

分形曲线曲面的分形插值法及其与随机生成法比较

张先波, 杨文颖

(三峡大学 理学院, 湖北 宜昌 443002)

摘要 给出了矩形域上的分形插值数学模型, 分形插值曲线曲面的 MATLAB 程序. 应用实际的数据进行了分形插值曲线曲面的研究, 并与随机生成法做了比较. 这对直观显示复杂物体的几何形态, 研究具有分形特征的地形地貌, 断层表面和材料裂缝表面等, 具有重要的理论意义和实用价值.

关键词 分形几何; 分形插值; matlab 语言; 程序设计

中图分类号 O241.3 **文献标识码** A **文章编号** 1003-8078(2010)03-031-06

The fractal interpolation methods of fractal curves and surfaces and comparison with randomly generated methods

ZHANG Xian-bo, YANG Wen-ying

(College of Science, China Three Gorges University, Yichang 443002, Hubei, China)

Abstract The fractal interpolation mathematical model at rectangular domain I, and interpolation curves and surfaces of the MATLAB program are given. Application of the actual data from the fractal interpolation of curves and surfaces are studied. The results are compared with that of the randomly generated method. Our research has significance to the visual display of complex geometric patterns, and to the research of topography with fractal characteristics, fault surfaces, and the surface cracks of materials, both in theory and reality.

Key words fractal geometry; fractal interpolation; matlab language; programming

分形曲线曲面在自然界中是大量存在的, 如海岸线, 山脉, 钟乳石的外观, 云团, 材料断口的粗糙表面等, 都是分形曲线曲面的实例^[1-3]. 近年来, 很多文献介绍了分形曲线曲面的研究方法——随机生成法和分形插值法. 在实际的工作中, 往往是已知分形曲线曲面上的部分信息 (例如, 材料断口的某条痕迹、断面上的某些特征), 需要通过这些部分信息和特征, 拟合出分形曲线曲面的整体形态, 从而对分形体的整体进行研究^[4-5]. 这就需要用到分形插值曲线曲面的理论和方法. 为了方便地使曲线曲面分形插值方法, 基于 MATLAB 语言, 本文给出了分形插值曲线、曲面的 MATLAB 程序, 并应用实际数据进行了分形插值曲线曲面的实例研究. 从而为更好地研究材料断口形貌、地貌形态的分形维数特征提供了直观分析依据. 并用一个实例说明: 在曲线曲面的整体形态描述上, 分形插值法要优于随机生成法.

1 分形插值曲线曲面

给定一组测量数据 $\{(x_i, F_i): x_{i-1} < x_i, i=0, 1, \dots, N\}$, 欲构造一个函数 $f(x)$, 使它的几何图形

收稿日期: 2010-01-28.

作者简介: 张先波, 湖北宜昌人, 三峡大学理学院副教授, 主要研究方向为应用概率统计和计算机辅助几何设计.

连续的穿过每个点,即 $F_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, N$. 函数 $f(x)$ 就称为插值函数. 传统的插值函数,对相邻的两插值点 (x_i, F_i) , (x_{i+1}, F_{i+1}) 之间只能用直线或光滑曲线连接,而得不到这两点之间的局部变化特征,然而对大量的实际情况,在相邻两数据点之间并不是线性变化或者是光滑过渡的,而是存在局部变化的特征,事实上,用分形插值就可以得到相邻两数据点之间的局部变化特征,从而使得插值结果更加符合实际.

