

高等学校规划教学参考书

岩层与地表移动计算 原理及程序

张玉卓 编著

煤炭工业出版社

173
1003
高等学校规划教学参考书

岩层与地表移动计算 原理及程序

张 玉 卓 编著

煤炭工业出版社

(京)新登字042号

内 容 提 要

本书较详细地介绍了地下开采引起的岩层和地表移动的计算理论和数值方法,着重论述了连续介质力学方法。全书共十一章,第一章是概论;第二至六章介绍岩层移动弹性解及有限元和边界元方法;第七章从新的角度介绍概率积分法;第八章探讨运用灰色系统理论研究地表移动过程;第九至十一章分别讨论断层影响计算、底板突水预测、条带采煤薄板理论及专家系统三个专题。书中介绍的大部分方法都给出了计算程序。

本书可作为煤炭、冶金、化工、建材等部门的采矿、土木、建井、测量、地质等专业的研究生及大学的教学用书,也可供其它有关专业的科技人员参考。

高等学校规划数学参考书
岩层与地表移动计算原理及程序

张 玉 卓 编著

责任编辑:洪 敏

*

煤炭工业出版社 出版

(北京安定门外和平里北街21号)

煤炭工业出版社印刷厂 印刷

新华书店北京发行所 发行

*

开本787×1092mm^{1/16} 印张11^{1/4}

字数265千字 印数1—1,365

1993年2月第1版 1993年2月第1次印刷

ISBN 7-5020-0752-0/TD·695

书号 3519 A0208 定价 3.00元

序 言

地表移动是一个经典的研究方向。开采地下的固体、液体甚至气体资源都会产生不同程度的地表沉陷。由于地下资源的合理开发和利用在国家经济建设中处于重要的地位，因此地表移动的研究具有重要的理论和实践意义。

地下开采引起的地表移动计算目前已有多种方法，如概率积分法、负指数函数法及典型曲线法等。使用这些方法求解一般条件下的岩层及地表移动变形已不困难，但在存在断裂构造、地形起伏变化很大及采区很不规则的情况下却会遇到很大困难，甚至无法求解。合理的力学并结合数值分析的方法，看来对求解这些问题是有效的。力学方法在定性探讨地表移动规律方面已取得了长足进展，但定量计算的误差还比较大。分析认为，力学模型选择不当和计算参数选取不准，是阻碍力学方法定量化的主要障碍。为了促进力学方法（主要指连续介质力学）计算岩层和地表移动的研究和应用，现汇集笔者近些年来这方面的研究成果，并充实相应的内容，编著了这本册子。

本书是一本理论和实践相结合的著作。每章力求扼要介绍理论和求解方法，有兴趣在此领域探索的读者可作深入的研究。书中各章的解答均编写了计算程序（有限元程序是在Dasai程序基础上修改而成的），以期提高本书的实用性和可操作性。这些程序除了有限单元、边界单元的程序外，都不十分复杂，在一台微型计算机上运行（512K内存）是没有问题的。

在本书的写作过程中，仲惟林教授给了许多指导和鼓励，北京科技大学于学馥教授在方法论方面给予了很多指教，煤炭科学研究总院北京开采所刘天泉教授、焦传武教授、杨秀英高级工程师、刘修源高级工程师都给予了很大帮助，中国矿业大学王金庄教授在百忙中审阅了本书初稿，并提出一些修改意见。对以上各位专家的指教，笔者表示衷心感谢。

由于笔者水平所限，加之时间较紧，书中定有一些不足甚至谬误之处，请读者指正。

张 玉 卓

1992年4月于北京

目 录

序言	
第一章 概论	1
第二章 岩层移动计算的各向同性弹性解	4
第一节 深部水平煤层开采时的岩层移动与变形	4
第二节 深部倾斜煤层开采时的岩层移动与变形	6
第三节 浅部倾斜煤层开采时的地表移动与变形	8
第四节 程序设计与计算实例	10
第三章 岩层与地表移动计算的横观各向同性弹性平面解和参数反算	15
第一节 深部煤层开采时岩层移动变形和应力的横观各向同性解	15
第二节 浅部煤层开采时岩层移动变形和应力的横观各向同性解	18
第三节 半平面问题的参数反分析	22
第四节 计算程序	23
第四章 岩层与地表移动计算的横观各向同性三维弹性解与参数反算	32
第一节 地表移动三维分析	32
第二节 地表移动参数分析	34
第三节 程序设计与计算实例	38
第五章 岩层与地表移动变形弹性分析的有限单元法	47
第一节 概述	47
第二节 有限元法分析过程	48
第三节 四类平面单元	50
第四节 有限元程序	56
第六章 岩层与地表移动变形计算的边界单元法	76
第一节 岩层移动位错理论解	76
第二节 岩层移动计算的边界元法	79
第三节 边界元程序	84
第四节 算例	102
第七章 岩层与地表移动计算的概率积分法	104
第一节 概述	104
第二节 随机介质模型及其基本解	104
第三节 下沉盆地主剖面的移动与变形	107
第四节 地表任意点移动变形计算公式	107
第五节 任意形状工作面地表移动变形计算程序原理	109
第六节 地表移动参数反分析	110
第八章 岩层与地表移动预计的灰色系统理论	114
第一节 灰色系统理论概述	114
第二节 灰色系统模型	116
第三节 灰色系统预计实例与算法程序	117

第四节	地表移动计算的灰色时空四维模型简介	123
第九章	断层影响下的地表移动计算	129
第一节	受断层影响的地表移动特征	129
第二节	台阶状下沉盆地的计算	130
第三节	应用边界元法研究断层影响规律	133
第十章	煤层底板破坏与突水预测研究初步	137
第一节	煤层底板采动影响及破坏深度	137
第二节	断层引起的底板突水危险性预测	138
第三节	陷落柱引起的底板突水预测	140
第四节	煤层底板突水危险性预测程序及实例	141
第十一章	条带开采地表移动计算与开采方案选择专家系统	147
第一节	条带开采地表移动计算的弹性薄板理论	147
第二节	条带开采方案选择专家系统	152
参考文献	172

第一章 概 论

一、岩层与地表移动研究的意义

开采地下资源引起的地表移动（沉陷）问题越来越受到人们的关注。地下采矿、开挖隧道和地铁，抽取地下水等都会引起地表沉陷，严重的还会危及人民生命财产的安全。因此，准确地预计和控制岩层移动，对国家经济建设具有重要意义。

对采煤引起的地表移动的研究由来已久。目前我国每年从地下采出的煤炭超过10亿吨，地表沉陷问题十分突出。人们已认识到，岩层与地表移动计算是一项十分重要的工作，是确定建筑物、水体、铁路和主要井巷压煤开采方案的基础。据统计，我国矿区在这些需要保护的對象下（上）压煤量达数百亿吨。为了解放这些煤炭资源，同时又使受护物保持原有的功能，对采动影响程度的预测是必不可少的。有了准确的地表移动变形预计值，才有可能采用预先加固或抗变形结构方式解决建筑物下采煤，才有可能确定合理的水下开采上限，才有可能通过及时维修铁路的方式解放路下压煤。

对井巷和各类敏感建筑物的煤柱留设，地表移动计算也是必要的。在不了解地表移动规律和量值的情况下盲目地圈定煤柱，有时是浪费资源，有时则是很危险的。

进行承压岩溶水上采煤时，只有确切地了解了煤层底板移动、变形和应力重新分布的规律，才有可能实现安全开采。

总之，岩层和地表移动计算对于地下煤层开采和地面建筑物、构筑物保护都是十分重要的，有时甚至是必不可少的。

二、岩层与地表移动研究的发展过程

地下开采矿物资源时，开采面积达到一定的数值，岩层将产生移动并发展到地表，引起地表的移动、变形和破坏。这种现象从人类开始利用地下资源时就被观察到了。早在15世纪，关于允许开采深度的问题就被比利时人写进了法律^[1]。18世纪下半叶，已能对移动范围进行估计，这就是所谓的“法线理论”和“自然斜面理论”。另一方面杜马特（Dumont）提出了一个下沉量 W 的算式，即 $W = m \cos \alpha$ ，这里 m 为采厚， α 为煤层倾角。本世纪20至30年代，斯奇米茨（Schmitz），凯因斯特（Keinhost）和巴斯（Bals）研究了开采影响的作用面积及分带，这可以作为影响函数法的初级阶段。值得指出的是，凯因斯特首先提出了水平移动的算法，即 $U = W \operatorname{tg} \varphi$ ，这里 φ 为地表点到开采中心的连线与铅垂线的夹角。以上可以称为岩层移动发展的第一阶段。

第二次世界大战后，生产的发展及其对煤炭需求量的增大，使地表移动问题更为突出。许多学者开始对地表移动计算进行深入探索。前苏联学者阿维尔辛（Авершин）通过塑性理论和经验方法提出了下沉剖面方程呈指数函数形式，并提出了水平移动与地面倾斜成正比的著名观点，这一观点至今被许多资料所证实。波兰学者克诺特（Knothe, 1950）提出了几何理论，布德雷克解决了克诺特提出的下沉盆地中的水平移动及水平变形问题，这一理论现在称为布德雷克—克诺特理论。其高斯型的影响曲线对近水平煤层的下沉描述十分成功。另一波兰学者李特维尼申（Litwiniszyn, 1954）对岩层移动计算理论

有较大贡献。他把岩层移动过程作为一个随机过程,推证下沉服从柯尔莫哥罗夫 (Kor-mogorov) 方程,这一理论被称为随机介质理论,依据这一理论发展了至今在我国广泛应用的概率积分方法^[2]。另外,沙武斯托维奇 (Salustowicz, 1953) 根据弹性基础梁理论得到了地表下沉盆地的表达式。60年代初,英国学者拜瑞 (Berry) 和沃利斯 (Wales) 根据弹性理论分别讨论了均质岩层平面和横观各向同性平面以及三维条件下的地表移动表达式^{[3]~[5]},但由于参数确定方面的困难,应用较少。此期间英国大量研究和发展了应用典型曲线计算地表移动的方法。美国学者沙拉蒙 (Salamon, 1960) 对地表移动也有一些研究,他几乎与拜瑞同期研究弹性理论求解地表移动^[6]。上述阶段可认为是岩层与地表移动研究的第二阶段。

随着计算技术的发展,岩层与地表移动的数学模型发展很快。从70年代至今,人们将经典理论 (第二阶段发展的理论) 的算法编成计算程序,使得过去难于计算的问题成为可能。值得一提的是,三种主要的数值分析方法 (有限元法、边界元法和离散元法) 均在岩层移动计算中得到了应用。岩层移动计算正向着自动化、智能化、复杂化和直观化方向发展。在自动化方面,可以根据已有观测资料反求参数、计算不同采矿方案下的地表移动变形;在智能化方面,根据计算理论和专家经验设计的专家系统可以辅助决策;在复杂化方面,不仅能对倾斜煤层、岩层内部进行计算,而且对复杂地质条件 (如有断层) 下的移动变形也能计算,同时还能给出应力分析的结果;在直观化方面,计算结果能直接以曲线图甚至三维图的方式给出,十分直观,一目了然。目前正在深入研究的这些方面可作为岩层移动发展的第三阶段。

与波兰、前苏联等国相比,我国岩层与地表移动研究起步较晚,分阶段的特征不明显,实际上解放后我国才进行这一方面的研究工作。刘宝琛、廖国华将随机介质理论引入我国,并发展和完善了这种计算方法。刘天泉、周国铨等一批学者对我国此项事业的发展做出了贡献。在我国已形成了概率积分法,典型曲线法,负指数函数法等多种计算方法并存的“百花齐放”的局面。在大量的地表移动观测资料的基础上制订出了自己的规程,可以毫不夸张地说,我国在岩层与地表移动的理论研究和实际应用方面都取得了巨大的成绩,并在国际上占据应有的地位。

三、本书讨论的主要内容和特点

岩层和地表移动计算中面临的问题主要是提高预计的精度和有效地解决复杂地质条件下的计算问题。在选择适当的力学模型后,预计参数的选取是影响预计精度的主要原因。就力学方法而言,以往的研究在模型方面强调得多,而在参数方面研究得不够,没有形成一套选取参数的途径。求解复杂的岩层移动问题,目前来看只有数值方法才是最为有效的。笔者近年来在岩层移动计算的力学方法及数值解方面做了一些工作,本书介绍的主要是这一方面的内容。从框架上看,主要包括以下几点:

(1) 岩层与地表移动的弹性理论解。分别对均质各向同性和横观各向同性假定条件下由于采煤引起的岩层和地表移动进行了分析。对横观各向同性条件还给出了三维解。另一方面,对计算参数的求取方法进行了较深入的探讨,给出了参数反分析的一系列公式和算法。

(2) 岩层与地表移动的数值解。重点引入有限单元和边界单元两种方法研究岩层移动问题。介绍了这两种方法的基本原理,并根据岩层移动的特点,对算法和程序设计作了

改进。

(3) 岩层与地表移动的概率积分算法。从基本微分方程出发,推导了岩层移动基本解。根据前人的研究,列出了任意形状工作面开采引起的地表移动计算公式。同时对参数反求方法也进行了介绍。

(4) 岩层与地表移动预计的灰色系统理论。将灰色系统理论引入地表移动过程的研究,提出了时空四维模型的概念,重点探讨了时间影响函数的费尔哈斯模型参数求法。

(5) 特殊条件下岩层移动专题研究。主要研究了三个专题,即断层影响下地表移动计算,煤层底板采动影响,以及条带开采地表移动计算的弹性薄板理论及方案选择专家系统。

从某些方面来看,本书着重理论方面阐述,并力求理论联系实际。为了提高理论的实用性和可操作性,对每种理论均提供了计算程序(概率积分法除外)。笔者期望此书的出版能够促进岩层与地表移动的研究,和此领域的研究者一道来完善这些方法,提高工程实用性,为社会主义现代化建设服务。

第二章 岩层移动计算的各向同性弹性解

在一些矿区, 岩层较坚硬, 完整性好。此时将岩层假定为弹性介质, 使得因地下采煤引起的地表移动和变形可以用均质弹性理论求解。

第一节 深部水平煤层开采时的岩层移动与变形

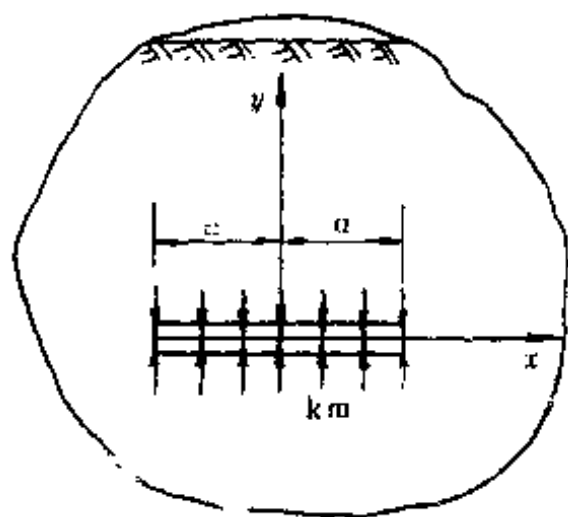


图 2-1 水平煤层

将开采煤层作为不连续位移处理, 可以计算出开采引起的移动和变形。文献^[1]给出了无限平面内由于不连续位移线段引起的域内应力和位移分布。这里所研究的深部 ($H \geq 500\text{m}$) 小倾角 ($\alpha < 10^\circ$) 煤层的简化模型, 如图2-1所示。

在图2-1所示的坐标系下, 采场周围直至地表的应力和位移表达式为

$$U = km \left[-(1-2\mu) \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right] \quad (2-1)$$

$$W = km \left[2(1-\mu) \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] \quad (2-2)$$

$$\sigma_x = 2Gkm \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \quad (2-3)$$

$$\sigma_y = 2Gkm \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \quad (2-4)$$

$$\tau_{xy} = 2Gkm \left(-y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (2-5)$$

式中 K ——顶板下沉系数, $0 \leq K \leq 1$;
 m ——煤层采厚;
 G ——剪切弹性模量;
 μ ——泊松比;
 f ——影响函数, 表达式为

$$f(x, y) = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2-6)$$

f 的各阶导数为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} - \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-1}{4\pi(1-\mu)} \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) \quad (2-8)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{y}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2-9)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2-10)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{2y}{4\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \quad (2-12)$$

研究采动对地表的影响，仅仅知道移动值和应力值是不够的，通常需要计算地表的倾斜、曲率和水平变形。有了下沉和水平移动两个表达式，进一步求出三项变形值是不困难的。

$$\text{地表倾斜} \quad T = dW/dx \quad (2-13)$$

$$\text{地表曲率} \quad K = d^2W/dx^2 \quad (2-14)$$

$$\text{地表水平变形} \quad \varepsilon = du/dx \quad (2-15)$$

于是可得出

$$T(x) = km \left[2(1-\mu) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (2-16)$$

$$K(x) = km \left[2(1-\mu) \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} - y \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} \right] \quad (2-17)$$

$$\varepsilon(x) = km \left[-(1-2\mu) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} \right] \quad (2-18)$$

式中

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (2-19)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = -\frac{2y}{4\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \quad (2-20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} = & -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{8(x-a)y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^3} - \frac{8(x+a)y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^3} \right. \\ & \left. + \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2 + y^2]^2} + \frac{2(x+a)}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right\} \end{aligned} \quad (2-21)$$

岩层移动研究中一个重要的课题是计算井巷及其围岩的竖向变形。根据岩体内的位移表达式，可以很容易求出它的竖向变形表达式：

$$\begin{aligned} \varepsilon(y) &= dW/dy \\ &= km \left[(1-2\mu) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right] \end{aligned} \quad (2-22)$$

第二节 深部倾斜煤层开采时的岩层移动与变形

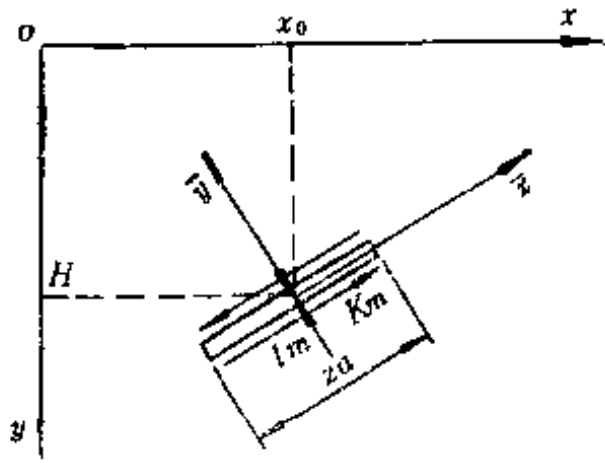


图 2-2 倾斜煤层

开采倾斜煤层相当于上节的不连续位移线段不再平行于 x 轴，而是与 x 轴存在一个夹角 α (煤层倾角) 如图 2-2 所示。

由于煤层倾角的作用，开采后不仅有沿煤层法向的不连续位移 km ，而且产生了沿煤层切向的不连续位移 lm 。常数 l 与煤层倾角 α 成正比关系。

为了描述方便，首先进行坐标变换，即由坐标系 xy 变换为 $\bar{x}\bar{y}$ ：

$$\bar{x} = (x - x_0) \cos \alpha + (y - H) \sin \alpha \quad (2-23)$$

$$\bar{y} = -(x - x_0) \sin \alpha + (y - H) \cos \alpha \quad (2-24)$$

该倾斜煤层开采引起的岩层与地表移动和应力为

$$\begin{aligned} U = lm \left[-(1 - 2\mu) \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + 2(1 - \mu) \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} + \right. \\ \left. + \bar{y} \left(\sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] + \\ + km \left[-(1 - 2\mu) \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} - 2(1 - \mu) \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \bar{y} \left(\cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-25)$$

$$\begin{aligned} W = lm \left[(1 - 2\mu) \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + 2(1 - \mu) \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \bar{y} \left(\cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] + \\ + km \left[-(1 - 2\mu) \sin \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + 2(1 - \mu) \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{y}} - \right. \\ \left. - \bar{y} \left(\sin \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-26)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x = 2Glm \left[2 \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \sin 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + \bar{y} \left(\cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] + \\ + 2Gkm \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + \bar{y} \left(\sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-27)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = 2Glm \left[2 \sin^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \sin 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} - \bar{y} \left(\cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] + \\ + 2Gkm \left[-\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} - \bar{y} \left(\sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} = 2Glm \left[\sin 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \cos 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + \bar{y} \left(\sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] + \\ + 2Gkm \left[-\bar{y} \left(\cos 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{y}^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (2-29)$$

进一步可求出地表三项变形和岩体内竖向变形:

$$\begin{aligned}
 T(x) = lm \left[(1-2\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + (1-\mu) \sin 2\alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} \right) \right] + \\
 + km \left[- (1-2\mu) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + 2(1-\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} - \cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} \right) \right] \quad (2-30)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 K(x) = lm \left[(1-2\mu) \cos^3 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} + (1-\mu) \sin 2\alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\cos^3 \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{y}} + \sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^4} \right) \right] + \\
 + km \left[- (1-2\mu) \sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} + 2(1-\mu) \cos^3 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\sin \alpha \cos^2 \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^3 \partial \bar{y}} - \cos^3 \alpha \frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^4} \right) \right] \quad (2-31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(x) = lm \left[- (1-2\mu) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} + 2(1-\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + \right. \\
 \left. + \bar{y} \left(\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} - \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} \right) \right] + \\
 + km \left[- (1-2\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x}^2} - 2(1-\mu) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial f}{\partial \bar{y} \partial \bar{x}} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} \right) \right] \quad (2-32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(y) = lm \left[(1-2\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + 2(1-\mu) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} + \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right) \right] + \\
 + km \left[- (1-2\mu) \sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + 2(1-\mu) \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{y}^2} - \right. \\
 \left. - \bar{y} \left(\sin \alpha \cos \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}^2} - \cos^2 \alpha \frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}} \right) \right] \quad (2-33)
 \end{aligned}$$

式中

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \bar{x}^3} = - \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{(\bar{x}-a)^2 - \bar{y}^2}{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]^2} - \frac{(\bar{x}+a) - \bar{y}^2}{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]^2} \right\} \quad (2-34)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^4} = -\frac{2}{4\pi(1-\mu)} \left\{ -\frac{(\bar{x}-a)}{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\bar{x}+a}{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{2(\bar{x}-a)[(\bar{x}-a)^2 - \bar{y}^2]}{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{5}{2}}} - \frac{2(\bar{x}+a)[(\bar{x}+a)^2 - \bar{y}^2]}{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} \quad (2-35)$$

$$\frac{\partial^4 f}{\partial \bar{x}^2 \partial \bar{y}^2} = \frac{2\bar{y}}{4\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{1}{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{[(\bar{x}-a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{2}{[(\bar{x}+a)^2 + \bar{y}^2]^{\frac{5}{2}}} \right\} \quad (2-36)$$

第三节 浅部倾斜煤层开采时的地表移动与变形

当煤层的开采深度不十分大时（如小于500m），以上的解答往往存在较大误差，这是因为它们研究的都是无限区域。而实际上，当采区尺度同采深同数量级时，地表移动问题应当作为一个半平面问题来求解。

半平面问题的解可以通过所谓的“镜像”法求得。如图2-3所示，以代表地表的 x 轴作为对称轴，构造一个虚拟的采区（即“镜像”），目的是在地表产生一个应力自由表面。

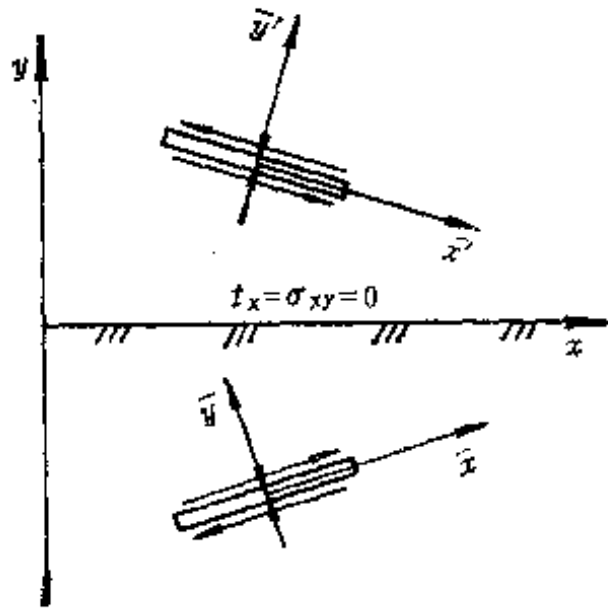


图 2-3 镜像法

浅部采场开采在地表产生的真实移动和变形应当等于上一节的解答叠加上“镜像”在地表产生的移动和变形，即

$$\overset{\Delta}{U} = U + U'$$

$$\overset{\Delta}{W} = W + W'$$

$$\overset{\Delta}{T} = T + T'$$

$$\overset{\Delta}{K} = K + K'$$

$$\overset{\Delta}{\varepsilon} = \varepsilon + \varepsilon'$$

以上各式中右端第二项即增加的补充解，克劳齐 (S.L.Crouch) 称之为余解 (Complementary Solution) 和补解 (Supplementary Solution)。

求补充解要进行的坐标变换为

$$\bar{x}' = (x - x_0) \cos \alpha - (y + H) \sin \alpha$$

$$\bar{y}' = (x - x_0) \sin \alpha + (y + H) \cos \alpha$$

为了描述方便，定义：

$$F'_1 = \frac{\partial f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'}$$

$$F'_2 = \frac{\partial f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{y}'}$$

$$F'_3 = \frac{\partial^2 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}' \partial \bar{y}'}$$

$$F'_4 = \frac{\partial^2 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2} = -\frac{\partial^2 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{y}'^2}$$

$$F'_5 = \frac{\partial^3 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}' \partial \bar{y}'^2}$$

$$F'_6 = \frac{\partial^3 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{y}'^3}$$

$$F'_7 = \frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}' \partial \bar{y}'^3}$$

$$F'_8 = \frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{y}'^4}$$

于是, 移动 U 和 W 的补充解为

$$U' = lm\{(1-2\mu)\sin\alpha\cdot F'_1 - 2(1-\mu)\cos\alpha F'_2 + [(3-4\mu)(y\sin 2\alpha - \bar{y}\sin\alpha) + 2y\sin 2\alpha]F'_3 + [(3-4\mu)(y\cos 2\alpha - \bar{y}\cos\alpha) - y(1-2\cos 2\alpha)]F'_4 + 2y(y\sin 3\alpha - \bar{y}\sin 2\alpha)F'_5 - 2y(y\cos 3\alpha - \bar{y}\cos 2\alpha)F'_6\} + km\{(1-2\mu)\cos\alpha F'_2 + 2(1-\mu)\sin\alpha F'_3 - [(3-4\mu)(y\cos 2\alpha - \bar{y}\cos\alpha) - y]F'_4 + (3-4\mu)(y\sin 2\alpha - \bar{y}\sin\alpha)F'_5 - 2y(y\cos 3\alpha - \bar{y}\cos 2\alpha)F'_6 - 2y(y\sin 3\alpha - \bar{y}\sin 2\alpha)F'_7\}$$

$$W' = lm[-(1-2\mu)\cos\alpha F'_2 - 2(1-\mu)\sin\alpha F'_3 - [(3-4\mu)(y\cos 2\alpha - \bar{y}\cos\alpha) + y(1-2\cos 2\alpha)]F'_4 + [(3-4\mu)(y\sin 2\alpha - \bar{y}\sin\alpha) - 2y\sin 2\alpha]F'_5 + 2y(y\cos 3\alpha - \bar{y}\cos 2\alpha)F'_6 + 2y(y\sin 3\alpha - \bar{y}\sin 2\alpha)F'_7] + km[(1-2\mu)\sin\alpha F'_3 - 2(1-\mu)\cos\alpha F'_4 - (3-4\mu)(y\sin 2\alpha - \bar{y}\sin\alpha)F'_5 - [(3-4\mu)(y\cos 2\alpha - \bar{y}\cos\alpha) + y]F'_6 + 2y(y\sin 3\alpha - \bar{y}\sin 2\alpha)F'_7 - 2y(y\cos 3\alpha - \bar{y}\cos 2\alpha)F'_8]$$

求倾斜补充解 $T'(x)$ 时, 将 W' 中的 F' 代换:

$$F'_1 \longrightarrow F'_1 \cos\alpha$$

$$F'_2 \longrightarrow F'_2 \cos\alpha$$

$$F'_3 \longrightarrow \frac{\partial^3 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'}$$

$$F'_4 \longrightarrow -F'_4 \cos\alpha$$

$$F'_5 \longrightarrow \frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'^2}$$

$$F'_7 \longrightarrow F'_7 \cos\alpha$$

求曲率补充解时, 对 W' 中的 F' 作以下代换:

$$F'_1 \longrightarrow \frac{\partial^3 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^3}$$

$$F'_2 \longrightarrow \frac{\partial^3 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'}$$

$$F'_3 \longrightarrow \frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^3 \partial \bar{y}'}$$

$$F'_4 \longrightarrow \frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^4}$$

$$F'_5 \longrightarrow \frac{\partial^5 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^3 \partial \bar{y}'^2}$$

$$F'_7 \longrightarrow \frac{\partial^5 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'^3}$$

对于水平变形的补充解 $e'(x)$, 应对 U' 中的 F' 作与倾斜补充解 $T'(x)$ 相同的代换。

由于补充解的引入, 在地表 $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, 但 $\sigma_x \neq 0$; 在岩体内部 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 均不为零, 其解为

$$\sigma'_x = 2Glm\{F'_1 - 3(\cos 2\alpha F'_1 - \sin 2\alpha F'_2) + [2y(\cos\alpha - 3\cos 3\alpha) + 3\bar{y}\cos 2\alpha]F'_3 + [2y(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha) + 3\bar{y}\sin 2\alpha]F'_4 - 2y(y\cos 4\alpha - \bar{y}\cos 3\alpha)F'_5 - 2y(y\sin 4\alpha - \bar{y}\sin 3\alpha)F'_6\} + 2Gkm\{F'_2 + [2y(\sin\alpha - 2\sin 3\alpha) + 3\bar{y}\sin 2\alpha]F'_3 - [2y(\cos\alpha - 2\cos 3\alpha) + 3\bar{y}\cos 2\alpha]F'_4 - 2y(y\sin 4\alpha - \bar{y}\sin 3\alpha)F'_5 + 2y(y\cos 4\alpha - \bar{y}\cos 3\alpha)F'_6\}$$

$$\sigma'_y = 2Glm \{ F'_1 - (\cos 2\alpha F'_4 - \sin 2\alpha F'_5) - (4y \sin \alpha \sin 2\alpha - \bar{y} \cos 2\alpha) F'_6 + (4y \sin \alpha \cos 2\alpha + \bar{y} \sin 2\alpha) F'_7 + 2y(y \cos 4\alpha - \bar{y} \cos 3\alpha) F'_8 + 2y(y \sin 4\alpha - \bar{y} \sin 3\alpha) F'_9 \} + 2Gkm \{ F'_1 - (2y \sin \alpha - \bar{y} \sin 2\alpha) F'_6 + (2y \cos \alpha - \bar{y} \cos 2\alpha) F'_7 + 2y(y \sin 4\alpha - \bar{y} \sin 3\alpha) F'_8 - 2y(y \cos 4\alpha - \bar{y} \cos 3\alpha) F'_9 \}$$

$$\tau'_{xy} = 2Glm \{ \sin 2\alpha F'_4 + \cos 2\alpha F'_5 + [2y \sin \alpha (1 + 4 \cos 2\alpha) - \bar{y} \sin 2\alpha] F'_6 + [2y \cos \alpha (3 - 4 \cos 2\alpha) + \bar{y} \cos 2\alpha] F'_7 + 2y(y \sin 4\alpha - \bar{y} \sin 3\alpha) F'_8 - 2y(y \cos 4\alpha - \bar{y} \cos 3\alpha) F'_9 \} + 2Gkm \{ (4y \sin \alpha \sin 2\alpha + \bar{y} \cos 2\alpha) F'_6 - (4y \sin \alpha \cos 2\alpha - \bar{y} \sin 2\alpha) F'_7 - 2y(y \cos 4\alpha - \bar{y} \cos 3\alpha) F'_8 - 2y(y \sin 4\alpha - \bar{y} \sin 3\alpha) F'_9 \}$$

在以上表达式中

$$F'_1 = -\frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{y}'^4} = -\frac{1}{2\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{\bar{x}' - a}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\bar{y}'^2(\bar{x}' - a)}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{\bar{x}' + a}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\bar{y}'^2(\bar{x}' + a)}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$\frac{\partial^4 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'^2} = -\frac{\bar{y}'}{2\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{1}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4(\bar{x}' - a)}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{4(\bar{x}' + a)}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

$$\frac{\partial^5 f(\bar{x}', \bar{y}')}{\partial \bar{x}'^2 \partial \bar{y}'^3} = -\frac{24}{4\pi(1-\mu)} \left\{ \frac{(\bar{x}' - a)\bar{y}'}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(\bar{x}' - a)\bar{y}'^2}{[(\bar{x}' - a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} + \frac{(\bar{x}' + a)\bar{y}'}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{(\bar{x}' + a)\bar{y}'^2}{[(\bar{x}' + a)^2 + \bar{y}'^2]^{\frac{5}{2}}} \right\}$$

第四节 程序设计与计算实例

一、程序框图

以上给出了三种情况下岩层和地表移动计算的表达式。这些公式虽然都给了解析解，但由于较为复杂，用手算有时是困难和不方便的。这里设计了计算程序，冗长的计算由计算机在很短的时间内（如一二分钟）就能完成。程序设计的思路如框图（图2-4）所示。

由图2-4可以发现，当给定一个实际工程时，先输入必要的参数。然后区分水平煤层或倾斜煤层，深部开采或浅部开采，进行岩层和地表移动与变形计算。当需要求解岩体应力时，程序也可算出。主程序计算中需要调用一个子程序 F 。这个子程序计算函数 f 及各阶导数。最后程序按照要求输出移动、变形或应力计算值。

二、计算程序清单（见12页）

三、输入输出说明

计算要求输入的原始数据包括三部分，即地质采矿参数，岩石力学参数和计算控制变量。现说明如下：

参数名称	符号	程序变量	单位
煤层倾角	α	ALF	(°)
煤层采厚	m	AM	mm
采区半长	$L/2$	A	m
总体和局部坐标差	x_0, H	X0, AH	m

计算点数	n	NUM	个
计算起、终点	x_1, x_n	XBEG, XEND	m
泊松比	μ	PR	
剪切弹性模量	G	G	MPa
控制半/全平面	J	J	

输入数据采用数据文件方式，文件名为B22·DAT，数据全部用自由格式输入。
计算结果输出在RESULTS·DAT文件中。

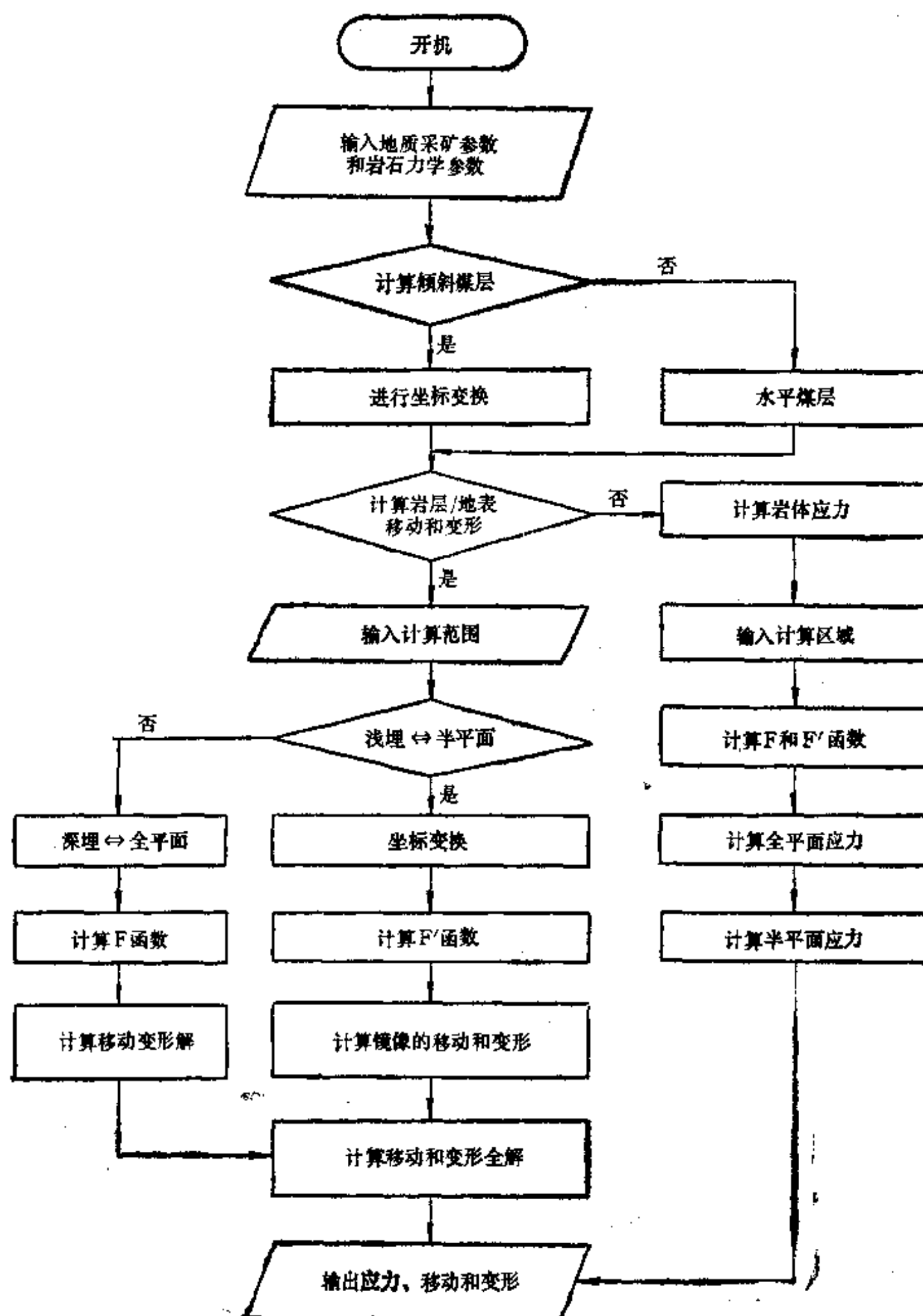


图 2-4 程序框图

```

PROGRAM DDM2
COMMON /S/ PR,ALF,CON,A,DX,DY
COMMON /R/ CX,CY
OPEN(5,FILE='B22.DAT',STATUS='OLD')
READ(5,*) PR,ALF,AM,A,D
WRITE(*,4)
WRITE(*,5)
PI=4.*ATAN(1.)
CON=1./(4*PI*(1-PR))
ALF=ALF*PI/180
READ(5,*) NUM,XB,YB,XE,YE,DX,DY
XD=(XE-XB)/NUM
YD=(YE-YB)/NUM
X=XB
Y=YB
DO 10 I=1,NUM+1
CALL COEFF(X,Y)
U=2*CX*D
W=2*CY*D
WRITE(*,20) I,X,Y,W,U
X=X+XD
10 Y=Y+YD
C
4 FORMAT(/'DISPLACEMENT DUE TO MINING'/)
5 FORMAT(/'I' X Y W U'/)
20 FORMAT(/,I3,4F10.4)
C
STOP
END
SUBROUTINE F(F2,F3,F4,F5,F6,F7,X1,Y1)
COMMON /S/ PR,ALF,CON,A,DX,DY
COMMON /R/ CX,CY

```

C

C

```

R1S=(X1-A)*(X1-A)+Y1*Y1
R2S=(X1+A)*(X1+A)+Y1*Y1
F2=CON*(ALOG(SQRT(R1S))-ALOG(SQRT(R2S)))
F3=-CON*(ATAN(Y1/(X1-A))-ATAN(Y1/(X1+A)))
F4=CON*Y1*(1/R1S-1/R2S)
F5=CON*((X1-A)/R1S-(X1+A)/R2S)
F6=CON*((R1S-2*Y1*Y1)/(R1S*R1S)-(R2S-2*Y1*Y1)/(R2S*R2S))
F7=2*CON*Y1*((X1-A)/R1S**2-(X1+A)/R2S**2)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE COEFF(X,Y)
COMMON /S/ PR,ALF,CON,A,DX,DY
COMMON /R/ CX,CY

```

C

```

X1=(X-DX)*COS(ALF)+(Y-DY)*SIN(ALF)
Y1=-(X-DX)*SIN(ALF)+(Y-DY)*COS(ALF)
CALL F(F2,F3,F4,F5,F6,F7,X1,Y1)
CY1=-(1-2*PR)*SIN(ALF)*F2+2*(1-PR)*COS(ALF)*F3
1-Y1*(SIN(ALF)*F4-COS(ALF)*F5)
CX1=-(1-2*PR)*COS(ALF)*F2-2*(1-PR)*SIN(ALF)*F3
1-Y1*(COS(ALF)*F4-SIN(ALF)*F5)
X1=(X-DX)*COS(ALF)-(Y+DY)*SIN(ALF)
Y1=(X-DX)*SIN(ALF)+(Y+DY)*COS(ALF)
CALL F(F2,F3,F4,F5,F6,F7,X1,Y1)
CY2=(1-2*PR)*SIN(ALF)*F2-2*(1-PR)*COS(ALF)*F3
1-(3-4*PR)*(Y*SIN(2*ALF)-Y1*SIN(ALF))*F4
1-(3-4*PR)*(Y*COS(2*ALF)-Y1*COS(ALF)+Y)*F5
1+2*Y*(Y*SIN(3*ALF)-Y1*SIN(2*ALF))*F6
1-2*Y*(Y*COS(3*ALF)-Y1*COS(2*ALF))*F7
CX2=(1-2*PR)*COS(ALF)*F2+2*(1-PR)*SIN(ALF)*F3
1-(3-4*PR)*(Y*COS(2*ALF)-Y1*COS(ALF)-Y)*F4
1+(3-4*PR)*(Y*SIN(2*ALF)-Y1*SIN(ALF))*F5

```

$1-2 * Y * (Y * \cos(3 * ALF) - Y1 * \cos(2 * ALF)) * F6$

$1-2 * Y * (Y * \sin(3 * ALF) - Y1 * \sin(2 * ALF)) * F7$

$CY = CY1 + CY2$

$CX = CX1 + CX2$

RETURN

END

第三章 岩层与地表移动计算的 横观各向同性弹性平面解和参数反算

将岩层假定为均质各向同性的弹性介质,研究岩层和地表移动计算时存在某些局限性。首先该模型忽略了岩层的重要特征,即层状赋存,层间有弱面。其次该模型将岩层的沿层面方向和垂直层面方向认为性质相同,而实测资料说明,两个方向的弹性模量有一倍或几倍的差异。另外,由上述模型导出的下沉和水平移动公式中涉及到的岩石力学参数只有一个,即泊松比 μ 。这种单参数的力学模型难以描述较复杂的岩层和地表移动性状。虽然在岩层完整、均匀且较坚硬的情况下,各向同性弹性解仍不失为一种合理的近似,但在大多数情况下,就存在问题了,因此应当引入新的模型。

一些研究表明,横观各向同性弹性模型能够反映煤系地层的层状特征,比较符合岩层移动的实际情况。从数学描述上看,横观各向同性平面模型有四个力学参数,刚好满足地表移动计算的要求,因而是合理的。

横观各向同性弹性理论过去曾有许多学者进行过研究,在对应力-应变关系的描述、复变函数解法和积分变换解法等方面已比较成熟^{[12]、[13]}。在与岩层移动有关的研究中,英国学者拜瑞(1960)等获得了在采场顶底板不接触、部分接触和完全闭合三种情况下的地表移动解^{[3]~[5]}。美国学者克劳齐将采场假定为不连续位移,推导了位移和应力场的公式^[11]。美国学者沙拉蒙(D.G.Salamon, 1962)也研究过岩层移动的理论解^[6]。王泳嘉等(1989)用富氏积分变换方法导出了与弹性主方向呈任意角度的不连续位移基本解^[14]。

在岩层与地表移动计算中,参数分析是一个重要问题,也是一个关键问题。目前国内流行的概率积分法^[15]、指数函数法、威布尔分布法等计算方法,曾对参数选取进行过大量的工作,有的已对各个矿区求出了参数值。对横观各向同性解,这里将对参数反分析进行一些探讨,以使这种方法能向实用化方面发展。

第一节 深部煤层开采时岩层移动变形和应力的横观各向同性解

一、基本方程

横观各向同性介质弹性应力应变关系为

$$\begin{cases} \varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y \\ \varepsilon_y = S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}S_{66}\tau_{xy} \end{cases}$$

其应变应力关系为

$$\begin{cases} \sigma_x = C_{11}\varepsilon_x + C_{12}\varepsilon_y \\ \sigma_y = C_{12}\varepsilon_x + C_{22}\varepsilon_y \\ \tau_{xy} = 2C_{66}\varepsilon_{xy} \end{cases}$$

上述关系中的弹性常数为

$$S_{11} = 1/E_x, \quad S_{12} = -\mu_{yx}/E_y,$$

$$S_{22} = 1/E_y, \quad S_{66} = \frac{1}{2}G_{xy}.$$

平面应变问题的 C_{ij} 弹性常数表示如下:

$$C_{11} = (S_{22} - S_{12}^2/S_{33})/S_{11}^2$$

$$C_{12} = -(S_{12} - S_{13}S_{23}/S_{33})/S_{11}^2$$

$$C_{22} = (S_{11} - S_{12}^2/S_{33})/S_{11}^2$$

$$C_{66} = 1/S_{66}$$

式中 $S_{13} = -\mu_{zx}/E_z$

$$S_{23} = -\frac{\mu_{yz}}{E_z},$$

$$S_{33} = 1/E_z,$$

$$S_{12}^2 = S_{11}S_{22} - S_{12}^2 + (2S_{12}S_{13}S_{23} - S_{11}S_{23}^2 - S_{22}S_{13}^2)/S_{33}.$$

在平面应变条件下 $S_{12} = S_{23}$, $S_{11} = S_{33}$, $E_x = E_z$, $\mu_{xy} = \mu_{zy}$.

