前　言

本文节译自美国地球物理学会所编《矿山地球物理》第二卷，原编著者系 S. H. 沃德❶。文中比较集中和系统地论述了作为电法勘探理论基础的一些电磁理论问题。

鉴于目前国内有关的生产和科研工作正在大力开展，为适应从事这类工作的同志的需要，翻译了这个材料，以供参考。

原著里的一些错误已由译者订正，但由于我们学识有限、经验不足，书中错漏之处一定还有，敬请读者不吝指正。

本书由金绩祖、张慧生同志译出。

新疆工学院电磁法科研组

❶ Ward, S. H., 1971, Electromagnetic theory for geophysical applications: Mining Geophysics, vol. Ⅱ, Theory, Society of Exploration Geophysicists, p. 13—196

目　录

一、基础

（一）引言 …… 1
（二）基本电磁量 …… 1
（三）电磁场的势和波动方程 …… 3
（四）不含源的谐变场 …… 9
（五）谢昆诺夫对称波势 …… 11
（六）波动方程的解 …… 14
1．边界条件 …… 14
（1）法向的B …… 14
（2）法向的D …… 15
（3）切向的E …… 16
（4）切向的H …… 17
（5）电流的连续性 …… 18
（6）势的连续性—静态场 …… 18
2．含源问题 …… 19
（1）非齐次波动方程 …… 19
（2）格林定理 …… 22
（3）静态场 …… 22
（4）时变场 …… 25
3．含源问题举例 …… 30
（1）电偶极子的场 …… 30
（2）磁偶极子的场 …… 30
4．波动方程的基本形式及其解 …… 35
（1）笛卡儿正交坐标 …… 35
a．时谐均匀平面波 …… 35
b．相、相角和相速度 …… 38

c．群速度和相速度 ……39
d．极化 ……41
（2）柱坐标 ……42
（3）球坐标 ……48
（4）齐次波动方程的积分解 ……52
（5）具有柱对称和球对称问题中特殊函数的选择 ……61
a．柱函数 ……61
b．球函数 ……62

二、均匀静电场中的导电球
三、均匀横静电场中的异电柱
四、均匀静磁场中的导磁球
五、均匀横静磁场中的导磁柱
六、谐变磁场中的导电导磁球
七、谐变磁场中的导电导磁柱

（一）引言 ……87
1．电性源 ……87
2．磁性源 ……88
（二）横一次场 ……88
（三）纵一次场 ……94
（四）讨论 ……95

八、半空间表面上的电极，直流

（一）无限大、均匀、各向同性媒质中点源的势 ……96
（二）接入均匀、各向同性半空间的电偶极子 ……97
（三）接入均匀、各向同性半空间的偶极子源及其电势 ……98
（四）两层大地上的电极 ……98
（五）三层大地上的电极 …… 102
（六）n层大地上的电极 …… 104
（七）势公式的用法 …… 105

九、半空间表面上的电极，交流

十、平面波的反射与折射

（一）引言 …… 125

（二）斯涅耳定律 …… 125
（三）菲涅耳方程 …… 127
1．情况Ⅰ：E_0垂直于入射面 …… 128
2．情况Ⅱ：E_0在入射面内 …… 130
（四）反射系数和透射系数 …… 135

十一、n层各向同性媒质的平面波阻抗

十二、n层各向异性媒质的平面波阻抗

十三、n层媒质上方的线电流源

（一）自由空间的线电流源 …… 155
（二）大地效应 …… 157
（三）均匀大地上面的线电流源 …… 161
（四）n层大地上面的线电流源 …… 168
（五）复折射角和复入射角 …… 170
（六）n层媒质上方的线电流源 …… 177

十四、n层媒质上方的垂直磁偶极子

（一）自由空间的磁偶极子源 …… 182
（二）均匀大地上方的垂直磁偶极子 …… 183
（三）对位于均匀大地上面的线圈的解 …… 187
（四）对位于n层大地上面的线圈的解 …… 195

十五、n层媒质上方的水平磁偶极子

（一）均匀大地上方的水平磁偶极子 …… 196
（二）位于均匀大地上面的水平磁偶极子 …… 204
（三）位于n层大地上面的水平磁偶极子 …… 214

十六、n层大地上方的磁偶极子

（一）引言 …… 216
（二）n层大地上方的垂直磁偶极子 …… 216
（三）n层大地上方的水平磁偶极子 …… 222

十七、n层大地上面的水平电偶极子

十八、n层大地上方线圈间相互耦合的小结

一、基　础

（一）引言

我们将在本节确立一些基本概念，它们是学习本章其它各节的基础。为此，需建立有理化 MKS 单位制中的麦克斯韦场方程组和各种波势，并求得与后面内容有关的波动方程的解。电磁场基本概念的这一概述，使我们可以讨论后面电磁理论的专门问题，这些专门问题对我们学习电法勘探来讲都是最根本的。

下面，我们将始终利用谐变时间依赖关系：$e^{-i\omega t}=\cos\omega t-i\sin\omega t$，而且总是依照斯特拉顿（1941）早期的研究进行的。

（二）基本电磁量

一个电磁场可用定义域中的四个矢量**E**, **B**, **D**, **H**来确定。这里

E＝电场强度，单位为伏特/米，

B＝磁感应强度或通量密度，单位为韦伯/米^2，

D＝电位移，单位为库仑/米^2，

H＝磁场强度，单位为安培·匝/米。

库仑、安培和法拉第的实验结果导致了四个麦克斯韦方程式的建立。这组方程表达了上述矢量和它们的源——电荷密度ρ（库/米^3）和电流密度**J**（安/米^2）的某种分布——的关系：

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,\quad\text{（法拉第定律）}\qquad(1)$$

$$\nabla\times\mathbf{H}-\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J},\quad\text{（安培定律）}\qquad(2)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B}=0,\quad\text{（B无源）}\qquad(3)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho,\quad\text{（库仑定律）}\qquad(4)$$

方程（2）表明，量$\partial\mathbf{D}/\partial t$具有电流密度的量纲。因此，给

它一个名称，叫做位移电流密度（$\mathbf{J}_D$）。与此类似，方程（1）中的量$\partial\mathbf{B}/\partial t$被称为磁流密度（$\mathbf{J}_m$），因此磁通量的变化率$\partial\phi/\partial t$具有磁流$K$的量纲，而且就把它叫做磁流（谢昆诺夫，1943）。

对这四个方程另加一个连续性方程

$$\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0. \tag{5}$$

一旦（2）和（4）被确定，（5）就不再是独立的了，反之亦然。

在自由空间，$\mathbf{D}$和$\mathbf{E}$及$\mathbf{H}$和$\mathbf{B}$之间是由一线性函数相联系的，即有

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\mathbf{E},\quad \varepsilon_0=8.854\times10^{-12}\text{法拉/米}, \tag{6}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B},\quad \mu_0=4\pi\times10^{-7}\text{亨利/米}. \tag{7}$$

对不同于自由空间的各向同性线性媒质，这两个关系式变成

$$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}, \tag{8}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\mathbf{B}. \tag{9}$$

ε_0、μ_0、ε、μ被称为媒质的感应容率。介电常数被定义为无量纲的量

$$K_e=\varepsilon/\varepsilon_0. \tag{10}$$

磁导率也是一无量纲的量

$$K_m=\mu/\mu_0. \tag{11}$$

地质体的非线性特性通常是二级效应，因而关系式（8）和（9）对我们来讲，一般还是适用的。不过岩石都具有各向异性，所以$\mathbf{D}-\mathbf{E}$、$\mathbf{H}-\mathbf{B}$的关系有时得用张量的形式来表示

$$\mathbf{D}_j=\varepsilon_{jk}\mathbf{E}_k, \tag{12}$$

$$\mathbf{H}_j=\frac{1}{\mu_{jk}}\mathbf{B}_k. \tag{13}$$

虽然，用五个矢量$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{J}$加一个标量ρ来描述电磁现象已是充分的，但将会看到，假如再引入电极化矢量和磁极化矢

量，对我们常常是方便的。这两个矢量由下式确定：

$$\mathbf{P}=\mathbf{D}-\varepsilon_0\mathbf{E}, \tag{14}$$

$$\mathbf{M}=-\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}-\mathbf{H}. \tag{15}$$

对线性各向同性媒质，P及M与E及H满足下述线性关系：

$$\mathbf{P}=x_e\varepsilon_0\mathbf{E}, \tag{16}$$

$$\mathbf{M}=x_m\mathbf{H}. \tag{17}$$

这里x_e和x_m分别是电极化率和磁极化率，由此

$$x_e=K_e-1, \tag{18}$$

$$x_m=K_m-1. \tag{19}$$

对导电的线性媒质，J与E的关系为

$$\mathbf{J}_j=\sigma_{jk}\mathbf{E}_k. \tag{20}$$

式中

σ_{jk}＝电导率（姆欧/米）

$$=\frac{1}{(\rho_0)_{jk}}=\frac{1}{\text{电阻率（欧姆米）}}.$$

截面为A、长度为l的均匀棒的直流电阻是

$$R=\rho_0\frac{l}{A}\text{欧姆}. \tag{21}$$

在岩体内部，J—E的关系通常是线性的，而在实验室中，当岩石标本内具有很高的电流密度时，线性关系就不再成立了。

（三）电磁场的势和波动方程

用势函数来解决电磁理论问题，常常是很方便的，场可由对势函数的微分得出。方程（3）指出，矢量B是无源的，因此可将它写成另外一个任意矢量A的旋度

$$\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}. \tag{22}$$

将方程（22）代入方程（1）式，得

$$\nabla\times\left(\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}\right)=0. \tag{23}$$

由于$\mathbf{E}+(\partial\mathbf{A}/\partial t)$是无旋的，故可将它写成某一任意标量函数

ϕ的梯度，于是

$$\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\nabla \phi,$$

或

$$\mathbf{E}=-\nabla \phi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{24}$$

函数$\mathbf{A}$和ϕ分别为场的矢量势和标量势。

如果媒质是线性、均匀和各向同性的，利用方程（8）、（9）、（22）和（24），能把方程（2）和（4）变换成：

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\mu\varepsilon\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}=\mu\mathbf{J}, \tag{25}$$

和

$$\nabla^2\phi+\nabla\cdot\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho. \tag{26}$$

方程（25）中，可认为矢量$\mathbf{J}$是由两个原因引起的，一个是外加的电动势，$\mathbf{J}'=\sigma\mathbf{E}'$，另一个是导电媒质中的电场$\mathbf{J}''=\sigma\mathbf{E}$。后者可表示为

$$\mu\sigma\left(-\nabla\phi-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right).$$

所以将方程（25）重写为：

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}+\mu\varepsilon\nabla\frac{\partial \phi}{\partial t}+\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}+\mu\sigma\nabla\phi$$

$$+\mu\sigma\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}=\mu\mathbf{J}'. \tag{27}$$

利用矢量恒等式

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{A}\equiv\nabla\nabla\cdot\mathbf{A}-\nabla\cdot\nabla\mathbf{A}\ \text{（只可用于笛卡儿坐标）}, \tag{28}$$

且使$\mathbf{A}$和ϕ的选择满足下述洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}+\mu\varepsilon\frac{\partial \phi}{\partial t}+\mu\sigma\phi=0. \tag{29}$$

方程（27）可化为

$$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\mathbf{J}'. \tag{30}$$

利用洛伦兹条件后，类似地可把方程（26）变换为

$$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{\rho'}{\varepsilon}. \tag{31}$$

洛伦兹条件的提出，似乎是任意的，实际上它仅是对选择矢势$\mathbf{A}$和标势ϕ的一种限制，因为这样做有一个值得注意的好处——使得标量势和矢量势完全对称，亦即使它们与场矢量满足同样的波动方程。

注意，方程（31）为非齐次波动方程，求它的满足适当边界条件的解是电磁理论在地球物理中应用的基本问题。对某些问题，可借引入单一的势——赫兹矢量而很容易地解决，其它问题则须去求解场矢量自己所满足的波动方程。

考虑引入赫兹矢量问题，假设

$$\mathbf{A}=\mu\varepsilon\frac{\partial\pi}{\partial t}+\mu\sigma\pi, \tag{32}$$

和

$$\phi=-\nabla\cdot\pi. \tag{33}$$

利用这些变换，并引入恒等式$\mathbf{J}'\equiv\partial\mathbf{P}'/\partial t$，方程（30）变成

$$\mu\sigma\left[\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}\right]$$

$$+\mu\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}\right]=-\mu\frac{\partial\mathbf{P}'}{\partial t}. \tag{34}$$

该方程的两种简化情况对我们是特别有兴趣的；第一种是无源的情况，即$\mathbf{P}'=0$，这时可写出

$$\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}=0. \tag{35}$$

这是矢量势π的一个齐次波动方程。

第二种使我们感兴趣的情况是$\sigma=0$，即在不导电的区域。这

时得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}\right]=-\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial\mathbf{P}'}{\partial t},$$

和

$$\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}=-\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon}, \tag{36}$$

这里已去掉了一个可以不考虑的积分常数。这方程是以势π表示的一个非齐次波动方程。

类似地，利用$\rho'\equiv-\nabla\cdot\mathbf{P}'$，选择$\mathbf{P}'=0$或$\sigma=0$，方程（31）将变成（35）或（36）的形式。必须指出，波动方程（35）和（36）这两种形式，在某种意义上，在任意单一区域是互相排斥的。如果σ有限，那么媒质内部自由电荷的密度经过一短暂的衰减后一直为零。这一衰减过程决定于弛豫时间（斯特拉顿，1941，p. 15）$\tau=\varepsilon/\sigma$，它对蒸馏水来说数量级为10^{-6}秒，对海水小于2×10^{-10}秒，对多数地质体可以忽略其自由电荷。

当然，空气中的σ很小，不能用方程（35），在有源的情况下可用方程（36）。当导电性可以忽略及无源时，（35）和（36）式简化为相同的方程。

到这里，波动方程只有一个共同的形式

$$\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\left(\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}\right)=-\left(\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon}\right). \tag{37}$$

亦即利用赫兹矢量就可以完全描述电磁现象。场矢量由下述辅助方程得到

$$\mathbf{B}=\mu\varepsilon\nabla\times\frac{\partial\pi}{\partial t}+\mu\sigma\nabla\times\pi \tag{38}$$

$$\mathbf{E}=\nabla\nabla\cdot\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}, \tag{39}$$

它们是将方程（32）和（33）代入方程（22）和（24）得出的。

可以用恒等式$\rho'\equiv-\nabla\cdot\mathbf{P}'$和$\mathbf{J}'\equiv\partial\mathbf{P}'/\partial t$的基础是满足连续性方程（5），并用电偶极子来作为电荷和电流源的物理解释（$\mathbf{P}'\equiv$

单位体积中的偶极矩)。

用类似的方式，可写出

$$\nabla^2\pi^* - \mu\epsilon\frac{\partial^2\pi^*}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\pi^*}{\partial t} = -\mathbf{M}', \qquad (40)$$

这里源用磁偶极子来表示（$\mathbf{M}'$≡单位体积中的偶极矩)。赫兹矢量在后一种情况下是磁的形式，而在前一种情况下是电的形式。对（40）式的推导，我们不再用$\mathbf{A}$和φ，而引入$\mathbf{A}^*$和φ^*。矢量势$\mathbf{A}^*$满足

$$\mathbf{D} = -\nabla\times\mathbf{A}^*, \text{ 或 } \mathbf{E} = -\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{A}^*. \qquad (41)$$

我们希望将方程（20）和（41）代入方程（2），得到

$$\nabla\times\mathbf{H} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mathbf{A}^*) = -\frac{\sigma}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{A}^*,$$

或

$$\nabla\times\left[\mathbf{H} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon}\right)\mathbf{A}^*\right] = 0, \qquad (42)$$

方括弧内的项可表示为某一标量的梯度：

$$\mathbf{H} + \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon}\right)\mathbf{A}^* = -\nabla\phi^*,$$

或

$$\mathbf{H} = -\nabla\phi^* - \frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t} - \frac{\sigma}{\epsilon}\mathbf{A}^*. \qquad (43)$$

早先在方程（2）中，以$\sigma\mathbf{E}$代换$\mathbf{J}$是假定只有感应电流而没有电偶极子源出现。另一方面，我们希望了解磁源存在的情况，它们在麦克斯韦方程组中不是显含的。为了表示磁源的存在，把$\mathbf{B}$分为两部分：纯感应部分和场源的贡献部分，相应于

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + \mu\mathbf{M}'. \qquad (44)$$

方程（44）表示总磁场$\mathbf{H}$是由感应部分$\frac{1}{\mu}\mathbf{B}$和外场源$\mathbf{M}'$引起的部分组成的。在这种情况下，感应场$\mathbf{B}$适用于麦克斯韦方程

$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$。利用这个关系可以得到：

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=-\nabla\cdot\mathbf{M}'. \tag{45}$$

（44）式可使我们将麦氏方程组的第一式写成

$$\nabla\times\mathbf{E}+\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\mathbf{M}'}{\partial t}. \tag{46}$$

现在，可以将（41）和（43）式代入（45）和（46)式，得到

$$\nabla^2\mathbf{A}^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{M}'}{\partial t}, \tag{47}$$

和

$$\nabla^2\phi^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\phi^*}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{M}', \tag{48}$$

式中利用下述形式的洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\mathbf{A}^*+\varepsilon\mu\frac{\partial\phi^*}{\partial t}=0. \tag{49}$$

由下面关系引出赫兹矢量π^*

$$\mathbf{A}^*=\mu\varepsilon\frac{\partial\pi^*}{\partial t}, \tag{50}$$

和

$$\phi^*=-\nabla\cdot\pi^* \tag{51}$$

于是非齐次波动方程（47）和（48）简化为一个方程

$$\nabla^2\pi^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi^*}{\partial t}=-\mathbf{M}',$$

这正是我们预想的结果。对许多地球物理问题，所研究的区域是不含源的，因而用下面的齐次方程

$$\nabla^2\pi^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi^*}{\partial t}=0, \tag{52}$$

$$\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}=0. \tag{53}$$

在一般情况下，既有电源又有磁源（虽然下面我们并不讨论这种情况），场矢量可由下式引出：

$$\mathbf{H}=\varepsilon\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}+\sigma\nabla\times\boldsymbol{\pi}+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^{*}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{\pi}^{*}}{\partial t^{2}}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\pi}^{*}}{\partial t},\tag{54}$$

$$\mathbf{E}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\boldsymbol{\pi}}{\partial t^{2}}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}-\mu\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{\pi}^{*}}{\partial t}.\tag{55}$$

最后这四个方程，可使我们利用赫兹矢量来解决不含源的自由区域中的任何电磁场问题。

我们不难得到场矢量的波动方程。对方程（1）取旋度，并利用代换$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$，有

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\times\mu\mathbf{H}\right).\tag{56}$$

但由方程（2），

$$\nabla\times\mu\mathbf{H}=\mu\left(\mathbf{J}+\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right)=\mu\left(\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right),\tag{57}$$

于是（56）式变为

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}}.\tag{58}$$

利用恒等式（28），（58）式成为

$$\nabla^{2}\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0.\tag{59}$$

或者如引入光速$c=(1/\sqrt{\varepsilon_{0}\mu_{0}})$，得到

$$\nabla^{2}\mathbf{E}-\frac{K_{e}K_{m}}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{E}}{\partial t^{2}}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=0.\tag{60}$$

类似地，有

$$\nabla^{2}\mathbf{H}-\frac{K_{e}K_{m}}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{H}}{\partial t^{2}}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=0.\tag{61}$$

（四）不含源的谐变场

在场随时间变化的问题中，引入蔓叶线型（或广义谐变）时间函数，可以简化分析，例如

$$\mathbf{E}=|\mathbf{E}|e^{-i\omega t}=|\mathbf{E}|(\cos\omega t-i\sin\omega t).$$

将所有的场矢量代换为这种与时间有关的形式，并从所有方程的两边消去$e^{-i\omega t}$，导电媒质的麦克斯韦方程组变为：

$$\nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} = 0, \tag{62}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} + (i\omega\varepsilon - \sigma)\mathbf{E} = 0, \tag{63}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \tag{64}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \tag{65}$$

由于我们实际上把时间因于$e^{-i\omega t}$吸收在场矢量中，故除非另外说明，后边的$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$将表示$|\mathbf{E}|e^{-i\omega t}$和$|\mathbf{H}|e^{-i\omega t}$。这个约定也同样适用于所有其它矢量。正如后面可以看到的，通过相应的拉普拉斯或付里叶变换，可以把方程的解推广到任意非正弦变化的情况。

在谐时变化的情况下，势和场的波动方程(30)、(47)、(31)、(48)、(53)、(52) 在直角坐标系中变成：

$$\nabla^2\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0, \tag{66}$$

$$\nabla^2\mathbf{A}^* + k^2\mathbf{A}^* = 0, \tag{67}$$

$$\nabla^2\phi + k^2\phi = 0, \tag{68}$$

$$\nabla^2\phi^* + k^2\phi^* = 0, \tag{69}$$

$$\nabla^2\pi + k^2\pi = 0, \tag{70}$$

$$\nabla^2\pi^* + k^2\pi^* = 0, \tag{71}$$

这里

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \tag{72}$$

复数 $k = \alpha + i\beta$ 叫做传播常数，它的实部

$$\alpha = \omega\left[\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1\right)\right]^{1/2}, \tag{73}$$

通称相常数；它的虚部

$$\beta = \omega\left[\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}} - 1\right)\right]^{1/2}, \tag{74}$$

通称衰减常数。

考虑到波动方程解的形式，对α、β这样命名的原因是很明显

的。场可以由势表示如下：

$$\mathbf{E}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}+k^2\boldsymbol{\pi}+i\omega\mu\nabla\times\boldsymbol{\pi}^*, \tag{75}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi+i\omega\mathbf{A}-\frac{1}{\epsilon}\nabla\times\mathbf{A}^*; \tag{76}$$

和

$$\mathbf{H}=(\sigma-i\omega\epsilon)\nabla\times\boldsymbol{\pi}+\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}^*+k^2\boldsymbol{\pi}^*, \tag{77}$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A}-\nabla\phi^*+i\omega\mathbf{A}^*-\frac{\sigma}{\epsilon}\mathbf{A}^*. \tag{78}$$

最后，谐时场矢量满足波动方程

$$\nabla^2\mathbf{E}+k^2\mathbf{E}=0, \tag{79}$$

$$\nabla^2\mathbf{H}+k^2\mathbf{H}=0. \tag{80}$$

对许多地球物理问题，当媒质中的传导电流远大于位移电流时，在α和β的表达式中，媒质常数满足$(\sigma^2/\epsilon^2\omega)\gg1$。于是

$$\alpha=\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}. \tag{81}$$

（五）谢昆诺夫对称波势

上面关于磁矢量势**A**的引入，多少带有些任意性，因为磁感应强度**B**的散度为零（3），使得我们写出 $\mathbf{B}=\mathrm{curl}\mathbf{A}$ (22)。我们可将类似的代换用于**E**矢量，这样做时div**E**是恒等于零的，即$\rho=0$。谢昆诺夫（1943）尤其注意到磁性源的势和电性源的势的对称性，写出

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}'+\mathbf{E}'', \tag{82}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}'+\mathbf{H}'', \tag{83}$$

这里场（$\mathbf{E}'$、$\mathbf{H}'$）是由电流**J**造成的，而（$\mathbf{E}''$，$\mathbf{H}''$）是由磁流$\mathbf{J}_M$产生的。在第（三）节中，我们已经看到了这种对称性，只是没有现在这样明显罢了。

当只有磁流源时，麦克斯韦方程的前两个变成

$$\nabla\times\mathbf{E}''+\mathbf{J}_M=-\mathbf{J}_M', \tag{84}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}''-\frac{\partial\mathbf{D}''}{\partial t}=\sigma\mathbf{E}'', \tag{85}$$

这里$\mathbf{J}_M=\partial\mathbf{B}/\partial t$为感应磁流密度，而且场是被两方面感应的。对谐变场$e^{-i\omega t}$，方程（84）和（85）变成

$$\nabla\times\mathbf{E}''=-\mathbf{J}_M''+i\omega\mu\mathbf{H}'', \tag{86}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}''=(\sigma-i\omega\varepsilon)\mathbf{E}''. \tag{87}$$

当把散度算符作用于（86）和（87）式时，产生了后两个麦氏方程：

$$\nabla\cdot\mathbf{H}''=\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}_M''}{i\omega\mu}, \tag{88}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}''=0. \tag{89}$$

类似地，只考虑电流源$\mathbf{J}'$时，有

$$\nabla\times\mathbf{E}'+\frac{\partial\mathbf{B}'}{\partial t}=0, \tag{90}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}'-\frac{\partial\mathbf{D}'}{\partial t}=\sigma\mathbf{E}'+\mathbf{J}'. \tag{91}$$

对$e^{-i\omega t}$的时间依赖关系变成

$$\nabla\times\mathbf{E}'=i\omega\mu\mathbf{H}', \tag{92}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}'=\mathbf{J}'+(\sigma-i\omega\varepsilon)\mathbf{E}'. \tag{93}$$

后两个麦克斯韦方程为

$$\nabla\cdot\mathbf{H}'=0, \tag{94}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}'=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}'}{\sigma-i\omega\varepsilon}. \tag{95}$$

方程（89）和（94）表明$\mathbf{H}'$和$\mathbf{E}''$能表成两个矢量$\mathbf{G}$和$\mathbf{F}$的旋度

$$\mathbf{H}'=\nabla\times\mathbf{G}, \tag{96}$$

$$\mathbf{E}''=-\nabla\times\mathbf{F}. \tag{97}$$

显然，前面用的矢量势$\mathbf{A}$通过$\mathbf{A}=\mu\mathbf{G}$与“电”矢量势$\mathbf{G}$建立了联系。“磁”矢量势$\mathbf{F}$与前面的$\mathbf{A}^*$亦由式$\mathbf{A}^*=\varepsilon\mathbf{F}$建立了联系。

将方程（96）和（97）代入方程（92）和（87），分别引出

$$\nabla\times\mathbf{E}'=i\omega\mu\nabla\times\mathbf{G} \tag{98}$$

$$\nabla\times\mathbf{H}''=-(\sigma-i\omega\varepsilon)\nabla\times\mathbf{F}. \tag{99}$$

于是矢量**E**、**G**和**H**、**F**关系如下：

$$\mathbf{E}' = i\omega\mu\mathbf{G} - \nabla A \tag{100}$$

$$\mathbf{H}'' = -(\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{F} - \nabla U. \tag{101}$$

这里V和U是新引入的两个标量函数，因为两个矢量的旋度相等并不意味着这两个矢量是相同的。将式（100）同式（24），式（101）同式（43）进行比较，可以看出V就是前面用到的电场标量函数ϕ，而U就是ϕ^*。

将式（100）与（96）代入式（93），式（101）与（97）代入式（86）得到，

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{J}' + k^2\mathbf{G} - (\sigma - i\omega\varepsilon)\nabla V, \tag{102}$$

和

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{J}_M'' + k^2\mathbf{F} + i\omega\mu\nabla U. \tag{103}$$

对矢量**G**和**F**，利用恒等式（28），有结果

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{G} - \nabla\cdot\nabla\mathbf{G} = \mathbf{J}' + k^2\mathbf{G} - (\sigma - i\omega\varepsilon)\nabla V \tag{104}$$

和

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{F} - \nabla\cdot\nabla\mathbf{F} = \mathbf{J}_M'' + k^2\mathbf{F} + i\omega\mu\nabla U. \tag{105}$$

洛伦兹条件对新引入的一组电磁势所做的限定为：

$$\nabla\cdot\mathbf{G} = -(\sigma - i\omega\varepsilon)V, \tag{106}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = i\omega\mu U. \tag{107}$$

因此，方程（104）和（105）简化为

$$\nabla^2\mathbf{G} + k^2\mathbf{G} = -\mathbf{J}'. \tag{108}$$

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = -\mathbf{J}_M'' \tag{109}$$

场的表达式（82）和（83）由外加电流分布所确定，

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{G} - \nabla V - \nabla \times \mathbf{F}. \tag{110}$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{G} - \nabla U - (\sigma - i\omega\varepsilon)\mathbf{F}. \tag{111}$$

这几个表达式在解决电磁勘探问题时是很有用的，在这些问题中，源总是电偶极子或磁偶极子或线电流元的电流分布。

在不含源的区域，波动方程（108）和（109）取下面的形式

$$\nabla^2\mathbf{G} + k^2\mathbf{G} = 0, \tag{112}$$

$$\nabla^2\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0. \tag{113}$$

正如我们所料，它们与关于$\mathbf{A}$、$\mathbf{A}^*$、ϕ、ϕ^*、π和π^*的波动方程完全一致，而且谢昆诺夫对称波势几乎与$\mathbf{A}$、$\mathbf{A}^*$、ϕ和ϕ^*相同，对谐变场，这种波势尤其对称，颇引人注目，因而由于这种理由，这种表示方法也常被采用。

（六）波动方程的解

1．边界条件——在固体地球物理中出现的电磁问题，通常是用总电流、总场强度或相应于一个外加场即一次场的势来处理的。一次场引起了二次电荷和电流的分布，并引起了二次场。总场是一次场和二次场的和。每一种场都必须满足麦克斯韦方程，或由麦氏方程组引出的方程加上适当的边界条件。因此我们最常遇到的问题被认为是边值问题。现在来考虑这些边界条件的确立方式。

（1）法向的$\mathbf{B}$——首先，我们来考虑磁感应强度$\mathbf{B}$的法向分量的连续性。麦氏方程组的第三个方程给出$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$。散度定理指出，对任一个矢量$\mathbf{F}$，可以写出：

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dv=\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,da, \tag{114}$$

这就是说，某矢量的散度对任一体积V的积分，等于该矢量在包围这体积V的封闭界面上的法向分量的面积分。将散度定理应用于矢量$\mathbf{B}$，可写出

$$\oint_S \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}\,da=0, \tag{115}$$

即通过任一封闭面的磁通量等于零。

下面考虑具有不同电学性质的两种媒质交接面上的情况（图1）。我们希望确定场在两种媒质的界面S上的状态，每一种媒质为一组物理参数$\epsilon_1\mu_1\sigma_1$和$\epsilon_2\mu_2\sigma_2$所描述。为了这一目的，我们设法做一高为Δl，面积为Δa，且其中包含有界面的小“扁盒”，亦即它的上表面在媒质2中，而下表面在媒质1中。现在，沿“扁盒”的壁和两端来计算积分（115）。如果端面Δa做得充分

小，可假设**B**在处于下面媒质中的端面上为常值$\mathbf{B}_1$，而在处于上面媒质中的端面上为常值$\mathbf{B}_2$，故可用下式作为方程（115）的近似：

$$(\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n}_1)\Delta a+\text{壁上的贡献}=0. \tag{116}$$

由于壁对面积分的贡献正比于Δl，因而当$\Delta l\to 0$时，可将它忽略，于是方程（116）变成

$$\mathbf{B}_2\cdot\mathbf{n}_2+\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{n}_1=0. \tag{117}$$

法线$\mathbf{n}_2$和$\mathbf{n}_1$是指向盒外的，所以可写出

$$\mathbf{n}_2=\mathbf{n}=-\mathbf{n}_1. \tag{118}$$

因而方程（117）变成

$$(\mathbf{B}_2-\mathbf{B}_1)\cdot\mathbf{n}=0. \tag{119}$$

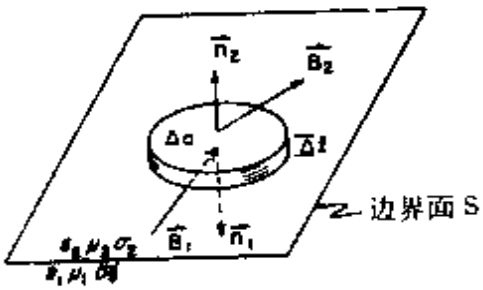


图 1　法向**B**的连续性

扁盒包含两媒质的界面。媒质 1 和 2 的常数分别为$\varepsilon_1\mu_1\sigma_1$和$\varepsilon_2\mu_2\sigma_2$。磁感应强度在（1）中为$\mathbf{B}_1$，在（2）中为$\mathbf{B}_2$，$\mathbf{n}_1$和$\mathbf{n}_2$分别为扁盒的底面和顶面的外法线

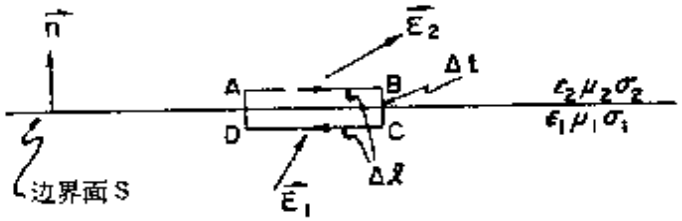


图 2　切向**E**的连续性

积分的闭合回线取在两媒质的界面上，两媒质的常数分别为$\varepsilon_1\mu_1\sigma_1$和$\varepsilon_2\mu_2\sigma_2$。媒质（1）和（2）中的电矢量分别为$\mathbf{E}_1$和$\mathbf{E}_2$

方程（119）说明**B**的法向分量B_n在通过界面时是连续的，即$B_{n1}=B_{n2}$。

（2）法向的**D**——对矢量**D**可做类似的考虑，但在这种情况下，由电荷密度的库仑定律，有$\nabla\cdot\mathbf{D}=\rho$，

$$\int_V \nabla\cdot\mathbf{D}\,dv=\oint_S \mathbf{D}\cdot\mathbf{n}da=\int_V \rho dv=q. \tag{120}$$

此式就是高斯定律，它表明**D**的法向分量沿某闭合面的面积分，

等于包含在该面中的总电荷q。可以用电荷密度ρ的体积分来代替总电荷q：

$$q=\int_v \rho dv=\rho\Delta l\Delta a. \tag{121}$$

这里，用面电荷密度ω来代替乘积$\rho\Delta l$是方便的，ω的定义为单位面积上的电荷量。我们发现[参考(118)式]

$$(\mathbf{D}_2\cdot\mathbf{n}_2+\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{n}_1)\Delta a=\omega\Delta a, \tag{122}$$

$$(\mathbf{D}_2-\mathbf{D}_1)\cdot\mathbf{n}=\omega. \tag{123}$$

方程（123）告诉我们，由于面电荷ω的聚集，矢量$\mathbf{D}$的法向分量D_n在界面上是不连续的。在导体表面，面电荷会很快消失（斯特拉顿，1941，p. 15）。所以除了最不良导体外，通过导体界面时法向的$\mathbf{D}$是连续的，亦即$D_{n1}=D_{n2}$。

（3）切向的$\mathbf{E}$——麦克斯韦第一方程为

$$\nabla\times\mathbf{E}+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=0,$$

对任一边界面进行积分给出

$$\int_S(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{n}da+\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}da=0, \tag{124}$$

这里$\mathbf{n}$为表面S的单位法线。对某一任意矢量$\mathbf{F}$应用斯托克斯定理。该定理告诉我们：$\mathbf{F}$绕某闭合曲线的线积分，等于$\mathbf{F}$的旋度的法向分量在以该曲线为边界的任一曲面上的积分，即

$$\oint_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{l}=\int_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}da \tag{125}$$

依该定理，将（124）式的第一个面积分变换为一线积分（环绕适当选择的回线C）。所选取的回线如图2所示，于是写出

$$-\int_S\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{n}\,da=\int_C\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}=\mathbf{E}_2\cdot\Delta\mathbf{l}+\mathbf{E}_1\cdot(-\Delta\mathbf{l})+\text{（两端的贡献）}。 \tag{126}$$

这里$\mathbf{E}_2\cdot\Delta\mathbf{l}$和$\mathbf{E}_1\cdot\Delta\mathbf{l}$是$\mathbf{E}$在媒质（1）和（2）中的切向部分。当回线取得很小时，由（126）式得出

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}\Delta t\Delta l = (\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)\cdot \Delta \mathbf{l}. \qquad (127)$$

在极限情形下，当高度$\Delta t\to 0$，方程（127）左端$\to 0$，所以越过边界面时$\mathbf{E}$的切向分量是连续的，也就是$E_{t1}=E_{t2}$。如$\mathbf{n}$是边界面的单位法线，由图2可以看到，矢量$\mathbf{n}\times\mathbf{E}$直接给出了切向分量，所以常把这个边界条件写成：

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2-\mathbf{E}_1)=0. \qquad (128)$$

（4）切向的$\mathbf{H}$——麦氏第二方程

$$\nabla\times\mathbf{H}-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}=\mathbf{J}$$

可以两端求积分，并将斯托克斯定理应用于左端的第一个积分，即得在形式上与方程（126）相似的结果

$$\oint_C \mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}-\int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\cdot \mathbf{n}\,da=\int_S \mathbf{J}\cdot \mathbf{n}da. \qquad (129)$$

$\mathbf{H}$的积分回线与图2所示的相同。于是取$\mathbf{H}$与边界面相切的分量，并使回线的极限有略去的高度Δt，可把（129）式写成

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{J}\right)\Delta t. \qquad (130)$$

当$\Delta t\to 0$时，由于假设$\mathbf{D}$和它的微商是有限的，上式右端的第一项将为零。如电流密度$\mathbf{J}$是有限的，则第二项也将为零。现规定面电流为

$$\mathbf{K}\equiv\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ J\to\infty}}\mathbf{J}\Delta t, \qquad (131)$$

所以切线方向$\mathbf{H}$的边界条件为

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\mathbf{K}\quad\text{（面电流存在）。} \qquad (132)$$

如果两种媒质的电导率是有限的，于是$\mathbf{E}=\mathbf{J}/\sigma$必须是有限的，因而没有面电流$\mathbf{K}$，则边界条件变为

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=0\quad\text{（电导率有限）。} \qquad (133)$$

假设电导率σ是无限的，$\mathbf{J}$同样是无限的，而我们的基本假设——$\mathbf{E}$

以及其它三个场矢量是有限的——并没有被破坏，这时我们就采用边界条件（132）。

（5）电流的连续性——流入和流出位于两种导电媒质界面上的扁盒的电流是由切向分量和法向分量组成的，如图 3 所示。当扁盒的高度变到零时，法向分量，即通过交界面的电流，可由下面的任一式标出

$$I=\mathbf{J}_2\cdot\mathbf{n}\Delta a$$

或者

$$I=\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{n}\Delta a.$$

$\mathbf{J}$的法向分量J_n通过交界面时，必须是连续的，亦即

$$(\mathbf{J}_2-\mathbf{J}_1)\cdot\mathbf{n}=0 \qquad (134)$$

或

$$J_{n1}=J_{n2}.$$

把连续性方程 $\nabla\cdot\mathbf{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ 用于稳定态，即ρ 达到平衡 状态 或 $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$的情况，可直接推出上面的结果。在稳定状态，$\nabla\cdot\mathbf{J}=0$，于是就可按照与推出$\mathbf{B}$ 的法向分量的 连续性 方程（117）同样的过程得出上述结果。可见，（134）式只适用 于导电 媒质相接触时的稳定状态。

（6）势的连续性—静态场——在由$\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}$、$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$、$\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ 所描述的线性媒质的静电和静磁问题中，我们利用由下式定义的势 ϕ 和 ϕ^*：

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi,\quad \mathbf{H}=-\nabla\phi^*.$$

于是利用这两个势可把方程（119）、（123）、（128）、（133）和（134）重写成下列形式

$$\mu_2\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\right)_2-\mu_1\left(\frac{\partial\phi^*}{\partial n}\right)_1=0, \qquad (135)$$

$$\varepsilon_2\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_2-\varepsilon_1\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)_1=\omega, \qquad (136)$$

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_2-\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_1=0, \tag{137}$$

$$\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right)_2-\left(\frac{\partial \phi^*}{\partial t}\right)_1=0, \tag{138}$$

$$\sigma_2\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_2-\sigma_1\left(\frac{\partial \phi}{\partial n}\right)_1=0. \tag{139}$$

这里$\partial/\partial n$和$\partial/\partial t$分别表示对法向和切向求微商。我们可把类似的边界条件推广到矢量势，比如$\mathbf{A}$和π。但我们将看到，这样做只对后面的某些问题是方便的。

在无源的情况下，势ϕ和ϕ^*在通过界面时必须是连续的，因为将一个小电荷或小磁极从无穷远处移到位于边界面两侧，相邻接的两点中的任一点所需的功是相同的。所以

$$\phi_1=\phi_2 \text{ 和 } \phi_1^*=\phi_2^*. \tag{140}$$

2．含源问题

（1）非齐次波动方程——在一（三）节中已看到，标量势和矢量势是通过下述的一些方程与电性源和磁性源相联系的。为了方便，将它们重复于后：

(30) $$\nabla^2\mathbf{A}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}=-\mu\mathbf{J}',$$

(31) $$\nabla^2\phi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\phi}{\partial t}=-\frac{\rho'}{\varepsilon},$$

(47) $$\nabla^2\mathbf{A}^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{A}^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial t}=-\mu\varepsilon\frac{\partial\mathbf{M}'}{\partial t},$$

(48) $$\nabla^2\phi^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\phi^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\phi^*}{\partial t}=\nabla\cdot\mathbf{M}',$$

(37) $$\nabla^2\pi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\left(\mu\sigma\frac{\partial\pi}{\partial t}\right)=-\left(\frac{\mathbf{P}'}{\varepsilon}\right),$$

(40) $$\nabla^2\pi^*-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\pi^*}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\pi^*}{\partial t}=-\mathbf{M}'.$$

对$e^{-i\omega t}$型时间的谐变场，这些方程变成

(30 a) $$\nabla^2\mathbf{A}+k^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}',$$

(31 a) $$\nabla^2\phi+k^2\phi=-\frac{\rho'}{\varepsilon},$$

(47 a) $$\nabla^2\mathbf{A}^*+k^2\mathbf{A}^*=i\mu\varepsilon\omega\mathbf{M}',$$

(48 a) $$\nabla^2\phi^*+k^2\phi^*=\nabla\cdot\mathbf{M}',$$

(37 a) $$\nabla^2\pi+k^2\pi=-\frac{i\omega\mathbf{P}'}{\sigma-i\varepsilon\omega},$$

(40 a) $$\nabla^2\pi^*+k^2\pi^*=-\mathbf{M}'.$$

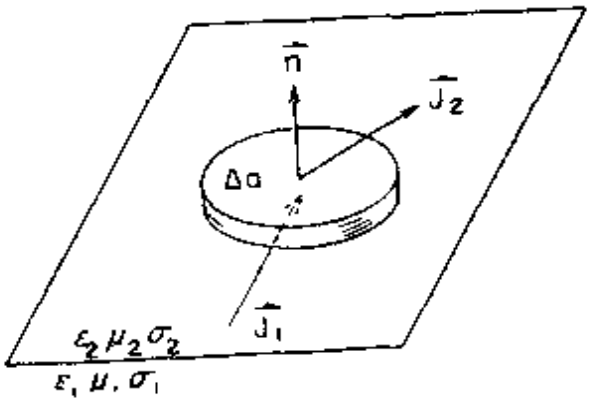


图 3 法向J的连续性

扁盒包含两媒质的界面，媒质常数分别为 $\varepsilon_1\mu_1\sigma_1$ 和 $\varepsilon_2\mu_2\sigma_2$。电流密度在（1）中是 $\mathbf{J}_1$，在（2）中是 $\mathbf{J}_2$

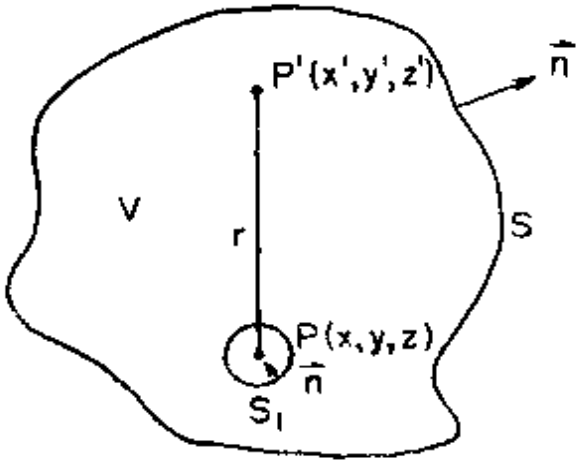


图 4 电荷密度的体分布

$\rho'(x',y',z')$ 在点 P' 观察点为 $P(x,y,z)$。n是由边界面 S、S_1 向外引出的法线

必须指出，方程（37 a）不是由(37) 而是直接由方程（34）推出的。这样做时，$\mathbf{P}'$包含束缚电荷和自由源电荷，因为在 $\mathbf{J}'\equiv\partial\mathbf{P}'/\partial t$ 和 $\rho'\equiv-\nabla\cdot\mathbf{P}'$ 中，我们用了统一的 $\mathbf{P}'$。在一（五）节中已注意到，对谐变场

(108) $$\nabla^2\mathbf{G}+k^2\mathbf{G}=-\mathbf{J}',$$

(109) $$\nabla^2\mathbf{F}+k^2\mathbf{F}=-\mathbf{J}_M''.$$

由于谢昆诺夫标量势和矢量势由洛伦兹条件〔方程（106）和(107)〕建立了联系：

$$\nabla\cdot\mathbf{G}=-(\sigma-i\omega\varepsilon)V,$$
$$\nabla\cdot\mathbf{F}=i\mu\omega U.$$

那么对方程（108）和（109）取散度，并代入V和U后，便得到下述两个方程：

$$\nabla^2V+k^2V=\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}'}{\sigma-i\omega\varepsilon},\tag{141}$$

$$\nabla^2U+k^2U=\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}_M''}{i\mu\omega}.\tag{142}$$

关于场矢量$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$的类似的非齐次波动方程，可直接由麦氏方程（1）至（4）得到。例如在方程（2）中，假设矢量$\mathbf{J}$由有源部分$\mathbf{J}'$和感应部分$\mathbf{J}''=\rho\mathbf{E}$组成，可以写出

$$\nabla\times\mu\mathbf{H}=\mu\left(\mathbf{J}'+\sigma\mathbf{E}+\varepsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right),\tag{143}$$

对方程（1）取旋度，得到

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\mu\mathbf{H}).\tag{144}$$

将方程（143）代入（144），

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{J}'}{\partial t}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

应用恒等式（28），加上没有电荷聚集，即$\nabla\cdot\mathbf{E}=0$，

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mu\frac{\partial\mathbf{J}'}{\partial t},\tag{145}$$

它给出了电场对源电流的依赖关系。当然，库仑定律（4）已给出了电场与电荷分布间的关系

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\rho}{\varepsilon}.\tag{146}$$

另外，磁场与磁流密度的关系由类似的等式（88）给出

$$\nabla\cdot\mathbf{H}''=\frac{\nabla\cdot\mathbf{J}_M''}{i\mu\omega}.$$

磁场与源电流密度$\mathbf{J}'$的关系为

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=-\nabla\times\mathbf{J}'. \qquad (147)$$

它是通过取方程（2）式的旋度，并将J分成源的和感应的两部分，再代入由（1）式得来的$\nabla\times\mathbf{E}$而得到的。

（2）格林定理——很清楚，上述讨论表明，为了由任何给定的源的配置得到场的分布，我们必须用适当的方式去求解非齐次波动方程；而为了找到非齐次波动方程的解，则需要引入格林定理。为便于理解以后的论述，首先给出格林定理的证明。

列出两个恒等式

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)=\nabla\phi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla\cdot\nabla\phi=\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla^2\phi, \qquad (148)$$

$$\nabla\cdot(\phi\nabla\psi)=\nabla\phi\cdot\nabla\psi+\phi\nabla\cdot\nabla\psi=\nabla\psi\cdot\nabla\phi+\phi\nabla^2\psi. \qquad (149)$$

这里ϕ和ψ是空间位置的任意标量函数，它们在任意的封闭体V内及其边界面S上都是连续的，ϕ和ψ的一阶和二阶导数在整个V内和S上也同样是连续的。

由方程（148）减去（149），并对体积V求积分

$$\int_V\nabla\cdot\{\psi\nabla\phi-\phi\nabla\psi\}dv=\int_V\{\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\}dv. \qquad (150)$$

方程（150）的左端可利用散度定理变换为一个面积分，散度定理应用于任意一个矢量A时为

$$\int_V\nabla\cdot\mathbf{A}dv=\int_S\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}ds. \qquad (151)$$

于是（150）式变成

$$\int_S\left\{\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\}ds=\int_V\{\psi\nabla^2\phi-\phi\nabla^2\psi\}dv. \qquad (152)$$

注意，$\nabla\phi\cdot\mathbf{n}=\partial\phi/\partial n$，这里$\partial\phi/\partial n$是在正法线方向的导数。方程（152）就是著名的格林定理。

（3）静态场——我们首先希望将格林定理应用于泊松方程

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho'}{\varepsilon}. \tag{153}$$

它是处理静电场问题（即 $\partial/\partial t=0$ ）时方程（31）的简化形式。求解方程（153）要我们考虑更困难的含源问题，这些问题中的场和势对时间的导数是不能忽略的。

假设在图4的体积 V 中存在着电荷分布 $\rho'(x,y,z)$，虽然不一定全部电荷都在表面 S 上，但事实上可假定在整个体积 V 中 ρ' 为零。观察点 P 由坐标 x、y、z 来确定，而点 $P'(x'、y'、z')$ 是 V 内的任意一点，假设在这一点存在着电荷。可把 P 点的势 $\phi(x、y、z)$ 作为格林定理中的函数之一。另外一个函数我们考虑选择拉普拉斯方程（即与泊松方程对应的齐次型方程）的具有球对称的解：

$$\psi=\frac{1}{r}, \tag{154}$$

和

$$\nabla^2\psi=0, \tag{155}$$

这里

$$r=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}. \tag{156}$$

函数 ψ 在 $r=0$ 处（即 P 点）有一奇点。我们围着 P 点划一个半径为 r_1 的小圆 S_1，将 P 点挖掉。体积 V 在外边以 S 为界，而在里面以 S_1 为界。于是对于选定的函数 ϕ 和 ψ，格林定理（152）给出

$$\int_V\frac{\nabla^2\phi}{r}dv=\int_{S+S_1}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ds. \tag{157}$$

由体积 V 向外的法线是由 S_1 径向地指向 P 点的，所以

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=-\frac{\partial\phi}{\partial r}. \tag{158}$$

另外，函数 ψ 对法向的导数只能是

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r=r_1}=\frac{1}{r_1^2}. \tag{159}$$

方程（157）的面积分对小球来讲是

$$\mathscr{I}=-\frac{1}{r_1}\int_{S_1}\frac{\partial\phi}{\partial r}ds-\frac{1}{r_1^2}\int_{S_1}\phi ds. \tag{160}$$

如果小球取得很小，那么ϕ在表面S_1上明显地为常数，于是方程（160）变成

$$\mathscr{I}=-\frac{1}{r_1}4\pi r_1^2\frac{\partial\phi}{\partial r}-\frac{1}{r_1^2}4\pi r_1^2\phi. \tag{161}$$

当$r_1\to 0$时，表达式（161）化为

$$\mathscr{I}=-4\pi\phi. \tag{162}$$

将面积分的这一值代入方程（157），得出结果为

$$\int_V\frac{\nabla^2\phi}{r}dv=\int_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ds-4\pi\phi$$

或

$$\phi(x,y,z)=-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla^2\phi}{r}dv$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ds. \tag{163}$$

方程（163）的面积分必须代表体积V外所有电荷的贡献，对于V内不包含电荷的情况（即$\rho'=0$），由（153）式，$\nabla^2\phi=-\rho'/\varepsilon$，故

$$-\frac{1}{4\pi}\int_V\frac{\nabla^2\phi}{r}dv=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho'}{r}dv=0. \tag{164}$$

所以P点的势$\phi(x,y,z)$将完全是（163）式中面积分的贡献。如S表面外无电荷存在，我们可将泊松方程的解表示成下述形式

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{\rho'}{r}dv. \tag{165}$$

在电法勘探问题中，由于我们几乎总是要围着源画一个闭合面，

故这个形式是最常用的。但在磁法中，我们经常用向上和向下的延拓，因而方程（163）中的面积分变成重要的了。如果S面上ϕ和它的法向导数的值是已知的，则在内部任一点的势可由积分确定如下：

$$\phi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_S\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}ds. \qquad (166)$$

这就是没有电荷存在的体积V中拉普拉斯方程的解。通常对延拓问题，S面是限定在地表平面或地下水平面的不含源的平面。这时体积V就是S以上的半空间。假定V外无源，电场$\mathbf{E}(x,y,z)$可通过取方程（165）的负梯度得到

$$\mathbf{E}=-\nabla\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\rho'\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dv. \qquad (167)$$

这个结果和（165）式一样，可用于某种均匀电荷分布。

对适于静电情况的矢量势$\mathbf{A}$，（30）式化为

$$\nabla^2\mathbf{A}=-\mu\mathbf{J}'.$$

以直接类似于（165）式的方法，我们可写出它的解为〔参考方程（30）和（31）〕

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{\mathbf{J}'}{r}dv. \qquad (168)$$

积分解（168）适用于$\mathbf{A}$和$\mathbf{J}$的每一个直角分量。

（4）时变场——对被方程（30）和（31）描写的随时间变化的情况，可引出下述形式的试探解：

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_V\frac{[\rho']}{r}dv, \qquad (169)$$

和

$$\mathbf{A}=\frac{\mu}{4\pi}\int_V\frac{[\mathbf{J}']}{r}dv. \qquad (170)$$

现在，由源$\rho'(x,y,z,t)$和$\mathbf{J}(x,y,z,t)$引起的势$\phi(x,y,z,t)$

和 $\mathbf{A}(x,y,z,t)$ 是时间的函数。如前所述，矢量解（170）和所有后来的矢量解都可通过依次考虑矢量的每一个直角分量而得到。在时刻 t，观察点 P 的势应该是 P' 点的源在较早的时刻 t' 所引起的，波从 P' 传到 P 点需要的时间为 $\Delta t=|t'-t|$。这样

$$t'=t-\frac{r}{v}, \tag{171}$$

式中 v 是传播速度，和以前一样，r 是由 P' 到 P 点的距离。由于计算时所用的电荷和电流密度的时刻比观察的时刻有一超前量 r/v，故（169）和（170）式给出的结果被称做推迟势。

类似地，我们能够写出含有电极化矢量 $\mathbf{P}$ 的赫兹推迟势为

$$\pi=\frac{-i\omega}{4\pi(\sigma-i\varepsilon\omega)}\int_V\frac{[\mathbf{P}']}{r}dv. \tag{172}$$

它是用由（31）式推导（169）的类似方法由（37）式导出的，这与（32）和（170）式也一致。类似地，由（108）和（141）式同样能写出

$$\mathbf{G}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{[\mathbf{J}']}{r}dv \tag{173}$$

$$V=-\frac{1}{4\pi(\sigma-i\varepsilon\omega)}\int\frac{[\nabla\cdot\mathbf{J}']}{r}dv. \tag{174}$$

这些电性源问题的解都是类似的（对磁性源问题亦严格类似的），不过我们还得去确定方括弧中的那一项。由于我们只是寻求谐变传播的解，所以标量势和矢量势各直角分量的一般表达式为

$$\psi=\psi'(x',y',z')\,e^{-i\omega(t-r/v)}. \tag{175}$$

传播常数一般由下式给出

$$k^2=\mu\varepsilon\,\omega^2+i\,\mu\sigma\omega=\frac{\omega^2}{v^2},$$

并可写出

$$\psi=\psi'(x',y',z')e^{-i\omega t+ikr} \tag{176}$$

所以赫兹矢量 π 解的形式为

$$\pi(x,y,z,t)=\frac{-i\omega\, e^{-i\omega t}}{4\pi(\sigma-i\varepsilon\omega)}\int_V \mathbf{P}'(x',y',z')\frac{e^{ikr}}{r}dv. \qquad (177)$$

这里 t 是指波扰动到达观察点的时间，并以它作为我们的标准参考时间。

对谐变场，由于 $\mathbf{J}\equiv -i\omega\mathbf{P}$，所以也可将方程（177）写成

$$\pi(x,y,z,t)=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi(\sigma-i\varepsilon\omega)}\int_V \mathbf{J}'(x',y',z')\frac{e^{ikr}}{r}dv.$$

依类似的做法，我们将各种非齐次波动方程的积分解确定如下：

$$\mathbf{A}=\frac{\mu e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \mathbf{J}'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (178)$$

$$\phi=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon}\int_V \rho'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (179)$$

$$\mathbf{A}^*=\frac{\mu\varepsilon e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \frac{\partial\mathbf{M}'}{\partial t}\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (180)$$

$$\phi^*=-\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \nabla\cdot\mathbf{M}'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (181)$$

$$\pi=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi(\sigma-i\varepsilon\omega)}\int_V \mathbf{J}'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (182)$$

$$\pi^*=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \mathbf{M}'\frac{e^{ikr}}{r}dv,$$

$$=\frac{1}{-i\mu\omega\,4\pi}e^{-i\omega t}\int \mathbf{J}_M''\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (183)$$

$$\mathbf{G}=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_{V_s}\mathbf{J}'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \qquad (184)$$

$$\mathbf{F}=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_V \mathbf{J}_M''\frac{e^{ikr}}{r}dv, \tag{185}$$

$$V=\frac{-e^{i\omega t}}{4\pi(\sigma-i\omega\varepsilon)}\int_V \nabla\cdot\mathbf{J}'\frac{e^{ikr}}{r}dv, \tag{186}$$

$$U=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi i\mu\omega}\int_V \nabla\cdot\mathbf{J}_M''\frac{e^{ikr}}{r}dv. \tag{187}$$

以上所用的符号与前面各节的规定一致。

另外，对谐变场，下述关系是成立的

$$\mathbf{A}=\mu\mathbf{G},\quad \mathbf{A}^*=\varepsilon\mathbf{F},\quad U=\phi^*,\ \mathbf{A}=\frac{k^2}{i\omega}\pi\ ;$$

$$\mathbf{A}^*=-i\mu\varepsilon\omega\pi^*,\quad \mathbf{F}=-i\mu\omega\pi^*,\qquad \mathbf{G}=\frac{k^2}{i\mu\omega}\pi\ .$$

方程（165)中所用的函数$\frac{1}{4\pi r}$和方程（178）至（187）内所用的函数$e^{ikr}/4\pi$，属于一类函数，称为格林函数。很清楚，（178）至（187）的每一式中，格林函数都作为积分号下的一个乘数出现，用以描写场源。处理含源问题时的基本问题，就在于要找格林函数的一个适当的表达式（一般地为一函数展开式)。

我们能够将泊松方程和拉普拉斯方程合并为一个形式

$$\nabla^2\phi=-\frac{\rho'}{\varepsilon}\delta(r). \tag{188}$$

如观察点$P(x,y,z)$与置有电荷的点$P'(x',y',z')$重合，则属于泊松方程，否则为拉普拉斯方程。德尔塔函数$\delta(r)$按通常的定义，在$r=0$处等于单位值，在别处为零。

下面写出（165）式相应于单位点电荷的形式

$$\phi=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\ \frac{1}{r}. \tag{189}$$

它是$\rho'=1$和体积V变成无穷小时的结果。将方程(189)代入(188)，得到

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=-4\pi\delta(r),$$

或

$$\nabla^2 G=-\delta(r). \tag{190}$$

如上面所说，这里函数$G=1/4\pi r$是格林函数。现在，在传播场的情况下，假如考虑某一扰动由源向观察点传播的一段时间，于是可把方程（190)推广

$$(\nabla^2+k^2)G(r,t)=-\delta(r)\delta(-t). \tag{191}$$

假设我们是在寻求下面非齐次方程的解

$$(\nabla^2+k^2)\psi(r,t)=-g(r,t). \tag{191a}$$

方程（191a）的解可由单位点源的方程（191）的解叠加而成。除了$r=0$,在所有其它点，方程（191）将取形式为

$$(\nabla^2+k^2)G(r,t)=0,$$

或

$$\frac{1}{r}\frac{d^2(rG)}{dr^2}+k^2G=0.$$

作为球坐标中的推迟解，G可被写成

$$G=\frac{A}{r}e^{ikr-i\omega t}.$$

为计算常数A，我们在奇点$r=0$的邻域对方程（191）两端进行积分。这里除了与时间有关的因子外，G的表现与A/r一样。在球坐标中，方程（191）变成

$$\int_V\nabla^2\left(\frac{A}{r}\right)dv+k^2\int_V\frac{A}{r}dv=-\int_V\delta(r)dv.$$

左边的第一个积分值为$-4\pi A$，又由于$dv\propto r^2$，故当$r\to0$时，第二个积分等于零。右端的积分值为一个单位，于是

$$G=\frac{e^{ikr-i\omega t}}{4\pi r}.$$

注意，格林函数是齐次波动方程的解，它直接类似于静电情况中

拉普拉斯方程的解$1/4\pi r$。

当然，如斯特拉顿已清楚指出过的那样，我们能够对场方程（145）和（147）求积分。电流源的解只能是

$$\mathbf{E}=\frac{1}{4\pi}\int_V i\mu\omega\mathbf{J}'\frac{e^{ikr}}{r}dv,$$

$$\mathbf{H}=\frac{1}{4\pi}\int_V \mathbf{J}'\times\nabla\frac{e^{ikr}}{r}dv.$$

3．含源问题举例

（1）电偶极子的场——作为上面积分解应用的一个例子，考虑一个位于无限大非导电媒质中的无穷小电偶极子。这个偶极子产生的势为

$$\mathbf{A}=\frac{\mu Ids}{4\pi}\ \frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t},\qquad(192)$$

和

$$\pi=\frac{iIds}{4\pi\epsilon\omega}\ \frac{e^{ikr}}{r}e^{-i\omega t}.\qquad(193)$$

这里ds是一长度元，并在量纲上$\mathbf{J}dv=Ids$。由于电磁波的传播需要一个有限的时间，故如前面已提到过的，由源在时刻$t-(r/v)$的激发所引起的势ϕ、ϕ^*、$\mathbf{A}$、$\mathbf{A}^*$、π、π^*和$\mathbf{G}$、$\mathbf{F}$、V、U，应该用时刻t来计算。为了说明，可以写出

$$\pi(x,y,z,t)=\frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\epsilon\omega}\int_V \mathbf{J}'(x,y,z)\frac{e^{ikr}}{r}dv\qquad(194)$$

这里r是源和观察点间的距离。为计算推迟赫兹积分，常常须借助于某种形式的级数展开式。这些展开式的性质如下一个例子中将要看到的，决定于频率和电流分布的几何形状。

（2）磁偶极子的场——在这个例子中，希望计算一个带有交变电流的闭合线圈的场。用类似于方程（192）的基本磁偶极子的表达式。为便于说明，这里将给出详细的分析，对用于这类问题的某些技巧也做了说明。我们从观察点P的赫兹推迟矢量的方程

开始，以原点为中心的圆环的边上某点ξ处电流密度为$\mathbf{J}=\mathbf{J}_0(\xi)\cdot e^{-i\omega t}$（图5）。通常问题是对所研究的区域要找函数$e^{ikr}/r$的一个适当的展开式，使得积分能够算出。在电磁勘探中，总是观测距电流环很远处的场，所以我们假设，第一，$r_1\ll R$；第二，由于使用低频有$R\ll\lambda$，这里λ为传播波的波长。一个基本而常用的展开式为

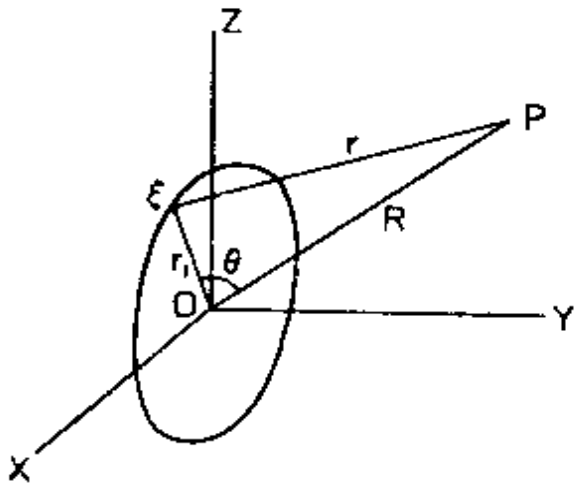


图 5　在点ξ带有电流强度为$\mathbf{J}=\mathbf{J}_0(\xi)e^{-i\omega t}$的金属环。由环的原点$O$到观察点$P(x,y,z)$的距离$R=(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}$

$$\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{1}{r}\left\{1+ikr+\frac{(ikr)^2}{2!}+\frac{(ikr)^3}{3!}+\cdots\right\},\tag{195}$$

它对ikr的所有值都是收敛的。条件$r_1\ll R$允许我们写$r\approx R-r_1\cos\theta$，所以

$$\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{1}{R-r_1\cos\theta}+ik-\frac{k^2}{2!}(R-r_1\cos\theta)+\cdots.\tag{196}$$

如$kR\ll1$，就可略去方程（196）中第二项以后的各项，从而得出e^{ikr}/r的一个简单的表达式，这里采用形式

$$R\ll\frac{1}{k}.\tag{197}$$

另一个合理假设是认为传导电流可以忽略，即$(\sigma_0^2/\varepsilon_0^2\omega^2)\ll1$，所以

$$k^2=\mu_0\varepsilon_0\omega^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\text{或}\ k=\frac{2\pi}{\lambda}.$$

于是方程（197）变成

$$R \ll \frac{\lambda}{2\pi}. \tag{198}$$

方程（198）是两个基本假设中比较严格的一个形式。这样一来，方程（196）的第一级近似为

$$\frac{e^{ikr}}{r} \sim \frac{1}{R - r_1\cos\theta} + ik \sim \frac{1}{R}\left(1 + \frac{r_1}{R}\cos\theta\right) + ik. \tag{199}$$

于是赫兹推迟势变成

$$\pi\text{❶} = \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon\omega}\int_V \mathbf{J}_0(\xi)\left[\frac{1}{R} + \frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R}}{R^3} + ik\right]dv. \tag{200}$$

注意$\int_V \mathbf{J}_0 dv$是电流密度对带电线圈体积的积分，于是

$$\mathbf{J}_0 dv = I_0 d\mathbf{S}, \tag{201}$$

这里$d\mathbf{S}$是沿线圈的长度元，而I_0是电流振幅。同样，对线圈的体积积分时，$1/R$和ik是常数，故有

$$\int_V \mathbf{J}_0\left[\frac{1}{R} + ik\right]dv = \int_S I_0\left[\frac{1}{R} + ik\right]ds = 0. \tag{202}$$

于是方程（200）变成

$$\pi = \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon\omega}\int_V \mathbf{J}_0(\xi)\frac{\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R}}{R^3}dv. \tag{203}$$

方程（203）中积分的物理解释，要求对乘积$(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R})/R^3$进行适当的变换。为此，引入恒等式，

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0)\times\mathbf{R} \equiv -\mathbf{R}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0) = -\mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot\mathbf{J}_0) + \mathbf{J}_0(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_1). \tag{204}$$

由后一个等号可写出

$$\mathbf{J}_0(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0)\times\mathbf{R} + \mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot\mathbf{J}_0), \tag{205}$$

---

❶ 这里赫兹矢量用π而不用π^*，因为我们涉及的是无限小电偶极子的某种分布对积分的影响。

和

$$2\mathbf{J}_0(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_1)=(\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0)\times\mathbf{R}+\mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot\mathbf{J}_0)+\mathbf{J}_0(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r}_1). \tag{206}$$

