魏 超,李小凡,张美根. 基于量子蒙特卡罗的地球物理反演方法. 地球物理学报,2008,51(5):1494~1502
Wei C, Li X F, Zhang M G. The geophysical inverse method based on Quantum Monte Carlo. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2008, **51**(5):1494~1502

基于量子蒙特卡罗的地球物理反演方法

魏 超,李小凡,张美根
中国科学院地质与地球物理研究所,北京 100029

摘 要 本文将量子蒙特卡罗全局优化方法引入地球物理反问题,进而发展了一类新的地球物理非线性反演方法.量子蒙特卡罗方法是基于量子力学机制的随机方法,包括变分蒙特卡罗方法、格林函数蒙特卡罗方法、扩散蒙特卡罗方法、路径积分蒙特卡罗方法.本文简要回顾了量子蒙特卡罗方法的发展,阐述了其方法理论;随后的数值试验结果表明,量子蒙特卡罗方法应用于地球物理反问题的求解是成功的,它适合于非线性、多极值的地球物理反演问题,在收敛速度和避免陷入局部极小等方面有着一定的优势,且该方法也适用于其他领域非线性最优化问题的求解,其算法具有较强的通用性;最后就量子蒙特卡罗方法在地球物理反问题中的应用前景以及存在的问题做了简要概述.

关键词 量子蒙特卡罗,路径积分蒙特卡罗,变分蒙特卡罗,格林函数蒙特卡罗,扩散蒙特卡罗,地球物理反演
文章编号 0001-5733(2008)05-1494-09 **中图分类号** P631 **收稿日期** 2007-11-06,2008-06-27收修定稿

The geophysical inverse method based on Quantum Monte Carlo

WEI Chao, LI Xiao-Fan, ZHANG Mei-Gen
Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, *China*

Abstract Quantum Monte Carlo method (QMC), including variational Monte Carlo (VMC), Green's function Monte Carlo (GFMC), diffusion Monte Carlo (DMC) and path integral Monte Carlo (PIMC), is a stochastic method based on the quantum mechanics. This paper, firstly, gives a brief summarization about the development of quantum Monte Carlo method and expatiates its principles; then does some model tests, which show that the using of quantum Monte Carlo method for geophysical inverse problems is successful, and its algorithm is also acceptable for some other nonlinear optimization problems; lastly, gives a perspective on the using of quantum Monte Carlo method for geophysical inversion, and points out its shortcomings.

Keywords Quantum Monte Carlo, Path integral Monte Carlo, Variational Monte Carlo, Green's function Monte Carlo, Diffusion Monte Carlo, Geophysical inversion

1 引 言

人类对地球内部物理性质以及矿产资源分布的了解,大多来自地表地质和地球物理、地球化学资料的反演和解释[1].在科学研究及工程技术中,凡涉及观测数据反推模型或体系时,均无法回避反演问题.20世纪六七十年代,人们把地球物理反演问题近似为线性问题,采用线性化近似方法求解,如广义反演理论;而后发展的非线性反演方法则是将反演问题

基金项目 国家自然科学基金项目(40437018,40304004,2007CB209603)资助.
作者简介 魏 超,男,1981年生,中国科学院地质与地球物理研究所博士研究生,主要从事地球物理反演方面的研究.
E-mail:cwei@mail.iggcas.ac.cn

万方数据

划归为求一个泛函极值问题的解,然后利用各种优化方法解决相应的问题.现有的线性、非线性方法大都存在着收敛速度和能否全局寻优的问题,因此,寻找一种兼具高效率和高精度的全局方法就显得尤为重要.量子蒙特卡罗方法(Quantum Monte Carlo, QMC)[2]则是一种很好的选择.

量子蒙特卡罗方法是研究量子多体系统的有效数值计算方法,通常以蒙特卡罗方法求解量子系统的薛定谔方程.所谓蒙特卡罗,它仅说明这种方法包含有随机的成分在里面[3~7],随机的方法通常适用于随机过程的描述,但是对于某些确定性的问题,把其置换为等价的随机问题来求解也不失为一种有效的方法.较之于经典蒙特卡罗,它们的差别在于应用的系统不同;另外从物理角度来讲,温度所起的作用不同也是一个重要的差别[8].

基于温度为零与否,量子蒙特卡罗方法可分为两类:零温方法,包括变分蒙特卡罗方法[9](Variational Monte Carlo, VMC)、格林函数蒙特卡罗方法[10~12](Green′s Function Monte Carlo, GFMC)、扩散蒙特卡罗方法[13~16](Diffusion Monte Carlo, DMC)(扩散蒙特卡罗方法被看作是格林函数方法的短时近似方法);有限温度方法,路径积分蒙特卡罗方法[17~20](Path Integral Monte Carlo, PIMC).

量子蒙特卡罗方法的思想最早源于 Donsker 等[21],随后 Kalos 于 1962 年把格林函数蒙特卡罗方法应用于波色子体系[10, 22],McMillan[23]于 1965 年把变分蒙特卡罗方法应用于液氦多体系统,Anderson 于 1975 年使用量子蒙特卡罗方法进行了小分子的计算[13, 24],Reynolds 等[15]于 1982 年提出了基于重要性抽样的固定节点扩散蒙特卡罗方法,Pollock 等[25]于 1984 年讨论了路径积分蒙特卡罗方法在量子多体系统中的应用.20 世纪 90 年代以后,量子蒙特卡罗方法的相关研究有了长足发展,在反铁磁体、多电子体系、Ising 模型、纳米材料等方面的优化计算中都显示了其相对于经典退火方法的有效性[26~35].

量子蒙特卡罗方法由最初用于核物理和凝聚态物理方面的研究,至后来逐渐应用于化学方面的计算[36~40],仍基本限定在量子系统的范畴.前人的应用研究结果都显示了量子蒙特卡罗方法的有效性,该方法实际上是求量子力学中"基阶态"的能量,它是量子系统的最小能量值,因此对应于求极值问题;而地球物理反演问题则也是利用各种优化方法求某一泛函问题的极值.基于这一共同点,本文尝试将量子蒙特卡罗思想引入到地球物理非线性反演计算,建立了相应的反演方法,并讨论了应用的可行性、前景以及可能存在的问题.

2　量子蒙特卡罗方法的基本原理

谈及量子蒙特卡罗方法,则首先需了解量子系统的虚时薛定谔方程(Imaginary-time Schrödinger Equation)以及哈密顿量(Hamiltonian):

$$\hat{H}\psi(\boldsymbol{x},t)=-\frac{\partial\psi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}, \tag{1}$$

这里,$\psi(\boldsymbol{x},t)$为波函数;$\hat{H}$ 为体系的哈密顿算符,表示为

$$\hat{H}=H_{\mathrm{kin}}+H_{\mathrm{cl}}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+\hat{V}, \tag{2}$$

这里,$H_{\mathrm{cl}}=\hat{V}$ 为势函数算符;令 $\Gamma=\hbar^2/2\mathrm{m}$,则有 $H_{\mathrm{kin}}=-\Gamma\nabla^2$.

