}=199.9\text{m}^3/\text{d}$，标准差$\hat{\sigma}=88.1\text{m}^3/\text{d}$；

（2）统计频数m_i和累积频数Σm_i。采用式（2-103）中位秩法$F_n(x_i)=(\Sigma m_i-0.5)/n$计算统计概率分布函数；

（3）极值Ⅰ型分布函数

$$F(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-u)]\}$$

式中参数α和u可根据上述均值$\hat{\mu}$和标准差$\hat{\sigma}$估计如下：

$$\alpha=\frac{\pi}{\sqrt{6}\hat{\sigma}}=\frac{\pi}{\sqrt{6}(88.1)}=\frac{1.28}{88.1}=0.0145$$

$$u=\hat{\mu}-\frac{0.5772}{\alpha}=159.98\approx160.0$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

假设H：

$$F(x)=\exp\{-\exp[-0.0145(x-160)]\}$$

（4）计算D_n值，如表2-20所示，其中

$$\max D_n(x)=0.1124$$

（5）判断：显著水平5%，样本量$n=25$，查表2-17得$D_{25,0.05}=0.27$，因$0.1124<0.27$，故无理由拒绝年峰值流量服从所假设的极值Ⅰ型分布。

质级地质论坛：http://bbs.3s001.com/

地信网论坛
BBS.3S001.COM

3 蒙特卡洛模拟法

3.1 概 述

近年来，模拟方法在广度和深度上迅猛发展，成为一种非常犀利的科学工具，已从自然科学的特殊方法上升为一般方法，进而发展为应用于自然科学、工程技术和国民经济各个领域的最普遍的方法之一。

蒙特卡洛(Monte Carlo)法又称随机模拟法或统计试验法，是一种依据统计抽样理论，利用电子计算机研究随机变量的数值计算方法。在目前可靠度计算中，是相对精确的方法。它源于第二次世界大战期间，Von Neuman和Ulam在对裂变物质的中子随机扩散进行直接模拟中，以世界闻名的赌城蒙特卡洛作为该项研究的秘密称呼而得名。显见，用赌城名比喻随机模拟，既风趣又贴切，所以很快就得到人们的普遍接受。

在边坡工程系统辨识、系统分析和系统设计中，有些基本条件和特性是假定已知的，如边坡岩体结构、强度参数、地下水压分布、可能破坏模式等，但并不确知。还有些因素，如强度调动过程、软化应变作用、空间变量间相互影响下系统状态和特性等，目前尚为未知。特别是大型高深露天矿的设计边坡，因不能通过完全揭露而实现直接识别，所以，从很大程度上讲，大部分边坡工程系统是一个灰箱问题。而且，由于边坡工程浩大，不适宜也不可能在实际作业过程中，以高昂代价对边坡形成、破坏过程进行直接的实验研究。面对这样理论上和实验上的双重困难，采用蒙特卡洛模拟方法，通过构造模型和进行模拟试验，把复杂的空间条件和时间过程简化成集总参数，进而求得安全系数或安全储备的概率分布及分布参数的特征值均值、标准差、破坏概率

地信网论坛
BBS.3S001.COM
作为边坡工程问题的近似解，这是极为适宜的。

在边坡工程中，坝肩边坡、路堑边坡、渠道边坡等一般是一次性完成的。而露天矿边坡、排土场边坡、尾矿坝边坡、电厂的灰场边坡，是在连续开采和堆置过程中逐步形成的，从时间意义上讲，它们是一个连续系统，但从工程角度说，我们并不关心边坡系统变化的全过程。因而，假定边坡破坏的发生和安全状态的变化是在有限个离散时间点上(即相应每个采矿延深阶段或一定边坡高上)瞬间完成的。这样，只需模拟在每个离散时间点上、给定条件下边坡安全状态参数和破坏事件的发生。应当指出，在边坡系统模拟中，破坏事件的发生和系统安全状态变量几乎总都是随机的，因此，必须把它们作为随机问题加以考虑。

建立随机模型是运用模拟方法的前题。对一个边坡工程形成过程进行分析、设计和控制，要掌握过程的属性、特征和状态，应建立相应的数学模型。数学模型是用数学方程来描述系统性能的模型。模拟模型应具有以下的功能：

（1）系统评价功能：根据极限平衡原理即安全系数$F_s \leqslant 1.0$或安全储备$M_s \leqslant 0$便开始破坏的准则，对已形成边坡或拟建边坡的稳定性和可靠性进行系统评价；

（2）方案比较功能：对于同一边坡工程不同设计方案进行分析、比较，从中选择较优的方案；

（3）系统预测功能：预测边坡系统在既定条件下现在和未来的工作状态、破坏概率、破坏危害等；

（4）因素判断功能：通过灵敏度分析，在众多的影响因素中，判定对系统状态影响最大的因素以及它们的影响程度；

（5）系统优化功能：确定在何种状态变量组合下，能够获得最佳的系统响应。

当然，勿需在一个模型中具有如此完备的功能，但必须根据具体工程目的，突出一二项功能。

蒙特卡洛模拟法的基本思想是，若已知状态变量的概率分布，根据边坡的极限状态条件$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)=0$，利用

地信网论坛
BBS.35001.COM
产生符合状态变量概率分布的一组随机数x_1，x_2，…，x_n，以之代入状态函数$g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$计算得状态函数的一个随机数。如此用同样的方法产生N个状态函数的随机数。如果在N个状态函数的随机数中有M个小于或等于1(以安全系数表示边坡状态)或小于或等于零(以安全储备表示边坡状态)，当N足够大时，根据大数定律，此时的频率已近似于概率，因而可得边坡的破坏概率

$$p_f = p\{g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \leqslant 0\} = \frac{M}{N} \qquad (3\text{-}1)$$

如有必要，也可由已得的N个$g(x)$值来求均值μ_g和标准差σ_g，从而得到可靠指标β。

蒙特卡洛模拟法的主要优点是：

（1）对于实际边坡工程系统，特别是露天矿边坡系统，由于各种因素复杂且多变，很难用一组数学方程来描述，即使在一些假设条件下建立了系统的数学模型，也难以获得解析解。另一方面，也绝不可能在闭坑之前，取得有关边坡稳定状态的全部实际变化资料。而采用蒙特卡洛模拟法，则可确定系统性能，估计系统可靠度，预测出任一指定开采时期、指定边坡地段、指定条件下边坡的稳定状态，进行系统风险分析，使复杂的时空相互作用问题得以处理。

（2）用蒙特卡洛法评价边坡可靠度，受问题条件限制的影响较小，其收敛性与极限状态方程的非线性、变量分布的非正态性无关，适应性强。就可靠度计算而言，若随机变量的变异系数大于30%，可靠指标法的计算结果往往远离精确解。然而，蒙特卡洛法却不受这个约束。而且，因为蒙特卡洛法的计算是通过大量而简单的重复抽样实现的，故方法和程序都很简单。

（3）因为蒙特卡洛法的方法误差(见式3-14)只与标准差和样本容量N有关，而与样本元素所在空间无关，则它的收敛速度与问题维数无关；同样，蒙特卡洛法的收敛是概率意义下的收敛，可指出其误差以接近1的概率不超过某个界限，亦与问题维

地信网论坛
BBS.35001.COM

数无关。

蒙特卡洛模拟法的主要缺点是：

（1）蒙特卡洛法只是一种数值计算方法，就是说，它只能给出边坡在特定条件和特定设计参数下的特解，而给不出通解。它和一般的数值方法不同，它不是孤立地纯数学地去求解各变量的数值关系，而是通过建立数学模型，进行模拟试验，然后从试验过程中“测定”出各个变量的数值。因此，它是一种通过试验求得数值解的方法，应当把它看作一系列的试验过程。

（2）蒙特卡洛法似乎很容易，但它可能使变量间和假设间的主要概率关系模糊不清。为了简便，把空间变量简化成集总参数，忽略了相互关系。

（3）收敛速度慢，因此花费机时数较大。

由于计算机和计算技术的迅速发展，蒙特卡洛法得到了广泛的发展和应用，它为大型复杂边坡工程的可靠性分析提供了一种有效的解决办法。

3.2 蒙特卡洛法的一般形式及模拟步骤

3.2.1 一般形式

对于边坡工程，根据边坡岩体结构、破坏机理和受力状况，可以建立如下状态函数：

$$Z=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_m) \tag{3-2}$$

式中 X_1，X_2，…，X_m为m个具有一定分布、统计独立的随机变量，假定它们的统计值为已知。如果我们把状态函数Z定义为安全系数，且随机地从诸随机变量X_i的全体中抽取同分布变量x'_1，x'_2，…，x'_m，则可由式(3-2)求得安全系数的一个随机样本Z'。如此重复，直至达到预期精度的充分次数N，便可得到N个相对独立的安全系数样本观测值Z_1，Z_2，…，Z_n。安全系数所表征的极限状态$Z=1$，故可构造一个随机变量Y：

$$Y=\begin{cases}1, & \text{当}Z\leqslant 1\\ 0, & \text{当}Z>1\end{cases} \tag{3-3}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

设在N次随机抽样的试验中，出现$Y=1$即$Z\leqslant 1$的次数为M，则边坡破坏概率为：

$$p_f=\frac{M}{N}$$

此式即为直接蒙特卡洛法计算破坏概率的公式。

显然，当N足够大时，由安全系数的统计样本Z_1，Z_2，…，Z_n，可以比较精确地近似安全系数的分布函数$G(z)$，并估计其分布参数。其均值和标准差分别为：

$$\mu_z=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i \tag{3-4}$$

$$\sigma_z=\left[\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i-\mu_z)^2\right]^{1/2} \tag{3-5}$$

进而可以根据$G(z)$拟合的理论分布，通过积分方法求得破坏概率。

在标准正态空间，也可根据μ_z和σ_z求得可靠指标：

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z} \tag{3-6}$$

破坏概率则为：

$$p_f=1-\Phi(\beta) \tag{3-7}$$

式中$\Phi(\beta)$为标准正态分布函数。

3.2.2 模拟步骤

如前所述，蒙特卡洛模拟法在模拟模型中不包含时间因素，就是模拟露天矿开采过程中的边坡系统状态，它也仅代表系统在指定的形成速度下、在相对时间的有限个点的状态，并假设系统状态的变化是在该时间点上瞬间完成的，因此是离散事件系统的静态模拟。这里的事件是指一次独立的试验结果，即一个表示稳定状态的安全系数或安全储备值。在此模拟中，我们不关心在每个离散时刻点上系统状态的变化过程，要模拟的只是对应于离散的时间点上出现的事件和系统的状态参数。因为事件的出现以及系统状态变量都是随机的，故将它们作为随机问题来处理。具体的模拟过程如图3-1所示。现简要说明如下：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（1）确定边坡可靠性分析剖面，选择适合于所分析边坡岩体工程地质力学模型的破坏模式，这是蒙特卡洛模拟的基础，只有正确的边坡工程剖面和破坏模式判断，才能保证模拟结果的准确。因此，与其他所有边坡稳定性分析方法一样，均应详细分析边坡岩体结构、边坡几何形状、工程环境与破坏机理，提供典型的边坡可靠性分析工程地质剖面。

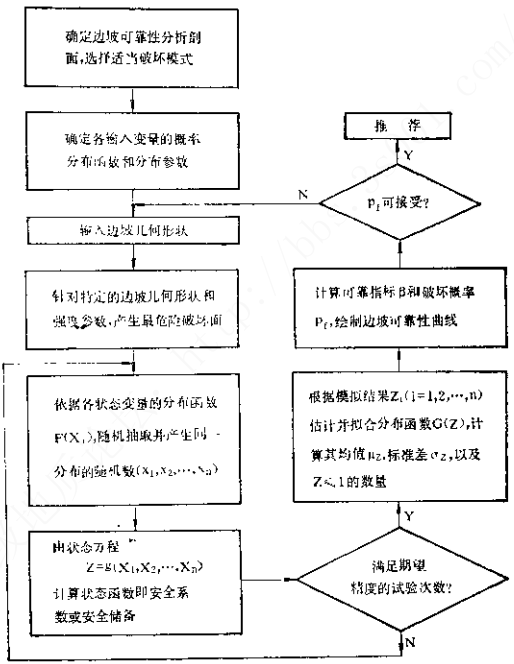


图 3-1 蒙特卡洛模拟过程

（2）确定影响边坡稳定性的各个输入变量的概率分布和分

地信网论坛
BBS.35001.COM

布参数，主要包括构成边坡岩体与有关不连续面的产状要素、强度指标、容重、震动加速度以及水文地质参数等。当然，输入数据中也包括确定型参数。这些变量的数目和类型需根据工程岩体特点、工程要求和分析方法具体确定。

（3）输入边坡的几何形状，使之投绘在所分析的工程地质剖面上。对于已形成边坡的可靠性分析，则是实际的边坡形状；对于设计边坡，则是一组边坡几何形状，以供分析和比较。

（4）在分析剖面上，根据已判定的破坏模式，确定最危险的潜在破坏面。或者指定若干个可能破坏面采用试算方法，或者采用某种优化求解方法，寻找到抗剪阻力最小的路径、或安全系数最小、或破坏概率最大的破坏面作为最危险破坏面。这里隐含假定：模拟过程中的破坏面是确定的。应当说明，破坏面的形成具有一定的随机性。然而，据作者的多年的实际工程经验，根据边坡岩体内不连续面的几何数据(产状、间距、长度、搭接长度等)随机模拟产生破坏面，不仅有的原始数据难以获取，而且有的模拟出来的破坏面形态也令工程概念难以接受。而通过系统分析取其工程最弱者作为确定型问题处理，这不仅使问题简便，也符合工程的安全意义，相当于既计算了安全系数，又评价了安全系数的可靠度。

（5）根据步骤（2）所确定的诸随机变量$\{X_1, X_2, \cdots X_m\}$的分布类型和参数，随机抽样取得同分布的一组随机数$x_1, x_2, \cdots, x_m$。

（6）由所建立的状态方程(式(3-2))计算出一个函数值，或安全系数或安全储备，即取得一个随机事件样本。

（7）重复步骤(5)和(6)，直至达到满足预期精度要求的试验次数N。如此对某一特定的边坡分析剖面、特定边坡几何形状、特定作用条件下，取得N个随机样本。

（8）根据N个安全系数值或安全储备值，拟合并检验其概率分布$G(Z)$，估计其均值μ_z和标准差σ_z，统计安全系数$Z\leqslant 1$（安全储备$Z\leqslant 0$）的样本数。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（9）计算可靠指标β和破坏概率p_f。对于重要的大型露天矿边坡设计，还需按不同边坡高度，分段计算破坏概率，最后绘制出可靠度随边坡高度的变化曲线。

（10）判别破坏概率p_f计算结果是否满足允许值，即风险水平能否被接受。如果满足预计要求，则推荐此边坡设计方案；如果不满足预计要求，则返至步骤（3），修改边坡几何形状，或采取其他提高可靠度措施，重新进行分析。

3.2.3 误差估计与模拟次数

由于随机抽样试验是概率为p的伯努利试验，所以估值p_f的期望值为：

$$E(p_f)=E\left(\frac{M}{N}\right)=p \tag{3-8}$$

p_f的方差为：

$$Var(p_f)=\frac{Var(M)}{N}=\frac{p(1-p)}{N} \tag{3-9}$$

p_f的标准差为：

$$\sigma_{p_f}=\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \tag{3-10}$$

实际计算中，可用计算的p_f作为p的估值，则：

$$\hat{\sigma}_{p_f}=\sqrt{\frac{p_f(1-P_f)}{N}} \tag{3-11}$$

从式(3-10)可见，随机抽样计算结果的标准差σ_{p_f}与$\sqrt{N}$成反比，若需将其标准差降低一个数量级，则试验次数必须增大百倍。

现确定随机抽样需要的试验次数。按中心极限定理，当N充分大时，有

$$\frac{p_f-p}{\sigma_{p_f}}\sim N(0,1) \tag{3-12}$$

因此，显著水平为α的置信区间为

$$p\left\{\left|\frac{p_f-p}{\sigma_{p_f}}\right|\leqslant K_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha \tag{3-13}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

式中 $K_{\alpha/2}$ 为$N(0,1)$的$\alpha/2$百分位值。将式(3-13)改写为

$$\varepsilon = |P_p - p| \leqslant K_{\alpha/2}\sigma_{P_f} = K_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \quad (3\text{-}14)$$

由公式$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{K_{\alpha/2}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1-\frac{\alpha}{2}$，可得$K_{\alpha/2}$与 α 值的数值关系计算结果，如表3-1所示。

表 3-1 $K_{\alpha/2}$ 与α关系

α	$K_{\alpha/2}$
0.01	2.5758
0.02	2.3263
0.05	1.9600

当取$K_{\alpha/2}=1.96$，这时，则可以$1-\alpha=95\%$的置信度相信$p_f \pm 1.96\sigma_{p_f}$的区间会包围p值，而估值p_f的绝对误差为

$$|\varepsilon| = |p_f - p| \leqslant 1.96\,\sigma_{P_f} = 1.96\sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{N}} \quad (3\text{-}15)$$

相对误差为

$$\varepsilon = \frac{|p_f - p|}{p} \leqslant \frac{1.96\sigma_{p_f}}{p} = 1.96\sqrt{\frac{1-p_f}{P_f N}} \quad (3\text{-}16)$$

由式(3-14)可得需试验次数：

$$N = \frac{K_{\alpha/2}^2\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{K_{\alpha/2}^2 p(1-p)}{\varepsilon^2} \quad (3\text{-}17)$$

可见，当p较小时，所需试验次数N较大，而且，随着试验次数N的增大，方法误差ε在减小，逐渐趋于收敛。

用式(3-17)计算N时，需要已知方差σ^2，虽然可以用样本方差S^2代替总体方差σ^2，但是，确定S^2时也需用到N，而N本身尚待确定。对此，可以采用试算法。如果给定ε_0的要求值，同时给定置信度$(1-\alpha)$，则可按下列步骤计算：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（1）设置一初始$n=n_0$(一般取$n_0\geqslant 10$)；

（2）计算$\overline{x}(n)$和$S^2(n)$；

（3）根据要求的置信度$(1-\alpha)$、S^2和n。可确定相应的误差ε；

表 3-2 模拟次数N与误差ε关系

模拟次数 N	破坏概率 p_f	绝对误差 $\lvert\varepsilon\rvert$	相对误差 ε
100	9.35×10^{-4}	6.112695×10^{-3}	6.537641
200	8.64×10^{-4}	4.155126×10^{-3}	4.809173
400	8.64×10^{-4}	2.575964×10^{-3}	3.879464
600	8.17×10^{-4}	2.027510×10^{-3}	3.286077
800	5.57×10^{-4}	1.668367×10^{-3}	2.995273
900	4.67×10^{-4}	1.440342×10^{-3}	3.084215
1000	4.42×10^{-4}	1.329368×10^{-3}	3.007619
1100	4.34×10^{-4}	1.255984×10^{-3}	2.893973
1200	4.76×10^{-4}	1.258669×10^{-3}	2.647042
1300	4.84×10^{-4}	1.220045×10^{-3}	2.520754
1400	4.04×10^{-4}	1.074180×10^{-3}	2.658812
1500	3.83×10^{-4}	1.010417×10^{-3}	2.638164
1600	3.90×10^{-4}	9.872282×10^{-4}	2.531355
1800	3.50×10^{-4}	8.817628×10^{-4}	2.519322
2000	3.44×10^{-4}	8.287123×10^{-4}	2.412554
2500	3.13×10^{-4}	7.075615×10^{-4}	2.260580
3000	3.13×10^{-4}	6.459123×10^{-4}	2.063618
3500	2.90×10^{-4}	5.756149×10^{-4}	1.984879
4000	2.75×10^{-4}	5.243323×10^{-4}	1.906663
5000	2.80×10^{-4}	4.732201×10^{-4}	1.690072
6000	2.91×10^{-4}	4.403902×10^{-4}	1.513368
7000	2.91×10^{-4}	4.077221×10^{-4}	1.401107
8000	2.80×10^{-4}	3.741134×10^{-4}	1.336119
9000	2.65×10^{-4}	3.431422×10^{-4}	1.294876
10000	2.80×10^{-4}	3.346172×10^{-4}	1.195661
12000	2.60×10^{-4}	2.943538×10^{-4}	1.13213
14000	2.65×10^{-4}	2.751259×10^{-4}	1.038211
16000	2.60×10^{-4}	2.549178×10^{-4}	0.980453

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（4）若$\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$，则结束；否则重复步骤(2)～(4)。

作为实际工程应用，只要N充分大，则可认为方差σ^2或p为已知，即可直接用式(3-17)计算N，足以满足工程精度要求。

例3-1 某大型露天铁矿总体边坡，边坡岩体为斜长角闪片岩和石英片岩，顺坡层状结构，破坏模式为上部顺层滑动、下部剪断岩体、采用Sarma方法进行安全系数计算，随机模拟结果和误差估计见表3-2和图3-2。

从图3-2可以看出，曲线变化大体可分三个阶段：

（1）$N<1000$时的急剧变化阶段，无论是p_f变化曲线，还

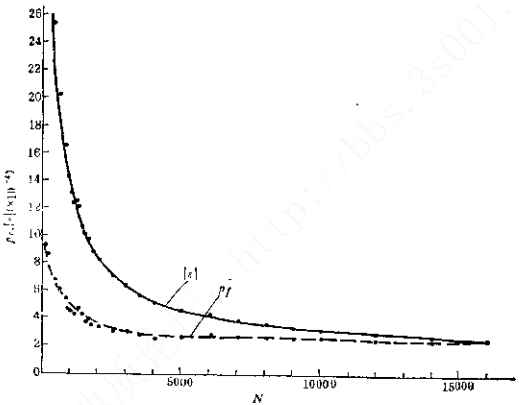


图 3-2 试验次数N与破坏概率p_f、误差$|\varepsilon|$的关系

是$|\varepsilon|$变化曲线，斜率均很陡，两者差距也较大，表明在$N<1000$时，破坏概率和方法误差对试验次数都非常敏感，且误差的敏感性强于破坏概率的敏感性，就是说，在此试验条件下，往往会带来较大的随机误差。

（2）$1000<N<5000$时的拐曲变化阶段，p_f和$|\varepsilon|$变化曲线斜率迅速变缓，且趋向靠近，接近于同一数量级。曲线呈拐曲

地信网论坛
BBS.3S001.COM

状，表明p_f和$|\varepsilon|$对N的敏感性急速降低。

（3）$N>5000$时的平缓变化阶段，p_f和$|\varepsilon|$对N的变化均较平缓，趋于重合，且在$N=16000$时$|\varepsilon|$的量值低于相应的p_f值，表明p_f与$|\varepsilon|$基本处于等量。

综上，如果我们采用式（3-17）求算试验次数，假定$p_f=10^{-1}$，$|\varepsilon|=10^{-4}$，显著水平$\alpha=0.05$，则得$N=40000$。对于一般性工程，取$N=5000\sim10000$，已完全可以满足工程评价精度要求。在实际应用中，还可以在同样试验次数条件下，采用减少标准差σ_{p_f}（见式（3-11））的抽样方法，实现方法误差的有效降低。

3.3 均匀分布随机数的产生方法

为了进行边坡系统状态模拟，必须进行随机抽样，或者说产生服从一定分布的随机数。当已知随机变量的分布函数$F(X)$以后，我们就可以用各种方法产生服从该分布的随机数。但是，无论用哪一种方法，产生哪一种分布的随机数，都必须以（0，1）区间的均匀分布随机数作为基础。一般，以蒙特卡洛法模拟边坡问题，将用到数以万计乃至数十万计的均匀分布的随机数。因此，必须解决如何产生大量随机数的问题。如果没有良好的伪随机数发生器，就难以获得正确的随机数。所以，能否有简便、经济、可靠的方法产生均匀随机数，将成为蒙特卡洛法应用的关键问题之一。

3.3.1 均匀分布随机数的性质

均匀分布的定义、概率度函数、分布函数、参数及其图形，第2章中已叙述过。均匀分布随机数必须具备均匀性和独立性，即：

（1）随机数序列应均匀分布在〔0，1〕区间，若将区间〔0，1〕分成n个等长区间，则在每个子区间内得到的观察期望值应是N/n，这里N是观察总数。

（2）序列之间没有相关性，即每个观察值落入某一子区间

地信网论坛
BBS.35001.COM

的概率与前一观察值无关。

这种真正均匀分布的随机数可以用物理方法，如电子噪声发生器、放射源激励计数器等获得，但是这需要一套物理设备，且这样产生的随机数列无法重现，因而也就不可能进行重复模拟，所以，实际上这种方法已不再使用。目前是应用计算机程序产生随机数，即运用一定的算法求得随机数列。若这种随机数序列具有均匀性和独立性的统计特性，就可以认为它们是随机的。为了与真正的随机数相区别，常将这种用计算机程序产生的随机数称为伪随机数，简称为随机数。

在计算机上产生的随机数列可以重复得到，当计算方法（递推公式）及初始值确定后，它就唯一地得到整个随机数序列，这和随机数的相互独立性的要求有矛盾，同时，由于计算机中能表示〔0，1〕区间的数是有限的，伪随机数序列一定会重复，即必然会出现周期性循环现象。但是，只要运用各种检验方法，验证它确实具有均匀分布性质，并且周期足够长，就可以在模拟中使用，而不会引起过大的系统误差。因此，计算机上产生的随机数必须满足下列要求：

（1）分布的均匀性，即尽可能接近U(0，1）分布；

（2）统计上的独立性；

（3）产生随机数的速度足够的快，以节省模拟时间和机时费用；

（4）产生的随机数应可以重复，即给以相同的初值能得到相同的随机序列，这样可以在相同条件下模拟不同的边坡设计方案；

（5）应有足够长的周期，即在其达到重复（循环）之前，能产生足够使用的随机数；

（6）占用计算机的内存空间尽可能的少。

3.3.2 均匀分布随机数的产生

历史上曾采用过的平方取中法、乘法取中法、常数乘子法、裴波那契法（Fibonecci），都因其固有的缺点而被淘汰，目前广

地信网论坛
BBS.3S001.COM

比应用的是线性同余法。

3.3.2.1 乘法线性同余法

乘法线性同余法是Lehmer (1949) 提出来的，用以产生伪随机数的递推公式是：

$$x_i = a x_{i-1} \pmod{M}$$

$$u_i = x_i / M \tag{3-18}$$

式中 a 为乘子；x_0为种子（初值）；M为模数。当给定一个初值以后，就可以利用上式算出序列x_1，x_2，…，x_n，…，由此可求得伪随机数列u_1，u_2，…，u_n，…。

a、x_0和M的选取对随机数的周期及其他统计特性有极大的影响，下面予以详细讨论。

式 (3-18) 意味着

$$x_i = (a x_{i-1}) - \left\lceil \frac{a x_{i-1}}{M} \right\rceil M \tag{3-19}$$

式中 「·」表示取整数；a和M均为整数。

令 $$N = a x_{i-1}$$

则 $$x_i = N - \left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil M$$

当$N=M$时，$x_i = M - \left\lceil \frac{M}{M} \right\rceil M = 0$，显然，$N=2M$，$3M$，…时，$x_i=0$；

当$N=M-1$时，$x_i = (M-1) - \left\lceil \frac{M-1}{M} \right\rceil \cdot M = M-1$；

当$0<N<M$时，$x_i = N$；

当$M<N<2M$时，$x_i = N - \left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil \cdot M = N-M<M$；

当$2M<N<3M$时，$x_i = N - \left\lceil \frac{N}{M} \right\rceil \cdot M = N-2M<M$；

… …

地信网论坛
BBS.3S001.COM

因此 $$0 \leqslant x_i \leqslant M-1 \tag{3-20}$$

有 $$u_i = x_i / M$$

故可知，x_i只能在{0，1，2，…，$M-1$}中选择，即{x_i}是$M-1$个有限的整数集合。同理，u_i也只能在{0/M，1/M，…，($M-1$)/M}中选择，即{u_i}也是一个有限的集合。显然，M越大，u_i可选择的范围也就越大。

同时，由于x_i取决于x_{i-1}，且均取整数，又因$0 \leqslant x_i \leqslant M-1$(包括0和$M-1$，共$M$个数)，当$x_i$取(0～$M-1$)中各整数且不重复时，则其周期$L$最长为$M$，即$L \leqslant M$。当循环周期$L$等于模数$M$时，称为满周期。在模拟中，要求随机数发生器的周期尽可能长，且是满周期的，即在0～$M-1$中的每一个整数，在周期L内仅出现一次，从理论上讲，保证了u_i的均匀分布特性。因此，M应尽可能大，一般选择$M=2^b-1$，其中b为二进制计算机字长。但是，当M很大时，每产生一个随机数都要进行一次大数值的除法运算，显然非常费时。我们可以利用二进制计算机的特性简化计算，即当数值越过2^b-1时，该数高位将自溢出而自动丢失，从而产生随机数时，将不需要进行除法和取余等运算。因此，计算机能表示的最大数是2^b-1。若存入一个整数$W=2^h$时($h>b$)，其结果使最左边的$h-b$位数因溢出而自动丢失，而保留下来的数恰是W.mod 2^b。此法称整数溢出法。

要达到最大周期及使u_i是U(0，1)上独立随机数，还必须正确选定a和x_0值，但目前对a和x_0的选择尚无成熟的方法。通常，a、x_0和M均取整数，且$M>0$，$a<M$，$x_0<M$。可采用不同的数据进行试验，以求得较好的统计特性。

例3-2 取参数组$x_0=1$，$a=7$，$M=10^3$，则

$x_1=7\times 1=7$，　　$u_1=7/1000=0.007$；

$x_2=7\times 7=49$，　　$u_2=49/1000=0.049$；

$x_3=7\times 49=343$，　　$u_3=343/1000=0.343$；

$x_4=7\times 343=2401$，　　$u_4=401/1000=0.401$；

$x_5=7\times 401=2807$，　　$u_5=807/1000=0.807$；

地信网论坛
BBS.3S001.COM

3.3.2.2 混合线性同余法

1961年，Greenberger将乘法线性同余法推广为混合线性同余法，其递推公式为

$$x_i = ax_{i-1} + c \pmod{M}$$
$$u_i = x_i / M \tag{3-21}$$

式中 c 为增量(常数)。为了获得满周期，要求满足下列条件：

（1）c与M互为质数，即同时整除c和M的数为1；

（2）如q为质数，若M能被q整除，则$a-1$也能被q整除，即$\frac{M}{q}$为整数，$\frac{a-1}{M}$为整数；

（3）若M可被4整除，则$a-1$也可被4整除，即$\frac{M}{4}$为整数，$\frac{a-1}{4}$为整数。

例3-3 若$M=16$，$a=5$，$c=3$，$x_0=7$，则

$$x_i = 5x_{i-1} + 3 \mod 16$$

i	x_i	u_i	i	x_i	u_i
0	7	—	6	5	0.313
1	6	0.375	7	12	0.750
2	1	0.063	8	15	0.938
3	8	0.500	9	14	0.875
4	11	0.688	10	9	0.563
5	10	0.625	11	0	0

3.3.2.3 二次同余法

二次同余法的递推公式为：

$$x_i = (a \cdot x_{i-1} + bx_{i-1} + c) \mod M$$
$$u_i = x_i / M \tag{3-22}$$

要求二次同余法的a、b是两个互质的常数，c是一个奇整数，且不为3和5除尽，并与M互质，M的取法与线性同余法相同。

3.3.2.4 加法同余法

地信网论坛
BBS.3S001.COM

加法同余法由于免除了乘法运算，所以计算速度较快，但加法同余法事先需要若干个数，比如n个数，从已知的x_1，x_2，…，x_i产生第$i+1$个随机数，其递推公式为

$$x_i=(x_{i-1}+x_{i-n}) \mod M$$
$$u_i=x_i/M \tag{3-23}$$

例3-4 已知x_1，x_2，x_3，x_4，x_5分别为57、34、89、92和16，$n=5$，取$M=100$，则

$$x_6=(x_5+x_1) \mod 100=73 \qquad u_6=0.73$$
$$x_7=(x_6+x_2) \mod 100=7 \qquad u_7=0.07$$
$$x_8=(x_7+x_3) \mod 100=96 \qquad u_8=0.96$$
$$x_9=(x_8+x_4) \mod 100=85 \qquad u_9=0.85$$
$$x_{10}=(x_9+x_5) \mod 100=1 \qquad u_{10}=0.01$$
$$x_{11}=(x_{10}+x_6) \mod 100=74 \qquad u_{11}=0.74$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

3.3.3 均匀分布随机数的检验

产生的随机数序列能否在实际中被看作是在(0，1)上均匀分布的连续随机变量的独立取样值，就必须对它们进行统计检验。一般应进行分布的参数检验、均匀性检验和独立性检验。应当指出，统计检验不能完全肯定或否定某一假设，因此，最好能多作几种统计检验，以便有较大的把握保证使用的随机数列有较好的统计性质。

3.3.3.1 参数检验

所谓参数检验是指检验随机数的数字特征，如均值、方差的估计值和理论值的差异是否显著。设由随机数发生器生成的随机数为

$$u_1，u_2，\cdots，u_n$$

则其均值和方差的估计值分别为：

$$\overline{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i \tag{3-24}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2 \tag{3-25}$$

若所生成的随机数序列为（0，1）上均匀分布的随机数列，则可假设：

$\overline{u}$的均值和方差分别为：

$$E(\overline{u})=\frac{1}{2},\quad Var(\overline{u})=\frac{1}{12n} \tag{3-26}$$

S^2的均值和方差分别为：

$$E(S^2)=\frac{1}{12},\quad Var(S^2)=\frac{1}{180n} \tag{3-27}$$

取统计量

$$V_1=\frac{\overline{u}-E(\overline{u})}{\sqrt{Var(\overline{u})}}=\sqrt{12n}\left(\overline{u}-\frac{1}{2}\right) \tag{3-28}$$

$$V_2=\frac{S^2-E(S^2)}{\sqrt{Var(S^2)}}=\sqrt{180n}\left(S^2-\frac{1}{12}\right) \tag{3-29}$$

当n足够大时，V_1、V_2近似服从$N(0,1)$正态分布。若取显著水平$\alpha=0.05$，从n个观测值计算$|V_1|$和$|V_2|$的值，当$|V_1|>1.96$，则拒绝$E(\overline{u})=\frac{1}{2}$及$Var(\overline{u})=\frac{1}{12n}$的假设，否则接受以上假设。当$|V_2|>1.96$，拒绝$E(S^2)=\frac{1}{12}$及$Var(S^2)=\frac{1}{180n}$的假设，否则接受这一假设。

例3-5 用线性同余法产生如表3-3所示的200个随机数，假设其有总体参数均值$E(\overline{u})=\frac{1}{2}$，方差的均值$E(S^2)=\frac{1}{12}$，按式（3-24）和（3-25）可计算得

$$\overline{u}=0.4681,\qquad S^2=0.0835$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-3 随 机 数 列

编号	随	机	数	列	
1	0.8693	0.6221	0.7519	0.5633	0.7602
2	0.0745	0.0107	0.0310	0.6284	0.3079
3	0.7333	0.7801	0.4653	0.3226	0.9316
4	0.8104	0.2710	0.1184	0.5996	0.1279
5	0.0151	0.6956	0.7334	0.7147	0.7886
6	0.0540	0.3359	0.5887	0.5003	0.1936
7	0.4072	0.7439	0.1811	0.1145	0.9473
8	0.1805	0.8306	0.8167	0.9561	0.8983
9	0.4487	0.3001	0.4336	0.8973	0.0356
10	0.5647	0.3799	0.1775	0.5913	0.6106
11	0.7949	0.7391	0.1157	0.4378	0.6787
12	0.5818	0.6089	0.0462	0.0312	0.7059
13	0.0708	0.4358	0.8525	0.1111	0.5014
14	0.6067	0.1426	0.7977	0.9009	0.5589
15	0.9014	0.7651	0.2690	0.2923	0.1289
6	0.0144	0.6059	0.8069	0.8252	0.5117
17	0.9116	0.1028	0.9902	0.3562	0.1369
18	0.1800	0.6210	0.4490	0.4292	0.0334
19	0.7266	0.8231	0.6411	0.0780	0.2973
20	0.4783	0.8218	0.0989	0.3379	0.4148
21	0.9712	0.3011	0.8167	0.6326	0.0893
22	0.2845	0.8212	0.1316	0.1762	0.0491
23	0.2705	0.9119	0.23.9	0.5930	0.1855
24	0.9731	0.2563	0.9222	0.5693	0.3162
25	0.2495	0.0305	0.4219	0.9402	0.2114
26	0.9202	0.7432	0.8455	0.1421	0.5411
27	0.5332	0.0320	0.0415	0.0432	0.7920
28	0.4998	0.9097	0.2767	0.5195	0.2488
29	0.7466	0.2913	0.7158	0.2791	0.5522
30	0.0872	0.3808	0.5906	0.3266	0.6644
31	0.5146	0.1834	0.0698	0.0227	0.1172
32	0.0571	0.7817	0.1624	0.1885	0.2127
33	0.4624	0.0833	0.7285	0.6492	0.1118
34	0.7855	0.7373	0.3670	0.7300	0.2688
35	0.2148	0.3660	0.3169	0.5335	0.1611

地信网论坛
BBS.3S001.COM

续表 3-3

编号	随	机	数	列	
36	0.6463	0.8726	0.5794	0.5762	0.2078
37	0.3970	0.4665	0.4599	0.0506	0.8901
38	0.0149	0.8125	0.1746	0.3526	0.4046
39	0.6338	0.5799	0.7827	0.5755	0.9238
40	0.2664	0.1821	0.5276	0.6826	0.2342

于是可按式 (3-28) 和 (3-29) 计算统计量

$$V_1=\sqrt{12\times 200}\times\left(0.4681-\frac{1}{2}\right)=-1.5628$$

$$V_2=\sqrt{180\times 200}\times\left(0.0835-\frac{1}{2}\right)=0.0316$$

由于$|V_1|<1.96$，$|V_2|<1.96$，故在显著水平$\alpha=0.05$下，可接受总体的均值为$\frac{1}{2}$，方差的均值为$\frac{1}{12}$的假设。

3.3.3.2 均匀性检验

均匀性检验是检验所产生的随机数落在各子区间的频率与理论频率之间的差异是否显著。均匀性检验主要采用频率检验法，其中常用的有χ^2检验和K-S检验，其具体检验步骤见2.5节。

例3-6 对表3-3所列200个随机数进行均匀性检验，将 (0, 1) 分成10个等长子区间，然后统计落在每一个子区间内的样本随机数的数目，并和理论频数进行比较，如表3-4所示。

由表3-4可以算得

$$\chi^2=\sum_{i=1}^{10}\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}=7.95$$

查χ^2表得$C_{(1-0.05)(10-1)}=16.92>7.95$，故接受显著水平为$\alpha=0.05$的均匀分布假设。

3.3.3.3 独立性检验

它是检查一个序列的随机数相互之间是否存在相关性。在此

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-4 随机数的频数

区间号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
理论频数	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
实际频数	25	25	20	17	15	24	17	24	17	15
$\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$	1.25	1.25	0	0.45	1.25	0.80	0.45	0.80	0.45	1.25

介绍三种检验方法：自相关检验、组合规律检验和连贯性检验。

A 自相关检验

设给定一组随机数按产生的先后顺序排列：

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$$

前后距离为 k 的随机数的相关系数为

$$\rho_k=\frac{\frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}u_i\cdot u_{i+k}-(\overline{u})^2}{S^2},\quad k=1,\ 2,\ \cdots \tag{3-30}$$

式中

$$S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2$$

$$\overline{u}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}u_i$$

若相关系数为零，即 $\hat{\rho}_k=0$，则随机数相互独立。统计量：

$$V_k=\hat{\rho}_k\sqrt{n-k} \tag{3-31}$$

在 n 充分大时（如$(n-k)>50$），V_k 近似服从$N(0,\ 1)$分布。因此，若取显著水平$\alpha=0.05$，按式（3-30）可以计算前后相距为$k=1,\ 2,\ \cdots$的各相关系数的估计值 $\hat{\rho}_1,\ \hat{\rho}_2,\ \cdots,\ \hat{\rho}_k,\ \cdots$，若统计量 $|V_k|>1.96$，则拒绝相关系数$\rho_k=0$的假设。

在实际检验中，通常取头20个相关系数（$k=1\sim20$），若它们当中至多只有一个相关系数与零有显著差别，则可在显著水平为0.05下接受随机数不相关的假设。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-5 相关系数检验结果

编号	$\hat{\rho}_k$	V_k	编号	$\hat{\rho}_k$	V_k
1	0.9199×10^{-3}	0.9199×10^{-1}	6	0.2296×10^{-4}	0.2295×10^{-2}
2	-0.6568×10^{-4}	-0.6567×10^{-2}	7	-0.6460×10^{-3}	-0.6458
3	-0.2995×10^{-2}	0.2995	8	-0.7210×10^{-3}	-0.7207
4	-0.4104×10^{-2}	-0.4103	9	0.1080×10^{-1}	1.0797
5	-0.5292×10^{-2}	-0.5290	10	-0.3104×10^{-3}	-0.3102×10^{-1}

例3-7 对一个容量为10000的随机数样本进行相关系数检验，检验结果见表3-5。给定显著水平$\alpha=0.01$，拒绝域为$|V_k|>1.645$。可见，头10个相关系数都与零无显著差别，故可在显著水平$\alpha=0.01$下接受该组随机数不相关的假设。

B 组合规律性检验

通常采用扑克检验（Poker test）来检查随机数中重复数字的频率，从而检查其组合规律性，即序列独立性。例如取随机数前5位数码，像是5张扑克牌，它们可能出现7种组合：五色（$abcde$）；一对（$aabcd$）；两对（$aabbc$）；三同（$aaabc$）；满堂（$aaabb$）；四同（$aaaab$）；同花（$aaaaa$）。对均匀随机数，它们的出现概率分别为：

$$
\begin{aligned}
p(abcde)&=m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)/m^5\\
p(aabcd)&=m(m-1)(m-2)(m-3)C_5^2/m^5\\
p(aabbc)&=C_m^2(m-2)C_5^2C_3^2/m^5\\
p(aaabc)&=m(m-1)(m-2)C_5^3/m^5\\
p(aaabb)&=m(m-1)C_5^3/m^5\\
p(aaaab)&=m(m-1)C_5^4/m^5\\
p(aaaaa)&=m/m^5
\end{aligned}
\qquad (3\text{-}32)
$$

式中 m为不同的数码个数，对10进制数为10，对16进制数为16。

按式（3-32）所示的理论概率可用χ^2检验完成扑克检验，从

地信网论坛
BBS.3S001.COM

例3-8 若有1000个三位数，经分析，有680个数具有完全不同的数字，289个数有两个数字相同，31个数是三位数字完全相同。试用扑克检验法检查这些数据是否相互独立。

解：令显著水平$\alpha=0.05$，进行χ^2检验，结果综合于表3-6。可见χ^2值为47.65，而查χ^2表得$C_{95,2}=5.99$，由于$\chi^2>C_{95,2}$，故检验结果表明这些数据不独立。

表 3-6 扑克检验结果

组合 i	观测频率 m_i	理论频率 e_i	$\frac{(m_i-e_i)^2}{e_i}$
abc	680	720	2.22
aaa	31	10	44.10
aab	289	270	1.33
	1000	1000	47.65

C 连贯性检验

连贯性检验是检验一组随机数中是否每隔一些数字连续出现增大或减少的趋势，从而判别这些数据的独立性。我们用“连”来表示连续性的相同事件的出现，“连”的长度表示在“连”中事件的个数，若上升记作“+”，下降记作“−”。

a 升降连检验

我们定义，数据连续升值的连叫升连，连续降值的连叫降连。在一个数列中，连的最小个数是1，即所有的数或是顺序上升，或是顺序下降；最大连数是$n-1$，其中n是该数列的数据个数。

若a是一个序列的连的总数，则a的均值μ_a和方差σ_a^2分别为

$$\mu_a=\frac{2n-1}{3} \tag{3-33}$$

$$\sigma_a^2=\frac{16n-29}{90} \tag{3-34}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

当数字总数 $n>20$时，连的总数 a 近似于正态分布 $N(\mu_a,\sigma_a^2)$。因而有

$$Z_0=\frac{a-\mu_a}{\sigma_a} \tag{3-35}$$

若显著水平为 α，则当 $-K_{1-\alpha/2}\leqslant Z_0\leqslant K_{\alpha/2}$ 时，不拒绝独立性的假设。

例3-9 用升降连连贯性检验法检查表3-7数据是否具有独立性。

表 3-7 升降连检验数据

编号	数据									
1	0.41	0.68	0.89	0.94	0.74	0.91	0.55	0.62	0.36	0.27
2	0.19	0.72	0.75	0.08	0.54	0.02	0.01	0.36	0.16	0.28
3	0.18	0.01	0.95	0.69	0.18	0.47	0.23	0.22	0.82	0.53
4	0.31	0.42	0.73	0.04	0.83	0.45	0.13	0.57	0.63	0.29

该序列的升降连如下：

+ + + − + − + − − − + + − + − + − − + − + − − + − − + − + + − − + + − + − − − + + 这里共有26个连，$n=40$，$a=26$，可得

$$\mu_a=\frac{2\times 40-1}{3}=26.33$$

$$\sigma_a^2=\frac{16\times 40-29}{90}=6.79$$

$$Z_0=\frac{26-26.33}{\sqrt{6.79}}=-0.13$$

而临界值 $K_{0.975}=1.96$，$Z_0<K_{0.975}$，故不能拒绝此数列的独立性假设。

b 正负连检验

有时升降连检验尚不能充分说明一组数据的独立性，此时可用正负连检验。我们定义，凡数值在均值以上的记以“+”，在均

地信网论坛
BBS.35001.COM

值以下的记以“－”。然后用类似升降连检验办法进行检验。

令n_1和n_2分别是在均值以上和在均值以下的数据个数，b是连的总数，显然最大连数$n=n_1+n_2$，最小连数是1。在给定n_1和n_2的条件下，连的总数b的均值μ_b和方差σ_b^2分别为

$$\mu_b=\frac{2n_1n_2}{n}-\frac{1}{2} \tag{3-36}$$

$$\sigma_b^2=\frac{2n_1n_2(2n_1n_2-n)}{n^2(n-1)} \tag{3-37}$$

当n_1或n_2大于20时，b近似于正态分布，从而得

$$Z_0=\frac{b-\mu_b}{\sigma_b} \tag{3-38}$$

若$-K_{1-\alpha/2}\leqslant Z_0\leqslant K_{1-\alpha/2}$，则不能拒绝独立性的假设。

例3-10 表3-7所示的一组数据，用正负连法检验其独立性。

该序列的正负连为：

－＋＋＋＋＋＋－－－＋＋－＋－－－－－－－＋＋－－－－＋＋－－＋－＋－－＋＋－ 这里$n_1=18$，$n_2=22$，$n=n_1+n_2=40$，$b=17$，可得

$$\mu_b=\frac{2\times18\times22}{40}-\frac{1}{2}=20.3$$

$$\sigma_b^2=\frac{2\times18\times22\times(2\times18\times22-40)}{40^2\times(40-1)}=9.54$$