于是方程（203）变成

$$\pi=\frac{ie^{-i\omega t}}{8\pi\varepsilon\omega R^3}\left[\int_V(\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0)\times\mathbf{R}dv\right.$$

$$\left.+\int_V\{\mathbf{J}_0(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R})+\mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot\mathbf{J}_0)\}dv\right]. \tag{207}$$

如果将方程(207) 右端的积分用I_0ds代替$\mathbf{J}_0dv$，得到

$$\mathbf{C}=\int_V\{\mathbf{J}_0(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R})+\mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot\mathbf{J})\}dv$$

$$=I_0\oint\{(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{R})ds+\mathbf{r}_1(\mathbf{R}\cdot ds)\}. \tag{208}$$

让$\mathbf{R}=R\mathbf{n}$，$\mathbf{n}$是R方向上的单位矢量，则

$$\mathbf{C}=I_0R\oint\{(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{n})ds+\mathbf{r}_1(\mathbf{n}\cdot ds)\}. \tag{209}$$

旋转坐标轴，使得$\mathbf{R}$为新的z轴，方程（209）取值如下：

$$\mathbf{C}=I_0R\oint(z_1ds+\mathbf{r}_1dz). \tag{210}$$

z_1是$\mathbf{r}_1$的z分量。方程（210）的x分量为

$$C_x=I_0R\oint(z_1dx+x_1dz)=0, \tag{211}$$

因为积分是一全微分。对其它分量，也完全类似地可得出这种结果。于是方程（207）简化为

$$\pi=\frac{ie^{-i\omega t}}{8\pi\varepsilon\omega R^3}\int_V(\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0)\times\mathbf{R}dv. \tag{212}$$

现在定义某回路的磁偶极矩为

$$\mathbf{m}=\frac{I_0}{2}\oint\mathbf{r}_1\times ds=\frac{1}{2}\int_V\mathbf{r}_1\times\mathbf{J}_0dv. \tag{213}$$

于是得

$$\pi = \frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon\omega R^3}\mathbf{m}\times\mathbf{R}, \tag{214}$$

这就是任意形状的电流线圈的赫兹推迟势。

我们感兴趣的是线圈被限制在zy平面上的情况，这时$\mathbf{m}$指向线圈面的垂直方向，我们可写出

$$\mathbf{m}\times\mathbf{R} = -\mathbf{j}\, m_x Z + \mathbf{k} m_x Y, \tag{215}$$

这里Z和Y是R的z和y分量。对于这种取向，赫兹矢量无x分量。依方程（77），场的分量由下式给出

$$H_x = -i\omega\varepsilon\left(\frac{\partial\pi_z}{\partial y} - \frac{\partial\pi_y}{\partial z}\right) = \frac{me^{-i\omega t}}{4\pi}\left(-\frac{2X^2 - Y^2 - Z^2}{R^5}\right), \tag{216}$$

$$H_y = -i\omega\varepsilon\left(-\frac{\partial\pi_z}{\partial x}\right) = \frac{me^{-i\omega t}}{4\pi}\left(-\frac{3XY}{R^5}\right), \tag{217}$$

$$H_z = -i\omega\varepsilon\left(\frac{\partial\pi_y}{\partial x}\right) = \frac{me^{-i\omega t}}{4\pi}\left(-\frac{3XZ}{R^5}\right). \tag{218}$$

这时电场是可以被忽略的，对这一点说明如下，由方程(75)，

$$\mathbf{E} = \nabla\nabla\cdot\pi + \mu\varepsilon\omega^2\pi.$$

首先，$\mu\varepsilon\omega^2 = (\omega/c)^2$，这里$c$是光速，对1000赫的标称音频，它就变成

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{2\pi\times10^3}{3\times10^8}\right)^2 \approx 4\times10^{-10}.$$

所以能忽略方程（75）的第二项，并写出

$$\mathbf{E} \approx \nabla\nabla\cdot\pi. \tag{219}$$

它的x分量为

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\pi_y}{\partial y} + \frac{\partial\pi_z}{\partial z}\right]. \tag{220}$$

由于$\pi\propto 1/R^2$，则$E_x\propto 1/R^4$，而$H_x\propto 1/R^3$，所以当与源的距离大约超过50米后，与H相比，E就可以被忽略了。

偶极矩的表达式

$$\mathbf{m}=\frac{I_0}{2}\oint \mathbf{r}_1\times d\mathbf{s}\ ,$$

其中，量$\mathbf{r}_1\times d\mathbf{s}$是以电流圈的半径$r_1$及其周边元$d\mathbf{s}$为边的三角形面积的两倍。于是$\oint \mathbf{r}_1\times d\mathbf{s}$是电流圈面积的两倍，故对一匝线圈，$\mathbf{m}$的大小为$I_0A$，当线圈为$N$匝时，则有

$$m=NAI_0. \tag{221}$$

于是N匝线圈的场可写为

$$\mathbf{H}=\frac{NAI}{4\pi}e^{-i\omega t}\frac{(2X^2-Y^2-Z^2)\mathbf{i}+3XY\mathbf{j}+3XZ\mathbf{k}}{R^5}, \tag{222}$$

式中

$$R=(X^2+Y^2+Z^2)^{1/2}.$$

注意到展开式（199）忽略了第二项以后的项，可得出方程（222）的适用范围，因为

$$\frac{1}{R-r_1\cos\theta}=\frac{\frac{1}{R}}{1-\frac{r_1}{R}\cos\theta}$$

$$=\frac{1}{R}\left[1+\frac{r_1}{R}\cos\theta+\left(\frac{r_1}{R}\cos\theta\right)^2+\cdots\right]. \tag{223}$$

假设我们根本不会在十倍线圈半径以内的区域进行测量，那么有$r_1/R<(1/10)$和$(r_1/R)^2<(1/100)$，可见忽略掉第二项以后的项所引起的最大误差只有1%。于是使方程（222）成立的最小范围为10倍线圈半径。范围的外限由$R\ll(\lambda/2\pi)$决定。对1000赫的频率，$\lambda=3\times10^2$公里。可见，在实际勘探中满足外限的要求是不成问题的。

4．波动方程的基本形式及其解

（1）笛卡儿正交坐标

a．时谐均匀平面波——在电磁勘探中，我们难得遇上某种

真正的平面电磁波。然而，从波动方程〔(79)、(80)〕的这样简单的特解的研究，我们能弄清在一般情况下的应用。这一节，我们将研究描写均匀平面谐波的波动方程的解，并弄清**E** 和**H** 的正交性及传播矢量、相速度、波阻抗、椭圆极化等等。这些概念在本书随后的章节中都是有用的。

平面波的同相面为平行面族，例如交变的**H** 矢量的最大强度将同时到达无限大平面上的所有点。在均匀平面波中，场强度在每一等相面里是不依赖于坐标的，所以，对沿正 Z 方向传播的平面波可以写出

$$\frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{E},\mathbf{H}]=\frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{E},\mathbf{H}]=0.$$

加这个约束后，麦氏方程 (62) 和 (63) 写成：

由(62)

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}-i\mu\omega H_y=0, \tag{224}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial z}-i\mu\omega H_x=0, \tag{225}$$

$$H_z=0. \tag{226}$$

由(63)

$$\frac{\partial H_x}{\partial z}-(\sigma-i\omega\varepsilon)E_y=0, \tag{227}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial z}+(\sigma-i\omega\varepsilon)E_x=0, \tag{228}$$

$$E_z=0. \tag{229}$$

这样，均匀平面波表示**E** 和**H** 保持在垂直于传播方向的平面中，它们被称为横向电磁波。显然，可把四个横向分量(224)、(225)、(227)、(228) 分成独立的两对 E_x、H_y 和 E_y、H_x。

波动方程 (79) 和 (80) 变成

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial z^2}+k^2\mathbf{E}=0, \tag{230}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial z^2}+k^2\mathbf{H}=0. \tag{231}$$

因为$\mathbf{E}=\mathbf{i}E_x+\mathbf{j}E_y$，故$E_x$和$E_y$都满足方程(230)，同时$H_x$和$H_y$也都满足方程(231)。由于已知所有四个横向分量都仅取决于z和t，故方程（230）和（231）的特解很容易构成如下：

$$E_x=E_{1x}e^{i(kz-\omega t)}+E_{2x}e^{-i(kz+\omega t)}, \tag{232}$$

$$E_y=E_{1y}e^{i(kz-\omega t)}+E_{2y}e^{-i(kz+\omega t)}; \tag{233}$$

$$H_x=H_{1x}e^{i(kz-\omega t)}+H_{2x}e^{-i(kz+\omega t)}, \tag{234}$$

$$H_y=H_{1y}e^{i(kz-\omega t)}+H_{2y}e^{-i(kz+\omega t)}. \tag{235}$$

含有$e^{i(kz-\omega t)}$的分量表示在正Z方向传播的波，而包含$e^{-i(kz+\omega t)}$的分量表示在负Z方向上传播的波。

一般情况下，E_{1x}，E_{2x}，…，H_{2y}是复常数，并结合成复矢量振幅的形式

$$\mathbf{E}_1=E_{1x}\mathbf{i}+E_{1y}\mathbf{j}, \tag{236}$$

$$\mathbf{E}_2=E_{2x}\mathbf{i}+E_{2y}\mathbf{j}; \tag{237}$$

$$\mathbf{H}_1=H_{1x}\mathbf{i}+H_{1y}\mathbf{j}, \tag{238}$$

$$\mathbf{H}_2=H_{2x}\mathbf{i}+H_{2y}\mathbf{j}. \tag{239}$$

所以可以写出

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_1e^{i(kz-\omega t)}+\mathbf{E}_2e^{-i(kz+\omega t)}, \tag{240}$$

$$\mathbf{H}=\mathbf{H}_1e^{i(kz-\omega t)}+\mathbf{H}_2e^{-i(kz+\omega t)}. \tag{241}$$

当把方程（232）和（235）代入（224）后，有结果

$$ikE_{1x}e^{i(kz-\omega t)}-ikE_{2x}e^{-i(kz+\omega t)}-i\omega\mu H_{1y}e^{i(kz-\omega t)}$$
$$-i\omega\mu H_{2y}e^{-i(kz+\omega t)}=0. \tag{242}$$

指数e^{ikz}和e^{-ikz}的系数应独立地为零，故得出

$$H_{1y}=\frac{k}{\omega\mu}E_{1x}, \tag{243}$$

$$H_{2y}=\frac{-k}{\omega\mu}E_{2x}, \tag{244}$$

类似地

$$H_{1x}=\frac{-k}{\omega\mu}E_{1y}, \tag{245}$$

$$H_{2x}=\frac{k}{\omega\mu}E_{2y}. \tag{246}$$

E_{1x}和H_{1y}这一对独立的场分量表示了沿正方向传播的波的一个分量，它们与所有其它各对场分量一样，是互相正交的；因而均匀平面波的电矢量和磁矢量是相互正交的。

下面我们只来注意沿正方向传播的波

$$(E_{2x}=E_{2y}=H_{2x}=H_{2y}=0).$$

由于E_{1x}、E_{1y}、H_{1x}、H_{1y}为复量，可以写出

$$E_{1x}=ae^{i\theta}, \tag{247}$$

$$E_{1y}=be^{i\psi}. \tag{248}$$

这里θ和ψ是实数，于是由方程（232）和（233）得出

$$E_x=ae^{i(kz-\omega t+\theta)}, \tag{249}$$

$$E_y=be^{i(kz-\omega t+\psi)}. \tag{250}$$

b．相、相角和相速度——传播常数$k=\alpha+i\beta$，α和β由方程（73）和（74）确定。这样方程（249）和（250）变成

$$\begin{aligned}E_x&=ae^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\theta)}\\&=ae^{-\beta z}[\cos(\omega t-\alpha z-\theta)-i\sin(\omega t-\alpha z-\theta)],\end{aligned} \tag{251}$$

$$\begin{aligned}E_y&=be^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\psi)}\\&=be^{-\beta z}[\cos(\omega t-\alpha z-\psi)-i\sin(\omega t-\alpha z-\psi)].\end{aligned} \tag{252}$$

与它相关联的磁场分量由方程（243）和（245）得出

$$\begin{aligned}H_x&=-\frac{k}{\omega\mu}be^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\psi)}\\&=-\frac{k}{\omega\mu}be^{-\beta z}[\cos(\omega t-\alpha z-\psi)-i\sin(\omega t\\&\qquad-\alpha z-\psi)],\end{aligned} \tag{253}$$

$$H_y=\frac{k}{\omega\mu}ae^{-\beta z}e^{i(\alpha z-\omega t+\theta)}$$

$$=\frac{k}{\omega\mu}ae^{-\beta z}[\cos(\omega t-\alpha z-\theta)-i\sin(\omega t-\alpha z-\theta)].$$

(254)

宗量$\phi_1=\omega t-\alpha z-\psi$或$\phi_2=\omega t-\alpha z-\theta$叫做相，而角$\psi$或$\theta$称为相角。由于我们已假设在包含**E**和**H**的每一个平面上相是不变的，即有

$$\phi_1=\omega t-\alpha z-\psi=常数.\tag{255}$$

由此得出

$$\frac{d\phi_1}{dt}=\omega-\alpha\frac{dz}{dt}=0.\tag{256}$$

于是等相面的传播速度

$$v=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{\alpha}.\tag{257}$$

v被称做波的相速度。注意它是一个与给定的相或频率相关联的速度。

c．群速度和相速度——如果一列波是无限持久的，我们可用下式来描写它

$$\psi(z,t)=Ae^{ikz-i\omega t},\tag{258}$$

并计算其相速度。如前边所讲，我们有

$$v_p=\frac{dz}{dt}=\frac{\omega}{\alpha},\tag{259}$$

这里$k=\alpha+i\beta$，它常常写成

$$v_p=\frac{\omega}{k}.\tag{260}$$

这样写时，我们认为k是实数。

对有限长的一束波列，不能再用方程（258）来表示了，因而术语“相速度”便失去了它通过方程（255）规定等相面的正确意义。对这种情况，我们利用群速度的概念。为使这一概念具

体化，考虑两个频率和传播常数相差不大的谐波叠加的情况，

$$\psi_1=\cos(kz-\omega t),$$
$$\psi_2=\cos[(k+\delta k)z-(\omega+\delta\omega)t]. \tag{261}$$

ψ_1和ψ_2的和为

$$\psi=\psi_1+\psi_2=2\cos\tfrac{1}{2}(z\delta k-t\delta\omega)\cos\left[\left(k+\frac{\delta k}{2}\right)z-\left(\omega+\frac{\delta\omega}{2}\right)t\right]. \tag{262}$$

假设场ψ的振荡频率$\omega+(\delta\omega/2)$与ω相差甚小，振荡的振幅是

$$A=2\cos\tfrac{1}{2}(z\delta k-t\delta\omega), \tag{263}$$

显然它是随时间变化的，事实上表示“拍”频。如图 6 所示，这时使合振幅A为常数的平面由下式确定

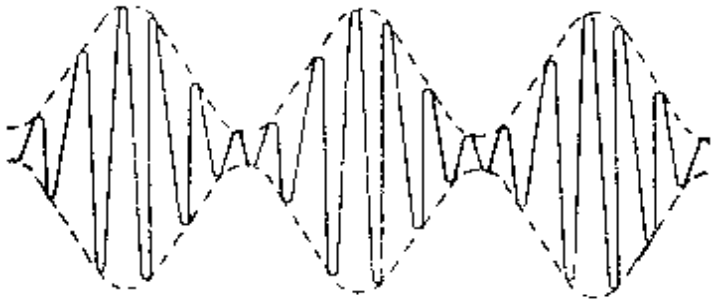


图 6　两个频率非常接近的信号叠加而成的“拍”

$$z\delta k-t\delta\omega=C, \tag{264}$$

所以

$$v_G=\frac{\delta\omega}{\delta k}, \tag{265}$$

叫做群速度。严格地说，方程（265）应写为

$$v_G=\frac{\delta\omega}{\partial\alpha}, \tag{266}$$

但在文献中通常用方程（265）的形式。

一般地说，α、β分别由下两式确定

$$\alpha=\omega\left[\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}+1\right)\right]^{1/2}, \tag{267}$$

$$\beta=\omega\left[\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2\omega^2}}-1\right)\right]^{1/2}. \tag{268}$$

现在可能有两种情况：

（a）$(\sigma^2/\varepsilon^2\omega^2)\ll 1$，即位移电流大大超过传导电流。这时

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \tag{269}$$

它对自由空间变成

$$v_p=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c, \tag{270}$$

式中 c 就是光速。群速度为

$$v_G=\frac{\delta\omega}{\delta\alpha}=\frac{\delta\omega}{\delta\omega/v_p}=v_p. \tag{271}$$

（b）$(\sigma^2/\varepsilon^2\omega^2)\gg 1$，即传导电流较位移电流占优势的情况。这时

$$\alpha=\beta=\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}, \tag{272}$$

和

$$v_p=\frac{\omega}{\alpha}=\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}. \tag{273}$$

频率增大时，v_p增大，而μ或σ增大时，v_p减小。群速度为

$$v_G=\frac{\delta\omega}{\delta\alpha}=\frac{\omega_1-\omega_2}{\sqrt{\omega_1}-\sqrt{\omega_2}}\sqrt{\frac{2}{\mu\sigma}}. \tag{274}$$

群速度和相速度不一样。相速度v_p在媒质中随频率而变化的现象，叫做色散。

d．极化——如我们选择时间原点，使 $\theta=0$，ψ在这时刻的值，将表示方程（251）和（252）里E_y对于E_x的相位差。在 $z=0$ 处，取方程（251）的实部：

$$E_x=E_1\cos\omega t, \tag{275}$$

$$E_y=E_2\cos(\omega t-\psi). \tag{276}$$

为了方便，这里的E_1就是a，而E_2就是b。除非$\psi=0$或π，一般情

况下描写合场强的矢量将是旋转的。电磁勘探中有一种特殊情况出现，相应的$\varphi=\pi/2$，即分量场强在相位上差1/4周期。这时

$$E_x=E_1\cos\omega t,\quad E_y=E_2\sin\omega t. \tag{277}$$

由方程（277）中，取平方消去 t，发现矢量末端的轨迹为

$$\left(\frac{E_x}{E_1}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_2}\right)^2=1. \tag{278}$$

这是一个描写椭圆的方程，它说明波是椭圆极化的。当$E_1=E_2$时，波是圆极化的。如$\varphi=0$，则波是线极化的，因为这时矢量$\mathbf{E}=E_x\mathbf{i}+E_y\mathbf{j}$的轨迹是一直线。

（2）柱坐标——地球物理勘探经常要遇到偶极子和线电流源，这类问题的对称性启发我们在柱坐标中求解。当源本身被除外时，我们在柱坐标中讨论齐次波动方程：

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0. \tag{279}$$

我们利用分离变量法来求解方程（279）。该方法假设方程的解可写成三个函数乘积的形式，而每个函数只包含一个变量：

$$\psi=R(r)\Phi(\phi)Z(z). \tag{280}$$

将方程（280）代入（279），并用$R\Phi Z$遍除各项，则有

$$\frac{1}{rR}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{r^2\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2z}{dz^2}+k^2=0. \tag{281}$$

由于除第三项外，所有的项都与 z 无关，所以

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}+h^2=0\text{或}\frac{d^2Z}{dz^2}+h^2Z=0. \tag{282}$$

这里 h 只是一个分离常数，但它有特殊的物理意义；比较方程（282）和（230），即可看出 h 具有传播常数的量纲。事实上，它也就是 z 方向的传播常数。除非限定边界条件，这个常数一般是任意的。

如果将方程（282）代入(281)，并乘以r^2，得到

$$\frac{r}{R}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+(k^2-h^2)r^2=0. \tag{283}$$

其中第一项和第三项与 ϕ 无关，所以又可写出

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2=0\ ,\ 或\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}+m^2\Phi=0. \tag{284}$$

最后，当把（284）式代入（283）后，得出方程

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right)+[(k^2-h^2)r^2-m^2]R=0.$$

或

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}+[(k^2-h^2)r^2-m^2]R=0. \tag{285}$$

这就是贝塞耳方程。它是一个二阶线性微分方程，因此必定有两个线性无关的解。

如果我们希望波动方程有谐时的解，那么方程（282）的解将是

$$Z=C_1e^{ihz-i\omega t}+C_2e^{-ihz-i\omega t} \tag{286}$$

当 h 为实数时，这个解表示分别沿 z 的正向和反向传播的波的叠加。但在一般情况下，传播常数 h 是复数，所以场不一定沿 z 轴是周期变化的。

方程（284）有解

$$\Phi=C_3e^{im\phi}+C_4e^{-im\phi}, \tag{287}$$

为满足函数 ψ 在空间任一点为单值的物理要求，Φ 应该保持单值。于是对无限大的媒质，必须限定 m 为整数 $m=0,1,2,\cdots\cdots$。当然，如媒质被限定在平面 ϕ_1 和 ϕ_2 之间，则单值要求不是必然满足的。事实上，这样的边界条件通常将要求 m 为非整数值。

贝塞耳方程的解——它在轴 $r=0$ 上是有限的——通称为 m 阶的贝塞耳函数，并用 $J_m(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)$ 表示。如除掉对轴上 $r=0$ 处函数值有限的要求，则贝塞耳方程通常给出被称为圆柱函数的解，并用 $Z_m(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)$ 表示它们。

贝塞耳方程的通解的标准形式不是简单地包含 $J_m(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)$，也不是 $Z_m(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)$，而是圆柱函数的某种线性组合。讨论一般公式之前，先作一个独立变量的变换，方程（285）中令 $x=\sqrt{k^2-h^2}\cdot r$，于是变成：

$$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0. \tag{288}$$

该方程的通解是

$$R=C_5J_m(x)+C_6Y_m(x) \tag{289}$$

这里C_5和C_6为任意常数。$J_m(x)$ 被称做第一类m阶贝塞耳函数，$Y_m(x)$为第二类m阶贝塞耳函数。这些函数——它们已被制成了表（雅恩克和埃姆德，1945）——的表现有点象阻尼振幅的三角函数，并且由下式得到

$$J_m(x)=\frac{(\frac{1}{2}x)^m}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{m!}{(n+k)!}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2k} \tag{290}$$

和

$$Y_m(x)\sin m\pi=J_m(x)\cos m\pi-J_{-m}(x). \tag{291}$$

这些函数的性质在一些标准教科书（如瓦特森，1944）中已被讨论过。在某些问题中，我们要求第一类和第二类贝塞耳函数的复数组合，这时我们用汉开尔（Hankel）函数：

$$H_m^{(1)}(x)=J_m(x)+iY_m(x), \tag{292}$$

$$H_m^{(2)}(x)=J_m(x)-iY_m(x). \tag{293}$$

在类似的其它问题中，贝塞耳方程具有形式

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}+\left(-1-\frac{m^2}{x^2}\right)R=0, \tag{294}$$

这里，第三项括弧中用-1取代了原来的$+1$。满足该方程的虚宗量的贝塞耳函数引出m阶第一类修正贝塞耳函数

$$I_m(x)=i^{-m}J_m(ix). \tag{295}$$

同样，可以写出m阶的第二类修正贝塞耳函数

$$K_m(x)=\frac{\pi/2}{\sin m\pi}[I_{-m}(x)-I_m(x)]\ (\text{对}m\neq\text{整}$$

数有定义)。 (296)

对 $x=\sqrt{k^2-h^2}\cdot r$，如 h 和 k 都是实数，且 $h>k$，方程(294)及其解(295)和(296)是纯虚量。

在确定线圈横截面里交流电流的分布时，会遇到下面的微分方程

$$\frac{d^2R}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dR}{dx}-iR=0. \tag{297}$$

该方程的通解可写为

$$R=AJ_0(i^{3/2}x)+BK_0(i^{1/2}x), \tag{298}$$

式中 $J_0(i^{3/2}x)$ 和 $K_0(i^{1/2}x)$ 是复函数。把这些函数分解成实部和虚部，得到

$$J_0(i^{3/2}x)=ber(x)+ibei(x), \tag{299}$$

$$K_0(i^{1/2}x)=ker(x)+ikei(x). \tag{300}$$

给这后几个函数以名称 ber、bei、ker、kei，仅仅用来区别不同的函数。

当把上述 R、Φ、Z 的任一个值代入方程(279)时，就构成波动方程的一个解。如前面所提到的，让 h 为一固定常数，并要求势 ψ 为 ϕ 的单值函数，这时 m 只能取整数值，于是在 $r=0$ 仍为有限值的通解是

$$\psi=\sum_{m=0}^{\infty}[e^{ihz}(A_m\cos m\phi+B_m\sin m\phi)$$

$$+e^{-ihz}(C_m\cos m\phi+D_m\sin m\phi)]J_m\sqrt{k^2-h^2}re^{-i\omega t}. \tag{301}$$

在均匀各向同性区域内，每一个电磁场都可被表示为基本波函数的线性组合，如方程(301)所给出的那样。每一个基本的波被参数 m、h、k 所表征。当 $m=0$ 时，场对轴是对称的；当 $h=0$ 时，在 z 方向无传播，波动只是严格地径向发生，这时说场是"二

维的"。这里ψ被用来表示标量势或矢量势及场矢量的任一分量。

现在，回顾一下我们讨论波动方程在柱坐标中的解的出发点。我们假设了方程（279）的形式。不过，这个形式能由齐次波动方程一般的形式逻辑地引出，如对赫兹势的方程（35）。我们必须记住，在方程（35）中是算符$\nabla^2\boldsymbol{\pi}$应用于笛卡儿坐标的情形，对其它坐标应由下式来代替〔看方程(28)〕.

$$\nabla^2\boldsymbol{\pi}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}. \tag{302}$$

但在任何坐标系中，赫兹势的齐次波动方程都是

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}=\nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}-\mu\epsilon\frac{\partial^2\boldsymbol{\pi}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\pi}}{\partial t}. \tag{303}$$

用方程（303）的左端取代方程（55）右端的前三项，并让$\boldsymbol{\pi}^*=0$，即得电场

$$\mathbf{E}=\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{\pi}. \tag{303a}$$

由于$\boldsymbol{\pi}^*=0$，故磁场由方程（55）式直接给出，即

$$\mathbf{H}=\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma\right)\nabla\times\boldsymbol{\pi}. \tag{303b}$$

矢量波动方程的解只有在有数的几个坐标系中是可以推出的，斯特拉顿(1941, p. 349)。柱坐标中一个满意的解，可由两个标量的赫兹势π_z和π_z^*推出的部分场的叠加产生。部分场的推出一般是足够概括的，通常我们让它满足对许多实际问题确定的边界条件。如我们假设只有$\boldsymbol{\pi}$的一个分量，则矢量波动方程（303）就简化为标量波动方程（279），我们的讨论就是由此开始的。

如果我们现在想计算相应于这个标量波方程的场，这里$\psi=\pi_z$，我们就用π_z代换方程（303a）和（303b）中的$\boldsymbol{\pi}$，于是得到

$$\left.\begin{aligned}E_r&=\frac{\partial^2\pi_z}{\partial z\partial r},\quad E_\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\pi_z}{\partial z\partial\phi},\\ E_z&=-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\pi_z}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_z}{\partial\phi}\right)\right],\end{aligned}\right\} \tag{304}$$

$$H_r=\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma\right)\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_z}{\partial\phi},\quad H_\phi=-\left(\epsilon\frac{\partial}{\partial t}+\sigma\right)\frac{\partial\pi_z}{\partial r},\quad H_z=0. \tag{305}$$

于是，由一标量函数π_z引出了电磁场，该场不存在磁矢量的轴向分量，这种情况属于横磁场。

类似地，另一部分场能由第二个赫兹矢量π_z^*（沿z轴）引出。在这种情况下，场由下列表达式给出

$$E_r=-\frac{\mu}{r}\frac{\partial^2\pi_z^*}{\partial t\partial\phi},\quad E_\phi=\mu\frac{\partial^2\pi_z^*}{\partial t\partial r},\quad E_z=0; \tag{306}$$

$$H_r=\frac{\partial^2\pi_z^*}{\partial z\partial r},\quad H_\phi=\frac{1}{r}\frac{\partial^2\pi_z^*}{\partial z\partial\phi},$$
$$H_z=-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\pi_z^*}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_z^*}{\partial\phi}\right)\right]. \tag{307}$$

由π^*得出的场的特点是没有**E**的纵分量，所以称为横电场。波动方程的一个满意的通解是这两类波的叠加。

在静电和静磁问题中，ω为零，所以k也为零。同样，这种情况下常常没有z向的依赖关系，即在方程（282）中，$Z(z)=C$，这时要求h为零。于是贝塞耳方程（285）化为

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+r\frac{dR}{dr}-m^2R=0. \tag{308}$$

它的一个特解是

$$R=Cr^m+Dr^{-m}\quad \text{对}m\neq0, \tag{309}$$
$$R=C\ln r+D\quad \text{对}m=0. \tag{310}$$

相应于ϕ的方程（284）写为

$$\frac{d\Phi^2}{d\phi^2}+m^2\Phi=0, \tag{311}$$

两个对应的解为

$$\Phi=A\cos m\phi+B\sin m\phi\quad \text{对}m\neq0, \tag{312}$$
$$\Phi=A\phi+B\quad \text{对}m=0. \tag{313}$$

于是在柱坐标中，与 z 无关的拉普拉斯方程的通解是

$$\phi = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos m\phi + B_m \sin m\phi)(C_m r^m + D_m r^{-m}) \tag{314}$$

注意，$m=0$ 的解是一种特殊的解，并且正如我们将要看到的那样，它是属于感应单极子的。而在要求柱坐标的电法勘探问题中，感应的电单极子和磁单极子比较少见，故我们很少去管对应于$m=0$的特解（310）和（313）。不过，这些解在重力勘探问题中却将是有用的。

对 $m=0$ 情况的这一讨论，扩充了波动方程的解，只是由于需要考虑特殊的物理问题，这里我们将不再讨论这种情况，而留到均匀谐变场中的圆柱体那一节再作研究。

（3）球坐标——由方程（302）能写出谐时变化矢量波动方程如下

$$\nabla\nabla\cdot\mathbf{F} - \nabla\times\nabla\times\mathbf{F} + k^2\mathbf{F} = 0 . \tag{315}$$

式中$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega$，而$\mathbf{F}$表示任何矢量势或矢量场。斯特拉顿（1941，p. 392）已指出，什么样的矢量解可以直接得到。不过我们常常注意的是任一个时刻矢量的某个分量及其所满足的标量波动方程。在球坐标中，这方程是

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + k^2r^2\phi = 0. \tag{316}$$

利用分离变量法求解该方程。考虑到谐时相关的假设，我们所求的函数ϕ应为

$$\phi = R\Theta\Phi e^{-i\omega t} = RSe^{-i\omega t} \tag{317}$$

函数R、Θ、Φ分别只是r、θ和ϕ的函数。函数 $S(\theta、\phi)=\Theta\Phi$叫作面谐函数。当$\phi$为常数时，函数$\Theta$被叫做带面谐函数。

将方程（317）代入（316），并用RS遍除各项，有

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)$$

$$+\frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}+k^2r^2=0\ . \qquad (318)$$

式中第一项和最后一项仅为 r 的函数，而其它各项只包含θ和ϕ，于是应有

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial R}{\partial r}\right)+k^2r^2=p^2.$$

或

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}+(k^2r^2-p^2)R=0 \qquad (319)$$

和

$$\frac{1}{S\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{S\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\phi^2}=-p^2. \qquad (320)$$

如在方程（319）中做代换$R=(kr)^{-1/2}f(r)$，可得出方程

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+[k^2r^2-(p^2+\tfrac{1}{4})]f=0. \qquad (321)$$

让$p^2=n(n+1)$，它就变成了半奇整数阶的贝塞耳方程

$$r^2\frac{d^2f}{dr^2}+r\frac{df}{dr}+[k^2r^2-(n+\tfrac{1}{2})^2]f=0. \qquad (322)$$

半奇整数阶的柱函数满足方程(322)，所以对最初的方程(319)，可写出它的解为

$$R=\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+1/2}(kr). \qquad (323)$$

如果$k=0$，（319）式有解

$$R=Ar^n+Br^{-n-1}. \qquad (324)$$

它是拉普拉斯方程的解的径向部分，并可应用于静电和静磁问题。拉普拉斯方程在球坐标中的通解可写为

$$\psi=(Ar^n+Br^{-n-1})S_n, \qquad (325)$$

式中S_n是方程（320）满足 $p^2=n(n+1)$ 的解，而且对应于方程

(319) 中 $k=0$情况。方程 (325) 有这样一个很重要的特解：ψ 与 ϕ 无关，故Φ是常数，而S_n仅是θ的函数。对这种情况有

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial \phi^2}=0. \tag{326}$$

于是方程 (320) 化为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial S_n}{\partial\theta}\right)+n(n+1)S_n=0. \tag{327}$$

如 $x=\cos\theta$，方程 (327) 变成

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dS_n}{dx}\right]+n(n+1)S_n=0. \tag{328}$$

这里偏导符号已被换掉，因为现在只含有一个变量。方程 (328) 为 n 次的勒让特方程。如 n 是正整数，则方程 (327) 的解由勒让特多项式给出

$$S_n=P_n(x)=P_n(\cos\theta). \tag{329}$$

对所有这样的解求和，并乘以方程 (323) 或 (324) 那样的解，便得到方程 (316) 的通解为

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+1/2}(kr)P_n(\cos\theta) \tag{330}$$

或

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n+\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \tag{331}$$

即为拉普拉斯方程的通解。量A_n和B_n是任意常数。

对较一般的情况，ψ 是依赖于 ϕ 的，所以必须进一步分离变量。这时在方程 (320) 中代入$S=\Theta\Phi$，再通乘以 $\sin^2\theta$，得到

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}+n(n+1)\sin^2\theta=0. \tag{332}$$

我们可以让

$$\frac{1}{\Phi}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}=-m^2. \tag{333}$$

它的一个解是

$$\Phi=e^{im\phi}. \tag{334}$$

剩下的结果为

$$\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}\right)-m^2+n(n+1)\sin^2\theta=0. \tag{335}$$

将$x=\cos\theta$代入方程（335），得出

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0. \tag{336}$$

这是缔合勒让特方程，满足它的解是

$$\Theta=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{337}$$

式（337）给出的函数Θ为缔合勒让特多项式，并用$P_n^m(x)$表示它。所以我们有

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x). \tag{338}$$

于是波动方程在球坐标中的通解为

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+1/2}(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t} \tag{339}$$

而对拉普拉斯方程，则是

$$\psi=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(a_{nm}r^n+\frac{b_{nm}}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi} \tag{340}$$

式中a_{nm}和b_{nm}是任意常数。

在许多问题中，初始条件或边界条件将指出通解的形式(339)和（340）是多余的，只有满足条件的某些特解有用。读者可参考瓦特森（1941）关于勒让特多项式性质的研究。

通常用于柱函数（323）的术语是球贝塞耳函数

$$z_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Z_{n+1/2}(\rho),\quad j_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}J_{n+1/2}(\rho)$$

$$y_n(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}Y_{n+1/2}(\rho),\quad h_n^{(1)}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H_{n+1/2}^{(1)}(\rho)$$

$$h_n^{(2)}(\rho)=\sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}H_{n+1/2}^{(2)}(\rho).$$

(341)

（4）齐次波动方程的积分解——由上面方程（232），我们已经看到，波动方程的基本平面波解在笛卡儿坐标中具有形式

$$\psi=(Ae^{ikz}+Be^{-ikz})e^{-i\omega t}. \tag{342}$$

系数A和B是任意的，也可能是频率的函数。这启发我们想到一维波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{343}$$

的通解可能具有形式为

$$\psi=\sum_{\omega=0}^{\infty}(A_\omega e^{ikz}+B_\omega e^{-ikz})e^{-i\omega t}. \tag{344}$$

这个形式的解只限于离散频率$\omega=0$，1，2……。对频率的某连续谱，应采用积分表达式

$$\psi(z,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[A(\omega)e^{ikz}+B(\omega)e^{-ikz}]e^{-i\omega t}d\omega. \tag{345}$$

由于我们已假设了谐时依赖关系，所以这样的波在时间上是被限定了的，每一个基本波函数都具有其频率ω。对另外一些波还可在空间上给予限定，我们希望假设谐变空间依赖关系。为说明这后一种波，让我们写出方程（59）的一维等价关系

$$\frac{\partial^2E_x}{\partial z^2}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E_x}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t}=0. \tag{346}$$

我们已设定沿 z 方向传播的波的电矢量只有 x 分量。方程（346）可由分离变量法解出

$$E_x = f_1(z) f_2(t). \tag{347}$$

将它代入方程（346）得出

$$\frac{1}{f_1}\frac{d^2 f_1}{dz^2} = \frac{\mu\varepsilon}{f_2}\frac{d^2 f_2}{dt^2} + \frac{\mu\sigma}{f_2}\frac{df_2}{dt} = -k^2, \tag{348}$$

这里 $-k^2$ 为分离常数。f_1 的通解为

$$f_1(z) = Ae^{ikz} + Be^{-ikz}. \tag{349}$$

取 f_2 的一个特解

$$f_2(t) = Ce^{-pt}. \tag{350}$$

p 所满足的是把这个解代入方程（348）后所得的方程

$$p^2 - \frac{\sigma}{\varepsilon}p + \frac{k^2}{\mu\varepsilon} = 0. \tag{351}$$

对谐时波，我们选择 $p = i\omega$，于是 k 由方程(351)定出

$$k^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega. \tag{352}$$

在一般情况下，它总是复数量。

我们只来讨论一种解

$$f_1(z) = Ce^{ikz}, \tag{353}$$

$$f_2(t) = De^{-pt}. \tag{354}$$

由它们可导出方程

$$p^2 - \frac{\sigma}{\varepsilon}p + \frac{k^2}{\mu\varepsilon} = 0, \tag{355}$$

它与方程（351）一样。对 p 求解此方程得

$$p = \frac{\sigma}{2\varepsilon} \pm i\sqrt{\frac{k^2}{\mu\varepsilon} - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}. \tag{356}$$

于是 E_x 有值

$$E_x = e^{-(\sigma/2\varepsilon)t}(Ae^{iqt} + Be^{-iqt})e^{ikz}. \tag{357}$$

式中

$$q = \sqrt{\frac{k^2}{\mu\varepsilon} - \frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}.$$

当 $(\sigma^2/4\varepsilon^2)>(k^2/\mu\varepsilon)$ 时，量iq为实数，相应的这类波就是所谓的衰减波。这时，场在 z 方向是周期的，但随时间而单调地减小。对于这种波，有类似于方程（345）那样的表达式

$$\psi(z,t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sigma/2\varepsilon)t}\,[A(k)e^{iqt}+B(k)e^{-iqt}]e^{ikz}\,dk. \tag{358}$$

现在积分对 k 进行，即遍及整个 k 空间，对每一个元波有不同的 k 来表示。由于 k 是波长的倒数，所以由方程（358）给出的解是覆盖波长的整个频谱的波的叠加。

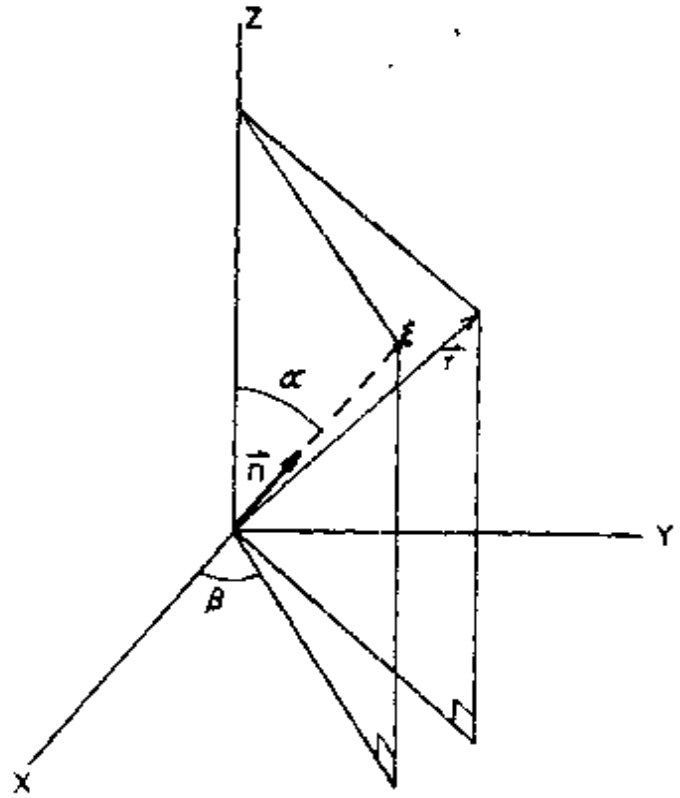


图 7　在直角坐标系（x，y，z）中，ξ方向的单位矢量n由极角α和β确定

在一般情况下，能由形式为

$$\psi=e^{ikx-i\omega t} \tag{359}$$

的元子波构成波动方程的积分解。其中 k 和 ω 为实数或复数，ξ为任意方向的坐标。与在直角坐标系中的定义一样，ξ 方向的单位矢量为 $\mathbf{n}=\mathbf{i}n_x+\mathbf{j}n_y+\mathbf{k}n_z$。观察点的直角坐标为 x、y、z。如$\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$是由原点引向观察点的径向矢量（图 7），则

$$\xi=\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=n_x x+n_y y+n_z z. \tag{360}$$

矢量n的方向余弦n_x、n_y、n_z可用极角 α 和 β 表示

$$n_x=\sin\alpha\cos\beta, \tag{361}$$

$$n_y=\sin\alpha\sin\beta, \tag{362}$$

$$n_z=\cos\alpha. \tag{363}$$

于是方程（359）可写成

$$\psi = e^{ik(x\sin\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\sin\beta + z\cos\alpha) - i\omega t}. \tag{364}$$

设子波是与每一 α、β 方向及振幅 $g(\alpha,\beta)$ 相联系的。于是由这样的元平面波叠加的通解为

$$\psi(x,y,z,t) = e^{-i\omega t}\int d\alpha \int g(\alpha,\beta)\, e^{ik(x\sin\alpha\cos\beta + y\sin\alpha\sin\beta + z\cos\alpha)} d\beta. \tag{365}$$

通常我们将 α 和 β 看做实数角，但从数学观点来看，对复数值的 α 和 β，方程（365）亦满足波动方程。复数值的 α 和 β 的物理意义已由斯特拉顿（1941, p. 516）作过讨论；复值的 α、β 描写的是非齐次平面波，这种波的等相面和等幅面是不重合的。对我们目前的讨论，只需要考虑实数的 α、β。

现在我们来定义一个矢量传播常数

$$\mathbf{k} = k\mathbf{n}, \tag{366}$$

它的直角分量是

$$k_1 = k\sin\alpha\cos\beta, \tag{367}$$

$$k_2 = k\sin\alpha\sin\beta, \tag{368}$$

$$k_3 = k\cos\alpha. \tag{369}$$

对谐时波，元平面波现在为

$$\psi = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n} - i\omega t} \tag{370}$$

这里必须注意区别在这个用法中的矢量**k**和单位坐标矢**k**。

将方程（370）式代入波动方程

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \mu\sigma\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{371}$$

得到

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i\mu\sigma\omega = k^2. \tag{372}$$

由于在（367）至（369）式中，对任何给定的子波我们可随意选取 α 和 β，所以 k_1、k_2 和 k_3 是任意的。对这三个波数的唯一限制，是它们应满足方程（372）。任一个元波函数由其参数（k_1，

k_2，k_3，ω）所表征；由于ω也是一个变数，故参数中的任三个可随意选取，而第四个由（372）式来确定。

我们可以把波函数ψ表示为四个频谱成分k_1、k_2、k_3或ω中的任一个的付里叶积分，甚至更一般地表示为频谱成分中任三个的三重付里叶积分，这样可以写出

$$\psi(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2,\omega)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z-\omega t)}\,dk_1dk_2d\omega. \qquad (373)$$

我们选取其中的k_1、k_2和ω为实变量，而k_3由下式确定

$$k_3^2=\mu\epsilon\omega^2+i\mu\sigma\omega-k_1^2-k_2^2. \qquad (374)$$

注意在一般情况下，k_3将是复数值。（373）式是（365）式的推广，因为(373)式适用于任意的一个时间函数，而(365)式仅适用于单一的时间谱参量ω。

倘若$f(x,y,t)$和它的一阶导数是分段连续并绝对可积的话，则振幅函数$g(k_1,k_2,\omega)$必定是另一个函数$f(x,y,t)$的付里叶变换。这一对变换为

$$f(x,y,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2,\omega)e^{i(k_1x+k_2y-\omega t)}\,dk_1dk_2d\omega, \qquad (375)$$

$$g(k_1,k_2,\omega)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,t)e^{-i(k_1x+k_2y-\omega t)}\,dxdydt. \qquad (376)$$

选择k_3为固定参数时，事实上就是规定了$z=0$平面上的波函数ψ，因为

$$\psi(x,y,0,t)=f(x,y,t) \qquad (377)$$

正如所见，让方程（373）中的$z=0$，并与（375）式比较，就可得出这个结果。

另一方面，我们也能规定 $t=0$ 时整个空间的ψ，这时ψ 表示如下

$$\psi(x,y,z,t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2,k_3)\,e^{i(k_1x+k_2y+k_3z-\omega t)}\,dk_1\,dk_2\,dk_3. \quad (378)$$

其中k_1、k_2、k_3 为实变数，而ω为由方程（372）得到的复数值

$$i\omega=\frac{\sigma}{2\varepsilon}\pm\sqrt{c^2(k_1^2+k_2^2+k_3^2)-\frac{\sigma^2}{4\varepsilon^2}}, \quad (379)$$

这里 $c=1/\sqrt{\mu\varepsilon}$ 是光速。这时的一对变换为：

$$f(x,y,z)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,k_2,k_3)e^{i(k_1x+k_2y+k_3z)}dk_1\,dk_2\,dk_3 \quad (380)$$

$$g(k_1,k_2,k_3)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}$$

$$\cdot\iiint_{-\infty}^{\infty} f(x,y,z)e^{-i(k_1x+k_2y+k_3z)}\,dx\,dy\,dz. \quad (381)$$

方程（373）和（378）是广义波的付里叶积分表达式。另外一些积分表达式在物探中也是有用的。其中之一是付里叶-贝塞耳积分，对具有柱对称性的问题尤其有用。在柱坐标中元波函数写为

$$\psi(r,\theta,z,t)=e^{in\theta}\,Z_n(\sqrt{k^2-h^2}\cdot r)e^{\pm ihz-i\omega t}. \quad (382)$$

把这样的基本解求和，得到由方程（301）给出的通解。现在我们希望找到有关的积分表达式。在需要付里叶-贝塞耳积分表达式的问题中，通常我们知道，在 $t=0$ 时，沿 $z=0$ 平面有 $\psi(r,\theta,0,0)=f(r,\theta)$。设$f(r,\theta)$为变量的单值函数；$f(r,\theta)$对$\theta$应该是周期的，且将它展为付里叶级数时（怀利，1960，p. 263），其系数仅为 r 的函数

$$f(r,\ \theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r)e^{in\theta}. \tag{383}$$

$$f_n(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r,\theta)e^{-in\theta}\,d\theta. \tag{384}$$

考虑函数$f(x,y)$，它具有如下的付里叶变换

$$f(x,\ y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} g(k_1,\ k_2)e^{i(k_1x+k_2y)}\,dk_1\,dk_2. \tag{385}$$

为把这个函数变换到ξ和k空间，作代换

$$\left.\begin{aligned} x&=r\cos\theta,\\ y&=r\sin\theta; \end{aligned}\right\} \tag{386}$$

$$\left.\begin{aligned} k_1&=k\sin\alpha\cos\beta,\\ k_2&=k\sin\alpha\sin\beta. \end{aligned}\right\} \tag{387}$$

方程（387）由方程（367）和（368）而来。由于（387）式的两个变换中有共同因子$k\sin\alpha$，可将此变换简化为

$$\left.\begin{aligned} k_1&=\lambda\cos\beta,\\ k_2&=\lambda\sin\beta, \end{aligned}\right\} \tag{388}$$

式中

$$\lambda=k\sin\alpha. \tag{389}$$

我们经常用字母h标记z方向的波数，所以由方程（369）写出

$$k_3=h=k\cos\alpha.$$

这样，用$\sin\alpha=(1/k)\sqrt{k^2-h^2}$，将方程（389）变为

$$\lambda=\sqrt{k^2-h^2}\quad 或\quad h=\pm i\sqrt{k^2-\lambda^2}. \tag{390}$$

把变换方程（386）与（388）相配起来，使我们写出

$$\begin{aligned} k_1x+k_2y&=r\lambda\cos\beta\cos\theta+r\lambda\sin\beta\sin\theta\\ &=\lambda r\cos(\beta-\theta). \end{aligned} \tag{391}$$

于是付里叶积分（385）变为

$$f(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\lambda d\lambda\int_0^{2\pi}d\beta g(\lambda,\beta)e^{i\lambda r\cos(\beta-\theta)}.$$

(392)

这里，如同$rdrd\theta$是ξ空间的体积元一样，$\lambda d\lambda d\beta$是k空间的体积元。函数

$$e^{i\lambda r\cos(\beta-\theta)-i\omega t} \tag{393}$$

表示一传播常数为λ的平面波，该平面波的传播方向在$x-y$平面内，并与x轴的夹角为β。每一个元平面波都被乘以加权函数$g(\lambda,\beta)$，并对角β和空间频率λ求积分。

$f(x,y)$的变换式为

$$g(k_1,k_2)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,e^{-i(k_1x+k_2y)}dx\,dy.$$

(394)

用极坐标来表示时，它为

$$g(\lambda,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}rdr\int_0^{2\pi}d\theta f(r,\theta)e^{-i\lambda r\cos(\beta-\theta)}. \tag{395}$$

在（383）式中，级数的每一项被下式描写

$$f(r,\theta)=f_n(r)e^{in\theta}. \tag{396}$$

把它代入（395）式中

$$g(\lambda,\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}rdr\,f_n(r)\int_0^{2\pi}d\theta\,e^{-i\lambda r\cos(\beta-\theta)+in\theta}.$$

(397)

现在，我们采用贝塞耳函数的索末菲积分表达式（琼斯，1964；斯特拉顿，1941，p. 369）

$$J_n(z)=\frac{e^{-n\pi i/2}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i(n\psi+z\cos\psi)}d\psi, \tag{398}$$

做变数变换

$$\left.\begin{aligned}\psi&=\theta-\beta-\pi,\quad d\psi=d\theta\\ z&=\lambda r.\end{aligned}\right\}\tag{399}$$

于是（397）式中的第二个积分变为

$$\mathscr{I}=\frac{1}{2\pi}\int_{\psi=-\beta-\pi}^{\psi=-\beta+\pi}e^{iz\cos\psi+in(\beta+\pi)}\,d\psi$$

$$=e^{in(\beta+3\pi/2)}J_n(z).\tag{400}$$

这样，（397）式变成

$$g(\lambda,\beta)=e^{in(\beta+3\pi/2)}\int_0^\infty f_n(r)J_n(\lambda r)rdr$$

$$=g_n(\lambda)e^{in(\beta+3\pi/2)}.\tag{401}$$

将（401）式代入（392），得到：

$$f(r,\theta)=f_n(r)e^{in\theta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty\lambda d\lambda g_n(\lambda)$$

$$\cdot\int_0^{2\pi}d\beta e^{i\lambda r\cos(\beta-\theta)+in(\beta+3\pi/2)}.\tag{402}$$

再做变换$\phi=\beta-\theta$后，（402）式变成

$$f(r,\theta)=f_n(r)e^{in\theta}=e^{in\theta}\int_0^\infty\lambda g_n(\lambda)J_n(\lambda r)d\lambda.\tag{403}$$

由方程（401）和（403），我们得到一对付里叶-贝塞耳变换

$$f_n(r)=\int_0^\infty g_n(\lambda)J_n(\lambda r)\lambda d\lambda,\tag{404}$$

$$g_n(\lambda)=\int_0^\infty f_n(r)J_n(\lambda r)rdr.\tag{405}$$

取方程(403),并考虑谐时相关性和z向的相关性，再根据(383)式的付里叶级数所有的项求和，给出

$$\psi(r,\theta,z,t)=f(r,\theta,z)e^{-i\omega t}$$

$$=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{in\theta}\int_0^\infty g_n(\lambda)J_n(\lambda r)e^{\pm i\sqrt{k^2-\lambda^2}z}\lambda d\lambda.\tag{406}$$

这里的 $\psi(r,\theta,z,t)$ 就是圆柱坐标中波动方程的解。这个解，对 $t=0$，在平面 $z=0$ 上就简化为 $f(r,\theta)$。如果是柱坐标问题中，则除要求谐时关系外，方程（406）可对频谱成分 ω 求积分。

在类似的形式中，付里叶-贝塞耳积分表达式还能推广用于具有球对称的问题。对球对称问题，元波函数由方程（339）为

$$\psi(r,\theta,\phi,t)=\frac{1}{\sqrt{kr}}Z_{n+1/2}(kr)P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}e^{-i\omega t}. \tag{407}$$

现在找到了推广方程（407）的解。斯特拉顿（1941，p. 412）提出这种解的形式为

$$\psi(r,\theta,\phi,t)=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g_n(k)j_n(kr)k^2dkS_n(\theta,\phi). \tag{408}$$

这里的 $g_n(k)$ 由下述的一对变换描写

$$\left.\begin{aligned}f_n(r)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}g_n(k)j_n(kr)k^2\,dk,\\ g_n(k)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}f_n(r)\,j_n(kr)r^2\,dr,\end{aligned}\right\} \tag{409}$$

而 $S_n(\theta,\phi)=P_n^m(\cos\theta)e^{im\phi}$ 是 n 阶面谐函数。

（5）具有柱对称和球对称问题中特殊函数的选择

a. 柱函数——总结一下各种柱函数的应用是有益的。注意到柱函数和谐函数的相似，可以清楚地了解柱函数的特点。当宗量 (kr) 数值很大时，存在柱函数的一系列渐近式

$$J_n(kr)\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos(kr-\pi/4-n\pi/2),$$

$$Y_n(kr)\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin(kr-\pi/4-n\pi/2),$$

$$H_n^{(1)}(kr)\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{ikr}e^{-i(2n+1)\pi/4},$$

$$H_n^{(2)}(kr)\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}e^{-ikr}e^{i(2n+1)\pi/4},$$

$$\left.\begin{aligned} I_n(kr)&\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{2\pi kr}}\\ K_n(kr)&\xrightarrow[(kr)\to\infty]{}\sqrt{\frac{\pi}{2kr}}e^{-ikr}. \end{aligned}\right\}\quad (kr)\text{虚数。}$$

于是我们注意到，除了$1/\sqrt{kr}$衰减外，可得出下述性质上的类似

$$J_n(kr)\ \text{类似于}\ \cos(kr),$$
$$Y_n(kr)\ \text{类似于}\ \sin(kr),$$
$$H_n^{(1)}(kr)\ \text{类似于}\ e^{ikr},$$
$$H_n^{(2)}(kr)\ \text{类似于}\ e^{-ikr}.$$

例如，对实数的k，J_n和Y_n显示出振荡的特点，象蔓叶线函数，所以它们表示圆柱驻波。又如对实数的k，$H_n^{(1)}$和$H_n^{(2)}$表示行波，象指数函数，它们表示的是圆柱行波。$H_n^{(1)}$表示向外的行波，而$H_n^{(2)}$表示向内的行波。

当k为纯虚数时，$k=i\beta$，用修正贝塞耳函数I_n和K_n。由于这时ik是实数，所以它们也是实的，则有

$$I_n(kr)\ \text{类似于}\ e^{\beta r},$$
$$K_n(kr)\ \text{类似于}\ e^{-\beta r}.$$

由此推断，修正贝塞耳函数用来描述渐消失的波。

表1总结了柱函数的某些性质。

b．球函数——球贝塞耳函数与相应的柱贝塞耳函数在性质上有相同的特点。对实数的k，$j_n(kr)$和$y_n(kr)$表示驻波；$h_n^{(1)}(kr)$表示向外的行波，$h_n^{(2)}(kr)$表示向内的行波。为了表示球外的有限场，我们应该选择在无限远处仍保持场的固有特点的向外行波。

表 1

$Z_n(kr)$	采用的表达式	$kr\to 0$时的值	$\lvert kr\rvert\to\infty$时的值	零	无 限 大	物理解释
$H_n^{(1)}(kr)$	$J_n(kr)+iY_n(kr)$	$1-i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{(\gamma kr)}$; $n=0$ $\frac{(kr)^n}{2^n n!}-i\frac{2^n(n-1)!}{\pi(kr)^n}$; $n>0$	$\sqrt{\frac{-2i}{\pi kr}}i^{-n}e^{ikr}$	$kr\to+i\infty$	$kr=0$ $kr\to-i\infty$	实数k—向外的行波 虚数k—渐消失的场 复数k—衰减行波
$H_n^{(2)}(kr)$	$J_n(kr)-iY_n(kr)$	$1+i\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{(\gamma kr)}$; $n=0$ $\frac{(kr)^n}{2^n n!}+i\frac{2^n(n-1)!}{\pi(kr)^n}$; $n>0$	$\sqrt{\frac{2i}{\pi kr}}i^{n}e^{-ikr}$	$kr\to-i\infty$	$kr=0$ $kr\to+i\infty$	实数k—向内的行波 虚数k—渐消失的场 复数k—衰减的行波
$J_n(kr)$	$\frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(kr)+H_n^{(2)}(kr)\right]$	1; $n=0$ $\frac{(kr)^n}{2^n n!}$; $n>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cos(kr-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$	沿实轴 无穷多个数	$kr\to\pm i\infty$	实数k—驻波 虚数k—两个渐消失的场 复数k—定域驻波
$Y_n(kr)$	$\frac{1}{2i}\left[H_n^{(1)}(kr)-H_n^{(2)}(kr)\right]$	$-\frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{(\gamma kr)}$; $n=0$ $-\frac{2^n(n-1)!}{\pi(kr)^n}$; $n>0$	$\sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\sin(kr-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4})$	沿实轴 无穷多个数	$kr=0$ $kr\to\pm i\infty$	实数k—驻波 虚数k—两个渐消失的场 复数k—定域驻波

当$k=0$; $J_0=1$; $Y_0=\ln r$; $n=0$和$J_0=r^n$; $Y_0=r^{-n}$; $n\neq 0$; γ=欧拉常数

二、均匀静电场中的导电球

我们希望确定位于均匀外场中的一个导电球的标量势 ϕ，球的电导率为σ_1，它被埋置在电导率为σ_2 的媒质中。由于假设是静电场，故电场的表达式与时间无关，根据（24），这里只要考虑标量势就够了，即

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \qquad (2\text{-}1)$$

由于我们只对电场的测量有兴趣，故不去理会磁场。不过如果需要，我们也可以由下列第二个麦克斯韦方程推出磁场强度 $\mathbf{H}$，

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \qquad (2\text{-}2)$$

现在所讨论的问题，可直接用于近乎球形的透镜状矿体的电阻率测量。只要供电电极以较大的间隔固定着，而测量电极靠得较近且是可移动的，就满足问题的条件。

参见图2—1，让数值为 E_0 的外场沿 x 方向作用。远处没有

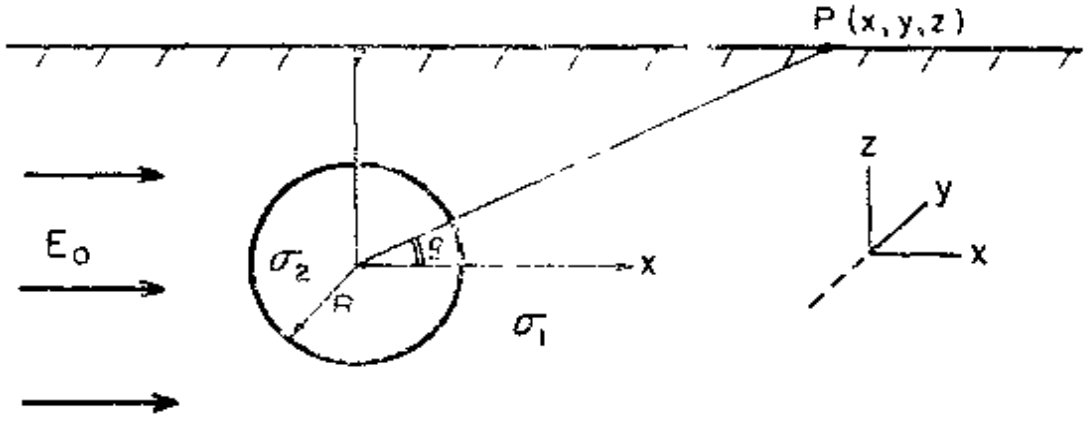


图 2—1　位于均匀静电场E_0中的导体球。球和围域的电导率分别为σ_2和σ_1，球半径为R，观察点为$P(x,y,z)$。注意，在这个图中 θ 是相对于x轴的量度，而ϕ是对z轴的角位移

球的影响，由式（2-1）有

$$E_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial x}$$

或

$$\phi_0 = -E_0 x, \tag{2-3}$$

这里已略去了积分常数。由于没有源，且没有时间的变化，根据（31）式，势场应该满足拉普拉斯方程。由于问题具有球对称性，故我们就在球坐标中寻求拉普拉斯方程的解。依方程(340)，我们找到下面形式的解（现在，θ和ϕ是相对于x轴的度量而不是对z轴，因为x轴在水平一次场方向，而z轴与其垂直）：

$$\phi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ a_{nm} r^n + \frac{b_{nm}}{r^{n+1}} \right\} P_n^m(\cos\theta) e^{im\phi}. \tag{2-4}$$

由于一次场的势对x轴是对称的，因而它与ϕ无关，所以要求$m=0$。在球外，因球产生的势在无限远处是有界的，所以r的正幂不应在球外出现。在球内，解在原点必须是有限的，所以r的负幂不应在球内出现。于是解简化为

$$\phi_e^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\theta), \quad \text{在球外} \tag{2-5}$$

$$\phi_i^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta), \quad \text{在球内} \tag{2-6}$$

它们就是异常势ϕ_e^n和ϕ_i^n。物理上要求在原点和无限远处解是有限的，所以必须是球内的$b_n=0$，球外$a_n=0$。

在无限远处，激发场或正常场的势ϕ^n，由（2-3)式，应为

$$\phi_\infty^n = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta = -E_0 r P_1(\cos\theta). \tag{2-7}$$

所以在（2-5)式中，$n>1$的全部b_n都为零，而且$a_0=b_0=0$，故球外的总势$\phi_e=\phi_e^a+\phi_e^n$是

$$\phi_e = \left\{ -E_0 r + \frac{b_1}{r^2} \right\} P_1(\cos\theta), \tag{2-8}$$

式中$-E_0 r\cos\theta$表示一次场的势，而$b_1/r^2\cos\theta$表示二次场的势。

在球面上，势ϕ'和电流密度的法向分量$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}=\sigma\mathbf{E}\cdot\mathbf{n}$都应该是连续的。由势的连续性得

$$\phi_i' = \phi_e'$$

或者

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(\cos\theta) \Big|_{r=R} = \left\{-E_0 r + \frac{b_1}{r^2}\right\}\cos\theta \Big|_{r=R} . \quad (2\text{-}9)$$

可见，除了$n=1$外，对其它所有的n，有 $a_n=0$。由方程（2-9）得到

$$a_1 r\cos\theta \Big|_{r=R} = \left\{-E_0 r + \frac{b_1}{r^2}\right\}\cos\theta \Big|_{r=R} . \quad (2\text{-}10)$$

于是有

$$a_1 = -E_0 + \frac{b_1}{R^3} . \quad (2\text{-}11)$$

方程（2-6)就简化为

$$\phi_i^a = \left(-E_0 + \frac{b_1}{R^3}\right) r\cos\theta . \quad (2\text{-}12)$$

球内的电场强度是

$$E_i^a = -\frac{\partial \phi_i^a}{\partial x} = -a_1 = E_0 - \frac{b_1}{R^3} . \quad (2\text{-}13)$$

注意它是一个常数。

我们希望用J的法向分量在球面上的连续性，并引入电导率σ_1和σ_2。$\mathbf{J}_1$的法向分量的连续性给出

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_1 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{J}_2$$

$$-\sigma_2 \frac{\partial \phi_i}{\partial r} = -\sigma_1 \frac{\partial \phi_e}{\partial r} ,$$

$$-\sigma_2\left(-E_0 + \frac{b_1}{R^3}\right)\cos\theta = -\sigma_1\left\{-E_0 - \frac{2b_1}{r^3}\right\}\cos\theta \Big|_{r=R} . \quad (2\text{-}14)$$

由它得出

$$\sigma_2\left[E_0-\frac{b_1}{R^3}\right]\cos\theta=\sigma_1\left[E_0+\frac{2b_1}{R^3}\right]\cos\theta\,. \qquad (2\text{-}15)$$

或

$$b_1=\left(\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}\right)E_0R^3\,. \qquad (2\text{-}16)$$

于是由方程（2-8）和（2-16），可写出球外的势为

$$\phi_r=\left[-E_0r+\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}E_0R^3\frac{1}{r^2}\right]\cos\theta\,. \qquad (2\text{-}17)$$

外加场E_0产生了一正常势$\phi_r^n=-E_0r\cos\theta$和一异常势

$$\phi_r^a=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}E_0R^3\frac{1}{r^2}\cos\theta\,.$$

物探中通常只考虑异常场，测量的是势的梯度。所以我们希望把总异常场表示为

$$\mathbf{E}^a=-\nabla\phi_r^a=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}E_0R^3$$

$$\cdot\left[\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5}\mathbf{i}+\frac{3xy}{r^5}\mathbf{j}+\frac{3xz}{r^5}\mathbf{k}\right]. \qquad (2\text{-}18)$$

通常我们的测量仅限于外加场方向，即x方向，所以方程(2-18)的括弧中只有第一项是有用的。

量

$$P=\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}E_0R^3 \qquad (2\text{-}19)$$

是球的感应电偶极矩。

应当指出，这里的讨论忽略了空气-大地间的界面。

已算过通过球心并与外加场E_0平行的截面上的电场强度（即水平电势梯度）异常（2-18），如图2—2所示。图中比值$\sigma_2/\sigma_1=10$，$R=50$米，$z=75$米，$E_0=1$伏/米。对这样的计算，方程（2-18）用下面无量纲的形式是最方便的