1.1 分形插值曲线的数学模型

对于给定的数据点 $\{(x_i, F_i) : x_{i-1} < x_i, i = 0, 1, \dots, N\}$, 构造迭代函数系统(IFS)

$$\{R^2; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}, \text{ 其中 } \omega_i \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix}, \quad (1)$$

并使其满足条件:

$$\omega_i \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ F_{i-1} \end{pmatrix}, \quad \omega_i \begin{pmatrix} x_N \\ F_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ F_i \end{pmatrix}. \quad (2)$$

展开后则有

$$\begin{cases} a_i x_0 + e_i = x_{i-1} \\ a_i x_N + e_i = x_i \\ c_i x_0 + d_i F_0 + f_i = F_{i-1} \\ c_i x_N + d_i F_N + f_i = F_i \end{cases} \quad (3)$$

这是具有四个方程的方程组,但是有 a_i, c_i, d_i, e_i, f_i 五个未知数,一般选 d_i 为任意参数,称为纵向压缩比,且 $0 \leq d_i < 1, i = 0, 1, \dots, N$. 这样可以解出:

$$\begin{cases} a_i = (x_i - x_{i-1}) / (x_N - x_0) \\ e_i = (x_N x_{i-1} - x_0 x_i) / (x_N - x_0) \\ c_i = ((F_i - F_{i-1}) - d_i (F_N - F_0)) / (x_N - x_0) \\ f_i = ((x_N F_{i-1} - x_0 F_i) - d_i (x_N F_0 - x_0 F_N)) / (x_N - x_0) \end{cases} \quad (4)$$

1.2 分形插值曲面

令 $I = [a, b], J = [c, d]$; 设 $D = I \times J = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, 将 D 剖分为网格:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b; c = y_0 < \dots < y_M = d. \quad (5)$$

给定一组网格点上的数据 $(x_n, y_m, Z_{n,m}), n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M$, 欲构造二元分形插值函数 $f: D \rightarrow R$, 且满足 $f(x_n, y_m) = Z_{n,m}, n = 0, 1, 2, \dots, N, m = 0, 1, 2, \dots, M$.

记 $I_n = [x_{n-1}, x_n], J_m = [y_{m-1}, y_m], D_{n,m} = I_n \times J_m, n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}$.

令 $\phi_n: I \rightarrow I_n, \Phi_n(x) = a_n x + b_n; \varphi_m: J \rightarrow J_m, \Psi_m(y) = c_m(y) + d_m$ 为压缩变换,而且满足

$$\Phi_n(x_0) = x_{n-1}, \Phi_n(x_N) = x_n; \Psi_m(y_0) = y_{m-1}, \Psi_m(y_M) = y_m, \quad (6)$$

可得

$$\begin{cases} a_n = (x_n - x_{n-1}) / (x_N - x_0) \\ b_n = (x_N x_{n-1} - x_0 x_n) / (x_N - x_0) \\ c_m = (y_m - y_{m-1}) / (y_M - y_0) \\ d_m = (y_{m-1} y_M - y_0 y_m) / (y_M - y_0) \end{cases} \quad (7)$$

又令 z 方向的压缩变换为:

$$F_{n,m}(x, y, z) = e_{n,m} + f_{n,m}y + g_{n,m}xy + \alpha_{n,m}z + k_{n,m}, (n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}),$$

而且满足

$$\begin{cases} F_{n,m}(x_0, y_0, Z_{0,0}) = Z_{n-1,m-1} \\ F_{n,m}(x_N, y_0, Z_{N,0}) = Z_{n,m-1} \\ F_{n,m}(x_0, y_M, Z_{0,M}) = Z_{n-1,m} \\ F_{n,m}(x_N, y_M, Z_{N,M}) = Z_{n,m} \end{cases} \quad (8)$$

$\alpha_{n,m}$ 为决定分形插值曲面分形维数(粗糙程度)的自由参数,且满足 $0 \leq \alpha_{n,m} < 1$, 称为垂直比例因子.