因$n_2>20$，故可用式（3-38）得

$$Z_0=\frac{17-20.3}{\sqrt{9.54}}=-1.07$$

而$K_{0.975}=1.96$，$|Z_0|<K_{0.975}$，故不能拒绝独立性的假设。

3.4 非均匀分布随机变量的抽样方法

用蒙特卡洛法进行计算而建立的概率模型中，常会遇到具有

地信网论坛
BBS.3S001.COM

各种不同分布的随机变量，则要求产生对应于该随机变量（或分布）的随机数，称做对该随机变量进行模拟或抽样。

抽样方法有许多，如反变换法、舍选法、复合法、变换法、查表法等等。为了应用方便，本书不对各种方法作系统阐述，而是根据常用的分布类型介绍实用的抽样方法。

3.4.1 连续随机变量的抽样

3.4.1.1 正态分布的随机变量

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \tag{3-39}$$

对于这种非标准的正态分布，可用标准正态分布$N(0,1)$的随机变量x'经下列线性变换得到

$$x=\mu+\sigma x' \tag{3-40}$$

式中 x'是标准正态分布的随机变量；μ和σ分别为所求非标准正态分布随机变量x的均值和标准差。

A 变换法

该法是Box和Muller提出的。取两个独立的〔0，1〕区间均匀随机数u_1和u_2，利用二元函数变换得到

$$\begin{aligned}x_1'&=(-2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)\\ x_2'&=(-2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)\end{aligned} \tag{3-41}$$

则x_1'和x_2'是两个相互独立的标准正态分布的随机变量。从而由式（3-40）得到正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机数：

$$\begin{aligned}x_1&=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)\\ x_2&=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)\end{aligned} \tag{3-42}$$

用式（3-42）产生正态分布随机数的精度高，且可同时产生一对互为正交的独立正态随机数，因此广泛应用。

例3-11 已知层面倾角服从正态分布，其均值$\mu=30.58°$，标准差$\sigma=2.33°$。试抽取4个正态分布的随机数。

解：产生4个（0,1）均匀分布随机数，如：

$u_1=0.1213501$，$u_2=0.6518610$，$u_3=0.8688612$，$u_4=$

地信网论坛
BBS.35001.COM

$u_2=0.7297025$，由式（3-42）得

$$x_1=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)$$
$$=30.58+2.33(-2\ln 0.1213501)^{1/2}\cos(2\pi\times 0.6518610)$$
$$=35.35°$$
$$x_2=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)$$
$$=30.58+2.33(-2\ln 0.1213501)^{1/2}\sin[2\pi(0.6518610)]$$
$$=30.92°$$

同理 $x_3=31.81°$

$x_4=30.68°$

B 极法

该法是Marsaglia和Brag提出的。其算法是：

（1）抽取一对（0,1）均匀分布的随机数u_1，u_2，并将它们变换成[−1,1]区间的均匀随机数，即

$$r_1=2u_1-1$$
$$r_2=2u_2-1$$

（2）令 $s=r_1^2+r_2^2$

（3）若$s\geqslant 1$，则转至步骤（1），否则

$$x_1'=r_1(-2\ln s/s)^{1/2}$$
$$x_2'=r_2(-2\ln s/s)^{1/2} \qquad (3\text{-}43)$$

为一对独立的标准正态分布随机数。

（4）由式（3-40）可得正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机数。

例3-12 同例3-11，用极法产生2个正态分布随机数。

解：产生一对（0,1）均匀分布随机数：

$$u_1=0.7989531,\quad u_2=0.0736981$$

从而有 $r_1=2u_1-1=2\times 0.7989531-1=0.5979$

$$r_2=2u_2-1=2\times 0.0736981-1=-0.8526$$

则 $s=r_1^2+r_2^2=(0.5979)^2+(-0.8526)^2=1.0841$

因$s>1$，故继续再产生一对（0,1）均匀分布随机数：

$$u_1=0.950512,\quad u_2=0.4072496$$

得 $r_1=0.9010$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$r_2=-0.1855$

$s=0.8462$

由式（3-43）求得：

$$x_1'=r_1(-2\ln s/s)^{1/2}$$
$$=0.9010\times(-2\ln 0.8462/0.8462)^{1/2}=0.5661$$
$$x_2'=r_2(-2\ln s/s)^{1/2}$$
$$=-0.1855\times(-2\ln 0.8462/0.8462)^{1/2}=-0.1165$$

由式（3-40）即$x=\mu+\sigma x'$，则得

$$x_1=30.58+2.33\times 0.5661=31.90°$$
$$x_2=30.58+2.33\times(-0.1165)=30.31°$$

C　近似法

取n个在（0,1）上均匀分布的随机数u_1，u_2，…，u_n，有期望值$E(u)=\frac{1}{2}$，方差$Var(u)=\frac{1}{12}$，由中心极限定理可知随机变量

$$x'=\left(\sum_{i=1}^{n}u_i-\frac{n}{2}\right)\Big/\sqrt{\frac{n}{12}} \qquad (3\text{-}44)$$

渐近地服从$N(0,1)$正态分布。为了保证一定的精确度，n应取足够大。若$n=12$，则式（3-44）有最简式

$$x'=\sum_{i=1}^{12}u_i-6 \qquad (3\text{-}45)$$

然后，可根据式（3-40）求出正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的随机数x。

例3-13　模拟参数同例3-11，即$\mu=30.58°$，$\sigma=2.33°$，采用近似法抽取正态分布的1个随机数。

解：由式（3-45）即

$$x'=\sum_{i=1}^{12}u_i-6$$

首先取12个（0,1）均匀随机数：

0.671289　0.7025723　0.7407753　0.45390406
0.6668769　0.3341433　0.1568530　0.7362702

地信网论坛
BBS.3S001.COM

0.5428796　0.4259691　0.0554481　0.7682681

则得　　$x'=6.2552154-6=0.2552154$

由式 (3-40) 即$x=\mu+\sigma x'$，可得

$$x=30.58+2.33\times 0.2552154=31.17°$$

D　舍选法

Von Neuman提出用舍选法从 (0,1) 均匀随机数中，按照一定条件选出服从给定分布的随机数。

已知标准正态分布的概率密度

$$f(x')=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x')^2}{2}}$$

选择一个区间$(-a,a)$ 作为$f(x)$的取值区间，即$\int_{-a}^{a}f(x')\mathrm{d}x'=1$，选取正常数$c=\sqrt{2\pi}$，使$cf(x')<1$对一切$x'\in(-a,a)$ 成立。在计算机上产生一对 (0,1) 均匀分布的随机数u_1和u_2，用u_1可求得在 $(-a,\ a)$ 上的均匀分布的一个随机数：

$$Z_1=-a[a-(-a)]u_1$$

$$\therefore\quad Z_1=a(2u_1-1) \tag{3-46}$$

如果

$$cf(Z_1)=e^{-\frac{Z_1^2}{2}}\geqslant u_2 \tag{3-47}$$

则取Z_1作为$f(x')$的一个随机数x_i'；如果不满足式 (3-47)，则舍弃之。如此重复，便产生一系列标准正态分布的随机数x_i'。通过式 (3-40)，可求得正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的随机数x_i。

该法适用于$f(x)$ 变化平缓的情况，若$f(x)$ 在小区间内取值变化很大，这种方法就不稳定。

例3-14　模拟参数同例 3-11，用舍选法产生正态分布随机数。

解：取$a=5$，产生一对 (0,1) 均匀随机数：

$$u_1=0.5135362,\quad u_2=0.5640480$$

由式 (3-46)，$Z_1=a(2u_1-1)$

$$=5\times[2\times(0.5135362)-1]=0.135362$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

由式 (3-47)，$e^{-\frac{x'^2}{2}}=e^{-\frac{(0.135362)^2}{2}}=0.9908804>0.564080$

故　　$x'=0.135362$

由式 (3-40) 可得　$x=30.58+2.33\times0.135362$

$=30.90^{\circ}$

3.4.1.2 对数正态分布的随机变量

对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ 的密度函数为：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right],\quad x>0 \tag{3-48}$$

对数正态分布与正态分布之间有确定的变换关系。若随机变量 Y 服从均值 μ 和方差 σ^2 的正态分布，则

$$X=e^{Y} \tag{3-49}$$

为具有对数正态分布的随机变量，且其均值和方差为：

$$\mu_X=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right) \tag{3-50}$$

$$\sigma_X^2=(\exp\sigma^2-1)\exp(2\mu+\sigma^2) \tag{3-51}$$

在计算机上产生两个 (0,1) 均匀分布随机数 u_1 和 u_2，用二元函数变换求得两个独立的标准正态分布随机变量 y_1' 和 y_2'，且根据 $y=\mu+\sigma y'$，可得

$$\begin{aligned}y_1&=\mu+(-2\sigma^2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)\\ y_2&=\mu+(-2\sigma^2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)\end{aligned} \tag{3-52}$$

因此，相应可得到两个对数正态分布随机函数 x_1 和 x_2：

$$\begin{aligned}x_1&=\exp[\mu+(-2\sigma^2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)]\\ x_2&=\exp[\mu+(-2\sigma^2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)]\end{aligned} \tag{3-53}$$

应当指出，对数正态分布 $LN(\mu,\sigma^2)$ 中的 μ 和 σ^2 是对应的正态分布的均值和方差，而不是对数正态分布的均值和方差。如果要求产生给定对数正态分布均值 μ_X 和方差 σ_X^2 的随机数，则可由式 (3-50) 和 (3-51) 求解得

$$\mu=\ln\frac{\mu_X}{\sqrt{1+\delta_X^2}} \tag{3-54}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\sigma^2=\ln(1+\delta_x^2) \tag{3-55}$$

式中 δ_x为变异系数。

例3-15 根据48个裂隙宽度的测量数据，绘制成的直方图，选用对数正态分布曲线能较好地拟合，试抽取2个对数正态分布随机数。

解：样本的均值和方差求得为

$$\overline{X}=2.67,\quad S^2=2.90$$

并相应作为总体均值μ_x和总体方差σ_x^2的点估计。

利用式(3-54)和(3-55)分别转换成正态分布的均值和方差：

$$\mu=\ln\frac{\mu_x}{\sqrt{1+\delta_x^2}}=\ln\frac{2.67}{\sqrt{1+\frac{2.90}{2.67^2}}}=0.81$$

$$\sigma^2=\ln(1+\delta_x^2)=0.34$$

根据式(3-53)，并取2个(0,1)均匀随机数：

$$u_1=0.6618575,\quad u_2=0.2314501$$

则得

$$x_1=\exp\{0.81+[(-2)\times 0.34\times\ln 0.6618575]^{1/2}\times\cos(2\pi\times 0.2314501)\}$$

$$=3.28\ (\text{mm})$$

$$x_2=2.28\ (\text{mm})$$

3.4.1.3 均匀分布的随机变量

对任意$a<b$，在$(a,\ b)$上均匀分布概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a\\ \dfrac{1}{b-a}, & x\in(a,b)\\ 1, & x\geqslant b\end{cases} \tag{3-56}$$

因此，如果给出了在(0,1)上均匀分布的随机数u_i，则可得其分布函数

$$F(x)=\int_a^x\frac{\mathrm{d}x}{b-a}=\frac{x-a}{b-a}=u \tag{3-57}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

所以

$$x=a+(b-a)u \tag{3-58}$$

例3-16 一组层面起伏角量测数据，根据直方图的形状可以认为它服从均匀分布，已知$a=3°$，$b=9°$，试抽取4个均匀分布的随机数。

解：在计算机上产生4个（0,1）均匀随机数：

$$u_1=0.4642614,\quad u_2=0.1285592,$$
$$u_3=0.4849701,\quad u_4=0.0553248。$$

由式（3-58）得

$$x_1=a+(b-a)u_1$$
$$=3+(9-3)\times 0.4642614=5.79°$$

同理有 $x_2=3.77°$，$x_3=5.91°$，$x_4=3.33°$。

3.4.1.4 指数分布的随机变量

指数分布的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\leqslant 0\end{cases} \tag{3-59}$$

同样，由$f(x)$求得

$$F(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\,dx=1-e^{-\lambda x}=u$$

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln(1-u) \tag{3-60a}$$

因为$(1-u)$与u都是（0,1）上均匀分布的随机数，故其简化式：

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln u \tag{3-60b}$$

式中 $\lambda=1/\mu$。在边坡工程分析参数中，多数不以0作下限，往往有一个起始值r，因此需要一个简单的坐标变换，即$\frac{1}{\lambda}=\mu-r$，而在随机抽样过程中，需要恢复原坐标，即

$$x=-\frac{1}{\lambda}\ln u+r \tag{3-60c}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

例3-17 一组层面间距（cm）数据，经χ^2检验，判定在显著水平$\alpha=0.05$下服从指数分布，其参数$\lambda=0.0209$，$r=80$。试依此产生2个指数分布的随机数。

解：产生（0,1）区间均匀随机数：

$$u_1=0.3629986,\quad u_2=0.5712636$$

由式（3-60c）可得：

$$x_1=-\frac{1}{\lambda}\ln u_1+r$$

$$=-\frac{1}{0.0209}\ln 0.3629986+80$$

$$=128.49(\text{cm})$$

$$x_2=106.79(\text{cm})$$

3.4.1.5 三角分布的随机变量

在某些场合，对某些因素的概率估计，常根据其上限值（b）、下限值（a）和最可能值（c），人为地假定为三角分布。三角分布的概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x-c)}{(b-a)(c-a)}, & x\in(a,\ c)\\ \dfrac{2(c-x)}{(b-a)(b-c)}, & x\in(c,\ b)\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\tag{3-61}$$

分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{(x-a)^2}{(b-a)(c-a)}, & x\in(a,\ c)\\ 1-\dfrac{(c-x)^2}{(b-a)(b-c)}, & x\in(c,\ b)\\ 1, & x>b\end{cases}\tag{3-62}$$

应用反变换方法$x_i=F^{-1}(u_i)$可得

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$x_i=\begin{cases} a+\sqrt{(b-a)(c-a)u_i}\ , & 0\leqslant u_i\leqslant\dfrac{c-a}{b-a} \\ b-\sqrt{(b-a)(b-c)(1-u_i)}\ , & \dfrac{c-a}{b-a}\leqslant u_i\leqslant 1 \end{cases} \tag{3-63}$$

例3-18 边坡岩体内某一观测点的地下水位高度（以海拔标高表示），根据历史资料，其年最低水位$a=204$m，年最高水位$b=210$m，一般正常水位$c=206$m，假定服从三角分布。试抽取2个三角分布的随机数。

解：令$\xi=\dfrac{c-a}{b-a}=\dfrac{206-204}{210-204}=0.3333$

在计算机上产生2个（0，1）均匀分布的随机数

$$u_1=0.9901088,\quad u_2=0.2901530$$

因 $0.3333<0.9901088<1$

故
$$\begin{aligned} x_1&=b-\sqrt{(b-a)(b-c)(1-u_1)}\\ &=210-\sqrt{(210-204)(210-206)(1-0.9901088)}\\ &=209.51(\text{m}) \end{aligned}$$

因 $0<0.2901530<0.3333$

故
$$\begin{aligned} x_2&=a+\sqrt{(b-a)(c-a)u_2}\\ &=204+\sqrt{(210-204)(206-204)\times 0.2901530}\\ &=205.87(\text{m}) \end{aligned}$$

3.4.1.6 威布尔分布的随机变量

威布尔分布$W(\alpha,\ \beta)$的密度函数为：

$$f(x)=\alpha\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right],\quad x\geqslant 0 \tag{3-64}$$

其分布函数为

$$F(x)=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{3-65}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

应用反变换法，则有

$$u=1-\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right] \tag{3-66}$$

故可得威布尔分布随机数的计算公式：

$$x=\beta[-\ln(1-u)]^{1/\alpha}$$

或

$$x=\beta(-\ln u)^{1/\alpha} \tag{3-67}$$

式中 u 为（0，1）区间均匀分布随机数。

威布尔分布的中值 $x_m=\beta(\ln 2)^{1/\alpha}$，若以 x_m 代替比例参数 β，则可有

$$x=x_m\left(\frac{-\ln u}{\ln 2}\right)^{1/\alpha} \tag{3-68}$$

3.4.1.7 瑞利分布的随机变量

瑞利分布是形状参数 $\alpha=2$ 的威布尔分布，是单参数分布，其密度函数为

$$f(x)=\frac{2x}{\beta}\exp\left(-\frac{x^2}{\beta^2}\right),\quad x\geqslant 0 \tag{3-69}$$

产生瑞利分布随机数的计算公式为

$$x=\beta(-\ln u)^{1/2} \tag{3-70}$$

瑞利分布的均值 $E(x)=\sqrt{\frac{\pi}{4}}\,\beta\simeq 0.8862\beta$，若用均值 E 代替参数 β，则

$$x=\sqrt{\frac{4}{\pi}}\,E(-\ln u)^{1/2} \tag{3-71}$$

式中 u 为（0，1）区间均匀分布随机数。

3.4.1.8 伽马分布的随机变量

伽马分布 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)},\quad x>0 \tag{3-72}$$

式中 形状参数 α 和比例参数 β 都大于零。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

A $0<\alpha<1$的情况

Ahrens和Dieter提出用推广的舍选抽样法产生伽马分布随机数（$0<\alpha<1$）。取

$$C_g g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & 0<x<1\\ \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\Gamma(\alpha)}, & x>1\end{cases}\tag{3-73}$$

式中常数

$$C_g=\frac{b}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

$$b=\frac{e+\alpha}{e}>1$$

因为此密度函数

$$g(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{\alpha x^{\alpha-1}}{b}, & 0<x\leqslant 1\\ \dfrac{\alpha e^{-x}}{b}, & x>1\end{cases}\tag{3-74}$$

相应分布函数

$$G(x)=\int_0^x g(x)\,\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha}}{b}, & 0\leqslant x<1\\ 1-\dfrac{\alpha e^{-x}}{b}, & x>1\end{cases}\tag{3-75}$$

所以产生分布函数为$G(x)$的随机数的反变换公式为

$$x=G^{-1}(u)=\begin{cases}(bu)^{1/\alpha}, & r\leqslant\dfrac{1}{b}\\ -\ln\dfrac{b(1-u)}{\alpha}, & \text{其它}\end{cases}\tag{3-76}$$

式中 u 为（0，1）区间均匀随机数。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

其算法为：

（1）产生（0，1）区间独立均匀随机数u_1，u_2，令$\beta=bu_1$，若$\beta>1$转至（3），否则转至（2）；

（2）产生随机数$x=\beta^{1/a}$，若$u_2\leqslant e^{-x}$，则x为所求随机数，否则转至（1）；

（3）产生随机数$x=-\ln[(b-\beta)/a]$，若$u_2\leqslant x^{a-1}$，则x为所求随机数，否则转至(1)。

B　$\alpha>1$的情况

$\alpha>1$的情况同样采用推广的舍选抽样法，取

$$\lambda=(2\alpha-1)^{1/2}$$

$$\mu=\alpha^{\lambda}$$

$$C_g=\frac{4\alpha^{\alpha}e^{-\alpha}}{\lambda\Gamma(\alpha)}$$

$$g(x)=\begin{cases}\lambda\mu x^{\lambda-1}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

相应分布函数

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\lambda}}{\mu+x^{\lambda}}, & x\geqslant 0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\qquad(3\text{-}77)$$

产生分布函数为$G(x)$的随机数的反变换公式为

$$x=G^{-1}(u)=\left(\frac{\mu u}{1-u}\right)^{1/\lambda}\qquad(3\text{-}78)$$

式中　u为（0，1）区间均匀随机数。

Cheng提出一种算法。令

$$a=(2\alpha-1)^{1/2}$$

$$b=\alpha-\ln 4$$

$$q=\alpha+\frac{1}{a}$$

$$\theta=4.5$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

其算法为：

（1）产生（0，1）区间独立均匀随机数u_1，u_2；

（2）令$v=a\ln[u_1/(1-u_1)]$

$$x=ae^{v}$$

$$y=u_1^2u_2$$

$$\omega=b+qv-x$$

（3）若$\omega+q-\theta y\geqslant 0$，则$x$为所求随机数，否则转至(4)；

（4）若$\omega\geqslant\ln y$，则x为所求随机数，否则转至（1）。

3.4.1.9 贝塔分布的随机变量

贝塔分布$\beta(\alpha_1,\alpha_2)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)},\quad 0\leqslant x\leqslant 1 \tag{3-79}$$

式中 $\beta(\alpha_1,\alpha_2)$为贝塔函数；α_1和α_2为形状参数。

产生$\beta(\alpha_1,\alpha_2)$分布随机数的一般方法是利用$\beta(\alpha_1,\alpha_2)$分布与伽马分布之间的关系。若X_1和X_2分别是$\Gamma(\alpha_1,1)$和$\Gamma(\alpha_2,1)$分布随机数，则

$$X=\frac{X_1}{X_1+X_2} \tag{3-80}$$

即为$\beta(\alpha_1,\alpha_2)$分布随机数。因此，可利用产生伽马分布随机数的方法产生贝塔分布随机数。

A α_1或α_2中有一个为1的情况

若$X\sim\beta(\alpha_1,\alpha_2)$，则$(1-X)\sim\beta(\alpha_2,\alpha_1)$。如取$\alpha_2=1$，这时密度函数

$$f(x)=\alpha_1x^{\alpha_1-1} \tag{3-81}$$

相应分布函数

$$F(x)=x^{\alpha_1} \tag{3-82}$$

因此，用反变换法

$$x=u^{1/\alpha_1} \tag{3-83}$$

很容易产生$\beta(\alpha_1,1)$分布随机数。式中u为（0，1）区间均匀随机数。

地信网论坛
BBS.35001.COM

B α_1和α_2为正整数的情况

Fox给出一种快速算法：

（1）产生$\alpha_1+\alpha_2-1$个（0，1）区间均匀随机数；

（2）取所产生的随机数中的第α_1个最小者即为一个$\beta(\alpha_1, \alpha_2)$分布随机数。

C α_1和α_2为不大于1的正实数

Berman对这种情况提出下列算法：

（1）产生（0，1）区间独立均匀随机数u_1，u_2；

（2）令$x_1=u_1^{1/\alpha_1}$，$x_2=u_2^{1/\alpha_2}$；

（3）若$x_1+x_2\leqslant 1$，转至（1），否则转至（4）；

（4）$x=x_1/(x_1+x_2)$即为$\beta(\alpha_1, \alpha_2)$分布随机数。

D α_1和α_2为大于1的正实数

Cheng对这种情况提出了一种简单的舍选抽样算法：

（1）初始化：令$\alpha=\alpha_1+\alpha_2$，若$\min(\alpha_1, \alpha_2)\leqslant 1$，令$b=1/\min(\alpha_1, \alpha_2)$；否则，令$b=\{(\alpha-2)/(2\alpha_1\alpha_2-\alpha)\}^{1/2}$，令$c=\alpha_1+1/b$；

（2）产生（0，1）区间均匀分布随机数u_1，u_2，u_3，令$v=b\ln\{u_1/(1-u_1)\}$，$\omega=\alpha_1\exp(v)$；

（3）若$\alpha\ln\left(\frac{\alpha}{\alpha_2+\omega}\right)+cv-\ln 4<\ln(u_1u_2u_3)$，则转至（1）；否则

$$x=\frac{\omega}{\alpha_2+\omega}$$

即为$\beta(\alpha_1, \alpha_2)$分布随机数。

3.4.1.10 柯西分布的随机变量

柯西分布$C(\mu, \alpha)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{\alpha}{\pi[\alpha^2+(x-\mu)^2]},\quad -\infty<x<\infty \qquad (3\text{-}84)$$

式中；α和μ为实数，是柯西分布的两个参数。

其分布函数为：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right) \tag{3-85}$$

因此，产生柯西分布随机数的反变换公式为

$$x=F^{-1}(u)=\mu-\frac{\alpha}{\mathrm{tg}(\pi u)} \tag{3-86}$$

式中 u 为（0，1）区间均匀随机数。

可用变换法产生柯西分布随机数：

（1）用下式产生两个标准正态分布随机数x_1和x_2：

$$x_1=(-2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_1)$$

$$x_2=(-2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)$$

（2）取$x=x_1/x_2$，则x为柯西分布$C(0,1)$随机数X^1；

（3）通过$X=\alpha X^1+\mu$变换，则可产生$C(\mu,\alpha)$分布随机数。

3.4.1.11 χ^2分布的随机变量

χ^2分布$\chi^2(n)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\quad x>0 \tag{3-87}$$

若z_1，z_2，…，z_n为n个独立标准正态分布随机数，则

$$x=\sum_{i=1}^{n}z_i^2 \tag{3-88}$$

为$\chi^2(n)$分布随机数。

若n为偶数，y_1，y_2，…，y_n为n个独立指数分布随机数，则

$$x=2\sum_{i=1}^{[n/2]}y_i \tag{3-89}$$

为$\chi^2(n)$分布随机数。

若n为奇数，则

$$x=\sum_{i=1}^{[n/2]}y_i+z^2 \tag{3-90}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

为$\chi^2(n)$分布随机数。式中y_i和z_i分别为独立指数分布和标准正态分布随机数。

3.4.1.12 t分布的随机变量

t分布$t(n)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{3-91}$$

若y_1为标准正态分布随机数，y_2为$\chi^2(n)$分布随机数，则

$$x=\frac{y_1}{\sqrt{\frac{y_2}{n}}} \tag{3-92}$$

为$t(n)$分布随机数

3.4.1.13 F分布的随机变量

F分布$F(n_1, n_2)$的密度函数为

$$f(x)=\frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{\beta\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right)}\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}}\left(1+\frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}},$$

$$x\geqslant 0 \tag{3-93}$$

若y_1和y_2分别为独立的$\chi^2(n_1)$和$\chi^2(n_2)$随机数，则

$$x=\frac{y_1/n_1}{y_2/n_2} \tag{3-94}$$

为$F(n_1, n_2)$分布随机数。

也可以用贝塔分布函数产生F分布随机数。若ω为$\beta(n_1/2, n_2/2)$分布随机数，则

$$x=\frac{n_2}{n_1}\times\frac{\omega}{1-\omega} \tag{3-95}$$

为$F(n_1, n_2)$分布随机数。

3.4.1.14 极值Ⅰ型分布的随机变量

极值Ⅰ型分布的分布函数为

$$F(x)=\exp\{-\exp[-\alpha(x-r)]\} \tag{3-96}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

式中 α 和 r 是参数。

设 $F(x)=u$，则有

$$x=r-\frac{1}{\alpha}\ln\left(\ln\frac{1}{u}\right) \tag{3-97}$$

式中 u 为(0,1) 区间的均匀随机数。

3.4.1.15 经验分布的随机变量

当已知所有原始数据 x_1，x_2，…，x_n 时，将它们按大小顺序排列，有

$$x_1^*<x_2^*<\cdots<x_n^*$$

其对应经验分布函数值分别为 0，$1/(n-1)$，$2/(n-1)$，…，$(n-2)/(n-1)$，1。产生这种经验分布随机数的反变换算法为：

（1）产生 (0，1) 区间均匀随机数 u；

（2）令 $p=(n-1)u$，$i=\lceil p\rfloor+1$，其中 $\lceil p\rfloor$ 表示取整；

（3）$x=x_i^*+(p-i+1)(x_{i+1}^*-x_i^*)$ 即为所求随机数。

显然，这种方法产生的随机数的数值区间限于 $[x_1^*,x_n^*]$ 内。

若已知的是组成数据经验分布函数 $G_k(x)$（见2.2.3节），即已知 n 个数据在 k 个相邻区间。

$$[a_0,a_1),[a_1,a_2),\cdots,[a_{k-1},a_k]$$

内的个数分别为 n_1，n_2，…，n_k（$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$）。则产生这种经验分布随机数的反变换算法为：

（1）产生 (0，1) 区间均匀随机数 u；

（2）求非负整数 j（$0\leqslant j\leqslant k-1$），使

$$G_k(a_j)\leqslant u\leqslant G_k(a_{j+1})$$

（3）按下式计算随机数：

$$x=a_j+\frac{[u-G_k(a_j)](a_{j+1}-a_j)}{G_k(a_{j+1})-G_k(a_j)} \tag{3-98}$$

显然，这种方法产生的随机数的取值区间为 $[a_0,a_k]$。

3.4.2 离散随机变量的抽样

3.4.2.1 伯努利分布的随机变量

地信网论坛
BBS.3S001.COM

伯努利分布$Ber(p)$的离散密度为

$$p_k=\begin{cases}1-p, & x_k=0\\ p, & x_k=1\end{cases} \tag{3-99}$$

产生伯努利分布随机数的反变换算法为：

（1）产生〔0，1）区间均匀随机数u；

（2）若$u\leqslant p$，则$x=1$，否则，$x=0$。x即为所求随机数。

3.4.2.2 离散均匀分布的随机变量

离散均匀分布$DU(i,j)$的离散密度为

$$p_k=\frac{1}{j-i+1},\quad x_k\in(i,i+1,\cdots,j) \tag{3-100}$$

产生离散均匀分布随机数的反变换算法为：

（1）产生（0，1）区间均匀随机数u；

（2）$x=i+\lfloor(j-i+1)u\rfloor$即为所求随机数。

3.4.2.3 二项分布的随机变量

二项分布$Bin(n,p)$的离散密度为

$$p_k=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k\in\{0,1,\cdots,n\} \tag{3-101}$$

二项分布$Bin(n,p)$是n次独立伯努利试验中成功次数(每次试验成功概率为p）的概率分布。因此，可由n个$Ber(p)$随机数构成$Bin(n,p)$随机数，其算法为：

（1）产生n个独立的$Ber(p)$随机变量$y_1,y_2,\cdots,y_n$；

（2）$x=y_1+y_2+\cdots+y_n$即为所求随机数。

3.4.2.4 几何分布的随机变量

几何分布Geom(p)的离散密度为

$$p_k=p(1-p)^k,\quad k\in\{0,1,\cdots\} \tag{3-102}$$

产生几何分布随机数的反变换算法为：

（1）产生（0，1）区间均匀随机数u；

（2）$x=\left\lceil\frac{\ln u}{\ln(1-p)}\right\rceil$即为所求随机数。

3.4.2.5 泊松分布的随机变量

泊松分布Poisson(λ)的离散密度为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$p_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k\in\{0,1,\cdots\} \tag{3-103}$$

可利用泊松分布与指数分布的关系，产生泊松分布随机数。令 y_i 是均值为1的指数分布随机数，则

$$\sum_{i=1}^{k}y_i\leqslant\lambda\leqslant\sum_{i=1}^{k+1}y_i$$

将产生指数分布随机数的式 (3-60b)即$x=-\frac{1}{\lambda}\ln u$代入，则有

$$-\sum_{i=1}^{k}\ln u_i\leqslant\lambda<-\sum_{i=1}^{k+1}\ln u_i$$

即

$$\prod_{i=1}^{k}u_i\geqslant e^{-\lambda}>\prod_{i=1}^{k+1}u_i \tag{3-104}$$

式中 u_i 为（0，1）区间均匀随机数。

3.5 减小试验方差的方法

为了提高模拟效率，减少模拟试验次数，或者由相同的试验次数得到更精确的参数估计值，必须减小试验结果的方差。减小试验方差的方法很多，而且对给定的同一边坡问题，也可以采用几种不同方法。下面介绍两种常用方法。

3.5.1 对偶变数法

设Z'和Z''为参数Z_a的两个无偏估计量，现构造第3个估计量

$$Z=\frac{1}{2}\left(Z'+Z''\right) \tag{3-105}$$

显然，Z的期望值为

$$E(Z)=\frac{1}{2}[E(Z')+E(Z'')]=\frac{1}{2}(Z'+Z'')$$
$$=Z_a \tag{3-106}$$

且Z的方差为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$Var(Z)=\frac{1}{4}Var(Z')+\frac{1}{4}Var(Z'')+\frac{1}{2}Cov(Z',Z'') \tag{3-107}$$

如果Z'和Z''具有负相关性，即

$$Cov(Z',Z'')<0$$

则可使

$$Var(Z)<Var(Z')$$
$$Var(Z)<Var(Z'')$$

将Z''称为Z'的对偶变数，用来补偿估计中的变化，这正是负相关的概念。例如，若函数$g(x)$是单调的，则

$$\phi(x)=\frac{1}{2}[g(x)+g(1-x)]$$

变化更小，具有较小方差。

为了用对偶变数法进行随机抽样即产生对偶随机数x_i和x_i'，可取(0,1)区间均匀随机数u_i和$(1-u_i)$，则有

$$x_i=F^{-1}(u_i)$$
$$x_i'=F^{-1}(1-u_i) \tag{3-108}$$

式中 $F(\cdot)$是概率分布函数。因此，如果试验次数为n，则对偶变数法的估值公式为

$$\hat{Z}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)+g(x_i')] \tag{3-109}$$

试验方差$Var(Z)$为

$$Var(Z)=\frac{1}{4n}\left\{\int_a^b[g(x)+g(1-x)]^2-[E(Z)]^2\right\} \tag{3-110}$$

其估值公式为

$$\hat{V}ar(Z)=\frac{1}{n-1}\left\{\frac{1}{4n}\sum_{i=1}^{n}[g(x_i)+\right.$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$g(x_i)]^2 - Z^2\Big\} \tag{3-111}$$

可见，通过对偶变数法能够使蒙特卡洛模拟结果的精度得以改进。

例3-19 某粘土的不排水剪切强度值服从正态分布，其均值$\mu=44.85\text{kPa}$，标准差$\sigma=6.56\text{kPa}$，试抽取同一分布的两个随机数。

解：采用变换法，即

$$x_1=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\cos(2\pi u_2)$$
$$x_2=\mu+\sigma(-2\ln u_1)^{1/2}\sin(2\pi u_2)$$

产生（0,1）均匀随机数$u_1=0.2123501$，则$u_2=(1-u_1)=0.7876499$，代入上式可得$x_1=56.36\text{kPa}$，$x_2=45.85\text{kPa}$。

3.5.2 相关抽样法

相关抽样法对于研究同一边坡问题两种不同设计的均值的差异特别有效。

设：设计方案A和设计方案B的状态函数为：

$$Z_A=g(A,X) \tag{3-112}$$
$$Z_B=g(B,X)$$

式中 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$，是设计方案A的一组设计参数；

$B=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$，是设计方案B的一组设计参数；

$X=(X_1,X_2,\cdots,X_m)$，是一组随机变量。

两个试验方案的性能随机变量（或安全系数，或安全储备）之差为

$$Z=Z_A-Z_B \tag{3-113}$$

如果在两次试验中采用同样的随机数，则其试验结果Z_A和Z_B是高度相关的，从而可减小两次试验结果之差的试验方差。此时，Z的均值$\overline{Z}$的方差为

$$Var(\overline{Z})=Var(\overline{Z}_A)+Var(\overline{Z}_B)-2Cov(\overline{Z}_A,\overline{Z}_B)$$

如果Z_A和Z_B是相互独立的，显然

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$Var(\overline{Z}) = Var(\overline{Z}_A) + Var(\overline{Z}_B)$$

但是，由于Z_A和Z_B是正相关的，即有

$$Cov(Z_A,\ Z_B) \geqslant 0$$

因此

$$Var(\overline{Z}) \leqslant Var(Z_A) + Var(Z_B)$$

用下面两式产生的Z_{Aj}和Z_{Bj}将是正相关的：

$$Z_{Aj} = g[A, F_{\overline{X}_1}^{-1}(u_1), F_{\overline{X}_2}^{-1}(u_2), \cdots, F_{\overline{X}_n}^{-1}(u_n)] \quad (3\text{-}114)$$

$$Z_{Bj} = g[B, F_{\overline{X}_1}^{-1}(u_1), F_{\overline{X}_2}^{-1}(u_2), \cdots, F_{\overline{X}_n}^{-1}(u_n)] \quad (3\text{-}115)$$

式中 $F_{X_i}(x_i)$为随机变量x_i的分布函数；u_i为(0,1)区间均匀分布的一组随机数。

为了便于计算试验方差的估计值$\widehat{Var}(Z)$，两次试验取相同试验次数n，即有

$$Z = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Z_{Aj} - Z_{Bj}) \quad (3\text{-}116)$$

则

$$\widehat{Var}(Z) = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Z_{Aj} - Z_{Bj})^2 - Z^2\right] \quad (3\text{-}117)$$

3.6 模拟结果的可信度估计

任何工程评价都不是绝对的，尤其是随机模拟，更是带有一定艺术性的技巧，即便是同一工程问题，不同人用模拟方法求解，结果也不尽相同。何况所建立的边坡工程模拟模型也多是非唯一性的。

在目前的工程评价中，可靠性分析是一种演绎的系统计算方法，即首先提出一组假定，基此建立工程地质模型和数学模型，通过随机模拟和统计试验来求得工程技术问题的近似的数值解。自然，通过模型会把有关假定、参数值、边界条件和初始条件的不确定性引伸到最终综合预测结果的不确定性。所谓边坡可靠性可以理解为：所设计的边坡能在使用期限内肯定地达到预计状态

地信网论坛
BBS.3S001.COM

的程度。可靠程度是用“概率”表示的，概率表明其事件本身的性质是明确的，即事件的结果分明，或稳定或破坏，但事件的意义却不确定，即由于发生的条件不充分，而不能在条件与事件之间确立必然的因果关系，因此，事件的出现与否表现出不确定性。这样，表明可靠程度的概率就包含两种涵义：一是在一系列同样试验中出现的频率；一是分析结果的置信程度。实际上，频率和置信度是两个截然不同的概念，各自都有适当的定义域，又都服从于概率论的定理。在边坡工程中，前一定义多用于长边坡破坏数目的统计分析，后一定义应用更为普遍，因为许多有意义的事件和过程具有唯一性，它们不能重复出现。本节着重讨论可信度估计。

边坡的破坏概率是基于安全系数或安全储备的概率分布求得的，破坏概率是一个随机型问题。随机模型是以“概率统计”方法求解的，应用概率论，必然是根据给定的不确定性和其他变量间关系，推断不确定性以及几组变量间的关系。应用统计方法，必然是根据部分的或有限的观察结果对真实的全体作出推断。因此，即使有了可靠的随机模型和程序，也不能保证模拟得到的结果一定可靠，这是因为模型中包含许多不确定因素和随机变量，例如：

（1）地质模型的构造；
（2）破坏模式和数学力学模型的抽象；
（3）边界条件和环境因素的假定；
（4）基本状态变量的选取；
（5）随机抽样方法和模拟运行方式；
（6）模拟次数即所获样本量，等等。

所以，每次模拟得到的是大量抽样数据的统计结果，它与总体特性之间存在误差，而且这种误差本身也是随机变量。为了提高结果的可信性，必须提高出现小误差的概率，这在数理统计中就是置信区间估计问题。

设安全系数总体分布含有一个未知参数Z，若由样本确定的

地信网论坛
BBS.3S001.COM

两个统计量$Z_L(x_1, x_2, \cdots, x_m)$及$Z_U(x_1, x_2, \cdots, x_m)$对于给定$\alpha(0<\alpha<1)$满足

$$p\{Z_L(x_1,x_2,\cdots,x_m)<Z<Z_U(x_1,x_2,\cdots,x_m)\}=1-\alpha$$

则称随机区间(Z_L, Z_U)是Z的$(1-\alpha)$置信区间，它表示估计真实值Z的误差程度；$(1-\alpha)$称为置信程度，表示该区间包含真实值Z的概率为$(1-\alpha)$。

据2.4.2节，均值区间由式（2-133）求得：

$$\langle\mu\rangle_{1-\alpha}=\left(\overline{x}-K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+K_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

方差区间由式（2-143）求得：

$$\langle\sigma^2\rangle_{1-\alpha}=\left(\frac{S^2}{1+K_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}};\ \frac{S^2}{1-K_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}}\right)$$

式中 $\overline{X}$为样本均值；σ为总体标准差；S为样本标准差；n为样本容量；$K_{\alpha/2}$为给定区间，由正态分布表确定$K_{\alpha/2}$值。

如果通过蒙特卡洛模拟，取得n个安全系数样本，假定安全系数为正态总体，则可求得其均值$\overline{x}$和标准差S，当样本量很大（$n>30$），就可认为样本标准差S即为总体标准差σ的很好估计，即可用S替代σ。

例3-20 某一边坡模拟结果如表3-8所示，分别计算出置信度$(1-\alpha)=95\%$和99%的置信区间如表3-9所示。

因为安全系数服从正态分布，故上述结果为确切的99%和95%的置信区间。由于μ_{F_S}和σ_{F_S}值随抽样次数n不同而变化，所以，它们的区间也必然是随机的，因而，并不能保证总体均值μ_{F_S}和方差$\sigma^2_{F_S}$肯定落在所给定区间里，它的可靠程度由置信度

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-8 边坡模拟结果

模拟次数	安全系数 F_s		破坏概率
n	$\overline{X}$	S	P_f，%
100	1.392	0.1685	0.99
200	1.392	0.1688	1.02
300	1.393	0.1691	1.02
400	1.401	0.1691	0.89
500	1.402	0.1761	1.13
600	1.392	0.1706	1.07
700	1.395	0.1700	1.02
800	1.394	0.1703	1.04
900	1.403	0.1769	1.13
1000	1.401	0.1778	1.19

来确定。对于同一模拟次数来说，99%的置信区间较之95%的置信区间为大，这是因为区间越大，包含μ_{F_S}和$\sigma^2_{F_S}$的机会越多。

对于同一置信度（$1-\alpha$），增大n即可相对提高估计的精度，从表3-9可以看出，无论是均值区间估计，还是方差区间估计，其区间宽度均随模拟次数的增加而缩小。

如果评价指标是破坏概率，因为破坏概率是众多随机变量的函数，即$p_f=p(X_1,X_2,\cdots,X_m)$，因此，与安全系数一样，破坏概率亦是一个随机变量。故亦可用概率统计方法来估计其置信区间。

如前所述，随机抽样试验是概率为p的伯努利试验，在试验次数n足够大时，可以样本方差S^2作为总体方差σ^2的较好的估值，并用S^2替代σ^2。这样，即可用式(3-11)求得破坏概率估值$\hat{p}_f$的标准差：

$$\hat{\sigma}_{p_f}=\sqrt{\frac{p_f(1-p_f)}{n}}$$

在标准差为已知情况下，则可用式（2-133）和式（2-143）求得给定置信度下破坏概率均值和方差的区间估计。

表 3-9 模拟结果的置信度估计

模拟次数 n	$(1-\alpha)=95\%$				$(1-\alpha)=99\%$			
	μ_{F_s}		σ_{F_s}		μ_{F_s}		σ_{F_s}	
	区间值	宽度	区间值	宽度	区间值	宽度	区间值	宽度
100	(1.359; 1.425)	0.066	(0.149; 0.198)	0.049	(1.349; 1.435)	0.086	(0.144; 0.212)	0.068
200	(1.369; 1.415)	0.046	(0.154; 0.188)	0.034	(1.361; 1.423)	0.062	(0.150; 0.196)	0.046
300	(1.374; 1.412)	0.038	(0.157; 0.185)	0.028	(1.368; 1.418)	0.050	(0.154; 0.190)	0.036
400	(1.384; 1.418)	0.034	(0.158; 0.182)	0.024	(1.379; 1.423)	0.044	(0.156; 0.187)	0.031
500	(1.387; 1.417)	0.030	(0.166; 0.188)	0.022	(1.382; 1.422)	0.040	(0.163; 0.192)	0.029
600	(1.378; 1.406)	0.028	(0.162; 0.181)	0.019	(1.374; 1.410)	0.036	(0.159; 0.185)	0.026
700	(1.382; 1.408)	0.026	(0.162; 0.180)	0.018	(1.378; 1.412)	0.034	(0.159; 0.183)	0.024
800	(1.382; 1.406)	0.024	(0.163; 0.179)	0.016	(1.378; 1.410)	0.032	(0.160; 0.182)	0.022
900	(1.391; 1.415)	0.024	(0.169; 0.186)	0.017	(1.388; 1.418)	0.030	(0.167; 0.189)	0.022
1000	(1.390; 1.412)	0.022	(0.170; 0.186)	0.016	(1.386; 1.416)	0.030	(0.168; 0.189)	0.021

地信网论坛 BBS.3S001.COM

地信网论坛
BBS.3S001.COM

例3-21 由表 3-8 的数据，计算置信度 $(1-\alpha)=95\%$ 情况下破坏概率均值和方差的置信区间。计算结果列于表3-10，根据表3-10的数据，绘制出破坏概率均值μ_{p_f}和方差$\sigma^2_{p_f}$的 $(1-\alpha)=95\%$置信区间变化图(图3-3和图3-4)。可以看出，无论是μ_{p_f}的区间估计，还是$\sigma^2_{p_f}$的区间估计，均随着样本容量 n 的增大，由波动趋于稳定，由宽变窄。就是说，随着 n 的增大，所求解趋于收敛，精度逐渐提高。

表 3-10 破坏概率的区间估计

n	p_f, $\times 10^{-2}$	$\hat{\sigma}_{p_f}$, $\times 10^{-3}$	$(1-\alpha)=95\%$, $K_{\alpha/2}=1.96$	
			μ_{p_f}, $\times 10^{-2}$	$\sigma^2_{p_f}$, $\times 10^{-5}$
100	0.99	9.99	(0.80, 1.18)	(7.665, 13.59)
200	1.02	7.10	(0.92, 1.12)	(4.213, 6.274)
300	1.02	5.80	(0.95, 1.09)	(2.899, 4.006)
400	0.89	4.70	(0.84, 0.94)	(1.940, 2.565)
500	1.13	4.73	(1.09, 1.17)	(1.199, 2.554)
600	1.07	4.20	(1.04, 1.10)	(1.585, 1.989)
700	1.02	3.80	(0.99, 1.05)	(1.307, 1.613)
800	1.04	3.59	(1.02, 1.06)	(1.174, 1.429)
900	1.13	3.52	(1.11, 1.15)	(1.134, 1.365)
1000	1.19	3.43	(1.18, 1.20)	(1.082, 1.290)