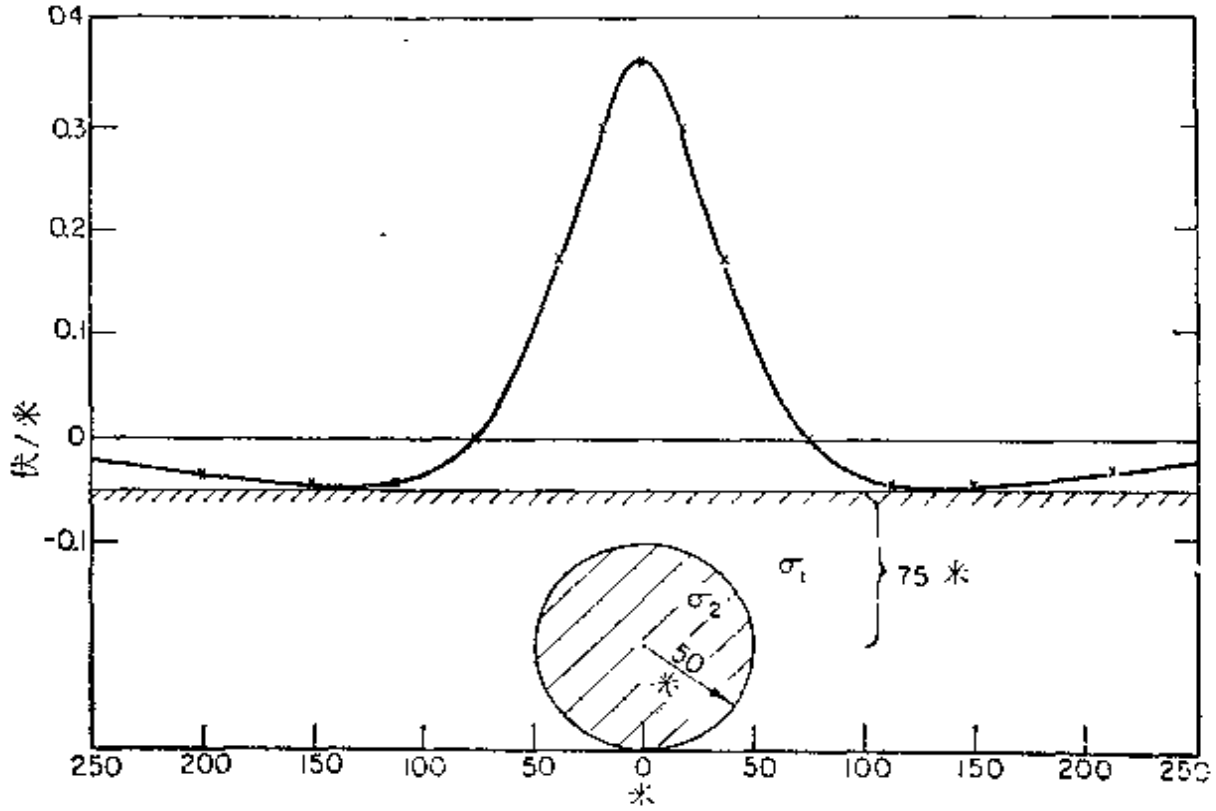


图 2—2　电场异常（单位：伏/米）与距离之间的关系。球的半径为50米，埋深75米，$\sigma_2/\sigma_1 = 10$，$E_0 = 1$伏/米

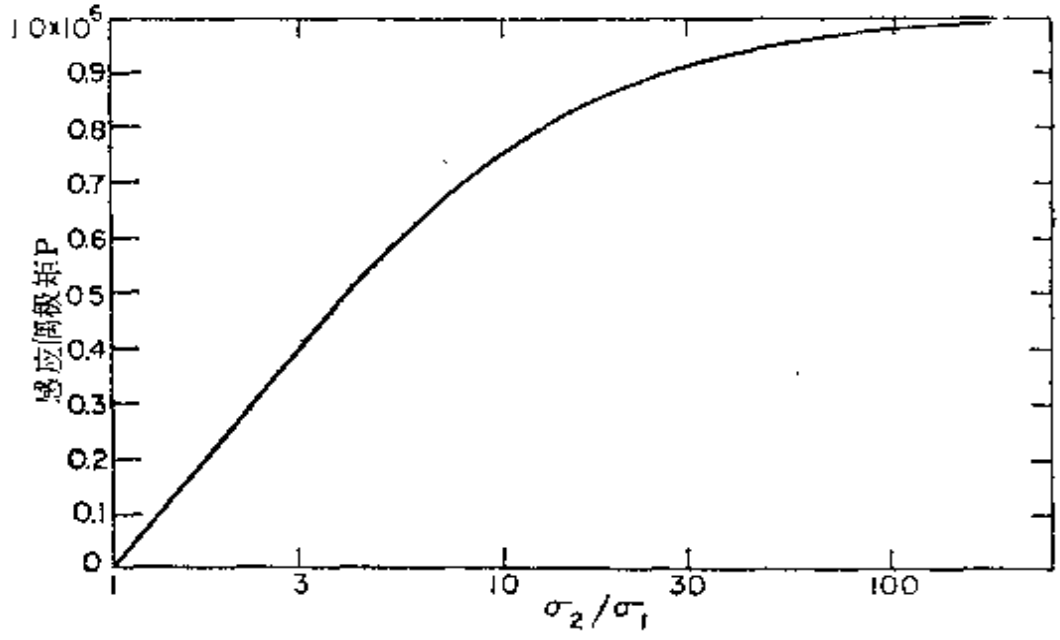


图 2—3　静电场中球的感应偶极矩 $P = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 R^3$ 与σ_2/σ_1间的关系

$$E_z^s = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\sigma_2 + 2\sigma_1} E_0 \left(\frac{R}{z}\right)^3 \left[\frac{2\left(-\frac{x}{z}\right)^2 - 1}{\left\{\left(\frac{x}{z}\right)^2 + 1\right\}^{5/2}} \right]. \tag{2-20}$$

图 2—3表示了同一条件下感应偶极矩（2-19）作为 σ_2/σ_1 的函数的变化情况。注意饱和状态发生在比值σ_2/σ_1约为 10^2 处，电阻率的比值大于 100 后，偶极矩的增大很小。另外，偶极矩随球半径的立方而无限增大。

三、均匀横静电场中的导电柱

设静电场垂直于埋放在导电媒质中的无限长导电圆柱体的轴（图3—1），以 y 为轴向。由于轴向没有变化，故可用由式(314)给出的解：

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)(C_n r^n + D_n r^{-n}). \qquad (3\text{-}1)$$

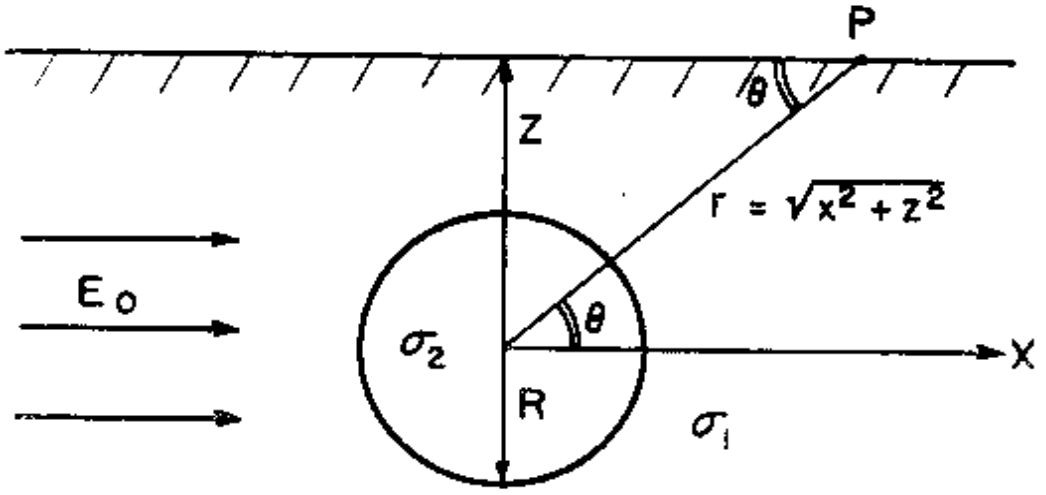


图 3—1　均匀横静电场E_0中的导体柱。圆柱和围域的电导率分别为σ_2、σ_1，柱的半径为R，观察点为P (x,y,z)。注意，θ是相对于此图中做为极轴的 x 轴的量度，且正 y 坐标是指向纸内的

柱外的外加场是E_0，根据方程 (2-3)，它的外加势是

$$\phi_0 = -E_0 x = -E_0 r\cos\theta. \qquad (3\text{-}2)$$

在无穷远处，由柱上感应电荷产生的势必须为零；故r^n的项不应出现，因此C_n等于零。另一方面，势对于 x 轴应该是对称的，因此包含$\sin n\theta$ 的项不应出现，这样B_n必须为零。于是圆柱外的势ϕ_e的形式为

$$\phi_e = -E_0 r\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^e r^{-n}\cos n\theta, \qquad (3\text{-}3)$$

式中常数$A_n^e=A_nD_n$。

在圆柱内，如果势仍为有限，则必须除去包含r^{-n}的解，所以有

$$\phi_i=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n^i\cos n\theta+B_n^i\sin n\theta]r^n, \qquad (3\text{-}4)$$

式中$A_n^i=A_nC_n$，$B_n^i=B_nC_n$。

在边界上，$r=R$，边界条件为

$$\phi_e=\phi_i|_{r=R} \qquad (3\text{-}5)$$

$$-\sigma_1\frac{\partial\phi_e}{\partial r}=-\sigma_2\frac{\partial\phi_i}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \qquad (3\ 6)$$

条件（3-5)告诉我们，n的值只能为1。因为在方程（3-3)中，只有激发势才含有r的正幂，而在那一项中r的指数为1，于是得

$$-E_0R+\frac{A_1^e}{R}=A_1^iR \qquad 和 \quad B_n^i=0. \qquad (3\text{-}7)$$

由条件（3-6）发现

$$-\sigma_1E_0-\frac{\sigma_1A_1^e}{R^2}=\sigma_2A_1^i. \qquad (3\text{-}8)$$

于是得到

$$A_1^i=\frac{-2\sigma_1E_0}{\sigma_1+\sigma_2} \qquad (3\text{-}9)$$

和

$$A_1^e=E_0R^2\left\{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}\right\}. \qquad (3\text{-}10)$$

这样，圆柱外的势是

$$\phi_e=-E_0r\cos\theta+E_0R_1\left\{\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}\right\}\cos\theta=\phi_e^n+\phi_e^a. \qquad (3\text{-}11)$$

上式的第二项表示异常场或被感应场的势。物性参数$(\sigma_2-\sigma_1)/(\sigma_2+\sigma_1)$做为比值$\sigma_2/\sigma_1$的函数的变化关系示于图3—3中。

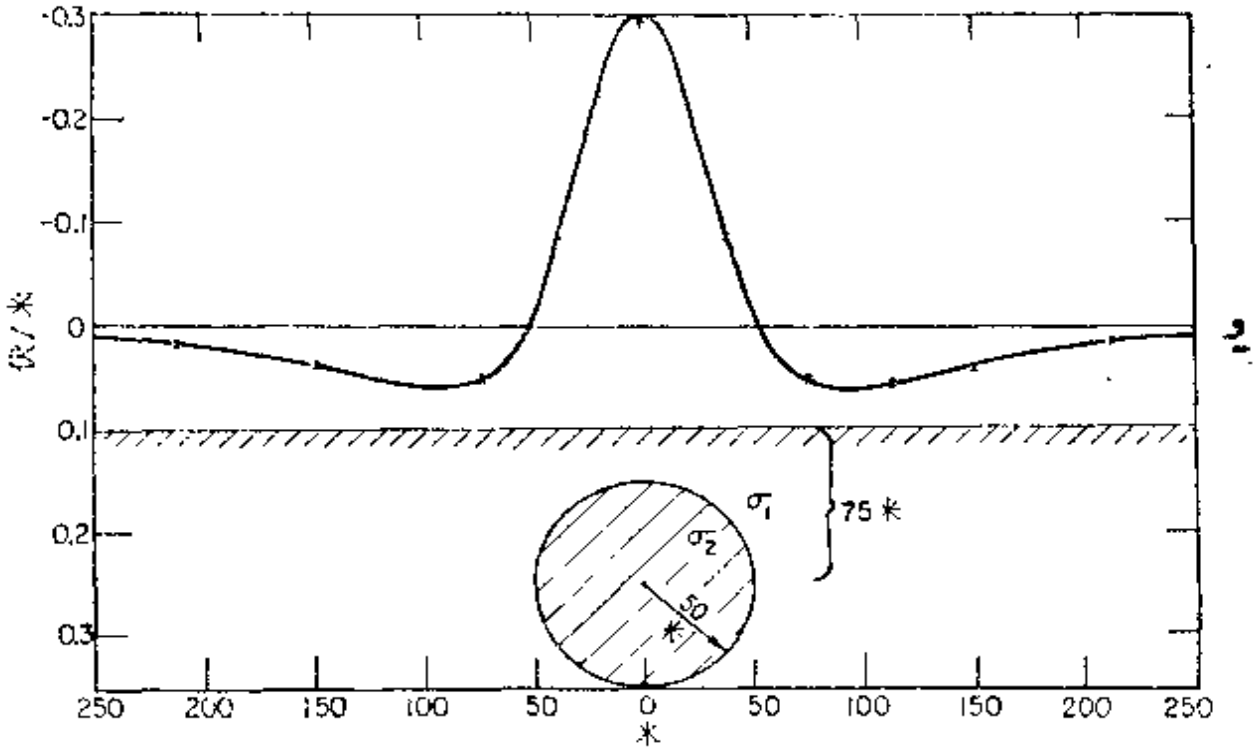


图 3—2 用每米伏表示的电场中的异常与通过圆柱横切面的距离间的关系，柱半径为50米，埋深75米，$\sigma_2/\sigma_1=10$，$E_0=1$ 伏/米

与前面的结果一样，异常值的上升，随比值 σ_2/σ_1 的增加趋于饱和；当比值 σ_2/σ_1 为10时，异常达到最大值的 82%；电导率比值进一步增大时，异常的增加就很小了。异常势随观测点与圆柱中心距离的一次幂而减小，随圆柱半径的平方而增大。

异常场的电场强度是

$$\mathbf{E}^a=-\nabla\phi_z^a=\left[\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+\sigma_1}\right]E_0R^2\left[\frac{(x^2-z^2)\mathbf{i}+2xz\mathbf{k}}{r^4}\right]. \tag{3-12}$$

这是一线偶极子场，它与从柱心径向距离的平方成反比。已对平行于激发场$\mathbf{E}_0$的剖面算出了电场强度（即水平电势梯度）的异常，如图3—2所示。图中相应的$\sigma_2/\sigma_1=10$，$R=50$米，$z=75$米，$E_0=1$伏/米。

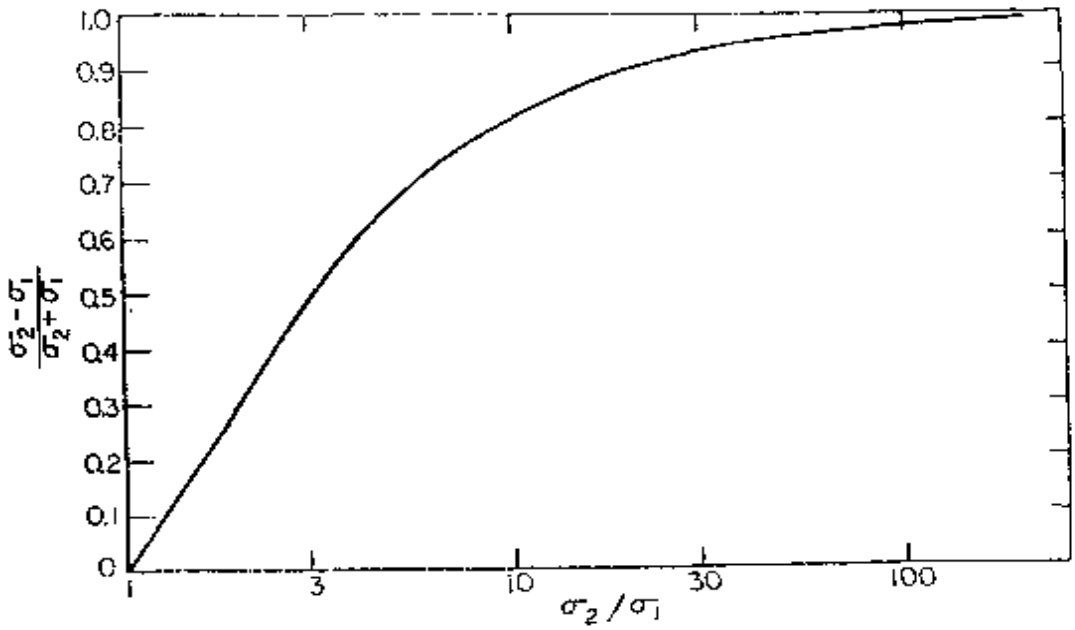


图 3—3　对坪在静电场中的圆柱，物性因子$F=(\sigma_2-\sigma_1)/(\sigma_2+\sigma_1)$与$\sigma_2/\sigma_1$间的关系

四、均匀静磁场中的导磁球

仿照第二节关于均匀静电场中的导电球的讨论。这一节假设一个半径为 a 的球，其导磁率为 $K_m^{(2)}=\mu_2/\mu_0$，将它埋放在导磁率为 $K_m^{(1)}=\mu_1/\mu_0$ 的媒质中（图 4—1）。同样，我们将分别讨论球内和球外的势 ϕ_i^{*a} 和 ϕ_e^{*a}。

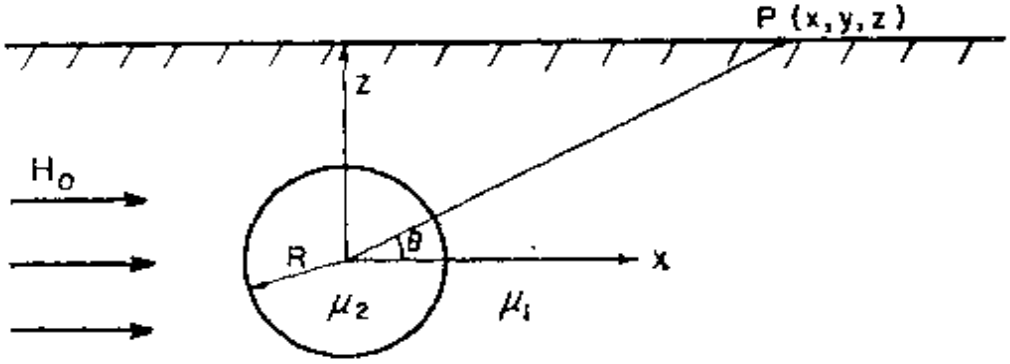


图 4—1　均匀静磁场 H_0 中的导磁球。球及围域的感应容率分别为 μ_2、μ_1，球半径为 R，观察点为 $P(x,y,z)$

球外的势是均匀场的势与球体感应场的势之和。这样，与方程（2-5）和（2-6）类似，可以写出：

$$\phi_e^*=-H_0 r\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n^e}{r^{n+1}}P_n(\cos\theta) \tag{4-1}$$

和

$$\phi_i^*=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^i r^n P_n(\cos\theta)\ . \tag{4-2}$$

边界条件是

$$\phi_i^*=\phi_e^*\big|_{r=R}, \tag{4-3}$$

$$-\mu_2\frac{\partial\phi_i^*}{\partial r}=-\mu_1\frac{\partial\phi_e^*}{\partial r}\bigg|_{r=R}\ , \tag{4-4}$$

这些边界条件给出联立方程

$$-H_0R\cos\theta+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n^e}{R^{n+1}}P_n(\cos\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^iR^nP_n(\cos\theta)$$

(4-5)

$$-\mu_1H_0\cos\theta-\mu_1\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{A_n^e}{R^{n+2}}P_n(\cos\theta)$$

$$=\mu_2\sum_{n=0}^{\infty}nA_n^iR^{n-1}P_n(\cos\theta)\ . \qquad (4-6)$$

让等式两端对应的$P_n(\cos\theta)$的系数相等，则得出

$$-H_0R+\frac{A_1^e}{R^2}=A_1^iR, \qquad (4-7)$$

$$-\mu_1H_0-\mu_1\frac{2A_1^e}{R^3}=\mu_2A_1^i \qquad (4-8)$$

或

$$A_1^e=H_0R_3\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+2\mu_1}\right]. \qquad (4-9)$$

于是球外的势为

$$\phi_e^*=-H_0r\cos\theta+\frac{H_0R^3}{r^2}\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+2\mu_1}\right]\cos\theta. \qquad (4-10)$$

异常势是方程（4-10）右端的第二项。在磁法勘探中，我们关心的是磁场强度而不是磁势，故再求出异常场

$$\mathbf{H}^a=-\nabla\phi_e^{*a}=\left[\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+2\mu_1}\right]H_0R^3\left[\frac{2x^2-y^2-z^2}{r^5}\mathbf{i}\right.$$

$$\left.+\frac{3xy}{r^5}\mathbf{j}+\frac{3xz}{r^5}\mathbf{k}\right]. \qquad (4-11)$$

通常我们用磁化率表示物性的对比，而不用感应容率μ_i或磁导率$K_m^{(i)}$，故写出

$$F=\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+2\mu_1}=\frac{K_m^{(2)}-K_m^{(1)}}{K_m^{(2)}+2K_m^{(1)}}=\frac{x_m^{(2)}-x_m^{(1)}}{x_m^{(2)}+2x_m^{(1)}+3}. \qquad (4-12)$$

由于方程(4-12)是无量纲的，我们可用CGS制的 ki 来代替MKS制中的$\chi_m^{(i)}$，二者的关系为$\chi_m^{(i)}=4\pi ki$，得出：

$$F=\frac{4\pi(k_2-k_1)}{4\pi(k_2+2k_1)+3}=\frac{\frac{4\pi}{3}(k_2-k_1)}{\frac{4\pi}{3}(k_2+2k_1)+1}. \tag{4-13}$$

这个物性因子与很多物探教科书中所引用的不同（例如海兰德，p.390)。别的书所给出的一个典型的形式为：

$$F'=\frac{\frac{4\pi}{3}(k_2-k_1)}{\frac{4\pi}{3}(k_2-k_1)+1}. \tag{4-14}$$

表达式（4-14）只有在 $k_1=0$ 时才是对的，否则就只能用(4-13)式。

异常H_z^s的形式与图2—2给出的一样，它随比值 k_2/k_1 的增加而趋于饱和的情况示于图4—2中。

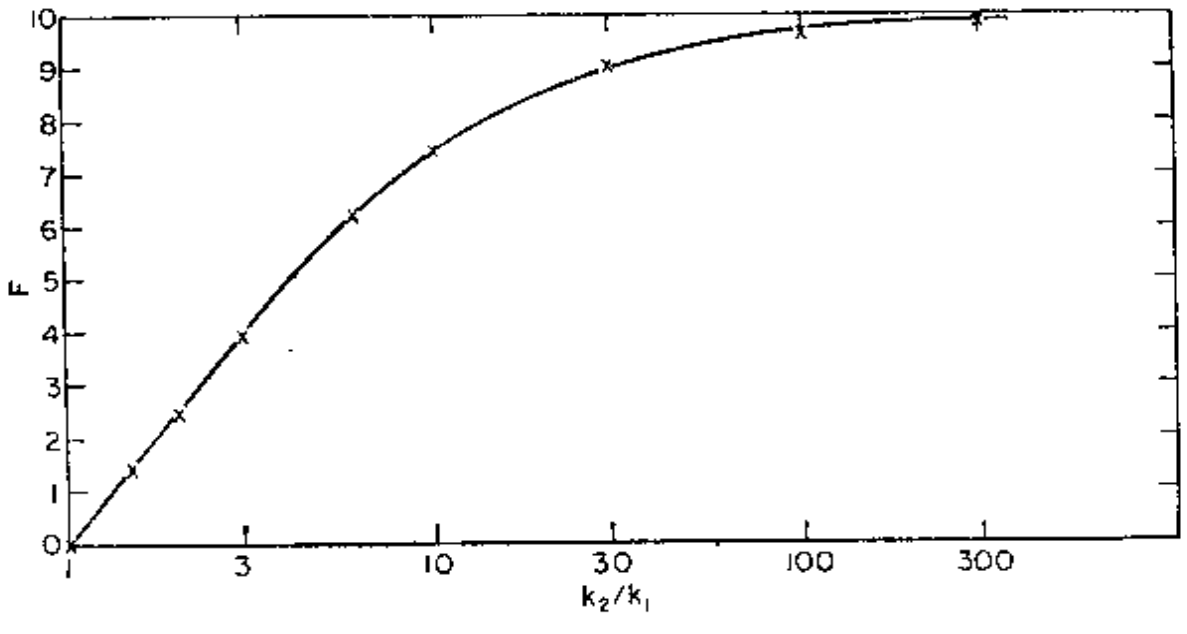


图 4—2 静磁场中球的物性因子

$F=\frac{(k_2/k_1)-1}{\left(\frac{k_2}{k_1}+2\right)+\frac{0.235}{k_1}}$ 与k_2/k_1的关系。对所有$k_1>10$的值，曲线是准确的

五、均匀横静磁场中的导磁柱

若比较一下方程（2-18）和（4-11），就会看到，对于均匀场中球体的静电和静磁问题，除了物性因子

$$\frac{\sigma_2-\sigma_1}{\sigma_2+2\sigma_1}\text{和}\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+2\mu_1}$$

外，结果是一样的。所以当我们研究位于均匀横静磁场中的导磁柱时，只要相应地改变一下物性因子，H异常场将与E异常场〔(3-12)式〕是一样的，于是我们立刻可以写出H异常场

$$\mathbf{H}=-\nabla\phi_z^{*a}=\left\{\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1}\right\}H_0R^2\left[\frac{-(x^2-z^2)\mathbf{i}+2xz\mathbf{k}}{r^4}\right]. \tag{5-1}$$

当然，我们能用与证明方程（3-12）同样的方式来证明方程(5-1)。

关于异常场形式的演绎可直接由前几节的分析得出。注意，在所有四个等式（2-18）、（3-12）、（4-11）、(5-1）中，异常场是由下述四个基本部分组成的：

$$\mathrm{A}=(\mathrm{PPF})\cdot(\mathrm{IF})\cdot(\mathrm{SF})\cdot(\mathrm{GF}) \tag{5-2}$$

式中 A＝异常场；

PPF＝物性因子；

IF＝激发场；

SF＝大小因子；

GF＝几何因子；

$\mathrm{PPF}=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+2\alpha_1}$ 对球体，

$=\dfrac{\alpha_2-\alpha_1}{\alpha_2+\alpha_1}$ 对柱体；

$$IF = E_0,\ H_0$$

$$SF = R^3 \qquad \text{对球体，}$$

$$= R^2 \qquad \text{对柱体；}$$

$$GF = -\frac{(2x^2 - y^2 - z^2)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}}{r^5} \qquad \text{对激发场在 } x$$

方向的球体，

$$= \frac{(x^2 - y^2)\mathbf{i} + 2xz\mathbf{k}}{r^4} \qquad \text{对激发场在 } x \text{ 方向的柱体。}$$

六、谐变磁场中的导电导磁球

下面考虑将一个电导率为σ_2、感应容率为μ_2和ε_2的球体埋放在被参数σ_1、μ_1、ε_1所确定的无限大媒质中的情形（图 6-1）。在 x 方向作用一个均匀的交变磁场

$$H=H_0e^{-i\omega t}. \tag{6-1}$$

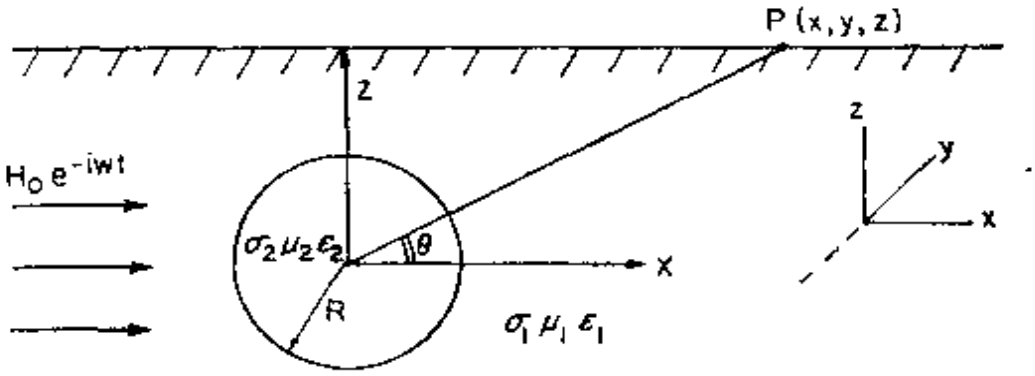


图 6—1　在均匀交变磁场$H_0e^{-i\omega t}$中的导电导磁球。球体和围域的常数分别为 $\sigma_2\mu_2\varepsilon_2$、$\sigma_1\mu_1\varepsilon_1$。球半径为 R，观察点为 $P(x,y,z)$

为使球的附近场是均匀的，应该要求$|k_1R|\ll1$，这里 k_1 是无限媒质的传播常数，它由下式来定义

$$k_1=[\mu_1\varepsilon\omega^2+i\mu_1\sigma_1\omega]^{1/2}. \tag{6-2}$$

不等式$|k_1R|\ll1$要求球外媒质中交变场的波长远大于球的半径（$k_1=2\pi/\lambda_1$）。在这个限制下，激发场的振幅在球的附近应保持不变。球的媒质的传播常数是

$$k_2=[\mu_2\varepsilon_2\omega^2+i\mu_2\sigma_2\omega]^{1/2}. \tag{6-3}$$

由于激发源是纯磁性的，因而可用赫兹矢量 π^*来计算磁场。在限制只有磁性源的情况下，通过方程（77）可以算出磁场为：

$$\mathbf{H}=\nabla\nabla\cdot\pi^*+k^2\pi^*. \tag{6-4}$$

由于一次场是均匀的，其散度为零，所以可用势 π_1^* 将它简单地表示为

$$\mathbf{H}_0 = k^2 \boldsymbol{\pi}_0^*, \tag{6-5}$$

显然，由于均匀的一次场沿 x 方向作用，故它对 x 轴应该是对称的。又由于 $\mathbf{H}_0$ 垂直于 z-y 平面，故电流被限制在该平面内，因而电矢量也被限制在 z-y 平面内，亦即它是横场。这样，与方程（306）和（307）类似，我们只需用 $\boldsymbol{\pi}^*$ 的 x 分量 π_x^*，于是矢量波动方程就被简化为一个标量方程。下面我们就来解这方程。

考虑到对 x 轴的对称性，我们可在球坐标中寻求 π_x^* 方程与 Φ 无关的解。找出一个由（339）式给出的适当的标量解。对在无限远处数值有限的行波解，有

$$\pi_{x0}^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos\theta); \tag{6-6}$$

或对在原点上数值有限的驻波解，有

$$\pi_{x2}^* = \sum_{n=0}^{\infty} a_n j_n(k_2 r) P_n(\cos\theta). \tag{6-7}$$

在球外，一次场和二次场的总势为

$$\pi_{x1}^* = \frac{H_0}{k_1^2} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos\theta). \tag{6-8}$$

边界条件为

（1）$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$，法向 $\mathbf{B}$ 是连续的，

（2）$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0$，切向 $\mathbf{H}$ 是连续的。

在球的边界 $r = R$ 处应用这些条件。由于 H_0/k_1^2 项只有零级的勒让特多项式 $P_0(\cos\theta) = 1$，因而如果要满足边界条件的话，（6-7）和（6-8）式中所有的 n 都必须限制在零级，即要求 $n > 0$ 时，$a_n = bn = 0$。对 $n = 0$ 有

$$h_0^{(1)}(kr) = \frac{e^{ikr}}{ikr} \text{ 和 } j_0(kr) = \frac{\sin(kr)}{kr}$$

（哈林顿，1961，p.266）。于是（6-8）和（6-7）式简化为

$$\pi_{x1}^* = \frac{H_0}{k_1^2} + b_0 \frac{e^{ik_1 r}}{r}, \tag{6-9}$$

$$\pi_{x2}^{*}=a_0\frac{\sin k_2 r}{r}. \tag{6-10}$$

这个结果与斯特拉顿（1941，p.405-406）的结果一致。注意，这里已把常数ik_1和k_2分别合并到b_0和a_0当中了。下面再回头来讨论边界条件。我们应该用矢量势π^*，经下面的关系来求其结果

$$\mathbf{H}=\nabla\nabla\cdot\pi^*+k^2\pi^*.$$

在球坐标里（索末菲，1952，p.150）：

$$\nu_r\nabla\cdot\pi^*=\cos\theta\frac{\partial^2\pi_x^*}{\partial r^2},$$

$$\nabla_\theta\nabla\cdot\pi^*=-\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\pi_x^*}{\partial r},$$

$$\nabla_\phi\nabla\cdot\pi^*=0.$$

所以有：

$$n\cdot(\mu_2\mathbf{H}_2-\mu_1\mathbf{H}_1)=\mu_2\left(\frac{\partial^2\pi_{x2}^*}{\partial r^2}+k_2^2\pi_{x2}^*\right)$$

$$-\mu_1\left(\frac{\partial^2\pi_{x1}^*}{\partial r^2}+k_1^2\pi_{x1}^*\right)=0$$

和

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2-\mathbf{H}_1)=\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{x2}^*}{\partial r}+k_2^2\pi_{x2}^*\right)$$

$$-\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{x1}^*}{\partial r}+k_1^2\pi_{x1}^*\right)=0.$$

于是用球坐标中的势来表示的法向**B**连续的边界条件变成

$$\mu_2\left(\frac{\partial^2\pi_{x2}^*}{\partial r^2}+k_2^2\pi_{x2}^*\right)=\mu_1\left(\frac{\partial^2\pi_{x1}^*}{\partial r^2}+k_1^2\pi_{x1}^*\right)\Big|_{r=R}. \tag{6-11}$$

类似地，切向**H**连续的边界条件变成

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{x2}^*}{\partial r}+k_2^2\pi_{x2}^*=\frac{1}{r}\frac{\partial\pi_{x1}^*}{\partial r}+k_1^2\pi_{x1}^*\Big|_{r=R} \tag{6-12}$$

现在，希望将（6-9）和（6-10）式代入（6-11）和（6-12）式。为便于论证，我们进行如下：

$$\pi_{x2}^{*}=a_0\frac{\sin k_2 r}{r}, \tag{6-13}$$

$$\frac{\partial \pi_{x2}^{*}}{\partial r}=\frac{a_0 k_2\cos k_2 r}{r}-\frac{a_0\sin k_2 r}{r^2}, \tag{6-14}$$

$$\frac{\partial^2 \pi_{x2}^{*}}{\partial r^2}=\frac{-a_0k_2^2\sin k_2 r}{r}-\frac{a_0k_2\cos k_2 r}{r^2}$$

$$-\frac{a_0k_2\cos k_2 r}{r^2}+\frac{2a_0\sin k_2 r}{r^3},$$

$$=\frac{-a_0k_2^2\sin k_2 r}{r}-\frac{2a_0k_2\cos k_2 r}{r^2}+\frac{2a_0\sin k_2 r}{r^3}, \tag{6-15}$$

$$\mu_2\left(\frac{\partial^2 \pi_{x2}^{*}}{\partial r^2}+k_2^2\pi_{x2}^{*}\right)=\frac{2a_0\mu_2(\sin k_2 r-k_2 r\cos k_2 r)}{r^3}, \tag{6-16}$$

表达式（6-16）是在 $r=R$ 处求值的；为了方便，我们在此式两端都乘以R^3并让$Rk_2=\alpha$

$$R^3\mu_2\left(\frac{\partial^2 \pi_{x2}^{*}}{\partial r^2}+k_2^2\pi_{x2}^{*}\right)=2a_0\mu_2[\sin\alpha-\alpha\cos\alpha]. \tag{6-17}$$

类似地写出

$$\pi_{x1}^{*}=-\frac{H_0}{k_1^2}+\frac{b_0e^{ik_1 r}}{r}, \tag{6-18}$$

$$\frac{\partial \pi_{x1}^{*}}{\partial r}=\frac{b_0e^{ik_1 r}ik_1}{r}-\frac{b_0e^{ik_1 r}}{r^2}, \tag{6-19}$$

$$\frac{\partial^2 \pi_{x1}^{*}}{\partial r^2}=\frac{-b_0k_1^2e^{ik_1 r}}{r}-\frac{b_0ik_1e^{ik_1 r}}{r^2}$$

$$-\frac{b_0ik_1e^{ik_1 r}}{r^2}+\frac{2b_0e^{ik_1 r}}{r^3}, \tag{6-20}$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial^2\pi_{x1}^*}{\partial r^2}+k_1^2\pi_{x1}^*\right)=\frac{-\mu_1 b_0 k_1^2 e^{ik_1r}}{r}$$

$$-\frac{k_1 2i\mu_1 b_0 e^{ik_1r}}{r^2}+\frac{2\mu_1 b_0 e^{ik_1r}}{r^3}+\frac{\mu_1 k_1^2 b_0 e^{ik_1r}}{r}+\mu_1 H_0. \tag{6-21}$$

我们希望在$r=R$处求方程（6-21）右边的值。为便于计算，给该式两端乘以R^3，并借助于$|Rk_1|\ll 1$的基本假设

$$R^3\mu_1\left(\frac{\partial^2\pi_{x1}^*}{\partial r^2}+k_1^2\pi_{x1}^*\right)=2\mu_1 b_0+\mu_1 H_0 R^3. \tag{6-22}$$

为满足边界条件（6-11），使方程（6-17）和（6-22）相等，有结果

$$2a_0\mu_2(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)=2\mu_1 b_0+\mu_1 H_0 R^3. \tag{6-23}$$

由此式得到

$$a_0=\frac{\mu_1}{\mu_2}b_0\frac{1}{[\sin\alpha-\alpha\cos\alpha]}+\frac{\mu_1}{2\mu_2}H_0R^3\cdot\frac{1}{[\sin\alpha-\alpha\cos\alpha]}. \tag{6-24}$$

由第二个边界条件（6-12）得到

$$\frac{a_0k_2\cos k_2r}{r^2}-\frac{a_0\sin k_2r}{r^3}+k_2^2a_0\frac{\sin k_2r}{r}=\frac{b_0ik_1e^{ik_1r}}{r^2}-\frac{b_0e^{ik_1r}}{r^3}+\frac{k_1^2b_0e^{ik_1r}}{r}+H_0. \tag{6-25}$$

再一次借助$|k_1R|\ll 1$的假定，在$r=R$处计算方程（6-25）。为便于计算，等式两端同乘以R^3，并让$\alpha=k_2R$，则有

$$a_0[\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\alpha^2\sin\alpha]=-b_0+H_0R^3$$

或

$$a_0=-b_0\frac{1}{[\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\alpha^2\sin\alpha]}+H_0R^3\cdot\frac{1}{[\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\alpha^2\sin\alpha)}. \tag{6-26}$$

使方程（6-24）和（6-26）相等，就得出了用系统的参数表示的b_0的表达式

$$b_0=H_0R^3\frac{2\mu_2[\sin\alpha-\alpha\cos\alpha]-\mu_1[\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\alpha^2\sin\alpha]}{2\mu_2[\sin\alpha-\alpha\cos\alpha]+2\mu_1[\alpha\cos\alpha-\sin\alpha+\alpha^2\sin\alpha]}. \tag{6-27}$$

如作代换$\alpha=i\beta$，可得到等价的形式

$$b_0=H_0R^3\frac{2\mu_2[\sinh\beta-\beta\cosh\beta]+}{2\mu_2[\sinh\beta-\beta\cosh\beta]-}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{+\mu[\sinh\beta-\beta\cosh\beta+\beta^2\sinh\beta]}{-2\mu_1[\sinh\beta-\beta\cosh\beta+\beta^2\sinh\beta]}. \tag{6-28}$$

除了术语不同外，它与韦特（1951）得到的结果一样。为便于运算，我们想把方程（6-27）写成如下的形式

$$b_0=H_0R^3\frac{2\mu_2[\tan\alpha-\alpha]-\mu_1[\alpha-\tan\alpha+\alpha^2\tan\alpha]}{2\mu_2[\tan\alpha-\alpha]+2\mu_1[\alpha-\tan\alpha+\alpha^2\tan\alpha]} \tag{6-29}$$

式中

$$\alpha=k_2R=(\mu_2\varepsilon_2\omega^2+i\mu_2\sigma_2\omega)^{1/2}R \tag{6-30}$$

如能忽略位移电流，则可把方程（6-30）写为

$$\alpha=(i\mu_2\sigma_2\omega)^{1/2}R=(i)^{1/2}\theta \tag{6-31}$$

这里

$$\theta=(\sigma_2\mu_2\omega)^{1/2}R. \tag{6-32}$$

对一个可以忽略其导磁性的球，韦特（1951）将方程（6-28）写为如下形式

$$b_0=H_0R^3(M-iN). \tag{6-33}$$

在一般情况下

$$(M-iN)=\left[\frac{2\mu_2(\tan\alpha-\alpha)-\mu_1(\alpha-\tan\alpha+\alpha^2\tan\alpha)}{2\mu_2(\tan\alpha-\alpha)+2\mu_1(\alpha-\tan\alpha+\alpha^2\tan\alpha)}\right]. \tag{6-34}$$

图 6—2 中，对应不同的比值 μ_2/μ_1，画出了同相实分量函数M和异相虚分量函数N与无量纲参数 θ 的关系，感应容率比值的范

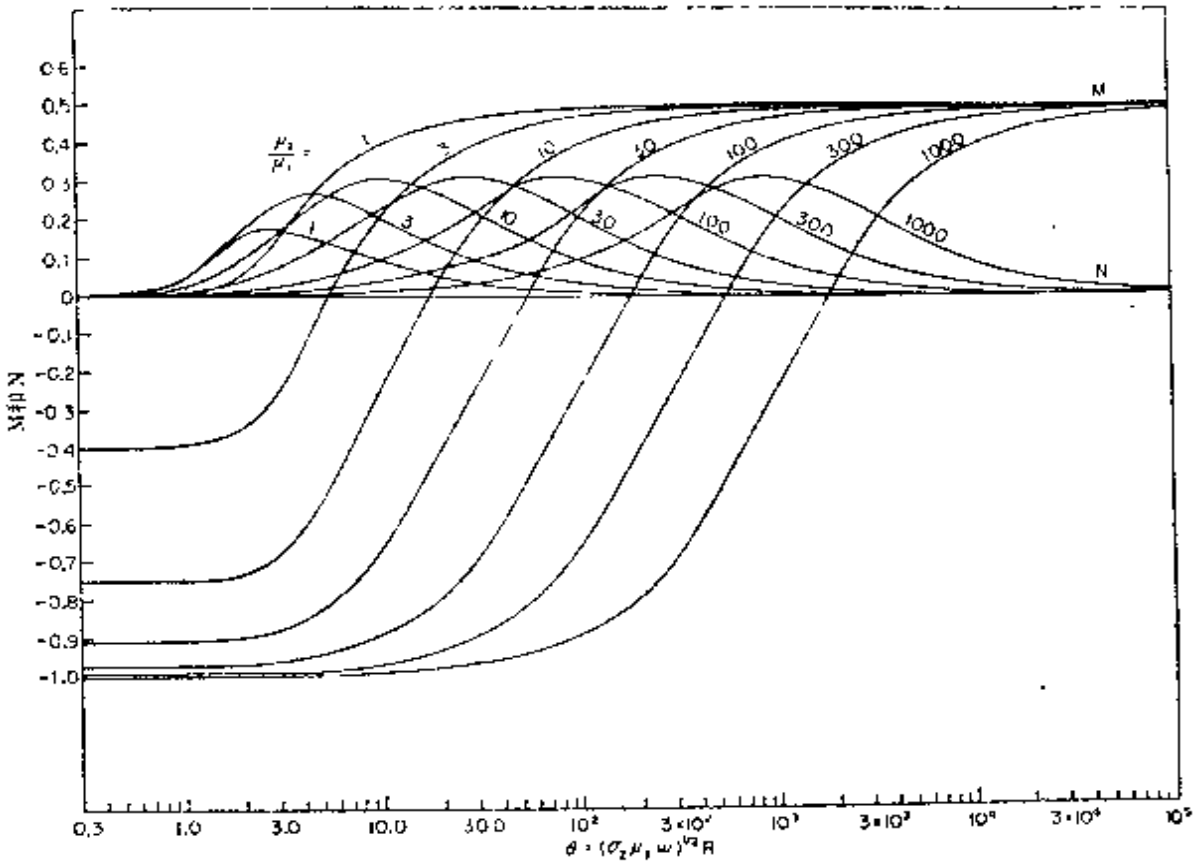


图 6—2　在均匀交变磁场中球的感应偶极矩的同相实分量（M）和异相虚分量（N）与无量纲参数 θ 的关系

围由 1 （自由空间）到1000（钢）。

球外的磁场可用由式(6-9)给出的π^*代入式（6-4）求出。因为通常我们测的是关于笛卡儿坐标的磁场分量，所以希望在该坐标系中计算（6-4）式，有了球外异常场的赫兹势，这个计算是不难完成的。写出球外异常场的赫兹势为

$$\pi_{x1}^{+}=b_0\frac{1}{r}e^{ik_1r}e^{-i\omega t}=b_0\frac{1}{r}e^{i(k_1r-\omega t)}. \qquad (6\text{-}35)$$

由于$e^{i(k_1r-\omega t)}$表示向外的行波，故得到场的几何因子简单地为$\nabla\nabla\cdot(1/r)$。

$$\nabla\nabla\cdot\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y\partial x}\mathbf{j}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z\partial x}\mathbf{k}$$

$$= \frac{(2x^2 - y^2 - z^2)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + 3xz\mathbf{k}}{r^5}. \qquad (6\text{-}36)$$

于是球外磁场的笛卡儿分量是

$$\left.\begin{aligned} H_x(\omega) &= R^3 H_0 (M - iN) \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{r^5} + H_0, \\ H_y(\omega) &= R^3 H_0 (M - iN) \frac{3xy}{r^5}, \\ H_z(\omega) &= R^3 H_0 (M - iN) \frac{3xz}{r^5}. \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}37)$$

这是一个轴线在 x 方向的偶极子的场。其感应偶极矩为，

$$P = R^3 H_0 (M - iN) \times 4\pi. \qquad (6\text{-}38)$$

最后，将上述沃德的结果与韦特（1951）的结果比较如下：

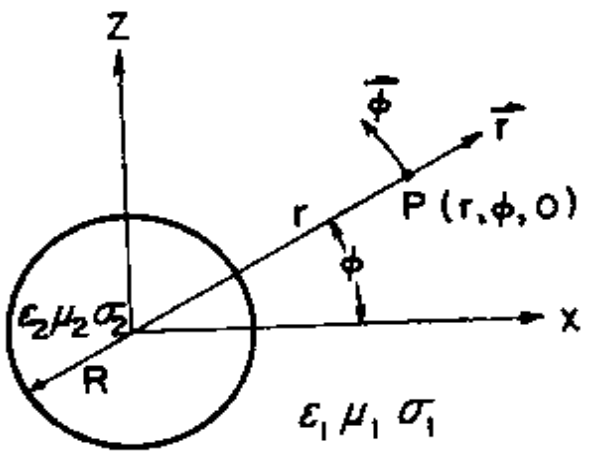
	韦特	沃德
谐时关系形式	$e^{i\omega t}$	$e^{-i\omega t}$
传播常数	$\gamma = (i\sigma\mu\omega - \varepsilon\mu\omega^2)^{1/2}$	$k = (i\sigma\mu\omega + \varepsilon\mu\omega^2)^{1/2}$
波动方程形式	$(\nabla^2 - \gamma^2)\psi = 0$	$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0$
解的型式	修正球贝塞耳函数（双曲三角函数）	球贝塞耳函数（三角函数）

在其它方面，二者是一致的。不过应该注意，我们的 M 和 N 中包含有因子（$-3/2$）。

七、谐变磁场中的导电导磁柱

（一）引言

下面我们来讨论把一个参数为 $\varepsilon_2\mu_2\sigma_2$ 的无限长圆柱体埋放在参数为 $\varepsilon_1\mu_1\sigma_1$ 的媒质中的情况，假设媒质中还作用有一角频率为 ω 的均匀一次磁场。我们希望研究两种情况：一次场与圆柱体的轴是互相垂直的和平行的。一旦得到这样的两个解，我们就可以由它们的组合得到任意方位感应场的解，事实上也就是任意方位椭圆极化场的解。问题的几何图形由图7—1给出。又由于可以认为是一个二维的问题，所以我们假设所求的解与 y 无关。当讨论垂直的和平行的两种情况时，利用谢昆诺夫对称波势是方便的。前面我们已由下述的一组等式确定了它们。



Y进入纸面

图 7—1　均匀交变磁场 $H_0e^{-i\omega t}$ 中的导电导磁柱。柱体和围域的常数分别为 $\sigma_2\mu_2\varepsilon_2$、$\sigma_1\mu_1\varepsilon_1$。圆柱半径为 R，观察点为 $P(r,\phi,0)$

1．电性源

$$\nabla\times\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{H}, \tag{7-1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H}=0, \tag{7-2}$$

$$\mathbf{H}=\nabla\times\mathbf{G}, \tag{7-3}$$

$$\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{G}-\nabla V, \tag{7-4}$$

$$V=-\frac{\nabla\cdot\mathbf{G}}{\sigma-i\omega\varepsilon}, \tag{7-5}$$

$$\mathbf{E}=i\omega\mu\mathbf{G}+\frac{1}{\sigma-i\omega\varepsilon}\nabla\nabla\cdot\mathbf{G}, \tag{7-6}$$

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0, \qquad \psi=\mathbf{G}, V. \tag{7-7}$$

2. 磁性源

$$\nabla\times\mathbf{H}=(\sigma-i\omega\varepsilon)\mathbf{E}, \tag{7-8}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \tag{7-9}$$

$$\mathbf{E}=-\nabla\times\mathbf{F} \tag{7-10}$$

$$\mathbf{H}=-(\sigma-i\varepsilon\omega)\mathbf{F}-\nabla U, \tag{7-11}$$

$$U=\frac{\nabla\cdot\mathbf{F}}{i\omega\mu} \tag{7-12}$$

$$\mathbf{H}=-(\sigma-i\omega\varepsilon)\mathbf{F}-\frac{1}{i\omega\mu}\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}, \tag{7-13}$$

$$\nabla^2\psi+k^2\psi=0, \qquad \psi=\mathbf{F}, U. \tag{7-14}$$

（二）横一次场

对于横场，方程（7-3）将给出一次场在圆柱中的感应电流所引起的二次场。由（7-3)式，二次磁场是

$$H_r=\frac{1}{r}\frac{\partial G_y}{\partial\phi}-\frac{\partial G_\phi}{\partial y}, \tag{7-15}$$

$$H_\phi=\frac{\partial G_r}{\partial y}-\frac{\partial G_y}{\partial r}, \tag{7-16}$$

$$H_y=-\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rG_\phi)-\frac{\partial G_r}{\partial\phi}\right]. \tag{7-17}$$

由于圆柱是无限长的，$H_y=0$，并且，$\partial/\partial y=0$，所以上述方程简化为

$$H_r=-\frac{1}{r}\frac{\partial G_y}{\partial\phi}, \tag{7-18}$$

$$H_\phi=-\frac{\partial G_y}{\partial r}, \tag{7-19}$$

$$H_y=0. \tag{7-20}$$

又因为这里只有势$\mathbf{G}$的y分量，波动方程（7-7）变成

$$\nabla^2 G_y + k^2 G_y = 0 \qquad r \leqslant R. \tag{7-21}$$

在所讨论的物理问题中，圆柱内的位移电流是可以忽略的，所以圆柱的传播常数可写为

$$k_2^2 = i\mu_2\sigma_2\omega. \tag{7-22}$$

与前面圆球问题一样，设$|k_1R| \ll 1$，则柱外的场是均匀的。这里的k_1满足

$$k_1^2 = \mu_1\varepsilon_1\omega^2 + i\mu_1\sigma_1\omega. \tag{7-23}$$

如认为柱外媒质是不导电的，即有$\sigma_1 = 0$，则只有位移电流对波的传播有贡献。由于与圆柱中的传导电流相比，其中的位移电流是可以忽略的，同时由于我们假设$\varepsilon_1 \doteq \varepsilon_2$，这样就可以认为柱外媒质中的位移电流也是微不足道的；这是因为位移电流在所设条件下，并不提供有效的磁场。于是我们可以使$k_1 = 0$，并且在柱外媒质中，我们只需求拉普拉斯方程的解就行了

$$\nabla^2 G_y = 0, \qquad r > R. \tag{7-24}$$

方程（7-21）和（7-24）的解可由（301）和（314）式直接得出

$$G_y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi) J_n(k_2 r), \quad r \leqslant R, \tag{7-25}$$

和

$$G_y = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\phi + B_n \sin n\phi)(C_n r^n + D_n r^{-n}), \quad r > R. \tag{7-26}$$

为避免感应单极子，应除去方程（7-25）和（7-26）中$n = 0$的情况[参看（314）式后的注解]。

柱外的一次场或激发场为$H = H_0 e^{-i\omega t}$，它的径向分量为$H_r = H_0 \cos\phi e^{-i\omega t}$，所以激发场的势由方程（7-15）导出为

$$G_y = H_0 r \sin\phi e^{-i\omega t}. \tag{7-27}$$

在无限远处，由二次场引起的势必须为零；于是在方程（7-26）中不应有r^n的项，即C_n应等于零。柱外的势G_y^e形式为

$$G_y^e = H_0 r\sin\phi + \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^e\cos n\phi + B_n^e\sin n\phi]r^{-n}. \qquad (7\text{-}28)$$

式中 $A_n^e = A_n D_n$ 和 $B_n^e = B_n D_n$.

在柱内，如势仍是有限的，就必须除去解中所包含的 r^{-n} 项所以有

$$G_y^i = \sum_{n=1}^{\infty}[A_n^i\cos n\phi + B_n^i\sin n\phi]J_n(k_2 r). \qquad (7\text{-}29)$$

在边界上，$r=R$，应满足边界条件

$$G_y^e = G_y^i|_{r=R} \qquad \text{(势连续)}, \qquad (7\text{-}30)$$

$$\mu_1\left(\frac{\partial G_y^e}{\partial r}\right) = \mu_2\left(\frac{\partial G_y^i}{\partial r}\right)\Big|_{r=R} \qquad \text{(法向B连续)}. \qquad (7\text{-}31)$$

边界条件 (7-30) 指出，必须假定 n 的值为 1，因为在式 (7-28)中，与一次势相关联的只有 r 的正幂，而那一项 n 的次为1。于是

$$A_1^e R^{-1} = A_1^i J_1(k_2 R).$$

$$H_0 R + B_1^e R^{-1} = B_1^i J_1(k_2 R). \qquad (7\text{-}32)$$

由边界条件 (7-31) 得出

$$-\mu_1 A_1^e R^{-2} = \mu_2 A_1^i \frac{d}{dr}\{J_1(k_2 r)\}\Big|_{r=R},$$

$$-\mu_1 B_1^e R^{-2} + \mu_1 H_0 = \mu_2 B_1^i \frac{d}{dr}\{J_1(k_2 r)\}\Big|_{r=R}. \qquad (7\text{-}33)$$

应用对贝塞耳函数的微分公式 (瓦特森，1944，p.45)

$$\frac{d}{dr}\{J_n(kr)\} = k\left[J_{n-1}(kr) - \frac{n}{kr}J_n(kr)\right]. \qquad (7\text{-}34)$$

现在方程 (7-33) 变为

$$-\mu_1 B_1^e R^{-2} + \mu_1 H_0 = \mu_2 B_1^i\left[k_2 J_0(k_2 r) - \frac{1}{R}J_1(k_2 R)\right]. \qquad (7\text{-}35)$$

含有两个未知数 B_1^e 和 B_1^i 的两个方程（7-32）和（7-35）构成方程组，可利用克兰默规则(怀利，1960，p.32）联立求解。先把方程（7-32）和（7-35）分别改写如下

$$B_1^e R^{-1} - B_1^i J_1(k_2 R) = -H_0 R,$$

$$B_1^e \mu_1 R^{-2} + B_1^i \mu_2 \left[k_2 J_0(k_2 R) - \frac{1}{R} J_1(k_2 R) \right] = \mu_1 H_0.$$

则有

$$B_1^e = \frac{\begin{vmatrix} -H_0 R & -J_1(\alpha) \\ \mu_1 H_0 & \mu_2 \left[k_2 J_0(\alpha) - \frac{1}{R} J_1(\alpha) \right] \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R^{-1} & -J_1(\alpha) \\ \mu_1 R^{-2} & \mu_2 \left[k_2 J_0(\alpha) - \frac{1}{R} J_1(\alpha) \right] \end{vmatrix}}, \quad \alpha = k_2 R,$$

或

$$B_1^e = R^2 H_0 \left| \frac{-\alpha J_0(\alpha) + J_1(\alpha)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1\right)}{\alpha J_0(\alpha) + J_1(\alpha)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right)} \right| \tag{7-36}$$

类似地

$$B_1^i = \frac{2\mu_1 H_0 R}{\alpha J_0(\alpha) + J_1(\alpha)\left(-\frac{\mu_1}{\mu_2} + 1\right)}. \tag{7-37}$$

A_1^i 和 A_1^e 的两个表达式的联立解，只有 $A_1^e = A_1^i = 0$ 才成立。

把方程（7-25）和（7-26）用到方程（7-18）至(7-20)后，就直接得出了场的分量

$$H_r = \frac{1}{r} J_1(k_2 r) B_1^i \cos\phi, \qquad r \leqslant R; \tag{7-38}$$

$$H_\phi = -\frac{d}{dr}\{J_1(k_2 r)\} B_1^i \sin\phi, \quad r \leqslant R; \tag{7-39}$$

$$H_r = r^{-2} B_1^e \cos\phi, \qquad r > R; \tag{7-40}$$

$$H_\phi = r^{-2}B_1'\sin\phi, \qquad r>R. \tag{7-41}$$

在物探中，我们关心的只是由（7-40）和（7-41）式描述的柱体外边的场；由于我们已经求出了所有的常数，故不难得到：

$$H_r = H_0\cos\phi e^{-i\omega t}$$

$$+H_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\left|\frac{-k_2RJ_0(k_2R)+J_1(k_2R)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)}{k_2RJ_0(k_2R)+J_1(k_2R)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)}\right|\cos\phi e^{-i\omega t}, \tag{7-42}$$

$$H_\phi = -H_0\sin\phi e^{-i\omega t}+H_0\left(\frac{R}{r}\right)^2$$

$$\cdot\left|\frac{-k_2RJ_0(k_2R)+J_1(k_2R)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}+1\right)}{k_2RJ_0(k_2R)+J_1(k_2R)\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}-1\right)}\right|\sin\phi e^{-i\omega t}. \tag{7-43}$$

如果柱体及其周围具有与自由空间相等的感应容率，$\mu_2=\mu_1=\mu_0$，则应用下面的递推公式（瓦特森，1944，p.45）能使方程（7-42）和（7-43）简化为

$$\alpha J_2(\alpha)=2J_1(\alpha)-\alpha J_0(\alpha), \quad \alpha=k_2R. \tag{7-44}$$

则得出结果

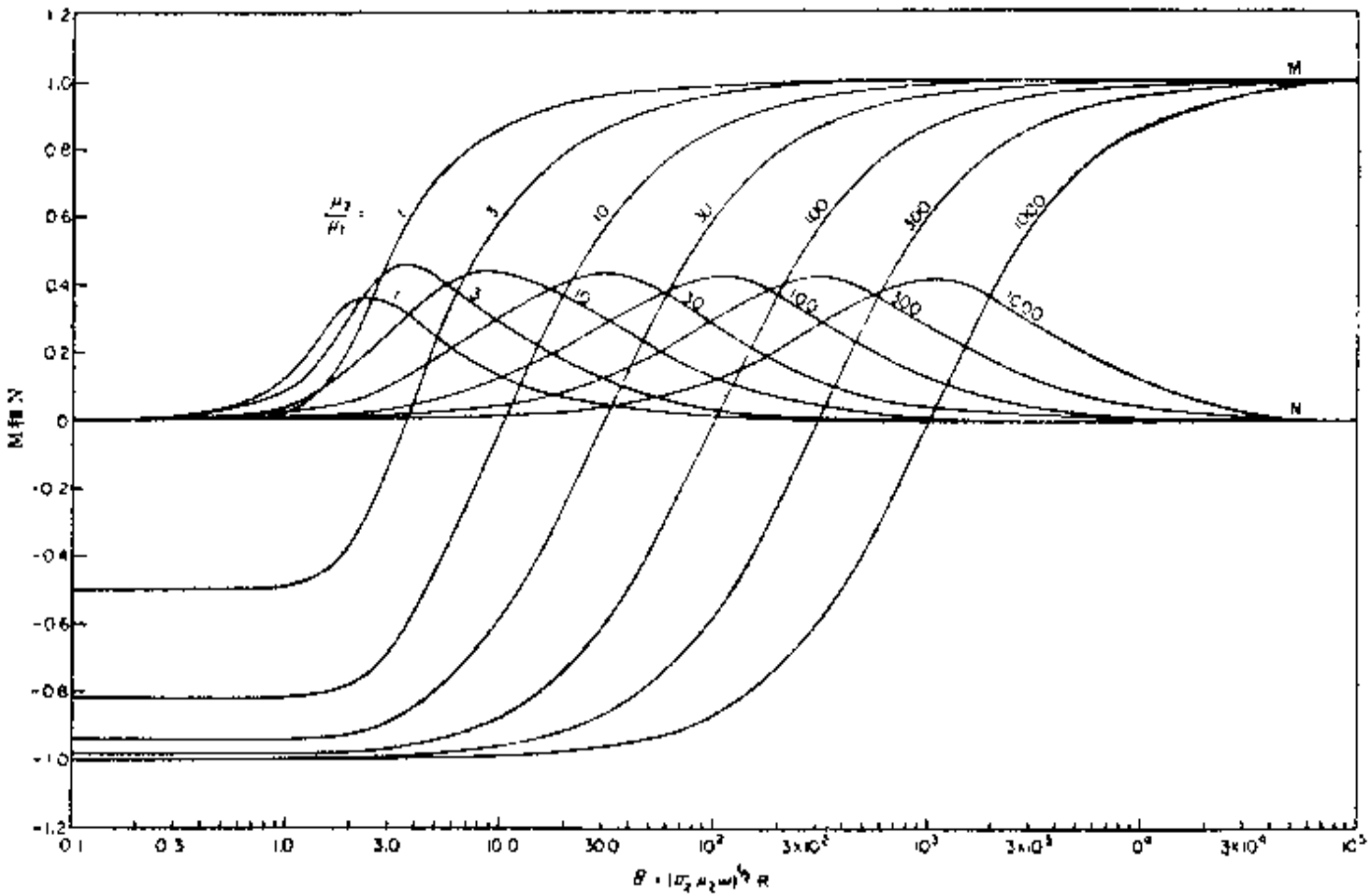
$$H_r = H_0\cos\phi e^{-i\omega t}+H_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\left[\frac{J_2(\alpha)}{J_0(\alpha)}\right]\cos\phi e^{-i\omega t}, \quad \alpha=k_2R \tag{7-45}$$

和

$$H_\phi = -H_0\sin\phi e^{-i\omega t}+H_0\left(\frac{R}{r}\right)^2\left[\frac{J_2(\alpha)}{J_0(\alpha)}\right]\sin\phi e^{-i\omega t}. \tag{7-46}$$

利用与球问题的类似性，由（7-36）式能够写出

$$B_1' = -H_0R^2(M-iN), \tag{7-47}$$



$$\theta = (\sigma_2 \mu_2 \omega)^{1/2} R$$

图 7—2　在横向均匀交变磁场中，无限长圆柱体感应偶极矩的同相实分量（M）和异相虚分量（N）

式中

$$M-iN=\frac{\mu_2[\alpha J_0(\alpha)-J_1(\alpha)]-\mu_1 J_1(\alpha)}{\mu_2[\alpha J_0(\alpha)-J_1(\alpha)]+\mu_1 J_1(\alpha)}. \qquad (7-48)$$

图7—2中，对应不同的比值 μ_2/μ_1，画出了实分量（同相）函数 M 和虚分量（异相）函数 N 与无量纲参数 θ 的关系。感应容率比值的范围由 1 （自由空间）到1000（钢）。

也可以用笛卡儿坐标的分量 H_x 和 H_z 来表示磁场；这些分量能由下列变换简单地得到

$$H_x=H_r\cos\phi-H_\phi\sin\phi \qquad (7-49)$$

$$H_z=H_r\sin\phi+H_\phi\cos\phi. \qquad (7-50)$$

故得出

$$\mathbf{H}=H_x\mathbf{i}+H_z\mathbf{k}=H_0e^{-i\omega t}\mathbf{i}$$
$$+H_0R^2\frac{\mu_2[\alpha J_0(\alpha)-J_1(\alpha)]-\mu_1 J_1(\alpha)}{\mu_2[\alpha J_0(\alpha)-J_1(\alpha)]+\mu_1 J_1(\alpha)}$$
$$\cdot\left[\frac{-(x^2-z^2)\mathbf{i}+3xz\mathbf{k}}{r^4}\right]e^{-i\omega t} \qquad (7-51)$$

这是一线偶极子场，它在形式上与前面得到的静电场中的导电柱及静磁场中的导磁柱的表达式相同。无疑地，当角频率为零时，公式（7-51）还原为对静磁问题推出的公式（5-1）。

（三）纵一次场

纵场在圆柱中只能感应出环形电流，现在我们可用矢量 $\mathbf{F}$ 去求问题的解。按另一种说法，照物理上的要求，对所找的解来说，其磁场是无旋的，而电场是有旋的。方程（7-13）指出，由于这里只有 $\mathbf{H}$ 的一个分量，故只需用 $\mathbf{F}$ 的一个分量。另外，磁场 $\mathbf{H}$ 也是无散度的。于是

$$H_r=H_\phi=0,$$
$$H_y=-(\sigma-i\omega\varepsilon)Fy.$$

忽略位移电流，即 $\sigma\gg\omega\varepsilon$，则场是

$$H_r=0, \qquad E_r=0, \qquad (7-52)$$

$$H_\phi = 0\,, \qquad E_\phi = \frac{\partial F_y}{\partial r}\,, \tag{7-53}$$

$$H_y = -\sigma F_y; \qquad E_y = 0\,. \tag{7-54}$$

而波动方程为：

$$\nabla^2 F_y + k_2^2 F_y = 0, \qquad r \leqslant R, \tag{7-55}$$

$$\nabla^2 F_y = 0, \qquad r > R. \tag{7-56}$$

这里

$$k_2^2 = i\mu_2\sigma_2\omega, \quad \text{而} k_1^2 \approx 0. \tag{7-57}$$

由于假设外部媒质的导电率为零，于是由（7-54）可知，柱体外边并没有异常磁场，只在内部有异常的磁场分布。

（四）讨论

上述结果是依梅逸（1963）的研究导出的。可将它与韦特（1952）得出的位于线电流源场中的柱形矿体的解相比较，或拿它与纳吉（1962）得出的位于均匀谐变横场中的非均匀柱状矿体的解相比较。

