

# 分形插值曲面的 MATLAB 程序

孙洪泉

(苏州科技学院 土木工程系, 江苏 苏州 215011)

**摘 要:** 给出了矩形域上分形插值数学模型, 分形插值曲面的 MATLAB 程序, 对程序中的主要变量进行了说明, 并应用实际数据进行了分形插值曲面的实例研究。运用少量已知数据值, 模拟出粗糙表面, 这对于直观显示复杂物体的几何形态, 研究具有分形特征的地形地貌、断层表面和材料裂隙表面, 具有重要的理论意义和实用价值。

**关键词:** 分形几何; 分形插值; 粗糙表面; MATLAB 语言; 程序设计

中图分类号: TP 311 文献标识号: A 文章编号: 1672-0679(2006)04-0018-04

分形曲面在自然界是大量存在的, 如山脉、地形、岩石、云团、材料断口的粗糙表面等, 都是分形曲面的实例<sup>[1-3]</sup>。近年来, 很多文献介绍了分形曲面的研究方法——随机生成法和分形曲面的插值。在实际工作中, 往往已知分形曲面上的部分信息(例如, 材料断口的某条迹线、断面上的某些特征), 需要通过这些部分信息和特征, 拟合出分形曲面的整体形态, 从而对分形体的整体进行研究<sup>[4,5]</sup>。这就需要用到分形插值曲面的理论和方法。

由于 MATLAB 语言是一种“演算纸式”的用于科学计算的高级语言<sup>[6]</sup>。它与其它高级语言相比, 且有较强的、编程效率高语言简单等特点, 本文给出了分形插值曲面的 MATLAB 程序, 并对程序中的主要变量进行了说明, 应用实际数据进行了分形插值曲面的实例研究。从而为更好地研究材料断口形貌、地貌形态的分形维数特征提供了直观分析依据。

## 1 分形插值曲面的数学模型

令  $I=[a, b]$ ,  $J=[c, d]$ ; 设  $D=I \times J=\{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , 以  $x, y$  为步长, 将  $D$  剖分为网格

$$a=x_0 < x_1 < \dots < x_N=b, \quad c=y_0 < y_1 < \dots < y_M=d \quad (1)$$

给定一组网格点上的数据  $(x_n, y_m, z_{n,m})$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ ;  $m=0, 1, \dots, M$ 。欲构造二元分形插值函数  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ , 且满足:  $f(x_n, y_m)=z_{n,m}$ ,  $n=0, 1, \dots, N$ ;  $m=0, 1, \dots, M$ 。

令  $x$  方向的压缩变换为

$$\phi_n(x)=a_n x+b_n \quad (2)$$

$y$  方向的压缩变换为

$$\psi_m(y)=c_m y+d_m \quad (3)$$

且满足条件  $\phi_n(x_0)=x_{n-1}$ ,  $\phi_n(x_N)=x_n$ ,  $\psi_m(y_0)=y_{m-1}$ ,  $\psi_m(y_M)=y_m$  可得

$$a_n=(x_n-x_{n-1})/(x_N-x_0), \quad b_n=(x_{n-1}x_N-x_nx_0)/(x_N-x_0), \quad c_m=(y_m-y_{m-1})/(y_M-y_0), \quad d_m=(y_{m-1}y_M-y_my_0)/(y_M-y_0) \quad (4)$$

又令  $z$  方向的压缩变换为

$$F_{n,m}(x, y, z)=e_{n,m}x+f_{n,m}y+g_{n,m}xy+a_{n,m}z+k_{n,m} \quad (n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}) \quad (5)$$

式中,  $a_{n,m}$  ( $n \in \{1, 2, \dots, N\}, m \in \{1, 2, \dots, M\}$ ) 为决定分形插值曲面分形维数(粗糙程度)的自由参数, 且满足  $0 < a_{n,m} < 1$ , 称为垂直比例因子。

由条件(3)可以解得

[收稿日期] 2006-09-25

[基金项目] 苏州科技学院人才引进基金项目(030540101)