量子蒙特卡罗方法的四种不同方法都是基于量子力学的机制,下面将分别阐述.

2.1　路径积分蒙特卡罗(PIMC)

路径积分蒙特卡罗方法作为有限温度量子蒙特卡罗方法由 Pollock 和 Ceperley 于 1984 年引入[25],它模拟的是处于相对低温下的平衡量子系统,通过对量子配分函数的近似抽样来模拟体系的热力学性质:

$$\begin{aligned}Z&=Tr\,\mathrm{e}^{-(H_{\mathrm{cl}}+H_{\mathrm{kin}})/k_{\mathrm{B}}T}\\&=\sum_{s^1}\langle s^1\mid \mathrm{e}^{-(H_{\mathrm{cl}}+H_{\mathrm{kin}})/k_{\mathrm{B}}T}\mid s^1\rangle,\end{aligned} \tag{3}$$

这里,Tr 表示求矩阵的迹(即,对角元素求和),s^1 表示体系的一般位形,k_{B} 为玻尔兹曼常数,T 为温度.

对于量子系统,因(2)式哈密顿量中的动能项为非对易项,不能直接用于经典的蒙特卡罗方法;路径积分蒙特卡罗方法的基本思想即把式(3)转变为经典配分函数以满足通常的抽样方法.根据 Suzuki-Trotter 分解[41, 42],式(3)中的指数表达式可拆分为

$$\mathrm{e}^{-(H_{\mathrm{cl}}+H_{\mathrm{kin}})/T}=\lim_{P\to\infty}(\mathrm{e}^{-\frac{1}{PT}H_{\mathrm{cl}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{PT}H_{\mathrm{kin}}})^P, \tag{4}$$

通过恒等变换并计算动能项的传播子(具体推导过程见附录 A).在实际计算中,需对 Z 作近似(取有限 P 值,其误差为 $O((1/PT)^2)$[43]),则最终的配分函数为

$$Z\approx\left(\frac{K^{\perp}}{2\pi PT}\right)^{DP/2}\sum_{\boldsymbol{x}^1}\cdots\sum_{\boldsymbol{x}^P}\mathrm{e}^{-\frac{1}{PT}H_{D+1}}, \tag{5}$$

$$H_{D+1}=\sum_{k=1}^{P}\left(V(\boldsymbol{x}^k)+\frac{K^{\perp}}{2}(\boldsymbol{x}^{k+1}-\boldsymbol{x}^k)^2\right), \tag{6}$$

万方数据

这里,Z 表示了温度为 PT 时经典的($D+1$)维体系的配分函数,$V(x^t)$为 D 维中的势能,$K^{\perp}=(PT)^2/(2\Gamma)$ 为沿着分解的 Trotter 维的耦合,Trotter 维有限长度为 P.

在路径积分蒙特卡罗方法中,利用重要性抽样法以 $\rho=\mathrm{e}^{-\frac{1}{P\Gamma}H_{D+1}}$ 为概率密度函数进行抽样.整个过程中,Γ 从初始值 Γ_0 缓慢递减,$K^{\perp}$ 则反向递增[44].

2.2 变分蒙特卡罗(VMC)

McMillan[23]于 1965 年把变分蒙特卡罗方法应用于液氦(He)多体系统.变分蒙特卡罗方法是量子蒙特卡罗方法中比较简单易行的方法,将变分原理和积分形式的蒙特卡罗模拟相结合,利用试探波函数 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$计算在此试探波函数下的变分能量,以寻找基态波函数 $\psi_0(x)$和基态能量 E_0,计算结果的有效性很大程度上依赖于试探波函数对基态波函数的近似[45,46].

考虑如式(2)的量子系统,对于任意的试探波函数 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$,其能量期望值满足:

$$\begin{aligned}\langle E\rangle &= \frac{\langle\psi\mid H\mid\psi\rangle}{\langle\psi\mid\psi\rangle}\\ &= \frac{\int \mathrm{d}x\,\psi_{\mathrm{T}}^{*}(x)H\psi_{\mathrm{T}}(x)}{\int \mathrm{d}x\,\psi_{\mathrm{T}}^{*}(x)\psi_{\mathrm{T}}(x)}\\ &= \frac{\int \mathrm{d}x\mid\psi_{\mathrm{T}}(x)\mid^2 E_{\mathrm{L}}(x)}{\int \mathrm{d}x\mid\psi_{\mathrm{T}}(x)\mid^2}\geqslant E_0,\end{aligned}\tag{7}$$

这里,$E_{\mathrm{L}}(x)=\psi_{\mathrm{T}}(x)^{-1}H\psi_{\mathrm{T}}(x)$为"局部能量";如果 $\psi_{\mathrm{T}}\to\psi_0$,则 $E_{\mathrm{L}}\to E_0$,(7)式的方差将趋于零[33].

对给定的试探波函数 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$,采用重要性抽样法产生以 $\rho=\mid\psi_{\mathrm{T}}(x)\mid^2$ 为概率密度函数的 N 个位形,并计算出相应的局部能量,则有:

$$\langle E\rangle\approx\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}E_{\mathrm{L}}(x_i).\tag{8}$$

通过逐渐改变试探波函数中的变分参数值,计算相应的$\langle E\rangle$值并使其逐渐达到最小,这时的 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$和$\langle E\rangle$可以看作是基态波函数$\psi_0(x)$和基态能量 E_0.

2.3 格林函数蒙特卡罗(GFMC)

格林函数蒙特卡罗方法基于不含时格林函数,由 Kalos 于 1962 年提出[10];它和扩散蒙特卡罗方法相似,都是把薛定谔方程的基态看作是扩散方程(虚时薛定谔方程)的平稳解[47],通过把格林函数 G 重复作用于试探波函数 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$以得到哈密顿量 H 的基态 $\psi_0(x)$[48]:

$$\lim_{n\to\infty}G^n\psi_{\mathrm{T}}(x)=\psi_0(x),\tag{9}$$

只是具体实现中使用的格林函数不同:

$$G=\mathrm{e}^{-\Delta t(H-E_{\mathrm{T}})}\quad(\mathrm{DMC}),\tag{10}$$

$$\begin{aligned}G&=\frac{1}{1+\Delta t(H-E_{\mathrm{T}})}\\ &=1-\Delta t(H-E_{\mathrm{T}})\quad(\mathrm{GFMC}),\end{aligned}\tag{11}$$

这里,E_{T} 是基态能量的估计值[30],Δt 为时间步长.对于系统的哈密顿量 H,其解可写成递推形式:

$$\psi_{n+1}(x')=\sum_{x}G(x',x)\psi_n(x).\tag{12}$$

格林函数 $G(x',x)$则可表示成[34]:

$$\begin{aligned}G_{x',x}&=\langle x'\mid G\mid x\rangle=\langle x'\mid 1-\Delta t(H-E_{\mathrm{T}})\mid x\rangle\\ &=(1+\Delta tE_{\mathrm{T}})\delta_{x',x}-\Delta t\langle x'\mid H\mid x\rangle\\ &=(1+\Delta tE_{\mathrm{T}})\delta_{x',x}-\Delta tH_{x',x},\end{aligned}\tag{13}$$

如果选取适当的 Δt 值,$\psi_n(x)$将逐渐趋向于$\psi_0(x)$[26].