八、半空间表面上的电极，直流

（一）无限大、均匀、各向同性媒质中点源的势

将一个电流源 I 置入无限大媒质中的坐标原点 o 处，电流径向地流出与原点相距 r 的球面 S。由于 S 面的面积是 $4\pi r^2$，则球面上的电流密度为

$$J_r=\frac{I}{4\pi r^2}. \tag{8-1}$$

如果 $\rho=1/\sigma$ 是均匀各向同性的电阻率，可把欧姆定律写成

$$E_r=J_r\rho=\frac{I\rho}{4\pi r^2}. \tag{8-2}$$

与电极相距 r 处的电势 V，由 Er 在 $r\to\infty$ 区间的积分给出

$$V=\int_r^\infty E_r dr=\frac{I\rho}{4\pi r}. \tag{8-3}$$

方程（8-3）是井中电测深的基本关系。

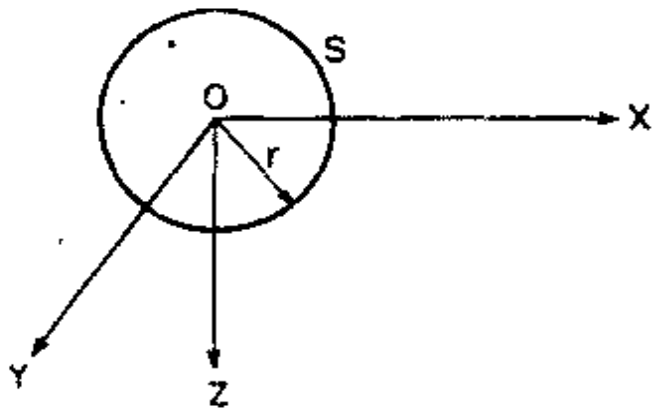


图 8—1　在无穷大媒质内的坐标系 (x,y,z) 的原点置入电流源 I。在距离 r 处电流径向地流过表面 S。电流密度是 $J_r=I/4\pi r^2$

如果说，电流源电极是安置在半空间——如 $x-y$ 平面以下的空间——的表面上的，则电流径向地通过半径为 r 的半球面流出，且由于表面积为 $2\pi r^2$，于是电流密度为

$$J_r=\frac{I}{2\pi r^2}. \tag{8-4}$$

而电势为

$$V=\frac{I\rho}{2\pi r}. \tag{8-5}$$

这个式子给出了所有地面电法勘探的基本关系。随后的讨论将只涉及地面电极的情况，但是如将 2π 换成 4π，就可把得到的公式直接用于测井。

（二）接入均匀、各向同性半空间的电偶极子

在这一节及随后各节，我们将讨论作偶极子排列的任意两个电极。虽然“偶极子”一词通常是指相距无限小的一对点源。在物探中，对它的这种不拘字义的用法已成习惯。

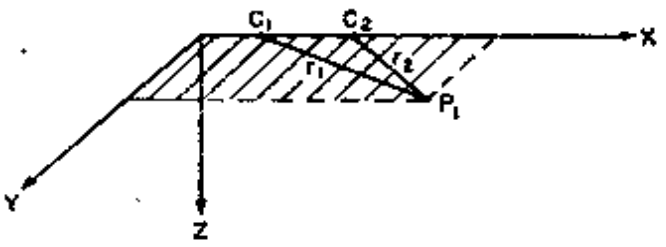


图 8—2　与P_1点相距分别为 r_1 和r_2的供电电极 C_1和C_2 在P_1点产生的 势。电极和观察点都在地表面

与供电电极C_1和C_2距离分别为 r_1和r_2 的任意点 P_1 （图8—2)处的电势，可用（8-5）式给出的两个电势相加得到。这时有

$$V_1=\frac{I_1\rho}{2\pi r_1},\qquad V_2=\frac{I_2\rho}{2\pi r_2} \tag{8-6}$$

和

$$V=V_1+V_2=\frac{I_1\rho}{2\pi r_1}+\frac{I_2\rho}{2\pi r_2}. \tag{8-7}$$

设电流经电极C_1流入半空间而后经C_2流出，于是得

$$I=I_1=-I_2 \tag{8-8}$$

和

$$V=\frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right]. \tag{8-9}$$

方程(8-9) 给出了位于均匀、各向同性半空间上的偶极子所产生的势。

（三）接入均匀、各向同性半空间的偶极子源及其电势

我们要解决的下一个问题是求偶极子源造成的地面上两点间的电势差(图8—3)。

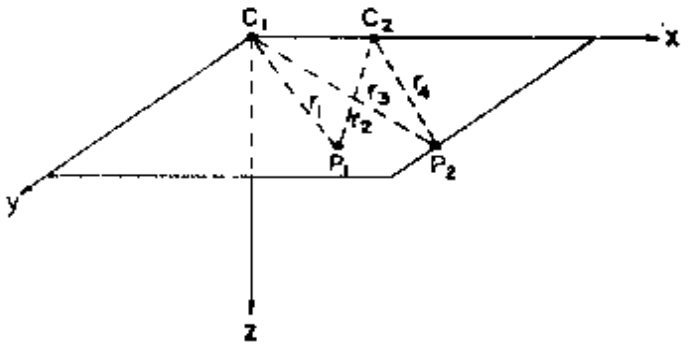


图 8—3　由地面的偶极子源 C_1、C_2 造成地表面两点 P_1 和 P_2 间电势差的图示

如果 $\dot{V}_1$ 和 $\dot{V}_2$ 是由源电极 C_1 和 C_2 在 P_1 点所引起的势，而 $\dot{V}_3$ 和 $\dot{V}_4$ 是由 C_1 和 C_2 在 P_2 点所引起的势，则它们的差为

$$V=(\dot{V}_1+\dot{V}_2)-(\dot{V}_3+\dot{V}_4) \tag{8-10}$$

或

$$V=\frac{I\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right]. \tag{8-11}$$

电势与电流的比值，或电极排列的互阻抗

$$Q=\frac{\rho}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right] \tag{8-12}$$

（四）两层大地上的电极

我们来考虑两层大地的情况，在上层的表面接有电极 C，如图8—4所示。上、下层中的电势各自由一次场和二次场的势构成，即可以写出

$$V'=V_p+V_{s1} \tag{8-13}$$

和

$$V''=V_p+V_{s2} \tag{8-14}$$

式中 V_p 为一次场的势，

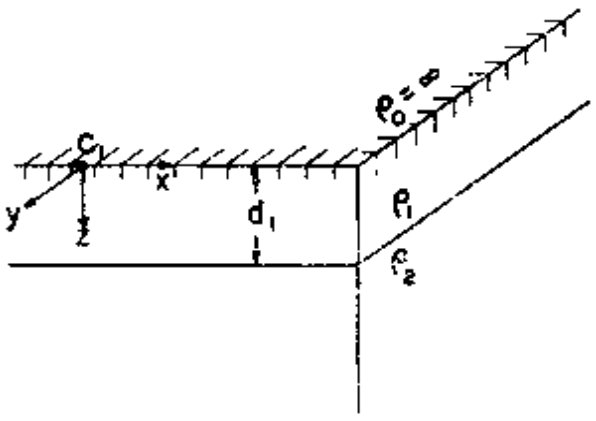


图 8—4　两层大地上的电极。第一层厚度为 d_1。(1) 层和(2)层的电阻率分别为 ρ_1 和 ρ_2

而V_{s1}和V_{s2}分别是在上层和下层中感应出的二次场的势。可以把一次场的势V_p当做接在电阻率等于ρ_1的均匀大地上的接地电极所产生的势，则有

$$V_p=\frac{I\rho_1}{2\pi}(z^2+r^2)^{-1/2}, \tag{8-15}$$

式中 $$r^2=x^2+y^2.$$

由拉普拉斯变换表（如斯科特，1955）可看到，第一类零级贝塞耳函数的直接拉普拉斯变换就等于$(z+r)^{-1/2}$，即

$$(z^2+r^2)^{-1/2}=\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}d\lambda. \tag{8-16}$$

所以，一次场势的表达式（8-15）可以写成

$$V_p=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)e^{-\lambda z}d\lambda. \tag{8-17}$$

由式（406）与$k=t=0$相应的静电问题，就得出我们所找的二次场势的形式为

$$V_{s1}=\int_0^\infty [f_1(\lambda)e^{-\lambda z}+g_1(\lambda)e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda, \tag{8-18}$$

$$V_{s2}=\int_0^\infty [f_2(\lambda)e^{-\lambda z}+g_2(\lambda)e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda. \tag{8-19}$$

对这个特殊问题，选方程（406）中的$n=0$，其物理根据是点电极所产生的电势与θ完全无关。（406）式中的本征值λ已被并入指定了各个指数的本征函数$f_1(\lambda)$和$g_1(\lambda)$。

现在，问题归结为由边界条件来求本征函数$f_1(\lambda)$、$f_2(\lambda)$、$g_1(\lambda)$和$g_2(\lambda)$的值。第一个边界条件要求通过半空间的界面时，法向**J**是连续的〔参看(134)式〕。由于空气中的法向电流为零，则在边界面$z=0$处，媒质内**J**的法向分量J_z也应该为零

$$J_z=0 \quad 或 \quad \sigma E_z=0 \quad 或 \quad E_z=-\frac{\partial V}{\partial z}=0. \tag{8-20}$$

于是，应用方程（8-20），由（8-18）式得出

$$f_1 = g_1. \tag{8-21}$$

点电极产生的二次势 V_{s2}，随 z 趋于无穷大时必须为零，所以由方程（8-19）得

$$g_2 = 0. \tag{8-22}$$

第三个和第四个边界条件要求，通过媒质（1）和媒质（2）的边界时，势和电流密度的法向分量是连续的，也就是

$$V' = V''|_{z=d_1}, \tag{8-23}$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V'}{\partial z} = \frac{1}{\rho_2}\frac{\partial V''}{\partial z}\bigg|_{z=d_1}. \tag{8-24}$$

由（8-23）式确定的边界条件引出等式

$$f_1(\lambda)[e^{-\lambda d_1} + e^{\lambda d_1}] = f_2(\lambda)e^{-\lambda d_1}. \tag{8-25}$$

这是把方程（8-21）和（8-22）用于方程(8-18)和（8-19）后得到的。注意（8-21）和（8-22）式的结果，把（8-17）、(8-18)和(8-19)式代入边界条件（8-24），可得到

$$\frac{\lambda}{\rho_1}\left[-\frac{I\rho_1}{2\pi}e^{-\lambda d_1} + f_1(\lambda)(-e^{-\lambda d_1} + e^{\lambda d_1})\right]$$

$$= \frac{\lambda}{\rho_2}\left[-\frac{I\rho_1}{2\pi}e^{-\lambda d_1} - f_2(\lambda)e^{-\lambda d_1}\right]. \tag{8-26}$$

将方程（8-25）和（8-26）对 $f_1(\lambda)$和$f_2(\lambda)$联立求解，得出

$$f_1(\lambda) = \frac{I\rho_1}{2\pi}\left(\frac{-u_1 e^{-2\lambda d_1}}{1 + u_1 e^{-2\lambda d_1}}\right), \tag{8-27}$$

$$f_2(\lambda) = \frac{I\rho_1}{2\pi}\left(\frac{-u_1(e^{-2\lambda d_1} + 1)}{1 + u_1 e^{-2\lambda d_1}}\right), \tag{8-28}$$

式中

$$u_1 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

由于我们只在媒质（1）的表面测电势，所以下面只须考虑本征

函数 $f_1(\lambda)$。把这个函数的分母作二项式展开，则方程 (8-27) 变为

$$f_1(\lambda)=\frac{I\rho_1}{2\pi}(-u_1e^{-2\lambda d_1}+u_1^2e^{-4\lambda d_1}-u_1^3e^{-6\lambda d_1}+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{I\rho_1}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-u_1)^ne^{-2nd_1\lambda}\,. \qquad (8-29)$$

于是对大地表面，$z=0$，可把二次势 (8-18) 写成

$$V_{S1}=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^{\infty}2\sum_{n=1}^{\infty}(-u_1)^ne^{-2nd_1\lambda}J_0(\lambda r)d\lambda$$

$$=\frac{I\rho_1}{2\pi}2\sum_{n=1}^{\infty}(-u_1)^n\int_0^{\infty}e^{-2nd_1\lambda}J_0(\lambda r)d\lambda\,. \qquad (8-30)$$

我们已在方程 (8-16) 中给出了零阶贝塞耳函数的拉普拉斯变换，而方程 (8-30) 中的积分正好是满足这个变换的，所以可用下式来代换积分

$$\frac{1}{[r^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\,.$$

于是 (8-30) 式变为

$$V_{S1}=\frac{I\rho_1}{2\pi}2\sum_{n=1}^{\infty}(-u_1)^n\frac{1}{[r^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\,. \qquad (8-31)$$

把这个势和由方程 (8-15) 在 $z=0$ 处给出的一次势结合起来，就得到了在大地表面观察到的总电势

$$V'=V_P+V_{S1}$$

$$=\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u_1)^n}{[r^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\right]. \qquad (8-32)$$

方程 (8-32) 也能表示成积分形式。将方程(8-27)代入(8-18)，并令 $z=0$，得出二次势为

$$V_{S1}=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{-2u_1e^{-2\lambda d_1}}{1+u_1e^{-2\lambda d_1}}J_0(\lambda r)d\lambda\,. \qquad (8-33)$$

这个表达式可加上由方程（8-17）在 $z=0$ 处给出的一次势

$$V_P=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty J_0(\lambda r)\,d\lambda, \tag{8-34}$$

则得出总势为

$$V'=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1-u_1e^{-2\lambda d_1}}{1+u_1e^{-2\lambda d_1}}J_0(\lambda r)\,d\lambda. \tag{8-35}$$

这个公式和第八节中的其它结果是由桑德（1949）得到的。

如果我们现在用上面八(三)节中用过的方法，就能直接写出一对测量电极 P_1 和 P_2 间所观察到的电势增量 ΔV，这个电势差是由一对电流电极 C_1、C_2 对两层大地供电所造成的。

$$\Delta V=(V'_1+V'_2)-(V'_3+V'_4). \tag{8-36}$$

$$V'_1=\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r_1}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u_1)^n}{[r_1^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\right], \tag{8-37}$$

$$V'_2=-\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r_2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u_1)^n}{[r_2^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\right], \tag{8-38}$$

$$V'_3=-\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r_3}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u_1)^n}{[r_3^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\right], \tag{8-39}$$

$$V'_4=-\frac{I\rho_1}{2\pi}\left[\frac{1}{r_4}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-u_1)^n}{[r_4^2+(2nd_1)^2]^{1/2}}\right]. \tag{8-40}$$

（五）三层大地上的电极

参考图8—5，头两层中的势 V' 和 V'' 与前面的一样为

$$V'=V_P+V_{S1}, \tag{8-41}$$

$$V''=V_P+V_{S2}. \tag{8-42}$$

而且可类似地提出第三层中的势为

$$V'''=V_P+V_{S3}. \tag{8-43}$$

依照早先的讨论，可以写出四个势：

$$V_P=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda r)\,d\lambda, \tag{8-44}$$

$$V_{s1}=\int_0^\infty [f_1(\lambda)e^{-\lambda z}+g_1(\lambda)\,e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda, \qquad (8-45)$$

$$V_{s2}=\int_0^\infty [f_2(\lambda)e^{-\lambda z}+g_2(\lambda)\,e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda \qquad (8-46)$$

$$V_{s3}=\int_0^\infty [f_3(\lambda)e^{-\lambda z}+g_3(\lambda)\,e^{\lambda z}]J_0(\lambda r)d\lambda, \qquad (8-47)$$

下面，应用边界条件来求解本征函数 $f_1(\lambda)\cdots, g_3(\lambda)$。在 $z=0$ 的平面上，J_z是连续的，于是又有 $f_1=g_1$。由另外一个条件：当 $z\to\infty$ 时，$V_{s3}\to 0$，则 $g_3=0$。于是未知数减成了四个，它们由下述四个边界条件求出：

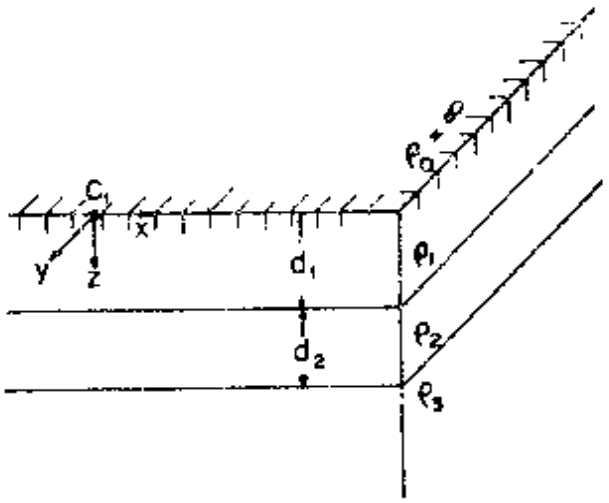


图 8—5　三层大地表面的电极。第一层和第二层的厚度分别为d_1和d_2。各层的电阻率是ρ_1，ρ_2和ρ_3

$$V'=V''|_{z=d_1}, \qquad (8-48)$$

$$V''=V'''|_{z=d_1+d_2}, \qquad (8-49)$$

$$\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial V'}{\partial z}=\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial V''}{\partial z}\Big|_{z=d_1}, \qquad (8-50)$$

$$\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial V''}{\partial z}=\frac{1}{\rho_3}\frac{\partial V'''}{\partial z}\Big|_{z=d_1+d_2}, \qquad (8-51)$$

式中 ρ 和 d 的值参看图8—5的说明。把方程（8-44）至（8-47）给出的形式代入方程（8-48）至（8-51），就构成了关于四个未知数 $f_1(\lambda)$、$f_2(\lambda)$、$g_2(\lambda)$、$f_3(\lambda)$ 的四个联立方程组。利用克兰默规则，可解出此联立方程组的未知数。把求出的本征函数值代入式（8-45）中，就得出了大地表面的二次势 V_{s1}。再将 V_{s1}与

$z=0$ 平面的一次势V_p相加，得到

$$V'=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{1-u(\lambda)e^{-2\lambda d_1}}{1+u(\lambda)e^{-2\lambda d_1}}J_0(\lambda r)d\lambda \qquad (8\text{-}52)$$

式中

$$u(\lambda)=\frac{\rho_1-\rho_2\left(\dfrac{1-u_2e^{-2\lambda d_2}}{1+u_2e^{-2\lambda d_2}}\right)}{\rho_1+\rho_2\left(\dfrac{1-u_2e^{-2\lambda d_2}}{1+u_2e^{-2\lambda d_2}}\right)}, \qquad (8\text{-}53)$$

而

$$u_2=\frac{\rho_2-\rho_3}{\rho_2+\rho_3}. \qquad (8\text{-}54)$$

对偶极子—偶极子排列，势可如（8-36）式那样相加。

（六）n层大地上的电极

描写两层大地表面的势的方程（8-35）可以写成

$$V'=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty k_{12}(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda\ , \qquad (8\text{-}55)$$

式中积分的核是

$$k_{12}=\frac{1-u_{12}e^{-2\lambda d_1}}{1+u_{12}e^{-2\lambda d_1}}, \qquad (8\text{-}56)$$

而

$$u_{12}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2}. \qquad (8\text{-}57)$$

类似地，三层大地表面的势可被写为

$$V'=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty k_{123}(\lambda)J_0(\lambda r)d\lambda, \qquad (8\text{-}58)$$

和

$$k_{123}=\frac{1-u_{123}e^{-2\lambda d_1}}{1+u_{123}e^{-2\lambda d_1}}, \qquad (8\text{-}59)$$

$$u_{123}=\frac{\rho_1-\rho_2 k_{23}}{\rho_1+\rho_2 k_{23}}, \tag{8-60}$$

$$k_{23}=\frac{1-u_{23}e^{-2\lambda d_2}}{1+u_{23}e^{-2\lambda d_2}}, \tag{8-61}$$

$$u_{23}=\frac{\rho_2-\rho_3}{\rho_2+\rho_3} \tag{8-62}$$

依此类推，我们能写出 n 层大地表面的势：

$$V_1=\frac{I\rho_1}{2\pi}\int_0^\infty k_{12\cdots n}J_0(\lambda r)d\lambda \tag{8-63}$$

和

$$k_{12\cdots n}=\frac{1-u_{12\cdots n}e^{-2\lambda d_1}}{1+u_{12\cdots n}e^{-2\lambda d_1}}, \tag{8-64}$$

$$u_{12\cdots n}=\frac{\rho_1-\rho_2 k_{23\cdots n}}{\rho_1+\rho_2 k_{23\cdots n}}, \tag{8-65}$$

$$k_{(m-1)m\cdots n}=\frac{1-u_{(m-1)m\cdots n}e^{-2\lambda d_{m-1}}}{1+u_{(m-1)m\cdots n}e^{-2\lambda d_{m-1}}}, \tag{8-66}$$

$$u_{(m-1)m\cdots n}=\frac{\rho_{m-1}-\rho_m k_{m(m+1)\cdots n}}{\rho_{m-1}+\rho_m k_{m(m+1)\cdots n}}, \tag{8-67}$$

$$k_{(n-1)n}=\frac{1-u_{(n-1)n}e^{-2\lambda d_{n-1}}}{1+u_{(n-1)n}e^{-2\lambda d_{n-1}}},$$

$$u_{(n-1)n}=\frac{\rho_{n-1}-\rho_n}{\rho_{n-1}+\rho_n}. \tag{8-68}$$

同样，对偶极子-偶极子排列，势可如方程（8-36）那样相加。

（七）势公式的用法

在电阻率测深中，我们希望能推断出大地下不同岩层的厚度和电阻率。为此，我们通常计算视电阻率 ρ_s 相对电极间距的变化曲线。其所以这样做，是由于我们假设对每一电极间距，所测

的电阻率就等于视均匀大地的电阻率。于是，由方程（8-11）

$$\rho_a=2\pi\frac{V}{I}\frac{1}{\left[\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4}\right]}=2\pi\frac{V}{I}r_0,\quad(8\text{-}69)$$

式中

$$\frac{1}{r_0}=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4},$$

并做出 ρ_a 随 r_0 或与 r_0 有关的什么距离而变化的曲线，可把得到的观测曲线与视电阻率的理论曲线相比较。后者是基于二层或三层的大地模型由方程（8-35）和（8-52）求得的。把方程(8-35)和（8-52）改写为有用的形式

$$\rho_a=2\pi\frac{V}{I}r_0=\rho_1\int_0^\infty\frac{1-u_1e^{-2\lambda d_1}}{1+u_1e^{-2\lambda d_1}}[J_0(\lambda r_1)-J_0(\lambda r_2)-J_0(\lambda r_3)+J_0(\lambda r_4)]d\lambda\quad(8\text{-}70)$$

和

$$\rho_a=2\pi\frac{V}{I}r_0=\rho_1\int_0^\infty\frac{1-u(\lambda)e^{-2\lambda d_1}}{1+u(\lambda)e^{-2\lambda d_1}}[J_0(\lambda r_1)-J_0(\lambda r_2)-J_0(\lambda r_3)+J_0(\lambda r_4)]d\lambda\quad(8\text{-}71)$$

这里，已把所有四个电极都考虑到了。

我们注意到，在方程(8-35)、(8-52)和一般方程(8-63)中，提供关于层的信息的基本量是核 $k_{12\cdots n}$；$J_0(\lambda r)$ 的贡献只是记述电极的排列。所以，电阻率测深的基本问题就是确定核。由方程（404）和（405）给出的一对付里叶-贝塞耳变换，启发我们可以变换（8-63)式，得出

$$k_{12\cdots n}=\frac{2\pi\lambda}{I\rho_1}\int_0^\infty rV(r)J_0(\lambda r)dr.\quad(8\text{-}72)$$

这样，如果已知道了对恒定电流 I 的观测电势函数 $V(r)$，我们就能计算出实验核，并将它与由模型实验得出的核相对照。沃佐夫（1958）曾提到过这个方法。

由方程（8-56）和（8-57），两层大地的核是：

$$k_{12}=\frac{1-u_{12}e^{-2\lambda d_1}}{1+u_{12}e^{-2\lambda d_1}},$$

其中

$$u_{12}=\frac{\rho_1-\rho_2}{\rho_1+\rho_2},$$

核的表达式可改写为

$$k_{12}=\frac{(\rho_1+\rho_2)e^{\lambda d_1}-(\rho_1-\rho_2)e^{-\lambda d_1}}{(\rho_1+\rho_2)e^{\lambda d_1}+(\rho_1-\rho_2)e^{-\lambda d_1}}, \qquad (8\text{-}73)$$

这里已对各项乘以因子 $(\rho_1+\rho_2)e^{\lambda d_1}$，把上式重新整理为

$$k_{12}=\frac{\rho_1(e^{\lambda d_1}-e^{-\lambda d_1})+\rho_2(e^{\lambda d_1}+e^{-\lambda d_1})}{\rho_1(e^{\lambda d_1}+e^{-\lambda d_1})+\rho_2(e^{\lambda d_1}-e^{-\lambda d_1})}. \qquad (8\text{-}74)$$

分子分母同除以 $(e^{\lambda d_1}+e^{-\lambda d_1})$，并做代换

$$\tanh\lambda d_1=\frac{e^{\lambda d_1}-e^{-\lambda d_1}}{e^{\lambda d_1}+e^{-\lambda d_1}},$$

则有

$$\rho_1 k_{12}=\rho_1\frac{\rho_2+\rho_1\tanh\lambda d_1}{\rho_1+\rho_2\tanh\lambda d_1}. \qquad (8\text{-}75)$$

量$\rho_1 k_{12}$完全类似于由下面常见的形式给出的两层大地的平面波阻抗

$$Z(0)=Z_1\frac{Z_2+Z_1\tanh ikh_1}{Z_1+Z_2\tanh ikh_1}, \qquad (8\text{-}76)$$

式中 $Z(0)$是大地表面的阻抗；

Z_2 是终端的阻抗；

Z_1 是第一层的特征阻抗；

h_1 是第一层的厚度。

前面出现的量 u_{12} 类似于反射系数的平方根（斯特 拉顿，1941，P.512）

$$r_{12}=R_{12}^{1/1}=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}=-r_{21}. \qquad (8\text{-}77)$$

对于两层的大地，参量 u_{12} 是比核更基本的。前面图 3-2 已做了这个参数的曲线。那里我们就讲过，当 ρ_1/ρ_2 大于 10 后，该比值的进一步增大并不会引起做为 ρ_1/ρ_2 的函数 u_{12} 的任何有意义的改变。所以方程（8-32）说明，对一固定的 ρ_1，当 $\rho_2=0.1\rho_1$ 后，其数值进一步减小并不会引起势 V' 的明显变化。

九、半空间表面上的电极，交流

用于电阻率测深或勘探的交流电法，较之直流电法，出现了电流迴路和电势迴路之间的电感和电容耦合。这种耦合使得解释复杂化了，当观测低电阻区域的激发极化时尤其如此。我们只能就非常简单的大地模型算出电感和电容耦合。下面我们考虑对均匀大地附加的电感耦合项。现在提出这个问题是为了在本书中尽早引入交流源的问题。这一安排会使问题的阐述受一点影响，但稍后我们就将完成这一论述。下面的含源问题在开头就做过深入的研究。

偶极子是沿 x 轴取向的，如图9—1所示，它位于大地表面以上高度为 h 处，P 点在大地表面上或其上方，可用笛卡儿坐标（x，y，z）或柱坐标（ρ，θ，z）描述它，原点在偶极子上。

假设存在有赫兹矢量 $\pi(\rho,\theta,z)$，且它的分量必须满足柱坐标中的波动方程（279）。该方程在轴上仍保持有限值的积分解，由（406）式给出。电场的对称性已在图9—2中说明；场对 $x-z$ 平面是对称的，对 $y-z$ 平面是反对称的。当角 θ 是对 x 轴度量时，余弦函数能描述这一对称性，正弦函数就不行了。所以在（406）式中的 $e^{in\theta}$ 必须换为 $\cos n\theta$

$$\phi(\rho,\theta,z,t)=e^{-i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos n\theta\int_0^{\infty}[f_n(\lambda)e^{+z\sqrt{k^2-\lambda^2}}+g_n(\lambda)e^{-z\sqrt{k^2-\lambda^2}}]J_n(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (9-1)$$

这里把（406）式中积分号下的 λ 并入了本征函数，而且我们引入积分号下对正负指数分开的本征函数选择了方程的通解。

我们已经得出了位于无限大媒质中的无穷小电偶极子的势，它由方程（193）给出

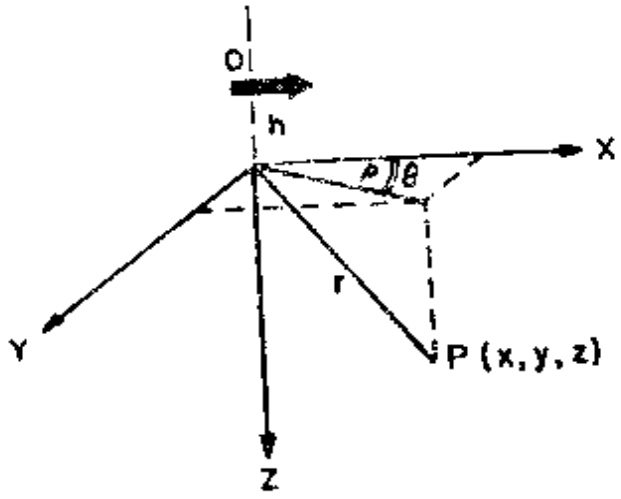


图9—1 均匀大地表面位于坐标系原点的电偶极子。观察点 $P(x, y, z)$ 的位置是任意的

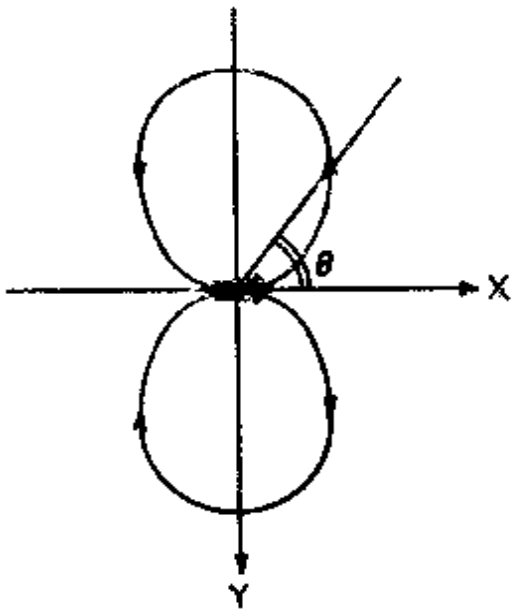


图9—2 沿 x 轴取向的电偶极子电场的对称性

$$\pi_x^E = \frac{i\mu\omega}{4\pi k_0^2}\,\frac{e^{ik_0 r}}{r} - Ids e^{-i\omega t},\quad r^2 = \rho^2 + z^2. \qquad (9\text{-}2)$$

这是无穷小偶极子的一次势，还应该给它加上由于大地的存在而产生的二次势。这样一来，我们就可以对无穷小偶极子的势的表达式作积分，得到有限长度“偶极子”的势。函数 $e^{ik_0 r}/r$ 能变换为积分式。由（406)式，略去时间相关因子，可把波动方程在原点保持有限而且是轴对称（有 $n = 0$）的解写成

$$\psi(\rho, 0, z) = \int_0^\infty g_0(\lambda) J_0(\lambda\rho) e^{\pm i\sqrt{k_0^2+\lambda^2}\cdot z}\,\lambda d\lambda \qquad (9\text{-}3)$$

因为 $e^{ik_0 r}/r$ 也是波动方程的一个解，它在原点是有限的而且是轴对称的，所以可把 $e^{ik_0 r}/r$ 与方程（9-3）同等看待。在 $z = 0$ 时有

$$\frac{e^{ik_0 r}}{r} = \int_0^\infty g_0(\lambda) J_0(\lambda\rho) d\lambda \qquad (9\text{-}4)$$

现在，我们来求使这个等式成立的 $g_0(\lambda)$ 的值。如果能把方程（9-4）当做方程（404）和（405）的一对付里叶—贝塞耳变换中的函数之一来看，则另一个函数是

$$g_0(\lambda)=\int_0^\infty e^{ik_0r}J_0(\lambda\rho)d\rho. \tag{9-5}$$

与方程（8-16）类似，我们可把（9-5）式变换为

$$g_0(\lambda)=\int_0^\infty e^{ik_0r}J_0(\lambda\rho)d\rho=(\lambda^2-k_0^2)^{-1/2} \tag{9-6}$$

于是

$$\frac{e^{ik_0r}}{r}=\int_0^\infty\frac{\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}e^{\pm\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\cdot z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{9-7}$$

方程（9-7）中正负指数的选择与函数展开的区域有关。我们希望保证积分表达式在无限远处表现出与 e^{ik_0r}/r 相同的特点。由于 e^{ik_0r}/r 是一球状传播的波，它的振幅在 $r\to\infty$ 时将减小为零，因而在积分表达式中，我们使 $\sqrt{\lambda^2-k^2}$ 的实部始终为正，并选择 z 的符号，使得波在无限远处为零。所以，对区域 $z\leqslant 0$，展式为

$$\pi_z^p=\frac{ce^{ik_0r}}{r}=c\int_0^\infty\frac{\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}e^{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\cdot z}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{9-8}$$

在区域 $h\geqslant z>0$，展式为

$$\begin{aligned}\pi_z^p&=c\frac{e^{ik_0r}}{r}\\&=c\int_0^\infty\frac{\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\cdot z}J_0(\lambda\rho)d\lambda,\end{aligned} \tag{9-9}$$

式中

$$c=\frac{i\mu\omega}{4\pi k_0^2}Idse^{-i\omega t}. \tag{9-10}$$

为了方便，用 u_0 代换 $\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$，这样方程（9-2）变为

$$\pi_x^P = c\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} e^{u_0 z} J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad z \leqslant 0, \tag{9-11}$$

$$\pi_z^P = c\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_0} e^{-u_0 z} J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad h \geqslant z > 0. \tag{9-12}$$

设空气中的总势是一次势和二次势相加构成的

$$\pi_{x0} = \pi_x^P + \pi_x^S, \tag{9-13}$$

但在地面上，势仅由二次势构成

$$\pi_{x1} = \pi_{x1}^S. \tag{9-14}$$

这一处置可看做任意的，对大地上面的区域，它等价于用一个特解加上齐次波动方程的解，来表示非齐次波动方程的解。而在大地中，则只找齐次波动方程的解。

我们注意到，关于一次势的表达方程（9-11）和（9-12）只包含有零级贝塞耳函数，于是为满足大地表面的边界条件，可以预料二次势也只含有零级贝塞耳函数。下面我们用势来表示边界条件。

当一次势只有 x 分量时，问题没有对称性，这使我们不得不对二次势采用两个分量。在一般情况下，可把势写为

$$\boldsymbol{\pi} = \mathbf{i}\pi_x + \mathbf{k}\pi_z, \qquad \pi_y = 0. \tag{9-15}$$

所以由方程（75）和（77），场为

$$\mathbf{E} = \nabla\nabla\cdot\boldsymbol{\pi} + k^2\boldsymbol{\pi}, \tag{9-16}$$

$$\mathbf{H} = (\sigma - i\omega\sigma)\nabla\times\boldsymbol{\pi}. \tag{9-17}$$

场的分量可直接写出如下：

$$E_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z}\right) + k^2\pi_x. \tag{9-18}$$

$$E_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z}\right), \tag{9-19}$$

$$E_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \pi_x}{\partial x} + \frac{\partial \pi_z}{\partial z}\right) + k^2\pi_z; \tag{9-20}$$

$$H_x=(\sigma-i\omega\varepsilon)\frac{\partial\pi_z}{\partial y}, \tag{9-21}$$

$$H_y=(\sigma-i\omega\varepsilon)\left(\frac{\partial\pi_x}{\partial z}-\frac{\partial\pi_z}{\partial x}\right) \tag{9-22}$$

$$H_z=-(\sigma-i\omega\varepsilon)\frac{\partial\pi_x}{\partial y}. \tag{9-23}$$

在空气－大地界面上，切向的 **E** 和 **H** 是连续的，那么由上面用 π 矢量表示的电场和磁场的关系式，能写出

由 H_x：
$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)\frac{\partial\pi_{z0}}{\partial y}=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)\frac{\partial\pi_{z1}}{\partial y}\Big|_{z=h}, \tag{9-24}$$

由 H_y：
$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)\left(\frac{\partial\pi_{x0}}{\partial z}-\frac{\partial\pi_{z0}}{\partial x}\right)$$
$$=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)\left(\frac{\partial\pi_{x1}}{\partial z}-\frac{\partial\pi_{z1}}{\partial x}\right)\Big|_{z=h}, \tag{9-25}$$

由 E_x：
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\pi_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z0}}{\partial z}\right)+k_0^2\pi_{x0}$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\pi_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z1}}{\partial z}\right)+k_1^2\pi_{x1}\Big|_{z=h}, \tag{9-26}$$

由 E_y：
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\pi_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z0}}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\pi_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z1}}{\partial z}\right)\Big|_{z=h}. \tag{9-27}$$

关系式（9-24）至（9-27）适用于所有的 x 和所有的 y，因而能对 x 和 y 求积分。这些函数和它们的导数在 $x\to\infty$ 和 $y\to\infty$ 时为零，所以积分常数一定为零。于是边界条件（9-27）化为

$$\frac{\partial\pi_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z0}}{\partial z}=\frac{\partial\pi_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial\pi_{z1}}{\partial z}\Big|_{z=h}, \tag{9-28}$$

把它代入方程（9-26）后得到

$$k_0^2\pi_{x0}=k_1^2\pi_{x1}|_{z=h}. \tag{9-29}$$

由方程（9-24）的积分，得到

$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)\pi_{z0}=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)\pi_{z1}|_{z=h}. \tag{9-30}$$

我们能将方程（9-24）对 y 求积分，再把其结果对 x 求微商，并

与方程（9-25）相加，得到

$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)\frac{\partial\pi_{x0}}{\partial z}=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)\left.\frac{\partial\pi_{x1}}{\partial z}\right|_{z=h}. \qquad (9-31)$$

前面已讲过，边界条件要求势的任一表达式中只能有零级贝塞耳函数，按方程（9-1）可写出合势的z分量

在偶极子上方的空气中

$$\pi_{x0}^{-}=\pi_{x0}^{p}+\pi_{x0}^{s}$$
$$=\int_0^\infty[f_0(\lambda)e^{u_0z}+g_0(\lambda)e^{-u_0z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda;\quad z\leqslant 0. \qquad (9-32)$$

在偶极子下方的空气中

$$\pi_{x0}^{+}=\pi_{x0}^{p}+\pi_{x0}^{s}$$
$$=\int_0^\infty[f_0(\lambda)e^{u_0z}+g_0(\lambda)e^{-u_0z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda;\quad h\geqslant z>0. \qquad (9-33)$$

在大地中

$$\pi_{x1}=\pi_{x1}^{s}$$
$$=\int_0^\infty[f_1(\lambda)e^{u_1z}+g_1(\lambda)e^{-u_1z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda;\quad z\geqslant h. \qquad (9-34)$$

注意，在式（9-32）中，被$g_0(\lambda)e^{u_0z}$表示的一次波函数具有正的指数，所以在$z\leqslant 0$的区域，一次波是沿负z方向传播的。在方程（9-32）和（9-33）中，每个势都由被负指数表示的一次波（或发射波）和被正指数表示的二次波（或反射波）构成。在下几节中我们将再次提到这一点。

现在，我们又得来计算四个本征函数$f_0(\lambda)$、$g_0(\lambda)$、$f_1(\lambda)$和$g_1(\lambda)$。首先我们指出，由于z趋于无穷大时π_{x1}必须为零，则$f_1(\lambda)=0$；也就是在半无限大介质里没有反射波。其次，由

方程（9-31）

$$\frac{k_0^2}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}[f_0(\lambda)e^{u_0 z}+g_0(\lambda)e^{-u_0 z}]$$

$$=\frac{k_1^2}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial z}[g_1(\lambda)e^{-u_1 z}]|_{z=h}. \tag{9-35}$$

或者

$$\frac{k_0^2 u_0}{\mu_0}[f_0(\lambda)e^{u_0 h}-g_0(\lambda)e^{-u_0 h}]=-\frac{k_1^2}{\mu_1}u_1 g_1(\lambda)e^{-u_1 h}. \tag{9-36}$$

类似地，将方程（9-33）和（9-34）代入方程（9-29），可以看到

$$k_0^2[f_0(\lambda)e^{u_0 h}+g_0(\lambda)e^{-u_0 h}]=k_1^2 g_1(\lambda)e^{-u_1 h}. \tag{9-37}$$

由上两式，得出

$$g_1(\lambda)=\frac{2k_0^2}{k_1^2}\cdot\frac{u_0\mu_1}{\mu_1 u_0+\mu_0 u_1}e^{(-u_0+u_1)h}g_0(\lambda), \tag{9-38}$$

$$f_0(\lambda)=\frac{-u_1\mu_0+u_0\mu_1}{u_1\mu_0+u_0\mu_1}e^{-2u_0 h}g_0(\lambda). \tag{9-39}$$

由于这里为无限大的媒质，注意到 $k_1=k_0$，解方程（9-32）必将化为只有源的势。于是可以用系统的常数求出 $g_0(\lambda)$ 来。比较方程（9-32）和（9-8），可以看到

$$g_0(\lambda)=c\cdot\frac{\lambda}{u_0}. \tag{9-40}$$

于是，由方程（9-38）和（9-39）得出

$$g_1(\lambda)=2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\cdot\frac{\lambda\mu_1}{\mu_1 u_0+\mu_0 u_1}e^{(-u_0+u_1)h}, \tag{9-41}$$

$$f_0(\lambda)=\frac{c\lambda}{u_0}\frac{-u_1\mu_0+u_0\mu_1}{u_1\mu_0+u_0\mu_1}e^{-2u_0 h}. \tag{9-42}$$

所以，现在可以没有困难地由方程（9-32）至（9-34）得到 π_{x1}

和 π_{x0}。

再来考虑空气中势的 z 分量的边界条件。首先，由方程(9-28)我们注意到微商 $\partial\pi_{x0}/\partial_x$ 和 $\partial\pi_{x1}/\partial_x$ 只要求零级贝塞耳函数的微商，这可通过下面公式来实现

$$J'_n(x)=\frac{n}{x}J_n(x)-J_{n+1}(x), \qquad (9-43)$$

而在我们的问题中，阶数为零

$$J'_0(x)=-J_1(x). \qquad (9-44)$$

这样，在方程（9-28）中只有第一阶贝塞耳函数出现，故势的 z 分量一般只能含有第一阶贝塞耳函数，即 $n=1$。所以势的 z 分量仅由二次势组成。

在空气中是

$$\pi_{z0}=\cos\theta\int_0^\infty[p_0(\lambda)e^{u_0z}+q_0(\lambda)e^{-u_0z}]J_1(\lambda\rho)d\lambda; \qquad (9-45)$$

在地面上是

$$\pi_{z1}=\cos\theta\int_0^\infty[p_1(\lambda)e^{u_1z}+q_1(\lambda)e^{-u_1z}]J_1(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (9-46)$$

还是因为 $z\to\infty$ 时，$\pi_{z1}\to 0$，则 $p_1(\lambda)=0$；在半无限大介质中没有反射波。同样，我们知道，由于偶极子势是在 x 方向的，因而对无限大媒质将没有 π_{x0} 分量。于是随着 $z\to-\infty$，$\pi_{x0}\to 0$，则必然有 $q_0(\lambda)=0$。为确定剩余的两个本征函数 $p_0(\lambda)$ 和 $q_1(\lambda)$。我们首先将边界条件（9-30）用于方程（9-45）和（9-46）

$$(\sigma_0-i\omega\epsilon_0)e^{u_0h}\ p_0(\lambda)=(\sigma_1-i\omega\epsilon_1)e^{-u_1h}\ q_1(\lambda)$$

或

$$p_0(\lambda)=\frac{k_1^2\mu_0}{\mu_1k_0^2}e^{-(u_0+u_1)h}\ q_1(\lambda). \qquad (9-47)$$

(9-28) 式包含有贝塞耳函数对 x 的微商，注意

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)d\lambda=\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)d\lambda\right]\frac{\partial\rho}{\partial x}$$

$$=-\cos\theta\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{9-48}$$

这里已用了 (9-44) 式的结果。然后将边界条件 (9-28) 用于方程 (9-45)、(9-46)、(9-33) 和 (9-34) 得出

$$-[f_0(\lambda)e^{u_0h}+g_0(\lambda)e^{-u_0h}]\lambda+p_0(\lambda)u_0e^{u_0h}$$

$$=-\lambda g_1(\lambda)e^{-u_1h}-q_1(\lambda)u_1e^{-u_1h}. \tag{9-49}$$

把 (9-40)、(9-41)、(9-42)、(9-47) 和 (9-49) 式结合在一起时，就可得到

$$q_1(\lambda)=2c\lambda^2\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{\mu_1^2}{\mu_1u_0+\mu_0u_1}\frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{(u_1-u_0)h}, \tag{9-50}$$

于是方程 (9-47) 可被表示为

$$p_0(\lambda)=2c\lambda^2\frac{\mu_0\mu_1}{\mu_1u_0+\mu_0u_1}\frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{-2u_0h}. \tag{9-51}$$

把这后两个本征函数代入方程 (9-45) 和 (9-46)，就得到了势 π_{z0} 和 π_{z1}。首先注意，(9-45)式可改写为(先令 $q_0(\lambda)=0$，这样做与该本征函数的物理意义一致)

$$\pi_{z0}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{p_0(\lambda)}{\lambda}e^{u_0z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{9-52}$$

同样，可把 (9-46) 式改写为

$$\pi_{z1}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{q_1(\lambda)}{\lambda}e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{9-53}$$

将方程 (9-51) 和 (9-50) 代入方程 (9-52) 和 (9-53)，

结果为

$$\pi_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\mu_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}\ \frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}$$

$$\cdot e^{u_0(z-2h)}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda \qquad (9\text{-}54)$$

和

$$\pi_{z1}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{k_0^2}{k_1^2}\ \frac{\mu_1^2}{\mu_1u_0+\mu_0u_1}\ \frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}$$

$$\cdot e^{-u_1(z-h)}\ e^{-u_0h}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (9\text{-}55)$$

在 $h=0$ 处，$\mu_1=\mu_0$，式 (9-54) 变为

$$\pi_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{k_1^2-k_0^2}{(u_0+u_1)(u_0k_1^2+u_1k_0^2)}e^{u_0z}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

(9-56)

它对于准静态近似，$k_0\sim 0$，因而对$u_0\sim\lambda$变为

$$\pi_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda+u_1}e^{\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (9\text{-}57)$$

这个结果与沃尔夫（1946）和奎恩（1963）提出的公式一致。准静态近似对低频传播是适宜的。这种近似认为空气中和大地里的位移电流可以忽略。又假设空气中的传导电流也为零，故 $k_0\sim 0$。所以在空气中我们要找拉普拉斯方程的解，而在大地里为波动方程的解。

求出势以后，就可以来计算场了。在勘探中，我们的兴趣大多在于水平电偶极子的电场，现在就来集中精力讨论这一问题。假设$\mu_1=\mu_0$，$k_0\sim 0$，$u_0\sim\lambda$并且$h=0$；水平电偶极子就放置在均匀、不导磁的地面上。于是在大地中，由方程 (9-34) 和(9-55) 给出的势变为

$$\pi_{z1}=2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda+u_1}e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (9\text{-}58)$$

$$\pi_{z1}=-2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda+u_1}e^{-u_1z}J_1(\lambda\rho)d\lambda.$$

(9-59)

这两个积分已被福斯特（1931）算出，现在我们着手算一下。给方程（9-59）的分子分母同乘以 $\lambda-u_1$，并将 $\lambda^2-u_1^2$ 用其等价的 k_1^2 来代换

$$\pi_{z1}=-2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\int_0^\infty\lambda e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda-\int_0^\infty u_1e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda\right].\quad(9-60)$$

其中的第一个积分与索末菲（1926）积分有关

$$\frac{e^{ik_1r}}{r}=\int_0^\infty\frac{\lambda}{u_1}e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda=P.\quad(9-61)$$

方程（9-60）中的第二个积分为下述福斯特（1931）积分的二阶导数

$$N=\int_0^\infty\frac{1}{u_1}e^{-u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda=I_0\left[\frac{r}{2}(r+z)\right]\cdot K_0\left[\frac{r}{2}(r-z)\right].\quad(9-62)$$

I_0和K_0是零阶修正贝塞耳函数。于是得到：

$$\pi_{z1}=2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial^2N}{\partial z^2}\right].\quad(9-63)$$

π_{z1}的这个形式启发我们，给π_{x1}的积分表达式也找一个类似的形式。事实上，可将方程（9-58）写做

$$\pi_{x1}=-2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{1}{k_1^2}\left[\frac{\partial^2P}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_1^2N+\frac{\partial^2N}{\partial z^2}\right)\right].$$

(9-64)

于是，电场强度的各分量由方程（9-63）和（9-64）的微商

得到。这样，从方程（9-18）和（9-19），有

$$E_x=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial \pi_{z1}}{\partial x}+\frac{\partial \pi_{z1}}{\partial z}\right]+k_1^2\pi_{z1}, \tag{9-65}$$

$$E_y=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \pi_{z1}}{\partial x}+\frac{\partial \pi_{z1}}{\partial z}\right], \tag{9-66}$$

或者

$$E_x=2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\left[\frac{\partial^3 N}{\partial y^2\partial z}-\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}\right], \tag{9-67}$$

$$E_y=-2c\frac{k_0^2}{k_1^2}\frac{\partial^3 N}{\partial x\partial y\partial z} \tag{9-68}$$

这与福斯特（1931）得到的表达式完全一样。求得这个结果时，用了关于$\partial N/\partial z$的波动方程，即

$$\frac{\partial^2\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)}{\partial z^2}+k^2\frac{\partial N}{\partial z}=0. \tag{9-69}$$

这个特殊的波动方程是成立的，因为我们知道 π_{z1} 必须满足波动方程，而且π_{z1}的所有导数和积分也应该满足波动方程。参看方程（9-60）和（9-62），可得到$\partial N/\partial z$对π_{z1}的关系。

在地面，$z=0$，可以看到

$$\frac{\partial N}{\partial z}=-\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)d\lambda=-\frac{1}{\rho}. \tag{9-70}$$

这个积分是在方程（8-16）中用过的李普希兹积分。同时在地面，积分P的值为

$$P=\frac{e^{ik_1\rho}}{\rho}, \tag{9-71}$$

与前面一样

$$\rho^2=x^2+y^2,$$
$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

于是电场分量成为

$$E_x=\frac{Ids}{2\pi\sigma_1}\left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1-ik_1\rho}{\rho^3}e^{ik_1\rho}\right]$$

$$=\frac{Ids}{2\pi\sigma_1\rho^3}\left[1+(1-ik_1\rho)e^{ik_1\rho}-\frac{3y^2}{\rho^2}\right], \qquad (9-72)$$

$$Ey=\frac{Ids}{2\pi\sigma_1}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(-\frac{1}{\rho}\right)=\frac{Ids}{2\pi\sigma_1\rho^3}\frac{3xy}{\rho^2}. \qquad (9-73)$$

到目前为止，我们只考虑了由无穷小电偶极子造成的势和场。现在我们来考虑大地表面上两个相邻的导线，如图9—3所示。设两个导线S和s在同一平面内，且作用于沿路线S的第二根导线的线元dS上的合场强为

$$E_s=E_x\cos\theta+E_y\sin\theta, \qquad (9-74)$$

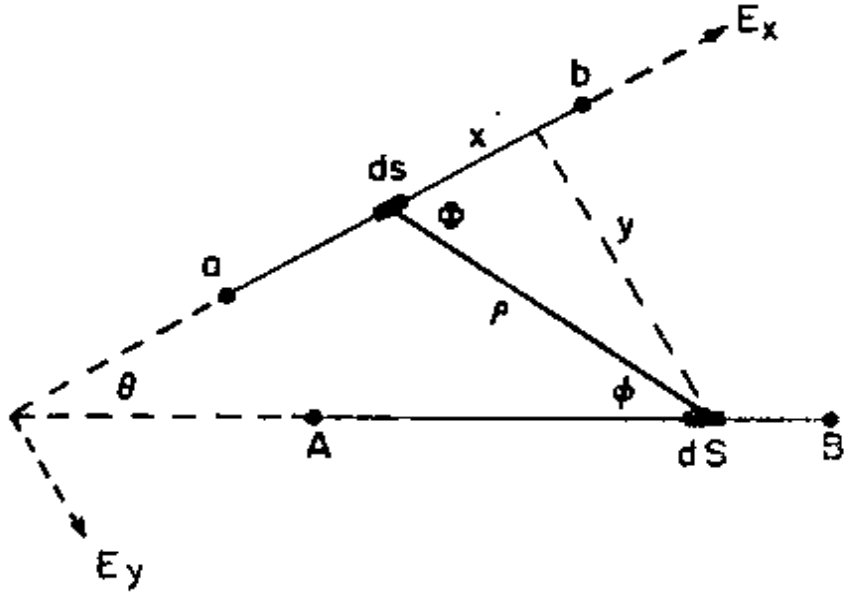


图 9—3　均匀大地表面上的两个相邻的电流线AB和ab

则作用于dS的电势差dV是

$$dV=dS(E_x\cos\theta+E_y\sin\theta). \qquad (9-75)$$

把方程（9-72）和（9-73）代入（9-75），得到

$$dV=\frac{IdsdS}{2\pi\sigma_1}\left\{\left[1-\frac{3y^2}{\rho^2}\right]\frac{\cos\theta}{\rho^3}+\frac{3xy}{\rho^2}\frac{\sin\theta}{\rho^3}\right.$$

$$\left.+[1-ik_1\rho]e^{ik_1\rho}\frac{\cos\theta}{\rho^3}\right\}. \qquad (9-76)$$

现在，把两个无穷小线元 ds 和 dS 之间的互阻抗写为一个线元的总电势差与另一线元中的电流之比：

$$dZ=\frac{dV}{I}=\frac{dsdS}{2\pi\sigma_1}\left\{-\frac{3}{\rho^3}\sin\Phi\sin\phi\right.$$

$$\left.+\frac{2\cos\theta}{\rho^3}-[1-(1-ik_1\rho)e^{ik_1\rho}]\frac{\cos\theta}{\rho^3}\right\}. \qquad (9-77)$$

这里，已对方程（9-76）的前两项做了如下代换：$\cos\Phi=x/\rho$，$\sin\Phi=y/\rho$和$\Phi=\theta+\phi$。

我们想给方程（9-77）中的第一项提供另一形式。为此，先注意对某函数w存在的关系

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (9-78)$$

在图 9—3 中，x 和y 是独立的变量，而 ds 是沿 x 轴方向的，所以全导数变为

$$\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{dw}{ds}. \qquad (9-79)$$

类似地能写出

$$\frac{dw}{dS}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dS}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dS}=\frac{\partial w}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial w}{\partial y}\sin\theta, \qquad (9-80)$$

这里S是沿第二根导线的坐标方向。于是我们发现

$$\frac{d^2w}{dsdS}=\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\cos\theta+\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\sin\theta$$

$$=-\frac{\cos\theta}{\rho^3}+\frac{3x^2}{\rho^5}\cos\theta+\frac{3xy}{\rho^5}\sin\theta \qquad \left(\text{对 } w=\frac{1}{\rho}\right)$$

$$=\frac{2\cos\theta}{\rho^3}-\frac{3\sin^2\Phi\cos\theta}{\rho^3}+\frac{3\sin\Phi\cos\Phi\sin\theta}{\rho^3}, \qquad (9-81)$$

或者：

$$\frac{d^2w}{dsdS}=\frac{1}{\rho^3}(2\cos\theta-3\sin\Phi\sin\phi)。\qquad(9\text{-}82)$$

于是，方程（9-77）可写成

$$dZ=\frac{dsdS}{2\pi\sigma_1}\left\{\frac{d^2}{dsdS}\left(\frac{1}{\rho}\right)-[1-(1-ik_1\rho)\ e^{ik_1\rho}]\frac{\cos\theta}{\rho^3}\right\}。\qquad(9\text{-}83)$$

依照常规的表示法，我们把上式改写为

$$dZ=dsdS\left[\frac{d^2Q(\rho)}{dsdS}+P(\rho)\cos\theta\right],\qquad(9\text{-}84)$$

式中

$$Q(\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\rho}，\qquad(9\text{-}85)$$

$$P(\rho)=-\frac{1}{2\pi\sigma_1\rho}\left[\frac{1-(1-ik_1\rho)\ e^{ik_1\rho}}{\rho^2}\right]。\qquad(9\text{-}86)$$

如我们能适当地选择$P(\rho)$和$Q(\rho)$，则无论介质成不成层，方程（9-84）都是正确的。不过，$P(\rho)$和$Q(\rho)$将依赖于媒质的几何形态和电极分布情况。这样，我们可以说，分别由a到b及A到B布好的两根导线s和S的互阻抗是

$$Z=\int_a^b\int_A^B\left[P(\rho)\cos\theta+\frac{d^2}{dsdS}Q(\rho)\right]dsdS\qquad(9\text{-}87)$$

由（9-85）式给出的$Q(\rho)$的值是由单个电流源产生的势。对图9—3所示的偶极子-偶极子排列，由方程（9-85）有

$$\begin{aligned}Q_{(A-B)(a-b)}&=Q(Aa)-Q(Ba)-Q(Ab)+Q(Bb)\\&=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\left[\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_4}\right]\end{aligned}\qquad(9\text{-}88)$$

式中 $\rho_1=Aa$，$\rho_2=Ba$，$\rho_3=Ab$和$\rho_4=Bb$。对于直流情况，（9-88）式与（8-11）式是完全一样的。我们把这种情况称做电阻耦合。

方程（9-87）中的另一项一定是电感耦合项。如果忽略位移电流，则$P(\rho)$由（9-86）式给出。显然，$P(\rho)$是频率和大地电

性常数的函数。应该指出，正如我们所料，E_φ 表达式中不会有电感耦合项。这说明，各向同性大地上正交的线电流元之间没有电感耦合。

马登和坎特韦尔曾用方程（9-86）估算了均匀大地上偶极子—偶极子排列的电感耦合。

下面将会看到，这里的解很容易推广到 n 层大地的情况。不过，事先必须引入一个导致统一近似求解这类问题的附加理论。

十、平面波的反射与折射

（一）引言

这一节我们所关心的是斯涅耳定律的证明、菲涅耳方程的推导，并引出反射系数和透射系数的表达式。这些基本概念对了解下述各节的内容是重要的。下面由斯涅耳定律的推导开始讲起。

（二）斯涅耳定律

平面S是电学性质分别为$\epsilon_1\mu_1\sigma_1$与$\epsilon_2\mu_2\sigma_2$的两种媒质的界面，示于图10—1中。$\mathbf{n}$是由媒质（1）指向媒质（2）并垂直于平面S的单位矢量。如果$\mathbf{r}$是从原点到媒质（1）或（2）中任一点所画出的位置矢量，则平面S由下式确定

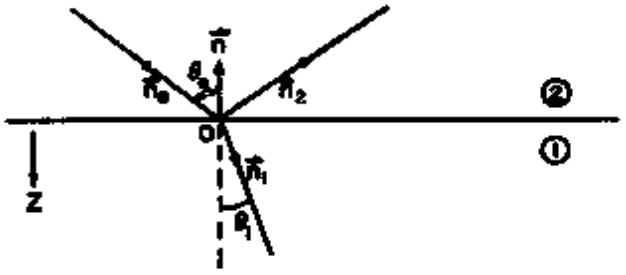


图 10—1　在界面上的反射与折射

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0. \tag{10-1}$$

设一平面波沿$\mathbf{n}_0$方向入射到面S上，电矢量和磁矢量由下两式给出

$$\mathbf{E}_i=\mathbf{E}_0\exp[ik_2\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}-i\omega t] \tag{10-2}$$

$$\mathbf{H}_i=\frac{k_2}{\omega\mu_2}\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_i. \tag{10-3}$$

式中$\mathbf{E}_0$是入射波的复振幅。由$\mathbf{n}$和$\mathbf{n}_0$这一对矢量所确定的平面，称为入射面。

经过面S进入媒质（1）中的波是透射波，而被平面S返回媒质（2）中的波是反射波。设反射波和透射波均为平面波，则将透射波写做

$$\mathbf{E}_t=\mathbf{E}_1\exp[ik_1\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-i\omega t], \tag{10-4}$$

$$\mathbf{H}_t=\frac{k_1}{\omega\mu_1}\mathbf{n}_1\times\mathbf{E}_t, \tag{10-5}$$

而反射波为

$$\mathbf{E}_r=\mathbf{E}_2\exp[ik_2\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{r}-i\omega t], \tag{10-6}$$

$$H_r=\frac{k_2}{\omega\mu_2}\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_r. \tag{10-7}$$

由于我们假定入射波、透射波和反射波都是平面波，则 $\mathbf{E}_1$、$\mathbf{E}_2$ 和 $\mathbf{E}_0$均与坐标无关。借助于$\mathbf{E}$的切向分量和$\mathbf{H}$的切向分量在 $z=0$ 的平面上是连续的这一边界条件，可以求出这三个波的振幅之间的关系。不过首先可以看到：由于这些边界条件适用于任意的 x 和 y 及所有的时间，因此在 $z=0$ 处，相因子必须全部相等，亦即

$$k_2\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}=k_1\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{r}=k_2\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{r}. \tag{10-8}$$

现在，我们引入恒等式

$$\mathbf{r}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})\mathbf{n}-\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r}), \tag{10-9}$$

对于 $z=0$，有$\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}=0$，所以方程（10-9）成为

$$\mathbf{r}=-\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r}), \tag{10-10}$$

把它代入方程（10-8）时得到

$$k_2\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r})=k_2\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r}), \tag{10-11}$$

和

$$k_2\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r})=k_1\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{r}). \tag{10-12}$$

通过矢量恒等式

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}, \tag{10-13}$$

可把（10-11）和（10-12）式变换为

$$(\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}-\mathbf{n}_2\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{r}=0, \tag{10-14}$$

$$(k_2\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}-k_1\mathbf{n}_1\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{n}\times\mathbf{r}=0. \tag{10-15}$$

如果在方程（10-14）和（10-15）中做下面的代换

$$(\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}-\mathbf{n}_2\times\mathbf{n})=\mathbf{A}, \tag{10-16}$$

$$\mathbf{n}\times\mathbf{r}=\mathbf{B}, \tag{10-17}$$

$$(k_1\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}-k_1\mathbf{n}_1\times\mathbf{n})=\mathbf{C}, \tag{10-18}$$

则（10-14）和（10-15）式变成

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0, \tag{10-19}$$

$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{B}=0, \tag{10-20}$$

由于**B**在S上的取向是任意的，所以标量积$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$要求**A**垂直于$S$，这样**A**就应平行于**n**。但是，**A**又是两个叉乘积产生的，其中每个叉乘都含有**n**，每个叉乘都垂直于**n**。要使$\mathbf{A}\parallel\mathbf{n}$和$\mathbf{A}\perp\mathbf{n}$的两个条件都得到满足，只有$\mathbf{A}=0$。同理可以确定$\mathbf{C}=0$。于是有

$$\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}=\mathbf{n}_2\times\mathbf{n}, \tag{10-21}$$

和

$$k_2\mathbf{n}_0\times\mathbf{n}=k_1\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}. \tag{10-22}$$

方程（10-21）的左右两端所表示的矢量是互相平行的，且垂直于$\mathbf{n}_0$、$\mathbf{n}_2$和**n**。同样，方程（10-22）左右两边也是互相平行（也相等）的矢量，它们都垂直于$\mathbf{n}_0$、$\mathbf{n}_1$和**n**。因此$\mathbf{n}_0$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$和**n**是共面的。透射波与反射波的同相面与入射面垂直。

参看图10—1可以发现，方程（10-21）左边的值是

$$\sin(\pi-\theta_0)=\sin\theta_0.$$

而等式（10-21）右边的数值是

$$\sin\theta_2$$

于是有结果

$$\sin\theta_2=\sin\theta_0. \tag{10-23}$$

这就是说：入射角θ_0等于反射角θ_2。由（10-22)式，我们可写出

$$k_2\sin\theta_0=k_1\sin\theta_1. \tag{10-24}$$

（10-23）和（10-24）式就是关于反射和折射的斯涅耳定律。

（三）菲涅耳方程

现在，我们回过头来讨论关于振幅$\mathbf{E}_0$、$\mathbf{E}_1$和$\mathbf{E}_2$的各个边界条件。由**E**的切向分量是连续的，可写出

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_2)=\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1. \tag{10-25}$$

由**H**的切向分量是连续的，可写出

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_2)=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1. \tag{10-26}$$

利用方程（10-3）、（10-5）和（10-7），可通过电矢量来表示方程（10-26）

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_0+\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_2)\frac{k_2}{\mu_2}=\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{E}_1)\frac{k_1}{\mu_1},$$

(10-27)

利用矢量恒等式

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})=(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B}-(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C},\qquad(10\text{-}28)$$

可把方程（10-27）中的三项展开为

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_0)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)\mathbf{n}_0-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0)\mathbf{E}_0,\qquad(10\text{-}29)$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_2)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2)\mathbf{n}_2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2)\mathbf{E}_2,\qquad(10\text{-}30)$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{E}_1)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1)\mathbf{n}_1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1)\mathbf{E}_1.\qquad(10\text{-}31)$$

入射矢量$\mathbf{E}_0$的方向是任意的，但是可把它分解为与入射面垂直的分量和在入射面内的分量。让我们分别来讨论这两种情况。

1．情况Ⅰ，$\mathbf{E}_0$垂直于入射面——由于入射面包含$\mathbf{n}$、$\mathbf{n}_0$、$\mathbf{n}_1$、$\mathbf{n}_2$，又因$\mathbf{E}_0$垂直于入射面，则

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0=\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{E}_0=0.\qquad(10\text{-}32)$$

对各向同性媒质，$\mathbf{E}_1$和$\mathbf{E}_2$也同样垂直于入射面

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1=\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2=0.\qquad(10\text{-}33)$$

于是求得（10-29）到（10-31）各式右边的第一项为零，第二项可由图10—1直接求出

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0=\cos(\pi-\theta_0)=-\cos\theta_0\qquad(10\text{-}34)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1=\cos(\pi-\theta_1)=-\cos\theta_1\qquad(10\text{-}35)$$

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2=\cos\theta_2.\qquad(10\text{-}36)$$

用$\mathbf{n}$叉乘等式（10-25）各项

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_0)+\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_2)=\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{E}_1).\qquad(10\text{-}37)$$

仿照方程（10-29）到（10-31）的做法，可把上式变换为

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_0)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{E}_0+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_2)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{E}_2$$
$$=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_1)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{E}_1.\qquad(10\text{-}38)$$

利用方程（10-32）和（10-33），得到

$$\mathbf{E}_0+\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_1.\qquad(10\text{-}39)$$

同理，由方程（10-27）得出

$$[-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0)\mathbf{E}_0-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2)\mathbf{E}_2]\frac{k_2}{\mu_2}=-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1)\mathbf{E}_1\frac{k_1}{\mu_1} \tag{10-40}$$

或

$$\cos\theta_0\mathbf{E}_0-\cos\theta_2\mathbf{E}_2=\frac{\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2}\cos\theta_1\mathbf{E}_1. \tag{10-41}$$

对$\mathbf{E}_1$和$\mathbf{E}_2$求解方程（10-39）和（10-41），就得出由$\mathbf{E}_0$表示的$\mathbf{E}_1$和$\mathbf{E}_2$

$$\mathbf{E}_1=\frac{\mu_1 k_2(\cos\theta_2+\cos\theta_0)}{\mu_1 k_2\cos\theta_2+\mu_2 k_1\cos\theta_1}\mathbf{E}_0, \tag{10-42}$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mu_1 k_2\cos\theta_0-\mu_2 k_1\cos\theta_1}{\mu_1 k_2\cos\theta_2+\mu_2 k_1\cos\theta_1}\mathbf{E}_0. \tag{10-43}$$

电场、磁场和传播矢量的相对取向示于图10—2中。

由斯涅耳第二定律（10-24）计算得

$$k_1\cos\theta_1=\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}. \tag{10-44}$$