根据以上应力应变关系, 结合平衡方程, 用位势方法可以求出无限平面内一段不连续位移产生的位移和应力。

二、水平煤层情况

对图3-1所示的深部煤层开采的情况, 在煤层倾角 α 较小 ($\alpha < 15^\circ$) 时, 其解答为

$$U = -lm \left[\frac{1}{1+q_1} \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1} - \frac{1}{1+q_2} \frac{\partial f(x, y_2)}{\partial y_2} \right] +$$

$$+ km \left[\frac{\gamma_1}{1+q_1} \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1} - \frac{\gamma_2}{1+q_2} \frac{\partial f(x, y_2)}{\partial y_2} \right] +$$

$$W = lm \left[\frac{q_1}{\gamma_1(1+q_1)} \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x} - \frac{q_2}{\gamma_2(1+q_2)} \frac{\partial f(x, y_2)}{\partial x} \right] +$$

$$+ km \left[\frac{q_1}{1+q_1} \frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1} - \frac{q_2}{1+q_2} \frac{\partial f(x, y_2)}{\partial y_2} \right]$$

$$\sigma_x = C_{66}lm \left[\frac{1}{\gamma_1^2} \frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial x \partial y_1} - \frac{1}{\gamma_2^2} \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial x \partial y_2} \right] +$$

$$+ C_{66}km \left[\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial y_1^2} - \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial y_2^2} \right]$$

$$\sigma_y = -C_{66}lm \left[\frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial x \partial y_1} - \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial x \partial y_2} \right] - C_{66}km \left[\gamma_1 \frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial y_1^2} - \gamma_2 \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial y_2^2} \right]$$

$$\tau_{xy} = C_{66}lm \left[\frac{1}{\gamma_1} \frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial y_1^2} - \frac{1}{\gamma_2} \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial y_2^2} \right] - C_{66}km \left[\frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial x \partial y_1} - \frac{\partial^2 f(x, y_2)}{\partial x \partial y_2} \right]$$

以上各式中, f 函数及其导数为

$$f(x, y) = \frac{-(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} \left[y \arctan \frac{y}{x-a} - y \arctan \frac{y}{x+a} \right]$$

$$\begin{aligned}
& - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \Big] \\
\frac{\partial f(x, y_1)}{\partial x} &= - \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} \left[- \ln \sqrt{(x-a)^2 + y_1^2} + \ln \sqrt{(x+a)^2 + y_1^2} \right] \\
\frac{\partial f(x, y_1)}{\partial y_1} &= \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} \left[\arctan \frac{y_1}{x-a} - \arctan \frac{y_1}{x+a} \right] \\
\frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial x \partial y_1} &= \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} \left[\frac{-y_1}{(x-a)^2 + y_1^2} + \frac{y_1}{(x+a)^2 + y_1^2} \right] \\
\frac{\partial^2 f(x, y_1)}{\partial y_1^2} &= \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y_1^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y_1^2} \right]
\end{aligned}$$

式中: $y_1 = y/\gamma_1$, $y_2 = y/\gamma_2$ 。

而 γ_1 , γ_2 , q_1 和 q_2 为弹性常数, 其表达式为

$$q_1 = (C_{11}\gamma_1^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66})$$

$$q_2 = (C_{11}\gamma_2^2 - C_{66}) / (C_{12} + C_{66})$$

γ_1 , γ_2 是以下方程的根:

$$C_{11}C_{66}\gamma^4 + [C_{12}(2C_{66} + C_{12}) - C_{11}C_{12}]\gamma^2 + C_{32}C_{66} = 0$$

三、倾斜煤层情况

倾斜煤层开采的情况如图3-2所示。

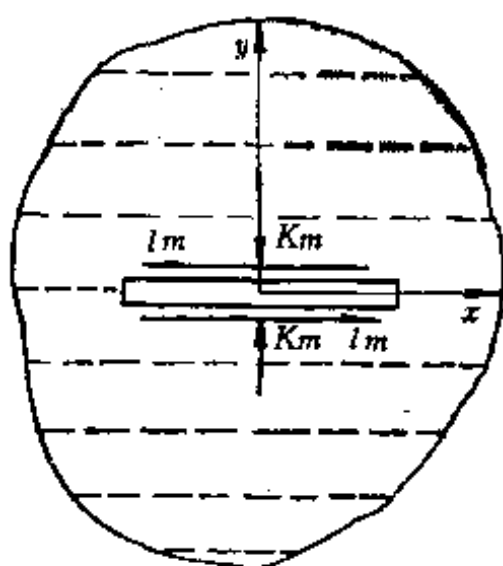


图 3-1 无限域内的不连续位移

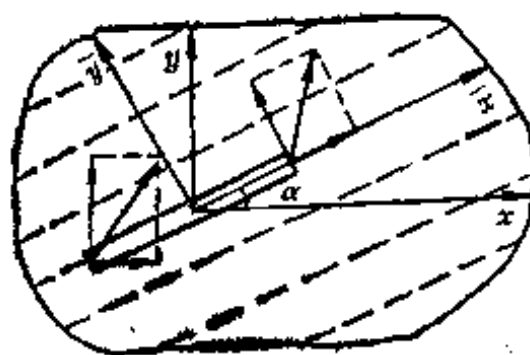


图 3-2 倾斜煤层开采模型

坐标变换为

$$x = \bar{x} \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha$$

$$y = \bar{x} \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha$$

可以在水平煤层计算公式的基础上变换为倾斜煤层的情况, 公式中应做的变化为

$$\ln[(x \pm a)^2 + y^2]^{\frac{1}{2}} = \ln[A_1(\bar{x} \pm a)^2 + B_1(\bar{x} \pm a)\bar{y} + C_1\bar{y}^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\arctan \frac{y_1}{x \pm a} = \arctan \frac{1}{\gamma_1} \frac{(\bar{x} \pm a) \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha}{(\bar{x} \pm a) \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha}$$

$$\frac{x}{(x \pm a)^2 + y^2} = \frac{(\bar{x} \pm a) \cos \alpha - \bar{y} \sin \alpha}{A_1(\bar{x} \pm a)^2 + B_1(\bar{x} \pm a)\bar{y} + C_1\bar{y}^2}$$

$$\frac{y_1}{(x \pm a)^2 + y^2} = \frac{1}{\gamma_1} \frac{(\bar{x} \pm a) \sin \alpha + \bar{y} \cos \alpha}{A_1(\bar{x} \pm a)^2 + B_1(\bar{x} \pm a)\bar{y} + C_1\bar{y}^2}$$

式中 $A_i = (\gamma_i^2 \cos \alpha + \sin \alpha) / \gamma_i^2$;
 $B_i = (1 - \gamma_i^2) \sin 2\alpha / \gamma_i^2$;
 $C_i = (\gamma_i^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) / \gamma_i^2$ 。

第二节 浅部煤层开采时岩层移动变形和应力的横观各向同性解

应用“镜像”法，可以得到横观各向同性介质中不连续位移的半平面解，以描述浅部煤层开采时岩层至地表的移动、变形和应力的情况。求解时建立的坐标系见图3-3。

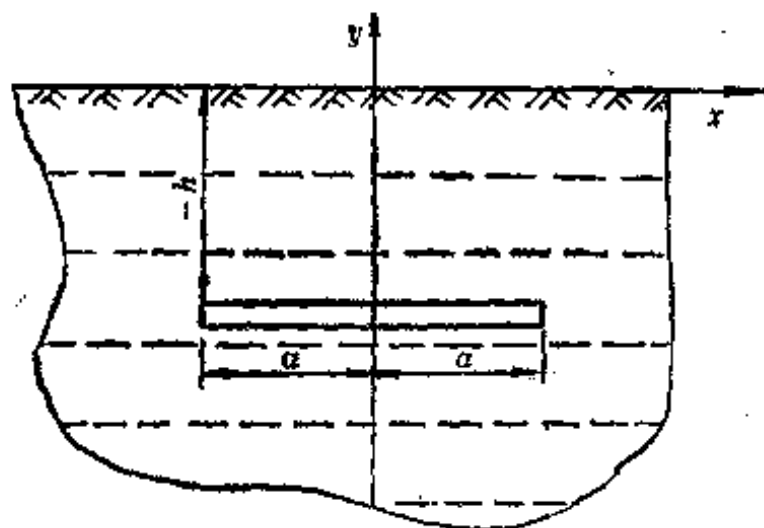


图 3-3 半平面问题

其解答如下：

$$\begin{aligned} U &= lm[G_1(x+a, y) - G_1(x-a, y)] + km[G_2(x+a, y) - G_2(x-a, y)] \\ W &= lm[G_3(x+a, y) - G_3(x-a, y)] + km[G_4(x+a, y) - G_4(x-a, y)] \\ T &= lm[G_5(x+a, y) - G_5(x-a, y)] + km[G_6(x+a, y) - G_6(x-a, y)] \\ k &= lm[G_7(x+a, y) - G_7(x-a, y)] + km[G_8(x+a, y) - G_8(x-a, y)] \\ e &= lm[G_9(x+a, y) - G_9(x-a, y)] + km[G_{10}(x+a, y) - G_{10}(x-a, y)] \\ \sigma_x &= lm[G_{11}(x+a, y) - G_{11}(x-a, y)] + km[G_{12}(x+a, y) - G_{12}(x-a, y)] \\ \sigma_y &= lm[G_{13}(x+a, y) - G_{13}(x-a, y)] + km[G_{14}(x+a, y) - G_{14}(x-a, y)] \\ \tau_{xy} &= lm[G_{15}(x+a, y) - G_{15}(x-a, y)] + km[G_{16}(x+a, y) - G_{16}(x-a, y)] \end{aligned}$$

以上的表达式中， $G_i(x, y)$ 为

$$\begin{aligned} G_1(x, y) &= B \left\{ -\frac{1}{1+q_1} \arctan \frac{y+h}{\gamma_1 x} + \frac{1}{1+q_2} \arctan \frac{y+h}{\gamma_2 x} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{1+q_1} \arctan \frac{y-h}{\gamma_1 x} + \frac{1}{1+q_2} \arctan \frac{y-h}{\gamma_2 x} \right] + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ &\quad \times \left[\frac{\gamma_1}{1+q_1} \arctan \frac{\gamma_2 y - \gamma_1 h}{\gamma_1 \gamma_2 x} + \frac{\gamma_2}{1+q_2} \arctan \frac{\gamma_1 y - \gamma_2 h}{\gamma_1 \gamma_2 x} \right] \Big\} \\ G_2(x, y) &= \frac{B}{2} \left\{ -\frac{\gamma_1}{1+q_1} \ln \frac{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_2}{1+q_2} \ln \frac{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2}{\gamma_2^2} + \right. \\ &\quad + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{\gamma_1}{1+q_1} \ln \frac{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_2}{1+q_2} \ln \frac{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2}{\gamma_2^2} \right] - \\ &\quad - \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{1+q_1} \ln \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + \frac{1}{1+q_2} \ln \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \Bigg\} \\
G_3(x, y) = & \frac{B}{2} \left\{ -\frac{q_1}{\gamma_1(1+q_1)} \ln \frac{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2}{\gamma_1^2} + \frac{q_2}{\gamma_2(1+q_2)} \ln \frac{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2}{\gamma_2^2} \right. \\
& - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[-\frac{q_1}{\gamma_1(1+q_1)} \ln \frac{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2}{\gamma_1^2} + \frac{q_2}{\gamma_2(1+q_2)} \times \right. \\
& \times \ln \frac{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2}{\gamma_2^2} \Bigg] + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{q_1}{1+q_1} \ln \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} + \right. \\
& \left. \left. - \frac{q_2}{1+q_2} \ln \frac{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2} \right] \right\} \\
G_4(x, y) = & B \left\{ \frac{q_1}{1+q_1} \arctan \frac{y+h}{\gamma_1 x} - \frac{q_2}{1+q_2} \arctan \frac{y+h}{\gamma_2 x} \right. \\
& - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{q_1}{1+q_1} \arctan \frac{y-h}{\gamma_1 x} + \frac{q_2}{1+q_2} \arctan \frac{y-h}{\gamma_2 x} \right] + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\
& \times \left[\frac{\gamma_2 q_1}{1+q_1} \arctan \frac{\gamma_2 y - \gamma_1 h}{\gamma_1 \gamma_2 x} + \frac{\gamma_1 q_2}{1+q_2} \arctan \frac{\gamma_1 y - \gamma_2 h}{\gamma_1 \gamma_2 x} \right] \Bigg\} \\
G_5(x, y) = & \frac{B}{2} \left\{ -\frac{q_1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1 x}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \frac{2\gamma_2 x}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} \right. \\
& - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[-\frac{q_1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1 x}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \frac{2\gamma_2 x}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right] + \\
& + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[-\frac{q_1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \times \right. \\
& \times \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \Bigg] \Bigg\} \\
G_6(x, y) = & B \left\{ -\frac{q_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1(y+h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \frac{\gamma_2(y+h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \right. \\
& + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[-\frac{q_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1(y-h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \frac{\gamma_2(y-h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right] + \\
& + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{\gamma_2 q_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} - \frac{\gamma_1 q_2}{1+q_2} \times \right. \\
& \times \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \Bigg] \Bigg\} \\
G_7(x, y) = & \frac{B}{2} \left\{ -\frac{2\gamma_1 q_1}{1+q_1} \left[\frac{1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{2\gamma_1^2 x^2}{[\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2]^2} \right] + \right. \\
& + \frac{2\gamma_2 q_2}{1+q_2} \left[\frac{1}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{2\gamma_2^2 x^2}{[\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2]^2} \right] + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\
& \times \left[\frac{2\gamma_1 q_1}{1+q_1} \left[\frac{1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} - \frac{2\gamma_1^2 x^2}{[\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2]^2} \right] + \frac{2\gamma_2 q_2}{1+q_2} \times \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} - \frac{2\gamma_2 x^2}{[\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2]^2} \right] + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left\{ \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 q_1}{1+q_1} \times \right. \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} - \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2}{[\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2]^2} \right] + \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 q_2}{1+q_2} \times \\
& \times \left[\frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} - \left[\frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right] \right] \Big\} \\
G_8(x, y) = & B \left\{ \frac{2\gamma_1^2 q_1}{1+q_1} \frac{x(y+h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{2\gamma_2^2 q_2}{1+q_2} \frac{x(y+h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} - \right. \\
& - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{2\gamma_1^2 q_1}{1+q_1} \frac{x(y-h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{2\gamma_2^2 q_2}{1+q_2} \frac{x(y-h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right] - \\
& - \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 q_1}{1+q_1} \frac{x(\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{[\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2]^2} + \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 q_2}{1+q_2} \times \right. \\
& \times \left. \frac{x(\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{[\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2]^2} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_9(x, y) = & B \left\{ \frac{q_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1(y+h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{q_2}{1+q_2} \frac{\gamma_2(y+h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\
& \times \left[\frac{q_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1(y-h)}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{q_2}{1+q_2} \frac{\gamma_2(y-h)}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right] + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\
& \times \left[\frac{\gamma_1}{1+q_1} \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} - \frac{\gamma_2}{1+q_2} \frac{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{10}(x, y) = & -\frac{B}{2} \left\{ -\frac{1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1^2 x}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{1}{1+q_2} \frac{2\gamma_2^2 x}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \right. \\
& + \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1^2 x}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{1}{1+q_2} \frac{2\gamma_2^2 x}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right] - \\
& - \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[\frac{1}{1+q_1} \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{1}{1+q_2} \times \right. \\
& \times \left. \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2 x}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right] \Big\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{11}(x, y) = & BC_{66} \left[-(y+h) \left\{ -\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{1}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} \right\} - \right. \\
& - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} (y-h) \left\{ -\frac{1}{\gamma_1} \frac{1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \right. \\
& + \frac{1}{\gamma_2} \frac{1}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \Big\} + \frac{2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left\{ \frac{\gamma_2 (\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \right. \\
& + \left. \frac{\gamma_1 (\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\] \Big\}
\end{aligned}$$

$$G_{12}(x, y) = BC_{66} \times \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\ \times \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right\} + \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left. \left\{ \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\} \right]$$

$$G_{13}(x, y) = BC_{66} \left[(y+h) \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \right. \\ \times (y-h) \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right\} - \frac{-2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left. \left\{ \frac{\gamma_1(\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{\gamma_2(\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\} \right]$$

$$G_{14}(x, y) = BC_{66} \times \left[\frac{-\gamma_1^2}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\ \times \left\{ \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right\} - \frac{-2\gamma_1^2 \gamma_2^2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left. \left\{ \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\} \right]$$

$$G_{15}(x, y) = BC_{66} \times \left[\frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} + \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\ \times \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right\} - \frac{2\gamma_1^2 \gamma_2^2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left. \left\{ \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{1}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\} \right]$$

$$G_{16}(x, y) = BC_{66} \left[(y+h) \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y+h)^2} - \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y+h)^2} \right\} - \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \right. \\ \times (y-h) \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1^2 x^2 + (y-h)^2} + \frac{\gamma_2}{\gamma_2^2 x^2 + (y-h)^2} \right\} + \frac{2\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left. \left\{ \frac{\gamma_2(\gamma_2 y - \gamma_1 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_2 y - \gamma_1 h)^2} + \frac{\gamma_1(\gamma_1 y - \gamma_2 h)}{\gamma_1^2 \gamma_2^2 x^2 + (\gamma_1 y - \gamma_2 h)^2} \right\} \right]$$

以上各式中, B 为弹性常数:

$$B = \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{2\pi(q_1-q_2)} = \frac{(C_{11}\gamma_1^2 + C_{12})(C_{11}\gamma_2^2 + C_{12})}{2\pi C_{11}(C_{12} + C_{66})(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$$

第三节 半平面问题的参数反分析

一、正算简化公式

上节给出的表达式可以计算岩层和地表任意点的移动变形。这些公式包括的参数有两组：即参数 l 、 k 和弹性力学参数 C_{11} 、 C_{12} 、 C_{33} 及由此导出的 q_1 、 q_2 或 γ_1 、 γ_2 。

参数 l 、 k 的物理意义类似于概率积分法中的下沉系数。 l 是与煤层倾角 α 有关的系数，当 $\alpha = 0$ 时， $l = 0$ 。

弹性力学参数最原始的表示是用 E_1 （层面方向弹模）、 E_2 （垂直层面方向弹模）、 μ （泊松比）和 G （剪切弹模）四个常数。它们组合成 C_{11} ，进一步地 q_1 和 γ_1 都是它们的函数。为此，求解岩层移动参数可以有两种思路：一是根据矿区已有的岩石力学试验资料，确定 E_1 、 E_2 、 μ 和 G ，通过公式求出 γ_1 和 γ_2 ；另一是根据矿区地表移动观测资料反算 γ_1 、 γ_2 。现讨论第二种方法。

对于水平煤层，地表下沉和水平移动的公式简化为

$$U = \frac{\gamma_1 \gamma_2 k m}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2} - \ln \frac{(x-a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right]$$

$$W = \frac{k m}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_1 \left(\arctan \frac{\gamma_1 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_1 h}{x-a} \right) - \gamma_2 \left(\arctan \frac{\gamma_2 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_2 h}{x-a} \right) \right]$$

二、根据下沉观测值反算参数 k 、 γ_1 和 γ_2

下沉 $W(x)$ 的台劳展开式可写为

$$W(x) = W(k^0, \gamma_1^0, \gamma_2^0, x, a) + \frac{\partial W}{\partial k^0} \delta k + \frac{\partial W}{\partial \gamma_1^0} \delta \gamma_1 + \frac{\partial W}{\partial \gamma_2^0} \delta \gamma_2$$

式中带指标“0”者为近似值或初值， δ 为改正值。

$$\frac{\partial W}{\partial k} = \frac{m}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\gamma_1 \left(\arctan \frac{\gamma_1 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_1 h}{x-a} \right) - \gamma_2 \left(\arctan \frac{\gamma_2 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_2 h}{x-a} \right) \right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = \frac{k m}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \frac{-\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\arctan \frac{\gamma_1 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_1 h}{x-a} \right) + \gamma_1 \left[\frac{h(x+a)}{(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2} - \frac{h(x-a)}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right] + \frac{\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\arctan \frac{\gamma_2 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_2 h}{x-a} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = \frac{k m}{\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\arctan \frac{\gamma_1 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_1 h}{x-a} \right) - \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2} \left(\arctan \frac{\gamma_2 h}{x+a} - \arctan \frac{\gamma_2 h}{x-a} \right) - \right.$$

$$\gamma_2 \left[\frac{h(x+a)}{(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2} - \frac{h(x-a)}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right] \}$$

令 $\frac{\partial W}{\partial k} = A$, $\frac{\partial W}{\partial \gamma_1} = B$, $\frac{\partial W}{\partial \gamma_2} = C$ 及 $fW_1 = W(k^0, \gamma_1^0, \gamma_2^0; x, a) - \hat{W}$, 其中 \hat{W} 为实测值。

当有 n 个下沉观测点时, 可建立以下 n 个误差方程:

$$A_1 \delta k + B_1 \delta \gamma_1 + C_1 \delta \gamma_2 + fW_1 = \varepsilon_1$$

$$A_2 \delta k + B_2 \delta \gamma_1 + C_2 \delta \gamma_2 + fW_2 = \varepsilon_2$$

.....

$$A_n \delta k + B_n \delta \gamma_1 + C_n \delta \gamma_2 + fW_n = \varepsilon_n$$

根据 $[\varepsilon \varepsilon] = \min$ 的最小二乘原理, 组成以下方程组:

$$[AA] \delta k + [AB] \delta \gamma_1 + [AC] \delta \gamma_2 + [Af] = 0$$

$$[AB] \delta k + [BB] \delta \gamma_1 + [BC] \delta \gamma_2 + [Bf] = 0$$

$$[AC] \delta k + [BC] \delta \gamma_1 + [CC] \delta \gamma_2 + [Cf] = 0$$

以上 $[\]$ 代表求和, 即

$$[AB] = \sum_{i=1}^n (A_i B_i) \quad (\text{非张量记号})$$

根据三个方程, 可以确定参数 δk , $\delta \gamma_1$ 和 $\delta \gamma_2$, 然后加到初值上, 即得参数反算得到的解。

三、根据水平移动观测值反算参数 k 、 γ_1 、 γ_2

当对地表点进行了水平移动观测时, 可以用它来反求地表移动参数。具体求解的步骤与已知下沉时相类似, 仅将其中的 A 、 B 、 C 和 f 变换为如下的表达式:

$$A = \frac{\partial U}{\partial k} = \frac{\gamma_1 \gamma_2 m}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left[\ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2} - \ln \frac{(x-a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right]$$

$$B = \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} = \frac{-km}{2\pi} \frac{\gamma_2^2}{(\gamma_1 - \gamma_2)^2} \left[\ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_2^2 h^2} - \ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma_1 \gamma_2 km}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \frac{4\gamma_2 h^2 (x^2 + a^2) [(x-a)^2 + \gamma_2^2 h^2]}{[(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2]^3} \right\}$$

$$C = \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} = \frac{km\gamma_1^2}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)^2} \left[\ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_2^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_2^2 h^2} - \ln \frac{(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2}{(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2} \right] +$$

$$+ \frac{\gamma_1 \gamma_2 km}{2\pi(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \frac{[(x-a)^2 + \gamma_1^2 h^2] 4\gamma_1 h^2 (x^2 + a^2)}{[(x+a)^2 + \gamma_1^2 h^2]^3} \right\}$$

$$f_1 = U(k^0, \gamma_1^0, \gamma_2^0; x, a) - \hat{U}_1$$

第四节 计 算 程 序

一、程序框图

根据以上正反算公式, 笔者设计了计算程序TIP2, 图3-4为程序框图。

二、输入变量说明

MM——控制变量, 如为大于零的整数时, 直接输入力学参数; 反之则为反算参数;

E1, E2, G12, MU——岩石力学参数 (初值);

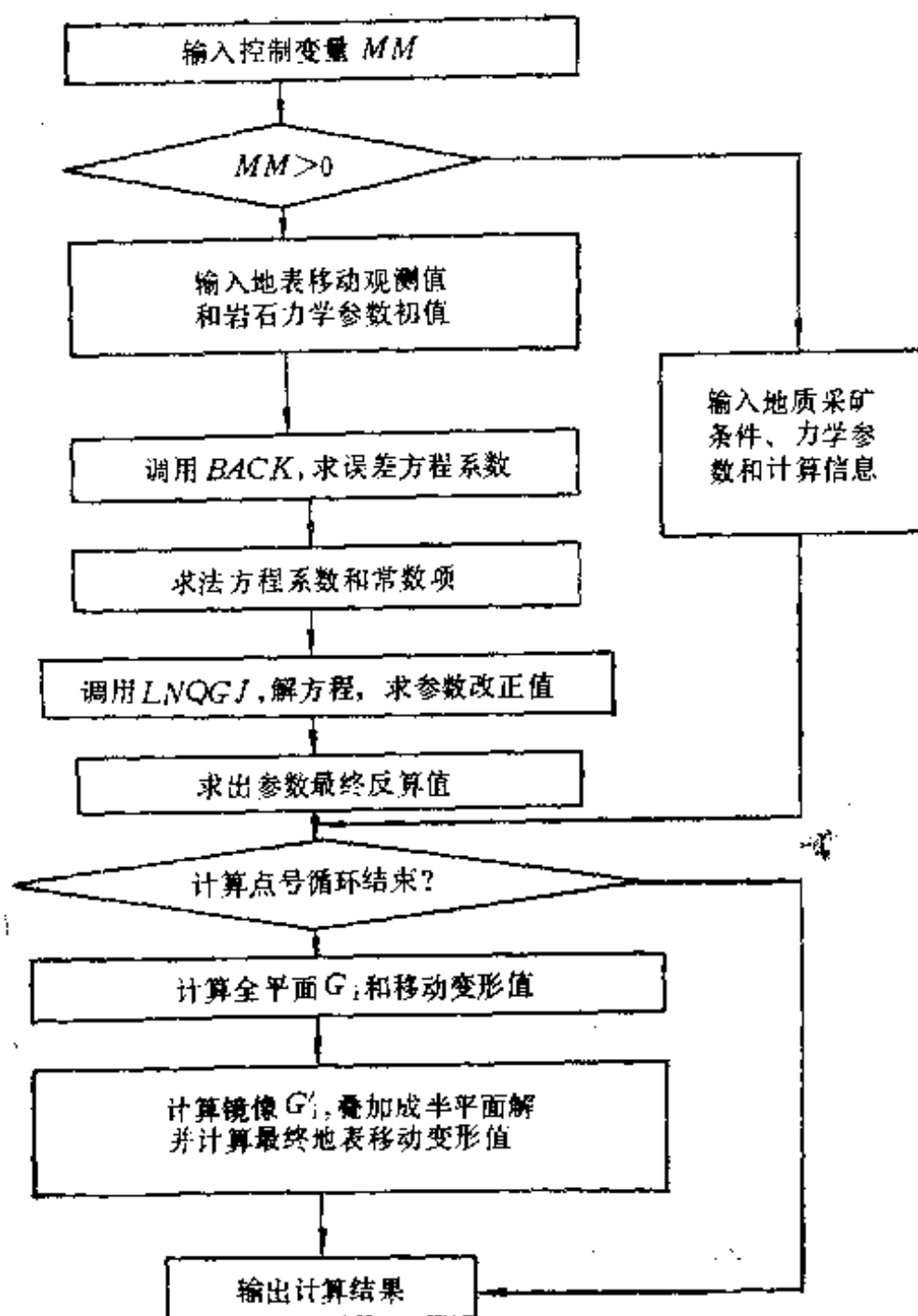


图 3-4 程序框图

ALF——煤层倾角, ($^{\circ}$);

AM——煤层采厚, m;

AA——采区半长, m;

N——地表移动观测点数;

XX(I), WW(I)——第i点的坐标和下沉值;

AKO, GW10, GM20——岩石力学综合参数的初值;

NM——地表计算点数;

XB, XE——地表计算范围的起始点和终止点的坐标, m;

H——采深, m;

A——采区半长, m。

三、子程序说明

BACK(x)——计算误差方程的系数;

GG(x, H)——计算函数系列 $G_1 \sim G_{10}$;

LNQGJ——解法方程组。

四、源程序

```

PROGRAM TIP2
  DIMENSION XX(100),WW(100),A(100),B(100),C(100),F(100),
* UU(100),S(3,4),U(100),W(100),T(100),Q(100),E(100)
  COMMON / A1 / PI,AM,AA,H
  COMMON / D / DWK,DWGM1,DWGM2,FW,AK0,GM10,GM20
  COMMON / GM / GM1,GM2
  COMMON / G / B1,Q1,Q2,G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9,G10
  OPEN(5,FILE='TIP.DAT',STATUS='OLD')
  OPEN(6,FILE='RESULTS.DAT',STATUS='NEW')
  READ(5,*) MM
  IF(MM) 10,10,20
10  READ(5,*) E1,E2,G12,MU,ALF,AM,AA
  S11=1/E1
  S12=-MU/E2
  S22=1/E2
  S66=0.5*G12
  S0=(S11*S22-S12**2)/(2*(S12**2*S11-S11*S12**2-S22*S11**2)/S11
  C11=(S22-S12**2/S11)/S0**2
  C22=0.
  Q1=(C11*GM1**2-C66)/(C12+C66)
  Q2=(C11*GM2**2-C66)/(C12+C66)
  B1=(1+Q1)*(1+Q2)/(2*PI*(Q1-Q2))
C
  WRITE(*,4)
  WRITE(*,5)
  PI=4.*ATAN(1.)
  CON=1./(4*PI*(1-PR))
  ALF=ALF*PI/180
20  READ(5,*) N,(XX(I),WW(I),I=1,N)
  READ(5,*) AK0,GM10,GM20
  CC=AK0*AM/(PI*(GM10-GM20))
  DO 30 I=1,3
  DO 30 J=1,4
30  S(I,J)=0.0

```



```

      DO 40 I= 1,N
      X= XX(I)
      CALL BACK(X)
      A(I)=DWK0 * CC
      B(I)=DWGM1 * CC
      C(I)=DWGM2 * CC
      F(I)=FW-W(I)
40    CONTINUE
      DO 50 I= 1,N
      S(1,1)= A(I) * A(I)
      S(1,2)= A(I) * B(I)
      S(1,3)= A(I) * C(I)
      S(2,2)= B(I) * B(I)
      S(3,3)= C(I) * C(I)
      S(2,3)= B(I) * C(I)
      S(1,4)= A(I) * F(I)
      S(2,4)= B(I) * F(I)
      S(3,4)= C(I) * F(I)
50    CONTINUE
      DO 60 I= 1,4
      DO 60 J= 1,4
60    S(I,J)= S(J,I)
      CALL LNQGJ(S,3,4,ISW,1E-6)
      AK= AK0+S(1,4)
      GM1= GM10+S(2,4)
      GM2= GM20+S(3,4)
      WRITE(6,70) AK,GM1,GM2
70    FORMAT(// 'K=' ,F6.3 / // 'GMA1=' ,F8.4 / // 'GMA2=' ,F8.4)
      READ(5, * ) NM,XB,XE
      READ(5, * ) H,A
      DX= (XE-XB) / (NM-1)
      X= XB
      DO 100 I= 1,NM
      X1= X+AA

```

```

      X2=X-AA
      CALL GG(X1,H)
      U(I)=AK * AM * G2
      W(I)=AK * AM * G4
      T(I)=AK * AM * G6
      Q(I)=AK * AM * G8
      E(I)=AK * AM * G10
      CALL GG(X2,H)
      U(I)=U(I)-AK * AM * G2
      W(I)=W(I)-AK * AM * G4
      T(I)=T(I)-AK * AM * G6
      Q(I)=Q(I)-AK * AM * G8
      E(I)=E(I)-AK * AM * G10
100  CONTINUE
4    FORMAT(/ 'DISPLACEMENT DUE TO MINING' /)
5    FORMAT(/ / 'T      X      Y      W      U' /)
C
C
      STOP
      END
      SUBROUTINE BACK(X)
      COMMON / D / DWK,DWGM1,DWGM2,FW,AK0,GM10,GM20
      COMMON / A1 / PI,AM,A,H
C
      H1=GM10 * H
      H2=GM20 * H
      DWK=GM10 * (ATAN(H / (X+A))-ATAN(H / (X-A)))
#    -GM20 * (ATAN(H / (X+A))-ATAN(H / (X-A)))
      DWGM1=-GM20 * (GM10-GM20) * (ATAN(H1 / (X+A))-ATAN(H2 / (X-A)))
#    +GM20 * (GM10-GM20) * (ATAN(H2 / (X+A))-ATAN(H2 / (X-A)))
#    +GM10 * (H * (X+A) / ((X+A) * * 2+H1 * * 2)-H * (X-A) / ((X-A) * * 2+H1 * * 2))
      DWGM2=GM10 / (GM10-GM20) * (ATAN(H1 / (X+A))-ATAN(H2 / (X-A)))
#    -GM10 * (GM10-GM20) * (ATAN(H2 / (X+A))-ATAN(H2 / (X-A)))
      %-GM20 * ((X+A) / ((X+A) * * 2+H2 * * 2)-H * (X-A) / ((X-A) * * 2+H2 * * 2))

```

```

      FW = AK0 * DWK
      RETURN
      END
      SUBROUTINE LNQGJ(A,N,M,ISW,EPS)
      DIMENSION A(N,M)
      DO 10 NN = 1,N
      P = 0.0
      DO 2 I = NN,N
      IF(P-ABS(A(I,NN)).LT.0.0) THEN
1      P = ABS(A(I,NN))
      IP = I
      ENDIF
2      CONTINUE
      IF(P-EPS) 3,3,4
3      ISW = 1
      RETURN
4      DO 5 J = NN,M
      W = A(NN,J)
      A(NN,J) = A(IP,J)
5      A(IP,J) = W
      DO 6 J = NN+1,M
6      A(NN,J) = A(NN,J) / A(NN,NN)
      DO 9 I = 1,N
      IF(I-NN) 7,9,7.
7      DO 8 J = NN+1,M
8      A(I,J) = A(I,J) - A(I,NN) * A(NN,J)
9      CONTINUE
10     CONTINUE
      ISW = 0.0
      RETURN
      END
      SUBROUTINE GG(X,H)
      COMMON / G1 / B1,Q1,Q2,G1,G2,G3,G4,G5,G6,G7,G8,G9,G10
      COMMON / GM / GM1,GM2

```

```

X1=GM1 * X
X2=GM2 * X
Y1=GM1 * Y
Y2=GM2 * Y
H1=GM1 * H
H2=GM2 * H
C1=(GM1+GM2)/(GM1-GM2)
C2=2/(GM1-GM2)
Q11=1/(1+Q1)
Q22=1/(1+Q2)
GM12=GM1 * GM2
G1=-Q11 * ATAN2(Y+H,X1)+Q22 * ATAN2(Y+H,X2)
%-C1 * (Q11 * ATAN2((Y-H),X1)-Q22 * ATAN2((Y-H),X2))
%+C2 * (GM1 * ATAN2((GM2 * Y-GM1 * H),(GM1 * GM2 * X))
%+GM2 * ATAN((GM1 * Y-GM2 * H)/(GM1 * GM2 * X)))
G1=B1 * G1
G2=-GM1 * Q11 * ALOG((X1 * * 2+(Y+H) * * 2)/(GM1 * X2))
% +GM2 * Q22 * ALOG((X2 * * 2+(Y+H) * * 2)/(GM2 * * 2))
%+C1 * (GM1 * Q11 * ALOG((X1 * * 2+(Y+H) * * 2)/GM1 * * 2)
% +GM2 * Q22 * ALOG((X2 * * 2+(Y+H) * * 2)/GM2 * * 2)
%-GM1 * GM2 * C2 * (Q11 * ALOG(((GM1 * X2) * * 2+(Y2-H1) * * 2)/GM12 * * 2)
% +Q22 * ALOG((GM1 * X2) * * 2+(Y1-H2) * * 2)/GM12 * * 2))
G2=0.5 * B1 * G2
G3=0.5 * B1 * (-Q1/GM1 * Q11 * ALOG((X1 * * 2+(Y+H) * * 2)/GM1 * * 2)
% +Q2/GM2 * Q11 * ALOG((X2 * * 2+(Y+H) * * 2)/GM2 * * 2)
% -C1 * (Q1/GM1 * Q11 * ALOG((X1 * * 2+(Y-H) * * 2)/GM1 * * 2))
% +Q2/GM2 * Q11 * ALOG((X1 * * 2+(Y-H) * * 2)/GM2 * * 2)))
% -C2 * (Q1 * Q11 * ALOG((GM1 * * 2 * X2 * * 2+(Y2-H1) * * 2)/GM12 * * 2)
% +Q2 * Q22 * ALOG((GM1 * * 2 * X2 * X2+(Y1-H2) * * 2)/GM12 * * 2))
G4=B1 * (Q1 * Q11 * ATAN((Y+H)/X1)-Q2 * Q22 * ATAN((Y+H)/X2)
% -C1 * (Q1 * Q11 * ATAN((Y-H)/X1)-Q2 * Q22 * ATAN((Y-H)/X2))
% +C2 * (GM2 * Q1 * Q11 * ATAN((Y2-H1)/(GM1 * X2))
% +GM1 * Q2 * Q22 * ATAN((Y1-H2)/(GM1 * X2))))
G5=0.5 * B1 * (-Q1 * Q11 * 2 * X1/(X1 * * 2+(Y+H) * * 2)

```

$$\begin{aligned}
& \% + Q2 * Q22 * 2 * X2 / (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2) \\
& \% - C1 * (Q1 * Q11 * 2 * X1 / (X1 * * 2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% + Q2 * Q22 * 2 * X2 / (X2 * * 2 - (Y-H) * * 2)) \\
& \% + C2 * (Q1 * Q11 * 2 * GM12 * * 2 * X / (GM12 * * 2 * X * * 2 + (Y2-H1) * * 2) \\
& \% + Q2 * Q22 * 2 * GM12 * * 2 * X / (GM12 * * 2 * X + (Y1-H2) * * 2))) \\
& G6 = B1 * (-Q1 * Q11 * GM1 * (Y+H) / (X1 * * 2 + (Y+H) * * 2) \\
& \% + Q2 * Q22 * GM2 * (Y-H) / (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2)) \\
& \% + C1 * (Q1 * Q11 * GM1 * (Y-H) / (X1 * * 2 - (Y-H) * * 2) \\
& \% + Q2 * Q22 * GM2 * (Y-H) / (X2 * * 2 + (Y-H) * * 2)) \\
& \% + C2 * (GM2 * Q1 * Q11 * GM12 * (Y2-H1) / (GM12 * * 2 * X * X + (Y2-H1) * * 2) \\
& \% + GM1 * Q2 * Q22 * GM12 * (Y1-H2) / (GM12 * * 2 * X * X + (Y1-H2) * * 2)) \\
& G7 = -2 * GM1 * Q1 * Q11 * (1 / (X1 * * 2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% - 2 * X1 * * 2 / (X1 * * 2 + (Y+H) * * 2) * * 2) \\
& \% + 2 * GM2 * Q2 * Q22 * (1 / (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2) - 2 * X2 * * 2 / (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2) * * 2) \\
& \% + C1 * (2 * GM1 * Q1 * Q11 * (1 / (X1 * * 2 + (Y-H) * * 2) - 2 * GM1 * X * X / \\
& \% (X1 * * 2 + (Y+H) * * 2) * * 2) + 2 * GM2 * Q2 * Q22 * (1 / (X2 * * 2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% - 2 * GM2 * X * X / (GM12 * * 2 * X * X / (GM12 * * 2 * X * X + (Y-H) * * 2) * * 2)) \\
& \% + C2 * (2 * GM12 * * 2 * Q1 * Q11 * (1 / (GM12 * * 2 * X * X + (Y2-H1) * * 2) \\
& \% - 2 * GM12 * * 2 * X * X / (GM12 * * 2 * X * X + (Y2-H1) * * 2) * * 2)) \\
& \% + 2 * GM12 * * 2 * Q2 * Q22 * (1 / (GM12 * * 2 * X * X + (Y1-H2) * * 2) \\
& \% - 2 * GM12 * * 2 * X * X / (GM12 * * 2 * X * X + (Y1-H2) * * 2 * * 2))))) \\
& G7 = 0.5 * B * G7 \\
& G8 = B1 * (2 * GM1 * * 3 * Q1 * Q11 * (X * (Y+H) / (X1 * * 2 + (Y+H) * * 2) \\
& \% - 2 * GM2 * * 3 * Q2 * Q22 * X * (Y+H) / (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2) \\
& \% - C1 * (2 * GM1 * * 3 * Q1 * Q11 * (X * (Y-H) / (X1 * * 2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% + 2 * GM2 * * 2 * Q2 * Q22 * X * (Y-H) / (X2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% - C2 * (2 * GM12 * * 3 * GM2 * Q1 * Q11 * (X * (Y2-H1) / (GM12 * * 2 * X * X + (Y2-H1) * * 2) \\
& \% * * 2 + 2 * GM12 * * 3 * GM1 * Q2 * Q22 * X * (Y1-H2) / \\
& \% (GM12 * * 2 * X * X + (Y1-H2) * * 2) * * 2))))) \\
& G9 = B1 * (Q1 * Q11 * GM1 * (Y+H) / (X1 * * 2 + (Y+H) * * 2) - Q2 * Q22 * GM2 * (Y+H) / \\
& \% (X2 * * 2 + (Y+H) * * 2) + C2 * (Q1 * Q11 * GM1 * (Y-H) / (X1 * * 2 + (Y-H) * * 2) \\
& \% + Q2 * Q22 * GM2 * (Y-H) / (X2 * * 2 + (Y-H) * * 2)) + C2 * (GM1 * Q11 * GM12 * (Y2-H1) \\
& \% / (GM12 * * 2 * X * X + (Y2-H1) * * 2) - GM2 * Q22 * GM12 * (Y1-H2) \\
& \% / (GM12 * * 2 * X * X + (Y1-H2) * * 2))
\end{aligned}$$

```

G10=0.5*B1*(-Q11*2*GM1**3*X/(X1**2+(Y+H)**2)+Q22*2*GM2**3*X
%/ (X2**2+(Y+H)**2))-C2*GM12*(Q11*2*GM12**2*X/(GM12**2*X*X
%+(Y2-H1)**2)+Q22*2*GM12**2*X/(GM12**2*X*X+(Y1-H2)**2)))
RETURN
END

```

第四章 岩层与地表移动计算的 横观各向同性三维弹性解与参数反算

从严格的意义上讲, 地下开采引起的地表移动和变形是一个空间问题。在许多情况下, 人们将其简化为两个平面问题, 这与工程实际存在较大的差距。应用横观各向同性弹性理论, 可以从最一般的方程式入手, 求出开采地下的某个空间后地表在三个方向上产生的位移, 英国学者拜瑞早在 30 年前即完成了这一理论工作^[5]。但由于参数研究方面的工作做得较少, 限制了这一方法的广泛应用。事实上, 横观各向同性弹性半空间位移不连续解, 较好地把握了煤系地层最显著的特征——层状特征, 不仅在拟合计算方面有较大灵活性, 而且在参数合理确定的条件下有可能改善力学方法的预计精度^[16]。因此, 以下较简明地给出拜瑞的主要求解过程和结果, 而着重研究参数求取方法。

已有的解析公式的参数反算有较明确的解算格式, 其基本原理仍然是最小二乘法。参数取值的准确性看来较大程度上依赖于观测数据的多少和可靠性。作为一种尝试, 后面还给出了五个力学参数和传统的概率积分参数的初步对应关系, 供取值时参考。应当说明, 这一关系仅仅具有统计上的意义, 而在参数物理意义及其相容性方面也许不尽合理。

一个十分有意义的工作是对有观测资料的矿区逐一反求力学参数, 以便为进行预计提供基础资料, 看来这一工作还需要较长时间的努力。

第一节 地表移动三维分析

对以 Z 轴为对称轴的横观各向同性材料, 其本构方程有如下的形式:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= C_{11}\epsilon_x + C_{12}\epsilon_y + C_{13}\epsilon_z \\ \sigma_y &= C_{12}\epsilon_x + C_{11}\epsilon_y + C_{13}\epsilon_z \\ \sigma_z &= C_{13}\epsilon_x + C_{13}\epsilon_y + C_{33}\epsilon_z \\ \tau_{yz} &= 2C_{44}\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= 2C_{44}\gamma_{xz} \\ \tau_{xy} &= (C_{11} - C_{12})\gamma_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (4-1)$$

其中 C_{ij} 为材料常数。

在地表有

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (\text{当 } z=0 \text{ 时}) \quad (4-2)$$

于是, 地表位移可用调和函数表示为

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ V &= \frac{\partial}{\partial y} (\varphi_1 + \varphi_2) \\ W &= \frac{\partial}{\partial z} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) \end{aligned} \right\} \quad (4-3)$$

式中

$$q_j = (C_{11}\alpha_j^2 - C_{44}) / (C_{13} + C_{44}), \quad (j=1, 2) \quad (4-4)$$

进一步地, φ_1, φ_2 可用一个调和函数表达:

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{\alpha_1}{1+q_1} \left\{ \Phi(x, y, z_1 + h_1) + \Phi(x, y, z_1 - h_1) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} [\alpha_1 \Phi(x, y, z_1 - h_1) - \alpha_2 \Phi(x, y, z_1 - h_2)] \right\} \\ \varphi_2 = & -\frac{\alpha_2}{1+q_2} \left\{ \Phi(x, y, z_2 + h_2) + \Phi(x, y, z_2 - h_2) \right. \\ & \left. - \frac{2}{\alpha_1 - \alpha_2} [\alpha_1 \Phi(x, y, z_2 - h_1) - \alpha_2 \Phi(x, y, z_2 - h_2)] \right\} \end{aligned} \quad (4-5)$$

这里

$$\Phi = \frac{M}{4\pi} \frac{(1+q_1)(1+q_2)}{q_1 - q_2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{d\xi d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \quad (4-6)$$

令

$$I = \int_{-a}^a \int_{-b}^b \frac{d\xi d\eta}{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2} \quad (4-7)$$

则

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial x} &= -\ln \frac{(r_1 - y + b)(r_3 - y - b)}{(r_2 - y + b)(r_4 - y - b)} \\ \frac{\partial I}{\partial y} &= -\ln \frac{(r_1 - x + a)(r_3 - x - a)}{(r_4 - x + a)(r_2 - x - a)} \\ \frac{\partial I}{\partial z} &= -\arctan \frac{(a-x)(b-y)}{zr_1} - \arctan \frac{(a+x)(b-y)}{zr_2} \\ &\quad - \arctan \frac{(a+x)(b+y)}{zr_3} - \arctan \frac{(a-x)(b+y)}{zr_4} \end{aligned} \quad (4-8)$$

式中

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + z^2} \\ r_2 &= \sqrt{(a+x)^2 + (b-y)^2 + z^2} \\ r_3 &= \sqrt{(a+x)^2 + (b+y)^2 + z^2} \\ r_4 &= \sqrt{(a-x)^2 + (b+y)^2 + z^2} \end{aligned} \quad (4-9)$$

a_j 见式 (4-18) $(j=1, 2)$

设边界条件为

$$\begin{aligned} \Delta W &= -M & |x| \leq a, & |y| \leq b \\ \Delta W &= 0 & \text{其它} \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} &= 0 & z=0 \text{处} \end{aligned} \quad (4-10)$$

则可得如下的公式:

$$U(x, y) =$$

$$- \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} \ln \frac{(r'_1 h_1 + b - y)(r'_1 h_1 - b - y)(r''_2 h_2 + b - y)(r''_2 h_2 - b - y)}{(r'_2 h_1 + b - y)(r'_2 h_1 - b - y)(r''_1 h_2 + b - y)(r''_1 h_2 - b - y)} \quad (4-11)$$

$$V(x, y) = - \frac{\alpha_1 \alpha_2 M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} \ln \frac{(r'_1 h_1 + a - x)(r'_1 h_1 - a - x)(r''_2 h_2 + a - x)(r''_2 h_2 - a - x)}{(r'_2 h_1 + a - x)(r'_2 h_1 - a - x)(r''_1 h_2 + a - x)(r''_1 h_2 - a - x)} \quad (4-12)$$

$$W(x, y) = - \frac{M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} \left[\alpha_1 \sum_{i=1}^4 \arctan \frac{\alpha_1^2 X_i^2}{r'_i} - \alpha_2 \sum_{i=1}^4 \arctan \frac{\alpha_2^2 X_i^2}{r''_i} \right] \quad (4-13)$$

这里

$$h_i = h/\alpha_i \quad (4-14)$$

$$\left. \begin{aligned} X_1^2 &= (a-x)(b-y)/h^2 \\ X_2^2 &= (a+x)(b-y)/h^2 \\ X_3^2 &= (a+x)(b+y)/h^2 \\ X_4^2 &= (a-x)(b+y)/h^2 \end{aligned} \right\} \quad (4-15)$$

$$\left. \begin{aligned} r'_i &= (\alpha_1 Y_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \\ r''_i &= (\alpha_2 Y_i^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_1^2 &= \frac{(a-x)^2 + (b-y)^2}{h^2} \\ Y_2^2 &= \frac{(a-x)^2 + (b+y)^2}{h^2} \\ Y_3^2 &= \frac{(a+x)^2 + (b+y)^2}{h^2} \\ Y_4^2 &= \frac{(a+x)^2 + (b-y)^2}{h^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

以上即为计算长为 $2a$ 、宽为 $2b$ 的工作面开采产生的三维地表移动的计算公式。

第二节 地表移动参数分析

一、参数反分析公式

在以上的计算公式中, α_1 、 α_2 是力学参数 E_1 、 E_2 、 G 、 μ_1 、 μ_2 的函数, 可表示为

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1^2 &= (C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2})/2 \\ \alpha_2^2 &= (C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2})/2 \end{aligned} \right\} \quad (4-18)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{E_1}{G(1-\mu_1^2)} - 2 \frac{\mu_2}{1-\mu_1} \\ C_2 &= \frac{E_1}{E_2(1-\mu_1^2)} - \frac{\mu_2^2}{1-\mu_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (4-19)$$

如何准确确定力学参数是计算中的关键问题。长期以来,力学参数的选取基本上沿用两种方法,即实验室试验和工程类比。这种基于岩石试块的实验数据或者经验的类比方法往往带来较大的误差,使得计算的可靠性大为降低。而应用地表移动实测资料求取力学参数,就较准确地反映出整个岩体的信息。这里我们用下沉观测值 $W(x, y)$ 来求取五个力学参数 E_1 、 E_2 、 G 、 μ_1 、 μ_2 。

设

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{\partial W}{\partial E_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial E_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial E_1} \\ B &= \frac{\partial W}{\partial E_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial E_2} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial E_2} \\ C &= \frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial G} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial G} \\ D &= \frac{\partial W}{\partial \mu_1} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_1} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu_1} \\ E &= \frac{\partial W}{\partial \mu_2} = \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} \frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_2} + \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} \frac{\partial \alpha_2}{\partial \mu_2} \end{aligned} \right\} \quad (4-20)$$

而由式 (4-13) 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_1} &= \frac{M}{2\pi} \frac{1}{(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \left\{ \alpha_1 \sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_1^2 X_n^2}{r_n^2} - \alpha_2 \sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_2^2 X_n^2}{r_n^2} \right\} - \\ &= \frac{M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} \left\{ \sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_1^2 X_n^2}{r_n^2} + \alpha_1 \sum_{n=1}^4 \frac{X_n^2}{1 + \left(\frac{\alpha_1^2 X_n^2}{r_n^2} \right)^2} \frac{1}{r_n^2} (2\alpha_1 + \alpha_1^2/r_n^2) \right\} \end{aligned} \quad (4-21)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} &= -\frac{M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)^2} \left\{ \alpha_1 \sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_1^2 X_n^2}{r_n^2} - \alpha_2 \sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_2^2 X_n^2}{r_n^2} \right\} - \\ &= \frac{M}{2\pi(\alpha_1 - \alpha_2)} \left\{ -\sum_{n=1}^4 \arctan \frac{\alpha_2^2 X_n^2}{r_n^2} - \alpha_2 \sum_{n=1}^4 \frac{X_n^2}{1 + \left(\frac{\alpha_2^2 X_n^2}{r_n^2} \right)^2} \frac{1}{r_n^2} (2\alpha_2 + \alpha_2^2/r_n^2) \right\} \end{aligned} \quad (4-22)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial E_1} = \frac{1}{4\alpha_1} \left\{ \frac{1}{G(1-\mu_1^2)} - (-1)^{i+1} (C_1^2 - 4C_2) - \frac{1}{2} \left[\frac{C_1}{G(1-\mu_1^2)} - 2 \frac{E_1}{E_2(1-\mu_1^2)} \right] \right\} \quad (4-23)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial E_2} = +(-1)^{i+1} (C_1^2 - 4C_2)^{-\frac{1}{2}} \frac{E_1}{E_2^2(1-\mu_1^2)} \frac{1}{4\alpha_1} \quad (4-24)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial G} = \frac{1}{4\alpha_1} \frac{-E_1}{2G^2(1-\mu_1^2)} [1 + (-1)^{i+1} (C_1^2 - 4C_2)^{-\frac{1}{2}} C_1] \quad (4-25)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_1} = \frac{1}{4\alpha_1} \left\{ \frac{2E_1\mu_1}{G(1-\mu_1^2)^2} - \frac{2\mu_2}{(1-\mu_1^2)^2} + \frac{1}{2} (-1)^{i+1} (C_1^2 - 4C_2)^{-\frac{1}{2}} \left[2C_1 \frac{2E_1\mu_1}{G(1-\mu_1^2)^2} - \right. \right.$$

$$- \frac{2\mu_1}{(1-\mu_1)^2} - \frac{8E_1\mu_1}{E_2(1-\mu_1^2)} - \frac{2\mu_1\mu_2^2}{(1-\mu_1^2)^2} \Bigg\} \quad (4-26)$$

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial \mu_2} = \frac{1}{4\alpha_1} \left[\frac{-2}{1-\mu_1} + \frac{1}{2} (-1)^{1,1,1} (C_1^2 - 4C_2)^{-\frac{1}{2}} \left(C_1 \frac{-4}{1-\mu_1} - \frac{8\mu_2}{1-\mu_1^2} \right) \right] \quad (4-27)$$

根据式 (4-20)~(4-27) 可组成以下的法方程式:

$$\left. \begin{aligned} [AA]\delta E_1 + [AB]\delta E_2 + [AC]\delta G + [AD]\delta \mu_1 + [AE]\delta \mu_2 + [Af] &= 0 \\ [AB]\delta E_1 + [BB]\delta E_2 + [BC]\delta G + [BD]\delta \mu_1 + [BE]\delta \mu_2 + [Bf] &= 0 \\ [AC]\delta E_1 + [BC]\delta E_2 + [CC]\delta G + [CD]\delta \mu_1 + [CE]\delta \mu_2 + [Cf] &= 0 \\ [AD]\delta E_1 + [BD]\delta E_2 + [CD]\delta G + [DD]\delta \mu_1 + [DE]\delta \mu_2 + [Df] &= 0 \\ [AE]\delta E_1 + [BE]\delta E_2 + [CE]\delta G + [DE]\delta \mu_1 + [EE]\delta \mu_2 + [Ef] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4-28)$$

式中〔〕为求和， δ 表示改正值， f 为常数项。

二、参数的物理意义及取值限制

合理的力学模型能够避免物理含义不明确的参数。用五个力学参数，足以描述岩体的主要特征。这五个参数具有经典的力学含义，即 E_1 、 E_2 为弹性模量， G 为剪切弹性模量， μ_1 、 μ_2 为泊松比，如图4-1所示。

由图4-1可知， x_1 方向与 x_3 方向等价。 E_1 为沿 x_1 （或 x_3 ）方向的弹模； E_2 为沿 x_2 方向的弹模； μ_1 则是 x_1 方向的应变与 x_3 方向应变之比（带有负号）； μ_2 是 x_2 方向的应变与 x_3 方

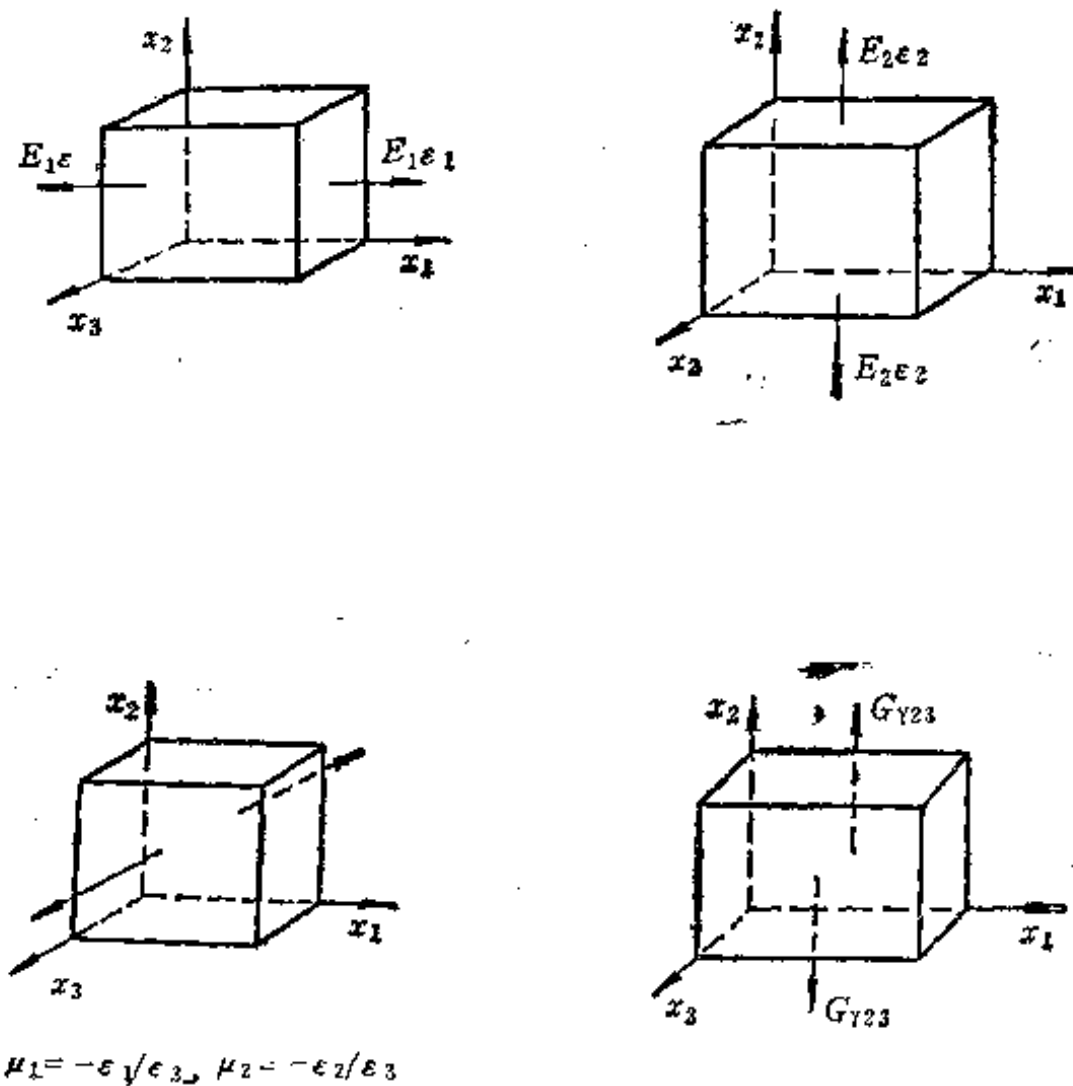


图 4-

向应变之比（带有负号）； G 为 (x_1, x_2) 平面对 x_3 方向的剪切弹性模量。

根据能量原理，各参数应满足以下条件：

$$E_1, E_2, G > 0 \quad (4-29)$$

$$|\mu_1| < (E_2/E_1)^{\frac{1}{2}} \quad (4-30)$$

$$|\mu_2| < (E_1/E_2)^{\frac{1}{2}} \quad (4-31)$$

应当注意，这里 μ_1 、 μ_2 的绝对值不必象各向同性弹性材料那样小于0.5，只要满足上式， μ_1 、 μ_2 可以大于0.5，甚至超过1，都是有物理意义的。