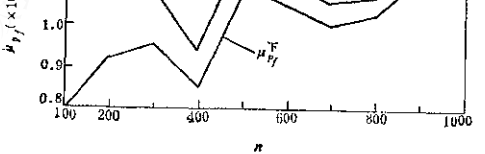


图 3-3 均值μ_{p_f}的0.95置信区间

地信网论坛
BBS.3S001.COM

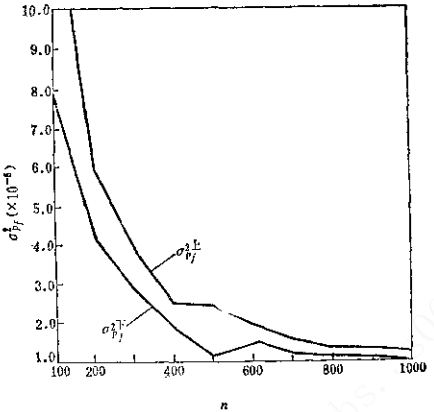


图 3-4 方差σ_{p_f}的0.95置信区间

要特别注意的是，以上确定置信区间的方法需在满足以下两条件时才能使用：

（1）所有观测值相互独立；

（2）由这些观测值所得到的概率分布是平稳的，也即随机变量观测值要符合独立、同一分布的条件。

但是，在离散事件系统的模拟中，往往并不满足上述条件。为使模拟结果满足一定的可信度，在运行方式上常常采用以下两种方法：重复运行法和单次长时间运行法。

重复运行法是改变随机数发生器的初始值，重复n次，每次同样的m个样本的模拟试验，各自得到独立的样本均值$\overline{x}_j(m)$和方差$s_j^2(m)$如下：

$$\overline{x}_j(m)=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}x_{ij},$$

$$(i=1,2,\cdots,m,\quad j=1,2,\cdots,n)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$s_j^2(m)=\frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}[x_{ij}-\overline{x}_j(m)]^2$$

则有

$$\overline{x}(n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{x}_j(m)$$

$$s^2(n)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}s_j^2(m)$$

由于各组均值$\overline{x}_j(m)$相互独立，而且，当m取得较大时，能较好地满足同一分布条件，所以，用$\overline{x}(n)$和$s^2(n)$来估计总体统计特征值是可信的。

单次长时间运行法就是把模拟运行时间划分若干段，每段抽样数据都为m个，共n段，则抽样总数为$N=n\cdot m$，须增加各段数据量，使各段均值比较符合独立、同一分布的条件。其数据处理方法与重复运行法相同。

3.7 实例分析

3.7.1 美国双峰铜矿

美国双峰铜矿东采场，东帮岩体呈强烈裂隙状，已实施了地下水降压工程，为了对总体边坡和斜坡道间边坡提供可靠性设计曲线，对这个区段的边坡进行了全面的稳定性分析。

边坡岩体地质条件比较复杂，上部覆盖厚约130m的冲积层，冲积层下为厚约30m的软弱氧化斑岩和长石砂岩，再下为基岩。基岩由一条走向北西-南东、倾角近乎直立的断层分隔成两部分：断层的东北部是非常坚硬的古生代沉积变质岩系，由石灰岩和砂质粉砂岩组成，其中包含有若干倾向采场、倾角达55°、延长有限的断层，这部分边坡垂直高度最终将达190m，断层的西南部，基岩由强烈裂隙状中生代沉积的长石砂岩和侵入斑岩组成，边坡的最终高度将达160m。典型的设计剖面如图3-5所示。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

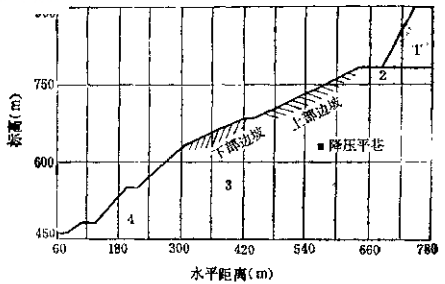


图 3-5　双峰铜矿典型设计剖面

1—冲积层；2—氧化带；3—中生代长石砂岩和斑岩；4—古生代沉积变质岩系

输入参数选定两个随机变量，一是岩体抗剪强度，另一是地下水压。采用经验分布函数描述其概率分布，采用分层抽样法进行随机抽样。

岩体强度：采取直径152.4mm和NX岩心试样，进行了斑岩和长石砂岩的三轴试验，岩心不连续面的直剪试验，以及人工制备的集合料三轴试验。

岩体强度的最低值是完全剪断的不连续面的残余强度值，即斑岩和长石砂岩摩擦角为30°。经验认为，残余强度值不能代表岩体强度的实际下限值，因此确定为：

正应力范围 (kPa)	粘结力 (kPa)	摩擦角 (°)
0～840	20.7	35
840～2450	131.0	30

断层带附近的岩体强度极低，试验确定的平均摩擦角24°，粘结力34.5kPa。但从总体强度观点看，不予单独考虑。

由新鲜、干净不连续面和重新压密试样直剪试验两个结果的平均值，确定岩体强度的实际下限值，便有下列结果：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

正应力范围 (kPa)	粘结力 (kPa)	摩擦角 (°)
0～840	34.5	38
840～2450	206·8	30

预计新鲜的硫化长石砂岩和斑岩的强度值可能略高于上表所示值，其它矿山类同岩体边坡的反分析也证实这一点，因此，设计使用的适中值（即出现概率为50%）如下：

正应力范围 (kPa)	粘结力 (kPa)	摩擦角 (°)
0～840	55.2	42
840～2450	330.9	30

最后，为了完整地描述硫化斑岩和长石砂岩的岩体强度，还需考虑最大强度值，即上限值如下：

正应力范围 (kPa)	粘结力 (kPa)	摩擦角 (°)
0～840	103.4	45
840～2450	448.2	30

这些结果示于图3-6，图3-7表示为积累概率分布曲线。

地下水压：同样地用概率描述可能的地下水压，它存在两种不确定性：

其一，水平方向上的低渗透带即界于中生代和古生代地层之间的断层带所形成的“阻水墙”出现的概率。根据地质情况和广泛的测压数据的分析，认为有“阻水墙”的水文状况的概率为50%，处于有“阻水墙”和无“阻水墙”之间的概率为50%，其定量地示于图3-8。

为降低边坡体内水压，在中生代地层的下部打一条疏干平巷，并安设75个水压计监控水压降低情况。然后模拟随着采场降深水压的分布，由于水文地质结构复杂，连续的模拟预测结果与现场测试结果不符。

其二，特定深处水压值的不确定性。图3-9以曲线图形式说明如何把整个边坡内地下水压值模拟结果修改成现场水压变化性

地信网论坛
BBS.35001.COM

结合的结果，图3-10表示边坡内特定深度的水压值出现概率。

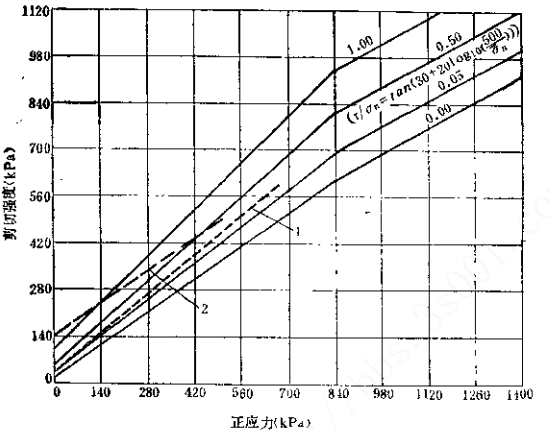


图 3-6 斑岩和长石砂岩的岩体强度参数
1—西采场南帮滑坡在假定静水压力下的反分析；2—斑岩中边坡破坏的反分析（Hoek和Brey，1977）

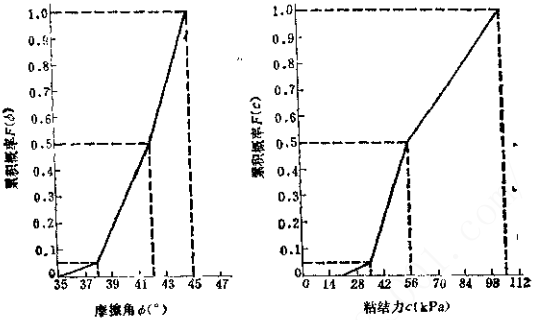
其他可能变量，包括氧化带和冲积层的岩土工程性质，均视作定值，因为对它们的特性有大量实际经验可以采用，就实用目的讲，可认为其确定性很小。

在双峰铜矿，强烈裂隙状的中生代沉积岩边坡，明显的破坏模式为似圆弧形破坏。裂隙和节理的发育程度，无论是预先存在的，还是开采引起的，对于所分析的岩体均是足够强烈的，且可视为连续的。

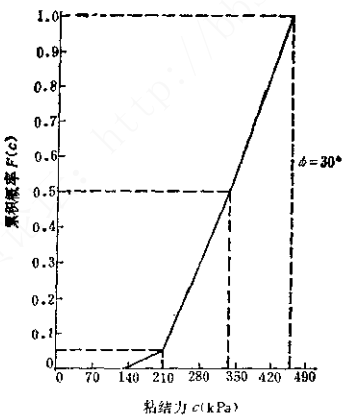
安全系数计算采用Bishop方法和Sarma方法。由于计算模型复杂，进行上千次迭代的蒙特卡洛模拟是不现实的。为此，提出所谓变换函数近似法予以处理。其具体分析步骤是：首先就下述三个变量：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

）岩体强度特性；（2）阻水墙与无阻水墙水文状态；（3）地下水压可能变化范围。分别对各组边坡几何形状进行敏



(a) σ:0～840kPa



(b) σ:770～2450kPa

图 3-7　岩体强度的不确定性描述

地信网论坛
BBS.3S001.COM

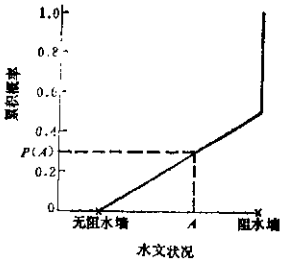


图 3-8 水文状况的不确定性描述

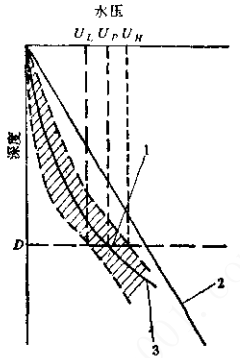


图 3-9 相应水文状态下水压不确定性描述

1—用预测压力U_P表示不确定范围；2—静水压线；3—模拟预测结果(相应于水文状态A)

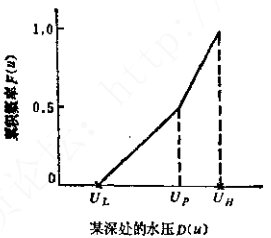


图 3-10 某深处水压值的概率分布

感性分析。通过一定数量的定数计算，分别求得各变量与安全系数之间的关系，即变换函数（图3-11），供作概率统计分析时模拟抽样用。变换函数的处理方法有二：一是以一条曲线拟合敏感性分析结果，然后在该曲线上抽样；二是在敏感性分析结果之间使用线性内插方法抽样。应当指出，一般需要进行足够数量的定

地信网论坛
BBS.3S001.COM

数分割，以便较精确地建立起变换函数，特别是在安全系数 $F_s \leqslant 1$的区段，应尽可能加密。

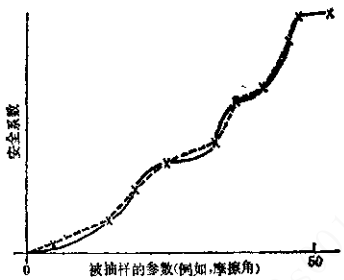


图 3-11 岩土工程模型的函数近似法
×敏感性分析结果；—拟合的函数关系；---线性内插近似曲线

然后，产生（0，1）区间均匀分布随机数，重复地在输入参数的累积分布上抽样，即对应每个抽样的概率值，便可以从累积概率分布上抽取相应的一个参数值，根据此参数值，在变换函数曲线上（图3-11）通过内插方法，相应地抽取一个安全系数样本。对每个变量均照此办理，则可得到任意多个安全系数样本，再经过统计分析，可求得不同边坡角、不同水文状态下安全系数的概率分布（图3-12）。应当强调指出，必须系统、均匀、随机地进行输入变量概率分布的抽样，可用产生的同一随机数抽取两个正应力范围的相关变量，例如粘结力值和摩擦角值。

在分析过程中，由于对分析方法本身以及对某些因素所作假定的怀疑，而引入了主观不确定性。据估计，安全系数的模拟值变化达10%。同样地，按照与其它输入变量同样的方式，以概率表达安全系数的修正系数（图3-13）。这样，通过把原安全系数分布乘上这个因子，便可求得修正的概率分布。实际上，这会增大破坏概率。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

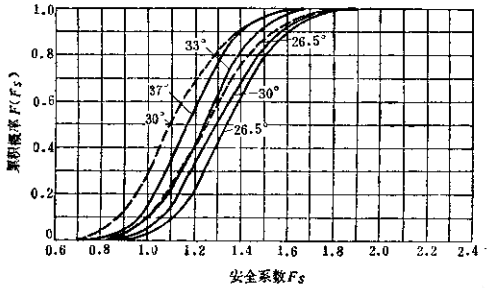


图 3-12 总体边坡安全系数分布
(实线表示降压排水边坡，虚线表示非排水边坡)

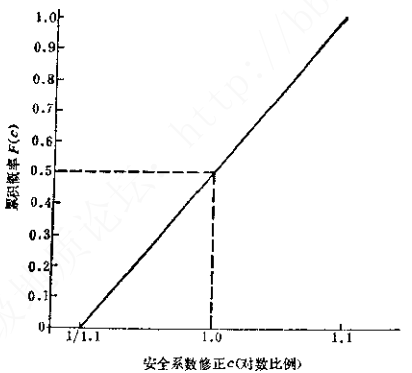


图 3-13 分析中造成安全系数不确定性的分布函数

最后，把中生代岩体在疏干降压和非疏干降压两种情况下的计算结果绘制成总体边坡可靠度曲线（图3-14），以便设计时使

地信网论坛
BBS.3S001.COM

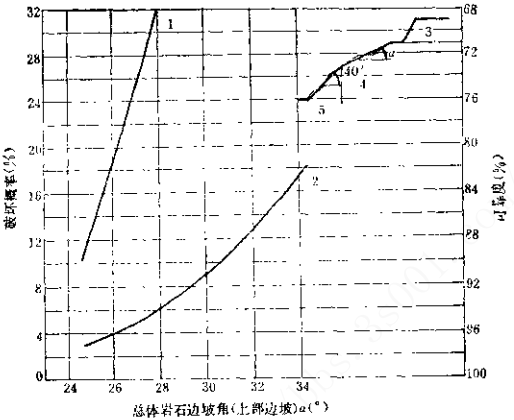


图 3-14 总体边坡的可靠性曲线

1—不疏干；2—疏干；3—冲积层；4—碎岩和长石砂岩；5—古生代地层

3.7.2 澳大利亚新南威尔士和昆士兰煤矿排土场

在澳大利亚的新南威尔士和昆士兰，许多露天煤矿的排土场设计采用可靠性分析方法，并进行了破坏概率的敏感性分析。

这里的排土场为坑内排土。有关排土场的研究表明，煤层底板即排土场基础近乎水平，且较软弱，往往沿其发生剪切位移，而在废石材料内部形成较陡的滑动面，滑体内部产生任一倾角的剪裂面，如此构成双楔体破坏模式（图3-15）。特别是当把软弱的、对水敏感的土石材料从坡顶堆放到坑底后，地下水积集使之饱和，更是增大了沿近乎水平的基底滑动的可能。

图3-16表示双楔体力系分析。假定在总体平均安全系数F_s适合于这两个楔体的情况下，两楔体处于力平衡状态。因此，沿每一

地信网论坛
BBS.3S001.COM

的抗剪强度为有效抗剪强度的$1/F_S$倍。用下式表示

$$\text{楔体间的力}P=P_1=-P_2$$

$$\text{抗剪阻力}S_i=(N_i\tan\phi_i+L_i c_i)/F_S$$

式中 c_i和ϕ_i分别为沿楔体第i基面天然含水状态时的粘结力和摩擦角；L_i为该基面长度。

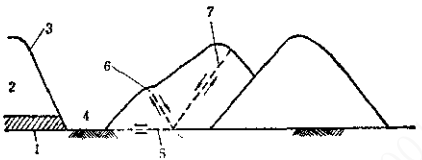


图 3-15 排土场的双楔体破坏

1—煤层；2—覆盖层；3—高边坡；4—采场；5—废石与基底的软弱界面；6—楔体界面；7—滑移后形成的陡崖

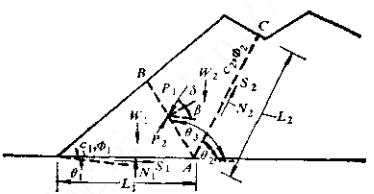


图 3-16 双楔体分析

楔体之间剪裂面上δ角的计算：

$$P\sin\delta=\frac{c_2 L_{AB}+P\cos\delta\tan\phi_2}{F_S}$$

在迭代的第1步，采用F_S和P的试验值。

通过代数处理，由上式可推导出楔体间作用力的表达式，最后可由二次方程式计算出安全系数：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$AF_s^2+BF_s+C=0$$

式中 $A=W_1\sin\theta_1\cdot\cos(\delta+\beta-\theta_2)+W_2\sin\theta_2\cos(\delta+\beta-\theta_1)$

$B=W\sin\theta_1\tan\phi_2\sin(\delta+\beta-\theta_2)-(L_1c_1+W_1\cos\theta_1\times\tan\phi_1)\cdot\cos(\delta+\beta-\theta_2)-W_2\sin\theta_2\tan\phi_1\sin\times(\delta+\beta-\theta_1)-(L_2c_2+W_2\cos\theta_2\tan\phi_2)\cos\times(\delta+\beta-\theta_1)$

$C=(L_1c_1+W_1\cos\theta_1\tan\phi_1)\tan\phi_2\sin(\delta+\beta-\theta_2)+(L_2c_2+W_2\cos\theta_2\tan\phi_2)\tan\phi_1\sin(\delta+\beta-\theta_1)$

因为δ角是基于F_s的试验值确定的，故可通过迭代法求解。采用方格搜索法，交替地增加A、B、C点的坐标，以寻求安全系数最小的临界双楔体破坏的形状。

由于计算安全系数F_s值所用数据如抗剪强度参数、孔隙水压参数等具有很大的不确定性，使之不可能非常精确地计算出真实的安全系数。因此，根据不确定性的系统分析，进行风险评价，借以改善传统的经验判断。

为了如实地反映排土场稳定性问题，应把抗剪强度参数视作随机变量，其包括基底材料的粘结力c_1和摩擦角ϕ_1；废石材料的粘结力c_2和摩擦角ϕ_2。废石容重γ假定为常数，因为容重变化对安全系数F_s和破坏概率p_f的影响均不重大，研究中所作的敏感性分析也证明了这一点。

根据在昆士兰各矿山所收集的抗剪强度指标（表3-11），粘

表 3-11 抗剪强度的统计参数

粘结力c (kPa)			摩擦角 ϕ(°)			地点
均值 μ_c	标准差 σ_c	变异系数 δ_c	均值 μ_ϕ	标准差 σ_ϕ	变异系数 δ_ϕ	
480	87	0.18	15	5.0	0.33	古涅拉10S边坡，斜坡道
335	108	0.32	12	1.8	0.15	古涅拉11S排土场，斜坡道
116	57	0.49	9	1.8	0.19	古涅拉6N排土场，斜坡道
312	81	0.26	11	1.7	0.15	南布莱克沃特，特兰排土场
48	19	0.39	9	1.3	0.14	特兰排土场基底接触面
123	25	0.20	16	2.9	0.18	特兰排土场基底

地信网论坛
BBS.3S001.COM

的变异系数分别取作35%和15%。由于样本量有限，随机变量的概率分布未经统计检验，而假定c和ϕ均服从正态分布，因为在ϕ值的实用范围（$0°\leqslant\phi\leqslant45°$）内，$\phi$值近似与$\tan\phi$成比例。

分析所用抗剪强度参数的限值为：

基底材料	$c_1=0\sim50\text{kPa}$
	$\phi_1=10°\sim30°$
废石材料	$c_2=50\sim200\text{kPa}$
	$\phi_2=15°\sim40°$

排土场的基本几何参数为：

排土场高度	38～80m
基底倾角	2°～8°
边坡角	30°～42°

模拟中，将抗剪强度分布划分不同的区段进行分层随机抽样，每段抗剪强度指标对应一条安全系数分布曲线。图3-17表示模拟次数$n=500$的安全系数频率分布曲线。为了考察模拟次数对安全系数或破坏概率的影响，模拟次数从100递增至1000，其模拟结果汇总于表3-12。结果表明，安全系数分布具有的偏度系数β_1（$=m_3/m_2^{3/2}$）近乎为0，峰度系数β_2（$=m_4/m_2^2$）近乎为3，按照Pearson分类，可视作正态分布或贝塔分布。图3-18表示模拟100次安全系数的频率分布。

由不同区段的抗剪强度指标的抽样，相应得到破坏概率对安全系数均值即中值安全系数曲线（图3-19）。可以看出，安全系数$F_S=1$时，相应破坏概率为50%，与预计值相同。实用的设计安全系数的选择应依据可接受的破坏概率值确定。表3-13列出该工程安全系数与破坏概率对应值的摘要。应当指出，这个摘要只对具体条件下的一次模拟成立，不能泛用，更不能认为安全系数与破坏概率之间存在一定规律的一一对应关系。

排土场基底的孔隙水压对破坏概率的影响很突出(图3-20)。在较高的平均水压（65kPa)情况下，引起平均安全系数的降低较

地信网论坛
BBS.3S001.COM

引起破坏概率的增加却很大。在疏干条件下，中值安全系数$F_s=1.150$的排上场，比未疏干条件下的安全系数只降低0.100，但破坏概率却增大3倍，达到25%。

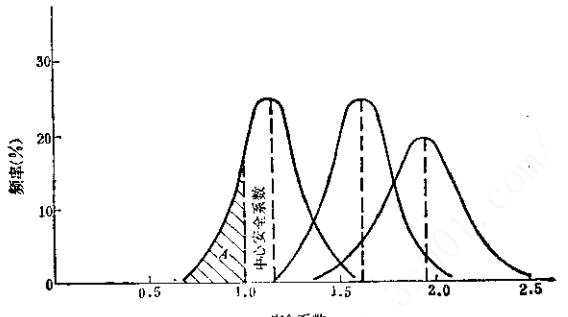


图 3-17 破坏概率的估计

$$\text{破坏概率}=\hat{P}(F<1.0)=\frac{\text{面积A}}{\text{曲线下总面积}}\text{，模拟次数500}$$

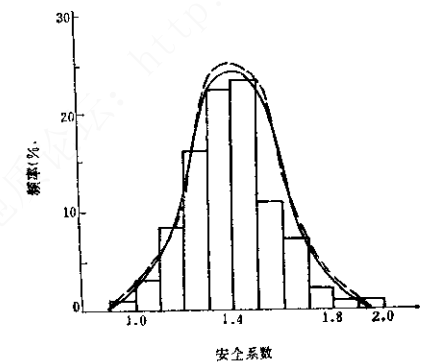


图 3-18 安全系数的频率分布
——正态分布；----贝塔分布

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-12 安全系数的统计参数

模拟次数 n	一阶矩 m_1	二阶矩 m_2	三阶矩 m_3	四阶矩 m_4	偏度系数 β_1	峰度系数 β_2
100	1.392	0.0284	0.0017	0.0028	0.367	3.585
200	1.392	0.0285	0.0025	0.0027	0.520	3.417
300	1.393	0.0286	0.0016	0.0025	0.330	3.165
400	1.401	0.0286	0.0018	0.0027	0.369	3.382
500	1.402	0.0310	0.0020	0.0032	0.374	3.334
600	1.392	0.0291	0.0008	0.0026	0.162	3.073
700	1.395	0.0289	0.0011	0.0026	0.226	3.198
800	1.394	0.0299	0.0012	0.0027	0.243	3.236
900	1.403	0.0313	0.0015	0.0032	0.274	3.233
1000	1.401	0.0316	0.0015	0.0033	0.278	3.287

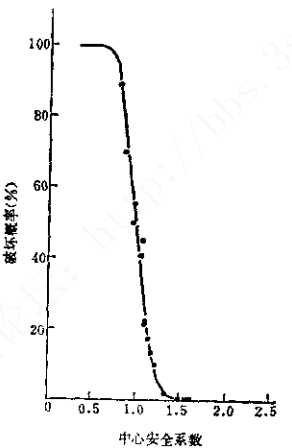


图 3-19 双楔体破坏概率对中值安全系数

排土场几何形状的调查表明，稳定的排土场，其安息角变化范围在31°和34°之间，平均33°，煤层倾角在排土场基底倾角变化，从3°到6°仍有边坡破坏。排土场高度、边坡角、基底倾角

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-13 平均安全系数及其相应破坏概率

破坏概率(%)	2.5	5	10	15
中值安全系数	1.35	1.25	1.20	1.15

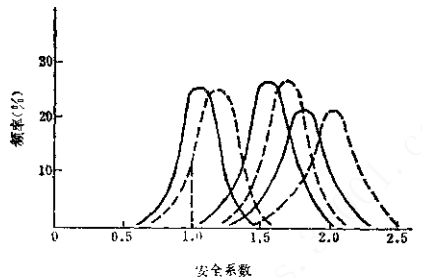


图 3-20 疏干和未疏干状态下边坡安全系数的频率分布
---- 疏干状态，$U=0$，—— 未疏干状态，$U=650$kPa，模拟次数500

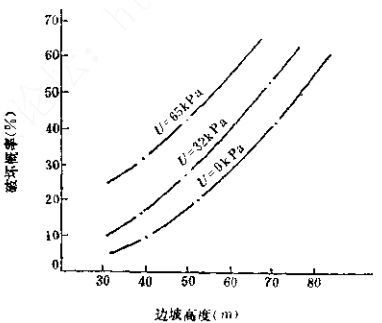


图 3-21 破坏概率-边坡高度变化（边坡角33°，基底倾角1.5°）

地信网论坛
BBS.3S001.COM

影响示于图3-21、3-22和3-23。从这些图中可以看出，当排土场高度超过50m、基底倾角大于3°、边坡角大于33°，破坏概率则在15%以上。

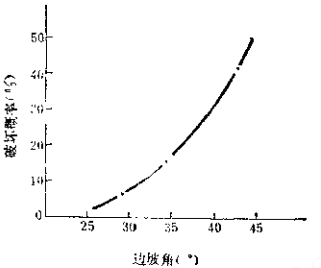


图 3-22 破坏概率-边坡角变化

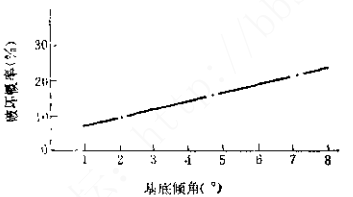


图 3-23 破坏概率-基底倾角变化

对于安全系数概率分布的假定，曾以正态分布和贝塔分布进行对比研究，研究结果表明，就排土场边坡而言，破坏概率比较高，其计算结果对所用概率分布的选择并不敏感，因为贝塔分布的中心区实际上近似于正态分布。而从经济因素考虑，在排土场实现很低的破坏概率也是不现实的设计目标。

3.7.3 尖山露天铁矿

3.7.3.1 边坡岩体结构与边坡设计方案

尖山铁矿体赋存于中太古界吕梁群袁家村组中上部的含铁变

地信网论坛
BBS.3S001.COM

质岩系中。控制矿区地层产状和边坡岩体结构的最主要构造是尖山向斜。尖山向斜走向NWW-SEE，呈倾伏状，西端翘起，较紧密，出露较老的石英片岩（AQ）、炭质片岩（AP）地层。其槽底呈波状向SEE倾伏，倾伏角5°～15°，且往SEE方向逐渐开阔，出露石英绢云母片岩（AM）等较新地层。尖山向斜东西长3000m以上，纵贯全矿区，南北宽约1000m，岩层产状与向斜轴基本相同，倾角变化在40°～80°之间，一般南翼较陡，北翼较缓。由于采矿场长轴方向与尖山向斜轴向基本一致，因此，决定了采场北帮、西端帮和南帮边坡岩体均为顺坡层状结构，而东端帮则为截切层面的层状结构。

构成边坡的主要岩体为石英片岩（AQ）、铁闪片岩（AT）、石英绢云母片岩（AM）、斜长角闪片岩（Mδ）等。岩层间均成假整合接触，接触面和层面连续贯通性强，片理发育。

尖山铁矿是一个未开采的基建矿山，原边坡设计方案从总体上讲，边坡可靠度基本上能满足可接受风险水平的要求，故以此作为基准方案即方案一。为了寻求最佳边坡设计方案，拟定了另外两个对比设计方案，即方案二：以原边坡设计方案为基础，探讨加陡边坡角2°～3°、降低剥岩量的边坡设计方案；方案三：在加陡边坡角的基础上，延深采场深度24m、增大回采矿量的边坡设计方案。三个边坡设计方案的分区几何参数、岩体结构特征见表3-14。

根据边坡岩体工程地质力学判断和破坏机理分析，认定该矿潜在破坏模式有二：顺层滑动-剪切破坏（设计区Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅴ、Ⅵ）和圆弧形破坏（设计区Ⅳ）。采用单纯形加速法确定安全系数最小即最危险破坏面的形状与位置（见4-4节），在此基础上进行随机模拟。

根据已确定的破坏模式，对于顺层滑动-剪切破坏，基于Sarma方法和余推力法建立极限状态方程；圆弧形破坏，基于Bishop方法建立极限状态方程。

3.7.3.2 基本变量

表 3-14 边坡设计方案的几何、结构特征

设计区	主要岩性	边坡岩体结构	设计区位置	总体边坡角(°) 方案一	总体边坡角(°) 方案二	总体边坡角(°) 方案三	边坡高度(m) 方案一	边坡高度(m) 方案二	边坡高度(m) 方案三
Ⅰ	石英片岩（AQ） 斜长角闪片岩（$M\delta$）；	顺坡层状结构	西端帮	34	34	34	384	384	408
Ⅱ	正长闪长岩（Σ） 斜长角闪片岩（$M\delta$） 铁闪片岩（AT） 石英片岩（AQ）	陡倾顺坡层状结构和块状结构	西北帮	43.6°	46	46	264	264	288
Ⅲ	铁闪片岩（AT） 石英片岩（AQ） 斜长角闪片岩（$M\delta$） 正常闪长岩	陡倾顺坡层状结构	东北帮	1.17	42.5	42.5	288	288	312
Ⅳ	第四系（Q） 铁闪片岩（AT） 石英片岩（AQ） 斜长角闪片岩（$M\delta$）	截切层状结构	东端帮	43.17	46	46	249	249	273
Ⅴ	石英片岩（AQ） 铁矿（Fe） 正长闪长岩（Σ）	陡倾顺坡层状结构	东南帮	35.83	38.5	38.5	264	264	288
Ⅵ	石英片岩（AQ） 铁闪片岩（AT）	陡倾顺坡层状结构	西南帮	43.26	46	46	231	231	255

地信网论坛 BBS.3S001.COM

地信网论坛
BBS.3S001.COM

抗剪强度参数、层面和岩体抗剪强度指标均取用现场大型原位剪切试验及室内不规则试块直剪试验的结果，其统计参数见表3-15和3-16。

表 3-15 层面抗剪强度

岩性	粘结力c(0.1MPa)		摩擦系数 $f=\tan\phi$	
	均值	标准差	均值	标准差
石英片岩 (AQ)	0.0970	0.1331	0.733	0.035
钙质片岩 (AT)	0.1396	0.1543	0.670	0.058
绿泥角闪片岩 (AH)	0.7954	0.3485	0.726	0.062
石英绢云母片岩 (AM)	0.5964	0.3641	0.662	0.026
斜长角闪片岩 (Mδ)	0.7277	0.3214	0.727	0.028
铁矿石 (Fe)	0.8443	0.7951	0.749	0.061
绢云母炭质片岩 (AP)	0.1717	0.5925	0.683	0.047

表 3-16 岩体抗剪强度

岩性	粘结力c(0.1MPa)		摩擦系数 $f=\tan\phi$	
	均值	标准差	均值	标准差
石英片岩 (AQ)	1.9190	0.3558	0.841	0.107
钙质片岩 (AT)	2.2060	0.4112	0.791	0.096
石英绢云母片岩 (AM)	1.7140	0.2153	0.778	0.101
斜长角闪片岩 (Mδ)	2.0230	0.3233	0.810	0.119
正长闪长岩 (Σ)	2.4330	0.3670	0.850	0.154
铁矿石 (Fe)	2.8790	0.3558	0.841	0.107
黄土 (Q)	0.1500		0.499	

经统计检验确认，粘结力和摩擦系数均服从正态分布。

A 层面倾角

层面倾角是顺坡层状结构边坡稳定性的最重要的控制因素。各设计区的层面倾角在平面与高程方向上均有较大变化，为客观地描述边坡面附近层面倾角的变化，确定其各部位的统计参数见表3-17。它们的概率分布类型检验结果表明，服从正态分布。

B 地下水

地下水主要为基岩裂隙潜水，地下水位埋深：在北帮约52m

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-17 层面倾角

设计区	标高 (m)	层面倾角(°) 均值	标准差	设计区	标高 (m)	层面倾角(°) 均值	标准差
Ⅰ	1752～1800	24.93	7.17	Ⅳ	1464～1512	59.20	6.38
	1704～1752	34.64	9.94		1416～1464	56.85	6.47
	1656～1704	29.49	6.43		1368～1416	51.98	4.25
	1608～1656	26.57	4.31	Ⅴ	1560 以上	56.55	6.36
	1560～1608	50.60	9.46		1512～1560	54.65	7.06
	1512～1560	31.04	6.94		1464～1512	52.71	5.65
Ⅱ	1656 以上	63.72	8.74		1416～1464	50.48	8.81
	1608～1656	57.99	7.81		1368～1416	36.04	4.68
	1560～1608	55.13	13.00	Ⅵ	1656 以上	65.36	3.52
	1512～1560	52.99	5.56		1608～1656	61.40	17.81
Ⅲ	1560 以上	66.38	4.61		1560～1608	56.02	7.27
	1512～1560	64.32	8.64		1512～1560	53.02	7.98

左右（标高1590～1667m）；在南帮约60～105m（标高1600～1650m）。由于宽厚直立的正长闪长岩墙以隔水体形式于采场中部横断，又把矿区水文地质条件分成东西两区，即西部包括设计区Ⅰ、Ⅱ、Ⅵ，东部包括设计区Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ。

在未来开采过程中，地下水位的状态变化，采用非稳定流有限元方法，分别按采场底标高1560、1512、1488、1464、1416、1392、1368、1344m模拟求得。在边坡可靠性分析中，把相应的水位值作为确定值参加计算。

从未来地下水溢出段高度（从相应采场底算起）看（表3-18），地下水对边坡稳定性产生较大影响的地段是采场东部（Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ区）1464m水平以下。

C 地震加速度

尖山铁矿位于山西地震带西侧，基本烈度为6度。为了考虑地震力的影响，采用统计概率模型进行了专门的地震危险性分析。地震危险性可以集中地用地震加速度a来描述，而加速度a又是地震发生的时间间隔（Δt）、震中距（r）和震级（m）的函数。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-18 地下水溢出高度(m)

采场底标高	设	计	区	
(m)	I	III	IV	V
1512	15.62			
1488		6.59		
1464		11.34	8.08	12.38
1416		17.65	20.49	24.47
1392		18.05	27.39	31.95
1368		25.34	57.37	55.95
1344		28.83	50.87	79.95

根据矿区200km范围内历史地震资料，求得矿区在未来T年内地震加速度的分布函数：

$$F(a)_T=1-\int_{M_0}^{M_u}f(m)Z[\varphi^{-1}(a_0,m)]\mathrm{d}mH(T+T_0)$$

$$=1-\int_4^8\frac{0.9173e^{-0.9173(m-4)}}{1-e^{-3.6652}}Z$$

$$\times(e^{-\frac{\lg a-2.387-0.844m}{0.874}-3})\mathrm{d}mH(T+1)$$

$$=1-\frac{1}{1.0267+6.0508/(T+1)}\int_4^8\frac{0.9173e^{0.9173(m-4)}}{1-e^{-3.6652}}$$

$$\times(-0.2454+4.7728\times10^{-3}e^{-\frac{\lg a-2.387-0.844m}{0.874}-3})\mathrm{d}m \tag{3-118}$$

式中 M_0为工作区内对工程有影响的地震震级下限，取$M_0=4$；M_u为工作区内历史地震震级的上限，取$M_u=8$；$f(m)$为震级概率密度函数，由Richter震级法则求得：

$$f(m)=\frac{\beta e^{-\beta(m-M_0)}}{1-e^{-\beta(M_u-M_0)}}=\frac{0.9173e^{-0.9173(m-4)}}{1-e^{-3.6692}}$$

β为回归系数；m为地震震级；T为计算年限；T_0为工作区内最后一次$m>M_0$的地震发生时间到计算起始年限之差；φ^{-1}

地信网论坛
BBS.3S001.COM

(a_0, m)为工作区内地震加速度衰减方程$a=\varphi(m,r)$在$a=a_0$)给定值)，$m=M_0$时的逆函数值；$Z(r)$为震中距分布函数，由拟合求得

$$Z(r)=-0.2454+4.7728\times10^{-3}r$$

$H(\Delta t)$为地震时间间隔分布函数，由拟合求得：

$$H(\Delta H)\approx\frac{1}{1.0267+6.05081/\Delta t}$$

在边坡可靠性分析中，以式 (3-118) 作为该矿区地震加速度分布函数，进行随机模拟。尖山矿区地震危险性分析结果列于表3-19。根据露天矿边坡的服务期限，取$T=50$年，其地震加速度的分布函数值列于表3-20，相应的分布曲线示于图3-24。

3.7.3.3 结果分析

三个边坡设计方案的蒙特卡洛模拟结果(模拟次数$N=5000$)示于表3-21和图3-25。现简要分析如下：

设计区Ⅰ：位于采场西端帮尖山向斜翘起端，构成边坡的主要岩体石英片岩的层面倾角（约34°）较缓，而设计边坡角也不陡于这一角度，因而，即使在总体边坡高达384 m，且在1608 m水平上下，层面直接截切边坡面，其各计算段边坡的破坏概率均小于9.961×10^{-4}。下部1560 m及1512 m水平的宽平台对总体边坡的稳定性也十分有利。从平面上看，由于端帮边坡弧形弯曲与地层弧形展布一致，该区北侧又有F_3断层切割，使该区的风险有所增加。

设计区Ⅱ：位于采场西北帮，因受强度高而完整性较好的正长闪长岩墙的控制，可靠性好。虽然总体边坡角由一方案的43.68°增至三方案的46.25°，高度达264～288 m，各计算段边坡的破坏概率均高于3.907×10^{-3}。从图3-25 (b) 的p_f-H变化曲线形状可直观看出，该区三个设计方案的全高边坡破坏概率大体上都随开采深度的增加而递增，且形态均匀，其中方案一为均匀边坡，相应的p_f-H曲线近似为直线，总体边坡的破坏概率2.326×10^{-4}，方案二和三的边坡面在1560 m水平略有转折，p_f-H曲线从该

表 C-19 地震危险性分析结果

a	时				间				(年)	
(cm/s²)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
10	0.4795	0.5886	0.6370	0.6642	0.6817	0.6939	0.7029	0.7098	0.7153	0.7197
20	0.1614	0.1982	0.2144	0.2236	0.2295	0.2336	0.2366	0.2389	0.2408	0.2423
30	0.0811	0.0996	0.1077	0.1123	0.1153	0.1174	0.1189	0.1200	0.1210	0.1217
40	0.0481	0.0590	0.0639	0.0666	0.0684	0.0696	0.0705	0.0712	0.0717	0.0722
50	0.0312	0.0383	0.0415	0.0433	0.0444	0.0452	0.0458	0.0462	0.0466	0.0469
60	0.0215	0.0263	0.0285	0.0297	0.0305	0.0310	0.0314	0.0318	0.0320	0.0322
70	0.0153	0.0188	0.0203	0.0212	0.0218	0.0222	0.0224	0.0227	0.0228	0.0230
80	0.0112	0.0138	0.0149	0.0155	0.0160	0.0162	0.0164	0.0166	0.0167	0.0168
90	0.0084	0.0103	0.0111	0.0116	0.0119	0.0121	0.0123	0.0124	0.0125	0.0126
100	0.0063	0.0078	0.0084	0.0088	0.0090	0.0092	0.0093	0.0094	0.0095	0.0095
110	0.0049	0.0060	0.0064	0.0067	0.0069	0.0070	0.0071	0.0072	0.0072	0.0073
120	0.0037	0.0046	0.0050	0.0052	0.0053	0.0054	0.0055	0.0055	0.0056	0.0056
130	0.0029	0.0035	0.0038	0.0040	0.0041	0.0042	0.0042	0.0043	0.0043	0.0043
140	0.0022	0.0027	0.0030	0.0031	0.0032	0.0032	0.0033	0.0033	0.0033	0.0033
150	0.0017	0.0021	0.0023	0.0024	0.0024	0.0025	0.0025	0.0025	0.0026	0.0026

地信网论坛 BBS.3S001.COM

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-20 地震加速度分布函数值（$T=50$）

a(cm/s²)	$F(a)$	a(cm/s²)	$F(a)$	a(cm/s²)	$F(a)$
10	0.3183	60	0.9695	110	0.9931
20	0.7705	70	0.9782	120	0.9947
30	0.8847	80	0.9840	130	0.9959
40	0.9316	90	0.9881	140	0.9968
50	0.9556	100	0.9910	150	0.9976

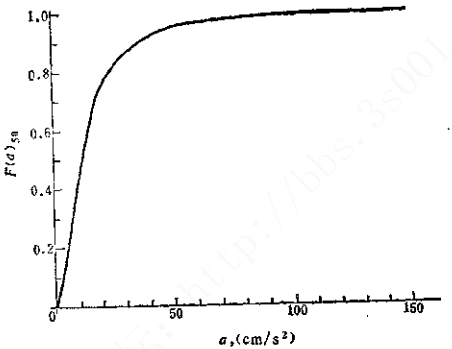


图 3-24 加速度概率分布曲线（$T=50$）

点始斜率也相应发生变化。方案二的总体边坡的破坏概率为1.395×10^{-3}，方案三为3.907×10^{-3}。总体上看，该区各设计方案的破坏概率较低。

设计区Ⅱ：位于采场东北帮，总体边坡角40.27°（方案一）至42.40°（方案三），在中值安全系数$F_{so}=1.2059$的情况下，总体边坡的破坏概率为2.507×10^{-4}。提高边坡角约2°后，方案二的总体边坡破坏概率为1.001×10^{-3}，再加大开采深度24 m后，方案三的总体边坡破坏概率为6.740×10^{-3}。可见，破坏概率对

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 3-21 蒙特卡洛模拟结果

设计区	计算标高 m	方案一			方案二			方案三		
		β	p_f	F_{SO}	β	p_f	F_{SO}	β	p_f	F_{SO}
I	1800～1872	5.550	1.485×10^{-8}	1.4413	5.550	1.485×10^{-8}	1.4413	5.550	1.485×10^{-8}	1.4413
	1608～1872	3.719	9.961×10^{-5}	1.2232	3.719	9.961×10^{-5}	1.2232	3.719	9.961×10^{-5}	1.2232
	1560～1872	3.803	7.235×10^{-5}	1.1982	3.803	7.235×10^{-5}	1.1982	3.803	7.235×10^{-5}	1.1982
	1512～1872	5.622	1.072×10^{-8}	1.2793	5.622	1.072×10^{-8}	1.2793	5.622	1.072×10^{-8}	1.2793
II	1650～1752	4.320	7.801×10^{-6}	1.6187						
	1560～1752	3.894	4.911×10^{-5}	1.3735	3.545	1.926×10^{-4}	1.3081	3.295	4.834×10^{-4}	1.2889
	1488～1752	3.508	2.328×10^{-4}	1.3158	2.991	1.395×10^{-3}	1.2682			
	1464～1752							2.657	3.907×10^{-3}	1.2213
III	1560～1632	5.242	9.960×10^{-7}	1.4830	3.080	1.035×10^{-3}	1.3601	3.013	1.264×10^{-3}	1.3986
	1416～1632	3.825	6.540×10^{-5}	1.3102	2.732	3.167×10^{-3}	1.1863	2.551	5.386×10^{-3}	1.1678
	1344～1632	3.479	2.507×10^{-4}	1.2059	3.088	1.001×10^{-3}	1.1693			
	1320～1632							2.471	6.756×10^{-3}	1.1578

续表 3-21

设计区	计算标高 m	方案一			方案二			方案三		
		β	P_f	F_{SO}	β	P_f	F_{SO}	β	P_f	F_{SO}
Ⅳ	1512～1593	2.933	1.677×10^{-3}	1.3881	2.572	5.083×10^{-3}	1.3758	2.539	5.543×10^{-3}	1.357
	1416～1593	3.100	9.681×10^{-4}	1.2340						
	1368～1593				2.810	2.477×10^{-3}	1.1800			
	1356～1593							2.464	6.947×10^{-3}	1.1676
	1314～1593	2.861	2.118×10^{-3}	1.1993	2.680	3.573×10^{-3}	1.1711			
	1320～1593							2.634	4.269×10^{-3}	1.1534
Ⅴ	1512～1608	4.113	2.066×10^{-5}	1.4051	4.231	1.168×10^{-5}	1.3791	4.077	2.252×10^{-5}	1.3833
	1476～1608	3.674	1.209×10^{-4}	1.4483	3.576	1.718×10^{-4}	1.4199	3.523	2.158×10^{-4}	1.3847
	1344～1608	4.285	8.539×10^{-6}	1.2712	3.890	5.012×10^{-5}	1.2280			
	1320～1608							2.799	2.555×10^{-3}	1.1711
Ⅵ	1656～1719	3.291	5.001×10^{-4}	1.4393	3.491	2.415×10^{-4}	1.4445	3.145	8.164×10^{-4}	1.4578
	1560～1719	3.590	1.650×10^{-4}	1.3800	2.989	1.395×10^{-3}	1.2893	2.892	1.926×10^{-3}	1.2758
	1488～1719	2.787	2.635×10^{-3}	1.3052	2.504	6.210×10^{-3}	1.2488			
	1464～1719							2.344	9.642×10^{-3}	1.2340