(12)式的方程在形式上看起来和普通的马尔可夫主方程类似[49],但却有一些本质上的不同:其一,$\psi_n(x)$表示的是振幅,而非概率;其二,(13)式中的格林函数 $G_{x',x}$和主方程中的转移概率不一样,并不一定满足 $G_{x',x}\geqslant 0$ 和列归一化 $\sum_{x'}G_{x',x}=1$. 基于此,还不能利用蒙特卡罗方法模拟(12)式这样一个并非完全的马尔可夫链[34].

对于上述第二点不同,一般来说可以通过选择合适的动能项以保证 $G_{x',x}\geqslant 0$;且可通过归一化满足 $\sum_{x'}\rho_{x',x}=1$:

$$\begin{aligned}\rho_{x',x}&=G_{x',x}/b_x,\\ b_x&=\sum_{x'}G_{x',x}=1+\Delta tE_{\mathrm{T}}-\Delta t\sum_{x'}H_{x',x}.\end{aligned}\tag{14}$$

对于上述第一点不同,给 x 添加一个权重因子 ω 以扩展马尔可夫链的位形空间$(x)\to(x,\omega)$[50].用(x_n,ω_n)表示扩展位形空间中的第 n 次迭代,$P_n(x_n,\omega_n)$表示第 n 次的概率密度,通过定义波函数 $\psi_n(x)\propto\int \mathrm{d}\omega_n\omega_nP_n(x,\omega_n)$,则可使得 $\psi_n(x)$与 $P_n(x_n,\omega_n)$相关联(具体过程见附录 B)[29].这样一个马尔可夫过程包含了 x 空间的标准的马尔可夫过程和 ω 空间的乘积过程,其中 x 由 $p_{x',x}$确定,而 ω 则由 b_x 得到:

$$\begin{aligned}x_n&\to x_{n+1}:\rho_{x_{n+1},x_n},\\ \omega_n&\to\omega_{n+1}=\omega_nb_x.\end{aligned}\tag{15}$$

(15)式是格林函数蒙特卡罗方法的数学表述.利用试探波函数 $\psi_{\mathrm{T}}(x)$可把格林函数 $G_{x',x}$替换为 $\bar{G}_{x',x}=\psi_{\mathrm{T}}(x')G_{x',x}\psi_{\mathrm{T}}^{-1}(x)$以减小计算中的统计涨落,这里,$\bar{G}_{x',x}$通常不再是对称的,但 $\bar{G}_{x',x}\geqslant 0$.则(14)式可变为

$$\rho_{x',x}=\bar{G}_{x',x}/b_x,$$

万方数据

$$b_x = \sum_{x'} \bar{G}_{x',x} = 1 + \Delta t E_T - \Delta t \frac{\sum_{x'} \psi_T(x') H_{x',x}}{\psi_T(x)}$$
$$= 1 - \Delta t (E_L(x) - E_T), \quad (16)$$

这里,$E_L(x)$为局部能量.在格林函数蒙特卡罗方法的具体实现中,利用重要性抽样法以(16)式中的概率密度函数进行抽样.

2.4 扩散蒙特卡罗(DMC)

扩散蒙特卡罗方法和格林函数蒙特卡罗方法相似,都是基于虚时薛定谔方程,只是扩散蒙特卡罗方法基于含时格林函数,最初由 Anderson 提出[13, 24];Reynolds[15]于 1982 年提出改进,构造一个似概率函数对波函数进行抽样.

选取一个试探波函数 $\psi_T(x)$作为起始基态波函数 $\psi(x,0)=\psi_T(x)$,则可得虚时薛定谔方程的解为

$$\psi(x,t) = e^{-(H-E_T)t}\psi_T(x). \quad (17)$$

利用这样的起始波函数构造一个似概率函数:

$$F(x,t) = \psi(x,t)\psi_T(x), \quad (18)$$

可以证明,$F(x,t)$满足下面的扩散方程

$$-\frac{\partial F(x,t)}{\partial t} = -\Gamma\nabla^2 F + (E_L(x) - E_T)F + \Gamma\nabla \cdot FU, \quad (19)$$

这里,$E_L(x)=\psi_T(x)^{-1}H\psi_T(x)$为局部能量,$U(x)=\nabla\ln|\psi_T(x)|^2=2\nabla\psi_T(x)/\psi_T(x)$起"力"的作用.实际计算中,将(19)式扩散方程写为积分形式

$$F(x',t+\tau) = \int F(x,t)G(x',x;\tau)\mathrm{d}x, \quad (20)$$

这里,$G(x',x;\tau)$是(19)式扩散方程的格林函数.如果 τ 足够小,格林函数则可近似为

$$G(x',x;\tau) \approx W(x',x;\tau)G_0(x',x;\tau). \quad (21)$$

这里,$G_0(x',x;\tau)$为 D 维(x 的维数)Fokker-Planck 方程的格林函数[46],其表达式为

$$G_0(x',x;\tau) = (4\pi\Gamma\tau)^{-D/2}e^{-(x'-x-\Gamma U\tau)^2/4\Gamma\tau}, \quad (22)$$

其分支因子为

$$W(x',x;\tau) = e^{-\{[E_L(x')+E_L(x)]/2-E_T\}\tau}. \quad (23)$$

扩散蒙特卡罗方法的模拟过程包括扩散和分支两个步骤.在扩散阶段,其游走的接受概率为 $\rho=\frac{\psi_T(x')^2G(x,x';\tau)}{\psi_T(x)^2G(x',x;\tau)}$;在分支阶段,按 $M=[W(x',x;\tau_a)+\xi]$产生新的位形,这里,[ ]表示取整,τ_a 为有效扩散时间,ξ 为[0,1]区间均匀分布的随机数.具体模拟过程参见文献[46, 47].

3 量子蒙特卡罗方法的数值计算

对于地球物理反问题,取 $m_i^{(0)}$ 为待定模型参数 $m_i(i=1,2,\cdots,L)$的初始模型,$d_j(j=1,2,\cdots,M)$为观测数据.在第 n 次迭代时,相应的能量函数定义为

$$E(\boldsymbol{m}^{(n)}) = \sum_{j=1}^{M}(d_j - d_j(\boldsymbol{m}^{(n)}))^2, \quad (24)$$

然后,随机地修改模型参数,经迭代得 $\boldsymbol{m}^{(n+1)}$,其相应的能量函数为 $E(\boldsymbol{m}^{(n+1)})$;在经典问题的蒙特卡罗方法反演中,通常取 $\Delta E=E(\boldsymbol{m}^{(n+1)})-E(\boldsymbol{m}^{(n)})$为待求解的目标函数.