三、力学参数与概率积分参数的关系

由于我国岩层移动工作者的艰苦努力，利用各矿区的地表移动观测资料求得的概率积分法的参数都较为可靠。为了借鉴这些成果，我们对11个矿区的参数作了分析，应用本文给出的正反算公式编制了计算程序，并计算了力学参数。为讨论方便，将参数变换为无量次量，结果见表4-1。

表 4-1 力学参数与概率积分参数分析

矿 区	概 率 积 分 参 数						力 学 参 数			
	$\bar{\eta}$	测站数	\bar{b}	测站数	$\overline{\lg \beta}$	测站数	E_1/E_2	$E_1/(2G)$	μ_1/μ_2	E_1 (GPa)
阜 新	0.68	7	0.24	6	2.42	7	1.2	4.0	3.2	15
辽 源	0.77	7	0.28	4	1.79	5	0.9	2.4	2.6	10
峰 峰	0.87	7	0.24	4	2.09	5	0.8	2.0	2.2	8
开 滦	0.67	6	0.38	6	1.45	6	1.2	2.5	3.8	14
枣 庄	0.77	4	0.24	4	2.41	4	0.9	3.2	2.6	10
焦 作	0.95	15	0.27	15	2.18	15	0.65	2.0	2.4	6
鹤 壁	0.74	4	0.24	5	2.03	6	1.0	3.1	2.5	11
平 顶 山	0.77	6	0.33	6	1.82	6	0.9	3.4	3.1	14
淮 南	0.70	8	0.34	6	1.75	8	1.1	2.6	3.6	9
徐 州	0.81	4	0.25	3	1.57	3	0.8	1.8	2.0	8
南 桐	0.6	9	0.2	5	1.51	9	1.50	3.3	2.2	15

根据表4-1，通过统计分析，我们得到了下面的近似关系式：

$$E_1/E_2 = \frac{1}{2\eta^2} + 0.1 \quad (4-32)$$

$$E_1/(2G) = \frac{1}{2} \lg \beta \left(\frac{1}{2\eta^2} - 0.1 \right) + \frac{1}{2} \quad (4-33)$$

$$\mu_1/\mu_2 = 3b \lg \beta / \eta^2 \quad (4-34)$$

式(4-32) ~ (4-34)就是概率积分参数与力学参数变换的“桥梁”，这个“桥梁”尽管还比较简易，但它毕竟第一次实现了互相转换。应用已有的概率积分参数变换为力学参数，不仅能够应用力学方法计算地表三维移动，而且为应用有限单元、边界单元等数值方法计算复杂条件下的岩层与地表移动提供了可靠的基础。

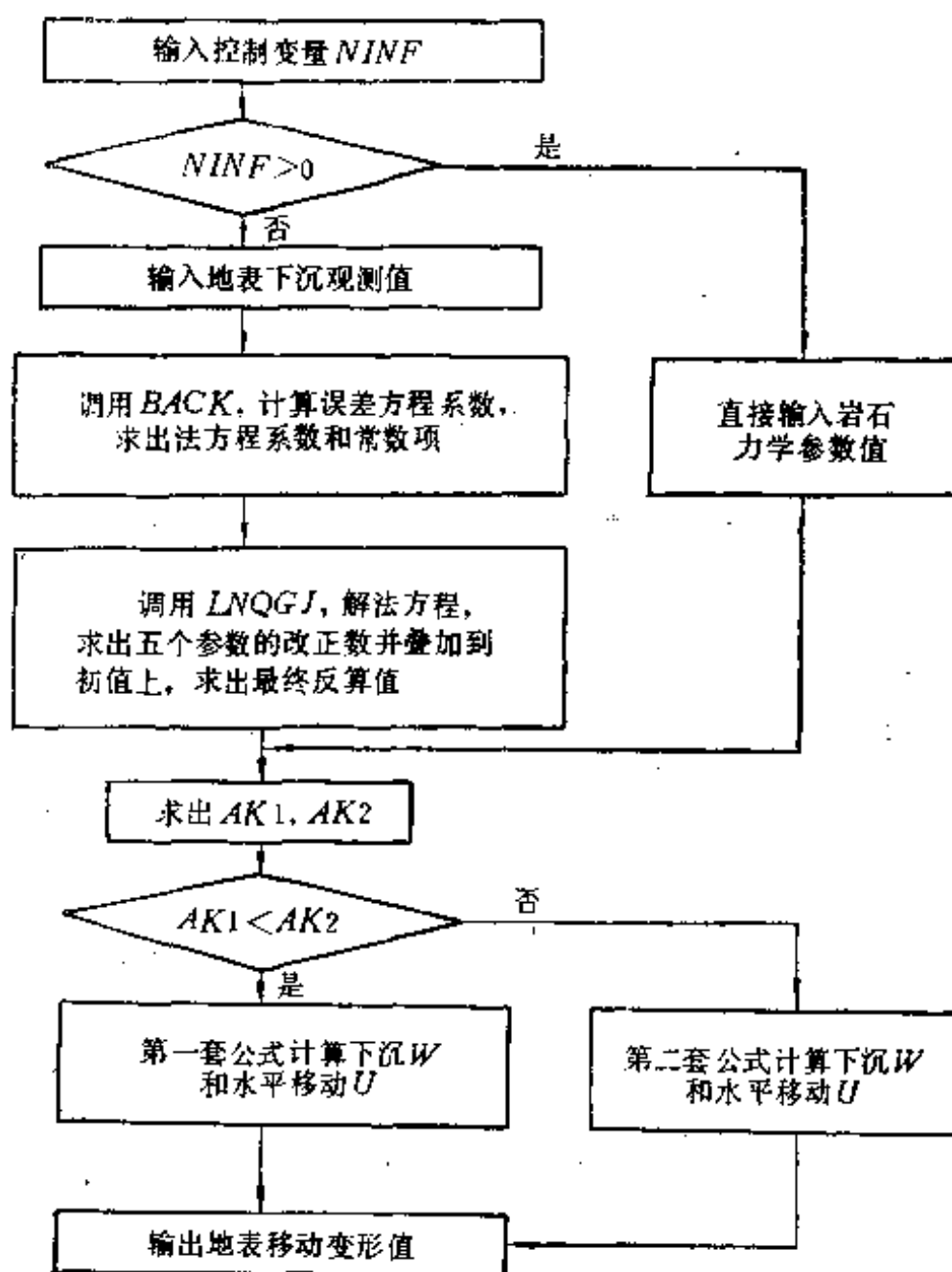


图 4-2 程序框图

第三节 程序设计与计算实例

一、程序框图

根据前面给出的计算公式, 为将参数反算和地表移动计算统一于一个程序中, 设计了程序 ELAST3, 其框图如图 4-2 所示。

二、输入变量说明

$NINF$ ——控制变量, > 0 时输入岩石力学参数, ≤ 0 时反算参数;

AM ——煤层采厚, m;

H ——采深, m;

MO ——地表观测点数;

$XO(I)$ ——第 i 个测点的 x 坐标, m;

$WW(I)$ ——第 i 个测点的下沉观测值, mm;

$E10, E20, GO, AU10, AU20$ ——参数初值;

$E1, E2, G, AU1, AU2$ ——不反算参数时的参数输入值;

M ——地表移动计算点数;

NX, NY —— X 和 Y 方向的分格数;

XB, YB —— X 和 Y 方向的起点坐标;

XE, YE —— X 和 Y 方向的终点坐标;

A, B ——地下工作面沿 X 、 Y 方向的长度。

三、计算实例

某矿区开采近水平煤层, 采深 $H = 250\text{m}$, 采厚 $M = 1.0\text{m}$, 工作面走向长 600m , 宽(倾向长) $200 \sim 300\text{m}$, 其概率积分法的地表移动参数为 $\eta = 0.8$, $b = 0.25$, $\text{tg}\beta = 2.2$ 。现应用力学方法计算三维地表移动。

应用反算程序求出的力学参数为

$$E_1 = 26(\text{GPa}), E_2 = 30.5(\text{GPa})$$

$$\mu_1 = 0.71, \quad \mu_2 = 0.33$$

$$G = 9.6(\text{GPa})$$

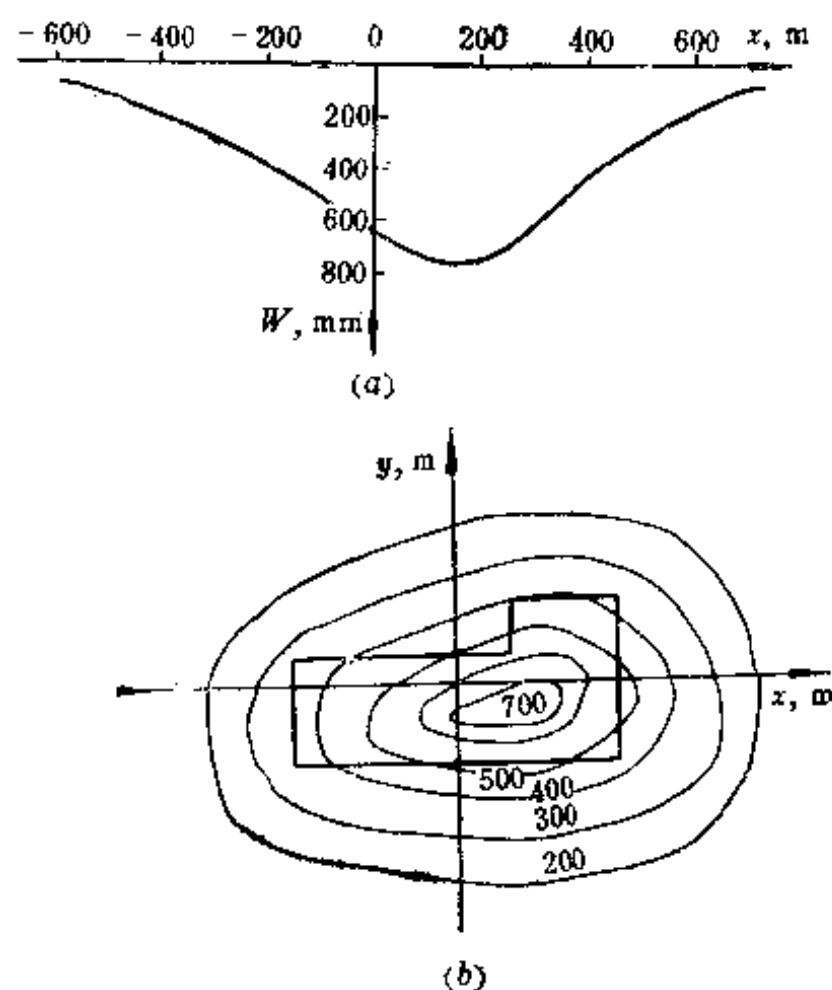


图 4-3 下沉示意图

a —下沉剖面; b —下沉等值线

应用正算程序计算地表移动, 得

$$W_{\max} = 710 (\text{mm})$$

$$U_{\max} = 181 (\text{mm})$$

$$V_{\max} = 197 (\text{mm})$$

计算得到的沿 y 轴的下沉剖面如图4-3a所示, 地表下沉等值线如图4-3b所示。

四、程序清单


```

PROGRAM ELAST3
C   TRANSVERSLY ISOTROPIC ELASTIC HALF-SPACE PROBLEMS
C   INCLUDING BACK-ANALYSIS OF PARAMETERS
C
  DIMENSION X1(4),Y1(4),R1(4),R2(4),A1(4),B1(4),C1(4),D1(4),
%   X0(100),WW(100),S(5,6),AV(100),BV(100),CV(100),DV(100),EV(100),
%   FV(100)
  COMMON / C0 / E10,E20,G0,AU10,AU20
  COMMON / C1 / A,B,H,AM,PI
  COMMON / C2 / AT,BT,CT,DT,ET,FT,X1,Y1
  OPEN(5,FILE='eldata',STATUS='old')
  open(6,FILE='els',STATUS='new')
  PI=4*ATAN(1.)
  READ(5,*)NINF
  IF(NINF) 10,10,25
  READ(5,*)AM,H
10  READ(5,*)M0,(X0(I),WW(I),I=1,M0)
  READ(5,*)E10,E20,G0,AU10,AU20
  DO 12 I=1,5
  DO 12 J=1,6
12  S(I,J)=0.
  DO 15 I=1,M0
  CALL BACK(X,DE1,DE2,DG,DU1,DU2)
  AV(I)=AT
  BV(I)=BT
  CV(I)=CT
  DV(I)=DT
  EV(I)=ET
  FV(I)=FT
  S(1,1)=AV(I)*AV(I)
  S(1,2)=AV(I)*BV(I)
  S(1,3)=AV(I)*CV(I)
  S(1,4)=AV(I)*DV(I)
  S(1,5)=AV(I)*EV(I)

```

```

S(1,6)=AV(I)*FV(I)
S(2,2)=BV(I)*BV(I)
S(2,3)=BV(I)*CV(I)
S(2,4)=BV(I)*DV(I)
S(2,5)=BV(I)*EV(I)
S(2,6)=BV(I)*FV(I)
S(3,3)=CV(I)*CV(I)
S(3,4)=CV(I)*DV(I)
S(3,5)=CV(I)*EV(I)
S(3,6)=CV(I)*FV(I)
S(4,4)=DV(I)*DV(I)
S(4,5)=DV(I)*EV(I)
S(5,5)=EV(I)*EV(I)
15 S(5,6)=EV(I)*FV(I)
DO 20 I=1,5
DO 20 J=1,6
20 S(I,J)=S(J,I)
CALL LNQGJ(S,5,6,ISW,1E-6)
E1=E10+S(1,6)
E2=E20+S(2,6)
G12=G0+S(3,6)
AU1=U10+S(4,6)
AU2=U20+S(5,6)
GO TO 50
25 READ(5,*)E1,E2,PR1,PR2,G12
READ(5,*)M,NX,NY,XB,XE,YB,YE,H,A,B
C
AK1=SQRT((1.-PR1*PR1)/(E1/E2-PR2**2))
AK2=(E1/(1.*G)-PR2*(1.+pr1))/(E1/E2-PR2**2)
write(*,2)AK1,AK2
READ(*,*)AK1,AK2
C
2 FORMAT(1X,2F20.5)
CC1=AK1*M/(2.8282*PI*SQRT(ABS(AK2-AK1))),

```

```

CC2=SQRT((AK1+AK2)/ABS((AK2-AK1)))
50 READ(5,*)M,NX,NY,XB,XE,YB,YE,H,A,B
C
XD=(XE-XB)/(NX-1)
YD=(YE-YB)/(NY-1)
X=XB
Y=YB
DO 110 J=1,NX
Y=YB
DO 100 K=1,NY
X1(1)=(A-X)*(B-Y)/(H*H)
X1(2)=(A+X)*(B-Y)/(H*H)
X1(3)=(A+X)*(B+Y)/(H*H)
X1(4)=(A-X)*(B+Y)/(H*H)
Y1(1)=((A-X)*(A-X)+(B-Y)*(B-Y))/(H*H)
Y1(2)=((A+X)*(A+X)+(B-Y)*(B-Y))/(H*H)
Y1(3)=((A+X)*(A+X)+(B+Y)*(B+Y))/(H*H)
Y1(4)=((A-X)*(A-X)+(B+Y)*(B+Y))/(H*H)
C
DO 60 I=1,4
A1(I)=Y1(I)+AK2/(AK1*AK1)
60 B1(I)=SQRT(A1(I)*A1(I)+(AK1**2-AK2**2)/AK1**4)
IF(AK1.LT.AK2) THEN
DO 70 I=1,4
C1(I)=2.*(AK2*A1(I)-AK1*B1(I)+AK2**2/AK1**2-1.)
D1(I)=4.*AK1*B1(I)+C1(I)*C1(I)
C1(I)=SQRT(C1(I))
70 D1(I)=SQRT(D1(I))
FZ1=(D1(1)-C1(1)+2.*(B-Y)/H)*(D1(2)+C1(2)+2.*(B-Y)/H)
FM1=(D1(1)+C1(1)+2.*(B-Y)/H)*(D1(2)-C1(2)+2.*(B-Y)/H)
FZ2=(D1(3)-C1(3)+2.*(B+Y)/H)*(D1(4)+C1(4)+2.*(B+Y)/H)
FM2=(D1(3)+C1(3)+2.*(B+Y)/H)*(D1(4)-C1(4)+2.*(B+Y)/H)
U=CC1*(ALOG(FZ1/FM1)+ALOG(FZ2/FM2))
FZ3=(D1(1)-C1(1)+2.*(A-X)/H)*(D1(2)+C1(2)+2.*(A+X)/H)

```

```

FM3=(D1(1)+C1(1)+2.* (A-X)/H)*(D1(2)-C1(2)+2.* (A+X)/H)
FZ4=(D1(3)-C1(3)+2.* (A+X)/H)*(D1(4)+C1(4)+2.* (A-X)/H)
FM4=(D1(3)+C1(3)+2.* (A+X)/H)*(D1(4)-C1(4)+2.* (A-X)/H)
V=CC1*(ALOG(FZ3/FM3)+ALOG(FZ4/FM4))

```

C

```

W1=0.
W2=0.
DO 80 I=1,4
WI1=ATAN(C1(I)*X1(I)/(B1(I)+AK1*X1(I)**2))
WI2=ATAN(D1(I)*X1(I)/(B1(I)-AK1*X1(I)**2))
W1=W1+WI1
80 W2=W2+WI2
W=-M/(4.*PI)*(CC2*W1+W2)
ELSE
DO 85 I=1,4
C1(I)=SQRT(2*(AK1*B1(I)-AK2*A1(I)+1.-(AK2/AK1)**2))
85 D1(I)=SQRT(4.*AK1*B1(I)-C1(I)**2)
BY1=2.*(B-Y)/H
BY2=2.*(B+Y)/H
AX1=2.*(A-X)/H
AX2=2.*(A+X)/H
U=-CC1*(ATAN(C1(1)/(D1(1)+BY1))-ATAN(C1(2)/(D1(2)+BY1))
*      +ATAN(C1(3)/(D1(3)+BY2))-ATAN(C1(4)/(D1(4)+BY2)))
V=-CC1*(ATAN(C1(1)/(D1(1)+AX1))-ATAN(C1(2)/(D1(2)+AX2))
*      +ATAN(C1(3)/(D1(3)+AX2))-ATAN(C1(4)/(D1(4)+AX1)))
W1=0.
W2=0.
DO 90 I=1,4
CKX=C1(I)*X1(I)+AK1*X1(I)**2
WI1=ALOG(abs((B1(I)+CKX)/(B1(I)-CKX)))
WI2=ATAN(D1(I)*X1(I)/(B1(I)-AK1*X1(I)**2))
W1=W1+WI1
90 W2=W2+WI2
W=-M/(4.*PI)*(.5*CC2*W1+W2)

```

```

ENDIF
U = 100 * U
V = 100 * V
WRITE(6,99)J,K,X,Y,U,V,W
WRITE(*,99)J,K,X,Y,U,V,W
99  FORMAT(2I4,2F14.3,3F14.5)
100  Y = Y + YD
110  X = X + XD
STOP
END
SUBROUTINE BACK(X,DE1,DE2,DG,DU1,DU2)
DIMENSION XX(4),YY(4),R1(4),R2(4),S(5,6)
COMMON / C0 / E10,E20,G0,AU10,AU20
COMMON / C1 / A,B,H,AM,PI
COMMON / C2 / AT,BT,CT,DT,ET,FT,X1(4),Y1(4)
C1 = E10 / (G0 * (1-AU10 * * 2)) - 2 * AU20 / (1-AU10)
C2 = E10 / (E20 * (1-AU10 * * 2)) - AU20 * * 2 / (1-AU10)
ALF1 = SQRT(0.5 * (C1 + SQRT(C1 * * 2 - 4 * C2)))
ALF2 = SQRT(0.5 * (C1 - SQRT(C1 * * 2 - 4 * C2)))
DO 10 I = 1,4
R1(I) = SQRT(ALF1 * Y1(I) * Y1(I) + 1)
10  R2(I) = SQRT(ALF2 * Y1(I) * Y1(I) + 1)
S1 = 0
S2 = 0
S3 = 0
S4 = 0
DO 20 I = 1,4
S1 = S1 + ATAN(ALF1 * * 2 * (X1(I) * * 2 / R1(I)))
S2 = S2 + ATAN(ALF2 * * 2 * (X1(I) * * 2 / R2(I)))
S3 = S3 + X1(I) * * 2 * (2 * ALF2 + ALF2 * * 3 / R1(I) * * 2) / (R1(I) * (1+
& (ALF2 * X1(I) * * 2 / R1(I) * * 2))
20  S4 = S4 + X1(I) * * 2 * (2 * ALF2 + ALF2 * * 3 / R2(I) * * 2) / (R1(I) * (1+
& (ALF2 * X1(I) * * 2 / R2(I) * * 2))
WA1 = AM / (2 * PI * (ALF1 - ALF2) * * 2) * (ALF1 * S1 - ALF2 * S2

```

```

&      -AM / (2 * PI * (ALF1-ALF2)) * (S1+ALF1 * S3))
      WA2=AM / (2 * PI * (ALF1-ALF2) * * 2) * (ALF1 * S1-ALF2 * S2
&      -AM / (2 * PI * (ALF1-ALF2)) * (-S2-ALF2 * S4))
      AE10=1 / SQRT(C1 * * 2-4 * C2) * (C1 / (G0 * (1-AU10 * * 2))
&      -2 * E10 / (E20 * (1-AU10 * * 2)))
      AE11=(1 / (G0 * (1-AU10 * * 2))+AE10) / (4 * ALF1)
      AE21=(1 / (G0 * (1-AU10 * * 2))-AE10) / (4 * ALF2)
      AE12=1 / SQRT(C1 * * 2-4 * C2) * E10 / (E20 * * 2 * (1-AU10 * * 2)) / (4 * ALF1)
      AE22=-1 / SQRT(C1 * * 2-4 * C2) * E10 / (E20 * * 2 * (1-AU10 * * 2)) / (4 * ALF2)
      ST=1 / SQRT(C1 * * 2-4 * C2)
      AG11=-E10 * (1+ST * C1) / (8 * ALF1 * G0 * * 2 * (1-AU10 * * 2))
      AG22=-E10 * (1-ST * C1) / (8 * ALF2 * G0 * * 2 * (1-AU10 * * 2))
      STT=4 * C1 * E10 * AU10 / (G0 * (1-AU10 * * 2) * * 2)-2 * AU10 / (1-AU10) * * 2
&      -8 * E1 * AU1 / (E2 * (1-AU20 * * 2))-2 * AU10 * AU20 * * 2 / (1-AU10 * * 2) * * 2
      AMU11=1 / (4 * ALF1) * 2 * E10 * AU10 / (G0 * (1-AU10 * * 2) * * 2)+0.5 * ST * STT
      AMU21=1 / (4 * ALF2) * 2 * E10 * AU10 / (G0 * (1-AU10 * * 2) * * 2)-0.5 * ST * STT
      AMU12=1 / (4 * ALF1) * (-2 / (1-AU10)+0.5 * ST * (-4 * C1 / (1-AU10)-
&      8 * AU20 * (1-AU10 * * 2)))
      AMU22=1 / (4 * ALF2) * (-2 / (1-AU10)-0.5 * ST * (-4 * C1 / (1-AU10)-
&      8 * AU20 * (1-AU10 * * 2)))
      FT=-AM / (2 * PI * (ALF1-ALF2)) * (ALF1 * S1+ALF2 * S2)
      AT=WA1 * AE11+WA2 * AE21
      BT=WA1 * AE12+WA2 * AE22
      CT=WA1 * AG11+WA2 * AG22
      DT=WA1 * AMU11+WA2 * AMU21
      ET=WA1 * AMU12+WA2 * AMU22
      RETURN
      END
      SUBROUTINE LNQGJ(A,N,M,ISW,EPS)
      DIMENSION A(N,M)
      DO 10 NN=1,N
      P=0.0
      DO 20 I=NN,N
      IF(P-ABS(A(I,NN)).LT.0.0) THEN

```

```

1      P=ABS(A(I,NN))
      IP=I
      ENDIF
2      CONTINUE
      IF(P-EPS) 3,3,4
3      ISW=1
      RETURN
4      DO 5 J=NN,M
      W=A(NN,J)
      A(NN,J)=A(IP,J)
5      A(IP,J)=W
      DO 6 J=NN+1,M
6      A(NN,J)=A(NN,J)/A(NN,NN)
      DO 9 I=1,N
      IF(I-NN) 7,9,7
7      DO 8 J=NN+1,M
8      A(I,J)=A(I,J)-A(I,NN)*A(NN,J)
9      CONTINUE
10     CONTINUE
      ISW=0.0
      RETURN
      END

```


第五章 岩层与地表移动变形弹性分析的有限单元法

第一节 概 述

在岩层和地表移动变形计算中,经常遇到一些复杂的条件,如覆岩存在断裂构造,岩层软硬很不均匀,地势起伏较大,井下开采很不规则等。这时用解析方法求解会遇到很大困难。在满足工程要求的精度范围内寻求更合理的数值解看来是十分必要的。有限单元法较适合分析这类复杂的岩层移动问题。事实上,有限元法是各类数值方法中应用十分广泛且最为简明的一种,在处理复杂的介质、复杂的结构、复杂的边界条件及荷载条件时能显示出它的优越性^[17]。

有限单元法是50年代以来迅速发展起来的一种数值计算方法。其实质是将具有无限多个自由度的连续体理想化为只有有限个自由度的单元集合体。只要确定了单元的力学特性,就可按结构分析的方法求解。由于求解的格式十分明确,因此大部分工作均可由高速的电子计算机实现。

有限元法作为一种高效能的数值方法在岩石力学与岩石工程中得到了很大发展。国内外许多岩石力学和计算力学专家对这一方法的发展和完善作出了贡献。以笔者所见资料,他们包括:辛克维兹(O.C.Zienkiewicz)、德赛(C.S.Desai)、威尔逊(E.L.Wilson)、古德曼(R.E.Goodman)、潘德(G.N.Pandle)、刘怀恒、于学馥、张海东、孙钧、张有天、王仁、殷有泉、郑颖人、陈至达、陶振宇等。

在岩层移动学科,也有许多研究者对有限元法分析岩层移动问题进行了卓有成效的探索。日本学者石岛洋二等对煤层开采引起的地表移动问题进行过计算^[18],开滦煤研所研究了有限元法在水体下采煤中的应用^[19]。耿德庸应用线弹性有限元法对条带开采煤柱的受力状态进行了模拟^[20]。沈光寒等用有限元法分析了岩层移动规律。近年来,用有限元法研究各类岩层和地表移动问题的报道越来越多,这种方法所表现出的灵活性和有效性已逐步获得岩层移动界的承认^[21]。

应当指出,有限元法并不是万能的,它代替不了必要的现场观测和室内实验。有限元法定量计算的精度还受很多条件的制约,主要是以下三个方面:

- (1) 有关岩层的合理物性方程的建立;
- (2) 计算参数的正确选取;
- (3) 功能完备且经过严格考证的计算程序。

关于岩石物性关系(或本构关系)的研究一直是岩石力学中的重要课题,研究范围已涉及到岩石的弹性和非弹性变形、损伤与断裂、破裂后行为、岩体与流体相互作用、有限变形和蠕变等多种性质,得到的某些物性方程比较复杂^[22]。其中较为简单的是岩石的弹性本构关系,对于层状(横观各向同性)介质,这种关系已能够反映岩层的主要特征。

选定了岩层的物性方程后,力学参数成为一个关键问题。以往选取力学参数时,常常从室内岩石力学试验结果出发,对岩块的力学参数作大幅度折减后作为岩体(地层)的力学

参数。由于岩块和岩体在某些参数上（如弹性模量 E ）有数量级的差异，所以这种折减带有相当大的人为因素。由这种参数计算得到的分析结果，人们对其可靠性很难相信，更谈不上有多大把握。近年来，人们对从现场观测资料反演参数的方法表现出越来越大的兴趣。因为观测值（常常是位移）反映了整个地层的特征，由此反求出的参数在代表总体特征方面显然是合理的。

以位移反求力学参数的方法在岩层移动学科的应用比在岩石力学等其它领域要早一些，只不过当时人们没有如此命名而已。在我国从50年代开始进行了地表移动观测工作，并取得了大量资料，应用这些数据求参数已成为一种常规方法。至80年代，在岩石力学界普遍研究位移反分析方法时，岩层移动学科已求出了全国大部分矿区的岩移参数，并编入了规程，供实践中采用。但是以上参数是随机介质力学理论的参数，对连续介质力学的参数求取，还未形成系统。

关于有限单元程序，目前已有一些大型通用程序，如SAP, NONSAP, ADINA, 等。在微机十分普及的条件下，专用分析程序有很强的生命力。在对矿山岩石力学分析的程序中，刘怀恒教授编写的NCAP程序是较好的一个。由德赛和阿贝尔(J.F. Abel)给出的弹性分析简单程序，对于初步接触有限元法的人来说是较易掌握的^[23]。笔者对此程序进行了改进，并加上了横观各向同性单元、无界单元等功能，从而适合于用来解算地表移动问题。

第二节 有限元法分析过程

岩层与地表移动变形分析的有限元法的基本原理和分析步骤可以概述为如下几点：

1. 岩体的离散化

将岩体看作是一个被假想的线或面分割的有限多和有限大的单元体的集合。假定这些单元体之间仅仅是通过节点相互联接和相互制约。节点的位移是基本的未知参数。

为了有效地逼近实际的连续体，并保证具有较高的计算精度，在单元划分方面应考虑在需要重点分析的范围加密网格，其它区域则可稀疏一些。这样既可保证精度，又不致使计算量急剧增加。在单元形状选择方面，可考虑三角形常应变单元、四边形等参元、节理单元和无界单元四种。用四边形单元划分主要计算域，三角形单元补充斜角或加密部分，用节理单元模拟断层和其它不连续面，在需要的地方布置无界单元反映远场性质。图5-1为某工程计算岩层和地表移动所做的网格划分。

2. 选择位移模式

为了能用节点位移表示单元体的位移、变形和应力，必须对单元中位移的分布假定为坐标的某种简单函数，即位移模式。在有限元应用中，普遍选择多项式作为位移模式。在选择多项式的项数和阶次时要考虑到单元的自由度和解的收敛性要求。一般说来，多项式的项数应等于单元的自由度数，其阶次应包括常数项和线性项。选定了位移模式后，就可以导出用节点位移表示单元内任一点位移的表达式，即

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e$$

式中 f ——单元内任一点的位移列阵，

$\{\delta\}^e$ ——单元的节点位移列阵，

$[N]$ ——形函数矩阵，其元素是位置坐标的函数。

3. 分析单元的力学特性

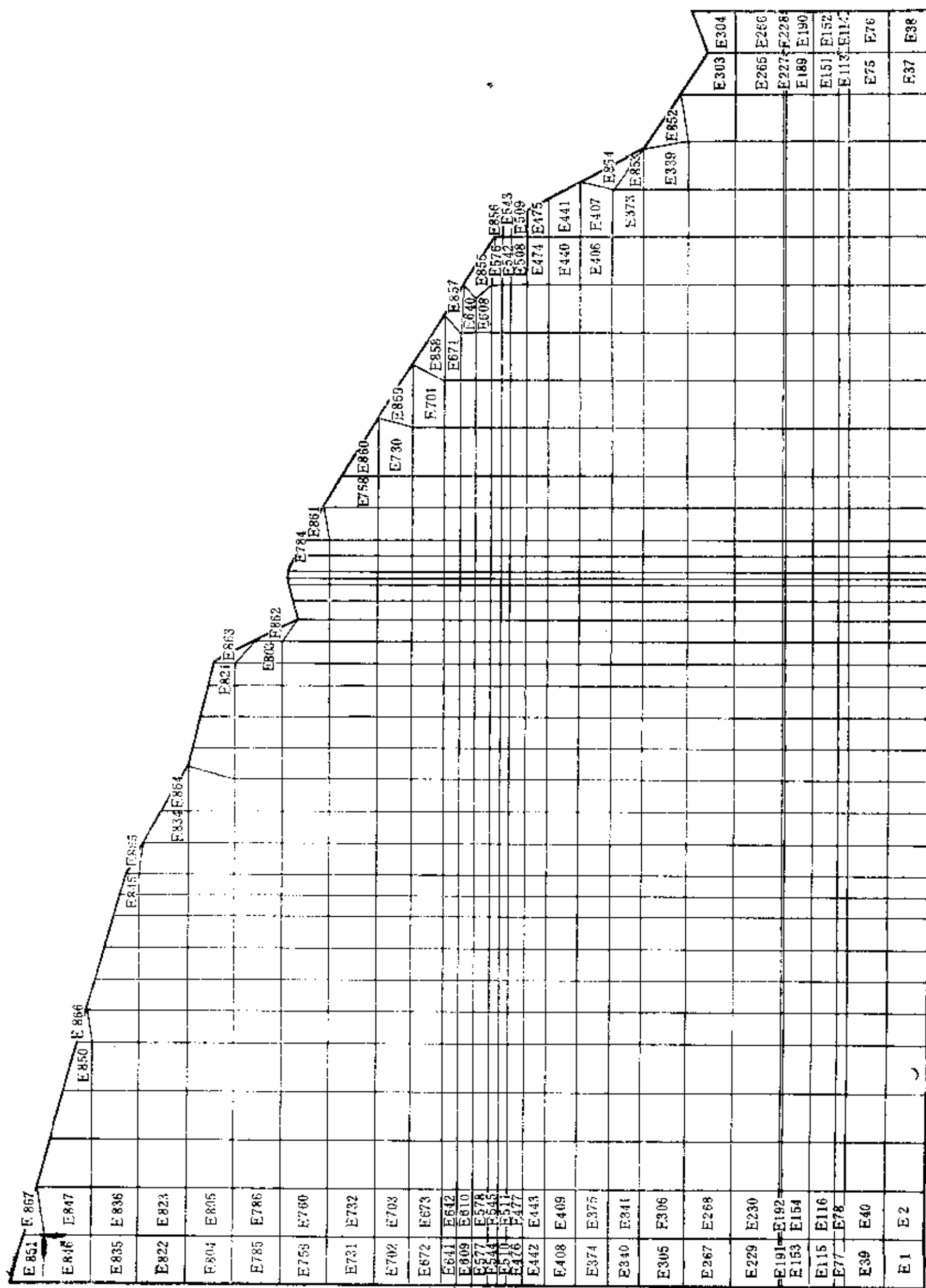


图 5 岩层移动计算网格划分示例

力学特性分析包括三部分^[24]：

(1) 利用几何方程，由位移表达式导出用节点位移表示单元应变的表达式：

$$\{\epsilon\} = [B]\{\delta\}^e$$

式中 $\{\epsilon\}$ 是单元内任一点的应变列阵。

(2) 利用物理方程，由应变表达式导出由节点位移表示单元应力的关系式：

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e$$

式中 $\{\sigma\}$ ——单元内任一点的应力列阵；

$[D]$ ——与单元材料有关的弹性矩阵。

(3) 利用虚功原理，建立作用于单元上的节点力和节点位移之间的关系式，即单元的刚度方程：

$$\{R\}^e = [k]\{\delta\}^e$$

式中 $[k]$ 称为单元刚度矩阵，有

$$[k] = \iiint [B]^T [D] [B] dx dy dz$$

上式积分应遍及整个单元的体积。

4. 计算等效节点力

岩体经过离散化后，假定力是通过节点从一个单元传递到另一个单元的，但作为实际的连续岩体，力却是从单元的公共边界传递到另一个单元的。因此，这种作用在单元边界上的表面力以及作用在单元上的体积力、集中力都需要等效移置到节点上去，也就是用等效的节点力替代所有作用在单元上的力。移置的方法是按照虚功等效的原则进行的。

5. 集合所有单元的刚度方程，建立整个系统的平衡方程

这个组装过程包括两方面的内容。一是由各单元刚度矩阵集成整个岩体的总体刚度矩阵；二是将作用于各单元的等效节点力列阵集成总的荷载列阵。组集的依据是所有相邻单元在公共节点处的位移相等。组装后得到总体平衡方程：

$$[K]\{\delta\} = \{R\}$$

式中 $[K]$ ——整体刚度矩阵；

$\{R\}$ ——荷载列阵；

$\{\delta\}$ ——节点位移列阵。

上述方程应引入几何边界条件。

6. 求解节点位移和计算单元应力与变形

由集合起来的平衡方程组求解可得到节点位移，进而计算单元的应力和应变。

按要求可输出岩层与地表移动变形及应力值，必要时对结果进行后处理，绘出各类等值线图。

第三节 四类平面单元

一、常应变三角形单元

如图5-2所示，常应变三角形单元有三个节点，六个自由度。

单元的节点位移矢量为

$$\{\delta\} = [u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3]^T$$

位移模式选为

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{cases}$$

或以矩阵形式表为

$$\{f\} = [M]\{\alpha\}$$

经变换, 得

$$\{f\} = [N]\{\delta\} = [IN_1 IN_2 IN_3]\{\delta\}$$

式中 $N_1 = (\alpha_1 + b_1 x + c_1 y) / (2\Delta)$;

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= x_j y_m - x_m y_j \\ b_1 &= y_i - y_m \\ c_1 &= x_m - x_j \end{aligned} \right\} (i, j, m);$$

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix};$$

I 为单位矩阵。

单元应变表示为

$$\{\epsilon\}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

对位移模式求导, 并经适当变换, 得

$$\{\epsilon\}^e = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_1 & b_1 & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix} \{\delta\} = [B]\{\delta\}$$

由上式知, 单元应变为常量。

单元刚度矩阵的一般化公式为

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dv$$

由于上式中 $[B]$ 、 $[D]$ 均为常量, 则上式简化为

$$[k]^e = [B]^T [D] [B] \Delta t$$

式中 Δ —— 三角形的面积;

t —— 单元厚度;

$[D]$ —— 弹性矩阵, 其形式后文讨论。

二、四边形等参元

任意四边形单元如图5-3所示。

四节点四边形单元的位移模式可取以下形式:

$$\begin{cases} u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{cases}$$

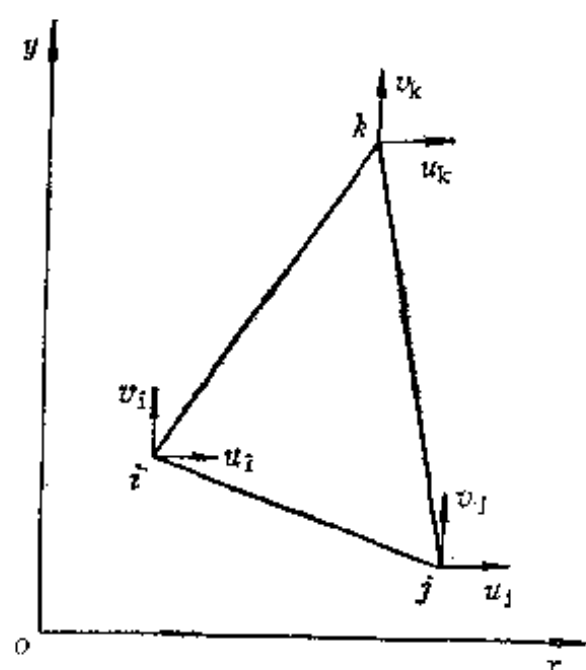


图 5-2 三角形单元

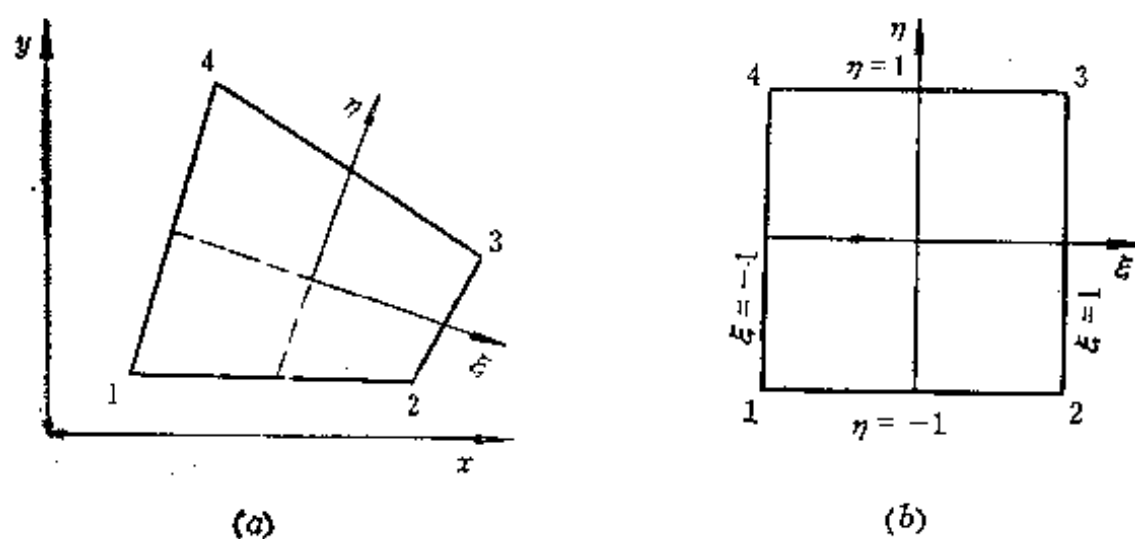


图 5-3 任意四边形四节点等参元及其参考单元

为了便于求单元刚度矩阵, 先进行坐标变换, 即将总体坐标下的任意四边形映射成图 5-3b 所示的正方形参考单元。单元位移可用插值函数表示为节点位移:

$$u = \sum_{i=1}^4 N_i u_i$$

$$v = \sum_{i=1}^4 N_i v_i$$

此处 $N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)$ ($i = 1 \sim 4$)

其中 ξ_i, η_i 为四边形各节点的局部坐标。

局部坐标与整体坐标的关系假定为

$$\begin{cases} x = a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi\eta \\ y = a_5 + a_6\xi + a_7\eta + a_8\xi\eta \end{cases}$$

以单元节点的整体坐标 x_i, y_i 和局部坐标 ξ_i, η_i 分别代入上式, 可导出坐标变换式

$$x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i$$

$$y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i$$

由此可见, 位移函数和坐标变换具有相同的插值函数, 等参元的概念即从此而得。

在建立几何矩阵 $[B]$ 时, 需求对 ξ, η 的导数。局部坐标和总体坐标下的求导关系为

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= [J] \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (i = 1 \sim 4)$$

式中 $[J]$ 为雅可比矩阵。

以上关系的反关系为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (i = 1 \sim 4)$$

用坐标变换式可得出雅可比矩阵为

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^4 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix}$$

几何方程变换为节点位移的表达式:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\} = [B_1 B_2 B_3 B_4]\{\delta\}$$

各分块矩阵为

$$[B_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [J]^{-1} & 0 \\ 0 & [J]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [N_i] & 0 \\ 0 & [N'_i] \end{bmatrix}$$

式中

$$[N'_i] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} \xi_i(1 + \eta\eta_i) \\ \eta_i(1 + \xi\xi_i) \end{Bmatrix}$$

子矩阵 $[B_i]$ 为 3×2 阶, 而 $[B]$ 为 3×8 阶。

最终单元刚度矩阵由以下的积分求得:

$$[k]^* = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] \det [J] d\xi d\eta \cdot t$$

式中 $\det [J]$ 为矩阵 $[J]$ 的行列式。

三、节理单元

这里主要介绍古德曼节理单元。单元模型如图5-4所示。

假定单元无厚度, 沿节理面的应力为法向应力 σ_n 和切向应力 τ_s 。其本构关系表为

$$\begin{Bmatrix} \sigma_n \\ \tau_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_n & 0 \\ 0 & K_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = [D']\{\varepsilon\}$$

式中 K_n 和 K_s 为节理法向和切向刚度。

单元节点位移矢量表示为

$$\{\delta'\} = [u_1 v_1 u_2 v_2 u_3 v_3 u_4 v_4]^T$$

沿节理方向任一点 s 的应变为

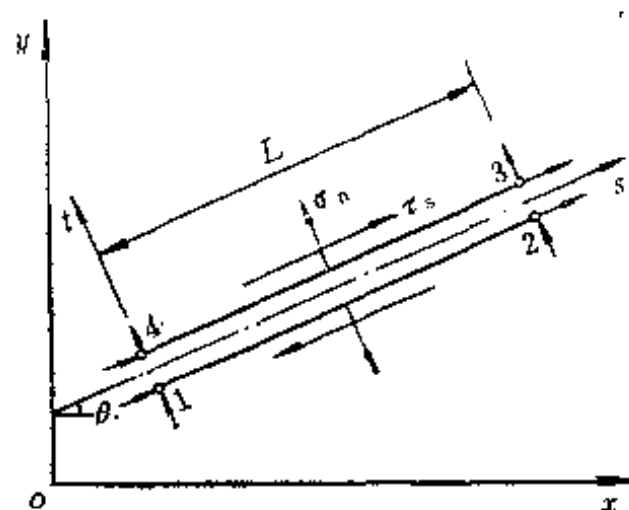


图 5-4 节理单元

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_n \\ \varepsilon_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -L_1 & 0 & -L_2 & 0 & L_2 & 0 & L_1 \\ -L_1 & 0 & -L_2 & 0 & L_2 & 0 & L_1 & 0 \end{bmatrix} \{\delta'\} \\ = [B]\{\delta'\}$$

式中: $L_1 = 1 - S/L$, $L_2 = S/L$ 。

沿节理全长积分, 求出单元刚度矩阵

$$[k']^e = \int_0^L [B]^T [D'] [B] ds$$

得到局部坐标下的单元刚度矩阵:

$$[k']^e = \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2K_s & & & & & & & \\ & 2K_n & & & & & & \\ & & K_s & 0 & 2K_s & & & \\ & & 0 & K_n & 0 & 2K_n & & \\ -K_s & 0 & -2K_s & 0 & 2K_s & & & \\ & 0 & -K_n & 0 & -2K_n & 0 & 2K_n & \\ -2K_s & 0 & -K_s & 0 & K_s & 0 & 2K_s & \\ & 0 & -2K_n & 0 & -K_n & 0 & K_n & 0 & 2K_n \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

经过坐标变换即可将局部坐标下的单元刚度矩阵化为整体坐标下的单元刚度矩阵:

$$[k]^e = [T]^T [k']^e [T]$$

式中

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_0] & & 0 \\ & [T_0] & \\ 0 & & [T_0] \\ & & & [T_0] \end{bmatrix}$$

而

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

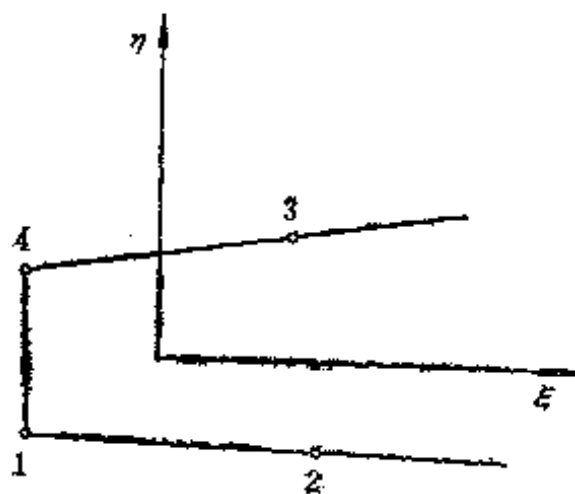


图 5-5 无界单元

古德曼节理单元适合模拟直接接触的层面。在有一定厚度的情况下, 可用 D_n 、 D_s 代替前面导出的单元刚度矩阵中的 K_n 、 K_s 。此时有

$$D_n = \frac{1 - \mu}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)} E$$

$$D_s = G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

式中 E 、 μ 是节理单元材料的弹性模量和泊松比。

四、无界单元

四节点的无界单元选择如图 5-5 所示的形式。设

形函数为 N_1 ,

则

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^4 N_i x_i \\ y = \sum_{i=1}^4 N_i y_i \end{cases}$$

形函数为

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}(1-\eta)\xi \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1-\eta)(1+\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{2}(1+\eta)(1+\xi) \\ N_4 &= -\frac{1}{2}(1+\eta)\xi \end{aligned} \right\} \xi \leq 0$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= -\frac{1}{2}(1-\eta)\xi/(1-\xi) \\ N_2 &= \frac{1}{2}(1-\eta) + \frac{1}{2}(1-\eta)\xi/(1-\xi) \\ N_3 &= \frac{1}{2}(1+\eta) + \frac{1}{2}(1+\eta)\xi/(1-\xi) \\ N_4 &= -\frac{1}{2}(1+\eta)\xi/(1-\xi) \end{aligned} \right\} \xi > 0$$

对于无界单元，位移模式和坐标变换（形函数）并不相同，但可以以 $\xi \leq 0$ 时的形函数为基础施加衰减函数而使远场位移趋于零^[25]。

即

$$M_i = M_i^* f(\xi, \eta)$$

式中 M_i^* 为 $\xi \leq 0$ 时的形函数； f 为衰减函数，可取以下形式：

$$f(\xi, \eta) = \frac{r_1}{r} = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{(\sum N_i x_i)^2 + (\sum N_i y_i)^2}}$$

对于 $\xi \leq 0$ 的情况，单元刚度矩阵为

$$[k]^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^{\infty} [B]^T [D] [B] \det[J] d\xi d\eta$$

当 $\xi > 0$ 时，上述积分上限将 ∞ 换为1。

式中

$$[J] = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \Sigma \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{vmatrix}$$

几何矩阵

$$[B_i] = \begin{pmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_i}{\partial y} \\ \frac{\partial M_i}{\partial y} & \frac{\partial M_i}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial x_i} \\ \frac{\partial M_i}{\partial y_i} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial M_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial M_i}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

五、均质各向同性和横观各向同性岩石的弹性矩阵

以上讨论的各类单元中，确定单元刚度矩阵除了要知道几何矩阵 $[B]$ 外，还应知道弹性矩阵 $[D]$ 。对于均质各向同性岩石的平面应变情况， $[D]$ 即为广义虎克定律：

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{pmatrix}$$

对于横观各向同性岩石材料，其弹性矩阵 $[D]$ 为

$$[D] = \frac{E_2}{(1+\mu_2)(1-\mu_1-2n\mu_1^2)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} n(1-n\mu_1^2) & n\mu_2(1+\mu_2) & 0 \\ n\mu_2(1+\mu_2) & 1-\mu_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & m(1+\mu_1)(1-\mu_1-2n\mu_1^2) \end{pmatrix}$$

式中 $n = E_1/E_2$, $m = G_2/E_2$ 。

以上矩阵对岩层层面与 xy 平面相重合的情形，有：

$$\begin{aligned} E_1 &= E_x = E_y & E_2 &= E_z \\ \mu_1 &= \mu_{xy} = \mu_{yx} & \mu_2 &= \mu_{zx} = \mu_{zy} \\ G_1 &= G_{xy} = \frac{E_1}{2(1+\mu_1)} & G_2 &= G_{zx} = G_{zy} \end{aligned}$$