地信网论坛 BBS.3S001.COM

地信网论坛
BBS.3S001.COM

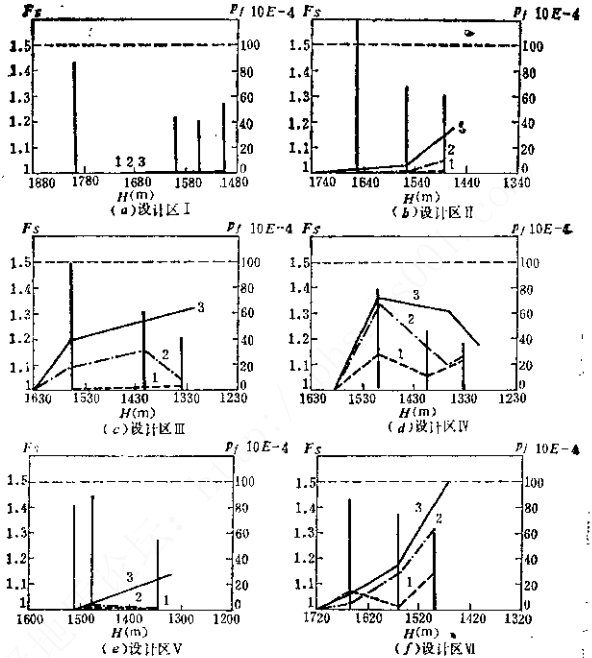


图 3-25 p_f-H变化曲线

1—方案一；2—方案二；3—方案三

开采深度和边坡角都较敏感。从图3-25（c）的p_f-H曲线来看，方案二和三在1416m水平的坡面转折点发生变化，且二方案（1416～1632m）段的p_f值高于总体边坡，达3.167×10^{-3}。总体上看，该设计区边坡可靠性相对较低，但经局部修改后，各设

地信网论坛
BBS.35001.COM

均在边坡设计允许的风险水平之内。

设计区Ⅳ：位于采场的东端帮，边坡呈逆坡或截切层状结构，为边坡可靠性有利因素。但该区岩体完整性差，且上部第四系（Q）和风化层累计达100m，地下水位亦较高，这些都是降低可靠性的因素。随着总体边坡角从43.17°(方案一)加陡到45.84°（方案三），边坡高度由249m（方案一）增至273m（方案三），总体边坡破坏概率均在10^{-3}量级内。从图3-25（d）可见，该区浅部边坡因岩体风化，其破坏概率普遍接近或高于总体边坡的破坏概率。方案二和三，风化层段边坡的破坏概率分别达5.083×10^{-3}和5.543×10^{-3}，因此，如采用这两者之一，存在发生小规模局部破坏的可能。

设计区Ⅴ：位于采场的东南帮，主要由石英片岩组成，最终边坡高度264～288m，各设计方案在该区的总体边坡角均不超过39°。因采矿工程的需要，在1476m水平附近留有数十米宽的平台，总体边坡相对较缓，下部边坡又有正长闪长岩墙出露，分析结果表明，各设计方案都有较高的可靠性，虽然在1476m水平以上边坡角达44°～46°，而破坏概率仍在10^{-4}以内。方案三的总体边坡破坏概率同样高于其它两方案，也只有2.255×10^{-3}。

设计区Ⅵ：位于采场的西南帮，主要由陡倾层状石英片岩构成。该区总体边坡有较高的破坏概率，三个设计方案依序为2.635×10^{-3}、6.210×10^{-3}、9.642×10^{-3}，但均在10^{-3}量级内。由图3-25(f)可见，各设计方案全高边坡破坏概率随边坡高程下降而增大。

综上表明，无论是设计方案一，还是方案二和三，各设计区边坡在爆破震动与地下水作用下，破坏概率均在10^{-3}量级以内，按照露天矿边坡设计允许风险水平，总体边坡可靠性均能满足设计要求。相比之下，方案三较之方案一提高边坡角2°～3°，降低早期剥岩量，延深采矿24m，多采矿石637.57万吨，显然是首推方案。

表3-21中的中值安全系数，为安全系数的统计均值，它与相同条件下的极限平衡分析结果极为接近。可以看出，在多数情况

地信网论坛
BBS.3S001.COM

F，中值安全系数与破坏概率呈单调递减关系，但也出现相反情况，由图3-25（d）明显可见。安全系数与破坏概率不存在一一对应的关系，只能表明在特定工程条件下，所选用的安全系数所承担的风险。为满足工程安全的需要，本工程同时采用允许安全系数$F_s \geqslant 1.15$、可接受破坏概率$p_f \leqslant 10\times10^{-3}$两个指标作为设计依据。图3-26示出总体边坡角对中值安全系数和破坏概率的敏感性分析结果。可以看出，在该设计区，边坡角取用47°时，其安全系数$F_s=1.19>1.15$，而破坏概率$p_f=11\%$，超过了可接受风险水平。就图3-26所示的特定边坡而言，以F_s曲线与p_f曲线交点所对应的总体边坡角46.3°较为适宜。

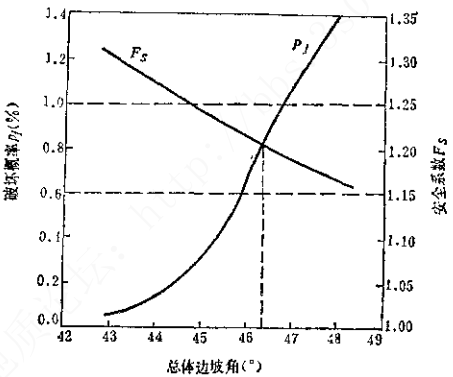


图 3-26　设计区Ⅱ边坡角敏感性分析

地信网论坛
BBS.3S001.COM

4 可靠指标法

4.1 概 述

在边坡可靠性计算中，由于边坡体受力情况比较复杂，状态变量众多且分布各异，极限状态方程往往是非线性的，采用蒙特卡洛模拟方法，不受分析条件的限制，不管极限状态方程是否线性，也不管分布是否服从正态分布，都可以简明地模拟出边坡系统的主要状态或特征，只要模拟次数足够多，就能得到一个相对精确的破坏概率值。但是，它需要预知各基本状态变量的分布形式和参数。当基本变量X_i（$i=1$，2，…，n）的概率密度未知，或者在概率密度函数复杂不易求其分布参数的积分时，可利用Taylor级数展开后忽略两次以上的项，只考虑它们的一阶原点矩（即均值）和二阶中心矩（即方差）这两个特征参数，近似地计算状态函数的均值和方差，求得可靠指标和破坏概率，故也称作一次二阶矩法。

如前所述，对于任何一个给定的边坡，其状态函数为n个基本变量的函数，即$Z=g(X)=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，而每种状态就是一组随机变量的实现，即$Z_i=g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$。换句话说，变量$Z_i$是$n$维基本变量空间$\Omega$的一个点。因此，极限状态面可定义于$n$维基本变量空间$\Omega$，极限状态面即用极限状态方程

$$Z=g(X)=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)=0 \qquad (4\text{-}1)$$

刻划的曲面，这个面上所有点的基本状态变量的组合结果$Z=g(X)=0$，它把基本变量空间划分为破坏域Ω_f和安全域Ω_s。破坏域包含导致破坏（即$g(X)\leqslant 0$）的一组基本变量的实现，安全域包含导致安全（即$g(X)>0$）的一组基本变量的实现，

地信网论坛
BBS.3S001.COM

即：

$$g(X)=\begin{cases}>0, & \text{当 } X\in\Omega_s \\ \leqslant 0, & \text{当 } X\in\Omega_f\end{cases} \tag{4-2}$$

这种方法的基本思路是把极限状态面变换到标准化正态分布空间U，假设极限状态面近似为一个超平面，该超平面为极限状态面距坐标原点最近的点的切平面，而从原点到该切点的距离则等于可靠指标β（图4-1和图4-2）。这样，问题得以简化，就仅仅需要验算极限状态面上一个点。

为了更直观地理解设计点和可靠指标的几何意义，请看下面两例。

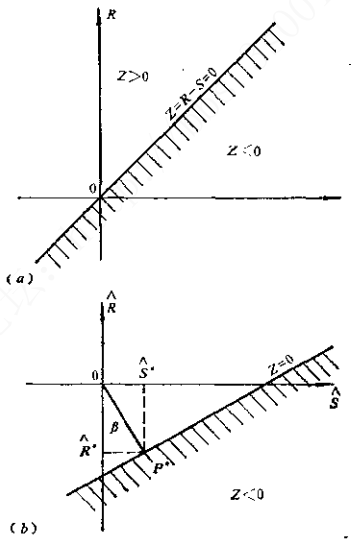


图 4-1 线性函数的极限状态面

(a) 基本变量空间；(b) 标准化正态空间

地信网论坛
BBS.3S001.COM

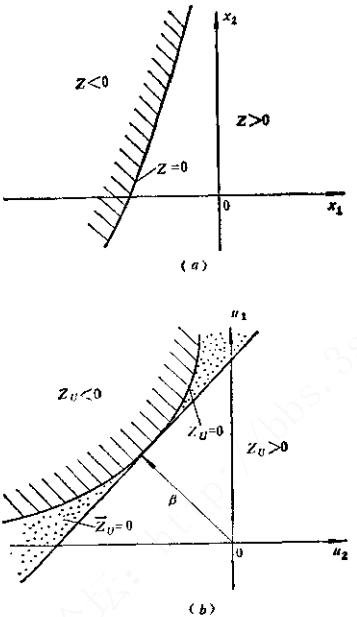


图 4-2　非线性函数的极限状态面
(a) 基本变量空间；(b) 标准化正态空间

例4-1　有一状态方程$Z=g(X)$，其中只含有一个基本变量X。如果取一组变量值（x_1，x_2，…，x_m），代入状态方程可求得相应的一组函数值（Z_1，Z_2，…，Z_m），绘成状态函数曲线如图4-3所示。

由图可见，在x^*处$Z=g(x^*)$值为零，极限状态边界就是一个点，而不是一条线或一个曲面。如果有若干个变量时，则

地信网论坛
BBS.3S001.COM

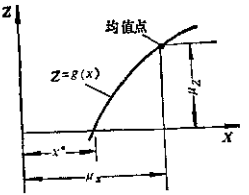


图 4-3 设计点的几何意义

$g(x^*)$ 是$g(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*)$，此处$x_1^*, x_2^*, \cdots, x_n^*$是$X_1, X_2, \cdots, X_n$的设计值。

例4-2 同例1-1，试确定这一体系的可靠指标。

解：如例1-1绘出极限状态曲线。绘制中，选定表示法向应力σ的标准差（20kPa）的长度与表示摩擦角ϕ的标准差（5°）的长度相等的坐标系。这样，图中平均值点（100，35°）到极限状态曲线的最小距离即等于可靠指标β（图4-4）。根据所选的坐标比例尺度，这一距离是以Z的标准差来度量的，求出为1.16，故该体系的可靠指标为1.16。

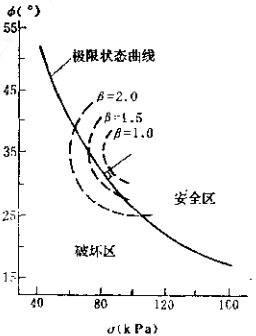


图 4-4 二维空间β的几何意义

地信网论坛
BBS.3S001.COM

对于非线性极限状态方程，涉及到偏导数的赋值问题，如果对状态函数在平均值处用Taylor级数展开即用平均值赋值，称之为中心点法。中心点法会带来较大的误差，因为由平均值所确定的坐标点位于安全区，而不是在极限状态曲面上。为此，而将Taylor展开式的点选在极限状态曲面上，并且只在破坏概率最大的这个点上，这个赋值点称为验算点，经过这样改进后的一次二阶矩法称为验算点法。本章重点介绍这两种方法。

可靠指标法是一种实用的近似概率设计法，它的应用，在土木工程和结构工程设计中被认为是代替部分安全系数的应用的一个有效方法，在露天矿边坡工程设计中，已开始进入实际应用阶段。由于这种方法概念清楚，计算简便，因此，必将在未来工程实践中广为接受，不断得以完善，发展成为一种富有生命力的方法。

4.2 中心点法

中心点法，首先由A.P.Ржаницын提出，后经C.A.Cornell(1969)定义正态分布随机变量模型，E.Rosenblueth和L.Estera(1972)定义对数正态分布随机变量模型。它的基本思想是：假定状态函数是基本变量的线性函数，在基本变量相互独立、且又均服从正态分布或对数正态分布情况下，可靠指标定义为

$$\beta = \frac{\mu_z}{\sigma_z}$$

式中 μ_z为状态函数Z的平均值；σ_z为状态函数Z的标准差。

在这种情况下，下面的关系式才成立：

$$p_f = \Phi(-\beta)$$

式中 p_f为破坏概率；$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

由于在分析时，对状态函数进行线性化处理，采用了Taylor级数在平均值（即中心点）处展开，故简称中心点法。

设状态函数Z为n个相互独立的随机变量X_i（$i=1, 2, \cdots,$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

n）的函数，即

$$Z=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$$

将函数$g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$按均值$\mu_{X_1},\ \mu_{X_2},\ \cdots,\ \mu_{X_n}$展开Taylor级数：

$$Z=g(\mu_{X_1},\ \mu_{X_2},\ \cdots,\ \mu_{X_n})+\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\mu_{X_i}\right)\times$$

$$\times\frac{\partial g}{\partial X_i}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(X_i-\mu_{X_i})\cdot(X_j-\mu_{X_j})$$

$$\times\frac{\partial^2 g}{\partial X_i\partial X_j}+\cdots \tag{4-3}$$

这里，各偏导数均在$\mu_{X_1},\ \mu_{X_2},\ \cdots,\ \mu_{X_n}$处取值。

取级数的线性项，得Z的一次近似均值和方差：

$$\mu_Z\simeq g(\mu_{X_1},\ \mu_{X_2},\ \cdots,\ \mu_{X_n}) \tag{4-4}$$

$$\sigma_Z^2\simeq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2\sigma_{X_i}^2+\sum_{i\neq j}^{n}\sum^{n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$$

$$\times\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial X_j}\right) \tag{4-5}$$

如果X_i和X_j对所有i和j均不相关（或相互独立），则式(4-5)可简化为

$$\sigma_Z^2\simeq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)^2\sigma_{X_i}^2 \tag{4-6}$$

求出μ_Z和σ_Z的近似值后，即可用式（1-38）计算可靠指标。

以上是把抗滑力R和滑动力S合并为一个函数$g(X_i)$，亦可把R和S分开，分别建立其为若干基本变量的函数形式，即

$$R=f_R(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n) \tag{4-7}$$

$$S=f_S(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_n) \tag{4-8}$$

然后，分别对式（4-7）和（4-8）作一次二阶矩处理，求得均值和方差：

$$\mu_R\simeq f_R(\mu_{X_1},\ \mu_{X_2},\ \cdots,\ \mu_{X_n}) \tag{4-9}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mu_S \approx f_S(\mu_{Y_1},\ \mu_{Y_2},\ \cdots,\ \mu_{Y_n}) \tag{4-10}$$

$$\sigma_R^2 \simeq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_R}{\partial X_i}\right)^2 \sigma_{X_i}^2 \tag{4-11}$$

$$\sigma_S^2 \simeq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_S}{\partial Y_i}\right)^2 \sigma_{Y_i}^2 \tag{4-12}$$

进而可以求得可靠指标β和破坏概率p_f(参见1.3.5节)。

例4-3 图4-5示出一个双块体边坡的几何形状，假定滑动面倾角已确定，即$\alpha_1=38°$，$\alpha_2=70°$，滑动面长度$l_1=70$m，$l_2=80$m，块体重力$G_1=68.55$MN，$G_2=24.84$MN。滑动面抗剪强度的统计量如表4-1所示：

表 4-1 滑动面抗剪强度统计量

滑动面	摩擦系数 $f=\tan\phi$		粘结力，c(MPa)		协方差，Cov(f,c) (MPa)
	$\overline{f}$	σ_f	$\overline{C}$	σ_C	
l_1	0.88	0.068	0.0892	0.0284	−0.0018
l_2	0.51	0.033	0.0965	0.0291	−0.0008

试用中心点法求其破坏概率。

采用余推力法，安全系数为

$$F_S=\frac{f_1(G_1\cos\alpha_1+P\sin\theta)+c_1l_1}{G_1\sin\alpha_1+P\cos\theta}$$

式中 $P=G_2(\sin\alpha_2-f_2\cos\alpha_2)-c_2l_2$；

$\theta=\alpha_2-\alpha_1$；

按上式，抗滑力可写成：

$$R=f_1(G_1\cos\alpha_1+P\sin\theta)+c_1l_1$$

滑动力可写成：

$$S=G_1\sin\alpha_1+P\cos\theta$$

根据式 (4-9) 和 (4-10) 有均值：

$$\mu_R=\overline{f_1}(G_1\cos\overline{\alpha_1}+\overline{P}\sin\overline{\theta})+\overline{c_1}l_1$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=59.05\text{MN}$$

$$\mu_S = G_1 \sin\overline{\alpha_1} + \overline{P}\cdot\cos\overline{\theta}$$

$$=51.81\text{MN}$$

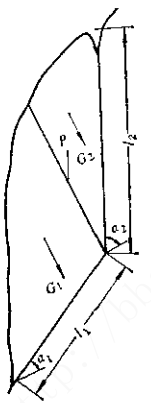


图 4-5 双块体边坡

根据式（4-11）和（4-12）求得方差：

$$\sigma_R^2 = \left(\frac{\partial R}{\partial f_1}\bigg|_{\mu_{f_1}}\right)^2\sigma_{f_1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)^2\sigma_{f_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial c_1}\bigg|_{\mu_{c_1}}\right)^2\sigma_{c_1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)^2\sigma_{c_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\bigg|_{\mu_{\alpha_1}}\right)^2\sigma_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\bigg|_{\mu_{\alpha_2}}\right)^2\sigma_{\alpha_2}^2$$

$$+2\,\frac{\partial R}{\partial f_1}\bigg|_{\mu_{f_1}}\frac{\partial R}{\partial c_1}\bigg|_{\mu_{c_1}}\mathrm{Cov}(f_1, c_1)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$+\frac{\partial R}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\frac{\partial R}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\mathrm{Cov}(f_2,c_2)$$

$$\sigma_S^2=\left(\frac{\partial S}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)^2\sigma_{f_2}^2+\left(\frac{\partial S}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)^2\cdot\sigma_{c_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}\bigg|_{\mu_{\alpha_1}}\right)^2\sigma_{\alpha_1}^2$$

$$+\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}\bigg|_{\mu_{\alpha_2}}\right)^2\sigma_{\alpha_2}^2+2\left(\frac{\partial S}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)$$

$$\times\left(\frac{\partial S}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)\mathrm{Cov}(f_2,\ c_2)$$

R与S的协方差：

$$\mathrm{Cov}(R,\ S)=\left(\frac{\partial R}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)\sigma_{f_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)\sigma_{c_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\bigg|_{\mu_{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}\bigg|_{\mu_{\alpha_1}}\right)\sigma_{\alpha_1}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\bigg|_{\mu_{\alpha_2}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}\bigg|_{\mu_{\alpha_2}}\right)\sigma_{\alpha_2}^2$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial R}{\partial c_2}\bigg|_{\mu_{c_2}}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial f_2}\bigg|_{\mu_{f_2}}\right)\mathrm{Cov}(f_2,\ c_2)$$

式中 $\overline{\theta}=\overline{\alpha_2}-\overline{\alpha_1}$；

$\overline{P}=G_2(\sin\overline{\alpha_2}-\overline{f_2}\cos\overline{\alpha_2})-\overline{c_2}l_2$；

$\dfrac{\partial R}{\partial f_1}\bigg|_{\mu_{f_1}}=G_1\sin\overline{\alpha_1}+\overline{P}\sin\overline{\theta}$；

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\left.\frac{\partial R}{\partial c_1}\right|_{\mu_{c_1}} = l_1;$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial f_2}\right|_{\mu_{f_2}} = -G_2 f_1 \sin\overline{\theta}\cos\overline{\alpha_2};$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial c_2}\right|_{\mu_{c_2}} = -\overline{f_1} l_2 \sin\overline{\theta};$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right|_{\mu_{\alpha_1}} = -f_1(G_1\sin\overline{\alpha_1} + \overline{P}\cos\overline{\theta});$$

$$\left.\frac{\partial R}{\partial \alpha_2}\right|_{\mu_{\alpha_2}} = \overline{f_1}[\overline{P}\cos\overline{\theta} + G_2\sin\overline{\theta}(\cos\overline{\alpha_2} + \overline{f_2}\sin\overline{\alpha_2})];$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial f_2}\right|_{\mu_{f_2}} = -G_2\cos\overline{\alpha_2}\cos\overline{\theta};$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial c_2}\right|_{\mu_{c_2}} = -l_2\cos\overline{\theta};$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha_1}\right|_{\mu_{\alpha_1}} = G_1\cos\overline{\alpha_1} + \overline{P}\sin\overline{\theta};$$

$$\left.\frac{\partial S}{\partial \alpha_2}\right|_{\mu_{\alpha_2}} = G_2[\cos(\overline{\theta}+\overline{\alpha_2}) + \overline{f_2}\cdot\sin(\overline{\theta}+\overline{\alpha_2}) + \overline{c_2}l_2\cdot\sin\overline{\theta}$$

故得

$$\sigma_R^2 = 6.3123 \quad \text{MN}$$

$$\sigma_S^2 = 3.1809 \quad \text{MN}$$

$$\mathrm{Cov}(R, S) = 1.7289 \quad \text{MN}$$

根据安全储备M_S的定义，求得M_S的均值μ_{M_S}：

$$\mu_{M_S} = \mu_R - \mu_S$$

$$= 59.05 - 51.81 = 7.24 \quad \text{MN}$$

M_S的方差$\sigma^2_{M_S}$考虑R与S的相关性，得

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\sigma_{M_S}^2=\sigma_u^2+\sigma_s^2-2\mathrm{Cov}(R,\ S)$$

$$=6.3123+3.1809-2(1.7289)$$

$$=6.0354\quad \mathrm{MN}$$

由式（1-40）求得破坏概率：

$$p_f=1-\Phi(\beta)=1-\Phi\left(\frac{\mu_{M_S}}{\sigma_{M_S}}\right)$$

$$=1-\Phi(2.95)=0.16\%$$

例4-4 一顺山坡人工填筑的土坡，土料为粘土，上覆砂砾石，其滑动面主要在粘土中通过，如图4-6所示。滑动弧半径$r=15$m，条块为8个，$b=10$m，土坡内的孔隙压力是由其稳定渗流网确定的。根据实测结果，上游水位155.5m，下游水位145.2m，水头差约10m。

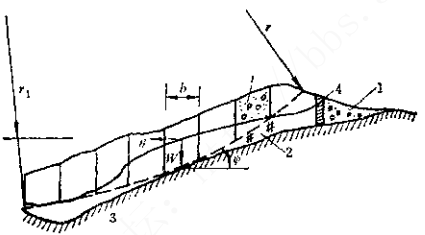


图 4-6 计算剖面

1—砂砾石；2—粘土；3—基岩；4—混凝土墙

根据《水工建筑物抗震设计规范》，土坡稳定的圆弧滑动法计算公式为

$$F_S=\frac{\sum_1^n\left\{cb\sec\Psi+(W\cos\Psi-\theta\sin\Psi-ub\sec\Psi)\tan\phi\right\}}{\Sigma\left(W\sin\Psi+\frac{\theta r_c}{r}\right)}$$

(4-13)

地信网论坛
BBS.3S001.COM

式中 $W=\gamma V$为条块在滑动面以上土体的自重；γ为土体的密度；$\theta=k_H c_z a_i W$为水平地震惯性力；k_H为水平地震系数，按规范取0.1；c_z为综合影响系数，按规范取0.25；a_i为地震加速度分布系数，取1.0；c和ϕ为土体在地震条件下的有效粘结力和有效内摩擦角；u为稳定渗流条件下作用于条块底面中点的孔隙水压力；V为条块的体积；其余符号见图4-6。

由式（4-13）得抗滑力矩M_R（对于某一条块）：

$$M_R=b\sec\Psi c+V(\cos\Psi-0.025\sin\Psi)\gamma f-b\sec\Psi u f \tag{4-14}$$

设

$$M_{R_1}=b\sec\Psi c$$

$$M_{R_2}=V(\cos\Psi-0.025\sin\Psi)\gamma f$$

$$M_{R_3}=b\sec\Psi u f$$

类似地，可得滑动力矩M_O：

$$M_O=\gamma V\left(\sin\Psi+0.025\frac{r_1}{r}\right) \tag{4-15}$$

取对数正态分布作为M_R和M_O概率密度分布函数的形式。设$\mu(M_R)$、$\mu(M_O)$分别为M_R和M_O的均值，$\mathrm{Var}(M_R)$、$\mathrm{Var}(M_O)$分别为M_R和M_O的方差，$\delta(M_R)$、$\delta(M_O)$分别为M_R和M_O的变异系数。由式（1-52）可得破坏概率：

$$p_f=1-\Phi\left\{\frac{\ln\left[\dfrac{\mu(M_R)}{\mu(M_O)}\sqrt{\dfrac{1+\delta^2(M_O)}{1+\delta^2(M_R)}}\right]}{\sqrt{\ln[(1+\delta^2(M_R))(1+\delta^2(M_O))]}}\right\}$$

假设$\ln(1+\delta^2)=\delta^2$，并取中值安全系数$\overline{F}=(\overline{M_R}/\overline{M_O})$的校正系数$N(M_R)$，则有

$$p_f=1-\Phi\left\{\frac{\ln(N(M_R)\overline{F})-\dfrac{1}{2}[\delta^2(M_R)-\delta^2(M_O)]}{\sqrt{\delta^2(M_R)+\delta^2(M_O)}}\right\}$$

本例中取$\overline{N}(M_R)=1.04$

由于滑动面大部分通过粘土，故计算公式中的抗剪强度参数值仅根据粘土指标取用。经计算，其统计参数为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$\overline{c}=0.1835\times 100\text{kPa}$　　$\overline{f}=0.4196$

$\mathrm{Var}(c)=0.448$　　$\mathrm{Var}(f)=0.00352$

$\delta(c)=0.36$　　$\delta(f)=0.1414$

容重γ的统计参数按粘土和砂砾石分别计算，求得：

粘土的浮容重　　$\overline{\gamma}_{土'}=0.96$

$$\mathrm{Var}(\gamma_{土'})=0.001743$$

$$\delta(\gamma_{土'})=0.0435$$

粘土的容重$\overline{\gamma}_{土}=1.85$，比重$G_{土}=2.70$

砂砾石的浮容重$\overline{\gamma}_{砂}=1.37$

砂砾石的容重$\overline{\gamma}_{砂}=2.29$，比重$G_S=2.68$

在本例中，随机变量有c，ϕ，γ，u，M_{R_1}，M_{R_2}，M_{R_3}，M_R，M_O和$(M_{R_2}-M_{R_3})$，其中c与ϕ是相关的，c与ϕ也可能与γ相关，而u与c、ϕ、γ则是不相关的。M_{R_1}中随机变量c，M_{R_2}中随机变量γ和ϕ，M_{R_3}中随机变量u，ϕ，故M_{R_2}、M_{R_2}与M_{R_3}均互相相关。M_O中随机变量为γ，故M_O与M_R也相关。求得相关系数如下：

$$\rho_1(M_{R_1},\ (M_{R_2}-M_{R_3}))=-0.41$$

$$\rho_2(M_{R_2},\ M_{R_3})=1$$

$$\rho_3(M_R,\ M_O)=0.544$$

$$\rho(c,\ f)=-0.42$$

$$\rho(c,\ \gamma)=0.0299\simeq 0$$

$$\rho(f,\ \gamma')=-0.532$$

由Taylor级数展开，并取一次近似，可得变量均值和方差：

抗滑力矩：

$$E(M_R)=E(M_{R_1})+E(M_{R_2})-E(M_{R_3})$$

$$\mathrm{Var}(M_R)=\mathrm{Var}(M_{R_1})+\mathrm{Var}(M_{R_2})+\mathrm{Var}(M_{R_3})-2\rho_2\sqrt{\mathrm{Var}(M_{R_2})\cdot\mathrm{Var}(M_{R_3})}+2\rho_1\sqrt{\mathrm{Var}(M_{R_1})}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}(M_{R_2})+\mathrm{Var}(M_{R_3})-2\rho_2\sqrt{\mathrm{Var}(M_{R_2})\,\mathrm{Var}(M_{R_3})}}$$

式中　$E(M_{R_1})=b\sec\Psi\cdot\overline{c}$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mathrm{Var}(M_{R_1})=(b\sec\Psi)^2\mathrm{Var}(c)$$

$$E(M_{R_2})=V(\cos\Psi-0.025\sin\Psi)\overline{\gamma}\ \ \overline{f}$$

$$\mathrm{Var}(M_{R_2})=[V(\cos\Psi-0.025\sin\Psi)]^2\overline{\gamma}\ \ \overline{f}\rho_{f,\gamma}\sqrt{\mathrm{Var}(f)\mathrm{Var}(\gamma)}$$

$$E(M_{R_3})=b\sec\Psi\,\overline{u}\ \ \overline{f}$$

$$\mathrm{Var}(M_{R_3})=(b\sec\Psi f)^2\mathrm{Var}(u)+(b\sec\Psi\overline{u})^2\mathrm{Var}(f)$$

滑动力矩：

$$E(M_O)=V\left(\sin\Psi+0.025\frac{r_1}{r}\right)\overline{\gamma}$$

$$\mathrm{Var}(M_O)=\left[V(\sin\Psi+0.025)\frac{r_1}{r}\right]^2\mathrm{Var}(\gamma)$$

各随机变量的均值和方差的计算结果如表4-2所示。

从而得整个滑动土体的M_O和M_R的方差为：

$$\mathrm{Var}(M_O)=\sum_{i=1}^{8}\mathrm{Var}(M_O)_i+\sum_{i\neq j}^{8}\sum^{8}\mathrm{Cov}(M_{Oi},M_{Oj})$$

$$=\sum_{i=1}^{8}\mathrm{Var}(M_O)_i+\sum_{i}^{8}\sum_{i+1}^{8}\sigma(M_{Oi})\sigma(M_{O(i+1)})$$

$$=818.27$$

$$\mathrm{Var}(M_R)=\sum_{i=1}^{8}\mathrm{Var}(M_R)_i+\sum_{i\neq j}^{8}\sum^{8}\mathrm{Cov}(M_{Ri},M_{Rj})$$

$$=2943.83$$

由此得变异系数如下：

$$\delta(M_R)=0.081,\ \ \delta(M_O)=0.053$$

求得中值安全系数：

$$\overline{F}=\overline{M}_R/\overline{M}_O=1.235$$

求得破坏概率：

$$p_f=1-\Phi(2.55)=0.0054=0.54\%$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 4-2 均值及方差计算

条块号	ϕ_i	u_i	W_i	$E(M_{i0})$	$E(M_{i1})$	$E(M_{i2})$	$E(M_{i3})$
1	6.85	0.14	140.39	20.11	18.47	58.20	0.59
2	10.69	0.23	164.28	34.33	18.66	67.41	0.93
3	14.58	0.35	207.95	57.16	18.95	83.89	1.51
4	18.53	0.70	188.96	64.33	19.34	74.54	3.69
5	22.59	2.50	193.22	73.54	19.86	74.07	11.39
6	26.76	4.59	215.00	101.43	20.54	79.53	21.14
7	31.10	1.50	221.46	118.97	21.42	78.36	7.35
8	35.65	0.00	105.70	63.74	22.57	35.39	0.00
				Σ538.58			

条块号	E (M_R)	Var (M_O)	Var (M_{R1})	Var (M_{R2})	Var (M_{R3})	Var (M_R)
1	76.18	1.81	45.44	7.87	0.00	37.80
2	85.10	5.35	46.39	10.59	0.01	38.70
3	101.33	12.21	47.83	14.88	0.04	40.41
4	90.79	16.02	49.83	11.96	0.19	41.47
5	82.58	21.28	52.55	11.14	2.58	45.23
6	78.93	24.26	56.19	10.62	8.94	54.09
7	92.44	26.73	61.19	9.23	1.08	52.27
8	57.96	7.49	67.84	1.86	0.00	60.49
	Σ665.8	总方差				总方差
		818.27				2943.83

中心点法的特点是可以直接给出可靠指标与随机变量统计参数之间的关系，计算简便，对于$\beta=1\sim2$的极限状态可靠度分析，尤为适用。

中心点法的主要问题是不能考虑随机变量的实际分布，因为它是基于正态分布或对数正态分布推导的，对于随机变量为其他类型分布，则不适用。并且，计算极限状态方程的均值μ_Z和方差σ_Z^2的式（4-4）和（4-5）或（4-6），都是在均值处（中心点）按Taylor级数展开的简化式，略去了二阶以上的项，因此，对非线性极限状态函数，运用这个方法将引起较大的误差。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

4.3 验算点法

在实际工程中，状态函数的基本变量往往不止两个，而且也不一定都服从正态或对数正态分布。为了使理论模型符合客观实际，R.Rackwitz和B.Fiessler提出了当量正态变量模型，并把极限状态函数推广到两个以上变量的非线性的更一般情况。这就是改进的二阶矩理论，或称验算点法。

这里，按以下四种情况来讨论：一是两个正态分布变量；二是多个正态分布变量；三是多个非正态分布变量；四是相关变量的处理，即从阐述验算点法的基本概念开始，逐步深入更复杂的分析和应用。

4.3.1 两个正态分布的变量

设R和S相互独立并服从正态分布，则极限状态方程为

$$Z=g(R,S)=R-S=0$$

对基本变量R、S作标准化变换：

$$r=\frac{R-\mu_R}{\sigma_R},\quad s=\frac{S-\mu_S}{\sigma_S} \tag{4-16}$$

这时，r和s为标准正态变量。在坐标系sor中，极限状态直线的倾角不再为45°，而是$\arctg\left(\frac{\sigma_R}{\sigma_S}\right)$，如图4-7所示。

由式（4-16）可得

$$\left.\begin{aligned}R&=\mu_R+r\sigma_R\\S&=\mu_S+s\sigma_S\end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

所以，极限状态方程为

$$r\sigma_R-s\sigma_S+\mu_R-\mu_S=0 \tag{4-18}$$

将式（4-18）两端同除以法线化因子$(-\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2})$，故可得：

$$r\times\frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}+s\times\frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}-\frac{\mu_R-\mu_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}=0 \tag{4-19}$$

这里，r和s的系数是极限状态直线上法线的方向余弦，即

地信网论坛
BBS.3S001.COM

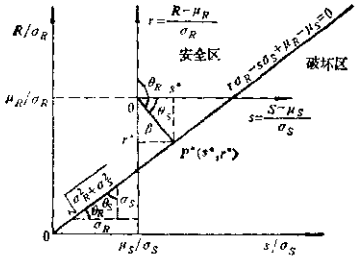


图 4-7　双变量坐标变换

$$\left.\begin{aligned}\frac{-\sigma_R}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}&=\cos(180-\theta_R)=-\cos\theta_R=-\alpha_R\\ \frac{\sigma_S}{\sqrt{\sigma_R^2+\sigma_S^2}}&=\cos\theta_S=\alpha_S\end{aligned}\right\}\tag{4-20}$$

式（4-19）中最后一项是常数，为法线长，从中心点法已知，此即β值。于是式（4-19）变成

$$-r\alpha_R+s\alpha_S-\beta=0\tag{4-21}$$

由图4-7可知，验算点P^*的坐标为

$$\left.\begin{aligned}r^*&=-\cos\theta_R\beta=-\alpha_R\beta\\ s^*&=\cos\theta_S\beta=\alpha_S\beta\end{aligned}\right\}\tag{4-22}$$

将其代入式（4-17），即回到原坐标系SOR中，则得

$$\left.\begin{aligned}R^*&=\mu_R-\alpha_R\beta\sigma_R\\ S&=\mu_S+\alpha_S\beta\sigma_S\end{aligned}\right\}\tag{4-23}$$

由于点P^*在极限状态直线上，故能满足极限状态条件，即

$$Z=g(R^*,S^*)=R^*-S^*=0\tag{4-24}$$

因此，在满足极限状态方程的各组R和S的取值中，P^*点是最有可能破坏的一组取值，因为这组取值算出的β值最小。

例4-5　同例1-1，试用验算点法计算这一体系的可靠指标

地信网论坛
BBS.3S001.COM

β。

解：根据Coulomb定律，对于粒状土有

$$\tau=\sigma\tan\phi$$

因此 $$Z=\sigma\tan\phi-\tau$$

或 $$Z=g(X_1,X_2,C)$$

式中 $X_1=\sigma$；$X_2=\phi$；$C=\tau=50\,\text{kPa}$。

（1）取设计点x^*初值为均值，即取

$$x_1^*=\mu_\sigma=100\text{kPa}$$

$$x_2^*=\mu_\phi=35^\circ=0.6109$$

（2）为了计算α_i^*，先计算

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)_*=\tan\phi=0.7003$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)_*=\sigma\cdot\sec^2\phi=149.0363$$

根据这些数据，得

$$\sigma_Z=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\times\sigma_{X_1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\times\sigma_{X_2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(0.7003\times20)^2+(149.0363\times0.0873)^2}$$

$$=19.11617$$

$$\alpha_{X_1}^*=\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_1}\right)\sigma_{X_1}}{\sigma_Z}=\frac{0.7003\times20}{19.11617}=0.7326$$

$$\alpha_{X_2}^*=\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial X_2}\right)\sigma_{X_2}}{\sigma_Z}=\frac{149.0363\times0.0873}{19.11617}=0.6806$$

（3）由式（4-23）计算新的x_i^*：

$$x_1^*=\mu_{X_1}-\alpha_{X_1}^*\beta\sigma_{X_1}$$

$$=100-0.7326\times20\times\beta=100-14.652\beta$$

$$x_{X_2}^*=\mu_{X_2}-\alpha_{X_2}^*\beta\sigma_{X_2}$$

$$=0.6109-0.6806\times0.0873\times\beta=0.6109-0.059\beta$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（4）根据状态方程，有

$$(100-14.652\beta)\tan(0.6109-0.059\beta)-50=0$$

解得$\beta=1.158549$，从而有新的x_i^*值：

$$x_1^*=100-14.652\times 1.158549=83.02411$$

$$x_2^*=0.6109-0.059\times 1.158549=0.54206$$

（5）继续进行第2次，第3次迭代，…，最后得到的β值与前次求得的β值之差$|e|\leqslant 10^{-6}$，这一数值已相当接近于零。因此，得可靠指标$\beta=1.156017$。

整个迭代过程与结果列于表4-3。

表 4-3 迭代验算过程

迭代次数	变量	假设x_i^*	σ_{X_i}	μ_{X_i}	$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$	$\alpha_{X_i}^*$	β	新的X_i^*
1	$X_1=\sigma$	100	20	100	0.7063	0.7326	1.158549	83.02411
	$X_2=\phi$	0.6109	0.0873	0.6109	149.0363	0.6806		0.54206
2	$X_1=\sigma$	83.02411	20	100	0.6922	0.7733	1.156057	82.12124
	$X_2=\phi$	0.54206	0.0873	0.6109	113.1358	0.63408		0.54691
3	$X_1=\sigma$	82.12124	20	100	0.60886	0.77821	1.156018	82.09757
	$X_2=\phi$	0.54691	0.0873	0.6109	112.564	0.62801		0.54752
4	$X_1=\sigma$	82.09757	20	100	0.60970	0.778827	1.156017	82.09326
	$X_2=\phi$	0.54752	0.0873	0.6109	112.4926	0.62724		0.54759

4.3.2 多个正态分布的变量

在边坡可靠性计算中，一般R和S都是若干基本随机变量的函数，因此，极限状态方程一般都是由两个以上的随机变量组成。对于包含有多个相互独立的正态基本变量X_1，X_2…，X_n时，则极限状态方程为

$$Z=g(X_1,X_2,\cdots,X_n)=0$$

引入标准化变量

$$x_i=\frac{X_i-\mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}},\quad i=1,2,\cdots,n$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

态空间，极限状态方程变成

$$Z=g(x_1\sigma_{X_1}+\mu_{X_1},\ x_2\sigma_{X_2}+\mu_{X_2},\cdots,x_n\sigma_{X_n}+\mu_{X_n})=0 \tag{4-25}$$

其表示一个非线性极限状态面，它把n维空间分成安全区$g(\cdot)>0$和破坏区$g(\cdot)<0$两部分。对于三维空间即三个正态变量的情况如图4-8所示。原点0到极限状态曲面的最短距离$\overline{OP}^*$则为可靠指标β值。

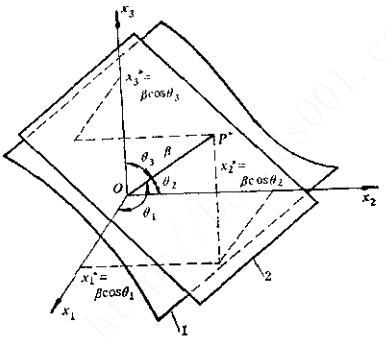


图 4-8　三维空间极限状态面
1—极限状态曲面；　2—过P^*点的切平面

将式（4-25）在P^*点展开为线性Taylor级数：

$$g(X_1,X_2,\cdots,X_n)\approx g(X_1^*,X_2^*,\cdots X_n^*)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*\times(X_i-X_i^*)=0$$

但是

$$X_i-X_i^*=x_i\sigma_{X_i}+\mu_{X_i}-(x_i^*\sigma_{X_i}+\mu_{X_i})=\sigma_{X_i}(x_i-x_i^*)$$

又

$$\frac{\partial g}{\partial X_i}=\frac{\partial g}{\partial X_i}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}X_i}\right)=\frac{1}{\sigma_{X_i}}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \simeq g(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* (x_i - x_i^*) = 0 \tag{4-26}$$

此即为切于P^*点的切平面方程，并以此切平面近似地代替非线性极限状态面。这样，极限状态面上到原点最小距离的点是最可能的破坏点。因而，在一定的近似意义上，可用这最短距离来度量可靠度。

将式(4-26)写成

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i - \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i^* + g(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*) = 0 \tag{4-27}$$

将式(4-27)除以法线化因子$\left[\sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2\right]^{1/2}$，得

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2\right]^{1/2}} - \frac{\sum_{i=1}^{n} -\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i^* + g(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*)}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2\right]^{1/2}} = 0 \tag{4-28}$$

式(4-28)常数项的绝对值为法线长，即原点至切平面的最短距离——β值：

$$\beta = \frac{-\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i^* + g(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*)}{\left[\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2\right]^{1/2}} \tag{4-29}$$

又因

$$\frac{\partial g}{\partial X_i} = \frac{\partial g}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}X_i}{\mathrm{d}x_i}\right) = \frac{\partial g}{\partial X_i}\sigma_{X_i}$$

故β值又可写成

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\beta=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*(X_i^*-\mu_{X_i})+g(X_1^*,X_2^*,\cdots,X_n^*)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*\sigma_{X_i}\right]^2}} \tag{4-30}$$

由于P^*在极限状态面上，故

$$g(X_1^*,\ X_2^*,\ \cdots,\ X_n^*)=0 \tag{4-31}$$

所以得

$$\beta=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i^*}{\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2\right]^{1/2}} \tag{4-32}$$

或

$$\beta=\frac{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*(X_i^*-\mu_{X_i})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*\sigma_{X_i}\right]^2}} \tag{4-33}$$

β值亦可由式(4-31)求出。

式(4-28)中x_i^*的系数为方向余弦，即

$$\frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2}}=\frac{-\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*\sigma_{X_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial g}{\partial X_i}\right)_*\sigma_{X_i}\right]^2}}=-\alpha_i \tag{4-34}$$

法线端点(验算点)坐标为

$$x_i^*=-\alpha_i\beta \tag{4-35}$$

回到原点坐标

$$X_i^*=\mu_{X_i}-\alpha_i\beta\sigma_{X_i} \tag{4-36}$$

由于验算点和β皆为未知，须用迭代法计算。计算步骤如下：

（1）假设$X_i^*(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$的初值，一般取$x_i^*=\mu_{X_i}$；

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（2）由式(4-34)计算α_i值；

（3）由式(4-36)得到x_i^*与β的关系式；

（4）由式(4-31)求β值；

（5）用第4步求得的β，代入第3步所得的x_i^*式内，求出x_i^*的新值；

（6）以新的x_i^*值重新进行第2至第4步的计算，如果所得的β值与上一次的β值之差等于或小于允许的误差，则计算结束，本次所求的β值即为所求的可靠指标。

计算程序如图4-9所示。

例4-6 边坡岩体由震旦纪砂质的云岩(SLS)、红色粘土层(SC)以及紫红色砂质岩(SQ)组成(图4-10)。边坡走向N80E，倾向SE，边坡角43°，边坡高度70m。红色粘土层走向与边坡平行，总体产状为N80°E/SE∠59°。边坡岩体为顺坡层状结构，且发育一组顺坡产出缓倾角节理，其平均产状为N70°E/SE∠30°，不甚贯通，截切层面。粘土岩层面与该组节理可能构成双滑面剪切破坏模式，前者为主动滑面，后者为被动滑面。

对此，块体安全系数为

$$F_S=\frac{f_1[G_1\cos\alpha_1+P\sin(\alpha_2-\alpha_1)]+C_1L_1}{G_1\sin\alpha_1+P\cos(\alpha_2-\alpha_1)}$$

式中 $P=G_2(\sin\alpha_2-f_2\cos\alpha_2)-C_2L_2$；$G_i$为块体重量；$f_i$为摩擦系数；$l_i$为块体基面长度。其它符号见图4-10。

取f_1，f_2，c_1，c_2，α_1，α_2为随机变量。其中，α_1和α_2据现场测定数据，f_1、f_2、c_1、c_2据实验室试验结果，假定它们均服从正态分布，各自统计参数见表4-4。

岩体容重$\gamma=2.7t/m^3$；块体重量$G_1=46669kN(4759t)$，$G_2=34274kN(3495t)$；块体基底长度$l_1=67.2m$，$l_2=96.8m$。

显然，状态方程为f_1，f_2，c_1，c_2，α_1和α_2六个基本变量的函数，其极限状态方程为：

$$g(f_1,\ f_2,\ c_1,\ c_2,\ \alpha_1,\ \alpha_2)$$
$$=f_1G_1\cos\alpha_1+f_1G_2\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

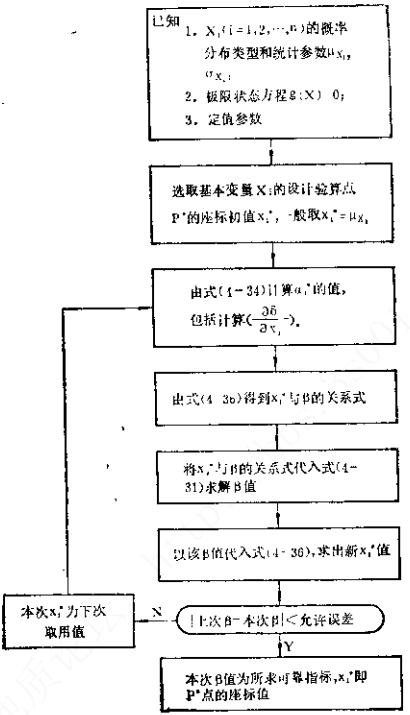


图 4-9　验算点法计算程序

表 4-4　随机变量的统计参数

变　量	f_1	f_2	c_1(kPa)	c_2(kPa)	α_1(°)	α_2(°)
μ	0.939	0.277	249.09	39.22	30°	59°08′
σ	0.123	0.01	84.34	4.90	7°15′	6°20′