为了能够将量子蒙特卡罗思想引入到地球物理非线性反演计算中,则需要把所研究的经典系统扩展成一个量子系统以用于量子蒙特卡罗方法,最后再还原为经典系统,这个过程中系统哈密顿量 H 的构建至关重要.

首先把地球物理反问题中待反演的模型参数和量子系统中的粒子对应起来,这样就可以把经典问题中的目标函数看作是量子系统哈密顿量的势能部分,也即为 $H_{cl}=\Delta E=E(\boldsymbol{m}^{(n+1)})-E(\boldsymbol{m}^{(n)})$;其次则需考虑如何设置动能项 H_{kin},即怎么把我们所研究的经典系统扩展成量子系统.简单起见,按(2)式定义系统的哈密顿量,即人为加上动能项 $H_{kin}=-\Gamma\nabla^2$,这里 Γ 类比于引起不同状态之间跃迁的横向场,它和模拟退火中的温度 T 起着类似的作用[51];∇ 不再是通常意义的对(x,y,z)的偏微分算符,其表征为 $\nabla^2=\sum_i\frac{\partial^2}{(\partial m_i)^2}$.基于此,则系统的哈密顿量可表示为

$$\hat{H} = H_{kin} + H_{cl} = \Delta E - \Gamma\nabla^2. \quad (25)$$

与经典蒙特卡罗方法类似,量子蒙特卡罗方法用于反演的基本思路是按照上述方式构建系统的哈密顿量 H,根据四种方法各自原理中采用的不同概率函数 ρ,利用重要性抽样法产生新的位形,并计算出相应的势能部分 H_{cl},通过缓慢地减小人为加上的动能项 H_{kin}(H_{kin}中的 Γ 逐渐减小)进行迭代反演,从而使目标函数最终达到全局最小.具体的反演实现流程在相关文献[51]中有详细说明,在此不再赘述.

此外,量子蒙特卡罗方法中零温方法的计算过程中需要用到试探波函数$\psi_T(x)$,相关文献[27, 45]都有详细介绍,但大多都是基于量子多体系统构建的,并不适用于其他非量子系统的情况;在此,本文引用的是似玻尔兹曼波函数[34]$\psi_T(x)=e^{-(\beta/2)H_{cl}}$,$\beta$ 为变分参数,x 则表示模型空间的参数 $\boldsymbol{m}$.

为了检验量子蒙特卡罗方法的正确性和适用性,本文给出了 MT 和地震波阻抗理论模型试验.下

万方数据

面具体讨论量子蒙特卡罗方法在数值计算中的实现.

3.1 理论MT模型反演

我们考虑一个H型三层MT模型,其理论MT曲线如图1所示.模型真值($\rho_1,\rho_2,\rho_3,h_1,h_2$)为(80.0,30.0,80.0,200.0,400.0).对于4种方法,初始模型选为(120.0,50.0,100.0,350.0,500.0),计算精度为10^{-6},最大迭代次数为60000,搜索范围为1～10^4,Γ值为1.0,PIMC方法中温度T为1.0,P值为4.用量子蒙特卡罗4种方法求解,其结果如图2和表1所示.而在相关文献[51]中,对于同样的模

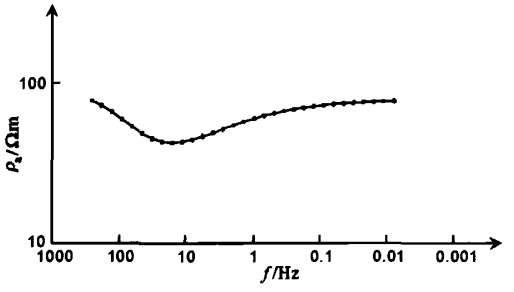


图1 三层MT模型的视电阻率曲线

Fig. 1 Modeling MT sound curve

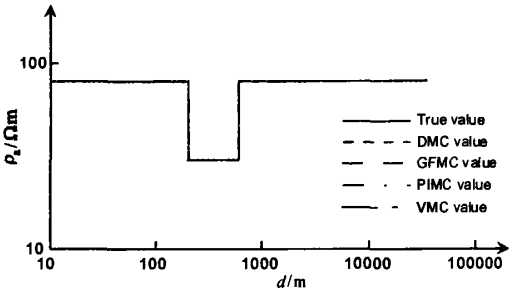


图2 QMC四种方法的反演结果比较

Fig. 2 The comparison among results of four methods

表1 MT测深理论曲线四种反演方法对比

Table 1 The comparison among four inverse methods for MT model data

方法	搜索次数	ρ_1/Ωm	ρ_2/Ωm	ρ_3/Ωm	h_1/m	h_2/m
PIMC	12000	80.0241	30.1090	80.0071	199.5597	401.2291
VMC	60000	80.3108	29.0914	79.0905	201.4823	396.7213
GFMC	6162	79.9105	29.9611	80.0003	200.4396	398.9898
DMC	5823	79.7152	29.8772	79.9950	201.0014	399.7073

型,使用模拟退火方法在相同参数的情况下,搜索14501次,计算结果为(79.484,29.784,79.992,202.530,394.220).

3.2 一维波动方程波阻抗反演

假设地下介质是各向同性的水平层状介质,震源激发的地震波是垂直传播的平面波.地震波传播的一维波动方程及其数值解法参见文献[52, 53].

这里,我们设计了6层和8层两个模型,计算精度为10^{-8},搜索范围为1～10^4,Γ值为10,6层模型最大迭代次数为50000,PIMC方法中温度T为4,P值为4;8层模型最大迭代次数为60000,PIMC方法中温度T为3,P值为4.用量子蒙特卡罗的四种方法求解,计算结果如表2和图3、图4所示.在相关文献[51]中,使用模拟退火方法在相同参数的情况下,对于6层模型,搜索18361次,计算时间为6′5″,最大误差为2.09%;对于8层模型,搜索155041次,计算时间为84′43″,最大误差为1.51%.