第四节 有限元程序

一、程序框图

根据有限元法的原理，以文献[23]给出的程序为框架，结合岩层移动计算的特点，设计了岩层和地表移动计算程序FEMS-2，程序的框图如图5-6所示。

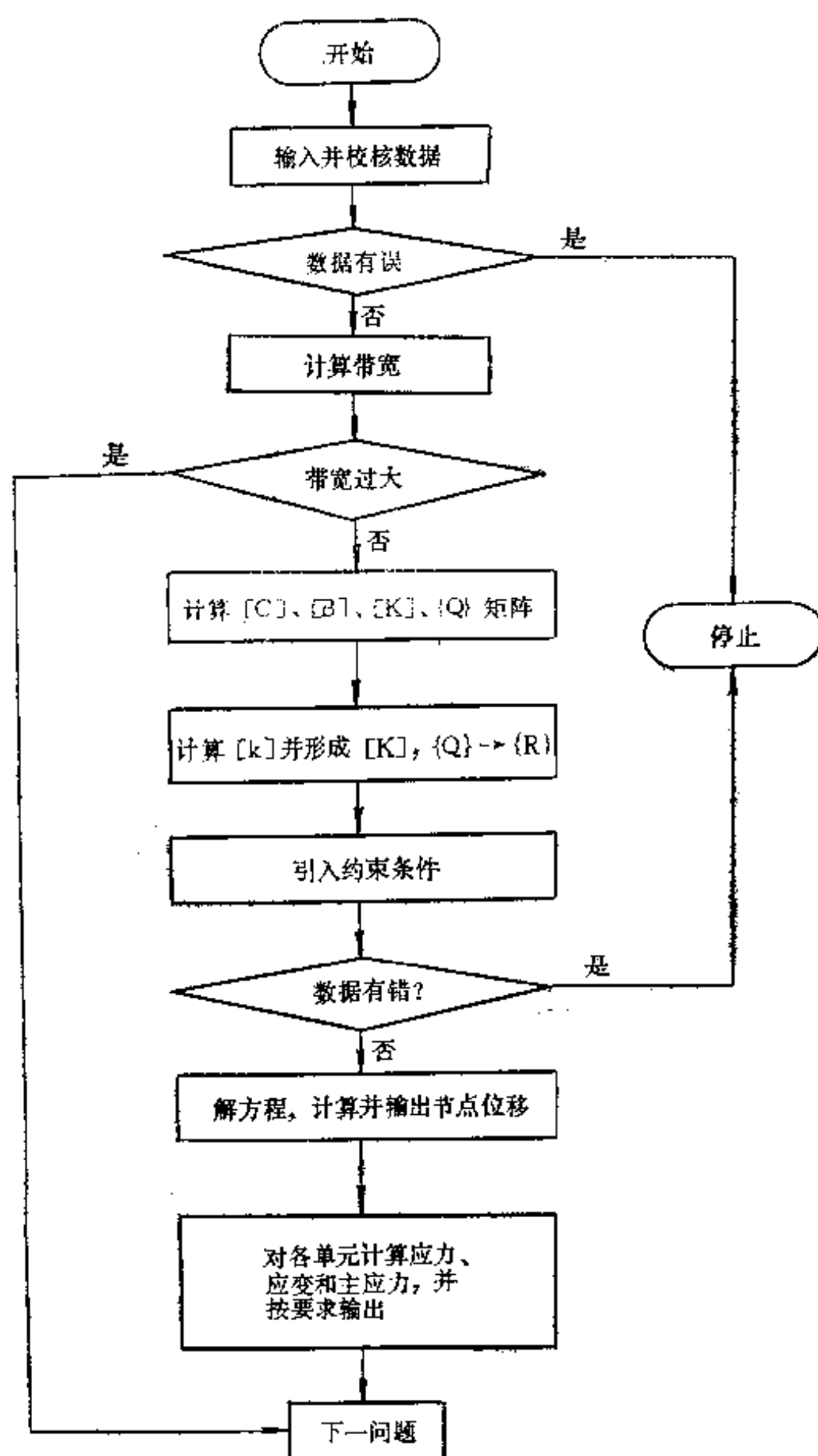


图 5-6 程序框图

二、变量说明

- AK 集合体的刚度矩阵。
 AREA 三角形元素的面积。
 B 四边形元素的矩阵 $[B]$ 。

BODYF	TBODY对节点载荷的贡献。
BT	三角形元素的矩阵 $[B]$ 。
C	应力-应变矩阵 $[C]$ 。
CB	矩阵乘积 $[C][B]$ 。
CF	计算应力-应变矩阵 $[C]$ 时所用的公因子。
E	弹性模量 E 。在STRESS中为元素形心处的应变。
EL	其上规定了面力的元素边长。
FAC	对元素应变取平均值所用的系数。
IBAND	集合体方程的半带宽, $IBAND \leqslant MAXBW$ 。
IE(M,I)	元素标识数组。 M 是元素编号, $1 \leqslant M \leqslant NEL$, $I = 1, 2, 3, 4$ 时表示元素的角节点, 而 $I = 5$ 时表示元素的MTYP。
ISC,JSC	其上规定了面力的边的节点 i 和 j 的节点标号。
ISTOP	用来数数据错误的标号。
I,J,K,L	QUAD中四边形4个节点的标号。
I,J,K	CST中三角形元素3个节点的标号。
KODE(I)	节点 I 处位移和集中载荷条件的标号。
KKK	在BANSOL中, 表示将实行的功能的标号。 $KKK = 1$ 表示刚度矩阵三角化。 $KKK = 2$ 表示用三角化的刚度矩阵后退求解。
MAXBW	存储容量允许的最大半带宽。
MAXDOF	最大自由度数, $MAXDOF = 2 * MAXNP$ 。
MAXEL	存储容量允许的最大元素数目。
MAXMAT	存储容量允许的最大材料类型数目。
MAXNP	存储容量允许的最大节点数目。
MAXSLC	存储容量允许的最大的面力卡片数目。
MDIM	最大带宽, $MDIM = MAXBW$ 。
MTYP	材料类型编号, $1 \leqslant MTYP \leqslant NMAT$ 。
NBODY	体力的选择。 $NBODY = 0$ 表示无重力, $NBODY = 1$ 表示重力作用于 y 的负方向。
NDIM	最大自由度数, $NDIM = MAXDOF$ 。
NEL	元素的数目, $NEL \leqslant MAXEL$ 。
NEQ	方程的总数, $NEQ = 2 * NNP \leqslant MAXDOF$ 。
NMAT	不同材料的数目, $1 \leqslant NMAT \leqslant MAXMAT$ 。
NNP	节点数目, $NNP \leqslant MAXNP$ 。
NOLINE	在STRESS中, 限制每页输出50行的标号。
NOPT	平面应变/应力的选择。 $NOPT = 1$ 表示平面应变, $NOPT = 2$ 表示平面应力。
NPROB	问题的编号。
NSLC	面力卡片的数目, $NSLC \leqslant MAXSLC$ 。
PR	泊松比 ν 。

PXI } PXJ }	面力对 x 方向节点力的贡献。
PYI } PYJ }	面力对 y 方向节点力的贡献。
Q	四边形元素的载荷矢量。在STRESS中, 表示元素的位移矢量。
QK	四边形元素的刚度矩阵。
R	集合体的载荷矢量。在MAIN, BANSOL和 STRESS 中还表示算出的集合体的位移。
RO	材料的重量密度。
SIG	应力数组。
SURTRX } SURTRY }	给定的分布载荷的 x , y 分量。
TBODY	三角形元素的总重量。
TH	厚度 h 。
TITLE	问题的标题 (72个字符)。
TK	三角形元素的刚度矩阵。
TOTALA	四边形元素的总面积。
U	在GEOMBC中表示给定的 x 或 y 方向的位移。
ULX(I) } VLY(I) }	节点 I 处 x 和 y 方向上的集中载荷或位移。
X(I) } Y(I) }	节点 I 的 x 和 y 坐标。
XQ } YQ }	四边形元素或三角形元素的节点坐标 (XQ (5) 和 YQ (5) 是形心的坐标)。

三、子程序说明

DATAIN	读入和原样打印所有输入数据。实行数据校核。
ASEMBL	集合总刚度矩阵和载荷矢量。暂时存储后面计算所需的数据。引入几何边界条件。
QUAD	计算4-CST四边形元素或三角形元素的应力-应变矩阵、刚度矩阵、体力矢量和应变-位移矩阵。
CST	计算常应变三角形 (CST) 元素的应变-位移矩阵、刚度矩阵和体力矢量。
GEOMBC	在每个节点处施加规定的位移边界条件。
BANSOL	用对称高斯-杜利特尔分解法把带状的总刚度矩阵三角化, 或解出对应于每个载荷矢量的位移矢量。
STRESS	计算应变、应力和主应力。打印元素形心处的应力和主应力。

四、源程序

PROGRAM FEMS-2

C

DIMENSION TITLE(9)

COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,

1E(10),PR(10),RO(10),TH(10),IE(100,5),

2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),

3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)

COMMON / ONE / QK(10,10),Q(10),B(3,10),C(3,3),BT(3,6),XQ(5),YQ(5)

COMMON / TWO / IBAND, NEQ, R(240), AK(240,50)

DATA MAXEL, MAXNP, MAXMAT, MAXBW, MAXSLC

1 / 50, 50, 10, 50, 20 /

C

9999 READ 100,NPROB, (TITLE(I),I=1,9)

IF(NPROB.LE.0) GO TO 999

1020 PRINT 200,NPROB,(TITLE(I),I=1,9)

CALL DATAIN (MAXEL,MAXNP,MAXMAT,MAXSLC,ISTOP)

MAXDOF=2 * MAXNP

C

C COMPUTE MAX, NODAL DIFFERENCE AND SEMI-BANDWIDTH

MAXDIF=0

DO 1 I=1, NEL

DO 1 J=1,4

DO 1 K=1,4

LL=IABS(IE(I,J)-IE(I,K))

IF(LL.GT.MAXDIF)MAXDIF=LL

1 CONTINUE

IBAND=2 * (MAXDIF+1)

NEQ=2 * NNP

IF(IBAND.GT.MAXBW) GO TO 900

IF(ISTOP.GT.0) GO TO 999

CALL ASEMBL(ISTOP)

IF(ISTOP.GT.0) GO TO 999

C

CALL BANSOL(2,AK,R,NEQ,IBAND,MAXDOF,MAXBW)

```

      PRINT 300, (I, R(2 * I - 1), R(2 * I), I = 1, NNP)
C
      CALL STRESS
C
      GO TO 9999
900  PRINT 901, IBAND, MAXBW
      GO TO 9999
100  FORMAT(I5,3X,9A8)
200  FORMAT (/ 8H1PROBLEM, I5,3H.,9AB /)
300  FORMAT (37H1OUTPUT TABLE 1., NODAL DISPLACEMENTS / /
1  14X,4HNCDE, 9X, 11HU = X-DISP.,9X,11HV = Y-DISP, /
2  (5X,I12,2E20.8))
901  FORMAT( / / / 12H BANDWIDTH = ,I4,25H EXCEEDS MAX, ALLOWABLE  $\pi$ ,I4 / /
1  30H GO ON TO NEXT PROBLEM
999  STOP
      END
      SUBROUTINE DATAIN(MAXEL,MAXNP,MAXMAT,MAXSLC,ISTOP)
      COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,
1E(10),PR(10),RO(10),TH(10),TE(100,5),
2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),
3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)
C
      ISTOP = 0
      READ 1,NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY
C
      PRINT 100,NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY
C
      IF(NNP.LE.MAXNP) GO TO 201
      ISTOP = ISTOP + 1
      PRINT 251, MAXNP
201  IF(NEL.LE.MAXEL) GO TO 202
      ISTOP = ISTOP + 1
      PRINT 252,MAXEL
202  IF(NMAT.LE.MAXMAT) GO TO 203

```

```

      ISTOP = ISTOP+1
      PRINT 253 MAXMAT
203  IF(NSLC.LE.MAXSLC) GO TO 204
      ISTOP = ISTOP+1
      PRINT 254,MAXSLC
204  IF(ISTOP.EQ.0) GO TO 205
      PRINT 255, ISTOP
      STOP

C
205  READ 2, (E(I),PR(I),RO(I),TH(I),I = 1,NMAT)
      PRINT 101
      PRINT 51, (I,E(I),PR(I),RO(I),TH(I), I = 1,NMAT)

C
      PRINT 103
      N=1
5    READ 3, M,KODE(M),X(M),Y(M),ULX(M),VLY(M)
      IF(M-N)4,6,7
4    PRINT 105,M
      PRINT 52,M,KODE(M), X(M), Y(M),ULX(M),VLY(M)
      ISTOP = ISTOP+1
      GO TO 5
7    DF = M+1-N
      RX = (X(M)-X(N-1))/DF
      RY = (Y(M)-Y(N-1))/DF
8    KODE(N) = 0
      X(N) = X(N-1)+RX
      Y(N) = Y(N-1)+RY
      ULX(N) = 0.0
      VLY(N) = 0.0
6    PRINT 52,N,KODE(N),X(N),Y(N),ULX(N),VLY(N)
      N = N+1
      IF(M-N)9,6,8
9    IF(N.LE.NNP) GO TO 5

C

```



```

      PRINT 106
13   L = 0
14   READ 15, M, (IE(M,I), I = 1, 5)
16   L = L + 1
      IF(M-L) 117, 17, 18
117  PRINT 118, M
      PRINT 53, M, (IE(M,I), I = 1, 5)
      ISTOP = ISTOP + 1
      GO TO 14
18   IE(L,1) = IE(L-1,1) + 1
      IE(L,2) = IE(L-1,2) + 1
      IE(L,3) = IE(L-1,3) + 1
      IE(L,4) = IE(L-1,4) + 1
      IE(L,5) = IE(L-1,5)
17   PRINT 53, L, (IE(L,I), I = 1, 5)
      IF(M-L) 20, 20, 16
20   IF(NEL-L) 21, 21, 14
21   CONTINUE
C
      IF(NSLC.EQ.0) GO TO 31
30   PRINT 108
      DO 40 L = 1, NSLC
      READ 41, ISC(L), JSC(L), SURTRX(L,1), SURTRX(L,2), SURTRY(L,1),
1SURTRY(L,2)
40   PRINT 42, ISC(L), JSC(L), SURTRX(L,1), SURTRX(L,2), SURTRY(L,1),
1SURTRY(L,2)
31   IF(ISTOP.EQ.0) GO TO 999
      PRINT 900, ISTOP
C
      IFORMAT(6I5)
100  FORMAT(35H0 INP UT TABLE 1., BASIC PARAMETERS / /
15X, 40H NUMBER OF NODAL POINTS.....I5 /
25X, 40H NUMBER OF ELEMENTS.....I5 /
35X, 40H NUMBER OF DIFFERENT MATERIALS...I5 /

```

```

45X, 40H NUMBER OF SURFACE LOAD CARDS...I5 /
55X, 40H 1 = PLANE STRAIN, 2 = PLANE STRESS..I5 /
65X, 40H BODY FORCES(1 = IN-Y DIREC., 0 = NONE),I5)
251  FORMAT( / / / / 33H TOO MANY NODAL POINTS, MAXIMUM = ,I5)
252  FORMAT( / / / / 30H TOO MANY ELEMENTS, MAXIMUM = ,I5)
253  FORMAT( / / / / 30H TOO MANY MATERIALS, MAXIMUM = ,I5)
254  FORMAT( / / / / 40H TOO MANY SURFACE LOAD CARDS, MAXIMUM = ,I5)
255  FORMAT( / / / / 28H EXECUTION HALTED BECAUSE OF,I5,13H FATAL ERRORS / )
      2FORMAT(4E10.3)
101  FORMAT (36HINPUT TABLE 2.. MATERIAL PROPERTIES / /
      110H MATERIAL,5X,10HNODJLUS OF,6X,9HPOISSON'S,7X,
      28HMATERIAL,7X, 8HMATERIAL /
      34X,6HNUMBER,5X,10HELASTICITY,BX,7H RATIO,8X,7HDENSITY,6X,
      49HTHICKNESS
5    1FORMAT(I10,4E15.4)
103  FORMAT(34HINPUT TABLE 3.. NOUAL POINT DATA / /
      15X,5HNODAL, 48X, 7HX-DISP.,8X,7HY-DISP. /
      25X,5HPOINT,6X,4HTYPE,14X,1HX,14X,1HY,8X,7HOR LOAD,8X,7HOR LOAD)
3    FORMAT (2I5,4E10.3)
105  FORMAT (5X,17HERROR IN CARD NO., I5 / )
52   FORMAT (2I10,4E15.4)
106  FORMAT (34HINPUT TABLE 4., ELEMENT DATA      / /
      111X,31HGLOBAL INDICES OF ELEMENT NODES / 3X,7HELEMENT,
      27X, 1HI,7X,1HZ,7X,1HS,7X,1H4,2X,8HMATERIAL)
118  FORMAT(5X, 25HERROR IN ELEMENT CARD NO., I5 / )
15   FORMAT(6I5)
53   FORMAT(I10,4I8,I10)
108  FORMAT(37HINPUT TABLE 5.. SURFACE LOADING DATA / /
      117X, 33HSURFACE LOAD INTENSITIES AT NODES /
      24X,6HNODE I,4X,6HNODE J,10X,2HXI,10X,2HXJ,10X,2HYI,10X,2HYJ)
41   FORMAT (2I5,4E10.3)
42   FORMAT (2I10,4E12.4)
900  FORMAT ( / / / 45H ASSEMBLY AND SOLUTION WILL NOT BE PERFORMED,I5.
      121H FATAL CARD ERRORS

```

```

990  RETURN
      END

```

```

      SUBROUTINE ASEMBL(ISTOP)
      COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,
1E(10),PR(10),RO(10),TH(10),IE(100,5)
2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),
3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)
      COMMON / ONE / QK(10,10),Q(10),B(3,10),C(3,3),BT(3,6),XQ(5),YQ(5)
      COMMON / TWO / IBAND, NEQ, R(240),AK(240,50)
      DIMENSION LP(8)
      REWIND1

```

C

```

      ISTOP=0
      BT(1,4)=0.0
      BT(1,5)=0.0
      BT(1,6)=0.0
      BT(2,1)=0.0
      BT(2,2)=0.0
      BT(2,3)=0.0
      C(1,3)=0.0
      C(2,3)=0.0
      C(3,1)=0.0
      C(3,2)=0.0

```

C

```

      DO 2 I=1,NEQ
      R(I)=0.0
      DO 2 J=1,IBAND
2  AK(I,J)=0.0

```

C

C

```

      DO 10 M=1,NEL
      IF(IE(M,5).GT.0) GO TO 11

```

```

      ISTOP=ISTOP+1
      GO TO 10
11    CALL QUAD(M,AREA)
      IF(AREA.GT.0.0) GO TO 16
      ISTOP =ISTOP+1
      PRINT 20,M
C
16    IF(IE(M,3).EQ.IE(M,4)) GO TO 26
      DO 31 J=1,2
      IJ=10-J
      IK=IJ+1
      PIVOT=QK(IK,IK)
      DO 32 K=1,IJ
      F=QK(IK,K)/PIVOT
      QK(IK,K)=F
      DO 33 I=K,IJ
      QK(I,K)=QK(I,K)-F*QK(I,IK)
33    QK(K,I)=QK(I,K)
32    Q(K)=Q(K)-QK(IK,K)-Q(IK)
31    Q(IK)=Q(IK)/PIVOT
C
26    WRITE (1)((QK(I,J),J=1,10),I=9,10),Q(9),Q(10),
      1((B(I,J),J=1,10),I=1,3),((C(I,J),J=1,3),I=1,3),XQ(5),Q(5)
C
C
      LIM=8
      IF(IE(M,3).EQ.IE(M,4)) LIM=6
      DO 40 I=2,LIM,2
      IJ=I/2
      LP(I-1)=2*IE(M,IJ)-1
40    LP(I)=2*IE(M,IJ)
      DO 50 LL=1,LIM
      I=LP(LL)
      R(I)=R(I)+Q(LL)

```

```

      DO 50 MM = 1, LIM
      J = LP(MM) - I + 1
      IF(J.LE.0) GO TO 50
      AK(I,J) = AK(I,J) + QK(LL,MM)
50    CONTINUE
10    CONTINUE
C
      DO 55 N = 1, NNP
      IF(KODE(N).EQ.3) GO TO 55
      K = 2 * N
      IF(KODE(N).EQ.1) GO TO 57
      R(K-1) = R(K-1) + ULX(N)
      IF(KODE(N).NE.0) GO TO 55
57    R(K) = R(K) + VLY(N)
55    CONTINUE
C
      IF(NSLC.EQ.0) GO TO 60
      DO 61 L = 1, NSLC
      I = ISC(L)
      J = JSC(L)
      II = 2 * I
      JJ = 2 * J
      DX = X(J) - X(I)
      DY = Y(J) - X(I)
      EL = SQRT(DX * DX + DY * DY)
      RXI = SURTRX(L,1) * EL
      PXI = SURTRX(L,2) * EL
      PYI = SURTRY(L,1) * EL
      PYJ = SURTRY(L,2) * EL
      R(II-1) = R(II-1) + PXI / 3.0 + PXJ / 6.0
      R(JJ-1) = R(JJ-1) + PXI / 6.0 + PXJ / 3.0
      R(II) = R(II) + PYI / 3.0 + PYJ / 6.0
      R(JJ) = R(JJ) + PYI / 6.0 + PYJ / 3.0
61    CONTINUE

```

C

C

```

60  DO 70 M=1,NNP
    IF(KODE(M).GE.0.AND.KODE(M).LE.3) GO TO 72
    ISTOP=ISTOP+1
    GO TO 70
72  IF(KODE(M).EQ.0) GO TO 70
    IF(KODE(M).EQ.2) GO TO 71
    CALL GEOMBC(ULX(M),2 * M-1)
    IF(KODE(M).EQ.1) GO TO 70
71  CALL GEOMBC(VLY(M),2 * M)
70  CONTINUE
    ENDFILE 1
    IF(ISTOP.EQ.0) GO TO 81
    PRINT 100,ISTOP
20  FORMAT( / 5X,17H AREA OF ELEMENT, I5,14H IS NEGATIVE / )
100  FORMAT( / / / / 42H SOLUTION WILL NOT BE PERFORMED BECAUSE OF,I5,
    115H DATA ERRORS / )
81  RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE QUAD(M,TOTALA)
COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,
1E(10),PR(10),RO(10),TH(10),IE(100,5),
2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),
3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)
COMMON / ONE / QK(10,10),Q(10), B(3,10), C(3,3) BT(3,6),XQ(5),YQ(5)
COMMON / TWO / IBAND, NEQ, R(240),AK(240,50)

```

C

```

I=IE(M,1)
J=IE(M,2)
K=IE(M,3)
L=IE(M,4)

```

```

MTYP=IE(M,5)
TOTALA=0.0
C
IF(NMAT.EQ.1.AND.M.GT.1) GO TO 5
IF(NOPT.EQ.2) GO TO 2
CF=E(MTYP)/((1.0+PR(MTYP))*1.0-2.0*PR(MTYP))
C(1,1)=CF*(1.0-PR(MTYP))
C(1,2)=CF*PR(MTYP)
C(2,1)=C(1,2)
C(2,2)=C(1,1)
C(3,3)=CF*(1.0-2.0*PR(MTYP))/2.0
GO TO 5
2  CF=E(MTYP)/(1.0-PR(MTYP)*PR(MTYP))
   C(1,1)=CF
   C(1,2)=PR(MTYP)*CF
   C(2,1)=C(1,2)
   C(2,2)=CF
   C(3,3)=CF*(1.0-PR(MTYP))/2.0
5  LIM=4
   IF(K.EQ.L)LIM=3
   XQ(5)=0.0
   YQ(5)=0.0
   DO 10 N=1:LIM
     NN=IE(M,N)
     XQ(N)=X(NN)
     YQ(N)=Y(NN)
     XQ(5)=XQ(5)+X(NN)/FLOAT(LIM)
10  YQ(5)=YQ(5)+Y(NN)/FLOAT(LIM)
C
   DO 13 II=1,10
     Q(II)=0.0
     DO 12 JJ=1,10
12  QK(II,JJ)=0.0
     DO 13 JJ=1,3

```

```

13  B(JJ,II)=0.0
    IF(K.NE.L) GO TO 15
    CALL CST(1,2,3,TOTALA)
    GO TO 999
15  CALL CST(1,2,5,AREA)
    TOTALA=TOTALA+AREA
    CALL CST(2,3,5,AREA)
    TOTALA=TOTALA+AREA
    CALL CST(3,4,5,AREA)
    TOTALA=TOTALA+AREA
    CALL CST(4,1,5,AREA)
    TOTALA=TOTALA+AREA
999  RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE CST(I,J,K,AREA)
COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,
IE(10),PR(10),RO(10),TH(10),IE(100,5),
2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),
3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)
COMMON / ONE / QK(10,10),Q(10),B(3,10),C(3,3),BT(3,6),XQ(5),YQ(5)
COMMON / TWO / IBAND,NEQ,R(240),AK(240,50)
DIMENSION CB(3,6),LC(6),LT(3),TK(6,6)

```

C

```

LT(1)=I
LT(2)=J
LT(3)=K

```

C

```

BT(1,1)=YQ(J)-YQ(K)
BT(1,2)=YQ(K)-YQ(I)
BT(1,3)=YQ(I)-YQ(J)
BT(2,4)=XQ(K)-XQ(J)
BT(2,5)=XQ(I)-XQ(K)

```



```

BT(2,6)=XQ(J)-XQ(I)
BT(3,1)=BT(2,4)
BT(3,2)=BT(2,5)
BT(3,3)=BT(2,6)
BT(3,4)=BT(1,1)
BT(3,5)=BT(1,2)
BT(3,6)=BT(1,3)
AREA=(BT(2,4)*BT(1,3)-BT(2,6)*BT(1,1))/2.0
C
DO 10 II=1,3
DO 10 JJ=1,6
CB(II,JJ)=0.0
DO 10 KK=1,3
10 CB(II,JJ)=CB(II,JJ)+C(II,KK)*BT(KK,JJ)
C
DO 12 II=1,6
DO 12 JJ=1,6
TK(II,JJ)=0.0
DO 12 KK=1,3
12 TK(II,JJ)=TK(KK,JJ)+BT(KK,II)*CB(KK,JJ)
DO 15 II=1,3
LC(II)=2*LT(II)-1
15 LC(II+3)=2*LT(II)
DO 30 II=1,6
LL=LC(II)
FK=1.0/(4.0*AREA)
FB=2.0*FK
DO 20 JJ=1,6
MM=LC(JJ)
20 QK(LL,MM)=QK(LL,MM)+TK(II,JJ)*TH(MTYP)*FK
DO 30 JJ=1,3
30 B(JJ,LL)=B(JJ,LL)+BT(JJ,II)*FB
C
IF(NBODY.EQ.0) GO TO 999

```

```

      TBODYF=AREA*RO(MTYP)*TH(MTYP)
      BODYF=-TBODYF/3.0
      DO 35 II=1,3
      JJ=2*LT(II)
35    Q(JJ)=Q(JJ)+BODYF
999  RETURN
      END.

```

SUBROUTINE STRESS

```

      COMMON NNP,NEL,NMAT,NSLC,NOPT,NBODY,MTYP,
      IE(10),PR(10),RO(10),TH(10),IE(100,5),
      2X(120),Y(120),ULX(120),VLY(120),KODE(120),ISC(20),JSC(20),
      3SURTRX(20,2),SURTRY(20,2)
      COMMON / ONE / QK(10,10),Q(10),B(3,10),C(3,3),BT(3,6),XQ(5),YQ(5)
      COMMON / TWO / IBAND,NEQ,R(210),AK(240,50)
      DIMENSION SIG(6)

```

C

```

      REWIND 1
      PRINT 300
      NOLINE=47

```

C

```

      DO 5 M=1,NEL
      READ(1)((QK(I,J),I=1,10),I=1,2),Q(9),Q(10),
      1((B(I,J),I=1,10),I=1,3),((C(I,J),J=1,3),I=1,3),XC,YC

```

C

```

      IF(IE(M,3).EQ.IE(M,4)) LIM=3
      DO 10 I=1,LIM
      II=2*I
      JJ=2*IE(M,I)
      Q(II-1)=R(JJ-1)
10    Q(II)=R(JJ)

```

C

```

      IF(LIM.EQ.3) GO TO 16

```

```

      DO 15 K=1,2
      JK=K+8
      IK=JK-1
      DO 15 L=1,IK
15    Q(JK)=Q(JK)-QK(K,L)*Q(L)
C
      LIM=10
      FAC=0.25
      GO TO 17
16    LIM=6
      FAC=1.0
17    DO 20 I=1,3
      E(I)=0.0
20    E(I)=E(I)+B(I,J)*Q(J)*FAC
      DO 30 I=1,3
      SIG(I)=0.0
      DO 30 J=1,3
30    SIG(I)=SIG(I)+C(I,J)*E(J)
      SP=(SIG(1)+SIG(2))/2.0
      SM=(SIG(1)-SIG(2))/2.0
      DS=SQRT(SM*SM+SIG(3)*SIG(3))
      SIG(4)=SP+DS
      SIG(5)=SP-DS
      SIG(6)=0.0
      IF(SIG(3).NE.0.0.AND.SM.NE.0.0) SIG(6)=28.648*ATAN2(SIG(3),SM)
      IF (NOLINE.GT.0)GO TO 54
      PRINT 1000
      NOLINE=49
54    NOLINE=NOLINE-1
5    PRINT 1010,M,XC,YC,CSIG(I),I=1,6)
      ENDFILE 1
300 FORMAT(47H1OUTPUT TABLE 2,STRESSES AT ELEMENT CENTROI
      1DS / / 1x, 7HELEMENT, 9X,1HX,9X,1HY,4X,BHSIGMA(X),4X,BHSIG
      2MA(Y),4X,8HTAU(X,Y),4X,8HSIGMA(1),4X,BHSIGMA(2),7X,5HANGLE)

```

```
1000 FORMAT(1H1, 7HELEMENT,9X,1HX,9X,1HY,4X8HSIGMA(X),4X,BHSIG
      1MA(Y),4X,BHTAU(X,Y),4X,BHSIGMA(1),5X,BHSIGMA(2),7X,5HANGLE)
```

```
1010 FORMAT(I8,2F10.2,1P6E12.4)
```

```
      RETURN
```

```
      END
```

```
      SUBROUTINE GEOMBC(U,V)
```

```
      COMMON / TWO / IBAND,NEQ,R(240),AK(240,50)
```

```
      C DOM N
```

```
      DO 100 M=2,IBAND
```

```
      K=N-M+1
```

```
      IF(K.LE.0) GO TO 50
```

```
      R(K)=R(K)-AK(K,M)*U
```

```
      AK(K,M)=0.0
```

```
50      K=N+M-1
```

```
      IF(K.GT.NEQ) GO TO 100
```

```
      R(K)=R(K)-AK(N,M)*U
```

```
      R(N)=1.0
```

```
100     CONTINUE
```

```
      AK(N,1)=1.0
```

```
      R(N)=U
```

```
      RETURN
```

```
      END.
```

```
      SUBROUTINE BANSOL(KKK,AK,R,NEQ,IBAND,NDIM,MDIM)
```

```
      DIMENSION AK(NDIM,MDIM),R(1)
```

```
      NRS=NEQ-1
```

```
      NR=NEQ
```

```
      FI(KKK.EQ.2) GO TO 200
```

```
      DO 120 N=1,NRS
```

```
      M=N-1
```

```
      MR=MIN0(IBAND,NR-M)
```

```

      PIVOT=AK(N,1)
      DO 120 L=2,MR
      CP=AK(N,L)/PIVOT
      I=M+L
      J=0
      DO 110 K=L,MR
      J=J+1
110   AK(I,J)=AK(I,J)-CP*AK(N,K)
120   AK(N,L)=CP
      GO TO 400
200   DO 220 N=1,NRS
      M=N-1
      MR=MIN0(IBAND,NR-M)
      CP=R(N)
      R(N)=CP/AK(N,1)
      DO 220 L=2,MR
      I=M+L
220   R(I)=R(I)-AK(N,L)*CP
      R(NR)=M(NR)/AK(NR,1)
      DO 320 I=1,NRS
      N=NR-I
      M=N-1
      MR=MIN0(IBAND,NR-M)
      DO 320 K=2,MR
      L=M+K
320   R(N)=R(N)-AK(N,K)*R(L)
400   RETURN
      END

```

第六章 岩层与地表移动变形计算的边界单元法

边界单元法 (Boundary Element Method) 是本世纪70年代以来迅速发展起来的一门新的计算方法。边界元法将边界的广义位移或广义力作为独立变量, 以满足场方程的奇异函数 (基本解) 作为加权函数, 因而是一种特殊格式的加权余量法[26]。

边界单元法用于求解岩层和地表移动问题有一些特点, 如只剖分边界, 使求解的问题降低了一维, 具有节省机时和减少数据准备量的特点; 计算岩体内部的移动变形有解析公式, 不必借助于数值积分或插值计算。但是, 对于介质不均匀、地质构造复杂和几何形状极不规则的情况, 边界元法模拟较困难些。因而, 边界元法和其它数值方法 (如有限元、有限差分元) 相结合能更有效地解决一些复杂问题。

一般认为, 边界元法是本世纪70年代才发展起来的[27]。英国学者布雷拜 (C.A. Brebbia) 对此方法及工程应用做出了重要贡献[26]。美国学者克劳齐对边界元法在固体力学中的应用有深入研究, 并独创性的发展了间接方法[11]。在我国, 杜庆华、王泳嘉等对边界元法的研究较早[28]、[29]。目前有关边界元法研究的文献很多, 全部罗列出来是不太可能的。

将边界元法引入岩层移动研究, 笔者曾对均质模型和横观各向同性模型进行了探讨[30]、[31]。

第一节 岩层移动位错理论解

一、模型和基本假定

煤层开采选择位错模式, 见图6-1所示。该模式的基本假定为:

- (1) 岩层为均质、横观各向同性的线弹性介质;
- (2) 平面应变问题, 开采在 z 方向为超充分采动;
- (3) 将煤层和断层视为具有恒位错的裂缝;
- (4) 地表为零应力表面, 即半无限平面问题。

二、求解途径

根据横观各向同性介质的假定, 其本构方程为

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1/2S_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \frac{1-\mu_1^2}{E_1} & -\frac{\mu_2(1+\mu_1)}{E_1} & 0 \\ -\frac{\mu_2(1+\mu_1)}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\mu_2^2}{E_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2G} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6-1)$$

代入变形协调方程并引入应力函数, 得相容方程为

$$S_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (S_{66} + 2S_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + S_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = 0 \quad (6-2)$$

进行Fourier变换, 在象空间解析, \bar{F} 分为上、下两个半平面, 具有以下形式

$$\begin{cases} \bar{F}^* = (Ae^{-\gamma_1 y} + Be^{-\gamma_2 y})H_0 & y \geq 0 \\ \bar{F} = (Ce^{\gamma_1 y} + De^{\gamma_2 y})H_0 & y \leq 0 \end{cases} \quad (6-3)$$

γ_1, γ_2 是弹性常数的组合, 即

$$\begin{cases} \gamma_1^2 \\ \gamma_2^2 \end{cases} = (C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_2})/2 \quad (6-4)$$

式中 $C_1 = (S_{66} + 2S_{12})/S_{11}$, $C_2 = S_{22}/S_{11}$ 。

求解半无限平面内恒位错问题, 首先求出无限域内集中位错的解答; 然后构造半平面问题的奇异解, 自动满足地表的零应力状态; 最后将奇异解沿线段积分, 即得到整个问题的解答。

三、无限域内集中位错问题

(1) $D_x = 1$ 时 (图6-2) 的状态向量各分量为

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = A\gamma_1^2 G_{41} + B\gamma_2^2 G_{42} \\ \sigma_{yy} = -AG_{41} - BG_{42} \\ \sigma_{xy} = -A\gamma_1 G_{51} - B\gamma_2 G_{52} \\ U_x = A(\gamma_1^2 S_{11} - S_{12})G_{31} + B(\gamma_2^2 S_{11} - S_{12})G_{32} \\ U_y = A[\gamma_1^2 S_{11} - \gamma_1(S_{12} + S_{66})]G_{21} + B[\gamma_2^2 S_{11} - \gamma_2(S_{12} + S_{66})]G_{22} \end{cases} \quad (6-5)$$

式中 G_{ij} ——函数系列, G_{ij} 见表6-1, $y_i = \gamma_i y$;

A, B, C, D ——系数, $A = \frac{1}{2S_{11}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$, $B = -A$, $C = -A$, $D = A$ 。

(2) $D_y = 1$ (图6-3) 时的状态向量

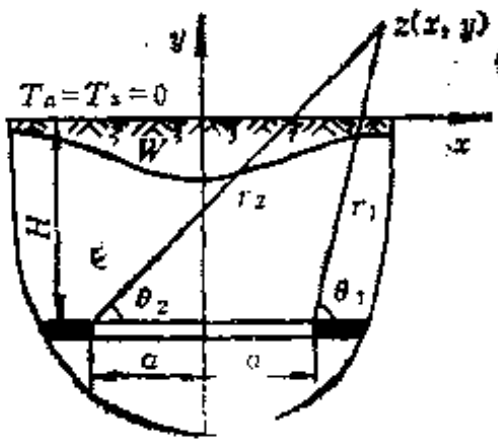


图 6-1 岩层移动模型

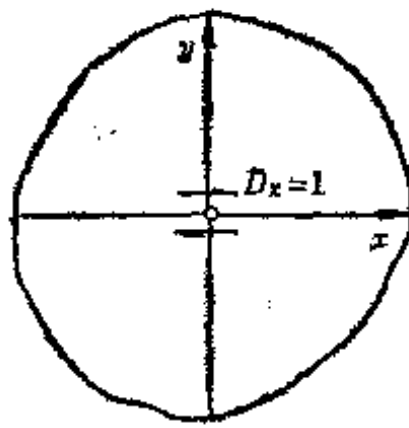


图 6-2 $D_x = 1$ 时状态向量

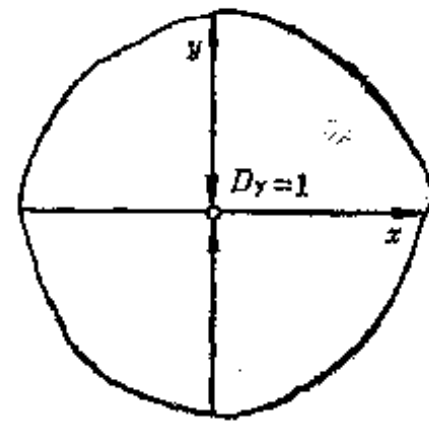


图 6-3 $D_y = 1$ 时的状态向量

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -A\gamma_1^2 G_{51} - B\gamma_2^2 G_{52} \\ \sigma_{xy} = -A\gamma_1 G_{41} - B\gamma_2 G_{42} \\ \sigma_{yy} = AG_{51} + BG_{52} \\ U_x = -A(S_{11}\gamma_1^2 - S_{12})G_{21} - B(S_{11}\gamma_2^2 - S_{12})G_{22} \\ U_y = A[S_{11}\gamma_1^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_1]G_{31} + B[S_{11}\gamma_2^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_2]G_{32} \end{cases} \quad (6-6)$$

表 6-1 函数 G 系列

	G_{11}	G_{12}
2	$-\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y_1^2}$	$-\frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + y_2^2}$
3	$-\frac{1}{\pi} \frac{y_1}{x^2 + y_1^2}$	$-\frac{1}{\pi} \frac{y_2}{x^2 + y_2^2}$
4	$\frac{1}{\pi} \frac{2xy_1}{(x^2 + y_1^2)^2}$	$\frac{1}{\pi} \frac{2xy_2}{(x^2 + y_2^2)^2}$
5	$\frac{1}{\pi} \frac{x^2 - y_1^2}{(x^2 + y_1^2)^2}$	$\frac{1}{\pi} \frac{x^2 - y_2^2}{(x^2 + y_2^2)^2}$

式中 $A = \frac{1}{2\gamma_1 S_{11}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$; $B = -\frac{1}{2\gamma_2 S_{11}(\gamma_1^2 - \gamma_2^2)}$; $C = A$; $D = B$ 。

四、半平面问题的解答

为了求解包含零应力状态地表的半无限平面问题, 利用镜象法寻找一个余解, 满足地表的应力自由条件。此时半平面问题完全解的形式为

$$\begin{cases} U_i = U_i^A + U_i^C \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^A + \sigma_{ij}^C \end{cases} \quad (6-7)$$

这里 A 解 σ_{ij}^A 、 U_i^A 中的 G_{ij}^A 是将 G_{ij} 中的 y 以 $y+h$ 代入得到的, 所表示的是实际位错所产生的分量。 C 解是要寻找的余解, 表达式为

(1) $D_x = 1$ 时

$$\begin{cases} \sigma_{xx}^C = C_1 \gamma_1^2 G_{11}^C + D_1 \gamma_2^2 G_{22}^C + C_2 \gamma_1^2 G_{11}^{C'} + D_2 \gamma_2^2 G_{22}^{C'} \\ \sigma_{yy}^C = C_1 G_{11}^C + D_1 G_{22}^C + C_2 G_{11}^{C'} + D_2 G_{22}^{C'} \\ \sigma_{xy}^C = C_1 \gamma_1 G_{31}^C + D_1 \gamma_2 G_{32}^C + C_2 \gamma_1 G_{31}^{C'} + D_2 \gamma_2 G_{32}^{C'} \\ U_x^C = -C_1(\gamma_1^2 S_{11} - S_{12})G_{11}^C - D_1(\gamma_2^2 S_{11} - S_{12})G_{22}^C - \\ \quad - C_2(\gamma_1^2 S_{11} - S_{12})G_{11}^{C'} - D_2(\gamma_2^2 S_{11} - S_{12})G_{22}^{C'} \\ U_y^C = -C_1[\gamma_1^2 S_{11} - \gamma_1(S_{12} + S_{66})]G_{11}^C - D_1[\gamma_2^2 S_{11} - \gamma_2(S_{12} + S_{66})]G_{22}^C - \\ \quad - C_2[\gamma_1^2 S_{11} - \gamma_1(S_{12} + S_{66})]G_{11}^{C'} - D_2[\gamma_2^2 S_{11} - \gamma_2(S_{12} + S_{66})]G_{22}^{C'} \end{cases} \quad (6-8)$$

(2) $D_y = 1$ 时

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = -C_1 \gamma_1^2 G_{11}^C - D_1 \gamma_2^2 G_{22}^C - C_2 \gamma_1^2 G_{11}^{C'} - D_2 \gamma_2^2 G_{22}^{C'} \\ \sigma_{yy} = C_1 G_{11}^C + D_1 G_{22}^C + C_2 G_{11}^{C'} + D_2 G_{22}^{C'} \\ \sigma_{xy} = -C_1 \gamma_1 G_{31}^C - D_1 \gamma_2 G_{32}^C - C_2 \gamma_1 G_{31}^{C'} - D_2 \gamma_2 G_{32}^{C'} \\ U_x^C = -C_1(S_{11}\gamma_1^2 - S_{12})G_{11}^C - D_1(S_{11}\gamma_2^2 - S_{12})G_{22}^C - \\ \quad - C_2(S_{11}\gamma_1^2 - S_{12})G_{11}^{C'} - D_2(S_{11}\gamma_2^2 - S_{12})G_{22}^{C'} \\ U_y^C = C_1[S_{11}\gamma_1^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_1]G_{11}^C + D_1[S_{11}\gamma_2^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_2]G_{22}^C + \\ \quad + C_2[S_{11}\gamma_1^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_1]G_{11}^{C'} + D_2[S_{11}\gamma_2^2 - (S_{12} + S_{66})\gamma_2]G_{22}^{C'} \end{cases} \quad (6-9)$$

式中 G_{ij}^C , $G_{ij}^{C'}$ ——是将 G_{ij} 中的 y 分别以 $\gamma_i(y-h)$ 及 $\gamma_i y - \gamma_j h (i \neq j)$ 代入得到的;
 C_i , D_i ——系数, 即

$$C_1 = A \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad C_2 = \frac{2B\gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2},$$

$$D_1 = -B \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{\gamma_1 - \gamma_2}, \quad D_2 = -2A \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

五、沿线段的恒位错问题

沿线段恒位错的解答可由集中位错沿线段积分得到。这里给出的水平位错线段的解答，即将 G_{ij} 换为 F_{ij} ($j=1, 2$)，函数 F_i 为

$$\left\{ \begin{array}{l} F_2 = \frac{1}{\pi} (\ln r_1 - \ln r_2) \\ F_3 = \frac{1}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) \\ F_4 = -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{r_1} \sin \theta_1 - \frac{1}{r_2} \sin \theta_2 \right) \\ F_5 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{r_1} \cos \theta_1 - \frac{1}{r_2} \cos \theta_2 \right) \end{array} \right. \quad (6-10)$$

式中 θ_i 取值在 $(-\pi, \pi)$ 内。

第二节 岩层移动计算的边界元法

一、边界元法

边界元法是近十几年来迅速发展起来的一种工程数值分析方法。对于研究岩层和地表移动问题，它与有限元法相比具有一系列优点：

(1) 边界元法只剖分边界，这就使得求解的问题降低了一维。就是说，三维问题只需使用二维面单元，平面问题只需一维边界单元。这样，代数方程的数目大大减小，从而可节约机时。

(2) 输入信息远比有限元法少，从而可减少准备工作量。

(3) 边界元法特别适合求解无限和半无限域问题。地表移动属半无限平面问题，边界元法求解不必象有限元法那样需要人为圈定计算区域。

(4) 计算岩体内部任意点移动和变形有解析表达式，不必借助数值积分或插值计算。计算误差仅在离散边界时产生，因而计算精度比有限元法高。

(5) 边界元法对计算机容量要求不高，一般可在微型机上实现。

边界元法发展到现在，出现了直接法和间接法两大类。我们所用的位错法属于后者。位错法求解岩层移动问题，具有概念明确，求解简单之优点，又能保证一定的精度。这种方法的求解过程为

① 首先求出岩层移动问题的奇异解，这就是前面得到的横观各向同性半无限平面内集中位错的解析解。

② 然后将此奇异解沿一线段积分，得到一个小单元上常位错的解答。

③ 边界部分，沿薄层状采场布置单元，每个单元上存在常位错。

④ 根据叠加原理， $2N$ 个位错单元的总效应等于边界条件所给出的边值。通过建立与

求解方程组, 得到指定边值的单元位错值。

⑤ 域内或地表任意点的移动、变形和应力值由单元影响叠加得到。

二、岩层移动问题的模式

层状矿体开挖是采矿工程中最常见的一类问题, 煤层开采就属这种情况。它的特点是, 沿一个方向很薄, 另外两个方向延伸很远。考虑到沿走向足够长, 可按平面应变问题处理。下面讨论两种模式:

1) 空洞模式 如图6-4, 采空区顶底板没有接触, 给出应力边值 $\sigma_x = \sigma_y = 0$ 。对于坚硬难冒顶板和条带开采这种模式有时能给出较好的结果。但对于多数情况, 存在有边值难于给定的问题。另外, 空洞模式处理需要沿采场四周布设数目足够多的边界单元, 否则就难于得到可靠的数值解。因为边界元素要求长度相当, 即模拟采场顶底板的单元长度必须和煤层厚度处于同一数量级。为满足这个条件, 需增加很多单元。

2) 位错模式 位错模式可以克服空洞模式单元数目剧增的缺点。虽然单元数目少了, 但计算精度, 尤其是位移精度并没有降低多少。煤层采出后顶底板的相对位移量(闭合量)是计算中很重要的参量。根据这一特点, 我们用位错来表示这个相对位移。如图6-5所示, 沿采区布置单元, 每个位错单元就代表了包括矿层上下表面在内的一个小段。也就是说, 忽略煤层的绝对厚度, 视其为一个含有可压缩充填材料的裂缝。单元的位错值 D_i (D_x, D_y), 如图6-6所示。两个分量分别代表顶底板的相对错动和相对移近量, 即

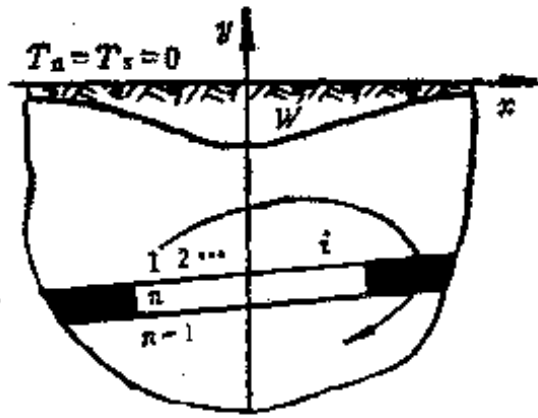


图 6-4 空洞模式

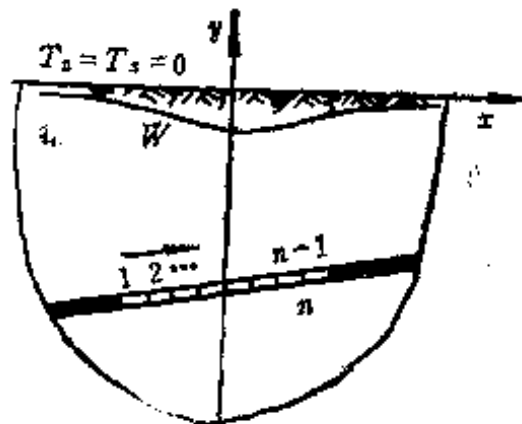


图 6-5 位错模式

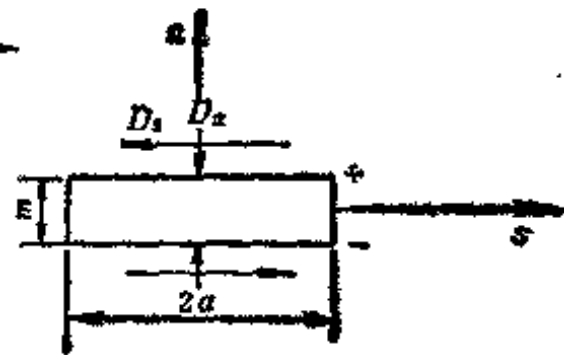


图 6-6 单元位错

$$\begin{cases} D_x = U_i - U_j \\ D_y = U_i - U_j \end{cases} \quad (6-11)$$

位错模式既可模拟顶底板接触的情况, 又可模拟顶底板没有接触的情况。

三、计算方法

沿采场划分 N 个单元, 每个单元的边界条件为

$$\begin{cases} \bar{U}_i = 0 \\ \bar{U}_i = Km \quad 0 \leq K \leq 1 \end{cases} \quad (6-12)$$

式中 m ——煤层采厚。

将 N 个位错单元对于单元 i 作用的效应叠加起来, 应当满足下式, 即

$$\begin{cases} \bar{U}_i = \sum_{j=1}^N B_{ij} D_j + \sum_{j=1}^N B_{ij} D_j = 0 \\ \bar{U}_i = \sum_{j=1}^N B_{ij} D_j + \sum_{j=1}^N B_{ij} D_j = Km \end{cases} \quad (6-13)$$

单元上的应力按下式计算:

$$\begin{cases} \sigma_x^i = \sum_{j=1}^N A_{xj}^i D_j^i + \sum_{j=1}^N A_{xj}^i D_j^i \\ \sigma_y^i = \sum_{j=1}^N A_{yj}^i D_j^i + \sum_{j=1}^N A_{yj}^i D_j^i \end{cases} \quad (6-14)$$

式中 $B_{xj}^i, B_{yj}^i, A_{xj}^i$ ——单元影响系数, 由位错理论解直接导出。

应当注意, 位移边界影响系数当 $i \neq j$ 时是连续的; 当 $i = j$ 时, 表示单元的自效应, 即

$$\begin{cases} B_{xj}^i = B_{yj}^i = 0, \\ B_{xj}^i = B_{yj}^i = \begin{cases} -\frac{1}{2} & n \rightarrow 0, \\ +\frac{1}{2} & n \rightarrow 0. \end{cases} \end{cases} \quad (6-15)$$

由式 (6-13) $2N$ 个方程可求得 $2N$ 个位错量 D_j^i, D_j^i ($j = 1 \sim N$)。由此可计算岩体内任意点 p 的应力、位移和变形值为

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^p \\ \sigma_{yy}^p \\ \sigma_{xy}^p \\ U_x^p \\ U_y^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{xx}^p & A_{xx}^p \\ A_{yy}^p & A_{yy}^p \\ A_{xy}^p & A_{xy}^p \\ B_{xx}^p & B_{xx}^p \\ B_{yy}^p & B_{yy}^p \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} D_j^i \\ D_j^i \end{Bmatrix} \quad (6-16)$$

三项变形值根据求得的位移按差分公式计算得

$$\begin{cases} \text{倾斜} & T_i = \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} \right)_{x=x_i} \approx \frac{U_y^{i+1} - U_y^i}{x^{i+1} - x^i} \\ \text{水平变形} & E_i = \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} \right)_{x=x_i} \approx \frac{U_x^{i+1} - U_x^i}{x^{i+1} - x^i} \\ \text{曲率} & K_i = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=x_i} \approx \frac{T^{i+1} - T^i}{x^{i+1} - x^i} \end{cases} \quad (6-17)$$

另外, 岩体内部有时需要计算竖向变形, 即

$$E_{yi} = \left(\frac{\partial U_y}{\partial y} \right)_{y=y_i} \approx \frac{U_y^{i+1} - U_y^i}{y^{i+1} - y^i} \quad (6-18)$$