而由斯涅耳第一定律算得

$$\cos\theta_2=\cos\theta_0. \tag{10-45}$$

将方程（10-44）和（10-45）代入方程（10-42）和（10-43），得出

$$\mathbf{E}_1=\frac{2\mu_1 k_2\cos\theta_0}{\mu_1 k_2\cos\theta_0+\mu_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}}\mathbf{E}_0, \tag{10-46}$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mu_1 k_2\cos\theta_0-\mu_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}}{\mu_1 k_2\cos\theta_0+\mu_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}}\mathbf{E}_0. \tag{10-47}$$

作为一个例子，我们取$\theta_0=0$，这相当于垂直入射的情形，得到

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mu_1 k_2-\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2+\mu_2 k_1}\mathbf{E}_0. \tag{10-48}$$

如果k_2为自由空间的波矢量，k_1为导体的波矢量，亦即$k_2=\alpha_2$和$k_1=\alpha_1+i\beta_1$，则有

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mu_1\alpha_2-\mu_2(\alpha_1+i\beta_1)}{\mu_1\alpha_2+\mu_2(\alpha_1+i\beta_1)}\mathbf{E}_0. \tag{10-49}$$

显然，在导体表面上$\mathbf{E}_2$与$\mathbf{E}_0$之间存在着相移。对$\mathbf{E}_0$垂直于入射面的情形，把反射波电场与入射波电场之比称做振幅反射系数$r_\perp$，那么由方程（10-47）可看到

$$r_\perp=\frac{\mathbf{E}_2}{\mathbf{E}_0}=\frac{\mu_1 k_2\cos\theta_0-\mu_2 k_1\sqrt{1-\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\sin^2\theta_0}}{\mu_1 k_2\cos\theta_2+\mu_2 k_1\sqrt{1-\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\sin^2\theta_0}}. \tag{10-50}$$

如作下面的代换

$$u_2=ik_2\cos\theta_0 \tag{10-51}$$

以及

$$u_1=ik_1\sqrt{1-\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2\sin^2\theta_0}, \tag{10-52}$$

则$r_\perp$可写做

$$r_\perp=\frac{\mu_1 u_2-\mu_2 u_1}{\mu_1 u_2+\mu_2 u_1}, \tag{10-53}$$

或写成一般形式

$$r_\perp=\frac{\mu_k u_j-\mu_j u_k}{\mu_k u_j+\mu_j u_k}. \tag{10-54}$$

这里的入射波在媒质j内，并在媒质k上反射。为了以后的方便，$i=\sqrt{-1}$已包含在由方程（10-51）和（10-52）给出的变换当中。

2．情况Ⅱ，$\mathbf{E}_0$在入射面内——在这种情况下，磁场矢量必定垂直于入射面，所以可写出

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_0=\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_1=\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_2=0. \tag{10-55}$$

场矢量的形式为

$$\mathbf{E}_i=\mathbf{E}_0\exp[ik_2\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}-i\omega t]\quad \mathbf{H}_i=\frac{k_2}{\omega\mu_2}\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_i, \tag{10-56}$$

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_1 \exp[ik_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t], \quad \mathbf{H}_i = \frac{k_1}{\omega \mu_1} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_i, \tag{10-57}$$

$$\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_2 \exp[ik_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t], \quad \mathbf{H}_r = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_r. \tag{10-58}$$

方程（10-56）至（10-58）右端的各式可写作

$$\mathbf{H}_i = \mathbf{H}_0 \exp[ik_2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t], \tag{10-59}$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_1 \exp[ik_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t], \tag{10-60}$$

$$\mathbf{H}_r = \mathbf{H}_2 \exp[ik_2 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t]. \tag{10-61}$$

所以

$$\mathbf{H}_0 \exp[ik_2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t] = \frac{k_2}{\omega \mu_2} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0 \exp[ik_2 \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r} - i\omega t]$$

或

$$\frac{\omega \mu_2}{k_2} \mathbf{H}_0 = \mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0. \tag{10-62}$$

用$\mathbf{n}_0$叉乘方程（10-62）两端

$$\frac{\omega \mu_2}{k_2} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}_0 = \mathbf{n}_0 \times (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{E}_0) = (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0)\mathbf{n}_0 - (\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{n}_0)\mathbf{E}_0. \tag{10-63}$$

由于$\mathbf{E}_0$在入射面内并与$\mathbf{n}_0$垂直，则$\mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{E}_0 = 0$，而(10-62)式变成

$$\mathbf{E}_0 = -\frac{\omega \mu_2}{k_2} \mathbf{n}_0 \times \mathbf{H}_0. \tag{10-64}$$

同样，我们可看到

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\omega \mu_1}{k_1} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{H}_1 \tag{10-65}$$

和

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\omega \mu_2}{k_2} \mathbf{n}_2 \times \mathbf{H}_2. \tag{10-66}$$

应用上面的方程（10-64）至（10-66），$\mathbf{E}$和$\mathbf{H}$切向的边界条件

(10-25) 和 (10-26) 现在成为

$$\mathbf{n}\times\left(-\frac{\omega\mu_2}{k_2}\mathbf{n}_0\times\mathbf{H}_0-\frac{\omega\mu_2}{k_2}\mathbf{n}_2\times\mathbf{H}_2\right)=-\mathbf{n}\times\frac{\omega\mu_1}{k_2}\mathbf{n}_1\times\mathbf{H}_1 \tag{10-67}$$

及

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_2)=\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1. \tag{10-68}$$

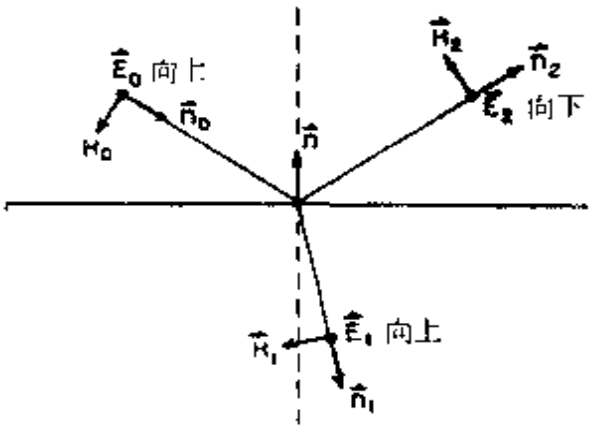


图 10—2 电矢量垂直于入射面时，磁场$\mathbf{H}_i$电场$\mathbf{E}_i$和传播矢量$\mathbf{n}_i$的取向关系

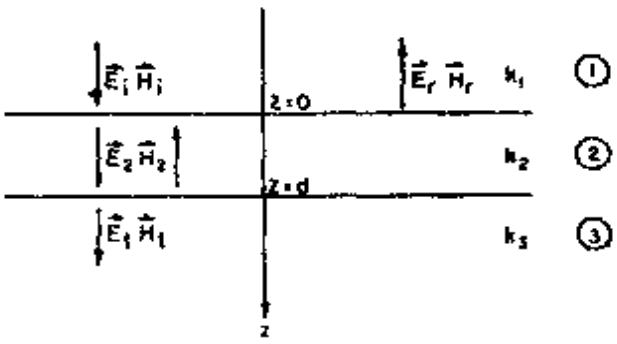


图 10—3 电磁波对某三层结构的入射

方程 (10-67) 通过展开式

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_0\times\mathbf{H}_0)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_0)\mathbf{n}_0-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_0)\mathbf{H}_0=\cos\theta_0\mathbf{H}_0, \tag{10-69}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_2\times\mathbf{H}_2)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_2)\mathbf{n}_2-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_2)\mathbf{H}_2=-\cos\theta_2\mathbf{H}_2, \tag{10-70}$$

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}_1\times\mathbf{H}_1)=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_1)\mathbf{n}_1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1)\mathbf{H}_1=\cos\theta_1\mathbf{H}_1, \tag{10-71}$$

可简化为

$$\cos\theta_0\mathbf{H}_0-\cos\theta_2\mathbf{H}_2=\frac{\mu_1 k_1}{\mu_2 k_2}\cos\theta_1\mathbf{H}_1. \tag{10-72}$$

若以n叉乘方程 (10-68) 两端，得到

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_0)+\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_2)=\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{H}_1) \tag{10-73}$$

或者

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_0)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}_0+(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_2)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}_2$$
$$=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{H}_1)\mathbf{n}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n})\mathbf{H}_1. \qquad (10\text{-}74)$$

考虑到$\mathbf{n}$与$\mathbf{H}_1$、$\mathbf{H}_2$和$\mathbf{H}_0$是正交的，则上式简化为

$$\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_2=\mathbf{H}_1. \qquad (10\text{-}75)$$

将方程（10-72）和（10-75）联立求解，得

$$\mathbf{H}_1=\frac{(\cos\theta_0+\cos\theta_2)\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2\cos\theta_1+\mu_2 k_1\cos\theta_2}\mathbf{H}_0, \qquad (10\text{-}76)$$

$$\mathbf{H}_2=\frac{\mu_2 k_1\cos\theta_0-\mu_1 k_2\cos\theta_1}{\mu_2 k_1\cos\theta_2+\mu_1 k_2\cos\theta_1}\mathbf{H}_0. \qquad (10\text{-}77)$$

以方程（10-44）和（10-45）代入方程(10-76)和(10-77)，可消去反射角和折射角

$$\mathbf{H}_1=\frac{2\cos\theta_0\mu_2 k_1^2}{\mu_1 k_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}+\mu_2 k_1^2\cos\theta_0}\mathbf{H}_0, \qquad (10\text{—}78)$$

$$\mathbf{H}_2=\frac{\mu_2 k_1^2\cos\theta_0-\mu_1 k_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}}{\mu_2 k_1^2\cos\theta_0+\mu_1 k_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}}\mathbf{H}_0. \qquad (10\text{-}79)$$

对于垂直入射，电矢量对情况Ⅰ和情况Ⅱ没有区别，都是

$$\mathbf{E}_1=\frac{2\mu_1 k_2}{\mu_1 k_2+\mu_2 k_1}\mathbf{E}_0, \qquad (10\text{-}80)$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{\mu_1 k_2-\mu_2 k_1}{\mu_1 k_2+\mu_2 k_1}\mathbf{E}_0. \qquad (10\text{-}81)$$

方程（10-46）、（10-47）、（10-78）和（10-79）就是菲涅耳方程。应当注意的是，除去垂直入射之外，还必须说明入射波以其它角度入射时的偏振情况，后面的讨论将会说明这一点。我们已讨论了入射角为实数值时的斯涅耳定律和菲涅耳方程。可以证明（例如，斯特拉顿，1941，p.497，p.516），在一定的物理条件下会要求θ_0和θ_1为复数值。

方程（10-79）给出了反射波的磁场与入射波的磁场之比；它是由方程（10-64）和（10-66）算出的反射波电场与入射波电场之比的负值。因此能写出

$$r_{11}=\frac{\mu_1 k_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}-\mu_2 k_1^2\cos\theta_0}{\mu_1 k_2\sqrt{k_1^2-k_2^2\sin^2\theta_0}+\mu_2 k_1^2\cos\theta_0} \tag{10-82}$$

或者

$$r_{\parallel}=\frac{\mu_1 u_1 k_2^2-\mu_2 u_2 k_1^2}{\mu_1 u_1 k_2^2+\mu_2 u_2 k_1^2} \tag{10-83}$$

而其一般式为

$$r_{\parallel}=\frac{\mu_k u_k k_j^2-\mu_j u_j k_k^2}{\mu_k u_k k_j^2+\mu_j u_j k_k^2}. \tag{10-84}$$

这里波由媒质 j 中发生，并从媒质 K 上反射。

对垂直入射，$\theta_0=0$，两反射系数是一样的，这时我们略去下标（⊥，∥），即有

$$r_{jk}=\frac{\mu_k k_j-\mu_j k_k}{\mu_k k_j-\mu_j k_k} \tag{10-85}$$

有时把反射系数写成平面波阻抗 Z_j 的形式是方便的。Z_j 被定义为一对正交的电场和磁场之比

$$Z_j\equiv\left|\frac{E_j}{H_j}\right|, \tag{10-86}$$

这里下标 j 指待测阻抗的媒质。由（243）到（246）式可知，波阻抗也可定义为：

$$Z_j\equiv\frac{\omega\mu_j}{k_j}. \tag{10-87}$$

这样，反射系数将以下面的形式出现

$$r_{\perp}=\frac{Z_k\cos\theta_0-Z_j\sqrt{1-\left(\frac{k_j}{k_k}\right)^2\sin^2\theta_0}}{Z_k\cos\theta_0+Z_j\sqrt{1-\left(\frac{k_j}{k_k}\right)^2\sin^2\theta_0}} \tag{10-88}$$

和

$$r_{\parallel}=\frac{Z_k\sqrt{1-\left(\frac{k_j}{k_k}\right)^2\sin^2\theta_0}-Z_j\cos\theta_0}{Z_k\sqrt{1-\left(\frac{k_j}{k_k}\right)^2\sin^2\theta_0}+Z_j\cos\theta_0}. \tag{10-89}$$

对于垂直入射，这两个表达式是一样的，等于

$$r_{jk}=\frac{Z_k-Z_j}{Z_k+Z_j}. \tag{10-90}$$

常用的功率反射系数为：$R_{jk}\equiv|r_{jk}|^2$.

（四）反射系数和透射系数

让我们考虑一平面电磁波垂直入射到图 10—3 所示的三层结构的情形。对媒质（1）中的入射波和反射波可写出

$$E_i=E_0e^{ik_1z-i\omega t}, \tag{10-91}$$

$$H_i=\frac{k_1}{\omega\mu_1}E_i; \tag{10-92}$$

$$E_r=E_1e^{-ik_1z-i\omega t}, \tag{10-93}$$

$$H_r=-\frac{k_1}{\omega\mu_1}E_r. \tag{10-94}$$

由于我们处理的是垂直入射，这时垂直于入射面的 E_i 与平行于入射面的E_i是一样的，故可略去矢量记号。

在媒质（2）中产生的沿正向和负向传播的两种行波为

$$E_2=(E_2^+e^{ik_2z}+E_2^-e^{-ik_2z})e^{-i\omega t}, \tag{10-95}$$

$$H_2=\frac{k_2}{\omega\mu_2}(E_2^+e^{ik_2z}-E_2^-e^{-ik_2z})e^{-i\omega t}. \tag{10-96}$$

透射波可表示为

$$E_t=E_3e^{ik_3z-i\omega t}, \tag{10-97}$$

$$H_t=\frac{k_3}{\omega\mu_3}E_t. \tag{10-98}$$

我们通过下式引入固有平面波阻抗

$$E_j\equiv\pm Z_jH_j, \tag{10-99}$$

$$Z_j\equiv\frac{\omega\mu_j}{k_j}. \tag{10-100}$$

于是磁场分量可写做

$$H_i=\frac{1}{Z_1}E_i, \tag{10-101}$$

$$H_r=-\frac{1}{Z_1}E_r, \tag{10-102}$$

$$H_2=\frac{1}{Z_2}[E_2^+ e^{ik_2z}-E_2^- e^{-ik_2z}]e^{-i\omega t}, \tag{10-103}$$

$$H_t=\frac{1}{Z_3}E_t. \tag{10-104}$$

我们用**E**和**H**的切向分量在$z=0$和$z=d$的分界面上是连续的这一通常的边界条件，来求每层媒质中电矢量和磁矢量的振幅之间的关系。在$z=0$处有

$$E_0+E_1=E_2^++E_2^-, \tag{10-105}$$

$$(E_0-E_1)\frac{1}{Z_1}=(E_2^+-E_2^-)\frac{1}{Z_2}. \tag{10-106}$$

而在$z=d$处有

$$E_2^+ e^{ik_2d}+E_2^- e^{-ik_2d}=E_3 e^{ik_3d}, \tag{10-107}$$

$$(E_2^+ e^{ik_2d}-E_2^- e^{-ik_2d})\frac{1}{Z}=E_3 e^{ik_3d}\frac{1}{Z_3}. \tag{10-108}$$

用克兰默规则（怀利，1960，p. 32）求解这四个方程的方程组，给出

$$E_1=\frac{(Z_2-Z_1)(Z_3+Z_2)+(Z_2+Z_1)(Z_3-Z_2)e^{2ik_2d}}{(Z_2+Z_1)(Z_3+Z_2)+(Z_2-Z_1)(Z_3-Z_2)e^{2ik_2d}}E_0, \tag{10-109}$$

$$E_3=\frac{4e^{ik_3d}Z_2Z_3}{(Z_2-Z_1)(Z_3-Z_2)e^{ik_2d}+(Z_2+Z_1)(Z_3+Z_1)e^{-ik_2d}}E_0. \tag{10-110}$$

引入垂直入射的振幅反射系数

$$r_{ik}=\frac{Z_k-Z_i}{Z_k+Z_i}=-r_{ki}, \tag{10-111}$$

于是方程（10-109）和（10—110）变成

$$E_1=\frac{r_{12}+r_{23}\,e^{2ik_2d}}{1+r_{12}r_{23}\,e^{2ik_2d}}E_0, \tag{10-112}$$

$$E_3=\frac{Z_2Z_3}{(Z_2+Z_1)(Z_3+Z_2)}\;\frac{4e^{i(k_2-k_3)d}}{1+r_{12}r_{23}\,e^{2ik_2d}}E_0. \tag{10-113}$$

除非乘积$k_2d\to0$，否则上面和下面都被同一种媒质包围的薄板将产生反射。如果$k_2d\to0$，则式（10-112）化为

$$\frac{E_1}{E_0}=\frac{r_{12}+r_{23}}{1+r_{12}r_{23}}=\frac{r_{12}+r_{21}}{1+r_{12}r_{21}}=\frac{r_{12}-r_{12}}{1-r_{12}^2}=0. \tag{10-114}$$

可见，无量纲的参数 k_2d 支配着被薄板反射的振幅。

十一、n层各向同性媒质的平面波阻抗

这个问题的分析，对磁大地电流法特别重要。它对研究有限大小的源产生的非平面波在成层媒质中的传播也是一个入门。

对每一层我们都能写出用入射波和反射波表示的电场和磁场。对于一均匀平面波垂直入射到板状成层、各向同性媒质的情形（图11—1），由方程(236)直到(246)，可写出场为

$$E_y^i=[A_{yx}^i e^{ik_x^i(z^i-z)}+B_{yx}^i e^{-ik_x^i(z^i-z)}], \qquad (11-1)$$

$$H_x^i=-\frac{k_{yx}^i}{\omega\mu_0}[A_{yx}^i e^{ik_x^i(z^i-z)}-B_{yx}^i e^{-ik_x^i(z^i-z)}], \qquad (11-2)$$

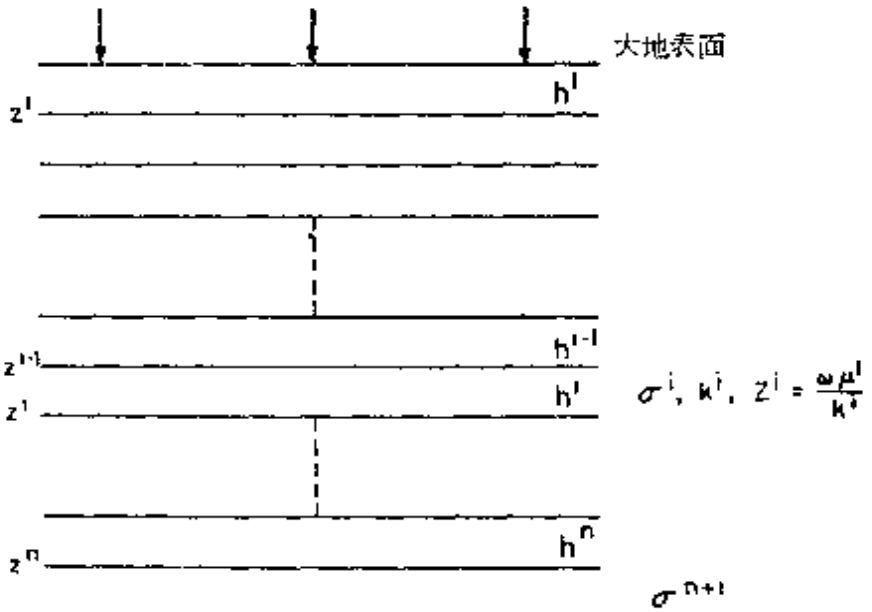


图 11—1　均匀平面电磁波垂直入射到 n 层的大地上

式中 k_{yx}^i　第 i 层中的传播常数。下标 y 和 x 分别指的是电矢量和磁矢量的分量，现在引入它可使我们很容易把它推

广到各向异性层的情形。

μ_0 自由空间的感应容率，假定所有各层的感应容率都是 μ_0。

z^i 到第 i 层下底的垂直距离。

z 到任一个要测量场的那一点的垂直距离。

A_{yx}^i 第 i 层中入射电波的振幅。

B_{yx}^i 第 i 层中反射电波的振幅。

ω 角频率。假定各处都有谐时依赖关系 $e^{-i\omega t}$，但是为了方便计，所有的方程式都把它略去了。

我们可假设电矢量的一种形式，并由它计算出磁矢量。实际上，我们假定电矢量是与入射面垂直的。在 $z=z^i$，我们发现

$$E_y^i = A_{yx}^i + B_{yx}^i, \tag{11-3}$$

$$H_x^i = [B_{yx}^i - A_{yx}^i]\frac{1}{Z_{yx}^i}, \tag{11-4}$$

这里

$$Z_{yx}^i \equiv \frac{\omega\mu_0}{k_{yx}^i} \equiv \text{第 } i \text{ 层的固有阻抗。} \tag{11-5}$$

由方程（11-3）和（11-4）看到

$$A_{yx}^i = \tfrac{1}{2}[E_y^i - Z_{yx}^i H_x^i], \tag{11-6}$$

$$B_{yx}^i = \tfrac{1}{2}[E_y^i + Z_{yx}^i H_x^i]. \tag{11-7}$$

在 $z=z^{i-1}$ 处，连续性要求

$$H_x^i = H_x^{i-1}, \tag{11-8}$$

$$E_y^i = E_y^{i-1}. \tag{11-9}$$

于是可写出

$$E_y^{i-1} = [A_{yx}^i e^{ik_{yx}(z^i - z^{i-1})} + B_{yx}^i e^{-ik_{yx}(z^i - z^{i-1})}], \tag{11-10}$$

$$H_x^{i-1} = -\frac{1}{Z_{yx}^i}[A_{yx}^i e^{ik_{yx}(z^i - z^{i-1})} - B_{yx}^i e^{-ik_{yx}(z^i - z^{i-1})}]. \tag{11-11}$$

如果现在令

$$z^i - z^{i-1} = -h^i, \tag{11-12}$$

并把它和用方程（11-6）及（11-7）表示的 A^i 和 B^i 代入方程（11-10）和（11-11），则有

$$E_y^{i-1} = E_y^i \cosh jk_{yx}^i h^i - Z_{yx}^i H_x^i \sinh jk_{yx}^i h^i, \tag{11-13}$$

$$H_x^{i-1} = H_x^i \cosh jk_{yx}^i h^i - \frac{1}{Z_{yx}^i} E_y^i \sinh jk_{yx}^i h^i. \tag{11-14}$$

这里已用了恒等式

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

方程（11-13）和（11-14）可写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} E_y^{i-1} \\ H_x^{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh jk_{yx}^i h^i & -Z_{yx}^i \sinh jk_{yx}^i h^i \\ -\frac{1}{Z_{yx}^i} \sinh jk_{yx}^i h^i & \cosh jk_{yx}^i h^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_y^i \\ H_x^i \end{pmatrix} \tag{11-15}$$

它可用下面的符号来表示：

$$\begin{pmatrix} E_y^{i-1} \\ H_x^{i-1} \end{pmatrix} = T^i \begin{pmatrix} E_y^i \\ H_x^i \end{pmatrix}. \tag{11-16}$$

矩阵T^i称为第 i 层的转移矩阵。一共有 n 层时，从T^2到T^{n+1}我们可找出T^i的一个系列。每个转移矩阵可使我们由下一层中的场写出上一层中的场。因此不难看出，在无穷大媒质中第$i-1$层中的场与最终第 n 层中的场之间的矩阵关系

$$\begin{pmatrix} E_y^{i-1} \\ H_x^{i-1} \end{pmatrix} = \prod_2^{n+1} T^i \begin{pmatrix} E_y^{n+1} \\ H_x^{n+1} \end{pmatrix}. \tag{11-17}$$

n 个矩阵的连乘 $\prod_2^{n+1} T^i$ 也是一个矩阵 S，所以可把方程（11-17）写做

$$\begin{pmatrix} E_y^{i-1} \\ H_x^{i-1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} E_y^{n+1} \\ H_x^{n+1} \end{pmatrix}, \tag{11-18}$$

式中

$$S \equiv \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}. \tag{11-19}$$

那么，从第 i 层的表面研究 n 层媒质的阻抗是

$$Z_{yx}^{i-1} = -\frac{E_y^{i-1}}{H_x^{i-1}} = -\frac{\alpha_{11}E_y^{n+1} + \alpha_{12}H_x^{n+1}}{\alpha_{21}E_y^{n+1} + \alpha_{22}H_x^{n+1}}$$

$$= \frac{\alpha_{11}Z_{yx}^{n+1} - \alpha_{12}}{\alpha_{22} - \alpha_{21}Z_{yx}^{n+1}}. \tag{11-20}$$

对于上面是无限大半空间的只有一层媒质的模型来说（通常被当做是“两层大地”），其阻抗可由式(11-15)做α_{ij}的代换得出，亦即

$$\alpha_{11} = \cosh jk_{yx}^1 h^1,$$
$$\alpha_{12} = -Z_{yx}^1 \sinh jk_{yx}^1 h^1,$$
$$\alpha_{21} = -\frac{1}{Z_{yx}^1}\sinh jk_{yx}^1 h^1,$$
$$\alpha_{22} = \cosh jk_{yx}^1 h^1. \tag{11-21}$$

于是由方程（11-20)得到阻抗$\hat{Z}_{yx}^1 = -(E_y^1/H_x^1)$，它是由大地表面上测得的电场和磁场来表示的

$$\hat{Z}_{yx}^1 = Z_{yx}^1 \frac{\hat{Z}_{yx}^2 + Z_{yx}^1 \tanh jk_{yx}^1 h^1}{Z_{yx}^1 + \hat{Z}_{yx}^2 \tanh jk_{yx}^1 h^1}. \tag{11-22}$$

按照计算上面为均匀半空间的第一层媒质顶部阻抗的办法，我们可用已知的阻抗$Z_{yx}^1 \cdots\cdots Z_{yx}^{n+1}$、已知的传播常数$k_{yx}^1 \cdots k_{yx}^{n+1}$和已知的层厚度$h^1 \cdots h^{n+1}$来表示方程（11-20)。由方程（11-22）类推，这个阻抗是

$$\hat{Z}_{yx}^n = Z_{yx}^n \frac{\hat{Z}_{yx}^{n+1} + Z_{yx}^n \tanh jk_{yx}^n h^n}{Z_{yx}^n + \hat{Z}_{yx}^{n+1} \tanh jk_{yx}^n h^n}. \tag{11-23}$$

一旦算出这个阻抗，就可用它做为等价的均匀半空间的终端阻抗，并写出第（$n-1$）层顶部的阻抗

$$\hat{Z}_{yx}^{n-1}=Z_{yx}^{n-1}\frac{\hat{Z}_{yx}^{n}+Z_{yx}^{n-1}\tanh jk_{yx}^{n-1}h^{n-1}}{Z_{yx}^{n-1}+\hat{Z}_{yx}^{n}\tanh jk_{yx}^{n-1}h^{n-1}}, \quad (11\text{-}24)$$

依此写下去一直到表面上的阻抗

$$\hat{Z}_{yx}^{1}=Z_{yx}^{1}\frac{\hat{Z}_{yx}^{2}+Z_{yx}^{1}\tanh jk_{yx}^{1}h^{1}}{Z_{yx}^{1}+\hat{Z}_{yx}^{2}\tanh jk_{yx}^{1}h^{1}}. \quad (11\text{-}25)$$

我们用符号 $\hat{Z}_{yx}^{i}$ 来表示第 i 层顶部的阻抗，而用符号 $Z_{yx}^{i}=\omega\mu_0/k_{yx}^{i}$ 表示第 i 层的特征阻抗。在 n 层的媒质顶部阻抗的计算中，需要 n 步相继的运算；这些步骤由方程（11-23）到（11-25）和它们与其它层相应的公式给出。

对另一对场分量，相应于方程（11-25）可以写出

$$\hat{Z}_{xy}^{1}=-Z_{xy}^{1}\frac{\hat{Z}_{xy}^{2}+Z_{xy}^{1}\tanh jk_{xy}^{1}h^{1}}{Z_{xy}^{1}+\hat{Z}_{xy}^{2}\tanh jk_{xy}^{1}h^{1}}. \quad (11\text{-}26)$$

这里 $\hat{Z}_{xy}^{1}=E_x^1/H_y^1$。注意 $\hat{Z}_{yx}^{1}=-(E_y^1/H_x^1)$。

对于垂直入射的偏振平面波，如果其电矢量与入射面垂直，则由方程（10-90）在界面上的反射系数为

$$r_{01}=\frac{Z_1-Z_0}{Z_1+Z_0}. \quad (11\text{-}27)$$

若用 $\hat{Z}_{yx}^{1}$ 而不用 Z_1 来研究界面的阻抗，则反射系数为

$$r_{0n}=\frac{\hat{Z}_{yx}^{1}-Z_0}{\hat{Z}_{yx}^{1}+Z_0}. \quad (11\text{-}28)$$

$\hat{Z}_{yx}$ 是等效于 n 层模型的均匀大地的阻抗。

上述讨论可推广到任意入射角的情形，参看图11—2。首先假设一平面波以 θ_0 角入射到一个具有 n 层的层状媒质上，平面波的电矢量垂直于入射面，亦即只有一个 y 分量。

在第 i 层中，$\mathbf{E}$ 的波动方程是

$$[\nabla^2+(k_{yx}^{i})^2]E_{iy}=0 \quad (11\text{-}29)$$

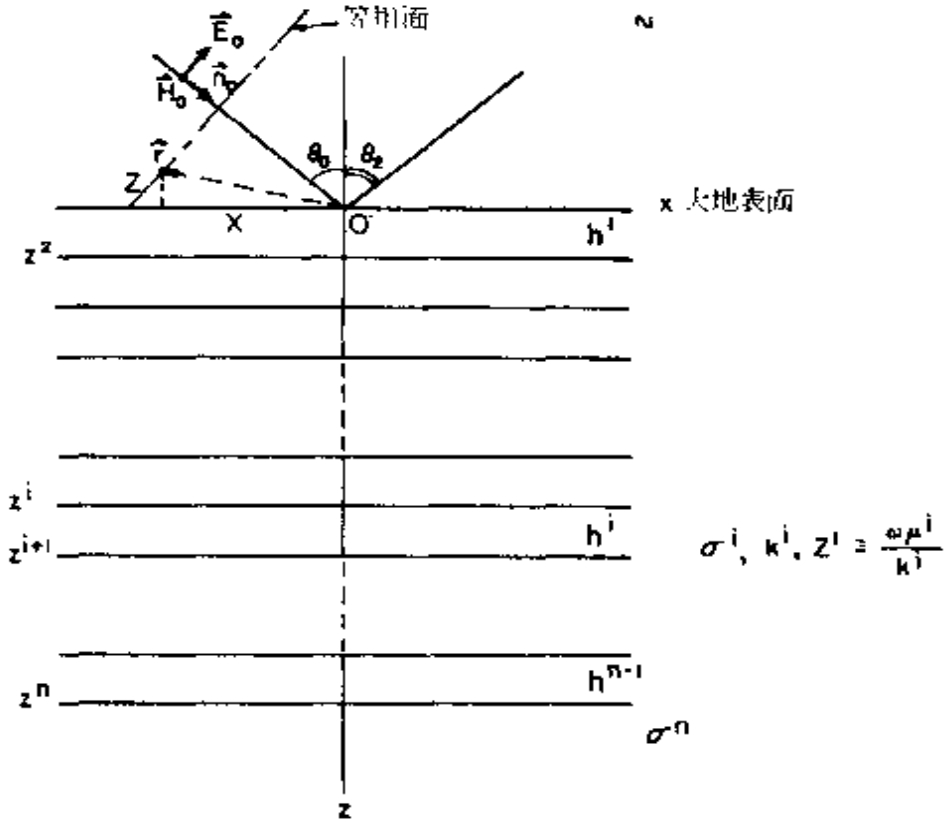


图 11—2　均匀平面电磁波斜入射到 n 层的大地上，电矢量在入射面内

式中

$$(k_{yx}^i)^2 = \varepsilon_{yx}^i \mu_{yx}^i \omega^2 + i\mu_{yx}^i \sigma_{yx}^i \omega. \qquad (11\text{-}30)$$

这是一个二维的波动方程，可用分离变量法求解。物理上，反射只发生在 z 方向，在 x 方向无反射。因此我们可找带有变数分离形式的平面波解，

$$E_{iy} = [a_i e^{u_{yx}^i z} + b_i e^{-u_{yx}^i z}] e^{i\lambda x}. \qquad (11\text{-}31)$$

倘若

$$\frac{\partial^2 E_{iy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{iy}}{\partial z^2} + (k_{yx}^i)^2 E_{iy} = 0, \qquad (11\text{-}32)$$

或

$$-\lambda^2 E_{iy} + (u_{yx}^i)^2 E_{iy} + (k_{yx}^i)^2 E_{iy} = 0, \qquad (11\text{-}33)$$

或

$$(u_{yx}^i)^2 = \lambda^2 - (k_{yx}^i)^2, \qquad (11\text{-}34)$$

则方程（11-31）就是方程（11-29）的解。此时在方程(11-34)中 λ 是一任意的因子。

因为假设媒质是耗散的，故场在 z 方向是衰减的，因而u_{yx}^{i}的实部为正。

入射场是

$$E_{0y}{}^{INC}=E_0\exp[ik_{yx}^{0}\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}-i\omega t]. \tag{11-35}$$

将$\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}$展开

$$\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{r}=x\sin\theta_0+z\cos\theta_0. \tag{11-36}$$

于是入射场可表示为

$$E_{0y}{}^{INC}=E_0\exp[ik_{yx}^{0}(x\sin\theta_0+z\cos\theta_0)-i\omega t]. \tag{11-37}$$

使方程（11-31）和（11-37）相等，得到

$$a_0=E_0, \tag{11-38}$$

$$u_{yx}^{0}=ik_{yx}^{0}\cos\theta_0, \tag{11-39}$$

$$\lambda=k_{yx}^{0}\sin\theta_0. \tag{11-40}$$

可见，参数 λ 简单地依入射媒质的传播常数和入射角而定。

应该指出，就反射而论，我们可以不必去管解方程(11-31)中的因子 $e^{i\lambda x}$。因此，比较方程（11-1）、（11-2）和（11-25），我们可以立即写出 n 层结构对于斜入射波的阻抗

$$\hat{Z}_{yx}^{1}=Z_{yx}^{1}\frac{\hat{Z}_{yx}^{2}+Z_{yx}^{1}\tanh u_{yx}^{1}h^{1}}{Z_{yx}^{1}+\hat{Z}_{yx}^{2}\tanh u_{yx}^{1}h^{1}}. \tag{11-41}$$

韦特（1962）对这一问题提出了相同的解。在第 i 层中，波的传播具有视波数u_{yx}^{i}，所以第 i 层的视固有阻抗Z_{yx}^{i}是

$$Z_{yx}^{i}=\frac{\omega\mu_{yx}^{i}}{iu_{yx}^{i}}=\frac{\omega\mu_{yx}^{i}}{i[\lambda^2-(k_{yx}^{i})^2]^{1/2}}. \tag{11-42}$$

利用方程（11-35）和斯涅耳定律的下述形式

$$-\cos\theta_1=\frac{1}{k_{yx}^{1}}\sqrt{(k_{yx}^{1})^2-(k_{yx}^{0})^2\sin^2\theta_0}$$

$$=\frac{i}{k_{yx}^{1}}\sqrt{(k_{yx}^{0})^2\sin^2\theta_0-(k_{yx}^{1})^2}, \tag{11-43}$$

我们可以变换方程（11-42），得到第一层的固有阻抗

$$Z^1_{yx}=-\frac{\omega\mu^1_{yx}}{k^1_{yx}\cos\theta_1}. \qquad (11-44)$$

注意，对斯涅耳定律的上述形式，我们规定向下的方向为平面法线**n**的正方向，因此在 $\cos\theta_1$ 前面冠以负号。

另外，当不计位移电流时，$k^1_{yx}\gg k^0_{yx}$，所以由斯涅耳定律给出

$$-\cos\theta_1=\sqrt{1-\left(\frac{k^0_{yx}}{k^1_{yx}}\right)^2\sin^2\theta}\approx 1. \qquad (11-45)$$

因而在空气—大地界面上的折射角常常可以忽略。我们由此断定，无论介质上低频波的入射角为何值，阻抗 Z^1_{yx} 与大地的物理常数间存在着简单的关系

$$Z^1_{yx}=\frac{\omega\mu_1}{k_1}. \qquad (11-46)$$

同样，我们得出

$$u^i_{yx}=[\lambda^2-(k^i_{yx})^2]^{1/2}=[(k^0_{yx})^2\sin^2\theta_0-(k^i_{yx})^2]^{1/2}. \qquad (11-47)$$

而且对于实数值的入射角θ_0，在大地内

$$u^i_{yx}\approx ik^i_{yx}. \qquad (11-48)$$

因此对大地上以任何实角 θ_0 入射的平面波，层状大地的阻抗可以简单地由方程（11-26）或（11-25）给出。

下面来讨论另一种偏振化情况，即电矢量平行于入射面的情形。我们需要从方程

$$[\nabla^2+(k^i_{xy})^2]H_{iy}=0 \qquad (11-49)$$

开始，因为现在只有磁场的 y 分量，并且

$$(k^i_{xy})^2=(\varepsilon^i_{xy})^2(\mu^i_{xy})^2\omega^2+i\mu^i_{xy}\sigma^i_{xy}\omega. \qquad (11-50)$$

对这种情况，我们寻找下面形式的解

$$H_{iy}=[a_i e^{u^i_{xy}z}+b_i e^{-u^i_{xy}z}]e^{i\lambda x}. \qquad (11-51)$$

倘若

$$\frac{\partial^2 H_{iy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H_{iy}}{\partial z^2}+(k_{xy}^i)^2=0, \tag{11-52}$$

则方程（11-51）是（11-49）的解。由此得到

$$(u_{xy}^i)^2=\lambda^2-(k_{xy}^i)^2. \tag{11-53}$$

与方程（11-37）类似，入射场可写做

$$H_{oy}^{INC}=H_0\exp[ik_{xy}^i(x\sin\theta_0+z\cos\theta_0)-i\omega t], \tag{11-54}$$

而且

$$a_0=H_0, \tag{11-55}$$

$$u_{xy}^0=ik_{xy}^0\cos\theta_0, \tag{11-56}$$

$$\lambda=k_{xy}^0\sin\theta_0. \tag{11-57}$$

依此一直做下去，可得到（11-26）式给出的波阻抗表达式。

如果拿方程（11-39）或（11-56）与方程(10-51）做比较，就可以看出为了简化反射系数$r_\perp$和$r_\parallel$而引进的量u_i的物理意义。u_i是等效的传播常数，对垂直入射，它恰好化为ik_i，而对于实际的大地物质，无论入射角为何值，它都近似地化为ik_i。当大地中的传播常数比空气中的传播常数大得多时，大地里的$u_i\approx ik_i$，可以忽略空气中的传播常数，就说我们做了准静态近似。这样，空气中的波动方程就简化为拉普拉斯方程。注意，$r_\perp$和$r_\parallel$一般是θ_0的函数，因而是λ的函数，但对本书中我们感兴趣的物质和频率，通常有理由假设$r_\perp$和$r_\parallel$相等，并与λ无关。

十二、n层各向异性媒质的平面波阻抗

在各向异性媒质中，正交的一对场分量（E_y，H_x）的传播常数k^i_{yx}与正交的另一对场分量（E_x，H_y）的传播常数k^i_{xy}，一般是不相同的。只有当测量轴线x和y沿着各向异性的主方向时，才能假定k^i_{xy}和k^i_{yx}为那一层的主值k^i_O和k^i_E。传播常数k^i_O和k^i_E现在属于正交的一对(E_O，H_E)和另一对(E_E，H_O)，这里轴（O,E）是各向异性的主轴（图12—1)。通常，在(x，y)方向的每个场分量将由两种主要波型各自的贡献组成。在下面的公式中，振幅的上下左右所出现的一些符号其意义为：

E，O——“非常的”和“正常”的波型；

+，−——分别相应于入射波和反射波；

x，y——关于笛卡儿坐标的分量；

i——第i层。

这样，我们对场分量给出下面的表达式：

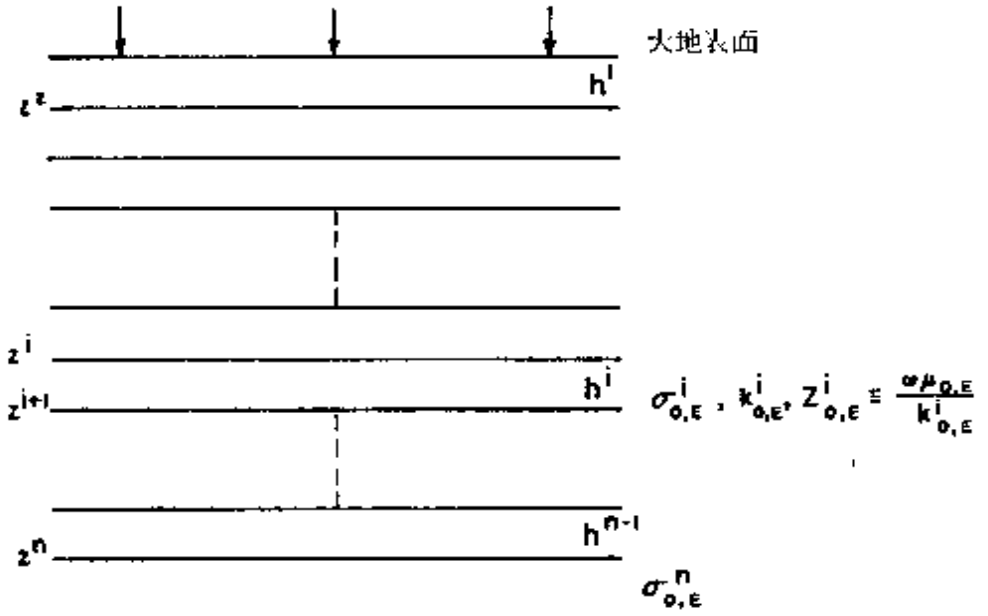


图 12—1　均匀平面电磁波垂直入射到各向异性的n层大地上

$$E_y^i = {}^{+}_{y}E_0^i\, e^{jk_0^i(x-x')} + {}^{+}_{y}E_E^i\, e^{jk_E^i(x-x')} + {}^{-}_{y}E_0^i\, e^{-jk_0^i(x-x')}$$
$$+ {}^{-}_{y}E_E^i e^{-jk_E^i(x-x')}, \qquad (12\text{-}1)$$

$$H_z^i = \frac{-k_0^i}{\omega\mu}\left[{}^{+}_{y}E_0^i e^{jk_0^i(x-x')} - {}^{-}_{y}E_0^i e^{-jk_0^i(x-x')}\right]$$
$$-\frac{k_E^i}{\omega\mu}\left[{}^{+}_{y}E_E^i e^{jk_E^i(x-x')} - {}^{-}_{y}E_E^i\, e^{-jk_E^i(x-x')}\right], \qquad (12\text{-}2)$$

$$E_x^i = {}^{+}_{x}E_0^i\, e^{jk_0^i(x-x')} + {}^{+}_{x}E_E^i\, e^{jk_E^i(x-x')} + {}^{-}_{x}E_0^i\, e^{-jk_0^i(x-x')}$$
$$+ {}^{-}_{x}E_E e^{-jk_E^i(x-x')}, \qquad (12\text{-}3)$$

$$H_y^i = \frac{k_0^i}{\omega\mu}\left[{}^{+}_{x}E_0^i\, e^{jk_0^i(x-x')} - {}^{-}_{x}E_0^i\, e^{-jk_0^i(x-x')}\right]$$
$$+\frac{k_E^i}{\omega\mu}\left[{}^{+}_{x}E_E^i\, e^{jk_E^i(x-x')} - {}^{-}_{x}E_E^i\, e^{-jk_E^i(x-x')}\right]. \qquad (12\text{-}4)$$

在$z=z'$处，我们看到

$$E_y^i = {}^{+}_{y}E_0^i + {}^{+}_{y}E_E^i + {}^{-}_{y}E_0^i + {}^{-}_{y}E_E^i\,, \qquad (12\text{-}5)$$

$$H_x^i = -\frac{1}{Z_0^i}\left[{}^{+}_{y}E_0^i - {}^{-}_{y}E_0^i\right] - \frac{1}{Z_E^i}\left[{}^{+}_{y}E_E^i - {}^{-}_{y}E_E^i\right], \qquad (12\text{-}6)$$

$$E_x^i = {}^{+}_{x}E_0^i + {}^{+}_{x}E_E^i + {}^{-}_{x}E_0^i + {}^{-}_{x}E_E^i\,, \qquad (12\text{-}7)$$

$$H_y^i = -\frac{1}{Z_0^i}\left[{}^{+}_{x}E_0^i - {}^{-}_{x}E_0^i\right] + \frac{1}{Z_E^i}\left[{}^{+}_{x}E_E^i - {}^{-}_{x}E_E^i\right]. \qquad (12\text{-}8)$$

八个未知的振幅 ${}^{+}_{y}E_0^i \cdots {}^{-}_{x}E_E^i$ 通过下面的变换（参考图12—2），可化为四个未知振幅和一个角ϕ_i：

$${}^{+}_{y}E_0^i = -\tan\phi_i\, {}^{+}_{x}E_0^i\,, \qquad (12\text{-}9)$$
$${}^{+}_{x}E_E^i = \tan\phi_i\, {}^{+}_{y}E_E^i\,, \qquad (12\text{-}10)$$
$${}^{-}_{y}E_0^i = -\tan\phi_i\, {}^{-}_{x}E_0^i\,, \qquad (12\text{-}11)$$
$${}^{-}_{x}E_E^i = \tan\phi_i\, {}^{-}_{y}E_E^i\,. \qquad (12\text{-}12)$$

于是方程（12-1）到（12-4）变为

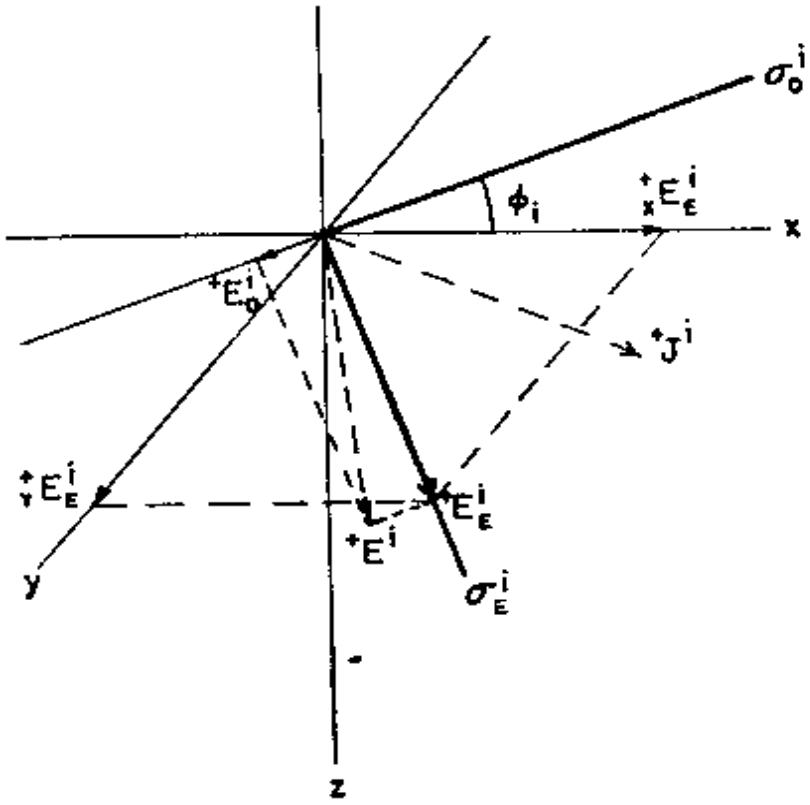


图 12—2　各向异性大地的几何图示和符号

$$E^i_y=-\tan\phi_i[{}^{+}_{x}E^i_0\,e^{jk^i_0(z-z')}+{}^{-}_{x}E^i_0\,e^{-jk^i_0(z-z')}]$$
$$+[{}^{+}_{y}E^i_E e^{jk^i_E(z-z')}+{}^{-}_{y}E^i_E\,e^{-jk^i_E(z-z')}],\quad(12\text{-}13)$$

$$H^i_x=\frac{1}{Z^i_0}[{}^{+}_{x}E^i_0\,e^{jk^i_0(z-z')}-{}^{-}_{x}E^i_0\,e^{-jk^i_0(z-z')}]\tan\phi_i$$
$$+\frac{1}{Z^i_E}[{}^{-}_{y}E^i_E\,e^{-jk^i_E(z-z')}-{}^{+}_{y}E^i_E\,e^{jk^i_E(z-z')}],\quad(12\text{-}14)$$

$$E^i_x=[{}^{+}_{x}E^i_0 e^{jk^i_0(z-z')}+{}^{-}_{x}E^i_0\,e^{-jk^i_0(z-z')}]$$
$$+\tan\phi_i[{}^{+}_{y}E^i_E e^{jk^i_E(z-z')}+{}^{-}_{y}E^i_E\,e^{-jk^i_E(z-z')}],\quad(12\text{-}15)$$

$$H^i_y=\frac{1}{Z^i_0}[{}^{+}_{x}E^i_0\,e^{jk^i_0(z-z')}-{}^{-}_{x}E^i_0\,e^{-jk^i_0(z-z')}]$$
$$-\frac{\tan\phi_i}{Z^i_E}[{}^{-}_{y}E^i_E\,e^{-jk^i_E(z-z')}-{}^{+}_{y}E^i_E\,e^{jk^i_E(z-z')}],\quad(12\text{-}16)$$

由于E和H的切向分量越过第 i 层和第 $(i+1)$ 层的界面时是连续的，则可引出矩阵方程

$$\begin{pmatrix} E_y^{i+1} \\ H_x^{i+1} \\ E_x^{i+1} \\ H_y^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_y^i \\ H_x^i \\ E_x^i \\ H_y^i \end{pmatrix}.$$

这些关系能使我们得到一个表示振幅因子的矩阵公式，如可把方程(12-13)中的振幅因子 ${}^{+}_{x}E_0^i$ 与下一层中的 ${}^{+}_{x}E_0^{i+1}$ 相比较。首先，我们把方程（12-13）到（12-16）改写为矩阵形式

$$\begin{pmatrix} E_y^i \\ H_x^i \\ E_x^i \\ H_y^i \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\tan\phi_i e^{jk_0^i(z-z^i)} & -\tan\phi_i e^{-jk_0^i(z-z^i)} \\ \dfrac{\tan\phi_i e^{jk_0^i(z-z^i)}}{Z_0^i} & \dfrac{-\tan\phi_i e^{-jk_0^i(z-z^i)}}{Z_0^i} \\ e^{jk_0^i(z-z^i)} & e^{-jk_0^i(z-z^i)} \\ \dfrac{e^{jk_0^i(z-z^i)}}{Z_0^i} & -\dfrac{e^{-jk_0^i(z-z^i)}}{Z_0^i} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{e^{jk_E^i(z-z^i)}}{Z_E^i} & \dfrac{e^{-jk_E^i(z-z^i)}}{Z_E^i} \\ \tan\phi_i e^{jk_E^i(z-z^i)} & \tan\phi_i e^{-jk_E^i(z-z^i)} \\ \dfrac{\tan\phi_i e^{jk_E^i(z-z^i)}}{Z_E^i} & -\tan\phi_i e^{-jk_E^i(z-z^i)} \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{+}_{x}E_0^i \\ {}^{-}_{x}E_0^i \\ {}^{+}_{y}E_E^i \\ {}^{-}_{y}E_E^i \end{pmatrix} \quad (12\text{-}17)$$

对第 $(i+1)$ 层可写出同样的矩阵

$$\begin{pmatrix} E_y^{i+1} \\ H_x^{i+1} \\ E_x^{i+1} \\ H_y^{i+1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -\tan\phi_{i+1} e^{jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})} & -\tan\phi_{i+1} e^{-jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})} \\ \dfrac{\tan\phi_{i+1} e^{jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_0^{i+1}} & \dfrac{-\tan\phi_{i+1} e^{-jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_0^{i+1}} \\ e^{jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})} & e^{-jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})} \\ \dfrac{e^{jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_0^{i+1}} & \dfrac{-e^{-jk_0^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_0^{i+1}} \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e^{jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})} & e^{-jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})} \\ \dfrac{e^{jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_E^{i+1}} & \dfrac{e^{-jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_E^{i+1}} \\ \tan\phi_{i+1}e^{jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})} & \tan\phi_{i+1}e^{-jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})} \\ \dfrac{\tan\phi_{i+1}e^{jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_E^{i+1}} & \dfrac{-\tan\phi_{i+1}e^{-jk_E^{i+1}(z-z^{i+1})}}{Z_E^{i+1}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} {}^{+}_{x}E_0^{i+1} \\ {}^{-}_{x}E_0^{i+1} \\ {}^{+}_{y}E_E^{i+1} \\ {}^{-}_{y}E_E^{i+1} \end{pmatrix}. \tag{12-18}$$

如把这后两个矩阵式用符号表示为

$$[A^i]=[B^i]\cdot[C^i], \tag{12-19}$$

$$[A^{i+1}]=[B^{i+1}]\cdot[C^{i+1}]. \tag{12-20}$$

边界条件(12-17) 允许我们计算C^i与C^{i+1}间的转移矩阵

$$[C^i]=[C^{i+1}]\cdot[B^{i+1}]\cdot[B^i]^{-1}. \tag{12-21}$$

第 i 层的转移矩阵

$$T^i=[B^{i+1}]\cdot[B^i]^{-1} \tag{12-22}$$

是一个具有四行四列元素的矩阵

$$Ti=\begin{pmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & a_{13}^i & a_{14}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & a_{23}^i & a_{24}^i \\ a_{31}^i & a_{32}^i & a_{33}^i & a_{34}^i \\ a_{41}^i & a_{42}^i & a_{43}^i & a_{44}^i \end{pmatrix}, \tag{12-23}$$

其中

$$a_{11}^i=\left[1+\frac{Z_0^{i+1}}{Z_0^i}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i+1}\tan\phi_i}{2(1+\tan^2\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_0^i-k_0^{i+1})h^i},$$

$$a_{12}^i=\left[1-\frac{Z_0^{i+1}}{Z_0^i}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i+1}\tan\phi_i}{2(1+\tan^2\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_0^i+k_0^{i+1})h^i},$$

$$a_{13}^{i}=\left[1+\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i}-\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_{E}^{i}-k_{0}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{14}^{i}=\left[1-\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i}-\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{E}^{i}+k_{0}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{21}^{i}=\left[1-\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i}\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_{0}^{i}+k_{0}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{22}=\left[1+\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i}\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{0}^{i}-k_{0}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{23}=\left[1-\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i}-\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_{E}^{i}+k_{0}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{24}=\left[1+\frac{Z_{0}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i}-\mathrm{tsn}\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{E}^{i}-k_{0}^{i})h^{i}},$$

$$a_{31}=\left[1-\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i+1}-\tan\phi_{i}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{0}^{i}+k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{32}=\left[1-\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i+1}-\tan\phi_{i}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{0}^{i}+k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{33}=\left[1+\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i}\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_{E}^{i}-k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{34}=\left[1-\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{E}^{i}}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i}\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{E}^{i}+k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{41}=\left[1-\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i+1}-\tan\phi_{i}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1}}\right]e^{j(k_{0}^{i}+k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{42}=\left[1+\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{\tan\phi_{i+1}-\tan\phi_{i}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_{0}^{i}-k_{E}^{i})h^{i}},$$

$$a_{43}=\left[1-\frac{Z_{E}^{i+1}}{Z_{0}^{i}}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_{i}\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^{2}\phi_{i+1})}\right]e^{j(k_{E}^{i}+k_{E}^{i+1})h^{i}},$$

$$a_{44}=\left[1+\frac{Z_B^{i+1}}{Z_B^i}\right]\left[\frac{1+\tan\phi_i\tan\phi_{i+1}}{2(1+\tan^2\phi_{i+1})}\right]e^{-j(k_B^i-k_B^{i+1})h^i}.$$

于是，仿照方程（11-17），第 i 层和底部的第 n 层（半无限大空间）之间层的转换函数变成

$$[C^i]=\prod_i^n T^i[C^n]. \qquad (12\text{-}24)$$

注意对这个各向异性问题，我们将半无限大空间底部的媒质选为第 n 层媒质，但对各向同性情形，我们选它为第（$n+1$）层。这种标记的选取完全是任意的，并不会改变问题的物理性质。

n 个矩阵的连乘，$\prod_1^n T^i$ 与前面一样，也是一个矩阵 S^1，不过现在 S^1 由下面的形式确定

$$S^1\equiv\begin{pmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & s_{13}^1 & s_{14}^1 \\ s_{21}^1 & s_{22}^1 & s_{23}^1 & s_{24}^1 \\ s_{31}^1 & s_{32}^1 & s_{33}^1 & s_{34}^1 \\ s_{41}^1 & s_{42}^1 & s_{43}^1 & s_{44}^1 \end{pmatrix}. \qquad (12\text{-}25)$$

这个矩阵把振幅 ${}_x^+E_0^1$，${}_x^-E_0^1$，${}_y^+E_B^1$，${}_y^-E_B^1$ 与 ${}_x^+E_0^n$，${}_x^-E_0^n$，${}_y^+E_B^n$，${}_y^-E_B^n$ 联系起来了。不过在第 n 层媒质中不存在反射波，且有

$${}_x^-E_0^n={}_y^-E_B^n=0. \qquad (12\text{-}26)$$

一旦求得属于媒质表面的振幅 ${}_x^+E_0^1$，…，${}_y^-E_B^1$，则 E_x^1、E_y^1、H_x^1 和 H_y^1 就知道了。后面这些量就是人们通常要测的量。

在 E_x^1，…，H_y^1 与 E_x^n，…，H_y^n 之间存在有一矩阵关系，其形式为

$$\begin{pmatrix} E_y^1 \\ H_x^1 \\ E_x^1 \\ H_y^1 \end{pmatrix}=S\begin{pmatrix} E_y^n \\ H_x^n \\ E_x^n \\ H_y^n \end{pmatrix}, \qquad (12\text{-}27)$$

这里

$$S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{pmatrix} \tag{12-28}$$

是一个四行四列的转移矩阵。这样，在大地表面测得的阻抗形式为

$$\hat{Z}^{1}_{yx}=-\frac{E^{1}_{y}}{H^{1}_{x}}=-\frac{S_{11}Z^{n}_{yx}+S_{12}+S_{13}\dfrac{E^{n}_{x}}{H^{n}_{x}}+S_{14}\dfrac{H^{n}_{y}}{H^{n}_{x}}}{S_{21}Z^{n}_{yx}+S_{22}+S_{23}\dfrac{E^{n}_{x}}{H^{n}_{x}}+S_{24}\dfrac{H^{n}_{y}}{H^{n}_{x}}}. \tag{12-29}$$

显然，所测的阻抗是结构底部的磁场H^{n}_{y}/H^{n}_{x}的极化的函数，因而也是下传波的极化的函数。一般情况下，方程(12-29)并不实用。不过奥比林(1964)曾用这个表达式得到在各向同性半空间上有一个各向异性层的结构的阻抗。将方程(12-29)与(11-20)比较，可以看到，对各向异性情况增加了包含S_{13}、S_{14}、S_{23}和S_{24}的附加项。

十三、n层媒质上方的线电流源

（一）自由空间的线电流源

假设在电导率为零的无限媒质中，沿着y轴有一无限长线电流源（图13—1）。因为在这一节以及后面的其它部分，我们所关心的是低频近似，所以位移电流可以略去，这就要求我们去解非齐次波动方程

$$\nabla^2\psi-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-g(x,y,z,t)。\qquad(13\text{-}1)$$

式中源函数$g(x,y,z,t)$表示具有“恒定”密度谐变电流的无限长线电流源。此外，在寻求场的解时，用直接沿着电流线的单一成分的π矢量是方便的。因此，由方程（36）可以确定我们所要求解的方程是

$$\nabla^2\pi_y+\mu\varepsilon\omega^2\pi_y=-\frac{P'_y}{\varepsilon}。\qquad(13\text{-}2)$$

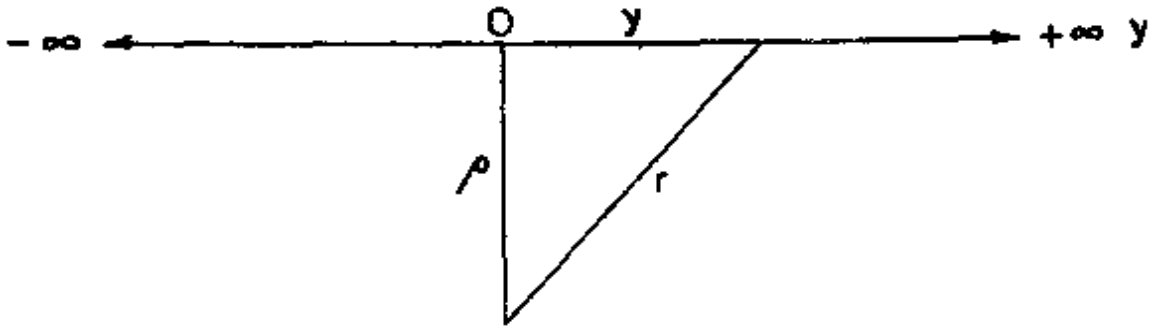


图 13—1　自由空间中无限长线电流源的几何图示

从（182)式已知该方程的解是

$$\pi_y=\frac{-e^{-i\omega t}}{4\pi i\varepsilon\omega}\int_V J_y\frac{e^{ik_0r}}{r}dv.\qquad(13\text{-}3)$$

式中$k_0=\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\omega$是自由空间的传播常数。体积分可用含有电流

的线积分代替，于是

$$\pi_y=\frac{ie^{-i\omega t}}{4\pi\varepsilon\omega}\int_{y=-\infty}^{\infty} I\frac{e^{ikr}}{r}dy. \qquad (13\text{-}4)$$

我们已假定沿导线的长度方向电流处处恒定，虽然这仅对电流频率为零的情形是正确的。但是这个假定对于非常低的频率，因而波长非常长的情形，也是合理的；这样我们只需假定电流在某个区间$-y$到y上是恒定的，以致在区间外面的电流对积分(13-4)的贡献就可略去。电流I可从积分(13-4)中提出，而剩下的任务将是去求格林函数的积分

$$\mathscr{I}=2\int_{y=0}^{\infty}\frac{e^{ikr}}{r}dy. \qquad (13\text{-}5)$$

为了计算积分，可通过变量变换。首先，由图13-1，注意到

$$\rho^2+y^2=r^2. \qquad (13\text{-}6)$$

微分上式，得

$$dy=\frac{rdr}{\sqrt{r^2-\rho^2}}. \qquad (13\text{-}7)$$

于是积分(13-5)成为

$$\mathscr{I}=\frac{2}{\rho}\int_{r=\rho}^{\infty}\frac{e^{ikr}}{\sqrt{\left(\frac{r}{\rho}\right)^2-1}}dr. \qquad (13\text{-}8)$$

作变换$\left(\frac{r}{\rho}\right)=t$，则

$$\mathscr{I}=2\int_{1}^{\infty}\frac{e^{ik\rho t}}{\sqrt{t^2-1}}dt. \qquad (13\text{-}9)$$

瓦特森(1944, p.185)曾计算过这积分为

$$\mathscr{I}=2K_0(-ik\rho), \qquad (13\text{-}10)$$

式中$K_0(-ik\rho)$是零级修正贝塞耳函数，所以势可写作

$$\pi_y=\frac{ie^{-i\omega t}}{2\pi\varepsilon\omega}IK_0(-ik\rho). \qquad (13\text{-}11)$$

由方程（75）和（77）可得到场

$$E_y = k^2\pi_y = \frac{i\mu\omega e^{-i\omega t}}{2\pi} IK_0(-ik_0\rho), \qquad (13\text{-}12)$$

$$H_\theta = -i\omega\varepsilon\frac{\partial\pi_y}{\partial\rho} = \frac{ik_0}{2\pi} IK_1(-ik_0\rho)\ e^{-i\omega t} \approx -\frac{Ie^{-i\omega t}}{2\pi\rho}. \qquad (13\text{-}13)$$

其中已利用了关系式（瓦特森，1944，p.79）

$$K_0'(Z) = -K_1(Z). \qquad (13\text{-}14)$$

θ是直接与y和ρ正交的坐标。

（二）大地效应

在成层大地上方的线电流源，其几何关系示于图 13—2 中。无限长线电流源位于大地表面以上高 h 处。

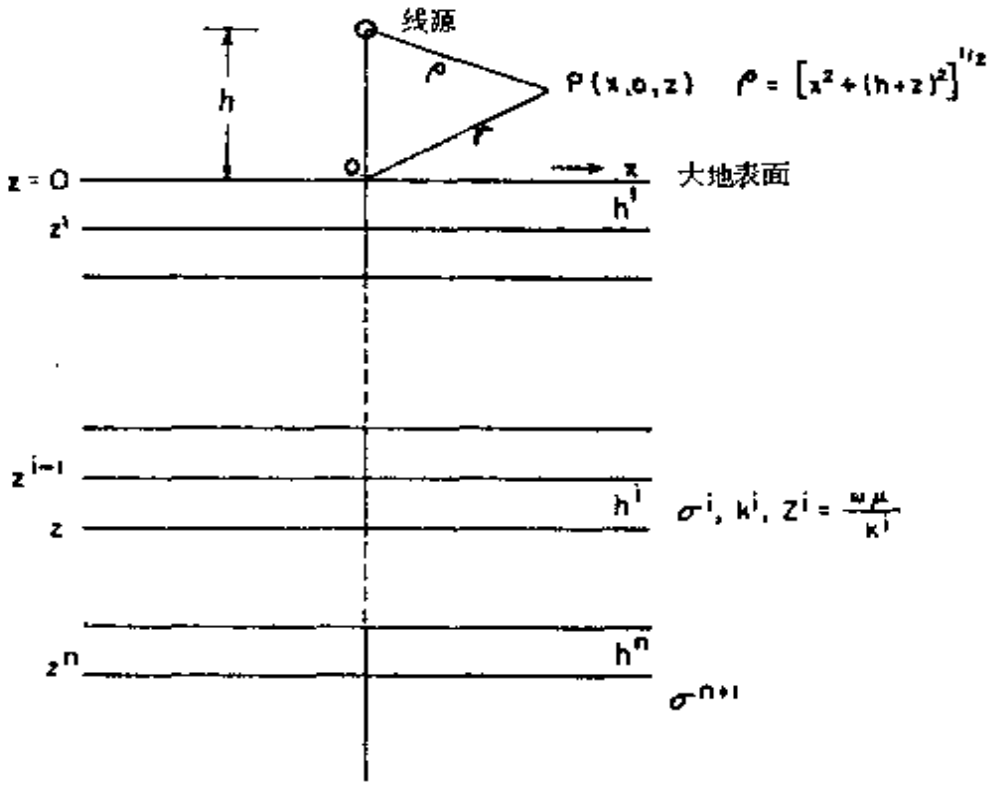


图 13—2　层状大地上方的无限长线电流源

笛卡儿坐标的原点是由线源向下所作的铅垂线与地面的交点。场的观测点在$P(x,0,z)$。

初看起来，可沿用我们求解一次场时所用过的方法那样，通

过对线源是柱对称的赫兹矢量，直观地去寻求问题的解答。然而容易看出，困难将产生在企图使成层大地中 $n+1$ 个分界面上的边界条件都得到满足。为了避免这个困难，我们用平面波的叠加来表示一次场和所有其它的场。回想方程（365）所描述的元子波的叠加，每个元子波都有它自己的加权函数 $g(\alpha, \beta)$。如果对场的描述是需要的话，加权函数以及入射角 α 和 β 可以都是复数。于是方程（406）描述元平面波 $e^{\pm i\sqrt{k_2-\lambda_2}\,z-i\omega t}$ 的叠加，其中每一个元平面波都被乘以加权函数，并对空间频率 λ 求积分。现在，对于电矢量垂直于入射面，并以 θ_0 角入射的寻常平面波，由方程（11-31）可写出

$$E_{iy}=[a_i e^{u_i z}+b_i e^{-u_i z}]e^{i\lambda x}, \tag{13-15}$$

式中

$$\lambda=k_0\sin\theta_0; \tag{13-16}$$

$$(u_i)^2=\lambda^2-(k_i^0)^2; \tag{13-17}$$

$$k_i^0=\varepsilon_i\mu_i\omega^2+i\mu_i\sigma_i\omega. \tag{13-18}$$

括号中的第一项可解释为第 i 层中向外传播的行波，第二项解释为第 i 层中的反射波。按照方程（11-31），(11-34)和(11-35)，入射波为

$$\begin{aligned}E_{0y}&=a_0\exp[ik_0\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}]=a_0\exp[ik_0x\sin\theta_0]\exp[ik_0z\cos\theta_0]\\&=a_0\exp[i\lambda x]\exp[u_0z].\end{aligned} \tag{13-19}$$