[作者简介] 孙洪泉(1954-), 男, 江苏盐城人, 教授, 博士。

$$\begin{cases} g_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n-1,m} - Z_{n,m-1} + Z_{n,m} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{N,0} - Z_{0,M} + Z_{N,M})] / (x_0 y_0 - x_N y_0 - x_0 y_M + x_N y_M) \\ e_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n,m-1} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{N,0}) - g_{n,m}(x_0 y_0 - x_N y_0)] / (x_0 - x_N) \\ f_{n,m} = [Z_{n-1,m-1} - Z_{n-1,m} - \alpha_{n,m}(Z_{0,0} - Z_{0,M}) - g_{n,m}(x_0 y_0 - x_0 y_M)] / (y_0 - y_M) \\ k_{n,m} = Z_{n,m} - e_{n,m} x_N - f_{n,m} y_M - \alpha_{n,m} Z_{N,M} - g_{n,m} x_N y_M \quad (n = \{1, 2, \dots, N\}, m = \{1, 2, \dots, M\}) \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{令 } W_{n,m}(x, y, z) = (\phi_n(x), \psi_m(y), F_{n,m}(x, y, z)) \quad (n=1, 2, \dots, N, m=1, 2, \dots, M) \quad (7)$$

那么就定义了一个迭代函数系 (IFS),  $F_{n,m}(x, y, z)$  为分形插值函数  $f$  的隐函数。

## 2 分形插值曲面 MATLAB 程序

根据分形插值曲面的数学公式, 运用 MATLAB 语言研制了模拟粗糙曲面的计算机程序, 并绘制了分形插值曲面。

### 2.1 变量说明

d:\sun\fp 为存放数据文件的路径名;

s 为存放原始数据文件名变量;

sp 为存放插值数据文件名变量;

af 为公式 (5) 中决定分形插值曲面分形维数 (粗糙程度) 的自由参数  $\alpha_{n,m}$  的值;

n, m 分别为 x, y 方向插值结点数 N, M;

nn, mm 分别为 x, y 方向插值后的结点数;

x(n×1), y(m×1) 分别存放 x, y 方向步长值 (x), (y);

z(n×m) 存放插值结点上的原始数据;

zz(nn×mm) 存放插值后结点上的值;

a(n×1), b(n×1), c(m×1), d(m×1) 分别存放公式 (4) 中的  $a_n, b_n, c_m, d_m$ ;

cc(n×m), bb(n×m), dd(n×m), kk(n×m) 分别存放公式 (6) 中的  $e_{n,m}, f_{n,m}, g_{n,m}, k_{n,m}$ ;