四、非线性处理

如果采动岩体内存在断层和弱面, 引入节理单元进行模拟。图 6-7 为表示断层的压缩与剪切变形性质的模型, 其本构关系为

$$\begin{cases} \sigma_n' = -K_n D_n' \\ \sigma_s' = -K_s D_s' \end{cases} \quad (6-19)$$

$$\begin{cases} K_n = E_0/h \\ K_s = G_0/h \end{cases} \quad (6-20)$$

式中 K_n , K_s ——法向与切向刚度;
 G_0 ——剪切弹性模量;
 E_0 ——弹性模量;
 h ——断层厚度。

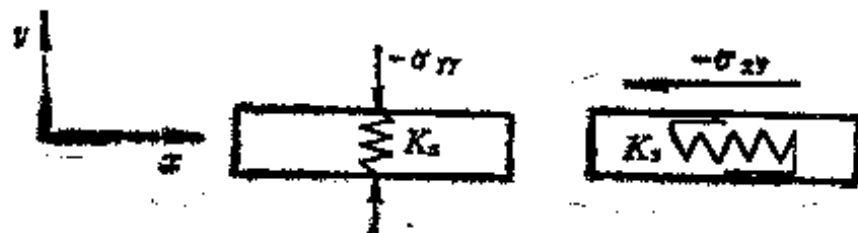


图 6-7 节理的压缩与剪切模型

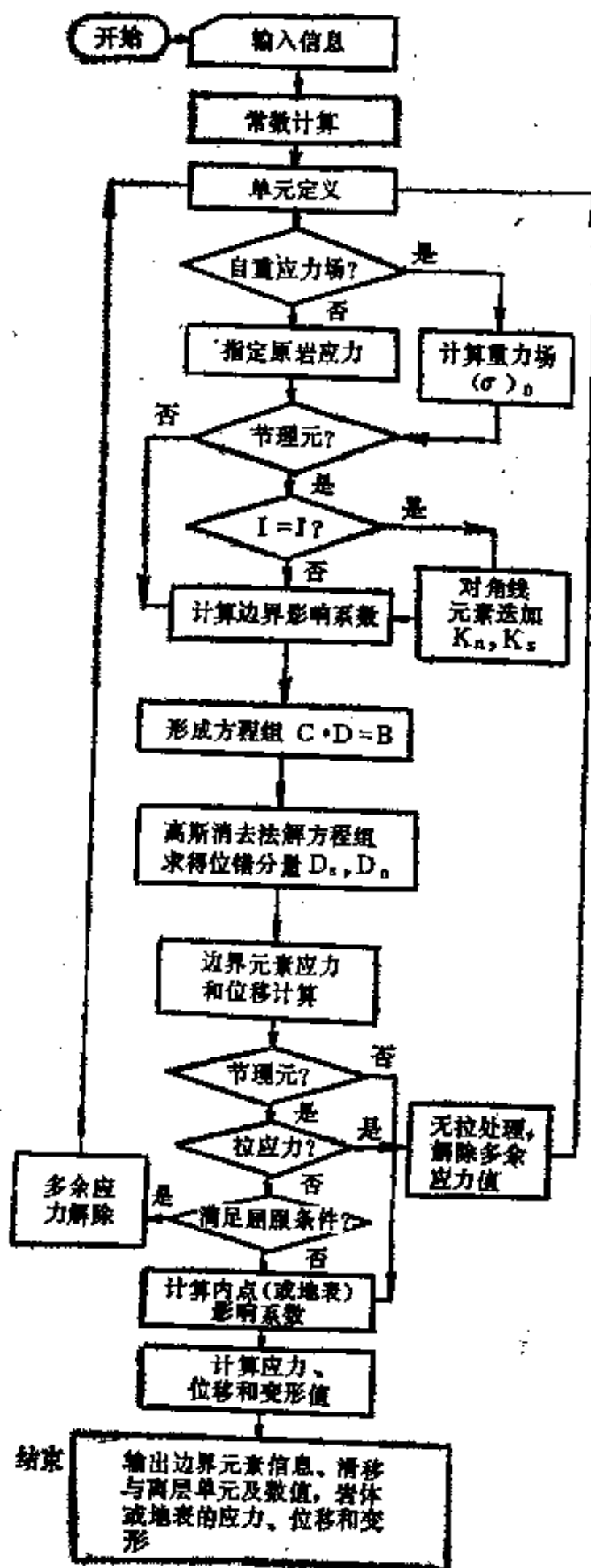


图 6-8 程序结构框图

在应力的作用下,沿节理可能发生滑移与分离,这时的特性就是非线性的。为了模拟这种性状,在节理单元上对法向应力 σ_n 和切向应力 σ_t 应用屈服准则进行限制。这里选择的屈服条件为莫尔-库仑准则,即

$$|\sigma_t| \leq C' + (-\sigma_n) \tan \varphi', \quad (6-21)$$

式中 C' 、 φ' ——断层充填物的粘结力与内摩擦角;

$-\sigma_n$ ——单元受法向压应力。

节理的滑移是非线性的,它与路径有关,还与回采过程有关,模拟时采用逐步加载法。沿煤层的位错单元逐渐增加,每步待求出节理单元上的切向与法向应力后,代入式(6-21)判断,如果计算出的切向应力超过屈服应力,即产生滑移状态。此时需解除单元上的多余应力,重新解算。另一方面,如果单元承受法向拉应力时,则会产生弱面分离或裂缝拉开,根据无拉力准则,需解除单元上的全部应力。

五、程序TSHD的设计思想及框图

将边界元位错法的理论和算法应用于解决工程实际问题,中间的桥梁是计算机程序。笔者根据位错理论解的公式,应用FORTRAN-77语言,设计了二维边界元法源程序TSHD。该程序参考了美国明尼苏达大学克劳齐教授编写的TWODD程序,结构比较简明。按程序各部功能,将TSHD程序分为五个模块:

- 1) 单元定义 确定边界单元的位置、尺寸、方向及边界值。
- 2) 影响系数 计算单元影响系数,这是边界元程序的核心。
- 3) 解方程组 组成并求解代数方程组。
- 4) 求边界未知量 计算边界单元的未知分量。
- 5) 计算内点 计算区域内指定点的影响系数,然后计算这些点的位移、应力和变形值。程序结构的框图见图6-8。

六、程序TSHD的特点及功能

(1) 通用性较好,除了计算岩层移动变形值外,该程序还可求解一般的岩石力学问题和弹性力学问题。

(2) 考虑了岩体的各向异性特性(横观各向同性),使得岩体介质的假定更加符合工程实际。

(3) 可解决深埋和浅埋问题。当采深较大时,可采用无限平面问题;采深较小时,半无限平面问题考虑了地表零应力状态。

(4) 可模拟断层滑移和弱面离层。这是岩层移动研究中长期存在的难题。

(5) 可通过增量加载法模拟开挖过程中断层的非线性效应及岩层移动动态过程。

(6) 将岩体内部和地表的任意点应力、位移和变形分析结合起来,形成一个闭合体系。

需要指出的是,当开采在一个方向(至少一个方向)达到充分采动时,程序给出准确的解答;当双向非充分采动时,结果是近似的;当开采沿水平方向时(水平煤层),结果是精确的,煤层倾斜时,解答近似成立。

第三节 边界元程序

C

--

C

C

PROGRAM BEP-1

C

C TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF TRANSVERSELY ISOTROPIC SEMI-PLANE

C

C GENERAL PROGRAM FOR STRATA MOVEMENTS OR ROCK MECHANICS

C

C

--

COMMON / S1 / PI,S11,S12,S22,S66,ROT1,ROT2,Q1,Q2,Q3,Q4,NINF

COMMON / S2 / SXXS,SXXN,SYYS,SYYN,SXYS,SXYN,UXS,UXN,UYS,UYN

COMMON / S3 / C(400,400),B(400),D(400)

COMMON / S4 / AX,BX,AY,BY,CX1,CY1,CX2,CY2,DX1,DY1,DX2,DY2

DIMENSION XM(200),YM(200),A(200),COSBET(200),SINBET(200),

1 KOD(200),U(250),W(250),SK(400),PXX(200),PYY(200),PXY(200)

DIMENSION TITLE(20)

OPEN(5,FILE='adddata',STATUS='old')

OPEN(6,FILE='results',STATUS='new')

READ(5,1) (TITLE(I),I=1,20)

WRITE(*,2) (TITLE(I),I=1,20)

WRITE(6,2) (TITLE(I),I=1,20)

READ(5,*) NUMBS,NUMOS,NINF,KS~~YM~~,MAT~~AD~~

IF(NINF) 60,50,60

50 WRITE(*,21)

WRITE(6,21)

GO TO 60

60 READ(5,*) E1,E2,PR,G,C~~MAX~~,FA,COEX

```

C      READ(5,*) AXX,AYY,AXY,BXX,BYY,BXY
      WRITE(*,6) NUMBS,NUMOS
      WRITE(6,6) NUMBS,NUMOS
      READ(5,*) AXX,AYY,AXY,BXX,BXY,BYY

      GO TO (80,85,90,95),KSYM
80     WRITE(6,7)
      WRITE(*,7)
      GO TO 100
85     WRITE(*,8) XSYM
      WRITE(6,8) XSYM
      GO TO 100
90     WRITE(*,9) YSYM
      WRITE(6,9) YSYM
      GO TO 100
95     WRITE(*,10) XSYM,YSYM
      WRITE(6,10) XSYM,YSYM

100    CONTINUE
      WRITE(*,11) E1,E2,PR,G
      WRITE(6,11) E1,E2,PR,G
      WRITE(6,22) AXX,BXX,AYY,BYY,AXY,BXY
      WRITE(*,22) AXX,BXX,AYY,BYY,AXY,BXY
      PI=4.0*ATAN(1.0)
      FAA=FA*PI/180.
      S11=(1.-PR*PR)/E1
      S12=-PR*(1.+PR)/E2
      S22=1./E2-E1*PR*PR/E2**2
      S66=1./G
      B1=-(S66+2.*S12)/S11
      C1=S22/S11
      ROT1=SQRT(.5*(-B1+SQRT(B1*B1-4.*C1)))
      ROT2=SQRT(.5*(-B1-SQRT(B1*B1-4.*C1)))
      Q1=S11*ROT1**2-S12

```

$$Q2 = S11 * ROT2 * * 2 - S12$$

$$Q3 = ROT1 * (Q1 - S66)$$

$$Q4 = ROT2 * (Q2 - S66)$$

$$P1 = ROT1 + ROT2$$

$$P2 = ROT1 - ROT2$$

$$AX = .5 / (S11 * (ROT1 * * 2 - ROT2 * * 2))$$

$$BX = -AX$$

$$AY = AX / ROT1$$

$$BY = BX / ROT2$$

$$CX1 = AX * P1 / P2$$

$$CY1 = AY * P1 / P2$$

$$DX1 = -BX * P1 / P2$$

$$DY1 = -BY * P1 / P2$$

$$CX2 = 2. * BX * ROT2 / P2$$

$$CY2 = 2. * BY * ROT2 / P2$$

$$DX2 = -2. * AX * ROT1 / P2$$

$$DY2 = -2. * AY * ROT1 / P2$$

DO 910 L=1,MAT

C DEFINE LOCATIONS,SIZES,ORIENTATIONS AND BOUNDARY CONDIONS OF
C BOUNDARY ELEMENTS

$$NUMBE = 0$$

$$DO 110 N=1,NUMBS$$

$$READ(5,*) NUM,XBEG,YBEG,XEND,YEND,KODE,BVS,BVN,SKS,SKN,DALT$$

$$IF(KODE.NE.2)GO TO 105$$

$$XEND = AD * XEND$$

$$YEND = AD * YEND$$

$$NUM = IFIX(AD * NUM)$$

105 IF(KODE.NE.5)GO TO 106

$$DALT = DALT * PI / 180.$$


```

XEND=XBEG+(YEND-YBEG)*COS(DALT)/SIN(DALT)
106 XD=(XEND-XBEG)/NUM
    YD=(YEND-YBEG)/NUM
    SW=SQRT(XD*XD+YD*YD)

C
DO 110 NE=1,NUM
    NUMBE=NUMBE+1
    M=NUMBE
    XM(M)=XBEG+0.5*(2.*NE-1.)*XD
    YM(M)=YBEG+0.5*(2.*NE-1.)*YD
    PXX(M)=BXX+AXX*YM(M)
    PYY(M)=BYY+AYY*YM(M)
    PXY(M)=BXY+AXY*YM(M)
    A(M)=0.5*SW
    SINBET(M)=YD/SW
    COSBET(M)=XD/SW
    KOD(M)=KODE
    MN=2*M
    MS=MN-1
    SK(MS)=SKS
    SK(MN)=SKN
    B(MS)=BVS
110  B(MN)=BVN

    WRITE(6,13)
    WRITE(*,13)
    DO 115 M=1,NUMBE
        SIZE=2.*A(M)
        ANGLE=180.*ATAN2(SINBET(M),COSBET(M))/PI
        WRITE(*,15) M,KOD(M),XM(M),YM(M),SIZE,ANGLE,B(2*M-1),B(2*M),
1    SK(2*M-1),SK(2*M)
        WRITE(6,15) M,KOD(M),XM(M),YM(M),SIZE,ANGLE,B(2*M-1),B(2*M),
1    SK(2*M-1),SK(2*M)
115  CONTINUE

```

```

WRITE( *,27)
WRITE(6,27)
WRITE(6,23)
WRITE( *,23)
WRITE(6,24) (M,YM(M),PXX(M),PYY(M),PXY(M),M = 1,NUMBE)
WRITE( *,24) (M,YM(M),PXX(M),PYY(M),PXY(M),M = 1,NUMBE)

```

C ADJUST STRESS BOUNDARY VALUES TO ACCOUNT FOR INITIAL STRESSES.

```

DO 150 N=1,NUMBE
NN=2 * N
NS=NN-1
COSB=COSBET(N)
SINB=SINBET(N)
SIGS=(PYY(N)-PXX(N)) * SINB * COSB+PXY(N) * (COSB * COSB-SINB * SINB
SIGN=PXX(N) * SINB * SINB-2. * PXY(N) * SINB * COSB+PYY(N) * COSB * COSB
GO TO (120,150,130,140,150),KOD(N)
120 B(NS)=B(NS)-SIGS
    B(NN)=B(NN)-SIGN
    GO TO 150
130 B(NN)=B(NN)-SIGN
    GO TO 150
140 B(NS)=B(NS)-SIGS
150 CONTINUE

```

C COMPUTE INFLUENCE COEFFICIENTS AND SET UP SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

```

DO 300 I=1,NUMBE
IN=2 * I
IS=IN-1
XI=XM(I)
YI=YM(I)
COSBI=COSBET(I)

```

```

      SINBI=SINBET(I)
      KODE=KOD(I)
      DO 300 J=1,NUMBE
      JN=2 * J
      JS=JN-I
      CALL INITL
      XJ=XM(J)
      YJ=YM(J)
      COSBJ=COSBET(J)
      SINBJ=SINBET(J)
      AJ=A(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,SINBJ,+1)

      GO TO (240,210,220,230),KSYM

210   XJ=2. * XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)
      GO TO 240

220   YJ=2. * YSYM-YM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)
      GO TO 240

230   XJ=2. * XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)
      XJ=XM(J)
      YJ=2. * YSYM-YM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)
      XJ=2. * XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,-SINBI,+1)

240   CONTINUE
      GO TO (250,260,270,280,250),KODE

250   C(IS,JS)=(SYYS-SXXS) * SINBI * COSBI+SXYS * (COSBI * COSBI-SINBI * SINBI)
      C(IS,JN)=(SYYN-SXXN) * SINBI * COSBI+SXYN * (COSBI * COSBI-SINBI * SINBI)

```

$C(IN,JS) = SXXS * SINBI * SINBI-2. * SXYS * SINBI * COSBI + SYYS * COSBI * COSBI$

$C(IN,JN) = SXXN * SINBI * SINBI-2. * SXYN * SINBI * COSBI + SYYN * COSBI * COSBI$

IF(LEQ.J) GO TO 255

GO TO 300

255 $C(IS,IS) = C(IS,IS) + SK(IS)$

$C(IN,IN) = C(IN,IN) + SK(IN)$

GO TO 300

260 $C(IS,JS) = UXS * COSBI + UYS * SINBI$

$C(IS,JN) = UXN * COSBI + UYN * SINBI$

$C(IN,JS) = -UXS * SINBI + UYS * COSBI$

$C(IN,JN) = -UXN * SINBI + UYN * COSBI$

GO TO 300

270 $C(IS,JS) = UXS * COSBI + UYS * SINBI$

$C(IS,JN) = UXN * COSBI + UYN * SINBI$

$C(IN,JS) = SXXS * SINBI * SINBI-2. * SXYS * SINBI * COSBI + SYYS * COSBI * COSBI$

$C(IN,JN) = SXXN * SINBI * SINBI-2. * SXYN * SINBI * COSBI + SYYN * COSBI * COSBI$

GO TO 300

C

280 $C(IS,JS) = (SYYS - SXXS) * SINBI * COSBI + SXYS * (COSBI * COSBI - SINBI * SINBI)$

$C(IS,JN) = (SYYN - SXXN) * SINBI * COSBI + SXYN * (COSBI * COSBI - SINBI * SINBI)$

$C(IN,JS) = -UXS * SINBI + UYS * COSBI$

$C(IN,JN) = -UXN * SINBI + UYN * COSBI$

C

300 CONTINUE

C

C SOLVE SYSTEM OF ALGEBRAIC EQUATIONS

C

WRITE(6,16)

WRITE(*,16)

310 $N = 2 * NUMBE$

CALL SOLVE(N)

C

C COMPUTE BOUNDARY DISPLACEMENTS AND STRESSES

C

DO 600 I=1,NUMBE

IN=2*I

IS=IN-1

XI=XM(I)

YI=YM(I)

COSBI=COSBET(I)

SINBI=SINBET(I)

C

UXNEG=0.

UYNEG=0.

SIGXX=PXX(I)

SIGYY=PYY(I)

SIGXY=PGY(I)

C

DO 570 J=1,NUMBE

JN=2*J

JS=JN-1

CALL INTL

XJ=XM(J)

YJ=YM(J)

AJ=A(J)

COSBJ=COSBET(J)

SINBJ=SINBET(J)

CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,SINBJ,+1)

GO TO (540,510,520,530),KSYM

C

510 XJ=2.*XSYM-XM(J)

CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)

GO TO 540

C

520 YJ=2.*YSYM-YM(J)

CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)

92

GO TO 540

C

```
530  XJ=2. * XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)
      XJ=XM(J)
      YJ=2. * YSYM-YM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)
      XJ=2. * XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XI,YI,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,-SINBJ,+1)
```

```
540  CONTINUE
```

C

```
      UXNEG=UXNEG+UXS * D(JS)+UXN * D(JN)
      UYNEG=UYNEG+UYS * D(JS)+UYN * D(JN)
      SIGXX=SIGXX+SXXS * D(JS)+SXXN * D(JN)
      SIGYY=SIGYY+SYYS * D(JS)+SYYN * D(JN)
      SIGXY=SIGXY+SXYS * D(JS)+SXYN * D(JN)
```

C

```
570  CONTINUE
```

C

```
      USNEG=UXNEG * COSBI+UYNEG * SINBI
      UNNEG=-UXNEG * SINBI+UYNEG * COSBI
      USPOS=USNEG-D(IS)
      UNPOS=UNNEG-D(IN)
      UXPOS=USPOS * COSBI-UNPOS * SINBI
      UYPOS=USPOS * SINBI+UNPOS * COSBI
      SIGS=(SIGYY-SIGXX) * SINBI * COSBI+SIGXY * (COSBI * COSBI-SINBI * SINBI)
      SIGN=SIGXX * SINBI * SINBI-2. * SIGXY * SINBI * COSBI+SIGYY * COSBI * COSBI
```

C

```
      WRITE(*,28)SIGS,SIGN
```

C

```
      IF(KOD(I).NE.5) GO TO 585
```

```
      IF(SIGN.LE.0.) GO TO 584
```

```
      B(IN)=0.
```

```
      B(IS)=0.
```

```
      GO TO 310
```

C

584 $S_{MAX} = ABS(C_{MAX} - SIGN * SIN(FAA) / COS(FAA))$
 $ADD = S_{MAX} - ABS(SIGS)$

C - 51.49

C

IF(ADD.GT.0.001) GO TO 585

$ADU = SK(IS) * ADD$

WRITE(6,25)I,ADU

WRITE(*,25)I,ADU

$B(IS) = B(IS) - ADD$

GO TO 310

585 CONTINUE

C

590 WRITE(*,17)I,D(2*I-1),USNEG,USPOS,D(2*I),UNNEG,UNPOS,UXNEG,UYN
 #EG,UXPOS,UYPOS,SIGS,SIGN

C

WRITE(6,17)I,D(2*I-1),USNEG,USPOS,D(2*I),UNNEG,UNPOS,UXNEG,UYN

C

#EG,UXPOS,UYPOS,SIGS,SIGN

C

600 CONTINUE

C

COMPUTE DISPLACEMENTS AND STRESSES AT SPECIFIED POINTS IN BODY
 OR ON THE SURFACE

C

IF(NUMOS.LE.0) GO TO 900

WRITE(6,18)

WRITE(*,18)

NPOINT = 0

DO 890 N = 1, NUMOS

READ(5,*)XBEG,YBEG,XEND,YEND,NUMPB

NUMP = NUMPB + 1

$DELX = (XEND - XBEG) / NUMP$

$DELY = (YEND - YBEG) / NUMP$

IF(NUMPB.GT.0) NUMP = NUMP + 1

IF((DELX**2 + DELY**2.EQ.0.)) NUMP = 1

C

```

DO 890 NI= 1,NUMP
XP=XBEG+(NI-1)*DELX
YP=YBEG+(NI-1)*DELY

```

C

```

UX=0.
UY=0.
SIGXX=BXX+AXX*YP
SIGYY=BYY+AYY*YP
SIGXY=BXY+AXY*YP

```

C

```

DO 880 J= 1,NUMBE
JN=2*J
JS=JN-1
CALL INITL
XJ=XM(J)
YJ=YM(J)
AJ=A(J)

```

C

```

IF(SQRT((XP-XJ)**2+(YP-YJ)**2).LT.(2.*AJ)) GO TO 890

```

C

```

COSBJ=COSBET(J)
SINBJ=SINBET(J)
CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,COSBJ,SINBJ,+1)
GO TO (840,810,820,830),KSYM

```

C

```

810 XJ=2.0*XSYM-XM(J)
CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)
GO TO 840

```

C

```

820 YJ=2.*YSYM-YM(J)
CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)
GO TO 840

```

C

```

830 XJ=2.*XSYM-XM(J)

```



```

      CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,COSBJ,-SINBJ,-1)
      XJ=XM(J)
      YJ=2.*YSYM-YM(J)
      CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,SINBJ,-1)
      XJ=2.*XSYM-XM(J)
      CALL COEFF(XP,YP,XJ,YJ,AJ,-COSBJ,-SINBJ,+1)
840  CONTINUE

```

C

```

      UX=UX+UXS*D(JS)+UXN*D(JN)
      UY=UY+UYS*D(JS)+UYN*D(JN)
      SIGXX=SIGXX+SXXS*D(JS)+SXXN*D(JN)
      SIGYY=SIGYY+SYYS*D(JS)+SYYN*D(JN)
      SIGXY=SIGXY+SXYS*D(JS)+SXYN*D(JN)
880  CONTINUE
      UX=COEX*UX

```

C

```

      U(NI)=UX
      W(NI)=UY
      IF(NI-1) 33,32,33
32   T=0.
      E=0.
      K=0.
      GO TO 43
33   E=(U(NI)-U(NI-1))/DELX
      T=(W(NI)-W(NI-1))/DELX
      IF(NI.EQ.2) GO TO 34
      AK=(T-T1)/DELX
34   T1=T
40   CONTINUE

```

C

```

      NPOINT=NPOINT+1

```

C

```

      WRITE(6,20)NPOINT,XP,YP,UX,UY,T,E,AK,SIGXX,SIGYY,SIGXY
      WRITE(*,20)NPOINT,XP,YP,UX,UY,T,E,AK,SIGXX,SIGYY,SIGXY

```

96

C

890 CONTINUE

C

900 CONTINUE

IF(L.EQ.1) GO TO 910

C

AD=AD+(1-AD)/(MAT-1)

910 CONTINUE

C

C FORMAT STATEMENTS

C

1 FORMAT(20A4)

2 FORMAT(1H /,25X,20A4,/)

3 FORMAT(4I4)

4 FORMAT(F5.2,F12.2,2F10.4)

5 FORMAT(3F10.4)

6 FORMAT(/'NUMBER OF STRAIGHT-LINE SEGMENTS USED TO DEFINE BOUN

#DARIES='I3, / /'NUMBER OF STRAIGHT-LINE SEGMENTS USED TO

SPECIFY OTHER LOCATIONS WHERE RESULTS ARE TO BE FOUND ='I3)

7 FORMAT(/'NO SYMMETRY CONDITIONS IMPOSED')

8 FORMAT(/'THE LINE X=XS='F12.4,' IS A LINE OF SYMMETRY.')

9 FORMAT(/'THE LINE Y=YS='F12.4,' IS A LINE OF SYMMETRY.')

10 FORMAT(/'THE LINES X=XS='F12.4,' AND Y=YS='F12.4,

' ARE LINES OF SYMMETRY.')

11 FORMAT(/'YOUNG MODULUS-1='F12.2, / /'YOUNG MODULUS-2 ='F12.2, /

/'POSSON RATIO='F6.2, / /'SHEAR MODULUS='F15.2)

12 FORMAT(/'XX-COMPONENT OF FILED STRESSES ='E11.4, / /'YY-COMPONENT

OF FILED STRESS ='E11.4, / /'XY-COMPONENT OF FILED STRESS='E11.4)

13 FORMAT(1H /' BOUNDARY ELEMENT DATA.', / /' ELEMENT KODE

X(CENTER) Y(CENTER) LENGTH ANGLE

US/SIGMA-S UN/SIGMA-N KS KN'/)

14 FORMAT(I4,4F10.4,I4,4F10.4)

15 FORMAT(2I9,3F12.4,F12.2,4E15.4)

16 FORMAT(1H /' DISPLACEMENT AND STRESSES AT MIDPOINTS OF BOUN

```

#DARY ELEMENTS.' / / ' ELEMENT DS US(-) US(+)
# DN UN(-) UN(+) UX(-) UY(-) UX(+)
# UY(+) SIGMA-S SIGMA-N' / )
17 FORMAT(I10,10F10.6,2F9.1)
18 FORMAT(1H / ' DISPLACEMENTS AT SPECIFIED POINTS IN THE BODY.'
# / / ' POINT X CO-ORD Y CO-ORD UX
# UY T E AK
# SIGXX SIGYY SIGXY' / )
19 FORMAT(4F10.4,14)
20 FORMAT(19,2F12.4,2F12.6,3F12.9,3F12.1)
21 FORMAT(1H / 'TWO-DIMENSIONAL PROBLEM OF TRANSVERSELY ISOTROPIC
# SEMI-PLANE')
22 FORMAT(1H / 'AXX=',F10.3,' BXX=',F10.3 / /
# 'AYY=',F10.3,' BYY=',F10.3 / / 'AXY=',F10.3,' BXY=',F10.3)
23 FORMAT(1H / ' M H PXX. PYY
# PXY' / )
24 FORMAT(I6,4F12.4)
25 FORMAT(1H / 'SLIPING ELEMENT No-',I6, / / 'SLIPING QUANTITY
# DALT W = ',F20.9)
26 FORMAT(2F7.3)
27 FORMAT(1H / 'FIELD STRESSES DATA')
28 FORMAT(1H,2F15.2)
STOP
END
C
C
SUBROUTINE INITL
C
COMMON / S2 / SXXS,SXXN,SYYs,SYYN,SXYS,SXYN,UXS,UXN,UYS,UYN
C
SXXS=0.
SXXN=0.
SYYs=0.
SYYN=0.

```

SXYS=0.

SXYN=0.

UXS=0.

UXN=0.

UYS=0.

UYN=0.

C

RETURN

END

C

C

SUBROUTINE COEFF(X,Y,CX,CY,A,COSB,SINB,MSYM)

C

COMMON /S1/ PI,S11,S12,S22,S66,ROT1,ROT2,Q1,Q2,Q3,Q4,NINF

COMMON /S2/ SXXS,SXXN,SYYS,SYYN,SXYS,SXYN,UXS,UXN,UYS,UYN

COMMON /S4/ AX,BX,AY,BY,CX1,CY1,CX2,CY2,DX1,DY1,DX2,DY2

C

CY=ABS(CY)

Y1=ROT1 * Y

Y2=ROT2 * Y

CYA=CY * ROT1

CYB=CY * ROT2

XB1=(X-CX) * COSB+(Y1+CYA) * SINB

YB1=-(X-CX) * SINB+(Y1+CYA) * COSB

XB2=(X-CX) * COSB+(Y2+CYB) * SINB

YB2=-(X-CX) * SINB+(Y2+CYB) * COSB

CALL F(XB1,YB1,A,COSB,SINB,FA2,FA3,FA4,FA5)

CALL F(XB2,YB2,A,COSB,SINB,FB2,FB3,FB4,FB5)

C

UXDS=AX * Q1 * FA3+BX * Q2 * FB3

UXDN=-AY * Q1 * FA2-BY * Q2 * FB2

UYDS=AX * Q3 * FA2+BX * Q4 * FB2

UYDN=AY * Q3 * FA3+BY * Q4 * FB3

C

$SXXDS = AX * ROT1 * * 2 * FA4 + BX * ROT2 * * 2 * FB4$
 $SXXDN = -AY * ROT1 * * 2 * FA5 - BY * ROT2 * * 2 * FB5$
 $SYXDS = -AX * FA4 - BX * FB4$
 $SYXDN = AY * FA5 + BY * FB5$
 $SXYDS = -AX * ROT1 * FA5 - BX * ROT2 * FB5$
 $SXYDN = -AY * ROT1 * FA4 - BY * ROT2 * FB4$

C

IF(NINF) 70,60,70

C

60 $XB3 = (X - CX) * COSB - (Y1 - CYA) * SINB$
 $YB3 = (X - CX) * SINB + (Y1 - CYA) * COSB$
 $XB4 = (X - CX) * COSB - (Y2 - CYB) * SINB$
 $YB4 = (X - CX) * SINB + (Y2 - CYB) * COSB$
 CALL F(XB3,YB3,A,COSB,SINB,FIA2,FIA3,FIA4,FIA5)
 CALL F(XB4,YB4,A,COSB,SINB,FIB2,FIB3,FIB4,FIB5)

C

$CY3 = +CY * ROT2$
 $CY4 = +CY * ROT1$
 $XB5 = (X - CX) * COSB - (Y1 - CY3) * SINB$
 $YB5 = (X - CX) * SINB + (Y1 - CY3) * COSB$
 $XB6 = (X - CX) * COSB - (Y2 - CY4) * SINB$
 $YB6 = (X - CX) * SINB + (Y2 - CY4) * COSB$
 CALL F(XB5,YB5,A,COSB,SINB,FJA2,FJA3,FJA4,FJA5)
 CALL F(XB6,YB6,A,COSB,SINB,FJB2,FJB3,FJB4,FJB5)

C

$UXDBS = -(CX1 * Q1 * FIA3 + DX1 * Q2 * FIB3 + CX2 * Q1 * FJA3 + DX2 * Q2 * FJB3)$
 $UXDBN = -CY1 * Q1 * FIA2 - DY1 * Q2 * FIB2 - CY2 * Q1 * FJA2 - DY2 * Q2 * FJB2$
 $UYDBS = -(CX1 * Q3 * FIA2 + DX1 * Q4 * FIB2 + CX2 * Q3 * FJA2 + DX2 * Q4 * FJB2)$
 $UYDBN = +(CY1 * Q3 * FIA3 + DY1 * Q4 * FIB3 + CY2 * Q3 * FJA3 + DY2 * Q4 * FJB3)$

C

$SXXDBS = -CX1 * ROT1 * * 2 * FIA4 - DX1 * ROT2 * * 2 * FIB4$
 1 $-CX2 * ROT1 * * 2 * FJA4 - DX2 * ROT2 * * 2 * FJB4$
 $SXXDBN = -CY1 * ROT1 * * 2 * FIA5 - DY1 * ROT2 * * 2 * FIB5$
 1 $-CY2 * ROT1 * * 2 * FJA5 - DY2 * ROT2 * * 2 * FJB5$

SYDDBS = CX1 * FIA4+DX1 * FIB4+CX2 * FJA4+DX2 * FJB4

SYDDBN = CY1 * FIA5+DY1 * FIB5+CY2 * FJA5+DY2 * FJB5

SXDDBS = CX1 * ROT1 * FIA5+DX1 * ROT2 * FIB5+CX2 * ROT1 * FJA5+DX2 * ROT2 *
1FJB5

SXDDBN = -CY1 * ROT1 * FIA4-DY1 * ROT2 * FIB4-CY2 * ROT1 * FJA4-DY2 * ROT2

1 * FJB4

GO TO 80

C

70 UXDDBS = 0.

UXDDBN = 0.

UYDDBS = 0.

UYDDBN = 0.

C

SXXDDBS = 0.

SXXDDBN = 0.

SYDDBS = 0.

SYDDBN = 0.

SXDDBS = 0.

SXDDBN = 0.

C

80 UXS = UXS+MSYM * (UXDS+UXDDBS)

UXN = UXN+UXDN+UXDDBN

UYS = UYS+MSYM * (UYDS+UYDDBS)

UYN = UYN+UYDN+UYDDBN

C

SXXS = SXXS+MSYM * (SXXDS+SXXDDBS)

SXXN = SXXN+SXXDN+SXXDDBN

SYYS = SYYS+MSYM * (SYYDS+SYYDDBS)

SYYN = SYYN+SYYDN+SYYDDBN

SXYS = SXYS+MSYM * (SXYDS+SXYDDBS)

SXYN = SXYN+SXYDN+SXYDDBN

RETURN

END

C

```

C
SUBROUTINE SOLVE(N)
C
COMMON / S3 / A(400,400),B(400),X(400)
C
NB=N-1
DO 20 J=1,NB
  L=J+1
  DO 20 JJ=L,N
    XM=A(JJ,J)/A(J,J)
    DO 10 I=J,N
10   A(JJ,I)=A(JJ,I)-A(J,I)*XM
20   B(JJ)=B(JJ)-B(J)*XM
C
X(N)=B(N)/A(N,N)
DO 40 J=1,NB
  JJ=N-J
  L=JJ+1
  SUM=0.
  DO 30 I=L,N
30   SUM=SUM+A(JJ,I)*X(I)
40   X(JJ)=(B(JJ)-SUM)/A(JJ,JJ)
  RETURN
END
C
C
SUBROUTINE F(XB,YB,A,COSB,SINB,F2,F3,F4,F5)
C
COMMON / S1 / PI,S11,S12,S22,S66,ROT1,ROT2,Q1,Q2,Q3,Q4,NINF
C
COS2B=COSB**2-SINB**2
SIN2B=2.*SINB*COSB
25  R1=SQRT((XB-A)**2+YB*YB)
    R2=SQRT((XB+A)**2+YB*YB)

```

```

      IF(YB.NE.0.) GO TO 30
      ANG1=0.0
      ANG2=0.0
      IF(ABS(XB).LT.A) ANG1=-PI
      GO TO 40
30    ANG1=ATAN2(YB,(XB-A))
      ANG2=ATAN2(YB,(XB+A))
C
40    F2=((ALOG(R1)-ALOG(R2))*COSB+(ANG1-ANG2)*SINB)/PI
      F3=((ALOG(R1)-ALOG(R2))*SINB-(ANG1-ANG2)*COSB)/PI
      F4=((SIN(ANG1)*COS2B+COS(ANG1)*SIN2B)/R1
1     -(SIN(ANG2)*COS2B+COS(ANG2)*SIN2B)/R2)/PI
      F5=((COS(ANG1)*COS2B-SIN2B*SIN(ANG1))/R1
1     -(COS(ANG2)*COS2B-SIN2B*SIN(ANG2))/R2)/PI
C
      RETURN

```

第四节 算 例

一、淮北张庄矿423工作面开采地表移动计算

1. 地质采矿条件

淮北张庄矿423工作面倾斜长92m, 走向长300m, 煤层倾角6°, 煤层厚度2.2m。采深: 上边界100m, 下边界110m, 平均105m。该矿属二叠系煤系地层, 上覆岩层比较软弱。

2. 计算参数的选取

根据岩层性质, 选取岩体力学参数为 $E_1 = 2500\text{MPa}$ (沿层面), $E_2 = 1500\text{MPa}$ (垂直层面), $\mu = 0.55$, $G = 100\text{MPa}$ 。

$$\left. \begin{aligned} \text{原岩应力为} \quad (\sigma_{yy})_0 &= A_{yy}H \\ (\sigma_{xx})_0 &= A_{xx}H \end{aligned} \right\}$$

式中 $A_{yy} = 0.3$; $A_{xx} = 0.1$ 。

3. 模型计算的实现

将计算参数及开采条件通过数据文件DATA输入, 由程序TSHD实现了模型的计算。

4. 计算结果及对比

将计算曲线绘制在图6-9上, 与实测结果对比表明, 这种方法是可行的, 计算值与实测值的符合程度是比较好的。

二、鹤壁二矿受断层影响的地表移动计算

1. 地质采矿条件

鹤壁二矿129工作面走向长495m, 倾向长90m。上边界采深312m, 下边界采深342m。煤层倾角 17° 。开采方法为走向长壁全部陷落法。采厚(一分层)为2m。

上覆岩层主要为页岩、砂质页岩和砂岩, 松散层厚度90m。该工作面上山方向存在一正断层 F_0 , 断层面倾向与煤层倾向相反。断层倾角为 45° , 落差8.5~31.5m。

2. 计算参数的选取

岩体力学参数为: $E_1 = 2630\text{MPa}$ (沿层面), $E_2 = 1440\text{MPa}$ (垂直层面), $\mu = 0.20$, $G = 500\text{MPa}$ 。

原岩应力系数为: $A_{xx} = 0.1$, $A_{yy} = 0.3$, 其余为零。

断层的力学参数为: 断层柔度 $1/K_s = 1/K_0 = 4.5 (\text{Pa/m})^{-1}$; 夹层粘聚力 C 为0, 内摩擦角 $\varphi = 25^\circ$ 。

3. 数据输入

将力学参量和开采条件通过数据文件 DATA 输入作为计算信息。按程序要求分六段输入。

4. 计算结果与分析

通过TSHD程序实现了上述模型, 并将得到的计算结果绘成曲线(图6-10)。

计算结果表明, 岩体内部的滑移量大于地表的滑移量, 而且越接近采空区滑移量越大, 见图6-11。

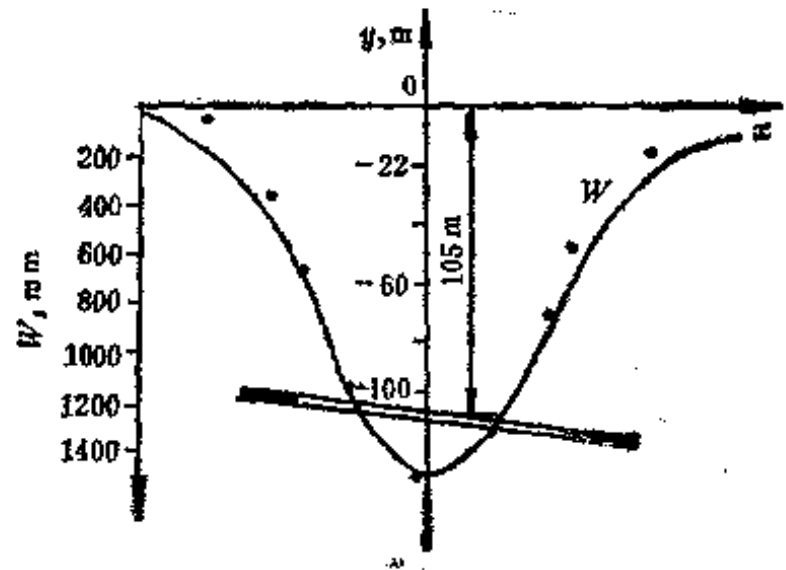


图 6-9 淮北张庄矿423工作面地表移动实测值与计算曲线

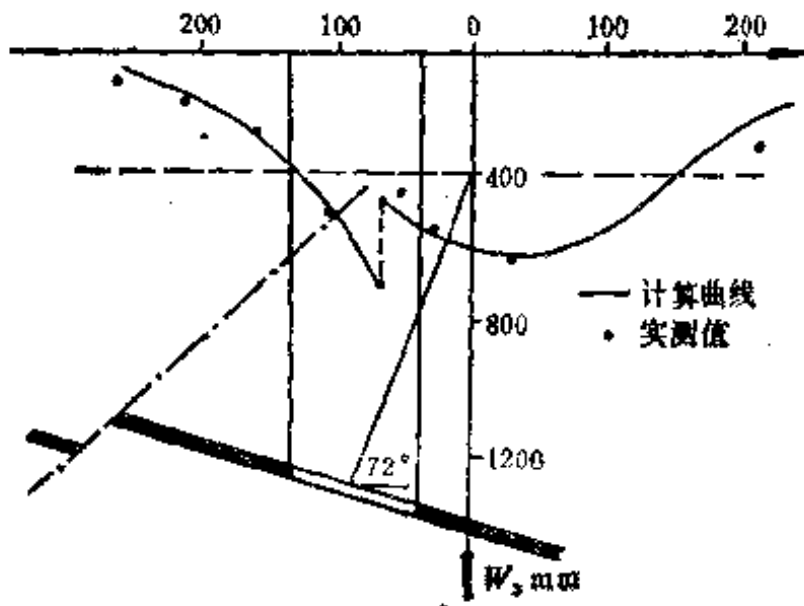


图 6-10 鹤壁二矿129工作面台阶状下沉盆地
计算值与实测值

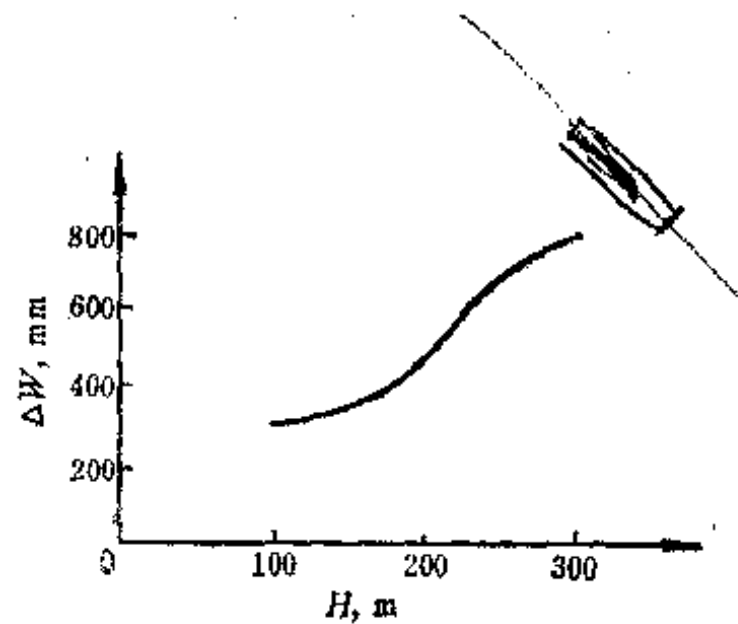


图 6-11 滑移量随深度变化的曲线

计算曲线与实测下沉曲线对比, 可以发现两者符合程度是比较好的。这说明, 在力学参数选取适当时, 这种方法是行之有效的。

第七章 岩层与地表移动计算的概率积分法

第一节 概 述

在许多岩体中,分布着各种层次的不连续面,如节理、断层、弱面和裂隙等。由于地下开采,岩体受到影响,会产生许多新裂隙,因而在极端的情况下,可以将岩体视为碎裂介质^[32],各个碎块体之间的粘结力忽略不计。可以想象,这些岩块在岩层移动中存在多个自由度。此时岩块本身的性质就变得较为次要了,岩体的移动过程具有某种随机过程的特征。将岩体假定为随机介质,波兰学者李特维尼申提出并发展了随机介质理论^[33]。该理论将岩石移动过程视为随机现象,应用概率理论证明下沉场服从柯尔莫哥洛夫(B.Kolmogorov)方程。由于这一理论符合岩层与地表移动规律,在下沉预计中得到广泛应用。

在我国,刘宝琛、廖国华等首先将李特维尼申的理论引进岩层与地表移动领域,在理论的实用化方面做了大量工作^[34]。他们在煤矿地表移动计算中,进一步发展和改进了这种理论,对其预计方法、非正态分布、边界条件的选取、计算参数的反分析等方面均有较深入的探讨。在1985年颁布的《建筑物、水体、铁路及主要井巷煤柱留设与压煤开采规程》中,将以随机介质理论为基础的概率积分法作为主要预计方法,并给出了全国各矿区的地表移动概率积分参数。事实上,概率积分法已成为煤矿中应用最广泛的地表移动预计方法。

应当指出,随机介质理论作为一种力学模型也有其缺陷,主要是无法研究复杂地质采矿条件下的岩层移动和无法进行应力分析。

第二节 随机介质模型及其基本解

随机介质力学模型如图7-1所示。各个格子里装有小球,小球之间刚性接触。如果从C处取出一球,其空间可能由上层的A球或B球占据。将其视为随机事件,概率表达式为

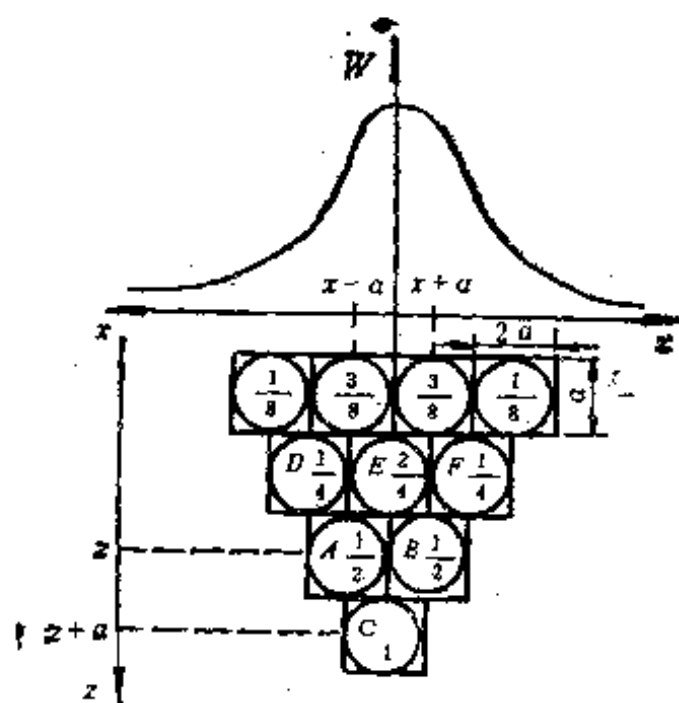


图 7-1 随机介质力学模型

$$\frac{1}{2}P(x-a, z) + \frac{1}{2}P(x+a, z) = P(x, z+h) \quad (7-1)$$

上式还可改写为以下形式:

$$\frac{a^2}{2h^2} \left[\frac{P(x-a, z) - 2P(x, z) + P(x+a, z)}{a^2} \right] = \frac{P(x, z+h) - P(x, z)}{h} \quad (7-2)$$

上式在 $a \rightarrow 0$ 、 $h \rightarrow 0$ 且

$$\lim_{a \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \frac{a^2}{h} = 1 \quad (7-3)$$

时, 即成为

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial P(x, z)}{\partial z} \quad (7-4)$$

位移继续向上发展, 在所研究的高度上得到的垂直位移分布类似于高斯曲线, 这个现象已被实验所证实。更一般地, 式 (7-4) 写为

$$B(z) \frac{\partial^2 W(x, z)}{\partial x^2} = \frac{\partial W(x, z)}{\partial z} \quad (7-5)$$

这里已将概率 P 换为垂直位移 W 。 $B(z)$ 为系数。式 (7-5) 即为水平层状矿体开挖后上覆岩体的垂直位移 (下沉) 所满足的方程。

沉积岩体一般为倾斜成层, 且开挖多为三维问题, 此时岩石下沉场服从二阶抛物线型偏微分方程:

$$\frac{\partial W(x_i, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 K_{ij}(x_i, z) \frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^3 M_i(x_i, z) \frac{\partial W}{\partial x_i} + N(x_i, z) W \quad (7-6)$$

式中 K_{ij} 、 M_i 、 N 是反映介质特性的参数, 当岩体为层状介质时, K_{ij} 、 M_i 、 N 只与 z 有关。其中 K_{ij} 表征岩石在 z 方向的不均匀性; M_i 反映开采影响的传播方向; N 是介质的压缩性系数。

可以证明, 在边界条件恰当给定时, 方程 (7-6) 的解是存在且是唯一的 [35]。

为得到层状矿体开采后地表和岩层移动问题的基本解, 给出以下基本假定:

- (1) 岩体为倾斜成层的随机介质;
- (2) 开采沿走向 (y 方向) 达到充分采动, 因而可视为平面应变问题;
- (3) 岩体不可压缩;
- (4) 叠加原理成立。

由此得到随机偏微分方程:

$$\frac{\partial W}{\partial z} = K(z) \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + M(z) \frac{\partial W}{\partial x} \quad (7-7)$$

下面求解由于集中点荷载 (位移) 在介质内产生的位移场, 即基本解。设 $K(z) = k^2$, $M(z) = m$, 基本解由下面的方程得到:

$$\begin{cases} \frac{\partial W}{\partial z} = K^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m \frac{\partial W}{\partial x} \\ W(x, 0) = \delta(x - \xi) \end{cases} \quad (7-3)$$

进行变量代换, 设

$$W = U e^{\mu x + \lambda z} \quad (7-9)$$

$$\mu = -\frac{b}{2a^2}, \quad \lambda = -\frac{b^2}{4a^2} \quad (7-10)$$

定解问题式 (7-8) 变换为

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \\ U(x, 0) = e^{-\mu x} \delta(x - \xi) \end{cases} \quad (7-11)$$

通过Laplace积分变换求解, 得

$$U(x - \xi, z) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi z}} \exp\left[-\frac{(x - \xi)^2}{4a^2 z}\right] \quad (7-12)$$

回代, 得

$$W_0 = \frac{1}{2k\sqrt{\pi z}} \exp\left[-\frac{(x - \xi - mz)^2}{4k^2 z}\right] \quad (7-13)$$

W_0 表示单元开采的下沉分布函数。

设

$$k = \frac{r}{2\sqrt{\pi z}} \quad (7-14)$$

$$m = -\text{ctg}\theta \quad (7-15)$$

基本解变为

$$W_0 = \frac{1}{r(z)} \exp\left[-\frac{1}{r^2(z)} (x - \xi - z \text{ctg}\theta)^2\right] \quad (7-16)$$

式中 r ——主要影响半径;
 θ ——开采影响传播角。

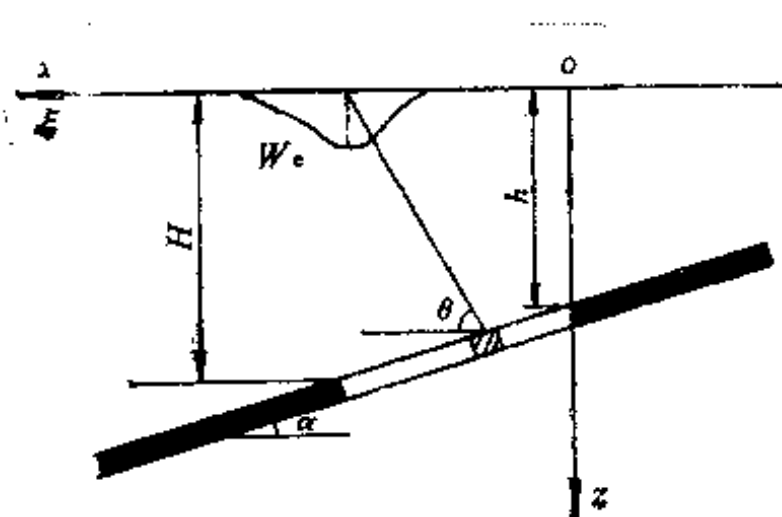


图 7-2 坐标系

坐标系选择和各变量的物理意义, 如图 7-2 所示。

对水平煤层的情况, 单元下沉盆地表达式简化为

$$W_0 = \frac{1}{r} e^{-\pi \left(\frac{x}{r}\right)^2} \quad (7-17)$$

根据单元体积不变假设, 可导出单元水平移动表达式

$$U_0 = -\frac{x}{r^2} \cdot r' \cdot e^{-\pi \left(\frac{x}{r}\right)^2} = B \frac{\partial W_0}{\partial x} \quad (7-18)$$

式中 B 是 z 的函数, 与 x 无关。

第三节 下沉盆地主剖面的移动与变形

求出了单元开采引起的下沉和水平移动表达式后, 就可根据叠加原理计算开采引起的地表移动:

$$W(x) = \int_{-\infty}^{\infty} W_0(x-\xi)W(\xi)d\xi \quad (7-19)$$

上式中 $W(\xi)$ 取为

$$W(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{(煤柱上方)} \\ 1 & \text{(采空区上方)} \end{cases} \quad (7-20)$$