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$-f_1f_2G_2\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)-c_2l_2f_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)+c_1l_1-G_1\sin\alpha_1-G_2\sin\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)+f_2G_2\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)+c_2l_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)=0 \tag{4-37}$$

计算步骤如下：

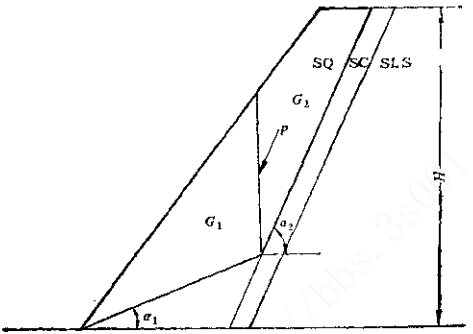


图 4-10　例4-6计算剖面

SLS—砂质白云岩；SC—红色粘土岩；SQ—紫红色砂质岩

（1）选取x_i^*的初值为均值，即

$$f_1=0.939$$
$$c_1=249.09\text{kPa}=25.4\text{t/m}^2$$
$$f_2=0.277$$
$$c_2=39.22\text{kPa}=4\text{t/m}^2$$
$$\alpha_1=30^\circ \qquad \alpha_2=59^\circ08'$$

（2）计算$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_1}\right)_*=G_1\cos\alpha_1+G_2\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)-f_2G_2\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)-c_2l_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)=5151.2$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial c_1}\right)_*=l_2=67.3$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\left(\frac{\partial g}{\partial f_2}\right)_* = -f_1G_2\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) + G_2\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) = 746.4$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial c_2}\right)_* = -l_2f_1\sin(\alpha_2-\alpha_1) + l_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) = 40.3$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_1}\right)_* = -f_1G_1\sin\alpha_1 - f_1G_2\sin\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) + f_1f_2G_2\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) + c_2l_2f_1\cos(\alpha_2-\alpha_1) - G_1\cos\alpha_1 - G_2\sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) + f_2G_2\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) + c_2l_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) = -9122.2$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \alpha_2}\right)_* = f_1G_2[\cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) + \sin\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)] - f_1f_2G_2[\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) - \sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)] - c_2l_2f_1\cos(\alpha_2-\alpha_1) - G_2[\cos\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) - \sin\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)] - f_2G_2[\sin\alpha_2\cos(\alpha_2-\alpha_1) + \cos\alpha_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)] - c_2l_2\sin(\alpha_2-\alpha_1) = 1672.9$$

(3) 将$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_*$值代入式(4-34)，则有

$$\alpha_{f_2}^* = (746.4\times0.01)/[(746.4\times0.01)^2 + (5151.2\times0.123)^2 + (40.3\times0.5)^2 + (67.3\times8.6)^2 + (1672.9\times0.1107)^2 + (-9122.9\times0.1265)^2]^{1/2} = 0.0001$$

$$\alpha_{f_1}^* = 0.0095$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

).0003

$\alpha_{c_1}^*=0.0086$

$\alpha_{a_2}^*=0.158$

$\alpha_{a_1}^*=0.987$

（4）由式(4-36)计算新的x_i^*值

$$f_2^*=\mu_{f_2}-\alpha_{f_2}^*\sigma_{f_2}\beta$$
$$=0.277-0.0001\times0.01\times\beta=0.277-0.000001\beta$$
$$f_1^*=\mu_{f_1}-\alpha_{f_1}^*\sigma_{f_1}\beta=0.939-0.00169\beta$$
$$c_2^*=\mu_{c_2}-\alpha_{c_2}^*\sigma_{c_2}\beta=4-0.00015\beta$$
$$c_1^*=\mu_{c_1}-\alpha_{c_1}^*\sigma_{c_1}\beta=25.4-0.0739\beta$$
$$\alpha_2^*=\mu_{a_2}-\alpha_{a_2}^*\sigma_{a_2}\beta=1.032-0.0175\beta$$
$$\alpha_1^*=\mu_{a_1}-\alpha_{a_1}^*\sigma_{a_1}\beta=0.524-0.1265\beta$$

（5）将以上x_i^*值代入式(4-37)，形成一β方程，解得$\beta=2.0123$。再将此β值代入第4步骤，从而有新的x_i^*值：

$$f_1^*=0.9370 \qquad f_2^*=0.2773$$
$$c_1^*=25.254 \qquad c_2^*=3.9996$$
$$\alpha_1^*=0.7750 \qquad \alpha_2^*=0.9969$$

（6）以这些新的x_i^*值代入式(4-34)，进行第2次迭代，重复上述步骤。直至第3次迭代解得$\beta=1.9979$，与第2次迭代解得$\beta=1.9978$相比，误差小于允许值即0.0001，故得可靠指标$\beta=1.9979$。

（7）根据$p_f=1-\Phi(\beta)$，求得破坏概率$p_f=0.0233=2.33\%$。同时，求得中值安全系数$F_0=1.549$。表明本工程在中值安全系数达到1.549情况下，仍有破坏概率$p_f=2.33\%$的风险。

下面，我们介绍Fiessler(1980)提出的一种迭代方法，其与标准化变量一起使用，更为方便。

若X_i为某一变量的特定值，这个变量的均值为μ_{X_i}，标准差为σ_{X_i}，则对应的标准化变量x_i由下式给出：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$x_i = \frac{X_i - \mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

一个标准化变量具有均值为0和标准差为1的特性，这意味着标准空间的坐标原点即为标准化变量的平均值点。此时，状态方程可表示为

$$Z = g(x) = g(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

因此，在点$x^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*)$处的线性近似为

$$Z \approx g(x_1^*,\ x_2^*,\ \cdots,\ x_n^*) + \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$$

并可简化为

$$Z = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_i^*)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$$

因为标准化变量的均值为0，故Z的均值为

$$\mu_Z \simeq \sum_{i=1}^{n}(\mu_{X_i} - x_i^*)\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} x_i^*\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* \tag{4-38}$$

而

$$\sigma_Z \simeq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*\sigma_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* \tag{4-39}$$

因为标准化变量的标准差为1。

由式(4-38)和(4-39)可得可靠指标β：

$$\beta = \frac{\mu_Z}{\sigma_Z} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^*\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*}{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*} \tag{4-40}$$

因此

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*[-(x_i^* - \alpha_i\beta)] = 0 \tag{4-41}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM
则对于所有 i 值，用标准化变量表示的解为

$$x^* = -\alpha_i \beta \tag{4-42}$$

从上列方程可见，从原点到x^*的距离即是可靠指标，可由下式得出：

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \tag{4-43}$$

Fiessler法的迭代步骤如下：

（1）建立状态方程$Z=g(x)$；

（2）导出$g(x)$的表达式；

（3）确定$g(x)$的所有一阶导数$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$的表达式；

（4）令$x=0$，$\beta=0$；

（5）计算所有的$\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*$值；

（6）计算$g(x)$；

（7）由下式算出Z的标准差：

$$\sigma_z = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2} \tag{4-44}$$

（8）用下式计算新的x值：

$$x = -\frac{\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*}{\sigma_z}\left\{\beta + \frac{g(x)}{\sigma_z}\right\} \tag{4-45}$$

（9）计算

$$\beta = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

(10) 重复步骤(5)到(9)直到数值收敛为止。

例4-7 同例4-5，以Fiessler法计算可靠指标。

解：（1）状态方程

$$Z = \sigma \tan\phi - \tau$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=g(X_1,\ X_2,\ C)$$

式中　　$X_1=\sigma$；$X_2=\phi$；$C=50\text{kPa}$

因此

$$Z=g(x)=X_1\tan(X_2)-50$$

即基本变量为：

	均　　值	标准差
X_1	100	20 (kPa)
X_2	35	5°(0.0873弧度)

（2）因　$X_1=\sigma_1x_1+\mu_{X_1}$；$X_2=\sigma_2x_2+\mu_{X_2}$，

因此

$$Z=g(x)=(x_1\sigma_1+\mu_{X_1})\tan(x_2\sigma_2+\mu_{X_2})-50$$

（3）求偏导数的表达式：

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_*=\sigma_1\tan(x_2\sigma_2+\mu_{X_2})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)_*=\sigma_2(x_1\sigma_1+\mu_{X_1})\sec^2(x_2\sigma_2+\mu_{X_2})$$

（4）令$x_1=x_2=0$，$\beta=0$

（5）则有

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_*=20\tan35°=14.004$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)_*=0.0873(100)\sec^2 35°=13.010$$

（6）$g(x)=100\times0.7002-50=20.02$

（7）$\sigma_z=\sqrt{14.004^2+13.010^2}=19.115$

（8）由式（4-45）求新x值：

$$x_1=\frac{-14.004}{19.115}\left(0+\frac{20.02}{19.115}\right)=-0.767$$

$$x_2=\frac{-13.010}{19.115}\left(0+\frac{20.02}{19.115}\right)=-0.713$$

（9）求β值：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\beta=\sqrt{0.767^2+0.713^2}=1.047$$

(10) 回到迭代过程第5步，将刚求得的 x_1，x_2 和 β 值代入。整个迭代过程如下表4-5：

表 4-5 迭 代 过 程

迭 代	x_1	x_2	β	$g(x)$
1	0.0	0.0	0.0	20.02
2	−0.767	−0.713	.047	1.74 6
3	−0.890	−0.740	1.157	−0.0177
4	−0.899	−0.727	1.156	−0.0018
5	−0.900	−0.725	1.156	0.0000
6	−0.900	−0.725	1.156	0.0000

故可靠指标 $\beta=1.156$，破坏概率 $p_f=\Phi(-\beta)=0.1182=11.82\%$。

边坡工程中用到的某些 ϕ 的函数相当复杂，对它们微分时，常会遇到麻烦。可以取 $\tan\phi$ 函数代替 ϕ 函数。

可以证明，如果

$$U=g(X)=g(X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n)$$

则

$$\sigma_U=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial X_i}\right)^2\sigma_{X_i}^2} \tag{4-46}$$

即 U 的一阶导数以 $X=\mu_{X_i}$ 赋值。如果 X 是一个单一变量，则有

$$\sigma_U=\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial X}\right)_{\mu_X}\sigma_X^2} \tag{4-47}$$

例4-8 某种土的摩擦用平均值为35°，标准差为 5°（=0.0857弧度）。求 $\tan\phi$ 的均值和标准差。

解：令 $Y=\tan\phi$

则 $\mu_Y=\tan(\mu_\phi)=0.7002$

$$\left(\frac{\partial Y}{\partial\phi}\right)=\sec^2(\mu_\phi)=1.490$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\sigma_V=\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial\phi}\right)^2\sigma_{X_\phi}^2}$$

$$=\sqrt{(1.49\times0.0875)^2}=0.1301$$

例4-9 用上述简化方法重新计算例4-7。

解：

$$Z=\sigma\tan\phi-\tau$$

$$=g(X_1,\ X_2,\ C)$$

式中 $X_1=\sigma$；$X_2=\tan\phi$；$C=\tau$

因此

$$Z=g(X)=X_1X_2-50$$

其基本变量为

	均值	标准差
X_1	100	20
X_2（据例4-8）	0.07002	0.1301

现

$$X_1=\sigma_1x_1+\mu_{X_1};\quad X_2=\sigma_2x_2+\mu_{X_2}$$

因此

$$g(x)=(x_1\sigma_1+\mu_{X_1})(x_2\sigma_2+\mu_{X_2})-50$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_*=\sigma_1(x_2\sigma_2+\mu_{X_2})$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)_*=\sigma_2(x_1\sigma_1+\mu_{X_1})$$

令 $x_1=x_2=0$；$\beta=0$，则

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}\right)_*=14.004;\quad \left(\frac{\partial g}{\partial x_2}\right)_*=13.01$$

$$g(x)=100\times0.7002-50=20.02$$

$$\sigma_2=\sqrt{14.004^2+13.01^2}=19.115$$

$$x_1=-\frac{14.004}{19.115}\left[0+\frac{20.02}{19.115}\right]=-0.767$$

$$x_2=-0.713$$

$$\beta=\sqrt{0.767^2+0.713^2}=1.047$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

现在，返回第5步继续迭代，并代入相应的x_1、x_2和p值。整个迭代结果如下：

表 4-6 迭 代 结 果

迭 代	x_1	x_2	β	$g(x)$
1	0.0	0.0	0.0	20.02
2	−0.767	−0.713	1.047	1.7416
3	−0.890	−0.740	1.157	−0.0177
4	−0.899	−0.727	1.156	−0.0018
5	−0.900	−0.725	1.156	0.0000
6	−0.844	−0.759	1.133	0.0000

得可靠指标$\beta=1.135$；破坏概率$p_f=12.8\%$。与例4-7精确p值为1.156相比，误差小于2%。

4.3.3 多个非正态分布的变量

在极限状态方程中，常包含非正态分布的基本变量。对于这种极限状态方程的可靠度分析，可用Rackwitz-Fiessler建议的改进一次二阶矩法，简称R-F法。它的基本概念是在引用二个或多个正态分布变量分析方法时，将非正态的随机变量先行“当量正态化”。当量正态化的条件是：（1）在设计验算点x_i^*处，当量正态变量X_i'（其均值为$\mu_{X_i'}$，标准差为$\sigma_{X_i'}$）的分布函数值$F_{X_i'}(x_i^*)$与原变量X_i（其均值为μ_{X_i}，标准差为σ_{X_i}）的分布函数值$F_{X_i}(x_i^*)$相等；（2）在设计验算点x_i^*处，当量正态变量概率密度函数值$f_{X_i'}(x_i^*)$与原变量概率密度函数值$f_{X_i}(x_i^*)$相等，如图4-11所示。在非正态变量当量正态化以后，即可用所求得当量正态的均值$\mu_{X_i'}$和标准差$\sigma_{X_i'}$替代原变量的均值μ_{X_i}和标准差σ_{X_i}，按正态分布变量情况进行计算。

由条件（1）得

$$F_{X_i'}(x_i^*)=F_{X_i}(x_i^*)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

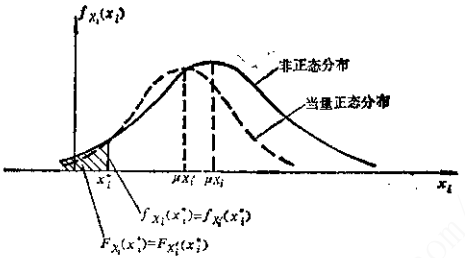


图 4-11　当量正态分布

或

$$\Phi\left(\frac{x_i^*-\mu_{X_i'}}{\sigma_{X_i'}}\right)=F_{X_i}(x_i^*) \tag{4-48}$$

亦可写成

$$\frac{x_i'-\mu_{X_i'}}{\sigma_{X_i'}}=\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)] \tag{4-49}$$

由此得当量正态分布的均值 $\mu_{X_i'}$：

$$\mu_{X_i'}=x_i^*-\Phi^{-1}[F_{X_i}(x_i^*)]\sigma_{X_i'} \tag{4-50}$$

式中　$\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态分布的反函数。

由条件（2）得

$$f_{X_i'}(x_i^*)=f_{X_i}(x_i^*)$$

或

$$\frac{\Phi\left(\frac{x_i^*-\mu_{X_i'}}{\sigma_{X_i'}}\right)}{\sigma_{X_i'}}=f_{X_i}(x_i^*) \tag{4-51}$$

亦可写成

$$\frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{X_i'}(x_i^*)]\}}{\sigma_{X_i'}}=f_{X_i}(x_i^*) \tag{4-52}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

于是，当量正态分布的标准差 $\sigma_{x_i'}$ 为

$$\sigma_{x_i'}=\frac{\phi\{\Phi^{-1}[F_{x_i}(x_i^*)]\}}{f_{x_i}(x_i^*)} \tag{4-53}$$

式中 ϕ 为标准正态概率密度函数。

从式（4-32）可知，$\mu_g\approx\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_* x_i^*$，$\sigma_g^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)_*^2$，而 $\beta=\mu_g/\sigma_g$。应当指出，对于验算点法，μ_g 和 σ_g 的一阶近似必须在极限状态面上的一点（验算点）进行计算。假如在均值（μ_{x_i}）处作一阶近似计算，将引起显著的误差，因为在均值处计算的比值 μ_g/σ_g 不是从标准化变量坐标原点到非线性极限状态面的最短距离；而且，对于等价的破坏条件（$R-S<0$）和（$R/S<1$），均值一阶近似将给出不同的可靠指标值。

例4-10 设某随机变量服从对数正态分布，其样本均值和方差分别为

$$\overline{X}=\mu_X=26.75,\quad S^2=\sigma_X^2=360.0$$

试求其当量正态分布的均值 $\mu_{x_i'}$ 和标准差 $\sigma_{x_i'}$。

解：以标准正态分布函数和密度函数来表示对数正态分布，即

$$F(x)=\Phi\left(\frac{\ln x-\lambda_X}{\xi_X}\right) \tag{4-54}$$

$$f(x)=\frac{1}{x\cdot\xi_X}\phi\left(\frac{\ln x-\lambda_X}{\xi_X}\right) \tag{4-55}$$

式中 $\Phi(\cdot)$——标准正态分布函数；

$\phi(\cdot)$——标准正态密度函数；

λ_X——参数：

$$\lambda_X=\ln\mu_X-\frac{1}{2}\xi_X^2 \tag{4-56}$$

ξ_X——参数：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\xi_X^2=\ln\left(1+\frac{\sigma_{\ln X}^2}{\mu_{\ln X}^2}\right) \tag{4-57}$$

由式（4-52）和（4-53）得

$$\sigma_X'=\frac{1}{f(x^*)}\phi\left\{\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\ln x^*-\lambda_X}{\xi_X}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{f(x^*)}\phi\left(\frac{\ln x^*-\lambda_X}{\xi_X}\right)$$

$$=x^*\xi_X \tag{4-58}$$

$$\mu_X'=x^*-\sigma_X'\Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{\ln x^*-\lambda_X}{\xi_X}\right)\right]$$

$$=x^*-x^*\xi_X\left(\frac{\ln x^*-\lambda_X}{\xi_X}\right)$$

$$=x^*(1-\ln x^*+\lambda_X) \tag{4-59}$$

由式（4-56）和（4-57）可解得

$$\lambda_X=3.08,\quad \xi_X=0.64$$

由式（4-58）和（4-59）可得

$$\sigma_X'=26.75(0.64)=17.12$$

$$\mu_X'=26.75[1-\ln(26.75)+3.08]$$

$$=21.23$$

例4-11 已知流入某尾矿库的峰值流量Q服从I型极值分布，其均值$\mu_Q=9146\text{m}^3/\text{d}$，变异系数$\delta=0.36$。试计算当量正态分布的均值$\mu_{Q'}$和标准差$\sigma_{Q'}$。

解：I型极值分布函数和概率密度函数为

$$F(x)=\exp\{-\exp[-a(X-u)]\}$$

$$f(x)=a\exp\{-a(X-u)-\exp[-a(X-u)]\}$$

上两式中的参数：

$$a=1.2825/\sigma=1.2825/(9146\times0.36)$$

$$=3.895\times10^{-4}$$

$$u=\mu_Q-0.5772/a=9146-0.5772/(3.895\times10^{-4})$$

$$=7664$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

在验算点上Q的分布函数和概率密度值为：

$$F(q^*)=\exp\{-\exp[-3.895\times10^{-4}(9146-7664)]\}$$
$$=0.5703$$
$$f(q^*)=3.895\times10^{-4}\exp\{-3.895\times10^{-4}\times(9146-7664)-\exp[-3.895\times10^{-4}\times(9146-7664)]\}$$
$$=1.247\times10^{-4}$$

根据式（4-50）和（4-53）有

$$\sigma_{Q'}=\frac{\phi\{\Phi^{-1}[F(q^*)]\}}{f(q^*)}$$
$$=\frac{\phi[\Phi^{-1}(0.5703)]}{1.247\times10^{-4}}=3149$$
$$\mu_{Q'}=q^*-\Phi^{-1}[F(q^*)]\sigma_{Q'}$$
$$=9146-3149\Phi^{-1}(0.5703)$$
$$=8589$$

4.3.4 相关变量的处理

可靠性分析的中心点法和验算点法都是基于极限状态方程中状态变量X_1，X_2，…，X_n是互不相关或相互独立的假定。对彼此相关的变量，可以将它们先变换为互不相关的变量，然后再运用上述方法求可靠指标和破坏概率。

考虑相关影响的方法是采用协方差矩阵将相关变量空间转换为不相关变量空间。协方差矩阵是表示相关变量之间相互关系的矩阵。假设原相关变量X_1，X_2，…，X_n，其协方差矩阵为

$$[C_X]=\begin{bmatrix}\mathrm{Var}(X_1) & \mathrm{Cov}(X_1,X_2) & \mathrm{Cov}(X_1,X_3)\cdots\mathrm{Cov}(X_1,X_n)\\ \mathrm{Cov}(X_2,X_1) & \mathrm{Var}(X_2) & \mathrm{Cov}(X_2,X_3)\cdots\mathrm{Cov}(X_2,X_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots \quad\cdots\quad \vdots\\ \mathrm{Cov}(X_n,X_1) & \mathrm{Cov}(X_n,X_2) & \mathrm{Cov}(X_n,X_3)\cdots\mathrm{Var}(X_n)\end{bmatrix} \tag{4-60}$$

主对角线上的元素由相关变量的方差$\mathrm{Var}(X_i)$组成，而非对角

地信网论坛
BBS.3S001.COM

其 i,j 的元素由相应的协方差Cov（X_i，X_j）组成。

对于变量X的n个统计样本值，X的方差为：

$$\mathrm{Var}(X)=E[(X-\mu_X)^2]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_X)^2}{n} \tag{4-61}$$

同样，如果Z是两个相关随机变量X和Y的函数，即$Z=g(X,Y)$，则对n个相关的统计样本，Z的协方差为：

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[X-\mu_X][Y-\mu_Y]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n} \tag{4-62}$$

相应的相关系数为

$$\rho_{X,Y}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} \tag{4-63}$$

式中 μ_X、μ_Y和σ_X、σ_Y分别为变量X和Y的均值、标准差。

空间变换是通过正交变换来实现的。这种方法的实质是要确定协方差矩阵的特征值和特征向量。特征值就是位于对角线上的元素，知道这些特征值以后，便可以求得相应的特征向量。

求特征值的方法很多，这里只叙述Jacobi方法。这个方法包含一个重复迭代的过程，通过依次消去非对角线上元素把矩阵变换成对角矩阵。这一过程从理论上讲可以无限地进行下去，但只要达到所要求的精度，即可停止计算。当矩阵成为对角阵形式后，矩阵的特征值即方差就是对角线上的元素。适合于利用计算机实现。

在空间变换过程中，原始变量定义的坐标轴依次变换为与协方差矩阵的特征向量相平行的坐标轴。

设一向量OA，它在一组坐标轴上有x_1和x_2两个分量（图4-12）。现在有一个新的坐标系，它与OX_1和OX_2的夹角为θ，则对于新坐标系，OA的分量为$\overline{x_1}$和$\overline{x_2}$。

从图4-12可以看到：

$$x_1=\overline{x_1}\cos\theta-\overline{x_2}\sin\theta$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

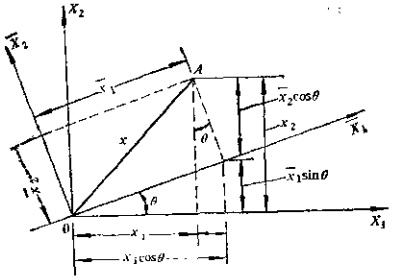


图 4-12 坐标轴转换法

$$x_2=\bar{x}_1\sin\theta+\bar{x}_2\cos\theta$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{bmatrix} \qquad (4\text{-}64)$$

这是形为$x=R\bar{x}$的一种关系。

根据特征方程：

$$Ax=\lambda x \qquad (4\text{-}65)$$

其中 A为一个方阵；x为一个列向量；λ是一个标量。满足方程（4-65）的λ值往往不止一个，这些值就称为矩阵A的特征根或特征值。对于每个不同的λ值，有不同的满足线性方程组的向量。这些向量称为矩阵A的特征向量。

现将式（4-64）代入式（4-65），有

$$AR\bar{x}=\lambda R\bar{x}$$

两边都乘上R的转置矩阵R^T，得到

$$R^TAR\bar{x}=\lambda R^TR\bar{x}$$

由于

$$R^TR=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

即单位矩阵。因此，

$$R^T A R\bar{x} = \lambda I\bar{x} = \lambda\bar{x} \tag{4-66}$$

把转换矩阵$R^T AR$用矩阵B表示，则

$$B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{4-67}$$

其中 $b_{11} = a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\sin^2\theta$

$b_{12} = a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin\theta\cos\theta(a_{22} - a_{11})$

$b_{21} = a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin\theta\cos\theta(a_{22} - a_{11})$

$b_{22} = a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta$

可以选择一个适当的θ值，使得非对角线上的元素b_{12}和b_{21}为零。这个θ值可以通过使b_{12}或b_{21}等于零得到。

$$a_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin\theta\cos\theta(a_{22} - a_{11}) = 0$$

因而，

$$\frac{a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta}$$

$$\frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}$$

故

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} \tag{4-68}$$

或写成通式形式：

$$\tan 2\theta = \frac{2a_{ij}}{a_{ii} - a_{jj}} \tag{4-69}$$

利用这个θ值，矩阵B成为：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \tag{4-70}$$

这里的b_{11}和b_{22}是矩阵A的特征值。

对于三阶以上的高阶矩阵，则不同的向量将有更多的分量。如果矩阵的非对角线元素每次消去一个而能逐次地消去，经过几次迭代后，可以最终得到对角矩阵B。

例4-12 求出矩阵A的特征值

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 6 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

解：选择一个适当的精度，如10^{-4}。

第1次迭代：选择一个具有最大绝对值的非对角元素，即$a_{12}=6$，则

$$\tan 2\theta=\frac{2a_{12}}{a_{11}-a_{22}}=\frac{2\times 6}{3-4}=-12$$

因此 $2\theta=85.24°$； $\theta=-42.62°$；

$\sin\theta=-0.6771$； $\cos\theta=0.7359$

建立旋转矩阵的步骤是：置$-\sin\theta$于a_{ij}；置$\sin\theta$于a_{ji}；置$\cos\theta$于a_{ii}和a_{jj}。因此，

$$R_1=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0.7359 & 0.6771 & 0 \\ -0.6771 & 0.7359 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

通过下列相乘，a_{12}被化为零。

$$R_1^{\mathrm{T}}[A]R_1=\begin{bmatrix} 0.7359 & -0.6771 & 0 \\ 0.6771 & 0.7359 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\times\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 6 & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7359 & 0.6771 & 0\\ -0.6771 & 0.7359 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

因此

$$B=\begin{bmatrix}-2.5208 & 0.0 & 0.7359\\ 0.0 & 9.5208 & 0.6771\\ 0.7359 & 0.6771 & 2.0\end{bmatrix}$$

第2次迭代：现在，其值最大的非对角线元素是a_{13}。

$$\tan 2\theta=\frac{2\times 0.7359}{-2.5208-2}=-0.3256$$

$$\sin\theta=-0.1567;\quad \cos\theta=0.9876$$

因此

$$R_2=\begin{bmatrix}0.9876 & 0 & 0.1567\\ 0.0 & 1 & 0.0\\ -0.1567 & 0 & 0.9876\end{bmatrix}$$

而B则为

$$B=\begin{bmatrix}0.9876 & 0 & -0.1567\\ 0.0 & 1 & 0.0\\ 0.1567 & 0 & 0.9876\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}-2.5208 & 0.0 & 0.7359\\ 0.0 & 9.5208 & 0.6771\\ 0.7359 & 0.6771 & 2.0\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}0.9876 & 0 & 0.1567\\ 0.0 & 1 & 0.0\\ -0.1567 & 0 & 0.9876\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2.6376 & -0.1061 & 0.0\\ -0.1061 & 9.5208 & 0.6687\\ 0.0 & 0.6687 & 2.1168\end{bmatrix}$$

全部过程需进行5次迭代使得非对角线元素的值等于或小于0.0001（见表4-7）。最终求得特征值是−2.6385，9.5816和2.5069。

地信网论坛
BBS.35001.COM

表 4-7　计算矩阵A特征值的迭代过程

n	矩阵			旋转矩阵		
1	3.0000	6.0000	1.0000	0.7359	0.6771	0.0000
	6.0000	4.0000	0.0000	−0.6771	0.7359	0.0000
	1.0000	0.0000	2.0000	0.0000	0.0000	1.0000
2	−2.5208	0.0000	0.7359	0.9876	0.0000	0.1567
	0.0000	9.5268	0.6771	0.0000	1.0000	0.0000
	0.7359	0.6771	2.0000	−0.1567	0.0000	0.9876
3	−2.6376	−0.1061	0.0000	1.0000	0.0000	0.0000
	−0.1061	9.5208	0.6687	0.0000	0.9960	−0.0892
	0.0000	0.6678	2.1168	0.0000	0.0892	0.9960
4	−2.6376	−0.1057	0.0095	1.0000	−0.0086	0.0000
	−0.1057	9.5207	0.0000	0.0086	1.0000	0.0000
	0.0095	0.0000	2.0569	0.0000	0.0000	1.0000
5	−2.6385	0.0000	0.0095	1.0000	0.0000	−0.0020
	0.0000	9.5816	−0.0001	0.0000	1.0000	0.0000
	0.0095	−0.0001	2.0569	0.0020	0.0000	1.0000
6	−2.6385	0.0000	0.0000			
	0.0000	9.5816	−0.0001			
	0.0000	−0.0001	2.5069			

在求得旋转矩阵之后，便可采用Jacobi法求特征向量。矩阵A的标准模态矩阵N就是用来确定矩阵A的特征值的旋转矩阵的乘积，即

$$N=R_1\cdot R_2\cdots R_n \tag{4-71}$$

而标准模态矩阵的列向量就是与特征值相对应的特征向量。如上例，其标准模态矩阵为

$$N=\begin{bmatrix} 0.7326 & 0.6784 & 0.0559 \\ -0.6621 & 0.7292 & -0.1727 \\ -0.1579 & 0.0895 & 0.9834 \end{bmatrix}$$

而相应于特征值−2.6385的特征向量为

$$\begin{bmatrix} 0.7326 \\ -0.6621 \\ -0.1579 \end{bmatrix}$$

相应于特征值9.5816的特征向量为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\begin{bmatrix} 0.6784 \\ 0.7292 \\ 0.0895 \end{bmatrix}$$

等等。

根据熟知的线性代数的定理，一组不相关的变量可由下列变换得到：

$$Y = N^T X \tag{4-72}$$

式中 $X=\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$；$Y=\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_n\}$ 是所求的互不相关的变量；N^T 为转置模态矩阵。

因 Y 为随机变量 X_1，X_2，…，X_n 的线性函数

$$Y = a_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \tag{4-73}$$

所以，随机变量 Y 的平均值 $E[Y]$ 可按下式计算：

$$E[Y] = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i E[X_i] \tag{4-74}$$

至此，得到一组等效的、经变换的不相关变量 Y_1，Y_2，…Y_n，再将这些不相关变量标准化，即

$$y = \frac{y - \mu_Y}{\sigma_Y} \tag{4-75}$$

便得到一组与原始变量 X_1，X_2，…，X_n 相对应的不相关的标准化变量 y_1，y_2，…，y_n。据此便可计算可靠指标。

例4-13 进行一组土剪切试验，给出土的容重 γ 和相应的摩擦角 ϕ 如下：

$X_1(\gamma$, kN/m³)	18.0	18.8	19.2	19.4	19.5	19.7	20.1	20.2
$X_2(\phi$, 度)	33.3	33.5	34.8	33.1	36.8	35.4	35.5	37.0

由此得出：

$$\mu_\gamma = 19.36;\ \sigma_\gamma^2 = 0.511;\ \sigma_\gamma = 0.72$$

$$\mu_\phi = 34.52;\ \gamma_\phi^2 = 77.164;\ \sigma_\phi = 8.78$$

$$\mathrm{Cov}(\gamma, \phi) = 4.442;\ \rho = 0.707$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

将相关变量X_1和X_2处理成不相关变量Y_1和Y_2。

首先，建立协方差矩阵：

$$C_X=\begin{bmatrix}0.511 & 4.442\\ 4.442 & 77.164\end{bmatrix}$$

按上述方法，将此矩阵变换成对角矩阵

$$B=\begin{bmatrix}0.2544 & 0\\ 0 & 77.42\end{bmatrix}$$

与之相应的标准模态矩阵为：

$$N=\begin{bmatrix}0.9983 & 0.0577\\ -0.0577 & 0.9983\end{bmatrix}$$

相应于X_1和X_2的不相关变量Y_1和Y_2，可由式(4-72)求得：

$$Y_1=0.9983X_1-0.0577X_2，\ 其\sigma_{Y_1}=\sqrt{0.2544}$$
$$=0.504$$

$$Y_2=0.0577X_1+0.9983X_2，\ 其\sigma_{Y_2}=\sqrt{77.42}$$
$$=8.80$$

则

$$E[Y_1]=0.9983E[X_1]-0.0577E[X_2]$$
$$=0.9983\times19.36-0.0577\times34.52=17.34$$
$$E[Y_2]=0.0577\times19.36+0.9983\times34.52=35.58$$

按式（4-75）进行标准化变换，得

$$y_1=\frac{0.9983X_1-0.0577X_2-17.34}{0.504}$$
$$=1.8487X_1-0.1145X_2-34.405$$

$$y_2=\frac{0.0577X_1+0.9983X_2-35.58}{8.80}$$
$$=0.00656X_1+0.1134X_2-4.043$$

解这两个方程得到

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$X_1=0.503y_1+0.508y_2+19.37$$
$$X_2=-0.032y_1+8.786y_2+34.61$$

例4-14 有一极限状态方程为

$$Z=50+5X_1-4X_2-2X_3+X_4$$

变量值为：

变 量	均 值	标 准 差
X_1	15	3.5
X_2	10	3.0
X_3	15	2.5
X_4	5	1.5

已知变量X_1、X_2和X_3是相关变量，且协方差矩阵为：

$$\begin{array}{c} \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12.25 & -5 & 2 \\ -5 & 9 & -4 \\ 2 & -4 & 6.25 \end{bmatrix} \end{array}$$

求该系统的可靠指标：（1）假定没有相关影响；（2）考虑相关影响。

解：

（1）假定不相关

用标准化变量表示Z，则有

$$Z=50+5(y_1\sigma_1+\mu_1)-4(y_2\sigma_2+\mu_2)$$
$$-2(y_3\sigma_3+\mu_3)+(y_4\sigma_4+\mu_4)$$
$$=50+5(3.5y_1+15)-4(3y_2+10)$$
$$-2(2.5y_3+15)+(1.5y_4+5)$$

求β的迭代过程为：

	y_1	y_2	y_3	y_4	β	$g(y)$
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	60.0
2	−2.20	.51	0.63	−0.19	2.75	0.0
3	−2.20	1.51	0.63	−0.19	2.75	0.0

地信网论坛
BBS.35001.COM

考虑相关

采用Jacobi法将协方差矩阵转换为对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} 17.220 & 0 & 0 \\ & 6.198 & \\ 0 & 0 & 3.112 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}=4.150 \\ \sigma_{Y_2}=2.490 \\ \sigma_{Y_3}=1.764 \end{bmatrix}$$

相应的标准化模态矩阵N为

$$N=\begin{bmatrix} 0.7144 & 0.6660 & 0.2147 \\ -0.6054 & 0.4343 & 0.6670 \\ 0.3510 & 0.6065 & 0.7134 \end{bmatrix}$$

因此

$$Y_1=0.7144X_1-0.6054X_2+0.3510X_3$$
$$E[Y_1]=9.927$$
$$Y_2=0.6660X_1+0.4343X_2-0.6065X_3$$
$$E[Y_2]=5.285$$
$$Y_3=0.2147X_1+0.6670X_2+7134X_3$$
$$E[Y_3]=20.592$$

故

$$y_1=\frac{0.7144X_1-0.6054X_2+0.3510X_3-9.927}{4.150}$$

$$=0.172X_1-0.146X_2+0.085X_3-2.392$$
$$y_2=0.267X_1+0.174X_2-0.244X_3-2.102$$
$$y_3=0.122X_1+0.378X_2+0.404X_3-11.673$$

用矩阵形式表示，有

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\begin{bmatrix} y_1+2.392 \\ y_2+2.102 \\ y_3+11.673 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.172 & -0.146 & 0.085 \\ 0.267 & 0.174 & -0.244 \\ 0.122 & 0.378 & 0.404 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

对矩阵求逆，得

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.965 & 1.662 & 0.380 \\ -2.511 & 1.078 & 1.179 \\ 1.454 & -1.511 & 1.275 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1+2.392 \\ y_2+2.102 \\ y_3+11.673 \end{bmatrix}$$

代入极限状态方程，最终得到

$$Z=60+21.96y_1+7.072y_2-5.33y_3+1.5y_4$$

求β的迭代过程为：

	y_1	y_2	y_3	y_4	β	$g(y)$
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	60.00
2	−2.34	−0.75	0.57	−0.16	2.53	0.0
3	−2.31	−0.73	0.57	−0.16	2.53	0.0

可以看出，当考虑相关影响时，可靠指标值为2.53，而忽略相关影响时，可靠指标略有增加，为2.75。

4.4 实例分析

可靠指标法在我国尖山铁矿边坡设计中得以成功的应用，有关边坡岩体工程地质条件和基本变量的统计参数详见第3章3·7·3节。这里，主要介绍实际工程应用中的几个关键步骤。

4.4.1 极限状态方程的建立与可靠指标的求解

地信网论坛
BBS.35001.COM

极限状态衡准则，安全系数$F=1.0$即边坡处于极限平衡状态，因而，安全储备可定义为$Z=F-1.0$。在具有m个基本变量$X(X_1, X_2, \cdots, X_m)$情况下，极限状态方程可表达为：

$$Z=F(X_1, X_2, \cdots, X_m)-1=0 \qquad (4\text{-}76)$$

设基本变量X是具有均值μ_{X_i}和标准差σ_{X_i}的正态分布随机变量，且其标准化变量为

$$t_i=\frac{x_i-\mu_{X_i}}{\sigma_{X_i}}$$

因此，设计验算点

$$x_i^*=\mu_{X_i}+t_i^*\sigma_{X_i} \qquad (4\text{-}77)$$

选择设计验算点$x_i^*(i=1, 2, \cdots, m)$作为线性化点，把极限状态方程(4-76)在某点x_i^*附近用Taylor级数展开，近似地取一次项，得

$$Z=F(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)+\sum_{i=1}^{m}(X_i-x_i^*)\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}-1 \qquad (4\text{-}78)$$

由于设计验算点就在极限状态面上，那里$F(x_1^*, x_2^*, \cdots, x_m^*)-1=0$，因此，其均值

$$\mu_Z=\sum_{i=1}^{m}(\mu_{X_i}-x_i^*)\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*} \qquad (4\text{-}79)$$

将式(4-77)代入式(4-79)，则有

$$\mu_Z=-\sum_{i=1}^{m}t_i^*\sigma_{X_i}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*} \qquad (4\text{-}80)$$

其标准差则为

$$\sigma_Z\approx\left[\sum_{i=1}^{m}\sigma_{X_i}^2\left(\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\right)^2\right]^{1/2} \qquad (4\text{-}81)$$

故可靠指标β为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\beta=\frac{\mu_Z}{\sigma_Z}=\frac{\sum_{i=1}^{m}t_i^*\sigma_{X_i}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}}{\left[\sum_{i=1}^{m}\sigma_{x_i}^2\left(\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{4-82}$$

为了使β值最小，将式（4-82）对X_i求导，可得

$$\beta_i=\frac{t_i^*}{\alpha_i} \quad 或 \quad t_i^*=\alpha_i\beta_i \tag{4-83}$$

将式（4-83）代入式（4-77）得

$$x_i^*=\mu_{X_i}-\alpha_i\beta_i\sigma_{X_i} \tag{4-84}$$

式中

$$\alpha_i=\frac{\sigma_{X_i}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}}{\left[\sum_{i=1}^{m}\sigma_{X_i}^2\left(\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\right)^2\right]^{1/2}} \tag{4-85}$$

式（4-84）和式（4-76）组成（$m+1$）方程组。若x_i^*为破坏密度最大概率点，则有$\beta_1=\beta_2=\cdots=\beta_m$。如果$x_i^*$和$x_i^*+\Delta x_i^*$均在极限状态面上，则要满足

$$\sum_{i=1}^{m}\Delta x_i^*\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}+F(x_i^*)-1=0 \tag{4-86}$$

$$\beta_i+\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\Delta x_i^*=\beta \tag{4-87}$$

令

$$b_i=\left(\frac{\partial\beta_i}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}=\frac{1}{\alpha_i\sigma_i} \tag{4-88}$$

则

$$\beta_i+b_i\Delta x_i^*=\beta \tag{4-89}$$

将式（4-89）代入式(4-86)，得

$$\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}(\beta_i-\beta)\alpha_i\sigma_{X_i}+F(x_i^*)-1=0 \tag{4-90}$$

由此可得基本迭代公式

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\beta=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\beta_i\frac{1}{b_i}-F(x_i^*)+1}{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}\cdot\frac{1}{b_i}} \tag{4-91}$$

具体求得步骤如下：

（1）假定一组初始验算点值，取$x_i^*=\mu_{X_i}$，$(i=1,2,\cdots,m)$；

（2）由状态函数式（4-77）求出$F(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_m^*)-1$；

（3）对所有X_i求$\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}$，由式（4-85）求得$\alpha_i$，由式（4-88）求得$b_i$，由式（4-83）求得$\beta_i$；

（4）由迭代公式（4-91）求得β，由式（4-89）求出Δx_i^*；

（5）令$x_i^*=x_i^*+\Delta x_i^*$并代入式（4-77），若$F(x_i^*)-1\neq 0$，则重复步骤（2）～（4），直至$F(x_i^*)-1=0$，则所求得β为可靠指标，x_i^*为破坏密度最大概率点。

4.4.2 状态函数求导

由式（4-91）可知，其关键是求$\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}$，而稳定性计算较精确的求解方法，如Bishop法、Janbu法、Sarma法等，本身呈隐函数形式需用迭代求解，这就难以直接计算$\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}$。为此，采用数值求导方法，其三节点求导公式为：

$$\left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{x_i^*}=\frac{F(x_i^*+\Delta x_i)-F(x_i^*-\Delta x_i)}{2\Delta x_i} \tag{4-92}$$

式中 Δx_i为基本变量X_i的求导增量。

计算结果表明，采用3节点、5节点和7节点进行数值求导，结果相差甚小，对最终结果几乎没有什么影响，为计算简便，采用了节点求导。而求导中增量Δx_i的选取对求导结果影响很大，这是因为安全系数计算本身不是完全的精确解。Δx_i过

地信网论坛
BBS.3S001.COM

小，求出的误差增大；Δx_i过大也不符合数值求导的要求。通过对一组Δx_i的试算，我们认为，能使安全系数在10^{-2}量级产生变化的Δx_i是合适的。

4.4.3 危险破坏面的优化求解方法

在既定的边坡几何形状下，任何假定的破坏面总存在一个与之相应的安全系数值F_S和一个与之相应的破坏概率p_f。而且，在所考虑的全部破坏面中，存在一个安全系数最小$F_{S(\min)}$或破坏概率最大$p_{f(\max)}$的最危险破坏面。由于基本状态参数是随机变量，并具有离散的性质，所以，相应的最危险破坏面的位置并非确定。但是，在边坡稳定性问题中，把破坏面位置固定而产生的影响并不大，采用基本变量的均值确定相应最小安全系数的破坏面，作为可靠性分析的破坏面，完全可以满足工程精度要求。

4.4.3.1 边坡岩体结构特点及破坏模式

构成边坡的地层主要为吕梁群袁家村组中上部含铁沉积变质岩层。与边坡破坏机理有关的结构特点是：

（1）弯曲层面的连续性。在沉积变质过程中，受特定构造应力作用，岩层多产生褶皱，挠曲等连续的塑性变形，由于构造应力分布和边界约束，以及岩石组成和力学性质的差异，在岩层弯曲、错动、连续位移过程中形成高一级构造形态之上，往往又叠加上次一级的褶曲、柔皱，或呈舒展状，或呈紧闭状，它们的共同特点是岩层相对连续、贯通，这就决定了对稳定性起着控制作用的潜在破坏面的特定形态。

（2）软硬相间的互层性。沉积变质岩层的原岩，在建造过程中，由于沉积四次间沉积矿物组成的差异，造成成岩后的软硬互层。在经受变质作用时，软弱岩层更是敏感的表现出矿物蚀变和形态弯曲的特征。由于软弱岩层比较厚，一般为数米或数十米，因此，在评价它们对稳定性影响时，不是视作单一软弱面，而应把整个软弱岩层作为一个潜在破坏带加以考虑。

（3）层面多重的成序性。沉积变质岩层，特别是软弱岩层，多是由数十层乃至更多近乎平行的单个岩层组成，其层间距

地信网论坛
BBS.35001.COM

一般数厘米，由于在同一地质时期，同一地质环境中形成，又处在相邻的空间位置，因此，层面强度参数必然具有一定的相关性。而且，可能构成破坏面的层面具有一定的随机性，就是说，在构成潜在破坏带的整个软弱岩层中，可能有一个破坏概率最大或安全系数最小的层面。

（4）层面形态的变化性。构成潜在破坏面的层面，弯曲形态强烈变化，这样，潜在破坏面在形态变化性的基础上，再加上抗剪强度的不确定性，不但造成潜在滑体局部安全系数的差异，还决定着总体边坡的破坏概率。

由于边坡岩体结构主要为顺坡层状结构（设计区Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅴ、Ⅵ）和截切层状结构（设计区Ⅳ），因此，相应的可能破坏模式为顺层滑动-剪切破坏和圆弧形剪切破坏。

4.4.3.2 顺层滑动-剪切破坏面的优化求解方法

根据岩层结构作如下假定：

（1）直接构成边坡的或临近边坡的岩层接触面和软弱层面可能成为上部顺层滑动的破坏面。考虑到地层的厚度、延深的连贯性及层面强度指标，基于工程判断，本矿边坡上部滑动面一般通过石英片岩（AQ）和铁闪片岩（AT）。