从上述4种方法的计算结果来看,计算速度方面,扩散蒙特卡罗方法最快,格林函数蒙特卡罗方法次之,而变分蒙特卡罗方法速度收敛性最差,速度最慢;计算精度方面,路径积分蒙特卡罗方法精度最高,扩散蒙特卡罗方法和格林函数蒙特卡罗方法次之,变分蒙特卡罗方法精度最差,只能是一个粗略的计算,在实际计算中,往往先用它计算,为别的方法

表2 量子蒙特卡罗4种方法计算结果对比

Table 2 The comparison among four inverse methods

方法	6层模型				8层模型			
	搜索次数	计算时间	最大误差(%)	ΔE	搜索次数	计算时间	最大误差(%)	ΔE
PIMC	6841	9′12″	3.82	9.05×10^{-6}	13441	31′24″	5.29	9.16×10^{-5}
VMC	>50000	>17′48″	71.59	1.82×10^{-1}	>60000	>35′10″	71.59	2.39×10^{-1}
GFMC	5680	1′53″	6.97	2.72×10^{-4}	10919	5′58″	21.55	1.89×10^{-3}
DMC	1087	22″	4.36	9.02×10^{-5}	5866	3′11″	5.70	8.11×10^{-5}

万方数据

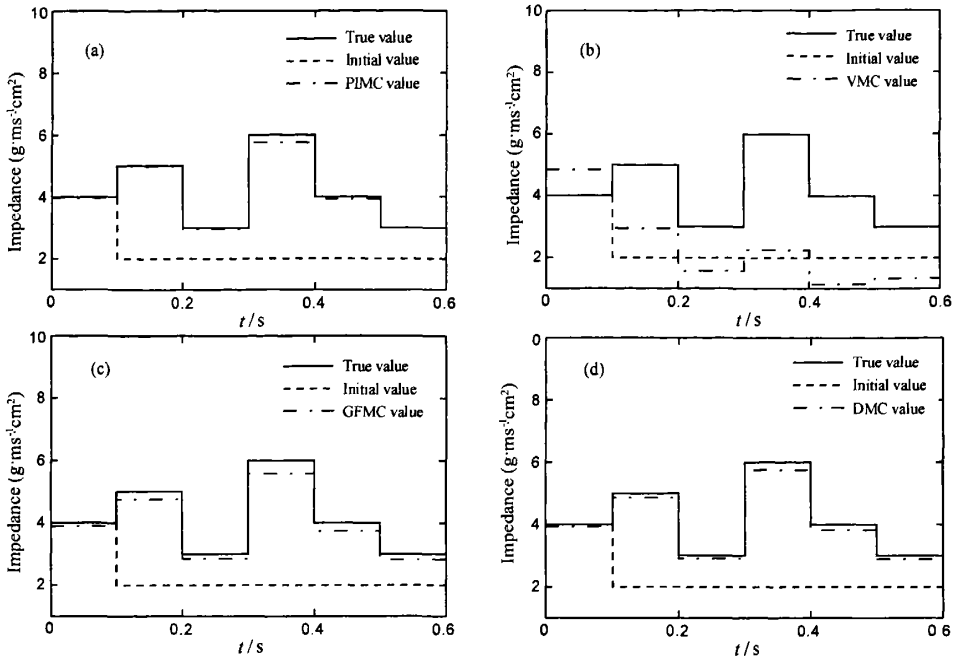


图 3　6 层模型量子蒙特卡罗 4 种方法计算结果

(a)　PIMC;(b)VMC; (c) GFMC; (d)DMC.

Fig. 3　The inversion results of 6-layer model using four methods

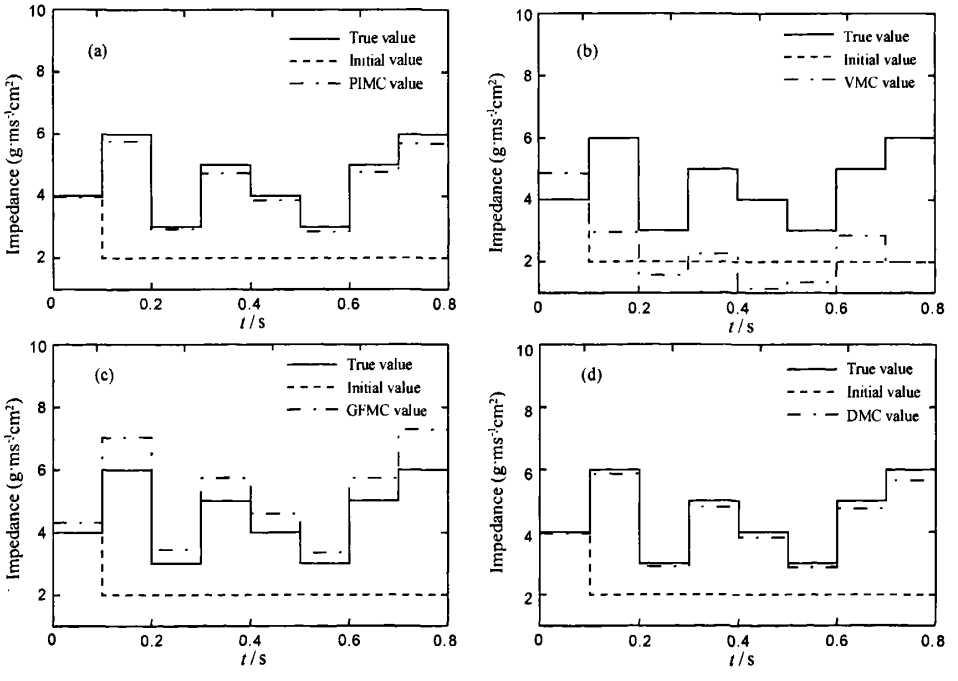


图 4　8 层模型量子蒙特卡罗 4 种方法计算结果

(a)PIMC; (b)VMC; (c)GFMC; (d)DMC.

Fig. 4　The inversion results of 8-layer model using four methods

万方数据

提供一个初始参数值和试探波函数,这点在其原理部分也有体现.

比较量子蒙特卡罗4种方法和模拟退火方法的计算结果,变分蒙特卡罗方法无论在计算速度还是精度上都差于模拟退火方法;而路径积分蒙特卡罗方法、扩散蒙特卡罗方法和格林函数蒙特卡罗方法在计算精度范围内,其计算速度都明显优于模拟退火方法.综合言之,扩散蒙特卡罗方法和格林函数蒙特卡罗方法实际应用性相对较高.

4 结 论

前人在量子系统的范畴针对量子蒙特卡罗方法的研究大都只是其中一、两种方法,并未有见对量子蒙特卡罗四种方法综合的比较;本文将量子蒙特卡罗4种方法整体引入地球物理反问题中,但并非每种方法都能很好的适应地球物理反问题.基于此,本文将量子蒙特卡罗方法应用于MT和地震一维波动方程波阻抗反演模型计算,从数值上比较了4种方法的优劣,结果表明把量子蒙特卡罗方法应用于地球物理反问题的求解是成功的,它适合于非线性、多极值的地球物理反问题;且在收敛速度以及反演结果精度方面有其优越性,也有较好的避免陷入局部极小的性质,在地球物理非线性反演中具有广阔的应用前景.该方法也适用于其他领域的非线性最优化问题求解,其算法具有较强的通用性,但还有待进一步优化、完善;同时将4种方法的计算结果和相关文献[51]中模拟退火的计算结果做了比较,结果表明量子蒙特卡罗方法在一定程度上优于模拟退火方法,这和前人的研究结论是一致的.限于篇幅,我们将在后续文章中将本文所提出的方法在地球物理反问题中的应用结果与其他非线性反演方法做进一步比较.

此外,本文按照量子系统的形式设置动能项和试探波函数,但是对于实际地球物理反问题,这种设置未必就是合理和有效的.所以,找出适当的动能项和试探波函数是进一步工作的重要内容.