其中煤柱上方还包括拐点偏移部分。

对水平移动存在下式:

$$U(x) = \int_{-\infty}^{\infty} U_0(x-\xi)U(\xi)d\xi \quad (7-21)$$

$U(\xi)$ 与 $W(\xi)$ 取相同的形式。

根据上式, 可导出走向主断面的移动与变形表达式:

$$W(x) = \frac{m\eta}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{r}(x-l)}^{\frac{\sqrt{\pi}}{r}x} e^{-\lambda^2} d\lambda = \frac{W_{\max}}{2} \left[\operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi} \cdot \frac{x}{r}\right) - \operatorname{erf}\left(\sqrt{\pi} \cdot \frac{x-l}{r}\right) \right] \quad (7-22)$$

$$T(x) = -\frac{dW(x)}{dx} = \frac{W_{\max}}{r} \left[e^{-\pi\left(\frac{x}{r}\right)^2} - e^{-\pi\left(\frac{x-l}{r}\right)^2} \right] \quad (7-23)$$

$$K(x) = \frac{d^2W(x)}{dx^2} = -2\pi \frac{W_{\max}}{r^2} \left[\frac{x}{r} e^{-\pi\left(\frac{x}{r}\right)^2} - \frac{x-l}{r} e^{-\pi\left(\frac{x-l}{r}\right)^2} \right] \quad (7-24)$$

$$U(x) = bW_{\max} \left[e^{-\pi\left(\frac{x}{r}\right)^2} - e^{-\pi\left(\frac{x-l}{r}\right)^2} \right] \quad (7-25)$$

$$\varepsilon(x) = -2\pi b \frac{W_{\max}}{r} \left[\frac{x}{r} e^{-\pi\left(\frac{x}{r}\right)^2} - \frac{x-l}{r} e^{-\pi\left(\frac{x-l}{r}\right)^2} \right] \quad (7-26)$$

对倾斜主断面, 计算 W 、 T 和 K 的公式仅需将 x 以 y 代换, r 在上山方向以 r_{\pm} 代换, 在下山方向以 r_{\mp} 代换即可。计算水平移动和水平变形的公式如下:

$$U(y) = W_{\max} \left[b \left(e^{-\pi\left(\frac{y}{r_{\mp}}\right)^2} - e^{-\pi\left(\frac{y-l}{r_{\pm}}\right)^2} \right) + \operatorname{ctg}\theta \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\sqrt{\pi}}{r_{\pm}}(y-l)}^{\frac{\sqrt{\pi}}{r_{\mp}}y} e^{-\lambda^2} d\lambda \right) \right] \quad (7-27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(y) = W_{\max} \left\{ -2\pi b \left(\frac{y}{r_{\mp}} e^{-\pi\left(\frac{y}{r_{\mp}}\right)^2} - \frac{y-l}{r_{\pm}} e^{-\pi\left(\frac{y-l}{r_{\pm}}\right)^2} \right) + \right. \\ \left. + \operatorname{ctg}\theta \left[\frac{1}{r_{\mp}} e^{-\pi\left(\frac{y}{r_{\mp}}\right)^2} - \frac{1}{r_{\pm}} e^{-\pi\left(\frac{y-l}{r_{\pm}}\right)^2} \right] \right\} \quad (7-28) \end{aligned}$$

式中 θ ——开采影响传播角。

第四节 地表任意点移动变形计算公式

1. 下沉

矩形工作面开采引起的地表某点 $A(x, y)$ 的下沉为

$$W_A(x, y) = W_{\max} \cdot C_x \cdot C_y \quad (7-29)$$

$$W_{\max} = m\eta \cos \alpha \quad (7-30)$$

$$C_x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{x-L}{r_1}}}^{\sqrt{\frac{x}{r}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (7-31)$$

$$C_y = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{\frac{y-L}{r_1}}}^{\sqrt{\frac{y}{r_2}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \quad (7-32)$$

式中 m ——煤层采厚, m;

η ——下沉系数;

α ——煤层倾角, ($^\circ$);

l ——工作面走向长, m;

L ——工作面倾向长, m;

r, r_1, r_2 ——主要影响半径, m, $r = H / \lg \beta$, $r_1 = H_1 / \lg \beta$, $r_2 = H_2 / \lg \beta$;

$\lg \beta$ ——主要影响角正切;

H, H_1, H_2 ——走向、上山和下山边界采深。

程序计算中, 误差积分按下式作近似计算:

$$\frac{1}{2} \operatorname{erf}(u) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2} (C_1 t + C_2 t^2 + \dots + C_5 t^5) \quad (7-33)$$

$$t = \frac{1}{1 + PU} \quad (7-34)$$

式中 $P = 0.2316419$; $C_1 = 0.31938153$; $C_2 = -0.356563782$; $C_3 = 1.78147937$; $C_4 = -1.821255978$; $C_5 = -1.821255928$ 。

2. 倾斜

地表 $A(x, y)$ 点沿某方向 φ 的倾斜值

$$T_\varphi = T(x)C_y \cos \varphi + T(y)C_x \sin \varphi \quad (7-35)$$

该点最大倾斜方向

$$\varphi_{T\max} = \arctan \left(\frac{T(y)C_x}{T(x)C_y} \right) \quad (7-36)$$

3. 曲率

地表 $A(x, y)$ 点沿 φ 方向的曲率公式为

$$K_\varphi = K(x)C_y \cos^2 \varphi + K(y)C_x \sin^2 \varphi + \frac{T(y)T(x)}{W_{\max}} \sin 2\varphi \quad (7-37)$$

该点最大曲率方向 $\varphi_{K\max}$ 按下式计算:

$$\varphi_{K\max} = \frac{1}{2} \arctan \left[\frac{2T(x)T(y)}{W_{\max}(K(x)C_y - K(y)C_x)} \right] \quad (7-38)$$

4. 水平移动

地表点 $A(x, y)$ 沿 φ 方向的水平移动

$$U_{\varphi} = U(x) \cdot C_y \cos \varphi + U(y) \cdot C_x \sin \varphi \quad (7-39)$$

该点水平移动主方向为

$$\varphi_{U_{\max}} = \arctan \left(\frac{U(y) C_x}{U(x) C_y} \right) \quad (7-40)$$

5. 水平变形

地表点 $A(x, y)$ 沿 φ 方向的水平变形

$$\varepsilon_{\varphi} = \varepsilon(x) C_y \cos^2 \varphi + \varepsilon(y) C_x \sin^2 \varphi + \frac{\sin 2\varphi [U(y) T(x) + U(x) T(y)]}{2W_{\max}} \quad (7-41)$$

该点水平变形主方向为

$$\varphi_{\varepsilon_{\max}} = \frac{1}{2} \arctan \left\{ \frac{U(x) T(y) + U(y) T(x)}{W_{\max} [\varepsilon(x) C_y - \varepsilon(y) C_x]} \right\} \quad (7-42)$$

第五节 任意形状工作面地表移动变形计算程序原理

一、计算原理

前述的概率积分公式是以矩形工作面为基础导出的。对非矩形开采工作面，可以把该面切割成多个近似矩形的小工作面，通过计算每个小的矩形工作面开采对地表的影响，然后叠加起来就可得到地表移动变形最终值。

二、总体和局部坐标变换

如图7-3所示，总体坐标系的确定方法为沿煤层走向为 x 方向指向煤层走向， y 方向沿煤层倾斜方向，坐标原点可任意确定。计算中对每个小矩形程序自动建立一个局部坐标系，如图中的 $x'y'$ 。

输入数据是总体坐标系下各矩形角点坐标。程序首先将其变换为沿煤层斜面的坐标，然后投影到地表。

三、程序框图

根据上述的原理和方法可以设计计算程序，计算程序的框图如图7-4，7-5所示。

由于概率积分法计算矩形和任意形状工作面开采的地表移动计算程序已在有关文献中发表，本书不再给出。有兴趣的读者请参见文献〔7〕、〔15〕、〔36〕。

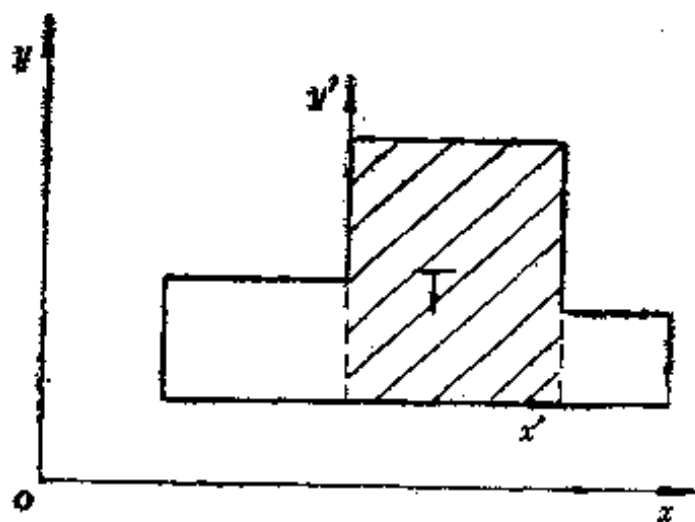


图 7-3 总体和局部坐标系

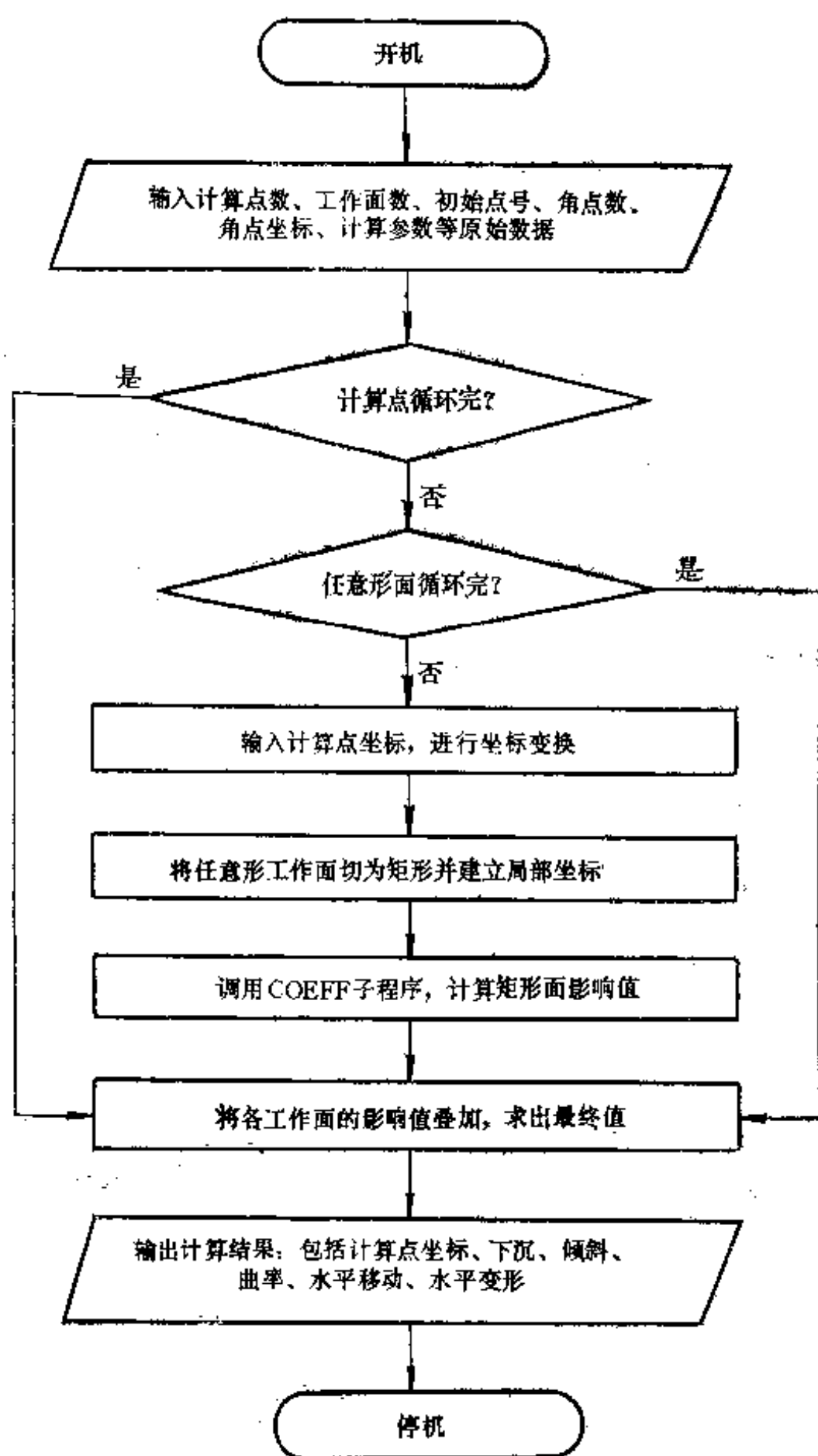


图 7-4 程序主框图

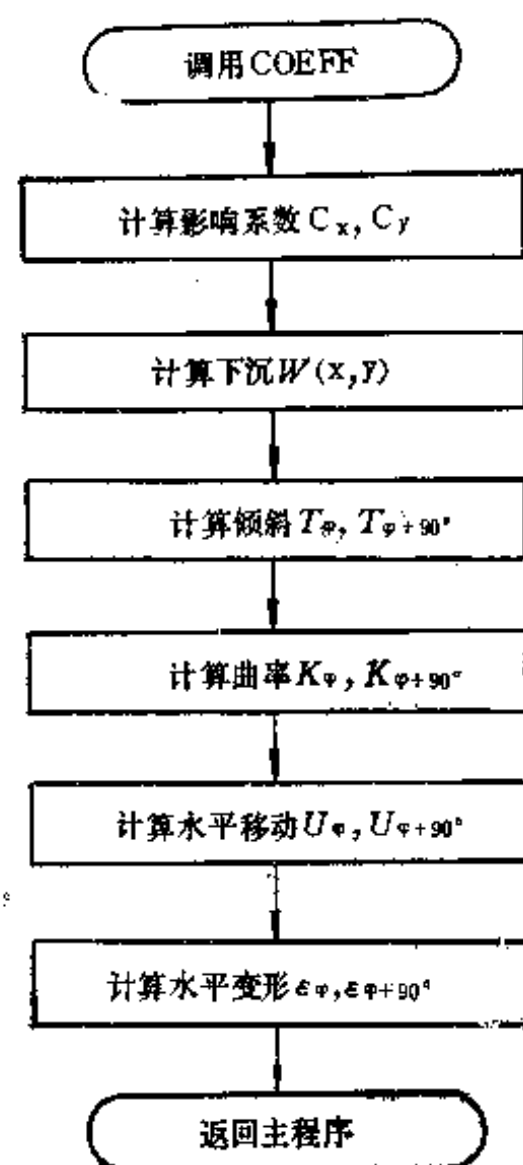


图 7-5 影响系数 COEFF 子程序框图

第六节 地表移动参数反分析

一、最小二乘原理

设地表下沉 W 是地表点位 (x, y) 的函数, 其中包含六个参数, 即

$$W = W(x, y, \eta, \lg \beta, S_1, S_2, S_3, S_4) \quad (7-43)$$

现对最终下沉曲线 W 上的 n 点进行了观测, 得到观测值序列 $(x_i, y_i, W_i, i=1 \sim n)$ 。于是 W 的理论值 $\hat{W}(x, y, \eta, \lg \beta, S_1, S_2, S_3, S_4)$ 与观测值 W_i 之间的绝对误差为

$$|W_i - \hat{W}| \quad (i=1 \sim n)$$

最小二乘法的原理就是要求以上的 n 个误差在平方和最小的意义下使函数 W 与观测值 W 最佳拟合。也就是求参数 η , $\lg \beta$, S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , 使下式成立:

$$Q = \sum_{i=1}^n [W_i - W(x, y, \eta, \lg \beta, S_1, S_2, S_3, S_4)]^2 = \min \quad (7-44)$$

对应地表水平移动观测值, 应求参数 b , θ , 使下式成立:

$$R = \sum_{i=1}^n [U_i - U(x, y, b, \theta)]^2 = \min \quad (7-45)$$

二、与地表下沉有关的参数估计

在图7-6所示的坐标系中, 地表下沉表达式为

$$W(x, y) = W_{\max} \cdot C_x \cdot C_y$$

$$C_x = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{x}{r_1}}} e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{x}{r_2}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \right] \quad (7-46)$$

$$C_y = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{y}{r_1}}} e^{-\lambda^2} d\lambda - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\frac{y}{r_2}}} e^{-\lambda^2} d\lambda \right] \quad (7-47)$$

以上公式可以展开为台劳级数:

$$\begin{aligned} W(x, y) &= W(\eta^0, \lg \beta^0, x_1^0, x_2^0, y_1^0, y_2^0) \\ &= \frac{\partial W}{\partial \eta^0} \delta \eta + \frac{\partial W}{\partial \lg \beta^0} \delta \lg \beta + \frac{\partial W}{\partial x_1^0} \delta x_1 + \frac{\partial W}{\partial x_2^0} \delta x_2 + \frac{\partial W}{\partial y_1^0} \delta y_1 + \frac{\partial W}{\partial y_2^0} \delta y_2 \end{aligned} \quad (7-48)$$

式中 $\eta^0, \delta \eta$ —— 下沉系数近似值和改正值;

$\lg \beta^0, \delta \lg \beta$ —— 主要影响角正切近似值和改正值;

$x_1^0, \delta x_1$ —— 以工作面左边界地表拐点为坐标原点的 A 点 x 的近似值和改正值;

$x_2^0, \delta x_2$ —— 以工作面右边界地表拐点为坐标原点的 A 点 x 的近似值和改正值;

$y_1^0, \delta y_1$ —— 以工作面下边界地表拐点为坐标原点的 A 点 y 的近似值和改正值;

$y_2^0, \delta y_2$ —— 以工作面上边界地表拐点为坐标原点的 A 点 y 的近似值和改正值。

式(7-48)中各偏导数可写为

$$\frac{\partial W}{\partial \eta^0} = m \cos \alpha \cdot C_x C_y = A \quad (7-49)$$

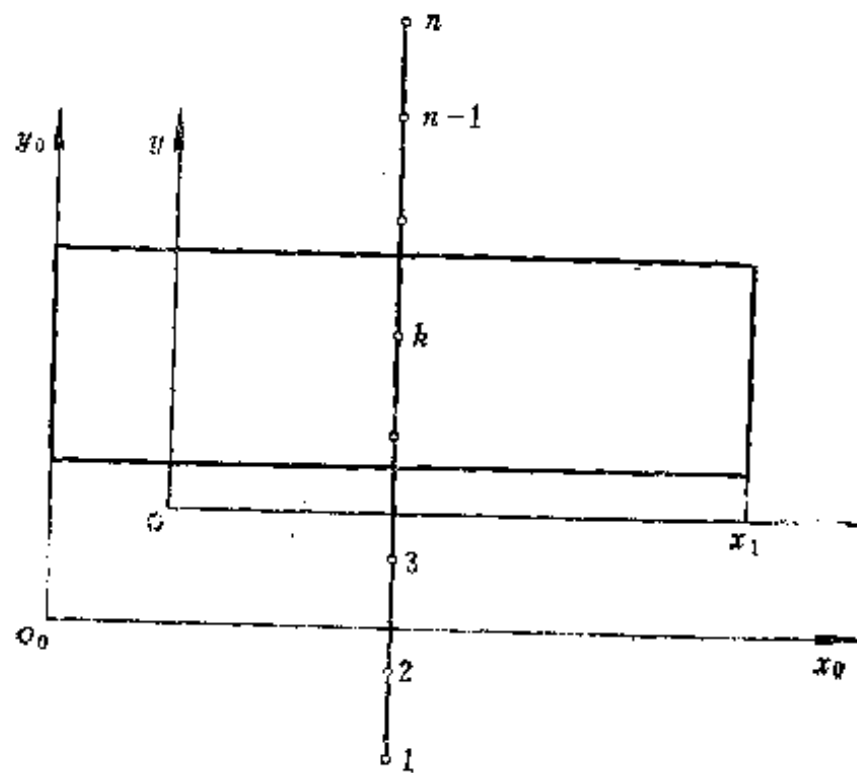


图 7-6 坐标系

$$\frac{\partial W}{\partial y_1^0} = \frac{W_{max} \operatorname{tg} \beta^0}{H_1} \cdot e^{-x \left(\frac{y_1^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H_1} \right)} \cdot C_x = B \quad (7-50)$$

$$\frac{\partial W}{\partial y_2^0} = - \frac{W_{\max} \operatorname{tg} \beta^0}{H_2} \cdot \exp \left[- \pi \left(\frac{y_2^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H_2} \right)^2 \right] \cdot C_1 = C \quad (7-51)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_1^0} = \frac{W_{\max} \operatorname{tg} \beta^0}{H_0} \exp \left[-\pi \left(\frac{x_1 \operatorname{tg} \beta_0}{H_0} \right)^2 \right] \cdot C_y = D \quad (7-52)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x_2^0} = \frac{W_{\max} \operatorname{tg} \beta^0}{H_0} \exp \left[-\pi \left(\frac{x_2 \operatorname{tg} \beta^0}{H_0} \right)^2 \right] \cdot C_T = E \quad (7-53)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \operatorname{tg} \beta^0} = W_{\max} & \left\{ C_x \left(\frac{y_1^0}{H_1} \exp \left[-\pi \left(\frac{y_1^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H_1} \right)^2 \right] - \frac{y_2^0}{H_2} \exp \left[-\pi \left(\frac{y_2^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H_2} \right)^2 \right] + \right. \\ & \left. + C_y \left[\frac{x_1^0}{H} \exp \left[-\pi \left(\frac{x_1^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H} \right)^2 \right] - \frac{x_2^0}{H} \exp \left[-\pi \left(\frac{x_2^0 \operatorname{tg} \beta^0}{H} \right)^2 \right] \right] \right\} \quad (7-54) \end{aligned}$$

当地表移动观测站包含走向观测线 (m 个测点) 和倾斜观测线 (n 个测点) 时, 对于这些测点存在下面的误差方程:

$$\begin{aligned} &A_1\delta\eta + B_1\delta y_1 + C_1\delta y_2 + D_1\delta x_1 + E_1\delta x_2 + F_1\delta \operatorname{tg}\beta + fW_1 = e_1 \\ &A_2\delta\eta + B_2\delta y_1 + C_2\delta y_2 + D_2\delta x_1 + E_2\delta x_2 + F_2\delta \operatorname{tg}\beta + fW_2 = e_2 \\ &\dots\dots\dots \\ &A_{m+n}\delta\eta + B_{m+n}\delta y_1 + C_{m+n}\delta y_2 + D_{m+n}\delta x_1 + E_{m+n}\delta x_2 + F_{m+n}\delta \operatorname{tg}\beta + fW_{m+n} = e_{m+n} \end{aligned} \quad (7-55)$$

以上称为 $m+n$ 个误差方程式, 其中

$$fW_i = W(\eta^0, y_i^0, y_i^1, x_i^0, x_i^1, \lg \beta^0) - W_i \quad (7-56)$$

根据最小二乘原理，组成法方程式：

$$\begin{aligned} [AA]\delta\eta + [AB]\delta y_1 + [AC]\delta y_2 + [AD]\delta x_1 + [AE]\delta x_2 + [AF]\delta\text{tg}\beta + [Af] &= 0 \\ [AB]\delta\eta + [AB]\delta y_1 + [BC]\delta y_2 + [BD]\delta x_1 + [BE]\delta x_2 + [BF]\delta\text{tg}\beta + [Bf] &= 0 \\ [AC]\delta\eta + [BC]\delta y_1 + [CC]\delta y_2 + [CD]\delta x_1 + [CE]\delta x_2 + [CF]\delta\text{tg}\beta + [Cf] &= 0 \\ [AD]\delta\eta + [BD]\delta y_1 + [CD]\delta y_2 + [DD]\delta x_1 + [DE]\delta x_2 + [DF]\delta\text{tg}\beta + [Df] &= 0 \\ [AE]\delta\eta + [BE]\delta y_1 + [CE]\delta y_2 + [DE]\delta x_1 + [EE]\delta x_2 + [EF]\delta\text{tg}\beta + [Ef] &= 0 \\ [AF]\delta\eta + [BF]\delta y_1 + [CF]\delta y_2 + [DF]\delta x_1 + [EF]\delta x_2 + [FF]\delta\text{tg}\beta + [Ff] &= 0 \end{aligned}$$

(7-57)

式中的 λ 代表求和之意，如：

$$[BB] = \sum_{i=1}^{m+n} (B_i, B_i), \quad [BC] = \sum_{i=1}^{m+n} (B_i, C_i) \quad (7-58)$$

根据以上六个法方程，可以唯一地确定六个参数值。

三、与水平移动有关的参数估计

由于走向和倾向水平移动表达式的形式不同, 因而沿求 θ 的改正值时只能用倾向测点。

对走向观测线, 水平移动表达式及其展开式为

$$U(x, y) = bW_{\max} \left[e^{-\pi \left(\frac{x_1 + \xi \beta}{H} \right)^2} - e^{-\pi \left(\frac{x_2 + \xi \beta}{H} \right)^2} \right] \cdot C_y$$

第八章 岩层与地表移动预计的灰色系统理论

第一节 灰色系统理论概述

一、灰色系统理论的基本概念

灰色系统,是指包含某些已知因素和若干个未知因素在内的一个复杂系统。1982年我国学者邓聚龙首先提出了灰色系统理论^[37]。这个理论不要求对系统的物理机制有详尽确切地了解,而着重对系统的内部结构及参数的总体特征进行研究,尽量发挥已有信息的作用,对系统的发展、控制和局势决策作出合乎实际的判断。

矿山岩层与地表移动受地质、采矿条件等多种因素的作用。在具有一定观测资料的条件下,特别适合应用灰色系统预测。灰色系统模型的求解有三个基本步骤:模型建立、参数分析和预测预报。

灰色系统模型(GM)是以微分方程描述的,它揭示了事物持续发展的长过程^[38]。一般地说,灰色系统采用线性模型。对包含 h 个变量的 n 阶动态模型可以记为

$$\frac{d^n X^{(1)}}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} X^{(1)}}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n X^{(1)} = b_1 X_1^{(1)} + \cdots b_{h-1} X_{h-1}^{(1)}$$

式中 a_i, b_i ——常系数;

$X^{(1)}$ ——变量的一次生成序列;

t ——时间(或空间)变量。

上述微分方程中, a_i 和 b_i 是待识别的参数。进行参数分析实际上类似于目前常用的位移反分析法,即由系统过去的行为构成的数据序列通过适当的处理,来反演模型的参数。

由于采矿工程中影响因素的复杂多变性,观测到的数据常常呈波动起伏状,直接用这些波动的数据建立模型往往精度和可靠性较差。因而对原始数据应进行生成处理,累加和累减生成是常用的数据变换方式,公式为

$$X^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i X^{(0)}(k) \quad X^{(0)}(i) > 0$$
$$X^{(0)}(i) = X^{(1)}(i) - X^{(1)}(i-1)$$

式中 $X^{(1)}(i)$ ——一次累加生成数据;

$X^{(0)}(i)$ ——非负的原始数据。

在建立起模型并确定了参数之后,即可动态地预测系统未来的行为状态。

二、GM(h, n)求解的一般过程

设给定原始数据

$$\{X_k^{(0)}(i)\}, X_k^{(0)}(i) > 0$$
$$i = 1, 2, \cdots N; k = 1, 2, \cdots h$$

有相应的一次累加序列

$$\{X_k^{(1)}(i)\}, i = 1, 2, \cdots N; k = 1, 2, \cdots m$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

当特征根为不等实根时, 方程的解为

$$W^{(1)}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{u}{a_2}$$

其中 C_1 、 C_2 是与初值有关的系数, 由以下两式求出:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{u}{a_2} = W^{(1)}(0) \\ \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 = W^{(1)}(1) - W^{(1)}(0) \end{cases}$$

二阶模型具有较高的计算精度, 但有时存在数据不稳定的情形。

第三节 灰色系统预计实例与算法程序

一、根据下沉观测序列预测以后的下沉量示例^[39]

某矿属坚硬岩层矿山, 现开采4221工作面, 采深200m, 采厚2.1m, 煤层倾角 $\alpha = 3^\circ \sim 5^\circ$, 工作面走向长800m, 倾向长250m。地表设立了移动观测站, 其中13号点为最大下沉点, 工作面推过13号点后已观测了五次, 下沉值为:

表 8-1 观 测 值 表

次 数	0	1	2	3	4	5
下 沉 值 (m)	0.910	1.015	1.145	1.169	1.187	1.285

观测时间间隔为每月一次, 总次数为第4~9次, 即第0次代表总次数的第4次, 以此类推。

现按灰色系统建模方法建立地表最大下沉点移动过程的方程, 并预测后3个月的下沉值。

设选取的微分模型为 $GM(2, 1)$, 基本形式为

$$\frac{d^2 W^{(1)}}{dt^2} + a_1 \frac{dW^{(1)}}{dt} + a_2 W^{(1)} = u$$

当特征方程的根为不等实根 λ_1 、 λ_2 时, 方程的解为

$$W^{(1)}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \frac{u}{a_2}$$

参数 $a = [(A; B)^T (A; B)]^{-1} (A; B)^T Y_n = [a_1 \ a_2 \ u]^T$

这里

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -\alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 2) - \frac{1}{2}(X_1^{(1)}(2) + X_1^{(1)}(1)) & 1 \\ -\alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 3) - \frac{1}{2}(X_1^{(1)}(3) + X_1^{(1)}(2)) & 1 \\ -\alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 4) - \frac{1}{2}(X_1^{(1)}(4) + X_1^{(1)}(3)) & 1 \\ -\alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 5) - \frac{1}{2}(X_1^{(1)}(5) + X_1^{(1)}(4)) & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_n = [\alpha^{(1)}(X_1^{(1)}, 2), \alpha^{(2)}(X_1^{(1)}, 3), \alpha^{(3)}(X_1^{(1)}, 4), \alpha^{(4)}(X_1^{(1)}, 5)]^T$$

可由数据表 (表8-2) 算出 $(A|B)$ 、 Y_n ;

表 8-2 计 算 数 据 表

总序号	计算序号	观测时间	下沉值 $W^{(1)}(t)$ (m)	下沉增量	一次累加序列	均值生成序列
4	0	82.5	0.910			
5	1	82.6	1.015	0.105		
					1.015	
6	2	82.7	1.145	0.130		1.588
					2.160	
7	3	82.8	1.169	0.024		2.744
					3.329	
8	4	82.9	1.187	0.018		3.922
					4.516	
9	5	82.10	1.285	0.098		6.158
					5.801	

$$(A|B) = \begin{pmatrix} -1.145 & -1.588 & 1 \\ -1.169 & -2.744 & 1 \\ -1.187 & -3.922 & 1 \\ -1.285 & -5.158 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Y_n = (0.130 \quad 0.024 \quad 0.018 \quad 0.098)^T$$

进而计算得

$$(A|B)^T(A|B) = \begin{pmatrix} 5.738 & 16.309 & -4.786 \\ 16.309 & 52.038 & -13.412 \\ -4.786 & -13.412 & 4 \end{pmatrix}$$

$$[(A|B)^T(A|B)]^{-1} = \begin{pmatrix} 534.078 & -19.764 & 572.756 \\ -19.764 & 0.873 & -20.721 \\ 572.756 & -20.721 & 616.075 \end{pmatrix}$$

$$(A|B)^T Y_n = (-0.324 \quad -0.848 \quad 0.432)^T$$

$$\hat{a} = (91.149 \quad -3.288 \quad 98.143)$$

于是微分模型为

$$\frac{d^2 W^{(1)}}{dt^2} + 91.149 \frac{dW^{(1)}}{dt} - 3.288 W^{(1)} = 98.143$$

特征方程为

$$\lambda^2 + 91.149\lambda - 3.288 = 0$$

解得: $\lambda_1 = 0.036$ $\lambda_2 = -91.18$

微分方程的解为

$$W(t) = C_1 e^{0.036t} + C_2 e^{-91.18t} - 29.849$$

现确定 C_1, C_2 :

令 $t = 0$, 有 $W(0) = 1.015$

$$\frac{dW^{(1)}}{dt} = 0.105$$

代入方程, 得

$$C_1 + C_2 - 29.849 = 1.015$$

$$0.036C_1 - 91.18C_2 = 0.105$$

上述两式联立求解, 得

$$C_1 = 30.855, \quad C_2 = 0.0093$$

于是得到模型的解:

$$W^{(1)}(t) = 30.855e^{0.036t} + 0.0093e^{-91.18t} - 29.849$$

以次数表示的方程为

$$W^{(1)}(k) = 30.855e^{0.036(k-1)} + 0.0093e^{-91.18(k-1)} - 29.849$$

现将拟合和预计结果列于表8-3。

表 8-3 观测值与计算值对比

单位: m

观测时间	下沉观测值	下沉预计值	差值 Δ
82.5	0.910	0.910	0
82.6	1.015	1.015	0
82.7	1.145	1.122	0.023
82.8	1.169	1.174	0.005
82.9	1.187	1.214	0.027
82.10	1.285	1.260	0.025
82.11	1.299	1.305	0.006
82.12	1.335	1.354	0.019
82.13	1.384	1.404	0.020

$$\text{中误差 } m = \pm \sqrt{\frac{[\Delta\Delta]}{n-1}} = \pm 0.018(\text{m})$$

结果表明, 这种方法具有较好的拟合效果和较高的预计精度。

二、GM(2, 1)预测程序

根据以上计算过程设计的预测程序。

```

PROGRAM GM21
PARAMETER (N=3,EPS=1E-10)

C
  DIMENSION A(5),S(5),Z(4),B(4,3),C(3,4),Y(4),
  * E(3,3),F(3),AU(3),D(3,3),W(16),WW(15),Y1(N),Y2(N)
  DIMENSION TITLE(20), T(15)
  OPEN(5,FILE='GMDATA',STATUS='OLD')
  OPEN(6,FILE='GMDD',STATUS='NEW')
  READ(5,1) (TITLE(I),I=1,20)
  WRITE(6,2) (TITLE(I),I=1,20)
1  FORMAT(20A4)
2  FORMAT(1H / ,5X, 20A4, /)
  S(1)=0.
10 READ(5,* ) A0,(A(I),I=1,5)
  S(1)=A(1)
  DO 15 I=2,5
15 S(I)=S(I-1)+A(I)
C
  DO 20 I=1,4
  Z(I)=(S(I+1)+S(I))/2
  B(I,1)=-A(I+1)
  B(I,2)=-Z(I)
  B(I,3)=1
  C(1,I)=-A(I+1)
  C(2,I)=-Z(I)
20 C(3,I)=1
  DO 30 I=1,4
30 Y(I)=A(I+1)-A(I)
C
  D(I,J)=0.
  DO 45 I=1,3
  DO 45 K=1,3
  D(I,K)=0.
  DO 45 J=1,4

```

```

45  D(I,K)=D(I,K)+C(I,J)*B(J,K)
C   CALL ELSV(DE,EPS,N,D,Y1,Y2)
    DET=D(1,1)*D(2,2)*D(3,3)+D(1,2)*D(2,3)*D(3,1)
    %   +D(1,3)*D(2,1)*D(3,2)-D(1,3)*D(2,2)*D(3,1)
    %   -D(2,1)*D(1,2)*D(3,3)-D(1,1)*D(2,3)*D(3,2)
    WRITE(*,*)DET
    E(1,1)=(D(2,2)*D(3,3)-D(2,3)*D(3,2))/DET
    E(1,2)=-(D(2,1)*D(3,3)-D(2,3)*D(3,1))/DET
    E(1,3)=(D(2,1)*D(3,2)-D(2,2)*D(3,1))/DET
    E(2,2)=(D(1,1)*D(3,3)-D(1,3)*D(3,1))/DET
    E(2,3)=-(D(1,1)*D(3,2)-D(1,2)*D(3,1))/DET
    E(3,3)=(D(1,1)*D(2,2)-D(1,2)*D(2,1))/DET
    E(2,1)=E(1,2)
    E(3,2)=E(2,3)
    E(3,1)=E(1,3)
C
    F(I)=0.
    DO 60 I=1,4
    F(1)=F(1)+C(1,I)*Y(I)
    F(2)=F(2)+C(2,I)*Y(I)
60  F(3)=F(3)+C(3,I)*Y(I)
    WRITE(*,*)(F(I),I=1,3)
    AU(I)=0.
    DO 70 I=1,3
    AU(1)=AU(1)+E(1,I)*F(I)
    AU(2)=AU(2)+E(2,I)*F(I)
C
70  AU(3)=AU(3)+E(3,I)*F(I)
    WRITE(*,80)(AU(I),I=1,3)
80  FORMAT(1H /'A1=',F10.6,' - A2=',F10.6,' U=',F10.6)
    DELT=AU(1)**2-4*AU(2)
    ROT1=(-AU(1)+SQRT(DELT))/2
    ROT2=(-AU(1)-SQRT(DELT))/2
    X=AU(3)/AU(2)

```

```

C1=(A(1)-A0-ROT2*(A(1)-X))/(ROT1-ROT2)
C2=A0-X-C1
WRITE(*,*)C1,C2
DO 120 I=1,16
120 W(I)=C1*EXP(ROT1*(I-1))+C2*EXP(ROT2*(I-1))+X
C
WW(1)=W(1)
DO 130 I=1,15
130 WW(I)=W(I+1)-W(I)
DO 140 I=1,5
140 T(I)=WW(I)-A(I)
WRITE(6,157)
157 FORMAT(/'STARTING TIME: 1988.06   INTERVAL: 0.5 YEAR')
WRITE(6,158)
158 FORMAT(1H/'   NO. OBSERVED DATA  CALCULATION  DELT')
WRITE(6,160) (I,A(I),WW(I),T(I),I=1,5)
WRITE(*,160) (I,A(I),WW(I),T(I),I=1,5)
WRITE(6,159)159  FORMAT(1H/'   NO.    PREDICTED DATA')
WRITE(6,165) (I,WW(I),I=6,15)
160 FORMAT(1X,I5,3F12.4)
165  FORMAT(1X,I5,F16.4)
STOP
END
SUBROUTINE ELSV(DE,EP,N,A,B,C)
DIMENSION A(N,N),B(N),C(N)
DO 11 I=1,N
C(I)=0.
DO 12 J=1,N
12  C(I)=C(I)+A(I,J)
A(I,I)=A(I,I)-1.0
11  CONTINUE
DO 13 K=1,N
DO 14 J=1,N
B(J)=A(K,J)

```

```

      A(K,J)=0.0
14  CONTINUE
      A(K,K)=1.0
      W=B(K)+1.
      IF(ABS(W).LT.EP) GO TO 17
      DO 13 I=1,N
      Y=A(I,K)/W
      DO 13 J=1,N
      A(I,J)=A(I,J)-B(J)*Y
13  CONTINUE
      DE=0.
      DO 15 J=1,N
      B(J)=0.
      DO 16 I=1,N
      B(J)=B(J)+A(I,J)
16  CONTINUE
      DE=DE+C(J)*B(J)
15  CONTINUE
      RETURN
17  DE=-1
      END

```

第四节 地表移动计算的灰色时空四维模型简介

地表移动计算中影响函数法应用较普遍，其基本思路是全部开采引起的地表移动是无限小单元盆地的总和。这个基本原理被许多研究者反复论证过^[40]。

地表移动过程可以归结为一个扩散过程，而扩散过程是与时间相关联的。通常导出的计算公式和模型中不包括时间因子，因而得到的结果是稳定状态的情况。在研究保护地面建筑物时，知道移动变形的过程是十分必要的。刘宝琛、廖国华等证明下沉速度与最终下沉和瞬间下沉量之差成正比^[34]。峰峰矿务局与中国矿业大学研究了地表下沉过程的表达式。笔者根据灰色系统理论研究了地表一个点的移动过程，得到了双参数的时间函数。

在以下的讨论中，将地表移动的空间与时间过程放在统一的表达式中，作为一个时间空间四维过程处理。

一、时间—空间四维模型

由于地下开采引起的地表移动是空间和时间的函数，一般地有影响函数

$$f = f(x, y, z, t, \xi, \eta, \zeta)$$

式中 x, y, z ——计算点的坐标;

t ——计算时刻;

ξ, η, ζ ——地下采空区位置的坐标。

按叠加原理, A 点 (x, y, z) t 时刻的下沉为

$$W(x, y, z, t) = \iiint_{\Omega} f(x, y, z, t) dv dt$$

一般地说, $f(x, y, z, t)$ 中时间和空间变量是不可分离的。但经过化简和运算, 可将 f 写为

$$f(x, y, z, t) = g(x, y, z) \cdot h(t)$$

于是任意时刻的下沉表达式可写为

$$W(x, y, z, t) = \iiint_{\Omega} g(x, y, z) dv \cdot \int_0^t h(t) dt$$

依据上式, 即可将空间影响函数 $g(x, y, z)$ 和时间影响函数 $h(t)$ 分别确定出来, 然后获得最终计算结果。

二、空间模型及其简化

单元下沉盆地表达式, 即影响函数写为

$$g(x, y, z) = \frac{\text{tg}^2\beta}{z^2} \exp\left[-\frac{\pi(x^2 + y^2)\text{tg}^2\beta}{z^2}\right]$$

考虑水平煤层的情况, z 即为采深 H 。同时考虑下沉系数 η 的影响 (相当于扩散系数), 则

$$g(x, y, z) = \frac{\eta \text{tg}^2\beta}{H^2} \exp\left[-\frac{\pi(x^2 + y^2)\text{tg}^2\beta}{H^2}\right]$$

对整个开采区域积分, 得到下沉表达式

$$W(x, y, z) = \iiint_{\Omega} \frac{\eta \text{tg}^2\beta}{H^2} \exp\left[-\frac{\pi \text{tg}^2\beta}{H^2} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right] d\xi d\eta d\zeta$$

当采厚均匀时, 有

$$\begin{aligned} W(x, y, z) &= \int_0^M \eta d\zeta \iint_D \frac{\text{tg}^2\beta}{H^2} \exp\left[-\pi \frac{\text{tg}^2\beta}{H^2} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right] d\xi d\eta \\ &= M\eta \iint_D \frac{\text{tg}^2\beta}{H^2} \exp\left[-\frac{\pi \text{tg}^2\beta}{H^2} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]\right] d\xi d\eta \end{aligned}$$

文献[41]导出了沿开采平面边界环路积分的形式:

$$W(x, y) = m\eta \oint_s \frac{\text{tg}^2\beta}{2H^2} \exp\left[-\pi \frac{\text{tg}^2\beta}{H^2} (y - \eta)^2\right] \cdot \text{erf}\left[\pi \frac{\text{tg}\beta}{H} (x - \xi)\right] d\eta$$

式中 s 为任意形状的开采边界 (单连通域)。

上式还可写为

$$W(x, y) = m\eta \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{\text{tg}\beta}{2H} \exp\left[-\frac{\pi \text{tg}^2\beta}{H^2} (y - \eta)^2\right] \text{erf}\left[\frac{\pi \text{tg}\beta}{H} (x - \xi)\right] d\eta$$

式中 l_i 为直线段。

以上表达式称为线积分型概率积分方程。

三、时间影响函数

根据对地表点移动过程的观测资料分析, 现选择费尔哈斯 (Verhulst) 模型反映时间因素。该模型以微分方程表示为

$$\frac{dh^{(1)}(t)}{dt} = ah^{(1)}(t) - b(h^{(1)}(t))^2$$

模型包括两个参数 a 、 b 。方程右端后一项称为竞争项, 反映加速阻尼的含义。

费氏模型是一个非线性微分方程, 其解为

$$h(t) = \frac{a/b}{1 + \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{h_0} - 1 \right) e^{-a(t-t_0)}}$$

费氏模型的几何意义如图8-1所示。第Ⅰ阶段 $h(t)$ 增长慢, 类似于地表移动起动过程; 第Ⅱ阶段快速增长, 对应地表移动活跃期, 中间的分界点是 $\frac{1}{2} \frac{a}{b}$; 第Ⅲ阶段增长趋势越来越小, 对应于地表移动衰退期。

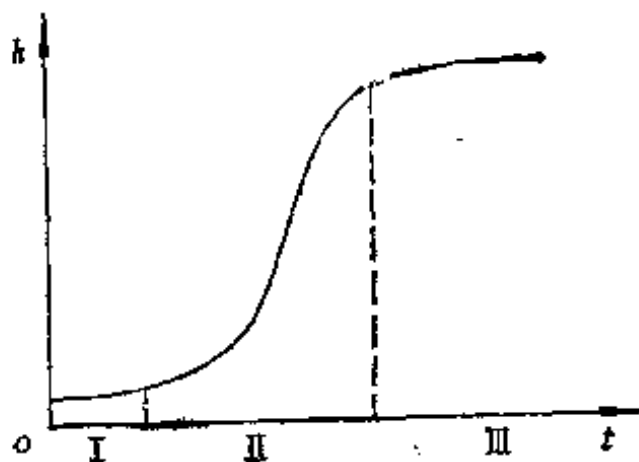


图 8-1 费氏模型的几何解释

费氏模型的参数 a 、 b , 可以通过灰色系统反算, 其过程为:

对地表最大下沉点进行了 N 次观测, 得到 N 次观测值 $W(1)$ 、 $W(2) \cdots W(N)$; 对各时刻下沉值分别除以最大下沉值 $W(N)$, 并令

$$h(i) = W(i)/W(N) \quad i=1, 2, \cdots, N$$

进行累加处理, 得

$$h^{(1)}(i) = \sum_{k=1}^i h(k)$$

费氏模型中参数 a 、 b 用矩阵表示:

$$\hat{a} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$$

参数由以下矩阵乘法求出:

$$\hat{a} = [(A : B)^T (A : B)]^{-1} (A : B)^T Y_N$$


```

DO 20 I=1,4
Z(I) = (S(I+1)+S(I))/2
ZQ(I) = Z(I) * Z(I)
B(I,1) = Z(I)
C(1,I) = Z(I)
C(2,I) = -ZQ(I)
20  B(I,2) = -ZQ(I)
WRITE(*,*)(Z(I),I=1,4)
WRITE(*,*)(ZQ(I),I=1,4)
DO 30 I=1,4
C
30  Y(I) = A(I+1)
C
D(I,J) = 0.
DO 45 I=1,4
D(1,1) = Z(I) * Z(I) + D(1,1)
D(1,2) = D(1,2) - Z(I) * ZQ(I)
45  D(2,2) = ZQ(I) * ZQ(I) + D(2,2)
D(2,1) = D(1,2)
WRITE(*,*)(D(I,J),J=1,2),I=1,2)
DET = D(1,1) * D(2,2) - D(1,2) * D(2,1)
E(1,1) = D(2,2) / DET
E(2,2) = D(1,1) / DET
E(1,2) = -D(2,1) / DET
E(2,1) = E(1,2)
WRITE(*,*)(E(I,J),J=1,2),I=1,2)
DO 60 I=1,2
50  F(I) = 0.
WRITE(*,*)(C(I,J),J=1,4),I=1,2)
DO 60 I=1,4
F(1) = F(1) + C(1,I) * Y(I)
60  F(2) = F(2) + C(2,I) * Y(I)
DO 65 I=1,2

```

```

65  AU(I)=0.
    DO 70 I=1,2
      AU(2)=AU(2)+E(2,I)*F(I)
C
70  AU(1)=AU(1)+E(1,I)*F(I)
    WRITE(6,80)AU(1),AU(2)
80  FORMAT(1H/'A=',F10.6'    U=',F10.6)
C
    X=AU(1)/AU(2)
    DO 120 I=1,16
120  W(I)=X/(1+(X/A0-1)*EXP(-AU(1)*(I-1)))
C
    WW(1)=W(1)
    DO 130 I=1,15
130  WW(I)=W(I+1)-W(I)
    DO 140 I=2,15
140  T(I)=WW(I)-A(I)
    WRITE(6,157)
157  FORMAT(/'STARTING TIME: ——    INTERVAL: 0.5 YEAR')
    WRITE(6,158)
158  FORMAT(1H/'    NO.  OBSERVED DATA CALCULATION  DELT')
    WRITE(6,160)(I,A(I),WW(I),T(I),I=1,5)
    WRITE(6,159)
159  FORMAT(1H/'    NO.  PREDICTED DATA')
    WRITE(6,165)(I,WW(I),I=6,15)
160  FORMAT(1X,I5,3F12.4)
165  FORMAT(1X,I5,F16.4)
    STOP
    END

```

第九章 断层影响下的地表移动计算

断层和采矿共同作用下的岩层与地表移动问题在我国各矿区均普遍存在。由于赋存条件复杂,实测资料较少,以及研究手段方面的限制,至今难于准确预计和定量计算,甚至在定性规律的认识上尚不清楚。事实上,含断层岩体受开采影响产生不连续变形的规律已成为岩层移动学科亟待解决的难题之一。

在含断层的地质条件下进行建筑物下、铁路下、水体下和承压水上开采,应当研究断层引起移动变形集中的条件和范围,并定量地做出合乎实际的估计。还应探讨断层各要素的影响性质,预测不连续变形是否出现,发生时间、持续过程及发展趋势。此外,分析断层影响的岩体内部移动变形规律,井柱开采、柱外开采对井筒的影响,以及煤柱的合理留设,都具有重要的实用价值。

由于含断层岩体介质和开采影响的复杂性,用某一种方法单独解决这个问题是比较困难的。笔者在前人工作的基础上,应用统计分析和数值模拟两种方法对断层影响的岩层移动问题作了初步探讨^[42]。

第一节 受断层影响的地表移动特征

如果采动岩体产生了沿断层面的滑动,其移动变形特点与连续型的岩体移动变形规律存在明显的差异,主要表现在移动范围、移动过程和剖面形态三个方面。

一、移动范围

对实测资料的分析表明,断层面倾角是引起岩层移动范围发生变化的主要因素。一般来说,断层面倾角 δ 与岩层移动角 α 的关系对移动范围起控制作用。

当 $\delta < \alpha$ 时,移动范围扩大,如辽源西安矿^[43]、淮南大通矿以及前苏联亚罗夫矿。

当 $\delta > \alpha$ 时,移动范围缩小,如淮南九龙岗矿^[2]。

二、移动过程

岩体沿断层面滑移的过程与连续的地表移动过程相比其速度要快,但移动台阶并不是瞬间形成一次终止,而是经历了较为复杂的发展过程。鹤壁二矿129工作面上方通过 F_{22} 断层的地表移动观测曲线见图9-1。由图9-1可见,滑移是随地表移动盆地的发展逐步形成的,台阶也是多次累积形成的。我们通过对一理论模型的分析,得出结论:岩体沿断层面的大规模、一次性急剧滑动一般是不会发生的。

三、移动台阶产生的影响因素

岩体沿断层面滑移在地表产生移动台阶,是由众多因素的影响产生的,根据实测分析,可得出以下定性的结论:

(1) 断层面倾角 δ 是岩体稳定至关重要的影响因素。当 $\delta < 20^\circ$ 时,影响一般不显著;当 $\delta > 20^\circ$ 时,由影响显著直至起控制作用。

(2) 移动台阶的产生往往取决于断层的两盘下沉速度差,差值越大越容易产生滑移。

(3) 断层落差 ΔH 大小对台阶产生有很大影响。当 $\Delta H < 10\text{m}$ 时,往往不产生沿断层

面的滑移; 当 $\Delta H > 10\text{m}$ 时, 比较容易产生滑移。

(4) 滑移与采动程度有关。当最大下沉 W_{\max} 较大时, 容易产生移动台阶, 且台阶落差一般与 W_{\max} 成正比。

(5) 断层面之间存在软弱夹层时, 岩体的稳定性与充填物的力学性质有关。粘结力 C_f 和内摩擦角 φ_f 越小越不稳定。

(6) 同样条件下, 正断层比逆断层易复活。

(7) 重复采动比初次采动更容易引起岩体沿断层面的滑移。

(8) 采动范围内几条断层同时存在时, 有可能同时复活或同时稳定。

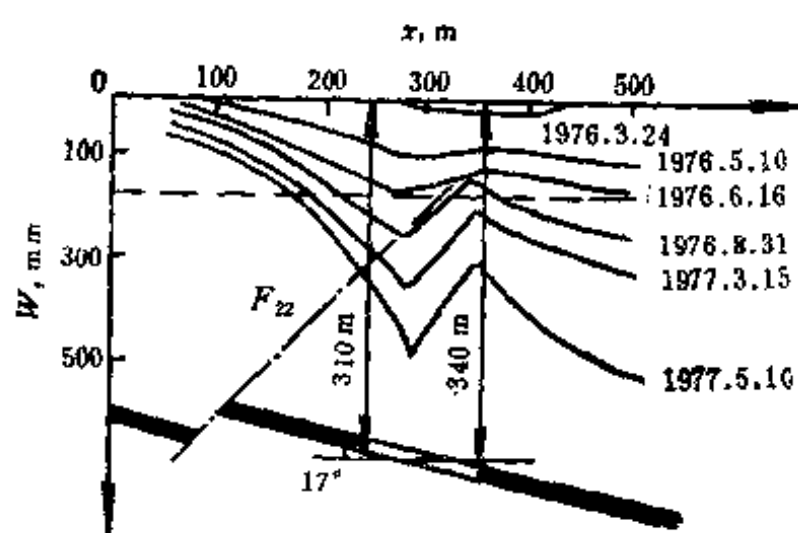


图 9-1 鹤壁二矿129工作面滑移盆地观测曲线

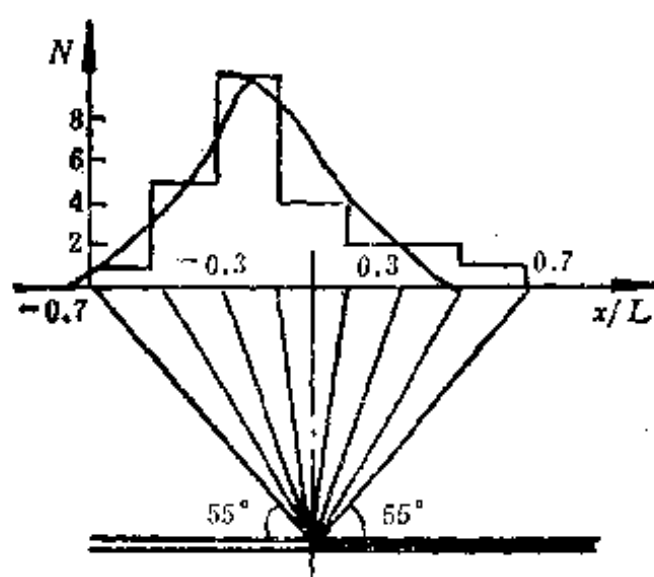


图 9-2 移动台阶分布

四、移动台阶产生的位置分析

根据国内外25个断层影响的台阶状盆地的实测资料^[44], 从统计意义上分析台阶在移动盆地中位置的分布规律, 根据直方图(图9-2)假定位置服从正态分布。通过 χ^2 检验在水平0.1下接受了原假设, 台阶位置服从分布 $N(-0.0136, 0.2676)$ 。