### 2.2 源程序

```
% This is a F3PT1.m program (fractal surface interpolation).
```

```
bds=input('Input your file name please ','s');
```

```
af=input('Input argument af == ');
```

```
s=['d:\sun\fp\' bds];
```

```
sp=['d:\sun\fp\' bds 'p'];
```

```
eval(['load ' s]);
```

```
eval(['z=' bds]);
```

```
eval(['clear ' bds]);
```

```
[m,n]=size(z);
```

```
x=0:100:(n-1)*100;
```

```
y=0:100:(m-1)*100;
```

```
subplot(2,1,1);
```

```
mazz=max(max(z))*3;
```

```
dip=40; dir=340;
```

```
meshz(z);
```

```
view(dir,dip);
```

```
axis([0 n-1 0 m-1 0 mazz]);
```

```
nn = (n-1)*(n-1);
```

```
mm = (m-1)*(m-1);
```

```
xl = x(n)- x(1);
```

```

yl = y(m)- y(1);
a=(x(2:n)- x(1:n- 1))/xl;
b=(x(n)*x(1:n- 1)- x(1)*x(2:n))/xl;
c=(y(2:m)- y(1:m- 1))/yl;
d=(y(m)*y(1:m- 1)- y(1)*y(2:m))/yl;
cz=z(1,1)+z(m,n)- z(1,n)- z(m,1);
cm=x(1)*y(1)+x(n)*y(m)- x(n)*y(1)- x(1)*y(m);
bz1=z(1,1)- z(1,n); bz2=x(1)*y(1)- x(n)*y(1);
bm=x(1)- x(n);
dz1=z(1,1)- z(m,1);dz2=x(1)*y(1)- x(1)*y(m);
dm=y(1)- y(m);
dn=ones(m- 1,n- 1);
dn=dn*af;
cc=(z(1:m- 1,1:n- 1)- z(1:m- 1,2:n)- z(2:m,1:n- 1)+z(2:m,2:n)- dn*cz)/cm;
bb=(z(1:m- 1,1:n- 1)- z(1:m- 1,2:n)- dn*bz1- cc*bz2)/bm;
dd=(z(1:m- 1,1:n- 1)- z(2:m,1:n- 1)- dn*dz1- cc*dz2)/dm;
kk=z(2:m,2:n)- bb*x(n)- dd*y(m)- dn*z(m,n)- cc*x(n)*y(m);
for j=1:m- 1;
    for j0=1:m;
        yv=c(j)*y(j0)+d(j);
        jj=(j- 1)*(m- 1)+j0;
        for i=1:n- 1;
            for i0=1:n;
                ii=(i- 1)*(n- 1)+i0;
                xv=a(i)*x(i0)+b(i);
                zt=bb(j,i)*x(i0)+dd(j,i)*y(j0);
                zz(jj,ii)=zt+cc(j,i)*x(i0)*y(j0)+dn(j,i)*z(j0,i0)+kk(j,i);
            end;
        end;
    end;
end;
mm=(m- 1)*(m- 1)+1;
nn=(n- 1)*(n- 1)+1;
subplot(2,1,2);
meshz(zz);
view(dir,dip);
axis([0 nn- 1 0 mm- 1 0 mazz]);
axis off;
spp=['fwd=fopen('' sp '' ','w'')'];
eval ([spp]);
for j=1:mm;
    for i=1:nn;
        fprintf(fwd,'%8.4f',zz(j,i));
    end;
end;

```

```

end;
fprintf(fwd, '\n');
end;
fclose(fwd);
end

```

### 3 研究实例

今在某一 30 mm×30 mm 矩形区域的粗糙表面上测得一组数据。X 方向、Y 方向上的间隔均为 10 mm, 各有 4 测量数据点, 共测得 16 个数据。即原始插值数据集为  $(x_n, y_m, z_{n,m})$  ( $n=0, 1, 2, 3; m=0, 1, 2, 3$ ) (见表 1)。上文中的  $N=3, M=3$ 。根据观测点数据用线性插值方法, 可得到观测数据点曲面(见图 1)。

将观测点数据存放在 D 盘上, 目录名为 “d:\sun\fp\”, 数据文件名为 “data”。上述 MATLAB 分形曲面插值程序存放磁盘上的文件名为 “F3PT1.m”。在 MATLAB 工作平台上运行 F3PT1.m 程序。

根据屏幕提示: (1) 输入数据文件名: data; (2) 输入的值(纵向压缩比)。当  $\lambda=0.2$  时, 得图 2(a); 当  $\lambda=0.3$  时, 得图 2(b)。

图 1 为用观测点数据用线性插值方法插出的曲面, 视倾角为  $40^\circ$ ; 视方位角为  $340^\circ$ ; 图 2 为运用观测点数据用分形插值方法插出的分形曲面。从图 2 可以看出, 同一组插值数据, 运用不同的压缩比, 可以得到不同的分形维数的粗糙表面。用盒维数法<sup>[4]</sup>可以计算出这两个分形曲面的分形维数。图 2(a) 的压缩比为  $\lambda=0.2$ , 分形维数为 2.267 5; 图 2(b) 的压缩比为  $\lambda=0.3$ , 分形维数为 2.522 2。显然, 不同的压缩比可以得到不同的分形维数、不同粗糙程度的粗糙表面。