附录 A

对于文中(4)式,则有:

$$Z=\lim_{P\to\infty}\sum_{s^1,\cdots,s^P}e^{-\frac{1}{PT}\sum_{k=1}^{P}H_{cl}(s^k)}e^{-\frac{1}{PT}\sum_{k=1}^{P}H_{kin}(s^k)},$$

然后利用 $\sum_{s^k}|s^k\rangle\langle s^k|\equiv I$, $(k=1,\cdots,P)$ 的恒等式,则可变为

$$Z=\lim_{P\to\infty}\sum_{s^1,\cdots,s^P}e^{-\frac{1}{PT}\sum_{k=1}^{P}H_{cl}(s^k)}\langle s^1|e^{-\frac{1}{PT}H_{kin}(s^1)}|s^2\rangle\cdots\langle s^P|e^{-\frac{1}{PT}H_{kin}(s^P)}|s^1\rangle,$$

这里,s^k 表示的是统计系统中第 k 个"微观"系统的状态;P 为该统计系统包含的"微观"系统总数.因势能部分 H_{cl} 可对角化,所以接下来只需考虑处于两个不同位形之间的动能项指数表达式 $\langle s^k|e^{-\frac{1}{PT}H_{kin}(s^k)}|s^{k+1}\rangle$(也即为动能项的传播子)的计算.

在量子力学中,动量算符表示为:$\hat{p}=-i\hbar\nabla$,动能算符表示为 $\hat{T}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2=\frac{p^2}{2m}$,动量本征态在坐标表象中表示为 $\langle x|p\rangle=\psi_p(x)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{D/2}}e^{ip\cdot x/\hbar}$,坐标本征态在动量表象中表示为 $\langle p|x\rangle=\psi_x(p)=\frac{1}{(2\pi\hbar)^{D/2}}e^{-ip\cdot x/\hbar}$,根据 $\int dp|p\rangle\langle p|\equiv I$,则有:

$$\begin{aligned}&\langle x^k|e^{-H_{kin}/PT}|x^{k+1}\rangle\\&=\langle x^k|e^{-\frac{p^2}{2m}\frac{1}{PT}}|x^{k+1}\rangle=\int dp e^{-\frac{p^2}{2m}\frac{1}{PT}}\langle x^k|p\rangle\langle p|x^{k+1}\rangle\\&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^D}\int dp_1\int dp_2\cdots\int dp_D e^{-\sum_{j=1}^{D}\left[\frac{p_j^2}{2mPT}+ip_j(x_j^{k+1}-x_j^k)\right]}\\&=\frac{1}{(2\pi\hbar)^D}\left(\sqrt{2\pi mPT}\right)^D e^{-\frac{mPT(x^{k+1}-x^k)^2}{2\hbar^2}}\\&=\left(\frac{mPT}{2\pi\hbar^2}\right)^{D/2}e^{-\frac{mPT(x^{k+1}-x^k)^2}{2\hbar^2}}\end{aligned}$$

将 $\Gamma=\frac{\hbar}{2m}$ 及 $K^{\perp}=(PT)^2/(2\Gamma)$ 带入上式,则有:

$$\langle x^k|e^{-H_{kin}/PT}|x^{k+1}\rangle=\left(\frac{K^{\perp}}{2\pi PT}\right)^{D/2}e^{-\frac{1}{PT}\frac{K^{\perp}}{2}\langle x^k-x^{k+1}\rangle^2}$$

这里,D 为 x 的空间维数.该式表明"微观"系统间的横向耦合 $K^{\perp}$ 在相邻位形 x^k 和 x^{k+1} 间起弹性连接的作用.在退火过程中,可把粒子的质量 m 看作是一个逐渐增加的量,则 m 的反向增加可看成 Γ 值的逐渐减小.

附录 B

在扩展的位形空间(x,ω)里定义一个马尔可夫过程,其从第 n 次迭代(x_n,ω_n)到第 $n+1$ 次迭代(x_{n+1},ω_{n+1})的一步转移概率为

$$K(x_{n+1},\omega_{n+1}|x_n,\omega_n)=\rho_{x_{n+1},x_n}\delta(\omega_{n+1}-\omega_n b_{x_n}),$$

则扩展位形空间中概率密度为 $P_n(x_n,\omega_n)$ 的相应主

万方数据

方程可给定为

$$P_{n+1}(\boldsymbol{x}_{n+1},\omega_{n+1}) = \sum_{x}\int \mathrm{d}\omega K(\boldsymbol{x}_{n+1},\omega_{n+1}\mid \boldsymbol{x}_n,\omega_n)P_n(\boldsymbol{x}_n,\omega_n)\,.$$

定义波函数振幅 $\psi_n(\boldsymbol{x})$ 为

$$\psi_n(\boldsymbol{x}) = \sum_{x_n}\int \mathrm{d}\omega_n\omega_n\delta_{x,x_n}P_n(\boldsymbol{x}_n,\omega_n) = \int \mathrm{d}\omega_n\omega_n P_n(\boldsymbol{x},\omega_n)\,,$$

则可以很好的满足迭代方程式 $\psi_{n+1}(\boldsymbol{x}') = \sum_{x} G(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x})\psi_n(\boldsymbol{x})$;对于足够大的 n,$\psi_n(\boldsymbol{x})$能够保证逐渐趋向于基态 $\psi_0(\boldsymbol{x})$:$\psi_n(\boldsymbol{x}) \xrightarrow{n\to\infty} \psi_0(\boldsymbol{x})$.

参考文献(References)

[1] 王家映. 地球物理反演理论. 北京: 高等教育出版社, 2000
Wang J Y. Inverse Theory in Geophysics (in Chinese). Beijing: Higher Education Press, 2000

[2] Ceperley D M, Alder B J. Quantum Monte Carlo. *Science*, 1986, **231**: 555～560

[3] Rubinstein R V. Simulation and the Monte Carlo Method. New York: John Wiley & Sons, 1981

[4] Kalos M H, Whitlock P A. Monte Carlo Methods. New York: John Wiley & Sons, 1986

[5] Bratley P, Fox B L, Schrage L E. A Guide to Simulation (2nd ed). New York: Springer, Berlin, 1987

[6] Gardiner C W. Handbook of Stochastic Methods (2nd ed). New York: Springer, Berlin, 1990

[7] Fishman G S. Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications. New York: Springer, 1996

[8] Lewerenz M. Monte Carlo methods: Overview and Basics in Quantum simulations of complex many-body systems: from theory to algorithms. Lecture Notes, 2002. 1～24

[9] Barnett R N, Whaley K B. Variational and diffusion Monte Carlo techniques for quantum clusters. *Phys. Rev.* (A), 1992, **47**: 4082～4098

[10] Kalos M H. Monte Carlo calculations of the ground state of three- and four-body nuclei. *Phys. Rev.*, 1962, **128**:1791～1795

[11] Kalos M H. Energy of a boson fluid with Lennard-Jones potentials. *Phys. Rev.* (A), 1970, **2**: 250～255