由条件(8)可以解得:

$$\begin{cases} g_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n-1,m} - Z_{n,m-1} + Z_{n,m} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{N,0} - Z_{0,M} + Z_{N,M})] / (x_0 y_0 - x_N y_0 - x_0 y_M + x_N y_M) \\ e_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n,m-1} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{N,0}) - g_{n,m}(x_0 y_0 - x_N y_0)] / (x_0 - x_N) \\ f_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n-1,m} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{0,M}) - g_{n,m}(x_0 y_0 - x_0 y_M)] / (y_0 - y_M) \\ k_{n,m} = Z_{n,m} - e_{n,m} x_N - f_{n,m} y_M - \alpha_{n,m} Z_{n,m} - g_{n,m} x_N y_M. \end{cases}$$

令 $W_{n,m}(x, y, z) = (\Phi_n(x), \Psi_m(y), F_{n,m}(x, y, z))$ ($n=1, 2, \dots, N, m=1, 2, \dots, M$), 那么就定义了一个迭代函数系(IFS), $F_{n,m}(x, y, z)$ 为分形插值函数的隐函数.

2 分形插值曲线曲面的 matlab 程序

2.1 分形插值曲线

根据分形插值曲线的数学公式, 绘制分形插值曲线的步骤如下:

Step1, 给出要插值数据点 $\{(x_i, F_i): x_{i-1} < x_i, i=0, 1, \dots, N\}$;

Step2, 根据分形插值曲线的数学公式计算 $\{(\omega_i(x_j), \omega_i(F_j)): i=1, 2, \dots, N, j=0, 1, \dots, N\}$.

(这样经过计算后可以得到 $N \times (N+1)$ 个点.)

Step3, 将 Step2 中得到的 $N \times (N+1)$ 个点作为数据点, 绘制分形插值曲线, 若得到的图形不满意, 则转到 Step2 再进行一次运算, 直到得到满意的图形.

% 分形插值曲线

```
function [xp, yp] = fractal_curves(x, y)
```

```
alpha = 0.4
```

```
N = length(x);
```

```
xp = [];
```

```
yp = []; xp = x; yp = y;
```

```
k = 1;
```

```
for j = 1:length(x) - 1
```

```
    a(j) = (x(j+1) - x(j)) / (x(N) - x(1));
```

```
    c(j) = ((y(j+1) - y(j)) - alpha * (y(N) - y(1))) / (x(N) - x(1));
```

```
    e(j) = (x(N) * x(j) - x(1) * x(j+1)) / (x(N) - x(1));
```

```
    f(j) = (x(N) * y(j) - x(1) * y(j+1) - alpha * (x(N) * y(1) - x(1) * y(N))) / (x(N) - x(1));
```

```
    for i = 1:N
```

```
        xp(k) = a(j) * x(i) + e(j);
```

```
        yp(k) = c(j) * x(i) + alpha * y(i) + f(j);
```

```
        k = k + 1;
```

```
    end
```

```
end
```

2.2 分形插值曲面

根据分形插值曲面的数学公式, 绘制分形插值曲面的步骤如下:

Step1, 给出要插值数据点 $(x_n, y_m, Z_{n,m}), n=0, 1, 2, \dots, N, m=0, 1, 2, \dots, M$

Step2, 根据分形插值曲面的数学公式计算

$(\Phi_n(x_i), \Psi_m(y_j), F_{n,m}(x_i, y_j, z_{i,j}))(n=1, 2, \dots, N, m=1, 2, \dots, M, i=0, 1, \dots, N, j=0, 1, \dots, M)$

(这样经过计算后可以得到 $N \times (N+1) \times M \times (M+1)$ 个点.)

Step3, 将 Step2 中得到的 $N \times (N+1) \times M \times (M+1)$ 个点作为数据点, 绘制分形插值曲面, 若得到的图形不满意, 则转到 Step2 再进行一次运算, 直到得到满意的图形.