在成层大地以上的自由空间，通解（13-15)可改写成下面的形式

$$E_{0y}=a_0\left[e^{u_0z}+\frac{b_0}{a_0}e^{-u_0z}\right]e^{i\lambda x} \tag{13-20}$$

或

$$E_{0y}=a_0[e^{u_0z}+r(\lambda)\,e^{-u_0z}]e^{i\lambda x}. \tag{13-21}$$

式中反射系数 $r(\lambda)$ 必须是入射角的函数，因而必须是 λ 的函数。

如假设振幅因子 a_0 也是入射角的函数，则 E_{0y} 的普遍形式应为平面波的叠加

$$E_{0y}=\int_{-\infty}^{\infty}a_0(\lambda)[e^{u_0z}+r(\lambda)e^{-u_0z}]e^{i\lambda x}d\lambda. \quad (13-22)$$

任意的二维场可表示为这种形式，与无限媒质中相关的线电流源的一次场可令$r(\lambda)=0$得到。于是

$$\int_{-\infty}^{\infty}a_0(\lambda)e^{u_0z}e^{i\lambda x}d\lambda=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}K_0(-ik_0\rho)$$

$$=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}]. \quad (13-23)$$

把方程（13-23）作为一个付氏变换来研究。因此可写出它的反演式

$$a_0(\lambda)e^{u_0z}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}]e^{-i\lambda x}dx. \quad (13-24)$$

因为方程（13-24）中积分的核是x的偶函数，复积分变换可写成余弦变换

$$a_0(\lambda)e^{u_0z}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}2\int_0^{\infty}K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}]\cos\lambda x dx$$

$$=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}\frac{1}{2}(\lambda^2-k_0^2)^{-1/2}e^{(z+h)(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}$$

$$=\frac{i\mu\omega I}{4\pi}\frac{e^{(z+h)u_0}}{u_0}. \quad (13-25)$$

对上述变换的计算可参考埃尔德利（1954, Vol. I, p.17, n. 27）。于是可得

$$a_0(\lambda)=\frac{i\mu\omega I}{4\pi}\frac{e^{hu_0}}{u_0}, \quad (13-26)$$

而E_{0y}的表达式则变成

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{u_0}[e^{u_0(z+h)}+r(\lambda)e^{-u_0(z-h)}]e^{i\lambda x}d\lambda. \quad (13-27)$$

磁场的分量H_{0x}可由下面的关系式得到

$$-i\mu\omega H_{0x}=\frac{\partial E_{0y}}{\partial z}, \tag{13-28}$$

$$i\mu\omega H_{0x}=\frac{\partial E_{0y}}{\partial x} \tag{13-29}$$

或

$$H_{0x}=\frac{I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{u_0 h}\,[r(\lambda)e^{-u_0 z}-e^{u_0 z}]e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{13-30}$$

表达式（13-27）和（13-30）给出了在$0>z>-h$空间中的合场。而$r(\lambda)$正是个别频谱分量平面波反射的反射系数。E_0的积分表达式显然是通常在复入射角下的平面波或者频谱分量的叠加。

前面我们曾引入（10-54）式所表示的反射系数，因为在这个特殊问题中，对于所有的元子波，其电矢量是垂直于入射面的。此外，设对远场可假定$u^1_{yx}\approx ik^1_{yx}$，并令所有的感应容率均等于自由空间的感应容率，于是反射系数由方程(10-54)可简化为

$$r_\perp=\frac{k^0_{yx}-k^1_{yx}}{k^0_{yx}+k^1_{yx}}=\frac{\hat{Z}^1_{yx}-Z_0}{\hat{Z}^1_{yx}+Z_0}, \tag{13-31}$$

式中

$$\hat{Z}^1_{yx}=Z^1_{yx}\,\frac{\hat{Z}^2_{yx}+Z^1_{yx}\tanh u^1_{yx}h^1}{Z^1_{yx}+\hat{Z}^2_{yx}\tanh u^1_{yx}h^1}. \tag{13-32}$$

对于这种近似，u^1_{yx}、Z^1_{yx}并因此$\hat{Z}^1_{yx}$都不依赖于λ。于是反射系数（13-31）与λ无关。这样我们就可以简单地积分（13-27）式，得到

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}[K_0\{-ik^0_{yx}[x^2+(z+h)^2]^{1/2}\}$$

$$+r(\lambda)K_0\{-ik^0_{yx}[x^2+(z-h)^2]^{1/2}\}]. \tag{13-33}$$

通常在与大的λ值相关的复入射角的情形下，上式是不适用的。复入射角要求在源的近旁得到一个平面波的叠加。倘若h或Z很

大，则方程（13-33）将是一个很好的近似。

注意 $r(\lambda)=0$ 的极限情形，这相应于无反射的情况，解应简化为原来的一次场。又对于 $r(\lambda)=-1$，这相应于完全导电的半空间，这时解（13-33）化为

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}[K_0\{-ik_{yx}^0[x^2+(z+h)^2]^{1/2}\}$$

$$-K_0\{-ik_{yx}^0[x^2+(z-h)^2]^{1/2}\}]. \qquad (13-34)$$

（三）均匀大地上面的线电流源

现在让我们来研究一个更精确的解。对于均匀圆柱状的源，可看作是一线源。由它发出的一切电磁波，就电矢量垂直入射面的情形而论，那么反射系数可以应用（10-54)式。若假定所有媒质有自由空间的感应容率，则方程（10—54）可简化为

$$r(\lambda)=\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}, \qquad (13-35)$$

式中u_0与线源所在的自由空间有关，而u_1则与自由空间以下的均匀大地有关。在目前，对于这个特殊问题的研究，我们没有作准静态的假设。

当以方程（13-35）代入（13-27），可得到

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}\int_0^\infty\frac{1}{u_0}\left[e^{u_0(z+h)}+\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0(z-h)}\right]\cos\lambda x d\lambda.$$

(13-36)

为了方便，式中已将付氏积分变换改为付氏余弦积分变换。当线电流源在大地表面上时，$h=0$，且方程（13-36）化为

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}\int_0^\infty\frac{e^{u_0z}}{u_0}\left[1+\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-2u_0z}\right]\cos\lambda x d\lambda$$

$$=\frac{i\mu\omega I}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{u_0+u_1}e^{-u_0z}\,d\lambda. \qquad (13-37)$$

这是大地表面上的电场。现在我们来积分（13-37）式。首先注意到

$$\frac{1}{u_0+u_1}=\frac{u_1-u_0}{u_1^2-u_0^2}=\frac{u_1-u_0}{k_0^2-k_1^2}, \tag{13-38}$$

因此方程（13-37)成为

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{\pi(k_0^2-k_1^2)}\left[\int_0^\infty u_1\cos\lambda x\, e^{-u_0 z}\,d\lambda-\int_0^\infty u_0\cos\lambda x\, e^{-u_0 z}\,d\lambda\right]. \tag{13-39}$$

方程（13-39)中的两个积分可用付氏余弦变换来处理。为了计算它们，应先注意方程（13-25)中我们曾用过的下面一对余弦变换

$$\int_0^\infty \frac{e^{(z+h)u_0}}{u_0}\cos\lambda x\,d\lambda=K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}] \tag{13-40}$$

$$\int_0^\infty K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}\cos\lambda x\,dx=\frac{e^{(z+h)\,u_0}}{u_0}. \tag{13-41}$$

因为对我们有意义的是线源和观测点在地面上的情形，因而可使方程（13-40)中的 $h=z=0$

$$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda x}{u_0}d\lambda=K_0[-ik_0x]. \tag{13-42}$$

以$\left[k_0^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]$乘(13-42）式的两边，得

$$-\int_0^\infty u_0\cos\lambda\, x\,d\lambda=\left[k_0^2+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]K_0\ (-ik_0x) \tag{13-43}$$

为计算方程(13-43）的右边，我们可应用递推关系（瓦特森，1944，p.79)

$$K_0'(z)=-K_1(z), \tag{13-44}$$

$$K_1'(z)+\frac{1}{z}K_1(z)=-K_0(z). \tag{13-45}$$

于是由方程(13-44)

$$K_0''(z)=-K_1'(z)=\frac{1}{z}K_1(z)+K_0(z), \tag{13-46}$$

式中的微商系指对变量 z 的微商。但就方程（13-43）中的变量而论，后一方程变为

$$K_0'(-ik_0x)=\frac{1}{-ik_0x}K_1(-ik_0x)+K_0(-ik_0x). \tag{13-47}$$

假若对 x 而不是对$(-ik_0x)$ 进行微分，则方程（13-47）成为

$$\frac{\partial^2 k_0(-ik_0x)}{\partial x^2}=\frac{-ik_0}{x}K_1(-ik_0x)-k_0^2K_0(-ik_0x). \tag{13-48}$$

利用这个结果，方程(13-43) 现在简化为

$$\int_0^\infty u_0\cos\lambda x d\lambda=\frac{ik_0}{x}K_1(-ik_0x). \tag{13-49}$$

类似地，方程（13-39）的第一个积分在 $z=h=0$时可求得

$$\int_0^\infty u_1\cos\lambda x d\lambda=\frac{ik_1}{x}K_1(-ik_1x). \tag{13-50}$$

干是电场可写作

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{\pi(k_0^2-k_1^2)x^2}[ik_1xK_1(-ik_1x)-ik_0xK_1(-ik_0x)]. \tag{13-51}$$

铅垂方向的磁场现在可由方程（13-29)来计算，得出

$$H_{0z}=\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial E_{0y}}{\partial x}$$

$$H_{0x}=\frac{I}{\pi(k_0^2-k_1^2)x^3}[-2ik_0xK_1(-ik_0x)+k_0^2x^2K_0(-ik_0x)$$
$$+2ik_1xK_1(-ik_1x)-k_1^2x^2K_0(-ik_1x)]. \tag{13-52}$$

韦特（1962,p.27)曾以自由空间中线电流的场 $H_{0x}^p=-\left(\frac{I}{2\pi x}\right)$计算了$H_{0x}/H_{0x}^p$ 的比。基于低频假设，不计位移电流。他的计算结果示于图13-3中。

由麦克斯韦方程，磁场的水平分量为

$$H_{0x}=\frac{1}{-i\mu\omega}\frac{\partial E_{0y}}{\partial z}, \tag{13-53}$$

式中的E_{0y}由方程(13-37) 给出。以方程(13-37)的积分号下对 z

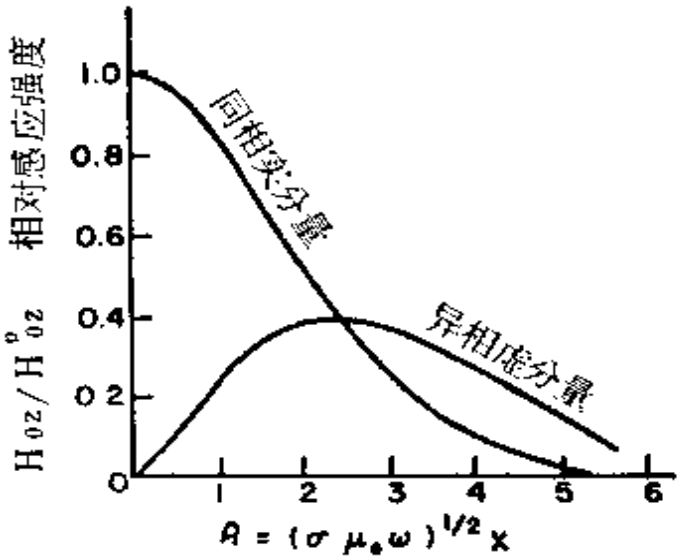


图 13—3 均匀大地上线电流源激发的归一化垂向磁场的虚实分量与感应数$\theta=(\sigma\mu_0\omega)^{1/2}x$关系的图示。其中$x$为观测点到线源的垂直距离（按韦特，1962）

求微商，得到

$$H_{0x}=-\frac{I}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{u_0}{u_0+u_1}\cos\lambda x e^{-u_0 z}\,d\lambda. \tag{13-54}$$

现作准静态近似

$$u_0=(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}\approx\lambda. \tag{13-55}$$

所以方程(13-54) 可写作

$$H_{0x}=\frac{I}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda}{\lambda+u_1}\cos\lambda x e^{-\lambda z}d\lambda. \tag{13-56}$$

以$\lambda-u_1$乘方程(13-56) 的分子分母，并利用恒等式

$$\lambda^2-u_1^2=k_1^2, \tag{13-57}$$

则得

$$H_{0x}=\frac{I}{\pi k_1^2}\int_0^\infty \lambda(\lambda-u_1)\cos\lambda x e^{-\lambda z}d\lambda. \qquad (13\text{-}58)$$

应用瓦特森（1944, p.386, no.7）得出的公式

$$\int_0^\infty e^{-at}J_\nu(bt)\frac{dt}{t}=\frac{\{(a^2+b^2)^{1/2}-a\}^\nu}{\nu b^\nu}, \qquad (13\text{-}59)$$

可将因子（$u_1-\lambda$）变换成积分。

如设$a=\lambda$，$b=-ik_1$和$\nu=1$，则方程（13-59）成为

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}J_1(-ik_1t)\frac{dt}{t}=\frac{\{(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}-\lambda\}}{-ik_1}=\frac{u_1-\lambda}{-ik_1}. \qquad (13\text{-}60)$$

子是H_{0x}的表达式（13-58）现在是

$$H_{0x}=\frac{-I}{\pi ik_1}\int_0^\infty \frac{J_1(-ik_1t)}{t}dt\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda z}\cos\lambda x d\lambda. \qquad (13\text{-}61)$$

其中的后一个积分记作$\mathscr{I}$，并可应用付氏余弦变换来处理，于是

$$\mathscr{I}=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}e^{-\lambda z}\cos\lambda x d\lambda=\frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}. \qquad (13\text{-}62)$$

上式的得出，可参考埃尔德利的《积分变换表》（1954, Vol.I, p.14, no.5）。当注意到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right)=\frac{t^2-x^2}{(t^2+x^2)^2}, \qquad (13\text{-}63)$$

方程（13-62）可写成另一种形式

$$\mathscr{I}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{t^2+x^2}\right), \qquad (13\text{-}64)$$

并且磁场的分量可被表示成

$$H_{0x}=\frac{I_0}{\pi ik_1}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\int_0^\infty \frac{J_1(-ik_1t)}{(t^2+x^2)t}dt\right], \qquad (13\text{-}65)$$

式中的积分曾由瓦特森（1944, p.426）求出，其解的一般形式如

下

$$\mathscr{I}=\int_0^\infty \frac{J_\nu(at)\,dt}{(t^2+b^2)t}=\frac{\pi}{2b^{\nu+1}}\left[I_\nu(ab)-L_\nu(ab)\right],$$

(13-66)

式中的L_ν是尼科耳森函数，已被瓦特森（1944，p.329）定义为级数形式

$$L_\nu(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}z)^{\nu+2m+1}}{\Gamma(m+3/2)\Gamma(\nu+m+3/2)} \qquad (13\text{-}67)$$

于是利用变量$(-ik_1x)$，可给出水平方向的磁场为

$$H_{0x}=\frac{I}{2}\ \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{-ik_1x}\{I_1(-ik_1x)-L_1(-ik_1x)\}\right\}.$$

(13-68)

我们要确定大地表面上任意一点磁场的倾角。欲求该倾角，我们须先注意H_{0x}和H_{0z}二者都是复数，因而在一般情形下，场将是椭圆极化的。极化椭圆可用下面的方法来确定。因为我们所关心的是它的场分量

$$H_xe^{i\varphi_x}=H_x(\cos\varphi_x+i\sin\varphi_x), \qquad (13\text{-}69)$$

$$H_ze^{i\varphi_z}=H_z(\cos\varphi_z+i\sin\varphi_z), \qquad (13\text{-}70)$$

式中H_x和H_z现在指的是磁场在x和z方向上的振幅。沿着与x轴夹角为α的任意方向上，其磁场为

$$H_1=[H_x\cos\varphi_x\cos\alpha+H_z\cos\varphi_z\sin\alpha]+i[H_x\sin\varphi_x\cos\alpha+H_z\sin\varphi_z\sin\alpha], \qquad (13\text{-}71)$$

而在与其垂直的方向上，磁场是

$$H_2=[-H_x\cos\varphi_x\sin\alpha+H_z\cos\varphi_z\cos\alpha]+i[-H_x\sin\varphi_x\sin\alpha+H_z\sin\varphi_z\cos\alpha]. \qquad (13\text{-}72)$$

现在我们来求$|H_1|$为最大而同时$|H_2|$为最小的角度α。这两个方向便确定了极化椭圆的长轴和短轴。在短轴方向，磁场的绝对值平方可写成

$$|H_2|^2=H_x^2\sin^2\alpha+H_z^2\cos^2\alpha-2H_xH_z\cos\varphi_x\cos\varphi_z\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-2H_xH_z\sin\varphi_x\sin\varphi_z\sin\alpha\cos\alpha$$
$$=H_x^2\sin^2\alpha+H_z^2\cos^2\alpha-2H_xH_z\sin\alpha\cos\alpha\cos(\varphi_x-\varphi_z),$$
(13-73)

$|H_2|$的最小值相应于$|H_2|^2$的最小值，所以求$d|H_2|^2/d\alpha=0$就够了，或

$$2H_x^2\sin\alpha\cos\alpha-2H_z^2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$-2\cos(\varphi_x-\varphi_z)H_xH_z(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0, \quad (13-74)$$

可求出α的值。这个方程的形式为

$$A\tan^2\alpha+B\tan\alpha+C=0, \quad (13-75)$$

其中

$$A=2H_xH_z\cos(\varphi_x-\varphi_z),$$
$$B=2H_z^2-2H_x^2,$$
$$C=-2H_xH_z\cos(\varphi_x-\varphi_z), \quad (13-76)$$

而其根是

$$\tan\alpha=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}. \quad (13-77)$$

它相当于长轴和短轴的方位。置于地面上的线电流源，其附近磁场的倾角可由方程（13-77）得到。

在均匀大地上面的线电流源，其附近的场可总结如下

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{\pi(k_0^2-k_1^2)x^2}[ik_1xK_1(-ik_1x)-ik_0xK_1(-ik_0x)]$$
$$\sim\frac{i\mu\omega I}{\pi k_1x}K_1(-ik_1x), \quad (13-78)$$

$$H_{0x}=\frac{I}{2}\left[\frac{2I_1(-ik_1x)}{ik_1x^2}-\frac{I_1(-ik_1x)}{ik_1x^2}+\frac{1}{x}\right.$$
$$\left.\cdot I_0(-ik_1x)-\frac{1}{x}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+1)\left(-\frac{ik_1x}{2}\right)^{2m+1}}{\Gamma(m+\frac{3}{2})\ \Gamma(m+\frac{5}{2})}\right],$$
(13-79)

$$H_{0x}=\frac{I}{\pi(k_0^2-k_1^2)x^3}[-2ik_0xK_1(-ik_0x)+k_0^2x^2K_0(-ik_0x)$$
$$+2ik_1xK_1(-ik_1x)-k_1^2x^2K_0(-ik_1x)]$$
$$\sim\frac{I}{\pi x}[K_0(-ik_1x)-\frac{2}{(-ik_1x)}K_1(-ik_1x)]. \quad (13\text{-}80)$$

$$\tan\alpha=\frac{-(H_x^2-H_z^2)\pm\sqrt{(H_x^2-H_z^2)^2+4H_x^2H_z^2\cos^2(\varphi_x-\varphi_z)}}{2H_xH_z\cos(\varphi_x-\varphi_z)}. \quad (13\text{-}81)$$

最后一个公式中的H_x和H_z是方程（13-79）和（13-80）中的振幅，同时φ_x和φ_z分别是这同一表示式中的初相位。

（四）n层大地上面的线电流源

这一问题可以与均匀大地上方的线电流源的情况直接类比，以便较简单地处理。由方程（13-35），反射系数现在必须是

$$r(\lambda)=\frac{u_0-u_a}{u_0+u_a}, \quad (13\text{-}82)$$

式中u_a是与均匀大地相当的视传播常数。按照方程（13-37）类推，可以直接给出电场

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\lambda x}{u_0+u_a}e^{-u_0z}\,d\lambda. \quad (13\text{-}83)$$

在n层构造上，对于电矢量垂直入射面的平面波，其波阻抗已由方程（11-25）给出。为了使反复写该表达式简单起见，我们将去掉下标，并将上标降为下标。当然，我们应该记住，凡被改写过的式子，在后面仅适用于电矢量垂直入射面的情形。于是可写出

$$\hat{Z}_1=Z_1\frac{\hat{Z}_2+Z_1\tanh u_1h_1}{Z_1+\hat{Z}_2\tanh u_1h_1}, \quad (13\text{-}84)$$

和

$$Z_1=\frac{\omega\mu_1}{iu_1}, \qquad \hat{Z}_1=\frac{\omega\mu_a}{iu_a}. \quad (13\text{-}85)$$

设若$\mu_1=\mu_a$，则

$$u_a = u_1 \frac{Z_1 + \hat{Z}_2 \tanh u_1 h_1}{\hat{Z}_2 + Z_1 \tanh u_1 h_1}. \qquad (13\text{-}86)$$

对于某些实际的勘探问题，我们可引进远场的假设，$u_i \approx iki$，这样方程(13-86) 成为

$$k_a \approx k_1 \frac{Z_1 + \hat{Z}_2 \tan h\, j k_1 h_1}{\hat{Z}_2 + Z_1 \tan h\, j k_1 h_1} \approx \frac{k_1}{Q}, \qquad (13\text{-}87)$$

其中

$$Q \approx \frac{\hat{Z}_2 + Z_1 \tanh j k_1 h_1}{Z_1 + \hat{Z}_2 \tanh j k_1 h_1}. \qquad (13\text{-}88)$$

为了标记上的方便，这里及其它一些式子中，对于$\sqrt{-1}$已用记号 j 代替了习惯上的 i 。于是，可按对半空间上方的线电流源的场类比，写出

$$E_{0y} \approx \frac{i\mu\omega I}{\pi(k_0^2 - k_a^2)x^2}[ik_a x K_1(-ik_a x) - ik_0 x K_1(-ik_0 x)]. \qquad (13\text{-}89)$$

对于$|-ik_a x| \gg 1$，方括号中的第一项可以忽略。因为对于大的宗量，修正贝塞耳函数K_1的渐近形式是

$$K_1(-ik_a x) \to \sqrt{\frac{\pi}{2(-ik_a x)}} e^{ik_a x}. \qquad (13\text{-}90)$$

于是可得

$$E_{0y} \approx \frac{-i\mu\omega I}{\pi k_1^2 x^2}(-ik_0 x) K_1(-ik_0 x) Q^2 \qquad (13\text{-}91)$$

或

$$E_{0y} \approx \frac{i\mu\omega I k_0}{\pi k_1^2 x} K_1(-ik_0 x) Q^2. \qquad (13\text{-}92)$$

类似地，我们可使均匀大地上方线电流源的电场有类似的形式

$$E_{0y} \approx \frac{i\mu\omega I k_0}{\pi k_1^2 x} K_1(-ik_0 x). \qquad (13\text{-}93)$$

韦特（1962，p.31）曾指出，因子 Q^2 可解释为在线源下面的导电半空间中有成层媒质存在时的校正因子。值得注意的是，上述结论仅对于 $\lambda=k_0\sin\theta_0\sim 0$ 即意味着 θ_0 是实的才有 $u_i\sim ik_i$。在源的附近，这是不正确的，这时方程（13-83）必须用（13-86）式给出的 u_a 来计算。

应用关系式

$$\hat{Z}_1=\frac{\omega\mu}{ka}, \tag{13-94}$$

我们可将方程（13-92）变换成另一方便的形式，于是有

$$E_{0y}\approx\frac{iIk_0}{\pi\mu\omega x}K_1(-ik_0x)\{\hat{Z}_1\}^2. \tag{13-95}$$

这里是以平面波的波阻抗的平方作为校正因子的。

在成层大地上面远处的水平磁场，由方程（13-68）可直接得出如下

$$H_{0x}=\frac{I}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{-ik_ax}\left\{I_1(-ik_ax)-L_1(-ik_ax)\right\}\right], \tag{13-96}$$

在远处的垂向磁场可直接由方程（13-52）得出

$$\begin{aligned}H_{0z}=\frac{I}{\pi(k_0^2-k_a^2)x^3}\Big[&-2ik_0xK_1(-ik_0x)\\&+k_0^2x^2K_0(-ik_0x)+2ik_ax K_1(-ik_ax)\\&-k_a^2x^2K_0(-ik_ax)\Big].\end{aligned} \tag{13-97}$$

（五）复折射角和复入射角

我们已把斯涅耳第二定律写作

$$k_2\sin\theta_0=k_1\sin\theta_1,$$

或

$$\sin\theta_1=\frac{k_2}{k_1}\sin\theta_0, \tag{13-98}$$

式中 θ_0、θ_1 分别是入射角和折射角。现在，若 $(k_2/k_1)\sin\theta_0>1$，则 θ_1 必须是复数才能满足方程（13-98）。

对于电介质，方程（13-98）可写作

$$\sin\theta_1=\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}\sin\theta_0, \qquad (13\text{-}99)$$

并且会出现复入射角，例如 $\epsilon_2/\epsilon_1<1$，这时波在介电常数减小的方向传播。

假定上面所讲的条件存在，则θ_1可写成

$$\theta_1=\theta_1^r+i\theta_1^i, \qquad (13\text{-}100)$$

于是

$$\sin\theta_1=\sin(\theta_1^r+i\theta_1^i)=\sin\theta_1^r\cosh\theta_1^i+\cos\theta_1^r\sinh\theta_1^i.$$

因为 θ_1^i和 $\sinh\theta_1^i$ 都可以大于 1，则容易看出 $\sin\theta_1$比 1 大。雅恩克和埃姆德 (1945, p.67) 提出一个$\sin(x+iy)$ 函数的图模 (relief)。那么就我们所处理的边值问题的物理性质，如何用它来解释复折射角呢？ 因为 $\sin\theta_1>1$，在电介质中余弦是纯虚数

$$\cos\theta_1=\frac{i}{\sqrt{\epsilon_1}}\sqrt{\epsilon_2\sin^2\theta_0-\epsilon_1}=in_{12}\sqrt{\sin^2\theta_0-\overline{n_{21}^2}}, \qquad (13\text{-}101)$$

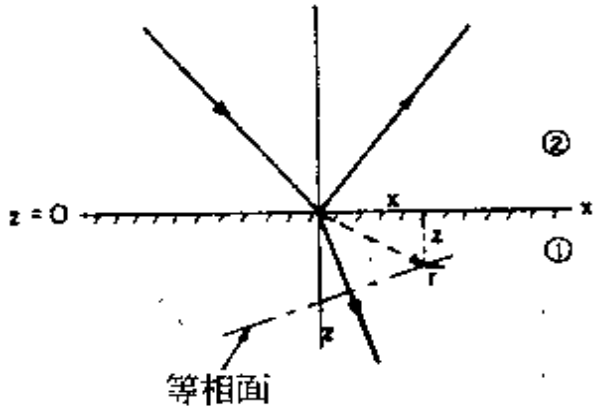


图 13—4 在分界面上的反射与折射，复折射角

式中

$$n_{12}=\sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}}=\frac{1}{n_{21}}$$

是折射率。

由图13—4，对于以平面 $z=0$ 相接触的两种媒质，透射波的周相是

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}=\omega\sqrt{\epsilon_1\mu_1}\ (z\cos\theta_1+x\sin\theta_1)$$

$$=\omega\sqrt{\epsilon_2\mu_2}\ (iz\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}+x\sin\theta_1). \qquad (13\text{-}102)$$

而透射波的电场强度是

$$\mathbf{E}_t=\mathbf{E}_1\exp[\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}]=\mathbf{E}_1\exp[-\beta_1 z+i\alpha x-i\omega t]. \qquad (13\text{-}103)$$

由菲涅耳方程 (10-46)、(10-47) 加上方程 (10-78)和(10-79)，

可得反射波与透射波的场的振幅如下：

1．对于电场垂直于入射面

$$\mathbf{E}_1=\frac{2\cos\theta_0}{\cos\theta_0+i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}\mathbf{E}_0, \qquad (13\text{-}104)$$

$$\mathbf{E}_2=\frac{\cos\theta_0-i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}{\cos\theta_0+i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}\mathbf{E}_0. \qquad (13\text{-}105)$$

2．对于电场在入射面内

$$\mathbf{n}_1\times\mathbf{E}_1=\frac{2n_{21}\cos\theta_0}{n_{21}^2\cos\theta_0+i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_0, \qquad (13\text{-}106)$$

$$\mathbf{n}_2\times\mathbf{E}_2=\frac{n_{21}^2\cos\theta_0-i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}{n_{21}^2\cos\theta_0+i\sqrt{\sin^2\theta_0-n_{21}^2}}\mathbf{n}_0\times\mathbf{E}_0. \qquad (13\text{-}107)$$

功率反射系数与功率透射系数被定义为

$$R\equiv\frac{E_2^2}{E_0^2}, \qquad T\equiv\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,\frac{\cos\theta_1}{\cos\theta_0}\,\frac{E_1^2}{E_0^2}. \qquad (13\text{-}108)$$

在上述每一情形下，当垂直于表面的功率反射系数和功率透射系数算出后，要求

$$R+T=1. \qquad (13\text{-}109)$$

不难证明，菲涅耳方程满足方程（13-108）和（13-109）。

由方程（13-106）和（13-107）很容易看出，因为$\mathbf{E}_0$的系数都是复数，因而透射波和反射波相对入射波在分界面上显然是异相的。从方程（13-104）到方程（13-107）不难证明

$$R=1, \qquad T=0. \qquad (13\text{-}110)$$

这种反射是全反射；这时没有寻常的平均能流进入介电常数较小的媒质。

设若媒质（2）是理想的电介质，但媒质（1）是导电的，这与空气-大地交界面的情形相符合。其传播常数是

$$k_1^2=\varepsilon_1\mu_1\omega^2+i\mu_1\sigma_1\omega=(\alpha_1+i\beta_1)^2, \qquad (13\text{-}111)$$

$$k_2^2=\varepsilon_2\mu_2\omega^2=\alpha_2^2. \qquad (13\text{-}112)$$

斯涅耳定律可写作

$$\sin\theta_1=\frac{k_2}{k_1}\sin\theta_0=\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2+\beta_1^2}(\alpha_1-i\beta_1)\sin\theta_0$$

(13-113)

$$=(a-ib)\sin\theta_0. \tag{13-114}$$

由方程（13-114）可算出 $\cos\theta_1$ 为

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-(a^2-b^2-2abi)\sin^2\theta_0}=\rho e^{i\gamma}.$$

(13-115)

量 ρ 和相角 γ 可由方程（13-115）的平方，并使等式两边的实部和虚部分别相等求得

$$\rho^2\cos2\gamma=\rho^2(2\cos^2\gamma-1)=1-(a^2-b^2)\sin^2\theta_0, \tag{13-116}$$

$$\rho^2\sin2\gamma=2\rho^2\sin\gamma\cos\gamma=2ab\sin^2\theta_0. \tag{13-117}$$

由方程（13-102），透射波的相是

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}&=(\alpha_1+i\beta_1)(z\cos\theta_1+x\sin\theta_1)\\&=z\rho(\alpha_1\cos\gamma-\beta_1\sin\gamma)+iz\rho(\beta_1\cos\gamma+\alpha_1\sin\gamma)\\&\quad+x(a\alpha_1+b\beta_1)\sin\theta_0+ix(a\beta_1-b\alpha_1)\sin\theta_0.\end{aligned}$$

(13-118)

由方程（13-113）和（13-114）可求出

$$(a\alpha_1+b\beta_1)\sin\theta_0=\alpha_2\sin\theta_0 \tag{13-119}$$

和

$$(a\beta_1-b\alpha_1)=0. \tag{13-120}$$

另外，若做下列代换

$$p=\rho(\beta_1\cos\gamma+\alpha_1\sin\gamma), \tag{13-121}$$

$$q=\rho(\alpha_1\cos\gamma-\beta_1\sin\gamma), \tag{13-122}$$

则透射波可表示为

$$\mathbf{E}_t=\mathbf{E}_1\exp[-pz+i(qz+\alpha_2x\sin\theta_0-\omega t)]. \tag{13-123}$$

显然，等振幅面是 $-pz=$常数的平面，而等相面是 $qz+\alpha_2x\sin\theta=$常数的平面，一般这些平面是不相重合的。我们称这样的波为非均匀平面波。容易看出，等振幅面是平行于表面的平面，而波传播的方向则由等相面的法线方向决定。波与表面法线的夹角 ψ

是真折射角，其值由下式确定

$$\cos\psi=\frac{q}{\sqrt{q^2+\alpha_2^2\sin^2\theta_0}},\qquad(13\text{-}124)$$

这是由方程（13-123）中的传播因子直接得到的。

对于实的入射角，在空气-大地分界面上总有一些反射，但若出现复入射角，则反射不存在。对于电矢量在入射面内的情形，其振幅反射系数可由方程（10-82）以 $\mu_1=\mu_2=\mu_0$ 直接得到

$$r_{\parallel}=\frac{\cos\theta_0-\dfrac{k_2}{k_1}\cos\theta_1}{\cos\theta_0+\dfrac{k_2}{k_1}\cos\theta_1}.\qquad(13\text{-}125)$$

当无反射时，我们推得

$$\cos\theta_0=\frac{k_2}{k_1}\cos\theta_1,\qquad(13\text{-}126)$$

而根据斯涅耳定律（10-24），有

$$\sin\theta_0=\frac{k_1}{k_2}\sin\theta_1.\qquad(13\text{-}127)$$

方程（13-126）与（13-127）可合并得出下列无反射的条件

$$\sin^2\theta_0=\frac{k_1^2}{k_1^2+k_2^2}.\qquad(13\text{-}128)$$

方程（13-128）决定了无反射但有实数折射角的条件。在低频情形下，对于空气-大地分界面而言，可以忽略大地中的位移电流，于是有

$$\begin{aligned}&\text{在空气中：}\quad k_2^2=\mu\varepsilon_2\omega^2\\&\text{在大地中：}\quad k_1^2=i\mu\sigma_1\omega\end{aligned}\qquad(13\text{-}129)$$

所以

$$\sin^2\theta_0=\frac{1}{1-i\dfrac{\varepsilon_2\omega}{\sigma_1}}.\qquad(13\text{-}130)$$

方程（13-130）中的虚项，直到工作频率高于每秒 10^9 周，都可

忽略不计。于是对于勘探频率

$$\sin^2\theta_0=1. \tag{13-131}$$

这说明，对于零反射的唯一条件是实的入射角$\frac{\pi}{2}$。很明显，在线源问题中，我们不曾涉及过复入射角，因为入射波未出现非常传播波型。下面我们将更详细地研究这个问题。

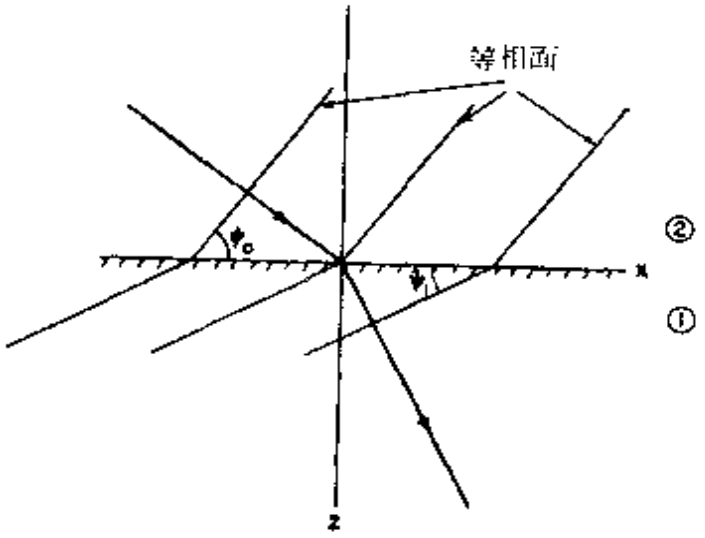


图 13—5 在分界面上的反射与折射，复入射角与复折射角

图 13—5 表示一平面波在空气－大地分界面上的折射。电矢量在入射面内，磁矢量则与入射面垂直。由于切向H的连续性，要求在媒质①和媒质②中，H的振幅和周相必须相等。因此我们可以写出

$$H_{2y}=H\exp[ik_2(z\cos\theta_0+x\sin\theta_0)-i\omega t], \tag{13-132}$$

$$H_{1y}=H\exp[ik_1(z\cos\theta_1+x\sin\theta_1)-i\omega t]. \tag{13-133}$$

和以前一样，我们设$\lambda=k_2\sin\theta_0$，并根据斯涅耳定律$k_2\sin\theta_0=k_1\sin\theta$，一般$\lambda$是复数，允许我们写出

$$\lambda=\alpha+i\beta, \tag{13-134}$$

$$ik_2\cos\theta_0=-i\sqrt{k_2^2-\lambda^2}=a_2+ib_2, \tag{13-135}$$

$$ik_1\cos\theta_1=i\sqrt{k_1^2-\lambda^2}=-a_1+ib_1. \tag{13-136}$$

方程(13-135)和(13-136)两式中符号的选取，已使场在$x=\pm\infty$时保持有限。于是，方程（13-132）与（13-133）变为

$$H_{1y}=H\exp[-a_1z-\beta x+i(b_1z+\alpha x)-i\omega t], \tag{13-137}$$

$$H_{2y}=H\exp[a_2z-\beta x+i(b_2z+\alpha x)-i\omega t]. \tag{13-138}$$

然后，对于入射波，等相面可由下式确定

$$b_2 z + \alpha x = 常数; \tag{13-139}$$

而等振幅面的方程则由下式确定

$$a_2 z - \beta x = 常数. \tag{13-140}$$

由方程（13-139）和（13-140），我们得出结论，等振幅面与同相面并不重合。

实入射角 ψ 示于图13--5中，并由下式来确定

$$\cos\psi = \frac{b_2}{\sqrt{\alpha^2 + b_2^2}}. \tag{13-141}$$

入射波的等振幅面，可由这些面的法线和负 z 轴间的夹角 ψ' 来确定

$$\tan\psi' = -\frac{\beta}{a_2}. \tag{13-142}$$

电矢量的分量可通过下列公式算出

$$\mathbf{E} = \frac{i\mu\omega}{k^2}\nabla \times \mathbf{H}, \tag{13-143}$$

$$E_x = -\frac{i\mu\omega}{k^2}\frac{\partial H_y}{\partial z}, \tag{13-144}$$

$$E_z = \frac{i\mu\omega}{k^2}\frac{\partial H_y}{\partial x}. \tag{13 145}$$

当把方程（13-132）和(13-133)代入方程(13-144)和（13-145）中时可得

$$E_{2x} = \frac{i\mu\omega}{k_2^2}(a_2 + ib_2)H_{2y}, \tag{13-146}$$

$$E_{2z} = \frac{\mu\omega}{k_2^2}(\alpha + i\beta)H_{2y}, \tag{13-147}$$

$$E_{1x} = \frac{-i\mu\omega}{k_1^2}(a_1 - ib_1)H_{1y}, \tag{13-148}$$

$$E_{1z} = \frac{\mu\omega}{k_1^2}(\alpha + i\beta)H_{1y}. \tag{13-149}$$

横向分量 E_z 引起平行于媒质(1)与媒质(2)的分界面的能流[1]。应当指出，假如 α、β 相对于 a_1、b_1 很小（即和前面一样，λ 相对于 k_1 可以略去），则上述的平均能流相对于进入媒质的平均能流是可以忽略的。我们已知

$$\lambda = k_1 \sin\theta_1, \tag{13-150}$$

对于空气-大地分界面的情形，常有 $\theta_1 \approx 0$，因而 $k_1 \gg \lambda$ 恒能满足。在这些情况下，表面波型并不包含有效的能流（对于这样的边界面，平行于界面的能流是很小的）。

（六）n 层媒质上方的线电流源

上面十三（五）节的讨论，可使我们得出以下结论，对于均匀大地上方的线源，其电场不论线源的高度或观测高度如何，仅当 $\lambda \sim 0$ 时，才能使我们应用公式（13-33）。因此，就推测而论，我们能导出磁场的分量 H_{0x} 与 H_{0z} 的形式同样简单。然而，我们也可通过少许严格一点的推导来建立这些公式。目前我们讨论的出发点将由方程（13-27）开始，为了方便起见，再把它重写于下

$$E_{0y} = \frac{i\mu\omega I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u_0 h}}{u_0}\left\{e^{u_0 z} + \frac{u_0 - u_1}{u_0 + u_1} e^{-u_0 z}\right\} e^{i\lambda x}\, d\lambda. \tag{13-151}$$

应当指出，该方程不包含近似。由麦克斯韦方程，对于同等精度的磁场，表示式是

$$H_{0x} = \frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{u_0 h}}{u_0}\left\{e^{u_0 z} + \frac{u_0 - u_1}{u_0 + u_1} e^{-u_0 z}\right\} e^{i\lambda x}\, d\lambda, \tag{13-152}$$

和

---

[1] 能流由坡印亭矢量 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ 瓦特/米^{2}给出（斯特拉顿，1941，p.132）。

$$H_{0z}=\frac{I}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u_0 h}}{u_0}\left[e^{u_0 z}+\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0 z}\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{13-153}$$

下面的任务将是计算积分

$$\mathscr{I}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u_0 h}}{u_0}\left[e^{u_0 z}+\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{-u_0 z}\right]e^{i\lambda x}\,d\lambda. \tag{13-154}$$

因为反射系数可写成

$$r(\lambda)=\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}=\frac{2u_0}{u_0+u_1}-1, \tag{13-155}$$

于是积分（13-154）可分解成下面的三个积分：

$$\mathscr{I}=\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_2+\mathscr{I}_3, \tag{13-156}$$

$$\mathscr{I}_1=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u_0(h+z)}}{u_0}e^{i\lambda x}\,d\lambda, \tag{13-157}$$

$$\mathscr{I}_2=2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u_0(h-z)}}{u_0+u_1}e^{i\lambda x}\,d\lambda, \tag{13-158}$$

$$\mathscr{I}_3=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{u_0(h-z)}}{u_0}e^{i\lambda x}\,d\lambda, \tag{13-159}$$

$$u_0=(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}.$$

因为$\mathscr{I}_1$、$\mathscr{I}_2$是λ的偶函数，我们可变换它们为余弦变换，并且可仿照（13-25）式中我们所使用过的方法那样来求解它们。参照埃尔德利（1954，Vol. I, p. 17, no. 27），于是我们求得

$$\mathscr{I}_1=2K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}], \tag{13-160}$$

$$\mathscr{I}_3=-2K_0[-ik_0\{x^2+(h-z)^2\}^{1/2}]. \tag{13-161}$$

显然，这两个表达式中的第一个表示一次源的函数，而第二个则表示位于地表面以下距离为$-h$处的像。这应该是完全导电的大地的镜像所在位置。下面对于有限电导率的大地，尚需计算剩下

的积分 $\mathscr{I}_2$。

积分 $\mathscr{I}_2$ 可简化为余弦变换，因为该积分的核同样是 λ 的偶函数。

$$\mathscr{I}_2=4\int_0^\infty \frac{e^{u_0(h-z)}}{u_0+u_1}\cos\lambda x d\lambda\,. \qquad (13\text{-}162)$$

而且，以 u_0-u_1 同乘式中的分子与分母，得

$$\mathscr{I}_2=\mathscr{I}_{21}+\mathscr{I}_{22},$$

$$\mathscr{I}_{21}=\frac{4}{k_1^2-k_0^2}\int_0^\infty u_0 e^{u_0(h-z)}\cos\lambda x d\lambda\,, \qquad (13\text{-}163)$$

$$\mathscr{I}_{22}=\frac{-4}{k_1^2-k_0^2}\int_0^\infty u_1 e^{u_0(h-z)}\cos\lambda x d\lambda\,. \qquad (13\text{-}164)$$

这些积分中的第一个，可应用与求得方程（13-49）时的方法一样，不带有任何近似地计算，或者直接参照埃贝尔和福斯特的著作（1948，p. 76，no. 635）。不过我们将采用后一种近似方法。但计算之前可先做准静态近似 $\lambda\sim u_0$，于是得

$$\mathscr{I}_{21}=\frac{4}{k_1^2-k_0^2}\,\frac{(z-h)^2-x^2}{[(z-h)^2+x^2]^2}. \qquad (13\text{-}165)$$

其次，假如在第二个积分中以 $(e^{i\lambda x}+e^{-i\lambda x})/2$ 代换 $\cos\lambda x$，我们可改写方程（13-164），并使

$$\mathscr{I}_{22}=\mathscr{I}_{221}+\mathscr{I}_{222}, \qquad (13\text{-}166)$$

式中

$$\mathscr{I}_{221}=\frac{-2}{k_1^2-k_0^2}\int_0^\infty (\lambda^2-k_1^2)^{1/2}e^{\lambda[(h-z)+ix]}d\lambda\,, \qquad (13\text{-}167)$$

$$\mathscr{I}_{222}=\frac{-2}{k_1^2-k_0^2}\int_0^\infty (\lambda^2-k_1^2)^{1/2}e^{\lambda[(h-z)-ix]}d\lambda\,. \qquad (13\text{-}168)$$

这后面的两个积分在形式上是相似的，并可用斯特杜夫函数的积

分式算出（埃尔德利等，1953，Vol.I,p.38,no.51）

$$\Gamma(\nu+\tfrac{1}{2})[H_\nu(\xi z)-Y_\nu(\xi z)]$$

$$=\frac{1}{\pi^{1/2}}(\tfrac{1}{2}\xi)^{\nu-1}z^\nu\int_0^{e^{i\beta}}e^{-zt}(1+t^2\xi^{-2})^{\nu-\frac{1}{2}}dt,$$

(13-169)

$$\beta-\frac{1}{2}\pi<\arg\xi<\beta+\frac{1}{2}\pi\ ,$$

$$-\frac{\pi}{2}-\beta<\arg z<\frac{\pi}{2}-\beta\ .$$

式中 Y_ν 和 $\Gamma(\nu+\frac{1}{2})$ 是 ν 阶第二类贝塞耳函数和 $\nu+\frac{1}{2}$ 阶 Γ 函数。把方程（13-169）应用到 $\mathscr{I}_{221}$ 和 $\mathscr{I}_{222}$，可得

$$\mathscr{I}_{221}=\frac{2(-ik_1)}{k_1^2-k_0^2}\ \frac{\pi}{(h-z)+ix}[\mathrm{H}_1[ik_1\{(h-z)+ix\}]$$

$$-Y[ik_1\{(h-z)+ix\}]],\qquad(13\text{-}170)$$

$$\mathscr{I}_{222}=\frac{2(-ik_1)}{k_1^2-k_0^2}\ \frac{\pi}{(h-z)-ix}[\mathrm{H}_1[ik_1\{(h-z)-ix\}]$$

$$-Y[ik_1\{(h-z)-ix\}]].\qquad(13\text{-}171)$$

如果我们假定 $k_0\sim0$，这当然是做了准静态近似，于是我们可写出电场为

$$E_{0y}=\frac{ik\eta\omega I}{4\pi}[\mathscr{I}_1+\mathscr{I}_3+\mathscr{I}_{21}+\mathscr{I}_{221}+\mathscr{I}_{222}]$$

$$=-\frac{ik\eta\omega I}{2\pi}[K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}]$$

$$-K_0[-ik_0\{x^2+(h-z)^2\}^{1/2}]+\frac{2}{k_1^2}$$

$$\cdot\frac{(z-h)^2-x^2}{[(z-h)^2+x^2]^2}+\frac{\pi}{k_1}\ \frac{1}{[-x+i(h-z)]}$$

$$\cdot[\mathrm{H}_1[k_1\{-x+i(h-z)\}]-Y[k_1\{-x$$

$$+i(h-z)\}]]+\frac{\pi}{k_1}\ \frac{1}{[x+i(h-z)]}$$

$$\cdot[\mathrm{H}_1[k_1\{x+i(h-z)\}]-Y[k_1\{x+i(h-z)\}]]]. \tag{13-172}$$

以上的推导，大体上是遵循劳和范宁（1961）的研究，这个问题早在1926年已被卡森（1926）用近似的形式解决了。磁场的分量现在可根据方程（13-152）和（13-153）来计算。然而，得到场的所有表达式的最简便的方法是对方程（13-172）中函数的级数表达式以及它们的微商进行数值计算。

在方程（13-172）中，若以 k_a 代 k_1，我们可再次将结果(13-172）推广到n层媒质的情形，不过这一推广仅对大的 x 值才适合

$$E_{0y}=\frac{i\mu\omega I}{2\pi}[K_0[-ik_0\{x^2+(h+z)^2\}^{1/2}]$$

$$-K_0[-ik_0\{x^2+(h-z)^2\}^{1/2}]+\frac{2}{k_a^2}$$

$$\cdot\frac{(z-h)^2-x^2}{[(z-h)^2+x^2]^2}+\frac{\pi}{k_a}\ \frac{1}{[-x+i(h-z)]}$$

$$\cdot[H_1[k_a\{-x+i(h-z)\}]-Y[k_a\{-x+i(h-z)\}]]$$

$$+\frac{\pi}{k_a}\ \frac{1}{[x+i(h-z)]}[\mathbf{H}_1[k_a\{x+i(h-z)\}]$$

$$-Y[k_a\{x+i(h-z)\}]]]. \tag{13-173}$$

同时

$$H_{0x}=-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial E_{0y}}{\partial z}, \tag{13-174}$$

$$H_{0z}=\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial E_{0y}}{\partial x}.$$

对于小的 x 值，以 u_a 代替 u_1，可对方程（13-151）、(13-152）和（13-153）做数值计算。

十四、n层媒质上方的垂直磁偶极子

（一）自由空间的磁偶极子源

对于磁偶极子源的谢昆诺夫电波势可从方程（185）推出

$$\mathbf{F}=\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\int_v \mathbf{J}''_{\mathrm{M}}\frac{e^{ikr}}{r}dv, \tag{14-1}$$

式中

$$r^2=x^2+y^2+z^2.$$

比较方程（46）和（84），可由 $\mathbf{M}'$ 确定 $\mathbf{J}''_{\mathrm{M}}$

$$\mathbf{J}''_{\mathrm{M}}=\mu\frac{\partial\mathbf{M}'}{\partial t}=-i\mu\omega\mathbf{M}', \tag{14-2}$$

所以方程（14-1）可写成另一形式

$$\mathbf{F}=-\frac{i\mu\omega e^{-i\omega t}}{4\pi}\int\mathbf{M}'\frac{e^{ikr}}{r}dv. \tag{14-3}$$

另一方面，极化矢量$\mathbf{M}$可定义为单位体积中的偶极矩

$$\mathbf{M}=\frac{d\mathbf{m}}{dv}=I\frac{d\mathbf{a}}{dv},$$

式中 $\mathbf{m}$ 是偶极矩，$d\mathbf{a}$是线圈的面积元，I 是线圈中的电流。于是方程（14-3）变为

$$\mathbf{F}=-\frac{i\mu\omega e^{-i\omega t}}{4\pi}I\int\frac{e^{ikr}}{r}d\mathbf{a}. \tag{14-4}$$

这式对于线圈元，可简单的写作

$$\mathbf{F}=-\frac{i\mu\omega e^{-i\omega t}}{4\pi}I\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{14-5}$$

或

$$\mathbf{F}=\mathbf{c}\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{14-6}$$

其中

$$\mathbf{c}=-\frac{i\mu\omega Id\mathbf{a}}{4\pi}. \tag{14-7}$$

这里，谐时相关性是不言而喻的。假如 $k=k_0$，k_0 为自由空间的传播常数，则方程（14-6）给出自由空间中一个无限小磁偶极子的一次势的表达式。

（二）均匀大地上方的垂直磁偶极子

磁偶极子或电流线圈，位于柱坐标系 (ρ,θ,z) 的原点。它指向 z 方向，并位于均匀大地表面以上高为 h 的地方，如图 14—1 所示。因为线圈面元的法线在 z 方向，于是我们只需要一次场的 z 分量的势 F_z^p

$$F_z^p=c\frac{e^{ikr}}{r}. \tag{14-8}$$

对于这个一次势，我们必须加上由于大地的存在而产生的二次势。按照所属的两种媒质，由方程(9-7)，函数 e^{ikr}/r 可变换为积分形式。

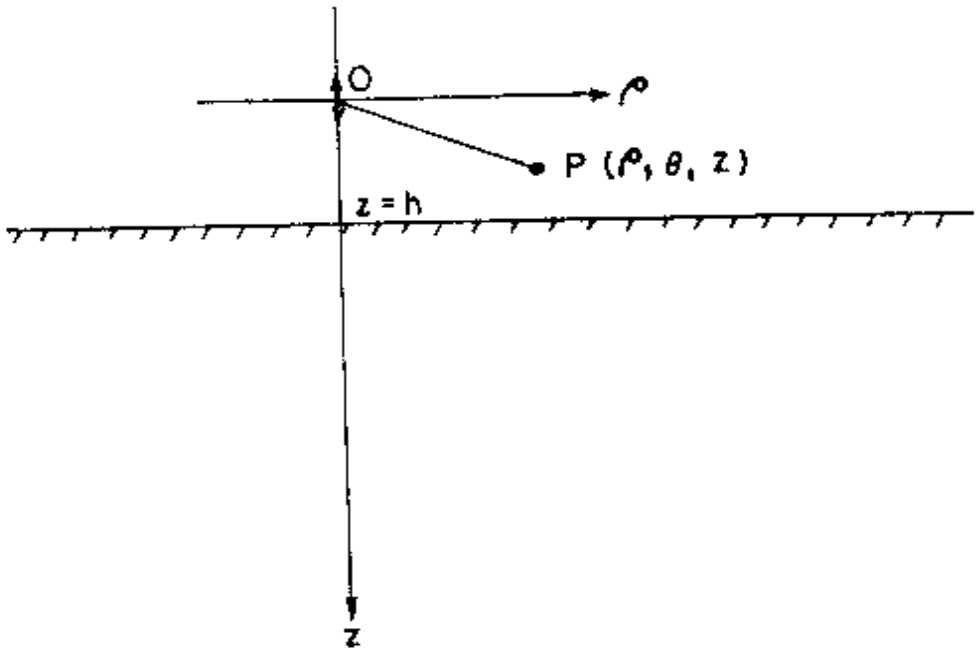


图 14—1　均匀大地上方的垂直磁偶极子

对于 $z\leqslant 0$ 的区域，这展开式是

$$\frac{e^{ik_0r}}{r}=\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}e^{\sqrt{\lambda^2-k_0^2}z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

(14-9)

而对于 $h\geqslant z\geqslant 0$ 的区域，这展开式是

$$\frac{e^{ik_0r}}{r}=\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

(14-10)

最后，对于 $z\geqslant h$ 的区域，我们有

$$\frac{e^{ik_1r}}{r}=\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}}e^{-\sqrt{\lambda^2-k_1^2}z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

(14-11)

为了保证函数扩展到 $z=-\infty$时的固有性质，方程（14-9）中已用了正的指数，同时为保证函数扩展到 $z=\infty$时的固有性质，方程（14-10）和（14-11）中已用了负的指数。

现在我们来研究大地表面上的边界条件。由于**H**在切向的连续性，我们拟用方程（111）的下述形式

$$\mathbf{H}=-(\sigma-i\omega\varepsilon)\mathbf{F}-\frac{1}{i\mu\omega}\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}. \qquad (14\text{-}12)$$

因为这里没有 **F** 的切向分量，当计算**H**的切向分量时，可不考虑方程（14-12）中的第一项。第二项包括由散度计算出的一个标量的梯度。在柱坐标系中，梯度是

$$\nabla\psi=\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\mathbf{i}_1+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\mathbf{i}_2+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathbf{i}_3. \qquad (14\text{-}13)$$

式中 $\mathbf{i}_1$，$\mathbf{i}_2$ 和 $\mathbf{i}_3$ 分别是 ρ、θ 和 z 方向的单位矢量。对于切向分量，必须除去方程（14-13）中的第三项，而且根据对称性，我们知道不会有 **H** 的 θ 分量。于是，上述梯度对**H**沿切向的贡献，只不过是方程（14-13）中的第一项。在柱坐标系中，矢量**F**的散度是

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho F_\rho)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{14-14}$$

因为我们只有 **F** 的 z 分量，则只能保留方程（14-14）中的第三项。于是，对于 **H** 在切向上的连续性，将以

$$-\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial^2 F_z}{\partial\rho\partial z} \tag{14-15}$$

的连续性所代替。这样在大地表面上，我们可写出

$$\frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\partial^2 F_{z0}}{\partial\rho\partial z}=\frac{1}{i\mu_1\omega}\frac{\partial^2 F_{z1}}{\partial\rho\partial z}\Big|_{z=h}. \tag{14-16}$$

对于 **E** 的切向连续性，我们需用下面形式的方程（110）

$$\mathbf{E}=-\nabla\times\mathbf{F}=\frac{\partial F_z}{\partial\rho}. \tag{14-17}$$

于是在大地表面上

$$\frac{\partial F_{z0}}{\partial\rho}=\frac{\partial F_{z1}}{\partial\rho}\Big|_{z=h}. \tag{14-18}$$

不计积分常数，条件（14-16）和（14-18）对于全部的 ρ 均能成立，因此可对 ρ 求积分，边界条件可简化为

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial F_{z0}}{\partial z}=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\Big|_{z=h}, \tag{14-19}$$

$$F_{z0}=F_{z1}|_{z=h}. \tag{14-20}$$

由方程（14-8）所表示的一次势仅有 z 分量，这与方程(14-9)、(14-10)或（14-11）替换了 e^{ikr}/r 相一致。注意这些表示式中只含有零阶贝塞耳函数，亦即 $n=0$。设若边界条件(14-19)和（14-20）得到满足，则二次势的 z 分量也只能在 $n=0$ 时存在，即只能有零阶贝塞耳函数。因此，总势的 z 分量由方程（9-1）可写成，

在空气中

$$F_{z0}=\int_0^\infty [f_0(\lambda)e^{u_0 z}+g_0(\lambda)e^{-u_0 z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda,\quad h\geqslant z\geqslant 0,$$

(14-21)

在大地中

$$F_{z1}=\int_0^\infty [f_1(\lambda)e^{u_1 z}+g_1(\lambda)e^{-u_1 z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda,\quad z\geqslant h,$$

(14-22)

式中

$$u_0=(\lambda^2-k_0^2)^{1/2},$$
$$u_1=(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}.$$

下面我们来计算四个本征函数$f_0(\lambda)$、$g_0(\lambda)$、$f_1(\lambda)$、$g_1(\lambda)$。首先值得注意的是，因为当z趋于无穷大时，F_{z1}必须为零，因此$f_1(\lambda)=0$。其次，从边界条件（14-19），我们有

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial z}[f_0(\lambda)e^{u_0 z}+g_0(\lambda)e^{-u_0 z}]$$
$$=\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial}{\partial z}[g_1(\lambda)e^{-u_1 z}]\Big|_{z=h},\qquad (14-23)$$

或

$$\frac{1}{\mu_0}[u_0 f_0(\lambda)e^{u_0 h}-u_0 g_0(\lambda)e^{-u_0 h}]$$
$$=\frac{1}{\mu_1}[-u_1 g_1(\lambda)e^{-u_1 h}].\qquad (14-24)$$

同样，由边界条件（14-20）有

$$f_0(\lambda)e^{u_0 h}+g_0(\lambda)e^{-u_0 h}=g_1(\lambda)e^{-u_1 h}.\qquad (14-25)$$

方程（14-24）和（14-25）可使我们用$g_0(\lambda)$来求出$f_0(\lambda)$和$g_1(\lambda)$的值。

$$f_0(\lambda)=\frac{u_0\mu_1-u_1\mu_0}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}e^{-2u_0 h}g_0(\lambda),\qquad (14-26)$$

$$g_1(\lambda)=\frac{2u_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}e^{(u_1-u_0)h}\,g_0(\lambda). \quad (14\text{-}27)$$

函数 $g_0(\lambda)$ 可由系统的常数求出。当注意到方程（14-21）必须由一次势与二次势的和组成时，$g_0(\lambda)$ 就可以求出了。在方程（14-21）中，能够表示一次势的唯一的项是第二项，因为只是这一项才有与（14-10）式中的负指数相当的一个负指数存在。于是，从方程（14-21）、（14-10）和（14-6），我们得到

$$g_0(\lambda)=\frac{c\lambda}{(\lambda^2-k_0^2)^{1/2}}=-\frac{i\mu\omega Ida\lambda}{4\pi u_0}. \quad (14\text{-}28)$$

现在我们已得出问题的形式解，为了导出对实用有价值的公式，还需计算方程（14-21）和（14-22）的积分。

（三）对位于均匀大地上面的线圈的解

设 $\mu_0=\mu_1$ 且 $h=0$；线圈置于均匀不导磁的地面上，则由方程（14-21）给出空气中的势为

$$F_{z0}=c\int_0^\infty\left[\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}e^{u_0z}+e^{-u_0z}\right]\frac{\lambda}{u_0}J_0(\lambda\rho)d\lambda,\quad h\geqslant z\geqslant 0. \quad (14\text{-}29)$$

为使后面有所参照，我们注意这表示式

$$\frac{u_0-u_1}{u_0+u_1}=r_\perp(\lambda) \quad (14\text{-}30)$$

正是由方程（13-35）给出的振幅反射系数，命 $z=0$，势可写成

$$F_{z0}=c\int_0^\infty\frac{2\lambda}{u_0+u_1}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \quad (14\text{-}31)$$

当再略去位移电流时，则有

$$u_0=\sqrt{\lambda^2-k_0^2}\approx\lambda, \quad (14\text{-}32)$$

因而我们现在希望计算积分

$$F_{z0}=c\int_0^\infty\frac{2\lambda}{u_1+\lambda}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \quad (14\text{-}33)$$

前面我们曾指出，这方程(9-58)的积分已被福斯特(1931)求出，

所以我们可直接写下

$$F_{z0}=2c\frac{1-(1-k_1\rho)e^{ik_1\rho}}{-(k_1\rho)^2\rho}. \qquad (14\text{-}34)$$

电场只有一个 θ 分量，由方程（306)得出

$$E_\theta=-i\mu\omega\frac{\partial\pi_z^*}{\partial\rho}=\frac{\partial F_{z0}}{\partial\rho}$$

$$=\frac{2c}{k_1^2\rho^4}[3-\{3-3ik_1\rho-k_1^2\rho^2\}e^{ik_1\rho}]. \qquad (14\text{-}35)$$

同时由方程（307)，磁场的分量是

$$H_z=\frac{1}{i\mu\omega}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F_{z0}}{\partial\rho}\right)\right], \qquad (14\text{-}36)$$

和

$$H_\rho=-\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial^2F_{z0}}{\partial z\partial\rho}. \qquad (14\text{-}37)$$

在上面的三个式子中，我们已应用了恒等式

$$\mathbf{F}=-i\mu\omega\pi^*, \qquad (14\text{-}38)$$

式中 π^* 是由于磁源而引入的赫兹矢量，并且我们已用 ρ 代替 r 作为径向坐标。对称性要求场与 θ 无关〔或是方程(306-307)中用的 ϕ〕，所以我们可使 $\partial/\partial\theta=0$。

垂向的磁场很容易由方程(14-35) 求得。注意 $\partial F_{z0}/\partial\rho$ 在计算(14-35) 式时已经算出，于是可得

$$H_z=\frac{-2c}{i\mu\omega k_1^2}\frac{1}{\rho^5}[9-(9-9ik_1\rho-4k_1^2\rho^2+ik_1\rho^3)e^{ik_1\rho}]. \qquad (14\text{-}39)$$

为了计算 H_ρ，我们必须应用方程(14-22)给出的 F_{z1}

$$F_{z1}=\int_0^\infty 2c\frac{\lambda e^{-u_1z}}{\lambda+u_1}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (14\text{-}40)$$

式中我们已再次以 λ 代替了 u_0。方程(14-40) 可写成下面的形式

$$F_{z1}=\frac{-2c}{k_1^2}\left[\frac{\partial^2P}{\partial z^2}-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_1^2N+\frac{\partial^2N}{\partial z^2}\right)\right], \qquad (14\text{-}41)$$

其中

$$P=\int_0^\infty \frac{\lambda}{u_1}e^{-u_1 z}\ J_0(\lambda\rho)d\lambda=\frac{e^{ik_1 r}}{r}, \qquad (14\text{-}42)$$

以及

$$N=\int_0^\infty \frac{1}{u_1}e^{-u_1 z}\ J_0(\lambda\rho)\,d\lambda=I_0\left[\frac{-ik_1}{2}(r+z)\right]$$

$$\cdot K_0\left[-\frac{ik_1}{2}(r-z)\right]. \qquad (14\text{-}43)$$

积分P已在方程(14-11)中引入，积分N已由福斯特（1931）算出。函数I_0和K_0是零阶修正贝塞耳函数。我们现在可对方程（14-37）中的微商进行计算，为此可颠倒微商的顺序，于是

$$H_\rho=-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial^2 F_{z1}}{\partial z\partial\rho}\bigg|_{z=0}=-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right]\bigg|_{z=0}. \qquad (14\text{-}44)$$