[12] Lee M A, Schmidt K E. Green's function Monte Carlo. *Comput. in Phys.*, 1992, **6**: 192～197

[13] Anderson J B. A random walk simulation of the Schrödinger equation: H_3^+. *J. Chem. Phys.*, 1975, **63**: 1499～1503

[14] Ceperley D M, Alder B J. Ground state of the electron gas by a stochastic method. *Phys. Rev. Lett.*, 1980, **45**: 566～569

[15] Reynolds P J, Ceperley D M. Fixed-node quantum Monte Carlo for molecules. *J. Chem. Phys.*, 1982, **77**: 5593～5603

[16] Hammond B L, Lester W A, Reynolds Jr P J. Monte Carlo Methods in ab initio Quantum Chemistry. Singapore: World Scientific, 1994

[17] Martonák R, Santoro G E, Tosatti E. Quantum annealing by the path integral Monte Carlo method: the two-dimensional random Ising model. *Phys. Rev.* (B), 2002, **66**: 094203

[18] Sarjala M, Petäjä V, Alava M. Optimization in random field Ising models by quantum annealing. *Stat. Mech.*, 2006, **1**: P01008. (http://arxiv.org/abs/cond-mat/0511515)

[19] Liu P, Berne B J. Quantum path minimization: An efficient method for global optimization. *Chem. Phys.*, 2003, **118**: 2999～3005

[20] Lee Y H, Berne B J. Global optimization: quantum thermal annealing with path integral Monte Carlo. *Phys. Chem.* (A), 2000, **104**: 86～95

[21] Donsker M D, Kac M. A sampling method for determining the lowest eigenvalue and the principal eigenfunction of Schrödinger equation. *J. Res. Natl. Bur. Std.*, 1950, **44**: 551～557

[22] Kalos M H, Levesque D, Verlet L. Helium at zero temperature with hard-sphere and other forces. *Phys. Rev.* (A), 1974, **9**: 2178～2195

[23] McMillan W L. Ground state of liquid He^4. *Phys. Rev.* (A), 1965, **138**: 442～451

[24] Anderson J B. Quantum chemistry by random walk. *J. Chem. Phys.*, 1976, **65**: 4121～4127

[25] Pollock E L, Ceperley D M. Simulation of quantum many-body systems by path-integral methods. *Phys. Rev.* (B), 1984, **30**: 2555～2568

[26] Trivedi N, Ceperley D M. Ground-state correlations of quantum antiferromagnets: A Green's function Monte Carlo study. *Phys. Rev.* (B), 1990, **41**: 4552～4569

[27] Umrigar C J, Nightingale M P, Runge K J. A diffusion Monte Carlo algorithm with very small time-step errors. *J. Chem. Phys.* 1993, **99**: 2865～2890

[28] Kosztin I, Faber B, Schulten K. Introduction to the diffusion Monte Carlo method. *Am. J. Phys.* 1996, **64**: 633～644

[29] Buonaura M C, Sorella S. Numerical study of the two-dimensional Heisenberg model using a Green function Monte Carlo technique with a fixed number of walkers. *Phys. Rev.* (B), 1998, **57**: 11446～11456

[30] Foulkes W M C, Mitas L, Needs R J, et al. Quantum Monte Carlo simulations of solids. *Rev. Mod. Phys.*, 2001, **73**: 33～83

[31] Anderson J B. Diffusion and Green's function quantum Monte Carlo methods in Quantum simulations of complex many-body systems: from theory to algorithms. Lecture Notes, 2002. 25～50

[32] Bernul B, Ceperley D M. Path integral Monte Carlo in Quantum simulations of complex many-body systems: from theory to algorithms. Lecture Notes, 2002. 51～61

[33] Shumway J, Ceperley D M. Quantum Monte Carlo methods in the study of nanostructures. Lecture Note, 2004

万方数据

[34] Santoro G E, Tosatti E. Optimization using quantum mechanics: quantum annealing through adiabatic evolution. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2006, **39**: 393～431

[35] Stella L, Santoro G E. Quantum annealing of an Ising spin-glass by Green's function Monte Carlo. *Phys. Rev.* (E), 2007, **75**: 036703

[36] Anderson J B. Quantum chemistry by random walk: higher accuracy. *J. Chem. Phys.*, 1980, **73**: 3897～3899

[37] Mentch F, Anderson J B. Quantum chemistry by random walk: importance sampling for H_4^3. *J. Chem. Phys.*, 1981, **74**: 6307～6311

[38] Alder B J, Ceperley D M, Reynolds P J. Stochastic calculation of interaction energies. *J. Phys. Chem.*, 1982, **86**: 1200～1204

[39] Moskowitz J W, Kalos M H. A new look at correlations in atomic and molecular systems. I. Application of fermion Monte Carlo variational method. *Int. J. Quantum Chem.*, 1981, **20**: 1107～1119

[40] Moskowitz J W, Schmidt K E, Lee M A, et al. Monte Carlo variational study of Be: A survey of correlated wave functions. *J. Chem. Phys.*, 1982, **76**: 1064～1067

[41] Trotter H F. On the product of semi-groups of operators. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1959, **10**: 545～551

[42] Commun M S. Generalized Trotter's formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems. *Math. Phys.*, 1976, **51**: 183～190

[43] Suzuki M. Relationship between d-dimensional quantum spin systems and $(d+1)$-dimensional Ising systems—equivalence, critical exponents and systematic approximants of the partition function and spin correlations. *Prog. Theor. Phys.*, 1976, **56**: 1454～1469

[44] Santoro G E, MartoňáK R, Tosatti E, et al. Theory of quantum annealing of an Ising spin glass. *Science*, 2002, **295**: 2427～2430

[45] Alán A G, William A L. Quantum Monte Carlo methods for the solution of the Schrödinger equation for molecular systems in Handbook for Numerical Analysis. 2002

[46] 马文淦. 计算物理学. 北京: 科学出版社, 2005
Ma W G. Computational Physics (in Chinese). Beijing: Science Press, 2005

[47] Pang T. An Introduction to Computational Physics. Cambridge: Cambridge University Press, 2006

[48] Assaraf R, Caffarel M, Khelif A. Diffusion Monte Carlo with a fixed number of walker. *Phys. Rev.* (E), 2000, **61**: 4566～4575

[49] van Kampen N G. Stochastic Processes in Physics and Chemistry. Amsterdam: North-Holland, 1992

[50] Stella L. Studies of classical and quantum annealing. SISSA. Thesis: D. 2005

[51] 魏 超,朱培民,王家映. 量子退火反演的原理和实现. 地球物理学报, 2006, **49**: 577～583
Wei C, Zhu P M, Wang J Y. Quantum annealing inversion and its implementation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2006, **49**(2): 577～583

[52] 黄光远,许闻天,傅国华等. 地震勘探数据处理的一种算法——分布参数系统最优理论的应用. 地球物理学报, 1985, **28**(1): 74～83
Huang G Y, Xu W T, Fu G H, et al. An algorithm for processing seismic exploration data. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 1985, **28**(1): 74 ～83