（2）矿区经过详细勘探和补充勘探后，地层的空间形态基本上得以比较准确的控制，因此，从宏观上可以认为软弱地层的上下界限是确定的。由于我们承认层理面的连续性，故层理面的较大起伏形态主要受地层水平厚度变化的影响，就是说，某一层面的延深形态可以用有限个点l_i连接的折线来描述，如图4-13所示，a_i表示软弱层底界限，b_i表示软弱岩层顶界限，其中$i=1, 2, \cdots, m$，构成滑动面的层面上各点坐标为：

$$l_1(x_{l_1}, y_{l_1}),\ l_2(x_{l_2}, y_{l_2}),\ \cdots,\ l_m(x_{l_m}, y_{l_m})$$

计算中，相应每个点l_i的y_{l_i}坐标（$y_{l_1}, y_{l_2}, \cdots, y_{l_m}$）分别视作常量，即$x_{l_i}$在$y_{l_i}$水平上平移。于是，在软弱岩层内，变量$x_{l_i}$可用下式求得

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$x_{l_i}=\frac{x_{l_1}-a_1}{b_1-a_1}(b_i-a_i)+a_i \qquad (4\ 93)$$

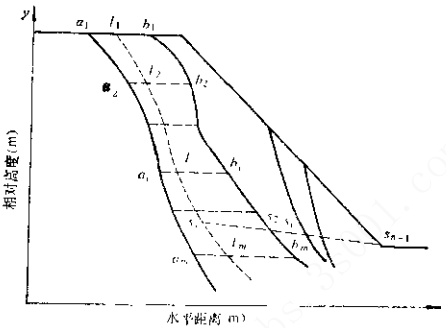


图 4-13 破坏面的几何形状

（3）破坏面的下部剪切段，在没有明显发育的不利方向不连续面的情况下，认为剪切方向只能沿剪切阻力最小的面发生，并通过坡脚。同样可用有限个点s_i即其与上部滑动面、所穿过不同岩层界面的交点连接的折线表示（图4-13）。它们的相应坐标为：

$$s_1(x_{s_1},\ y_{s_1}),\cdots s_2(x_{s_2},\ y_{s_2}),\cdots,\ s_{n-1}(x_{sn-1},\ y_{sn-1})$$

其中x_{s_i}为独立变量。

可见，在强度值和载荷均确定的情况下，边坡状态函数的基本变量仅仅为确定破坏面的坐标值，即

$$Z=F[(x_1y_1),\ (x_2,y_2),\ \cdots,\ (x_n,\ y_n)] \qquad (4\text{-}94)$$

又因y_i为x_i所决定值，故状态函数值完全由x_i所决定，所以，式（4-94）可写作：

$$Z=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \qquad (4\text{-}95)$$

这里，我们定义状态函数值为安全系数，目标函数则为安全系数

地信网论坛
BBS.35001.COM

最小，即

$$\mathrm{Min}Z=F(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n) \tag{4-96}$$

对应MinZ的破坏面则为临界破坏面。

这是一个无约束条件下多变量函数的寻优问题。因式(4-96)不能写出其显式，若用梯度法求解，只能采用近似计算求目标函数的梯度，不仅增加了计算工作量，而且会影响寻优的收敛性，为此而采用单纯形加速法求解。

单纯形加速法的基本思想是：首先计算出若干滑面对应的安全系数$F_i(X)$，并进行比较，从它们的大小关系判断出安全系数$F(X)$的变化趋势，作为寻找下一次更小安全系数对应的破坏面的参考。

根据式(4-96)，安全系数由n个坐标$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$决定，则可首先找出$n+1$个滑面$X_0,\ X_1,\ \cdots,\ X_n$，其中$X_i$代表了一个滑面$X_i=\{x_{i1},\ x_{i2},\ \cdots,\ x_{in}\}$，其寻优过程为：

(1) 计算安全系数值$F_i=F(X_i)$，$(i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，比较$n+1$个滑面对应的安全系数$F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_n$的大小，找出安全系数最大的滑面$X_H$及最小的滑面$X_L$，即

$$F_H=F(X_H)=\mathrm{Max}F_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$
$$F_L=F(X_L)=\mathrm{Min}F_i \tag{4-97}$$

以及除H滑面之外的安全系数最大滑面X_G：

$$F_G=F(X_G)=\mathrm{Min}F_i \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n,\ i\neq H) \tag{4-98}$$

(2) 计算反射点，即可能安全系数更小的滑面X_R，即

$$X_R=\frac{2}{n}\left(\sum_{i=0}^{n}X_i-X_H\right)-X_H \tag{4-99}$$

(3) 若$F_R=F(X_R)\geqslant F(X_G)$，则压缩步长，令

$$X_S=(1-\lambda)X_H+\lambda X_R \tag{4-100}$$

式中，λ为压缩因子，$0<\lambda<1$，$\lambda\approx 0.5$，计算$F(X_S)$并转向(5)。

(4) 若$F_R<F_G$，则加大步长，令

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$X_E=(1-\mu)X_H+\mu X_R \tag{4-101}$$

式中，μ 为放大因子，$\mu<1$，计算 $F_h=F(X_E)$，若 $F_h<F_R$，则 $X_S=X_E$，否则 $X_S=X_R$。

（5）若 $F(X_S)<F(X_C)$，则用滑面 X_S 代替 X_H，并和其它 n 个滑面构成新的单纯形。若 $F(X_S)<F(X_C)$，则进行单纯形收缩，令

$$X_i=(X_i+X_l)/2 \quad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n) \tag{4-102}$$

（6）继续上述过程，直至满足

$$\left|\frac{F(X_H)-F(X_l)}{F(X_l)}\right|\leqslant e \tag{4-103}$$

计算中，初始单纯形产生，可取一正数 h，令 $X_i=X_0+hE_i$，E_i 为单位向量，$E_1=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$，$E_2=(0,\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T$，$\cdots$，$E_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)^T$，$h=0.5\sim2$。

图4-14示出安全系数最小破坏面的寻优过程。

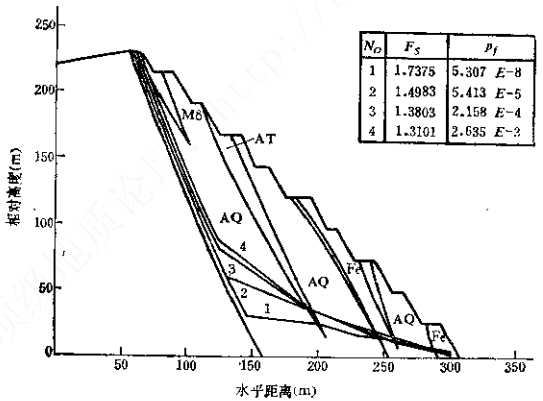


图 4-14 顺层滑动-剪切破坏面

4.4.3.3 圆弧形破坏面的优化求解方法

地信网论坛
BBS.3S001.COM

东端帮（设计区Ⅳ）圆弧形破坏面采用黄金分割法寻优，以确定最小安全系数的滑面。

圆弧形破坏面位置取决于圆心坐标（x_0，y_0），相应的目标函数定义为

$$\mathrm{Min}Z=\mathrm{Min}F(x_0,\ y_0) \qquad (4\text{-}104)$$

根据常规的试算经验，最小安全系数对应的滑弧圆心在图4-15所确定的DE线上E点附近。为简便计算，采用分步优化，首先在DE线上求优：

$$\mathrm{Min}Z_1=\mathrm{Min}F(D_1) \qquad (4\text{-}105)$$

求出安全系数最小的滑弧圆心D_1，在过D_1点且垂直DE的直线上求解

$$\mathrm{Min}Z_2=\mathrm{Min}F(D_2) \qquad (4\text{-}106)$$

求出最小安全系数及对应的圆心D_2，即为最终计算结果。经上述简化，将一个二维的无约束求优转化为两步单变量的无约束优化问题。图4-16示出圆弧形破坏面求优过程。

4.4.4 计算结果分析

对三个边坡设计方案6个设计区的总体边坡和分段边坡进行了可靠性计算，计算结果列于表4-8和图4-17，并简要分析如

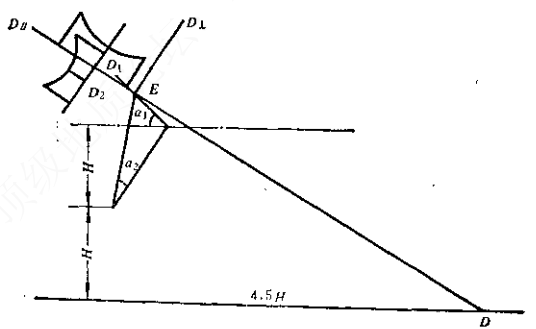


图 4-15 圆弧形破坏面的圆心位置

地信网论坛
BBS.3S001.COM

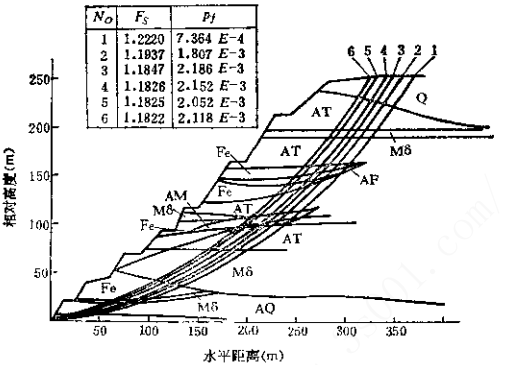


图 4-16 圆弧形破坏面

下：

（1）结果表明，在考虑爆破震动与地下水影响不利条件下，三个边坡设计方案(参见第3章3.7.3节)各设计区总体边坡可靠指标β和破坏概率p_f均能满足设计允许风险水平（10×10^{-3}），即使在方案二比方案一加陡边坡角2°～3°，方案三又在加陡边坡角的同时，采深增加24m的情况下，破坏概率也都在10^{-3}量级内。

（2）可靠指标和破坏概率对边坡角或边坡高度的变化均较敏感。方案一与方案二各设计区边坡位置及高度大体相同，只因方案二的边坡角陡于方案一2°～3°，而破坏概率有明显增大（图4-17）；而方案二与方案三的边坡角及形状大体相似，只因方案三的边坡高度高出方案二24m，而使总体边坡的破坏概率产生明显增大（图4-17）。

（3）东部采场（包括设计区Ⅲ、Ⅳ、Ⅴ）风化层较厚，岩体完整性较差，因此上部边坡有较大的破坏概率，其中，设计区

地信网论坛
BBS.3S001.COM

Ⅳ的1512m水平至坡顶的破坏概率普遍高于总体边坡破坏概率，一方案为2.825‰，二方案为6.947‰，三方案为7.143‰，其结果预示，东端帮浅部边坡发生小规模、局部破坏是可能的。因而，在未来矿山生产中须加强边坡的管理。

表 4-8 验算点法计算结果

设计区	计算标高 m	方案一 β	方案一 p_f	方案二 β	方案二 p_f	方案三 β	方案三 p_f
Ⅰ	1800～1872	5.840	2.362×10^{-9}	5.840	2.362×10^{-9}	5.840	2.362×10^{-9}
	1668～1872	3.687	1.121×10^{-4}	3.687	1.121×10^{-4}	3.687	1.121×10^{-4}
	1560～1872	3.595	1.591×10^{-4}	3.595	1.591×10^{-4}	3.595	1.591×10^{-4}
	1512～1872	5.775	2.911×10^{-9}	5.775	2.911×10^{-9}	5.775	2.911×10^{-9}
Ⅱ	1656～1752	4.115	1.936×10^{-5}				
	1560～1752	3.875	5.333×10^{-5}	3.589	1.718×10^{-4}	3.266	5.477×10^{-4}
	1488～1752	3.467	2.602×10^{-4}	3.089	1.035×10^{-3}		
	1464～1752					2.671	3.793×10^{-3}
Ⅲ	1560～1632	1.621	1.919×10^{-5}	2.886	1.926×10^{-3}	2.649	4.025×10^{-3}
	1416～1632	3.689	1.166×10^{-4}	2.718	3.264×10^{-3}	2.527	5.763×10^{-3}
	1344～1632	3.442	2.909×10^{-4}	3.108	9.354×10^{-4}		
	1320～1632					2.484	6.569×10^{-3}
Ⅳ	1512～1593	2.768	2.825×10^{-3}	2.456	6.947×10^{-3}	2.445	7.143×10^{-3}
	1416～1593	3.056	1.127×10^{-3}				
	1368～1593			2.891	1.928×10^{-3}		
	1356～1593					2.486	6.387×10^{-3}
	1344～1593	2.841	2.256×10^{-3}	2.742	3.072×10^{-3}		
	1320～1593					2.712	3.364×10^{-3}
Ⅴ	1512～1608	3.752	8.872×10^{-5}	3.377	5.223×10^{-4}	3.711	1.078×10^{-4}
	1476～1608	3.414	3.218×10^{-4}	3.326	4.342×10^{-4}	3.274	4.831×10^{-4}
	1344～1608	3.170	1.523×10^{-3}	3.792	7.285×10^{-5}		
	1320～1608					2.766	2.803×10^{-3}
Ⅵ	1656～1719	2.951	1.589×10^{-3}	3.221	6.410×10^{-4}	2.973	1.489×10^{-3}
	1536～1719	3.462	2.701×10^{-4}	2.755	2.899×10^{-3}	2.671	3.681×10^{-3}
	1488～1719	2.733	3.072×10^{-3}	2.479	6.569×10^{-3}		
	1464～1719					2.324	10.17×10^{-3}

地信网论坛
BBS.3S001.COM

（4）破坏概率p_f与边坡高程H的变化曲线（图4-17）可以很直观地反映各设计区全高边坡可靠性的变化规律。设计区Ⅰ，三个边坡设计方案相同，可见，可靠性很高，各段破坏概率均小的1.591×10^{-4}（1560～1872m）；设计区Ⅱ，因正长闪长岩墙出露，总体边坡的破坏概率为2.602×10^{-4}（方案一）至$3.793\times$

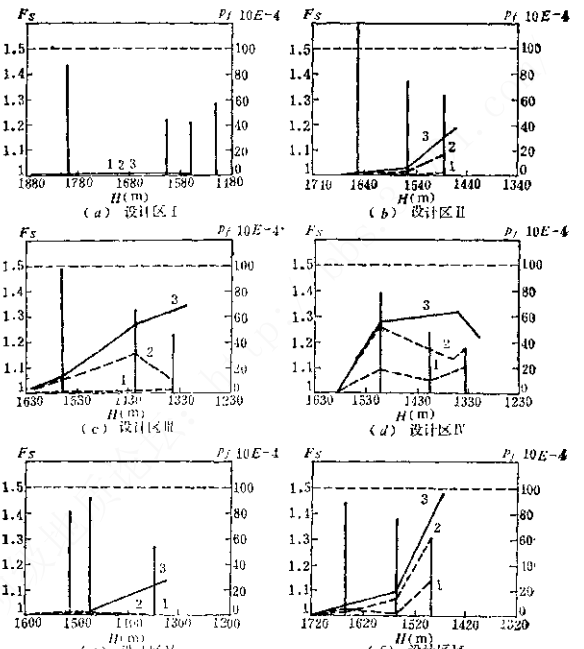


图 4-17 p_f-H变化曲线

1—方案一；2—方案二；3—方案三

地信网论坛
BBS.3S001.COM

10^{-3}（方案三），从图4-17(*b*)的曲线形状可见，随着采矿深度下降，边坡破坏概率比平稳的增加；设计区Ⅰ和Ⅳ，p_f-H曲线略有起伏，浅部边坡的破坏概率高于总体边坡的破坏概率，反映出东北帮风化层和深部地下水的不利影响；设计区Ⅴ，边坡角较缓（小于40°），下部又有正长闪长岩墙出露边坡，即使在方案三开采至1320 m水平，地下水位明显增大情况下，破坏概率也只有2.803×10^{-3}；设计区Ⅵ，设计边坡角较陡（46°），潜在破坏面受强度均值高、离散大的石英片岩控制，相对破坏概率较高。

（5）表4-9示出各设计方案、各设计区总体边坡，采用各种方法求得的安全系数值的对比，表4-10示出各种方法求得的破坏概率值的对比。明显可见，各个设计区的计算结果均有较好的一致性。

表 4-9　总体边坡的安全系数

设计方案	设计区	安全系数		中值安全系数	
		萨尔玛法	余推力法	蒙特卡洛法	随机有限元法
一	Ⅰ	1.1935	1.1989	1.1982	1.2066
	Ⅱ	1.3180	1.3375	1.3158	1.3072
	Ⅲ	1.2049	1.2174	1.2059	1.2178
	Ⅳ	1.2077		1.1990	1.2235
	Ⅴ	1.2718	1.2933	1.2712	1.2998
	Ⅵ	1.3101	1.3763	1.3052	1.3254
二	Ⅱ	1.2692	1.2941	1.2682	
	Ⅲ	1.1699	1.1757	1.1693	
	Ⅳ	1.1749		1.1711	
	Ⅴ	1.2284	1.2670	1.2280	
	Ⅵ	1.2506	1.2899	1.2488	
三	Ⅱ	1.2196	1.2163	1.2231	
	Ⅲ	1.1586	1.1689	1.1578	
	Ⅳ	1.1581		1.1554	
	Ⅴ	1.1719	1.1838	1.1711	
	Ⅵ	1.2363	1.2465	1.2340	

地信网论坛
BBS.35001.COM

表 4-10　总体边坡可靠性分析结果对比

设计方案	设计区	总体边坡破坏概率			
		蒙特卡洛法	统计矩法	验算点法	随机有限元法
一	Ⅰ	9.961×10^{-5}	1.561×10^{-4}	1.591×10^{-4}	2.909×10^{-4}
	Ⅱ	2.326×10^{-4}	2.701×10^{-4}	2.602×10^{-4}	1.078×10^{-4}
	Ⅲ	2.507×10^{-4}	2.711×10^{-4}	2.909×10^{-4}	1.363×10^{-4}
	Ⅳ	2.118×10^{-3}	2.497×10^{-3}	2.256×10^{-3}	1.441×10^{-3}
	Ⅴ	8.539×10^{-5}	5.668×10^{-5}	1.523×10^{-5}	1.395×10^{-5}
	Ⅵ	2.635×10^{-3}	2.635×10^{-3}	3.072×10^{-3}	2.118×10^{-3}
二	Ⅱ	1.395×10^{-3}	1.396×10^{-3}	1.035×10^{-3}	
	Ⅲ	1.001×10^{-3}	8.447×10^{-4}	9.354×10^{-4}	
	Ⅳ	3.573×10^{-3}	3.573×10^{-3}	3.072×10^{-3}	
	Ⅴ	5.012×10^{-5}	3.446×10^{-5}	7.235×10^{-5}	
	Ⅵ	6.210×10^{-3}	6.387×10^{-3}	6.569×10^{-3}	
三	Ⅱ	3.907×10^{-3}	4.269×10^{-3}	3.793×10^{-3}	
	Ⅲ	6.756×10^{-3}	6.387×10^{-3}	6.569×10^{-3}	
	Ⅳ	6.947×10^{-3}	7.976×10^{-3}	6.387×10^{-3}	
	Ⅴ	2.555×10^{-3}	2.186×10^{-3}	2.803×10^{-3}	
	Ⅵ	9.642×10^{-3}	10.44×10^{-3}	10.17×10^{-3}	

地信网论坛
BBS.3S001.COM

5 统计矩法

统计矩法是80年代初开始引入边坡可靠性分析的一种方法，它的基本数学工具是Rosenblueth E.于1975年提出的统计矩点估计方法，故又称Rosenblueth法。这是一种近似方法，当各状态变量的概率分布为未知时，只要利用它们的均值和方差，就可以求得状态函数（安全系数或安全储备）的一阶矩（均值）、二阶矩（方差）、以及三、四阶矩，从而求得边坡的可靠指标，且在状态函数值的假定概率分布下求得破坏概率 p_f，因而颇便应用。就采矿工程而论，一般可以满足工程精度要求，特别是对于新开发矿山及其他领域早期研究阶段边坡工程的风险评价，更为适宜。

5.1 统计矩法的基本公式

统计矩法的基本要点是，在状态变量 X_i（$i=1, 2, \cdots, n$）的分布函数未知情况下，勿需考察 X_i 的变化形态，只在区间（$x_{\min}$, $x_{\max}$）上分别对称地择其2个取值点，例如均值 μ_{X_i} 的正负一个标准差 σ_{X_i}，即

$$\begin{aligned} x_{i1} &= \mu_{X_i} + \sigma_{X_i} \\ x_{i2} &= \mu_{X_i} - \sigma_{X_i} \end{aligned} \tag{5-1}$$

对于 n 个状态变量，可有 $2n$ 个取值点，取值点的所有可能组合则有 2^n 个。在 2^n 个组合下，可根据状态方程求得 2^n 个状态函数 Z，即 2^n 个安全系数 F_{s_j} 或安全储备 M_{s_j}。

如果 n 个状态变量相互独立，每一组合的出现概率相等，则 Z 的均值估计为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mu_Z=\frac{1}{2^n}\sum_{j=1}^{2^n}Z_j \tag{5-2}$$

如果n个状态变量是相关的，且每一组合的出现概率不相等，则其概率值p_j的大小取决于变量间的相关系数ρ：

$$p_j=\frac{1}{2^n}(1+e_1e_2\rho_{1,2}+e_2e_3\rho_{2,3}+\cdots+$$
$$+e_{n-1}e_n\rho_{n-1,n}) \tag{5-3}$$

式中，e_i（$i=1,2,\cdots,n$）取值为

当x_i取x_{i1}时，$e_i=1$；

当x_i取x_{i2}时，$e_i=-1$；

$\rho_{n-1,n}$—— 状态变量X_{n-1}与X_n之相关系数。

于是，Z的均值估计为：

$$\mu_8=\sum_{j=1}^{2^n}p_j8_j \tag{5-4}$$

如此可以推导出安全系数或安全储备的概率分布的四阶矩表达式：

（1）一阶矩M_1 随机变量Z的一阶矩，也称均值μ_Z，其定义为：

$$M_1=E[Z]=\mu_Z=\int_{-\infty}^{\infty}Zf(Z)\mathrm{d}Z$$

其点估计式为

$$M_1=E[Z]=\mu_Z\approx\sum_{j=1}^{2^n}p_jZ_j \tag{5-5}$$

式中 $E[Z]$为随机变量的期望值。

（2）二阶矩M_2 随机变量Z的二阶矩为Z的方差σ_Z^2，其定义为：

$$M_2=E[(Z-\mu_Z)^2]=\sigma_Z^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(Z-\mu_Z)f(Z)\mathrm{d}Z$$

其点估计式为：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$M_2 = E[(Z-\mu_Z)^2] = \sigma_Z^2 \approx \sum_{j=1}^{2^n} p_j Z_j^2 - \mu_Z^2 \qquad (5\text{-}6)$$

（3）三阶矩M_3　随机变量Z的三阶矩定义为：

$$\begin{aligned} M_3 &= E[(Z-\mu_Z)^3] \\ &= E[Z^3] + 3\mu_Z^2 E[Z] - 3\mu_Z E[Z^2] - \mu_Z^3 \\ &= E[Z^3] - 3\mu_Z E[Z^2] - 2\mu_Z^3 \end{aligned}$$

其点估计式为：

$$M_3 \approx \sum_{j=1}^{2^n} p_j Z_j^3 - 3\mu_Z \sum_{j=1}^{2^n} p_j Z_j^2 + 2\mu_Z^3 \qquad (5\text{-}7)$$

（4）四阶矩M_4　随机变量Z的四阶矩定义为：

$$M_4 = E[(Z-\mu_Z)^4]$$

其点估计式为：

$$M_4 \simeq \sum_{j=1}^{2^n} p_j Z_j^4 - 4\mu_Z \cdot M_3 - 6\mu_Z^2 \cdot M_2 - \mu_Z^4 \qquad (5\text{-}8)$$

由状态函数Z的一阶矩M_1和二阶矩M_2可求得边坡可靠指标β：

$$\beta = M_1 / M_2^{1/2} \qquad (5\text{-}9)$$

以及变异系数δ：

$$\delta = M_2^{1/2} / M_1 \qquad (5\text{-}10)$$

用来表示离散程度。

可以采用偏态系数θ_1：

$$\theta_1 = M_3 / M_2^{3/2} \qquad (5\text{-}11)$$

表示概率分布的对称程度及其偏倚方向。

采用峰态系数θ_2：

$$\theta_2 = M_4 / M_2^2 \qquad (5\text{-}12)$$

表示概率分布的突起程度。

破坏概率的计算，假定状态函数服从正态分布和对数正态分布，可按中心点法（第4章）计算破坏概率，即$p_f = 1 - \Phi(\beta)$。

例5-1　有一边坡，采用统计矩法求得其安全系数的均值和

地信网论坛
BBS.3S001.COM

标准差，假设安全系数服从正态分布 N（$\mu_{F_s}=1.339$，$\sigma_{F_s}=0.196$）。试问

（1）其安全系数$F_s\leqslant 1$的破坏概率是多少？

在标准正态空间，标准化变量

$$s=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

令 a 和 b 分别为变量X的下界和上界，则有

$$p(a<X\leqslant b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

故破坏概率p_f：

$$p_f=p(X\leqslant 1)=\Phi\left(\frac{1-1.339}{0.196}\right)-\Phi(-\infty)$$

$$=\Phi(-1.73)-0$$

$$=0.0418=4.18\%$$

（2）安全系数F_s至少为1.15的概率是多少？

$$p(X\geqslant 1.15)=\Phi(\infty)-\Phi\left(\frac{1.15-1.339}{0.196}\right)$$

$$=1-[1-\Phi(0.96)]$$

$$=\Phi(0.96)=0.8315=83.15\%$$

（3）累积概率为0.5%的安全系数值为多少？

$$p(X\leqslant x_{0.005})=0.005$$

即

$$\Phi\left(\frac{x_{0.005}-1.339}{0.196}\right)=0.005$$

$p<0.5$所对应的变量值为负，故有

$$\frac{x_{0.005}-1.339}{0.196}=\Phi^{-1}(0.005)=-\Phi^{-1}(0.995)$$

$$=-2.58$$

因此，累积概率为0.5%的安全系数为：

$$F_s=x_{0.005}=1.339-2.58\times 0.196$$

$$=0.833$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

例5-2 同例5-1，假定安全系数服从对数正态分布，其结论如何？

首先求得对数正态分布的参数λ和ξ（参见第2章）：

$$\xi \simeq \frac{\sigma}{\mu}=\frac{0.196}{1.339}=0.146$$

$$\lambda=\ln\mu-\frac{1}{2}\xi^2$$

$$=\ln(1.339)-\frac{1}{2}(0.143)^2$$

$$=0.292-0.011=0.281$$

（1）破坏概率为：

$$p_f=p(X\leqslant 1)=\Phi\left(\frac{\ln x-\lambda}{\xi}\right)$$

$$=\Phi\left(\frac{\ln 1-0.281}{0.146}\right)$$

$$=1-\Phi(1.92)$$

$$=0.0274=2.74\%$$

（2）安全系数至少为1.15的概率为：

$$p(X\geqslant 1.15)=1-\Phi\left(\frac{\ln 1.15-0.281}{0.146}\right)$$

$$=1-\Phi(-0.97)$$

$$=0.8340=83.40\%$$

（3）累积概率为0.5%的安全系数值为：

$$\Phi\left(\frac{\ln x_{0.005}-0.281}{0.146}\right)=0.005$$

故得

$$F_S=x_{0.005}=e^{-0.090}=0.908$$

5.2 实例分析

5.2.1 路堑土坡

地信网论坛
BBS.3S001.COM

高度 $H=7.6$m，边坡角 $\alpha=45°$，边坡土体的容重 $\gamma=18.84$kN/m^3，粘结力均值 $\mu_c=23.94$ kPa，摩擦系数均值 $\mu_f=0.78$，粘结力与摩擦系数的相关系数 $\rho_{c,f}=0.2$，变异系数 $\delta_c=0.5$，$\delta_f=0.5$。采用统计矩法估计安全系数均值 μ_{FS}、标准差 σ_{FS} 和破坏概率 p_f

边坡土体视作均质，假定为圆弧形剪切破坏模式，采用Fellenius方法计算安全系数（图5-1）。

对于2个随机变量 C 和 f 的函数 F_S，可能有4个函数值：

$$F_{S1(++)}=F_S(\mu_c+\sigma_c,\mu_f+\sigma_f)$$
$$F_{S2(+-)}=F_S(\mu_c+\sigma_c,\mu_f-\sigma_f)$$
$$F_{S3(-+)}=F_S(\mu_c-\sigma_c,\mu_f+\sigma_f)$$
$$F_{S4(--)}=F_S(\mu_c-\sigma_c,\mu_f-\sigma_f)$$

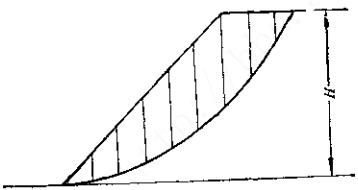


图 5-1 路堑土坡计算剖面

因而可求得4个安全系数：

$$F_{S1(++)}=3.46;\quad F_{S2(+-)}=2.33;$$
$$F_{S3(-+)}=2.29;\quad F_{S4(--)}=1.15$$

根据式（5-3）确定系数 p_j：

$$p_{1(++)}=p_{4(--)}=0.25(1+0.2)=0.3;$$
$$p_{2(+-)}=p_{3(-+)}=0.25(1-0.2)=0.2$$

按式（5-5）求得安全系数均值 μ_{FS}：

$$\mu_{FS}=p_{1(++)}F_{S1(++)}+p_{2(+-)}F_{S2(+-)}$$
$$+p_{3(-+)}F_{S3(-+)}+p_{4(--)}F_{S4(--)}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=0.3\times3.46+0.2\times2.33+$$
$$0.2\times2.29+0.3\times1.15$$
$$=2.31$$

由式（5-6）求得安全系数标准差 σ_{F_S}：

$$\sigma_{F_S}=[(p_{1(++)}F^2_{S1(++)}+p_{2(+-)}F^2_{S2(+-)}$$
$$+p_{3(-+)}F^2_{S3(-+)}+p_{4(--)}F^2_{S4(--)})-\mu^2_{F_S}]^{1/2}$$
$$=(0.3\times3.46^2+0.2\times2.33^2+0.2\times$$
$$2.29^2+0.3\times1.15^2-2.31^2)^{1/2}$$
$$=0.885$$

假定 $F_S\sim N(0.1)$ 分布，其标准化变量 $S=(F_S-\mu_{F_S})/\sigma_{F_S}$，因此，破坏概率为

$$p_f=1-\Phi(S)$$
$$=1-\Phi(1.48)$$
$$=0.0694-6.94\%$$

其中 $\Phi(\cdot)$ 为标准正态分布函数，由标准正态分布表查得。

5.2.2 永平铜矿西北排土场

西北排土场处在纵坡为18°～34°的沟谷区，基底为强风化混合岩（S_u），上覆有1m左右厚的第四纪粘土和亚粘土（Q），如图5-2所示。

潜在滑动面是根据排土场边坡二维非线性有限元分析确定的。在剪应变等值线图上，剪应变的大小则反映剪应力的变化，沿剪应变突出的面可能成为最危险剪切破坏面或潜在滑动面，因此，潜在滑动面一般与剪应变等值线脊线相吻合。分析结果表明，预计有3个潜在滑动面，它们的出口与排土场堆弃不同废石组成的界面相当。滑动面的总体形态近乎于圆弧形（图5-2）。滑动面 S_1、S_2 全部处于松散废石中，S_3 上部在废石中，下部沿基底粘土层穿过。

采用最大剪应力法与Bishop法、D_n 法计算安全系数，其结果列于表5-1。本例择取安全系数最低、且反映总体稳定性的滑动

地信网论坛
BBS.3S001.COM

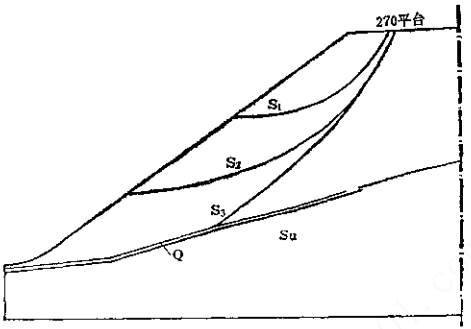


图 5-2 西北排土场计算剖面

表 5-1 安全系数计算结果

滑 动 面	极大剪应力法	极限平衡法
S_1	1.134	1.076①
S_2	1.243	1.249①
S_3	0.976	1.048②

①Bishop方法；②D_{11}方法。

面S_R，采用统计矩法计算其安全储备M_S的统计参数，估计其破坏概率。

这里，安全储备表示为安全系数F_S减去指定安全系数F_{SO}（通常取$F_{SO}=1$）的函数，即

$$M_S = F_S - 1$$

破坏概率则定义为安全储备小于或等于零的概率：

$$p_f = p(M_S \leqslant 0)$$

根据现场直剪试验、室内直剪和三轴剪切试验资料，确定抗剪强度的均值为

废石材料　$C_1=130$ kPa　$\phi_1=33°$

基底材料　$C_2=13$ kPa　$\phi_2=24°$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

抗剪强度参数具有很大的不确定性，是一个随机变量。为了考察抗剪强度对安全储备和破坏概率的影响，假设粘结力c和摩擦角ϕ在相同的变异系数$\delta=\delta_c=\delta_\phi=0.1,\ 0.2,\ 0.3,\ 0.4,\ 0.5$下，相关系数$\rho_{c_1,\phi_1}$和$\rho_{c_2,\phi_2}$在$-0.6$到$+0.6$之范围内进行敏感度分析。

取4个基本状态变量c_1、ϕ_1、c_2、ϕ_2，其分别以X_1，X_2，X_3、X_4代表。因此，取值的组合共有$2^4=16$个。依据统计矩法，M_S^n的期望值可表示为：

$$\begin{aligned}E[M_S^n]=&\ p_{+++\,+}M_{S\,+++\,+}^n+p_{+++-}M_{S\,+++-}^n\\&+p_{++-\,-}M_{S\,++-\,-}^n+p_{+---}M_{S\,+---}^n\\&+p_{+--+}M_{S\,+--+}^n+p_{+-+-}M_{S\,+-+-}^n\\&+p_{+-\,--}M_{S\,+-\,--}^n+p_{+--\,+}M_{S\,+--\,+}^n\\&+p_{-\,---}M_{S\,-\,---}^n+p_{-\,--+}M_{S\,-\,--+}^n\\&+p_{-\,-+-}M_{S\,-\,-+-}^n+p_{-\,-++}M_{S\,-\,-++}^n\\&+p_{-+\,--}M_{S\,-+\,--}^n+p_{-+\,-+}M_{S\,-+\,-+}^n\\&+p_{-++\,-}M_{S\,-++\,-}^n+p_{-+++}M_{S\,-+++}^n\end{aligned}$$

式中 $M_{S\,++++}=M_S(x_{1+},x_{2+},x_{3+},x_{4+})$

$M_{S\,+++-}=M_S(x_{1+},x_{2+},x_{3+},x_{4-})$

等等；

$$p_{++++}=p_{----}=\frac{1}{16}(1+\rho_{1,2}+\rho_{2,3}+\rho_{3,4})$$

$$p_{+++-}=p_{---+}=\frac{1}{16}(1+\rho_{1,2}+\rho_{2,3}-\rho_{3,4})$$

等等；

μ_{X_i}和σ_{X_i}——变量X_i的均值和标准差；

$\rho_{i,i+1}$——变量X_i和X_{i+1}的相关系数。如果X_i与X_{i+1}相互独立，则$\rho_{i,i+1}=0$，所有系数$p=\frac{1}{16}$。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表 5-2 安全储备的统计参数

变异系数 δ	相关系数 ρ	安全储备 M_S		破坏概率 p_f
		μ_{M_S}	σ_{M_S}	
0.1	−0.6	0.0395	0.0852	0.3215
	−0.4	0.0394	0.0855	0.3224
	−0.2	0.0394	0.0857	0.3228
	0	0.0394	0.0859	0.3232
	0.2	0.0394	0.0863	0.3240
	0.4	0.0394	0.0864	0.3241
	0.6	0.0394	0.0866	0.3246
0.2	−0.6	0.0329	0.1199	0.3919
	−0.4	0.0328	0.1210	0.3932
	−0.2	0.0328	0.1213	0.3934
	0	0.0327	0.1218	0.3942
	0.2	0.0327	0.1222	0.3945
	0.4	0.0326	0.1230	0.3955
	0.6	0.0325	0.1235	0.3962
0.3	−0.6	0.0405	0.1808	0.4114
	−0.4	0.0404	0.1816	0.4120
	−0.2	0.0402	0.1827	0.4129
	0	0.0401	0.1836	0.4136
	0.2	0.0400	0.1844	0.4141
	0.4	0.0398	0.1855	0.4150
	0.6	0.0396	0.1864	0.4159
0.4	−0.6	0.0515	0.2432	0.4159
	−0.4	0.0512	0.2439	0.4169
	−0.2	0.0509	0.2452	0.4178

地信网论坛
BBS.3S001.COM

续表 5-2

变异系数δ	相关系数ρ	安全储备，M_S		破坏概率，p_f
		μ_{M_S}	σ_{M_S}	
0.4	0	0.0507	0.2464	0.4185
	0.2	0.0504	0.2477	0.4194
	0.4	0.0501	0.2490	0.4203
	0.6	0.0498	0.2501	0.4211
0.5	−0.6	0.0661	0.3062	0.4145
	−0.4	0.0656	0.3077	0.4156
	−0.2	0.0657	0.3104	0.4162
	0	0.0647	0.3108	0.4175
	0.2	0.0643	0.3124	0.4185
	0.4	0.0638	0.3139	0.4195
	0.6	0.0634	0.3154	0.4203

表 5-3 对数正态分布下的破坏概率

δ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
p_f	0.3336	0.4108	0.4483	0.4611	0.4721

如此计算结果列于表5-2。在假定安全储备服从对数正态分布情况下，设$\rho=0$时的破坏概率列于表5-3。

综上可以看出：

（1）变异系数对M_S均值的影响不显著，而对M_S标准差的影响则随着变异系数的增大而增强，如图5-3所示。这表明，尽管在相同均值情况下，却因标准差不同，而承担的设计风险的差异很大。

（2）破坏概率p_f对变异系数δ、特别是$\delta<0.3$时非常敏感，无论假设分布类型是正态分布，还是对正态分布，都显示同样的趋势（图5-4）。为了减少风险，必须从基础数据入手，进行更精细的研究。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

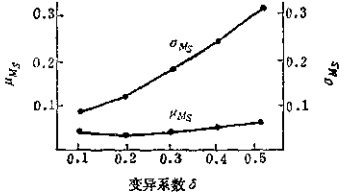


图 5-3 变异系数对安全储备均值和标准差的影响

（3）图5-5示出相关系数 ρ 在不同变异系数情况下对破坏概率 p_f 的影响。可以看出，在相同变异系数下，相关系数对破坏概率的影响很微弱，变化曲线近水平状；而变异系数由 0.1 增至0.2，破坏概率增大约7%，变异系数增至 0.3 以后，破坏概率变化趋于稳定。

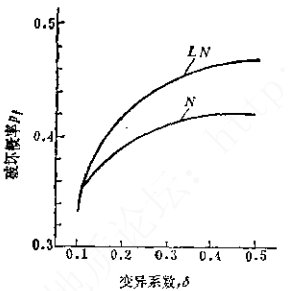


图 5-4 破坏概率与变异系数变化曲线（$\rho=0$）

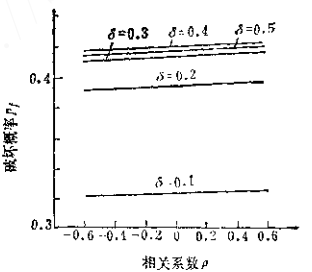


图 5-5 破坏概率与相关系数变化曲线

（4）假设对数正态分布下求得的破坏概率明显高于正态分布的假设（图5-4）。在分析特定边坡的风险时，应深入考察其分布类型，同时，需要通过边坡破坏的实际观察数据加以检验。

（5）如果取用设计安全系数 $F_s=1.15$，则 $p(F_s\geqslant 1.15)$

地信网论坛
BBS.35001.COM

=9.85%，这是一个不可接受的风险水平，应当采取适当工程措施，以提高可靠性。

5.2.3 德兴铜矿南山采场第Ⅰ设计区边坡

德兴铜矿南山采场第Ⅰ设计区，已形成十余个台阶，边坡面基本为平面状，边坡走向东西，北倾，边坡角40°，边坡高度498m。

构成坡体之岩石为硅化绢云母片岩，片理发育，展布方向单一，产状为99°/27°。

该区有断层F_1'和F_{24}产出，产状均为359°/55°，走向与坡面平行，且倾向采场，断层的延伸深度是按其在地表出露长度的一半推断的。断层面中无充填物，具有刚性结构面的特点。

据地表节理调查及定向钻孔岩心上节理面产状的测定，边坡岩体中主要有三组节理，其中有一组节理之倾向与边坡倾向基本一致，在标高100m以上，其平均产状为355°/49°，标高100m以下，倾角变缓，平均产状为0°/25°。

经分析判定，其一种破坏模式是由三个平面构成折线状，如图5-6所示。上部滑面通过的F_1'和F_{24}断层面、其位置是确定的，下部滑面相继是倾角在标高100m处发生变化的两组节理面。

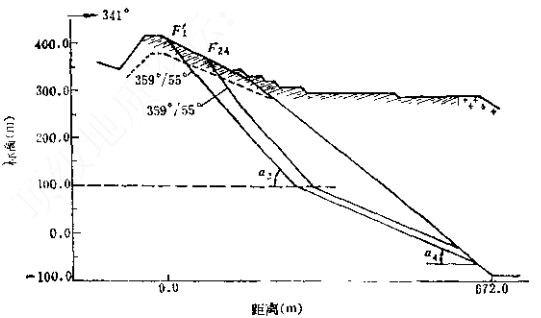


图 5-6 折线状剪切破坏

地信网论坛
BBS.3S001.COM

随机变量有4个，即抗剪强度参数粘结力c和摩擦角，中部节理面倾角α_2和下部节理面倾角α_4。根据节理面统计分析，确认变量α_2和α_4服从正态分布，同时假定c和ϕ亦服从正态分布，它们的特征参数列于表5-4。

表 5-4 随机变量及其分布参数

随机变量	均值 μ	标准差 σ
α_2(°)	51.6	13.6
α_4(°)	29.3	13.7
c(×100kPa)	6.2	4.72
ϕ(°)	32.9	7.8

安全系数计算采用修正的Janbu方法，破坏概率采用统计矩法求得，其结果列于表5-5。

表 5-5 破坏概率表

滑面	破坏概率p_f（%）				
	饱和状态	正常地下水	p_f（50）	p_f（100）	p_f（150）
经过F_2断层	44.58	40.76	33.99	18.12	15.54
经过F_4'断层	39.36	35.22	28.39	21.46	19.53

注：p_f(·)括号中数字表示水位降深(m)。

结果表明，地下水作用对边坡破坏概率影响较大，图5-7可见，降低地下水埋深可以提高边坡可靠性，但当地下水位降到100m以后，效果不显著。

岩体强度指标c和ϕ之间的相关性对边坡破坏概率的影响如图5-8所示。可见，当c和ϕ负相关时，随着相关系数的提高，破坏概率降低，就是说，如果忽略了相关性会过高地估计破坏概率。但在此例中，破坏概率对相关系数变化的敏感性很低。

40°边坡在饱和、正常水位状态下，稳定性较低，既便放缓边坡角至35°，破坏概率仍有43%左右，虽能改善稳定性，但敏

地信网论坛
BBS.35001.COM

强性较差。而降低地下水位则能大幅度地提高边坡可靠性。

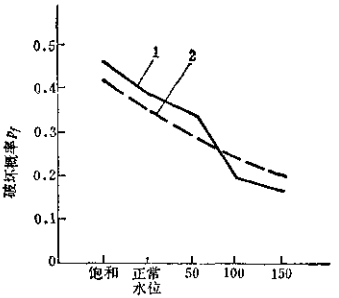


图 5-7 水位降深对破坏概率的影响

1—通过F_1滑面；2—通过F_1'滑面

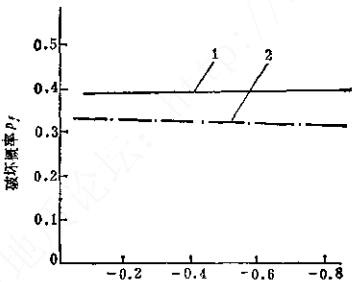


图 5-8 相关系数对破坏概率的影响

1—正常水位；2—水位降深50m

地信网论坛
BBS.3S001.COM

6 随机有限元法

6.1 概 述

在边坡设计中，除了分析其稳定性之外，还必须分析其应力和变形。没有对应力和变形的分析，很难估计边坡岩体的破坏发展。稳定性的丧失也是由局部地区应力达到了强度，变形增大，而逐步发展的。有了对边坡应力和变形的全面分析，也可能更好地分析边坡岩体的稳定性。

边坡岩体是由各种不同成因类型、历经不同地质作用的岩层所组成的复杂介质，又具有类型不同、规模不一、方位各异的地质不连续面，呈现出明显的非均匀性和各向异性。因此，边坡岩体应力-应变关系，在大多数情况下，常常表现出一定程度的非线性特性。再者，边坡岩体往往存在初始应力，以及重力场、渗流场和震动场的叠加，使得边坡岩体的力学属性和边界条件更加复杂。由于有限单元法能适应各种边界条件和几何形态变化，能考虑岩体的非均质和不连续性，以及边坡工程与其环境因素的共同作用，还能引入非线性应力应变关系，其为边坡工程提供了很好的分析方法。

岩体边坡的有限元分析，通常包括三方面内容，即模拟边坡岩体内的力学状态；了解边坡岩体的变形破坏机制；在一定的破坏判别标准下，评价边坡的稳定性。

自从60年代以来，随着有限单元法在边坡工程分析、评价和设计中的深入发展，对岩体力学模型、影响应力及变形因素的定量化提出更高的要求，期望为计算分析提供更合理的模型和更精确的数据。然而，由于岩体组成、结构、强度、荷载条件以及力学状态的不确定性和变化性，岩体的力学常数并非常数，而是一

地信网论坛
BBS.35001.COM
组随机变量，这样，用确定型分析方法不可能真确地描述边坡的本征属性。因为再精确的计算数据，也只是相对的经验性确认，其分析结果自然会带有一定程度的局限性。因此，近几年来，国际上开始研究一个新的领域，即探索随机模型与数值解法的耦合，以寻求数值方法的概率解答，逐步发展成随机有限元法，并正在走向工程应用。