% 分形插值曲面

len = length(x);

alpha = 0.3 * ones(len, len);

N = length(x);

M = length(y);

xx = 0;

yy = 0;

fzz = 0;

xp = NaN;

yp = NaN;

zp = NaN;

s = 1;

s1 = 1;

s2 = 1;

s3 = 0;

s4 = 0;

for i = 1:N-1

for j = 1:N

xx = x(i) + (x(i+1) - x(i)) * (x(j) - x(1)) / (x(N) - x(1));

xp(s1) = xx; s1 = s1 + 1;

end

end

for i = 1:M-1

for j = 1:M

yy = y(i) + (y(i+1) - y(i)) * (y(j) - y(1)) / (y(N) - y(1));

yp(s2) = yy; s2 = s2 + 1;

end

end

KK = [];

for i = 2:N

for j = 2:M

c = (z(i-1, j-1) - z(i-1, j) - z(i, j-1) + z(i, j) - alpha(i, j) * (z(1, 1) - z(N, 1) - z(1, M) + z(N, M))) / (x(1) * y(1) - x(N) * y(1) - x(1) * y(M) + x(N) * y(M));

b = (z(i-1, j-1) - z(i, j-1) - alpha(i, j) * (z(1, 1) - z(N, 1)) - c * (x(1) * y(1) - x(N) * y(1))) / (x(1) - x(N));

d = (z(i-1, j-1) - z(i-1, j) - alpha(i, j) * (z(1, 1) - z(1, M)) - c * (x(1) * y(1) - x(1) * y(M))) / (y(1) - y(M));

k = z(i, j) - b * x(N) - d * y(M) - alpha(i, j) * z(N, M) - c * x(N) * y(M);

[c b d k];

i;

j;

for t1 = 1:N

for t2 = 1:M

```
KK=[KK;[(i-2)*M+t1,(j-2)*N+t2]];
zz((i-2)*N+t1,(j-2)*M+t2)=b*x(t1)+d*y(t2)+c*x(t1)*y(t2)+alpha(i,j)
*z(t1,t2)+k;
end
end
end
end
surf(xp,yp,zz)
x=xp;
y=yp;
z=zz;
```

3 研究实例

3.1 分形插值曲线研究实例

我们选取“吉林化纤”从1996年8月7日到1997年1月6日的数据进行分形插值(图2),根据其价格变化的情况取得14个数据点,图1是按股票走势随机法生成图.

表 1

时间 X	1	9	21	29	39	57	69	75	83	96	111	121	133	138
价格 Y	11.21	12.65	10.17	10.35	9.33	10.39	14.42	15.01	16.93	26.55	29.02	21.6	23.23	20.73

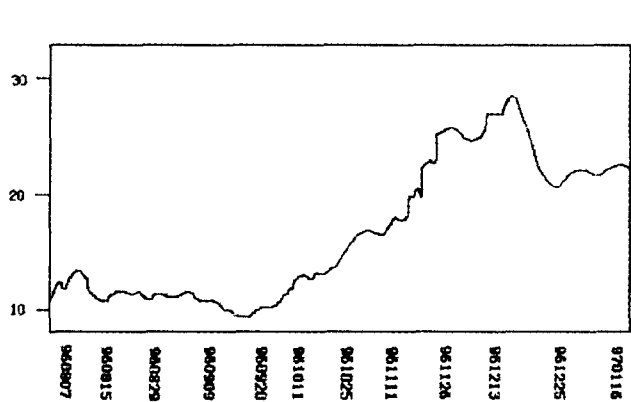


图 1 股票走势随机法生成

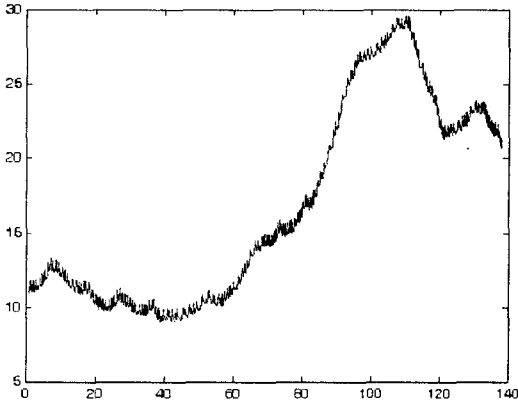


图 2 股票走势分形插值图

虽然,从图2可以发现分形插值结果与实际结果有一定的误差,没有图1那样在局部上更接近实际,但插值函数图形在整体上反映了股票价格的变化趋势,反映了两相邻已知信息点之间的局部特征;如果加密采样数据点,增加迭代系数,其结果将更加理想.