[53] 张丽琴,王家映,严德天. 一维波动方程波阻抗反演的同伦方法. 地球物理学报, 2004, **47**(6): 1111～1117
Zhang L Q, Wang J Y, Yan T D. A homotopy method for the impedance inversion of 1-D wave equation. *Chinese J. Geophys.* (in Chinese), 2004, **47**(6): 1111～1117

(本文编辑 汪海英)

万方数据

基于量子蒙特卡罗的地球物理反演方法

万方数据 WANFANG DATA 文献链接

作者： 魏超， 李小凡， 张美根， WEI Chao， LI Xiao-Fan， ZHANG Mei-Gen
作者单位： 中国科学院地质与地球物理研究所,北京,100029
刊名： 地球物理学报 ISTIC SCI PKU
英文刊名： CHINESE JOURNAL OF GEOPHYSICS
年，卷(期)： 2008，51(5)
被引用次数： 1次

参考文献(53条)

1. 王家映 地球物理反演理论 2000

2. Ceperley D M. Alder B J Quantum Monte Carlo 1986

3. Rubinstein R V Simulation and the Monte Carlo Method 1981

4. Kalos M H. Whitloek P A Monte Carlo Methods 1986

5. Bratley P. Fox B L. Schrage L E A Guide to Simulation 1987

6. Gardiner C W Handbook of Stochastic Methods 1990

7. Fishman G S Monte Carlo,Concepts,Algorithms,and Applications 1996

8. Lewerenz M Monte Carlo methods:Overview and Basics in Quantum simulations of complex many-body systems:from theory to algorithms 2002

9. Barnett R N. Whaley K B Variational and diffusion Monte Carlo techniques for quantum clusters 1992

10. Kalos M H Monte Carlo calculations of the ground state of three-and four-body nuclei 1962

11. Kalos M H Energy of a boson fluid with Lennard-Jones potentials 1970

12. Lee M A. Schmidt K E Green's function Monte Carlo 1992

13. Anderson J B A random walk simulation of the Schrodinger equation:H<,3><'+> 1975

14. Ceperley D M. Alder B J Ground state of the electron gas by a stochastic method 1980

15. Reynolds P J. Ceperley D M Fixed-node quantum Monte Carlo for molecules 1982

16. Hammond B L. Lester W A. Reynolds Jr P J Monte Carlo Methods in ab initio Quantum Chemistry 1994

17. Martonák R. Santoro G E. Tosatti E Quantum annealing by the path integral Monte Carlo method:the two-dimensional random Ising model 2002

18. Sarjala M. Petaja V. Alava M Optimization in random field Ising models by quantum annealing 2006

19. Liu P. Berne B J Quantum path minimization:An efficient method for global optimization 2003

20. Lee Y H. Berne B J Global optimization:quantum thermal annealing with path integral Monte Carlo 2000

21. Donsker M D. Kac M A sampling method for determining the lowest eigenvalue and the principal eigenfunction of Schrodinger equation 1950

22. Kalos M H. Levesque D. Verlet L Helium at zero temperature with hard-sphere and other forces 1974

23. McMillan W L Ground state of liquid He<'4> 1965

24. Anderson J B Quantum chemistry by random walk 1976

25. Pollock E L. Ceperley D M Simulation of quantum manybody systems by path-integral methods 1984

26. Trivedi N. Ceperley D M Ground-state correlations of quantum antiferromagneta:A Green's function Monte Carlo study 1990

27. Umrigar C J. Nightingale M P. Runge K J A diffusion Monte Carlo algorithm with very small time-step errors 1993

28. Kosztin I. Faber B. Schuhen K Introduction to the diffusion Monte Carlo method 1996

29. Buonaura M C. Sorella S Numerical study of the twodimensional Heisenherg model using a Green function Monte Carlo technique with a fixed number of walkers 1998

30. Foulkes W M C. Mitas L. Needs R J Quantum Monte Carlo simulations of solids 2001

31. Anderson J B Diffusion and Green's function quantum Monte Carlo methods in Quantum simulations of complex many-body systems:from theory to algorithms 2002

32. Bernul B. Ceperley D M Path integral Monte Carlo in Quantum simulations of complex many-body systems:from theory to algorithms 2002

33. Shumway J. Ceperley D M Quantum Monte Carlo methods in the study of nanostructures 2004

34. Santoro G E. Tosatti E Optimization using quantum mechanics:quantum annealing through adiabatic evolution 2006

35. Stella L. Santoro G E Quantum annealing of an Ising spinglass by Green's function Monte Carlo 2007

36. Anderson J B Quantum chemistry by random walk,higher accuracy 1980

37. Mentch F. Anderson J B Quantum chemistry by random walk:importance sampling for H<'3><,+> 1981

38. Alder B J. Ceperley D M. Reynolds P J Stochastic calculation of interaction energies 1982

39. Moskowitz J W. Kalos M H A new look at correlations in atomic and molecular systems I Application of fermion Monte Carlo variational method 1981

40. Moskowitz J W. Schmidt K E. Lee M A Monte Carlo variational study of Be:A survey of correlated wave functions 1982

41. Trotter H F On the product of semi-groups of operators 1959

42. Commun M S Generalized Trotter's formula and systematic approximants of exponential operators and inner derivations with applications to many-body problems 1976

43. Suzuki M Relationship between d-dimensional quantum spin systems and (d+1)-dimensional Ising systems-equivalence,critical exponents and systematic approximants of the partition function and spin correlations 1976

44. Santoro G E. MartonáK R. Tosatti E Theory of quantum annealing of an Ising spin glass 2002

45. Alan A G. William A L Quantum Monte Carlo methods for the solution of the Scbrodinger equation for molecular systems 2002

46. 马文淦 计算物理学 2005

47. Pang T An Introduction to Computational Physics 2006

48. Assaraf R. Caffarel M. Khelif A Diffusion Monte Carlo with a fixed number of walker 2000

49. van Kampen N G Stochastic Processes in Physics and Chemistry 1992

50. Stella L Studies of classical and quantum annealing 2005

51. 魏超. 朱培民. 王家映 量子退火反演的原理和实现[期刊论文]-地球物理学报 2006(02)

52. 黄光远. 许闻天. 傅国华 地震勘探数据处理的一种算法--分布参数系统最优理论的应用[期刊论文]-地球物理学报 1985(01)

53.张丽琴.王家映.严德天 一维波动方程波阻抗反演的同伦方法[期刊论文]-地球物理学报 2004(06)

引证文献(1条)

1.潘克家.王文娟.谭永基.曹俊兴 基于混合差分进化算法的地球物理线性反演[期刊论文]-地球物理学报 2009(12)

本文链接：http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_dqwlxb200805023.aspx
授权使用：电子科技大学(cddzkjdx)，授权号：f654a4ec-9244-42d1-89a1-9ea6010f1adf
下载时间：2011年3月14日