表 1 分形插值曲面观测点数据

Y	X			
	0	10	20	30
0	1	4	6	2
10	2	1	3	6
20	5	0	4	3
30	3	6	3	4

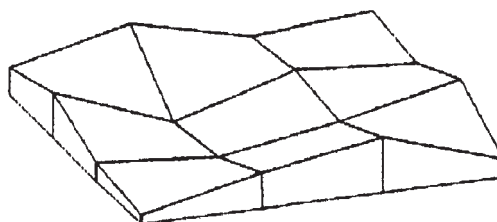
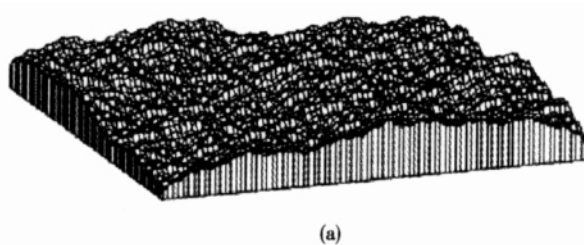
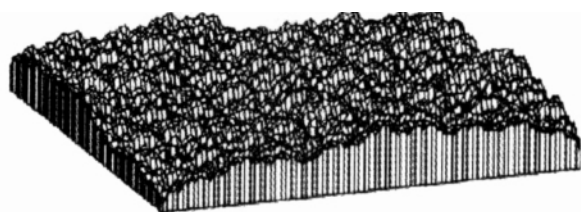


图 1 观测数据点曲面(线性插值)



(a)



(b)

图 2 分形插值曲面

### 4 结语

(1) 传统的插值方法, 在相邻的两个信息点之间只能插出直线或者光滑曲线, 而分形插值运用自仿射原理, 在两个信息点之间可以得到各种波状起伏的折线, 这对于模拟粗糙表面具有更高的精度。

(2) 给出的分形插值曲面是严格自仿射的, 而自然界中很多物体和现象具有统计自相似特征, 或者具有多重分形的特征, 因此在进行分形插值模拟的过程中, 还需考虑插值领域的确定与压缩比的选择<sup>[4]</sup>。

#### 参考文献:

- [1] Barnsley M F. Fractals Everywhere[M]. Academic Press Orlando, FL, 1988: 172-247.
- [2] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. W. H. Freeman: New York, 1982: 361-366.
- [3] Xie H, Sun H, Ju Y. Study on generation of rock surface by using fractal interpolation[J]. International Journal of Solid and Structure, 2001, 38: 5765-5787.
- [4] 孙洪泉. 分形插值曲面理论与岩石断裂表面的分形插值研究[D]. 北京: 中国矿业大学(北京校区), 1998.
- [5] 孙洪泉. 分形几何及其分形插值研究[J]. 河北工业大学学报, 2002, (1): 56-60.
- [6] 苏金明, 王永利. MATLAB 7.0 实用指南[M]. 北京: 电子工业出版社, 2004.

(下转第 38 页)

## Operational Characteristics of Anaerobic Baffled Reactor Treating Low Strength Wastewater

CHEN Yan, SHEN Yao-liang

(Jiangsu Province Key Laboratory of Environmental Science and Engineering, USTS, Suzhou 215011, China)

Abstract: The result of anaerobic baffled reactor(ABR) treating low strength wastewater on mesophilic condition indicates that on the condition of influent  $\text{COD}_\text{Cr}$  concentration of about 500 mg/L, HRT 3~12 h, the reactor was efficient in the removal of  $\text{COD}_\text{Cr}$ , viz above 84%, effluent  $\text{COD}_\text{Cr}$  concentration of 75 mg/L. The control of HRT is important to the operational performance. The start-up with long HRT and decreasing HRT gradually are suitable for the start-up and operation of the reactor.

Key words: anaerobic baffled reactor; low strength wastewater; performance

\*\*\*\*\*

(上接第 21 页)

## A Practical MATLAB Program of Fractal Interpolated Surface

SUN Hong-quan

(Dept. of Civil Engineering, USTS, Suzhou 215011, China)

Abstract: In this paper, the mathematical model of fractal interpolation on the rectangle field is introduced, a MATLAB program of the fractal interpolation surface is presented and the main variables in the programs are explained. Based on the measured data, the practical case is studied. Using a little amount of given data to simulate unknown roughness surface has the important theoretical meaning and practical values for displaying the shape of complicated objects intuitively and studying the topography of the fault surface and the fracture surface of materials.

Key words: fractal geometry; fractal interpolated; roughness surface; MATLAB; programming