几年来，许多学者为之作出有益的贡献。Su.Y.L.等人为了考虑材料常数空间分布的离散性，提出了对各单元的材料常数按其概率分布进行蒙特卡洛抽样。他们虽然忽视了单元尺寸的影响，但也介绍了由单元尺寸决定弹性系数的方法。Kovari等人也提出一种方法：对输入的材料常数进行各种变换后，通过对这些数据的多种组合及解析，对所求出的结果按上限值和下限值进行评价。Chugh认为强度特性的微小变化对分析结果有很大影响，在弹塑性分析中，参数研究非常重要。而多种参数的组合使计算成本提高。为了通过少量的计算，能得出破坏概率，Cambou把材料常数和荷载都视作随机变量，应用线性一次逼近方法，求出位移和应力的期望值和方差。而根据线性一次逼近理论进行可靠性分析是由Cornell和Ang等人提出的。在结构工程领域，Vanmarcke等、Kiureghian等、Laurence基于随机有限元法，通过迭代验算求得结构的可靠指标。后两种方法，即线性一次逼近方法和迭代验算法系目前广为接受的两种方法。

边坡随机有限元分析的实质，是在常规有限元方法基础上，改输入常数为随机变量$\{X\}$，如弹性模量(E)、泊松系数(μ)、容重(γ)等。因为单元应力$\{\sigma\}$和结点位移$\{\delta\}$均为随机变量$\{X\}$的函数，只要随机变量存在均值和方差，则可以求得$\{\sigma\}$和$\{\delta\}$的统计上的均值和方差。岩体强度分量粘结力(c)和摩擦角(ϕ)亦为随机变量。依照Mohr-Coulomb破坏准则，根据剪应力与抗剪强度的关系，可以建立起抗剪稳定性的极限状态方程$Z=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)=0$。在由$n$个随机变量组成的$n$维状态空间中，$Z=0$构成一个极限状态曲面，而该曲面至变量空间坐标原点的

地信网论坛
BBS.3S001.COM

最短距离即为单元的局部可靠指标。在标准正态空间，由式 $p_f = 1-\Phi(\beta)$，可求得单元的局部破坏概率。显然，在有确定的潜在破坏面情况下，根据破坏面所穿过的所有单元的力学参数和几何参数，可以求得边坡总体的可靠指标和破坏概率。

本章重点叙述两种基于随机有限元原理计算边坡可靠度的方法：线性一次逼近法和迭代验算法。迭代验算法是我们首次把它引入边坡工程可靠性评价，为此，将结合我国一个大型露天铁矿的边坡设计，详细说明这种方法的基本原理、分析方法和应用结果。

为了便于常规有限元法与随机有限元法的概念联系以及记号的统一，首先介绍有限元法的基础。

6.2 有限元法的基础

有限单元法是根据物理的近似，把连续体用网格划分为有限数目的单元体，这些单元体之间在结点处相互铰接，形成离散结构，用这离散结构来代替原来的连续体结构。在满足（1）相邻单元间变形的相容条件；（2）作用于单元上力的平衡条件；（3）各单元的位移与单元材料的力学性质相对应（应力应变关系式）这三个条件的情况下，将荷载移置作用于离散结构的结点上，成为结点荷载。应力应变关系表示为

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\} \tag{6-1}$$

式中 $\{\sigma\}$为单元的应力；$[D]$为弹性矩阵；$\{\varepsilon\}$为单元的形变。由虚位移原理和应力应变关系，可建立结点荷载与结点位移之间的关系，即用位移表示的结点平衡方程组

$$[K]\{\delta\}=\{R\} \tag{6-2}$$

式中，$[K]$、$\{\delta\}$、$\{R\}$分别为劲度矩阵、结点位移和结点荷载列阵。解方程组（6-2）可得位移场，进而可推出应变$\{\varepsilon\}$和应力$\{\sigma\}$的分布。这就是有限单元法的基本思路。它实际上是微分方程的一种数值解法。

下面，以平面应变三角形单元的弹性力学分析，来说明有限

地信网论坛
BBS.3S001.COM

元法的基本原理和应用。

（1）将实际的连续介质体离散化为理想的有限元的集合体，即把边坡分析剖面划分成若干个三角形单元，形成三角形网格，借以用有限个单元组成的组合体结构代替实际的边坡岩体介质。选定任一个直角坐标系，并定出所有各结点的坐标值，即(x_i,y_i)、(x_j,y_j),…等等。任一单元ijm（结点号，按逆时针旋转）如图6-1所示。

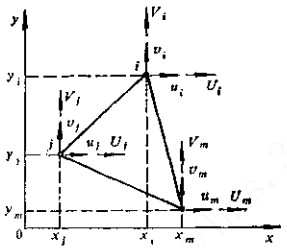


图 6-1 三角形单元

等应变三角形单元是常用的单元。但应指出，在用有限元法计算边坡角缘地区如坡脚等处的应力时，计算所得的应力与计算所采用的网格尺寸形状关系十分密切，随着网格在角缘区的加密，计算所得的角缘应力也越来越大。因此，应力与通常的强度准则相比较，不同的计算者有时会得出截然不同的结论。为了在实际工程应用中提高计算精度，可以采用高次单元或等参数单元。读者可查阅有关专门性参考文献，这里不再赘述。

（2）选择适当的位移函数。如果弹性体的位移分量是坐标的已知函数，就可以用几何方程求得形变分量，从而用物理方程求得应力分量。但是，如果只是已知弹性体中某几个结点的位移分量的数值，是不能直接求得形变分量和应力分量的。因此，为了能用结点位移表示形变和应力，必须假定一个位移模式，也就是假定位移分量为坐标的某种简单函数。对于平面应变问题所采用的三角形单元，一般假定单元内任一点位移分量 u、v（图6-1）是

地信网论坛
BBS.3S001.COM

坐标的线性函数，即

$$\left.\begin{aligned} u &= N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \\ v &= N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \end{aligned}\right\} \tag{6-3}$$

其中

$$N_i = (a_i + b_i x + c_i y)/2A \quad (i,j,m) \tag{6-4}$$

在这里，系数

$$\left.\begin{aligned} a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \\ b_i &= y_j - y_m, \\ c_i &= -x_j + x_m \end{aligned}\right\} \ (i,j,m) \tag{6-5}$$

而单元面积A可根据结点的坐标值求得，即

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix} \tag{6-6}$$

在有限元法中，荷载的移置以及应力矩阵和劲度矩阵的建立等等，都依赖于位移函数。因此，为了使有限元分析的结果能够收敛于真实解，必须使位移函数能够正确反映边坡体的真实位移形态。

（3）建立劲度矩阵。由式（6-5）算出相邻结点的坐标差值，即各个单元的b_i、c_i、b_j、c_j、b_m、c_m等值，再用弹性模量E和泊松系数μ，建立起劲度矩阵$[K]$，它的元素是由各单元的劲度矩阵$[k]$中相应的元素迭加后得到的。矩阵$[k]$的元素表明该单元的各结点沿坐标方向发生单位位移时引起的结点力，它决定于该单元的形状、大小、方位和弹性常数，而与单元的位置无关，即不随单元或坐标轴的平行移动而改变。平面形变问题三角形单元的劲度矩阵；其分块形式为

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} & k_{im} \\ k_{ji} & k_{jj} & k_{jm} \\ k_{mi} & k_{mj} & k_{mm} \end{bmatrix} \tag{6-7}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

其中

$$[k_{rs}]=\frac{E(1-\mu)t}{4(1+\mu)(1-2\mu)A}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} b_rb_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_rc_s & \frac{\mu}{1-\mu}b_rc_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_rb_s \\ \frac{\mu}{1-\mu}c_rb_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_rc_s & c_rc_s+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_rb_s \end{bmatrix}$$

$$(r=i,j,m;\quad s=i,j,m) \tag{6-8}$$

（4）在每个单元上，都把结点力$\{F\}^e$用结点位移$\{\delta\}^e$来表示，也就是建立关系式

$$\{F\}^e=[k]\{\delta\}^e \tag{6-9}$$

其中

$$\{\delta\}^e=\begin{Bmatrix}\delta_i\\ \delta_j\\ \delta_m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix}$$

$$\{F\}^e=\begin{Bmatrix}F_i\\ F_j\\ F_m\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}U_i\\ V_i\\ U_j\\ V_j\\ U_m\\ V_m\end{Bmatrix}$$

根据结点i的平衡条件，有平衡方程

$$\sum_e\{F_i\}=\sum_e\{R_i\} \tag{6-10}$$

其中

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\{R_i\}=\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$$

式中 $\sum_e$ 表示对环绕结点i的所有单元求和；X_i和Y_i为环绕结点i的所有单元上移置而来的结点荷载。这样，就得到以结点位移为未知量的方程组。

（5）荷载向结点移置，建立荷载列阵。将各单元所受的荷载，包括体力和面力，以及可能有的集中荷载，按静力等效的原则移置到结点上，求得X_i、Y_i等等。所谓静力等效，是指原荷载与结点荷载在任何虚位移上的虚功都相等。在一定的位移函数之下，这样移置的结果是唯一的。而且，原荷载与结点荷载在任一轴上的投影之和相等，对任一轴的力矩之和也相等，也就是，在向任一点简化时，它们将具有相同的主矢量及主矩。

在线性位移函数情况下，对于常见的一些荷载，可以通过很简单的虚功计算，求得所需的荷载列阵。对于匀质等厚度的三角形单元ijm所受的重力W，只需把$\frac{1}{3}$的重力移到每个结点上，就完全符合对刚体的静力等效原则。这样，应当移置到三个结点的荷载可用荷载列阵表示为

$$\begin{aligned}\{R\}^e&=[X_i\ Y_i\ X_j\ Y_j\ X_m\ Y_m]^T\\&=-\frac{W}{3}[0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1]^T\end{aligned}\qquad(6\text{-}11)$$

（6）建立与未知结点位移相应的平衡方程即式（6-10），再将结点力用结点位移表示的表达式即式（6-9）代入，且将所有各结点的平衡方程集合在一起，即得整个边坡体的平衡方程组

$$[K]\{\delta\}=\{R\}$$

其中的未知量列阵是结点位移$\{\delta\}$，自由项列阵是结点荷载$\{R\}$，而矩阵$[K]$称为整体劲度矩阵。解此线性方程组，求出结点位移。

（7）计算应力矩阵$[S]$中各元素的数值。利用几何方程，可由式（6-3）和（6-4）得出用结点位移表示单元的形变的表

地信网论坛
BBS.3S001.COM

式：

$$\{\varepsilon\}=\begin{Bmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\end{Bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0\\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m\\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m\end{bmatrix}\times\begin{Bmatrix}u_i\\ v_i\\ u_j\\ v_j\\ u_m\\ v_m\end{Bmatrix} \tag{6-12}$$

或者简写为

$$\{\varepsilon\}=[B]\{\delta\}^e \tag{6-13}$$

其中，矩阵$[B]$可写为分块形式

$$[B]=[B_i\ B_j\ B_m] \tag{6-14}$$

其子矩阵为

$$[B_i]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & 0\\ 0 & c_i\\ c_i & b_i\end{bmatrix},\quad (i,\ j,\ m) \tag{6-15}$$

由于单元的面积A以及各个b和c都是常量，所以矩阵$[B]$的元素都是常量，可见形变$\{\varepsilon\}$的元素也是常量，就是说，在每一个单元中，形变分量ε_x、ε_y、γ_{xy}都是常量。

将表达式（6-13）代入物理方程（6-1），就得到用结点位移表示单元中应力的表达式

$$\{\sigma\}=[D]\{\varepsilon\}=[D][B]\{\delta\}^e \tag{6-16}$$

可见，在每一个单元中，应力分量也是常量。当然，相邻单元一般将具有不同的应力，因而在它们的公共边上，应力将有突变。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

这里，$[D]$为弹性矩阵，对于平面形变问题，有

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1-\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix}1 & & \text{对} \\ \dfrac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\end{bmatrix} \tag{6-17}$$

则

$$[S]=[D][B] \tag{6-18}$$

将式（6-14）和（6-17）代入式（6-18），即得平面形变问题中的应力矩阵，写成分块形式

$$[S]=[S_i\ S_j\ S_m] \tag{6-19}$$

其中的子矩阵为

$$[S_i]=\frac{E(1-\mu)}{2(1+\mu)(1-2\mu)A}\begin{bmatrix}b_i & \dfrac{\mu}{1-\mu}c_i \\ \dfrac{\mu}{1-\mu}b_i & c_i \\ \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}c_i & \dfrac{1-2\mu}{2(1-\mu)}b_i\end{bmatrix}\quad(i,j,m) \tag{6-20}$$

将E、μ、A、b_i、c_i等数值代入式（6-19），可得各元素的数值。于是就可以用式（6-15）求出各单元中的应力分量。从而用下两式求出主应力及应力主向：

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{6-21}$$

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\tau_{xy}}\right) \tag{6-22}$$

式中 α为σ_1与x轴所成的角度（以逆时针转向为正）。

（8）整理计算成果，用表格或图线示出所需的位移及应力。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

6.3 线性一次逼近法

基于线性一次逼近理论的随机有限元法的基本思路是：假定结点位移 $\{\delta\}$和应力 $\{\sigma\}$均为随机变量$X=\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m\}$ 的函数，若随机变量X的均值和方差都存在，则可通过Taylor展开并略去二次以上高次项，求得结点位移和应力的均值、方差和协方差，进而求得基于Mohr-Coulomb破坏准则建立的状态函数的均值、方差和协方差，最后，绘制出主应力分布图、应变等值线图、安全系数等值线图、可靠指标等值线图、破坏概率等值线图，同时，可以根据指定破坏面所通过的单元参数，计算边坡总体安全系数、可靠指标和破坏概率值。

6.3.1 线性一次逼近理论

在有限单元法中，以刚性方程组表达位移与荷载的平衡关系，即

$$[K]\{\delta\}=\{R\}$$

若整体劲度矩阵$[K]$和结点荷载列阵$\{R\}$是m个随机变量$\{X\}=\{X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m\}$的函数，则结点位移列阵$\{\delta\}$也是随机变量$\{X\}$的函数，即

$$\delta_i=\delta_i(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m) \tag{6-23}$$

式中δ_i表示结点i的位移，而$\{X\}$为弹性模量E、泊松系数μ、容重ν及荷载p等。

在随机变量$\{X\}$的均值处对δ_i进行Taylor展开，略去二次以上高次项，可得结点位移的期望值：

$$E[\delta_i]=E\left[\delta_i(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_m)+\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\times\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\right]$$

$$=\delta_i(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \cdots\cdots, \overline{X}_m) \tag{6-24}$$

其中$\overline{X}_i(i=1, 2, \cdots\cdots, m)$为随机变量均值。显然，$E[\delta_i]$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

；(6-2) 求得。

结点位移的方差为：

$$\begin{aligned} Var[\delta_i] &= E[\{E[X_i]-\overline{X}_i\}^2] \\ &= E\left[\left\{\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\right\}^2\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_l}\right)_E E[(X_k-\overline{X}_k) \\ &\quad \times (X_l-\overline{X}_l)] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \end{aligned} \tag{6-25}$$

式中$\mathrm{Cov}[X_k,\ X_l]$为随机变量X_k和X_l的协方差；$\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E$和$\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_l}\right)_E$分别为位移$\delta_i$对随机变量$X_k$和$X_l$的偏导数在均值处的取值。

而结点i和j的位移协方差为：

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[\delta_i,\delta_j] &= E[\{E[\delta_i]-\delta_i\}\{E[\delta_j]-\delta_j\}] \\ &= E\left[\left\{\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\right\}\left\{\sum_{l=1}^{m}(X_l\right.\right. \\ &\quad \left.\left.-\overline{X}_l)\left(\frac{\partial\delta_j}{\partial X_l}\right)_E\right\}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial\delta_j}{\partial X_l}\right)_E E[(X_k-\overline{X}_k) \\ &\quad (X_l-\overline{X}_l)] \\ &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\delta_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial\delta_j}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \end{aligned} \tag{6-26}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

可见，计算位移方差和协方差的关键是要先求出$\left(\frac{\partial \delta_i}{\partial X_k}\right)_E$，为此，对式（6-2）取随机变量$X_k$的微分，有

$$\frac{\partial [K]}{\partial X_k}\{\delta\}+[K]\frac{\partial \{\delta\}}{\partial X_k}=\frac{\partial \{R\}}{\partial X_k}$$

或者

$$[K]\left\{\frac{\partial \delta}{\partial X_k}\right\}=\left\{\frac{\partial R}{\partial X_k}\right\}-\left\{\frac{\partial K}{\partial X_k}\right\}\{\delta\}$$

令

$$[K]\left\{\frac{\partial \delta}{\partial X_k}\right\}=\{u\} \tag{6-27}$$

式中

$$\{u\}=\left\{\frac{\partial R}{\partial X_k}\right\}-\left\{\frac{\partial K}{\partial X_k}\right\}\{\delta\} \tag{6-28}$$

由于是求随机变量均值的偏导数，故把随机变量的均值$\{\overline{X}\}$和位移均值$\{\overline{\delta}\}=\{E[\delta_i]\}$代入式(6-28)，即可求得$\{u\}$。由式（6-27）可求得$\left(\frac{\partial \delta}{\partial X_k}\right)_E$。于是，可按式（6-25）和（6-26）求出位移的方差和协方差。

应力$\{\sigma\}$和位移$\{\delta\}$一样，亦为$\{X\}$的函数，即

$$\sigma_i=\sigma_i(X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots,\ X_m) \tag{6-29}$$

其期望值、方差和协方差为

$$E[\sigma_i]=\sigma_i(\overline{X}_1,\ \overline{X}_2,\ \cdots\cdots,\ \overline{X}_m) \tag{6-30}$$

$$\mathrm{Var}[\sigma_i]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \tag{6-31}$$

$$\mathrm{Cov}[\sigma_i,\ \sigma_j]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial \sigma_i}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial \sigma_j}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \tag{6-32}$$

式中 σ_i表示单元i的应力。

在有限单元法中，以物理方程表示应力与结点位移之间的关

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e$$

式中，$[D]$为弹性矩阵，它完全决定于弹性常数E和μ。对于平面形变问题，其为

$$[D]=\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\begin{bmatrix} 1 & \text{对} & \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & \text{称} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix}$$

而$[B]$为几何矩阵，作为三角形单元，其分块形式为

$$[B_i]=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{bmatrix} \qquad (i,\ j,\ m)$$

如前所述，矩阵$[B]$的元素均为常量。这样，把结点位移期望值$E[\delta_i]$、弹性模量E和泊松系数μ的均值代入式（6-17）和（6-16），则可求得应力的期望值。

计算应力的方差和协方差的方法是：对式（6-16）的两端取X_k的微分，得

$$\left\{\frac{\partial\sigma}{\partial X_k}\right\}=\frac{\partial[D]}{\partial X_k}[B][\delta]+[D][B]\left\{\frac{\partial\delta}{\partial X_k}\right\} \qquad (6\text{-}33)$$

式中，矩阵$[B]$为确定量。把$E[\delta_i]$、$\left(\frac{\partial\delta}{\partial X_k}\right)_E$、$\{\overline{X}\}$代入式（6-33），可求得$\left(\frac{\partial\sigma_i}{\partial X_k}\right)_E$，由式（6-31）和（6-32）可求得应力的方差和协方差。

按平面问题考虑，主应力和最大剪应力可由（6-21）、（6-34）式求得：

$$\begin{pmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{pmatrix}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\tau_{max}=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{6-34}$$

对式（6-21）和（6-34）取X_k的微分，则有

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\sigma_1}{\partial X_k}\\ \\ \frac{\partial\sigma_2}{\partial X_k}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_k}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial x_k}\right)\pm$$

$$\pm\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_k}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial X_k}\right)+2\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial X_k}}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} \tag{6-35}$$

$$\frac{\partial\tau_{max}}{\partial X_k}=\frac{\frac{1}{2}(\sigma_x-\sigma_y)\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial X_k}-\frac{\partial\sigma_y}{\partial X_k}\right)+2\tau_{xy}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial X_k}}{2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}} \tag{6-36}$$

由式（6-35）和（6-36）求出$\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial X_k}\right)_E$、$\left(\frac{\partial\sigma_2}{\partial X_k}\right)_E$和$\left(\frac{\partial\tau_{max}}{\partial X_k}\right)_E$后，即可由式（6-31）和（6-32）求出主应力和最大主应力的方差和协方差。

6.3.2 各向同性边坡体的局部破坏概率

下面，我们讨论边坡岩体为均质各向同性体，且无优势方向的不连续面存在情况下的局部破坏概率。

为了求解边坡体局部破坏概率，在求得随机变量位移和应力的期望值、方差、协方差后，还应考虑边坡岩体的强度特性。因此，假设边坡岩体服从Mohr-Coulomb破坏准则。为简化计算，只对剪切破坏和受拉破坏分别计算破坏概率，而不涉及两者同时发生的混合破坏。关于剪切破坏的材料强度特性，考虑粘结力和摩擦角，并把它们视作随机变量。同时，假设岩石材料完全不能承受拉伸。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

图6-2示出各向同性均质体边坡内部某一点的应力状态和Mohr-Coulomb破坏准则的关系。图中压应力取正。这里，不考虑破坏的方向，依据Mohr应力圆与破坏标准线的接近度来确定破坏概率。如从Mohr应力圆心至破坏标准线的距离以τ_f表示，应力圆的半径以τ_{max}表示，则抗剪破坏的安全储备为

$$Q_s = \tau_f - \tau_{max} \tag{6-37}$$

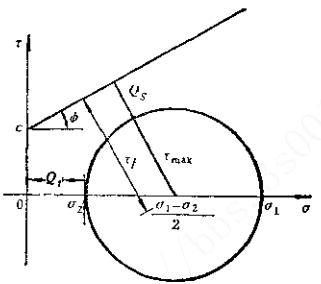


图 6-2　均质体内一点的应力状态和安全储备

根据主应力和强度特性，由图6-2的几何关系的推导，可将式(6-37)写作：

$$Q_s = C\cos\phi + \frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\sin\phi - \frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2) \tag{6-38}$$

因假定岩石材料是无抗拉能力的，故σ_2就是这种情况下的抗拉安全储备，即

$$Q_t = \sigma_2 \tag{6-39}$$

从式(6-38)和(6-39)可以看出，若$Q_s \leqslant 0$或者$Q_t \leqslant 0$，意味着应力状态超过破坏标准，则岩体发生破坏。

因为主应力和强度特性都是随机变量，故安全储备Q_s和Q_t亦都是随机变量。如果采用线性一次逼近理论，其期望值和方差可按下式求得：

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$E[Q_s]=E[C]\cos(E[\phi])+\frac{1}{2}(E[\sigma_1]+E[\sigma_2])$$

$$\times\sin(E[\phi])-\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2]) \qquad (6\text{-}40)$$

$$E[Q_l]=E[\sigma_2] \qquad (6\text{-}41)$$

$$\mathrm{Var}[Q_s]=E[\{E[Q_s]-Q_s\}^2]$$

$$=E\left[\left\{(E[C]-C)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E+(E[\phi]-\phi)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_k}\right)_E\right\}^2\right]$$

$$=E\left[\left\{(E[C]-C)^2\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E^2+(E[\phi]-\phi)^2\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E^2+(E[C]-C)(E[\phi]-\phi)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E$$

$$\times\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E+(E[C]-C)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)$$

$$\times\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_k}\right)_E+(E[\phi]-\phi)\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)$$

$$\times\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_k}\right)_E+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_l}\right)_E(X_k-\overline{X}_k)$$

$$\left.\left.\times(X_l-\overline{X}_l)\right\}\right]$$

$$=\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E^2E[(E[C]-C)^2]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E^2E[(E[\phi]$$

$$-\phi)^2]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_E\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_EE[(E[C]-C)(E[\phi]$$

$$-\phi)]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C}\right)_EE\left[(E[C]-C)\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\right.$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\times\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E\Big\}+\left(\frac{\partial Q_z}{\partial \phi}\right)_E E\Big\{(E[\phi]-\phi)\sum_{k=1}^{m}(X_k-\overline{X}_k)\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E\Big\}+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E \times\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_l}\right)_E E[(X_k-\overline{X}_k)(X_l-\overline{X}_l)]$$

$$=\left(\frac{\partial Q_z}{\partial C}\right)_E^2 \mathrm{Var}[C]+\left(\frac{\partial Q_z}{\partial \phi}\right)_E^2 \mathrm{Var}[\phi]+\left(\frac{\partial Q_z}{\partial C}\right)_E\left(\frac{\partial Q_z}{\partial \phi}\right)_E \mathrm{Cov}[C,\ \phi]+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E \times\left(\frac{\partial Q_z}{\partial C}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ C]+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_z}{\partial \phi}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ \phi]+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_z}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \tag{6-42}$$

$$\mathrm{Var}[Q_z]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial X_l}\right)_E \mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \tag{6-43}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial Q_z}{\partial C}&=\cos\phi\\ \frac{\partial Q_z}{\partial \phi}&=-C\sin\phi+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\cos\phi\\ \frac{\partial Q_z}{\partial X_k}&=\frac{1}{2}(\sin\phi-1)\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial X_k}\right)+\frac{1}{2}(\sin\phi+1)\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial X_k}\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-44}$$

关于$\frac{\partial Q_z}{\partial X_k}$求导：因$Q_z$是随机变量$C$、$\phi$、$\sigma_1$、$\sigma_2$的函数，

地信网论坛
BBS.3S001.COM

随机变量X_i（$i=1, 2, \cdots\cdots, m$）的函数，由式(6-38)可得

$$\frac{\partial Q_n}{\partial X_k}=\frac{\partial}{\partial X_k}\left(C\cos\phi+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\sin\phi-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_k}(\sigma_1+\sigma_2)\sin\phi-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial X_k}(\sigma_1-\sigma_2)$$

$$=\frac{1}{2}\sin\phi\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial X_k}+\frac{\partial\sigma_2}{\partial X_k}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial X_k}-\frac{\partial\sigma_2}{\partial X_k}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\phi-1)\frac{\partial\sigma_1}{\partial X_k}+\frac{1}{2}(\sin\phi+1)\frac{\partial\sigma_2}{\partial X_k}$$

下面，我们计算单元i和j的Q_i、Q_j的协方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[Q_{si}, Q_{sj}]=&\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial C}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial C}\right)_E\mathrm{Var}[C]\\&+\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial\phi}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial\phi}\right)_E\mathrm{Var}[\phi]\\&+\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial C}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial\phi}\right)_E\mathrm{Cov}[C, \phi]\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial C}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k, C]\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial C}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial X_k}\right)_E\mathrm{Cov}[C, X_k]\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial\phi}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k, \phi]\\&+\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial\phi}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial X_k}\right)_E\mathrm{Cov}[\phi, X_k]\\&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial X_l}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k, X_l]\end{aligned}\tag{6-45}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mathrm{Cov}[Q_{ti},\ Q_{tj}]=\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_{ti}}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{tj}}{\partial X_l}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k,\ X_l] \tag{6-46}$$

按照极限平衡的概念，可求得安全系数：

$$F_S=\frac{E[\tau_f]}{E[\tau_{\max}]}$$

$$=\frac{E[C]\cos(E[\phi])+\frac{1}{2}(E[\sigma_1]+E[\sigma_2])\sin(E[\phi])}{\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2])} \tag{6-47}$$

假若安全储备Q_s和Q_t的概率模型为正态分布，则可按下式求得可靠指标β和剪切破坏概率p_f：

$$\beta=\frac{\mu_{Q_s}}{\sigma_{Q_s}} \tag{6-48}$$

$$p_f=1-\Phi(\beta) \tag{6-49}$$

式中，$\mu_{Q_s}=E[Q_s]$，$\sigma_{Q_s}=(\mathrm{Var}[Q_s])^{1/2}$，$\Phi(\cdot)$为标准正态分布函数。

同理，可以求得拉伸破坏概率。

6.3.3 有一定方向不连续面边坡体的局部破坏概率

若具备平面剪切破坏条件，不连续面近乎平行成组出现，其与水平面夹角为β时，根据$Mohr$应力圆，不连续面的主应力σ和剪应力τ如图6-3所示。该面上的剪切强度为

$$\tau_{\beta f}=C_\beta+\sigma\tan\phi_\beta \tag{6-50}$$

式中 C_β和ϕ_β分别为不连续面的粘结力和摩擦角。

沿不连续面的安全储备为

$$Q_s=\tau_{\beta f}-\tau \tag{6-51}$$

由于主应力方向在应力场中是变化的，虽然不连续面组的产状在岩体一定范围内可以认为是稳定的，不连续面与主应力之间

地信网论坛
BBS.3S001.COM

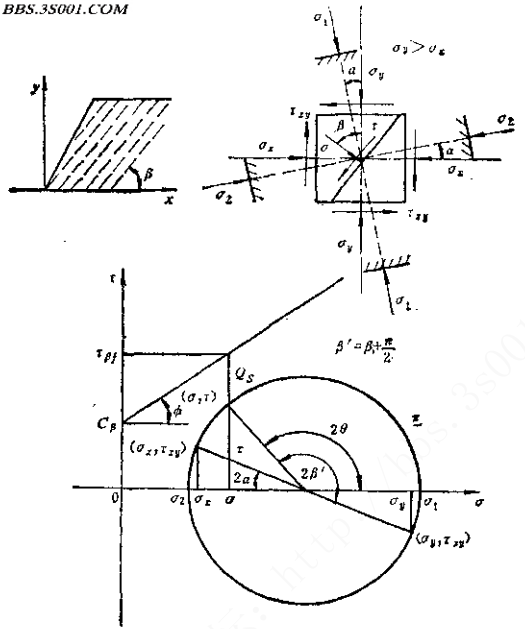


图 6-3　有一定方向平行不连续面岩体的应力状态与安全储备

夹角仍是在不同部位上有很大变化的。不连续面上的正应力和剪应力可根据主应力公式写成：

$$\sigma=\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta \quad (6\text{-}52)$$

$$\tau=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta \quad (6\text{-}53)$$

式中　$\theta=\beta-\alpha+\pi/2$　(6-54)

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\alpha=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) \tag{6-55}$$

把式 (6-50)、(6-52) 和 (6-53) 代入式 (6-51)，得安全储备：

$$Q_s=C_\beta+\left\{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\right\}\tan\phi_\beta$$

$$-\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\sin 2\theta \tag{6-56}$$

式中，C_β和ϕ_β是相关随机变量，但与其它随机变量X_k之间则是统计独立的。因此，Q_s为随机变量，采用线性一次逼近理论，可求出其期望值和方差：

$$E[Q_s]=E[C_\beta]+\left\{\frac{1}{2}(E[\sigma_1]+E[\sigma_2])\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2])\cos(2E[\theta])\right\}\tan(E[\phi_\beta])$$

$$-\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2])\sin(2E[\theta]) \tag{6-57}$$

$$\mathrm{Var}[Q_s]=\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C_\beta}\right)_E^2\mathrm{Var}[C_\beta]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta}\right)_E^2\mathrm{Var}[\phi_\beta]$$

$$+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial C_\beta}\right)_E\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta}\right)_E\mathrm{Cov}[C_\beta,\phi_\beta]$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_s}{\partial X_l}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k,X_l] \tag{6-58}$$

式中 $$\frac{\partial Q_s}{\partial C_\beta}=1 \tag{6-59}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta}=\frac{1}{\cos^2\phi_\beta}\left\{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\right\} \tag{6-60}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q_s}{\partial X_h}=&\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial X_h}+\frac{\partial \sigma_2}{\partial X_h}\right)\tan\phi_\beta\\&+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \sigma_1}{\partial X_h}-\frac{\partial \sigma_2}{\partial X_h}\right)\times(\cos 2\theta\tan\phi_\beta-\sin 2\theta)\\&-(\sigma_1-\sigma_2)\cdot(\tan\phi_\beta\sin 2\theta+\cos 2\theta)\\&\times\frac{(\sigma_x-\sigma_y)\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_h}-\tau_{xy}\left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial X_h}-\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial X_h}\right)}{(\sigma_x-\sigma_y)^2+4\tau_{xy}^2}\end{aligned} \tag{6-61}$$

假定在单元内应力为定值，且平行的不连续面无数多，这样，在求得各单元Q_s的期望值和方差后，可求得单元i和j的Q_s的协方差：

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[Q_{si},Q_{sj}]=&\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial C_\beta}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial C_\beta}\right)_E\mathrm{Var}[C_\beta]\\&+\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial \phi_\beta}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi_\beta}\right)_E\cdot\mathrm{Var}[\phi_\beta]\\&+\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial C_\beta}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial \phi_\beta}\right)_E\mathrm{Cov}[C_\beta,\phi_\beta]\\&+\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial Q_{si}}{\partial X_k}\right)_E\left(\frac{\partial Q_{sj}}{\partial X_l}\right)_E\mathrm{Cov}[X_k,X_l]\end{aligned} \tag{6-62}$$

式中，下标i和j表示相应单元i和j的值。

根据极限平衡的概念，可得安全系数：

$$F_s=\frac{\tau_{\beta f}}{\tau}=\frac{E[C_\beta]+\left\{\frac{1}{2}(E[\sigma_1]+E[\sigma_2])+\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2])\cos(2E[\theta])\tan(E[\phi_\beta])\right\}}{\frac{1}{2}(E[\sigma_1]-E[\sigma_2])\sin(2E[\theta])} \tag{6-63}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

Q_s服从正态分布，可用式（6-48）和（6-49）计算可靠指标β和破坏概率p_f。

6.3.4 确定破坏面边坡体的总体破坏概率

在边坡可靠性分析中，求出单一的确定破坏面的破坏概率是非常重要的。图6-4示出圆弧形破坏边坡，确定的滑动弧的剪应力矩为：

$$M(x_o, y_o) = r^2 \int_0^{\theta_o} \tau \mathrm{d}\theta \tag{6-64}$$

式中，r表示圆弧滑动面的半径。而该面的抗剪力矩为：

$$R(x_o, y_o) = r^2 \int_0^{\theta_o} \tau_{\beta f} \mathrm{d}\theta \tag{6-65}$$

因此，该面上的抗滑安全储备为：

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}_s(x_o, y_o) &= R(x_o, y_o) - M(x_o, y_o) \\ &= r^2 \int_o^{\theta_o} (\tau_{\beta f} - \tau) \mathrm{d}\theta \\ &= r^2 \int_o^{\theta_o} Q_s \mathrm{d}\theta \end{aligned} \tag{6-66}$$

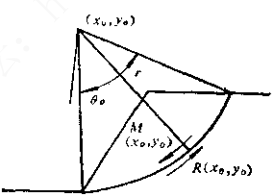


图 6-4　圆弧滑动面上的剪应力矩和抗剪力矩

如果按图6-5所示，滑动弧穿过N个单元，式(6-66) 可近似地离散成：

$$\widetilde{Q}_s(x_o, y_o) = \sum_{i=1}^{N} Q_{si} r^2 \Delta l_i \tag{6-67}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

元i的安全储备；Δl_i为滑动弧切割单元i的长度（取直线）。$\widetilde{Q}_s(x_o,y_o)$的均值和方差为：

$$E[\widetilde{Q}_s(x_o,y_o)]=\sum_{i=1}^{N}E[Q_{si}]r^2\Delta l_i \qquad (6\text{-}68)$$

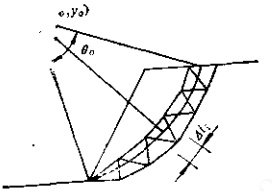


图 6-5 滑动弧通过的单元

$$\mathrm{Var}[\widetilde{Q}_s(x_o,y_o)]=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(\Delta l_i)(\Delta l_j)r^2 \times \mathrm{Cov}[Q_{si},Q_{sj}] \qquad (6\text{-}69)$$

假定$\widetilde{Q}_s(x_o,y_o)$服从正态分布，则这个滑动面上的破坏概率可由式（6-48）和（6-49）求出。

6.3.5 算例

6.3.5.1 分析模型

图6-6为分析所用的边坡有限元模型，其考虑弹性模量(E)、泊松系数（μ）、粘结力（c）、内摩擦角（ϕ）和容重（γ）等5个材料常数，它们的均值和变异系数列于表6-1。

6.3.5.2 静力分析的基本公式

A 极限平衡法安全系数计算公式

圆弧形滑动的安全系数采用Fillenius方法求得（图6-7）：

$$F_s=\frac{R(x_o,y_o)}{M(x_o,y_o)}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}[c\Delta s_j+\gamma h_j\Delta x_j\cos\alpha_j\tan\phi]r_o}{\sum_{j=1}^{n}[\gamma h_j\Delta x_j\sin\alpha_j]r_o} \tag{6-70}$$

式中 c和ϕ分别为滑动面的粘结力和摩擦角，γ为岩体容重，n为条块个数。

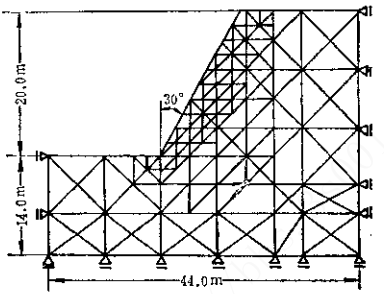


图 6-6 分析模型

表 6-1 材料常数的均值和变异系数

材料常数	均 值	变异系数
弹性模量，E(MPa)	980	0.0
泊松系数μ	0.3	0.1
容重γ(t/m^3)	22.5	0.1
粘结力c(kPa)	10	0.1
摩擦角ϕ(°)	48	0.072

B 均值一次二阶矩法求破坏概率

图6-8示出简单平面破坏模式，试计算沿某平面发生破坏的概率。沿该面的抗剪力矩为：

$$R(s)=-\frac{\gamma s^2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}\tan\phi_\beta+s\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}C_\beta \tag{6-71}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

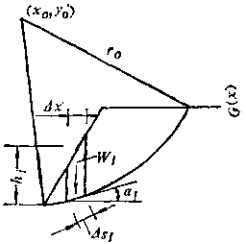


图 6-7 圆弧滑动的几何关系

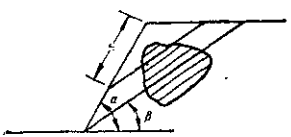


图 6-8 简单平面破坏的几何关系

该面的滑动力矩为：

$$M(s)=\frac{\gamma s^2 \sin\alpha \sin(\alpha-\beta)}{2} \tag{6-72}$$

故该面的抗滑安全储备为：

$$\begin{aligned} Q(s)&=R(s)-M(s)\\ &=f(s)\gamma\tan\phi_\beta+q(s)C_\beta-p(s)r \end{aligned} \tag{6-73}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} f(s)&=\frac{s^2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta}\\ q(s)&=s\times\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\\ p(s)&=\frac{s^2\sin\alpha\sin(\alpha-\beta)}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6-74}$$

设c_β、ϕ_β和γ是相互独立的，采用线性一次逼近法，按下式求出安全储备的均值和方差：

$$\begin{aligned} E[Q(s)]=&f(s)E[\gamma]E[\tan\phi]+q(s)E[c]\\ &-p(s)E[\gamma] \end{aligned} \tag{6-75}$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mathrm{Var}[Q(s)]=\left(\frac{\partial Q(s)}{\partial \gamma}\right)^2\mathrm{Var}[\gamma]+\left(\frac{\partial Q(s)}{\partial \phi}\right)^2\mathrm{Var}[\phi]$$

$$+\left(\frac{\partial Q(s)}{\partial c}\right)\mathrm{Var}[c]$$

$$=\{f(s)\tan\phi-p(s)\}^2\mathrm{Var}[\gamma]$$

$$+f(s)^2\gamma^2\left(\frac{1}{\cos^2\phi}\right)\mathrm{Var}[\phi]+q(s)^2\mathrm{Var}[c]$$

(6-76)

假设$Q(s)$概率模型为正态分布，单一滑动面的可靠指标和破坏概率用式（6-48）和（6-49）求得。

6.3.5.3 局部破坏

首先，采用单元平均应力，以式（6-47）求得无定向不连续面情况下边坡岩体内局部破坏的安全系数的分布（图6-9）。

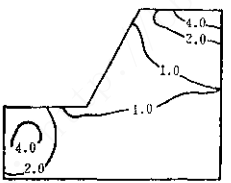


图 6-9 剪切破坏的平均安全系数分布

由图6-9可以看出，安全系数$F_s\leqslant 1.0$的范围自坡面向坡体内扩展，在坡脚的局部地方也有$F_s\leqslant 1$出现。

根据式（6-40）和（6-41）分别求出Q_s和Q_f的期望值。由于E、μ、γ、c和ϕ是统计上相互独立，故在式(6-42)和(6-43)中设：

$$\mathrm{Cov}[X_k,\phi]=0$$

$$\mathrm{Cov}[X_k,c]=0$$

$$\mathrm{Cov}[X_k,X_l]=\mathrm{Var}[X_k],\ (k=l\text{时})$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\mathrm{Cov}[X_k, X_l]=0, \quad (k\neq l\text{时})$$

则式 (6-42) 和 (6-43) 变成

$$\mathrm{Var}[Q_s]=\left(\frac{\partial Q_s}{\partial c}\right)_E^2\mathrm{Var}[c]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}\right)_E^2\mathrm{Var}[\phi]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \gamma}\right)_E^2\mathrm{Var}[\gamma]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial E}\right)_E^2\mathrm{Var}[E]+\left(\frac{\partial Q_s}{\partial \mu}\right)_E^2\mathrm{Var}[\mu] \tag{6-77}$$

$$\mathrm{Var}[Q_t]=\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial E}\right)_E^2\mathrm{Var}[E]+\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu}\right)_E^2\mathrm{Var}[\mu]=\left(\frac{\partial \sigma_2}{\partial \gamma}\right)_E^2\mathrm{Var}[\gamma] \tag{6-78}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_s}{\partial c}=\cos\phi\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial \phi}=-c\cos\phi+\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)\cos\phi\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial E}=\frac{1}{2}(\sin\phi-1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial E}+\frac{1}{2}(\sin\phi+1)\frac{\partial \sigma_2}{\partial E}\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial \mu}=\frac{1}{2}(\sin\phi-1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial \mu}+\frac{1}{2}(\sin\phi+1)\frac{\partial \sigma_2}{\partial \mu}\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial \gamma}=\frac{1}{2}(\sin\phi-1)\frac{\partial \sigma_1}{\partial \gamma}+\frac{1}{2}(\sin\phi+1)\frac{\partial \sigma_2}{\partial \gamma}
\end{aligned} \tag{6-79}$$

求得Q_s和Q_t的期望值和方差后，可按式 (6-49) 计算破坏

地信网论坛
BBS.3S001.COM

概率，其结果示于图6-10和图6-11。可以看出，剪切破坏概率的分布与平均安全系数的分布很相似。当然，平均安全系数$F_s=1.0$的等值线与破坏概率$p_f=50\%$等值线相对应。在坡脚处，受拉破坏概率不大，而剪切破坏概率较大，因此，这个边坡是受剪切破坏控制的。

在定向不连续面组（图6-8）、其倾角$\beta=40°$情况下，安全储备Q_s的期望值和方差分别按式（6-57）和(6-77)求得，但粘结

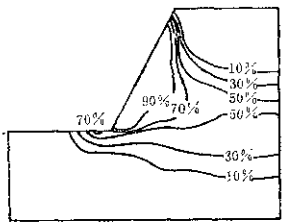


图 6-10 剪切破坏的破坏概率分布

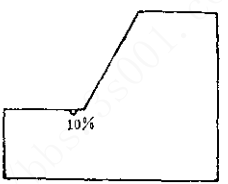


图 6-11 拉伸破坏的破坏概率分布

力c和摩擦角ϕ取不连续面的强度值，并在式（6-77）中采用以下数值：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial Q_s}{\partial c_\beta}=1\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial \phi_\beta}=\frac{1}{\cos^2\phi_\beta}\left\{\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_2)+\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_2)\cos 2\theta\right\}\\
&\frac{\partial Q_s}{\partial E}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial E}+\frac{\partial\sigma_2}{\partial E}\right)\tan\phi_\beta+\frac{1}{2}\times\\
&\qquad\times\left(\frac{\partial\sigma_1}{\partial E}-\frac{\partial\sigma_2}{\partial E}\right)(\cos 2\theta\cdot\tan\phi_\beta
\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}80)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$-\sin2\theta)-(\sigma_z-\sigma_z)(\tan\phi_\beta\sin2\theta+\cos2\theta)\times\frac{(\sigma_x-\sigma_y)\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial E}-\tau_{xy}\left(\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial E}-\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial E}\right)}{(\sigma_x-\sigma_y)^2+\tau_{xy}^2}\times$$

式中，c_β和ϕ_β分别为不连续面上的粘结力和摩擦角。$\dfrac{\partial Q_s}{\partial\mu}$或$\dfrac{\partial Q_s}{\partial\gamma}$的偏导数，按照与$\dfrac{\partial Q_s}{\partial E}$相同的方式求得。

计算结果示于图6-12。可以看出，破坏概率的等值线近乎平行于坡面分布，且高破坏概率的范围限于坡面附近，与图6-10相比，坡脚不存在高破坏概率的情况。

6.3.5.4 单一滑动面的破坏

由式（6-64）和（6-65）可以构造极限平衡概念下的平均安全系数表达式：

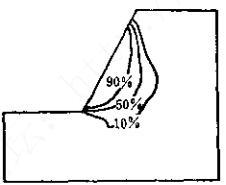


图 6-12 有不连续面组存在时剪切破坏的破坏概率分布

$$F_s=\frac{R(x_o,y_o)}{M(x_o,y_o)}=\frac{\int_0^{\theta_o}(\tau_{\beta f}\cdot r)r\,d\theta}{\int_0^{\theta_o}(\tau\cdot r)r\,d\theta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\tau_{\beta f_i}\Delta l_i}{\sum_{i=1}^{n}\tau_i\Delta l_i}\qquad(6\text{-}81)$$

地信网论坛
BBS.3S001.COM

与滑动面所穿过的单元i的剪切应力；τ_{fi}为单元i的剪切强度；Δl_i为滑动面切割单元i的长度；n为滑动面切割的单元数。

根据式（6-81）求出F_s后，把F_s与滑动面圆心(x_o, y_o)的关系划在图6-13上。

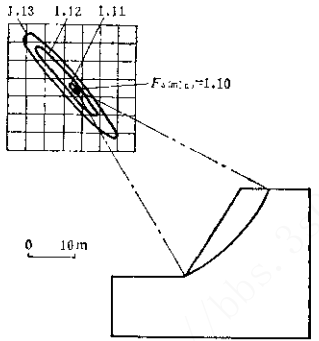


图 6-13 用有限元法得到的安全系数

下面，分析简单平面破坏的情况。同样，用式（6-81）计算平均安全系数。平均安全系数与滑动面位置（从边坡肩线算起，以顺坡的斜线距离s表示）的关系绘于图6-14。为了比较，图上也绘出极限平衡法的计算结果。结果表明，随着s加长即滑动面靠近边坡脚，两种方法的计算结果越接近一致。而在s值较小时，有限元法求得的安全系数值一般比极限平衡法低。