3.2 分形插值曲面实例研究

在某一30 mm×30 mm矩形区域的粗糙表面上测得一组数据.X方向、Y方向上的间隔均为10 mm.各有4个测量数据点,共测得16个数据(表2).即原始插值数据集为(x_n,y_m,z_{n,m})(n=0,1,2,3;m=0,

表 2

Y	X			
	0	10	20	30
0	1	4	6	2
10	2	1	3	6
20	5	0	4	3
30	3	6	3	4

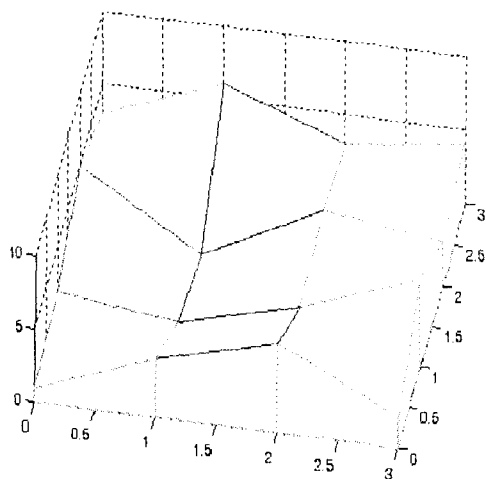


图3 测量数据点曲面(线性插值)

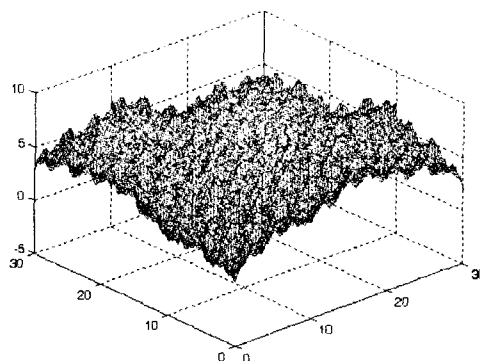


图4 分形插值曲面

1,2,3). 根据测量点用线性插值方法,可得测量点的曲面(图3). 根据测量点用分形插值方法得到的曲面见图4.

4 结论

(1)分形是研究自然界复杂现象的一种全新的思想方法,很多在欧氏空间中无法描述的现象,用分形理论可以得到很好的解释;

(2)分形的主要特征是分形(分数)维数和自相似性,分形在工程实际中的很多应用都是以这两个主要特征为依据的,许多过去认为无法解决的问题,借助于分形理论可以得到令人满意的结果;

(3)传统的插值方法(例如随机法)不能反映两相邻已知信息点之间的局部特征,分形插值克服了这一缺憾. 运用分形插值原理对股票市场价格变化以及断裂表面进行了分形模拟. 这对于研究一些复杂的几何形态的物体,例如,地形地貌、断层表面、材料裂缝表面的模拟研究和直观显示,具有重要的应用意义.

参考文献:

- [1] Barnsley MF. Fractals Everywhere[M]. Academic Press Orlando. FL, 1988: 172 - 247.
- [2] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. W. H. Freeman: New York, 1982: 361 - 366.
- [3] Xie H, Sun H, Ju Y. Study on generation of rock surface by using fractal interpolation[J]. International Journal of Solid and Structure, 2001, 38: 5765 - 5787.
- [4] 齐东旭. 分形及其计算机生成[M]. 北京: 科学出版社, 1996.
- [5] 孙洪泉. 分形几何及其分形插值研究[J]. 河北工业大学学报, 2002, (1): 56 - 60.
- [6] 宋来忠, 王志明. 数学建模与实验[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

(李鑫)