由方程（14-41)得：

$$\left[\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right]_{z=0}=-\frac{2c}{k_1^2}\left[\frac{\partial^3 P}{\partial z^3}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(k_1^2 N+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]_{z=0}. \qquad (14\text{-}45)$$

通过对$e^{ik_1 r}/r$的微商，可以证明上式方括号中的第一项在$z=0$时为零。

此外，我们已经知道，F_{z1}必须满足柱坐标系中的波动方程，并且这个函数的任意积分或微商也必须满足同样的波动方程。所以

$$\frac{\partial^2 N}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial N}{\partial\rho}+\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}+k^2 N=0. \qquad (14\text{-}46)$$

这个方程可使我们改写方程(14-45)中的微商次序成为

$$\left[\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right]_{z=0}=-\frac{2c}{k_1^2}\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right)\left(\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right)\right]_{z=0}. \qquad (14\text{-}47)$$

为了计算方程(14-47)，应首先注意

$$N=I_0\left[-\frac{\gamma}{2}(r+z)\right]K_0\left[\frac{\gamma}{2}(r-z)\right]，式中\gamma=-ik_1，$$

(14-48)

$$\frac{\partial N}{\partial z}=\frac{\partial I_0}{\partial z}K_0+I_0\frac{\partial K_0}{\partial z}$$

$$=K_0\frac{\partial I_0}{\partial p}\left[-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]+I_0\frac{\partial K_0}{2q}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\right],$$

(14-49)

式中

$$p=\frac{\gamma}{2}(r+z)是\ I_0\ 的宗量，$$

$$q=\frac{\gamma}{2}(r-z)是\ K_0\ 的宗量.$$

$$\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}=\frac{\partial K_0}{\partial z}\frac{\partial I_0}{\partial p}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]+K_0\frac{\partial^2 I_0}{\partial z\partial p}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]$$

$$+K_0\frac{\partial I_0}{\partial p}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]+\frac{\partial I_0}{\partial z}\frac{\partial K_0}{\partial q}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\right]$$

$$+I_0\frac{\partial^2 K_0}{\partial z\partial q}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\right]+I_0\frac{\partial K_0}{\partial q}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]$$

$$=-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\frac{\partial K_0}{\partial q}\frac{\partial I_0}{\partial p}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]$$

$$+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)K_0\frac{\partial^2 I_0}{\partial p^2}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)\right]$$

$$+K_0\frac{\partial I_0}{\partial p}\frac{\gamma}{2r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right)+\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}+1\right)$$

$$\cdot\frac{\partial I_0}{\partial p}\frac{\partial K_0}{\partial q}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\right]-\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)$$

$$\cdot I_0\frac{\partial^2 K_0}{\partial q^2}\left[\frac{\gamma}{2}\left(\frac{z}{r}-1\right)\right]+I_0\frac{\partial K_0}{\partial q}\frac{\gamma}{2r}\left(1-\frac{z^2}{r^2}\right).$$

(14-50)

下面我们使 $z=0$，来计算方程(14-49)和(14-50)，这时上两式中有

$$\frac{\partial}{\partial q}=\frac{\partial}{\partial p}=\frac{\partial}{\partial t}\text{和 }t=\frac{\gamma\rho}{2}$$

是 I_0 和 K_0 的共同宗量。于是我们得到

$$\left.\frac{\partial N}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{\gamma}{2}[K_0I_0'-I_0K_0'], \tag{14-51}$$

$$\left.\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right|_{z=0}=\frac{\gamma^2}{4}\Big[-K_0'I_0'+K_0I_0''-I_0'K_0'+I_0K_0''+\frac{1}{t}(K_0I_0'+I_0K_0')\Big], \tag{14-52}$$

式中的撇号表示对 t 的微商。以上两个式子可变换为仅包含零阶和一阶贝塞耳函数的等价形式。为此我们应用递推关系(瓦特森，1944，P.79)

$$I_0''=I_1'=I_0-\frac{1}{t}I_1,\quad I_0'=I_1,$$

$$K_0''=-K_1'=K_0+\frac{1}{t}K_1,\quad K_0'=-K_1,$$

和修正贝塞耳函数的朗斯基行列式（瓦特森，1944，P.80)

$$I_0'K_0-I_0K_0'=\frac{1}{t}.$$

于是有

$$\left.\frac{\partial N}{\partial z}\right|_{z=0}=\frac{1}{\rho}, \tag{14-53}$$

$$\left.\frac{\partial^2 N}{\partial z^2}\right|_{z=0}=\frac{\gamma^2}{2}[I_0K_0+I_1K_1]. \tag{14-54}$$

函数 I_0 和 K_0 现在的变量是 $t=\gamma\rho/2$。我们推导的下一步，将是计算对 ρ 的微商。

$$\frac{\partial}{\partial\rho}[I_0K_0+I_1K_1]=-\frac{2}{\rho}I_1K_1, \tag{14-55}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[I_0K_0+I_1K_1]=-\frac{6}{\rho^2}I_1K_1+\frac{\gamma}{\rho}[I_1K_0-I_0K_1]. \tag{14-56}$$

于是由方程 (14-44)、(14-47)、(14-54)、(14-55) 和 (14-56) 可得

$$H_\rho=\frac{1}{i\mu\omega}2c\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{4}{\rho^2}I_1K_1+\frac{\gamma}{\rho}\{I_1K_0-I_0K_1\}\right]. \tag{14-57}$$

再完成求微商，其结果为

$$H_\rho=-\frac{1}{i\mu\omega}\frac{c}{\rho^3}[\gamma^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)+4\gamma\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1] \tag{14-58}$$

或

$$H_\rho=-\frac{1}{i\mu\omega}\frac{c}{\rho^3}[-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1]. \tag{14-59}$$

应当指出，公式 (14-35)、(14-39) 和 (14-59) 各有其用，但是它们还能以各种方式联合起来，提供另外有用的公式。按照均匀大地上方的线源的情形一样，我们可用水平的或径向的分量 H_ρ，以及垂直分量 H_z，来计算径向平面中磁矢量的倾角如下：

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}, \tag{14-60}$$

$$A=2H_\rho H_z\cos(\varphi_\rho-\varphi_z),$$

$$B=2(H_\rho^2-H_z^2),$$

$$C=-2H_\rho H_z\cos(\varphi_\rho-\varphi_z),$$

式中的 H_ρ、H_z 分别由方程(14-59)和 (14-39) 给出。测定倾角 α 的一个优点是，源电流的变化不影响测量。有用的函数的另一个例子是“波阻抗”

$$Z_{\theta\rho}=-\frac{E_\theta}{H_\rho}=-\frac{1}{2i\mu\omega k_1^2\rho}$$

$$\cdot\left[\frac{3-\{3-ik_1\rho-k_1^2\rho^2\}e^{ik_1\rho}}{-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1}\right], \tag{14-61}$$

$$Z_{\theta z}=-\frac{E_\theta}{H_z}$$

$$=-\frac{1}{i\mu\omega\rho}\left[\frac{3-\{3-3ik_1\rho-k_1^2\rho^2\}e^{ik_1\rho}}{9-\{9-9ik_1\rho-4k_1^2\rho+ik_1^3\rho^3\}e^{ik_1\rho}}\right], \tag{14-62}$$

或者按照常规，我们可计算一个线圈和其附近的另一个线圈之间的互阻抗。设在距离第一个线圈为 ρ 处有面积为 dA 的第二个线圈，假定它是水平放置的，则在该线圈中感应的电压是

$$e=-\frac{d\phi_z}{dt}=i\mu\omega H_z dA. \tag{14-63}$$

量

$$Z=\frac{i\mu\omega H_z dA}{I} \tag{14-64}$$

通常称做两线圈间的互阻抗，其中 I 是面积为 da 的第一个线圈中的电流。利用方程(14-39) 可求得

$$Z=\frac{i\mu\omega dadA}{2\pi k_1^2\rho^5}\left[9-(9-9ik_1\rho-4k_1^2\rho^2+ik_1^3\rho^3)\,e^{ik_1\rho}\right]. \tag{14-65}$$

因为在无限大媒质中的两个共平面线圈的互阻抗是

$$Z_0=-\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi\rho^3}, \tag{14-66}$$

于是方程(14-65) 可写成更为方便的形式

$$\frac{Z}{Z_0}=-\frac{2}{k_1^2\rho^2}\left[9-(9-9ik_1\rho-4\,k_1^2\rho^2+ik_1^3\,\rho^3)\,e^{ik_1\rho}\right], \tag{14-67}$$

式中 $k_1=(i\mu\sigma_1\omega)^{1/2}$。该阻抗比作为无量纲参数 $\theta=(\sigma_1\mu\omega)^{1/2}\rho$ 的函数，已被韦特 (1955) 计算出来。对于这个耦合关系以及其它情形下的耦合关系，现绘成曲线，一并示于图14—2中。

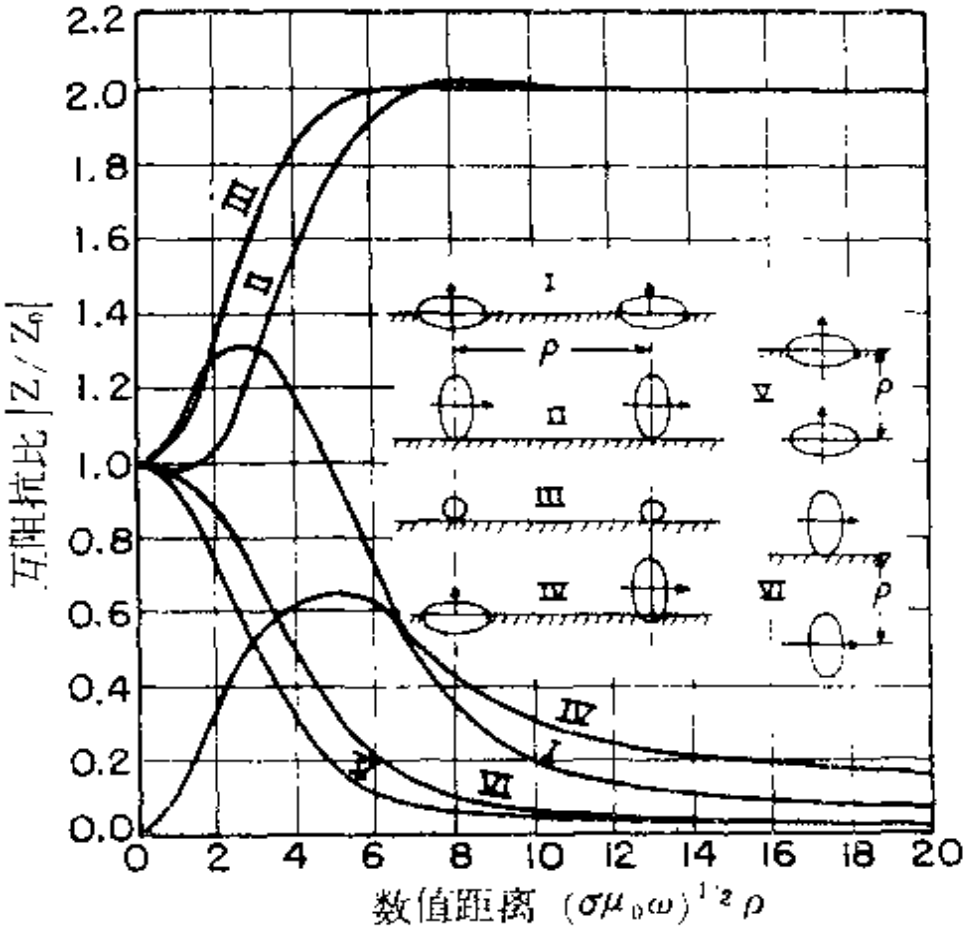


图 14—2　位于均匀大地表面及其内部的线圈间的归一化阻抗
（按韦特，1955）

为了得到韦特绘出的第四条曲线（图14—2），需求出垂向源偶极子与径向水平偶极子间的耦合。在自由空间中，这种耦合为零，但当均匀大地存在时，耦合将由下式给出

$$Z=\frac{i\mu\omega}{I}H_\rho\,dA=\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi\rho^3}\cdot[-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1]. \qquad (14\text{-}68)$$

若仍应用方程(14-66) 所确定的 Z_0，其阻抗比是

$$\frac{Z}{Z_0}=-[-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1]. \qquad (14\text{-}69)$$

这与韦特（1955）所得结果相同。

上述研究，原则上是按照韦特（1951）和梅逸（1962）的

论述。从事于这一工作的还有戈尔登（1951）和布哈达卡利娅（1959）。

（四）对位于n层大地上面的线圈的解

当处理成层大地上的线源时，我们注意到，用引入视传播常数 u_a 到层叠出现的计算上，其 u_a 为

$$u_a \approx u_1 - \frac{Z_1 + \widehat{Z}_2 \tanh u_1 h_1}{\widehat{Z}_2 + Z_1 \tanh u_1 h_1} \qquad (14\text{-}70)$$

对于磁偶极子源，首先以 u_a 代换关键积分(14-31)和(14-40)中的 u_1，则可得到完全一样的结果。实际上这和前面一样，引入了反射系数

$$r_\perp(\lambda) = \frac{u_0 - u_a}{u_0 + u_a}. \qquad (14\text{-}71)$$

然后，我们在方程(14-35)、(14-39)和(14-59)中处处以 $k_a = k_1/Q$ 代换 k_1，则可得到远区场的解

$$E_\theta = \frac{2cQ^2}{k_1^2\rho^4}\left[3 - \{3 - ik_a\rho - k_a^2\rho^2\}e^{ik_a\rho}\right], \qquad (14\text{-}72)$$

$$H_z = \frac{-2cQ^2}{i\mu\omega k_1^2\rho^5}\left[9 - \{9 - ik_a\rho - 4k_a^2\rho^2 + ik_a^3\rho^3\}\, e^{ik_a\rho}\right], \qquad (14\text{-}73)$$

$$H_\rho = -\frac{1}{i\mu\omega}\,\frac{c}{\rho^3}\left[-k_a^2\rho^2(I_1K_1 - I_0K_0)\right.$$
$$\left. - 4ik_a\rho(I_1K_0 - I_0K_1) + 16I_1K_1\right]. \qquad (14\text{-}74)$$

对于 $|-ik_a\rho| \gg 1$，方程(14-73)简化为

$$H_z \approx \frac{9daIQ^2}{2\pi k_1^2\rho^5}. \qquad (14\text{-}75)$$

由方程（14-29）以 u_a 代换 u_1，已对于全部 ρ 求出了场的精确数值解。

十五、n层媒质上方的水平磁偶极子

（一）均匀大地上方的水平磁偶极子

强度为

$$\mathbf{c}=-\frac{i\mu\omega I d\mathbf{a}}{4\pi} \tag{15-1}$$

的磁偶极子位于笛氏坐标系的原点，并指向 x 方向。由方程(15-1)，我们可推断偶极子源是面积为 da、带有电流 I、线圈面垂直 x 轴的小电流圈。线圈位于大地表面以上高为 h 处，如图15—1

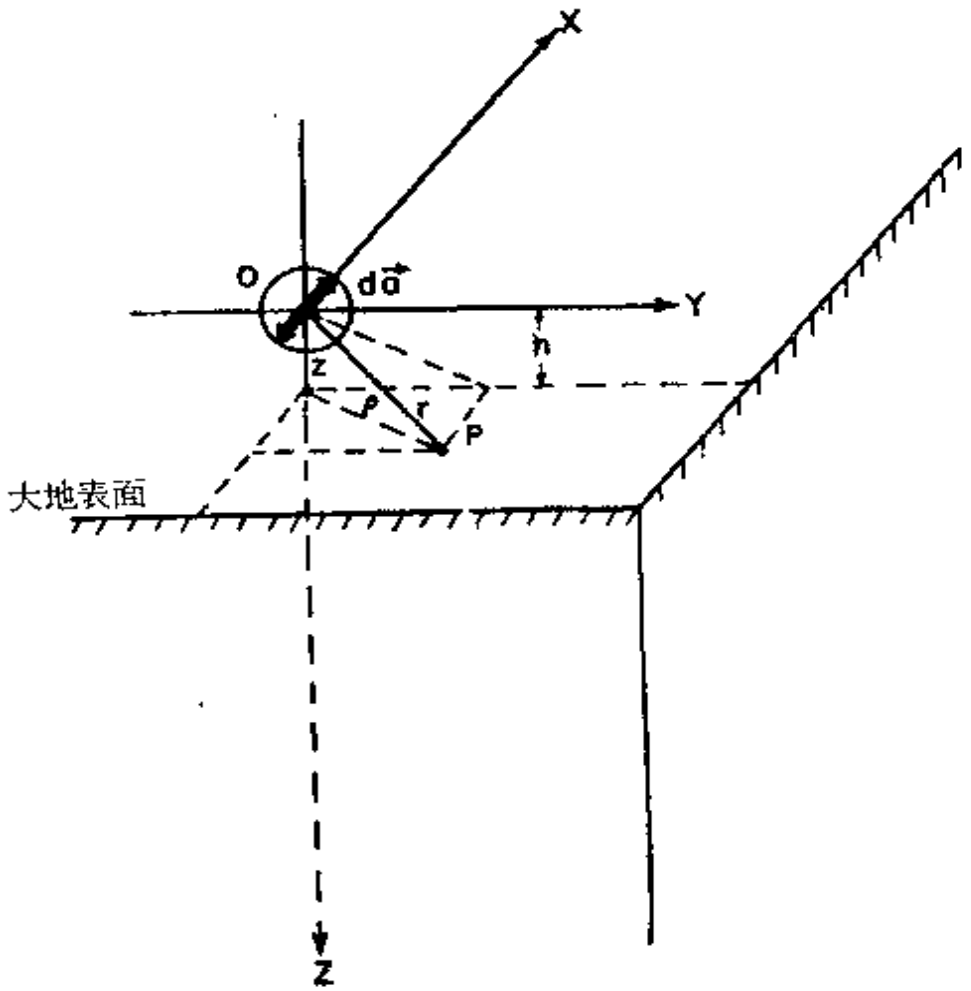


图15—1　均匀大地上方的水平磁偶极子

所示。

就大地上面的水平磁偶极子而论，我们需要赫兹矢量的 x 及 z 两个分量，并从这两个分量可推导出场强。一个适宜的赫兹矢量是由磁源而产生的 π^*；另一个我们可用谢昆诺夫势 $\mathbf{F}=-i\mu\omega\pi^*$。如果我们选择二者中的后一个，则势为

$$\mathbf{F}=\mathbf{i}F_x+\mathbf{K}F_z,\quad F_y=0. \tag{15-2}$$

由方程(97)、(101)和(107)，场是

$$\mathbf{E}=-\nabla\times\mathbf{F}, \tag{15-3}$$

$$\mathbf{H}=-(\sigma-i\omega\varepsilon)\ \mathbf{F}-\frac{1}{i\mu\omega}\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}. \tag{15-4}$$

于是场的分量可直接写出如下：

$$\begin{aligned}
E_x&=-\frac{\partial F_x}{\partial y},\\
H_x&=-(\sigma-i\omega\varepsilon)F_x-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right),\\
E_y&=\frac{\partial F_x}{\partial x}-\frac{\partial F_z}{\partial z},\\
H_y&=-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right),\\
E_z&=\frac{\partial F_x}{\partial y},\\
H_z&=-(\sigma-i\omega\varepsilon)F_z-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right).
\end{aligned} \tag{15-5}$$

本问题最初由索末菲（1926)研究过，后来又被韦特(1953)和奎恩（1963）所发展。我们虽然希望作较一般性的介绍，然而由于按照本卷的论题，却包括了该问题在研究进程中所有适宜的发展步骤。下面我们将由大地表面上的边界条件开始讨论。从 **E** 和 **H** 切向分量的连续性和用矢量 **F** 表示的电场和磁场表示式(15-5)，可以写出：

由 H_x 的连续性有

$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)F_{x0}+\frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z0}}{\partial z}\right)$$

$$=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)F_{x1}+\frac{1}{i\mu_1\omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=h},\tag{15-6}$$

由 H_y 的连续性有

$$\frac{1}{i\mu_0\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z0}}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{1}{i\mu_1\omega}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=h},\tag{15-7}$$

由 E_x 的连续性有

$$\frac{\partial F_{z0}}{\partial y}=\frac{\partial F_{z1}}{\partial y}\Bigg|_{z=h},\tag{15-8}$$

由 E_y 的连续性有

$$\frac{\partial F_{z0}}{\partial x}-\frac{\partial F_{x0}}{\partial z}=\frac{\partial F_{z1}}{\partial x}-\frac{\partial F_{x1}}{\partial z}\Bigg|_{z=h}.\tag{15-9}$$

关系式（15-6）到（15-9）对所有的 x 和 y 均能成立，因此对于 x 或 y 可以求积分。由于这些函数和它们的微商当 $x\to\infty$ 和 $y\to\infty$ 时为零，所以积分常数必为零。于是边界条件(15-7)和(15-8)简化为

$$\frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\partial F_{x0}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z0}}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial F_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial F_{z1}}{\partial z}\right)\Bigg|_{z=h},\tag{15-10}$$

$$F_{z0}=F_{z1}\Big|_{z=h}.\tag{15-11}$$

利用以上两式，可使方程（15-6）与（15-9）化为

$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)F_{x0}=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)\ F_{x1}\Big|_{z=h},\tag{15-12}$$

$$\frac{\partial F_{x0}}{\partial z}=\frac{\partial F_{x1}}{\partial z}\Bigg|_{z=h}.\tag{15-13}$$

因此方程（15-10）到(15-13)便组成了势 F_x、F_z 的边界条件。一次势仅有 x 分量

$$F_x^p = c\frac{e^{ikr}}{r}, \tag{15-14}$$

这里

$$r^2 = \rho^2 + z^2,$$

在前面已经指出，它满足非齐次波动方程。于是一次势 F_x^p 可用恒等式（14-9）、（14-10）和（14-11）写成方便的形式

$$F_x^p = c\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2 - k_0^2)^{1/2}} e^{\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\,z} J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad z \leqslant 0 \tag{15-15}$$

$$F_x^p = c\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2 - k_0^2)^{1/2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_0^2}\,z} J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad h \geqslant z \geqslant 0, \tag{15-16}$$

$$F_x^p = c\int_0^\infty \frac{\lambda}{(\lambda^2 - k_1^2)^{1/2}} e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2}\,z} J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad z \geqslant h. \tag{15-17}$$

我们假定，在空气中的总势由一次部分和二次部分的和来组成

$$F_{x0} = F_x^p + F_x^s.$$

同时，在大地中的势仅由二次部分来组成

$$F_{x1} = F_{x_1}^s.$$

这个过程相当于把表示空气中的非齐次波动方程的解当作一个特解，加上齐次波动方程的解，同时在大地中则只需求齐次波动方程的解。值得注意的是，以上表达式中仅含有零阶贝塞耳函数，这意味着 $n=0$。因此，为使边界条件(15-12）和（15-13）得到满足，则二次势的 x 分量也只能有 $n=0$，即二次势只能含有零阶贝塞耳函数。仿照前面的作法，我们可写出总势的 x 分量为：在偶极子以上的空气中

$$F_{x0}=F^{p}_{x0}+F^{s}_{x0}=\int_0^\infty [f_0(\lambda)e^{u_0 z}+g_0(\lambda)e^{u_0 z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$z\leqslant 0; \qquad (15\text{-}18)$$

在偶极子以下的空气中

$$F_{x0}=F^{p}_{x0}+F^{s}_{x0}=\int_0^\infty [f_0(\lambda)e^{u_0 z}+g_0(\lambda)e^{-u_0 z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$h\geqslant Z>0; \qquad (15\text{-}19)$$

在大地中

$$F_{x1}=F^{s}_{x1}=\int_0^\infty [f_1(\lambda)e^{u_1 z}+g_1(\lambda)e^{-u_1 z}]J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$z\geqslant h, \qquad (15\text{-}20)$$

式中

$$u_0=(\lambda^2-k_0^2)^{1/2},$$

和

$$u_1=(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}.$$

注意在方程(15-18)中，由 $g_0(\lambda)e^{u_0 z}$ 表示的一次波函数带有正的指数，所以在 $z\leqslant 0$ 的区域，一次波沿 z 的负方向传播。对于方程(15-19)和(15-20)，每一个势是由负指数所代表的一次波或发射波函数和由正指数所代表的二次波或反射波函数所组成。带有负指数和正指数的一次波及二次波的识别，自然是决定于方程(15-15)到(15-17)中 $\pm\sqrt{\lambda^2-k_0^2}$ 的符号的选择。很明显，我们只需要半无限大地中的发射波，所以我们将期待一个取零值的本征函数。这样我们就可以仿前去计算四个本征函数 $f_0(\lambda)$、$g_0(\lambda)$、$f_1(\lambda)$ 和 $g_1(\lambda)$。首先应注意到 $f_1(\lambda)=0$，因为 z 趋于无穷大时 $\mathbf{F}_{x1}$ 必趋于零。其次，由方程(15-12)可得

$$(\sigma_0-i\omega\varepsilon_0)[f_0(\lambda)e^{u_0 h}+g_0(\lambda)e^{-u_0 h}]=(\sigma_1-i\omega\varepsilon_1)[g_1(\lambda)e^{-u_1 h}]. \qquad (15\text{-}21)$$

同样，由方程(15-13)我们得到

$$u_0[f_0(\lambda)e^{u_0 h}-g_0(\lambda)e^{-u_0 h}]=-u_1 g_1(\lambda)e^{-u_1 h}. \qquad (15\text{-}22)$$

解以上两个方程，并以 $g_0(\lambda)$ 表示 $g_1(\lambda)$ 和 $f_0(\lambda)$，于是有

$$g_1(\lambda)=-\frac{2u_0\mu_1k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{(u_1-u_0)h}g_0(\lambda), \quad (15\text{-}23)$$

$$f_0(\lambda)=\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2}e^{-2u_0h}g_0(\lambda), \quad (15\text{-}24)$$

现在必须利用这个系统的常数将函数 $g_0(\lambda)$ 计算出来。如果注意到 $k_1=k_0$，这相当于我们只考虑一无限大媒质的情形，这时解(15-18)必须含有单一场源的势，这样我们就可计算 $g_0(\lambda)$ 了。比较方程(15-19)与(15-16)，我们看出

$$g_0(\lambda)=c\frac{\lambda}{u_0}. \quad (15\text{-}25)$$

因而从方程(15-23)和(15-25)，我们可求得 $g_1(\lambda)$ 和 $f_0(\lambda)$ 分别为

$$g_1(\lambda)=-\frac{2c\lambda\mu_1k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{(u_1-u_0)h}, \quad (15\text{-}26)$$

$$f_0(\lambda)=\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2}\cdot\frac{c\lambda}{u_0}e^{-2u_0h}. \quad (15\text{-}27)$$

由方程(15-18)、(15-19)和(15-20)很容易得到 E_{x0}^-、F_{x0}^+ 和 F_{x1}。

在偶极子上方的空气中

$$F_{x0}^-=c\int_0^\infty\frac{1}{u_0}\left[\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2}e^{-2u_0h}+1\right]\cdot e^{u_0z}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad z\leqslant 0; \quad (15\text{-}28)$$

在偶极子以下的空气中

$$F_{x0}^+=c\int_0^\infty\frac{1}{u_0}\left[\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2}e^{u_0(z-2h)}+e^{-u_0z}\right]\cdot\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad h\geqslant z\geqslant 0; \quad (15\text{-}29)$$

在大地中

$$F_{x1}=2c\int_0^\infty \frac{\mu_1 k_0^2}{u_0\mu_0 k_1^2+u_1\mu_1 k_0^2}e^{(u_1-u_0)h}\ e^{-u_1 z}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$z\geqslant h. \tag{15-30}$$

我们指出，除去因子 e^{-2u_0h} 之外，表示式(15-28) 与索末菲 (1926) 和韦特 (1953) 所得结果相符；对于 $h=0$，我们的解如所期待的那样，与早期的研究结果完全一致。除了相对于我们所采用的原点有一位移外，奎恩也得到了同样形式的解。

对于势的 z 分量的边界条件，可以导出如下。与水平电偶极子的情形类似，我们注意边界条件 (15-10)仅含有零阶贝塞耳函数的单一微商。于是通过求微商可得

$$\frac{\partial F_{z0}}{\partial x}=c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{1}{u_0}\left[\frac{u_0\mu_0 k_1^2-u_1\mu_1 k_0^2}{u_1\mu_1 k_0^2+u_0\mu_0 k_1^2}e^{u_0(z-2h)}\right.$$

$$\left.+\ e^{-u_0 z}\right]\cdot\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda=-c\int_0^\infty \frac{1}{u_0}\left[\frac{u_0\mu_0 k_1^2-u_1\mu_1 k_0^2}{u_1\mu_1 k_0^2+u_0\mu_0 k_1^2}\right.$$

$$\left.\cdot e^{u_0(z-2h)}\ +\ e^{-u_0 z}\right]\cdot\lambda^2 J_1(\lambda\rho)\cos\theta d\lambda.$$

这样，我们可以看到仅第一阶贝塞耳函数出现在方程 (15-10) 中，因而势的 z 分量也只能含有一阶贝塞尔函数。这就是说，势的 z 分量只可能由二次势所组成，于是势的 z 分量可以写出

在空气中

$$F_{z0}=\cos\theta\int_0^\infty\left[\ p_0(\lambda)\ e^{u_0 z}\ +q_0(\lambda)\ e^{-u_0 z}\ \right]J_1(\lambda\rho)d\lambda,$$

(15-31)

在大地中

$$F_{z1}=\cos\theta\int_0^\infty\left[\ p_1(\lambda)\ e^{u_1 z}\ +q_1(\lambda)\ e^{-u_1 z}\ \right]J_1(\lambda\rho)d\lambda.$$

(15-32)

从方程(15-32)，我们推出 $p_1(\lambda)=0$，因为当 $z\to\infty$时要求 $F_{z1}\to 0$。同样我们可以推出，对于无限媒质时可能有 F_{z0}，因为场源的势是在 x 方向。于是，当 $z\to-\infty$时，$F_{z0}\to 0$，并且必须有 $q_0(\lambda)=0$。为了决定剩下的两个本征函数 $p_0(\lambda)$ 和 $q_1(\lambda)$，可首先将边界条件(15-11) 应用于方程(15-31) 和(15-32)，得

$$p_0(\lambda)e^{u_0h}=q_1(\lambda)\,e^{-u_1h}. \tag{15-33}$$

有了从方程 (15-29)、(15-30)、(15-31) 和 (15-32) 得到的势 F_{x0}^{+}、F_{z1}、F_{x0}、F_{z1}，则由边界条件 (15-10) 可得到下面的关系

$$\frac{-c\lambda^2}{u_0\mu_0}e^{-u_0h}\left[\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2}+1\right]+\frac{u_0}{\mu_0}p_0(\lambda)e^{u_0h}$$

$$=-\frac{2c\lambda^2}{\mu_1}\left[\frac{\mu_1k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}\right]e^{-u_0h}-\frac{u_1}{\mu_1}\left[q_1(\lambda)\,e^{-u_1h}\right]. \tag{15-34}$$

联立方程 (15-33) 与 (15-34)，可解得

$$p_0(\lambda)=\frac{2c\lambda^2\mu_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}\,\frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{-2u_0h}, \tag{15-35}$$

$$q_1(\lambda)=\frac{2c\lambda^2\mu_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}\,\frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}e^{(u_1-u_0)h} \tag{15-36}$$

把 $p_0(\lambda)$、$q_1(\lambda)$这两个本征函数代到方程 (15-31) 和 (15-32) 中，可得势F_{x0}与F_{z1}。不过应注意，方程 (15-31)、(15-32) 事先应改写成下列形式

$$F_{z0}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{p_0(\lambda)}{\lambda}e^{u_0z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{15-37}$$

$$F_{z1}=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{q_1(\lambda)}{\lambda}e^{-u_1z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda. \tag{15-38}$$

将方程 (15-35)、(15-36) 代入方程 (15-37) 和 (15-38) 中，其结果是

$$F_{x0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\mu_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}\ \frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}$$

$$\cdot\ e^{u_0(z-2h)}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (15\text{-}39)$$

$$F_{x1}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{\mu_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}\ \frac{k_1^2-k_0^2}{u_0\mu_0k_1^2+u_1\mu_1k_0^2}$$

$$\cdot\ e^{-u_1(z-h)}\ e^{-u_0h}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (15\text{-}40)$$

当 $h=0$和$\mu_1=\mu_0$时，方程（15-39）变为韦特（1953）所得到的结果：

$$F_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{k_1^2-k_0^2}{(u_0+u_1)(u_0k_1^2+u_1k_0^2)}e^{u_0z}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda.$$

(15-41)

但是应当注意，韦特所得解中的变量与本书（沃德）不同

$$\left[\gamma_1^2,\ \gamma_0^2,\ -z,\frac{\partial}{\partial y}\right]=\left[-k_1^2,-k_0^2,z,\frac{\partial}{\partial x}\right]$$

韦特　　沃德

应用所得到的势F_{x0}^-、F_{x0}^+、F_{z0}、F_{x1}和F_{z1}，我们可求得问题的具有最少限制的形式解。现在我们就来寻求在均匀大地表面上的水平磁偶极子场的表达式。

（二）位于均匀大地上面的水平磁偶极子

设 $\mu_1=\mu_0$ 和 $h=0$，且水平磁偶极子位于非导磁的均匀大地上，则空气中的势可由方程（15-28）和（15-39）给出

$$F_{x0}^-=2c\int_0^\infty \frac{k_1^2}{u_1k_0^2+u_0k_1^2}e^{u_0z}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda,\quad z\leqslant 0; \qquad (15\text{-}42)$$

$$F_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{k_1^2-k_0^2}{(u_0+u_1)(u_0k_1^2+u_1k_0^2)}e^{u_0z}\ \lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$z\leqslant 0. \qquad (15\text{-}43)$$

于是可计算$\mathbf{F}_0$的散度

$$\nabla \cdot \mathbf{F}_0 = \frac{\partial F_{x0}}{\partial x} + \frac{\partial F_{z0}}{\partial z}$$

$$= 2c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{(u_1 k_1^2 + u_0 k_0^2) e^{u_0 z}}{(u_0 + u_1)(u_0 k_1^2 + u_1 k_0^2)} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda . \quad (15\text{-}44)$$

在与低频传播有关的准静态近似中，我们可略去k_0^2，并在空气中寻求拉普拉斯方程的解和在大地中波动方程的解。我们在前面有关的节段中已经看到，该近似解将导致 $u_0 \sim \lambda$，并因此方程（15-44）可简化为

$$\phi = -\nabla \cdot \mathbf{F}_0 = -2c \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{u_1 e^{\lambda z}}{u_1 + \lambda} J_0(\lambda \rho) d\lambda . \quad (15\text{-}45)$$

对于垂直方向的磁场，现在可从方程（15-45）以 $\sigma_0 = \varepsilon_0 \approx 0$ 推得

$$H_z = \frac{1}{i\mu\omega} \frac{2\phi}{\partial z} = -\frac{2c}{i\mu\omega} \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \int_0^\infty \frac{u_1 e^{\lambda z}}{u_1 + \lambda} J_0(\lambda \rho) d\lambda . \quad (15\text{-}46)$$

在大地表面上，$z = h = 0$，方程(15-46) 可化为

$$H_z = -\frac{2c}{i\mu\omega} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{\lambda u_1}{u_1 + \lambda} J_0(\lambda \rho) d\lambda . \quad (15\text{-}47)$$

在方程（15-47）中，我们可附加一项

$$\int_0^\infty \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda = 0. \quad (15\text{-}48)$$

这是由瓦特森（1944，p. 386,no.6）得出的公式中以 $a = \nu = 0$ 的特殊情形下求出的。于是

$$H_z = -\frac{c}{i\mu\omega} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \frac{u_1 - \lambda}{u_1 + \lambda} \lambda J_0(\lambda \rho) d\lambda . \quad (15\text{-}49)$$

计算该积分需要许多步骤已由韦特(1953)算出。首先，量 $\frac{u_1 - \lambda}{u_1 + \lambda}$ 可通过下列关系(瓦特森,1944,p. 386,no.7)

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt) \frac{dt}{t} = \frac{\{(a^2+b^2)^{1/2}-a\}^\nu}{\nu b^\nu} \qquad (15\text{-}50)$$

表示成一个积分。若 $a=\lambda$，$b=-ik_1$ 和 $\nu=2$，则方程(15-50)成为

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} J_2(-ik_1 t) \frac{dt}{t} = \frac{\{(\lambda^2-k_1^2)^{1/2}-\lambda\}^2}{-2k_1^2}$$

$$= \frac{(u_1-\lambda)^2}{2(u_1^2-\lambda^2)} = \frac{u_1-\lambda}{2(u_1+\lambda)}. \qquad (15\text{-}51)$$

于是方程(15-49)可写成

$$H_z = \frac{-2c}{i\mu\omega} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t} J_2(-ik_1 t) J_0(\lambda\rho) \lambda \frac{dt}{t} d\lambda.$$

(15-52)

现在对于 λ 的积分，可由李普希兹积分(瓦特森，1944，p. 384)

$$\int_0^\infty e^{-\lambda\alpha} J_0(\lambda\rho) d\lambda = \frac{1}{(t^2+\rho^2)^{1/2}} \qquad (15\text{-}53)$$

推出的一个公式求得。假如该积分对于 t 在积分号下求微商，则得

$$\int_0^\infty \lambda e^{-t\lambda} J_0(\lambda\rho) d\lambda = \frac{t}{(t^2+\rho^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}\left\{\frac{t}{(t^2+\rho^2)^{1/2}}\right\}.$$

(15-54)

将方程(15-54)代入(15-52)有

$$H_z = \frac{2c}{i\mu\omega} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \int_0^\infty \frac{J_2(-ik_1 t) dt}{(t^2+\rho^2)^{1/2}}. \qquad (15\text{-}55)$$

瓦特森(1944，p. 435)曾计算过该无穷积分，因此可写出

$$H_z = \frac{2c}{i\mu\omega} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}\left[I_1\left(\frac{-ik_1\rho}{2}\right) K_1\left(\frac{-ik_1\rho}{2}\right)\right].$$

(15-56)

为了方便起见，我们可利用 ρ，并通过下列关系

$$\rho^2=x^2+y^2,\ \frac{\partial\rho}{\partial x}=\frac{x}{\rho},$$

得到

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial\rho}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{x}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}$$

和

$$H_x=\frac{2cx}{i\mu\omega\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left[I_1\left(\frac{-ik_1\rho}{2}\right)K_1\left(\frac{-ik_1\rho}{2}\right)\right].$$

(15-57)

方程（15-57)中的微商可用贝塞耳函数间的递推关系求出，于是

$$H_x=-\frac{1}{i\mu\omega}\frac{cx}{\rho^4}[-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)$$
$$-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1]. \quad (15-58)$$

显然，这个结果可由 z 指向的磁偶极子磁场的 x 分量（方程14-59）直接从互反性得出。

在大地表面上，磁场的切向分量可从(15-5）式以 $\sigma_0=\varepsilon_0=0$ 得到

$$H_x=\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial\phi}{\partial x},\ H_y=\frac{1}{i\mu\omega}\frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (15-59)$$

因此我们需要计算 $z=0$时的 ϕ。从方程（15-45）我们得到微分后的结果是

$$\phi_{z=0}=\frac{2cx}{\rho}\int_0^\infty\frac{\lambda u_1}{\lambda+u_1}J_1(\lambda\rho)d\lambda. \quad (15-60)$$

利用恒等式 $u_1^2=\lambda^2-k_1^2$，上式可写成

$$\phi_{z=0}=\frac{2cx}{-k_1^2\rho}\int_0^\infty(u_1-\lambda)\lambda u_1J_1(\lambda\rho)\,d\lambda. \quad (15-61)$$

方程（15-61)的积分能够表示成由下列三个积分组成：

$$\phi_{z=0}=\frac{2cx}{-k_1^2\rho}\left[\int_0^\infty\lambda^3J_1(\lambda\rho)\,d\lambda-k_1^2\int_0^\infty\lambda J_1(\lambda\rho)d\lambda\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty\lambda^2u_1J_1(\lambda\rho)d\lambda\right]. \quad (15-62)$$

其中的第一、第二两个积分，可由李普希兹积分

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda=\frac{1}{(\rho^2+z^2)^{1/2}} \tag{15-63}$$

推出。假如就 ρ 对积分先微分一次，接着对 z 再微分两次，并令 $z=0$，我们可得方程（15-62）中的第一积分，即

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda z}J_1(\lambda\rho)d\lambda=\frac{\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}, \tag{15-64}$$

$$\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}J_1(\lambda\rho)d\lambda\Big|_{z=0}=-\frac{3}{\rho^4}. \tag{15-65}$$

把方程(15-63) 就 ρ 求微分，并令 $z=0$，可得方程(15-62)中的第二个积分，即

$$-\int_0^\infty \lambda J_1(\lambda\rho)d\lambda=-\frac{1}{\rho^2}. \tag{15-66}$$

由索末菲积分（1926），对于 $z\leqslant 0$，可推出方程(15-62) 中的第三个积分〔参见(15-15)式〕。索末菲积分是

$$\int_0^\infty -\frac{\lambda}{u_1}e^{u_1 z}\,J_0(\lambda\rho)d\lambda=\frac{e^{ik_1 r}}{r},\quad r^2=\rho^2+z^2. \tag{15-67}$$

第三个积分是由上式在令 $z=0$ 之前，先对 ρ 求微分一次，然后对 z 求微分两次，得到

$$-\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{u_1}e^{u_1 z}\,J_1(\lambda\rho)d\lambda=\frac{i\rho k_1}{r^2}e^{ik_1 r}-\frac{\rho e^{ik_1 r}}{r^3}, \tag{15-68}$$

$$-\int_0^\infty \lambda^2 e^{u_1 z}\,J_1(\lambda\rho)d\lambda=-\frac{2iz\rho k_1^2 e^{ik_1 r}}{r^4}-\frac{\rho k^2 z e^{ik_1 r}}{r^3}$$

$$+\frac{3\rho z e^{ik_1 r}}{r^5}-\frac{\rho z i k_1 e^{ik_1 r}}{r^4}, \tag{15-69}$$

$$-\int_0^\infty \lambda^2 u_1 J_1(\lambda\rho)d\lambda=\left[-\frac{3ik_1}{\rho^3}-\frac{k_1^2}{\rho^3}+\frac{3}{\rho^4}\right]e^{ik_1\rho}. \tag{15-70}$$

现将方程(15-65)、(15-66) 和 (15-70) 代入 (15-62)，可得

$$\phi_{z=0}=\frac{2cx}{-k_1^2\rho^5}[-3-k_1^2\rho^2+(3-k_1^2\rho^2-3ik_1\rho)]e^{ik_1\rho}\ .$$

(15-71)

在大地表面上的磁场分量 H_x 和 H_y，可由方程 (15-59) 就 x 和 y 分别对 ϕ 求微分而得到。不过按韦特 (1953) 的方法，表达式 (15-71)可先整理成方便的形式如下

$$\phi_{z=0}=-\frac{cx}{\rho}M, \qquad (15\text{-}72)$$

式中

$$M=\frac{2}{k_1^2\rho^4}[-3-k_1^2\rho^2+(3-k_1^2\rho^2-3ik_1\rho)\,e^{ik_1\rho}\ ]. \qquad (15\text{-}73)$$

由方程(15-72) 我们得到场的分量是

$$H_y=\frac{c}{i\mu\omega}M\frac{xy}{\rho^3}-\frac{c}{i\mu\omega}\ \frac{\partial M}{\partial\rho}\ \frac{xy}{\rho^2}, \qquad (15\text{-}74)$$

$$H_x=-\left[\frac{c}{i\mu\omega}M\ \frac{y^2}{\rho^3}+\frac{c}{i\mu\omega}\ \frac{\partial M}{\partial\rho}\ \frac{x^2}{\rho^2}\right], \qquad (15\text{-}75)$$

式中

$$\frac{\partial M}{\partial\rho}=\frac{-2}{k_1^2\rho^5}[(ik_1^3\rho^3-5k_1^2\rho^2-12ik_1\rho+12)\,e^{ik_1\rho}\ -12-2k_1^2\rho^2].$$

(15-76)

当我们欲求在 x 轴或 y 轴上的 H_x 时，表达式 (15-75) 是特别有用的形式，这时仅 (15-75) 式中的第一项或第二项才存在。

把方程 (15-5) 应用到方程 (15-42)、(15-43) 中，同时取 $\lambda\sim u_0$，$k_0^2\sim 0$，我们可以求出电场。首先场的势是

$$Fx_0^-=2c\int_0^\infty e^{\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (15\text{-}77)$$

和 ，

$$F_{z0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda+u_1}e^{\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (15\text{-}78)$$

以 $\lambda-u_1$ 分别乘后一积分的分子与分母，并利用恒等式 $\lambda^2-u_1^2=k_1^2$，可得

$$F_{z0}=\frac{-2c}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\lambda e^{\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+\frac{2c}{k_1^2}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty u_1e^{\lambda z}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (15\text{-}79)$$

注意到方程(15-48) 可知，(15-79) 式右边的第一个积分在 $z=0$时为零。因为电场的分量中无一含有 F_{z0} 对 z 的微商，所以在这时刻允许我们以 $z=0$代入方程 (15-79) 。利用对福斯特积分 (福斯特，1931)的求解，对 z 求微分两次，并令 $z=0$，可求出第二个积分在 $z=0$时的值，即

$$\int_0^\infty\frac{1}{u_1}e^{u_1z}J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$=I_0\left[\frac{\gamma}{2}(r+z)\right]K_0\left[\frac{\gamma}{2}(r-z)\right]=N, \qquad (15\text{-}80)$$

$$\int_0^\infty u_1J_0(\lambda\rho)d\lambda=\frac{\partial^2N}{\partial z^2}\Big|_{z=0} \qquad (15\text{-}81)$$

于是势的 z 分量是

$$F_{z0}=\frac{2c}{k_1^2}\frac{\partial^3N}{\partial x\partial z^2}\Big|_{z=0} \qquad (15\text{-}82)$$

由于势的 x 分量的表达式(15-77) 中出现的积分，显然是李普希兹积分，所以我们可写

$$F_{x0}=\frac{2c}{(\rho^2+z^2)^{1/2}}. \qquad (15\text{-}83)$$

电场的分量现在容易由下式求出

$$E_x=-\frac{\partial F_{z0}}{\partial y}, \qquad (15\text{-}84)$$

$$E_y=\frac{\partial F_{x0}}{\partial x}-\frac{\partial F_{x0}^{-}}{\partial z}, \tag{15-85}$$

$$E_z=\frac{\partial F_{x0}^{-}}{\partial y}. \tag{15-86}$$

以方程(15-82) 和(15-83) 代入方程 (15-84)、(15-85) 和 (15-86)，得到

$$E_x=-\frac{2c}{k_1^2}\left.\frac{\partial^4 N}{\partial x\partial y\partial z^2}\right|_{z=0}$$

$$=-\frac{2c}{k_1^2}\frac{xy}{\rho^2}\left.\frac{\partial^4 N}{\partial\rho^2\partial z^2}\right|_{z=0}, \tag{15-87}$$

$$E_y=\frac{2c}{k_1^2}\left.\frac{\partial^4 N}{\partial x^2\partial z^2}\right|_{z=0}$$

$$=\frac{2c}{k_1^2}\frac{x^2}{\rho^2}\left.\frac{\partial^4 N}{\partial\rho^2\partial z^2}\right|_{z=0}, \tag{15-88}$$

$$E_z=-\frac{2cy}{\rho^3}. \tag{15-89}$$

当然，$\partial^4N/\partial\rho^2\partial z^2$ 已在垂直磁偶极子一节中计算过，除了少一因子 $\gamma/2$外，已由方程 (14-56) 给出。于是我们有

$$\left.\frac{\partial^4 N}{\partial\rho^2\partial z^2}\right|_{z=0}=\frac{\gamma^2}{2}\left[\frac{6}{\rho^2}I_1K_1+\frac{\gamma}{\rho}(I_1K_0-I_0K_1)\right]. \tag{15-90}$$

在大地表面上的切向电场是

$$E_x=\frac{cxy}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)], \tag{15-91}$$

$$E_y=-\frac{cx^2}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)]. \tag{15-92}$$

为了应用，我们现在可把公式(15-58)、(15-74)、(15-75)、(15-89)、(15-91) 和 (15-92) 联合成各种组合。为此我们首先汇集这些公式：

$$H_x=-\frac{c}{i\mu\omega}\left[M\frac{y^2}{\rho^3}+\frac{\partial M}{\partial\rho}\ \frac{x^2}{\rho^2}\right], \tag{15-93}$$

$$H_y=\frac{c}{i\mu\omega}\left[M\frac{xy}{\rho^3}-\frac{\partial M}{\partial\rho}\ \frac{xy}{\rho^2}\right], \tag{15-94}$$

$$H_z=-\frac{c}{i\mu\omega}\ \frac{x}{\rho^4}[-k_1^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)$$

$$-4ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1], \tag{15-95}$$

$$E_x=c\ \frac{xy}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)], \tag{15-96}$$

$$E_y=-\ c\ \frac{x^2}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_1\rho(I_1K_0-I_0K_1)], \tag{15-97}$$

$$E_z=-2c\frac{y}{\rho^3}, \tag{15-98}$$

式中

$$M=\frac{2}{k_1^2\rho^4}[-3-k_1^2\rho^2+(3-k_1^2\rho^2-3ik_1\rho)e^{ik_1\rho}], \tag{15-99}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\rho}=\frac{-2}{k_1^2\rho^5}[(ik_1^3\rho^3-5k_1^2\rho^2-12ik_1\rho$$

$$+12)e^{ik_1\rho}-12-2k_1^2\rho^2]. \tag{15-100}$$

由下式

$$\tan\alpha=\frac{-(H_x^2-H_z^2)\pm\sqrt{(H_x^2-H_z^2)+4H_x^2H_z^2\cos^2(\varphi_x-\varphi_z)}}{2H_xH_z\cos(\varphi_x-\varphi_z)} \tag{15-101}$$

所定义的倾角，在y轴上为零，但是将方程（15-93)和(15-95)代入方程（15-101)，可在x轴上给出有限值。对于$\varphi_x-\varphi_z$的值，在很大的范围内能使$\tan\alpha$的近似值有

$$\tan\alpha\approx\frac{|H_z|}{|H_x|}. \tag{15-102}$$

作为 x 的函数去测定这个角，可提供表层下面电导率的信息，并根据垂直线圈电磁参数去估计覆盖层的影响，是十分有用的。下述的“波阻抗”对沉积岩层成层的研究是很重要的：

$$Z_{xy}=\frac{E_x}{H_y},\quad Z_{yx}=-\frac{E_y}{H_x}。\tag{15-103}$$

此外，我们还可测定

$$Z_{xx}=-\frac{E_x}{H_x}\text{或}\ Z_{yx}=-\frac{E_y}{H_x}$$

作为场的均匀性的量度。这后两个阻抗在离偶极子充分远时，将过渡到自由空间的阻抗。

对有些电磁勘探系统，我们希望知道一对水平偶极子间的互阻抗。按照14节的讨论，对于沿 x 取向的偶极子，可写出两个共轴共平面线圈间的互阻抗为

$$Z=\frac{i\mu\omega H_x dA}{I},\tag{15-104}$$

其中假定第二线圈的面积为 da。

如果两线圈共轴，磁场 H_x 可由方程（15-93）令 $y=0$ 算出。于是有

$$Z=\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi}\frac{\partial M}{\partial\rho}。\tag{15-105}$$

在无限媒质中，两个共轴线圈间的互阻抗可用公式（222）以 $y=z=0$ 求出，即

$$Z_0=\frac{2i\mu\omega dadA}{4\pi x^3}。\tag{15-106}$$

于是可得阻抗比为

$$\frac{Z}{Z_0}=-\frac{1}{k_1^2\rho^2}[(ik_1^3x^3-5k_1^2x^2-12ik_1x+12)e^{ik_1x}-12-2k_1^2x^2]。\tag{15-107}$$

另外，假如两线圈共面，则磁场可由方程(15-93)中令 $x=0$ 算出，于是有

$$Z=\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi}\frac{M}{y}. \qquad (15\text{-}108)$$

在无限媒质中，两个共平面线圈的互阻抗是〔(14-66)式〕

$$Z_0=-\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi y^3}, \qquad (15\text{-}109)$$

于是阻抗比由下式给出为

$$\frac{Z}{Z_0}=-\frac{2}{k_1^2y^2}[-3-k_1^2y^2+(3-k_1^2y^2-3ik_1y)\,e^{ik_1y}]. \qquad (15\text{-}110)$$

韦特（1955）曾得到与此相同的结果。

（三）位于n层大地上面的水平磁偶极子

由方程（15-29），我们注意到由正指数 $e^{u_0(z-2h)}$ 表示的反射波是与下列因子

$$r_{\parallel}(\lambda)=\frac{u_0\mu_0k_1^2-u_1\mu_1k_0^2}{u_1\mu_1k_0^2+u_0\mu_0k_1^2} \qquad (15\text{-}111)$$

相乘的。显然，$r_{\parallel}(\lambda)$ 是在电矢量与入射面平行的情形下，由方程（10-84)中推得的关于磁矢量的振幅反射系数。对于成层大地，其反射系数将是

$$r_{\parallel}(\lambda)=\frac{u_0\mu_0k_a^2-u_a\mu_ak_0^2}{u_a\mu_ak_0^2+u_0\mu_0k_a^2}, \qquad (15\text{-}112)$$

式中 k_a 是相当于均匀大地的视传播常数，μ_a 是对同一大地的视感应容率。而量 u_a 则由下式得出

$$u_a=\sqrt{\lambda^2-k_a^2}. \qquad (15\text{-}113)$$

于是我们很容易就均匀大地所得到的解答，推广到成层大地中去。例如，我们想在方程(15-14)中对势的 z 分量，以及在方程（15-45）中给出的流势Φ，以 k_a 代 k_1，以 u_a 代u_1，就可得到成层大地中相应的表示式。因此，由方程（15-93）到（15-100），我们可直接写出远场为

$$H_z=-\frac{c}{i\mu\omega}\left[M\frac{y^2}{\rho^3}+\frac{\partial M}{\partial\rho}\frac{x^2}{\rho^2}\right], \qquad (15\text{-}114)$$

$$H_y=\frac{c}{i\mu\omega}\left[M\frac{xy}{\rho^3}-\frac{\partial M}{\partial\rho}\frac{xy}{\rho^2}\right], \tag{15-115}$$

$$H_z=-\frac{c}{i\mu\omega}\frac{x}{\rho^4}[-k_a^2\rho^2(I_1K_1-I_0K_0)$$

$$-4ik_a\rho(I_1K_0-I_0K_1)+16I_1K_1]; \tag{15-116}$$

$$E_x=\frac{cxy}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_a\rho(I_1K_0-I_0K_1)], \tag{15-117}$$

$$E_y=-c\frac{x^2}{\rho^4}[6I_1K_1-ik_a\rho(I_1K_0-I_0K_1)], \tag{15-118}$$

$$E_z=-2\frac{cy}{\rho^3}, \tag{15-119}$$

式中

$$M=\frac{2}{k_a^2\rho^4}[-3-k_a^2\rho^2+(3-k_a^2\rho^2-3ik_a\rho)\,e^{ik_a\rho}], \tag{15-120}$$

$$\frac{\partial M}{\partial\rho}=-\frac{2}{k_a^2\rho^5}[(ik_a^3\rho^3-5k_a^2\rho^2-12ik_a\rho$$

$$+12)e^{ik_a\rho}-12-2k_a^2\rho^2], \tag{15-121}$$

$k_a=k_1/Q$.

值得注意的是，对全部的 ρ 值，场的精确表达式必须以 u_a 代 u_1，并对方程（15-45）做数值积分得出。

十六、n层大地上方的磁偶极子

（一）引言

在研究成层大地上面的电偶极子和磁偶极子时，我们曾遇到过一些通常的积分，它们的解答很容易表示成已知的形式。但是当偶极子高出大地以上时，与积分有关的解则只能进行数值积分。奎恩（1963）对此问题曾作了很好的论述，并处理了电的以及磁的垂直偶极子和水平偶极子这两种类型。他的工作是索末菲（1926）经典著作的逻辑推广。在本书中我们已研究了奎恩和索末菲所讨论过的四种情况中的三种，仅略去了垂直电偶极子这一论题。

在电磁勘探中，我们主要关心的是成层大地上方的磁偶极子。在这一节中我们所要讨论的也仅仅是这样的一些场源。

（二）n层大地上方的垂直磁偶极子

由**十四**（二）节中，通过对垂直磁偶极子的讨论我们看出，依方程（14-21）、（14-22）、（14-26）、（14-27）和(14-28)可以写出空气中和大地中的势。

在偶极子上方的空气中

$$F_{z0}^{-}=-\frac{i\mu\omega Ida}{4\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\lambda}{u_0}\cdot\frac{u_0\mu_1-u_1\mu_0}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}e^{-2u_0h}e^{u_0z}+\frac{\lambda}{u_0}e^{u_0z}\right]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \tag{16-1}$$

在偶极子下方的空气中

$$F_{z0}^{+}=-\frac{i\mu\omega Ida}{4\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{\lambda}{u_0}\cdot\frac{u_0\mu_1-u_1\mu_0}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}e^{-2u_0h}e^{u_0z}\right.$$

$$+\frac{\lambda}{u_0}e^{-u_0z}\Big]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad (16\text{-}2)$$

在地面以下

$$F_{z1}=-\frac{i\mu\omega Ida}{4\pi}\int_0^\infty\Big[\frac{2u_0\mu_1}{u_0\mu_1+u_1\mu_0}e^{(u_1-u_0)h}\ \frac{\lambda}{u_0}e^{-u_1z}\Big]$$

$$\cdot J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (16\text{-}3)$$

倘若我们按通常的假定，使 $\lambda\sim u_0$ 和 $\mu_1=\mu_0$，并使原点由偶极子移至地面上，则以上表达式可化成更为方便的形式如下：

在偶极子上方的空气中

$$F_{z0}^{-}=c\int_0^\infty\Big[\frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}e^{\lambda(z-h)}+e^{\lambda(z-h)}\Big]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad (16\text{-}4)$$

在偶极子下方的空气中

$$F_{z0}^{+}=c\int_0^\infty\Big[\frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}\ e^{\lambda(z-h)}+e^{-\lambda(z+h)}\Big]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad (16\text{-}5)$$

在地面以下

$$F_{z1}=c\int_0^\infty\frac{2\lambda}{\lambda+u_1}e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (16\text{-}6)$$

式中

$$c=-\frac{i\mu\omega Ida}{4\pi}.$$

由后面的三个方程，并利用下列关系式

$$H_\rho=-\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{\partial^2F_z}{\partial z\partial\rho}, \qquad (16\text{-}7)$$

$$H_z=\frac{1}{i\mu\omega}\ \frac{1}{\rho}\Big[\frac{\partial}{\partial\rho}\Big(\rho\frac{\partial F_z}{\partial\rho}\Big)\Big], \qquad (16\text{-}8)$$

可以计算出磁场在空气中和地面以下的分量。现在利用方程(285)，并令$h^2=-u^2$和$m=0$，可写出 F_z 在柱坐标系中的波动

方程是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)+(k^2+u^2)F_z=0,$$

或

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)=-\lambda^2F_z. \tag{16-9}$$

于是得到：

在偶极子上方的空气中

$$H_\rho=\frac{-Ida}{4\pi}\int_0^\infty\lambda^2[r(\lambda)e^{\lambda(z-h)}+e^{\lambda(z-h)}]J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-10}$$

$$H_z=\frac{Ida}{4\pi}\int_0^\infty\lambda^2[r(\lambda)e^{\lambda(z-h)}+e^{\lambda(z-h)}]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \tag{16-11}$$

在偶极子下方的空气中

$$H_\rho=\frac{-Ida}{4\pi}\int_0^\infty\lambda^2[r(\lambda)e^{\lambda(z-h)}-e^{-\lambda(z+h)}]J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-12}$$

$$H_z=\frac{Ida}{4\pi}\int_0^\infty\lambda^2[r(\lambda)e^{(z-h)}-e^{-\lambda(z+h)}]J_0(\lambda\rho)d\lambda; \tag{16-13}$$

在地面以下

$$H_\rho=\frac{-Ida}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda^3}{\lambda+u_1}e^{\lambda(z-h)}J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-14}$$

$$H_z=\frac{Ida}{4\pi}\int_0^\infty\frac{2\lambda^3}{\lambda+u_1}e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-15}$$

式中

$$r(\lambda)=\frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}. \tag{16-16}$$

对于 n 层大地，我们只需以 u_n 代 u_1，并且再规定反射系数为

$$r(\lambda)=\frac{\lambda-u_n}{\lambda+u_n}, \tag{16-17}$$

则方程（16-10）到（16-15）仍能适用。注意方程（16-10）到（16-13）仅包含两种类型的积分，因此如果我们希望计算大地表面上的场，则需计算的积分是

$$N(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu J_\nu(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda, \qquad (16\text{-}18)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu r(\lambda) J_\nu(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda, \qquad (16\text{-}19)$$

式中 $\mu=2$ 和 $\nu=0$。于是偶极子下方空气中的场可表示成

$$H_\rho=\frac{-Ida}{4\pi}[T(2,1)-N(2,1)], \qquad (16\text{-}20)$$

$$H_z=\frac{Ida}{4\pi}[T(2,0)+N(2,0)]. \qquad (16\text{-}21)$$

这种表示方法是奎恩（1963）按照韦特（1958）在解有关积分时曾用过的记号法。奎恩首先注意到

$$N(0,0)=\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda\ , \qquad (16\text{-}22)$$

是李普希兹积分，其值为

$$N(0,0)=\frac{1}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}. \qquad (16\text{-}23)$$

于是，积分

$$N(0,1)=\int_0^\infty J_1(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda\ , \qquad (16\text{-}24)$$

已由瓦特森（1944，P.386，no.8）求出

$$N(0,1)=\frac{(\rho^2+h^2)^{1/2}-h}{\rho(\rho^2+h^2)^{1/2}}. \qquad (16\text{-}25)$$

这样，当 $\nu\to 0$ 时，$N(\mu,\nu)$ 可求出如下：

$$N(\mu,0)=(-)^\mu\frac{\partial^\mu}{\partial h^\mu}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda=(-)^\mu\frac{\partial^\mu}{\partial h^\mu}\left[\frac{1}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}\right] \qquad (16\text{-}26)$$

和

$$N(1,1)=-\frac{\partial}{\partial\rho}\int_0^\infty J_0(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left[\frac{1}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}\right],$$

(16-27)

所以

$$N(\mu+1,1)=(-1)^{\mu+1}\frac{\partial^\mu}{\partial h^\mu}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{1}{(\rho^2+h^2)^{1/2}}\right]=-\frac{\partial}{\partial\rho}N(\mu,0).$$

(16-28)

关于积分$T(\mu,\nu)$的计算，可将$r(\lambda)$展成幂级数形式

$$r(\lambda)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\lambda^l, \tag{16-29}$$

并用积分$N(\mu,\nu)$来表示，即

$$T(\mu,\nu)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lN(\mu+l,\nu). \tag{16-30}$$

利用在零点的泰勒展开，可得到系数a_l为

$$a_l=\frac{1}{l!}\left[\frac{d^l}{d\lambda^l}r(\lambda)\right]_{\lambda=0}. \tag{16-31}$$

若$r(\lambda)$的各阶微商在$\lambda=0$都存在，则前四项的系数是

$$\begin{aligned}a_0&=-1,\\ a_1&=-\frac{2i}{k_a},\\ a_2&=\frac{2}{k_a^2},\\ a_3&=\frac{2i}{k_a^3}.\end{aligned} \tag{16-32}$$

在上述的计算中，我们已假定对n层大地有

$$r(\lambda)=\frac{\lambda-u_a}{\lambda+u_a},$$

并且当$\lambda=0$时，$u_a=ik_a$。于是有

$$T(2,0)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lN(2+l,0)=-N(2,0)$$

$$-\frac{2i}{k_a}N(3,0)+\frac{2}{k_a^2}N(4,0)+\cdots\cdots, \qquad (16\text{-}33)$$

$$T(2,1)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lN(Z+l,1)=-N(2,1)$$

$$-\frac{2i}{k_a}N(3,1)+\frac{2}{k_a^2}N(4,1). \qquad (16\text{-}34)$$

因为在方程（16-20)(16-21）中，所有的四个函数$T(2,1)$、$N(2,1)$、$T(2,0)$和$N(2,0)$都可由方程（16-34)、(16-28)、(16-33）和（16-26）得出，于是场的分量可用函数$1/(\rho^2+h^2)^{1/2}$及其各阶微商来表示。对于小的ρ值，可用计算机直接求解。

当在大地表面以上高度为z处进行观测时，所求得的积分可表示成

$$N_1(\mu,\nu)=\int_0^{\infty}\lambda^{\mu}J_{\nu}(\lambda\rho)e^{\lambda(z-h)}d\lambda, \qquad (16\text{-}35)$$

$$N_2(\mu,\nu)=\int_0^{\infty}\lambda^{\mu}J_{\nu}(\lambda\rho)e^{-\lambda(z+h)}d\lambda, \qquad (16\text{-}36)$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^{\infty}\lambda^{\mu}\gamma(\lambda)J_{\nu}(\lambda\rho)e^{\lambda(z-h)}d\lambda, \qquad (16\text{-}37)$$

其中最后一个积分可通过下式求出

$$T(\mu,\nu)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lN_1(\mu+l,\nu). \qquad (16\text{-}38)$$

值得注意的是，上式对于$T(\mu,\nu)$的渐近展开式仅对小的k_a值才能很快收敛。对于许多实际问题，$k_a\ll1$。这样，在展开式中我们取前三、四项就可以了。奎恩（1963）曾研究了计算$T(\mu,\nu)$的其它方法。

（三）n层大地上方的水平磁偶极子

由十五（一）节的讨论，我们得出了偶极子下面空气中和大地中的势是

$$F_{x0}^{+}=c\int_0^{\infty}[r_{//}(\lambda)e^{\lambda(z-h)}+e^{-\lambda(z+h)}]J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (16\text{-}39)$$

$$F_{x1}=2c\int_0^{\infty}\frac{k_0^2}{\lambda k_1^2+u_1k_0^2}e^{-\lambda h}\,e^{-u_1z}\,\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (16\text{-}40)$$

$$F_{x0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda+u_1}\,\frac{k_1^2-k_0^2}{\lambda k_1^2+u_1k_0^2}e^{\lambda(z-h)}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (16\text{-}41)$$

$$F_{x1}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda+u_1}\,\frac{k_1^2-k_0^2}{\lambda k_1^2+u_1k_0^2}e^{-u_1z}\,e^{-\lambda h}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (16\text{-}42)$$

式中我们已经假定了 $u_0\sim\lambda$，$\mu_1=\mu_0$，并平移了 z 轴，所以坐标原点在大地表面上。对于均匀的和成层的大地，函数 $r_{//}(\lambda)$ 各定义为

$$r_{//}(\lambda)=\frac{\lambda k_1^2-u_1k_0^2}{u_1k_0^2+\lambda k_1^2},\quad r_{//}(\lambda)=\frac{\lambda k_a^2-u_ak_0^2}{u_ak_0^2+\lambda k_a^2}. \qquad (16\text{-}43)$$