按照单一滑动面的随机有限元分析方法，分析了滑动面位置与破坏概率之间的关系，如图6-15所示。同样地，为了比较，把用均值一次二阶矩方法所求得的结果一并绘于图6-15。可以看出，随着距离s的增大，这两种方法所求得的破坏概率均增大。但是，用均值一次二阶矩方法所求得的破坏概率最大的滑动面出露在坡脚处；而用随机有限元法求得的破坏概率最大的滑动面，出露在坡脚以上略高一些的地方。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

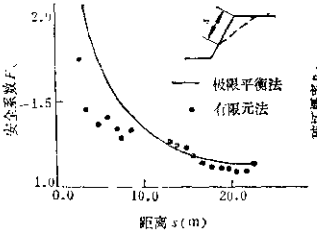


图 6-14 平面滑动位置与平均安全系数的关系

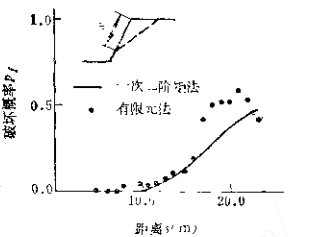


图 6-15 滑动面位置与破坏概率的关系

6.4 迭代验算法

线性一次逼近的随机有限元法，实质上是均值一次二阶矩法与有限元法的藕合。按照Mohr-Coulomb破坏准则建立起极限状态方程$Z=g(X_i),i=1,2,\cdots,n$。采用有限元法求得各单元的主应力和最大剪应力的均值和方差。将极限状态方程$Z=g(X_i)=0$按均值μ_x展成一个Taylor级数，并只取此级数的线性项，成切于设计点p^*的切平面方程，求得各单元的Z的一次近似的均值和方差，进而求得局部的单元可靠指标β和破坏概率p_f。

迭代验算的随机有限元法则是验算点法与有限元法的藕合，因此，其求解思路和步骤与验算点法基本相同。在有限元方法中，状态函数Z为单元应力$\{\sigma\}$和剪应力$\{\tau\}$、以及岩体强度参数粘结力c和摩擦角ϕ的函数，而$\{\sigma\}$和$\{\tau\}$又为基本随机变量$\{X\}$如弹性模量E、泊松系数μ等的函数，这样，可以采用有限元法求出单元的偏导数的应力矩阵，根据极限状态曲面方程，通过迭代方法，求出极限状态曲面至变量空间坐标原点的最短距离即可靠指标β和破坏概率p_f。

6.4.1 基于有限元的可靠指标计算公式

可靠指标β是在标准正态空间求得的。为此，对于正态分布的随机变量需进行标准正态化。当随机变量为非正态分布时，首

地信网论坛
BBS.3S001.COM

先需将其当量正态化，然后再进行标准正态化。并且，为了适应右限元法求解，均以矩阵形式来描述各基本公式。

设n维随机变量$\{X\}=\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}^T$，其均值为$\{\mu_X\}=\{\mu_{X_1},\mu_{X_2},\cdots,\mu_{X_n}\}^T$，标准差为$\{\sigma_X\}=\{\sigma_{X_1},\sigma_{X_2},\cdots,\sigma_{X_n}\}^T$，而与$\{X\}$相应的标准随机变量为$\{Y\}=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$，于是有

$$\{Y\}=[T]\{X\}+\{B\} \tag{6-82}$$

式中

$$[T]=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sigma_{X_1}} & & & 0\\ & \frac{1}{\sigma_{X_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\sigma_{X_n}}\end{bmatrix} \tag{6-83}$$

$$\{B\}=\begin{Bmatrix}-\frac{\mu_{X_1}}{\sigma_{X_1}}\\ -\frac{\mu_{X_2}}{\sigma_{X_2}}\\ \vdots\\ -\frac{\mu_{X_n}}{\sigma_{X_n}}\end{Bmatrix} \tag{6-84}$$

相应有

$$\{X\}=[T]^{-1}(\{Y\}-\{B\}) \tag{6-85}$$

这样，状态函数$g(X)$亦可转换到标准正态空间，即

$$g(X)=g([T]^{-1}(\{Y\}-\{B\}))=g(Y) \tag{6-86}$$

对于当量正态分布函数，要求其在设计验算点x_i^*处的累积概率分布函数值和概率密度分布函数值与原分布函数的累积概率分布函数值和概率密度分布函数值相等。根据这两个条件，可求出当量正态分布的均值μ'_{X_i}和标准差σ'_{X_i}：

$$\sigma'_{X_i}=\phi(\Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)))/f_{X_i}(x_i^*) \tag{6-87}$$

地信网论坛
BBS.35001.COM

$$\frac{x_i^* - \mu'_{X_i}}{\sigma'_{X_i}} = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i^*)) \tag{6-88}$$

式中 $f_{X_i}(x_i^*)$为原分布的概率密度分布函数在x_i^*处的值；$F_{X_i}(x_i^*)$为在x_i^*处原累积概率分布函数的值；$\Phi^{-1}(\cdot)$为标准正态分布的反函数；$\phi(\cdot)$为标准正态密度分布函数。

设Z为所有相关基本变量的函数，故可用状态函数

$$Z = g(X) = g(X_1, X_2, \cdots, X_n) \tag{6-89}$$

来表示n维状态空间。它代表X的所有可能值构成的所有可能状态，而等于$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的x^*是一个坐标为$x_1, x_2, \cdots, x_n$的单独的点，它表示基本变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$的数值$x_1, x_2, \cdots, x_n$所构成的状态。

当

$$g(X) = 0 \tag{6-90}$$

称为极限状态，而所有实现$g(X)=0$的点构成一个极限状态曲面。极限状态面上任一点$X' = (X'_1, X'_2, \cdots, X'_n)$至原点距离为

$$D = \beta = \sqrt{(Y'_1)^2 + (Y'_2)^2 + \cdots + (Y'_n)^2}$$
$$= \sqrt{\{Y'\}^T\{Y'\}} \tag{6-91}$$

式中 $\{Y\}$为一组经过当量正态化的相互独立的标准正态变量。

可靠指标法的最终结果就是求得可靠指标β（即在极限状态面上某一点至坐标原点的最短距离），以及相应的破坏概率

$$P_f = 1 - \Phi(\beta)$$

采用迭代法求β，其基本思路是：首先假设验算点的初始值x^*，并将x^*值代入极限状态方程$g(x^*)$，若$g(x^*) \neq 0$，则沿着$g(x) = g(x^*)$所表示的空间曲面在x^*点处的梯度方向前进或后退，得到新的验算点；再将新的验算点x^*代入极限状态方程，如果$g(x^*) > \varepsilon$（ε为所规定的离极限状态方程所表示的极限状态面的距离的精度要求），则继续迭代；如果$g(x^*) \leqslant \varepsilon$，则表示验算点正在极限状态面上，迭代停止，即可求出β值。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

根据梯度的定义，在标准正态空间，状态函数$G(Y)$在Y点的梯度向量：

$$\nabla G(Y)=[T]^{-1}\nabla g(X)$$
$$=\left\{\frac{\partial g}{\partial y_1},\ \frac{\partial g}{\partial y_2},\ \cdots,\ \frac{\partial g}{\partial y_n}\right\} \tag{6-92}$$

即状态函数对Y_i $(i=1,\ 2,\cdots,n)$的偏导数，它表明沿梯度方向（极限状态曲面法线方向）的空间变化率。而沿负梯度方向的单位向量

$$\{\alpha\}=-\frac{\nabla G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|} \tag{6-93}$$

式中 $\|\cdot\|$为几何范数或梯度的模，即

$$\|\nabla G(Y)\|=\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial Y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial Y_2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial g}{\partial Y_n}\right)^2} \tag{6-94}$$

$\{\alpha\}$$\beta$关于$Y_i$轴的方向余弦，它垂直于极限状态面，指向背离原点。迭代点沿此方向移动，$G(Y)$降低最快。

迭代点的移动步长d

$$d=\frac{G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|} \tag{6-95}$$

为了保证第k次迭代$\{Y\}^{(k)}$坐标原点与新的迭代点$\{Y\}^{(k+1)}$之间的连线能沿着$\{Y\}^{(k)}$点所在曲线的梯度方向，需将$\{Y\}^{(k)}$修正为

$$\{Y\}^{(k)'}=\{Y\}^{(k)T}\{\alpha\}\{\alpha\} \tag{6-96}$$

进而得迭代公式

$$\{Y\}^{(k+1)}=\left(\{Y\}^{(k)T}\{\alpha\}+\frac{G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|}\right)\{\alpha\} \tag{6-97}$$

由式（6-97），每次迭代便可求得一组向量$\{Y\}$，由式（6-91）可得一个β值，直至收敛满足预定精度要求，最后求得的β值即为实际工程的可靠指标。

值得注意的是，在求得当量正态分布的μ'_{x_i}和σ'_{x_i}后，由于

地信网论坛
BBS.35001.COM

迭代时验算点值$\{x^*\}$不同，μ'_{X_i}和σ'_{X_i}值也将改变，转换到标准正态空间的坐标系也将改变，所以，在确定新的迭代点$\{Y\}^{(k+1)}$之前，要将$\{Y\}$修正为

$$\{Y\}^{(k)'}=[T]'\{Y\}^{(k)}+\{B\}' \tag{6-98}$$

式中

$$[T]'=\begin{pmatrix} \dfrac{\sigma'^{(k)}_{X_1}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_1}} & & & 0 \\ & \dfrac{\sigma'^{(k)}_{X_2}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dfrac{\sigma'^{(k)}_{X_n}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_n}} \end{pmatrix} \tag{6-99}$$

$$\{B\}'=\begin{Bmatrix} \dfrac{\mu'^{(k)}_{X_1}-\mu'^{(k+1)}_{X_1}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_1}} \\ \dfrac{\mu'^{(k)}_{X_2}-\mu'^{(k+1)}_{X_2}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\mu'^{(k)}_{X_n}-\mu'^{(k+1)}_{X_n}}{\sigma'^{(k+1)}_{X_n}} \end{Bmatrix} \tag{6-100}$$

6.4.2 基于随机有限元原理的可靠指标计算方法

边坡抗滑稳定可靠度计算，按Mohr-Coulomb准则，建立抗滑稳定的极限状态方程：

$$g(X)=f|\sigma_{y_i}|+c-\tau_{xyi}=0 \tag{6-101}$$

以求得各单元的局部可靠度和破坏概率。在有确定的潜在破坏面时，可有

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$g(X)=\sum_{i=1}^{m}(f\,|\sigma_{yi}|+c-\tau_{xyi})\,b_i=0 \qquad (6\text{-}102)$$

以评价边坡总体的可靠度和破坏概率。

式中 m为潜在破坏面截切的单元数；f为摩擦系数；c为粘结力；σ_{yi}为单元i的垂直正应力，以拉为正，当$\sigma_{yi}>0$时，此项不计；τ_{xyi}为单元i的剪应力；b_i为破坏面截切单元i的长度。

在标准正态空间里，由式(6-92)可得状态函数的偏导数，即

$$\nabla G(Y)=[T]^{-1}\nabla g(X)$$

而

$$\nabla g(X)=\begin{Bmatrix}\sum_{i=1}^{m}\left(-f\cdot\dfrac{\partial\sigma_{yi}}{\partial X_1}-\dfrac{\partial\tau_{xyi}}{\partial X_1}\right)\cdot b_i\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^{m}\left(-f\cdot\dfrac{\partial\sigma_{yi}}{\partial X_{n-2}}-\dfrac{\partial\tau_{xyi}}{\partial X_{n-2}}\right)\cdot b_i\\ \sum_{i=1}^{m}(-\sigma_{yi}\cdot b_i)\\ \sum_{i=1}^{m}b_i\end{Bmatrix}\quad(\sigma_{yi}<0) \qquad (6\text{-}103)$$

式(6-103)的最后两个分量分别为状态函数$g(X)$对f和c的偏导数。可见，问题归结为求单元$i(i=1,2,\cdots,m)$的偏导数的应力矩阵。

因有以结点位移$\{\delta\}$表示的单元内任一点应力$\{\sigma\}$表达式

$$\{\sigma\}=[D][B]\{\delta\}^e$$

或

$$\{\sigma\}=[S]\{\delta\}^e \qquad (6\text{-}104)$$

式中，$[S]$为单元的应力矩阵，它等于单元的弹性矩阵$[D]$与几何矩阵$[B]$的乘积。

任一单元i，其偏导数应力矩阵为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_1}, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial X_1}, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_n}, & \frac{\partial \sigma_y}{\partial X_n}, & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_n} \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial \sigma_x}{\partial X_n} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial \sigma_y}{\partial X_n} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial X_n} \end{pmatrix}_i^T$$

$$= \left[\frac{\partial [S]}{\partial X_1} \{\delta\}^e, \frac{\partial [S]}{\partial X_2} \{\delta\}^e, \cdots, \frac{\partial [S]}{\partial X_n} \{\delta\}^e \right]_i^T$$

$$+ \left[[S] \frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial X_1}, [S] \frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial X_2}, \cdots, [S] \frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial X_n} \right]_i^T$$

(6-105)

因应力矩阵$[S]$为显式，故其对基本变量的偏导数和结点位移$\{\delta\}^e$容易求出。下面讨论单元偏导数结点位移向量$\frac{\partial \{\delta\}^e}{\partial X_j}$（$j=1, 2, \cdots, n$）的计算方法。

整体偏导数结点位移向量

$$\frac{\partial \{\delta\}}{\partial X_j} = [K]^{-1} \left(\frac{\partial \{R\}}{\partial X_j} - \frac{\partial [K]}{\partial X_j} \{\delta\} \right)$$

$$(j=1, 2, \cdots, n) \qquad (6\text{-}106)$$

式中偏导数劲度矩阵$\frac{\partial [K]}{\partial X_j}$和偏导数荷载向量$\frac{\partial \{R\}}{\partial X_j}$对于三角形常应变单元可以得到显式，求出后即可由式（6-106）解得$\frac{\partial \{\delta\}}{\partial X_j}$，从而得到$\frac{\partial \{\delta\}}{\partial X_j}$。

至此，求出状态函数的梯度向量$\nabla G(Y)$，然后，可由迭代公式（6-97）和式（6-91）求得可靠指标。

具体计算步骤如下：

（1）确定正态随机变量$\{X\}$和极限状态方程$g(X)=0$；

（2）以式（6-82）将正态随机变量$\{X\}$转换成标准正态随机变量$\{Y\}$；

地信网论坛
BBS.3S001.COM

$$\{Y\}=[T]\{X\}+\{B\}$$

（3）确定初始迭代点$\{X\}^0$，一般以均值点$\{\mu_x\}$为初始迭代点，此时$\{Y\}^0=0$；

（4）以式（6-2）求解$\{\delta(\mu_x)\}$；

（5）求$\frac{\partial[K]}{\partial X}$和$\frac{\partial\{R\}}{\partial X}$。这里，暂不考虑材料的非线性，荷载只考虑自重，因而两者均为常数矩阵；

（6）以式（6-106）求解$\left\{\frac{\partial\{\delta\}}{\partial X}\right\}$；

（7）以式（6-92）求出极限状态方程梯度$\nabla G(Y)$

$$\nabla G(Y)=[T]^{-1}\nabla g(X)$$

（8）以式（6-93）求迭代点移动方向

$$\{\alpha\}=-\frac{\nabla G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|}$$

（9）以式（6-95）求迭代点移动步长

$$d=\frac{G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|}$$

（10）以式（6-96）修正$\{Y\}^{(k)}$：

$$\{Y\}^{(k)'}=\{Y\}^{(k)T}\{\alpha\}\{\alpha\}$$

（11）以式（6-97）进行迭代计算

$$\{Y\}^{(k+1)}=\left(\{Y\}^{(k)T}\{\alpha\}+\frac{G(Y)}{\|\nabla G(Y)\|}\right)\{\alpha\}$$

（12）求新的验算点$\{X\}^{(k+1)}$

$$\{X\}^{(k+1)}=[T]^{-1}(\{Y\}^{(k+1)}-\{B\})$$

（13）计算可靠指标β

$$\beta=\sqrt{\{Y\}^T\{Y\}}$$

（14）计算$G(X)$或$G(Y)$，进行收敛判别，若$G(Y)<\varepsilon$、$|\beta_i-\beta_{i-1}|<\varepsilon'$，则停止迭代计算，从而由式（6-91）求得$\beta$，代入式（6-49）可求得破坏概率$p_f$，否则

地信网论坛
BBS.3S001.COM

(15) 以式（6-97）求解下一次验算点值，继续迭代，直至满足精度要求为止。

计算程序框图如图6-16所示。

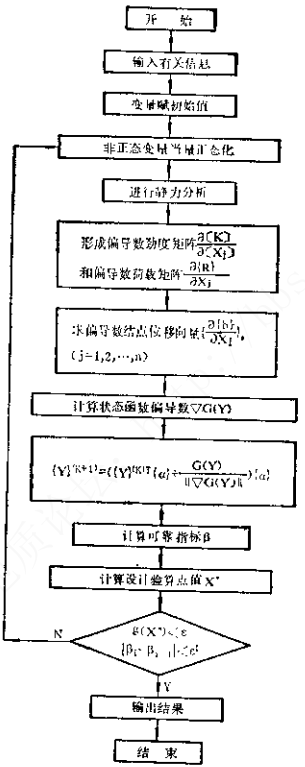


图 6-16 迭代验算法计算程序框图

地信网论坛
BBS.3S001.COM

6.4.3 实例分析

边坡可靠性分析的随机有限元法，首先在我国尖山露天铁矿边坡设计中应用，取得良好的计算结果。边坡岩体工程地质条件详见第3章3.7.3节。

6.4.3·1 计算假定和参数

典型计算剖面示于图6-17。计算假定：

（1）假定边坡岩体的变形和位移是微小的，作弹性平面应变问题处理；

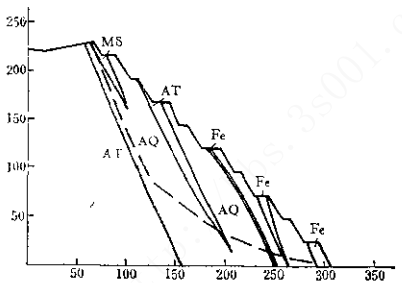


图 6-17 典型计算剖面

AQ—石英片岩；AT—铁闪片岩；Mδ—斜长角闪片岩；Fe—铁矿

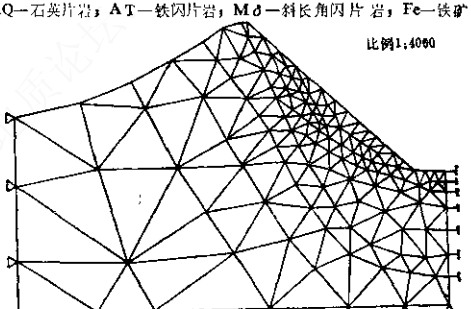


图 6-18 离散化模型

地信网论坛
BBS.35001.COM

（2）露天矿采场处于当地浸蚀基准面以上，矿区范围内亦未曾进行地应力测量，所以计算中只考虑自重应力作用下的应力与位移；

（3）采用三角形单元，线性函数的位移模式；

（4）总体抗剪稳定性分析，假定破坏面是确定的，采用单纯形法寻求安全系数最小的破坏面作为分析破坏面，如图6-17中虚线所示。

图6-18示出典型离散化模型。计算使用的强度参数及其统计

表 6-2　岩石物理及变形参数①

岩　性	风化状态	弹性模量 E MPa×10⁴	泊松系数 μ	容　重 G g/cm³
石英片岩（AQ）	风　化	0.670	0.250	2.64
	新　鲜	5.410	0.220	2.75
斜长角闪片岩（Mδ）	未风化	2.189	0.290	2.93
	新　鲜	6.010	0.240	2.96
绿泥角闪片岩（AH）	风　化	0.120	0.370	2.66
	新　鲜	5.420	0.270	2.97
石英绢云母片岩（AM）	风　化	2.590	0.318	2.66
	新　鲜	4.840	0.252	2.87
钛闪片岩（ΔT）	风　化	2.960	0.370	2.76
	新　鲜	4.690	0.260	3.10
绢云母炭质片岩（AP）	风　化	2.445	0.380	2.71
	新　鲜	3.120	0.290	2.86
钛矿石（Fe）	未风化	5.590	0.270	3.20
	新　鲜	6.210	0.200	3.30
正长闪长岩（Σ）	风　化	2.100	0.280	2.97
	新　鲜	6.100	0.210	2.98

①变形参数取变异系数$\delta=0.15$；容重取变异系数$\delta=0.10$。

地信网论坛
BBS.3S001.COM

3-15和3-16，岩体容重和变形参数见表6-2。

6.4.3.2 计算结果分析

图6-19示出6#计算剖面应力分布。可以看出，其主应力均以压应力为主，坡面附近的最大主应力方向基本顺着边坡面方向，并一直延伸到坡脚，这显然对边坡稳定性不利。向边坡体内部，最大压应力方向与水平轴（X轴）的夹角逐步变大，直至铅直和反倾。可能受岩层产状的影响，各设计区最大压应力方向变化速度和程度略有不同，4#剖面岩层为横截，6#剖面岩层陡倾，其最大压应力方向与X轴夹角大于倾角略缓的2#剖面。而各剖面上最大主应力方向突变界线与计算所假定的潜在最危险破坏面方向基本一致。拉应力一般出现在边坡上部几个单元（如2#和4#计算剖面），反映了岩层力学效应对边坡稳定性的控制作用。

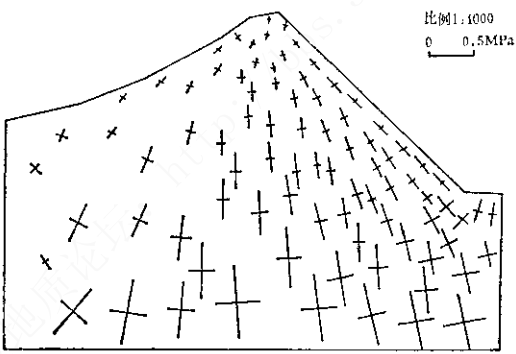


图 6-19 6#计算剖面应力分布

图6-20和图6-21示出6#计算剖面的等可靠指标β和等破坏概率p_f曲线。实际上，等β图和等p_f图是对应的、等价的，它们可以比较全面地表示出最终总体设计边坡岩体的局部可靠度和局部破坏概率的状态。从图中可见，局部破坏概率有的较高（最大为

地信网论坛
BBS.3S001.COM

40%），因为从理论上讲，中值安全系数$F_{so}=1.0$时，相应于破坏概率50%，就是说，如果以极限平衡理论为评价准则的话，局部安全系数仍大于1.0。

相对低β（$\beta<2$）和高p_f（$p_f>10\%$）的等值线，大都分布在坡面附近，多不向边坡体内部延伸，而边坡内部β值一般较高。这就意味着，潜在破坏危险可能孕育在中浅部边坡，而局部

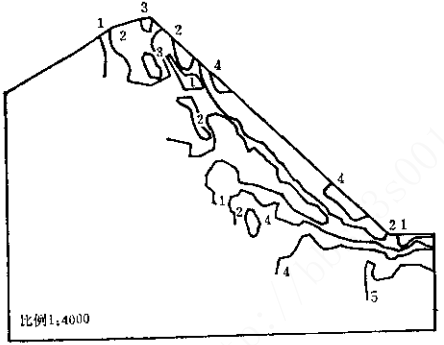


图 6-20 6#计算剖面等β曲线

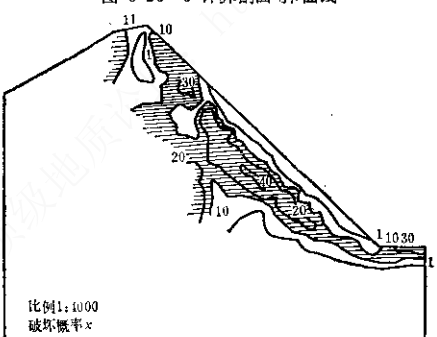


图 6-21 6#计算剖面等p_f曲线

地信网论坛
BBS.3S001.COM

表面边坡只有在1#计算剖面上几处出现较高的破坏概率。在计算剖面1#～4#，低β曲线或高p_f曲线呈孤立状，并不连续。而计算剖面5#和6#，$p_f=10\%$曲线连成一体，但量值不大。

对边坡设计方案一（见第3章3.7.3节），还采用了与可靠性分析相同的潜在破坏面进行了总体边坡可靠的随机有限元分析，分析结果见表6-3。为了便于比较，亦将其他可靠性分析方法的计算结果与随机有限元法计算结果一并列于表6-4。可以看出，各种计算方法所求得的相应破坏概率值基本一致。

表 6-3　方案一总体边坡分析结果

剖面	计算标高（m）	可靠指标β	破坏概率p_f	中值安全系数F_{s0}
1	1608～1872	3.443	2.909×10^{-4}	1.2666
2	1488～1752	3.698	1.078×10^{-4}	1.3072
3	1344～1632	3.644	1.363×10^{-4}	1.2178
4	1344～1593	2.983	1.441×10^{-3}	1.2235
5	1341～1608	4.191	1.395×10^{-5}	1.2998
6	1488～1716	2.856	2.118×10^{-3}	1.3254

表 6-4　各种计算方法的结果比较

设计区	总体边坡破坏概率p_f			
	蒙特卡洛法	统计矩法	验算点法	随机有限元法
Ⅰ	9.961×10^{-5}	1.561×10^{-4}	1.591×10^{-4}	2.909×10^{-4}
Ⅱ	2.326×10^{-4}	2.701×10^{-4}	2.602×10^{-4}	1.078×10^{-4}
Ⅲ	2.507×10^{-4}	2.711×10^{-4}	2.905×10^{-4}	1.363×10^{-4}
Ⅳ	2.118×10^{-3}	2.497×10^{-3}	2.256×10^{-3}	1.441×10^{-3}
Ⅴ	8.539×10^{-5}	5.668×10^{-5}	1.523×10^{-5}	1.395×10^{-5}
Ⅵ	2.635×10^{-3}	2.635×10^{-3}	2.980×10^{-3}	2.118×10^{-3}

地信网论坛
BBS.3S001.COM

附表 1 标准正态分布表

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}\xi$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0.0	0.500000	0.35	0.636831	0.70	0.758036
0.01	0.503989	0.36	0.640576	0.71	0.761148
0.02	0.507978	0.37	0.644309	0.72	0.764238
0.03	0.511966	0.38	0.648027	0.73	0.767305
0.04	0.515954	0.39	0.651732	0.74	0.770350
0.05	0.519939	0.40	0.655422	0.75	0.773373
0.06	0.523922	0.41	0.659097	0.76	0.776373
0.07	0.527904	0.42	0.662757	0.77	0.779350
0.08	0.531882	0.43	0.666402	0.78	0.782305
0.09	0.535857	0.44	0.670032	0.79	0.785236
0.10	0.539828	0.45	0.673645	0.80	0.788145
0.11	0.543796	0.46	0.677242	0.81	0.791030
0.12	0.547759	0.47	0.680823	0.82	0.793892
0.13	0.551717	0.48	0.684387	0.83	0.796731
0.14	0.555671	0.49	0.687933	0.84	0.799546
0.15	0.559618	0.50	0.691463	0.85	0.802337
0.16	0.563560	0.51	0.694975	0.86	0.805105
0.17	0.567494	0.52	0.698468	0.87	0.807850
0.18	0.571423	0.53	0.701944	0.88	0.810570
0.19	0.575345	0.54	0.705401	0.89	0.813267
0.20	0.579260	0.55	0.708840	0.90	0.815940
0.21	0.583166	0.56	0.712260	0.91	0.818589
0.22	0.587064	0.57	0.715661	0.92	0.821214
0.23	0.590954	0.58	0.719043	0.93	0.823815
0.24	0.594835	0.59	0.722405	0.94	0.826391
0.25	0.598706	0.60	0.725747	0.95	0.828944
0.26	0.602568	0.61	0.729069	0.96	0.831473
0.27	0.606420	0.62	0.732371	0.97	0.833977
0.28	0.610262	0.63	0.735653	0.98	0.836457
0.29	0.614092	0.64	0.738914	0.99	0.838913
0.30	0.617912	0.65	0.742154	1.00	0.841345
0.31	0.621720	0.66	0.745374	1.01	0.843752
0.32	0.625517	0.67	0.748572	1.02	0.846136
0.33	0.629301	0.68	0.751748	1.03	0.848495
0.34	0.633072	0.69	0.754903	1.04	0.850830

地信网论坛
BBS.3S001.COM

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1.05	0.853141	1.45	0.926471	1.85	0.967843
1.06	0.855428	1.46	0.927855	1.86	0.968557
1.07	0.857690	1.47	0.929219	1.87	0.969258
1.08	0.859929	1.48	0.930563	1.88	0.969946
1.09	0.862143	1.49	0.931888	1.89	0.970621
1.10	0.864334	1.50	0.933193	1.90	0.971284
1.11	0.866500	1.51	0.934478	1.91	0.971933
1.12	0.868643	1.52	0.935744	1.92	0.972571
1.13	0.870762	1.53	0.936992	1.93	0.973197
1.14	0.872857	1.54	0.938220	1.94	0.973810
1.15	0.874928	1.55	0.939429	1.95	0.974412
1.16	0.876976	1.56	0.940620	1.96	0.975002
1.17	0.878999	1.57	0.941792	1.97	0.975581
1.18	0.881000	1.58	0.942947	1.98	0.976148
1.19	0.882977	1.59	0.944083	1.99	0.976705
1.20	0.884930	1.60	0.945201	2.00	0.977250
1.21	0.886860	1.61	0.946301	2.01	0.977784
1.22	0.888767	1.62	0.947384	2.02	0.978308
1.23	0.890651	1.63	0.948449	2.03	0.978822
1.24	0.892512	1.64	0.949497	2.04	0.979325
1.25	0.894350	1.65	0.950529	2.05	0.979818
1.26	0.896165	1.66	0.951543	2.06	0.980301
1.27	0.897958	1.67	0.952540	2.07	0.980774
1.28	0.899727	1.68	0.953521	2.08	0.981237
1.29	0.901475	1.69	0.954486	2.09	0.981691
1.30	0.903199	1.70	0.955435	2.10	0.982136
1.31	0.904902	1.71	0.956367	2.11	0.982571
1.32	0.906583	1.72	0.957284	2.12	0.982997
1.33	0.908241	1.73	0.958185	2.13	0.983414
1.34	0.909877	1.74	0.959071	2.14	0.983823
1.35	0.911492	1.75	0.959941	2.15	0.984223
1.36	0.913085	1.76	0.960796	2.16	0.984614
1.37	0.914656	1.77	0.961636	2.17	0.984997
1.38	0.916207	1.78	0.962462	2.18	0.985371
1.39	0.917735	1.79	0.963273	2.19	0.985738
1.40	0.919213	1.80	0.964070	2.20	0.986097
1.41	0.920730	1.81	0.964852	2.21	0.986447
1.42	0.922196	1.82	0.965621	2.22	0.986791
1.43	0.923641	1.83	0.966375	2.23	0.987126
1.44	0.925066	1.84	0.967116	2.24	0.987455

地信网论坛
BBS.3S001.COM

续附表 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
2.25	0.987776	2.65	0.995975	3.05	0.998856
2.26	0.988089	2.66	0.996093	3.06	0.998893
2.27	0.988396	2.67	0.996207	3.07	0.998930
2.28	0.988696	2.68	0.996319	3.08	0.998965
2.29	0.988989	2.69	0.996427	3.09	0.998999
2.30	0.989276	2.70	0.996533	3.10	0.999032
2.31	0.989556	2.71	0.996636	3.11	0.999065
2.32	0.989830	2.72	0.996736	3.12	0.999096
2.33	0.990097	2.73	0.996833	3.13	0.999126
2.34	0.990358	2.74	0.996928	3.14	0.999155
2.35	0.990613	2.75	0.997020	3.15	0.999184
2.36	0.990863	2.76	0.997110	3.16	0.999211
2.37	0.991106	2.77	0.997197	3.17	0.999238
2.38	0.991344	2.78	0.997282	3.18	0.999264
2.39	0.991576	2.79	0.997365	3.19	0.999289
2.40	0.991802	2.80	0.997445	3.20	0.999313
2.41	0.992024	2.81	0.997523	3.21	0.999336
2.42	0.992240	2.82	0.997599	3.22	0.999359
2.43	0.992451	2.83	0.997673	3.23	0.999381
2.44	0.992656	2.84	0.997741	3.24	0.999402
2.45	0.992857	2.85	0.997814	3.25	0.999423
2.46	0.993053	2.86	0.997882	3.26	0.999443
2.47	0.993244	2.87	0.997948	3.27	0.999462
2.48	0.993431	2.88	0.998012	3.28	0.999481
2.49	0.993613	2.89	0.998074	3.29	0.999499
2.50	0.993790	2.90	0.998134	3.30	0.999516
2.51	0.993963	2.91	0.998193	3.31	0.999533
2.52	0.994132	2.92	0.998250	3.32	0.999550
2.53	0.994297	2.93	0.998305	3.33	0.999566
2.54	0.994457	2.94	0.998359	3.34	0.999581
2.55	0.994614	2.95	0.998411	3.35	0.999596
2.56	0.994766	2.96	0.998462	3.36	0.999610
2.57	0.994915	2.97	0.998511	3.37	0.999624
2.58	0.995060	2.98	0.998559	3.38	0.999637
2.59	0.995201	2.99	0.998605	3.39	0.999650
2.60	0.995339	3.00	0.998650	3.40	0.999663
2.61	0.995473	3.01	0.998694	3.41	0.999675
2.62	0.995604	3.02	0.998736	3.42	0.999687
2.63	0.995731	3.03	0.998777	3.43	0.999698
2.64	0.995855	3.04	0.998817	3.44	0.999709

地信网论坛
BBS.3S001.COM

续附表 1

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3.45	0.999720	3.80	0.999928	4.75	0.101708E—05
3.46	0.999730	3.81	0.999931	4.80	0.793328E—06
3.47	0.999740	3.82	0.999933	4.85	0.617307E—06
3.48	0.999749	3.83	0.999936	4.90	0.479183E—06
3.49	0.999758	3.84	0.999938	4.95	0.371067E—06
3.50	0.999767	3.85	0.999941	5.00	0.286652E—06
3.51	0.999776	3.86	0.999943	5.10	0.169827E—06
3.52	0.999784	3.87	0.999946	5.20	0.996443E—07
3.53	0.999792	3.88	0.999948	5.30	0.579013E—07
3.54	0.999800	3.89	0.999950	5.40	0.333204E—07
3.55	0.999807	3.90	0.999952	5.50	0.189896E—07
3.56	0.999815	3.91	0.999954	5.60	0.107176E—07
3.57	0.999821	3.92	0.999956	5.70	0.599037E—08
3.58	0.999828	3.93	0.999958	5.80	0.331575E—08
3.59	0.999835	3.94	0.999959	5.90	0.181751E—08
3.60	0.999841	3.95	0.999961	6.00	0.986588E—09
3.61	0.999847	3.96	0.999963	6.10	0.530343E—09
3.62	0.999853	3.97	0.999964	6.20	0.282316E—09
3.63	0.999858	3.98	0.999966	6.30	0.148823E—09
3.64	0.999864	3.99	0.999967	6.40	0.77688 E—10
3.65	0.999869	4.00	0.316712E—04	6.50	0.40160 E—10
3.66	0.999874	4.05	0.250088E—04	6.60	0.20558 E—10
3.67	0.999879	4.10	0.206575E—04	6.70	0.10421 E—10
3.68	0.999883	4.15	0.166238E—04	6.80	0.5231 E—11
3.69	0.999888	4.20	0.133458E—04	6.90	0.260 E—11
3.70	0.999892	4.25	0.106885E—04	7.00	0.128 E—11
3.71	0.999896	4.30	0.853906E—05	7.10	0.624 E—12
3.72	0.999900	4.35	0.680688E—05	7.20	0.301 E—12
3.73	0.999904	4.40	0.541254E—05	7.30	0.144 E—12
3.74	0.999908	4.45	0.429351E—05	7.40	0.68 E—13
3.75	0.999912	4.50	0.339767E—05	7.50	0.32 E—13
3.76	0.999915	4.55	0.268230E—05	7.60	0.15 E—13
3.77	0.999918	4.60	0.211245E—05	7.70	0.70 E—14
3.78	0.999922	4.65	0.165968E—05	7.80	0.30 E—14
3.79	0.999925	4.70	0.130081E—05	7.90	0.15 E—14

地信网论坛
BBS.35001.COM

附表 2　x^2分布的$(1-\alpha)$百分位值

f \ $1-\alpha$	0.005	0.025	0.050	0.090	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.04393	0.03982	0.02393	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8
2	0.0100	0.0506	0.103	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8
3	0.0717	0.216	0.352	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3
4	0.207	0.484	0.711	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5
5	0.412	0.831	1.15	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5
6	0.676	1.24	1.64	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5
7	0.989	1.69	2.17	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3
8	1.34	2.18	2.73	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1
9	1.73	2.70	3.33	11.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9
10	2.16	3.25	3.94	16.0	18.3	20.5	23.0	25.2	29.6
11	2.60	3.82	4.57	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3
12	3.07	4.40	5.23	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9
13	3.57	5.01	5.89	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5
14	4.07	5.63	6.57	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1
15	4.60	6.26	7.26	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7
16	5.11	6.91	7.96	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3
17	5.70	7.56	8.67	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8
18	6.26	8.23	9.39	26.0	28.9	31.5	35.8	37.2	42.3
19	6.84	8.91	10.1	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8
20	7.43	9.59	10.9	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3
21	8.03	10.3	11.6	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8
22	8.64	11.0	12.3	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3
23	9.26	11.7	13.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7
24	9.89	12.4	13.8	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2
25	10.5	13.1	14.6	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6
26	11.2	13.8	15.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1
27	11.8	14.6	16.2	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5
28	12.5	15.3	16.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9
29	13.1	16.0	17.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3
30	13.8	16.8	18.5	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7
35	17.2	20.6	22.5	46.1	49.8	53.2	57.3	60.3	66.6
40	20.7	24.4	26.5	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8	73.4
45	24.3	28.4	30.6	57.5	61.7	65.4	70.0	73.2	80.1
50	28.0	32.4	34.8	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5	86.7
75	47.2	52.9	56.1	91.1	96.2	100.8	106.4	110.3	118.6
100	67.3	74.2	77.9	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4

地信网论坛
BBS.3S001.COM

参 考 文 献

[1] Chowdhury R. N., *Slope analysis, Elsevier scientific publishing company, Amsterdam-Oxford*-New York, 1978.

[2] Harr M.E. *Mechanics of particulate media (A Probabilistic approach), McGraw-Hill International Book company*, New York, 1977.

[3] Wu T. H. *and* Kraft L. M., *Safety analysis of slopes, J. Soil Mech. Fdns Div. Am. Soc. civ. Engrs*, 1976.

[4] Matsuo M. *and* Kuroda K., *Probabilistic approach to design of embamkments. Soils & Fdns* 14 (2), 1974.

[5] Morja-Catajan J. *and* Cornell C. A., *Earth Slope reliability byalevel crossing method, J. Ceotech. Engng Div. Am Soc. civ. Engrs*, 1976.

[6] Alonso E. E *Risk analysis of slopes and its application to Canadian sensitive clays. Geotechnique* 26 (3), 1976.

[7] McMahon B. K., *A statistical method for the design of rock slopes, Proc. 1st Australia-New Zealand Conf. on Geomechanics, Melbourna*, 1971.

[8] McMahon B.K., *Probability of failure and expected volume of failure in high rock Slopes, Proc. 2nd Australia-New Zealand Conf. on Geomechanics, Brisbane*, 1975.

[9] Piteau D. R. and Martin D.C., *Slope stability analysis and design based on Probability techniques at Cassiar mine, Con. Min. Metall. J. March.*, 1977.

[10] Marek J. M. *and* Savely J. P., *Probabilistic analysis of plane shear failure mode. 19th U. S. Symp. on Rock Mechanics*, 1978.

[11] Baecher G. B.*and* Einstein H.H., *Slope stability models in pit optimisation. 19 APCOM Symp. Tucson*, 1978.

[12] Morriss P. *and* Stotter H. J., *Open-cut design using probabilistic methods, Proc. 5th Int. Congr. on Rock Mechanics, Vol. 1*, 1983.

[13] *Kim Hyung Sik*, Major G. *and* Brown D. R., *Application of Monte Carlo technigues to slope stability analysis, 19th U. S. Symp. on Rock Mechanics*, 1978.

[14] Herget G., *Probabilistic slope besign for open Pit mines, Rock Mechanics, Suppl.* 12, 1982.

[15] Nguyen V. U. *and* Chowdhury R. N., *Probabilistic study of spoil pile stability in strip coal mines-Two techniques compared Int. J.Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.* 21 (1984), №6.

[16] Nguyen V. U. *and* Chowdhury R.N., *Risk analysis with Correlated variables, Geotechnique*, 35 (1), 1985.

[17] Chowdhury R.N. *and* A-Grivas D., *A Prababilistic model*

地信网论坛
BBS.3S001.COM

ilure of slope, J. Geotech. Engng Div, Am. Soc. Civ. Engrs 108 (GT6), 1982.

[18] Vanmarcke E., *On the riliability of earth slope, J. Geotech. Engng Div. Am. Soc. Civ. Engrs* 103 (GT11), 1977.

[19] Yuceman M.S. *and* Vanmarcke E., 3-D *Seismic reliability analysis of earth slope, ICASP-4, Pittagora Editrice, Florence*, 1984.

[20] A-Grivas D. *and* Asaoka A., *Slope safety Prediction under static and seismic loads, J. Geotech. Engng Div. Am. Soc. Civ. Engrs* 108 (GT5), 1982.

[21] Glass D. E., Savely J. P. *and* Call R. D., *Determining seismic risk for economic optimum slope design. 19th U. S. Symp. on Rock Mechanics*, 1978.

[22] Glynn E.F. *and* Ghosh S., *Effect of correlation on rock slope stability analysis*, 23 *RD Symp. on Rock Mechanics*, 1982.

[23] Pentz D.L., *Slope stability analysis techniques incorporating uncertainty in critical Parameters, 3RD Stabitity in surface mining*, 1982.

[24] Ramachandran K. *and* Hosking I. A., *Reliability approach to stability analysis of soil/rock Slopes, 5th Inter. conference on numerical methods in geomechanics, Nagoya, April* 1985.

[25] Miller S.M., *Fourier analysis for estimating probability of sliding for the plane shear failure mode*, 23 *RD Symp. on Rock Mechanics*, 1982.

[26] Baecher G. B., *Playing the odds in rock mechanics*, 23 *RD Symp. on Rock Mechanics*, 1982.

[27] Call R. D., Savely J. P. *and* Nicholas D. E., *Estimation of joint set characteristics from surface mapping data, 17th U.S. Symp. on Rock Mechanics*, 1976.

[28] Priest S. D. *and* Hudson J. A., *Estimation of discontinuity spacing and trace length Using scanline surveys, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech.Abstr.* 18 (1981).

[29] Kujatijake P.H.S.W *and* Wu T.H., *Estimation of mean trace length of discontinuities, Rock Mechanics and Rock Engineering*, 17, 1984.

[30] Einstein H. H. *and* Baecher G. B. *Probabilistic and statistical methods in engineering geology-Specific methods and examples, Part I: Exploration, Rock Mechanics and Rock Engineering* 16, 1983.

[31] Young D.S., *A generalized probabilistic approach for slope analysis: practical application to an open pit iron ore mine, Inter. J. Min. & Geological Engineering*, 4, 1986.

[32] Vanmarcke E., Shinozuka M., *Random filieds and stochastic finite elements, Structural Safety*, № 3, 1986.

[33] Vanmarcke E. *and* Grigoriu M., *Stochastic finite element analysis of simple beams, J. Eng. Mech. ASCE*, №5, 1983.

[34] Lauvence Mark A., *Basis random Variables in finite elemes*

地信网论坛
BBS.35001.COM

nt analysis. Inter. J. for numerical methods in engineering, 24(1987).

[35] Kiureghian Armen Der and Jyh-Bin Ke, Finite element based reliability analysis of frame structures. structural Safety and Reliability, IASSAR, Japan, May 27~29, 1985.

[36] 高历坤，实用概率统计学（概率及其应用），国防工业出版社，1988.

[37] 茆德元、杨节等，试验研究的数理统计方法，中国计量出版社，1987.

[38] 吕顺祥、李庆宇，质量——可靠性的设计、检验和效益，知识出版社，1988.

[39] 加拿大矿物能源技术中心，边坡工程手册（上、下），冶金工业出版社，1984、1986.

[40] 黄克中、毛善培，随机方法与模糊数学应用，同济大学出版社，1987.

[41] 赵国藩、曹居易、张宝权，工程结构可靠度，水利电力出版社，1984.

[42] 樱井春辅等，可靠性分析用概率纸的使用方法，机械工业出版社，1988.

[43] 吴世伟，结构可靠度分析，1988，未公开出版著作.

[44] 同济大学岩土工程系，可靠性理论在地基基础方面的应用译文集，同济大学出版社，1987.

[45] 包承纲、于丽，土坡在非常条件下稳定分析的概率方法，岩土工程学报，Vol. 9, No. 3, 1987.

[46] 祝玉学等，露天矿边坡设计的可靠性分析方法，水文地质工程地质，№ 5, 1980.

[47] 祝玉学等，随机模拟在边坡可靠性分析中的应用，有色金属(国外版)，№.2 1985.

[48] 祝玉学、沈大用，可靠性指标法在双滑面破坏模式分析中的应用，矿山技术，№ 3,1989.

[49] 祝玉学，边坡可靠性评价的R-S模型，安徽冶金，№. 1, 1989.

[50] 祝玉学、鲁礼明，弯曲形层状结构边坡顺层破坏的风险模型，金属矿山，№. 9 1989.

[51] 鲁兆明、祝玉学，边坡工程可靠性评价方法及运用，有色金属，№.3, 1989.

[52] 祝玉学，边坡工程评价指标的演化与发展，黑色金属矿山通讯，№. 2, 1990.

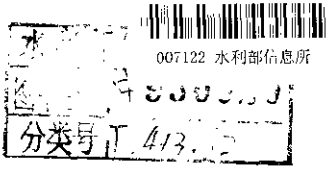
[53] 祝玉学、黄礼富，Rosenbjueth 方法在排土场边坡可靠性分析中的应用，矿山技术，№.3, 1990.

[54] 祝玉学，边坡可靠性分析的蒙特卡洛模拟方法，矿山技术，№. 4, 1990.

[55] 祝玉学，边坡工程的可靠性分析(讲座)，矿山技术，№. 4, 1990～№.6, 1991.

地信网论坛
BBS.3S001.COM





中国科学院地质研究所
岩体工程地质力学开放实验研究室基金项目

边坡可靠性分析

祝玉学 著

冶金工业出版社