五、滑移量值分析

根据实测资料分析得到台阶落差的估算公式^[2]为

$$Q(x) = \frac{\lambda W_{\max} \sqrt{\sin \delta} L}{x} \quad (9-1)$$

式中 λ ——断层影响系数;

$Q(x)$ ——台阶量值函数;

x ——断层露头到最大下沉点的距离;

L ——地表下沉盆地半长。

式(9-1)的特点是考虑了最大下沉、断层要素和断层位置几个因素的综合影响。

第二节 台阶状下沉盆地的计算

一、连续与不连续下沉盆地的统一表达式

设某一剖面地表下沉曲线为 $W(x)$, 并在移动范围 $[-L, L]$ 上满足狄氏(Dirichlet)条件, 即

(1) $W(x)$ 在 $[-L, L]$ 上连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在 $[-L, L]$ 上 $W(x)$ 只有有限个极值点。

那么 $W(x)$ 在 $[-L, L]$ 上可以展开为傅里叶 (Fourier) 级数, 即

$$W(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{L} + b_k \sin \frac{k\pi x}{L} \right) \quad (k=1, 2, \dots) \quad (9-2)$$

式中, $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L W(x) dx$; $a_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L W(x) \cos \frac{k\pi x}{L} dx$;

$$b_k = \frac{1}{L} \int_{-L}^L W(x) \sin \frac{k\pi x}{L} dx.$$

$W(x)$ 在 $[-L, L]$ 上分段可微, 在连续点上有导数, 在间断点 (滑移点) x_0 处极限存在。则级数在连续点收敛于 $W(x)$, 间断点 x_0 处收敛于 $[W(x_0+0) + W(x_0-0)]/2$, 于是式 (9-2) 既可表达连续的下沉曲线, 又可表达台阶状下沉曲线。

a_0 表示下沉曲线与 x 轴之间的面积乘 $\frac{1}{L}$, 故

$$a_0 = \frac{1}{2L} mq \times 2a = \frac{maq}{L} \quad (9-3)$$

式中 m —— 采厚;

a —— 采区半长;

q —— 常数, $0 \leq q \leq 1$ 。

a_k 、 b_k 是随 $W(x)$ 而变化的, 我们选一简化模型为例。沙武斯托维奇 (A. Salustowicz) 根据弹性基础梁假定, 给出了地表下沉的剖面方程⁽¹⁾, 即

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} W_0 e^{-\alpha x} \cos \alpha x & x > 0 \text{ (煤层上)} \\ W_0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-\alpha x} \cos \alpha x \right) & x < 0 \text{ (采空区上)} \end{cases} \quad (9-4)$$

式中 $\alpha = \frac{\pi}{l}$; l 为移动盆地半长。

假定在 $x=0$ 处有移动台阶, 则

$$W(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \varphi_1 W_0 \exp\left(-\frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) & x > 0 \\ \varphi_2 W_0 \left[1 - \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right] & x \leq 0 \end{cases} \quad (9-5)$$

式中 φ_1 、 φ_2 为断层上、下盘影响系数, $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ 时, $W(x)$ 为连续型下沉曲线。

将 $W(x)$ 代入 a_k 、 b_k 的表达式, 积分得

$$\begin{cases} a_k = a'_k + a''_k \\ b_k = (-1)^k \frac{\varphi_2 W_0 L}{k\pi} + (k+1)a'_k + (k+1)a''_k \end{cases} \quad (9-6)$$

其中

$$\begin{cases} \alpha'_k = \frac{W_0[\varphi_1 + \varphi_2 - (-1)^k(e^{-x}\varphi_1 - e^x\varphi_2)]}{4\pi[1 + (k+1)^2]} \\ \alpha''_k = \frac{W_0[\varphi_1 + \varphi_2 + (-1)^k(e^x\varphi_2 + e^{-x}\varphi_1)]}{4\pi[1 + (k-1)^2]} \end{cases} \quad (9-7)$$

二、台阶状下沉盆地计算的实用方法

上面导出的公式应用计算机计算比较方便。下面我们根据资料分析，在体积不变的假定条件下，提出台阶状下沉盆地的一个实用预计方法。

所谓体积不变假定就是：地表下沉盆地的体积不因剖面形态的变异而变化，在其余条件相同的情况下，台阶状下沉盆地与连续型下沉盆地具有相同的体积；在平面变形情况下，两种下沉剖面曲线所围的面积相等。

若连续型下沉剖面函数为 $W(x)$ ，则台阶状下沉剖面曲线可表达为

$$G(x) = \{1 + \varphi_1(x) - U(x - x_0)[\varphi_1(x) + \varphi_2(x)]\}W(x) \quad (9-8)$$

式中 $U(x - x_0)$ —— 阶梯函数；

$\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ —— 断层上、下盘影响函数。

根据图9-3， $\varphi_1(x)$ 、 $\varphi_2(x)$ 存在如下关系：

$$\begin{cases} \varphi_1(x_0) + \varphi_2(x_0) = 0 \\ \varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)Q(x)dx \\ \int_{-\infty}^{x_0} [\varphi_1(x) - 1]dx = \int_{x_0}^{\infty} [\varphi_2(x) - 1]dx \end{cases} \quad (9-9)$$

式中 $\delta(x - x_0)$ —— 狄拉克 (Dirac)- δ 函数。

适当选取 $W(x)$ 、 $\varphi(x)$ 和 $Q(x)$ ，就能较好地计算断层影响的台阶状下沉曲线 $G(x)$ 。这里将 $W(x)$ 取式 (9-4)， $Q(x)$ 取式 (9-1)，于是 $\varphi(x)$ 为分段线性函数式，即

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = -\frac{1}{2} Q(x_0) + \frac{1}{2c} Q(x_0)(x - x_0) \\ \varphi_2(x) = \frac{1}{2} Q(x_0) - \frac{1}{2c} Q(x_0)(x - x_0) \end{cases} \quad (9-10)$$

式中 c —— 断层影响范围。

三、预计实例

云南田坝矿1218工作面采用长壁式全部陷落法开采，采厚2.05m，煤层倾角15°，上边界采深112m，下边界采深132m。工作面走向长450m，超充分采动；倾向长92m，非充分采动。采动岩体内存在一正断层，断层面倾角86°，其倾向与煤层倾向相反。

首先根据该矿的经验参数，按概率积分法计算出连续型曲线 $W(x)$ ；其次根据断层露头线确定台阶的位置；然后由台阶量值函数估算 $Q(x_0)$ ，并选择分段线性函数 $\varphi(x)$ ；计算修正量 $\Delta W(x)$ ；最后由 $G(x) = W(x) + \Delta W(x)$ 得台阶状下沉曲线 (图9-4)。

图9-4表明，计算曲线与实测值基本符合。还表明，非充分采动，受断层影响也可能出现平底盆地。

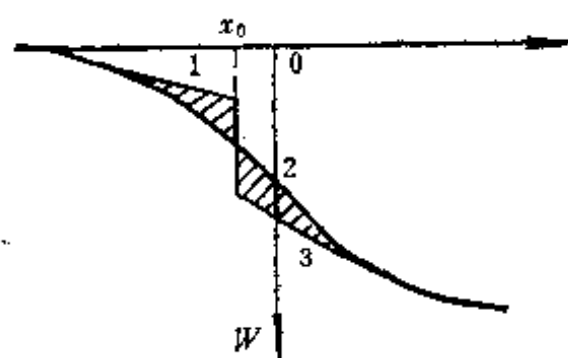


图 9-3 $\varphi_1(v)$ 与 $\varphi_2(x)$ 的相互关系
1— $G(x)=\varphi_1 W(x)$; 2— $W(x)$; 3— $G(x)=\varphi_2 W(x)$

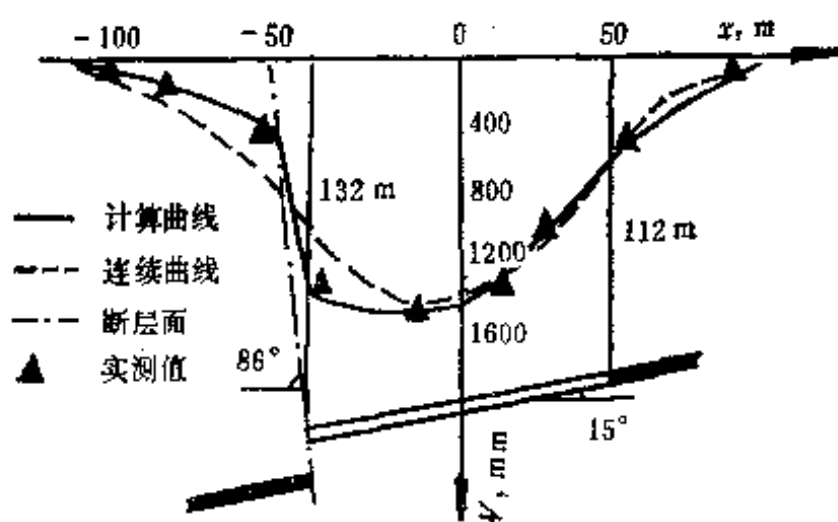


图 9-4 云南田坝矿台阶状盆地计算值与实测值对比曲线

第三节 应用边界元法研究断层影响规律

对于求解无限或半无限域问题,边界元法与有限元法相比具有一系列优点,如仅剖分边界,降低了问题的维数并节省机时;无须象有限元那样人为圈定计算边界;对计算机容量要求不高且上机准备量较少;计算精度较高等。我们将边界元法用于计算岩层与地表移动问题^[31],设计了程序TSHD,并应用该程序对条带开采问题进行了初步探讨。TSHD程序可以模拟包括断层滑移在内的非线性问题。下面应用该程序对正交设计方案中的模型进行数值模拟,以研究断层影响的规律性。

一、正交设计法

正交设计法是用较少的模型高效率地研究多因素影响问题的一种方法,它具有因子均衡搭配的性质,从而可用综合比较的方法分析诸因素的影响程度和变化规律。应用这种方法研究断层影响问题的主要步骤为:

- 1) 确定因子、水平和指标 首先选择与滑移相关的因素并分为若干水平。这里考虑两项指标:滑移可能性和滑动量值。
- 2) 提出设计方案 根据因子水平数,选择适当的正交表,制订出计算方案。
- 3) 数值模拟,取得计算结果 通过程序 TSHD,逐个模型进行计算,得到模拟分析的结果。
- 4) 数据的统计分析 按综合比较的方法着重分析因子影响的主次和因子的变化规律。

二、两个计算方案及其分析

1) 方案一——8因子三水平计算方案 该方案的目的是分出滑移影响因子的主次。选择 8 个因子分为三个水平 (表9-1)。正交设计方案一包括27个模型,在全部 216 种可能的计算中具有很强的代表性。

通过对计算结果进行分析,各要素对滑移产生及量值大小所起的作用顺序如下:断层面倾角 δ ;弱面刚度 K_n , K_s ;弱面内摩擦角 φ ;原岩应力;断层露头的位置;岩石力学参数 E_H , E_L ;煤层采厚;弱面粘聚力 C 。

表 9-1 方案一的因子选取和水平布置

序 号	因 子	水 平		
		1	2	3
1	岩石的弹性模量 $E_{//}$, GPa	2.63	3.56	5.63
	E_{\perp} , GPa	1.44	2.24	3.14
2	煤层采厚 m , m	0.4	0.7	1.0
3	原岩应力系数 A_{xx}	0.05	0.083	0.117
	A_{yy}	0.15	0.25	0.35
4	断层面倾角 δ , ($^{\circ}$)	25	45	75
5	弱面粘聚力 C , MPa	0	0.1	0.5
6	弱面内摩擦角 φ , ($^{\circ}$)	10	20	30
7	断层露头与采空区中心位置 x/L	0	0.4	0.9
8	弱面柔度系数 $1/K$ (10MPa/m) $^{-1}$	0.1	0.5	1

2) 方案二——6因子五水平计算方案 该设计方案的目的是定性分析主要因子对滑移量影响的相关关系。选择 6 个影响显著的因子布置五个水平 (表9-2)。正交方案二共包含 25 个模型。

表 9-2 方案二的因子选取和水平布置

序 号	因 子	水 平				
		1	2	3	4	5
1	$E_{//}$, (GPa)	1.44	2.88	4.48	6.28	9.42
	E_{\perp} , (GPa)	2.63	5.26	7.12	11.26	16.89
2	φ , ($^{\circ}$)	10	17	24	31	38
3	A_{yy}	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
	A_{xx}	0.033	0.05	0.069	0.083	0.10
4	x/L	0	0.3	0.5	0.7	0.9
5	$1/K$, (10MPa/m) $^{-1}$	0.1	0.3	0.5	0.7	1.0
6	δ , ($^{\circ}$)	30	45	60	75	90

通过模拟计算结果的统计分析而得到的相关曲线见图9-5。图a说明岩层越坚硬, 滑移量越大; 图b表明, 随着弱面内摩擦角 φ 的增大, ΔW 有减小的趋势; 图c表明, 滑移量 ΔW 与原岩应力的相关关系不明显; 图d表明, 开采边界上方容易发生滑移; 图e看出, 断层柔度 $1/K$ 与滑移量近似成线性关系; 图f表明, 断层面倾角 δ 在 60° 左右滑移的可能性较大。

三、计算参数的讨论

1) 岩石力学参数 $E_{//}$, E_{\perp} , G , μ 考虑到岩体存在层间弱面、节理和断层, 假定为横观各向同性, 力学参数为 $E_{//}$, E_{\perp} , G , μ 四个, 从而能对岩石性质的描述更加符合岩体实际情况。根据资料分析, 我们给出了三类典型岩体力学参数的选取范围 (表9-3)。

2) 原岩应力系数 A_{xx} , A_{yy} 根据自重应力假定, A_{xx} , A_{yy} 根据岩体密度 γ 和泊松比确定。这里取 $\gamma = 2.5 \times 10^{-3} \text{kg/cm}^3$, 则 $A_{yy} = \gamma$, $A_{xx} = \lambda = \frac{\mu}{1-\mu} \gamma$ 。

3) 断层力学参数 C , φ , K_n , K_s 这四个参数反映出沿弱面滑移的非线性效应, 我

们采用的取值范围为： $C=0.4\sim 1.0\text{MPa}$ ， $\varphi=10^\circ\sim 13^\circ$ ， $K_n=E'/h$ ， $K_s=G'/h$ （ h 为夹层的厚度； E' 、 G' 为夹层弹性模量、剪切模量）。

四、实例

阜新清河门矿北翼南二采区地层为中生代晚侏罗系地层，上覆岩层为页岩、砂岩、砂质页岩和第四纪冲积层，岩性中硬，普氏系数3~5。上部岩层内存在一正断层，断层倾角为 53° ，断层露头线方向 $\text{NE}30^\circ$ 。采用长壁式全部陷落法开采，走向长268m，倾向长234m，煤层采厚1.9m，倾角 22° ，上边界采深223m，下边界采深305m，平均采深276m，没有达到充分采动条件。

选取的岩石力学参数为 $E_{//}=14\text{GPa}$ ， $E_{\perp}=6\text{GPa}$ ， $\mu=0.25$ ， $G=5\text{GPa}$ ；原岩应力系数 $A_{xx}=0.1$ ， $A_{yy}=0.3$ ；断层力学参数 $1/K_n=1/K_s=0.45(10\text{MPa/m})^{-1}$ ， $C=0$ ， $\varphi=25^\circ$ 。

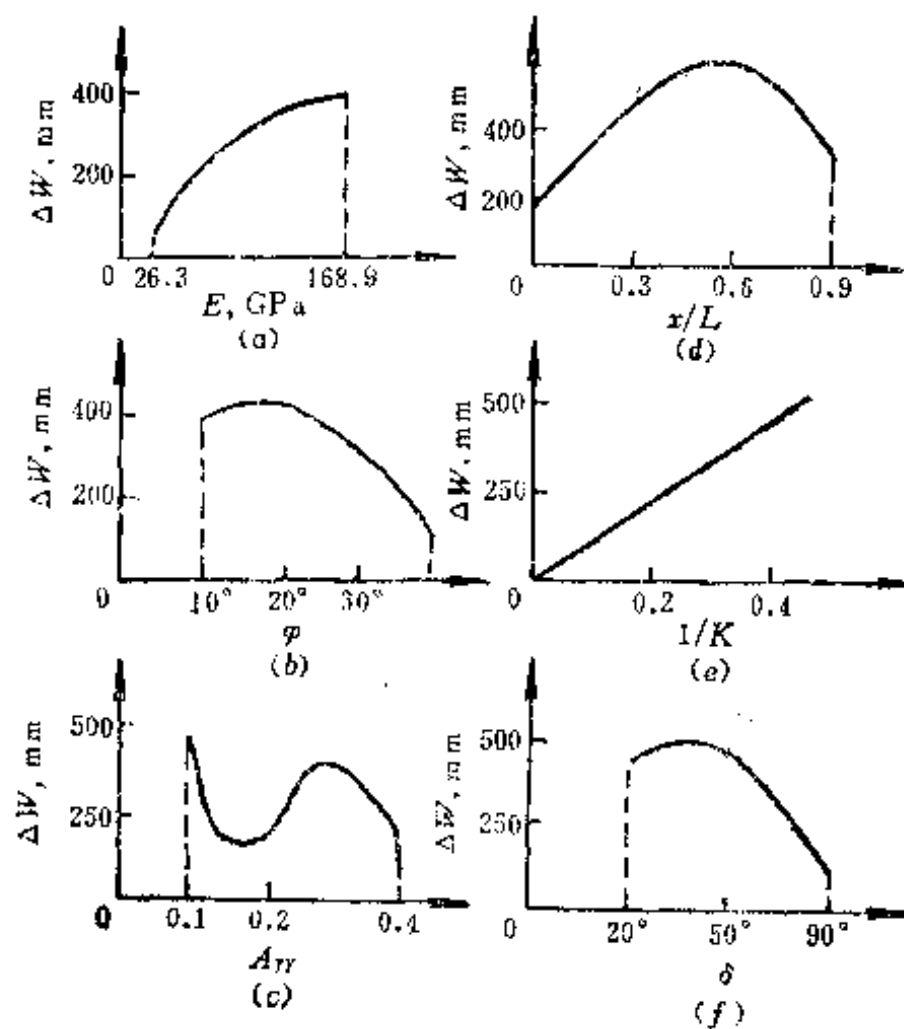


图 9-5 各因子对滑移量影响的相关曲线

a— $E-\Delta W$ 关系；b— $\varphi-\Delta W$ 关系；c— $A_{yy}-\Delta W$ 关系；d— $x/L-\Delta W$ 关系；e— $1/K-\Delta W$ 关系；f— $\delta-\Delta W$ 关系

表 9-3 岩石力学参数的选取范围

序 号	力 学 指 标	岩 体 类 型		
		软 弱	中 硬	坚 硬
1	单向抗压强度 R_0 , (MPa)	10~30	30~60	60~120
2	竖向弹性模量 E_{\perp} , (GPa)	1~6	6~10	10~18
3	横向弹性模量 $E_{//}$, (GPa)	1~10	10~15	15~25
4	泊松比 μ	0.1~0.25	0.25~0.35	0.35以上
5	剪切弹性模量 G , (GPa)	1~4	4~8	8~16

将力学参量和开采条件通过数据文件DATA 输入作为计算信息。按程序要求分六段输入。

通过TSHD 程序实现了对上述模型的数值模拟, 用计算结果绘成曲线见图9-6。实测值与计算曲线对比表明, 边界元计算结果是令人满意的。

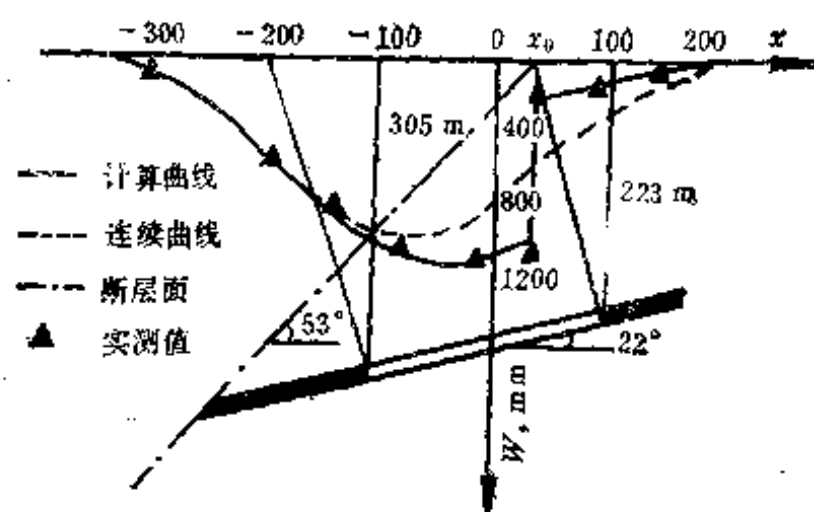


图 9-6 阜新清河门矿北翼南二采区台阶状下沉盆地计算值与实测值对比

第十章 煤层底板破坏与突水预测研究初步

在我国南方和华北一些煤田中,由于特定的成煤沉积环境,在煤层底板常常赋存有厚层含水石灰岩。据不完全统计,北方受奥陶纪灰岩水和南方受茅口灰岩水威胁的100多对矿井中,压煤量高达60亿吨以上,占受水威胁煤炭资源(含水上、水下)的40%^[45],数量是惊人的。另一方面,由于承压水的水压值往往很高,煤层底板突水隐患威胁着矿井的安全生产。以往的开采实践中,全国共发生淹井事故200多起,突水事故700多次,造成了巨大的经济损失。仅北方某矿的淹井事故就造成两矿被淹、数矿警戒,直接治水费用达5亿元,影响煤炭产量数千万吨,教训极为深刻。因此,准确预测受底板水威胁煤层的突水危险性,避免淹井事故和减少突水事故是我国煤炭生产和科研工作中亟待解决的重大课题之一。

近年来,一些研究者致力于煤层底板破坏规律和承压水上采煤的理论和试验研究,使得这一学科有了长足进步。刘天泉、张金才应用弹塑性力学提出了煤层底板防水煤岩柱构成的新观念^[46];沈光寒、荆自刚研究了承压水上采煤的类型^[47];陈钢、刘天泉等对底板突水因素进行了分析,并建立了相应的模型^[48]、^[49];王作宇、华安增等对底板移动规律进行了研究^[50~53],得到了一些有意义的结果。在煤矿现场,也进行了大量的开采实践,取得了一些带压开采的经验。

以往的研究和生产实际表明,断裂构造和陷落柱是诱发煤层底板突水的主要原因。这两类地质构造引起的突水事故占底板突水事故的80%以上^[45]。本文在前人工作的基础上,针对底板隐伏的断层及陷落柱的条件,提出新的力学模型,初步探讨预测底板突水危险的可能性。作为一个基础,这里先讨论采动引起的底板破坏深度问题。

第一节 煤层底板采动影响及破坏深度

煤层开采过程中,煤层底板将受到采动影响。简单地说,从煤层底板到下部承压含水层可以分为两带,即采动裂隙带和隔水带(如图10-1)。显然,若破坏带(裂隙带)发展到承压含水层,将有很大的突水危险。为了预测煤层底板破坏带深度,这里引入断裂力学理论^[54]。

将采场视为无限大地层中的裂缝,则其周围应力场为(坐标系如图10-1)

$$\sigma_1 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (10-1)$$

$$\sigma_2 = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad (10-2)$$

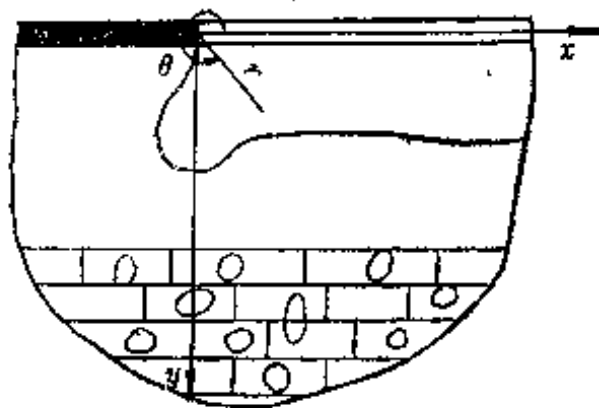


图 10-1 底板采动影响及含水层模型

$$\sigma_3 = \frac{K_1}{\sqrt{2\pi r}} \cdot 2\mu \cos \frac{\theta}{2} \quad (10-3)$$

式中 σ_1 、 σ_2 、 σ_3 ——主应力分量；

K_1 ——I型裂纹的应力强度因子；

μ ——底板岩石材料的泊松比。

以主应力表示的德鲁克-普拉格 (Drucker-Prager) 屈服准则为

$$\alpha I_1 + J_2^{\frac{1}{2}} = K \quad (10-4)$$

这里

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (10-5)$$

$$J_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \quad (10-6)$$

$$\alpha = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (10-7)$$

$$K = \frac{3C \cos \varphi}{\sqrt{3} \sqrt{3 + \sin^2 \varphi}} \quad (10-8)$$

式中 C 、 φ 分别为岩石的粘结力和内摩擦角。

当采场底板的应力满足式 (10-4) 时，即可认为岩石进入塑性而破坏。将式 (10-1) ~ (10-3) 代入式 (10-4)，整理后得

$$r_p(\theta) = \frac{K_1^2}{2\pi k^2} f^2(\theta) \quad (10-9)$$

或

$$r_p(\theta) = \frac{K_1^2}{2\pi(\alpha + \sqrt{\frac{3}{2}})\sigma_1} f(\theta) \quad (10-10)$$

式中 σ ——岩石的单向抗压强度。

$$f(\theta) = \alpha(1 + \mu)(1 + \cos \theta) + \left[(1 - 2\mu)^2(1 + \cos \theta) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-11)$$

理论分析和实测资料表明，煤层的最大破坏深度在开采边界正下方，此时 $\theta = 270^\circ$ ， $f(\theta)$ 简化为只与岩性有关的常数

$$f = \alpha(1 + \mu) + \left[(1 - 2\mu)^2 + \frac{3}{2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10-12)$$

以上 (10-9) ~ (10-12) 即为计算底板破坏深度的公式。

第二节 断层引起的底板突水危险性预测

由采动和断层共同作用下引起的底板突水机制，可以理解为采动应力场和水压应力场叠加起来，在某个薄弱环节屈服带上下贯穿，导致突水。采动应力场可以通过位移不连续法求解。而与岩溶承压水相联系的断层可以视为煤层底板中的附加应力场，以应力不连续法能够找到其理论解。这样一个模型我们称为综合力学模型，如图10-2所示。

1. 采动应力场

采动应力场的表达式为^[11]

$$\sigma_{xx1} = 2GM \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \quad (10-13)$$

$$\sigma_{yy1} = 2GM \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - y \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} \right) \quad (10-14)$$

$$\sigma_{xy1} = 2GM \left(-y \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (10-15)$$

式中 G ——剪切弹性模量;
 M ——煤层采厚;
 f ——影响函数, 表达式为

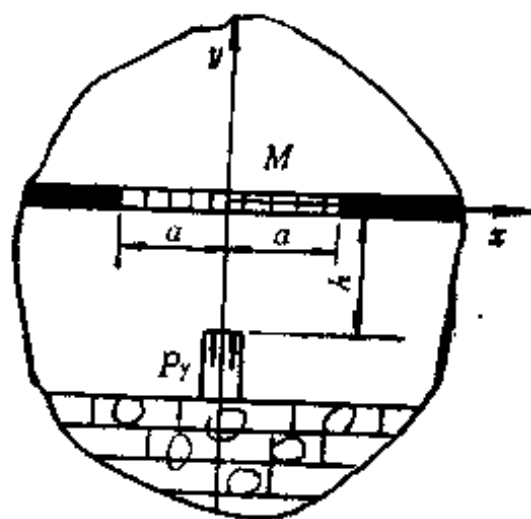


图 10-2 综合力学模型

$$f(x, y) = \frac{-1}{4\pi(1-\mu)} \left[y \left(\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right) - (x-a) \ln \sqrt{(x-a)^2 + y^2} + (x+a) \ln \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (10-16)$$

这里 a 为采场长度的一半。

对 $f(x, y)$ 求导, 得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2 + y^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2 + y^2} \right] \quad (10-17)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{x+a}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \quad (10-18)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{(x-a)^2 - y^2}{[(x-a)^2 + y^2]^2} - \frac{(x+a)^2 - y^2}{[(x+a)^2 + y^2]^2} \right] \quad (10-19)$$

2. 水压应力场

由于承压水的作用, 在断层周围产生的应力场可按应力不连续法 (即虚应力法) 求解。但首先应进行坐标变换, 即令 $y' = y + h$ 。

当断层带很窄时, 其解为

$$\sigma_{xx2} = P_y \left(2\mu \frac{\partial f}{\partial y'} + y' \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right) \quad (10-20)$$

$$\sigma_{yy2} = P_y \left[2(1-\mu) \frac{\partial f}{\partial y'} - y' \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \right] \quad (10-21)$$

$$\sigma_{xy2} = P_y \left[(1-2\mu) \frac{\partial f}{\partial x} - y' \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} \right] \quad (10-22)$$

式中

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \frac{y}{x^2 + y'^2} \quad (10-23)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \frac{x}{x^2 + y'^2} \quad (10-24)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} = \frac{1}{4\pi(1-\mu)} \frac{2xy'}{x^2 + y'^2} \quad (10-25)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \frac{x^2 - y'^2}{(x^2 + y'^2)^2} \quad (10-26)$$

上式中 P_y 是断层顶端的集中力。

当断层带较宽时, 应力场仍用式 (10-20)~(10-22) 表示, 但与 f 有关的导数成为

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} [\ln\sqrt{(x-a)^2+y'^2} - \ln\sqrt{(x+a)^2+y'^2}] \quad (10-27)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\arctan \frac{y}{x-a} - \arctan \frac{y}{x+a} \right] \quad (10-28)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{y}{(x-a)^2+y'^2} - \frac{y}{(x+a)^2+y'^2} \right] \quad (10-29)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} = -\frac{1}{4\pi(1-\mu)} \left[\frac{x-a}{(x-a)^2+y'^2} - \frac{x+a}{(x+a)^2+y'^2} \right] \quad (10-30)$$

3. 合成应力场

由采动应力场和水压应力场叠加, 即可求出真实的应力场:

$$\sigma_x = \sigma_{xx1} + \sigma_{xx2} \quad (10-31)$$

$$\sigma_y = \sigma_{yy1} + \sigma_{yy2} \quad (10-32)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xy1} + \sigma_{xy2} \quad (10-33)$$

由于所研究的为平面应变问题, 其余应力分量为

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (10-34)$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (10-35)$$

4. 突水危险性判别

应用德鲁克-普拉格准则〔或 (10-4)〕判断岩石是否屈服。以非主应力分量表示的不变量为

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (10-36)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{xz}^2)] \quad (10-37)$$

第三节 陷落柱引起的底板突水预测

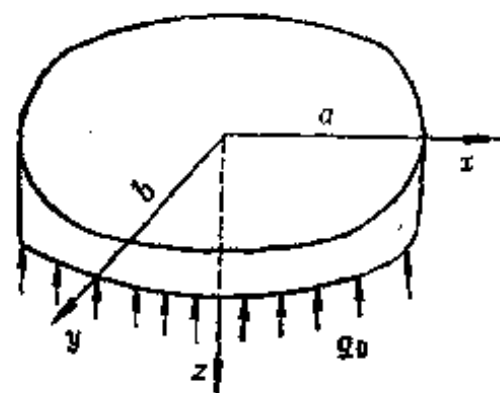


图 10-3 椭圆形陷落柱

在我国北方, 岩溶陷落柱引起煤层底板突水已超过50多次。这类突水的机制* 可以理解为采动与水压作用于底板隔水层, 使薄板状隔水层屈服而引起承压水涌入采场。

根据岩溶陷落柱的赋存条件, 可将其简化为椭圆形 (如图10-3), 并视为弹性薄板问题。

由于底板水压引起的底鼓 (挠度) 方程为

$$W = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (10-38)$$

边界条件为周边固支:

$$W \Big|_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} = 0 \quad (10-39)$$

* 陷落柱直接到达开采煤层的情况不在此讨论。

$$\left. \frac{\partial W}{\partial y} \right|_{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1} = \left. \frac{\partial W}{\partial x} \right|_{\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = 1} = 0 \quad (10-40)$$

薄板弯曲问题的挠曲线微分方程为

$$D \nabla^4 W = q_0 \quad (10-41)$$

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \quad (10-42)$$

式中 t ——陷落柱顶至底板塑性区的距离。

将挠度方程 (10-38) 代入微分方程 (10-41)，得

$$m = \frac{q_0}{8D \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \quad (10-43)$$

式中 q_0 ——陷落柱内的水压值。

根据薄板理论，应力分量可表示为

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (10-44)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (10-45)$$

$$\sigma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \quad (10-46)$$

将式 (10-38) 代入式 (10-44)~(10-46)，不难得出应力表达式。可以看出，处在陷落柱中心的应力最大，据此得到最大点应力值为

$$\sigma_x = -\frac{2Et}{1-\mu^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right) \quad (10-47)$$

$$\sigma_y = -\frac{2Et}{1-\mu^2} \left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (10-48)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_z = 0 \quad (10-49)$$

应力不变量为

$$I_1 = \frac{2Et}{1-\mu} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \quad (10-50)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left(\frac{2Et}{1-\mu^2} \right)^2 \left[\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} \right)^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right)^2 + \left(\frac{\mu}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \right] \quad (10-51)$$

将式 (10-50)、(10-51) 代入式 (10-4)，可以直接判断是否存在突水危险性。

第四节 煤层底板突水危险性预测程序及实例

1. 程序设计

根据以上讨论的模型及解析解，笔者设计了煤层底板破坏深度及存在断层和陷落柱时底板突水危险性的计算程序。程序框图如图10-4所示。

计算机预测时，首先要求输入地质采矿条件和岩石力学参数，然后计算底板破坏深度，并找出最大破坏深度的位置和数值。以下按条件分为两个分支，第一个分支对应存在断层的情况，第二个分支则是存在岩溶陷落柱的情况。

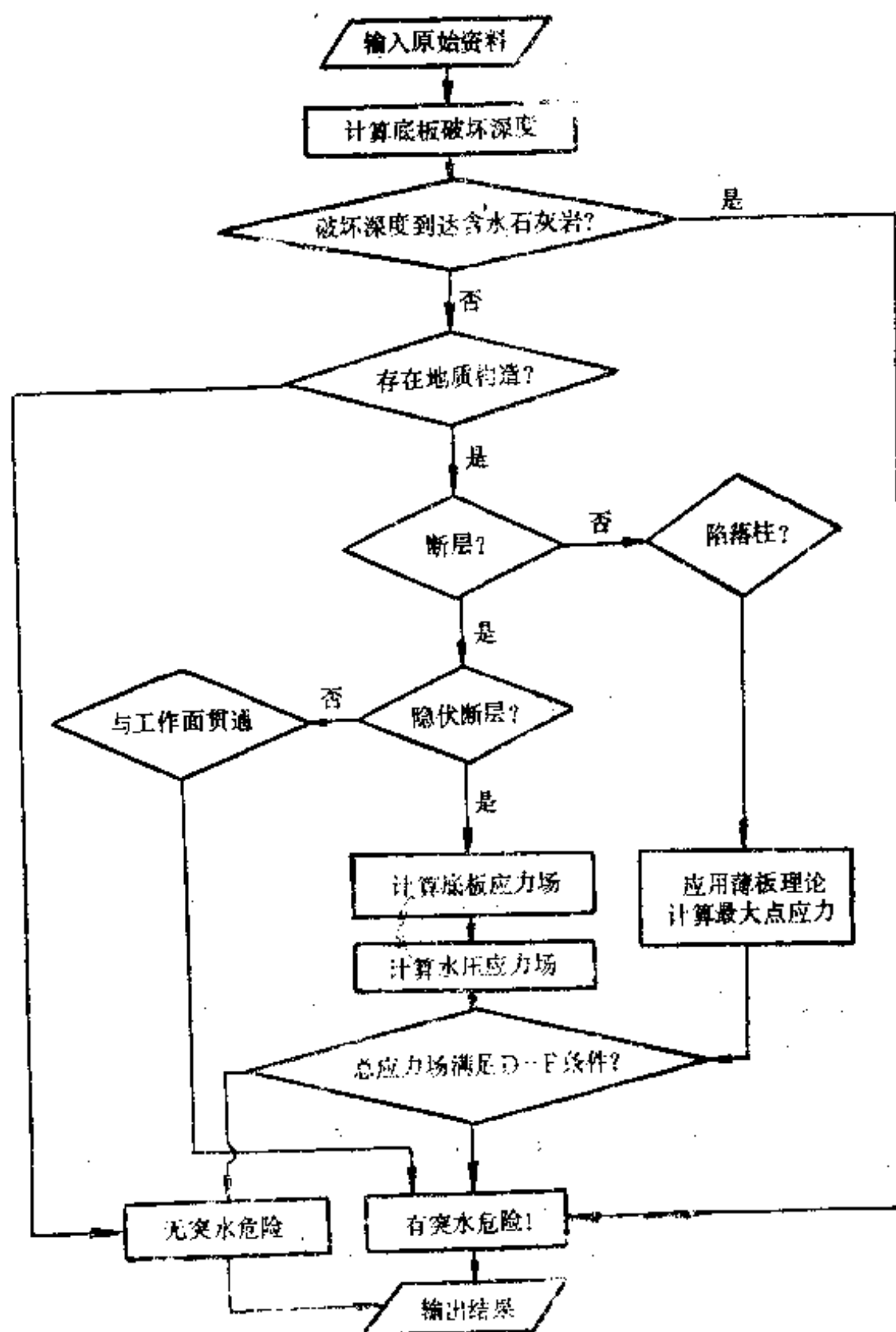


图 10-4 程序框图

以上两个分支分别计算出综合应力场，调用子程序，判断是否达到屈服条件，给出预测结果。输出信息包括：（1）底板最大破坏深度；（2）底板应力场（含断层的情况）；（3）煤层是否有突水危险性。

2. 输入变量说明

E, PR, FA, C——岩石的弹性模量、泊松比、内摩擦角和粘结力；

SIGM, XKI——岩石单向抗拉强度，断裂韧度；

AA, AM——煤层工作面长和采厚；

H, PY——采深和水压值；

A, B——椭圆形陷落柱的长半轴和短半轴。

3. 源程序（见144页）

4. 计算实例

〔实例1〕 肥城矿务局白庄矿开采7406工作面，走向长800m，倾斜长60~140m。已知

煤层底板岩石的单向抗拉强度 $\sigma_c = 0.85 \text{ MPa}$, $E = 25 \text{ MPa}$, $\mu = 0.26$, $\varphi = 30^\circ$, K_1 取值为 $9.0 \text{ MPa m}^{\frac{1}{2}}$ 。

计算得出底板破坏深度 $R_p = 16.57 \text{ m}$ 。

实测资料表明^[55], 该工作面底板最大破坏深度 (垂深) 为 15 m 。

〔实例2〕开滦范各庄矿2176综采面下部存在一隐伏陷落柱, 长轴长 $2a = 80 \text{ m}$, 短轴 $b = 52 \text{ m}$, $q_0 = 2.5 \text{ MPa}$ (估计), $E = 2 \times 10^2 \text{ MPa}$, $\mu = 0.25$, $t = 8 \text{ m}$ (估计), 计算后得出陷落柱中心应力场满足德鲁克-普拉格条件, 判断有严重突水危险。实际开采过程中, 发生了突水事故, 停产两个月, 累积排水量达 15000 m^3 。

〔实例3〕淄博寨里矿北大井-185 m水平102工作面开采10号煤层, 煤层底板距奥灰岩 16.93 m , 水压为 3 MPa 。工作面底板存在一断层 (落差 56 m), 预留了断层煤柱。但由于断层产状的变化, 断层顶距煤层底板不到 10 m 。

计算参数取为

$E = 20 \text{ MPa}$, $\mu = 0.3$, $C = 0.5 \text{ MPa}$, $\varphi = 30^\circ$, $\sigma_c = 2 \text{ MPa}$, $K_1 = 10 \text{ MPa m}^{\frac{1}{2}}$ 。

计算结果为 底板破坏深度 $R_p = 5.66 \text{ m}$ 。断层上至底板五个点的应力如表10-1。

表 10-1 底板应力计算

单位: MPa

点	σ_x	σ_y	σ_z
1	1.27	1.36	0.79
2	1.29	1.37	0.79
3	1.29	1.37	0.80
4	1.30	1.37	0.80
5	1.32	1.37	0.80

最终输出: 存在突水威胁。

实际开采中该处发生突水, 最大涌水量 $420 \text{ m}^3/\text{h}$ 。

通过本章各节的分析, 可以得出以下结论:

(1) 合理地分析煤层底板突水的机制是实现准确预测的基础。研究表明, 断裂构造和陷落柱是诱发煤层底板突水的主要原因。因此, 在了解灰岩含水层富水性、隔水层厚度等条件的同时, 查明地质构造是十分必要的。

(2) 对煤层底板岩层移动规律及最大破坏深度的理论分析和观测验证是一项十分有意义的工作, 本文提出的底板破坏深度的表达式, 在力学参数恰当给定的条件下较为准确。

(3) 在存在断层和岩溶陷落柱的条件下, 采动应力场和含水压构造应力场综合作用满足屈服条件时导致突水。据此, 本文提出了两个力学模型, 并求出了解析解, 进一步在PC计算机上得以实现。这种方法是对煤层底板突水预测的一种新尝试。预测实例表明这种方法是可行的。

(4) 由于煤层底板突水原因的复杂性, 实现承压水上安全开采应采取综合性技术措施, 如疏水降压、区域截流、留设煤柱、底板加固等。

(5) 这里的研究是对煤层底板突水的初步探索。此课题的工作有待进一步完善, 如力学参数的合理选取、更复杂条件下的突水预测以及合理开采方案的研究等等。

PROGRAM FLOOR

C THIS PROGRAM CALCULATE QUANTITATIVE VALUE OF DANGER OF
C WATER INRUSH FROM COAL SEAM FLOOR

COMMON / A / CON,COND,FX,FY,FGY,FYY,FGYY,FYYY

COMMON / A2 / ALF,AK

C

OPEN(5,FILE='FDATA',STATUS='OLD')

OPEN(6,FILE='FJEGO',STATUS='NEW')

READ(5,*) E,PR

READ(5,*) FA,C,SIGM,XKI

READ(5,*) AA,AM

PI=4.*ATAN(1.0)

CON=1/(4*PI*(1-PR))

G=E/(1+PR)

COND=1/(4*PI*(1-PR))

FA=FA*PI/180.0

FM=SQRT(3.*(3.+SIN(FA)**2))

ALF=SIN(FA)/FM

AK=3.0*C*COS(FA)/FM

COE=XKI*XKI/(2.*PI*(ALF+1.4142)*SIGM**2)

F1=ALF*(1+PR)+SQRT((1-2*PR)**2+1.5)

RP=COE*F1**2

WRITE(5,5) RP

5 FORMAT(/ / 'MAXIMUM PLASTIC DEPTH =',F10.2)

READ(5,*) S

IF(S) 50,100,100

50 READ(5,*) H,PY

IF(H.LT.RP) GO TO 300

YBEG=RP

YEND=H

DY=(YEND-YBEG)/11

Y=YBEG

DO 60 I=1,10

CALL F(0,Y,AA)

```

SXX=2 * G * (FYY+Y * FYYY) * AM
SYY=2 * G * AM * (FYY-Y * FYYY)
SXY=2 * G * AM * (-Y * FXY)
Y1=Y-H
CALL F(0,Y1,AA)
SXX1=PY * (2 * PR * FY+Y1 * FYY)
SYY1=PY * (2 * (1-PR) * FY-Y1 * FYY)
SXY1=PY * ((1-2 * PR) * FX-Y1 * FXY)
SXX=SXX+SXX1
SYY=SYY+SYY1
SXY=SXY+SXY1
SZZ=PR * (SXX+SYY)
AI1=SXX+SYY+SZZ
XX1=(SXX-SYY) * * 2
XX2=(SYY-SZZ) * * 2
XX3=(SXX-SZZ) * * 2
XX4=6 * SXY * * 2
AJ2=SQRT((XX1+XX2+XX3+XX4) / 6)
CALL P(AI1,AJ2)
WRITE(6, *)SXX,SYY,SXY,SZZ
55  FORMAT(4F10.3)
60  Y=Y+DY
    GO TO 320
100  READ(5, *)A,B,H
    D=E * H * * 3 / (12 * (1-PR * * 2))
    BM=PY / (8 * D * (3 / A * * 4+2 / (A * A * B * B)+3 / B * * 4))
    W=BM * (X * X / A * * 2+Y * * 2 / B * * 2-1) * * 2
    AI1=2 * E * H / (1-PR) * (1 / A * * 2+1 / B * * 2)
    XX1=1 / A * * 2+1 / B * * 2
    XX2=1 / A * * 2+PR / B * * 2
    XX3=PR / A * * 2+1 / B * * 2
    XX=SQRT((XX1 * * 2+XX2 * * 2+XX3 * * 2) / 6)
    AJ2=2 * E * H / (1-PR * * 2) * XX
    CALL P(AI1,AJ2)

```

```

WRITE(6,*) W
300 WRITE(6,310)
310 FORMAT(/ / 'NO DANGER OF WATER INRUSH FROM SEAM FLOOR')
320 CONTINUE
STOP
END

SUBROUTINE F(X,Y,A)
COMMON / A / CON,COND,FX,FY,FX,Y,FYY,FXYY,FYYY
FM1=(X-A)**2+Y**2
FM2=(X+A)**2+Y**2
FX=COND*(ALOG(SQRT(FM1))-ALOG(SQRT(FM2)))
FY=-COND*(ATAN(Y/(X-A))-ATAN(Y/(X+A)))
FXY=COND*(Y/FM1-Y/FM2)
FYY=-COND*((X-A)/FM1-(X+A)/FM2)
FZ1=(X-A)**2-Y*Y
FZ2=(X+A)**2-Y*Y
FXYY=COND*(FZ1/FM1**2-FZ2/FM2**2)
FYYY=COND*((X-1)/FM1**2-(X+A)/FM2**2)
RETURN
END

SUBROUTINE P(AI1,AJ2)
COMMON / A2 / ALF,AK
YZ=ALF*AI1+AJ2-AK
IF(YZ) 10,30,30
10 WRITE(*,20)
20 FORMAT(/ / 'NO DANGER OF WATER INRUSH FROM FLOOR')
GO TO 50
30 WRITE(6,40)
40 FORMAT(/ / 'DANGER!!! WATER POSSIBLY INRUSH.')
50 RETURN
C
END

```

第十一章 条带开采地表移动计算与 开采方案选择专家系统

条带法开采是一种控制岩层移动、保护地面建筑物的有效措施,目前应用较广泛。此法是将开采煤层划分为比较正规的条带形状,采一条留一条,使保留的条带煤柱能够承受住上覆岩层的全部荷载,使地表仅发生轻微的、均匀的移动和变形。

对条带开采产生地表移动与变形的机制有不同的认识。一般认为,地表移动是由煤柱的弹性压缩所引起的。从随机介质理论的观点看,最终地表移动是多个极不充分采动下沉盆地的叠加。

条带开采的地表移动计算方法可分为两类,即概率积分法和力学理论法。概率积分法是把整个条带开采范围(包括采出条带之间的煤柱)作为回采区域,在参数上通过下沉系数调整地表下沉量。这时下沉系数的选择比较困难,不象全部开采时下沉系数的选择那样较有把握。在力学理论方面,已经引入了弹性理论法和粘弹塑性数值法来模拟条带开采的地表下沉^{[56]、[57]}。这里介绍笔者用弹性薄板理论计算条带地表移动的方法。

确定条带的采留宽度是条带法开采设计的一个关键。以下介绍用人工智能技术中的专家系统方法确定条采方案的原理,并给出笔者设计的专家系统程序。

第一节 条带开采地表移动计算的弹性薄板理论

一、概念和假定

两个平行面和垂直于这两个平行面的柱面(或棱柱面)围成的物体,在弹性力学里称为平板。平分板的厚度的平面称为板的中面。板所受的荷载总可以分解为作用在板中面之内的荷载和垂直于中面的荷载。对于岩层移动问题,可以视为由垂直中面的荷载引起的薄板弯曲问题。当薄板弯曲时,中面内各点在垂直于中面方向的位移称为挠度。这样就把岩层下沉转化为薄板的挠度问题。

条带开采引起地表移动观测资料表明,地表下沉值约为煤层采出厚度的10%~30%,与30~40m厚的某一岩层相比是微小的。这种情况下,小挠度弯曲理论比较适用。

小挠度弯曲理论坐标系如图11-1所示。该理论的基本假定是^[59]：

(1) 垂直于中面的正应变 ε_z 忽略不计。从而由 $\varepsilon_z = \partial W / \partial z = 0$, 得出

$$W = W(x, y) \quad (11-1)$$

(2) 由应力分量 τ_{zx} 、 τ_{zy} 和 σ_z 引起的形变忽略不计,由此可导出薄板弯曲问题和平面应力问题具有相同的本构方程。

(3) 薄板的中面内各点都不存在平行于中面的位移。

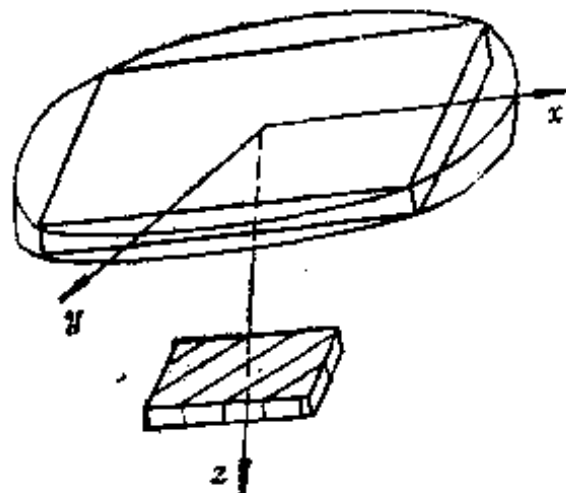


图 11-1 坐标系统

以上假定在岩层移动机理方面也可以获得较好的解释：地表或同一岩层内一点的移动只与其平面坐标 x, y 有关，某个岩层是作为一个整体参与运动的，水平移动不在层内而在层间发生。这符合岩层移动的实际，已被许多观测结果所证实。

二、基本微分方程

取位移函数 W 作为基本未知量求解薄板弯曲问题，所有的应变和应力分量均用 W 表示：

水平位移分量：

$$U = + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot z \quad (11-2)$$

$$V = + \frac{\partial W}{\partial y} \cdot z \quad (11-3)$$

应变分量：

$$\varepsilon_x = + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot z \quad (11-4)$$

$$\varepsilon_y = + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \cdot z \quad (11-5)$$

$$\gamma_{xy} = + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \cdot z \quad (11-6)$$

倾斜：

$$T_x = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad T_y = \frac{\partial W}{\partial y} \quad (11-7)$$

曲率：

$$K_x = - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \quad K_y = - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \quad (11-8)$$

应力分量：

$$\sigma_x = - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (11-9)$$

$$\sigma_y = - \frac{Ez}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \quad (11-10)$$

$$\tau_{xy} = - \frac{Ez}{1+\mu} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (11-11)$$

$$\sigma_z = \frac{Et^3}{6(1-\mu^2)} \left(-\frac{1}{2} - \frac{z}{t} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{t} \right) \nabla^4 W \quad (11-12)$$