假如 $k_0\sim0$，方程（16-39）等式可进一步简化为

$$F_{x0}^{+}=c\int_0^{\infty}[e^{\lambda(z-h)}+e^{-\lambda(z+h)}]J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (16\text{-}44)$$

$$F_{x1}=0, \qquad (16\text{-}45)$$

$$F_{x0}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda+u_1}e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \qquad (16\text{-}46)$$

$$F_{x1}=-2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\infty}\frac{1}{\lambda+u_1}e^{-u_1z}\,e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda. \qquad (16\text{-}47)$$

于是可算出偶极子以下大气空间中 F_0 的散度

$$\nabla\cdot\mathbf{F}_0=\frac{2F^*_{x0}}{\partial x}+\frac{2F_{z0}}{\partial z}$$

$$=c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty\frac{u_1-\lambda}{u_1+\lambda}e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-\lambda(z+h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$=-c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty r(\lambda)e^{\lambda(z-h)}J_0(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-\lambda(z+h)}J_0(\rho\lambda)d\lambda. \qquad (16\text{-}48)$$

按照方程（110）和（111），在笛卡儿坐标系中，场的分量可写成

$$\mathbf{E}=-\nabla\times\mathbf{F}_0$$

$$\left.\begin{aligned}
&i\mu_0\omega\mathbf{H}=-\nabla\nabla\cdot\mathbf{F}_0-k_0^2\mathbf{F}_0=\nabla\phi-k_0^2\mathbf{F}_0,\quad \phi=-\nabla\cdot\mathbf{F}_0,\\
&E_x=-\frac{\partial F_{z0}}{\partial y}, && i\mu_0\omega H_x=-k_0^2F^*_{x0}+\frac{\partial\phi}{\partial x},\\
&E_y=-\frac{\partial F^*_{x0}}{\partial z}+\frac{\partial F_{z0}}{\partial x}, && i\mu_0\omega H_y=\frac{\partial\phi}{\partial y},\\
&E_z=\frac{\partial F^*_{x0}}{\partial y}, && i\mu_0\omega H_z=-k_0^2F_{z0}+\frac{\partial\phi}{\partial z}.
\end{aligned}\right\} \qquad (16\text{-}49)$$

我们首先计算在 $z=0$，即大地表面上场的分量。为此，应当注意，在 $z=0$ 有

$$F^*_{x0}=2c\int_0^\infty e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda; \qquad z=0 \qquad (16\text{-}50)$$

$$\left.\begin{aligned} F_{x0} &= -2c\frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda+u_1}e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda, && z=0 \\ &= 2c\frac{x}{\rho}\int_0^\infty \frac{\lambda}{\lambda+u_1}e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda, && z=0 \\ &= \frac{cx}{\rho}\int_0^\infty [r(\lambda)+1]e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda, && z=0 \end{aligned}\right\} \quad (16\text{-}51)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}_0 = \frac{cx}{\rho}\int_0^\infty \lambda r(\lambda)e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda - \frac{cx}{\rho}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda,$$

$$z=0. \quad (16\text{-}52)$$

将以上三式代入方程（16-49），可求出场的表示式。不过在计算中，我们需要用到下面的等式：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{\rho}f(\rho)\right] = \left(\frac{1}{\rho}-\frac{x^2}{\rho^3}\right)f(\rho) + \frac{x^2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}f(\rho), \quad (16\text{-}53)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{\rho}f(\rho)\right] = -\frac{xy}{\rho^3}f(\rho) + \frac{xy}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}f(\rho) \quad (16\text{-}54)$$

和

$$\frac{\partial}{\partial\rho}[J_1(\lambda\rho)] = \lambda J_0(\lambda\rho) - \frac{1}{\rho}J_1(\lambda\rho). \quad (16\text{-}55)$$

于是得到

$$E_x = 2c\frac{xy}{\rho^3}\int_0^\infty [r(\lambda)+1]e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda - \frac{cxy}{\rho^2}\int_0^\infty \lambda[r(\lambda)+1]e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad (16\text{-}56)$$

$$E_y = c\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2x^2}{\rho^3}\right)\int_0^\infty [1+r(\lambda)]e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda + \frac{cx^2}{\rho^2}\int_0^\infty [1+r(\lambda)]e^{-\lambda h}\lambda J_0(\lambda\rho)d\lambda, \quad (16\text{-}57)$$

$$E_x=-2\frac{cy}{\rho}\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-58}$$

$$i\mu_0 H_x=c\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2x^2}{\rho^3}\right)\int_0^\infty [1-r(\lambda)]\lambda e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+\frac{cx^2}{\rho^2}\int_0^\infty [1-r(\lambda)]\lambda^2 e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-59}$$

$$i\mu_0 H_y=\frac{cxy}{\rho^3}\int_0^\infty [r(\lambda)-1]\lambda e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda$$

$$+\frac{cxy}{\rho^2}\int_0^\infty [r(\lambda)-1]\lambda^2 e^{-\lambda h}J_0(\lambda\rho)d\lambda, \tag{16-60}$$

$$i\mu_0 H_z=-\frac{cx}{\rho}\int_0^\infty \lambda^2[r(\lambda)+1]e^{-\lambda h}J_1(\lambda\rho)d\lambda. \tag{16-61}$$

将以上诸式中的积分项展开，并利用十六(二)中的记号法，可使方程（16-56）到（16-61）各式化为简单的形式

$$E_x=-\frac{i\mu_0\omega Ida}{4\pi}\frac{xy}{\rho^3}[T(0,1)+N(0,1)]+\frac{i\mu_0\omega Ida}{4\pi}$$

$$\cdot\frac{xy}{\rho^2}[T(1,0)+N(1,0)], \tag{16-62}$$

$$E_y=-\frac{i\mu_0\omega Ida}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2x^2}{\rho^3}\right)[T(0,1)+N(0,1)]$$

$$-\frac{i\mu_0\omega Ida}{4\pi}\frac{x^2}{\rho^2}[T(1,0)+N(1,0)], \tag{16-63}$$

$$E_z=\frac{2i\mu_0\omega Ida}{4\pi}\frac{y}{\rho}N(1,1), \tag{16-64}$$

$$H_x=\frac{Ida}{4\pi}\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2x^2}{\rho^3}\right)[T(1,1)-N(1,1)]$$

$$+\frac{Ida}{4\pi}\frac{x^2}{\rho^2}[T(2,0)-N(2,0)], \tag{16-65}$$

$$H_y=\frac{Ida}{4\pi}\frac{xy}{\rho^3}[N(1,1)-T(1,1)]$$

$$+\frac{Ida}{4\pi}\frac{xy}{\rho^2}[N(2,0)-T(2,0)], \tag{16-66}$$

$$H_z=\frac{Ida}{4\pi}\frac{x}{\rho}[T(2,1)+N(2,1)]. \tag{16-67}$$

以上各式与奎恩（1963）的结果相符合。参见十六（二）节，T和N由下式定义

$$N(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu J_\nu(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda, \tag{16-68}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu r(\lambda)J_\nu(\lambda\rho)e^{-\lambda h}d\lambda, \tag{16-69}$$

其中$r(\lambda)$对于均匀大地

$$r(\lambda)=\frac{\lambda-u_1}{\lambda+u_1}, \tag{16-70}$$

对于成层大地

$$r(\lambda)=\frac{\lambda-u_n}{\lambda+u_n}. \tag{16-71}$$

如前所述，通过将$r(\lambda)$展开成幂级数

$$r(\lambda)=\sum_{l=0}^{\infty}a_l\lambda^l, \tag{16-72}$$

则可使$T(\mu,\nu)$用已知的积分$N(\mu,\nu)$来表示，也就是能把$T(\mu,\nu)$写成

$$T(\mu,\nu)=\sum_{l=0}^{\infty}a_lN(\mu+l,\nu). \tag{16-73}$$

假设在大地表面以上高为h处进行测量，则求得的积分可表

示成

$$N_1(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu J_\nu(\lambda\rho)e^{\lambda(z-h)}d\lambda, \tag{16-74}$$

$$N_2(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu J_\nu(\lambda\rho)e^{-\lambda(z+h)}d\lambda, \tag{16-75}$$

$$T(\mu,\nu)=\int_0^\infty \lambda^\mu \gamma(\lambda) J_\nu(\lambda\rho)e^{\lambda(z-h)}d\lambda. \tag{16-76}$$

其中的最后一个积分可通过下式求出

$$T(\mu,\nu)=\sum_{l=0}^{\infty} a_l N_1(\mu+l,\nu). \tag{16-77}$$

前面用过的渐近展开式，这里可再一次应用，不过应以（$z\pm h$）代换 h。

十七、n层大地上面的水平电偶极子

在第九节中，我们已计算了均匀大地上方电偶极子的电场沿切向的分量 E_x 和 E_y。我们也计算过在均匀大地表面上的一对线电流元间的互阻抗。对于这些表达式，只要在公式（9-72）、（9-73）、（9-85）和（9-86）中以 σ_a 代 σ_1 和 k_a 代 k_1，就可推广到 n 层大地的情形。于是，对于大的 ρ 值我们得到

$$E_x=\frac{Ids}{2\pi\rho^3\sigma_a}\left[1+(1-ik_a\rho)e^{ik_a\rho}-\frac{3y^2}{\rho^2}\right], \quad (17\text{-}1)$$

$$E_y=\frac{Ids}{2\pi\rho^3\sigma_a}\frac{3xy}{\rho^2}, \quad (17\text{-}2)$$

$$Q(\rho)=\frac{1}{2\pi\sigma_a\rho}, \quad (17\text{-}3)$$

$$P(\rho)=\frac{i\mu\omega}{2\pi\rho}\frac{1-(1-ik_a\rho)e^{ik_a\rho}}{-(k_a\rho)^2}, \quad (17\text{-}4)$$

式中 $k_a\approx k_1/Q$，$\sigma_a\approx\sigma_1/Q$，并且

$$Q=\frac{Z_1+\widehat{Z}_2\tanh jk_1h_1}{\widehat{Z}_2+Z_1\tanh jk_1h_1}.$$

十八、n层大地上方线圈间相互耦合的小结

n 层大地上方两个线圈间的互阻抗，可由第十六节中给出的积分 $N_1(\mu,\nu)$、$N_2(\mu,\nu)$ 和 $T(\mu,\nu)$ 简单地表示。利用方程(14-64)，可确定两个线圈间的互阻抗为

$$Z=\frac{i\mu\omega HdA}{I}, \tag{18-1}$$

式中的 I 是面积为 da 的第一个线圈中的电流，H 是垂直于第二线圈平面的磁场分量。对于无限媒质，两个共平面线圈间的互阻抗是

$$Z_0=-\frac{i\mu\omega dadA}{4\pi\rho^3}, \tag{18-2}$$

式中 ρ 为两线圈中心间的距离。在此，我们假定两线圈的半径相对于 ρ 均很小。在前面我们已计算过，归一化的互阻抗是

$$\frac{Z}{Z_0}=-\frac{4\pi H\rho^3}{Ida}. \tag{18-3}$$

特别重要的四种情况是：

1．轴向在铅垂方向的共平面线圈

对于这种情况，我们只需把位于成层大地上方的垂直磁偶极子的垂向磁场公式限定在 $x=y=0$，并把该垂向的磁场方程（16-21）代入（18-3），就可得到

$$\frac{Z}{Z_0}=-\rho^3[T(2,0)+N(2,0)]. \tag{18-4}$$

2．第一个线圈的轴是铅垂的，第二个线圈的轴平行于地面并指向第一个线圈的半径。

对于这种情况，我们需要使成层大地上方的垂直磁偶极子的径向磁场限定在 $z=h$ 上。于是可将方程（16-20）代入（18-3），得到

$$\frac{Z}{Z_0}=\rho^3[T(2,1)-N(2,1)]. \qquad (18\text{-}5)$$

3．轴向在水平方向的共轴线圈

对于这种情况，我们需要使位于成层大地上方的水平磁偶极子的轴向磁场限定在 $z=h$ 和 $y=0$ 上。这样我们可将方程（16-65）代入（18-3），得到

$$\frac{Z}{Z_0}=-\rho^3\left(\frac{1}{\rho}-\frac{2x^2}{\rho^3}\right)[T(1,1)-N(1,1)]$$

$$-\rho^3\frac{x^2}{\rho^2}[T(2,0)-N(2,0)]. \qquad (18\text{-}6)$$

4．轴向在水平方向的共平面线圈

对于这种情况，我们需要使水平磁偶极子磁场的 x 分量，限定在 $z=h$ 和 $x=0$。于是将方程（16-65）代入（18-3），得到

$$\frac{Z}{Z_0}=-\rho^2[T(1,1)-N(1,1)]. \qquad (18\text{-}7)$$

韦特（1955和1966）曾就这四种情况计算了归一化的波阻抗，他所得到的公式表与本节的计算结果相同。现将这些结果示于图18—1至图18—4中。

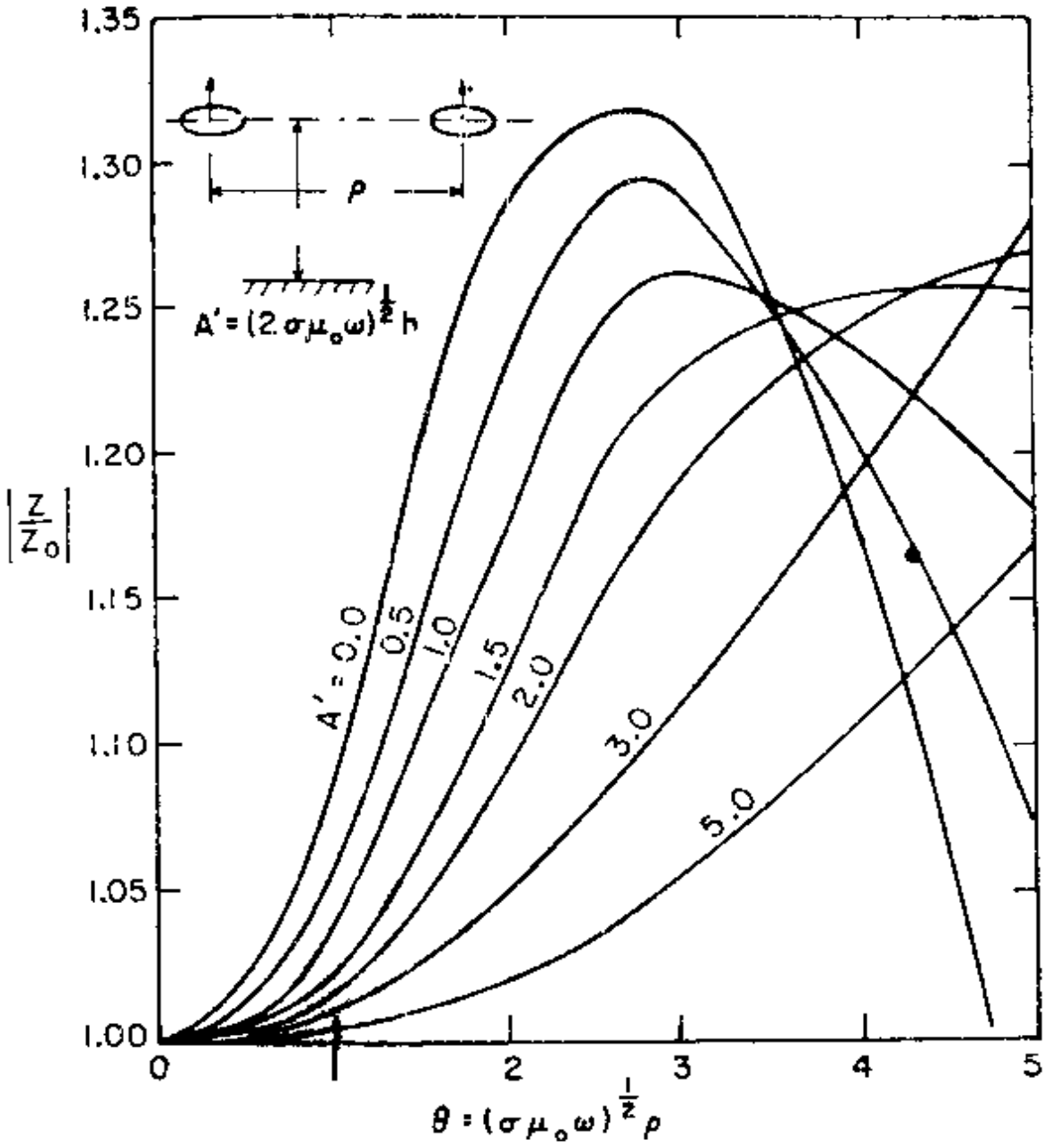


图 18—1　均匀大地上方共平面线圈间的互阻抗比
（按韦特，1955）

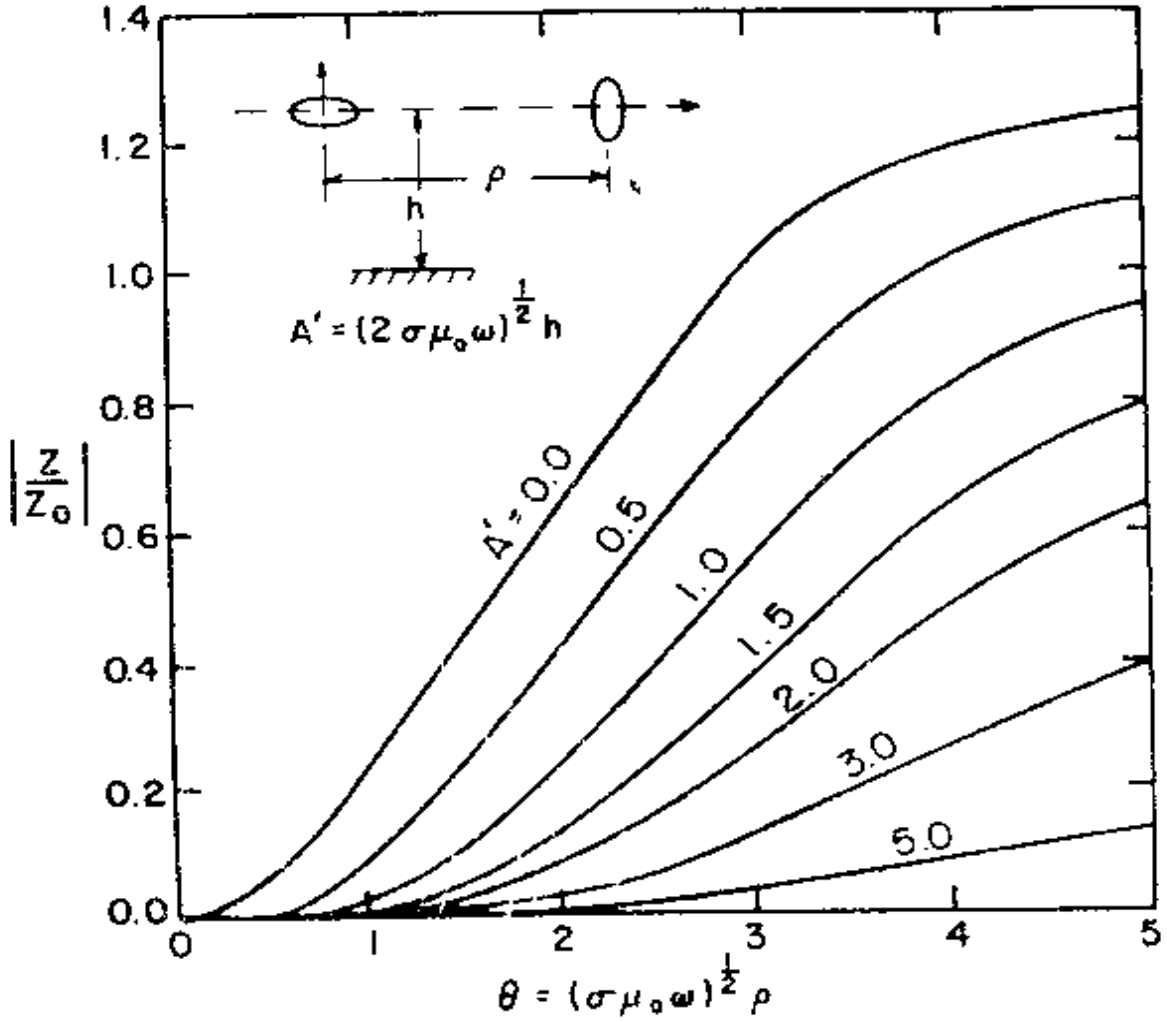


图 18—2　均匀大地上方相互垂直线圈间的互阻抗比
（按韦特，1955）

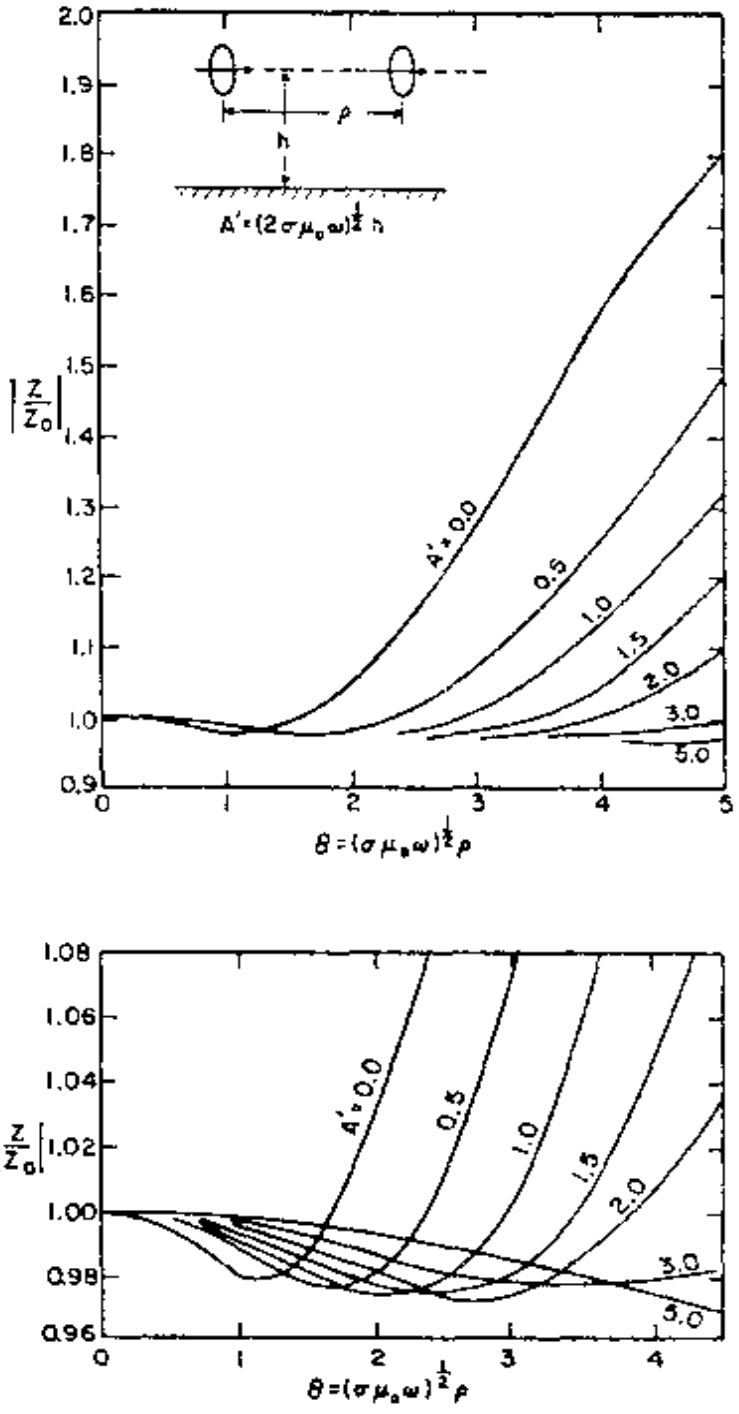


图 18—3　轴平行于均匀大地的共轴线圈间的互阻抗比
（按韦特，1956）

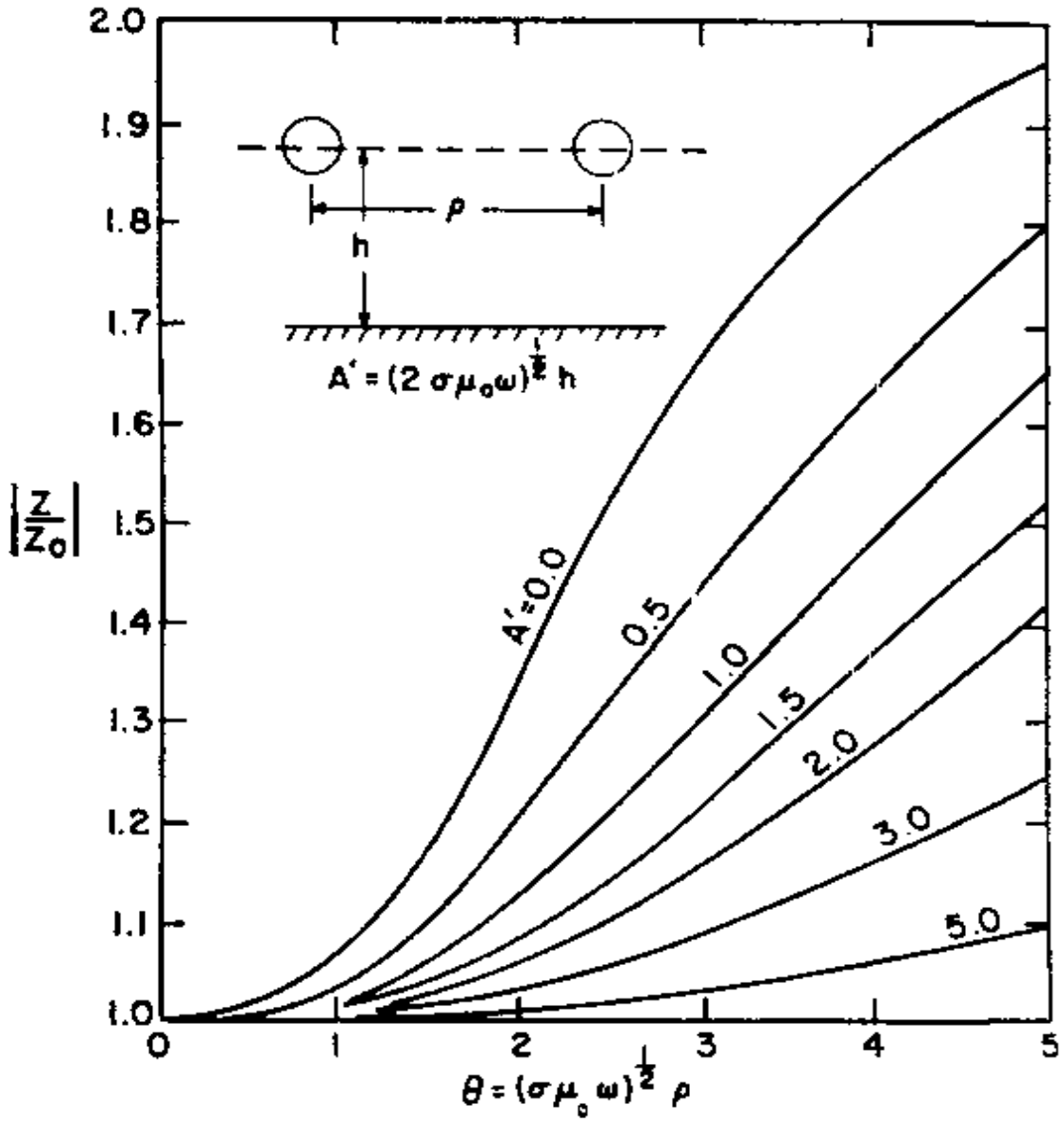


图 18—4　轴平行于均匀大地的共平面线圈间的互阻抗比
（按韦特，1956）

人 名 对 照 表

Ampere	安培	Lorentz	洛伦兹
Bessel	贝塞耳	Madden	马登
Bhattacharyya	布哈达卡利娅	Maxwell	麦克斯韦
Campbell	坎贝尔	Meyer	梅逸
Cantwell	坎特韦尔	Negi	纳吉
Carson	卡森	Nicholson	尼科耳森
Coulomb	库仑	O'brien	奥比林
Cramer	克兰默	Ohms	欧姆
Emde	埃姆德	Poisson	泊松
Erdelyi	埃尔德利	Poynting	坡印亭
Fannin	范宁	Quon	奎恩
Faraday	法拉第	Schelkunoff	谢昆诺夫
Foster	福斯特	Scott	斯科特
Fourier	付利叶	Snell	斯涅耳
Fresnel	菲涅耳	Sommerfeld	索末菲
Gordon	戈尔登	Stratton	斯特拉顿
Green	格林	Struve	斯特杜夫
Hankel	汉开尔	Sunde	森德
Harrington	哈林顿	Taylor	泰勒
Heiland	海兰德	Vozoff	沃佐夫
Henry	亨利	Wait	韦特
Hertz	赫兹	Ward. S. H.	沃德
Jahnke	雅恩克	Watson	瓦特森
Jones	琼斯	Weber	韦伯
Law	劳	Wolf	沃尔夫
Laplace	拉普拉斯	Wylie	怀利
Legendre	勒让特	Wronskian	朗斯基
Lipschitz	李普希兹		

参 考 文 献

A. 教科书

Campbell, G., and Foster, R. M., 1948, Fourier integrals for practical application: Van Nostrand Co., Ltd.

Erdelyi, A., 1954, Tables of integral transforms: McGraw-Hill Book Co., Inc.

Harrington, R. F., 1961, Time-harmonic electromagnetic fields: McGraw-Hill Book Co., Inc.

Heiland, C. A., 1940, Geophysical exploration: Prentice-Hall, Inc.

Jahnke, E., and Emde, F., 1945, Tables of functions: Dover Publications.

Jones, D. S., 1964, The theory of electromagnetism: The Macmillan Company.

Reitz, J. R., and Milford, F. J., 1960, Foundations of electromagnetic theory: Addison-Wesley Publishing Co., Inc.

Schelkunoff, S. A., 1943, Electromagnetic waves: D. Van Nostrand Co., Inc.

Scott, E. J., 1955, Transform calculus: Harper and Brothers.

Sommerfeld, A., 1949, Partial differential equations in physics: Academic Press, Inc.

——— 1952, Electrodynamics, Volume III of Lectures on theoretical physics: Academic Press, Inc.

Stratton, J. A., 1941, Electromagnetic theory: McGraw-Hill Book Co.

Sunde, E. D., 1949, Earth conduction effects in transmission systems: D. Van Nostrand Co., Inc.

Wait, J. R., 1962, Electromagnetic waves in stratified media: The Macmillan Company.

Watson, G. N., 1944, A treatise on the theory of Bessel functions: Cambridge University Press.

Wylie, C. R., 1960, Advanced engineering mathematics: McGraw-Hill Book Co., Inc.

B. 期刊

Bhattacharyya, B. K., 1959, Electromagnetic fields of a transient magnetic dipole on the earth's surface: Geophysics, v. 24, p. 89–108.

Carson, J. R., 1926, Wave propagation in overhead wires: Bell System Technical Journal, p. 539.

Foster, R. M., 1931, Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth: Bell System Technical Journal, v. 10, p. 408–419.

Gordon, A. N., 1951, The field induced by an oscillating magnetic dipole outside a semi-infinite conductor: Quart. Jour. Mechanics and Applied Mathematics, v. 4, p. 106–115.

Law, P. F., and Fannin, B. M., 1961, Radiation from a current filament above a homogeneous earth, with application to micropulsations: J. G. R., v. 66, no. 4, p. 1049–1060.

Madden, T. R., and Cantwell, T. 1967, This Volume.

Meyer, J., 1962, Elektromagnetische induktion eines vertikalen magnetischen dipols uber einem leitenden homogenen halbraum: Mitt. Max-Planck-Inst. f. Aeronomie (s) Nr. 7.

——— 1963. Elektromagnetische induktion in einem leitenden homogenen zylinder durch aussere magnetische und elektrische wechselfelder mitteilungen aus dem: Max-Planck-Inst. f. Aeronomie.

Negi, J. G., 1962, Inhomogeneous cylindrical ore body in presence of a time varying magnetic field: Geophysics, v. 27, no. 3, p. 386–392.

Nisbet, A., 1955, Hertzian electromagnetic potentials and associated gauge transformations: Proc. Roy. Soc. 231A, p. 250–263.

O'Brien, D. P., 1964, personal communication.

Quon, C., 1963, Electromagnetic fields of elevated dipoles on a two-layer earth: M.S. Thesis, University of Alberta.

Sommerfeld, A., 1926, Über die Ausbreitung der Wellen in der dratlosen Telegraphie. Annalen der Physik, 4, 81, 1135–1153.

Vozoff, K., 1958, Numerical resistivity analysis: Horizontal layers. Geophysics, v. 23, p. 536–556.

Wait, J. R. 1951, A Conducting sphere in a time varying magnetic field: Geophysics, v. 16, no. 5, p. 666–672.

——— 1952, The cylindrical ore body in the presence of a cable carrying an oscillating current: Geophysics, v. 17, no. 2, p. 378–386.

——— 1953, Induction by a horizontal oscillating magnetic dipole over a conducting, homogeneous earth: Trans. Amer., Geophys. Union, v. 34, p. 185–189.

——— 1954, Mutual coupling of wire loops lying on the ground: Geophysics, v. 19, p. 290–296.

——— 1955, Mutual electromagnetic coupling of loops over a homogeneous ground: Geophysics, v. 20, no. 3, p. 630–637.

——— 1956, Mutual electromagnetic coupling of loops over a homogeneous ground—An additional note: Geophysics, v. 21, no. 2, p. 479–484.
——— 1958, Induction by an oscillating magnetic dipole over a two layer ground: Appl Sci. Res., Sec. B, v. 7, p. 73–80.
Wolf, A., 1946, Electric field of an oscillating dipole over the surface of a two layer earth: Geophysics, v. 2, no. 4, p. 518–534.

追加参考文献

A. 教科书

Brekhovskikh, L. M., 1960, Waves in layered media: Academic Press.
Bremmer, H., 1958, Propagation of electromagnetic waves: Handbuch der Physik, v 16, p. 423–639.
Budden, K. G., 1951, Radiowaves in the ionosphere: Cambridge University Press.
Compagnie Generale de geophysique, 1955, Abaques de sondage electrique: Geophysical Prospecting, v. 3, Supplement 3.
Fritsch, V., 1960, Elektrische messungen an raumlich ausgedehnten, Besondere in der angewandten geoelektrik: Verlag G. Braun, Karlsruhe.
Grant, F. S., and West, G. F., 1965, Interpretation theory in applied geophysics: McGraw-Hill Book Co.
Jackson, John David, 1962, Classical electrodynamics: John Wiley and Sons, Inc.
Landau, L. D , and Lifshitz, E. M., 1960, Electrodynamics of continuous media: Addison-Wesley Publishing Co. Inc. (English translation)
Mooney, H. M., and Wetzel, W. W., 1956, The potentials about a point electrode and apparent resistivity curves for a two, three, and four layer earth: Univ. of Minnesota Press.
Morse, P. M., and Feshbach, H., 1953, Methods of theoretical physics. McGraw-Hill Book Co., Inc.
Panofsky, W. K. H., and Phillips, M. 1962, Classical electricity and magnetism, 2nd edition: Addison-Wesley Publishing Company, Inc
Plomsey, R., and Collin, R. E., 1961, Principles and applications of electromagnetic fields McGraw-Hill Book Co., Inc.
Rano, S , and Whinnery, J. R., 1953, Fields and waves in modern radio: John Wiley and Sons, Inc.
Smythe, W. R , 1950, Static and dynamic electricity, 2nd edition: McGraw-Hill Book Co., Inc.
Sommerfeld, A. N., 1949, Partial differential equations: New York, Academic Press.
Tarkhov, A. G , 1963, Spravochnik geofizika, Tom 3, Electrorazvedka (Handbook of Geophysics), v. 3, Electrical Surveying· Moscow, Gostoptekhizdat.
Wait, J. R., 1962, Electromagnetic waves in stratified media: The Macmillan Co.
Weeks, W. L., 1964, Electromagnetic theory for engineering applications: John Wiley and Sons, Inc.
Zaborovskiy, A. I., 1960, Peremennyye elektromagnitnoye polya v electrorazvedke· Moscow, Izdatel'stvo Moskov Univ.

B 期刊

Adachi, Saburo, 1960, Impedance characteristics of a uniform current loop having a spherical core: Jour. of Res., Nat. Bur. Stand., v. 64D, no 3, p. 295 298
Ashour, A. A., 1950, Induction of electric currents in a uniform circular disk Quart Jour. of Mech. and Appl. Math., v. 3, p. 119–128.
——— 1952, The induction of electric currents in a uniform conducting circular disk by the sudden creation of magnetic poles. Quart Jour. Mech. and Appl. Math , v 5, p 379
Banos, A., and Wesley, J. P., 1953, The horizontal dipole in a conducting half-space University of California, Marine Physical Lab, Pt. I, S10, Ref. 53-33.
———1954, The horizontal dipole in a conducting half-space· University of California, Marine Physical Lab, Pt. II, S10, Ref 54-31
Beltuigi, A , 1949, Coupling of a vertical coil with a homogeneous earth Geophysics, v 14, p. 501–507
——— 1950, The electromagnetic field due to induced currents in a conductive slab Geophysics, v. 15, no. 4, p. 687–703
——— 1952, Sui campi geoelettromagnetici a bassa frequenza Rivista di Geofisica Applicata, v 13, p 3–34.

Berdichevsky, M. N., and Brunelli, B. E., 1959, Theoretical premises of magneto-telluric profiling: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 757–762.
Bhattacharyya, B. K., 1955, Electromagnetic induction in a two-layer earth: J. G. R., v. 60, p. 279.
——— 1955, Propagation of transient electromagnetic waves in a conducting medium: Geophysics, v. 20, no. 4, p. 959–961.
——— 1957, Propagation of an electric pulse through a homogeneous and isotropic medium: Geophysics, v. 22, p. 905–921.
——— 1957, Propagation of transient electromagnetic waves in a medium of finite conductivity: Geophysics, v. 22, no. 1, p. 75–88.
——— 1959, Electromagnetic fields of a transient magnetic dipole on the earth's surface: Geophysics, v. 24, no. 1, p. 89–108.
——— 1959, Field on earth's surface due to a transient electro-magnetic disturbance: Jour. Technology, v. 1, p. 151–161.
——— 1963, Electromagnetic fields of a vertical magnetic dipole placed above the earth's surface: Geophysics, v. 28, no. 3, p. 408–425.
——— 1963, Input resistances of horizontal and vertical magnetic dipoles over a homogeneous ground: Trans. I.E.E.E., VAP-II, no. 3.
——— 1964, Electromagnetic fields of a small loop antenna on the surface of a polarizable medium: Geophysics, v. 29, no. 5, p. 814–831.
Bilinsky, Solomon, 1938, On the field due to a vertical line source of current grounded to earth: Geophysics, v. 3, no. 1, p. 58–62.
Buckner, G. O., 1954, Sub-surface electrical measurements about two plane interfaces: Geophysics, v. 19, no. 2, p. 297–309.
Burrows, C. R., 1937, Radio propagation over plane earth-field strength curves: Bell. Syst. Tech. Jour., v. 16, p. 45.
Bursian, V. R., 1936, The theory of electromagnetic fields applied in electric prospecting, Pt. 2: Gostekhteoretizdat.
Cagniard, L., 1953, Basic theory of the magneto-telluric method of geophysical prospecting: Geophysics, v. 18, p. 605–635.
Chastenet De Gery, J., and Kunetz, G., 1956, Potential and apparent resistivity over dipping beds: Geophysics, v. 21, no. 3, p. 780–793.
Cook, K. L., and Gray, R. L., 1961, Theoretical horizontal resistivity profiles over hemispherical sinks: Geophysics, v. 26, no. 3, p. 342–354.
Cook, K. L., and Van Nostrand, R. G., 1954, Interpretation of resistivity data over filled sinks: Geophysics, v. 19, no. 4, p. 761–770.
d'Erceville, I., and Kunetz, G., 1962, The effect of a fault on the earth's natural electromagnetic field: Geophysics, v. 27, p. 651–665.
D'Iakonov, B. P., 1957, A cylinder in the field of a point source of electric current: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 1, p. 135–140.
Dmitriev, V. I., 1959, The effect of inhomogeneities in the earth on the field of a rectilinear, infinitely long cable: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 4, p. 435–...
——— 1960, A solution of a basic problem in the theory of the induction method of electromagnetic surveying: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 8, p. 748–753.
——— 1962, Diffraction of electromagnetic waves at a conducting plate in a conducting medium: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 6, p. 475–477.
Doll, H. G., 1949, Introduction to induction logging and application to logging of wells drilled with oil base mud: Journal of Petroleum Technology, v. 1, no. 6, p. 148–162.
Douloff, A. A., 1961, The response of a disk in a dipole field: Geophysics, v. 26, no. 4, p. 452–464.
Duesterhoeft, W. C., 1961, Propagation effects in induction logging: Geophysics, v. 26, no. 2, p. 192–204.
Duesterhoeft, W. C., and Smith, H. W., 1962, Propagation effects on radial response in induction logging: Geophysics, v. 27, no. 4, p. 463–469.
D'Yakonov, B. P., 1959, The diffraction of electromagnetic waves by a circular cylinder in a homogeneous half-space: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 9, p. 950–955.
——— 1959, The diffraction of electromagnetic waves by a sphere located in a half-space: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., no. 11, p. 1120–1125.

——— 1960, Asymptotic expressions for electromagnetic fields caused by a cylindrical inhomogeneity: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 636–638.
——— 1960, The influence of the earth's surface on the electromagnetic field of a cylindrical inhomogeneity: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 5, p. 488–492.
Eckart, G., and Martin, H., 1963, Some problems in the theory of diffraction and refraction in stratified media: Publication A.D. 404 897, U. S. Dept. of Commerce.
Ehrenburg, D. O., and Watson, R. J., 1932, Mathematical theory of electrical flow in stratified media with horizontal, homogeneous, and isotropic layers: Trans. A.I.M.E., Geophysical Prospecting, p. 423–442.
Enenshtein, B. S., 1957, Method of interpreting curves for electromagnetic soundings: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 12, p 102–108.
Evjen, H. M., 1938, Depth factors and resolving power of electrical measurements: Geophysics, v. 3, no. 1, p. 78–95.
——— 1949, Theory and practice of low-frequency electromagnetic exploration: Geophysics, v. 13, no. 4, p. 584–594.
Flathe, H., 1955, A practical method of calculating geoelectrical model graphs, for horizontally stratified media: Geophys. Prosp., v. 3, no. 3, p. 268–294.
——— 1963, Five-layer master curves for the hydrogeological interpretation of geoelectrical resistivity measurements above a two-storey aquifer: Geophys. Prosp., v. 11, no. 4, p. 471–508.
Fraser, D. C., and Ward, S. H., 1965, Resolution of two-layer earth structure from dipole-dipole resistivity and induced polarization data: Proc. Symp on Computers and Computer Applications in Mining and Exploration, University of Arizona, p. PP-1 to PP-43.
Frolov, P. P., 1963, On the establishment of an electromagnetic field: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 656–658.
——— 1965, On the asymptotic behaviour of magnetic field buildup in a layered medium: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, Physics of the Solid Earth, no. 1, p. 33–36.
Galbraith, J. N., Jr., and Cantwell, T., 1963, Resistivity calculations: Report under contract NONR-4198(00) by Geoscience Incorporated.
Gordon, A. N., 1951, Electromagnetic induction in a uniform semi-infinite conductor: Quart. Jour. Mech. and Applied Math, v. 8, p. 116.
Gray, M., 1934, Mutual impedance of grounded wires lying on the surface of the earth when the conductivity varies exponentially with depth: Physics, v. 5, p. 76–80.
Groskopf, J., and Vogt, K., 1940, On the measurement of earth conductivity: Telegrapher und Fernspech Funk Fernseh Technik, v 29, p. 164–172.
Hack, F., 1908, The propagation of electromagnetic waves over a plane conductor: Annalen der Physik, v. 27, p. 43.
Harrington, R. R., 1964, Magnetic components radiated by a horizontal dipole at V. L. F.: U. S. Navy Electronics Lab, San Diego, Research Rpt. 1221.
Hallof, P. G., 1957, On the interpretation of resistivity and induced polarization results: Ph.D thesis, M.I.T. Dept. of Geology and Geophysics.
Hedstrom, H., 1932, Electrical prospecting for auriferous quartz veins and reefs: Mining Magazine, v. 46, p. 201–213.
Horton, C. W., 1946, On the use of electromagnetic waves in geophysical prospecting. Geophysics, v. 11, no. 4, p. 505–517.
Hummel, J. N., 1932, A theoretical study of apparent resistivity in surface potential methods: A.I.M.E. Geophysical Prospecting, p. 392–422.
Ivanov, A. G., 1957, Approximate formula for a calculation of the variable magnetic field over a lode: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 2, p. 91–97.
——— 1957, Frequency investigations in detailed electrical prospecting: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 1, p. 43–56.
Ivanov, A. G., Nikitana, V. N., and Skugarevskaya, O. A., 1964, Spectral interpretation of electromagnetic field build-up curves: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 3, p. 210–213.
Jackson, C. M., Wait, J. R., and Walters, L. C., 1962, Numerical results for the surface impedance of a stratified conductor: Technical Note No. 43, Nat. Bur. Stand.
Jain, S., 1964, A method of quantitative interpretation of the electrical fields of infinitely long sinks and horizontal circular cylindrical bodies: Geophys. Prosp., v. 12, no. 3, p. 290–297

Kamenetskii, F. M , Kaufman, A. A., and Iakubovskii, I. U. V., 1957, On the choice of the optimum frequency in the induction method of electrical prospecting: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 2, p. 80–90.
Kertz, W , 1960, Leitungsfahiger zylinder im transversalen magnetischen Wechselfeld: Gerl Beitr. Geophys , 69, 4–28.
Koefoed, O , 1955, Resistivity curves for a conducting layer of finite thickness embedded in an otherwise homogeneous and less conducting earth: Geophysical Prospecting, v. 3, no. 3.
——— 1965, A semi-direct method of interpreting resistivity observations: Geophys Prosp , v 13, no 2.
Koroleva, K. P , Nikitina, V. N , and Skugarevskaya, O.A., 1956, Buildup of an electric field in an homogeneous half-space in the case of a submerged source: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R , Geophysics Series, Physics of the Solid Earth, no. 2, p 106–110
Koroleva, K P , and Skugarevskaya, O. A., 1965, Buildup of a magnetic field excited by a horizontal electric dipole in a homogeneous conducting half-space: Bull. Acad. Sci., U.S.S R , Geophysics Series, Physics of the Solid Earth, no 2, p 99–105
Kosenkov, O. M., 1963, The electromagnetic field of a circular loop at the earth-air boundary: Bull. Acad Sci., U.S.S R , Geophysics Series, no. 12, p. 1122–1126.
Kozulin, Yu. N., 1960, The electromagnetic field of a transmitter for large values of the product of the complex wave number and transmitter-to-receiver distance: Bull. Acad. Sci , U S S.R , Geophysics Series, no. 10, p. 1006–1007.
——— 1960, On the theory of electromagnetic frequency sounding of multilayered structures: Bull. Acad Sci., Geophysics Series, no. 8, p. 798–803.
Kraichman, M. B., 1960, Basic experimental studies of the magnetic field from electromagnetic sources immersed in a semi-infinite conducting medium: Jour. Res. Nat. Bur. Stand , v 64D, no. 1, p. 21–25
——— 1962, Impedance of a circular loop in an infinite conducting medium: Jour Res Nat Bur. Stand , v. 66D, no. 4, p. 499–504
——— 1962, Induction in a small loop moving with a magnetostatic dipole toward a conducting half-space: Jour Res. Nat. Bur. Stand., v. 66D, p 731–735
Krajcovic, S., 1962, O telurickom anomalnom poli kruhoveno valca (On the telluric anomaly field of a circular cylinder): Geol. Prace, Zpravy 24, p. 237–247.
Lahiri, B. N., and Price, A. T., 1939, Electromagnetic induction in non-uniform conductors, and the determination of the conductivity of the earth from terrestrial magnetic variations: Roy. Soc. Phil. Trans., Ser. A, v. 237, p. 509–540.
Lien, R. H., 1953, Radiation from a horizontal dipole in a semi-infinite dissipative medium: J Appl Phys., v. 24, p. 1–5.
Lien, R. H., and Wait, J. R., 1953, Radiation from a horizontal dipole in a semi-infinite dissipative medium: J. Appl. Phys., v. 24, p. 958–959.
Lipskaya, N. V., 1949, The field of a point electrode observed on the earth's surface near a buried conducting sphere: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, v. 13, p. 409–427.
Logn, O., 1954, Mapping nearly vertical discontinuities by earth resistivities: Geophysics, v 19, no. 4, p. 739–760.
Lowndes, J. S., 1957, A transient magnetic dipole source above a two-layer earth: Quart Jour. Mech. and Appl. Math., v. 10, p. 79.
Lowrie, W., and West, G. F., 1965, The effect of a conducting overburden on electromagnetic prospecting methods: Geophysics, v. 30, no. 4, p. 624–632.
Maeda, Katsuro, 1955, Apparent resistivity for dipping beds: Geophysics, v. 20, no. 1, p. 123–139.
Maillet, Raymond, 1947, The fundamental equations of electrical prospecting: Geophysics, v. 12, no. 4, p. 529–556.
Mal, A. K., 1962, On the field of an electric dipole in presence of a layered media: Zeitschr. Geophysik, v. 28, no. 5, p. 209–218.
March, H. W., 1953, The field of a magnetic dipole in the presence of a conducting sphere: Geophysics, v. 18, p. 671.
Matveev, B. K., and Shkabarnya, N. G., 1959, Electrical profiling above a sphere situated near the boundary between two media: Bull. Acad. Sci., Geophysics Series, no 10, p. 1060–1064.
Meier, A. A., 1964, The potential of a point source of current in a semi-infinite inhomogeneous

medium with conductivity varying in a direction parallel to the surface: Bull. Acad Sci., U.S S.R. Geophysics Series, no. 3, p. 235–236.
Moore, R. K., 1951, Theory of radio communication between submerged submarines: Ph D. Thesis, Cornell University.
Moore, R. K., and Blair, W. E., 1961, Dipole radiation in a conducting half-space: Jour. Res. Nat. Bur. Stand., v. 65D, no. 6, p. 547–563.
Moran, J. H., and Kuntz, K. S., 1962, Basic theory of induction logging and application to study of two-coil sondes: Geophysics, v. 27, no. 6, p. 829–858.
Muskat, M., and Evinger, H. H., 1941, Current penetration in direct current prospecting: Geophysics, v. 6, no. 4, p. 397–427.
Negi, J. G., 1961, Radiation resistance of a vertical magnetic dipole over an inhomogeneous earth: Geophysics, v 26, no 5, p. 635–642.
——— 1962, Diffraction of electromagnetic waves by an inhomogeneous sphere: Geophysics, v. 28, no. 4, p. 480–492.
——— 1965, Radiation resistance of a horizontal circular loop over a finitely conducting ground and application of results to geophysical exploration of conducting sheet-type deposits: Geophysics, v. 30, no. 2, p. 234–245.
Nikitina, V. N., 1956, Anomalies in electromagnetic fields over cylindrical inhomogeneities: Trans. (Trudy) Inst. Geophys. Acad. Sci., U.S.S R., no. 32, p. 159.
——— 1960, The calculation of a variable electromagnetic field over a sloping vein: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 3, p 328–334.
——— 1960, The general solution of an axially symmetrical problem in induction logging theory: Bull Acad. Sci., U S.S.R , Geophysics Series, p. 607–616.
——— 1962, Some calculations of electromagnetic fields for the method of radioscopy: Bull. Acad. Sci., U S S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 596–600.
Norton, K. A., 1936, The propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere: Pt. I., Proc. I.R E., v. 24, p. 1367–1387.
——— 1937, Propagation of radio waves over the surface of the earth and in the upper atmosphere: Pt II., Proc. I.R.E., v. 25, p. 1203–1236.
Onodera, Seibe, 1963, Numerical analysis of relative resistivity for a horizontally layered earth: Geophysics, v. 28, no. 2, p. 222–231.
Orsinger, A., and Van Nostrand, R., 1954, A field evaluation of the electromagnetic reflection method: Geophysics, v. 19, no. 3, p. 478–489.
Pekeris, C. L., 1940, Direct method of interpretation in resistivity prospecting: Geophysics, v 5, no. 1, p. 32–42.
Peters, L J., and Bardeen, John, 1932, Some aspects of electrical prospecting applied in locating oil structures: American Physical Society (Geophysics), Trans. Soc. of Pet. Geophysicists, v. 2, p. 1–20.
Phillips, R. J., 1965, Computer utilization in analyzing telluric data of structure in sedimentary basins: Proc. Symp. on Computers and Computer Applications in Mining and Exploration, University of Arizona, p. QQ-1 to QQ-13.
Pirson, S. J., 1935, Effect of anisotropy on apparent resistivity curves: Bull. A A.P.G., v. 19, no. 1, p. 37–57.
Price, A. T., 1950, Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor with a plane boundary: Quart Jour. Mech. and Appl. Math., v. 3, p. 385.
Pris, G. V., 1961, Parameters of cylindrical conductors in inductive prospecting: Bull. Acad Sci., U.S.S R., Geophysics Series, no 11, p. 1070–1074.
——— 1965, Magnetic-field sources which have a directional effect. Bull Acad. Sci., U.S.S R., Geophysics Series, Physics of the solid earth, no. 1, p 37–41.
Rice, S. O , 1937, Series for the wave function of a radiating dipole at the earth's surface: Bell System Tech. Jour., v. 16, p 101–109.
Richards, P. I., 1958, Transients in conducting media: Trans. I.R.E., v. AP-6, p. 178–182.
Rikitake, T., and Sawada, M., 1962, Electromagnetic induction within an anisotropic plane sheet over a non-conductor and underlain by a uniform semi-infinite conductor: Bull. Earthquake Research Institute, University of Tokyo, v. 40, Pt. 4, p. 657–684.

——— 1965, Electromagnetic induction in a semi-infinite conductor having a undulatory surface: Bull. Earthquake Research Institute, University of Tokyo, v. 43, p. 161–166.
Rikitake, T., and Whitham, K., 1964, Interpretation of the Alert anomaly in geomagnetic variations: Canadian Journal of Earth Sciences, v. 1, p. 35–62.
Riordan, J., 1931, Transients in grounded wires lying on the earth's surface: Bell Syst. Tech. Jour., v. 10, p. 420–431.
Riordan, J., and Sunde, E. D., 1933, Mutual impedance of grounded wires for stratified two-layer earth: Bell Syst. Jour., v. 12, p. 162–177.
Roden, R. B., 1964, The effect of an ocean on magnetic diurnal variations: The Geophysical Journal, v. 8, no. 4, p. 375–388.
Roman, Irwin, 1933, The calculation of electrical resistivity for a region underlying two uniform layers: Terr. Mag. and Atmos. Elect., v. 38, p. 117–140 and 185–202.
——— 1959, An image analysis of multiple-layer resistivity problems. Geophysics, v. 24, no. 3, p. 485–509.
——— 1963, The kernel function in the surface potential for a horizontally stratified earth: Geophysics, v. 28, no. 2, p. 232–249.
Roy, A., and Jain, S., 1961, A simple integral transform and its applications to some problems in geophysical interpretation: Geophysics, v. 26, no. 2, p. 229–241.
Schaub, Yu. B., 1962, The influence of the specific resistance of the surrounding medium on the form of anomaly curves obtained in aerial electrical prospecting. Bull. Acad. Sci., U S S.R., Geophysics Series, no. 5, p. 423–426.
——— 1963, The determination of the distribution of specific electrical conductivity in a horizontally layered medium by aerial electric induction exploration: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 9, p. 837–841.
Schlumberger, C., 1920, Etude sur la prospection electrique du sous sol, Paris: Gauthier-Villars, Chapt. VIII.
Seigel, H. O., 1952, Ore body size determination in electrical prospecting: Geophysics, v. 17, no. 4, p. 907–914.
——— 1959, Mathematical formulation and type curves for induced polarization: Geophysics, v. 24, no. 3, p. 547–565.
Shakhsuvarov, D. N., 1956, Method for interpreting the results of observations on an electromagnetic field for dipole soundings: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 5.
——— 1956, Method of interpreting dipole sounding data for electromagnetic fields. Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 5.
Shakhsuvarov, D. N., and Rybakova, E. V., 1960, On the application of the expressions of a distant zone for electromagnetic frequency soundings: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 11, p. 1072–1073.
Skalskaya, I. P., 1948, The field of a point source of current situated on the earth's surface above an inclined plane: Jour. Technical Physics, U.S.S.R., v. 18, p. 1242–1254.
Slichter, L. B., 1932, Observed and theoretical electromagnetic model response of conducting spheres: A.I.M.E. Trans., v. 97, p. 443–459.
——— 1933, An inverse boundary value problem in electrodynamics: Physics, v. 4, p. 411.
——— 1933, The interpretation of the resistivity prospecting method for horizontal structures: Physics, v. 4, p. 307–322.
——— 1951, An electromagnetic interpretation problem in geophysics: Geophysics, v. 16, p. 431–449.
——— 1952, An electromagnetic interpretation problem for the sphere: Proc. Roy. Soc. London, v. A214, p. 356–370.
Slichter, L. B., and Knopoff, Leon, 1959, Field of an alternating magnetic dipole on the surface of a layered earth: Geophysics, v. 24, no. 1, p. 77–88.
Sommerfeld, A., 1897, Über verzweigte potentiale im Raum: Proc. Lond. Math. Soc., v. 28, p. 395–429.
——— 1909, Über die Ausbrutung der wellen in der drahtlosen telegraphie: Ann. der Physik v. 28, p. 665–737.

Stefanesco, S. S., 1942, Das elektromagnetische normalfeld des waagerechten dipols: Angewandte Geophysik, v. 9, p. 201.
Stefanesco, S., Schlumberger, C., and Schlumberger, M., 1930, Sur la distribution electrique potentielle autour d'une prise de terre ponctuelle dans un terrain a couches horizontales, homogenes et isotropes: Jour. Physique et Radium, tome 1, p. 132–140.
Sumi, F., 1953, On the possibility of determining the dip of the contact between two geologic formations by the geoelectric method: Srbije Zavoid Geol i Geofiz Instrazivanjz Vesnik, Kniga, 10, p. 273–280.
——— 1956, Geoelectrical exploration oi inclined thin beds: Geophys. Prosp., v. 4, no. 2, p. 194–204.
Tagg, G. F, 1930, The earth resistivity method of geophysical prospecting: Some theoretical considerations. Mining Magazine, v. 43, p. 150–158.
——— 1934, Interpretation of resistivity measurements: A.I.M.E. Trans., v. 166.
Tai, C. T., 1947, Hertzian dipole immersed in a dissipative medium: Cruft. Lab. Report No. 21, Harvard University.
Tikhonov, A. N., 1942, The effect of inhomogeneity of the earth's crust on the field of terrestrial currents: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, v. 5, p. 207–218.
——— 1946, The establishment of an electric current in a homogeneous conducting halfspace: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Ser. Geogr. and Geophys., no. 3.
——— 1950, The establishment of an electric current in an inhomogeneous layered medium: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Ser. Geogr. and Geophys., no. 3.
Tikhonov, A. N., and Dimitriev, V. I., 1959, On the possibility of using the induction method of electrical prospecting from the air for geological map-making, Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 10, p. 1053–1055.
Tikhonov, A. N., and Shakhsuvarov, D. N., 1954, The application of electromagnetic fields from radio transmitters in geophysical exploration: Trans. (Trudy). Inst. Geophys. Acad. Sci., U.S.S.R., no. 9.
——— 1956, Method for calculating electromagnetic fields produced by an alternating current in stratified media: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 3.
——— 1959, The electromagnetic field produced by a dipole at points in distant zones: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 672–677.
———1959, The distant electromagnetic field of a dipole: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 946.
Tikhonov, A. N., Shakhsuvarov, D. N., and Rybakova, E. V., 1959, The properties of the electromagnetic field of a dipole activated in a layer lying on an insulator. Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 11, p. 1173–1174.
Tikhonov, A. N., and Skugarevskaya, O. A., 1951, The establishment of an electric current in an inhomogeneous layered medium III: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 6.
——— 1958, The interpretation of the process of establishing an electric field in layered media: Bull. Acad. Sci., Geophysics Series, no. 3, p. 197–199.
——— 1959, The asymptotic behaviour of the process of generating an electromagnetic field: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 6, p. 573–578.
——— 1959, The asymptotic behaviour of the process of generating an electromagnetic field in a laminated medium: Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 7, p. 667–671.
Tuman, V. S., 1951, The telluric method of prospecting and its limitations under certain geologic conditions: Geophysics, v. 16, p. 102–114.
Unz, M., 1964, Superposition in resistivity prospecting: Geophys. Prosp., v. 12, no. 1, p. 1–48.
Van Dam, J. C., 1965, A simple method for the calculation of standard graphs to be used in geoelectrical prospecting: Geophys. Prosp., v. 13, no. 1, p. 37–65.
Van Nostrand, R. G., 1953, Limitations on resistivity methods as inferred from the buried sphere problem: Geophysics, v. 18, p. 423–433.
Van Nostrand, R. G., and Cook, K. L. 1955, Apparent resistivity for dipping beds: Geophysics, v. 20, no. 1, p. 140–147.
Vogler, L. E., and Noble, J. L., 1963, Curves of ground proximity loss for dipole antennas (a digest): Jour. Res., Nat. Bur. Stand., v. 67D, no. 5, p. 567–575.

Wait, J R., 1951, The magnetic dipole over the horizontally stratified earth: Can. Jour. Phys., v. 29, p. 577–592.
——— 1951, Transient electromagnetic propagation in a conducting medium: Geophysics, v. 16, p. 213–221.
——— 1952, Current-carrying wire loops in simple inhomogeneous region: Jour. Appl. Phys., v. 23, p. 297.
——— 1952, The magnetic dipole antenna immersed in a conducting medium: Proc. Inst. Radio Engrs., v. 40, no. 10, p. 1244–1245.
——— 1952, A transient magnetic dipole source in a dissipative medium: Jour. Appl. Phys., v 24, no. 3, p. 341–343.
——— 1953, A conducting permeable sphere in the presence of a coil carrying an oscillating current: Can. Jour. Phys , v. 31, p. 670.
——— 1953, Electromagnetic coupling between a circular loop and a conducting sphere: Geophysics, v. 18, no. 4, p. 971–972.
——— 1953, Induction in a conducting sheet by a small current-carrying loop: Appl. Sci. Res., Sec. B, v. 3, p 230–236.
——— 1953, Propagation of radio waves over a stratified ground: Geophysics, v. 18, no. 2, p. 416–422.
——— 1953, Radiation resistance of a small circular loop in the presence of a conducting ground: Jour. Appl. Phys , v. 54, no. 5, p. 646–649.
——— 1953, Transient coupling in grounded circuits. Geophysics, v. 18, p. 138–141 and p. 971.
——— 1956, Shielding of a transient electromagnetic dipole field by a conducting sheet: Can. Jour. Phys , v. 34, p. 888–890
——— 1957, Insulated loop antenna immersed in a conducting medium: Jour. Res., Nat. Bur. Stand., v. 59, no. 2, p. 133-137.
——— 1957, The transient behaviour of the electromagnetic ground wave over a spherical earth: Trans I R.E., v. AP-5, p. 198–202.
——— 1958, Induction by an oscillating magnetic dipole over a two-layer ground: Appl. Sci. Res., v. B-7, p. 73–80.
——— 1959, On the electromagnetic response of an imperfectly conducting thin-dyke: Geophysics, v. 14, p. 167–171.
——— 1959, Radiation from a small loop immersed in a semi-infinite conducting medium: Can J. Phys , v. 37, p 672–674.
——— 1960, Propagation of electromagnetic pulses in a homogeneous conducting earth: Appl. Sci. Res., Sec. B, v. 8, p. 213–253.
——— 1960, Some solutions for electromagnetic problems involving spheroidal, spherical, and cylindrical bodies: Jour. of Res., Nat. Bur. Stand., v. 64B, no. 1, p. 15–32.
——— 1962, A note on the electromagnetic response of a stratified earth. Geophysics, v. 27, no. 3, p. 382–385.
Wait, J. R , and Campbell, L. Lorne, 1953, The fields of an electric dipole in a semi-infinite conducting medium. J. G. R , v. 58, no. 1, p. 21–28.
——— 1953, Fields of an oscillating magnetic dipole immersed in a semi-infinite conducting medium: J.G.R., v. 58, p. 167.
Wait, J R., and Spies, K. P., 1964, A note on the insulated loop antenna immersed in a conducting medium: Jour. Res., Nat. Bur. Stand., v. 68D, no. 11, p. 1249–1250.
Ward, S H., 1953, Electrical conductivity of diamond drill core specimens: Geophysics, v. 23, p. 434–447.
——— 1959, Unique determination of conductivity, susceptibility, size and depth in multi-frequency electromagnetic exploration: Geophysics, v. 24, no. 3, p. 531–546.
Wesley, J. P., 1958, Response of dyke to oscillating dipole: Geophysics, v. 23, p. 128–133.
——— 1958, Response of a thin dyke to oscillating dipole: Geophysics, v. 23, p. 134–143.
West, G. F., 1960, Quantitative interpretation of electromagnetic prospecting measurements: Ph.D. Thesis, University of Toronto, Canada
West, S S., 1940, Three-layer resistivity curves for the eltran electrode configuration: Geophysics, v. 5, no. 1, p. 43–46.
——— 1943, The mutual impedance of collinear grounded wires: Geophysics, v. 8, no. 2, p. 157–164.

Wetzel, W. W., and McMurry, H. V., 1951, A set of curves to assist in the interpretation of the three layer resistivity problem: Geophysics, v. 2, no. 4, p. 329–341.
Wise, W H., 1937, The physical reality of the Zenneck surface wave: Bell System Tech. Jour., v. 13.
——— 1937, The physical reality of the Zenneck surface wave: Bell System Tech. Jour., v. 16, p. 35–44.
Wolf, A., 1942, The impedance of a grounded wire: Geophysics, v. 7, p. 414–418.
Yost, W. J., 1952, The interpretation of electromagnetic reflection data in geophysical exploration, Pt. I, General theory: Geophysics, v. 17, no. 1, p. 89 105.
Yost, W. J., Beard, C. I., McClure, C. D., and Skomal, E. M., 1952, Interpretation of electromagnetic reflection data in geophysical exploration: Geophysics, v. 17, no. 4, p. 806–826.
Yungul, S. H., 1961, Magneto-telluric sounding three-layer interpretation curves: Geophysics, v. 26, no. 4, p. 465–473.
Zakharov, V. Kh., 1964, The interpretation of anomalies of electromagnetic dipole profiling taken above solids of revolution (spheres, cylinders): Bull. Acad. Sci., U.S.S.R., Geophysics Series, no. 4, p. 339–342.
Zenneck, J., 1907, The propagation of plane electromagnetic waves over a flat earth and its application to wireless telegraphy: Annalen der Physik, vol. 23, p. 846.
Zitron, N. R., 1960, Shielding of transient electromagnetic signals by a thin conducting sheet: Jour. Res., Nat. Bur. Stand., v. 64D, no. 5, p. 563–567.