式中 t —— 该岩层厚度。

由边界条件

$$\sigma_z \Big|_{z=\pm \frac{t}{2}} = -q \quad (11-13)$$

式中 q —— 薄板单位面积内的垂向荷载，包括面力和体力。

将 σ_x 代入边界条件，得

$$D \nabla^4 W = q \quad (11-14)$$

式中 $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$, 称为弯曲刚度。

式 (11-14) 为挠曲微分方程, 是薄板弯曲问题的基本微分方程。

三、岩层与地表移动变形表达式

由于某一条带开采引起上覆某一岩层下沉, 其挠曲面表示为椭圆形 (如图11-2), 设其周边为固定边界, 其方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (11-15)$$

若取下沉表达式为

$$W(x, y) = m \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2 \quad (11-16)$$

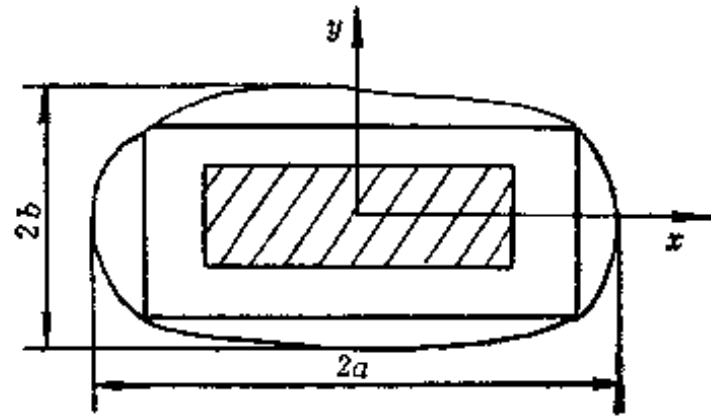


图 11-2 椭圆形下沉曲面

则能满足边界条件。上式中 m 的含义是开采单一条带时某层中面上的最大下沉值。若有实测资料, 可取 $m = W_0$; 若无实测资料, 可按式计算 m :

$$m = \frac{q_0}{8D \left(\frac{3}{a^4} + \frac{2}{a^2 b^2} + \frac{3}{b^4} \right)} \quad (11-17)$$

式中

$$a = \frac{l}{2} + \frac{3}{2} \frac{H}{\lg \beta} \quad (11-18)$$

$$b = \frac{L}{2} + \frac{3}{2} \frac{H}{\lg \beta} \quad (11-19)$$

这里 l 、 L 分别为采出条带的长度和宽度。 $\lg \beta$ 值可参考文献^[10]选取。

以下进一步给出计算任意点移动和变形的表达式:

$$C_x = m(x^2/a^2 - 1)^2 \quad (11-20)$$

$$C_y = m(y^2/b^2 - 1)^2 \quad (11-21)$$

$$T_x = \frac{4m}{a^2} x \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-22)$$

$$T_y = \frac{4m}{b^2} y \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-23)$$

$$T(x, y)_\varphi = T_x C_y \cos \varphi + T_y C_x \sin \varphi \quad (11-24)$$

$$K_x = \frac{4m}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-25)$$

$$K_y = \frac{4m}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-26)$$

$$K(x, y)_\varphi = K_x C_y \cos^2 \varphi + K_y C_x \sin^2 \varphi + \frac{T_x T_y}{m} \sin 2\varphi \quad (11-27)$$

$$U_x = \frac{4mB}{a^2} x \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-28)$$

$$U_y = \frac{4mB}{b^2} y \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-29)$$

$$U(x, y)_\varphi = U_x C_y \cos \varphi + U_y C_x \sin \varphi \quad (11-30)$$

$$\varepsilon_x = \frac{4mB}{a^2} \left(\frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-31)$$

$$\varepsilon_y = \frac{4mB}{b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \quad (11-32)$$

$$\varepsilon(x, y)_\varphi = \varepsilon_x C_y \cos^2 \varphi + \varepsilon_y C_x \sin^2 \varphi + \frac{U_x T_y + U_y T_x}{2m} \sin 2\varphi \quad (11-33)$$

以上各式中 $B = b_0 r$, b_0 为水平移动系数, r 为主要影响半径。

应当指出, 以上表达式仅适用于椭圆区域范围内, 超出这个范围会得出荒谬的结果。

四、条带采区地表移动计算及程序

计算方法如图11-3所示。总体坐标 xy 是任意选定的。计算时通过坐标变换计算每个条带的移动变形, 然后叠加, 得到最终值。

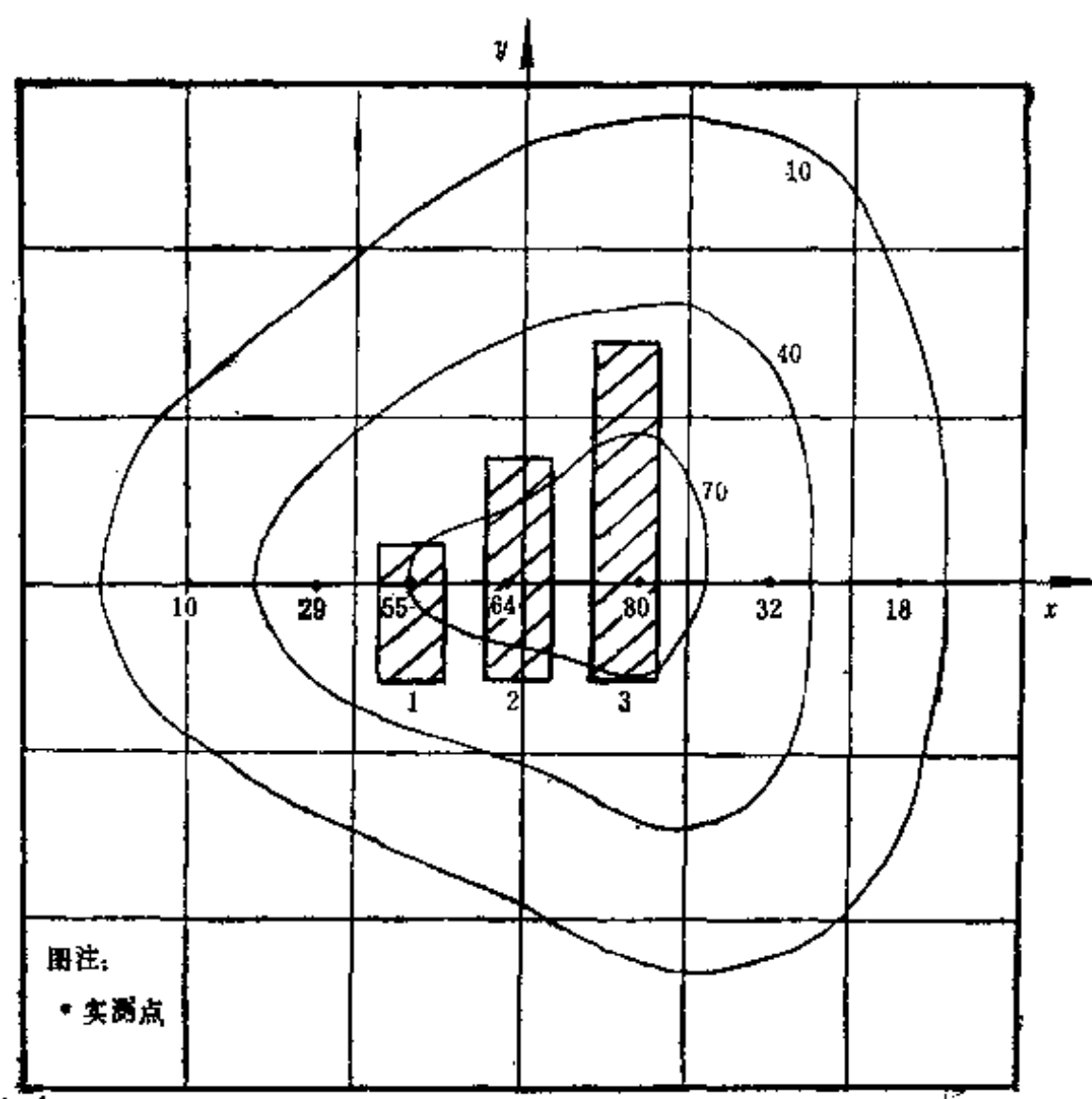


图 11-3 地表下沉等值线

根据以上方法设计的计算程序如下:


```

PROGRAM PLATE
DIMENSION W(400),T(400),K(400),U(400),E(400),
      X0(20),Y0(20),W1(20),T1(20),K1(20),U1(20),E1(20)
COMMON/A/W0
      REAL KX,KY
OPEN(5,FILE='DPLATE',STATUS='OLD')
OPEN(6,FILE='PLATEJ',STATUS='NEW')
READ(5,*) W0,M,H
READ(5,*) TGB,D1,D3,BB,FA
      FA=FA*3.14159/180
A=D3/2+1.5*H/TGB
B=D1/2+1.5*H/TGB
READ(5,*) XB,YB,XD,YD
READ(5,*) (X0(I),Y0(I),I=1,M)
      DX=(XD-XB)/(N-1)
      DY=(YD-YB)/(N-1)
X=XB
Y=YB
      BB=BB*H/TGB
DO 20 I=1,20
      W(I)=0
      T(I)=0
      K(I)=0
      U(I)=0
20      E(I)=0
      DO 200 K=1,400
DO 200 I=1,M
X=X-X0(I)
Y=Y-Y0(I)
IF(X/A.GT.1.OR.Y/B.GT.1) GO TO 200
Y=B*SQRT(1-X*X/A**2)
CX=(X*X/A**2-1)**2
CY=(Y*Y/B**2-1)**2
CXY=(X*X/A**2+Y*Y/B**2-1)
W1(I)=W0*CXY
TX=4*M/A**2*X*CXY
TY=4*M/B**2*Y*CXY
T1(I)=TX*CY*COS(FA)+TY*CX*SIN(FA)
KX=4*W0/A**2*(CXY+2*X*X/A**2)

```

```

KY = 4 * W0 / B * * 2 * (CXY + 2 * Y * Y / B * * 2)
K1(I) = KX * CY * COS(fa) * * 2 + ky * cx * sin(fa) * * 2
Y + TX * TY * SIN(2 * FA) / W0
UX = BB * TX
UY = BB * TY
U1(I) = BB * T(I)
EX = BB * KX
EY = BB * KY
E1(I) = EX * CY * COS(FA) * * 2 + EY * CX * SIN(FA) * * 2
Y + (UX * TY + UY * TX) * SIN(2 * FA) / (2 * W0)
W(K) = W(K) + W1(I)
T(K) = T(K) + T1(I)
K(K) = K(K) + K1(I)
U(K) = U(K) + U1(I)
E(K) = E(K) + E1(I)
X = X + DX
200 Y = Y + DY
WRITE(6,240)
WRITE(6,250)((K,X,Y,W(K),T(K),K(K),U(K),E(K)),K=1,400)
240 FORMAT(1H// 'K X Y W T K U E')
250 FORMAT(1H'13,8F10.3)
STOP
END

```

第二节 条带开采方案选择专家系统^[59]

一、专家系统的基本结构

专家系统具有知识存贮、知识获取、知识推理和知识利用的功能，它是利用专家知识，通过推理求解专门问题的知识工程系统。对一个理想的专家系统，其结构如图11-4所示。

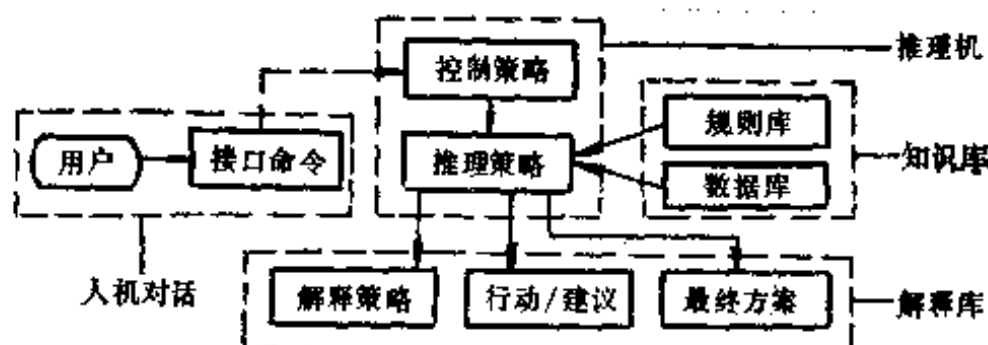


图 11-4 专家系统结构框图

由图11-4可见，专家系统主要由三部分组成^[60]：

1) 知识库 它是专家知识、经验、学科基础知识及数据的存储器。其中规则库存放着“前提—结论”形式的规则,而数据库存放有关的叙述性知识、原始数据和推理过程中得到的中间信息。

2) 推理机 它控制、协调整个系统,并根据当前输入数据(数据库中的信息),利用知识库中的知识,按一定的推理策略求解问题。其中控制策略负责匹配排序和冲突裁决,推理策略则是如何利用知识库的控制器。

3) 解释库 给出推理的结论并进行必要的解释,使用户了解推理过程,以便于学习和维护系统。

由此可见,专家系统的基本思想就是从人类专家那里获取知识与经验,通过编码及运用这些知识与经验,去解决那些复杂的技术难题。

二、条带开采知识库的建立

设计条带开采专家系统首先要建立知识库。本文知识库的规则主要以我国20多年的实践经验为基础,并在以下四个方面引入笔者通过有限元和边界元数值分析得到的结果。

(1) 关于极限采出率 ρ_{max} 。在有限元模型中考虑了有无充填体的差异,可以初步得到冒落正规条带开采时 ρ_{max} 为60%,充填条带开采时 ρ_{max} 达72%。

(2) 关于煤柱的长期稳定性。粘弹塑性力学模型的计算结果表明,软弱的煤岩蠕变特性明显,条带煤柱在恰有“核区”的临界条件下不能满足长时稳定,应适当增大煤柱宽度使塑性率不大于60%。

(3) 倾斜煤层开采布置走向条带时,煤层最大倾角 α 为35°。

(4) 断层与巷道横穿煤柱时,切割煤柱的最小间距应大于留宽 a 。

建立知识库要把专家的经验形式化地表达出来。知识表达的方法有逻辑、框架、规则等十几种,但对条带法开采的经验来说以产生式规则为最适合的表达方法。其一般形式为RULE

```
= (<规则名>
  (IF
    <事实1>
    <事实2>
    .....
    <事实n>)
  (THEN
    <事实n+1>
    <事实n+2>
    .....
    <事实n+m>)))
```

其含义是若前 n 条事实匹配成功,则能推出后 m 条结论。

通过具有上述形式的规则,把条带开采的一般知识、专家经验、研究成果等存入知识库。这样的规则初步给出了29条,下面列出有代表性的几条。

(RULE-1

```
(IF      (MINING IS UNDER BUILDINGS)
          (INDUCED DEFORMATIONS LARGER THAN THOSE OF
            BUILDINGS ALLOWED)
```

(TAKING MEASURES ON SURFACE CAN NOT AVOID
HARMFUL DEFORMATIONS ON THE BUILDINGS))
(THEN (STRIP MINING METHOD CAN BE USED)))

规则 1 给出了条带开采的使用条件。

(RULE-15

(IF (<ETA-S 0.3)
 (NO WAVE SHAPED SUBSIDENCE BASIN ON THE
 SURFACE)
 (CORE ZONE EXISTS IN THE PILLAR)
 (THE PILLAR IS STABLE))
(THEN (REGULAR STRIP MINING)))

规则15判断条带开采的正规性。

(RULE-26

(IF (<= TMAX 3.0)
 (<= KMAX 0.2)
 (<= EMAX 2.0))
(THEN (THE FIRST DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS)))

规则26判断建筑物是否达到一级破坏。

知识库的另一部分——数据库包括三个内容：

- 1) 地质采矿参量 煤层倾角 α ，开采深度 H_0 ，开采厚度 M ，煤的单向抗压强度 σ ；
- 2) 地表移动参数 全部陷落法开采（或全采充填法）的地表下沉参数 η ；水平移动系数 b ，主要影响角的正切 $\tan \beta$ ，开采影响传播角 θ 和拐点偏移距 S ；
- 3) 其它参数 条带开采吨煤成本增加量，建筑物保护等级。

以上规划库和数据库结合起来，形成了条带开采的知识库，相当于专家头脑中的知识和经验。要解决具体的工程问题，专家还要开动脑筋，进行决策，专家系统则是通过推理机，以一定的推理方法来实现这部分功能。

三、模糊推理方法

在条带开采的方案设计中有大量的模糊信息处理问题。如使用规则“建筑物抗变形能力较强时可适当提高采出率”，“抗变形能力强和适当提高采出率”均是模糊概念，对具体工程中的实际情况并不能简单地用“是”或“否”去评定，因而推理过程是模糊的。但这种推理具有很强的逻辑性，十分接近专家的决策过程。模糊逻辑就是研究模糊命题演算及推理方法的一门学科，它是由模糊子集论发展起来的一种非布尔逻辑。

对于条带采煤专家系统采用真值限定的模糊推理^[32]。设 P 、 P' 为论域 U 上的模糊子集， Q 、 Q' 为论域 V 上的模糊子集。将 $(u \text{ 是 } P) \rightarrow (v \text{ 是 } Q)$ 表示为 $[0, 1]$ 上的模糊关系 R ，

$$\mu_R(u, v) \triangleq (1 - u + v) \wedge 1$$

把 R 作为变换器，输入的是 $\tau = |(u \text{ 是 } P) / (u \text{ 是 } P')|$ ，输出的是 $\phi = \tau \cdot R$ 。

其中 τ 的意义是在 $(u \text{ 是 } P')$ 成立时命题 $(u \text{ 是 } P)$ 的隶属度，定义为：

$$\mu_\tau(x) = S_{uP}(\mu_P(y))$$

$$y: \mu_{P'}(y) = x$$

结论为：“(v是Q)是 ϕ ”。

这个推理过程可用框图表示（如图11-5）。

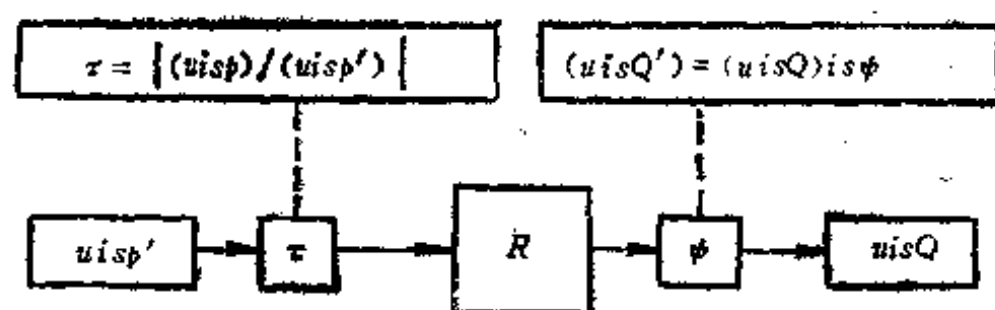


图 11-5 真值限定的模糊推理

下面以煤柱的稳定性分析为例说明模糊矩阵 R 的形成。按煤柱的破碎区、塑性区及弹性区所占的比例，可将稳定性分为五个等级：

$$U = (u_1, u_2, \dots, u_5)$$

式中 u_1 ——煤柱失稳破坏；

u_2 ——煤柱处在临界的稳定状态；

u_3 ——煤柱有一定核区，塑性率小于85%；

u_4 ——煤柱可长期稳定，塑性率小于70%；

u_5 ——煤柱极稳定，塑性率小于50%。

选择六个影响煤柱稳定的因素进行分析：

$$V = (v_1, v_2, \dots, v_6)$$

式中 v_1 ——煤柱强度对稳定性的影响；

v_2 ——煤柱的宽高比因素；

v_3 ——采出率的影响；

v_4 ——开采深度对煤柱的作用；

v_5 ——充填程度对稳定性的作用；

v_6 ——地质采矿条件的作用，包括断层、裂隙及穿巷等因素。

各因素对稳定性影响的隶属函数是根据规程和经验选取的，如采出率隶属函数：

$$r_{13} = \mu_R(u_1, v_3) = \begin{cases} 1 & v_3 < 0.5 \\ 1 - \frac{v_3 - 0.5}{0.22} & 0.5 < v_3 < 0.72 \\ 0 & v_3 > 0.72 \end{cases}$$

根据单因素评定的隶属函数，可以确定一个从 V 到 U 的模糊关系 R ：

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{51} & r_{52} & \dots & r_{56} \end{pmatrix}$$

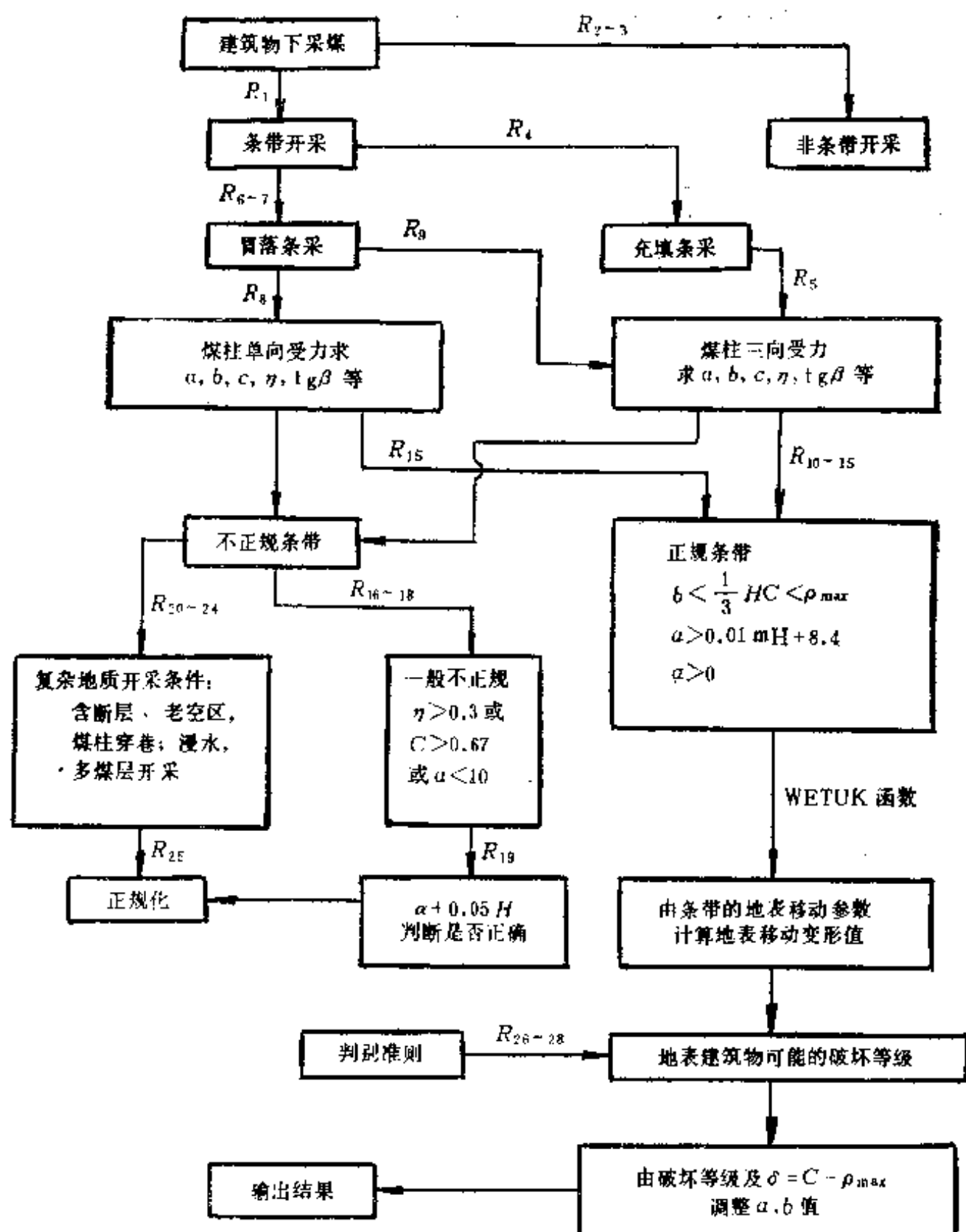


图 11-6 条带开采专家系统的推理网络

四、条带采煤SMES专家系统及其推理机

设计条带开采专家系统, 运用称为人工智能数学的LISP语言, 较好地模拟了下述确定条带开采方案的过程:

- (1) 根据地质采矿条件, 初步确定采宽 b 和留宽 a ;
- (2) 计算条带煤柱应力, 进行稳定性分析, 并判定是否为正规条带开采;
- (3) 类比取得全部陷落法开采 (或全采充填法) 的地表移动参数;
- (4) 计算条带开采的地表移动参数及地表移动变形值;
- (5) 考虑特殊条件下煤柱的稳定性, 包括含断层、多煤层开采、煤柱长期浸水等影响;
- (6) 判断地面建筑物可能的破坏等级, 修改条带宽度。

以上过程在推理机中以启发式推理的形式得以实现, 推理的网络见图11-6。

推理的方向为“数据→结论”式的正向推理。即由原始数据出发, 按控制级策略进行规则匹配与搜索, 推断出结论, 这称为数据驱动策略。图11-7是这个过程的示意图。

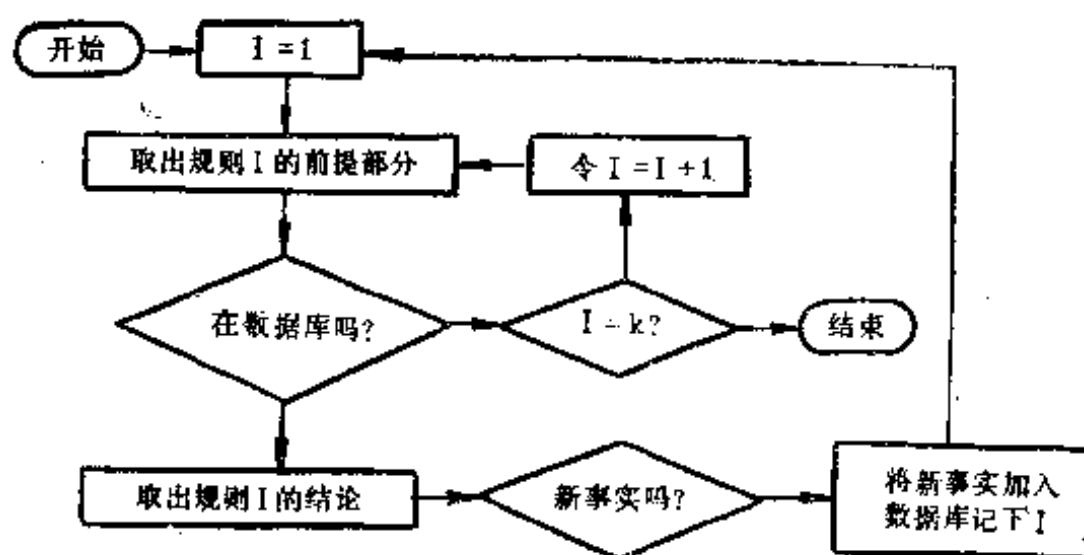


图 11-7 数据驱动策略

推理过程中用到的每一条规则都通过解释库记忆下来, 在最后输出开采方案时同时给出推理依据。

上述知识库、推理机和解释库组成了完整的条带采煤专家系统, 并定名为 SMES。笔者在IBM-PC/AT微型机上实现了SMES系统。

五、源程序

```

(setf *print-level* nil)
(setf *print-length* nil)
(DEFUN RULES()
  (SETF
    RULE-1'(RULE-1
      (IF (MINING IS UNDER BUILDINGS)
        (INDUCED DEFORMATIONS LARGER THAN THOSE OF BUILDINGS ALLOWED)
        (TAKING MEASURES ON SURFACE CAN NOT AVOID HARMFUL
          DEFORMATIONS ON THE BUILDINGS))
        (THEN (STRIP MINING METHOD CAN BE USED))))

    RULE-2'(RULE-2
      (IF (> H 800.0))
      (THEN (STRIP MINING METHOD IS NOT AVAILABLE)))

    RULE-3'(RULE-3
      (IF (> COST-PER-TON 20.))
      (THEN (STRIP MINING METHOD IS NOT AVAILABLE)))

    RULE-4'(RULE-4
      (IF (BUILDINGS ARE VERY SENSITIVE TO EXTRACTION)
        (BUILDINGS MUST BE PROTECTED IN GOOD SERVICE)
        (THE COAL MINE HAS CONDITIONS OF STOWING))
      (THEN (STOWING STRIP MINING)))

    RULE-5'(RULE-5
      (IF (STOWING STRIP MINING))
      (THEN (THREE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR)))

    RULE-6'(RULE-6
      (IF (CAVING STRIP MINING)
        (ROOF FULLY FALL))
      (THEN (THREE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR)))

    RULE-7'(RULE-7
      (IF (CAVING STRIP MINING)
        (ROOF IS HARD AND DIFFICULT TO COLLAPSE),
      (THEN (ONE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR)))

    RULE-8'(RULE-8

```



```

(IF      (ONE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR))
(THEN    (make-b h)
          (SETF s (/ (* 0.25 H) SIGMA-COAL))
          (setf c (- 1 s))
          (COND ((= A 0)(SETF A (/ (* B s) (- 1. s))))))
          (SETF ETA-S (* (/ (- H 30.) (- (* 5000. (/ A B)) 2000.))
                          ETA-LC))
          (SETF tgB-S (* (- 1.076 (* 0.0014 H)) tgB-LC))
          (SETF B-S (* (- 1.29 (* 0.0026 H)) B-LC))))

```

RULE-9'(RULE-9

```

(IF      (THREE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR))
(THEN    (make-b h)
          (COND ((= A 0)
                  (SETF A (+ (* 6.56e-3 m H)
                              (- (/ B 3.) (/ (* B B) (* 3.6 H))))))
          (SETF C (/ B (+ A B)))
          (SETF ETA-S (* (/ (+ H 1000.) (- (* 5000. (/ A B)) 2000.))
                          ETA-IS))
          (SETF tgB-S (* (- 1.076 (* 0.0014 H)) tgB-LC))
          (SETF B-S (* (- 1.29 (* 0.0026 H)) B-LC))))

```

RULE-10'(RULE-10

```

(IF      (< C 0.67)
          (> A (+ (* 0.01 M H) 8.4)))
(THEN    (CORE ZONE EXISTS IN THE PILLAR)))

```

RULE-11'(RULE-11

```

(IF      (< c 0.67)
          (> A (+ (* 0.01 (* M H)) 8.4)))
(THEN    (CORE ZONE EXISTS IN THE PILLAR)))

```

RULE-12'(RULE-12

```

(IF      (CAVING STRIP MINING)
          (> (/ A M) 5.0))
(THEN    (THE PILLAR IS STABLE)))

```

RULE-13'(RULE-13

```

(IF      (STOWING STRIP MINING)

```

(> (/ A M) 3.0))
 (THEN (THE PILLAR IS STABLE)))

RULE-14 '(RULE-14

(IF (< B (/ h 3))
 (< C 0.67))
 (THEN (NO WAVE SHAPED SUBSIDENCE BASIN ON THE SURFACE)))

RULE-15 '(RULE-15

(IF (< ETA-S 0.3)
 (NO WAVE SHAPED SUBSIDENCE BASIN ON THE SURFACE)
 (CORE ZONE EXISTS IN THE PILLAR)
 (THE PILLAR IS STABLE))
 (THEN (REGULAR STRIP MINING)))

RULE-16 '(RULE-16

(IF (> ETA-S 0.3))
 (THEN (GENERAL NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-17 '(RULE-17

(IF (> C 0.67))
 (THEN (GENERAL NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-18 '(RULE-18

(IF (< A 10.))
 (THEN (GENERAL NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-19 '(RULE-19

(IF (GENERAL NON-REGULAR STRIP MINING))
 (THEN (SETF A (+ A (* 0.05 H))))))

RULE-20 '(RULE-20

(IF (FAULTS ARE ENCOUNTERED IN THE PILLAR))
 (THEN (NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-21 '(RULE-21

(IF (MINING AREA IS NEAR GOB))
 (THEN (NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-22 '(RULE-22

(IF (TUNNELS ARE CUTTING THE PILLAR))
 (THEN (NON-REGULAR STRIP MINING)))

RULE-23 '(RULE-23

```
(IF (THE PILLAR SOAKS IN WATER FOR MORE THAN ONE YEAR))
(THEN (NON-REGULAR STRIP MINING)))
```

RULE-24 (RULE-24

```
(IF (MORE THAN ONE SEAM TO BE MINED)
(BOUNDARIES ARE IN THE SAME LINE))
(THEN (NON-REGULAR STRIP MINING)))
```

RULE-25 (RULE-25

```
(IF (NON-REGULAR STRIP MINING))
(THEN (SETF A (+ A 5.))))
```

RULE-26 (RULE-26

```
(IF (<= TMAX 3.0)
(<= KMAX 0.2)
(<= EMAX 2.0))
(THEN (THE FIRST DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS)))
```

RULE-27 (RULE-27

```
(IF (<= TMAX 6.0)
(<= KMAX 0.4)
(<= EMAX 4.0))
(THEN (THE SECOND DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS)))
```

RULE-28 (RULE-28

```
(IF (<= TMAX 10.0)
(<= KMAX 0.6)
(<= EMAX 6.0))
(THEN (THE THIRD DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS)))
```

RULE-30 (RULE-30

```
(if (< c 0.67)
(> a 75))
(then (setf a (/ a 2))
(setf b (/ b 2))))
```

)

(DEFUN FRAMES ()

(SETF

FRAME-1

```
((IF (TEST-JFS RULE-1))
```

```

(THEN (TEST-THENS RULE-1)
      (GOTO FRAME-4))
(ELSE (GOTO FRAME-2)))

```

FRAME-2

```

'((IF (TEST-IFS RULE-2))
  (THEN (TEST-THENS RULE-2)
        (format t "~%It is non-strip mining!")
        (return t))
  (ELSE (GOTO FRAME-3)))

```

FRAME-3

```

'((IF (TEST-IFS RULE-3))
  (THEN (TEST-THENS RULE-3)
        (format t "~%It is non-strip mining!")
        (return t))
  (ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
        (return t)))

```

FRAME-4

```

'((IF (TEST-IFS RULE-4))
  (THEN (TEST-THENS RULE-4)
        (setf unfacts (cons '(caving strip mining) unfacts))
        (GOTO FRAME-5))
  (ELSE (setf facts (cons '(caving strip mining) facts))
        (setf unfacts (cons '(stowing strip mining) unfacts))
        (GOTO FRAME-6)))

```

FRAME-5

```

'((IF (TEST-IFS RULE-5))
  (THEN (TEST-THENS RULE-5)
        (GOTO FRAME-9))
  (ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
        (return t)))

```

FRAME-6

```

'((IF (TEST-IFS RULE-6))
  (THEN (TEST-THENS RULE-6)
        (GOTO FRAME-9))

```

```
(ELSE (GOTO FRAME-7)))
```

FRAME-7

```
((IF (TEST-IFS RULE-7))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-7)
```

```
(GOTO FRAME-8))
```

```
(ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
```

```
(return t)))
```

FRAME-8

```
((IF (TEST-IFS RULE-8))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-8)
```

```
(GOTO FRAME-10))
```

```
(ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
```

```
(return t)))
```

FRAME-9

```
((IF (TEST-IFS RULE-9))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-9)
```

```
(GOTO FRAME-10))
```

```
(ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
```

```
(return t)))
```

FRAME-10

```
((IF (TEST-IFS RULE-10))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-10)
```

```
(GOTO FRAME-12))
```

```
(ELSE (GOTO FRAME-11)))
```

FRAME-11

```
((IF (TEST-IFS RULE-11))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-11)
```

```
(GOTO FRAME-12))
```

```
(ELSE (GOTO FRAME-16)))
```

FRAME-12

```
((IF (TEST-IFS RULE-12))
```

```
(THEN (TEST-THENS RULE-12)
```

```
(GOTO FRAME-14))
```

```
(ELSE (GOTO FRAME-13)))
```

FRAME-13

```
'((IF (TEST-IFS RULE-13))
  (THEN (TEST-THENS RULE-13)
    (GOTO FRAME-14))
  (ELSE (GOTO FRAME-16)))
```

FRAME-14

```
'((IF (TEST-IFS RULE-14))
  (THEN (TEST-THENS RULE-14)
    (GOTO FRAME-15))
  (ELSE (GOTO FRAME-16)))
```

FRAME-15

```
'((IF (TEST-IFS RULE-15))
  (THEN (TEST-THENS RULE-15)
    (GOTO FRAME-20))
  (ELSE (GOTO FRAME-16)))
```

FRAME-16

```
'((IF (TEST-IFS RULE-16))
  (THEN (TEST-THENS RULE-16)
    (GOTO FRAME-19))
  (ELSE (GOTO FRAME-17)))
```

FRAME-17

```
'((IF (TEST-IFS RULE-17))
  (THEN (TEST-THENS RULE-17)
    (GOTO FRAME-19))
  (ELSE (GOTO FRAME-18)))
```

FRAME-18

```
'((IF (TEST-IFS RULE-18))
  (THEN (TEST-THENS RULE-18)
    (GOTO FRAME-19))
  (ELSE (goto frame-19)))
```

FRAME-19

```
'((IF (TEST-IFS RULE-19))
  (THEN (TEST-THENS RULE-19)
    (GOTO FRAME-20)))
```

```
(ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
      (return t)))
```

FRAME-20

```
((IF (TEST-IFS RULE-20))
 (THEN (TEST-THENS RULE-20)
        (GOTO FRAME-25))
 (ELSE (GOTO FRAME-21)))
```

FRAME-21

```
((IF (TEST-IFS RULE-21))
 (THEN (TEST-THENS RULE-21)
        (GOTO FRAME-25))
 (ELSE (GOTO FRAME-22)))
```

FRAME-22

```
((IF (TEST-IFS RULE-22))
 (THEN (TEST-THENS RULE-22)
        (GOTO FRAME-25))
 (ELSE (GOTO FRAME-23)))
```

FRAME-23

```
((IF (TEST-IFS RULE-23))
 (THEN (TEST-THENS RULE-23)
        (GOTO FRAME-25))
 (ELSE (GOTO FRAME-24)))
```

FRAME-24

```
((IF (TEST-IFS RULE-24))
 (THEN (TEST-THENS RULE-24)
        (GOTO FRAME-25))
 (ELSE (WETUK-MAX)
        (GOTO FRAME-30)))
```

FRAME-25

```
((IF (TEST-IFS RULE-25))
 (THEN (TEST-THENS RULE-25)
        (WETUK-MAX)
        (GOTO FRAME-30))
 (ELSE (format t "~%Knowledge base is not enough! Please add it!")
```

```
(return t)))
```

FRAME-26

```
((IF (TEST-IFS RULE-26)
(THEN (TEST-THENS RULE-26)
(GRADE 1.)
(abc-tke))
(ELSE (GOTO FRAME-27))))
```

FRAME-27

```
((IF (TEST-IFS RULE-27)
(THEN (TEST-THENS RULE-27)
(GRADE 2.)
(abc-tke))
(ELSE (GOTO FRAME-28))))
```

FRAME-28

```
((IF (TEST-IFS RULE-28)
(THEN (TEST-THENS RULE-28)
(GRADE 3.)
(abc-tke))
(ELSE NIL))
```

FRAME-29

```
((IF (MEMBERS '(ONE DIMENSIONAL STRESS STATE ON THE PILLAR)FACTS))
(THEN (GOTO FRAME-8))
(ELSE (GOTO FRAME-9)))
```

frame-30

```
((if (test-ifs rule-30)
(then (test-thens rule-30)
(goto frame-26))
(else (goto frame-26)))
```

```
)
```

(DEFUN PARAMETERS()

(PROG ()

```
(FORMAT T "%Please input the parameters of environment,
such as:H;Cost-per-ton;M;Sigma-coal;Eta-lc;Eta-ls;Tgb-lc;
b-lc;COSa;r;etc.")
```



```

(format t "~%H = ")
(SETF H (READ))
(FORMAT T "~%Cost-per-ton = ")
(setf cost-per-ton (read))
(format t "~%M = ")
(SETF M (READ))
(FORMAT T "~%Sigma-coal = ")
(SETF Sigma-coal (read))
(FORMAT T "~%Eta-lc = ")
(SETF Eta-lc (READ))
(FORMAT T "~%Eta-ls = ")
(SETF Eta-ls (READ))
(FORMAT T "~%Tgb-lc = ")
(SETF Tgb-lc (READ))
(FORMAT T "~%b-lc = ")
(SETF b-lc (READ))
(format T "~%COSa = ")
(setf COSa (read))
L1 (FORMAT T "~%Anymore ? y / n")
(SETF RD (READ))
(COND ((EQUAL RD 'Y)
      (GO L2))
      (T (RETURN T)))
L2 (FORMAT T "~%What are the name and the value of the parameter ?")
(SETF (READ) (READ))
(GO L1)))

(DEFUN CONTROL ( )
  (PROG (A B USED RULES)
    (setf facts nil unfacts nil)
    (RULES)
    (FRAMES)
    (setf A 0 B 0)
    (FORMAT T "~%How do you do ! Strip mining expert system begins")

```

```
(FORMAT T "%to help you.Please answer the following questions:")
```

```
(format t "% (1-----fixable method)")
```

```
(format t "% (0-----unfixable method)")
```

```
(format t "%
```

```
Pleaes choice the methods of inputing parameters <1/0>")
```

```
(setf rd (read))
```

```
(cond ((equal rd 1)(parameters))
```

```
(t (xxx)))
```

```
(goto frame-1)
```

```
(print (get-rules-name usedrules))))
```

```
(defun abc-tke ( )
```

```
(prog ( )
```

```
(format T "%A =-d(M) B =-d(M) C =-d "a b c)
```

```
(format t "%Wmax =-d Emax =-d Tmax =-d Umax =-d Kmax =-d"
```

```
Wmax Emax Tmax Umax Kmax)
```

```
(format t "%Good-bye !"))
```

```
(defun goto(frame)
```

```
(meta-rule-2 frame))
```

```
(defun meta-rule-2 (frame)
```

```
(if (operate-1-frame (cdr (nth 0 frame)))
```

```
(operate-2-frame (cdr (nth 1 frame)))
```

```
(operate-2-frame (cdr (nth 2 frame))))))
```

```
(defun operate-1-frame(ifs)
```

```
(prog (x)
```

```
(setf x ifs)
```

```
loop (cond ((null x)(return t))
```

```
(t (cond ((not (eval (car x)))
```

```
(return nil))))))
```

```
(setf x (cdr x))
```

```
(go loop)))
```

```
(defun operate-2-frame (thens-else)
```

```
  (prog (x)
```

```
    (setf x thens-else)
```

```
  loop (cond ((null x)(return t))
```

```
          (t (eval (car x))))
```

```
    (setf x (cdr x))
```

```
    (go loop)))
```

```
(DEFUN WETUK-MAX)
```

```
  (setf r (/ h tgb-lc))
```

```
  (SETF Wmax (* Eta-S 1000 (* m COSa)))
```

```
  (SETF Emax (* 1.52 b-s (/ Wmax r)))
```

```
  (SETF Tmax (/ Wmax r))
```

```
  (SETF Umax (* b-lc Wmax))
```

```
  (SETF Kmax (* 1.52e-3 (/ Wmax (* r r))))
```

```
(defun make-b (h)
```

```
  (cond ((= b 0)(format t "%Do you have the expert's data of B? Y / N:"))
```

```
    (setf rd (read))
```

```
    (cond ((equal rd 'y)
```

```
      (format t "%B = ")
```

```
      (setf b (read)))
```

```
    (t (cond ((> h 600) (setf b (/ h 10)))
```

```
            ((> h 500) (setf b (/ h 8)))
```

```
            ((> h 300) (setf b (/ h 15)))
```

```
            ((> h 200) (setf b (/ h 10)))
```

```
            ((> h 100) (setf b (/ h 4.5)))
```

```
            (t (setf b (/ h (+ 5 (* 0.325 (- h 60))))))))))
```

```
(defun test-ifs(rule)
```

```
  (if
```

```
    (prog (ifs)
```

```
      (setf ifs (caddr rule))
```



```

      (return t))
    (t (go loop))))))

```

```

(defun members(x s)
  (cond ((null s) nil)
        ((atom x)(member x s))
        (t (member x s :test 'equal))))

```

```

(defun test-thens (rule)
  (prog (x)
    (setf x (cdadr (CDR rule)))
  loop (cond ((null x)(return t))
              (t (if (fboundp (caar x))
                      (eval (car x))
                      (setf facts (cons (car x) facts))))))
    (setf x (cdr x))
    (go loop)))

```

```

(defun get-thens(rule)
  (cdadr rule))

```

```

(DEFUN XXX()

```

```

  (SETF H 505 COST-PER-TON 3. M 16.6 SIGMA-COAL 50 EIA-LS 0.35 ETA-LC 0.45
        TGB-LC 2.0 B-LC 0.2 COSA 0.95 ))

```

```

(DEFUN GRADE(S)

```

```

  (CASE S

```

- (1. (FORMAT T "%.5F FIRST DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS"))
- (2. (FORMAT T "%.5F SECOND DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS"))
- (3. (FORMAT T "%.5F THIRD DAMAGE GRADE IN THE BUILDINGS"))

参 考 文 献

- [1] 刘宝琛、廖国华、颜荣贵：采煤岩层及地表移动的基本规律，长沙岩石力学工程技术咨询公司，1987.6
- [2] 煤炭科学研究院北京开采研究所：煤矿地表移动与覆岩破坏规律及其应用，煤炭工业出版社，1981.12
- [3] D.S.Berry, An Elastic Treatment of Ground Movement Due to Mining—I Isotropic Ground, J.Mech.Phys.Solids, 1960 Vol.8
- [4] D.S.Berry, T.W.Sales, An Elastic Treatment of Ground Movement due to Mining —II Transversely Isotropic Ground J.Mech.Phys.Solids, 1961, Vol.9
- [5] D.S.Berry, T.W.Sales, An Elastic Treatment of Ground Movement due to Mining —III. Three Dimensional Problem, Transversely Isotropic Ground, J. Mech. Phys Solids, 1962, Vol.10
- [6] M.D.G.沙拉蒙著，田良灿、连志昇译：地下工程的岩石力学，冶金工业出版社，1982.5
- [7] 周国铨等：建筑物下采煤，煤炭工业出版社，1983.10
- [8] 郝庆旺：任意采动影响下地面沉陷的数值计算方法——区域单元法（ZEM），煤炭学报，1988, №4
- [9] 姚建国：开采影响下岩层移动变形的块体单元数值模拟，第一届全国计算岩土力学会议论文，1987
- [10] 煤炭工业部：建筑物、水体、铁路及主要井巷煤柱留设与压煤开采规程，煤炭工业出版社，1986.11
- [11] S.L.Crouch, A.M.Starfield, Boundary Element Methods in Solid Mechanics, George Allen & Unwin, 1983
- [12] 蒋咏秋：复合材料力学，西安交通大学讲义，1981.3
- [13] W.T.Chen, Displacement Discontinuity Over a Transversely Isotropic Elastic Half-Space, J.of Mechanics,Phys.Solids, 1964.9
- [14] 王泳嘉、李占才：横观各向同性体平面问题的不连续位移法，岩石力学与工程学报，1989, №2
- [15] 煤炭科学研究院北京开采所：“三下”采煤地表移动电算（讲义），1983.7
- [16] 张玉卓：地表移动三维力学计算和参数反分析，岩层移动与特殊采煤论文集，煤炭科研参考资料，1991, №2
- [17] 于学馥、郑颖人、刘怀恒、方正昌：地下工程围岩稳定分析，煤炭工业出版社，1983.12
- [18] [日]石岛洋二：应用三维有限单元法分析地表下沉的模拟，矿山岩石移动译文选，阜新矿业学院情报资料室，1978.12
- [19] 开滦煤炭科学研究所：有限单元法在水体下采煤中的应用，矿山测量，1978, №1
- [20] 耿德庸：用有限单元法计算和分析条带开采法的地表移动及煤柱稳定性规律，开采论文集，1980, №1
- [21] [西德] H.克拉茨著，马伟民、王金庄、王绍林译：采动损害及其防护，煤炭工业出版社，1984.4
- [22] 张玉卓：岩石内变量演化的模糊随机过程，岩土力学进展（陈祥福主编），中国展望出版社，1990.12
- [23] C.S.Desai, J.F.Abel, Introduction to the Finite Element Method, Van Nostrand

Reinhold Co., New York, 1972

- [24] 谢贻权、何福保：弹性和塑性力学中的有限单元法，机械工业出版社，1981.8
- [25] 杨更社：考虑岩体塑性应变软化及硬化的有限元分析及应用，西安矿业学院硕士学位论文，1987.5
- [26] [英] C.A.布雷拜、S.沃克著，张治强译：边界元法的工程应用，陕西科学技术出版社，1985.10
- [27] [日] 田中正隆、田中喜久昭：境界要素法——基础と応用，东京，丸善株式会社，1982
- [28] Wang Yongjia: Boundary Element Method for Viscoelastic Problems in Rock Mechanics, Press of Northeast Univ. of Tech, 1986.8
- [29] 张有天：工程问题边界元法，资料，1983.5
- [30] 张玉卓：应用边界元法——位移不连续法计算岩层与地表移动，岩石力学数值分析会议论文，1984.12（昆明）
- [31] 张玉卓、仲惟林、姚建国：岩层移动的位错理论解与边界元法计算，煤炭学报，1987，№2
- [32] 汪培庄：模糊集与随机集落影，北京师范大学出版社，1985.9
- [33] [波] J.李特维尼申著，王泳嘉译：论岩石力学研究的新方向，煤炭科学技术通讯，1960，№1
- [34] 刘宝琛、廖国华：煤矿地表移动的基本规律，中国工业出版社，1965
- [35] A. Friedman: Stochastic Differential Equations and Applications, Academic Press, 1975
- [36] 杨秀英、战洪学、熊传武：计算地表下沉盆地内任意剖面的移动和变形的源程序及其应用，开采论文集，1980，№1
- [37] 邓聚龙：灰色控制系统，华中理工大学出版社，1985.3
- [38] 邓聚龙：灰色预测与决策，华中理工大学出版社，1986.8
- [39] 张玉卓：坚硬岩层矿山地表移动计算的灰色系统方法，坚硬岩体控制学术讨论会论文集，1991（大同）
- [40] Gerhard Brauner: Subsidence Due to Underground Mining. Information Circular 857, Denver Mining Research Center, 1973
- [41] 张华兴：井筒煤柱开采理论与技术的研究，煤科总院博士学位论文，1991.6
- [42] 张玉卓、仲惟林、姚建国：断层影响下地表移动规律的统计和数值模拟研究，煤炭学报，1989，№1
- [43] 张立国、吕泰和：对辽源西安矿竖井变形规律的研究，矿山测量，1983，№1
- [44] Lee, A.J.: The Effect of Faulting on Mining Subsidence, The Mining Engineer, 1966, №8 PP735-745
- [45] 中国统配煤矿总公司生产局等：煤矿水害事故典型案例汇编，1992.1
- [46] 刘天泉、张金才：论煤层底板岩层中采动影响及防水岩柱构成，煤炭科学研究院论文集，1987.5
- [47] 沈光寒、荆自刚：矿井特殊开采，山东矿业学院讲义，1981
- [48] Chen Gang, Liu Tian-Quan: A comprehensive Analysis of Influential Factors and Mechanism of Water-Inrush from Floor of Coal Seam, V II Int. Sym Rock Mech, 1987, Canada
- [49] 陈钢：煤层底板突水因素分析，煤炭科学研究院硕士论文，1985
- [50] Wang Zouyu: Moving Regularity of Overburden Rock in Mining of Coal Mines, 27th US Sym. Rock Mech, 1986
- [51] Wang Zouyu: Floor Rockmass Movement in Workings, Int. Conf. Mech. Jointed and

Faulted Rock, 1990, Austr

- [52] Wang Zouyu, Observation and Research about Rock Stress Behaviour Regularity of floor, Int. Sym. Modern Min. Tech., 1988, China
- [53] 华安增: 底板采动影响, 煤炭学报, 1983, №3
- [54] 张玉卓、仲惟林: 采场边缘塑性区分析, 煤矿开采, 1992, №1
- [11] Crouch S. L., Boundary Element Methods in Solid Mechanics, Georger Unwin, 1983
- [55] 肥城矿务局、煤炭科学研究总院北京开采所: 白庄矿7406工作面底板岩体移动规律观测研究报告, 1990.10
- [56] 白矛、刘天泉: 条带法开采中条带尺寸的研究, 煤炭学报, 1983, №4
- [57] 张玉卓: 抚顺市区下条带充填采煤的理论和实验研究, 煤炭科学研究总院研究报告, 1988
- [58] 徐芝纶: 弹性理论 (下册), 人民教育出版社, 1982.2
- [59] 张玉卓: 建筑物下条带开采专家系统研究, 中国矿业大学学报, 1988, №4
- [60] 涂序彦: 人工智能及其应用, 北京钢铁学院讲义, 1986.9

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名= 岩层与地表移动计算原理及程序

作者=

页数= 1 7 4

S S 号= 1 0 9 7 9 9 7 3

出版日期=

封面
书名
版权
前言
目录
正文